

zbiór zadań

Matematyka

z plusem

8



gdańskie
wydawnictwo
oświatowe



Marcin Braun Jacek Lech Marek Pisarski

Matematyka 8

z plusem

Zbiór zadań dla klasy ósmej
szkoły podstawowej

gdańskie
wydawnictwo
oświatowe



Redakcja: *Elżbieta Bagińska-Stawiarz*

Korekta merytoryczna: *Agnieszka Dąbrowska, Hanna Lenz-Terlecka,
Mirosława Nawrot, Agnieszka Szulc*

Korekta językowa: *Grażyna Kompowska*

Projekt graficzny: *Sławomir Kilian, Jarosław Zakrzewski*

Ilustracje: *Sławomir Kilian*

Grafika komputerowa: *Leszek Jakubowski, Joanna Szyller*

Skład (T_EX): *Maria Chojnicka, Joanna Szyller*

ISBN 978-83-8118-588-2

© Copyright by Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe

Wydawca: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 80-309 Gdańsk, al. Grunwaldzka 413

Gdańsk 2018. Wydanie pierwsze

Niniejsza publikacja podlega ochronie przewidzianej w przepisach Ustawy z dnia 4.02.1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych. Każdy przypadek kopiowania lub zwielokrotniania fragmentu lub całości publikacji stanowi niedozwolone naruszenie praw twórcy lub wydawcy, o ile nie odbywa się zgodnie z przepisami wyżej wymienionej ustawy.

Wszystkie książki Wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.

Zamówienia można składać w księgarni internetowej: www.ksiegarnia.gwo.pl

lub nadsyłać listownie pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe

80-305 Gdańsk 5, skrytka pocztowa 80

tel. 801 643 917, 58 340 63 63

fax 58 340 63 61, 58 340 63 66

<http://www.gwo.pl> e-mail: handel@gwo.pl

SPIS TREŚCI

Od Autorów	5
------------------	---

I Liczby i działania

1. System rzymski	7
2. Własności liczb naturalnych	9
3. Porównywanie liczb	13
4. Działania na liczbach	17
5. Działania na potęgach i pierwiastkach	26
6. Zadania testowe	30

II Wyrażenia algebraiczne i równania

1. Przekształcenia algebraiczne	33
2. Równania	36
3. Proporcje	41
4. Wielkości wprost proporcjonalne	43
5. Zadania testowe	46

III Figury geometryczne na płaszczyźnie

1. Trójkąty i czworokąty	49
2. Twierdzenie Pitagorasa	55
3. Zastosowania twierdzenia Pitagorasa	60
4. Przekątna kwadratu. Wysokość trójkąta równobocznego	64
5. Trójkąty o kątach 90° , 45° , 45° oraz 90° , 30° , 60°	66
6. Odcinki w układzie współrzędnych	71
7. Dowodzenie w geometrii	74
8. Zadania testowe	79

IV Zastosowania matematyki

1. Obliczenia procentowe	85
2. Zmiana o dany procent. Lokaty bankowe	89
3. VAT i inne podatki	94
4. Czytanie diagramów	98
5. Podział proporcjonalny	104
6. Obliczanie prawdopodobieństw	107
7. Odczytywanie wykresów	111
8. Zadania testowe	121

V Graniastosłupy i ostrosłupy

1. Pole powierzchni i objętość graniastosłupa	131
2. Odcinki w graniastosłupach	134
3. Rodzaje ostrosłupów	137
4. Siatki ostrosłupów. Pole powierzchni	141
5. Objętość ostrosłupa	146
6. Odcinki w ostrosłupach	151
7. Zadania testowe	155

VI Symetrie

1. Symetria względem prostej	162
2. Oś symetrii figury	170
3. Symetralna odcinka	175
4. Dwusieczna kąta	177
5. Symetria względem punktu	179
6. Środek symetrii figury	185
7. Zadania testowe	190

VII Koła i okręgi

1. Styczna do okręgu	195
2. Wzajemne położenie dwóch okręgów	198
3. Liczba π . Długość okręgu	200
4. Pole koła	205
5. Zadania testowe	210

VIII Rachunek prawdopodobieństwa

1. Ile jest możliwości?	214
2. Obliczanie prawdopodobieństw (cd.)	217
3. Zadania testowe	221
 Odpowiedzi	 225

Od Autorów

Niniejszy zbiór obejmuje materiał z matematyki omawiany w ósmej klasie szkoły podstawowej. Układ zagadnień jest dostosowany do programu *Matematyka z plusem*. Książka ta może jednak służyć uczniom i nauczycielom niezależnie od wybranego programu.

Każdy dział składa się z jednostek tematycznych podzielonych na cztery części. Pierwsza — *Przypomnij sobie* — zawiera proste ćwiczenia, których celem jest powtórzenie elementarnych wiadomości (także z klasy siódmej szkoły podstawowej). Druga część — *Poćwicz* — obejmuje zadania, które pomagają opanować podstawowe umiejętności z danego tematu. W części trzeciej — *Pomyśl* — znalazły się zadania na zastosowanie, problemowe oraz wymagające uzasadnienia lub opracowania własnej strategii. Ostatnia część — *Sprawdź się* — to krótki test z kilkoma zadaniami.

Każdy dział kończy się modulem *Zadania testowe*. Zgromadzono w nim wiele zadań utrwalających wiedzę zdobytą z danego zakresu i doskonalących umiejętność rozwiązywania zadań zamkniętych.

Na końcu książki zamieszczono odpowiedzi do wszystkich zadań, a do trudniejszych — także wskazówki dotyczące rozwiązań.

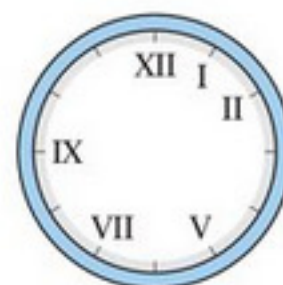
Ponieważ dane liczbowe w wielu zadaniach z treścią są autentyczne (nie były dobierane tak, aby uprościć rachunki), to przy ich rozwiązywaniu uczniowie mogą używać kalkulatora i powinni zaokrąglać wyniki.

Dla wyróżnienia zadań trudnych przyjęliśmy następujące oznaczenie: *

1 System rzymski

Przypomnij sobie

1. Wypisz wszystkie liczby parzyste, których brakuje na tarczy zegara przedstawionej na rysunku obok.



2. a) Zapisz podane liczby w systemie dziesiętkowym.

L C D M CL DC MD MDC MDCL

- b) Zapisz podane liczby w systemie rzymskim.

51 49 120 80 550 450 900 1100

Poćwicz

3. a) Zapisz podane liczby w systemie rzymskim.

24 38 564 879 1960 2017 3688

- b) Zapisz podane liczby w systemie dziesiętkowym.

LXXXVII CLIX CCCXLIV CMXLIX DCCCLXXXVII MDCCXXXII

4. Poniżej podano lata pewnych wydarzeń z przeszłości. Oblicz, ile lat upłynęło między nimi.

a) MCDLII — wydrukowano pierwszy egzemplarz tzw. Biblii Gutenberga

MCMXCVII — wydrukowano pierwszy egzemplarz książki „Harry Potter i Kamień Filozoficzny”

b) MCMII — Georges Méliès użył efektów specjalnych w swoim filmie „Podróż na Księżyc” po raz pierwszy w historii kina

MMXV — odbyła się premiera filmu „Przebudzenie mocy”

c) MDCXXIII — zbudowano pierwszą maszynę wykonującą cztery działania na liczbach naturalnych

MCMXLV — zbudowano ENIAC — pierwszą elektroniczną maszynę liczącą (jest uznawana za pierwszy komputer)

d) MDCIX — Galileusz zorganizował publiczny pokaz swojej lunety i skierował ją w stronę księżyców Jowisza

MCMXC — na orbicie wokół Ziemi umieszczono teleskop Hubble’a

5. Z zapisu liczby 199 w systemie rzymskim wykreślono pewne znaki. Jaką liczbę otrzymano? Zapisz ją w systemie dziesiętkowym, jeśli wykreślono:
- | | | |
|-------------------|-----------------------------|-------------------------|
| a) pierwszy znak, | c) pierwszy i ostatni znak, | e) drugi znak od lewej, |
| b) ostatni znak, | d) środkowy znak, | f) wszystkie znaki X. |

Pomyśl

6. Wykonaj działania. Wynik zapisz w systemie rzymskim. Czy potrafisz wykonać obliczenia bez korzystania z systemu dziesiętkowego?
- a) MMCLVII + CMLXXII b) CDLII – LXXXVIII c) MMMCDL – DLXXI
- *7. a) Od największej liczby, którą można zapisać w systemie rzymskim za pomocą znaków: I, V, X, L, C, D, M, odjęto liczbę trzycyfrową, która ma w zapisie rzymskim najwięcej znaków. Jaką liczbę otrzymano?
- b) Od liczby czterocyfrowej, która ma w zapisie rzymskim najwięcej znaków, odjęto największą liczbę, którą można zapisać za pomocą znaków: I, X, L, C, M, ale użytych tylko raz. Jaką liczbę otrzymano?
8. Z podanych znaków rzymskich ułóż dwie liczby, których suma zapisana w systemie rzymskim wynosi C.
- | | | |
|---------------------|---------------------------|------------------------------------|
| a) C, X, X | c) L, L, X, V, V, I, I | e) C, X, X, I, I |
| b) L, X, X, X, X, X | d) L, X, X, X, X, X, I, I | f) L, X, X, X, X, V, I, I, I, I, I |
9. W kalendarzu żydowskim obliczanie lat zaczyna się od 7 października 3761 roku (MMMDCCCLXI) p.n.e. Zapisz w systemach dziesiętkowym i rzymskim, w którym roku według tej rachuby:
- a) odbyły się pierwsze udokumentowane igrzyska olimpijskie w Grecji (776 r. p.n.e.),
- b) powstało miasto Rzym (753 r. p.n.e.),
- c) urodził się Aleksander Macedoński (356 r. p.n.e.).

VLADISLAUS D.G.
 REX POLONIAE AB
 MCCCLXXXVI LITUANIAE
 PRINCEPS SUPREMUS AB
 MCCCLXXVII.
 NATUS MCCCLI.
 MORTUS MCDXXXIV.

10. W tekście w ramce podano datę urodzenia i śmierci Władysława Jagiełły, a także napisano, kiedy został wielkim księciem litewskim, a kiedy (nieco później) królem Polski.
- a) Znajdź te daty i zapisz je cyframi arabskimi.
- b) Ile lat żył Jagiełło według podanych dat?
- c) Data urodzenia nie jest całkowicie pewna. Niektórzy historycy uważają, że Jagiełło urodził się dziesięć lat później. Który to był rok? Zapisz odpowiedź cyframi rzymskimi.

Sprawdź się

1. Który zapis liczby jest prawidłowy?
A. CDCVIIX B. CMXXXV C. LDLVIII D. CDXLIX
2. Na dwóch budynkach stojących przy pewnej ulicy umieszczono daty ukończenia ich budowy: MDCCCXL i MCMXXI. Ile lat upłynęło między upamiętnionymi wydarzeniami?
A. 19 lat B. 49 lat C. 52 lata D. 81 lat
3. Która z nierówności jest prawdziwa?
A. CMLIX < DCCCXIX C. CCCXCII < CDXV
B. CDLXXXVIII > DLIX D. MCCXXV > MCDLXXX

2 Własności liczb naturalnych

Przypomnij sobie

1. Wśród dodatnich liczb całkowitych mniejszych od 20 wskaż liczby pierwsze, liczby złożone, kwadraty liczb, sześciany liczb, wielokrotności liczby 5.
2. Wśród liczb zapisanych w ramce wskaż liczby podzielne przez:
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 9 f) 10

1014	2025	3440
3307	5508	6099
3. a) Przedstaw liczbę 12 jako iloczyn dodatnich liczb całkowitych na trzy sposoby.
b) Rozłóż liczbę 12 na czynniki pierwsze.
4. a) Znajdź trzy wspólne wielokrotności liczb 4 i 6.
b) Znajdź najmniejszą wspólną wielokrotność liczb 4 i 6.
5. a) Znajdź trzy wspólne dzielniki liczb 12 i 18.
b) Znajdź największy wspólny dzielnik liczb 12 i 18.
6. a) Jaka jest reszta z dzielenia liczby 19 przez 4?
b) Podaj przykład liczby, która podzielona przez 4 daje resztę 1.

Poćwicz

7. Zapisz wyniki dzielenia z resztą w postaci $a : b = c$ reszta d , a następnie sprawdź, czy otrzymałeś poprawny wynik (tzn. sprawdź, czy wartość wyrażenia $bc + d$ jest równa a).
- a) $29 : 7$ b) $79 : 11$ c) $231 : 22$ d) $371 : 8$ e) $712 : 13$ f) $520 : 25$
8. a) Przedstaw liczbę 10 jako sumę dwóch liczb pierwszych.
b) Przedstaw liczbę 20 jako sumę dwóch liczb pierwszych.
c) Przedstaw liczbę 30 jako sumę dwóch liczb pierwszych.
9. a) Ile jest dwucyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 5?
b) Ile jest dwucyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 3?
c) Ile jest dwucyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 15?
10. Znajdź NWD i NWW liczb:
- a) 11 i 13 b) 11 i 22 c) 22 i 26 d) 36 i 54 e) 90 i 135 f) 240 i 600
11. Nie wykonując dzielenia, ustal, czy liczba 1 234 560 jest podzielna przez:
- a) 12 b) 15 c) 18 d) 20 e) 30 f) 90
12. a) Czy różnica $70\,987 - 11\,872$ jest podzielna przez 5?
b) Czy suma $12\,018 + 57\,804$ jest podzielna przez 4?
c) Czy iloczyn $26\,787 \cdot 50\,723$ jest podzielny przez 3?

Pomyśl

13. a) Suma trzech liczb naturalnych jest liczbą nieparzystą. Czy ich iloczyn jest liczbą parzystą czy nieparzystą?
b) Suma trzech liczb naturalnych jest liczbą parzystą. Czy ich iloczyn jest liczbą parzystą czy nieparzystą?
14. a) Wiadomo, że cyfrą dziesiątek liczby trzycyfrowej jest 3 i liczba ta jest podzielna przez 4. Z jakich cyfr może się składać ta liczba?
b) Wiadomo, że liczba trzycyfrowa o różnych cyfrach jest większa od 900 i podzielna przez 9. Z jakich cyfr może się składać ta liczba? Ile jest takich liczb?
c) Wiadomo, że liczba czterocyfrowa o różnych cyfrach jest podzielna przez 3. Jaka jest najmniejsza liczba spełniająca ten warunek?

15. Przez jakie liczby jednocyfrowe są podzielne liczby równe poniższym iloczynom?
a) $11 \cdot 55$ b) $22 \cdot 33$ c) $14 \cdot 17 \cdot 19$ d) $22 \cdot 66 \cdot 77$ e) $14 \cdot 21 \cdot 30$
16. Ile różnych dzielników ma liczba, której rozkład na czynniki pierwsze jest podany poniżej?
a) $11 \cdot 17$ b) $73 \cdot 103$ c) $7 \cdot 13 \cdot 19$ d) $71 \cdot 73 \cdot 79$ *e) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
- *17. Ile różnych dzielników ma liczba, której rozkład na czynniki pierwsze jest podany poniżej?
a) 7^2 b) $5^2 \cdot 11$ c) $2^3 \cdot 13$ d) $13^2 \cdot 17^2$
18. Znajdź resztę z dzielenia liczby 730 049 przez:
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 9 f) 10
19. a) Przez jaką liczbę należy podzielić 18, żeby otrzymać resztę 3?
b) Przez jaką liczbę należy podzielić 14, żeby otrzymać resztę 2?
c) Przez jaką liczbę należy podzielić 39, żeby otrzymać resztę 4?
- *20. a) Znajdź najmniejszą liczbę naturalną podzielną przez 3, 4 i 6.
b) Znajdź najmniejszą liczbę naturalną, która podzielona przez każdą z liczb: 3, 4 i 6 daje taką samą resztę równą 2.
c) Znajdź najmniejszą liczbę naturalną, która podzielona przez każdą z liczb: 2, 4, 5, 8 i 10 daje taką samą resztę równą 1.
d) Znajdź najmniejszą liczbę naturalną, która podzielona przez 2 daje resztę 1, podzielona przez 3 daje resztę 2, a podzielona przez 4 daje resztę 3.
- *21. a) Znajdź najmniejszą liczbę naturalną podzielną przez 5 i 13.
b) Znajdź najmniejszą liczbę naturalną, która przy dzieleniu przez 5 i 13 daje resztę 4.
c) Znajdź najmniejszą liczbę naturalną, która przy dzieleniu przez 7 i 5 daje resztę 3.
- *22. Gdy podzielimy pewną liczbę przez 12, otrzymamy iloraz a i resztę 11. Gdy podzielimy tę samą liczbę przez 13, otrzymamy iloraz 11 i resztę a . Jaka to liczba?
23. a) Rozłóż liczbę 60 na czynniki pierwsze.
b) Wymień wszystkie dzielniki liczby 60, które są podzielne przez 6.
c) Znajdź wszystkie pary liczb, których największym wspólnym dzielnikiem jest liczba 6, a najmniejszą wspólną wielokrotnością jest 60.

24. Sprawdź, czy suma $3 \cdot 10 + 5 \cdot 10^7 + 10^9 + 9 \cdot 10^{20}$ jest liczbą podzielną przez:
- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 9 f) 10
25. Wyjaśnij, dlaczego:
- a) suma $10^{99} + 9$ nie jest liczbą podzielną przez 9,
b) różnica $10^{100} - 1$ jest liczbą podzielną przez 9,
*c) suma $10^{15} + 5$ jest liczbą podzielną przez 15.
26. a) Wszystkie cyfry pewnej liczby są jedynkami. Znajdź tę liczbę, jeżeli jest to najmniejsza możliwa liczba spełniająca ten warunek i podzielna przez 9.
*b) Wszystkie cyfry pewnej liczby są piątkami. Znajdź tę liczbę, jeżeli jest to najmniejsza możliwa liczba spełniająca ten warunek i podzielna przez 15.
*c) Wszystkie cyfry pewnej liczby są czwórkami. Znajdź tę liczbę, jeżeli jest to najmniejsza możliwa liczba spełniająca ten warunek i podzielna przez 36.
*d) Wszystkie cyfry pewnej liczby są trójkami. Znajdź tę liczbę, jeżeli jest to najmniejsza możliwa liczba spełniająca ten warunek i podzielna przez 27.
27. a) Czy liczbę 25 można przedstawić jako sumę dwóch liczb pierwszych?
*b) Czy liczbę 125 można przedstawić jako sumę dwóch liczb pierwszych?
- *28. Znajdź najmniejszą liczbę, która podzielona przez 22 daje wynik podzielny przez 2, a podzielona przez 33 daje wynik podzielny przez 3.

Sprawdź się

1. Które z poniższych zdań jest prawdziwe?
- A. Reszta z dzielenia liczby $a = 123 \cdot 72 + 11$ przez 123 jest równa 72.
B. Liczba $b = 23 \cdot 17 + 17$ jest podzielna przez 23.
C. Reszta z dzielenia liczby $c = 428 \cdot 71 + 13$ przez 13 jest równa 71.
D. Liczba $d = 43 \cdot 24 + 24$ jest podzielna przez 24.
2. W czterocyfrowej liczbie 207■ zasłonięto cyfrę jedności. Liczba ta jest podzielna przez 12. Wynika stąd, że cyfrą jedności jest:
- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8
3. NWW pewnych dwóch liczb jest równa 180, a NWD tych liczb wynosi 9. Tą parą liczb jest:
- A. 9 i 90 B. 36 i 45 C. 18 i 81 D. 10 i 90

3 Porównywanie liczb

Przypomnij sobie

- Wymień te spośród liczb podanych w ramce, które są:
 - wymierne,
 - całkowite,
 - naturalne,
 - niewymierne.

$$\begin{array}{cccccc} \sqrt{5} & \frac{1}{\sqrt{4}} & -\frac{13}{3} & \sqrt[3]{4} & -1 & \frac{8}{6} \\ 7,(5) & -0,0(7) & 5\frac{5}{7} & \sqrt[3]{1} & & \\ \frac{125}{25} & 0 & \sqrt{2\frac{7}{9}} & -12,3 & \frac{62}{63} & \end{array}$$

- Podaj przykład:
 - liczby naturalnej większej od $\sqrt{1000}$,
 - dodatniej liczby wymiernej mniejszej od 0,001,
 - ujemnej liczby wymiernej większej od -2,05.
- Których liczb jest więcej wśród podanych: dodatnich czy ujemnych?

$$2^3 \quad -2^4 \quad (-4)^3 \quad (-5)^0 \quad 100^4 \quad -1^0 \quad (-6)^{12}$$
- Która z podanych liczb jest większa?
 - 10^8 czy 10 000 000
 - 10^{-4} czy 0,001
- Która z liczb jest większa?

a) 2,316 czy 2,3119	c) -4,2 czy -4,4	e) $\frac{14}{37}$ czy $\frac{14}{31}$
b) 3,(7) czy 3,78	d) $\frac{13}{19}$ czy $\frac{15}{19}$	f) $\frac{27}{50}$ czy $\frac{21}{44}$
- Zapisz podane liczby w notacji wykładniczej.

a) 700 000	b) 53 000	c) 0,0003
------------	-----------	-----------

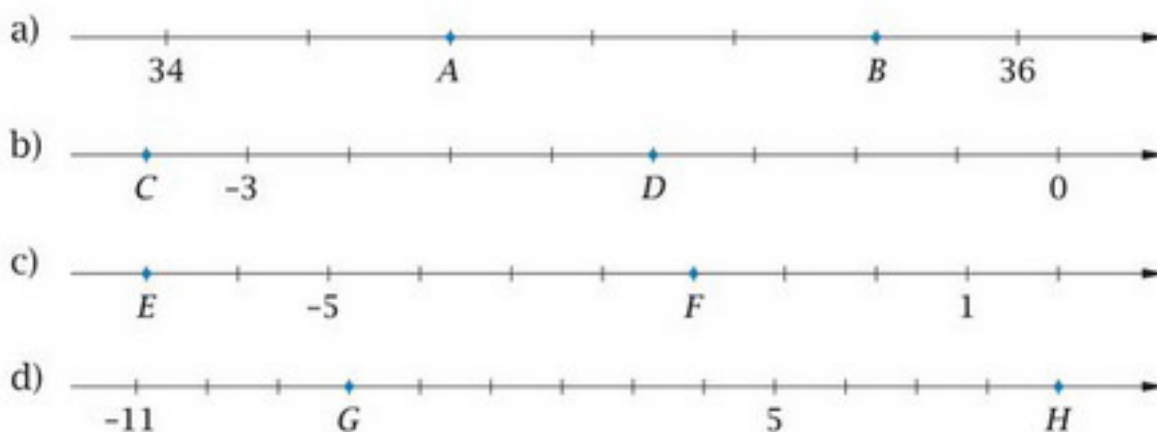
Poćwicz

- Zaznacz na osi liczbowej wszystkie:
 - ujemne liczby całkowite większe od $-\sqrt{19}$,
 - ujemne liczby wymierne większe od -2, które można przedstawić w postaci ułamka o całkowitym liczniku i mianowniku równym 3,
 - dodatnie liczby wymierne mniejsze od 4, które można przedstawić w postaci pierwiastka kwadratowego z liczby naturalnej.

8. Zapisz podane liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

- a) 2^3 $(-2)^3$ $(-3)^3$ -3^2 -2^4 3^2
 b) $(\frac{1}{3})^2$ $(\frac{1}{2})^3$ $(-\frac{1}{3})^3$ $(-\frac{1}{2})^2$ $-(\frac{1}{3})^2$ $-(\frac{1}{2})^4$

9. Odczytaj współrzędne punktów zaznaczonych literami na osi liczbowej.



$P_1 = 0,01$ $P_4 = 10$ $P_7 = 1,6$
 $P_2 = 400$ $P_5 = \frac{2}{3}$ $P_8 = \frac{49}{81}$
 $P_3 = 1\frac{7}{9}$ $P_6 = 2,25$

10. W ramce podano pola kwadratów. Ustal, które z nich mają boki o długościach wyrażonych liczbami:

- a) całkowitymi, b) wymiernymi.

11. W tabeli przedstawiono, jaką część ludności Polski będą stanowiły dzieci i młodzież w wieku do lat 17 w przyszłości (prognozę sporządzono na początku XXI w.). Ustal, w którym roku udział młodzieży i dzieci w liczbie ludności Polski będzie największy, a w którym — najmniejszy.

Rok	2020	2025	2030	2035
Część liczby ludności Polski	$\frac{37}{200}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{13}$



12. Która z podanych liczb jest mniejsza?

- a) 5^7 czy $(-5)^8$ c) $(\frac{7}{3})^5$ czy $(\frac{7}{4})^5$ e) $0,8^3$ czy $0,8^4$
 b) $(-7)^{20}$ czy -7^{20} d) $(\frac{4}{5})^6$ czy $(\frac{5}{4})^6$ f) $(-3,4)^6$ czy $(-3,4)^8$

13. Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

- a) 3000 c) 0,12 e) 1,0765 g) 9876,546
 b) 120 000 d) 0,00387 f) 10,879 h) 0,00001

14. a) Porównaj podane pary liczb — najpierw sprowadź je do wspólnego mianownika.

$$\frac{7}{12} \text{ i } \frac{5}{6} \quad \frac{11}{15} \text{ i } \frac{13}{20} \quad \frac{2}{5} \text{ i } \frac{3}{7} \quad \frac{5}{7} \text{ i } \frac{7}{10} \quad \frac{4}{9} \text{ i } \frac{5}{11}$$

- b) Porównaj podane pary liczb — najpierw sprowadź je do wspólnego licznika.

$$\frac{2}{5} \text{ i } \frac{4}{9} \quad \frac{5}{13} \text{ i } \frac{15}{38} \quad \frac{4}{7} \text{ i } \frac{6}{11} \quad \frac{10}{13} \text{ i } \frac{15}{21} \quad \frac{9}{25} \text{ i } \frac{6}{17}$$

- c) Porównaj podane pary liczb — najpierw oblicz ich iloraz i porównaj go z liczbą 1.

$$\frac{12}{25} \text{ i } \frac{9}{20} \quad \frac{8}{15} \text{ i } \frac{12}{25} \quad \frac{12}{35} \text{ i } \frac{18}{49} \quad \frac{33}{50} \text{ i } \frac{55}{70} \quad \frac{20}{21} \text{ i } \frac{55}{63}$$

- d) Porównaj podane pary liczb — porównaj ich rozwinięcia dziesiętne. Skorzystaj z kalkulatora.

$$0,678 \text{ i } \frac{13}{19} \quad 0,562 \text{ i } \frac{50}{89} \quad 7,94 \text{ i } \frac{421}{53} \quad \frac{13}{15} \text{ i } \frac{27}{31} \quad \frac{107}{51} \text{ i } \frac{47}{22}$$

- e) Porównaj podane pary liczb — skorzystaj z dowolnej metody.

$$\frac{6}{17} \text{ i } \frac{8}{21} \quad \frac{5}{12} \text{ i } \frac{23}{60} \quad \frac{3}{20} \text{ i } \frac{4}{23} \quad 0,5(83) \text{ i } \frac{7}{12} \quad 2,2 \text{ i } \frac{33}{14}$$

15. Wiadomo, że $\sqrt{2} \approx 1,41421$ i $\sqrt{3} \approx 1,73205$. Ustal, która z poniższych liczb jest mniejsza.

- | | | |
|------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| a) 1,41 czy $\sqrt{2}$ | c) 0,75 czy $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | e) 2,1 czy $0,3 + \sqrt{3}$ |
| b) 1,73 czy $\sqrt{3}$ | d) 3,45 czy $2\sqrt{3}$ | f) 0,3 czy $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ |

16. Która liczba jest większa?

- | | | |
|--------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------|
| a) $\sqrt{37} - 1$ czy 6 | c) $\sqrt{101} - \sqrt{80}$ czy 1 | e) $0,5\sqrt[3]{9}$ czy 1 |
| b) $10\sqrt{51}$ czy 69 | d) $\sqrt[3]{1001} + 1$ czy 11 | f) $\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5}$ czy 5 |

17. Która liczba jest większa?

- | | | |
|---------------------|------------------------|--------------------------|
| a) 0,12 czy 0,1(20) | d) 7,(13) czy 7,(31) | g) 0,12(32) czy 0,1233 |
| b) 3,4 czy 3,0(4) | e) 2,0(42) czy 2,(042) | h) 12,(051) czy 12,05(1) |
| c) 5,606 czy 5,(60) | f) 9,(321) czy 9,3(21) | i) 4,2(115) czy 4,21(15) |

Pomyśl

18. Znajdź wszystkie liczby całkowite większe od mniejszej z podanych liczb i mniejsze od większej z tych liczb.

- | | | | |
|------------------------------|--------------------------------|---|----------------------------------|
| a) $\sqrt{12}$; $\sqrt{18}$ | c) $\sqrt{48}$; $\sqrt{96}$ | e) $-\sqrt{26}$; $-\sqrt{3}$ | g) $-\sqrt{10}$; $\sqrt{10}$ |
| b) $\sqrt{27}$; $\sqrt{72}$ | d) $\sqrt{220}$; $\sqrt{360}$ | f) $-\sqrt{43}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | h) $-\sqrt{420}$; $-\sqrt{250}$ |

19. Zapisz podane liczby w postaci dziesiętnej.

$$\frac{4}{9} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{8}{11} \quad \frac{4}{13} \quad \frac{1}{44} \quad \frac{1}{66} \quad \frac{1}{99}$$

20. Skorzystaj z równości $\frac{1}{22} = 0,0(45)$ i oblicz.

- a) $3 \cdot 0,0(45)$ c) $11 \cdot 0,0(45)$ e) $\frac{1}{2} \cdot 0,0(45)$
b) $7 \cdot 0,0(45)$ d) $22 \cdot 0,0(45)$ f) $0,22 \cdot 0,0(45)$

21. Wiadomo, że $\frac{1}{3} = 0,(3)$ oraz że $\frac{2}{3} = 0,(6)$. Ile wynosi suma liczb $0,(3)$ i $0,(6)$?

*22. Znajdź liczbę niewymierną leżącą pomiędzy podanymi liczbami.

- a) 1 oraz 1,3 c) $\sqrt{3}$ oraz $\sqrt{5}$
b) 4,6 oraz 5 d) $-\sqrt{18}$ oraz $-\sqrt{17}$

23. Podkreślone liczby zapisz bez używania potęg.

- a) Do operacji mikrochirurgicznych używa się igieł o grubości $5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ i nici o grubości $1,8 \cdot 10^{-5} \text{ m}$.
b) Najmniejszy brylant poddany oszlifowaniu miał wagę $1,5 \cdot 10^{-5} \text{ g}$, średnicę $1,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ i wysokość $1,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}$.
c) W 1901 roku odkryto na preriach USA kolonię psów preriowych liczącą $4 \cdot 10^6$ osobników i zamieszkującą powierzchnię $6,1 \cdot 10^{10} \text{ m}^2$.
d) Zaporę Rogun na rzece Wachs w Tadżykistanie zbudowano z $7,55 \cdot 10^7 \text{ m}^3$ betonu i odgradzono nią $1,16 \cdot 10^{10} \text{ m}^3$ wody.
e) Średnica atomu węgla jest równa $7,7 \cdot 10^{-13} \text{ m}$, a w 1 gramie czystego węgla mieści się $5 \cdot 10^{22}$ atomów.

24. Podkreślone liczby zapisz w notacji wykładniczej.

- a) Najlżejszym gazem jest wodór, którego 1 cm^3 waży $0,00009 \text{ g}$, a najcięższym radon, którego 1 cm^3 waży $0,01 \text{ g}$.
b) Najlepsze mikroskopy optyczne są w stanie powiększyć obraz $2,5 \text{ tys.}$ razy. Mikroskopem elektronowym można uzyskać powiększenie do 250 tys. razy.
c) Budowa Kanału Panamskiego kosztowała 387 mln dolarów. Podczas budowy wykorzystano $27,5 \text{ mln}$ ton dynamitu i przerzucono $163,8 \text{ mln m}^3$ ziemi.
d) Samica dorsza składa do 5 mln jajeczek, z których każde ma około $0,0015 \text{ m}$ średnicy.



Sprawdź się

1. Wskaż zdanie fałszywe.

- A. Każda liczba, która ma rozwinięcie dziesiętne okresowe nieskończone jest wymierna.
- B. Każda liczba, która ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone i nieokresowe, jest niewymierna.
- C. Każda liczba, która ma rozwinięcie dziesiętne skończone, jest wymierna.
- D. Każda liczba, która ma więcej niż 100 milionów cyfr po przecinku, jest niewymierna.

2. Która z nierówności jest prawdziwa?

- A. $10\sqrt{10} < 30$ B. $\frac{\sqrt{23}}{5} > 1$ C. $\frac{\sqrt[3]{30}}{2} > \frac{3}{2}$ D. $\sqrt[3]{9} + \sqrt{5} < 4$

3. Dane są liczby: $23,12 \cdot 10^4$, $3,876 \cdot 10^{-10}$, $3,45 \cdot 100^2$, $0,999 \cdot 10^{20}$, $1 \cdot 10^{-87}$, $4,2 \cdot 11^{10}$, $10 \cdot 10^5$, $1,1 \cdot 10^0$. Ile z tych liczb zapisano w notacji wykładniczej?

- A. jedną B. dwie C. trzy D. cztery

4 Działania na liczbach

Przypomnij sobie

1. Wybierz dwa ułamki zwykłe o tych samych mianownikach i różnych licznikach, a następnie:

- a) dodaj je, c) pomnóż je,
- b) odejmij od mniejszego większy, d) podziel większy przez mniejszy.

2. Oblicz — zwróć uwagę na podobieństwa i różnice między przykładami.

- a) $9 - 3 : 3 + 7$ c) $9 - 3 : (3 + 7)$ e) $9 - (3 : 3 + 7)$
- b) $(9 - 3) : 3 + 7$ d) $(9 - 3) : (3 + 7)$ f) $(9 - 3 : 3) + 7$

3. Oblicz.

- a) połowę sumy liczb $\frac{3}{4}$ i $\frac{3}{5}$ c) czwartą część ilorazu liczb $\frac{3}{20}$ i $\frac{3}{4}$
- b) trzecią część iloczynu liczb $\frac{3}{4}$ i $\frac{3}{7}$ d) piątą część różnicy liczb $\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{3}$

4. Która z liczb a , b , c jest zaokrągleniem liczby k z podaną dokładnością?

- | | | | |
|---|---------------|----------------|---------------|
| a) $k = 6785,123$, do części dziesiątych | $a = 6785,1$ | $b = 6785,2$ | $c = 6785,12$ |
| b) $k = 1008,325$, do dziesiątek | $a = 1008,3$ | $b = 1010,325$ | $c = 1010$ |
| c) $k = 324,999$, do setek | $a = 300$ | $b = 400$ | $c = 320$ |
| d) $k = 13\,459$, do tysięcy | $a = 14\,000$ | $b = 13\,400$ | $c = 13\,000$ |

5. Odpowiedz na pytanie.

- Ile metrów ma kilometr?
- Ile sekund jest w godzinie?
- Sto decymetrów sześciennych — ile to litrów?
- Ile metrów kwadratowych jest w kilometrze kwadratowym?
- Ile centymetrów sześciennych jest w metrze sześciennym?
- Ile litrów ma hektolitr?
- Ile arów jest w hektarze?

Poćwicz

6. Oblicz (postaraj się liczyć w pamięci).

- $\frac{5}{8} + \frac{7}{8}$ $3\frac{2}{9} + \frac{8}{9}$ $6\frac{6}{11} + 5\frac{5}{11}$ $1\frac{7}{12} + 10\frac{7}{12}$ $20\frac{6}{7} + 1\frac{5}{7}$
- $5 - \frac{3}{7}$ $2 - \frac{5}{11}$ $8\frac{7}{9} - 2\frac{2}{9}$ $4\frac{2}{5} - \frac{3}{5}$ $7\frac{3}{8} - 2\frac{5}{8}$
- $6 \cdot \frac{3}{5}$ $\frac{2}{7} \cdot 4$ $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{3}$ $-\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8}$ $(-\frac{9}{11}) \cdot (-\frac{4}{7})$
- $4 : \frac{5}{7}$ $\frac{3}{11} : 2$ $\frac{1}{7} : \frac{1}{4}$ $-\frac{5}{8} : \frac{1}{3}$ $(-\frac{2}{5}) : (-\frac{1}{5})$

7. Oblicz (postaraj się liczyć w pamięci).

- $1,3 + 0,9$ $4,15 + 2,07$ $1,2 - 0,5$ $3,4 - 5,6$ $-6,7 - 2,8$
- $2 \cdot 0,6$ $0,15 \cdot 4$ $-0,23 \cdot 10$ $-0,6 \cdot (-0,2)$ $-3,7 \cdot 0,01$
- $0,6 : 2$ $1,2 : 3$ $52,4 : 100$ $20 : 0,2$ $3,2 : 32$

8. Oblicz (pamiętaj o właściwej kolejności wykonywania działań).

- $3 + 2 \cdot (-7)$
- $17 - 7 \cdot 5$
- $4 - (4 + 6) \cdot 2$
- $1 - 8 : (-3 + 5)$
- $(-12 + 2) : (-2 - 3)$
- $(-3 \cdot (-4) - 5) \cdot (-8 - 2 \cdot (-6))$
- $6 + 15 : 3 - 12 + 6 \cdot 9$
- $-7 + 4 \cdot (10 + 5) - (-3 - (-2))$

9. Oblicz.

a) $\frac{6+15}{3} + \frac{12+6}{9}$

d) $\frac{7+35}{7} - \frac{42-14}{21}$

g) $\frac{17-8}{34} - \frac{85-4}{17}$

b) $\frac{25+15}{5} + \frac{20+30}{10}$

e) $\frac{6+16}{24} - \frac{12+6}{18}$

h) $\frac{40+18}{36} - \frac{9-80}{18}$

c) $\frac{6+18}{6} - \frac{24-6}{3}$

f) $\frac{13-5}{26} + \frac{12+10}{52}$

i) $\frac{18+108}{54} - \frac{10+25}{30}$

10. Wykonaj działania.

a) $-4\frac{1}{6} \cdot (-2\frac{2}{5})$

b) $2\frac{1}{7} : 5$

c) $\frac{5}{3\frac{1}{8}}$

d) $5\frac{5}{6} : 3\frac{1}{9}$

e) $-7\frac{14}{15} : 2\frac{5}{6}$

11. Wykonaj działania.

a) $8,23 + 3,99$

c) $3,8 \cdot (-0,7)$

e) $0,42 : (-3)$

b) $2,92 - 7,6$

d) $4,8 : 0,06$

f) $-6,25 : (-0,25)$

12. Oblicz.

a) $(3,75 + 1\frac{3}{8}) : 2$

c) $-1,6 : 3\frac{11}{15} + 1\frac{3}{14}$

e) $\frac{1,6 - \frac{2}{3}}{1,6 \cdot \frac{2}{3}}$

b) $(1,25 - 2\frac{2}{3}) \cdot 6$

d) $(0,3 + \frac{4}{5}) : (6\frac{1}{15} - \frac{2}{3})$

f) $\frac{4,8}{1\frac{1}{15}} - \frac{2\frac{1}{4}}{5,4}$

13. Wykonaj obliczenia sposobem pisemnym.

a) $45,09 + 67,31$

b) $86,08 - 58,09$

c) $7,63 \cdot 5,1$

d) $56,26 : 9,7$

14. Zaokrąglij liczbę.

a) 8764,76 do jedności

e) 59 191,321 do dziesiątek tysięcy

b) 27 765,12 do dziesiątek

f) 976 599,389 do części dziesiątych

c) 29 878,29 do setek

g) 1098,945 do części setnych

d) 34 900,1 do tysięcy

h) 2229,6799 do części tysięcznych

Rzeka	Kontynent	Długość (w km)
Nil	Afryka	6695
Amazonka	Ameryka Płd.	6437
Jangcy	Azja	6379
Missisipi — Missouri	Ameryka Płn.	6264
Irtysz	Azja	5411
Huang He	Azja	4676
Kongo	Afryka	4667

15. Zaokrąglij podane w tabeli długości najdłuższych rzek świata:

a) do dziesiątek kilometrów,

b) do setek kilometrów,

c) do tysięcy kilometrów.

16. W tabeli przedstawiono historię rekordu świata w biegu na 10 km w drugiej połowie lat dziewięćdziesiątych XX wieku. Zaokrąglaj podane czasy:

- a) do dziesiątych części sekundy, b) do sekund, *c) do minut.

Biegacz	Kraj	Rok	Czas (minuty i sekundy)
Haile Gebrselassie	Etiopia	1998	26:22,75
Paul Tergat	Kenia	1997	26:27,85
Haile Gebrselassie	Etiopia	1997	26:31,32
Salah Hissou	Maroko	1996	26:38,08
Haile Gebrselassie	Etiopia	1995	26:43,53

17. Zaokrąglaj liczbę:

- a) 12,(72) do części setnych,
 b) 0,0(346) do części tysięcznych,
 c) 0,5(15) do części dziesięciotysięcznych,
 d) 0,(39) do części stutysięcznych.

18. Wskaż większą liczbę bez wykonywania dokładnych obliczeń.

- a) $a = 345 + 543$ oraz $b = 346 + 544$ d) $a = 772 \cdot 989$ oraz $b = 771 \cdot 989$
 b) $a = 786 - 498$ oraz $b = 786 - 500$ e) $a = 1234 : 123$ oraz $b = 1234 : 124$
 c) $a = 903 - 349$ oraz $b = 902 - 349$ f) $a = 2346 : 328$ oraz $b = 2347 : 328$

19. Bez wykonywania dokładnych obliczeń uporządkuj podane liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

- a) $a = 15(31 - 7) + 225$, $b = (16 + 20) \cdot 8 + 200$, $c = (43 + 20) \cdot 14 + 225$
 b) $a = 13,2(100 - 19,9) + 1$, $b = 999 : (46 - 23) + 50$, $c = (45 - 13) \cdot 32 : 24$
 c) $a = 49,11 \cdot 5 : 20$, $b = 11 \cdot (73 - 15) : 22$, $c = (51 - 12,16 \cdot 4) \cdot 25$
 d) $a = (72 - 13) \cdot 99 : 29$, $b = (83 - 12) \cdot 98 : 25$, $c = (66 - 18) \cdot 97 : 31$

20. a) Wyraż podane wielkości w milimetrach.

8,3 cm 25 cm 26,08 cm 8,3253 m 16 km

b) Wyraż podane wielkości w centymetrach.

1,2 m 8,352 m 29 mm 0,03 mm 62,05 m

c) Wyraż podane wielkości w metrach.

83 289 mm 532,8 cm 500,02 cm 2,53 km 13,09 km

d) Wyraż podane wielkości w kilometrach.

73 820 m 950,2 m 33 000,5 m 280,3 m 30 000 cm

21. a) Wyraż podane wielkości w arach.

50 m² 28,3 m² 1,53 km² 2800 m² 15 ha

b) Wyraż podane wielkości w hektarach.

23 a 1800 m² 2,5 km² 853 a 12 m²

c) Wyraż podane wielkości w metrach kwadratowych.

2480 cm² 34 196 dm² 345 a 192 ha 76,5 km²

d) Wyraż podane wielkości w kilometrach kwadratowych.

3 123 000 cm² 32 450 m² 9000 a 54 900 ha 100 000 ha

22. a) Wyraż podane wielkości w milimetrach sześciennych.

3 dm³ 0,03 cm³ 2,7 cm³ 53 cm³ 0,03 dm³

b) Wyraż podane wielkości w centymetrach sześciennych.

8 mm³ 253 mm³ 0,2 dm³ 1,52 dm³ 12 m³

c) Wyraż podane wielkości w litrach.

25 dm³ 53 mm³ 2,8 cm³ 0,2 m³ 3 mm³

d) Wyraż podane wielkości w decymetrach sześciennych.

5 l 350 ml 250 cm³ 0,24 cm³ 0,0005 km³

23. a) Wyraż podane wielkości w minutach.

23 h 2,5 h 120 s 600 s 840 s

b) Wyraż podane wielkości w sekundach.

8 min 5 s 2 min 3 s 8,5 min 25 min 3 s 2,5 h

c) Wyraż podane wielkości w godzinach.

1470 min 6480 min 59 235 min 194 400 s 388 800 s

d) Wyraż podane wielkości w dobach.

576 godz. 8760 godz. 129 600 s 1440 min 80 640 min

24. a) Wyraż podane wielkości w mililitrach.

0,7 cm³ 120 cm³ 0,12 dm³ 0,0003 l 3,5 l

b) Wyraż podane wielkości w milimetrach sześciennych.

0,13 ml 120 ml 0,13 dm³ 4,529 l 0,0028 hl

c) Wyraż podane wielkości w litrach.

1200 cm³ 34 000 cm³ 4560 dm³ 500 m³ 1 km³

d) Wyraż podane wielkości w hektolitrach.

765 876 987 ml 3 456 600 cm³ 30 303 l 34 500,4 l 1 km³

25. Uporządkuj od najmniejszej do największej:
- długości: 0,09 km, 112 m, 7980 cm, 540 000 mm,
 - masy: 54 kg, 740 000 g, 0,13 t, 7500 dag,
 - pola powierzchni: 1920 a, 710 ha, 600 000 m², 0,04 km²,
 - czasy: 6140 min, 30 h 20 min, 120 min 30 s, 360 000 s,
 - objętości: 4200 cm³, 0,0003 km³, 54 000 dm³, 0,7 m³.
26. a) Przeciętny włos ma grubość 0,1 mm, a na przeciętnej głowie jest 100 000 włosów. Jaką szerokość miałby pas tych włosów, gdyby ułożyć je jeden obok drugiego?
- b) W ryzie papieru jest 500 arkuszy. Ryza ma grubość 5 cm. Ile arkuszy tego papieru trzeba ułożyć jeden na drugim, żeby uzyskać stos o wysokości 1 km?
- c) Najcięższe kule do kręgli ważą 7,2 kg. Ile takich kul może przewieźć samochód ciężarowy o ładowności 9 t?
- d) Mysz waży 3 dag, a słoń 6 t. Ile razy słoń jest cięższy od myszy?
- e) Teren o powierzchni 0,6 ha podzielono na 15 jednakowych działek. Ile arów miała każda z tych działek?
- f) Wyspa Wolin ma powierzchnię 245 km², a znajdujący się na niej Woliński Park Narodowy — 11 000 ha. Jaka jest nieobjęta parkiem powierzchnia tej wyspy?
- g) Czas 2 h 12 min podzielono na trzy równe okresy. Jak długo trwał każdy z nich? Ile trwałby każdy okres, gdyby było ich cztery?
- h) Pewien zawodnik biorący udział w triathlonie płynął przez 18 min 55 s, jechał na rowerze przez 1 h 15 min 40 s i biegł przez 34 min 13 s. Jaki był łączny czas tego zawodnika?
27. Wyraż prędkość $300 \frac{\text{m}}{\text{h}}$: a) w metrach na minutę, b) w kilometrach na godzinę.
28. Przelicz na metry na sekundę maksymalne prędkości, jakie obowiązują w Polsce na poszczególnych typach dróg. Wyniki podaj z dokładnością do $0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- $140 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ na autostradach
 - $120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ na drogach ekspresowych dwujezdniowych
 - $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ na drogach ekspresowych jednojezdniowych
 - $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ na drogach jednojezdniowych dwukierunkowych
 - $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ na terenie zabudowanym w dzień
29. W tabeli podano prędkości w metrach na sekundę. Przelicz je na kilometry na godzinę.

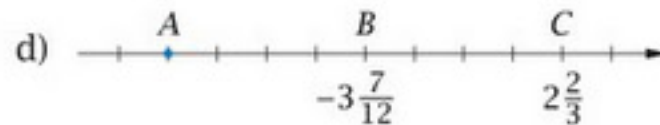
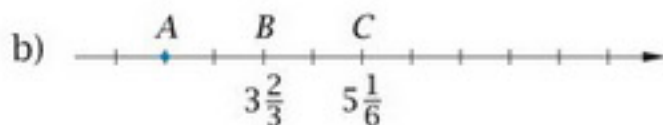
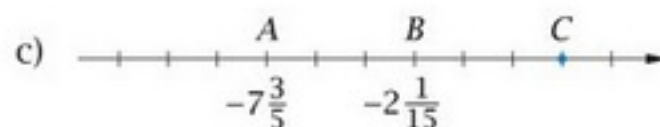
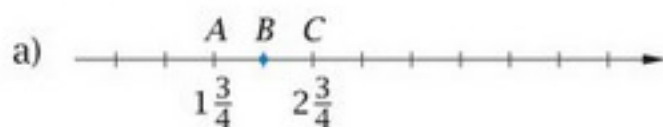
Dżdżownica	Statek <i>Titanic</i>	Gepard	Dźwięk w powietrzu	Światło
0,004	11,6	29	339	300 mln

30. a) Jaką drogę pokona samochód osobowy jadący ze średnią prędkością $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ przez 1,5 godziny?
- b) Z jaką średnią prędkością jechał rowerzysta, który pokonał 32 km w ciągu 2 godzin?
- c) Ile czasu potrzebuje pociąg jadący ze średnią prędkością $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, by pokonać 175 km?



Pomyśl

31. Dane są współrzędne dwóch punktów na osi liczbowej. Oblicz współrzędną trzeciego punktu.



32. Oblicz, a następnie przepisz wyrażenie i wstaw w nim nawiasy w taki sposób, aby otrzymać mniejszy wynik.

a) $3\frac{1}{2} + 4\frac{5}{6} - 8 : 1\frac{1}{4}$

b) $1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{5}{6} - 1 : 1\frac{1}{4}$

c) $4\frac{1}{5} : 2\frac{1}{10} - 2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4}$

33. W tabeli przedstawiono skład różnych produktów żywnościowych. Liczby oznaczają, jaką część porcji produktu stanowią podstawowe składniki.

Produkt	Woda	Białko	Tłuszcze	Węglowodany
orzechy laskowe	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{28}$
fasola	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{5}{8}$
ser żółty	$\frac{7}{16}$	$\frac{11}{40}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$

- a) Określ, którego składnika jest najwięcej w każdym z produktów.
- b) W którym z podanych produktów jest najwięcej białka?
- c) Jaką część każdego z produktów stanowią składniki niewymienione w tabeli?
- d) Czego jest więcej w orzechach — białka czy węglowodanów? Ile razy więcej?



34. Zgodnie z zaleceniem należy rozpuścić 1 łyżkę naparu ziołowego w 1,5 szklanki wody i wypić jednorazowo $\frac{1}{4}$ szklanki tak otrzymanego leku. Jaką część łyżki naparu zawiera jednorazowa porcja leku?

35. Masa jaj kurzych waha się od 4,5 dag do 7,5 dag. Białko stanowi około $\frac{2}{3}$ masy jajka, a skorupka około $\frac{1}{10}$ masy jajka. Oblicz masę żółtka w najmniejszych i największych jajkach.

36. Gdy artysta rysuje człowieka, stara się zachować odpowiednie proporcje ludzkiego ciała. Wysokość całej postaci jest $7\frac{1}{2}$ razy większa od wysokości jej głowy. Odległość od linii bioder do stóp jest równa czterem wysokościami głowy. Jaką część wysokości postaci stanowi odległość od linii bioder do stóp?



37. Oszacuj wyniki bez wykonywania dokładnych rachunków.

a) Odległość między orbitami Saturna i Ziemi jest równa 1277 mln km. Czy sonda kosmiczna pokonująca w ciągu dnia 1,5 mln km przebędzie tę odległość w ciągu roku?

b) Staropolska mila była równa 7146 m i dzieliła się na 8 stająg. W XIX wieku wprowadzono nowopolską milę równą 8534,3 m i dzielącą się na 8 wiorst. Czy kilometr jest jednostką większą czy mniejszą od stajania i od wiorsty?

c) Powierzchnia lądów wynosi 148,94 mln km². Czy sześć największych państw zajmuje w sumie ponad połowę powierzchni lądów?

Państwo	Rosja	Kanada	USA	Chiny	Brazylia	Australia
Powierzchnia (w mln km ²)	17,08	9,98	9,63	9,60	8,51	7,69

38. a) Wiadomo, że 1 cl (centylitr) to 10 ml. Ile centylitrów jest w jednym litrze, a ile — w jednym hektolitrze?

b) Wiadomo, że 10 decybeli (dB) to 1 bel (B). Ilu belom odpowiada 130 dB?

c) Wiadomo, że 1 kWh (kilowatogodzina) to 1000 watogodzin (Wh). Ile kilowatogodzin jest w 1 000 000 Wh?

d) Wiadomo, że 1 MJ (megadżul) to milion dżuli (J). Jaką część megadżula stanowi 20 000 J?

39. W tabeli podano masy różnych substancji o objętości 1 cm^3 .

Bakelit	Ołów	Złoto	Platyna
1340 mg	11,35 g	1,928 dag	0,02145 kg

- a) Ile kilogramów waży 100 dm^3 każdej z tych substancji?
b) Jaką objętość w dm^3 ma 1 t każdej z tych substancji?
40. a) W buteleczce mieści się 30 cm^3 leku. Lek przyjmuje się w dawkach po 0,5 ml. Na ile dawek wystarczy leku w butelce?
b) W cysternie mieści się 13 m^3 paliwa. Ile zbiorników na paliwo o pojemności 50 litrów można napęlić paliwem z tej cysterny?
c) Z jednej pomarańczy wyciśnięto 10 cl soku. Ile takich pomarańczy należy wycisnąć, aby wypełnić kartonik o wymiarach $4 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} \times 25 \text{ cm}$?
41. Półtorakilometrowy odcinek szosy o szerokości 7 m pokryto pięciocentymetrową warstwą asfaltu.
a) Ile hektarów zajmuje ten odcinek szosy?
b) Jaką objętość ma asfalt użyty do pokrycia tego odcinka?
42. Podczas deszczu na każdy metr kwadratowy spadło 15 litrów wody.
a) O ile milimetrów zwiększyła się w wyniku tego deszczu głębokość wody w otwartym basenie?
b) Ile metrów sześciennych wody spadło na park, który ma powierzchnię $0,2 \text{ km}^2$?
43. a) O której godzinie prawdziwe jest stwierdzenie: „do północy zostało jeszcze 5 razy tyle czasu, ile upłynęło od północy”?
b) O ile mniej sekund upływa między godziną 15:34 a północą niż między północą a godziną 15:34?
c) Minutowa wskazówka zegara wykonała 45 pełnych obrotów wokół tarczy. Ile pełnych obrotów wokół tarczy wykonała w tym czasie wskazówka godzinowa, a ile — wskazówka sekundnika?
44. Maksymalna dopuszczalna ilość szkodliwych pyłów PM10 (typowy składnik smogu) w powietrzu to $5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$.
a) W ilu metrach sześciennych powietrza zmieści się 1 kg PM10, jeżeli jego stężenie odpowiada maksymalnej dopuszczalnej ilości?
b) Człowiek wykonuje około 12 wdechów po 0,5 l powietrza w ciągu minuty. Ile gramów PM10 wchłonie on w ciągu tygodnia, jeżeli norma zawartości PM10 w powietrzu, którym oddycha, zostanie przekroczona 10-krotnie?

Sprawdź się

1. Które z wyrażeń ma inny wynik niż pozostałe?

A. $\frac{4,5 - \frac{1}{6}}{4,5 + \frac{1}{6}}$ B. $\frac{4,5}{4\frac{2}{3}} - \frac{\frac{1}{6}}{4,(6)}$ C. $\frac{3}{14} \left(4,5 - \frac{1}{6}\right)$ D. $\frac{\frac{1}{6} - 4,5}{\frac{1}{6} + 4,5}$

2. Jedną z poniższych liczb zaokrąglono i otrzymano $9,12 \cdot 10^7$. Wskaż tę liczbę.

A. 9 122 989 B. 91 259 898 C. 91 229 898 D. 912 298 980

3. Pewien koń pokonał 400 m w ciągu 20 sekund. Oznacza to, że ten koń osiągnął prędkość średnią równą:

A. $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ B. $42 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ C. $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ D. $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

4. Liczby:

$$a = \sqrt{6\frac{1}{4}} \quad b = \left(\frac{7}{4}\right)^2 \quad c = 2,(75) \quad d = 2\frac{3}{4} \quad e = \sqrt{8}$$

uporządkowano w kolejności od najmniejszej do największej. W wyniku otrzymano ustawienie:

A. e, d, c, b, a B. a, d, c, e, b C. a, b, c, d, e D. a, c, d, e, b

5. Oszacuj lewe strony poniższych równości i wskaż równość prawdziwą.

A. $5712 : (45 + 23) = 154$ C. $(85 - 16) \cdot 89 = 6141$
 B. $66 \cdot 20 : 11 = 100$ D. $55 \cdot (11 + 78) = 895$

6. 12 500 pewnych owoców waży 3 t. Ile waży średnio jeden taki owoc?

A. 2,4 g B. 24 g C. 24 dag D. 240 dag

5 Działania na potęgach i pierwiastkach

Przypomnij sobie

1. Przedstaw w postaci jednej potęgi — przypomnij zasady wykonywania działań na potęgach o tych samych podstawach.

a) $2^5 \cdot 2^9$ b) $3^8 : 3^6$ c) $4 \cdot 4^7$ d) $5^8 : 5$ e) $(3^5)^3$

2. Oblicz — przypomnij zasady wykonywania działań na potęgach o tych samych wykładnikach.

a) $4^3 + 5^3$ b) $6^{15} : 3^{15}$ c) $6^5 - 5^5$ d) $7^4 \cdot 2^4$ e) $(0,125 \cdot 16)^7$

3. Oblicz — przypomnij zasady wykonywania obliczeń wyrażeń zawierających pierwiastki.

a) $\sqrt{3^2 + 4^2}$ b) $\sqrt{2^8 - 2^4}$ c) $\sqrt{5^2}$ d) $(\sqrt{19})^2$ e) $\sqrt{7^4 \cdot 7^2}$

4. Oblicz — przypomnij zasady wykonywania obliczeń wyrażeń zawierających pierwiastki.

a) $(\sqrt[3]{21})^3$ b) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 6^3}$ c) $\sqrt[3]{343}$ d) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{27}\right)^3}$ e) $\sqrt[3]{14^3 : 7^3}$

Poćwicz

5. Zapisz w postaci jednej potęgi.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$ c) $(1,2)^{14} : (1,2)^{10}$ e) $\frac{(\sqrt{3})^6 \cdot 3^7}{3^{13} : 3^3}$
 b) $(-6)^{15} : (-6)^3$ d) $(5^3)^2$ f) $\frac{(\sqrt{5})^{16} \cdot (\sqrt[3]{5})^9}{(5^5)^2}$

6. Oblicz.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(1\frac{3}{4}\right)^2$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot (2,25)^2$ e) $\sqrt{0,64} : \sqrt[3]{0,001}$
 b) $0,5^2 - 0,1^3$ d) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} + \sqrt{1\frac{13}{36}}$ f) $\sqrt{2 - \frac{1}{25}} - \sqrt{1 - 0,99}$

7. Oblicz. Wynik zapisz w notacji wykładniczej. Możesz korzystać z kalkulatora.

a) $1,2 \cdot 10^2 \cdot 1,2 \cdot 10^2$ d) $6,2 \cdot 10^{-3} \cdot 8,3 \cdot 10^6$ g) $5,5 \cdot 10^{-7} \cdot 8,1 \cdot 10^{-6}$
 b) $2,5 \cdot 10^4 \cdot 2,1 \cdot 10^6$ e) $7,12 \cdot 10^6 \cdot 9 \cdot 10^{-8}$ h) $9,5 \cdot 10^{-8} \cdot 3,2 \cdot 10^{-8}$
 c) $4,4 \cdot 10^5 \cdot 2,1 \cdot 10^{-1}$ f) $3,5 \cdot 10^{-3} \cdot 8,1 \cdot 10^{-4}$ i) $3,5 \cdot 10^{-11} \cdot 7,1 \cdot 10^{-13}$

8. Oblicz bez korzystania z kalkulatora. Wynik zapisz w notacji wykładniczej.

a) $2 \cdot 10^6 + 7 \cdot 10^6$ f) $2,9 \cdot 10^7 - 2,7 \cdot 10^7$ k) $3,6 \cdot 10^8 - 6 \cdot 10^7$
 b) $5,4 \cdot 10^{-5} + 3,2 \cdot 10^{-5}$ g) $4 \cdot 10^9 + 9 \cdot 10^8$ l) $1,38 \cdot 10^{11} - 2,1 \cdot 10^{10}$
 c) $4,3 \cdot 10^9 + 7,8 \cdot 10^9$ h) $1,7 \cdot 10^4 + 5,3 \cdot 10^5$ *m) $6 \cdot 10^{-8} - 4 \cdot 10^{-9}$
 d) $8 \cdot 10^8 - 5 \cdot 10^8$ i) $7,45 \cdot 10^7 + 5 \cdot 10^5$ *n) $1,6 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-5}$
 e) $9,4 \cdot 10^{-4} - 6,6 \cdot 10^{-4}$ j) $2 \cdot 10^{10} - 6 \cdot 10^9$ *o) $7,39 \cdot 10^{-7} - 1,7 \cdot 10^{-8}$

9. a) Powierzchnia jednego pęcherzyka płucnego wynosi $1,7 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$, a w płucach człowieka jest ich od 300 mln do 500 mln. Jaka jest łączna powierzchnia pęcherzyków w płucach człowieka?
- b) Termosfera to warstwa atmosfery ziemskiej sięgająca od wysokości $8,5 \cdot 10^4 \text{ m}$ do $5,5 \cdot 10^5 \text{ m}$ nad powierzchnią Ziemi. Jaka jest grubość tej warstwy?
- c) Na rolce nawinięte jest 200 m folii o szerokości 50 cm i grubości $2,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}$. Jaka jest objętość tej folii? Odpowiedź wyraż w decymetrach sześciennych.

10. Zapisz w jak najprostszej postaci.

- | | | |
|---|------------------------------------|---|
| a) $\frac{1}{3}\sqrt{6} + 1\frac{2}{3}\sqrt{6}$ | e) $-6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}$ | i) $\frac{5}{6}\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| b) $\sqrt{7} - 3\frac{2}{3}\sqrt{7}$ | f) $5\sqrt{13} \cdot (-0,4)$ | j) $\frac{5\sqrt{7} - 10\sqrt{3}}{5}$ |
| c) $3\sqrt{11} - \frac{\sqrt{11}}{3}$ | g) $0,1\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ | k) $(4\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2$ |
| d) $\frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{10}$ | h) $1,2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10}$ | l) $\frac{(3\sqrt{5})^2}{(5\sqrt{3})^2}$ |

11. Oblicz.

- | | | |
|---|---|----------------------------|
| a) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{1}{6}}$ | e) $\sqrt[3]{0,08} \cdot \sqrt[3]{100}$ | i) $\sqrt{3^6}$ |
| b) $\sqrt{0,4} \cdot \sqrt{10}$ | f) $\sqrt[3]{\frac{2}{9}} \cdot \sqrt[3]{1\frac{1}{3}}$ | j) $\sqrt{7^4}$ |
| c) $\sqrt{1\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{0,3}$ | g) $\frac{\sqrt{0,9}}{\sqrt{10}}$ | k) $\sqrt{5^2 \cdot 11^2}$ |
| d) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$ | h) $\frac{\sqrt[3]{10\,000}}{\sqrt[3]{10}}$ | l) $\sqrt{3^2 \cdot 2^4}$ |

12. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka i zapisz w jak najprostszej postaci.

- | | | |
|----------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\sqrt{20} + \sqrt{45}$ | c) $-\sqrt{75} + \sqrt{27}$ | e) $\sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{54}$ |
| b) $\sqrt{8} - \sqrt{200}$ | d) $\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{5000}$ | f) $-\sqrt[3]{0,004} + \sqrt[3]{32}$ |

13. Wykonaj mnożenie (nie zapomnij o wyłączeniu czynnika przed znak pierwiastka).

- | | | |
|-------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|
| a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{15}$ | c) $\sqrt{30} \cdot \sqrt{15}$ | e) $6\sqrt{50} \cdot (-3\sqrt{12})$ |
| b) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{6}$ | d) $3\sqrt{21} \cdot \sqrt{7}$ | f) $2\sqrt{15} \cdot 0,6\sqrt{10}$ |

$$\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

14. Przekształć wyrażenie tak, aby pozbyć się pierwiastków z mianownika.

- | | | | | |
|--------------------------|---------------------------|---------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $\frac{-7}{\sqrt{3}}$ | b) $\frac{-2}{3\sqrt{6}}$ | c) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ | d) $\frac{-4\sqrt{10}+2}{\sqrt{10}}$ | e) $\frac{2-4\sqrt{15}}{3\sqrt{5}}$ |
|--------------------------|---------------------------|---------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|

Pomyśl

15. Znajdź liczby a , b i c .

a) $2^{12} = 4^a = 8^b = 64^c$

b) $10^{20} = 100^a = 10\,000^b = 100\,000^c$

16. Znajdź liczbę a .

a) $4 \cdot 2 \cdot 16 = 2^a$

c) $125 \cdot 25 \cdot 125 = 5^a$

e) $\frac{10^7 \cdot 100}{100\,000} = 10^a$

b) $9 \cdot 27 \cdot 81 = 3^a$

d) $\frac{8 \cdot 64}{2^7} = 2^a$

f) $\frac{3^{14} \cdot 27}{81 \cdot 3^5} = 3^a$

17. a) Powierzchnia Ziemi jest równa $5,1 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$, a Księżycy — $3,8 \cdot 10^{13} \text{ m}^2$. O ile powierzchnia Ziemi jest większa od powierzchni Księżycy?

b) Krew człowieka zawiera $2,5 \cdot 10^{13}$ krwinek czerwonych, z których każda ma powierzchnię $1,2 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2$. Oblicz powierzchnię wszystkich krwinek czerwonych we krwi człowieka.

18. a) Pierwiastek kwadratowy z iloczynu liczb dodatnich a i b pomnożono przez pierwiastek z ilorazu liczby a przez liczbę b . Jaki wynik otrzymano?

b) Pierwiastek kwadratowy z iloczynu liczb dodatnich a i b podzielono przez pierwiastek z ilorazu liczby a przez liczbę b . Jaki wynik otrzymano?

19. Niech a i b będą dowolnymi liczbami dodatnimi. Wyraż x za pomocą a i b .

a) $\sqrt[3]{a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot x} = ab$

b) $\sqrt[3]{a^2 \cdot b^2 \cdot b \cdot x} = ab$

c) $\sqrt[3]{a^6 : a^3 \cdot (b : x)} = a$

Sprawdź się

1. Liczba $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5$ nie jest równa:

A. 4^7 B. $\frac{2^{15}}{2}$ C. 2^{120} D. $4 \cdot 8^4$

2. Samolot bez ładunku ma masę $1,1 \cdot 10^8 \text{ kg}$. Na jego pokład wniesiono $4 \cdot 10^7 \text{ kg}$ ładunku. Jaką masę ma ten samolot z ładunkiem?

A. $1,5 \cdot 10^8 \text{ kg}$ B. $5,1 \cdot 10^8 \text{ kg}$ C. $1,14 \cdot 10^8 \text{ kg}$ D. $4,11 \cdot 10^7 \text{ kg}$

3. Która z podanych liczb nie jest równa $2\sqrt{5}$?

A. $\sqrt{180} - \sqrt{80}$ B. $\sqrt{320} - \sqrt{180}$ C. $-\sqrt{125} + \sqrt{45}$ D. $-\sqrt{80} + \sqrt{180}$

4. Która z podanych liczb nie jest liczbą wymierną?

A. $\sqrt[3]{3\frac{12}{27} - 1\frac{2}{27}}$ B. $\sqrt{6\frac{7}{8} - 1\frac{13}{16}}$ C. $\sqrt[3]{9\frac{1}{4} - 5\frac{7}{8}}$ D. $\sqrt{10\frac{1}{9} - 1\frac{2}{9}}$

6 Zadania testowe

1. Dane są liczby:

CXVI CDLXIII MCCXII MCDLX XLIX

Które z poniższych zdań dotyczą tych liczb?

- I. Nie ma wśród nich liczby 463.
- II. Największą liczbą jest 1212.
- III. Najmniejszą liczbą jest 49.
- IV. Są wśród nich trzy liczby mniejsze od 500.

A. I i II B. II i III C. I i IV D. III i IV

2. Oznaczmy literą a liczbę $17 \cdot 248 + 11$. Które z poniższych zdań jest fałszywe?

- A. Reszta z dzielenia liczby a przez 17 jest równa 11.
- B. Liczba $a - 11$ jest podzielna przez 248.
- C. Reszta z dzielenia liczby a przez 248 jest równa 11.
- D. Liczba $a + 17$ jest podzielna przez 17.

3. Resztą z dzielenia liczby x przez 12 jest liczba 11. Która z poniższych liczb nie jest podzielna przez 12?

A. $x - 11$ B. $x + 1$ C. $12x$ D. $x + 12$

4. Przy każdym z poniższych zdań wybierz P, gdy zdanie to jest prawdziwe, lub F, gdy jest fałszywe.

Istnieje para liczb pierwszych, których suma jest liczbą pierwszą.	P	F
Istnieje para liczb pierwszych, których różnica jest liczbą pierwszą.	P	F
Istnieje para liczb pierwszych, których iloczyn jest liczbą pierwszą.	P	F
Istnieje para liczb pierwszych, których iloraz jest liczbą pierwszą.	P	F

5. Wynikiem dzielenia najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb 12 i 90 przez największy wspólny dzielnik tych liczb jest:

A. 12 B. 30 C. 36 D. 60

6. Jednym z dzielników liczby $a = 11 \cdot 17 \cdot 31$ jest ona sama, innym jest liczba 1. Ile jeszcze, poza tymi dwoma, dzielników ma ta liczba?

A. 3 B. 5 C. 6 D. 9

7. Która z poniższych liczb jest większa od $\frac{1}{3}$?

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\sqrt{\frac{1}{8}}$ C. 0,3 D. 0,(3)

8. Która z podanych liczb jest błędnym zaokrągleniem liczby 63 993,5249?

- A. 63 993,525 (do części tysięcznych) C. 63 994 (do jedności)
B. 60 000 (do dziesiątek tysięcy) D. 63 900 (do setek)

9. Wiadomo, że $a = 5,(25)$, $b = 5\frac{1}{4}$, $c = 5,(52)$, $d = 5,2(5)$. Wynika stąd, że:

- A. $a > b > c > d$ B. $b > a > d > c$ C. $c > d > a > b$ D. $c > d > b > a$

10. Wartość wyrażenia $(1\frac{4}{9} - 2\frac{5}{6}) \cdot 1,8$ wynosi:

- A. -0,7 B. -2,5 C. 5 D. -1

11. Mongolia jest jednym z najślabiej zaludnionych krajów świata: powierzchnię 1 564 116 km² zamieszkuje 2,99 mln ludzi. Na 1 km² powierzchni tego kraju żyje więc średnio około:

- A. 0,5 człowieka C. 8 ludzi
B. 2 ludzi D. 16 ludzi



12. Jabłko o masie 0,16 kg podczas suszenia straciło $\frac{13}{20}$ swej masy. Po ususzeniu jabłko to waży:

- A. $\frac{7}{125}$ kg B. $\frac{7}{20}$ kg C. $\frac{13}{125}$ kg D. 0,03 kg

13. Wskaż nieprawdziwe dokończenie zdania.

32 490 sekund to:

- A. 541,5 min B. 9 h 1,5 min C. 9 h 1 min 50 s D. 9 h 1 min 30 s

14. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli równość jest prawdziwa, lub F — jeśli jest fałszywa.

$10\,000\text{ cm}^3 = 0,01\text{ m}^3$	P	F
$100\text{ cm} = 0,001\text{ km}$	P	F
$10\,000\text{ g} = 0,00001\text{ t}$	P	F
$0,1\text{ a} = 0,001\text{ ha}$	P	F

15. Kwadratową działkę o obwodzie 400 m podzielono na 100 jednakowych kwadratowych części. Pole jednej z tych części wynosi:
- A. 1 a B. 4 a C. 10 a D. 10 m²
16. Światło w diamencie porusza się z prędkością stu dwudziestu pięciu tysięcy kilometrów na sekundę, czyli:
- A. $1,25 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ B. $1,25 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ C. $1,25 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ D. $1,25 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
17. Samochód osobowy jedzie z prędkością $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jaką drogę pokona ten samochód w ciągu 15 minut?
- A. 1200 km B. 12 km C. 20 km D. $5\frac{1}{3}$ km
18. Która z podanych liczb jest największa?
- A. $7^3 \cdot 7^4$ B. $(7^2)^4$ C. $\frac{7^{15}}{7^9}$ D. $7^2 : 7^{-7}$
19. Oto kartka z zeszytu Asi. Ile błędów popełniła Asia?
- | | |
|-----------------------------|--------------------------|
| a) $2^5 \cdot 2^2 = 2^{10}$ | c) $2^2 \cdot 2^3 = 2^5$ |
| b) $3^8 : 3^4 = 3^2$ | d) $2^2 + 2^3 = 2^5$ |
- A. jeden B. dwa C. trzy D. cztery
20. Dwie spośród podanych liczb są równe. Które to liczby?
- $$a = \frac{2^8 \cdot 2^7}{2^{10}} \quad b = (2^2)^5 \cdot 2 \quad c = (2^5 \cdot 2^2)^2 \quad d = \left(\frac{2^{10}}{2^8}\right)^7$$
- A. a i d B. b i c C. c i d D. b i d
21. Które z obliczeń nie zostały przeprowadzone poprawnie?
- A. $100 \cdot (2,8 \cdot 10^{13}) = 280 \cdot 10^{15} = 2,8 \cdot 10^{17}$
- B. $(5 \cdot 10^7) \cdot (4 \cdot 10^8) = 20 \cdot 10^{15} = 2 \cdot 10^{16}$
- C. $3,5 \cdot 10^9 + 5 \cdot 10^8 = 40 \cdot 10^8 = 4 \cdot 10^9$
- D. $(2 \cdot 10^{12}) : (4 \cdot 10^7) = 0,5 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^4$
22. Bok kwadratu ma długość $5\sqrt{7}$. Pole tego kwadratu jest równe:
- A. $25\sqrt{7}$ B. 35 C. $20\sqrt{7}$ D. 175
23. Która z liczb nie jest równa $5\sqrt{2}$?
- A. $\sqrt{18} + \sqrt{8}$ B. $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$ C. $\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}$ D. $\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{4}}$
24. Jedna z poniżej podanych liczb jest różna od trzech pozostałych. Wskaż ją.
- A. $\sqrt{45} + \sqrt{20}$ B. $\sqrt{125}$ C. $\frac{\sqrt{500}}{2}$ D. $\sqrt{50} - \sqrt{5}$



1 Przekształcenia algebraiczne

Przypomnij sobie

1. Zapisz w prostszej postaci.

a) $2a + 4a$ b) $3b \cdot 4b$ c) $\frac{8c}{4c}$ d) $\frac{8c}{2}$ e) $\frac{8}{4c}$

2. Zapisz iloczyn w postaci sumy.

a) $a(1 + a)$ c) $\left(\frac{1}{2} - c\right)c$
b) $1,5(4a - 1)$ d) $(1 - d)(1 + d)$

3. Zapisz w postaci sumy.

a) $\frac{2a + 4c}{2}$ c) $\frac{36c + 4c^2}{2}$
b) $\frac{24x - 4y}{8}$ d) $\frac{25d^3 - 5d^2}{20}$

4. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego pole:

- a) trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i $b + 4$,
- b) trójkąta o podstawie $b + 7$ i wysokości $c + 1$,
- c) prostokąta o bokach c i $d + 18$,
- d) trapezu o podstawach $d + 1$ i $a + 2$ oraz wysokości 4.
- e) kwadratu o boku $a + 3$.

Poćwicz

5. Zapisz w jak najprostszej postaci.

a) $16\left(\frac{1}{4}a - 0,1\right)$	e) $\frac{2}{5}y(20y - 0,5)$	i) $\frac{4}{5}a\left(-a + \frac{5}{4}\right) + a^2 - 1$
b) $-\frac{1}{6}(0,5b + 3)$	f) $-1,2z(0,1 - 5z)$	j) $20b^2 - 6b + 3b(2 - 7b)$
c) $-0,7(2c - 0,4)$	g) $-25 \cdot \frac{3s - 4}{5}$	k) $3(-a + 4) - \frac{1}{2}(6 - a)$
d) $3x(-2 + 0,3x)$	h) $16t \cdot \frac{5 - 2t}{8}$	l) $1,1(2b - 5) - 0,8(2 - 0,3b)$

6. Zapisz w jak najprostszej postaci.

a) $\frac{6a+18b}{3} + \frac{-12a+3}{9}$

e) $15 \cdot \frac{x+16}{30} - 9 \cdot \frac{12-x}{18}$

b) $\frac{15+25b}{5} - \frac{2b+30}{10}$

f) $13 \cdot \frac{3a-9b}{39} + \frac{12a+3b}{9}$

c) $12 \cdot \frac{3x+12}{6} - 8 \cdot \frac{6x-1}{2}$

g) $17 \cdot \frac{17a-8b}{34} - 7 \cdot \frac{14a-4b}{2}$

d) $28 \cdot \frac{1+7y}{7} + 6 \cdot \frac{12-2y}{24}$

h) $4 \cdot \frac{40a+18b}{36} - 6 \cdot \frac{9a-8b}{18}$

7. Uprość wyrażenie.

a) $(2x-3)(x+7)$

d) $(3a+5)^2$

g) $(0,2 - \frac{2}{5}z)(10z+1)$

b) $(4-5y)(1-6y)$

e) $(3a-5)^2$

h) $-(\frac{1}{3}w - \frac{1}{2})(4w+6)$

c) $-(3+2x)(x-2)$

f) $(a+3)(a-3)$

i) $(0,2c-0,1)(0,2c+0,1)$

8. Zapisz w jak najprostszej postaci.

a) $-5(0,4\sqrt{7} - 1,2\sqrt{5})$

e) $\frac{2}{3}\sqrt{3}(5\sqrt{3} - 4\sqrt{27} - 12)$

b) $\sqrt{3}(2\sqrt{3} - 3)$

f) $-0,1\sqrt{15}(\sqrt{15} - 2\sqrt{5} + 20)$

c) $\frac{1}{2}\sqrt{6}(10\sqrt{6} + 4\sqrt{\frac{1}{6}})$

g) $(5 - 2\sqrt{7})(5 + 2\sqrt{7})$

d) $3\sqrt{2}(5 - \frac{1}{6}\sqrt{8} + \frac{\sqrt{2}}{2})$

h) $(3 - 2\sqrt{2})(5 + \sqrt{2})$

9. Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla podanej wartości a .

a) $\frac{a}{4} - \frac{3a}{2} + a$ dla $a = 16$

d) $\frac{3}{a+2} + \frac{4}{a+2} + \frac{5}{a+2} + a$ dla $a = 10$

b) $(a-3)(a+4) - a^2$ dla $a = 100$

e) $\frac{3a+4a+18a}{a^2}$ dla $a = 5$

c) $6a(12 - \frac{3}{a})$ dla $a = \frac{4}{9}$

f) $a^2 - 98a - 200$ dla $a = 100$

10. Zapisz:

a) sumę liczby o 2 większej od liczby x i liczby 3 razy większej od liczby x ,

b) różnicę kwadratu liczby y i pierwiastka z liczby y ,

c) iloczyn połowy liczby a i piętnastu procent liczby a ,

d) iloraz liczby 10 razy mniejszej od liczby b i sześcianu liczby b ,

e) iloczyn sumy liczby a i b przez liczbę a powiększoną o 10%.

f) połowę ilorazu sumy liczb a i b przez różnicę tych liczb.

g) liczbę cztery razy większą od iloczynu kwadratu sumy liczb p i q przez kwadrat różnicy tych liczb.

Pomyśl

11. Zapisz odpowiedzi w postaci wyrażeń algebraicznych.

- Kartka książki ma grubość 0,1 mm, a karton na okładkę — 0,5 mm. Jaką grubość ma książka o s stronach?
- Bożena z klasy IIIa przyniosła do szkoły torbę, w której było c cukierków. Każdemu uczniowi swojej klasy dała po dwa cukierki, a ostatniego zjadła sama. Ilu uczniów liczy klasa Bożeny?
- W jednym pojemniku mieści się 10 jajek. Jajka zebrane w kurniku zapełniły p pojemników i połowę jednego pojemnika. Ile jajek zebrano?
- Rok temu z pewnego pola zebrano b kilogramów ziemniaków. W tym roku zebrano z tego samego pola o 0,1 więcej ziemniaków. O ile kilogramów zbiór tegoroczny był większy od ubiegłorocznego?
- Darek kupił x kilogramów jabłek w cenie 2,50 zł za 1 kg i o 0,5 kg więcej śliwek w cenie 3 zł za 1 kg. Ile Darek zapłacił za zakupy?
- W sklepie znajdowało się m jogurtów owocowych i n jogurtów naturalnych. Sprzedano 30 jogurtów owocowych i jedną trzecią jogurtów naturalnych. Ile jogurtów pozostało w sklepie?

12. Zapisz odpowiedzi w postaci wyrażeń algebraicznych.

- Opakowanie z 28 sucharkami waży w gramów. Skrobia stanowi $\frac{6}{10}$ masy sucharków. Ile gramów skrobi zawiera jeden sucharek?
- Pewne pismo miało x czytelników w wieku do 16 lat i y czytelników powyżej 16 lat. Po zmianie stylu pisma pierwsza grupa wzrosła o $\frac{4}{5}$, a druga zmalała o $\frac{1}{5}$. Ilu czytelników miało to pismo po zmianach?
- Jednorazowy bilet autobusowy kosztuje a zł, a bilet miesięczny b zł. O ile więcej kosztuje 40 biletów jednorazowych od biletu miesięcznego?
- W dniu otwarcia wesołego miasteczka zakupiono x biletów na karuzelę po y złotych. Drugiego dnia cenę biletów zmniejszono o 50 gr, a liczba sprzedanych biletów wzrosła o $\frac{2}{5}$. Ile złotych uzyskano ze sprzedaży biletów drugiego dnia?



*13. Jakie wyrażenie algebraiczne należy wpisać w miejscu kropek?

- | | |
|--|---|
| a) $\cdot (y - 6) = x^2 y - 6x^2$ | d) $3x(\text{.....}) = 6x^2 + 18x$ |
| b) $2(x + 5q) = 2x + \text{.....}$ | e) $(2 - 4x)(2 - 4x) = 4 - \text{.....} + 16x^2$ |
| c) $(x - 1)(x + 2) = x^2 + \text{.....} - 2$ | f) $\frac{2}{x^3}(x + 2x^2 - x^3) = \frac{2}{x^2} + \text{.....} - 2$ |

*14. Uzasadnij, że różnica kwadratów dowolnych dwóch liczb dodatnich różniących się o 1 jest równa sumie tych liczb.

*15. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n :

- a) liczba $(2n+1) + (2n+3) + (2n+5)$ jest liczbą nieparzystą,
- b) liczba $(2n+1)^2$ jest liczbą nieparzystą,
- c) liczba $(2n-1)^2 + 3$ dzieli się przez 4,
- d) liczba $(n+1)(n-1) - (n-1)^2$ jest liczbą parzystą.

*16. Znajdź wszystkie pary liczb naturalnych (k, n) , takie że spełniona jest równość:

a) $k = 1 + \frac{2}{n-1}$ b) $k = \frac{2n}{n-1}$

Sprawdź się

1. Wyrażenie $\frac{25x+5y}{5} - \frac{-45x+9y}{9}$ można przekształcić do postaci:

- A. $10x$ B. $2y$ C. $10x + 2y$ D. $10x - 2y$

2. Jedna trzecia liczby uczniów pewnej klasy uczęszcza na basen, a czwarta część liczby pozostałych gra w piłkę nożną. Ilu uczniów klasy nie uczęszcza ani na basen, ani nie gra w piłkę nożną, jeżeli klasa liczy a uczniów?

- A. $\frac{1}{4}a$ B. $\frac{1}{3}a$ C. $\frac{1}{2}a$ D. $\frac{2}{3}a$

3. Które wyrażenie przyjmuje największą wartość dla $x = 71$ i $y = -51$?

- A. $x \cdot y - x^2 \cdot y$ C. $x \cdot y + x^2 \cdot y$
B. $x \cdot y - x \cdot y^2$ D. $x \cdot y + x \cdot y^2$

2 Równania

Przypomnij sobie

1. Zapisz zdania dotyczące liczb dodatnich, używając znaków matematycznych.

- a) Liczba a jest o 3 większa od liczby b .
- b) Liczba c jest 3 razy mniejsza od liczby d .
- c) Liczba e stanowi $\frac{1}{3}$ liczby f .
- d) Liczba g jest o h mniejsza od liczby 3.
- e) Liczba i jest 3 razy większa od liczby j .

2. Zapisz zdanie w postaci równania z niewiadomą x . Zgadnij wartość niewiadomej.
- a) Po zwiększeniu niewiadomej dwa razy i zmniejszeniu otrzymanej liczby o 4 otrzymamy liczbę 4.
 - b) Liczba o x mniejsza od 4 jest równa 3.
 - c) Jeżeli zwiększymy niewiadomą trzy razy i odejmiemy 5, otrzymamy liczbę 10.
 - d) Liczba o x mniejsza od 12 jest równa x .
 - e) Liczba o 16 mniejsza od x jest równa liczbie o x mniejszej od 16.
3. Do podanego zdania ułożono równanie. Ile rozwiązań ma to równanie — jak się nazywa taki rodzaj równania?
- a) Wynik odejmowania szóstki od pewnej liczby jest równy sumie tej liczby i jedynki.
 - b) Połowa pewnej liczby zwiększona o 1 jest równa połowie sumy tej liczby i liczby 2.
4. Dany jest wzór: $A = \frac{B}{2C}$.
- a) Oblicz wartość A , gdy $B = 30$ i $C = 3$.
 - b) Oblicz wartość B , gdy $A = 10$ i $C = 3$.
 - c) Wyznacz ze wzoru C .

Poćwicz

5. Sprawdź, czy liczby -3 i 2 są rozwiązaniami podanych równań.
- a) $x^2 = 6 - x$
 - b) $\frac{5}{x+2} = \frac{x-7}{2}$
 - c) $(x+3)(x-2) = 1$
 - d) $\sqrt{6-x} = x$
6. Każde z poniższych równań ma dwa rozwiązania i są nimi dwie spośród liczb: $-3, -1, 0, 1$ oraz 2 . Znajdź rozwiązania tych równań.
- a) $x^2 + 2 = 3x$
 - b) $\frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{4}$
 - c) $2x^2 = x^3$
 - d) $|x+1| = 2$
7. Rozwiąż równanie.
- a) $-5x + 3 = 7x + 8$
 - b) $\frac{1}{8}(3x - 3) = -(6 - x)$
 - c) $6(x + 4) = -3(-2x - 5)$
 - d) $\frac{1}{5}(6x - 2) + 3\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\right) = 2,52x$
 - e) $\frac{1}{3}(5x + 2) - 2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}x$
 - f) $-\frac{2}{5}(3 - 2x) = 0,1(4x + 1)$
 - g) $0,4(2x - 8) + \frac{4}{7}(14 - 3x) = -1,6$
 - h) $0,3(12 + 3x) - \frac{8}{9}(1 + 5x) = -\frac{5}{6}$

8. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x}{4} = \frac{3}{5}$

c) $\frac{x+5}{3} = \frac{x}{2}$

e) $\frac{6-2x}{5} - \frac{3x+2}{-2} = 5,5$

b) $\frac{5}{-12} = \frac{x}{4}$

d) $\frac{3x-1}{5} = \frac{x-4}{2}$

f) $\frac{5x-2}{2} + \frac{3x-7}{6} = \frac{1}{2}$

9. Wyznacz ze wzoru wskazaną wielkość.

a) $F = ma$ a

d) $P = \frac{W}{t}$ t

g) $F = \frac{F_1 - F_2}{s}$ F_1

b) $E = mgh$ h

e) $E = \frac{mv^2}{2}$ m

h) $a = \frac{v_1 - v_2}{t}$ t

c) $P = \frac{F}{S}$ F

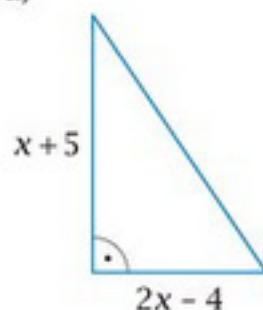
f) $F = \frac{mv^2}{r}$ r

i) $Q = mc(T_2 - T_1)$ T_2

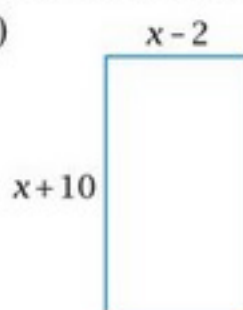
Pomyśl

10. Pole narysowanej figury jest równe x^2 . Ułóż i rozwiąż odpowiednie równanie.

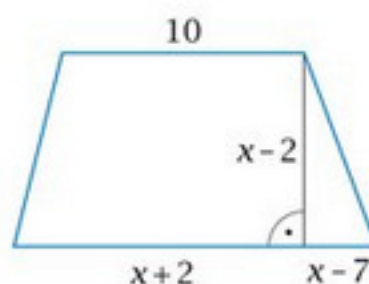
a)



b)



c)



11. a) Jeden z boków równoległoboku jest o 3,5 cm krótszy od drugiego boku. Obwód tego równoległoboku jest równy 31 cm. Oblicz długości jego boków.
 b) Najkrótszy bok trójkąta jest o 6 cm krótszy od najdłuższego, a bok o średniej długości jest o 3 cm krótszy od najdłuższego. Obwód trójkąta wynosi 30 cm. Jaką długość ma bok o średniej długości?
 c) Długość prostokątnego placu jest o 2 m krótsza od podwojonej jego szerokości. Na ogrodzenie placu potrzeba 26 m siatki. Jakie wymiary ma ten plac?
 d) W autobusie jest 120 miejsc dla pasażerów. Miejsc stojących jest o 40 więcej niż miejsc siedzących. Ile jest miejsc siedzących w tym autobusie?
12. a) Magda stwierdziła, że ma tylko 10 zł w skarbonce, a jej siostra Ania ma 190 zł. Postanowiła co tydzień dokładać do skarbonki 2 zł, podczas gdy Ania co tydzień wydawała 10 zł ze swych oszczędności. Po ilu tygodniach siostry będą miały tyle samo pieniędzy?
 b) Dwa samochody wyruszyły z różnych miejscowości w tym samym momencie i jechały naprzeciw siebie, jeden z prędkością $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a drugi z prędkością $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Do momentu spotkania oba pojazdy przejechały razem 280 km. Ile czasu jechały naprzeciw siebie?

13. Staś miał w skarbonce 43 zł. Najwięcej było w niej złotych: dwa razy więcej niż dwuzłotówek i cztery razy więcej niż pięciozłotówek. Pozostałymi monetami w skarbonce były pięćdziesięciogroszówki, których liczba była równa $\frac{2}{3}$ liczby złotych. Ile było złotych w skarbonce?



14. Szkoła za sumę 13 800 zł zakupiła krzesła po 70 zł i stoły po 90 zł. Ile zakupiono krzeseł i stołów, jeżeli przy każdym stole stoją dwa krzesła?

15. a) Dorota jest trzy razy młodsza od swego taty, a 4 lata temu była od niego cztery razy młodsza. Ile lat ma Dorota?
b) Kacper jest cztery razy młodszy od swojej mamy, a za 14 lat mama będzie od niego 2 razy starsza. Ile lat ma mama Kacpra?
c) W 1549 roku Barbakan w Krakowie był 50 razy starszy niż Barbakan w Warszawie, ale w 1597 roku krakowski Barbakan był tylko 2 razy starszy od warszawskiego. Ile lat liczyły te Barbakany w roku 2016?

16. Średnia długość życia hipopotama jest 6 razy większa od średniej długości życia kangura. Niektóre osobniki żyją jednak o wiele dłużej. Jeśli hipopotam i kangur będą żyły o 20 lat dłużej niż średnia długość życia przedstawicieli ich gatunków, to hipopotam będzie 2 razy starszy od kangura. Ile wynoszą średnie długości życia tych zwierząt?



17. Największa wyspa świata, Grenlandia, jest 10 razy — inaczej mówiąc: o 2 tys. km² — większa od największej europejskiej wyspy, czyli Wielkiej Brytanii. Oblicz powierzchnię Grenlandii.



18. Lodziarz sprzedaje małe gałki lodów po 2 zł, a duże po 3,20 zł. Pewnego dnia sprzedał 380 gałek lodów, otrzymując ze sprzedaży 1072 zł. Ile dużych gałek lodów sprzedał lodziarz tego dnia?

19. Klomb ma kształt prostokąta, którego jeden bok jest 3 razy dłuższy od drugiego boku. Klomb jest otoczony pasem trawnika o szerokości 2 m. Trawnik otoczono płotem o długości 20 m. Jakie wymiary ma klomb?

20. Gdynia otrzymała prawa miejskie 570 lat później niż Kazimierz Dolny. W 1956 roku oba miasta święciły jubileusz nadania praw miejskich, ale rocznica Kazimierza była 20 razy większa od rocznicy Gdyni. Kiedy każde z tych miast otrzymało prawa miejskie?
- *21. Jeśli Tomek nie zatrzymuje się w drodze ze szkoły do domu, to powrót zajmuje mu 12 minut. Dziś jednak czas powrotu ze szkoły był o wiele dłuższy. Tomek stracił $\frac{1}{4}$ tego czasu na oglądanie wystaw, $\frac{1}{3}$ na rozmowę z kolegami, a 8 minut patrzył na grających w piłkę. Jak długo wracał dziś ze szkoły do domu?



- *22. Uzasadnij, że:

- a) istnieje taka liczba naturalna n , że liczba $(n+3)^2 - n^2$ jest równa 51.
 b) nie istnieje taka liczba naturalna n , że liczba $(n+1)(n-1) - (n-1)^2$ jest równa 597 651.

Sprawdź się

1. Rozwiązanie równania $3(x-2) = \frac{2x-4}{3}$ jest również rozwiązaniem równania:
- A. $\frac{x+3}{10} = \frac{1}{x}$ B. $2x^2 = x+2$ C. $\sqrt{2+x} = x-4$ D. $(x+1)(x+2) = 1$
2. Adam i Ewa mają razem 24 lata. Za dwa lata Ewa będzie 3 razy starsza od Adama. Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

Adam jest o 14 lat młodszy od Ewy.	P	F
Ewa jest cztery razy starsza od Adama.	P	F
Kilka lat temu Ewa była osiem razy starsza od Adama.	P	F
Za 6 lat Adam i Ewa będą mieli razem 30 lat.	P	F

3. Jeżeli ze wzoru $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$ wyznaczymy a , otrzymamy:

- A. $a = \frac{2P}{h} - b$ B. $a = \frac{P}{2h} - b$ C. $a = \frac{2P-b}{h}$ D. $a = \frac{P-hb}{2}$

3 Proporcje

Przypomnij sobie

1. Rozwiąż równanie.

a) $2x = \frac{1}{5}$

b) $\frac{x}{2} = 4$

c) $\frac{x}{6} = \frac{1}{3}$

2. Zapisz odpowiednie równanie.

a) Pewna liczba x podzielona przez 7 daje ten sam wynik co iloraz liczb 2 i 9.

b) Zapas wody x litrów został równo podzielony pomiędzy 5 uczestników wyprawy. Każdy uczestnik dostał $\frac{2}{3}$ litra.

Poćwicz

3. Odgadnij liczbę x spełniającą dane równanie.

a) $\frac{1}{x} = \frac{2}{10}$

d) $\frac{2}{x} = \frac{4}{18}$

g) $\frac{2}{3} = \frac{x}{9}$

b) $\frac{1}{x} = \frac{3}{12}$

e) $\frac{5}{x} = \frac{15}{21}$

h) $\frac{3}{5} = \frac{x}{15}$

c) $\frac{5}{15} = \frac{1}{x}$

f) $\frac{14}{30} = \frac{7}{x}$

i) $\frac{x}{28} = \frac{5}{7}$

4. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x+1}{x} = \frac{3}{2}$

e) $\frac{2x-6}{x-2} = \frac{2}{3}$

i) $\frac{6}{9x+2} = \frac{4}{6x+1}$

b) $\frac{3}{5} = \frac{x}{x-4}$

f) $\frac{2-x}{0,2x+1} = \frac{5}{3}$

j) $\frac{0,2}{0,5x+0,1} = \frac{8}{3x-1}$

c) $\frac{2x}{3+x} = \frac{5}{6}$

g) $\frac{2}{3x+1} = \frac{1}{x+5}$

k) $\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{12}} = \frac{3-2x}{\frac{1}{3}}$

d) $\frac{1}{3} = \frac{2x+1}{7x-2}$

h) $\frac{x+5}{2} = \frac{10+2x}{4}$

l) $\frac{0,5x-3}{0,2} = \frac{0,7x-2}{0,5}$

5. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2x+1}{x^2+5} = \frac{2}{x}$

c) $\frac{x^2-1}{2x} = \frac{2x-3}{4}$

e) $\frac{4x}{4x^2+1} = \frac{1}{x+1}$

b) $\frac{3x}{6x-1} = \frac{x}{2x+5}$

d) $\frac{-6x-5}{-2} = \frac{3x^2+1}{x}$

f) $\frac{3}{-2x} = \frac{-3x+2}{2x^2+8}$

*6. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x^2-1}{2x^2+1} = \frac{1}{3}$

b) $\frac{2}{x^2+5} = \frac{5}{3x^2+8}$

c) $\frac{2x^2+1}{4x^2+2} = \frac{3}{5}$

Pomyśl

7. a) Iloraz pewnej liczby i liczby od niej mniejszej o 6 jest równy 3. Jaka to liczba?
b) Iloraz pewnej liczby i liczby od niej większej o 2 jest równy $\frac{2}{3}$. Jaka to liczba?
c) Iloraz liczby o dwa większej od liczby a i liczby o 2 mniejszej od a jest równy $\frac{3}{4}$. Znajdź liczbę a .
8. a) Przedstaw ułamek $\frac{1}{3}$ w postaci ułamka, którego mianownik jest o 30 większy od licznika.
b) Przedstaw ułamek $\frac{2}{7}$ w postaci ułamka, którego mianownik jest o 15 większy od licznika.
c) Przedstaw ułamek $\frac{4}{9}$ w postaci ułamka, którego licznik jest o 15 mniejszy od mianownika.
9. a) W pudełku jest 6 kulek białych i 4 czarne. Do pudełka wrzucono po tyle samo kulek czarnych i białych i teraz stosunek liczby kulek białych do liczby kulek czarnych wynosi 4:3. Ile kulek wrzucono do pudełka?
b) W torebce były 24 cukierki cytrynowe i 32 cukierki malinowe. Jola wyjęła z torebki po tyle samo cukierków obu rodzajów i teraz stosunek liczby cukierków cytrynowych do liczby cukierków malinowych jest równy 2:3. Ile cukierków zabrała Jola?
c) W misce było 15 orzechów laskowych i 20 włoskich. Po dorzuceniu do nich po tyle samo orzechów każdego rodzaju stosunek liczby orzechów laskowych do liczby orzechów włoskich jest równy 9:10. Ile orzechów dorzuceno?
10. a) Licznikiem pewnego ułamka jest liczba 3. Wartość tego ułamka się nie zmienia, gdy zarówno do licznika, jak i mianownika dodamy 1. Jaki to ułamek?
b) Licznikiem pewnego ułamka jest liczba 5. Wartość tego ułamka się nie zmienia, gdy zarówno do licznika, jak i mianownika dodamy 2. Jaki to ułamek?
c) Licznikiem pewnego ułamka jest liczba 4. Wartość tego ułamka się nie zmienia, gdy zarówno od licznika, jak i mianownika odejmiemy 1. Jaki to ułamek?
*d) Wcześniejsze podpunkty tego zadania pozwalają na sformułowanie hipotezy, że jeśli dodamy tę samą liczbę do licznika i mianownika pewnego ułamka i nie zmieni on swojej wartości, to ten ułamek musi być równy 1. Czy potrafisz ją udowodnić?
11. Z poniższych proporcji wyznacz a .
a) $\frac{a+2b}{5} = \frac{2}{3}$ b) $\frac{a+b}{3} = \frac{b}{2}$ c) $\frac{a+2}{b} = \frac{b}{3}$
- *12. Na podstawie poniższych proporcji oblicz wartość $\frac{a}{b}$.
a) $\frac{a+2b}{a+b} = \frac{2}{3}$ b) $\frac{3a-b}{a-b} = \frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{5} = \frac{5a+2b}{3a-2b}$

Sprawdź się

1. Czterech uczniów przekształciło poniższe równanie. Ustal, który z nich zrobił to błędnie.

$$\frac{2x-3}{3x+5} = \frac{4}{5}$$

A. Andrzej: $\frac{10x-15}{3x+5} = 4$

C. Czarek: $2x-3 = \frac{12x+20}{5}$

B. Bartek: $5(3x+5) = 4(2x-3)$

D. Damian: $4(3x+5) = 5(2x-3)$

2. Iloczyn rozwiązań równań $\frac{3}{x} = \frac{7}{4}$ i $\frac{x+1}{3x-1} = \frac{2}{5}$ jest równy:

A. 12

B. $\frac{49}{12}$

C. 7

D. $\frac{36}{35}$

3. Natalia spięła kartki dwoma spinaczami, a w pudełku zostały 23 spinacze. Następnie Natalia wyjęła kilka spinaczy z pudełka i spięła nimi pozostałe kartki. Teraz stosunek liczby spinaczy pozostałych w pudełku do liczby spinaczy użytych do spięcia kartek wynosi 3:2.

Które równanie przedstawia opisaną sytuację?

A. $\frac{23-x}{3} = \frac{2}{2+x}$

B. $\frac{23-x}{2+x} = \frac{3}{2}$

Ilu spinaczy Natalia użyła do spięcia kartek?

C. 8

D. 10

4 Wielkości wprost proporcjonalne

Przypomnij sobie

1. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x}{2} = \frac{5}{14}$

b) $\frac{3}{11} = \frac{2}{x}$

c) $\frac{x}{x-1} = \frac{5}{3}$

2. W jednym pudełku jest 7 czekoladek.

a) Ile czekoladek jest w dwóch takich pudełkach, a ile — w sześciu?

b) W ilu takich pudełkach znajduje się 28 czekoladek?

3. Dany jest kwadrat o boku długości 2 cm. Ile razy większy obwód i ile razy większe pole ma kwadrat, którego bok jest dłuższy od boku danego kwadratu:

a) 2 razy,

b) 5 razy?

Poćwicz

4. W którym zdaniu jest mowa o wielkościach wprost proporcjonalnych?
- A. Im dłuższy bok kwadratu, tym większy jego obwód.
 - B. Im dłuższy bok kwadratu, tym większe jego pole.
 - C. Im dłuższa krawędź sześcianu, tym większa jego objętość.
 - D. Im dłuższa krawędź sześcianu, tym większe pole jego powierzchni bocznej.
 - E. Im dłuższa krawędź sześcianu, tym większa suma długości jego krawędzi.
 - F. Im więcej kupujemy ziemniaków, tym więcej płacimy.
 - G. Im więcej jednakowych puszek z napojem, tym więcej napoju.
 - H. Im starsze drzewo, tym jest wyższe.
 - I. Im więcej jednakowych cukierków, tym większa ich łączna masa.
 - J. Im dłużej jedziemy (ze stałą prędkością), tym większą drogę przebywamy.
 - K. Jedziemy z Krakowa do Warszawy. Im większa prędkość średnia, tym krótszy czas przejazdu.
 - L. Planujemy jechać 2 godziny. Im większa będzie średnia prędkość, tym większy pokonamy dystans.
 - M. Im dłuższa droga w terenie, tym dłuższa na mapie.
 - N. Im większe państwo, tym więcej ma mieszkańców.
 - O. Im dłużej pracuje maszyna wytwarzająca spinacze, tym więcej spinaczy jest wyprodukowanych.
5. a) Masa 12 jednogroszówek to 19,68 g. Jaką masę mają 3 jednogroszówki?
b) Masa 7 dziesięciogroszówek to 17,57 g. Jaką masę ma 5 dziesięciogroszówek?
c) Masa 3 dwuzłotówek to 15,63 g. Ile dwuzłotówek ma łączną masę 72,94 g?
6. a) Za 30 dag cukierków zapłacono 5,40 zł. Ile kosztuje 55 dag takich cukierków?
b) Za 24 dag szynki zapłacono 11,10 zł. Ile kosztuje 1,08 kg tej szynki?
c) Za 85 dag bananów zapłacono 4,08 zł. Ile kilogramów bananów można kupić za 12 zł?

Pomyśl

7. a) Włosy wydłużają się przeciętnie o 1 cm w ciągu 3 tygodni. O ile milimetrów wydłużają się w ciągu doby?
b) Trawa urosła 4 cm w ciągu tygodnia. O ile milimetrów urosła przeciętnie w ciągu 5 godzin?
c) Winorośl urosła 10 cm w ciągu doby. O ile milimetrów urosła przeciętnie w ciągu 1,5 godziny?



8. Przeciętny pomidor waży 10 dag. Największy pomidor wyhodowany na świecie ważył 3,5 kg. Wyobraź sobie, że bierzemy 1 kg przeciętnych pomidorów i powiększamy każdy z nich do wielkości rekordowej. Ile ważyłyby nasze pomidory po tej operacji?



9. Szklankę herbaty posłodzono dwiema łyżeczkami cukru. Ile łyżeczek cukru trzeba wrzucić do kotła herbaty, aby była tak samo słodka jak herbata w szklance? Szklanka ma pojemność 0,25 l, a kocioł — 20 l.
10. W czasie gdy Tomek pomaluje 6 sztachet w płocie, Romek pomaluje tylko 4.
- a) Ile sztachet pomaluje Romek, wtedy gdy Tomek pomaluje 21 sztachet?
 - b) Ile sztachet pomaluje Tomek, wtedy gdy Romek pomaluje 21 sztachet?
11. a) Na pięciu łyżkach stołowych zmieściło się 8 g soli. Na ilu łyżkach mieści się 20 g soli?
- b) W trzech szklankach zmieściło się 625 g cukru. W ilu takich szklankach mieści się 1 kg cukru?
12. a) Dienne zapotrzebowanie dorosłej osoby na białko wynosi ok. 80 g. Ile waży groch pokrywający to zapotrzebowanie, jeśli 200 g grochu zawiera 48 g białka?
- b) Dienne zapotrzebowanie dorosłego człowieka na magnez wynosi ok. 350 mg. Jednym z najbogatszych źródeł magnezu jest kakao, 1 kg kakao zawiera ok. 4,2 g magnezu. Jaka masa kakao pokrywa dzienne zapotrzebowanie dorosłego człowieka na magnez?
13. a) Według przepisu na zupę jarzynową dla 4 osób potrzeba 60 dag warzyw i 1,2 l wody. Ile należy wziąć tych składników, przygotowując zupę dla 7 osób?
- b) Przygotowując zapasy żywności na wyprawę, przyjęto, że dziennie na 3 osoby będzie przypadać 0,45 kg cebuli. Oblicz dzienną porcję cebuli dla 8 członków wyprawy.
14. a) Według jednego z przepisów na keczup do 3 kg pomidorów trzeba dodać 1,1 kg cebuli i 250 ml octu winnego. Ile cebuli i octu należy dodać do 5 kg pomidorów, aby zrobić keczup na podstawie tego samego przepisu?
- b) Według przepisu do upieczenia kruchych ciasteczek potrzeba 30 dag mąki, 20 dag masła i 10 dag cukru. Ile potrzeba masła i cukru, żeby takie ciastka upiec z 50 dag mąki?

15. Masa wód Bałtyku to około $2,2 \cdot 10^{16}$ kg, z czego około $1,56 \cdot 10^{14}$ kg to rozpuszczona w nich sól. Ile soli trzeba by rozpuścić w wodzie wypełniającej wannę o pojemności 200 litrów, aby otrzymać wodę zasoloną tak jak wody Bałtyku? Przyjmij, że litr wody waży kilogram.
- *16. Kargul ma kwadratowe pole o powierzchni 9 ha. Jakie wymiary ma to pole na mapie wykonanej w skali 1 : 10 000?
- *17. Piotrek jest o 2 lata starszy od Magdy. Gdyby Magda była dwa razy młodsza, a Piotrek o sześć lat młodszy, to byłby od niej tyle razy starszy, ile razy jest od niej starszy teraz. Ile lat ma Piotrek, a ile — Magda?

Sprawdź się

1. W każdym z poniższych punktów zestawiono dwie wielkości.
- I. Czas gotowania wody i temperatura wody.
 - II. Liczba równych kawałków, na które został pokrojony tort, i masa jednego kawałka.
 - III. Wzrost człowieka i masa człowieka.
 - IV. Liczba takich samych kartek papieru w stosie i wysokość tego stosu.
 - V. Czas pracy automatu do napełniania butelek i liczba napełnionych butelek.
- W których punktach opisano tylko wielkości wprost proporcjonalne?
- A. w I, III i IV B. w II, IV i V C. w III i IV D. w IV i V
2. Pewna drukarka drukuje 25 000 znaków w ciągu jednej minuty. Jak długo będzie trwało wydrukowanie 7500 znaków na tej drukarce?
- A. 32 sekundy B. 26 sekund C. 18 sekund D. 14 sekund
3. Babcia z wnuczką zdobią pierniki. W czasie gdy babcia ozdobiła 20 pierników, wnuczka ozdobiła 12 pierników. Jeśli każda z nich nadal będzie pracowała w swoim tempie, to ile pierników ozdobi babcia w czasie, w którym wnuczka ozdobi 27 pierników?
- A. 32 B. 39 C. 45 D. 47

5 Zadania testowe

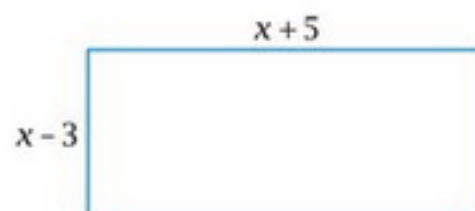
1. Które z poniższych wyrażeń można uprościć do postaci $3x - 2$?
- A. $\frac{9x-2}{3}$ B. $2x - (2 - x)$ C. $3(x - 2)$ D. $3x - 2x^2 - x^2$

2. Wyrażenie $x^2 - (x - 5)(3 + x)$ można przekształcić do postaci:

- A. $2x^2 + 2x + 15$ C. $2x + 15$
B. $-2x - 15$ D. $x^2 + x + 15$

3. Oblicz różnicę między polem narysowanego obok prostokąta i polem kwadratu o boku długości x .

- A. 2 B. $2x - 15$ C. $x^2 - 15$ D. 15



4. Rozwiązanie równania $9 - 2(8 - x) = x - 5$ jest liczbą:

- A. parzystą dodatnią C. nieparzystą dodatnią
B. parzystą ujemną D. nieparzystą ujemną

5. Równanie $\frac{3x-5}{6} = \frac{3+2x}{4}$:

- A. nie ma rozwiązania
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie
C. ma dokładnie dwa rozwiązania
D. ma nieskończenie wiele rozwiązań

6. Liczba 4,5 jest rozwiązaniem równania:

- A. $3(0,5 - x) = 12$ C. $-(x + 3,5) = 17 - 2x$
B. $x + 1,5 = (3x + 4,5) : 3$ D. $2(x - 4) - \frac{1}{2}(x - 4) = \frac{4}{3}$

7. Na tacy leżały jabłka i gruszki. Razem było 25 owoców. Po pewnym czasie ubyło 6 gruszek, a liczba jabłek się nie zmieniła. Potem ktoś dołożył 8 jabłek i teraz jest ich o 19 więcej niż gruszek. Ile gruszek było na początku na tacy?

- A. 6 B. 10 C. 15 D. 19

8. Które równanie wynika z proporcji $\frac{3}{x} = \frac{2+x}{12}$?

- A. $3x = 24 + 12x$ C. $36 = 2x + x^2$
B. $36 = 2x + x$ D. $6 + 3x = 12x$

9. Dane są równania:

- I. $\frac{x-3}{24} = \frac{x-18}{-48}$ II. $\frac{13}{x+6} = \frac{26}{72-x}$ III. $\frac{x}{10+x} = \frac{45}{75}$ IV. $\frac{x}{x-2} = \frac{x}{x+1}$

Spośród liczb, które są rozwiązaniami tych równań, najmniejsza spełnia równanie:

- A. I B. II C. III D. IV

10. W każdej tabeli przedstawiono zależność między dwiema wielkościami x i y .

I

x	10	400
y	55	2200

II

x	18	36
y	10	5

III

x	80	60
y	30	40

IV

x	36	6
y	60	10

Dokończ poniższe zdania. Wybierz odpowiedzi spośród podanych.

Wielkości wprost proporcjonalne przedstawiono w tabelach:

- A. I i IV B. III i IV C. I i III D. II i IV

11. Oceń prawdziwość zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

Pole trójkąta równobocznego i jego bok to wielkości wprost proporcjonalne.	P	F
Długość boku trójkąta równobocznego i jego obwód to wielkości wprost proporcjonalne.	P	F

12. Kilogram ziemniaków kosztuje 1,40 zł. Pani Lucyna kupiła 3,5 kg ziemniaków, a pan Robert — 4,2 kg. Ile razy mniej niż pani Lucyna zapłacił za ziemniaki pan Robert?

Czy do udzielenia odpowiedzi na to pytanie wystarczy obliczyć iloraz $\frac{4,2}{3,5}$? Wybierz odpowiedź TAK lub NIE oraz jej uzasadnienie A lub B.

TAK,	ponieważ	A.	stosunek ilości kupionych ziemniaków przez pana Roberta i panią Lucynę jest odwrotnością stosunku zapłaconych przez nich kwot.
NIE,		B.	stosunek ilości kupionych ziemniaków przez pana Roberta i panią Lucynę jest taki sam jak stosunek zapłaconych przez nich kwot.

13. O liczbie $n^2 - (n+2)(n+2) + 16$, gdzie n oznacza pewną liczbę naturalną dodatnią, można powiedzieć, że:

- A. jest nieparzysta C. może być równa 6
B. jest podzielna przez 4 D. może być większa od 8



1 Trójkąty i czworokąty

Przypomnij sobie

- Dwa boki trójkąta mają długości 2 m i 3 m. Czy trzeci bok tego trójkąta może mieć długość 4 m lub 6 m?
 - Dwa kąty trójkąta mają miary 100° i 30° . Jaką miarę ma trzeci kąt tego trójkąta?
- Jeden z boków trójkąta ma długość 10 m, a wysokość opuszczona na ten bok ma długość 3 m. Oblicz pole tego trójkąta.
- Trzy kąty czworokąta mają miary 10° , 20° i 30° . Jaką miarę ma czwarty kąt tego czworokąta?
 - Kąt ostry równoległoboku ma miarę 40° . Jakie miary mają pozostałe kąty tego równoległoboku?
- Przekątne równoległoboku $KLMN$ przecinają się w punkcie P . Przekątna KM ma długość 9 cm.
 - Jaką długość ma odcinek PM ?
 - Jaką długość ma druga przekątna, jeżeli równoległobok jest prostokątem?
- Podstawy trapezu równoramienneego mają długości 5 m i 7 m, a jego wysokość jest równa 10 m. Oblicz pole tego trapezu.

Poćwicz

- Czy z odcinków o podanych długościach można zbudować trójkąt?
 - 5 cm, 5 cm, 11 cm
 - 3 cm, 3 cm, 1 cm
 - 2 cm, 2 cm, 2 dm
- Dwa boki trójkąta mają długości 8 cm i 5 cm. Czy podana poniżej długość może być długością trzeciego boku tego trójkąta?

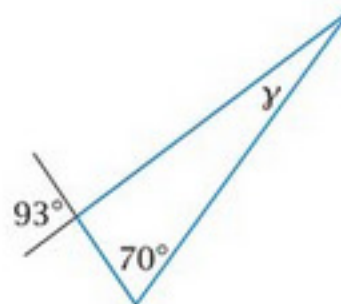
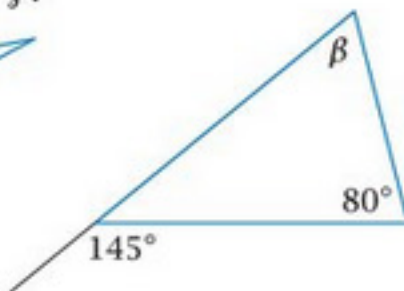
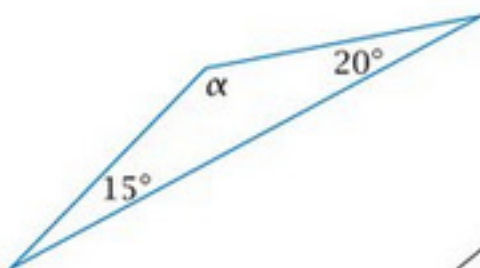
a) 1 cm	c) 3,5 cm	e) 7,3 cm	g) 13,7 cm
b) 2,8 cm	d) 5 cm	f) 12 cm	h) 15 cm

8. Dwa spośród boków trójkąta równoramiennego mają długości a i b . Jaką długość może mieć trzeci bok?

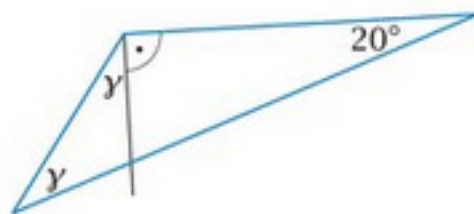
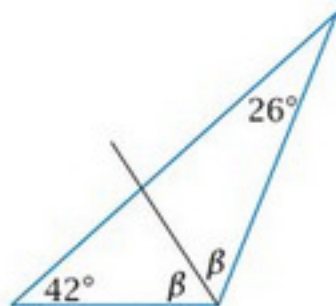
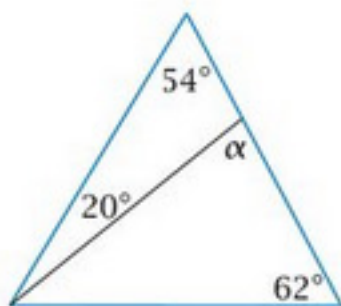
a) $a = 3 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$

b) $a = 1 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$

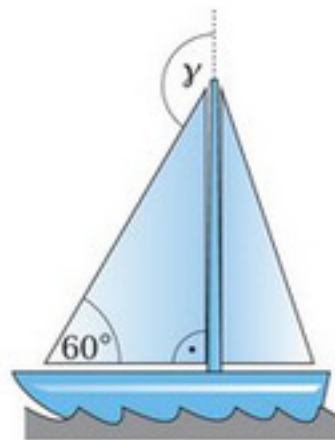
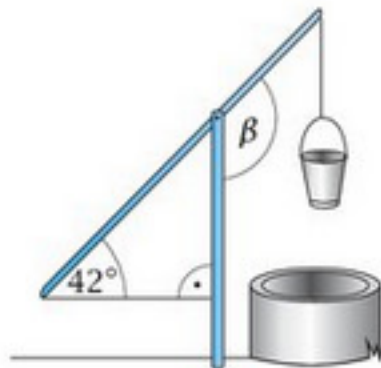
9. Oblicz miary kątów α , β i γ .



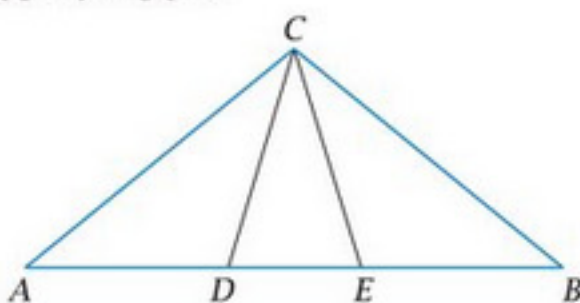
10. Oblicz miary kątów α , β i γ .



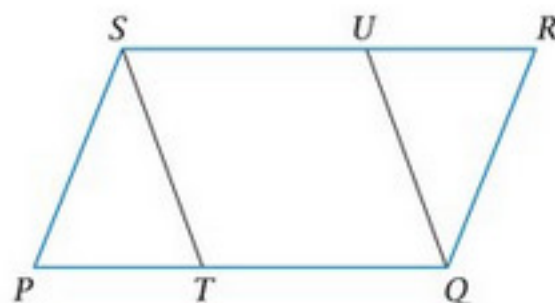
11. Jakie miary mają kąty α , β i γ ?



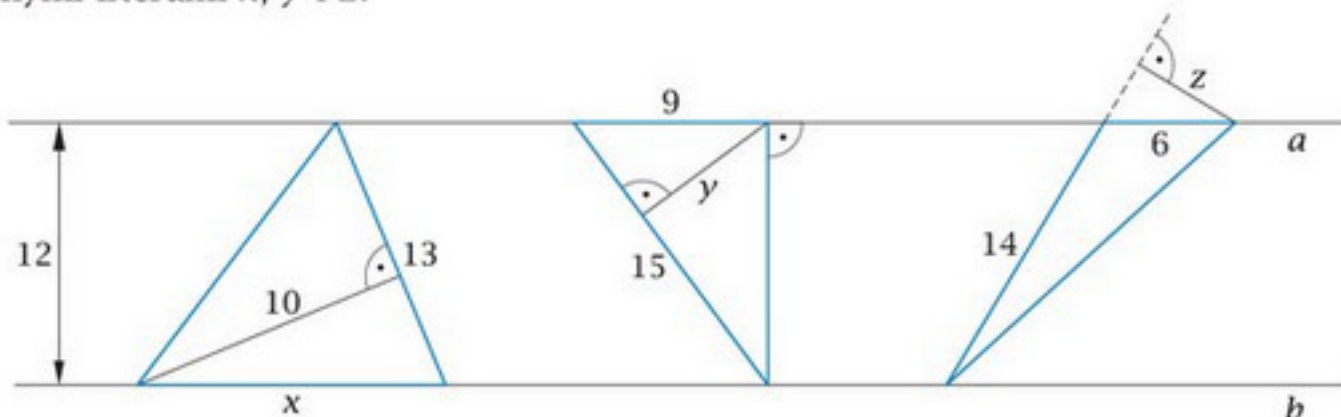
12. a) Trójkąt ABC jest równoramienny ($AC = BC$). Kąt ACB został podzielony na trzy równe części półprostymi CD i CE . Uzasadnij, że trójkąty ADC i BEC są przystające.



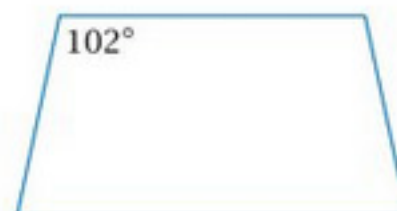
- b) Na bokach PQ i RS równoległoboku $PQRS$ wybrano punkty T i U tak, że $PT = RU$. Uzasadnij, że trójkąty PTS i RUQ są przystające.



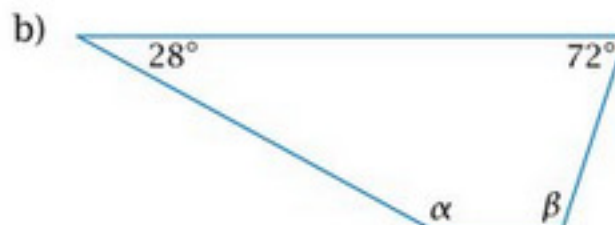
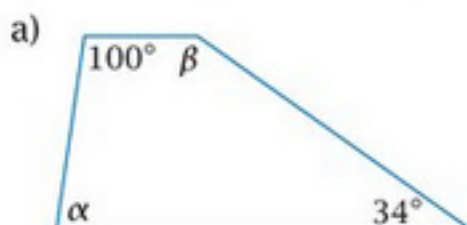
13. Odległość między prostymi równoległymi a i b przedstawionymi na rysunku jest równa 12. Oblicz pola narysowanych trójkątów i długości odcinków oznaczonych literami x , y i z .



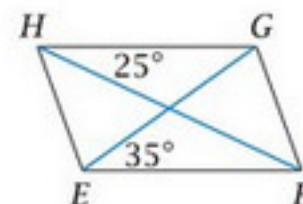
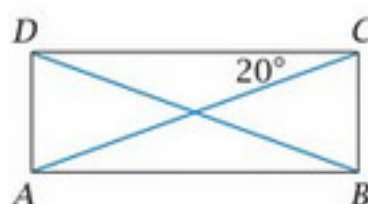
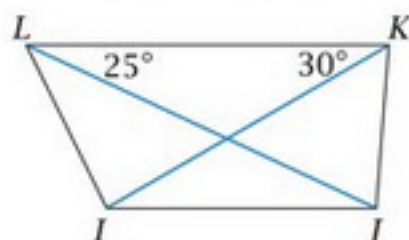
14. Oblicz miary kątów narysowanych poniżej równoległoboku i trapezu równoramiennego.



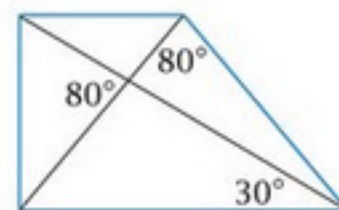
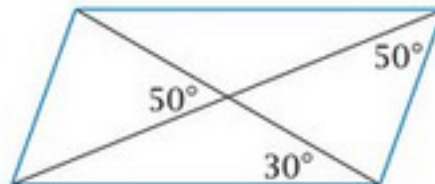
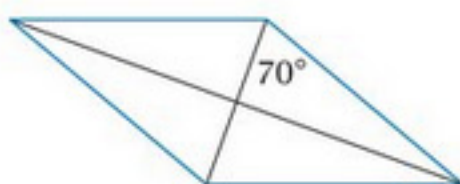
15. Oblicz miary kątów α i β w trapezie.



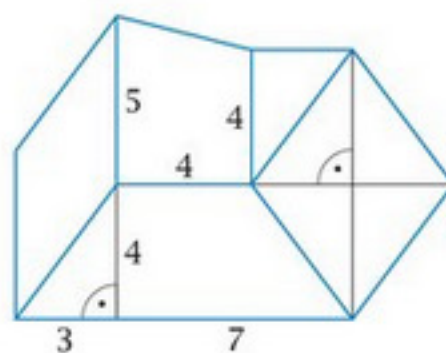
16. Narysowane poniżej czworokąty to trapez, prostokąt i równoległobok. Oblicz miary kątów ostrych, pod którymi przecinają się ich przekątne.



17. Narysowane poniżej czworokąty to romb, równoległobok i trapez prostokątny. Oblicz miary kątów tych czworokątów.



18. Określ, do jakiego rodzaju czworokątów należy czworokąt, którego przekątne:
- przecinają się w połowie,
 - przecinają się w połowie i mają równe długości,
 - przecinają się w połowie i są prostopadłe,
 - przecinają się w połowie, mają równe długości i są prostopadłe.
19. Jeden z kątów trapezu równoramiennego jest 4 razy większy od drugiego kąta. Jakie miary mają kąty tego trapezu?
20. Boki równoległoboku mają długości 5 cm i 6 cm, a wysokość opuszczona na dłuższy bok ma 4 cm. Oblicz długość drugiej wysokości.
21. Figura narysowana obok składa się z dwóch trapezów, równoległoboku, rombu i trójkąta prostokątnego. Oblicz jej pole.
22. Który z opisanych czworokątów ma większe pole?
O ile większe?
- romb o przekątnych długości 5 cm i 14 cm czy romb o boku 9 cm i wysokości 4 cm
 - kwadrat o boku 9 cm czy równoległobok o boku 18 cm i wysokości opuszczonej na ten bok o długości 5 cm
 - trapez o podstawach 1 cm i 19 cm oraz wysokości 2 cm czy kwadrat o przekątnej 6 cm

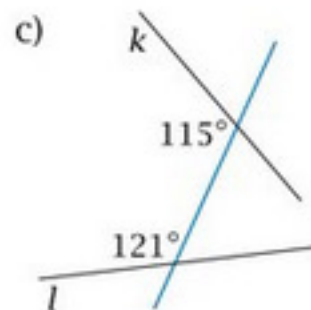
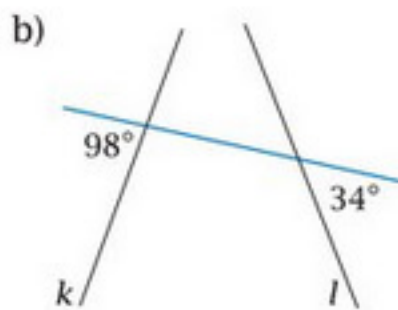
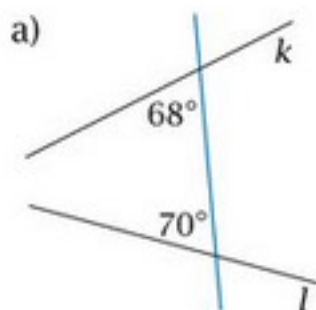


23. Bok kratki ma długość 1. Oblicz pola narysowanych figur.



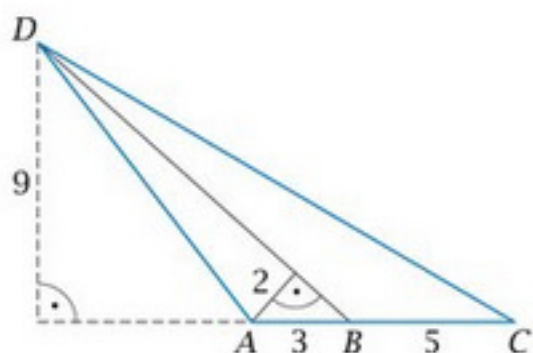
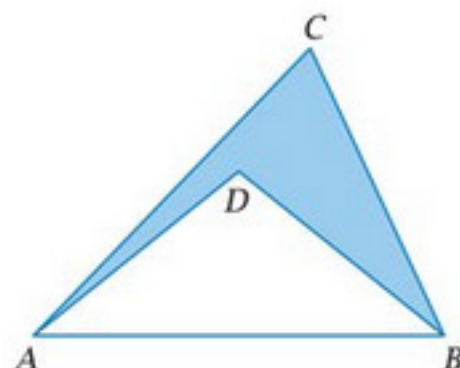
Pomyśl

24. Pod jakim kątem przecinają się proste k i l ?



25. Dwa boki trójkąta mają długości 3 i 6. Długość trzeciego boku tego trójkąta jest liczbą całkowitą. Wymień wszystkie możliwe długości tego boku.
- *26. a) Dwa boki trójkąta mają długości 4 m i 6 m. Wyjaśnij, dlaczego trzeci bok tego trójkąta musi być krótszy niż 10 m, ale dłuższy niż 2 m.
 b) Dwa spośród boków trójkąta mają długości 3 i 4. Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby oznaczające możliwe długości trzeciego boku.
 c) Dwa boki trójkąta mają długości 2 m i 7 m. Długość trzeciego boku tego trójkąta musi być krótsza od a metrów, ale dłuższa niż b metrów. Znajdź a i b .
 d) Dwa boki trójkąta mają długości 1 m i 100 m. Długość d trzeciego boku tego trójkąta spełnia nierówność $a < d < b$. Znajdź a i b .
- *27. W dowolnym trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona na najdłuższy bok dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty. Wykaż, że te trójkąty oraz trójkąt wyjściowy mają takie same kąty.

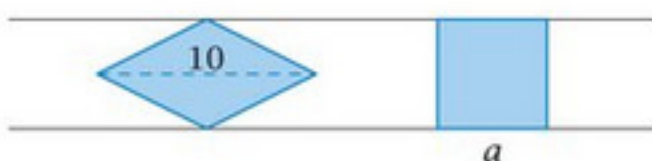
28. W trójkącie ABC bok AB ma długość 10, a wysokość na niego opuszczona ma długość 7. Z tego trójkąta wycięto trójkąt ABD , tak jak na rysunku. Pole powstałego w ten sposób czworokąta $ADBC$ jest równe 15. Oblicz wysokość trójkąta ABD opuszczoną z wierzchołka D .



- *29. Trójkąt ACD został rozcięty odcinkiem DB tak, jak pokazano na rysunku. Wysokość trójkąta ABD opuszczona z wierzchołka A ma długość 2. Jaką długość ma wysokość trójkąta BCD opuszczona z wierzchołka C ?

30. a) Jedna z przekątnych rombu jest nachylona do boku pod kątem 23° . Oblicz miary kątów tego rombu.
 b) Przekątne prostokąta przecinają się pod kątem 34° . Oblicz miary kątów, jakie tworzą przekątne z bokami tego prostokąta.
31. Narysowane pary czworokątów mają takie same pola. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.

a) romb i prostokąt



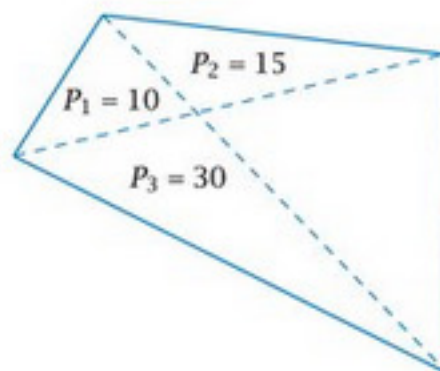
b) równoległobok i trapez



32. Każdy z narysowanych czworokątów (romb, trapez równoramienny i równoległobok) ma obwód równy 24 i pole równe 30. Oblicz wysokości tych czworokątów.



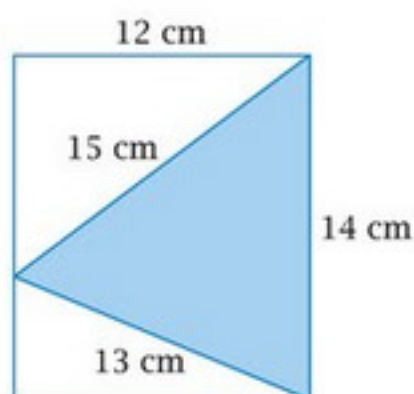
- *33. W pewnym czworokącie największy kąt jest o 180° większy od najmniejszego, a różnica między miarami pozostałych dwóch kątów jest równa 80° . Ile kątów ostrych może mieć ten czworokąt?
- *34. Wykaż, że jeśli trapez ma trzy boki o jednakowych długościach, to jego przekątne dzielą kąt przy jednej z podstaw na połowy.
35. a) Wykaż, że przekątne dowolnego prostokąta dzielą go na cztery trójkąty o jednakowych polach.
 *b) Wykaż, że przekątne dowolnego równoległoboku dzielą go na cztery trójkąty o jednakowych polach.
- *36. Przekątne dzielą narysowany obok czworokąt na cztery trójkąty. Pola trzech z tych trójkątów podano na rysunku. Jakie jest pole czwartego trójkąta?



Sprawdź się

1. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

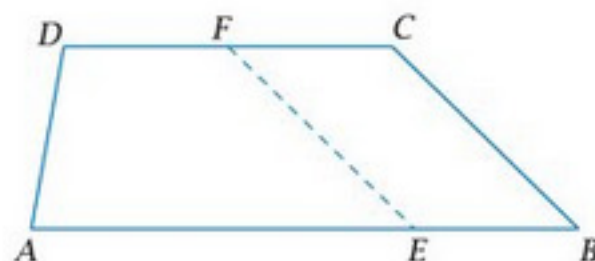
Istnieje trójkąt o bokach długości 10 cm, 202 cm i 195 cm.	P	F
Istnieje trójkąt o kątach 11° , 70° i 99° .	P	F
Każdy czworokąt, którego przekątne są prostopadłe, jest rombem.	P	F
Każdy czworokąt, którego przekątne mają jednakowe długości, jest prostokątem.	P	F
Każdy czworokąt, którego przekątne przecinają się w połowie, jest równoległobokiem.	P	F



2. Z prostokąta o wymiarach $12\text{ cm} \times 14\text{ cm}$ wycięto trójkąt o bokach długości 13 cm , 14 cm i 15 cm (niebieski trójkąt na rysunku). Która z poniższych długości nie jest długością żadnej z wysokości tego trójkąta?

- A. 12 cm C. $12\frac{5}{14}\text{ cm}$
 B. $11\frac{1}{5}\text{ cm}$ D. $12\frac{12}{13}\text{ cm}$

3. Trapez $ABCD$ ma podstawy o długościach 10 i 6 . Odcinek EF podzielił ten trapez na trapez i równoległobok. Punkt F jest środkiem podstawy CD . Ile razy pole trapezu $AEFD$ jest większe od pola równoległoboku?



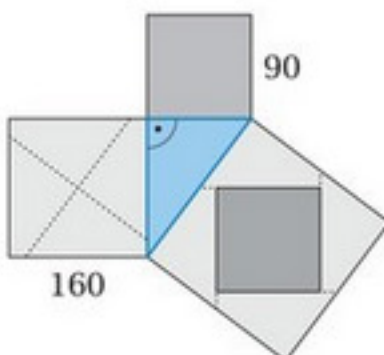
- A. $1\frac{1}{3}$ raza B. $1\frac{2}{3}$ raza C. $1\frac{5}{6}$ raza D. $2\frac{1}{2}$ raza

2 Twierdzenie Pitagorasa

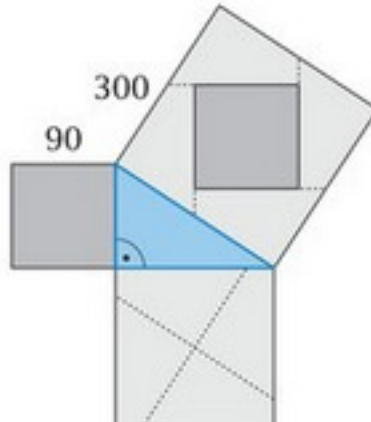
Przypomnij sobie

1. Na rysunku przedstawiono trójkąt prostokątny i trzy kwadraty zbudowane na jego bokach. Obok wybranych kwadratów podano ich pola. Oblicz pole trzeciego kwadratu.

a)



b)

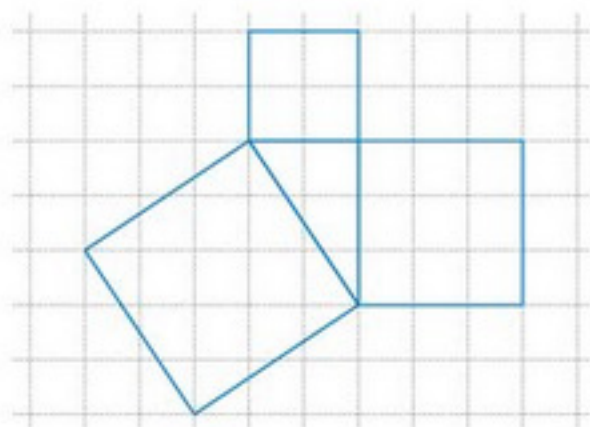


c)



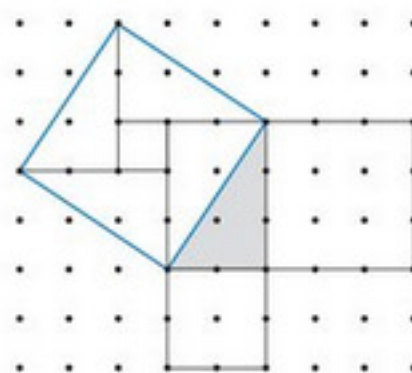
2. Oblicz pola kwadratów zbudowanych na bokach trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 4 i 6 . Jaką długość ma przeciwprostokątna tego trójkąta?

3. Na rysunku przedstawiono trójkąt prostokątny i trzy kwadraty zbudowane na jego bokach. Oblicz pola kwadratów i długość przeciwprostokątnej trójkąta. Za jednostkę długości przyjmij bok kratki, a za jednostkę pola — jedną kratkę.

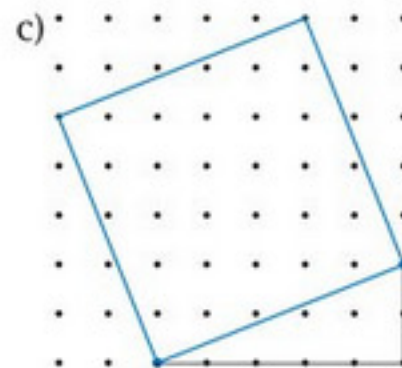
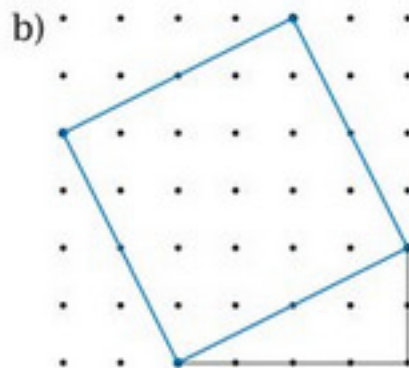
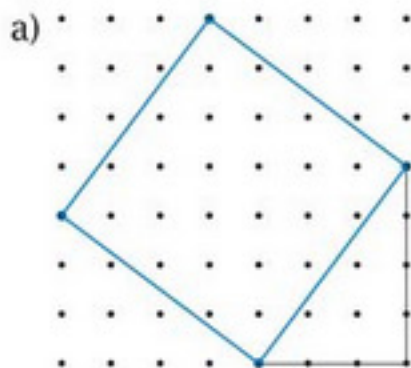


Poćwicz

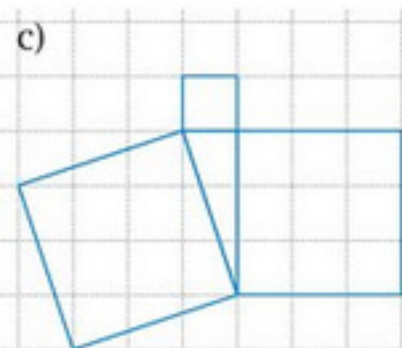
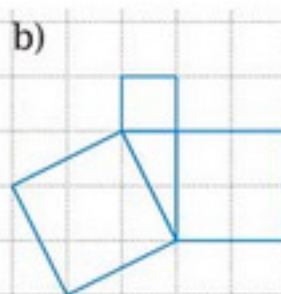
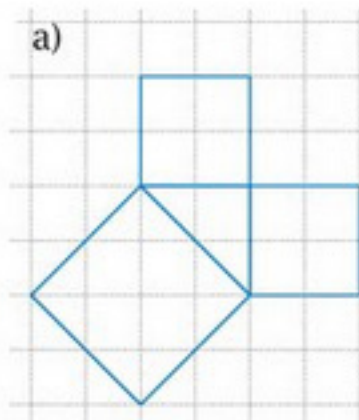
4. Na rysunku obok przedstawiono niebieski kwadrat podzielony na cztery trójkąty prostokątne i mały kwadrat. Na podstawie podanych obliczeń spróbuj odgadnąć, na czym polega metoda wyznaczenia pola niebieskiego kwadratu. Następnie skorzystaj z metody pokazanej na rysunku do obliczenia pola kwadratu zamieszczonego poniżej.



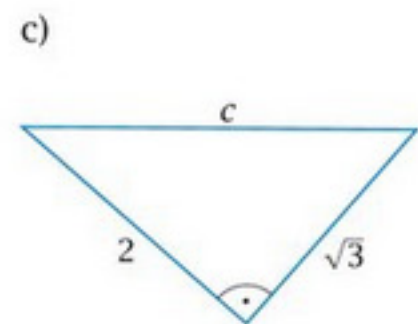
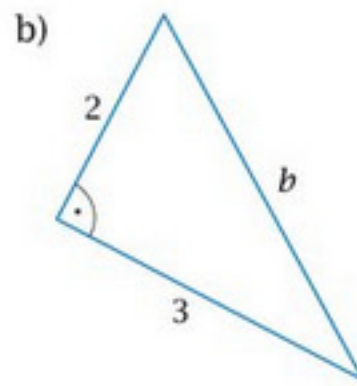
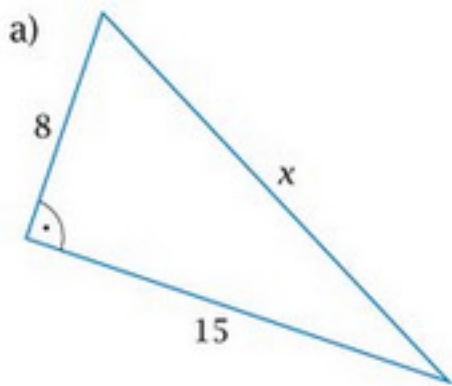
$$P = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 + 1^2 = 13$$



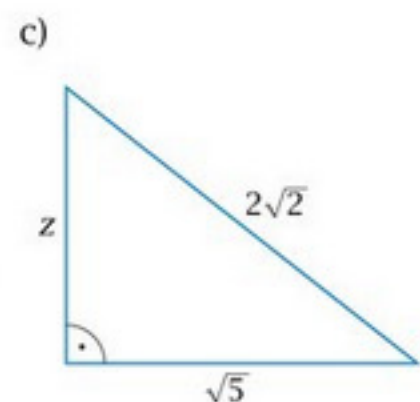
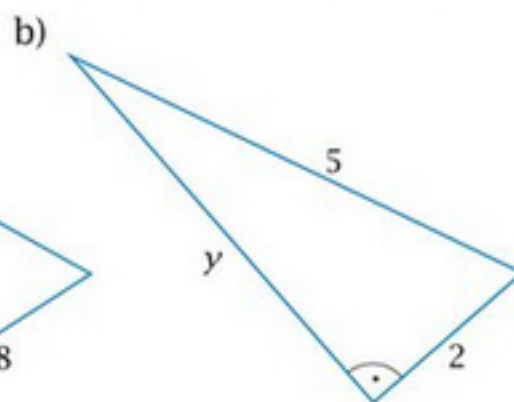
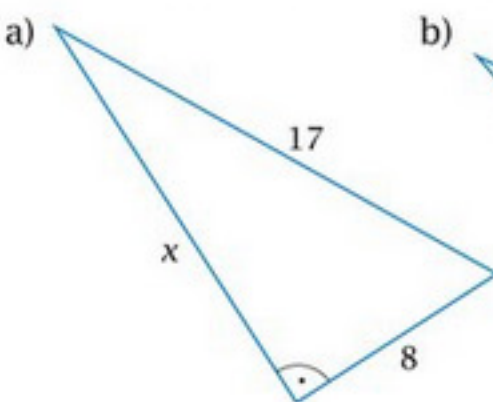
5. Policz, ile kwadratów jednostkowych mieści się w kwadracie zbudowanym na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego. Sprawdź, że otrzymane w ten sposób pole kwadratu jest równe polu wyznaczonemu na podstawie twierdzenia Pitagorasa.



6. Oblicz długość przeciwprostokątnej w danym trójkącie prostokątnym.



7. Oblicz długość przyprostokątnej oznaczonej literą.

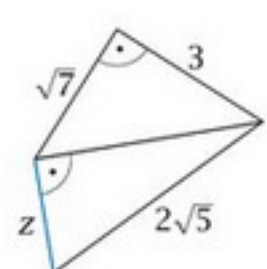
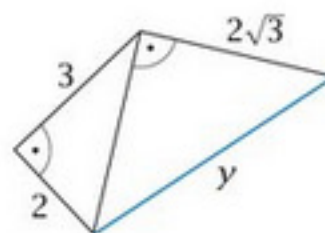
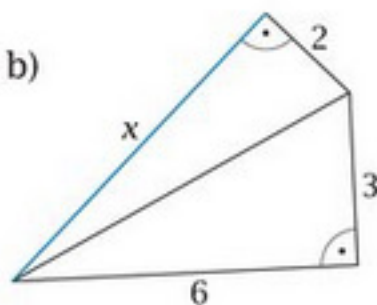
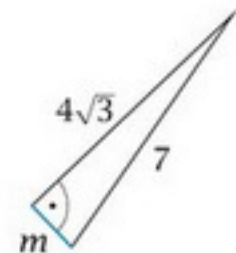
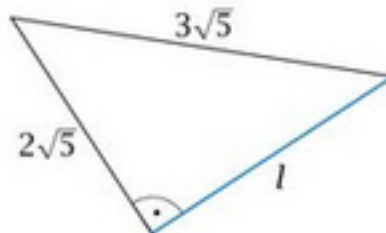
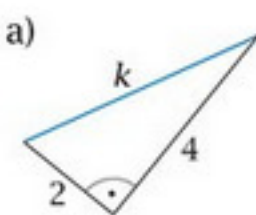


8. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 6 m i 8 m. Oblicz długość przeciwprostokątnej.

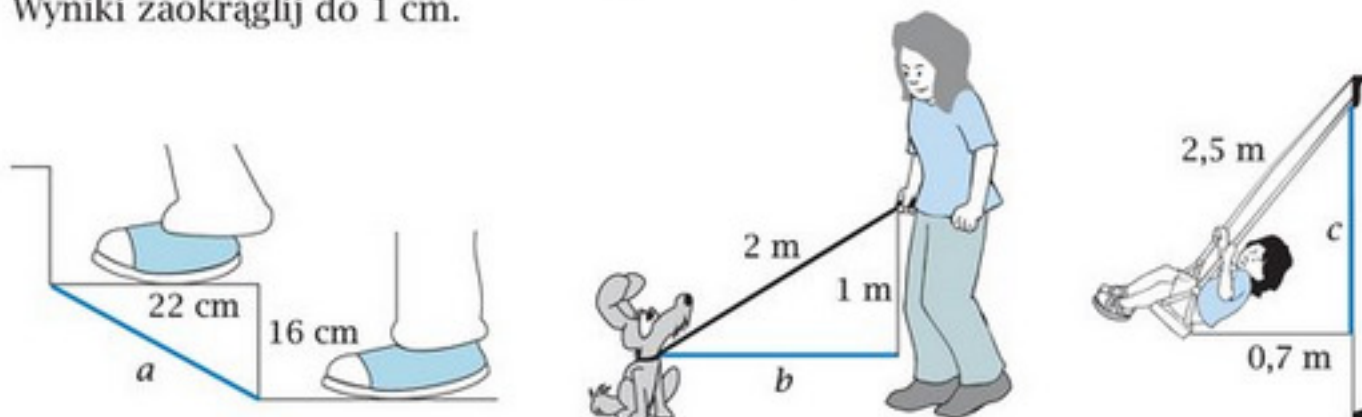
9. W trójkącie prostokątnym ABC dane są długości boków: $AC = 5$, $BC = 4$. Oblicz długość boku AB , jeśli:

- C oznacza wierzchołek kąta prostego,
- B oznacza wierzchołek kąta prostego.

10. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.



11. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.
Wyniki zaokrąglaj do 1 cm.



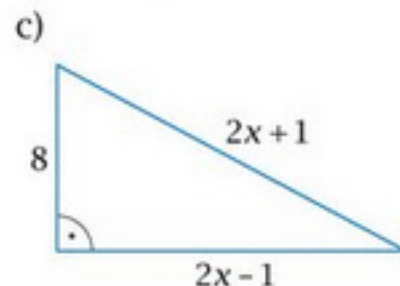
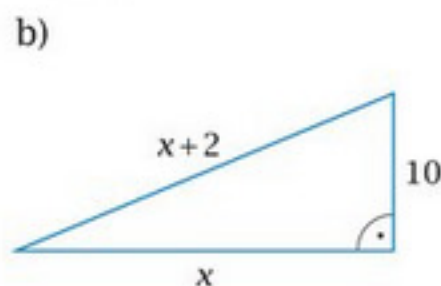
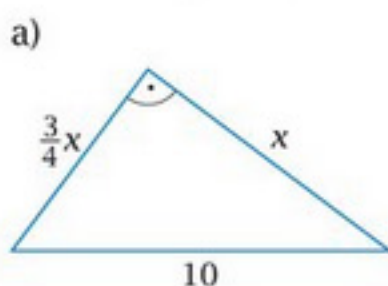
12. Liczby w danym wyrażeniu są długościami boków trójkąta prostokątnego, a wynik wyrażenia jest równy długości trzeciego boku. Naskicuj ten trójkąt i przy każdym boku wpisz jego długość.

a) $\sqrt{7^2 + 5^2}$ b) $\sqrt{12^2 + 4^2}$ c) $\sqrt{12^2 - 6^2}$ d) $\sqrt{25^2 - 15^2}$

13. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, w którym przeciwprostokątna i przyprostokątna mają podane długości.

a) 5 cm, 3 cm b) 6 dm, 2 dm c) 8 m, $4\sqrt{3}$ m d) $3\sqrt{2}$ km, $2\sqrt{3}$ km

- *14. Oblicz długości tych boków trójkąta, które oznaczono za pomocą liter.



Pomyśl

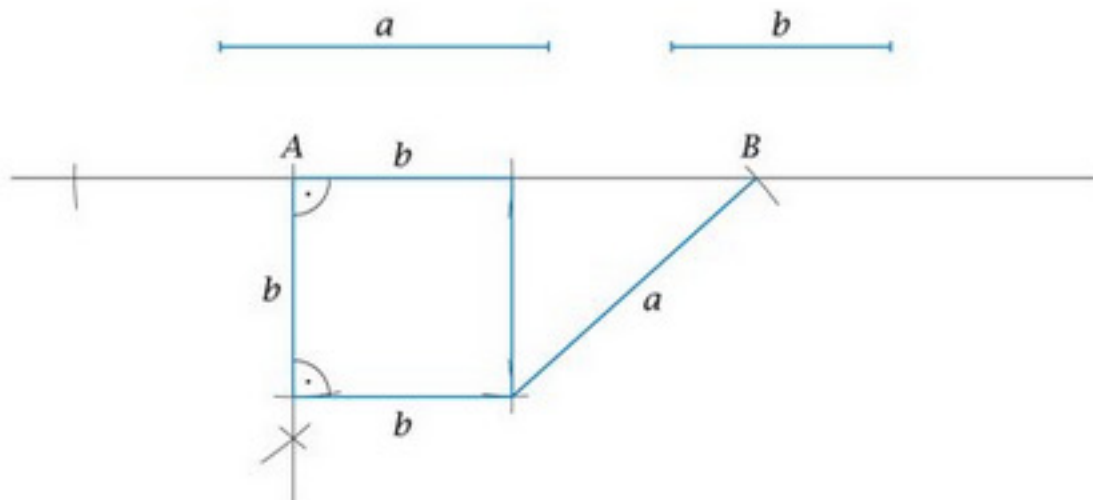
15. Maciek znalazł w dziupli kartkę ze wskazówkami, gdzie ukryty jest skarb. W jakiej odległości od drzewa jest on zakopany?

*Idź przed siebie 60 kroków, następnie
skręć w lewo i przejdź 80 kroków.
Tam, gdzie się zatrzymasz, zakopany jest skarb.*

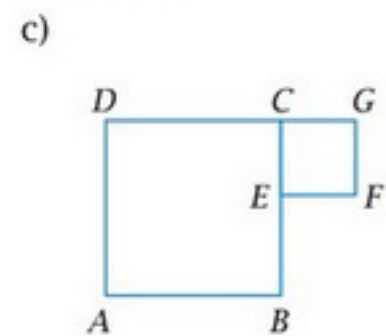
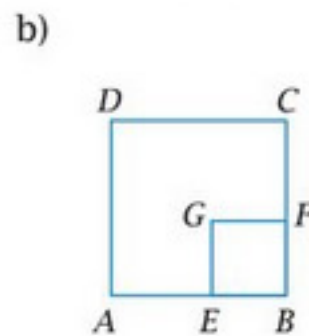
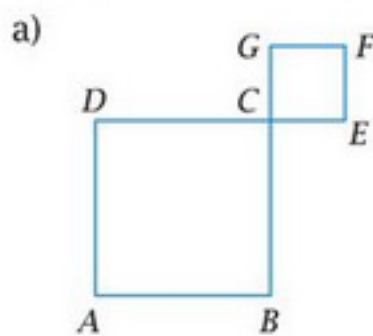


16. Helikopter wystartował z lotniska i po pokonaniu 5 km w kierunku południowym wylądował, by wziąć chorego. Następnie poleciał do szpitala odległego o 12 km w kierunku wschodnim. Jaka jest odległość w linii prostej szpitala od lotniska?

17. Dany jest odcinek o długości a i odcinek o długości b . W wyniku konstrukcji przedstawionej na rysunku otrzymano odcinek AB . Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące jego długość.

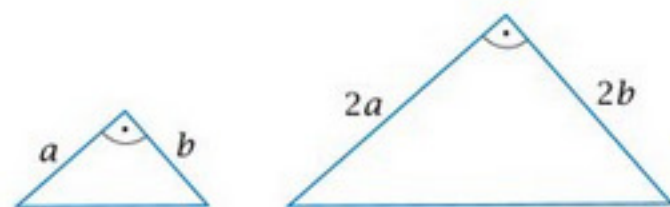


- *18. Które wierzchołki narysowanych kwadratów należy połączyć odcinkiem, aby otrzymać bok kwadratu o polu równym sumie pól tych kwadratów?



- *19. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości będące liczbami naturalnymi. Obwód tego trójkąta jest równy $3(4 + \sqrt{10})$. Wyznacz długości przyprostokątnych tego trójkąta.

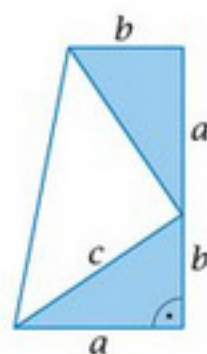
- *20. Na rysunku przedstawiono dwa trójkąty prostokątne. Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.



Przeciwprostokątna większego trójkąta jest $\sqrt{2}$ razy dłuższa od przeciwprostokątnej mniejszego trójkąta.	P	F
Pole kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej większego trójkąta jest 4 razy większe od pola kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej mniejszego trójkąta.	P	F

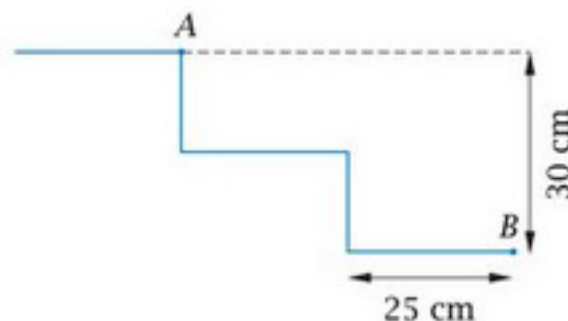
- *21. Skonstruuj kwadrat o polu trzy razy większym niż pole danego kwadratu.

- *22. James Garfield, dwudziesty prezydent USA, przeprowadził w roku 1876 pewne rozumowanie. Zbudował trapez prostokątny z trzech trójkątów (zob. rysunek). Wyznaczył pole tego trapezu na dwa sposoby: na podstawie wzoru oraz jako sumę pól trójkątów. Porównał otrzymane wyrażenia i zapisał równość w najprostszej postaci. Jakie twierdzenie udowodnił?



Sprawdź się

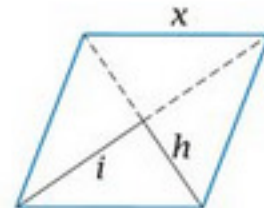
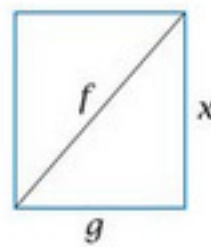
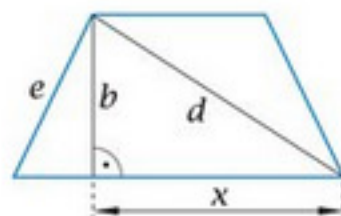
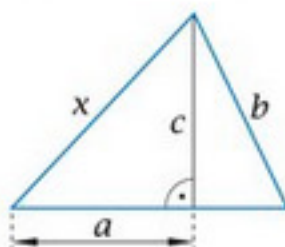
- Przeciwprostokątna w pewnym trójkącie prostokątnym ma długość $\sqrt{15}$. Która para liczb nie może wyrażać długości przyprostokątnych tego trójkąta?
 A. 3, $\sqrt{6}$ B. $2\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$ D. $2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$
- Obwód trójkąta prostokątnego jest równy $12\sqrt{7}$. Spośród podanych trójek liczb wskaż długości boków tego trójkąta.
 A. $6\sqrt{7}$, $3\sqrt{7}$, $4\sqrt{7}$ C. $5\sqrt{7}$, $5\sqrt{7}$, $2\sqrt{7}$
 B. $5,5\sqrt{7}$, $3,5\sqrt{7}$, $3\sqrt{7}$ D. $3\sqrt{7}$, $4\sqrt{7}$, $5\sqrt{7}$
- Oba stopnie schodów przedstawionych na rysunku mają jednakowe wymiary. Długość odcinka AB jest równa:
 A. $5\sqrt{109}$ cm C. $10\sqrt{34}$ cm
 B. $5\sqrt{34}$ cm D. $10\sqrt{109}$ cm



3 Zastosowania twierdzenia Pitagorasa

Przypomnij sobie

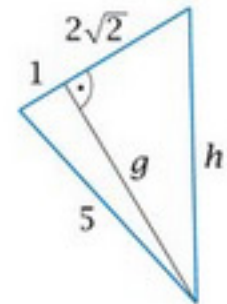
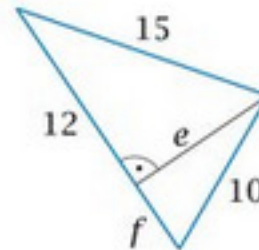
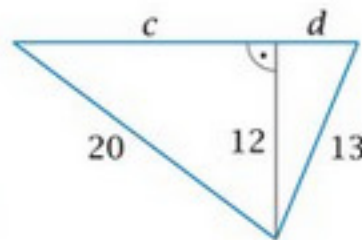
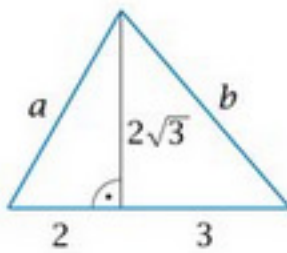
- Wyznacz długość odcinka x w trójkącie, trapezie, prostokącie i rombie.



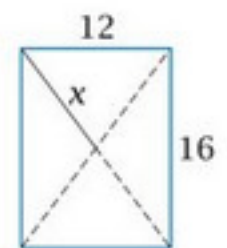
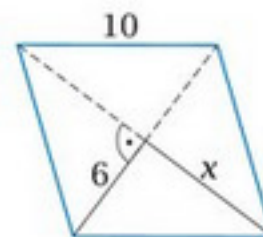
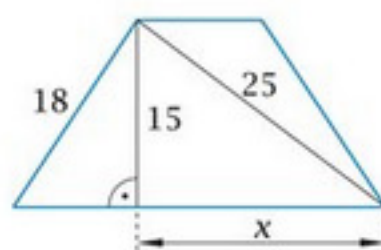
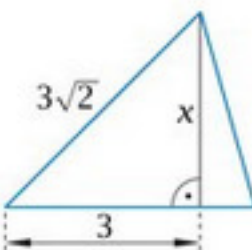
- Oblicz długość przyprostokątnej trójkąta prostokątnego równoramiennego o przeciwprostokątnej długości $\sqrt{2}$.

Poćwicz

3. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.



4. Oblicz długość odcinka x w trójkącie, trapezie, rombie i prostokącie.



5. Oblicz długość przekątnej prostokąta o danych bokach. Wyniki zaokrąglaj do części setnych wybranej jednostki.

- | | |
|-----------------|-------------------|
| a) 2 dm i 5 dm | c) 25 cm i 100 mm |
| b) 8 cm i 10 cm | d) 6 m i 10 dm |

6. Oblicz wysokość opuszczoną na podstawę trójkąta równoramiennego o bokach:

- | | |
|---------------------|--|
| a) 5 cm, 5 cm, 6 cm | c) $2\sqrt{3}$ dm, $2\sqrt{3}$ dm, $2\sqrt{3}$ dm |
| b) 4 cm, 4 cm, 4 cm | d) $3\sqrt{6}$ mm, $3\sqrt{6}$ mm, $2\sqrt{29}$ mm |

7. Oblicz długość boku rombu o przekątnych długości:

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| a) 30 cm i 40 cm | c) $6\sqrt{2}$ dm i $2\sqrt{31}$ dm |
| b) $4\sqrt{6}$ cm i $4\sqrt{3}$ cm | d) 10 m i $20\sqrt{39}$ dm |

8. Bok rombu ma długość 15 cm, a jedna z jego przekątnych jest równa e . Oblicz długość drugiej przekątnej, jeżeli:

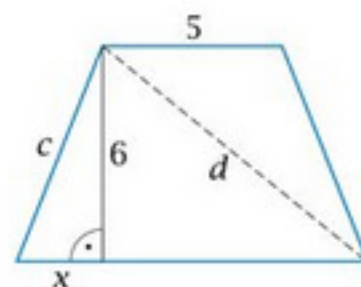
- | | |
|----------------|------------------------|
| a) $e = 10$ cm | c) $e = 6\sqrt{5}$ cm |
| b) $e = 2$ dm | d) $e = 80\sqrt{7}$ mm |

9. Oblicz wysokość h trapezu równoramiennego o danej przekątnej d oraz podstawach długości 6 i 10.

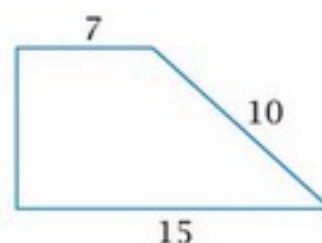
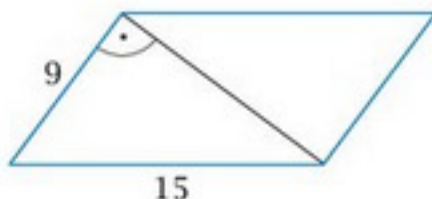
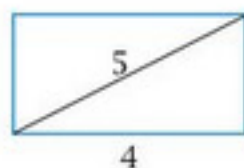
- | | | | |
|-------------|-------------|-------------|--------------------|
| a) $d = 10$ | b) $d = 12$ | c) $d = 16$ | d) $d = 8\sqrt{3}$ |
|-------------|-------------|-------------|--------------------|

10. Oblicz długości c ramienia i d przekątnej trapezu równoramiennego przedstawionego na rysunku, jeżeli:

a) $x = 1$ b) $x = 4$ c) $x = 5$ *d) $x = \sqrt{2}$



11. Narysowane poniżej czworokąty to prostokąt, równoległobok i trapez prostokątny. Oblicz pola i obwody tych czworokątów.

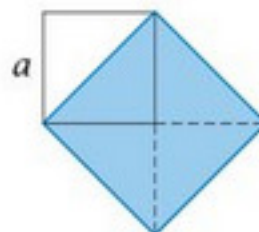


12. Jeden koniec 10-metrowego sznurka umocowany jest na słupie na wysokości 7 m nad ziemią. W jakiej największej odległości od słupa może dotknąć ziemi drugi koniec sznurka? Oszacuj wynik bez kalkulatora.

Pomyśl

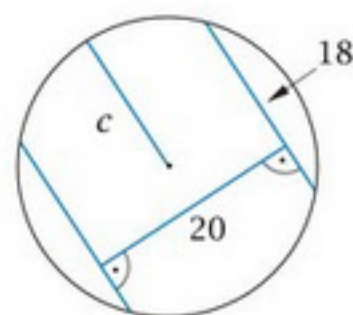
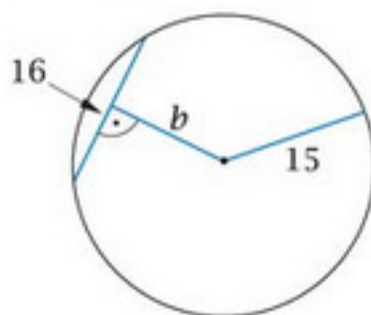
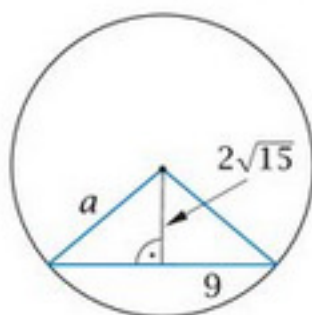
13. Uzasadnij, że pole kwadratu zbudowanego na przekątnej kwadratu o boku a wynosi $2a^2$:

- a) wyłącznie na podstawie rysunku,
b) wykonując odpowiednie obliczenia.

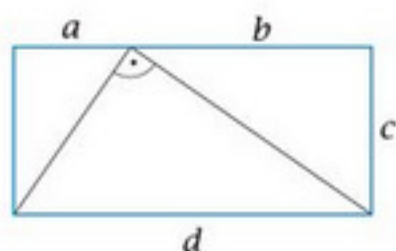
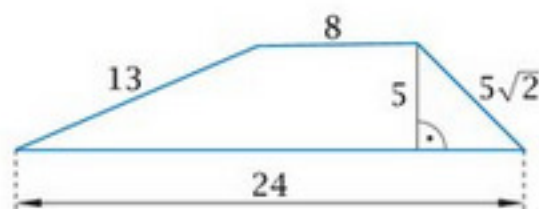


14. a) Jakiej wysokości ma trójkąt prostokątny równoramienny o ramieniu 10?
b) Jakie pole ma trójkąt prostokątny równoramienny o najdłuższym boku długości 6?
c) Jaki obwód ma trójkąt prostokątny równoramienny o polu 8?
15. Boki trapezu równoramiennego mają długości 5 cm, 4 cm, 5 cm i 10 cm. Oblicz pole tego trapezu.
16. Bok rombu ma długość 7 cm, a jedna z jego przekątnych ma 10 cm. Oblicz pole tego rombu.
17. Krótsza przekątna trapezu prostokątnego ma długość 8 cm i dzieli ten trapez na dwa trójkąty prostokątne równoramiennie. Oblicz pole tego trapezu.

18. Jedna z podstaw trapezu ma długość 20, każde z ramion ma długość 13, a wysokość wynosi 12. Oblicz pole tego trapezu. Rozważ trzy przypadki.
19. Trzy boki trapezu mają taką samą długość równą 10. Obwód trapezu wynosi 52. Oblicz pole tego trapezu.
20. Oblicz długość odcinka oznaczonego literą.



- *21. Sprawdź, czy czworokąt przedstawiony na rysunku jest trapezem. Uzasadnij odpowiedź.

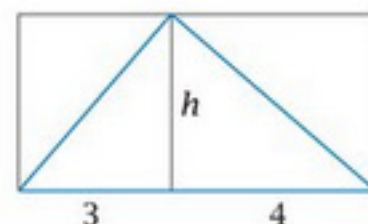


- *22. a) Uzasadnij, że jeżeli c i d są długościami boków prostokąta przedstawionego na rysunku obok i $a + b = d$, to spełnione są równości:

I. $a^2 + b^2 + 2c^2 = d^2$

II. $c^2 = ab$

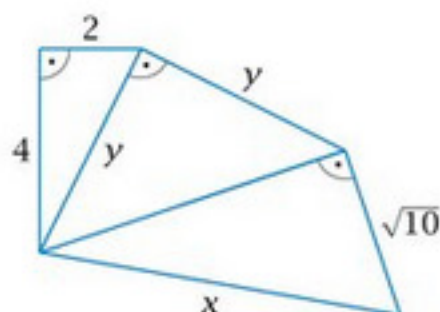
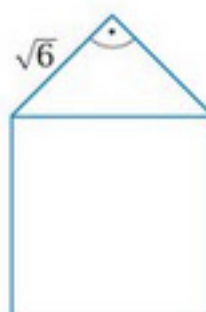
b) Oblicz wysokość h trójkąta prostokątnego poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego (zob. rysunek), przy założeniu, że dzieli ona przeciwprostokątną na odcinki o długościach 3 i 4.



Sprawdź się

1. Na rysunku przedstawiono figurę zbudowaną z kwadratu i przylegającego do niego trójkąta prostokątnego równoramiennego. Pole tej figury wynosi:

A. 12 B. 15 C. $6\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$ D. 147



2. Przyjrzyj się rysunkowi. Odcinek x ma długość:

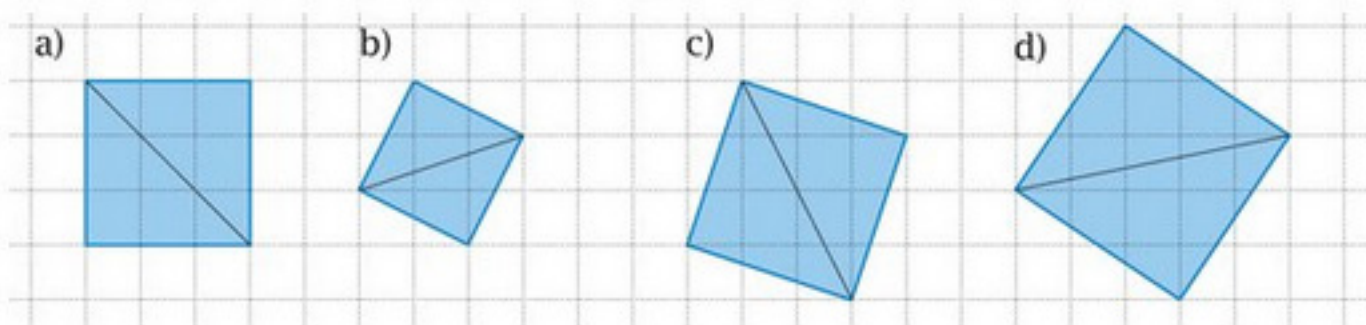
A. $5\sqrt{2}$ C. 10
B. $2\sqrt{5}$ D. 50

4

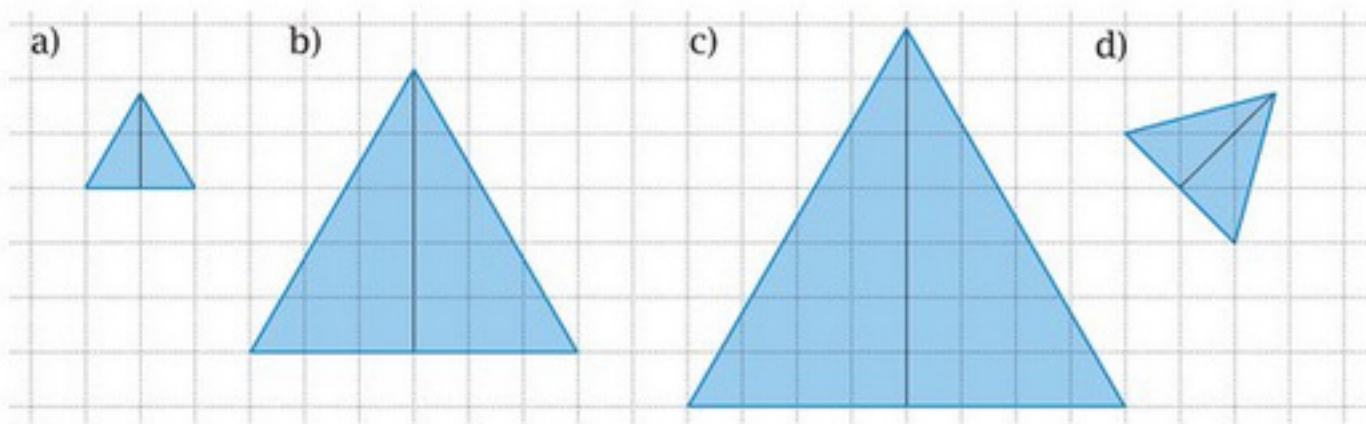
Przekątna kwadratu. Wysokość trójkąta równobocznego

Przypomnij sobie

1. Oblicz długość przekątnej kwadratu. Przyjmij jako jednostkę długość boku kratki.



2. Oblicz wysokość trójkąta równobocznego. Przyjmij jako jednostkę długość boku kratki.



Poćwicz

3. Oblicz długość przekątnej kwadratu o boku długości:

a) 5 b) $3\sqrt{2}$ c) $5\sqrt{3}$ d) $0,5\sqrt{2}$ e) 3,5 f) $\sqrt{8}$

4. Oblicz długość boku kwadratu, którego przekątna ma długość:

a) $5\sqrt{2}$ b) $0,7\sqrt{2}$ c) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ d) 3 e) $\frac{1}{3}$ f) 12

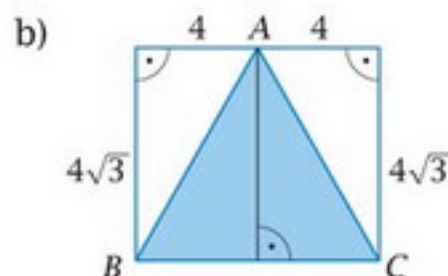
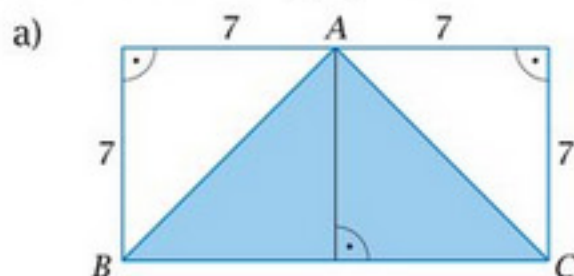
5. Oblicz wysokość trójkąta równobocznego o boku długości:

a) 10 b) 15 c) $3\sqrt{3}$ d) $13\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{2}$ f) $3\sqrt{8\frac{1}{3}}$

6. Oblicz długość boku trójkąta równobocznego o danej wysokości:

a) $2\sqrt{3}$ b) $10,2\sqrt{3}$ c) 9 d) $15\sqrt{6}$ e) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ f) $\sqrt{7}$

7. Oblicz obwód trójkąta ABC .

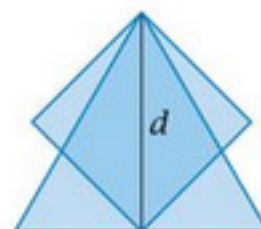
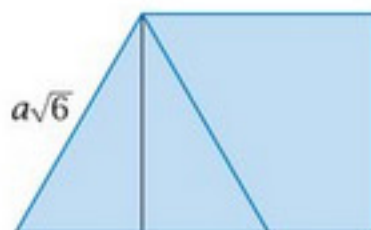
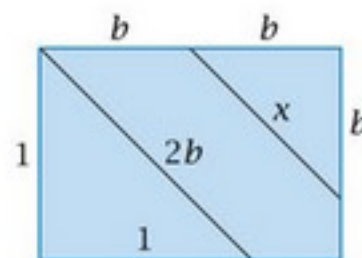


8. Oblicz długość przekątnej kwadratu, którego bok ma taką samą długość jak wysokość trójkąta równobocznego o boku długości:

- | | | | |
|-----------------|-------------------|-----------------|-------------------|
| a) $6\sqrt{2}$ | c) $20\sqrt{2}$ | e) $6\sqrt{3}$ | g) $20\sqrt{3}$ |
| b) $10\sqrt{2}$ | d) $1428\sqrt{2}$ | f) $10\sqrt{3}$ | h) $1428\sqrt{3}$ |

Pomyśl

9. Na rysunku przedstawiono prostokąt. Oblicz długość odcinka x .
10. a) Jaką wysokość ma trójkąt równoboczny o boku $4\sqrt{3}$?
 b) Jakie pole ma trójkąt równoboczny o boku $\sqrt{6}$?
 c) Jaki obwód ma trójkąt równoboczny o polu $\sqrt{3}$?
11. Oblicz pole rombu zbudowanego z dwóch trójkątów równobocznych, jeżeli:
 a) bok rombu ma długość 4,
 b) krótsza przekątna rombu ma długość 6,
 c) dłuższa przekątna rombu ma długość 6.
12. Kwadrat i trójkąt równoboczny mają równe obwody. Który odcinek jest dłuższy: przekątna d kwadratu czy wysokość h trójkąta?
13. Przekątna kwadratu i wysokość trójkąta równobocznego mają takie same długości równe d (zob. rysunek). Która figura: kwadrat czy trójkąt ma większe pole?



14. Bok trójkąta równobocznego ma długość $a\sqrt{6}$. Uzasadnij, że przekątna kwadratu, którego bok ma długość równą wysokości tego trójkąta, wynosi $3a$.



- *15. Na rysunku przedstawiono romb, który jest częścią wspólną dwóch przystających trójkątów równobocznych skonstruowanych wewnątrz kwadratu o boku długości 4. Oblicz długości przekątnych tego rombu.

Sprawdź się

1. Wysokość trójkąta równobocznego o polu $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ wynosi:

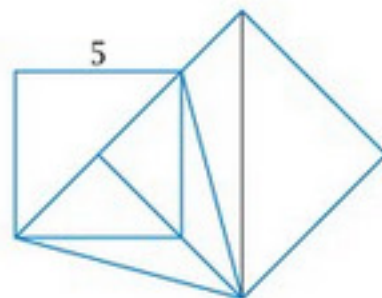
A. 1,5 B. 3 C. $1,5\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{3}$

2. Długość przekątnej kwadratu o polu 8 jest równa:

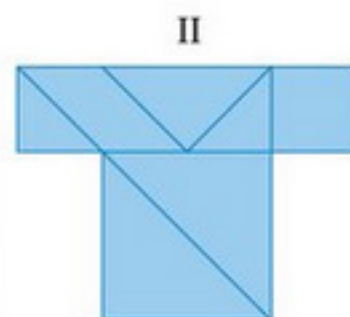
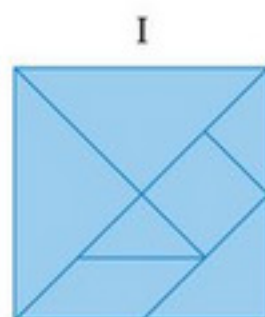
A. $2\sqrt{2}$ B. 4 C. 8 D. $8\sqrt{2}$

3. Na przekątnej kwadratu o boku długości 5 zbudowano trójkąt równoboczny, a na jego wysokości kolejny kwadrat (zob. rysunek). Przekątna drugiego kwadratu ma długość:

A. $5\sqrt{2}$ B. $5\sqrt{3}$ C. $5\sqrt{6}$ D. $5\sqrt{12}$



4. Na rysunku I przedstawiono kwadrat ułożony z elementów tangramu (wśród tangramowych figur jest kwadrat, równoległobok i pięć trójkątów prostokątnych równoramiennych). Przyjmij, że bok tego kwadratu ma długość 2. Obwód figury pokazanej na rysunku II jest równy:

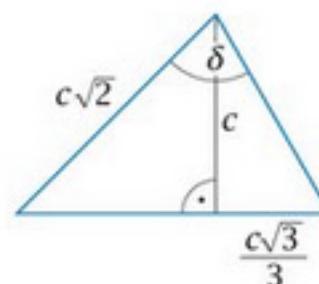
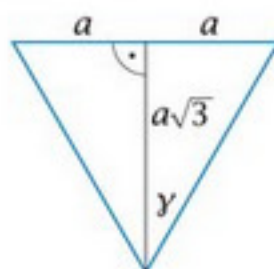
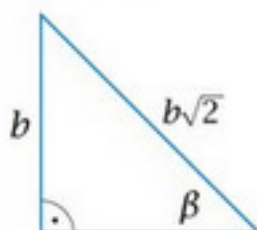
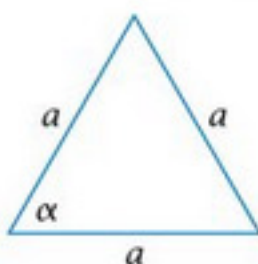


A. $4\sqrt{2}$ B. $5\sqrt{2}$ C. $6\sqrt{2}$ D. $7\sqrt{2}$

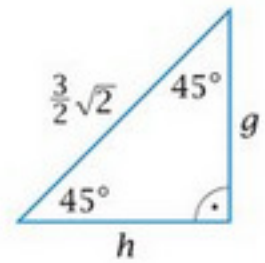
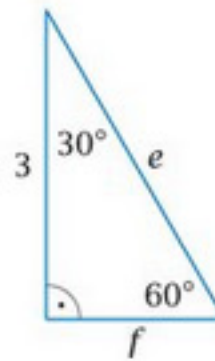
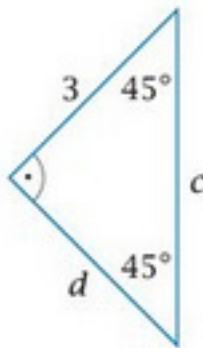
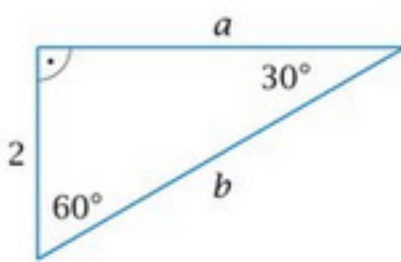
5 Trójkąty o kątach 90° , 45° , 45° oraz 90° , 30° , 60°

Przypomnij sobie

1. Jakie miary mają kąty α , β , γ i δ w trójkątach przedstawionych na rysunkach?



2. Oblicz długości tych boków trójkątów, które oznaczono literami.



Poćwicz

3. Podaj miary kątów trójkąta o bokach danej długości.

a) 1, 1, $\sqrt{2}$

d) $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$

b) 1, 2, $\sqrt{3}$

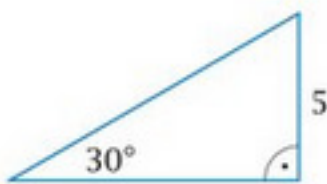
e) $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, 3

c) $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$

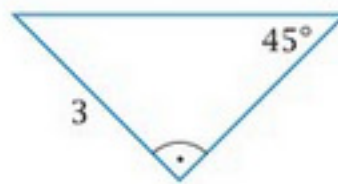
f) $\sqrt{6}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

4. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta.

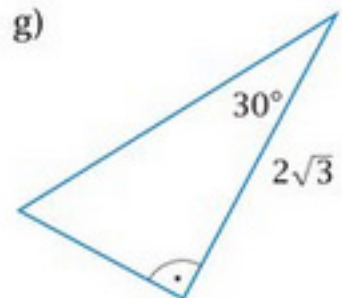
a)



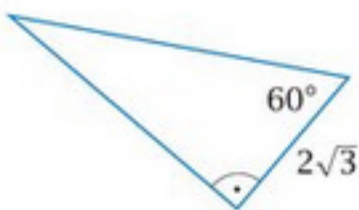
d)



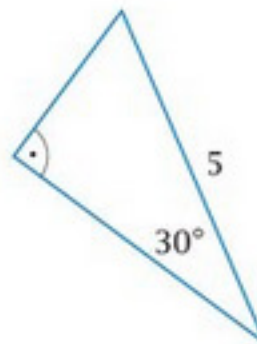
g)



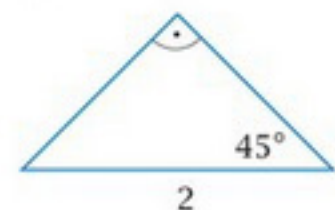
b)



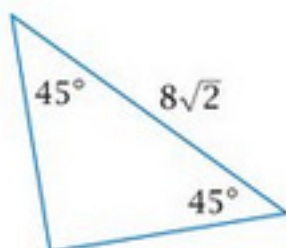
e)



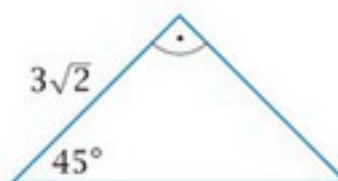
h)



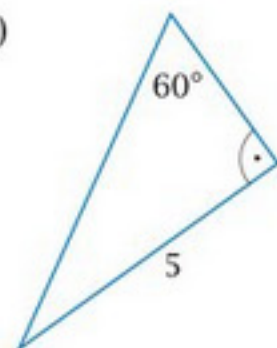
c)

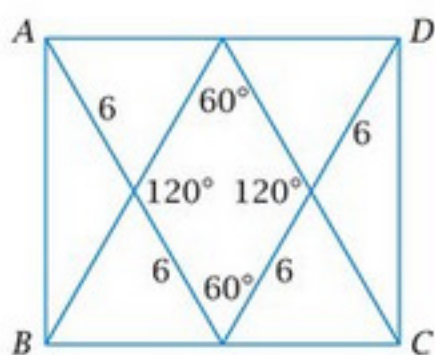


f)



i)





5. Oblicz wymiary prostokąta $ABCD$ przedstawionego na rysunku obok.

6. Trójkąt prostokątny równoramienny ma ramię długości z . Oblicz wysokość tego trójkąta opuszczoną na przeciwprostokątną, jeśli:

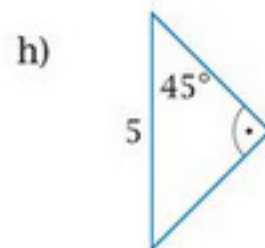
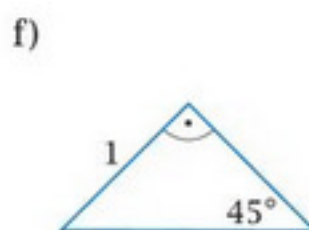
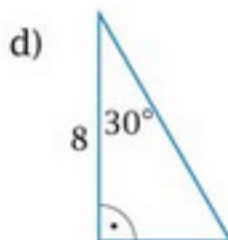
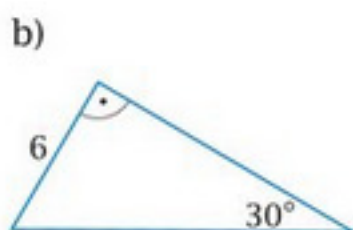
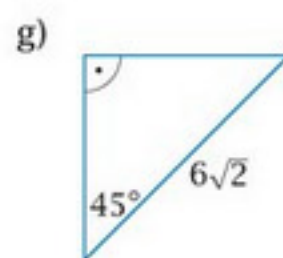
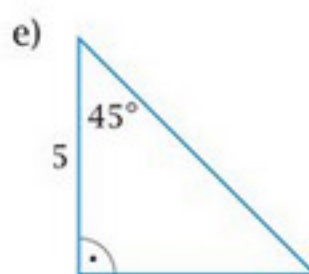
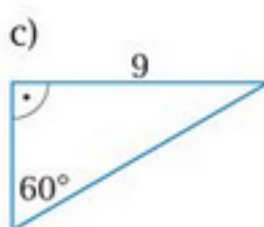
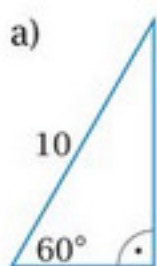
- a) $z = 2$ b) $z = 4$ c) $z = 2\sqrt{2}$ d) $z = 5\sqrt{6}$

7. Trójkąt równoramienny ma ramię długości $2t$, a jeden z jego kątów ma miarę 120° . Oblicz obwód i pole tego trójkąta, jeśli:

- a) $2t = 2$ b) $2t = 4$ c) $2t = 2\sqrt{3}$ d) $2t = 6\sqrt{3}$

Pomyśl

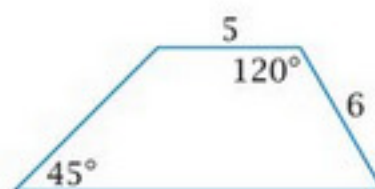
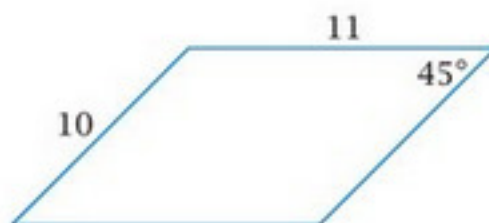
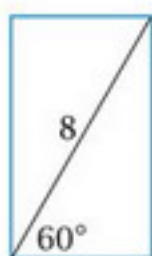
8. Oblicz pole trójkąta.



9. Kąt rozwarty pewnego rombu jest 5 razy większy od kąta ostrego. Bok tego rombu ma długość 2 m.

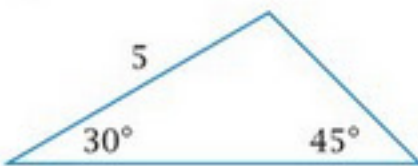
- a) Jaką miarę ma kąt ostry? *b) Jakie pole ma ten romb?

10. Narysowane poniżej czworokąty to prostokąt, równoległobok i trapez. Oblicz pola i obwody tych czworokątów.

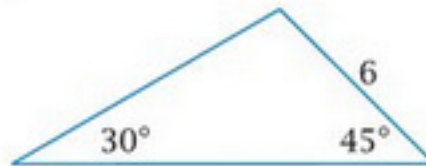


11. Oblicz pole i obwód trójkąta.

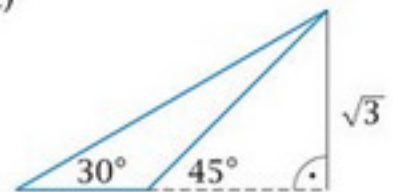
a)



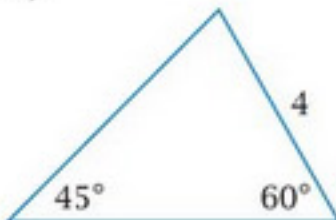
c)



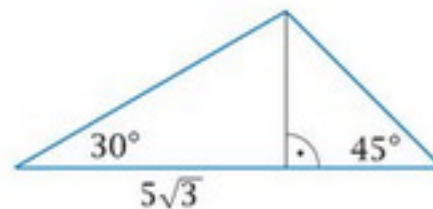
e)



b)



d)

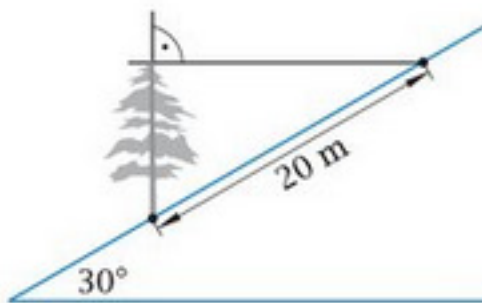


f)

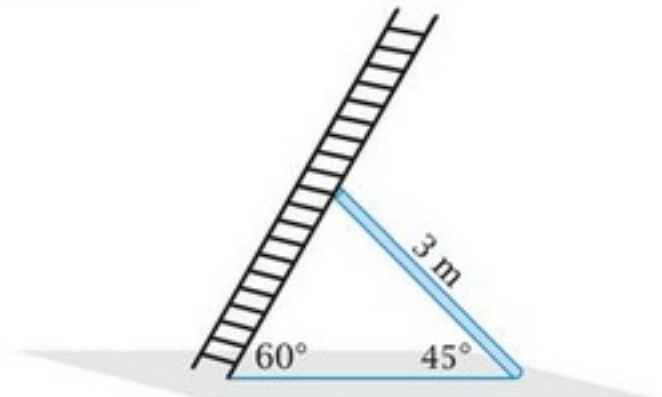


12. Odpowiedz na pytanie.

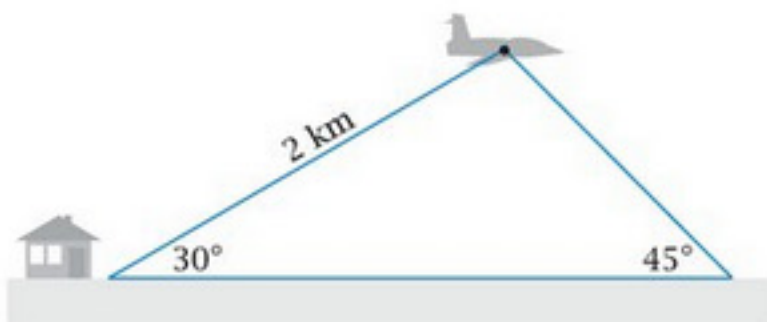
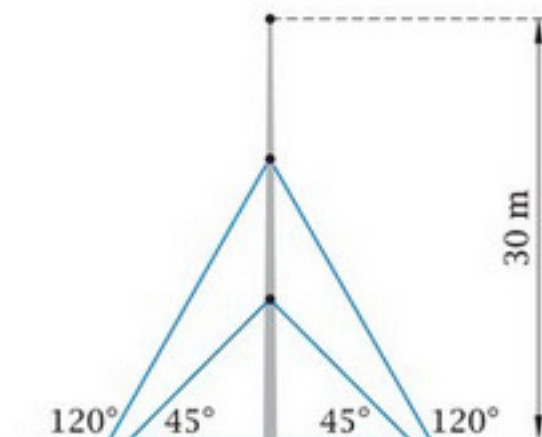
a) Jaka jest wysokość drzewa?



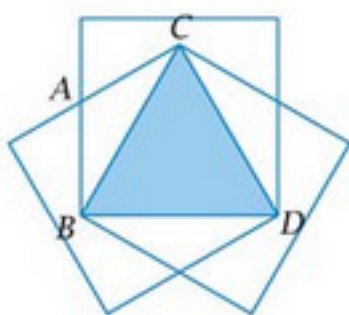
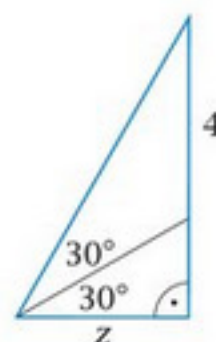
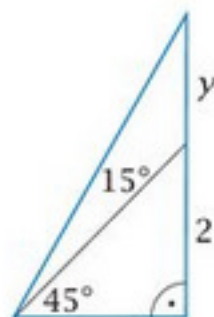
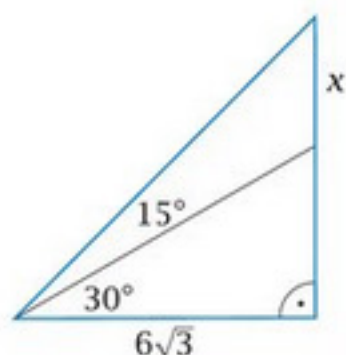
c) Jaka jest długość drabiny, jeśli belka podpira ją w połowie długości? Wynik podaj z dokładnością do części dziesiątych metra.



b) Jak wysoko nad powierzchnią ziemi leci samolot? Wynik zaokrągl.


 d) Liny mocujące maszt są zaczepione w $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$ jego wysokości. W jakiej odległości od masztu zaczepiono te liny? Wynik podaj z dokładnością do części dziesiątych metra.


*13. Oblicz długości odcinków x , y , z .



14. Na bokach trójkąta równobocznego BDC o boku długości 12 zbudowano trzy kwadraty (zob. rysunek). Oblicz:

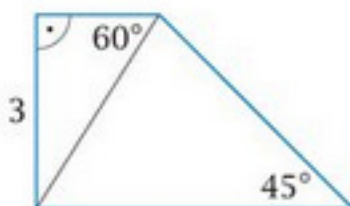
- pole trójkąta ABD ,
- długość odcinka AD .

15. Dla dowolnego trójkąta o kątach 30° , 60° , 90° oblicz:

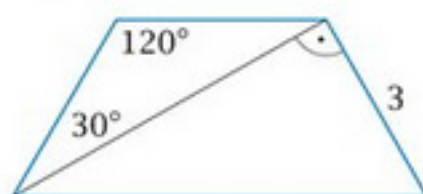
- stosunek długości przyprostokątnych (uwzględnij dwa przypadki),
- stosunek długości każdej z przyprostokątnych do przeciwprostokątnej,
- sumę kwadratów obu stosunków długości przyprostokątnej do przeciwprostokątnej.

*16. Oblicz obwód narysowanego trapezu.

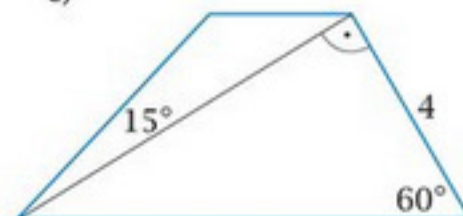
a)



b)



c)

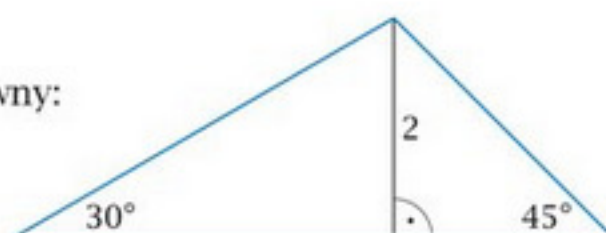


*17. Dłuższa podstawa trapezu ma długość 8, a dłuższe ramię — 2. Kąty przy dłuższej podstawie trapezu mają miary 45° i 60° . Oblicz pole tego trapezu.

Sprawdź się

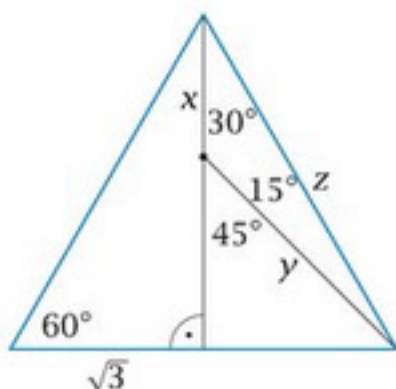
1. Obwód narysowanego obok trójkąta jest równy:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| A. $6 + 4\sqrt{3}$ | C. $8 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$ |
| B. $6 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ | D. $4 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ |



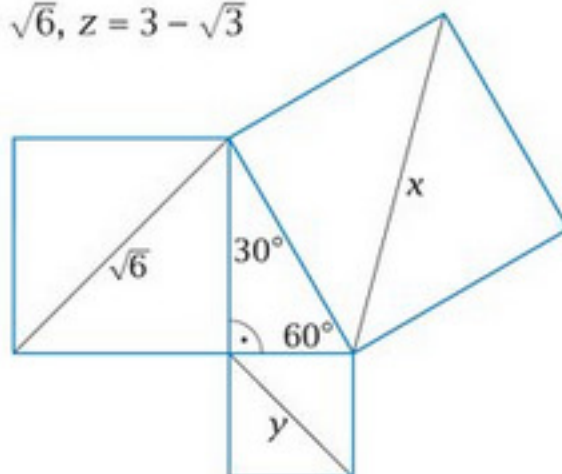
2. Pole trapezu prostokątnego o krótszej podstawie długości 15, dłuższym ramieniu długości 20 i kącie przy dłuższej podstawie 60° jest równe:

A. $200\sqrt{3}$ B. $\frac{75\sqrt{3}}{2}$ C. 315 D. $215\sqrt{3}$



3. Przyjrzyj się rysunkowi. W którym z podanych punktów wymieniono długości odcinków x , y , z ?

A. $x = 3 - \sqrt{3}$, $y = \sqrt{6}$, $z = 2\sqrt{3}$
 B. $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $y = \sqrt{6}$, $z = 2\sqrt{3}$
 C. $x = 3 - \sqrt{3}$, $y = 3$, $z = 2\sqrt{3}$
 D. $x = 2\sqrt{3}$, $y = \sqrt{6}$, $z = 3 - \sqrt{3}$



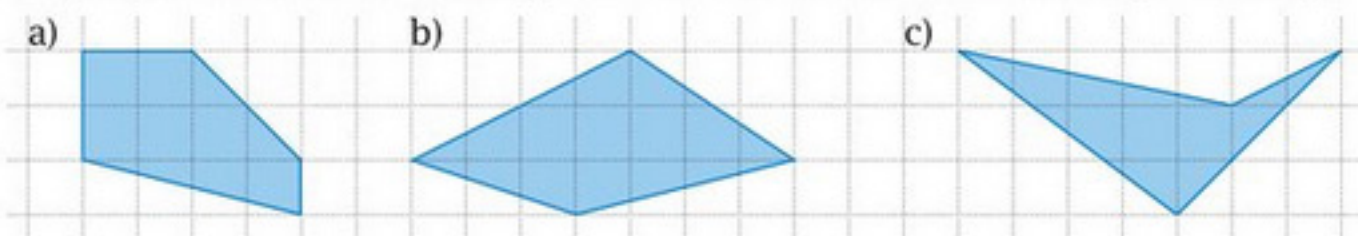
4. Przekątne x i y kwadratów przedstawionych na rysunku mają długości:

A. $x = 2\sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$ C. $x = 2\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}$
 B. $x = \sqrt{2}$, $y = 2\sqrt{2}$ D. $x = \sqrt{3}$, $y = 2\sqrt{3}$

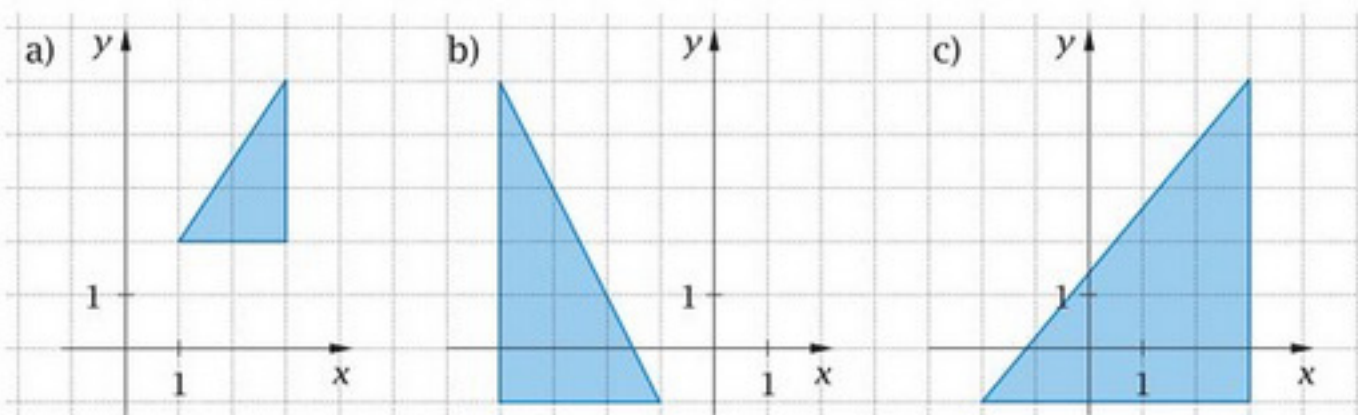
6 Odcinki w układzie współrzędnych

Przypomnij sobie

1. Przyjmij, że bok kratki ma długość 1 i oblicz obwód zacieniowanego wielokąta.



2. Oblicz długość przeciwprostokątnej zacieniowanego trójkąta.



3. Oblicz długość odcinka o końcach:

a) $A = (2, 3)$, $B = (6, 6)$

c) $E = (-1, 2)$, $F = (-3, -4)$

b) $C = (-4, 1)$, $D = (4, -3)$

d) $G = (3, -2)$, $H = (-2, -4)$

Poćwicz

4. Oblicz odległość punktu A od początku układu współrzędnych.

a) $A = (-6, 0)$

b) $A = (3, -4)$

c) $A = (-5, 12)$

d) $A = (-12, -16)$

5. Jeden koniec odcinka o długości a ma współrzędne $(-3, 0)$, a drugi leży na osi y . Jakie współrzędne może mieć ten drugi koniec? Narysuj ten odcinek.

a) $a = 5$

b) $a = 3\sqrt{2}$

c) $a = \sqrt{10}$

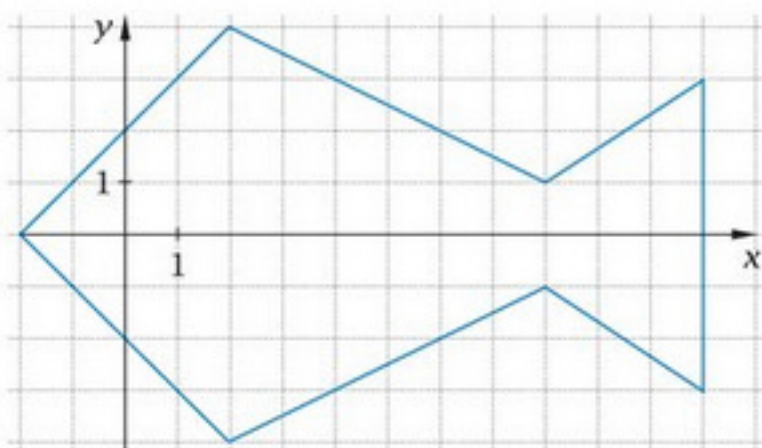
d) $a = \sqrt{34}$

6. Znajdź wierzchołek C trójkąta prostokątnego równoramiennego o przyprostokątnej AB .

a) $A = (2, 1)$, $B = (5, 1)$

b) $A = (-2, 2)$, $B = (3, 4)$

c) $A = (1, 2)$, $B = (4, 1)$



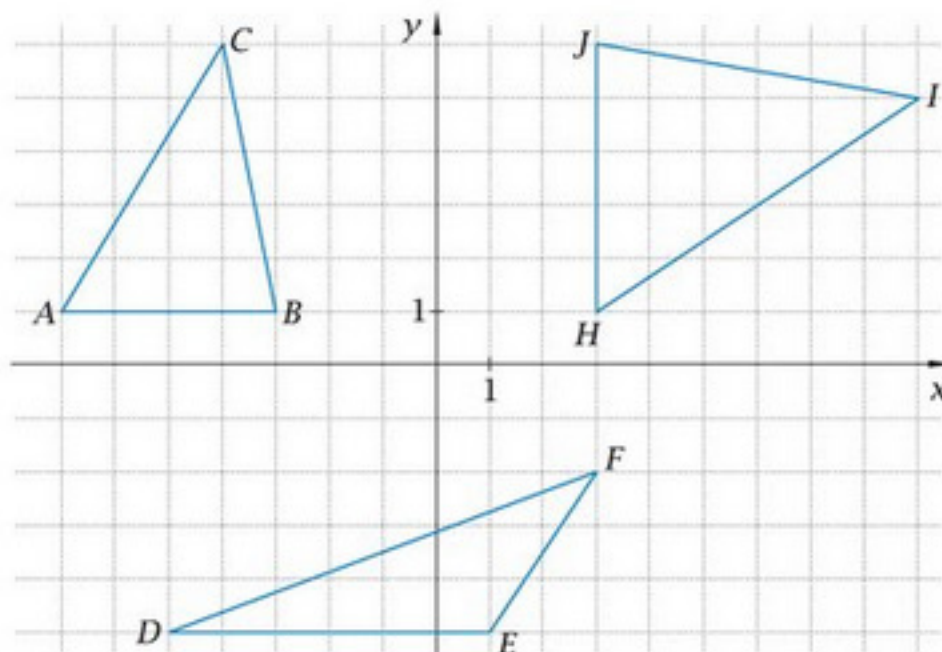
7. Znajdź współrzędne środka odcinka PR , wiedząc, że $P = (0, 6)$ i $R = (-4, 0)$.

8. Oblicz obwód wielokąta przedstawionego na rysunku. Skorzystaj z przybliżeń:

$$\sqrt{2} \approx 1,4, \quad \sqrt{5} \approx 2,2,$$

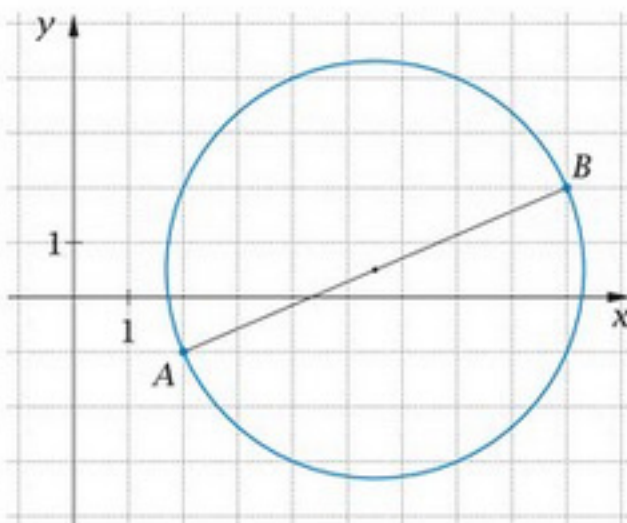
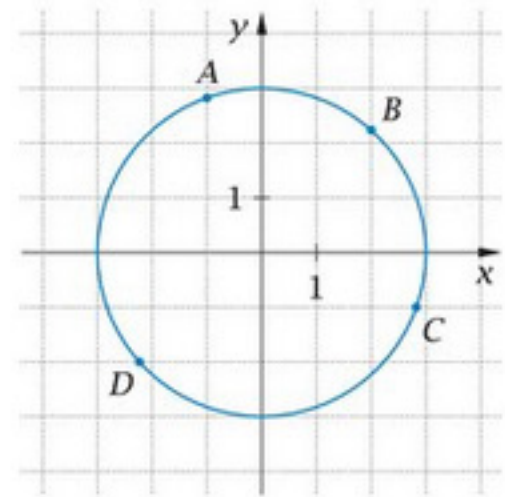
$$\sqrt{13} \approx 3,6.$$

9. Oblicz pola narysowanych trójkątów.



Pomyśl

10. Punkty A , B i C są wierzchołkami trójkąta. Czy ten trójkąt jest równoramienny?
- $A = (0, -3)$, $B = (3, 1)$, $C = (2, 6)$
 - $A = (1, -10)$, $B = (-1, -5)$, $C = (3, -3)$
 - $A = (-4, -6)$, $B = (1, -5)$, $C = (-3, -1)$
11. Narysuj w układzie współrzędnych czworokąt o podanych niżej wierzchołkach, a następnie oblicz jego pole i obwód.
- $A = (-4, 1)$, $B = (-1, 1)$, $C = (2, 4)$, $D = (-1, 4)$
 - $E = (-3, 0)$, $F = (-4, -3)$, $G = (-3, -6)$, $H = (-2, -3)$
 - $I = (2, -1)$, $J = (4, -1)$, $K = (6, 2)$, $L = (1, 2)$
12. Oblicz pole prostokąta o wierzchołkach:
- $A = (-2, 0)$, $B = (-1, -3)$, $C = (5, -1)$, $D = (4, 2)$
 - $E = (-3, 4)$, $F = (-1, 0)$, $G = (1, 1)$, $H = (-1, 5)$
 - $I = (-3, -1)$, $J = (4, -4)$, $K = (7, 3)$, $L = (0, 6)$
13. Jeden koniec odcinka o długości a ma współrzędne $(3, 2)$, a drugi leży na osi y . Jakie współrzędne może mieć ten drugi koniec? Narysuj te odcinki.
- $a = 5$
 - $a = 3\sqrt{2}$
 - $a = \sqrt{13}$
 - $a = \sqrt{58}$
14. Punkty $A = (-1, a)$, $B = (2, b)$, $C = (c, -1)$, $D = (d, -2)$ leżą na okręgu o środku $(0, 0)$ i promieniu 3 (zob. rysunek obok). Oblicz współrzędne a , b , c , d tych punktów.



15. Odcinek AB jest średnicą narysowanego okręgu.

- Oblicz długość odcinka AB . Ustal długość promienia okręgu i współrzędne jego środka.
- Czy punkt o współrzędnych $(7, 4)$ należy do tego okręgu? Odpowiedź uzasadnij.

Sprawdź się

1. Punkty $A = (-1, 1)$, $B = (2, -1)$, $C = (3, 2)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Obwód tego równoległoboku wynosi:

A. $4\sqrt{10}$ B. $2\sqrt{10} + \sqrt{13}$ C. $4\sqrt{13}$ D. $2\sqrt{10} + 2\sqrt{13}$

2. Dane są punkty:

$$A = (6, 1) \quad B = (5, 1) \quad C = (7, 3) \quad D = (4, -3) \quad E = (1, -9)$$

Które z tych punktów leżą w jednakowej odległości od końców odcinka XY , jeśli $X = (4, 2)$, $Y = (8, 0)$?

A. tylko A B. A, D, E C. A, C, D, E D. B, C, D, E

3. Wierzchołkami trójkąta KLM są punkty: $K = (-2, -2)$, $L = (0, -9)$ i $M = (-2, 1)$. Dokończ zdania. Wybierz odpowiedzi spośród A i B oraz spośród C i D.

Najdłuższy bok tego trójkąta ma długość: A. $3\sqrt{11}$ B. $2\sqrt{26}$

Pole tego trójkąta jest równe: C. 3 D. 6

4. Wierzchołki rombu mają współrzędne: $P = (-9, -2)$, $Q = (-3, -7)$, $R = (3, -2)$, $S = (-3, 3)$. Dokończ poniższe zdania. Wybierz odpowiedzi spośród A i B oraz spośród C i D.

Pole tego rombu jest równe: A. 60 B. 90

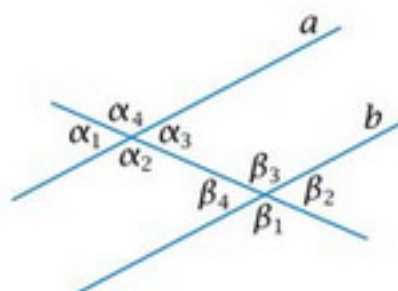
Obwód tego rombu jest równy: C. $4\sqrt{61}$ D. 32

7 Dowodzenie w geometrii

Przypomnij sobie

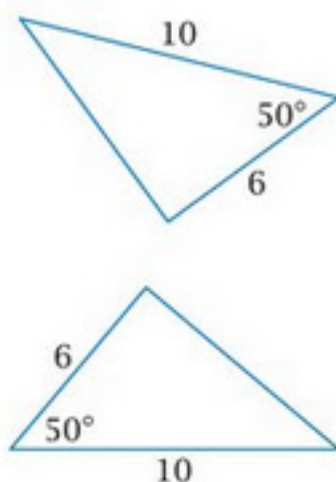
1. Na rysunku obok proste a i b są równoległe. Wskaż:

- kąt wierzchołkowy do kąta α_1
- kąty przyległe do kąta α_1
- kąt odpowiadający kątowi α_1
- kąt naprzemianległy do kąta α_1
- kąty, które mają taką samą miarę jak kąt β_1
- kąty, których miara jest równa $180^\circ - \beta_1$

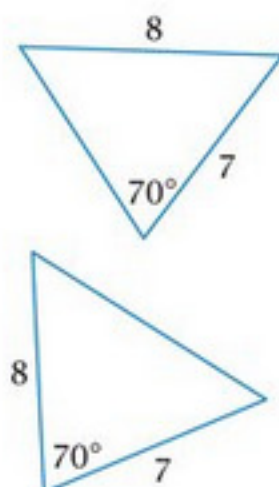


2. a) Podaj sumę miar kątów wewnętrznych trójkąta oraz sumę kątów wewnętrznych czworokąta.
 b) Jeden z kątów trójkąta równoramiennego ma miarę 10° . Jakie miary mają pozostałe kąty tego trójkąta?
3. Trzy spośród poniżej narysowanych par trójkątów to na pewno pary trójkątów przystających. Wskaż je i podaj odpowiednią cechę przystawania.

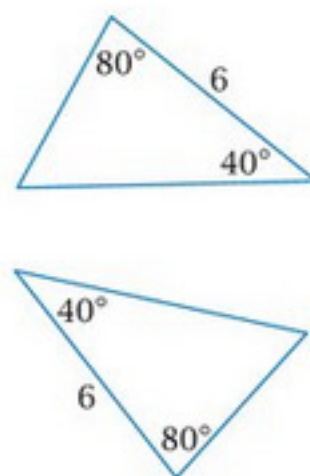
Para 1



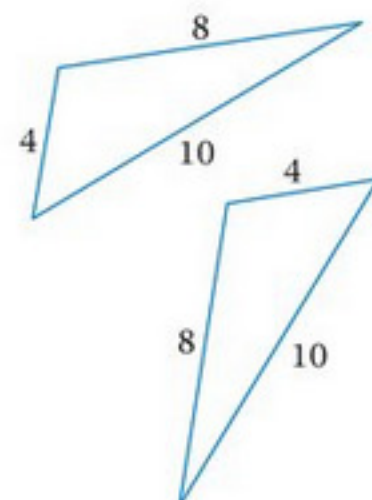
Para 2



Para 3

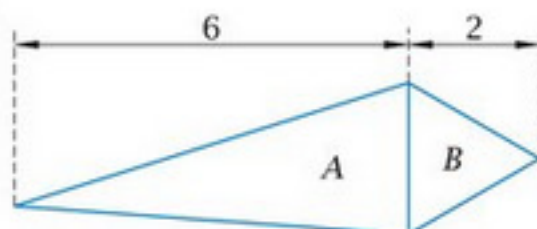


Para 4

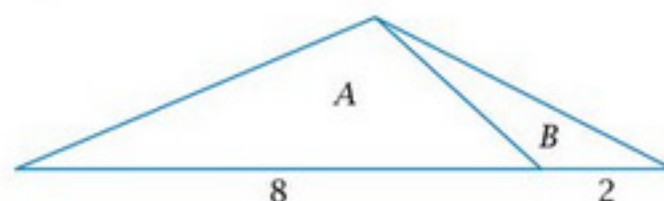


4. Ile razy pole trójkąta A jest większe od pola trójkąta B?

a)

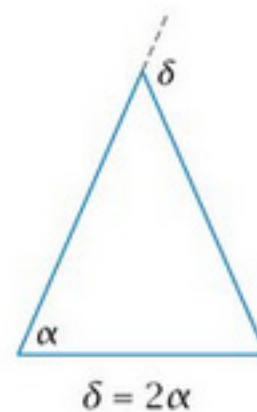
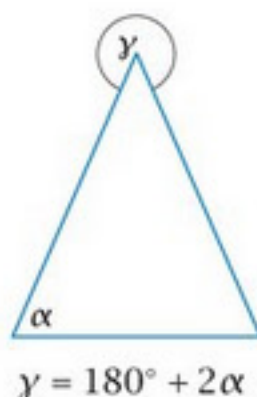
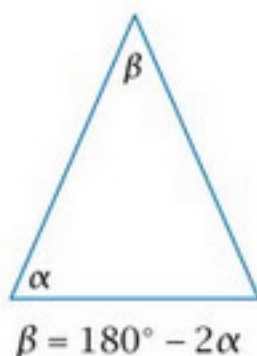


b)



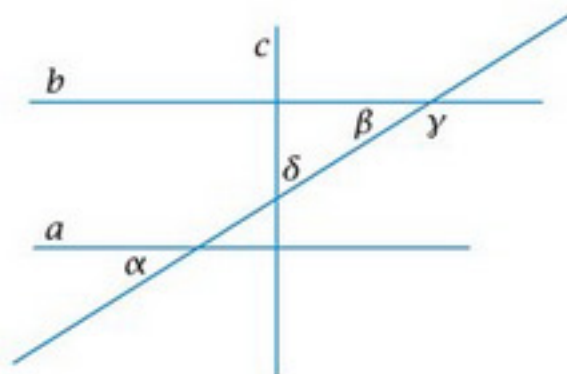
Poćwicz

5. Trójkąt na rysunku jest równoramienny. Przyjrzyj się rysunkom i wykaż, że podane pod nimi równości są prawdziwe.



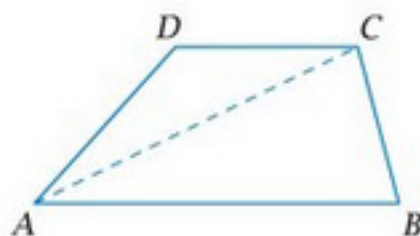
6. Proste a i b , przedstawione na rysunku obok, są równoległe, a prosta c jest do nich prostopadła. Wyjaśnij dlaczego:

- a) $\alpha = \beta$
 b) $\gamma = 180^\circ - \alpha$
 c) $\delta = 90^\circ - \alpha$



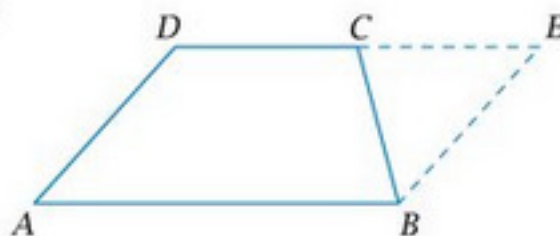
7. Podstawa AB trapezu $ABCD$ jest dwa razy dłuższa od podstawy CD . Uzasadnij własności podane pod rysunkami.

a)



Pole trójkąta ABC jest dwa razy większe od pola trójkąta ACD .

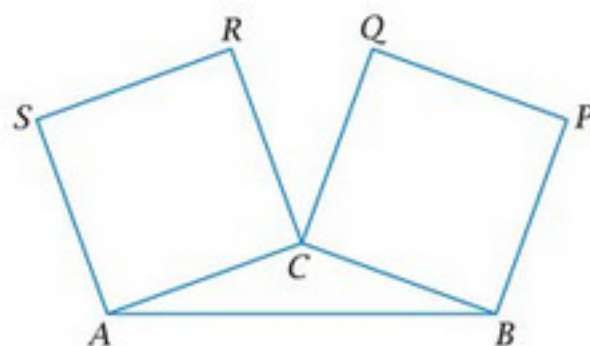
b)



Jeśli $CE = CD$, to pole trójkąta BEC jest trzy razy mniejsze od pola trapezu $ABCD$.

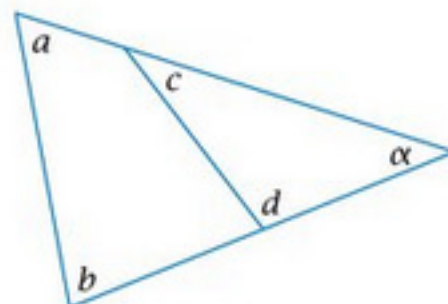
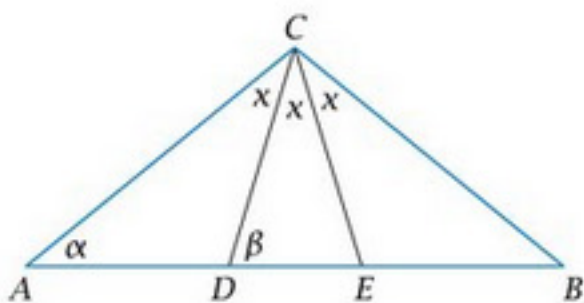
8. Trójkąt ABC jest równoramienny, a na jego bokach zbudowano kwadraty tak, jak na rysunku obok. Wyjaśnij, dlaczego podane trójkąty są przystające.

- a) $\triangle SAB$ i $\triangle ABP$
 b) $\triangle ACQ$ i $\triangle BCR$
 c) $\triangle ABQ$ i $\triangle BAR$



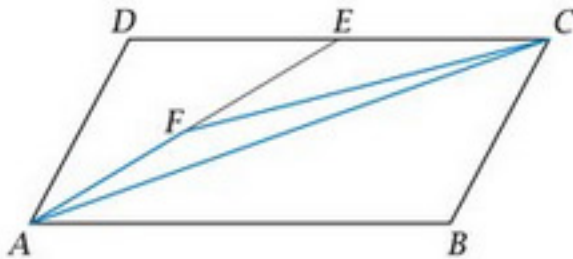
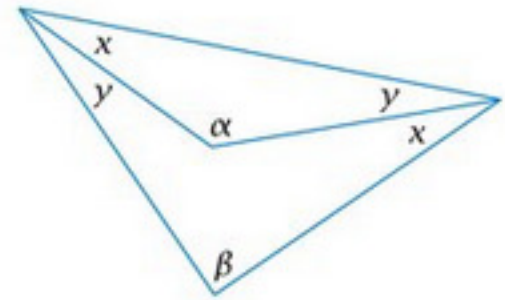
Pomyśl

9. Wykaż, że zgodnie z oznaczeniami na rysunku obok: $a + b + c + d = 360^\circ - 2\alpha$.



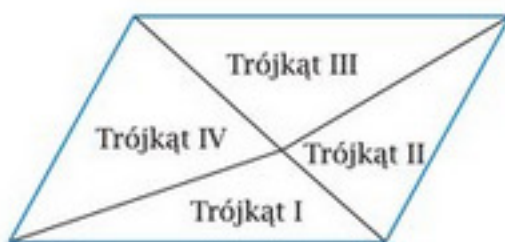
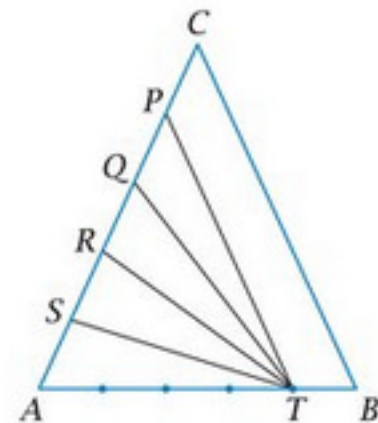
10. Kąt C trójkąta równoramiennego ABC został podzielony na trzy równe części, tak jak na rysunku obok. Wykaż, że $\beta = 60^\circ + \frac{1}{3}\alpha$.

11. Wykaż, że przy takich oznaczeniach jak na rysunku: $\beta = 2\alpha - 180^\circ$.



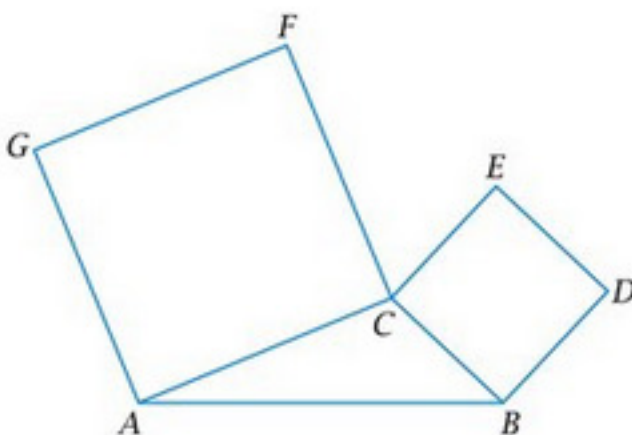
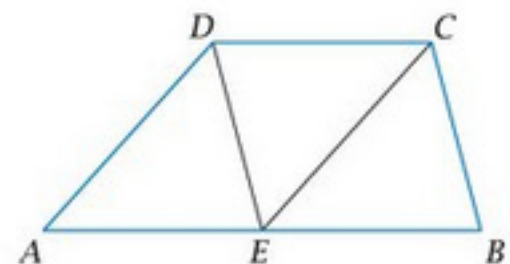
12. Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, punkt E jest środkiem boku CD , a punkt F — środkiem odcinka AE . Wykaż, że pole trójkąta ACF jest osiem razy mniejsze od pola równoległoboku $ABCD$.

13. Punkty zaznaczone na bokach trójkąta ABC dzielą dwa jego boki na równe części. Wykaż, że pole każdego z trójkątów ATS , STR , RTQ , QTP stanowi 0,16 pola trójkąta ABC .



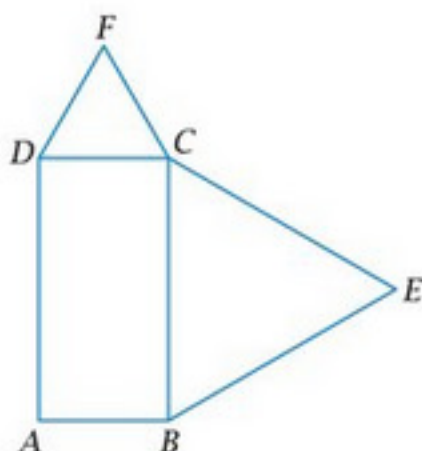
14. Wewnątrz równoległoboku wybrano dowolny punkt i połączono go odcinkami z wierzchołkami, tak jak pokazano na rysunku. Wykaż, że suma pól trójkątów I i III jest równa sumie pól trójkątów II i IV.

15. Podstawa AB trapezu $ABCD$ jest dwa razy dłuższa od podstawy CD , a punkt E jest jej środkiem. Wykaż, że przekątne trapezu $ABCD$ przecinają odcinki CE i DE w połowie.



16. Na bokach AC i BC trójkąta ABC zbudowano kwadraty $ACFG$ i $BDEC$. Udowodnij, że $AE = BF$.

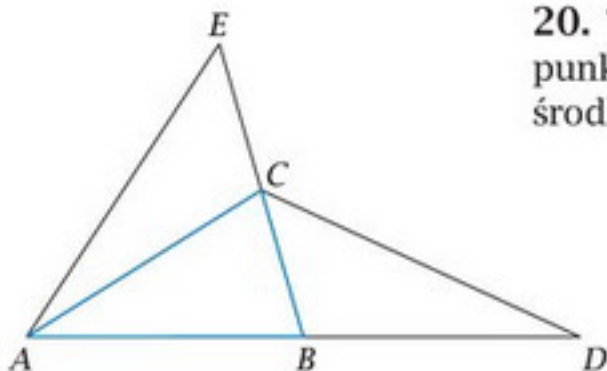
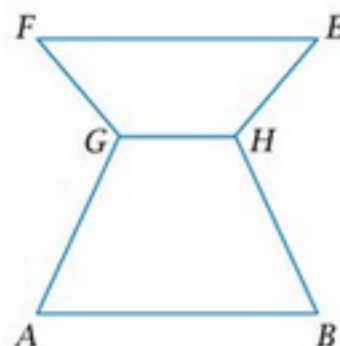
- *17. Wykaż, że suma odległości dowolnego punktu trójkąta równobocznego od jego boków jest równa wysokości tego trójkąta.



18. Na bokach prostokąta $ABCD$ zbudowano trójkąty równoboczne BEC i CFD . Wykaż, że równoramienne są trójkąty:

- a) AFE b) BEF c) DEF

19. Dwa trapezy równoramienne $ABDG$ i $DEFG$ połączono krótszymi podstawami tak jak na rysunku obok. Wykaż, że czworokąt $ABEF$ też jest trapezem równoramiennym.



20. Trójkąt ABC jest równoramienny ($AB = AC$), punkt B jest środkiem odcinka AD , a punkt C — środkiem odcinka BE . Wykaż, że $AE = CD$.

***21.** Punkty $A, B, C, D, E, F, \dots$ są wierzchołkami pewnego wielokąta foremnego, wykaż, że:

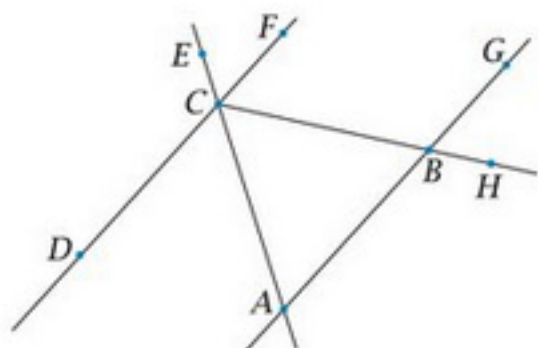
- a) $AC = CE$ b) $AD = CF$

***22.** Pewien wielokąt foremny ma parzystą liczbę wierzchołków (większą od 4). Wykaż, że wielokąt otrzymany w wyniku połączenia co drugiego wierzchołka odcinkiem też jest wielokątem foremnym.

Sprawdź się

1. Na krótszej podstawie trapezu równoramiennego $ABCD$ zbudowano trójkąt równoboczny CDE tak, że wierzchołek E leży wewnątrz trapezu. Poniżej podano pięć kroków uzasadnienia, że odcinki AE i BE mają równe długości. Ułóż je w poprawnej kolejności.

- Trójkąty AED i BEC są przystające na mocy cechy *bkb*.
- Trapez jest równoramienny, więc $AD = BC$.
- Odpowiednie boki trójkątów przystających są równe, więc $AE = BE$.
- Kąty ADC i BCD są kątami przy podstawie trapezu równoramiennego, więc są równe. Od obu odjęto 60° , więc kąty ADE i BCE mają równe miary.
- Trójkąt CDE jest równoboczny, więc $DE = CE$.

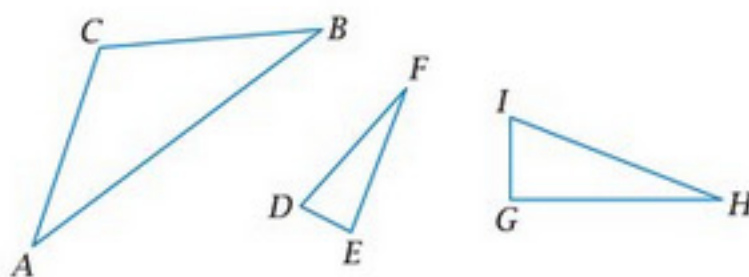


2. Proste DF i AG są równoległe, a półprosta CH jest dwusieczną kąta ACF . Czy trójkąt ABC jest równoramienny? Wybierz odpowiedź TAK albo NIE oraz jej uzasadnienie A, B, C albo D.

TAK,	ponieważ	A.	odcinki AF i CG mają różne długości, więc również odcinki AC i AB mają różne długości.
		B.	kąty ACB i BCF są równe oraz kąty BCF i ABC są równe, a więc kąty ACB i ABC są równe.
NIE,		C.	czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, a nie rombem.
		D.	długości odcinków AC i BC są równe oraz długości odcinków BC i AB też są równe, a więc $AC = BA$.

8 Zadania testowe

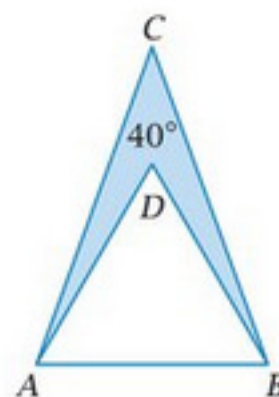
1. Dane są trójkąty ABC , DEF i GHI . Suma miar kątów trójkąta jest najmniejsza w trójkącie:

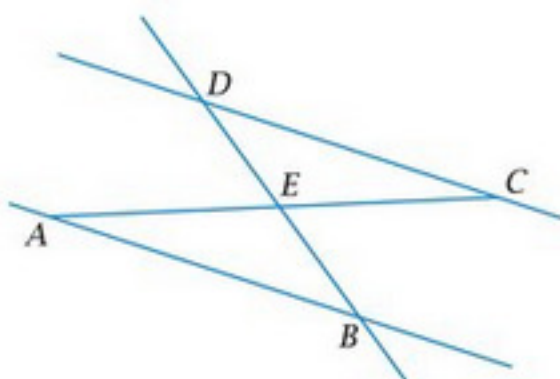


- A. ABC B. DEF C. GHI
 D. Wszystkie trójkąty mają taką samą sumę miar kątów.

2. Kąt między ramionami trójkąta równoramiennego ABC ma miarę 40° . Z tego trójkąta wycięto trójkąt równoboczny ABD , tak jak na rysunku. W tak powstałym czworokącie $ADBC$ różnica między miarą największego kąta i miarą kąta najmniejszego jest równa:

- A. 30° B. 100° C. 260° D. 290°



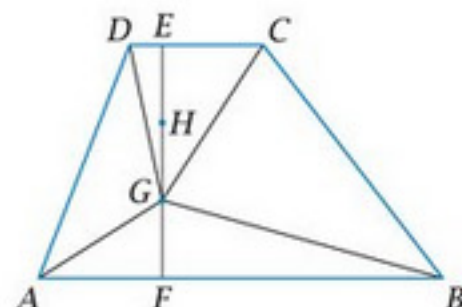


3. Proste AB i CD są równoległe. Przez środek odcinka AC poprowadzono prostą BD , tak jak na rysunku. Która z poniższych par trójkątów nie jest parą trójkątów przystających?

- A. $\triangle AED$ i $\triangle CEB$
- B. $\triangle ABC$ i $\triangle CDA$
- C. $\triangle ABE$ i $\triangle CDE$
- D. $\triangle ABD$ i $\triangle ACD$

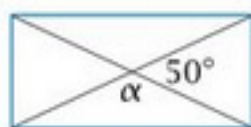
4. Podstawa CD trapezu $ABCD$ jest trzy razy krótsza od podstawy AB . Punkty G i H dzielą wysokość EF trapezu na trzy równe części. Stosunek pola trójkąta CDG do pola trójkąta ABG jest równy:

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{2}{3}$
- C. 1
- D. $\frac{3}{2}$



5. Kąt α ma największą miarę w czworokącie:

A.



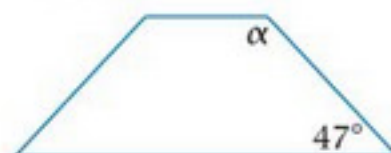
B.



C.



D.



6. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

Przekątne dzielą każdy romb na cztery przystające trójkąty.	P	F
Przekątne dzielą każdy prostokąt na cztery trójkąty równoramienne.	P	F
Przekątne dzielą każdy kwadrat na cztery trójkąty równoboczne.	P	F

7. Dokończ zdania. Wybierz odpowiedzi spośród A i B oraz spośród C i D.

Odcinki o długościach 4 cm i 5 cm nie mogą być przekątnymi:

- A. prostokąta
- B. rombu

Przekątne pewnego czworokąta przecinają się pod kątem 45° . Tym czworokątem nie może być:

- C. równoległobok
- D. kwadrat

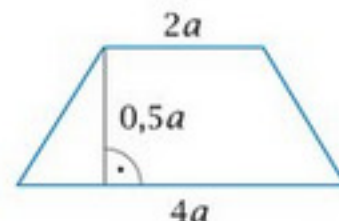
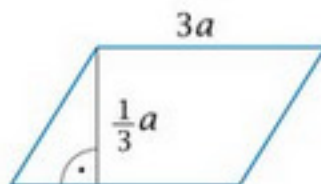
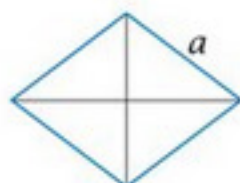
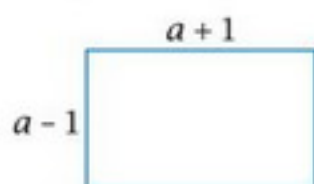
8. Pole kwadratu o boku a jest równe polu narysowanego niżej:

A. prostokąta

B. rombu

C. równoległoboku

D. trapezu



9. Jedna z wysokości równoległoboku jest równa wysokości trapezu. Oba te czworokąty mają równe pola. Podstawy trapezu mają długości 7 cm i 11 cm. Zatem długość jednego z boków równoległoboku wynosi:

A. 7 cm

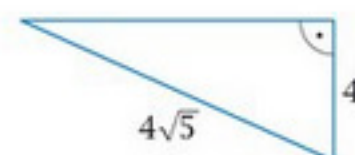
B. 9 cm

C. 11 cm

D. 18 cm

10. Odpowiedz na poniższe pytanie dotyczące przedstawionego trójkąta. Wybierz odpowiedź TAK albo NIE oraz jej uzasadnienie A albo B.

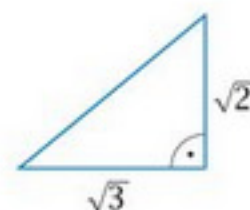
Czy dłuższa przyprostokątna trójkąta ma długość równą 8?



TAK,	ponieważ	A.	różnica kwadratów długości danych odcinków jest większa od kwadratu liczby 8.
NIE,		B.	różnica kwadratów długości danych odcinków jest równa kwadratowi liczby 8 i odcinek o długości 8 jest dłuższy od odcinka o długości 4.

11. Oceń prawdziwość podanych zdań dotyczących trójkąta przedstawionego na rysunku. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

Jeden z kątów trójkąta ma miarę 45° .	P	F
Pole trójkąta jest równe $\frac{\sqrt{6}}{2}$.	P	F
Obwód trójkąta wynosi $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.	P	F



12. Boki trójkąta prostokątnego ABC mają długości: $AB = 3\sqrt{5}$, $AC = 3\sqrt{2}$, $BC = 3\sqrt{7}$. Wskaż zdanie prawdziwe.

A. Dłuższą przyprostokątną jest bok BC .

B. Pole tego trójkąta wynosi $9\sqrt{10}$.

C. Wierzchołkiem kąta prostego w tym trójkącie jest punkt A .

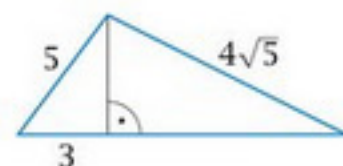
D. Wierzchołkiem kąta prostego w tym trójkącie jest punkt C .

13. Przekątna prostokąta ma długość 7, a jeden z jego boków ma długość 4. Wskaż zdanie prawdziwe.

A. Drugi bok prostokąta jest krótszy od danego.
 B. Pole prostokąta wynosi $4\sqrt{33}$.
 C. Przekątne prostokąta przecinają się pod kątem 60° .
 D. Dłuższy bok prostokąta ma długość $3\sqrt{11}$.

14. Pole trójkąta przedstawionego na rysunku jest równe:

A. $6 + 12\sqrt{5}$ B. 16 C. 22 D. $12\sqrt{5}$



15. Krótsza podstawa i krótsze ramię trapezu prostokątnego mają taką samą długość równą 3 cm, a dłuższa podstawa jest o 5 cm dłuższa od krótszej. Dłuższe ramię tego trapezu ma długość:

A. 4 cm B. 8 cm C. $\sqrt{13}$ cm D. $\sqrt{34}$ cm

16. Równoległobok ma przekątne długości 6 cm i 8 cm. Czy wynika stąd, że:

jeden z jego boków ma długość 5 cm, TAK/NIE

równoległobok ten jest rombem, TAK/NIE

pole tego równoległoboku wynosi 24 cm^2 ? TAK/NIE

17. Wysokość trójkąta równobocznego o boku $6\sqrt{3}$ cm ma długość:

A. 3 cm B. 9 cm C. $3\sqrt{3}$ cm D. 18 cm

18. Dokończ zdania. Wybierz odpowiedzi spośród A i B oraz spośród C i D.

Trójkąt równoboczny, którego wysokość wynosi 3, ma bok długości:

A. $\frac{9}{\sqrt{3}}$ B. $\frac{6}{\sqrt{3}}$

Trójkąt prostokątny równoramienny, którego krótsza wysokość wynosi 3, ma przeciwprostokątną długości:

C. 6 D. $3\sqrt{2}$

19. Długość przekątnej prostokąta przedstawionego na rysunku jest równa:

A. 17 B. $17\sqrt{3}$ C. 34 D. $34\sqrt{3}$



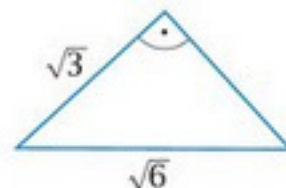
20. Obwód trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej długości 3 i jednym z kątów równym 60° wynosi:

A. $4,5 + 3\sqrt{3}$ B. $4,5 + 1,5\sqrt{3}$ C. $1,5 + 4,5\sqrt{3}$ D. $9 + 3\sqrt{3}$

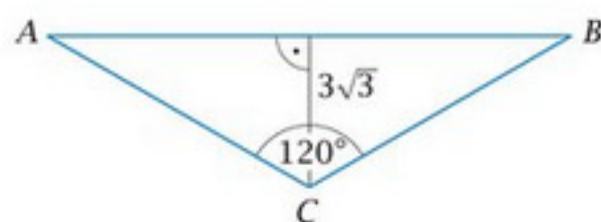
21. Bok rombu ma długość 12 cm, a kąt ostry tego rombu ma miarę 60° . Dokończ zdania. Wybierz odpowiedzi spośród A i B oraz spośród C i D.

Dłuższa przekątna tego rombu ma długość: A. $8\sqrt{2}$ B. $12\sqrt{3}$
 Pole tego rombu jest równe: C. 64 D. $72\sqrt{3}$

22. Oceń prawdziwość podanych zdań dotyczących trójkąta przedstawionego na rysunku. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.



Kąty ostre trójkąta mają miarę 45° .	P	F
Druga przyprostokątna trójkąta ma długość $\sqrt{3}$.	P	F
Pole trójkąta jest równe 3.	P	F
Obwód trójkąta wynosi $\sqrt{6} + 2\sqrt{3}$.	P	F

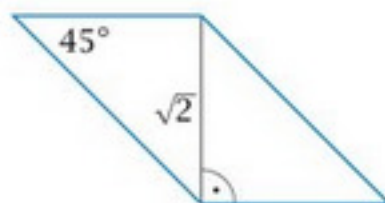


23. Narysowany trójkąt ABC jest równoramienny. Odcinek AB ma długość:

A. 9 C. $6\sqrt{3}$
 B. 18 D. $12\sqrt{3}$

24. Obwód O i pole P równoległoboku przedstawionego na rysunku są równe:

A. $O = 4 + 2\sqrt{2}$, $P = 2$
 B. $O = 2$, $P = 4 + 2\sqrt{2}$
 C. $O = 2 + 4\sqrt{2}$, $P = 4$
 D. $O = 4$, $P = 2 + 4\sqrt{2}$



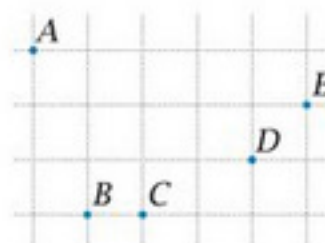
25. Punkty A, B, C, D, E leżą w punktach kratowych. Przyjmij, że bok kratki ma długość 1.

a) Który z wymienionych punktów jest oddalony od punktu A o $2\sqrt{5}$?

A. punkt B B. punkt C C. punkt D D. punkt E

b) Wskaż równość fałszywą.

A. $AB = BD$ B. $AC = CE$ C. $AD = BE$ D. $BE = AC$



26. Odległość między punktami $A = (2, 1)$ i $B = (-3, -2)$ jest równa:

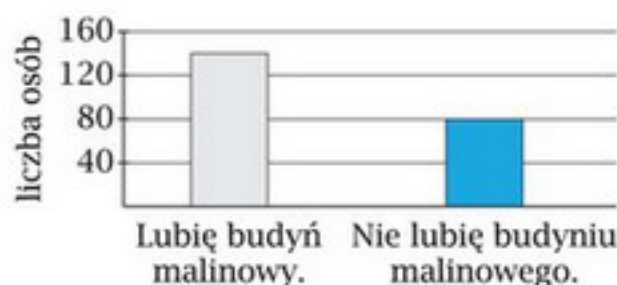
A. 4 B. $\sqrt{2}$ C. 6 D. $\sqrt{34}$

27. Dane są punkty $A = (-3, 5)$ i $B = (3, 1)$. Która z podanych niżej par liczb to współrzędne takiego punktu C , że $AC = 6$ i $BC = 4$?
- A. $(4, 6)$ B. $(-3, 1)$ C. $(-2, 0)$ D. $(3, 5)$
28. Punkt A ma współrzędne $(3, 2)$. Wybrano taki punkt X , że pole kwadratu o boku AX jest różne od 5. Który to mógł być punkt spośród podanych?
- A. $X = (5, 3)$ B. $X = (4, 0)$ C. $X = (1, 5)$ D. $X = (2, 4)$
29. Na okręgu o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 1 leży punkt $P = \left(\frac{3}{5}, y\right)$. Druga współrzędna tego punktu może być równa:
- A. $-\frac{2}{5}$ lub $\frac{2}{5}$ B. tylko $\frac{4}{5}$ C. tylko $-\frac{4}{5}$ D. $-\frac{4}{5}$ lub $\frac{4}{5}$
30. Sąsiednie wierzchołki pewnego kwadratu mają współrzędne $(6, 2)$ i $(10, -1)$.
- a) Długość przekątnej tego kwadratu jest równa:
- A. 5 B. $5\sqrt{2}$ C. $\sqrt{17}$ D. $2\sqrt{5}$
- b) Który z podanych punktów na pewno nie jest wierzchołkiem tego kwadratu?
- A. $(13, 3)$ B. $(7, -5)$ C. $(9, 6)$ D. $(4, -1)$

1 Obliczenia procentowe

Przypomnij sobie

1. Co można powiedzieć o liczbach a i b , jeżeli 35% liczby a równa się $0,35b$?
2. Jaki procent wszystkich uczniów w pewnej klasie stanowią dziewczęta, jeśli wszystkich uczniów jest 28, a chłopców jest 18?
3. Jeżeli 5% pewnej liczby to 13, to ile wynosi ta liczba?
4. W pewnej ankiecie zadano pytanie: *Czy lubisz budyń malinowy?* Na diagramie przedstawiono wyniki tej ankiety. Jaki procent badanych lubi budyń malinowy, a jaki procent — nie lubi?



Poćwicz

5. Jaki procent liczby y stanowi liczba x ?

a) $x = 14, y = 20$	d) $x = 61, y = 500$	g) $x = 375, y = 125$
b) $x = 16, y = 25$	e) $x = 35, y = 20$	h) $x = 5000, y = 500$
c) $x = 54, y = 125$	f) $x = 26, y = 25$	i) $x = 540, y = 120$
6. Oblicz.

a) 70% liczby 20	d) 68% liczby 136	g) 250% liczby 2400
b) 64% liczby 25	e) 125% liczby 3000	h) 1000% liczby 1,34
c) 11% liczby 121	f) 300% liczby 1230	i) 1500% liczby 25
7. Oblicz kwotę, której:

a) 70% wynosi 14 zł,	c) 82% wynosi 574 zł,	e) 99% wynosi 1237,5 zł,
b) 64% wynosi 16 zł,	d) 67% wynosi 2010 zł,	f) 135% wynosi 945 zł.

8. a) Sahara ma powierzchnię równą około 9 mln km^2 . Piaszczysta część tej pustyni stanowi tylko 30% jej powierzchni. Oblicz pole powierzchni piaszczystej części Sahary.



- b) Dotąd na świecie wydobyto około 150 tys. ton złota, z czego około 85 tys. ton znajduje się w rękach prywatnych. Jaki procent wydobytego złota należy do prywatnych posiadaczy?

- c) Polskie zasoby rud miedzi wynoszą około 3,4 mld ton i stanowią około 9% odkrytych zasobów światowych. Oblicz wielkość światowych zasobów rudy miedzi.

9. Szkoła Języków Obcych „Asinus” w przypadku rezygnacji z kursu nie zwraca pełnej opłaty, lecz potrąca z niej pewną kwotę.

- a) Jeśli rezygnacja z kursu następuje przed jego rozpoczęciem, to potrąca się 64 zł, czyli 8% opłaty za kurs. Ile wynosi opłata za kurs?

- b) Jeśli rezygnacja z kursu następuje w pierwszym tygodniu trwania kursu, to potrącenie wynosi 120 zł. Jaki to procent opłaty za kurs?

- c) Jeśli rezygnacja z kursu następuje w drugim tygodniu kursu, to potrąca się 28% opłaty za kurs. Jaka to kwota?

10. Tłuszcz stanowi 0,6% masy ryżu.

- a) Ile gramów tłuszczu zawiera 30-gramowa porcja ryżu?

- b) Jaka porcja ryżu zawiera 0,51 g tłuszczu?

Pomyśl

11. Kanał Sueski znacznie skraca drogę wodną do wschodniej Azji. Przyjrzyj się tabeli. Jakie liczby trzeba wpisać zamiast liter a , b i c ?

SKRÓCENIE TRAS ŻEGLUGOWYCH PO WYBUDOWANIU KANAŁU SUESKIEGO

Trasa żeglugowa	Trasa wokół Afryki (w tys. km)	Skrócenie drogi (w tys. km)	Skrócenie drogi (w %)
Odessa — Bombaj	22,0	14,2	65
Marsylia — Bombaj	18,2	9,7	a
Nowy Jork — Bombaj	21,5	b	30
Liverpool — Jokohama	c	20,6	24

12. Na kuli ziemskiej występuje 450 000 gatunków roślin, ale zdołano zbadać własności chemiczne tylko 15% z nich. Stwierdzono, że 30% zbadanych roślin ma własności lecznicze, jednak tylko 10% leczniczych roślin zamieszczono w oficjalnych spisach leków. W Polsce występuje 12% roślin z tych spisów.



a) Ile gatunków roślin występujących na kuli ziemskiej zbadano pod względem ich własności chemicznych?

b) W ilu gatunkach roślin naukowcy stwierdzili własności lecznicze? Jaki procent wszystkich gatunków roślin stanowią takie rośliny?

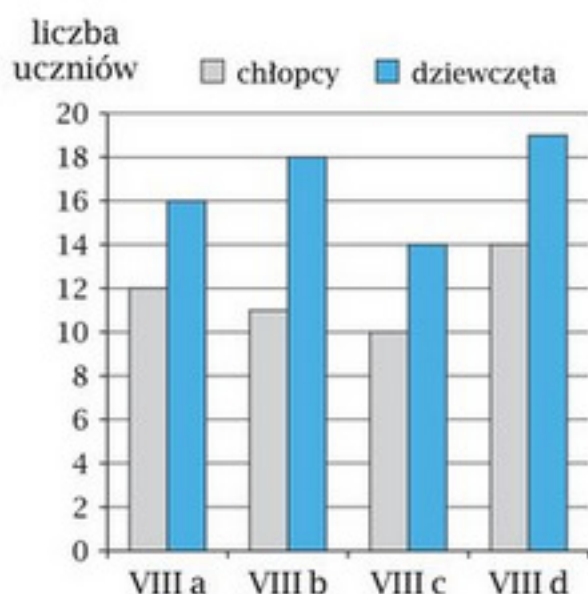
c) Ile gatunków roślin z oficjalnych spisów leków występuje w Polsce?

13. a) Rury wodociągowe w starożytnym Rzymie były wykonane z nieomal czystego ołowiu. Jedynie 7% tego materiału stanowiły zanieczyszczenia. Jaki procent tego materiału stanowił czysty ołów?

b) Pierwiastkiem będącym głównym budulcem Ziemi jest żelazo, stanowiące 32% masy naszej planety. Ósmym wśród najczęściej spotykanych pierwiastków jest glin (1,4% masy Ziemi). Ile razy więcej jest na Ziemi żelaza niż glinu?



14. Zmieszano 350 g 15-procentowego roztworu cukru z pewną ilością 20-procentowego roztworu cukru i otrzymano 0,5 kg roztworu. Ile cukru jest w tym roztworze?



15. Na diagramie przedstawiono, ile dziewcząt i ilu chłopców uczęszcza do ósmej klasy pewnej szkoły. W której klasie procent liczby dziewcząt jest największy?

16. Woda stanowi 90% pewnego świeżego owocu. Ten sam owoc po wysuszeniu zawiera 40% wody.

a) Ile waży owoc po wysuszeniu, jeżeli świeży ważył 600 g?

b) Ile ważył owoc przed wysuszeniem, jeżeli po wysuszeniu waży 120 g?

17. Suma liczb a i b wynosi c . Liczba a stanowi 40% liczby c .

a) Oblicz liczbę b , jeżeli $c = 1230$.

b) Jakim procentem liczby b jest liczba a ?

c) Jakim procentem liczby a jest liczba b ?

18. Do niedawna najczęściej stosowanym materiałem do wypełniania ubytków w zębach był amalgamat stomatologiczny. Powstaje on przez zmieszanie rtęci z proszkiem zawierającym kilka metali. Rtęć stanowi 40% amalgamatu, a 62% proszku to srebro, 26% — cyna, 10% — miedź, 2% — cynk.
- Ile potrzeba rtęci, by otrzymać 2 g amalgamatu?
 - Ile można otrzymać amalgamatu z 0,5 g rtęci?
 - Jaki procent amalgamatu stanowi miedź, a jaki — srebro?
 - Ile jest miligramów cynku w 1,5 g amalgamatu?



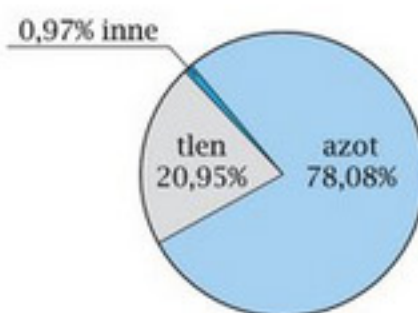
19. a) Jakie będzie stężenie roztworu otrzymanego w wyniku zmieszania 1 kilograma 50-procentowego roztworu kwasu siarkowego z 3 kilogramami 20-procentowego roztworu tego kwasu?
- b) Ile gramów wody należy dodać do 500 gramów 75-procentowego wodnego roztworu etanolu, aby otrzymać roztwór 45-procentowy?
20. Ustal, jakie będzie stężenie 1 kilograma 20-procentowego roztworu chlorku wapnia, jeśli doda się do niego:
- 3 kg wody,
 - 10 dag chlorku wapnia.

Sprawdź się

- Wskaż zdanie prawdziwe.
 - 45% liczby 90 wynosi 40.
 - Jeżeli 45% pewnej liczby wynosi 675, to ta liczba jest równa 1550.
 - Jeżeli liczba a jest sumą dwóch liczb, z których jedna stanowi 45% liczby a , to druga stanowi 65% liczby a .
 - Jeżeli 45% pewnej liczby wynosi 675, to 4,5% tej liczby wynosi 67,5.
- Na diagramie przedstawiono procentowy skład powietrza. Oznacza to, że w pokoju w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $2\text{ m} \times 3\text{ m} \times 2,5\text{ m}$ znajduje się:

- ok. $11,7\text{ m}^3$ azotu
 - 4 m^3 tlenu

- ok. $12,49\text{ m}^3$ azotu
 - ok. $3,35\text{ m}^3$ tlenu



2 Zmiana o dany procent. Lokaty bankowe

Przypomnij sobie

1. Dzięki intensywnej akcji wspierającej czytelnictwo liczba przeczytanych książek wzrosła w klasie o 25%. Ile książek przeczytano po tej akcji, jeśli przed nią liczba przeczytanych książek wynosiła 40?
2. Cenę płyty zwiększono ze 120 zł do 160 zł. O ile procent zwiększono tę cenę?
3. Cenę towaru obniżono o 20% i teraz wynosi ona 240 zł. Ile ten towar kosztował przed obniżką?
4. O ile procent liczba 135 jest mniejsza od 540?
5. Lodówka kosztowała 1234,50 zł. Jej cenę obniżono o 20%, a następnie podwyższono o 25%. Ile teraz kosztuje lodówka?
6. Marek zarobił w ciągu pierwszego miesiąca 1200 zł i co miesiąc otrzymywał 10% podwyżki. Oblicz, ile Marek zarobił w trzecim miesiącu.
7. W ciągu pierwszego tygodnia Anna zarobiła 800 zł. W ciągu drugiego tygodnia zarobiła o 200 zł więcej niż w pierwszym tygodniu. O ile procent zarobek Anny w drugim tygodniu był wyższy od jej zarobku w pierwszym tygodniu?

Poćwicz

8. Liczbę 1340 zwiększono o p procent. Znajdź tę liczbę, jeżeli:
a) $p = 7\%$ b) $p = 10\%$ c) $p = 28\%$ d) $p = 125\%$ e) $p = 245\%$
9. Liczbę 2160 zmniejszono o p procent. Znajdź tę liczbę, jeżeli:
a) $p = 8\%$ b) $p = 10\%$ c) $p = 32\%$ d) $p = 80\%$ e) $p = 99\%$
10. a) W tym miesiącu Basia otrzymała 140 zł kieszonkowego, czyli o 25% więcej niż w poprzednim miesiącu. Ile wynosiło kieszonkowe Basi w poprzednim miesiącu?
b) Po roku eksploatacji cena samochodu spadła o 14%. Jego właściciel może sprzedać swój samochód za 49 880 zł. Ile kosztował samochód rok wcześniej?

11. a) O ile procent podwyższono cenę sukienki, jeśli przed podwyżką sukienka kosztowała 245 zł, a po podwyżce 296,45 zł?
- b) Po wymianie pewnych elementów silnika zużycie paliwa spadło z 7,5 litra do 6,1 litra na 100 km. O ile procent spadło zużycie paliwa?
- c) Cenę kilograma cukru podwyższono o 12%, czyli o 36 groszy. Ile kosztuje kilogram cukru po podwyżce?
- d) Liczba drobnych kradzieży w pewnej dzielnicy zmalała w tym roku o 15%, czyli o 6. Ile kradzieży w tej dzielnicy zdarzyło się w tym roku?



12. Przyjrzyj się towarom na rysunku.

- a) Cenę którego z towarów obniżono o największy procent?
- b) Cenę którego z towarów obniżono o największą kwotę?
- c) Który z towarów był najtańszy przed obniżką?
- d) Który z towarów jest najtańszy po obniżce?

13. Ciśnienie atmosferyczne zmienia się wraz z wysokością nad poziomem morza — im wyżej, tym ciśnienie jest niższe. Średnie ciśnienie atmosferyczne na poziomie morza wynosi około 1013 hPa.
- a) Na wysokości 2 km nad poziomem morza ciśnienie jest o około 30% niższe niż na poziomie morza. Oblicz średnie ciśnienie atmosferyczne na wysokości 2 km n.p.m.
- b) Za pomocą balonu badawczego zmierzono, że na wysokości 5 km n.p.m. panuje ciśnienie 520 hPa i jest ono o 160% wyższe niż 3 km wyżej. Jakie ciśnienie panuje na wysokości 8 km n.p.m.?
- c) Na wysokości 4 km n.p.m. zanotowano ciśnienie 600 hPa, a 2 km wyżej — 450 hPa. O ile procent zmalała wartość ciśnienia między czwartym a szóstym kilometrem nad poziomem morza?
14. Oblicz wysokość odsetek, jakie otrzymasz po roku, jeśli wpłaciłeś do banku kwotę x , a oprocentowanie w skali roku wynosi p .
- a) $x = 10\,000$ zł, $p = 6\%$
- b) $x = 3000$ zł, $p = 5\%$
- c) $x = 900$ zł, $p = 5,52\%$
- d) $x = 2400$ zł, $p = 5,75\%$
15. Oblicz, ile pieniędzy wypłacisz z banku po roku, jeśli wpłaciłeś do banku kwotę x , a oprocentowanie w skali roku wynosi p .
- a) $x = 1000$ zł, $p = 5\%$
- b) $x = 20\,000$ zł, $p = 4,7\%$
- c) $x = 800$ zł, $p = 5,2\%$
- d) $x = 530$ zł, $p = 6\%$

16. Oblicz oprocentowanie lokaty w skali roku, jeśli po wpłaceniu na nią kwoty x i upływie roku stan tej lokaty wyniósł y .
- a) $x = 1000$ zł, $y = 1070$ zł c) $x = 3000$ zł, $y = 3159$ zł
 b) $x = 50\,000$ zł, $y = 52\,750$ zł d) $x = 12\,000$ zł, $y = 12\,630$ zł
17. Oblicz, ile pieniędzy wypłacisz w banku po dwóch latach, jeśli wpłaciłeś do banku kwotę x , a oprocentowanie w skali roku wynosi p .
- a) $x = 100\,000$ zł, $p = 4\%$ d) $x = 16\,000$ zł, $p = 5,5\%$
 b) $x = 20\,000$ zł, $p = 5\%$ e) $x = 50\,000$ zł, $p = 6,3\%$
 c) $x = 5000$ zł, $p = 6\%$ f) $x = 1\,000\,000$ zł, $p = 6,5\%$

Pomyśl

18. Na poniedziałkowych seansach w kinie było zajętych 60% miejsc na widowni. Na wtorkowe seanse przyszło o 20% więcej widzów niż na poniedziałkowe, a na środowe — o 20% mniej niż na wtorkowe.
- a) Czy na środowe seanse przyszło mniej widzów niż na poniedziałkowe, czy więcej?
- *b) O ile procent liczba widzów na seansach w środę różni się od liczby widzów na seansach w poniedziałek?
19. Cenę parasolki obniżano 3 razy, za każdym razem o 10%. Teraz można ją nabyć za 43 zł 74 gr. Ile kosztowała parasolka przed pierwszą z obniżek?
20. W pewnym kraju w ostatnich latach liczba ludności maleje o 0,2% rocznie. W 2014 roku ten kraj zamieszkiwało 80 mln ludzi. Oblicz, ile było w nim mieszkańców:
- a) w 2015 roku, b) w 2016 roku.



21. Na diagramie przedstawiono zawartość tłuszczu w kilku produktach spożywczych.

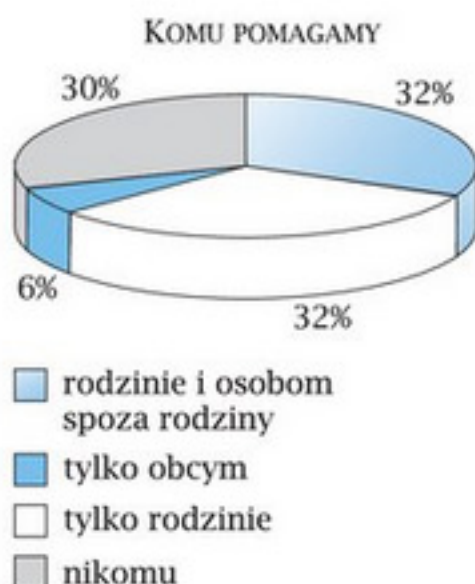
- a) Oblicz, o ile procent zawartość tłuszczu w pizzy jest większa od zawartości tłuszczu w hamburgerze.
- b) Oblicz, o ile procent zawartość tłuszczu w pizzy jest mniejsza od zawartości tłuszczu w hot dogu.

22. Liczba a jest większa od liczby b o 35%. O ile procent liczba $2a$ jest większa od liczby $2b$? Odpowiedź uzasadnij.

23. Podczas przygotowywania potraw produkty zwykle tracą 50% zawartości witaminy C, 10% witaminy B₁ i po 5% witamin B₂ i PP. Oblicz na podstawie tabeli, ile tych witamin powinny zawierać produkty, aby nawet po stratach mogły zaspokoić dzienne zapotrzebowanie młodzieży.

DZIENNE ZAPOTRZEBOWANIE
MŁODZIEŻY NA WITAMINY (w mg)

Witamina	Zapotrzebowanie
B ₁	1,6
B ₂	2,2
PP	14
C	102



24. Podczas przeprowadzania ankiety grupie 1100 osób zadano pytanie: *Komu w ostatnim roku udzieliłeś pomocy?* Odpowiedz na pytania na podstawie wykresu.

- Ile osób udzieliło pomocy tylko rodzinie?
- O ile punktów procentowych wyższy był odsetek osób, które pomogły tylko rodzinie, od odsetka osób, które nie pomogły nikomu?
- O ile punktów procentowych mniej osób pomogło tylko obcym niż tylko rodzinie?
- O ile procent więcej było osób, które pomogły tylko rodzinie, niż osób, które nie pomogły nikomu?

- O ile procent mniej osób pomogło tylko obcym niż tylko rodzinie?
- Jaki procent osób, które w ogóle komuś pomogły, pomogło tylko rodzinie?
- Wśród tych, którzy nie udzielili nikomu pomocy, 264 osoby wyjaśniły, że nie widziały takiej potrzeby. Jaki to procent wszystkich ankietowanych? Ilu ankietowanych nie udzieliło pomocy z innych powodów?
- Najczęstszą formą pomocy (przyznało się do niej 20% udzielających pomocy) było wsparcie finansowe. Ilu ankietowanych udzieliło takiej pomocy?

25. Na dwie lokaty wpłacono po 1000 zł. Oprocentowanie na jednej z nich było równe 4% w stosunku rocznym i pieniądze wypłacono z niej po upływie 1 roku. Oprocentowanie drugiej wynosiło 2% w stosunku rocznym i pieniądze wypłacono z niej po upływie 2 lat. Która wypłata była wyższa i o ile?
26. a) Utworzono dwie lokaty roczne o takim samym oprocentowaniu, na jedną wpłacono 2000 zł, a na drugą 1000 zł. Czy po upływie roku stan konta, na które wpłacono 2000 zł, jest dwa razy większy od stanu drugiego konta? Czy odsetki na koncie, na które wpłacono 2000 zł, są dwa razy większe od odsetek na drugim koncie?
- b) Na dwie lokaty roczne, 3-procentową i 6-procentową, wpłacono takie same kwoty. Czy po upływie roku stan konta 3-procentowego jest dwa razy mniejszy od stanu drugiego konta? Czy odsetki na koncie 3-procentowym są dwa razy mniejsze od odsetek na drugim koncie?

- *27. O ile procent wzrośnie po dwóch latach kwota na lokacie, której oprocentowanie wynosi 6% w skali roku?
- *28. Na pewną lokatę roczną wpłacono 10 000 zł. Po upływie dwóch lat, podczas których nie dokonywano żadnych wpłat ani wypłat, stan tej lokaty wyniósł 12 321 zł. Jakie było oprocentowanie tej lokaty w stosunku rocznym?
- *29. Która z ofert jest korzystniejsza?

a)

Oferta 1

Wpłać pieniądze na lokatę z oprocentowaniem równym 7% w stosunku rocznym i wypłać pieniądze po dwóch latach

Oferta 2

Wpłać pieniądze na lokatę, na której po upływie dwóch lat kwota wzrośnie o 14,5%.

b)

Oferta 1

Wpłać pieniądze na lokatę z oprocentowaniem równym 8% w stosunku rocznym i wypłać pieniądze po dwóch latach

Oferta 2

Wpłać pieniądze na lokatę, na której po upływie dwóch lat kwota wzrośnie o 16,5%.

Sprawdź się

- Janek ma 50 metalowych znaczków, a Tomek ma ich aż 68. Wskaż zdanie nieprawdziwe.
 - Liczba znaczków Janka stanowi około 42% liczby znaczków obu chłopców.
 - Tomek ma o 36% znaczków więcej niż Janek.
 - Janek ma o około 26,5% znaczków mniej niż Tomek.
 - Aby obaj chłopcy mieli po tyle samo znaczków, Tomek powinien oddać Jankowi około 10% liczby swoich znaczków.
- Pan Nowak przed podwyżką zarabiał 2450 zł, a po podwyżce — 3620 zł. Pan Janiak zarabiał 4900 zł, a po zmianie stanowiska — 3210 zł. Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

Pan Nowak zarabia teraz o około 47,8% więcej, a pan Janiak o około 34,5% mniej niż poprzednio.	P	F
Pan Nowak zarabiał o 50% mniej niż pan Janiak.	P	F
Pan Janiak zarabiał o 50% więcej niż pan Nowak.	P	F
Pan Nowak zarabia teraz o około 20% mniej niż pan Janiak.	P	F

3. Pani Agnieszka i pani Karolina wpłaciły do banku pewne kwoty pieniędzy na lokaty, których oprocentowanie w stosunku rocznym przedstawiono w poniższej tabeli.

	Kwota	Oprocentowanie
Pani Agnieszka	2500 zł	4%
Pani Karolina	3000 zł	3%

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedzi spośród A i B oraz spośród C i D.

Po roku wyższe odsetki otrzyma:

A. pani Agnieszka B. pani Karolina

Po roku wyższy stan konta będzie miała:

C. pani Agnieszka D. pani Karolina

4. Na lokatę roczną wpłacono 3800 zł. Po upływie roku stan lokaty wzrósł do 3895 zł. Jakie było oprocentowanie tej lokaty?

A. 1% B. 1,025% C. 2,5% D. 2,75%

5. Pewien bank oferuje oprocentowanie oszczędności w wysokości 3% rocznie. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

Jeśli wpłacimy na to konto 4000 zł, to po upływie roku kwota na koncie wzrośnie do 4030 zł.	P	F
Jeśli wpłacimy na to konto 4000 zł, to po upływie dwóch lat kwota na koncie wzrośnie do 4240 zł.	P	F
Kwota na koncie w tym banku po dwóch latach wzrośnie o 6%.	P	F

3 VAT i inne podatki

Przypomnij sobie

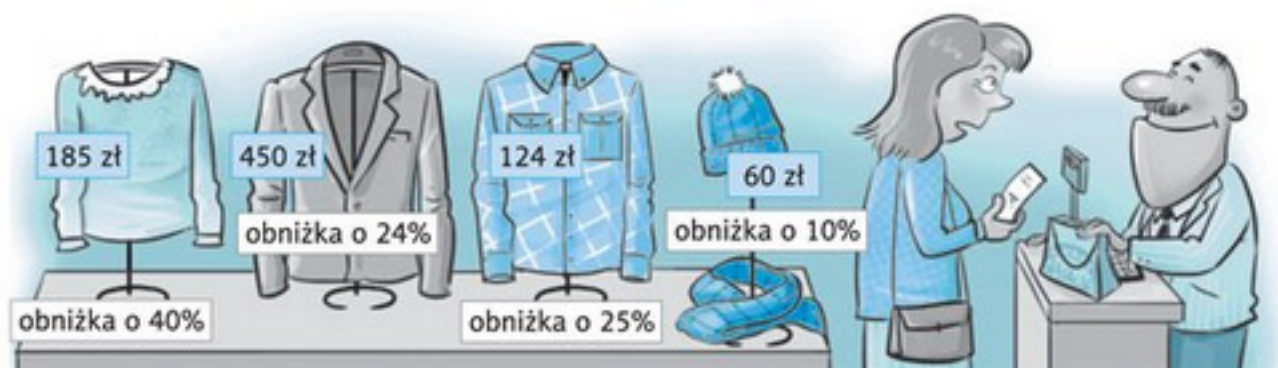
1. Ile wynosi liczba:

a) o 35% większa od 70,
 b) o 45% mniejsza od 70,
 c) o 7% większa od 127,
 d) o 8% mniejsza od 1350?

2. O ile procent:
- liczba 45 jest mniejsza od liczby 180,
 - liczba 180 jest większa od liczby 45,
 - liczba 1,38 jest mniejsza od liczby 4,2?
3. Liczbę x zwiększono o p procent i otrzymano liczbę b . Ile wynosi liczba x , jeżeli
- $b = 2000$, $p = 25\%$,
 - $b = 15\,499,2$, $p = 20\%$?
4. Liczbę x zmniejszono o p procent i otrzymano liczbę b . Ile wynosi liczba x , jeżeli
- $b = 900$, $p = 25\%$,
 - $b = 1135,68$, $p = 22\%$?

Poćwicz

5. W Polsce obowiązuje kilka stawek podatku VAT, czyli podatku od dóbr i usług doliczanego do ceny netto. Podstawową stawką tego podatku jest 23%. Na niektóre produkty i usługi nałożony jest podatek VAT w wysokości 5% lub 8%.
- Oblicz ceny brutto (czyli z podatkiem VAT) od ceny netto równej 1450 zł według trzech różnych stawek.
 - Oblicz ceny netto (bez podatku VAT), gdy cena brutto wynosi 1450 zł i została naliczona według trzech różnych stawek.
6. Stawka VAT przy sprzedaży instrumentów muzycznych wynosi 23%.
- Cena netto pewnego pianina wynosi 3500 zł. Ile kosztuje to pianino w sklepie?
 - Cena brutto pewnego fortepianu wynosi 58 560 zł. Jaka jest jego cena netto?
 - Cena brutto pewnego pianina elektronicznego wynosi 7 564 zł. Oblicz kwotę podatku VAT zawartą w tej cenie.
7. Pewien przebiegły właściciel sklepu podaje ceny towarów bez naliczonego podatku VAT (23%). Oblicz, ile trzeba zapłacić za każdą z przedstawionych na rysunkach rzeczy, jeżeli podaną obniżkę nalicza się od ceny brutto.



8. Pan Henryk, pan Bogdan, pan Karol i pan Tomasz musieli zapłacić podatki od darowizn. Podatki te zostały naliczone według następującej tabeli:

Kwota		Podatek
ponad	do	
	10 278 zł	12%
10 278 zł	20 556 zł	1233 zł 40 gr + 16% nadwyżki ponad 10 278 zł
20 556 zł		2877 zł 90 gr + 20% nadwyżki ponad 20 556 zł

Oblicz wysokość podatku, jeżeli:

- pan Henryk otrzymał 8900 zł,
- pan Bogdan otrzymał 18 900 zł,
- pan Karol otrzymał 28 900 zł,
- pan Tomasz otrzymał 20 556 zł.

Pomysł

- W pewnym hotelu cena netto jednego noclegu wynosi 150 zł. Klient zapłacił za trzy noclegi 486 zł. Jaką łącznie kwotę podatku VAT mu naliczono i według jakiej stawki?
- Pewna firma telekomunikacyjna oferuje telefoniczne połączenia międzynarodowe w cenie netto 20 gr za minutę. Do tej kwoty dolicza podatek VAT w wysokości 23% zaokrąglony do pełnych groszy.
 - Oblicz cenę brutto takiego połączenia trwającego minutę.
 - Oblicz kwotę podatku dla połączenia trwającego 30 minut, a następnie ustal, o ile niższy byłby podatek za to połączenie, gdyby był doliczany do ceny netto po zakończeniu rozmowy.
- Oblicz kwotę podatku VAT naliczonego według stawki 23%, jeżeli kwota brutto jest równa 12 340 zł.
 - Uzasadnij, że wysokość podatku VAT naliczanego według stawki 23% można obliczyć w przybliżeniu, mnożąc kwotę brutto przez 18,7%.
 - Skorzystaj ze sposobu opisanego w punkcie b) i oblicz wartość podatku VAT dla kwoty brutto 12 340 zł, a następnie porównaj ją z wartością otrzymaną w punkcie a).
- *12. Jakim procentem ceny brutto jest podatek w wysokości:
 - 5%,
 - 8%,
 - 23%?

13. Obywatele pewnego państwa płacą podatki zgodnie z zasadami opisanymi w poniższej tabeli.

Podstawa obliczenia podatku	Podatek wynosi
do 5000 talarów	15% podstawy obliczenia
powyżej 5000 talarów	750 talarów + 20% nadwyżki ponad 5000 talarów

- a) Oblicz, jaki podatek trzeba zapłacić, jeśli podstawa obliczenia wynosi 4000 talarów, a jaki — gdy wynosi 8000 talarów.
- b) Od jakiej podstawy obliczono podatek w wysokości 480 talarów, a od jakiej — podatek równy 1270 talarów?
- c) Po odjęciu podatku od podstawy pozostało 3230 talarów. Ile wynosiła podstawa obliczenia tego podatku?

- *14. W Polsce podatek od dochodów (PIT) za rok 2016 obliczano według poniższej tabeli.

Podstawa obliczenia podatku	Podatek wynosi
do 85 528 zł	18% podstawy obliczenia minus 556,02 zł.
ponad 85 528 zł	14 839,02 zł + 32% nadwyżki ponad 85 528 zł.

- a) Podstawa obliczenia podatku pani Hani wynosiła 85 000 zł, a pani Gieni – 86 000 zł. O ile wyższy podatek zapłaciła pani Gienia niż pani Hania?
- b) Porównaj podatek PIT dla podstawy 85 528 zł obliczony według pierwszego i drugiego sposobu.
- c) Od jakiej podstawy opodatkowania naliczono następujący podatek?

11 143,98 zł 14 743,98 zł 14 990,06 zł 19 470,06 zł

Sprawdź się

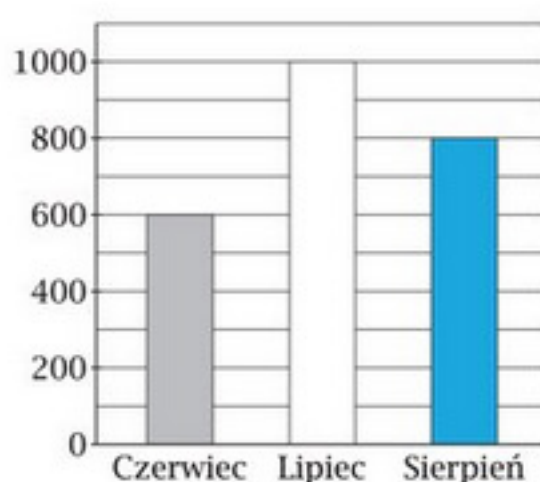
1. Poniżej podano powierzchnie mieszkań na różnych osiedlach oraz ceny jednego metra kwadratowego z podatkiem VAT (8%) albo bez niego w tych mieszkaniach. Wskaż najdroższe mieszkanie.
- A. Powierzchnia 55 m², 4500 zł/m² z podatkiem VAT.
- B. Powierzchnia 77 m², 3330 zł/m² bez podatku VAT.
- C. Powierzchnia 48 m², 5000 zł/m² z podatkiem VAT.
- D. Powierzchnia 68 m², 3500 zł/m² bez podatku VAT.

2. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

Cena brutto pewnego towaru wynosi 8900 zł. Cena netto tego towaru przy podatku VAT równym 5% wynosi 8476,19 zł.	P	F
Cena netto pewnego towaru wynosi 8900 zł. Jego cena brutto przy podatku VAT równym 8% wynosi 8240,74 zł.	P	F
Cena netto pewnego towaru wynosi 8900 zł, a cena brutto jest równa 10 947 zł. Stawka podatku VAT wynosi więc 23%.	P	F
Cena netto pewnego towaru wynosi 8900 zł. Różnica między ceną brutto tego towaru z podatkiem VAT równym 23% a ceną brutto z podatkiem VAT równym 5% wynosi 1602 zł.	P	F

4 Czytanie diagramów

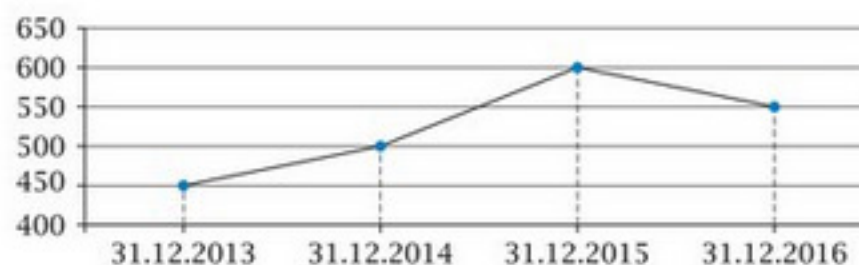
Przypomnij sobie



1. Na diagramie przedstawiono, ile sprzedano biletów na kolejkę wąskotorową w ciągu trzech miesięcy.

- Ile biletów sprzedano w ciągu tych trzech miesięcy?
- O ile więcej biletów sprzedano w sierpniu niż w czerwcu?
- O ile procent zmniejszyła się liczba sprzedanych biletów w sierpniu w porównaniu z lipcem?

2. Na diagramie przedstawiono, jak zmieniała się liczba zwierząt w pewnym ogrodzie zoologicznym w okresie od 2013 roku do 2016 roku.



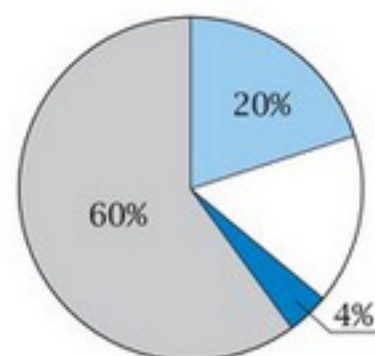
- Na koniec którego roku w tym zoo było najwięcej zwierząt?
- W którym roku liczba zwierząt w tym zoo się zmniejszyła?
- W którym roku nastąpił największy przyrost liczby zwierząt?

3. Na pewnym skrzyżowaniu ulic zliczono, ile pojazdów przejeżdża przez nie w ciągu dnia. Wyniki przedstawiono na diagramie.

a) Jaki procent pojazdów przejeżdżających przez to skrzyżowanie stanowiły autobusy i busy?

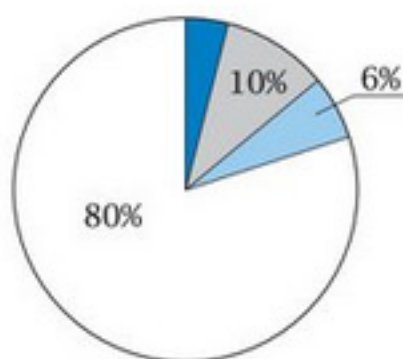
b) Ile razy więcej przejechało przez to skrzyżowanie samochodów ciężarowych niż motocykle?

c) Jaką miarę ma kąt środkowy wycinka diagramu odpowiadającego samochodom osobowym?



- samochody osobowe
- samochody ciężarowe
- autobusy i busy
- motocykle

Poćwicz



- biały
- niebieski
- żółty
- zielony

4. Pewne biuro ma zapas papieru w czterech kolorach. Na diagramie przedstawiono, jaką część tego zapasu stanowi papier w każdym z kolorów.

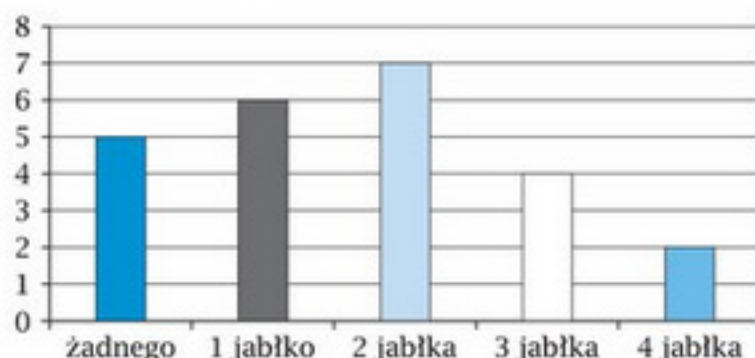
a) Jaki procent zapasu papieru stanowi papier zielony?

b) Ile razy więcej papieru białego niż papieru niebieskiego ma to biuro?

c) Biuro ma 500 arkuszy papieru niebieskiego. Z ilu arkuszy składa się cały zapas papieru?

d) Ile arkuszy żółtego papieru ma to biuro?

5. Uczniów pewnej klasy zapytano, ile jabłek zjedli w ciągu ostatniego tygodnia. Na diagramie przedstawiono ich odpowiedzi.



a) Ilu uczniów udzieliło odpowiedzi na to pytanie?

b) Ile jabłek zjedli uczniowie w ciągu tygodnia?

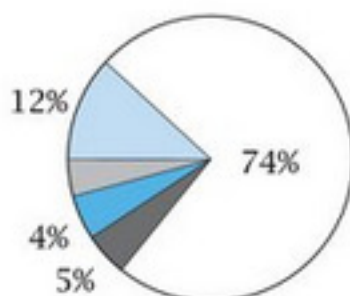
c) Jaki był procent uczniów, którzy zjedli w ciągu tygodnia 1 jabłko?

d) Jaki procent wszystkich zjedzonych przez uczniów jabłek zjedli ci, którzy w ciągu tygodnia zjedli tylko 1 jabłko?

Pomyśl

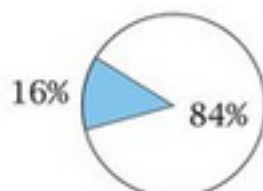
SKŁAD SUCHARKÓW

- węglowodany
- białko
- błonnik
- tłuszcz
- inne składniki



SKŁAD WĘGLOWODANÓW ZAWARTYCH W SUCHARKACH

- skrobia
- cukry



6. a) Jaki procent masy sucharków stanowi błonnik?

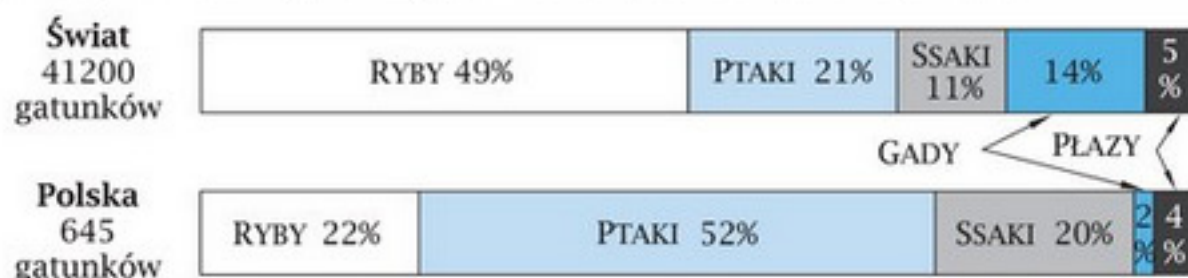
b) Ile razy więcej jest w sucharkach białka niż tłuszczu?

c) Czy składniki, które nie są węglowodanami stanowią nieco ponad $\frac{1}{4}$ masy sucharków?

d) Ile gramów tłuszczu zawiera jeden sucharek o masie 12 g?

*e) Jaki procent masy sucharków stanowi zawarta w nich skrobia?

7. Diagram przedstawia, jakich gatunków kręgowców jest najwięcej.



a) Jaki procent gatunków kręgowców żyje w Polsce?

b) Ile gatunków ssaków żyje w Polsce?

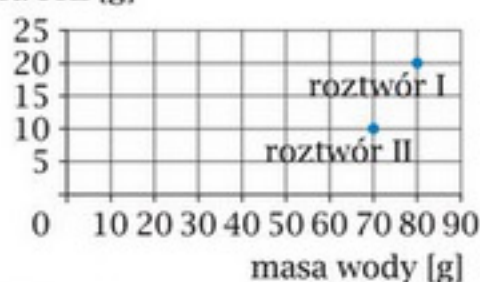
c) Jaki procent gatunków ptaków żyje w Polsce?

8. Sporządzono dwa wodne roztwory soli. Ich skład przedstawiono na poniższym wykresie.

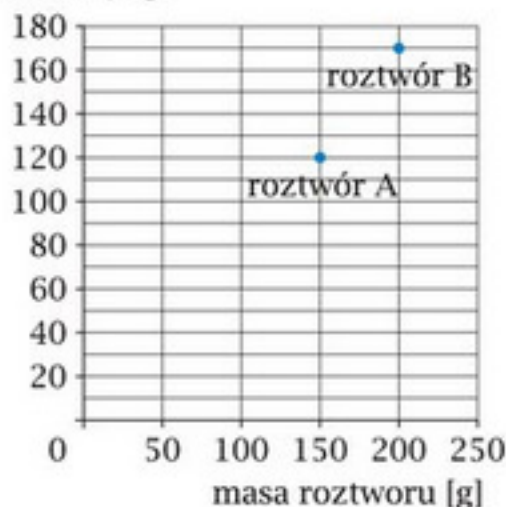
a) Oblicz stężenia tych roztworów.

b) Przygotowano 80 g roztworu 15-procentowego. Jakie współrzędne powinien mieć punkt na powyższym wykresie, który przedstawiałby skład tego roztworu?

masa soli [g]



masa wody [g]

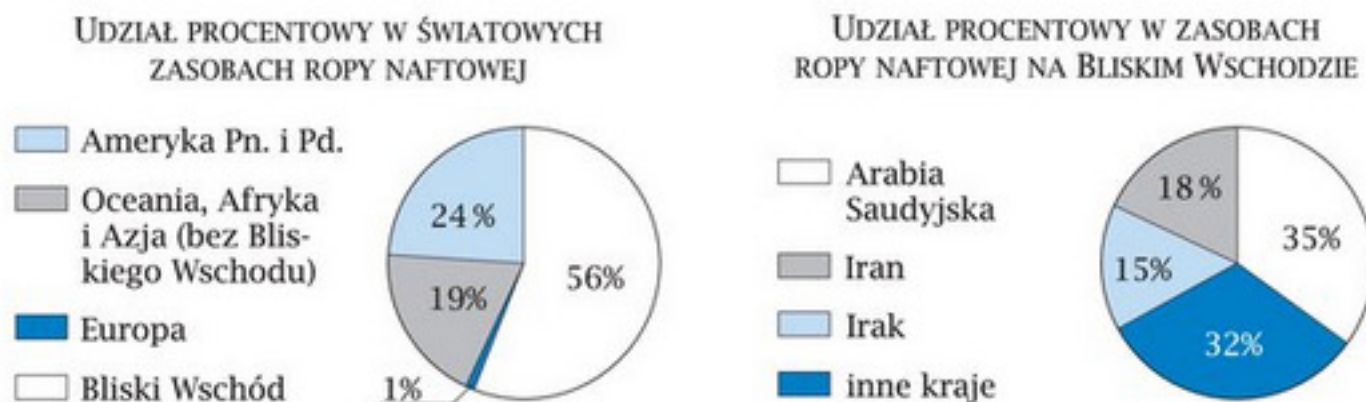


9. Sporządzono dwa wodne roztwory cukru. Ich masę oraz masę wody podano na poniższym wykresie.

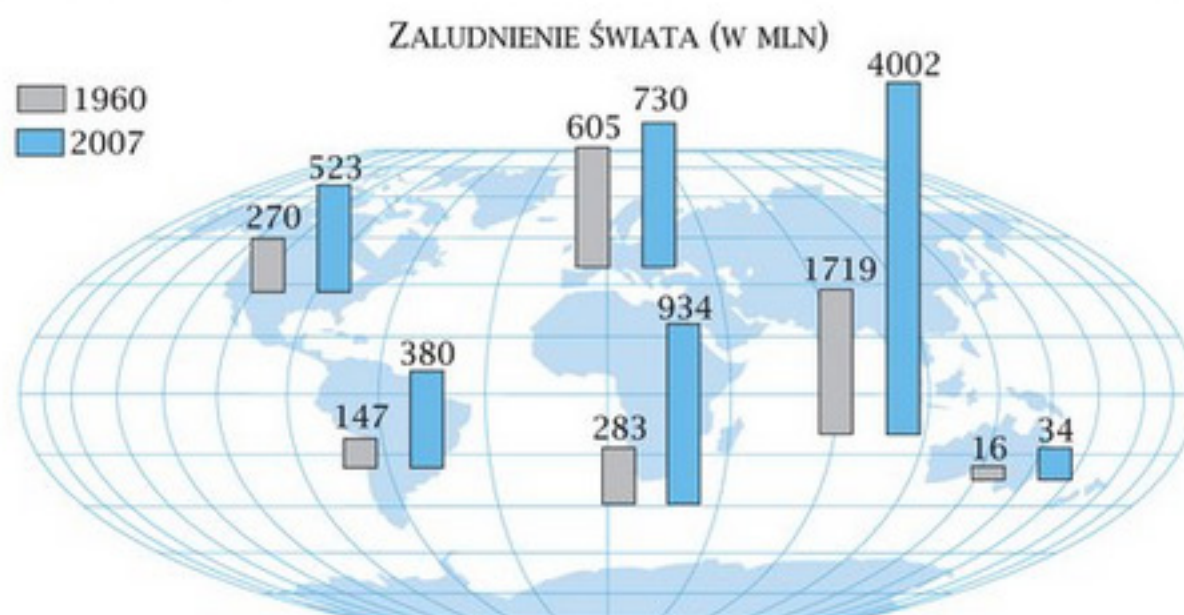
a) Oblicz stężenie każdego z tych roztworów.

b) Przygotowano 50 g roztworu 14-procentowego. Jakie współrzędne powinien mieć punkt na powyższym wykresie, który odpowiadałby temu roztworowi?

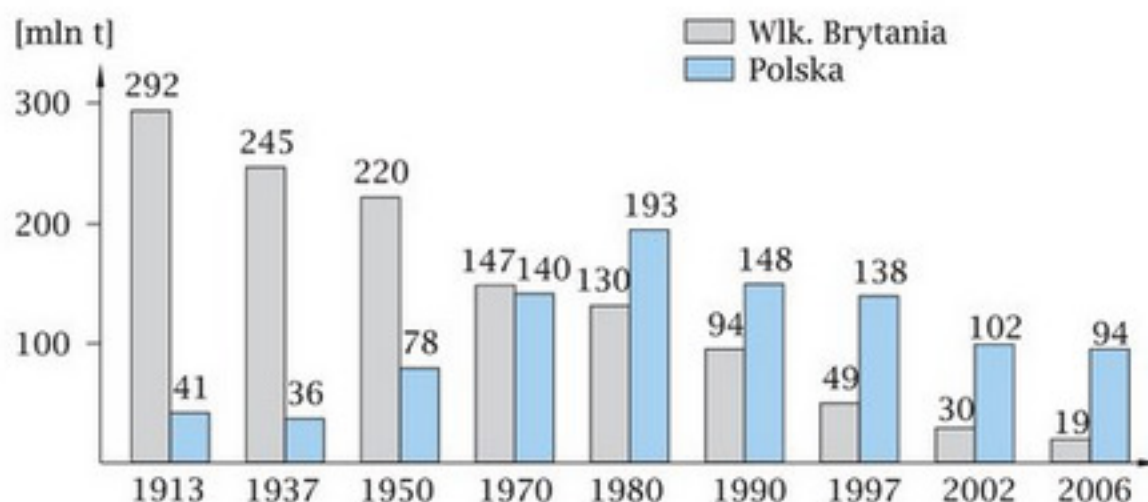
10. Zasoby światowe ropy naftowej na początku XXI wieku oceniano na 140 mld ton. Poniższe wykresy przedstawiają wydobycie tego surowca. Na ich podstawie odpowiedz na pytania.



- Jaką część światowych zasobów ropy naftowej stanowią zasoby Oceanii, Afryki i Azji (włączając Bliski Wschód)?
 - Czy prawdą jest, że zasoby ropy naftowej na Bliskim Wschodzie są ponad dwukrotnie większe od zasobów w obu Amerykach?
 - Ile ton ropy naftowej znajduje się w zasobach Oceanii, Afryki i Azji bez Bliskiego Wschodu?
 - O ile ton europejskie zasoby ropy naftowej są mniejsze od zasobów amerykańskich?
- *e) Jaki procent światowych zasobów ropy naftowej znajduje się w Arabii Saudyjskiej?
- *f) Ile ton ropy naftowej znajduje się w zasobach Iranu?
11. a) Które miejsce pod względem liczby ludności zajmowała Europa w 1960 roku, a które — w 2007 roku?
- b) Które z kontynentów miały niemal taką samą liczbę ludności w 1960 roku? Czy podobnie było w roku 2007?
- c) Ustal, na którym kontynencie liczba ludności wzrosła o największy procent.



12. Poniższy diagram przedstawia wydobycie węgla kamiennego w Wielkiej Brytanii i w Polsce.

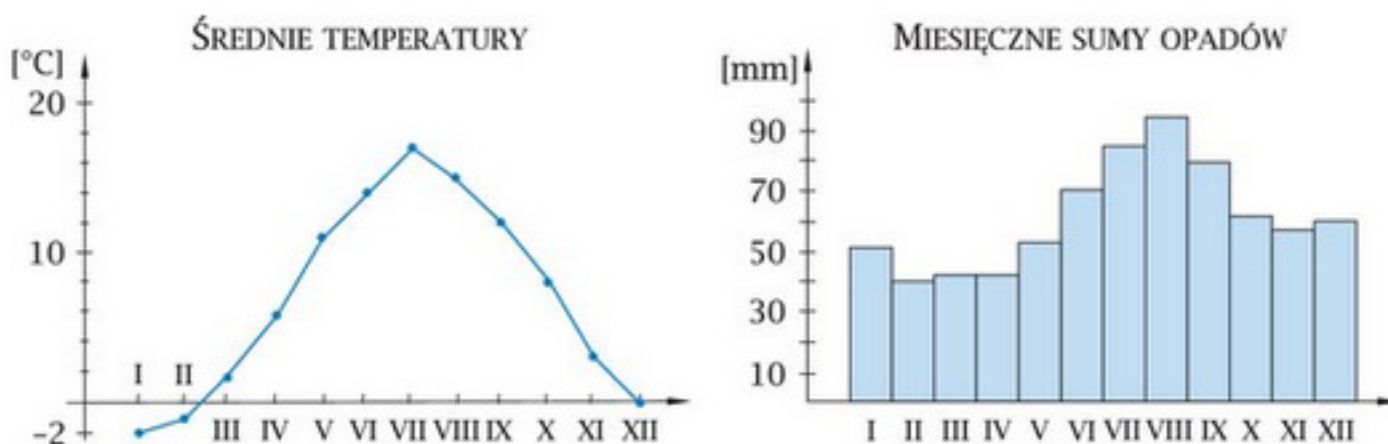


- a) O ile zmniejszyło się wydobycie węgla kamiennego w Wielkiej Brytanii między rokiem 1913 a 1937?
- b) W którym roku różnica między wydobyciem węgla w obu krajach była największa?
- c) Oblicz, jaki procent węgla kamiennego wydobywanego na świecie pochodził łącznie z Wielkiej Brytanii i z Polski w 1913 roku, w 1980 roku i w 2006 roku.

WYDOBYCIE WĘGLA KAMIENNEGO NA ŚWIECIE

1913 rok	1216 mln t
1980 rok	2728 mln t
2006 rok	5370 mln t

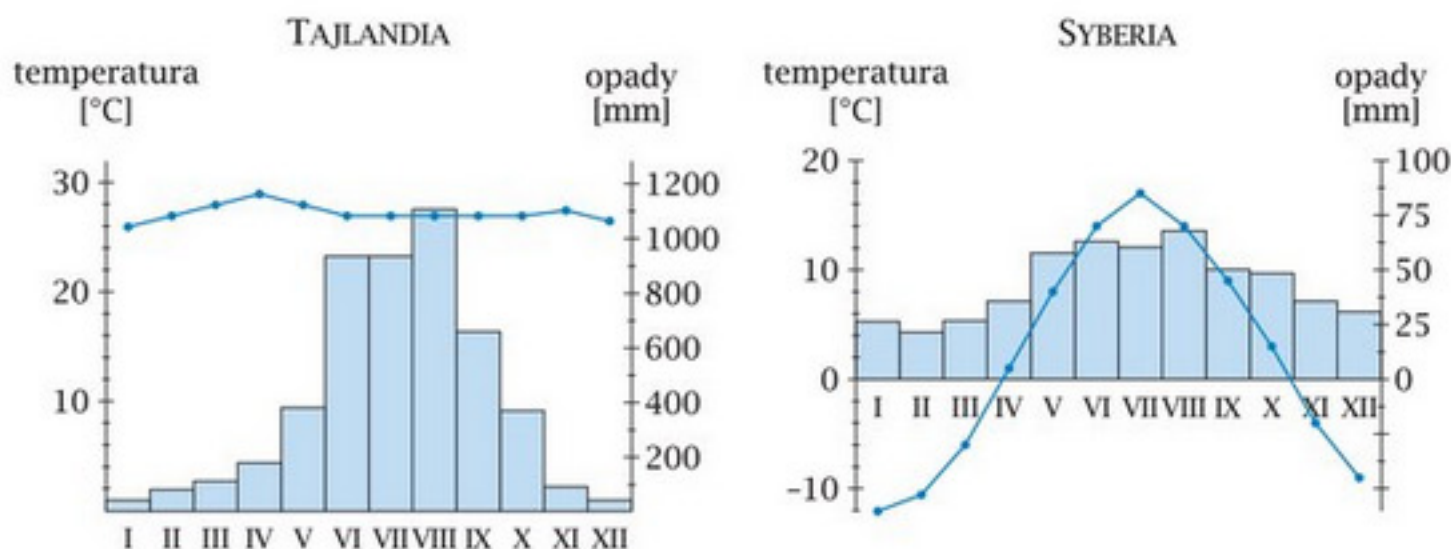
13. Diagramy przedstawiają, jak zmienia się pogoda w Koszalinie.



- a) Który miesiąc jest w Koszalinie najcieplejszy, a który — najobfitszy w opady?
- b) Jaka jest w Koszalinie różnica między średnimi temperaturami miesiąca najcieplejszego i najzimniejszego?
- c) Między którymi kolejnymi miesiącami obserwuje się w Koszalinie największą różnicę średnich temperatur?
- d) W jakich miesiącach średnia temperatura wynosi około 14-15°C?
- e) Które półrocze jest bogatsze w opady?

Sprawdź się

1. Na diagramach przedstawiono średnie miesięczne temperatury powietrza i miesięczne sumy opadów w pewnych miejscach w Tajlandii i na Syberii.



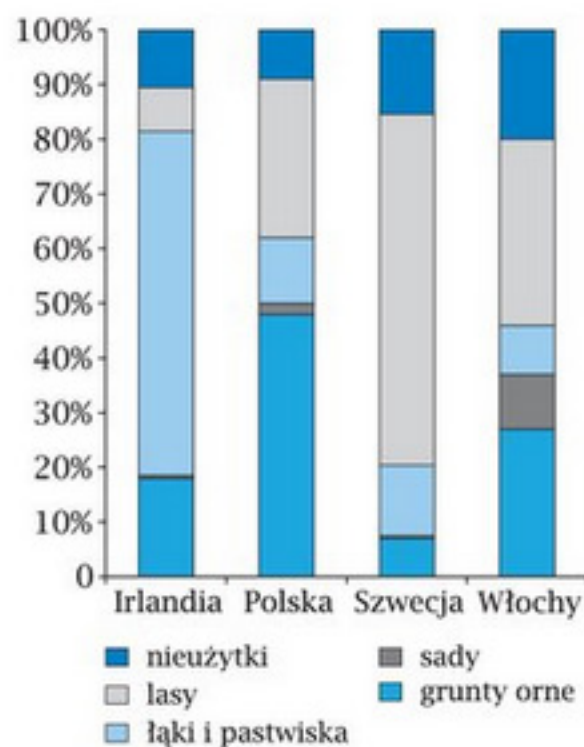
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Średnie miesięczne temperatury powietrza w Tajlandii nie spadają poniżej 25°C.	P	F
Różnica między najwyższą i najniższą średnią temperaturą miesięczną na Syberii jest większa niż 25°C.	P	F
Zarówno w Tajlandii, jak i na Syberii największe opady wypadają w miesiącach letnich.	P	F

2. Na diagramie obok przedstawiono strukturę użytkowania ziemi w czterech krajach europejskich.

Który wniosek z tego diagramu jest niepoprawny?

- A. Lasy zajmują mniej niż $\frac{1}{3}$ powierzchni Polski.
 B. Spośród tych czterech krajów sady zajmują największą część ziemi we Włoszech.
 C. Lasy w Szwecji zajmują w przybliżeniu taką samą część ziemi co łąki i pastwiska w Irlandii.
 D. Łąki i pastwiska zajmują większą część ziemi we Włoszech niż w Szwecji.



5 Podział proporcjonalny

Przypomnij sobie

1. Ustal, w jakim stosunku podzielono pewną kwotę, jeśli:
 - a) jedna z części była 3 razy większa od drugiej,
 - b) jedna z części stanowiła połowę drugiej.
2. Dwaj koledzy Tadek Niejadek i Andrzej Łakomy postanowili złożyć się na pizzę w stosunku 1 : 2. Ile powinien zapłacić każdy z nich, jeśli pizza kosztowała:
 - a) 30 złotych,
 - b) 18 złotych?
3. Podaj, w jakim stosunku podzielono 1200 kg złota, jeśli podzielono tę masę na:
 - a) 300 kg i 900 kg,
 - b) 200 kg, 300 kg i 700 kg,
 - c) 200 kg, 400 kg i 600 kg.

Poćwicz

4. a) Tombak to stop stosowany jako imitacja złota, otrzymywany w wyniku stopienia miedzi z cynkiem w stosunku 17 : 3. Ile potrzeba miedzi, a ile cynku, aby otrzymać 50 g tombaku?
b) Inwar to stosowany w precyzyjnych urządzeniach stop żelaza i niklu. Żelazo stanowi 64% masy tego stopu. W jakim stosunku powinny być masy tych metali, aby po ich stopieniu otrzymać inwar?
c) Z nowego srebra (zwanego alpaka) wytwarza się sztucce i części instrumentów medycznych i muzycznych. Jest to stop miedzi, niklu i cynku w stosunku 6 : 1 : 3. Ile potrzeba stopić niklu i cynku z 3 kg miedzi, żeby otrzymać ten stop?
5. Gotując kapustę z grochem, pan Marian miesza 0,8 kg kapusty kiszonej i 0,6 kg grochu.
 - a) Jaki jest stosunek masy kapusty do masy grochu?
 - b) Ile należy wziąć kapusty, a ile — grochu, aby zgodnie z przepisem pana Mariana otrzymać 3,5 kg kapusty z grochem?
6. Gaz LPG, stosowany np. jako paliwo samochodowe, to mieszanka propanu i butanu. W pewnej butli znajduje się gaz LPG, którego 60% objętości stanowi propan, a 40% — butan.
 - a) W jakim stosunku zmieszano propan i butan w tej butli?
 - b) Ile litrów każdego z tych gazów należy wziąć, aby otrzymać 400 litrów LPG?

7. Według pewnego przepisu do przygotowania deseru potrzebne jest 600 g jogurtu, 500 g owoców i 50 g cukru.
- Jaki jest stosunek mas tych składników?
 - Jaka jest masa każdego z tych składników w porcji deseru o masie 92 g?
8. Hania przygotowała mieszankę herbacianą, na którą składają się: cztery łyżki czarnej herbaty, 1 łyżka herbaty zielonej i 3 łyżki suszonych owoców.
- Jaki jest stosunek objętości tych składników?
 - Jaką objętość każdego z tych składników trzeba wziąć, aby wypełnić tą mieszanką półlitrowy słoik?

Pomyśl

9. W misce zmieszano 48 orzechów dwóch rodzajów w taki sposób, że stosunek liczby orzechów laskowych do liczby orzechów włoskich wynosi 5 : 1. Ile orzechów laskowych jest w misce?
10. Dwóch braci chce podzielić się otrzymaną od babci kwotą 120 zł. Określ, ile dostanie każdy z nich, jeśli podziału dokonają w stosunku:
- a) 1 : 2 b) 1 : 3 c) 1 : 5 d) 2 : 3 e) 5 : 7 f) 9 : 11
11. W płocie są 42 sztachety. Stosunek liczby pomalowanych sztachet do niepomalowanych jest równy 3 : 4. Ile sztachet pozostało do pomalowania?



12. Ile potrzeba soku pomarańczowego, a ile grejpfrutowego, aby po zmieszaniu ich w stosunku 2 : 3 otrzymać 3 litry napoju?
13. W przepisie na bardzo słodkie ciasto mąka i cukier powinny być zmieszane tak, aby ich objętości były w stosunku 5 : 3.
- Ile mąki powinno się mieszać z 4 szklankami cukru, by upiec takie ciasto?
 - Ile cukru powinno się mieszać z 3 szklankami mąki, by zachować proporcje z tego przepisu?
14. Ogrodnik chce mieszać nasiona trawy gatunku A z nasionami gatunku B tak, aby ich masy były w stosunku 4 : 3.
- Ile nasion gatunku B potrzebuje ogrodnik, jeśli ma 2 kg nasion gatunku A?
 - Ile nasion gatunku A potrzebuje ogrodnik, jeśli ma 75 dag nasion gatunku B?

15. Właściciel dwóch psów, labradora i jamnika, dzieli karmę tak, by stosunek masy karmy labradora do masy karmy jamnika był równy 5 : 2.
- Ile karmy dostanie labrador, gdy masa porcji jamnika wynosi 15 dag?
 - Ile karmy dostanie jamnik, gdy masa porcji labradora wynosi 50 dag?
16. Wstążkę podzielono na dwa kawałki w stosunku 1 : 4. Długości tych kawałków różniły się o 60 cm. Jaką długość miał każdy z nich?
17. Farby niebieską i czerwoną zmieszano w stosunku 2 : 3. Farby czerwonej było o 0,5 litra więcej niż farby niebieskiej. Ile litrów każdej z farb zmieszano?
18. Dwaj pracownicy podzielili się zapłatą (proporcjonalnie do wykonanej pracy) w stosunku 2 : 5. Jeden z nich dostał o 450 złotych więcej niż drugi. Jaką zapłatę otrzymali do podziału?
19. Obok podano stosunki długości dnia do długości nocy w czerwcu w trzech krajach. Oblicz długość czerwcowego dnia w każdym z tych krajów.

Polska	2 : 1
Urugwaj	5 : 7
Japonia	5 : 3

20. a) Jak podzielić 18 litrów wody na trzy części w stosunku 1 : 2 : 3?
 b) Jak podzielić trasę 40 km na cztery odcinki w stosunku 1 : 2 : 3 : 2?
 c) Jak podzielić 300 000 zł na pięć rat w stosunku 1 : 2 : 3 : 4 : 5?
21. Stosunek miar kątów trójkąta wynosi 1 : 3 : 5. Oblicz te miary.

22. Sznur rozcięto na trzy kawałki, których długości były w stosunku 1 : 2 : 7. Najdłuższy kawałek był o 1,5 metra dłuższy od najkrótszego. Jak długi był ten sznur przed rozcięciem?



Sprawdź się

1. Stosunek długości polskiej flagi do jej szerokości powinien być równy 8 : 5. Dołącz poniższe zdania. Wybierz odpowiedzi spośród A i B oraz spośród C i D.
- Jeżeli flaga ma szerokość 1,2 m, to jej długość powinna wynosić:
- A. 1,56 m B. 1,92 m
- Flaga o długości 1,2 m powinna mieć szerokość równą:
- C. 0,75 m D. 0,8 m

2. Flaga Indonezji ma kształt prostokąta i ma te same barwy co flaga Polski, ale pas czerwony znajduje się nad pasem białym, a stosunek długości do szerokości wynosi 3 : 2. Szerokość pewnej flagi Indonezji jest o 10 cm krótsza od jej długości. Jeśli literą x oznaczmy szerokość tej flagi w centymetrach, to które z poniższych równań wynika z podanych informacji?

A. $\frac{3}{2} = \frac{x}{x-10}$ B. $\frac{2}{3} = \frac{x+10}{x}$ C. $\frac{x-10}{x} = \frac{3}{2}$ D. $\frac{x}{x+10} = \frac{2}{3}$

3. Flaga Monako ma kształt prostokąta i taki sam układ barw jak flaga Indonezji, ale inne proporcje. Długość tej flagi jest równa 125% jej szerokości. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

Szerokość flagi Monako stanowi 0,8 jej długości.	P	F
Stosunek długości do szerokości flagi Monako jest równy 5 : 4.	P	F
Suma długości boków pewnej flagi Monako to 5,4 m. Wynika stąd, że szerokość tej flagi jest o 30 cm krótsza od jej długości.	P	F

6 Obliczanie prawdopodobieństw

Przypomnij sobie

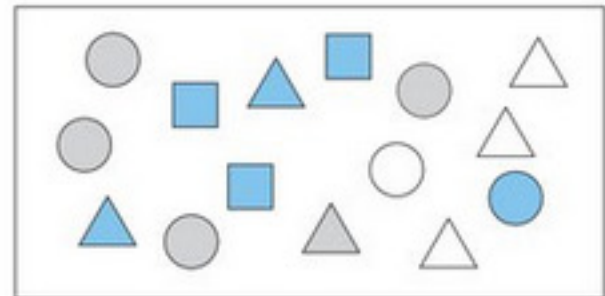
- Rzucamy sześcienną kostką do gry.
 - Ile jest możliwych różnych wyników tego rzutu?
 - Ile możliwych wyników tego rzutu jest większych od 4?
 - Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wynik rzutu będzie większy od 4?
- W loterii jest 200 losów i tylko jeden z nich daje główną nagrodę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pierwsza osoba kupująca los w tej loterii:
 - wyberze los z główną nagrodą,
 - wyberze los, który nie daje głównej nagrody?
- W pudełku znajdują się dwie kule białe, trzy czarne i cztery niebieskie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana z tego pudełka kula:
 - jest biała,
 - nie jest niebieska,
 - jest biała lub czarna,
 - jest zielona,
 - jest biała, czarna lub niebieska.

Poćwicz

4. W worku znajduje się 20 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 20. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba na wylosowanej kuli:
- a) jest parzysta,
 - b) jest podzielna przez 10,
 - c) jest wielokrotnością liczby 3,
 - d) jest pierwsza,
 - e) jest kwadratem liczby całkowitej,
 - f) jest jednocyfrowa,
 - g) jest trzycyfrowa,
 - h) jest mniejsza od 30.
5. Mamy wylosować jedną literę z jednego ze słów: BARBARA, RABARBAR czy BAR. Które słowo należy wybrać, żeby prawdopodobieństwo wylosowania podanej poniżej litery było największe?
- a) A b) B c) R
6. Obok trojga osób przejechał samochód o numerze rejestracyjnym złożonym z siedmiu znaków: ABCD123.
- a) Pierwsza osoba zapamiętała tylko jeden znak tego numeru. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że zapamiętanym znakiem była cyfra, a jakie — że litera?
 - b) Druga osoba zapamiętała jedną z cyfr. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że zapamiętaną przez nią cyfrą było 3?
 - c) Trzecia osoba zapamiętała jedną z liter. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że zapamiętaną przez nią literą było C?
7. a) Martyna i Michał rzucają sześcienną kostką do gry. Martyna wyrzuciła 2 oczka. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że Michał wyrzuci więcej oczek?
- b) Kuba i Ela losują po jednej z sześciu kart, na których zapisane są kolejne liczby naturalne od 1 do 6. Kuba wyciągnął kartę z liczbą 2. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że Ela z pozostałych kart wyciągnie taką, na której będzie zapisana liczba większa od 2?
8. W miseczce jest 30 orzechów laskowych i 20 migdałów.
- a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losując z tej miseczki jeden orzech, trafimy na orzech laskowy?
 - b) Okazało się, że jako pierwszy został wylosowany migdał. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że sięgając do miseczki po raz drugi, znów trafimy na migdał?
 - c) Okazało się, że jako dwa pierwsze wylosowano migdały. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że sięgając do miseczki po raz trzeci, tym razem trafimy na orzech laskowy?

Pomyśl

9. W pudełku znajdują się żetony o kształtach i kolorach takich, jak na rysunku obok. Z pudełka wyciągamy losowo jeden żeton.



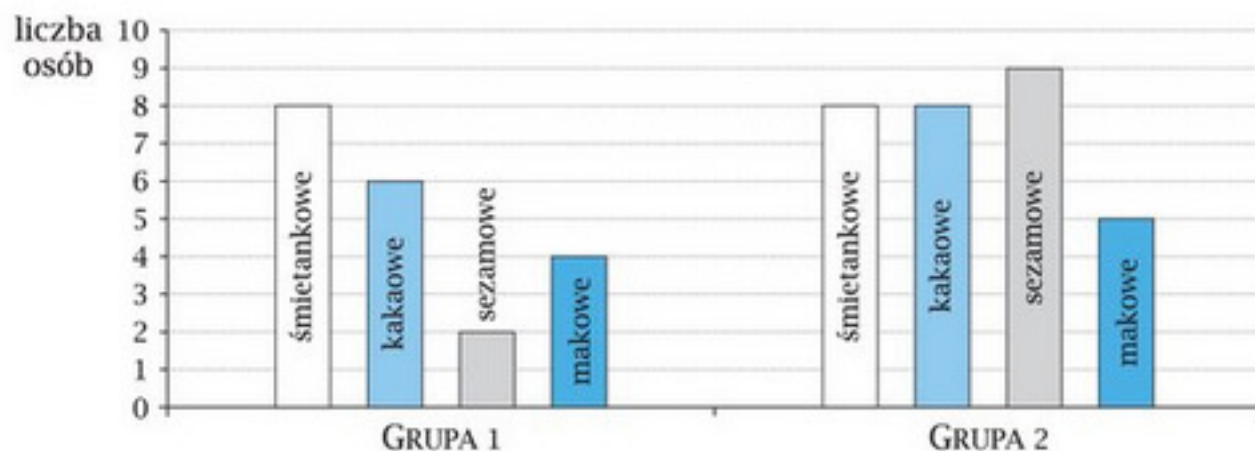
- Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wyciągnięty żeton to biały trójkąt?
- Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wyciągnięty żeton jest szary?
- Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wyciągnięty żeton jest okrągły?
- Wyciągnięty żeton jest niebieski. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest on kwadratowy?
- Wyciągnięty żeton jest trójkątny. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest on biały?
- Wyciągnięty żeton jest kwadratowy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest on niebieski?
- Wyciągnięty żeton jest biały. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest on kwadratowy?

	Solone	Bez soli
krakersy cebulowe	20	40
krakersy serowe	30	10

10. W misce znajdują się krakersy serowe i cebulowe, a niektóre z nich są solone. Liczby poszczególnych krakersów w misce przedstawiono w tabeli obok.

- Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania z miski solonego krakersa serowego?
 - Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania z miski krakersa cebulowego?
 - Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania z miski krakersa bez soli?
 - Wylosowany krakers jest cebulowy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że nie jest on solony?
 - Wylosowano krakersa bez soli. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest on cebulowy?
11. a) W worku z orzechami stosunek orzechów pełnych do orzechów pustych jest równy 7:1. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania z tego worka orzecha pełnego?
- b) W miseczce zmieszano oliwki czarne z zielonymi w stosunku 3:7. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana oliwka będzie czarna?
- c) W torebce pastylki miętowe zmieszano z owocowymi i cytrynowymi w stosunku 4:3:2. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana pastylka będzie owocowa?

12. Dwóm grupom osób dano do wyboru krówki o czterech smakach: śmietankowe, kakaowe, sezamowe i makowe. Na poniższym diagramie przedstawiono, jakie smaki były wybierane.



- W której grupie prawdopodobieństwo trafienia na osobę, która wybrała krówkę śmietankową, jest wyższe?
 - W której grupie prawdopodobieństwo trafienia na osobę, która wybrała krówkę kakaową, jest wyższe?
 - Ile razy prawdopodobieństwo trafienia na osobę, która wybrała krówkę sezamową, jest wyższe w grupie 2 niż w grupie 1?
 - Jakie jest prawdopodobieństwo trafienia na osobę, która wybrała krówkę makową w grupie 1, jakie — w grupie 2, a jakie — w grupie powstałej przez połączenie obu grup?
- *13. Organizatorzy loterii przygotowali 60 losów, wśród których 5 jest wygrywających, a pozostałe są przegrywające.
- Ile przegrywających losów należy dołożyć, aby prawdopodobieństwo wygrania w tej loterii było równe $\frac{1}{15}$?
 - Ile przegrywających losów należy zabrać, aby prawdopodobieństwo wygrania w tej loterii było równe $\frac{1}{8}$?
 - Ile wygrywających losów należy dołożyć, aby prawdopodobieństwo wygrania w tej loterii było równe $\frac{1}{6}$?
 - Należy dołożyć pewną liczbę losów, aby prawdopodobieństwo wygrania w tej loterii było równe $\frac{1}{8}$. Wyjaśnij, dlaczego dodanymi losami muszą być tylko losy wygrywające.

Sprawdź się

- W pudełku znajduje się dziesięć kul, na których zapisano kolejne liczby naturalne od 1 do 10. Weronika wyciągnęła z pudełka kulę z liczbą 6. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybierając jedną z pozostałych w pudełku kul, wyciągnie kulę z liczbą większą niż 6?
- A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{5}{9}$ D. $\frac{3}{10}$

2. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

W rzucie sześcienną kostką do gry wypadnięcie liczby nieparzystej jest bardziej prawdopodobne niż wypadnięcie liczby pierwszej.	P	F
Prawdopodobieństwo wygrania w loterii, w której jest 10 losów wygrywających i 50 przegrywających, jest równe $\frac{1}{5}$.	P	F

3. Pewien zestaw kart składa się z kart w dwóch kolorach: czerwonym i niebieskim. Na części kart postawiono krzyżyki. Liczby kart w zestawie przedstawiono w poniższej tabeli.

	Karty z krzyżykiem	Karty bez krzyżyka
Karty czerwone	3	6
Karty niebieskie	2	9

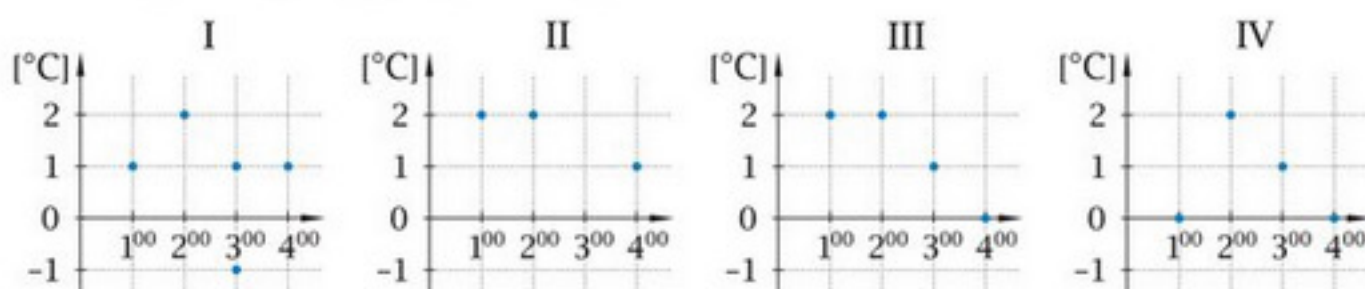
Jedno z poniższych zdań jest fałszywe. Wskaż je.

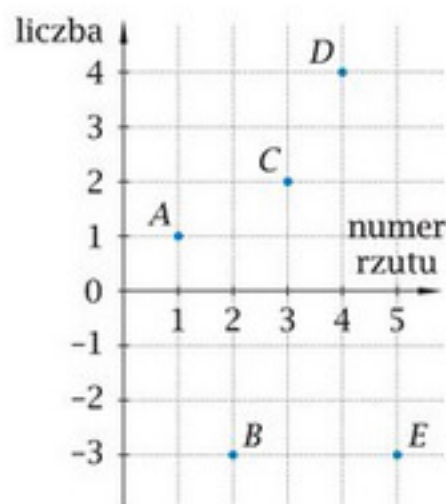
- A. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana karta z tego zestawu to niebieska karta bez krzyżyka, jest równe $\frac{9}{20}$.
- B. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana karta z tego zestawu jest czerwona, jest równe $\frac{9}{20}$.
- C. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana karta z tego zestawu ma krzyżyk, jest równe $\frac{1}{4}$.
- D. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana karta z tego zestawu jest czerwona i nie ma krzyżyka, jest równe $\frac{3}{20}$.

7 Odczytywanie wykresów

Przypomnij sobie

1. Które z poniższych wykresów nie mogą przedstawiać wyników pomiaru temperatury odnotowywanych w jednym miejscu co godzinę, między godziną pierwszą i czwartą w nocy? Wyjaśnij dlaczego.



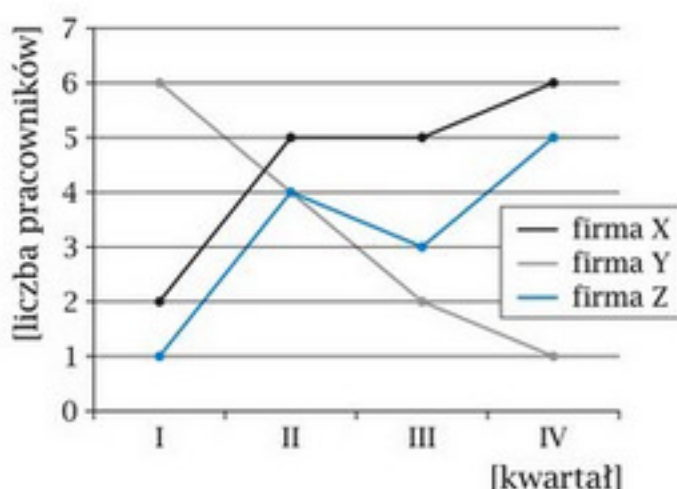
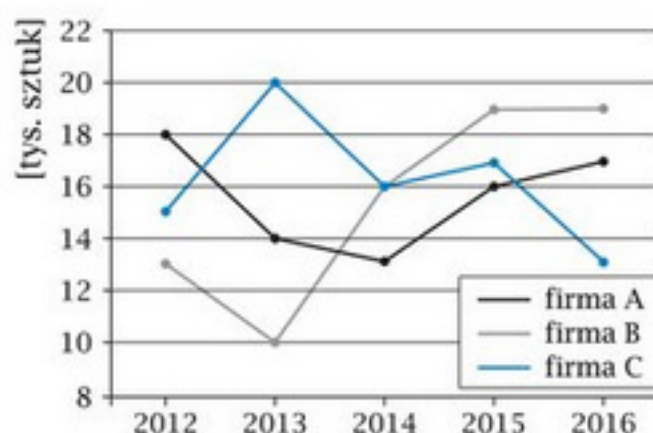


2. Na wykresie przedstawiono wyniki pięciu rzutów sześcienną kostką do gry z nietypowymi liczbami na ściankach: -6, -5, -3, 1, 2, 4.

- Odczytaj współrzędne punktów wykresu.
- Opisz wyniki tego doświadczenia rzut po rzucie.
- O ile największa uzyskana liczba jest większa od najmniejszej?
- Których liczb nie uzyskano w tym doświadczeniu?
- Czy liczb ujemnych uzyskano więcej niż dodatnich?
- Którą liczbę uzyskano więcej niż raz?

3. Trzy firmy produkują ten sam towar. Na wykresach przedstawiono wielkość ich produkcji (w tysiącach sztuk) na koniec kolejnych pięciu lat.

- W którym roku różnica między produkcją firmy B i firmy C była największa i ile wynosiła?
- W którym roku firmy B i C wyprodukowały po tyle samo sztuk towaru?
- Która firma odnotowała największy wzrost produkcji, a która — największy spadek produkcji pomiędzy rokiem 2012 a 2016?
- W których latach wielkość produkcji firmy B przewyższała wielkość produkcji każdej z pozostałych firm?
- Która z firm wyprodukowała najwięcej sztuk towaru łącznie w ciągu 5 lat?



4. Na wykresie przedstawiono liczby pracowników zatrudnionych na koniec poszczególnych kwartałów pewnego roku w trzech firmach. Której firmy dotyczy poniższe zdanie?

- W tej firmie liczba pracowników nie zmieniała się przez ćwierć roku.
- Ta firma zawsze zatrudniała więcej pracowników niż jedna z pozostałych firm.

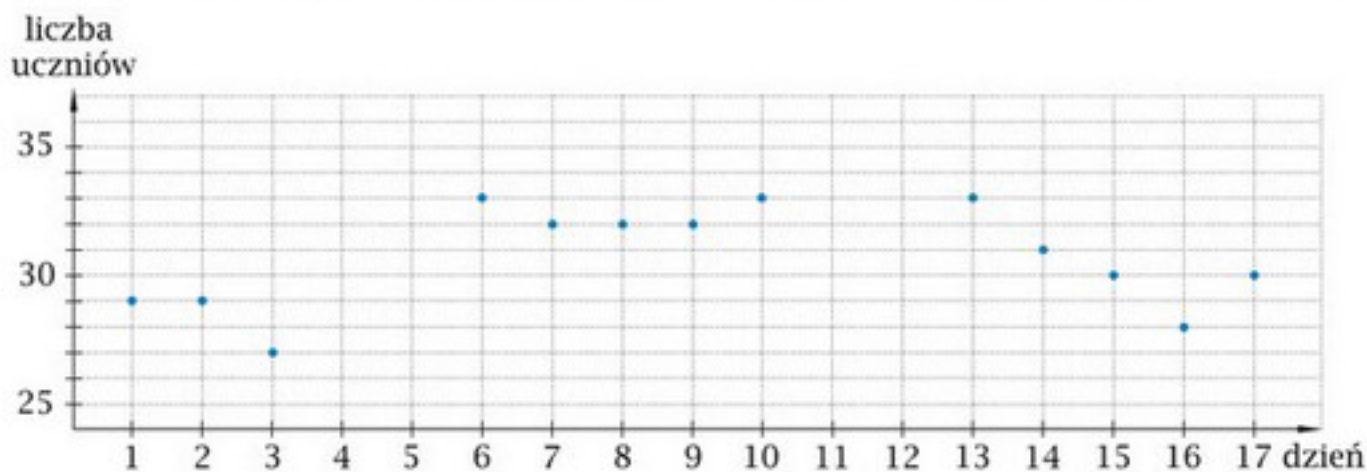
III. W tej firmie liczba pracowników stale malała.

IV. Ta firma w pewnym kwartale miała o 2 pracowników mniej niż pewna inna firma w tym samym kwartale.

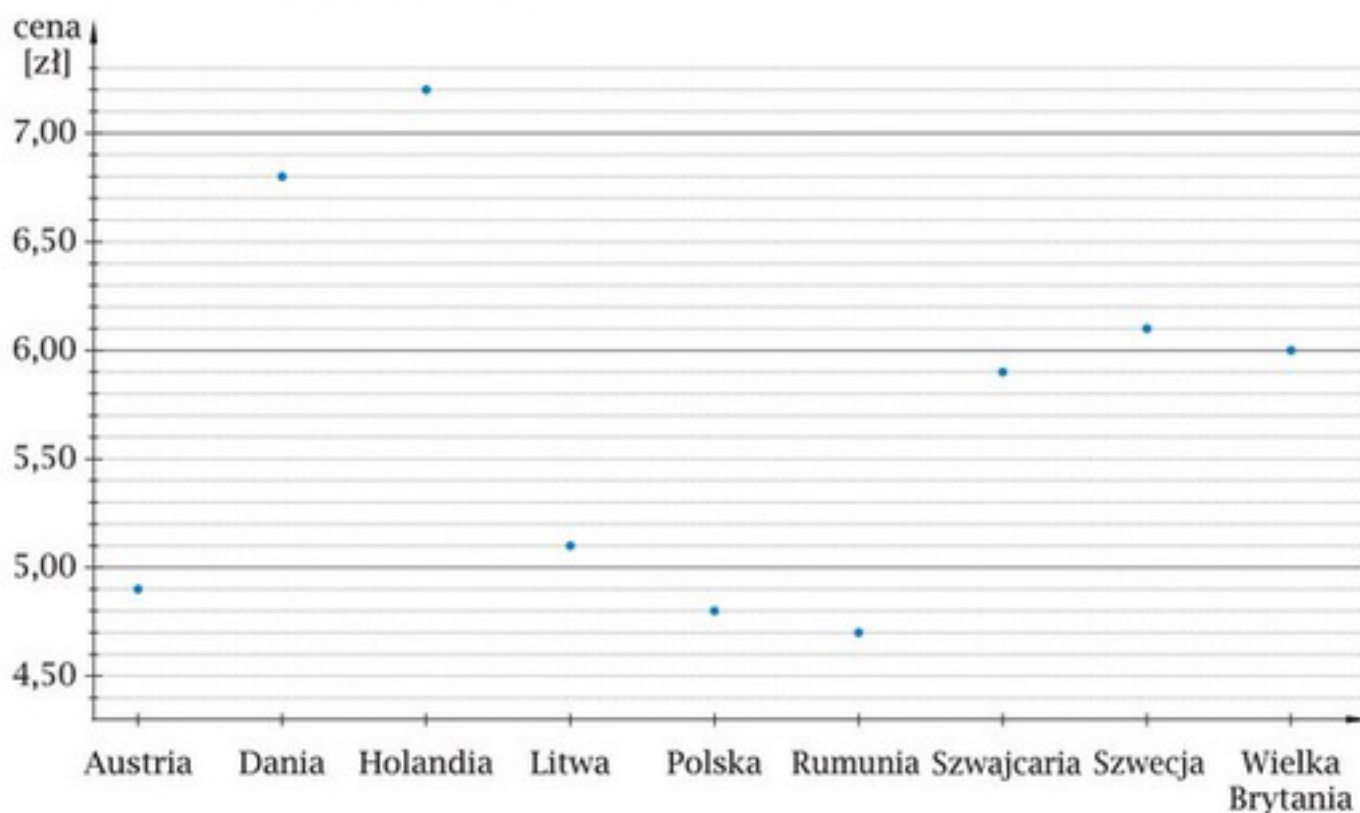
V. W okresie, kiedy liczba pracowników w jednej z firm spadła o 1, w tej firmie wzrosła o 1.

Poćwicz

5. W klasie VIII c są 33 osoby. Na wykresie przedstawiono liczbę uczniów tej klasy obecnych na lekcjach w poszczególnych dniach pierwszej połowy października.

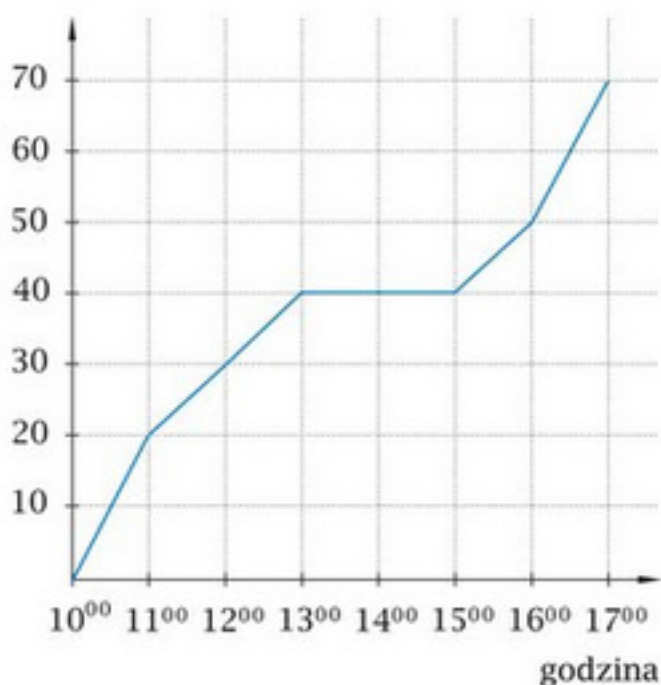


- Ile osób było obecnych 14 października?
 - Kiedy obecni byli wszyscy uczniowie?
 - Kiedy na lekcjach było najmniej uczniów? Ilu uczniów było nieobecnych tego dnia?
 - Jakim dniem tygodnia był 8 października tego roku?
6. Na wykresie przedstawiono ceny detaliczne benzyny Pb 95 w wybranych krajach europejskich w marcu 2017 roku.



- W którym z tych krajów cena benzyny była najniższa, a w którym najwyższa?
- O ile procent cena paliwa w Holandii była wyższa niż w Polsce?
- W którym kraju cena benzyny była o 2 zł wyższa niż w Polsce?

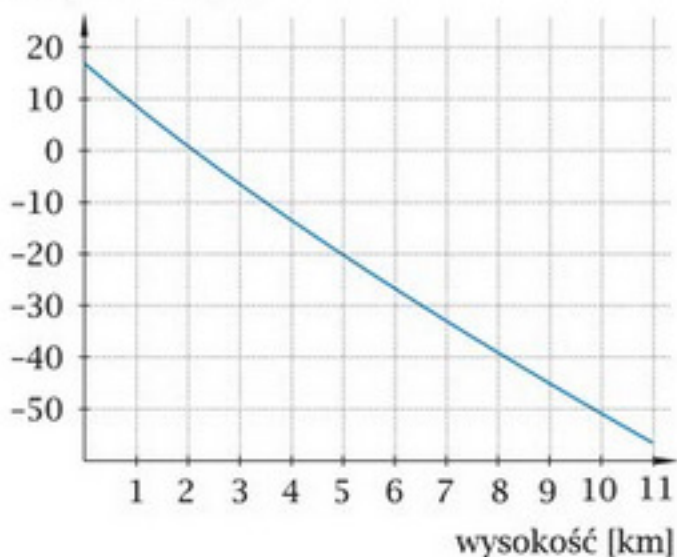
odległość [km]



7. Wykres opisuje przebieg pewnej wycieczki rowerowej.

- O której godzinie zaczęła się ta wycieczka, a o której się skończyła?
- Jak długą trasę przebył rowerzysta?
- O której godzinie rowerzysta zrobił sobie przerwę na obiad? Jak długo trwała ta przerwa?
- Ile kilometrów przejechał rowerzysta od godziny 10⁰⁰ do godziny 11⁰⁰, a ile — od 11⁰⁰ do 13⁰⁰?
- Z jaką prędkością jechał rowerzysta między 11⁰⁰ a 13⁰⁰?
- Jaka była średnia prędkość rowerzysty na całej trasie?

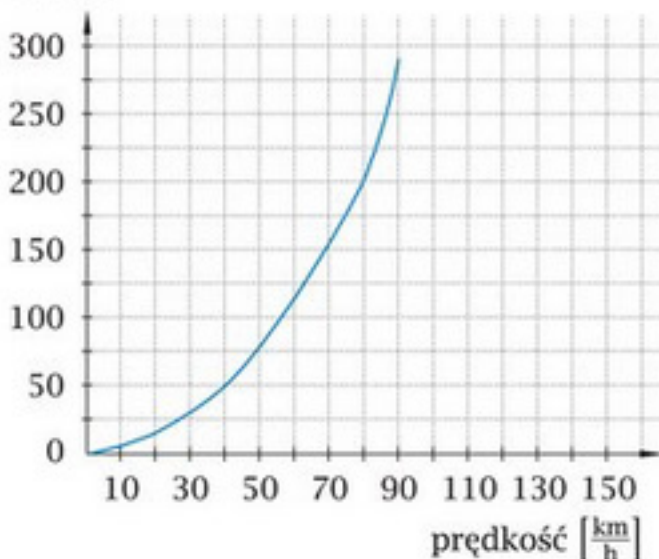
temperatura [°C]



8. Na wykresie przedstawiono zależność średniej temperatury powietrza od wysokości n.p.m.

- Ustal temperaturę na wysokości 1 km.
- Jaka jest temperatura na szczycie Mount Everestu (8850 m n.p.m.)?
- Na jakiej wysokości temperatura wynosi -20°C ?
- O ile stopni spada średnio temperatura wraz ze wzrostem wysokości o 1 km?

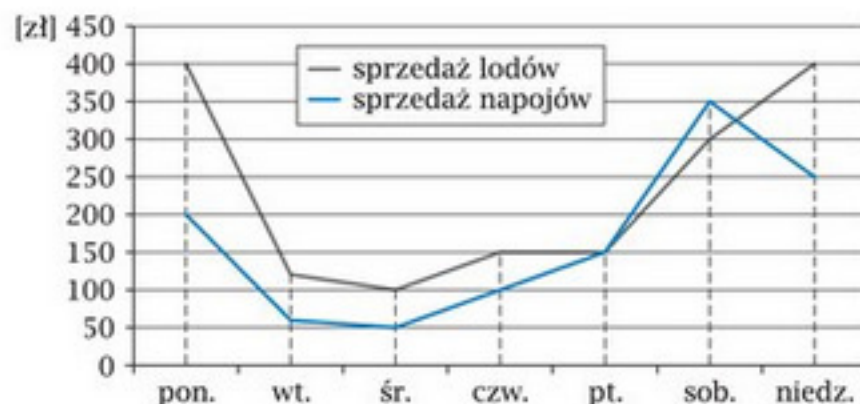
siła [N]



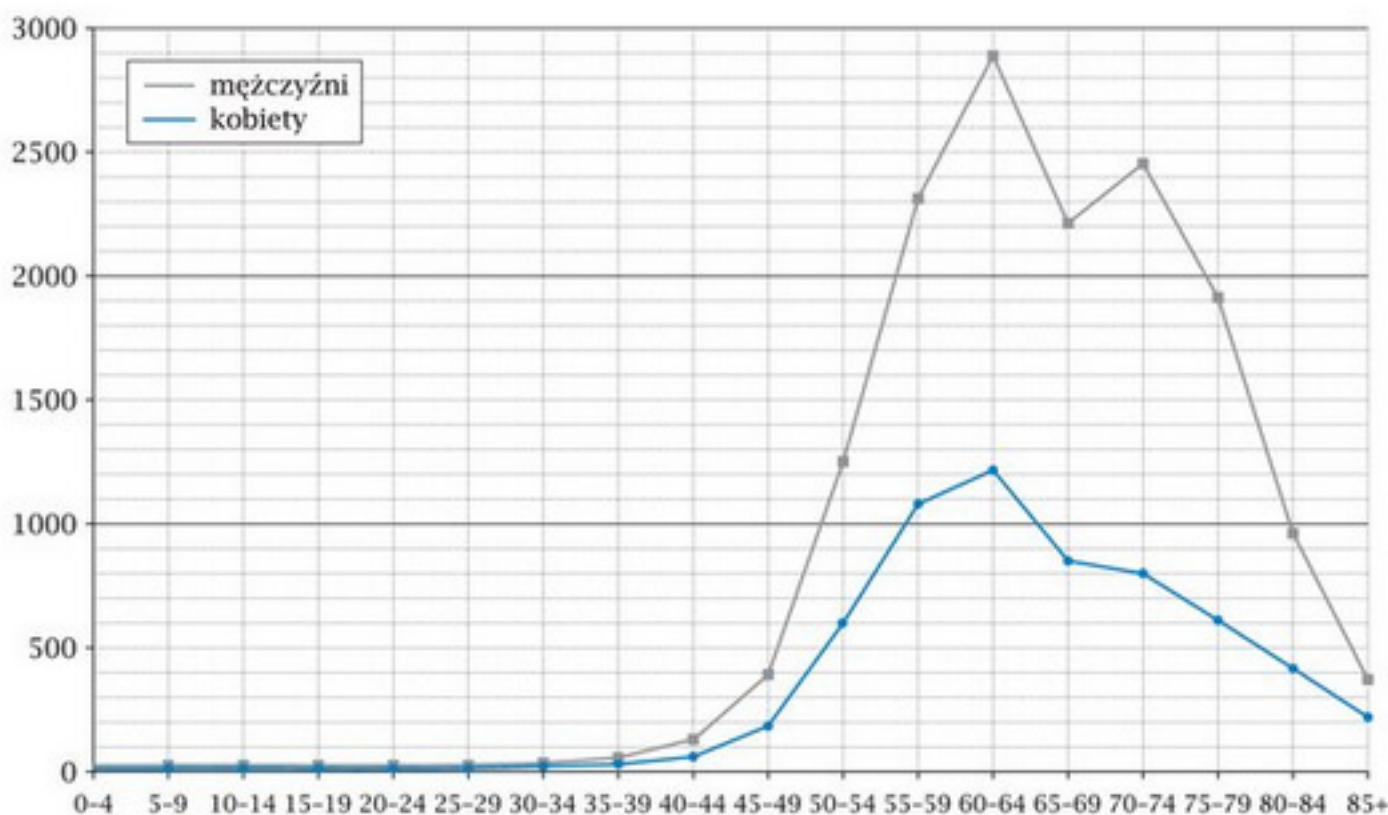
9. Na wykresie przedstawiono wyrażoną w niutonach siłę oporu powietrza działającego na samochód fiat 126 p w zależności od jego prędkości.

- Jaka siła oporu powietrza działa na ten samochód przy prędkości: $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?
- Czy siła oporu powietrza rośnie czy maleje ze wzrostem prędkości?
- Dla jakich prędkości siła oporu powietrza przekracza 100 N?

10. W pewnej małej lodziarni sprzedaje się tylko lody i napoje. Na diagramie przedstawiono dochód (w złotych) właściciela lodziarni w ciągu tygodnia.

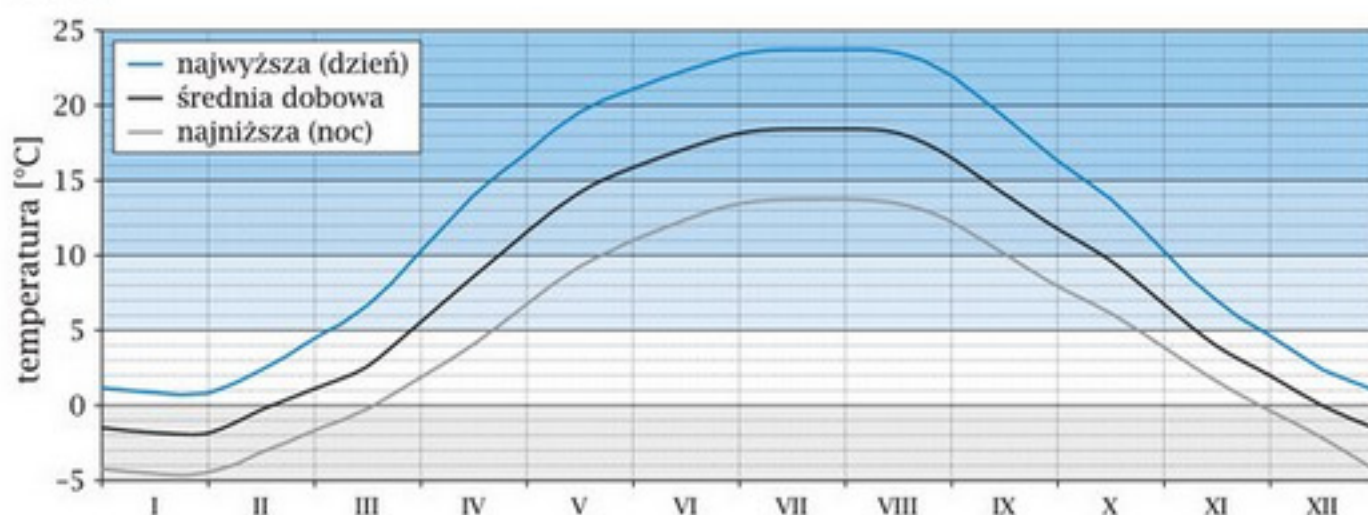


- Którego dnia dochód ze sprzedaży napojów był większy od dochodu ze sprzedaży lodów?
 - Jaki był dochód właściciela lodziarni w dniu, w którym dochody ze sprzedaży lodów i ze sprzedaży napojów były równe?
 - W które dni dochód właściciela lodziarni wyniósł 650 zł?
11. Na wykresie przedstawiono liczby zdiagnozowanych zachorowań (z podziałem na płeć i grupy wiekowe) na nowotwory złośliwe płuc i oskrzeli w Polsce w roku 2010.



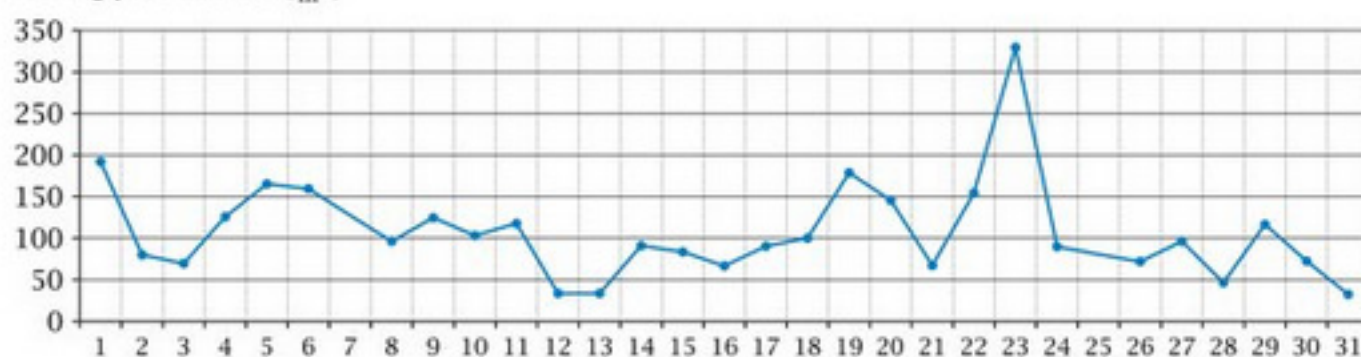
- W których przedziałach wiekowych liczba chorujących kobiet była większa niż 1000?
- W którym przedziale wiekowym liczba chorujących mężczyzn była wyższa od liczby chorujących kobiet o więcej niż 1500?
- W którym przedziale wiekowym w porównaniu z przedziałem poprzednim nastąpił największy spadek liczby zachorowań kobiet, a w którym — mężczyzn?

12. Wykres przedstawia średnie temperatury w Polsce mierzone w ciągu pewnego roku.



- Sprawdź, czy dzisiejsza temperatura jest wyższa czy niższa od odpowiedniej średniej dobowej.
 - W których miesiącach najniższa temperatura była wyższa od 10°C , a w których najwyższa temperatura była niższa od 10°C przez cały miesiąc?
 - Czy liczba nocy, w których temperatura spadła poniżej 0°C , była mniejsza czy większa niż 100?
 - W którym z miesięcy średnia dobowa temperatura oraz najwyższa i najniższa wynosiły pewnego dnia odpowiednio: $14,1^{\circ}\text{C}$, $19,3^{\circ}\text{C}$, $10,1^{\circ}\text{C}$? Dlaczego średnia arytmetyczna dobową temperaturę nie jest równa średniej arytmetycznej najwyższej i najniższej temperatury danej doby?
13. Poniższy wykres przedstawia ilość pyłów PM10 (czyli typowego składnika smogu) w Krakowie w kolejnych dniach stycznia 2016 roku. Według polskich przepisów dopuszczalna ilość tych pyłów w powietrzu jest równa $50 \frac{\mu\text{g}}{\text{m}^3}$, czyli $5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$.

ilość pyłów PM10 [$\frac{\mu\text{g}}{\text{m}^3}$]

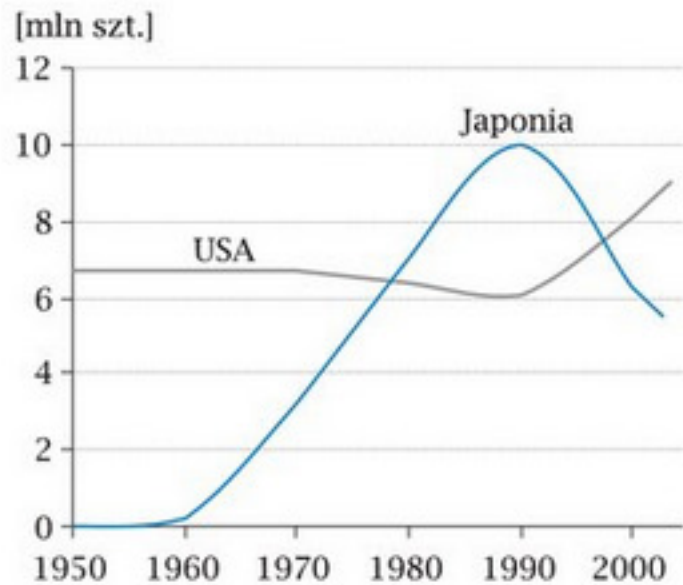


- Przez ile dni stycznia zanieczyszczenie powietrza pyłem PM10 mieściło się w normie?
- W których dniach zanieczyszczenie pyłem PM10 było większe niż $175 \frac{\mu\text{g}}{\text{m}^3}$?
- W którym dniu ilość PM10 przekroczyła normę 6,5 razy?
- Przez ile dni norma zanieczyszczenia powietrza PM10 była przekroczona więcej niż 3 razy?
- Ile najwięcej było kolejnych dni, w których ilość PM10 utrzymywała się pomiędzy wartością $50-100 \frac{\mu\text{g}}{\text{m}^3}$?

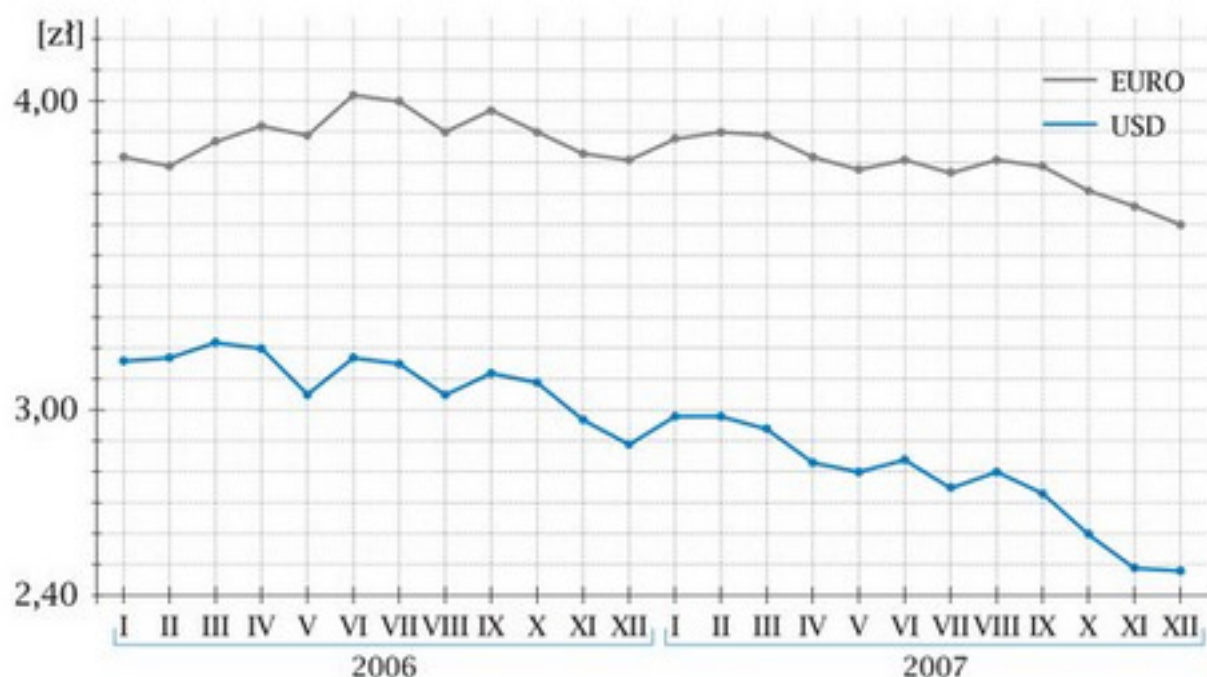
Pomyśl

14. Na wykresie przedstawiono roczną produkcję samochodów osobowych w USA i Japonii w latach 1950-2000.

- Ile samochodów wyprodukowano w Japonii w 1970 roku?
- Ustal, ile samochodów wyprodukowano w USA przez całe lata sześćdziesiąte.
- W którym roku w Japonii produkowano najwięcej samochodów?
- Kiedy Amerykanie produkowali więcej samochodów niż Japończycy?

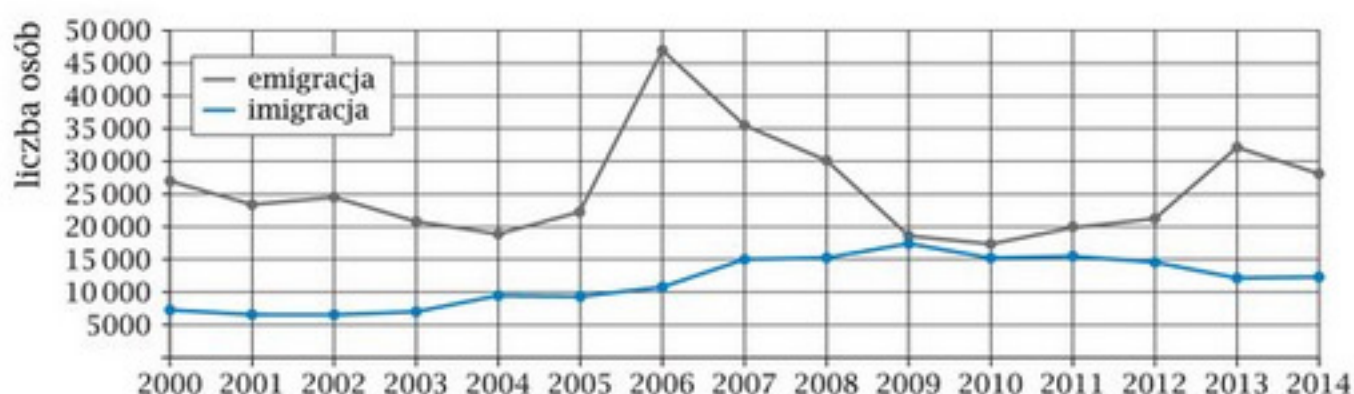


15. Na wykresach przedstawiono zmiany średnich kursów dolara amerykańskiego (USD) i euro (EUR) w latach 2006-2007.



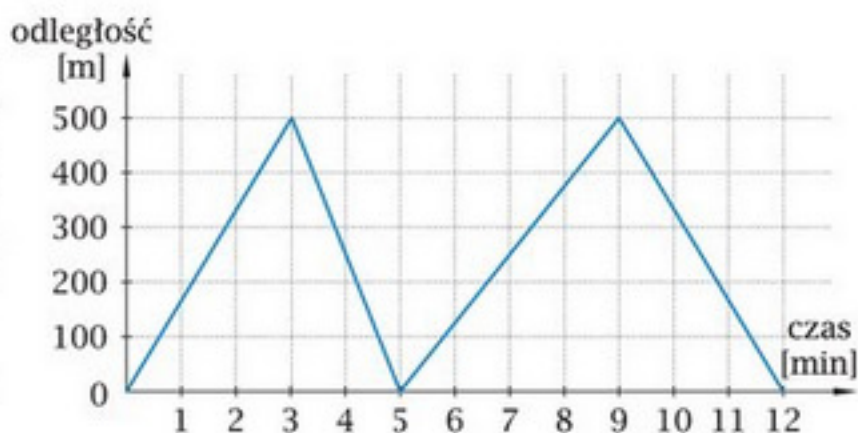
- Kiedy różnica wartości między euro a dolarem była większa: na początku czy na końcu przedstawionego okresu?
- Jaki był średni kurs dolara w grudniu 2006?
- Kiedy euro było najdroższe? Jaki był wtedy jego średni kurs?
- Jaki był kurs euro w październiku 2006 roku? Po jakim czasie jego wartość wróciła do tego poziomu?
- O ile procent spadła wartość dolara wyrażona w złotych w ciągu roku 2007? O ile procent w tym czasie spadła wartość euro?
- O ile procent wyższy był kurs euro od kursu dolara w chwili, gdy euro było najdroższe? O ile procent tańszy od euro był wtedy dolar? Wynik zaokrąglaj do dziesiątek procent.

16. Na diagramie przedstawiono migrację ludności w Polsce w latach 2000–2014.



- W którym roku wyemigrowało z Polski więcej ludzi: w 2008 roku czy w 2011 roku? O ile więcej?
- W którym roku wyemigrowało z Polski o 20 000 osób więcej niż imigrowało?
- W którym roku różnica między liczbą ludzi emigrujących z Polski a liczbą ludzi imigrujących do Polski była największa, a w którym — najmniejsza?

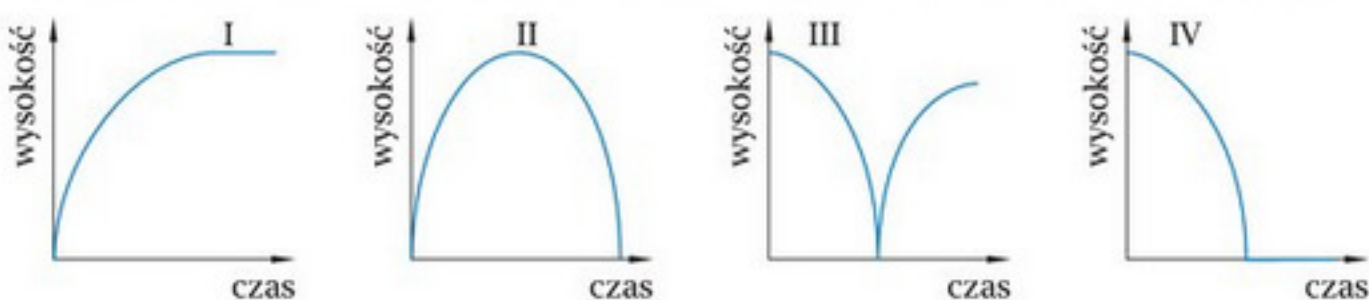
17. Pewien sportowiec biegał między dwoma ustalonymi punktami. Na wykresie przedstawiono, jak się zmieniała odległość między biegaczem a punktem startu w czasie tego treningu.



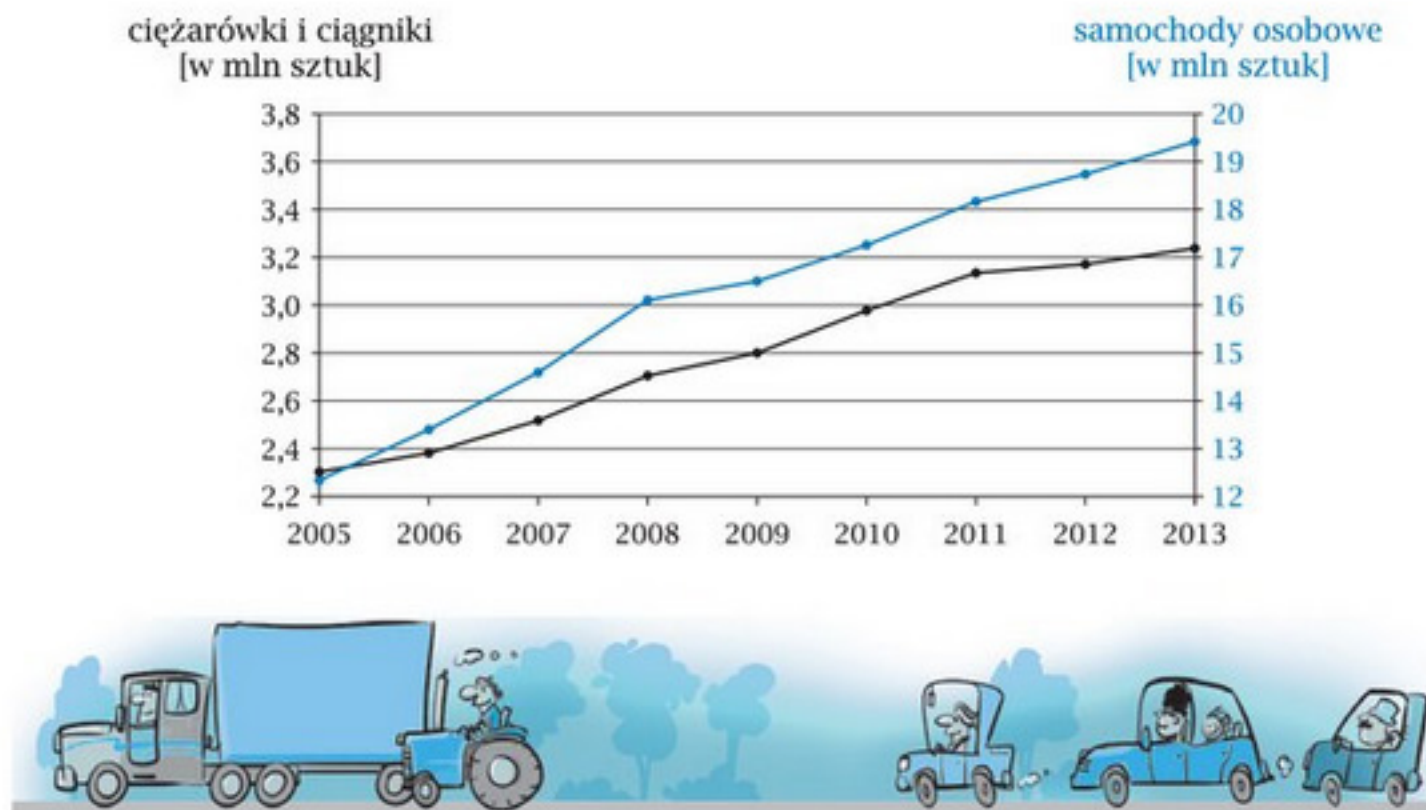
- Ile kilometrów przebiegł biegacz?
- Ile czasu trwało pokonanie pierwszej połowy całego dystansu, a ile — drugiej?
- Z jakimi prędkościami średnimi sportowiec pokonywał każdy z półkilometrowych odcinków dystansu? Podaj wynik w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
- Z jaką prędkością średnią sportowiec pokonał cały dystans?

18. Każdy z poniższych wykresów przedstawia wysokość nad ziemią pewnego ciała w kolejnych chwilach lotu. Dopasuj wykresy do opisów.

- Ciało zostało podrzucone do góry, a następnie spadło.
- Ciało spadło z pewnej wysokości.
- Ciało zostało podrzucone na pewną wysokość i tam zostało.
- Ciało spadło z pewnej wysokości, odbiło się od podłoża i poleciało w górę.



19. Wykresy przedstawiają, jak zmieniała się liczba samochodów osobowych oraz samochodów ciężarowych i ciągników w Polsce w latach 2005–2013.

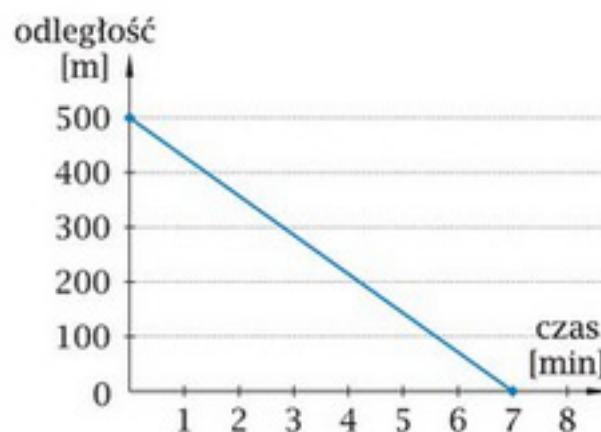


- a) Ile razy mniej samochodów ciężarowych i ciągników niż samochodów osobowych było w Polsce w roku 2005 i w roku 2013?
- b) Oszacuj, o ile średnio rocznie wzrastała liczba samochodów osobowych w latach 2009–2013. Ile samochodów osobowych byłoby w Polsce w roku 2015, gdyby takie tempo wzrostu się utrzymało?

Sprawdź się

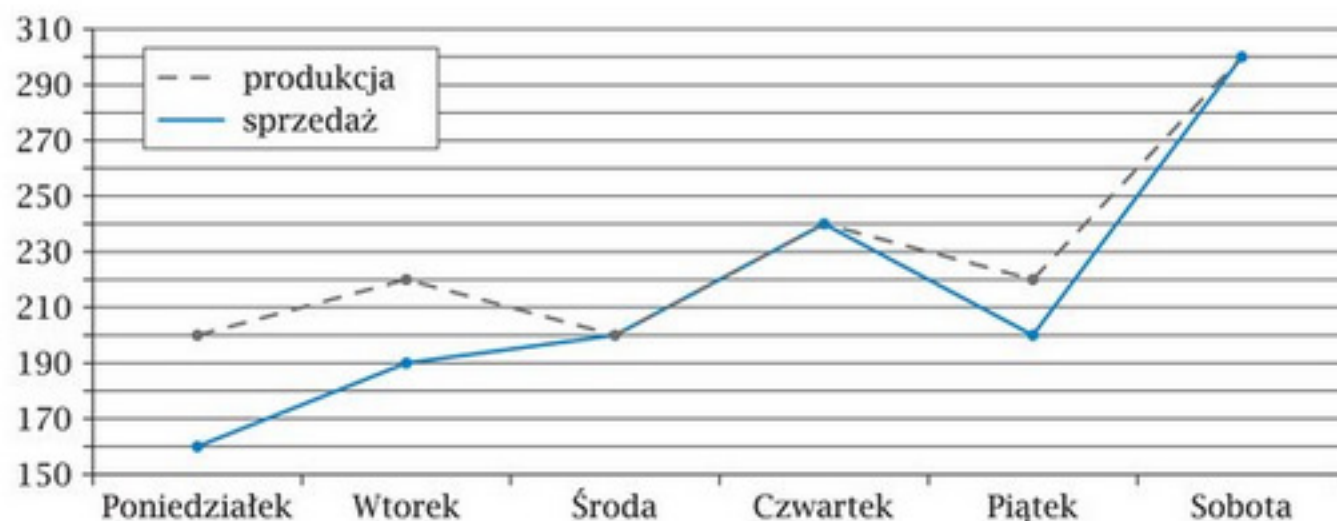
1. Na wykresie przedstawiono odległość (w metrach) między szkołą a domem pokonywaną przez ucznia w kolejnych minutach.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe lub F — jeśli jest fałszywe.



W ciągu początkowych 2 minut uczeń przeszedł więcej niż 300 m.	P	F
W ciągu początkowych trzech minut uczeń przebył taką samą drogę jak w ciągu ostatnich trzech minut.	P	F
Uczeń poruszał się z prędkością średnią mniejszą niż $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.	P	F

2. Na diagramie przedstawiono, ile bułek upieczono i sprzedano w pewnej piekarni w poszczególne dni tygodnia.



Odpowiedz na poniższe pytania. Wybierz odpowiedzi spośród A i B oraz spośród C i D.

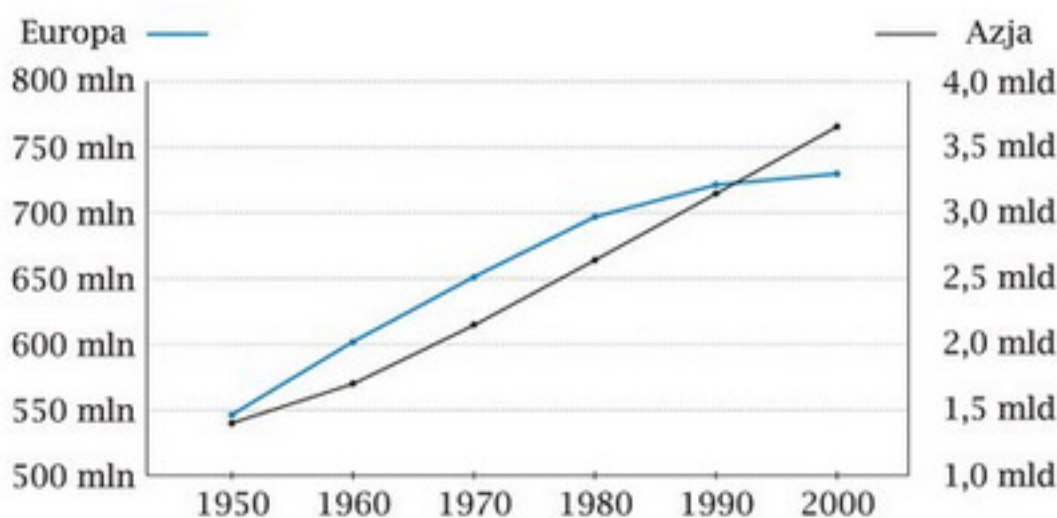
Ile było dni, w których sprzedano wszystkie upieczone bułki?

A. 2 B. 3

Ilu upieczonych bułek nie sprzedano w ciągu tego tygodnia?

C. 40 D. 90

3. Na wykresie przedstawiono, jak zmieniała się liczba mieszkańców Europy, a jak Azji w XX wieku. (Każdy z wykresów ma osobną oś pionową).



Które z podanych zdań są prawdziwe?

I. W roku 1990 w Azji mieszkało mniej więcej tyle samo osób co w Europie.

II. W roku 1980 Azja liczyła prawie cztery razy więcej mieszkańców niż Europa.

III. W latach 1950-1990 liczba ludności w Europie się podwoiła.

IV. Pod koniec XX wieku mieszkańców Azji było o około 3 mld więcej niż mieszkańców Europy.

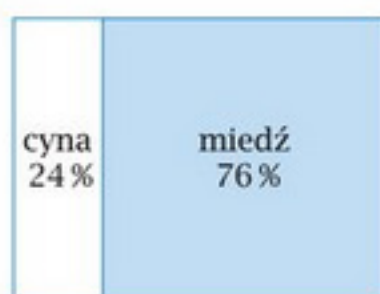
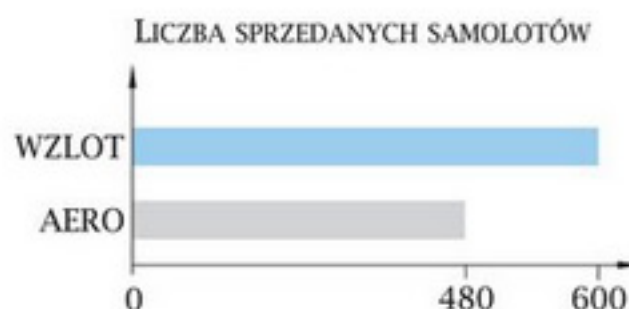
A. tylko I B. tylko II C. II i IV D. II i III

8 Zadania testowe

- Liczba, która zwiększona o 12% będzie równa 280, to:
A. 250 B. 268 C. 246,4 D. 313,6
- Podczas suszenia grzyby tracą 80% swojej masy. Wysuszono 1,2 kg świeżych grzybów. Ile ważą te grzyby po wysuszeniu?
A. 0,20 kg B. 0,24 kg C. 0,4 kg D. 0,96 kg

- O ile procent sprzedaż samolotów przez firmę WZLOT jest większa od sprzedaży firmy AERO?

- A. o 20% C. o 80%
B. o 25% D. o 125%



- Na przedstawionym obok schematycznym rysunku podano skład procentowy brązu, z którego są odlwane dzwony. Ile potrzeba miedzi do stopu, z którego będzie można odlać dzwon o masie 5000 kg?

- A. 76 kg C. 3800 kg
B. 1200 kg D. 2400 kg

- Próbka substancji promieniotwórczej miała masę 2,5 g, a po upływie pewnego czasu masa ta wyniosła 2 g. Masa tej próbki zmniejszyła się:

- A. o 5% B. o 10% C. o 20% D. o 25%

- Sporządzono dwa roztwory pewnej substancji w rozpuszczalniku.

Roztwór A: do 80 g rozpuszczalnika dodano 20 g substancji.

Roztwór B: do 90 g rozpuszczalnika dodano 30 g substancji.

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1, 2 albo 3.

Stężenie równe 25% ma:

A.	roztwór A,	ponieważ	1.	$\frac{20}{80} \cdot 100\% = 25\%$
			2.	$\frac{20\% + 30\%}{2} = 25\%$
B.	roztwór B,		3.	$\frac{30}{30 + 90} \cdot 100\% = 25\%$

7. Na lokatę roczną wpłacono 5000 zł. Po roku odsetki wyniosły 125 zł. Oprocentowanie tej lokaty w stosunku rocznym było równe:

A. 0,25% B. 1,25% C. 2% D. 2,5%

8. Na 3-procentowej lokacie rocznej na początku roku znajdowało się 6000 zł. Dołącz zdania. Wybierz odpowiedzi spośród A i B oraz spośród C i D.

Po upływie roku odsetki będą wynosiły:

A. 180 zł B. 90 zł

Po upływie dwóch lat kwota na lokacie będzie równa:

C. 6360 zł D. 6365,40 zł

9. W którym banku oprocentowanie lokaty rocznej jest najwyższe?

A. w Krajowym
B. w Miejskim
C. w Pieniężnym
D. w Oszczędnym

Bank	Kwota wpłacona	Stan konta po roku oszczędzania
Krajowy	1500 zł	1575 zł
Miejski	1000 zł	1060 zł
Pieniężny	3000 zł	3090 zł
Oszczędnym	1800 zł	1872 zł

10. Oprocentowanie lokaty wynosi 6% w stosunku rocznym. Ile złotych wpłacono na tę lokatę, jeżeli po roku znajduje się na niej 2544 zł?

A. 2391,36 zł B. 2400 zł C. 2500 zł D. 2696,64 zł

11. Ile złotych wypłacisz z banku po roku, jeśli wpłaciłeś 200 zł na lokatę roczną o oprocentowaniu 1,55%?

A. 3,10 zł B. 1,55 zł C. 203,10 zł D. 201,55 zł

12. Na lokatę A oprocentowaną w wysokości 2% w stosunku rocznym wpłacono 2000 zł, a na lokatę B oprocentowaną w wysokości 4% w stosunku rocznym wpłacono 1000 zł.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli zdanie jest fałszywe.

Po upływie roku odsetki na obu lokatach są takie same.	P	F
Po upływie roku stan obu lokat jest taki sam.	P	F
Po upływie roku na obu lokatach jest łącznie tyle samo pieniędzy, co po roku na lokacie 6-procentowej, na którą wpłacono 3000 zł.	P	F

13. Cena brutto pewnego towaru, na który stawka VAT jest równa 23%, wynosi 553,50 zł. Cena netto tego towaru jest równa:
- A. 541,06 zł B. 450 zł C. 680,81 zł D. 426,20 zł

14. Cenę netto pewnego towaru, dla którego stawka VAT wynosi 8%, obniżono o 10%. Ile trzeba zapłacić za ten towar, jeżeli przed obniżką cena netto wynosiła 120 zł?
- A. 99,36 zł B. 116,64 zł C. 129,60 zł D. 142,56 zł

15. Cena netto pewnego towaru wynosi 350 zł. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

Cena brutto tego towaru z VAT równym 5% wynosiłaby 367,50 zł.	P	F
Cena brutto tego towaru z VAT równym 8% wynosiłaby 378 zł.	P	F
Cena brutto tego towaru z VAT równym 23% byłaby wyższa od ceny brutto z VAT równym 5% o 62,50 zł.	P	F

16. Cena netto pewnego towaru jest równa 160 zł, a cena brutto — 172,80 zł. Jaką stawką VAT opodatkowano ten towar?
- A. 5% B. 7% C. 8% D. 23%

17. Gazeta kosztuje 2,70 zł, w tym 8% podatku VAT. Cena netto (bez podatku VAT) tej gazety to:
- A. 1,90 zł B. 2,56 zł C. 2,62 zł D. 2,50 zł

18. W Azlandii walutą są azy. Podatek w tym kraju oblicza się następująco: od dochodu rocznego odejmuje się 10 000 azów, a podatkiem jest pewien procent od pozostałej kwoty. Procent ten zależy od dochodu i określony jest w tabeli obok.

Dochód roczny	Wysokość podatku
50 000 azów lub mniej	10%
wiekszy od 50 000 azów	15%

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedzi spośród A i B oraz spośród C i D.

Obywatel Azlandii, którego dochód roczny wynosi 40 000 azów, powinien zapłacić podatek w wysokości:

- A. 3000 azów B. 4000 azów

Obywatel Azlandii, którego dochód roczny wynosi 55 000 azów, powinien zapłacić podatek w wysokości:

- C. 4500 azów D. 6750 azów

19. Mosiądz to stop miedzi i cynku, powstający z połączenia tych dwóch metali w proporcji odpowiednio 3:2. Odpowiedz na pytania. Wybierz odpowiedzi spośród A i B oraz spośród C i D.

Ile kilogramów miedzi trzeba dodać do 3 kg cynku, aby powstał mosiądz?

A. 2 kg B. 4,5 kg

Ile cynku trzeba użyć do wyprodukowania 15 kg mosiądzu?

C. 6 kg D. 5 kg

20. Turysta pokonał całą trasę w dwóch odcinkach, których długości pozostają w stosunku 1:3. Odcinki te różniły się o 12 kilometrów. Jaką długość miała cała trasa?

A. 13 km B. 32 km C. 18 km D. 24 km

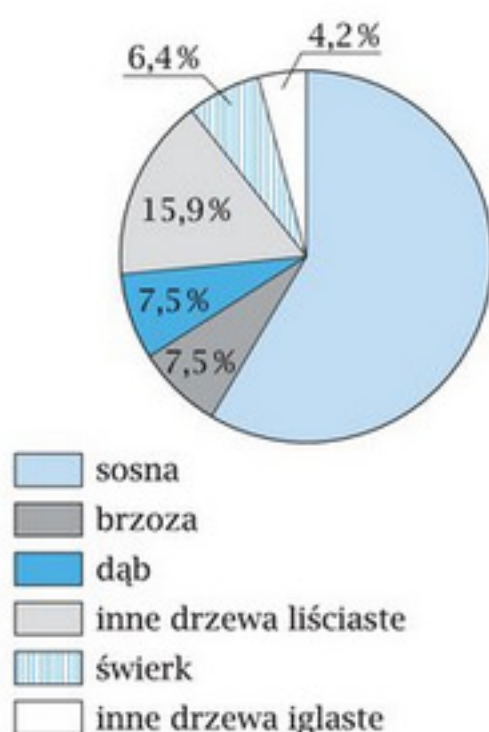
21. Praca uczniów na całej lekcji matematyki była tak zorganizowana, że stosunek ilości czasu poświęconego na samodzielną pracę do ilości pozostałego czasu wynosił 5:4. Wynika stąd, że:

A. samodzielną pracę uczniów trwała tyle co pozostałe zajęcia,
 B. samodzielną pracę uczniów trwała o 5 minut krócej niż pozostałe zajęcia,
 C. samodzielną pracę uczniów trwała o 5 minut dłużej niż pozostałe zajęcia,
 D. uczniowie pracowali samodzielnie przez 20 minut.

22. W wodzie rozpuszczono sól tak, że stosunek masy soli do masy wody wynosi 1:7. Stężenie tego roztworu wynosi:

A. $\frac{1}{7}\%$ B. około 14% C. 12,5% D. 70%

Na podstawie poniższego diagramu, przedstawiającego udział poszczególnych gatunków drzew w polskich lasach, odpowiedz na pytania 23-25.



23. Jaki procent drzew polskich lasów stanowi świerk?

A. 4,6% C. 6,8%
 B. 6,4% D. 7,2%

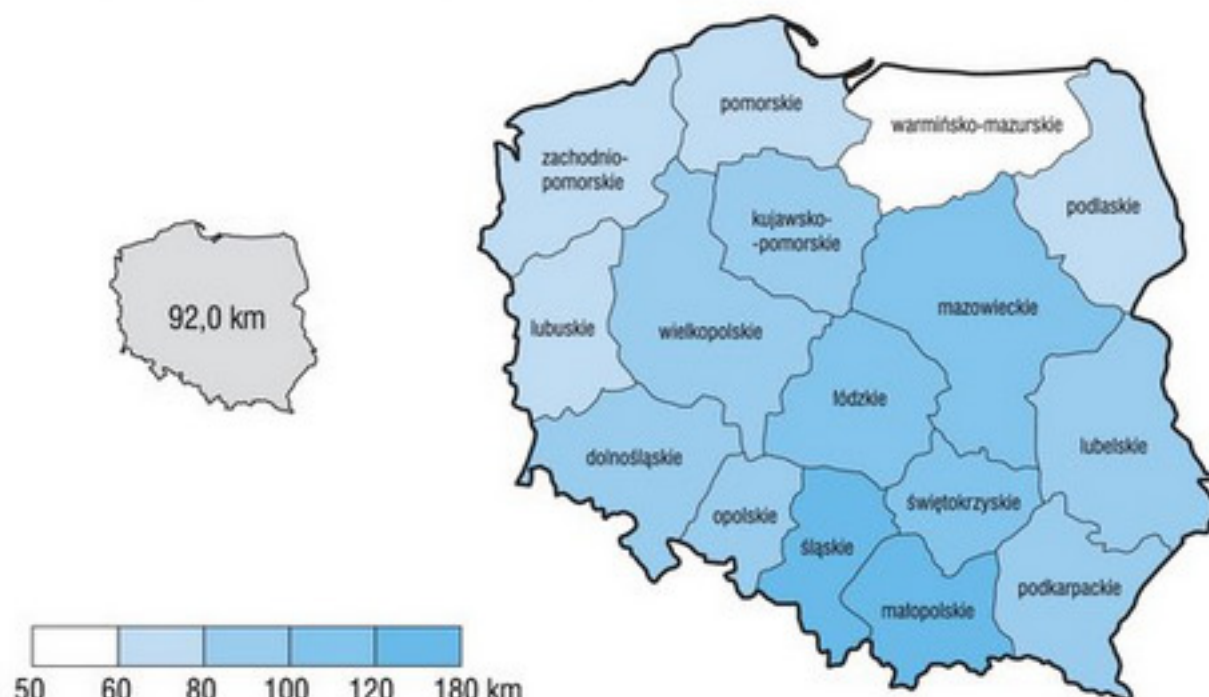
24. Jaki procent drzew stanowią łącznie sosna, świerk i inne drzewa iglaste?

A. 30,9% C. 69,1%
 B. 58,5% D. 80,8%

25. O ile procent więcej jest sosen niż brzoź?

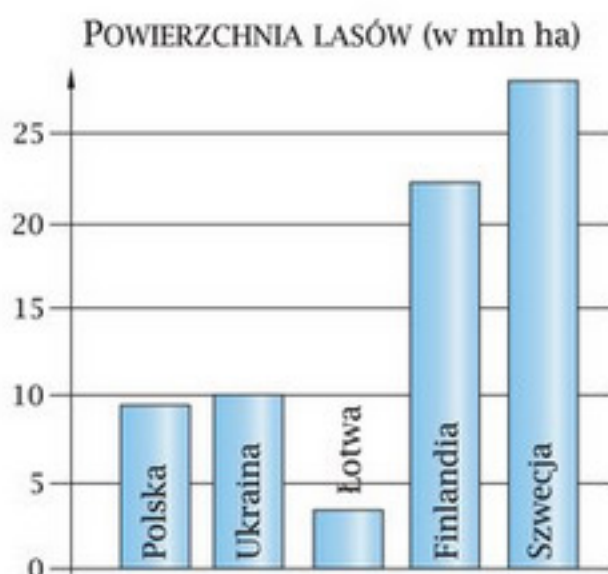
A. o 51% C. o 680%
 B. o 68% D. o 780%

26. Zapoznaj się z informacjami na temat gęstości sieci dróg publicznych o twardej nawierzchni na 100 km² powierzchni ogólnej według województw w Polsce w 2014 roku. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe lub F — jeśli jest fałszywe.



Najmniej kilometrów dróg o twardej nawierzchni na 100 km ² powierzchni przypadało w województwie warmińsko-mazurskim.	P	F
W pięciu województwach Polski gęstość sieci dróg o twardej nawierzchni przekraczała 100 kilometrów na 100 km ² powierzchni.	P	F
W województwie podlaskim i kujawsko-pomorskim gęstość sieci dróg o twardej nawierzchni była taka sama.	P	F
Średnia gęstość sieci dróg o twardej nawierzchni obliczona dla obszaru obejmującego województwa pomorskie, warmińsko-mazurskie i podlaskie była niższa niż średnia dla całego kraju.	P	F

Na podstawie diagramu odpowiedz na pytania 27-29.



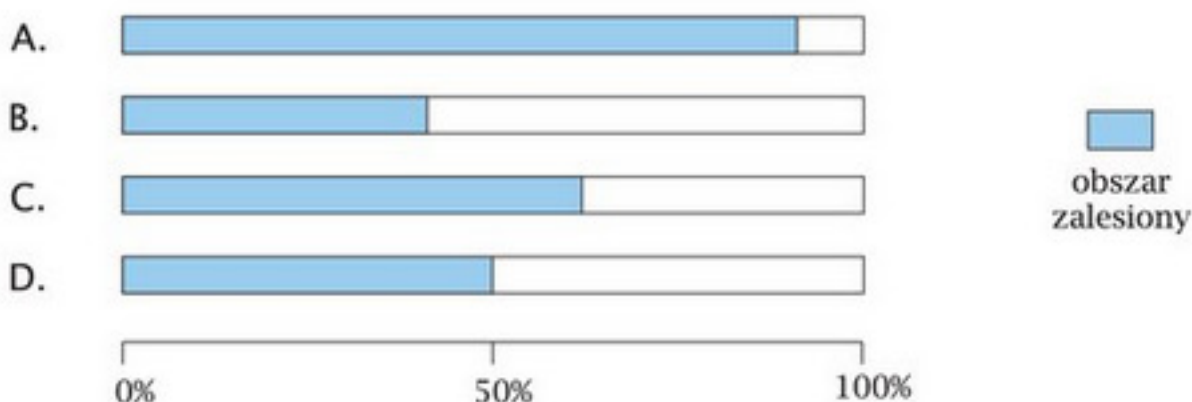
27. Powierzchnia lasów w Polsce jest większa od powierzchni lasów Łotwy w przybliżeniu o:

A. 3 mln ha C. 5 mln ha
B. 4 mln ha D. 6 mln ha

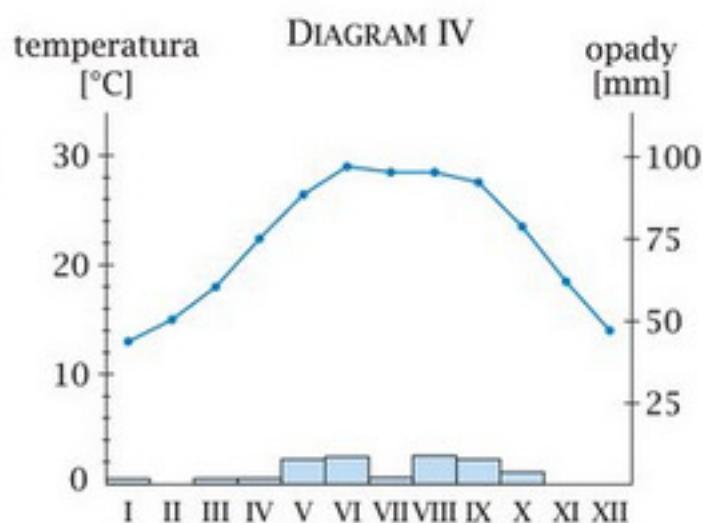
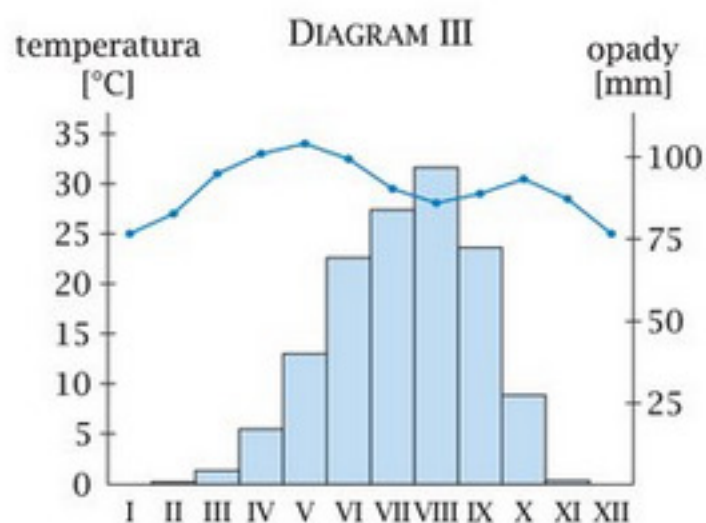
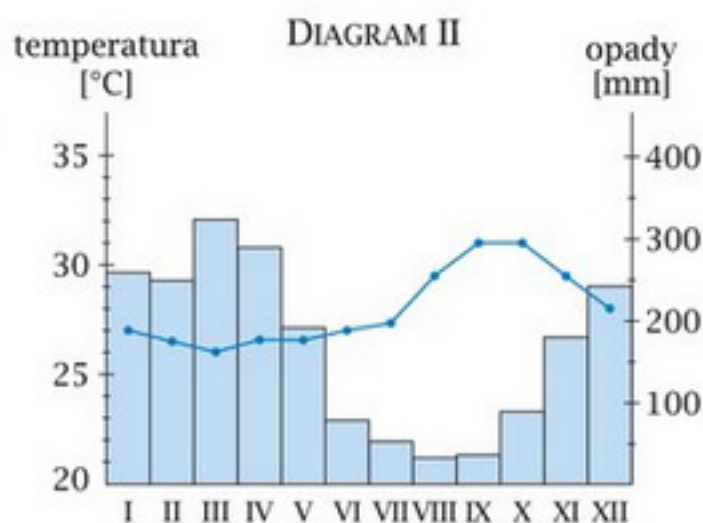
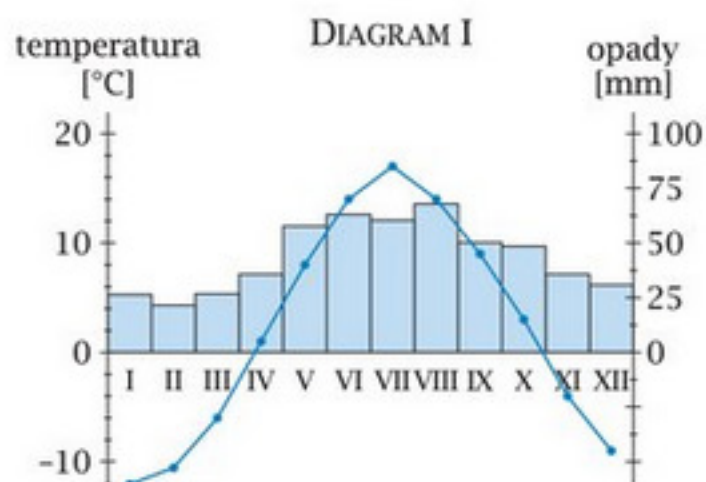
28. O ile procent powierzchnia lasów w Finlandii jest większa od powierzchni lasów na Ukrainie?

A. o ok. 12% C. o ok. 120%
B. o ok. 55% D. o ok. 220%

29. Powierzchnia Szwecji wynosi 45 mln ha. Który z poniższych wykresów przedstawia zalesienie tego kraju?



30. Na poniższych diagramach przedstawiono średnie miesięczne temperatury powietrza i miesięczne sumy opadów w czterech różnych miejscach na Ziemi.



Dokończ zdania. Wybierz odpowiedzi spośród A i B oraz spośród C i D.

Klimat Sahary charakteryzuje się bardzo małymi opadami i dużymi wahaniami temperatur w ciągu roku. Ten klimat opisano na diagramie:

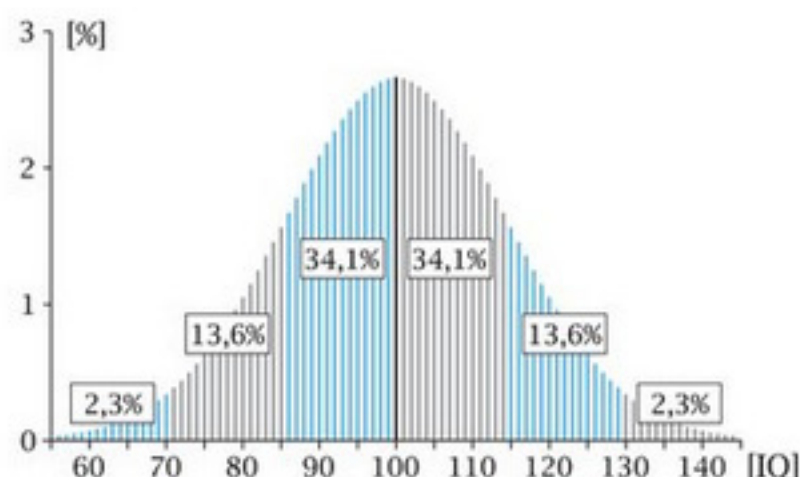
A. II B. IV

Na Syberii najwyższe temperatury i najwyższe opady są notowane w miesiącach letnich. Klimat Syberii opisano na diagramie:

C. I D. III

31. Na wykresie przedstawiono, jaki procent ludzi ma dany iloraz inteligencji (IQ).

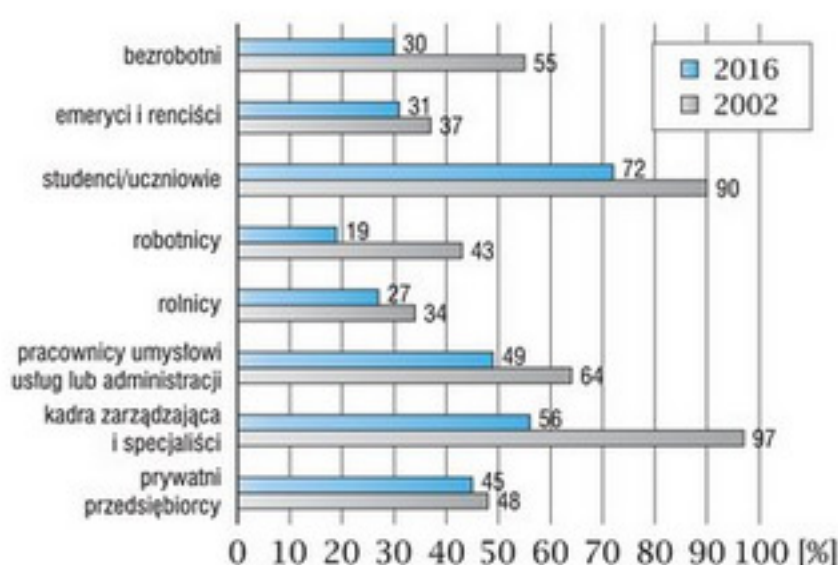
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.



Ludzie o IQ równym 90 stanowią ok. 2,1% populacji.	P	F
Ludzi o IQ większym niż 115 jest więcej niż ludzi o IQ mniejszym niż 85.	P	F
Spośród 10 000 losowo wybranych osób 6820 osób ma IQ między 86 a 114.	P	F
Bardziej prawdopodobne jest wybranie losowo osoby z IQ co najmniej 130 niż wybranie osoby z IQ co najwyżej 80.	P	F

32. Wykres przedstawia zmianę odsetka czytelników w grupach zawodowych w latach 2002–2016 (deklaracja dotyczyła przeczytania co najmniej jednej książki w ciągu danego roku).

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.



W 2016 r. w porównaniu z 2002 r. odsetek osób, które przeczytały co najmniej jedną książkę, spadł w każdej z grup.	P	F
W 2002 r. 44% kadry zarządzającej i specjalistów nie przeczytało ani jednej książki.	P	F
Największy, ponad pięćdziesięcioprocentowy spadek liczby osób, które przeczytały co najmniej jedną książkę, odnotowano w grupie robotników.	P	F
W 2016 r. 28% uczniów i studentów nie przeczytało ani jednej książki.	P	F

33. Grześ miał w kieszeni 3 dziesięciogroszówki, 4 dwudziestogroszówki i 2 pięćdziesięciogroszówki. Jedną z tych monet zgubił. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pozostało mu w kieszeni 1,90 zł?

A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{1}{3}$

34. Na ścianach kostki sześcienniej znajdują się: 1, 2, 3, 4, 5 i 6 oczek, a na ścianach kostki czworościennej znajdują się: 1, 2, 3 i 4 oczka. Czy poniższe zdania są prawdziwe? Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

Prawdopodobieństwo wypadnięcia parzystej liczby oczek jest takie samo na każdej z kostek.	P	F
Prawdopodobieństwo tego, że liczba oczek, jaka wypadnie, jest liczbą pierwszą, jest takie samo na każdej z kostek.	P	F
Prawdopodobieństwo tego, że liczba oczek, jaka wypadnie, jest liczbą podzielną przez 5, jest takie samo na każdej z kostek.	P	F

35. Dwie muchy losowo wybierają po jednej z liczb na tarczy zegara. Wybierz jedną spośród odpowiedzi A lub B oraz jedną spośród C lub D.

Prawdopodobieństwo tego, że pierwsza mucha wybierze liczbę, która jest kwadratem liczby całkowitej jest równe:

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$

Pierwsza mucha wybrała liczbę podzielną przez 3 i usiadła na niej. Druga mucha wybiera liczbę z pozostałych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że druga mucha wybierze inną liczbę podzielną przez 3?

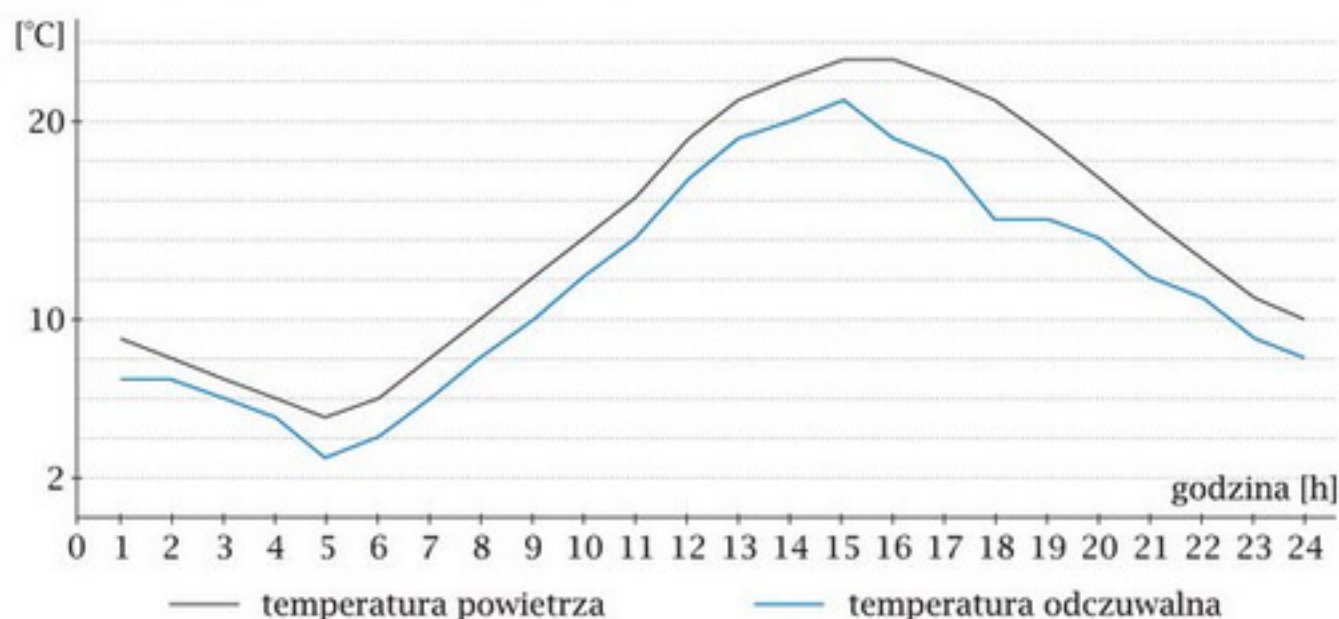
C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{3}{11}$

36. W pudełku znajdują się żetony okrągłe i kwadratowe w trzech kolorach. Liczby żetonów podano w tabeli. Czy poniższe zdania są prawdziwe?

Kształt żetonu	Kolor żetonu		
	czerwony	zielony	niebieski
okrągłe	1	2	5
kwadratowe	3	4	3

Prawdopodobieństwo wylosowania z pudełka zielonego żetonu jest równe $\frac{1}{3}$.	P	F
Prawdopodobieństwo wylosowania z pudełka kwadratowego żetonu jest równe $\frac{1}{2}$.	P	F
Prawdopodobieństwo wylosowania z pudełka okrągłego żetonu, który nie jest niebieski, jest równe prawdopodobieństwu wylosowania niebieskiego kwadratowego żetonu.	P	F

Poniższe wykresy przedstawiają temperaturę powietrza w ciągu doby i temperaturę odczuwalną (nieco niższą od rzeczywistej z powodu wiatru — im silniejszy wiatr, tym bardziej obniża się temperatura odczuwalna). Odpowiedz na podstawie tych wykresów na pytania 37–39.



37. Jaka była rzeczywista temperatura w samo południe?

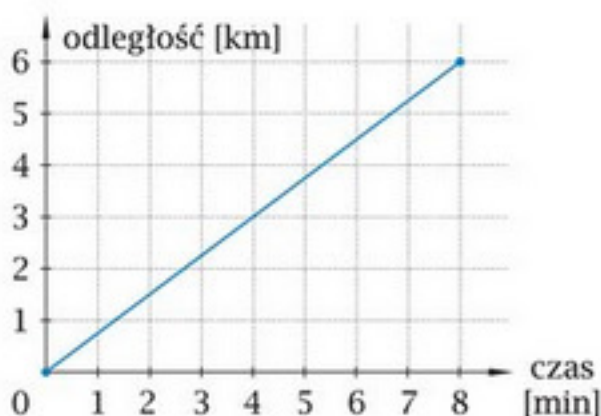
- A. 16,5°C B. 17°C C. 18°C D. 19°C

38. O której godzinie temperatura odczuwalna powietrza była najwyższa?

- A. o 13⁰⁰ B. o 14⁰⁰ C. o 15⁰⁰ D. o 17⁰⁰

39. O której godzinie wiatr był najsilniejszy?

- A. od 2⁰⁰ do 4⁰⁰ B. o 5⁰⁰ C. o 18⁰⁰ D. o 19⁰⁰



40. Na wykresie przedstawiono odległość w kilometrach przebytą przez samochód jadący ze stałą prędkością w kolejnych minutach ruchu.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

W ciągu minuty samochód przebywał mniej niż kilometr.	P	F
Odległość 4 km samochód pokonał w czasie 3 minut.	P	F
Miedzy 3 a 6 minutą jazdy samochód przebył więcej niż 2 km.	P	F
Prędkość średnia samochodu była większa niż $45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.	P	F

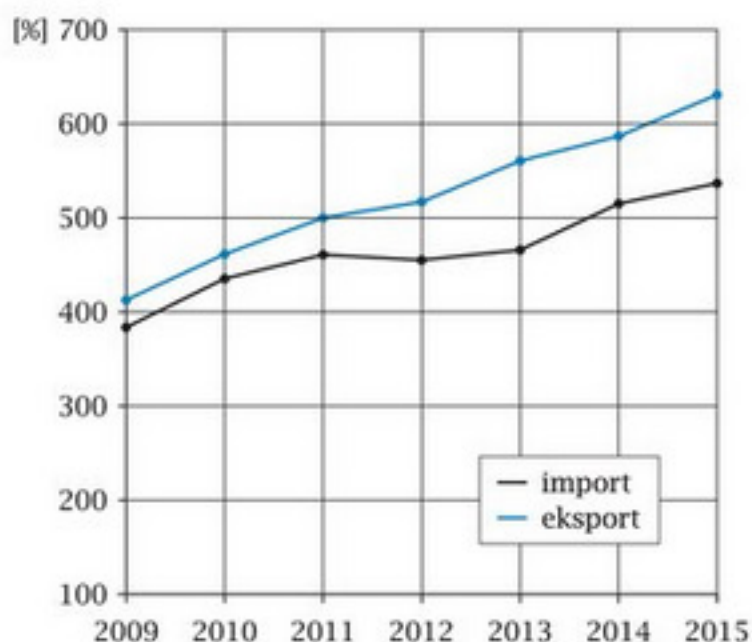
41. Wykres przedstawia zmiany wartości eksportu towarów z Polski oraz wartości importu towarów do Polski w latach 2009–2015 w porównaniu z rokiem 1995. Dokończ zdania. Wybierz odpowiedzi spośród A i B oraz spośród C i D.

Eksport w 2015 roku w porównaniu z rokiem 1995 wzrósł około:

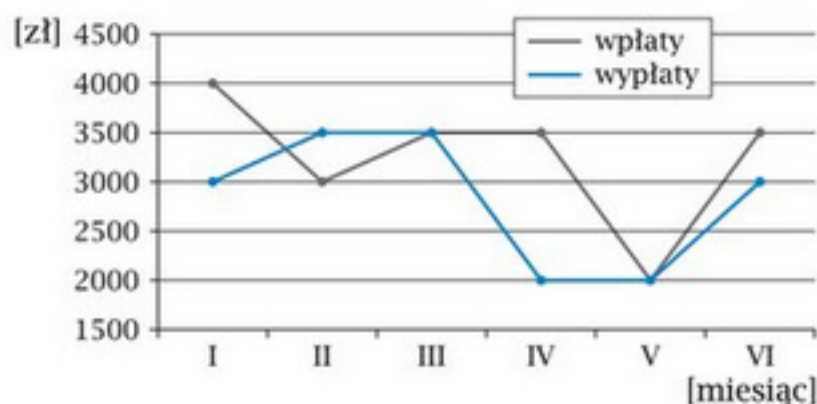
- A. 4 razy B. 6 razy

Import w 2015 r. w porównaniu z rokiem 2010 wzrósł o około:

- C. 25% D. 100%



Skorzystaj z podanych poniżej informacji, aby rozwiązać zadania 42 i 43.



Pan Nowak otworzył w styczniu konto. Na diagramie przedstawiono, ile pieniędzy wpłacał i ile z niego wypłacał w pierwszym półroczu.

42. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

W kwietniu pan Nowak wypłacił o 2000 zł mniej niż wpłacił.	P	F
W trzech miesiącach wpłaty pana Nowaka były równe wypłatom.	P	F
Pan Nowak w żadnym miesiącu nie wypłacił więcej niż wpłacił.	P	F

43. Odpowiedz na pytania. Wybierz odpowiedzi spośród A i B oraz spośród C i D.

W którym miesiącu różnica między wpłatami pana Nowaka a wypłatami była największa?

- A. w kwietniu B. w czerwcu

W ilu miesiącach pan Nowak wpłacił dokładnie 3500 zł?

- C. w trzech D. w czterech

1 Pole powierzchni i objętość graniastostupa

Przypomnij sobie

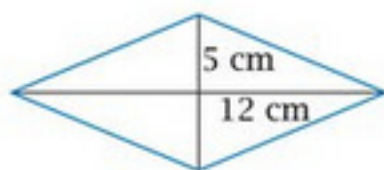
- Ile ścian, krawędzi i wierzchołków ma:
 - graniastosłup pięciokątny,
 - graniastosłup siedmiokątny?
- Oblicz pole powierzchni sześcianu o krawędzi 2 cm.
- Podstawą graniastosłupa jest sześciokąt o polu 10 cm^2 . Wysokość tego graniastosłupa jest równa 7 cm. Jaka jest jego objętość?
- Oblicz długość przekątnej największej ze ścian prostopadłościanu o wymiarach $1 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$.

Poćwicz

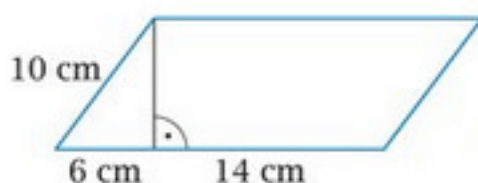
- Oblicz objętość i pole powierzchni:
 - sześcianu o krawędzi 5 cm,
 - sześcianu o krawędzi $3\sqrt{7} \text{ cm}$,
 - prostopadłościanu o wymiarach $3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$,
 - prostopadłościanu o wymiarach $2 \text{ cm} \times \sqrt{3} \text{ cm} \times 2\sqrt{3} \text{ cm}$.
- Oblicz, jaką długość powinna mieć krawędź sześciennego naczynia, żeby miało ono pojemność:
 - 125 m^3
 - 7 cm^3
 - 8 l
 - 2 l
- Oblicz, jaką wysokość powinno mieć naczynie w kształcie graniastosłupa, jeżeli ma się w nim zmieścić 100 litrów wody i jego podstawą ma być:
 - kwadrat o boku długości 5 dm,
 - prostokąt o wymiarach $10 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$,
 - romb o przekątnych długości 1 m i 2 m.

8. Oblicz objętość i pole powierzchni graniastoslupa o wysokości 10 cm i podstawie narysowanej poniżej.

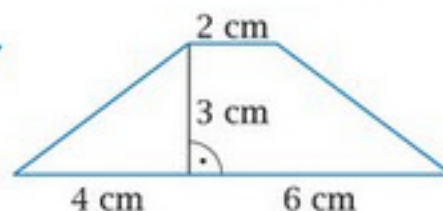
a) romb



b) równoległobok

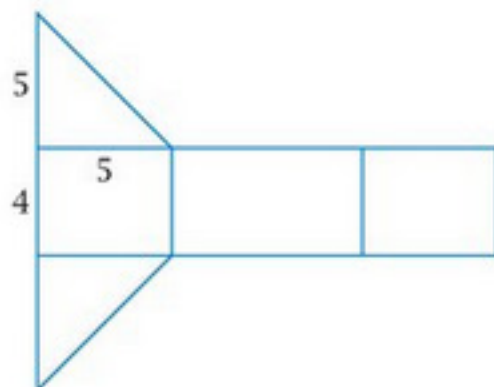


c) trapez równoramienny

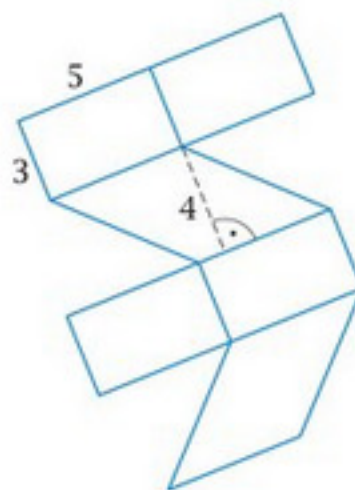


9. Oblicz objętość graniastoslupa, który można otrzymać z narysowanej poniżej siatki.

a)



b)



10. Ściana boczna pewnego graniastoslupa prawidłowego jest prostokątem o wymiarach 2×6 . Oblicz pole powierzchni i objętość tego graniastoslupa, jeżeli jego podstawą jest:

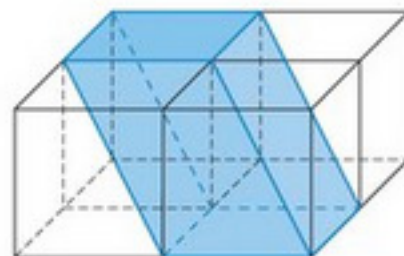
a) trójkąt o boku 2,

c) sześciokąt o boku 2,

b) trójkąt o boku 6,

d) sześciokąt o boku 6.

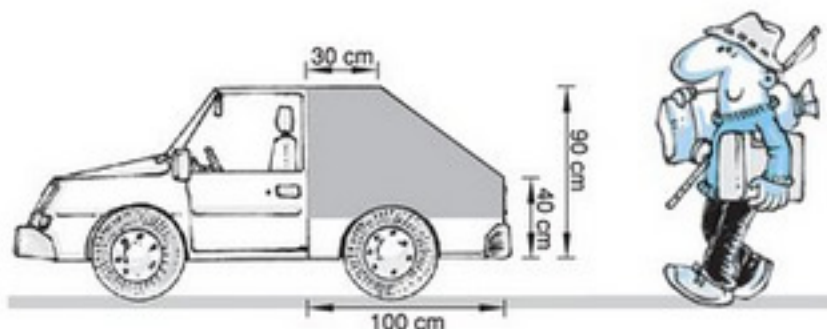
11. Z czterech sklejonych sześciątów o krawędzi 5 cm wycięto graniastoslup pochyły, taki jak na rysunku obok. Oblicz objętość tego graniastoslupa.



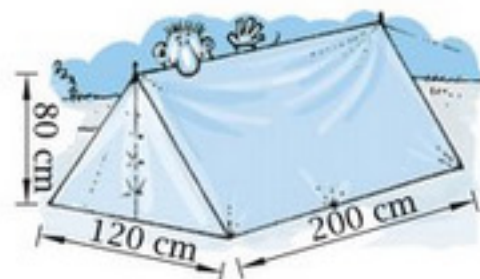
Pomyśl

12. Gdyby wydłużyć krawędzie pewnego sześcianu o 1 cm, to jego pole powierzchni całkowitej zwiększyłoby się o 15 cm^2 . Oblicz długość krawędzi sześcianu.
13. W pewnym graniastoslupie prawidłowym trójkątnym suma długości krawędzi bocznych jest równa sumie długości krawędzi obu podstaw. Suma długości wszystkich krawędzi jest równa 60 cm. Oblicz pole powierzchni tego graniastoslupa.

14. Wykopano dół o wymiarach $4\text{ m} \times 4\text{ m}$ i głębokości 50 cm , a następnie napełniono go piaskiem. Ile waży ten piasek, jeżeli jego 1 litr waży $1,5\text{ kg}$?



15. Oszacuj, ile litrów pojemności ma bagażnik samochodu zacieniowany na rysunku. Szerokość samochodu wynosi $1,5\text{ m}$.



16. Oblicz:

- ile powietrza mieści się w namiocie,
- jaką powierzchnię ma podłoga, a jaką ściany (przód, tył i boki).

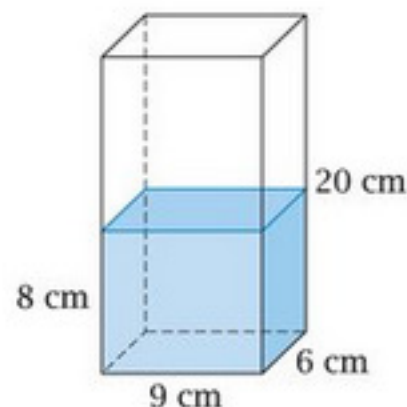
- *17. Graniastosłup G jest prawidłowy pięciokątny. Sklejono go podstawami z drugim takim samym graniastosłupem. W ten sposób otrzymano graniastosłup o polu powierzchni większym o 100 cm^2 od graniastosłupa G i sumie długości krawędzi o 20 cm większej od sumy długości krawędzi graniastosłupa G . Jaką długość ma krawędź podstawy graniastosłupa G ?

- *18. a) Suma długości krawędzi sześcianu jest równa $p\text{ cm}$, a jego pole powierzchni całkowitej jest równe $p\text{ cm}^2$. Oblicz wartość p .
b) Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe $p\text{ cm}^2$, a jego objętość wynosi $p\text{ cm}^3$. Oblicz wartość p .

Sprawdź się

1. Karton o wymiarach takich jak na rysunku jest częściowo wypełniony mlekiem — sięga ono do wysokości 8 cm . Jeśli postawimy ten karton na największej ścianie, to mleko będzie sięgało do wysokości:

- A. $1,2\text{ cm}$ B. $1,8\text{ cm}$ C. $2,2\text{ cm}$ D. $2,4\text{ cm}$



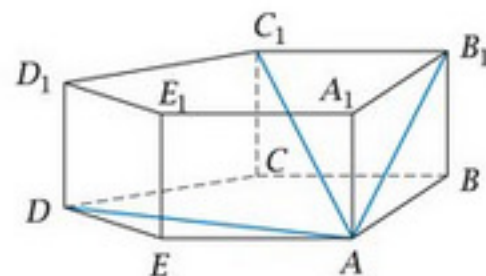
2. Każda z krawędzi pewnego graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 2 cm . Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa wynosi 12 cm .	P	F
Pole powierzchni tego graniastosłupa jest równe $(4\sqrt{3} + 12)\text{ cm}^2$.	P	F
Objętość tego graniastosłupa jest równa $4\sqrt{3}\text{ cm}^3$.	P	F

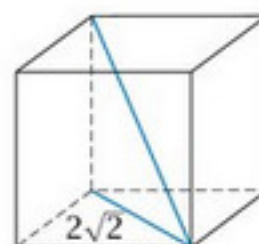
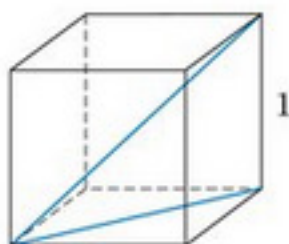
2 Odcinki w graniastostupach

Przypomnij sobie

1. Odcinek AD jest przekątną podstawy graniastostupa, AB_1 — przekątną ściany bocznej, a AC_1 — przekątną graniastostupa. Wskaż przekątną podstawy, przekątną ściany bocznej i przekątną graniastostupa, które mają wspólny koniec w wierzchołku A i nie są pokazane na rysunku.

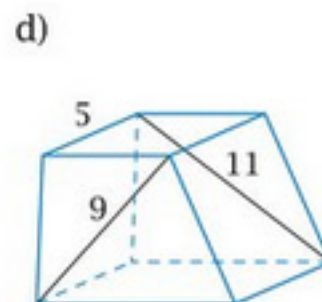
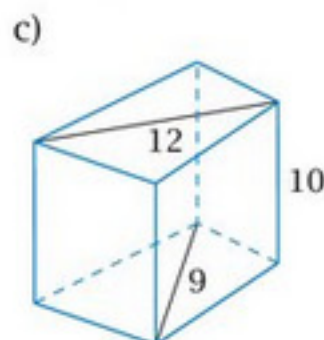
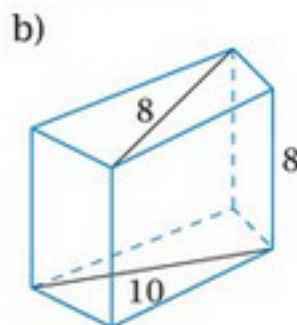
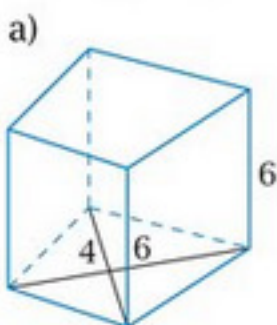
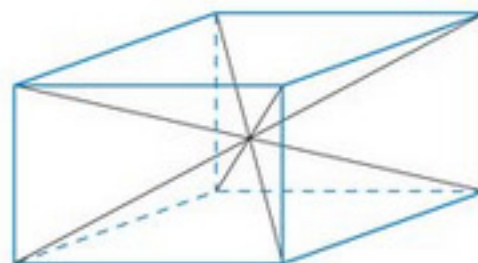


2. Oblicz długość przekątnej sześcianu, w którym:
 - a) krawędź ma długość 1,
 - b) przekątna podstawy ma długość $2\sqrt{2}$.



Poćwicz

3. Oblicz długości przekątnych ścian bocznych graniastostupa prostego o wysokości 5 cm, którego podstawą jest czworokąt o bokach 3 cm, 5 cm, 10 cm i 12 cm.
4. Na rysunku zaznaczono cztery przekątne graniastostupa czworokątnego. Podaj, ile przekątnych ma graniastostup:
 - a) pięciokątny,
 - b) sześciokątny.
5. Oblicz długości przekątnych narysowanego graniastostupa prostego, jeżeli dane są długości przekątnych jego podstawy oraz wysokość.



6. Oblicz długości przekątnych:

- a) sześcianu o krawędzi 1 m,
- b) prostopadłościanu o wymiarach $1\text{ m} \times 5\text{ m} \times 12\text{ m}$,
- c) graniastopu prawidłowego sześciokątnego, którego wszystkie krawędzie mają 1 m.

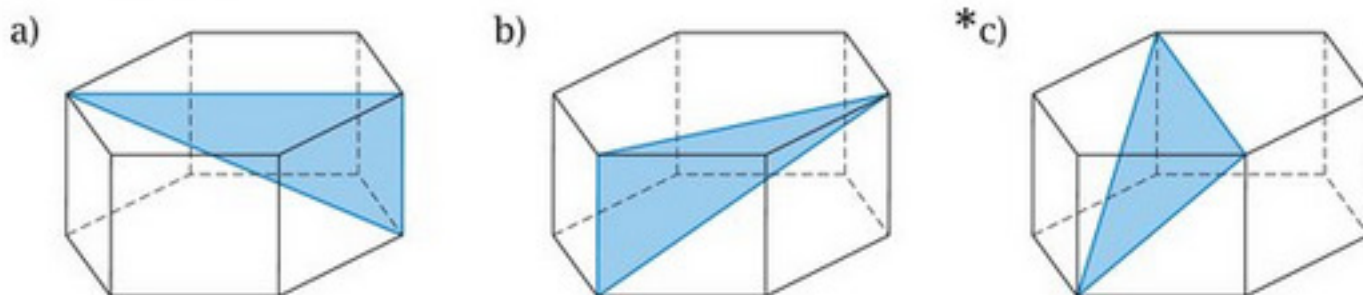
7. Oblicz długość krawędzi sześcianu o podanej przekątnej.

- a) 3 cm b) $3\sqrt{3}\text{ cm}$ c) $30\sqrt{6}\text{ cm}$ d) 60 cm

8. Wysokość graniastopu prawidłowego jest równa 6 cm, a przekątna ściany bocznej ma 10 cm. Oblicz objętość tego graniastopu, jeśli jego podstawą jest:

- a) trójkąt, b) czworokąt, c) sześciokąt.

9. Na rysunku przedstawiono graniastop prawidłowy sześciokątny, w którym krawędź podstawy ma długość 6, a wysokość 5. Oblicz długości boków zaznaczonego trójkąta.

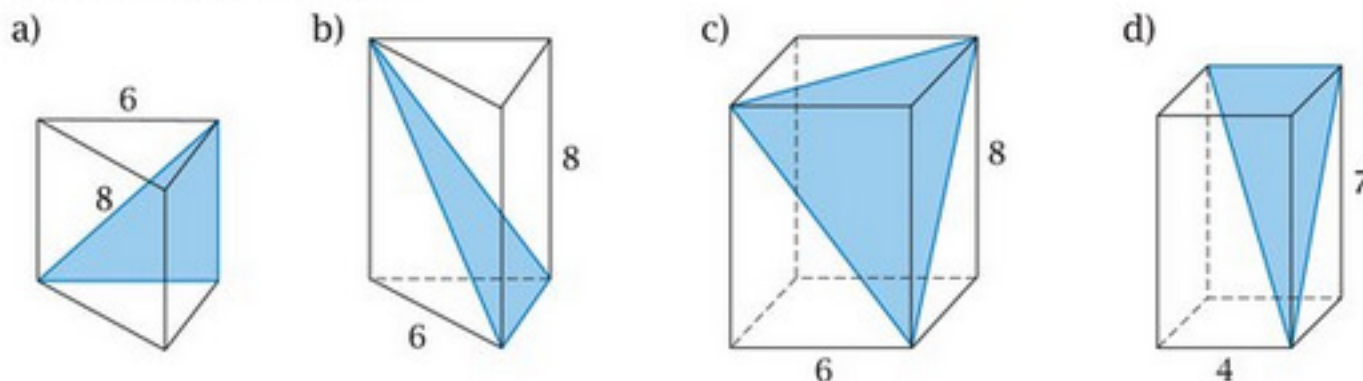


10. Oblicz długości przekątnych graniastopu o wysokości 2 m, którego podstawą jest:

- a) kwadrat o boku długości 3 m,
- b) prostokąt o bokach długości 1 m i 3 m,
- c) romb o przekątnych długości 1 m i 3 m.

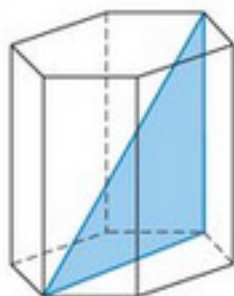
Pomyśl

11. Oblicz obwód zacieniowanego trójkąta wyznaczonego przez odcinki w graniastopie prawidłowym.

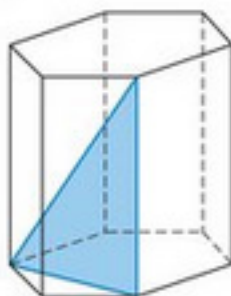


12. W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym najdłuższa przekątna podstawy ma 10 cm i jest równa wysokości tego graniastosłupa. Oblicz pole zacięniowego trójkąta.

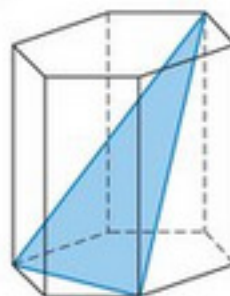
a)



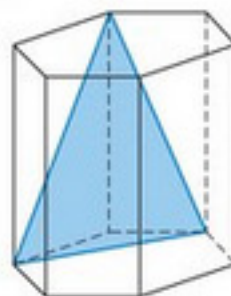
b)



*c)



*d)

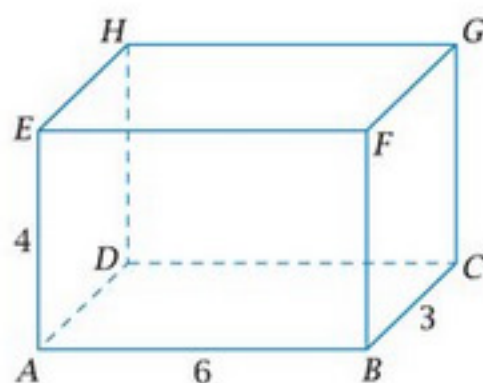


13. Uzasadnij, że złożony parasol długości 62 cm nie zmieści się w teczce o wysokości 30 cm, długości 50 cm i grubości 15 cm.

14. Oblicz, ilu klocków sześciennych o objętości 1 należy użyć do zbudowania prostopadłościanu o przekątnej długości:

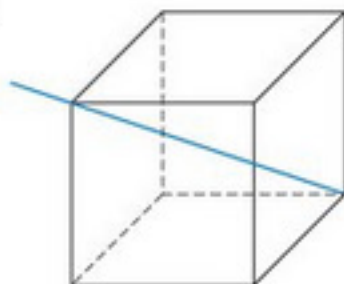
- a) $\sqrt{6}$ c) $2\sqrt{3}$
b) 3 d) $\sqrt{17}$

15. Oblicz odległości wierzchołka A prostopadłościanu przedstawionego na rysunku od pozostałych wierzchołków.

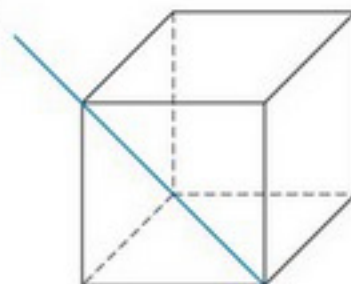


16. Do sześciennego pudełka wsunięto prosty kawałek drutu w sposób pokazany na rysunkach. W pierwszym przypadku poza pudełko wystawał 1 cm drutu, w drugim — 2 cm. Uzasadnij, że krawędź pudełka ma długość $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ cm.

I



II



- *17. Dany jest graniastosłup, którego podstawa jest wielokątem o n wierzchołkach.

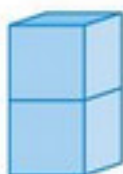
- a) Ile jest wszystkich przekątnych ścian bocznych w tym graniastosłupie?
b) Ile przekątnych ma ten graniastosłup?

- *18. Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 16. Stosunek długości przekątnej podstawy do przekątnej graniastosłupa wynosi 3 : 5. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Sprawdź się

1. Każdy z przedstawionych prostopadłościanów jest zbudowany z sześciątów o objętości 1. Który z tych prostopadłościanów ma przekątną długości $3\sqrt{2}$?

A.



B.



C.



D.



2. Prostopadłościan ma wymiary $6 \times 7 \times 8$. Dokończ zdania. Wybierz odpowiedzi spośród A i B oraz spośród C i D.

Przekątna najmniejszej ściany tego prostopadłościanu ma długość:

A. 10

B. $\sqrt{85}$

Odległość między najdalej położonymi punktami prostopadłościanu jest równa:

C. $\sqrt{149}$ D. $\sqrt{185}$

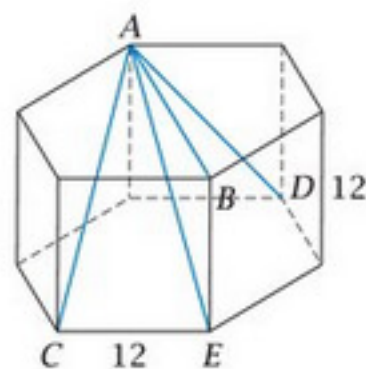
3. Przyporządkuj nazwie odcinka w graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym jego długość.

A. przekątna podstawy

B. przekątna ściany bocznej

C. krótsza przekątna graniastosłupa

D. dłuższa przekątna graniastosłupa

I. $12\sqrt{5}$ II. $6\sqrt{5}$ III. $6\sqrt{7}$ IV. $12\sqrt{2}$ V. $6\sqrt{2}$

VI. 24

3 Rodzaje ostrosłupów

Przypomnij sobie

1. Na którym rysunku przedstawiono ostrosłup siedmiokątny?

I



II



III



IV



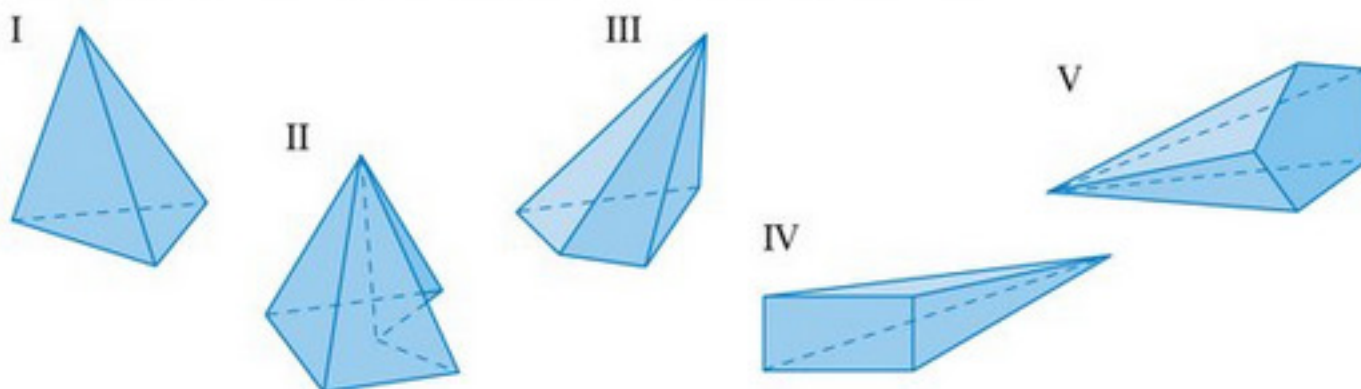
V



VI



2. Przyjrzyj się ostrosłupom przedstawionym na rysunkach.



- Ile wierzchołków ma każda z podstaw?
- Ile wszystkich wierzchołków ma każdy z ostrosłupów?

3. Odpowiedz na pytania dotyczące każdego ostrosłupa prawidłowego.

- Jaką figurą jest jego podstawa?
- Jakimi figurami są jego ściany boczne?
- Jak się nazywa odcinek łączący wierzchołek ostrosłupa z tym punktem podstawy, który jest jednakowo odległy od wierzchołków podstawy?
- Gdzie leży spodek wysokości ostrosłupa?

4. Słynne piramidy egipskie kształtem przypominają pewien ostrosłup. Podaj nazwę tego ostrosłupa.

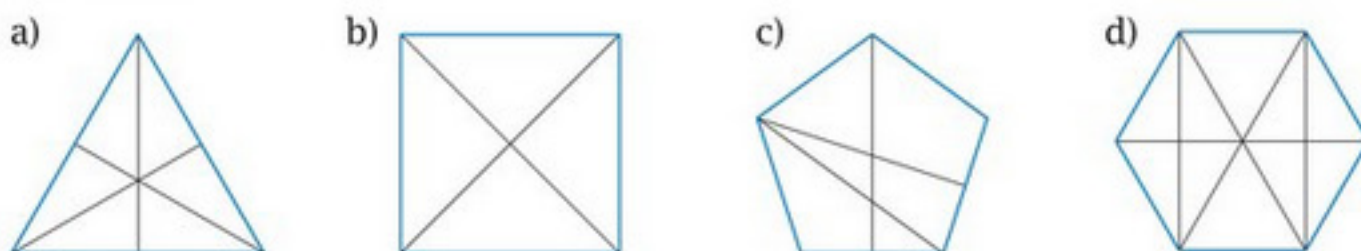


5. Ile ścian, krawędzi i wierzchołków ma:

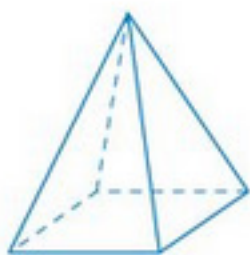
- ostrosłup sześciokątny,
- ostrosłup ośmiokątny?

Poćwicz

6. Ile krawędzi, ile ścian i ile wszystkich wierzchołków ma ostrosłup prawidłowy, którego podstawą jest dany wielokąt? Wskaż na podstawie spodek wysokości ostrosłupa.



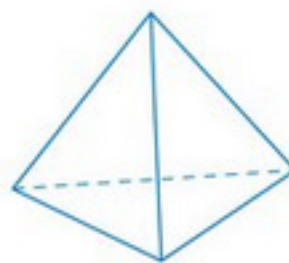
7. Przerysuj następujące ostrosłupy, a następnie zaznacz spodki ich wysokości. Narysuj, jak wygląda każdy z tych ostrosłupów widziany z góry.



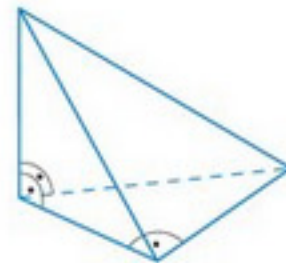
ostrosłup prawidłowy czworokątny



ostrosłup prawidłowy sześciokątny



ostrosłup prawidłowy trójkątny



ostrosłup trójkątny

8. Ile krawędzi, ile ścian i ile wszystkich wierzchołków ma ostrosłup, którego podstawą jest dany wielokąt?

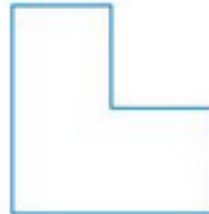
a)



b)



c)



d)



9. Podaj liczbę krawędzi, liczbę ścian i liczbę wszystkich wierzchołków ostrosłupa:

a) siedmiokątnego,

c) dwustudwudziestokątnego,

b) trzynastokątnego,

d) k -kątnego.

10. Oblicz sumę długości krawędzi czworościanu foremego, którego krawędź podstawy ma długość:

a) 7 mm

b) 12 cm

c) 30 dm

d) n metrów

11. Ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego są trójkąty o bokach 5 cm, 100 cm i 100 cm. Oblicz sumę długości krawędzi ostrosłupa, jeżeli jego podstawą jest:

a) czworokąt,

c) dwudziestokąt,

b) ośmiokąt,

d) k -kątny.

Pomyśl

12. Z drutu o długości 3 m zbudowano szkielet ostrosłupa prawidłowego pięciokątnego. Ustal, jakie długości mają krawędzie tego ostrosłupa, jeśli:

a) wszystkie krawędzie mają jednakowe długości,

b) krawędź boczna jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy,

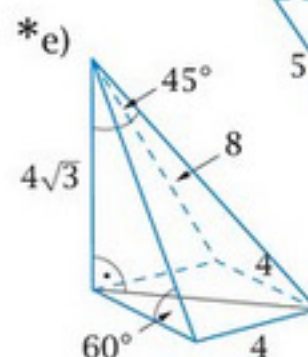
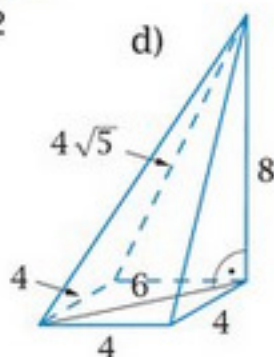
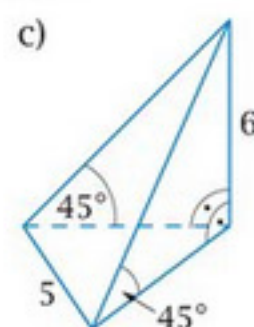
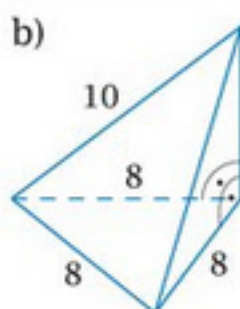
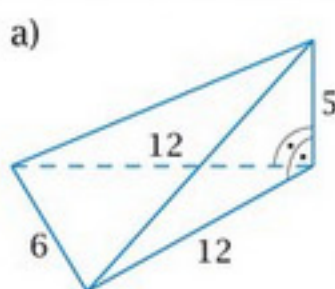
c) krawędź podstawy jest pięć razy krótsza od krawędzi bocznej.

- *13. Ustal, czy z kawałka drutu o długości 120 cm można zbudować szkielet ostrosłupa prawidłowego:
- sześciokątnego o krawędzi podstawy 10 cm,
 - czworokątnego o krawędzi podstawy 20 cm.

- *14. Jakie ostrosłupy prawidłowe można zbudować z zapalek tak, by każda krawędź miała długość jednej zapalki?



15. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi narysowanego ostrosłupa.



16. Narysuj dowolny czworokąt $ABCD$ oraz punkt S , który leży wewnątrz tego czworokąta. Połącz punkt S odcinkami z wierzchołkami A , B , C i D czworokąta. W ten sposób otrzymasz rysunek ostrosłupa widzianego z góry. Opisz położenie wysokości ostrosłupa i spodka wysokości względem bryły.

Wykonaj te same czynności, gdy punkt S leży:

- na jednym z boków czworokąta, ale nie w wierzchołku,
 - w wierzchołku czworokąta,
 - poza czworokątem.
17. Wszystkie poniższe zdania są fałszywe. Popraw każde z nich, dodając albo usuwając jedno słowo tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
- Wszystkie krawędzie ostrosłupa prawidłowego są równej długości.
 - Ściany boczne ostrosłupa są przystającymi trójkątami równoramiennymi.
 - Dowolny trapez nie może być podstawą ostrosłupa.
 - Ostrosłup o podstawie czworokątnej jest czworościanem.
 - Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest wielokąt.
 - Każdy ostrosłup o czterech ścianach nazywamy czworościanem foremnym.

18. Uzasadnij, że każdy ostrosłup:

- a) ma parzystą liczbę krawędzi,
- b) który ma parzystą liczbę ścian, ma też parzystą liczbę wierzchołków,
- c) ma dwa razy mniej ścian bocznych niż wszystkich krawędzi.

Sprawdź się

1. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

Liczba wierzchołków każdego ostrosłupa jest nieparzysta.	P	F
W każdym ostrosłupie ścian bocznych jest tyle, ile wierzchołków podstawy.	P	F
Liczba krawędzi każdego ostrosłupa jest nieparzysta.	P	F
Każdy ostrosłup o podstawie będącej wielokątem foremnym jest prawidłowy.	P	F

2. Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest dziesięciokąt o boku długości 5. Krawędź boczna ma długość 15. Suma długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa jest równa:

- A. 50 B. 150 C. 200 D. 250

3. Wskaż zdanie prawdziwe dotyczące ostrosłupa czworokątnego, w którym spodek wysokości nie jest punktem przecięcia przekątnych podstawy.

- A. Jest to ostrosłup prawidłowy czworokątny.
- B. Wierzchołek ostrosłupa leży na prostej prostopadłej do podstawy przechodzącej przez jeden z wierzchołków podstawy.
- C. Spodek wysokości ostrosłupa zawsze leży wewnątrz jego podstawy.
- D. Spodek wysokości ostrosłupa może leżeć poza jego podstawą.

4

Siatki ostrosłupów. Pole powierzchni

Przypomnij sobie

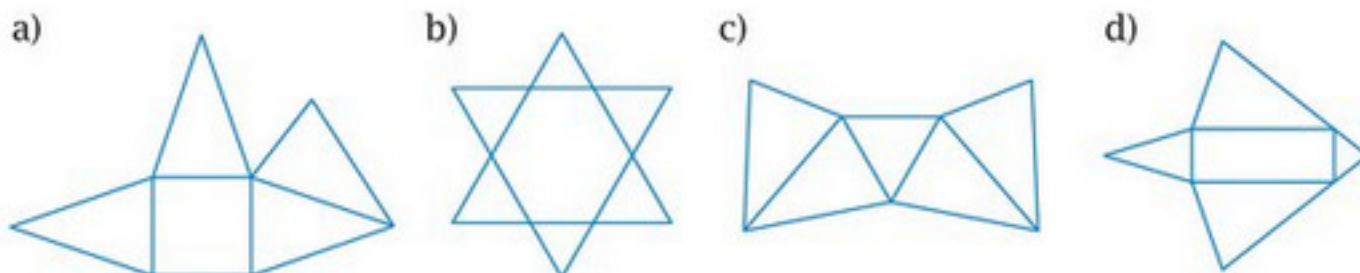
1. Podaj, z ilu trójkątów i ilu innych wielokątów składa się siatka ostrosłupa prawidłowego:

- a) czworokątnego, b) ośmiokątnego.

2. Na rysunku przedstawiono dwie różne siatki pewnego ostrosłupa. Podaj jego nazwę oraz określ, ile ma krawędzi i ile wierzchołków.



3. Wyjaśnij, dlaczego poniższe rysunki nie przedstawiają siatek ostrosłupów.



4. Wyraż pole powierzchni zapisane w ramce w jednostkach podanych obok.

a) 20 cm^2 mm^2, dm^2

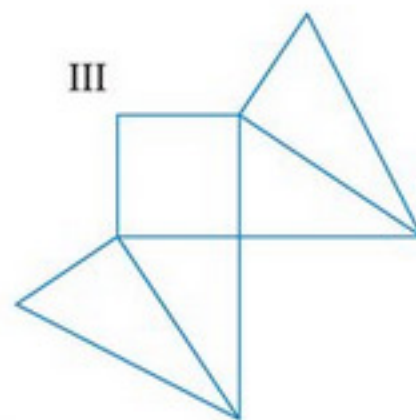
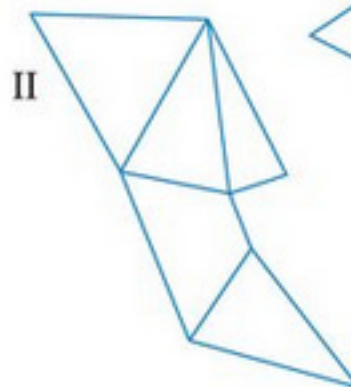
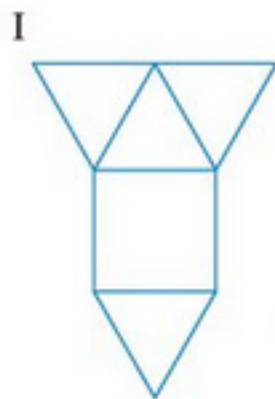
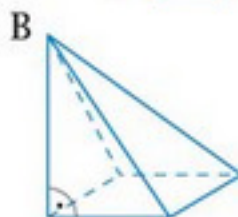
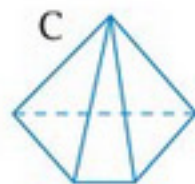
c) 4 m^2 a, dm^2

b) 3 dm^2 cm^2, m^2

d) 3 ha a, m^2

Poćwicz

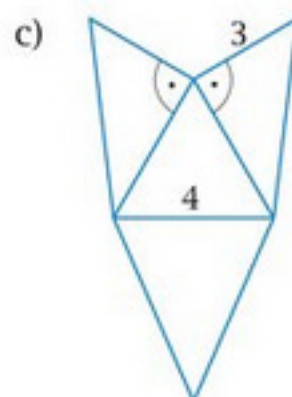
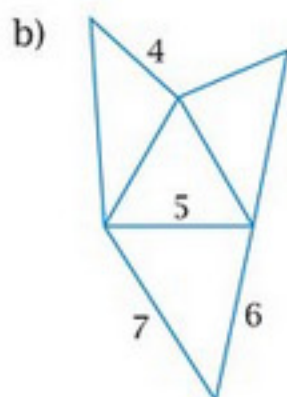
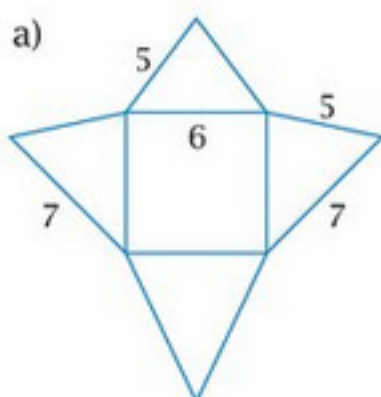
5. Dopasuj siatki I, II, III do ostrosłupów A, B, C.



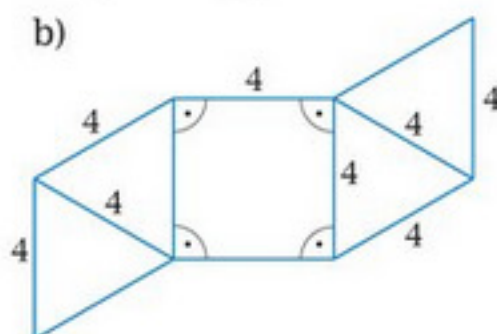
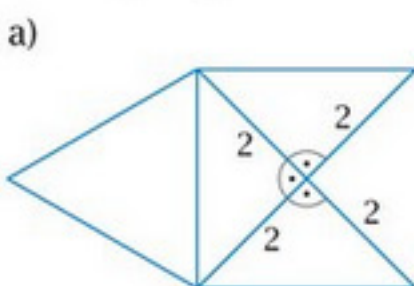
6. Narysuj siatkę:

- ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego krawędź boczna jest trzy razy dłuższa od krawędzi podstawy,
- ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego wszystkie krawędzie mają równe długości.

7. Na rysunku przedstawiono siatkę ostrosłupa, którego podstawa jest wielokątem foremnym. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa.



8. Oblicz pole powierzchni ostrosłupa, którego siatkę przedstawiono na rysunku.



9. Oblicz pole powierzchni czworościanu foremnego o krawędzi 2 cm.

10. Oblicz pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego, którego krawędź podstawy ma długość 10 cm, krawędź boczna ma długość 13 cm, a podstawa jest:

a) trójkątem,

b) czworokątem.

Pomyśl

- 11.** Sprawdź, że czworościan foremny ma tylko dwie różne siatki.

- *12. Krawędź czworościanu foremnego ma długość 6. Oblicz długość najkrótszej drogi biegnącej po powierzchni czworościanu łączącej:

a) środki dwóch ścian,

b) wierzchołek czworościanu ze środkiem przeciwległej ściany,

c) po kolei środki wszystkich ścian (kończącej się w punkcie wyjścia),

d) środki dwóch krawędzi o wspólnym wierzchołku i przechodzącej przez dwie ściany.

13. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma 10 cm, a krawędź podstawy — 12 cm. Oszacuj, czy arkusz papieru o wymiarach 16 cm $\times$ 20 cm wystarczy na oklejenie całej powierzchni tego ostrosłupa.

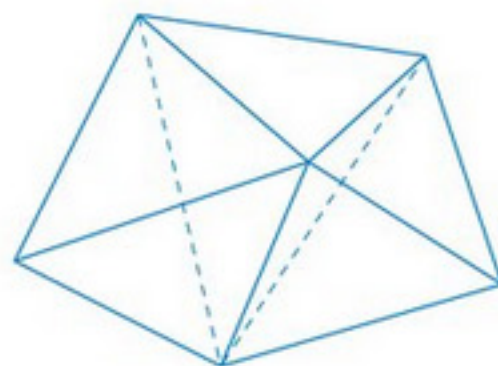
14. Pole ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równe $8\sqrt{6}$, a wysokość jego ściany bocznej ma długość 8. Oblicz pole powierzchni tego ostrosłupa.
15. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego dziesięciokątnego ma 14 cm, a krawędź boczna ma 25 cm. Pole powierzchni ostrosłupa jest równe 3188 cm^2 . Oblicz pole podstawy tego ostrosłupa.
16. Graniastosłup i ostrosłup są prawidłowe i mają jednakowe pola powierzchni całkowitej. Ich podstawami są kwadraty o boku 6 cm. Krawędź boczna graniastosłupa ma długość 2 cm. Oblicz długość krawędzi bocznej ostrosłupa.



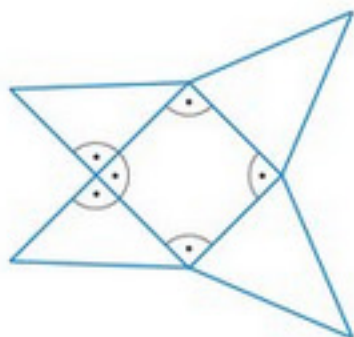
17. W pewnym ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędzie boczne są dwa razy dłuższe od krawędzi podstawy. Suma długości wszystkich krawędzi wynosi 48 cm. Oblicz pole powierzchni tego ostrosłupa.

18. Ile metrów kwadratowych blachy potrzeba na pokrycie dachu wieży w kształcie ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego przedstawionego na rysunku obok? Wynik podaj z dokładnością do części dziesiątych metra kwadratowego.

19. a) Wyraż pole powierzchni czworościanu foremnego w zależności od długości krawędzi a .
 b) Bryła na rysunku powstała przez połączenie ścianami trzech czworościanów foremnych o krawędzi a . Oblicz jej pole powierzchni.
 *c) Oblicz pole powierzchni bryły zbudowanej z pięciu połączonych ścianami czworościanów foremnych o krawędzi a .



- *20. Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równe polu ściany bocznej i wynosi $6\sqrt{3}$. Oblicz długości krawędzi tego ostrosłupa.
- *21. a) Dany jest kwadrat o boku a . Narysuj trzy odcinki w jego wnętrzu w taki sposób, aby otrzymać siatkę ostrosłupa trójkątnego.
 b) Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa, którego podstawą jest trójkąt prostokątny równoramienny o przeciwprostokątnej $\frac{5\sqrt{2}}{2}$, a krawędź boczna ostrosłupa wychodząca z wierzchołka kąta prostego podstawy i do niej prostopadła ma długość 5.



*22. Dlaczego z siatki przedstawionej na rysunku nie można złożyć ostrosłupa, mimo że odpowiednie krawędzie boczne są tej samej długości?

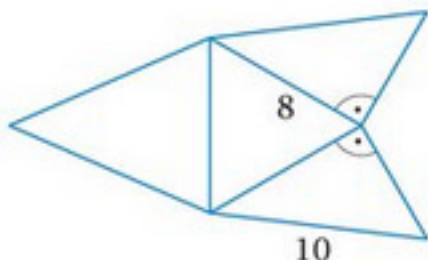
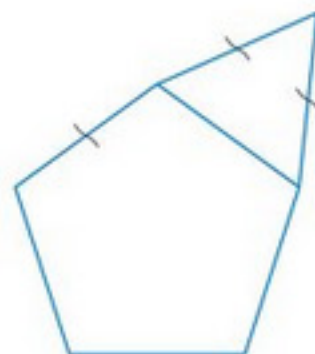
*23. Zaprojektuj siatkę takiego ostrosłupa o podstawie kwadratu, którego nie wszystkie krawędzie boczne są równej długości. Sklej model takiego ostrosłupa.



Sprawdź się

1. Na rysunku przedstawiono fragment siatki ostrosłupa prawidłowego i zaznaczono odcinki równej długości. Suma długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa wynosi 120. Krawędź podstawy ostrosłupa ma długość:

- A. 10 C. 15
B. 12 D. 24



2. Podstawą ostrosłupa, którego siatkę narysowano obok, jest trójkąt równoboczny. Pole powierzchni ostrosłupa jest równe:

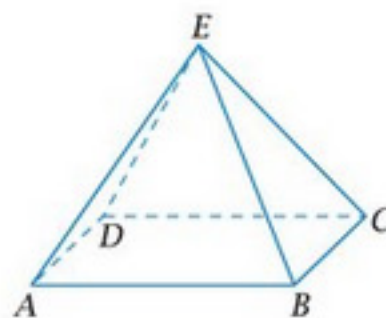
- A. $48 + 8\sqrt{21}$ C. $24 + 16\sqrt{3} + 8\sqrt{21}$
B. $68 + 16\sqrt{3}$ D. $48 + 16\sqrt{3} + 8\sqrt{21}$

3. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

Jeżeli dokładnie dwie ściany boczne ostrosłupa czworokątnego są trójkątami prostokątnymi, to wysokość ostrosłupa pokrywa się z jedną z krawędzi bocznych.	P	F
Istnieje czworościan, którego wszystkie ściany są przystającymi trójkątami równoramiennymi (ale nie równobocznymi).	P	F
Nie istnieje ostrosłup prawidłowy sześciokątny o wszystkich krawędziach tej samej długości.	P	F

4. Wszystkie krawędzie narysowanego obok ostrosłupa prawidłowego mają jednakowe długości.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.



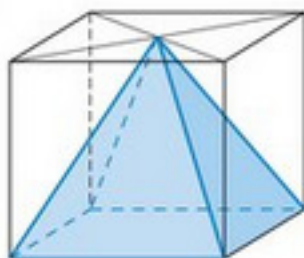
Trójkąt ACE jest prostokątny.	P	F
Wysokość ostrosłupa jest równa połowie przekątnej podstawy.	P	F

5 Objętość ostrosłupa

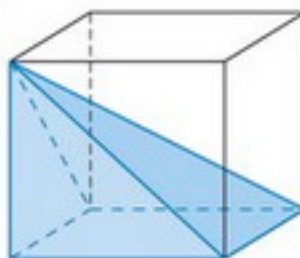
Przypomnij sobie

1. Objętość sześcianu wynosi 27. Wierzchołek ostrosłupa leży na górnej podstawie sześcianu. Oblicz objętość zacieniowanego ostrosłupa.

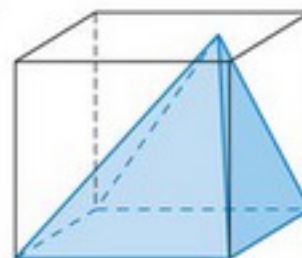
a)



b)

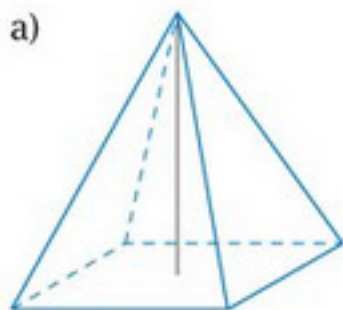


c)

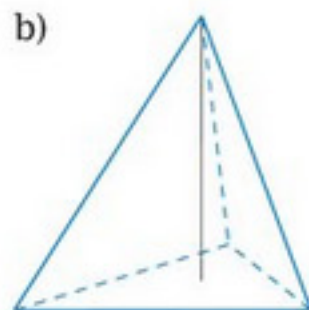


2. Wysokość narysowanego ostrosłupa jest równa 10 cm. Pod rysunkiem podano pole jego podstawy. Oblicz objętość ostrosłupa.

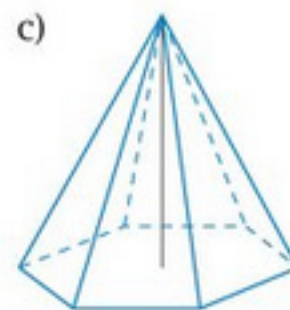
a)

12 cm²

b)

9 cm²

c)

15 cm²

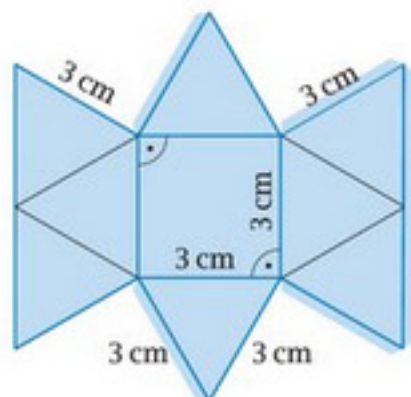
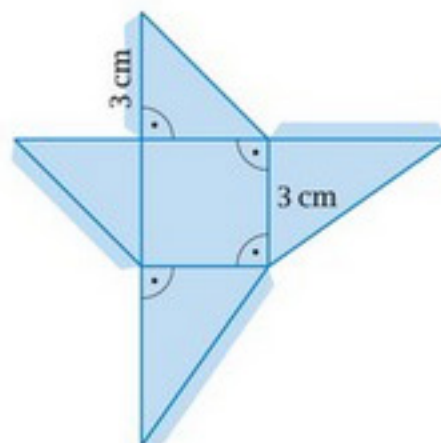
3. Wyraż objętość zapisaną w ramce w jednostkach podanych obok.

a) 2 cm³ mm³, dm³ b) 40 dm³ cm³, m³ c) 0,5 m³ dm³, cm³

4. Ze wzoru $V = \frac{1}{3}P_p h$ wyznacz P_p oraz h .

Poćwicz

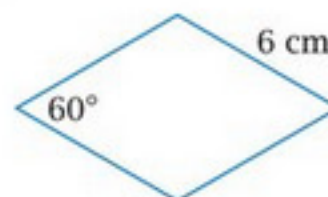
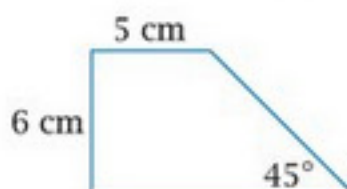
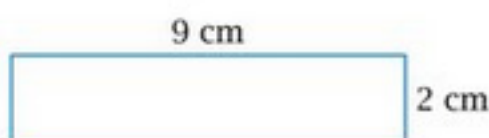
5. a) Narysuj trzy razy siatkę ostrosłupa według wzoru przedstawionego na rysunku obok. Sklej trzy modele tych ostrosłupów. Zbuduj z nich sześciian. Zmierz krawędź sześcianu, a następnie oblicz objętości sześcianu i ostrosłupa.



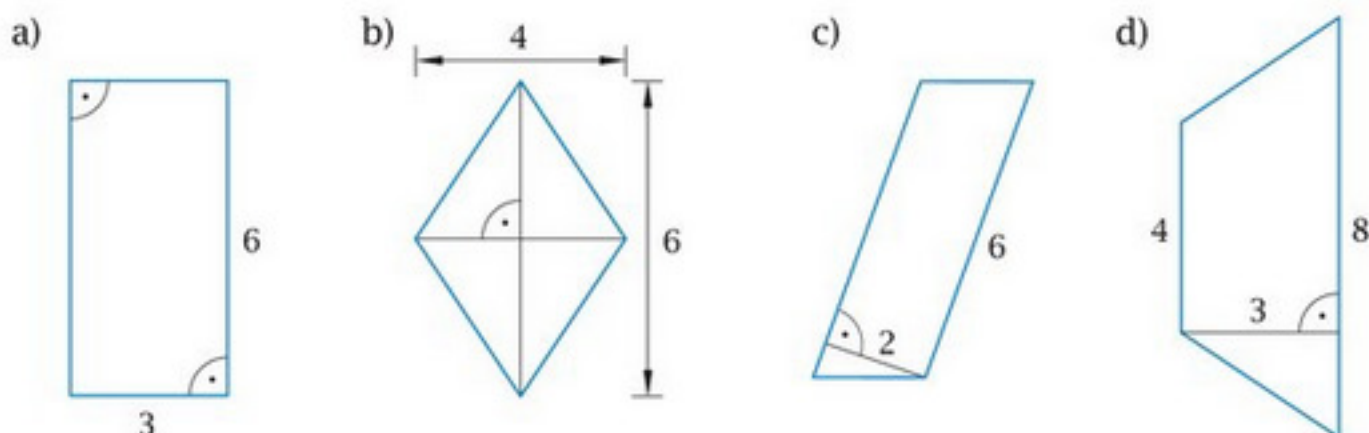
- b) Narysuj dwa razy siatkę według wzoru przedstawionego na rysunku obok. Sklej dwa modele figur przestrzennych. Zbuduj z nich ostrosłup. Zmierz jego krawędzie i wysokość, a następnie oblicz objętość ostrosłupa.

Uwaga. Czarne linie na rysunku to tylko linie pomocnicze.

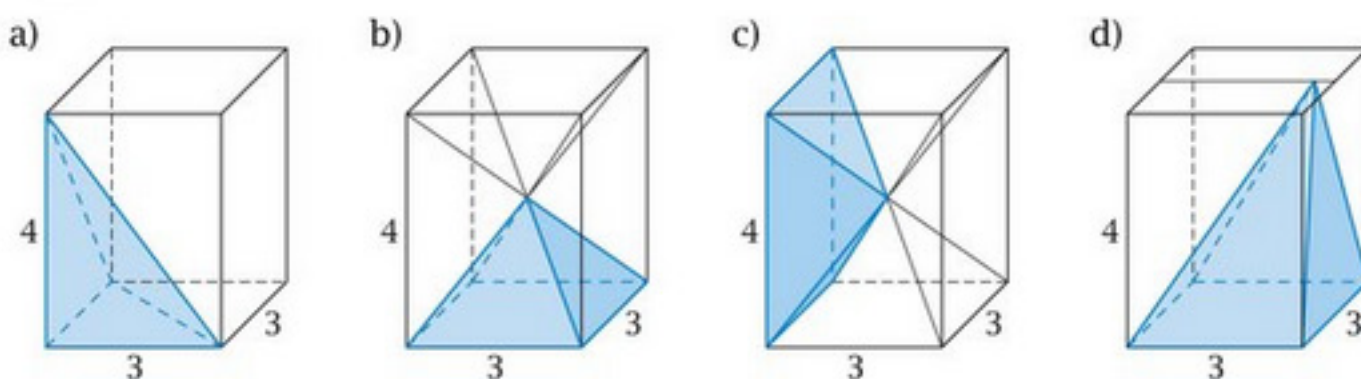
6. Podstawą ostrosłupa jest pięciokąt o polu 15 cm^2 . Wysokość tego ostrosłupa jest równa 4 cm. Jaka jest jego objętość?
7. Jaką wysokość powinien mieć ostrosłup, żeby miał objętość równą 2 m^3 i jego podstawą był:
- kwadrat o boku długości 5 m,
 - prostokąt o wymiarach $5 \text{ dm} \times 40 \text{ dm}$,
 - romb o przekątnych długości 6 m i 5 cm?
8. Oblicz objętość danego ostrosłupa. Wynik podaj w dwóch jednostkach objętości.
- Ostrosłup prawidłowy czworokątny o wysokości 12 dm i krawędzi podstawy 2 m.
 - Ostrosłup prawidłowy trójkątny o wysokości 9 cm i krawędzi podstawy 8 mm.
 - Ostrosłup prawidłowy sześciokątny o wysokości 3 cm i krawędzi podstawy 4 m.
 - Ostrosłup trójkątny o wysokości 0,9 m i podstawie w kształcie trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 4 cm i 1 dm.
9. Oblicz objętość ostrosłupa o wysokości 10 cm i podstawie przedstawionej na rysunku.
- prostokąt
 - trapez prostokątny
 - romb



10. Na rysunku przedstawiono podstawę ostrosłupa. Oblicz objętość ostrosłupa, jeżeli jego wysokość jest równa 10.



11. Na rysunku zacieniowano ostrosłup wycięty z prostopadłościanu. Oblicz jego objętość.

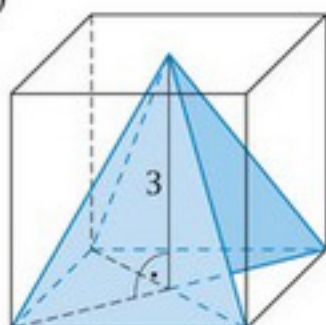


Pomyśl

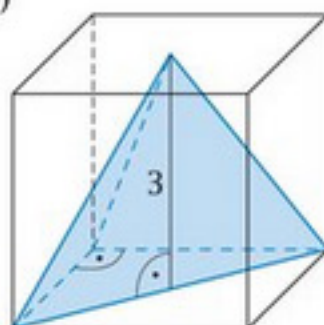
12. Opisz, jak można rozciąć ostrosłup prawidłowy czworokątny na:
- dwa ostrosłupy o równych objętościach,
 - osiem ostrosłupów o równych objętościach.
13. a) Ostrosłup i graniastosłup mają równe wysokości i pola podstawy. Ile razy objętość graniastosłupa jest większa od objętości ostrosłupa?
 b) Ostrosłup i graniastosłup mają równe wysokości i objętości. Ile razy pole podstawy graniastosłupa jest mniejsze od pola podstawy ostrosłupa?
 c) Ostrosłup i graniastosłup mają równe objętości i pola podstawy. Ile razy wysokość ostrosłupa jest dłuższa od wysokości graniastosłupa?
14. Jaką największą objętość może mieć ostrosłup włożony do pudełka o wymiarach $3\text{ cm} \times 4\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ tak, że jego podstawa leży na jednej ze ścianek pudełka?
15. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o boku $0,5\text{ m}$, a jego objętość jest równa 1 m^3 . Czy ostrosłup ten zmieści się w sali o wymiarach $6\text{ m} \times 5\text{ m} \times 3\text{ m}$?

16. Ostrosłup prawidłowy ma 8 krawędzi, przy czym krawędzie podstawy mają długość 3 cm. Wysokość bryły wynosi 8 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.
17. Na dziedzińcu Luwru postawiono przeszklony budynek w kształcie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Podstawa tego ostrosłupa ma krawędź długości 35 m, a wysokość jest równa 21,6 m.
- Jaka jest objętość tego budynku?
 - Jaka jest powierzchnia jego ścian (wynik podaj z dokładnością do 1 m^2)?
18. Oblicz objętość ostrosłupa umieszczonego w sześcianie o krawędzi długości 3.

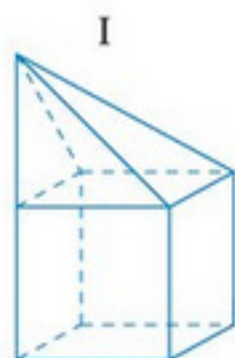
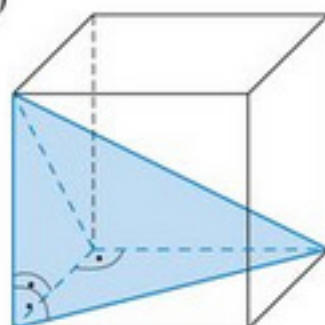
a)



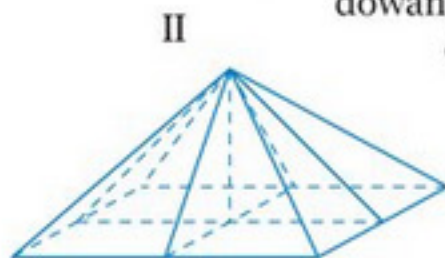
b)



c)

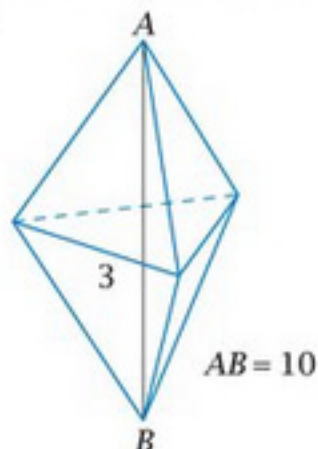


19. Bryła I widoczna na rysunku składa się z sześcianu i ostrosłupa, którego wysokość jest równa krawędzi sześcianu. Objętość tej bryły wynosi 256 dm^3 . Bryła II jest zbudowana z takich samych ostrosłupów, jak ostrosłup użyty do budowy bryły I.

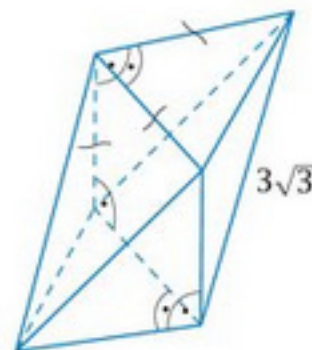


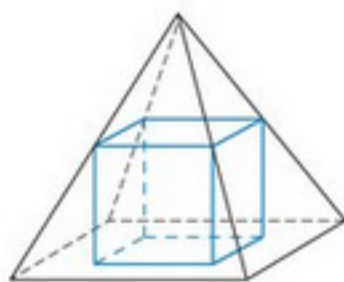
- Oblicz objętość sześcianu użytego do budowy bryły I.
- Oblicz objętość ostrosłupa II.

- *20. a) Bryła przedstawiona na rysunku powstała przez połączenie podstawami dwóch jednakowych ostrosłupów prawidłowych trójkątnych. Oblicz jej objętość.



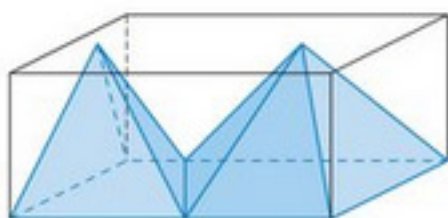
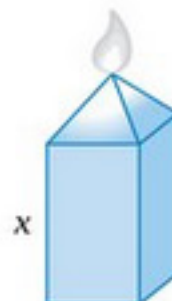
- b) Przedstawiona niżej bryła powstała przez połączenie podstawami jednakowych ostrosłupów czworokątnych. Zaznaczone odcinki mają tę samą długość. Oblicz objętość tej bryły.





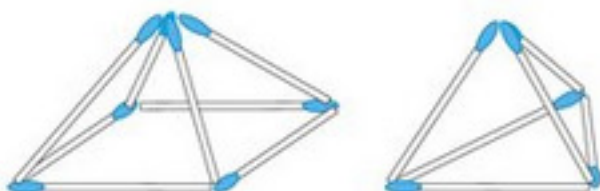
- *21. Z ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości $2a$ i krawędzi podstawy $2a$ wycięto sześcian o krawędzi a (zob. rysunek obok). Oblicz objętość części ostrosłupa pozostałej po wycięciu sześcianu.

- *22. Narysowana obok świeczka ma wysokość 15 cm i podstawę w kształcie kwadratu o boku 6 cm. Na wyprodukowanie tej świeczki zużyto 420 cm^3 wosku. Oblicz długość krawędzi x .



- *23. Objętość narysowanego obok prostopadłościenu jest równa 60 cm^3 . Oblicz sumę objętości zacieniowanych ostrosłupów.

- *24. W pewnej restauracji cukier podaje się w torebkach w kształcie czworoscianów o krawędziach długości 3 cm, 3 cm, 4 cm, 4 cm, 4 cm, 4 cm. Oszacuj, ile łyżeczek cukru może zawierać taka torebka, jeżeli w łyżeczce zmieści się 5 g cukru. Zakładamy, że torebka wypełniona jest cukrem w całości oraz że 1 cm^3 cukru waży 1,59 g.



- *25. Z jednakowych zapalek ustawiono szkielety dwóch ostrosłupów. Wykaż, że pierwszy z nich ma dwa razy większą objętość od drugiego.

- *26. Ośmiościan foremny można otrzymać w wyniku sklejenia podstawami dwóch ostrosłupów prawidłowych czworokątnych o wszystkich krawędziach jednakowej długości. Oblicz objętość ośmiościanu foremnego o krawędzi 1 dm.
- *27. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 10, a kąt między nią a przekątną podstawy ma miarę 30° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Sprawdź się

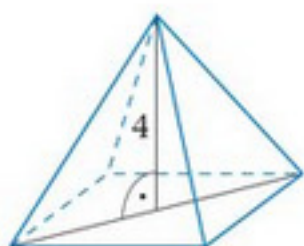
1. Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy 90 cm i wysokości 1,2 m jest równa:
- A. 81 dm^3 B. $81\,000\sqrt{3} \text{ cm}^3$ C. $243\sqrt{3} \text{ dm}^3$ D. $0,81\sqrt{3} \text{ m}^3$

2. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o wymiarach 5×6 , a jego objętość jest równa 60. Wynika stąd, że wysokość tego ostrosłupa jest równa:

A. 2 B. 5 C. 6 D. 2

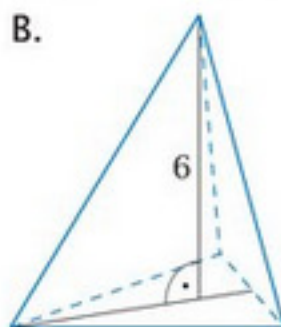
3. Który z ostrosłupów ma podstawę o największym polu powierzchni?

A.



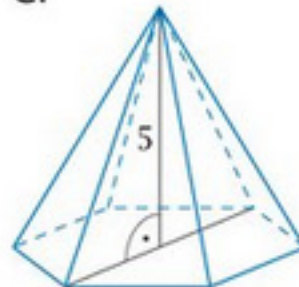
$V = 16$

B.



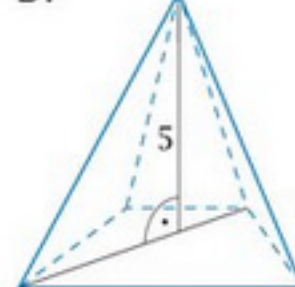
$V = 30$

C.



$V = 30$

D.



$V = 25$

4. Pole powierzchni pewnego ostrosłupa prawidłowego pięciokątnego wynosi $A \text{ cm}^2$, a pole podstawy jest równe $p \text{ cm}^2$. Wysokość tego ostrosłupa ma długość $h \text{ cm}$. Dokończ zdania. Wybierz odpowiedzi spośród A i B oraz spośród C i D.

Objętość tego ostrosłupa można zapisać za pomocą wyrażenia:

A. $\frac{Ah}{5}$

B. $\frac{ph}{3}$

Pole jednej ściany bocznej tego ostrosłupa można zapisać za pomocą wyrażenia:

C. $\frac{A-p}{5}$

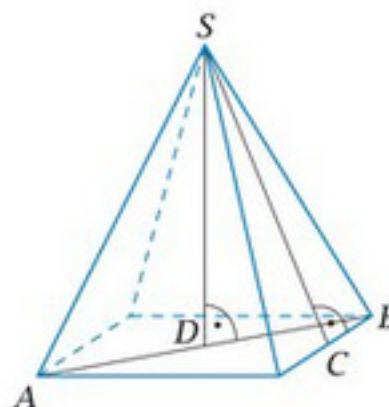
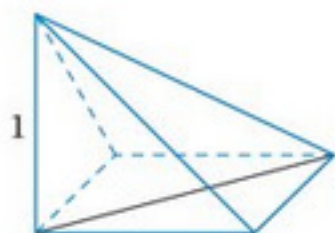
D. $\frac{A}{5} - p$

6 Odcinki w ostrosłupach

Przypomnij sobie

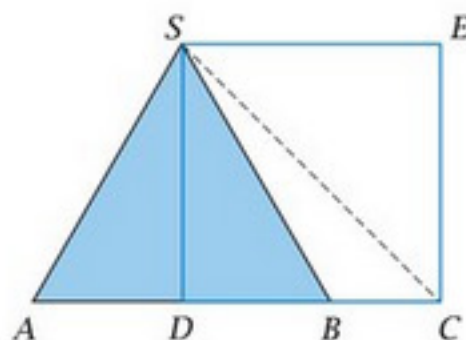
1. Na rysunku przedstawiono ostrosłup i opisano wybrane odcinki. Wskaż:

- wysokość ostrosłupa,
- przekątną podstawy,
- wysokość ściany bocznej,
- krawędzie boczne.



2. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o boku długości 1. Jedna z krawędzi bocznych jest wysokością ostrosłupa i jest równa krawędzi podstawy. Oblicz długości przekątnej podstawy oraz pozostałych krawędzi bocznych tego ostrosłupa.

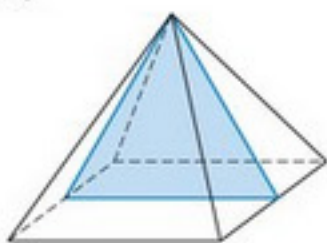
3. Trójkąt ABS jest równoboczny, a bok kwadratu $SDCE$ ma długość 1. Oblicz długość:
- wysokości trójkąta ABS ,
 - przekątnej kwadratu $SDCE$,
 - boku trójkąta ABS ,
 - odcinka BC .



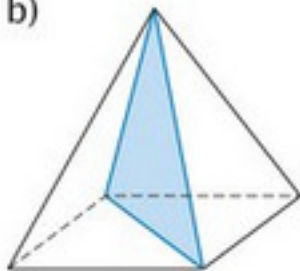
Poćwicz

4. Podstawą ostrosłupa przedstawionego na rysunku jest wielokąt foremny, a wyróżniony trójkąt jest trójkątem równobocznym o boku długości 6. Oblicz długość krawędzi podstawy ostrosłupa.

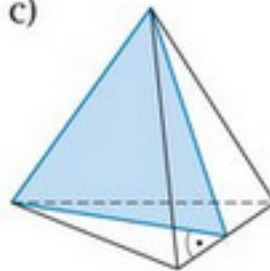
a)



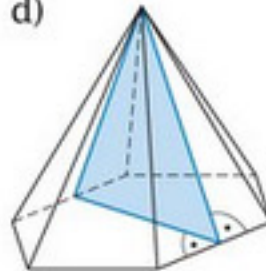
b)



c)

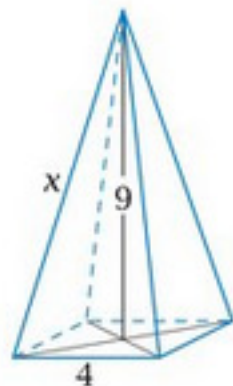


d)

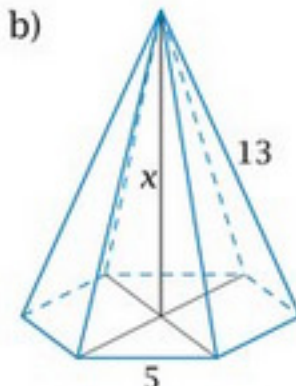


5. Dany ostrosłup jest prawidłowy. Oblicz długość odcinka oznaczonego literą.

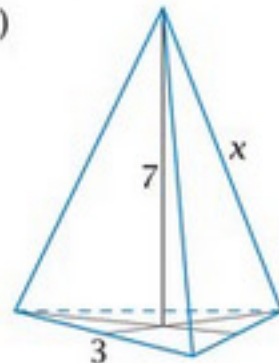
a)



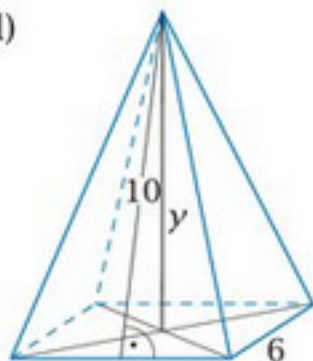
b)



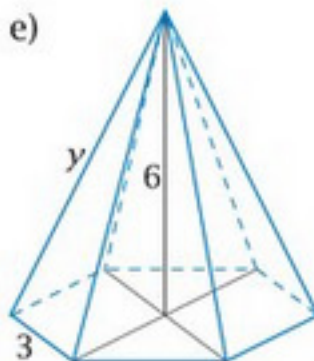
c)



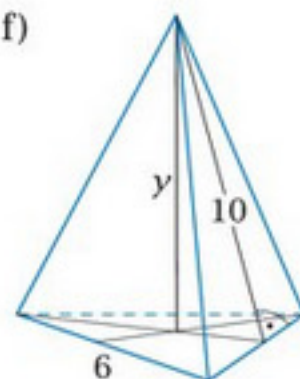
d)



e)



f)



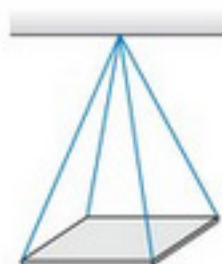
6. a) Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma 14 cm, a przekątna podstawy ma 12 cm. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.
- b) Wysokość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa 8 cm, a krawędź podstawy ma 6 cm. Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa.

7. Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 5 cm, a krawędź boczna ma 13 cm. Oblicz wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa.

8. Wysokość ostrosłupa prawidłowego ma długość 3, a pole podstawy jest równe $24\sqrt{3}$. Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa, jeżeli jest to ostrosłup:

- trójkątny,
- sześciokątny.

9. Rysunek przedstawia półkę na kwiaty zawieszoną u sufitu na czterech sznurkach równej długości. Półka ma kształt kwadratu o boku długości 30 cm. Jak długie powinny być sznurki, by półka wisiała 80 cm pod sufitem?



10. Narysowany namiot ma kształt ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy długości 1 m i krawędzi bocznej długości 2 m. Czy człowiek o wzroście 180 cm może stanąć wyprostowany w tym namiocie?

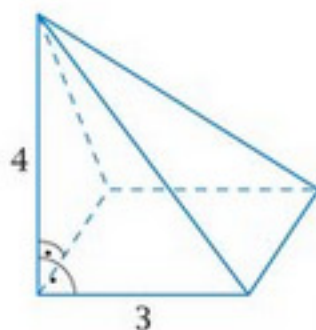


Pomyśl

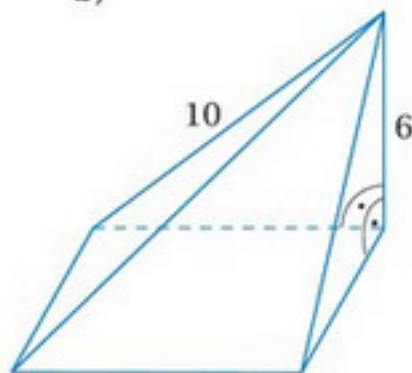
11. Wysokość czworościanu foremnego wynosi 4. Oblicz wysokość ściany bocznej tego czworościanu.

12. Podstawą narysowanego ostrosłupa jest wielokąt foremny. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa.

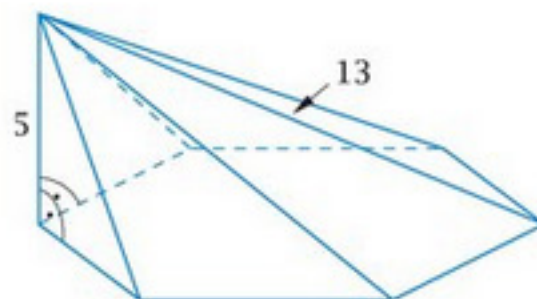
a)



b)



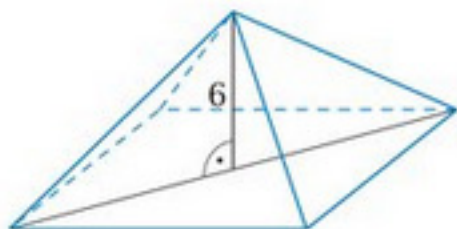
*c)



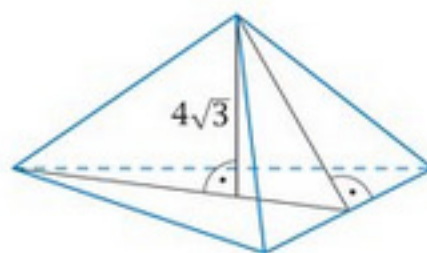
13. Podstawą ostrosłupa o wysokości 8 cm jest romb o przekątnych 8 cm i 12 cm. Spodek wysokości tego ostrosłupa leży w punkcie przecięcia przekątnych podstawy. Oblicz długości krawędzi tego ostrosłupa.

14. Objętość ostrosłupa prawidłowego przedstawionego na rysunku jest równa 256. Oblicz długości jego krawędzi.

a)



b)



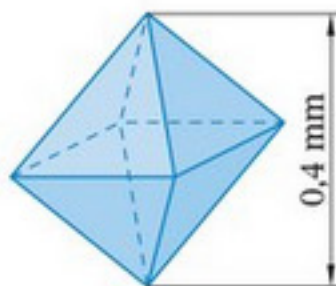
- *15. Narysuj siatkę ostrosłupa prawidłowego o wysokości 4 cm, którego podstawą jest:

a) trójkąt o boku 4 cm,

c) czworokąt o przekątnej 6 cm,

b) trójkąt o wysokości 6 cm,

d) czworokąt o boku 4 cm.



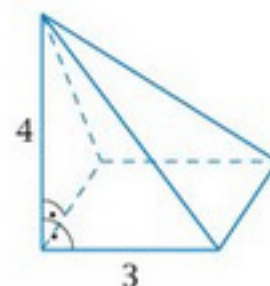
16. Pojedynczy kryształ diamentu (tzw. monokryształ) ma kształt ośmiościanu foremnego, czyli bryły, złożonej z dwóch sklejonych podstawami jednakowych ostrosłupów prawidłowych czworokątnych o wszystkich krawędziach jednakowej długości. Taki kryształek ma około 0,4 mm wysokości. Oblicz jego objętość.

- *17. Uzasadnij, że objętość czworościanu foremnego o krawędzi a wynosi $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Sprawdź się

1. Podstawą narysowanego ostrosłupa jest kwadrat.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.



Wszystkie ściany boczne są trójkątami prostokątnymi.	P	F
Długość najdłuższej krawędzi ostrosłupa wynosi $\sqrt{34}$.	P	F
Długość przekątnej podstawy wynosi $4\sqrt{2}$.	P	F

2. Ostrosłup przedstawiony na rysunku jest prawidłowy. Dokończ zdania. Wybierz odpowiedzi spośród A i B oraz spośród C i D.

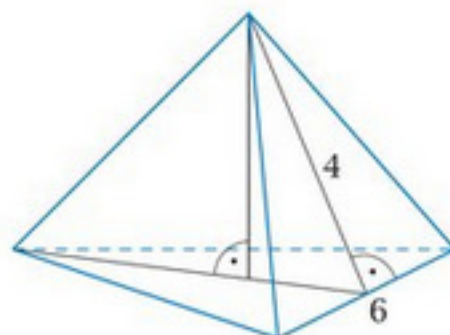
Wysokość podstawy ostrosłupa jest równa:

A. $3\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{2}$

Wysokość ostrosłupa wynosi:

C. $\sqrt{13}$

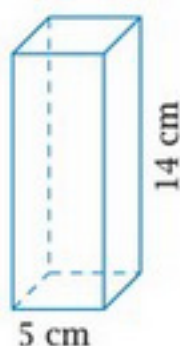
D. 13



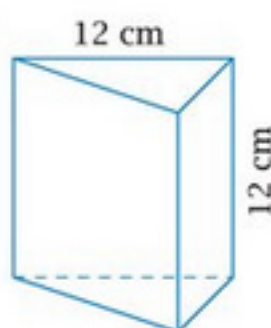
7 Zadania testowe

- Prostopadłościan o wymiarach $200\text{ cm} \times 50\text{ dm} \times 30\text{ m}$ ma pole powierzchni całkowitej równe:
A. 440 a B. 4,4 a C. 30 a D. 0,3 a
- Ile waży sześcienna kostka lodu o krawędzi $2,5\text{ cm}$, jeśli masa 1 cm^3 lodu to $0,9\text{ g}$?
A. około 4,5 g B. około 5,6 g C. około 14,1 g D. około 22,5 g
- Narysowane pudełka mają kształty graniastosłupów prawidłowych. Prosty kawałek drutu o długości 16 cm zmieści się (bez zaginania) do pudełka przedstawionego na rysunku:

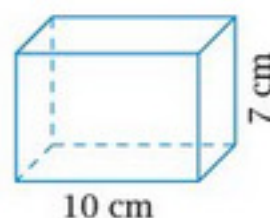
A.



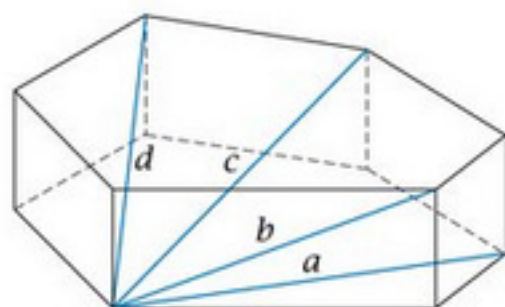
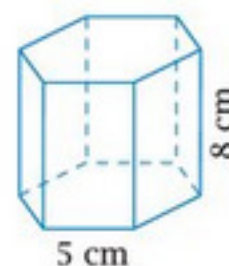
B.



C.



D.

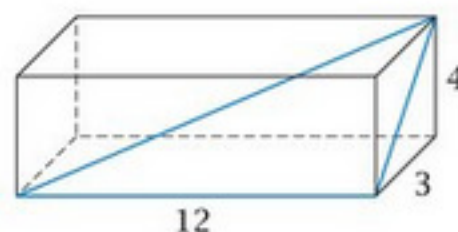


- Przekątną ściany bocznej przedstawionego obok graniastosłupa jest odcinek:

A. a B. b C. c D. d

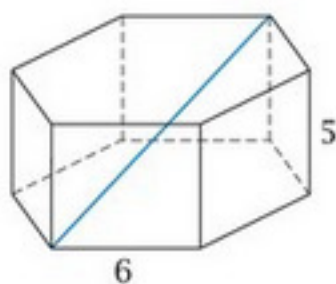
- Na rysunku przedstawiono prostopadłościan. Obwód zaznaczonego trójkąta jest równy:

A. 19 C. 30
B. $12 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{11}$ D. $17 + 4\sqrt{10}$



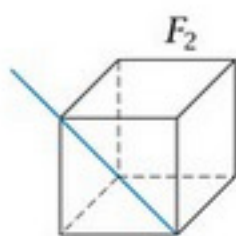
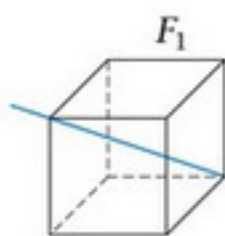
- Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

Kąt między przekątną ściany sześcianu a krawędzią tej ściany ma miarę 45° .	P	F
Kąt między przekątną sześcianu a przekątną ściany tego sześcianu ma miarę 60° .	P	F



7. Zaznaczona przekątna graniastostupa prawidłowego sześciokątnego narysowanego obok ma długość:

- A. $\sqrt{71}$ C. $\sqrt{133}$
B. 11 D. 13



8. Przyjmij, że krawędzie narysowanych sześcianów mają długość 1 cm, a długość niebieskiego odcinka wynosi w przybliżeniu 1,75 cm.

Wybierz poprawne dokończenia zdań spośród A i B oraz spośród C i D.

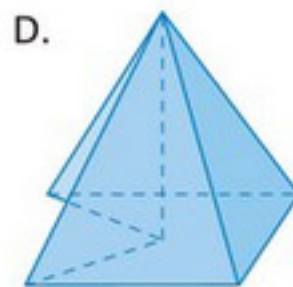
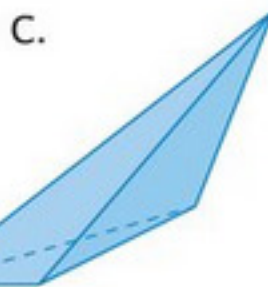
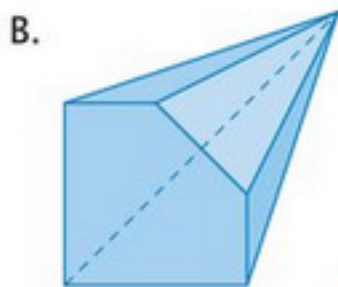
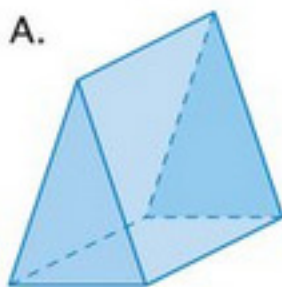
Część niebieskiego odcinka wystająca z sześcianu F_1 ma długość:

- A. około 0,02 cm B. około 0,03 cm

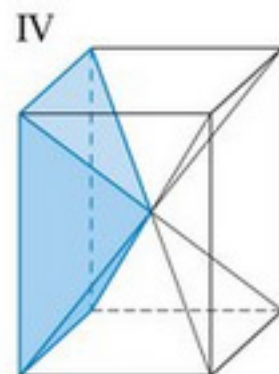
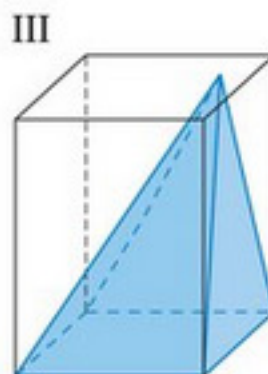
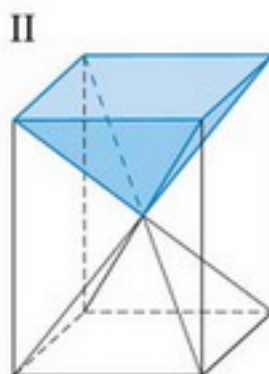
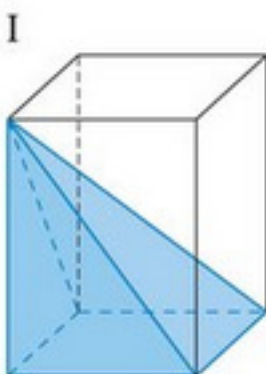
Część odcinka wystająca poza sześcian F_2 jest dłuższa od części odcinka wystającej poza sześcian F_1 :

- C. o około 0,03 cm D. o około 0,3 cm

9. Ostrosłupem nie jest bryła przedstawiona na rysunku:



10. Z czterech jednakowych graniastostupów prawidłowych wycięto cztery ostrosłupy przedstawione na rysunkach.



a) Na którym rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy?

- A. na I B. na II C. na III D. na IV

b) Które z przedstawionych ostrosłupów mają równe objętości?

- A. tylko I i III B. tylko I i IV C. I i III oraz II i IV D. I, III i IV

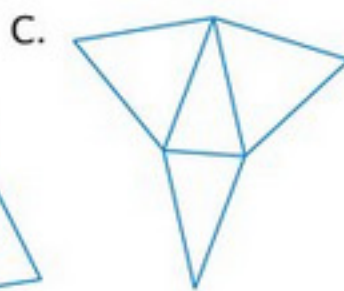
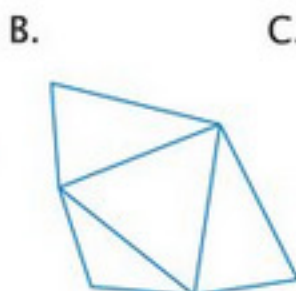
11. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

Ostrosłup o 100 krawędziach ma w podstawie pięćdziesięciokąt.	P	F
Ostrosłup o 50 krawędziach ma 51 ścian.	P	F

12. Ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego trójkątnego są trójkąty o bokach 20 cm, 20 cm i 10 cm. Suma długości krawędzi tego ostrosłupa jest równa:

A. 50 cm B. 90 cm C. 150 cm D. 180 cm

13. Który z rysunków przedstawia siatkę ostrosłupa prawidłowego?

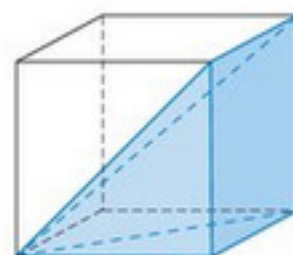


14. Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest kwadrat o boku 10 cm. Pole powierzchni bocznej wynosi 400 cm^2 . Jaka jest wysokość tej bryły?

A. około 19 cm C. około 8,7 cm
B. około 80 cm D. około 14 cm

15. Jaką część objętości sześcianu stanowi objętość ostrosłupa przedstawionego na rysunku obok?

A. 12,5% C. około 33%
B. 25% D. 50%

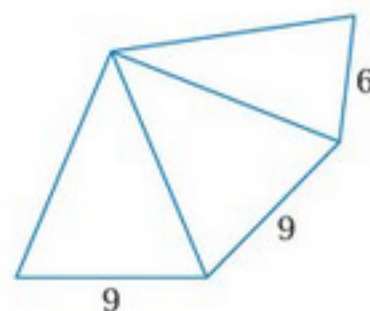


16. Trzy ostrosłupy prawidłowe mają jednakowe pola powierzchni podstaw i jednakowe wysokości. Największą objętość ma ten z nich, którego podstawą jest:

A. trójkąt C. sześciokąt
B. czworokąt D. wszystkie te bryły mają równe objętości

17. Na rysunku przedstawiono siatkę ścian bocznych ostrosłupa trójkątnego. Pole podstawy tego ostrosłupa jest równe:

A. $9\sqrt{3}$ C. $\frac{18\sqrt{3}}{4}$
B. $18\sqrt{7}$ D. $18\sqrt{2}$



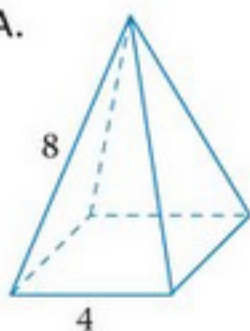
18. Piramida Cheopsa tuż po zbudowaniu miała kształt ostrosłupa o wysokości 146,5 m i kwadratowej podstawie o krawędzi długości 230 m. Odpowiedz na pytanie. Wybierz odpowiedź TAK lub NIE oraz jej uzasadnienie A, B, C lub D.

Czy kamień, z którego ta piramida była zbudowana, wystarczyłby na zbudowanie litego muru o szerokości 1 m i wysokości 4 m łączącego Warszawę i Paryż (odległość między tymi miastami to 1400 km)?

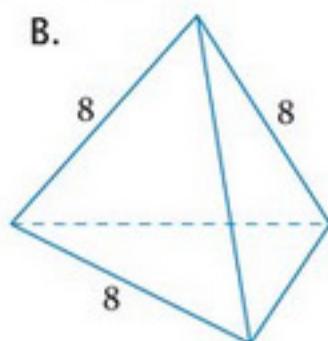
TAK,	ponieważ	A.	pole powierzchni ścian muru jest większe od pola powierzchni ścian piramidy.
		B.	$4 \cdot 146,5 \cdot 230 + 230^2 < 2 \cdot 4 \cdot 1\,400\,000$
NIE,		C.	suma długości krawędzi piramidy jest mniejsza od sumy długości krawędzi muru.
		D.	$\frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot 146,5 < 1 \cdot 4 \cdot 1\,400\,000$

19. Który z przedstawionych na rysunku ostrosłupów prawidłowych ma największe pole powierzchni całkowitej?

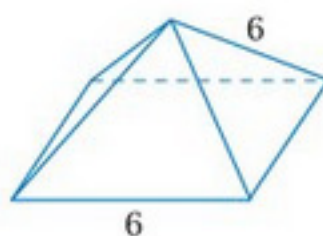
A.



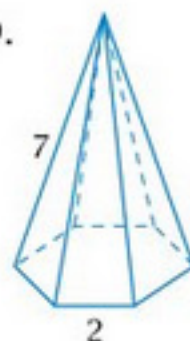
B.



C.



D.



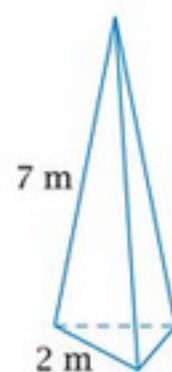
20. Wskaż poprawne odpowiedzi dotyczące ostrosłupa prawidłowego o wymiarach podanych na rysunku.

a) Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa wynosi:

- A. $5\sqrt{3}\text{ m}^2$ B. $12\sqrt{3}\text{ m}^2$ C. $13\sqrt{3}\text{ m}^2$ D. $16\sqrt{3}\text{ m}^2$

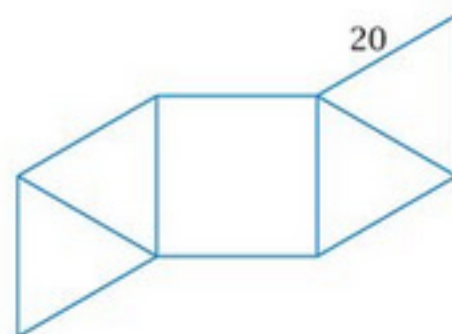
b) Jeden litr farby wystarcza na pomalowanie 10 m^2 powierzchni. Ile najmniej puszek farby o pojemności 1 l należy przygotować do pomalowania tego ostrosłupa?

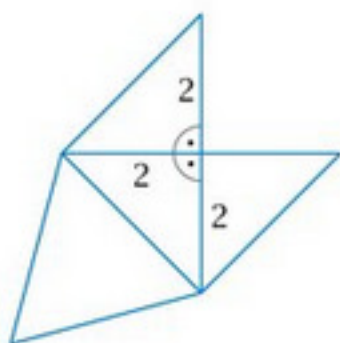
- A. jedną B. dwie C. trzy D. cztery



21. Objętość ostrosłupa prawidłowego, którego siatkę przedstawiono na rysunku, wynosi:

- A. $1333\frac{1}{3}\sqrt{2}$ B. $4000\sqrt{2}$ C. $1333\frac{1}{3}\sqrt{3}$ D. $4000\sqrt{3}$





22. Na rysunku przedstawiono siatkę ostrosłupa prawidłowego.

a) Pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest równe:

- A. 6 B. 8 C. $6 + 2\sqrt{3}$ D. $4 + 2\sqrt{3}$

b) Objętość ostrosłupa wynosi:

- A. $\frac{4}{3}$ B. 4 C. $\frac{16}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

23. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma 6 cm, a pole jego podstawy jest równe polu ściany bocznej.

a) Krawędź boczna tego ostrosłupa ma długość:

- A. 6 cm B. 12 cm C. $6\sqrt{3}$ cm D. $3\sqrt{17}$ cm

b) Objętość tego ostrosłupa jest równa:

- A. 12 cm^3 B. $12\sqrt{15} \text{ cm}^3$ C. $36\sqrt{15} \text{ cm}^3$ D. $108\sqrt{15} \text{ cm}^3$

24. Jeżeli długość każdej krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego zwiększymy dwa razy i jednocześnie jego wysokość zmniejszymy dwa razy, to objętość ostrosłupa:

- A. zwiększy się czterokrotnie
B. zwiększy się dwukrotnie
C. zmniejszy się dwukrotnie
D. nie zmieni się

25. Wysokość graniastosłupa jest trzy razy mniejsza od wysokości ostrosłupa, a pole powierzchni podstawy graniastosłupa jest trzy razy większe od pola powierzchni podstawy ostrosłupa. Wskaż zdanie prawdziwe.

- A. Objętości graniastosłupa i ostrosłupa są równe.
B. Objętość graniastosłupa jest 3 razy większa od objętości ostrosłupa.
C. Objętość ostrosłupa jest 3 razy większa od objętości graniastosłupa.
D. Objętość ostrosłupa jest 9 razy mniejsza od objętości graniastosłupa.

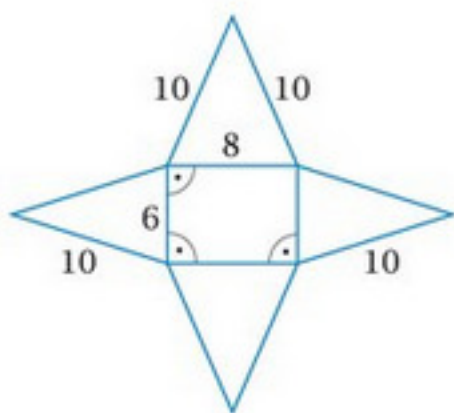
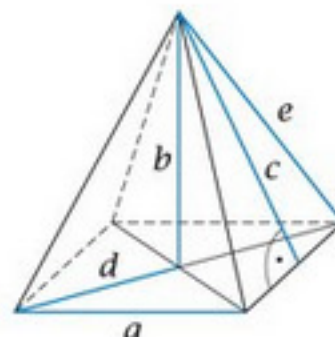
26. Ustal, który zestaw danych opisuje ostrosłup prawidłowy czworokątny o wysokości mniejszej niż 1 m.

- I. objętość 1 m^3 , krawędź podstawy 10 dm
II. objętość $0,1 \text{ m}^3$, krawędź podstawy 1 dm
III. objętość 10 cm^3 , krawędź podstawy 0,1 dm
IV. objętość 1 cm^3 , krawędź podstawy 1 mm
A. I i II B. tylko III C. III i IV D. I i IV

27. Podstawą ostrosłupa o wysokości 5 cm jest trapez prostokątny o podstawach 2 cm i 6 cm oraz ramionach 3 cm i 5 cm. Objętość tego ostrosłupa jest równa:
- A. 20 cm^3 B. $28\frac{2}{3} \text{ cm}^3$ C. $33\frac{1}{3} \text{ cm}^3$ D. 60 cm^3

28. Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy czworokątny, w którym literami oznaczono wybrane odcinki. Wskaż wyrażenie, które nie opisuje wysokości ostrosłupa.

- A. $\sqrt{e^2 - d^2}$ C. $\sqrt{c^2 - \frac{d^2}{2}}$
 B. $\sqrt{c^2 - \frac{a^2}{4}}$ D. $\sqrt{e^2 - \frac{a^2}{2}}$



29. Wysokość ostrosłupa, którego siatkę przedstawiono na rysunku, jest równa:

- A. 10 C. $\sqrt{91}$
 B. $2\sqrt{21}$ D. $5\sqrt{3}$

30. Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 7, a jego krawędź podstawy ma długość $2\sqrt{3}$. Pole ściany bocznej tego ostrosłupa jest równe:

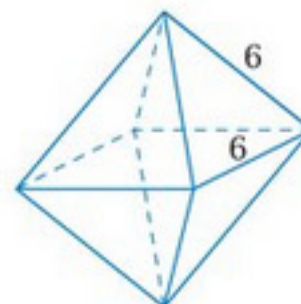
- A. $5\sqrt{6}$ B. $7\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{17}$ D. 12

31. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma 8 cm, a krawędź boczna ma 9 cm. Objętość ostrosłupa jest równa:

- A. 448 cm^3 B. $149\frac{1}{3} \text{ cm}^3$ C. 224 cm^3 D. $\frac{64}{3}\sqrt{17} \text{ cm}^3$

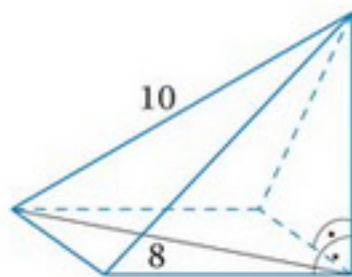
32. Ośmiościan foremny składa się z dwóch sklejonych podstawami ostrosłupów prawidłowych czworokątnych, w których wszystkie krawędzie mają jednakowe długości. Objętość ośmiościanu foremnego przedstawionego na rysunku wynosi:

- A. $12\sqrt{2}$ B. $24\sqrt{2}$ C. $72\sqrt{2}$ D. $36\sqrt{2}$



33. Pole powierzchni czworościanu foremnego wynosi $36\sqrt{3}$. Wysokość tego czworościanu jest równa:

- A. $2\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{6}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{6}$



34. Objętość ostrosłupa o podstawie kwadratu, przedstawionego na rysunku obok, jest równa:

- A. $8\sqrt{2}$ C. 64
B. $24\sqrt{2}$ D. 192

35. Z większego ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o objętości 36 dm^3 i wysokości 4 dm wycięto mniejszy. Stosunek wysokości większego ostrosłupa do mniejszego wynosi $2 : 1$.

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedzi spośród A i B, spośród C i D oraz spośród E i F.

Pole podstawy każdego z ostrosłupów jest równe:

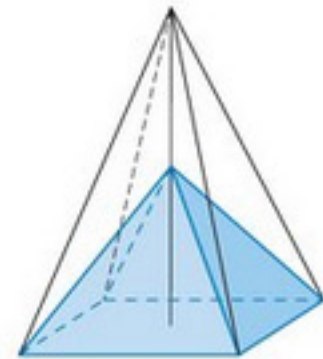
- A. 9 dm^2 B. 27 dm^2

Stosunek objętości większego ostrosłupa do mniejszego wynosi:

- C. $2 : 1$ D. $3 : 1$

Stosunek objętości części większego ostrosłupa pozostałej po wycięciu mniejszego do objętości większego ostrosłupa wynosi:

- E. $1 : 2$ F. $1 : 1$

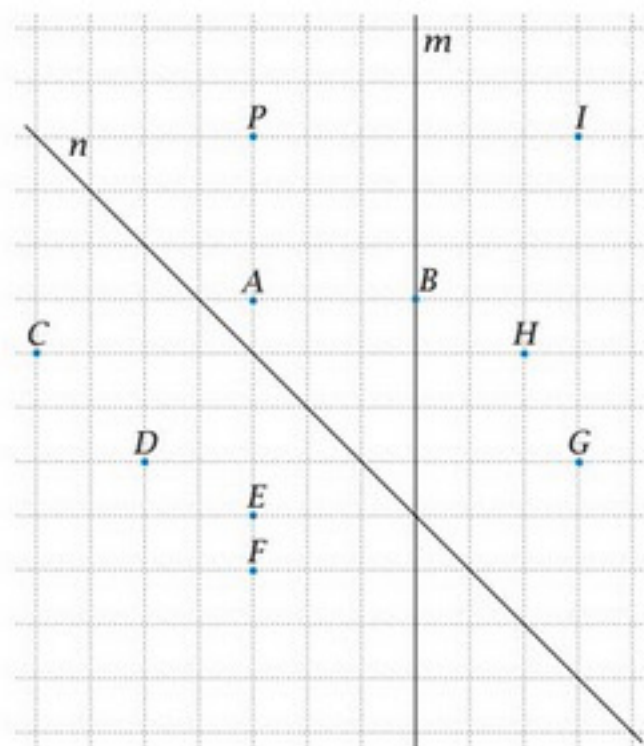


1 Symetria względem prostej

Przypomnij sobie

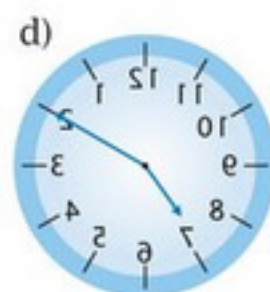
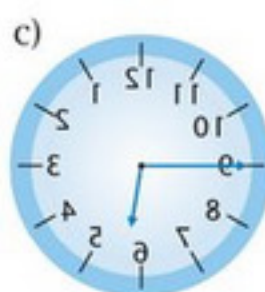
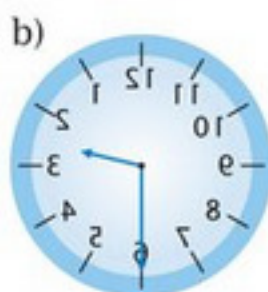
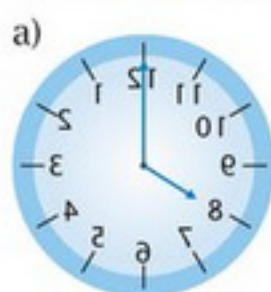
- Wyobraź sobie, że stoisz przed lustrem z kartką, na której są napisane litery: P, C, N, W. Narysuj odbicia tych liter w lustrze.
 - Wyobraź sobie, że stoisz przed lustrem z kartką, na której są wypisane wszystkie cyfry. Które cyfry nie różnią się od swych odbić?

- Które z punktów na rysunku obok leżą w takiej samej odległości od prostej m jak punkt P ?
 - Które z punktów na rysunku obok leżą w takiej samej odległości od prostej n jak punkt P ?
 - Które z prostych łączących punkt P z pozostałymi punktami są prostopadłe do prostej m lub prostej n ?
 - Znajdź dwa odcinki o końcach w zaznaczonych punktach, które są prostopadłe do prostej n .
 - Wyobraź sobie, że składasz kartkę z poniższym rysunkiem wzdłuż prostej n . Które punkty się pokryją?

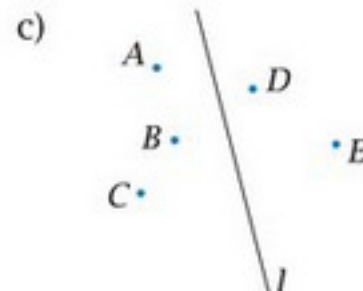
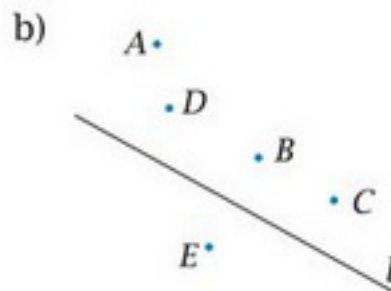
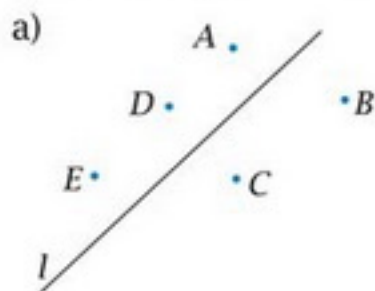


Poćwicz

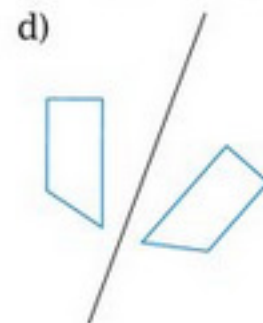
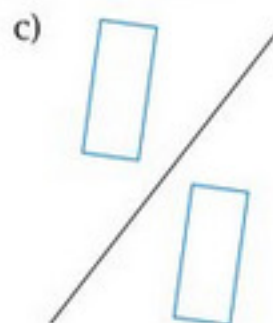
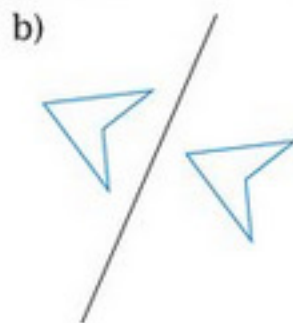
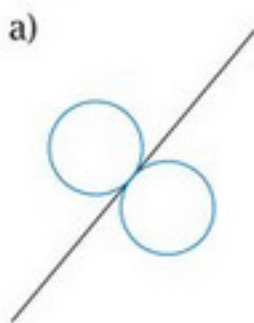
- Na rysunku przedstawiono odbicie tarczy zegara w lustrze. Odczytaj godzinę, którą wskazuje zegar.



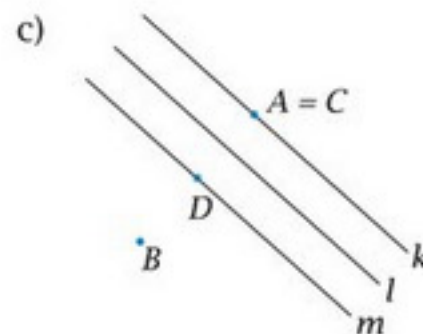
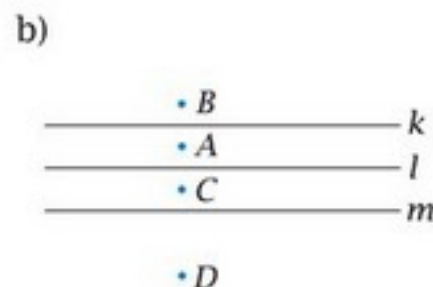
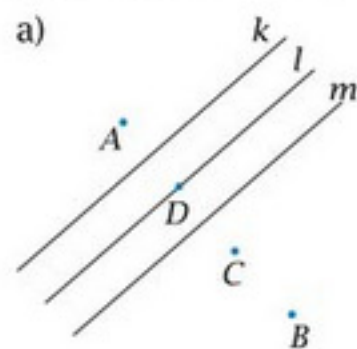
4. Znajdź parę punktów położonych symetrycznie względem prostej l .



5. Czy dane dwie figury są położone symetrycznie względem narysowanej prostej?

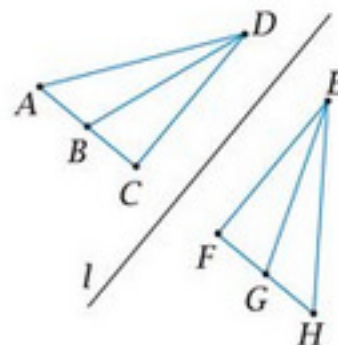


6. Każdy z punktów B, C, D jest symetryczny do punktu A względem jednej z prostych k, l, m . Której?

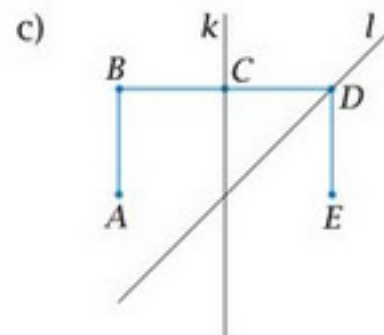
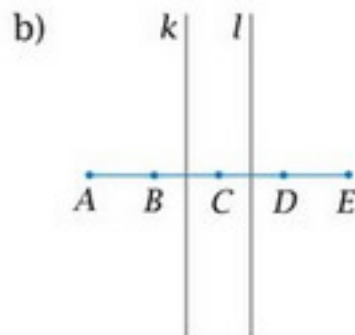
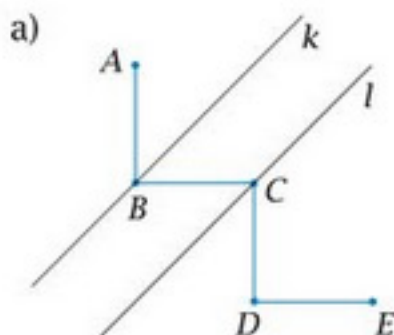


7. Na rysunku obok wskaż:

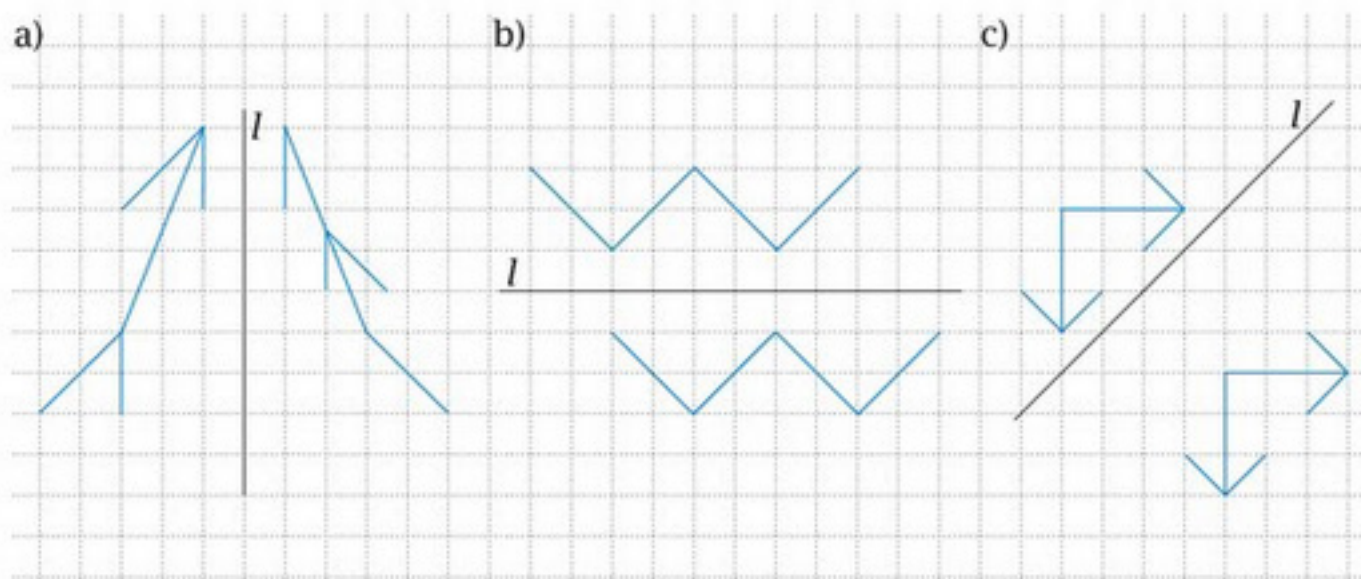
- punkty symetryczne względem prostej l ,
- odcinki symetryczne względem prostej l ,
- trójkąty symetryczne względem prostej l .



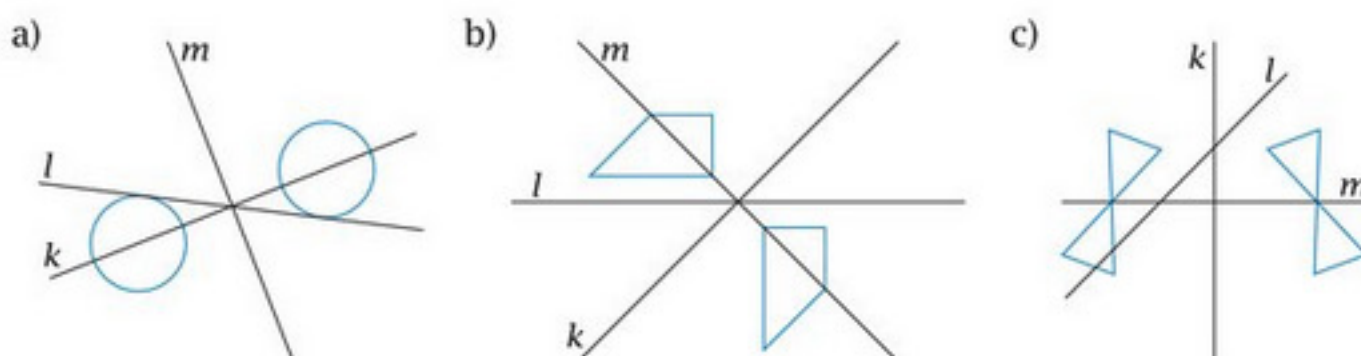
8. Znajdź wśród odcinków AB, BC, CD i DE pary odcinków symetrycznych względem prostych k i l .



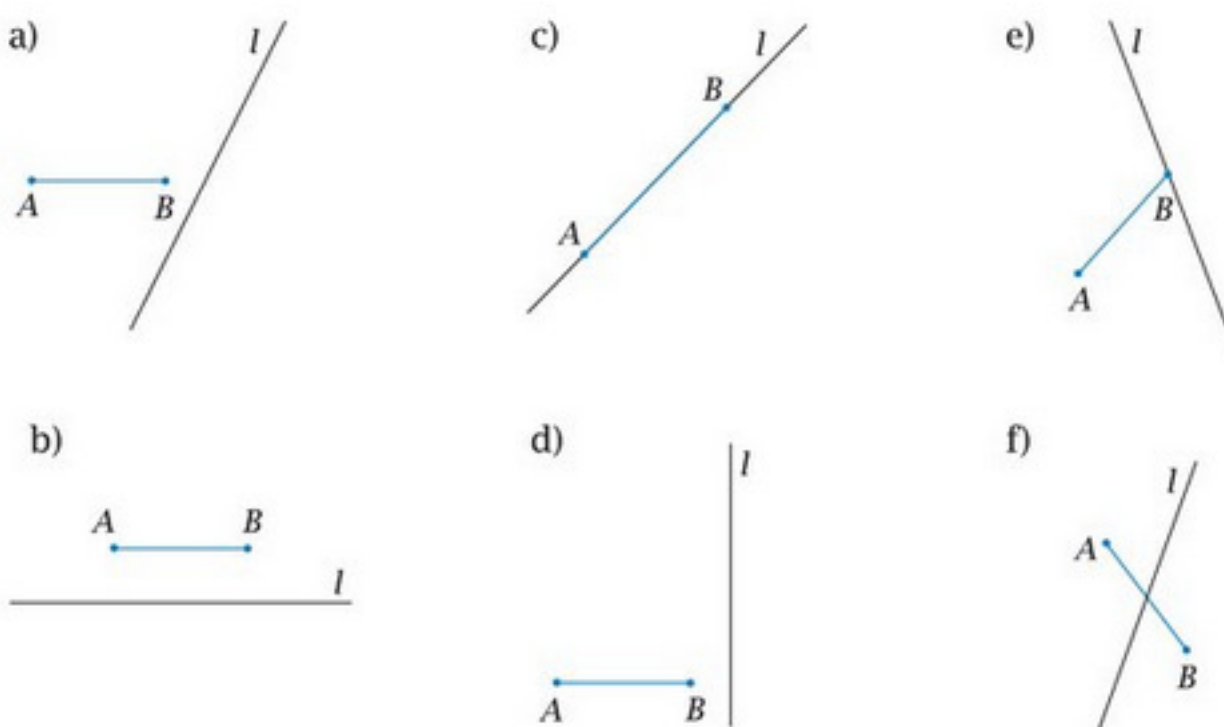
9. Przerysuj i uzupełnij rysunek tak, aby przedstawiał figury symetryczne względem prostej l .



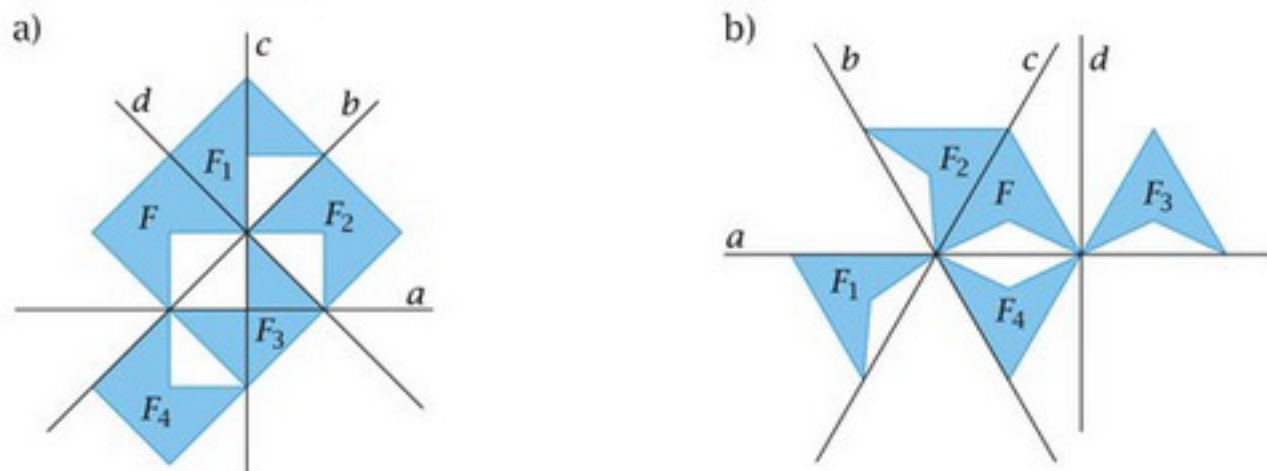
10. Na rysunku przedstawiono dwie figury i trzy proste. Względem której z tych prostych figury są symetryczne?



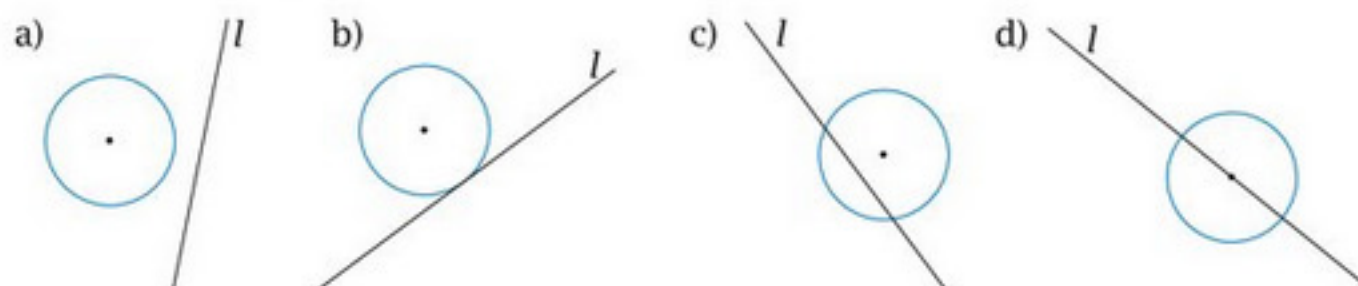
11. Narysuj prostą l i odcinek AB położony względem tej prostej tak, jak przedstawiono niżej. Dorysuj odcinek symetryczny do odcinka AB względem prostej l .



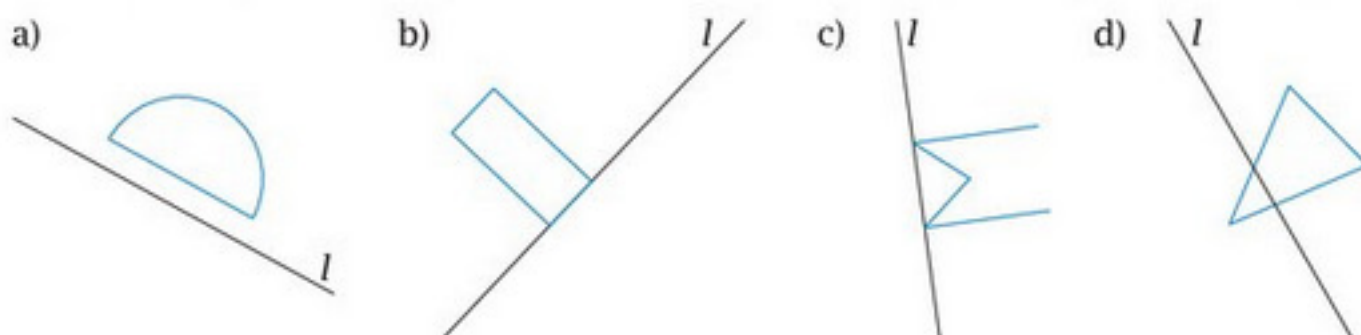
12. Figury F_1 , F_2 , F_3 i F_4 są symetryczne do figury F względem narysowanych prostych. Dla każdej z figur wskaż prostą, względem której dana figura jest symetryczna do figury F .



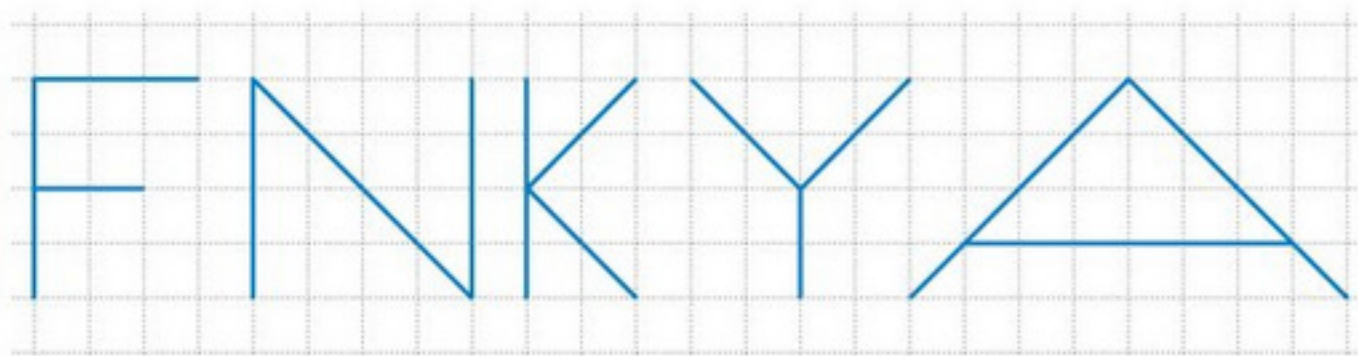
13. Narysuj prostą l i okrąg położony względem tej prostej tak, jak przedstawiono niżej. Dorysuj figurę symetryczną do danego okręgu względem prostej l .



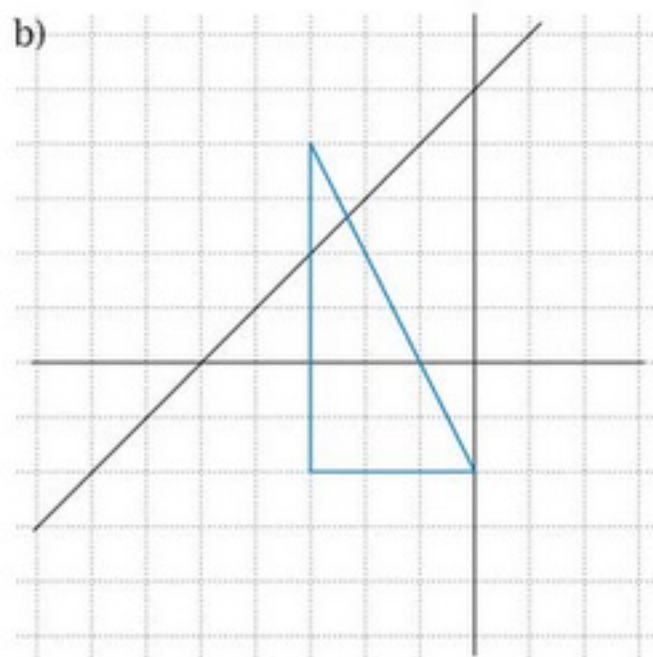
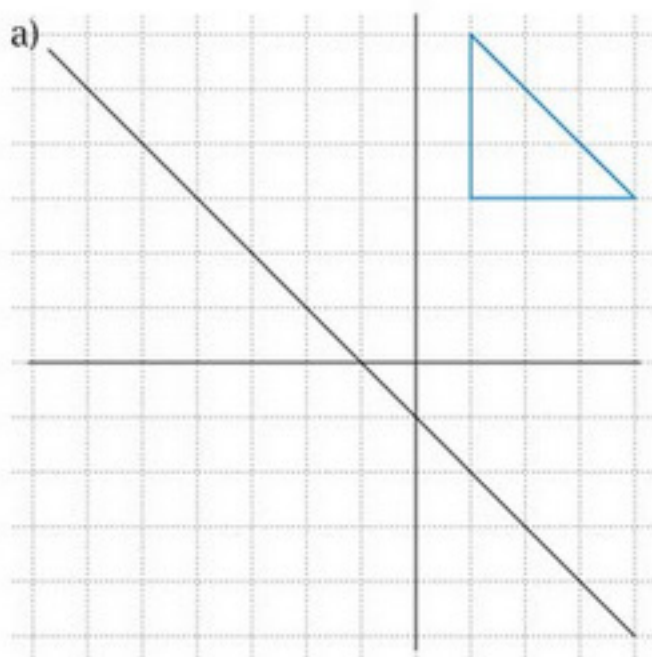
14. Narysuj prostą l i figurę, której kształt i położenie względem prostej l przedstawiono poniżej. Dorysuj figurę symetryczną do danej figury względem prostej l .



15. Przerysuj wybraną literę i dorysuj figury symetryczne do niej względem prostych, w których zawierają się odcinki tworzące tę literę.

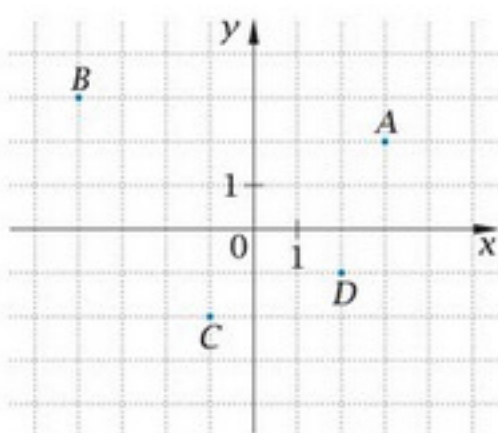
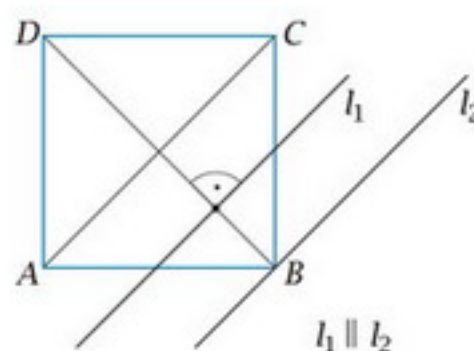


16. Przerysuj poniższy rysunek i dorysuj figurę symetryczną do danego trójkąta względem każdej z narysowanych prostych.



17. Przerysuj rysunek do zeszytu, a następnie dorysuj figurę symetryczną do kwadratu $ABCD$:

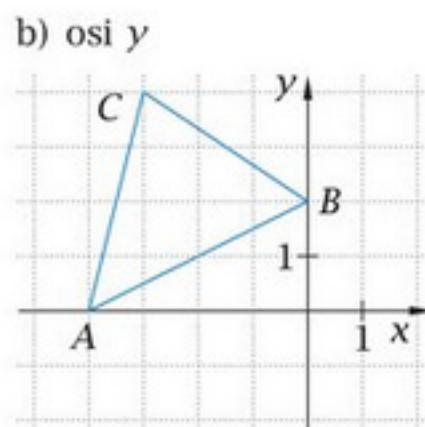
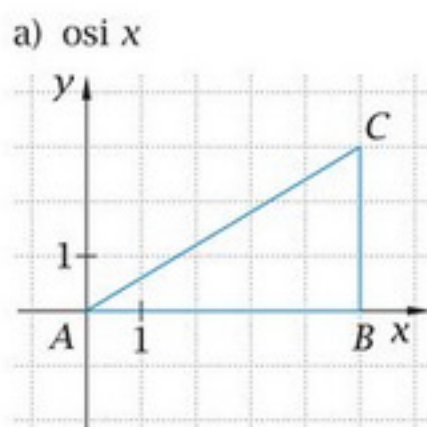
- względem prostej l_1 ,
- względem prostej l_2 ,
- względem prostej BD ,
- względem prostej AB .



18. Na rysunku zaznaczono punkty A, B, C, D . Podaj współrzędne punktów symetrycznych do tych punktów względem:

- osi x ,
- osi y .

19. Podaj współrzędne wierzchołków figury symetrycznej do danego trójkąta ABC względem:



20. Dane są punkty:

$$A = (3, -5)$$

$$C = (-420, 0)$$

$$E = (-140, -250)$$

$$G = (330, 240)$$

$$B = (-1\frac{1}{2}, 2)$$

$$D = (0, 370)$$

$$F = (630, -150)$$

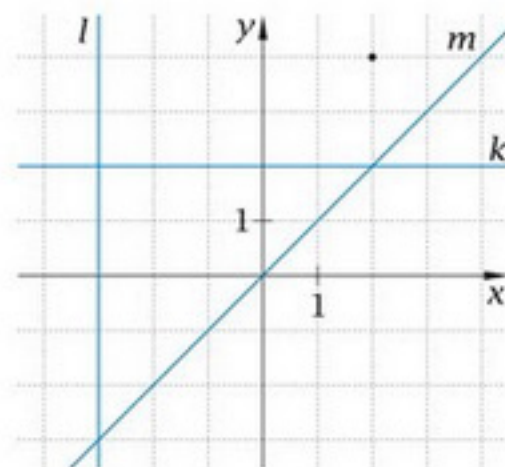
$$H = (-210, 450)$$

Podaj współrzędne punktów symetrycznych do tych punktów:

- a) względem osi x , b) względem osi y .

21. Korzystając z przedstawionego obok rysunku, podaj współrzędne punktu symetrycznego do punktu $(2, 4)$ względem:

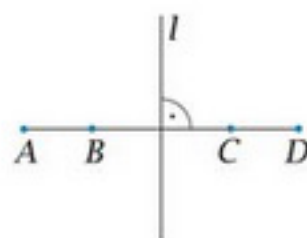
- a) prostej k
b) prostej l
c) prostej m



Pomyśl

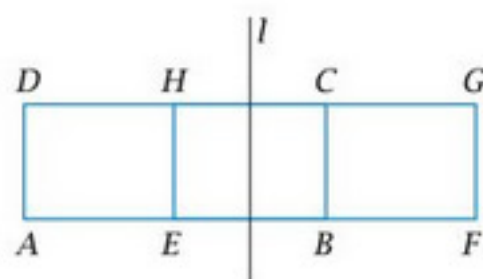
22. Odcinek BD o długości 10 cm jest symetryczny do odcinka AC względem prostej l . Znajdź długość odcinka AD , gdy:

- a) $BC = 4$ cm
b) $AB = 5$ cm
c) $CD = 7$ cm



23. Prostokąt $ABCD$ jest symetryczny do prostokąta $FEHG$ względem prostej l . Znajdź pole prostokąta $ABCD$, gdy:

- a) pole prostokąta $BFGC$ jest równe 6 cm^2 ,
a pole prostokąta $EBCH$ jest równe 8 cm^2 ,
b) pole prostokąta $AFGD$ jest równe 20 cm^2 ,
a pole prostokąta $EFGH$ jest równe 12 cm^2 .



24. Które z poniższych zdań są prawdziwe?

- A. Jeżeli dwa punkty leżą w równych odległościach od pewnej prostej, to są symetryczne względem tej prostej.
B. Dla dowolnych dwóch punktów można znaleźć prostą, względem której te punkty będą symetryczne.
C. Punkt, który jest symetryczny do siebie samego względem pewnej prostej, musi leżeć na tej prostej.
D. Figury symetryczne względem prostej są przystające.

25. Które z poniższych zdań są prawdziwe?

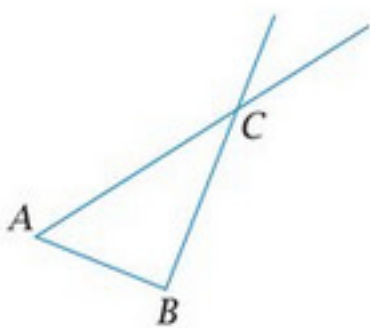
- A. Jeśli figura G jest symetryczna do figury F względem prostej, to figura F jest też symetryczna do figury G względem tej samej prostej.
- B. Proste k i l są równoległe. Jeżeli figura G jest symetryczna do figury F względem prostej k , a figura H jest symetryczna do figury G względem prostej l , to figura H jest symetryczna do figury F względem pewnej prostej.
- C. Proste k , l i m są równoległe. Jeżeli figura G jest symetryczna do figury F względem prostej k , figura H jest symetryczna do figury G względem prostej l , a figura I jest symetryczna do figury H względem prostej m , to figura I jest symetryczna do figury F względem pewnej prostej.

26. a) Bok trójkąta równobocznego ABC ma długość 5 cm. Trójkąt $A'B'C'$ jest symetryczny do trójkąta ABC względem prostej zawierającej bok BC . Oblicz obwód czworokąta zbudowanego z obu tych trójkątów.

b) Boki prostokąta $ABCD$ mają długości 2 cm i 3 cm. Prostokąt $A'B'C'D'$ jest symetryczny do prostokąta $ABCD$ względem prostej zawierającej jeden z boków tego prostokąta. Oblicz obwód czworokąta zbudowanego z obu tych prostokątów. Rozważ dwa przypadki.

27. a) Trójkąt o kątach 10° , 40° i 130° odbito symetrycznie względem prostej zawierającej jeden z jego boków. Jakie są miary kątów powstałego czworokąta? Rozważ trzy przypadki.

b) Trapez o kątach 80° , 90° , 90° i 100° odbito symetrycznie względem prostej zawierającej jeden z jego boków. Trapez i jego odbicie utworzyły sześciokąt. Jakie są miary jego kątów?



28. Narysuj punkty A , B , C i połącz je jak na rysunku.

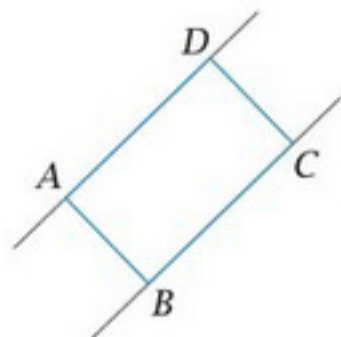
a) Narysuj trójkąt $A'B'C'$, który jest odbiciem symetrycznym trójkąta ABC względem prostej AC , a następnie narysuj odbicie trójkąta $A'B'C'$ względem prostej BC .

b) Narysuj trójkąt $A'B'C'$, który jest odbiciem symetrycznym trójkąta ABC względem prostej BC , a następnie narysuj odbicie trójkąta $A'B'C'$ względem prostej AC .

29. Narysuj prostokąt jak na rysunku obok.

a) Narysuj prostokąt $A'B'C'D'$, który jest odbiciem symetrycznym prostokąta $ABCD$ względem prostej BC , a następnie narysuj odbicie prostokąta $A'B'C'D'$ względem prostej AD .

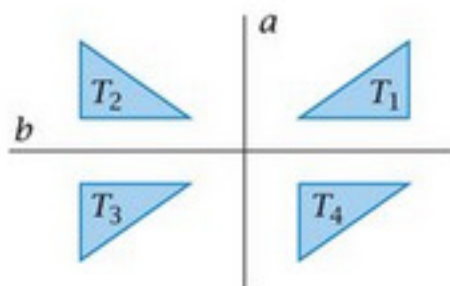
b) Narysuj prostokąt $A'B'C'D'$, który jest odbiciem symetrycznym prostokąta $ABCD$ względem prostej AD , a następnie narysuj odbicie prostokąta $A'B'C'D'$ względem prostej BC .



30. Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 3 cm i 4 cm i trójkąt do niego symetryczny tworzą nową figurę. Jaki jest największy możliwy obwód tej figury, jeśli te trójkąty są symetryczne względem prostej zawierającej jeden z boków trójkąta?
- *31. Krótsza przekątna rombu dzieli go na dwa trójkąty. Jak może być położona prosta, jeśli pole części wspólnej rombu i jego odbicia symetrycznego względem tej prostej jest równe:
- polu danego rombu,
 - $\frac{1}{4}$ pola danego rombu.
- *32. Ramiona i krótsza podstawa trapezu są równe połowie długości dłuższej podstawy. Jak może być położona prosta prostopadła do podstaw, jeśli pole części wspólnej trapezu i jego odbicia symetrycznego względem tej prostej wynosi:
- polu danego trapezu,
 - $\frac{1}{3}$ pola danego trapezu.
- *33. Narysuj kwadrat i wybierz w jego wnętrzu dowolny punkt P . Znajdź punkty symetryczne do punktu P względem boków kwadratu i oznacz je A, B, C i D .
- Wykaż, że wierzchołki kwadratu są środkami boków czworokąta $ABCD$.
 - Wykaż, że pole czworokąta $ABCD$ jest dwa razy większe od pola kwadratu.
- *34. Punkt R jest symetryczny do punktu $P = (a, b)$ względem osi x , a punkt S jest symetryczny do punktu R względem prostej p równoległej do osi x . Określ współrzędne punktu S , gdy prosta p przechodzi przez punkt o współrzędnych:
- $(3, 2)$,
 - $(-4, 1)$,
 - *c) (m, n) .

Sprawdź się

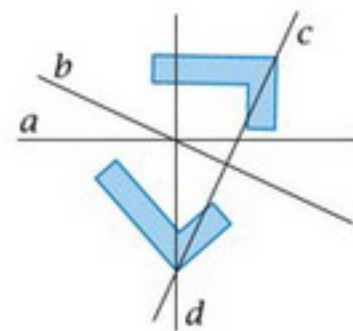
1. Na rysunku przedstawiono trójkąty T_1, T_2, T_3, T_4 oraz proste a i b . Oceń prawdziwość podanych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.



Trójkąty T_1 i T_2 są symetryczne względem prostej a .	P	F
Trójkąty T_2 i T_3 są symetryczne względem prostej b .	P	F
Trójkąty T_3 i T_4 są symetryczne względem prostej a .	P	F
Trójkąty T_4 i T_1 są symetryczne względem prostej b .	P	F

2. Narysowane figury są symetryczne względem prostej:

- A. a B. b C. c D. d



3. Trójkąt ma boki długości 5 cm, 6 cm i 7 cm. Obwód czworokąta zbudowanego z tego trójkąta i jego odbicia symetrycznego względem prostej zawierającej jeden z boków na pewno nie jest równy:

- A. 28 cm B. 26 cm C. 24 cm D. 22 cm

4. Punkty A i A' są symetryczne względem prostej p . Punkt B jest punktem przecięcia prostych AA' i p . Czy poniższe zdania są prawdziwe?

Odcinki AB i $A'B$ mają równe długości.

TAK/NIE

Prosta p jest prostopadła do prostej AA' .

TAK/NIE

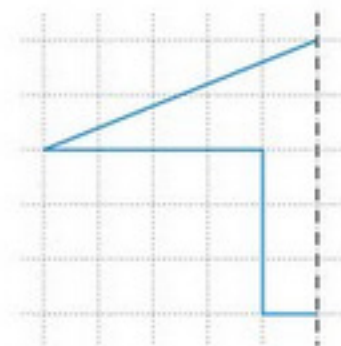
2 Oś symetrii figury

Przypomnij sobie

1. Czy daną figurę można złożyć tak, aby jedna część nałożyła się dokładnie na drugą część?

- a) koło
b) kwadrat
c) trapez równoramienny niebędący równoległobokiem
d) trapez nierównoramienny

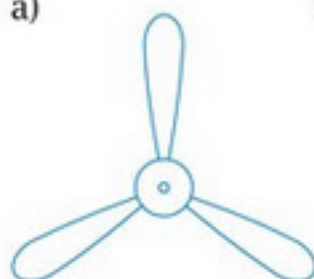
2. Na rysunku przedstawiono figurę po złożeniu na połowę wzdłuż przerywanej linii. Przerysuj tę figurę i narysuj, jak będzie wyglądała po rozłożeniu.



Poćwicz

3. Ile osi symetrii ma narysowana figura?

a)



b)



c)



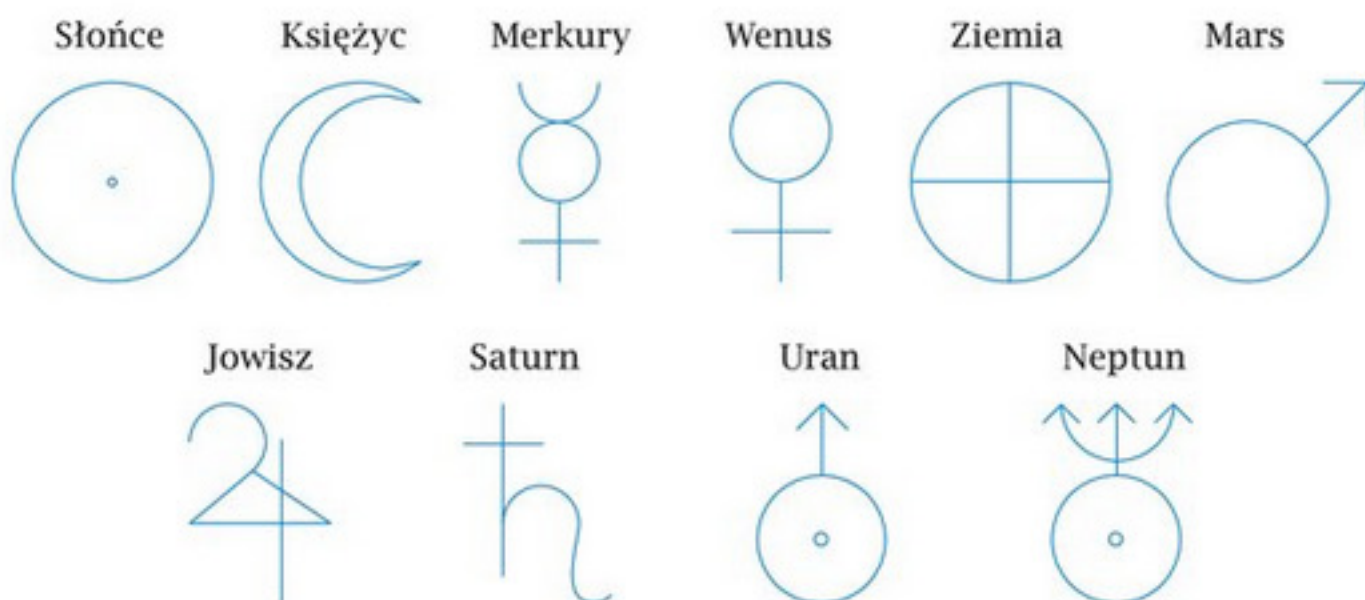
d)



4. Na rysunkach przedstawiono wzory występujące na herbach różnych miast. Które z nich mają oś symetrii?



5. Na rysunkach przedstawiono symbole Słońca, Księżyca i planet Układu Słonecznego, używane przez astronomów. Które z symboli mają oś symetrii? Które z nich mają więcej niż jedną oś symetrii?



6. Odpowiedz, ile osi symetrii ma:

- | | |
|---------------|--|
| a) kwadrat, | e) prostokąt niebędący kwadratem, |
| b) odcinek, | f) romb niebędący kwadratem, |
| c) półprosta, | g) trójkąt równoboczny, |
| d) okrąg, | h) trójkąt równoramienny, ale nie równoboczny. |

7. Zaznacz w układzie współrzędnych punkty $A = (3, 7)$ i $B = (8, 2)$, które są wierzchołkami czworokąta $ABCD$. Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków tego czworokąta, jeżeli:

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) jego osią symetrii jest oś x , | b) jego osią symetrii jest oś y , |
|-------------------------------------|-------------------------------------|

Jaki czworokąt powstał w każdym z tych przypadków?

8. Punkty $A = (0, 6)$ i $B = (-4, 0)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC . Znajdź współrzędne wierzchołka C i oblicz pole tego trójkąta, jeżeli jego osią symetrii jest:
- a) oś x , b) oś y .
9. Punkty $A = (4, -8)$ i $B = (6, -1)$ są wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$. Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków i oblicz pole tego trapezu, jeżeli jego osią symetrii jest:
- a) oś x , b) oś y .

Pomyśl

10. a) Rysunki przedstawiają fragmenty kilku symboli znaków zodiaku, dla których linie przerywane są osiami symetrii. Uzupełnij wszystkie rysunki do pełnych symboli.

Baran



Byk



Bliźnięta



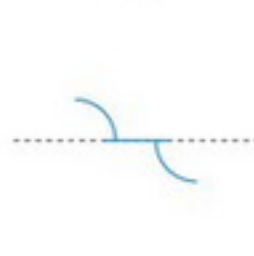
Waga



Strzelec



Ryby



- b) Które z otrzymanych symboli mają dwie osie symetrii?

11. Narysuj czworokąt, który ma dokładnie:

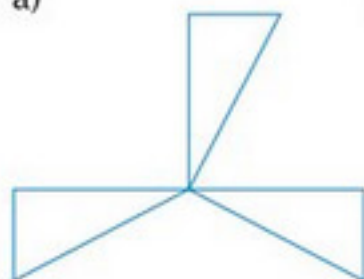
- a) jedną oś symetrii, b) dwie osie symetrii, c) cztery osie symetrii.

12. Narysuj sześciokąt, który ma:

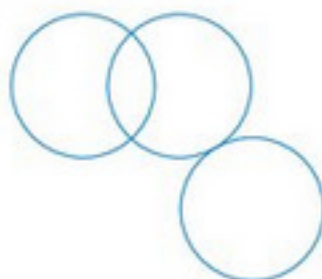
- a) dokładnie jedną oś symetrii, c) dokładnie trzy osie symetrii,
b) dokładnie dwie osie symetrii, d) dokładnie sześć osi symetrii.

- *13. Dana figura składa się z trzech jednakowych elementów. Przerysuj tę figurę i dorysuj czwarty taki sam element tak, by otrzymana figura miała oś symetrii.

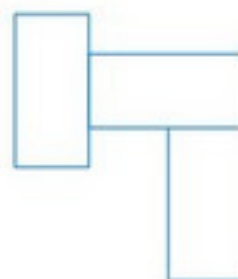
a)



b)



c)

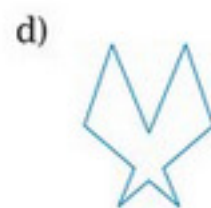
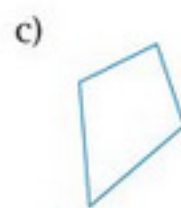
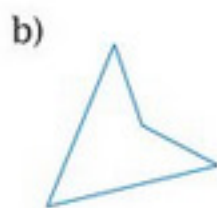
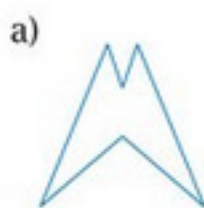
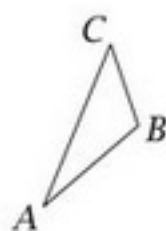


d)



14. Narysuj taką figurę złożoną z jednakowych kwadratów, która ma:
- a) dokładnie jedną oś symetrii,
 - b) dokładnie dwie osie symetrii.
15. Zbuduj z dwóch przystających trójkątów równobocznych figurę, która ma:
- a) jedną oś symetrii,
 - b) dwie osie symetrii.
16. Narysuj taką figurę złożoną z trzech jednakowych okręgów, która ma:
- a) dokładnie jedną oś symetrii,
 - b) dokładnie dwie osie symetrii,
 - c) dokładnie trzy osie symetrii,
 - d) nie ma żadnej osi symetrii.

17. Dana figura jest zbudowana z trójkąta ABC i jego odbicia symetrycznego względem prostej. Przerysuj tę figurę i narysuj jej oś symetrii.



18. Które z poniższych zdań są prawdziwe?
- A. Trójkąt, który ma oś symetrii, jest trójkątem równoramiennym.
 - B. Równoległobok, którego przekątne są jego osiami symetrii, jest rombem.
 - C. Trapez, który ma dokładnie jedną oś symetrii, jest trapezem równoramiennym.
 - D. Trójkąt, który ma oś symetrii, jest trójkątem równobocznym.
 - E. Prostokąt, który ma cztery osie symetrii, jest kwadratem.
 - F. Romb, który ma cztery osie symetrii, jest kwadratem.
 - G. Trapez, który ma dokładnie dwie osie symetrii, jest prostokątem.
 - H. Figura, która ma jedną oś symetrii, jest okręgiem.
19. Określ, jak położone są względem siebie półprosta i oś symetrii, jeżeli część wspólna tej półprostej i jej odbicia symetrycznego względem osi jest:
- a) punktem,
 - b) odcinkiem,
 - c) półprostą.
20. Narysuj trójkąt równoboczny. Poprowadź w taki sposób oś symetrii, aby figura złożona z trójkąta równobocznego i jego odbicia symetrycznego była:
- a) trójkątem,
 - b) czworokątem,
 - c) pięciokątem,
 - d) sześciokątem.

21. a) Boki trójkąta mają długości 4 m, 5 m i 6 m. Czworokąt zbudowany z tego trójkąta i jego odbicia symetrycznego względem prostej zawierającej jeden z boków trójkąta ma obwód 20 m. Jaką długość ma bok zawarty w osi symetrii?
b) Boki czworokąta wypukłego mają długości 4 cm, 5 cm, 6 cm i 9 cm. Wielokąt zbudowany z tego czworokąta i jego odbicia symetrycznego względem prostej zawierającej jeden z boków czworokąta ma obwód 40 cm. Jaką długość ma bok zawarty w osi symetrii?
22. Kwadrat o boku 5 m odbito symetrycznie względem pewnej prostej.
a) Jakie jest najmniejsze, a jakie największe pole figury złożonej z tego kwadratu i jego odbicia?
b) Oś symetrii jest równoległa do jednego z boków kwadratu. Jakie są długości odcinków, na które oś dzieli boki kwadratu do niej prostopadłe, jeżeli figura złożona z tego kwadratu i jego odbicia ma pole równe 35 m^2 ?
c) Oś symetrii jest równoległa do jednego z boków kwadratu. Jakie są długości odcinków, na które oś dzieli boki kwadratu do niej prostopadłe, jeżeli pole części wspólnej kwadratu i jego symetrycznego odbicia jest równe 20 m^2 ?
23. Narysuj wszystkie osie symetrii czworokąta, którego wierzchołki mają podane współrzędne.
a) (1, 3), (8, 3), (8, 4), (1, 4) c) (-2, -1), (2, -3), (6, -3), (10, -1)
b) (-1, 1), (-2, -2), (-1, -5), (0, -2) d) (4, -5), (10, -9), (10, 7), (4, 3)
24. Narysuj figurę, której:
a) osią symetrii jest prosta równoległa do osi x i przechodząca przez punkt (0, 4),
b) osią symetrii jest prosta równoległa do osi y i przechodząca przez punkt (-2, 0).
- *25. Narysuj dwie proste prostopadłe k i l oraz odcinek AB tak, by punkt A leżał na prostej k , a punkt B na prostej l . Znajdź odcinek A_1B_1 symetryczny do odcinka AB względem prostej k , a następnie odcinek A_2B_2 symetryczny do odcinka A_1B_1 względem prostej l i odcinek A_3B_3 symetryczny do odcinka AB względem prostej l . Ile osi symetrii może mieć figura złożona z odcinków AB , A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 ? Rozważ dwa przypadki.

Sprawdź się

1. Który z trójkątów o danych kątach nie ma osi symetrii?

A. $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$ B. $40^\circ, 40^\circ, 100^\circ$ C. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ D. $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$

2. Oceń prawdziwość podanych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

Równoległobok, który nie jest prostokątem ani rombem, nie ma osi symetrii.	P	F
Romb, który nie jest kwadratem, ma dwie osie symetrii.	P	F
Każda figura zbudowana z dwóch kwadratów ma oś symetrii.	P	F
Każda figura zbudowana z dwóch kół ma oś symetrii.	P	F

3 Symetralna odcinka

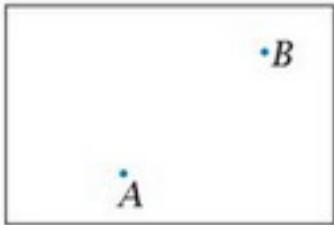
Przypomnij sobie

1. Jak są położone osie symetrii odcinka?
2. Narysuj odcinek. Opisz położenie punktów, które znajdują się w takiej samej odległości od końców tego odcinka.

Poćwicz

3. a) Narysuj dowolny odcinek. Podziel go konstrukcyjnie na cztery równe części.
b) Narysuj dowolny odcinek. Skonstruuj odcinek 8 razy krótszy od narysowanego odcinka.
4. a) Narysuj dowolny prostokąt, który nie jest kwadratem. Podziel go konstrukcyjnie na cztery części o takich samych polach.
b) Narysuj dowolny trójkąt. Podziel go konstrukcyjnie na cztery części o takich samych polach.
5. Narysuj odcinek. Oznacz jego końce literami A i B .
a) Skonstruuj trójkąt równoramienny o podstawie AB i wysokości dwukrotnie większej niż długość podstawy.
b) Skonstruuj trójkąt równoramienny o podstawie AB i ramieniu dwukrotnie dłuższym niż podstawa.
c) Skonstruuj trójkąt równoramienny o podstawie AB i obwodzie 6 razy większym niż długość podstawy.

Pomyśl

6. Narysuj dowolną prostą i dwa punkty tak, aby leżały po jednej stronie tej prostej i nie leżały na prostej prostopadłej do narysowanej prostej. Oznacz punkty literami A i B . Znajdź konstrukcyjnie na narysowanej prostej punkt jednakowo odległy od punktów A i B .
7. Rysunek przedstawia basen widziany z góry. W punktach A i B znajdują się pływacy, którzy chcą się ściągnąć ze swoich miejsc do pewnego punktu C na brzegu basenu tak, aby pokonać w linii prostej równe odległości. Znajdź położenie punktu C .
- 
8. a) Narysuj dowolny odcinek. Skonstruuj okrąg, którego średnicą jest narysowany odcinek.
b) Narysuj dowolny odcinek. Skonstruuj kwadrat, którego przekątną jest narysowany odcinek.
9. Narysuj odcinek i dowolną prostą, która nie przechodzi przez środek tego odcinka oraz nie jest ani równoległa, ani prostopadła do tego odcinka. Oznacz końce odcinka literami A i B . Znajdź konstrukcyjnie na narysowanej prostej taki punkt C , żeby trójkąt ABC był trójkątem równoramiennym o podstawie AB .
10. Narysuj odcinek i dowolną prostą, która nie jest ani równoległa, ani prostopadła do tego odcinka. Oznacz końce odcinka literami A i B . Znajdź konstrukcyjnie na narysowanej prostej taki punkt S , żeby punkty A i B leżały na okręgu o środku S .
11. Narysuj odcinek i dowolną prostą, która nie przechodzi przez środek tego odcinka oraz nie jest ani równoległa, ani prostopadła do tego odcinka. Oznacz końce odcinka literami A i B . Znajdź konstrukcyjnie na narysowanej prostej taki punkt P , żeby przecinały się w nim przekątne pewnego prostokąta o boku AB .
12. Narysuj dowolny trójkąt. Skonstruuj taką prostą, aby narysowany trójkąt i jego symetryczne odbicie względem tej prostej miały wspólny bok. Znajdź sześć prostych spełniających ten warunek.
- *13. Znajdź konstrukcyjnie środek dowolnego okręgu.
14. a) Jaką miarę ma kąt rozwarty zawarty między symetralnymi sąsiednich boków trójkąta równobocznego?
b) Kąt między sąsiednimi bokami pewnego czworokąta ma miarę 100° . Jaką miarę ma kąt ostry zawarty między symetralnymi tych boków?
c) Symetralne dwóch boków trójkąta przecinają się pod kątem 20° . Znajdź miarę kąta między tymi bokami. Rozważ dwa przypadki.

Sprawdź się

1. Oceń prawdziwość podanych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

Punkt P jest punktem przecięcia się symetrycznych odcinków AB i CD , zatem odległości tego punktu od punktów A , B , C i D są takie same.	P	F
Punkt P leży na symetralnej odcinka AB , a punkt M jest środkiem tego odcinka, zatem miary kątów AMP i BMP są równe.	P	F
Punkt P jest punktem przecięcia się symetrycznych odcinków AB i BC , zatem odległości tego punktu od punktów A , B i C są takie same.	P	F

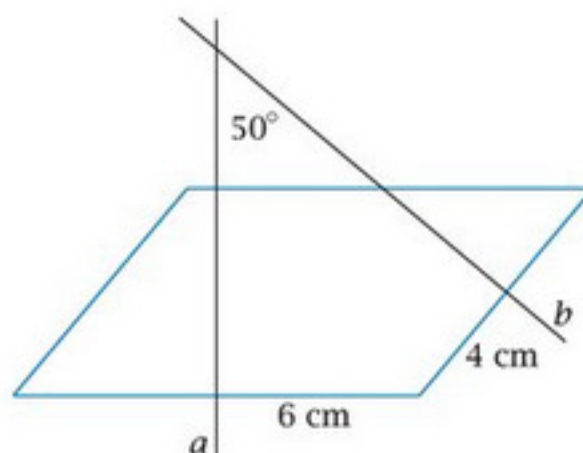
2. Proste a i b są symetrycznymi sąsiednich boków równoległoboku. Dokończ zdania. Wybierz odpowiedzi spośród A i B oraz spośród C i D.

Miara kąta rozwartego tego równoległoboku jest równa:

A. 130° B. 120°

Obwód tego równoległoboku jest równy:

C. 20 cm D. 40 cm



4 Dwusieczna kąta

Przypomnij sobie

- Narysuj kąt prosty i jego oś symetrii. Na jakie kąty oś symetrii dzieli ten kąt?
- Narysuj dowolny kąt. Zaznacz punkt, który leży w takiej samej odległości od obu ramion tego kąta. Gdzie leżą wszystkie punkty spełniające ten warunek?

Poćwicz

3. Narysuj dowolny kąt ostry α . Skonstruuj kąt o mierze:

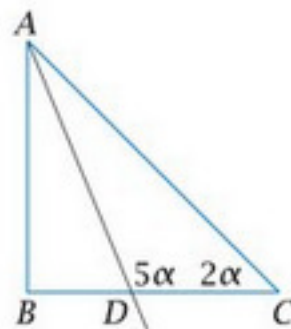
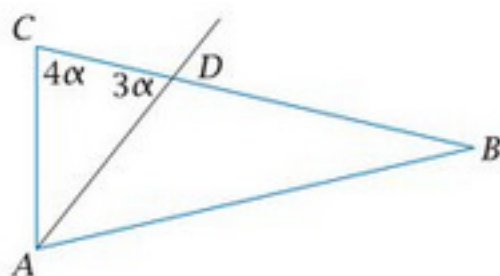
a) $\frac{1}{2}\alpha$ b) $\frac{1}{4}\alpha$ c) $\frac{3}{4}\alpha$ d) $2\frac{1}{4}\alpha$ e) $1\frac{1}{2}\alpha$

4. a) Dwusieczna jednego z kątów trójkąta równobocznego dzieli trójkąt na dwa trójkąty. Oblicz miary kątów tych trójkątów.
 b) Jeden z kątów trójkąta prostokątnego ma miarę 70° . Dwusieczna tego kąta dzieli trójkąt na dwa trójkąty. Oblicz miary kątów tych trójkątów.
 c) Kąt przy podstawie trójkąta równoramiennego ma miarę 40° . Dwusieczna tego kąta dzieli trójkąt na dwa trójkąty. Oblicz miary kątów tych trójkątów.
5. Skonstruuj trójkąt, którego kąty mają miary:
- a) 30° , 60° i 90° c) 45° , 60° i 75°
 b) 30° , 30° i 120° d) $22,5^\circ$, 15° i $142,5^\circ$

Pomyśl

6. a) W trójkącie ABC dane są kąty: $\sphericalangle ABC = 110^\circ$ i $\sphericalangle BCA = 20^\circ$. Dwusieczne tych kątów przecinają się w punkcie D . Oblicz miary kątów trójkąta BCD .
 b) W trójkącie prostokątnym równoramiennym ABC kąt ABC jest prosty. Dwusieczna kąta prostego i dwusieczna kąta BCA przecinają się w punkcie D . Oblicz miary kątów trójkąta BCD .
 c) W trapezie równoramiennym kąt ostry ma miarę 50° . Oblicz miary kątów trójkąta ograniczonego krótszą podstawą i dwusiecznymi kątów rozwartych tego trapezu.
7. Pod jakim kątem ostrym przecinają się dwusieczne:
- a) dwóch kątów trójkąta równobocznego,
 *b) kątów ostrych trójkąta prostokątnego?

8. a) Trójkąt ABC jest prostokątny, a półprosta AD jest dwusieczną kąta BAC . Oblicz miary kątów trójkąta ABC .



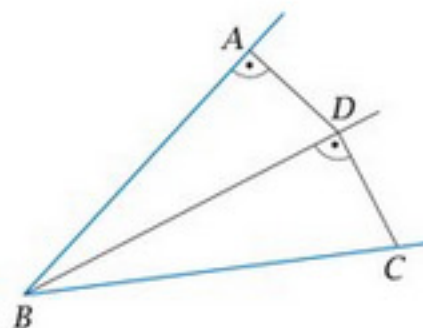
- b) Trójkąt ABC jest równoramienny, a półprosta AD jest dwusieczną kąta BAC . Oblicz miary kątów trójkąta ABC .

9. Narysuj dowolny trójkąt ABC . Znajdź konstrukcyjnie:
- a) zbiór wszystkich punktów jednakowo odległych od prostych AB i AC .
 b) punkt na boku AB jednakowo odległy od boków AC i BC .
 c) punkt jednakowo odległy od wszystkich boków trójkąta ABC .

- *10. a) Wykaż, że dwusieczne przeciwległych kątów w równoległoboku są równoległe.
b) Wykaż, że dwusieczne kątów leżących przy jednym boku równoległoboku są prostopadłe.
- *11. Pole trójkąta ABC jest równe 21 cm^2 , $AB = 6 \text{ cm}$ i $AC = 8 \text{ cm}$.
a) Oblicz stosunek pól trójkątów, na jakie dwusieczna kąta BAC dzieli trójkąt ABC .
b) Oblicz pola tych trójkątów.

Sprawdź się

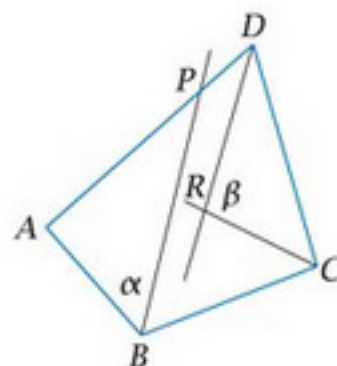
1. Na rysunku półprosta BD jest dwusieczną kąta ABC , który ma miarę 40° . Oceń prawdziwość podanych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.



Jeden z kątów czworokąta $ABCD$ ma miarę 70° .	P	F
Odcinki AD i DC mają równe długości.	P	F
Największy kąt czworokąta $ABCD$ ma miarę 160° .	P	F

2. Na rysunku obok półproste BP , CR i DR są dwusiecznymi kątów czworokąta $ABCD$. Wiadomo, że $\angle BAD = 90^\circ$ i $\angle ABC = 110^\circ$. W którym punkcie poprawnie podano miary kątów α i β ?

- A. $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 100^\circ$
B. $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 100^\circ$
C. $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 80^\circ$
D. $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 80^\circ$



5 Symetria względem punktu

Przypomnij sobie

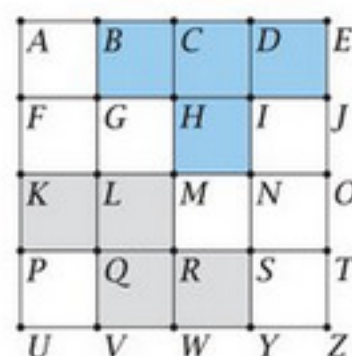
- Narysuj dowolny odcinek i oznacz jego końce literami A i B . Znajdź konstrukcyjnie taki punkt C , aby punkt B był środkiem odcinka AC .
- Narysuj dwa dowolne punkty i oznacz je P i R . Znajdź konstrukcyjnie punkt, który leży na prostej PR w równej odległości od punktów P i R .

3. a) Znajdź punkt symetryczny do punktu P względem:

- punktów K, R, L, M ,
- prostych BV i AZ .

b) Znajdź prostokąt symetryczny do prostokąta $AFHC$ względem:

- punktów M, G, H ,
- prostych KO, AZ, BV .

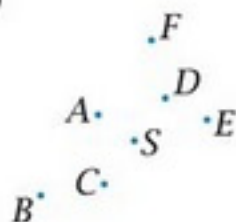


c) Na rysunku zacięniowano dwie figury (szarą i niebieską). Czy te figury mają oś symetrii?

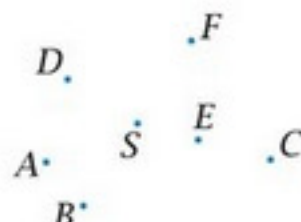
Poćwicz

4. Które punkty są symetryczne względem punktu S ?

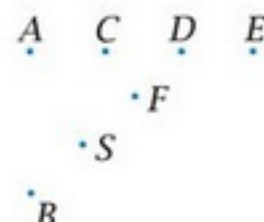
a)



b)

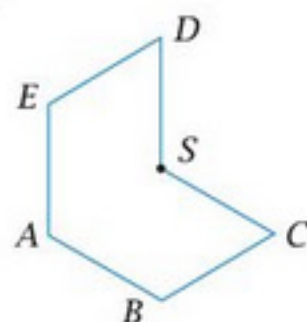


c)

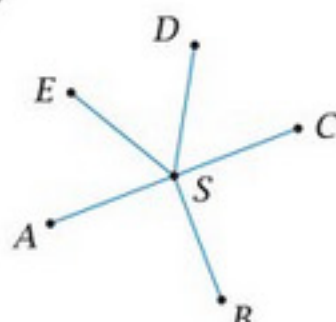


5. Które odcinki są symetryczne względem punktu S ?

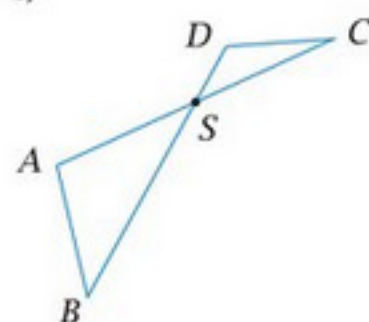
a)



b)



c)

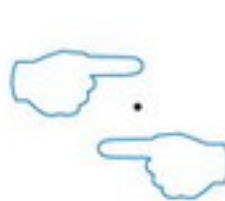


6. Czy narysowane figury są symetryczne względem zaznaczonego punktu?

a)



c)



e)



b)



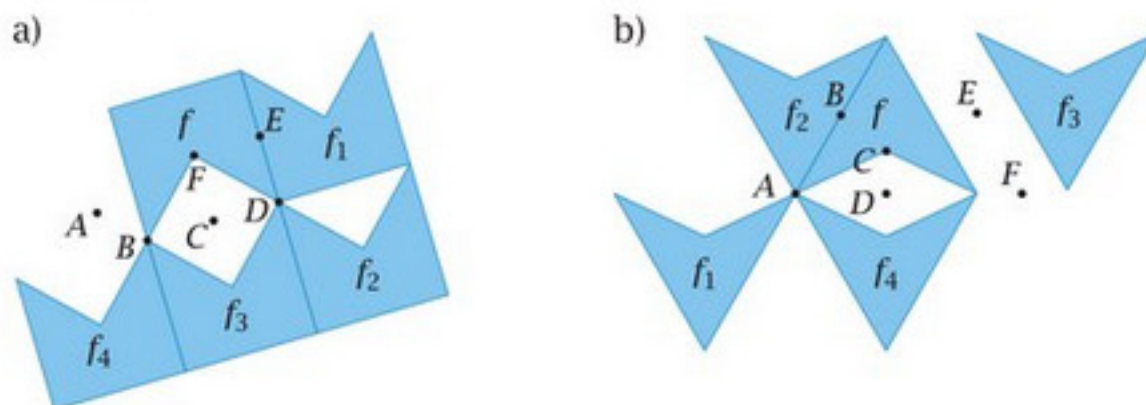
d)



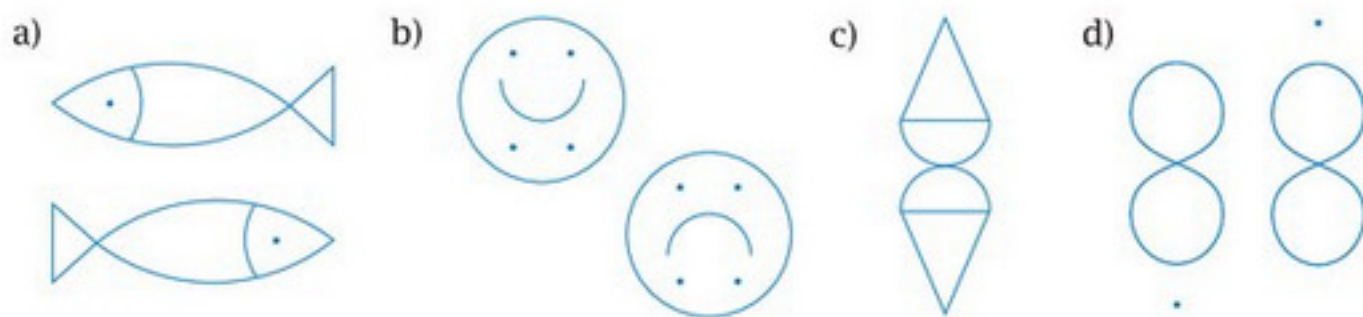
f)



7. Figury f_1, f_2, f_3 i f_4 są symetryczne do figury f względem zaznaczonych punktów. Dla każdej z tych figur wskaż punkt, względem którego jest ona symetryczna do figury f .



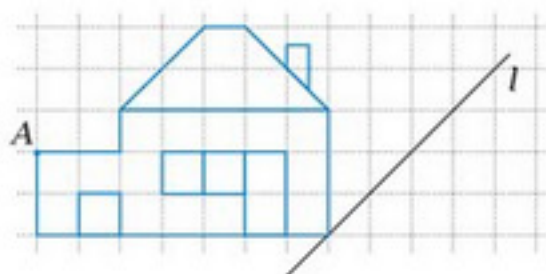
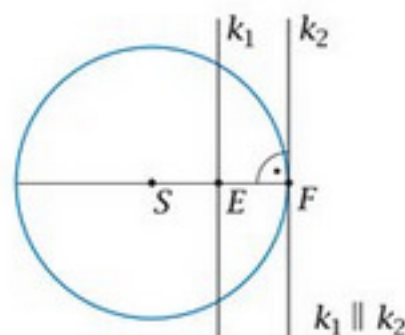
8. Narysowane figury są symetryczne względem pewnego punktu. Jak można znaleźć ten punkt?



9. a) Narysuj dowolny kwadrat. Skonstruuj kwadrat symetryczny do narysowanego kwadratu względem jednego z jego wierzchołków.
 b) Narysuj dowolny trójkąt równoboczny. Skonstruuj trójkąt symetryczny do niego względem środka jednego z boków.
 c) Deltoid to czworokąt, którego dwa sąsiednie boki są równe i pozostałe dwa boki też są równe. Narysuj dowolny deltoid. Skonstruuj deltoid symetryczny do niego względem punktu przecięcia się przekątnych.
10. Narysuj dowolny romb i skonstruuj figurę, która jest do niego symetryczna względem:
 a) jednego z wierzchołków,
 b) środka jednego z boków,
 c) punktu przecięcia się przekątnych.
11. Narysuj dowolny prostokąt i skonstruuj figurę do niego symetryczną względem:
 a) jednego z wierzchołków,
 b) punktu leżącego poza prostokątem,
 c) punktu leżącego wewnątrz prostokąta, ale różnego od punktu przecięcia się przekątnych.

12. Przerysuj rysunek do zeszytu, a następnie dorysuj figurę symetryczną do koła o środku S :

- względem prostej k_1 ,
- względem prostej k_2 ,
- względem punktu E ,
- względem punktu F .



13. Przerysuj domek do zeszytu, a następnie znajdź jego odbicie symetryczne:

- względem prostej l ,
- względem punktu A .

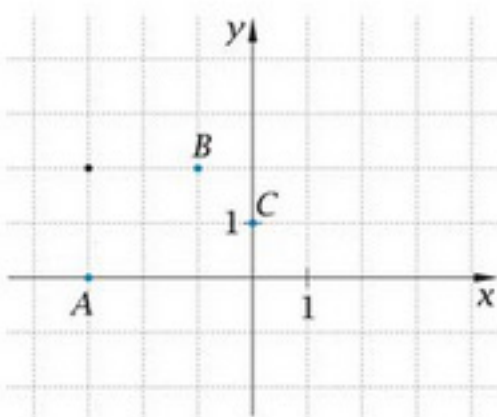
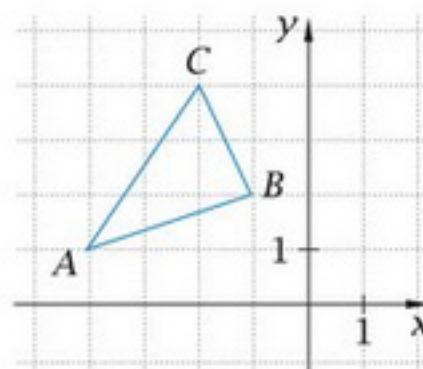
14. Podaj współrzędne wierzchołków figury symetrycznej do danego trójkąta ABC względem punktu $(0, 0)$.

15. Dane są punkty:

$$A = (3, -5) \quad C = (-420, 0) \quad E = (-140, -250)$$

$$B = (-1\frac{1}{2}, 2) \quad D = (0, 370) \quad F = (630, -150)$$

Podaj współrzędne punktów symetrycznych do tych punktów względem punktu $(0, 0)$.



16. Korzystając z przedstawionego obok rysunku, podaj współrzędne punktu symetrycznego do punktu $(-3, 2)$ względem:

- punktu A
- punktu B
- punktu C

17. a) Punkt B jest symetryczny do punktu $A = (0, 4)$ względem prostej równoległej do osi y przechodzącej przez punkt P . Zapisz współrzędne punktu B , jeżeli punkt P ma współrzędne:

$$(1, 0) \quad (2, 0) \quad (3, 0) \quad (5, 0) \quad (10, 0) \quad (72, 0) \quad (n, 0)$$

- b) Punkt B jest symetryczny do punktu $A = (0, 4)$ względem punktu S . Zapisz współrzędne punktu B , jeżeli punkt S ma współrzędne:

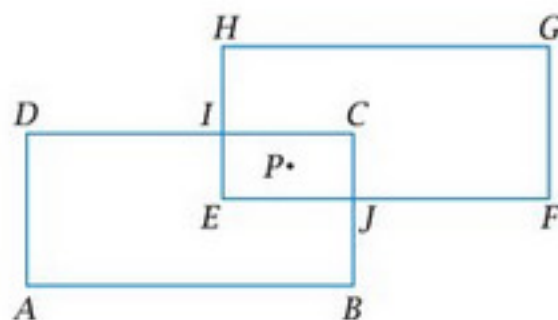
$$(0, 0) \quad (0, -1) \quad (0, -2) \quad (0, -3) \quad (0, -5) \quad (0, -20) \quad (0, -n)$$

18. Określ wartości a i b , dla których punkt $A = (a, -6)$ jest symetryczny do punktu $B = (4, b)$ względem:
- osi x ,
 - osi y ,
 - początku układu współrzędnych,
 - *d) prostej, której punkty mają pierwszą współrzędną równą 3,
 - *e) prostej, której punkty mają drugą współrzędną równą -4 ,
 - *f) punktu $(1, 1)$.

Pomyśl

19. Określ, gdzie położony jest punkt S , jeśli odcinek symetryczny do odcinka AB względem punktu S :
- leży na prostej AB ,
 - jest odcinkiem AB ,
 - ma jeden punkt wspólny z odcinkiem AB .

20. Prostokąt $ABCD$ jest symetryczny do prostokąta $GHEF$ względem punktu P . Wiadomo, że $HI = 4$, $CJ = 3$, $EJ = 6$ i $DI = 9$. Znajdź obwód prostokąta $ABCD$.



21. Które z poniższych zdań są fałszywe?

- Kąty wierzchołkowe są symetryczne względem punktu, który jest ich wierzchołkiem.
- Kąty naprzemianległe są symetryczne względem punktu, który jest środkiem odcinka łączącego ich wierzchołki.
- Kąty przyległe są symetryczne względem punktu leżącego na ich wspólnym ramieniu.
- Kąty odpowiadające są symetryczne względem punktu, który jest środkiem odcinka łączącego ich wierzchołki.

- *22. Odcinek $A'B'$ jest symetryczny do odcinka AB względem punktu S leżącego na prostej AB . Określ położenie punktu S , jeżeli:
- $AA' = 2AB$
 - $AA' > 2AB$
 - $AA' < 2AB$ i $BB' < 2AB$
 - $AA' = AB$

*23. Które z poniższych zdań są prawdziwe?

- I. Jeśli figura G jest symetryczna do figury F względem pewnego punktu, to figura F jest też symetryczna do figury G względem tego samego punktu.
- II. Proste k i l są prostopadłe. Jeżeli figura G jest symetryczna do figury F względem prostej k , a figura H jest symetryczna do figury G względem prostej l , to figura H jest symetryczna do figury F względem punktu, w którym proste k i l się przecinają.
- III. Jeżeli figura G jest symetryczna do figury F względem punktu A i figura H jest symetryczna do figury G względem punktu B , to figura H jest symetryczna do figury F względem pewnego punktu.

*24. a) Figura F_1 jest symetryczna do pewnej figury F względem osi x , a figura F_2 jest symetryczna do figury F_1 względem osi y . Wyjaśnij, dlaczego figura F_2 jest symetryczna do figury F względem początku układu współrzędnych.

b) Prosta a jest równoległa do osi x i przechodzi przez punkt $(-2, 8)$, a prosta b jest równoległa do osi y i przechodzi przez punkt $(-5, -1)$. Figura F_1 jest symetryczna do pewnej figury F względem prostej a , a figura F_2 jest symetryczna do figury F_1 względem prostej b . Figura F_2 jest symetryczna do figury F względem punktu P . Znajdź współrzędne tego punktu.

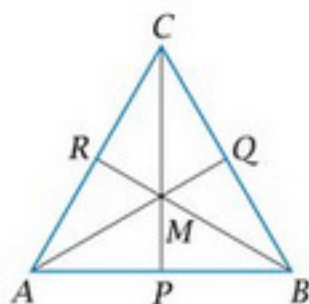
c) Prosta m przechodzi przez punkty $(0, 3)$ i $(2, 5)$, a prosta n przechodzi przez punkty $(5, 0)$ i $(1, 4)$. Figura F_1 jest symetryczna do pewnej figury F względem prostej m , a figura F_2 jest symetryczna do figury F_1 względem prostej n . Figura F_2 jest symetryczna do figury F względem punktu S . Znajdź współrzędne tego punktu.

Sprawdź się

1. Oceń prawdziwość podanych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

Jeśli obrazem figury A w symetrii względem punktu S jest figura B , to obrazem figury B w symetrii względem punktu S jest figura A .	P	F
Jeśli obrazem figury A w symetrii względem prostej p jest figura B , to obrazem figury B w symetrii względem prostej p jest figura A .	P	F
Jeśli obrazem figury A w symetrii względem prostej p jest figura B , to obrazem figury A w symetrii względem każdego punktu leżącego na prostej p również jest figura B .	P	F
Jeśli obrazem punktu A w symetrii względem punktu S jest figura B , to obrazem figury A w symetrii względem każdej prostej przechodzącej przez punkt S jest również figura B .	P	F

2. Trójkąt ABC jest równoboczny. Wysokości tego trójkąta przecinają się w punkcie M . Dokończ poniższe zdania. Wybierz odpowiedzi spośród A i B oraz spośród C i D.



Odcinek PB jest symetryczny względem prostej AQ do odcinka:

A. AR

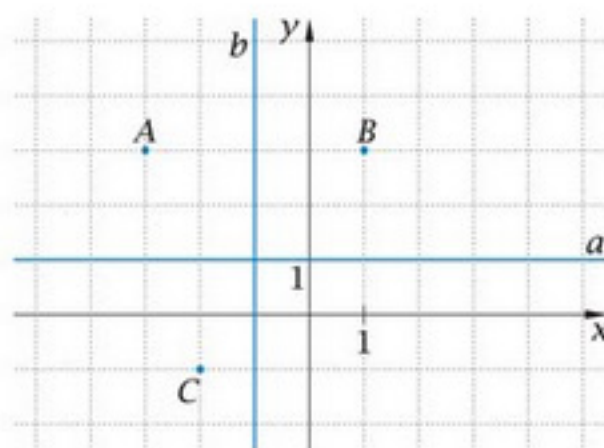
B. RC

Trójkąt APM jest symetryczny do trójkąta CQM :

C. względem punktu M

D. względem prostej BR

3. Poniższe zdania dotyczą punktów przedstawionych na rysunku. Oceń prawdziwość podanych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.



Obrazem punktu C w symetrii względem prostej a jest punkt o współrzędnych $(-2, 2)$.	P	F
Obrazem punktu A w symetrii względem punktu C jest punkt o współrzędnych $(-1, -5)$.	P	F
Punkt B jest obrazem punktu A w symetrii względem punktu o współrzędnych $(-1, 1)$.	P	F
Punkt A jest obrazem punktu B w symetrii względem prostej b .	P	F

6 Środek symetrii figury

Przypomnij sobie

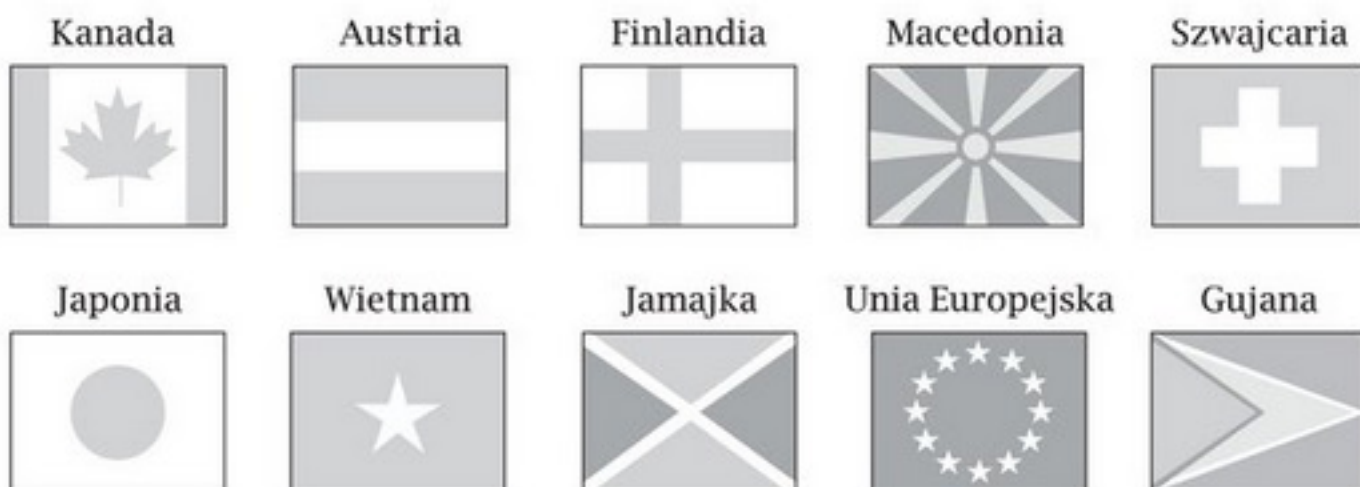
1. Które cyfry obrócone „do góry nogami” nie zmieniają wyglądu?
2. a) Narysuj trójkąt równoboczny, a następnie narysuj figurę symetryczną do tego trójkąta względem punktu, w którym przecinają się wysokości.
b) Narysuj kwadrat, a następnie narysuj figurę symetryczną do tego kwadratu względem punktu, w którym przecinają się przekątne.

Poćwicz

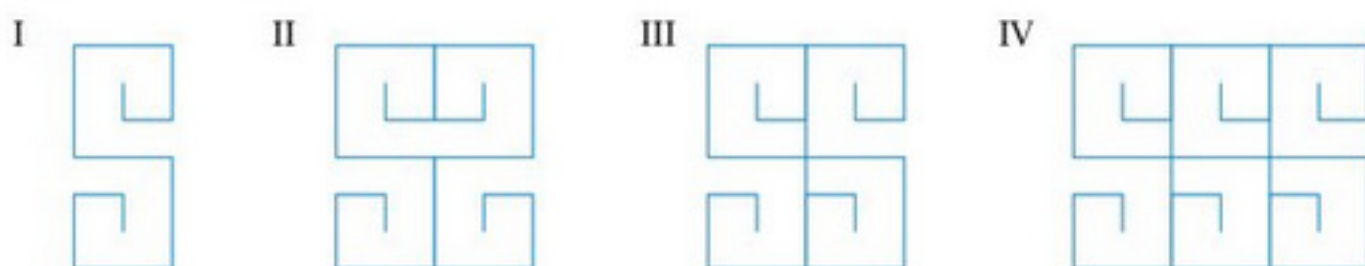
3. Które z narysowanych kart mają środek symetrii?



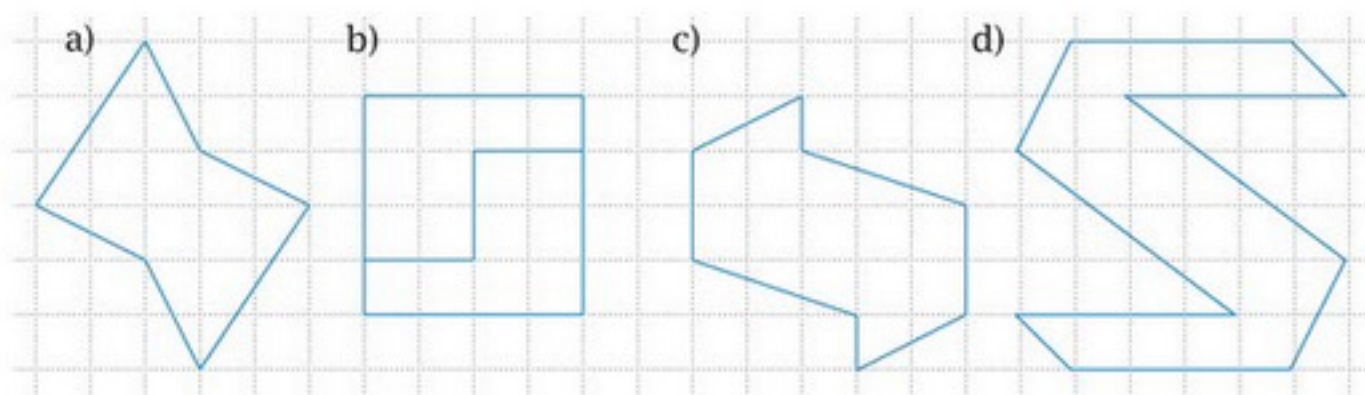
4. Poniżej przedstawiono wzory występujące na flagach różnych państw. Które z rysunków mają środek symetrii, a które — oś symetrii?



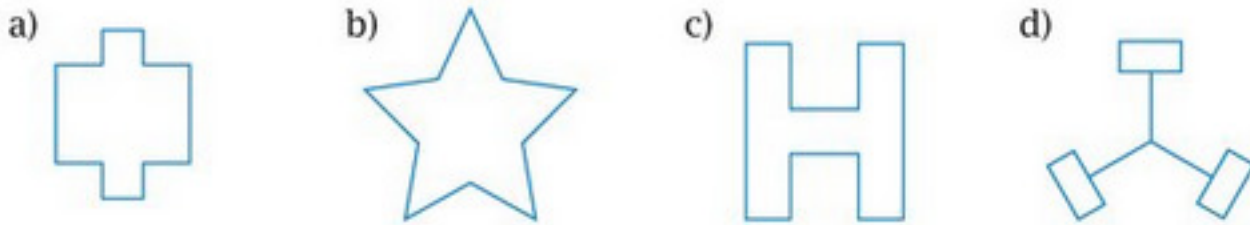
5. Które z narysowanych figur są środkowosymetryczne? Przerysuj je i zaznacz ich środki symetrii.



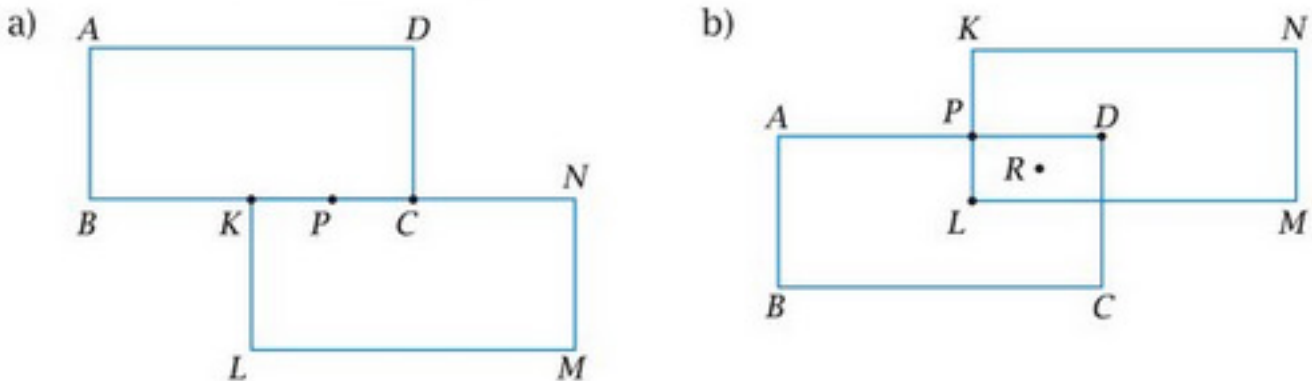
6. Przerysuj daną figurę i zaznacz jej środek symetrii.



7. Czy narysowana figura ma oś symetrii lub środek symetrii?



8. Na rysunku przedstawiono prostokąt $ABCD$ i jego obraz $KLMN$ w pewnej symetrii środkowej. Który punkt jest środkiem symetrii?



9. Środkiem symetrii rombu jest punkt $(-3, 5)$, a dwa z jego wierzchołków mają współrzędne $(-12, 5)$ i $(-3, 8)$. Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków i pole tego rombu.

10. Zaznacz w układzie współrzędnych punkty $A = (3, 7)$ i $B = (8, 2)$, które są wierzchołkami czworokąta $ABCD$.

a) Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków tego czworokąta, jeżeli jego środkiem symetrii jest początek układu współrzędnych.

b) Jaki czworokąt powstał?

11. Podaj współrzędne środka symetrii czworokąta o danych wierzchołkach.

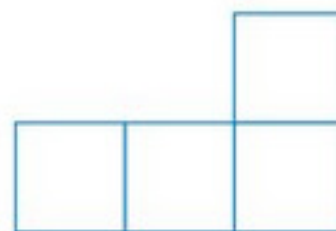
- a) $(0, 7)$, $(6, 2)$, $(0, -3)$, $(-6, 2)$
- b) $(-4, 3)$, $(2, 3)$, $(2, -3)$, $(-4, -3)$
- c) $(-6, -4)$, $(-1, -6)$, $(4, -4)$, $(-1, -2)$
- d) $(0, 5)$, $(-2, -1)$, $(6, -1)$, $(8, 5)$

Pomyśl

12. Ustal, czy dana figura ma środek symetrii.

- a) odcinek
- b) półprosta
- c) prosta
- d) punkt

13. Widoczna obok figura jest zbudowana z czterech takich samych kwadratów. Przerysuj tę figurę.



- a) Dorysuj do tej figury jeszcze jeden taki sam kwadrat tak, aby powstała figura:

- osiowosymetryczna,
- środkowosymetryczna.

- b) Dorysuj do tej figury jeszcze dwa takie same kwadraty tak, aby powstała figura:

- osiowosymetryczna,
- środkowosymetryczna.

- c) Dorysuj do tej figury jeszcze trzy takie same kwadraty tak, aby powstała figura:

- osiowosymetryczna,
- środkowosymetryczna.

14. a) Narysuj dowolny trójkąt. Zbuduj trzy różne figury środkowosymetryczne, każdą z dwóch trójkątów przystających do narysowanego. Trójkąty nie mogą zachodzić na siebie.

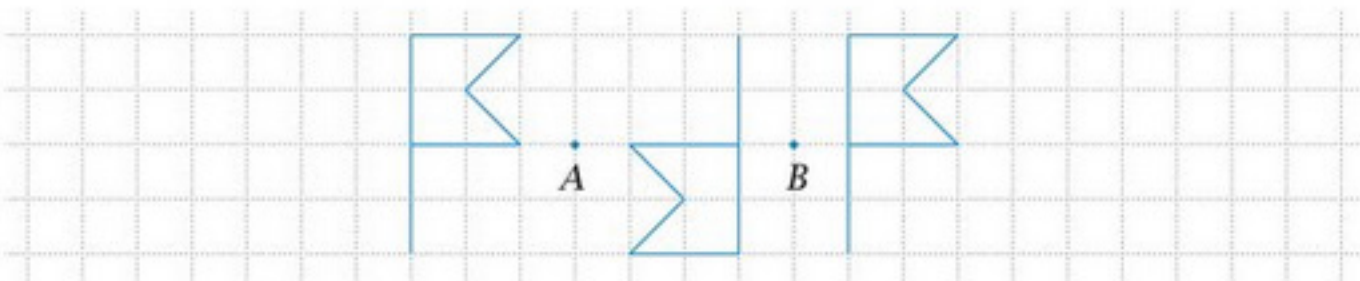
- b) Narysuj dowolny prostokąt. Zbuduj trzy różne figury środkowosymetryczne, każdą z trzech prostokątów przystających do narysowanego. Prostokąty nie mogą zachodzić na siebie.

- c) Narysuj dowolny kwadrat. Zbuduj trzy różne figury środkowosymetryczne, każdą z czterech kwadratów przystających do narysowanego. Kwadraty nie mogą zachodzić na siebie.

15. a) Narysuj dwa odcinki przecinające się w połowie. Połącz końce tych odcinków. Jaką figurę otrzymałeś? Czy jest ona środkowosymetryczna?

- *b) Skorzystaj z metody przedstawionej w punkcie a) i narysuj dziesięciokąt, który ma środek symetrii.

- *16. Z ilu elementów musi składać się szlaczek, którego fragment narysowano poniżej, by punkty *A* i *B* (obydwa naraz) były jego środkami symetrii?

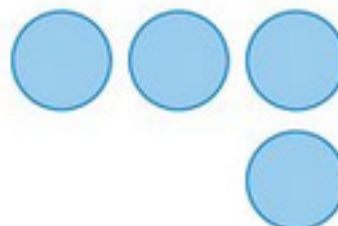


- *17. Czy prawdziwe są poniższe zdania?

- I. Jeśli figura ma tylko dwie osie symetrii, to są one prostopadłe.
- II. Jeśli figura ma tylko dwie osie symetrii, to ma też środek symetrii.

18. Cztery jednakowe żetony ułożono tak, jak pokazano na rysunku. Dołóż podaną niżej liczbę takich samych żetonów tak, aby figura złożona z wszystkich żetonów była osiowosymetryczna. Następnie wykonaj to zadanie tak, aby figura była środkowosymetryczna.

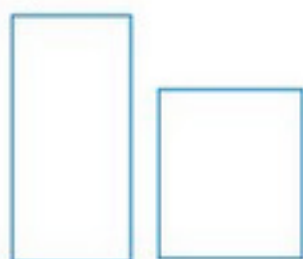
- a) Dołóż jeden żeton.
- b) Dołóż dwa żetony.
- c) Dołóż trzy żetony.
- d) Dołóż cztery żetony.



19. Narysuj prostokąt, a następnie pięć różnych prostych, z których każda dzieli ten prostokąt na dwie części o takich samych polach.

- *20. Jak poprowadzić prostą, która podzieli każdy z narysowanych prostokątów na dwie części o takich samych polach?

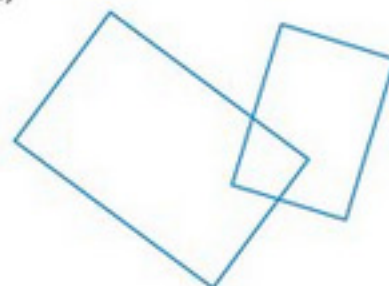
a)



b)



c)



21. Znajdź współrzędne środka symetrii:

- a) prostokąta o wierzchołkach:

$(-320, 110)$, $(-330, 110)$, $(-320, -420)$, $(-330, -420)$,

- b) rombu o wierzchołkach:

$(-240, -240)$, $(120, 0)$, $(480, -240)$, $(120, -480)$,

- c) kwadratu o wierzchołkach:

$(-520, -110)$, $(380, -110)$, $(-520, 790)$, $(380, 790)$,

- *d) okręgu, do którego należą punkty:

$(120, 380)$, $(180, 440)$, $(240, 380)$, $(180, 320)$.

22. Narysuj równoległobok o wierzchołkach $(-2, 4)$, $(0, 4)$, $(4, -2)$, $(2, -2)$.

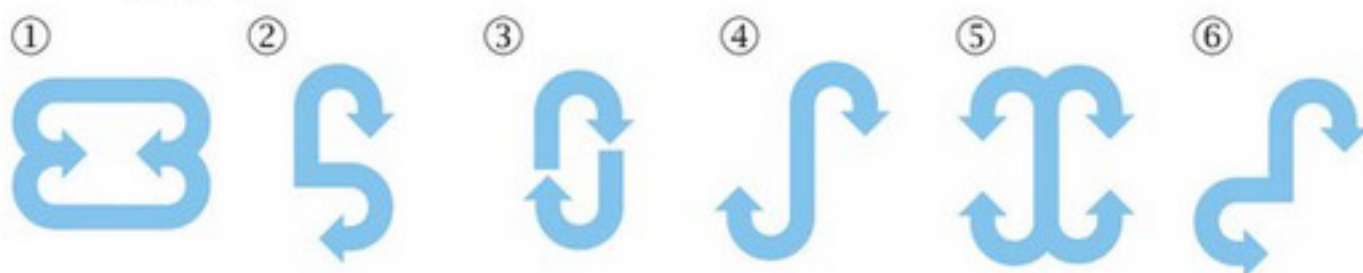
- a) Znajdź jego środek symetrii.

- b) Zamień miejscami współrzędne każdego z wierzchołków równoległoboku, następnie narysuj czworokąt o otrzymanych wierzchołkach. Znajdź jego środek symetrii. Co zaobserwowałeś?

- c) Sprawdź, czy zależność podobną do zaobserwowanej w powyższym podpunkcie spełniają środki symetrii równoległoboku o wierzchołkach $(-6, -1)$, $(-3, -1)$, $(5, 4)$ i $(2, 4)$ i równoległoboku o wierzchołkach $(-1, -6)$, $(-1, -3)$, $(4, 5)$ i $(4, 2)$.

Sprawdź się

1. Dane są figury.

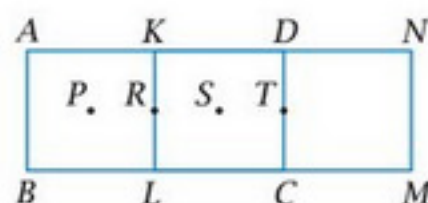


Które z tych figur mają środek symetrii?

- A. 1, 3, 6 B. 3, 4, 5, 6 C. 1, 3, 4, 5 D. 2, 3, 4, 5

2. Na rysunku przedstawiono prostokąt $ABCD$ i jego obraz $MNKL$ w pewnej symetrii środkowej. Środkiem symetrii jest punkt:

- A. P B. R C. S D. T



3. Ustal, które z poniższych zdań są fałszywe.

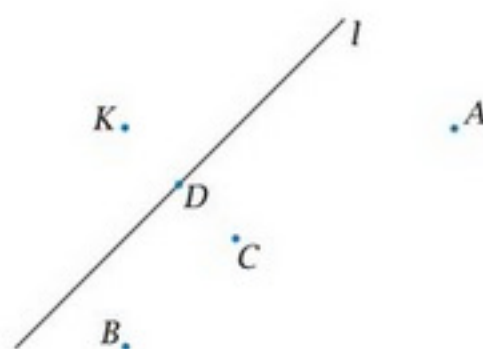
- I. Figura, która ma oś symetrii, ma też środek symetrii.
 II. Figura, która ma środek symetrii, ma też oś symetrii.
 III. Figura, która ma środek symetrii, może mieć dwie osie symetrii.
 IV. Figura, która ma tylko trzy osie symetrii, może mieć środek symetrii.

- A. tylko I i IV B. tylko I, II, IV C. tylko III i IV D. I, II, III, IV

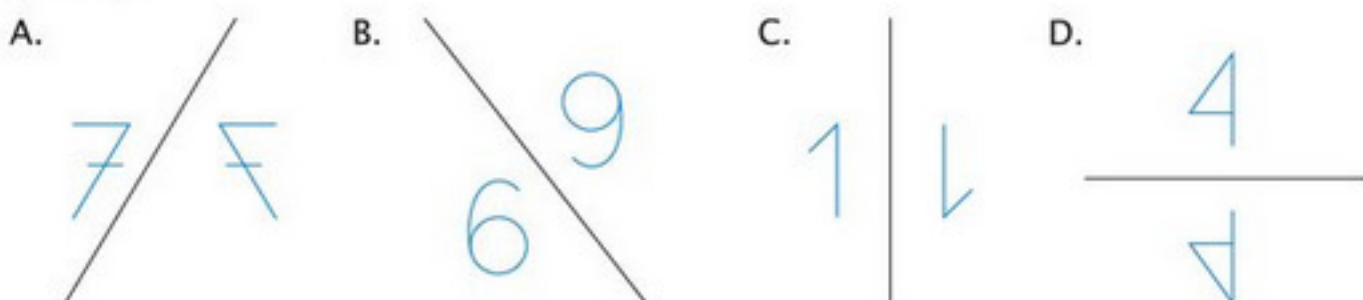
7 Zadania testowe

1. Który z punktów jest symetryczny do punktu K względem prostej l ?

- A. punkt A C. punkt C
 B. punkt B D. punkt D

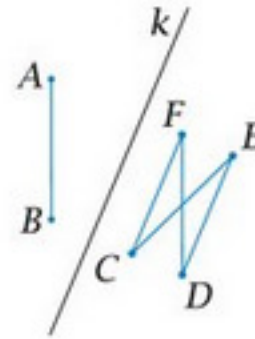


2. Na którym rysunku przedstawiono figury symetryczne względem narysowanej prostej?

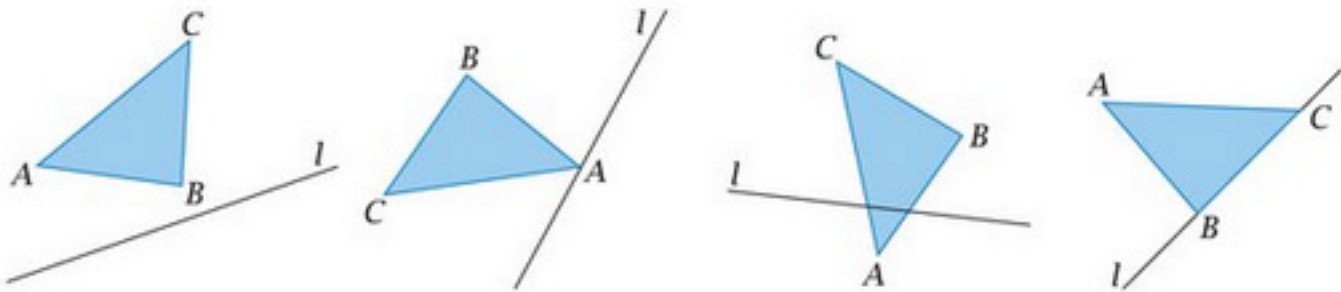


3. Który z wymienionych odcinków jest symetryczny do odcinka AB względem prostej k ?

A. CE C. DF
B. DE D. CF



4. Na rysunkach przedstawiono różne położenia trójkąta ABC i prostej l .

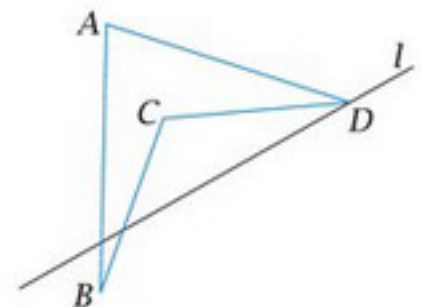


W ilu z tych sytuacji trójkąt ABC i trójkąt symetryczny do niego względem prostej l będą miały nieskończenie wiele punktów wspólnych?

A. w żadnej B. w jednej C. w dwóch D. w trzech

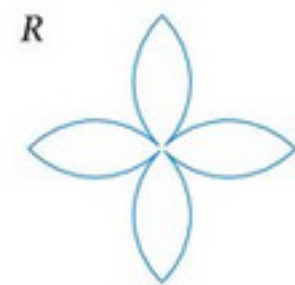
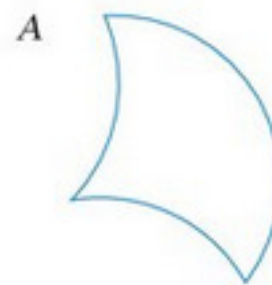
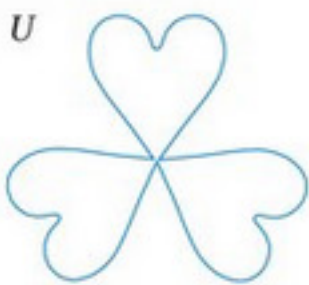
5. Punkty A' , B' , C' i D' są symetryczne do odpowiednich wierzchołków narysowanego czworokąta $ABCD$ względem prostej l . Wśród odcinków łączących punkty symetryczne najdłuższy jest odcinek:

A. AA' B. BB' C. CC' D. DD'



6. Gdy ustawimy narysowane figury w kolejności od największej do najmniejszej liczby posiadanych osi symetrii, otrzymamy układ liter:

A. UDAR B. RUDA C. ADUR D. UDRA



7. Oceń prawdziwość podanych zdań dotyczących wybranych czworokątów. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

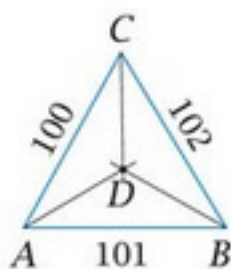
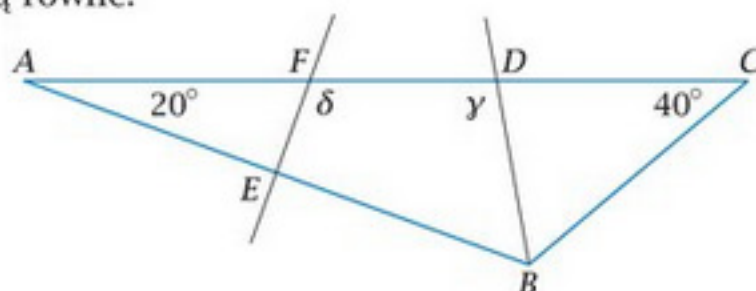
Kwadrat ma dokładnie dwie osie symetrii.	P	F
Jeżeli równoległobok ma oś symetrii, to jest prostokątem.	P	F
Trapez, który ma dwa boki równej długości, ma jedną oś symetrii.	P	F

8. Oceń prawdziwość podanych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

W każdym równoległoboku symetralne przeciwległych boków się pokrywają.	P	F
W każdym trapezie symetralne dwóch podstaw się pokrywają.	P	F
W każdym prostokącie symetralne przeciwległych boków się pokrywają.	P	F
W każdym rombie symetralne przekątnych się pokrywają.	P	F

9. Półprosta BD jest dwusieczną kąta ABC , a prosta EF jest symetralną boku AB trójkąta ABC . Miary kątów γ i δ są równe:

- A. $\gamma = 100^\circ$, $\delta = 110^\circ$
 B. $\gamma = 80^\circ$, $\delta = 110^\circ$
 C. $\gamma = 100^\circ$, $\delta = 70^\circ$
 D. $\gamma = 110^\circ$, $\delta = 100^\circ$



10. Dwusieczne kątów trójkąta ABC przedstawionego obok przecinają się w punkcie D . Wśród trójkątów ADC , ABD oraz BCD największe pole ma trójkąt:

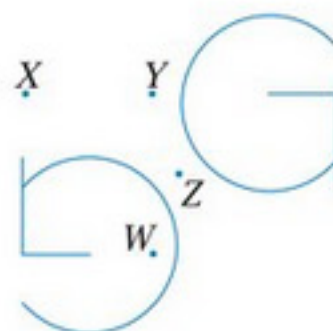
- A. ABD B. BCD C. ADC
 D. Pola wszystkich tych trójkątów są równe.

11. Dwusieczne kątów BAD i ABC prostokąta $ABCD$ przecinają się w punkcie E . Trójkąt ABE jest:

- A. równoboczny C. ostrokątny
 B. równoramienny D. rozwartokątny

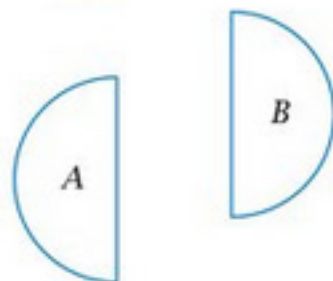
12. Figury na rysunku są symetryczne względem punktu:

- A. X B. Y C. Z D. W

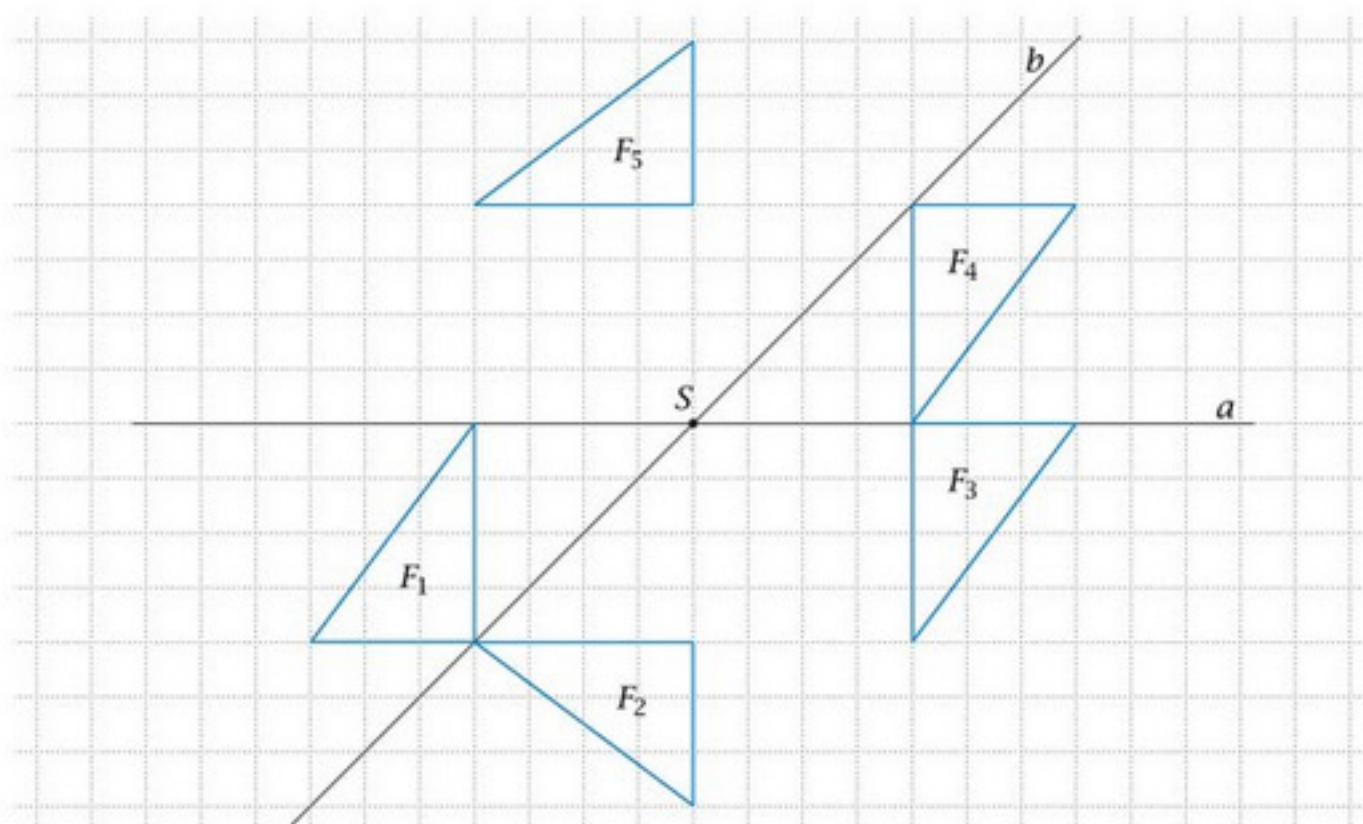


13. Wskaż poprawne dokończenie zdania. Figury A i B :

- A. są symetryczne względem pewnego punktu, ale nie są symetryczne względem żadnej prostej.
 B. są symetryczne względem pewnej prostej, ale nie są symetryczne względem żadnego punktu.
 C. nie są symetryczne względem żadnej prostej ani żadnego punktu.
 D. są symetryczne względem pewnej prostej i względem pewnego punktu.



14. Przyjrzyj się poniższemu rysunkowi.



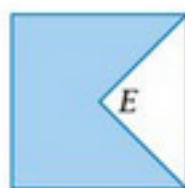
Odpowiedz na pytania. Wybierz odpowiedzi spośród A i B oraz spośród C i D.

Które z narysowanych figur są symetryczne względem prostej a ?

- A. F_3 i F_4 B. F_2 i F_5

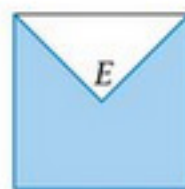
Które z narysowanych figur są symetryczne względem punktu S ?

- C. F_1 i F_4 D. F_3 i F_5

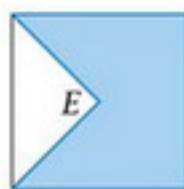


15. Czworokąt narysowany obok jest kwadratem. Punkt E jest punktem przecięcia się jego przekątnych. Na którym z poniższych rysunków przedstawiono pięciokąt symetryczny do zacieniowanego pięciokąta względem punktu E ?

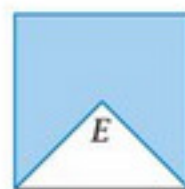
A.



B.



C.



D. na żadnym z rysunków

16. Dokończ zdania. Wybierz odpowiedzi spośród A i B oraz spośród C i D.

Wierzchołki A i B czworokąta $ABA'B'$ są symetryczne do punktów A' i B' względem punktu P . Czworokąt ten jest na pewno:

- A. równoległobokiem B. trapezem, który nie jest równoległobokiem

Wierzchołki A i B czworokąta $ABB'A'$ są symetryczne do punktów A' i B' względem prostej p . Czworokąt ten jest na pewno:

- C. rombem D. trapezem równoramiennym

17. Punkt B jest symetryczny do punktu $A = (-5, 2)$ względem osi y . Punkt C jest symetryczny do punktu A względem początku układu współrzędnych. Pole trójkąta ABC jest równe:

A. 40 B. 10 C. 20 D. 5

18. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

Jeśli trójkąt ABC jest symetryczny do trójkąta $A'B'C$ względem punktu C , to trójkąt ACB' jest symetryczny do trójkąta $A'CB$ względem tego samego punktu.	P	F
Jeśli trójkąt ABC jest symetryczny do trójkąta ABC' względem prostej AB , to trójkąt $AC'C$ jest równoramienny.	P	F
Jeśli trójkąt ABC jest symetryczny do trójkąta ABC' względem środka boku AB , to czworokąt $AC'BC$ jest rombem.	P	F

19. Która z narysowanych figur jest środkowosymetryczna?

A.



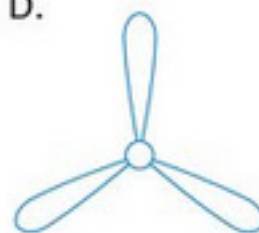
B.



C.



D.



20. Środek symetrii ma każdy:

A. trójkąt równoboczny

C. trapez

B. prostokąt

D. trójkąt prostokątny

21. Która z poniższych figur ma oś symetrii, ale nie ma środka symetrii?

A.



B.



C.



D.



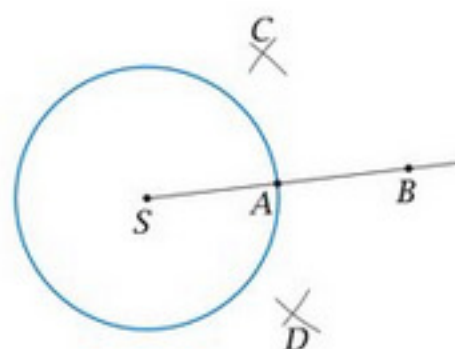
22. Środkiem symetrii czworokąta o wierzchołkach $(-4, 6)$, $(0, 6)$, $(6, -4)$ i $(2, -4)$ jest punkt o współrzędnych:

A. $(0, 0)$ B. $(1, 0)$ C. $(-1, 2)$ D. $(1, 1)$

1 Styczna do okręgu

Przypomnij sobie

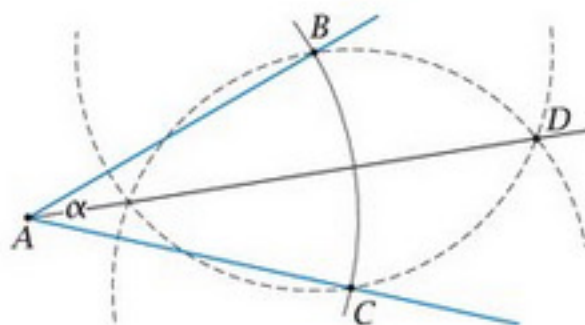
1. Rysunek przedstawia fragment konstrukcji prostej stycznej do okręgu, przechodzącej przez dany punkt leżący na okręgu. Przez które punkty należy poprowadzić prostą, żeby dokończyć tę konstrukcję?



2. Czy to prawda, że:
- odległość środka okręgu od stycznej jest większa niż promień,
 - styczna do okręgu to prosta, która ma z okręgiem jeden punkt wspólny,
 - styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności?
3. Odpowiedz na pytania dotyczące konstrukcji dwusiecznej kąta α przedstawionej na rysunku.

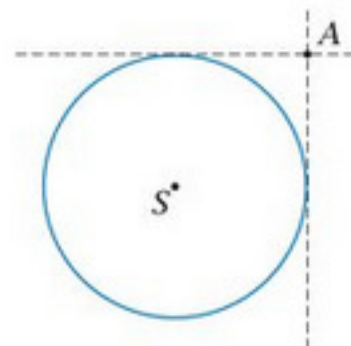
Czy to prawda, że:

- półprosta AD jest dwusieczną kąta BAC,
- prosta AD jest symetralną odcinka BC,
- prosta AC nie jest styczna do okręgu o środku B i promieniu BC,
- odcinki BD i DC mają tę samą długość?

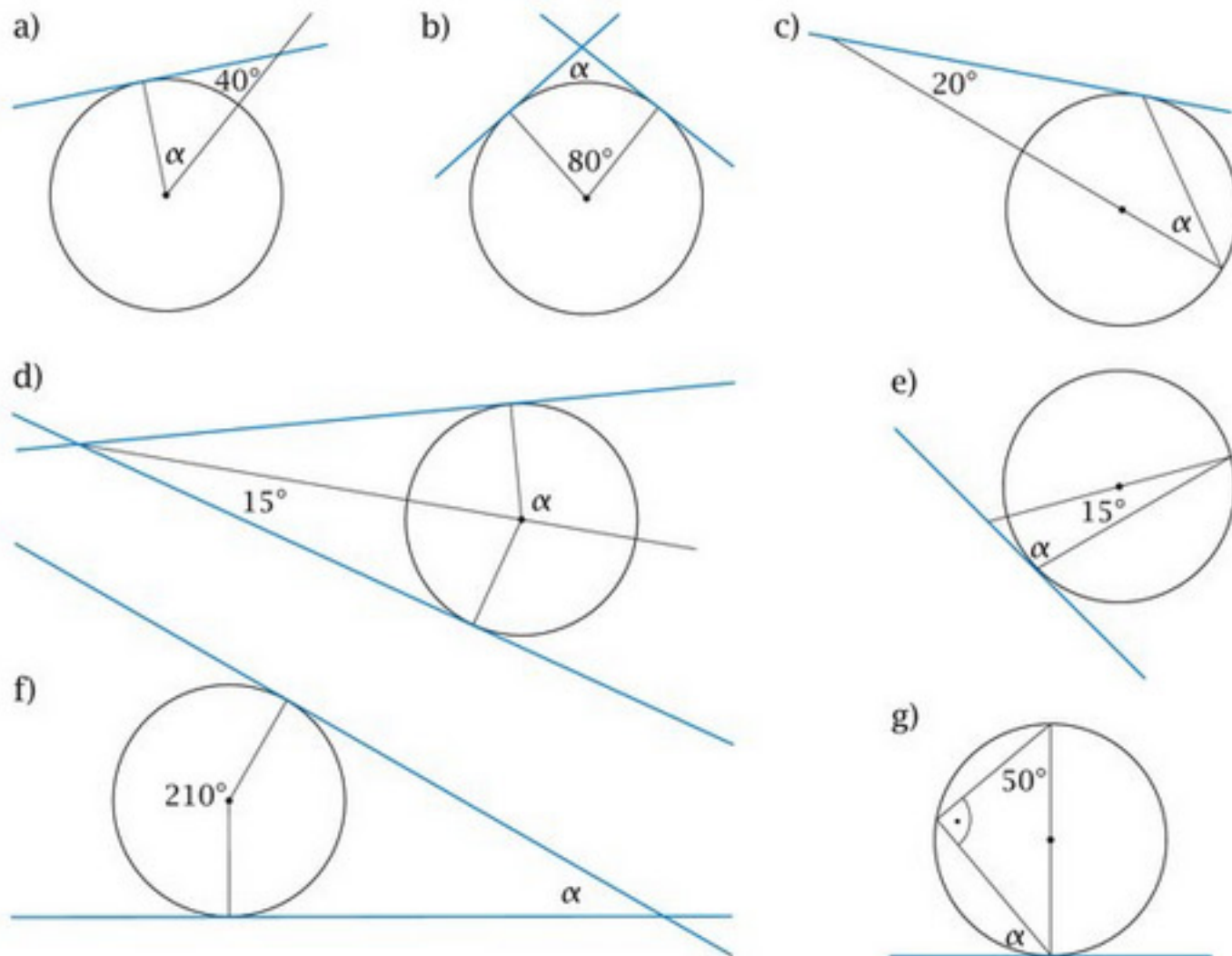


Poćwicz

4. Narysuj prostą l i zaznacz na niej punkt A. Skonstruuj okrąg o promieniu 2,5 cm, styczny do prostej l w punkcie A. Rozważ dwa przypadki.
5. Styczne do okręgu o środku S i promieniu 7 przecinają się pod kątem prostym w punkcie A (zob. rysunek). Oblicz odległość AS.

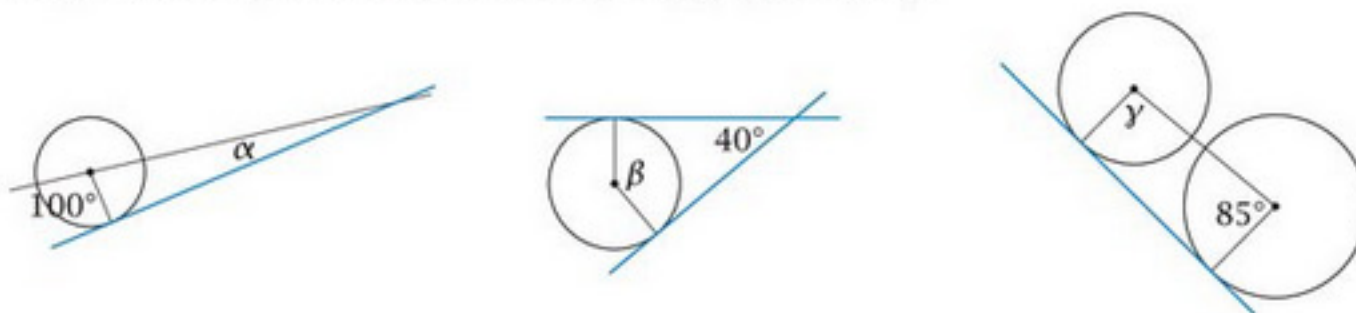


6. Narysowane proste są styczne do okręgu. Oblicz miarę kąta α .



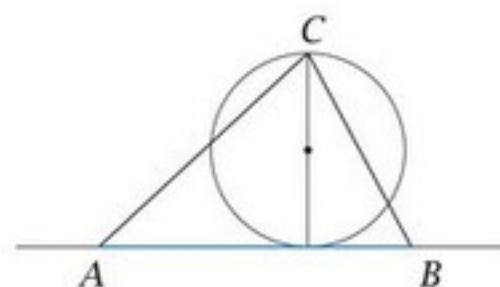
7. Skonstruuj trójkąt równoboczny ABC oraz okrąg o środku w punkcie A i promieniu AB . Następnie skonstruuj styczne do tego okręgu w punktach B i C . Oblicz miarę kąta rozwartego, pod którym przecinają się te styczne.

8. Narysowane proste są styczne do okręgów, a promienie zostały poprowadzone do punktów styczności. Jakie miary mają kąty α , β i γ ?



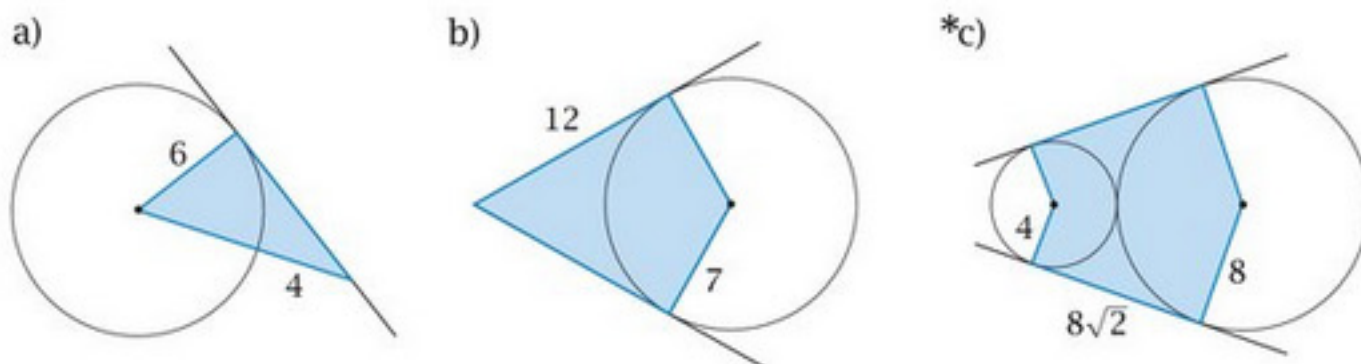
Pomyśl

9. Prosta AB jest styczna do okręgu o promieniu 3 cm (zob. rysunek). Pole trójkąta ABC jest równe 30 cm^2 . Oblicz długość odcinka AB .

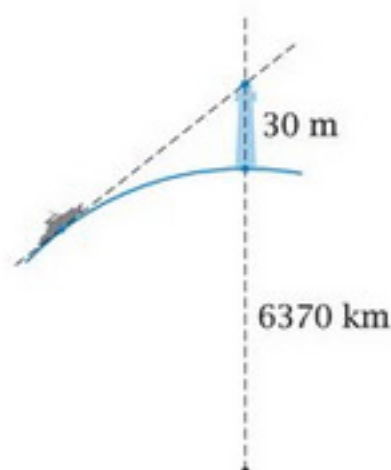
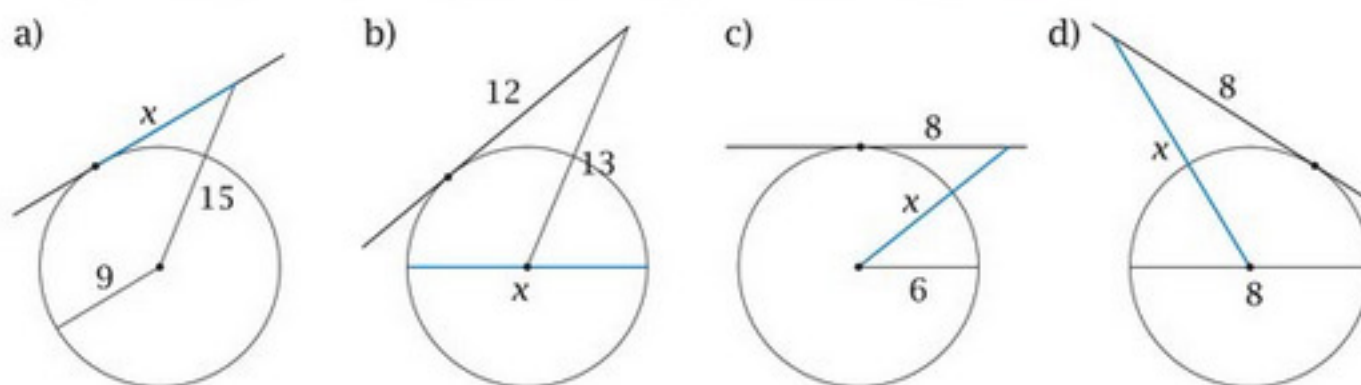


10. a) Narysuj dwie proste równoległe i skonstruuj okrąg styczny do tych prostych.
 b) Narysuj dwie proste prostopadłe i skonstruuj okrąg o promieniu 3 cm styczny do tych prostych.
 *c) Narysuj dwie proste przecinające się w punkcie K pod kątem o mierze 60° i zaznacz punkt A różny od K na jednym z ramion. Skonstruuj okrąg styczny do obu prostych i przechodzący przez punkt A . Rozważ dwa przypadki.

11. Narysowane proste są styczne do okręgu. Oblicz pole zacięniowanej figury.

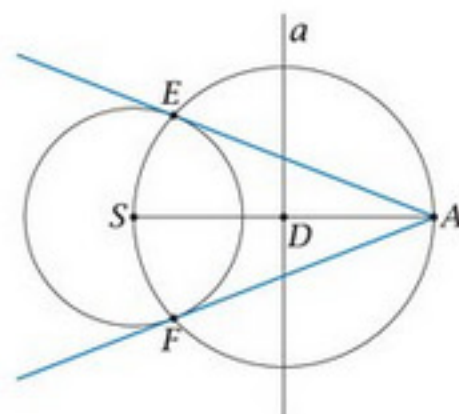


12. Narysowana prosta jest styczna do okręgu. Oblicz długość odcinka x .



13. Latarnia morska wysyła sygnał świetlny sięgający linii horyzontu. Oblicz maksymalną odległość, z której kapitan okrętu zbliżającego się do latarni może dostrzec jej światło. Skorzystaj z danych umieszczonych na rysunku. Do obliczeń użyj kalkulatora.

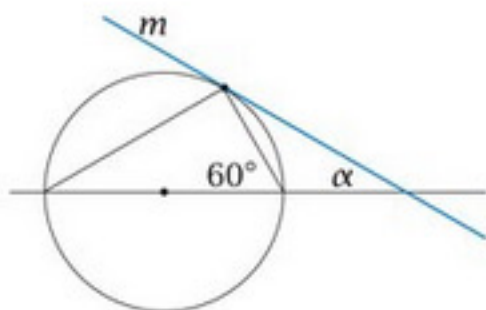
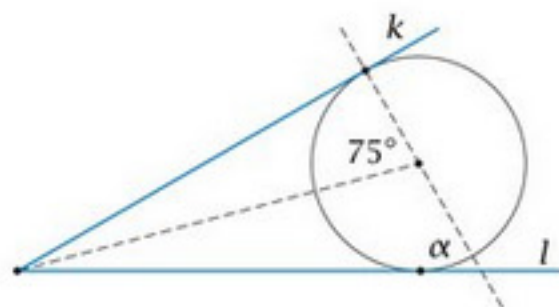
- *14. Na rysunku przedstawiono wynik konstrukcji prostej stycznej do okręgu o środku S przechodzącej przez dany punkt A , który leży poza okręgiem. Odtwórz tę konstrukcję w zeszycie. Ile stycznych otrzymasz w jej wyniku?



Sprawdź się

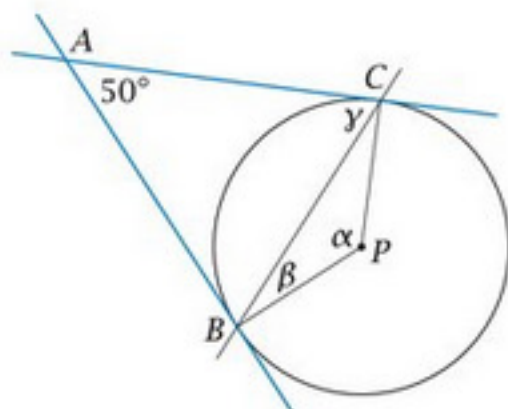
1. Proste k i l są styczne do okręgu. Oblicz miarę kąta α .

A. 55° B. 60° C. 70° D. 75°



2. Prosta m jest styczna do okręgu. Oblicz miarę kąta α .

A. 20° B. 25° C. 30° D. 35°



3. Punkt P jest środkiem okręgu, a proste AB i AC są styczne do okręgu w punktach B i C .

Czy podane miary kątów są prawdziwe? Wskaż poprawne odpowiedzi.

$\alpha = 150^\circ$ TAK/NIE

$\beta = 25^\circ$ TAK/NIE

$\gamma = 75^\circ$ TAK/NIE

2 Wzajemne położenie dwóch okręgów

Przypomnij sobie

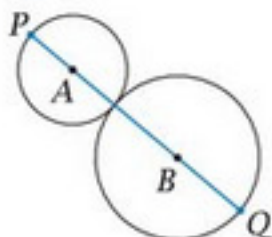
- Ile punktów wspólnych mogą mieć dwa okręgi?
- Dwa okręgi mają promienie równe 10 cm i 2 cm. Ustal, jaka jest odległość między środkami tych okręgów, jeśli te okręgi są styczne:
 - zewnątrznie,
 - wewnętrznie.

Poćwicz

- Okrąg ma środek w punkcie $(2, -4)$ i promień długości 6. Ile ma on punktów wspólnych z okręgiem o środku S i promieniu r ?
 - $S = (2, 5)$, $r = 2$
 - $S = (0, -4)$, $r = 4$
 - $S = (-4, -4)$, $r = 6$
 - $S = (9, -4)$, $r = 2$

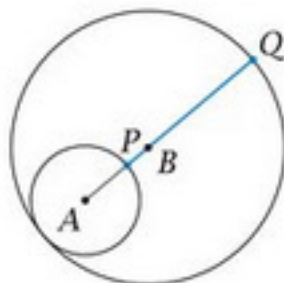
4. Przedstawione na rysunku okręgi o danych promieniach r i R są styczne, punkty A i B są ich środkami. Oblicz długości odcinka PQ .

a)



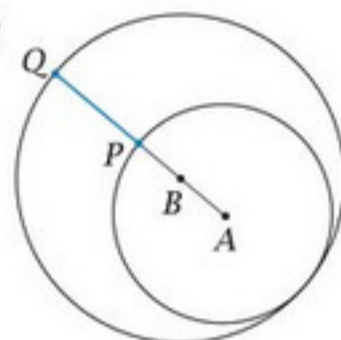
$$r = 2, R = 3$$

b)



$$r = 2, R = 5$$

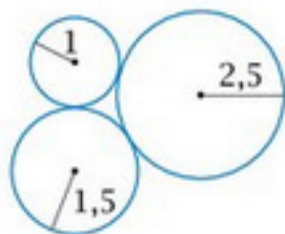
c)



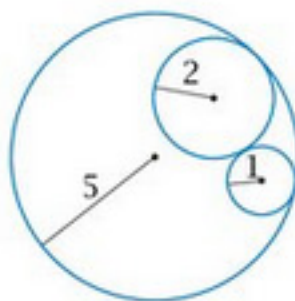
$$r = 4, R = 6$$

5. Narysowane okręgi są parami styczne. Oblicz obwód trójkąta, którego wierzchołkami są środki tych okręgów.

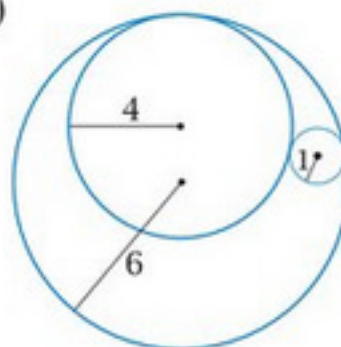
a)



b)



c)



Pomyśl

6. Odległość między środkami dwóch okręgów jest równa 15 cm. Ustal, jakie jest wzajemne położenie tych okręgów, jeśli ich promienie mają:

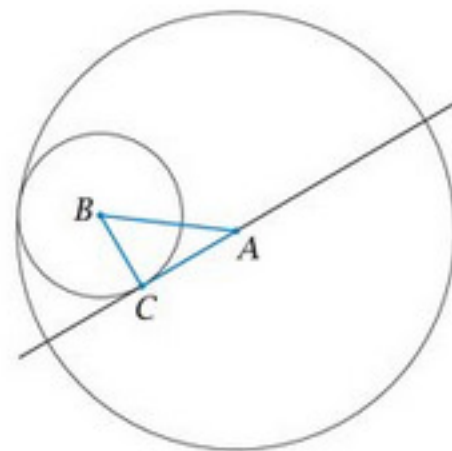
a) 14 cm i 8 cm b) 1,15 m i 1 m c) 3 km i 2 km d) 16 mm i 5 mm

7. Ustal, czy do tuby o średnicy 15 cm zmieszczą się (pakowane obok siebie):

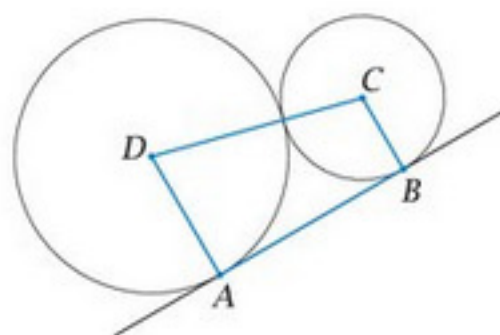
- a) dwa rulony o średnicy 7 cm,
 b) rulon o promieniu 5,5 cm i rulon o promieniu 4 cm,
 *c) cztery rulony o średnicy 6 cm.



8. Okręgi przedstawione na rysunku obok są styczne wewnętrznie, punkty A i B są ich środkami, a prosta AC jest styczna do mniejszego z okręgów. Promienie okręgów mają długości 3 i 8. Oblicz obwód trójkąta ABC .



- *9. Na rysunku przedstawiono okręgi styczne zewnętrznie oraz prostą AB styczną do obu tych okręgów. Punkty C i D są środkami okręgów, a promienie mają długości 5 i 3. Oblicz obwód czworokąta $ABCD$.



Sprawdź się

1. Dwa okręgi mają średnice 20 cm i 30 cm. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

Jeśli te okręgi są styczne zewnętrznie, to zawierają się w kole o promieniu 25 cm.	P	F
Jeśli te okręgi są styczne wewnętrznie, to odległość między ich środkami jest równa 10 cm.	P	F
Jeśli odległość między środkami tych okręgów wynosi 28 cm, to te okręgi są rozłączne.	P	F
Jeśli te okręgi są rozłączne, to odległość między ich środkami może być równa 2 cm.	P	F

2. Okrąg o środku w punkcie $(-3, -5)$ i promieniu 4 ma dwa punkty wspólne z okręgiem o środku w punkcie $(10, -5)$ i promieniu:
- A. 20 B. 17 C. 13 D. 9
3. Trzy okręgi mają promienie o długościach 3, 4 i 5. Każdy z tych okręgów jest styczny zewnętrznie do dwóch pozostałych. Obwód trójkąta, którego wierzchołkami są środki tych okręgów, jest równy:
- A. 12 B. 17 C. 24 D. 25

3 Liczba π . Długość okręgu

Uwaga. Jeżeli nie jest napisane inaczej, podaj wynik za pomocą liczby π .

Przypomnij sobie

1. Podaj zaokrąglenie liczby 3,14159265359 do:
- a) części milionowych, c) części tysięcznych, e) części dziesiątych,
 b) części dziesiętysięcznych, d) części setnych, f) jedności.

2. a) Oblicz obwód najmniejszej kwadratowej kartki, z której można wyciąć koło o promieniu 20 mm.
 b) Oblicz długość średnicy największego koła, jakie można wyciąć z kwadratowej kartki o polu 100 cm^2 .

Poćwicz

3. Czy podana różnica jest liczbą dodatnią, ujemną czy jest równa 0?

a) $3,1 - \pi$ b) $2\pi - 7$ c) $10 - 3\pi$ d) $\frac{1}{3} - \frac{1}{\pi}$ e) $\frac{\pi}{3} - 1$ f) $\frac{3}{\pi} - \frac{\pi}{3}$

4. Uporządkuj poniższe liczby od najmniejszej do największej.

a) $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{5}\pi$ $\frac{1}{\pi}$ 3,41 $\frac{3}{2}\pi$ $\frac{13}{4}$ π $\frac{31}{10}$
 b) -2π -2 $-\pi$ -3 -1 $-\frac{\pi}{3}$ $-\frac{3}{\pi}$ $-\frac{2}{\pi}$

5. Jakimi przybliżeniami liczby π posłużono się w poniższych przykładach?

- a) Okrąg o promieniu 14 m ma długość 88 m.
 b) Koło o średnicy 2 km ma obwód 6,2 km.
 c) Okrąg o długości 60 cm ma średnicę 19 cm.
 d) Koło o obwodzie 1,2 cm ma promień 2 mm.

6. Podaj długość okręgu o średnicy:

a) $\frac{3}{4}$ c) 123 e) 3π g) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
 b) 6 d) 4,2 f) $3\sqrt{2}$ h) $\sqrt{6} - 2$

7. Podaj długość okręgu o promieniu:

a) $\frac{1}{2}$ c) 3 e) π g) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 b) $\frac{5}{4}$ d) 111 f) $\sqrt{2}$ h) $1 + \sqrt{5}$

8. Oblicz obwód koła (odpowiedź podaj z dokładnością do 1 cm):

- a) o średnicy 10 cm,
 b) o promieniu 1 m.

9. Podaj promień koła o obwodzie:

a) 8π c) $\frac{5}{6}\pi$ e) $\frac{1}{2}$ g) π^2
 b) $1,2\pi$ d) 10 f) $4\sqrt{3}$ h) $\frac{2}{\pi}$

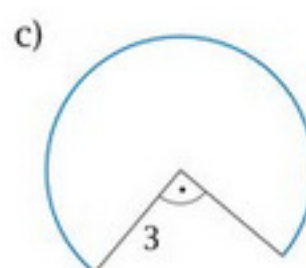
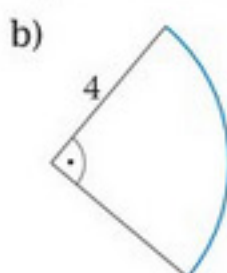
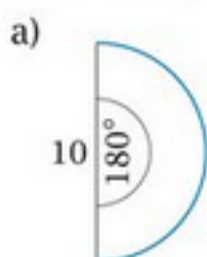
10. Podaj średnicę koła o obwodzie:

- | | | | |
|-------------|----------------------|------------------|-----------------|
| a) 3π | c) $\frac{4}{11}\pi$ | e) $\frac{2}{5}$ | g) $2\pi^2$ |
| b) $8,6\pi$ | d) 7 | f) $5\sqrt{2}$ | h) $\sqrt{\pi}$ |

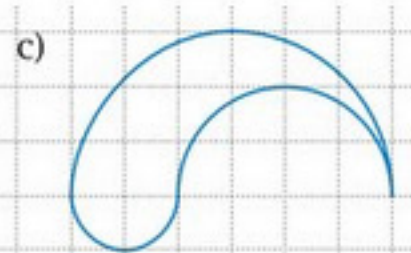
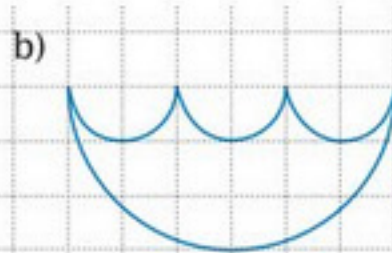
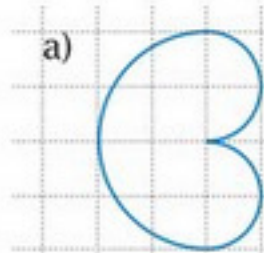
11. Ustal, jaki promień ma okrąg, którego długość jest równa obwodowi:

- trójkąta równobocznego o boku długości 6,
- rombu o boku długości $\frac{1}{2}\pi$,
- prostokąta o bokach długości 3 i π .

12. Oblicz długość zaznaczonego łuku okręgu.



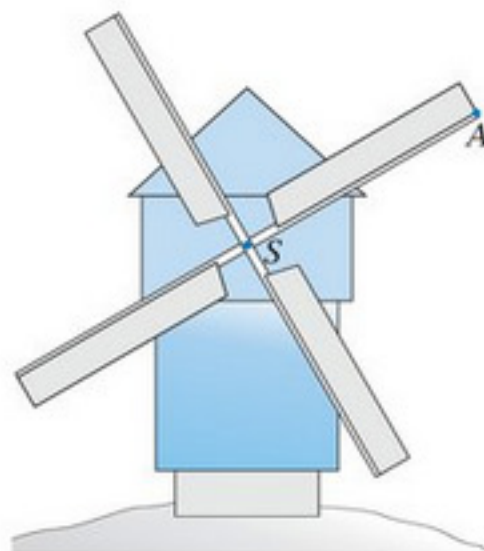
13. Znajdź promień okręgu, którego długość jest równa obwodowi narysowanej figury. Bok kratki ma długość 1.



Pomyśl

14. Wiatrak ma skrzydła długości 4 m.

- Jaką drogę pokona punkt A w czasie jednego obrotu skrzydeł?
- W jakiej odległości od punktu S znajduje się na skrzydle wiatraka punkt, który pokonuje w ciągu jednego obrotu drogę 22 m?



15. Wskazówki minutowa i godzinowa pewnego zegara mają długości odpowiednio 4 cm i 3 cm. Oblicz długości dróg pokonanych przez końce tych wskazówek w ciągu 12 godzin.



16. Hania obeszła trawnik w kształcie koła, wykonując 30 kroków. Jaka jest średnica (w metrach) tego trawnika, jeżeli średnia długość kroku Hani wynosi 0,6 m?

17. Ustal, ile razy dłuższy jest okrąg o promieniu 5 od okręgu:

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| a) o średnicy 5, | c) o promieniu $\frac{1}{5}$, |
| b) o średnicy $\frac{1}{5}$, | d) o promieniu 1. |

18. Oblicz stosunek promieni okręgów, których obwody są równe:

- | | | |
|---------------------|------------|----------------------|
| a) 20π i 5π | b) 30 i 10 | c) $\frac{1}{4}$ i 4 |
|---------------------|------------|----------------------|

19. Czy z kartki o wymiarach $21\text{ cm} \times 30\text{ cm}$ można zrobić rulon, przez który przetoczy się piłka o średnicy 9 cm?

20. Jurij Gagarin, pierwszy kosmonauta, podczas swojego lotu wykonał jedno okrążenie po kołowej orbicie na wysokości 180 km nad powierzchnią Ziemi. Średnica Ziemi jest równa 12 740 km.

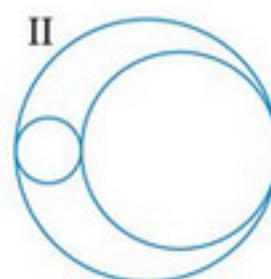
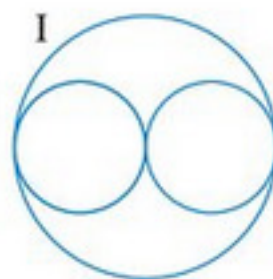
- Jaką drogę pokonał Gagarin, okrążając Ziemię? Wynik podaj w kilometrach.
- Ile razy droga przebyta przez Gagarina jest dłuższa od średnicy Ziemi?
- Statki kosmiczne krążące po orbicie Ziemi poruszają się z prędkością około 8 km/s. Ile czasu zajęło Gagarinowi okrążenie Ziemi?

***21.** Złotówka i grosz mają średnice równe odpowiednio 2,3 cm i 1,6 cm.

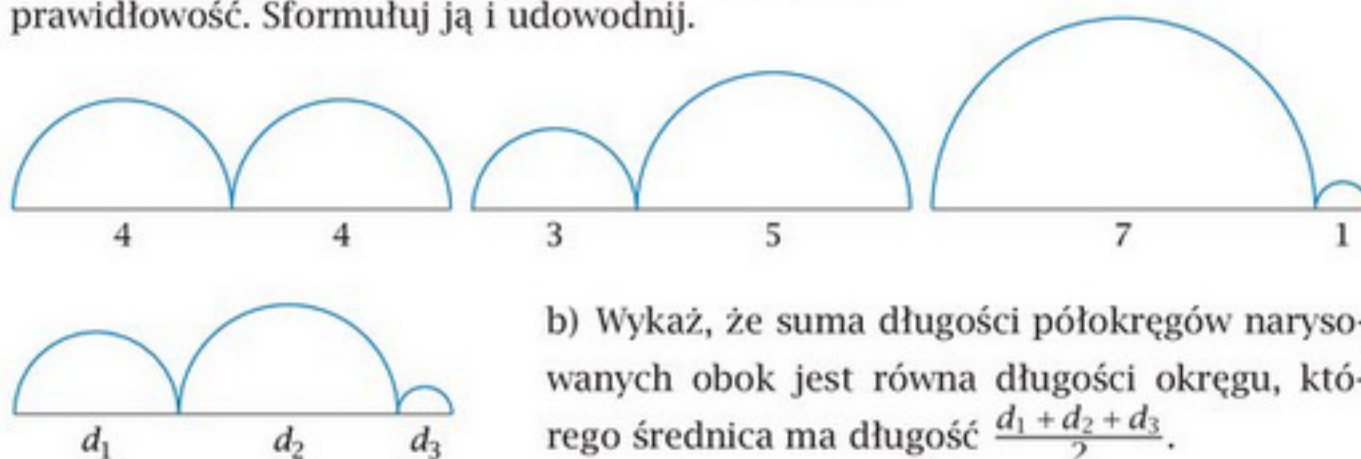
- Oblicz stosunek obwodów tych monet.
- Obie monety potoczono na drodze 36,8 cm. Jaki jest stosunek liczby obrotów wykonanych przez grosz do liczby obrotów złotówki?
- Grosz i złotówka potoczyły się w podróż dookoła świata. Jaki jest stosunek liczby obrotów wykonanych przez grosz do liczby obrotów złotówki podczas tej wyprawy? Załóż, że monety przebywają drogę równą długości równika.

***22.** a) Dwa mniejsze okręgi na rysunku I mają takie same promienie. Uzasadnij, że suma obwodów mniejszych okręgów jest równa obwodowi większego okręgu.

b) Mniejsze okręgi na rysunku II mają różne promienie. Czy suma obwodów mniejszych okręgów jest równa obwodowi większego okręgu? Uzasadnij odpowiedź.



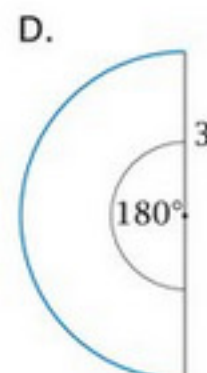
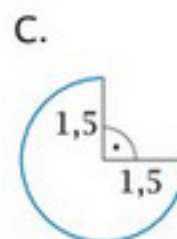
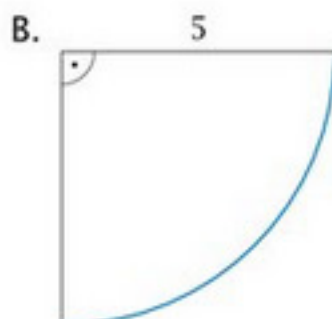
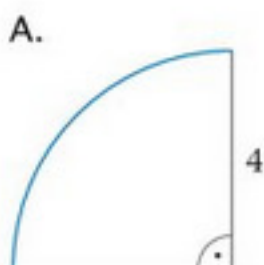
- *23. a) Oblicz sumę długości dwóch półokręgów w każdym z poniższych przykładów. Spróbuj ustalić jakąś prawidłowość. Sformułuj ją i udowodnij.



- b) Wykaż, że suma długości półokręgów narysowanych obok jest równa długości okręgu, którego średnica ma długość $\frac{d_1 + d_2 + d_3}{2}$.

Sprawdź się

- Czy podane nierówności są prawdziwe? Wskaż poprawne odpowiedzi.
 $\pi + 1 > 4$ TAK/NIE
 $\frac{2}{\pi} > \frac{2}{3}$ TAK/NIE
- Nienaciągnięta gumka recepturka ma kształt okręgu o średnicy 4 cm. Jeśli gumkę tę nałożymy na słoik o średnicy 10 cm, to zwiększy ona swoją długość o około:
 A. 13 cm C. 31 cm
 B. 19 cm D. 38 cm
- a) Jeśli promień okręgu zwiększy się 5 razy, to długość tego okręgu zwiększy się:
 A. 5 razy C. o 10
 B. 5π razy D. o 105π
 b) Jeśli promień okręgu zwiększy się o 5, to długość tego okręgu zwiększy się:
 A. 5 razy C. o 10
 B. 5π razy D. o 10π
- Który z łuków okręgów przedstawionych na rysunkach jest najdłuższy?



4 Pole koła

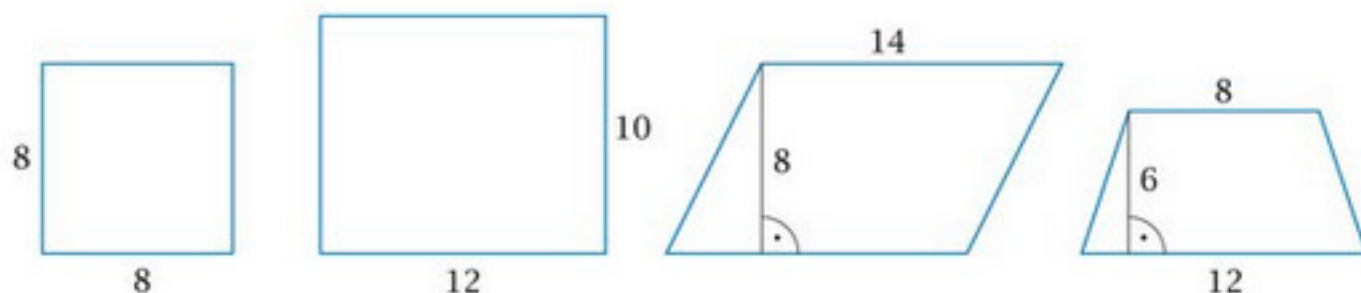
Przypomnij sobie

1. Podaj wynik działania $\pi \cdot 10^4$ zaokrąglony do: a) setek, b) jednostki.
2. Oblicz długość okręgu: a) o promieniu 2 m, b) o średnicy π m.
3. Oblicz długość średnicy koła o obwodzie: a) 12π cm, b) 30 mm.

Poćwicz

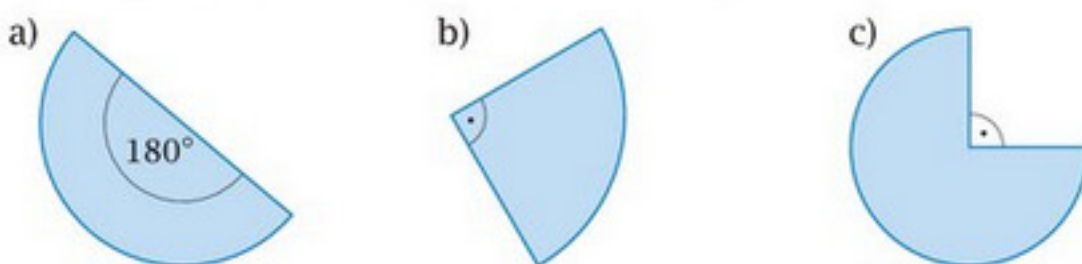
4. Ustal, jakie pole ma koło o promieniu:
a) 7 c) $1\frac{2}{3}$ e) 1,2 g) $\sqrt{6}$
b) $\frac{3}{5}$ d) 0,4 f) $\frac{1}{2}\pi$ h) $5\sqrt{2}$
5. Oblicz, jakie pole ma koło o średnicy:
a) 8 c) $\frac{2}{3}$ e) 2π g) $\sqrt{5}$
b) 5 d) $\frac{1}{6}$ f) $4\sqrt{3}$ h) $\frac{2}{7}\sqrt{2}$
6. Oblicz pole koła:
a) o promieniu 2 m, b) o średnicy 80 cm.
Odpowiedź podaj z dokładnością do setek centymetrów kwadratowych.
7. Ustal, jaki promień ma koło o polu:
a) π c) $1,21\pi$ e) $\frac{1}{5}\pi$ g) 5
b) $\frac{1}{16}\pi$ d) 2π f) 4 h) $\frac{9}{\pi}$
8. Oblicz, jaką średnicę ma koło o polu:
a) 49π c) $0,09\pi$ e) $\frac{1}{3}\pi$ g) 3
b) $\frac{4}{25}\pi$ d) 7π f) 81 h) $\frac{100}{\pi}$
9. Oblicz, ile razy większe jest pole koła o promieniu 4 od pola koła:
a) o średnicy 4, b) o promieniu $\frac{1}{4}$, c) o promieniu 1.

10. Poniższe rysunki przedstawiają kształty i wymiary kartek papieru. Z każdej z nich wycięto największe możliwe koło.

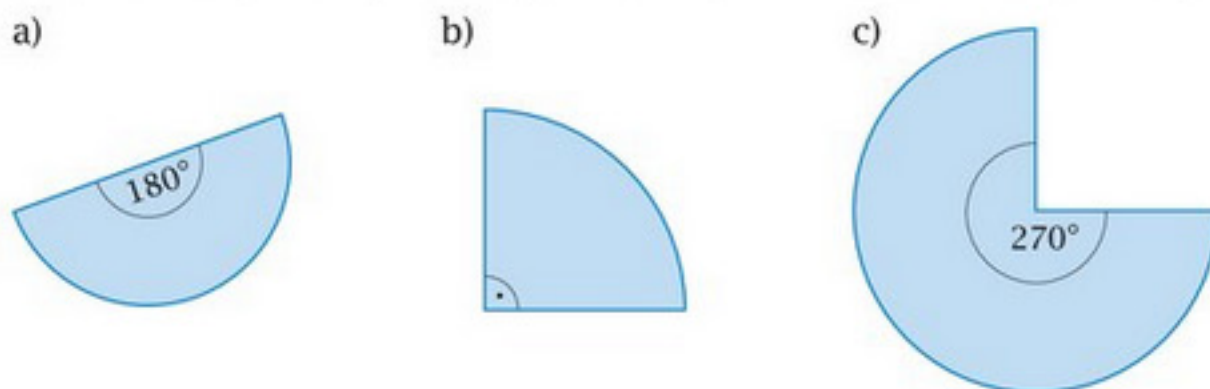


- a) Oblicz pola tych kół.
 *b) Jaki procent poszczególnych kartek stanowią ścinki?
 c) Oblicz promienie kół o polach równych polom narysowanych figur.
11. a) Oblicz pola i obwody kół o promieniach:
 $r_1 = 1 \text{ cm}$ $r_2 = 0,3 \text{ km}$ $r_3 = \frac{2}{3} \text{ mm}$ $r_4 = 2 \text{ dm}$
- b) Oblicz pola i obwody kół o średnicach:
 $d_1 = 1 \text{ km}$ $d_2 = 2,4 \text{ m}$ $d_3 = \frac{2}{7} \text{ cm}$ $d_4 = 7 \text{ dm}$
- c) Oblicz promienie okręgów o długościach:
 $l_1 = 6 \text{ dm}$ $l_2 = 3,2 \text{ mm}$ $l_3 = \pi \text{ km}$ $l_4 = 4\pi \text{ cm}$
- d) Oblicz średnice kół o polach:
 $P_1 = 1 \text{ cm}^2$ $P_2 = 3 \text{ ha}$ $P_3 = \pi \text{ dm}^2$ $P_4 = \frac{\pi}{2} \text{ mm}^2$

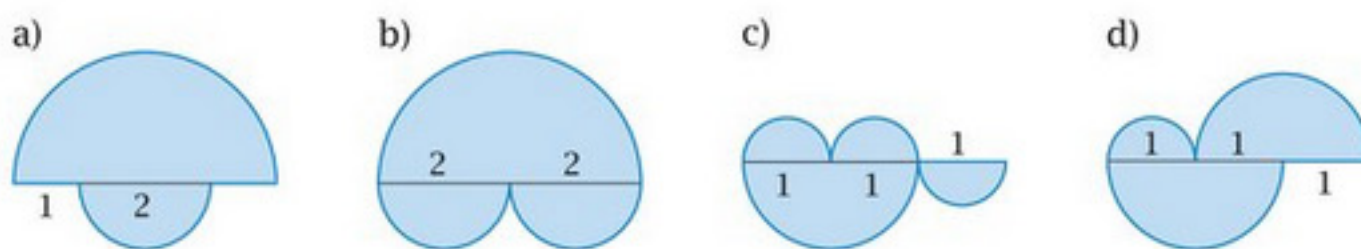
12. Oblicz, jaką częścią koła jest wycięty z niego wycinek przedstawiony na rysunku.



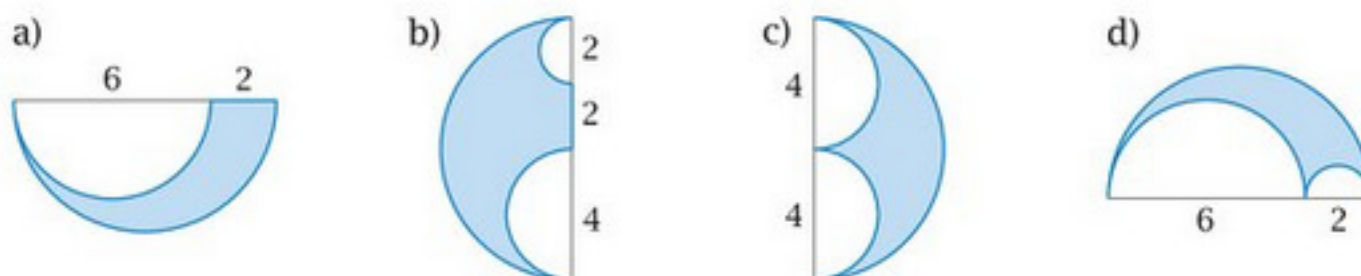
13. Narysowany wycinek jest wycięty z koła o promieniu 6. Oblicz pole tego wycinka.



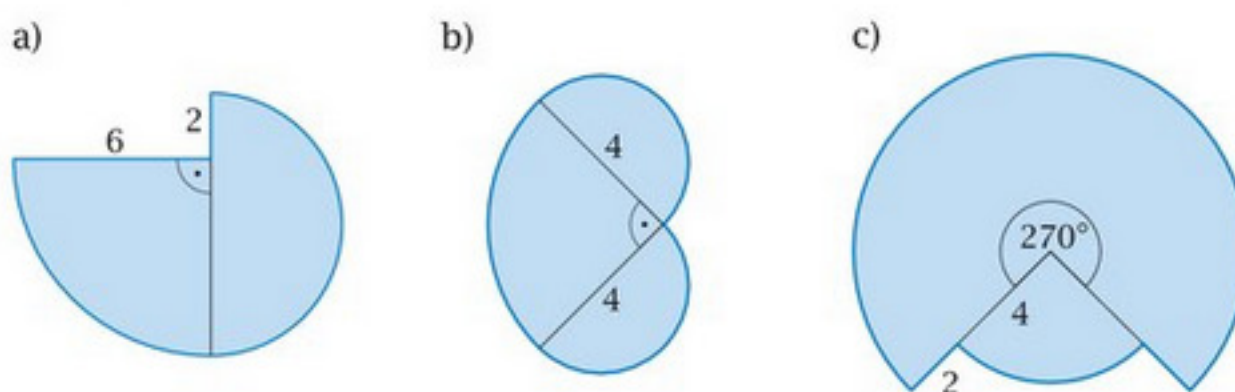
14. Oblicz pole i obwód zacieniowanej figury (wszystkie łuki to połowy okręgów).



15. Oblicz pole i obwód zacieniowanej figury (wszystkie łuki to połowy okręgów).

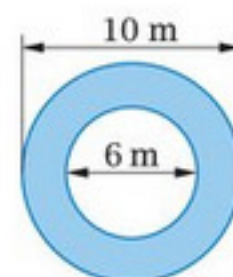


16. Oblicz pole i obwód figury przedstawionej na rysunku.

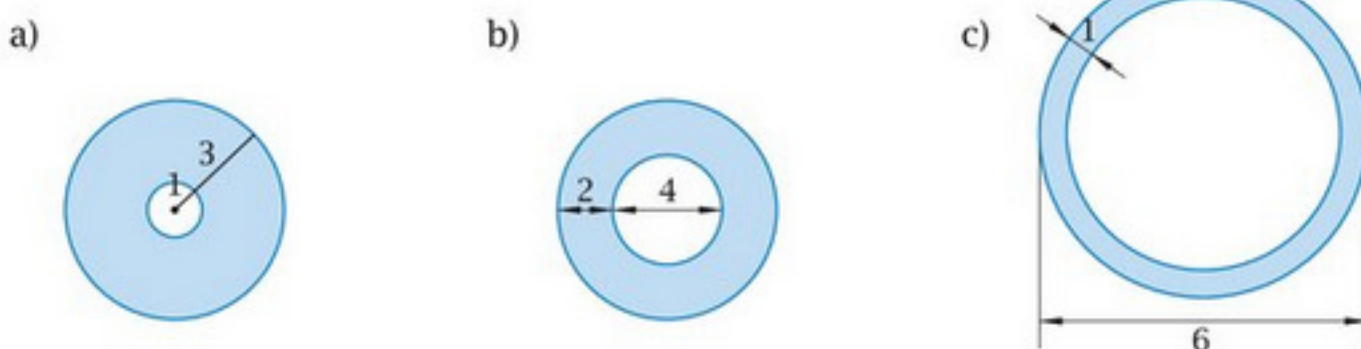


17. Na rysunku obok przedstawiono pierścień, którego zewnętrzna średnica ma 10 m, a wewnętrzna — 6 m. Oblicz pole i obwód tego pierścienia.

Uwaga. Obwód pierścienia to suma długości okręgów go wyznaczających.



18. Oblicz pole i obwód zacieniowanego pierścienia.



Pomyśl

19. Poniżej podano takie promienie dwóch kół, że ich suma jest równa 10. Oblicz sumę obwodów i sumę pól tych kół, a następnie porównaj wyniki ze wszystkich podpunktów.

a) $r_1 = 5 \text{ m}, r_2 = 5 \text{ m}$

c) $r_1 = 4 \text{ m}, r_2 = 6 \text{ m}$

b) $r_1 = 1 \text{ m}, r_2 = 9 \text{ m}$

d) $r_1 = 2 \text{ m}, r_2 = 8 \text{ m}$

20. Sznurek długości 12 m został rozcięty na dwa kawałki. Z każdego z kawałków utworzono okrąg. Oblicz sumę pól kół ograniczonych tymi okręgami, jeśli miały one długości:

a) 6 m i 6 m

b) 8 m i 4 m

c) 10 m i 2 m

21. Bulaj ma średnicę 40 cm. Ile bulajów wpuszcza tyle światła, co okno o wymiarach $125 \text{ cm} \times 90 \text{ cm}$?



22. Grubość przewodu elektrycznego określa się, podając pole jego przekroju.

a) Oblicz średnicę przewodu, którego pole przekroju wynosi $1,5 \text{ mm}^2$.

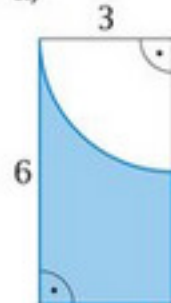
b) Ile razy średnica przewodu, którego pole przekroju jest równe 6 mm^2 , jest większa od średnicy przewodu o polu przekroju $1,5 \text{ mm}^2$?

23. Klomb w kształcie koła podzielono na trzy części w sposób przedstawiony na rysunku obok. Dla których kwiatów przeznaczono najmniejszą część klombu?

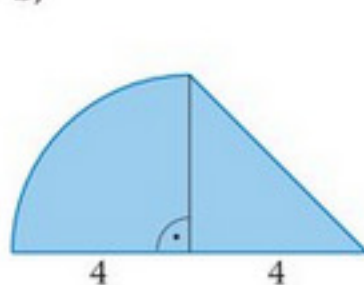


24. Zacięniowana figura jest ograniczona odcinkami i łukami okręgów. Oblicz pole tej figury.

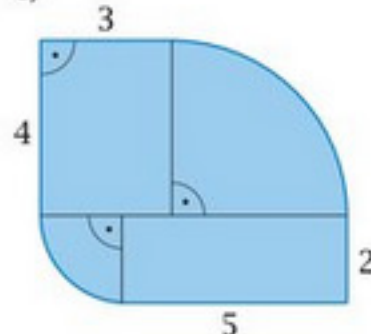
a)



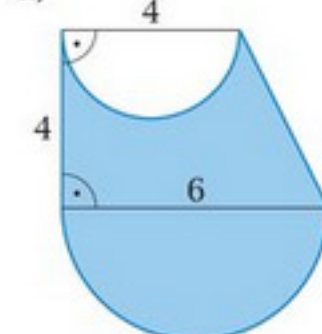
b)



c)

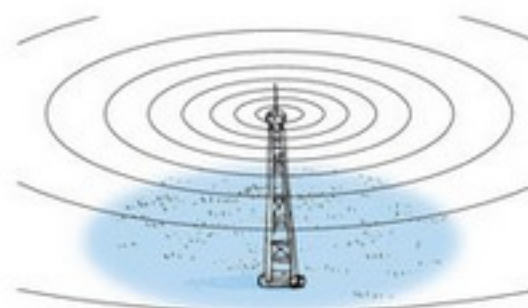


d)

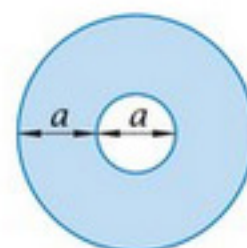


25. Sygnał radiowy dociera z nadajnika do odbiorników na obszarze o powierzchni 200 km^2 . Oblicz, w jakim promieniu od nadajnika można odebrać ten sygnał.

Uwaga. Sygnał radiowy rozchodzi się jednako we wszystkich kierunkach.

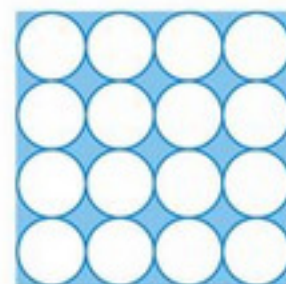
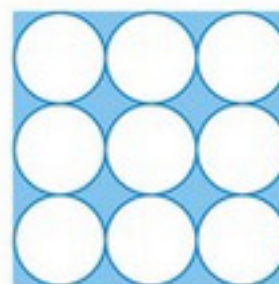
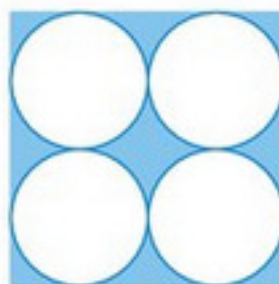
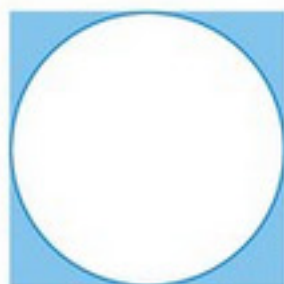


26. a) Tęczówka oka ma średnicę 12 mm. Jaką jej część zajmuje źrenica, której średnica jest równa 2 mm?
b) Ile razy zwiększy się powierzchnia źrenicy, gdy jej średnica wzrośnie od 2 mm do 6 mm?

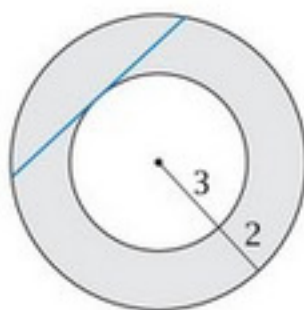


27. Jaką część dużego koła zajmuje pierścień przedstawiony na rysunku?

- *28. Z kwadratowych arkuszy papieru o boku 1 m wycięto koła, jak pokazano na rysunkach poniżej. Oblicz sumę pól kół w każdym z tych przykładów. Spróbuj zauważyć jakąś prawidłowość. Sformułuj ją i uzasadnij.



- *29. Z dużego koła o promieniu r wycięto małe koło tak, że powstały pierścień ma pole równe połowie pola dużego koła. Jaki promień ma małe koło?



- *30. Na rysunku przedstawiono pierścień kołowy i najdłuższy możliwy odcinek w nim zawarty.

a) Oblicz długość tego odcinka.

b) Co jest większe: pole pierścienia czy pole kwadratu, którego bokiem jest ten odcinek? Odpowiedź uzasadnij.

Sprawdź się

1. Jaki jest obwód koła o polu równym 5π ?

A. 5 B. $2,5\pi$ C. 10π D. $2\sqrt{5}\pi$

2. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

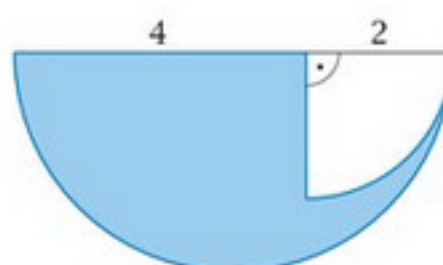
Pole prostokąta o bokach długości 3 cm i 4 cm jest mniejsze od pola koła o promieniu 2 cm.	P	F
Pole kwadratu o boku długości 9π cm jest większe od pola koła o promieniu 5π cm.	P	F

3. Wskaż promień koła o polu równym różnicy pól kół o promieniach 7 cm i 3 cm.

A. 2 cm B. 4 cm C. $2\sqrt{10}$ cm D. 2π cm

4. Pole zacieniowanej figury jest równe:

A. 7π C. $3,5\pi$
B. 6π D. $2,5\pi$



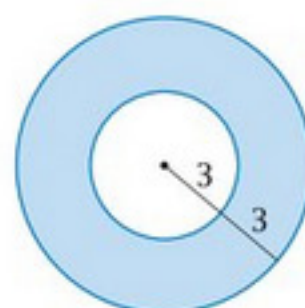
5. Dokończ poniższe zdania dotyczące pierścienia narysowanego obok. Wybierz odpowiedzi spośród A i B oraz spośród C i D.

Pole pierścienia jest równe:

A. 27π B. 45π

Obwód pierścienia jest równy:

C. 18π D. 28π



5 Zadania testowe

1. Prosta k jest styczna do dwóch okręgów o różnych promieniach. Środki tych okręgów i punkty styczności okręgów z prostą k są wierzchołkami czworokąta. Odpowiedz na pytania. Wybierz poprawne odpowiedzi.

Czy ten czworokąt może być trapezem prostokątnym? TAK/NIE

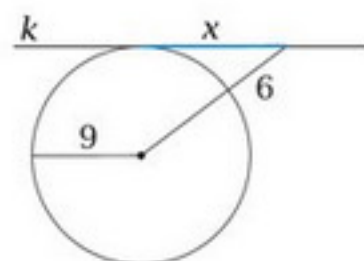
Czy ten czworokąt może być trapezem nieprostokątnym? TAK/NIE

2. Kąt między dwiema stycznymi do okręgu ma miarę 20° . Kąt między promieniami tego okręgu poprowadzonymi do obu punktów styczności ma miarę:

A. 20° B. 90° C. 120° D. 160°

3. Narysowana prosta k jest styczna do okręgu. Długość odcinka x , którego jeden koniec jest punktem styczności prostej i okręgu, wynosi:

A. 6 B. $9\sqrt{3}$ C. 12 D. $3\sqrt{34}$



4. Odpowiedz na pytanie. Wybierz odpowiedź TAK lub NIE oraz jej uzasadnienie A, B, C lub D.

Prosta a jest styczna do okręgu o środku O w punkcie A , a prosta b jest styczna do tego okręgu w punkcie B . Proste te przecinają się w punkcie P . Kąt AOB czworokąta $AOBP$ jest ostry. Czy ten czworokąt ma kąt rozwarty?

TAK,	ponieważ	A.	$\sphericalangle AOB + \sphericalangle APB = 180^\circ$
		B.	czworokąt $AOBP$ jest równoległobokiem.
NIE,		C.	odcinki AB i OP są prostopadłe.
		D.	przekątne czworokąta $AOBP$ mają równe długości.

5. Okręgi o środkach w punktach A i B ($AB = 18$ cm) i o promieniach 7 cm i 8 cm są rozłączne. Najmniejszy okrąg styczny do obu tych okręgów ma promień:

A. 1 cm B. 1,5 cm C. 3 cm D. 7 cm

6. Środki okręgów o promieniach r i R są odległe od siebie o 20 cm. Sprawdź, czy te okręgi są rozłączne. Wskaż poprawne odpowiedzi.

$r = 1,3$ cm oraz $R = 13,7$ cm TAK/NIE

$r = 23,5$ cm oraz $R = 2,2$ cm TAK/NIE

$r = \frac{2}{3}$ cm oraz $R = 21$ cm TAK/NIE

7. Jeden okrąg ma środek w punkcie $(-3, -1)$ i promień 3, a drugi ma środek w punkcie $(3, 2)$ i promień 9. Okręgi te:

A. są rozłączne C. są styczne wewnętrznie
B. są styczne zewnętrznie D. przecinają się

8. Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

Na osi liczbowej odległość między liczbą π a liczbą 2 jest mniejsza niż odległość między liczbą π a liczbą 4,5.	P	F
Tylko 6 liczb całkowitych jest jednocześnie mniejszych od liczby π i większych od liczby $-\pi$.	P	F

9. Różnica między długością okręgu o promieniu r km a obwodem koła o promieniu o 3 m mniejszym jest równa:
- A. 3 m B. 3π km C. 6π m D. odpowiedź zależy od wartości r
10. Okrąg o długości 15π ma promień równy:
- A. 30 B. 15 C. 7,5 D. 2π
11. Cztero dzieci zmierzyło obwody i średnice przedmiotów, których brzegi mają kształt okręgu. Następnie dzieci obliczyły przybliżoną wartość liczby π . Które z nich otrzymało najdokładniejszy wynik?
- A. Michał B. Ela C. Asia D. Kuba



średnica = 18 cm
obwód = 55 cm



średnica = 8 cm
obwód = 25 cm

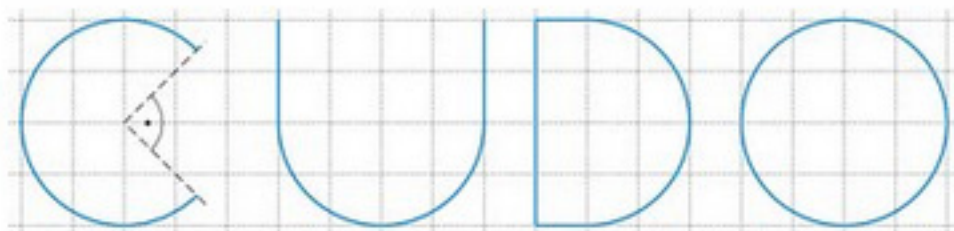


średnica = 24 cm
obwód = 77 cm



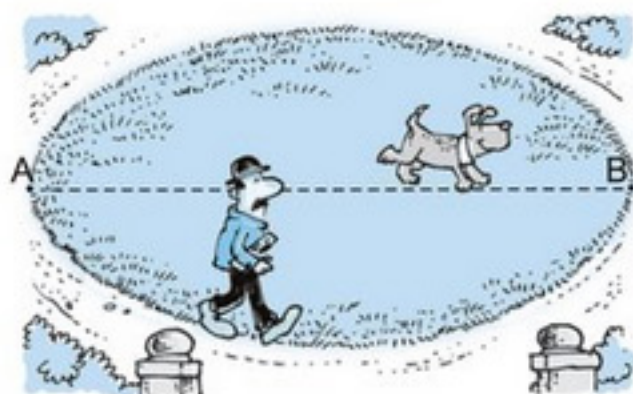
średnica = 2 cm
obwód = 6 cm

12. Obwód głowy pana Anatola wynosi 58 cm. Zrobiony dla niego kapelusz powinien mieć średnicę:
- A. około 9,2 cm B. około 12 cm C. około 29 cm D. około 18,5 cm
13. Którą z liter napisa-
no najkrótszą linią?
- A. C C. D
B. U D. O



14. Wybierz poprawne dokończenia zdań spośród A i B oraz spośród C i D.
- Koło o promieniu 1 ma pole równe: A. π B. $\frac{1}{\pi^2}$
- Koło o obwodzie 1 ma promień długości: C. π D. $\frac{1}{2\pi}$
15. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

Koło o obwodzie równym 2π ma pole równe π .	P	F
Koło o polu równym $\frac{1}{\pi}$ ma obwód równy 2.	P	F



16. Pies przebiegł kolisty trawnik z punktu A do punktu B wzdłuż średnicy. Jego właściciel doszedł z punktu A do punktu B wokół trawnika. Promień trawnika wynosi 12 m. O ile droga pokonana przez właściciela była dłuższa od drogi jego psa?

- A. o ok. 63,3 m C. o ok. 13,7 m
B. o ok. 27,4 m D. o ok. 6,85 m

17. Odpowiedz na pytanie. Wybierz odpowiedź TAK lub NIE oraz jej uzasadnienie spośród A, B lub C.

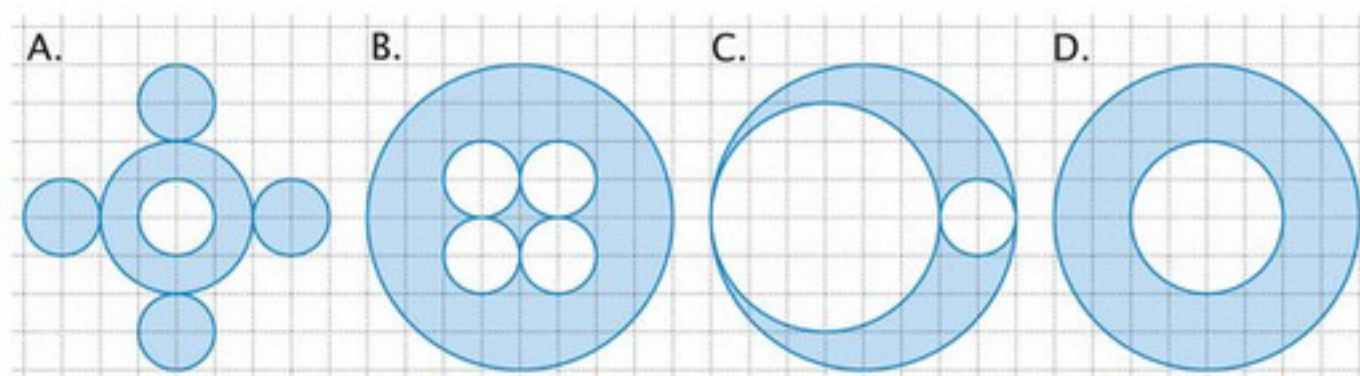
Czy możliwe jest, by koło o promieniu 10 i kwadrat o boku a miały równe pola?

TAK,	ponieważ	A.	we wzorze na pole kwadratu nie występuje liczba π .
		B.	jednym z rozwiązań równanie $a^2 = 100\pi$ jest liczba dodatnia.
NIE,		C.	koło i kwadrat mogą mieć jednakowe obwody

18. Koło o obwodzie 8 m ma pole równe:

- A. 8 m^2 B. $64\pi \text{ m}^2$ C. 16 m^2 D. $\frac{16}{\pi} \text{ m}^2$

19. Przyjmijmy, że pole jednej kratki jest równe 1. Na którym rysunku zacięniowana figura ma najmniejsze pole?



20. Klomb ma kształt koła o średnicy 8 m. Pole powierzchni ścieżki o szerokości 2 m biegnącej wokół tego klombu jest równe:

- A. $4\pi \text{ m}^2$ B. $9\pi \text{ m}^2$ C. $20\pi \text{ m}^2$ D. $36\pi \text{ m}^2$

21. Otwór o średnicy 5 mm powiększono wiertłem o średnicy 10 mm. Powierzchnia tego otworu zwiększyła się:

- A. o $75\pi \text{ mm}^2$ B. 2 razy C. o $18\frac{3}{4}\pi \text{ mm}^2$ D. π razy

1 Ile jest możliwości?

Przypomnij sobie

1. Kod składa się z dwóch liter: pierwsza jest literą grecką α lub β , a druga — łacińską x , y lub z . Ile takich kodów można utworzyć? Wypisz je.
2. Rzucamy złotówką i dwuzłotówką. Każda z nich może upaść orłem (O) lub reszką (R) do góry. Na ile sposobów mogą upaść te dwie monety? Wymień te sposoby.
3. Z cyfr 1, 2 i 3 układamy liczby dwucyfrowe (cyfry mogą się powtarzać). Ile jest takich liczb? Wymień je.

Poćwicz

4. a) Kod składa się z dwóch znaków. Pierwszym jest jedna z liter: A, B, C, D, E lub F, a drugim — dowolna cyfra. Ile różnych kodów można w ten sposób utworzyć?
b) W pierogarni można dostać pierogi z trzech rodzajów ciasta i z piętnastoma rodzajami nadzienia. Ile różnych pierogów można tam zjeść?
c) Pewien producent scyzoryków oferuje cztery wielkości scyzoryków, a dla każdej wielkości osiem różnych zestawów ostrzy. Ile różnych modeli scyzoryków oferuje ten producent?
5. a) Kod ma się składać z dwóch liter wybranych spośród: A, B, C, D, E, F. Litery nie mogą się powtarzać. Ile takich kodów można utworzyć?
b) Na półmisku leżą: jabłko, gruszka, śliwka, pomarańcza i brzoskwinia. Na ile sposobów można dwóm osobom dać po jednym owocu z tego półmiska?
c) Z grupy 20 osób chcemy losowo wybrać dwie, które dostaną bilet do kina lub bilet do teatru. Ile jest możliwości wybrania tych dwóch osób?
6. a) Kod składa się z dwóch liter wybranych spośród: V, W, X, Y, Z. Litery mogą się powtarzać. Ile takich kodów można utworzyć?
b) Mamy siedem różnych pudełek. Chcemy do nich schować ołówki i długopis. Mogą one trafić do różnych pudełek lub do tego samego pudełka. Na ile sposobów można schować te przedmioty?

7. Dwie monety: srebrna i złota mają trafić w sposób losowy do dwóch osób z grupy liczącej 30 osób. Najpierw przekazywana jest srebrna moneta, a potem złota. Osoba, która otrzyma srebrną monetę, bierze też udział w losowaniu złotej monety. Ile jest możliwości wylosowania szczęśliwców?
8. W pudełku znajduje się dziewięć kul ponumerowanych liczbami od 1 do 9.
- a) Z pudełka losujemy jedną kulę. Zapisujemy jej numer na kartce i wrzucamy kulę z powrotem do pudełka. Następnie losujemy drugą kulę i zapisujemy jej numer obok poprzedniego. Ile różnych liczb dwucyfrowych możemy w ten sposób otrzymać?
 - b) Z pudełka losujemy jedną kulę. Zapisujemy jej numer na kartce, ale kuli nie wrzucamy z powrotem do pudełka. Następnie losujemy drugą kulę i zapisujemy jej numer obok poprzedniego. Ile różnych liczb dwucyfrowych możemy w ten sposób otrzymać?

Pomyśl

9. Z cyfr: 1, 2, 3, 4 i 5 chcemy ułożyć liczbę dwucyfrową.
- a) Ile takich liczb można ułożyć, jeśli cyfry mogą się powtarzać?
 - b) Ile takich liczb można ułożyć, jeśli cyfry nie mogą się powtarzać?
 - c) Ile takich liczb nieparzystych można ułożyć, jeśli cyfry mogą się powtarzać?
 - d) Ile takich liczb parzystych można ułożyć, jeśli cyfry nie mogą się powtarzać?
- *10. Z cyfr: 1, 2, 3, 4 i 5 chcemy ułożyć liczbę trzycyfrową.
- a) Ile takich liczb można ułożyć, jeśli cyfry mogą się powtarzać?
 - b) Ile takich liczb można ułożyć, jeśli żadna z cyfr nie może się powtarzać?
 - c) Ile takich liczb podzielnych przez 5 można ułożyć, jeśli cyfry mogą się powtarzać?
 - d) Ile takich liczb parzystych można ułożyć, jeśli cyfry nie mogą się powtarzać?
- *11. a) Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie występuje dokładnie jedno zero?
b) Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie nie występuje zero?
12. Chorągiewkę złożoną z dwóch poziomych pasów należy pokolorować, każdy z pasów jednym kolorem.
- a) Na ile sposobów można tego dokonać, jeśli górny pas może być biały lub czerwony, a dolny — zielony, niebieski lub żółty?
 - b) Na ile sposobów można tego dokonać, jeśli mamy do dyspozycji pięć kolorów, ale pasy nie mogą mieć tego samego koloru?
 - c) Na ile sposobów można tego dokonać, jeśli mamy do dyspozycji pięć kolorów i pasy mogą mieć ten sam kolor?

- *13. Chorągiewkę złożoną z trzech poziomych pasów należy pokolorować, każdy z pasów jednym kolorem.
- Na ile sposobów można tego dokonać, jeśli mamy do dyspozycji pięć kolorów, ale żadne dwa pasy nie mogą mieć tego samego koloru?
 - Na ile sposobów można tego dokonać, jeśli mamy do dyspozycji pięć kolorów i sąsiednie pasy nie mogą mieć tego samego koloru?
14. a) Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry: zieloną i czerwoną. Wynikiem takiego rzutu niech będzie para liczb oczek, jakie wypadną na kostkach. Ile jest możliwych wyników takiego rzutu? Ile wśród nich jest takich, w których suma oczek jest równa 8?
- b) Rzucamy kostką sześcienną (na jej ściankach są umieszczone liczby: 1, 2, 3, 4, 5 i 6) i kostką czworosieczną (na jej czterech ścianach są umieszczone liczby: 1, 2, 3 i 4). Wynikiem takiego rzutu niech będzie para liczb, jakie wypadną na kostkach. Ile jest możliwych wyników takiego rzutu? Ile wśród nich jest takich, w których suma otrzymanych liczb jest równa 8?
15. Na szachownicy są 64 pola. Chcemy na niej umieścić dwa pionki: biały i czarny.
- Na ile sposobów możemy to zrobić, jeśli pionki mają się znaleźć na różnych polach?
 - Na ile sposobów możemy to zrobić, jeśli pionki mogą się znaleźć na tym samym polu?

Sprawdź się

1. Ola ma 12 kredek w różnych kolorach. Chce napisać swoje imię i nazwisko dwoma kolorami. Ile ma możliwości wyboru kolorów?
- A. 144 B. 132 C. 24 D. 23
2. Poniżej przedstawiono oferty dwóch kawiarni.

Kawiarnia Mocna

Proponujemy 30 gatunków kawy!
Możesz ją mieć bez dodatków albo
z jednym z pięciu syropów smakowych!

Kawiarnia Aromatyczna

Oferujemy 26 gatunków kawy!
Dostaniesz ją bez dodatków albo
z jednym z sześciu syropów smakowych!

Wybierz odpowiedzi spośród A i B oraz spośród C i D.

Kawiarnia, w której klient ma większy wybór, to:

A. Kawiarnia Mocna B. Kawiarnia Aromatyczna

Oferta jednej z tych kawiarni jest większa od oferty drugiej kawiarni o:

C. 2 możliwości wyboru D. 3 możliwości wyboru

3. W pudełku znajduje się sześć żetonów ponumerowanych liczbami od 1 do 6. Losujemy żeton z pudełka, zapisujemy wylosowaną liczbę, wkładamy go z powrotem do pudełka, losujemy żeton po raz drugi i zapisujemy wylosowaną liczbę. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

Jest 30 możliwości zapisania różnych liczb.	P	F
Jest 5 możliwości zapisania liczb, których suma będzie równa 6.	P	F
Liczba możliwych par liczb jest równa liczbie możliwych wyników rzutu dwiema kostkami sześciennymi.	P	F

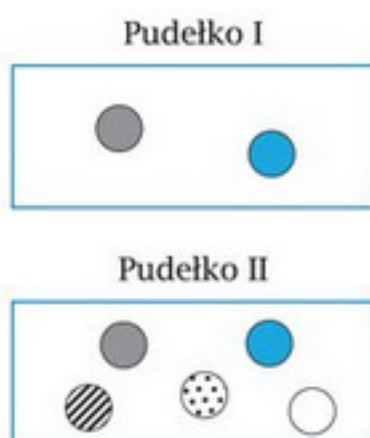
2 Obliczanie prawdopodobieństw (cd.)

Przypomnij sobie

- Wybieramy losowo jedną z dodatnich liczb całkowitych mniejszych od 30. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że tą liczbą jest:
 - liczba jednocyfrowa,
 - liczba dwucyfrowa,
 - liczba podzielna przez 7,
 - liczba, w której zapisie nie występuje 1.
- W jednym pudełku znajdują się dwie małe kulki: czerwona i zielona, a w drugim — trzy większe kulki: czerwona, zielona i niebieska. Z każdego pudełka losujemy po jednej kulce. Ile różnych par kulek można wylosować? Ile z nich składa się z kulek w tym samym kolorze? Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kulek w tym samym kolorze?
- Wynikiem rzutu dwiema kostkami sześciennymi jest para liczb oczek, jakie wypadły na kostkach. Ile jest możliwych wyników takiego rzutu? Ile z nich daje sumę równą 6? Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma oczek na obu kostkach będzie równa 6?

Poćwicz

- Roztargniony kucharz dodał tylko jedną z trzech przypraw: sól, cukier albo pieprz do jednej z czterech zup: do rosółu, kapuśniaku, grochówki albo barszczu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że kucharz:
 - posłodził rosół,
 - posolił lub posłodził kapuśniak lub barszcz,
 - nie dodał pieprzu do grochówki,
 - nie dodał soli ani do kapuśniaku, ani do barszczu.



5. W dwóch pudełkach znajdują się takie żetony, jak pokazano na rysunku. Z każdego z pudełek wybieramy po jednym żetonie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- oba wylosowane żetony są szare,
- z pudełka I wylosowano żeton szary, a z pudełka II — niebieski lub w paski,
- oba wylosowane żetony są takie same,
- wylosowane żetony są różne.

6. Na jednej półce sklepowej leżą 3 swetry w rozmiarach: S, M i L, a na drugiej cztery koszulki w rozmiarach: S, M, L i XL. Losowo bierzemy jeden sweter i jedną koszulkę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- zarówno sweter, jak i koszulka są w rozmiarze S,
- sweter i koszulka mają ten sam rozmiar,
- koszulka ma rozmiar XL, a sweter — S lub L,
- sweter i koszulka mają różne rozmiary.

7. W torebce są cztery cukierki o różnych smakach: miętowy, truskawkowy, malinowy i cytrynowy. Maciek i Marysia losowo wybierają po jednym cukierku. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- Maciek wyciągnie z torebki cukierek miętowy, a Marysia — malinowy,
- wyciągnięte cukierki będą miały smaki truskawkowy i cytrynowy,
- jedno z nich wyciągnie cukierek cytrynowy,
- żadne z nich nie wylosuje cukierka truskawkowego.



8. Spośród liter wyrazu POMIDOR losowo wybrano dwie i ustawiono obok siebie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ten sposób otrzymano:

- PI, b) IP, c) DR, d) OM.

9. W worku znajduje się dziesięć kul ponumerowanych kolejnymi liczbami naturalnymi od 0 do 9. Z worka losujemy kolejno dwie kule i nie wrzucamy ich z powrotem do worka. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- na jednej z kul będzie liczba 0,
- na obu kulach będą liczby nieparzyste,
- suma liczb na wylosowanych kulach będzie parzysta,
- iloczyn liczb na wylosowanych kulach będzie większy od 10.

Pomyśl

10. Kamila i Natalia tworzą liczby dwucyfrowe w taki sposób, że losowo wybierają cyfry spośród: $1, 2, 3, \dots, 9$. Pierwsza wylosowana cyfra to cyfra dziesiątek, a druga to cyfra jedności. Kamila przyjęła zasadę, że pierwsza wylosowana cyfra nie bierze udziału w losowaniu drugiej cyfry. Natalia każdą z cyfr losuje spośród ustalonego na początku zestawu 9 cyfr. Dla każdej z dziewcząt oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że utworzona przez nią liczba będzie:
- mniejsza od 20,
 - parzysta,
 - zbudowana z samych jedynek, z samych dwójek lub z jedynki i dwójki,
 - podzielna przez 11.
11. Filip i Kalina chcą pomalować obrazek przedstawiony poniżej. Filip chce użyć dwóch kolorów: jednym kolorem chce pomalować koło, a innym tło, czyli pozostałą część kwadratu. Kalina dopuszcza możliwość zamalowania obu elementów obrazka tym samym kolorem. Kolory wybierają losowo spośród: czerwonego, niebieskiego, zielonego, fioletowego i żółtego. Dla każdego z dzieci oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
- koło zostanie pomalowane na żółto, a tło na czerwono,
 - do pomalowania użyte będą kolory niebieski i czerwony,
 - tło pomalowane zostanie na zielono, a koło — na czerwono, niebiesko lub żółto,
 - nie zostanie użyty kolor fioletowy.
- 
12. Romek i Tomek wybierają losowo po jednej monecie z tych, które mają w kieszeni. Każdy z nich ma po jednej monecie 10-groszowej, 20-groszowej, 50-groszowej i jednozłotowej.
- Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wylosowane przez nich monety dadzą łącznie kwotę co najmniej 1 zł?
 - Chłopcy dołożyli do kieszeni po jednej monecie: Romek — 20-groszówkę, a Tomek — 50-groszówkę. Jakie jest teraz prawdopodobieństwo tego, że gdy wylosują po jednej monecie, uzbierają kwotę co najmniej 1 zł?
13. Spośród 5 różnych książek w języku angielskim i 6 różnych książek w języku polskim wybieramy dwie i układamy je obok siebie na półce. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
- pierwsza książka na półce będzie w języku angielskim, a druga — w języku polskim,
 - pierwsza książka na półce będzie w języku polskim, a druga — w języku angielskim,
 - obie książki na półce będą w języku angielskim,
 - obie książki na półce będą w języku polskim.

CZY POTRAFISZ TAŃCZYĆ WALCA?

	Tak	Nie
dziewczeta	10	5
chłopcy	3	9

14. Uczniów pewnej klasy zapytano, czy potrafią tańczyć walca. Odpowiedzi przedstawiono w tabeli obok. Z dwojga uczniów tej klasy utworzono parę, losowo wybierając chłopca i dziewczynę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- żadna z osób tworzących parę nie potrafi tańczyć walca,
- obie osoby tworzące parę potrafią tańczyć walca,
- tylko dziewczyna w parze potrafi tańczyć walca.

***15.** Agnieszka piekła ciastka w kształcie gwiazdek i kół. Część ozdabiała lukrem, a część — czekoladą. Liczby ciastek upieczonych przez Agnieszkę przedstawiono w tabeli obok. Spośród tych ciastek wybrano dwa. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

	z lukrem	z czekoladą
gwiazdki	20	30
koła	40	10

- oba ciastka miały kształt gwiazdki,
- pierwsze z ciastek miało kształt gwiazdki, a drugie koła,
- oba ciastka były ozdobione lukrem,
- oba ciastka miały kształt gwiazdki i były ozdobione czekoladą.

***16.** a) Krzys ma dwadzieścia różnych par skarpet. W żadnej z par nie ma różnicy między skarpetami, obie pasują na obie stopy. Krzys zakłada na każdą stopę po jednej losowo wybranej skarpecie. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że założył skarpety z jednej pary?

b) Wiktoria ma dziesięć różnych par rękawiczek. W każdej parze rękawiczki na lewą i prawą dłoń różnią się i każdą można założyć tylko na jedną z dłoni. Wiktoria zakłada na każdą dłoń po jednej losowo wybranej rękawiczce. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że założy rękawiczki z jednej pary?



c) Klaudia ma sześć różnych szalików. Codziennie losowo wybiera jeden z nich. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przez dwa dni będzie nosiła ten sam szalik?

Sprawdź się

1. W sposób losowy tworzymy kod złożony z jednej litery wybranej spośród: A, B, C, D i E i następującej po literze jednej cyfry wybranej spośród: 1, 2, 3 i 4. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że utworzony kod będzie zawierał jeden ze znaków A lub 1, lub oba te znaki?

- A. $\frac{3}{20}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{8}{9}$

2. Grzegorz i Alicja chcą kupić po jednej gałce lodów. Grzegorz wybierze smak truskawkowy, waniliowy lub śmietankowy, Alicja oprócz tych trzech smaków bierze też pod uwagę lody czekoladowe. Wyboru dokonują losowo. Prawdopodobieństwo tego, że oboje wybiorą ten sam smak lodów jest równe:

A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{7}$ D. $\frac{4}{9}$

3. Spośród liter wyrazu AUTO losowo wybrano dwie i ustawiono je obok siebie. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

Prawdopodobieństwo tego, że w ten sposób otrzymano słowo TU, jest równe $\frac{1}{4}$.	P	F
Prawdopodobieństwo tego, że w ten sposób otrzymano parę liter, wśród których pierwszą jest A, jest równe $\frac{1}{2}$.	P	F
Prawdopodobieństwo tego, że w ten sposób otrzymano parę liter, wśród których nie ma litery T, jest równe $\frac{1}{2}$.	P	F

3 Zadania testowe

1. Sklep rowerowy w ramach promocji do każdego sprzedanego roweru dodawał darmowy zestaw złożony z jednego z trzech dzwonek i jednego z czterech bidonów. Teraz wybór powiększono do pięciu dzwonek i siedmiu bidonów. O ile więcej zestawów, w porównaniu do początku promocji, można teraz utworzyć?

A. o 5 B. o 13 C. o 23 D. o 35

2. W skład pewnej orkiestry kameralnej wchodzi 8 muzyków grających na skrzypcach i 3 — grających na wiolonczeli. Wybierz odpowiedzi spośród A i B oraz spośród C i D.

Ile różnych duetów złożonych z wiolonczelisty i skrzypka można utworzyć z muzyków tej orkiestry?

A. 11 B. 24

W tej samej filharmonii gra orkiestra symfoniczna, w skład której wchodzi 20 muzyków grających na skrzypcach i 10 na wiolonczeli. Ile różnych duetów złożonych z wiolonczelisty i skrzypka należących do tej samej orkiestry można stworzyć z muzyków obu tych orkiestr?

C. 224 D. 330

3. W biegu bierze udział 12 koni. Każdy z nich ma takie same szanse na wygranie wyścigu. Ile jest możliwości zajęcia dwóch pierwszych miejsc?

A. 12 B. 120 C. 132 D. 144

4. Hania i Henio zamówili zupę i grzanekę. Każde z nich posypuje swoją zupę i grzanekę dwiema różnymi przyprawami. Hania wybiera losowo z zestawu czterech przypraw, a Henio — z zestawu trzech przypraw. Ile razy liczba możliwości wyboru dwóch przypraw przez Hanię jest większa od liczby możliwości Henia?

A. $1\frac{1}{3}$ raza B. 2 razy C. 2,5 raza D. 3 razy

5. W worku znajdują się trzy kule oznaczone literami A, B i C. Z worka wyjmujemy losowo dwie kule. Przyjrzyj się przedstawionym poniżej tabelom.

TABELA I

Pierwsza wyciągnięta kula

		A	B	C
Druga wyciągnięta kula	A	—	BA	—
	B	AB	—	CB
	C	—	BC	—

TABELA II

Pierwsza wyciągnięta kula

		A	B	C
Druga wyciągnięta kula	A	AA	BA	—
	B	AB	—	CB
	C	—	BC	CC

TABELA III

Pierwsza wyciągnięta kula

		A	B	C
Druga wyciągnięta kula	A	AA	BA	CA
	B	AB	BB	CB
	C	AC	BC	CC

TABELA IV

Pierwsza wyciągnięta kula

		A	B	C
Druga wyciągnięta kula	A	—	BA	CA
	B	AB	—	CB
	C	AC	BC	—

- a) Która z tych tabel przedstawia wszystkie możliwości wyciągnięcia dwóch kul w przypadku, gdy pierwszą wyciągniętą kulę ponownie wkładamy do worka?
- b) Która z tych tabel przedstawia wszystkie możliwości wyciągnięcia dwóch kul w przypadku, gdy pierwszej wyciągniętej kuli nie wkładamy ponownie do worka?
6. Do salonu samochodowego, który oferuje 10 różnych modeli aut, weszło dwóch klientów. Każdy z nich wskazał na jeden model. Ile jest możliwych par wskazanych przez nich samochodów?
- A. 10 B. 20 C. 90 D. 100
7. Gitara ma sześć strun, a ukulele — tylko cztery. Chcemy uderzać po kolei dwie (niekoniecznie różne) losowo wybrane struny w jednym z tych instrumentów. Ile różnych par dźwięków możemy usłyszeć?
- A. 10 B. 42 C. 52 D. 100
8. Zenon i Zuzanna układają liczby dwucyfrowe — Zenon z cyfr: 1, 2, 3, 4, a Zuzanna z cyfr: 4, 5, 6, 7, 8, 9. O ile więcej możliwości ułożenia liczby ma Zuzanna?
- A. o dwie B. o dziesięć C. o dwadzieścia D. o dwadzieścia pięć

9. Tomek chce utworzyć szyfr. Każdą literę chce przedstawić jako parę kolorowych kwadratów, np. tak jak na rysunku obok (oba kwadraty mogą być pomalowane tym samym kolorem). Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

A = 

Za pomocą dwóch kolorów Tomek może zakodować 4 litery.	P	F
Do zakodowania 26 liter wystarczy 5 kolorów.	P	F
6 kolorów wystarczy do zakodowania 32 liter.	P	F

10. Michał ma w jednej kieszeni monety: 1 zł, 2 zł i 5 zł, a w drugiej: 20 gr, 50 gr, 1 zł, 2 zł i 5 zł. Z każdej kieszeni wyciąga po jednej monecie. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wyciągnięta kwota będzie większa od 2 zł?

A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{8}{15}$



11. Pewien bar oferuje 5 zup, w tym 3 wegetariańskie, i 6 drugich dań, w tym 4 wegetariańskie. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybierając jedną zupę i jedno drugie danie, trafimy na zestaw wegetariański?

A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{4}{15}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{11}{15}$

12. W misce jest 10 żelków, każdy w innym smaku. Jeden z nich jest pomarańczowy. Jacek i Wacek wybierają z miski po jednym żelku. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wśród wybranych przez nich żelków żaden nie będzie pomarańczowy?

A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{9}{10}$ C. $\frac{89}{90}$ D. $\frac{49}{100}$

13. Książka ma 120 stron. Wiktoria dwukrotnie losowo wybiera stronę z tej książki. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dwukrotnie trafi na tę samą stronę?

A. $\frac{1}{240}$ B. $\frac{1}{120}$ C. $\frac{1}{60}$ D. $\frac{1}{2}$

14. Trzy kina wyświetlają ten sam film, każde oferuje w sobotę cztery seanse w różnych godzinach.

Wybierz odpowiedzi spośród A i B oraz spośród C i D.

Osoba wybierająca się w sobotę na ten film ma do wyboru:

A. 7 seansów B. 12 seansów

Ola i Olek, niezależnie od siebie, kupili bilety na sobotni seans na ten film. Prawdopodobieństwo tego, że nie wybiorą tego samego seansu, jest równe:

C. $\frac{11}{12}$ D. $\frac{121}{144}$

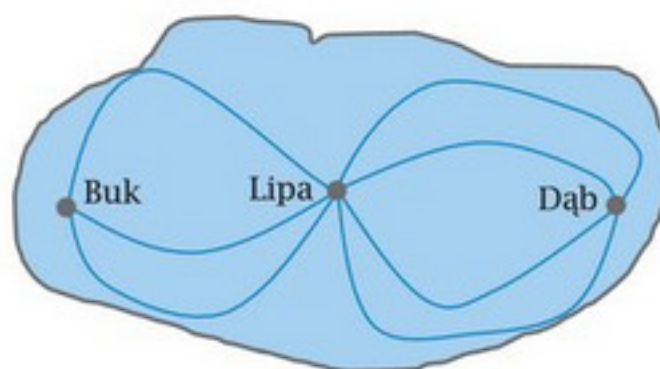
15. Pani Jadwiga ma pięć kotów, wśród nich jednego białego i jednego czarnego. Jeden z jej kotów siedzi na płocie, a inny na dachu. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że tymi kotami są biały i czarny?

A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{7}$ D. $\frac{1}{10}$

16. Policja znalazła na klamce i na telefonie po jednym odcisku palca tej samej osoby. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.

Prawdopodobieństwo tego, że oba ślady są odciskami palców lewej ręki, jest równe $\frac{1}{4}$.	P	F
Prawdopodobieństwo tego, że oba ślady są odciskami tego samego palca, jest równe $\frac{1}{5}$.	P	F
Prawdopodobieństwo tego, że oba ślady są odciskami wskazującego palca (niekoniecznie tego samego), jest równe $\frac{1}{50}$.	P	F

17. Na rysunku obok przedstawiono plan ścieżek w pewnym parku. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F — jeśli jest fałszywe.



Drogę od buka do dębu można pokonać na 12 różnych sposobów.	P	F
Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybierając drogi, ktoś idący od buka do lipy wybierze w drodze powrotnej tę samą drogę, którą przyszedł, jest równe $\frac{1}{3}$.	P	F
Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybierając drogi, ktoś idący od buka do dębu wybierze w drodze powrotnej tę samą drogę, którą przyszedł, jest równe $\frac{1}{4}$.	P	F

Liczby i działania

1. System rzymski (s. 7–9): 1. IV, VI, VIII, X 2. a) 50, 100, 500, 1000, 150, 600, 1500, 1600, 1650, b) LI, XLIX, CXX, LXXX, DL, CDL, CM, MC 3. a) XXIV, XXXVIII, DLXIV, DCCCLXXIX, MCMLX, MMXVII, MMMDCLXXXVIII, b) 87, 159, 344, 949, 887, 1732 4. a) 545 lat, b) 113 lat, c) 322 lata, d) 381 lat 5. a) 99, b) 191, c) 91, d) 119, e) 209, f) 201 6. a) MMMCXXIX, b) CCCLXIV, c) MMDCCCLXXIX 7. a) 3111 (te liczby to MMMCMXCIX, czyli 3999, oraz CCCLXXXVIII, czyli 888), b) 2727 (te liczby to MMMDCCCLXXXVIII, czyli 3888, oraz MCLXI, czyli 1161) 8. a) XC i X, b) np. LXXX i XX, c) np. LVI i XLIV, d) np. XXXIX i LXI, e) np. XCIX i I, f) np. LXXIII i XXVII 9. a) 2985 r., MMCMLXXXV, b) 3008 r., MMMVIII, c) 3405 r., MMMCDV 10. a) 1386 r., 1377 r., 1351 r., 1434 r., b) 83 lata, c) MCCCLXI

Sprawdź się: 1. D 2. D 3. C

2. Własności liczb naturalnych (s. 9–12): 1. Liczby pierwsze: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19; liczby złożone: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18; kwadraty liczb: 1, 4, 9, 16; sześciany liczb: 1, 8; wielokrotności liczby 5: 5, 10, 15 2. a) 1014, 3440, 5508, b) 1014, 2025, 5508, 6099, c) 3440, 5508, d) 2025, 3440, e) 2025, 5508, f) 3440 3. a) $1 \cdot 12, 2 \cdot 6, 3 \cdot 4$, b) $2 \cdot 2 \cdot 3$ 4. a) np. 12, 24, 600, b) 12 5. a) np. 1, 2, 3, b) 6 6. a) 3, b) np. 9 7. a) 4 r. 1, b) 7 r. 2, c) 10 r. 11, d) 46 r. 3, e) 54 r. 10, f) 20 r. 20 8. a) $5 + 5$ lub $3 + 7$, b) $3 + 17$ lub $7 + 13$, c) $7 + 23$ lub $11 + 19$, lub $13 + 17$ 9. a) 18, b) 30, c) 6 10. a) $NWD = 1$, $NWW = 143$, b) $NWD = 11$, $NWW = 22$, c) $NWD = 2$, $NWW = 286$, d) $NWD = 18$, $NWW = 108$, e) $NWD = 45$, $NWW = 270$, f) $NWD = 120$, $NWW = 1200$ 11. a) Tak, b) tak, c) nie, d) tak, e) tak, f) nie 12. a) Tak, b) nie, c) tak. Wskazówka. Jeśli jeden z czynników jest podzielny przez liczbę a , to iloczyn też jest podzielny przez liczbę a . 13. a) Iloczyn może być liczba parzysta (np. dla liczb 2, 4, 5) lub nieparzysta (np. dla liczb 3, 5, 7). b) Iloczyn jest liczbą parzystą. 14. a) Pierwsza cyfra tej liczby może być dowolna (różna od 0), a ostatnią cyfrą jest 2 lub 6. b) Pierwszą cyfrą tej liczby jest 9, a dwie pozostałe to jedna z następujących par (w dowolnej kolejności): (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5); jest osiem takich liczb. c) 1023 15. a) 1, 5, b) 1, 2, 3, 6, c) 1, 2, 7, d) 1, 2, 3, 4, 6, 7, e) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 16. a) 4, b) 4, c) 8, d) 8, e) 16 17. a) 3, b) 6, c) 8, d) 9 18. a) 1, b) 2. Wskazówka. Znajdź największą liczbę podzielną przez 3 i mniejszą od 730049. c) 1, d) 4, e) 5, f) 9 19. a) Przez 5 lub 15, b) przez 3, 4, 6 lub 12, c) przez 5, 7 lub 35 20. a) 12, b) 14, c) 41, d) 11. Wskazówka. Liczba o 1 większa od szukanej dzieli się bez reszty przez 2, 3 i 4. 21. a) 65, b) 69, c) 38 22. 155 23. a) $2^2 \cdot 3 \cdot 5$, b) 6, 12, 30, 60, c) 12 i 30, 6 i 60 24. Liczba jest podzielna przez wszystkie wymienione liczby oprócz 4. 25. Wskazówka. Sprawdź, jaka jest suma cyfr rozważanej liczby. 26. a) 111 111 111, b) 555, c) 444 444 444, d) 333 333 333 27. a) Tak ($2 + 23$), b) nie. Wskazówka. Jeśli suma jest liczbą nieparzystą, to jeden ze składników jest parzysty, a drugi — nieparzysty. 28. 396

Sprawdź się: 1. D 2. C 3. B

- 3. Porównywanie liczb (s. 13-17):** 1. a) $\frac{1}{4}, -\frac{13}{3}, -1, \frac{8}{6}, 7, (5), -0,0(7), 5\frac{5}{7}, \sqrt[3]{1}, \frac{125}{25}, 0, \sqrt{2\frac{7}{9}}, -12,3, \frac{62}{63}$, b) $-1, \sqrt[3]{1}, \frac{125}{25}, 0$, c) $\sqrt[3]{1}, \frac{125}{25}, 0$, d) $\sqrt{5}, \sqrt[3]{4}$ 3. Dodatnich liczb jest więcej. 4. a) 10^8 , b) $0,001$ 5. a) $2,316$, b) $3,78$, c) $-4,2$, d) $\frac{15}{19}$, e) $\frac{14}{31}$, f) $\frac{27}{50}$ 6. a) $7 \cdot 10^5$, b) $5,3 \cdot 10^4$, c) $3 \cdot 10^{-4}$ 7. a) $-4, -3, -2, -1$, b) $-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$, c) $1, 2, 3$ 8. a) $(-3)^3, -2^4, -3^2, (-2)^3, 2^3, 3^2$, b) $-(\frac{1}{3})^2, -(\frac{1}{2})^4, (-\frac{1}{3})^3, (\frac{1}{3})^2, (\frac{1}{2})^3, (-\frac{1}{2})^2$ 9. a) $A = 34\frac{2}{3}, B = 35\frac{2}{3}$, b) $C = -3\frac{3}{8}, D = -1,5$, c) $E = -6\frac{5}{7}, F = -1\frac{4}{7}$, d) $G = -5\frac{2}{3}, H = 12\frac{1}{9}$ 10. a) Kwadrat o polu P_2 , b) kwadraty o polach P_1, P_2, P_3, P_6, P_8 11. Największy w 2020 roku, najmniejszy w 2035 roku 12. a) 5^7 , b) -7^{20} , c) $(\frac{7}{4})^5$, d) $(\frac{4}{5})^6$, e) $0,8^4$, f) $(-3,4)^6$ 13. a) $3 \cdot 10^3$, b) $1,2 \cdot 10^5$, c) $1,2 \cdot 10^{-1}$, d) $3,87 \cdot 10^{-3}$, e) $1,0765 \cdot 10^0$, f) $1,0879 \cdot 10^1$, g) $9,876546 \cdot 10^3$, h) $1 \cdot 10^{-5}$ 14. Liczby większe: a) $\frac{5}{6}, \frac{11}{15}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}, \frac{5}{11}$, b) $\frac{4}{9}, \frac{15}{38}, \frac{4}{7}, \frac{10}{13}, \frac{9}{25}$, c) $\frac{12}{25}, \frac{8}{15}, \frac{18}{49}, \frac{55}{70}, \frac{20}{21}$, d) $\frac{13}{19}, 0,562, \frac{421}{53}, \frac{27}{31}, \frac{47}{22}$, e) $\frac{8}{21}, \frac{5}{12}, \frac{4}{23}, 0,5(83), \frac{33}{14}$ 15. a) $1,41$, b) $1,73$, c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, d) $3,45$, e) $0,3 + \sqrt{3}$, f) $0,3$ 16. a) 6 , b) $10\sqrt{51}$, c) $\sqrt{101} - \sqrt{80}$, d) $\sqrt[3]{1001} + 1$, e) $0,5\sqrt[3]{9}$, f) 5 17. a) $0,1(20)$, b) $3,4$, c) $5,(60)$, d) $7,(31)$, e) $2,0(42)$, f) $9,(321)$, g) $0,1233$, h) $12,05(1)$, i) $4,21(15)$ 18. a) 4 , b) $6, 7, 8$, c) $7, 8, 9$, d) $15, 16, 17, 18$, e) $-5, -4, -3, -2$, f) $-6, -5, -4, -3, -2, -1$, g) $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, h) $-20, -19, -18, -17, -16$ 19. $0,(4), 0,(428571), 0,(72), 0,(307692), 0,02(27), 0,0(15), 0,(01)$ 20. a) $0,1(36)$, b) $0,3(18)$, c) $0,5$, d) 1 , e) $0,2(27)$, f) $0,01$ 21. 1 22. Przykładowe rozwiązania: a) $\sqrt{2} - 0,2$, b) $2\sqrt{6}$, c) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{2}$, d) $-\frac{\sqrt{70}}{2}$ 23. a) $0,00005 \text{ m}, 0,000018 \text{ m}$, b) $0,000015 \text{ g}, 0,00016 \text{ m}, 0,00011 \text{ m}$, c) $4\,000\,000, 61\,000\,000\,000 \text{ m}^2$, d) $75\,500\,000 \text{ m}^3, 11\,600\,000\,000 \text{ m}^3$, e) $0,000000000000077 \text{ m}, 50\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ 24. a) $9 \cdot 10^{-5}; 1 \cdot 10^{-2}$, b) $2,5 \cdot 10^3; 2,5 \cdot 10^5$, c) $3,87 \cdot 10^8; 2,75 \cdot 10^7; 1,638 \cdot 10^8$, d) $5 \cdot 10^6; 1,5 \cdot 10^{-3}$

Sprawdź się: 1. D 2. C 3. C

- 4. Działania na liczbach (s. 17-26):** 2. a) 15 , b) 9 , c) $8,7$, d) $0,6$, e) 1 , f) 15 3. a) $\frac{27}{40}$, b) $\frac{3}{28}$, c) $\frac{1}{20}$, d) $\frac{1}{12}$ 4. a) a , b) c , c) a , d) c 5. a) 1000 , b) 3600 , c) 100 , d) $1000\,000$, e) $1000\,000$, f) 100 , g) 100 6. a) $1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{9}, 12, 12\frac{1}{6}, 22\frac{4}{7}$, b) $4\frac{4}{7}, 1\frac{6}{11}, 6\frac{5}{9}, 3\frac{4}{5}, 4\frac{3}{4}$, c) $3\frac{3}{5}, 1\frac{1}{7}, \frac{20}{21}, -\frac{15}{32}, \frac{36}{77}$, d) $5\frac{3}{5}, \frac{3}{22}, \frac{4}{7}, -1\frac{7}{8}, 2$ 7. a) $2,2; 6,22; 0,7; -2,2; -9,5$, b) $1,2; 0,6; -2,3; 0,12; -0,037$, c) $0,3; 0,4; 0,524; 100; 0,1$ 8. a) -11 , b) -18 , c) -16 , d) -3 , e) 2 , f) 28 , g) 53 , h) 54 9. a) 9 , b) 13 , c) -2 , d) $4\frac{2}{3}$, e) $-\frac{1}{12}$, f) $\frac{19}{26}$, g) $-4\frac{1}{2}$, h) $5\frac{5}{9}$, i) $1\frac{1}{6}$ 10. a) 10 , b) $\frac{3}{7}$, c) $1\frac{3}{5}$, d) $1\frac{7}{8}$, e) $-2\frac{4}{5}$ 11. a) $12,22$, b) $-4,68$, c) $-2,66$, d) 80 , e) $-0,14$, f) 25 12. a) $2\frac{9}{16}$, b) $-8\frac{1}{2}$, c) $\frac{11}{14}$, d) $\frac{11}{54}$, e) $\frac{7}{8}$, f) $4\frac{1}{12}$ 13. a) $112,4$, b) $27,99$, c) $38,913$, d) $5,8$ 14. a) 8765 , b) $27\,770$, c) $29\,900$, d) $35\,000$, e) $60\,000$, f) $976\,599,4$, g) $1098,95$, h) $2229,680$ 15. a) $6700 \text{ km}, 6440 \text{ km}, 6380 \text{ km}, 6260 \text{ km}, 5410 \text{ km}, 4680 \text{ km}, 4670 \text{ km}$, b) $6700 \text{ km}, 6400 \text{ km}, 6400 \text{ km}, 6300 \text{ km}, 5400 \text{ km}, 4700 \text{ km}, 4700 \text{ km}$, c) $7000 \text{ km}, 6000 \text{ km}, 6000 \text{ km}, 6000 \text{ km}, 5000 \text{ km}, 5000 \text{ km}, 5000 \text{ km}$ 16. a) $26 : 22,8, 26 : 27,9, 26 : 31,3, 26 : 38,1, 26 : 43,5$, b) $26 : 23, 26 : 28, 26 : 31, 26 : 38, 26 : 44$, c) $26, 26, 27, 27, 27$ 17. a) $12,73$, b) $0,035$, c) $0,5152$, d) $0,39394$ 18. a) b , b) a , c) a , d) a , e) a , f) b 19. a) b , a, c , b) c, b, a , c) a, b, c , d) c, a, b 20. a) $83 \text{ mm}, 250 \text{ mm}, 260,8 \text{ mm}, 8325,3 \text{ mm}, 16\,000\,000 \text{ mm}$, b) $120 \text{ cm}, 835,2 \text{ cm}, 2,9 \text{ cm}, 0,003 \text{ cm}, 6205 \text{ cm}$, c) $83,289 \text{ m}, 5,328 \text{ m}, 5,0002 \text{ m}, 2530 \text{ m}, 13\,090 \text{ m}$, d) $73,82 \text{ km}, 0,9502 \text{ km}, 33,0005 \text{ km}, 0,2803 \text{ km}, 0,3 \text{ km}$ 21. a) $0,5 \text{ a}, 0,283 \text{ a}, 15\,300 \text{ a}, 28 \text{ a}, 1500 \text{ a}$, b) $0,23 \text{ ha}, 0,18 \text{ ha}, 250 \text{ ha}, 8,53 \text{ ha}, 0,0012 \text{ ha}$, c) $0,248 \text{ m}^2, 341,96 \text{ m}^2, 34\,500 \text{ m}^2, 1\,920\,000 \text{ m}^2, 76\,500\,000 \text{ m}^2$, d) $0,0003123 \text{ km}^2$

0,03245 km², 0,9 km², 549 km², 1000 km² 22. a) 3 000 000 mm³, 30 mm³, 2700 mm³, 53 000 mm³, 30 000 mm³, b) 0,008 cm³, 0,253 cm³, 200 cm³, 1520 cm³, 12 000 000 cm³, c) 25 l, 0,000053 l, 0,0028 l, 200 l, 0,000003 l, d) 5 dm³, 0,35 dm³, 0,25 dm³, 0,00024 dm³, 500 000 000 dm³ 23. a) 1380 min, 150 min, 2 min, 10 min, 14 min, b) 485 s, 123 s, 510 s, 1503 s, 9000 s, c) 24,5 godz., 108 godz., 987,25 godz., 54 godz., 108 godz., d) 24 doby, 365 dób, 1,5 doby, 1 doba, 56 dób 24. a) 0,7 ml, 120 ml, 120 ml, 0,3 ml, 3500 ml, b) 130 mm³, 120 000 mm³, 130 000 mm³, 4 529 000 mm³, 280 000 mm³, c) 1,2 l, 34 l, 4560 l, 500 000 l, 10¹² l, d) 7658,76987 hl, 34,566 hl, 303,03 hl, 345,004 hl, 10¹⁰ hl 25. a) 7980 cm, 0,09 km, 112 m, 540 000 mm, b) 54 kg, 7500 dag, 0,13 t, 740 000 g, c) 0,04 km², 1920 a, 600 000 m², 710 ha, d) 120 min 30 s, 30 h 20 min, 360 000 s, 6140 min, e) 4200 cm³, 0,7 m³, 54 000 dm³, 0,0003 m³ 26. a) 10 m, b) 10 000 000 arkuszy, c) 1250 kul, d) 200 000 razy, e) 4 a, f) 135 km², g) 44 min, 33 min, h) 2 h 8 min 48 s 27. a) 5 $\frac{\text{m}}{\text{min}}$, b) 0,3 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ 28. a) ok. 38,9 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, b) ok. 33,3 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, c) ok. 27,8 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, d) 25,0 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, e) 13,9 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ 29. Dżdżownica: 0,0144 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, Titanic: 41,76 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, gepard: 104,4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, dźwięk w powietrzu: 1220,4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, światło: 1,08 · 10⁹ $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ 30. a) 90 km, b) 16 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, c) 2,5 godziny 31. a) $B = 2\frac{1}{4}$, b) $A = 2\frac{1}{6}$, c) $C = 3\frac{7}{15}$, d) $A = -9\frac{5}{6}$. Wskazówka. Zauważ, że $B = \frac{A+C}{2}$. 32. a) $1\frac{14}{15}$, $(3\frac{1}{2} + 4\frac{5}{6} - 8) : 1\frac{1}{4} = \frac{4}{15}$, b) $\frac{74}{45}$, np. $(1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{5}{6} - 1) : 1\frac{1}{4} = \frac{52}{45}$, c) 0, np. $(4\frac{1}{5} : 2\frac{1}{10} - 2\frac{1}{2}) : 1\frac{1}{4} = -\frac{2}{5}$ 33. a) Orzechy — tłuszcze, fasola — węglowodany, ser żółty — woda, b) w serze, c) $\frac{1}{28}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{3}{80}$, d) $1\frac{1}{3}$ razy więcej białka 34. $\frac{1}{6}$ łyżki 35. Najmniejsze jajko — 1,05 dag, największe jajko — 1,75 dag 36. $\frac{8}{15}$ 37. a) Nie, b) większą od stajania i mniejszą od wiorsty, c) nie 38. a) 100 cl, 10 000 cl, b) 13 B, c) 1000 kWh, d) 0,02 MJ 39. a) Bakelit — 134 kg, ołów — 1135 kg, złoto — 1928 kg, platyna — 2145 kg, b) bakelit — ok. 746,27 dm³, ołów — ok. 88,11 dm³, złoto — 51,87 dm³, platyna — 46,62 dm³ 40. a) Na 60 dawek, b) 260 zbiorników, c) 8 pomarańczy 41. a) 1,05 ha, b) 525 m³ 42. a) O 15 mm, b) 3000 m³ 43. a) O 4:00, b) o 25 680 s, c) 3 obroty; 2700 obrotów 44. a) W 20 000 000 m³, b) 0,03024 g

Sprawdź się: 1. D 2. C 3. D 4. B 5. C 6. C

5. Działania na potęgach i pierwiastkach (s. 26–29): 1. a) 2¹⁴, b) 3², c) 4⁸, d) 5⁷, e) 3¹⁵ 2. a) 189, b) 2¹⁵ = 32 768, c) 4651, d) 14⁴ = 38 416, e) 2⁷ = 128 3. a) 5, b) 4√15, c) 5, d) 19, e) 7³ = 343 4. a) 21, b) 12, c) 7, d) $\frac{1}{27}$, e) 2 5. a) $(\frac{2}{3})^{10}$, b) (-6)¹², c) 1,2⁴, d) 5⁶, e) 3⁰, f) 5¹ 6. a) 3 $\frac{1}{8}$, b) 0,249, c) 1,5, d) 1,5, e) 8, f) 1,3 7. a) 1,44 · 10⁴, b) 5,25 · 10¹⁰, c) 9,24 · 10⁴, d) 5,146 · 10⁴, e) 6,408 · 10⁻¹, f) 2,835 · 10⁻⁶, g) 4,455 · 10⁻¹², h) 3,04 · 10⁻¹⁵, i) 2,485 · 10⁻²³ 8. a) 9 · 10⁶, b) 8,6 · 10⁻⁵, c) 1,21 · 10¹⁰, d) 3 · 10⁸, e) 2,8 · 10⁻⁴, f) 2 · 10⁶, g) 4,9 · 10⁹, h) 5,47 · 10⁵, i) 7,5 · 10⁷, j) 1,4 · 10¹⁰, k) 3 · 10⁸, l) 1,17 · 10¹¹, m) 5,6 · 10⁻⁸, n) 1,1 · 10⁻⁴, o) 7,22 · 10⁻⁷ 9. a) Od 51 m² do 85 m², b) 465 tys. m, c) 2,3 dm³ 10. a) 2√6, b) -2 $\frac{2}{3}$ √7, c) 2 $\frac{2}{3}$ √11, d) 0,3√2, e) -3√3, f) -2√13, g) 0,2, h) 24, i) 1 $\frac{1}{4}$, j) √7 - 2√3, k) 50, l) 0,6 11. a) 1, b) 2, c) $\frac{3}{5}$, d) 2, e) 2, f) $\frac{2}{3}$, g) 0,3, h) 10, i) 27, j) 49, k) 55, l) 12 12. a) 5√5, b) -8√2, c) -2√3, d) 12 $\sqrt[3]{5}$, e) $\sqrt[3]{2}$, f) 1,9 $\sqrt[3]{4}$ 13. a) 3√5, b) 2√15, c) 15√2, d) 21√3, e) -180√6, f) 6√6 14. a) $\frac{-7\sqrt{3}}{3}$, b) $\frac{-\sqrt{6}}{9}$, c) √3, d) -4 + $\frac{\sqrt{10}}{5}$, e) $\frac{2\sqrt{5}-20\sqrt{3}}{15}$ 15. a) a = 6, b = 4, c = 2, b) a = 10, b = 5, c = 4 16. a) 7, b) 9, c) 8, d) 2, e) 4, f) 8 17. a) o 4,72 · 10¹⁴ m², b) 3 · 10³ m² = 0,3 ha 18. a) a, b) b 19. a) x = b, b) x = a, c) x = b

Sprawdź się: 1. C 2. A 3. C 4. D

6. Zadania testowe (s. 30–32): 1. D 2. D 3. D 4. PPFF 5. B 6. C 7. B 8. D
9. C 10. B 11. B 12. A 13. C 14. PPFP 15. A 16. D 17. C 18. D 19. C
20. C 21. A 22. D 23. B 24. D

II

Wyrażenia algebraiczne i równania

1. Przekształcenia algebraiczne (s. 33–36): 1. a) $6a$, b) $12b^2$, c) 2 , d) $4c$, e) $\frac{2}{c}$
2. a) $a + a^2$, b) $6a - 1,5$, c) $\frac{1}{2}c - c^2$, d) $1 - d^2$ 3. a) $a + 2c$, b) $3x - \frac{1}{2}y$, c) $18c + 2c^2$,
d) $\frac{5}{4}d^3 - \frac{1}{4}d^2$ 4. a) $\frac{a(b+4)}{2}$, b) $\frac{(b+7)(c+1)}{2}$, c) $c(d+18)$, d) $2(a+d+3)$, e) $(a+3)^2$
5. a) $4a - 1,6$, b) $-\frac{1}{12}b - \frac{1}{2}$, c) $-1,4c + 0,28$, d) $-6x + 0,9x^2$, e) $8y^2 - 0,2y$,
f) $-0,12z + 6z^2$, g) $-15s + 20$, h) $10t - 4t^2$, i) $\frac{1}{5}a^2 + a - 1$, j) $-b^2$, k) $-2,5a + 9$,
l) $2,44b - 7,1$ 6. a) $\frac{2}{3}a + 6b + \frac{1}{3}$, b) $4\frac{4}{5}b$, c) $-18x + 28$, d) $27\frac{1}{2}y + 7$, e) $x + 2$,
f) $2\frac{1}{3}a - 2\frac{2}{3}b$, g) $-40,5a + 10b$, h) $1\frac{4}{9}a + 4\frac{2}{3}b$ 7. Wskazówka. Potęgę zamień na iloczyn
jednakowych czynników. a) $2x^2 + 11x - 21$, b) $30y^2 - 29y + 4$, c) $-2x^2 + x + 6$, d) $9a^2 +$
 $+ 30a + 25$, e) $9a^2 - 30a + 25$, f) $a^2 - 9$, g) $-4z^2 + 1,6z + 0,2$, h) $-\frac{4}{3}w^2 + 3$, i) $0,04c^2 - 0,01$
8. a) $-2\sqrt{7} + 6\sqrt{5}$, b) $6 - 3\sqrt{3}$, c) 32 , d) $15\sqrt{2} + 1$, e) $-14 - 8\sqrt{3}$, f) $-1,5 + \sqrt{3} - 2\sqrt{15}$,
g) -3 , h) $11 - 7\sqrt{2}$ 9. a) -4 , b) 88 , c) 14 , d) 11 , e) 5 , f) 0 10. a) $4x + 2$,
b) $y^2 - \sqrt{y}$, c) $0,075a^2$, d) $\frac{1}{10b^2}$, e) $1,1a(a+b)$, f) $\frac{a+b}{2(a-b)}$, g) $4(p+q)^2(p-q)^2$
11. a) $(\frac{5}{20} + 1)$ mm, b) $\frac{c+1}{2}$ uczniów, c) $(10p+5)$ jajek, d) $0,1b$ kg, e) $(5,5x + 1,5)$ zł,
f) $m - 30 + \frac{2}{3}n$ jogurtów 12. a) $0,6 \cdot \frac{w}{28}$, b) $1,8x + 0,8y$, c) $40a - b$, d) $1,4x(y - 0,5)$ zł
13. a) x^2 , b) $10q$, c) x , d) $2x + 6$, e) $16x$, f) $\frac{4}{x}$ 14. $(a+1)^2 - a^2 = a^2 + 2a + 1 - a^2 =$
 $= 2a + 1 = a + 1 + a$ 15. a) Liczba $6n + 9$ jest liczbą nieparzystą, b) liczba $4n^2 + 4n + 1$
jest liczbą nieparzystą, c) liczba $4n^2 - 4n + 4$ jest podzielna przez 4, d) liczba $2n - 2$ jest
podzielna przez 2 16. a) $(2,3), (3,2)$, b) $(0,0), (4,2), (3,3)$

Sprawdź się: 1. A 2. C 3. A

2. Równania (s. 36–40): 1. a) $a = b + 3$, b) $c = \frac{d}{3}$, c) $e = \frac{1}{3}f$, d) $g = 3 - h$, e) $i = 3j$
2. a) $2x - 4 = 4, x = 4$, b) $4 - x = 3, x = 1$, c) $3x - 5 = 10, x = 5$, d) $12 - x = x, x = 6$, e) $x - 16 =$
 $= 16 - x, x = 16$ 3. a) Nie ma rozwiązań — równanie sprzeczne, b) nieskończenie wiele
rozwiązań — równanie tożsamościowe 4. a) $A = 5$, b) $B = 60$, c) $C = \frac{B}{2A}$ 5. a) Obie
liczby są rozwiązaniami. b) Tylko -3 jest rozwiązaniem. c) Żadna z tych liczb nie jest
rozwiązaniem. d) Tylko 2 jest rozwiązaniem. 6. a) $1, 2$, b) $-3, 1$, c) $0, 2$, d) $-3, 1$
7. a) $x = -\frac{5}{12}$, b) $x = 9$, c) równanie sprzeczne, d) $x = 5$, e) każda liczba spełnia to
równanie, f) $x = 3\frac{1}{4}$, g) $x = 7$, h) $x = 1$ 8. a) $x = 2\frac{2}{5}$, b) $x = -1\frac{2}{3}$, c) $x = 10$, d) $x = -18$
e) $x = 3$, f) $x = \frac{8}{9}$ 9. a) $a = \frac{F}{m}$, b) $h = \frac{E}{mg}$, c) $F = PS$, d) $t = \frac{W}{P}$, e) $m = \frac{2E}{v^2}$, f) $r = \frac{mv^2}{F}$,
g) $F_1 = FS + F_2$, h) $t = \frac{v_1 - v_2}{a}$, i) $T_2 = \frac{Q + mcT_1}{mc}$ 10. a) $x = 3\frac{1}{3}$, b) $x = 2\frac{1}{2}$, c) $x = 10$
11. a) 6 cm, $9,5$ cm, b) 10 cm, c) 5 m $\times$ 8 m, d) 40 miejsc siedzących 12. a) Po 15
tygodniach, b) 2 godziny 13. 12 złotych 14. 60 stołów i 120 krzeseł 15. a) 12 lat,
b) 28 lat, c) warszawski — 468 lat, krakowski — 517 lat 16. Hipopotam 30 lat, kangur
 5 lat 17. Ok. 2222 km² 18. 260 dużych gałek 19. $0,5$ m $\times$ $1,5$ m 20. Gdynia w 1926 r.,
Kazimierz Dolny w 1356 r. 21. 48 minut 22. a) $n = 7$

Sprawdź się: 1. A 2. PPFP 3. A

3. Proporcje (s. 41–43): 1. a) $\frac{1}{10}$, b) 8 , c) 2 2. a) $\frac{x}{7} = \frac{2}{9}$, b) $\frac{x}{5} = \frac{2}{3}$ 3. a) $x = 5$,
b) $x = 4$, c) $x = 3$, d) $x = 9$, e) $x = 7$, f) $x = 15$, g) $x = 6$, h) $x = 9$, i) $x = 20$ 4. a) $x = 2$,

- b) $x = -6$, c) $x = 2\frac{1}{7}$, d) $x = 5$, e) $x = 3,5$, f) $x = 0,25$, g) $x = 9$, h) wszystkie liczby,
 i) brak rozwiązań, j) $x = -\frac{5}{17}$, k) $x = \frac{5}{6}$, l) $x = 10$ 5. a) $x = 10$, b) $x = 0$, c) $x = \frac{2}{3}$,
 d) $x = \frac{2}{5}$, e) $x = \frac{1}{4}$, f) $x = -6$ 6. a) $x = 2$ lub $x = -2$, b) $x = 3$ lub $x = -3$, c) brak
 rozwiązań 7. a) 9, b) 4, c) $a = -14$ 8. a) $\frac{15}{45}$, b) $\frac{6}{21}$, c) $\frac{12}{27}$ 9. a) 4 kule (2 białe
 i 2 czarne), b) 16 cukierków, c) 60 orzechów 10. a) $\frac{3}{3}$, b) $\frac{5}{5}$, c) $\frac{4}{4}$ 11. a) $a = \frac{10-6b}{3}$,
 b) $a = \frac{b}{2}$, c) $a = \frac{b^2-6}{3}$ 12. a) -4, b) $\frac{3}{11}$, c) -1

Sprawdź się: 1. B 2. A 3. BD

4. **Wielkości wprost proporcjonalne (s. 43–46):** 1. a) $x = \frac{5}{7}$, b) $x = \frac{22}{3}$, c) $x = 2,5$
 2. a) W dwóch pudełkach — 14, w sześciu pudełkach — 42, b) w czterech 3. a) Obwód
 — 2 razy większy, pole — 4 razy większe, b) obwód — 5 razy większy, pole — 25 razy
 większe 4. A, E, F, G, I, J, L, M, O 5. a) 4,92 g, b) 12,55 g, c) 14 dwuzłotówek
 6. a) 9,90 zł, b) 49,95 zł, c) 2,5 kg 7. a) Ok. 0,5 mm, b) ok. 1,2 mm, c) 6,25 mm
 8. 35 kg 9. 160 łyżeczek 10. a) 14 sztachet, b) 31,5 sztachety 11. a) na 12,5 łyżki,
 b) w 4,8 szklanki 12. a) Ok. 333 g, b) ok. 8,3 dag 13. a) 105 dag warzyw i 2,1 litra wody,
 b) 1,2 kg 14. a) Ok. 1,8 kg cebuli i ok. 417 ml octu, b) ok. 33 dag masła i ok. 17 dag
 cukru 15. Ok. 1,42 kg 16. $3\text{ cm} \times 3\text{ cm}$ 17. Piotrek — 12 lat, Magda — 10 lat

Sprawdź się: 1. D 2. C 3. C

5. **Zadania testowe (s. 46–48):** 1. B 2. C 3. B 4. A 5. A 6. B 7. B 8. C 9. D
 10. A 11. FP 12. Tak, B 13. B



Figury geometryczne na płaszczyźnie

1. **Trójkąty i czworokąty (s. 49–55):** 1. a) 4 m — tak, 6 m — nie, b) 50° 2. 15 m^2
 3. a) 300° , b) $140^\circ, 40^\circ, 140^\circ$ 4. a) 4,5 cm, b) 9 cm 5. 60 m^2 6. a) Nie, b) tak, c) nie
 7. Tak — c), d), e), f), nie — a), b), g), h) 8. a) 3 cm lub 4 cm, b) 3 cm 9. $\alpha = 145^\circ, \beta = 65^\circ,$
 $\gamma = 17^\circ$ 10. $\alpha = 74^\circ, \beta = 56^\circ, \gamma = 35^\circ$ 11. $\alpha = 34^\circ, \beta = 132^\circ, \gamma = 150^\circ$ 13. $P = 65, x = 10\frac{5}{6};$
 $P = 54, y = 7\frac{1}{5}; P = 36, z = 5\frac{1}{7}$ 14. Równoległobok — $128^\circ, 52^\circ, 128^\circ$, trapez — $102^\circ, 78^\circ,$
 78° 15. a) $\alpha = 80^\circ, \beta = 146^\circ$, b) $\alpha = 152^\circ, \beta = 108^\circ$ 16. Trapez — 55° , prostokąt —
 40° , równoległobok — 60° 17. Romb — $40^\circ, 140^\circ, 40^\circ, 140^\circ$, równoległobok — $110^\circ, 70^\circ,$
 $110^\circ, 70^\circ$, trapez — $90^\circ, 90^\circ, 130^\circ, 50^\circ$ 18. a) Do równoległoboków, b) do prostokątów,
 c) do rombów, d) do kwadratów 19. $36^\circ, 36^\circ, 144^\circ, 144^\circ$ 20. 4,8 cm 21. $P = 91$
 22. a) Drugi romb ma pole większe o 1 cm^2 . b) Równoległobok ma pole większe o 9 cm^2 .
 c) Trapez ma pole większe o 2 cm^2 . 23. Pole M = 8, Pole U = 6, Pole Z = 7, Pole Y = 5,
 Pole K = 6, Pole A = 7 24. a) 42° , b) 48° , c) 56° 25. 4, 5, 6, 7, 8 26. a) Wskazówka.
 Suma dwóch krótszych boków trójkąta musi być większa od długości trzeciego boku.
 b)  c) $a = 9, b = 5$, d) $a = 99\text{ m}, b = 101\text{ m}$ 28. 4 29. $3\frac{1}{3}$
 30. a) $46^\circ, 134^\circ, 46^\circ, 134^\circ$, b) $17^\circ, 73^\circ$ 31. a) $a = 5$, b) $b = 14$ 32. Wysokość rombu wy-
 nosi 5, wysokość trapezu — 5, a wysokości równoległoboku są równe: 7,5 i 3,75. 33. Dwa
 lub trzy 36. 45

Sprawdź się: 1. PPFFP 2. C 3. B

2. **Twierdzenie Pitagorasa (s. 55–60):** 1. a) 250, b) 210, c) 100 2. 16, 36, 52;
 $2\sqrt{13}$ 3. 4, 9, 13; $\sqrt{13}$ 4. a) $P = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 + 1^2 = 25$, b) $P = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 + 2^2 = 20$,
 c) $P = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 + 3^2 = 29$ 5. a) 8, b) 5, c) 10 6. a) $a = 17$, b) $b = \sqrt{13}$, c) $c = \sqrt{7}$

7. a) $x = 15$, b) $y = \sqrt{21}$, c) $z = \sqrt{3}$ 8. 10 m 9. a) $AB = \sqrt{41}$, b) $AB = 3$
 10. a) $k = 2\sqrt{5}$, $l = 5$, $m = 1$, b) $x = \sqrt{41}$, $y = 5$, $z = 2$ 11. $a \approx 27$ cm, $b \approx 173$ cm,
 $c = 240$ cm 12. a) Przyprostokątne: 7 i 5, przeciwprostokątna: $\sqrt{74}$, b) przyprostokątne:
 12 i 4, przeciwprostokątna: $4\sqrt{10}$, c) przyprostokątne: 6 i $6\sqrt{3}$, przeciwprostokątna:
 12, d) przyprostokątne: 15 i 20, przeciwprostokątna: 25 13. a) 6 cm^2 , b) $4\sqrt{2} \text{ dm}^2$,
 c) $8\sqrt{3} \text{ m}^2$ d) $3\sqrt{2} \text{ km}^2$ 14. a) 6, 8, b) 24, 26, c) 15, 17 15. 100 kroków 16. 13 km
 17. $AB = b + \sqrt{a^2 - b^2}$ 18. a) BE lub DG , b) EC lub AF , c) GB lub DE 19. 3, 9.
 Wskazówka. Zapisz obwód trójkąta w postaci sumy i zastanów się, co oznaczają jej skład-
 niki. 20. FP 21. Wskazówka. Najpierw skonstruuj kwadrat o polu dwukrotnie większym
 od pola danego kwadratu, a następnie skonstruuj kwadrat o polu równym sumie pól obu
 tych kwadratów. 22. Twierdzenie Pitagorasa

Sprawdź się: 1. B 2. D 3. C

- 3. Zastosowania twierdzenia Pitagorasa (s. 60–63):** 1. $x = \sqrt{a^2 + c^2}$, $x = \sqrt{d^2 - b^2}$,
 $x = \sqrt{f^2 - g^2}$, $x = \sqrt{h^2 + i^2}$ 2. 1 3. $a = 4$, $b = \sqrt{21}$, $c = 16$, $d = 5$, $e = 9$, $f = \sqrt{19}$,
 $g = 2\sqrt{6}$, $h = 4\sqrt{2}$ 4. Trójkąt — $x = 3$, trapez — $x = 20$, romb — $x = 8$, prostokąt —
 $x = 10$ 5. a) $\sqrt{29} \approx 5,39$ dm, b) $2\sqrt{41} \approx 12,81$ cm, c) $5\sqrt{29} \approx 26,93$ cm, d) $\sqrt{37} \approx 6,08$ m
 6. a) 4 cm, b) $2\sqrt{3}$ cm, c) 3 dm, d) 5 mm 7. a) 25 cm, b) 6 cm, c) 7 dm,
 d) 8 m 8. a) $20\sqrt{2}$ cm, b) $10\sqrt{5}$ cm, c) $12\sqrt{5}$ cm, d) $2\sqrt{113}$ cm 9. a) $h = 6$,
 b) $h = 4\sqrt{5}$, c) $h = 8\sqrt{3}$, d) $h = 8\sqrt{2}$ 10. a) $c = \sqrt{37}$, $d = 6\sqrt{2}$, b) $c = 2\sqrt{13}$, $d =$
 $= 3\sqrt{13}$, c) $c = \sqrt{61}$, $d = 2\sqrt{34}$, d) $c = \sqrt{38}$, $d = \sqrt{63 + 10\sqrt{2}}$ 11. Pole prostokąta = 12,
 Obwód prostokąta = 14, Pole równoległoboku = 108, Obwód równoległoboku = 48, Pole
 trapezu = 66, Obwód trapezu = 38 12. Około 7 m 14. a) 10, 10 i $5\sqrt{2}$, b) 9, c) $8 + 4\sqrt{2}$
 15. 28 cm^2 16. $20\sqrt{6} \text{ cm}^2$ 17. 48 cm^2 18. 180 (trapez) lub 300 (trapez) lub 240 (równo-
 ległobok) 19. 128 20. $a = \sqrt{141}$, $b = \sqrt{161}$, $c = \sqrt{181}$ 21. Nie jest. 22. a) Wskazówka.
 Zauważ, że bok d jest przeciwprostokątną pewnego trójkąta prostokątnego. Aby wykazać
 równość II, skorzystaj z równości I. b) $h = 2\sqrt{3}$ Wskazówka. Skorzystaj z równości II

Sprawdź się: 1. B 2. A

- 4. Przekątna kwadratu. Wysokość trójkąta równobocznego (s. 64–66):** 1. a) $3\sqrt{2}$,
 b) $\sqrt{10}$, c) $2\sqrt{5}$, d) $\sqrt{26}$ 2. a) $\sqrt{3}$, b) $3\sqrt{3}$, c) $4\sqrt{3}$, d) $\sqrt{6}$ 3. a) $5\sqrt{2}$, b) 6, c) $5\sqrt{6}$,
 d) 1, e) $3,5\sqrt{2}$, f) 4 4. a) 5, b) 0,7, c) $\frac{5}{2}$, d) $\frac{3}{\sqrt{2}} = 1,5\sqrt{2}$, e) $\frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$, f) $\frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$
 5. a) $5\sqrt{3}$, b) $7,5\sqrt{3}$, c) 4,5, d) 19,5, e) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$, f) 7,5 6. a) 4, b) 20,4, c) $\frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$,
 d) $30\sqrt{2}$, e) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$, f) $\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{21}$ 7. a) $14 + 14\sqrt{2}$, b) 24 8. a) $6\sqrt{3}$, b) $10\sqrt{3}$,
 c) $20\sqrt{3}$, d) $1428\sqrt{3}$, e) $9\sqrt{2}$, f) $15\sqrt{2}$, g) $30\sqrt{2}$, h) $2142\sqrt{2}$ 9. $x = 1$ 10. a) 6,
 b) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$, c) 6 11. a) $8\sqrt{3}$, b) $18\sqrt{3}$, c) $6\sqrt{3}$ 12. Przekątna kwadratu ($d = \frac{\text{obwód}}{4}\sqrt{2}$,
 $h = \frac{\text{obwód}}{6}\sqrt{3}$) 13. Trójkąt (Pole kwadratu = $\frac{1}{2}d^2$, Pole trójkąta = $\frac{\sqrt{3}}{4}d^2$) 15. $4\sqrt{3} - 4$, $4 - \frac{4}{\sqrt{3}}$.
 Wskazówka. Dłuższa przekątna rombu zawiera się w wysokościach narysowanych trójkątów
 równobocznych oraz że krótsza przekątna dzieli romb na dwa trójkąty równoboczne.

Sprawdź się: 1. C 2. B 3. B 4. D

- 5. Trójkąty o kątach 90° , 45° , 45° oraz 90° , 30° , 60° (s. 66–71):** 1. $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$,
 $\gamma = 30^\circ$, $\delta = 75^\circ$ 2. $a = 2\sqrt{3}$, $b = 4$, $c = 3\sqrt{2}$, $d = 3$, $e = \frac{6}{\sqrt{3}}$, $f = \frac{3}{\sqrt{3}}$, $g = \frac{3}{2}$, $h = \frac{3}{2}$ 3. a) 45° ,
 45° , 90° , b) 30° , 60° , 90° , c) 45° , 45° , 90° , d) 60° , 60° , 60° , e) 30° , 60° , 90° , f) 30° , 60° ,
 90° 4. a) 10, $5\sqrt{3}$, b) $4\sqrt{3}$, 6, c) 8, 8, d) 3, $3\sqrt{2}$, e) $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{2}\sqrt{3}$, f) $3\sqrt{2}$, 6, g) 2, 4, h) $\frac{2}{\sqrt{2}}$,
 $\frac{2}{\sqrt{2}}$, i) $\frac{5}{\sqrt{3}}$, $\frac{10}{\sqrt{3}}$ 5. $AB = 6\sqrt{3}$, $BC = 12$ 6. a) $\sqrt{2}$, b) $2\sqrt{2}$, c) 2, d) $5\sqrt{3}$ 7. a) Obwód =
 $= 4 + 2\sqrt{3}$, Pole = $\sqrt{3}$, b) Obwód = $8 + 4\sqrt{3}$, Pole = $4\sqrt{3}$, c) Obwód = $6 + 4\sqrt{3}$, Pole = $3\sqrt{3}$,

d) Obwód = $18 + 12\sqrt{3}$, Pole = $27\sqrt{3}$ 8. a) $\frac{25\sqrt{3}}{2}$, b) $18\sqrt{3}$, c) $\frac{81}{2\sqrt{3}}$, d) $\frac{32}{\sqrt{3}}$, e) $\frac{25}{2}$, f) $\frac{1}{2}$, g) 18, h) $\frac{25}{4}$ 9. a) 30° , b) 2 m^2 10. Pole prostokąta = $16\sqrt{3}$, Obwód prostokąta = $8 + 8\sqrt{3}$, Pole równoległoboku = $\frac{110}{\sqrt{2}}$, Obwód równoległoboku = 42, Pole trapezu = $\frac{27+39\sqrt{3}}{2}$, Obwód trapezu = $19 + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{6}$ 11. a) $P = 3,125\sqrt{3} + 3,125$, Obwód = $7,5 + 2,5\sqrt{2} + 2,5\sqrt{3}$, b) $P = 2\sqrt{3} + 6$, Obwód = $6 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$, c) $P = 9\sqrt{3} + 9$, Obwód = $\frac{18+6\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + 6$, d) $P = 12,5 + 12,5\sqrt{3}$, Obwód = $15 + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$, e) $P = 1,5\sqrt{3} - 1,5$, Obwód = $3 + \sqrt{3} + \sqrt{6}$, f) $P = 8 + 8\sqrt{3}$, Obwód = $4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 12$ 12. a) 10 m, b) 1 km, c) $\frac{12}{\sqrt{6}}\text{ m} \approx 4,9\text{ m}$, d) 10 m, $\frac{20}{\sqrt{3}}\text{ m} \approx 11,5\text{ m}$ 13. $x = 6\sqrt{3} - 6$, $y = 2\sqrt{3} - 2$, $z = 2\sqrt{3}$ 14. a) $\frac{36}{\sqrt{3}}$, b) $6\sqrt{3} + \frac{6}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$ 15. a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{3}$, b) $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, c) 1 16. a) $3\sqrt{2} + 6 + \frac{6}{\sqrt{3}}$, b) 15, c) $18 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$ 17. $\frac{16}{\sqrt{2}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$

Sprawdź się: 1. B 2. A 3. A 4. A

6. Odcinki w układzie współrzędnych (s. 71-74): 1. a) $5 + 2\sqrt{2} + \sqrt{17}$, b) $\sqrt{10} + \sqrt{13} + \sqrt{17} + 2\sqrt{5}$, c) $5 + 3\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{26}$ 2. a) $\sqrt{13}$, b) $3\sqrt{5}$, c) $\sqrt{61}$ 3. a) 5, b) $4\sqrt{5}$, c) $2\sqrt{10}$, d) $\sqrt{29}$ 4. a) 6, b) 5, c) 13, d) 20 5. a) (0, 4) lub (0, -4), b) (0, 3) lub (0, -3), c) (0, 1) lub (0, -1), d) (0, 5) lub (0, -5) 6. a) $C = (2, 4)$ lub $C = (5, 4)$, lub $C = (2, -2)$, lub $C = (5, -2)$, b) $C = (0, -3)$ lub $C = (-4, 7)$, lub $C = (1, 9)$, lub $C = (5, -1)$, c) $C = (2, 5)$ lub $C = (5, 4)$, lub $C = (3, -2)$, lub $C = (0, -1)$ 7. (-2, 3) 8. 37,6 9. $P_{ABC} = 10$, $P_{DEF} = 9$, $P_{IJH} = 15$ 10. a) Nie, b) nie, c) tak 11. a) Pole = 9, Obwód = $6(1 + \sqrt{2})$, b) Pole = 6, Obwód = $4\sqrt{10}$, c) Pole = 10,5, Obwód = $7 + \sqrt{10} + \sqrt{13}$ 12. a) 20, b) 10, c) 58 13. a) (0, -2) lub (0, 6), b) (0, 5) lub (0, -1), c) (0, 0) lub (0, 4), d) (0, -5) lub (0, 9) 14. $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{5}$, $c = 2\sqrt{2}$, $d = -\sqrt{5}$ 15. a) $AB = \sqrt{58}$; $r = \frac{\sqrt{58}}{2}$; $S = (5\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, b) tak

Sprawdź się: 1. D 2. C 3. BC 4. AC

7. Dowodzenie w geometrii (s. 74-79): 1. Wierzchołkowy: α_3 ; przyległe: α_2 i α_4 ; odpowiadający: β_4 ; naprzemianległy: β_2 ; taka sama miara jak β_1 : β_3 , α_2 , α_4 ; miara równa $180^\circ - \beta_1$: β_2 , β_4 , α_1 , α_3 2. a) 180° , 360° , b) 10° i 160° albo 85° i 85° 3. Para 1 — cecha bkb , Para 3 — cecha kbb , Para 4 — cecha bbb 4. a) 3 razy, b) 4 razy

Sprawdź się: 1. B, D i E (w dowolnej kolejności), następnie A i C. 2. Tak, B.

8. Zadania testowe (s. 79-84): 1. D 2. D 3. D 4. B 5. D 6. PPF 7. AD 8. C 9. B 10. TAK, B 11. FPP 12. C 13. B 14. C 15. D 16. NIE, NIE, NIE 17. B 18. BC 19. C 20. B 21. BD 22. PPF 23. B 24. A 25. a) C, b) D 26. D 27. D 28. C 29. D 30. a) B, b) D

IV

Zastosowania matematyki

1. Obliczenia procentowe (s. 85-88): 1. $a = b$ 2. Ok. 35,7% 3. 260 4. Lubi ok. 63,6%, nie lubi ok. 36,4% 5. a) 70%, b) 64%, c) 43,2%, d) 12,2%, e) 175%, f) 104%, g) 300%, h) 1000%, i) 450% 6. a) 14, b) 16, c) 13,31, d) 92,48, e) 3750, f) 3690, g) 6000, h) 13,4, i) 375 7. a) 20 zł, b) 25 zł, c) 700 zł, d) 3000 zł, e) 1250 zł, f) 700 zł 8. a) Ok. 2,7 mln km^2 , b) ok. 57%, c) ok. 37,8 mld ton 9. a) 800 zł, b) 15%, c) 224 zł 10. a) 0,18 g, b) 85 g 11. $a \approx 53,3$, $b = 6,45$, $c \approx 85,8$ 12. a) 67 500 gatunków, b) w 20 250 gatunkach; 4,5%, c) 243 gatunki 13. a) 93%, b) ok. 23 razy 14. 82,5 g 15. W VIII b 16. a) 100 g, b) 720 g 17. a) $b = 738$, b) $66\frac{2}{3}\%$, c) 150% 18. a) 0,8 g, b) 1,25 g, c) 6%; 37,2%, d) 18 mg 19. a) 27,5%, b) ok. 333 g 20. a) 5%, b) ok. 27%

Sprawdź się: 1. D 2. A

2. Zmiana o dany procent. Lokaty bankowe (s. 89–94): 1. 50 2. O $33\frac{1}{3}\%$ 3. 300 zł
 4. O 75% 5. 1234,50 zł 6. 1452 zł 7. O 25% 8. a) 1433,8, b) 1474, c) 1715,2, d) 3015,
 e) 4623 9. a) 1987,2, b) 1944, c) 1468,8, d) 432, e) 21,6 10. a) 112 zł, b) 58 000 zł
 11. a) O 21%, b) o ok. 19%, c) 3,36 zł, d) 34 kradzieże 12. a) Cenę kurtki, b) cenę
 kurtki, c) spodnie, d) kurtka 13. a) Ok. 709 hPa, b) 200 hPa, c) o 25% 14. a) 600 zł,
 b) 150 zł, c) 49,68 zł, d) 138 zł 15. a) 1050 zł, b) 20 940 zł, c) 841,60 zł, d) 561,80 zł
 16. a) 7%, b) 5,5%, c) 5,3%, d) 5,25% 17. a) 108 160 zł, b) 22 050 zł, c) 5618 zł,
 d) 17 808,40 zł, e) 56 498,45 zł, f) 1 134 225 zł 18. a) Mniej, b) o 4% (w śróde było
 mniej widzów) 19. 60 zł 20. a) Ok. 79 840 tys., b) ok. 79 680 tys. 21. a) O ok. 36%,
 b) o ok. 46% 22. O 35% 23. B₁ — ok. 1,8 mg, B₂ — ok. 2,3 mg, PP — ok. 14,7 mg,
 C — ok. 204 mg 24. a) 352, b) o 2 punkty procentowe, c) o 26 punktów procentowych,
 d) o ok. 6,7%, e) o 81,25%, f) ok. 46%, g) 24%; 66 ankietowanych, h) 154 ankietowanych
 25. Druga, o 40 groszy 26. a) Tak, tak, b) nie, tak 27. O 12,36% 28. 11%
 29. a) Oferta 2, b) oferta 1

Sprawdź się: 1. D 2. PPFF 3. AD 4. C 5. FFF

3. VAT i inne podatki (s. 94–98): 1. a) 94,5, b) 38,5, c) 135,89, d) 1242
 2. a) O 75%, b) o 300%, c) o ok. 67% 3. a) $x = 1600$, b) $x = 12\,916$ 4. a) $x = 1200$,
 b) $x = 1456$ 5. a) 5% — 1522,50 zł, 8% — 1566 zł, 23% — 1783,50 zł, b) 5% — 1380,95,
 8% — 1342,59 zł, 23% — 1178,86 zł 6. a) 4305 zł, b) ok. 47 609,76 zł, c) ok. 1414,41 zł
 7. Bluzka — 136,53 zł, koszula — 114,39 zł, czapka i szalik — 66,42 zł, marynarka —
 420,66 zł 8. a) 1068 zł, b) 2612,92 zł, c) 4546,70 zł, d) 2877,88 zł. 9. 36 zł,
 8% 10. a) 25 gr, b) 1,50 zł, o 12 gr 11. a) Ok. 2307,48 zł, b) Wysokość VAT ob-
 liczamy, odejmując od ceny brutto cenę netto, czyli $b - b : 1,23 \approx 18,7\%b$, c) 2307,58 zł
 i jest o 10 gr wyższa od wartości otrzymanej w punkcie a) 12. a) Ok. 4,76%, b) ok. 7,41%,
 c) ok. 18,7% 13. a) 600 talarów, 1350 talarów, b) 3200 talarów, 7600 talarów, c) 3800 ta-
 larów 14. a) O 246,08 zł, b) są równe, c) 65 000 zł, 85 000 zł, 86 000 zł, 100 000 zł

Sprawdź się: 1. B 2. PFPP

4. Czytanie diagramów (s. 98–103): 1. a) 2400 biletów, b) o 200 biletów, c) o 20%
 biletów 2. a) W 2015 roku, b) w 2016 roku, c) w 2015 roku 3. a) 16%, b) 5 razy,
 c) 216° 4. a) 4%, b) 8 razy, c) z 5000 arkuszy, d) 300 arkuszy 5. a) 24, b) 40, c) 25%,
 d) 15% 6. e) Ok. 62% 7. a) Ok. 1,6%, b) 129, c) ok. 4% 8. a) Roztwór I — stężenie
 20%, roztwór II — stężenie 12,5%, b) (68,12) 9. a) Roztwór A — stężenie 20%, roztwór B
 — stężenie 15%, b) (50,43) 10. d) O 32,2 mld ton, e) 19,6%, f) ok. 14,1 mld ton
 11. a) W 1960 r. — drugie, w 2007 r. — trzecie, b) Ameryka Płn. i Afryka; nie, d) w Afryce
 12. a) O 47 mln t, b) w 1913 r., c) w 1913 r. — ok. 27%, w 1980 r. — ok. 12%, w 2006 r.
 — ok. 2% 13. a) Lipiec; sierpień, b) 19°C , c) między kwietniem i majem oraz między
 październikiem i listopadem, d) w czerwcu i w sierpniu, e) drugie

Sprawdź się: 1. PPP 2. D

5. Podział proporcjonalny (s. 104–107): 1. a) 3:1, b) 1:2 2. a) 10 zł i 20 zł,
 b) 6 zł i 12 zł 3. a) 1:3, b) 2:3:7, c) 2:4:6 lub inaczej 1:2:3 4. a) 42,5 g miedzi,
 7,5 g cynku, b) 16:9 (żelazo:nikiel), c) 0,5 kg niklu, 1,5 kg cynku 5. a) 8:6 lub inaczej
 4:3, b) 2 kg kapusty i 1,5 kg grochu 6. a) 6:4 lub inaczej 3:2, b) 240 l propanu i 160 l
 butanu 7. a) 12:10:1, b) 48 g, 40 g, 4 g 8. a) 4:1:3, b) 250 ml czarnej herbaty, 62,5 ml

zielonej herbaty i 187,5 ml suszonych owoców 9. 40 10. a) 40 zł, 80 zł, b) 30 zł, 90 zł, c) 20 zł, 100 zł, d) 48 zł, 72 zł, e) 50 zł, 70 zł, f) 54 zł, 66 zł 11. 24 12. a) 1200 ml — pomarańczowego, 1800 ml — grejpfrutowego 13. a) $6\frac{2}{3}$ szklanki mąki, b) $1\frac{4}{5}$ szklanki cukru 14. a) 1,5 kg, b) 1 kg 15. a) 37,5 dag, b) 20 dag 16. 20 cm, 80 cm 17. 1 litr niebieskiej, 1,5 litra czerwonej 18. 1050 zł 19. Polska — 16 godzin, Urugwaj — 10 godzin, Japonia — 15 godzin 20. a) 3 l, 6 l, 9 l, b) 5 km, 10 km, 15 km, 10 km, c) 20 000 zł, 40 000 zł, 60 000 zł, 80 000 zł, 100 000 zł 21. 20° , 60° , 100° 22. 2,5 m

Sprawdź się: 1. BC 2. D 3. PPP

6. Obliczanie prawdopodobieństw (s. 107–111): 1. a) 6, b) 2, c) $\frac{1}{3}$ 2. a) $\frac{1}{200}$, b) $\frac{199}{200}$ 3. a) $\frac{2}{9}$, b) $\frac{5}{9}$, c) $\frac{5}{9}$, d) 0, e) 1 4. a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{10}$, c) $\frac{3}{10}$, d) $\frac{2}{5}$, e) $\frac{1}{5}$, f) $\frac{9}{20}$, g) 0, h) 1 5. a) BARBARA, b) BAR, c) RABARBAR 6. a) $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, b) $\frac{1}{3}$, c) $\frac{1}{4}$ 7. a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{4}{5}$ 8. a) $\frac{3}{5}$, b) $\frac{19}{49}$, c) $\frac{5}{8}$ 9. a) $\frac{1}{5}$, b) $\frac{1}{3}$, c) $\frac{2}{5}$, d) $\frac{1}{2}$, e) $\frac{1}{2}$, f) 1, g) 0 10. a) $\frac{3}{10}$, b) $\frac{3}{5}$, c) $\frac{1}{2}$, d) $\frac{2}{3}$, e) $\frac{4}{5}$ 11. a) $\frac{7}{8}$, b) $\frac{3}{10}$, c) $\frac{1}{3}$ 12. a) W grupie 1, b) w grupie 1, c) 3 razy, d) $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{9}{50}$ 13. a) 15, b) 20, c) 6

Sprawdź się: 1. A 2. FF 3. D

7. Odczytywanie wykresów (s. 111–120): 1. I — godzinie trzeciej przypisano dwie różne temperatury, II — nie zaznaczono pomiaru o godzinie trzeciej 2. a) $A = (1, 1)$, $B = (2, -3)$, $C = (3, 2)$, $D = (4, 4)$, $E = (5, -3)$, b) za pierwszym razem wyrzucono liczbę 1, za drugim — liczbę -3, za trzecim — liczbę 2, za czwartym — liczbę 4, za piątym — liczbę -3, c) o 7, d) -5 i -6, e) nie, f) -3 3. a) W 2013 r., 10 tys. sztuk, b) 2014 r., c) wzrost — firma B, spadek — firma C, d) w 2015 r. i w 2016 r., e) firma C 4. I. firma X, II. firma X, III. firma Y, IV. firma Z, V. firma X 5. a) 31 osób, b) 6, 10 i 13 października, c) 3 października; 6 uczniów, d) środą 6. a) Najniższa w Rumunii, najwyższa w Holandii, b) o 50%, c) w Danii 7. a) Początek o 10^{00} , koniec o 17^{00} , b) 70 km, c) o 13^{00} , 2 godziny, d) po 20 km, e) $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, f) $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ 8. a) Ok. 9°C , b) ok. -43°C , c) 5 km, d) o ok. 7°C 9. a) Ok. 13 N, 50 N, 200 N, b) rośnie, c) wyższych niż ok. $55 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ 10. a) W sobotę, b) 300 zł, c) w sobotę i niedzielę 11. a) 55–59 i 60–64, b) 60–64 oraz 70–74, c) u kobiet 65–69, u mężczyzn — 80–84 12. b) Czerwiec, lipiec, sierpień; styczeń, luty, grudzień, c) większa, d) we wrześniu; średnia arytmetyczna dobową jest wyliczana na podstawie więcej niż dwóch pomiarów 13. a) 4 dni, b) 1 I, 19 I, 22 I, 23 I, c) 23 I, d) przez 7 dni, e) 5 dni 14. a) Ok. 3 mln sztuk, b) ok. 68 mln sztuk, c) w 1990 r., d) do ok. 1979 r. i od ok. 1998 r. 15. a) Na końcu, b) ok. 2,90 zł, c) w czerwcu 2006, ok. 4,01 zł, d) 3,90 zł, po czterech miesiącach, e) dolara — ok. 17%, euro — ok. 7%, f) o ok. 30% droższe euro w stosunku do dolara, o ok. 20% tańszy dolar w stosunku do euro 16. a) W 2008 r., o 10 000 osób, b) 2007, c) największa w 2006 r., najmniejsza w 2009 r. 17. a) 2 km, b) 5 min, 7 min, c) $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $7,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, d) $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ 18. I. C, II. A, III. D., IV. B 19. a) 2005 r. — ok. 5 razy, 2013 r. — ok. 6 razy, b) o ok. 1 mln, więcej niż 21 mln

Sprawdź się: 1. FPP 2. BD 3. C

8. Zadania testowe (s. 121–130): 1. A 2. B 3. B 4. C 5. C 6. B3 7. D 8. AD 9. B 10. B 11. C 12. PFF 13. B 14. B 15. PPF 16. C 17. D 18. AD 19. BC 20. D 21. C 22. C 23. B 24. C 25. C 26. PFPF 27. D 28. C 29. C 30. BC 31. PFPF 32. PFPF 33. C 34. PPF 35. AD 36. PFP 37. D 38. C 39. C 40. PFPF 41. BC 42. FFF 43. AC

V

Graniastolupy i ostrosłupy

1. Pole powierzchni i objętość graniastolupa (s. 131–133): 1. a) 7 ścian, 15 krawędzi, 10 wierzchołków, b) 9 ścian, 21 krawędzi, 14 wierzchołków 2. 24 cm^2 3. 70 cm^3 4. $\sqrt{13} \text{ cm}$ 5. a) $V = 125 \text{ cm}^3$, $P = 150 \text{ cm}^2$, b) $V = 189\sqrt{7} \text{ cm}^3$, $P = 378 \text{ cm}^2$, c) $V = 60 \text{ cm}^3$, $P = 94 \text{ cm}^2$, d) $V = 12 \text{ cm}^3$, $P = (12 + 12\sqrt{3}) \text{ cm}^2$ 6. a) 5 m, b) $\sqrt[3]{7} \text{ cm}$, c) 2 dm, d) $\sqrt[3]{2} \text{ dm}$ 7. a) Co najmniej 4 dm, b) co najmniej 50 dm, c) co najmniej 1 dm 8. a) $V = 1200 \text{ cm}^3$, $P = 760 \text{ cm}^2$, b) $V = 1600 \text{ cm}^3$, $P = 920 \text{ cm}^2$, c) $V = 180 \text{ cm}^3$, $P = 256 \text{ cm}^2$ 9. a) 50, b) 60 10. a) $P = 2\sqrt{3} + 36$, $V = 6\sqrt{3}$, b) $P = 18\sqrt{3} + 36$, $V = 18\sqrt{3}$, c) $P = 12\sqrt{3} + 72$, $V = 36\sqrt{3}$, d) $P = 108\sqrt{3} + 72$, $V = 108\sqrt{3}$ 11. $V = 125 \text{ cm}^3$ 12. $0,75 \text{ cm}$ 13. $(150 + 12,5\sqrt{3}) \text{ cm}^2$ 14. 12 ton 15. Na podstawie zewnętrznych wymiarów otrzymujemy 787,5 litra. 16. a) 960 dm^3 , b) podłoga: 240 dm^2 , ściany: 48 dm^2 , 200 dm^2 17. 5 cm 18. a) 24, b) 216

Sprawdź się: 1. D 2. FFF

2. Odcinki w graniastolupach (s. 134–137): 1. AC — przekątna podstawy, AE_1 — przekątna ściany bocznej, AD_1 — przekątna graniastolupa 2. a) $\sqrt{3}$, b) $2\sqrt{3}$ 3. $\sqrt{34} \text{ cm}$, $5\sqrt{2} \text{ cm}$, $5\sqrt{5} \text{ cm}$, 13 cm 4. a) 10, b) 18 5. a) $6\sqrt{2}$, $2\sqrt{13}$, b) $8\sqrt{2}$, $2\sqrt{41}$, c) $2\sqrt{61}$, $\sqrt{181}$, d) $\sqrt{146}$, $\sqrt{106}$ 6. a) $\sqrt{3} \text{ m}$, b) $\sqrt{170} \text{ m}$, c) $\sqrt{5} \text{ m}$ i 2 m 7. a) $\sqrt{3} \text{ cm}$, b) 3 cm, c) $30\sqrt{2} \text{ cm}$, d) $20\sqrt{3} \text{ cm}$ 8. a) $96\sqrt{3} \text{ cm}^3$, b) 384 cm^3 , c) $576\sqrt{3} \text{ cm}^3$ 9. a) 12, 5, 13, b) 5, $6\sqrt{3}$, $\sqrt{133}$, c) 12, $\sqrt{61}$, $\sqrt{133}$ 10. a) $\sqrt{22} \text{ m}$, b) $\sqrt{14} \text{ m}$, c) $\sqrt{5} \text{ m}$ i $\sqrt{13} \text{ m}$ 11. a) $14 + 2\sqrt{7}$, b) 26, c) $20 + 6\sqrt{2}$, d) $13 + 6\sqrt{65}$ 12. a) 50, b) $25\sqrt{3}$, c) $31,25\sqrt{3}$, d) $6,25\sqrt{51}$ 13. Przekątna teczki ma długość $\sqrt{15^2 + 50^2 + 30^2} = 5\sqrt{145} \approx 60,2 \text{ cm}$, więc jest krótsza od parasola. 14. a) 2, b) 4, c) 8, d) 12 15. $AE = 4$, $AB = 6$, $AD = 3$, $AC = 3\sqrt{5}$, $AF = 2\sqrt{13}$, $AH = 5$, $AG = \sqrt{61}$ 17. a) $2n$, b) $n^2 - 3n$ 18. $384\sqrt{2} + 144$. Wskazówka. Oznacz przekątną podstawy jako $3x$ i zastanów się, jaką długość ma wówczas przekątna graniastolupa.

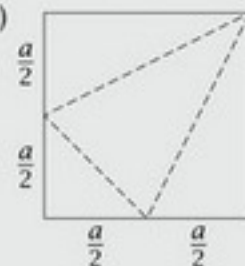
Sprawdź się: 1. C 2. BC 3. A — VI, B — IV, C — VI, D — I

3. Rodzaje ostrosłupów (s. 137–141): 1. VI 2. a) I — 3, II — 5, III — 4, IV — 4, V — 5, b) I — 4, II — 6, III — 5, IV — 5, V — 6 3. a) Wielokątem foremnym, b) przystającymi trójkątami równoramiennymi, c) wysokość ostrosłupa, d) w punkcie jednakowo odległym od wierzchołków podstawy 4. Ostrosłup prawidłowy czworokątny 5. a) 7 ścian, 12 krawędzi, 7 wierzchołków, b) 9 ścian, 16 krawędzi, 9 wierzchołków 6. a) 6 krawędzi, 4 ściany, 4 wierzchołki, b) 8 krawędzi, 5 ścian, 5 wierzchołków, c) 10 krawędzi, 6 ścian, 6 wierzchołków, d) 12 krawędzi, 7 ścian, 7 wierzchołków 8. a) 8 krawędzi, 5 ścian, 5 wierzchołków, b) 6 krawędzi, 4 ściany, 4 wierzchołki, c) 12 krawędzi, 7 ścian, 7 wierzchołków, d) 10 krawędzi, 6 ścian, 6 wierzchołków 9. a) 14 krawędzi, 8 ścian, 8 wierzchołków, b) 26 krawędzi, 14 ścian, 14 wierzchołków, c) 440 krawędzi, 221 ścian, 221 wierzchołków, d) $2k$ krawędzi, $k + 1$ ścian, $k + 1$ wierzchołków 10. a) 42 mm, b) 72 cm, c) 180 dm, d) $6n$ metrów 11. a) 420 cm, b) 840 cm, c) 21 m, d) $105k \text{ cm}$ 12. a) 30 cm, b) krawędź podstawy — 20 cm, krawędź boczna — 40 cm, c) krawędź podstawy — 10 cm, krawędź boczna — 50 cm 13. a) Nie, b) nie 14. Trójkątny, czworokątny, pięciokątny 15. a) 61, b) 50, c) $23 + 12\sqrt{2}$, d) $34 + 8\sqrt{5}$, e) $32 + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{6}$ 16. Wysokość ostrosłupa zawiera się w ostrosłupie, spodek wysokości leży wewnątrz podstawy. a) Wysokość ostrosłupa pokrywa się z wysokością jednej ze ścian bocznych, spodek wysokości leży na

krawędzi podstawy należącej do tej ściany bocznej. b) Wysokość ostrosłupa pokrywa się z jedną z krawędzi bocznych, spodek wysokości leży w wierzchołku podstawy, z którego wychodzi ta krawędź boczna. c) Wysokość ostrosłupa leży poza ostrosłupem, spodek wysokości leży poza podstawą. 17. a) Wszystkie krawędzie **boczne/podstawy** ostrosłupa prawidłowego są równej długości. b) Ściany boczne ostrosłupa **prawidłowego** są przystającymi trójkątami równoramiennymi. c) Dowolny trapez **nie** może być podstawą ostrosłupa./Dowolny trapez nie może być podstawą ostrosłupa **prawidłowego**. d) Ostrosłup o podstawie czworokątnej **nie** jest czworościanem. e) Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest wielokąt **foremny**. f) Każdy ostrosłup o czterech ścianach nazywamy czworościanem **foremnym**. 18. a) W ostrosłupie liczba krawędzi bocznych jest równa liczbie krawędzi podstawy, a suma dwóch równych liczb jest liczbą parzystą ($n + n = 2n$). b) Jeżeli ostrosłup ma parzystą liczbę wszystkich ścian, to ma nieparzystą liczbę ścian bocznych, czyli nieparzystą liczbę wierzchołków w podstawie, a zatem, gdy doliczymy wierzchołek ostrosłupa, otrzymamy parzystą liczbę wszystkich wierzchołków. c) Ostrosłup ma po tyle samo ścian bocznych, krawędzi bocznych i krawędzi podstawy. Zatem ścian bocznych w ostrosłupie jest dwa razy mniej niż wszystkich krawędzi.

Sprawdź się: 1. FPF 2. C 3. D

4. Siatki ostrosłupów. Pole powierzchni (s. 141–146): 1. a) Cztery przystające trójkąty równoramienne, jeden kwadrat, b) osiem przystających trójkątów równoramiennych, jeden ośmiokąt foremny 2. Czworościan foremny; 6 krawędzi i 4 wierzchołki 4. a) 2000 mm^2 , $0,2 \text{ dm}^2$, b) 300 cm^2 , $0,03 \text{ m}^2$, c) $0,04 \text{ a}$, 400 dm^2 , d) 300 a , $30\,000 \text{ m}^2$ 5. A – I, B – III, C – II 7. a) 48, b) 32, c) 25 8. a) $6 + 2\sqrt{3}$, b) $16 + 16\sqrt{3}$ 9. $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$ 10. a) $(25\sqrt{3} + 180) \text{ cm}^2$, b) 340 cm^2 11. Wskazówka. Rozważ wszystkie możliwe ułożenia trójkątów w siatce czworościanu. 12. a) $2\sqrt{3}$, b) $4\sqrt{3}$, c) $8\sqrt{3}$, d) $3\sqrt{3}$. Wskazówka. Narysuj drogi na siatce czworościanu. 13. Nie wystarczy. 14. $48\sqrt{6} + 36\sqrt{3}$ 15. 1508 cm^2 16. $\sqrt{58} \text{ cm}$ 17. $16 + 16\sqrt{15} \text{ cm}^2$ 18. $1,5\sqrt{39} \text{ m}^2 \approx 9,4 \text{ m}^2$ 19. a) $a^2\sqrt{3}$, b) $2a^2\sqrt{3}$, c) $3a^2\sqrt{3}$ 20. Krawędź podstawy – 2, krawędź boczna – $\sqrt{109}$ 21. a) b) 25 22. Wskazówka. Zastanów się, który punkt będzie spodkiem wysokości ostrosłupa, jeżeli najpierw sklejmy ściany mające kształt trójkątów prostokątnych, a który – jeżeli zaczniemy sklejanie od ścian w kształcie trójkątów równoramiennych.



Sprawdź się: 1. B 2. D 3. FPP 4. PP

5. Objętość ostrosłupa (s. 146–151): 1. a) 9, b) 9, c) 9 2. a) 40 cm^3 , b) 30 cm^3 , c) 50 cm^3 3. a) 2000 mm^3 , $0,002 \text{ dm}^3$, b) $40\,000 \text{ cm}^3$, $0,04 \text{ m}^3$, c) 500 dm^3 , $500\,000 \text{ cm}^3$ 4. $P_p = \frac{3V}{h}$, $h = \frac{3V}{P_p}$ 5. a) Objętość sześcianu = 27 cm^3 , Objętość ostrosłupa = 9 cm^3 , b) ok. 25 cm^3 6. 20 cm^3 7. a) $0,24 \text{ m}$, b) 3 m , c) 40 m 8. a) $1600 \text{ dm}^3 = 1,6 \text{ m}^3$, b) $480\sqrt{3} \text{ mm}^3 = 0,48\sqrt{3} \text{ cm}^3$, c) $240\,000\sqrt{3} \text{ cm}^3 = 0,24\sqrt{3} \text{ m}^3$, d) $600 \text{ cm}^3 = 0,6 \text{ dm}^3$ 9. a) 60 cm^3 , b) 160 cm^3 , c) $60\sqrt{3} \text{ cm}^3$ 10. a) 60, b) 40, c) 40, d) 60 11. a) 6, b) 6, c) 6, d) 12 13. a) 3 razy, b) 3 razy, c) 3 razy 14. 20 cm^3 15. Nie 16. 24 cm^3 17. a) 8820 m^3 , b) ok. 1946 m^2 18. a) 6,75, b) 4,5, c) 4,5 19. a) 192 dm^3 , b) 256 dm^3 . Wskazówka. Możesz skorzystać z rozwiązania zadania 5a. 20. a) $7\frac{1}{2}\sqrt{3}$, b) 18 21. $\frac{5}{3}a^3$ 22. 10 cm 23. 20 cm^3 24. Objętość torebki – około 5 cm^3 , masa cukru w torebce – około 8 g, liczba łyżeczek w torebce – około 1,6. W rzeczywistości tego typu torebki zawierają ok. 4 g cukru. Wskazówka. Zauważ, że odcinki AB

i AC są równe (jako wysokości przystających trójkątów równoramiennych). Oblicz ich długość, a następnie pole trójkąta równoramiennego ABC . Zauważ, że jedna z wysokości tego trójkąta (poprowadzona do ramienia) jest też wysokością ostrosłupa. Wyznacz jej długość na podstawie obliczonego wcześniej pola trójkąta ABC . 26. $\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ dm}^3$ 27. 250

Sprawdź się: 1. B 2. C 3. C 4. BC

6. Odcinki w ostrosłupach (s. 151–154): 1. a) SD , b) AB , c) CS , d) SA , SB

2. Przekątna podstawy — $\sqrt{2}$; krawędzie boczne — $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 3. a) $SD = 1$, b) $SC = \sqrt{2}$,

c) $AS = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, d) $BC = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$ 4. a) 6, b) $3\sqrt{2}$, c) $4\sqrt{3}$, d) $2\sqrt{3}$ 5. a) $x = \sqrt{89}$,

b) $x = 12$, c) $x = 2\sqrt{13}$, d) $y = \sqrt{91}$, e) $y = 3\sqrt{5}$, f) $y = \sqrt{97}$ 6. a) $4\sqrt{10} \text{ cm}$,

b) 10 cm 7. $\sqrt{61} \text{ cm}$ 8. a) $\sqrt{41}$, b) 5 9. $5\sqrt{274} \text{ cm} \approx$

$\approx 83 \text{ cm}$ 10. Nie 11. $3\sqrt{2}$ Wskazówkę zawiera rysunek:

12. a) $26 + \sqrt{34}$, b) $58 + 2\sqrt{41}$, c) $54 + 2\sqrt{61} + 2\sqrt{133}$ 13. Krawędź podstawy — $2\sqrt{13} \text{ cm}$, krawędzie boczne — 10 cm i $4\sqrt{5} \text{ cm}$

14. a) Krawędź podstawy — $8\sqrt{2}$, krawędź boczna — 10 , b) krawędź podstawy — 16 , krawędź boczna — $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ 16. Ok. $0,01 \text{ mm}^3$

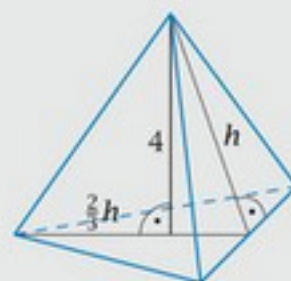
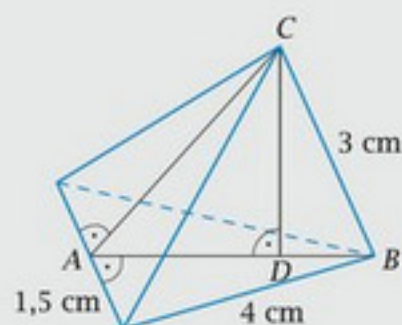
Sprawdź się: 1. PPF 2. AC

7. Zadania testowe (s. 155–161): 1. B 2. C 3. B 4. B 5. C 6. PF 7. D 8. AD

9. A 10. a) B, b) C 11. PF 12. B 13. D 14. A 15. C 16. D 17. D 18. NIE, D

19. B 20. a) C, b) C 21. A 22. a) A, b) A 23. a) D, b) C 24. B 25. B 26. B

27. A 28. C 29. D 30. A 31. B 32. C 33. B 34. C 35. BCE



VI

Symetrie

1. Symetria względem prostej (s. 162–170): 1. a) 9, 3, 11, W, b) 0 i 8 2. a) A, E,

F, G, I, b) B, C, D, F, G, c) Prosta PI jest prostopadła do prostej m , prosta PC jest prostopadła do prostej n , d) CP i BI , e) P i C 3. a) 8:00, b) 2:30, c) 5:45, d) 7:10

4. a) C i D , b) E i B , c) C i E 5. a) Tak, b) nie, c) nie, d) tak 6. a) B względem

prostej m , C względem prostej l , D względem prostej k , b) B względem prostej k , C względem

prostej l , D względem prostej m , c) B względem prostej m , C względem prostej k ,

D względem prostej l 7. a) A i H , B i G , C i F , D i E , b) AB i HG , AC i HF , BC i GF ,

AD i HE , BD i GE , CD i FE , c) ACD i HFE , ABD i HGE , BCD i GFE 8. a) Względem

prostej k — AB i CB , względem prostej l — AB i ED , BC i DC , b) względem prostej k —

AB i DC , AC i DB , AD i DA , BC i CB , względem prostej l — BC i ED , BD i EC , BE

i EB , CD i DC , c) względem prostej k — BC i DC , BD i DB , BA i DE , względem prostej

l — CD i ED 10. a) m , b) k , c) k 12. a) F_1 — d , F_2 — c , F_3 — b , F_4 —

a , b) F_1 — b , F_2 — c , F_3 — d , F_4 — a 18. a) $A' = (3, -2)$, $B' = (-4, -3)$, $C' = (-1, 2)$,

$D' = (2, 1)$, b) $A' = (-3, 2)$, $B' = (4, 3)$, $C' = (1, -2)$, $D' = (-2, -1)$ 19. a) $A' = (0, 0)$, $B' = (5, 0)$,

$C' = (5, -3)$, b) $A' = (4, 0)$, $B' = (0, 2)$, $C' = (3, 4)$ 20. a) $A' = (3, 5)$, $B' = (-1\frac{1}{2}, -2)$,

$C' = (-420, 0)$, $D' = (0, -370)$, $E' = (-140, 250)$, $F' = (630, 150)$, $G' = (330, -240)$,

$H' = (-210, -450)$, b) $A' = (-3, -5)$, $B' = (1\frac{1}{2}, 2)$, $C' = (420, 0)$, $D' = (0, 370)$, $E' = (140, -250)$,

$F' = (-630, -150)$, $G' = (-330, 240)$, $H' = (210, 450)$ 21. a) $(2, 0)$, b) $(-8, 4)$, c) $(4, 2)$

22. a) $AD = 16$ cm, b) $AD = 15$ cm, c) $AD = 17$ cm 23. a) 14 cm², b) 12 cm² 24. BCD
 25. ABC 26. a) 20 cm, b) 14 cm lub 16 cm 27. a) $130^\circ, 20^\circ, 80^\circ, 130^\circ$ lub $10^\circ, 260^\circ, 80^\circ, 10^\circ$ lub $40^\circ, 20^\circ, 260^\circ, 40^\circ$, b) $90^\circ, 90^\circ, 160^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 200^\circ$ 30. 18 cm 31. a) Zawiera przekątną rombu. b) Na przykład zawiera wysokość poprowadzoną z wierzchołka, który jest końcem krótszej przekątnej rombu. 32. a) Przechodzi przez środki podstaw. b) Równoległa do jednej przekątnej i poprowadzona tak, że romb wycina z niej odcinek o długości $\frac{d}{\sqrt{2}}$, gdzie d oznacza długość tej przekątnej. 34. a) $S = (a, 4 + b)$, b) $S = (a, 2 + b)$, c) $S = (a, 2n + b)$

Sprawdź się: 1. PPFF 2. B 3. A 4. TAK, TAK

2. Oś symetrii figury (s. 170–175): 1. a) Tak, b) tak, c) tak, d) nie 3. a) Trzy, b) cztery, c) dwie, d) sześć 4. Gdańsk, Elbląg, Rzeszów 5. Oś symetrii — Słońce, Księżyc, Merkury, Wenus, Ziemia, Mars, Uran, Neptun; więcej niż jedną oś symetrii — Słońce, Ziemia 6. a) Cztery, b) dwie, c) jedną, d) nieskończenie wiele, e) dwie, f) dwie, g) trzy, h) jedną 7. a) $(8, -2), (3, -7)$; trapez równoramienny, b) $(-8, 2), (-3, 7)$; trapez równoramienny 8. a) $C = (0, -6), P = 24$, b) $C = (4, 0), P = 24$ 9. a) $C = (6, 1), D = (4, 8); P = 18$, b) $C = (-6, -1), D = (-4, -8); P = 70$ 10. b) Bliźnięta, Ryby 18. ABCEF 19. a) Początek półprostej leży na osi symetrii albo półprosta i oś przecinają się, ale nie są prostopadłe. b) Są prostopadłe i przecinają się, ale nie w początku półprostej. c) Półprosta leży na osi symetrii. 20. Wskazówka. a) Oś symetrii zawiera wysokość trójkąta. b) Oś symetrii zawiera jeden z boków trójkąta. c) Oś symetrii jest prostopadła do jednego z boków trójkąta, przechodzi przez trójkąt, ale nie zawiera wierzchołka. d) Oś symetrii przecina dwa boki trójkąta w punktach, których odległość od wierzchołka wspólnego dla tych boków jest mniejsza niż połowa długości boku i równoległa do trzeciego boku trójkąta. 21. a) 5 m, b) 4 cm 22. a) 25 m²; 50 m², b) $3,5$ m i $1,5$ m, c) 2 m i 3 m 25. Dwie lub cztery

Sprawdź się: 1. C 2. PPFP

3. Symetralna odcinka (s. 175–177): 1. Oś symetrii zawiera odcinek lub jest do niego prostopadła i dzieli go na dwie równe części. 2. Te punkty leżą na symetralnej odcinka. 7. Wskazówka. Są dwa takie punkty (leżą w miejscu przecięcia symetralnej odcinka AB z brzegami basenu). 14. a) 120° , b) 80° , c) 20° lub 160°

Sprawdź się: 1. FPP 2. AD

4. Dwusieczna kąta (s. 177–179): 1. 45° i 45° 2. Te punkty leżą na dwusiecznej kąta. 4. a) $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ i $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, b) $35^\circ, 55^\circ, 90^\circ$ i $20^\circ, 35^\circ, 125^\circ$, c) $20^\circ, 40^\circ, 120^\circ$ i $20^\circ, 60^\circ, 100^\circ$ 6. a) $10^\circ, 55^\circ, 115^\circ$, b) $22,5^\circ, 45^\circ, 112,5^\circ$, c) $50^\circ, 65^\circ, 65^\circ$ 7. a) 60° , b) 45° 8. a) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$, b) $80^\circ, 80^\circ, 20^\circ$ 10. a) Wskazówka. Wykaż, że dwusieczne przeciwległych kątów równoległoboku przecinają boki tego równoległoboku pod takimi samymi kątami. 11. a) $4:3$, b) 12 cm² i 9 cm²

Sprawdź się: 1. PFP 2. B

5. Symetria względem punktu (s. 179–185): 3. a) Względem punktów: F, T, H, J , względem prostych: R, D , b) względem punktów: $ZTRW, MHFK, OJHM$, względem prostych: $UPRW, ABLK, CHFA$, c) tylko figura niebieska ma oś symetrii 4. a) C i D , b) B i F , c) B i F 5. a) ED i CB , b) AS i CS , c) AS i CS 6. a) Nie, b) nie, c) nie, d) nie, e) tak, f) tak 7. a) $f_1 - E, f_2 - D, f_3 - C, f_4 - B$, b) $f_1 - A, f_2 - B, f_3 - E, f_4 - D$

8. Wskazówka. Odcinki łączące pary odpowiadających sobie punktów przecinają się w punkcie, względem którego końce odcinka są symetryczne. 14. $A' = (4, -1)$, $B' = (1, -2)$, $C' = (2, -4)$ 15. $A' = (-3, 5)$, $B' = (1\frac{1}{2}, -2)$, $C' = (420, 0)$, $D' = (0, -370)$, $E' = (140, 250)$, $F' = (-630, 150)$ 16. a) $(-3, -2)$, b) $(1, 2)$, c) $(3, 0)$ 17. a) $(2, 4)$, $(4, 4)$, $(6, 4)$, $(10, 4)$, $(20, 4)$, $(144, 4)$, $(2n, 4)$, b) $(0, -4)$, $(0, -6)$, $(0, -8)$, $(0, -10)$, $(0, -14)$, $(0, -44)$, $(0, -2n - 4)$ 18. a) $a = 4$, $b = 6$, b) $a = -4$, $b = -6$, c) $a = -4$, $b = 6$, d) $a = 2$, $b = -6$, e) $a = 4$, $b = -2$, f) $a = -2$, $b = 8$ 19. a) Na prostej AB , b) Jest środkiem odcinka AB , c) Jest jednym z końców odcinka AB . 20. 44 21. III, IV 22. a) Punkt S leży w odległości AB od punktu A . b) Punkt S leży w odległości większej niż AB od punktu A . c) Punkt S leży na odcinku AB . d) Punkt S leży w odległości AB od punktu A . 23. I, II 24. b) $(-5, 8)$, c) $(1, 4)$

Sprawdź się: 1. PPFF 2. BD 3. FFPF

6. Środek symetrii figury (s. 185–190): 1. 0, 8 3. Król trefl ($\clubsuit$), as karo ($\spadesuit$), 2 pik ($\heartsuit$) 4. Środek symetrii — Austria, Macedonia, Szwajcaria, Japonia, Jamajka; oś symetrii — wszystkie 5. I, III, IV 7. a) Środek i osie symetrii, b) osie symetrii, c) środek i osie symetrii, d) osie symetrii 8. a) P , b) R 9. $(-3, 2)$, $(6, 5)$; $P = 54$ 10. a) $(-3, -7)$, $(-8, -2)$, b) równoległobok 11. a) $(0, 2)$, b) $(-1, 0)$, c) $(-1, -4)$, d) $(3, 2)$ 12. a) Tak, b) nie, c) tak, d) tak 15. a) Równoległobok; tak 16. Z nieskończenie wielu elementów 17. I — tak, II — tak 19. Wskazówka. Zauważ, że dowolna prosta przechodząca przez środek symetrii prostokąta dzieli go na dwie części o takich samych polach. 21. a) $(-325, -155)$, b) $(120, -240)$, c) $(-70, 340)$, d) $(180, 380)$ 22. a) $(1, 1)$, b) $(1, 1)$, c) nie

Sprawdź się: 1. C 2. C 3. B

7. Zadania testowe (s. 190–194): 1. C 2. D 3. A 4. C 5. A 6. B 7. FFF 8. FFPP 9. A 10. B 11. B 12. C 13. A 14. BC 15. B 16. AD 17. C 18. PPF 19. B 20. B 21. C 22. D

VII

Koła i okręgi

1. Styczna do okręgu (s. 195–198): 1. A, C, D 2. a) Nie, b) tak, c) tak 3. a) Tak, b) tak, c) tak, d) tak 5. $7\sqrt{2}$ 6. a) 50° , b) 100° , c) 35° , d) 105° , e) 105° , f) 30° , g) 50° 7. 120° 8. $\alpha = 10^\circ$, $\beta = 140^\circ$, $\gamma = 95^\circ$ 9. 10 cm 11. a) 24, b) 84, c) $96\sqrt{2}$ 12. a) 12, b) 10, c) 10, d) $4\sqrt{5}$ 13. Ok. 19,55 km. Wskazówka. Skorzystaj z twierdzenia Pitagorasa. 14. Wskazówka. Prosta a jest symetralną odcinka AS .

Sprawdź się: 1. B 2. C 3. NIE, TAK, NIE

2. Wzajemne położenie dwóch okręgów (s. 198–200): 1. 0, 1 lub 2 2. a) 12 cm, b) 8 cm 3. a) Nie ma, b) jeden, c) dwa, d) dwa 4. a) 10, b) 6, c) 4 5. a) 10, b) 10, c) 12 6. a) Przecinają się, b) styczne wewnętrznie, c) rozłączne (wewnętrznie), d) rozłączne (zewnętrznie) 7. a) Tak, b) nie, c) tak 8. 12 9. $16 + 2\sqrt{15}$

Sprawdź się: 1. PFPP 2. C 3. C

3. Liczba π . Długość okręgu (s. 200–204): 1. a) 3,141593, b) 3,1416, c) 3,142, d) 3,14, e) 3,1, f) 3 2. a) 16 cm, b) 10 cm 3. a), b), f) — ujemne, c), d), e) — dodatnie 4. a) $\frac{1}{\pi}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}\pi$, $\frac{31}{10}$, π , $\frac{13}{4}$, 3,41, $\frac{3}{2}\pi$, b) -2π , $-\pi$, -3 , -2 , $-\frac{\pi}{3}$, -1 , $-\frac{3}{\pi}$, $-\frac{2}{\pi}$

5. a) $\frac{22}{7}$, b) 3,1, c) $\frac{60}{19}$, d) 3 6. a) $\frac{3}{4}\pi$, b) 6π , c) 123π , d) $4,2\pi$, e) $3\pi^2$,
 f) $3\sqrt{2}\pi$, g) $\frac{\sqrt{5}}{2}\pi$, h) $(\sqrt{6}-2)\pi$ 7. a) π , b) $\frac{5}{2}\pi$, c) 6π , d) 222π , e) $2\pi^2$,
 f) $2\sqrt{2}\pi$, g) $\sqrt{3}\pi$, h) $2(1+\sqrt{5})\pi$ 8. a) 31 cm, b) 628 cm 9. a) 4, b) 0,6, c) $\frac{5}{12}$,
 d) $\frac{5}{\pi}$, e) $\frac{1}{4\pi}$, f) $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$, g) $\frac{\pi}{2}$, h) $\frac{1}{\pi^2}$ 10. a) 3, b) 8,6, c) $\frac{4}{11}$, d) $\frac{7}{\pi}$, e) $\frac{2}{5\pi}$, f) $\frac{5\sqrt{2}}{\pi}$,
 g) 2π , h) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ 11. a) $\frac{9}{\pi}$, b) 1, c) $1+\frac{3}{\pi}$ 12. a) 5π , b) 2π , c) $4,5\pi$ 13. a) 2,
 b) 3, c) 3 14. a) 8π m, b) $\frac{11}{\pi}$ m 15. Wskazówka godzinowa: 6π cm, wskazówka
 minutowa: 96π cm 16. Ok. 5,73 m 17. a) 2 razy, b) 50 razy, c) 25 razy, d) 5 razy
 18. a) 4:1, b) 3:1, c) 1:16 19. Tak 20. a) Ok. 40 tys. km, b) ok. 3, c) ok. 1 h 25 min
 21. a) 23:16, b) 23:16, c) 23:16 22. b) Tak 23. W każdym przykładzie obwód jest
 równy 4π . Wskazówka: Zauważ, że suma długości promieni obu półokręgów jest równa 8.
 Oblicz sumę obwodów dowolnych okręgów, których promienie spełniają ten warunek.

Sprawdź się: 1. TAK, NIE 2. B 3. a) A, b) D 4. D

4. Pole koła (s. 205–210): 1. a) 31 400, b) 31 416 2. a) 4π m, b) π^2 m 3. a) 12 cm,
 b) $\frac{30}{\pi}$ mm 4. a) 49π , b) $\frac{9}{25}\pi$, c) $\frac{25}{9}\pi$, d) $0,16\pi$, e) $1,44\pi$, f) $\frac{1}{4}\pi^3$, g) 6π , h) 50π
 5. a) 16π , b) $\frac{25}{4}\pi$, c) $\frac{\pi}{9}$, d) $\frac{\pi}{144}$, e) π^3 , f) 12π , g) $\frac{5}{4}\pi$, h) $\frac{2}{49}\pi$ 6. a) $125 700 \text{ cm}^2$,
 b) 5000 cm^2 7. a) 1, b) $\frac{1}{4}$, c) 1,1, d) $\sqrt{2}$, e) $\frac{1}{\sqrt{5}}$, f) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, g) $\sqrt{\frac{5}{\pi}}$, h) $\frac{3}{\pi}$ 8. a) 14,
 b) $\frac{4}{5}$, c) 0,6, d) $2\sqrt{7}$, e) $\frac{2}{\sqrt{3}}$, f) $\frac{18}{\sqrt{\pi}}$, g) $2\sqrt{\frac{3}{\pi}}$, h) $\frac{20}{\pi}$ 9. a) 4 razy, b) 256 razy,
 c) 16 razy 10. a) 16π ; 25π ; 16π ; 9π , b) ok. 21,5%; ok. 34,6%; ok. 55,1%; ok. 52,9%,
 c) $\frac{8}{\sqrt{\pi}}$; $2\sqrt{\frac{30}{\pi}}$; $4\sqrt{\frac{7}{\pi}}$; $2\sqrt{\frac{15}{\pi}}$ 11. a) $P_1 = \pi \text{ cm}^2$, $l_1 = 2\pi \text{ cm}$; $P_2 = 0,09\pi \text{ km}^2$, $l_2 = 0,6\pi \text{ km}$;
 $P_3 = \frac{4}{9}\pi \text{ mm}^2$, $l_3 = \frac{4}{3}\pi \text{ mm}$; $P_4 = 4\pi \text{ dm}^2$, $l_4 = 4\pi \text{ dm}$, b) $P_1 = 0,25\pi \text{ km}^2$, $l_1 = \pi \text{ km}$; $P_2 =$
 $= 1,44\pi \text{ m}^2$, $l_2 = 2,4\pi \text{ m}$; $P_3 = \frac{1}{49}\pi \text{ cm}^2$, $l_3 = \frac{2}{7}\pi \text{ cm}$; $P_4 = 12,25\pi \text{ dm}^2$, $l_4 = 7\pi \text{ dm}$, c) $r_1 =$
 $= \frac{3}{\pi} \text{ dm}$, $r_2 = \frac{8}{5\pi} \text{ m}$, $r_3 = \frac{1}{2} \text{ km}$, $r_4 = 2 \text{ cm}$, d) $d_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \text{ cm}$, $d_2 = \frac{200\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \text{ m}$, $d_3 = 2 \text{ dm}$, $d_4 =$
 $= \sqrt{2} \text{ mm}$ 12. a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{3}{4}$ 13. a) 18π , b) 9π , c) 27π 14. a) Pole = $2,5\pi$, Obwód =
 $= 2 + 3\pi$, b) Pole = 3π , Obwód = 4π , c) Pole = $0,875\pi$, Obwód = $1 + 2,5\pi$, d) Pole =
 $= 1,125\pi$, Obwód = $1 + 2,5\pi$ 15. a) Pole = $3,5\pi$, Obwód = $2 + 7\pi$, b) Pole = $5,5\pi$,
 Obwód = $2 + 7\pi$, c) Pole = 4π , Obwód = 8π , d) Pole = 3π , Obwód = 8π 16. a) Pole =
 $= 17\pi$, Obwód = $8 + 7\pi$, b) Pole = 8π , Obwód = 6π , c) Pole = 31π , Obwód = $11\pi + 4$
 17. Pole = $16\pi \text{ m}^2$, Obwód = $16\pi \text{ m}$ 18. a) Pole = 15π , Obwód = 10π , b) Pole = 12π ,
 Obwód = 12π , c) Pole = 5π , Obwód = 10π 19. a) Suma obwodów = 20π , suma
 pól = 50π , b) suma obwodów = 20π , suma pól = 82π , c) suma obwodów = 20π , suma
 pól = 52π , d) suma obwodów = 20π , suma pól = 68π 20. a) $\frac{18}{\pi} \text{ m}^2$, b) $\frac{20}{\pi} \text{ m}^2$, c) $\frac{26}{\pi} \text{ m}^2$
 21. 9 bulajów 22. a) Ok. 1,38 mm, b) 2 razy 23. Dla bratków 24. a) $18 - \frac{9}{4}\pi$,
 b) $8 + 4\pi$, c) $22 + 5\pi$, d) $20 + \frac{5}{2}\pi$ 25. Ok. 8 km 26. a) $\frac{1}{36}$, b) 9 razy 27. $\frac{8}{9}$
 28. W każdym przykładzie suma pól kół jest równa $0,25\pi \text{ m}^2$. 29. $\frac{1}{\sqrt{2}}r$ 30. a) 8,
 b) Pole kwadratu (64) jest większe od pola pierścienia (16π).

Sprawdź się: 1. D 2. PP 3. C 4. C 5. AC

5. Zadania testowe (s. 210–213): 1. TAK, TAK 2. D 3. C 4. TAK, A 5. B 6. TAK,
 TAK, TAK 7. D 8. PF 9. C 10. C 11. B 12. D 13. A 14. AD 15. PP 16. C
 17. TAK, B 18. D 19. C 20. C 21. C

VIII

Rachunek prawdopodobieństwa

1. Ile jest możliwości? (s. 214–217): 1. Sześć; αx , αy , αz , βx , βy , βz 2. Na cztery;
 OR, RO, OO, RR 3. Dziewięć; 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33 4. a) 60, b) 45, c) 32

5. a) 30, b) na 20 sposobów, c) 380 6. a) 25, b) na 49 sposobów 7. 900 8. a) 81, b) 72 9. a) 25, b) 20, c) 15, d) 8 10. a) 125, b) 60, c) 25, d) 24 11. a) 162, b) 729 12. a) Na 6 sposobów, b) na 20 sposobów, c) na 25 sposobów 13. a) Na 60 sposobów, b) na 80 sposobów 14. a) 36; 5, b) 24; 3 15. a) Na 4032 sposoby, b) na 4096 sposoby

Sprawdź się: 1. B 2. BC 3. PPP

2. Obliczanie prawdopodobieństw (cd.) (s. 217-221): 1. a) $\frac{9}{29}$, b) $\frac{20}{29}$, c) $\frac{4}{29}$, d) $\frac{17}{29}$
 2. 6; 2; $\frac{1}{3}$ 3. 36; 5; $\frac{5}{36}$ 4. a) $\frac{1}{12}$, b) $\frac{1}{3}$, c) $\frac{11}{12}$, d) $\frac{5}{6}$ 5. a) $\frac{1}{10}$, b) $\frac{1}{5}$, c) $\frac{1}{5}$, d) $\frac{4}{5}$
 6. a) $\frac{1}{12}$, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{1}{6}$, d) $\frac{3}{4}$ 7. a) $\frac{1}{12}$, b) $\frac{1}{6}$, c) $\frac{1}{2}$, d) $\frac{1}{2}$ 8. a) $\frac{1}{42}$, b) $\frac{1}{42}$, c) $\frac{1}{42}$, d) $\frac{1}{21}$ 9. a) $\frac{1}{5}$, b) $\frac{2}{9}$, c) $\frac{4}{9}$, d) $\frac{5}{9}$ 10. a) $K = \frac{1}{9}$, $N = \frac{1}{9}$, b) $K = \frac{4}{9}$, $N = \frac{4}{9}$, c) $K = \frac{1}{36}$, $N = \frac{4}{81}$, d) $K = 0$, $N = \frac{1}{9}$ 11. a) $F = \frac{1}{20}$, $K = \frac{1}{25}$, b) $F = \frac{1}{10}$, $K = \frac{2}{25}$, c) $F = \frac{3}{20}$, $K = \frac{3}{25}$, d) $F = \frac{3}{5}$, $K = \frac{16}{25}$ 12. a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{11}{25}$ 13. a) $\frac{3}{11}$, b) $\frac{3}{11}$, c) $\frac{2}{11}$, d) $\frac{3}{11}$ 14. a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{1}{6}$, c) $\frac{1}{2}$ 15. a) $\frac{49}{198}$, b) $\frac{25}{99}$, c) $\frac{59}{165}$, d) $\frac{29}{330}$ 16. a) $\frac{1}{39}$, b) $\frac{1}{10}$, c) $\frac{1}{6}$

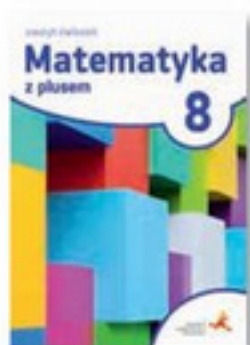
Sprawdź się: 1. C 2. B 3. FFP

3. Zadania testowe (s. 221-224): 1. C 2. BC 3. C 4. B 5. a) Tabelka III, b) tabelka IV 6. D 7. C 8. C 9. PFP 10. A 11. A 12. A 13. B 14. BC 15. D 16. PFF 17. PPF



Podręcznik *Matematyka z plusem 8* został dopuszczony przez MEN do użytku szkolnego i wpisany do wykazu podręczników.
Numer dopuszczenia: 780/5/2018

Zestaw dla ucznia składa się z podręcznika i zeszytu ćwiczeń lub ćwiczeń podstawowych. Uczniom poszukującym dodatkowych zadań polecamy dostępny w internecie program *Matlandia 8*.



Zeszyt ćwiczeń



Ćwiczenia
podstawowe



www.matlandia.pl