

Matematyka 8

z plusem

Podręcznik dla klasy ósmej szkoły podstawowej

Praca zbiorowa pod redakcją
Małgorzaty Dobrowolskiej

Matematyka 8

z plusem

Podręcznik dla klasy ósmej szkoły podstawowej

gdańskie
wydawnictwo
oświatowe



Zespół autorów:

Zofia Bolałek

Małgorzata Dobrowolska

Marta Jucewicz

Marcin Karpiński

Jacek Lech

Adam Mysior

Krystyna Zarzycka

Projekt graficzny: *Katarzyna Micun, Jarosław Zakrzewski*

Ilustracje: *Sławomir Kilian, Bartosz Polak*

Fotografie: *archiwum GWO, Shutterstock*

Grafika komputerowa: *Leszek Jakubowski, Joanna Szyller*

Skład (T_EX): *Maria Chojnicka, Joanna Szyller, Łukasz Sitko*

Fotoedycja: *Ilona Krasnopiórko*

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników szkolnych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie recenzji rzeczoznawców: dr. Macieja Bryńskiego, dr. Michała Krycha, dr. Krzysztofa Koca.

Etap edukacyjny: II

Typ szkoły: szkoła podstawowa

Rok dopuszczenia: 2018

Numer w wykazie: 780/5/2018

ISBN 978-83-7420-963-2

© Copyright by Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe

Wydawca: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 80-309 Gdańsk, al. Grunwaldzka 413

Gdańsk 2024. Wydanie szóste

Druk i oprawa: Quad/Graphics, Wyszaków

Podręcznik został wyprodukowany na papierze posiadającym certyfikaty FSC, PEFC, EU-Ecolabel oraz Blue Angel.



treści usunięte z podstawy programowej w 2024 r.



Spis treści

1

LICZBY I DZIAŁANIA

1. System rzymski	10
2. Własności liczb naturalnych	14
3. Porównywanie liczb	20
4. Działania na liczbach	27
5. Działania na potęgach i pierwiastkach	33
<i>Przed klasówką</i>	38
<i>Zadania uzupełniające</i>	40

2

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE I RÓWNANIA

1. Przekształcenia algebraiczne	46
2. Równania	50
3. Proporcje	57
4. Wielkości wprost proporcjonalne	60
<i>Przed klasówką</i>	64
<i>Zadania uzupełniające</i>	66

3

FIGURY GEOMETRYCZNE NA PŁASZCZYŹNIE

1. Trójkąty i czworokąty	72
2. Twierdzenie Pitagorasa	79
3. Zastosowania twierdzenia Pitagorasa	87
4. Przekątna kwadratu. Wysokość trójkąta równobocznego	93
5. Trójkąty o kątach 90° , 45° , 45° oraz 90° , 30° , 60°	97
6. Odcinki w układzie współrzędnych	102
7. Dowodzenie w geometrii	106
<i>Przed klasówką</i>	112
<i>Zadania uzupełniające</i>	114

4

ZASTOSOWANIA MATEMATYKI

1. Obliczenia procentowe	120
2. Zmiana o dany procent. Lokaty bankowe	125
3. VAT i inne podatki	130
4. Czytanie diagramów	134
5. Podział proporcjonalny	140
6. Obliczanie prawdopodobieństw	142
7. Odczytywanie wykresów	146
<i>Przed klasówką</i>	158
<i>Zadania uzupełniające</i>	160

5

GRANIASŁUPY I OSTROŚŁUPY

1. Pole powierzchni i objętość graniastosłupa	168
2. Odcinki w graniastosłupach	174
3. Rodzaje ostrosłupów	178
4. Siatki ostrosłupów. Pole powierzchni	184
5. Objętość ostrosłupa	188
6. Odcinki w ostrosłupach	191
<i>Przed klasówką</i>	198
<i>Zadania uzupełniające</i>	200

6

SYMETRIE

1. Symetria względem prostej	206
2. Oś symetrii figury	212
3. Symetralna odcinka	216
4. Dwusieczna kąta	218
5. Symetria względem punktu	221
6. Środek symetrii figury	224
<i>Przed klasówką</i>	228
<i>Zadania uzupełniające</i>	230

7

KOŁA I OKRĘGI

1. Styczna do okręgu	234
2. Wzajemne położenie dwóch okręgów	238
3. Liczba π . Długość okręgu	240



4. Pole koła	247
<i>Przed klasówką</i>	252
<i>Zadania uzupełniające</i>	254

8

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

1. Ile jest możliwości?	258
2. Obliczanie prawdopodobieństw (cd.)	265
<i>Przed klasówką</i>	269
<i>Zadania uzupełniające</i>	270

ODPOWIEDZI	273
-------------------------	-----

SKOROWIDZ	286
------------------------	-----

W podręczniku przyjęto następujące oznaczenia:

- ⊙ zadanie nieelementarne
- ▣ zadanie na dowodzenie
- * zadanie trudne
- 📱 do rozwiązania zadania zaleca się użycie kalkulatora



odsyłacz do analogicznego zadania umieszczonego w rozdziale
Zadania uzupełniające, tam oznaczonego symbolem ➡



treści usunięte z podstawy programowej w 2024 r.

Od autorów

Książka ta zamyka serię podręczników *Matematyka z plusem* dla szkoły podstawowej. Skonstruowana jest bardzo podobnie jak podręcznik dla klasy siódmej. Wyjątek stanowią rozdziały powtórzeniowe. Każdy z nich rozpoczyna się od kilku bardzo prostych pytań sprawdzających podstawowe wiadomości i umiejętności.

Dział *Symetrie* — zgodnie z podstawą programową — można realizować na lekcjach, które będą się odbywać między egzaminem a końcem roku szkolnego.

W pracy nad serią podręczników *Matematyka z plusem* pomagało nam wiele osób. Za ich pracę oraz wszystkie cenne uwagi i wskazówki serdecznie dziękujemy.

LICZBY I DZIAŁANIA

- 1** System rzymski
- 2** Własności liczb naturalnych
- 3** Porównywanie liczb
- 4** Działania na liczbach
- 5** Działania na potęgach i pierwiastkach

- Przed klasówką, s. 38
- Zadania uzupełniające, s. 40

1 System rzymski

Rzymski system zapisywania liczb został w Europie wyparty przez system dziesiętkowy już wiele wieków temu. Mimo to ciągle jeszcze w różnych dziedzinach znajduje zastosowanie.

Z historii

W systemie rzymskim do zapisywania liczb używa się siedmiu znaków: I, V, X, L, C, D, M. Wprowadzili je jeszcze starożytni Rzymianie i powszechnie używano ich w Europie przez kilkanaście wieków.

System dziesiętkowy stworzony przez Hindusów trafił na nasz kontynent dopiero około X wieku za pośrednictwem Arabów, stąd używane przez nas cyfry:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

są nazywane arabskimi, chociaż to nie Arabowie byli ich twórcami.

W chrześcijańskiej Europie system dziesiętkowy przyjmowano bardzo nieufnie, przez niektórych traktowany był on wręcz jako

wytwór szatana. Dlatego od czasu, w którym się pojawił, minęło kilka stuleci, zanim zaczęto go powszechnie używać.

W nowym systemie łatwiej można było wykonywać działania, a mimo to umiejętności rachowania uważane były za niedostępne dla przeciętnego człowieka. Świadczyć może o tym poniższy fragment pewnego średniowiecznego dokumentu:

„Jeśli wystarczy ci, by twój syn nauczył się dodawania i odejmowania, poślij go na dowolny uniwersytet we Francji lub w Niemczech. Gdyby jednak zależało ci na tym, żeby poznał również mnożenie i dzielenie, o ile sobie z tym poradzi, to musi się udać do szkół włoskich”.

Pytania i zadania kontrolne

A. Uporządkuj podane liczby od najmniejszej do największej.

XV, VIII, XIV, XXI, XVI, XIX

B. Zapisz podane liczby w systemie rzymskim.

29, 37, 24, 18, 39

C. Zapisz podane liczby w kolejności od najmniejszej do największej. Czy potrafisz odczytać podane liczby?

a) C, D, L, M

b) LXXII, MDC, XL, CM

D. Zapisz podane liczby w systemie rzymskim.

45, 162, 410, 1750

Znaki używane w systemie rzymskim	
	I
	1
V	X
5	10
L	C
50	100
D	M
500	1000

W ramce obok zebrano wszystkie znaki, które służą do zapisywania w systemie rzymskim liczb od 1 do 3999. Obowiązują przy tym następujące zasady:

✓ Obok siebie mogą występować kolejno **co najwyżej** trzy cyfry I (1), trzy cyfry X (10), trzy cyfry C (100), trzy cyfry M (1000), a pozostałe cyfry mogą występować w danej liczbie tylko raz.

✓ Gdy cyfra mniejsza poprzedza cyfrę większą, to wartość odpowiadająca tym dwóm cyfrom jest równa ich różnicy, przy czym taka kolejność cyfr może występować tylko w sześciu wypadkach: IV (4) IX (9) XL (40) XC (90) CD (400) CM (900)

Gdy pamiętamy, co oznaczają zapisy IV, IX, XL, XC, CD, CM, to każdą liczbę od 1 do 3999 można traktować jako sumę odpowiednich wartości. Oto przykłady:

XLIV	CXLI	DXCII	MCDX	MMCMV
40+4	100+40+1	500+90+1+1	1000+400+10	1000+1000+900+5
44	141	592	1410	2905

ĆWICZENIE. Wśród podanych zapisów wskaż takie, które nie są poprawnie zapisanymi liczbami w systemie rzymskim.

XV XXXX XL XXL DC CX XC DL LD LL XM MCDC

Z historii

Starożytni Rzymianie nie mieli jednoznacznych zasad zapisu liczb. Na przykład liczbę 40 początkowo zapisywano jako XXXX, a nie XL. Bywało też, że liczbę 8 zapisywano jako IIX, a 84 jako XXCIII. Na murach we Włoszech można znaleźć takie napisy:



Nawet znaki używane do zapisywania liczb nie były jednakowe na terenie całego państwa rzymskiego i zmieniały się w ciągu

wieków. Znaki D i M wprowadzono dość późno, a liczbę 1000 przez długi czas zapisywano jako MD (znak D i jego odbicie symetryczne). Zasady zapisu rzymskiego, jakimi posługujemy się obecnie, utrwaliły się stosunkowo niedawno, bo zaledwie około 300 lat temu.

Warto pamiętać, że znak C ma związek z łacińskim słowem *centum*, oznaczającym „sto”, a znak M związany jest ze słowem *mille*, oznaczającym „tysiąc”. Ślady tych słów można znaleźć w wielu określeniach, np. centymetr, cent, procent, milimetr, mililitr, milion.

Zadania

1. a) Zapisz podane liczby w systemie dziesiętkowym:

XXIX XLIV CXXII CCL DCCCX CMLXVI

- b) Zapisz podane liczby w systemie rzymskim:

45 159 1944 444 469 3800 866

1-2/40

2. Zapisz w systemie dziesiętkowym poniższe daty.



3. Poniżej podano lata budowy trzech dużych kościołów w Polsce. Który z nich jest najstarszy? Budowa którego z nich trwała najdłużej?

katedra w Gnieźnie: MCCCXLII-MCCCXC

katedra w Krakowie: MCCCXXII-MCCCLXIV

bazylika Mariacka w Gdańsku: MCCCXLIII-MDII

Budowę Bazyliki św. Piotra w Rzymie rozpoczęto w 1506 roku, a zakończono w 1626 roku. Łacińska inskrypcja na kopule mówi, że ukończono ją w roku MDXC, a inna inskrypcja podaje datę wzniesienia fasady: MDCXII.



4. Przeczytaj powyższe informacje z przewodnika. Po ilu latach od rozpoczęcia budowy bazyliki ukończono kopułę? Ile lat upłynęło pomiędzy ukończeniem kopuły a wzniesieniem fasady? Jak należałoby zapisać za pomocą cyfr rzymskich datę ukończenia budowy bazyliki?
5. Poniżej podano, kiedy się rozpoczęły i kiedy zakończyły pewne wydarzenia historyczne. Zapisz te daty za pomocą cyfr rzymskich.
- wojna stuletnia: 1337-1453
 - epidemia dżumy w Europie zwana czarną śmiercią: 1348-1352
 - okres panowania króla Władysława I Hermana: 1079-1102
 - wyprawa Magellana: 1519-1522

6. Przyjrzyj się rysunkom. Podniszczone napisy na dwóch starych budynkach informują o roku ich powstania.



Wiadomo, że pierwszy z tych budynków wzniesiono między rokiem 1490 a 1540, a drugi zbudowano w XVI wieku. Jakie napisy mogły być na tych budowlach, zanim zostały częściowo zniszczone?

7. Zapisz za pomocą znaków systemu rzymskiego (I, V, X, L, C, D, M) największą możliwą liczbę, używając każdego ze znaków:

- co najwyżej raz,
- dowolnie wiele razy, ale zgodnie z regułami.

8. Rzymianie liczyli lata od założenia Rzymu, co miało miejsce w roku 753 p.n.e. Tak obliczone daty opatrywane były skrótem a.u.c. — od łacińskich słów *ab urbe condita*, czyli „od założenia miasta”.
- Historycy przyjmują, że cesarstwo rzymskie upadło w 476 r. n.e. Zapisz w systemie rzymskim, ile lat miał wtedy Rzym.
 - Zapisz w systemie rzymskim, którym rokiem od założenia Rzymu jest obecny rok.

Sprawdź, czy umiesz

- W zapisie rzymskim liczby 944 nie występuje znak:
A. L B. C C. D D. M
- Ile lat żył grecki filozof Sokrates, który urodził się w roku CDLXIX p.n.e., a zmarł w roku CCCXCIX p.n.e.?
A. 40 B. 50 C. 60 D. 70
- Który z poniższych zapisów nie przedstawia liczby w systemie rzymskim?
A. CMLXVI B. MCLXIV C. MCXLVI D. MLCXIV

2 Własności liczb naturalnych

Pytania i zadania kontrolne

A. Wskaż liczby z ramki, które są podzielne:

- | | |
|--------------|-------------|
| a) przez 2, | d) przez 4, |
| b) przez 5, | e) przez 3, |
| c) przez 10, | f) przez 9. |

192	1308	1073
3333	7335	
2340	1234	1170

B. Które z liczb podanych w powyższej ramce są podzielne przez 6, a które — przez 30?

C. a) Znajdź resztę z dzielenia liczby 150 przez 7.
b) Wymień reszty, które można otrzymać przy dzieleniu przez 7.

D. a) Wypisz wszystkie dzielniki liczby 40.
b) Wypisz te wielokrotności liczby 40, które są mniejsze od 300.

E. Ile jest liczb pierwszych mniejszych od 20?

F. Znajdź rozkład na czynniki pierwsze liczby 198.

G. a) Podaj największy wspólny dzielnik liczb 36 i 28.
b) Podaj najmniejszą wspólną wielokrotność liczb 6 i 8.



Rozważmy następującą sytuację:

Gospodyni zebrała 172 jajka i układa je do opakowań, w których mieści się po 6 jajek. Łatwo obliczyć, że gospodyni zapełni 28 opakowań i jeszcze zostaną 4 jajka. Możemy powiedzieć, że 4 to reszta z dzielenia liczby 172 przez 6, i zapisać to w następujący sposób:

$$172 : 6 = 28 \text{ reszta } 4$$

Z równości tej wynika, że:

$$172 = 28 \cdot 6 + 4$$

ĆWICZENIE A. Jakie reszty możemy otrzymać, dzieląc liczby naturalne przez 6?

Poniżej zapisano wyniki dzielenia z resztą czterech liczb przez 13.

$$744 : 13 = 57 \text{ reszta } 3$$

$$546 : 13 = 42 \text{ reszta } 0$$

$$1606 : 13 = 123 \text{ reszta } 7$$

$$7787 : 13 = 599 \text{ reszta } 0$$

Z tych równości wynika, że liczby 744 i 1606 nie są podzielne przez 13, a liczby 546 i 7787 są podzielne przez 13.

■ **ĆWICZENIE B.** a) Korzystając z równości $744 : 13 = 57$ reszta 3, uzasadnij, że liczby $744 - 3$ oraz $744 + 10$ są podzielne przez 13.

b) Korzystając z równości $1606 : 13 = 123$ reszta 7, ustal, jakie są reszty z dzielenia przez 13 następujących liczb:

$$a = 1606 - 3$$

$$b = 1606 - 7$$

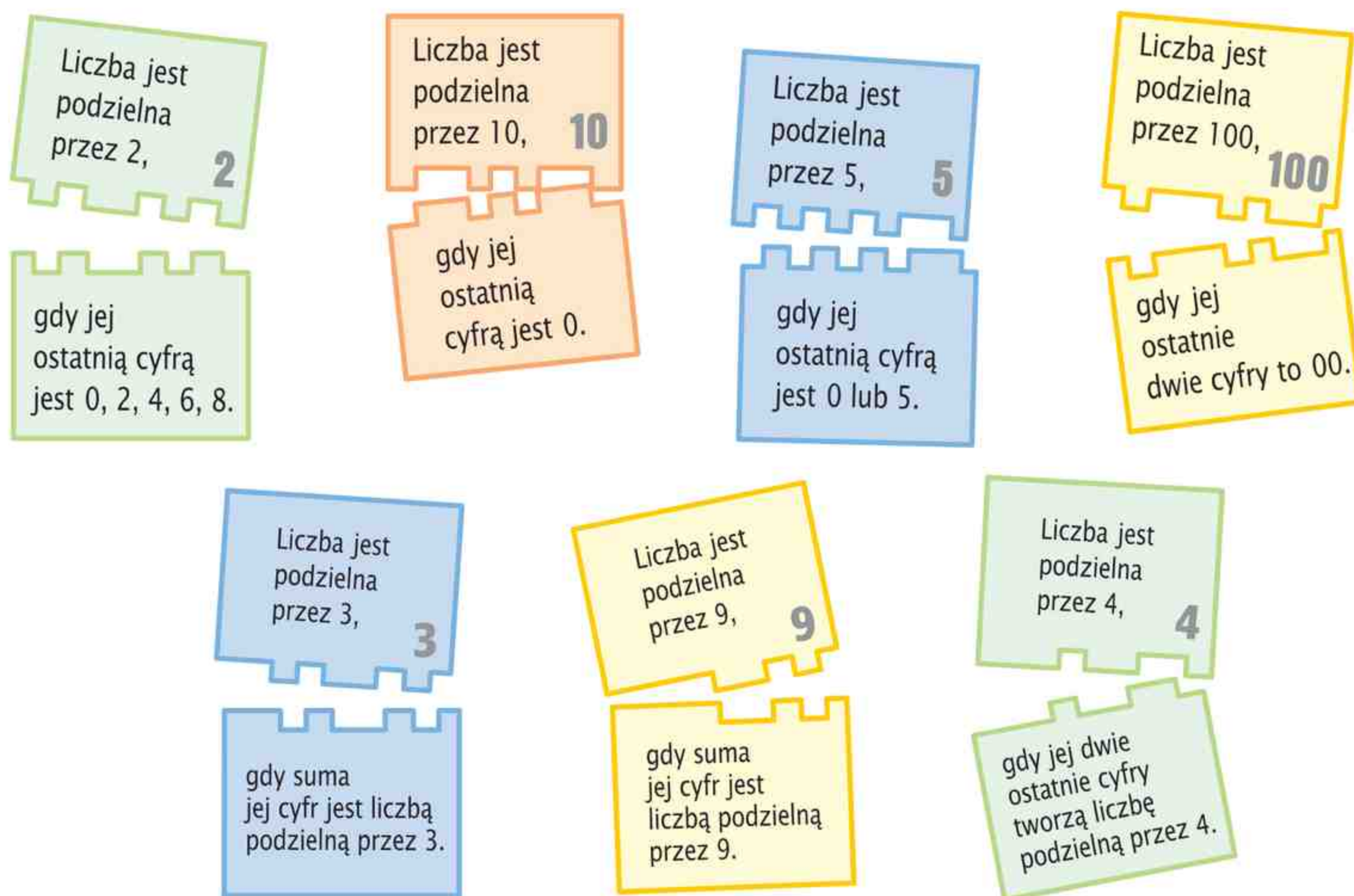
$$c = 1606 + 8$$

$$d = 1606 + 6$$

Przypomnijmy, że każdą liczbę, przez którą dana liczba naturalna dzieli się bez reszty (czyli reszta jest równa 0), nazywamy **dzielnikiem** tej liczby.

Na przykład dzielnikami liczby 70 są: 1, 70, 2, 35, 5, 14, 7, 10.

Aby sprawdzić, czy jakaś liczba jest dzielnikiem danej liczby n , można wykonać dzielenie i ustalić, czy reszta jest równa 0. W wypadku niektórych liczb nie trzeba wykonywać dzielenia, wystarczy skorzystać z cech podzielności, które przypominamy poniżej.



Dla każdej liczby naturalnej $n \neq 0$ jej dzielnikami są liczby 1 i n . Jeśli liczba ma dokładnie dwa dzielniki, to nazywamy ją **liczbą pierwszą**.

Liczby pierwsze mniejsze od 1000:

2	3	5	7	11	13	17	19
23	29	31	37	41	43	47	53
59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131
137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311
313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457
461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569
571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719
727	733	739	743	751	757	761	769
773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881
883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997

Ciekawostka

Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, zatem nie można wskazać największej z nich. Ciągłe jednak trwają poszukiwania coraz większych liczb pierwszych, bo takie liczby używane są między innymi w zaawansowanych metodach szyfrowania informacji w systemach komputerowych i przy przesyłaniu danych.

W roku 2016 największą znaną liczbą pierwszą była liczba $2^{74207281} - 1$. Zapisana w systemie dziesiętnym ma ona 22 338 618 cyfr. Jej odkrywcy otrzymali nagrodę 100 tys. dolarów od pewnej amerykańskiej fundacji. Ta sama fundacja wręczy nagrodę 150 tys. dolarów odkrywcy liczby pierwszej, która ma więcej niż 100 milionów cyfr.

Liczby naturalne większe od 1, które nie są liczbami pierwszymi, to **liczby złożone**. Liczby 0 i 1 nie są liczbami pierwszymi ani złożonymi.

Każdą liczbę złożoną można w jednoznaczny sposób rozłożyć na czynniki pierwsze, tzn. przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych.

Przykład

Rozłóż na czynniki pierwsze liczbę 504.

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$$504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

Z powyższego przykładu wynika, że dzielnikami pierwszymi liczby 504 są: 2, 3 i 7. Liczba 504 ma też wiele innych dzielników, nie będących liczbami pierwszymi. Na przykład liczby: $2 \cdot 7 = 14$, $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$ są jej dzielnikami, gdyż każdy iloczyn liczb występujących w rozkładzie na czynniki pierwsze danej liczby jest jej dzielnikiem.

Gdy chcemy znaleźć największy wspólny dzielnik liczb a i b , w skrócie NWD(a, b), możemy wypisać wszystkie dzielniki obu liczb, znaleźć wspólne i wybrać z nich największy.

Największy wspólny dzielnik dwóch liczb można też znaleźć, korzystając z rozkładów liczb na czynniki pierwsze.

Przykład

Znajdź NWD(840, 540).

840	2	540	2
420	2	270	2
210	2	135	3
105	3	45	3
35	5	15	3
7	7	5	5
1		1	

Rozkładamy liczby na czynniki pierwsze i podkreślamy te, które występują w obu rozkładach.

$$\text{NWD}(840, 540) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Obliczamy iloczyn wspólnych czynników pierwszych obu liczb.

Przypomnijmy, że **wielokrotnościami** liczby naturalnej a są liczby $0 \cdot a$, $1 \cdot a$, $2a$, $3a$, ...

Na przykład wielokrotnościami liczby 8 są: 0, 8, 16, 24, 32, 40, ...

Aby znaleźć najmniejszą wspólną wielokrotność liczb a i b (różną od 0), w skrócie NWW(a, b), możemy wypisać tyle kolejnych wielokrotności obu liczb, aż znajdziemy pierwszą taką, która jest wspólna dla obu liczb.

Najmniejszą wspólną wielokrotność dwóch liczb można także znaleźć, korzystając z rozkładów liczb na czynniki pierwsze.

Przykład

Znajdź NWW(150, 315).

150	2	315	3
75	3	105	3
25	5	35	5
5	5	7	7
1		1	

Rozkładamy liczby na czynniki pierwsze i skreślamy w drugim rozkładzie te czynniki, które wystąpiły w pierwszym rozkładzie.

$$\text{NWW}(150, 315) = 150 \cdot 3 \cdot 7 = 3150$$

Obliczamy iloczyn nieskreślonych czynników pierwszych.

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \end{array}$$

Uwaga. Oczywiście powyższe algorytmy byłyby kłopotliwe do zastosowania dla bardzo dużych liczb. W wypadku takich liczb stosuje się inne algorytmy.

Zadania

1. Znajdź liczby oznaczone literami.

$$a : 7 = 12 \text{ reszta } 5$$

$$161 : c = 3 \text{ reszta } 8$$

$$b : 11 = 17 \text{ reszta } 9$$

$$253 : d = 15 \text{ reszta } 13$$

2. Resztą z dzielenia liczby
- $a = 3945$
- przez 7 jest 4. Podaj trzy liczby naturalne większe od
- a
- , których:

- a) resztą z dzielenia przez 7 jest też 4,
b) resztą z dzielenia przez 7 jest 6.

3. a) Korzystając z tego, że
- $1347 : 128 \approx 10,523$
- , ustal, jaka jest reszta z dzielenia 1347 przez 128.

- b) Korzystając z tego, że
- $5992 : 48 \approx 124,8$
- , ustal, jaka jest reszta z dzielenia 5992 przez 48.

4. a) Resztą z dzielenia pewnej liczby
- m
- przez 6 jest 5. Które z poniższych liczb są podzielne przez 6?

$$m - 5 \qquad m + 5 \qquad m - 11 \qquad m + 25$$

- b) W wyniku dzielenia pewnej liczby
- n
- przez 13 otrzymano resztę 10. Jakie reszty otrzymamy, dzieląc poniższe liczby przez 13?

$$n - 10 \qquad n + 1 \qquad n + 3 \qquad n + 5$$

5. Resztą z dzielenia liczby
- a
- przez 4 jest 1, a resztą z dzielenia liczby
- b
- przez 4 jest 3. Ustal, jaka jest reszta z dzielenia przez 4 liczby:

- a) $a + b$ b) $2a$ c) $2b$

6. Ustal, przez które z liczb: 2, 3, 4, 5, 9, 10 można skrócić ułamek:

- a) $\frac{5670}{3135}$ b) $\frac{1836}{108}$ c) $\frac{297}{780}$ d) $\frac{81540}{23130}$

7. Podaj przykład liczby, którą można zastąpić literę, aby spełniony był warunek:

- a) liczba $3854 + a$ jest podzielna przez 4,
b) liczba $1357 + b$ jest podzielna przez 2 i przez 3,
c) liczba $5379 + c$ jest podzielna przez 5 i 9.

8. Liczba
- a
- jest podzielna przez 9. Podaj dwa przykłady liczby
- b
- , dla której liczba
- $10a + b$
- :

- a) jest podzielna przez 10, c) jest podzielna przez 9,
b) jest podzielna przez 5, d) jest podzielna przez 6.

9. Podaj NWD i NWW liczb:

- a) 5 i 7 b) 4 i 6 c) 10 i 12 d) 8 i 12 e) 100 i 150 f) 82 i 44

10. Znajdź NWD i NWW liczb:

- a) 84 i 90 b) 270 i 700 c) 735 i 252 d) 294 i 385

11. Znajdź NWD (a, b) i NWW (a, b) , gdy:

a) $a = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^7 \cdot 11^5$

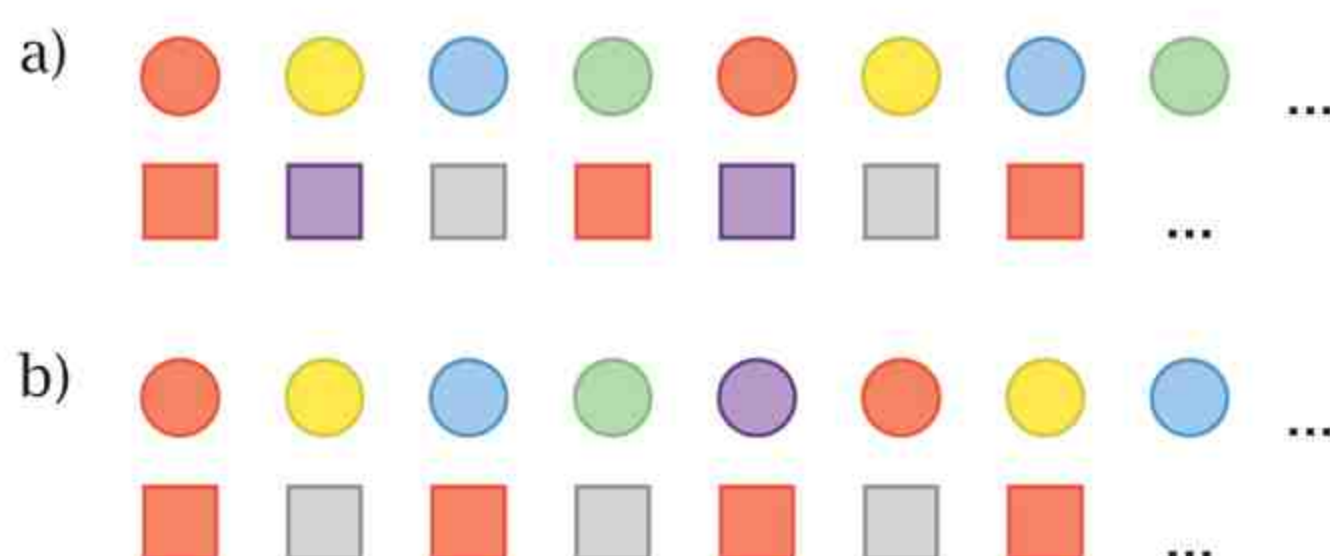
b) $a = 3^2 \cdot 5^7 \cdot 13^2$

$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 13^2$

$b = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^8 \cdot 13$

12. Podłoga pewnego pomieszczenia ma kształt prostokąta o wymiarach $264 \text{ cm} \times 840 \text{ cm}$. Podłogę tę chcemy wyłożyć jednakowymi kwadratowymi płytkami. Jaki największy rozmiar może mieć taka płytka?

13. Na rysunkach poniżej przedstawiono początkowy fragment szlaczków złożonych z powtarzających się elementów. Na pierwszym miejscu szlaczków znajdują się czerwony kwadrat i czerwone koło. Na którym miejscu tych szlaczków powinna się znaleźć kolejna taka para?



Sprawdź, czy umiesz

1. Która z podanych liczb jest wielokrotnością liczby 504?

A. $a = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

C. $c = 2 \cdot 3^3 \cdot 7^3$

B. $b = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 5$

D. $d = 2^4 \cdot 7^3 \cdot 5$

2. Resztą z dzielenia pewnej wielocyfrowej liczby a przez 15 jest 8. Która z poniższych liczb jest podzielna przez 15?

A. $a - 7$

B. $a + 15$

C. $a - 18$

D. $a + 22$

3 Porównywanie liczb

Pytania i zadania kontrolne

A. a) Podaj liczbę przeciwną do liczby $3\frac{2}{7}$ oraz odwrotność liczby $3\frac{2}{7}$.

b) Skróć ułamek $\frac{30}{18}$ i przedstaw go jako liczbę mieszaną.

c) Znajdź rozwinięcia dziesiętne liczb: $\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{3}$.

B. Która z podanych liczb jest większa?

a) 0,405 czy 0,45

c) $\frac{2}{7}$ czy $\frac{3}{5}$

e) $\sqrt{7}$ czy $\sqrt{8}$

b) -1,6 czy -2,08

d) $(-3)^5$ czy $(-3)^4$

f) $\sqrt[3]{-9}$ czy $\sqrt[3]{-15}$

C. Oblicz.

$$3^3$$

$$-3^4$$

$$3^0$$

$$(-3)^3$$

$$3^1$$

D. Podane liczby zapisz jako potęgi liczby 10.

100

1000

1 mln

1 mld

0,001

0,00001

1

E. Każdą z podanych liczb zapisz w notacji wykładniczej.

500

60 000

3

0,002

0,007

F. Wypisz pary równych liczb:

$$2\sqrt{0,01}$$

$$4\sqrt[3]{8}$$

$$4\sqrt{2\frac{1}{4}}$$

$$\sqrt{0,04}$$

$$\sqrt{36}$$

$$\sqrt{64}$$

Jak wiesz, liczby można zapisywać na różne sposoby. W każdej z poniższych ramek zapisano w różny sposób tę samą liczbę.

3,2

$3\frac{1}{5}$

$\frac{96}{30}$

$\frac{32}{10}$

4 mln

$4 \cdot 10^6$

4 000 000

2000^2

2

$\sqrt[3]{8}$

$\sqrt{4}$

$\frac{10}{5}$

ĆWICZENIE A. Zapisz na dwa inne sposoby każdą z liczb:

a) 90 000

b) $3\frac{4}{5}$

c) 0,06

d) $\sqrt{400}$

Przykłady liczb wymiernych:

$$\frac{1}{7} \quad 3\frac{1}{13} \quad -6 \quad 0 \quad -2,6$$

$$5,(3) \quad \sqrt{4} \quad \sqrt[3]{-8}$$

Liczby, które można przedstawić w postaci ułamka $\frac{l}{m}$, gdzie l i m są liczbami całkowitymi i $m \neq 0$, nazywamy **liczbami wymiernymi**.

Liczbami wymiernymi są wszystkie **liczby naturalne** (0, 1, 2, 3, ...), wszystkie **liczby całkowite** (... , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...) oraz ułamki dodatnie i ujemne.

Każda liczba wymierna ma rozwinięcie dziesiętne skończone lub nieskończone okresowe.

Przykłady

$$1\frac{3}{125} = 1,024 \quad 3\frac{9}{22} = 3,40909... = 3,4(09)$$

$$-\frac{3}{50} = -0,06 \quad -1\frac{4}{9} = -1,4444... = -1,(4)$$

Rozwinięcie dziesiętne ułamka zwykłego otrzymujemy, dzieląc licznik przez mianownik.

Ułamki zwykłe można rozszerzać lub skracać, ułamki niewłaściwe można zapisywać w postaci liczb mieszanych.

Przykłady

$$\frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} = 1,5 \quad 0,08 = \frac{8}{100} = \frac{2}{25} \quad -2\frac{3}{5} = -2\frac{6}{10} = -2,6$$

Dwa ułamki możemy porównać, gdy sprowadzimy je do wspólnego mianownika lub do wspólnego licznika.

Przykłady

a) Porównaj liczby $a = \frac{3}{7}$ i $b = \frac{2}{5}$.

$$a = \frac{3}{7} = \frac{15}{35} \quad b = \frac{2}{5} = \frac{14}{35}$$

$$\frac{15}{35} > \frac{14}{35}, \text{ więc } a > b$$

Sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika.

Gdy ułamki mają ten sam mianownik, to większy jest ten ułamek, który ma większy licznik.

b) Porównaj liczby $a = \frac{2}{19}$ i $b = \frac{3}{32}$.

$$a = \frac{2}{19} = \frac{6}{57} \quad b = \frac{3}{32} = \frac{6}{64}$$

$$\frac{6}{57} > \frac{6}{64}, \text{ więc } a > b$$

Sprowadzamy ułamki do wspólnego licznika.

Gdy ułamki mają ten sam licznik, to większy jest ten ułamek, który ma mniejszy mianownik.

Porównywać ułamki można też na wiele innych sposobów. Poniżej przedstawiamy dwa z nich.

Przykłady

a) Porównaj liczby $a = \frac{25}{69}$ i $b = \frac{14}{33}$.

$$a = \frac{25}{69} = 25 : 69 \approx 0,362$$

$$b = \frac{14}{33} = 14 : 33 \approx 0,424$$

$$0,362 < 0,424, \text{ więc } a < b$$

Znajdujemy rozwinięcia dziesiętne ułamków.

Porównujemy rozwinięcia dziesiętne.

b) Porównaj liczby $a = \frac{14}{45}$ i $b = \frac{21}{65}$.

$$a : b = \frac{14}{45} : \frac{21}{65} = \frac{14 \cdot 65}{45 \cdot 21} = \frac{26}{27} < 1$$

Obliczamy iloraz tych liczb i porównujemy go z liczbą 1.

$$\frac{a}{b} < 1, \text{ więc } a < b$$

Przy zapisywaniu bardzo dużych lub bardzo małych liczb dodatnich posługujemy się czasem tzw. **notacją wykładniczą**, czyli zapisem liczby w następującej postaci:

$$a \cdot 10^n$$

$\swarrow$ $\searrow$
 liczba spełniająca potęga liczby 10,
 warunek $1 \leq a < 10$ n jest liczbą całkowitą

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = 0,1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0,01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001$$

ĆWICZENIE B. Przypomnij sobie, jak mnożymy liczby przez 10, 100, 1000, ..., a jak przez 0,1, 0,01, 0,001, ..., czyli przez potęgi liczby 10. Zapisz podane liczby, nie używając potęg.

a) $8 \cdot 10^6$

c) $5 \cdot 10^{-3}$

b) $3,2 \cdot 10^5$

d) $6,75 \cdot 10^{-4}$

Przykłady

Zapisz podane liczby w notacji wykładniczej.

$$5 \cdot 30000 = 5,3 \cdot 10^5$$

$$0,00021 = 2,1 \cdot 10^{-4}$$

Przecinek powinien stać po pierwszej cyfrze różnej od zera. Liczba kropek pod odpowiednimi cyframi wskazuje na to, jaki powinien być wykładnik.

W ramce obok przypominamy definicje pierwiastka kwadratowego oraz pierwiastka sześciennego. Zauważ, że pierwiastek sześcienny można obliczać z dowolnej liczby, a pierwiastek kwadratowy — tylko z liczby nieujemnej.

- Dla $a \geq 0$:

$$\sqrt{a} = b, \text{ gdy } b^2 = a \text{ i } b \geq 0$$

- Dla dowolnej liczby c :

$$\sqrt[3]{c} = d, \text{ gdy } d^3 = c$$

Niektóre pierwiastki z liczb mają rozwinięcia dziesiętne skończone lub nieskończone okresowe, czyli są liczbami wymiernymi. Na przykład:

$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} = 0,6 \quad \sqrt{1,21} = 1,1 \quad \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3} = 0,333333\dots$$

Wiele pierwiastków ma rozwinięcie nieskończone i nieokresowe, czyli jest liczbami niewymiernymi. Na przykład:

$$\sqrt{2} = 1,41421356\dots \quad \sqrt{3} = 1,73205080\dots \quad \sqrt[3]{-10,2} = -2,16870288\dots$$

Wartość pierwiastka możemy też oszacować bez korzystania z jego rozwinięcia dziesiętnego.

Przykłady

Znajdź dwie kolejne liczby całkowite, takie że jedna z nich będzie mniejsza, a druga — większa od liczby $\sqrt{74}$.

$$\sqrt{64} < \sqrt{74} < \sqrt{81}$$

Im większa jest liczba podpierwiastkowa, tym większa jest wartość pierwiastka.

Zatem:

$$8 < \sqrt{74} < 9$$

ĆWICZENIE C. Podaj dwie kolejne liczby całkowite, między którymi na osi liczbowej leży liczba $\sqrt{74} - 10$.

Zadania

1. Która z podanych liczb jest większa?

a) $\frac{5}{142}$ czy $\frac{3}{142}$

d) $3\frac{4}{5}$ czy 3,81

g) $-\frac{1}{2}$ czy $-\frac{1}{7}$

b) $\frac{7}{23}$ czy $\frac{7}{25}$

e) 2,55 czy 2,(5)

h) $-2\frac{3}{5}$ czy -2,3

c) $\frac{7}{18}$ czy $\frac{1}{2}$

f) 1,(43) czy 1,44

i) -0,(3) czy -0,33

2. a) Podaj przykład liczby większej od $\frac{1}{5}$ i mniejszej od $\frac{1}{3}$.

b) Podaj przykład liczby większej od -0,8 i mniejszej od $-\frac{1}{4}$.

3. Zapisz podane liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

10-11/41

$$a = -\frac{5}{2} \quad b = 2,2(52) \quad c = 2,5(25) \quad d = -\frac{8}{3} \quad e = 2,52 \quad f = 3\frac{1}{3}$$

4. W tabeli podano, jaką część powierzchni USA stanowi pięć największych stanów. Ustal kolejność tych stanów od największego do najmniejszego.

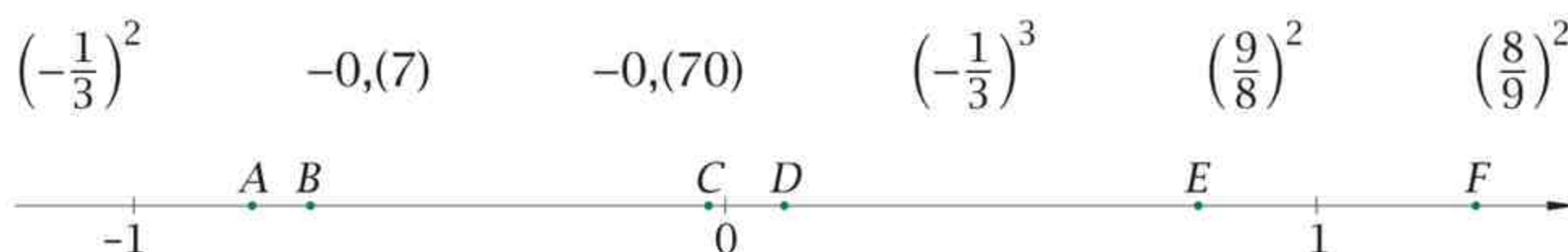
STAN	CZĘŚĆ POWIERZCHNI USA
Alaska	$\frac{11}{63}$
Kalifornia	$\frac{1}{23}$
Montana	$\frac{1}{26}$
Nowy Meksyk	$\frac{1}{31}$
Teksas	$\frac{7}{100}$



5. Złote dukaty regularnie bito w Polsce od czasów Zygmunta Starego. Zawartość czystego złota w tych monetach była różna. Uporządkuj dukaty z tabeli w kolejności od najmniejszej do największej zawartości czystego złota w monecie.

	Dukat Zygmunta Starego 1530 r.	Dukat Stefana Batorego 1580 r.	Dukat Jana Kazimierza 1650 r.	Dukat Augusta II Mocnego 1717 r.	Dukat Stanisława Augusta 1766 r.
Zawartość czystego złota	$\frac{346}{357}$	$\frac{346}{353}$	$\frac{344}{349}$	$\frac{343}{350}$	$\frac{343}{349}$

6. Dopasuj podane liczby do odpowiednich punktów na osi liczbowej.



7. Zapisz bez użycia potęg:

$$\text{a) } 2^3 \quad \left(\frac{3}{5}\right)^2 \quad (-1)^5 \quad (-7)^0 \quad \text{b) } \left(1\frac{2}{5}\right)^2 \quad \left(-2\frac{1}{2}\right)^3 \quad -1,2^2 \quad -4^3$$

8. Która z podanych liczb jest większa?

a) $(-3)^{15}$ czy 3^{14}

d) $6,7^6$ czy $6,7^7$

g) $(-1,1)^3$ czy $(-1,1)^7$

b) -9^4 czy $(-9)^4$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^6$ czy $\left(\frac{2}{3}\right)^7$

h) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$ czy $\left(-\frac{3}{5}\right)^5$

c) -1^0 czy $(-1)^0$

f) $\left(\frac{5}{4}\right)^3$ czy $\left(\frac{4}{5}\right)^3$

i) $0,7^4$ czy $0,7^6$

10^6 — milion (mln)
 10^9 — miliard (mld)
 10^{12} — bilion (bln)
 10^{15} — biliard (bld)
 10^{18} — trylion
 10^{24} — kwadrylion
 10^{30} — kwintylion
 10^{36} — sekstylion
 10^{42} — septylion
 10^{48} — oktylion
 10^{54} — nonilion
 10^{60} — decylion
 10^{600} — centylion

9. Podaj nazwy liczb:

$5 \cdot 10^9$

$30 \cdot 10^{12}$

$1000 \cdot 10^{12}$

$0,001 \cdot 10^{18}$

Ciekawostka

Liczby o nazwach kończących się na „lion” to potęgi liczby 10, których wykładniki są wielokrotnościami liczby 6. Liczby te są potęgami miliona. Na przykład: bilion to druga potęga miliona $10^{12} = (10^6)^2$, trylion to trzecia potęga miliona $10^{18} = (10^6)^3$, kwadrylion to czwarta potęga miliona $10^{24} = (10^6)^4$.

10. Zapisz w notacji wykładniczej liczby:

a) 234 600 40 700 000 320 mln 76 mld

b) 7 mln 0,5 mln 60 mld 19,5 mld

c) 0,02 0,0000503 0,00053 0,0000528

11. Podkreślone liczby zapisz bez używania potęg.

a) Słońce to jedna z $2 \cdot 10^{11}$ gwiazd naszej Galaktyki. Jest wielką kulą plazmy o średnicy $1,39 \cdot 10^6$ km. Na powierzchni Słońca panuje temperatura $5,5 \cdot 10^3$ °C, a we wnętrzu $1,55 \cdot 10^7$ °C.

b) Czerwone ciała krwi mają kształt krążka o średnicy $7,5 \cdot 10^{-6}$ m. W ciele ludzkim jest ich około $2,5 \cdot 10^{10}$.

12. Podkreślone liczby zapisz w notacji wykładniczej.

a) Przez jeden światłowód można przekazać 2,4 mld bitów w ciągu sekundy. Odpowiada to 32 tys. rozmów telefonicznych odbywanych jednocześnie.



b) Rośliny produkują olbrzymie ilości pyłku. Co roku dąb opuszcza 100 mln ziarenek pyłku, a kępę dzikiego szczytawiu aż 400 mln ziarenek. Ziarenka te są bardzo małe. Ich średnica waha się między 0,000015 m a 0,00002 m.

13. Która z liczb jest większa?

a) 36 tys. czy $4 \cdot 10^4$

c) $67 \cdot 10^4$ czy $6,8 \cdot 10^3$

b) 357 mld czy $3,5 \cdot 10^{10}$

d) $254 \cdot 10^8$ czy $2,5 \cdot 10^{10}$

14. Dla każdej z podanych liczb znajdź dwie kolejne liczby całkowite, tak aby jedna z nich była mniejsza, a druga większa od tej liczby.



$\sqrt{11}$

$\sqrt{23}$

$2\sqrt{50}$

$\sqrt[3]{9}$

$-\sqrt{15}$

$\sqrt{0,6}$

$-\sqrt[3]{30}$

15. Porównaj podane liczby.

a) $2\sqrt{10}$ i 5,8

c) $3\sqrt[3]{7}$ i 6,1

e) $\frac{-\sqrt{51}}{4}$ i -1,6

b) $\frac{1}{2}\sqrt{70}$ i 4,5

d) $\frac{\sqrt[3]{30}}{4}$ i 0,7

f) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{-900}$ i -2,3

16. Ustal, która z podanych liczb jest większa.

a) $2 + \sqrt{19}$ czy 6

c) $\sqrt{7} - 2$ czy 1

e) $\sqrt{45} - \frac{1}{5}$ czy 7

b) $\sqrt{69} - 5$ czy 3

d) $\frac{1}{3} + \sqrt{30}$ czy 7

f) $\frac{2}{3} + \sqrt{8}$ czy 4

17. Podaj przykład liczby a , która spełnia warunek:

a) $7 < \sqrt{a} < 8$

b) $\frac{1}{2} < \sqrt{a} < 1$

c) $3 < \sqrt{a} < 3\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{4} < \sqrt{a} < \frac{1}{2}$

Sprawdź, czy umiesz

1. Która z podanych liczb jest większa od $1\frac{5}{11}$ i mniejsza od 1,(456)?

A. 1,455

B. 1,46

C. 1,(45)

D. 1,454

2. Która z poniższych liczb jest mniejsza od $\frac{3}{25}$?

A. 0,12

B. $\frac{1}{9}$

C. $\sqrt{\frac{9}{625}}$

D. $\left(\frac{3}{5}\right)^2$

3. Jeżeli $a = 1,(4)$, $b = 1,2^2$, $c = \sqrt{2}$, $d = 1\frac{1}{2}$, to:

A. $a < b < c < d$

B. $c < b < a < d$

C. $d < a < c < b$

D. $d < c < b < a$

4 Działania na liczbach

Pytania i zadania kontrolne

A. Ustal, ile zer ma każda z liczb:

$$a = 1000 \cdot 7200 \quad b = 2\,500\,000 : 100 \quad c = 0,17 \cdot 10\,000$$

B. Wyraż masę 2 kg 300 g w gramach, dekagramach i kilogramach.

C. Dane są liczby $a = \frac{3}{4}$ oraz $b = \frac{4}{3}$. Oblicz:

$$a + b \quad b - a \quad \frac{a}{2} \quad \frac{4}{b} \quad a \cdot b \quad a : b \quad b : a$$

D. Oblicz:

$$\text{a) } (2 - 4) \cdot 3 - 5 \quad \text{b) } -15 + 10 : (-5) \quad \text{c) } 5 \cdot (-1)^2 + (-2)^3$$

E. Zaokrąglj masę 72497,9628 t:

a) do setek ton, b) do dziesiątek ton, c) do części setnych ton.

F. Literami oznaczono wyniki działań. Nie wykonując dokładnych obliczeń, wskaż te z nich, które są liczbami większymi od 500.

$$a = 97,82 + 388,3 \quad b = 2274,8 - 1952,47 \quad c = (575 - 527) \cdot 11,5$$

Niektóre działania na liczbach można wykonywać w pamięci. Szczególnie łatwe jest mnożenie i dzielenie przez 10, 100, 1000, ... Wystarczy dopisać lub usunąć odpowiednie zera albo wstawić lub przesunąć przecinek.

$$0,054 \cdot 10\,000 = 540$$

$$19,7 : 1000 = 0,0197$$

Tego typu działania wykonujemy przy przeliczaniu jednostek.

Przykłady

$$37\,540 \text{ g} = 37\,540 \cdot \frac{1}{1000} \text{ kg}$$

$$1 \text{ g} = \frac{1}{1000} \text{ kg}$$

$$0,65 \text{ m}^3 = 0,65 \cdot 1000 \text{ dm}^3 = 650 \text{ l}$$

$$1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ dm}^3$$

$$7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{7,5 \text{ m}}{1 \text{ s}} = \frac{7,5 \cdot \frac{1}{1000} \text{ km}}{\frac{1}{3600} \text{ h}} = 27 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$1 \text{ m} = \frac{1}{1000} \text{ km}$$

$$1 \text{ s} = \frac{1}{3600} \text{ h}$$

Obliczając wartości wyrażeń arytmetycznych, należy w prawidłowy sposób przekształcać liczby, poprawnie wykonywać działania i nie zapominać o regułach kolejności wykonywania działań.

Poniżej przedstawiony jest fragment pracy, w której uczeń popełnił różne błędy.

a) $1 - (3\frac{1}{2})^2 = 1 - 3\frac{1}{4} = -8\frac{1}{4}$ *popraw*

b) $0,24 : 0,6 = 24 : 6 = 4$ *popraw*

c) $\frac{12 - 41}{41} - 1 = \frac{12 - 1}{1} - 1 = 11 - 1 = 10$ *popraw*

d) $5\frac{7}{15} - \frac{7}{15} : 4\frac{1}{5} = 5 : \frac{21}{5} = 5 \cdot \frac{5}{21} = \frac{25}{21} = 1\frac{4}{21}$ *popraw*

ĆWICZENIE. W każdym przykładzie uczeń w jednym miejscu popełnił błąd. Wskaż to miejsce.

W poniższych przykładach pokazano poprawne obliczenia.

Przykłady

$$1 - \left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 1 - \frac{49}{4} = \frac{-45}{4} = -11\frac{1}{4}$$

$$0,24 : 0,6 = 2,4 : 6 = 0,4$$

$$\frac{12 - 41}{41} - 1 = \frac{-29}{41} - 1 = -1\frac{29}{41}$$

$$5\frac{7}{15} - \frac{7}{15} : 4\frac{1}{5} = 5\frac{7}{15} - \frac{7}{15} : \frac{21}{5} = 5\frac{7}{15} - \frac{7}{15} \cdot \frac{5}{21} = 5\frac{7}{15} - \frac{1}{9} = 5\frac{21}{45} - \frac{5}{45} = 5\frac{16}{45}$$

Gdy wykonujemy działania na liczbach naturalnych lub ułamkach dziesiętnych, możemy korzystać z algorytmów działań pisemnych, które przypominamy poniżej.

$$\begin{array}{r} 2,097 \\ + 9,85 \\ \hline 11,947 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 720,3 \\ - 68,7 \\ \hline 651,6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 58,5 \\ \times 1,23 \\ \hline 1755 \\ 1170 \\ 585 \\ \hline 71,955 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9,72 : 3,6 = \overset{2,7}{97,2} : 36 \\ \begin{array}{r} 36 \\ \times 27 \\ \hline 72 \\ 252 \\ \hline 252 \\ \hline 0 \end{array} \end{array}$$

W życiu codziennym podawanie dokładnego wyniku obliczeń nie zawsze jest konieczne, czasem wystarczy wynik oszacować.

Przykłady

$4672 + 5672 > 10\,000$	$4672 + 5672$ to więcej niż $4500 + 5500 = 10\,000$
$34 - 25,892 < 9$	$34 - 25,892$ to mniej niż $34 - 25 = 9$
$147,2 \cdot 36,11 < 6000$	$147,2 \cdot 36,11$ to mniej niż $150 \cdot 40 = 6000$
$6789 : 985 > 6$	$6789 : 985$ to więcej niż $6000 : 1000 = 6$

Zadania

1. Dane są liczby $a = 347,6$, $b = 7,391$, $c = 0,0452$. Oblicz:

a) $1000a$	b) $a : 100$	c) $a \cdot 0,1$	d) $a : 0,01$
$b \cdot 100$	$b : 1000$	$b \cdot 0,001$	$b : 0,001$
$c \cdot 10\,000$	$c : 10$	$c \cdot 0,01$	$c : 0,0001$

18/41

1 cm = 10 mm	1 dag = 10 g
1 m = 100 cm	1 kg = 100 dag
1 km = 1000 m	1 t = 1000 kg

2. a) Wyraż w metrach:

2,05 km 75,5 cm 30 500 mm

b) Wyraż w dekagramach:

120 g 1,15 kg 0,0002 t

19/41

1 ha = 10000 m ²
1 ha = 100 a
1 a = 100 m ²
1 km ² = 10 ⁶ m ²

3. a) Wyraż w arach:

7,5 ha 3000 m² 1 km²

b) Wyraż w metrach kwadratowych:

300 cm² 0,6 ha 0,75 a

19/41

4. a) Wyraż w decymetrach sześciennych:

8,5 l 5 m³ 2000 cm³

b) Wyraż w litrach:

0,5 dm³ 15 tys. hl 0,06 cm³

c) Wyraż w centymetrach sześciennych:

6 dm³ 0,2 hl 2 cl

d) Wyraż w metrach sześciennych:

0,007 km³ 1000 cm³ 70000 l

1 l = 1 dm ³
1 ml = 0,001 l
1 cm ³ = 1 ml
1 cl = 0,01 l
1 hl = 100 l

5. a) Wyraż w metrach na sekundę:

$$150 \frac{\text{km}}{\text{min}}$$

$$0,07 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$120 \frac{\text{cm}}{\text{min}}$$

b) Wyraż w kilometrach na godzinę:

$$30 \frac{\text{m}}{\text{h}}$$

$$125 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$25 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$



6. Lech, Czech i Rus zjedli obiad w Jadłodajni Polskiej. Zamówili trzy żurki, jeden kotlet schabowy, dwie porcje gołąbków i dwie porcje pierogów. Kosztami obiadu postanowili podzielić się po równo. Spójrz na cennik znajdujący się obok i oblicz, ile zapłacił każdy z nich.

7. Oblicz:

$$\frac{6}{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{5}}$$

$$\frac{4}{10}$$

$$2 \cdot \frac{4}{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{3}{4} : 2$$

$$2 : \frac{6}{\frac{4}{3}}$$

8. Wykonaj obliczenia (postaraj się liczyć w pamięci).

a) $-21 - 7$ $-18 + 6$ $-14 - (-23)$

e) $\frac{2}{11} \cdot 5$ $\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3}$ $(-\frac{2}{3}) \cdot (-\frac{3}{8})$

b) $-6 \cdot 7$ $-8 \cdot (-9)$ $-75 : 3$

f) $\frac{2}{5} : 3$ $\frac{3}{7} : \frac{1}{2}$ $-\frac{5}{8} : \frac{1}{3}$

c) $\frac{3}{5} + 2\frac{2}{5}$ $5\frac{9}{11} + \frac{6}{11}$ $1\frac{4}{7} + 2\frac{5}{7}$

g) $0,8 + 0,4$ $1,2 - 0,7$ $2,1 - 3$

d) $10 - \frac{1}{3}$ $12\frac{1}{5} - \frac{4}{5}$ $3\frac{1}{7} - 4$

h) $0,3 \cdot 2$ $1,6 \cdot (-3)$ $0,4 : 2$

9. Oblicz:

a) $1\frac{7}{8} \cdot (-6)$

f) $-1,5 : (-2\frac{1}{3})$

k) $17,21 - 20,03$

b) $-1\frac{1}{5} \cdot 2\frac{1}{2}$

g) $-1\frac{3}{4} + 7\frac{1}{5}$

l) $12,5 + 3,75$

c) $-1\frac{3}{4} : 8$

h) $-2\frac{3}{8} - \frac{1}{12}$

m) $-0,82 \cdot (-0,3)$

d) $1\frac{1}{3} \cdot 0,5$

i) $-3,7 + 4,5$

n) $0,7 \cdot (-0,92)$

e) $5,25 : (-1\frac{1}{2})$

j) $-13,1 - 2,5$

o) $-0,75 - 1\frac{2}{3}$

10. Oblicz (pamiętaj o właściwej kolejności wykonywania działań):

$$\begin{array}{lll} \text{a)} -4 \cdot (-2 - 11) & \text{c)} -11 - 12 : (-6) & \text{e)} \frac{7 + (-15)}{-2} + \frac{-8}{-3 - 1} \\ \text{b)} -7 + 2 \cdot (-5) & \text{d)} -8 - 5 \cdot (-4) - 4 \cdot (-6) & \text{f)} \frac{-11 - 9}{-4} - \frac{6 - 12}{-3} \end{array}$$

11. Oblicz:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{3}{4} + \frac{2}{3} : \left(-\frac{8}{12}\right) + \left(1\frac{1}{2}\right)^2 & \text{d)} \left(2 \cdot \frac{5}{6}\right)^2 - \left(3^2 - \sqrt{1\frac{7}{9}}\right) \\ \text{b)} \frac{\left(2 - \frac{1}{7}\right) \cdot 3}{2 + 0,6} - 8 \cdot \frac{3}{7} & \text{e)} \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2 : \frac{8}{9}\right]^2 - \left(\frac{3}{4} - 1\frac{1}{8}\right) \\ \text{c)} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{7}\right) : \left(1 - \frac{1}{9}\right) + \frac{3}{7} & \text{f)} 1,6 \cdot \frac{7}{16} - \frac{2,7}{3^3} - \frac{5 \cdot 0,7}{0,35} \end{array}$$

-  **12.** a) Średnia długość kroku Iwony wynosi 60 cm. Ile kroków wykonała Iwona podczas spaceru o długości 2,8 km?
 b) Cena 1 m² działki rekreacyjnej wynosi 22 zł. Ile kosztuje działka o powierzchni 15 arów?
 c) W Polsce produkuje się około 400 000 t jaj kurzych rocznie. Jedno takie jajo waży około 55 g. Ile jaj jest co roku produkowanych w Polsce? Wynik podaj w mld sztuk.
 d) Jezioro Śniardwy ma powierzchnię 10 660 ha, a Morze Kaspijskie ma powierzchnię 371 000 km². Ile razy większe jest Morze Kaspijskie od jeziora Śniardwy?
 e) W opakowaniu znajduje się 50 drażetek witaminy C, a każda waży 0,1 g. Ile opakowań można wypełnić zapasem drażetek o wadze 1 t?
- 13.** Największy znany naukowcom wieloryb miał masę 190 t. Największe dinozaury osiągały $\frac{2}{3}$ tej masy, a rekordowo wielki słoń był dziesięć razy lżejszy od największych dinozaurów. Oblicz masę największych dinozaurów i słonia rekordzisty.
- 14.** Rozlewamy 1,5 litra soku do kolejnych szklanek o pojemności 0,2 litra. Szklanki wypełniamy tylko do $\frac{2}{3}$ ich pojemności. Ile szklanek w ten sposób napełnimy?



15. Przepisy kulinarne podają, że pojemność 1 filiżanki jest równa pojemności 16 łyżek stołowych, a 1 łyżki stołowej — 3 łyżeczek do herbaty.

- a) Ile łyżeczek do herbaty mieści się w filiżance?
 b) Jaką część filiżanki zajmuje 6 łyżek stołowych cukru?
 c) Ile łyżek stołowych mąki trzeba wsypać do filiżanki, aby wypełnić $\frac{3}{4}$ jej pojemności?

Stany Zjednoczone	$\frac{5}{18}$
Wielka Brytania	$\frac{1}{15}$
Kanada	$\frac{1}{36}$
Polska	$\frac{1}{75}$

16. Na świecie około miliarda osób mówi po angielsku. W tabelce obok podano, jaka część tych osób mieszka w czterech wybranych krajach.

a) Jaka część ludzi mówiących po angielsku mieszka poza wymienionymi krajami?

b) Ile razy więcej osób mówiących po angielsku mieszka w Kanadzie niż w Polsce?

17. Najpierw oszacuj wartość wyrażenia, a następnie wykonaj rachunki sposobem pisemnym.

a) $14,3 + 10,57 + 0,29$

c) $16,32 \cdot 2,1$

e) $5,424 : 0,12$

b) $5,49 - 3,082$

d) $0,304 \cdot 5,02$

f) $14,07 : 3,5$

18. Oszacuj wyniki działań. Jakim znakiem: $<$ czy $>$ należy zastąpić $\star$?

a) $0,756 + 6,824 \star 7$

d) $(1,875)^2 \star 4$

b) $1832 \cdot 1,9 \star 4000$

e) $3,76 \cdot 74,1 \star 300$

c) $320 : 8,1 \star 40$

f) $4,99 + 8,60 + 84,7 \star 100$

19. Nie wykonując obliczeń, wyjaśnij, dlaczego prawdziwe są nierówności:

a) $11,4 \cdot (9,85 + 6,73) > 150$

c) $(58,36 - 49,5) \cdot (7,82 + 61,4) < 700$

b) $(773 - 156) : 143 > 4$

d) $61,2 : 9,7 + 120 : 18,7 > 10$

20. Nie wykonując dokładnych obliczeń, oszacuj, która z podanych w ramce wielkości jest najbliższa dokładnej odpowiedzi.

a) Kolej Transsyberyjska to najdłuższa linia kolejowa na świecie. Trasa z Moskwy do Władywostoku ma 9259 km. Pociąg osobowy pokonuje ją w ciągu 6 dób i 4 godzin. Ile kilometrów przejeżdża w ciągu doby?

około 1000 km

około 1500 km

około 2000 km



b) Wycieczka do Egiptu dla jednej osoby kosztuje 2450 zł. Wyobraź sobie, że masz milion złotych i całą kwotę wydajesz na taką wycieczkę dla znajomych. Ile osób mógłbyś zaprosić?

nie więcej niż 200

więcej niż 200, ale mniej niż 400

więcej niż 400

21. Kupon Mini Lotto z jednym wypełnieniem kosztuje 1,25 zł. Kupon można wypełnić na 850 668 sposobów. Ile pieniędzy potrzeba na kupony ze wszystkimi możliwymi wypełnieniami?

około 100 tys. zł

około 1 mln zł

około 10 mln zł

Sprawdź, czy umiesz

- Szkolna sztafeta pływacka składa się z 6 zawodniczek, z których każda pływa na takim samym dystansie. Na ostatnich zawodach sztafeta uzyskała czas 2 min 29,4 s. Jaki był przeciętny czas jednej zawodniczki?
A. 54,9 s B. 24,9 s C. 9,9 s D. 5,4 s
- Niech symbol $\textcircled{a}$ oznacza $\frac{1}{3}$ liczby a , natomiast symbol $\boxed{a}$ niech oznacza $\frac{1}{4}$ liczby a . Liczba $\textcircled{16} - \boxed{12}$ jest równa:
A. $\boxed{4}$ B. $\textcircled{4}$ C. $\boxed{7}$ D. $\textcircled{7}$
- Która nierówność jest prawdziwa?
A. $16,49 + 12,76 > 30$ C. $9,687 \cdot 52,9 < 529$
B. $0,769 + 0,31 < 1$ D. $100,201 \cdot 4,01 < 400$

→ zadania uzupełniające 18-42, str. 41-44

5**Działania na potęgach i pierwiastkach****Pytania i zadania kontrolne**

A. Oblicz:

$$2^3 \cdot 5^3 \quad (0,1^2)^2 \quad 3^2 \cdot 3^5 \quad 8^3 : 4^3 \quad 0,5^4 : 0,5^2$$

B. Dana jest liczba $a = 1,2 \cdot 10^5$. Zapisz w notacji wykładniczej liczby:

$$a \cdot 10^3 \quad a : 10^3 \quad 2a \quad 20a \quad a^2$$

C. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka:

$$\sqrt{8} \quad \sqrt{75} \quad \sqrt{72} \quad \sqrt[3]{24} \quad \sqrt[3]{-128}$$

W ramce obok zapisano równości (tzw. prawa działań), z których można korzystać, wykonując obliczenia na liczbach zapisanych w postaci potęg.

Uwaga. Równości te są spełnione, gdy wartości potęg po obu stronach są określone. Na przykład liczba 0^0 nie jest określona, więc w równościach, w których pojawia się zapis a^n , trzeba założyć, że liczby a oraz n nie mogą być jednocześnie równe 0.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{dla } a \neq 0$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{dla } b \neq 0$$

Przykłady

$$\frac{7^{15} \cdot 7^8}{7^{20}} = \frac{7^{15+8}}{7^{20}} = \frac{7^{23}}{7^{20}} = 7^3$$

$$\frac{3^2 \cdot 6^8}{4 \cdot (3^5)^2} = \frac{3^2 \cdot (2 \cdot 3)^8}{2^2 \cdot 3^{10}} = \frac{3^2 \cdot 2^8 \cdot 3^8}{2^2 \cdot 3^{10}} = 2^6$$

$$\frac{(2^3)^{15}}{2} = \frac{2^{45}}{2} = 2^{45-1} = 2^{44}$$

$$8^6 - 8^4 = 8^2 \cdot 8^4 - 8^4 = 64 \cdot 8^4 - 8^4 = 63 \cdot 8^4$$

$$9 \cdot 9^5 \cdot 81 = 9^6 \cdot 9^2 = 9^8$$

$$\frac{5^4 + 5^3}{6^4} = \frac{5 \cdot 5^3 + 5^3}{6^4} = \frac{6 \cdot 5^3}{6^4} = \frac{5^3}{6^3} = \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

Przykłady

Przedstaw w notacji wykładniczej:

$$675 \cdot 10^5 = 6,75 \cdot 10^2 \cdot 10^5 = 6,75 \cdot 10^7$$

$$0,032 \cdot 10^{-4} = 3,2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4} = 3,2 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{5,6 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^7} = \frac{5,6}{2} \cdot \frac{10^5}{10^7} = 2,8 \cdot 10^{5-7} = 2,8 \cdot 10^{-2}$$

$$4,5 \cdot 10^{15} + 3 \cdot 10^{13} = 450 \cdot 10^{13} + 3 \cdot 10^{13} = 453 \cdot 10^{13} = 4,53 \cdot 10^{15}$$

W kolejnej ramce zapisano prawa działań na pierwiastkach.

Uwaga. Podobnie jak w wypadku praw działań na potęgach, równości te są spełnione, gdy pierwiastki w nich występujące są określone. Na przykład liczba występująca pod pierwiastkiem kwadratowym musi być nieujemna.

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{dla } b \neq 0$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \quad \text{dla } b \neq 0$$

Przykłady

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$(2\sqrt{5})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = 4 \cdot 5 = 20$$

$$\frac{\sqrt[3]{56}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{\frac{56}{7}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{3} + 1\right) \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{3} + \sqrt{2} = \frac{2}{3} + \sqrt{2}$$

$$8\sqrt{\frac{3}{4}} = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{21} = \sqrt{3 \cdot 21} = \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 7} = 3\sqrt{7}$$

Zadania

1. Zapisz w postaci jednej potęgi:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$

b) $1,5^8 : 1,5^3$

c) $(3^3 \cdot 2^3)^2$

d) $\left(\frac{2}{7}\right)^5 \cdot 7^5$

43/44

2. Oblicz:

a) $9^4 : (3^3)^2$

b) $\frac{4^5}{2^7}$

c) $\left(\frac{5^4}{25}\right)^2$

d) $\frac{9^2 \cdot 3^3}{3^5}$

44/44

3. Czworo uczniów rozpoczęło obliczanie wartości wyrażenia $\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 2,5^6$. Czy wszystkie ich przekształcenia są poprawne? Jaka jest wartość tego wyrażenia?

$$\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 2,5^6 = \left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^6 = \frac{2^7}{5^7} \cdot \frac{5^6}{2^6} = \dots$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 2,5^6 = 0,4^7 \cdot 2,5^6 = 0,4 \cdot 0,4^6 \cdot 2,5^6 = \dots$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 2,5^6 = \left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{25}{10}\right)^6 = \frac{2^7}{5^7} \cdot \frac{(5^2)^6}{2^6 \cdot 5^6} = \dots$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 2,5^6 = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^6 \cdot 2,5^6 = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot 2,5\right)^6 = \frac{2}{5} \cdot 1^6 = \dots$$

4. Uprość wyrażenia:

a) $\frac{125 \cdot 15}{3^3 \cdot 5^4}$

c) $\frac{9^3 \cdot 4^4}{6^{10}}$

e) $\frac{(8^5 \cdot 4^3)^2 \cdot 25^2}{10^4 \cdot 2^{10}}$

b) $\frac{(3^5)^4 \cdot 6^4}{9^7 \cdot 4^2}$

d) $\frac{0,25^3 : 0,5^3}{5^3}$

f) $\frac{64^2 \cdot 36^4}{6^3 \cdot 2^6}$

5. Uprość wyrażenia:

a) $\frac{3^7 + 3^5}{10}$

b) $\frac{3^{12}}{2^{11} + 2^{12}}$

c) $\frac{6^{14}}{3^{15} - 3^{13}}$

6. a) Milion kwadrylionów — ile to miliardów?
 b) Bilion trylionów — ile to milionów?
 c) Miliard do kwadratu — ile to bilionów?

7. Przekształć iloczyny i odpowiedz:

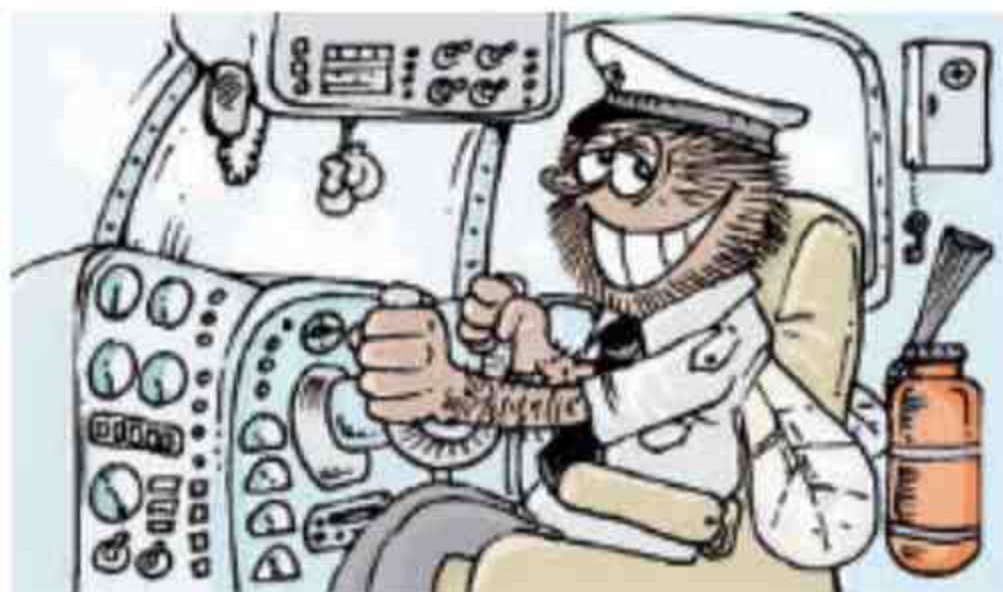
- a) $2,5 \cdot 10^8$ — ile to milionów?
 b) $3,9 \cdot 10^{10}$ — ile to miliardów?
 c) $7,28 \cdot 10^{15}$ — ile to bilionów?

milion	10^6
miliard	10^9
bilion	10^{12}
trylion	10^{18}
kwadrylion	10^{24}

8. Zapisz podane liczby w notacji wykładniczej.

- a) $357 \cdot 10^4$ c) $0,013 \cdot 10^{15}$ e) $5,2 \cdot 10^{20} \cdot 3,5 \cdot 10^{10}$
 b) $25,3 \cdot 10^5$ d) $27,5 \cdot 10^{-3}$ f) $\frac{1,25 \cdot 10^{18}}{25 \cdot 10^{12}}$

9. Wykonaj obliczenia, wyniki zapisz w notacji wykładniczej.



- a) Powierzchnia skrzydeł muchy wynosi $1,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$, a skrzydeł Boeinga 747 B — 510 m^2 . Ile razy skrzydła Boeinga są większe od skrzydeł muchy?
 b) Wirus ospy o wielkości do $2,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ jest jednym z największych wirusów. Najmniejsze wirusy są od niego 25 razy mniejsze. Oblicz ich wielkość.

10. Oblicz i zapisz wynik w notacji wykładniczej.

- a) $1,27 \cdot 10^5 + 9,8 \cdot 10^6$ c) $6,25 \cdot 10^{11} + 3,75 \cdot 10^{13}$
 b) $2,7 \cdot 10^{15} + 5,3 \cdot 10^{14}$ d) $8,5 \cdot 10^7 + 10^9$

11. Zapisz w jak najprostszej postaci:

- a) $2\sqrt{5} + \sqrt{5}$ e) $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2$
 b) $3\sqrt{7} \cdot 8$ f) $5\sqrt[3]{7} - 2,5\sqrt[3]{7}$
 c) $6\sqrt{5} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{5}$ g) $2\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{-10}$
 d) $(2\sqrt{3})^2$ h) $(2\sqrt[3]{-5})^3$

12. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

- a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{20}$ c) $\sqrt{50}$ d) $\sqrt{180}$ e) $\sqrt[3]{16}$ f) $\sqrt[3]{2000}$

13. Zapisz w postaci $a\sqrt{b}$, tak aby liczba b była jak najmniejszą liczbą naturalną.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$

c) $7\sqrt{10} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{5}$

e) $\sqrt{300} - 2\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{18}$

d) $\sqrt{50} + \sqrt{2}$

f) $-2\sqrt{32} - 2\sqrt{8}$

52/44

14. Oblicz:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{4\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{0,1}$

g) $\sqrt[3]{-9} \cdot \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt{2\frac{2}{3}} : \sqrt{\frac{2}{3}}$

e) $\sqrt[3]{2\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

h) $\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{-2}}$

c) $\sqrt{6,4} : \sqrt{10}$

f) $\frac{\sqrt[3]{2,7}}{\sqrt[3]{100}}$

i) $\frac{\sqrt[3]{-0,5} \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{16}}$

15. Która liczba jest większa?

a) $3\sqrt{2}$ czy $2\sqrt{5}$

b) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ czy $\frac{\sqrt{7}}{7}$

c) $\frac{4}{5}\sqrt{10}$ czy $\frac{3}{5}\sqrt{13}$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

16. Przekształć wyrażenia tak, aby pozbyć się pierwiastków z mianownika.

a) $\frac{3}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{5}{\sqrt{3}}$

c) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

d) $\frac{2}{3\sqrt{5}}$

53/44

Sprawdź, czy umiesz

1. Która z podanych liczb jest różna od 2^{21} ?

A. $2^{20} + 2^{20}$

B. $(2^7)^3$

C. $2^3 \cdot 2^7$

D. $\frac{1}{2} \cdot 2^{22}$

2. Liczba $25 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^3$ to:

A. 125 mln

B. 1250 mln

C. 12,5 mld

D. 125 mld

3. Która równość jest nieprawdziwa?

A. $3\sqrt{5^2 - 4^2} = 9$

B. $\sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = 3$

C. $5\sqrt{18} = 8\sqrt{2}$

D. $(2\sqrt{3})^4 = 144$

4. Która z podanych liczb jest równa $2\sqrt{3}$?

A. $\sqrt{18}$

B. $\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}$

C. $\frac{2}{3}\sqrt{18}$

D. $\sqrt{27} - \sqrt{3}$

Przed klasówką

1. Ile wynosi suma trzech liczb zapisanych w ramce?

A. MMMCCLXXX

C. MMMCCLXXXVIII

B. MMDCCCXC

D. MMMCCXC

CLXXIV
DLX
MMDLVI

2. Wiadomo, że $a : 7 = 12$ reszta 6. Jaka jest reszta z dzielenia liczby a przez 5?

A. 0

B. 1

C. 3

D. 4

3. Ile dzielników pierwszych ma liczba 700?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

4. Czy to prawda, że jeśli pewna liczba jest podzielna przez 10 oraz jest podzielna przez 15, to jest podzielna przez 150? Wybierz odpowiedź „tak” lub „nie” oraz jej uzasadnienie spośród zdań od A do D.

Ⓘ Tak, ponieważ...

Ⓜ Nie, ponieważ...

A — ...jeśli liczba jest podzielna przez a i przez b , to jest podzielna przez $a \cdot b$.

B — ...liczba parzysta i nieparzysta nie mają wspólnych wielokrotności.

C — ...na przykład liczba 300 dzieli się przez 10 i 15 oraz dzieli się przez 150.

D — ...na przykład liczba 180 dzieli się przez 10 i przez 15, a nie dzieli się przez 150.

5. Jakimi liczbami należy zastąpić kwadraciki?

a) Prędkość światła w wodzie wynosi: $225\,000\,000 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2,25 \cdot 10^{\square} \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) Średnica wirusa grypy typu B wynosi około: $0,00000012 \text{ m} = 1,2 \cdot 10^{\square} \text{ m}$.

c) Średnica atomu helu wynosi około: $0,000000000006 \text{ m} = 6 \cdot 10^{\square} \text{ m}$.

6. W którym z podanych zestawów liczb jest najwięcej liczb większych od $\frac{1}{2}$?

A. $\frac{3}{7}$, $\frac{31}{58}$, $\frac{272}{521}$

C. $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{2}{3}\right)^2$, $\left(\frac{3}{4}\right)^2$

B. $1 - \frac{5}{13}$, $1 - \frac{7}{13}$, $1 - \frac{8}{13}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$

7. Pewne boisko piłkarskie ma wymiary $100 \text{ m} \times 60 \text{ m}$. Pole powierzchni tego boiska jest równe:

A. 6 km^2

B. 6 ha

C. 60 a

D. $6 \cdot 10^4 \text{ m}^2$

8. Kot przesypia średnio $\frac{25}{48}$ doby, a pies $\frac{7}{16}$ doby. O ile godzin dłużej od psa śpi kot w ciągu tygodnia?

- A. o $\frac{1}{12}$ godz. B. o $\frac{9}{16}$ godz. C. o 2 godz. D. o 14 godz.

9. Cal i jard to jednostki długości często używane w krajach anglosaskich. Wiedząc, że $1 \text{ cal} = \frac{1}{36} \text{ jarda} = 2,54 \text{ cm}$, ustal, jakimi liczbami należy zastąpić kwadraciki.

- a) 2 jardy i 5 cali = ■ cali c) 0,5 cala = ■ mm
b) 200 cali = ■ cm d) 20 jardów = ■ m

10. Od dnia urodzin Karola upłynęło 3600 dni, od dnia urodzin Krystiana — 500 tygodni, Marcin ma już 125 miesięcy, a Mateusz właśnie skończył 10 lat. Oszacuj, który z tych chłopców jest najstarszy.

- A. Karol B. Krystian C. Marcin D. Mateusz

11. Wartość wyrażenia $4\frac{2}{3} - 1\frac{1}{4} : 1,2 \cdot 3\frac{1}{5}$ jest równa:

- A. $1\frac{1}{3}$ B. $2\frac{2}{15}$ C. $5\frac{11}{25}$ D. $3\frac{5}{6}$

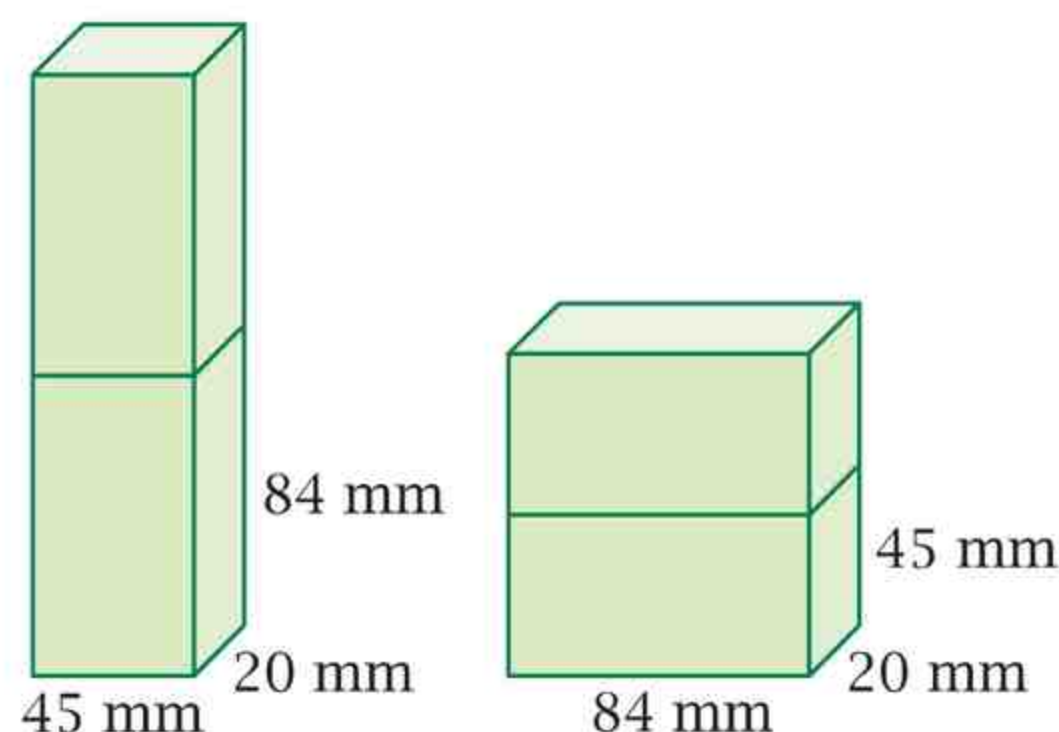
12. Czy poniższe zdania są prawdziwe?

- a) Liczba $(3^7)^2 \cdot 3$ jest równa liczbie $3^8 \cdot 3^7$. TAK/NIE
b) Liczba $\frac{2^{15}}{2^9}$ jest 4 razy większa od 8. TAK/NIE
c) Liczba $125 \cdot 5^{13}$ jest 5 razy mniejsza od liczby $\frac{5^{16}}{25}$. TAK/NIE

13. Które z podanych wyrażeń ma największą wartość?

- A. $\sqrt{27} - \sqrt{12}$ B. $\sqrt{63} + \sqrt{28}$ C. $\frac{\sqrt{20} + \sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{48} - \sqrt{3}}{\sqrt{12}}$

14. Przyjrzyj się rysunkowi. Z klocków o wymiarach $45 \text{ mm} \times 84 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$ układamy dwie wieże w sposób pokazany na rysunku. Ile co najmniej klocków potrzeba do ułożenia obu wież, aby ich wysokości były jednakowe? Jaką wysokość miałyby tak utworzone wieże?



Zadania uzupełniające

System rzymski

- 1. Zapisz w systemie rzymskim liczby:
492 1319 2047 3924
- 2. Odczytaj, jakie to liczby:
DCCXIV CMLXXX MDCCX MCMLIX
- 3. a) Zapisz najmniejszą z liczb, w której zapisie użyte są wszystkie symbole zapisu rzymskiego.
b) Zapisz liczbę, do zapisu której trzeba użyć możliwie najwięcej symboli używanych w systemie rzymskim.

Ciekawostka

Według zasad zapisywania liczb w systemie rzymskim największa liczba, jaką można w nim zapisać, to MMMCMXCIX, czyli 3999. Aby zapisywać liczby od niej większe, Rzymianie używali poziomych kresek. Kreska umieszczona nad liczbą oznaczała, że liczba jest 1000 razy większa. Na przykład:

$\overline{\text{V}}$	$\overline{\text{X}}$	$\overline{\text{M}}$
5000	10 000	1 000 000

4. Przeczytaj ciekawostkę. Zgodnie z podanymi zasadami zapisz liczby:

5049 10 336 1000111

Własności liczb naturalnych

5. Które zdania są prawdziwe?
- ① Liczba podzielna przez 2 i przez 3 musi być podzielna przez 6.
 - ② Liczba podzielna przez 5 i przez 10 musi być podzielna przez 50.
 - ③ Liczba podzielna przez 2 i przez 4 musi być podzielna przez 8.
 - ④ Liczba podzielna przez 10 i przez 9 musi być podzielna przez 6.

- 6. a) Uzasadnij, że liczba podzielna przez 6 i przez 7 jest wielokrotnością 42.

- b) Uzasadnij, że liczba podzielna przez 12 i przez 21 jest wielokrotnością 14.

7. Czy liczba a jest dzielnikiem liczby b ? Czy liczba a jest dzielnikiem liczby c ?

a) $a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5$	b) $a = 900$
$b = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$	$b = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^8$
$c = 2^5 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2$	$c = 2^8 \cdot 3^6 \cdot 5^3$

Ciekawostka

W rozkładzie liczby na czynniki pierwsze niektóre czynniki czasem się powtarzają. Możemy je zapisać w postaci potęgi, a pozostałe czynniki potraktować jako potęgę o wykładniku 1.

Tak zapisany rozkład na czynniki pierwsze pozwala obliczyć, ile dzielników ma dana liczba. Można bowiem udowodnić, że tych dzielników jest tyle, ile wynosi iloczyn wykładników powiększonych o 1.

Na przykład: aby obliczyć, ile dzielników ma liczba 5880, zapisujemy jej rozkład na czynniki pierwsze i obliczamy odpowiedni iloczyn:

$$5880 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^2$$

$$(3 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (2 + 1) = 48$$

Liczba 5880 ma 48 dzielników.

8. a) Wypisz wszystkie dzielniki liczby 36. Policz, ile ich jest. Sprawdź, czy metoda opisana w powyższej ciekawostce da ten sam rezultat.

- b) Ustal, ile dzielników ma liczba 600.

- c) Która z podanych niżej liczb ma więcej dzielników?

$$a = 2^5 \cdot 7^6 \cdot 11^2$$

$$b = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19$$

- * 9. Reszty z dzielenia przez 5 liczb naturalnych a , b , c , d wynoszą odpowiednio: 1, 2, 3, 4. Wykaż, że suma $a + b + c + d$ jest liczbą podzielną przez 5.

Porównywanie liczb

- 10. Zapisz poniższe liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

$$a = -0,79 \quad b = -0,(79) \quad c = -0,8 \quad d = -0,7$$

- 11. Zapisz podane liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

$$a = \frac{12}{5} \quad b = \frac{3}{8} \quad c = \frac{5}{6} \quad d = \frac{32}{15} \quad e = 1\frac{8}{9}$$

12. Nie wykonując działań, uporządkuj liczby od najmniejszej do największej.

$$\frac{1}{9,5} \quad \frac{9,6}{8,9} \quad \frac{8,9}{9,5} \quad \frac{8,9}{9,6} \quad \frac{9,5}{8,9} \quad \frac{1}{8,9}$$

- 13. Zapisz podane liczby w notacji wykładniczej.

- a) 28 mln c) 0,25 mln
b) 350 mld d) 0,061 mld

14. Zapisz w notacji wykładniczej:

- a) długość odcinka milion razy krótszego niż 2 cm,
b) liczbę 1000 razy mniejszą niż 0,32.

15. Korzystając z podanych przybliżeń, zapisz przybliżenia podanych liczb.

$$\sqrt{2} \approx 1,4142 \quad \sqrt{3} \approx 1,7321 \quad \sqrt[3]{6} \approx 1,8171$$

- a) $62 + \sqrt{2}$ c) $\frac{\sqrt[3]{6}}{10} + 2,2$
b) $10\sqrt{3} - 1$ d) $-\sqrt{3} - 6,3$

16. Ile jest liczb naturalnych n spełniających podany warunek?

- a) $\sqrt{11} < n < \sqrt{40}$ c) $\sqrt{111} < n < \sqrt{230}$
b) $\sqrt{28} < n < \sqrt{75}$ d) $\sqrt{420} < n < \sqrt{970}$

- 17. Znajdź dwie kolejne liczby całkowite, między którymi na osi liczbowej położona jest liczba:

- a) $\sqrt{105} + 7$ c) $6 - \sqrt{79}$
b) $\sqrt[3]{30} - 10$ d) $-5 - \sqrt[3]{992}$

Działania na liczbach

- 18. Oblicz:

- a) $37,82 : 0,1$ c) $4972,5 \cdot 0,001$
b) $0,01 \cdot 605,12$ d) $0,075 : 0,0001$

- 19. Wyraż podane wielkości w jednostce wskazanej w ramce.

- a) m 0,07 km 51 cm 25,5 cm
b) cm 2,3 m 0,0754 km 2,2 mm
c) kg 0,06 t 25 dag 3500 g
d) ha 200 a 2 km² 10⁶ mm²

- 20. a) Wyraż w metrach na sekundę:

$$28 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \quad 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad 150 \frac{\text{cm}}{\text{min}}$$

- b) Wyraż w kilometrach na godzinę:

$$6 \frac{\text{m}}{\text{min}} \quad 120 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad 80 \frac{\text{cm}}{\text{min}}$$

- 21. Wykonaj działania:

- a) $-4 \cdot 2\frac{1}{8}$ f) $0,24 : (-0,4)$
b) $-3\frac{1}{7} : 11$ g) $2\frac{3}{4} \cdot (-0,5)$
c) $2\frac{1}{4} : (-1\frac{1}{2})$ h) $-2,3 - \frac{1}{3}$
d) $-1,21 + 5,1$ i) $-3,75 : (-1\frac{1}{4})$
e) $-3,2 \cdot (-0,2)$ j) $\frac{1}{3} : (-0,7)$

22. Znajdź liczbę:

- a) o $5\frac{2}{3}$ mniejszą od $-2\frac{5}{6}$,
b) 4 razy większą od $3\frac{1}{3}$,
c) stanowiącą $\frac{1}{3}$ liczby $15\frac{9}{10}$,
d) stanowiącą 0,75 liczby $\frac{3}{4}$.

23. a) 0,01 godz. — ile to sekund?

- b) 0,1 doby — ile to minut?

- c) 3 godz. 6 min — ile to godzin?

- d) 4 godz. 30 min — jaka to część doby?

- e) 1500 s — ile to minut?

- f) 3 godz. 3 min 3 s — ile to minut?

24. Ułamki, których licznik jest równy 1 nazywamy egipskimi. Zapisz jako sumę różnych ułamków egipskich liczby:

- a) $\frac{5}{6}$ b) 1 c) 0,7 d) $\frac{13}{15}$

→ **25.** Oblicz:

- a) $\frac{8}{1\frac{2}{3}}$ d) $\frac{13}{2\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4}}$
 b) $\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}}{5}$ e) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}$
 c) $\frac{\frac{1}{3}}{1\frac{4}{9}}$ f) $\frac{2}{7} : \frac{1}{3}$

→ **26.** Oblicz:

- a) $\sqrt{1\frac{9}{16}} \cdot (-2)^2 + 1,2 \cdot \frac{5}{12}$
 b) $2\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{3\frac{3}{8}} + \frac{1}{2}$
 c) $\frac{4}{3} - (-1\frac{1}{3})^2 : 0,9$
 d) $0,8 \cdot \frac{3}{2^3} - \frac{(-2)^3}{4} \cdot 0,1$
 e) $(1\frac{1}{3})^2 \cdot (-3)^2 - 1,9^0 \cdot \frac{1}{3}$

27. a) Gęstość zaludnienia w Polsce wynosi 124 osoby/1 km². Ilu średnio Polaków żyje na 1 ha powierzchni kraju?

b) Pole o powierzchni 14,63 ha podzielono na 16 jednakowych działek rekreacyjnych. Ile arów ma każda z nich? Wynik podaj z dokładnością do 1 m².

c) Plony buraków cukrowych w Polsce w 2012 roku wyniosły 636 q/ha. Ile kilogramów buraków cukrowych zbierano zatem z 1 ara pola? (1 q = 100 kg).

Uwaga. Skrót q oznacza kwintal.

28. Pizzę podzielono na jednakowe kawałki. Dwa kawałki to $\frac{1}{6}$ pizzy. Jaką część pizzy stanowi 5 kawałków?

29. a) W 100 g szpinaku jest 3,9 mg żelaza. W ilu kilogramach szpinaku jest 3,9 g żelaza?

b) W 3 hl wody należy rozpuścić 1 l środka owadobójczego. Ile mililitrów środka należy rozpuścić w 3 l wody?

c) Jeden mililitr rtęci waży około 13,5 g. Ile ton waży 1 hektolitr rtęci?

30. a) Ustal, ile metrów sześciennych ma 1000 arkuszy blachy, każdy w kształcie prostopadłościanu o wymiarach: 2 mm × 120 cm × 15 dm.

b) W 1 cm³ mieści się około 250 ziaren piasku. Oblicz, ile ziaren piasku wypełni pokój o wymiarach 5 m × 4 m × 3 m. Wynik zapisz w notacji wykładniczej.

31. W tabeli podano kursy walut odnotowane pewnego dnia.

KURSY WALUT SPRZEDAŻ			
€	euro	\$	dolar
	4,2662 zł		3,8625 zł
£	funt	¥	jen
	4,8643 zł		3,3394 zł

Ile złotych trzeba było tego dnia zapłacić za:

- a) 1000 dolarów, c) pół funta,
 b) 50 euro, d) 500 jenów?

32. Staś zarobił pewną kwotę pieniędzy. Za $\frac{1}{5}$ tej kwoty kupił płyty, $\frac{1}{3}$ pozostałej kwoty wydał na książki, resztę wrzucił do skarbonki. Jaka część zarobionych pieniędzy znalazła się w skarbonce?



33. Drukarnia Betext za wydrukowanie 1000 egzemplarzy pewnej książki proponowała cenę 5540 zł. Za wydrukowanie 2000 egzemplarzy tej książki trzeba zapłacić 7920 zł. O ile mniejszy jest koszt wydrukowania jednego egzemplarza książki przy większym nakładzie?

----- Ciekawostka

Rodzaj papieru, na którym drukowane są książki, a także rodzaj kartonu na okładki określa się, podając ich gramaturę. Na przykład papier w tej książce jest 70-gramowy, a okładka 250-gramowa. Oznacza to, że 1 m^2 arkusza papieru, na którym wydrukowano tę książkę, waży 70 g, a 1 m^2 arkusza kartonu na okładkę waży 250 g.

34. Przeczytaj ciekawostkę. Stukartkowy notatnik wykonany jest z papieru 90-gramowego. Jedna strona notatnika ma powierzchnię 500 cm^2 . Ile waży notatnik? Ile ważyłby, gdyby go wykonano z papieru 70-gramowego?

 **35.** Przepisy gry w piłkę nożną sformułowano w Anglii, dlatego wszystkie odległości i wymiary były podane w jednostkach anglosaskich, tzn. stopach i jardach ($1\text{ stopa} = 30,48\text{ cm}$, $1\text{ jard} = 3\text{ stopy}$).

a) Bramka ma szerokość 8 jardów i wysokość 8 stóp. Pole karne jest prostokątem o bokach 44 jardy i 18 jardów. Podaj wymiary bramki w centymetrach, a wymiary pola karnego w metrach.

b) Punkt, z którego wykonuje się rzut karny, jest oddalony od bramki o 11 m. Gdy zawodnik wykonuje rzut wolny, gracze drużyny przeciwnej muszą stać w odległości co najmniej 9,15 m od piłki. W pierwotnych przepisach te odległości podane były w pełnych jardach. Ile jardów wynosiły te odległości?

 **36.** Skrupuły i łuty to dawne jednostki masy.

$$1\text{ skrupuł} = 1,056\text{ g}$$

$$1\text{ łut} = 12\text{ skrupułów}$$

a) Pani Wiesława waży 58 kg, a pani Jadwiga waży 77,8 kg. O ile więcej skrupułów ma pani Jadwiga?

b) Pan Jan powiada, że żona to jego szczęście i to szczęście ma 5000 łutów. Ile kilogramów waży żona pana Jana?



37. Zapisz za pomocą sześciu różnych cyfr i przecinka liczby: jak najmniejszą i jak największą, których zaokrąglenia do części dziesiątych równe są 1,4.

⊙ **38.** Wynik pomiaru zapisano za pomocą liczby mającej 5 miejsc po przecinku (ostatnia z zapisanych cyfr nie jest zerem). Po zaokrągleniu otrzymano 1. Ustal, jaki mógł być największy, a jaki najmniejszy wynik pomiaru, jeśli zaokrąglano go do części:

- a) dziesiątych,
- b) setnych.

39. Czy można wybrać takie liczby a i b , aby $a \geq 523$ i $b \leq 470$ oraz:

- a) iloraz $b : a$ był liczbą większą od 1,
- b) różnica $a - b$ była liczbą większą od 60,
- c) suma $a + b$ liczb była liczbą ujemną,
- d) iloczyn $a \cdot b$ był liczbą większą od 1 miliona?

40. Prostokąty A , B i C mają wymiary:

A : $12,48 \text{ m} \times 20,691 \text{ m}$,

B : $31,37 \text{ m} \times 4,232 \text{ m}$,

C : $79,842 \text{ m} \times 3,825 \text{ m}$.

a) Oszacuj, czy suma obwodów prostokątów A i B jest większa od obwodu prostokąta C .

b) Oszacuj, czy suma pól prostokątów A i B jest większa od pola prostokąta C .

41. Oszacuj, czy podana liczba jest większa od 1.

a) $\frac{135}{276} + \frac{315}{643}$ c) $\frac{15}{16} \cdot \frac{6}{11}$

b) $\frac{1}{2} + \frac{127}{263}$ d) $\frac{17}{19} + \frac{2}{19} \cdot \frac{6}{7}$

42. Oszacuj wyniki odpowiednich działań i odpowiedz na pytania.

a) Czy nasza era trwa dłużej niż milion dni?

b) Czy od czasu chrztu Polski minęło więcej czy mniej niż miliard minut?

c) Czy ferie zimowe trwają dłużej czy krócej niż milion sekund?

Działania na potęgach i pierwiastkach

→ **43.** Zapisz w postaci jednej potęgi:

a) $(-2)^{16} : (-2)^8$ c) $17^{14} \cdot 17^{14}$

b) $(7^5)^2$ d) $(1\frac{1}{3})^5 \cdot 3^5$

→ **44.** Oblicz:

a) $\frac{5^3 \cdot 5^8}{5^{11} : 5^2}$ c) $(\frac{2}{5})^3 : (-\frac{2}{5})^2$

b) $\frac{0,25^3 : 0,5^3}{5^3}$ d) $(0,1^2)^3 : 0,1^3$

45. Oblicz:

a) $\frac{2^{n+1}}{2^n}$ b) $6^m \cdot 6^{3-m}$ c) $\frac{10^{k+1}}{10^{k-1}}$ d) $\frac{3^{2n+2}}{3^{2n-1}}$

□ **46.** Uzasadnij, że zachodzi równość:

$$2 \cdot (2^{19} + 2^{19}) = 2^{21}$$

□* **47.** Uzasadnij, że liczba $3^{n+2} + 3^n$ jest podzielna przez 10 dla każdej liczby naturalnej n .

→ **48.** Oblicz (wynik zapisz w notacji wykładniczej):

a) $3 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^6$ c) $\frac{9 \cdot 10^{13}}{30 \cdot 10^5}$

b) $3 \cdot 10^9 + 8 \cdot 10^{10}$ d) $\frac{3,8 \cdot 10^{20}}{0,2 \cdot 10^{15}}$

49. Powierzchnia Danii to $4,3 \cdot 10^4 \text{ km}^2$. Do Królestwa Danii należą jeszcze: Grenlandia, której powierzchnia jest równa $2,17 \cdot 10^6 \text{ km}^2$, i Wyspy Owcze o powierzchni $1,4 \cdot 10^3 \text{ km}^2$. Oblicz powierzchnię Królestwa Danii. Wynik podaj w notacji wykładniczej.

→ **50.** Zapisz w jak najprostszej postaci:

a) $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ c) $3\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{4}$ e) $(-\frac{1}{2}\sqrt{3})^2$

b) $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{2\sqrt{5}}{3}$ d) $(\frac{3\sqrt{5}}{2})^2$ f) $(\frac{\sqrt{2}}{2})^3$

51. Wskaż pary równych liczb:

$$\begin{array}{ccc} 2\sqrt{3} & (2\sqrt{2})^2 & \sqrt{12} \\ \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} & 3\sqrt{2} & \sqrt{32} \cdot \sqrt{2} \end{array}$$

→ **52.** Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka i oblicz:

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{8}$ d) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{2}$

b) $3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{8} \cdot \sqrt{3}$ e) $2\sqrt[3]{24} - 2\sqrt[3]{3}$

c) $7\sqrt{2} \cdot 0,1\sqrt{12}$ f) $-\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{-3}$

→ **53.** Przekształć wyrażenia tak, aby pozbyć się pierwiastków z mianownika.

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{5}{2\sqrt{7}}$



WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE I RÓWNANIA

- 1** Przekształcenia algebraiczne
- 2** Równania
- 3** Proporcje
- 4** Wielkości wprost proporcjonalne

➤ Przed klasówką, s. 64

➤ Zadania uzupełniające, s. 66

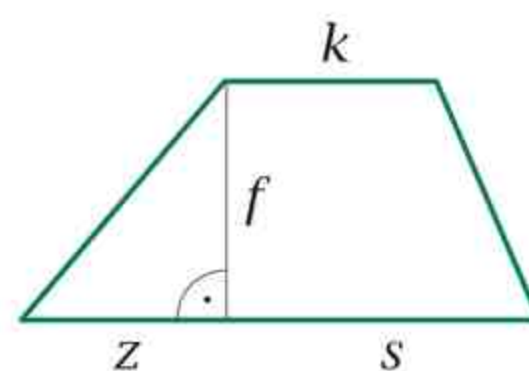
1 Przekształcenia algebraiczne

Pytania i zadania kontrolne

A. Liczba p jest dodatnia. Zapisz liczbę:

- | | |
|--------------------------|-----------------------------|
| a) o 5 większą od p , | c) 4 razy większą od p , |
| b) o 3 mniejszą od p , | d) 2 razy mniejszą od p . |

B. Zapisz wzór na pole trapezu przedstawionego na rysunku obok.



C. Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------|
| a) x metrów — ile to centymetrów? | b) g godzin — ile to minut? |
| y centymetrów — ile to metrów? | m minut — ile to godzin? |

D. Zapisz w jak najprostszej postaci:

- | | | |
|---------------|-----------------|--------------------------|
| a) $x - 0,7x$ | b) $x + 5x - 1$ | c) $1 + 3x - 0,6 - 0,6x$ |
|---------------|-----------------|--------------------------|

E. Przedstaw w postaci sumy algebraicznej:

- | | | |
|-----------------------|----------------------|--------------------|
| a) $3x(x + 5) - 2x^2$ | b) $(a + 3)(4 - 3a)$ | c) $6x - 2(3 - x)$ |
|-----------------------|----------------------|--------------------|

F. Bilet normalny kosztuje x złotych, a ulgowy jest o 7 zł tańszy. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, ile złotych trzeba zapłacić za 7 biletów ulgowych i 3 normalne.

Poniższe przykłady przypominają, jak przekształcamy wyrażenia algebraiczne.

Przykłady

$$x^2 + x - 7x^2 - 0,2x = -6x^2 + 0,8x$$

$$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$$

$$y - (2x - 3) = y - 2x + 3$$

$$\frac{2a+3}{2} = \frac{2a}{2} + \frac{3}{2} = a + \frac{3}{2}$$

$$2x(1 - 3x) = 2x - 6x^2$$

$$(x + 10y) : 5 = \frac{x+10y}{5} = \frac{x}{5} + 2y$$

Zadania

1. Zapisz w postaci jak najprostszej sumy algebraicznej:
 - a) sumę trzech liczb: liczby a , połowy liczby a i liczby 3,
 - b) wynik odejmowania dwóch liczb: od liczby o 5 większej od liczby b odejmujemy liczbę o 5 mniejszą od dwukrotności liczby b ,
 - c) sumę trzech liczb: liczby c , liczby o 10 od niej większej i liczby 10 razy mniejszej od kwadratu liczby c ,
 - d) jaką liczbę otrzymamy, gdy od liczby x odejmiemy $\frac{1}{6}$ tej liczby, a następnie dodamy 6,
 - e) $\frac{1}{4}$ liczby o 4 większej od $\frac{1}{5}$ liczby a .

10/66

2. Zapisz odpowiednie wyrażenia algebraiczne.
 - a) x kilometrów i 5 metrów — ile to metrów?
 - b) 5 kg i y gramów — ile to kilogramów?
 - c) x euro i y eurocentów — ile to eurocentów?
 - d) a złotych i b groszy — ile to złotych?
 - e) h hektarów i a arów — ile to hektarów?
 - f) g godzin i m minut — ile to godzin?

3. Uprość wyrażenia.

- | | |
|--|---|
| a) $5x^2 - 3x - 9x^2 + 4x + 5$ | d) $-(3 + 2b^2 - \frac{3}{4}b) + \frac{1}{3}b^2 + 2b$ |
| b) $p^2 + 4 - \frac{2}{3}p + p + \frac{3}{5}p^2$ | e) $-(5 - m) + 0,3m^2 - 0,6m + 2m^2$ |
| c) $-7a - (4a - 3a^2) + 5a^2 - 2a^3$ | f) $2n^2 - 0,7n - (2n^3 + 0,9n^2 - 2n)$ |

2/66

4. Zapisz w postaci jak najprostszej sumy algebraicznej:

- | | |
|------------------------------|--|
| a) $-4(2x + 0,5)$ | d) $-3(1 - 2y) + \frac{1}{2}(6 - 12y)$ |
| b) $\frac{2}{3}(6y - 15)$ | e) $-(x - 2) - 4(\frac{1}{2} - x)$ |
| c) $3(x^2 - 2) - (5 - 6x^2)$ | f) $1 - 3(\frac{1}{2}x - 2) - \frac{1}{2}(1 - 3x)$ |

3-4/66

5. Zapisz w postaci jak najprostszej sumy algebraicznej:

- | | | |
|------------------------|-------------------------|-------------------------------|
| a) $(x + 1)(x + 4)$ | c) $-(x + 7)(x - 3)$ | e) $2k^2 - (k + 3)(2k + 4)$ |
| b) $2(2x + 3)(2x - 1)$ | d) $1 - (z + 5)(z - 1)$ | f) $-3(a + 2b)(a - b) + 3a^2$ |

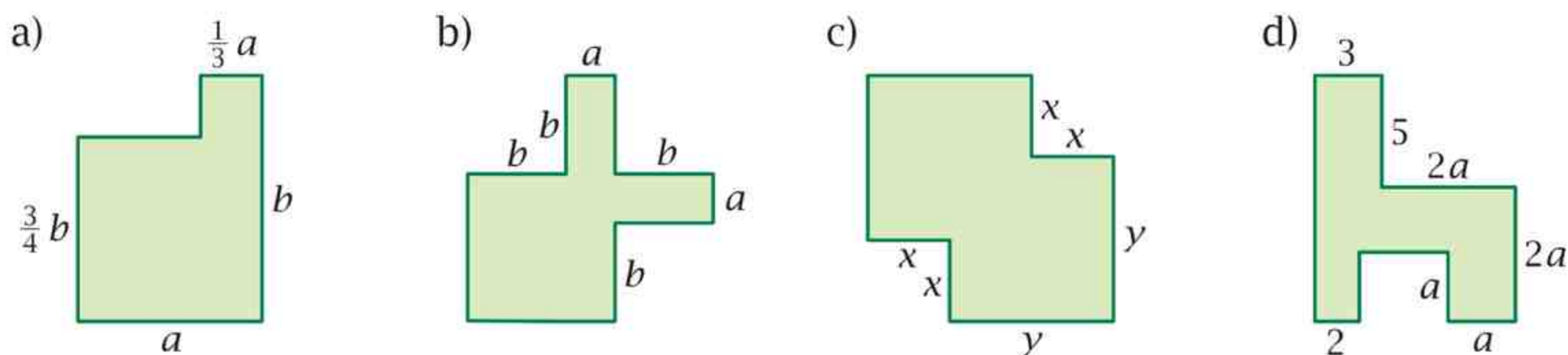
6/66

$$(x + 7)^2 = (x + 7)(x + 7)$$

6. Zapisz w postaci jak najprostszej sumy algebraicznej:

- | | | |
|----------------|-----------------|------------------|
| a) $(x + 7)^2$ | b) $(2x - 1)^2$ | c) $(5x + 2y)^2$ |
|----------------|-----------------|------------------|

7. Zapisz w jak najprostszej postaci obwody i pola figur:



8. Podane wyrażenia zapisz w jak najprostszej postaci.

- a) $a - [a - (1 - a)]$ c) $x - [y - (x - y) - x - (y - x)]$
 b) $-x - [-(1 - x) - (x - 1)]$ d) $1 - a - [1 - (a - 1) - 2a - (1 - 3a)] - a - 1$

9. Oblicz wartości wyrażeń dla podanych wartości zmiennych.

- a) $6x(2x - 1) + 4x(4 - 3x)$ dla $x = -4,2$
 b) $(y - 2)(y + 3) - y^2$ dla $y = -1\frac{1}{7}$
 c) $a(3a + b) - 2a^2$ dla $a = 5$ i $b = -3$
 d) $m(2m + 6) - 3(1 + 2m)$ dla $n = -5$ i $m = \frac{1}{n}$

10. Uprość wyrażenia.

- a) $\frac{2x+4}{2}$ c) $4 \cdot \frac{x-7}{2} - 6 \cdot \frac{3-x}{3}$
 b) $2 \cdot \frac{6x-18}{12}$ d) $-\frac{6a+4}{2} - \frac{9a-3}{3}$

11. Liczby x i y są ujemne i $x < y$. Które z poniższych wyrażeń ma wartość ujemną?

$$x - y \quad xy \quad \frac{x}{y} - 1 \quad \frac{y}{x} \quad y - x \quad \frac{y}{x} + 1$$

*12. a) Liczba x spełnia warunek $1 \leq x \leq 7$. Liczba y jest o 4 mniejsza od x , a liczba z jest równa $2y$. Jaka jest największa, a jaka najmniejsza możliwa wartość z ?

b) Liczba a spełnia warunek $-2 \leq a \leq 4$, a liczba b warunek $-3 \leq b \leq 5$. Jaka jest największa możliwa wartość wyrażenia $2a - b$, a jaka — najmniejsza?

■ 13. Uzasadnij, że:

- a) wyrażenie $x^2 + 1$ przyjmuje zawsze wartość dodatnią,
 b) wyrażenie $x^2 - (5 + x + x^2 - 4x) - 3x$ przyjmuje zawsze wartość -5 .

14. Odpowiedzi na pytania zapisz w postaci wyrażeń algebraicznych.

- W pewnej szkole jest a uczniów, w tym x dziewcząt. Okulary nosi $\frac{1}{5}$ dziewcząt i $\frac{2}{11}$ chłopców. Ilu jest chłopców w tej szkole? Ilu chłopców nosi okulary? Ilu uczniów nosi okulary?
- Wojtek jest o 7 lat starszy od Bożeny i o 10 lat młodszy od Uli. Bożena ma b lat. Ile lat ma Ula, a ile — Wojtek? Po ile lat będą mieli Wojtek, Bożena i Ula za 5 lat? Po ile lat mieli 3 lata temu?
- W portmonetce jest x złotych i monety o nominałach 20 gr i 2 zł. Dwudziestogroszówek jest 3 razy więcej niż złotych, a dwuzłotówek — o 5 mniej niż dwudziestogroszówek. Jaką łączną wartość mają monety dwudziestogroszowe, a jaką — dwuzłotowe?
- Jeden z kątów trójkąta ma miarę α , drugi kąt jest o 10° mniejszy. Jaką miarę ma trzeci kąt tego trójkąta?
- W czworokącie $ABCD$ jeden z kątów ma miarę α , dwa inne kąty mają równe miary, a każdy z nich jest o 5° mniejszy od kąta α . Jaką miarę ma czwarty kąt tego czworokąta?

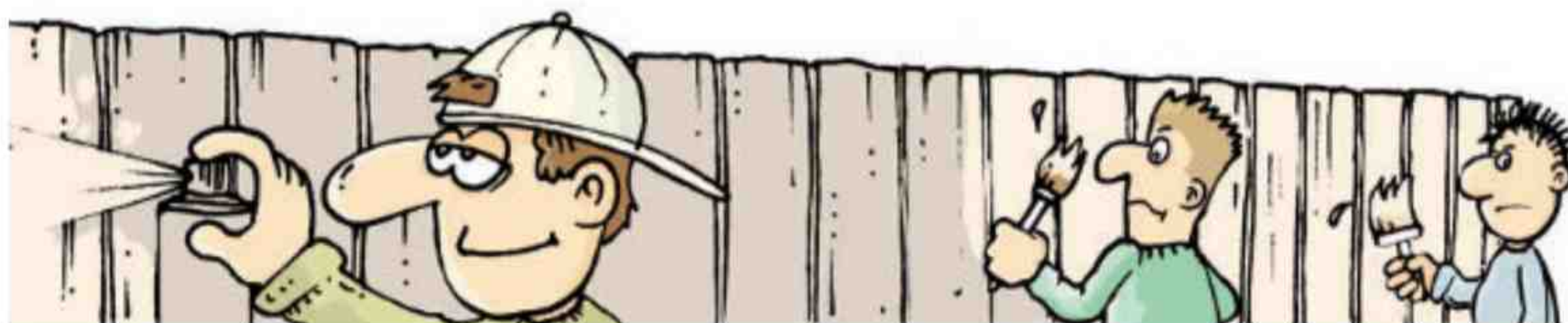
15. Zapisz odpowiedzi w postaci wyrażeń algebraicznych.

- W pewnej klasie n uczniów ma jednego brata lub jedną siostrę, o czterech uczniów mniej ma dwoje rodzeństwa, a dwóch uczniów ma troje rodzeństwa. Zakładając, że w klasie nie ma rodzeństw, ustal, jak liczne jest rodzeństwo uczniów tej klasy.
- Długość prostokątnej podłogi jest równa a metrów, a jej szerokość jest o 1,5 m mniejsza. Podłoga ta będzie pokryta wykładziną, której cena za 1 m^2 wynosi 45 zł. Ile będzie kosztowała położona wykładzina?



- Film pt. *Zawód Leona* w kinie Bajka obejrzało x osób. Film ten szczególnie podobał się dzieciom. Dorośli stanowili tylko $\frac{1}{5}$ wszystkich widzów. Jaki był przychód ze sprzedaży biletów na ten film w kinie Bajka?

- Większość z 5 l dzemu zmieściło się w x słoikach o pojemności 0,3 l i y słoikach o pojemności 0,25 l. Ile dzemu się nie zmieściło?
- Tomek miał pomalować płot o długości p metrów. Sam pomalował fragment płotu o długości 2 metrów, a 0,9 pozostałej części pomalowali jego koledzy. Ile metrów płotu zostało do pomalowania?



Sprawdź, czy umiesz

- Ania była wczoraj przez x godzin w szkole, a $\frac{1}{5}$ pozostałej części doby poświęciła na rozwiązywanie zadań domowych. Jak długo Ania rozwiązywała zadania?
 A. $\frac{1}{5} \cdot 24 - x$ B. $24 - \frac{1}{5}x$ C. $\frac{4}{5}(24 - x)$ D. $\frac{1}{5}(24 - x)$
- Wyrażenie $2p(2r + p) - 4r(p - r)$ można zapisać w postaci:
 A. $2p^2 - 4r^2$ B. $2p^2 + 4r^2$ C. $2p^2 + 4r^2 - 2pr$ D. $2p + 4r$
- Które z podanych wyrażeń algebraicznych przyjmuje dla $a = -3$ i $b = 2$ wartość ujemną?
 A. $a + b - 3a$ B. $-2ab + b$ C. $\frac{5}{a+b} + 4$ D. $1 - (2a + 3b)$

→ zadania uzupełniające 1–17, str. 66–67

2 Równania

Pytania i zadania kontrolne

- A. Znajdź liczby oznaczone literami:

$$3(a - 1) = -a$$

$$1 - 0,2b = 0,3b$$

$$\frac{c+1}{2} = \frac{c}{3}$$

- B. Dane jest równanie $2(x + 3) = -x + 3$. Sprawdź, nie rozwiązując równania, czy spełnia je liczba -1 .
- C. Zapisz i rozwiąż odpowiednie równanie.
- Liczba 5 razy większa od x jest o 12 większa od x .
 - Piotr waży x kg, Tomasz jest od niego o 4 kg cięższy, razem ważą 134 kg.
- D. Które z podanych równań nie ma rozwiązań, a które ma nieskończenie wiele rozwiązań?

$$7x + 4 = 7x - 3$$

$$6 + 2x = 6x - 2$$

$$-4x + 5 = 5 - 4x$$

- E. Wyznacz a ze wzoru $L = 2a + 2b$.

Przypominamy, że liczba spełnia równanie, gdy dla tej liczby wartości wyrażeń po lewej i prawej stronie równania są równe.

Przykład

Sprawdź, które z liczb: 4, 3, -5 spełniają podane równanie.

$$x^3 + x^2 = 20x$$

$$\text{dla } x = 4: \quad L = 4^3 + 4^2 = 80 \quad P = 20 \cdot 4 = 80 \quad L = P$$

$$\text{dla } x = 3: \quad L = 3^3 + 3^2 = 36 \quad P = 20 \cdot 3 = 60 \quad L \neq P$$

$$\text{dla } x = -5: \quad L = (-5)^3 + (-5)^2 = -100 \quad P = 20 \cdot (-5) = -100 \quad L = P$$

Odp. Liczby 4 i -5 spełniają równanie, a liczba 3 nie spełnia równania.

ĆWICZENIE A. Sprawdź, czy liczby 0, -1 spełniają równanie z powyższego przykładu.

Rozwiązać równanie to znaczy znaleźć wszystkie liczby, które spełniają to równanie.

Rozwiązując równanie, zapisujemy coraz prostsze równania równoważne danemu.

Przykłady

Rozwiąż równania:

$$\text{a) } 7x - 3 = x - 2(5x - 1)$$

$$7x - 3 = x - 10x + 2$$

$$7x - 3 = -9x + 2 \quad | +9x + 3$$

$$16x = 5 \quad | : 16$$

$$x = \frac{5}{16}$$

$$\text{b) } \frac{x}{3} - \frac{x-3}{6} = 4 \quad | \cdot 6$$

$$2x - (x - 3) = 24$$

$$2x - x + 3 = 24$$

$$x + 3 = 24 \quad | - 3$$

$$x = 21$$

Niektóre równania z jedną niewiadomą nie mają rozwiązań. Takie równanie nazywamy **sprzecznym**.

Można również zapisać równania, które spełnia każda liczba rzeczywista. Takie równanie nazywamy **tożsamościowym**.

$$x + 1 = x + 6$$

równanie sprzeczne

$$2(x + 1) = 2x + 2$$

równanie tożsamościowe

Zadania

1. Sprawdź, czy któraś z liczb -2 i 3 spełnia poniższe równania.

a) $\frac{5-x}{7} = \frac{3}{x}$

c) $x^3 - x - 6 = 0$

b) $x^2 + x = 6 + 2x$

d) $\frac{x^3+3}{10} = 8 - \frac{x^2+1}{x-1}$

2. Sprawdź, które liczby całkowite niedodatnie i większe od -5 są rozwiązaniami równań:

a) $x^3 + 8 = 0$

b) $\frac{x^2}{3} - \frac{x}{5} = \frac{8}{15}$

c) $\frac{2}{x} + x^2 + 4x = -\frac{1}{2}$

3. Rozwiąż równania:

a) $2x + 17 = 26 - x$

d) $-4\left(\frac{1}{2}x - 2\right) - 4 = 2(-x + 2)$

b) $11 - x = 3x + 8$

e) $2x(x - 1) = 2(x - 1)(x + 3)$

c) $-7(x + 2) + 4 = -3x$

f) $(3x + 2)(2x + 1) = (6x - 3)(x + 1)$

4. Rozwiąż równania:

a) $\frac{x}{2} = \frac{5}{6}$

c) $\frac{2(x-1)}{3} = \frac{x+2}{5}$

e) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + 1 = \frac{1}{6}(x + 6)$

b) $\frac{x}{2} = \frac{x+1}{4}$

d) $1 - \frac{2x+5}{3} = 4$

f) $\frac{x-1}{4} - \frac{x+1}{2} = -\frac{x}{4}$

5. Przyjrzyj się zapisom na karteczkach. Dwie osoby rozwiązywały to samo równanie różnymi sposobami.

Iwona

$$\begin{aligned} 6 + 0,5x &= 0,2x \\ 0,5x - 0,2x &= -6 \\ 0,3x &= -6 \\ x &= \frac{-6}{0,3} \\ x &= -20 \end{aligned}$$

Jacek

$$\begin{aligned} 6 + 0,5x &= 0,2x \\ 60 + 5x &= 2x \\ 5x - 2x &= -60 \\ 3x &= -60 \\ x &= -20 \end{aligned}$$

Wyjaśnij, jak równanie rozwiązywała Iwona, a jak — Jacek. Rozwiąż poniższe równania wybranym sposobem.

a) $1,2x + 0,8 = 0,3x$

b) $5 + 0,3x = 1,8x + 0,5$

c) $2x - 0,2x = 0,7x + 3,7$

6. Rozwiąż równania:

a) $\frac{3}{2}x + 0,7 = -0,3x - \frac{3}{4}$

c) $\frac{1,8x - \frac{5}{6}}{2} = \frac{2,3x + \frac{2}{3}}{5}$

b) $\frac{2}{7}(1,4x + 21) = -\frac{3}{5}x$

d) $-1,8\left(\frac{2}{9} - 0,5x\right) = \frac{5}{8}(4x + 2,4)$

7. Ile rozwiązań mają poniższe równania?

a) $2(x + 3) - x = x + 3$

c) $3(x + 4) = 12 - x$

e) $\frac{6x+5}{3} = 2x + 5$

b) $4x - 6(x - 3) = 2(9 - x)$

d) $3x + 2 = \frac{12x+8}{4}$

f) $\frac{2x+3}{2} = \frac{3x+2}{3} + 5$

8. a) Ile rozwiązań będzie miało równanie $ax - 5 = 4x + 3$, gdy literę a zastąpimy liczbą 4, a ile — gdy zastąpimy ją liczbą 5?

b) Ile rozwiązań będzie miało równanie $3x + p = 3(x + 2)$, gdy liczbę p zastąpimy liczbą 6, a ile — gdy zastąpimy ją liczbą 3?

c) Jaką liczbą należy zastąpić m w równaniu $mx - 4 = 5x - 4$, aby to równanie było tożsamościowe? Czy można zastąpić m taką liczbą, aby to równanie było sprzeczne?

9. Wyznacz ze wzoru wskazaną wielkość.

a) $P = \frac{e \cdot f}{2}$, f

c) $P = \frac{(a+b)h}{2}$, b

e) $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, a

b) $V = \frac{1}{3}ab \cdot H$, H

d) $d = a\sqrt{2}$, a

f) $P = \frac{r(a+b+c)}{2}$, a

27/68

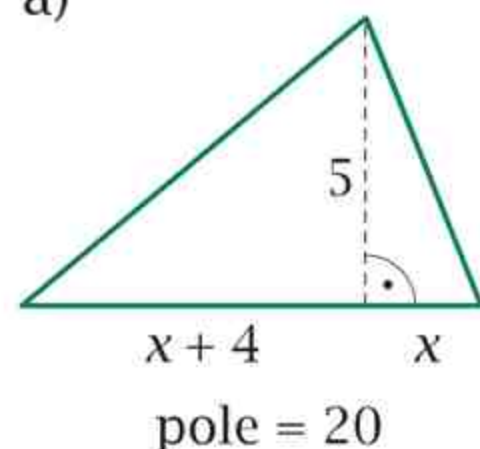
10. Oblicz wartość a na podstawie poniższych informacji:

a) $\frac{ab}{4} = 12$, $2b = \frac{36}{c}$, $\frac{15}{c} = 5$

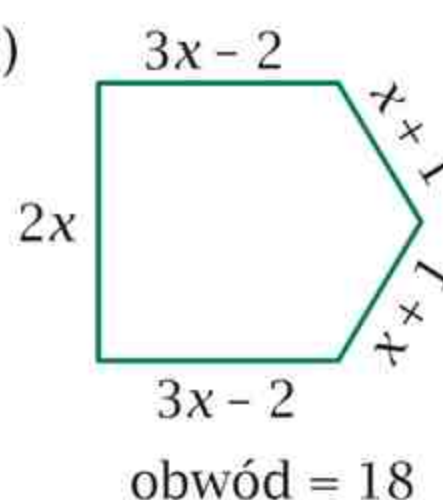
b) $\frac{3a+b}{5} = -2$, $5b = 2c + 3$, $\frac{1}{c} = \frac{2}{7}$

11. Oblicz x — ułóż i rozwiąż odpowiednie równania.

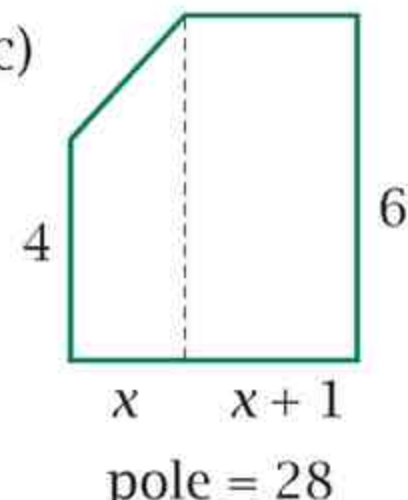
a)



b)



c)



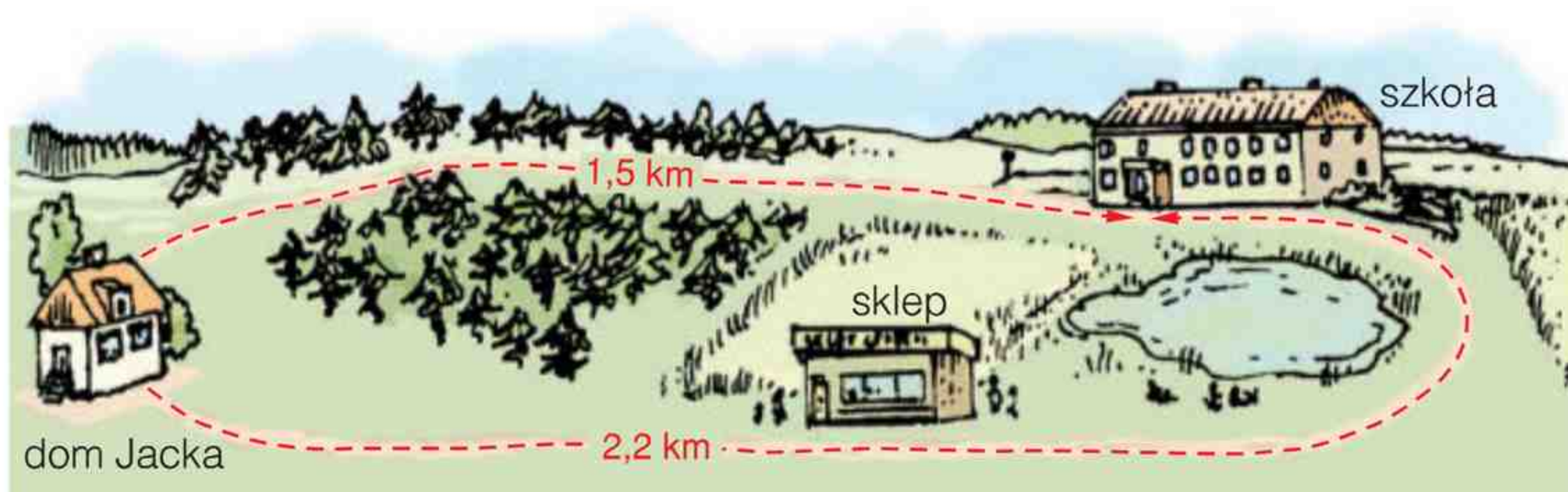
12. a) W trójkącie równoramiennym o obwodzie 11 cm ramię jest o 1 cm dłuższe od podstawy trójkąta. Oblicz długości boków tego trójkąta.

b) Pole trapezu o wysokości 6 cm jest równe 30 cm^2 . Jedna z podstaw jest o 8 cm dłuższa od drugiej. Jaką długość ma krótsza z podstaw tego trapezu?

13. Filiżanka jest o 8 zł droższa od podstawki. Za podstawkę z filiżanką trzeba zapłacić 38 zł. Ile kosztuje filiżanka bez podstawki?
14. Magda jest o 6 kg lżejsza od Zuzanny. Razem ważą 96 kg. Ile waży Zuzanna?
15. Roman pisze powieść. Ma już $\frac{1}{3}$ zaplanowanej liczby stron. Jeszcze 37 stron i połowa powieści będzie gotowa. Ile stron ma liczyć powieść Romana?
16. Na forum internetowym „Sami o sobie” wpisało się 120 tys. osób. Twórca forum prześledził wpisy i podzielił uczestników tego forum na nudziarzy i fantastów, przy czym tych pierwszych jest 5 razy więcej. Ilu nudziarzy i ilu fantastów zapisanych jest na tym forum?
17. Pod koniec XIV wieku trębacz miejski w Krakowie zarabiał 8 gr tygodniowo. Mógł za tę sumę kupić 2 korce grochu i 3 korce cebuli. Korzec grochu był o 1,5 gr droższy od korca cebuli. Ile kosztował korzec cebuli?



18. W hoteliku „Pod różami” są 74 miejsca noclegowe. Pokoi dwuosobowych jest o 10 więcej niż jednoosobowych, pokoi trzyosobowych jest 3 razy mniej niż dwuosobowych i na ostatnim piętrze są 3 pokoje czteroosobowe. Ile pokoi jest w tym hotelu?



19. Jacek obliczył, że od poniedziałku do piątku, chodząc do szkoły i z powrotem, pokonał odległość 16,4 km. Korzystając z informacji podanych na rysunku, odpowiedz, ile razy Jacek wybierał drogę przez las.

20. Przez prawie wszystkie miesiące tego roku pani Beata zarabiała tyle samo, a dopiero w grudniu zarobiła o 600 zł więcej. Dzięki temu jej średnia miesięcznych zarobków wynosiła w tym roku równo 2000 zł. Ile wyniosła grudniowa pensja pani Beaty?

21. Przeczytaj dialogi na rysunkach. Oblicz, ile za bilety zapłaci młodzieniec w okularach.



22. Czy można rozmiąć złotówkę na monety o nominałach 2 gr i 5 gr tak, aby monet tych było razem 30?
23. W torebce jest sporo cukierków. Aż $\frac{1}{3}$ z nich to krówki, a $\frac{1}{4}$ pozostałych to irysy. Oprócz tego jest jeszcze 18 cukierków innych gatunków. Ile cukierków jest w torebce?
24. Basia jest o 5 lat starsza od Agnieszki. Rok temu była dwa razy starsza od Agnieszki. Ile lat ma Agnieszka?
25. Pan Piotr jest wyższy od swojego syna dokładnie o 1 m. Gdyby pan Piotr był o 15 cm niższy, to byłby dwa razy wyższy od syna. Jakiego wzrostu jest syn pana Piotra?
26. Na początku pewnego bardzo ważnego zebrania było o 5 kobiet więcej niż mężczyzn. Po piętnastu minutach przyszli jeszcze spóźnieni pan Józio i trzy panie z księgowości. Wtedy znudzony pan Tadeusz zauważył, że kobiet jest dwa razy więcej niż mężczyzn. Ile osób było wówczas na sali?



27. Trzech zbójów: Olek i dwóch Marcinów podzieliło się łupem. Marciniowie wzięli po tyle samo skrzyń złota, Olek (herszt) — o pięć skrzyń więcej niż każdy z Marcinów. Marciniowie razem wzięli o cztery skrzynie więcej niż Olek. Ile było skrzyń złota?

- 28.** Piotr, Paweł, Ania i Hania zbierali jagody. Paweł zebrał połowę tego, co zebrał Piotr, Ania o 1 litr jagód więcej niż Piotr, a Hania tylko $\frac{1}{3}$ tego, co zebrał Piotr. Chłopcy zebrali tyle samo jagód co dziewczęta. Ile litrów jagód mają razem?
- *29.** Gospodyni zebrała jajka w kurniku. Może zapakować te jajka do pojemników po 6 jajek albo po 10 jajek. W każdym wypadku zostanie jej 5 jajek. Wybierając tylko większe pojemniki, zużyje o 4 pojemniki mniej, niż gdyby użyła tylko mniejszych pojemników. Ile jaj zebrała gospodyni w kurniku?
- *30.** W sklepie mięsnym Krasnal ceny są ustalone tak, że na oddzieleniu schabu od kości właściciel nic nie zarabia i nic nie traci. Ile przeciętnie ważą kości, a ile mięso w 1 kg schabu z kością?



Sprawdź, czy umiesz

$$-2(3x - 4) = 5$$

$$\frac{x+2}{3} - \frac{x}{2} = 1$$

- 1.** Znajdź sumę rozwiązań równań podanych w ramce.
- A. -2,5 B. -1,5 C. 1,5 D. 2,5
- 2.** Ze wzoru $\frac{a+5}{b} = c + 2d$ wyznaczono każdą ze zmiennych. W jednym wypadku zrobiono to błędnie. Wskaż go.
- A. $a = bc + 2bd - 5$ C. $c = \frac{a+5}{b} - 2d$
 B. $b = \frac{a+5}{c+2d}$ D. $d = \frac{a+5}{2b} - c$
- 3.** Test kontrolny z matematyki pisało 150 uczniów. Oceny bardzo dobre otrzymała $\frac{1}{3}$ dziewcząt i $\frac{2}{7}$ chłopców, razem 46 osób. O ilu więcej chłopców niż dziewcząt pisało ten test?
- A. o 8 B. o 18 C. o 22 D. o 66

3 Proporcje



ĆWICZENIE A. Zapisz odpowiednie równania:

a) Dzieci dostały czekolady do równego podziału. Czekolad było x , a dzieci o 6 więcej. Po podziale każde dziecko dostało $\frac{1}{3}$ czekolady.

b) Odcinek o długości 15 podzielono na x jednakowych części, a odcinek o długości 18 podzielono na $x + 1$ części. Wszystkie otrzymane w ten sposób odcinki miały tę samą długość.

c) W pewnej klasie jest k chłopców, a dziewcząt jest o 4 więcej. Gdyby chłopców podzielić na 3 równe grupy, a dziewczęta na 4 równe grupy, to w każdej grupie byłoby tyle samo osób.

Po obu stronach równań, które należało zapisać w ćwiczeniu A, występowały ilorazy. Oto inne przykłady równań tego typu:

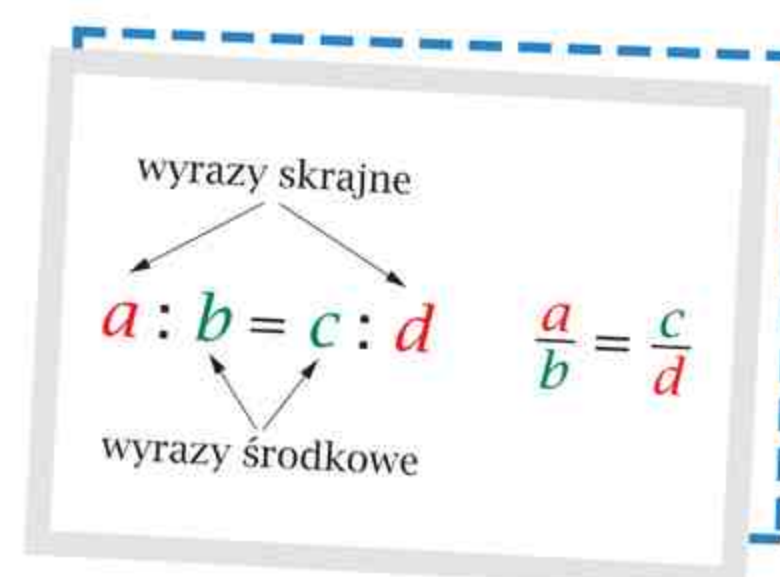
$$5 : x = 2 : 13 \quad \frac{2}{x-5} = \frac{3}{7} \quad \frac{3}{x} = \frac{5}{x+1} \quad \frac{x+1}{x+2} = \frac{3,3}{2,5}$$

Uwaga. W równaniach tego typu zakładamy, że dzielniki (mianowniki) nie przyjmują wartości 0.

Równość dwóch ilorazów nazywamy **proporcją**.

$$a : b = c : d \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Czytamy: } a \text{ ma się do } b \text{ jak } c \text{ do } d; \\ \text{zakładamy, że } b \text{ i } d \text{ są różne od zera.} \end{array} \right.$$

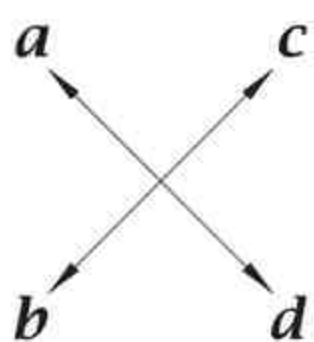
Proporcję tworzą cztery wielkości nazywane wyrazami proporcji; a i d to **wyrazy skrajne**, b i c to **wyrazy środkowe**.



ĆWICZENIE B. a) Dla każdej z poniższych proporcji oblicz iloczyn wyrazów skrajnych i iloczyn wyrazów środkowych.

$$6 : 9 = 10 : 15 \quad \frac{3}{4} = \frac{1,5}{2} \quad \frac{2,4}{1,6} = \frac{30}{20}$$

b) Jaką równość otrzymasz po pomnożeniu obu stron równości $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ przez iloczyn bd .



W każdej proporcji iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych.

Jeżeli $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, to $a \cdot d = b \cdot c$.

Przy rozwiązywaniu równań, które mają postać proporcji, będziemy korzystać z powyższej własności.

Przykład

$$\frac{2}{x} = \frac{3}{2x+1}$$

$$2(2x+1) = 3x$$

$$4x+2 = 3x$$

$$x = -2$$

2 i $2x+1$ to wyrazy skrajne, 3 i x to wyrazy środkowe; zakładamy, że $x \neq 0$ i $2x+1 \neq 0$

Iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych.

Otrzymane rozwiązanie spełnia założenia.

ĆWICZENIE C. Rozwiąż równania z ćwiczenia A.

Zadania

1. Rozwiąż równania:

a) $\frac{3}{x} = \frac{5}{7}$

c) $\frac{5}{6} = \frac{1+t}{10}$

e) $\frac{2p-5}{3} = \frac{4}{5}$

b) $\frac{8}{3,5} = \frac{4}{y}$

d) $\frac{1}{z-1} = \frac{6,5}{8}$

f) $\frac{10}{1,5} = \frac{8}{9-3n}$

2. Rozwiąż równania:

a) $\frac{2}{x} = \frac{3}{x-1}$

c) $\frac{3}{5} = \frac{2x-1}{2-5x}$

e) $\frac{0,4x-1}{3} = \frac{2x-5}{2}$

b) $\frac{4}{x+1} = \frac{5}{x}$

d) $\frac{2x+1}{1-2x} = \frac{2}{3}$

⊙ f) $\frac{4+x^2}{x} = \frac{2x-1}{2}$

3. Dzielimy 3 przez liczbę b oraz liczbę 5 przez liczbę o 12 większą od b . Jaka powinna być liczba b , aby ilorazy były równe?

4. a) Znajdź ułamek, w którym licznik jest o 8 mniejszy od mianownika, i który jest równy $\frac{3}{4}$.

b) Znajdź ułamek, w którym licznik jest o 6 większy od mianownika, i który jest równy $\frac{9}{7}$.



5. O której godzinie między 23^{30} a północą stosunek liczby minut, których brakuje do północy, do liczby minut, które upłynęły od 23^{30} , jest równy $\frac{1}{4}$?

6. W firmie Trans pracuje o 6 mężczyzn więcej niż kobiet. Na każde 4 kobiety przypada 5 mężczyzn. Ilu pracowników liczy Trans?

7. Uczniowie klasy VIIIb przygotowali na loterię 120 losów, w tym tylko 15 wygrywających. Ile powinni dołożyć losów wygrywających, aby loteria spełniała warunki zapowiedziane na plakacie (zob. rys. obok)?



- *8. a) Jaką cyfrę można wpisać między cyfry licznika oraz między cyfry mianownika ułamka $\frac{16}{32}$, aby otrzymany ułamek nadal był równy $\frac{1}{2}$?
- b) Jaką cyfrę można wpisać między cyfry licznika oraz między cyfry mianownika ułamka $\frac{16}{64}$, aby otrzymany ułamek nadal był równy $\frac{1}{4}$?

Sprawdź, czy umiesz

- Z równości $\frac{4}{x-3} = \frac{6}{2x}$ wynika, że:

A. $4(x-3) = 6 \cdot 2x$	C. $8x = 6x - 18$
B. $6 \cdot 4 = (x-3) \cdot 2x$	D. $8x = 6x - 3$
- Iloraz dwóch liczb dodatnich, z których jedna jest o 8 większa od drugiej, jest równy $\frac{3}{7}$. Iloczyn tych liczb wynosi:

A. 20	B. 84	C. 128	D. 308
-------	-------	--------	--------
- W sadzie rosło kilkanaście jabłoni i 12 śliw. Ogrodnik zasadził jeszcze 3 jabłonie i 2 śliwy, ale stosunek liczby jabłoni do liczby śliw się nie zmienił. Ile jabłoni rośnie teraz w sadzie?

A. 18	B. 20	C. 21	D. 24
-------	-------	-------	-------

4 Wielkości wprost proporcjonalne



ĆWICZENIE A. Puszka farby wystarcza do pomalowania około 4 m^2 powierzchni.

a) Oblicz, ile metrów kwadratowych można pomalować, mając do dyspozycji:

- 2 puszki • 5 puszek • 20 puszek

b) Ustal, ile puszek farby musimy kupić, jeśli chcemy pomalować powierzchnię:

- 40 m^2 • 100 m^2 • 120 m^2

Rozważmy dwie wielkości: ilość farby i powierzchnię, którą możemy tą farbą pomalować (zakładamy, że stale kładziemy warstwę farby tej samej grubości). Zauważmy, że gdy zwiększamy ilość farby np. 2 razy, to także 2 razy zwiększy się powierzchnia, którą można tą farbą pomalować.

Jeśli wraz ze wzrostem jednej wielkości druga wielkość rośnie tyle samo razy, to mówimy, że wielkości te są **wprost proporcjonalne**.

Wielkościami wprost proporcjonalnymi są więc ilość farby i powierzchnia, którą możemy tą farbą pomalować. Poniżej podano przykłady innych wielkości wprost proporcjonalnych.

- Liczba kupowanych bułek i kwota, którą musimy za nie zapłacić.

Gdy zwiększamy liczbę zakupionych bułek, tyle samo razy zwiększy się kwota, którą trzeba za nie zapłacić.

- Długość boku kwadratu i obwód kwadratu.

Gdy zwiększamy długość boku kwadratu, tyle samo razy zwiększa się obwód.

- Liczba jednakowych ziaren ryżu i ich łączna masa.

Ile razy więcej ziaren ryżu, tyle razy większa ich łączna masa.

- Liczba jednakowych butelek i objętość płynu, który możemy w nich pomieścić.

Ile razy zwiększymy liczbę butelek, tyle razy więcej płynu możemy do nich wlać.

- Odległość na mapie i odpowiadająca jej odległość w terenie.

Im dłuższy odcinek na mapie, tym proporcjonalnie większa odległość w terenie.

- Czas podróży samochodem jadącym ze stałą prędkością i przebyta odległość.

Im dłuższy czas podróży, tym proporcjonalnie dłuższą drogę przebedziemy.

Tabela przedstawia zależność między liczbą kupowanych bułek a kwotą, którą musimy za nie zapłacić:

Liczba bułek	1	2	3	4	5	6	7	8
Kwota do zapłaty w zł	0,60	1,20	1,80	2,40	3	3,60	4,20	4,80

Zauważ, że jeśli dowolną kwotę z dolnego wiersza tabelki podzielimy przez odpowiadającą jej liczbę bułek, to zawsze otrzymamy taki sam wynik (cenę jednej bułki). Dla liczb zaznaczonych w tabeli zachodzi więc równość ilorazów, czyli proporcja:

$$\frac{2,40}{4} = \frac{4,20}{7}$$

Można sprawdzić, że zachodzą też proporcje:

$$\frac{4}{7} = \frac{2,40}{4,20} \quad \frac{4,20}{2,40} = \frac{7}{4} \quad \frac{4}{2,40} = \frac{7}{4,20}$$

ĆWICZENIE B. Sprawdź, że zachodzą powyższe proporcje, obliczając iloczyny wyrazów skrajnych i środkowych.

Często w zadaniach tekstowych mamy do czynienia z wielkościami wprost proporcjonalnymi. Cała sztuka w rozwiązaniu takiego zadania polega najczęściej na ułożeniu odpowiedniej proporcji.

Przykład

Pięćdziesiąt ziaren kawy waży 6,25 g. Oszacuj, ile ziaren jest w jednym kilogramie kawy.

masa ziaren [g]	6,25	1000		1 kg = 1000 g
liczba ziaren [szt.]	50	x		

$$\frac{6,25}{50} = \frac{1000}{x}$$

Układamy proporcję.

$$6,25x = 50 \cdot 1000$$

Iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych.

$$x = 8000$$

Odp. W jednym kilogramie kawy jest około 8000 ziaren.

Zadania

1. Sprawdź, ile kresek potrafisz narysować w ciągu 10 sekund. Ile czasu zajęłoby ci narysowanie miliona kresek, gdybyś rysował w tym samym tempie?
2. a) Pięć rozbitych jajek wypełnia szklankę o pojemności 0,25 l. Jaką pojemność musi mieć naczynie, w którym zmieści się tuzin rozbitych jajek?
b) Siedem jajek waży 455 g. Ile waży kopa jaj?
Uwaga. Tuzin to 12, a kopa to 60.
3. Pan Szopiński w hurtowni „Wszystko dla nóg” kupił 350 par skarpetek i zapłacił 630 zł.
a) Ile par takich skarpetek można kupić w tej hurtowni za 450 zł?
b) Ile w tej hurtowni trzeba zapłacić za 450 par skarpetek?
4. Można przyjąć w uproszczeniu, że długość dłoni człowieka jest wprost proporcjonalna do jego wzrostu. Zmierz długość dłoni (swój wzrost pewnie znasz).
a) Oblicz, jaka była długość twojej dłoni, gdy miałeś 70 cm wzrostu.
b) Oblicz, jaką długość ma dłoń człowieka o wzroście 2 m.



5. Korzystając z informacji podanych na metkach, oblicz, ile kosztuje większy kawałek sera gouda.
6. W ciągu doby Ziemia obraca się wokół własnej osi o kąt 360° . O jaki kąt obraca się Ziemia w ciągu godziny lekcyjnej?

7. Joanna chciała zrobić pączki według przepisu otrzymanego od koleżanki. Miała wszystkie składniki, ale tylko trzy jajka. Ile powinna wziąć poszczególnych składników, aby proporcje były zachowane?

42/70

8. Tabletki musujące Provit o masie 4200 mg zawiera 30 mg witaminy C. Ile mg witaminy C zawiera tabletki Provit o masie 1 g? Wynik zaokrąglaj do 1 mg.



Przepis na pączki

Składniki ciasta:

- 1,5 szklanki mleka
- 1 kg mąki
- 200 g cukru
- 4 jajka
- 1 paczka drożdży (5 dag)

9. Kostka sześcienna o krawędzi 10 cm wykonana z mosiądzu waży 8 kg. Ile będzie ważyć mosiężna kostka o krawędzi 20 cm?
10. Do zawodów na najoszczędniejszy samochód stanęło kilkadziesiąt pojazdów. W baku każdego startującego pojazdu były dokładnie 2 litry benzyny. Zawody wygrał pan Solski, który swoim samochodem przejechał 90 km i 900 m. Ile litrów na 100 km pali jego samochód?



11. O godzinie 17¹⁵ rowerzysta wyjechał z Żabkowa do odległego o 15 km Boćkowa. Pierwsze 2,5 km przejechał w ciągu 8 minut. Czy jadąc w tym tempie, ma szansę zdążyć na spotkanie wyznaczone w Boćkowie na godzinę 18⁰⁰?

- *12. Pusta mała beczka o pojemności 20 l waży 3 kg, a duża pusta beczka o pojemności 50 l waży 5 kg. Mała beczka pełna lepiku waży 25 kg. Ile waży duża beczka pełna lepiku?



- *13. Oto zadanie ułożone przez Johna Mellisa w 1594 roku:

Jeśli 1 jard sukna kupujesz za 6 szylingów i 8 pensów, a sprzedajesz za 8 szylingów i 6 pensów, to ile zarobisz na każdych 100 szylingach zainwestowanych w taką transakcję?

Uwaga. W 1594 roku 12 pensów stanowiło równowartość 1 szylinga.

Sprawdź, czy umiesz

- Taką samą ilością karmy, jaką zjada 8 kaczek, można nakarmić 20 kur. Ilość karmy, jaką zjada 12 kaczek, wystarczy dla:

A. 24 kur B. 30 kur C. 36 kur D. 40 kur
- Pchła, która ma wysokość 1 mm, potrafi skoczyć na wysokość 13 cm. Na jaką wysokość mógłby skoczyć człowiek o wzroście 1,7 m, gdyby był tak skoczny jak pchła?

A. 221 m B. 22,1 m C. 221 cm D. $13\frac{1}{13}$ m

Przed klasówką

1. W portmonetce było m monet, w tym tylko 5 złotych. Włożono do niej dodatkowo jeszcze 3 dwuzłotówki. Ile teraz jest tam monet, które nie są złotówkami?

- A. $m + 8$ B. $m - 8$ C. $m + 2$ D. $m - 2$

2. Prostokąt, którego jeden bok ma długość x , a obwód jest równy 48, rozcięto na dwa jednakowe mniejsze prostokąty. Jeśli jeden z boków mniejszego prostokąta ma także długość x , to drugi jego bok ma długość:

- A. $12 - 2x$ B. $12 - \frac{x}{2}$ C. $24 - x$ D. $24 - 2x$

$$4a^2(a + 1) - 4a^2(a - 1)$$

3. Czy to prawda, że niezależnie od wartości a liczba zapisana w ramce obok jest 4 razy większa niż liczba a^2 ? Wybierz odpowiedź „tak” lub „nie” oraz jej uzasadnienie spośród zdań od A do D.

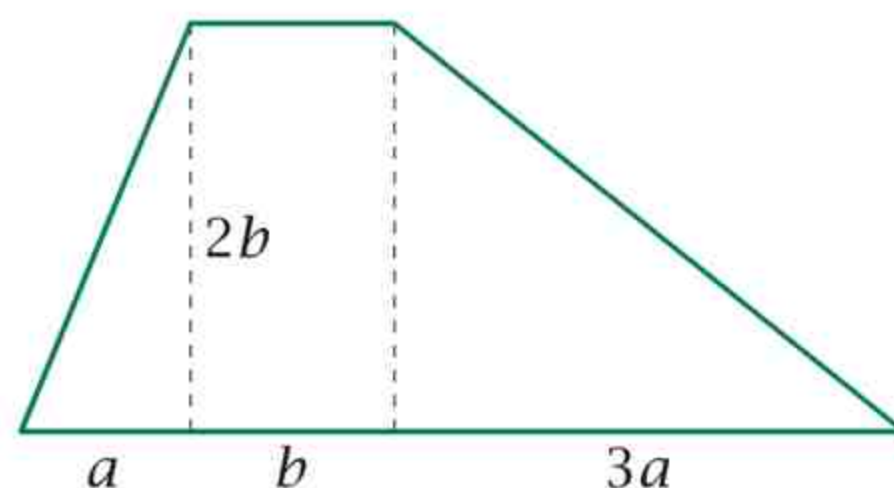
① Tak, ponieważ...

② Nie, ponieważ...

- A — ...wyrażenie w ramce jest równe $8a^2$ tylko dla niektórych wartości a .
 B — ...wyrażenie w ramce jest równe $8a^2$ niezależnie od wartości a .
 C — ...wyrażenie w ramce jest zawsze równe 0.
 D — ...wyrażenie w ramce można przekształcić do postaci $4a^2$.

4. Trapez przedstawiony na rysunku składa się z dwóch trójkątów i prostokąta. O ile pole trapezu jest większe od pola prostokąta?

- A. o $4a$ C. o $8ab$
 B. o $4ab$ D. o $8ab + 2b^2$



5. Który czworokąt ma większe pole: kwadrat o boku długości a czy prostokąt o wymiarach $(a - 4) \times (a + 2)$? O ile większe?

- A. Pole kwadratu jest o $2a + 8$ większe.
 B. Pole kwadratu jest o $2a - 8$ większe.
 C. Pole prostokąta jest o $2a + 8$ większe.
 D. Pole prostokąta jest o $2a - 8$ większe.

6. Oceń prawdziwość zdań.

a) Liczba -3 spełnia równanie $x^3 + 4x^2 = 3 - 2x$.

PRAWDA/FALSZ

b) Liczba $\frac{5}{6}$ jest rozwiązaniem równania $\frac{1+x}{1-x} = x$.

PRAWDA/FALSZ

c) Rozwiązanie równania $\frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{3}$ jest też rozwiązaniem równania $\frac{5}{x} = \frac{x^2}{25}$.

PRAWDA/FALSZ

7. Które z poniższych równań ma nieskończenie wiele rozwiązań?

A. $3(2x - 4) = 2(3x - 4)$

B. $\frac{1}{5}(3x - 6) = 0,6(x - 2)$

C. $5(2x + 7) = 4(2x + 7)$

D. $\frac{2}{3}(9x - 3) = \frac{1}{3}(18x + 6)$

8. Które z poniższych równań ma inne rozwiązanie niż równanie zapisane w ramce?

$$\frac{2x-3}{4-x} = \frac{1}{2}$$

A. $2(2x - 3) = 4 - x$

C. $\frac{1}{2} \cdot (4 - x) = 2x - 3$

B. $\frac{4-x}{2x-3} = 2$

D. $2x - 3 = 2 \cdot (4 - x)$

9. Jeśli za 32 dag truskawek zapłacono 2,40 zł, to za 0,7 kg truskawek trzeba zapłacić:

A. 3,20 zł

B. 5,00 zł

C. 5,25 zł

D. 6,20 zł

10. Do wyprodukowania 100 g keczupu potrzeba 190 g pomidorów. Jakimi liczbami należy zastąpić kwadraciki?

a) W butelce mieści się 410 g keczupu. Do jego wyprodukowania trzeba było użyć ■ g pomidorów.

b) Z 8,55 kg pomidorów można wyprodukować ■ kg keczupu.

11. Klub sportowy otrzymał pewną dotację od sponsorów. Połowę otrzymanej kwoty wydano na remont boiska, za $\frac{2}{5}$ dotacji kupiono sprzęt sportowy, a pozostałe 5500 zł wydano na stroje dla zawodników. Jaką kwotę przeznaczono na zakup sprzętu sportowego?



Zadania uzupełniające

Przekształcenia algebraiczne

1. Uprość wyrażenia.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{3a}{4} \cdot \left(-\frac{2a}{3}\right) & \text{c)} 4 \cdot \left(-\frac{x}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2x}{4}\right) \\ \text{b)} -2x \cdot (-3x) \cdot \frac{1}{4} & \text{d)} -\frac{10m}{7} \cdot \frac{14m}{15} \end{array}$$

→ 2. Uprość wyrażenia.

$$\begin{array}{l} \text{a)} -(x+1) + (2x+4) \\ \text{b)} (x+4) + (2x-6) \\ \text{c)} -(2y+3x) + (-4y+2x+1) \\ \text{d)} -(x-2xy) - (4x+xy) + (xy-x) \\ \text{e)} (x^2+2x+1) - (x^2-4x+3) \end{array}$$

→ 3. Uprość wyrażenia.

$$\begin{array}{l} \text{a)} 3(a^2-4) - (2-a^2) \\ \text{b)} -(3x+4) + 2(5x-3) \\ \text{c)} 3(5-x) - 4(2x-3) \\ \text{d)} -5(2x+3) - 3(5-3x) \end{array}$$

→ 4. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

$$\begin{array}{l} \text{a)} (2a+b) \cdot c - (2ac-bc+1) \\ \text{b)} 5(x-z) + 2(z-x) \\ \text{c)} 2x^2(x-5) - 3x(x^2-3x+5) \\ \text{d)} 6\left(a^2+b+\frac{1}{3}\right) - 6\left(a^2-\frac{1}{2}\right) - 3\left(b+\frac{1}{3}\right) \end{array}$$

→ 5. Uprość wyrażenia.

$$\begin{array}{l} \text{a)} \frac{4-5x}{2} + x \\ \text{b)} 2x - \frac{7x+1}{4} \\ \text{c)} \frac{2x+1}{6} + \frac{1-x}{3} \\ \text{d)} \frac{4x-5}{3} - \frac{x+4}{2} \\ \text{e)} \frac{6x-12y}{3} + x - 4y \\ \text{f)} \frac{15a+20b}{5} - \frac{4a+8b}{2} \\ \text{g)} \frac{7k+21}{14} - \frac{3k-9}{6} \\ \text{h)} 4 \cdot \frac{3p+6}{12} + \frac{10-5p}{15} \cdot 9 \end{array}$$

→ 6. Wykonaj mnożenie.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}) & \text{c)} (a+\sqrt{2})(a-\sqrt{3}) \\ \text{b)} (2y-\sqrt{3})(y+1) & \text{d)} (2\sqrt{2}+k)(\sqrt{2}-k) \end{array}$$

7. Zapisz w postaci jak najprostszej sumy algebraicznej.

$$\begin{array}{l} \text{a)} (x+3)(x-7) - (y-1)(2y+4) \\ \text{b)} 2a^2 - (a+6)(2a-1) \\ \text{c)} 3(x^2-1) - (x-3)(x+2) \\ \text{d)} (m+n)(m-2) + (m-n)(m+1) \end{array}$$

8. Niech k oznacza dowolną liczbę dodatnią. Zapisz:

- liczbę k razy większą niż 7,
- liczbę 5 razy mniejszą niż k ,
- liczbę o 10 mniejszą od połowy liczby k .
- liczbę k razy większą od $\frac{4}{5}$ liczby k .

9. Jakie wyrażenie należy odjąć od wyrażenia $5a^2 - 3ab + 7$, aby otrzymać $a^2 - 7$?

→ 10. Zapisz odpowiednie wyrażenia algebraiczne.

- Od podwojonej sumy liczb a i b odejmij ich różnicę.
- Od podwojonej różnicy liczb a i b odejmij ich sumę.

→ 11. Klasa VIIIa licząca m uczniów pojechała na wycieczkę pod opieką dwóch nauczycieli. Podróżowali pociągiem, zajmując wszystkie miejsca w kilku ośmioosobowych przedziałach. W ilu przedziałach podróżowali?



→ 12. W pewnym sklepie sprzedawano dziennie x kartonów soku w cenie y zł. Gdy obniżono cenę o 1 zł, liczba kartonów soku sprzedawanych dziennie wzrosła dwukrotnie. Jaki był dzienny przychód ze sprzedaży soku po obniżce?

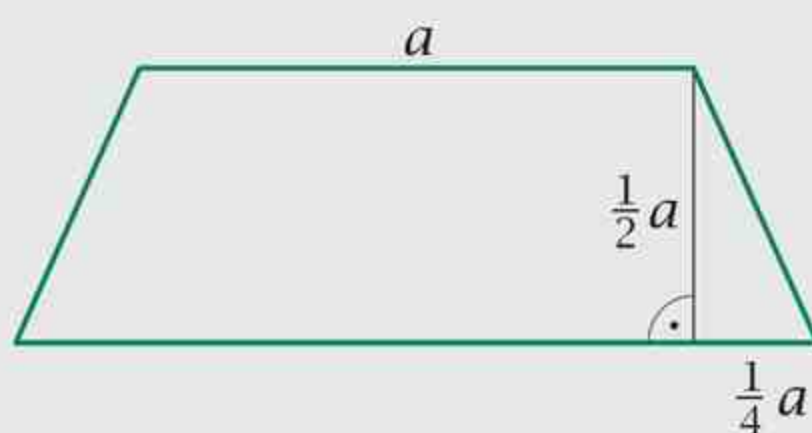
→ 13. Zeszyt kosztuje x złotych, pisak jest o 2,50 zł droższy od zeszytu, ołówek jest 3 razy tańszy od pisaka, cena cyrkla stanowi $\frac{1}{4}$ ceny zeszytu. Zapisz odpowiednie wyrażenia algebraiczne.

a) Ile trzeba zapłacić za zeszyt i ołówek?

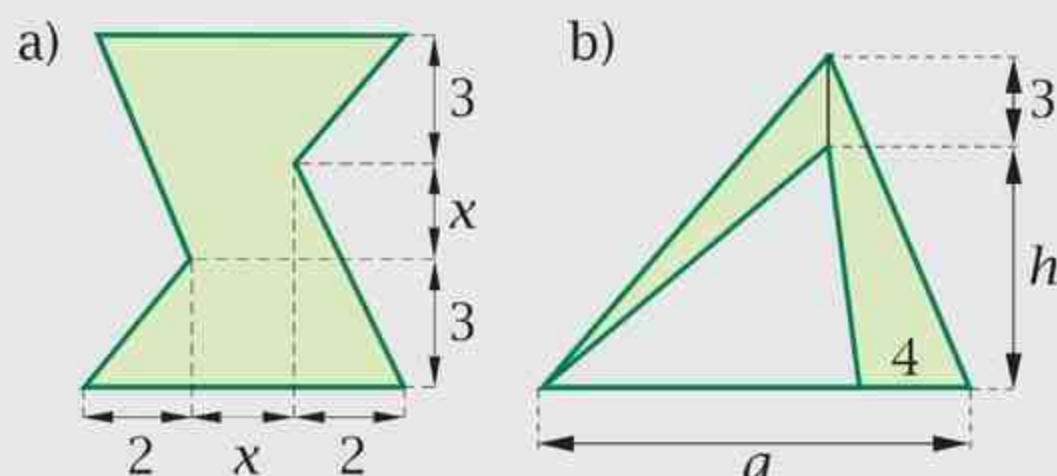
b) Ile złotych reszty z 50 zł otrzymasz, jeśli kupisz 2 pisaki i 3 ołówki?

c) O ile więcej trzeba zapłacić za 6 ołówków niż za 2 cyrkle?

14. Zapisz w jak najprostszej postaci pole trapezu równoramiennego przedstawionego na rysunku.



15. Zapisz w postaci sum algebraicznych wzory na pola poniższych figur.



16. Piłeczka pingpongowa waży p gramów, piłeczka do tenisa — t gramów, a piłka do siatkówki — s dekagramów.

a) O ile cięższe są 3 piłeczki do tenisa od 5 piłeczek do ping-ponga?

b) Ile razy cięższe są 4 piłki do siatkówki od 3 piłeczek do tenisa?

17. Jeden talerz głęboki kosztuje g zł, a jeden talerz płaski p złotych i t groszy. Zestaw obiadowy składa się z talerza głębokiego i płaskiego. Ile złotych trzeba zapłacić za n kompletów złożonych z tuzina zestawów obiadowych?



Równania

→ 18. Rozwiąż równania:

a) $7x - 6 = -6x + 7$

b) $\frac{1}{3}x + 2 = x$

c) $-7(2x + 1) = 4$

d) $8 = 6(x - 1) - 4x$

→ 19. Rozwiąż równania:

a) $\frac{3-x}{2} + \frac{x+2}{2} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{4}x - \frac{x-1}{4} = \frac{1}{4}$

c) $\frac{x+1}{2} + \frac{2x-2}{3} = \frac{2x-4}{6}$

d) $\frac{2x+3}{3} + \frac{x-4}{5} = \frac{3x+5}{10}$

→ 20. Rozwiąż równania:

a) $(x+3)(x+5) = -4(x^2+2) + 5x^2$

b) $(x-2)(4+x) = x(x-5)$

c) $-2x(x+1) = (3-2x)(x+2)$

d) $(x-3)(x+3) = (x-2)^2$

21. W trójkącie prostokątnym o obwodzie 24 cm długość jednej z przyprostokątnych stanowi $\frac{3}{4}$ długości drugiej przyprostokątnej, a przeciwprostokątna ma długość 10 cm. Narysuj ten trójkąt.

22. Pan Jan kupił za 448 000 zł mieszkanie z garażem i piwnicą na Osiedlu Słonecznym. Powierzchnia mieszkania jest piętnaście razy większa od powierzchni piwnicy. Jak duże jest mieszkanie pana Jana?

Czas kupić mieszkanie!



Polecamy
mieszkania
gotowe
do odbioru.

OSIEDLE
SŁONECZNE

Cena 1 m² – 7000 zł
Metraż 35-112 m²

Elementy dodatkowe:
Garaż – 25000 zł Piwnica – 750 zł za 1 m²

23. W pierwszym kwartale roku sprzedano 1300 samochodów pewnej marki. W lutym sprzedano o $\frac{1}{5}$ mniej samochodów tej marki niż w styczniu, a w marcu o 130 więcej niż w lutym. Ile samochodów sprzedano w marcu?

24. Pan Zabłocki od trzech lat handluje mydłem. W pierwszym roku interes szedł świetnie. W drugim roku sprzedał o $\frac{2}{5}$ mydła mniej, a w trzecim roku połowę tego, co w roku poprzednim. W ciągu trzech lat sprzedał 3,8 tony mydła. Ile sprzedał w ostatnim roku?

25. W partii Cymbałków jest o 8 członków więcej niż w partii Trąbek. Gdyby z partii Trąbek 4 osoby przeszły do partii Cymbałków, to w Cymbałkach byłoby 3 razy więcej członków niż w Trąbkach. Ile osób należy do Trąbek?



26. Przez pierwsze dwa tygodnie lipca (od poniedziałku do niedzieli) sprzedawano przeciętnie 18 koktajli dziennie. Gdy cenę zmniejszono o 3 zł, liczba koktajli sprzedawanych dziennie przez następne dwa tygodnie wzrosła dwukrotnie. Łącznie przez te 4 tygodnie sprzedano koktajle za 5670 zł. Jaka była początkowa cena koktajlu?

→ 27. Przypomnij sobie wzór na średnią prędkość zapisany w poniższej ramce, a następnie przekształć ten wzór, wyznaczając z niego s oraz t .

$$v = \frac{s}{t}$$

v — średnia prędkość
 s — przebyta droga
 t — czas ruchu

28. Dżdżownica porusza się z prędkością $0,4 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

a) W jakim czasie pokona odległość 0,5 m?

b) Jaką odległość może pokonać dżdżownica w ciągu 15 sekund?

29. a) Słoń biegnie z prędkością do 12 m/s. Z jaką prędkością (w km/h) musiałby jechać samochód, aby poruszać się szybciej od tego słońa?



b) Ślimak porusza się z prędkością 12 cm/min. Ile razy szybciej od ślimaka porusza się człowiek idący z prędkością 6 km/h?

c) Sokół może spaść na swoją ofiarę z prędkością 56 m/s. Strzała wypuszczona z łuku osiąga prędkość 180 km/h. Porównaj te prędkości.

30. Najszybsze ptaki osiągają prędkość 60 m/s, a najszybsze ryby mogą pływać z prędkością 70 węzłów. Porównaj te dwie prędkości (1 węzeł = 1 mila morska/h, 1 mila morska = 1852 m).

31. a) Rekord prędkości ssaków morskich należy do orki i wynosi 55,5 km/h. Ile czasu zajmuje orce przeplnięcie 100 m z taką prędkością?

b) Bambus rośnie z prędkością $0,7 \frac{\text{mm}}{\text{min}}$. Ile centymetrów urośnie w ciągu doby?



c) Najszybciej poruszający się lodowiec zaobserwowano na Alasce. W ciągu doby przesunął się o 20 m. Z jaką prędkością w cm/min poruszał się ten lodowiec?

d) Najszybsze strusie mogą przebiec 100 metrów w 4 sekundy. Jaka prędkość (w km/h) mogą wtedy rozwinąć?

32. Michał najpierw biegł z prędkością 12 km/h przez 20 minut, a następnie szedł z prędkością 6 km/h przez 40 minut. Jaki dystans pokonał Michał?

33. Spadochroniarz przez 30 sekund leciał z zamkniętym spadochronem ze średnią prędkością 200 km/h. Na wysokości 1 km nad ziemią otworzył spadochron i leciał dalej ze średnią prędkością 20 km/h. Jaka była średnia prędkość całego lotu spadochroniarza?



Uwaga. Pamiętaj, że średnia prędkość to nie to samo, co średnia arytmetyczna dwóch prędkości!

34. Pan Samochodzik wyruszył o godzinie 6³⁰ z Dolnowa do Górowa. Jechał ze średnią prędkością 60 km/h i dotarł do celu o godzinie 10³⁰. Powrót zajął mu 3 godziny. Z jaką średnią prędkością jechał w drodze powrotnej?

35. Dźwięk rozchodzi się w powietrzu z prędkością 330 m/s. Hania stoi 110 m od skraju lasu. Krzyknęła, a jej krzyk odbił się od ściany drzew i powrócił do niej w postaci echa. Po jakim czasie Hania usłyszała echo?

36. Kaczka i czapla wystartowały jednocześnie z tego samego miejsca. Kaczka leciała przez 15 minut z prędkością 65 km/h i usiadła. Czapla leciała z prędkością 40 km/h. Gdy zobaczyła kaczkę, sfrunęła i usiadła obok niej. Jak długo kaczka czekała na czaplę?



⊙ **37.** Koń biegnący kłusem osiąga prędkość 2 m/s, a cwałem — 12 m/s. Koń biegł kłusem przez 5 minut, a przez następne 2 minuty cwałował. Z jaką średnią prędkością biegł koń przez te 7 minut?

Proporcje

→ **38.** Rozwiąż równania:

a) $\frac{3}{x-2} = \frac{4}{2x+1}$

c) $\frac{6x-1}{x+1} = \frac{2,3}{1,2}$

b) $\frac{2}{3} = \frac{3x+2}{2x-2}$

d) $\frac{-x}{3x-1} = \frac{2x}{1-6x}$

→ **39.** Jaka liczbę należy dodać do licznika i mianownika ułamka $\frac{3}{5}$, aby otrzymać ułamek równy $\frac{2}{3}$?

40. Wyobraź sobie, jak małe dzieci widzą dorosłych.



Przypuśćmy, że mamy zbudować taki posąg, aby stosunek wysokości dorosłego człowieka do wysokości posągu był taki sam jak stosunek wysokości dziecka do dorosłego (zob. rysunek). Jaką wysokość powinien mieć posąg?

41. Podczas mistrzostw Europy w 2004 roku zwycięska drużyna Grecji zdobyła o 3 gole więcej niż straciła. Stosunek goli zdobytych do straconych wyniósł $\frac{7}{4}$. Ile razem goli padło w czasie meczów rozgrywanych przez Greków w tych mistrzostwach?

Wielkości wprost proporcjonalne

Mieszanka warzywna		masa 350 g
Wartość energetyczna	560 kcal	
Białko	7 g	
Węglowodany przyswajalne	42 g	
Tłuszcz całkowity	0,84 g	

→ 42. Na opakowaniu mieszanki warzywnej umieszczono tabelę wartości odżywczych tej mieszanki. Ile kcal dostarczysz organizmowi, zjadając 150 g takiej mieszanki warzywnej, ile dostarczysz białka, a ile węglowodanów?

43. W dzbanku zmieści się 1,8 l wody, a w kubku tylko 0,25 l. Napełnienie kubka wodą z kranu trwa 5 sekund. Jak długo trzeba nalewać z tego kranu wodę, aby napełnić dzbanek? Zakładamy, że woda leci z kranu cały czas takim samym strumieniem.

44. Jeśli podczas burzy słysząc grzmot po 3 sekundach od błyskawicy, to znaczy, że piorun uderzył w odległości około 1 km. W jakiej odległości uderzył piorun, jeśli od błyskawicy do grzmotu minęło 7 sekund?



45. W konkursie Mistrz Klawiatury Joasia zajęła drugie miejsce, bezbłędnie zapisując w określonym przez jury czasie 4920 znaków. Gdyby pisała o 5 znaków na minutę więcej, byłaby pierwsza z wynikiem 5040 znaków. Z jaką prędkością (w znakach na minutę) pisała Joasia?

46. Mintuszewo jest o 6 km dalej od Szyntuła niż od Pocięjska. Na mapie odcinek Mintuszewo — Szyntuły ma 11,5 cm, a Mintuszewo — Pocięjsk 10 cm. W jakiej odległości od Mintuszewa leżą Szyntuły?

47. Trzy koty złapały 3 myszy w ciągu 3 dni. Ile myszy padnie łupem sześciu tak łownych kotów w ciągu 6 dni?





FIGURY GEOMETRYCZNE NA PŁASZCZYŹNIE

- 1** Trójkąty i czworokąty
- 2** Twierdzenie Pitagorasa
- 3** Zastosowania twierdzenia Pitagorasa
- 4** Przekątna kwadratu.
Wysokość trójkąta równobocznego
- 5** Trójkąty o kątach 90° , 45° , 45° oraz 90° , 30° , 60°
- 6** Odcinki w układzie współrzędnych
- 7** Dowodzenie w geometrii

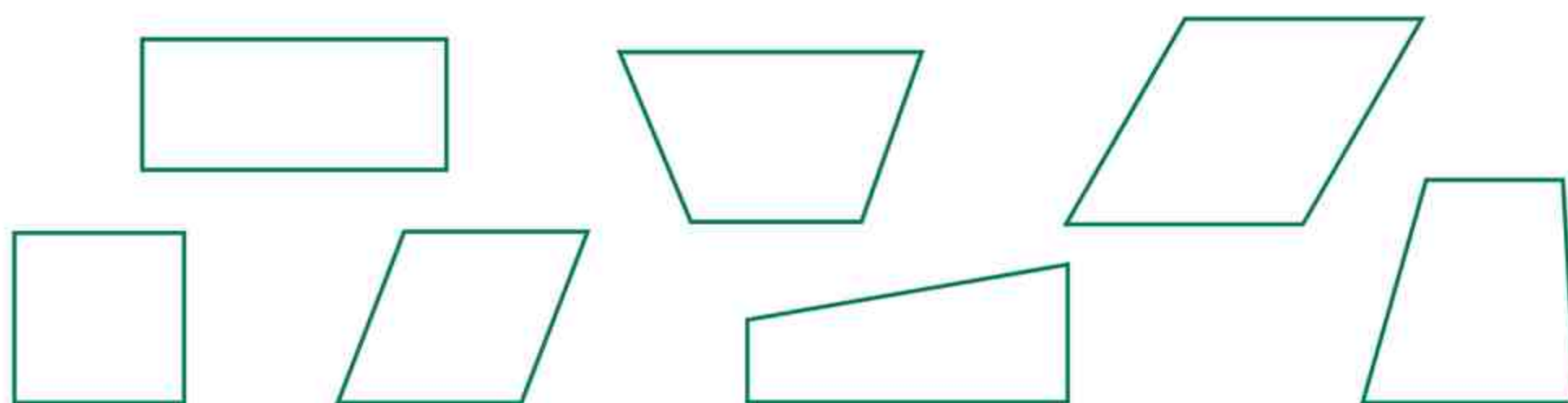
➤ Przed klasówką, s. 112

➤ Zadania uzupełniające, s. 114

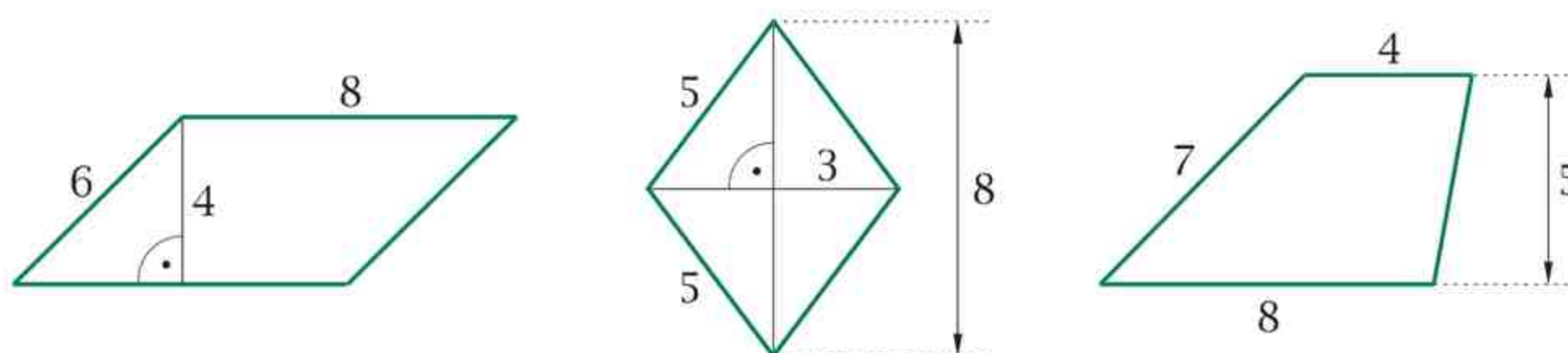
1 Trójkąty i czworokąty

Pytania i zadania kontrolne

- A. Czy boki trójkąta mogą mieć długości 3 cm, 6 cm i 10 cm?
- B. Dwa kąty trójkąta mają miary 35° i 40° . Jaki to trójkąt — ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny?
- C. Które z poniższych zdań są prawdziwe?
- ① Każdy trójkąt równoboczny jest trójkątem równoramiennym.
 - ② Każdy trójkąt równoramienny jest trójkątem równobocznym.
 - ③ Każdy trójkąt prostokątny ma dwa kąty ostre.
 - ④ W każdym trójkącie równoramiennym kąt między ramionami jest kątem ostrym.
- D. Kąt między ramionami trójkąta równoramiennego ma miarę 50° . Jakie miary mają kąty przy podstawie?
- E. Nazwij czworokąty przedstawione na rysunkach. Ile jest wśród nich równoległoboków, ile rombów, a ile trapezów?



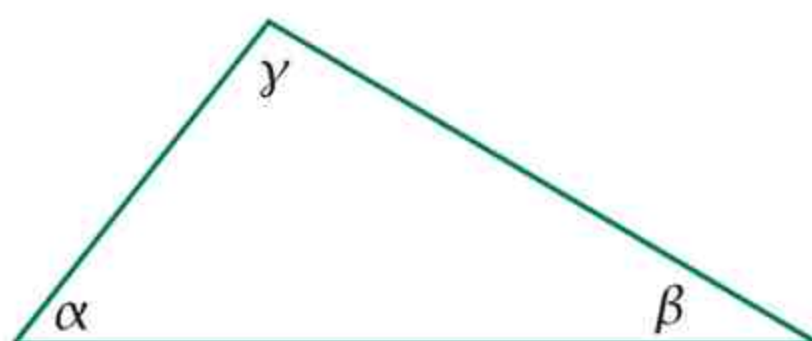
- F. Poniżej narysowano równoległobok, romb i trapez. Oblicz ich pola.



- G. Ile wynosi suma miar kątów czworokąta?

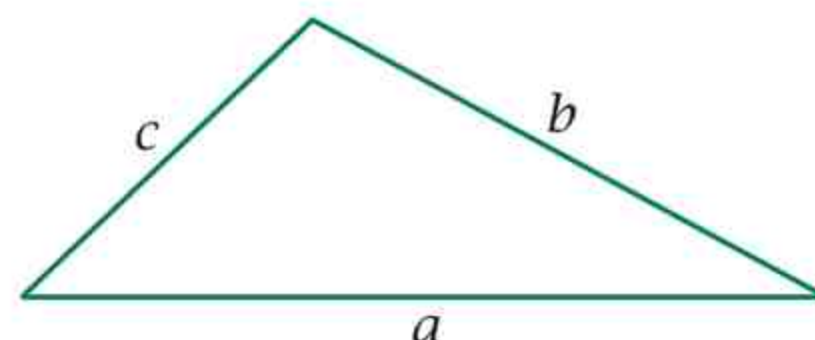
W tym rozdziale uporządkujemy wiadomości o trójkątach i czworokątach. Zaczynamy od informacji o trójkątach.

- Suma miar kątów trójkąta wynosi 180° .



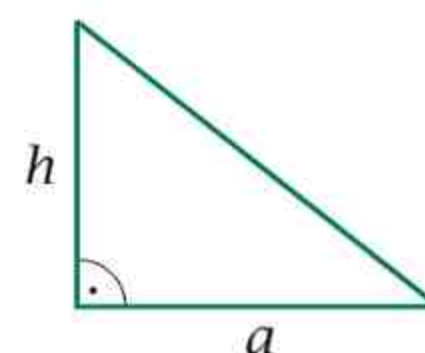
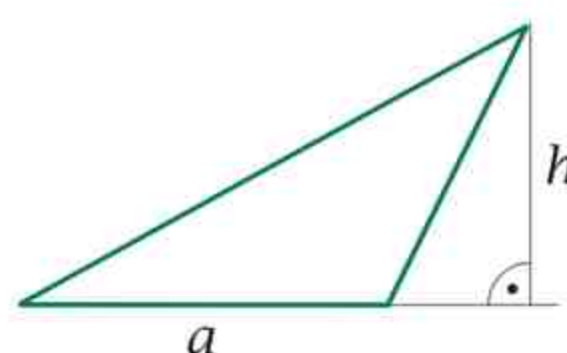
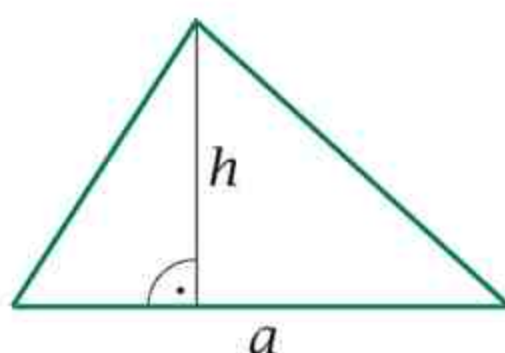
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

- Każdy bok trójkąta ma długość mniejszą od sumy długości dwóch pozostałych boków.



$$a < b + c \quad b < a + c \quad c < a + b$$

- WZÓR NA POLE TRÓJKĄTA

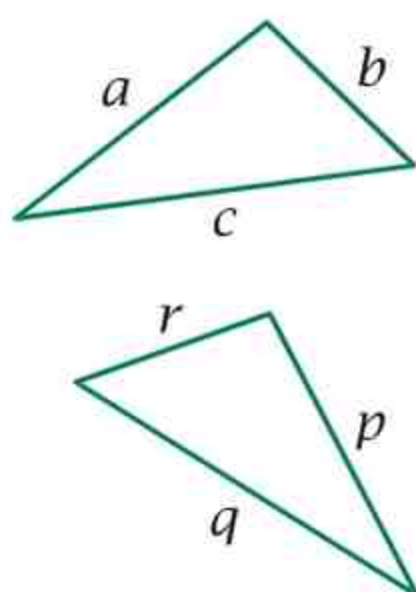


$$P = \frac{a \cdot h}{2}$$

- CECHY PRZYSTAWANIA TRÓJKĄTÓW

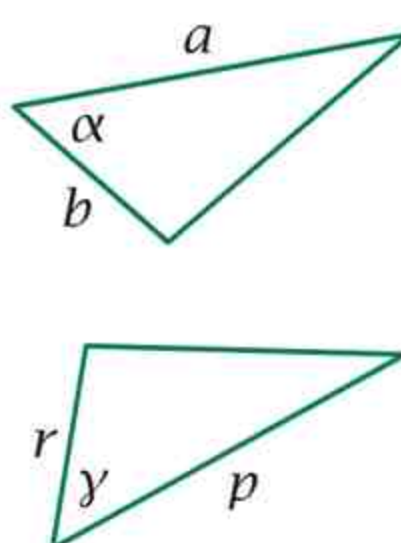
Jeśli dla dwóch trójkątów spełnione są warunki zapisane pod któryms z poniższych rysunków, to trójkąty są przystające.

Cecha bbb
(bok, bok, bok)



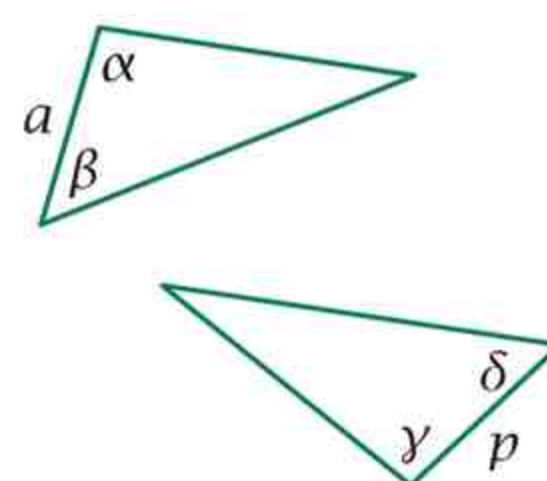
$$\begin{aligned} a &= p \\ b &= r \\ c &= q \end{aligned}$$

Cecha bkb
(bok, kąt, bok)



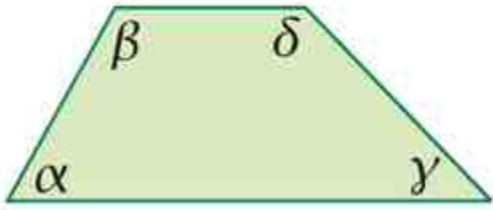
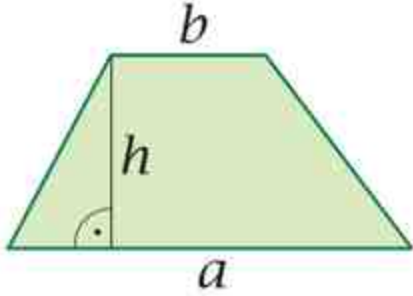
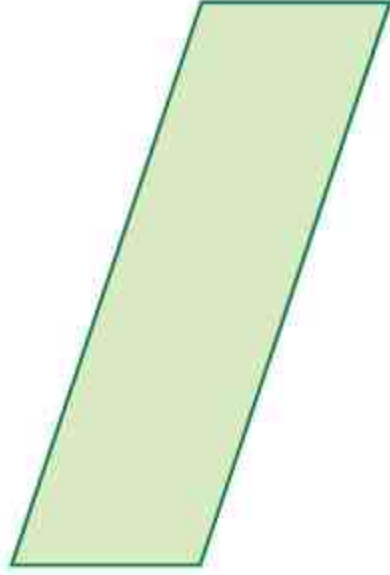
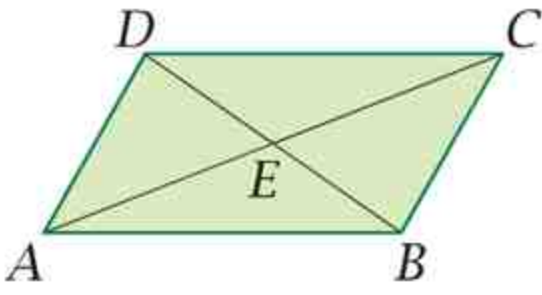
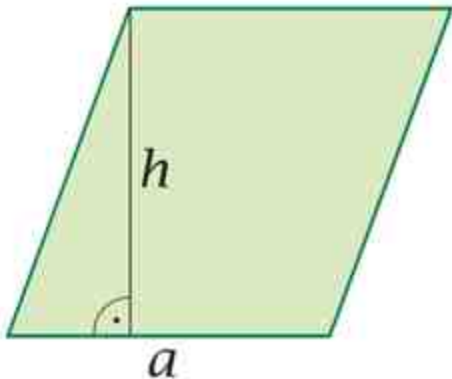
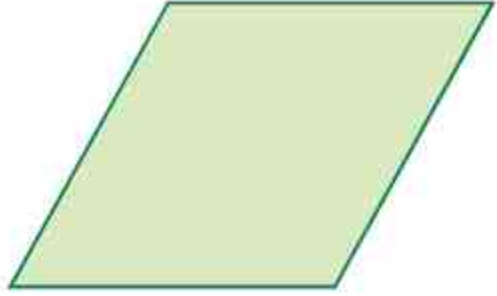
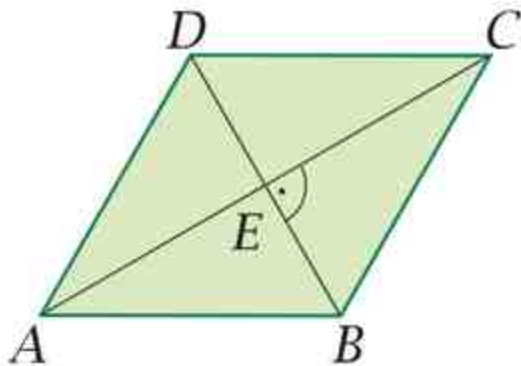
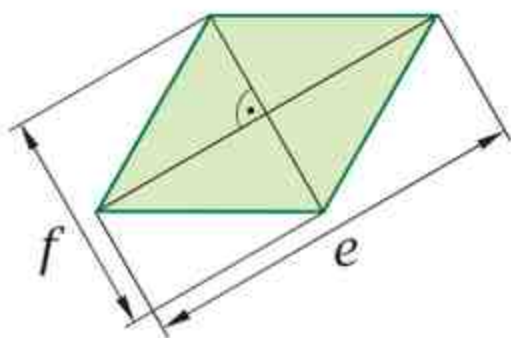
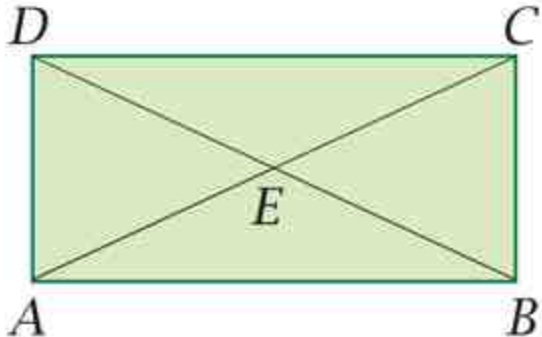
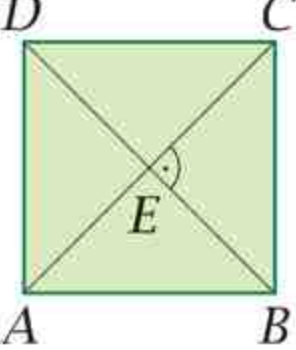
$$\begin{aligned} a &= p \\ \alpha &= \gamma \\ b &= r \end{aligned}$$

Cecha kbk
(kąt, bok, kąt)



$$\begin{aligned} \alpha &= \gamma \\ a &= p \\ \beta &= \delta \end{aligned}$$

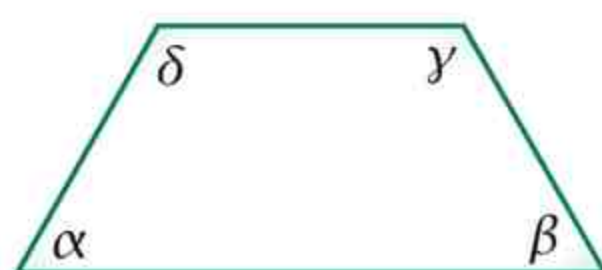
Przypomnijmy, że każdy kwadrat jest rombem oraz prostokątem. Każdy romb i każdy prostokąt jest równoległobokiem. Każdy równoległobok jest też trapezem. W tabeli na następnej stronie są przedstawione najważniejsze informacje o czworokątach.

RODZAJ CZWOROKĄTA	NAJWAŻNIEJSZE WŁASNOŚCI	POLE
Trapez — czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych. 	Suma miar kątów leżących przy tym samym ramieniu jest równa 180°.  $\alpha + \beta = 180^\circ \quad \delta + \gamma = 180^\circ$	 $P = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$
Równoległobok — czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych. 	Przekątne przecinają się w połowie.  $AE = EC$ $BE = ED$ Przeciwnie leżące kąty mają jednakowe miary. Suma miar kątów sąsiednich wynosi 180°.  $\alpha = \gamma \quad \beta = \delta$ $\alpha + \beta = 180^\circ$ $\beta + \gamma = 180^\circ$	 $P = a \cdot h$
Romb — czworokąt, który ma wszystkie boki równej długości. 	Przekątne przecinają się w połowie i są prostopadłe.  $AE = EC$ $BE = ED$	 $P = \frac{e \cdot f}{2}$
Prostokąt — czworokąt, który ma wszystkie kąty proste. 	Przekątne mają jednakowe długości i przecinają się w połowie.  $AC = BD$ $AE = EC$ $BE = ED$	 $P = a \cdot b$
Kwadrat — czworokąt, który ma wszystkie kąty proste i wszystkie boki równej długości. 	Przekątne mają jednakowe długości, przecinają się w połowie i są prostopadłe.  $AC = BD$ $AE = EC$ $BE = ED$	 $P = a^2$

Wśród trapezów wyróżniamy trapezy równoramienne, czyli takie, których ramiona mają równe długości, oraz trapezy prostokątne, w których przynajmniej jedno ramię jest prostopadłe do podstaw.

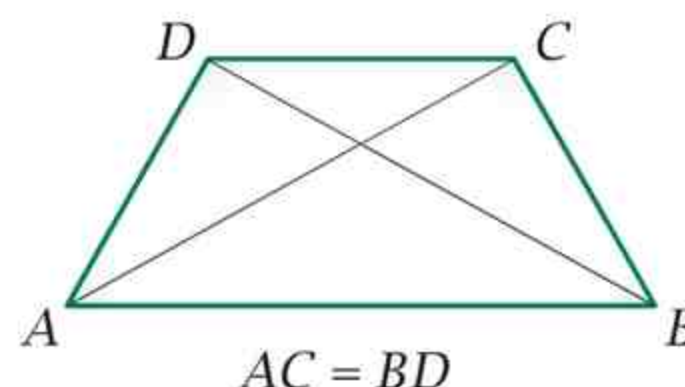
Warto zwrócić uwagę na własności trapezu równoramienne, który nie jest równoległobokiem. Taki trapez ma wszystkie własności opisane na poprzedniej stronie, a ponadto:

- kąty leżące przy tej samej podstawie mają równe miary,
- przekątne mają równe długości.



$$\alpha = \beta, \gamma = \delta$$

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$



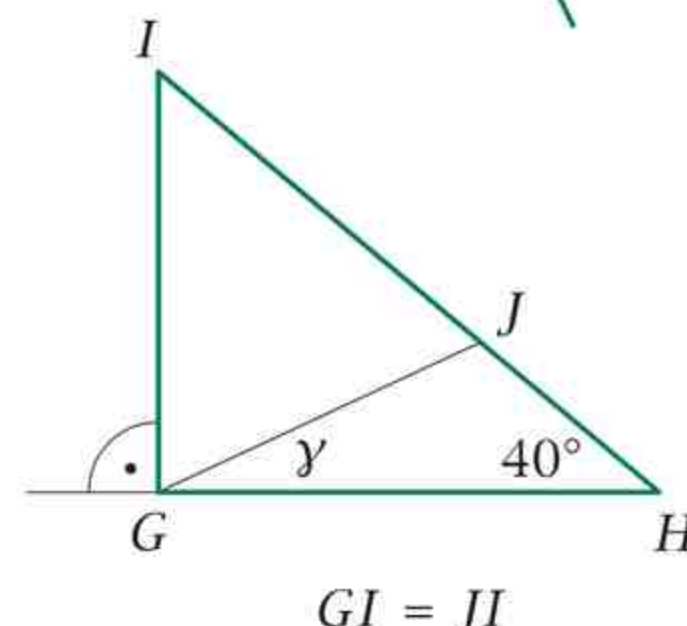
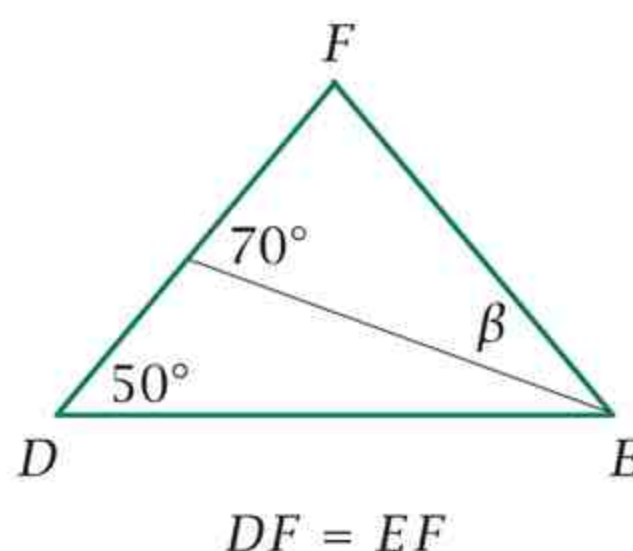
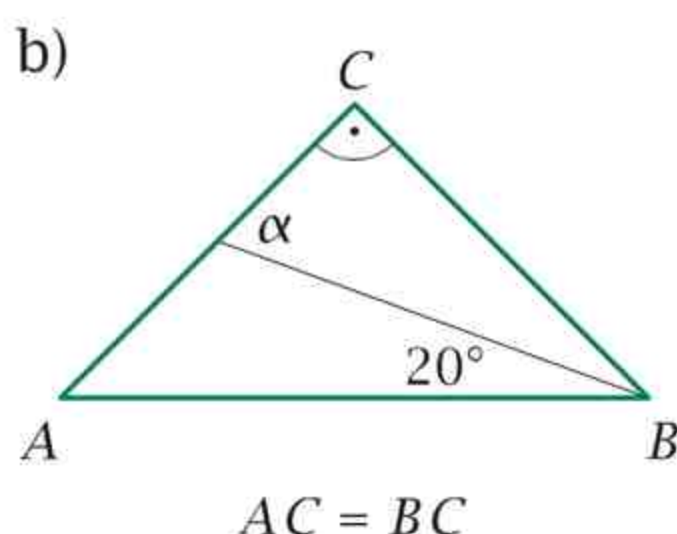
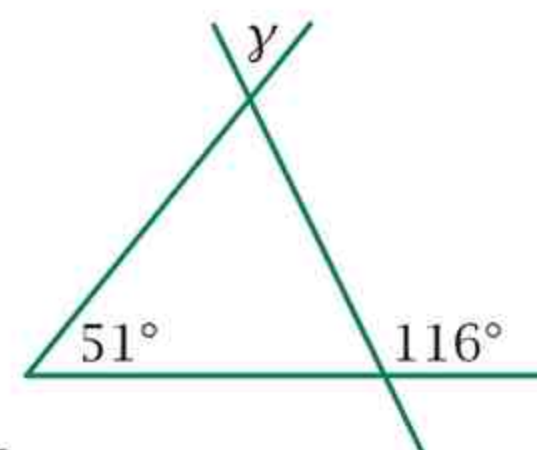
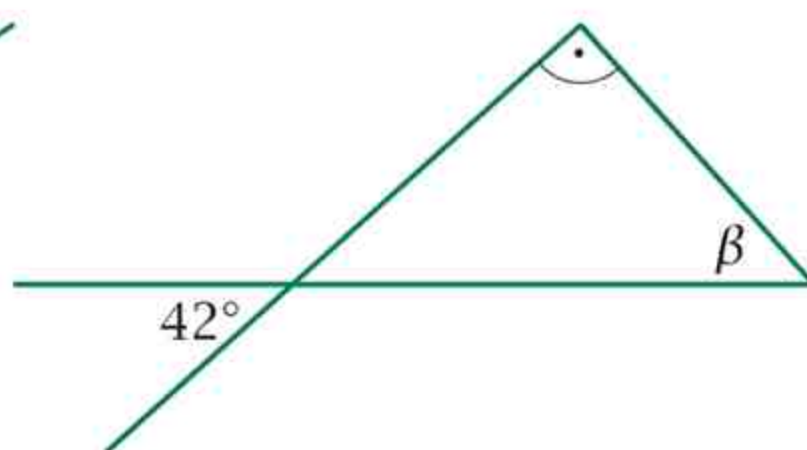
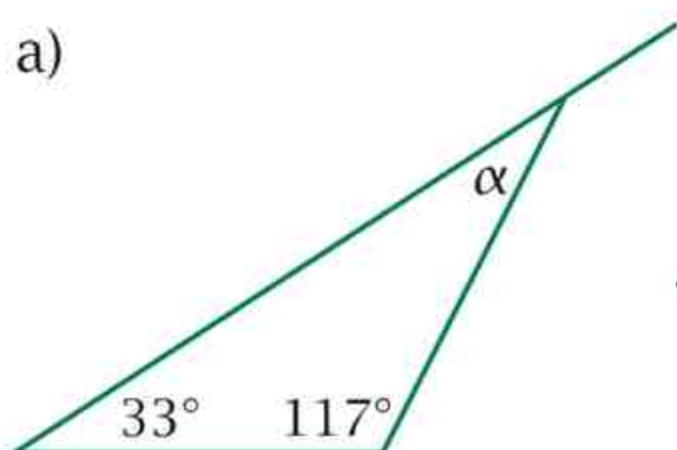
Zadania

1. a) Spośród pięciu odcinków o długościach 1 m, 2 m, 3 m, 4 m i 5 m wybierz trzy, które mogą być bokami trójkąta. Na ile sposobów można to zrobić?

Wskazówka. Wystarczy sprawdzić, czy najdłuższy z trzech wybranych odcinków jest krótszy niż suma dwóch pozostałych.

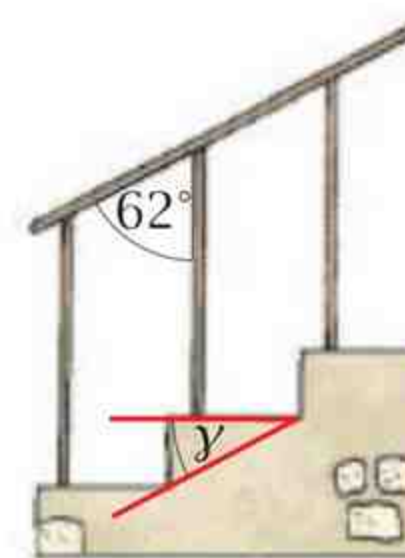
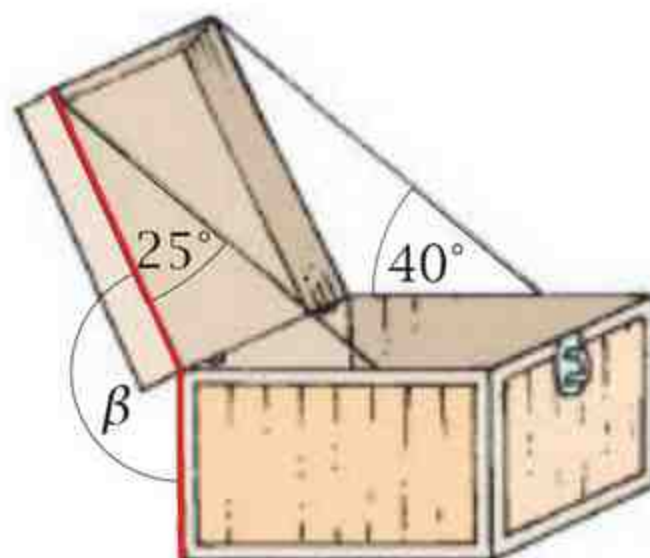
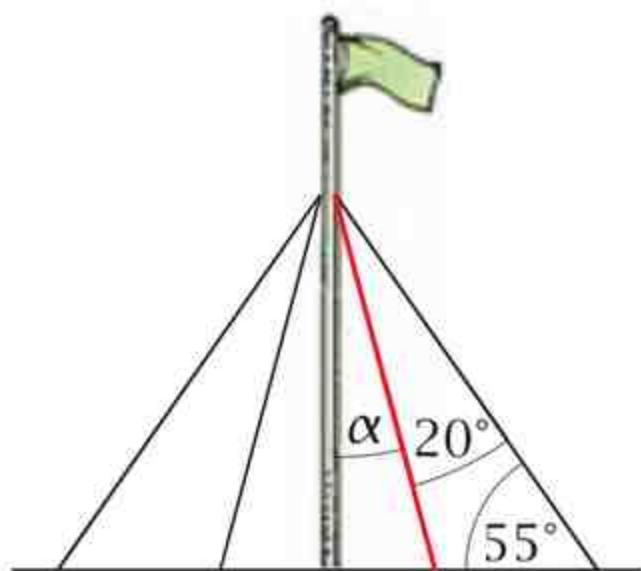
- b) Kąty w dwóch trójkątach mają miary 30° , 40° , 60° , 70° , 80° i 80° . Jakie kąty ma każdy z tych trójkątów?

2. Oblicz miary kątów α , β i γ .



3. Jeden z kątów trójkąta równoramienne ma 80° . Jakie mogą być miary pozostałych kątów tego trójkąta?

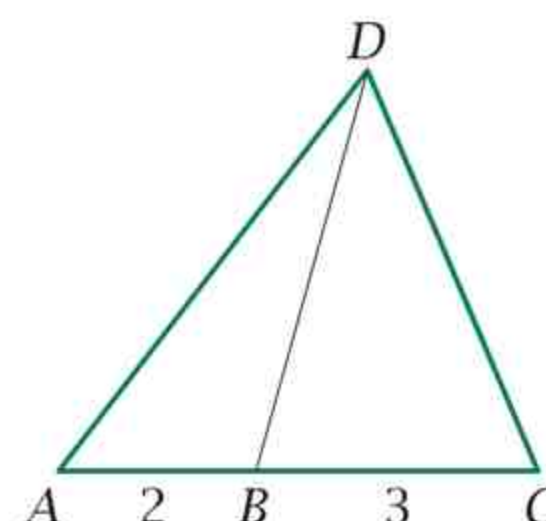
4. Jakie miary mają zaznaczone kąty?



5. Trójkąt ABD na rysunku obok ma pole równe 3.

a) Jakie pole ma trójkąt ACD ?

- b) W trójkącie ABD poprowadzono wysokość z wierzchołka A , a w trójkącie BCD poprowadzono wysokość z wierzchołka C . Uzasadnij, że stosunek tych wysokości jest równy $2:3$.

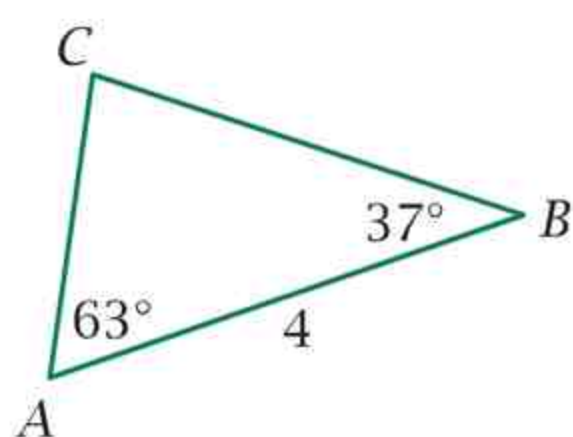


6. Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach:

a) $A = (-2, 4)$, $B = (6, -1)$, $C = (2, -1)$

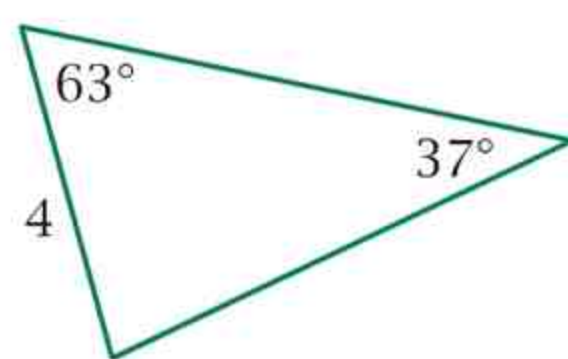
b) $K = (-2, 3)$, $L = (-2, 1)$, $M = (0, 0)$

4/114

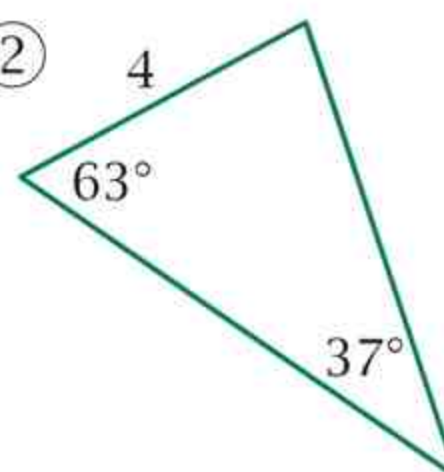


7. Który z niżej narysowanych trójkątów jest przystający do trójkąta ABC ?

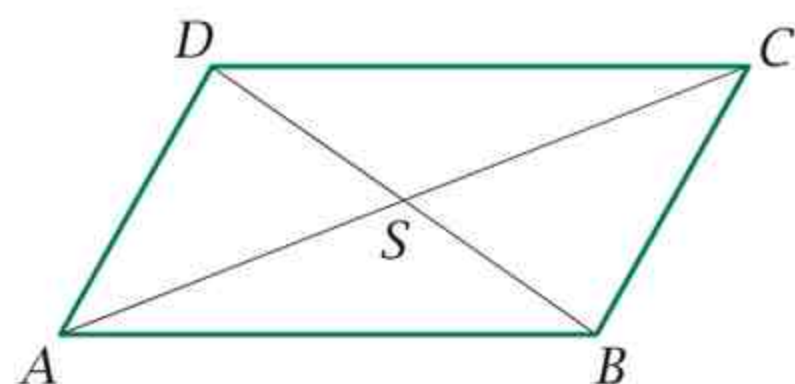
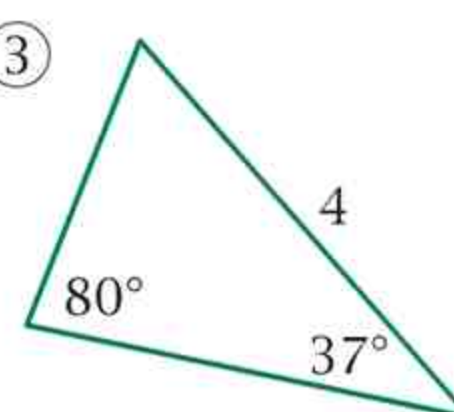
①



②

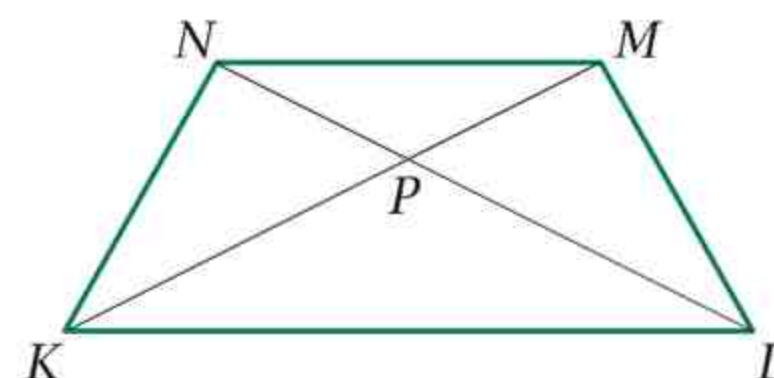


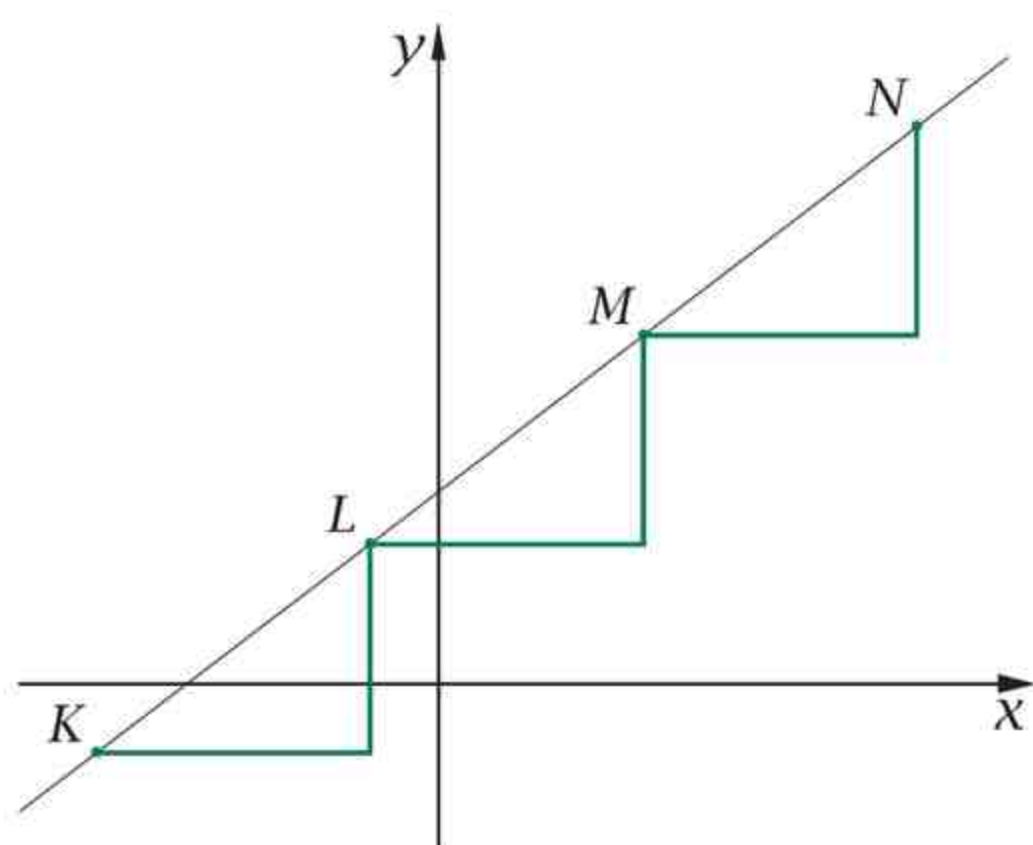
③



- 8. Czworokąt $ABCD$ na rysunku obok jest równoległobokiem. Uzasadnij, że:
- a) trójkąty ABC i ACD są przystające,
- b) trójkąty ASD i BSC są przystające.

- 9. Czworokąt $KLMN$ na rysunku obok jest trapezem równoramiennym. Uzasadnij, że trójkąt KPN jest przystający do trójkąta LPM .





10. Na rysunku obok poziome odcinki mają długość 4, a pionowe — 3.

a) Jakie współrzędne mają punkty M , N , K , jeśli $L = (-1, 2)$?

■ b) Uzasadnij, że narysowane trójkąty są przystające.

■ c) Uzasadnij, że punkty K , L , M , N leżą na jednej prostej.

Wskazówka. Aby stwierdzić, że punkty A , B , C są współliniowe, wystarczy wykazać, że kąt ABC ma 180° .

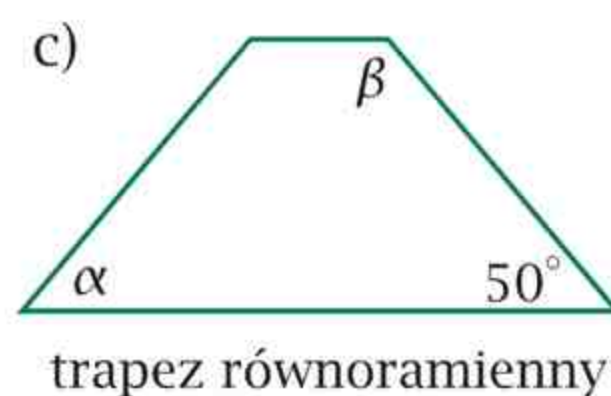
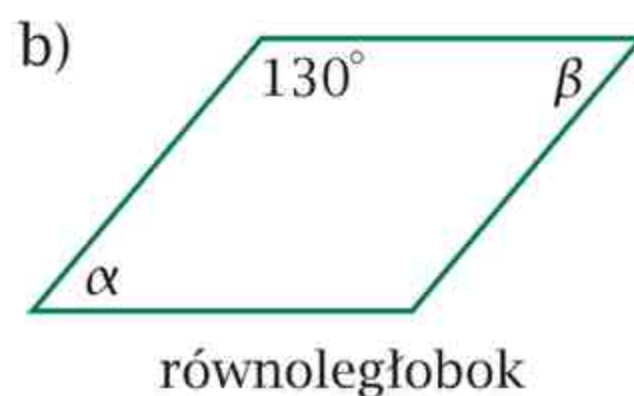
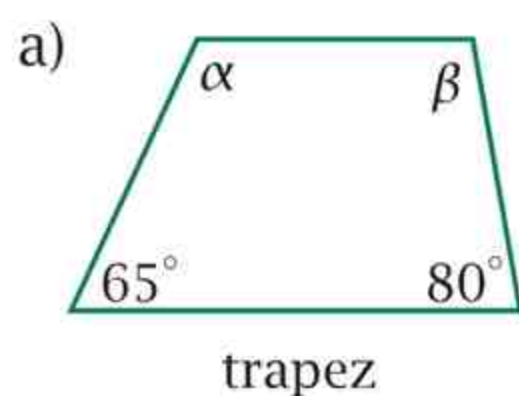
11. Przez podane punkty A i B poprowadzono prostą. Podaj współrzędne trzech dowolnych punktów leżących na prostej AB . Skorzystaj z wniosków wynikających z zadania 10.

a) $A = (-3, -10)$
 $B = (-5, 2)$

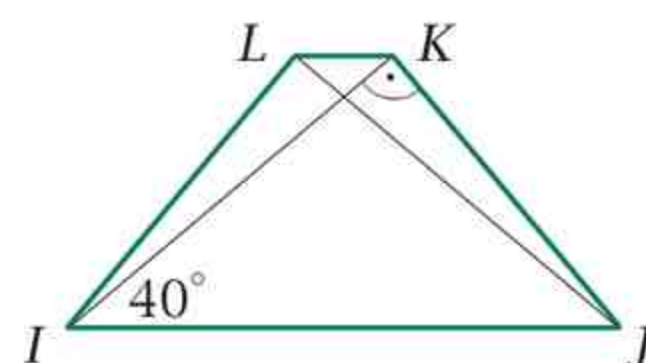
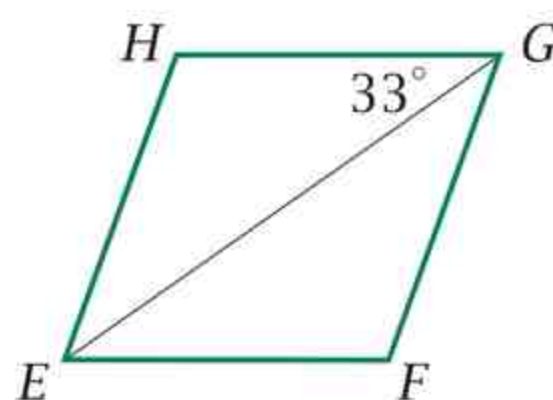
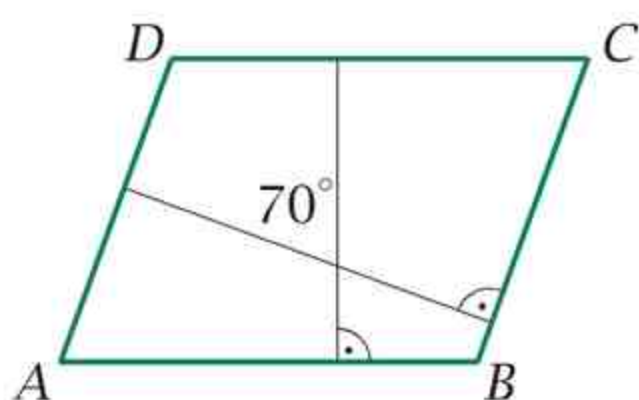
b) $A = (87, 16)$
 $B = (107, 22)$

c) $A = (50, 42)$
 $B = (65, 40)$

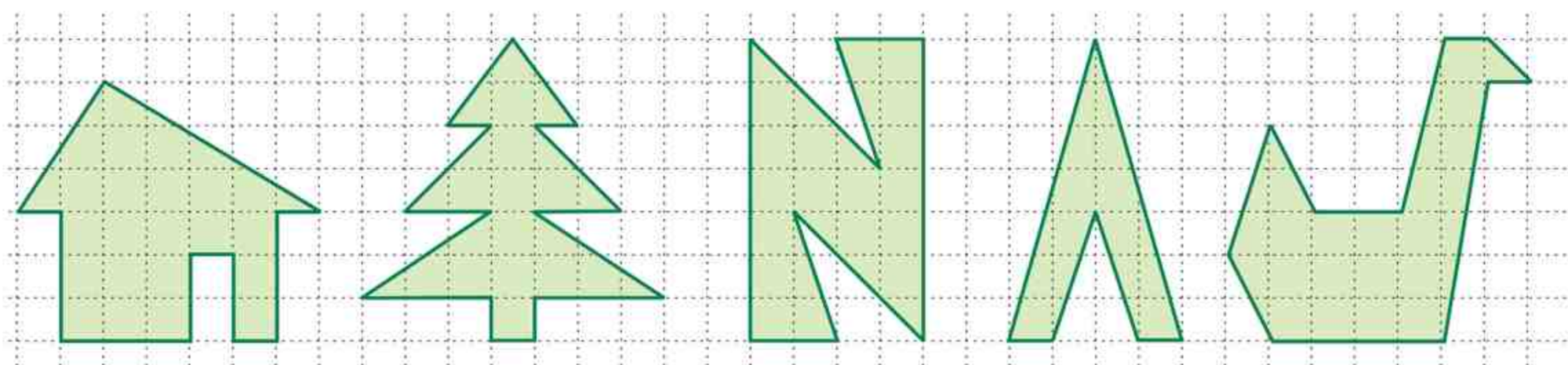
12. Oblicz miary kątów α i β :



13. Czworokąty narysowane poniżej to równoległobok, romb i trapez równoramienny. Oblicz miary kątów wewnętrznych tych czworokątów.

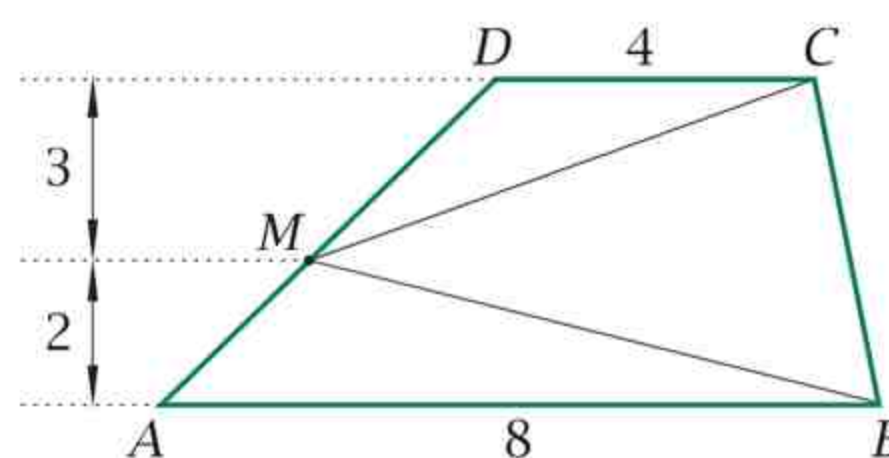


14. Bok kratki ma długość 1. Oblicz pola narysowanych figur.



15. a) Oblicz pole rombu o przekątnych długości $2\sqrt{2}$ i $4\sqrt{3}$.
b) Jaki obwód ma kwadrat o polu równym 20 cm^2 ?
16. Boki równoległoboku mają 10 cm i 12 cm , a krótsza wysokość ma 6 cm . Oblicz drugą wysokość.
17. Boki trójkąta prostokątnego mają długości 5 , 12 , 13 . Jaką długość ma najkrótsza z wysokości tego trójkąta?

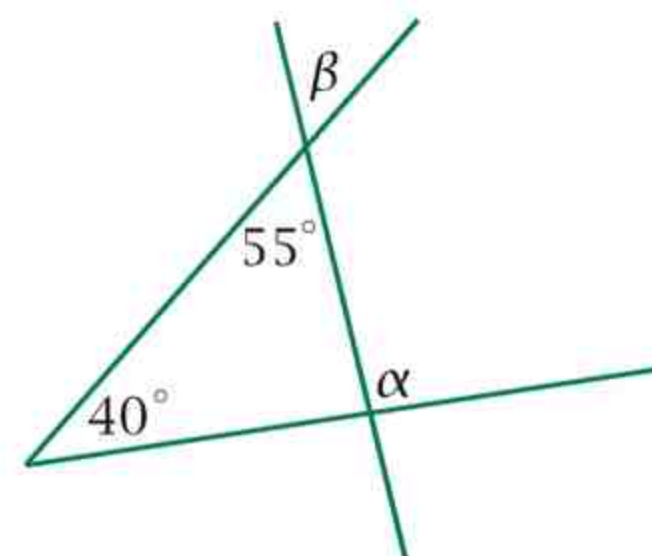
18. Czworokąt $ABCD$ na rysunku obok jest trapezem. Oblicz pole trójkąta BMC .



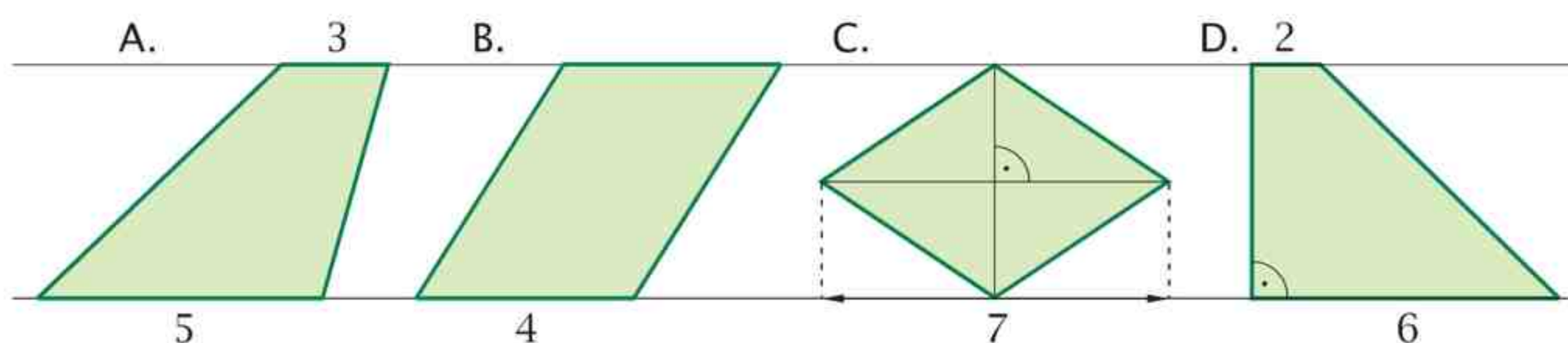
- 19. a) W pewnym czworokącie przekątne mają równe długości. Czy z tego wynika, że ten czworokąt jest prostokątem?
b) W pewnym czworokącie przekątne są prostopadłe. Czy z tego wynika, że ten czworokąt jest rombem?

Sprawdź, czy umiesz

1. Ile wynosi suma miar kątów α i β ?
A. 125° B. 145° C. 150° D. 160°

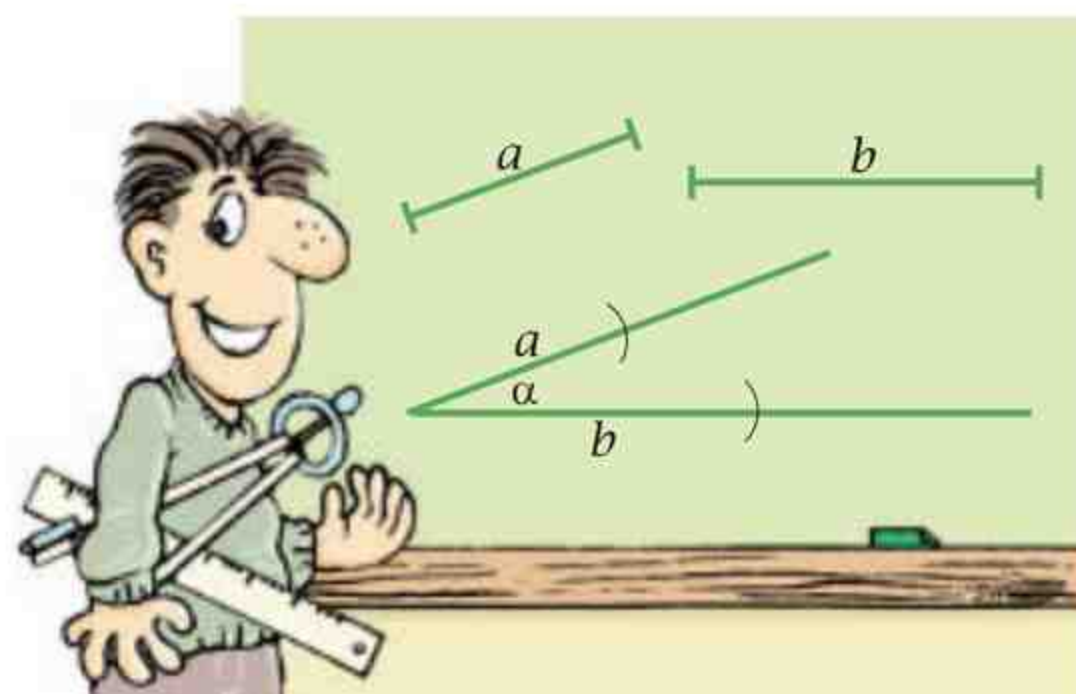
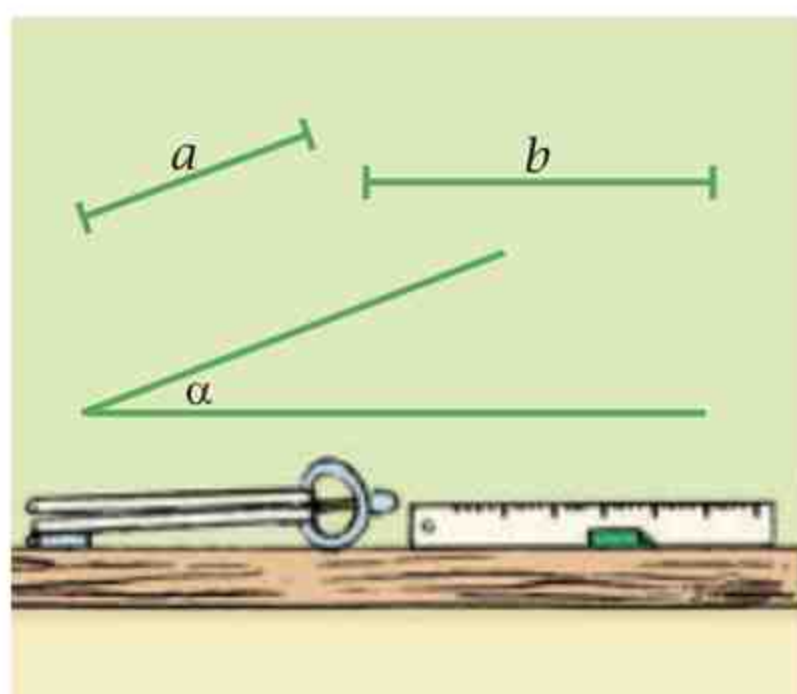


2. Który z poniższych czworokątów ma najmniejsze pole?



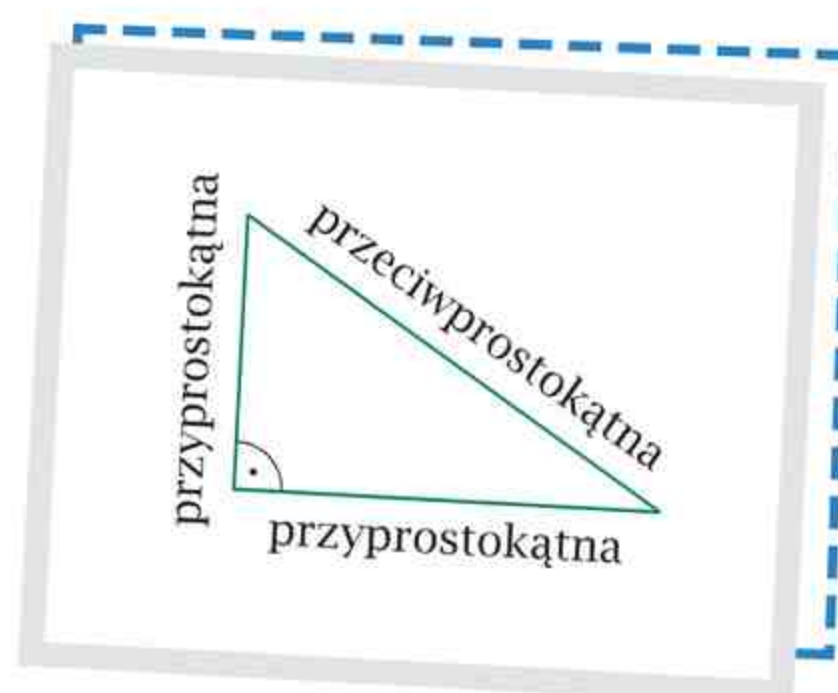
3. Wysokości równoległoboku są równe 6 cm i 8 cm . Pole tego równoległoboku wynosi 60 cm^2 . Jaką długość ma krótszy bok tego równoległoboku?
A. $7,5 \text{ cm}$ B. 10 cm C. 8 cm D. 6 cm

2 Twierdzenie Pitagorasa

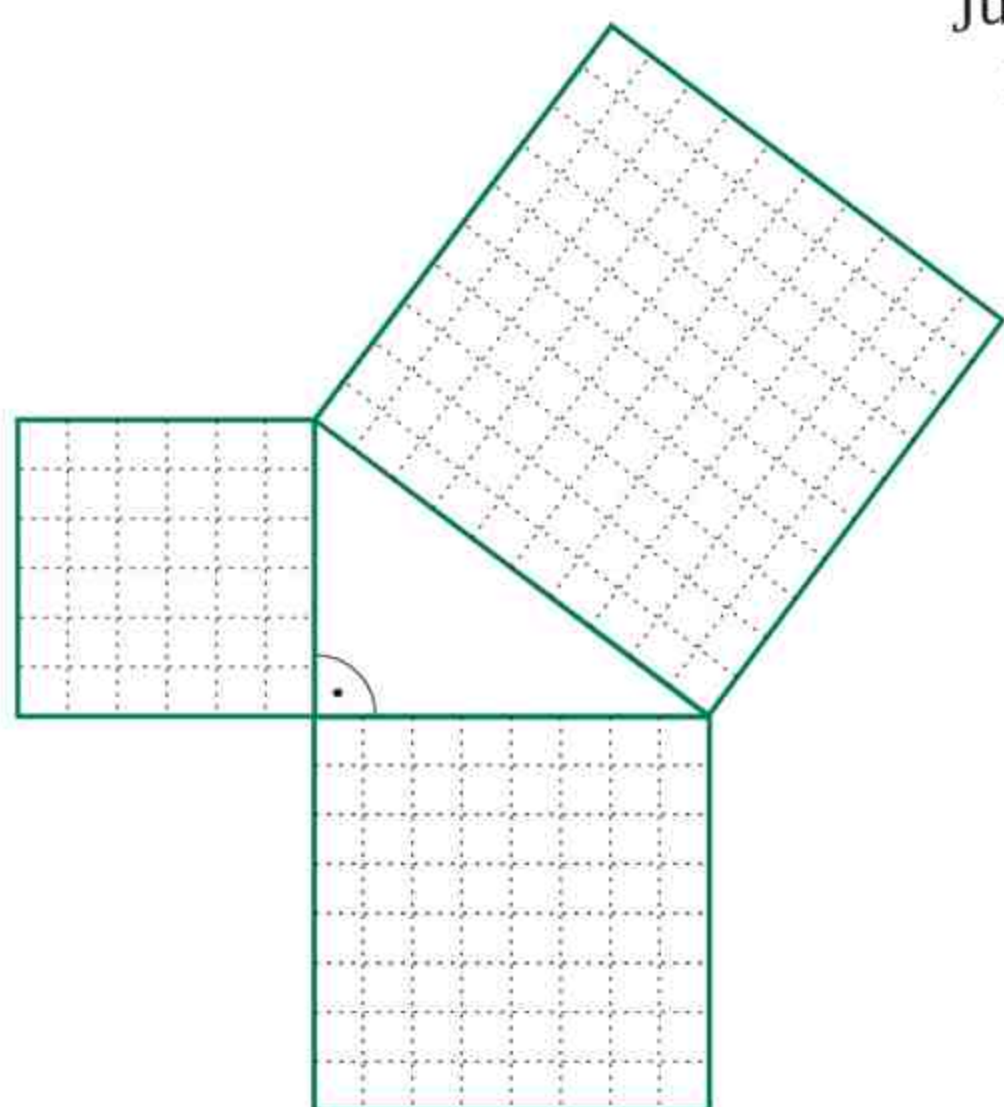


Gdy znamy długości dwóch boków trójkąta i miarę kąta między nimi, to możemy skonstruować trzeci bok trójkąta. Jeśli chcielibyśmy znać długość tego boku, to moglibyśmy go zmierzyć. Nie będziemy jednak mieć pewności, czy wynik jest dokładny.

ĆWICZENIE A. Skonstruuj przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 6 cm i 7 cm.

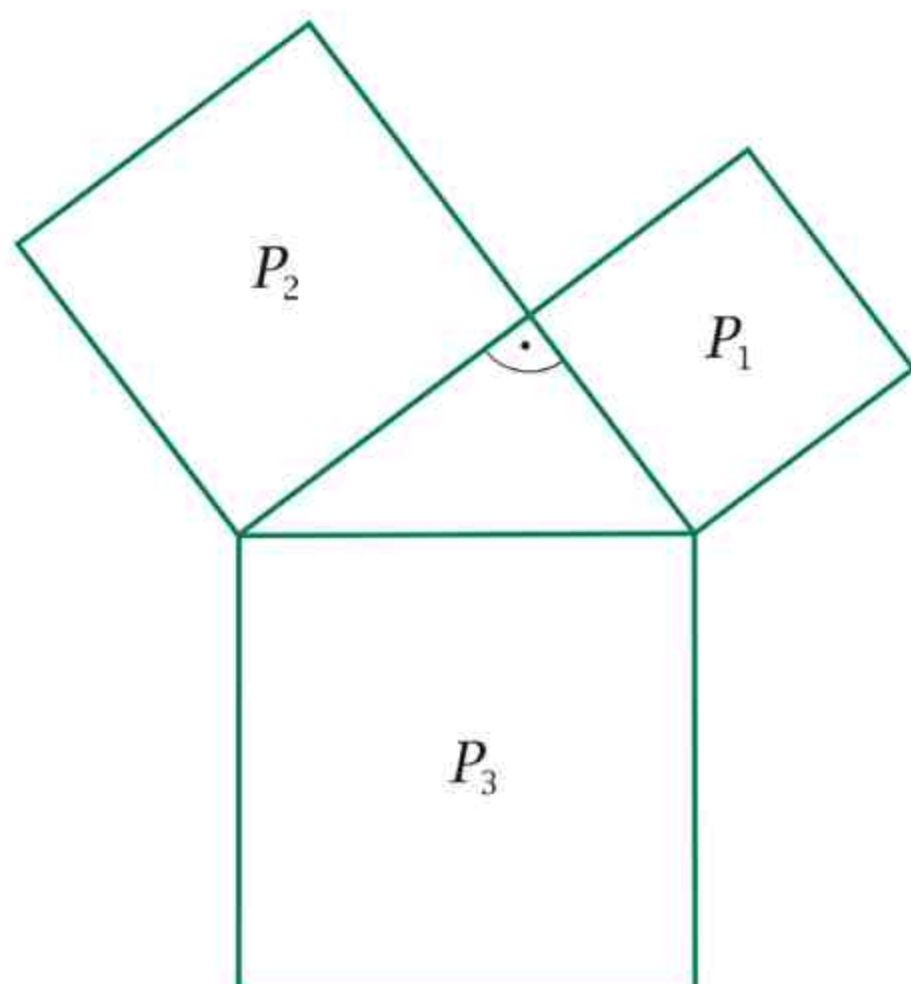


Już ponad 2500 lat temu zauważono, że jeśli kąt między danymi bokami jest prosty, to trzeci bok trójkąta nie tylko można skonstruować, ale także można obliczyć jego długość.



ĆWICZENIE B. a) Popatrz na rysunek obok. Na bokach trójkąta prostokątnego zbudowano kwadraty. Porównaj sumę pól dwóch mniejszych kwadratów z polem większego kwadratu.

b) Narysuj trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 3 cm i 4 cm. Zmierz długość przeciwprostokątnej. Na bokach tego trójkąta zbuduj kwadraty i oblicz ich pola. Dodaj pola dwóch mniejszych kwadratów i porównaj z polem największego kwadratu.



Starożytni matematycy odkryli następującą własność trójkątów prostokątnych:

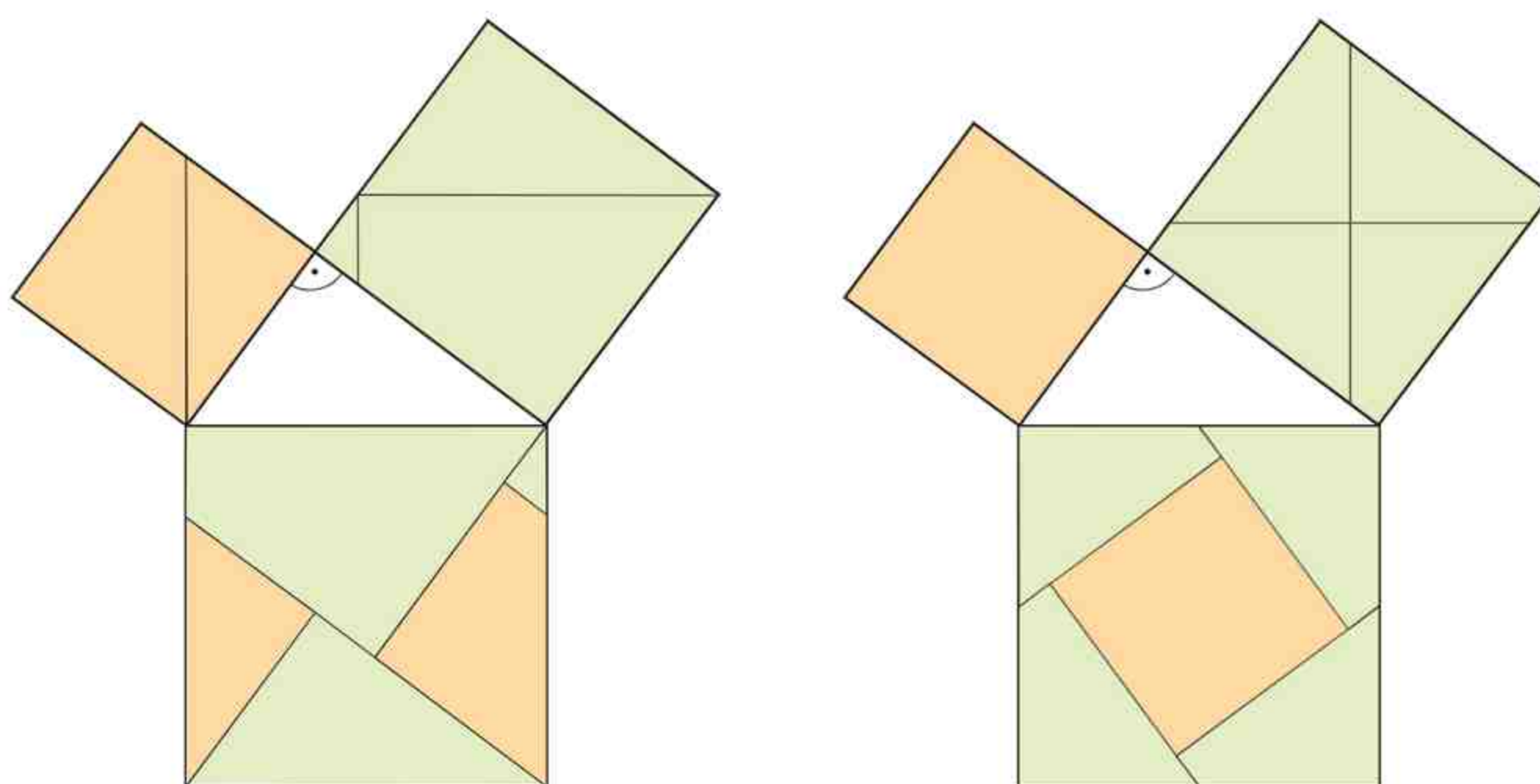
W trójkącie prostokątnym suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych jest równa polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej.

$$P_1 + P_2 = P_3$$

P_1, P_2 — pola kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych

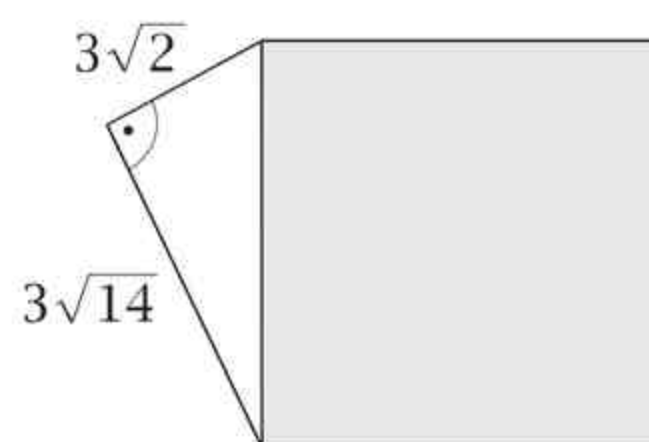
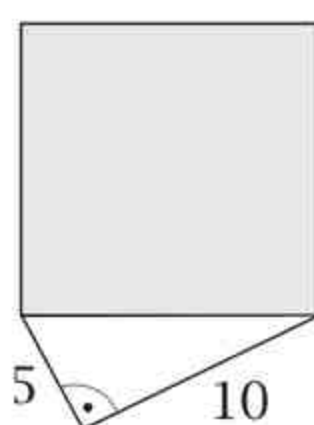
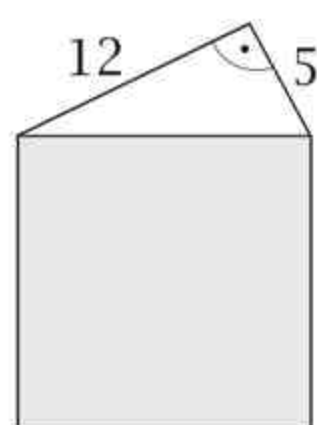
P_3 — pole kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej

Powyższą własność nazywamy **twierdzeniem Pitagorasa**. Można ją uzasadnić, dzieląc dwa mniejsze kwadraty na takie części, aby można było z nich złożyć największy kwadrat. Na poniższych rysunkach przedstawiono dwa różne sposoby takiego podziału.



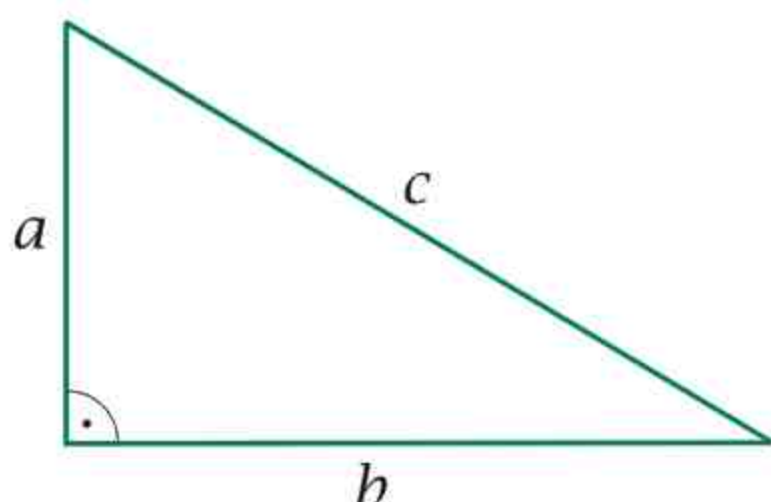
Uwaga. Linie podziału dwóch mniejszych kwadratów (na obu rysunkach) są równoległe do odpowiednich boków dużego kwadratu. Na drugim rysunku linie podziału przechodzą przez środek kwadratu (punkt przecięcia przekątnych).

ĆWICZENIE C. Jakie pola mają zacieniowane kwadraty z rysunków poniżej? Jakie długości mają boki tych kwadratów?



Zauważmy, że jeżeli boki trójkąta mają długości a , b i c , to kwadraty zbudowane na tych bokach mają pola równe odpowiednio a^2 , b^2 i c^2 .

Twierdzenie Pitagorasa możemy więc sformułować w inny sposób:



Jeśli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

a , b — długości przyprostokątnych

c — długość przeciwprostokątnej

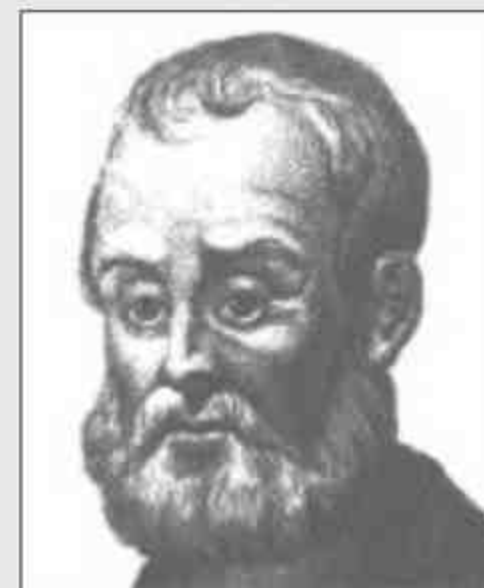
Uwaga. Matematycy nazywają *twierdzeniem* każde zdanie (np. dotyczące figur lub liczb), którego prawdziwość została udowodniona. Wiele różnych twierdzeń już znasz, na przykład:

- Suma miar kątów w trójkącie jest równa 180° .
- Przekątne prostokąta mają równe długości i przecinają się w połowie.
- Liczba naturalna, której ostatnią cyfrą jest 0 lub 5, jest podzielna przez 5.
- Iloczyn liczby parzystej i nieparzystej jest liczbą parzystą.

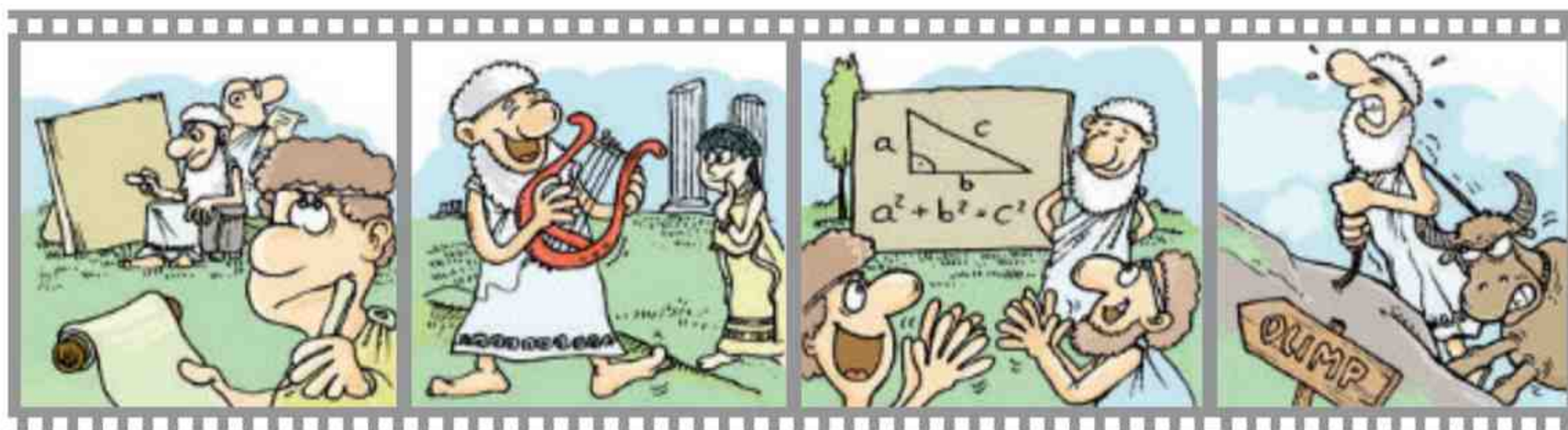
Z historii

Pitagoras z Samos (572 p.n.e. – 497 p.n.e.) żył w czasach, gdy w Indiach nauczał Budda, a w Chinach — Konfucjusz. Założył Związek Pitagorejski — bractwo religijno-polityczne, które prowadziło także działalność naukową. Pitagorejczycy uważali, że świat można opisać za pomocą liczb. Celem ich życia było poszukiwanie harmonii w świecie. Odkryli na przykład, jakie długości powinny mieć dwie struny, aby razem pięknie (harmonijnie) brzmiały.

Twierdzenie zwane twierdzeniem Pitagorasa było używane już wcześniej przez Babilończyków, Egipcjan i Hindusów. Od pitagorejczyków pochodzi prawdopodobnie ogólny dowód i nazwa twierdzenia. Legenda głosi, że po udowodnieniu twierdzenia Pitagoras złożył bogom hekatombę, czyli ofiarę ze stu wołów.



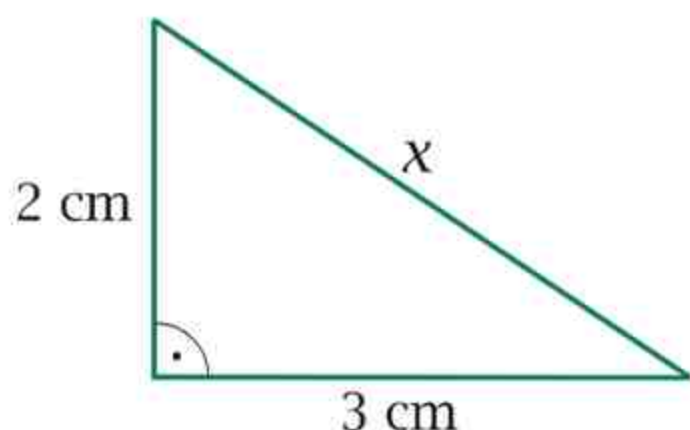
Πυθαγόρας



Stosując twierdzenie Pitagorasa, możemy obliczyć długość jednego z boków trójkąta prostokątnego, gdy znane są długości dwóch pozostałych boków.

Przykład

W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 2 cm i 3 cm. Jaka długość ma przeciwprostokątna tego trójkąta?



Wykonujemy rysunek pomocniczy; przez x oznaczamy szukaną długość odcinka.

$$2^2 + 3^2 = x^2$$

Zapisujemy równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa.

$$x^2 = 13$$

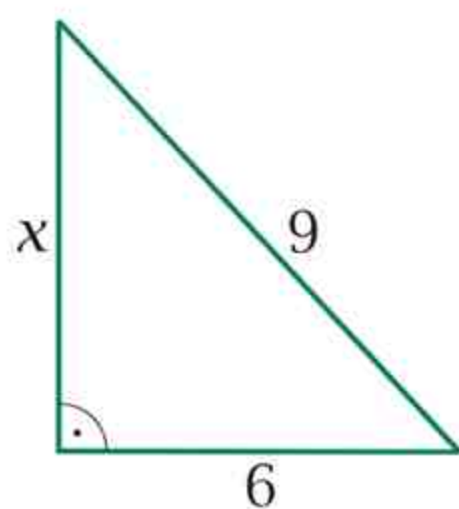
$$x = \sqrt{13} \text{ [cm]}$$

Ponieważ x to długość odcinka, więc rozpatrujemy tylko dodatnie rozwiązanie równania $x^2 = 13$.

Odp. Przeciwprostokątna ma długość $\sqrt{13}$ cm, czyli około 3,6 cm.

Przykład

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 9, a jedna z przyprostokątnych ma długość 6. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej.



Wykonujemy rysunek pomocniczy; przez x oznaczamy szukaną długość przyprostokątnej.

$$x^2 + 6^2 = 9^2$$

Zapisujemy równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa.

$$x^2 + 36 = 81$$

$$x^2 = 45$$

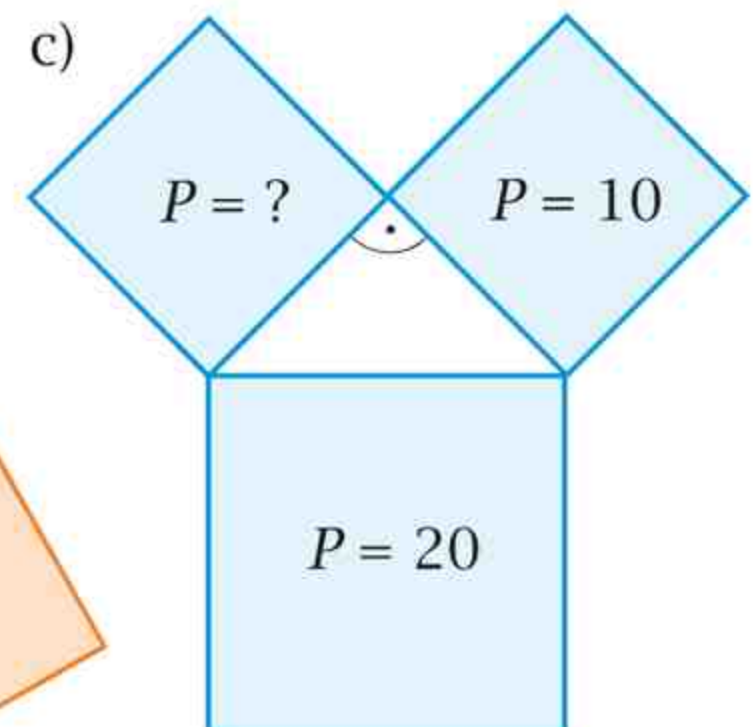
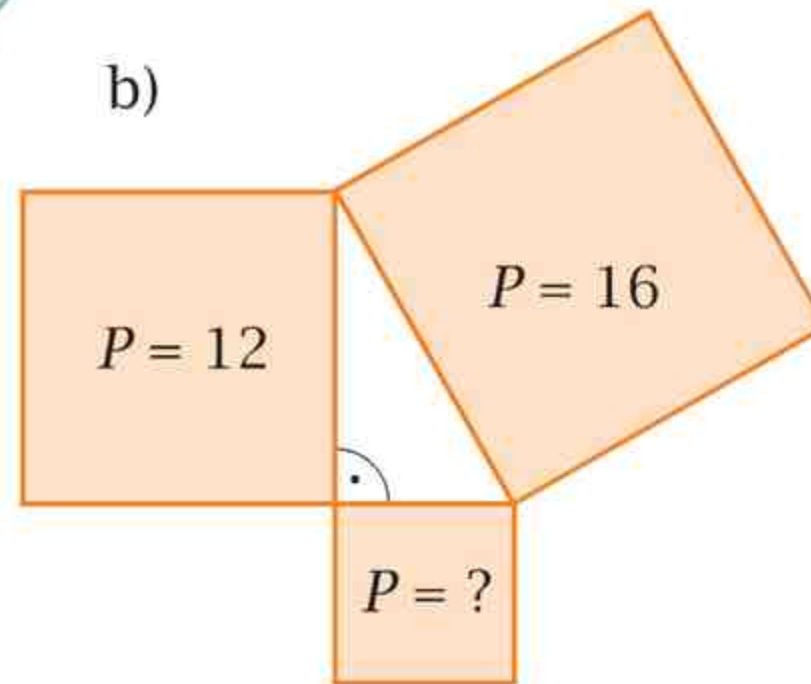
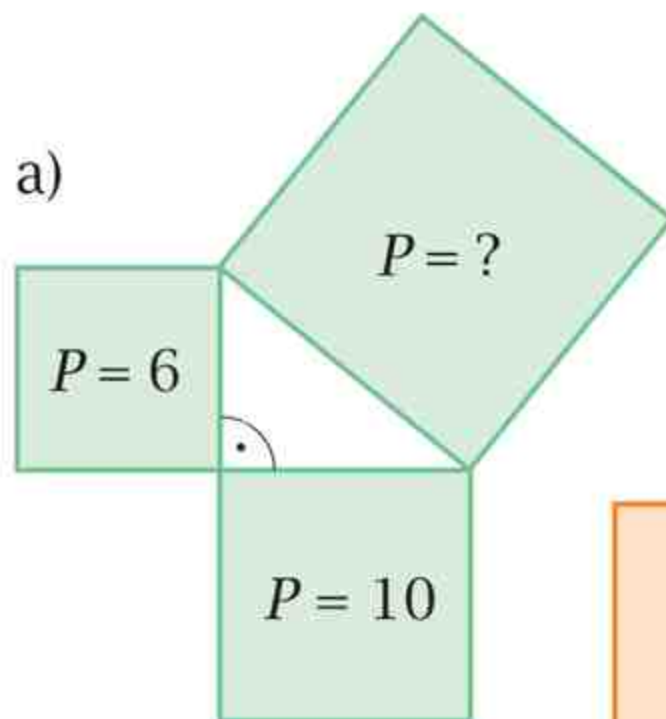
$$x = 3\sqrt{5}$$

Znajdujemy dodatnie rozwiązanie równania $x^2 = 45$; $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$.

Odp. Druga przyprostokątna ma długość $3\sqrt{5}$, czyli około 6,7.

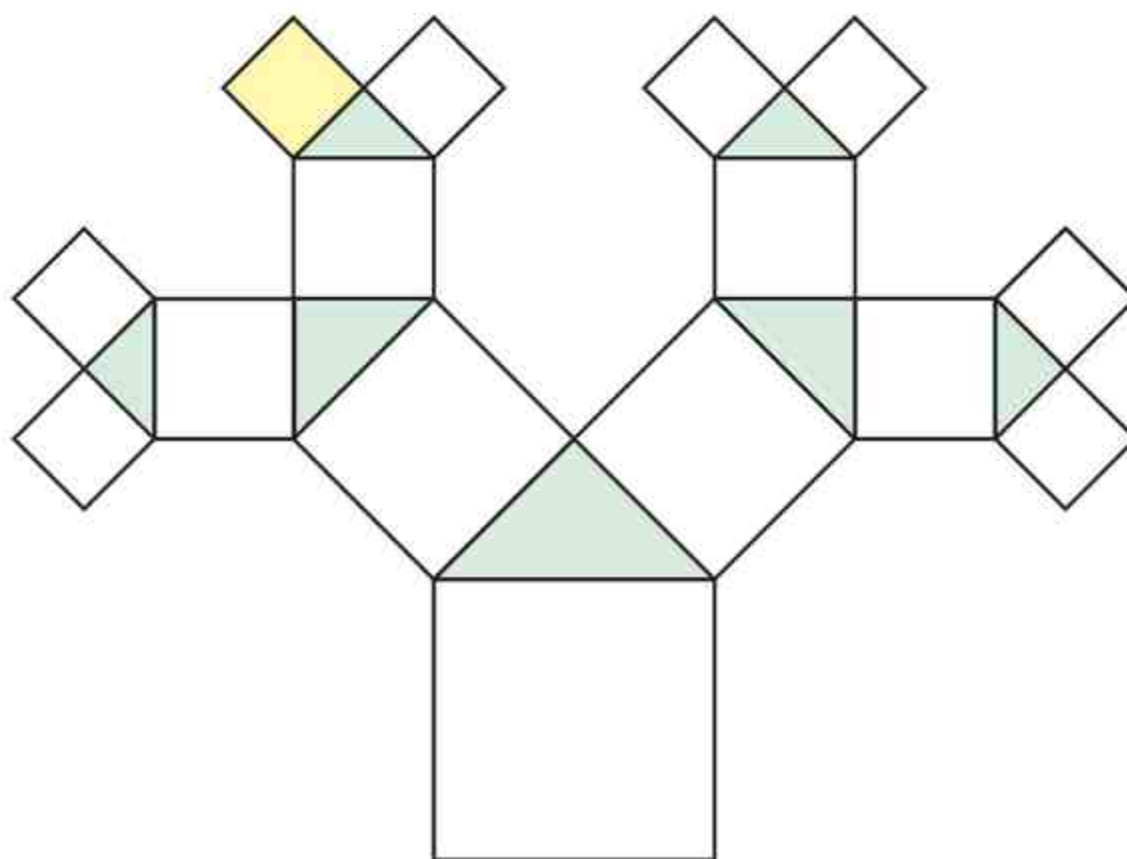
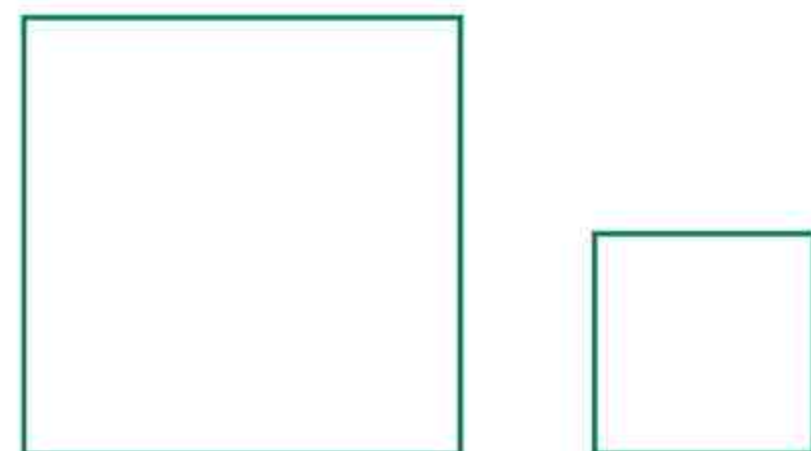
Zadania

1. Na każdym z rysunków podano pola dwóch kwadratów wyrażone w pewnej jednostce. Oblicz pole trzeciego kwadratu.



2. Skonstruuj kwadrat, którego pole jest równe:

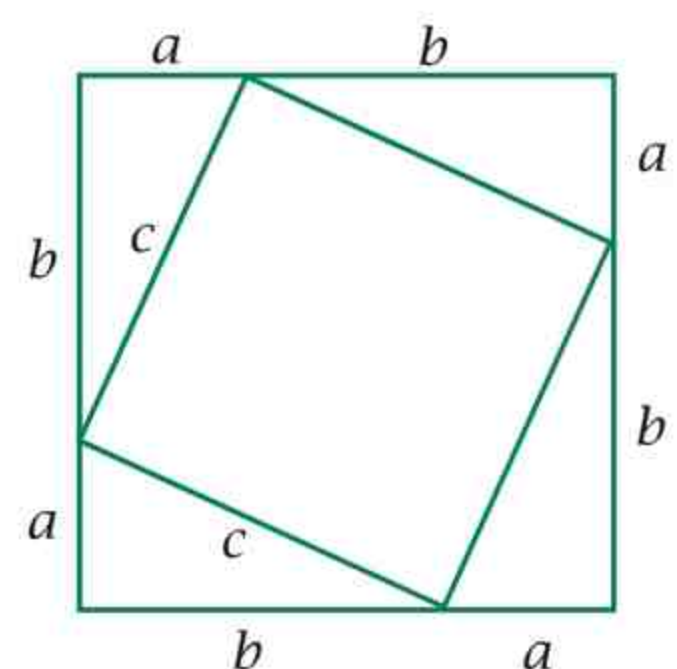
- sumie pól narysowanych kwadratów,
- różnicy pól narysowanych kwadratów.



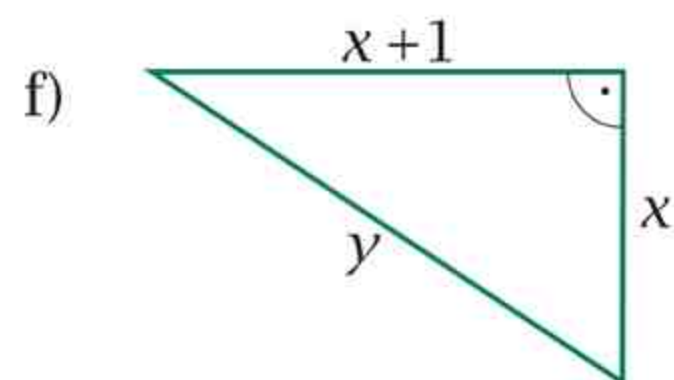
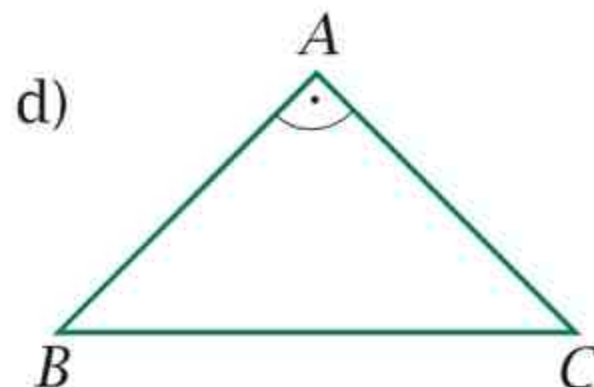
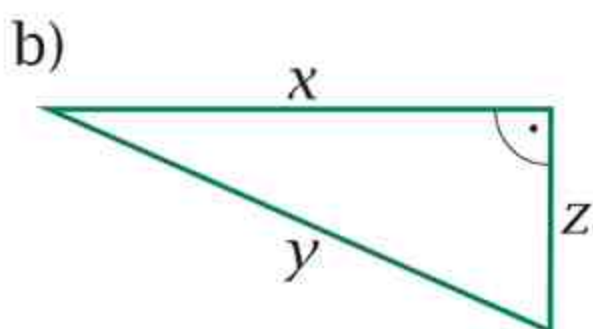
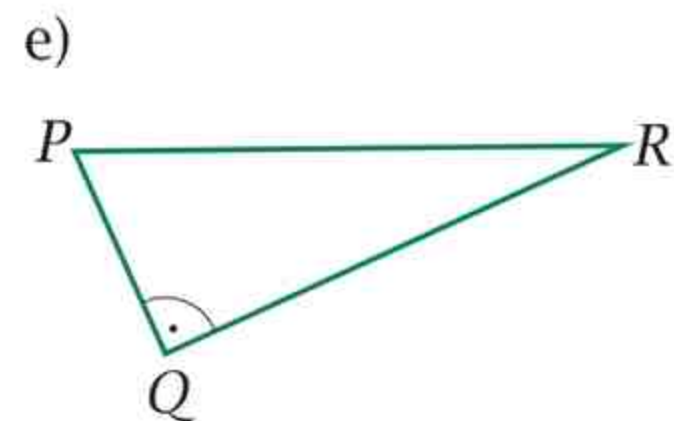
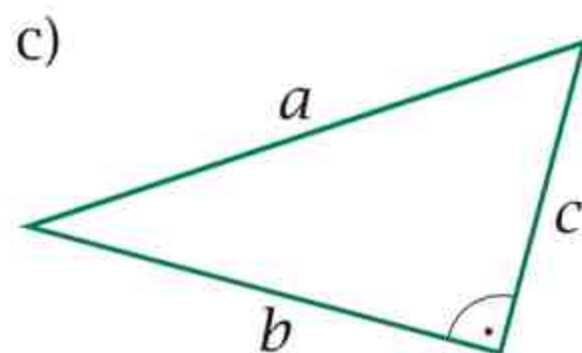
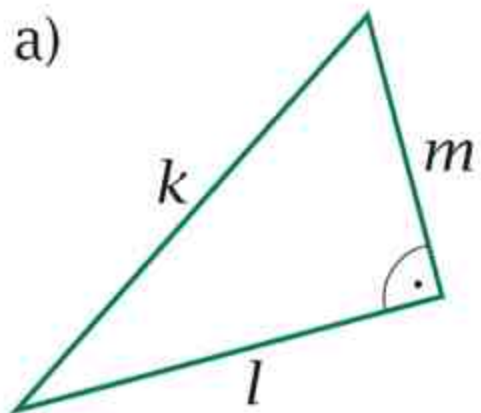
3. Trójkąty pomalowane na zielono są prostokątne i równoramienne.
- Jakie pole ma największy kwadrat na rysunku obok, jeśli pole żółtego kwadratu jest równe P ?
 - Jakie pole ma żółty kwadrat, jeśli pole największego kwadratu wynosi S ?

4. Rysunek obok przedstawia kwadrat o boku długości $a + b$, podzielony na cztery jednakowe trójkąty i kwadrat. Korzystając z tego rysunku, uzasadnij twierdzenie Pitagorasa.

Wskazówka. Przedstaw pole dużego kwadratu na dwa sposoby: jako pole kwadratu o boku $a + b$ oraz jako sumę pól figur, na które podzielony jest kwadrat.

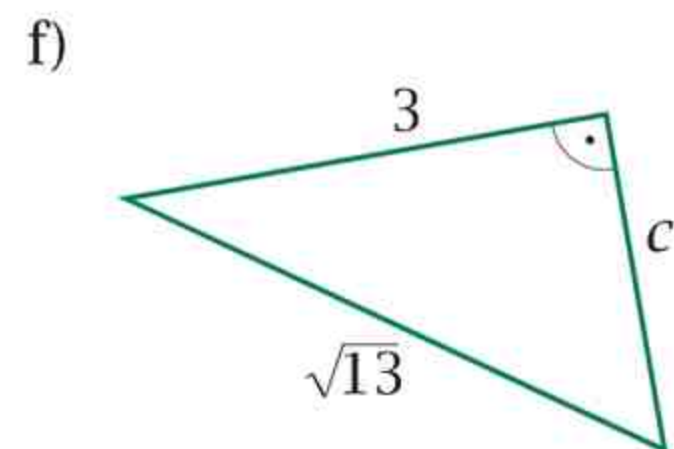
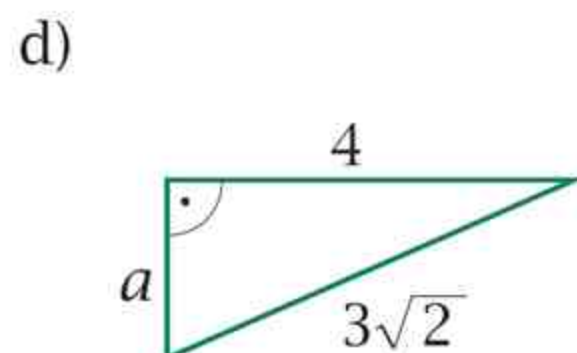
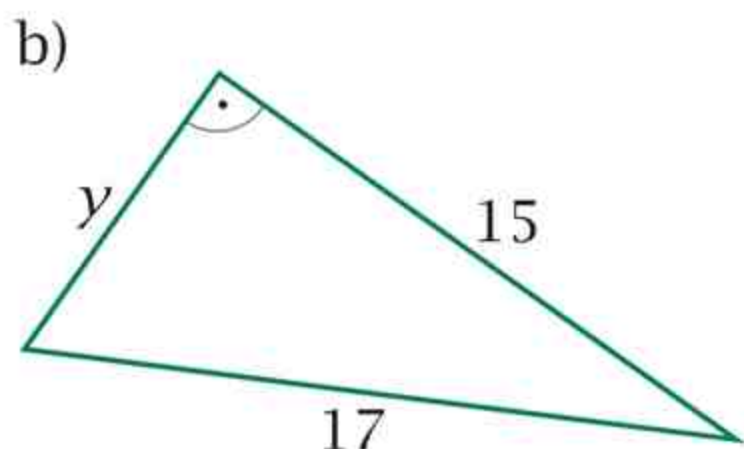
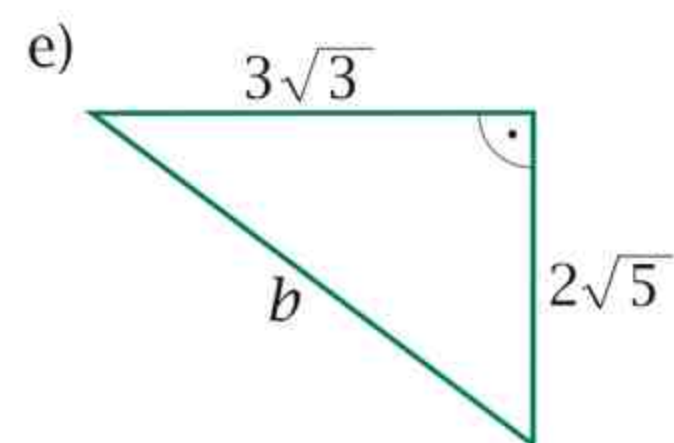
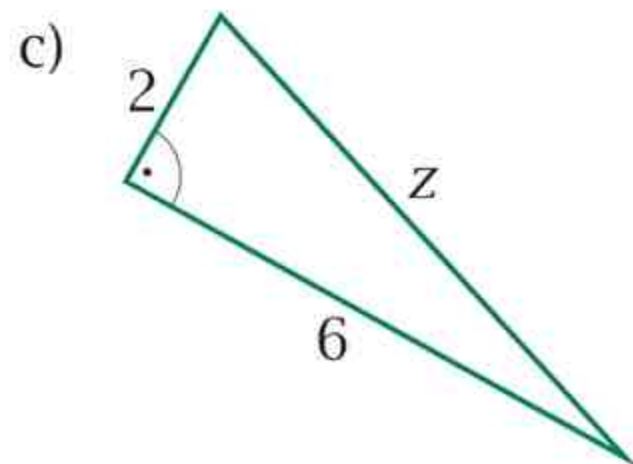
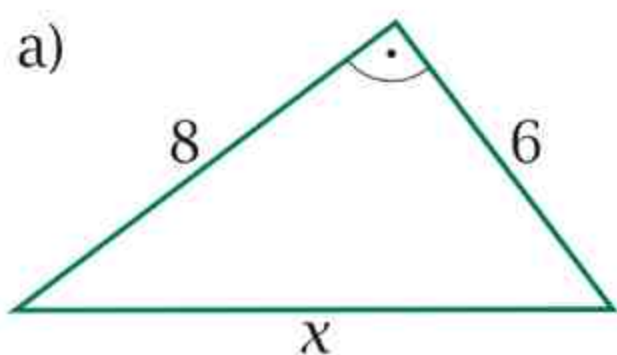


5. Zapisz związek między długościami boków poniższych trójkątów wynikający z twierdzenia Pitagorasa.

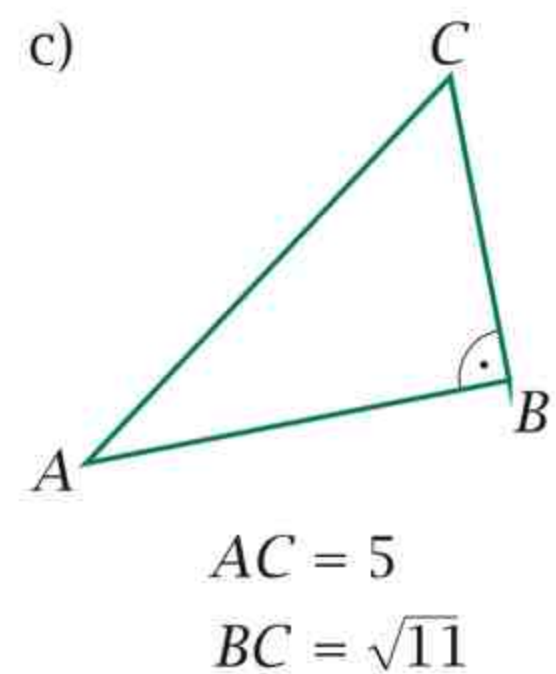
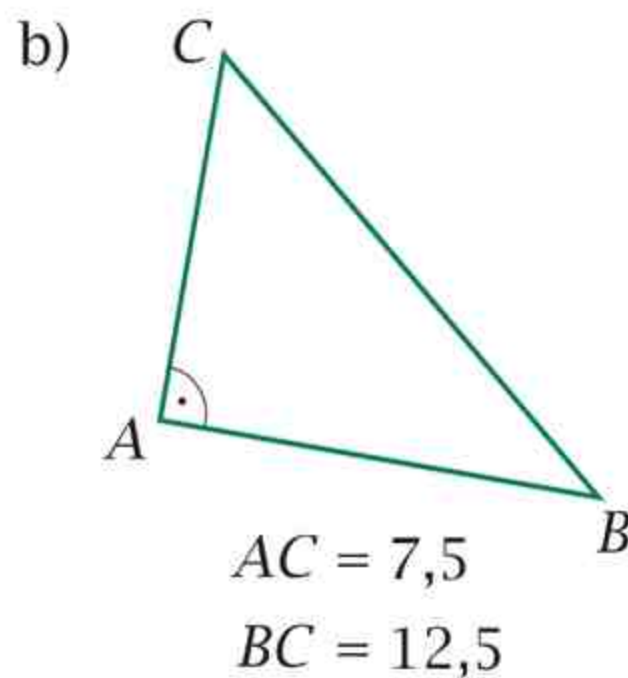
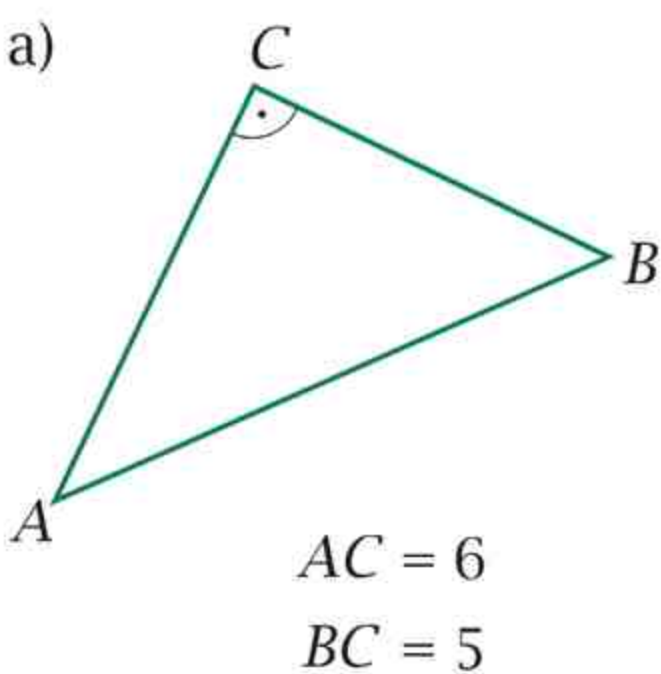


6. Trójkąt KLM jest prostokątny. Ustal, jaką literą jest oznaczony wierzchołek kąta prostego, jeśli zachodzi równość $KL^2 = KM^2 - LM^2$.

7. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.

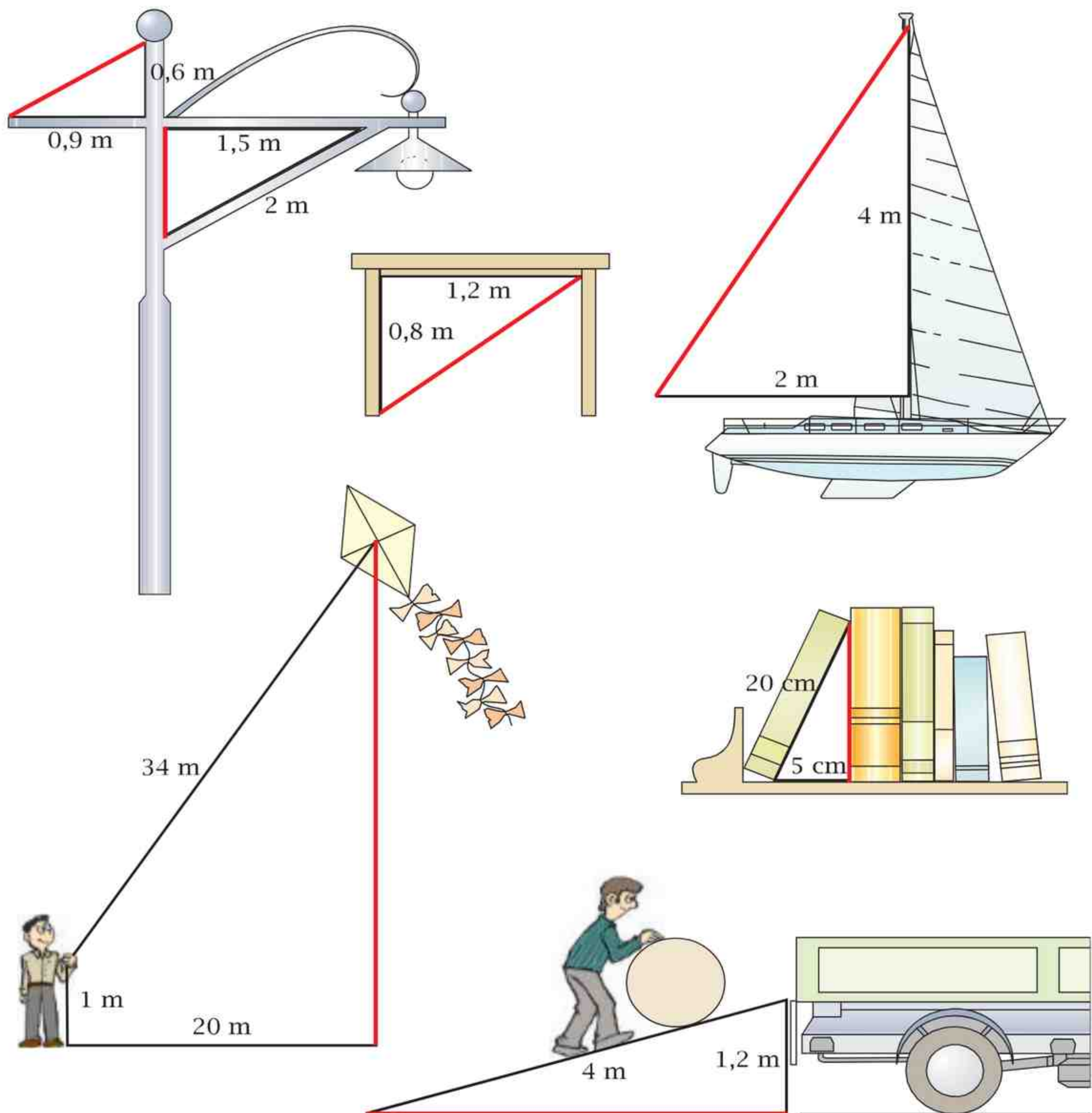


8. Oblicz długość odcinka AB .



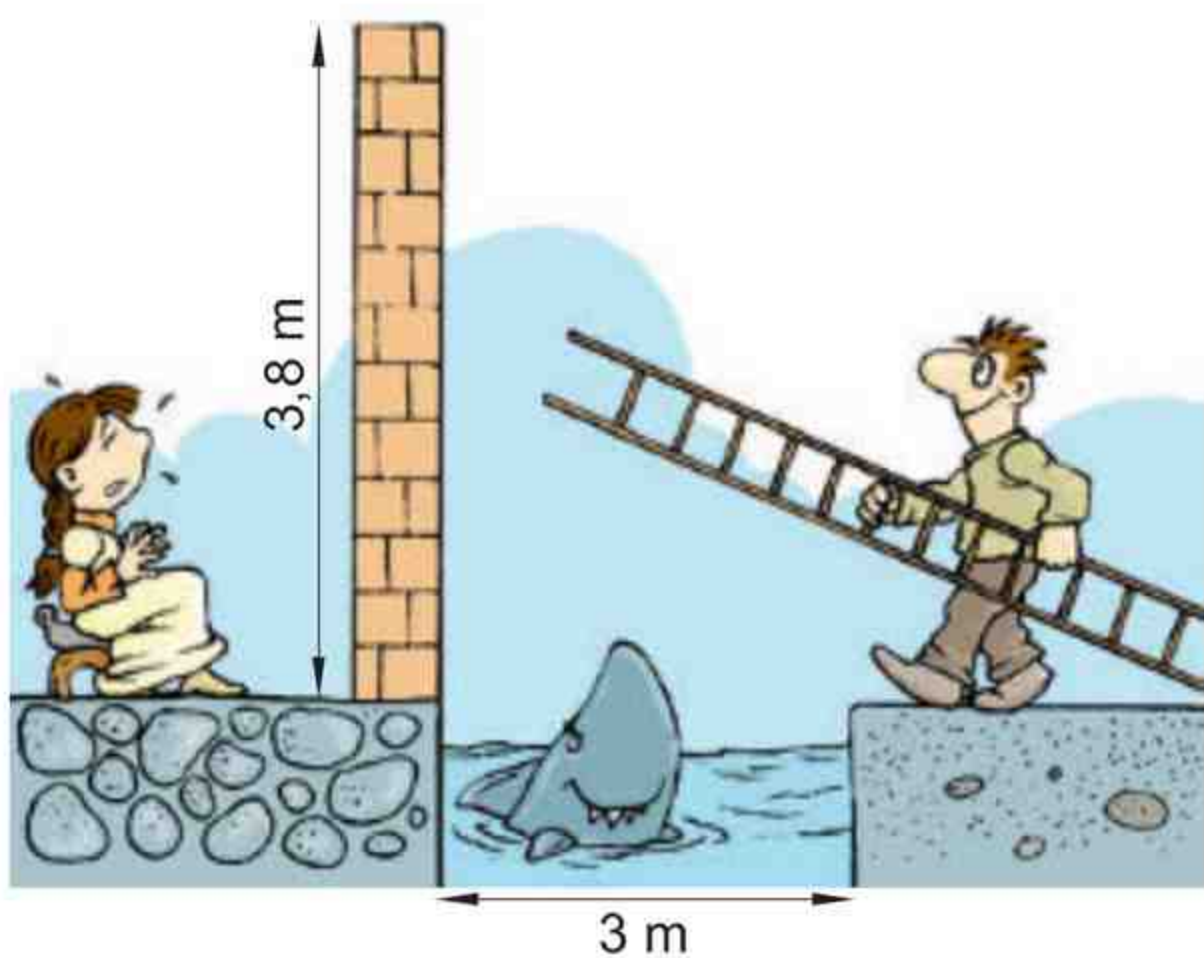
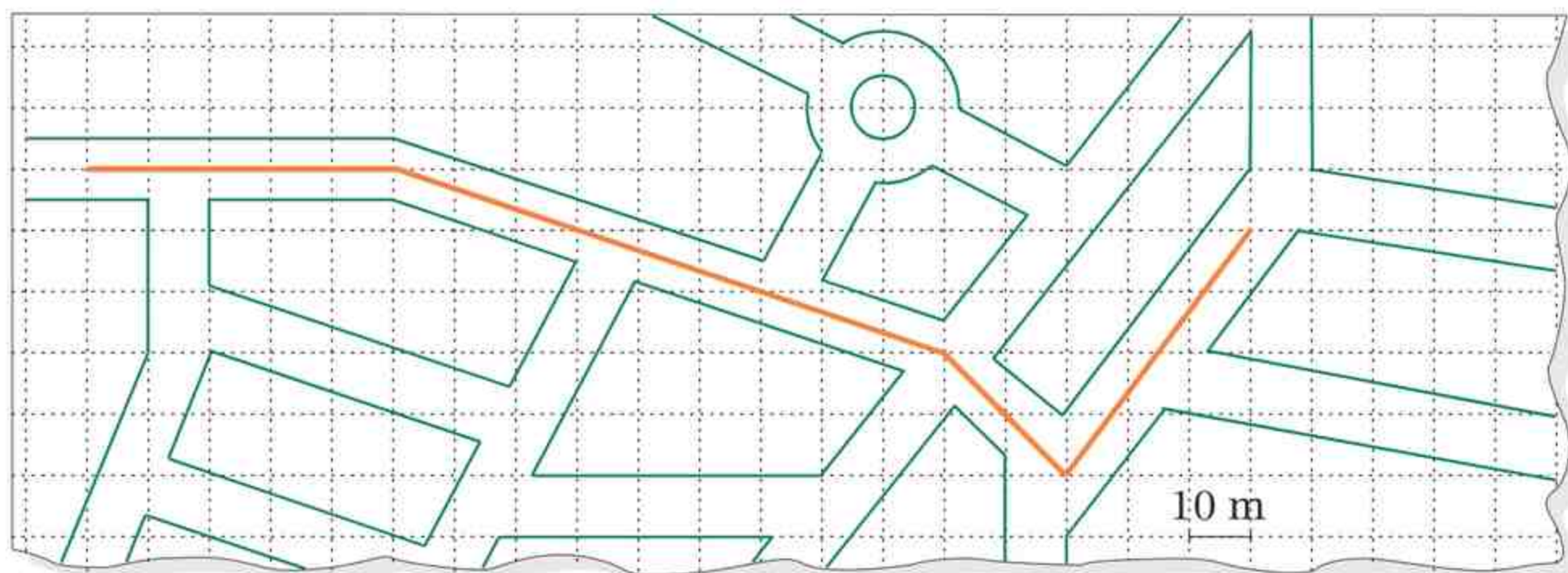
9. a) Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 24 i 18. Oblicz długość przeciwprostokątnej.
- b) W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma 34 cm, a jedna z przyprostokątnych ma 16 cm. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej.
- c) Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 10, a jedna z przyprostokątnych ma długość $2\sqrt{10}$. Oblicz pole tego trójkąta.

10. Oblicz długości zaznaczonych na czerwono odcinków. Wyniki zaokrąglaj.



11. Statek wypłynął z portu w kierunku wschodnim. Po przepłynięciu 10 mil skręcił i przepłynął 7,5 mili w kierunku południowym. Jak daleko znalazł się od portu?

- 12.** Rysunek przedstawia fragment planu miasta. Oszacuj z dokładnością do 1 m długość zaznaczonej trasy. (Do obliczeń przyjmij, że $\sqrt{2} \approx 1,4$ i $\sqrt{10} \approx 3,2$).

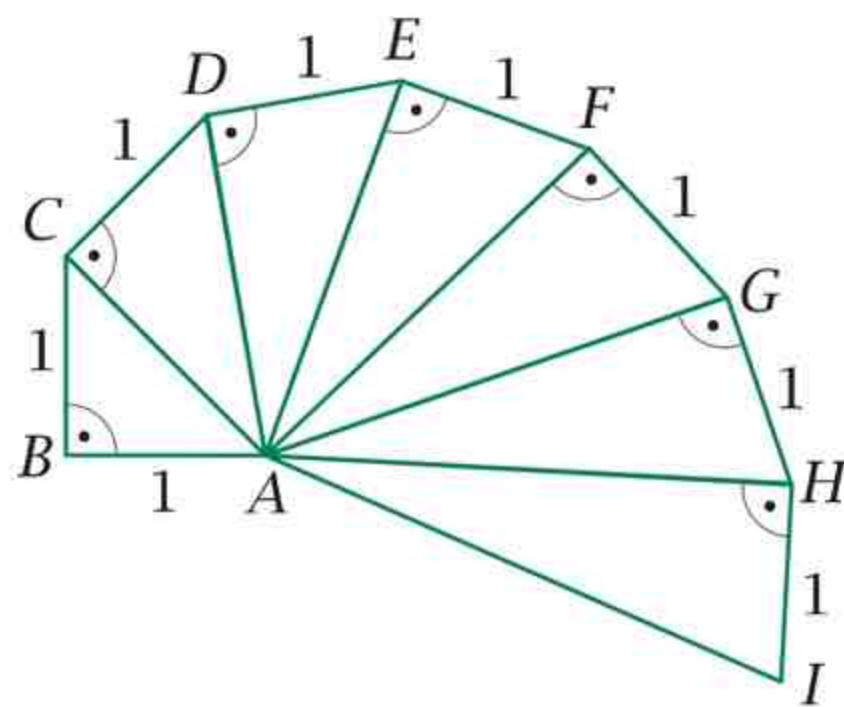


13. Tam za murem dziewczyna,
a pod ręką drabina,
co pięć metrów długości ma.
W fosie krążą rekiny.
Żal przecudnej dziewczyny,
co za murem z rozpaczyny łka.
Czy zwykłemu chłopczynie
na wspomnianej drabinie
te przeszkody pokonać się da?
Dane wierszyk pominie,
znajdziesz je przy rycinie.
Policz sprytnie,
odpowiedz raz-dwa!

- 14.** Popatrz na rysunek obok. Oblicz długości odcinków: AC , AD , AE , AF , AG , AH i AI .

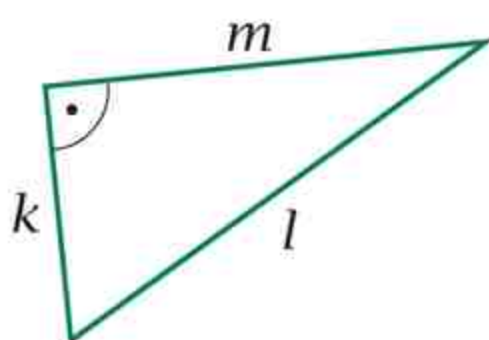
15. Skonstruuj odcinki o długościach:
- a) $\sqrt{10}$ cm, $\sqrt{13}$ cm, $\sqrt{40}$ cm
- b) $\sqrt{15}$ cm, $\sqrt{7}$ cm, $\sqrt{96}$ cm

Wskazówka. $10 = 3^2 + 1^2$, $15 = 4^2 - 1^2$.



- 16.** Narysuj oś liczbową, zaznacz na niej odcinek jednostkowy, a następnie zaznacz konstrukcyjnie na narysowanej osi punkt o współrzędnej $\sqrt{5}$ oraz punkty o współrzędnych $1 + \sqrt{5}$, $-2\sqrt{5}$, $\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Sprawdź, czy umiesz

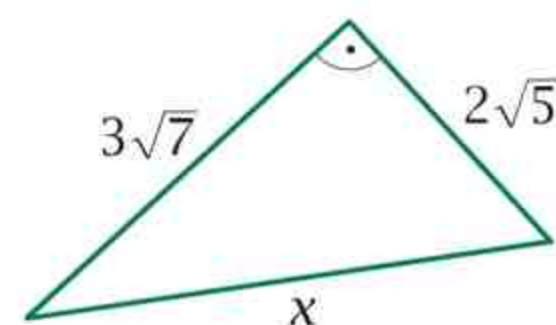


1. Przedstawiony na rysunku trójkąt jest prostokątny. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że:

- A. $m^2 = k^2 + l^2$ C. $l^2 = m^2 - k^2$
 B. $k^2 = m^2 - l^2$ D. $k^2 = l^2 - m^2$

2. Długość boku trójkąta, na rysunku oznaczonego literą x, jest równa:

- A. $\sqrt{43}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{83}$ D. $5\sqrt{2}$

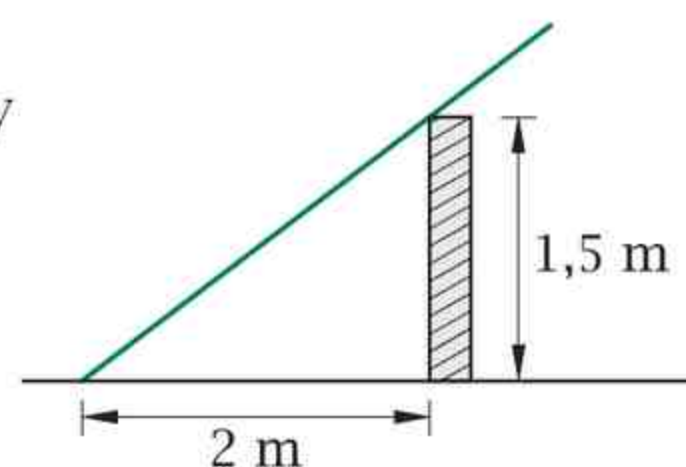


3. Jakie pole ma trójkąt, którego jedna z przyprostokątnych ma długość 4, a przeciwprostokątna ma długość 7?

- A. $2\sqrt{65}$ B. $\sqrt{65}$ C. $4\sqrt{33}$ D. $2\sqrt{33}$

4. Prosty pręt metalowy o długości 4 m jest oparty o mur. Część pręta wystająca ponad mur ma długość:

- A. 2 m B. 1,5 m C. 2,5 m D. 1 m



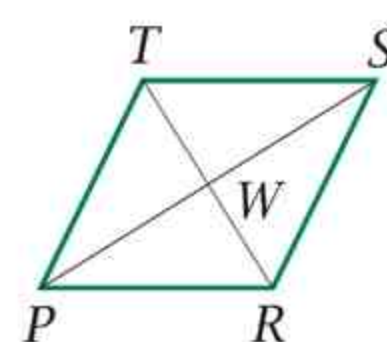
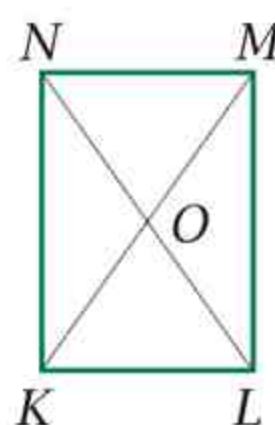
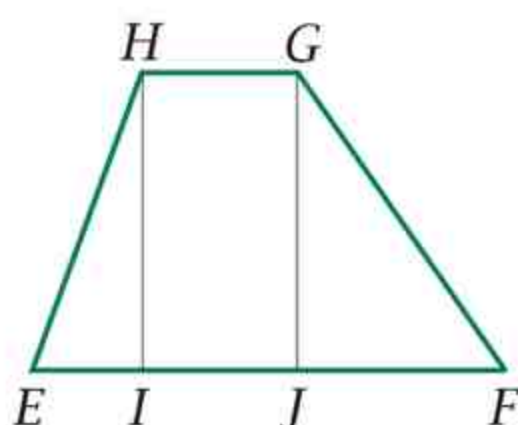
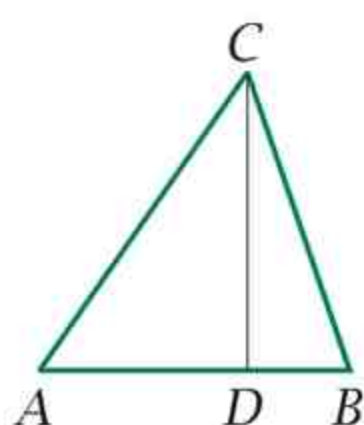
→ zadania uzupełniające 7–11, str. 114

3

Zastosowania twierdzenia Pitagorasa

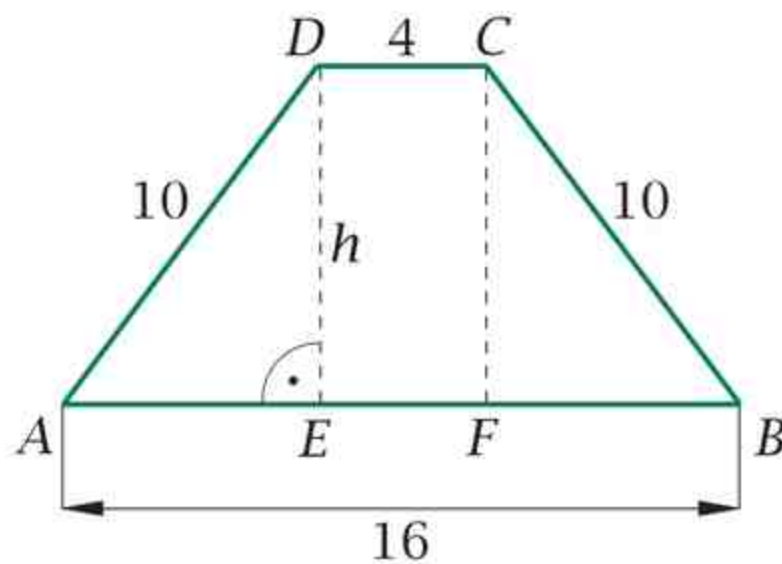
ĆWICZENIE. Kolejne figury przedstawione na poniższych rysunkach to trójkąt, trapez, prostokąt i romb. Odcinek CD to wysokość trójkąta, a odcinki HI i GJ to wysokości trapezu.

Znajdź w każdej z narysowanych figur jeden trójkąt prostokątny. Zapisz dla tego trójkąta równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa.



Przykład

Oblicz pole trapezu równoramiennego o podstawach długości 4 i 16 oraz ramionach długości 10.



Wykonujemy rysunek; wysokość trapezu oznaczamy literą h .

$$AE = FB = \frac{16 - 4}{2} = 6$$

Obliczamy długości odcinków AE i FB .

$$h^2 + AE^2 = 10^2$$

$$h^2 + 6^2 = 10^2$$

$$h^2 = 64$$

$$h = 8$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta AED .

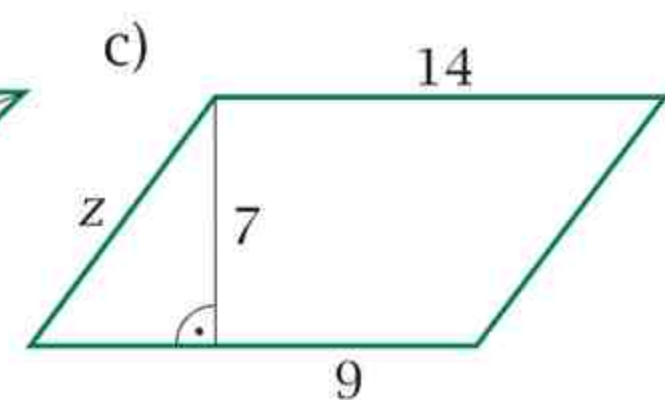
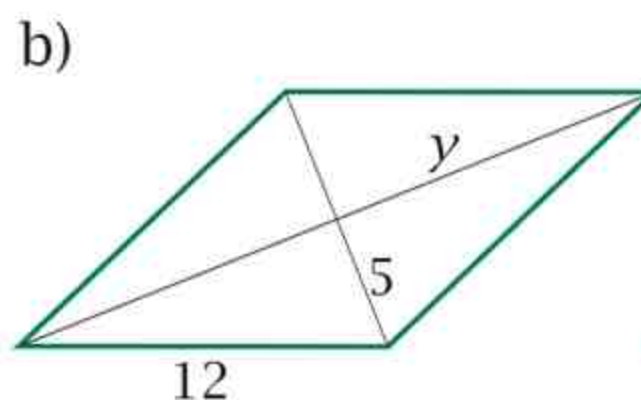
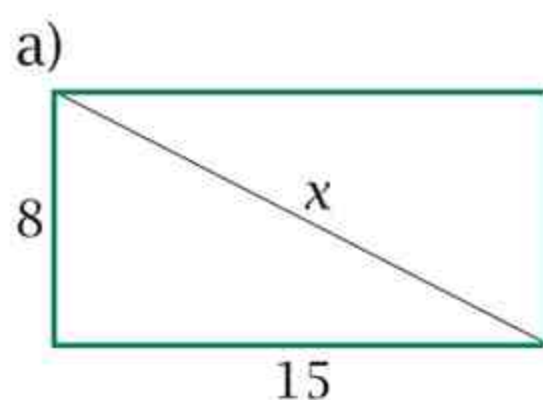
$$P = \frac{(16 + 4) \cdot 8}{2} = 80$$

Obliczamy pole trapezu.

Odp. Pole trapezu jest równe 80.

Zadania**Czworokąty**

1. Narysowane czworokąty to prostokąt, romb i równoległobok. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.



2. a) Oblicz długość przekątnej kwadratu o boku 4.
 b) Jaką długość ma przekątna prostokąta o bokach 5 i 10?
 c) Oblicz długość boku rombu o przekątnych długości 10 i 6.



3. Lustro ma wymiary $2,2 \text{ m} \times 2,2 \text{ m}$. Czy można je przenieść przez drzwi o wymiarach $1 \text{ m} \times 2 \text{ m}$?

4. Oblicz pole prostokąta, którego przekątna ma długość 7 cm , a jeden z boków ma długość $3\sqrt{2} \text{ cm}$.

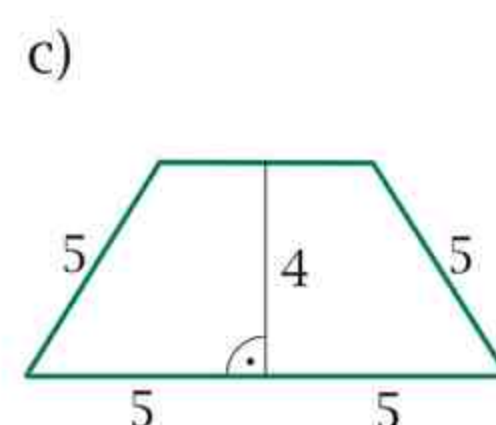
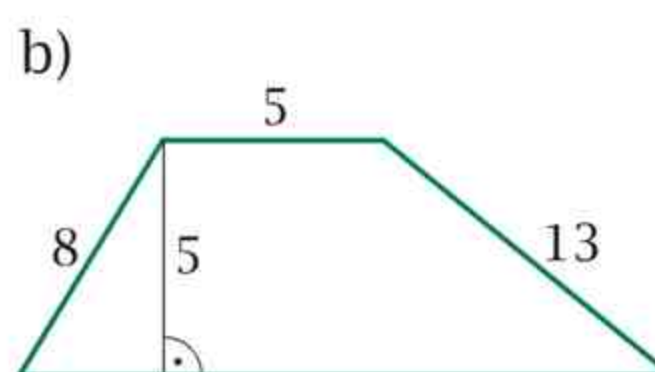
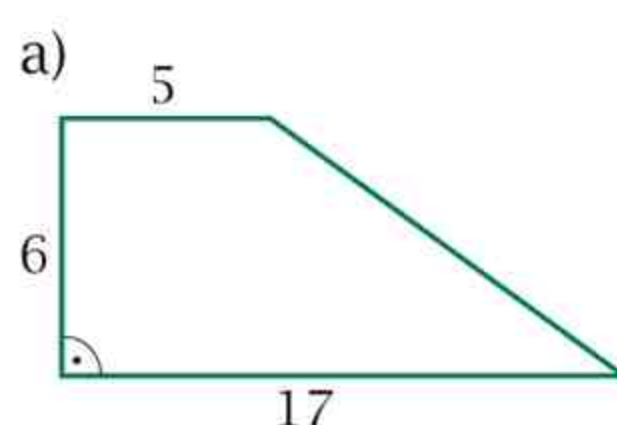
5. Bok rombu ma długość 13 cm , a jedna z jego przekątnych ma długość 24 cm . Oblicz długość drugiej przekątnej.

6. W równoległoboku dłuższy bok ma 10 cm , a krótsza przekątna ma 6 cm i dzieli równoległobok na dwa trójkąty prostokątne. Oblicz obwód tego równoległoboku.

7. Oblicz obwód prostokąta, którego przekątna ma długość 5 , a jeden z boków jest dwa razy dłuższy od drugiego.

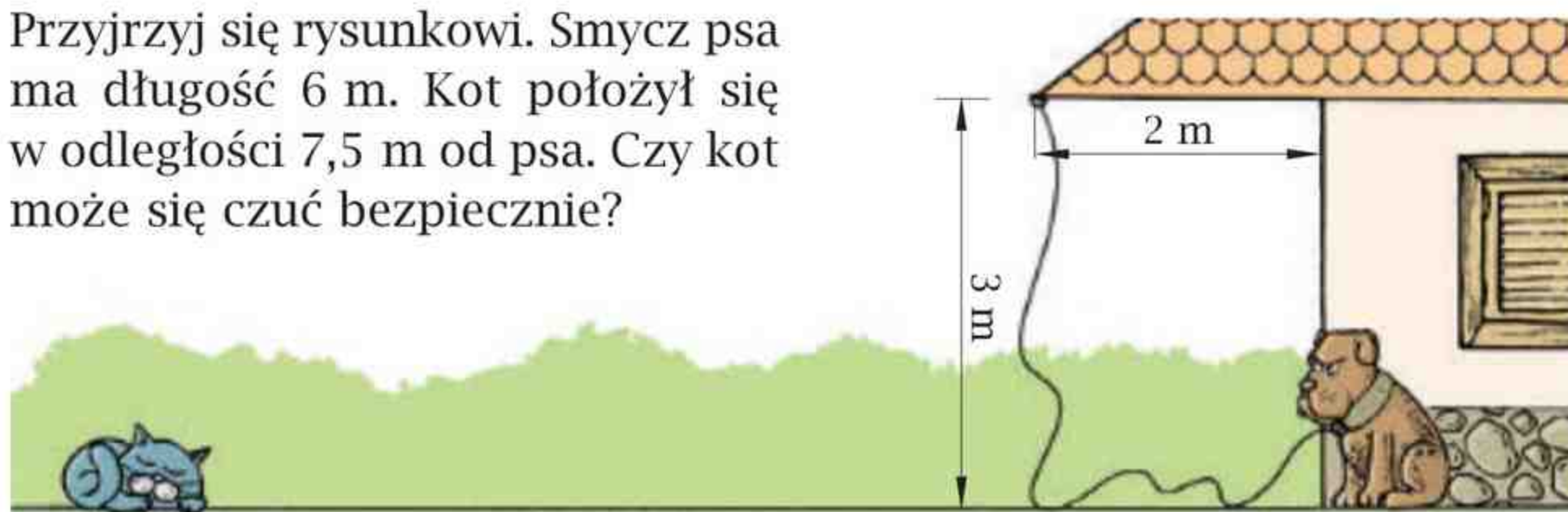
8. Jaką wysokość ma romb o przekątnych długości 12 cm i 16 cm ?

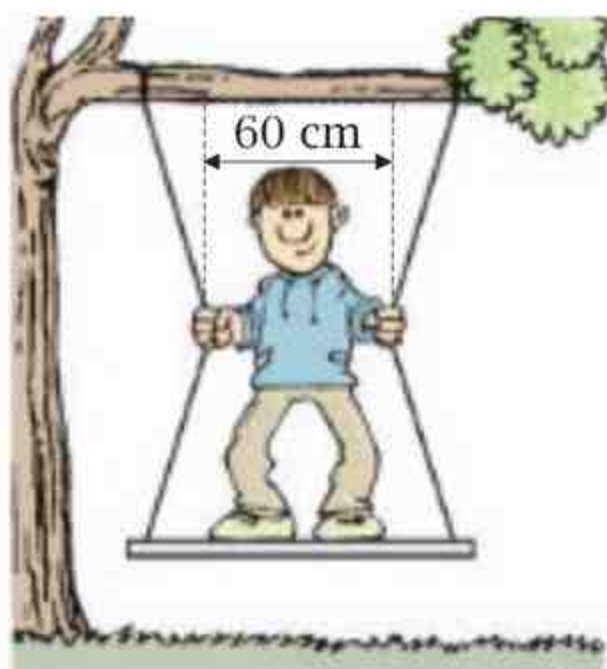
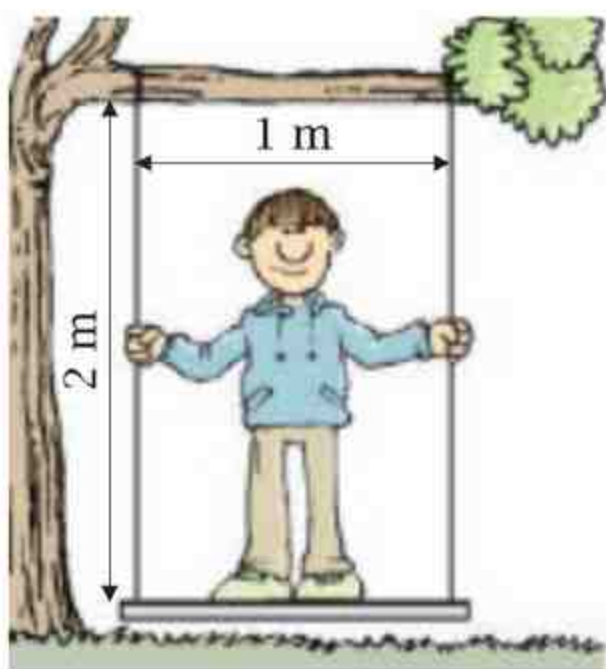
9. Oblicz obwody narysowanych trapezów.



10. Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 11 cm i 27 cm , a długości ramion wynoszą 14 cm . Jaką wysokość ma ten trapez?

11. Przyjrzyj się rysunkowi. Smycz psa ma długość 6 m . Kot położył się w odległości $7,5 \text{ m}$ od psa. Czy kot może się czuć bezpiecznie?

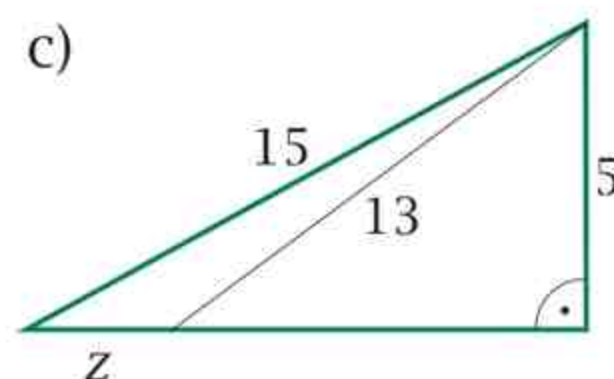
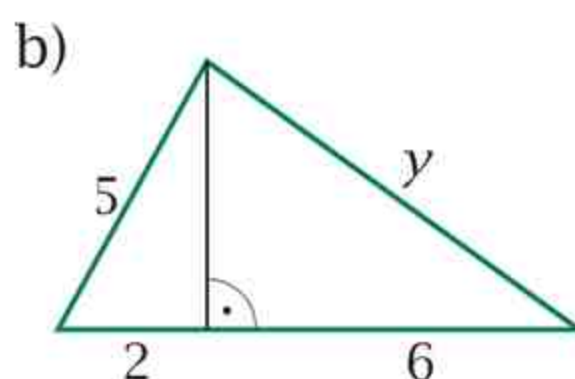
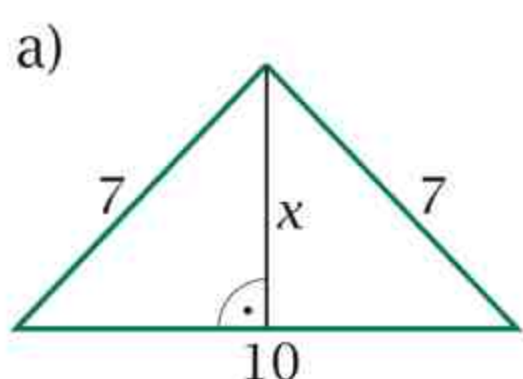




*12. Huśtający się chłopiec trzyma liny w połowie ich długości. Oblicz, o ile centymetrów podniosła się deska, na której stoi chłopiec, gdy liny zostały zbliżone.

Trójkąty

13. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.

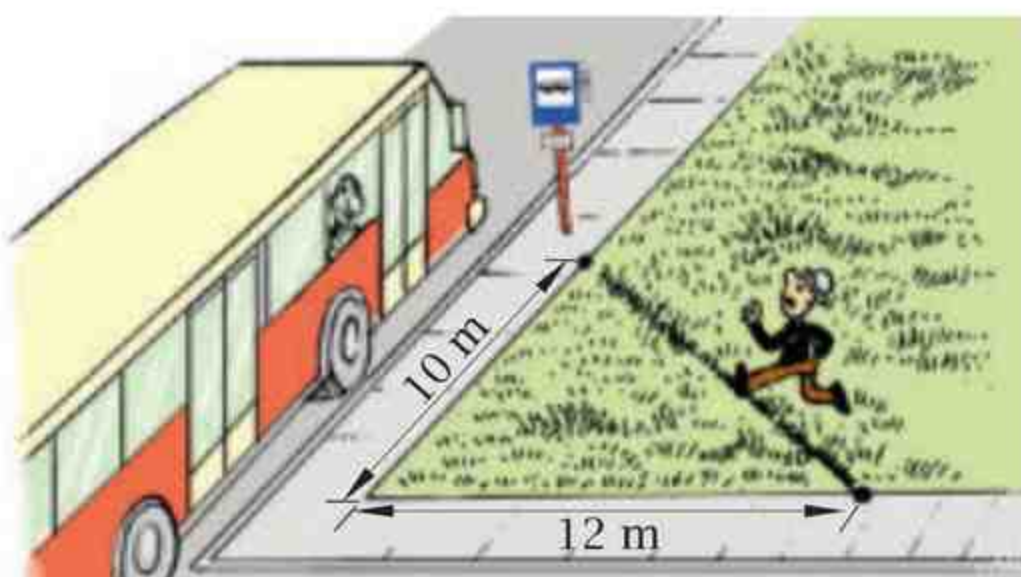


14. Trójkąt równoramienny ma podstawę długości 12 cm i ramię długości 10 cm. Oblicz jego wysokość opuszczoną na tę podstawę.

15. Typowa karta do gry ma wysokość 9 cm. Aby pojedynczy domek z kart był stabilny, tworzące go karty powinny być rozstawione na około 6 cm. Ile warstw takich domków należy ustawić, by otrzymać konstrukcję o wysokości ponad 1 m?



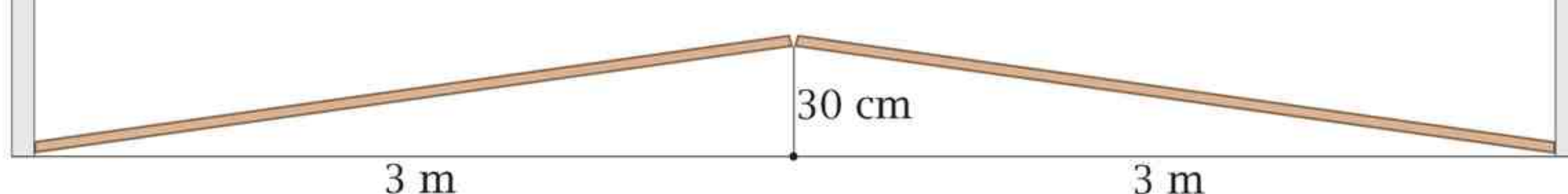
16. W trójkącie ostrokątnym ABC boki AC i BC mają długości $\sqrt{13}$ i 5, a wysokość poprowadzona z wierzchołka C ma długość 3. Oblicz pole tego trójkąta.



17. Przystanek autobusowy znajduje się przy prostokątnym skwerze (zob. rysunek). Niektórzy pasażerowie skracają sobie drogę do przystanku, niszcząc przy tym trawnik. Załóżmy, że starszy pan spieszący się do autobusu biegnie z prędkością $8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ($\approx 2,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$). Ile czasu zaoszczędzi, wybierając drogę przez trawnik?

18. Pole trójkąta równoramiennego jest równe 48 cm^2 , a podstawa ma długość 12 cm . Oblicz obwód tego trójkąta.

19. W sali lekcyjnej układana jest podłoga z desek. Deski okazały się zbyt długie (zob. rysunek). Oblicz, o ile centymetrów trzeba skrócić jedną z desek, aby obie leżały na podłodze, ściśle przylegając do siebie.



20. W pewnym trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 16 cm , a wysokość jest o 4 cm krótsza od ramienia. Oblicz pole tego trójkąta.

21. Gdy wiał silny wiatr halny, drzewo o wysokości 20 m złamało się w ten sposób, że jego czubek dotknął ziemi w odległości 6 m od pnia. Oblicz, na jakiej wysokości od ziemi drzewo zostało złamane.

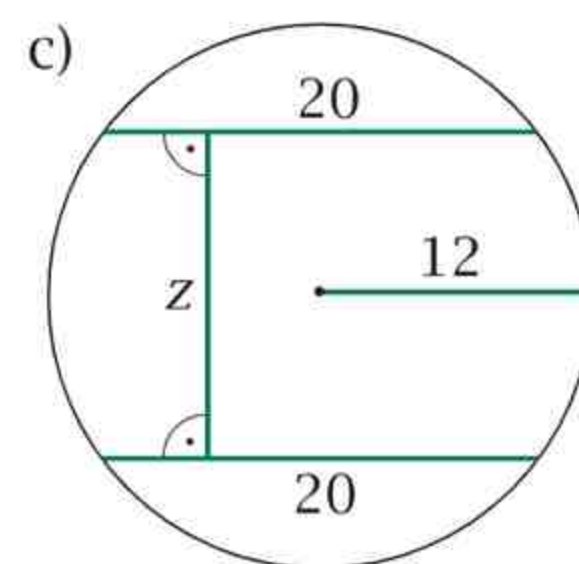
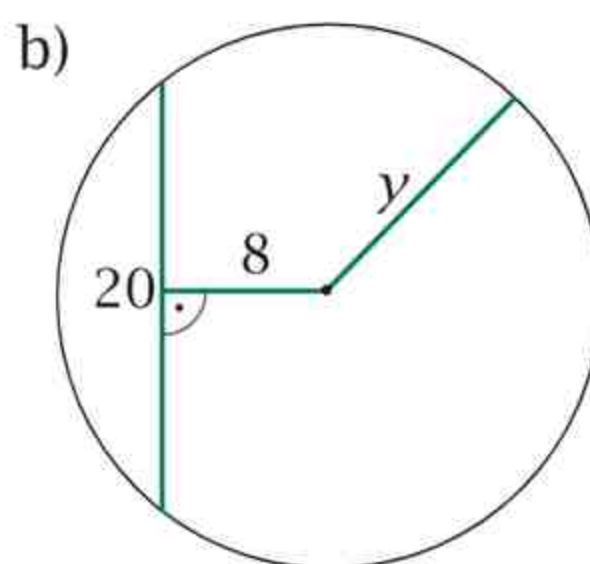
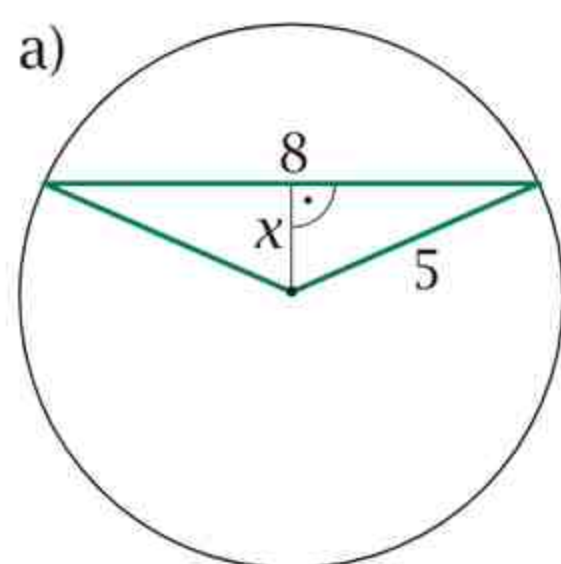


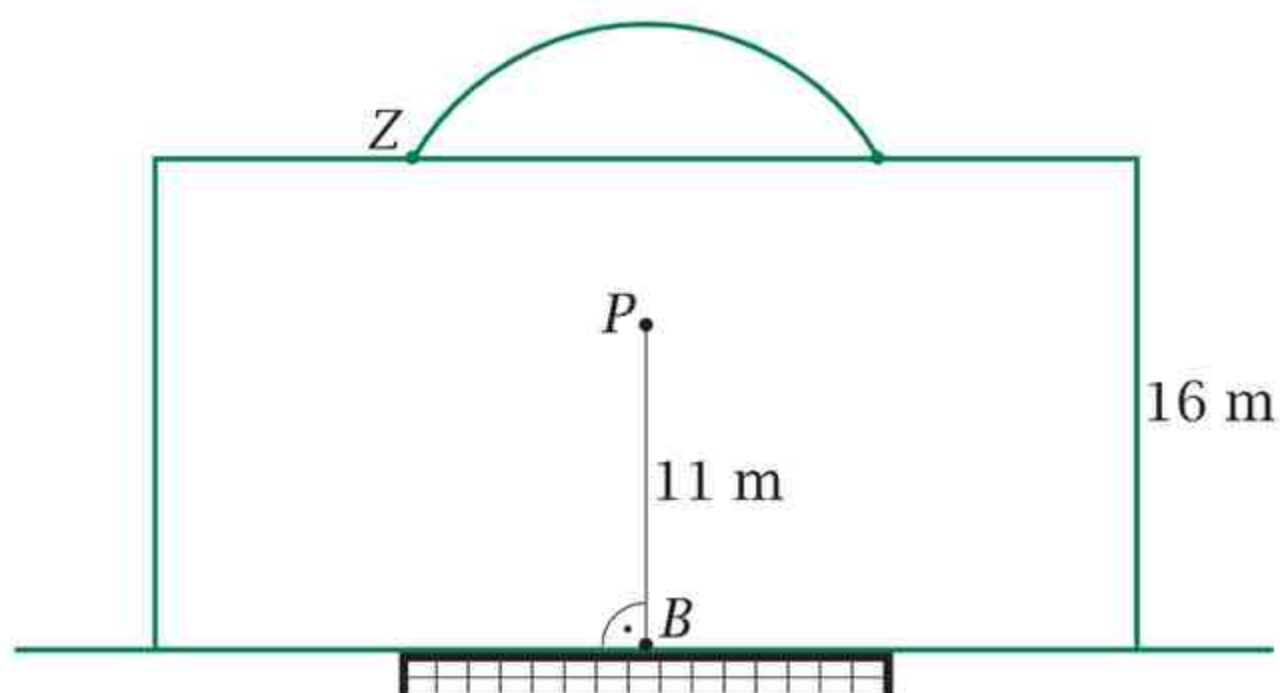
22. a) Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 4 i 8 . Oblicz wysokość tego trójkąta opuszczoną na przeciwprostokątną.
b) W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 10 cm , a ramię 13 cm . Oblicz wysokość tego trójkąta opuszczoną na ramię.

Wskazówka. Oblicz pole trójkąta na dwa sposoby.

Trójkąty w okręgach

23. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.





24. Rysunek przedstawia pole karne na boisku do piłki nożnej. Zaznaczony łuk jest fragmentem okręgu o promieniu 9 m i środku w punkcie P (z którego egzekwowany jest rzut karny). W jakiej odległości od bramkarza B jest zawodnik stojący w punkcie Z ?

25. a) Zwierciadło wody płynącej w kanale ma szerokość 2 m, a największa głębokość wynosi 0,5 m. Oblicz średnicę kanału.

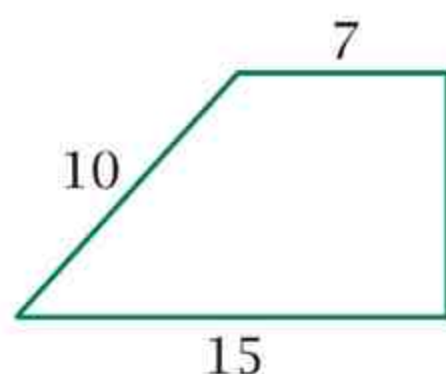


- b) Jaka byłaby w tym samym kanale szerokość lustra wody, gdyby poziom wody podniósł się o 25 cm?

Sprawdź, czy umiesz

1. Obwód rombu o przekątnych długości 4 i $8\sqrt{2}$ jest równy:

A. 24 B. 48 C. 20 D. $8\sqrt{7}$

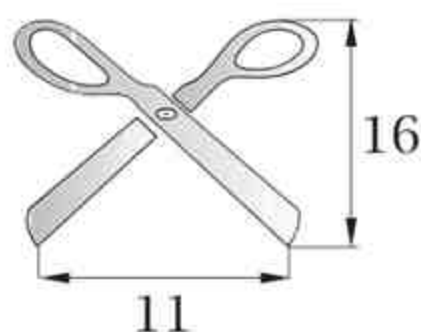


2. Pole trapezu prostokątnego przedstawionego na rysunku obok jest równe:

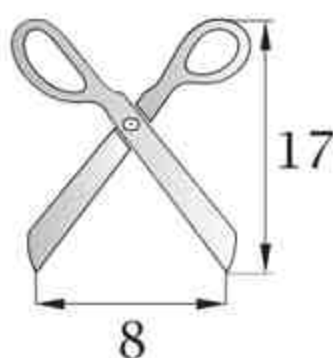
A. 66 B. 77 C. 110 D. 88

3. Które nożyczki są po złożeniu najkrótsze?

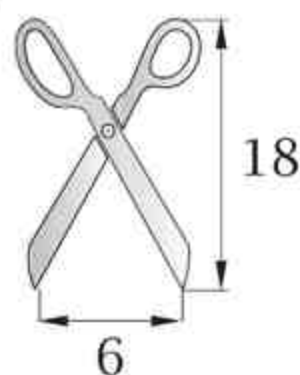
A.



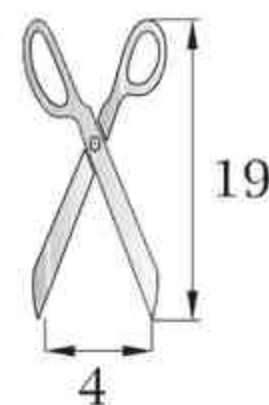
B.



C.



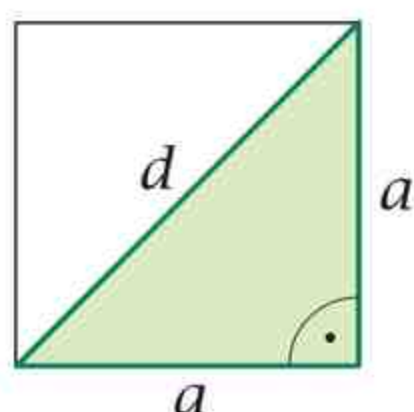
D.



4

Przekątna kwadratu. Wysokość trójkąta równobocznego

Przyjrzyj się rysunkowi. Przekątna dzieli kwadrat na dwa trójkąty równoramienne prostokątne. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, możemy znaleźć wzór na długość przekątnej d .



$$d^2 = a^2 + a^2$$

$$d^2 = 2a^2$$

$$d = \sqrt{2} \cdot a$$

Długość przekątnej kwadratu: $d = a\sqrt{2}$

a — długość boku kwadratu

ĆWICZENIE A. Oblicz długość przekątnej kwadratu o boku długości:

- a) 1 b) 2 c) 5 d) $\sqrt{2}$ e) $3\sqrt{2}$

Przykład

Przekątna kwadratu ma długość 4. Jaką długość ma bok tego kwadratu?

a — szukana długość boku

$$a\sqrt{2} = 4$$

$$a = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

Stosujemy wzór na długość przekątnej kwadratu.

Wyznaczamy a .

Odp. Bok tego kwadratu ma długość $\frac{4}{\sqrt{2}}$.

Uwaga. Wynik otrzymany w przykładzie można zapisać inaczej:

$$\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Równanie z powyższego przykładu można także rozwiązać w inny sposób:

$$a\sqrt{2} = 4 \quad | \cdot \sqrt{2}$$

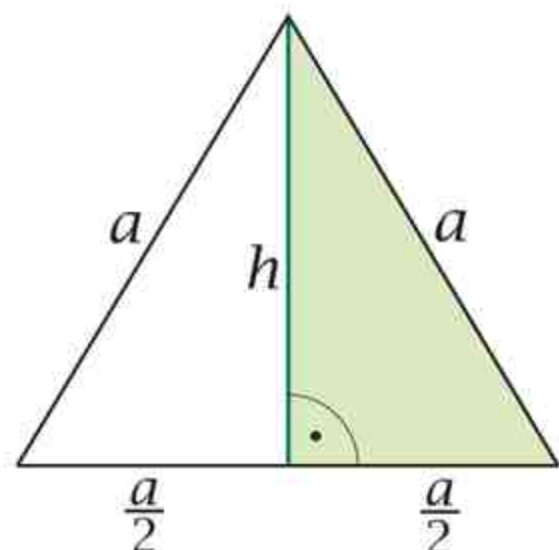
$$2a = 4\sqrt{2} \quad | : 2$$

$$a = 2\sqrt{2}$$

Mnożymy obie strony równania przez $\sqrt{2}$.

$$a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = a \cdot 2 = 2a$$

Popatrz na poniższy rysunek. Wysokość h trójkąta równobocznego dzieli ten trójkąt na dwa jednakowe trójkąty prostokątne. Aby otrzymać wzór na wysokość trójkąta równobocznego, możemy skorzystać z twierdzenia Pitagorasa.



$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Wysokość trójkąta równobocznego: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

a — długość boku trójkąta równobocznego

Gdy znamy długość boku trójkąta równobocznego, możemy obliczyć jego pole.

$$P = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

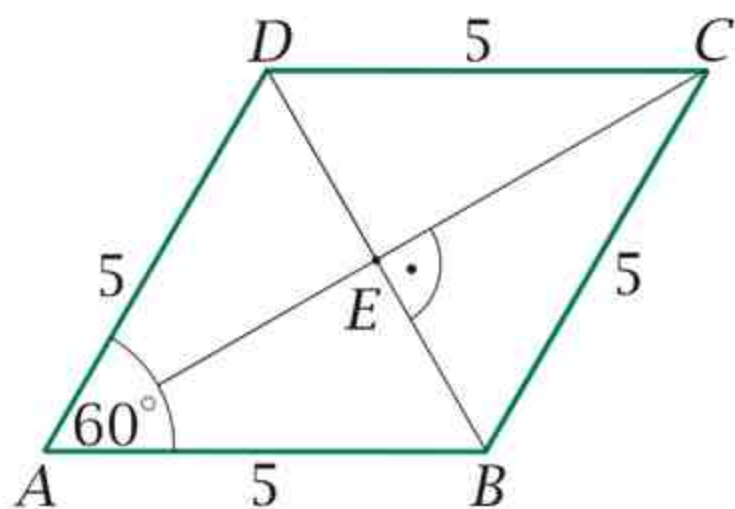
Pole trójkąta równobocznego: $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

a — długość boku trójkąta równobocznego

ĆWICZENIE B. Oblicz wysokość i pole trójkąta równobocznego o boku 4.

Przykład

Bok rombu ma długość 5, a jeden z kątów ma 60° . Oblicz długości przekątnych tego rombu.



Wykonujemy rysunek pomocniczy.

$$BD = 5$$

$$AC = 2 \cdot AE = 2 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

Trójkąt ABD jest równoboczny.

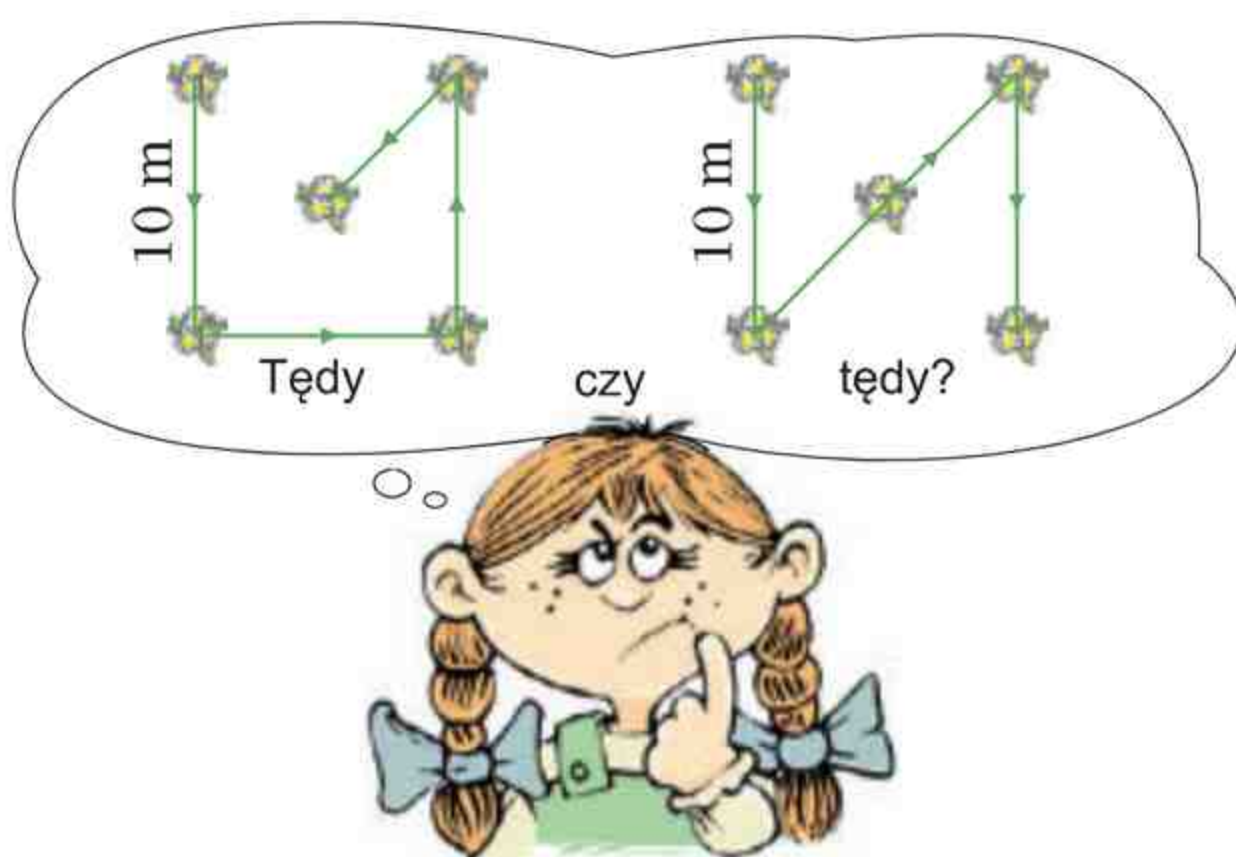
Długość odcinka AE obliczamy ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego.

Odp. Przekątne rombu mają długości 5 i $5\sqrt{3}$.

Zadania

- Jaką długość ma przekątna kwadratu o boku $7\sqrt{3}$?
 - Czy przekątna kwadratu o boku 5 cm jest dłuższa czy krótsza niż 7 cm?
 - O ile dłuższa jest przekątna kwadratu o boku 5 cm od przekątnej kwadratu o boku 3 cm?
- Oblicz długość boku kwadratu o przekątnej 2.
 - Jaki obwód ma kwadrat o przekątnej 5?
 - O ile dłuższy jest bok kwadratu o przekątnej 10 od boku kwadratu o przekątnej 8?

- Przeczytaj wierszyk i odpowiedz na pytania, korzystając z rysunku.



*Zosia chodziła po łące,
Zbierała kwiatki pachnące.
A Tadek w rogach kwadratu
Położył bukiety kwiatów,
Ostatni bukiet na środku,
I rzekł: — Pozbieraj je, kotku!
Zosia przez moment dumiała
I krótszą drogę wybrała.
Zastanów się i Ty chwilę:
Którą i krótszą o ile?*

- Oblicz sumę obwodów kwadratów narysowanych obok, jeśli bok największego kwadratu ma długość 4.
- Oblicz wysokość trójkąta równobocznego o boku:

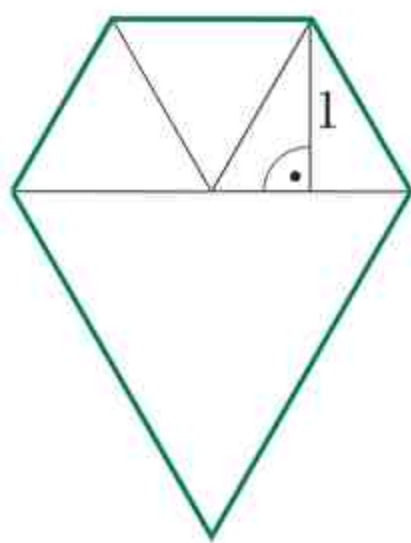
a) 12 b) 5 c) $\sqrt{3}$ d) $4\sqrt{6}$

- Oblicz pole trójkąta równobocznego o boku:

a) 8 cm b) 10 cm c) $2\sqrt{3}$ cm d) $5\sqrt{2}$ cm

- Oblicz długość boku trójkąta równobocznego o wysokości 4.
 - Jakie pole ma trójkąt równoboczny o wysokości $5\sqrt{3}$?
 - Jaką długość ma bok trójkąta równobocznego o polu $\sqrt{3}$?

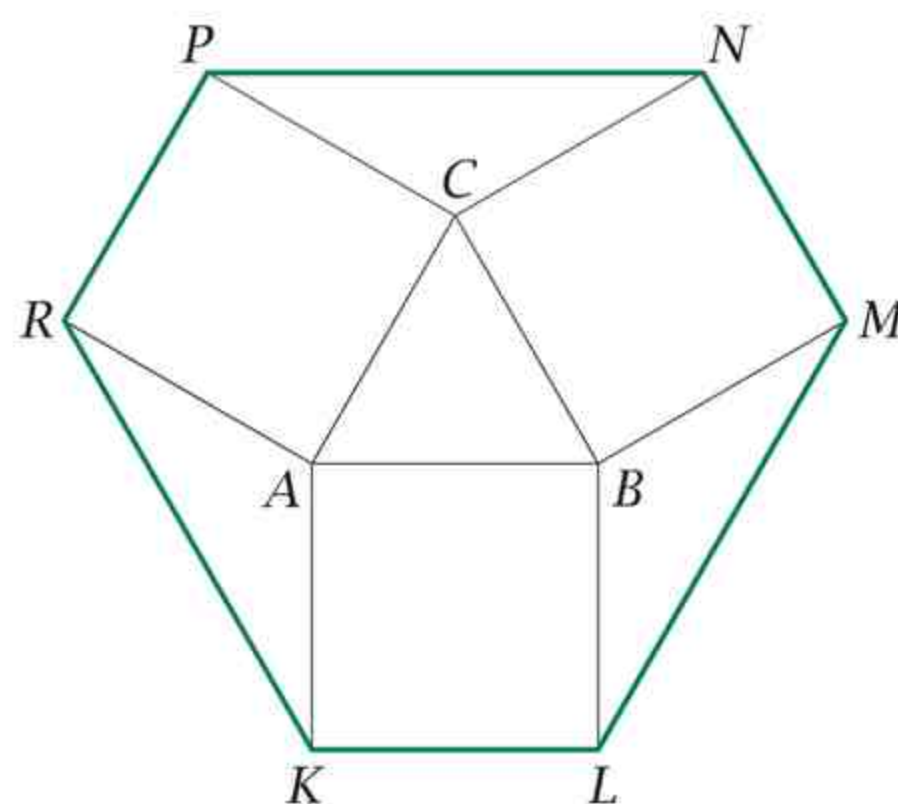




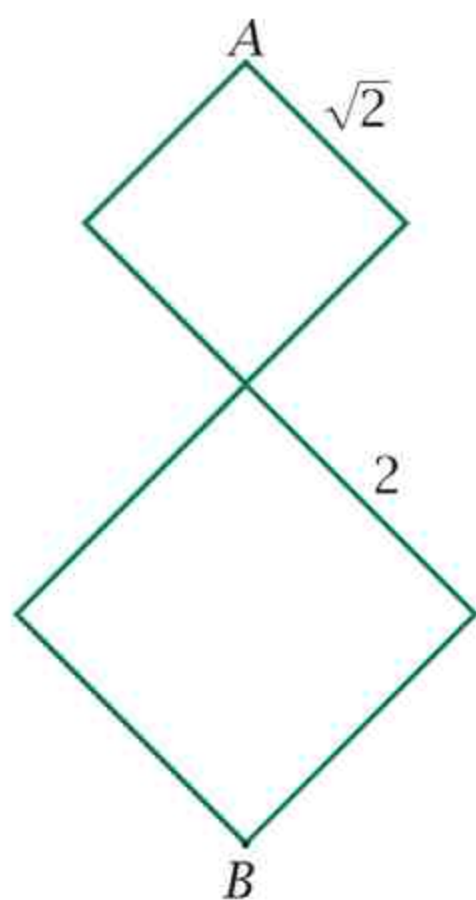
8. Pięciokąt na rysunku obok jest zbudowany z czterech trójkątów równobocznych. Oblicz pole i obwód tego pięciokąta.

9. Na bokach kwadratu o przekątnej długości 2 zbudowano trójkąty równoboczne położone na zewnątrz kwadratu. Jakie pole ma otrzymany ośmiokąt?

*10. Bok trójkąta równobocznego ABC ma długość 2. Na każdym boku tego trójkąta zbudowano kwadrat tak, jak na rysunku obok. Oblicz pole sześciokąta $KLMNPR$.



Sprawdź, czy umiesz



1. Figura narysowana obok jest zbudowana z dwóch kwadratów. Odległość AB jest równa:

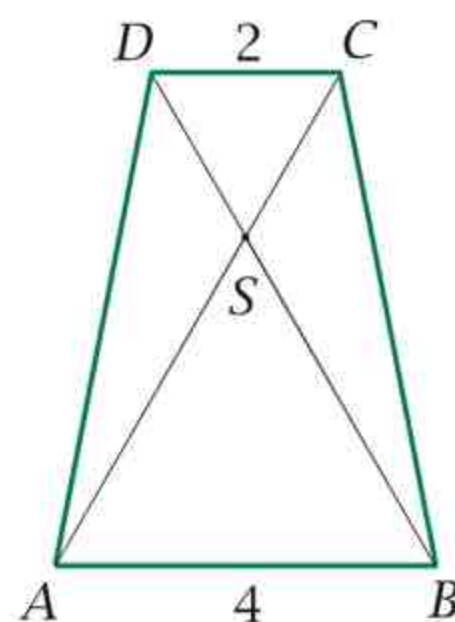
- A. $4\sqrt{2}$ B. $2 + 2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{6}$ D. $2 + \sqrt{2}$

2. Pole trójkąta równobocznego jest równe $9\sqrt{3}$. Zatem bok tego trójkąta ma długość:

- A. 3 B. 6 C. $3\sqrt{3}$ D. $6\sqrt{3}$

3. Trójkąty ABS i DSC są równoboczne. Jakie jest pole trapezu $ABCD$?

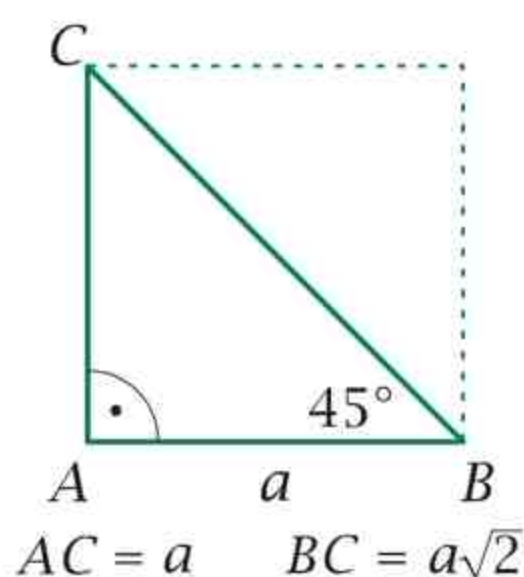
- A. $18\sqrt{3}$ C. $9\sqrt{3}$
B. $4,5\sqrt{3}$ D. $9\sqrt{2}$



5

Trójkąty o kątach 90° , 45° , 45° oraz 90° , 30° , 60°

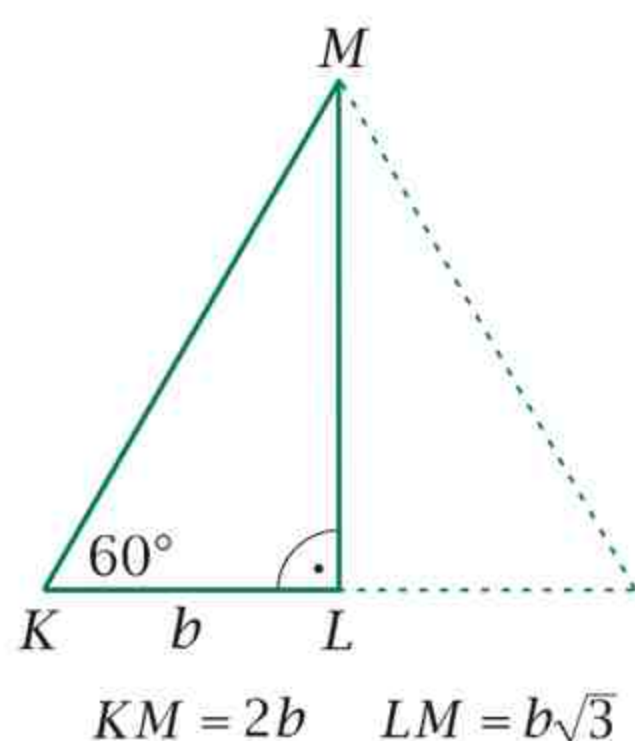
ĆWICZENIE A. Narysuj kwadrat o boku 5 cm. Zamaluj jeden z trójkątów, na które dzieli ten kwadrat jego przekątna. Jakie kąty ma ten trójkąt? Jakie długości mają jego boki?



Rysunek obok przedstawia trójkąt prostokątny ABC , którego jeden z kątów ostrych ma miarę 45° , a jedna z przyprostokątnych ma długość a .

Trójkąt ABC jest połową kwadratu o boku a . Zatem przyprostokątna AC ma długość a , a przeciwprostokątna BC ma długość $a\sqrt{2}$.

ĆWICZENIE B. Narysuj trójkąt równoboczny o boku 6 cm. Podziel ten trójkąt wzdłuż wysokości. Zamaluj jeden z otrzymanych trójkątów. Jakie kąty ma zamalowany trójkąt? Jakie długości mają boki tego trójkąta?



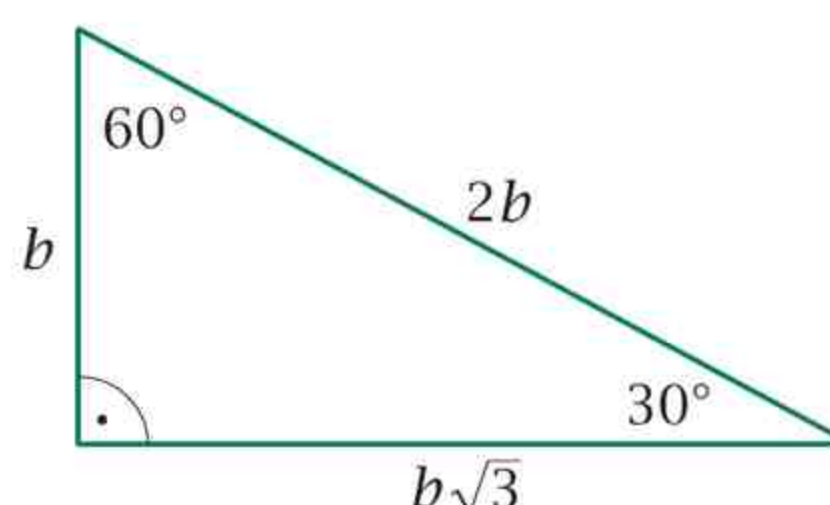
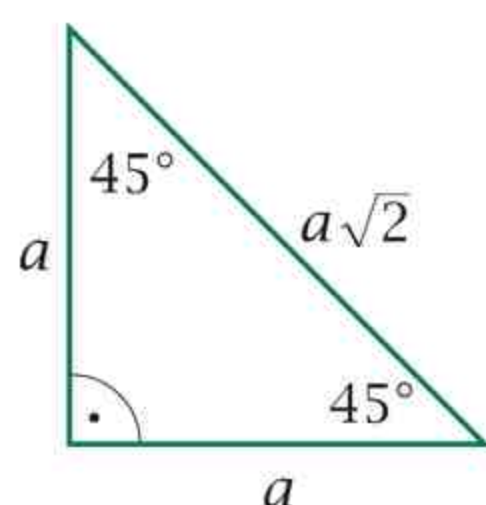
Rysunek obok przedstawia trójkąt prostokątny KLM , którego jeden z kątów ma 60° , a krótsza przyprostokątna ma długość b (drugi kąt ostry tego trójkąta ma 30°).

Trójkąt ten jest połową trójkąta równobocznego o boku $2b$. Zatem przeciwprostokątna KM ma długość $2b$. Długość przyprostokątnej LM można obliczyć ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego:

$$LM = \frac{2b \cdot \sqrt{3}}{2} = b\sqrt{3}$$

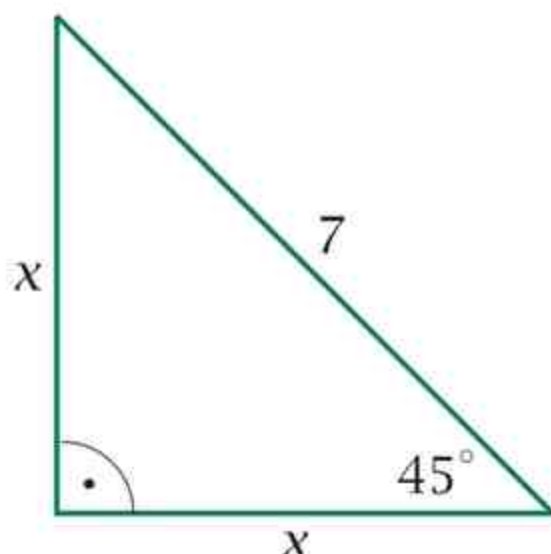
$2b$ — długość boku trójkąta równobocznego

Pokazaliśmy, że w trójkątach o kątach 90° , 45° , 45° oraz w trójkątach o kątach 90° , 30° , 60° wystarczy znać długość jednego z boków, aby obliczyć długości dwóch pozostałych.



Przykład

W trójkącie prostokątnym o kącie ostrym 45° przeciwprostokątna ma długość 7. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.



Trójkąt jest równoramienny; oznaczamy literą x długości przyprostokątnych.

$$x\sqrt{2} = 7$$

Przeciwprostokątna ma długość $x\sqrt{2}$.

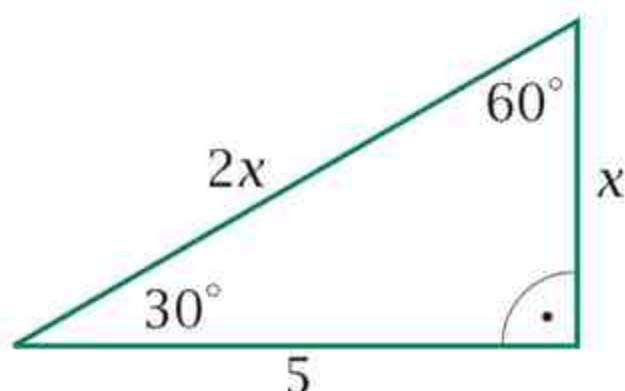
$$x = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

Obliczamy długość przyprostokątnej.

Odp. Przyprostokątne trójkąta mają długość $\frac{7}{\sqrt{2}}$.

Przykład

W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma 30° , a dłuższa przyprostokątna ma długość 5. Oblicz długość przeciwprostokątnej.



Dłuższa przyprostokątna trójkąta leży na przeciw kąta 60° ; oznaczamy literą x długość krótszej przyprostokątnej, wobec tego przeciwprostokątna ma długość $2x$.

$$x\sqrt{3} = 5$$

Dłuższa przyprostokątna ma długość $x\sqrt{3}$.

$$x = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

Obliczamy długość drugiej przyprostokątnej.

$$2x = 2 \cdot \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

Obliczamy długość przeciwprostokątnej.

Odp. Przeciwprostokątna ma długość $\frac{10}{\sqrt{3}}$.

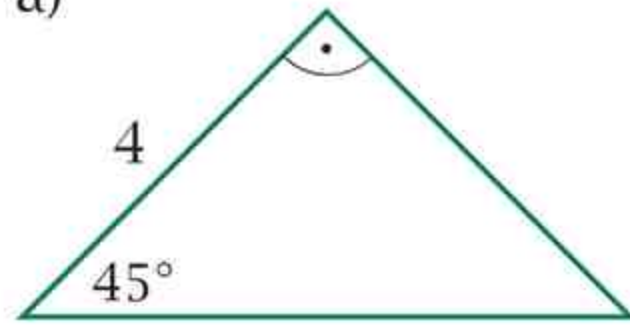
Wyniki z przykładów można też zapisać tak, aby w mianowniku nie występował pierwiastek.

$$\frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2} \quad \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

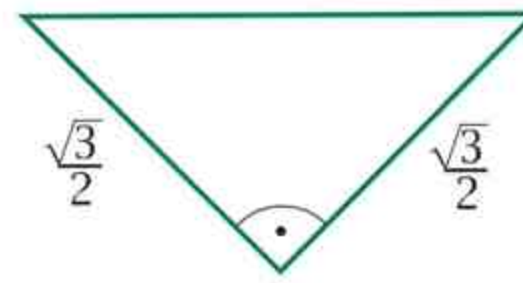
Zadania

1. Oblicz obwody narysowanych trójkątów.

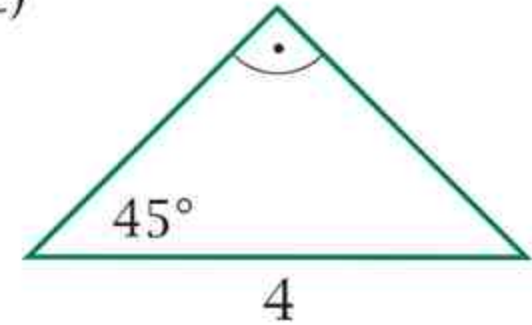
a)



b)

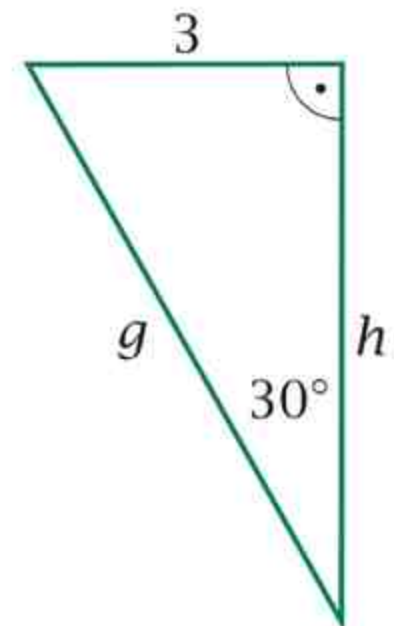
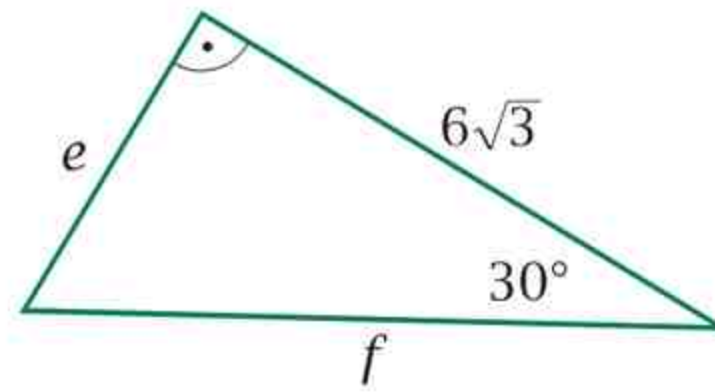
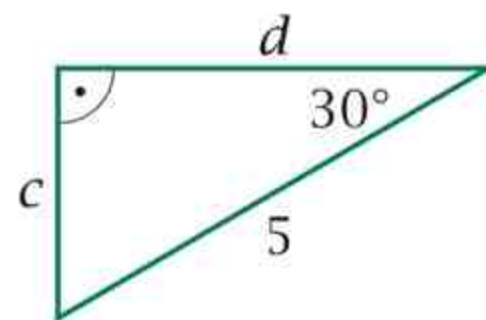
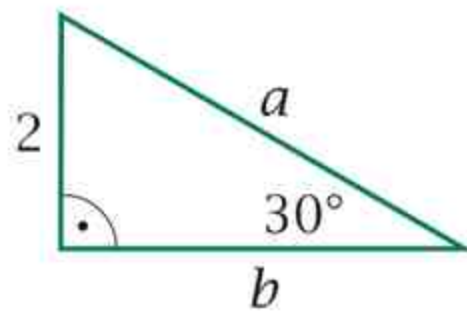


c)

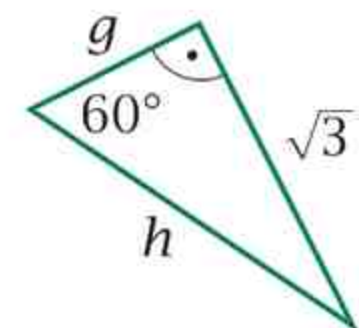
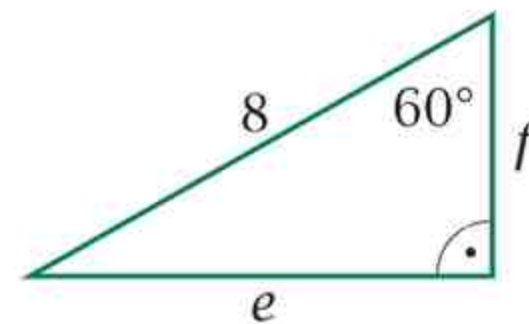
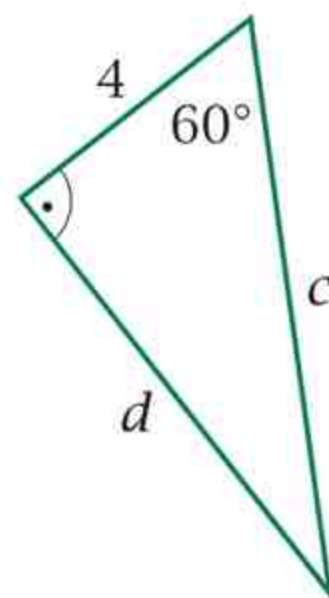
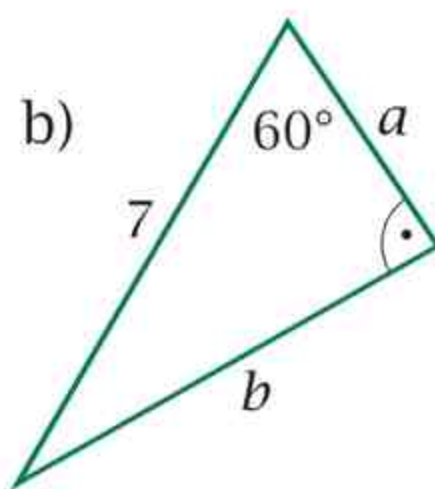


2. Podaj długości boków oznaczonych literami.

a)

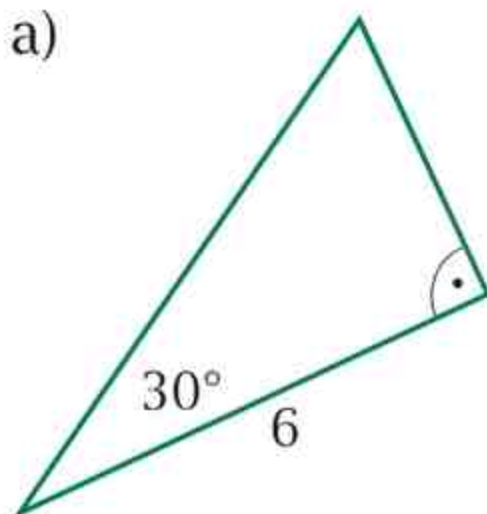


b)

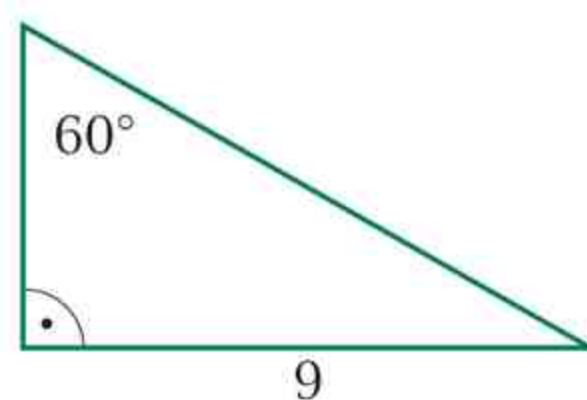


3. Oblicz brakujące długości boków w narysowanych trójkątach.

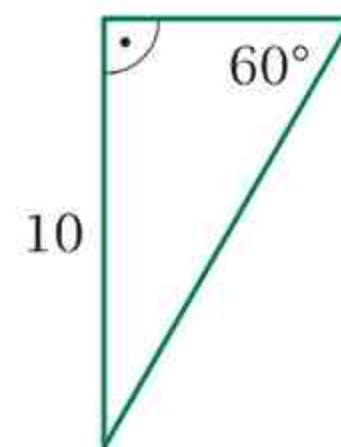
a)



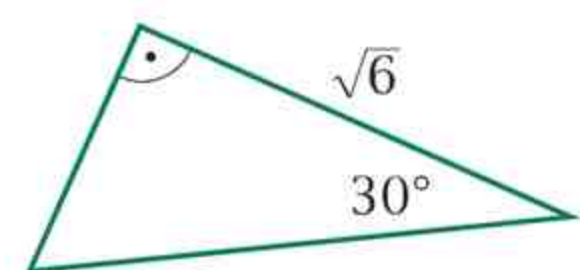
b)



c)



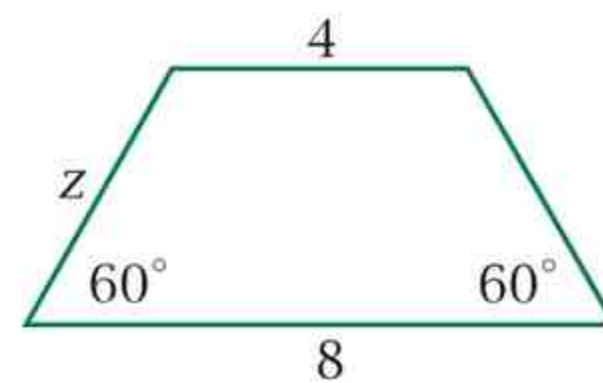
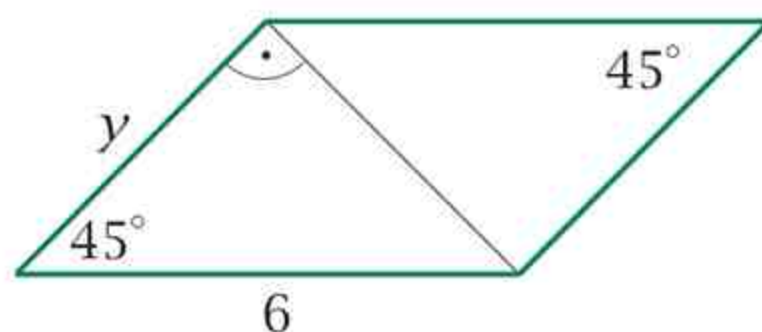
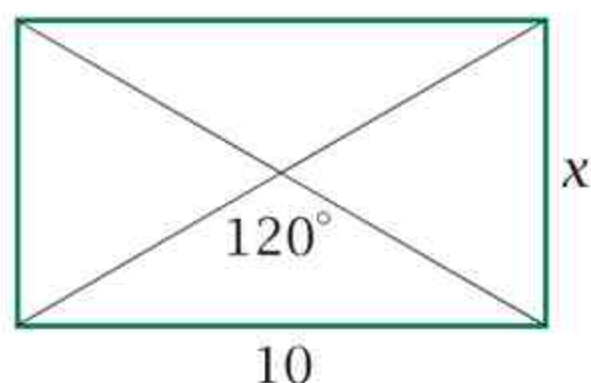
d)



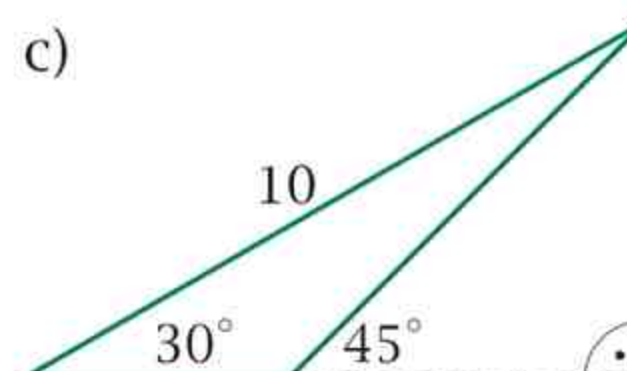
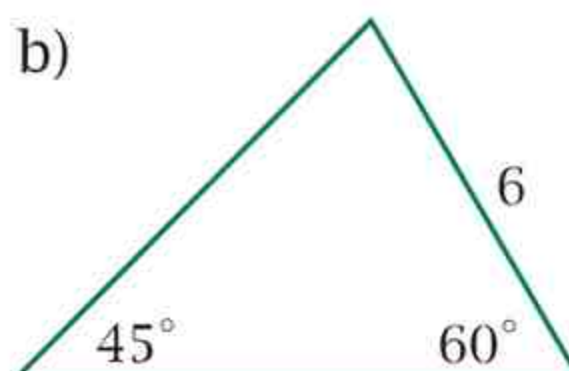
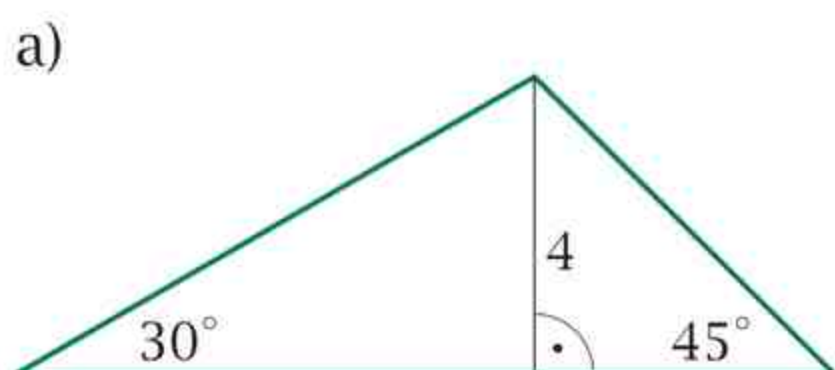
4. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma 30° . Oblicz obwód tego trójkąta, jeśli:

- krótsza przyprostokątna ma długość 2,
- dłuższa przyprostokątna ma długość 2,
- przeciwprostokątna ma długość 2.

5. Narysowane poniżej czworokąty to prostokąt, równoległobok i trapez równoramienny. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.



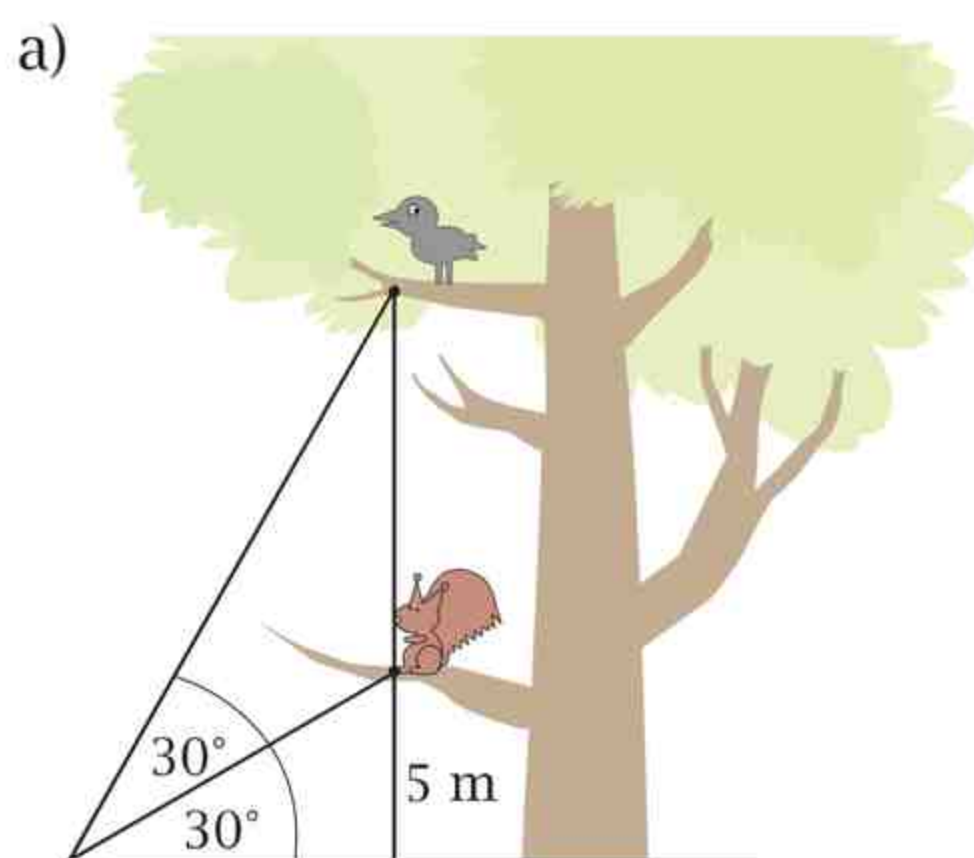
6. Oblicz obwody narysowanych trójkątów.



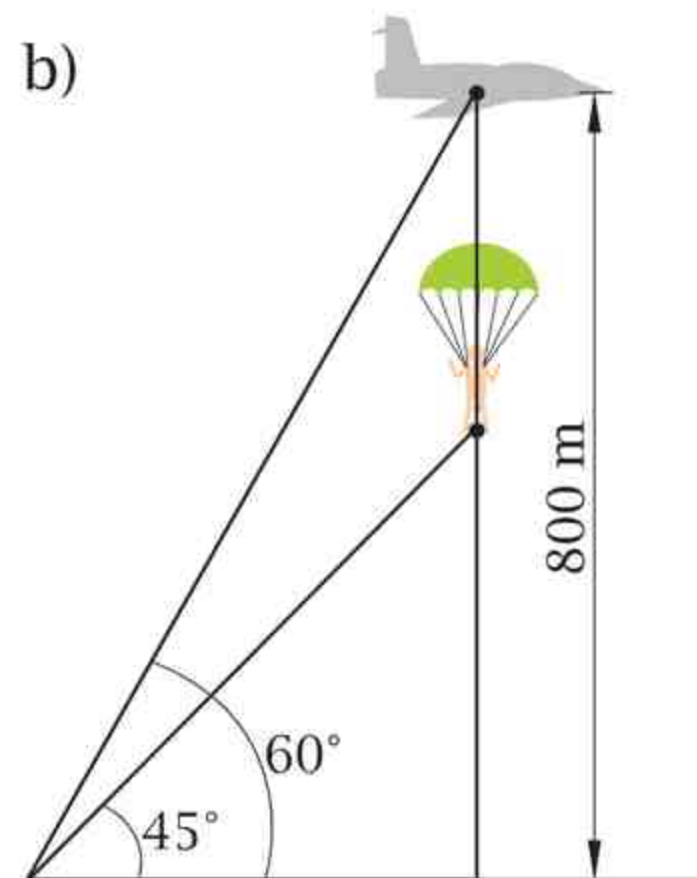
7. W trójkącie ABC wysokość CD wynosi 8. Kąt ABC ma miarę 60° , a kąt BAC ma 45° . Oblicz obwód tego trójkąta.

8. Kąt ostry rombu ma 60° , a dłuższa przekątna ma 8 cm. Oblicz długość boku tego rombu.

9. Odpowiedz na pytania (wyniki obliczeń zaokrąglaj).



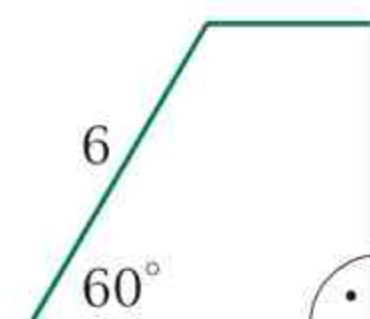
Jak wysoko nad ziemią
siedzi ptak?



Na jakiej wysokości
jest spadochroniarz?

10. a) Oblicz obwód trapezu prostokątnego, którego krótsza podstawa ma 2 cm, dłuższe ramię ma 4 cm, a kąt ostry ma 60° .

- b) W trapezie narysowanym obok dolna podstawa jest dwa razy dłuższa od górnej. Oblicz obwód tego trapezu.



11. Pokój na poddaszu ma skośny sufit, który jest nachylny do poziomu pod kątem 30° . W najniższym miejscu pokój ma 120 cm wysokości. Podłoga ma kształt kwadratu o boku 3 m. Jaką wysokość ma ten pokój w najwyższym miejscu?



12. W trapezie równoramiennym wysokość ma 5 cm i jest równa długości krótszej podstawy trapezu. Przedłużenia ramion przecinają się pod kątem prostym. Oblicz obwód tego trapezu.
13. Przekątne trapezu równoramiennego dzielą kąty przy dłuższej podstawie na połowy i przecinają się pod kątem 120° . Dłuższa podstawa ma 12 cm. Oblicz obwód tego trapezu.

Sprawdź, czy umiesz

1. Trójkąt prostokątny równoramienny ma ramię długości 4 cm. Wysokość tego trójkąta opuszczona na przeciwprostokątną wynosi:

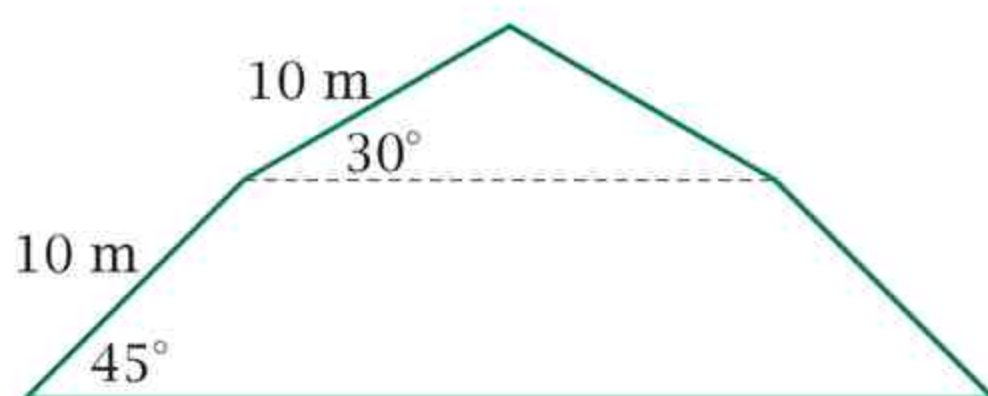
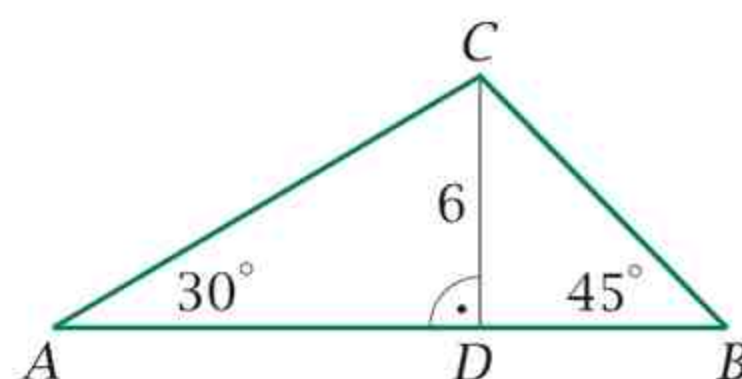
A. $\frac{4}{\sqrt{2}}$ cm B. $4\sqrt{2}$ cm C. 2 cm D. 4 cm

2. W trójkącie prostokątnym dłuższa przyprostokątna ma długość 12, a jeden z kątów ma 30° . Zatem pozostałe boki tego trójkąta mają długości:

A. 24 i $12\sqrt{3}$ B. 6 i $6\sqrt{3}$ C. $\frac{12}{\sqrt{3}}$ i $\frac{24}{\sqrt{3}}$ D. 4 i 8

3. Jakie pole ma trójkąt ABC?

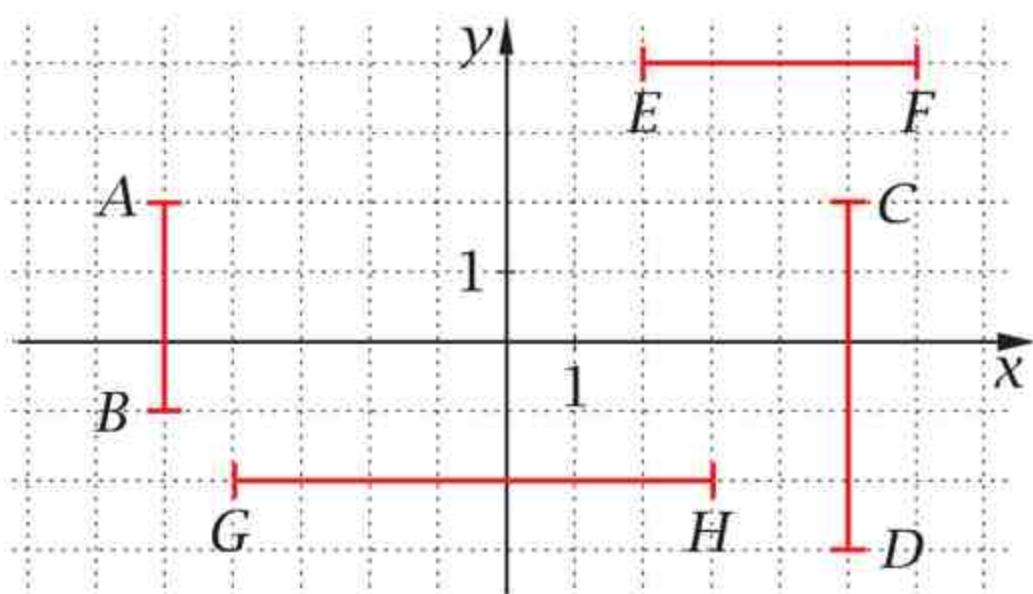
A. 54 C. $36 + 36\sqrt{3}$
B. $18\sqrt{3} + 18$ D. $18\sqrt{3} + 18\sqrt{2}$



4. Wysokość namiotu cyrkowego przedstawionego na rysunku wynosi około:

A. 12,1 m C. 9,9 m
B. 19,1 m D. 14,1 m

6 Odcinki w układzie współrzędnych



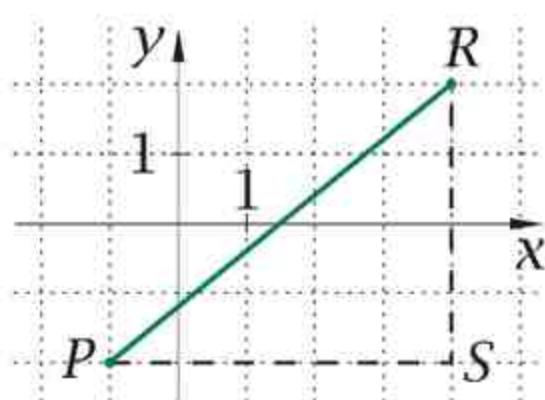
ĆWICZENIE A. Jakie długości mają odcinki zaznaczone na rysunku obok?

Łatwo jest określić długość odcinka, gdy jest on równoległy do jednej z osi układu współrzędnych. Twierdzenie Pitagorasa pozwala nam obliczać długości dowolnie położonych odcinków.

ĆWICZENIE B. Narysuj w układzie współrzędnych trójkąt o wierzchołkach: $A = (-5, 2)$, $B = (7, 2)$ i $C = (-5, 7)$. Jakie długości mają boki AB , AC i BC ?

Przykład

Oblicz długość odcinka o końcach w punktach $P = (-1, -2)$ i $R = (4, 2)$.



$$\begin{aligned} PS &= 5 \\ RS &= 4 \end{aligned}$$

Rysujemy odcinek PR w układzie współrzędnych, znajdujemy punkt S , taki że trójkąt PSR jest prostokątny, i odczytujemy długości odcinków PS i RS .

$$PR^2 = PS^2 + RS^2$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa.

$$PR = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

Odp. Długość odcinka PR wynosi $\sqrt{41}$.

Gdy znamy współrzędne końców odcinka, możemy także wyznaczyć jego środek.

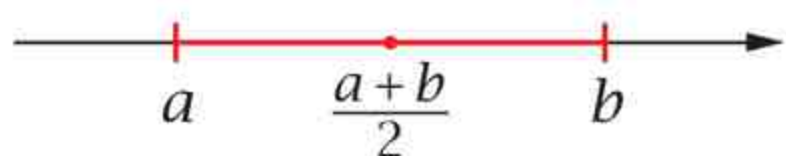
ĆWICZENIE C. Narysuj oś liczbową. Zaznacz na niej podane liczby oraz ich średnią arytmetyczną. Co można zauważyć?

a) 4 i 12

b) 0 i -6

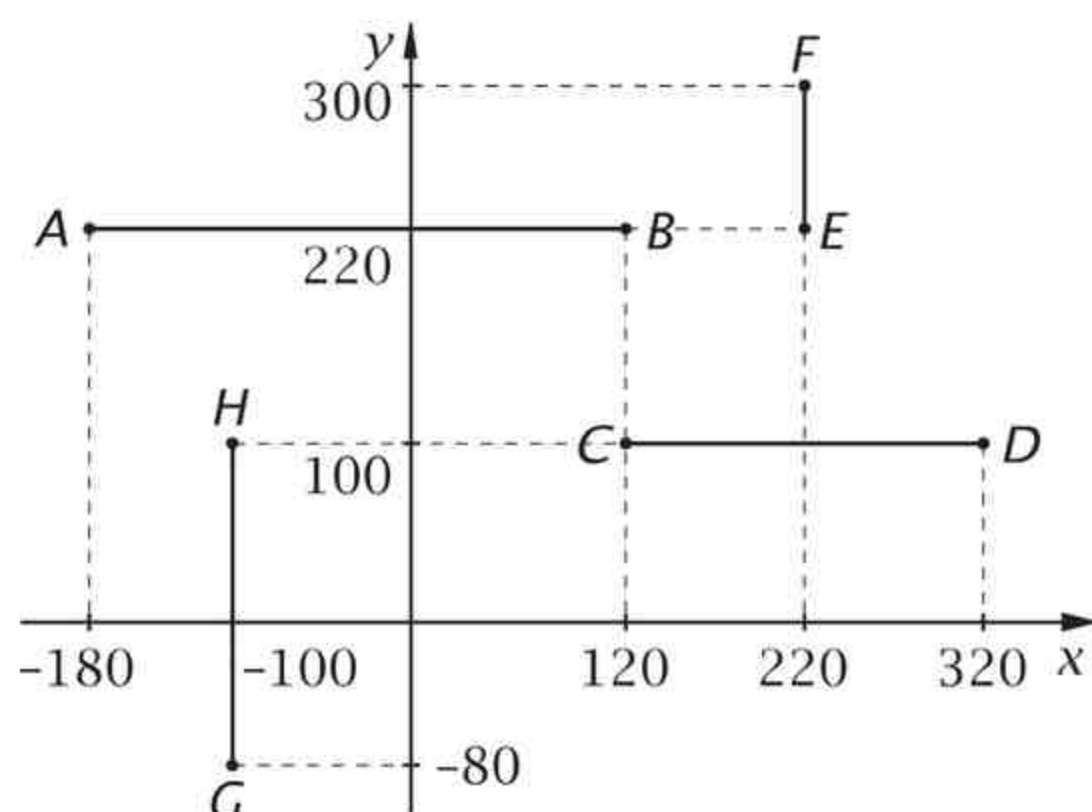
c) -5 i 7

d) -10 i -2



Na osi liczbowej środek odcinka wyznaczonego przez dwie liczby ma współrzędną równą ich średniej arytmetycznej.

Ten fakt wykorzystamy do określenia współrzędnych środka odcinka leżącego w układzie współrzędnych.

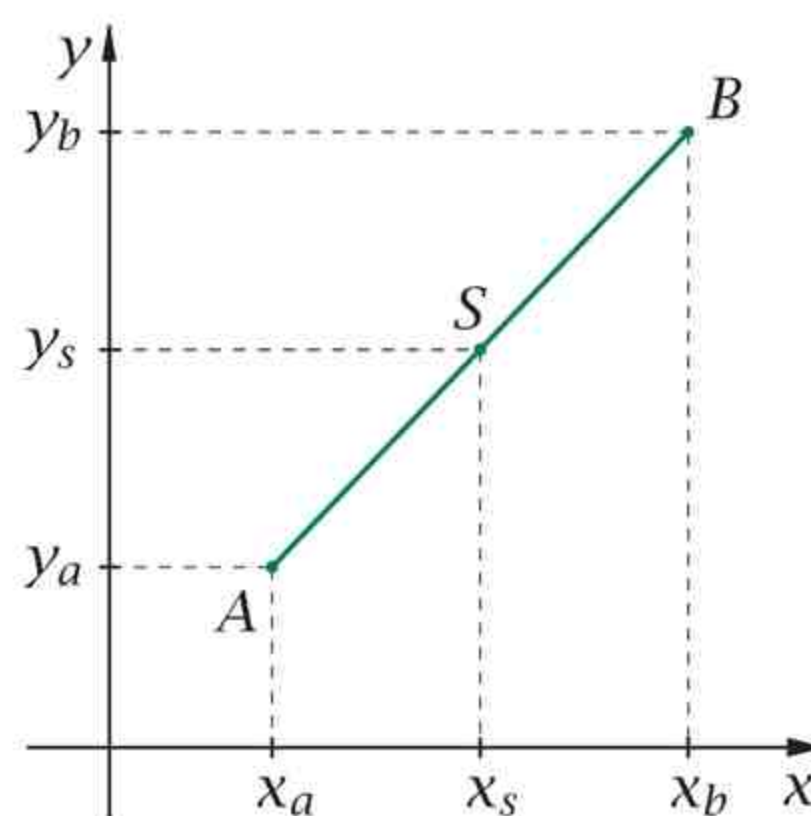


ĆWICZENIE D. Odczytaj współrzędne końców odcinków zaznaczonych na rysunku obok oraz ustal współrzędne ich środków.

Na poniższym rysunku zaznaczono w układzie współrzędnych odcinek o końcach $A = (x_a, y_a)$ i $B = (x_b, y_b)$ oraz jego środek S .

Pierwsza współrzędna punktu S leży na osi x dokładnie w środku między liczbami x_a i x_b , a druga współrzędna punktu S leży na osi y dokładnie w środku między liczbami y_a i y_b . Wynikają stąd następujące wzory, pozwalające obliczać współrzędne środka odcinka o danych końcach:

$$x_s = \frac{x_a + x_b}{2}, \quad y_s = \frac{y_a + y_b}{2}$$



ĆWICZENIE E. Oblicz, jakie współrzędne ma środek odcinka AB , gdy:

a) $A = (7, 2), B = (11, 14)$

b) $A = (-35, 1), B = (-17, -7)$

Przykład

Punkt $P = (-2, 3)$ jest środkiem odcinka AB , gdzie $A = (-10, -7)$. Znajdź współrzędne punktu B .

$$B = (x, y)$$

$$\frac{-10 + x}{2} = -2$$

$$\frac{-7 + y}{2} = 3$$

$$-10 + x = -4$$

$$-7 + y = 6$$

$$x = 6$$

$$y = 13$$

Zatem $B = (6, 13)$.

Korzystamy ze wzoru na współrzędne środka odcinka.

Zwróć uwagę, że w powyższym przykładzie szukany punkt B leży na prostej AP .

Zadania

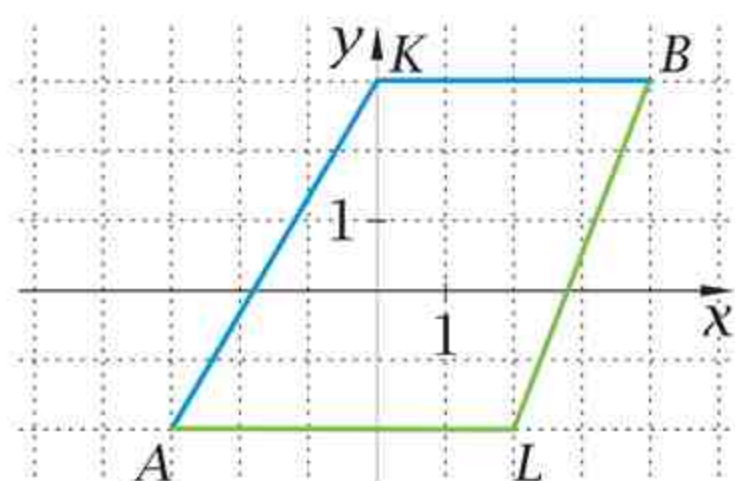
1. Oblicz długość odcinka, którego końcami są punkty A i B .

a) $A = (1, 4)$, $B = (5, 6)$

c) $A = (-5, -9)$, $B = (1, -3)$

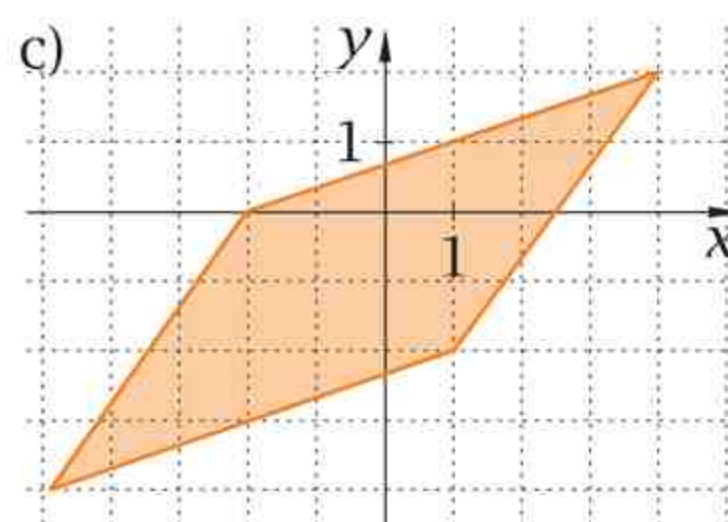
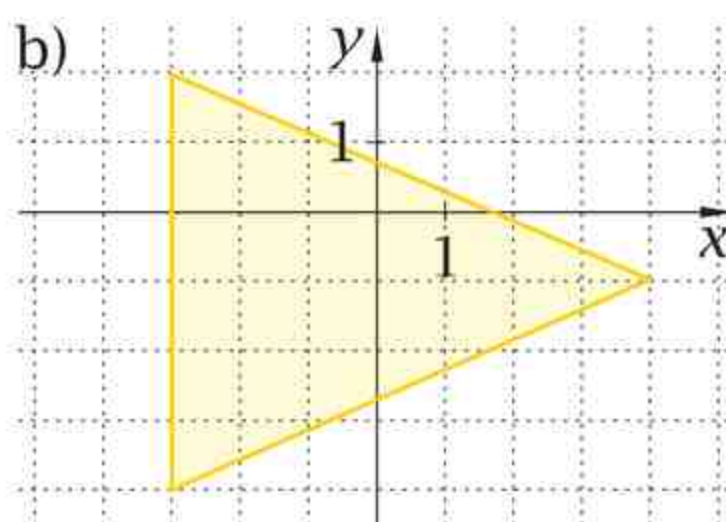
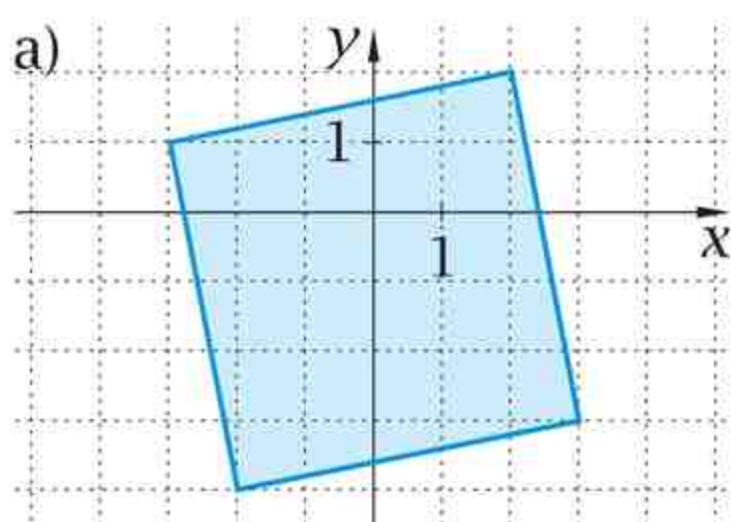
b) $A = (-3, 2)$, $B = (-7, -1)$

d) $A = (120, 200)$, $B = (124, 203)$



2. Popatrz na rysunek obok. Z punktu A do punktu B prowadzą dwie drogi — jedna przez punkt K , a druga przez punkt L . Oblicz długości tych dróg i oszacuj, która droga jest dłuższa.

3. Poniżej narysowano kwadrat, trójkąt równoramienny i równoległobok. Oblicz obwody tych figur. Oszacuj, która figura ma największy obwód, a która — najmniejszy.



4. Oblicz odległości podanych poniżej punktów od początku układu współrzędnych.

$A = (3, 4)$ $B = (1, 3)$ $C = (-8, 6)$ $D = (-3, -3)$ $E = (12, -5)$

5. Który z punktów $P_1 = (-8, 6)$, $P_2 = (7, -7)$, $P_3 = (-5, -9)$ leży na okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 10? Który punkt leży wewnątrz, a który na zewnątrz koła ograniczonego tym okręgiem?

6. Punkty P i R leżą na okręgu narysowanym obok. Znajdź ich współrzędne.

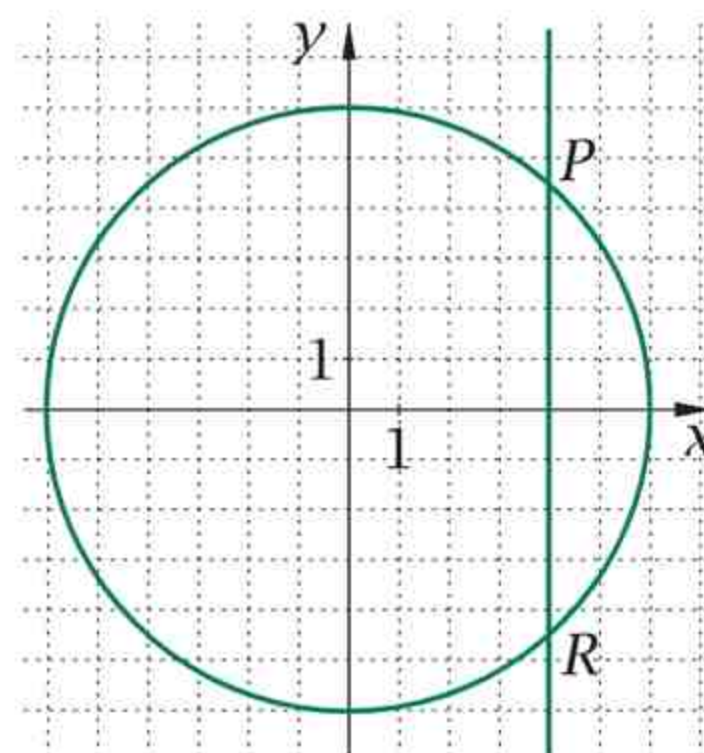
7. Które z poniższych punktów należą do koła o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 8?

$A = (-3, 4)$

$C = (\sqrt{33}, \sqrt{33})$

$B = (-5, -6)$

$D = (2\sqrt{10}, 2\sqrt{5})$



8. Wyznacz współrzędne środka odcinka o podanych końcach.

a) $A = (7, 11)$, $B = (13, 3)$

c) $P = (-5, 2)$, $R = (-9, -12)$

b) $K = (-6, 14)$, $L = (2, 20)$

d) $S = (-8, -11)$, $T = (-6, -7)$

9. Punkt S jest środkiem odcinka AB . Oblicz, jakie współrzędne ma punkt B , gdy:

a) $A = (4, 9)$, $S = (10, 10)$

b) $A = (-7, 6)$, $S = (-11, -2)$

10. Znajdź współrzędne trzech punktów, które leżą na prostej PR , gdzie $P = (-3, 12)$ i $R = (5, 24)$, i które:

a) leżą na odcinku PR ,

b) leżą poza odcinkiem PR .

11. Odcinek AB jest średnicą pewnego okręgu. Oblicz współrzędne środka okręgu oraz długość promienia, gdy:

a) $A = (-2, 9)$, $B = (6, 3)$

b) $A = (-4, -2)$, $B = (8, 3)$

12. Punkty $A = (40, -10)$, $B = (-50, 0)$ i $C = (-20, 50)$ to trzy kolejne wierzchołki równoległoboku $ABCD$. Znajdź współrzędne środka przekątnych oraz czwartego wierzchołka tego równoległoboku.

Sprawdź, czy umiesz

1. Odcinek o końcach $A = (-10, 20)$, $B = (-20, -10)$ ma długość:

A. $10\sqrt{10}$

B. 100

C. 1000

D. $\sqrt{10}$

2. Punkt $S = (-4, 7)$ jest środkiem odcinka PR , gdzie $P = (-10, -1)$. Punkt R ma współrzędne:

A. $(-6, -8)$

B. $(-7, 3)$

C. $(2, 15)$

D. $(-16, -9)$

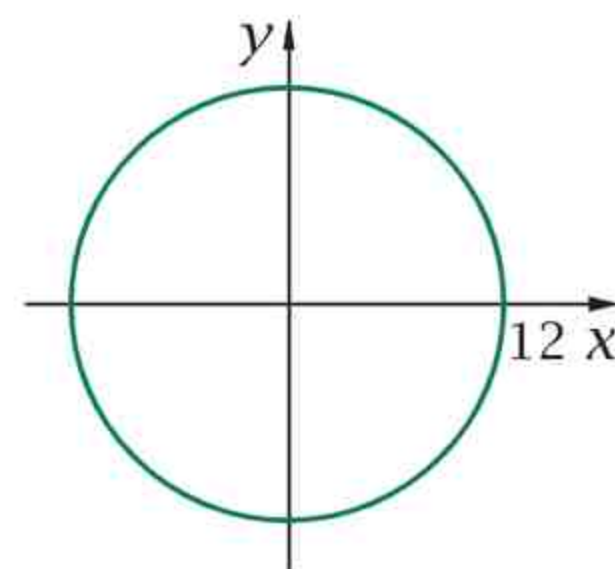
3. Który z podanych punktów leży na zewnątrz okręgu narysowanego obok?

A. $A = (-10, -6)$

C. $C = (-8, 9)$

B. $B = (11, 4)$

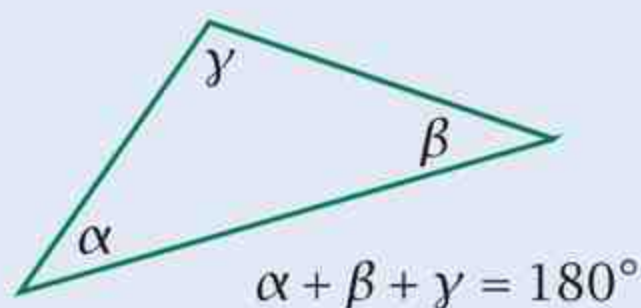
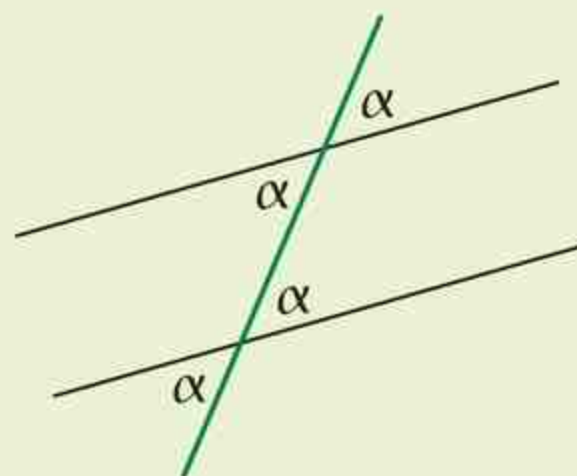
D. $D = (9, -7)$



7 Dowodzenie w geometrii

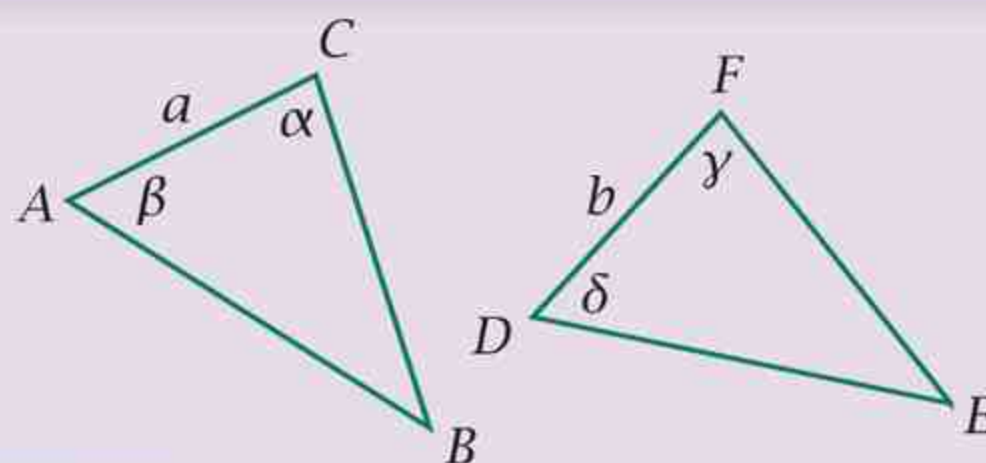
Znasz już wiele własności figur geometrycznych. Niektóre z nich przypominamy poniżej.

Jeśli prosta przecina dwie proste równoległe, to kąty odpowiadające mają równe miary oraz kąty naprzemianległe mają równe miary.



Suma miar kątów w trójkącie wynosi 180° .

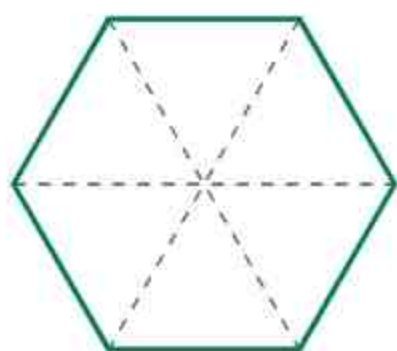
Jeśli $a = b$ i $\alpha = \gamma$, i $\beta = \delta$, to trójkąty ABC i DEF są przystające.



Korzystając z takich podstawowych własności, można uzasadniać inne własności figur geometrycznych.



W trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie mają równe miary.

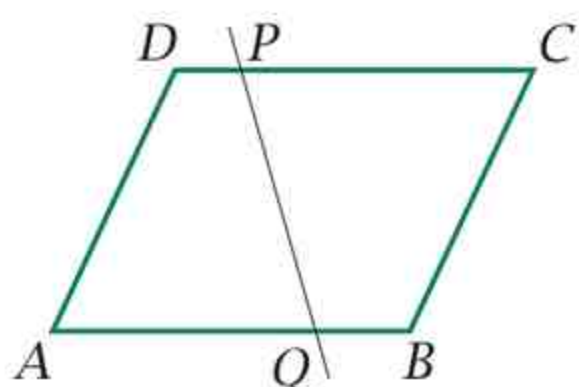


Sześciokąt foremny można podzielić na 6 jednakowych trójkątów równobocznych.

Zwykle to uzasadnienie można przeprowadzić na wiele różnych sposobów. W każdym z przykładów na kolejnych stronach dowodzimy pewnej własności i pokazujemy jeden z możliwych sposobów przeprowadzenia dowodu.

Przykład

Przez dwa punkty przeciwległych boków równoległoboku poprowadzono prostą, która podzieliła równoległobok na dwa trapezy. Wykaż, że te trapezy mają równe kąty.



Przedstawiamy na rysunku informacje podane w zadaniu i wprowadzamy oznaczenia.

Przeciwległe kąty równoległoboku mają równe miary, zatem:

$$\sphericalangle QAD = \sphericalangle BCP$$

$$\sphericalangle PDA = \sphericalangle QBC$$

Ponieważ $AB \parallel CD$, więc kąty naprzemianległe są równe:

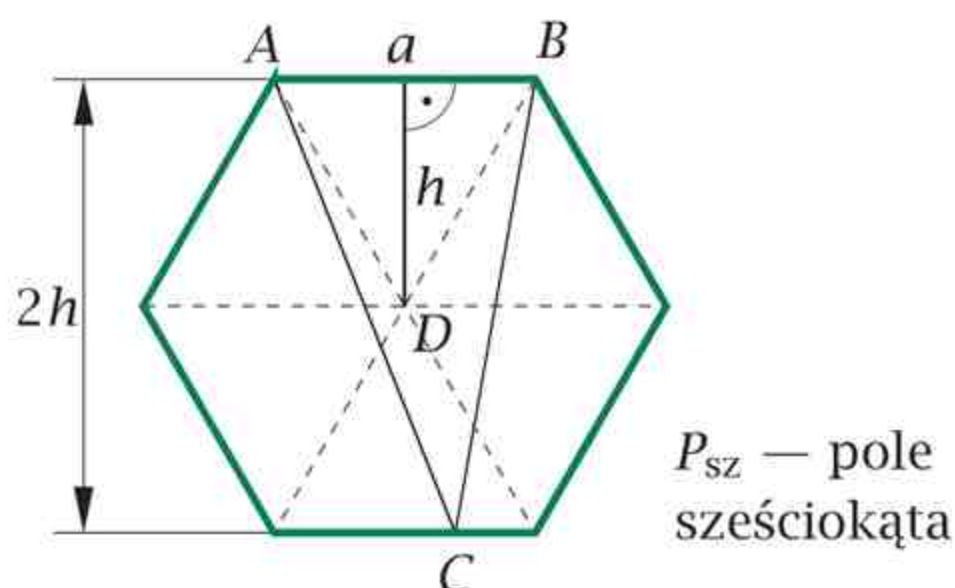
$$\sphericalangle AQP = \sphericalangle CPQ$$

$$\sphericalangle DPQ = \sphericalangle BQP$$

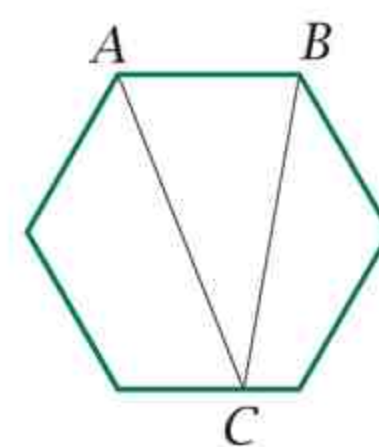
Wykazaliśmy, że kąty w trapezie $AQPD$ są równe odpowiednim kątom w trapezie $QBCP$.

Przykład

Figura na rysunku obok to sześciokąt foremny. Wykaż, że pole trójkąta ABC jest 3 razy mniejsze od pola sześciokąta.



P_{sz} — pole sześciokąta



Przerysowujemy rysunek, dzielimy sześciokąt na trójkąty równoboczne i wprowadzamy oznaczenia. Zauważamy, że wysokość trójkąta ABC to dwie wysokości trójkąta ABD .

$$P_{ABD} = \frac{ah}{2} \quad P_{ABD} = \frac{1}{6}P_{sz}$$

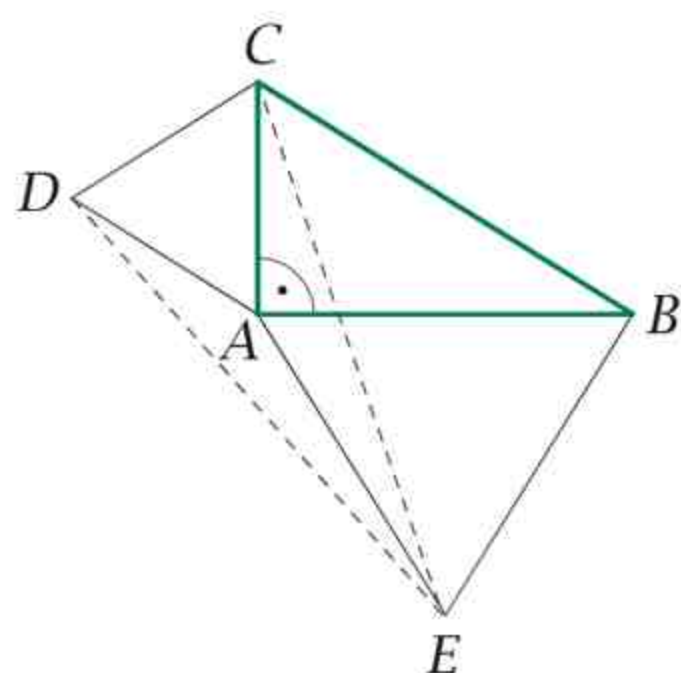
Zapisujemy pole trójkąta ABD na dwa sposoby.

$$P_{ABC} = \frac{a \cdot 2h}{2} = 2 \cdot \frac{ah}{2} = 2 \cdot P_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{6}P_{sz} = \frac{1}{3}P_{sz}$$

Wykazaliśmy, że trójkąt ABC ma pole 3 razy mniejsze od pola sześciokąta.

Przykład

Na przyprostokątnych AB i AC trójkąta prostokątnego ABC zbudowano trójkąty równoboczne ACD i ABE tak, że punkty A, E, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami pięciokąta. Wykaż, że trójkąt CED jest równoramienny.



Sporządzamy rysunek.

Pokażemy, że trójkąty ACE i ADE są przystające.

Trójkąt ACD jest równoboczny, więc $AC = AD$. Zauważmy też, że odcinek AE jest wspólnym bokiem trójkątów ACE i ADE .

Ponadto:

$$\sphericalangle CAE = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$$

$$\sphericalangle DAE = 360^\circ - (60^\circ + 90^\circ + 60^\circ) = 360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$$

$$\text{Stąd: } \sphericalangle CAE = \sphericalangle DAE$$

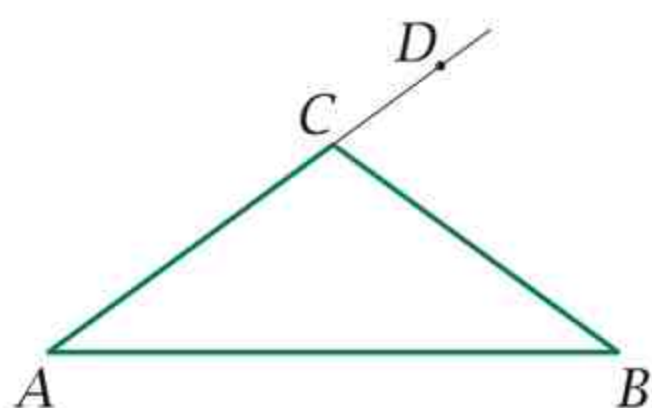
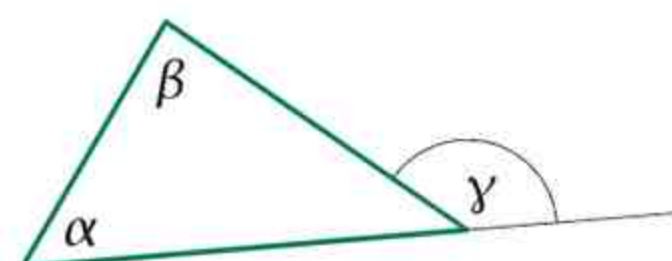
Z cechy *bkb* przystawiania trójkątów wynika, że trójkąty ACE i ADE są przystające.

$$\text{Zatem: } CE = DE$$

Pokazaliśmy, że trójkąt CED ma dwa równe boki, więc jest równoramienny.

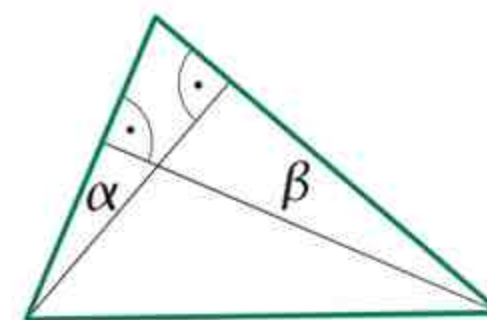
Zadania**Zagadnienia dotyczące kątów w wielokątach**

- 1. Na rysunku obok zaznaczono trzy kąty. Uzasadnij, że $\alpha + \beta = \gamma$.



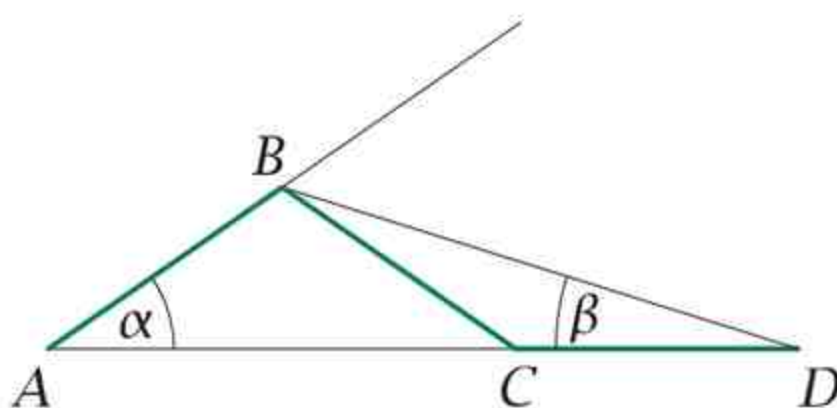
- 2. W trójkącie ABC na rysunku obok $AC = CB$. Uzasadnij, że jeśli przez punkt C poprowadzimy prostą równoległą do boku AB , to podzieli ona kąt BCD na dwa równe kąty.

- 3. W trójkącie ostrokątnym poprowadzono dwie wysokości, tak jak na rysunku obok. Wykaż, że kąty α i β są równe.

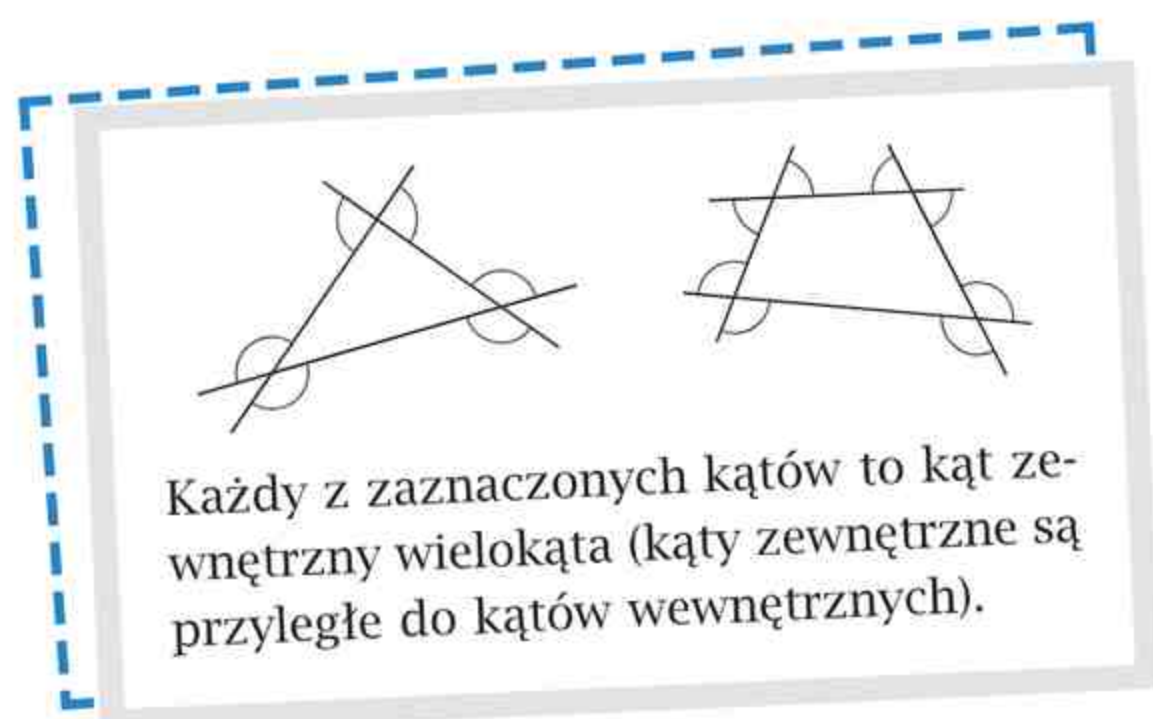
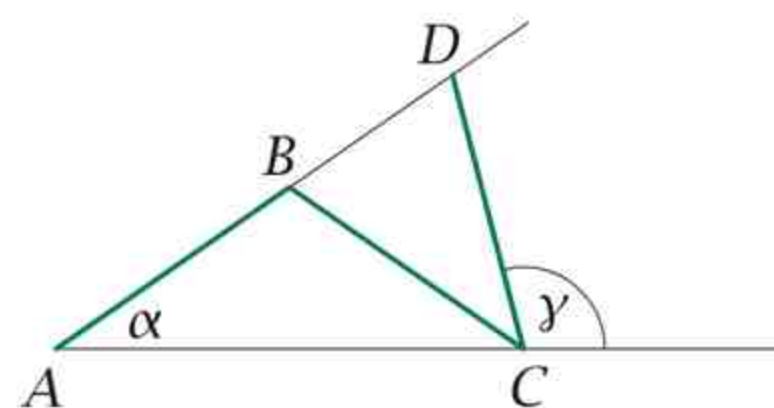


- 4. Pewien trójkąt prostokątny podzielono na dwa trójkąty prostą przechodzącą przez wierzchołek kąta prostego. Jeden z otrzymanych trójkątów jest rozwartokątny równoramienny. Wykaż, że drugi trójkąt też jest równoramienny.
- 5. W trójkącie równoramiennym poprowadzono wysokość do jednego z ramion. Uzasadnij, że kąt między tą wysokością a podstawą trójkąta jest 2 razy mniejszy niż kąt między ramionami.
- 6. Odcinki AB , BC i CD na każdym rysunku mają takie same długości. Wykaż, że $2\beta = \alpha$ oraz że $\gamma = 3\alpha$.

a)

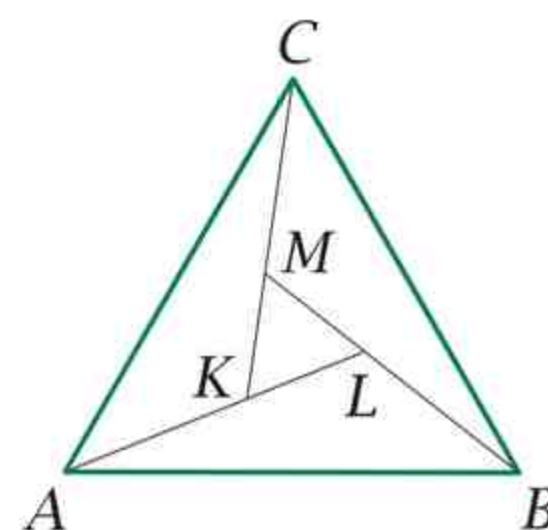


b)



- 7. Przeczytaj informacje obok. Uzasadnij następujące własności:
- a) Suma miar kątów zewnętrznych w trójkącie jest równa 720° .
- b) W czworokącie, w którym każdy kąt jest wypukły (mniejszy niż 180°), suma miar kątów zewnętrznych jest równa 720° .

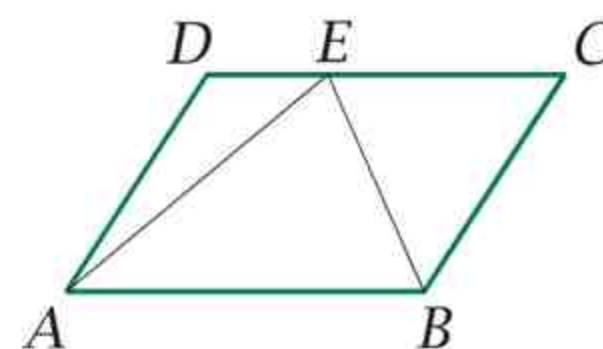
- 8. Trójkąt ABC na rysunku obok jest równoboczny oraz kąty LAB , MBC i KCA mają takie same miary. Wykaż, że trójkąt KLM jest równoboczny.



Zagadnienia dotyczące pól wielokątów

- 9. Uzasadnij, że przekątne dzielą równoległobok na cztery trójkąty o równych polach.

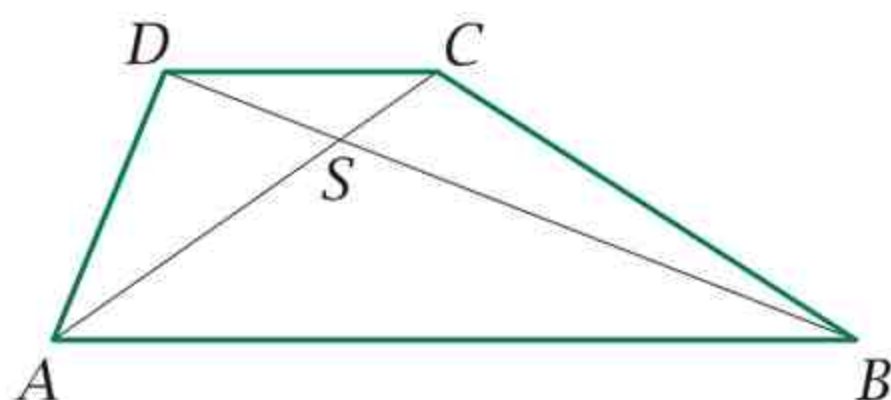
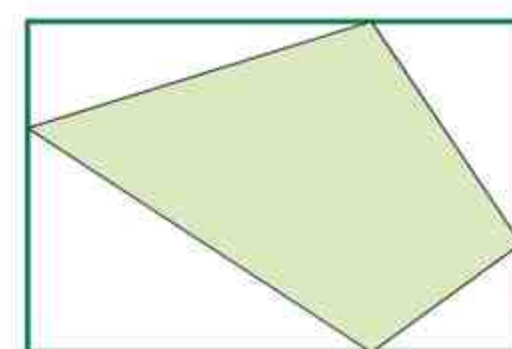
- 10. Na boku DC równoległoboku $ABCD$ wybrano dowolny punkt E . Wykaż, że pole trójkąta ABE jest równe sumie pól trójkątów ADE i EBC .



Środkowa trójkąta to odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

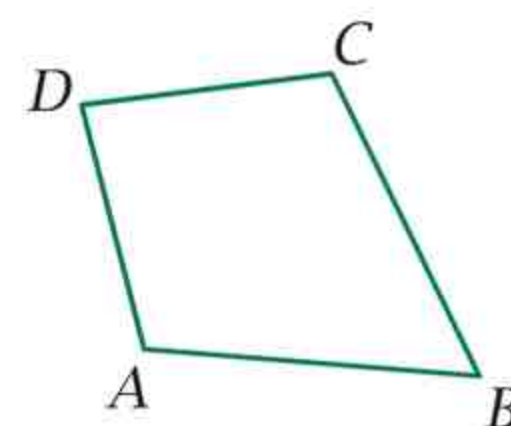
- 11. a) Wykaż, że środkowa trójkąta dzieli go na dwa trójkąty o równych polach.
b) Wykaż, że środkowa trójkąta i odcinki łączące jej środek z wierzchołkami trójkąta dzielą go na cztery trójkąty o równych polach.

- 12. Na bokach prostokąta wybrano cztery punkty w ten sposób, że dwa z nich leżą na prostej równoległej do jednego z boków, tak jak na rysunku obok. Wykaż, że pole zacieniowanego czworokąta jest równe połowie pola prostokąta.



- 13. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD prowadzimy przekątne przecinające się w punkcie S (zob. rysunek obok). Uzasadnij, że trójkąty ACD i BCD mają równe pola oraz że trójkąty ASD i BCS mają równe pola.

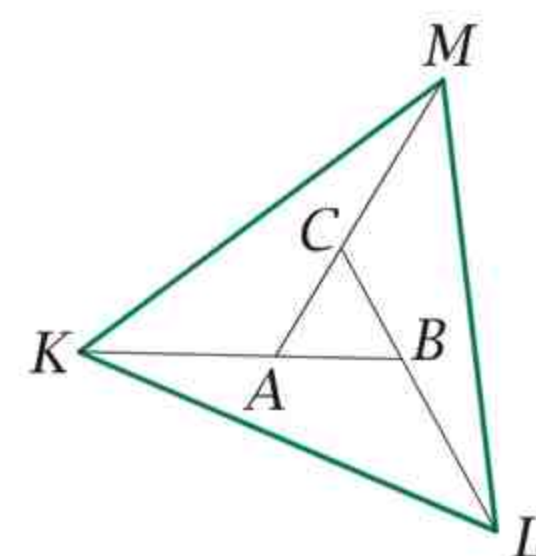
- 14. Czworokąt przedstawiony na rysunku obok ma dwie pary boków o jednakowych długościach: $AD = CD$ i $AB = BC$. Wykaż, że pole tego czworokąta jest równe połowie iloczynu długości przekątnych AC i BD .



- 15. Wykaż, że pole każdego czworokąta, którego przekątne przecinają się pod kątem prostym, jest równe połowie iloczynu długości jego przekątnych.

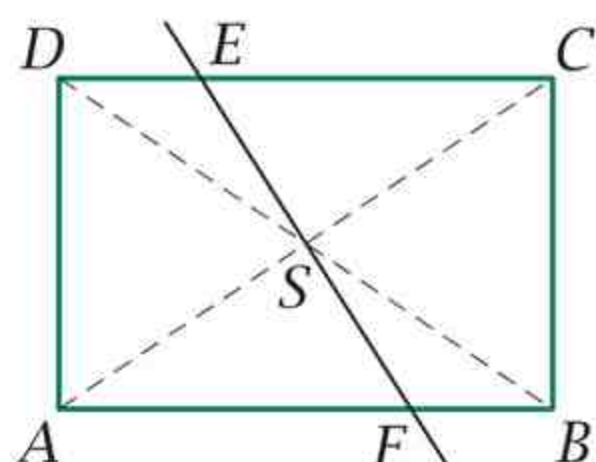
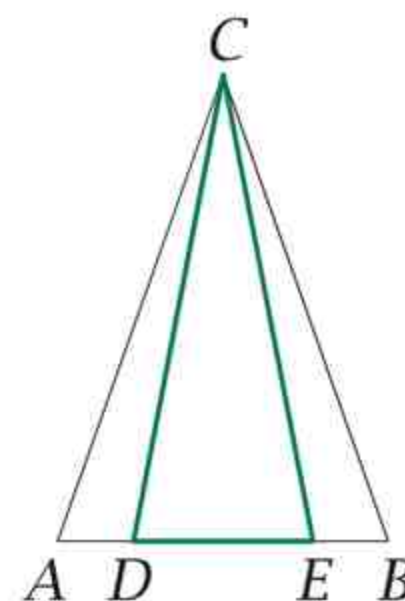
Zagadnienia dotyczące przystawiania trójkątów

- 16. Trójkąt ABC na rysunku obok jest równoboczny i odcinki AK , BL i CM mają równe długości. Wykaż, że trójkąt KLM jest równoboczny.



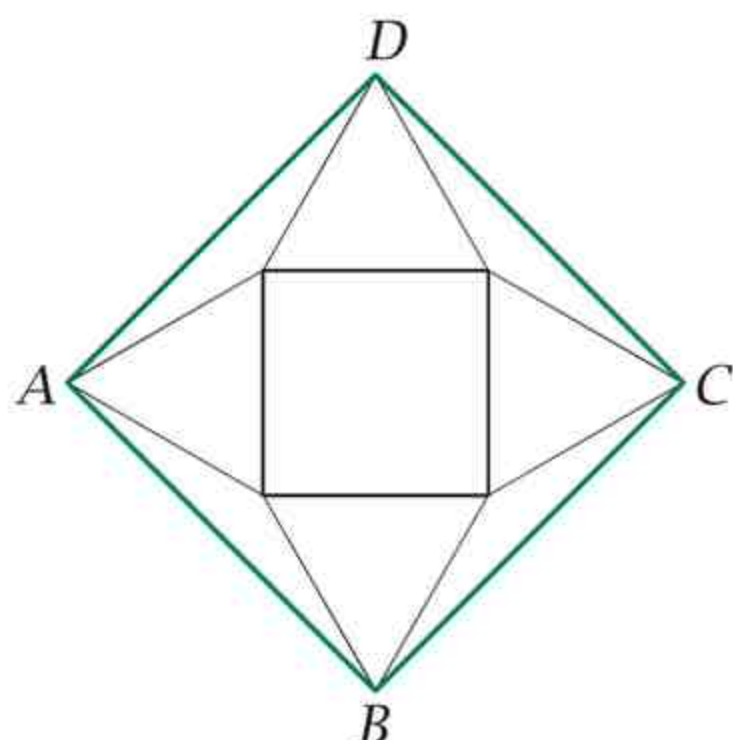
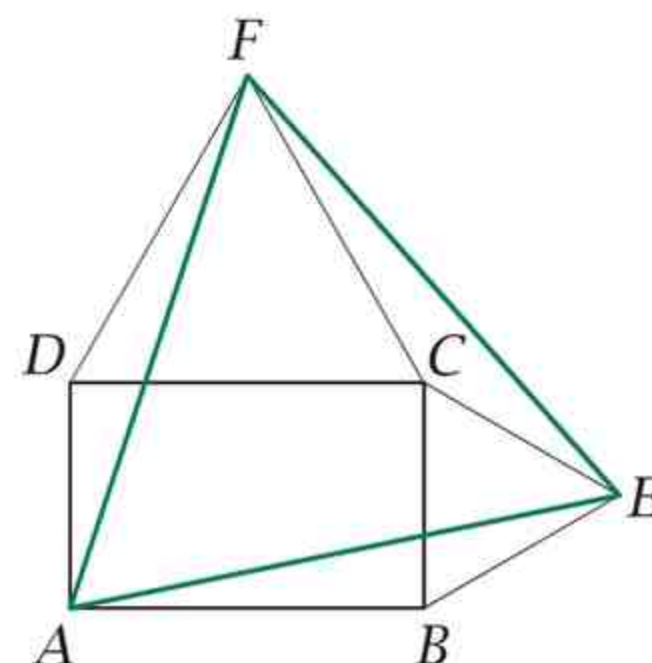
- 17. Udowodnij, że trójkąt, którego wierzchołkami są środki boków trójkąta równoramiennego, też jest równoramienny.
- 18. Udowodnij, że w trójkącie równoramiennym środkowe poprowadzone do ramion tego trójkąta mają równe długości.

- 19. Trójkąt ABC na rysunku obok jest równoramienny. Na podstawie AB wybrano dwa punkty D, E , takie że $AD = EB$. Wykaż, że trójkąt DEC jest równoramienny.



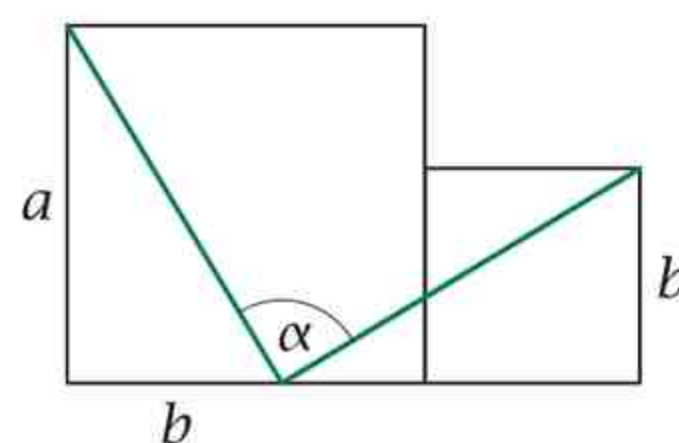
- 20. Prostokąt $ABCD$ dzielimy prostą przechodzącą przez punkt przecięcia przekątnych (zob. rysunek obok). Uzasadnij, że odcinki DE i FB są równe oraz że prosta EF dzieli prostokąt na dwie części o równych polach.

- 21. Na bokach DC i BC prostokąta $ABCD$ zbudowano trójkąty równoboczne DCF i BCE (zob. rysunek obok). Wykaż, że trójkąt AEF jest równoboczny.



- 22. Na każdym z boków kwadratu zbudowano trójkąty równoboczne tak, jak pokazano na rysunku obok. Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.

- 23. Dwa kwadraty są położone tak, jak na rysunku obok. Wykaż, że kąt α jest prosty.



Przed klasówką

1. W trójkącie równoramiennym poprowadzono wysokość do jednego z ramion. Kąt między ramionami ma 50° . Jaką miarę ma kąt między wysokością poprowadzoną do ramienia a podstawą trójkąta?

- A. 25° B. 40° C. 80° D. 90°

2. Boki trójkąta mają długości 13 cm, 20 cm i 21 cm, a pole tego trójkąta jest równe 126 cm^2 . Jaką długość ma najkrótsza z wysokości tego trójkąta?

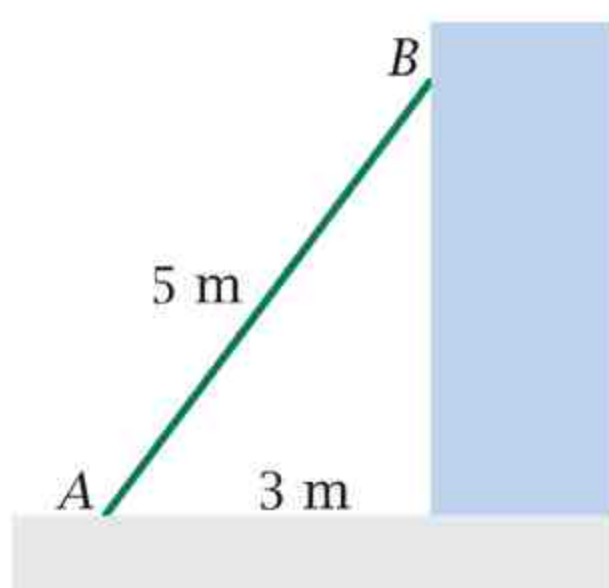
- A. 6 cm C. ok. 19 cm
B. 12 cm D. Podano za mało informacji, aby to obliczyć.

3. Jeden z boków równoległoboku jest dwa razy dłuższy od drugiego. Czy stąd wynika, że jedna z wysokości tego równoległoboku jest dwa razy dłuższa od drugiej? Wybierz odpowiedź „tak” lub „nie” oraz jej uzasadnienie spośród zdań od A do D.

① Tak, ponieważ...

② Nie, ponieważ...

- A — ...wysokość poprowadzona do 2 razy dłuższego boku musi być 2 razy dłuższa niż wysokość poprowadzona do krótszego boku.
B — ...oba iloczyny — długości boku i wysokości do niego poprowadzonej — są równe.
C — ...wysokości poprowadzone z jednego wierzchołka równoległoboku mogą mieć różne długości.
D — ...na przykład w rombie wszystkie wysokości są równe.



4. Drabina ma długość 5 m i jest oparta o ścianę tak, że jej podstawa (punkt A) jest oddalona od ściany o 3 m, tak jak na rysunku. Jeśli podstawę drabiny odsunie się od ściany o dodatkowe 0,5 m, to o ile centymetrów przesunie się w dół drugi koniec drabiny (punkt B)?

- A. ok. 25 cm C. ok. 50 cm
B. ok. 43 cm D. ok. 57 cm

5. Wiadomo, że w trójkącie PQR : $\sphericalangle PQR = 90^\circ$, $PR = q$, $PQ = r$, $QR = p$. Czy podane równości są prawdziwe czy fałszywe?

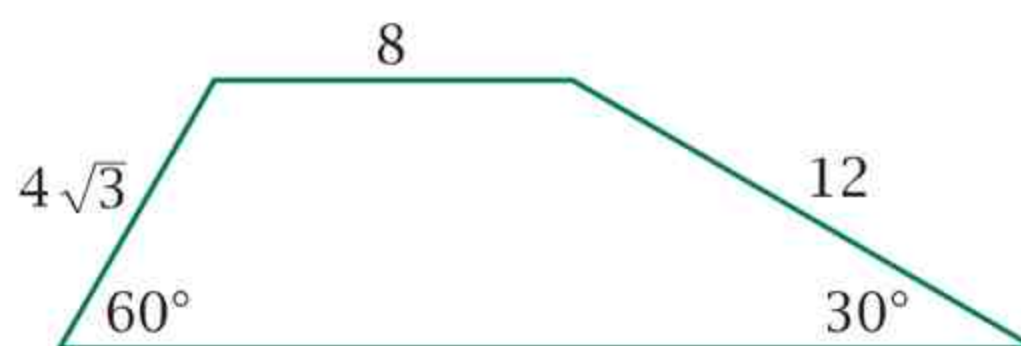
a) $p^2 = q^2 - r^2$
PRAWDA/FAŁSZ

b) $r^2 = q^2 - p^2$
PRAWDA/FAŁSZ

c) $q^2 = p^2 - r^2$
PRAWDA/FAŁSZ

6. Pole trapezu przedstawionego na rysunku jest równe:

- A. $72\sqrt{3}$ C. $48 + 24\sqrt{3}$
 B. $28 + 12\sqrt{3}$ D. $84 + 12\sqrt{3}$



7. Punkty $A = (-3, -4)$ i $B = (1, -6)$ są końcami średnicy pewnego koła. Czy poniższe zdania są prawdziwe czy fałszywe?

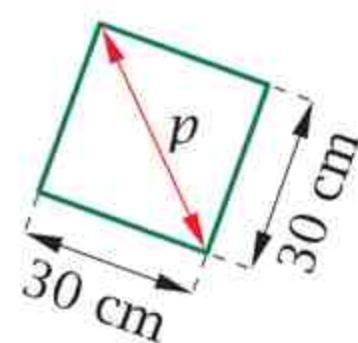
- a) Długość średnicy tego koła jest mniejsza od 5. PRAWDA/FAŁSZ
 b) Środek tego okręgu leży w II ćwiartce układu współrzędnych. PRAWDA/FAŁSZ
 c) Odległość środka okręgu od początku układu współrzędnych jest mniejsza od 5. PRAWDA/FAŁSZ

8. Na bokach trójkąta prostokątnego równoramiennego o przyprostokątnej a zbudowano trójkąty równoboczne. Jakie jest pole otrzymanego w ten sposób sześciokąta?

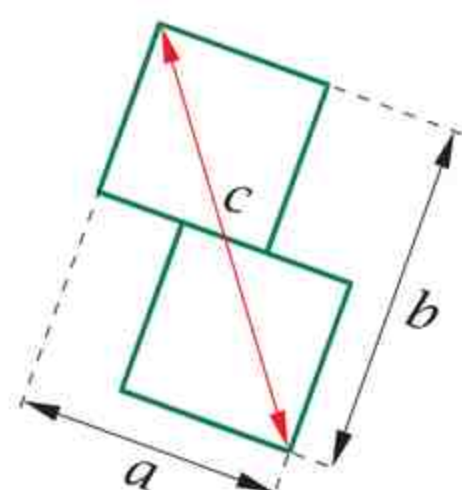
- A. $a^2\sqrt{3}$ C. $\frac{a^2}{2} + a^2\sqrt{3}$
 B. $2a^2\sqrt{3}$ D. $\frac{a^2}{2} + 2a^2\sqrt{3}$

9. Przyjrzyj się rysunkom i fotografii. Każdy taboret widziany z góry ma kształt kwadratu o boku 30 cm. Kolejne taborety dostawiane są tak, aby każdy kolejny stykał się połową jednego boku z poprzednim taboretom. Na rysunkach przedstawiono widok z góry tak ustawionych taboretów. Jakie długości mają odcinki oznaczone literami p, a, b, c, x, y, z, m ?

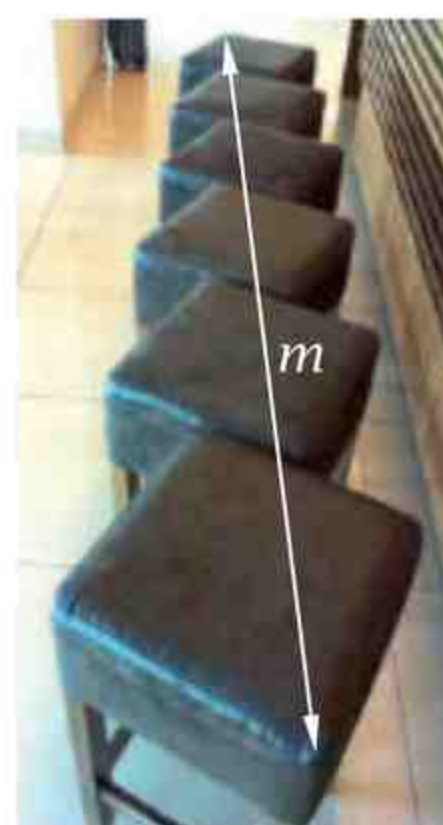
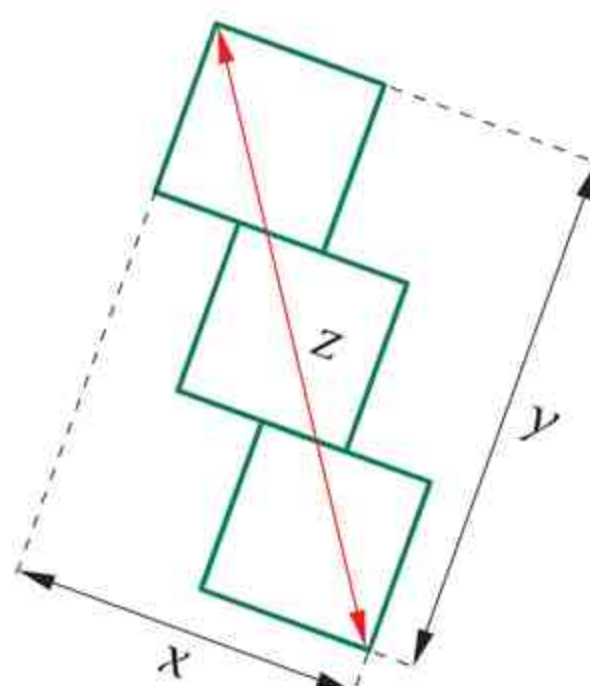
Jeden taboret



Dwa taborety



Trzy taborety



- 10. Uzasadnij, że czworokąt, którego wierzchołkami są środki boków rombu, jest prostokątem.

Zadania uzupełniające

Trójkąty i czworokąty

1. Kąt między ramionami trójkąta równoramiennego jest o 30° większy niż kąt przy podstawie. Jakie miary mają kąty tego trójkąta?

2. Podaj miary kątów:

- a) rombu, w którym jedna z przekątnych ma długość równą długości boków,
- b) równoległoboku, w którym kąt ostry jest dwa razy mniejszy niż kąt rozwarty,
- c) trapezu równoramiennego, w którym wysokość jest dwa razy krótsza od ramienia.

3. Na boku AB trójkąta ABC wybrano punkt D . Odcinek CD podzielił ten trójkąt na dwa trójkąty o polach 14 i 6. Bok AD większego z trójkątów ma długość 7. Jaką długość ma bok DB drugiego z tych trójkątów?

→ 4. Oblicz pole:

a) trójkąta o wierzchołkach:

$$(-7, 2), (-4, -10) \text{ i } (-3, 2)$$

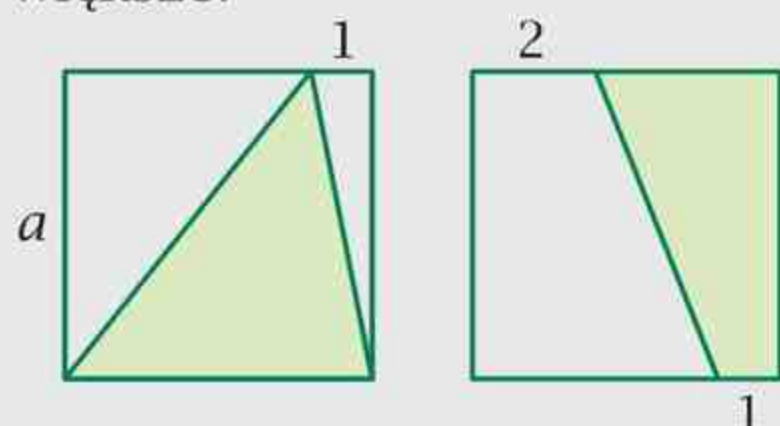
b) równoległoboku o wierzchołkach:

$$\left(-5\frac{2}{3}, -6\right), \left(-3\frac{1}{3}, -4\right), \left(-3\frac{1}{3}, 7\right) \text{ i } \left(-5\frac{2}{3}, 5\right)$$

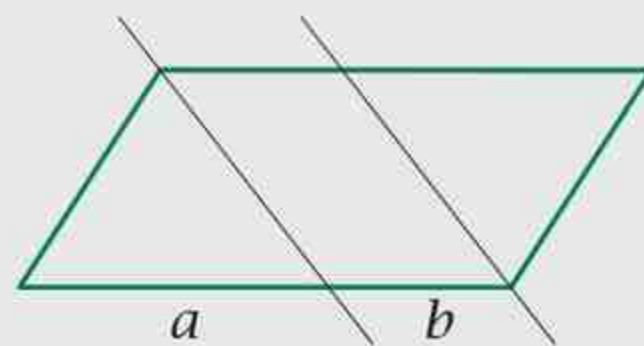
c) trapezu o wierzchołkach:

$$(-1, 3), (5, -3), (5, 3) \text{ i } (2, 6)$$

5. Na rysunkach przedstawiono dwa jednakowe kwadraty o boku a . Która z zacieniowanych figur ma większe pole? O ile większe?



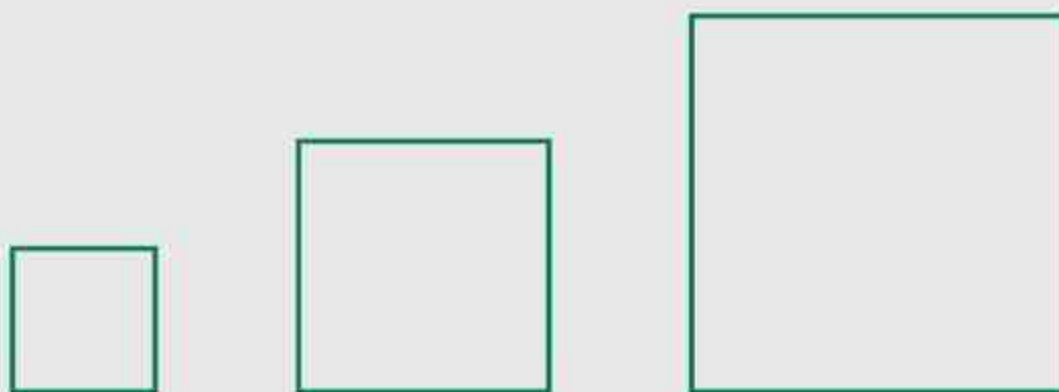
6. Równoległobok rozcięto na trzy części o równych polach: dwa trójkąty i równoległobok, tak jak na rysunku. Ile razy odcinek a jest dłuższy od odcinka b ?



Twierdzenie Pitagorasa

7. Pole kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego jest równe 20, a pole kwadratu zbudowanego na jednej z przyprostokątnych jest równe 4. Jakie pole ma kwadrat zbudowany na drugiej przyprostokątnej? Jaki obwód ma ten trójkąt?

→ *8. Skonstruuj kwadrat, którego pole jest równe sumie pól trzech kwadratów narysowanych poniżej.



9. Dwa boki trójkąta prostokątnego mają długości 10 cm i 20 cm. Jaką długość może mieć trzeci bok?

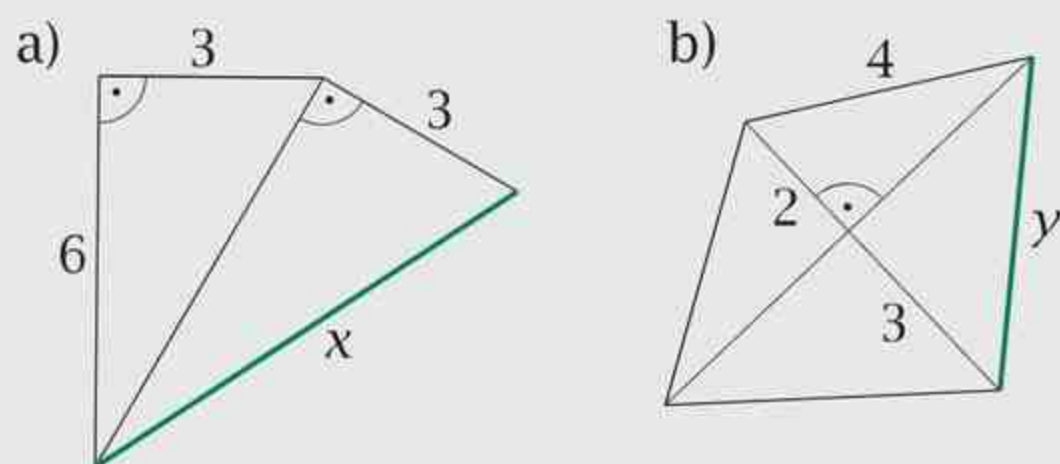
10. Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ma długość 6 i jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej. Oblicz obwód tego trójkąta.

→ 11. Opisz, w jaki sposób można konstrukcyjnie zaznaczyć w układzie współrzędnych punkty o współrzędnych:

$$A = (\sqrt{2}, 3) \quad B = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \\ C = (5, -\sqrt{3})$$

Zastosowania twierdzenia Pitagorasa

12. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.



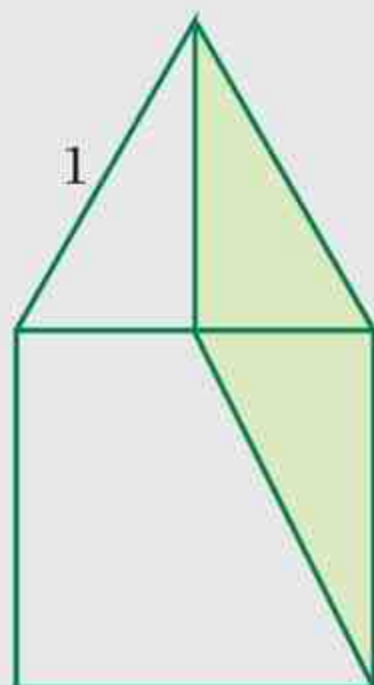
13. Obwód prostokąta wynosi 42 cm, a stosunek długości boków jest równy $\frac{3}{4}$. Oblicz długość przekątnej prostokąta.

14. Jedna z przekątnych rombu ma długość $4\sqrt{2}$, a druga jest od niej dwa razy krótsza. Oblicz długość boku tego rombu.

→ **15.** Oblicz pole rombu o obwodzie 60 cm i przekątnej 10 cm.

16. Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 4 cm i 20 cm, a jego wysokość ma 6 cm. Oblicz obwód tego trapezu.

□ **17.** Pięciokąt przedstawiony na rysunku jest zbudowany z kwadratu i trójkąta równobocznego o boku 1. Uzasadnij, że zacieniowany czworokąt nie jest równoległobokiem.

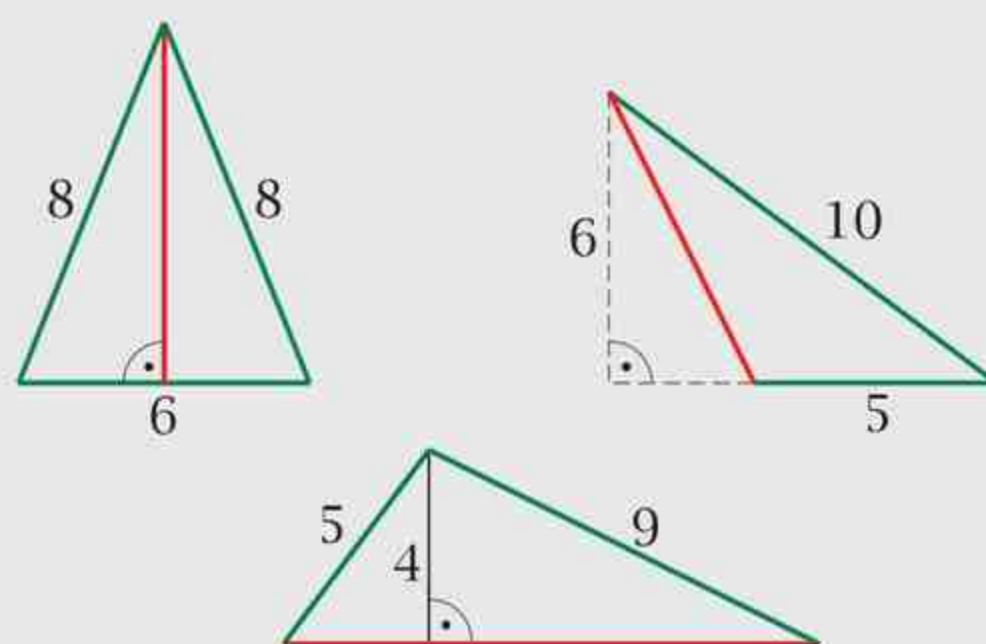


→ **18.** Boki trapezu równoramiennego mają długości 24 cm, 15 cm, 15 cm i 6 cm. Oblicz pole tego trapezu.

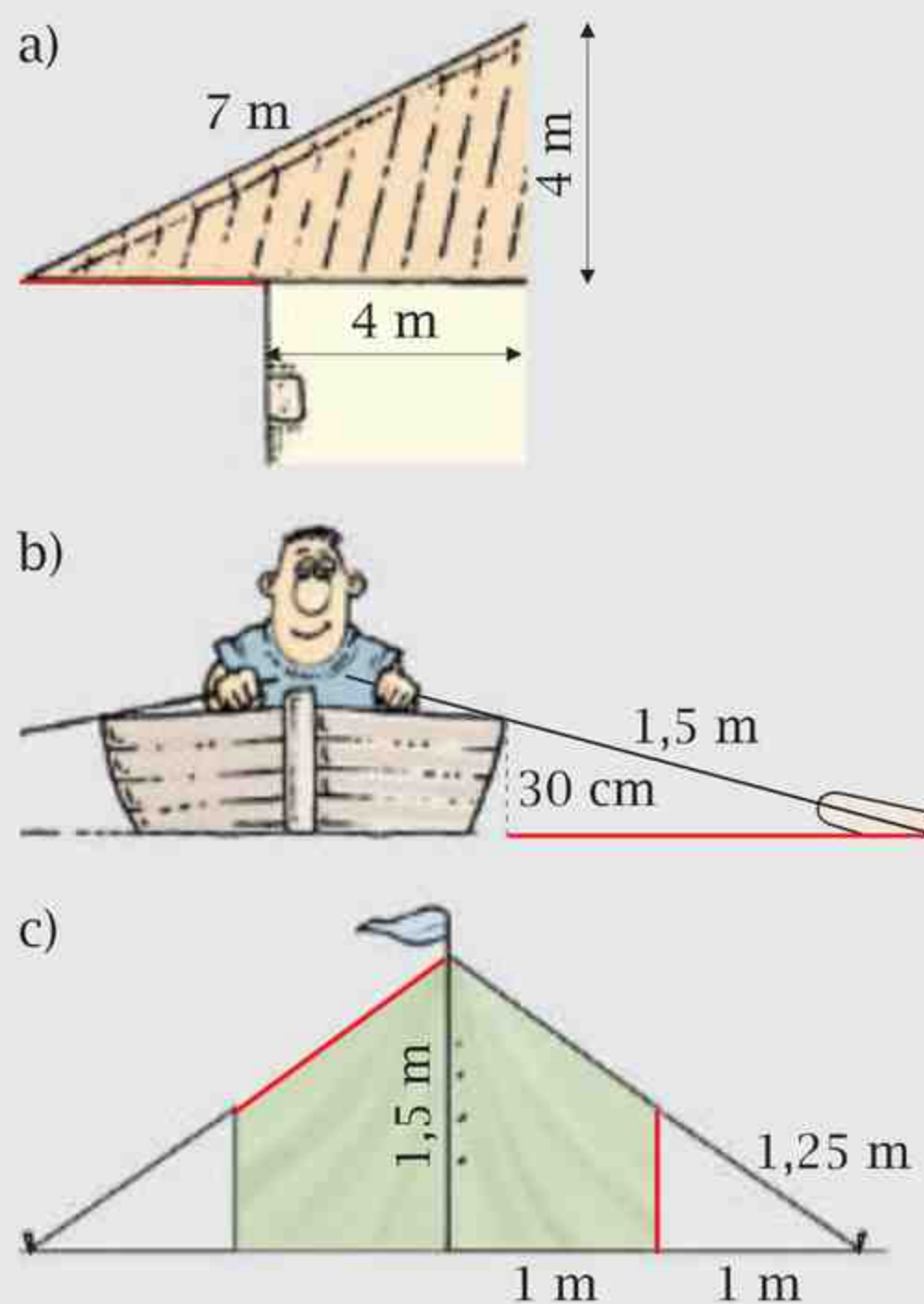
19. Jedna z przekątnych rombu ma długość 10. Pole rombu jest równe 40. Jaki obwód ma ten romb?

* **20.** Oblicz pole trapezu, którego podstawy mają 35 cm i 10 cm, a długości ramion wynoszą 20 cm i 15 cm.

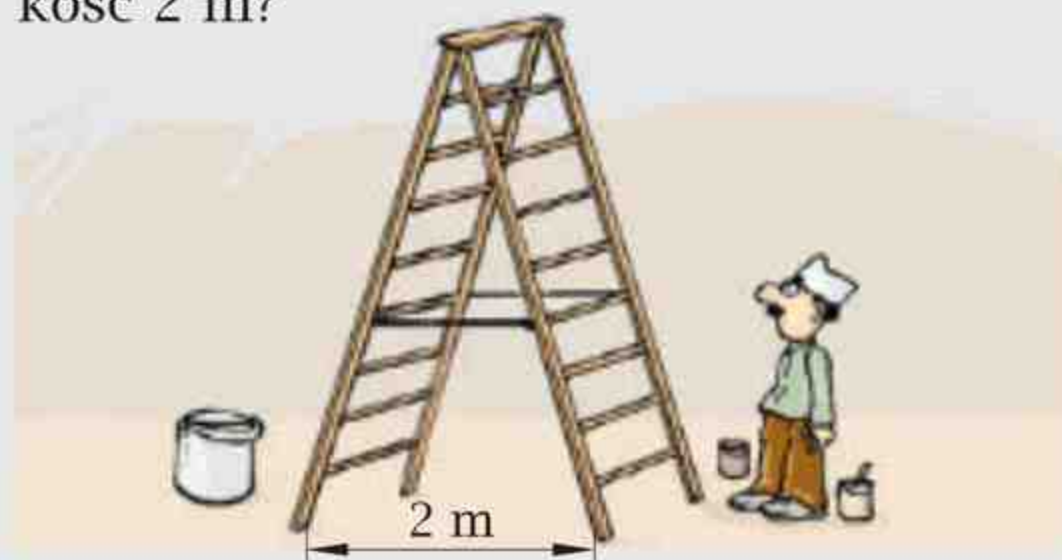
→ **21.** Oblicz długości odcinków zaznaczonych kolorem czerwonym.



■ **22.** Oblicz długości zaznaczonych na czerwono odcinków. Wyniki zaokrąglaj.



23. Jak wysoko sięga drabina malarska o długości 3 m, rozstawiona na szerokość 2 m?



24. Uczestnik letniego biegu na orientację przebiegł 500 m w kierunku północno-wschodnim, a następnie skręcił na północny zachód i przebiegł 200 m. W jakiej odległości od punktu wyjścia się znalazł?



25. W trójkącie równoramiennym wysokość poprowadzona do podstawy ma długość $2\sqrt{15}$. Ramię jest 2 razy dłuższe od podstawy. Oblicz obwód tego trójkąta.
26. Boki trójkąta mają długości 13, 13 i 10. Oblicz pole tego trójkąta oraz wszystkie jego wysokości.

Przekątna kwadratu.

Wysokość trójkąta równobocznego

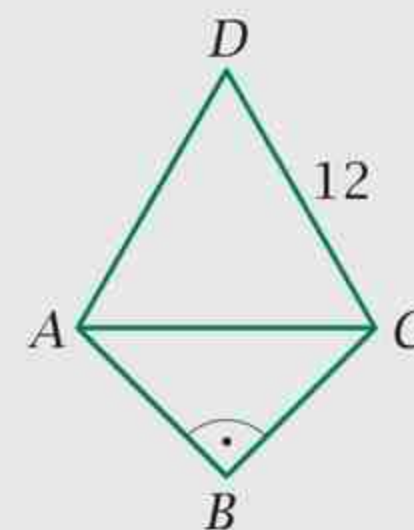
27. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego równoramiennego ma długość 10 cm. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

28. Z trzech trójkątów równobocznych zbudowano trapez o polu $12\sqrt{3}$. Jaka jest wysokość tego trapezu? Oblicz obwód tego trapezu.

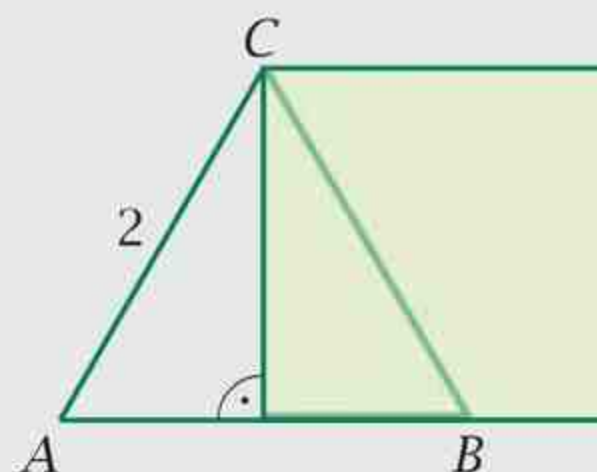
29. a) Kwadrat i trójkąt równoboczny mają takie same obwody równe 12 cm. Czy przekątna kwadratu jest dłuższa od wysokości trójkąta?

b) Przekątna kwadratu i wysokość trójkąta równobocznego mają jednakową długość równą 3 cm. Czy pole kwadratu jest większe od pola trójkąta?

30. Czworokąt $ABCD$ jest zbudowany z dwóch trójkątów: równobocznego i równoramiennego prostokątnego. Oblicz przekątną DB oraz pole i obwód czworokąta $ABCD$.



31. Trójkąt ABC przedstawiony na rysunku jest równoboczny. Jaki obwód ma zacieniowany kwadrat?



32. Znajdź wysokość trójkąta, którego wierzchołkami są środki boków trójkąta równobocznego o boku 6.

33. a) O ile zwiększy się długość przekątnej kwadratu, jeśli bok kwadratu zwiększymy o 2?

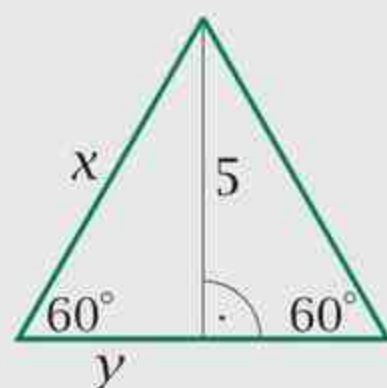
b) O ile zwiększy się wysokość trójkąta równobocznego, jeśli bok trójkąta zwiększymy o 2?

34. Wewnątrz kwadratu o boku długości 8 leży punkt, którego odległość od dwóch sąsiednich wierzchołków tego kwadratu jest równa 5. Oblicz odległość tego punktu od dwóch pozostałych wierzchołków kwadratu.

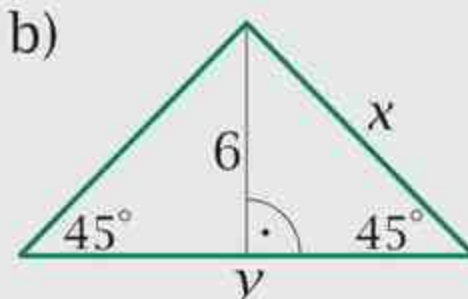
Trójkąty o kątach $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$ oraz $90^\circ, 30^\circ, 60^\circ$

→ 35. Oblicz długości odcinków x i y .

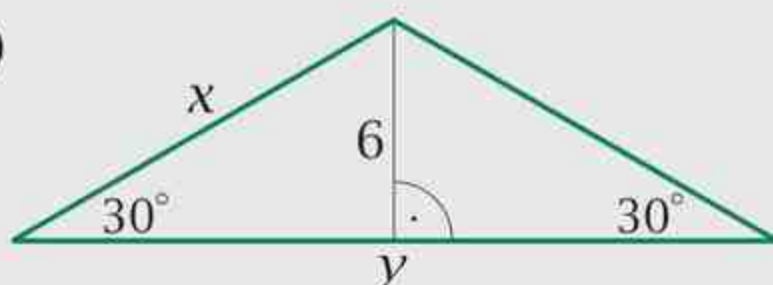
a)



b)



c)



36. Trójkąt prostokątny ma przyprostokątne długości a i b oraz przeciwprostokątną długości c , a jeden z kątów ostrych ma miarę α . Oblicz obwód trójkąta, jeśli:

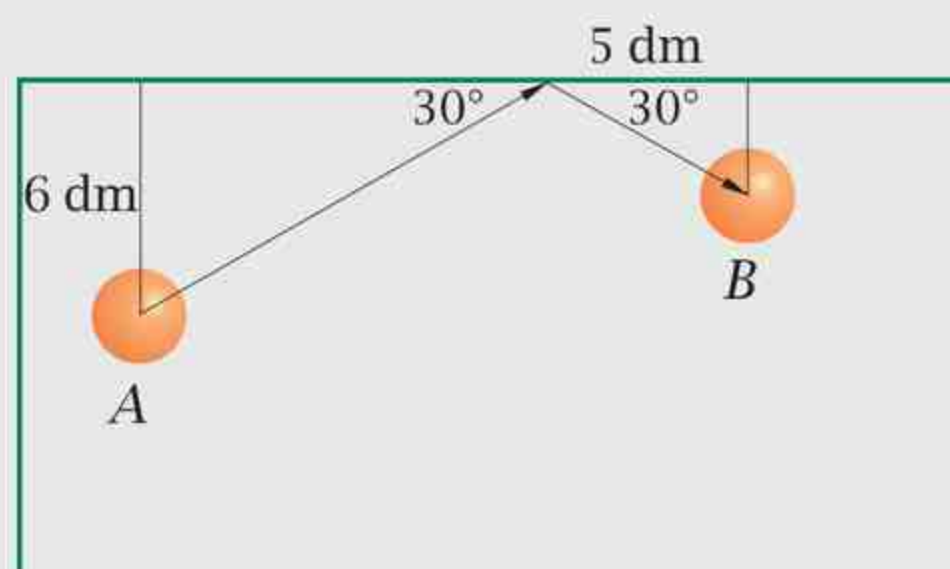
- a) $a = 2$, $\alpha = 45^\circ$,
- b) $c = 6$, $\alpha = 30^\circ$,
- c) $b = 4$, $\alpha = 60^\circ$ i $a < b$,
- d) $a = 5$, $\alpha = 30^\circ$ i $a < b$.

37. Ruszając z punktu położonego na wysokości 1000 m n.p.m., jedziemy 1 km pod górę drogą nachyloną do poziomu pod stałym kątem 30° . Na jaką wysokość wjedziemy?

38. W trapezie kąty przy dłuższej podstawie mają miary 30° i 45° . Dłuższa podstawa ma długość 16, a wysokość trapezu jest równa 3. Jaki obwód ma ten trapez?

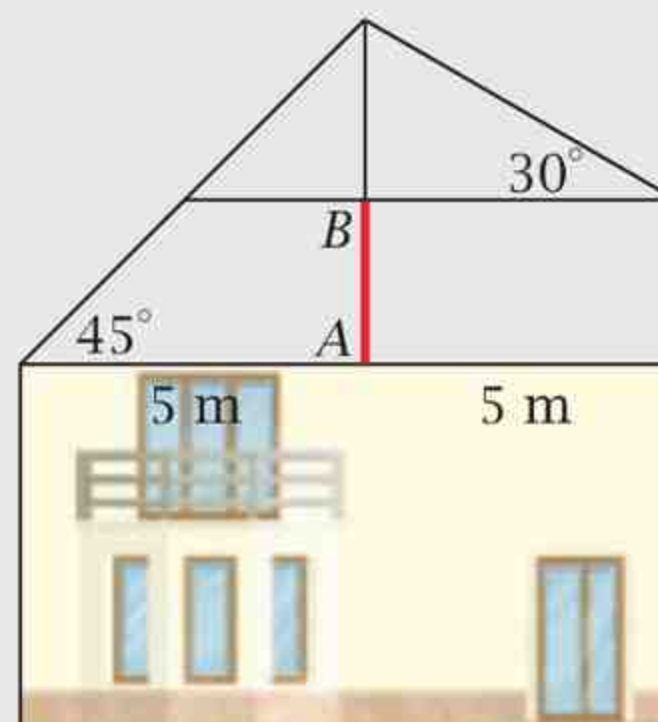
39. Krótsza podstawa trapezu równoramiennego ma długość 10 cm. Ramię ma długość 4 cm i jest nachylone do podstawy pod kątem 30° . Oblicz pole tego trapezu.

40. Uderzona kula bilardowa potoczyła się z punktu A w kierunku bandy, odbiła się i znalazła w punkcie B (zob. rysunek poniżej). Jaką drogę przebyła?



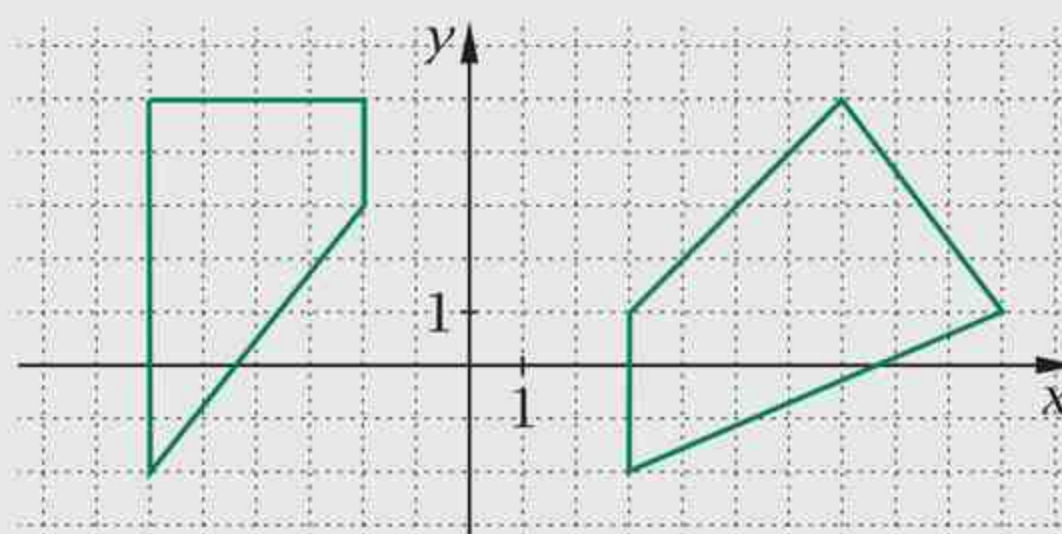
41. Kąty trójkąta mają miary 60° , 45° i 75° , a najkrótszy bok ma długość 6 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

*42. Jaką długość ma słup AB ?



Odcinki w układzie współrzędnych

43. Oblicz obwody narysowanych czworokątów.



44. Wierzchołki trójkąta mają współrzędne $A = (-2, -9)$, $B = (7, -7)$, $C = (-1, -1)$. Który bok tego trójkąta jest najkrótszy?

45. Czy trójkąt o wierzchołkach:

$$A = (-3, -2), B = (4, 1), C = (-1, 3)$$

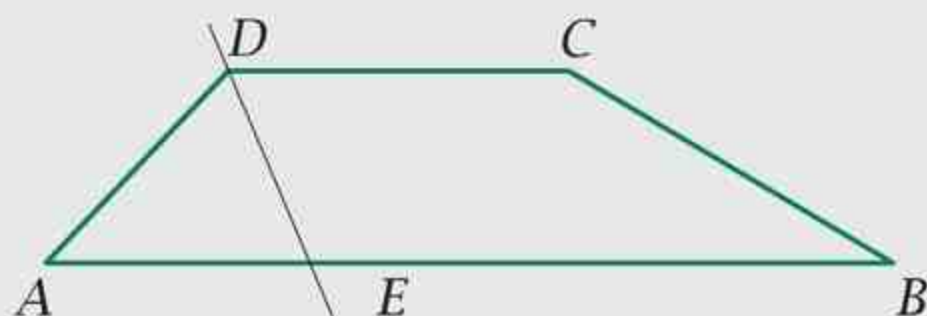
jest równoramienny?

46. Ustal, które z punktów $P_1 = (8, -5)$, $P_2 = (4, 12)$, $P_3 = (-6, 9)$, $P_4 = (10, -4)$ leżą na okręgu o środku w punkcie $S = (2, 3)$ i promieniu 10. Który punkt leży wewnątrz, a który — na zewnątrz tego okręgu?

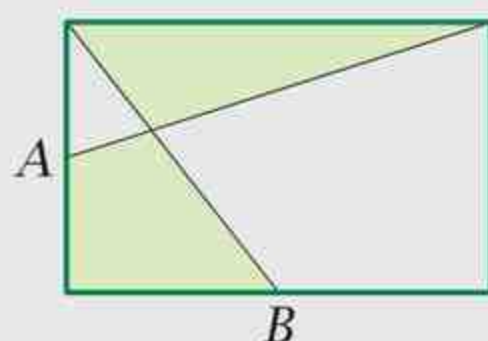
Dowodzenie w geometrii

47. Uzasadnij, że suma miar kątów wewnętrznych pięciokąta wypukłego jest równa 540° .

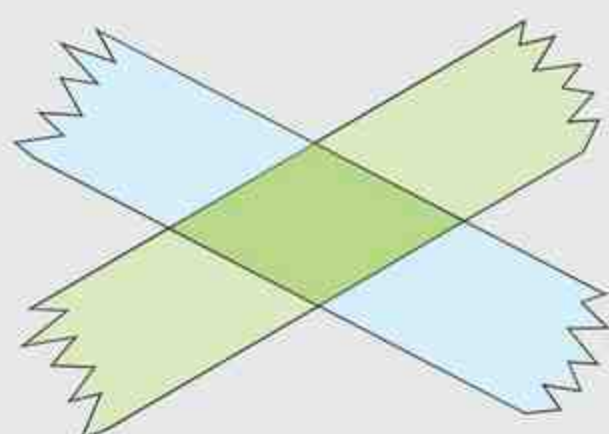
48. Czworokąt $ABCD$ na poniższym rysunku jest trapezem. Prosta DE dzieli kąt ADC na dwie równe części. Wykaż, że trójkąt AED jest równoramienny.



49. W prostokącie na poniższym rysunku punkty A i B są środkami boków. Wykaż, że pole zacieniowanego trójkąta jest równe polu zacieniowanego czworokąta.



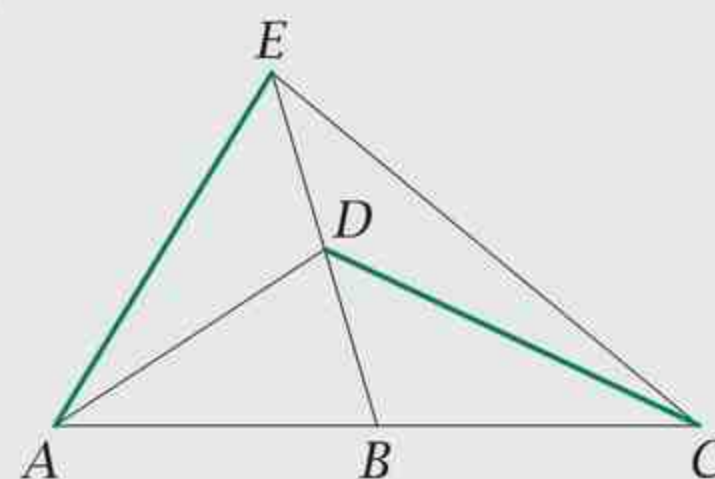
50. Dwa paski papieru o jednakowej szerokości przyklejono jeden na drugim, tak jak na rysunku. Wykaż, że figura, która jest ich częścią wspólną, to romb.



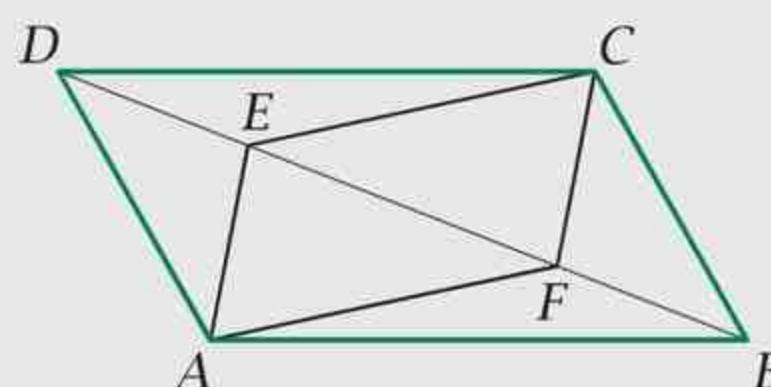
51. Udowodnij, że suma odległości dowolnego punktu trójkąta równobocznego od jego boków jest równa wysokości tego trójkąta.

52. Udowodnij, że suma odległości dowolnego punktu podstawy trójkąta równoramiennego od jego ramion jest równa wysokości opuszczonej na ramię.

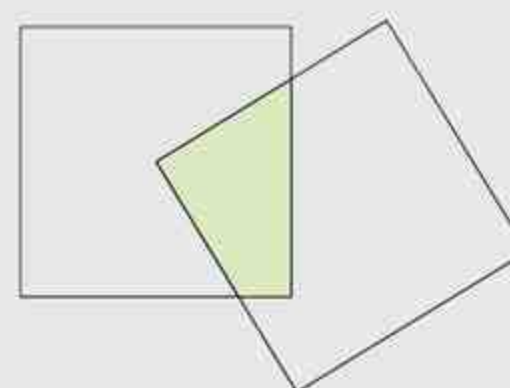
53. Odcinki AB , BC i AD na poniższym rysunku mają takie same długości, a punkt D jest środkiem odcinka BE . Wykaż, że odcinki AE i DC mają równe długości.



54. Na przekątnej BD równoległoboku $ABCD$ wybrano punkty E i F tak, że $DE = FB$. Wykaż, że czworokąt $AFCE$ jest też równoległobokiem.



55. Dwa jednakowe kwadraty położono jeden na drugim tak, że wierzchołek jednego z nich pokrywa się ze środkiem drugiego (punktem przecięcia przekątnych). Udowodnij, że figura, która jest częścią wspólną tych kwadratów ma pole 4 razy mniejsze od pola każdego z kwadratów.



IV ZASTOSOWANIA MATEMATYKI

- 1** Obliczenia procentowe
- 2** Zmiana o dany procent.
Lokaty bankowe
- 3** VAT i inne podatki
- 4** Czytanie diagramów
- 5** Podział proporcjonalny
- 6** Obliczanie prawdopodobieństw
- 7** Odczytywanie wykresów

➤ Przed klasówką, s. 158

➤ Zadania uzupełniające, s. 160

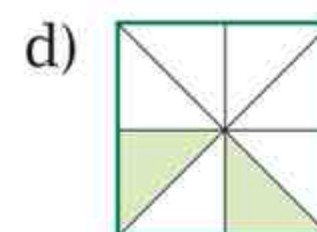
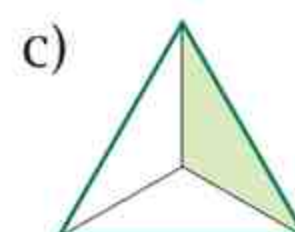
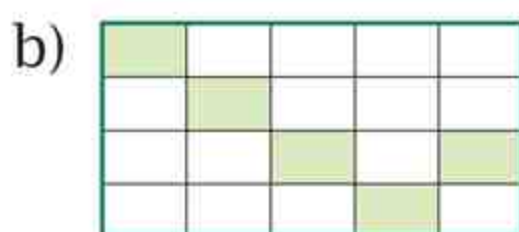
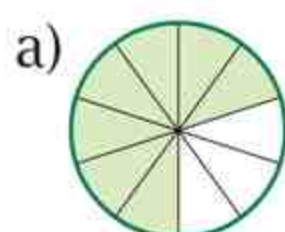
1 Obliczenia procentowe

Pytania i zadania kontrolne

A. Określ, ile procent ciasta zostało, jeśli goście zjedli:

- a) połowę ciasta, b) ćwierć ciasta, c) cztery piąte ciasta.

B. Określ w procentach, jakie części figur zamalowano.



C. a) Zamień na ułamki dziesiętne: 3% 48% 0,2% 55% 130%

b) Zamień na procenty: 0,35 0,7 0,007 6,5 1,2

D. Oblicz w pamięci najpierw 10% liczby 140, a następnie 5%, 20% i 70% tej liczby.

E. Określ, co jest większe:

- a) 0,27 ceny czy 20% tej ceny, c) $\frac{1}{3}$ pola czy 30% tego pola,
b) $\frac{4}{5}$ doby czy 90% doby, d) $1\frac{1}{8}$ ciasta czy 112% tego ciasta.

F. a) W klasie jest 10 chłopców i 15 dziewcząt. Jaki procent klasy stanowią chłopcy, a jaki — dziewczęta?

b) Ser zawiera 27% tłuszczu. Ile dekagramów tłuszczu jest w 2 kg sera?

Słowo **procent** oznacza setną część danej wielkości. Poniżej przypominamy, jak zamienia się procenty na ułamki zwykłe lub dziesiętne.

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$p\% = \frac{p}{100}$$

Przykłady

$$28\% = \frac{28}{100} \begin{cases} 0,28 \\ \frac{7}{25} \end{cases}$$

$$1,5\% = \frac{1,5}{100} \begin{cases} 0,015 \\ \frac{15}{1000} = \frac{3}{200} \end{cases}$$

Zamieniając ułamek na procent, wystarczy pomnożyć ten ułamek przez 100 i dopisać znak %.

Przykłady

$$\frac{3}{20} = \frac{3}{20} \cdot 100\% = 15\%$$

$$0,35 = 0,35 \cdot 100\% = 35\%$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot 100\% = 66\frac{2}{3}\% \approx 66,67\%$$

$$1,735 = 1,735 \cdot 100\% = 173,5\%$$

Warto pamiętać, że gdy zamieniamy ułamek dziesiętny na procent, wystarczy przesunąć przecinek o 2 miejsca w prawo, a gdy zamieniamy procent na ułamek dziesiętny, wystarczy przesunąć przecinek o 2 miejsca w lewo.

0,275 to 27,5%
1,5% to 0,015

Poniżej, na podstawie opowieści o zajęciach pasażerów podczas pewnego rejsu statkiem wycieczkowym, przypominamy trzy typy obliczeń — obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba, obliczanie procentu danej liczby oraz obliczanie liczby, gdy dany jest jej procent.

Przykład

Oficer kulturalno-oświatowy zaproponował pasażerom statku 15 rodzajów zajęć, w tym 3 przeznaczone dla dzieci. Jaki procent propozycji oficera przeznaczono dla dorosłych?

$$15 - 3 = 12$$

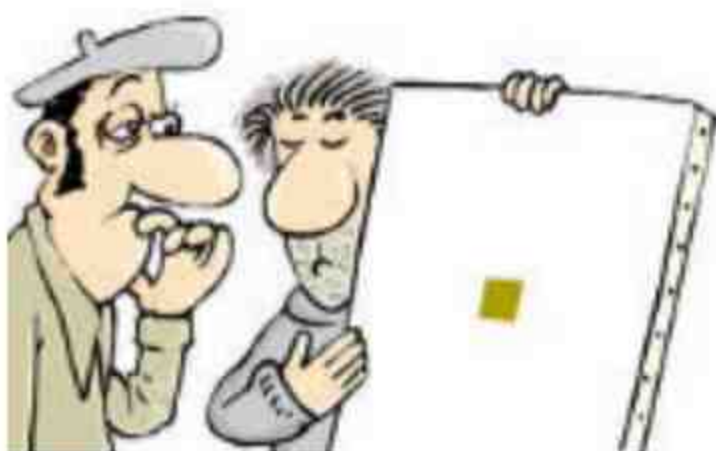
$$\frac{12}{15} = \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \cdot 100\% = 80\%$$

Liczba propozycji dla dorosłych wynosiła 12 i stanowiły one $\frac{12}{15}$ wszystkich propozycji.

Odp. Dla dorosłych przeznaczono 80% zajęć.



Przykład



Na zajęcia plastyczne uczęszczało 15 osób, chociaż 60% z nich nie miało żadnych uzdolnień. Ile osób nie miało uzdolnień?

$$0,6 \cdot 15 = 9$$

$$60\% = 0,6$$

Odp. 9 osób nie miało uzdolnień.

Przykład

W sekcji sportowej 18 mężczyzn ćwiczyło codziennie gimnastykę artystyczną. Stanowili oni 90% członków tej sekcji. Ile osób liczyła sekcja sportowa?

x — liczba członków sekcji sportowej

$$0,9x = 18 \quad | \quad 90\% = 0,9$$

$$x = \frac{18}{0,9} = 20$$

Odp. Do sekcji sportowej należało 20 osób.

**Zadania**

1. Zastąp litery odpowiednimi liczbami. Postaraj się liczyć w pamięci.

a) 20% liczby 15 to a

g) 10% liczby 0,8 to g

b) 25% liczby b to 12

h) 10% liczby h to 0,7

c) 5% liczby 20 to c

i) liczba 8 to $i\%$ liczby 40

d) liczba 3 to $d\%$ liczby 12

j) 0,5% liczby 400 to j

e) 200% liczby e to 4,6

k) 150% liczby k to 300

f) liczba 60 to $f\%$ liczby 15

l) liczba 40 to $l\%$ liczby 10

2. a) Przez 18 dni listopada padał deszcz. Jaki procent liczby dni listopada stanowiły dni deszczowe?

b) Węglowodany stanowią 57% kremu orzechowego. Ile węglowodanów jest w 400 g takiego kremu?

c) Część zebranych jabłek to owoce uszkodzone. Jest ich 9 kg, co stanowi 37,5% całego zbioru. Ile kilogramów jabłek zebrano?

3. a) 12,5% kwoty 1600 zł — ile to złotych?

b) Jaka to liczba, której 150% jest równe 330?

c) Jaka to pojemność, której 3% jest równe 12 litrów?

d) Jaki procent kwoty 200 zł stanowi 240 zł?

e) Jaka to odległość, której 1,5% jest równe 300 m?

4. W głosowaniu na przewodniczącego samorządu szkolnego wzięło udział 80% uczniów szkoły. Zwycięzca wyborów uzyskał 60% oddanych głosów. Czy prawdą jest, że głosowała na niego ponad połowa uczniów tej szkoły?

Symbol ‰ oznacza **promil**, czyli tysięczną część danej wielkości.

$$1‰ = \frac{1}{1000} = 0,001$$

$$1‰ = \frac{1}{10} \%$$

5. Dwutlenek węgla stanowi zaledwie około 0,3‰ objętości powietrza. W płucach człowieka mieści się 5 litrów powietrza. Ile dwutlenku węgla jest w powietrzu wypełniającym płuca?

6. Jedna tabletka preparatu Vitamineral waży 1,8 g i zawiera 40 mg witaminy C. Jakim promilem masy tabletki Vitamineralu jest masa zawartej w niej witaminy C?

7. Przyjrzyj się tabeli. Jakie liczby trzeba wpisać zamiast liter *a*, *b* i *c*?

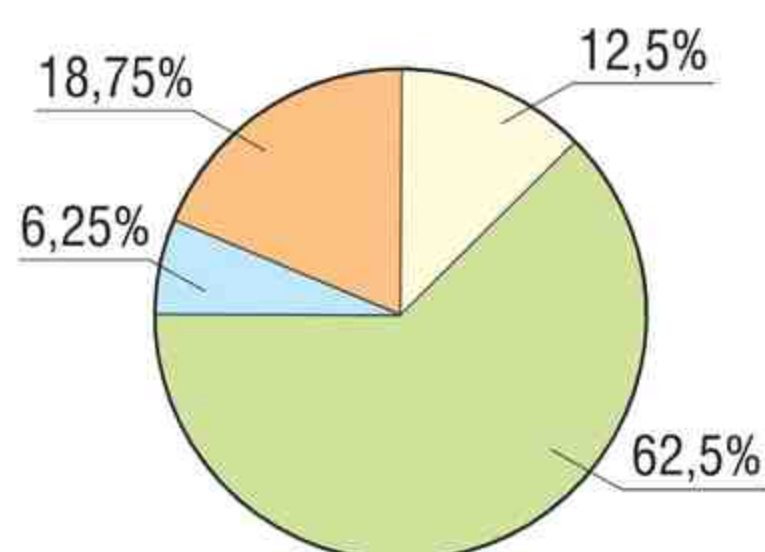


KOBIETY W ARMII W 2010 ROKU

Kraj	Liczba kobiet (w tys.)	Liczebność armii (w tys.)	Udział kobiet (w procentach)
USA	203	1400	14,5
Holandia	<i>a</i>	49,3	8,9
Węgry	3,9	<i>b</i>	17,5
Polska	1,8	99,7	<i>c</i>

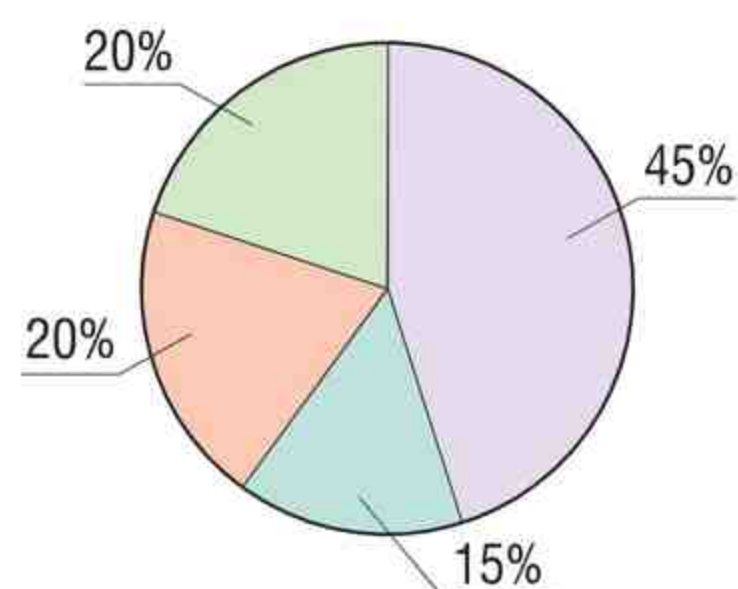
8. Diagramy kołowe przedstawiają skład pewnej orkiestry symfonicznej oraz skład jej sekcji instrumentów smyczkowych. W tej orkiestrze na skrzypcach gra 27 osób. Ilu muzyków liczy ta orkiestra? Ilu z nich gra na drewnianych instrumentach dętych?

Orkiestra symfoniczna



- instrumenty dęte drewniane
- instrumenty dęte blaszane
- instrumenty perkusyjne
- instrumenty smyczkowe

Instrumenty smyczkowe



- skrzypce
- altówki
- wiolonczele
- kontrabasy

9. Aż 98% zasobów wody na Ziemi stanowią wody słone. Słodkiej wody jest 28,5 mln km³, ale 80% tej wody jest uwięzione w lodowcach.

- Jaką objętość miałaby woda ze stopienia lodowców?
- Jaką objętość mają zasoby wody na Ziemi?

Mówimy, że roztwór cukru jest 15-procentowy, gdy masa cukru stanowi 15% masy roztworu.

10. a) Do 14 kg wody wsypano 2 kg cukru. Wyraź w procentach stężenie otrzymanego roztworu.

b) Ile cukru znajduje się w 30 dag roztworu 9-procentowego?

c) Do wody w garnku dosypano 20 g cukru i otrzymano roztwór 15-procentowy. Ile waży roztwór w garnku?

11. a) Ile soli trzeba wsypać do 12 kg wody, aby otrzymać roztwór piętnastoprocentowy?

b) W jakiej ilości wody należy rozpuścić 30 g soli, żeby otrzymać roztwór 20-procentowy?

c) Jaka powinna być masa soli i wody, aby po rozpuszczeniu soli w wodzie otrzymać 5,5 kg roztworu o stężeniu 10%?

12. Lidyjski król Krezus żyjący w VI w. przed Chrystusem zarządził, że stop złota i srebra, z którego bite są monety, ma zawierać tylko 3 części srebra na 40 części złota. Jaki procent srebra zawierał taki stop?

Sprawdź, czy umiesz

1. Które zdanie jest nieprawdziwe?

- 45% długości 200 m to 90 m.
- 1,5% masy 40 kg to 6 kg.

- 0,3% objętości 150 l to 0,45 l.
- 125% kwoty 120 zł to 150 zł.



2. Dienne zapotrzebowanie piętnastolatka na białko wynosi 90 g. Ile twarogu powinien zjeść piętnastolatek, aby zapewnić organizmowi potrzebną ilość białka?

- 50 dag
- 16,2 dag
- 50 g
- 200 g

2

Zmiana o dany procent. Lokaty bankowe

Pytania i zadania kontrolne

- A. Liczba a jest dodatnia. Zapisz:
- liczbę, która jest o 26% większa od liczby a ,
 - liczbę, która jest o 26% mniejsza od liczby a .
- B. a) Spodnie kosztowały 80 zł. Ile kosztują po obniżce o 25%?
b) Bilety kolejowe podrożały o 10%. Ile teraz kosztuje bilet, który przed podwyżką kosztował 5 zł?
- C. a) Metr kwadratowy lokalu kosztował 5000 zł, ale cenę obniżono do 4500 zł. O ile procent obniżono cenę?
b) Przed remontem w teatrze mieściło się 800 widzów, a teraz mieści się ich 1000. O ile procent wzrosła liczba miejsc na widowni?
- D. a) Cenę pewnego towaru obniżono o 25% i wynosi ona obecnie 120 zł. Ile wynosiła przed obniżką?
b) W szkolnym klubie sportowym jest teraz 60 osób. To o 50% więcej niż w zeszłym roku. Ilu było członków klubu w zeszłym roku?

Przy rozważaniu zagadnień dotyczących podwyżek lub obniżek warto pamiętać, że liczbę o dany procent większą lub mniejszą można zapisać na dwa sposoby. Na przykład:

$$\begin{array}{l} \text{o 10\% więcej niż } a \text{ to} \\ \begin{array}{l} a + 0,1a \\ \quad \uparrow \\ \quad a + 10\% \text{ liczby } a \\ \\ 1,1a \\ \quad \uparrow \\ \quad 110\% \text{ liczby } a \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{o 20\% mniej niż } a \text{ to} \\ \begin{array}{l} a - 0,2a \\ \quad \uparrow \\ \quad a - 20\% \text{ liczby } a \\ \\ 0,8a \\ \quad \uparrow \\ \quad 80\% \text{ liczby } a \end{array} \end{array}$$

Przykład

W chórze 8 osób śpiewało basem, a liczba osób, które śpiewały cienko, była o 25% większa. Ile osób cienko śpiewało?

$$1,25 \cdot 8 = \frac{5}{4} \cdot 8 = 10 \quad | \quad 125\% \text{ liczby } 8 \text{ to } 1,25 \cdot 8.$$

Odp. Cienkim głosem śpiewało 10 osób.



Przykład

DKF (Dyskusyjny Klub Filmowy) rozwijał się bardzo prężnie. Na początku rejsu należały do niego 2 osoby, a już po dwóch dniach — 5 osób. O ile procent wzrosła liczba członków DKF-u?

$$\frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot 100\% = 150\%$$

Obliczamy stosunek liczby nowych osób do początkowej liczby osób i zamieniamy ułamek na procent.

Odp. Liczba członków DKF-u wzrosła o 150%.

Przykład

Szachistów było tylko pięciu, ale o 150% więcej niż brydżystów. Ilu było brydżystów?

x — liczba brydżystów

$$x + 1,5x = 5 \quad | \quad 150\% = 1,5$$

$$2,5x = 5$$

$$x = \frac{5}{2,5} = 2$$

Odp. Brydżystów było dwóch.



Gdy oddasz do banku na przechowanie przez rok pewną kwotę pieniędzy, to bank po roku dopisze do twojego konta pewną kwotę, tzw. **odsetki**. W Banku Miejskim oprocentowanie wynosi 3% rocznie, czyli stan konta po upływie roku można obliczyć w następujący sposób.

Tyle wpłacasz do banku (lokata)		Tyle doliczy po roku Bank Miejski (odsetki)		Po roku na koncie
↓		↓		↓
kwota wpłacona	+	3% wpłaconej kwoty	=	kwota powiększona o odsetki

ĆWICZENIE. Klient wpłacił do Banku Miejskiego 1200 zł na roczną lokatę. Ile wyniosą odsetki po roku? Jaki będzie po roku stan jego konta?

Uwaga. Bank od doliczonych odsetek oblicza podatek (19% kwoty odsetek) i przekazuje go w imieniu klienta do skarbu państwa, ale przy rozwiązywaniu zadań podatku od odsetek nie będziemy brali pod uwagę.

Przykład

Na pewną lokatę roczną wpłacono 5000 zł. Po roku stan tej lokaty wzrósł do 5200 zł. Jakie jest oprocentowanie tej lokaty?

x — oprocentowanie lokaty wyrażone w procentach

$$5000 + \frac{x}{100} \cdot 5000 = 5200 \quad | \quad \text{kwota na koncie} = \text{kwota wpłacona} + \text{odsetki}$$

$$x = \frac{200}{50}$$

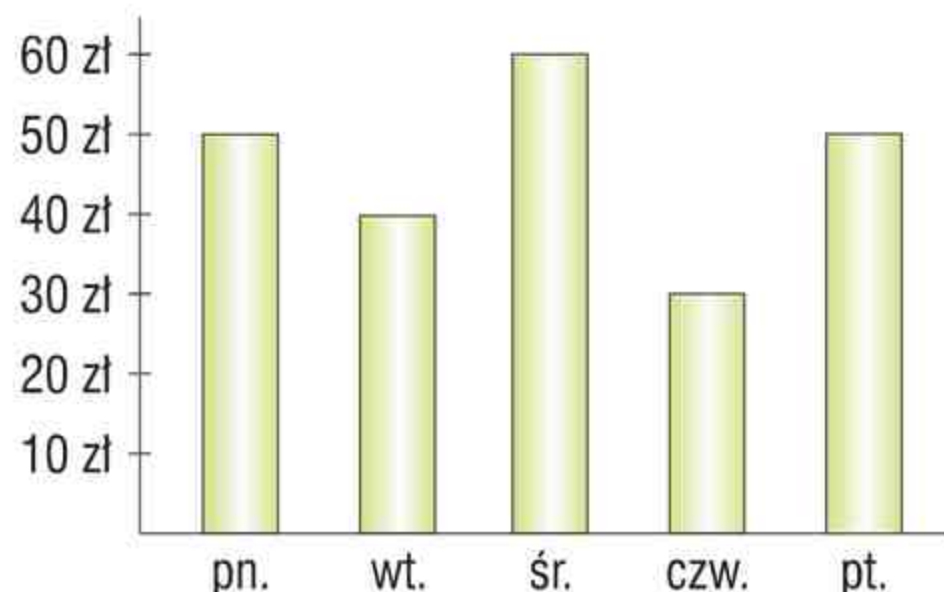
$$x = 4$$

Odp. Oprocentowanie wynosi 4%.

Zadania

1. Oblicz (postaraj się liczyć w pamięci).
 - a) O 10% mniej niż 3000 zł — ile to złotych?
 - b) O 125% więcej niż 200 m — ile to metrów?
 - c) O 2 zł mniej niż 50 zł — o ile to procent mniej?
 - d) O 10 kg więcej niż 40 kg — o ile to procent więcej?
 - e) Jeśli po obniżce o 25% nowa cena jakiegoś towaru wynosi 300 zł, to ile wynosiła przed obniżką?
 - f) Jaka kwota po podwyżce o 50% będzie wynosiła 300 zł?
2. Liczba n jest dodatnia. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego:
 - a) liczbę o 50% większą od n ,
 - b) liczbę o 20% mniejszą od n .
3. Liczba a jest dodatnia. Zapisz w jak najprostszej postaci:
 - a) liczbę o 80% większą od połowy liczby a ,
 - b) liczbę o 35% mniejszą od liczby a ,
 - c) liczbę, której połowa stanowi 60% liczby a ,
 - d) liczbę, która jest o 16% mniejsza od 150% liczby a ,
 - e) liczbę równą 120% liczby mniejszej od a o 20%.
4. a) Kosiarka do trawy kosztowała 750 zł. Teraz jest tańsza — kosztuje 600 zł. O ile procent obniżono cenę kosiarki?
 b) Lodówka kosztowała 1150 zł. Przeceniono ją o 12%. Ile teraz kosztuje ta lodówka?
 c) Cenę żyrandola obniżono o 15% i obecnie wynosi ona 272 zł. Ile kosztował ten żyrandol przed obniżką?

5. Rysunek przedstawia, jak kształtowały się ceny akcji firmy Blif w kolejnych dniach tygodnia.



a) O ile procent wzrosła cena akcji w środę w porównaniu z wtorkiem?

b) Pan Rafał kupił w poniedziałek 120 akcji firmy Blif. We wtorek sprzedał 35% tych akcji, a resztę sprzedał w środę. Czy jego kapitał wzrósł czy zmalał dzięki tym operacjom? O ile złotych?

Ciekawostka

W większości krajów ceny produktów i usług systematycznie rosną. Wzrost cen nazywamy inflacją i wyrażamy ją w procentach. Jeżeli na przykład inflacja wynosi 2% w skali roku, to znaczy, że przeciętnie w ciągu roku ceny wzrosły o 2%.

Jedną z największych w historii inflację — hiperinflację — zanotowano w latach dwudziestych w Niemczech. W 1923 r. inflacja tam była tak wielka, że ceny w restauracjach zmieniały się w trakcie obiadu. Cena chleba mogła się zwiększyć w ciągu jednego dnia o 25000%. Roczna inflacja wyniosła 30 mld procent. W listopadzie 1923 r. dolar kosztował 4,2 biliona marek.

6. Inflacja w Polsce w 2000 roku wyniosła 10%. Pani Jabłonowska w styczniu 2000 roku zarabiała 1500 zł, a w styczniu 2001 roku — 1600 zł. Czy realna wartość jej pensji wzrosła czy zmalała?
7. W 2014 roku przyrost naturalny w Polsce był ujemny. Liczba ludności Polski w ciągu tego roku obniżyła się o 0,11‰. Pod koniec 2013 roku w Polsce żyło około 38 496 tys. osób. Oszacuj liczbę ludności naszego kraju na koniec 2014 roku.
8. Pan Mariusz wpłacił na roczną lokatę pewną kwotę. Po roku otrzymał 2455,20 zł, w tym 55,20 zł odsetek.
- Jakie było oprocentowanie tej lokaty?
 - Jaki będzie stan konta pana Mariusza po kolejnym roku, jeśli zostawi na lokacie całą kwotę i oprocentowanie się nie zmieni?
9. Pan Kowalski wpłacił do banku 2000 zł na konto, którego oprocentowanie wynosi 4% w stosunku rocznym. Jaka kwota będzie miał pan Kowalski po roku, a jaką po dwóch latach, jeżeli w tym czasie nie będzie wpłacał ani wypłacał żadnych pieniędzy i oprocentowanie się nie zmieni?

Jeśli poparcie dla pewnej partii wynosiło 40% i po pewnym czasie wzrosło do 50%, to możemy powiedzieć, że wzrosło o 10 **punktów procentowych**. Uwaga. Stwierdzenie, że poparcie dla partii wzrosło o 10%, byłoby błędem.

10. Gdy Ania zaczęła kampanię w wyborach do samorządu szkolnego miała poparcie 40% z 500 uczniów szkoły. W wyborach głosowało na nią 60% uczniów.

a) Przeczytaj informacje w ramce. O ile punktów procentowych wzrosło jej poparcie w czasie kampanii?

b) O ile procent uczniów więcej poparło Anię w wyborach niż popierało ją na początku kampanii?

11. Mleko „Eko” zawiera 3% tłuszczu, a mleko „Slim” — 2% tłuszczu. O ile punktów procentowych więcej tłuszczu jest w mleku „Eko” niż w mleku „Slim”? O ile procent więcej tłuszczu zawiera mleko „Eko” w porównaniu z mlekiem „Slim”?

 ***12.** Przeczytaj uważnie informacje podane na rysunku obok. O ile procent obniżyła się cena jednego woreczka do robienia kul lodu?



Teraz 22 woreczki, czyli o 10% więcej, za tę samą cenę.

 ***13.** Podczas zebrania samorządu szkolnego propozycję wydłużenia przerwy poparło 7 osób, czyli więcej niż 60%, ale mniej niż $\frac{2}{3}$ uczestników zebrania. Ile osób uczestniczyło w zebraniu?

Sprawdź, czy umiesz

1. Pan Tomaszewski zarabiał przez pierwszą połowę roku 3000 zł miesięcznie. W lipcu dostał podwyżkę o 500 zł, a w grudniu kolejną podwyżkę o 10%. O ile procent wzrosła jego miesięczna pensja w ciągu roku?

A. o ok. 17% B. o ok. 28% C. o ok. 83% D. o ok. 128%

2. Po obniżce ceny o 20% żelazko kosztuje 110 zł. Jaka była cena tego żelazka przed obniżką?

A. 132 zł B. 88 zł C. 92 zł D. 137,50 zł

3. Na lokatę roczną o oprocentowaniu 3% wpłacono 500 zł. Stan konta po upływie dwóch lat wyniesie:

A. 530 zł B. 515 zł C. 530,45 zł D. 555 zł

3 VAT i inne podatki

W czasie zakupów w sklepach można spotkać informacje podobne do tych na obrazku.

cena netto	250 zł
+ 23% VAT	
cena brutto	42 zł
w tym	5% VAT
cena brutto	324 zł
w tym	8% VAT

Kwota, którą płacimy za towar w sklepie, to cena **brutto**. Tę cenę sprzedawca ustala w następujący sposób:

- ① Najpierw ustala, jaką kwotę chce otrzymać za dany towar (cenę netto).
- ② Następnie sprzedawca oblicza kwotę podatku (VAT). W Polsce na większość towarów obowiązuje stawka 23%, a niektóre towary i usługi objęte są stawką 5% lub 8%.
- ③ Na końcu ustala cenę brutto, która jest sumą ceny netto i kwoty podatku.

kwota dla sprzedawcy		VAT (kwota podatku)		kwota, którą płacimy
↓		↓		↓
cena netto	+	23% ceny netto (albo 5% ceny netto) (albo 8% ceny netto)	=	cena brutto

Po sprzedaży towaru sprzedawca musi przekazać kwotę VAT do skarbu państwa. VAT to skrót od angielskiej nazwy *Value Added Tax*.

ĆWICZENIE. Stawka VAT na sprzęt gospodarstwa domowego wynosi 23%. Sprzedawca ustalił cenę netto robota kuchennego na 1500 zł. Ile będzie kosztował ten robot?

Przykład

Jacek zapłacił w sklepie za aparat fotograficzny 1107 zł. Ile złotych wynosiła cena netto tego aparatu, a ile — podatek VAT? Stawka VAT na ten artykuł wynosi 23%.

x — cena netto

$$1,23x = 1107$$

$$x = 900$$

Kwota, którą zapłacił Jacek, jest o 23% większa od ceny netto, więc jest równa $1,23x$.

Zatem podatek wyniósł $1107 \text{ zł} - 900 \text{ zł} = 207 \text{ zł}$.

Odp. Cena netto aparatu wynosiła 900 zł, a podatek — 207 zł.

Oprócz VAT państwa pobierają od obywateli podatek od dochodów PIT. PIT to skrót od angielskiej nazwy *Personal Income Tax*.

W Polsce większość obywateli płaci 12% podatku od dochodów. Podatek ten oblicza się według następującego schematu:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{kwota do opodatkowania} & & \text{podatek od dochodu} & & \text{kwota po opodatkowaniu} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{kwota brutto} & - & 12\% \text{ kwoty brutto} & = & \text{kwota netto}
 \end{array}$$

Uwaga. Zwykle kwota do opodatkowania jest nieco niższa niż dochód obywatela, na przykład ze względu na możliwość odliczania tzw. ulg podatkowych.

Przykład

Dochód pana Kowalskiego w ciągu roku wyniósł 57 000 zł. Kowalski mógł od tej kwoty odliczyć 7000 zł i od pozostałej kwoty oddał do skarbu państwa 12%. Ile złotych podatku PIT zapłacił pan Kowalski?

Kwota do opodatkowania:

$$57\,000 \text{ zł} - 7\,000 \text{ zł} = 50\,000 \text{ zł}$$

$$0,12 \cdot 50\,000 \text{ zł} = 6\,000 \text{ zł}$$

Odp. Kwota podatku wyniosła 6000 zł.

Różnicę sposobów naliczania podatków VAT i PIT zilustrowano na poniższych schematach.

	cenę towarów i usług		zarobki obywateli
netto	a	brutto	b
VAT	$+ 0,23 a$	PIT	$- 0,12 b$
brutto	$a + 0,23 a$	netto	$b - 0,12 b$

Zadania

1. Który z tych komputerów jest tańszy?





cena brutto 861 zł



cena netto 120 zł

cena brutto ,
w tym VAT 69 zł

2. Stawka VAT przy sprzedaży obuwia, odzieży i sprzętu sportowego wynosi 23%. Korzystając z informacji podanych obok, odpowiedz:

- Jaka jest cena brutto butów?
- Jaka jest cena netto nart?
- Jaka jest cena netto, a jaka brutto płaszcza?

3. Jeden metr kwadratowy mieszkania na osiedlu Marysieńka kosztuje brutto 6000 zł. Jaka kwota pozostaje na koncie firmy budowlanej, a jaka kwota VAT jest przekazywana do skarbu państwa po sprzedaży mieszkania o powierzchni 50 m², jeśli stawka VAT wynosi 8%? Wyniki zaokrąglaj do 1 zł.

4. Stawka VAT na watę cukrową wynosi 23%. Za porcję waty trzeba zapłacić 4 zł. Sprzedawca waty cukrowej sprzedał w lipcu 2460 porcji waty. Jaką kwotę VAT odprowadził z tego tytułu do skarbu państwa?

5. Pan Leszek, właściciel restauracji, ustala ceny w taki sposób:
- Oblicza, ile kosztowały wszystkie potrzebne składniki.
 - Mnoży otrzymaną kwotę przez 3.
 - Do kwoty z punktu 2. pan Leszek dolicza 8% VAT. Otrzymana kwota to cena podawana w menu.

DESERY



carpaccio ze śliwek
w sosie cytrynowym
z gałką lodów orzechowych

9,72 zł

łazda z owocami
w sosie malinowym

16,20 zł

naleśniki z pomarańczami
w sosie z białej czekolady

19,44 zł

a) Jaką kwotę zapłaci klient w restauracji pana Leszka za danie, jeśli produkty potrzebne do jego przygotowania kosztowały 8 zł?

b) Popatrz na fragment menu z restauracji pana Leszka. Oblicz, ile kosztowały produkty potrzebne do przygotowania najdroższego z deserów.

c) W pewnym miesiącu w restauracji sprzedano 20 tart owocowych. Ile wynosił VAT od tej sprzedaży?

6. Jaki procent ceny brutto stanowi VAT, jeśli stawka VAT wynosi 23%? Odpowiedź podaj w przybliżeniu. Czy rację ma sprzedawca, który twierdzi, że przy stawce 23% VAT podatek stanowi prawie $\frac{1}{5}$ ceny brutto każdego towaru?

7. a) Wynagrodzenie brutto pracownika wyniosło 5300 zł. Jakie było jego wynagrodzenie netto, jeśli podatek obliczany jest według stawki 12%?
b) Podatek pewnego obywatela obliczony według stawki 12% wyniósł 1800 zł. Od jakiej kwoty obliczono ten podatek?

8. W roku 2015 w Polsce podatek od dochodów (PIT) obliczany był według poniższej tabeli. Oblicz wysokość podatku, gdy podstawa obliczenia wynosiła:

- a) 20 000 złotych, b) 50 000 złotych, c) 90 000 złotych.

Podstawa obliczenia podatku		Podatek wynosi
ponad	do	
	85 528 zł	18% podstawy obliczenia minus 556,02 zł
85 528 zł		14 839,02 zł + 32% nadwyżki ponad 85 528 zł

9. W państwach A, B i C obowiązującą walutą są talary, a obywatele płacą podatki według następujących zasad.

Państwo A	Państwo B	Państwo C
Wszyscy obywatele płacą 12% podatku od uzyskanych dochodów.	Jeśli obywatel w ciągu roku zarobił mniej niż 2000 talarów, to nie płaci podatku. Obywatele, którzy zarobili 2000 talarów lub więcej, płacą 15% podatku, ale tylko od kwoty powyżej 2000 talarów.	Jeśli obywatel w ciągu roku zarobił nie więcej niż 5000 talarów, to płaci 10% podatku. Jeśli zarobił więcej, to podatek wynosi 500 talarów + 20% od kwoty powyżej 5000 talarów.

- a) Jaką kwotę rocznego podatku zapłacą w każdym z tych państw obywatele, którzy zarobili w ciągu roku 7000 talarów, a ile — obywatele, którzy zarobili 20 000 talarów?
b) Pewien obywatel państwa B zapłacił 600 talarów podatku. Jaki był jego roczny dochód?
c) Dochód netto pewnego mieszkańca państwa A (po zapłaceniu podatku) wyniósł 13 200 talarów. Jaki podatek zapłacił ten obywatel?
d) Pewien obywatel państwa C zapłacił 1300 talarów podatku. Jaki był jego roczny dochód?

Sprawdź, czy umiesz

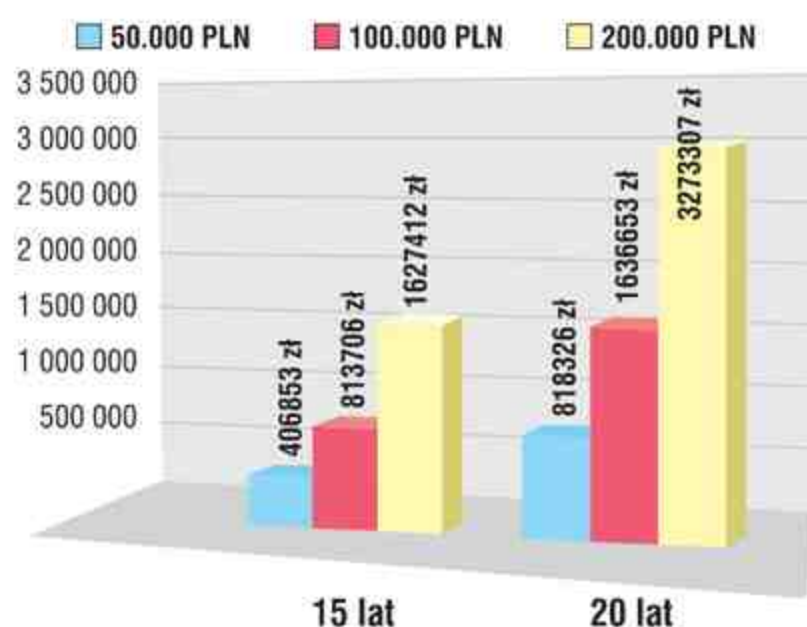
1. Cena netto za naprawę pralki wyniosła 55 zł. Stawka VAT na tego typu usługi wynosi 8%. Ile złotych trzeba zapłacić za naprawę pralki?
A. 55 zł B. 59,40 zł C. 63 zł D. 67,10 zł
2. Cena brutto lodówki (z doliczonym VAT) wynosi 738 zł. Stawka VAT jest równa 23%. Zatem cena netto lodówki wynosi:
A. 570,96 zł B. 600 zł C. 700 zł D. 393,04 zł
3. Firma płaci 19% podatku od dochodu. Roczny podatek firmy Milux wyniósł 15 960 zł. Jaki był dochód tej firmy?
A. 303 240 zł B. 18 992,40 zł C. 129 276 zł D. 84 000 zł

→ zadania uzupełniające 15–20, str. 162–163

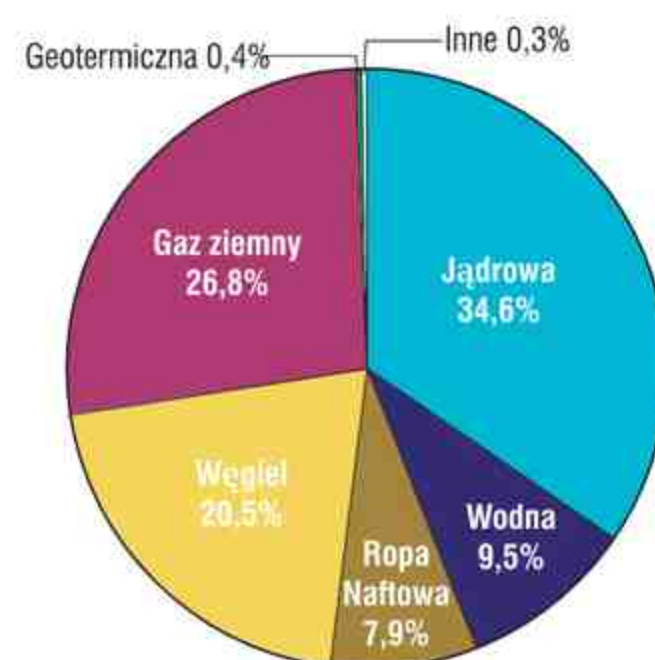
4

Czytanie diagramów

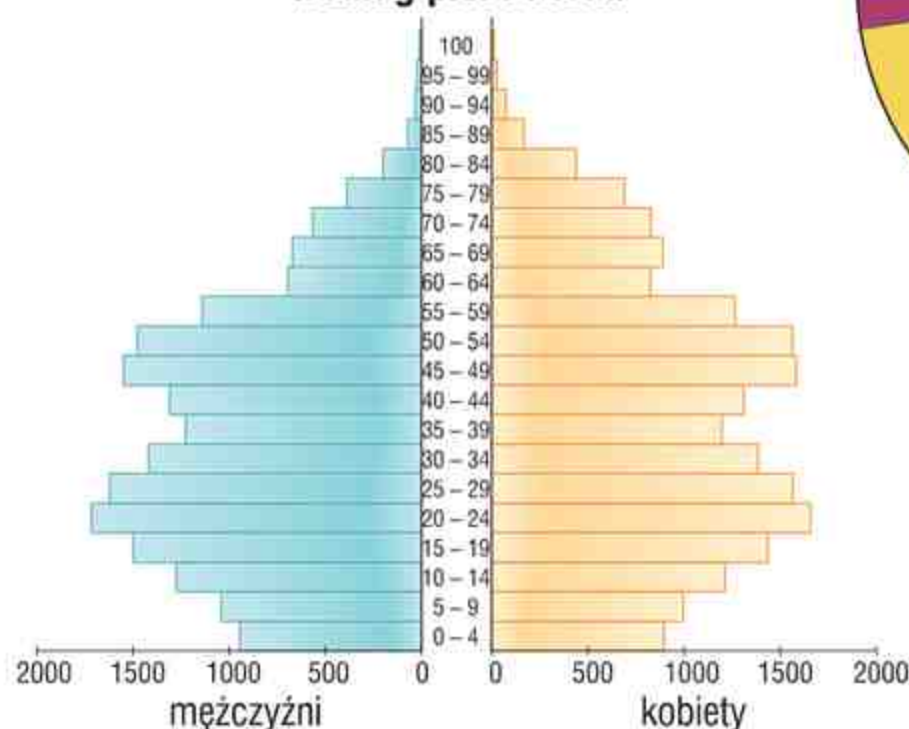
**Przykładowe zyski z inwestowania
w fundusze inwestycyjne**



Produkcja energii elektrycznej



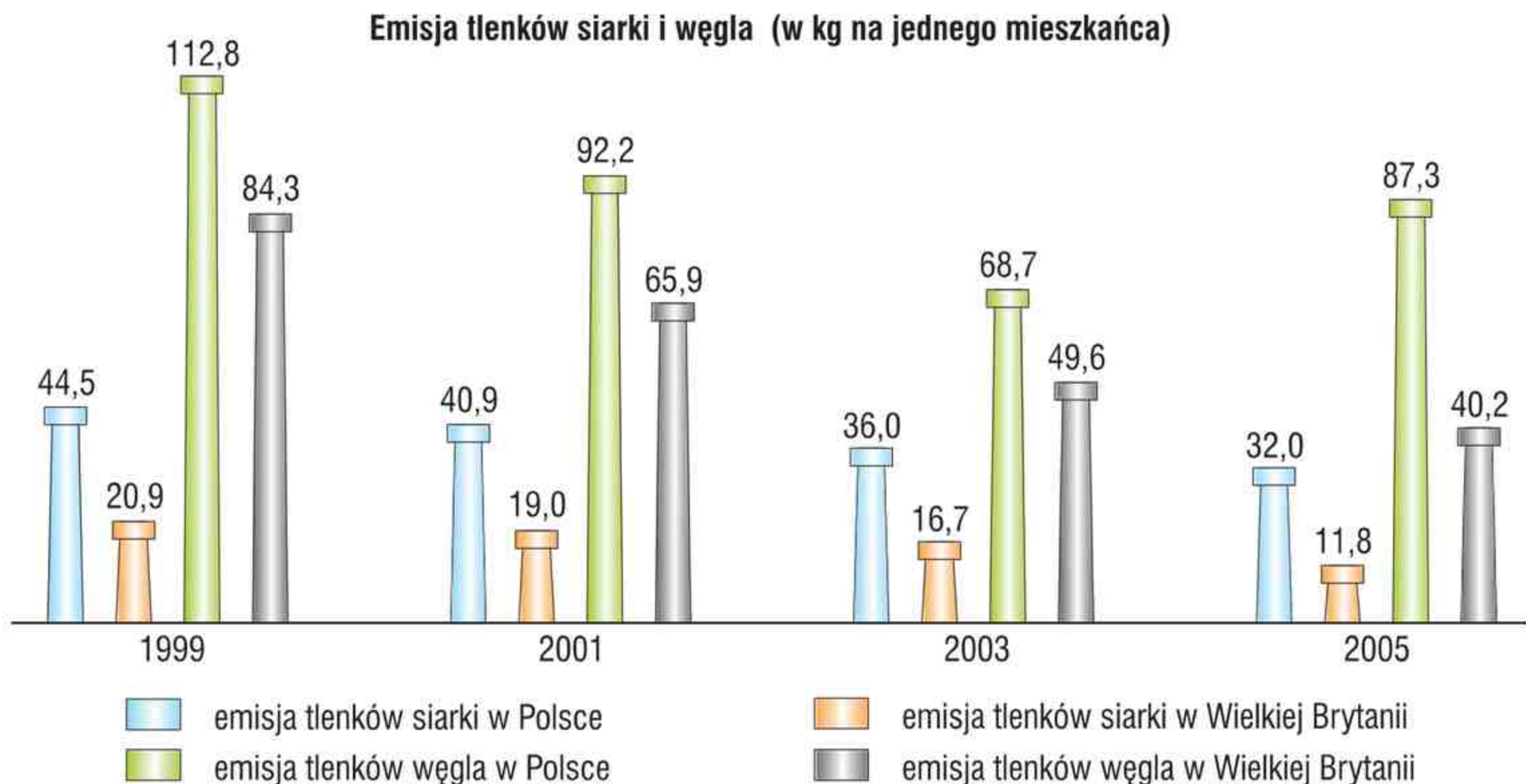
**Struktura ludności Polski
według płci i wieku**



Przedstawianie danych za pomocą diagramów i tabel na ogół jest bardzo obrazowe i pozwala szybciej odczytywać wiele faktów, a także uzyskać dodatkowe informacje po wykonaniu odpowiednich obliczeń.

W tym rozdziale w każdym omawianym zagadnieniu trzeba skorzystać z kilku informacji przedstawionych w różnej formie.

Przyjrzyj się informacjom przedstawionym na diagramie i w tabeli.



Na podstawie tych informacji możemy na przykład obliczyć, ile w Polsce, a ile w Wielkiej Brytanii wyemitowano w 2005 roku tlenków węgla w przeliczeniu na 1 km² powierzchni.

Ludność i powierzchnia Polski i Wielkiej Brytanii

Państwo	Ludność [tys.]*	Powierzchnia [tys. km ²]
Polska	38 174	312
Wielka Brytania	60 060	244,1

* Dane za rok 2005

W Polsce:

tlenki węgla: $38\,174\,000 \cdot 87,3\text{ kg} \approx 3333\text{ tys. ton}$

na 1 km²: $\frac{3333\text{ tys. ton}}{312\text{ tys. km}^2} \approx 10,7\text{ t/km}^2$

W Wielkiej Brytanii:

tlenki węgla: $60\,060\,000 \cdot 40,2\text{ kg} \approx 2414\text{ tys. ton}$

na 1 km²: $\frac{2414\text{ tys. ton}}{244,1\text{ tys. km}^2} \approx 9,89\text{ t/km}^2$

ĆWICZENIE A. Wykonaj podobne obliczenia dla tlenków siarki.

Korzystając z podanych informacji, można także obliczyć na przykład, o ile procent zmniejszyła się w Polsce emisja tlenków siarki na jednego mieszkańca w latach 1999–2005.

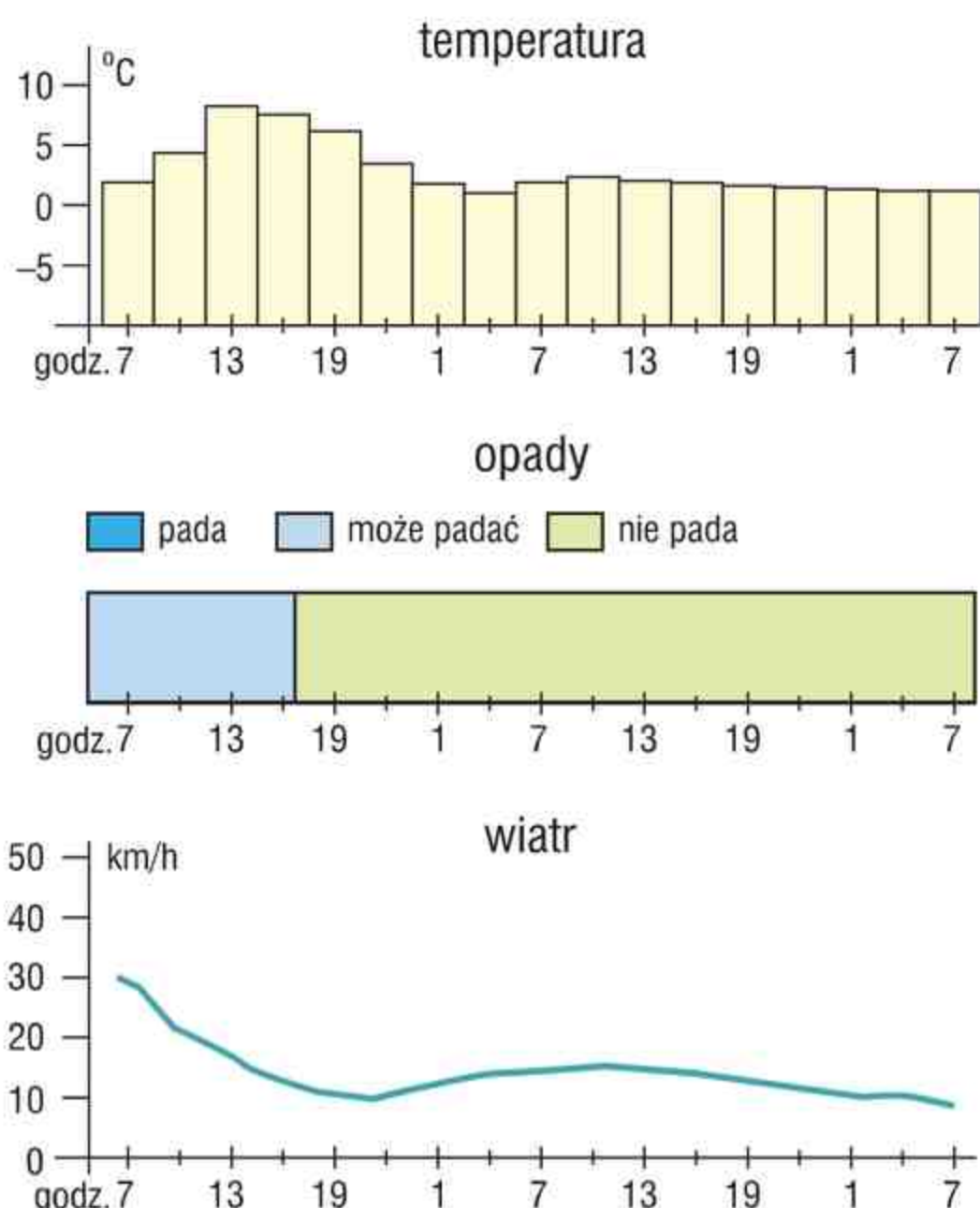
$$\frac{44,5 - 32,0}{44,5} \cdot 100\% \approx 28\%$$

ĆWICZENIE B. Oblicz, o ile procent w latach 1999–2005 zmniejszyła się emisja tlenków siarki na jednego mieszkańca w Wielkiej Brytanii.

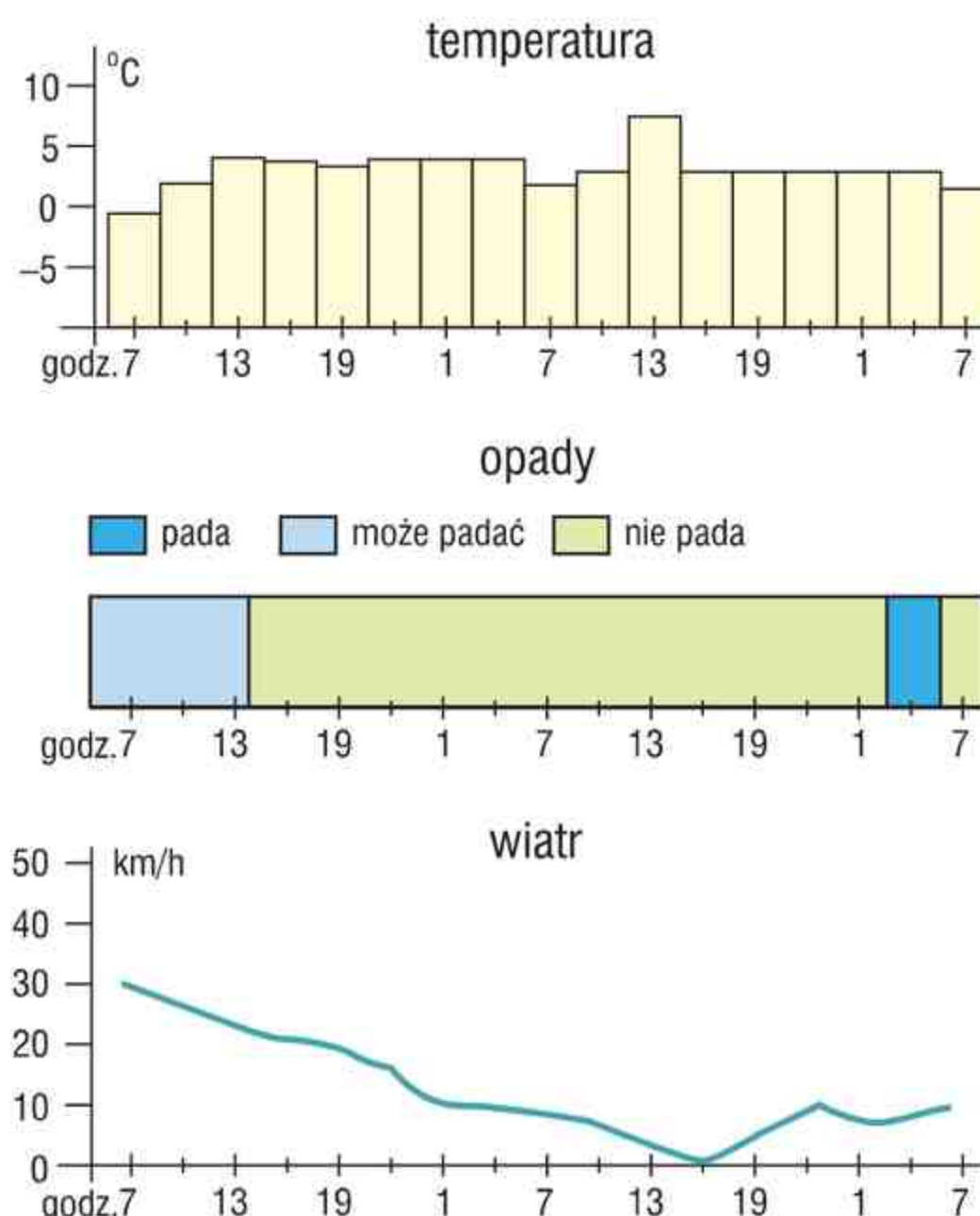
Zadania

1. a) Na podstawie informacji podanych poniżej przygotuj radiowy komentarz na temat pogody w Krakowie i Gdańsku.
b) Znajdź jak najwięcej ciekawych różnic w prognozie pogody dla Krakowa i Gdańska.

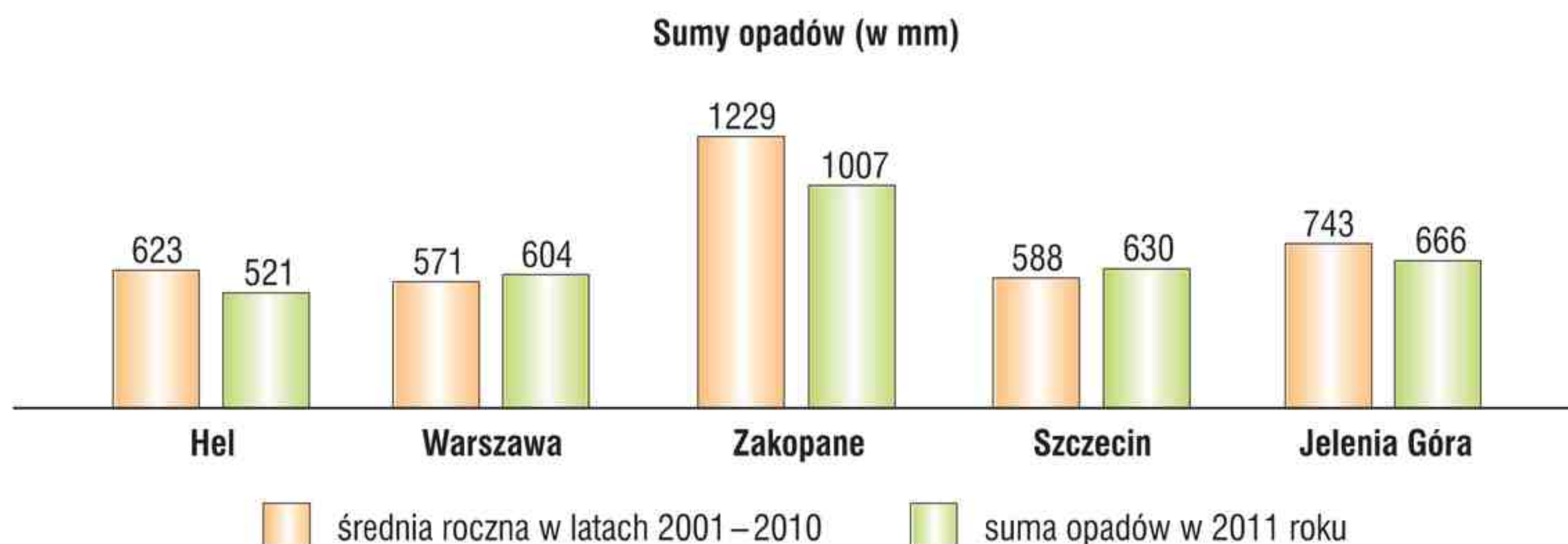
48 GODZIN W GDAŃSKU



48 GODZIN W KRAKOWIE

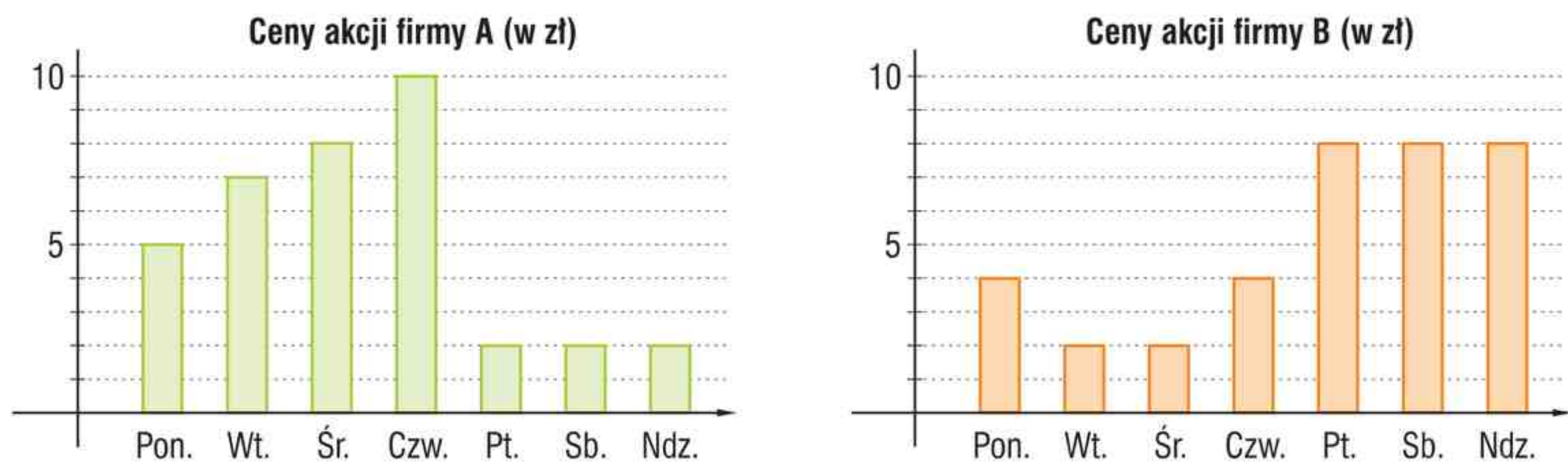


2. Diagram przedstawia informacje o wielkości opadów w wybranych miastach Polski.



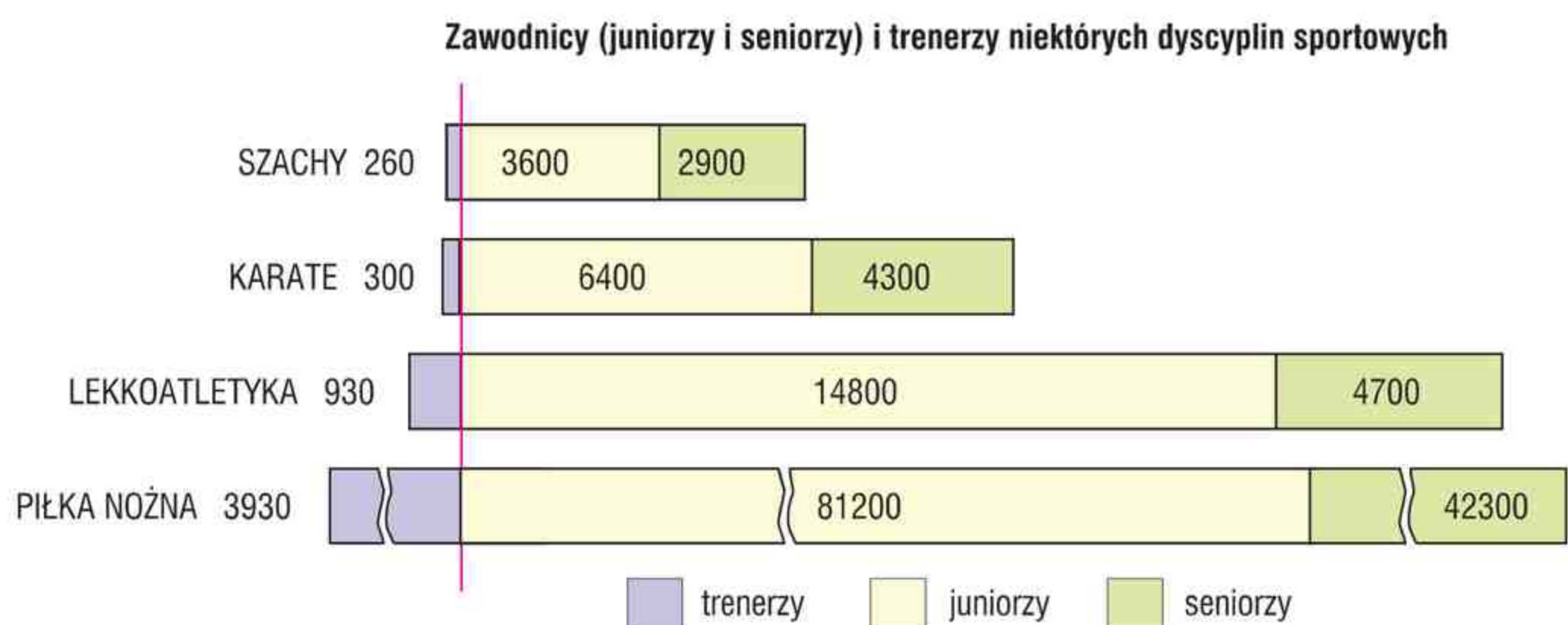
- a) Ile milimetrów opadów spadło w Warszawie przez 11 lat od 2001 r.?
b) O ile procent wzrosły w 2011 opady w Szczecinie w porównaniu ze średnią opadów w latach 2001–2010?
c) Oblicz, jaka była średnia roczna opadów w latach 2001–2011 w Jeleniej Górze.

3. Diagramy przedstawiają ceny (w złotych) akcji firm A i B w ciągu ostatniego tygodnia.



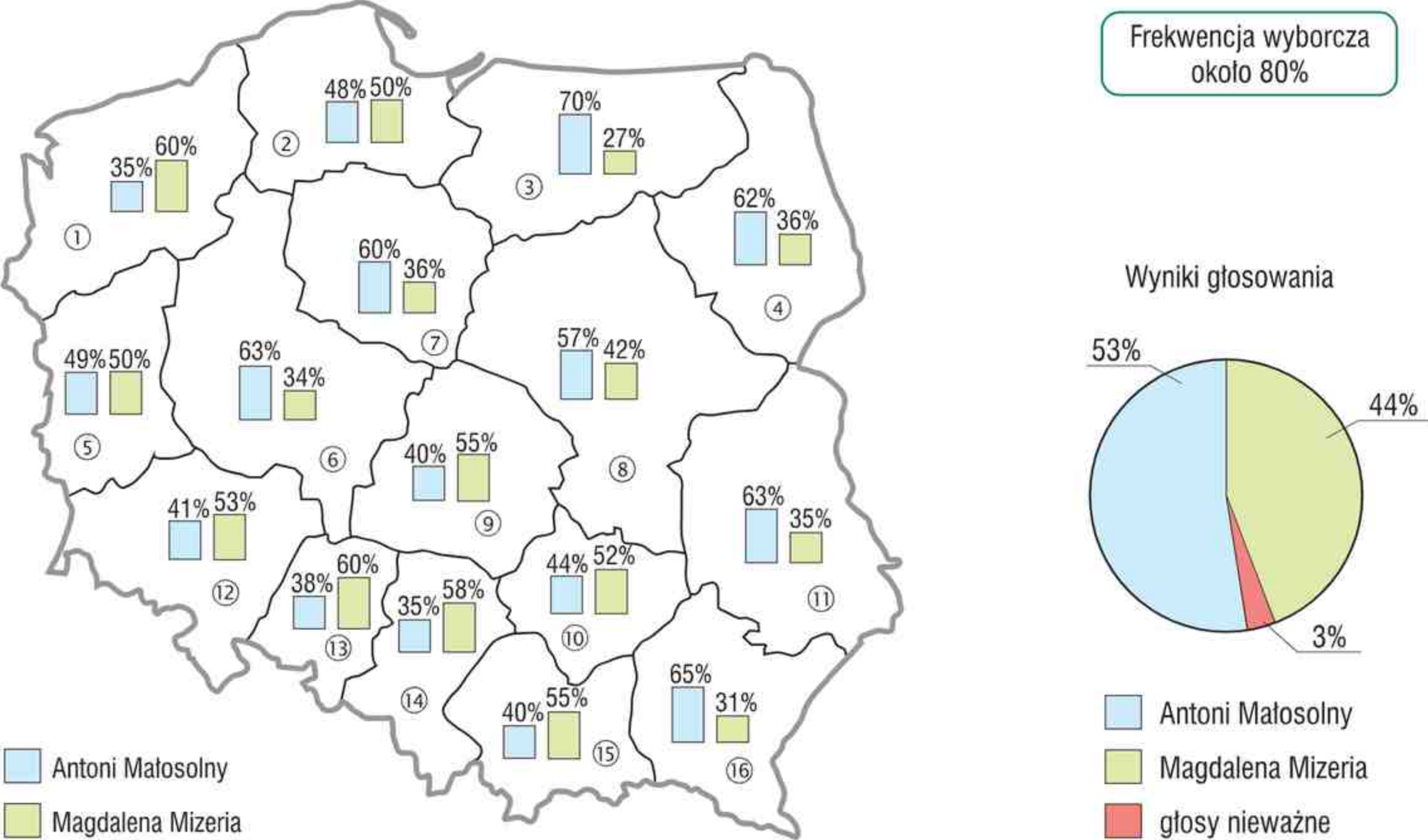
- O ile złotych spadła cena akcji firmy A w ciągu tygodnia? O ile procent spadła cena tych akcji?
- W jakich dniach tego tygodnia należało kupić akcje firmy B, a w jakich sprzedać, aby zysk był jak największy?
- Ile maksymalnie złotych mógł stracić pechowy inwestor na jednej akcji firmy A, a ile na akcji firmy B?
- Inwestor sprzedał w czwartek 1000 akcji firmy A i następnego dnia za wszystkie otrzymane pieniądze kupił akcje firmy B. Ile akcji kupił?

4. Z poniższego diagramu można odczytać informacje o liczbie trenerów i zawodników w czterech dyscyplinach sportowych. Na podstawie diagramu odpowiedz na poniższe pytania.



- O ilu więcej juniorów niż seniorów uprawia lekkoatletykę?
- Ile razy więcej jest zawodników uprawiających piłkę nożną niż uprawiających karate?
- W której z dyscyplin sportowych seniorzy stanowią około 40% wszystkich zawodników?
- Ilu zawodników przypada na jednego trenera w szachach?

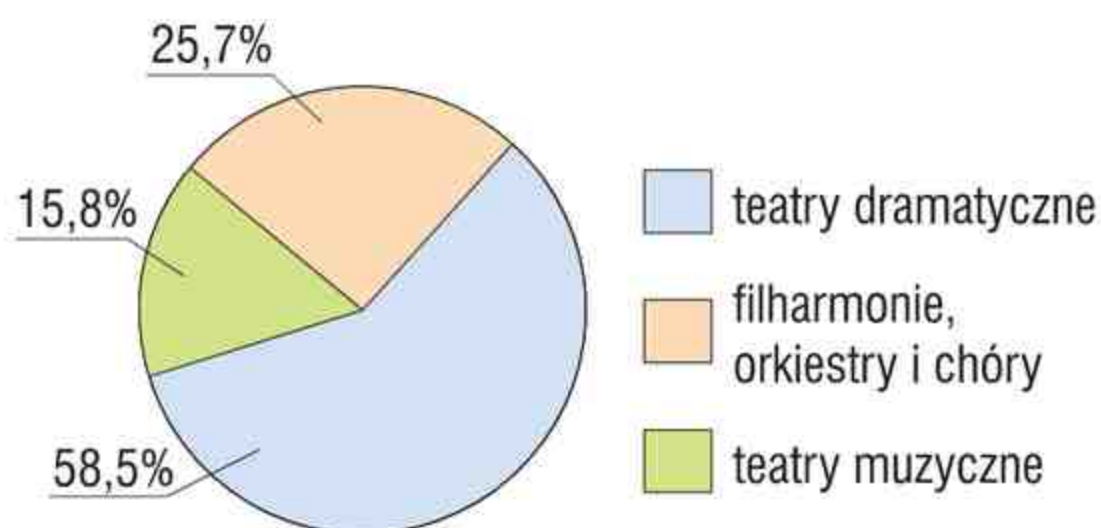
5. Członkowie Towarzystwa Hodowców Ogórków (THO) w wyborach powszechnych wybrali prezesa. Na to stanowisko kandydowali Magdalena Mizeria i Antoni Małosolny. Poniżej przedstawiono wyniki wyborów.



Województwo	Liczba głosujących
1. zachodniopomorskie	892
2. pomorskie	756
3. warmińsko-mazurskie	1012
4. podlaskie	834
5. lubuskie	900
6. wielkopolskie	1524
7. kujawsko-pomorskie	1257
8. mazowieckie	1312
9. łódzkie	942
10. świętokrzyskie	520
11. lubelskie	1212
12. dolnośląskie	950
13. opolskie	634
14. śląskie	720
15. małopolskie	1020
16. podkarpackie	934
RAZEM	15419

- a) W ilu województwach wygrała M. Mizeria?
- b) W których województwach wygrał A. Małosolny?
- c) Ile osób głosowało na A. Małosolnego, a ile na M. Mizerię w woj. lubuskim?
- d) Czy więcej osób głosowało na A. Małosolnego w woj. warmińsko-mazurskim czy w woj. wielkopolskim?
- e) W jednym z województw na południu Polski 5% oddanych głosów było nieważnych. Które to województwo? Ile to było głosów?
- f) Ilu członków THO wzięło udział w wyborach? Ile osób należy do THO?
- g) O ile mniej głosów niż A. Małosolny otrzymała M. Mizeria?

Przedstawienia teatralne w Polsce w 2014 r.



TEATRY W 2014 ROKU

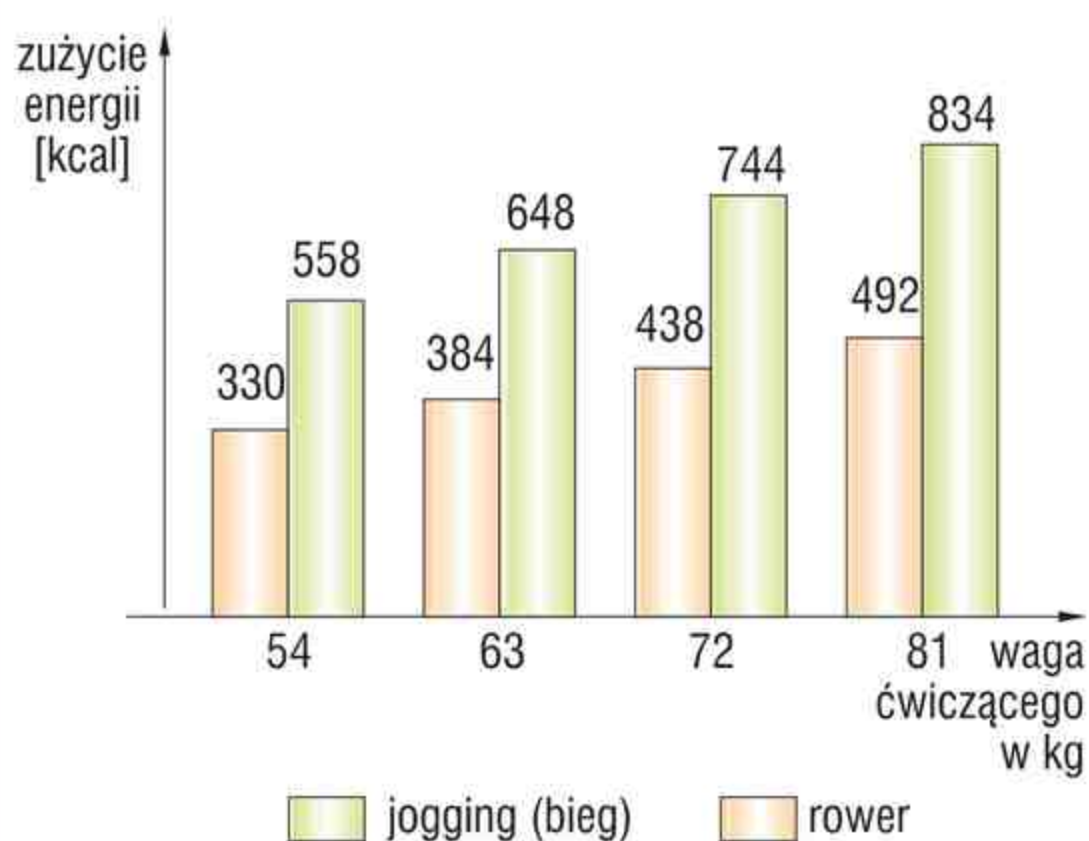
	Liczba teatrów	Liczba widzów (w tys.)
Teatry dramatyczne	100	5827
Filharmonie, orkiestry, chóry	44	4438
Teatry muzyczne	27	1998

6. W 2014 roku w polskich teatrach i instytucjach muzycznych wystawiono łącznie 56,1 tys. przedstawień.

- Ile przedstawień wystawiono w teatrach dramatycznych?
- Oszacuj, ile razy więcej było przedstawień w teatrach dramatycznych niż w teatrach muzycznych.
- Ile przeciętnie przedstawień przypadało na jeden teatr muzyczny? Ile to przeciętnie przedstawień miesięcznie?
- Ilu przeciętnie widzów przypadało na jedno przedstawienie w teatrze dramatycznym?
- O ile więcej widzów było przeciętnie na jednym przedstawieniu w teatrze muzycznym niż na jednym przedstawieniu w teatrze dramatycznym?

Sprawdź, czy umiesz

Zużycie energii w czasie godziny ćwiczeń w zależności od wagi



1. Średni banan dostarcza 100 kcal. Ile bananów musi zjeść osoba o wadze 63 kg, aby wyrównać straty energii spowodowane godziną biegu?

- A. 3 B. 4,5 C. 4 D. 6,5

2. Górnik o wadze 81 kg w ciągu doby zużywa 4400 kcal energii. Jak długo musiałby jechać na rowerze, aby zużyć tyle samo energii?

- A. ok. 1 godziny C. ok. 9 godzin
B. ok. 1,5 godziny D. ok. 24 godzin

3. O ile procent więcej energii zużywa osoba o wadze 72 kg podczas godzinowego biegu niż podczas godzinnej jazdy na rowerze?

- A. o ok. 30% C. o ok. 70%
B. o ok. 60% D. o ok. 90%

5 Podział proporcjonalny

ĆWICZENIE. a) Hania zmieszała 30 dag cukru i 120 dag mąki. W jakim stosunku zmieszała te składniki?

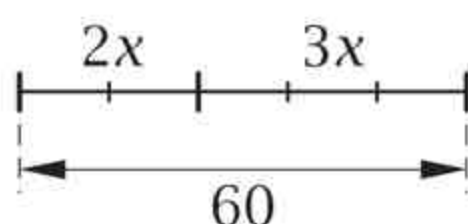
b) Karol przygotował sos, którego $\frac{1}{3}$ stanowi ocet, a $\frac{2}{3}$ oliwa. W jakim stosunku zmieszał te składniki?

c) Marta do 0,5 l octu dołała wody i otrzymała 2 l zalewy. Jaki jest stosunek octu do wody w tej zalewie?

Rozważmy następujący problem. Wstążkę o znanej długości chcemy podzielić tak, aby stosunek długości krótszej części do dłuższej wyniósł 2 : 3. Taki podział wstążki oznacza, że gdybyśmy krótszą z tych części podzielili na dwa równe kawałki, to dłuższa część musiałaby się składać z trzech takich kawałków.

Przykłady

a) Jak należy podzielić wstążkę o długości 60 cm w stosunku 2 : 3?



Jeśli jeden z kawałków jest 2 razy dłuższy od pewnego odcinka x , to drugi kawałek musi być 3 razy dłuższy od tego odcinka.

$$2x + 3x = 60$$

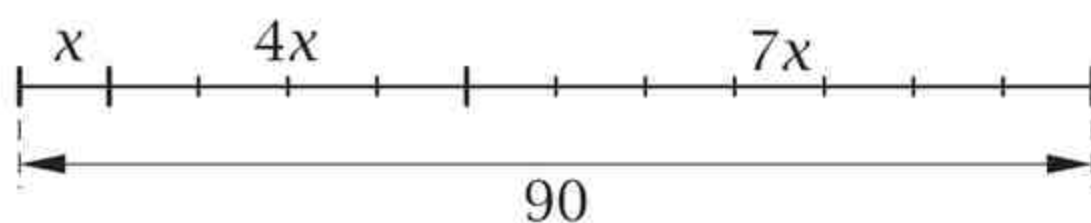
$$5x = 60$$

$$x = 12$$

$$2x = 2 \cdot 12 = 24 \quad 3x = 3 \cdot 12 = 36$$

Odp. Wstążkę należy podzielić na kawałki o długościach 24 cm i 36 cm.

b) Jak należy podzielić sznurek długości 90 cm w stosunku 1 : 4 : 7?



Jeśli jeden z kawałków jest równy pewnemu odcinkowi x , to pozostałe kawałki muszą być równe $4x$ i $7x$.

$$x + 4x + 7x = 90$$

$$12x = 90$$

$$x = 7,5$$

$$4x = 4 \cdot 7,5 = 30 \quad 7x = 7 \cdot 7,5 = 52,5$$

Odp. Kawałki sznurka powinny mieć długości: 7,5 cm, 30 cm i 52,5 cm.

Uwaga. Pierwszy z przykładów na poprzedniej stronie można także rozwiązać, zapisując warunki podane w zadaniu w postaci proporcji i rozwiązując otrzymane równanie (zob. zapiski obok).

$$\begin{array}{l} \overline{a \quad 60-a} \\ \frac{a}{60-a} = \frac{2}{3} \\ 3a = 120 - 2a \\ 5a = 120 \\ a = 24 \end{array}$$

Zadania

1. a) Podziel kwotę 520 zł w stosunku 1:3.
b) Podziel masę 28 t w stosunku 2:5.
c) Podziel długość 13 m w stosunku 3:7.
d) Podziel objętość 300 l w stosunku 1:2:3.
e) Podziel odległość 1200 km w stosunku 2:3:5.
f) Podziel okres 28 dni w stosunku 2:5:7.
2. a) Odcinek AB podzielono na dwie części w stosunku 2:3. Jedna część jest o 2 cm krótsza od drugiej. Jaką długość ma odcinek AB ?
b) Pewien odcinek KL podzielono w stosunku 1:3:10 tak, że najdłuższa z tych części miała 1,6 dm. Jaką długość miał odcinek KL ?
3. Trzy dziewczynki kupiły wspólnie los na loterię za 6 zł. Ania dała 1 zł, Basia — 2 zł, a Kasia — 3 zł. Dziewczynki wygrały 1,5 kg cukierków i chcą podzielić się nimi w takim samym stosunku, jak stosunek kwot, które wpłaciły. Ile cukierków powinna dostać każda z dziewczynek?
4. Moneta jednozłotowa wykonana jest z miedzioniklu. Stosunek ilości niklu do miedzi w tej monecie wynosi 1:3. Złotówka waży 5 g. Ile jest w niej gramów miedzi?



5. Beton można otrzymać, mieszając cement, wodę, piasek i żwir w proporcji 3:2:5:9. Ile kilogramów betonu uzyskamy według tego przepisu z worka cementu (25 kg)?

6. Pewien dystans podzielono na dwa etapy w stosunku 3:5. Krótszy z etapów miał długość 195 km. Jaką długość miał dłuższy z etapów?
7. Pewną objętość benzyny rozlano do trzech zbiorników w stosunku 2:3:10. Zbiornik, w którym znalazło się najmniej benzyny, zawierał 72 litry tego paliwa. Oblicz, jaką objętość miało paliwo w każdym z pozostałych dwóch zbiorników.

Sprawdź, czy umiesz

1. Krzysztof i Mateusz zarobek za wykonaną pracę podzielili w stosunku 2:7. Mateusz dostał 595 zł. Ile razem zarobili obaj chłopcy?
A. 765 zł B. 892,50 zł C. 1120 zł D. 1190 zł
2. Film *Dzięcielina* był wyświetlany w kinie „Adam” od poniedziałku przez trzy dni. Obejrzało go w sumie 195 osób. Liczby widzów w kolejnych dniach miały się do siebie jak 5:3:7. Ile osób obejrzało w tym kinie *Dzięcielinę* w środę?
A. 105 B. 91 C. 65 D. 39

→ zadania uzupełniające 24–27, str. 164

6**Obliczanie prawdopodobieństw****Pytania i zadania kontrolne**

- A. Losujemy jedną kulę z pudełka, w którym jest 6 kul białych i 8 czerwonych. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli?
- B. Rzucamy sześcienną kostką do gry. Co jest bardziej prawdopodobne — wylosowanie liczby parzystej czy liczby większej od 2?
- C. Wybieramy losowo jedną z liczb: 18, 27, 45, 54. Spośród opisanych poniżej zdarzeń wybierz zdarzenie pewne oraz niemożliwe.
 - ① Wybrana liczba jest podzielna przez 5.
 - ② Wybrana liczba jest podzielna przez 9.
 - ③ Różnica cyfr wybranej liczby jest równa 3.

Przypomnijmy, że obliczając prawdopodobieństwo, musimy ustalić, ile jest wszystkich możliwych wyników w opisanym zdarzeniu, ile z tych wyników spełnia podany warunek, i obliczyć odpowiedni iloraz.

$$P = \frac{n}{N}$$

P — prawdopodobieństwo, że wynik spełni podany warunek
 n — liczba wyników spełniających podany warunek
 N — liczba wszystkich możliwych wyników



4. Przypomnij sobie, jakie karty są w klasycznej talii 52 kart. Które z poniższych zdarzeń jest bardziej prawdopodobne?
 - a) Wylosowanie asa z talii 52 kart czy wylosowanie asa spośród wszystkich kierów?
 - b) Wylosowanie pika z talii 52 kart czy wylosowanie króla pik spośród wszystkich króli?
 - c) Wylosowanie króla spośród kart z figurami (waletów, dam, króli i asów) czy wylosowanie damy spośród tych samych figur?
5. Spośród liczb naturalnych większych od 33 i mniejszych od 57 wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybrana liczba ma następującą własność:
 - a) jest wielokrotnością liczby 10,
 - b) jest wielokrotnością liczby 5,
 - c) resztą z dzielenia tej liczby przez 5 jest 4,
 - d) resztą z dzielenia tej liczby przez 5 jest 1.
6. Spośród wszystkich dzielników liczby a wybrano losowo jeden. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybranym dzielnikiem jest liczba pierwsza, gdy:

a) $a = 11$	b) $a = 21$	c) $a = 60$
-------------	-------------	-------------
7. Tomek jest uczniem klasy VIII c, w której jest 16 chłopców i 15 dziewcząt. Przed klasową Wigilią każdy uczeń tej klasy losuje koleżankę lub kolegę i dla tej osoby przygotowuje świąteczny upominek.
Które z poniższych zdań są prawdziwe?
 - ① Prawdopodobieństwo, że Tomek wylosuje jednego ze swoich dwóch najlepszych przyjaciół jest równe $\frac{1}{15}$.
 - ② Prawdopodobieństwo, że Tomek wylosuje koleżankę z klasy jest równe $\frac{15}{31}$.
 - ③ Prawdopodobieństwo, że Tomek wylosuje kolegę z klasy wynosi $\frac{1}{2}$.
- *8. W pierwszym pojemniku jest 7 kul białych i 13 czarnych. W drugim pojemniku jest 15 kul białych i 20 czarnych. Ile jeszcze kul białych i ile czarnych należy dołożyć do drugiego pojemnika, aby prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli z każdego z pojemników było takie samo?

9. W pudełku znajduje się 5 kul czerwonych, 4 białe i 3 zielone. Zuzanna wyciąga losowo kule. Pierwsza kula, którą wyciągnęła jest zielona.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że druga kula będzie biała, a jakie — że będzie zielona?

b) Druga wyciągnięta kula była czerwona. Jakie jest prawdopodobieństwo, że następna wylosowana kula będzie biała, a jakie — że będzie czerwona?

28/164

10. Nauczyciel spytał uczniów z klasy VIII a, czy potrafią grać w szachy. Odpowiedzi przedstawił w poniższej tabelce.

	Potrafię grać w szachy.	Nie potrafię grać w szachy.
Dziewczęta	7	8
Chłopcy	6	12

a) Oblicz prawdopodobieństwo, że wybrana losowo osoba z tej klasy to chłopiec.

b) Oblicz prawdopodobieństwo, że wybrana losowo osoba z tej klasy nie potrafi grać w szachy.

c) Wybieramy jedną osobę z grupy dziewcząt. Oblicz prawdopodobieństwo, że potrafi ona grać w szachy.

Sprawdź, czy umiesz

1. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 15 spośród wszystkich liczb dwucyfrowych?

A. $\frac{1}{15}$

B. $\frac{3}{50}$

C. $\frac{6}{89}$

D. $\frac{7}{100}$

2. Na pięciu białych kartkach napisano liczby: 1, 2, 3, 4, 5, a na sześciu niebieskich kartkach napisano liczby: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Czy poniższe zdania są prawdziwe?

① Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana kartka jest biała, wynosi $\frac{1}{2}$.

TAK/NIE

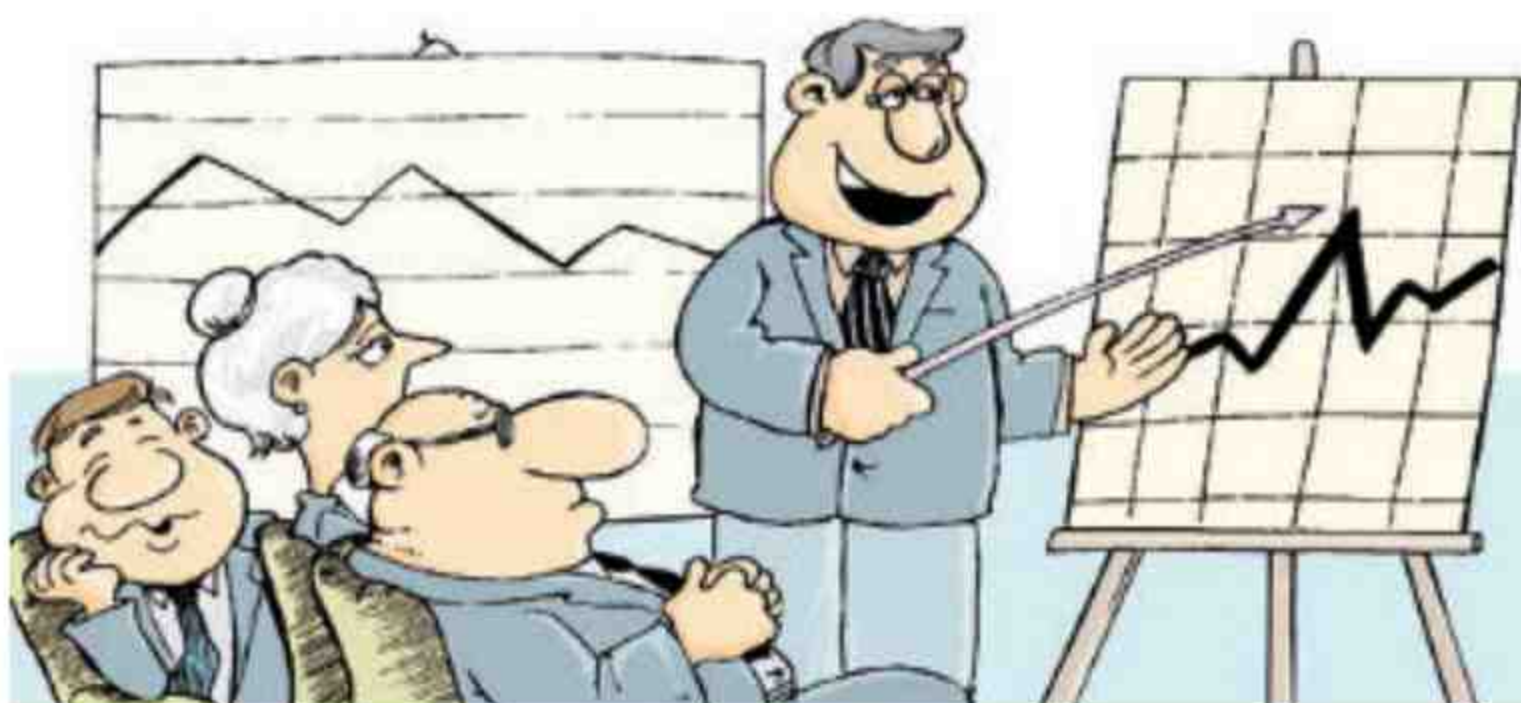
② Prawdopodobieństwo tego, że na wylosowanej kartce jest liczba nieparzysta, jest równe $\frac{1}{2}$.

TAK/NIE

③ Prawdopodobieństwo wylosowania kartki białej z nieparzystym numerem jest mniejsze niż prawdopodobieństwo wylosowania kartki niebieskiej z parzystym numerem.

TAK/NIE

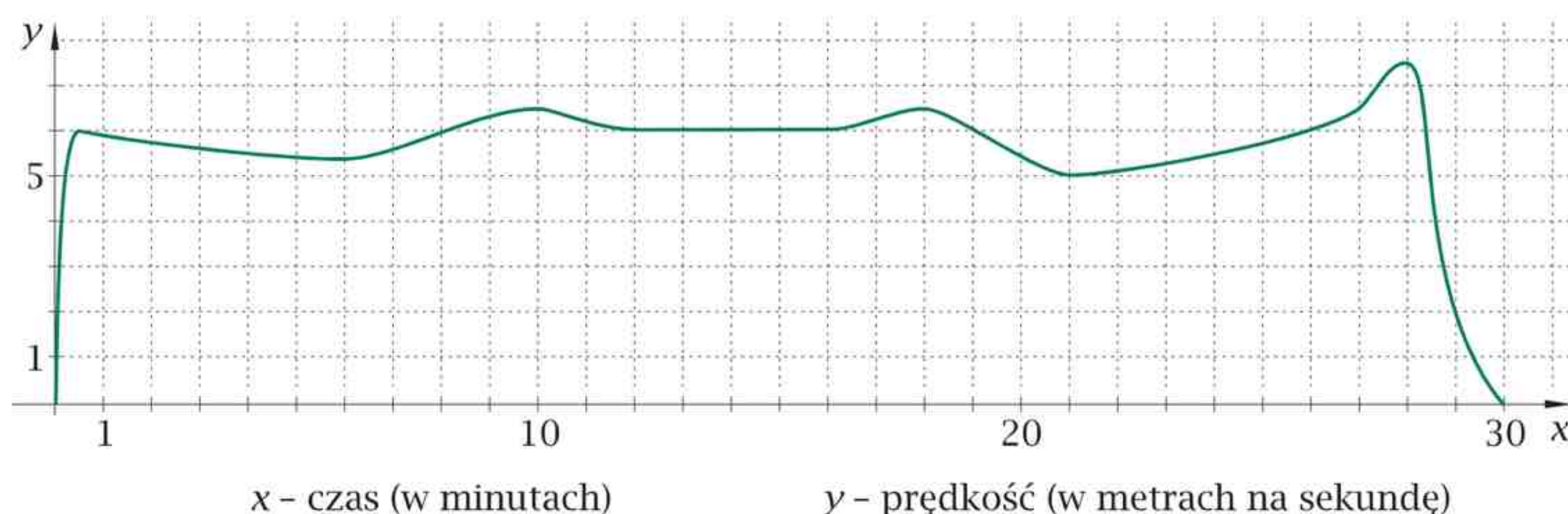
7 Odczytywanie wykresów



Wykres jest jednym z najwygodniejszych sposobów przedstawiania informacji.

Daje możliwość porównywania rozmaitych wielkości oraz obserwowania zależności między nimi.

Poniższy wykres pokazuje, jak zmieniała się prędkość pewnego długodystansowca. Pokonał on dystans 10 000 m w czasie 28 minut, a potem jeszcze przebiegł rundę honorową wokół stadionu.



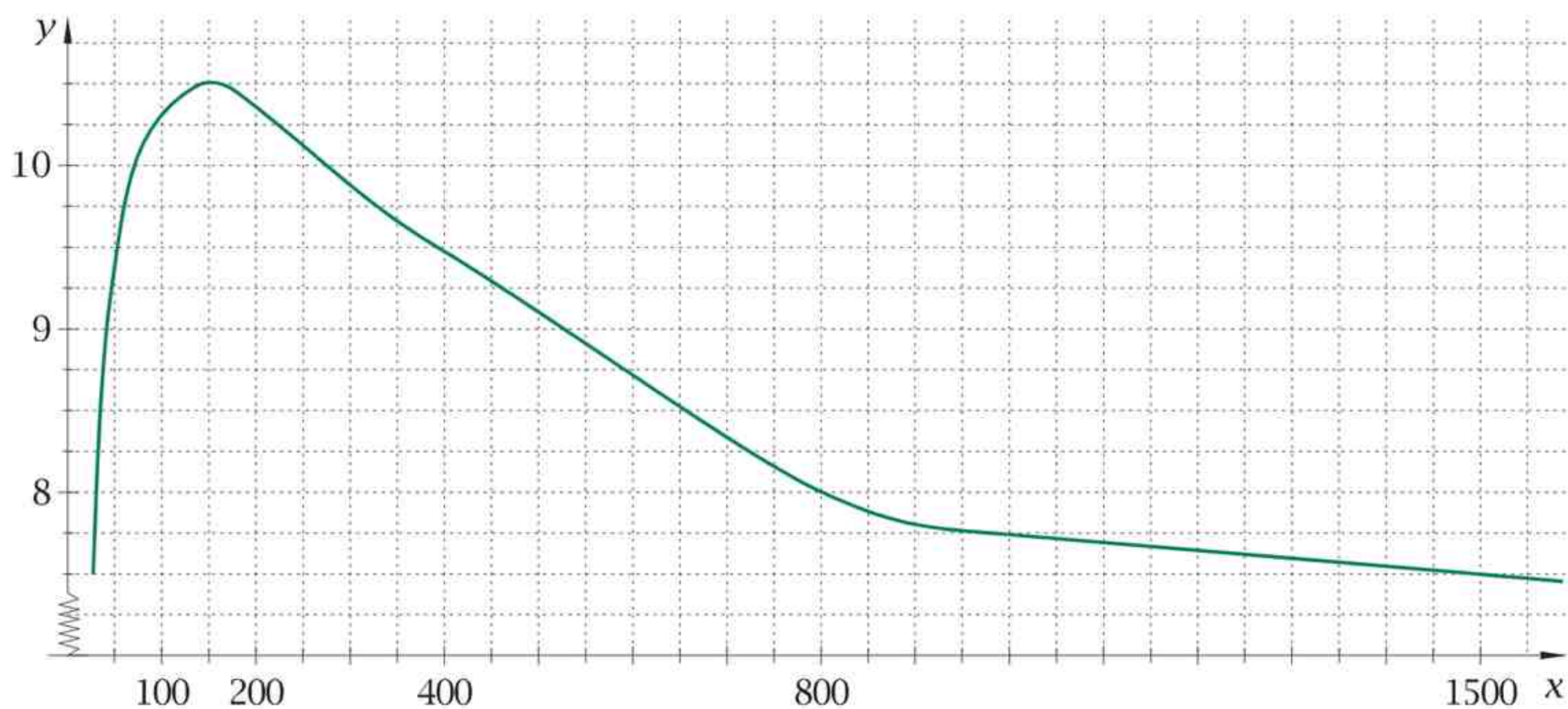
Z wykresu można odczytać na przykład, że:

- Zaraz po starcie zawodnik się rozpędził i po chwili osiągnął prędkość $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, potem nieco zwolnił, a po 6 minutach od startu znowu zaczął przyspieszać.
- Między 10 a 12 minutą zawodnik biegł coraz wolniej, a między 12 a 16 minutą utrzymywał stałą prędkość $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- Największą prędkość zawodnik osiągnął na mecie — w 28 minucie biegu, a po 30 minutach od startu się zatrzymał.
- Zawodnik w czasie tego biegu miał prędkość chwilową $6,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ czterokrotnie — w momentach, gdy od startu upłynęło 10, 18 i 27 minut oraz po kilkunastu sekundach od przekroczenia mety.

ĆWICZENIE A. a) Ile czasu trwała runda honorowa?

b) Ile łącznie minut (przed osiągnięciem mety) zawodnik biegł z prędkością większą niż $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$?

Kolejny wykres pokazuje, jakie są możliwości człowieka w biegach na różnych dystansach. Z wykresu można odczytać, jakie średnie prędkości mogliby osiągać biegacze na różnych dystansach.



x — dystans (w metrach) y — średnia prędkość (w metrach na sekundę)

Wykres ten sporządzono wiele lat temu w wyniku rozważań teoretycznych, uwzględniając różne czynniki (siłę i wytrzymałość człowieka, szybkość reakcji na strzał startera, opór powietrza itp.).

Okazuje się, że średnie prędkości uzyskane przez rekordzistów świata na poszczególnych dystansach są zbliżone do tych, które można odczytać z wykresu. Oznacza to, że dzisiejsi zawodnicy niemal optymalnie wykorzystują swoje możliwości.

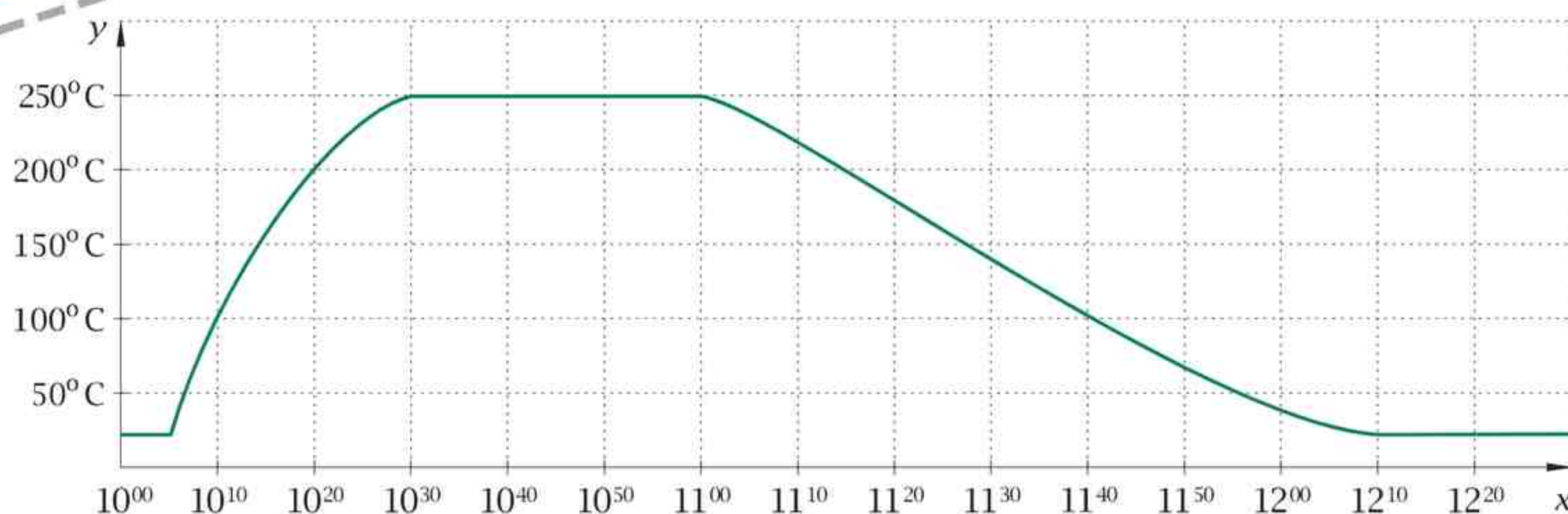
Z przedstawionego wykresu można na przykład odczytać, że:

- Na dystansie 100 m lekkoatleta może osiągnąć średnią prędkość około $10,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a na dystansie 1500 m może osiągnąć średnią prędkość równą około $7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- Największą średnią prędkość można osiągnąć w biegu na ok. 150 m, a nie (jak można byłoby przypuszczać) na krótszych dystansach. Czy się domyślasz dlaczego?
- Średnie prędkości możliwe do uzyskania na dystansach 50 m i 450 m są bardzo zbliżone.
- Możliwa do uzyskania średnia prędkość jest na dystansie 400 m o $1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ większa niż na dystansie 800 m.

ĆWICZENIE B. Rekord świata na dystansie 200 m, ustanowiony w 2009 r. przez sprintera z Jamajki — Usaina Bolta, wynosi 19,19 s. Oznacza to, że średnia prędkość rekordzisty na tym dystansie wyniosła $\frac{200 \text{ m}}{19,19 \text{ s}} \approx 10,42 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Porównaj ten wynik ze średnią prędkością odczytaną z wykresu.

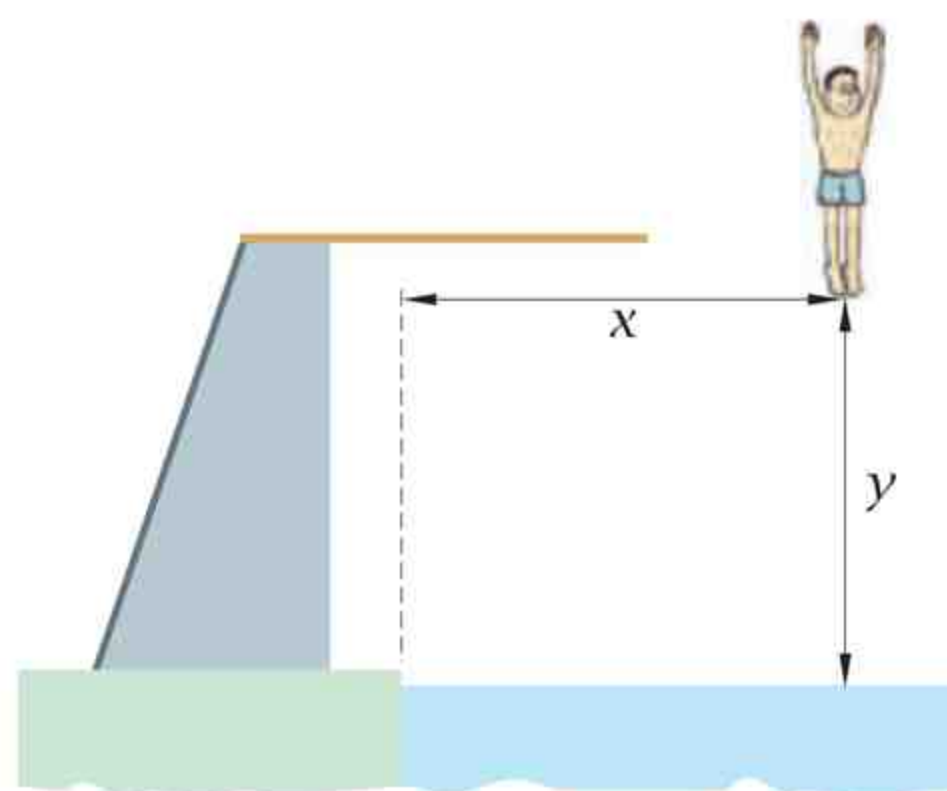
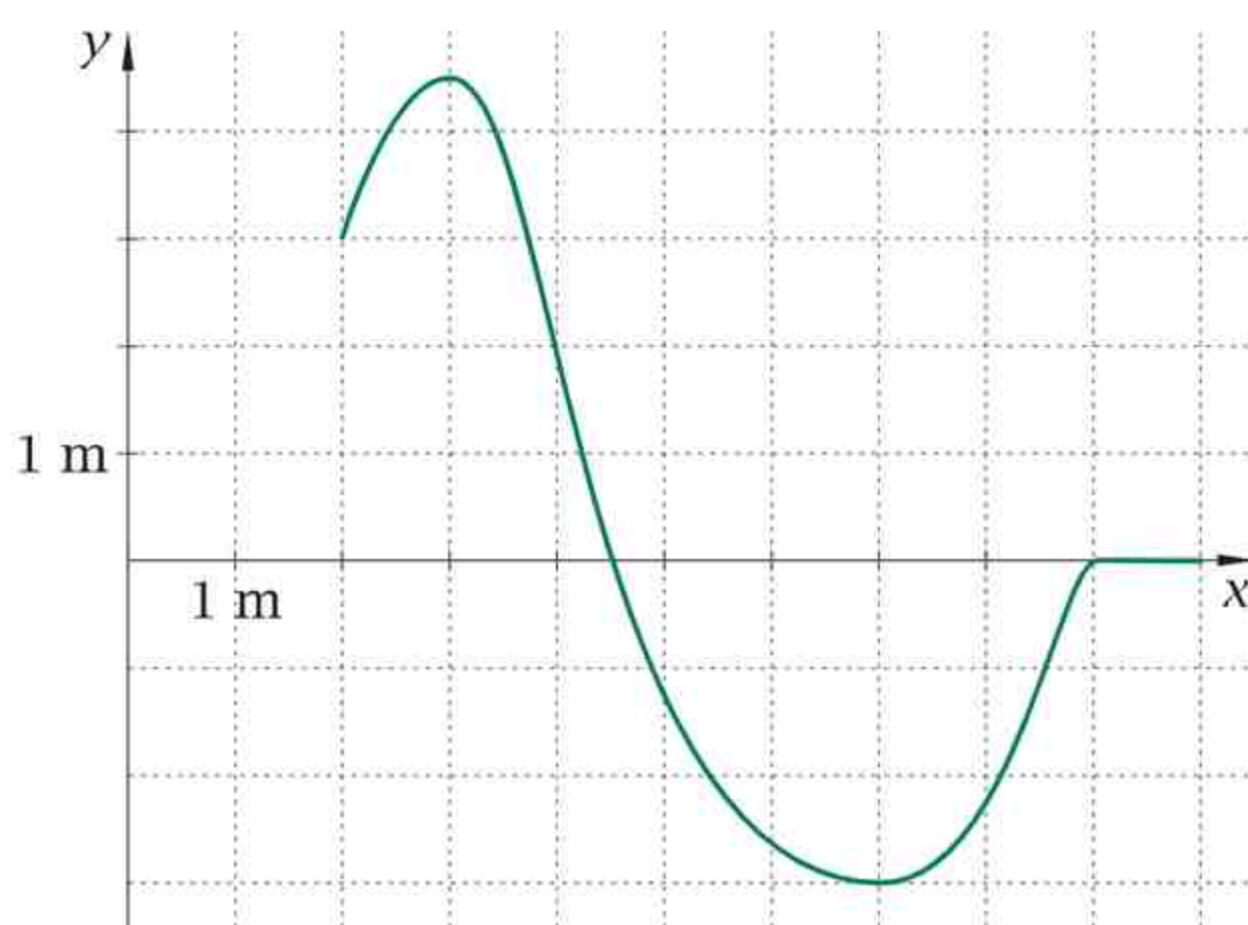
Zadania

1. Wykres przedstawia zmiany temperatury piekarnika.



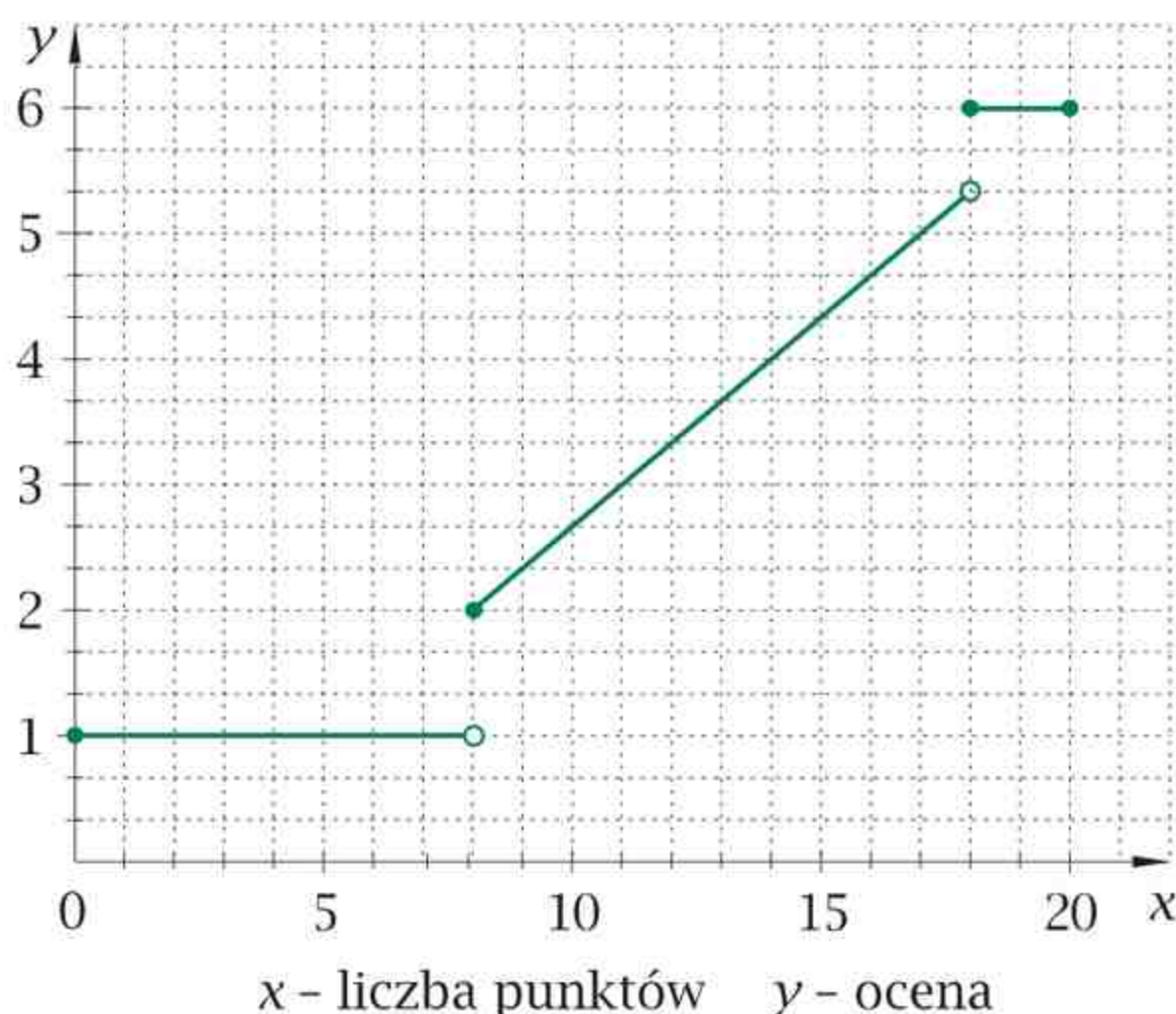
- Jaka temperatura była w piekarniku o godz. 10²⁰, a jaka o 11⁰⁰?
- O której godzinie termometr wskazywał 100°C?
- Jaka była najwyższa temperatura? Jak długo się utrzymywała?
- Jak długo temperatura piekarnika rosła, a jak długo malała?
- O której godzinie włączono piekarnik, a o której go wyłączono?

2. Michał skakał z trampoliny do basenu. Wykres pokazuje, jak zmieniała się odległość jego stóp od lustra wody w zależności od ich odległości od brzegu basenu (zob. rysunek obok wykresu).



- Na jakiej wysokości nad lustrem wody znajdowała się trampolina?
- Na jakiej największej wysokości nad lustrem wody znalazły się stopy Michała podczas tego skoku?
- Jak daleko od brzegu basenu stopy Michała dotknęły wody?
- W jakiej odległości od krawędzi basenu Michał zaczął płynąć tak, że jego stopy były na powierzchni wody?
- Basen ma głębokość 6 m. Ile brakowało, aby Michał dotknął stopami dna basenu?

3. Nauczyciel matematyki oddał uczniom sprawdzone klasówki. Na każdej pracy zamiast oceny zapisał liczbę uzyskanych punktów, a na tablicy narysował następujący wykres.

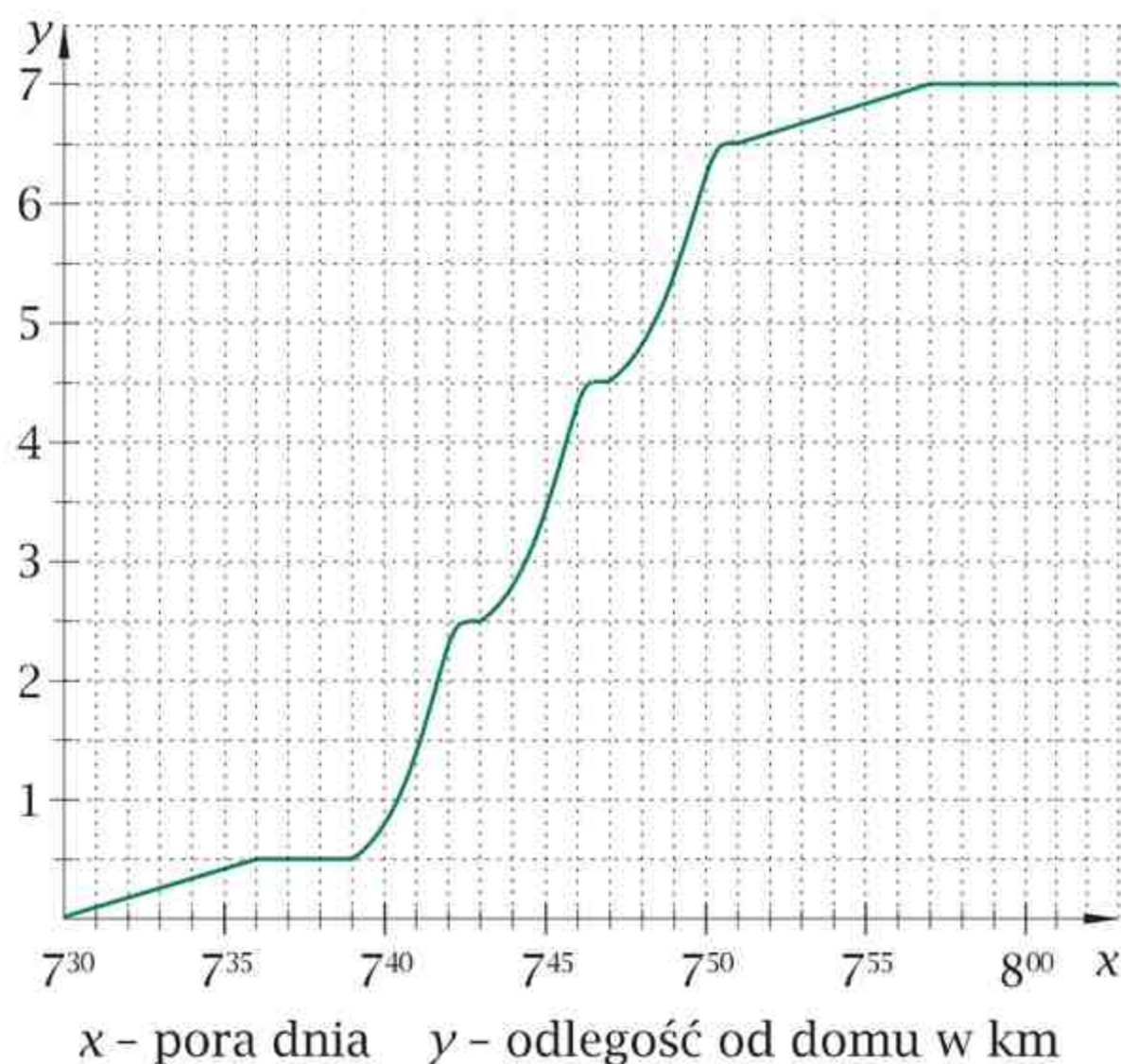


Dodatkowo wyjaśnił: $y = 5\frac{1}{3}$ oznacza ocenę 5+, $y = 4\frac{2}{3}$ oznacza ocenę 5–, $y = 4\frac{1}{3}$ ocenę 4+ itd.

a) Dorota zdobyła 14 punktów, Marek 10, a Kuba 15. Jakie oceny otrzymali?

b) Ile punktów trzeba było uzyskać, aby otrzymać ocenę *bdb*, a ile, aby otrzymać *dst*+

c) Jacek i Wacek otrzymali taką samą ocenę, chociaż Jacek zdobył o dwa punkty więcej od Wacka. Jaka to była ocena?



4. Kamil dojeżdża do szkoły autobusem. Na wykresie przedstawiono, jak pewnego dnia zmieniała się jego odległość od domu w drodze do szkoły.

a) Jak długo Kamil siedział na przystanek autobusowy? Jak daleko od domu znajduje się przystanek, na którym wsiada do autobusu?

b) Gdzie był Kamil o 7³⁸?

c) Ile kilometrów jechał autobusem?

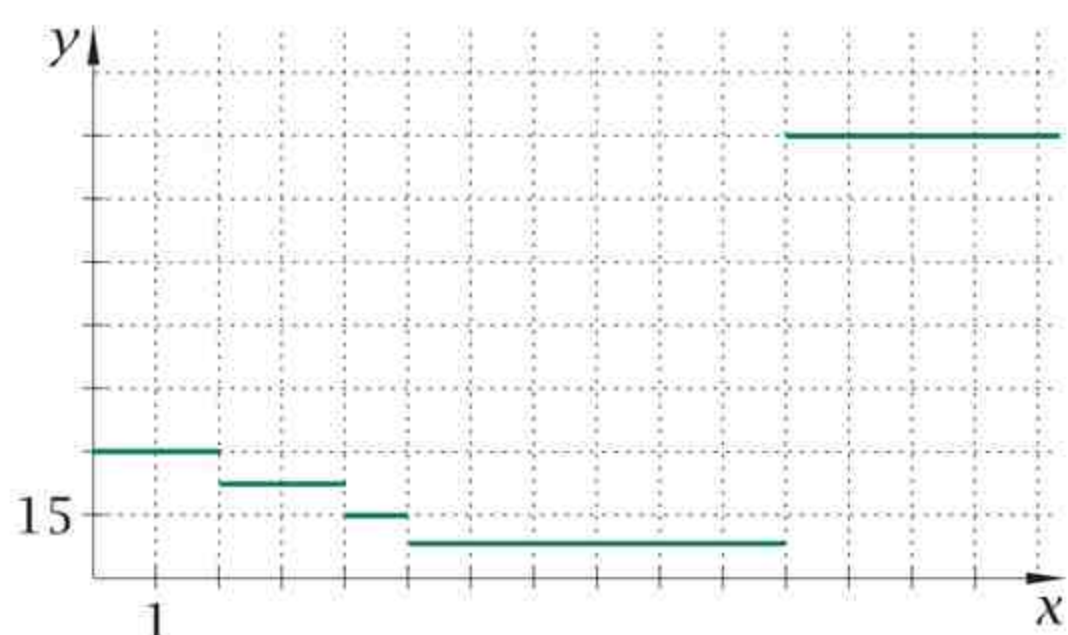
d) Na którym z kolei przystanku wysiadł Kamil?

e) Na ile minut przed dzwonkiem o godzinie 8⁰⁰ był w szkole?

- *f) Innego dnia Kamil wyszedł do szkoły jak zwykle o 7³⁰. W połowie drogi na przystanek zawrócił do domu, bo czegoś zapomniał. Gdy drugi raz wychodził z domu, była 7³⁶. Na przystanek dobiegł o 7⁴⁰. Autobus nadjechał po 4 minutach. O której Kamil był w szkole?



5. Cukiernicę postawiono na stole, potem kilka osób brało z niej po łyżeczce cukru. Po jakimś czasie dosypano cukru do pełna. Na wykresie przedstawiono, jak zmieniała się ilość cukru w tej cukiernicy.

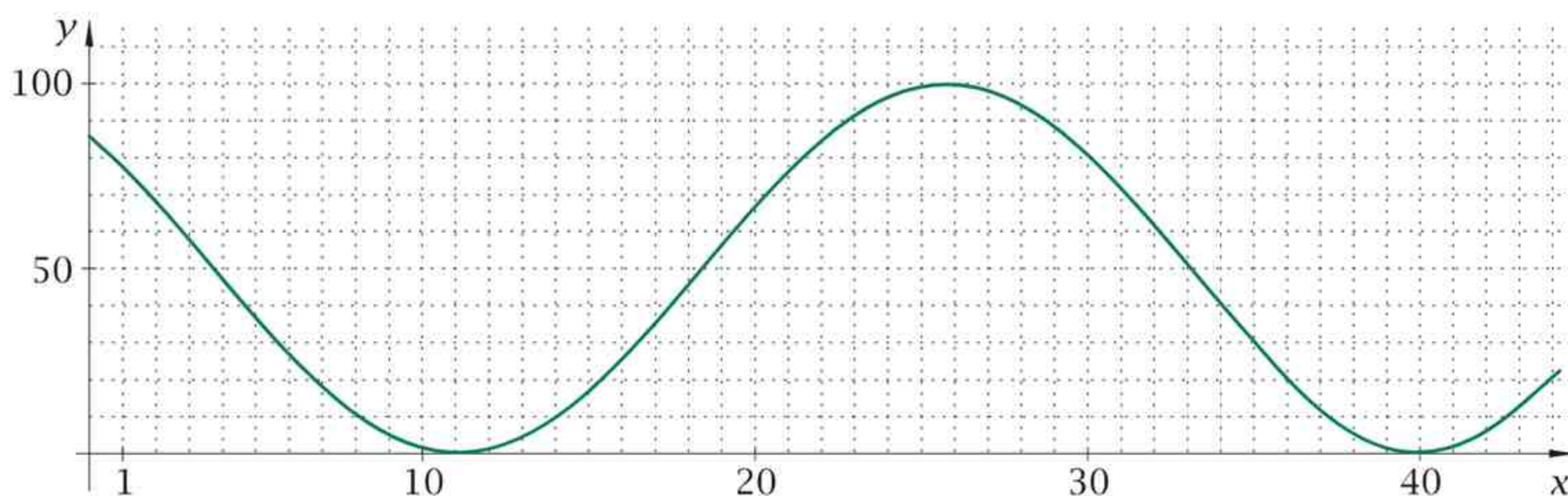


x – czas w minutach y – masa cukru w gramach

- Ile cukru mieści się w cukiernicy?
- Ile cukru mieści się na łyżeczce?
- Ile łyżeczek cukru wzięto z cukiernicy przed dosypaniem cukru?
- Ile łyżeczek cukru było w cukiernicy tuż przed dosypaniem cukru? Ile gramów cukru dosypano?

- Ile czasu upłynęło od momentu, gdy zabrano z cukiernicy trzecią łyżeczkę cukru, do momentu, gdy uzupełniono cukiernicę?
- Narysuj podobny wykres ilustrujący następującą sytuację: ta sama cukiernica stała pełna na stole, po 2 minutach wysypano z niej połowę cukru. Po upływie kolejnych 3 minut dosypano 30 g cukru.

6. Na wykresie przedstawiono, jaki procent tarczy Księżyca był widoczny w pierwszych dniach pewnego roku.



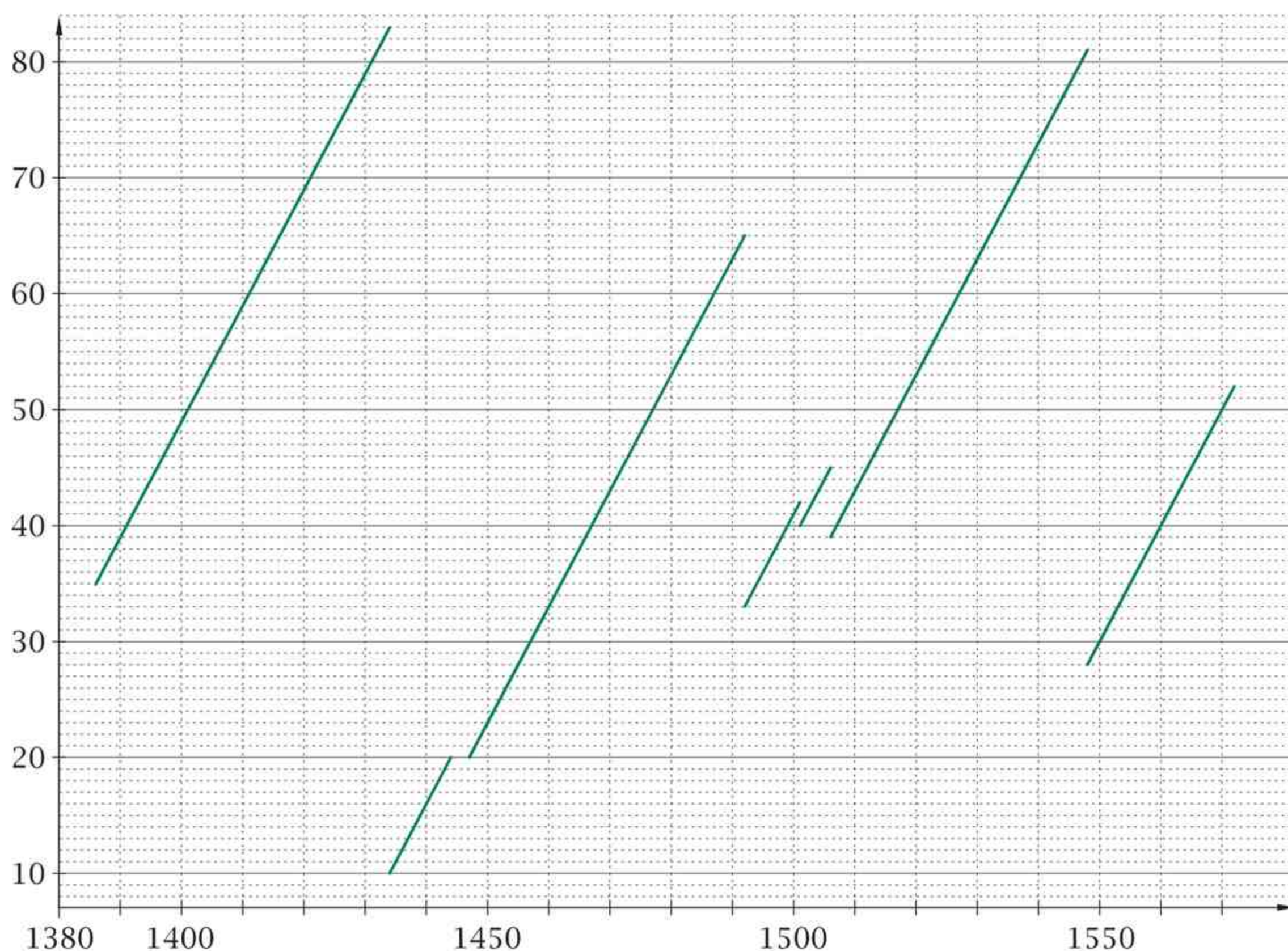
x – dzień roku ($x = 1$ oznacza 1 stycznia, godz. 24.00) y – procent widocznej tarczy księżyca

- Jaki procent tarczy Księżyca był widoczny wieczorem 1 stycznia?
- W których dniach stycznia widoczna była połowa tarczy Księżyca?
- W jakim okresie stycznia Księżyc przybierał, tzn. widoczna część Księżyca była coraz większa?
- Którego dnia stycznia tarcza Księżyca była niewidoczna (Księżyc był w nowiu)?
- Odczytaj z wykresu, ile dni upływa między jednym a drugim nowiem Księżyca. Którego dnia lutego i którego dnia marca owego roku Księżyc był w nowiu (przyjmij, że nie był to rok przestępny)?
- *f) W jakich okresach lutego widoczna część tarczy Księżyca malała?

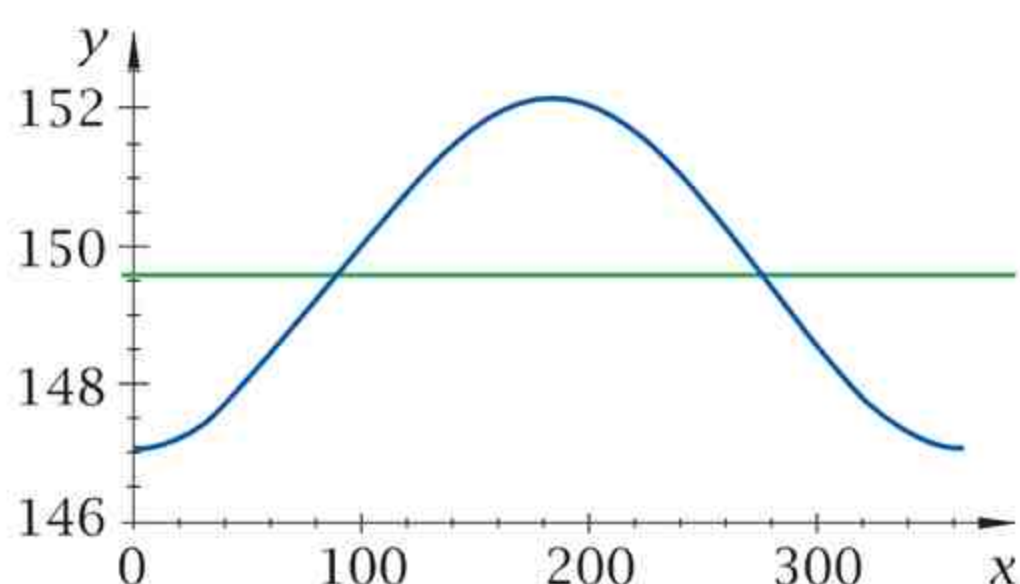


7. Z przedstawionego poniżej wykresu można odczytać, ile lat miał król w dowolnie wybranym roku z czasów panowania dynastii Jagiellonów.

- Ile lat miał Władysław Jagiełło w czasie bitwy pod Grunwaldem?
- W roku 1450 Jan Gutenberg wynalazł druk. Kto był wówczas królem w Polsce?
- Ile lat miał Władysław Warneńczyk w chwili wstąpienia na tron, a ile w chwili śmierci?
- Który z Jagiellonów rządził najdłużej?
- Ilu królów z tej dynastii żyło ponad 60 lat?
- Gdy Kolumb odkrywał Amerykę, miał 41 lat. W Polsce wówczas od niedawna panował nowy król. Czy był on starszy od Kolumba?
- Następcą każdego króla tej dynastii był albo jego syn, albo brat. W trzech przypadkach berło po ojcu przejął syn. Wymień królów, którzy przejęli władzę po ojcu.
- Ile lat miał Zygmunt Stary, gdy urodził się jego następca?



8. Ziemia, obiegając Słońce, porusza się po orbicie, która nie jest okręgiem. Wskutek tego w ciągu roku nasza odległość od Słońca jest raz mniejsza, raz większa.



x – numer kolejnego dnia roku
 y – odległość Ziemi od Słońca (w mln km)

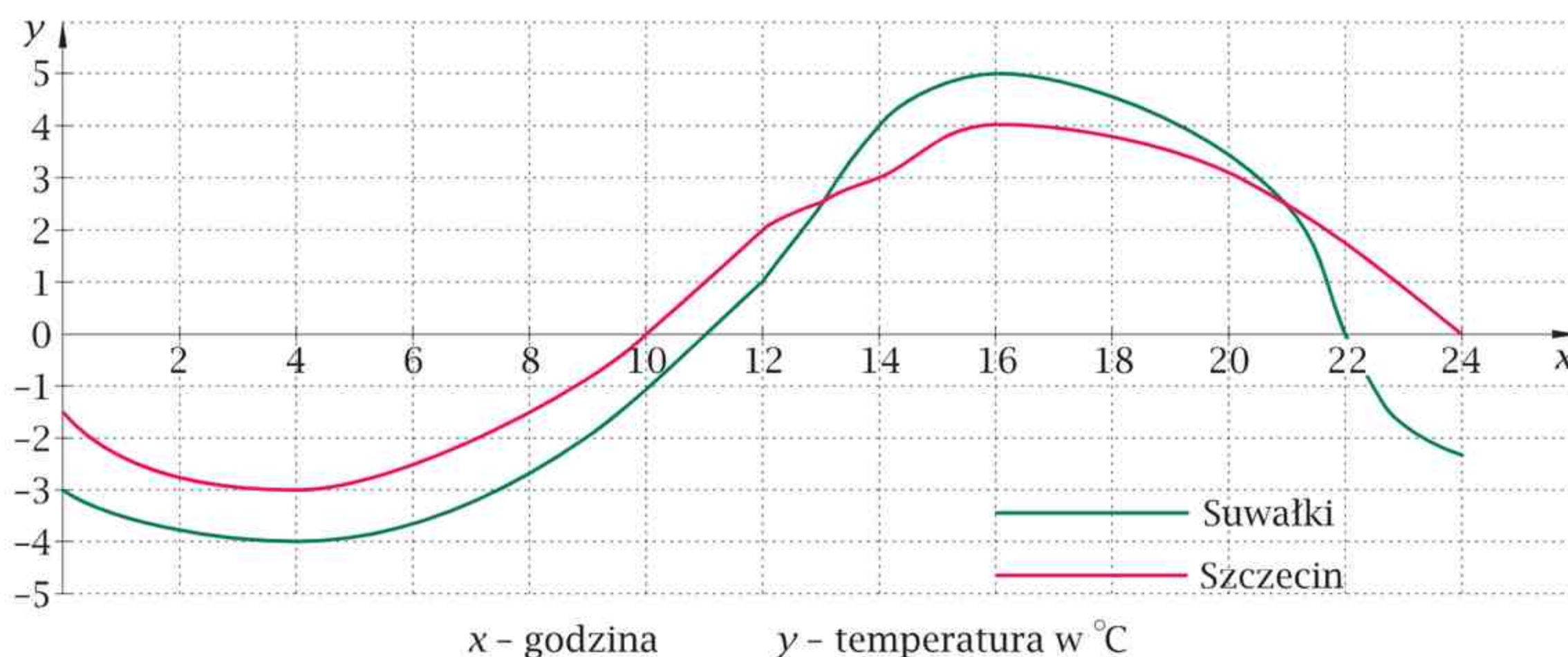
Niebieska linia na wykresie obok przedstawia, jak zmienia się ta odległość. Zieloną linią zaznaczono średnią odległość Ziemi od Słońca.

- Oszacuj, jaka jest największa odległość Ziemi od Słońca.
- W jakim miesiącu Ziemia jest najbliżej Słońca, a w jakim – najdalej?
- Czy gdy w Polsce trwa wiosna, Ziemia zbliża się do Słońca, czy od niego oddala?
- Średnia odległość Ziemi od Słońca wynosi 149,6 mln km. W jakich miesiącach Ziemia znajduje się w tej odległości od Słońca?

9. Na wykresie przedstawiono zmiany temperatury odnotowanej tego samego dnia w Suwałkach i w Szczecinie.

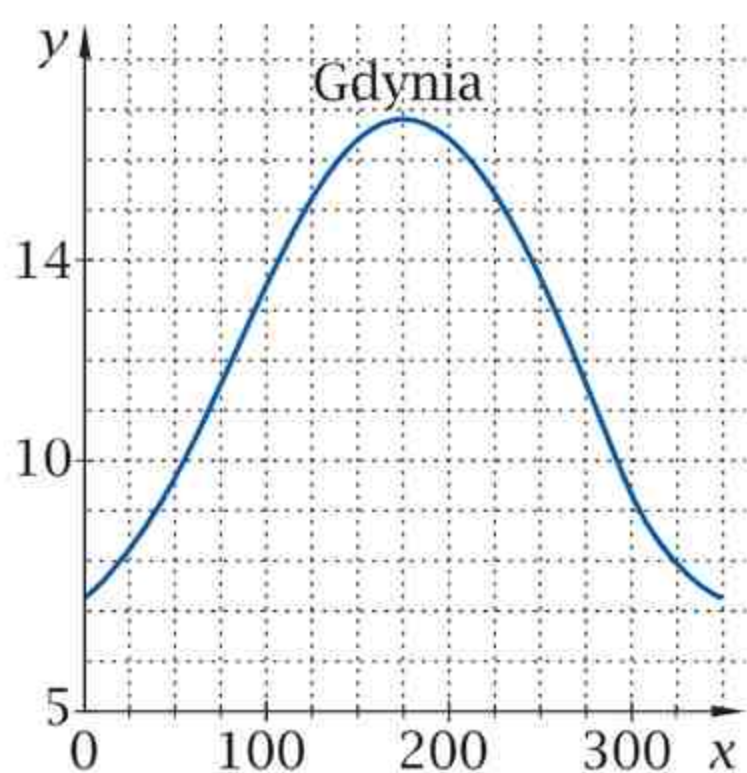
- Jaka temperatura panowała w tych miastach w południe?
- Dla każdego z tych miast określ, o których godzinach temperatura wynosiła 0°C .
- Dla każdego z tych miast określ, w jakich godzinach temperatura była ujemna.
- O której godzinie temperatura w obu miastach była taka sama?
- W jakich godzinach w Suwałkach było cieplej niż w Szczecinie?
- Jaka była najwyższa temperatura w Suwałkach, a jaka w Szczecinie? O której to było godzinie?
- Jaka temperatura była w Suwałkach, gdy w Szczecinie było -3°C ?

Temperatury w Suwałkach i w Szczecinie w ciągu tej samej doby.

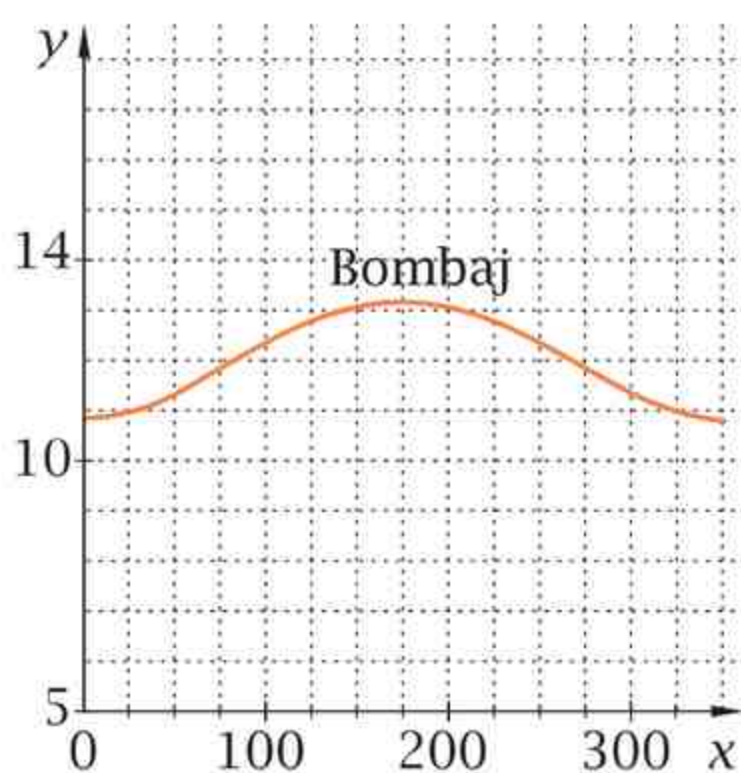


10. Poniżej zamieszczono trzy wykresy przedstawiające, jak zmienia się długość dnia w ciągu roku w Gdyni, Bombaju i Kapsztadzie.

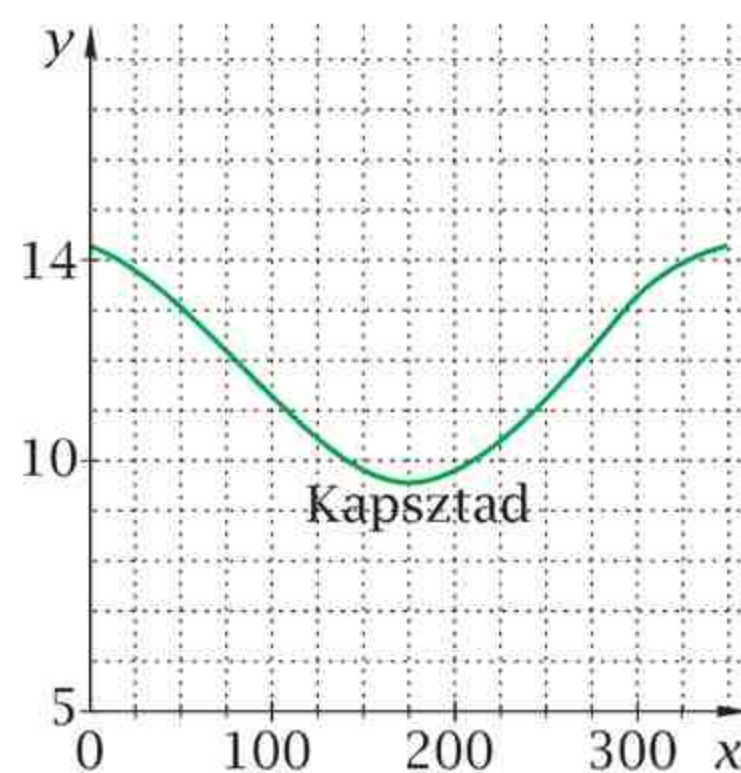
- Określ dla każdego z tych miast, ile trwa najdłuższy dzień w roku.
- W którym z tych miast różnica między najdłuższym a najkrótszym dniem jest najmniejsza?
- Czy w każdym z tych miast dzień trwa 12 godzin w tych samych dniach roku?
- Ile trwa dzień w Kapsztadzie, gdy dzień w Gdyni jest najdłuższy?
- W jakim okresie roku długość dnia w Bombaju rośnie? Jak zmienia się w tym czasie długość dnia w Gdyni, a jak w Kapsztadzie?



x – numer dnia w roku

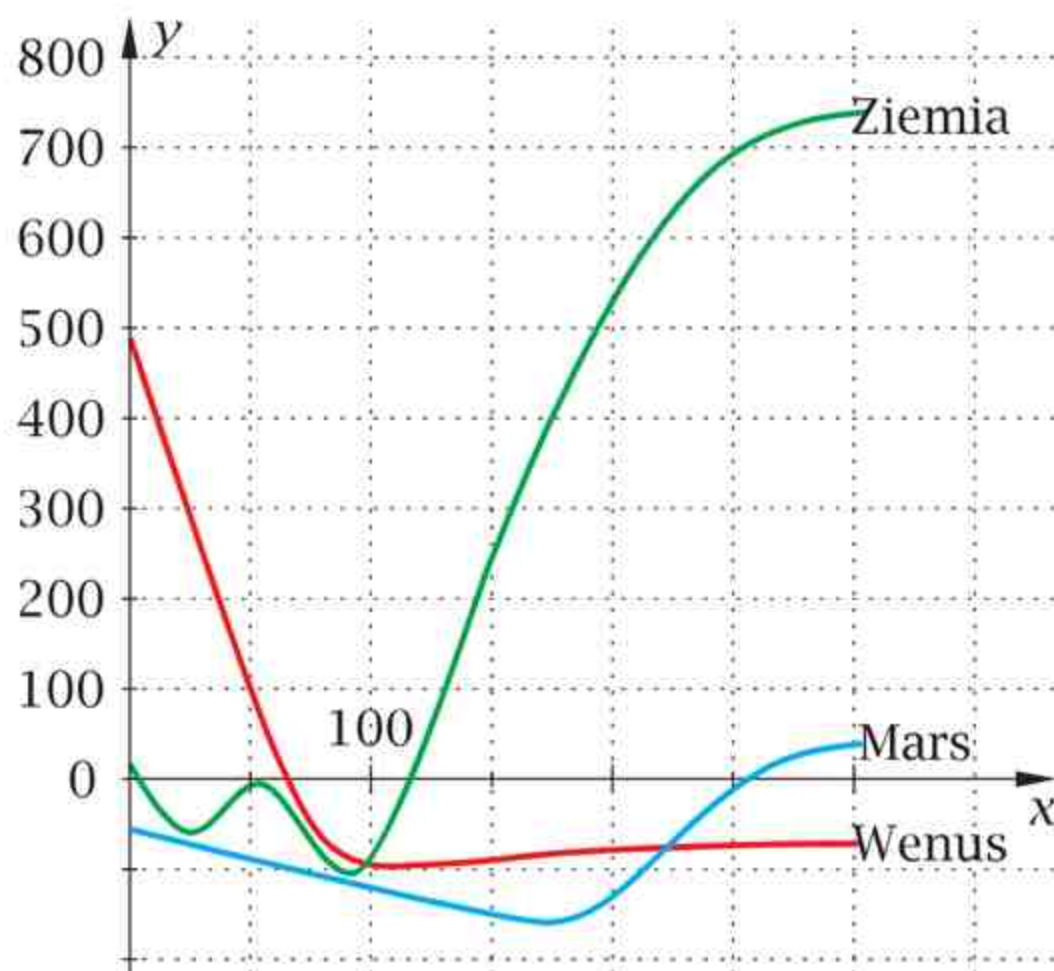


y – długość dnia (w godzinach)



11. Poniższe wykresy obrazują, jak zmienia się średnia temperatura nad powierzchnią Ziemi, Marsa i Wenus, w zależności od odległości od powierzchni planety. Korzystając z wykresu, odpowiedz na pytania.

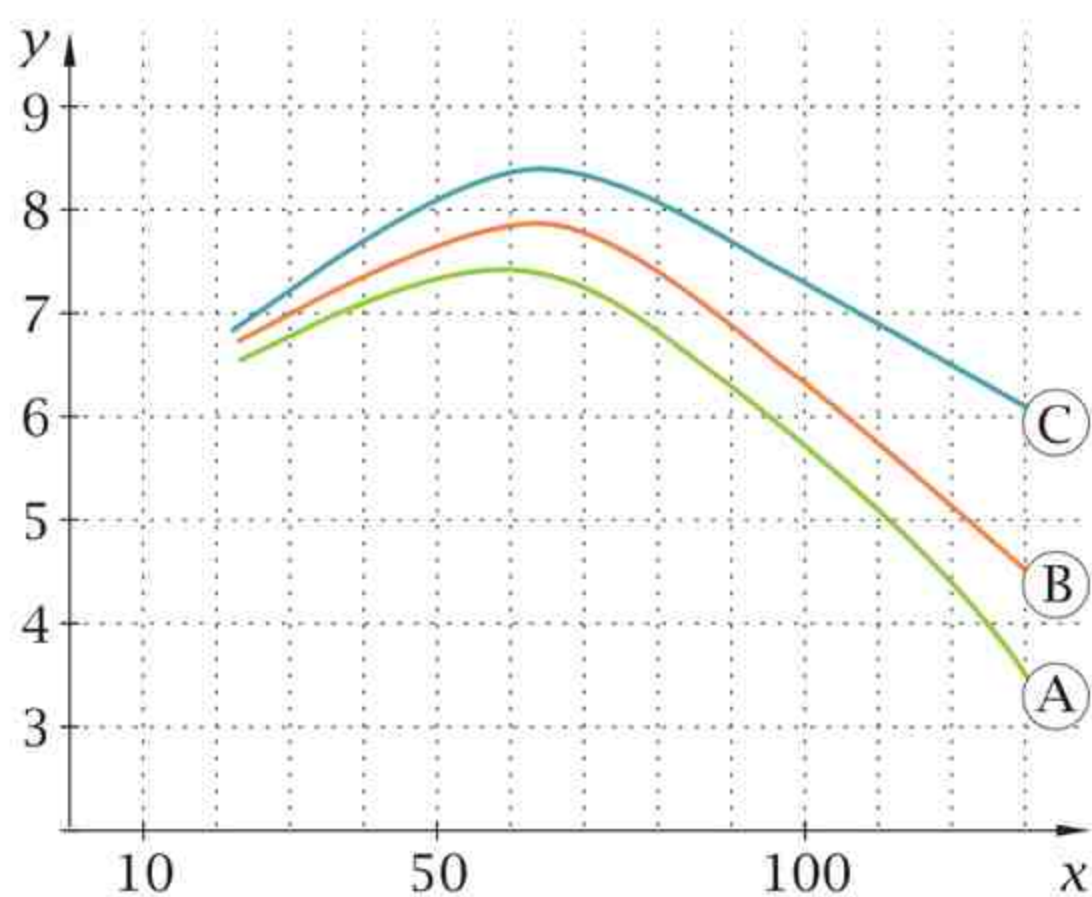
Średnie temperatury nad powierzchnią Ziemi, Marsa i Wenus



x – odległość od powierzchni planety w kilometrach

y – temperatura w $^{\circ}\text{C}$

- Na której planecie (spośród rozważanych) panuje najwyższa temperatura tuż przy powierzchni?
- Na jakiej wysokości nad Wenus, a na jakiej nad Marsem panują temperatury podobne do tych, które panują tuż nad powierzchnią Ziemi?
- Na jakiej wysokości nad powierzchnią Ziemi panują najniższe temperatury?
- W pewnej odległości od Wenus panuje taka sama temperatura, jak na tej samej wysokości nad powierzchnią Ziemi. Jaka to odległość?
- Na jakich wysokościach nad Wenus temperatury są dodatnie?
- Opisz, jak zmienia się temperatura nad Marsem wraz ze wzrostem wysokości nad powierzchnią planety.



x – prędkość w km/h

y – liczba kilometrów przejechanych na 1 litrze paliwa



koniec lat 20.



koniec lat 50.



czasy współczesne

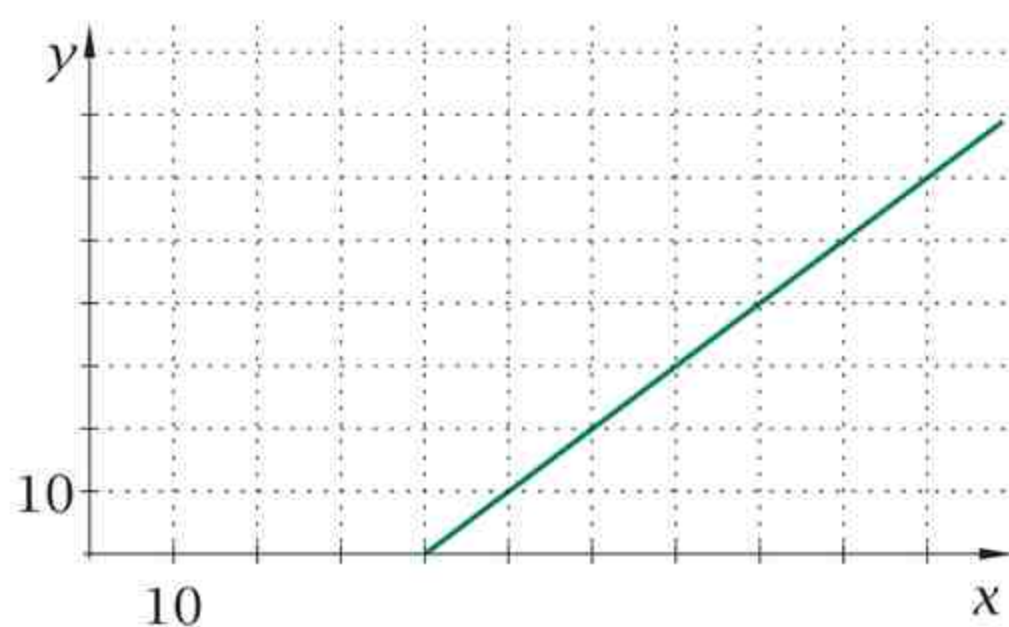
12. Wykresy przedstawiają zależność zużycia paliwa od prędkości dla różnych samochodów, które przedstawiono na poniższych fotografiach.

a) Przy jakiej prędkości samochód (B) mógł przejechać 7 km na jednym litrze paliwa?

b) O ile kilometrów więcej można przejechać na jednym litrze paliwa przy prędkości 100 km/h wspólnie niż w końcu lat pięćdziesiątych, a o ile więcej niż w latach dwudziestych?

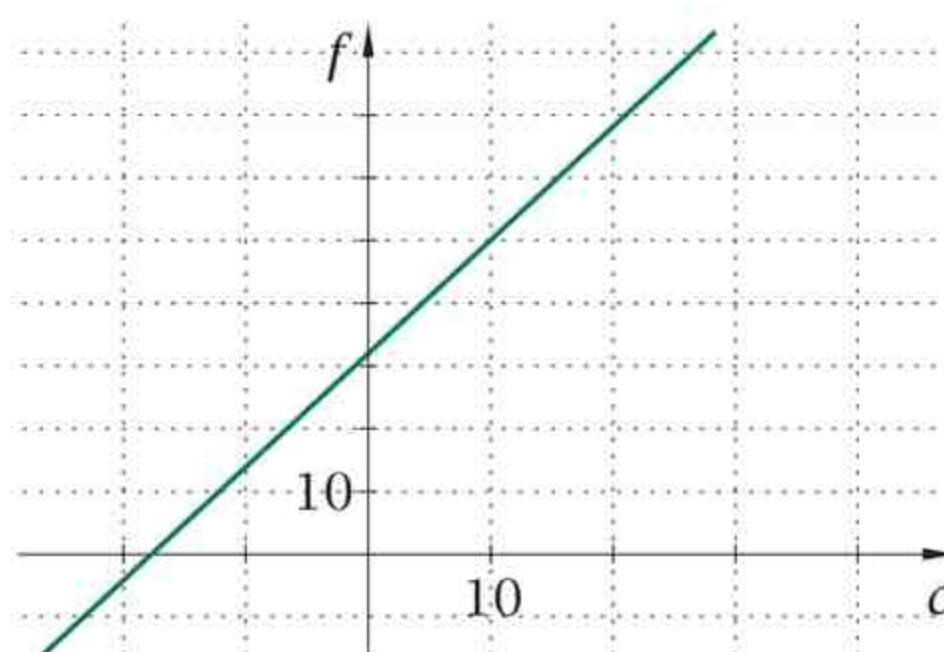
c) Dla każdego z trzech samochodów ustal, przy jakiej prędkości zużycie paliwa jest najmniejsze.

13. Naukowcy amerykańscy ustalili, że szybkość cykania świerszczy zależy od temperatury powietrza. Ta zależność została przedstawiona na pierwszym wykresie. Drugi wykres przedstawia związek między skalą Fahrenheita używaną w USA do określania temperatury a skalą Celsjusza.



x – temperatura w $^{\circ}\text{F}$

y – liczba cyknień świerszczy w ciągu 15 sekund



c – temperatura w $^{\circ}\text{C}$

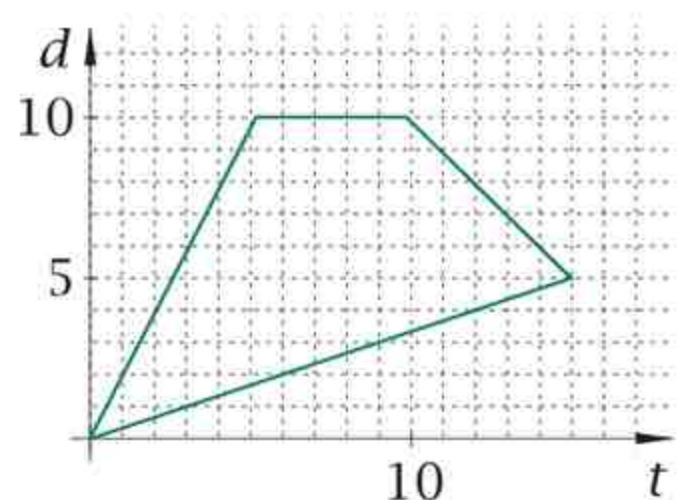
f – temperatura w $^{\circ}\text{F}$

a) Jaka jest temperatura w stopniach Fahrenheita, jeśli świerszcze cykają 40 razy w ciągu 15 sekund? Oszacuj, ile to stopni Celsjusza.

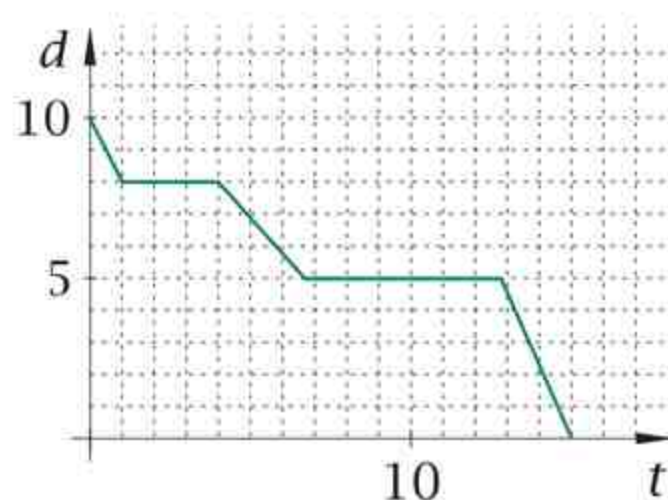
b) Ile razy w ciągu 15 sekund cykają świerszcze w temperaturze 10°C ?

14. Jurek wsiadł do łodzi przycumowanej do prawego brzegu rzeki, łódź odbiła i przez jakiś czas płynęła wzdłuż brzegu. Następnie Jurek dopłynął do lewego brzegu, wysiadł, odpoczął przez chwilę i powrócił łodzią do miejsca, z którego wyruszył.

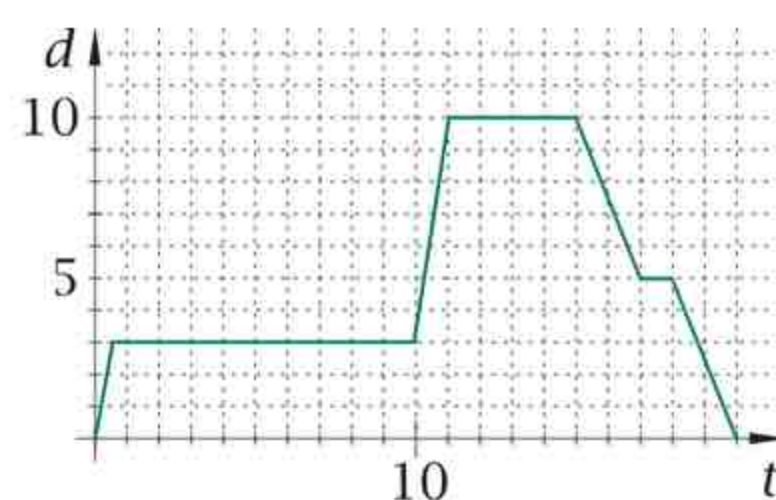
a) Na jednym z poniższych wykresów przedstawiono, jak zmieniała się odległość łódki Jurka od prawego brzegu. Na którym?



t – czas w (minutach)



d – odległość łódki od prawego brzegu (w metrach)

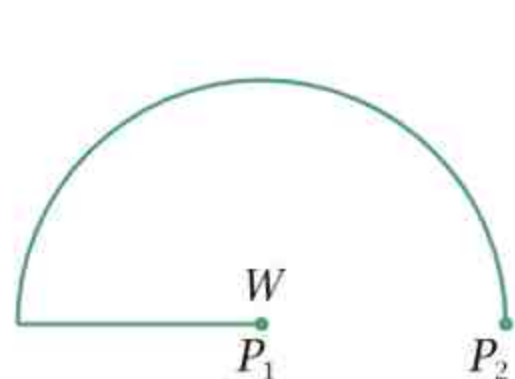


b) Jak długo Jurek odpoczywał na lewym brzegu rzeki? Ile czasu spędził na wodzie?

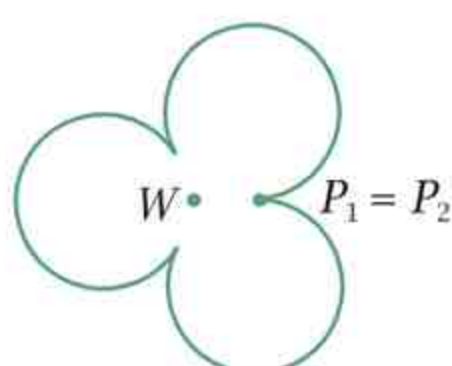
c) Jaka jest szerokość rzeki? W jakiej odległości od lewego brzegu rzeki płynął Jurek wówczas, gdy po rozpoczęciu swojej wycieczki płynął równolegle do brzegów?

d) Jeden z pozostałych dwóch wykresów opisuje ruch innej łódki, w której płynął kolega Jurka. Wskaż, który to wykres, i opisz ten ruch.

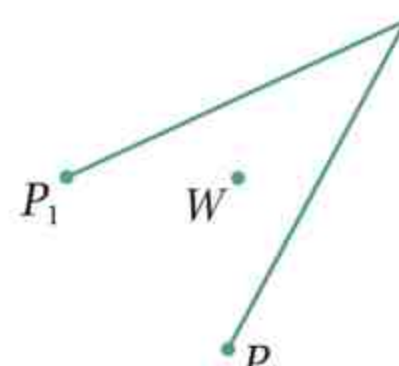
15. Psy przebiegły w pobliżu swoich właścicieli (na rysunkach oznaczonych literą W) wzdłuż zaznaczonych tras od punktu P_1 do punktu P_2 .



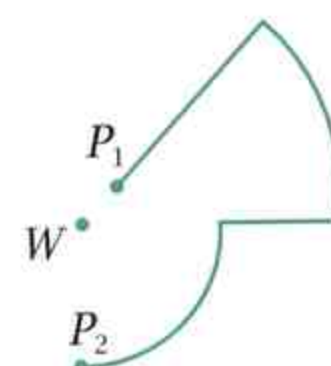
Azor



Reksio

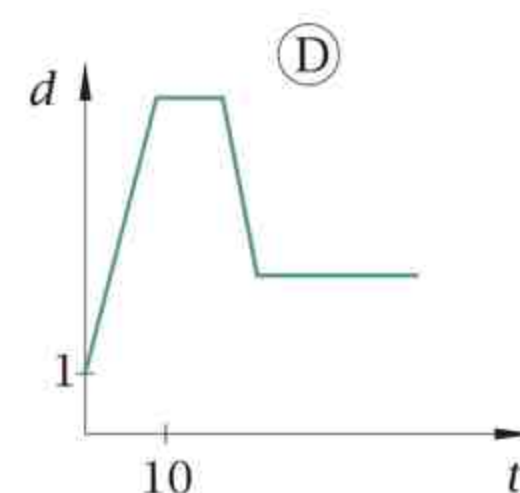
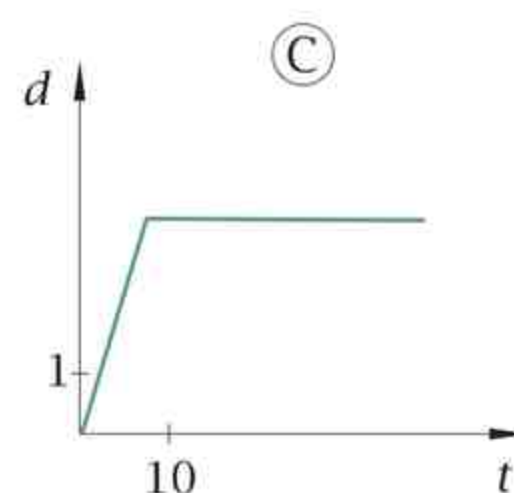
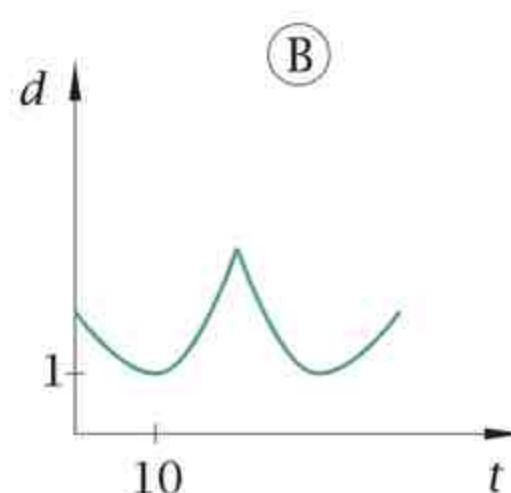
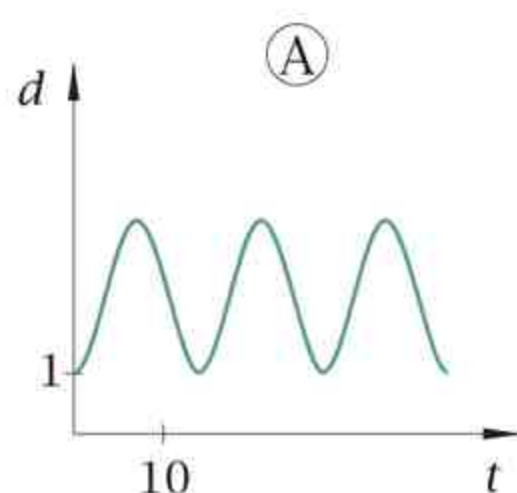


Burek



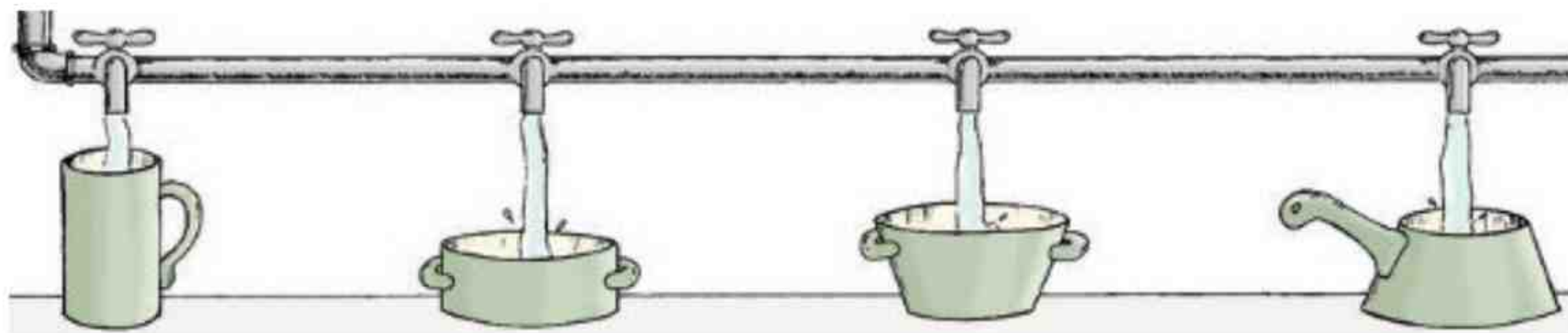
Szarik

Na wykresach przedstawiono, jak zmieniała się odległość psa od właściciela. Dopasuj rysunek trasy do odpowiedniego wykresu.

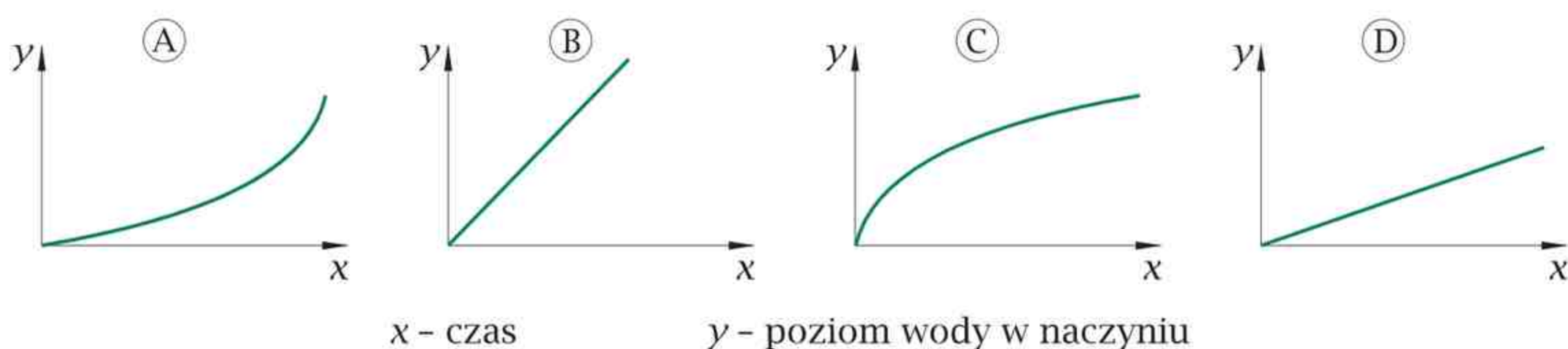


d — odległość psa od właściciela (w metrach) t — czas (w sekundach)

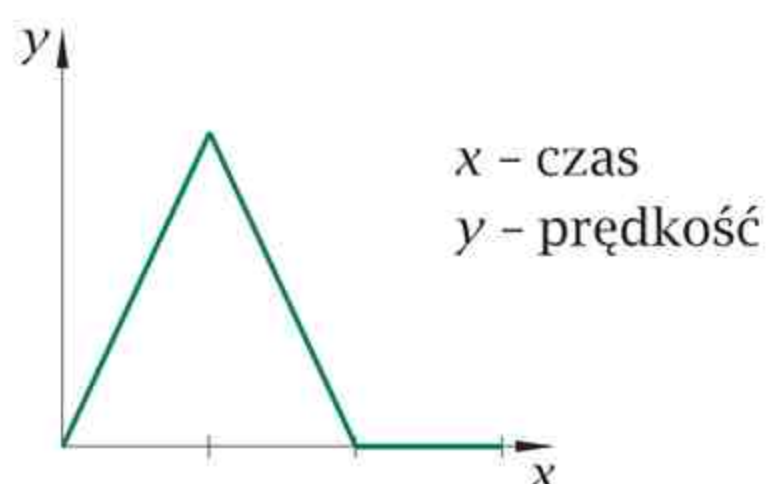
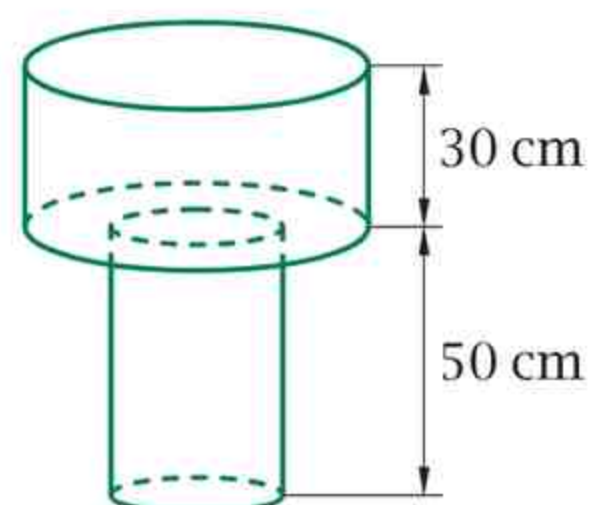
16. Przyjrzyj się rysunkom. Wlewamy jednakowym strumieniem wodę do różnych naczyń.



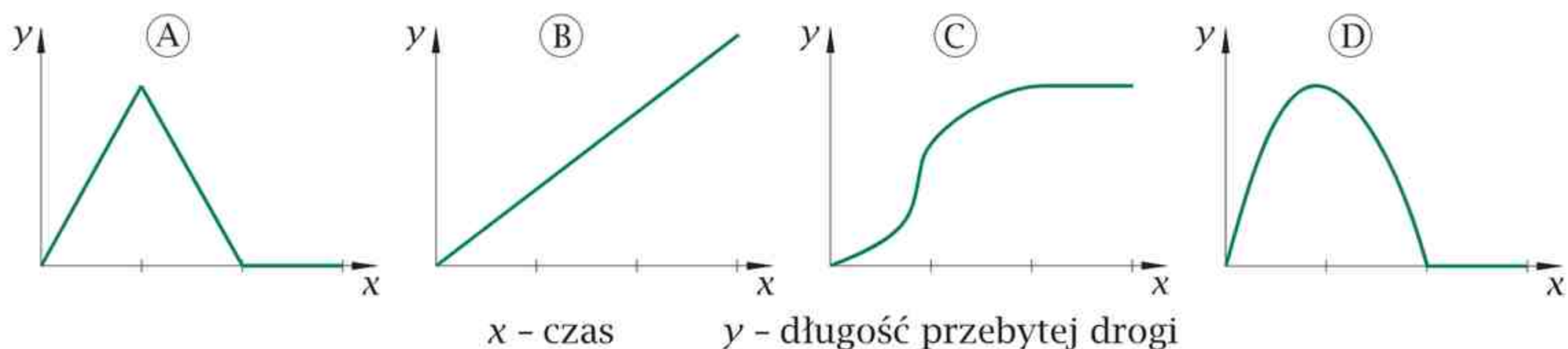
Poniższe wykresy przedstawiają, jak zmienia się poziom wody w naczyniach. Które wykresy odpowiadają kolejnym naczyniom?



17. Naczynie o kształcie takim, jak na rysunku, jest napełniane wodą stałym strumieniem. Dolna część naczynia napełniła się w ciągu 4 minut, a górna — w ciągu kolejnych 10 minut. Naszkicuj wykres przedstawiający, jak zmieniał się poziom wody w tym naczyniu.

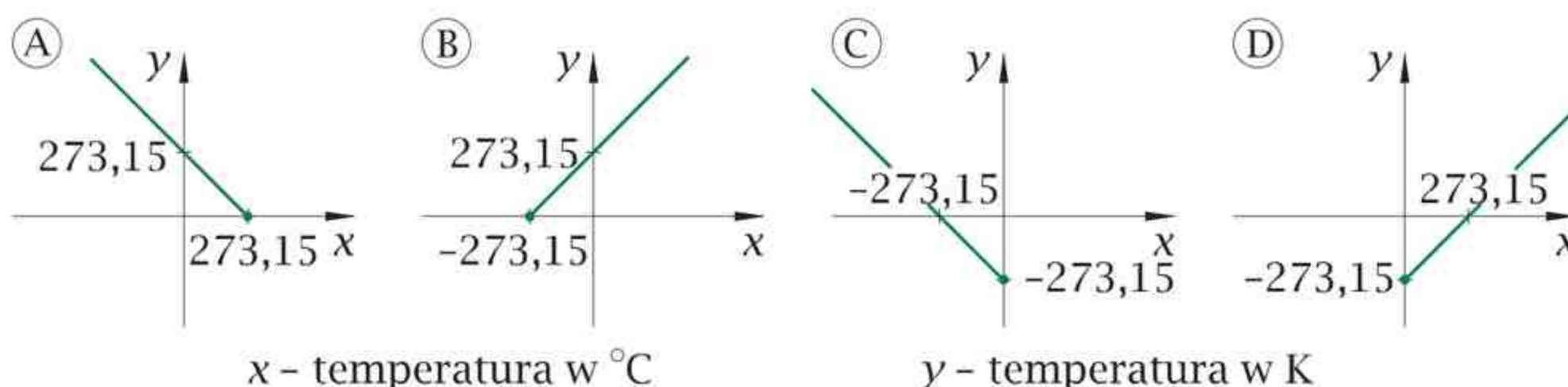


- *18. Wykres z lewej strony przedstawia, jak zmieniała się w czasie prędkość pewnego pojazdu. Jeden z poniższych wykresów pokazuje, jak w tym czasie zmieniała się długość drogi przebytej przez ten pojazd od początku podróży. Który to wykres?



Sprawdź, czy umiesz

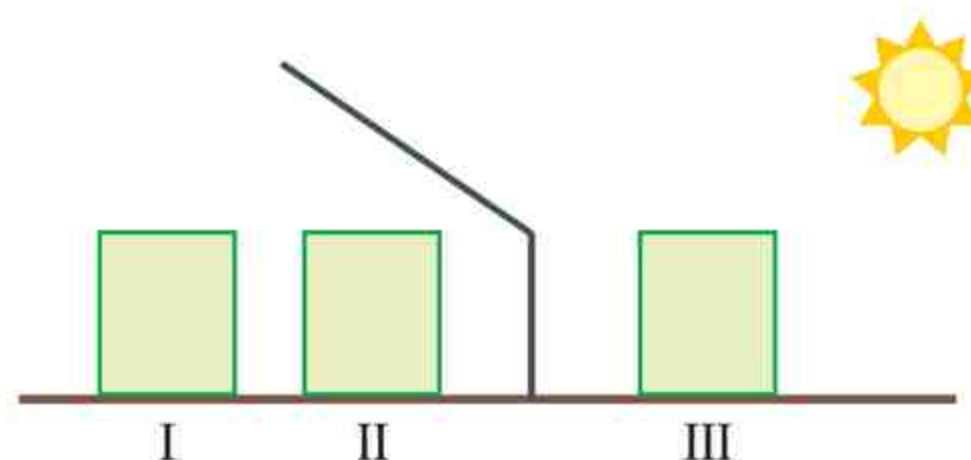
1. Temperaturze 0°C odpowiada w przybliżeniu temperatura $+273\text{ K}$ (273 kelwiny). Natomiast -273°C to 0 K . Który z wykresów przedstawia zależność między skalą Kelvina a skalą Celsjusza?



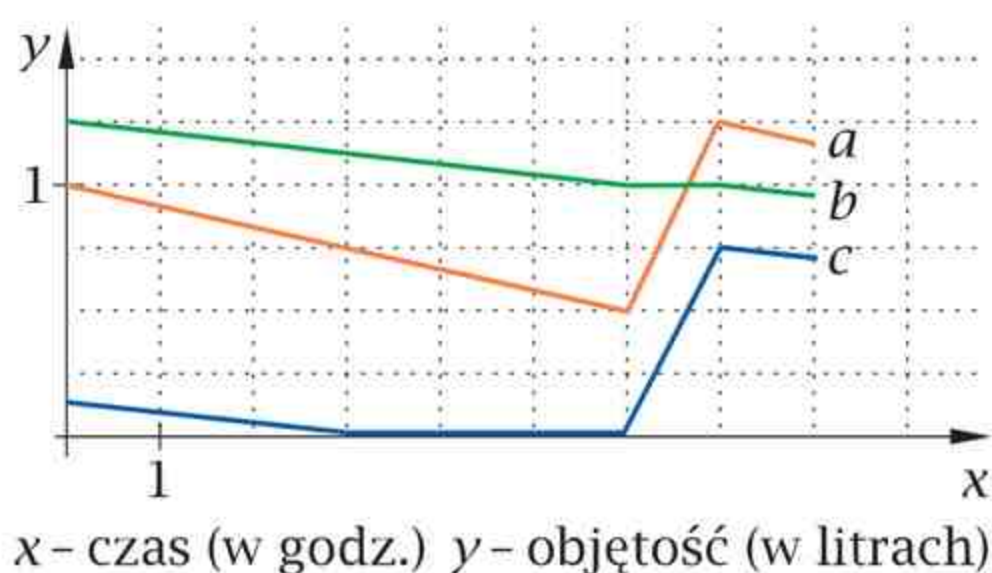
INFORMACJE DO ZADAŃ 2. ORAZ 3.

Trzy takie same pojemniki ustawiono w trzech różnych miejscach.

Pojemnik II stoi w miejscu zadaszonym, pojemnik I stoi w cieniu, ale nie pod dachem, pojemnik III stoi w miejscu nasłonecznionym.



Początkowo świeciło słońce i woda we wszystkich pojemnikach parowała, a następnie spadł deszcz. Na poniższych wykresach przedstawiono, jak zmieniała się objętość wody w pojemnikach.



2. Które wykresy odpowiadają poszczególnym pojemnikom?

A.	B.	C.	D.
$a - \text{I}$	$a - \text{I}$	$a - \text{III}$	$a - \text{II}$
$b - \text{II}$	$b - \text{III}$	$b - \text{II}$	$b - \text{I}$
$c - \text{III}$	$c - \text{II}$	$c - \text{I}$	$c - \text{III}$

3. Które z poniższych zdań jest fałszywe?

- A. Początkowo w trzech pojemnikach było łącznie ponad 2 l wody.
- B. Deszcz padał przez godzinę.
- C. W jednym z pojemników przez pewien czas nie było wody.
- D. W pojemniku, w którym początkowo było najwięcej wody, po 8 godzinach też było najwięcej wody.

Przed klasówką

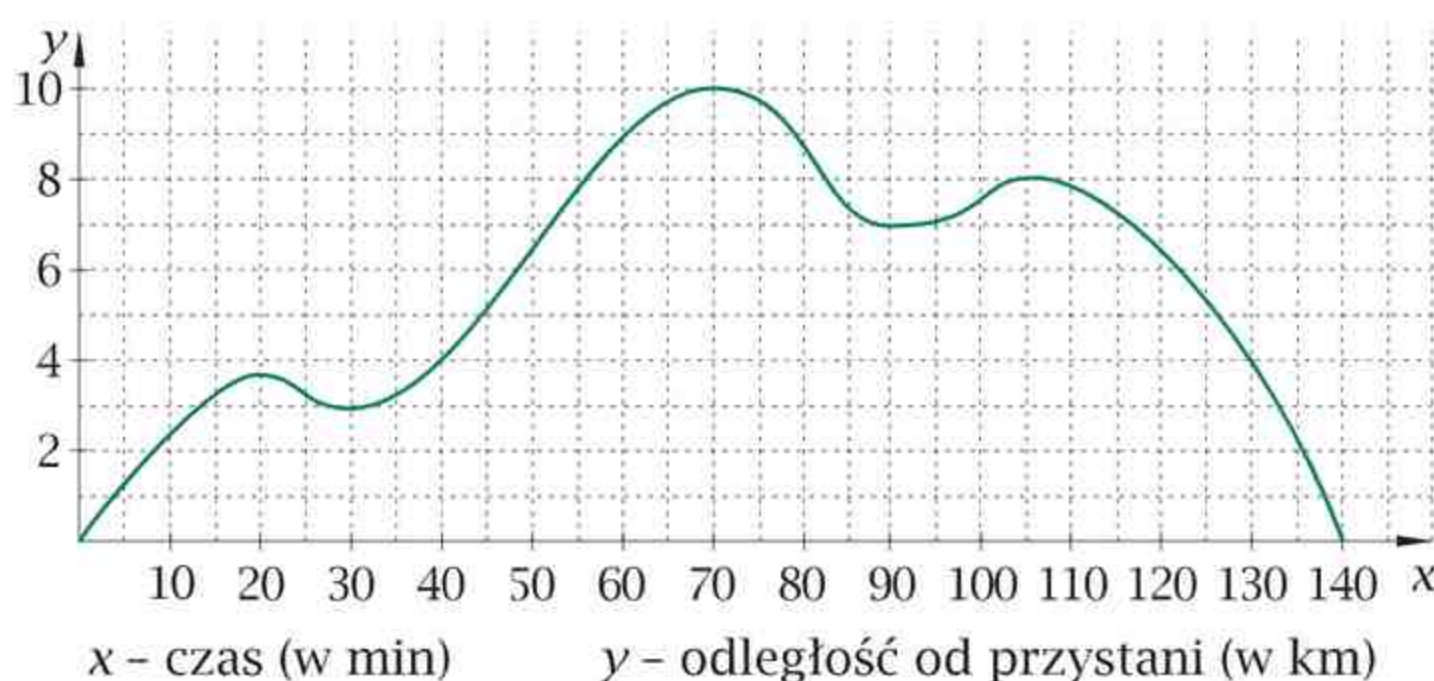
1. Pan Jan przytył w ciągu ostatniego roku aż o 14 kg i waży teraz 84 kg. O ile procent wzrosła jego waga w ciągu tego roku?

- A. o 12,5% B. o ok. 14% C. o ok. 17% D. o 20%

2. Bank Panamski oferuje lokaty roczne o oprocentowaniu 4% w skali roku. Jaką kwotę trzeba wpłacić, aby kwota odsetek po roku wyniosła 500 USD?

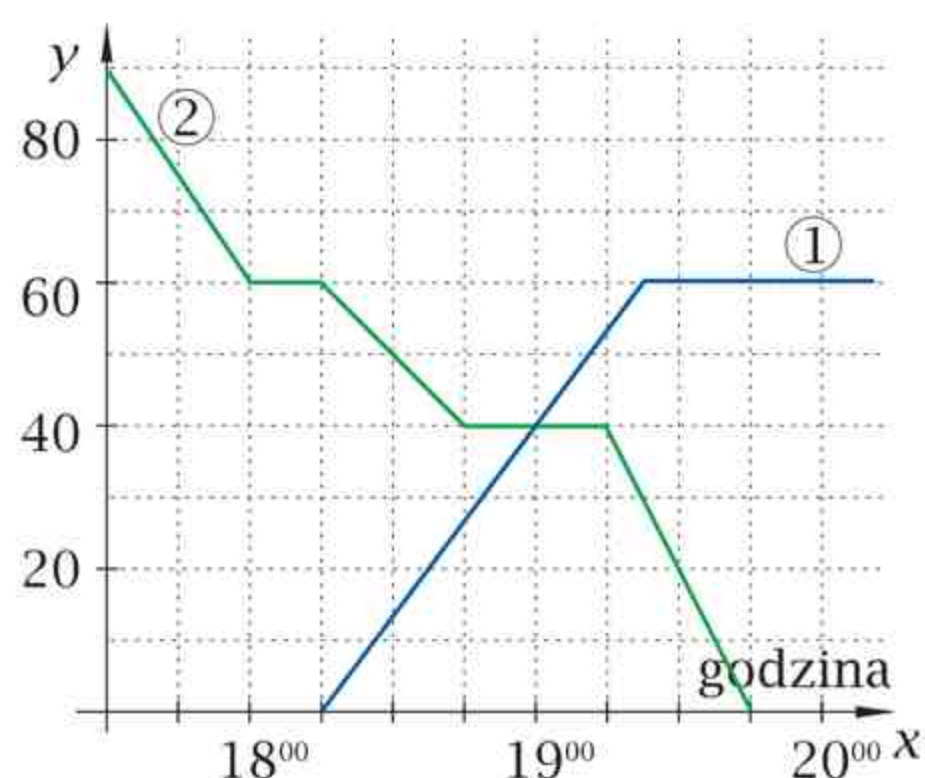
- A. 520 USD B. 480 USD C. 12 500 USD D. 2000 USD

3. Po jeziorze pływał jacht. Wykres przedstawia, jak zmieniała się odległość jachtu od przystani podczas rejsu. Oceń prawdziwość zdań.



- ① W 40 minucie rejsu i 10 minut przed końcem rejsu odległość jachtu od przystani była jednakowa. PRAWDA/FALSZ
- ② Jacht nie odpłynął od przystani dalej niż na odległość 10 km. PRAWDA/FALSZ
- ③ Cztery razy podczas rejsu odległość jachtu od przystani wynosiła dokładnie 7,5 km. PRAWDA/FALSZ
- ④ Rejs trwał 2 godziny i 40 minut. PRAWDA/FALSZ

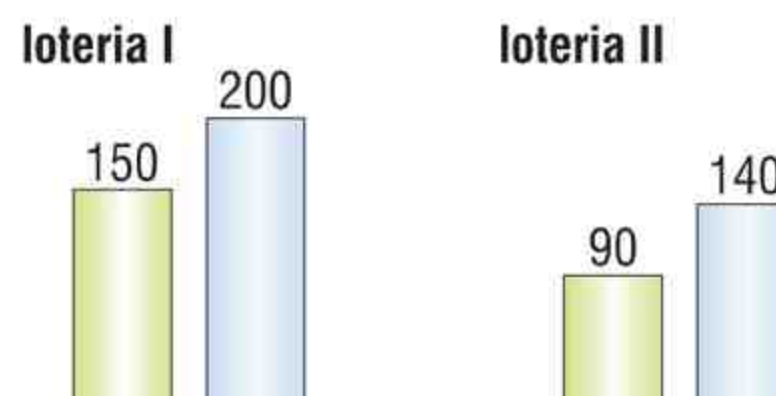
4. Między 18⁰⁰ a 20⁰⁰ ze stacji A rusza pociąg w kierunku stacji B. W tym samym momencie ze stacji B odjeżdża pociąg w kierunku stacji A. Na wykresie przedstawiono, jak zmieniają się odległości od stacji A każdego z tych pociągów. Oceń prawdziwość poniższych zdań.



x — czas (w godzinach)
y — odległość od stacji A (w kilometrach)

- a) Pociąg ① jedzie ze stacji A w kierunku stacji B. TAK/NIE
- b) O godzinie 18¹⁵ pociąg ② jest na stacji A. TAK/NIE
- c) Pociąg ① nie zatrzymuje się między stacjami A i B. TAK/NIE
- d) Gdy pociąg ① mija pociąg ②, ma prędkość $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. TAK/NIE

5. Na festyn dobroczynny przygotowano dwie loterie. W każdej z nich jest więcej losów przegrywających niż wygrywających. Liczby obu rodzajów losów przedstawiono na diagramach.



Przypuśćmy, że jako pierwszy uczestnik kupujesz po jednym losie w każdej loterii. Czy prawdopodobieństwo wygrania w loterii I jest większe niż w loterii II? Wybierz odpowiedź TAK lub NIE oraz jej poprawne uzasadnienie spośród zdań od A do D.

① Tak, ponieważ...

② Nie, ponieważ...

A — ...w loterii I jest więcej losów wygrywających.

B — ...w loterii I jest więcej losów.

C — ...różnica między liczbą losów przegrywających i wygrywających jest taka sama w obu loteriach.

D — ...iloraz liczby losów wygrywających do liczby wszystkich losów jest mniejszy w loterii II.

6. W corocznej loterii zawsze są trzy rodzaje losów: wygrywające, przegrywające i takie, które upoważniają do powtórnego losowania. Liczby losów ustala się w stosunku 1 : 4 : 2. Oceń prawdziwość zdań.

① Losów wygrywających jest cztery razy mniej niż losów przegrywających.

TAK/NIE

② Jeśli w ubiegłorocznej loterii były łącznie 434 losy, to wśród nich były 62 losy wygrywające.

TAK/NIE

③ Prawdopodobieństwo zakupu losu przegrywającego wynosi $\frac{4}{7}$.

TAK/NIE

④ Jeśli w loterii było 50 losów upoważniających do powtórnego losowania, to losów przegrywających musiało być 150.

TAK/NIE



7. Cena brutto pewnego towaru wynosi 126 zł. VAT jest równy 5%. Jaka jest cena netto tego towaru?

Zadania uzupełniające

Obliczenia procentowe

1. Spytano 1100 osób, z jakimi umiejętnościami sobie nie radzą. Wyniki ankiety przedstawia poniższy diagram.

Z czym Polacy sobie nie radzą?

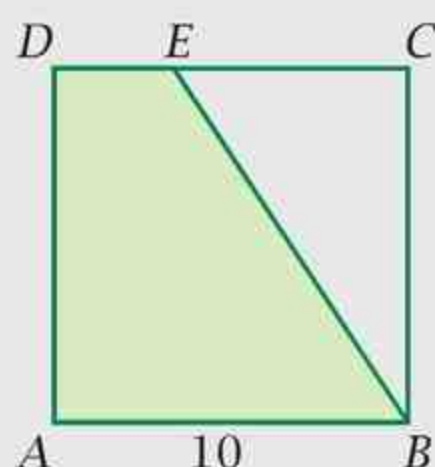


- Ile osób spośród ankietowanych nie umie grać na instrumencie muzycznym?
- Ilu osób potrafiących gotować należy się spodziewać w grupie 1200 osób?
- Do nieznamomości języków obcych przyznało się ankietowanym 869 osób. Jaki to procent ankietowanych?

2. Najpopularniejsze kolory pojawiające się na flagach państwowych to biały i czerwony. Wśród flag 224 państw tylko na 18 flagach pojawiają się tylko kolory biały i czerwony, a na czterech z nich koloru białego jest tyle samo co czerwonego.

- Jaki procent wszystkich flag stanowią flagi biało-czerwone?
- Jaki procent flag biało-czerwonych stanowią flagi, na których koloru białego jest tyle samo co czerwonego?

3. Pole trapezu $ABED$ stanowi 70% pola kwadratu $ABCD$. Jakie długości mają odcinki DE i BE ?



4. W pewnej szkole oceny są ustalane według zasad określonych w poniższej tabeli:

Procent zdobytych punktów	Ocena
od 0% do 49%	1
od 50% do 59%	2
od 60% do 79%	3
od 80% do 89%	4
od 90% do 94%	5
od 95% do 100%	6

- Na sprawdzianie z fizyki można było zdobyć 45 punktów. Wiesia zdobyła 30 punktów. Jaką otrzymała ocenę?
 - Jarek na sprawdzianie z chemii zdobył 90% punktów na 80 możliwych do uzyskania. Ilu punktów zabrakło mu do szóstki?
 - Krysia zdobyła na sprawdzianie z historii 39 punktów. Tylko dwóch punktów procentowych brakowało jej do czwórki. Ile maksymalnie punktów można było zdobyć na tym sprawdzianie?
5. W liczącej 20 uczniów klasie chłopców jest więcej niż dziewcząt. Czoro uczniów, czyli 20% dziewcząt i 20% chłopców, nosi okulary. Ilu chłopców i ile dziewcząt jest w tej klasie?
- 6. Ile śmietany o zawartości 12% tłuszczu i ile mleka dwuprocentowego trzeba zmieszać, aby otrzymać 200 g mleka, w którym będzie 3% tłuszczu?



7. Na pewnym forum internetowym można oceniać opinie innych internautów. Podsumowanie głosowania pod opinią jednego z internautów wyglądało tak:

392 ↓ 132

Oznacza to, że tę opinię oceniło łącznie 392 internautów i głosów negatywnych było o 132 więcej niż głosów pozytywnych. Ile było ocen pozytywnych, a ile — negatywnych? Jaki procent wszystkich ocen stanowiły oceny pozytywne? Odpowiedź podaj z dokładnością do 1%.

Zmiana o dany procent. Lokaty bankowe

8. W kiosku egzemplarz *Wiem* kosztuje 4,20 zł, a w prenumeracie tylko 3,30 zł. Poczta pobiera 2,50 zł opłaty za przekaz pocztowy, którym dokonuje się wpłaty na prenumeratę. Sprawdź, czy rzeczywiście prenumerata roczna jest o 20% tańsza od zakupów w kiosku, tak jak to obiecuje reklama.



9. W sklepie u pana Jamrożego można kupić stół za 243 zł. Pan Jamroży zarabia na nim 8% (tzn. sprzedaje go o 8% drożej niż zapłacił za niego w hurtowni). Ile procent zysku miałby pan Jamroży, gdyby sprzedał ten stół za 252 zł?



10. Ekonomisci przewidują, że w pewnym kraju inflacja 10% rocznie utrzyma się przez kilka lat. O ile procent wzrosną ceny w tym kraju w ciągu dwóch najbliższych lat, a o ile — w ciągu trzech lat?

*11. Fabryka produkuje zielone i czerwone szelki. Zielone są o 50% tańsze niż czerwone i stanowią 10% liczby produkowanych szelek. Gdyby fabryka ta produkowała miesięcznie o 100 szelek mniej, ale wszystkie czerwone, to przychód ze sprzedaży by się nie zmienił. Ile szelek miesięcznie produkuje ta fabryka?



Uwaga. W zadaniach 12-14 nie uwzględniamy podatku od odsetek.

12. Panowie Malinowski i Kowalski wpłacili po 3000 zł na lokaty roczne w dwóch bankach: pierwszy w Banku Pieniężnym, a drugi w Banku Oszczędnościowym (zob. rysunek poniżej).

a) O ile złotych stan konta pana Malinowskiego będzie wyższy od stanu konta pana Kowalskiego po upływie roku?



BANK OSZCZĘDNOŚCIOWY	
Termin lokaty 1 rok	Oprocentowanie 3%

b) Jaką kwotę złożono na lokatę roczną w Banku Pieniężnym, jeśli po roku naliczone od niej odsetki wyniosły 99 zł?

c) Jaką kwotę złożono na lokatę roczną w Banku Oszczędnościowym, jeśli po roku na lokacie znajduje się 3502 zł?

- **13.** Pan Grzegorz i pani Zuzanna wpłacili po 1000 zł na roczną lokatę oprocentowaną 6% w stosunku rocznym.

- a) Pan Grzegorz co roku wypłaca odsetki. Jaka będzie suma wypłaconych odsetek po trzech latach?
- b) Pani Zuzanna nie dokonała żadnych wypłat ani wpłat przez trzy lata. O ile złotych powiększył się stan jej konta?



- *14.** a) Pani Karolina wpłaciła do Banku Dziennego 800 zł na lokatę 90-dniową. Jaki będzie stan jej konta po upływie terminu lokaty?

BANK DZIENNY

Lokata terminowa	Stopa procentowa*	
	poniżej 10 000 zł	od 10 000 zł
7 dni	3%	3,4%
14 dni	3,5%	4%
30 dni	5%	5,2%
60 dni	5,3%	5,5%
90 dni	6%	6,4%

* oprocentowanie podane w skali roku

Uwaga. Bank nalicza odsetki wg wzoru:

$$\text{Odsetki} = \frac{n}{365} \cdot p\% \text{ kwoty } a$$

p — oprocentowanie lokaty

a — wpłacona kwota

n — liczba dni lokaty

- b) Pan Wojtek założył lokatę 14-dniową, wpłacając 12 000 zł. Jaki będzie stan jego konta po upływie terminu lokaty?
- c) Jaką kwotę trzeba by wpłacić na lokatę trzydziestodniową, aby odsetki wyniosły 1000 zł?

VAT i inne podatki

- 15.** Popatrz na rysunki i odpowiedz:

- a) Ile złotych trzeba zapłacić za sok?
- b) Ile złotych wynosi podatek VAT w cenie (brutto) słoika miodu?
- c) O ile tańsza byłaby kawa, gdyby podatek VAT wynosił 8%?



- **16.** Właściciel sklepu odzieżowego ustalił cenę netto krawatów na 70 zł. Stawka VAT wynosi 23%.

- a) Ile kosztował w tym sklepie krawat?
- b) W grudniu sprzedano 120 krawatów. Jaką kwotę stanowił VAT od sprzedaży krawatów przekazany przez sprzedawcę do skarbu państwa za ten miesiąc?

- 17.** a) Cena netto pralki wynosi 2000 zł, a stawka VAT wynosi 23%. O ile złotych zmniejszyłaby się cena brutto, gdyby stawkę VAT zmniejszono do 18%, a cena netto nie została zmieniona?

- b) Cena netto wynajęcia pewnego pokoju hotelowego wynosi 80 zł. Stawka VAT na usługi hotelowe to 8%. O ile procent wzrosłaby cena brutto wynajęcia pokoju, gdyby cena netto się nie zmieniła, a stawkę VAT zwiększono do 15%?

- 18.** Cenę brutto benzyny w 2018 roku ustalało się, dodając do ceny netto trzy rodzaje podatków: VAT (23% ceny netto), akcyzę (1,54 zł do ceny każdego litra) oraz opłatę paliwową (0,13 zł do ceny każdego litra). Łączny podatek był odprowadzany do skarbu państwa. Ile wynosiły podatki przy cenie 5 zł brutto za 1 litr benzyny? Jaki procent ceny brutto benzyny stanowiły podatki?

19. Znajdź w domu jakikolwiek rachunek, np. za prąd, gaz lub zakupy. Odczytaj z niego informacje dotyczące cen netto, cen brutto oraz podatków.

----- Ciekawostka

Oprócz pracowników zatrudnionych na stałe, to znaczy na etat, pracę na rzecz firmy wykonują też czasem pracownicy zatrudnieni na tzw. umowę-zlecenie. W umowie zawartej między takim pracownikiem a firmą podaje się kwotę brutto wynagrodzenia. Wynagrodzenie, które rzeczywiście otrzymuje pracownik (kwota netto), to zapisana w umowie kwota brutto pomniejszona o podatek. Podatek w tym wypadku to 12% z 80% kwoty brutto.

20. Przeczytaj ciekawostkę.

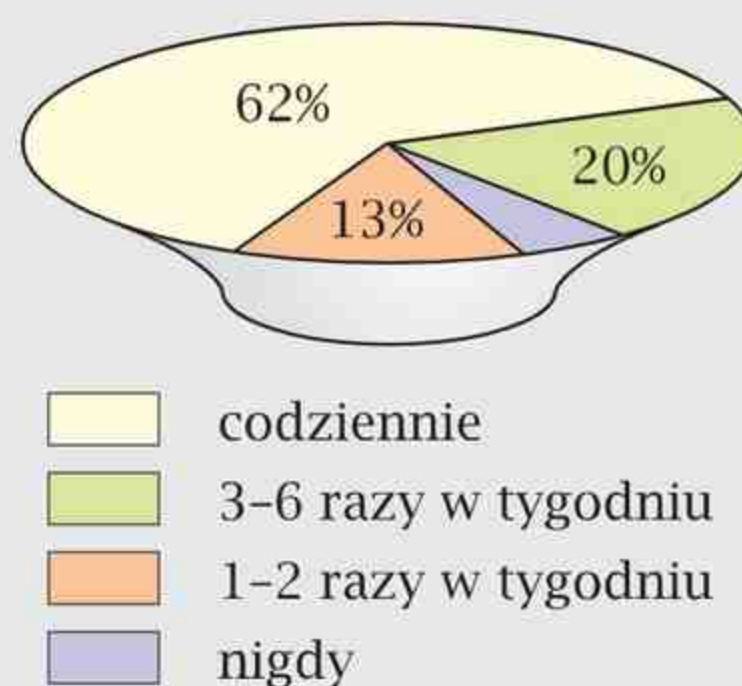
- Jacek przez tydzień pracował na umowę-zlecenie w pewnej firmie reklamowej. Jego wynagrodzenie brutto wyniosło 500 zł. Jaką kwotę netto otrzymał?
- Pewien producent proponuje wynagrodzenie 30 zł brutto za godzinę pracy. Jaką kwotę netto można zarobić u tego pracodawcy za 8 godzin pracy?
- Wynagrodzenie netto za pewną umowę-zlecenie wynosiło 1446,40 zł. Jaka kwota brutto była na tej umowie?

Czytanie diagramów

21. Popatrz na diagramy. O ile procent wzrośnie liczba ludności w Chinach, a o ile w Indiach w roku 2030 w porównaniu z początkiem wieku?



22. Grupie 1000-osobowej zadano pytanie: *Jak często sam gotujesz?* Oto wyniki ankiety:



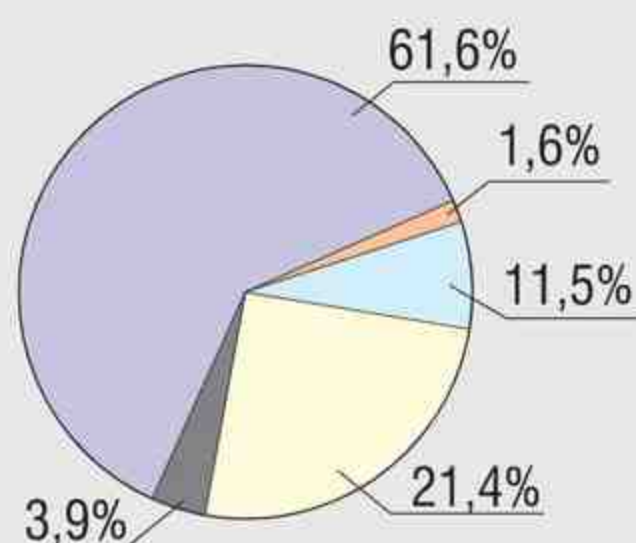
Tych, którzy sami gotują, dodatkowo spytano: *Potrawy jakich narodów potrafisz gotować?*



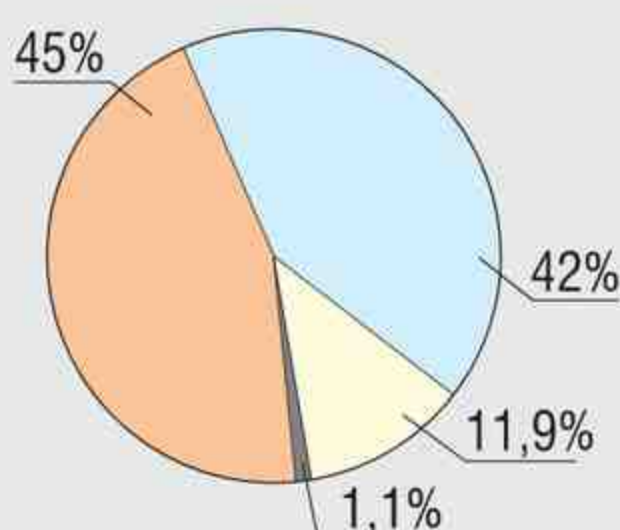
- Ile osób gotuje codziennie?
- Ile osób w podanej grupie nigdy samodzielnie nie gotuje?
- Ile osób gotuje chociaż raz w tygodniu?
- Wyjaśnij, dlaczego na drugim diagramie suma liczb wyrażonych w procentach przekracza 100%.
- Ile osób potrafi gotować potrawy azjatyckie? Jaki to procent badanej grupy?
- Wiadomo, że 5% badanej grupy to wegetarianie i wszyscy oni codziennie gotują. Jaki procent osób, które codziennie gotują, stanowią wegetarianie?
- Wiadomo, że 10% gotujących potrawy kuchni śródziemnomorskiej potrafi gotować także potrawy przynajmniej jednej z pozostałych wymienionych w ankiecie kuchni. Oblicz, ile jest takich osób.

23. Przyjrzyj się poniższym diagramom i odpowiedz na pytanie.

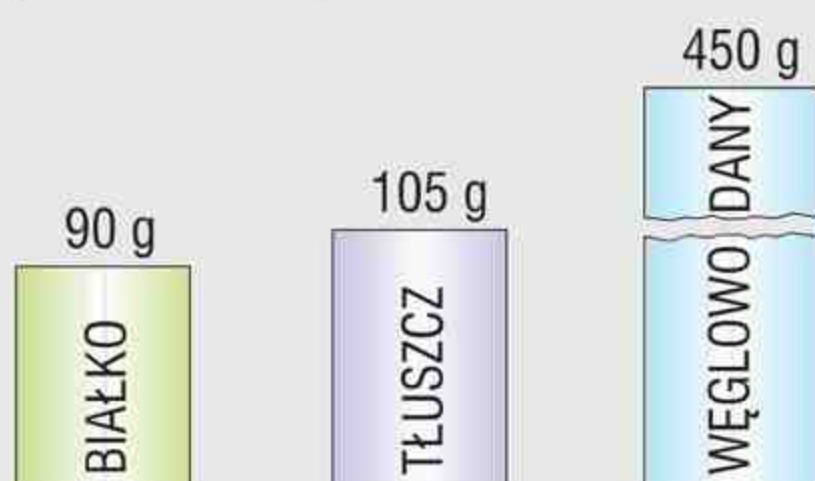
Skład fasoli białej



Skład wieprzowiny



Dobowe zapotrzebowanie na ważniejsze składniki odżywcze młodzieży w wieku 13-15 lat



- O ile więcej tłuszczu jest w 200 g wieprzowiny niż w 200 g fasoli?
- W porcji fasoli z wieprzowiną jest 150 g fasoli i 50 g wieprzowiny. Ile w tej porcji jest węglowodanów, a ile białka?
- Czy zjadając 0,5 kg fasoli białej, pokryjesz dzienne zapotrzebowanie na białko?
- Jaka ilość wieprzowiny pokrywa twoje dzienne zapotrzebowanie na tłuszcz?

Podział proporcjonalny

- 24. W pewnej szkole liczącej 432 uczniów stosunek liczby dziewcząt do liczby chłopców wynosi 4:5. Ile dziewcząt i ilu chłopców jest w tej szkole?

25. Panowie Marian, Stefan i Jerzy są właścicielami sadu. Do Mariana należy $\frac{1}{5}$ sadu, do Stefana — $\frac{7}{10}$, a do Jerzego — $\frac{1}{10}$ sadu. Po sprzedaniu owoców otrzymali 20 000 zł i podzielili zarobek proporcjonalnie do części sadu, które do nich należą. Ile zarobił każdy z tych panów?

- 26. Pewną kwotę podzielono w stosunku 1:4. Większa część otrzymana w wyniku tego podziału wynosiła 336 zł. Jaką kwotę podzielono?

27. W pewnej restauracji sporządzono dziewięćset litrów napoju owocowego, dodając do wody mineralnej sok owocowy w proporcji 11:4. Ile litrów wody, a ile soku owocowego zużyto do przygotowania tego napoju?

Obliczanie prawdopodobieństw

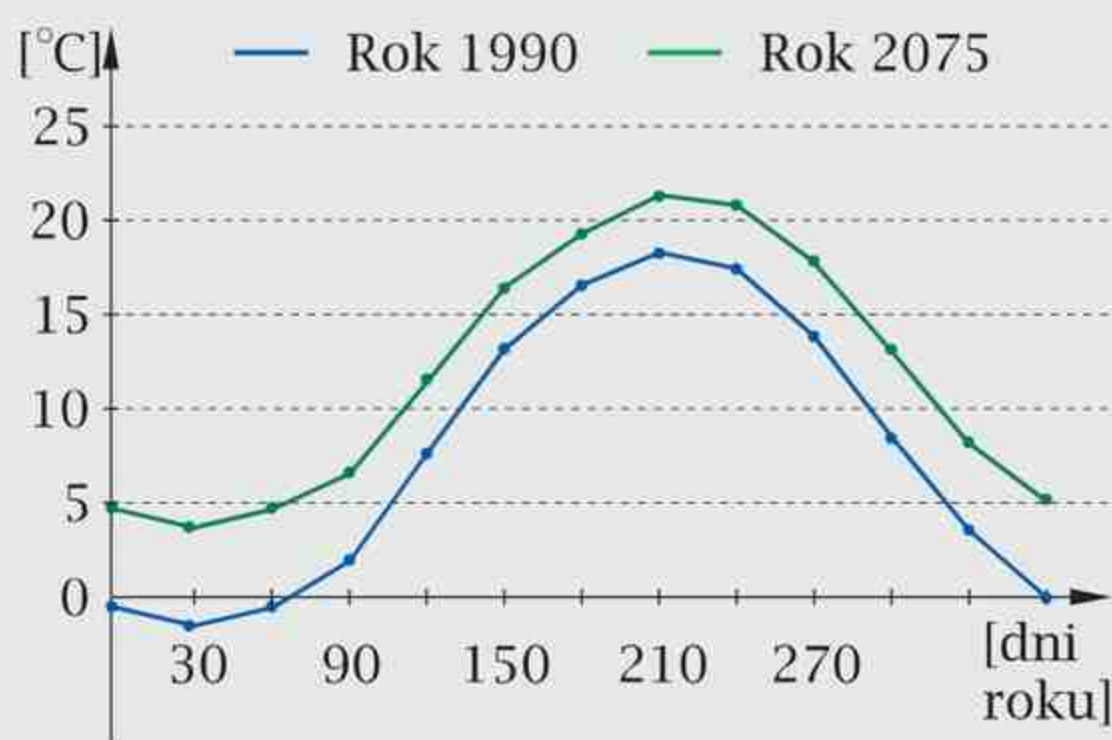
- 28. W starym ulu jest 5 kul czerwonych, 4 białe i 3 zielone. Ula wyciąga losowo kule z ula.
- Pierwsza wyciągnięta kula jest zielona. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że następna kula będzie biała, a jakie — że będzie zielona?
 - Pierwsze dwie wyciągnięte kule były zielone. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że trzecia kula będzie biała, a jakie — że będzie czerwona?
- 29. Spośród stu liczb naturalnych od 0 do 99 losujemy jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że liczba ta:
- jest parzysta,
 - jest podzielna przez 7,
 - przy dzieleniu przez 5 daje resztę 1?

→ **30.** Wybieramy losowo liczbę spośród dwucyfrowych liczb naturalnych. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby:

- nieparzystej,
- podzielnej przez 11,
- która nie jest podzielna przez 11,
- której dokładnie jedna z cyfr to 2.

Odczytywanie wykresów

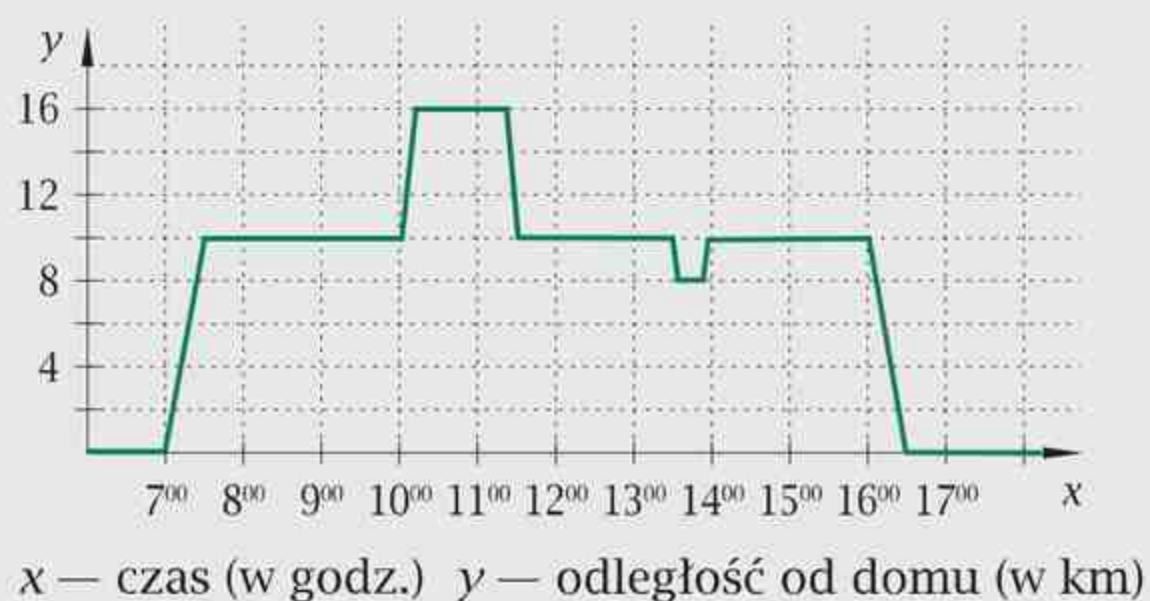
31. Poniżej przedstawiono, jak zmieniła się temperatura w Polsce w 1990 roku i jak przewiduje się, że będzie się zmieniać w 2075 roku.



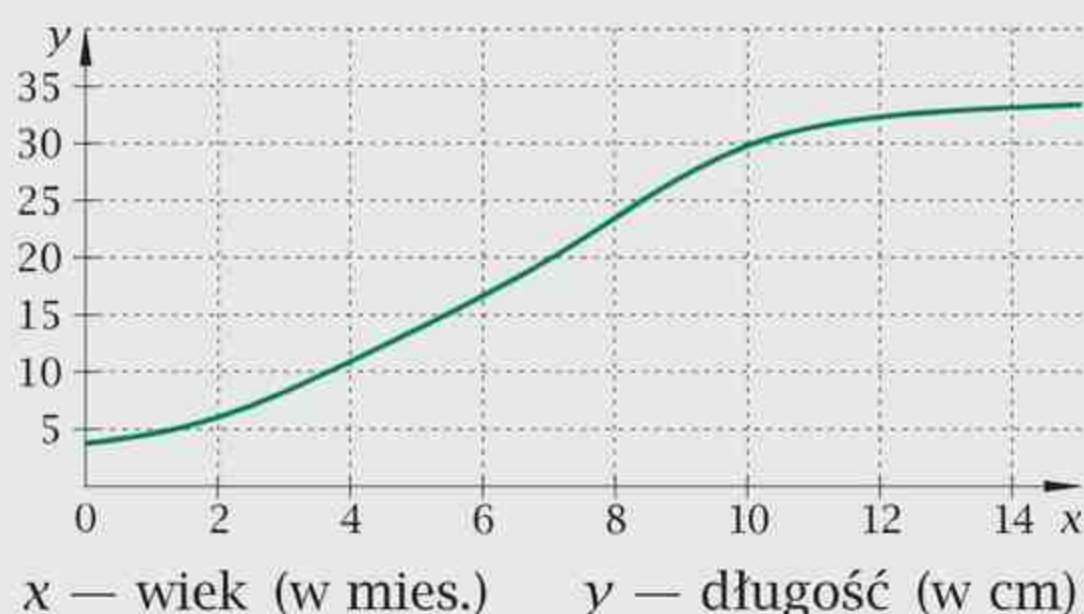
a) Jak długo w 2075 roku będą panowały temperatury wyższe niż najwyższa temperatura w 1990 roku?

b) Okres wegetacyjny to okres, gdy panują temperatury wyższe niż 5°C. O ile dłuższy będzie okres wegetacyjny w 2075 roku od okresu wegetacyjnego w 1990 roku?

32. Pan Jan jeździ do pracy samochodem. Wykres przedstawia, jak pewnego dnia zmieniała się odległość samochodu pana Jana od domu. Odczytaj z tego wykresu jak najwięcej informacji.



33. Wykres przedstawia, jak zmienia się średnia długość pstrąga w zależności od jego wieku.

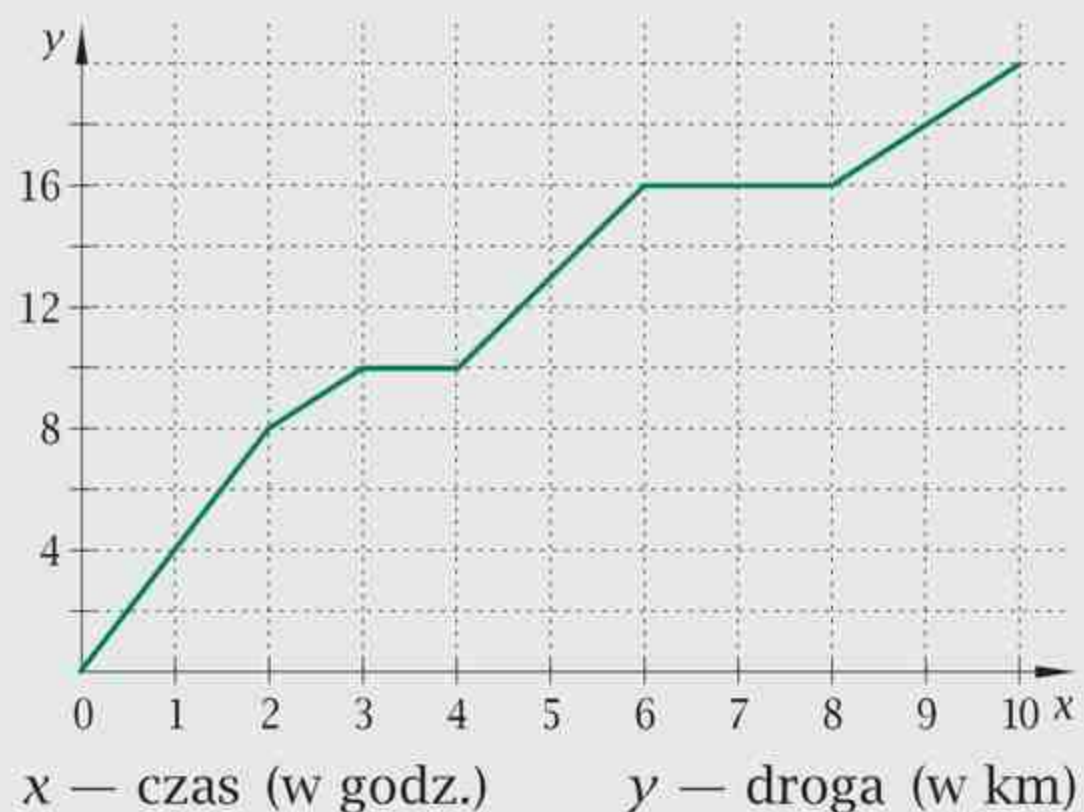


a) Jaką mniej więcej długość ma pstrąg trzymiesięczny?

b) Ile miesięcy może mieć pstrąg o długości 20 cm?

c) Wymiar ochronny dla pstrąga wynosi 30 cm. Oznacza to, że złowione pstrągi o długości mniejszej niż 30 cm należy wrzucać z powrotem do rzeki. Ile co najmniej miesięcy ma pstrąg, który nie podlega ochronie?

→ **34.** Z wykresu można odczytać, jaką odległość pokonali turyści podczas pewnej wycieczki.



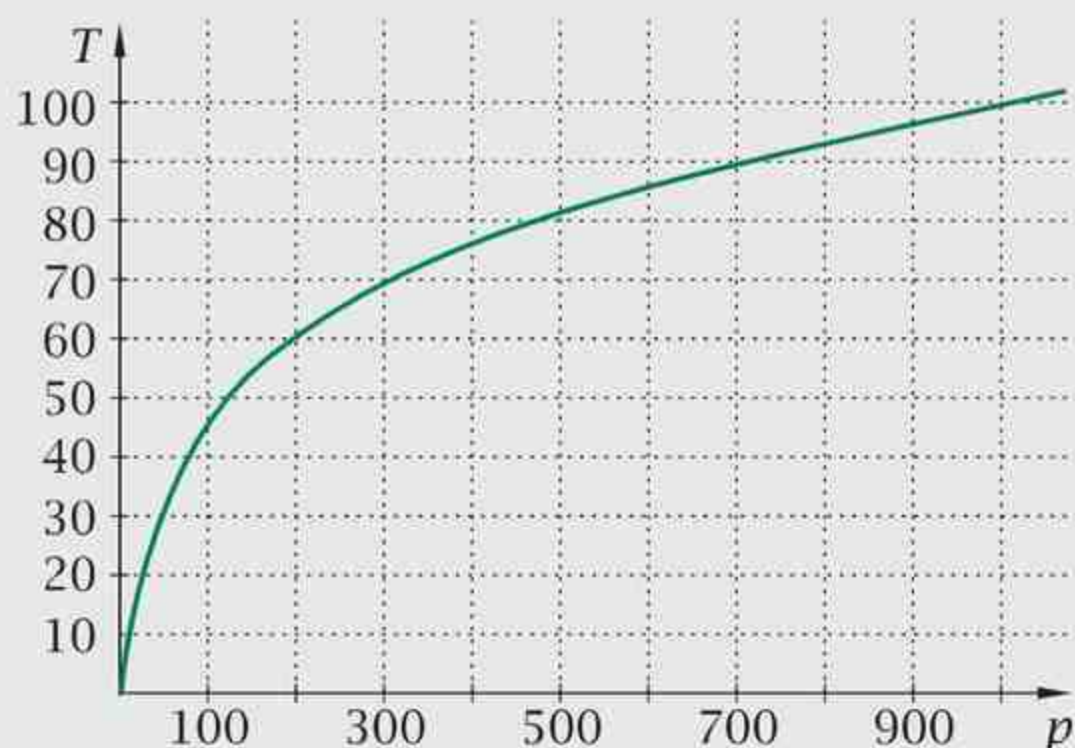
a) Ile kilometrów przeszli turyści przez pierwsze 2 godziny marszu?

b) Jak długo szli pierwszych 6 km?

c) Po ilu godzinach od wyruszenia turyści zatrzymali się na odpoczynek? Jaką odległość pokonali do tego czasu?

d) Z jaką średnią prędkością turyści szli przez pierwsze 3 godziny?

35. Woda nie zawsze wrze w temperaturze 100°C — tak jest tylko pod ciśnieniem 1000 hektopaskali. Korzystając z poniższych wykresów, można odczytać zależność między ciśnieniem, temperaturą wrzenia wody i wysokością nad poziomem morza.



p — ciśnienie (w hPa)

T — temperatura wrzenia wody (w $^{\circ}\text{C}$)



h — wysokość nad poziomem morza (w km)

a) W jakiej temperaturze wrze woda przy ciśnieniu 500 hPa? Oszacuj, na jakiej wysokości nad poziomem morza panuje takie ciśnienie.

b) Oszacuj, w jakiej temperaturze wrze woda na Śnieżce (1602 m n.p.m.), a w jakiej na Mount Evereście (8848 m n.p.m.).

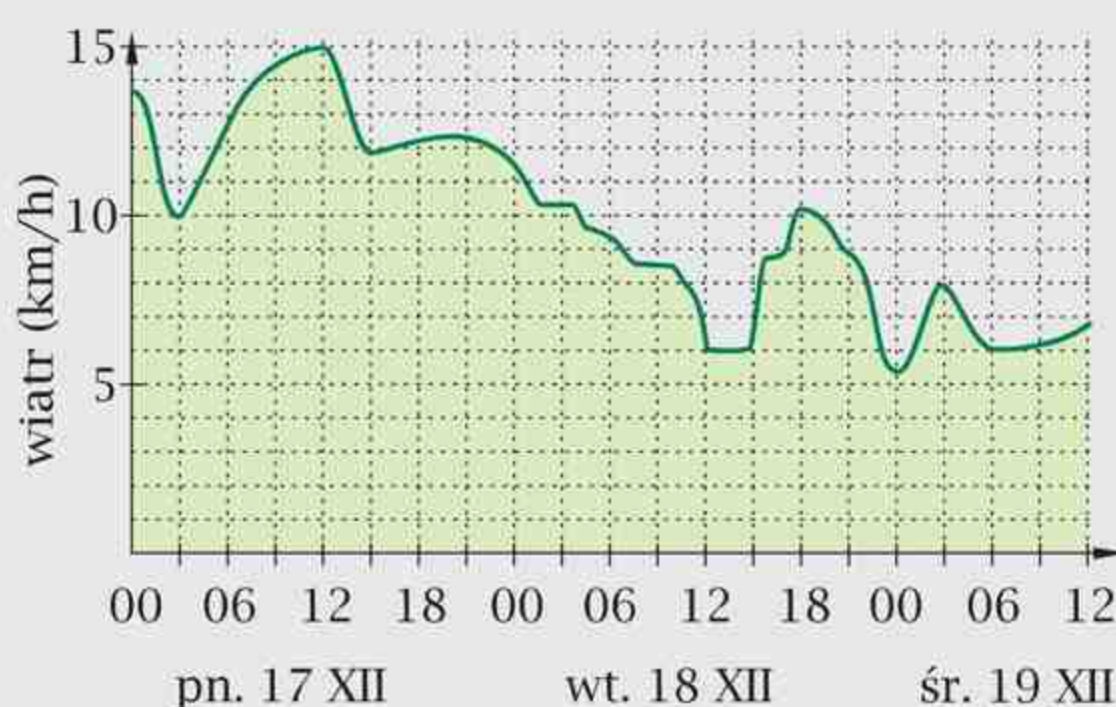
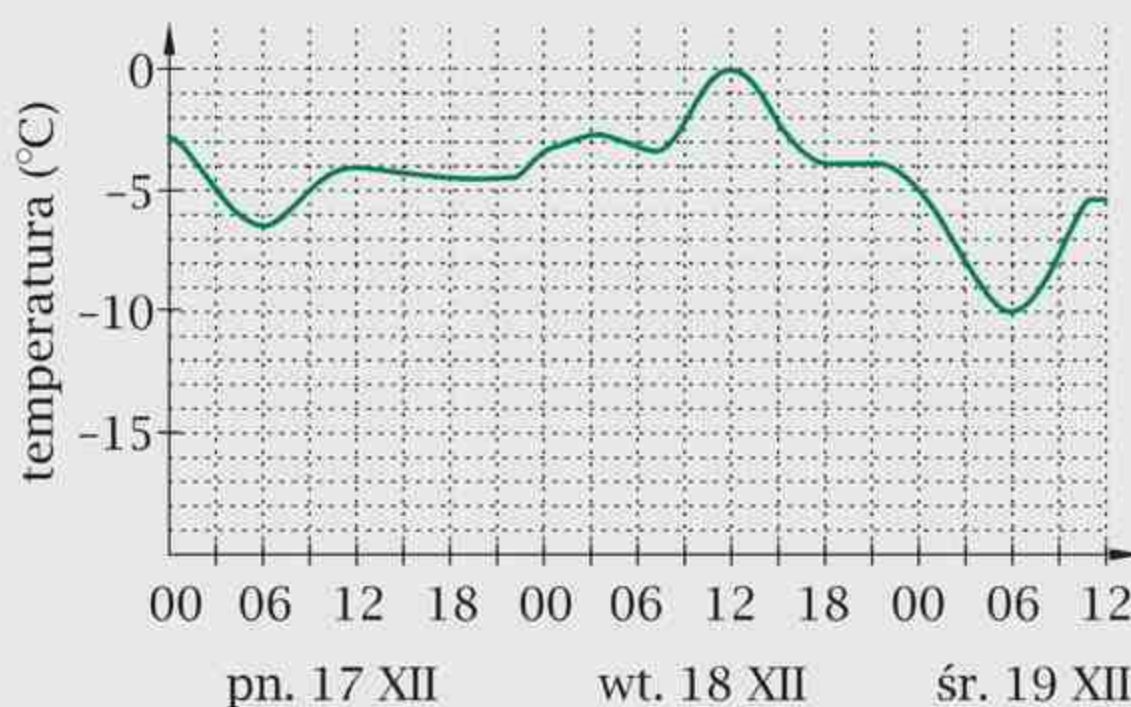
c) Taternik sprawdził, że wrzątek, który właśnie gotuje, ma 90°C . Na jakiej wysokości najprawdopodobniej jest ten taternik?

d) W miejscowości A jest wyższa temperatura wrzenia wody niż w miejscowości B. Która z tych miejscowości jest położona wyżej?

36. Odczucie zimna zależy m.in. od temperatury powietrza i siły wiatru. W tabelce podano tzw. temperaturę odczuwalną w zależności od tych dwóch czynników.

		temperatura powietrza ($^{\circ}\text{C}$)						
		0	-1	-2	-3	-4	-6	-10
wiatr w km/h	6	-2	-3	-4	-5	-7	-8	-14
	8	-3	-4	-5	-6	-7	-9	-14
	10	-3	-5	-6	-7	-8	-9	-15
	15	-4	-6	-7	-8	-9	-11	-17
	20	-5	-7	-8	-9	-10	-12	-18

Wykresy przedstawiają, jak zmieniała się temperatura i siła wiatru w ciągu trzech grudniowych dni w Karpaczu.



Jaka była odczuwalna temperatura:

- o godzinie 18^{00} 18 grudnia,
- w chwili gdy temperatura powietrza była najwyższa,
- w chwili gdy wiatr wiał z największą prędkością,
- w środę rano, gdy temperatura powietrza była najniższa?

V GRANIASTOSŁUPY I OSTROSŁUPY

- 1** Pole powierzchni i objętość graniastosłupa
- 2** Odcinki w graniastosłupach
- 3** Rodzaje ostrosłupów
- 4** Siatki ostrosłupów. Pole powierzchni
- 5** Objętość ostrosłupa
- 6** Odcinki w ostrosłupach

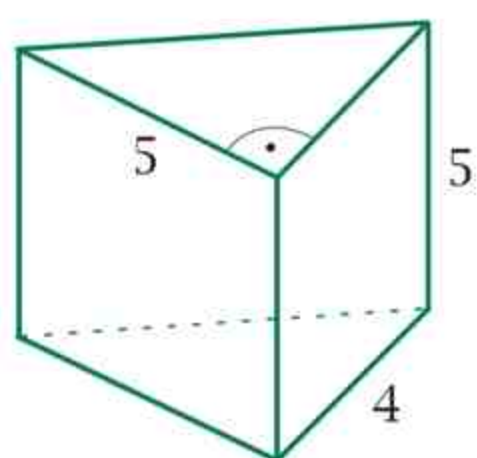
➤ Przed klasówką, s. 198

➤ Zadania uzupełniające, s. 200

1 Pole powierzchni i objętość graniastosłupa

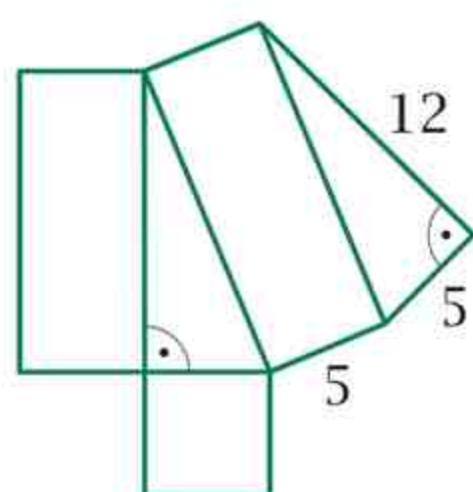
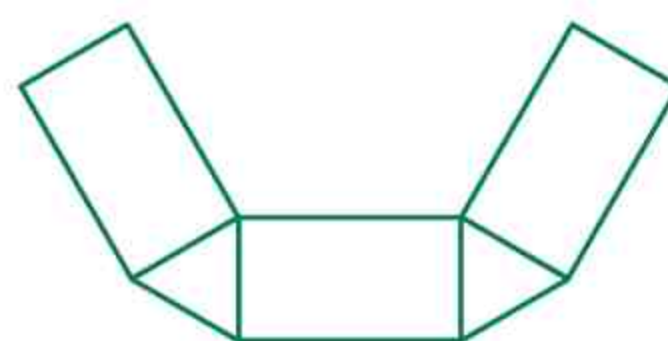
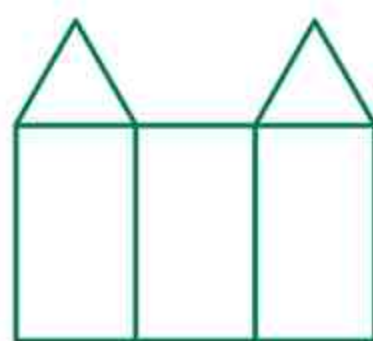
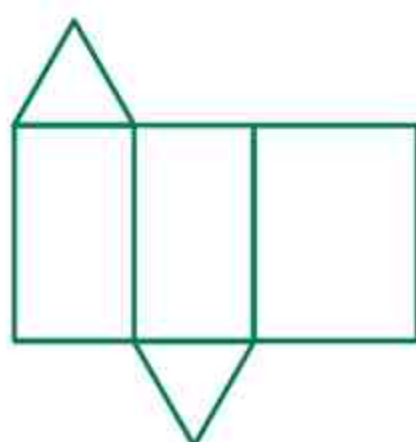
Pytania i zadania kontrolne

- A. Krawędź sześcianu ma 3 m. Oblicz powierzchnię całkowitą oraz objętość tego sześcianu.
- B. Prostopadłościan ma wymiary $40 \text{ cm} \times 3 \text{ dm} \times 0,5 \text{ m}$. Oblicz:
a) objętość tego prostopadłościanu (w litrach),
b) pole jego powierzchni (w metrach kwadratowych).
- C. Ile krawędzi, ile wierzchołków i ile ścian ma graniastosłup pięciokątny?
- D. W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź podstawy ma 15 cm, a krawędź boczna ma 2 dm. Oblicz sumę długości krawędzi tego graniastosłupa.



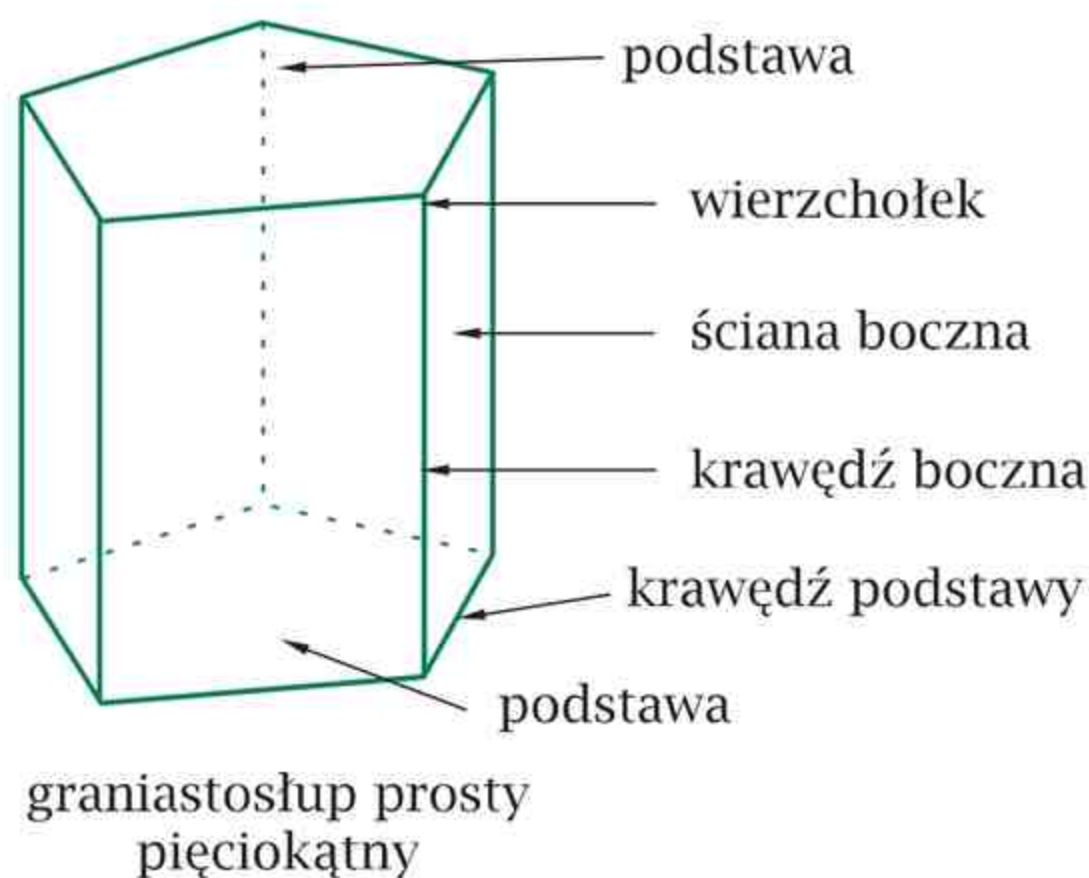
- E. Rysunek przedstawia graniastosłup trójkątny. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

- F. Żaden z poniższych rysunków nie przedstawia siatki graniastosłupa. Wyjaśnij dlaczego.



- G. Na rysunku obok przedstawiono siatkę graniastosłupa, oblicz jego objętość.

Na poniższym rysunku przedstawiony jest **graniastosłup prosty**. Taki graniastosłup ma dwie podstawy, które są równoległymi i przystającymi wielokątami, a jego ściany boczne są prostokątami.

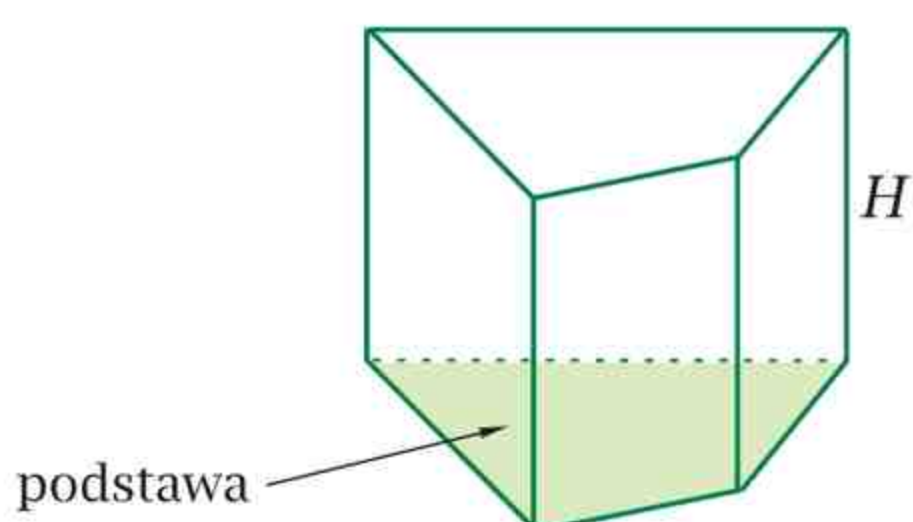


Krawędzie boczne graniastosłupa prostego są równoległe, mają jednakową długość i są prostopadłe do podstaw.

Wysokość graniastosłupa prostego jest równa długości krawędzi bocznych.

Graniastosłup prosty, którego podstawa jest wielokątem foremnym, nazywamy **graniastosłupem prawidłowym**.

Poniżej przypominamy, jak obliczamy objętość i pole powierzchni graniastosłupa.



Objętość graniastosłupa: $V = P_p \cdot H$

P_p — pole podstawy

H — wysokość graniastosłupa

Pole powierzchni całkowitej: $P_c = 2P_p + P_b$

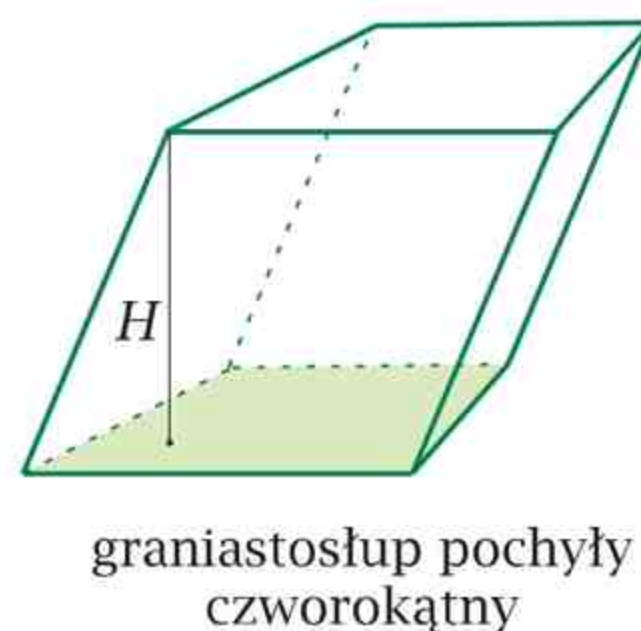
P_p — pole podstawy

P_b — pole powierzchni bocznej (suma pól wszystkich ścian bocznych)

Na kolejnym rysunku przedstawiono **graniastosłup pochyły**. Taki graniastosłup ma dwie podstawy, które są równoległymi i przystającymi wielokątami. Jego krawędzie boczne mają jednakową długość i są równoległe, ale nie są prostopadłe do podstaw.

Ściany boczne graniastosłupa pochyłego są równoległobokami, a wysokość nie jest równa długości krawędzi bocznych.

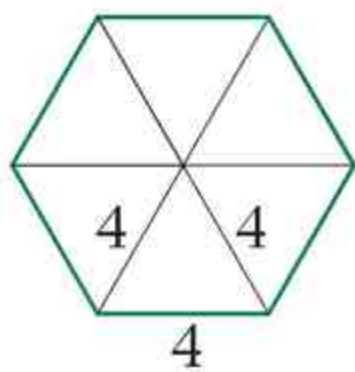
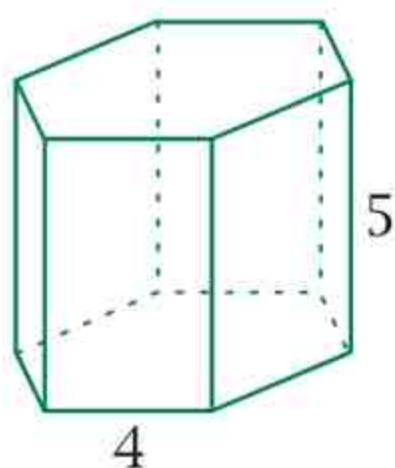
Gdy obliczamy objętość i pole powierzchni graniastosłupów pochyłych, możemy korzystać z takich samych wzorów jak dla graniastosłupa prostego.



Rozwiązując zadania dotyczące brył, czasem będziemy korzystać z twierdzenia Pitagorasa lub wynikających z tego twierdzenia wzorów.

Przykład

W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź podstawy ma 4 cm, a wysokość ma 5 cm. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



Rysujemy graniastosłup, podstawa jest sześciokątem foremnym, składa się z 6 trójkątów równobocznych o boku 4.

$$P_p = 6 \cdot \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

| Obliczamy pole podstawy.

$$V = P_p \cdot H$$

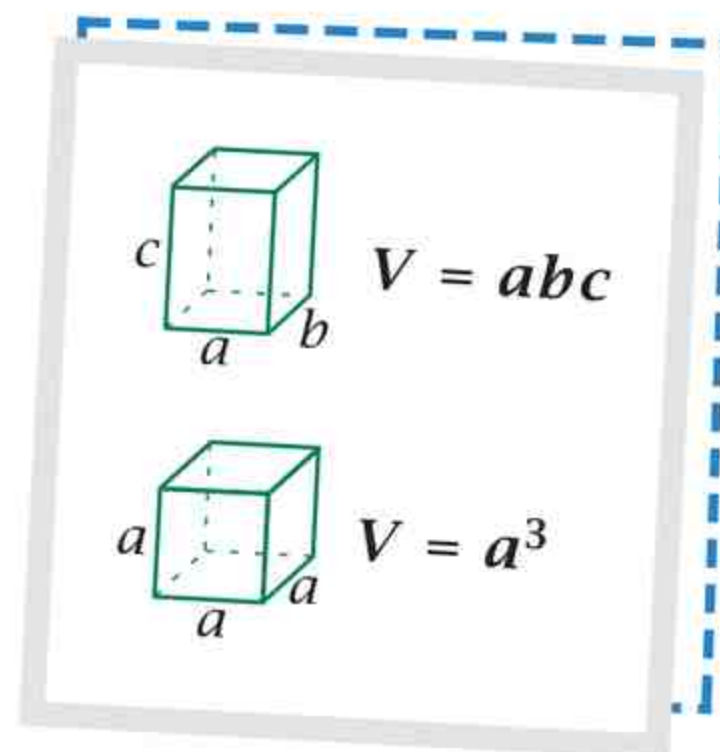
$$V = 24\sqrt{3} \cdot 5 = 120\sqrt{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$

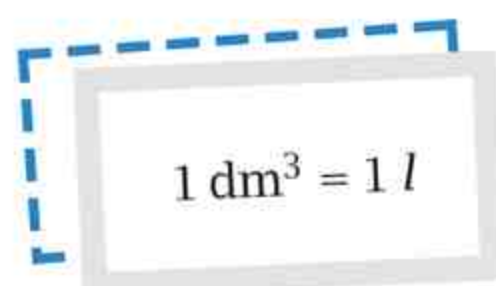
| Obliczamy objętość graniastosłupa.

Odp. Graniastosłup ma objętość $120\sqrt{3} \text{ cm}^3$, czyli około $207,8 \text{ cm}^3$.

Zadania

- Oblicz objętość i pole powierzchni:
 - prostopadłościanu o wymiarach $2 \text{ cm} \times 1 \text{ dm} \times 5 \text{ mm}$,
 - sześcianu o krawędzi $1,2 \text{ cm}$.
- Czy prostopadłościan o wymiarach $0,4 \text{ m} \times 15 \text{ cm} \times 1,2 \text{ dm}$ ma większą czy mniejszą objętość niż prostopadłościan o wymiarach $45 \text{ cm} \times 0,15 \text{ m} \times 80 \text{ mm}$?
- Jakie pole powierzchni ma sześcian o objętości 27?
 - Graniastosłup prawidłowy czworokątny ma objętość 250 cm^3 , a jego krawędź boczna jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz pole powierzchni tego graniastosłupa.
- Dwie ściany prostopadłościanu to kwadraty o boku $2,5 \text{ cm}$. Objętość tego prostopadłościanu jest równa 26 cm^3 . Oblicz pole powierzchni tego prostopadłościanu.

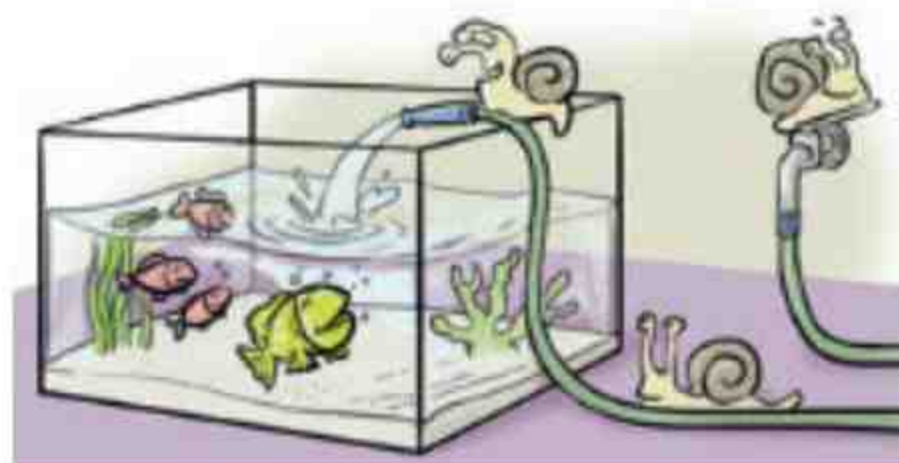




5. Czy 15 litrów wody zmieści się w akwarium w kształcie prostopadościanu o podanych wymiarach?

- a) $20 \text{ cm} \times 1,6 \text{ dm} \times 3,5 \text{ dm}$ b) $0,3 \text{ m} \times 2 \text{ dm} \times 500 \text{ mm}$

6. Do akwarium, którego dno ma wymiary $40 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$, dolano 5 litrów wody. Poziom wody w akwarium podniósł się, ale woda się z niego nie wylała. O ile centymetrów podniósł się poziom wody?



7. Płyty styropianowe typu FS 15, używane do ocieplania ścian, mają wymiary $60 \text{ cm} \times 100 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ i są sprzedawane w paczkach po 8 sztuk. Odpowiedz na pytania, przyjmując, że 1 m^3 takiego styropianu waży 15 kg.

- a) Ile waży paczka płyt typu FS 15?
b) Wyobraź sobie, że płyty styropianowe układamy jedna na drugiej, tak aby otrzymać wieżę, która waży co najmniej 1 tonę. Jaką wysokość miałaby taka wieża?



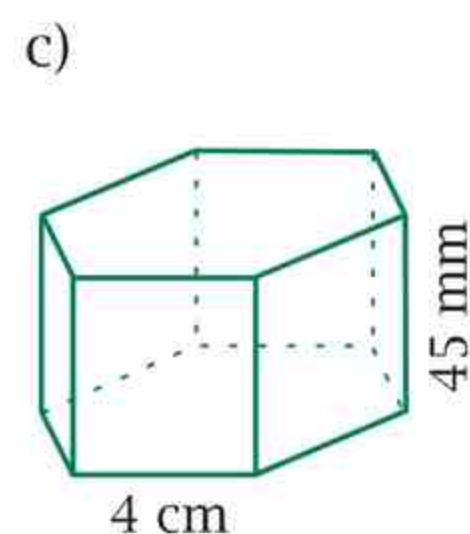
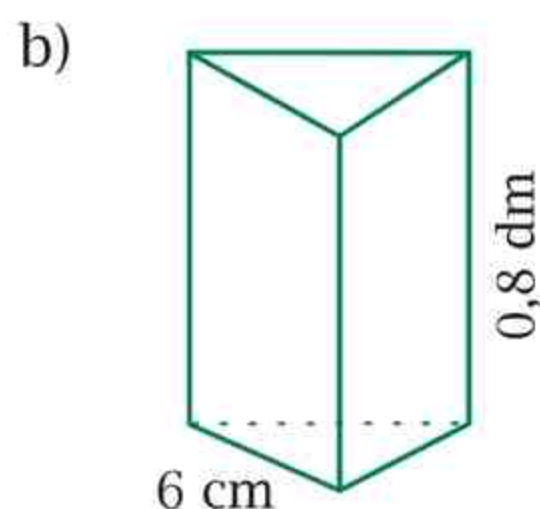
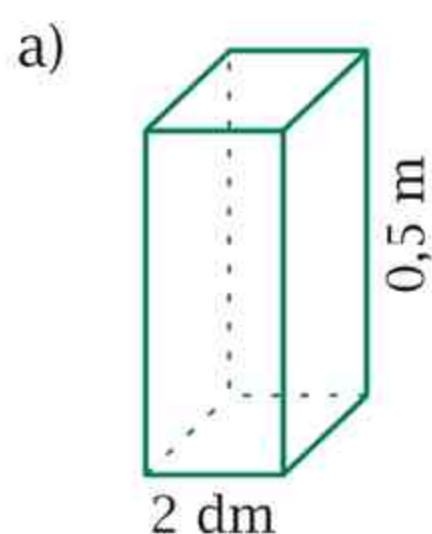
8. Piaskownica ma wymiary (zewnętrzne) $4 \text{ m} \times 3 \text{ m}$. Wnętrze piaskownicy otacza betonowy murek o wysokości 30 cm i grubości 20 cm. Ile metrów sześciennych betonu zużyto na wykonanie tego murku?

9. Metr sześcienny asfaltu waży 1,4 t. Do pokrycia asfaltem boiska o wymiarach $20 \text{ m} \times 40 \text{ m}$ użyto 42 ton asfaltu. Jaką grubość ma warstwa asfaltu na tym boisku?

10. Plastikowe pudełko w kształcie sześcianu ma pojemność 0,125 litra. Inne pudełko, wykonane z takiego samego plastiku i o takiej samej grubości ścianek, ma dwa razy dłuższe krawędzie. Jaką pojemność ma większe pudełko? Ile razy więcej plastiku zużyto do wyprodukowania większego pudełka?

*11. Drewniany klocek ma kształt sześcianu o krawędzi 8 cm. Zaprojektuj kartonowe pudełko (z wieczkiem), do którego można zapakować 40 takich klocków. Postaraj się tak dobrać wymiary, aby na projektowane przez ciebie pudełko zużyć jak najmniej kartonu.

12. Oblicz pola powierzchni graniastosłupów prawidłowych przedstawionych na poniższych rysunkach.

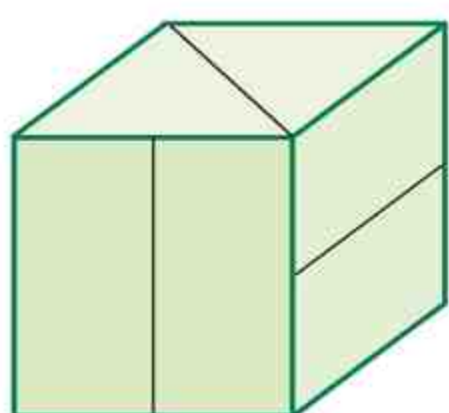
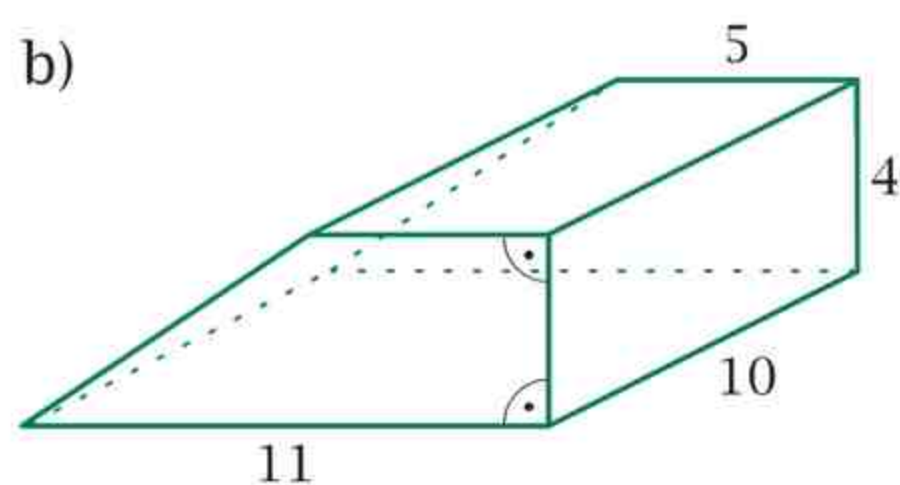
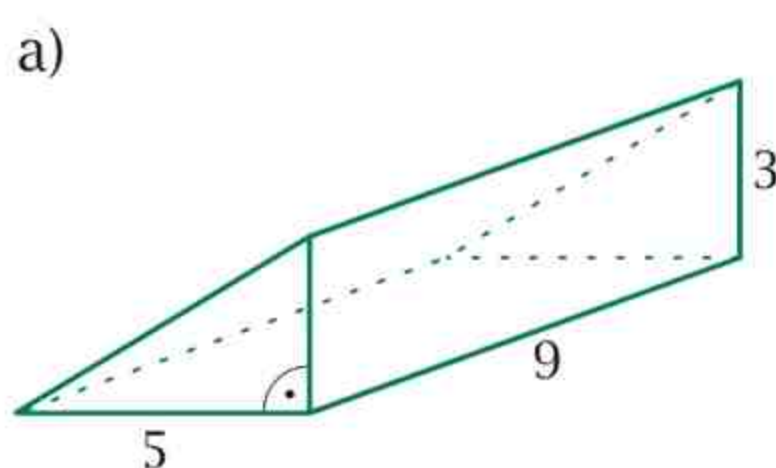


13. Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego:

- a) czworokątnego o krawędzi podstawy długości 4 i wysokości 8,
 b) trójkątnego o krawędzi podstawy długości 3 i wysokości 7,
 c) sześciokątnego o krawędzi podstawy długości 2 i wysokości 9.

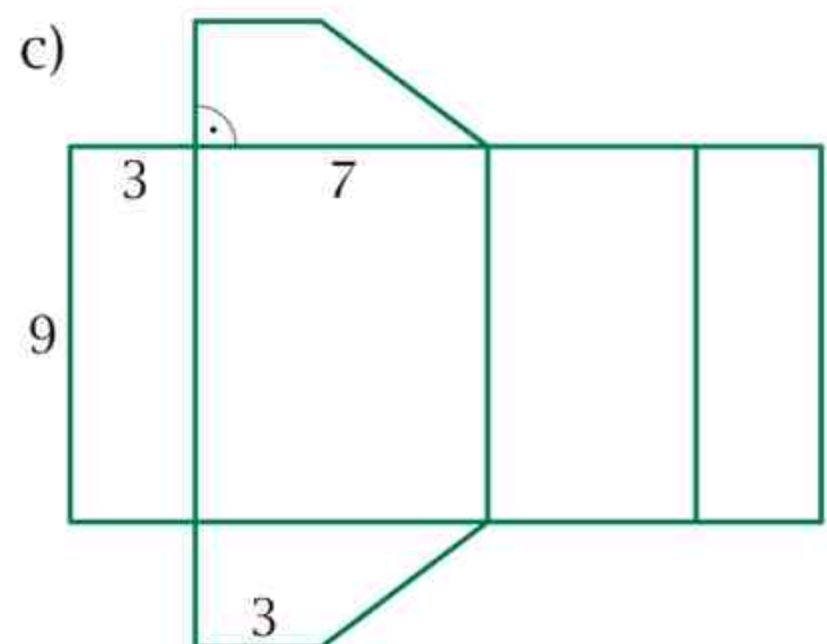
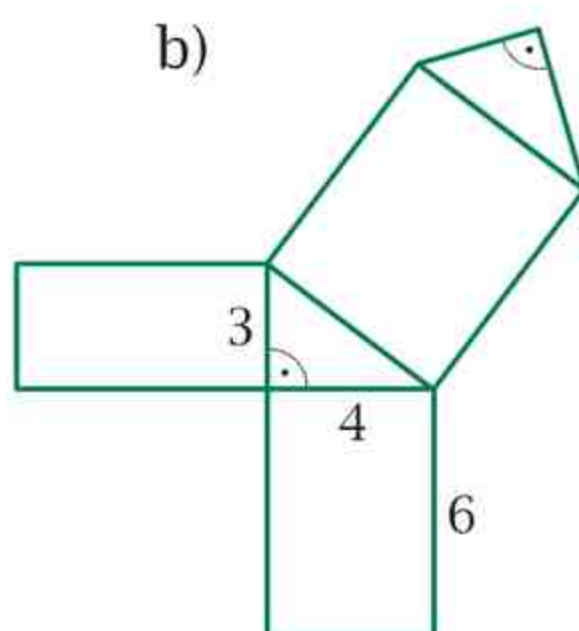
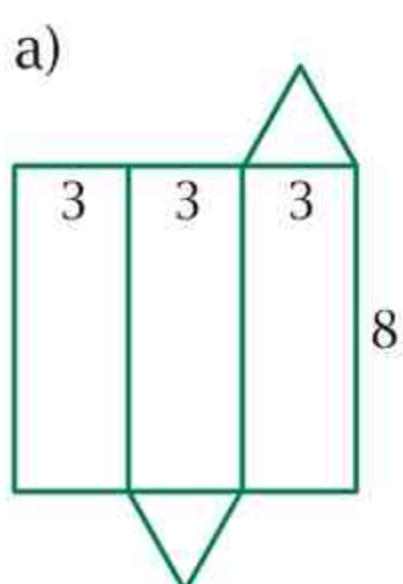
3/200

14. Oblicz objętości i pola powierzchni graniastosłupów prostych przedstawionych na rysunkach.

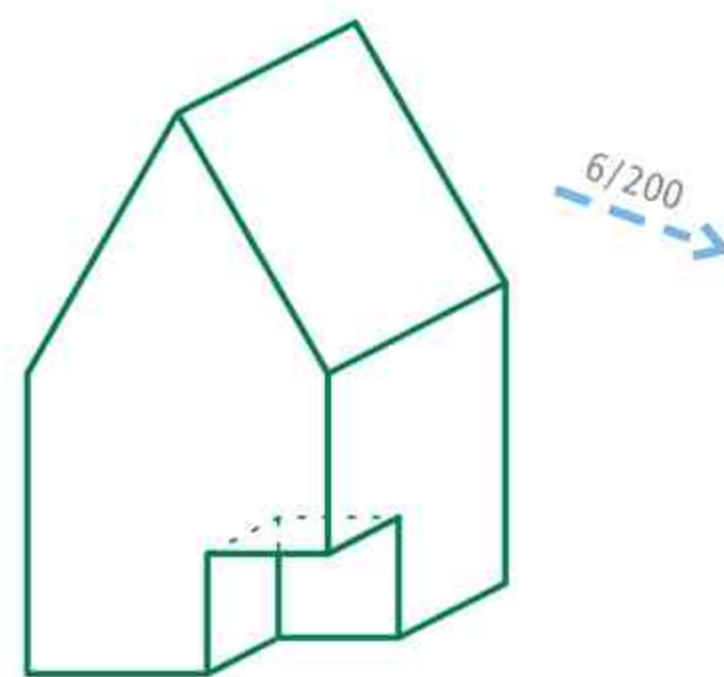


15. Popatrz na kostkę sześcienną przedstawioną na rysunku. Wiadomo, że na każdej ścianie jest narysowany odcinek, który łączy środki krawędzi albo wierzchołki sześcianu, a ponadto odcinki na przeciwległych ścianach są równoległe. Narysuj siatkę, z której można skleić tę kostkę. Na każdej ścianie narysuj odpowiedni odcinek.

16. Wyobraź sobie, że z poniższych siatek zbudowano graniastosłupy. Oblicz objętość każdego z nich.

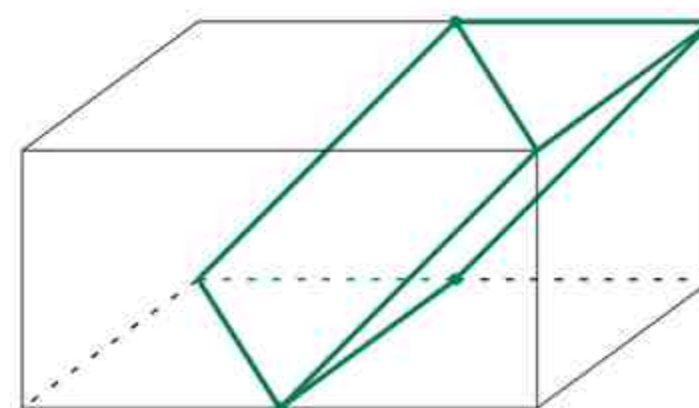
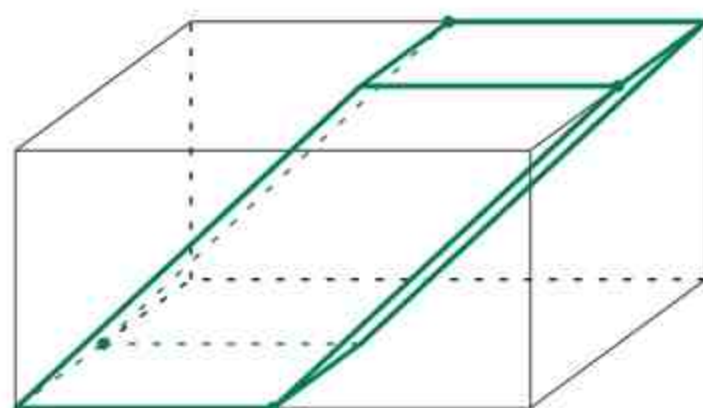


17. Z graniastosłupa, którego wszystkie krawędzie mają długość 10 cm, wycięto sześciąt o krawędzi 4 cm w sposób pokazany na rysunku. Jaka objętość ma tak otrzymana bryła?



18. Podstawa graniastosłupa pochyłego jest kwadratem. Wszystkie krawędzie tego graniastosłupa mają długość 6, a wysokość jest od nich trzy razy krótsza. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

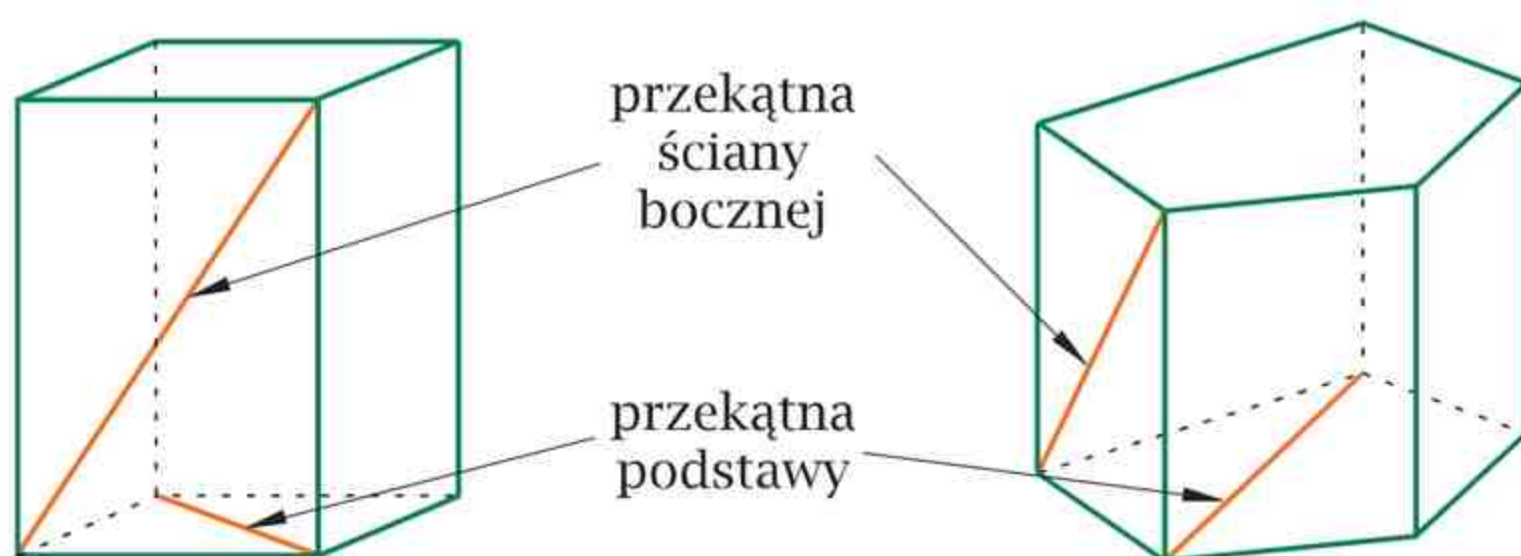
- 19. W takich samych prostopadłościanach umieszczono dwa graniastosłupy pochyłe. Zaznaczone punkty to środki krawędzi prostopadłościanu. Uzasadnij, że te graniastosłupy mają równe objętości.



Sprawdź, czy umiesz

- Ile litrów wody zmieści się w akwarium, które ma kształt prostopadłościanu o wymiarach $6 \text{ dm} \times 30 \text{ cm} \times 45 \text{ cm}$?
A. 8,1 l B. 81 l C. 810 l D. 8100 l
- Pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, w którym krawędź podstawy ma 3 cm, a wysokość ma 5 cm, wynosi:
A. 15 cm^2 C. 75 cm^2
B. $\left(15 + \frac{9\sqrt{3}}{4}\right) \text{ cm}^2$ D. $\left(\frac{9\sqrt{3}}{2} + 45\right) \text{ cm}^2$
- Wszystkie krawędzie graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o objętości $12\sqrt{3} \text{ cm}^3$ mają jednakową długość. Suma długości wszystkich krawędzi wynosi:
A. 36 cm B. 24 cm C. 72 cm D. 4 cm

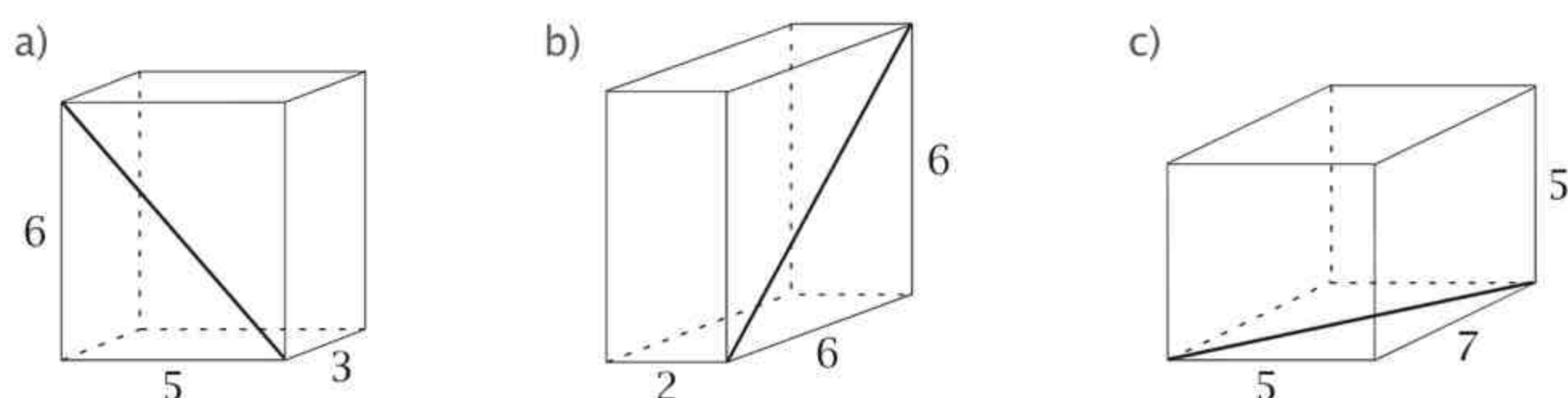
2 Odcinki w graniastosłupach



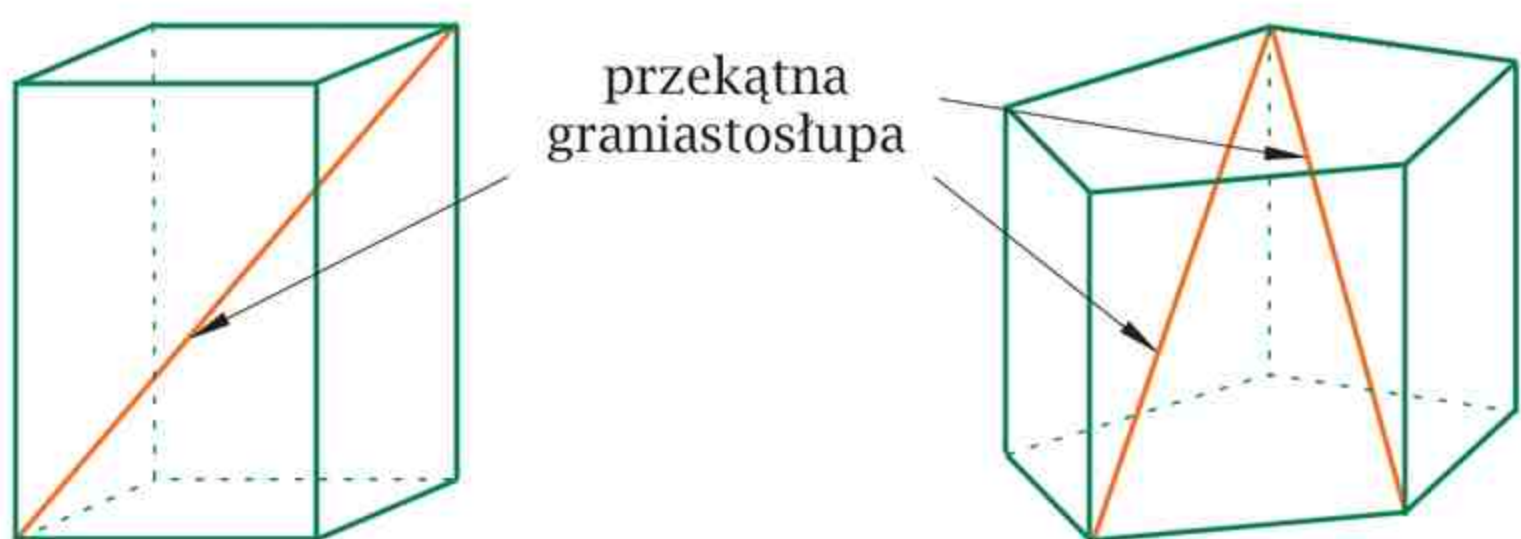
ĆWICZENIE A. Wskaż na modelu graniastosłupa przekątne ścian.

Na rysunku obok zaznaczono przekątne ścian graniastosłupa.

ĆWICZENIE B. Na rysunkach zaznaczono przekątne ścian prostopadłościanów. Oblicz ich długości (skorzystaj z twierdzenia Pitagorasa).

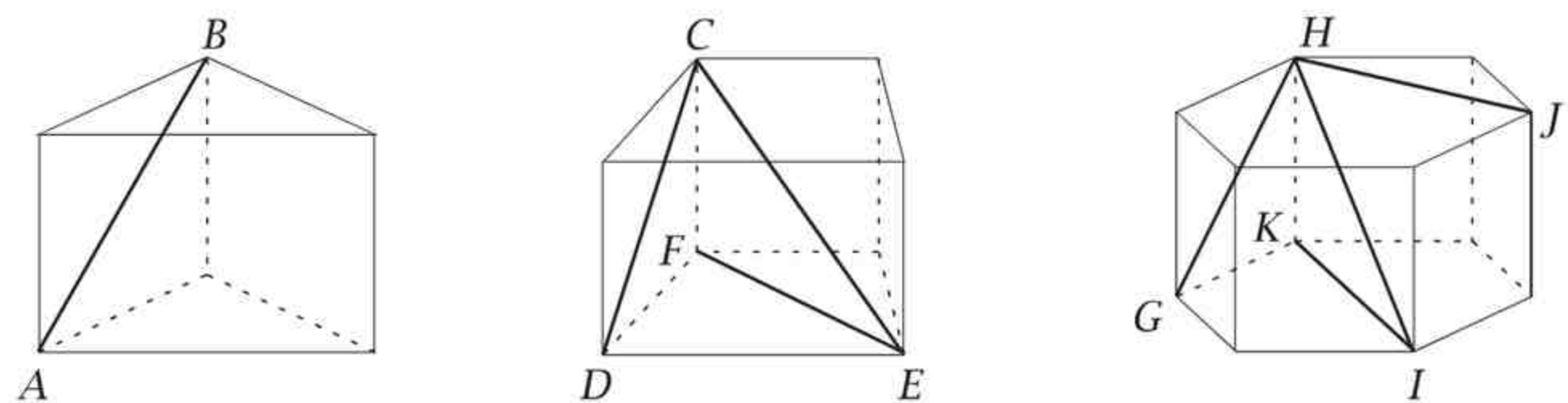


Odcinek, który łączy dwa wierzchołki graniastosłupa, a nie zawiera się w żadnej z jego ścian, nazwiemy **przekątną graniastosłupa**.



Zauważ, że graniastosłup trójkątny nie ma przekątnych (choć ma przekątne ścian bocznych).

ĆWICZENIE C. Na poniższych rysunkach graniastosłupów zaznaczono różne odcinki. Znajdź wśród nich przekątne podstaw, przekątne ścian bocznych oraz przekątne graniastosłupów.

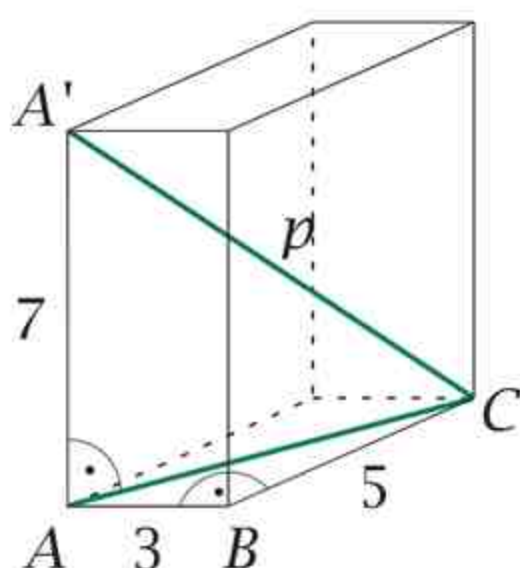


ĆWICZENIE D. Weź model graniastosłupa prostego nietrójkątnego. Wskaż przekątną podstawy i krawędzie boczne, które mają z tą przekątną punkty wspólne i są do niej prostopadłe.

Przekątna podstawy i krawędź boczna wychodzące z jednego wierzchołka graniastosłupa prostego są prostopadłe. Korzystamy z tego faktu, obliczając długość przekątnej graniastosłupa.

Przykład

Oblicz długość przekątnej prostopadłościanu o wymiarach $3 \times 5 \times 7$.



Rysujemy prostopadłościan i jego przekątną; przekątna p jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego ACA' .

$$AC^2 = 3^2 + 5^2$$

$$AC^2 = 34$$

$$p^2 = AC^2 + 7^2$$

$$p^2 = 34 + 49$$

$$p = \sqrt{83}$$

Obliczamy kwadrat długości przekątnej AC podstawy, stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta ABC .

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta ACA' .

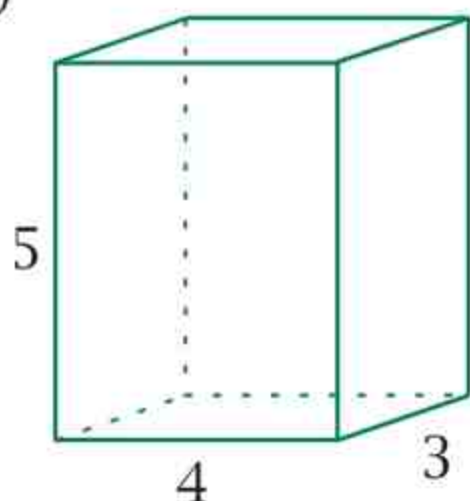
Obliczamy długość przekątnej p .

Odp. Przekątna prostopadłościanu ma długość $\sqrt{83}$, czyli około 9,1.

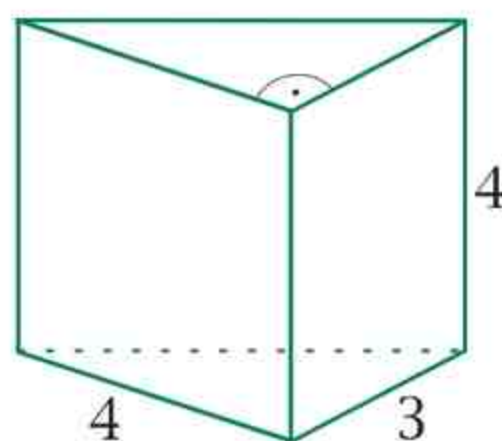
Zadania

- Oblicz długości przekątnych ścian bocznych w narysowanych graniastosłupach prostych.

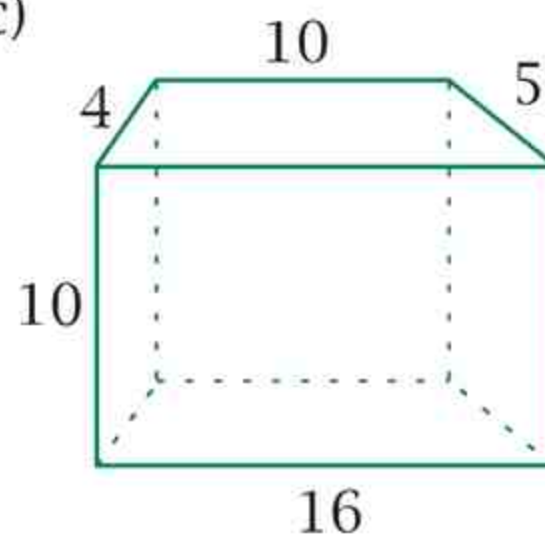
a)



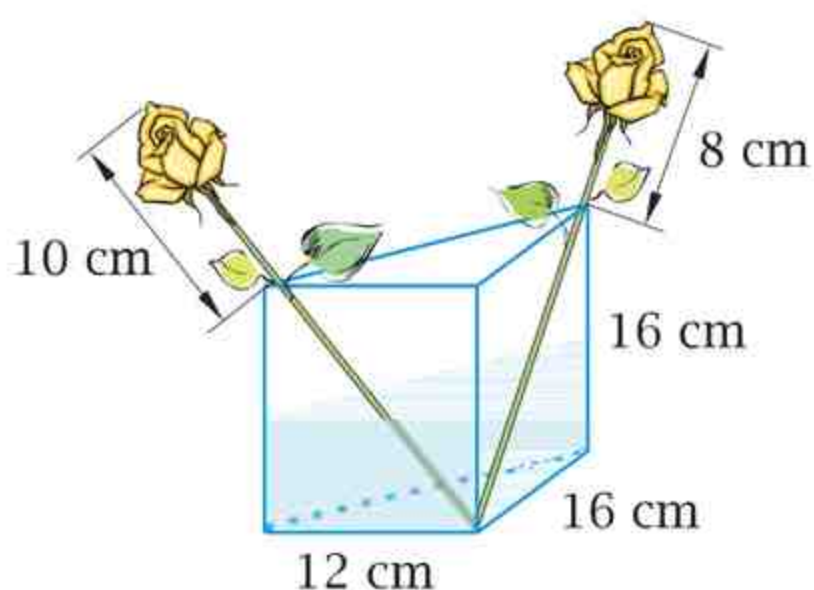
b)



c)



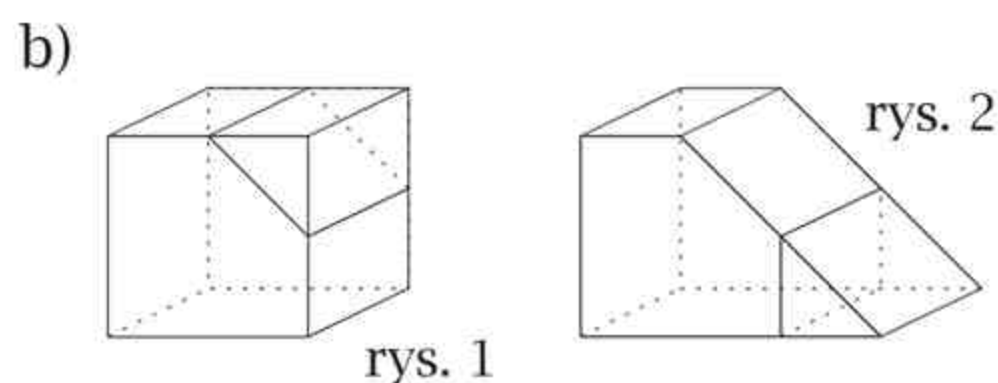
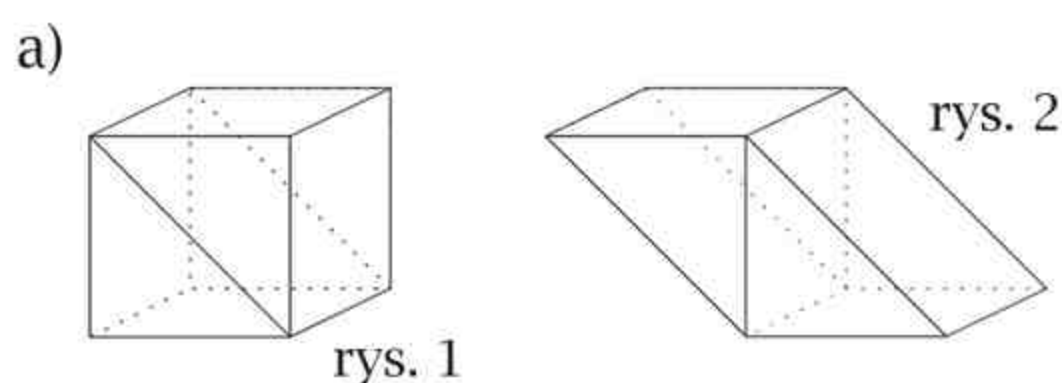
- Jakie długości mają przekątne podstawy w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy 10 cm?
 - Jakie długości mają przekątne podstawy w graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym o krawędzi podstawy 7 cm?



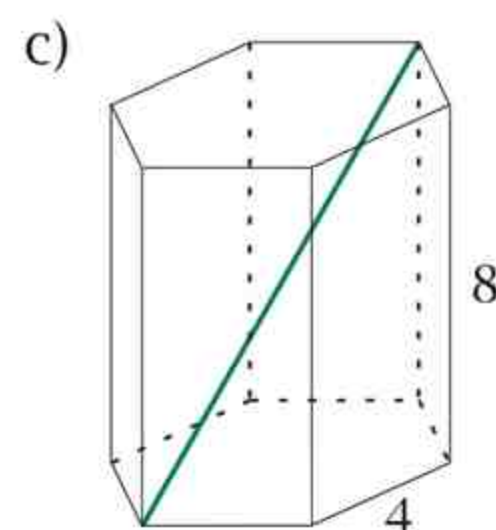
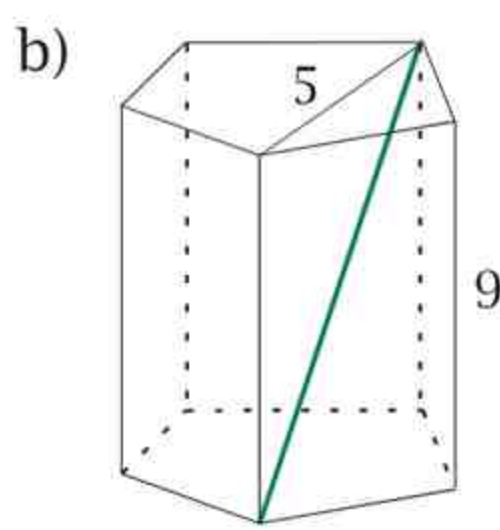
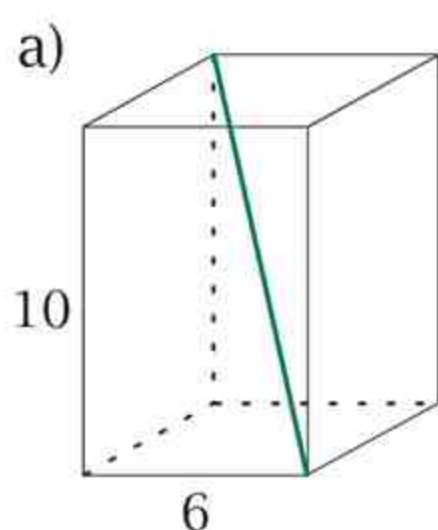
3. Przekątna podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $6\sqrt{2}$, a przekątna ściany bocznej ma długość 8. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

4. Wazon ma kształt graniastosłupa trójkątnego. Włożono do niego kwiaty w sposób przedstawiony na rysunku obok. Który z kwiatów jest dłuższy?

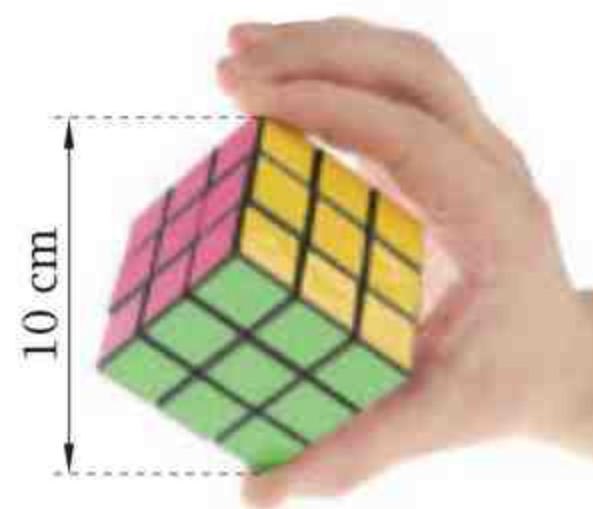
5. Sześcian o krawędzi 6 rozcięto na dwie części (zob. rys. 1), z których sklejo graniastosłup (zob. rys. 2). Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.



6. Oblicz długości zaznaczonych przekątnych graniastosłupów prawidłowych.

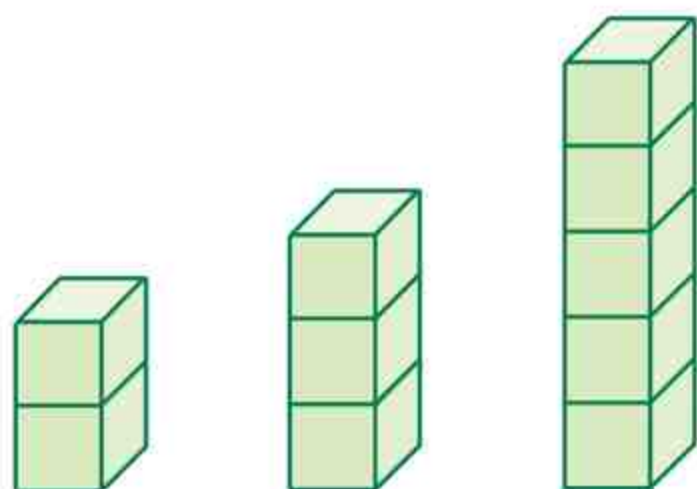
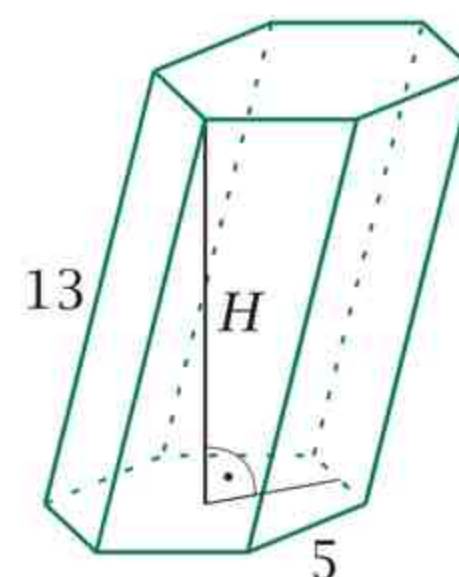


7. a) Oblicz długość przekątnej sześcianu o krawędzi 10.
 b) Znajdź wzór na długość przekątnej sześcianu o krawędzi a .
 c) Jakie wymiary ma kostka Rubika przedstawiona na fotografii?



8. a) Oblicz długość przekątnej prostopadłościanu o wymiarach $3\text{ cm} \times 4\text{ cm} \times 5\text{ cm}$.
 b) Znajdź wzór na długość przekątnej prostopadłościanu o krawędziach długości a , b i c .
9. W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź podstawy ma długość 6 cm, a krawędź boczna ma 10 cm. Jakie długości mają przekątne tego graniastosłupa?

10. Podstawą graniastosłupa pochyłego jest sześciokąt foremny o boku 5. Krawędź boczna ma długość 13. Wysokość graniastosłupa opuszczona z jednego z wierzchołków górnej podstawy pada w punkcie przecięcia dłuższych przekątnych dolnej podstawy. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



11. Kostki sześciennie o krawędzi 1 ustawiamy jedną na drugiej, tworząc prostopadłościany. Oblicz długość przekątnej prostopadłościanu zbudowanego z:

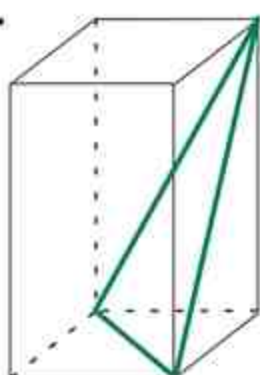
- a) 2 kostek, c) 5 kostek,
b) 3 kostek, ☒ d) n kostek.

- ☒ 12. Podstawą graniastosłupa prostego jest czworokąt o przekątnych długości 8 cm i 6 cm, wysokość graniastosłupa ma 10 cm. Oblicz długości obu przekątnych tego graniastosłupa.

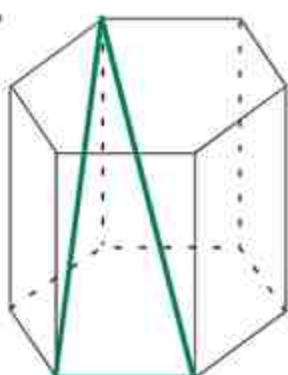
Sprawdź, czy umiesz

1. Rysunki przedstawiają graniastosłupy prawidłowe. Na którym rysunku zaznaczony trójkąt nie jest równoramienny?

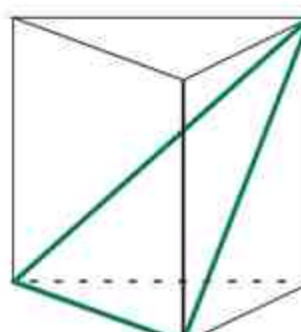
A.



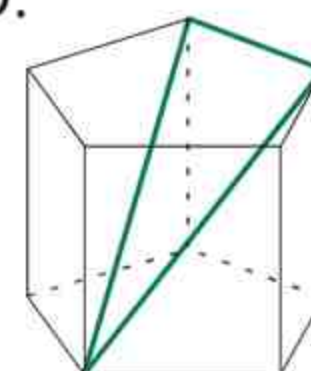
B.



C.



D.



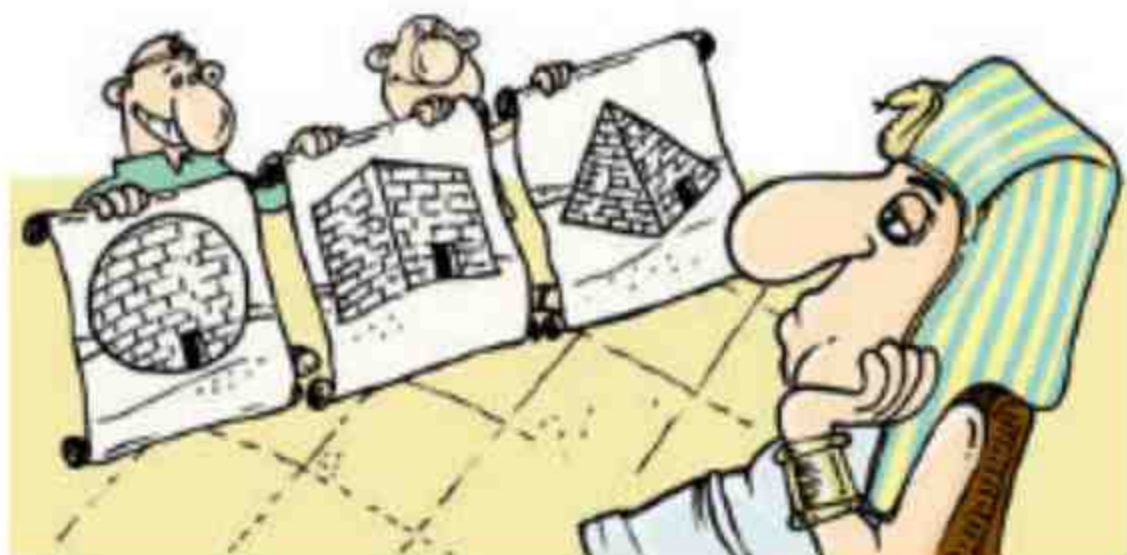
2. Jaką długość ma przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym krawędź podstawy ma 4 cm, a krawędź boczna ma 7 cm?

- A. 11 cm B. 9 cm C. $\sqrt{65}$ cm D. 15 cm

3. Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości 8 cm jest trójkąt, którego boki mają długości 4 cm, 5 cm i 6 cm. Najdłuższa z przekątnych ścian bocznych ma długość:

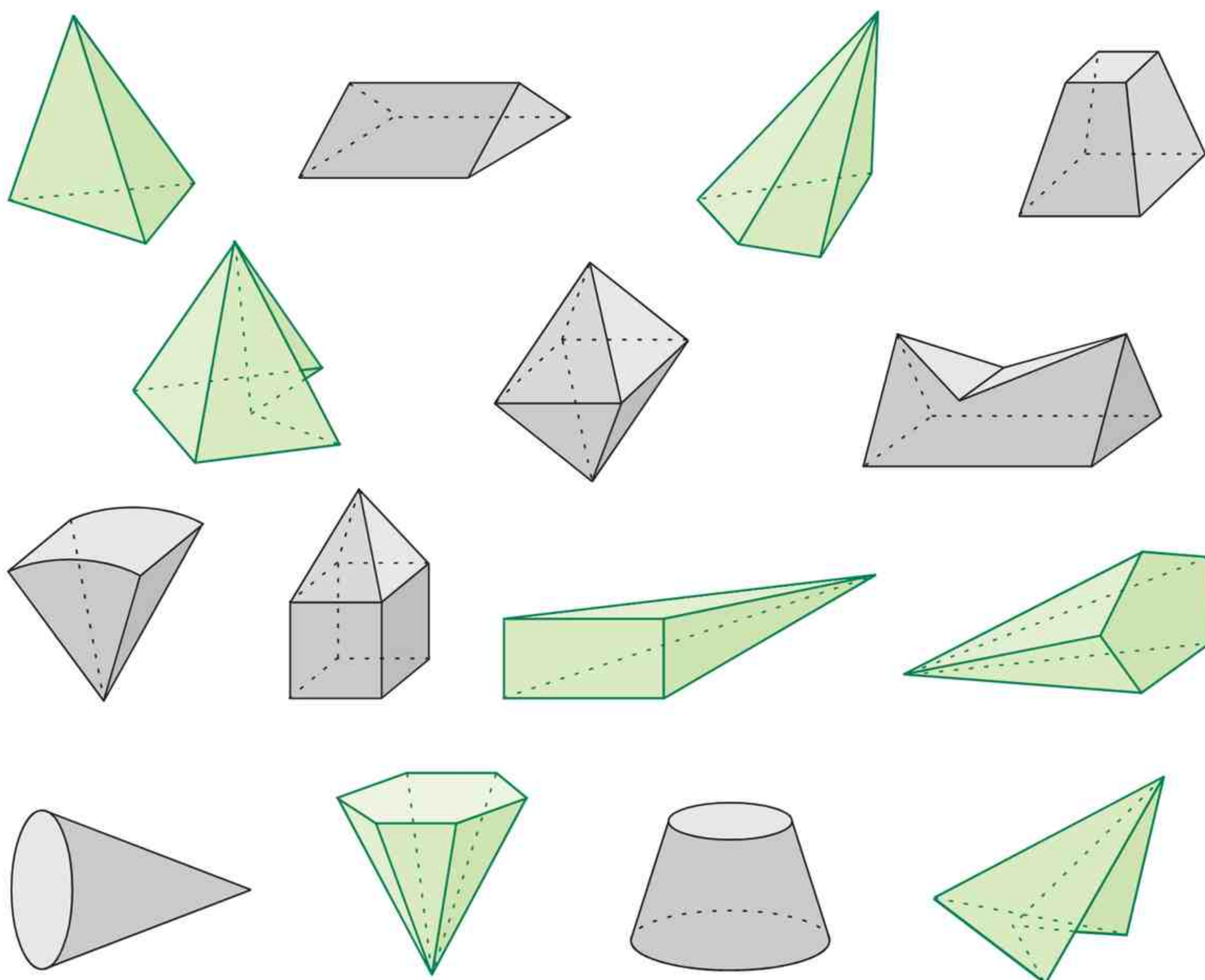
- A. 9 cm B. 10 cm C. $\sqrt{61}$ cm D. 14 cm

3 Rodzaje ostrosłupów



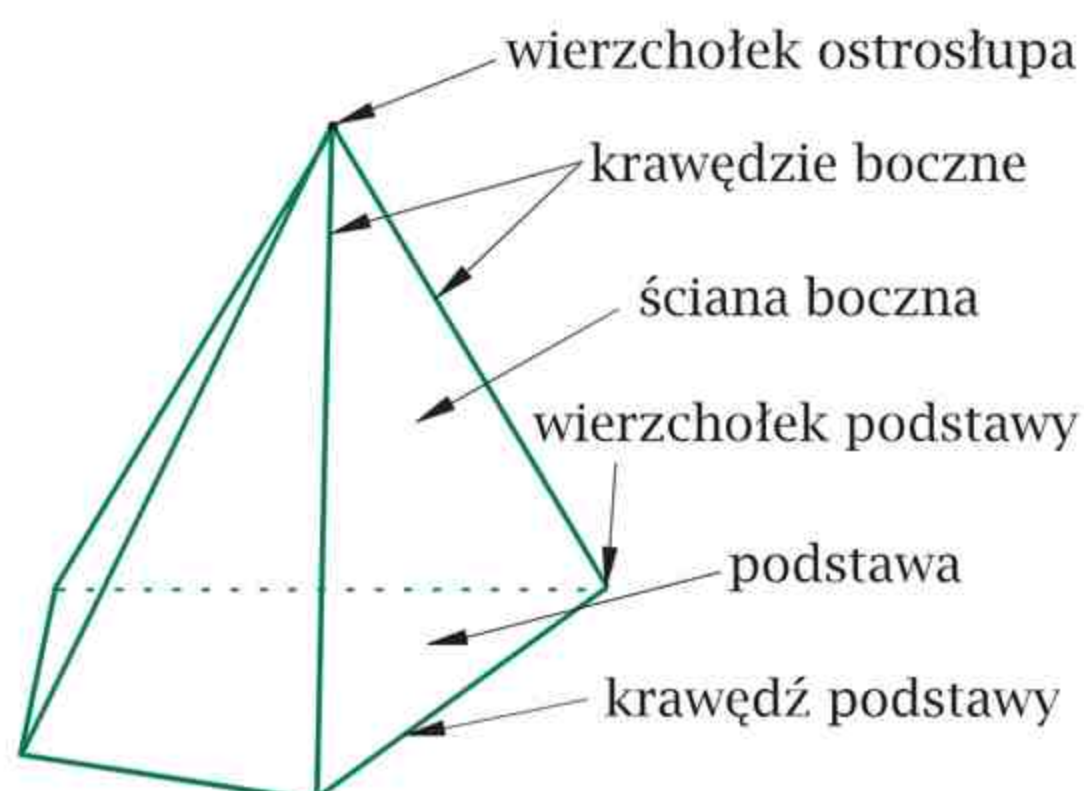
Wiele budowli ma kształt graniastosłupów. Władcy starożytnego Egiptu uznali jednak, że bryłą, która najlepiej przedstawi ich potęgę, będzie ostrosłup. Taki kształt mają grobowce faraonów — piramidy.

Na rysunku przedstawiono różne modele figur przestrzennych. Figury zaznaczone na zielono to przykłady **ostrosłupów**.



ĆWICZENIE A. Dla każdego z ostrosłupów przedstawionych na rysunkach ustal, ile boków ma podstawa i ile krawędzi ma ten ostrosłup.

Podstawą ostrosłupa może być dowolny wielokąt, a ścianami bocznymi są trójkąty o wspólnym wierzchołku.



ostrosłup czworokątny

W każdym ostrosłupie podstawa jest wielokątem, a ściany boczne są trójkątami.

Wspólny wierzchołek ścian bocznych nazywamy **wierzchołkiem ostrosłupa**.

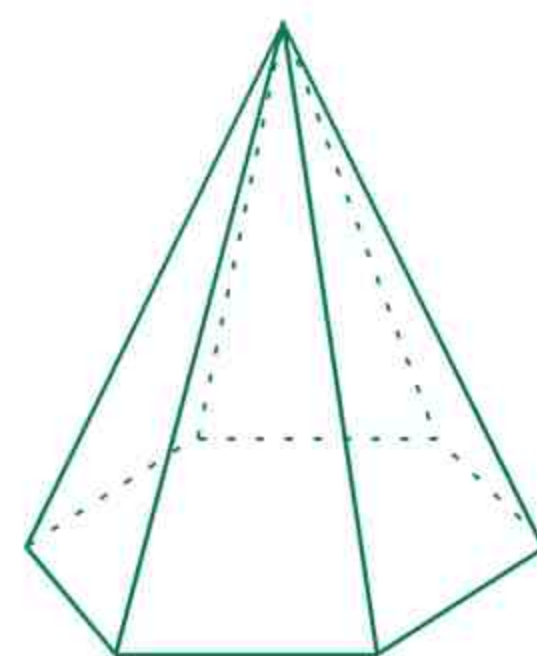
Jeżeli podstawą ostrosłupa jest trójkąt, to ostrosłup nazywamy trójkątnym, jeśli czworokąt, to czworokątnym, jeśli pięciokąt, to pięciokątnym itd.

Ostrosłup trójkątny nazywamy też **czworościanem**.

Jeśli podstawą ostrosłupa jest wielokąt foremny i krawędzie boczne mają równe długości, to taki ostrosłup nazywamy **prawidłowym**.

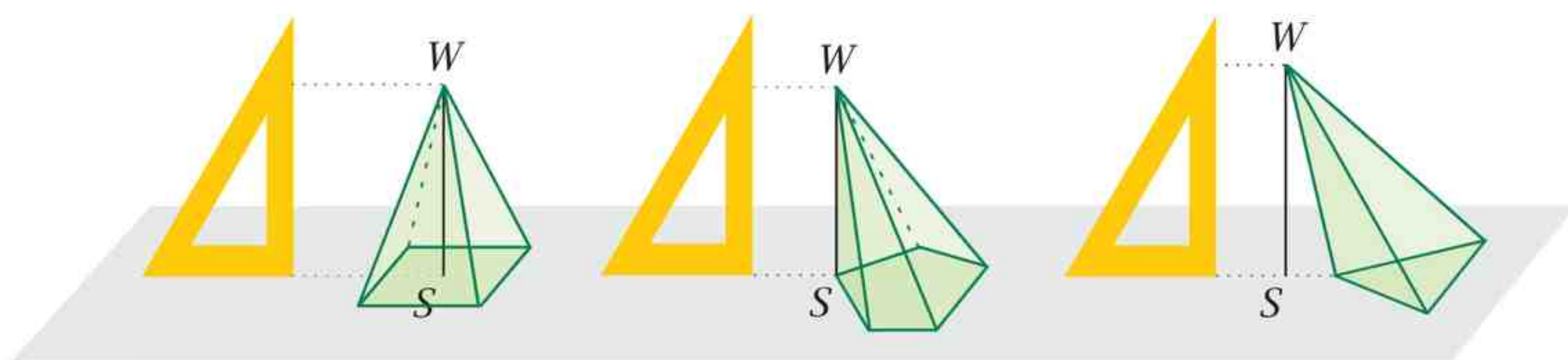
W ostrosłupie prawidłowym ściany boczne są przystającymi trójkątami równobocznymi.

Ostrosłup, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi, nazywamy **czworościanem foremnym**.



ostrosłup prawidłowy sześciokątny

Na każdym z poniższych rysunków zaznaczony jest odcinek łączący wierzchołek W ostrosłupa z płaszczyzną podstawy i prostopadły do tej płaszczyzny. Taki odcinek nazywamy **wysokością ostrosłupa**. Wysokością ostrosłupa nazywamy także długość tego odcinka.



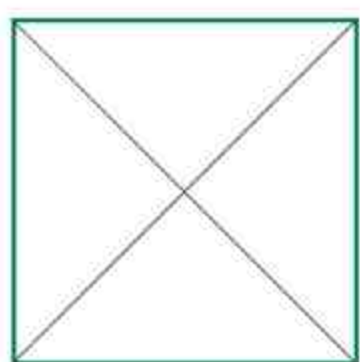
Punkt wspólny wysokości i płaszczyzny podstawy (na rysunku oznaczony literą S) nazywamy **spodkiem wysokości**. Zauważ, że spodek wysokości nie zawsze leży na podstawie ostrosłupa.

W ostrosłupie prawidłowym spodek wysokości leży w jednakowych odległościach od wierzchołków podstawy. (Innymi słowy — jest środkiem okręgu opisanego na podstawie).

Kwadrat, sześciokąt foremny i trójkąt równoboczny to przykłady podstaw ostrosłupów prawidłowych.

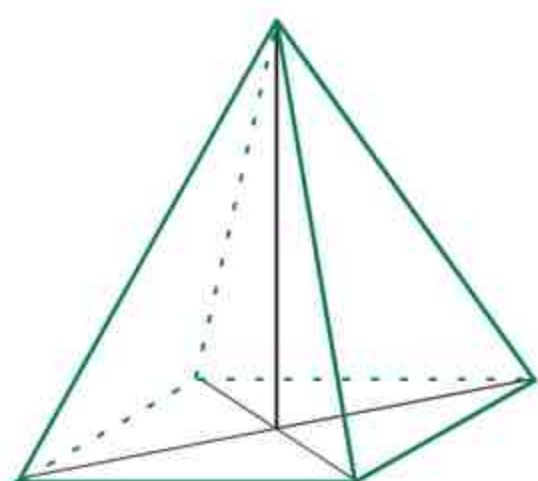
Poniżej przedstawione są podstawy ostrosłupów prawidłowych widziane z góry oraz rysunki ostrosłupów o takich podstawach. Zwróć uwagę, w jaki sposób na rysunkach ostrosłupów prawidłowych wyznaczone zostały spodki wysokości ostrosłupów.

Podstawa
widziana z góry



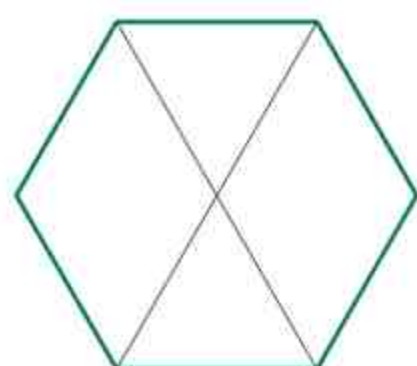
kwadrat

Rysunek ostrosłupa

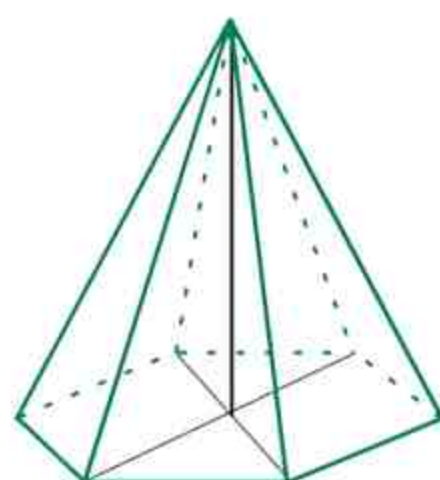


ostrosłup prawidłowy
czworokątny

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym spodek wysokości leży na przecięciu przekątnych podstawy.

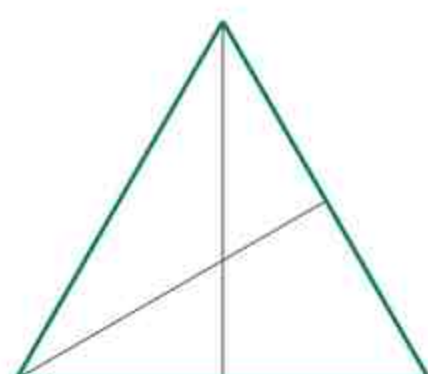


sześciokąt
foremny

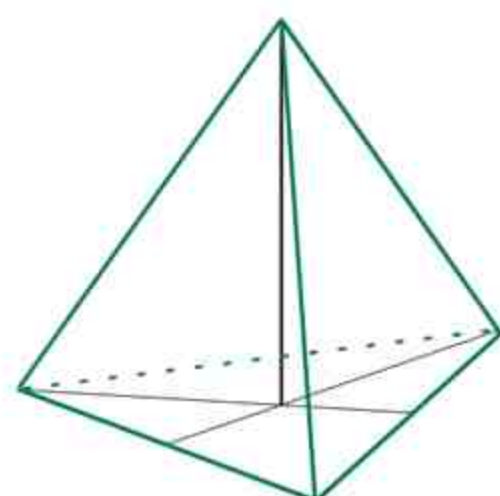


ostrosłup prawidłowy
sześciokątny

W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym spodek wysokości leży na przecięciu dłuższych przekątnych podstawy.



trójkąt
równoboczny

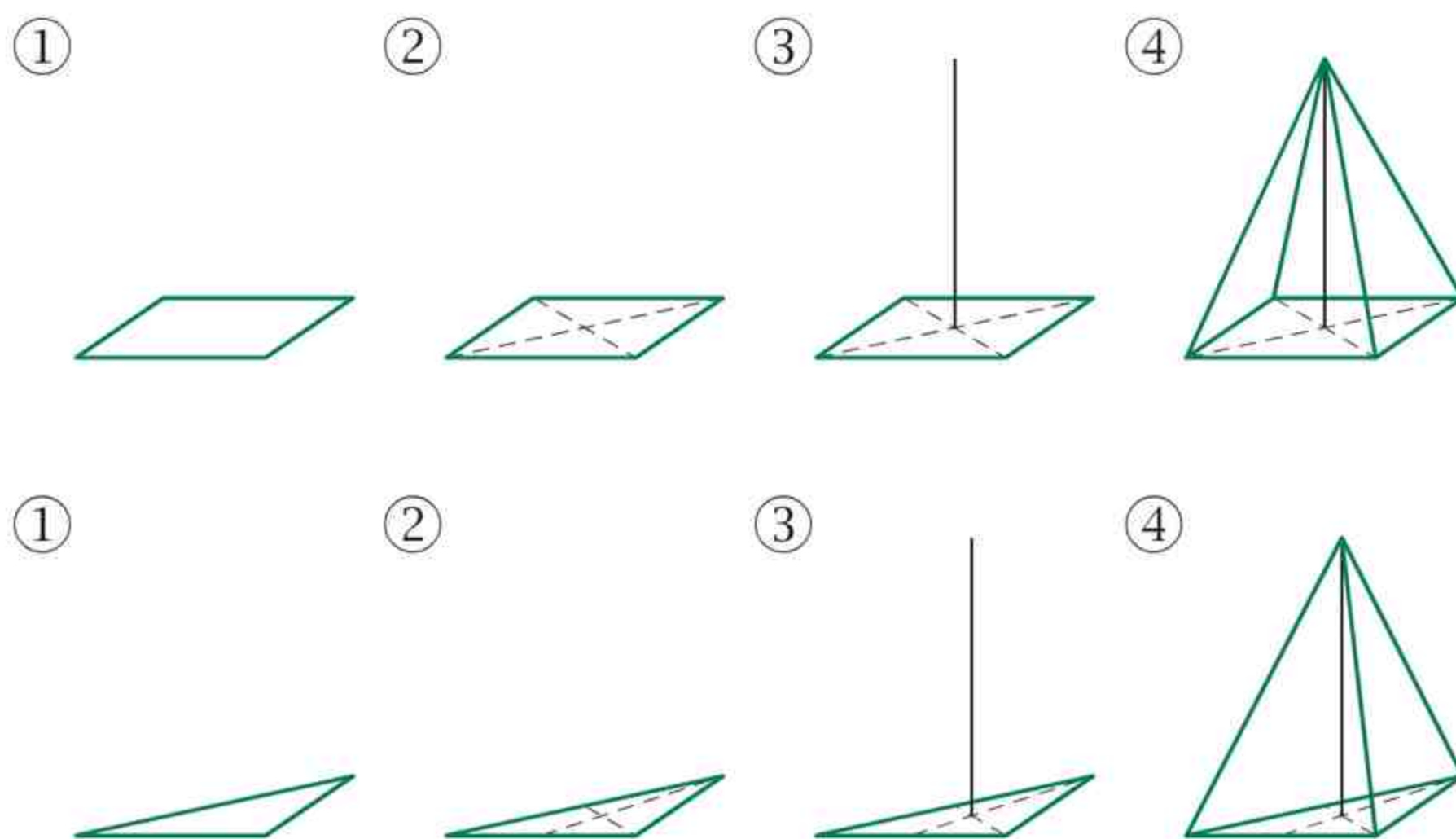


ostrosłup prawidłowy
trójkątny

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym spodek wysokości leży na przecięciu wysokości podstawy.

Zauważ, że z płaskiego rysunku, bez dodatkowych informacji, nie można odczytać, czy jest to ostrosłup prawidłowy.

Na rysunkach przedstawiono kolejne etapy rysowania ostrosłupów prawidłowych.



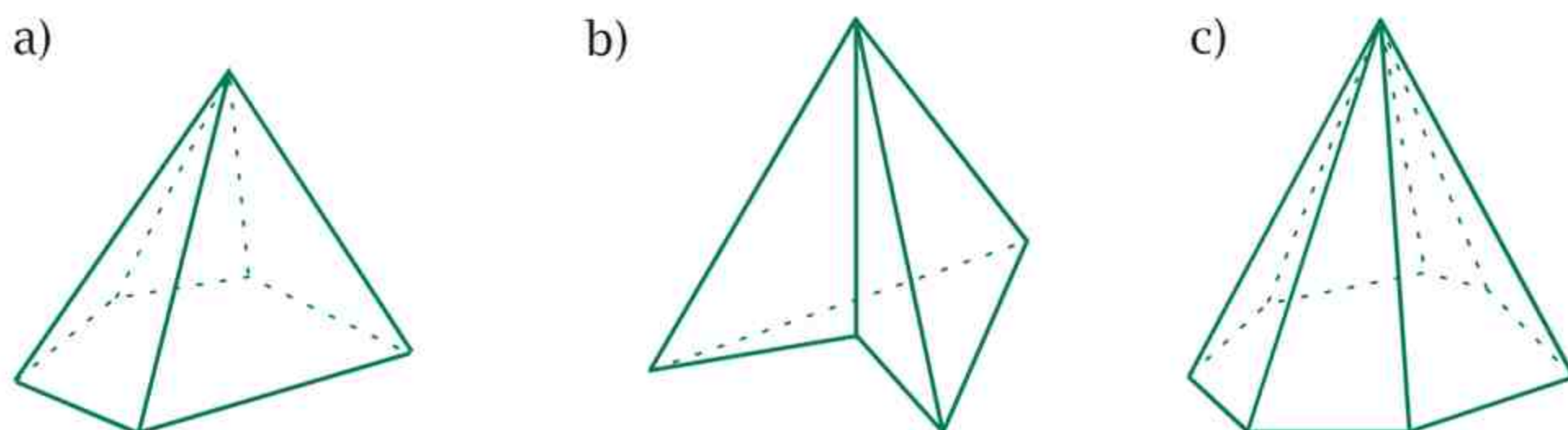
- ① Rysujemy podstawę.
- ② Wyznaczamy spodek wysokości. (W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym rysujemy przekątne podstawy, w ostrosłupie prawidłowym trójkątnym — odcinki łączące wierzchołki podstawy ze środkami przeciwległych boków).
- ③ Rysujemy wysokość.
- ④ Dorysowujemy krawędzie boczne.

ĆWICZENIE B. Narysuj ostrosłup:

- a) prawidłowy sześciokątny,
- b) trójkątny, w którym spodek wysokości jest jeden z wierzchołków podstawy,
- c) czworokątny, w którym spodek wysokości jest środkiem jednego z boków podstawy.

Zadania

1. Ile krawędzi i ile ścian mają narysowane ostrosłupy?



2. Podaj, ile krawędzi i ile ścian ma ostrosłup:

- a) pięciokątny, b) dwunastokątny, c) stukątny, d) n -kątny.

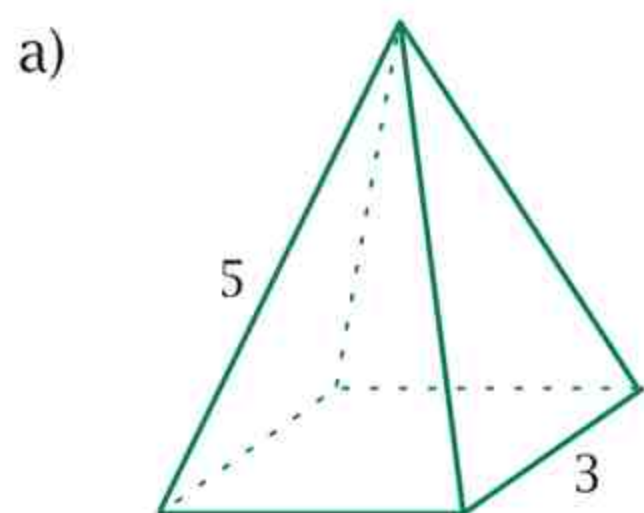
3. a) Ile ścian bocznych, a ile wszystkich ścian ma ostrosłup o 20 krawędziach?

b) Ile wierzchołków podstawy ma ostrosłup o 30 ścianach bocznych?

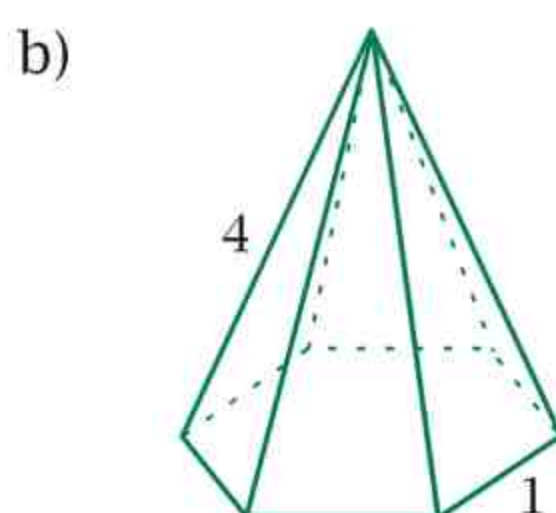
4. a) Czy krawędź boczna może być równa wysokości ostrosłupa?

b) Czy spodek wysokości ostrosłupa może leżeć w środku krawędzi podstawy?

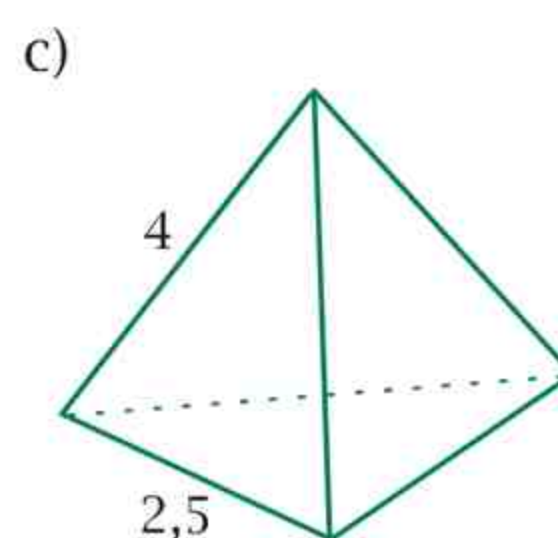
5. Oblicz sumę długości krawędzi każdego z narysowanych ostrosłupów.



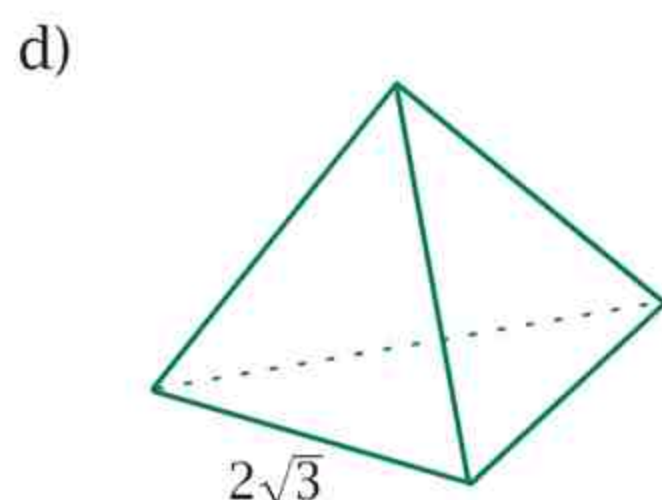
ostrosłup prawidłowy
czworokątny



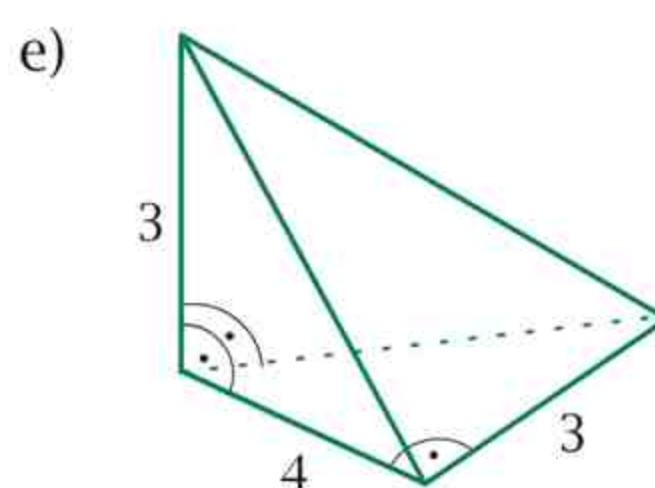
ostrosłup prawidłowy
sześciokątny



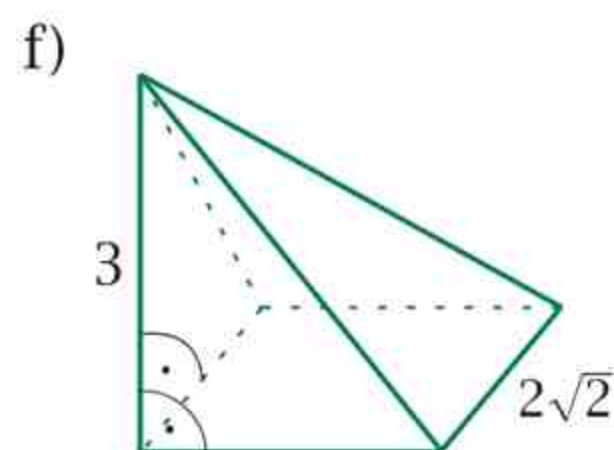
ostrosłup prawidłowy
trójkątny



czworościan foremny



ostrosłup trójkątny



ostrosłup, którego
podstawą jest kwadrat

6. Które z poniższych zdań są prawdziwe dla każdego ostrosłupa?

- ① Wszystkie krawędzie mają wspólny punkt.
- ② Liczba wszystkich krawędzi jest parzysta.
- ③ Liczba wszystkich ścian jest nieparzysta.
- ④ Wszystkie ściany boczne są trójkątami.
- ⑤ Z każdego wierzchołka wychodzą 3 krawędzie.
- ⑥ Krawędzi jest tyle, ile wszystkich ścian.
- ⑦ Krawędzi bocznych jest tyle, ile ścian bocznych.
- ⑧ Spodek wysokości leży na podstawie ostrosłupa.

7. Z drutu o długości 60 cm zbudowano szkielet ostrosłupa prawidłowego. Określ, jaką długość ma krawędź boczna, jeśli podstawa jest:

- kwadratem o boku 3 cm,
- sześciokątem o boku 4 cm,
- trójkątem o boku 1 dm,
- stukiem o boku 0,2 mm.

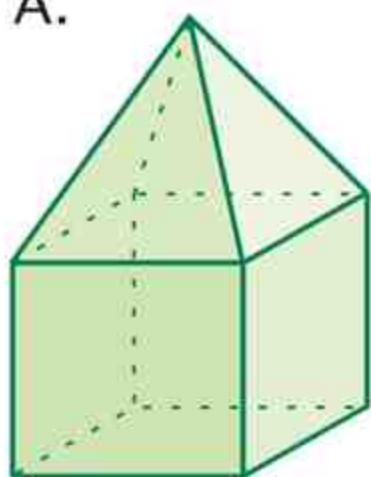
*8. Dlaczego poniższe zdania są nieprawdziwe?

- Ostrosłup prawidłowy, którego ściany boczne są trójkątami równobocznymi, jest czworościanem foremnym.
- Ostrosłup prawidłowy, którego wszystkie krawędzie mają jednakową długość, jest czworościanem foremnym.
- Ostrosłup, którego podstawą jest kwadrat, jest ostrosłupem prawidłowym.
- Istnieje ostrosłup prawidłowy sześciokątny, którego wszystkie krawędzie mają równe długości.

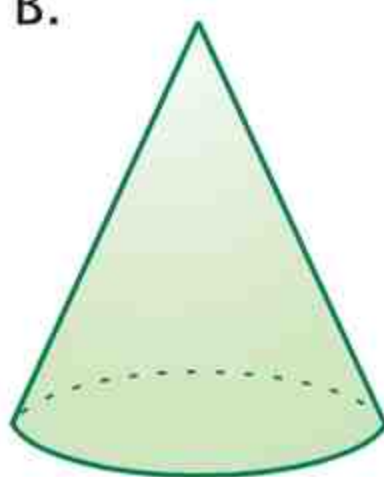
Sprawdź, czy umiesz

1. Ostrosłupem jest bryła przedstawiona na rysunku:

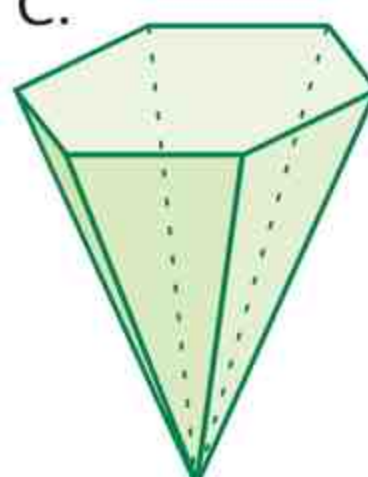
A.



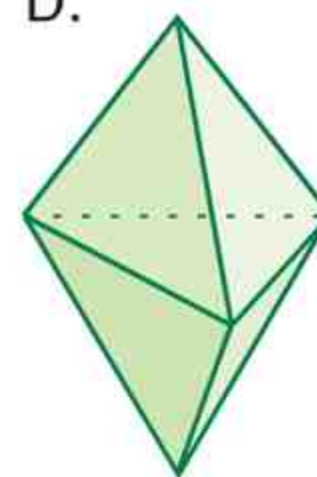
B.



C.



D.



2. Ostrosłup o 30 krawędziach ma:

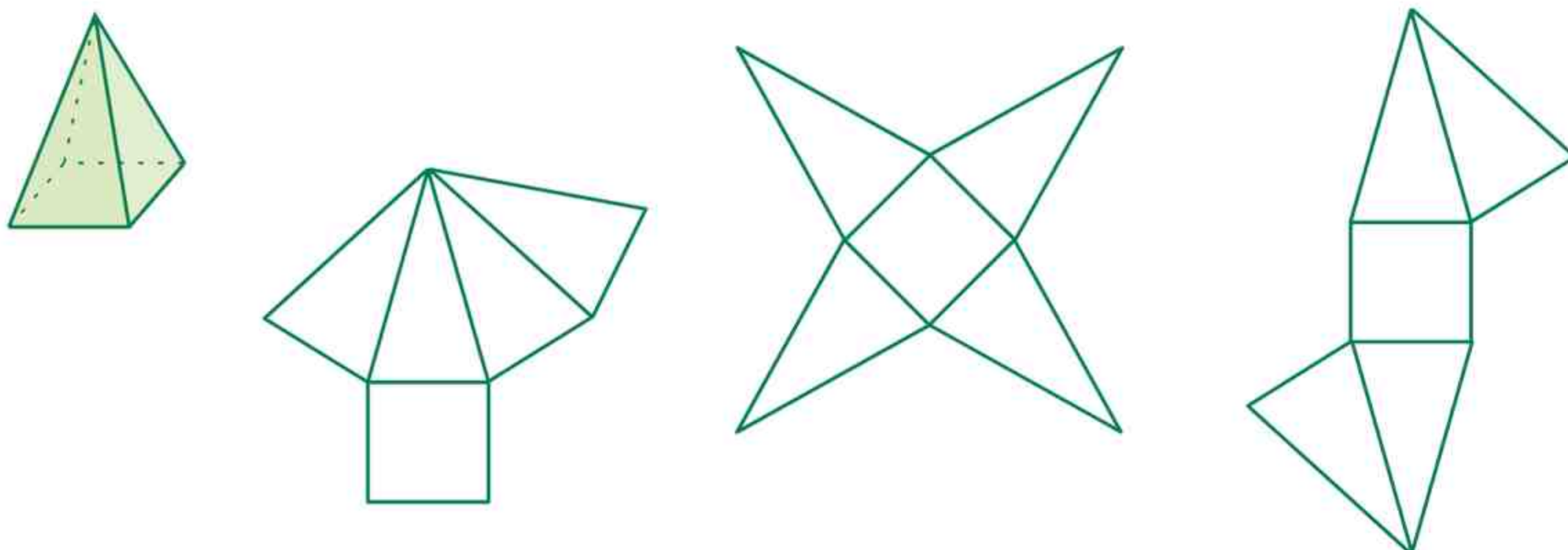
- | | |
|----------------------|------------------------------|
| A. 30 ścian bocznych | C. piętnastokąt w podstawie |
| B. 20 ścian bocznych | D. dziesięciokąt w podstawie |

3. Na zbudowanie szkieletu ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego wszystkie krawędzie mają równe długości, zużyto 120 cm drutu. Jedna krawędź tego szkieletu ma długość:

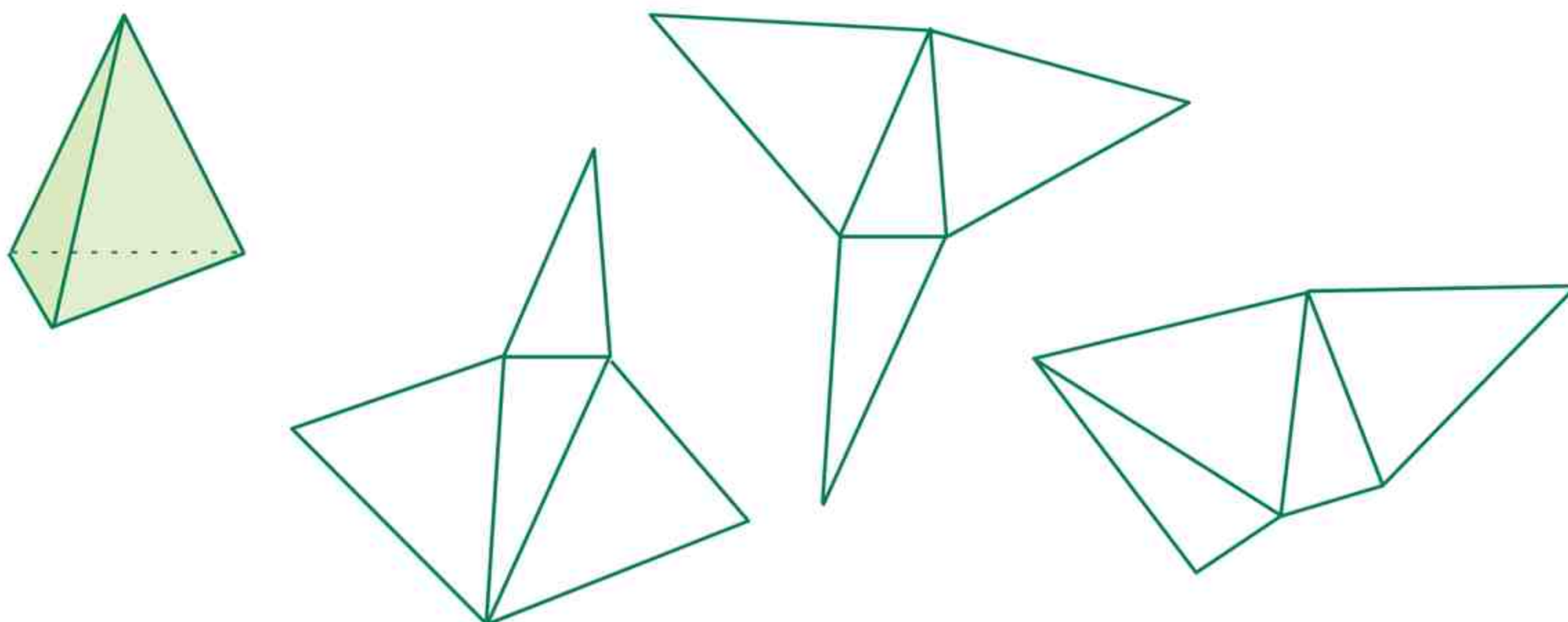
- | | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| A. 12 cm | B. 15 cm | C. 20 cm | D. 30 cm |
|----------|----------|----------|----------|

4 Siatki ostrosłupów. Pole powierzchni

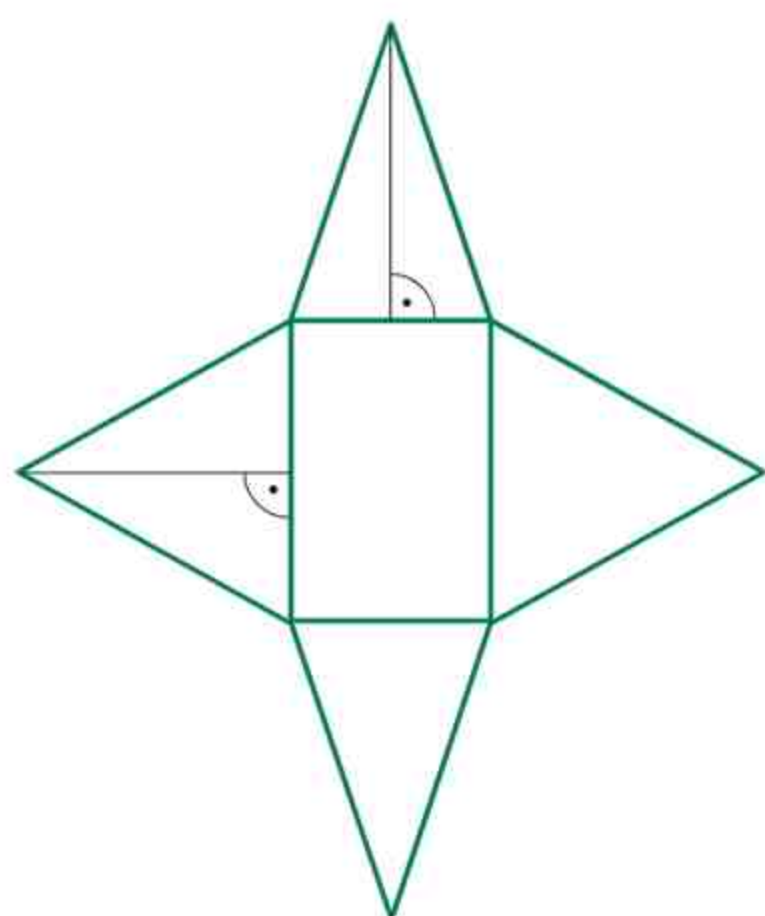
Na rysunku przedstawiony jest ostrosłup prawidłowy czworokątny oraz przykłady siatek tego ostrosłupa.



Na poniższym rysunku przedstawiony jest ostrosłup trójkątny oraz przykłady jego siatek.



ĆWICZENIE. Na rysunku przedstawiono siatkę ostrosłupa czworokątnego. Zmierz długości odpowiednich odcinków i oblicz pole powierzchni podstawy i ścian bocznych ostrosłupa.



Pole powierzchni ostrosłupa jest równe sumie pól ścian bocznych i pola podstawy.

Pole powierzchni ostrosłupa: $P_c = P_p + P_b$

P_c — pole powierzchni całkowitej

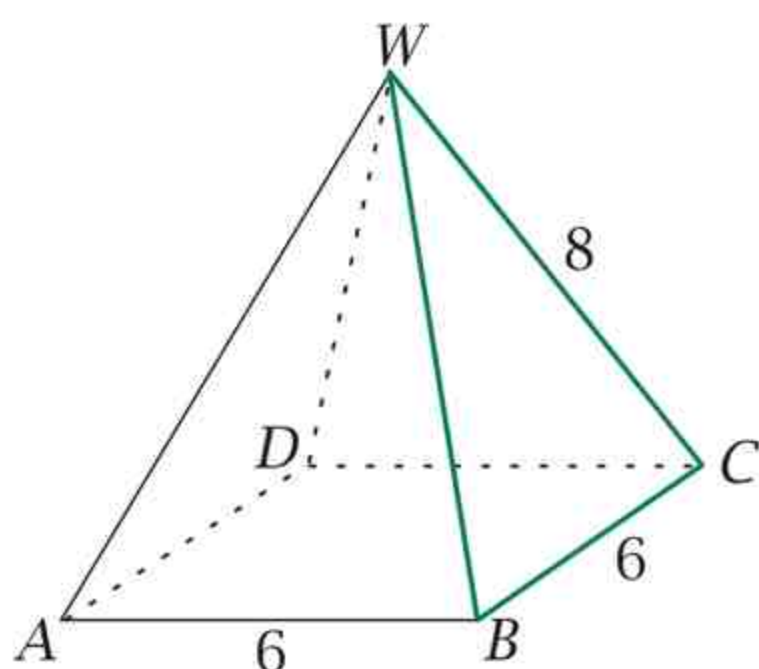
P_p — pole podstawy

P_b — pole powierzchni bocznej

Przy obliczaniu pola powierzchni ostrosłupa często korzystać będziemy z twierdzenia Pitagorasa.

Przykład

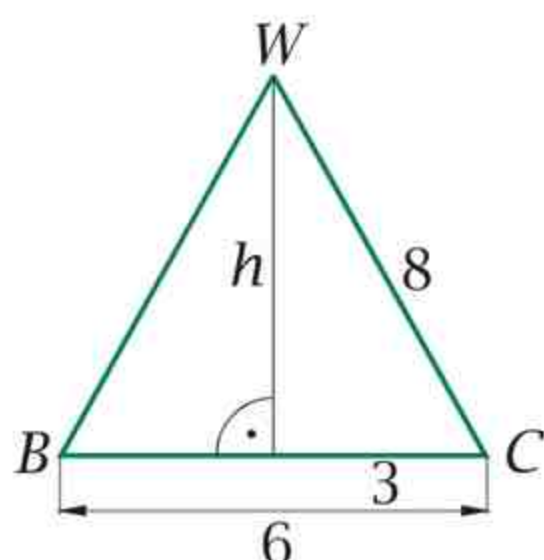
Oblicz pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 6, a krawędź boczna ma długość 8.



Rysujemy ostrosłup i zaznaczamy jedną ze ścian bocznych.

$$P_p = 6^2 = 36$$

Obliczamy pole podstawy.



Rysujemy ścianę boczną — jest ona trójkątem równoramiennym.

$$h^2 + 3^2 = 8^2$$

$$h^2 = 55$$

$$h = \sqrt{55}$$

Obliczamy wysokość ściany bocznej, stosując twierdzenie Pitagorasa.

$$P_b = 4 \cdot \frac{6 \cdot h}{2} = 12h$$

Obliczamy pole powierzchni bocznej.

$$P_b = 12\sqrt{55}$$

$$P_c = P_p + P_b$$

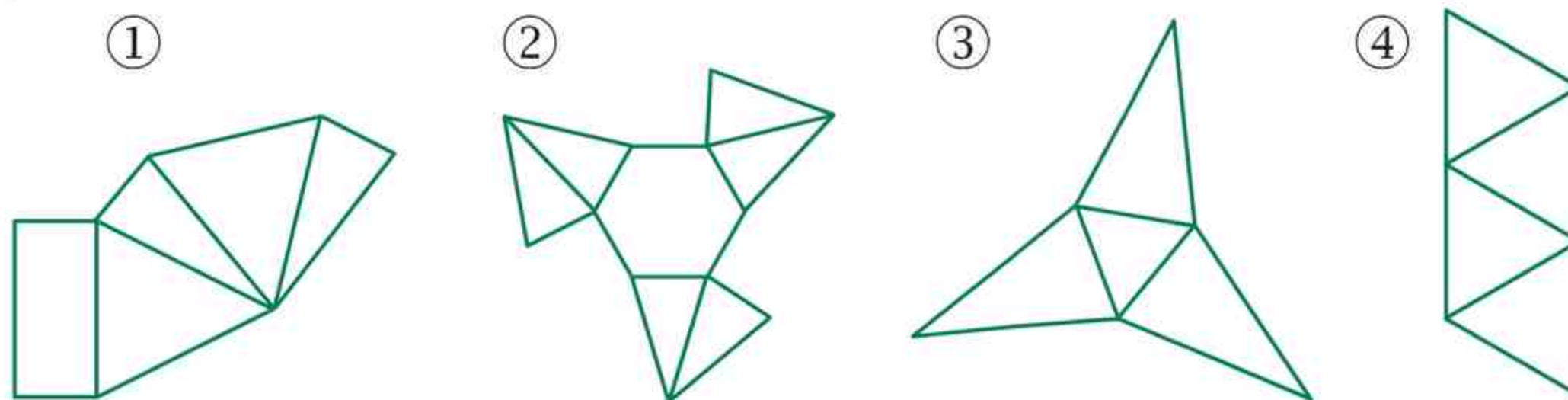
Obliczamy pole powierzchni całkowitej.

$$P_c = 36 + 12\sqrt{55}$$

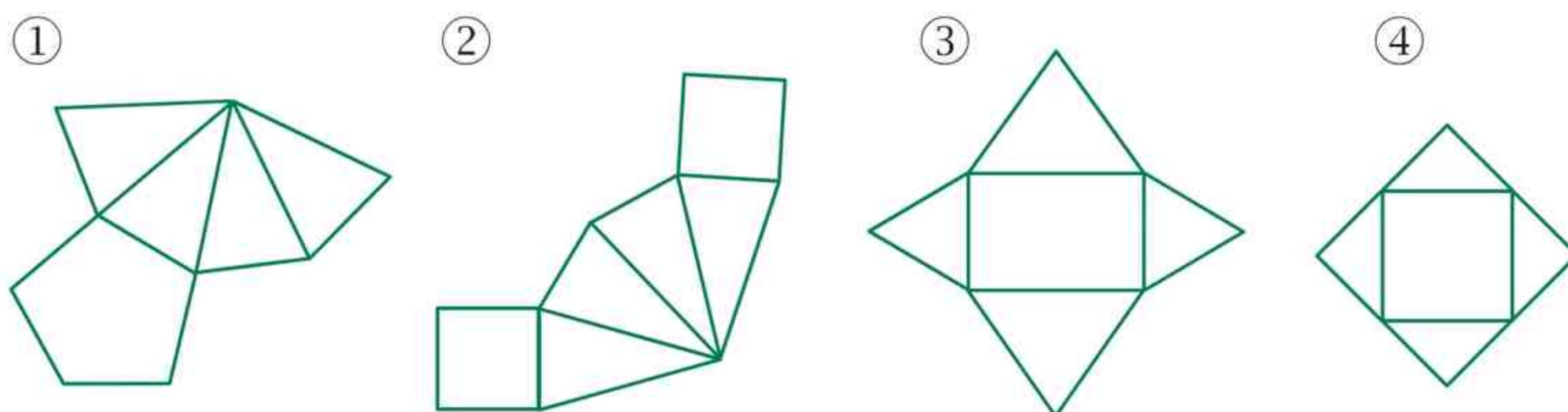
Odp. Pole powierzchni ostrosłupa jest równe $36 + 12\sqrt{55}$.

Zadania

1. Nazwij ostrosłupy, których siatki narysowano poniżej.



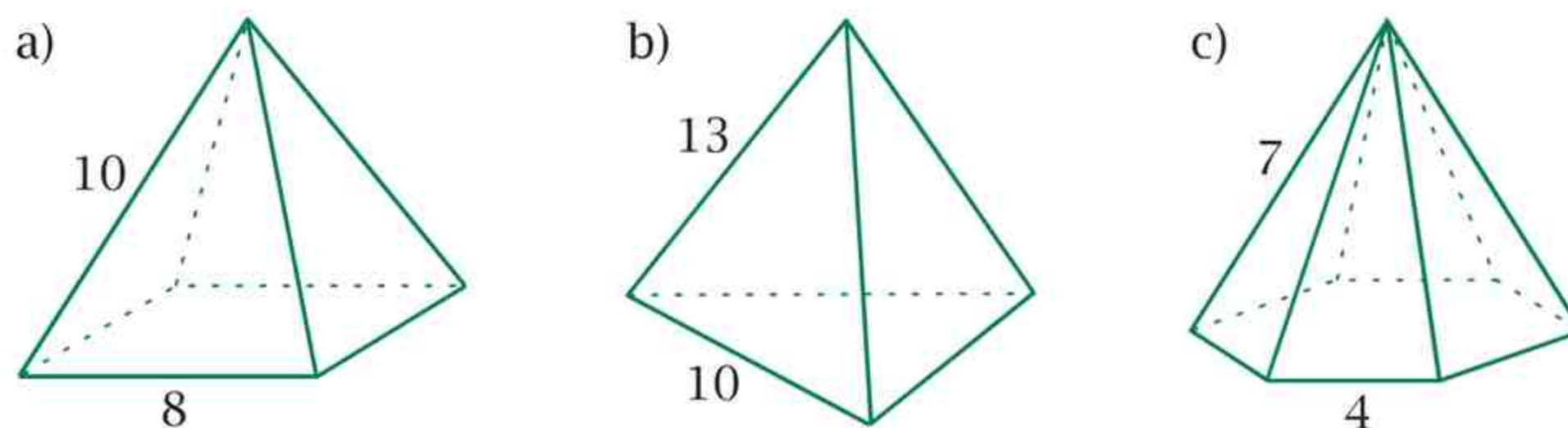
2. Żaden z poniższych rysunków nie przedstawia siatki ostrosłupa. Wyjaśnij, dlaczego.



3. Narysuj siatkę:

- ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym krawędź podstawy ma 3 cm, a krawędź boczna ma 5 cm,
- ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy 4 cm i krawędzi bocznej 6 cm,
- czworościanu foremnego o krawędzi 4 cm.

4. Oblicz pola powierzchni narysowanych ostrosłupów prawidłowych.



5. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym:

- wysokość ściany bocznej jest równa 5 cm, a pole powierzchni bocznej wynosi 80 cm^2 ,
- pole podstawy jest równe 144 cm^2 , a krawędź boczna ma 10 cm.

6. Pole powierzchni czworościanu foremnego jest równe $72\sqrt{3}$. Oblicz długość krawędzi tego czworościanu.



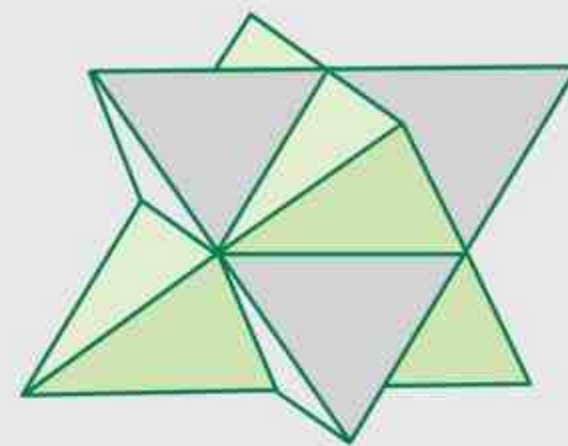
7. Dach każdej z dwóch wież w zabytkowej warowni ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 4 m i krawędzi bocznej równej 6 m. Litry farby wystarcza na pomalowanie 7 m^2 powierzchni. Ile litrów farby trzeba kupić, aby dwukrotnie pomalować dachy obu wież?

8. Do zbudowania indiańskiego namiotu użyto dwumetrowych tyczek. Szkielet namiotu kształtem przypomina ostrosłup prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy 90 cm. Kąt między przeciwległymi tyczkami ma 60° . Jaką długość ma wystająca część tyczki? Czy chłopiec o wzroście 1,60 m będzie mógł się w tym namiocie wyprostować? Czy $4,5 \text{ m}^2$ materiału wystarczy na pokrycie ścian tego namiotu?



Ciekawostka

Narysowaną obok bryłę, wyglądającą jak dwa przenikające się czworościany foremne, odkrył niemiecki matematyk i astronom Johannes Kepler (1571–1630). Nazwał ją *stella octangula*, co po łacinie znaczy „gwiazda ośmiokamienna”. Kepler najbardziej znany jest z odkrycia, że planety krążą nie po okręgach, lecz po elipsach. Był także konstruktorem lunety oraz jako pierwszy wprowadził przecinek w zapisie ułamka dziesiętnego.



stella octangula

9. Jakie pole powierzchni ma *stella octangula* utworzona przez dwa czworościany o krawędzi długości 8 cm?
10. Ile ścian ma bryła, która jest częścią wspólną dwóch czworościanów foremnych o krawędzi 10 cm, tworzących bryłę *stella octangula*? Jakie pole powierzchni ma ta bryła?

Sprawdź, czy umiesz

1. Który z rysunków przedstawia siatkę ostrosłupa?

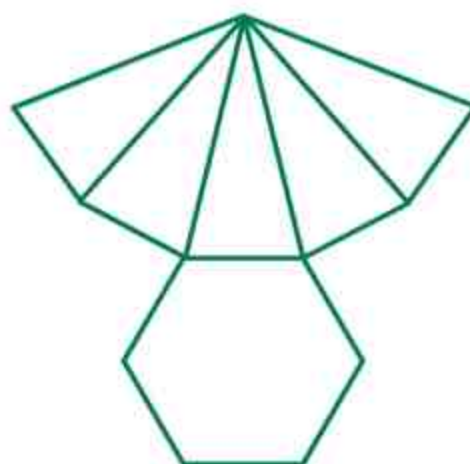
A.



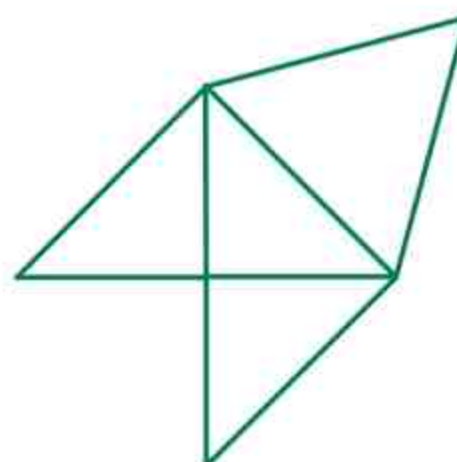
B.



C.



D.



2. Pole powierzchni czworościanu foremnego o krawędzi 2 cm jest równe:

A. $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$

B. $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$

C. 16 cm^2

D. 24 cm^2

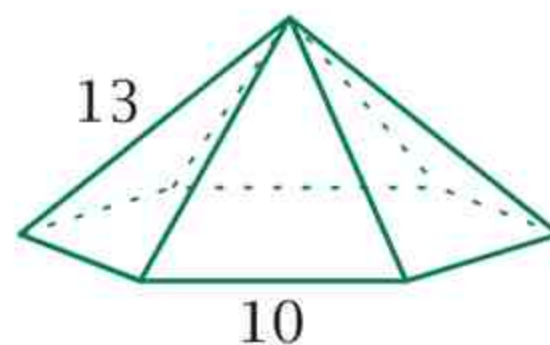
3. Pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego przedstawionego na rysunku wynosi:

A. $360 + 100\sqrt{3}$

C. $360 + 150\sqrt{3}$

B. $390 + 150\sqrt{3}$

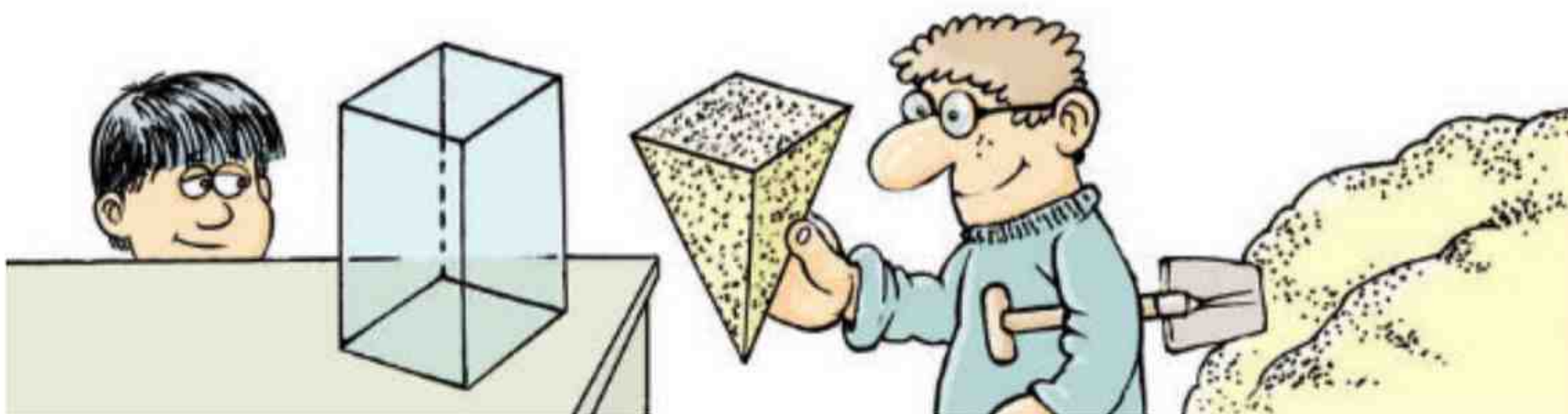
D. $510\sqrt{3}$



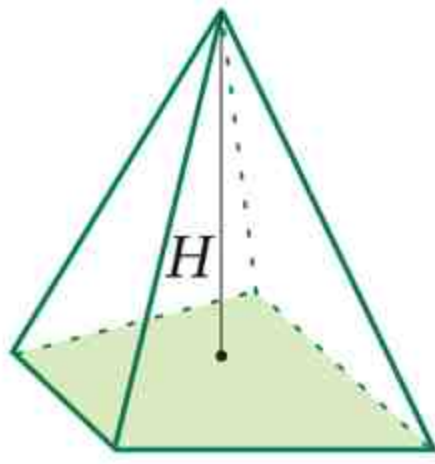
→ zadania uzupełniające 20–27, str. 201–202

5

Objętość ostrosłupa



ĆWICZENIE. Przygotuj otwarte pudełka w kształcie graniastoslupa i ostrosłupa o takiej samej podstawie i wysokości. Napełnij pudełko w kształcie ostrosłupa piaskiem i przesyp ten piasek do pudełka w kształcie graniastoslupa. Ile razy trzeba tę czynność wykonać, aby napełnić graniastosłup?



Objętość ostrosłupa jest trzy razy mniejsza niż objętość graniastosłupa o takiej samej podstawie i wysokości.

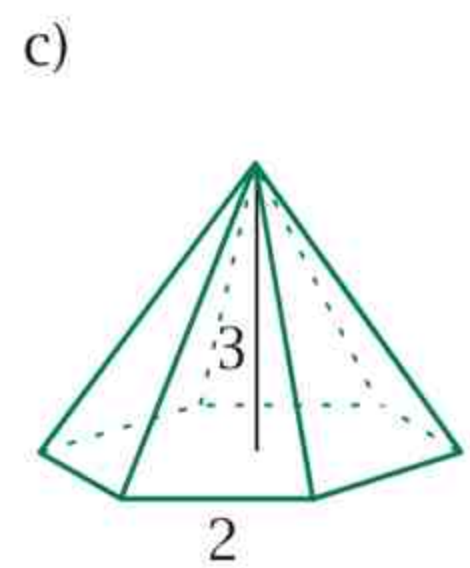
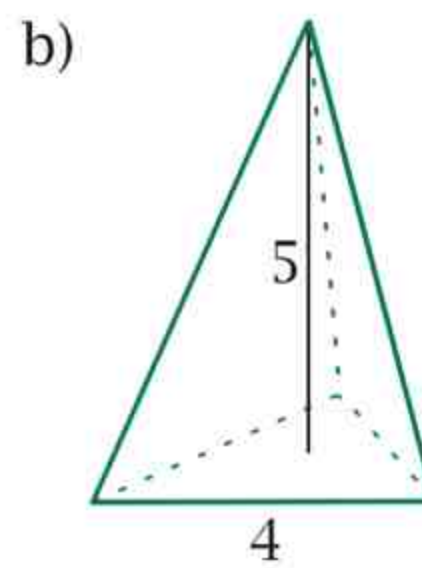
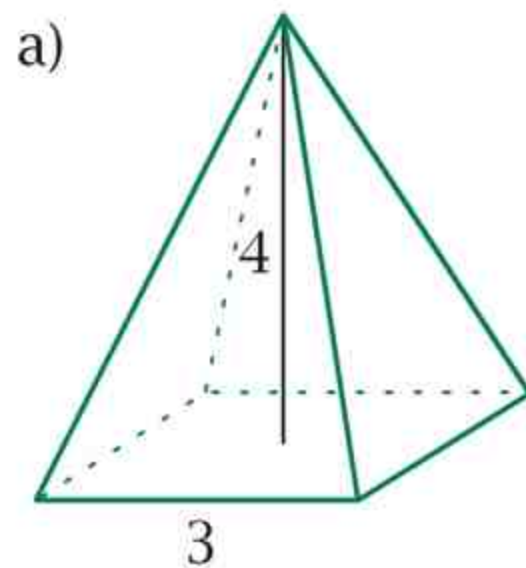
Objętość ostrosłupa: $V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$

P_p — pole podstawy ostrosłupa

H — wysokość ostrosłupa

Zadania

1. Oblicz objętości narysowanych ostrosłupów prawidłowych.



2. Oblicz objętość:

- ostrosłupa o wysokości 12 cm, którego podstawą jest romb o przekątnych 6 cm i 8 cm,
- ostrosłupa o wysokości 10 cm, którego podstawą jest trapez o podstawach 4 cm i 3 cm oraz wysokości 2 cm,
- ostrosłupa o wysokości 8 cm, którego podstawą jest trójkąt równoramienny o bokach 5 cm, 5 cm i 6 cm.

3. Dwa ostrosłupy prawidłowe czworokątne mają różne wysokości, ale takie same podstawy o krawędzi 8 cm. Gdy sklejo no podstawy, odległość między wierzchołkami ostrosłupów wyniosła 20 cm. Oblicz objętość otrzymanej bryły.

- Oblicz, jaką wysokość ma ostrosłup prawidłowy czworokątny o objętości 100 cm^3 i krawędzi podstawy 10 cm.
 - Jakie pole podstawy ma ostrosłup dziewięciokątny o wysokości 5 cm i objętości 20 cm^3 ?
 - Jaką długość ma krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o wysokości 1 m i objętości $12\sqrt{3} \text{ m}^3$?

5. Czy ostrosłup o polu podstawy 1 cm^2 i objętości 1 dm^3 jest wyższy od ciebie?

6. Świecę w kształcie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 6 cm i wysokości 12 cm przetopiono na świeczkę w kształcie sześcianu. Jakie wymiary ma otrzymana świeczka?

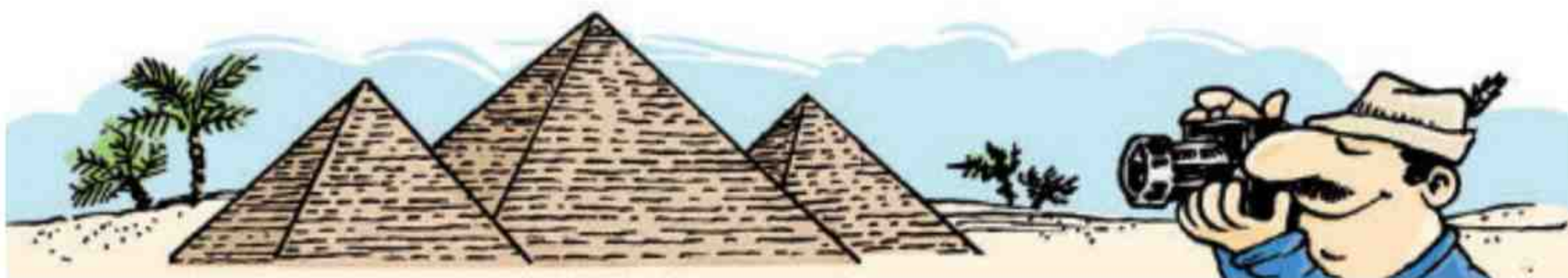
Ciekawostka

W czasach hellenistycznych siedem najefektowniejszych budowli nazywano cudami świata. Jednym z siedmiu cudów świata były piramidy w Gizie. Tylko one przetrwały do czasów współczesnych. Największa z nich — piramida Cheopsa, zwana Wielką Piramidą, przypomina kształtem ostrosłup prawidłowy czworokątny. Ma 146 m wysokości, a krawędź jej podstawy jest równa 230 m.

Na zbudowanie piramidy Cheopsa zużyto 2 300 000 bloków kamiennych o ciężarze od 2,5 t do 15 t.

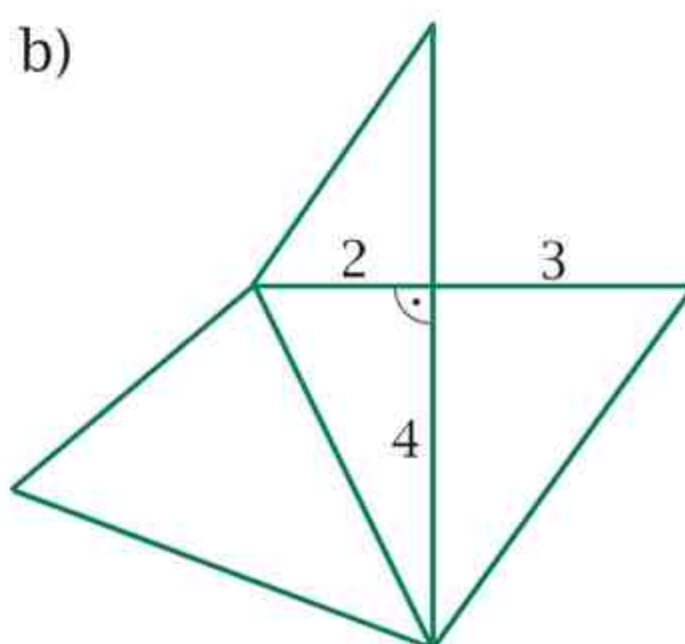
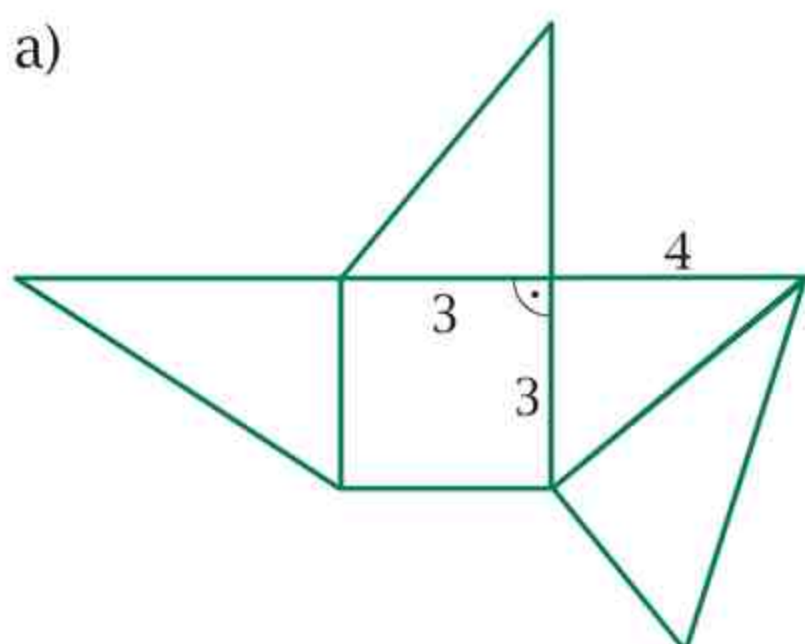
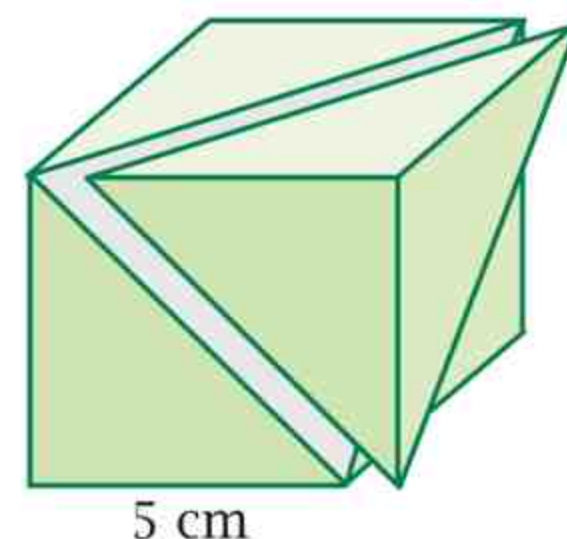
7. Przeczytaj ciekawostkę. Jaką długość miałby mur o wysokości 3 m i grubości 25 cm, zbudowany z kamienia zużytego do budowy piramidy Cheopsa? Czy można by tym murem opasać całą Polskę? Długość granic wynosi 3582 km.

8. Piramidzie Cheopsa towarzyszą dwie mniejsze piramidy — Chefrena (wys. 143 m, krawędź podstawy — 215 m) i Mykerinosa (wys. 66 m, krawędź podstawy — 108 m). Czy kamień zużyty na budowę mniejszych piramid wystarczyłby na zbudowanie piramidy Cheopsa?



9. Z sześcianu odcięto czworościan w sposób przedstawiony na rysunku. Oblicz objętość tego czworościanu.

Wskazówka. W czworościanie każda ściana może być podstawą.

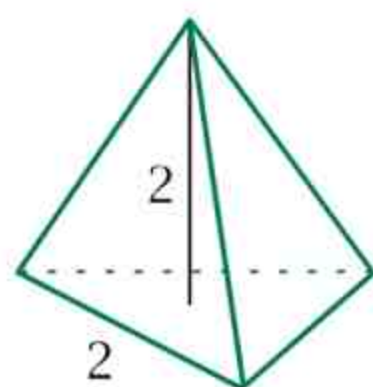


10. Oblicz objętości ostrosłupów, których siatki przedstawiono na rysunkach obok.

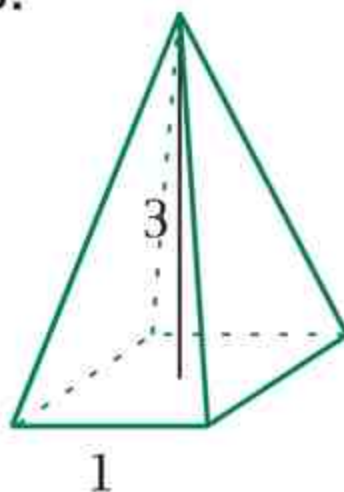
Sprawdź, czy umiesz

1. Który z narysowanych poniżej ostrosłupów prawidłowych ma największą objętość?

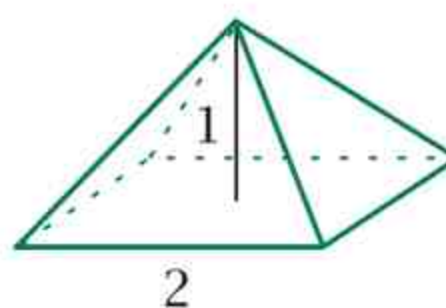
A.



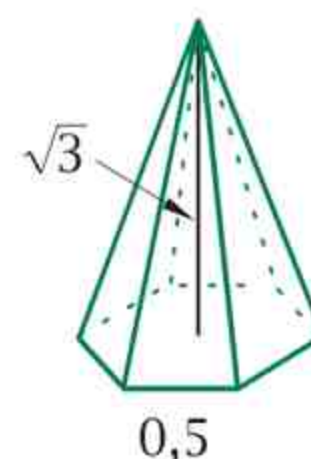
B.



C.



D.



2. Podstawą ostrosłupa o objętości 200 cm^3 jest romb, którego przekątne mają długości 6 cm i 10 cm. Wysokość tego ostrosłupa jest równa:

A. $3\frac{1}{3} \text{ cm}$

B. 20 cm

C. 60 cm

D. 10 cm

3. Graniastosłup i ostrosłup mają takie same podstawy i równe objętości. Wysokość graniastosłupa jest równa 9 cm. Jaką wysokość ma ostrosłup?

A. 3 cm

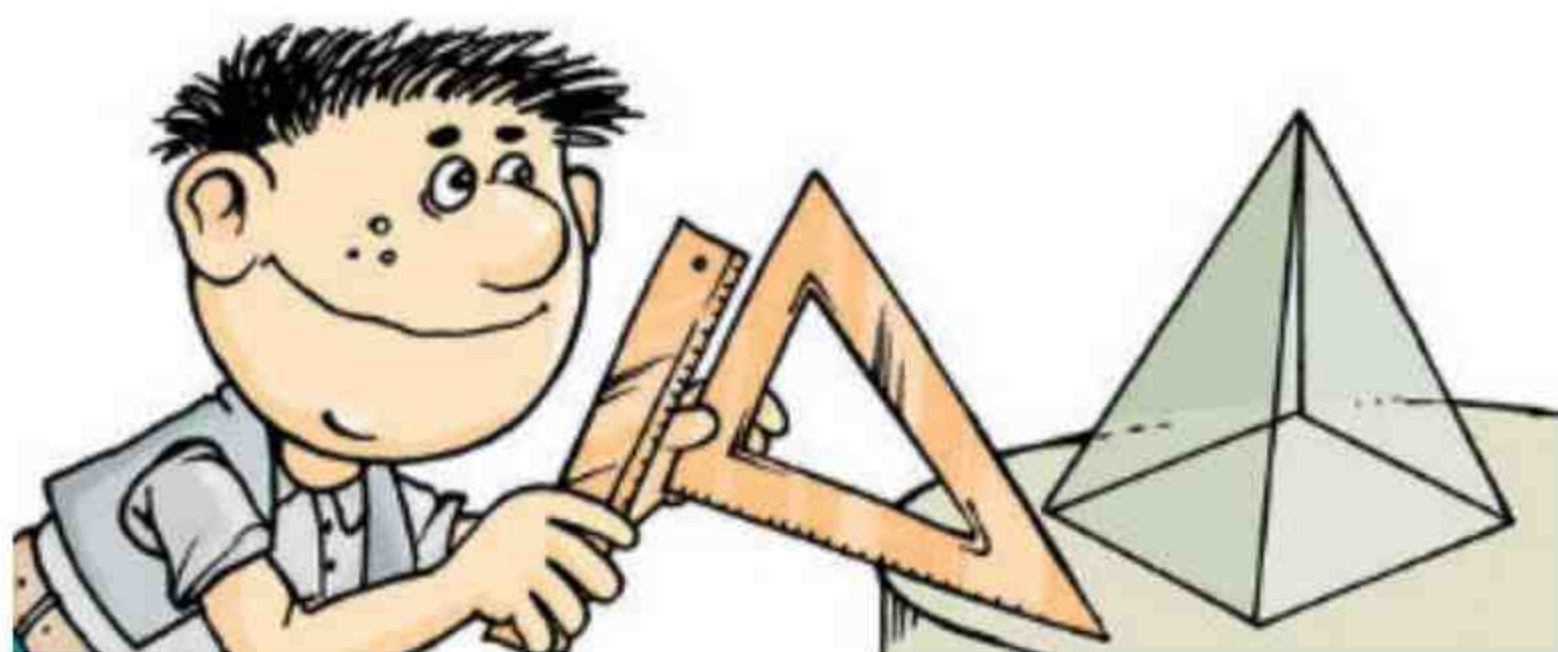
B. 9 cm

C. 18 cm

D. 27 cm

→ zadania uzupełniające 28–33, str. 202–203

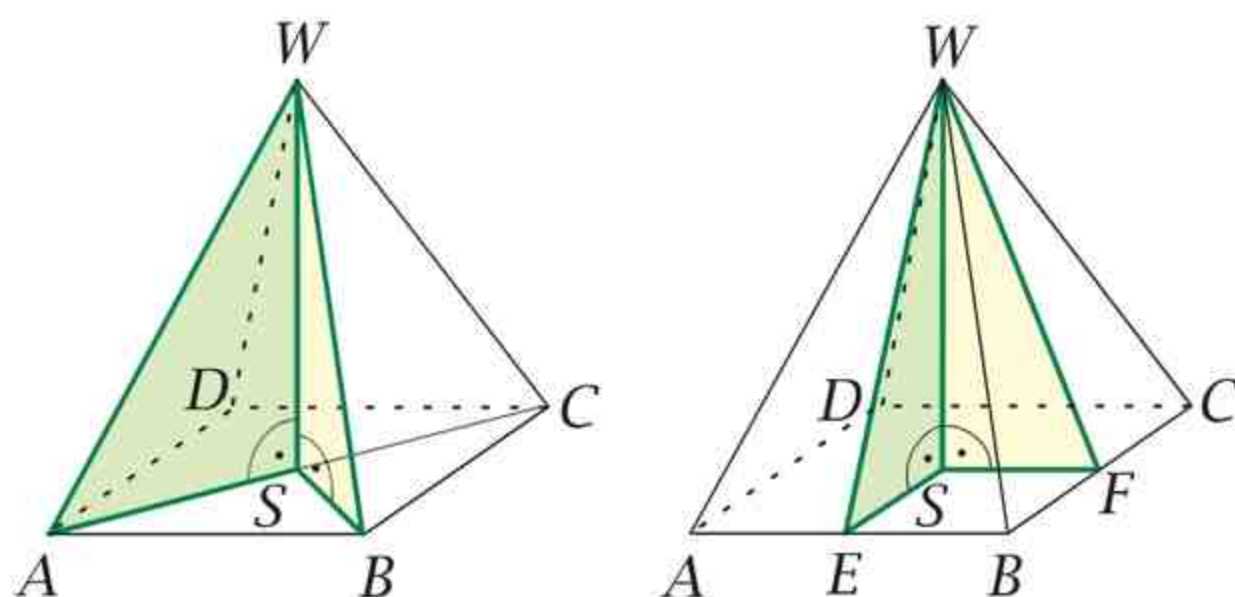
6 Odcinki w ostrosłupach



ĆWICZENIE A. Spróbuj wymyślić, w jaki sposób można zmierzyć wysokość ostrosłupa.

Zmierzenie wysokości ostrosłupa jest na ogół kłopotliwe. Dużo łatwiej zmierzyć długości jego krawędzi. Jeśli znamy długości krawędzi ostrosłupa prawidłowego, to możemy obliczyć jego wysokość.

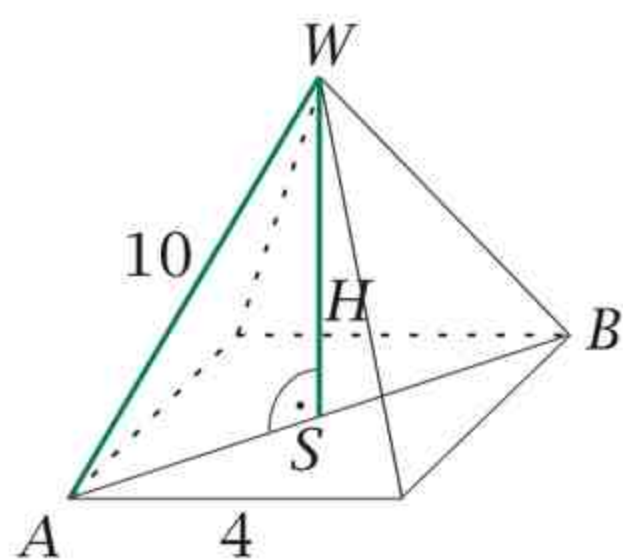
W tym celu należy w ostrosłupie wskazać trójkąt prostokątny, którego jedną z przyprostokątnych jest ta wysokość. Na rysunkach przedstawiono przykłady takich trójkątów w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym.



WE, WF — wysokości ścian bocznych
 WS — wysokość ostrosłupa

Przykład

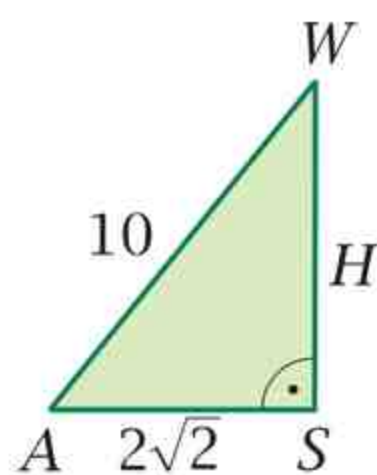
Oblicz wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym krawędź podstawy ma 4 cm, a krawędź boczna ma 10 cm.



Rysujemy ostrosłup (spodek wysokości S leży na przecięciu przekątnych podstawy).

$$AS = \frac{AB}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \quad [\text{cm}]$$

Odcinek AS to połowa przekątnej kwadratu o boku 4 cm.



Rysujemy trójkąt ASW .

$$(2\sqrt{2})^2 + H^2 = 10^2$$

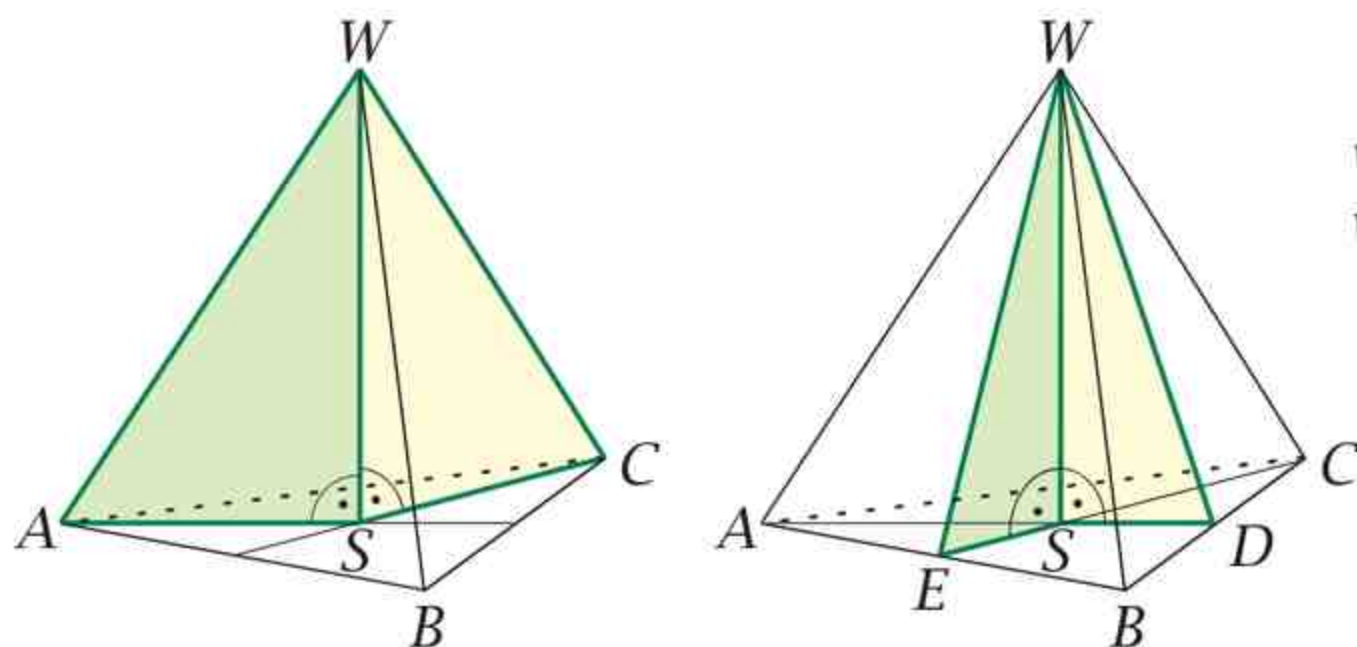
$$H^2 = 100 - 8$$

$$H = \sqrt{92} = 2\sqrt{23} \quad [\text{cm}]$$

Obliczamy wysokość ostrosłupa, stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta ASW .

Odp. Wysokość ostrosłupa jest równa $2\sqrt{23}$, czyli około 9,6 cm.

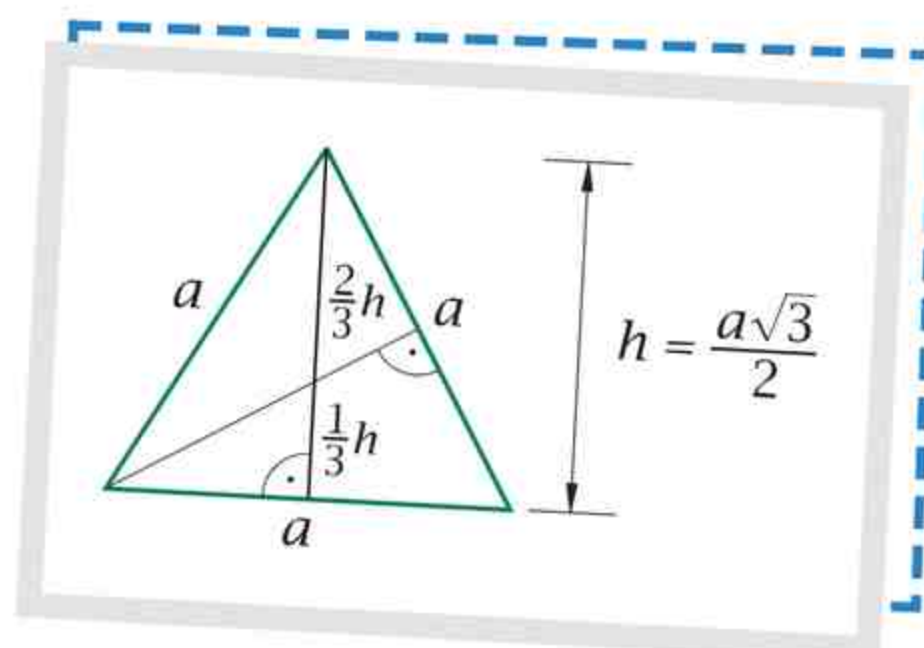
Na poniższych rysunkach zaznaczono kilka trójkątów prostokątnych w ostrosłupie prawidłowym trójkątnym.



WD, WE — wysokości ścian bocznych
 WS — wysokość ostrosłupa

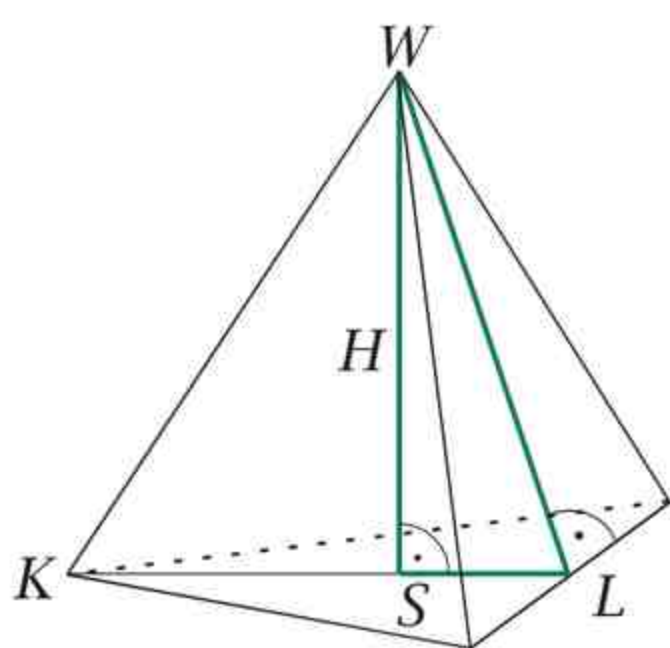
ĆWICZENIE B. Spodek wysokości ostrosłupa prawidłowego trójkątnego dzieli wysokość podstawy na dwa odcinki. Podaj, jakie długości mają te odcinki, jeśli krawędź podstawy ma długość:

- a) 15 mm b) $3\sqrt{3}$ cm



Przykład

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wysokość podstawy i wysokość ściany bocznej mają odpowiednio 6 cm i 7 cm. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.



Rysujemy ostrosłup i zaznaczamy odpowiednie trójkąt.

$$WL = 7 \text{ cm} \quad KL = 6 \text{ cm}$$

$$SL = \frac{1}{3}KL = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2 \text{ [cm]}$$

$$H^2 + 2^2 = 7^2$$

$$H^2 = 45$$

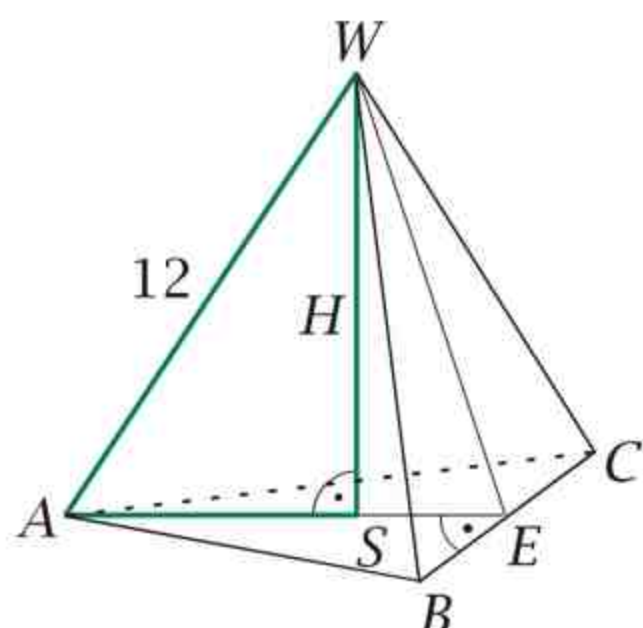
$$H = 3\sqrt{5} \text{ [cm]}$$

Obliczamy wysokość ostrosłupa, stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta SLW .

Odp. Wysokość ostrosłupa jest równa $3\sqrt{5}$ cm, czyli około 6,7 cm.

Przykład

Oblicz wysokość czworościanu foremnego o krawędzi długości 12.



$$AE = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$AS = \frac{2}{3}AE = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$H^2 + (4\sqrt{3})^2 = 12^2$$

$$H^2 = 144 - 48 = 96$$

$$H = 4\sqrt{6}$$

Rysujemy czworościan i zaznaczamy odpowiedni trójkąt.

Obliczamy wysokość podstawy; stosujemy wzór na wysokość trójkąta równobocznego o boku długości 12.

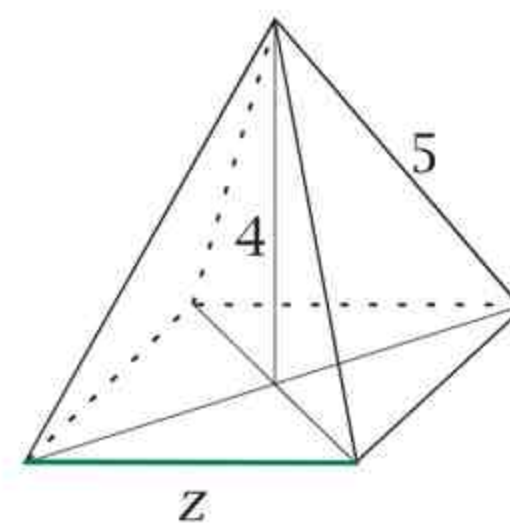
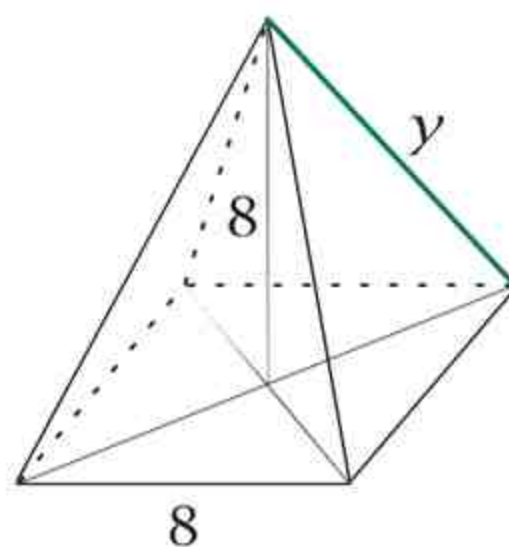
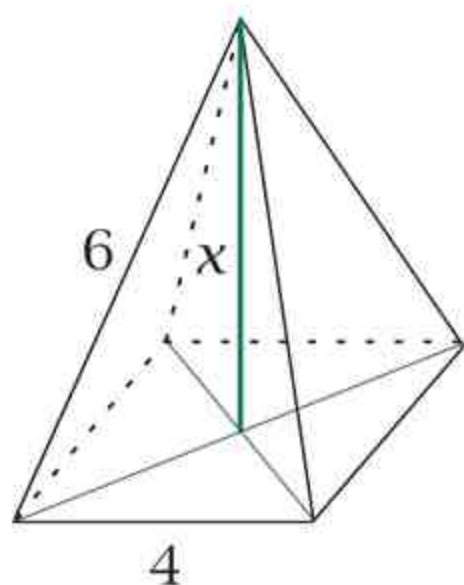
Odcinek AS to $\frac{2}{3}$ wysokości podstawy.

Obliczamy wysokość ostrosłupa, stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta ASW.

Odp. Wysokość czworościanu jest równa $4\sqrt{6}$, czyli około 9,8.

Zadania

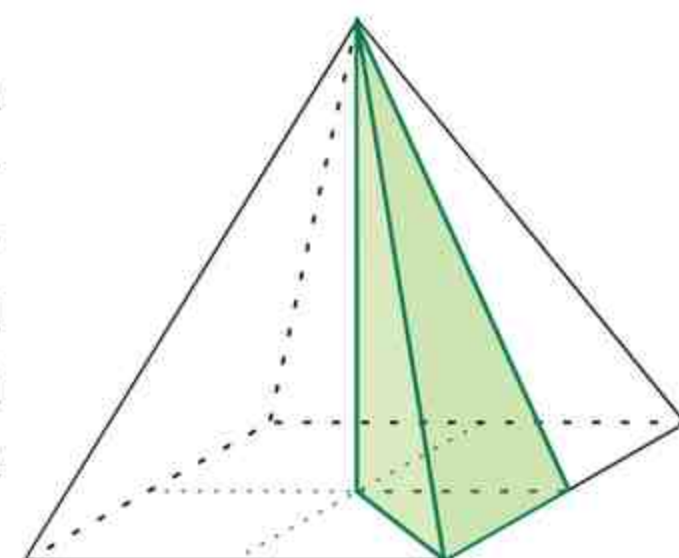
1. Poniżej narysowano ostrosłupy prawidłowe czworokątne. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.



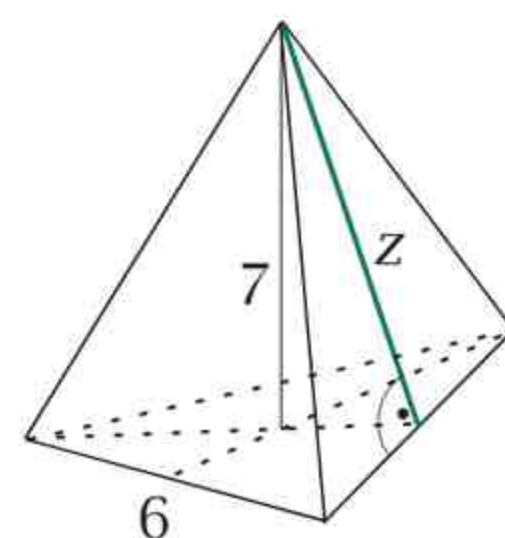
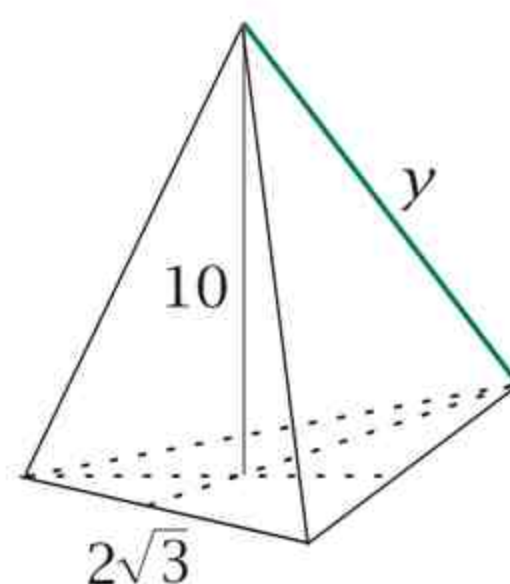
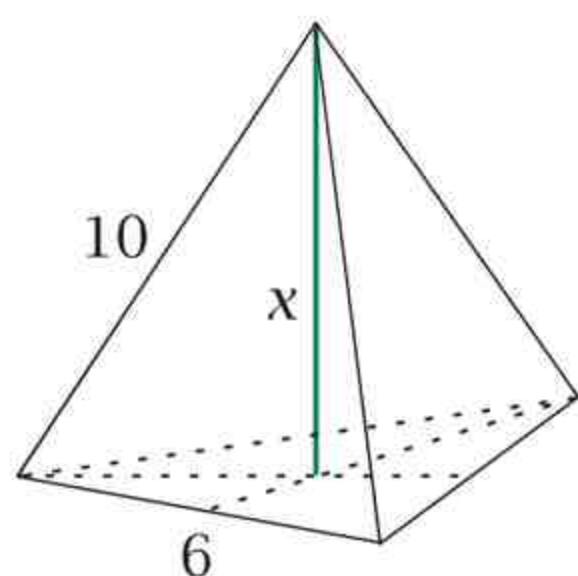
2. Wszystkie krawędzie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego mają długość 4. Oblicz objętość tego ostrosłupa.
3. Przeczytaj informację w ramce na stronie 190. Oblicz długość krawędzi bocznej piramidy Cheopsa.

4. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o bokach 10 cm i 4 cm. Każda z krawędzi bocznych ma 13 cm. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

5. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość oraz krawędź podstawy mają długość 6. Ostrosłup podzielono na osiem jednakowych ostrosłupów trójkątnych (na rysunku zacieniowano jeden z nich). Oblicz długości krawędzi bocznych każdego z otrzymanych w ten sposób ostrosłupów.

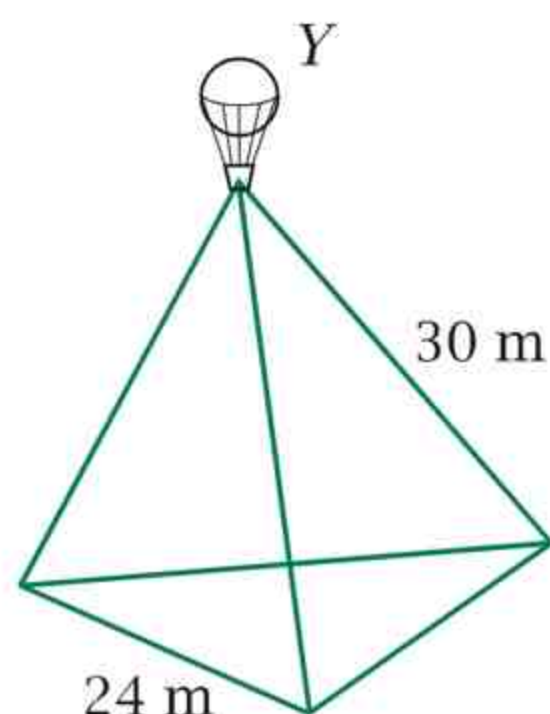
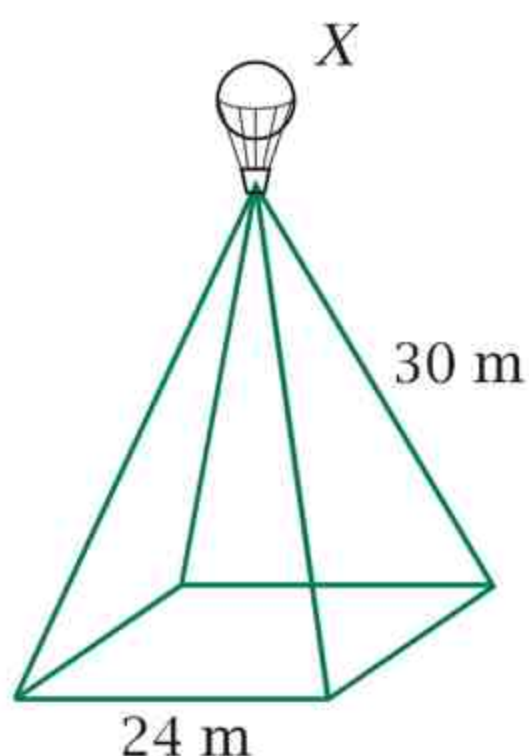


6. Poniżej narysowano ostrosłupy prawidłowe trójkątne. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.



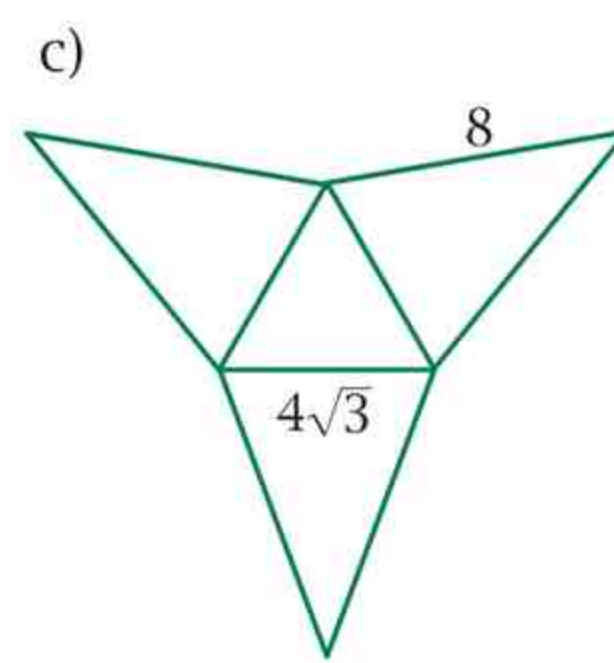
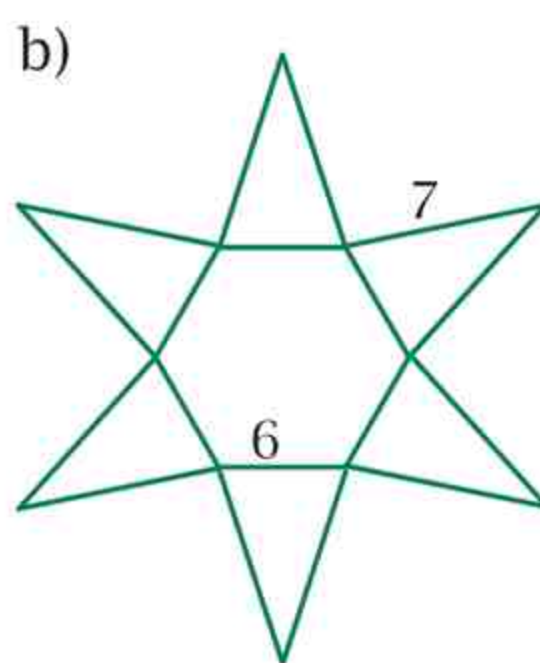
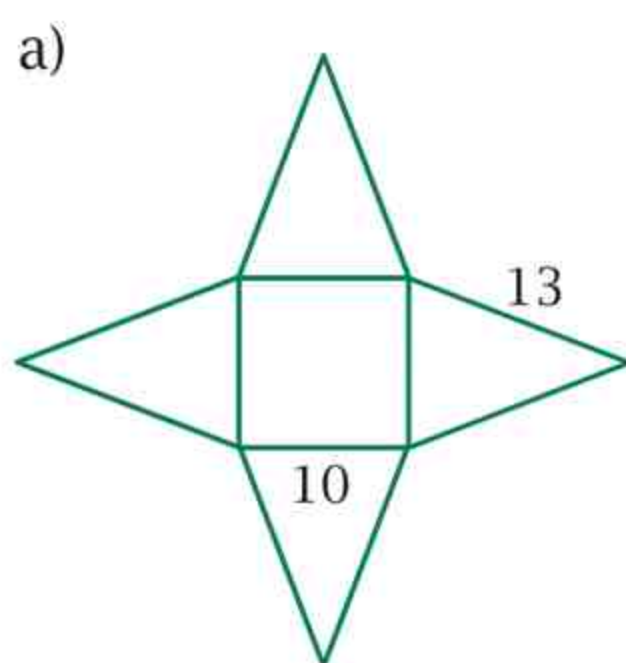
7. a) Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy 6 cm i krawędzi bocznej 10 cm.
 b) Jakie pole powierzchni ma ostrosłup prawidłowy trójkątny o wysokości 5 cm i krawędzi podstawy 9 cm?
 c) Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 8 cm. Spodek wysokości leży w odległości $4\sqrt{3}$ cm od każdego wierzchołka podstawy. Jaką objętość ma ten ostrosłup?
8. Jaką wysokość będzie miał szkielet czworościanu foremnego zbudowany z drutu o długości 6 m?
9. a) Wysokość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa 6, a krawędź boczna ma długość 8. Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa.
 b) Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość $2\sqrt{2}$, a krawędź boczna jest 2 razy dłuższa. Oblicz objętość tego ostrosłupa.
 c) Ile wynosi wysokość ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 4, a wysokość jest równa 9?

10. Ostrosłup prawidłowy sześciokątny o wysokości 12 cm ma objętość $150\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Oblicz długości krawędzi tego ostrosłupa.

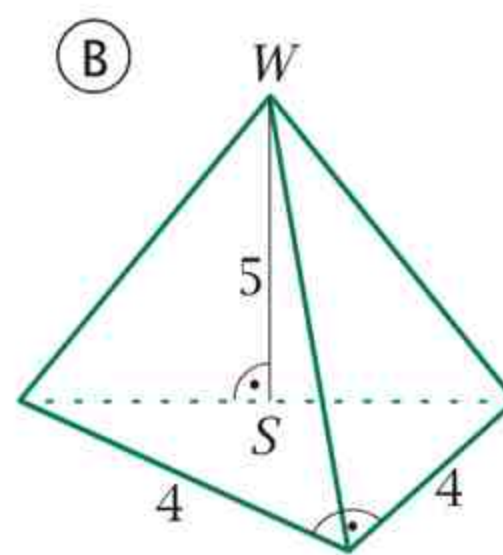
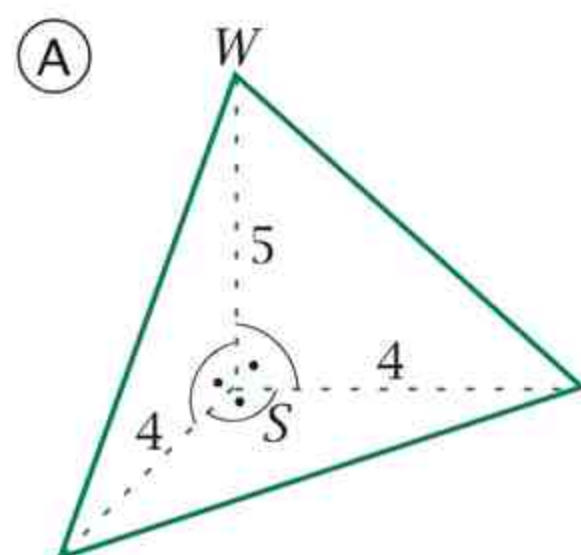


11. Popatrz na rysunki obok. Balon X przytrzymują 4 liny, każda o długości 30 m, zamocowane w wierzchołkach kwadratu. Balon Y przytrzymują 3 takiej samej długości liny, zamocowane w wierzchołkach trójkąta równobocznego. Oblicz, na jakiej wysokości znajduje się balon X, a na jakiej balon Y.

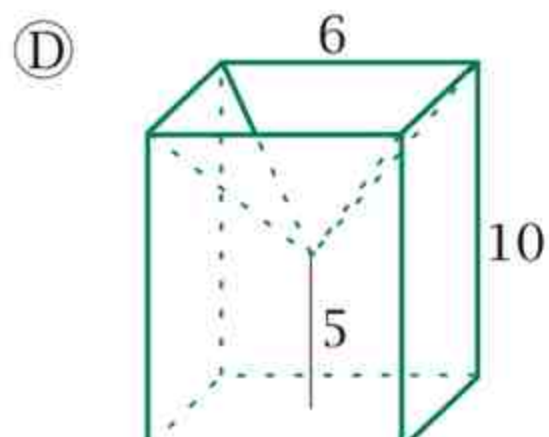
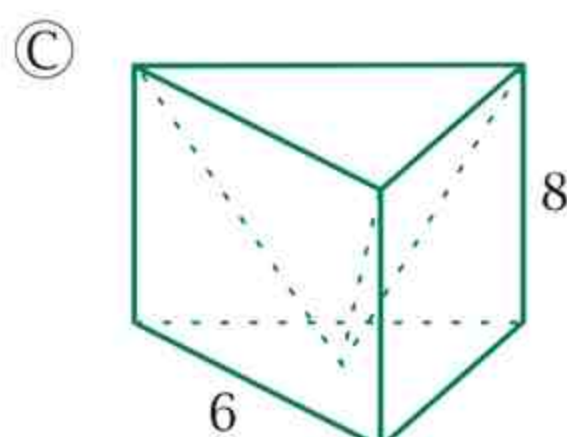
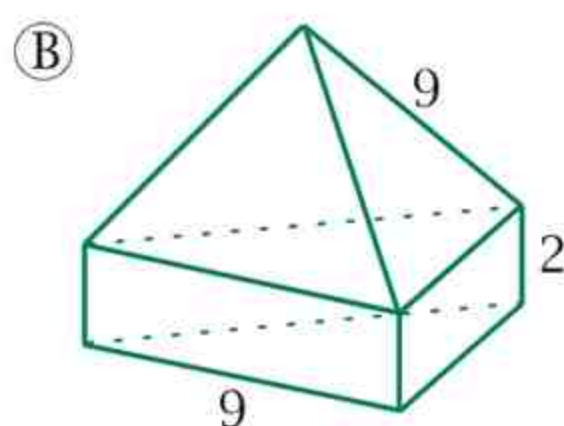
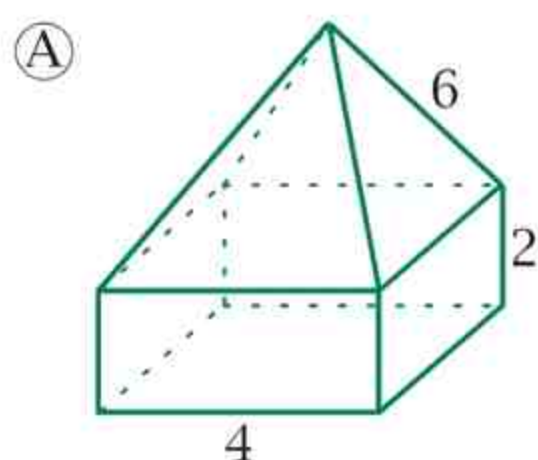
12. Oblicz wysokości ostrosłupów prawidłowych, których siatki przedstawiono na rysunkach.



13. Spodek wysokości ostrosłupa (A) leży w wierzchołku podstawy, spodek wysokości ostrosłupa (B) leży w połowie najdłuższej krawędzi podstawy. Oblicz długości krawędzi bocznych obu ostrosłupów.



- *14. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest 4 razy większe od pola podstawy. Krawędź podstawy ma długość 6. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



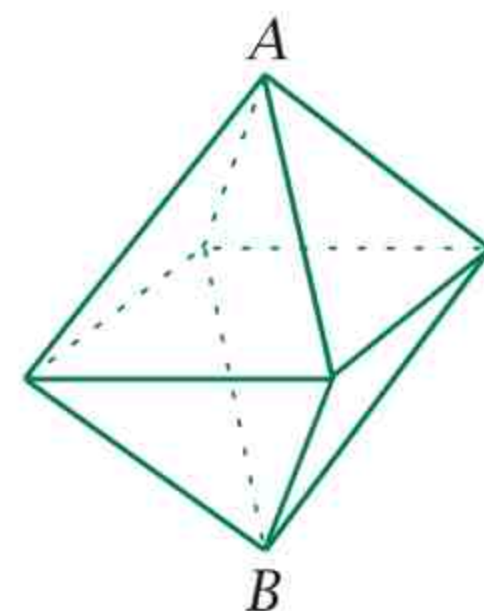
15. a) Bryły Ⓐ i Ⓑ przedstawione na rysunkach otrzymano przez sklejenie graniastosłupów prawidłowych z ostrosłupami prawidłowymi. Oblicz objętości tych brył.

b) Bryły Ⓒ i Ⓓ otrzymano, wycinając ostrosłupy prawidłowe z graniastosłupów prawidłowych. Jakie objętości mają te bryły?

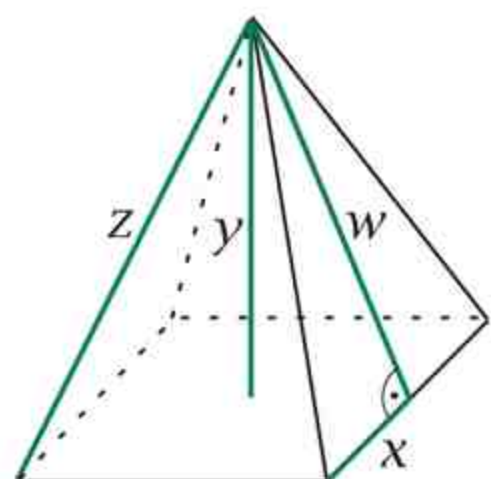
c) Oblicz pole powierzchni całkowitej bryły Ⓓ.

*16. Ośmiościan foremny to bryła, którą otrzymamy, sklejąc podstawami dwa jednakowe ostrosłupy prawidłowe czworokątne, w których wszystkie krawędzie mają jednakowe długości.

W narysowanym obok ośmiościanie foremnym odcinek AB ma długość 10. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego ośmiościanu.



Sprawdź, czy umiesz



1. Rysunek przedstawia ostrosłup prawidłowy czworokątny. Największą długość ma odcinek:

- A. x B. y C. w D. z

2. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma 6 cm, a krawędź boczna ma 10 cm. Wysokość tego ostrosłupa jest równa:

- A. $6\sqrt{3}$ cm B. 8 cm C. 9 cm D. 6 cm

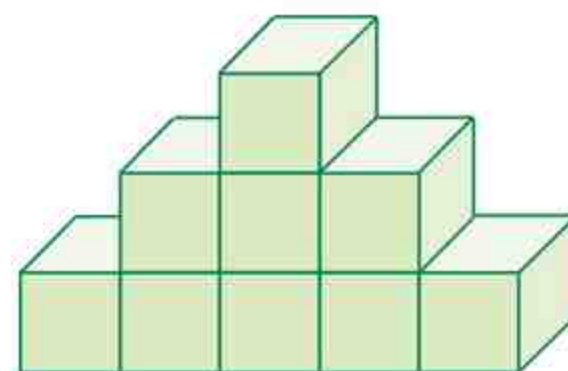
3. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma 6 cm, a jego wysokość równa jest 2 cm. Krawędź boczna tego ostrosłupa ma:

- A. 4 cm B. $\sqrt{7}$ cm C. $6\sqrt{3}$ cm D. 16 cm

Przed klasówką

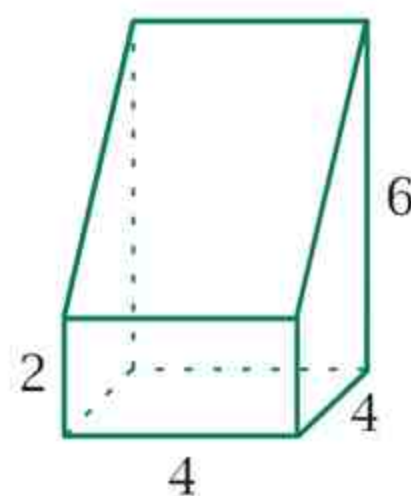
1. Bryłę przedstawioną na rysunku obok zbudowano z 9 jednakowych sześciątów o krawędzi 1 cm. Jakie pole powierzchni całkowitej ma ta bryła?

- A. 54 cm^2 C. 18 cm^2
B. 34 cm^2 D. 9 cm^2



2. Prostopadłościenną kostkę lodu o wymiarach $2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$, wrzucono do pustej szklanki. Jaką objętość będzie miała woda po stopieniu się tej kostki? Można przyjąć, że woda otrzymana z lodu ma objętość o 10% mniejszą niż lód.

- A. 12 ml C. 10,8 ml
B. 13,3 ml D. 1,2 ml



3. Z prostopadłościanu wycięto bryłę przedstawioną na rysunku. Jaką objętość ma ta bryła?

- A. 32 B. 64 C. 96 D. 192

4. Pole powierzchni bocznej graniastosłupa prawidłowego dziesięciokątnego wynosi $40\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Krawędź podstawy ma 2 cm. Jaką długość ma przekątna ściany bocznej tego graniastosłupa?

- A. 4 cm B. $2\sqrt{3} \text{ cm}$ C. $\sqrt{10} \text{ cm}$ D. $2\sqrt{13} \text{ cm}$

5. Na dziedzińcu przed paryskim muzeum Luwr zbudowano za szkła cztery piramidy. Największa z nich służy jako wejście do muzeum. Ma ona wysokość 21,64 m, a jej podstawą jest kwadrat o boku 35,42 m. Jaką objętość, po zaokrągleniu do 1 m^3 , ma taki ostrosłup?

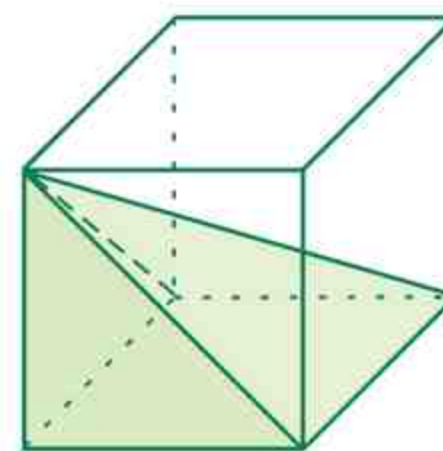
- A. 27149 m^3 C. 2034 m^3
B. 9050 m^3 D. 766 m^3



6. Stosunek pola powierzchni sześcianu o krawędzi 1 do pola powierzchni czworościanu foremnego o krawędzi 1 jest równy:

- A. $\sqrt{3} : 1$ B. $3 : 1$ C. $6 : \sqrt{3}$ D. $6\sqrt{3} : 1$

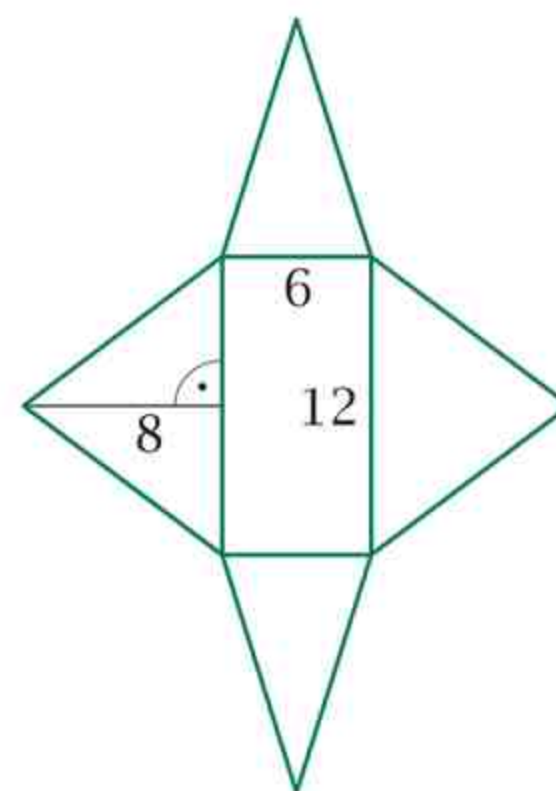
7. Od sześcianu odcięto bryłę taką jak ta, którą zaznaczono na zielono. Czy bryła pozostała po odcięciu ma dwa razy większą objętość niż odcięta część? Wybierz odpowiedź „tak” lub „nie” oraz jej uzasadnienie spośród zdań od A do D.



- Ⓘ Tak, ponieważ... Ⓜ Nie, ponieważ...

- A — ...objętość obu brył zależy od długości krawędzi sześcianu.
 B — ...odcięta bryła to połowa sześcianu.
 C — ...pozostała bryła nie jest ostrosłupem.
 D — ...objętość odciętej bryły jest 3 razy mniejsza od objętości sześcianu.

8. Na rysunku przedstawiono siatkę ostrosłupa, którego podstawa jest prostokątem. Wszystkie ściany boczne są trójkątami równoramiennymi. Oceń prawdziwość podanych zdań.

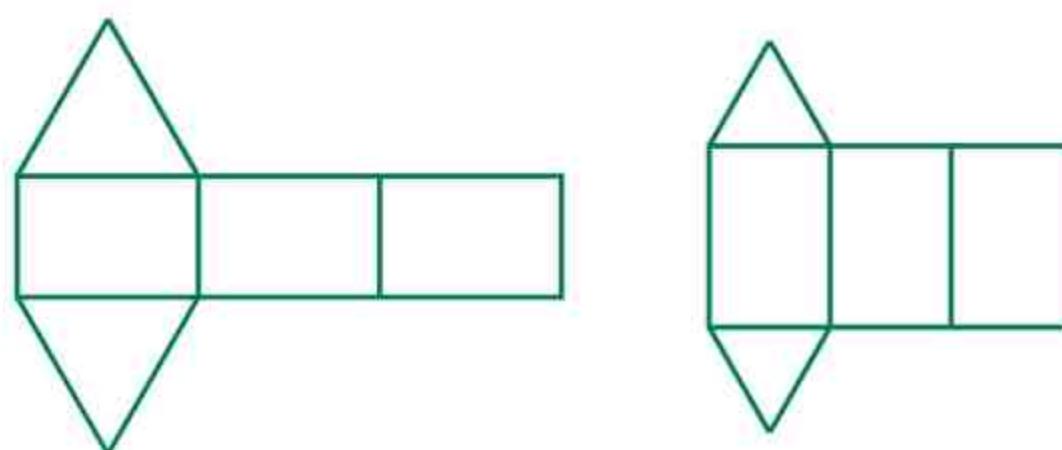


- a) Suma długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa jest równa 76. PRAWDA/FAŁSZ
 b) Suma pól dwóch większych ścian bocznych tego ostrosłupa jest 1,5 raza większa od pola jego podstawy. PRAWDA/FAŁSZ
 c) Wysokości wszystkich ścian bocznych są takie same. PRAWDA/FAŁSZ

9. Podstawami dwóch ostrosłupów są takie same wielokąty, każdy o polu 7 m^2 . Jeden z ostrosłupów jest wyższy od drugiego o 15 m. O ile większą objętość ma ten wyższy ostrosłup?

- A. o 22 m^3 B. o 35 m^3 C. o 85 m^3 D. o 105 m^3

10. Na rysunkach przedstawiono siatki dwóch graniastosłupów. W obu tych bryłach ścianami bocznymi są prostokąty o wymiarach $8 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. Który z tych graniastosłupów ma większą objętość? O ile większą?

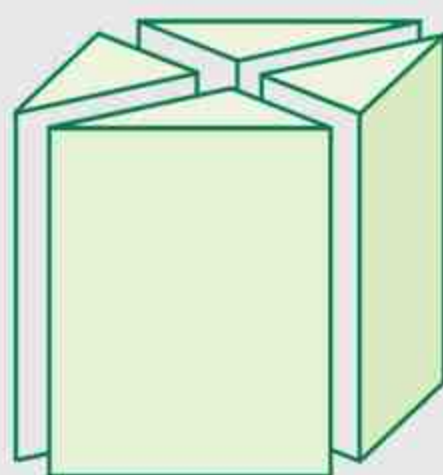


11. W ostrosłupie prawidłowym $ABCDEFGH$ krawędź podstawy ma 4 cm , a wysokość ściany bocznej wynosi $4\sqrt{3} \text{ cm}$. Oblicz pole powierzchni i objętość tego ostrosłupa.

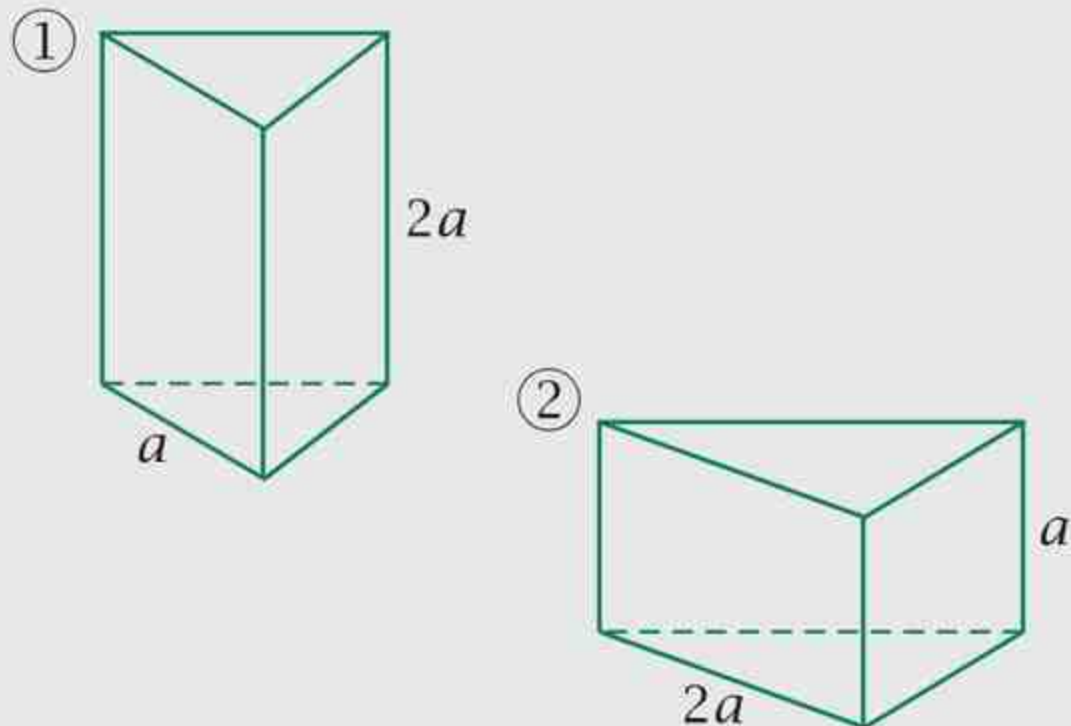
Zadania uzupełniające

Pole powierzchni i objętość graniastosłupa

1. Kłosek w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $10\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 20\text{ cm}$ pomalowano farbą, a następnie rozcięto na 4 części wzdłuż przekątnych podstaw. Oblicz sumę pól powierzchni wszystkich niezamalowanych ścian.



2. Porównaj objętości narysowanych graniastosłupów prawidłowych.



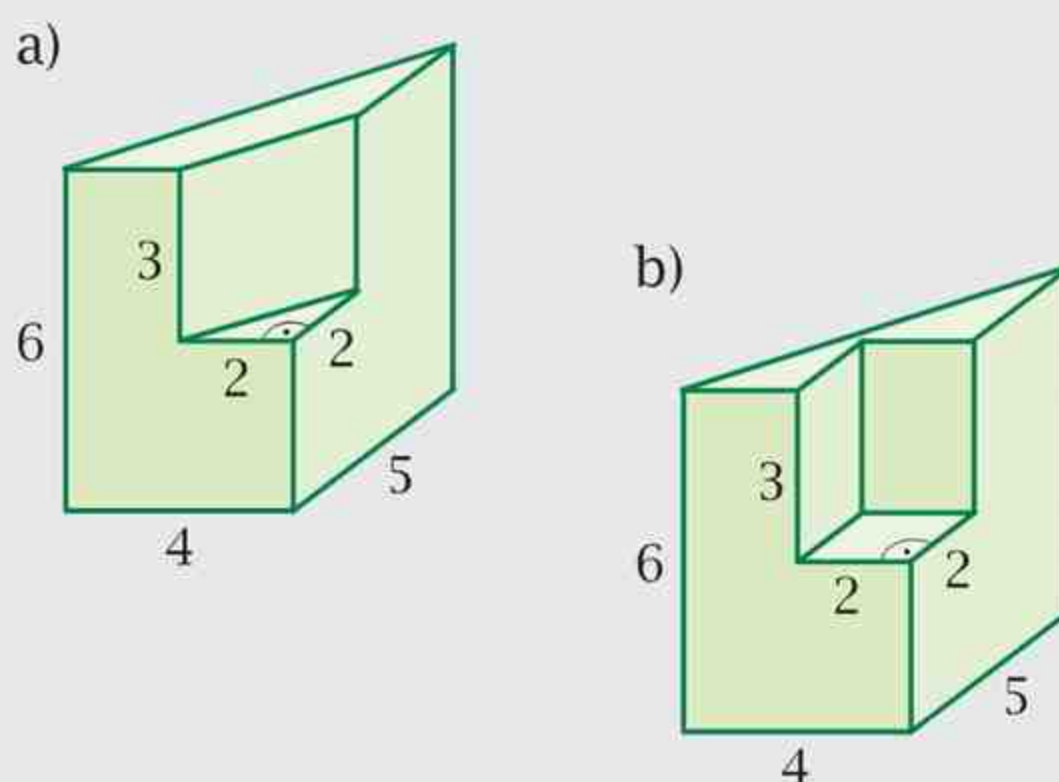
→ 3. Oblicz pole powierzchni i objętość graniastosłupa prawidłowego:

- trójkątnego o krawędzi podstawy 5 cm i wysokości 12 cm ,
- sześciokątnego, w którym krawędź podstawy ma 2 cm , a wysokość jest 6 razy dłuższa.

4. Graniastosłup prawidłowy trójkątny ma objętość 37 cm^3 . Jaką objętość miałby ten graniastosłup po podwojeniu długości każdej krawędzi?

5. Naczynie o pojemności 6 l ma kształt graniastosłupa, którego podstawą jest trójkąt równoboczny. Stosunek wysokości naczynia do długości krawędzi podstawy wynosi $\sqrt{3} : 1$. Jaką wysokość ma naczynie?

→ 6. Bryły przedstawione na poniższych rysunkach powstały przez wycięcie z graniastosłupów prostych trójkątnych innych graniastosłupów prostych. Oblicz pola powierzchni i objętości tych brył.



7. Ściana boczna graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest kwadratem o polu 64 cm^2 . Oblicz objętość graniastosłupa.

8. Ściana boczna graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest prostokątem o wymiarach $6\text{ cm} \times 4\text{ cm}$. Oblicz objętość tego graniastosłupa. Rozpatrz dwa przypadki.

Odcinki w graniastosłupach

9. Czy wszystkie przekątne graniastosłupa prostego mają tę samą długość, gdy podstawa jest:

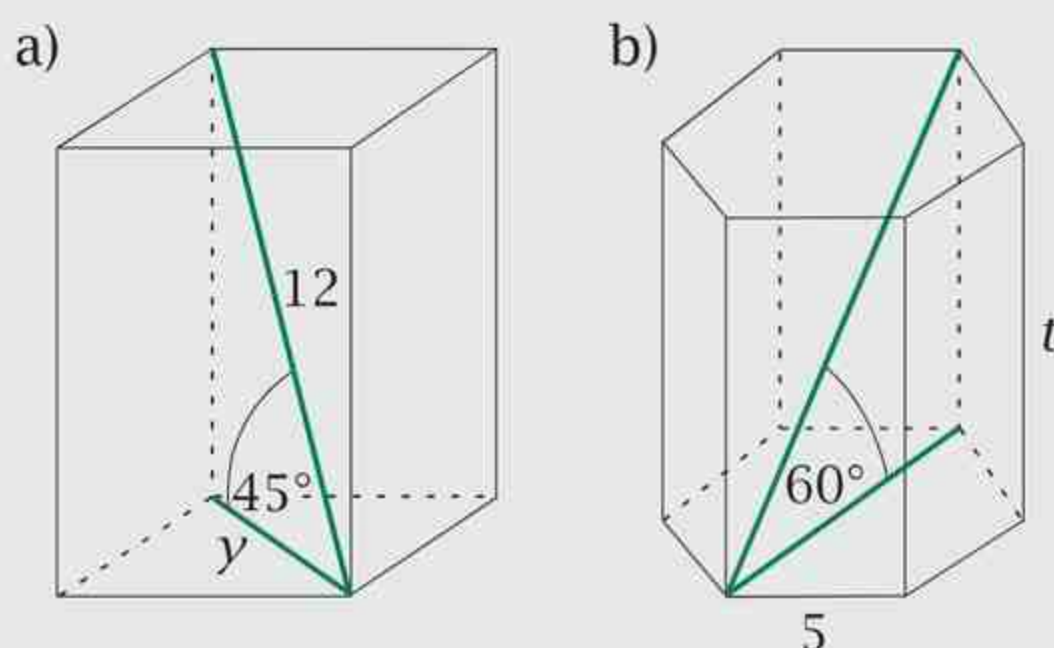
- kwadratem,
- pięciokątem foremnym,
- sześciokątem foremnym,
- ośmiokątem foremnym?

Jeśli nie, to ile różnych długości mogą mieć te przekątne?

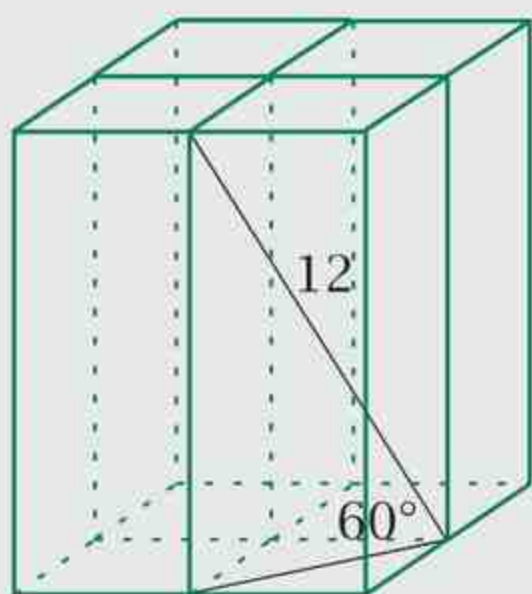
10. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 16 cm, a pole jego podstawy wynosi 64 cm^2 . Oblicz objętość tego graniastosłupa.

11. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o przekątnych długości 4 i 6. Krótsza przekątna tego graniastosłupa ma długość 10. Oblicz długość drugiej przekątnej.

12. Na każdym rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.



13. Cztery jednakowe graniastosłupy prawidłowe czworokątne ustawiono obok siebie (zob. rysunek). Oblicz długość przekątnej utworzonego w ten sposób prostopadłościanu.



Rodzaje ostrosłupów

14. Czy ostrosłup może mieć:

- 30 ścian bocznych i 50 krawędzi,
- 40 krawędzi bocznych i 20 ścian,
- 11 ścian i 20 krawędzi?

15. Odpowiedz, czy prawdą jest, że:

- czworościan foremny jest ostrosłupem prawidłowym trójkątnym,
- w czworościanie foremnym wszystkie krawędzie mają jednakowe długości.

16. Ustal, czy ostrosłup może mieć:

- 21 krawędzi,
- 18 ścian,
- 72 ściany boczne.

17. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi czworościanu foremnego o krawędzi podstawy 5,5 cm.

→ **18.** Suma długości krawędzi ostrosłupa prawidłowego wynosi 150 cm. Oblicz długości tych krawędzi, jeżeli:

- podstawą ostrosłupa jest kwadrat i wszystkie krawędzie są równe,
- podstawą ostrosłupa jest sześciokąt i krawędź boczna jest o 5 cm dłuższa od krawędzi podstawy.

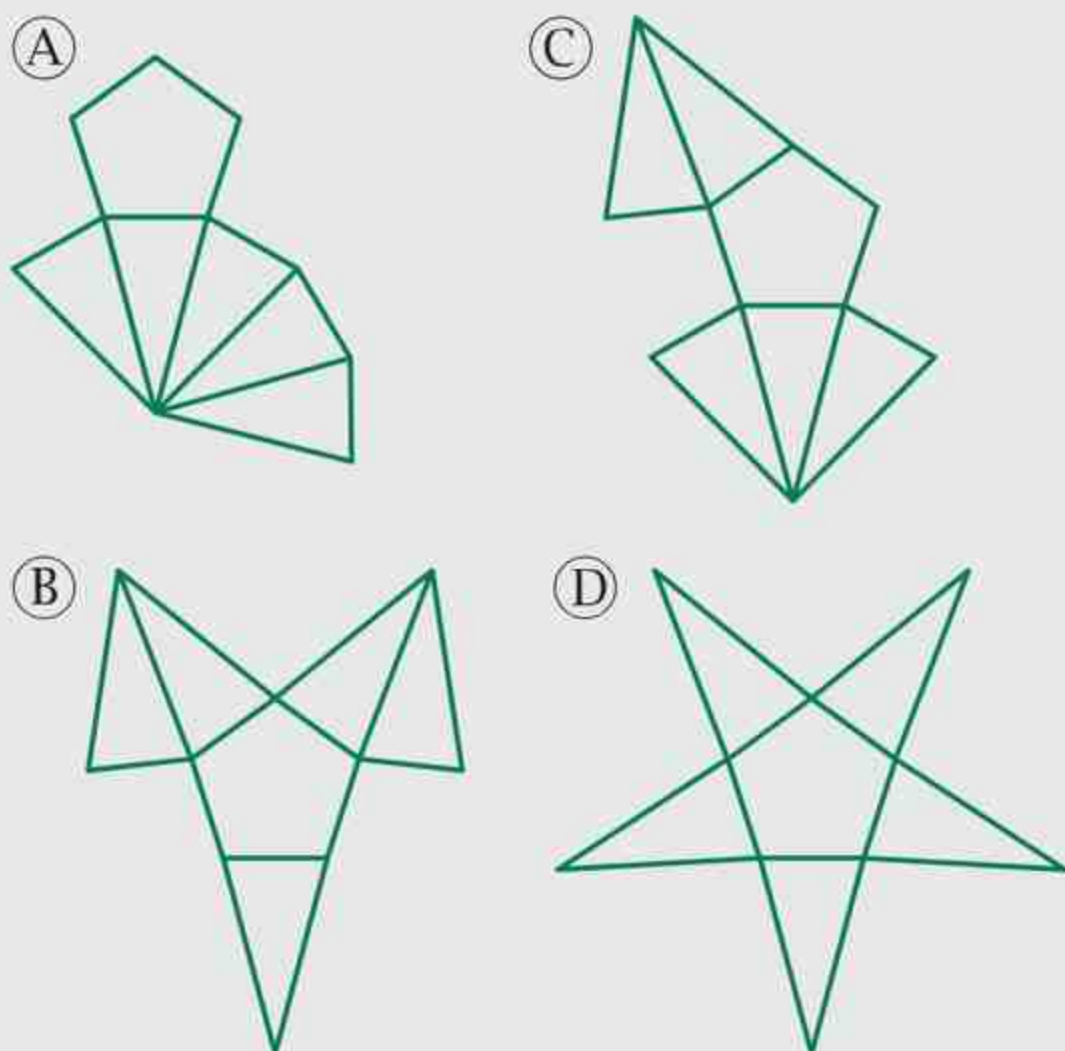
→ **19.** Które zdania są prawdziwe dla ostrosłupów prawidłowych?

- Wszystkie krawędzie mają jednakową długość.
- Ściany boczne są przystające.
- Spodek wysokości leży w jednakowych odległościach od wierzchołków podstawy.
- Wysokość jest krótsza od krawędzi bocznej.
- Krawędzie boczne mają jednakową długość.

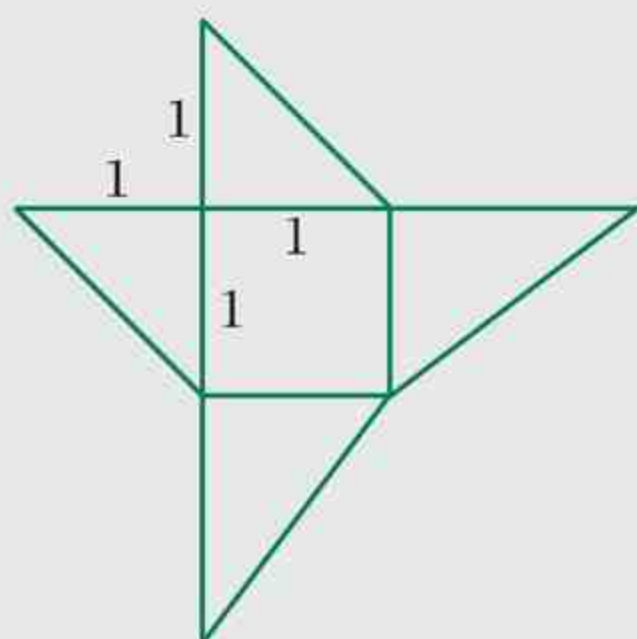
Siatki ostrosłupów. Pole powierzchni

→ **20.** Narysuj model i siatkę ostrosłupa, którego podstawą jest prostokąt o wymiarach $6 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$, a krawędź boczna ma 15 cm. Oblicz pole powierzchni tego ostrosłupa.

21. Który z poniższych rysunków nie przedstawia siatki ostrosłupa?



22. Poniższy rysunek przedstawia siatkę ostrosłupa. Oblicz pole powierzchni tego ostrosłupa.



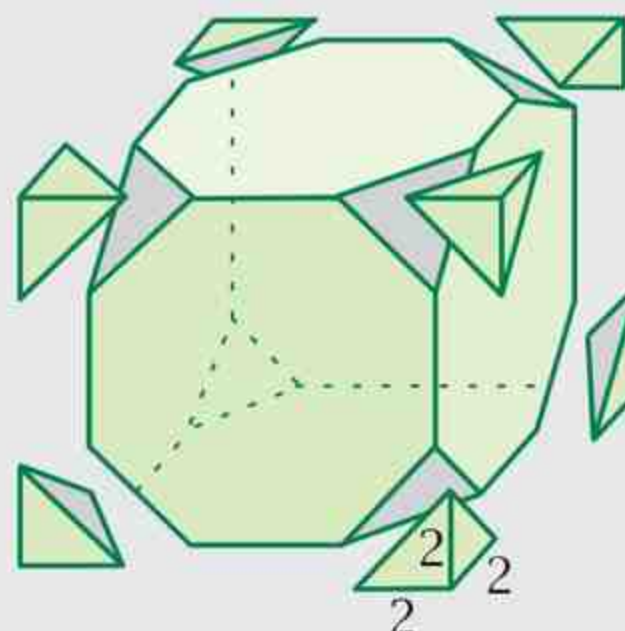
23. Narysuj powyższą siatkę ostrosłupa w skali 10:1. Sklej z niej ostrosłup (pamiętaj o zakładkach). Z trzech takich modeli możesz złożyć sześcian.

→ **24.** Oblicz pole powierzchni ostrosłupa:

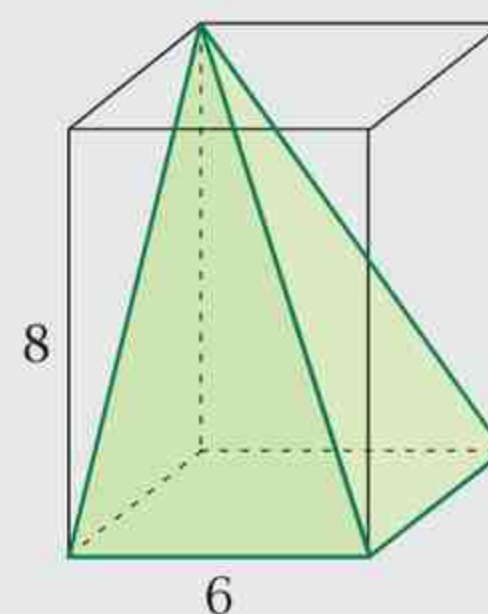
- prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma 10 cm, a krawędź boczna ma 12 cm,
- prawidłowego sześciokątnego, którego krawędź podstawy ma 14 cm, a krawędź boczna ma 25 cm.

○ **25.** Czy pole powierzchni bocznej ostrosłupa może być równe polu podstawy?

26. Z sześcianu o krawędzi długości 6 odcięto naroża w sposób przedstawiony na rysunku. Jakie pole powierzchni ma otrzymana bryła? Jakie pole powierzchni ma każdy z odciętych ostrosłupów?



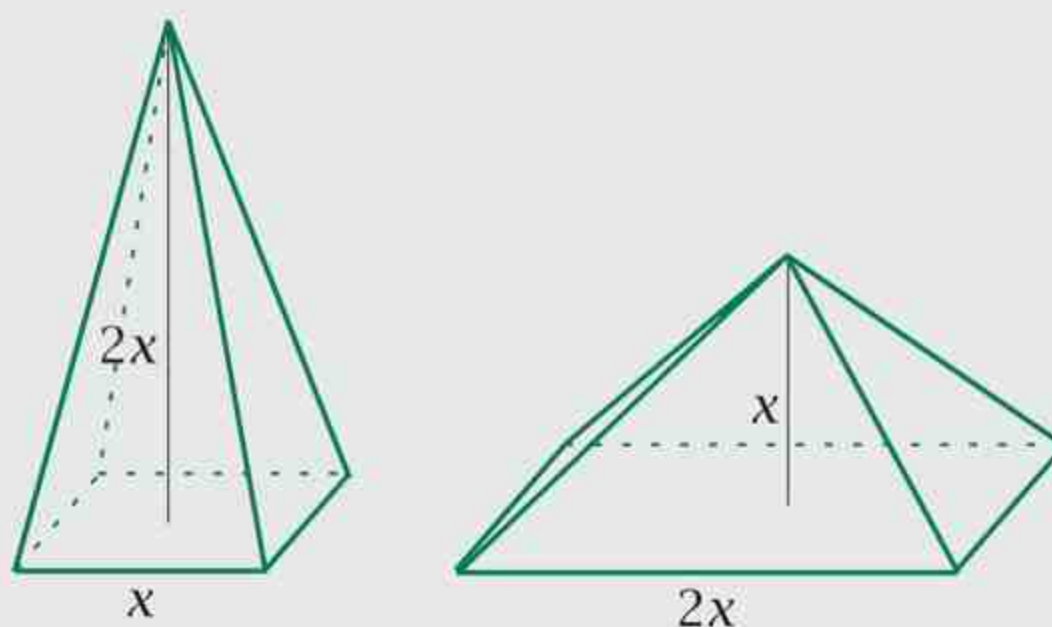
27. Z graniastosłupa prawidłowego o wymiarach podanych na poniższym rysunku wycięto ostrosłup o takiej samej podstawie i wysokości.



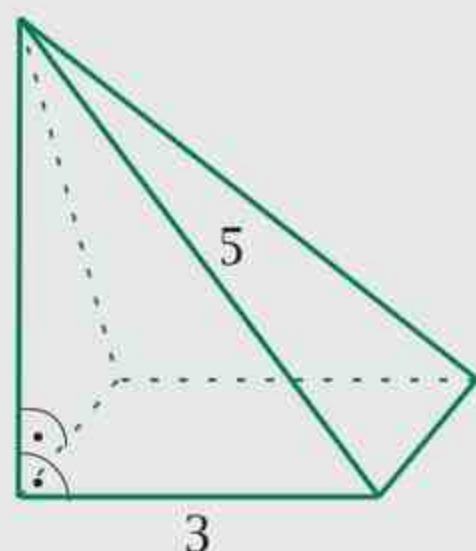
- Oblicz długości krawędzi bocznych ostrosłupa.
- Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

Objętość ostrosłupa

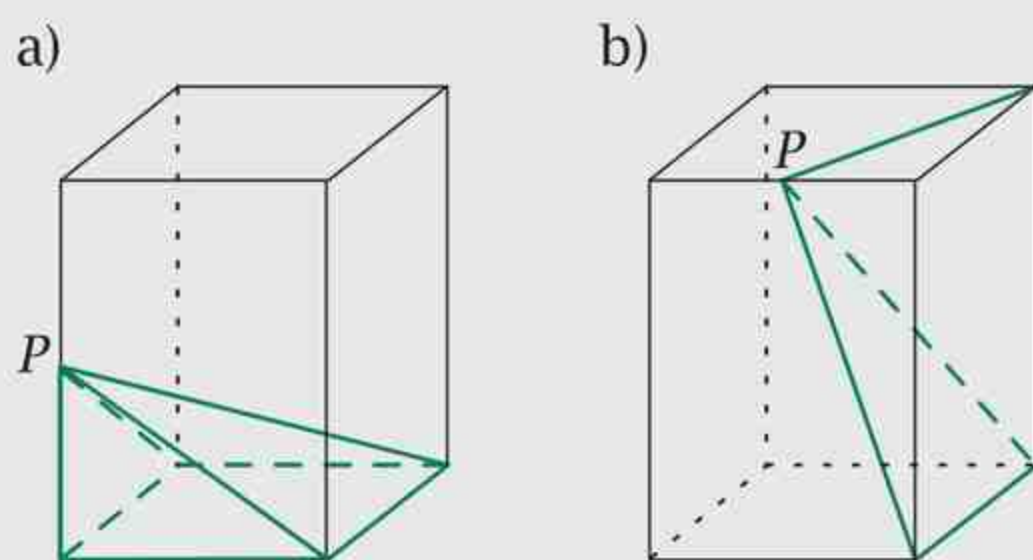
28. Rysunek przedstawia ostrosłupy prawidłowe czworokątne. Który z tych ostrosłupów ma większą objętość?



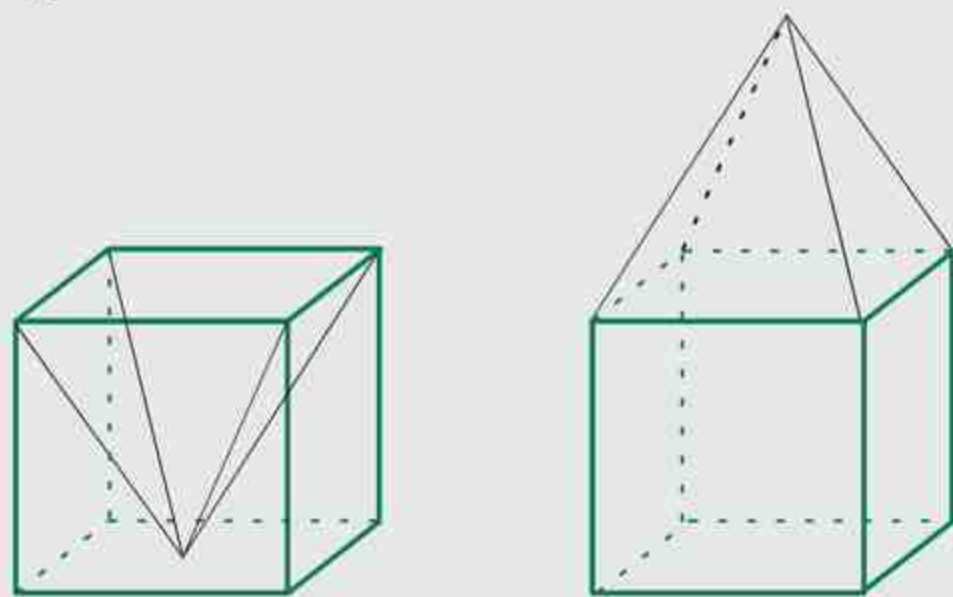
29. Podstawą ostrosłupa na poniższym rysunku jest kwadrat, a jedna z krawędzi bocznych jest prostopadła do podstawy. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



30. Z prostopadłościanu wycięto ostrosłup, tak jak na rysunku poniżej. Punkt P jest środkiem krawędzi prostopadłościanu. Ile razy mniejsza jest objętość ostrosłupa od objętości prostopadłościanu?



31. Bryły, które narysowano poniżej, powstały z dwóch jednakowych sześciątów o krawędzi 1 dm w ten sposób, że z jednego sześciąnu wycięto ostrosłup o wysokości 1 dm i dokleiono do drugiego sześciąnu.

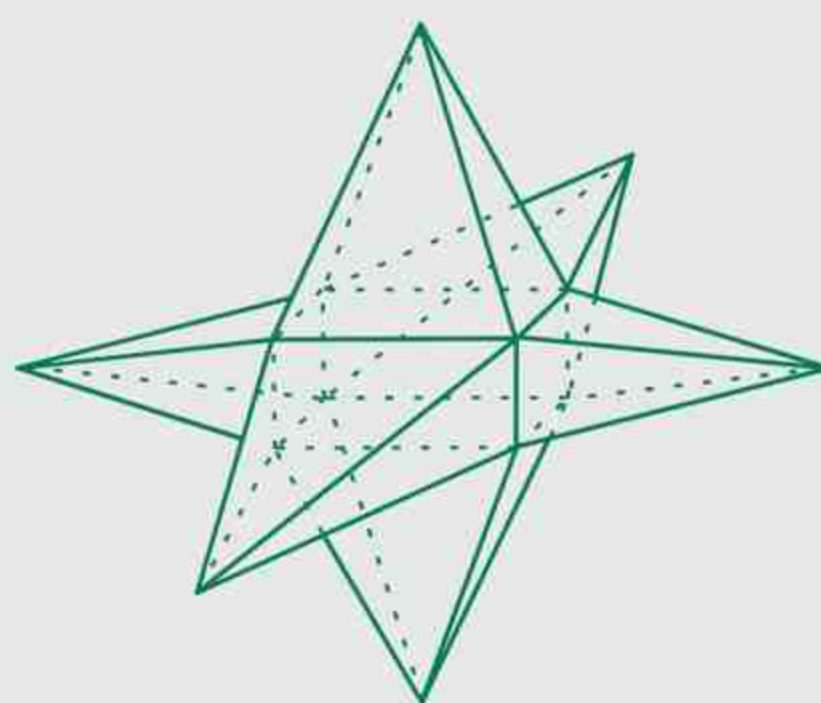


- Porównaj pola powierzchni tych brył.
- Oblicz, ile razy objętość drugiej bryły jest większa od objętości pierwszej bryły.

32. Podstawą ostrosłupa o objętości równej 60 i wysokości 10 jest romb. Jedna z przekątnych tego rombu jest dwa razy dłuższa od drugiej przekątnej. Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa.

33. Do każdej ściany prostopadłościanu o wymiarach $3\text{ cm} \times 6\text{ cm} \times 4\text{ cm}$ doklejono ostrosłup czworokątny o wysokości 8 cm (zob. rysunek poniżej).

- Jaką objętość ma otrzymana „rogata” bryła?
- Jakie pole powierzchni ma ta bryła?



Odcinki w ostrosłupach

34. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 6, a krawędź boczna jest równa 5. Oblicz:

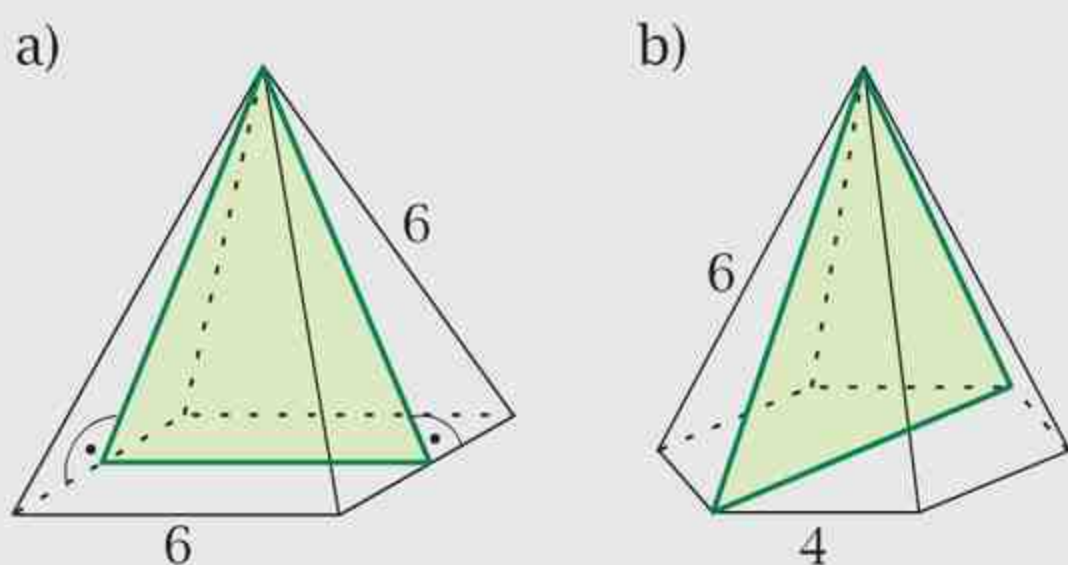
- długość przekątnej podstawy,
- wysokość ściany bocznej,
- wysokość ostrosłupa.

35. Jakie pole powierzchni ma ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 10 i wysokości 12?

36. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o objętości $5\frac{1}{3}\text{ cm}^3$ wysokość jest 2 razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz pole powierzchni tego ostrosłupa.

37. Oblicz wysokość i objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, w którym krawędź podstawy ma 4 cm, a krawędź boczna ma 10 cm.

38. Oblicz pola zaznaczonych trójkątów w ostrosłupach prawidłowych.

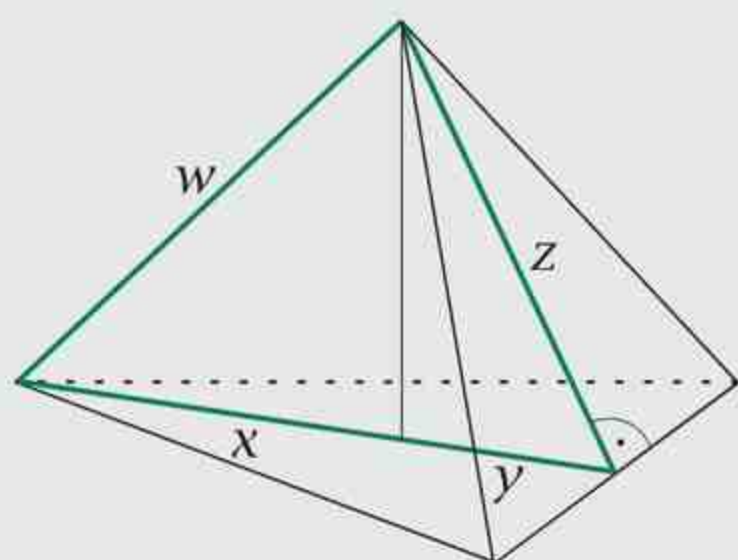


39. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość 10, a krawędź boczna jest równa 13. Oblicz:

- a) wysokość ściany bocznej,
- b) wysokość ostrosłupa.

40. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy 8 cm i krawędzi bocznej 12 cm.

41. Na rysunku czworościanu foremnego litery oznaczają długości odcinków. Uporządkuj te długości od największej do najmniejszej.

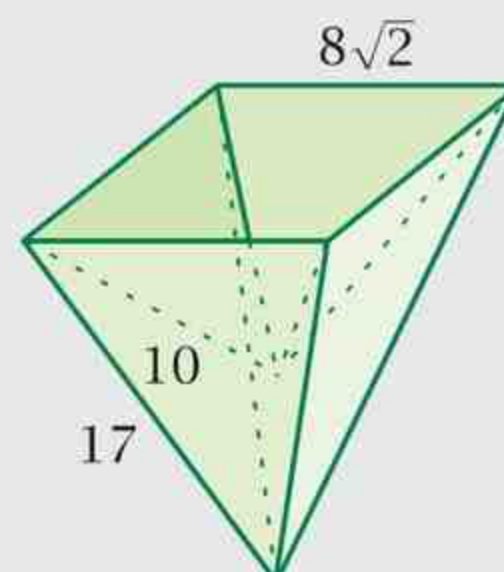


- **42.** Uzasadnij, że w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna jest dłuższa niż połowa przekątnej podstawy.

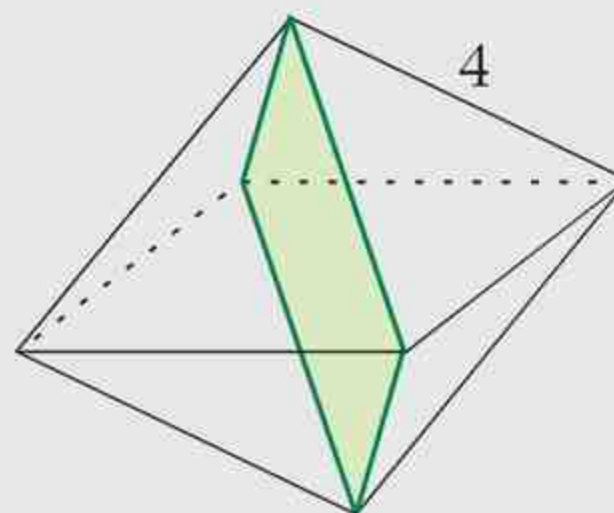
43. Wszystkie krawędzie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego mają jednakową długość. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa wynosi $36\sqrt{3}$. Oblicz wysokość ostrosłupa.

- ***44.** Czworościan foremny ma objętość równą $2\sqrt{2}$. Jaką długość ma krawędź tego czworościanu?

45. Z ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wycięto mniejszy ostrosłup prawidłowy o tej samej podstawie w sposób przedstawiony na rysunku. Oblicz objętość otrzymanej bryły.



- **46.** Ośmiościan foremny otrzymamy, składając podstawami dwa jednakowe ostrosłupy prawidłowe czworokątne, w których wszystkie krawędzie mają jednakowe długości. Jakie pole ma zacieniona figura przedstawiona na rysunku?



47. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma 20 cm, a krawędź boczna 30 cm. Oblicz pole trójkąta zawierającego wierzchołek ostrosłupa i przekątną podstawy.

VI SYMETRIE

- 1** Symetria względem prostej
- 2** Oś symetrii figury
- 3** Symetralna odcinka
- 4** Dwusieczna kąta
- 5** Symetria względem punktu
- 6** Środek symetrii figury

➤ Przed klasówką, s. 228

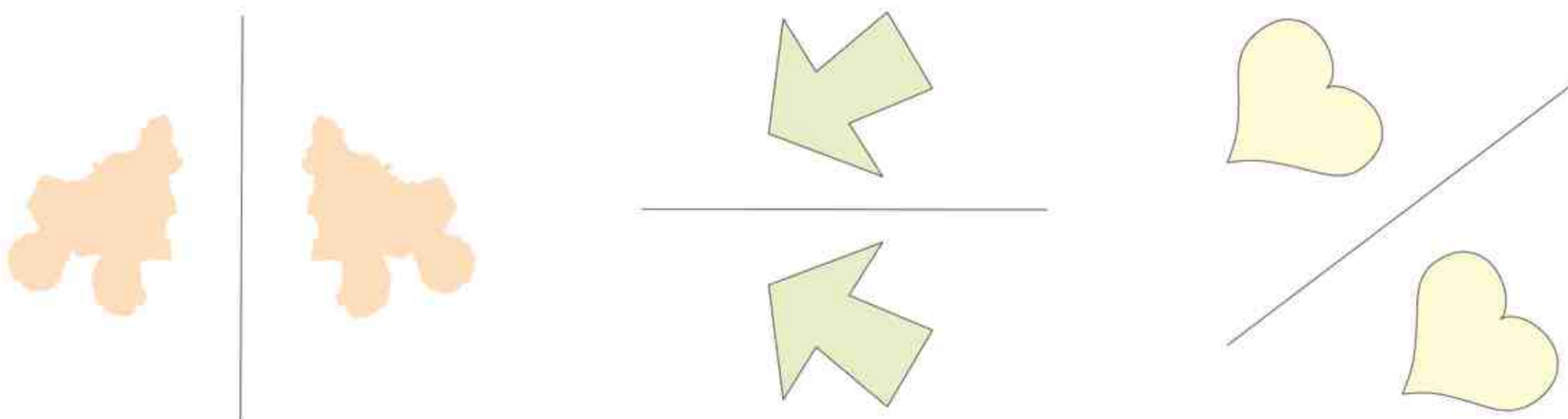
➤ Zadania uzupełniające, s. 230

1 Symetria względem prostej

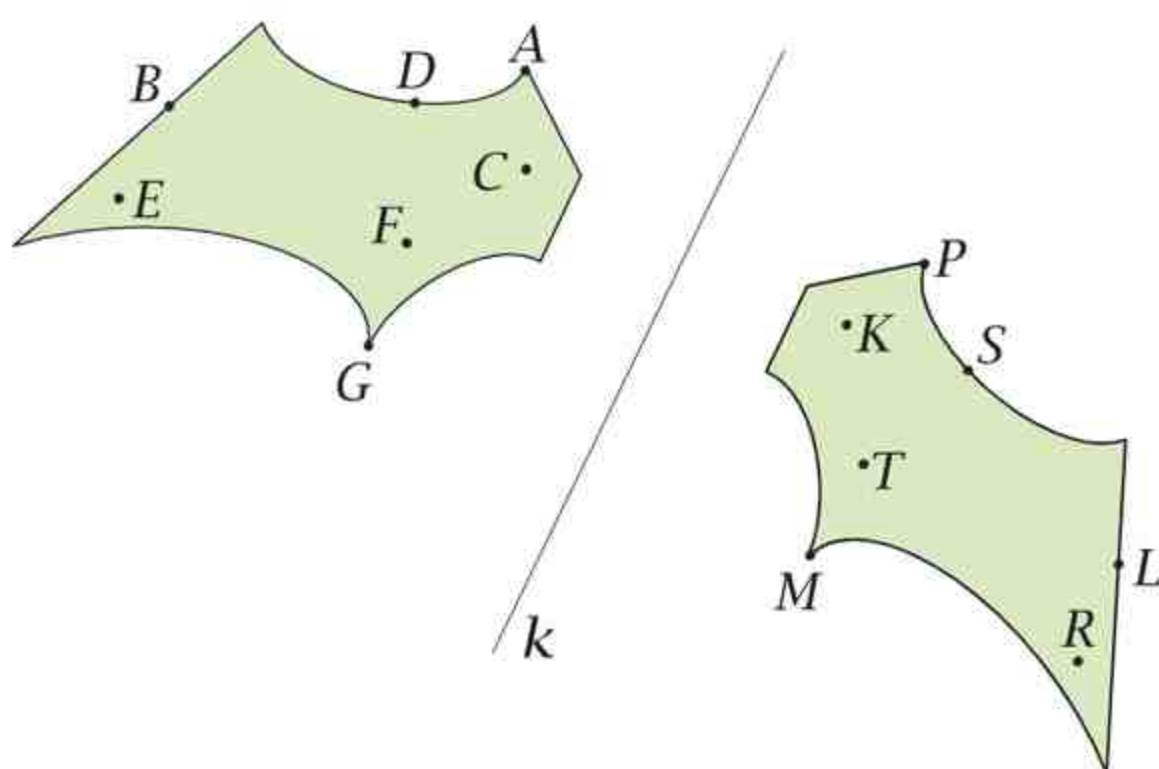


Przyjrzyj się ilustracji. Czy wiesz, jaki wyraz znajduje się na karetkce pogotowia? Czy się domyślasz, dlaczego to słowo jest napisane w taki sposób, jakby zostało odbite w lustrze?

Gdy na kartce zrobimy niewielki kleks, złożymy tę kartkę na pół i przyciśniemy, to po rozłożeniu kartki zobaczymy dwie identyczne plamy. Kleks odbije się po drugiej stronie linii zgięcia. Podobnie położone są pary figur na poniższych rysunkach.



Na każdym z tych rysunków jedna z figur jest odbiciem drugiej względem narysowanej prostej. O takich figurach mówimy, że są **symetryczne względem prostej**.

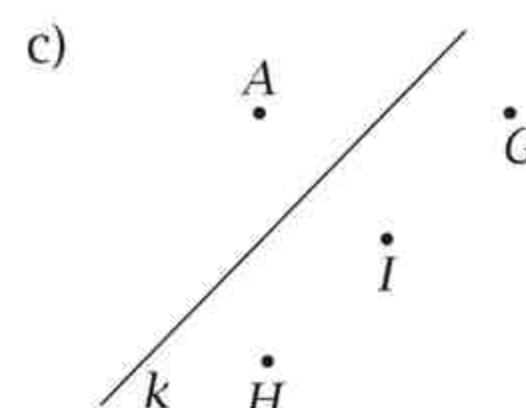
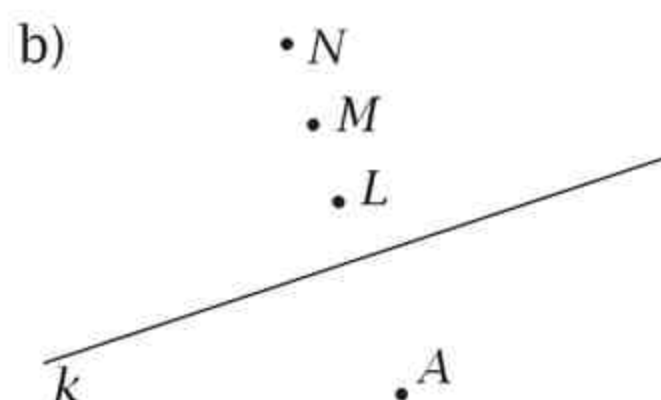
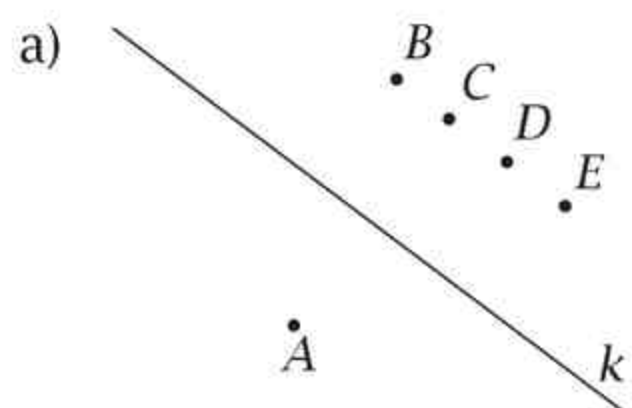


Rysunek obok przedstawia dwie figury symetryczne względem prostej.

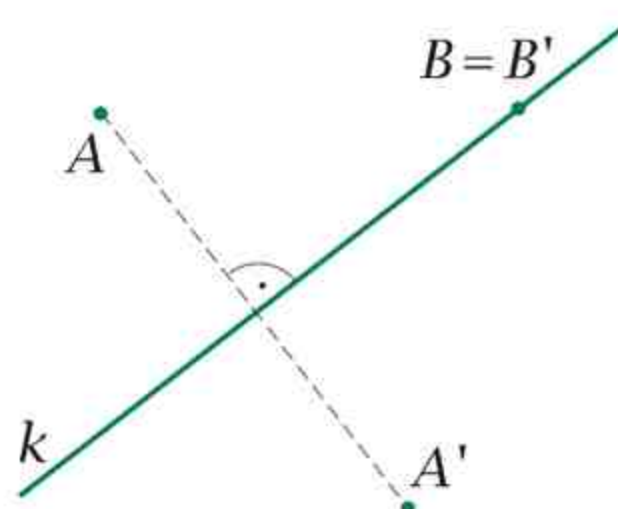
Gdybyśmy złożyli kartkę wzdłuż prostej k , to punkt A nałożyłby się na punkt P . Punkty A i P są więc symetryczne względem prostej k .

ĆWICZENIE A. Wskaż kilka innych par punktów symetrycznych względem prostej k .

ĆWICZENIE B. Na każdym z poniższych rysunków tylko jeden z punktów jest symetryczny do punktu A względem prostej k . Wskaż ten punkt.



ĆWICZENIE C. Złóż kartkę na pół, a następnie przekłuj w jednym miejscu. Rozłóż kartkę. Jak względem linii zgięcia kartki położone są ślady po przekłuciu?



Dwa punkty nieleżące na prostej k są symetryczne względem prostej k , jeżeli spełniają następujące warunki:

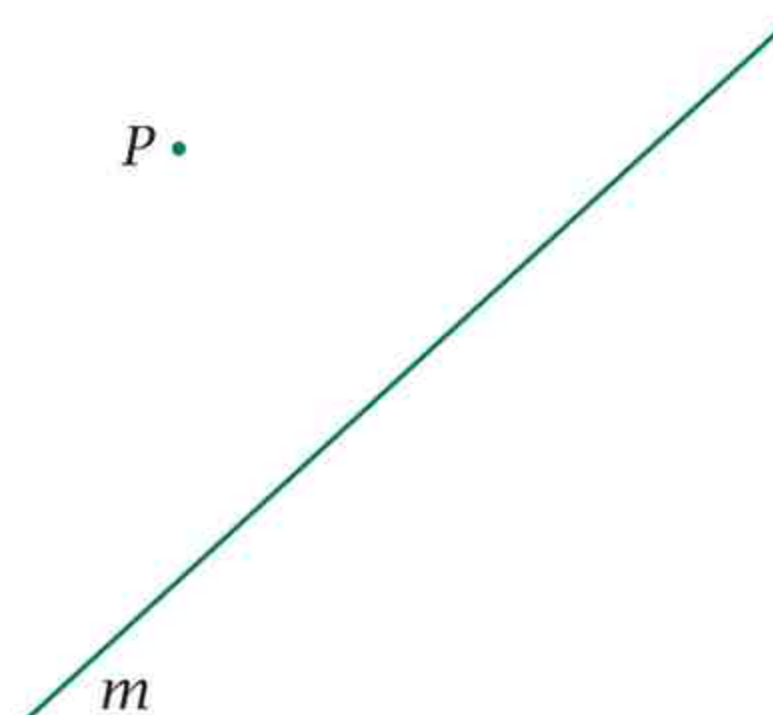
- leżą na prostej prostopadłej do prostej k ,
- leżą po przeciwnych stronach prostej k ,
- leżą w równych odległościach od prostej k .

Przyjmujemy, że jeżeli punkt leży na prostej k , to jest symetryczny sam do siebie względem tej prostej.

Założmy, że punkt P nie leży na prostej m . Zastanówmy się, jak znaleźć punkt P' symetryczny do punktu P względem prostej m .

Punkt P' nietrudno znaleźć za pomocą ekierki.

ĆWICZENIE D. Narysuj prostą m i zaznacz punkt P nieleżący na prostej m . Za pomocą ekierki narysuj prostą przechodzącą przez punkt P i prostopadłą do prostej m . Znajdź na tej prostej szukany punkt P' (możesz posłużyć się podziałką lub cyrklem).



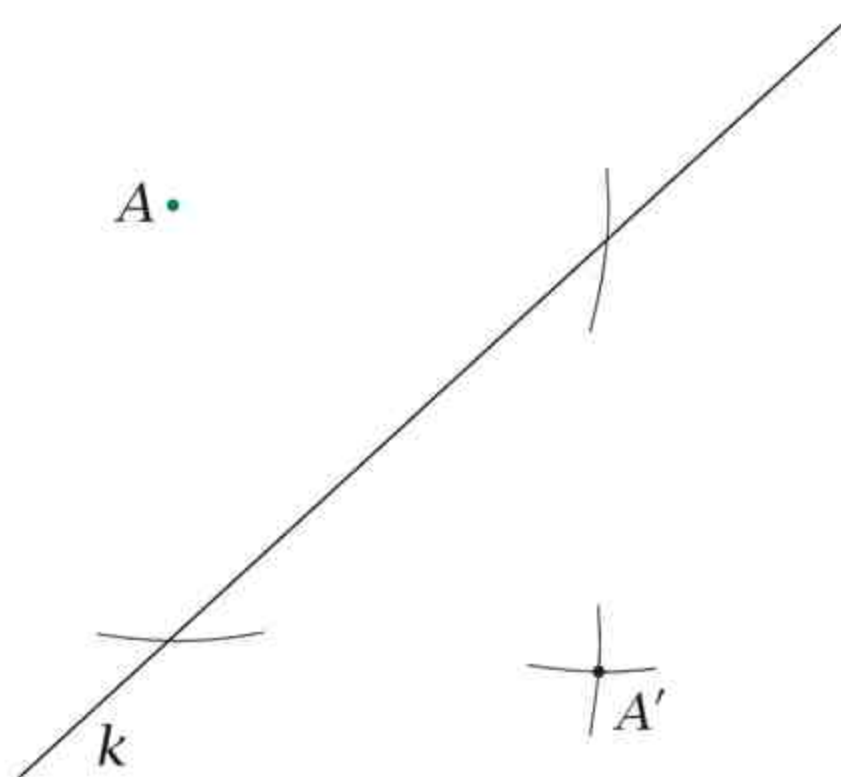
ĆWICZENIE E. Narysuj prostą m i zaznacz punkt P nieleżący na tej prostej. Znajdź za pomocą ekierki punkt P' — symetryczny do punktu P względem prostej m . Narysuj kilka okręgów, które przechodzą przez punkt P i których środki leżą na prostej m . Co zauważyłeś?

Z ćwiczenia E wynika, że szukany punkt P' można znaleźć za pomocą samego cyrkla. Wystarczy narysować dwa dowolne okręgi o środkach na prostej m , przechodzące przez punkt P .

Najwygodniejszy sposób znalezienia punktu symetrycznego do danego punktu względem prostej przedstawia poniższy przykład.

Przykład

Znajdź za pomocą cyrkla punkt A' symetryczny do punktu A względem prostej k .



Z punktu A kreślimy łuk przecinający prostą k w dwóch punktach.

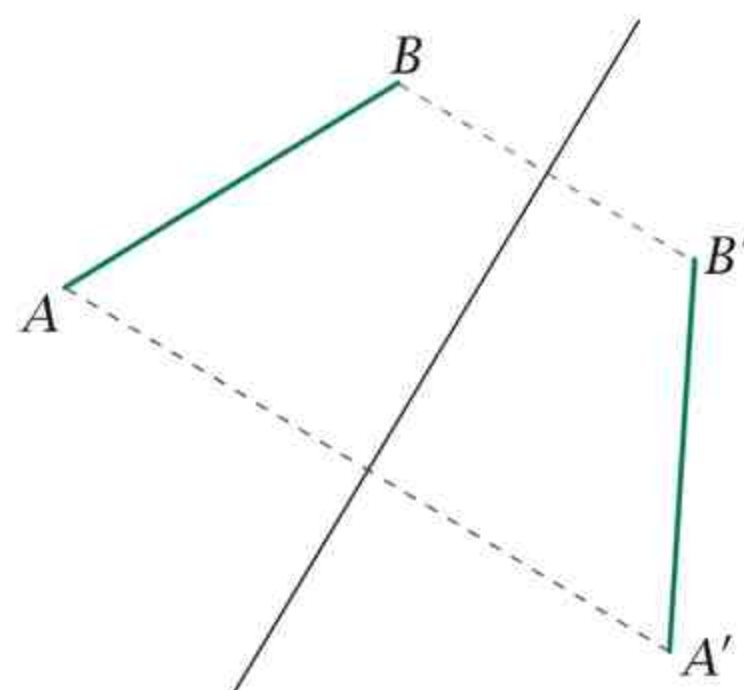
Z obu otrzymanych punktów, nie zmieniając promienia, kreślimy po drugiej stronie prostej dwa przecinające się łuki.

Punkt przecięcia tych łuków (punkt A') jest punktem symetrycznym do punktu A .

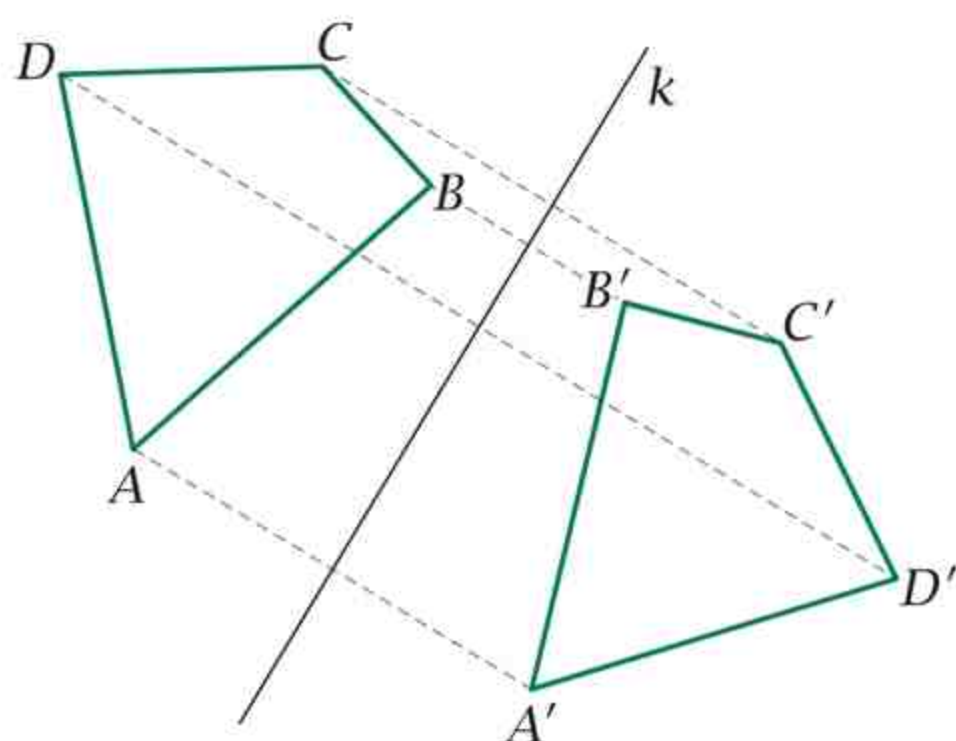
Zwróć uwagę, że w powyższej konstrukcji punkty A , A' oraz zaznaczone punkty na prostej k to wierzchołki rombu. Prosta AA' i prosta k zawierają przekątne tego rombu.

ĆWICZENIE F. Narysuj dowolny odcinek AB i prostą k nieprzecinającą tego odcinka. Zaznacz na odcinku AB kilka punktów i znajdź punkty do nich symetryczne względem prostej k . Narysuj odcinek symetryczny do odcinka AB względem prostej k .

Aby narysować odcinek symetryczny względem prostej do odcinka AB , wystarczy znaleźć jego końce, czyli punkty symetryczne do punktów A i B , oraz je połączyć.



Aby narysować wielokąt symetryczny względem prostej do danego wielokąta, wystarczy znaleźć jego wierzchołki, czyli punkty symetryczne do wierzchołków danego wielokąta, a następnie narysować odpowiednie boki.



Na rysunku obok czworokąt $A'B'C'D'$ jest symetryczny względem prostej k do czworokąta $ABCD$.

Zauważ, że figury symetryczne względem prostej są przystające, ponieważ jedną można nałożyć na drugą. Odcinki symetryczne względem prostej mają równe długości, a symetryczne kąty mają jednako-
we miary.

Zadania

1. Poniżej narysowane są odbicia lustrzane kilku wyrazów. W niektórych z nich są błędy. Wskaż w których. Możesz pomóc sobie lusterkiem.

MEZASZ
WOMV

NOZES
KAKOL

KSASZT
SNVK



Ciekawostka

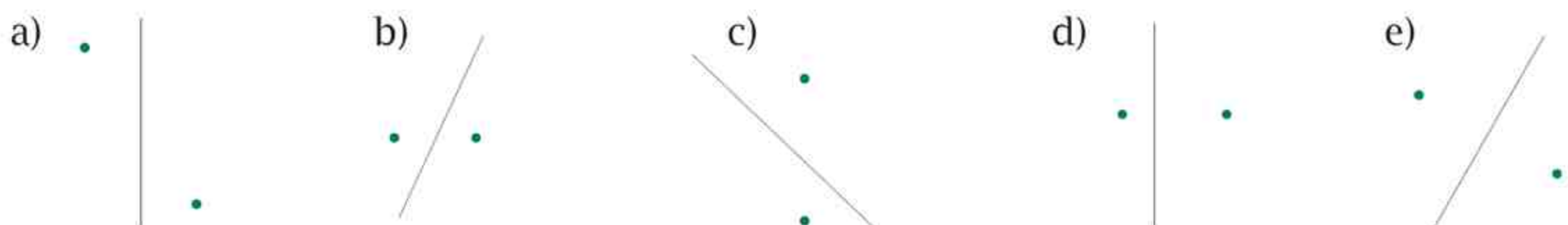
Mało znany jest fakt, że Leonardo da Vinci wiele traktatów z zakresu medycyny i teorii sztuki zapisywał w odbiciu lustrzanym.

2. Dwie małe litery alfabetu są lustrzanym odbiciem litery **b**. Które?

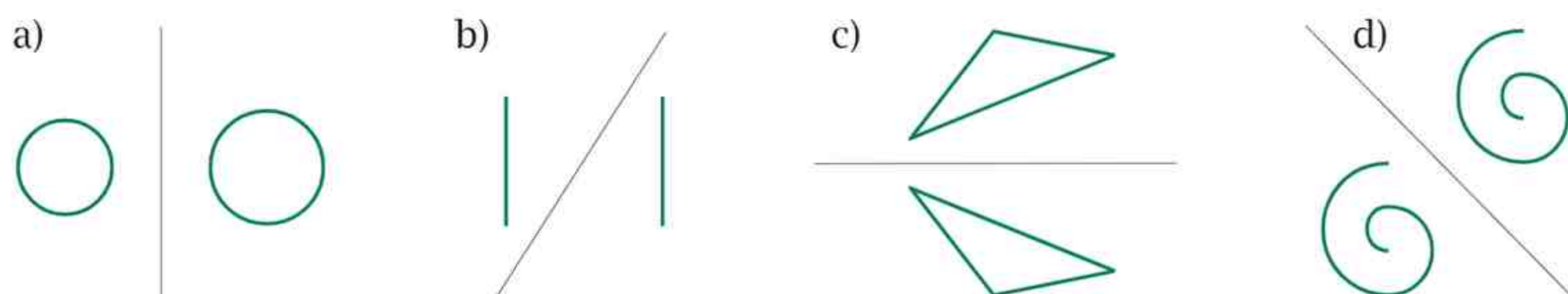
3. Rozszyfruj poniższy tekst. W razie trudności pomóż sobie lusterkiem.

ksztalcenie, powieć przecie,
kto jest najbliższy w świecie.

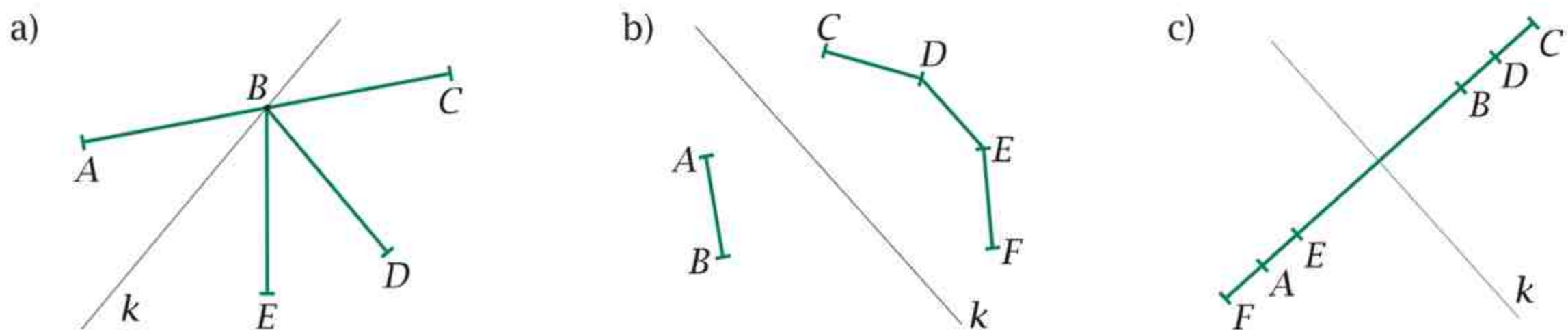
4. Czy dane punkty są symetryczne względem narysowanej prostej?



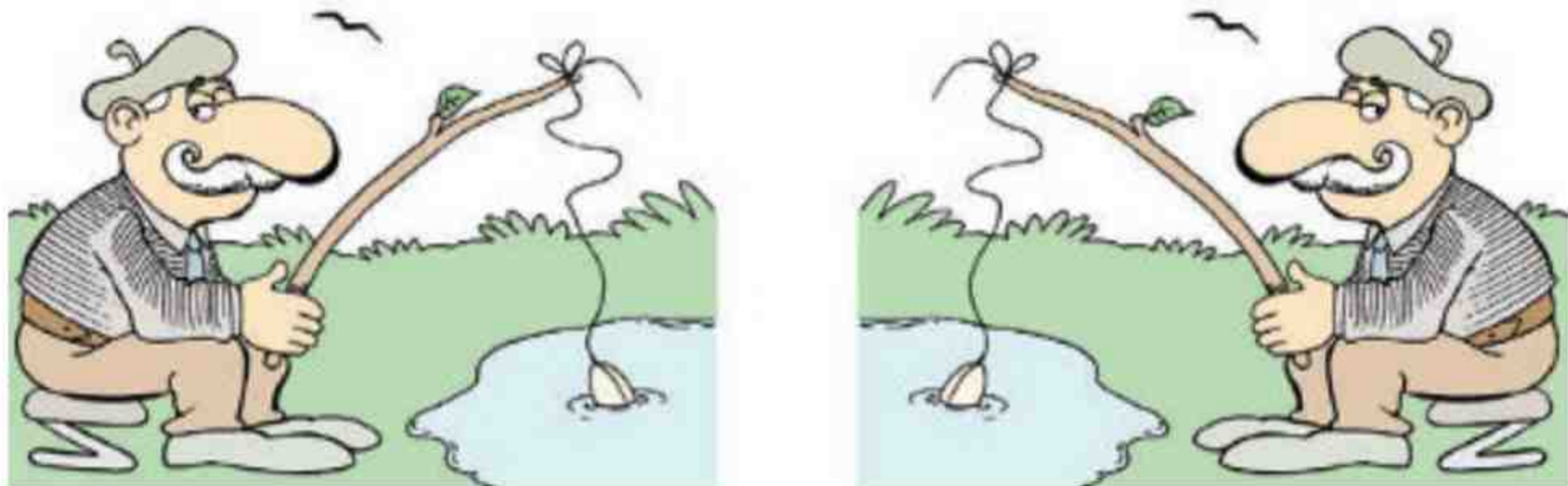
5. Czy dane dwie figury są położone symetrycznie względem narysowanej prostej?



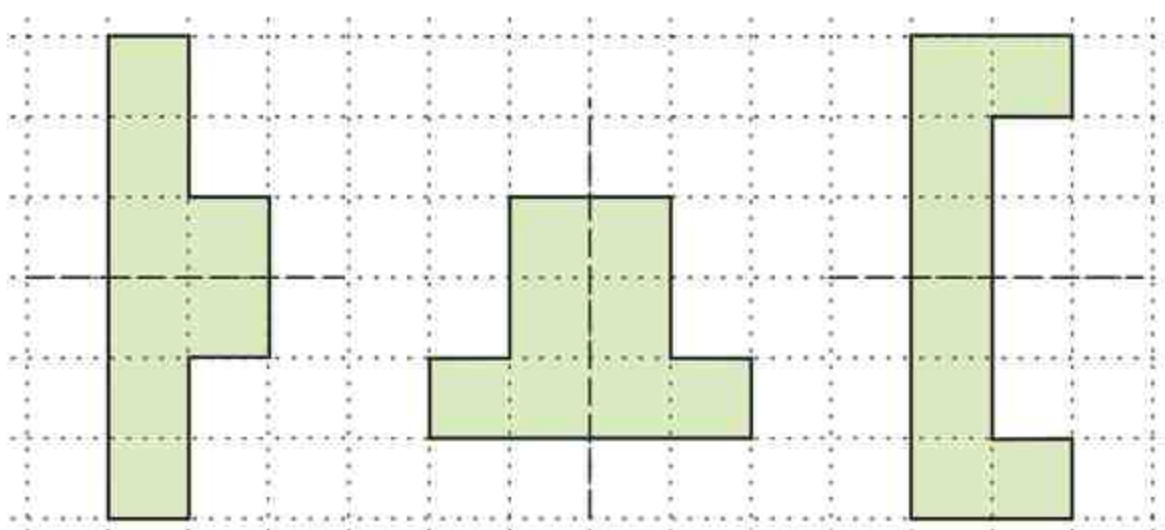
6. Wskaż odcinek symetryczny do odcinka AB względem prostej k .



7. Poniższe rysunki są prawie symetryczne względem pewnej prostej. Symetrię psuje pięć szczegółów. Znajdź te szczegóły.



8. Zaznacz cztery różne punkty i narysuj prostą przechodzącą przez dokładnie jeden z nich. Znajdź punkty symetryczne do zaznaczonych punktów względem narysowanej prostej.



9. Dorysowując do litery L jej odbicie symetryczne względem pewnej prostej, można otrzymać każdą z figur przedstawionych na rysunku obok.

Narysuj sześć innych figur, które można otrzymać w ten sposób.

10. Narysuj dowolny trójkąt i znajdź figurę do niego symetryczną względem prostej:

- nieprzecinającej trójkąta,
- zawierającej jeden z boków trójkąta,
- przechodzącej przez jeden z wierzchołków,
- przecinającej dwa boki trójkąta.

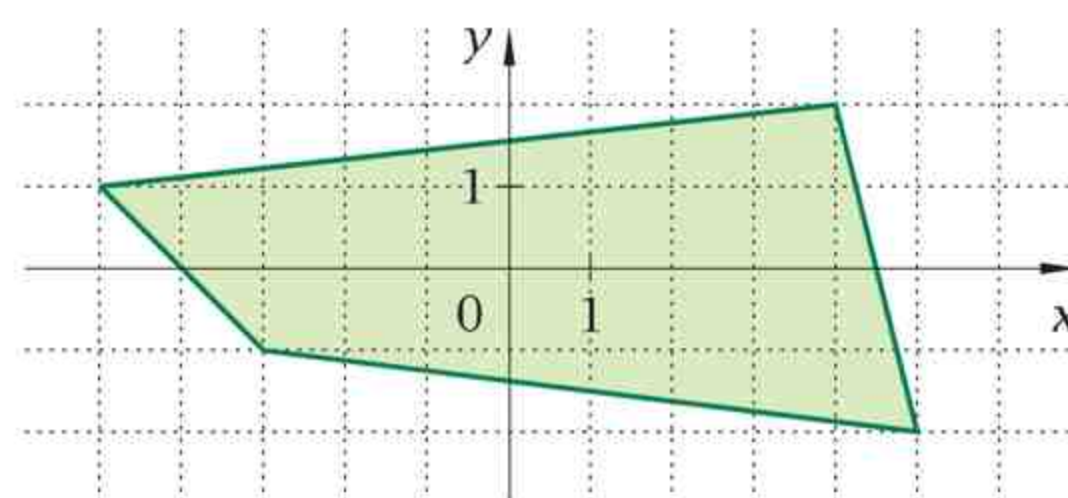
5/230

11. Narysuj prostą a i prostą k tak, aby prosta a i jej odbicie symetryczne względem prostej k :

- były równoległe,
- przecinały się,
- przecinały się pod kątem prostym,
- tworzyły jedną prostą.

12. Narysuj półprostą i figurę do niej symetryczną względem prostej. Rozważ różne przypadki.
13. Narysuj dowolny kąt ostry i znajdź jego odbicie symetryczne względem prostej nieprzecinającej ramion kąta.
14. Narysuj kwadrat o boku 4 cm i taką prostą k , aby pole figury złożonej z tego kwadratu i jego odbicia symetrycznego względem prostej k było równe 24 cm^2 .
15. Wierzchołkami trójkąta są punkty $A = (-1, -2)$, $B = (3, -5)$ i $C = (-2, 4)$. Znajdź współrzędne wierzchołków trójkąta, symetrycznego do trójkąta ABC :
 - a) względem osi x ,
 - b) względem osi y .

16. Podaj współrzędne wierzchołków figury symetrycznej do czworokąta narysowanego obok względem:
 - a) osi x ,
 - b) osi y .



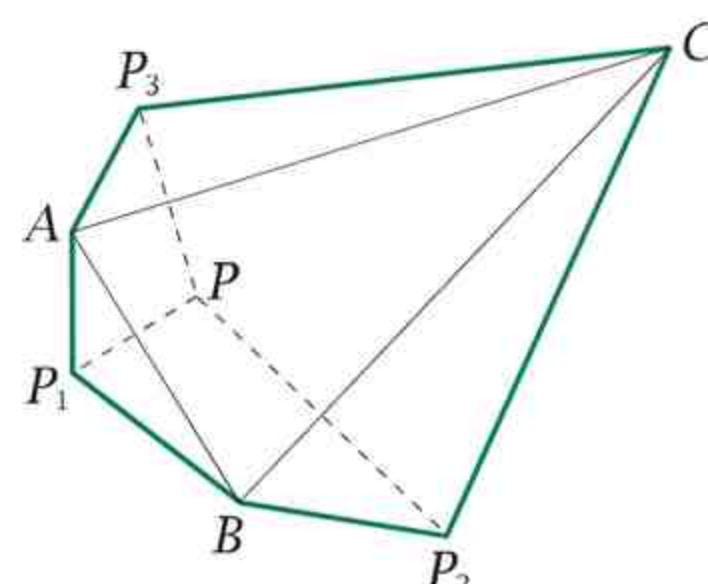
11/230

Ciekawostka

Jeżeli punkty A , B , C i P leżą na jednym okręgu, to punkty symetryczne do punktu P względem prostych zawierających boki trójkąta ABC leżą na jednej prostej.

17. Narysuj okrąg i trójkąt o wierzchołkach leżących na tym okręgu. Zaznacz na okręgu dowolny punkt P , który nie jest wierzchołkiem trójkąta. Znajdź odbicia symetryczne punktu P względem prostych zawierających boki trójkąta. Sprawdź, czy zgodnie z własnością opisaną w ciekawostce, otrzymane punkty leżą na jednej prostej.

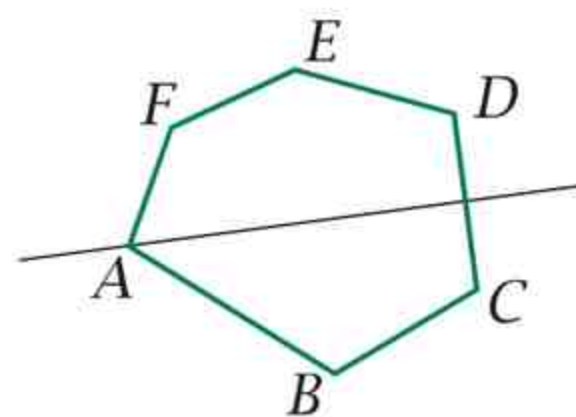
18. Trójkąt ostrokątny ABC ma obwód d . Jaki obwód ma wielokąt zbudowany z trójkąta ABC oraz jego odbić symetrycznych względem prostych AB , AC i BC ?
19. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC . Punkty P_1 , P_2 i P_3 są symetryczne do punktu P względem prostych AB , BC i AC . Wykaż, że pole wielokąta $AP_1BP_2CP_3$ jest dwa razy większe od pola trójkąta ABC .



Sprawdź, czy umiesz

1. Które boki wielokąta przedstawionego na rysunku obok są położone symetrycznie względem narysowanej prostej?

- A. AB i ED C. AF i CD
 B. AB i AF D. BC i ED

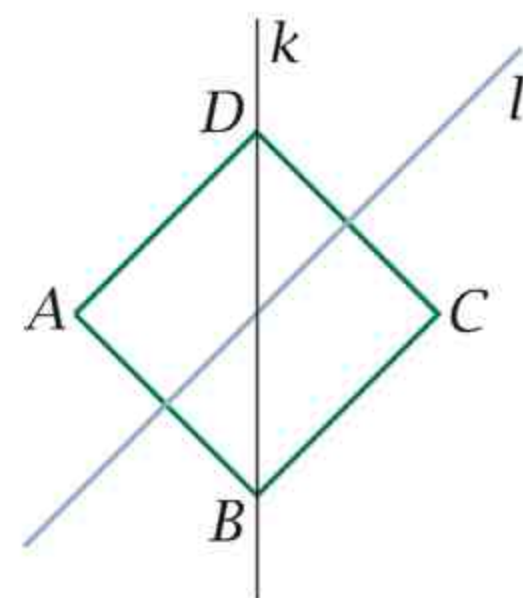


2. Które z poniższych zdań jest fałszywe?

- A. Trójkąt równoramienny i jego odbicie względem prostej zawierającej jego podstawę tworzą romb.
 B. Trójkąt prostokątny i jego odbicie względem prostej zawierającej jedną z jego przyprostokątnych tworzą trójkąt równoramienny.
 C. Trójkąt prostokątny i jego odbicie względem prostej zawierającej jego przeciwprostokątną tworzą prostokąt.
 D. Trójkąt prostokątny równoramienny i jego odbicie względem jego przeciwprostokątnej tworzą kwadrat.

3. Prosta l na rysunku obok przechodzi przez środki boków kwadratu $ABCD$. Jeśli punkt A' jest symetryczny do punktu A względem prostej k , a punkt A'' symetryczny do punktu A' względem prostej l , to:

- A. $A'' = B$ B. $A'' = D$ C. $A'' = A$ D. $A'' = C$

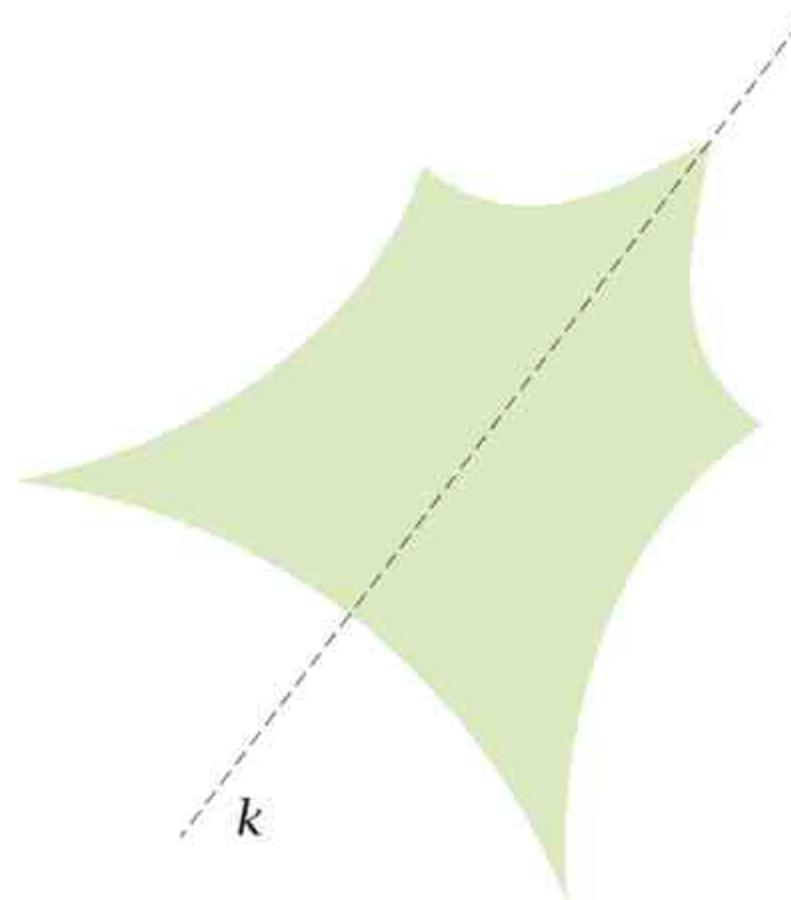


→ zadania uzupełniające 1–11, str. 230

2

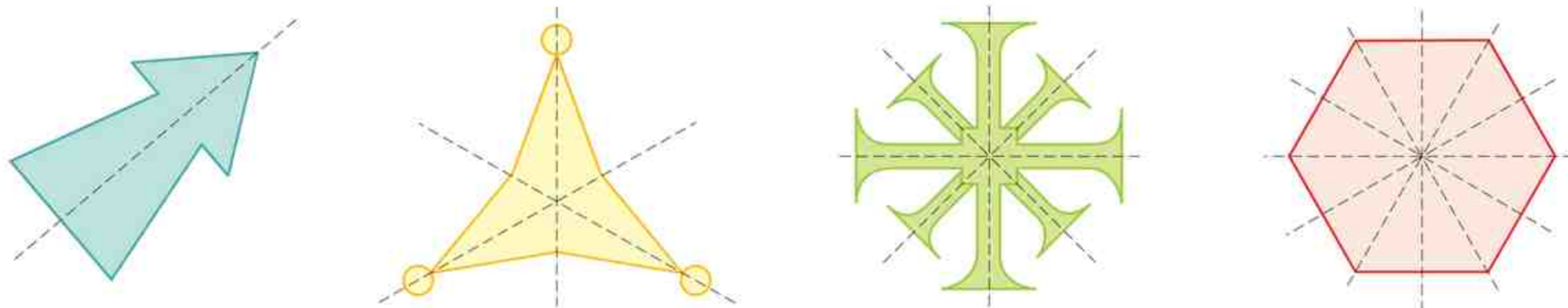
Oś symetrii figury

Przyjrzyj się figurze narysowanej obok. Zauważ, że gdybyśmy kartkę książki złożyli wzdłuż prostej k , to obie części tej figury nałożyłyby się na siebie. Narysowana figura jest więc symetryczna sama do siebie względem prostej k .



Jeżeli figura jest symetryczna sama do siebie względem prostej k , to prostą k nazywamy **osią symetrii** tej figury. Figurę, która ma oś symetrii, nazywamy **figurą osiowosymetryczną**.

Oto przykłady kilku figur osiowosymetrycznych. Ich osie symetrii narysowane są linią przerywaną.



Zauważ, że niektóre figury mają więcej niż jedną oś symetrii.

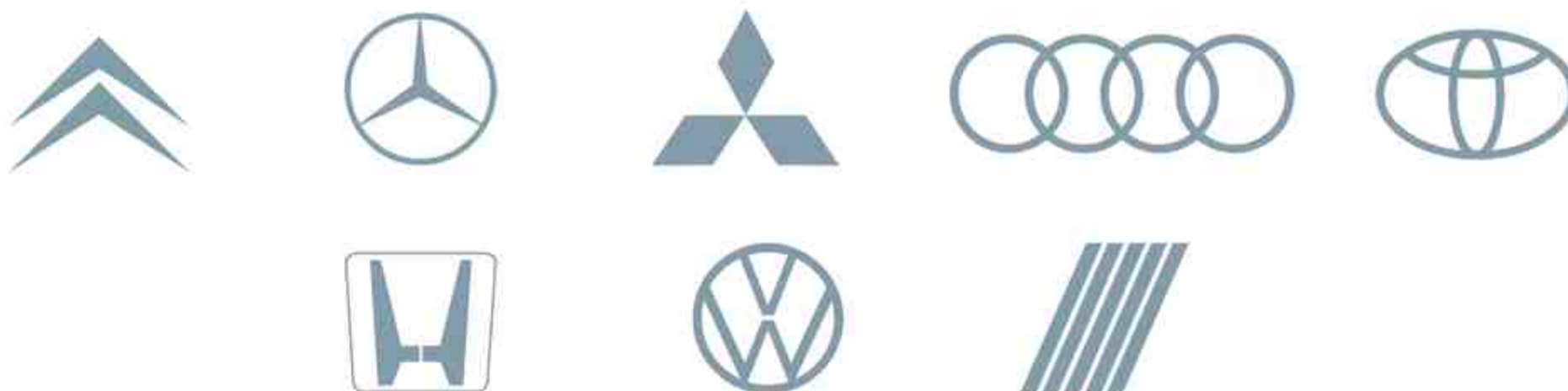
Ciekawostka



Czy wiesz, że ludzka twarz nie jest dokładnie symetryczna? Fotografia w środku przedstawia twarz pewnego chłopca. Ilustracja z lewej strony powstała przez połączenie lewej części tej fotografii z jej odbiciem symetrycznym. Ilustracja z prawej strony przedstawia prawą część twarzy połączoną z jej odbiciem symetrycznym.

Zadania

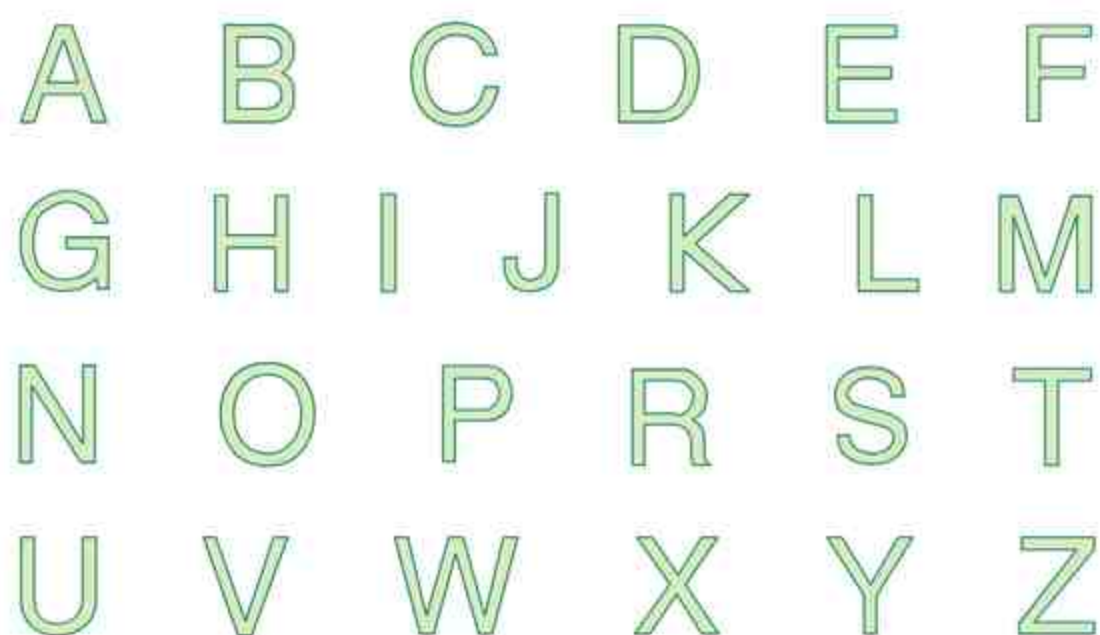
1. Ile osi symetrii mają poniższe znaki?



2. Podaj, ile osi symetrii ma:

- | | |
|-------------|---|
| a) kwadrat, | d) prostokąt, który nie jest kwadratem, |
| b) koło, | e) romb, który nie jest kwadratem, |
| c) półkole, | f) pięciokąt foremny. |

3. Ile osi symetrii ma trójkąt? Rozważ różne przypadki.



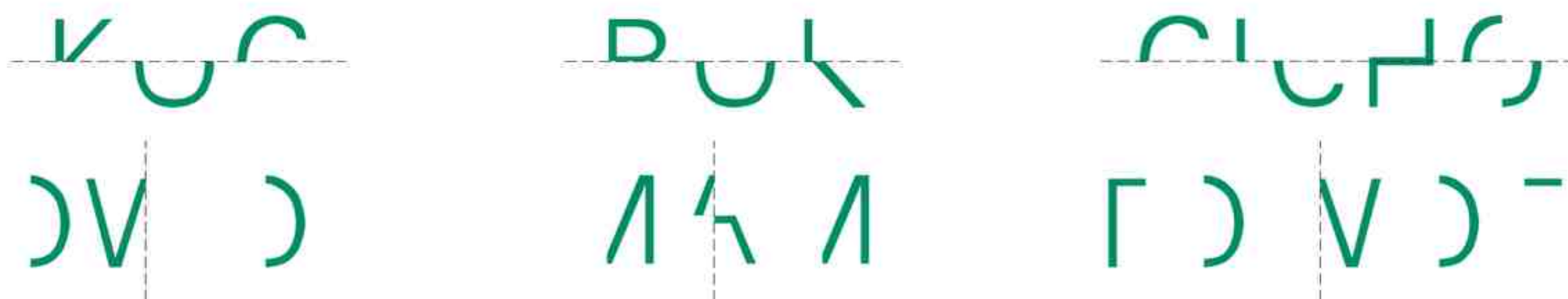
4. a) Które litery alfabetu mają oś symetrii? Które z liter mają więcej niż jedną oś symetrii?

b) Ułóż jak najdłuższy wyraz, który ma oś symetrii (poziomą lub pionową). Oto przykłady takich wyrazów:

OTO -OKO- -OBEO-

13/231

5. Odszyfruj wyrazy, dla których linie przerywane są osiami symetrii.



6. Narysuj sześciokąt, który ma dokładnie jedną oś symetrii.

15/231

*7. Narysuj figurę, która ma dokładnie 8 osi symetrii.

8. a) Ile osi symetrii ma odcinek, ile prosta, a ile półprosta?

b) Ile osi symetrii może mieć figura złożona z dwóch prostych? Rozważ różne położenia tych prostych.

9. Narysuj figurę złożoną z dwóch okręgów, która ma:

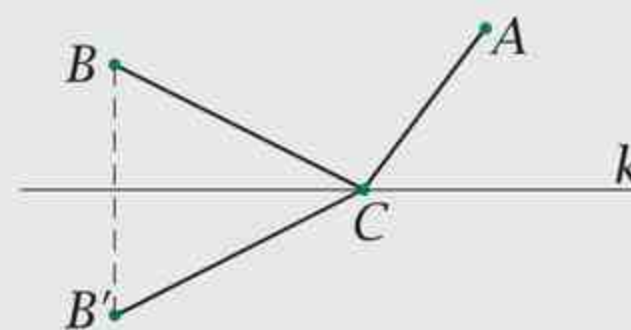
- dokładnie dwie osie symetrii,
- dokładnie jedną oś symetrii,
- nieskończenie wiele osi symetrii.

10. Które z poniższych zdań są prawdziwe?

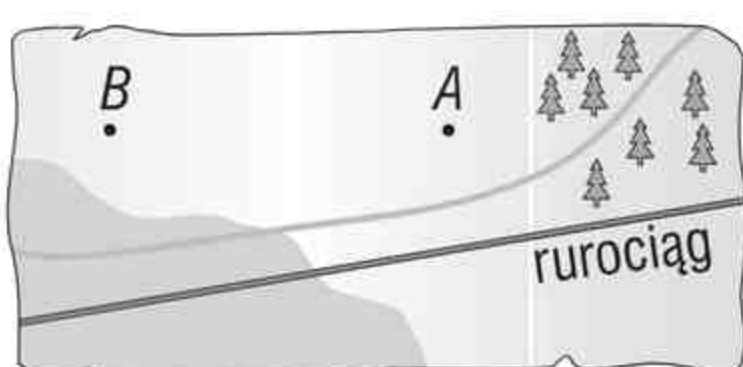
- Odcinek ma dokładnie jedną oś symetrii.
- Każdy trójkąt równoramienny ma dokładnie jedną oś symetrii.
- Istnieje trójkąt prostokątny, który ma oś symetrii.
- Jeżeli trójkąt ma oś symetrii, to jest równoramienny.
- Każdy romb ma dokładnie dwie osie symetrii.
- Jeżeli pięciokąt ma oś symetrii, to przechodzi ona przez jeden z wierzchołków.
- Jeżeli czworokąt ma oś symetrii, to przechodzi ona przez jeden z wierzchołków.

Ciekawostka

Na rysunku obok punkt B' jest symetryczny do punktu B względem prostej k . Wynika z tego, że dla każdego punktu C leżącego na prostej k odcinki BC i $B'C$ mają taką samą długość. Wobec tego droga z punktu A przez punkt C do punktu B jest taka sama jak do punktu B' .

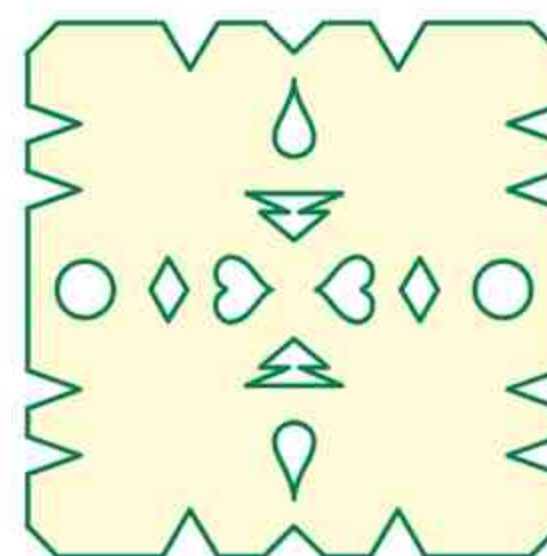
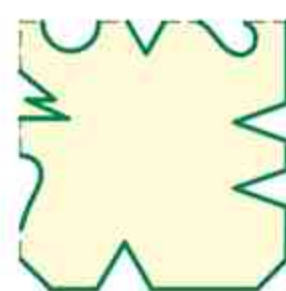
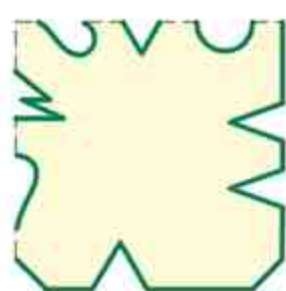
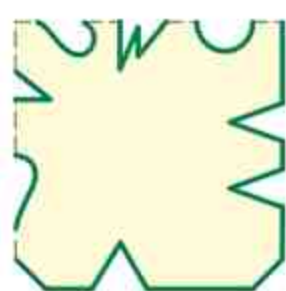


Gdy chcemy wyznaczyć najkrótszą z dróg łączących A z B i przechodzących przez punkt na prostej k , wystarczy wybrać taki punkt na tej prostej, który należy do odcinka AB' .



11. Przeczytaj ciekawostkę. Na ruropociąg (zob. rysunek) należy wyznaczyć taki punkt, by poprowadzone z niego odnogi do miejscowości A i B miały w sumie możliwie najkrótszą długość. Jak znaleźć ten punkt?

12. Z której wycinanki otrzymamy serwetkę narysowaną obok?



Sprawdź, czy umiesz

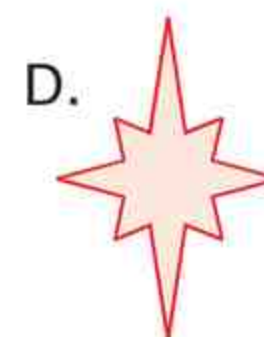
1. Ile liter w wyrazie **ORNAMENT** ma oś symetrii?

- A. 1 B. 3 C. 4 D. 5

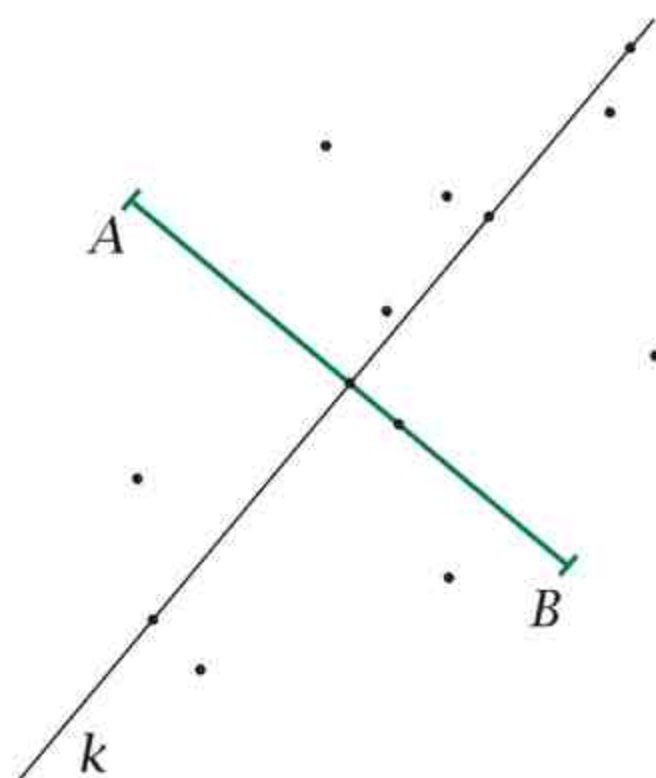
2. Który napis nie ma osi symetrii?

- A. KOK B. SOS C. MIM D. BOB

3. Która z narysowanych figur ma najwięcej osi symetrii?



3 Symetralna odcinka



Prostą, która jest prostopadłą do odcinka i przechodzi przez jego środek, nazywamy **symetralną odcinka**. Symetralna odcinka jest jedną z dwóch jego osi symetrii.

ĆWICZENIE A. Prosta k jest symetralną odcinka AB . Które z zaznaczonych punktów są jednakowo odległe od punktów A i B ? Które punkty leżą bliżej punktu A niż punktu B ?

Można zauważyć, że symetralną odcinka tworzą wszystkie punkty jednakowo oddalone od jego końców.

ĆWICZENIE B. Narysuj odcinek, a następnie wyznacz za pomocą cyrkla kilka punktów jednakowo oddalonych od obu końców odcinka. Jaką figurę tworzą wyznaczone punkty?

Z powyższej własności symetralnej wynika, że aby skonstruować symetralną danego odcinka, wystarczy wyznaczyć dwa punkty jednakowo odległe od obu końców odcinka i poprowadzić przez nie prostą. Najwygodniejszy sposób znalezienia symetralnej odcinka przedstawiamy poniżej.

Konstrukcja

Konstrukcja symetralnej danego odcinka AB .



- ① Z punktu A po obu stronach odcinka AB kreślimy łuki (o promieniu większym niż połowa długości odcinka).
- ② Nie zmieniając rozwartości cyrkla, kreślimy łuki z punktu B .
- ③ Przez punkty przecięcia łuków prowadzimy prostą. Narysowana prosta jest symetralną odcinka AB .

Zadania

1. Narysuj dowolny odcinek. Znajdź konstrukcyjnie jego środek.

2. Odcinek narysowany obok ma długość 1 cala. Skonstruuj odcinek długości $\frac{3}{4}$ cala.

Wskazówka. Możesz zacząć od konstrukcji odcinka o długości 3 cale.

3. Narysuj prostą, a następnie skonstruuj odcinek, którego symetralną jest ta prosta.

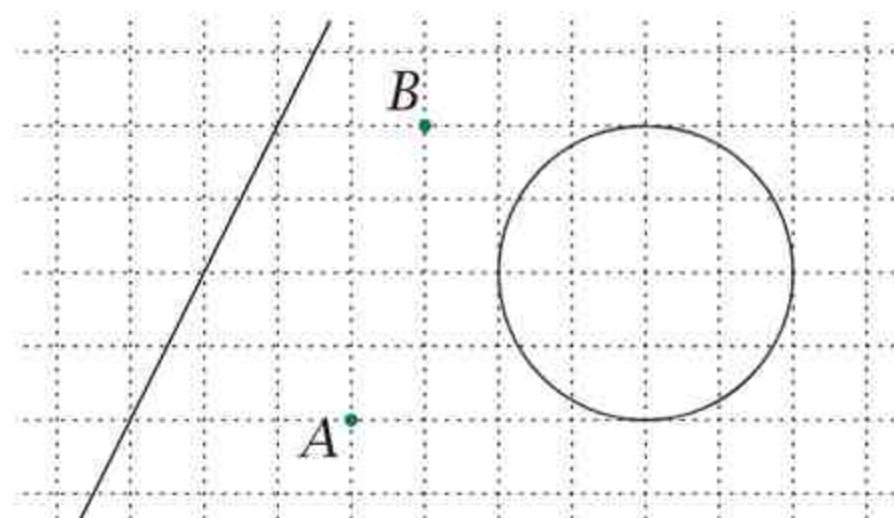
4. a) Uzasadnij, że symetralna każdej cięciwy okręgu przechodzi przez środek okręgu.

b) Narysuj okrąg, obrysowując na przykład pokrywkę lub szklankę. Wyznacz konstrukcyjnie środek narysowanego okręgu.

*5. Zaznacz dwa punkty A i P . Narysuj figurę złożoną ze wszystkich punktów B , dla których symetralna odcinka AB przechodzi przez punkt P .

6. Narysuj prostą, okrąg i dwa punkty A i B położone tak, jak na rysunku obok. Wyznacz punkt, który jest tak samo odległy od punktów A i B oraz leży:

- na narysowanej prostej,
- na okręgu.



7. Rzekł raz Kargul do Pawlaka:

— Zaświtała mi myśl taka:

*Jakże by to było cudnie,
gdybyśmy tak mieli studnię
na granicy dwóch gospodarstw.*

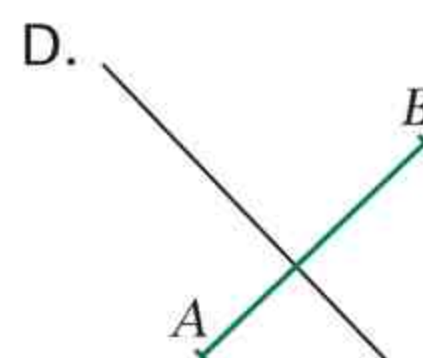
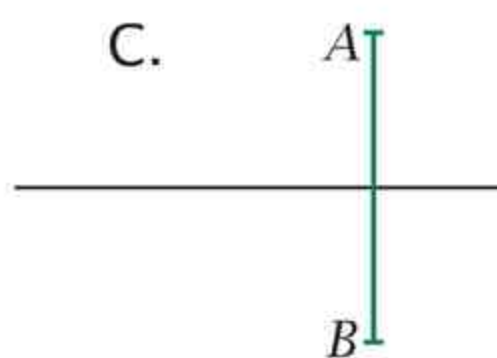
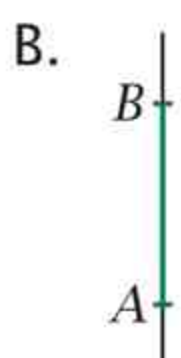
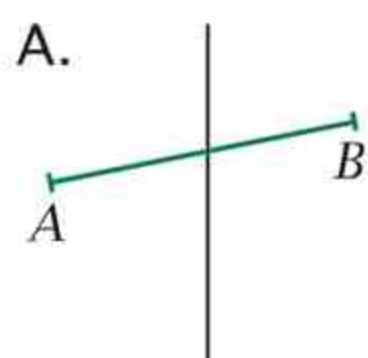
Na to Pawlak: — Studnia? Zgoda.
*Kopmy w miejscu wyznaczonym
tak, by droga z obu domów
jednakowa do niej była.*

Tu rozmowa się skończyła.
Punkt na mapce wyznaczyli.
W jaki sposób to zrobili?

*8. W trójkącie ABC kąt CAB ma miarę 25° . Środek boku AB leży na symetralnej boku AC . Oblicz miary pozostałych kątów tego trójkąta.

Sprawdź, czy umiesz

1. Na którym rysunku narysowano symetralną odcinka AB ?



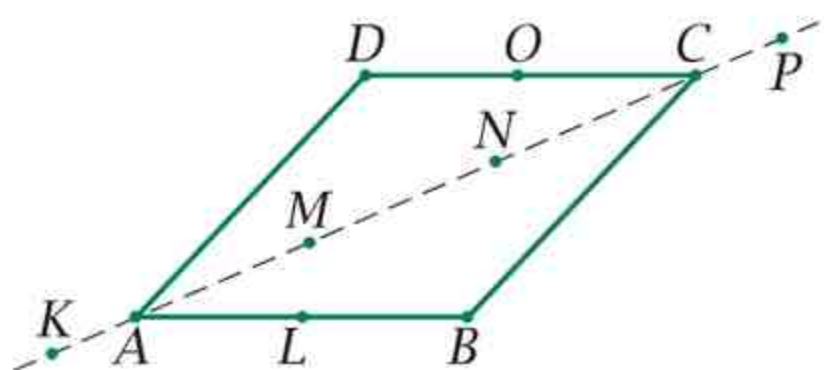
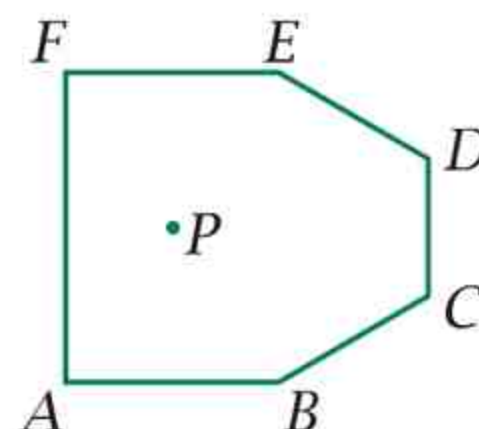
2. Punkt P na pewno nie leży na symetralnej odcinka:

A. AF

B. AB

C. BC

D. CD



3. Czworokąt $ABCD$ jest rombem. Ile spośród zaznaczonych punktów leży na symetralnej odcinka BD ?

A. 2

B. 3

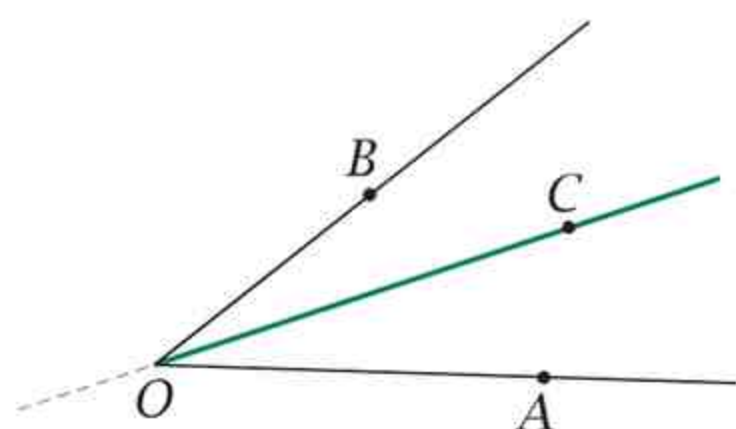
C. 4

D. 6

→ zadania uzupełniające 17–20, str. 231

4

Dwusieczna kąta

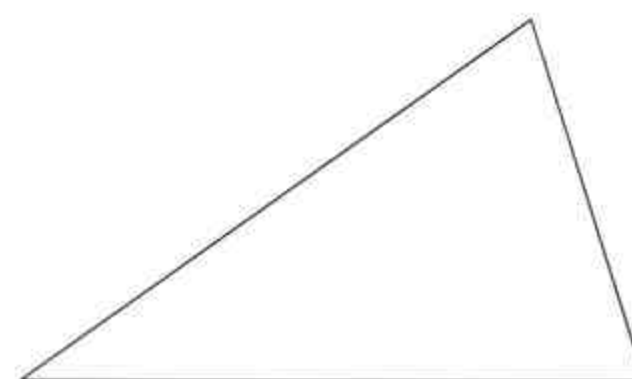


ĆWICZENIE A. Kąt AOB na rysunku obok ma miarę 40° . Prosta OC jest osią symetrii tego kąta. Jakie miary mają kąty AOC i COB ?

Półprostą dzielącą kąt na dwa kąty o jednakowych miarach nazywamy **dwusieczną kąta**. Zauważ, że dwusieczna kąta leży na jego osi symetrii.

W tym rozdziale rozważać będziemy wyłącznie dwusieczne kątów, których miary są mniejsze od 180° .

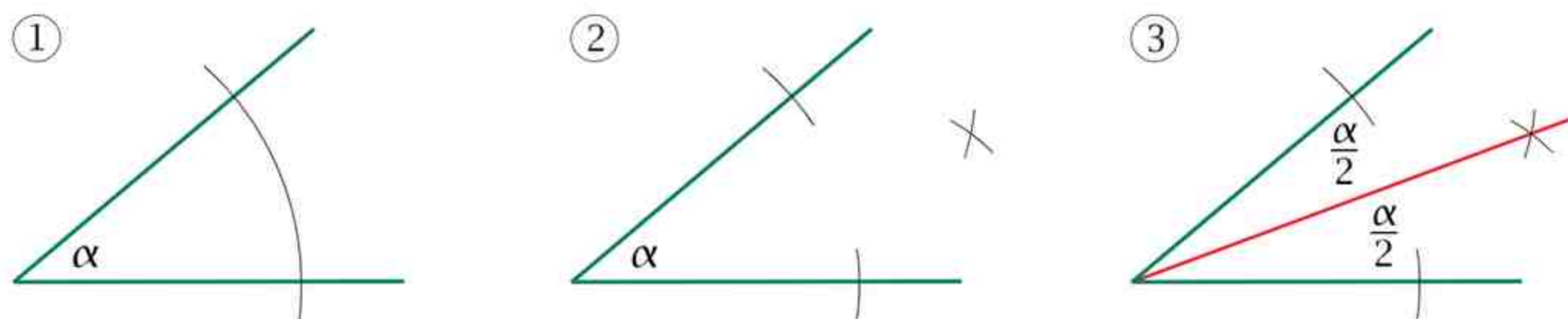
ĆWICZENIE B. Trójkąt narysowany obok jest równoramienny. Czy wiesz, jak wyznaczyć jego oś symetrii?



Dwusieczną kąta konstruujemy podobnie jak oś symetrii trójkąta równoramiennego.

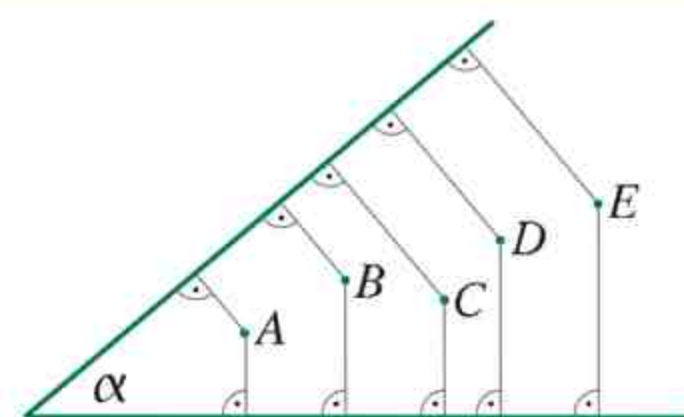
Konstrukcja

Konstrukcja dwusiecznej danego kąta α .



- ① Z wierzchołka kąta α kreślimy łuk (o dowolnym promieniu).
- ② Z punktów przecięcia łuku z ramionami kąta kreślimy łuki o jednakowym promieniu (przecinające się wewnątrz kąta).
- ③ Z wierzchołka kąta α prowadzimy półprostą przechodzącą przez punkt przecięcia łuków. Narysowana półprosta jest dwusieczną kąta α .

ĆWICZENIE C. Popatrz na rysunek obok. Jak myślisz, które z zaznaczonych punktów leżą na dwusiecznej kąta α ? Porównaj odległości każdego z tych punktów od ramion kąta α .



Dwusieczną kąta tworzą wszystkie punkty tego kąta, które są jednakowo odległe od obu ramion kąta.

Powyższą własność można uzasadnić, korzystając z cechy przystawania trójkątów.

- **ĆWICZENIE D.** Udowodnij, że jeśli punkt leży na dwusiecznej kąta, to jego odległości od obu ramion kąta są równe.

Ciekawostka

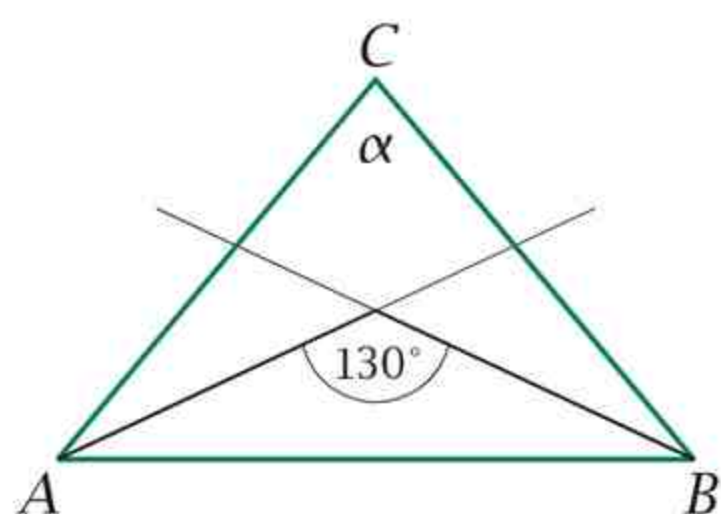
Konstruując dwusieczną, można podzielić dowolny kąt na dwa równe kąty. Przez ponad dwa tysiące lat matematycy nie mogli sobie poradzić z następującym, wydawałoby się prostym, zadaniem: *Jak za pomocą cyrkla i linijki podzielić dany kąt na trzy równe części?* Jest to słynny problem *trysekcji kąta*, postawiony jeszcze w starożytnej Grecji. Dopiero w 1837 r. francuski matematyk Pierre Wantzel [czyt. pier wancel] udowodnił, że dla wielu kątów trysekcja jest niewykonalna — np. dla kąta o mierze 60° .

Za pomocą cyrkla i linijki można skonstruować wiele różnych kątów, ale nie każdy. Nie można np. skonstruować kąta o mierze 20° , a także kątów o miarach 1° i 2° . Udowodniono, że kąt o mierze n° , gdzie n jest liczbą naturalną, można skonstruować tylko wtedy, gdy liczba n jest podzielna przez 3.

Zadania

1. a) Narysuj dowolny kąt ostry i skonstruuj jego dwusieczną.
b) Narysuj dowolny kąt rozwarty i podziel go na 4 równe kąty.
2. Skonstruuj kąty:
a) 45° b) $22,5^\circ$ c) 30° d) 15° e) $7,5^\circ$
3. W trójkącie ABC kąt CAB ma miarę 80° , a kąt ABC ma miarę 50° . Dwusieczna kąta BCA przecina bok AB w punkcie D . Oblicz miary kątów trójkąta CDB .
- 4. Wykaż, że kąt między dwusiecznymi kątów przyległych jest kątem prostym.
- 5. Uzasadnij, że dwusieczne kątów leżących przy tym samym ramieniu trapezu przecinają się pod kątem prostym.
- 6. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB kąt między ramionami ma miarę α , a dwusieczne kątów przy podstawie przecinają się w punkcie D . Uzasadnij, że kąt ADB ma miarę $\frac{\alpha}{2} + 90^\circ$
- *7. Dany jest odcinek długości a oraz kąt ostry. Jak znaleźć wewnątrz tego kąta punkt, którego odległości od obu ramion kąta są równe a ?

Sprawdź, czy umiesz

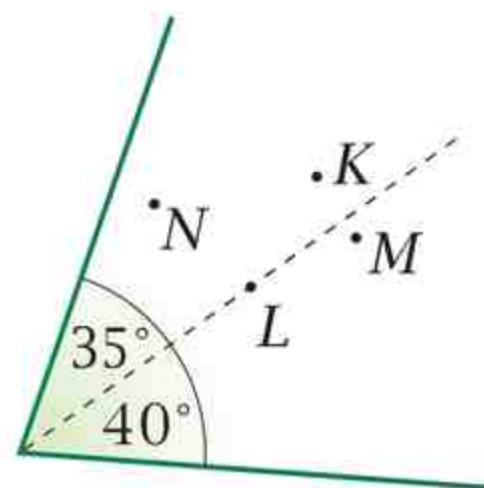


1. Dwusieczne kątów przy podstawie trójkąta równoramiennego ABC przecinają się pod kątem 130° . Kąt α ma miarę:

- A. 80° B. 65° C. 50° D. 100°

2. Jeden z zaznaczonych punktów jest jednakowo odległy od ramion kąta zacięniowanego na zielono. Który to punkt?

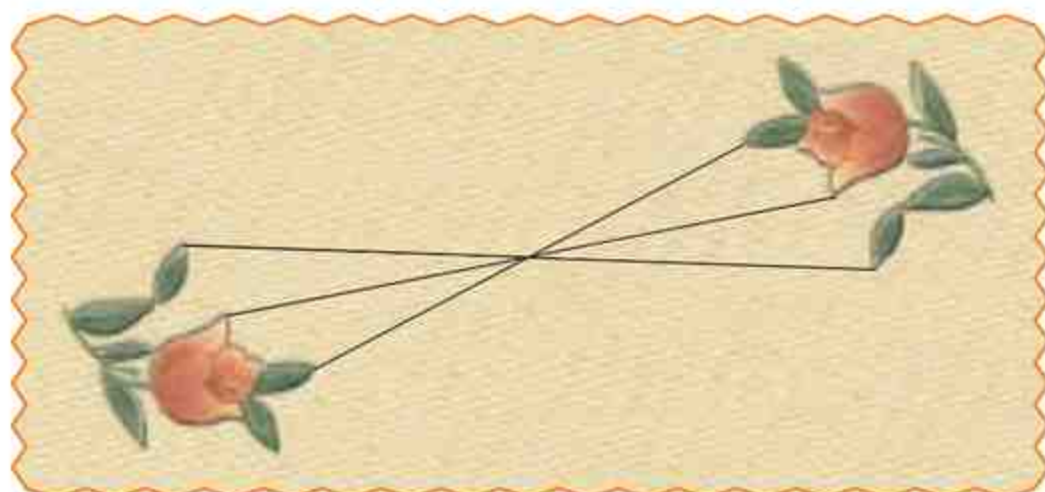
- A. K B. L C. M D. N



5 Symetria względem punktu



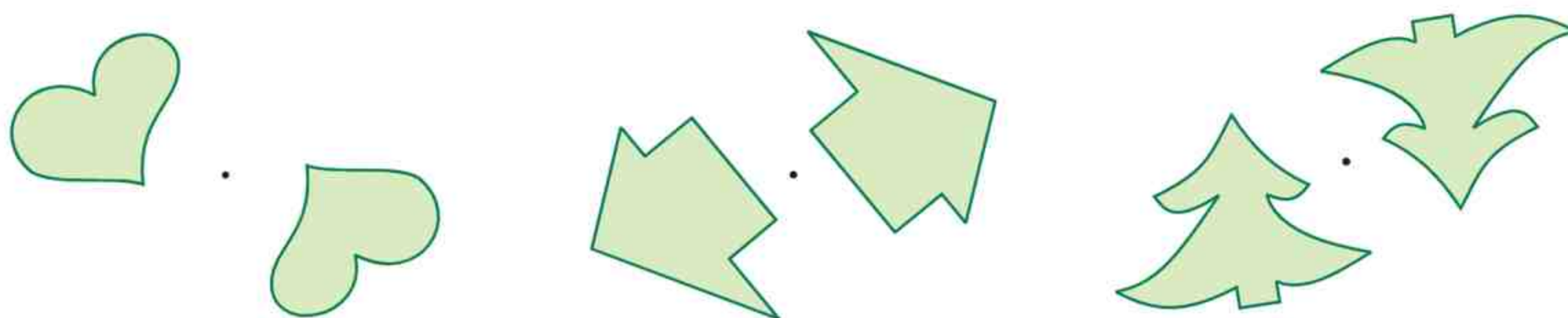
We wzorze na serwetce widać pewną symetrię, choć nie istnieje żadna prosta, względem której obie części wzoru byłyby symetryczne.



Połączmy odcinkami niektóre odpowiadające sobie punkty.

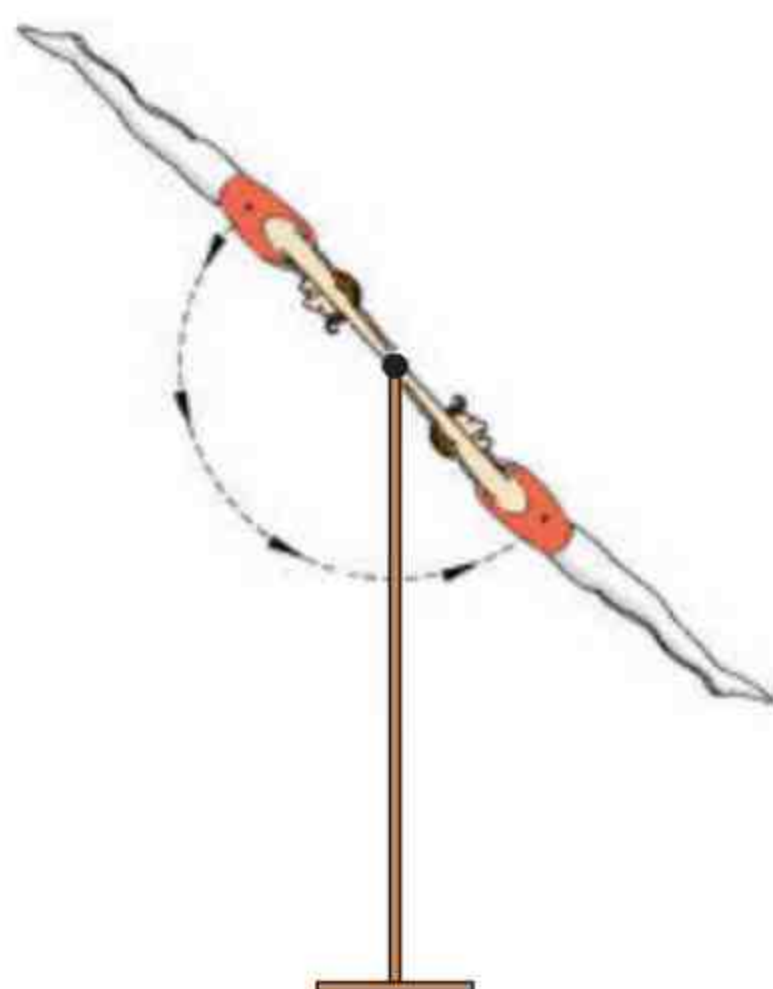
Dorysowane odcinki przecinają się w jednym punkcie. Zauważ, że ten punkt jest środkiem każdego z tych odcinków.

Podobnie położone są figury na poniższych rysunkach.

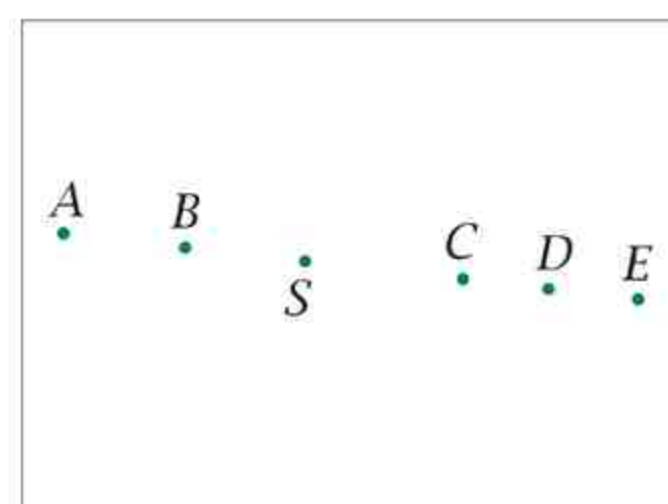
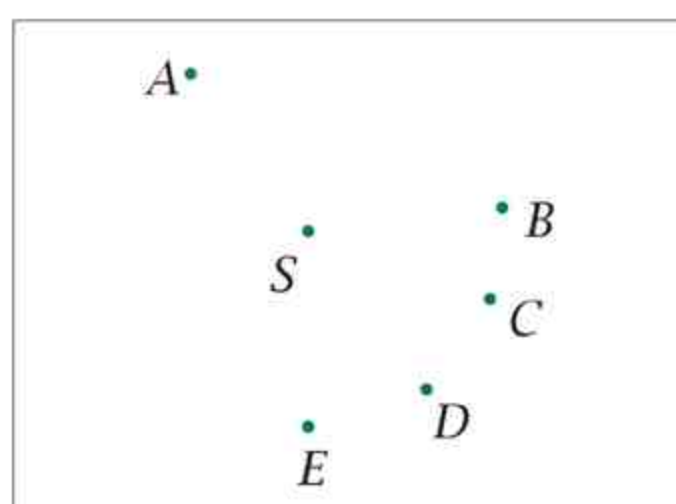


O takich figurach mówimy, że są **symetryczne względem punktu**.

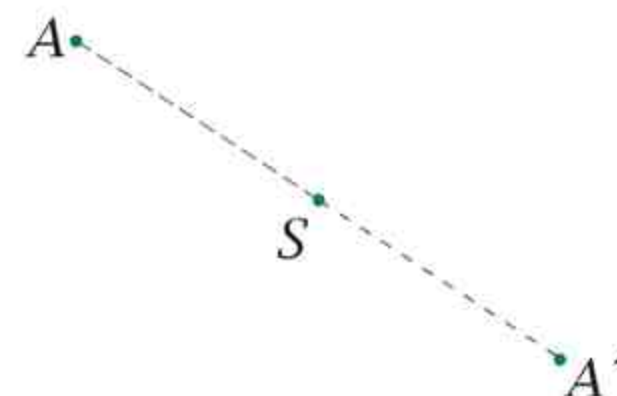
Zauważ, że dwie figury są symetryczne względem punktu S , jeżeli jedną z nich można otrzymać, obracając drugą wokół punktu S o 180° .



ĆWICZENIE. W każdej ramce jeden z punktów jest symetryczny do punktu A względem punktu S . Wskaż ten punkt.

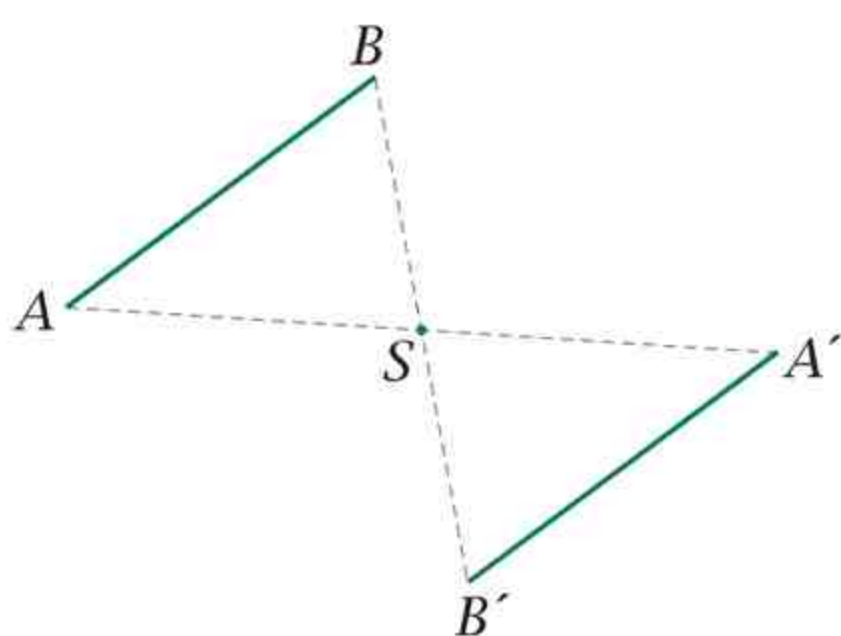


Mówimy, że **punkty A i A' są symetryczne względem punktu S** , jeżeli punkt S jest środkiem odcinka AA' .



Przyjmujemy, że punkt S jest symetryczny sam do siebie względem punktu S .

Aby znaleźć punkt A' symetryczny do punktu A względem punktu S , wystarczy narysować półprostą AS i znaleźć na niej punkt A' (różny od A), taki że $A'S = AS$.



Aby narysować odcinek symetryczny do odcinka AB względem punktu S , wystarczy znaleźć punkty symetryczne do punktów A i B — będą to końce szukanego odcinka.

Odcinki symetryczne względem punktu mają jednakową długość i są równoległe. Symetryczne kąty mają jednakowe miary.

Zadania

1. a) Narysuj odcinek AB i punkt S leżący poza prostą AB . Skonstruuj odcinek $A'B'$ symetryczny do odcinka AB względem punktu S .
b) Czy figurą symetryczną do odcinka względem punktu może być ten sam odcinek?



2. Narysuj dowolny trójkąt i skonstruuj trójkąt symetryczny do niego względem:

- a) jednego z wierzchołków,
- b) środka jednego z boków,
- c) punktu leżącego poza trójkątem,
- d) punktu leżącego wewnątrz trójkąta.

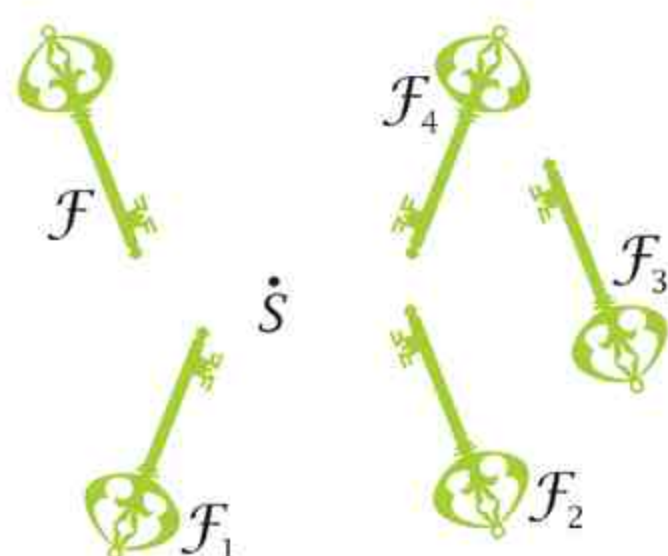
3. Narysuj dowolny trapez i skonstruuj figurę symetryczną do niego względem:

- a) wierzchołka przy dłuższej podstawie,
- b) wierzchołka przy krótszej podstawie,
- c) punktu przecięcia przekątnych.

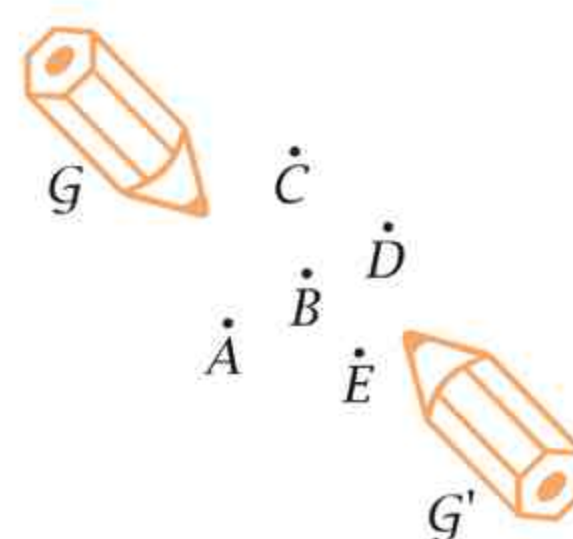
4. Popatrz na obrazki obok. Są one prawie symetryczne względem pewnego punktu. Symetrię psuje 5 szczegółów. Znajdź je.

5. Zaznacz trzy punkty A , B i S nieleżące na jednej prostej. Narysuj równoległobok, którego wierzchołkami są punkty A i B , a przekątne przecinają się w punkcie S .

6. a) Która figura jest symetryczna do figury $\mathcal{F}$ względem punktu S ?



- b) Względem którego punktu figury G i G' są symetryczne?

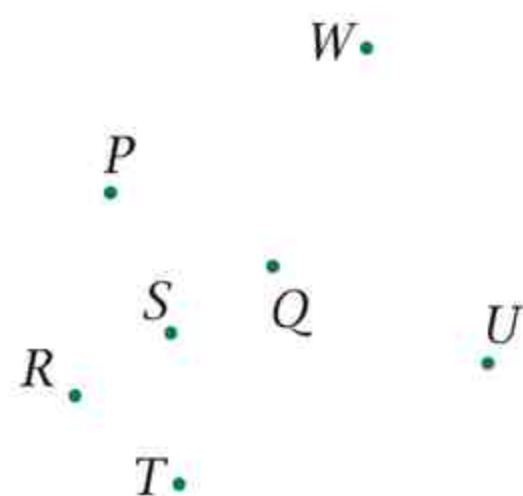


7. a) Narysuj prostą i jej odbicie symetryczne względem punktu, który nie leży na tej prostej.
b) Narysuj półprostą i jej odbicie symetryczne względem punktu leżącego na tej półprostej.
c) Narysuj okrąg i jego odbicie symetryczne względem punktu leżącego na okręgu.
8. Wierzchołkami trójkąta są punkty $A = (-1, -6)$, $B = (8, 3)$ i $C = (-4, 2)$. Znajdź współrzędne wierzchołków trójkąta symetrycznego do trójkąta ABC względem początku układu współrzędnych.
9. Przekątna kwadratu ma długość 6 cm. Środek przekątnej odbijamy symetrycznie względem wierzchołków kwadratu. Jakie jest pole czworokąta, którego wierzchołkami są otrzymane punkty?
10. Trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB ma pole równe 12 cm^2 . Punkty A' i B' są symetryczne do punktów A i B względem punktu C . Jakie jest pole czworokąta $ABA'B'$?
11. Punkt S leży wewnątrz kwadratu o boku 5 cm, w odległości 1 cm od dwóch sąsiednich boków kwadratu. Jaki obwód ma figura złożona z tego kwadratu i jego odbicia symetrycznego względem punktu S ?
- *12. Dane są trzy punkty nieleżące na jednej prostej. Przez punkty te poprowadź trzy proste równoległe w taki sposób, aby odległości między sąsiednimi prostymi były równe.

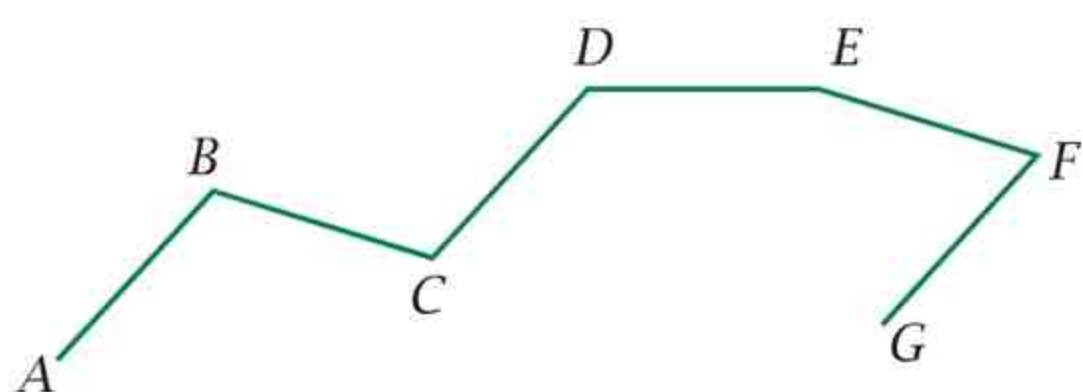
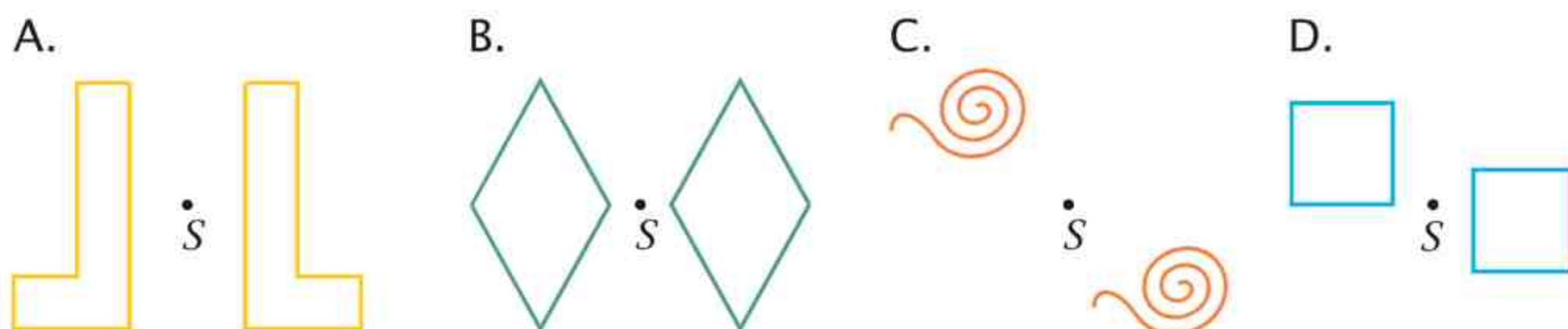
SPRAWDŹ, CZY UMIESZ

1. Ustal, które punkty znajdujące się na rysunku obok są symetryczne względem punktu Q .

- A. P i U C. P i W
B. R i S D. W i T



2. Na którym z tych rysunków figury są symetryczne względem punktu S ?



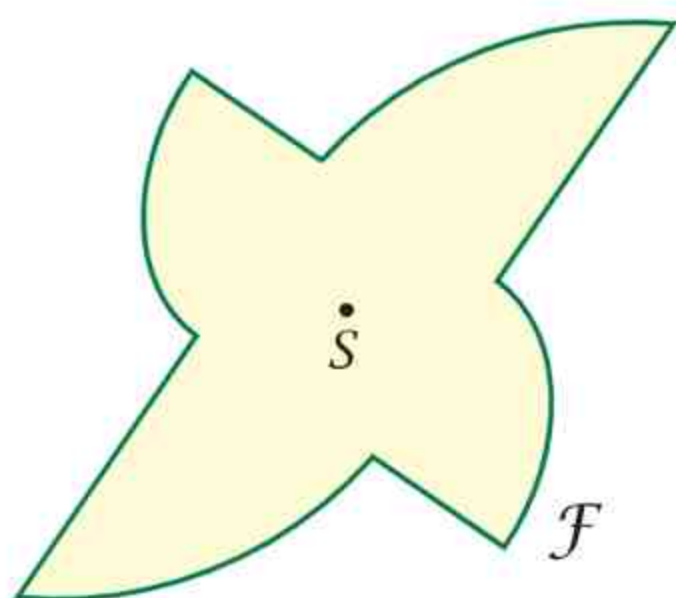
3. Na pewno nie istnieje punkt, względem którego są symetryczne odcinki:

- A. AB i FG C. AB i DC
B. BC i FE D. GF i DE

→ zadania uzupełniające 25–29, str. 232

6 Środek symetrii figury

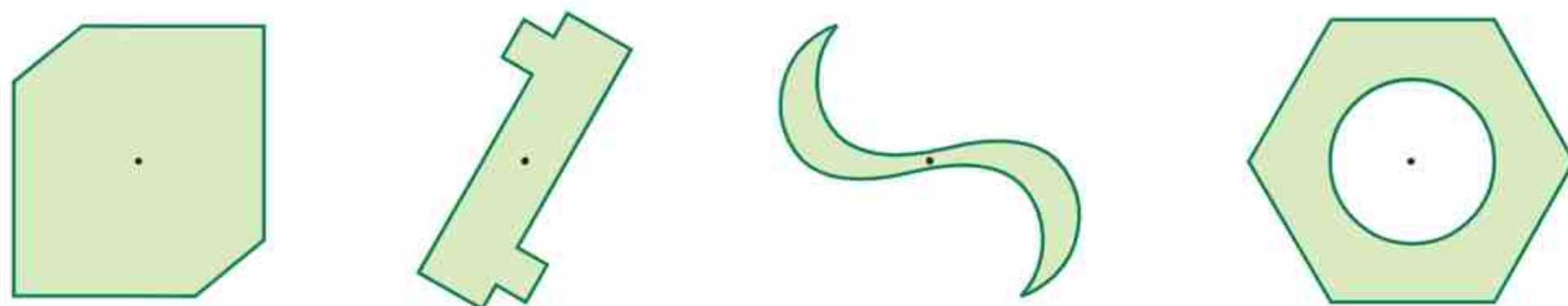
ĆWICZENIE. Narysuj równoległobok, oznacz literą S punkt przecięcia jego przekątnych. Narysuj figurę symetryczną do tego równoległoboku względem punktu S .



Przyjrzyj się figurze $\mathcal{F}$ narysowanej obok. Zauważ, że figurą symetryczną do $\mathcal{F}$ względem punktu S jest ta sama figura.

Jeżeli figura jest symetryczna sama do siebie względem punktu S , to punkt S nazywamy **środkiem symetrii** tej figury. Figurę, która ma środek symetrii, nazywamy **figurą środkowosymetryczną**.

Oto przykłady kilku figur środkowosymetrycznych. Zaznaczone punkty są ich środkami symetrii.



Uwaga. Zauważ, że obracając figurę środkowosymetryczną o 180° wokół środka symetrii, otrzymamy tę samą figurę.

Zadania

1. Dla każdej z podanych figur ustal, czy jest środkowosymetryczna. Jeśli tak, określ położenie środka symetrii:

- | | |
|-------------------------|-------------------|
| a) odcinek, | c) koło, |
| b) trójkąt równoboczny, | d) równoległobok. |

2. a) Które z liter alfabetu mają środek symetrii (zob. str. 214)?

- b) Wyraz ONO jest środkowosymetryczny. Ułóż kilka innych wyrazów środkowosymetrycznych.

3. Które z poniższych znaków mają środek symetrii?



4. Na rysunku przedstawiono figury środkowosymetryczne ułożone z patyczków. Ułóż z sześciu patyczków kilka innych figur środkowosymetrycznych.

5. Figura przedstawiona na rysunku zbudowana jest z pięciu jednakowych patyczków.

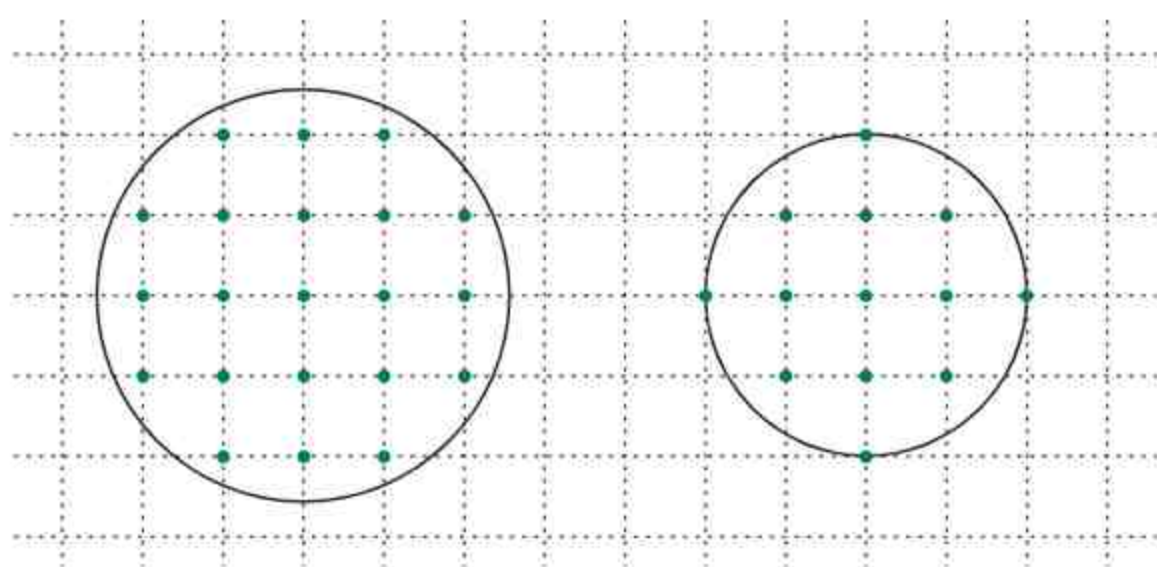
- a) Czy można przełożyć jeden patyczek tak, aby otrzymać figurę osiowosymetryczną?
b) Czy można przełożyć jeden patyczek tak, aby otrzymać figurę środkowosymetryczną?



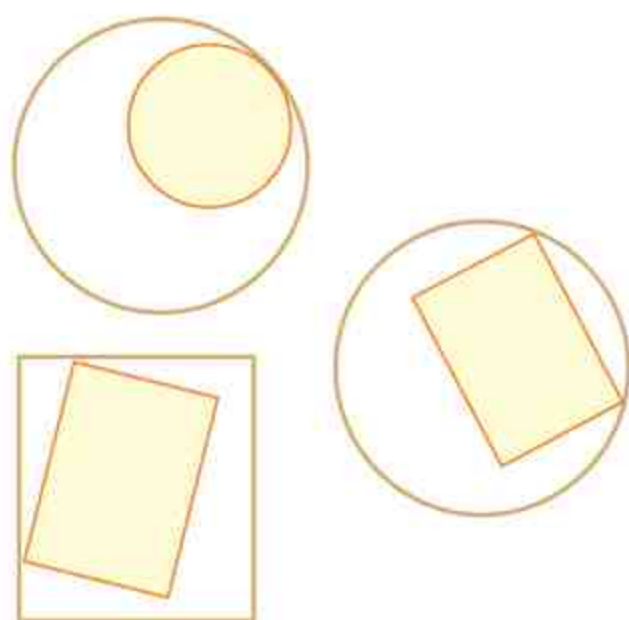
6. a) Podaj przykłady kilku czworokątów, które mają środek symetrii. Jaki warunek muszą spełniać przekątne takich czworokątów?
b) Narysuj czworokąt, który ma oś symetrii, a nie ma środka symetrii, oraz taki czworokąt, który ma środek symetrii, a nie ma osi symetrii.
7. Narysuj sześciokąt, który ma środek symetrii, chociaż nie wszystkie jego boki są jednakowej długości.
8. Podaj przykład figury, która ma więcej niż jeden środek symetrii.
9. Ile środków symetrii może mieć figura złożona z dwóch różnych prostych? Rozważ różne położenia tych prostych.
10. Podaj przykład figury, która nie jest czworokątem i która:
a) jest jednocześnie osiowosymetryczna i środkowosymetryczna,
b) ma oś symetrii, a nie ma środka symetrii,
c) ma środek symetrii, a nie ma osi symetrii,
d) ma nieskończenie wiele osi symetrii i jeden środek symetrii.
11. Które z poniższych zdań są prawdziwe?
① Równoległobok ma środek symetrii.
② Jeżeli czworokąt ma środek symetrii, to jest równoległobokiem.
③ Trójkąt równoboczny ma środek symetrii.
④ Prosta ma nieskończenie wiele środków symetrii.
⑤ Środek symetrii figury środkowosymetrycznej należy zawsze do tej figury.
⑥ Każda figura środkowosymetryczna ma oś symetrii.
⑦ Każda figura, która ma więcej niż jedną oś symetrii, jest figurą środkowosymetryczną.

----- Ciekawostka

Jeżeli figura ma więcej niż jeden środek symetrii, to musi mieć ich nieskończenie wiele.



- 12. Nazwijmy punktem kratowym każdy punkt, w którym przecinają się linie na papierze w kratkę. Wykaż, że w każdym kole, którego środek jest punktem kratowym, znajduje się nieparzysta liczba punktów kratowych.



- 13. a) Uzasadnij, że każda prosta przechodząca przez środek symetrii figury leżącej na płaszczyźnie dzieli tę figurę na dwie części o równych polach.
- b) Obok przedstawiono schematyczne rysunki kanapek. Żółte figury przedstawiają plasterki sera. Jak znaleźć linie, wzdłuż których można przekroić te kanapki dokładnie na pół (w każdej z dwóch części powinno być tyle samo pieczywa i tyle samo sera)?

Ciekawostka

Twierdzenia współczesnej matematyki są na ogół bardzo skomplikowane. Czasem jednak uczeni starają się wyniki swojej pracy podać w przystępnej wersji. Oto przykłady takich sformułowań:

Twierdzenie o kanapce

Jeśli kawałek chleba posmarujemy masłem, a na to położymy kawałek sera, to zawsze

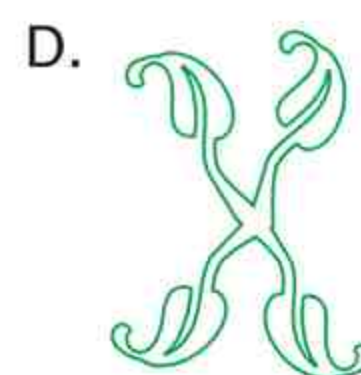
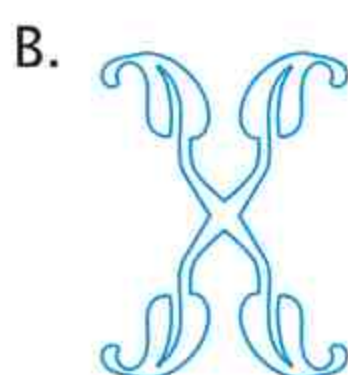
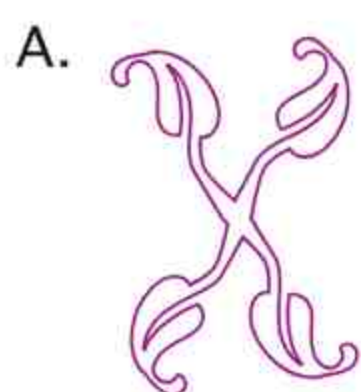
można jednym cięciem noża przeciąć otrzymaną kanapkę na dwie części tak, by przełować jednocześnie i chleb, i masło, i ser.

Twierdzenie o mapie

Jeśli z samolotu lecącego nad Polską zrzućmy mapę Polski, to upadnie ona tak, że jeden z jej punktów będzie leżał w punkcie terenu, który przedstawia.

Sprawdź, czy umiesz

1. Która z narysowanych poniżej figur jest jednocześnie osiowosymetryczna i środkowosymetryczna?



2. Ile liter w wyrazie **SZACHOWNICA** ma środek symetrii?

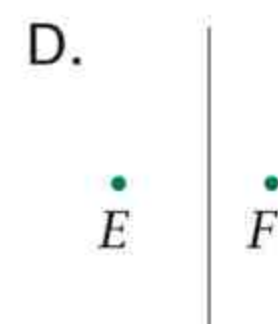
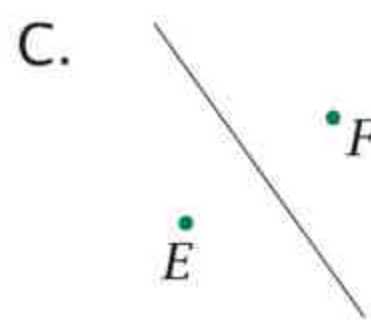
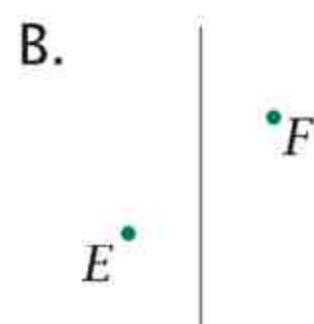
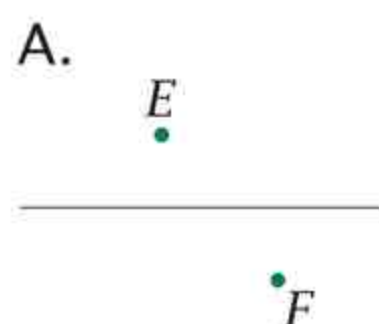
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

3. Które zdanie jest prawdziwe?

A. Nie istnieje figura, która ma więcej niż jeden środek symetrii.
 B. Wielokąt, który ma parzystą liczbę boków, ma dwa środki symetrii.
 C. Kąt prosty ma co najmniej jeden środek symetrii.
 D. Żaden pięciokąt nie ma środka symetrii.

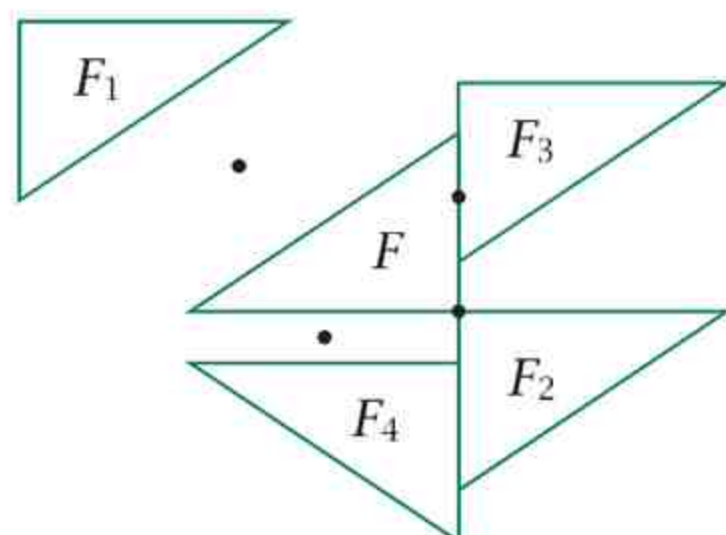
Przed klasówką

1. Na którym rysunku punkty E i F leżą symetrycznie względem narysowanej prostej?



2. Ustal, czy osią symetrii rombu, który nie jest kwadratem, jest:

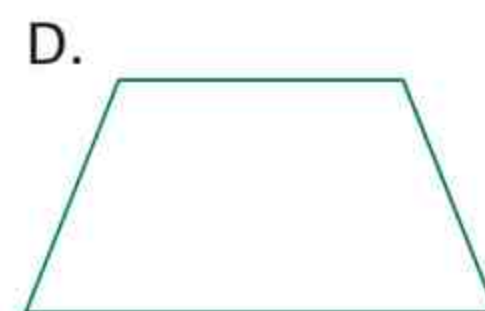
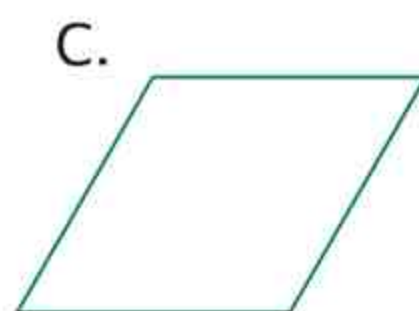
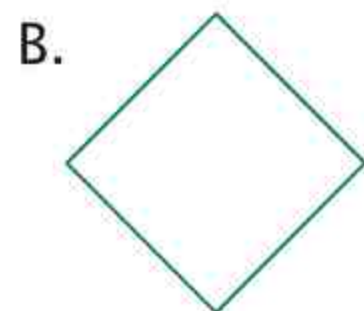
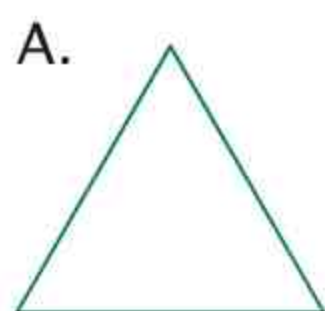
- | | |
|---|---------|
| a) prosta przechodząca przez przeciwległe wierzchołki, | TAK/NIE |
| b) symetralna jednego boku, | TAK/NIE |
| c) prosta przechodząca przez środki dwóch przeciwległych boków. | TAK/NIE |



3. Jedna z figur F_1 , F_2 , F_3 i F_4 **nie** jest symetryczna do figury F względem żadnego z zaznaczonych punktów. Która to figura?

- | | |
|----------|----------|
| A. F_1 | C. F_3 |
| B. F_2 | D. F_4 |

4. Na rysunkach przedstawiono trójkąt równoboczny, kwadrat, romb oraz trapez równoramienny. Która z tych figur ma najwięcej osi symetrii?



5. Który z poniższych punktów leży na symetralnej odcinka o końcach w punktach $P = (-2, -8)$ i $R = (-2, 2)$?

- | | | | |
|--------------|---------------|----------------|--------------|
| A. $(-2, 0)$ | B. $(-4, -8)$ | C. $(-10, -3)$ | D. $(0, -4)$ |
|--------------|---------------|----------------|--------------|

6. Punkt symetryczny do punktu $P = (-6, 5)$ względem początku układu współrzędnych to:

- A. $(-6, -5)$ B. $(6, -5)$ C. $(6, 5)$ D. $(-5, 6)$

7. Jedna z przekątnych trapezu równoramiennego zawiera się w dwusiecznej kąta ostrego tego trapezu. Podstawy trapezu mają długości 8 cm i 15 cm. Jaki obwód ma ten trapez?

- A. 23 cm B. 31 cm C. 39 cm D. 35 cm

8. Pewien wielokąt ma środek symetrii. Czy każda prosta przechodząca przez ten środek dzieli wielokąt na dwie części o równych polach? Wybierz odpowiedź „tak” lub „nie” oraz jej uzasadnienie spośród zdań od A do D.

Ⓘ Tak, ponieważ...

Ⓜ Nie, ponieważ...

A — ...przez środek symetrii przechodzi wiele różnych prostych.

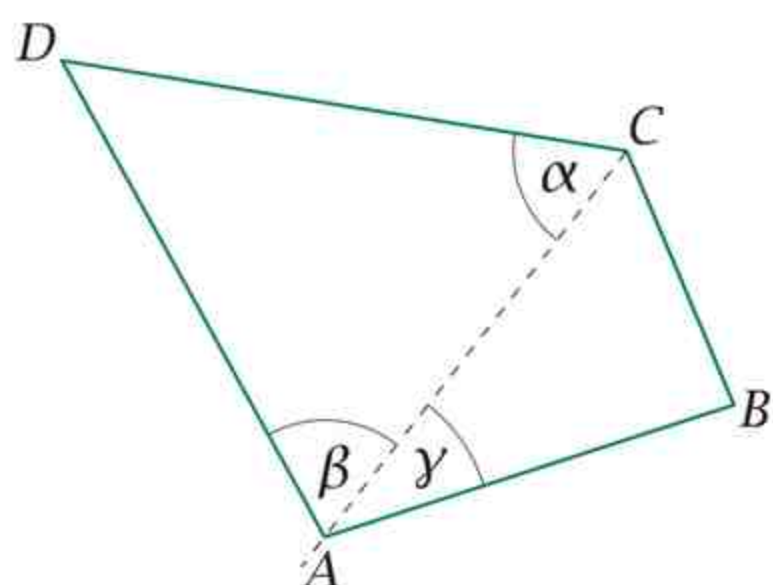
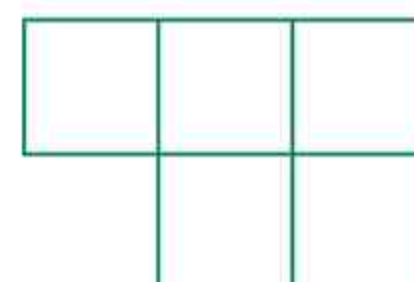
B — ...wielokąt, który ma środek symetrii, nie musi mieć osi symetrii.

C — ...jeśli jedną z części, na które podzielono wielokąt, obrócimy o 180° względem środka symetrii, to dokładnie pokryje się ona z drugą częścią wielokąta.

D — ...każda prosta przechodząca przez środek symetrii jest osią symetrii wielokąta.

9. Figura narysowana obok składa się z pięciu jednakowych kwadratów. Przerysuj ją do zeszytu i dorysuj dwa takie same kwadraty tak, aby otrzymana figura miała:

- a) oś symetrii, b) środek symetrii.



10. Na rysunku obok przedstawiono czworokąt $ABCD$. Półprosta AC jest dwusieczną kąta BCD . Jakie miary mają kąty α , β i γ , jeśli $\sphericalangle ABC = 85^\circ$, $\sphericalangle ADC = 52^\circ$, $\sphericalangle BCD = 122^\circ$?

Zadania uzupełniające

Symetria względem prostej

1. Spróbuj narysować dwie figury symetryczne, rysując prawą i lewą ręką równocześnie.



2. Wśród rysunków oznaczonych numerami znajduje się figura symetryczna do figury F względem pewnej prostej. Która to figura?



3. Odcinek AB nie ma punktów wspólnych z prostą k i nie jest prostopadły do prostej k . Odcinek $A'B'$ jest symetryczny do odcinka AB względem prostej k . Jaka figurą jest czworokąt $AA'B'B$?

4. Odpowiedz, czy to prawda, że dwa odcinki symetryczne względem prostej:

- a) mogą być równoległe,
- b) mogą być prostopadłe,
- c) mogą leżeć na jednej prostej,
- d) mogą się pokrywać.

→ 5. Narysuj dowolny czworokąt oraz prostą przecinającą jego dwa przeciwległe boki. Skonstruuj czworokąt symetryczny do danego względem narysowanej prostej.

6. Narysuj dowolny trapez równoramienny i trapez do niego symetryczny względem prostej, która zawiera jedno z ramion.

7. Proste l i l' są symetryczne względem prostej k . Ustal, na ile części dzieli płaszczyznę proste k , l i l' . Rozważ różne przypadki.

8. Punkt M leży wewnątrz kąta ostrego o wierzchołku w punkcie A i mierze α . Znajdź punkty symetryczne do punktu M względem ramion kąta; oznacz je literami B i C . Jaka jest miara kąta BAC ?

9. Punkt M jest dowolnym punktem wewnętrznym kwadratu o boku długości a . Punkty E , F , G , H są punktami symetrycznymi do punktu M względem prostych zawierających boki kwadratu.

a) Jaką długość mają przekątne czworokąta $EFGH$?

b) Oblicz pole czworokąta $EFGH$.

10. Ustal, czy dla podanych dwóch figur niezależnie od ich położenia zawsze można znaleźć prostą, względem której są one symetryczne:

- a) dowolne dwa punkty,
- b) dowolne dwa odcinki przystające,
- c) dowolne dwie proste,
- d) dowolne dwie półproste,
- e) dwa przystające okręgi,
- f) dwa przystające kwadraty,
- g) dwa przystające trójkąty.

→ 11. Punkty $A = (-2, 1)$ i $B = (-2, 4)$ odbito symetrycznie względem osi x oraz względem osi y .

a) Jakie współrzędne mają otrzymane punkty?

b) Otrzymane cztery punkty są wierzchołkami pewnego czworokąta. Jaki to czworokąt?

Oś symetrii figury

12. Złóż kartkę papieru na cztery części i wytnij na brzegach wybrany przez ciebie wzór. Rozłóż kartkę. Ile osi symetrii ma twoja wycinanka?



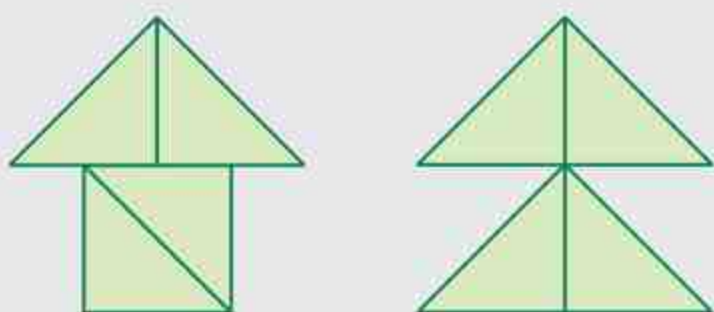
→ **13.** a) Które cyfry mają oś symetrii? Które mają więcej niż jedną oś symetrii?

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

b) Ile można zapisać liczb trzycyfrowych, które mają dwie osie symetrii?

c) Ile można zapisać liczb dwucyfrowych, które mają dokładnie jedną oś symetrii?

14. Wytnij cztery jednakowe trójkąty prostokątne równoramienne. Ułóż z nich 5 różnych figur, z których każda ma dokładnie jedną oś symetrii. Oto przykłady:



→ **15.** Narysuj sześciokąt, który ma:

- a) dokładnie jedną oś symetrii,
- b) dokładnie dwie osie symetrii.

○ **16.** Ile osi symetrii może mieć figura:

- a) złożona z okręgu i cięciwy,
- b) złożona z okręgu i dwóch cięciw,
- c) złożona z okręgu i prostej,
- d) złożona z dwóch okręgów o jednakowych promieniach,
- e) złożona z dwóch okręgów o różnych promieniach?

Symetralna odcinka

17. Zaznacz dwa dowolne punkty i narysuj kilka okręgów przechodzących przez te punkty.

18. W trójkącie o obwodzie 16 cm jeden z boków ma długość 4 cm. Symetralna tego boku przechodzi przez wierzchołek trójkąta. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

□ **19.** W trójkącie ABC symetralna boku AC przechodzi przez wierzchołek B , zaś symetralna boku BC przechodzi przez wierzchołek A . Wykaż, że trójkąt ABC jest równoboczny.

20. a) Czy punkt $P = (11, 9\frac{1}{2})$ leży na symetralnej odcinka, którego końcami są punkty $A = (0, 0)$ i $B = (12, -5)$?

b) Czy początek układu współrzędnych leży na symetralnej odcinka o końcach $K = (-8, 11)$ i $L = (-4, 13)$?

Dwusieczna kąta

21. W równoległoboku o bokach długości 6 i 4 poprowadzono dwusieczne kątów wewnętrznych. Na jakie części dzieli dłuższy bok równoległoboku:

- a) dwusieczna kąta ostrego,
- b) dwusieczna kąta rozwartego?

□ **22.** W trójkącie ABC dwusieczne kątów przy wierzchołkach A i B przecinają się w punkcie O . Przez punkt O prowadzimy proste równoległe do boków AC i BC , przecinające bok AB w punktach D i E . Uzasadnij, że obwód trójkąta DEO jest równy długości boku AB .

23. Skonstruuj trójkąt równoramienny o podstawie długości 3 cm, w którym kąt między ramionami ma miarę 30° .

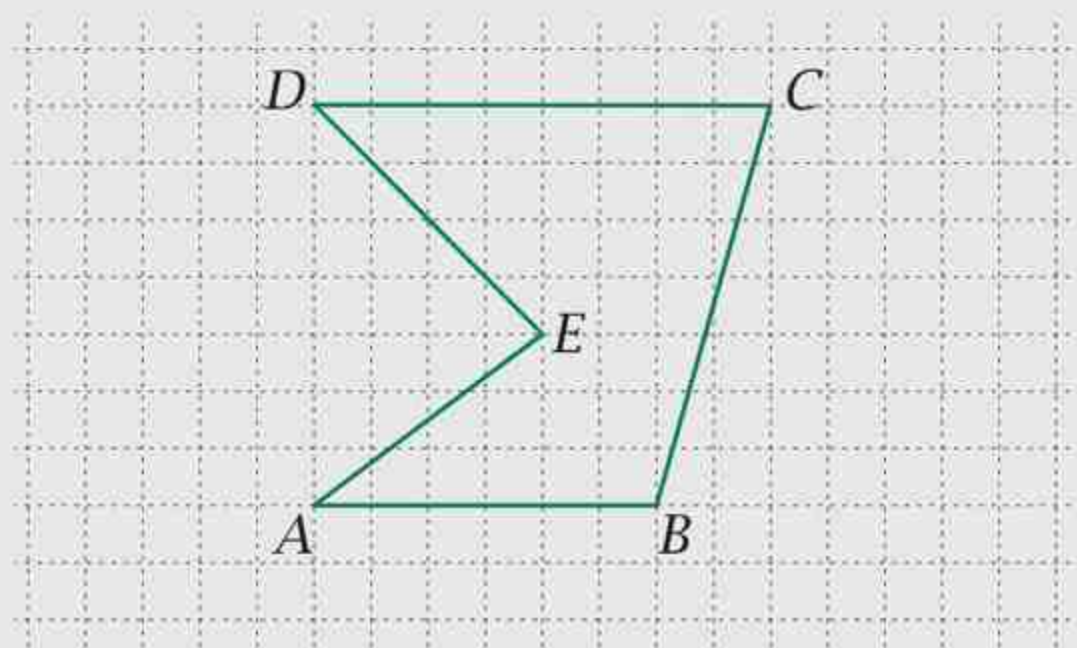
- 24. W równoległoboku, który nie jest rombem, poprowadzono dwusieczne wszystkich kątów wewnętrznych. Uzasadnij, że czworokąt, którego wierzchołkami są punkty przecięcia tych dwusiecznych, jest prostokątem.

Symetria względem punktu

- 25. Narysuj dowolny trapez prostokątny (nierównoramienny) oraz trapez do niego symetryczny względem:
- wierzchołka kąta ostrego,
 - punktu przecięcia przekątnych.

26. Przerysuj poniższy wielokąt i narysuj wielokąt do niego symetryczny względem:

- punktu C ,
- punktu E .



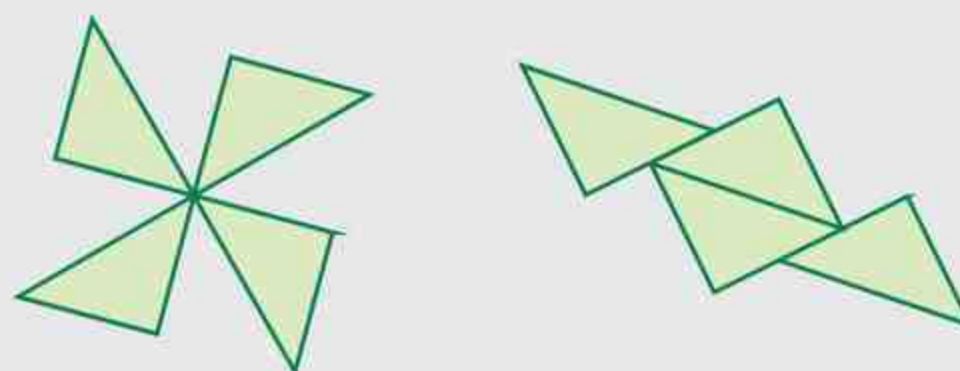
27. Narysuj dowolny trójkąt prostokątny ABC . Znajdź punkt A' symetryczny do punktu A względem środka przeciwprostokątnej BC . Jaką figurą jest czworokąt $ABA'C$?

28. Jaką figurę stanowi zbiór wszystkich punktów symetrycznych do środka okręgu względem punktów tego okręgu?

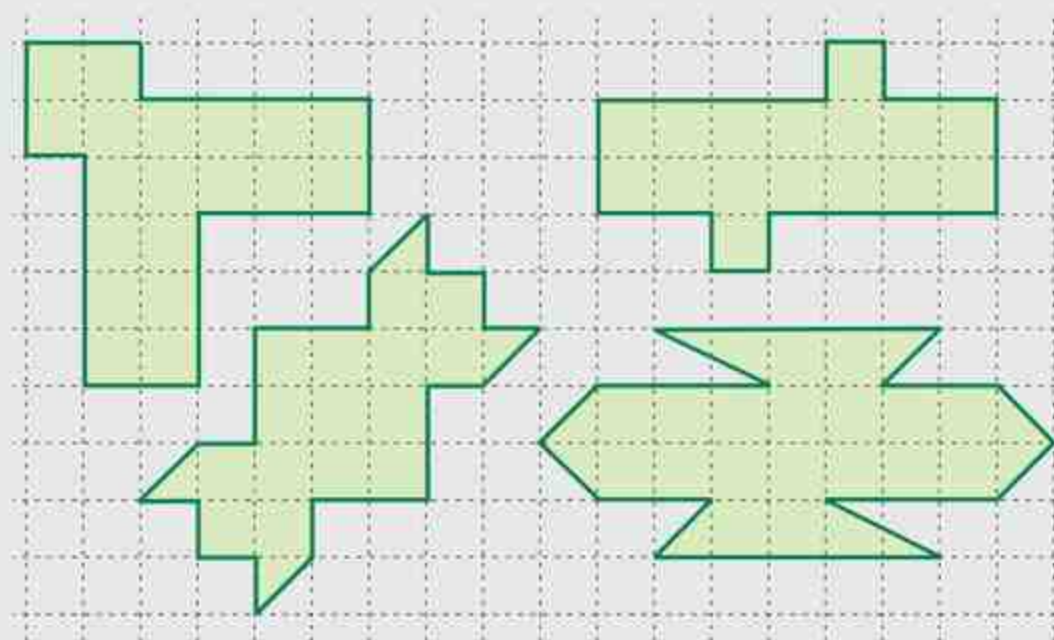
- 29. W układzie współrzędnych narysuj trójkąt ABC o wierzchołkach w punktach $A = (-3, -3)$, $B = (3, -3)$, $C = (0, 3)$. Narysuj trójkąt symetryczny do trójkąta ABC względem punktu $(0, 0)$. Ile osi symetrii ma figura zbudowana z tych trójkątów?

Środek symetrii figury

30. Z czterech jednakowych trójkątów równoramiennych prostokątnych ułóż pięć różnych figur środkowsymetrycznych. Oto przykłady takich figur:



31. Ile spośród poniższych figur ma oś symetrii, a nie ma środka symetrii?



32. Dla każdej z podanych figur ustal, ile ma osi symetrii i czy jest środkowsymetryczna:

- romb,
- siedmiokąt foremny,
- dziesięciokąt foremny.

33. Kiedy figura złożona z trzech prostych ma środek symetrii?

- *34. Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Opisz, jak usunąć z kwadratu n punktów, aby otrzymana figura nadal miała środek symetrii, gdy n jest liczbą:
- parzystą,
 - nieparzystą.

35. Punkty $K = (-35, -12)$ i $L = (15, -12)$ są wierzchołkami równoległoboku $KLMN$, a środkiem symetrii tego czworokąta jest początek układu współrzędnych. Jakie współrzędne mają wierzchołki M i N ?

VII KOŁA I OKRĘGI

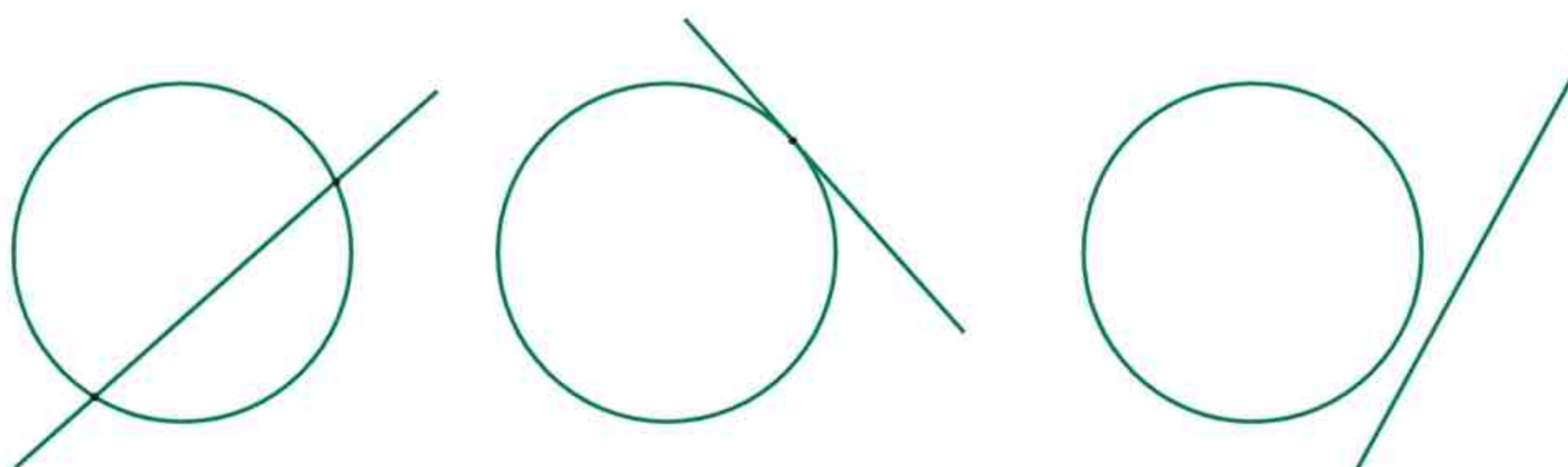
- 1 Styczna do okręgu
- 2 Wzajemne położenie dwóch okręgów
- 3 Liczba π . Długość okręgu
- 4 Pole koła

➤ Przed klasówką, s. 252

➤ Zadania uzupełniające, s. 254

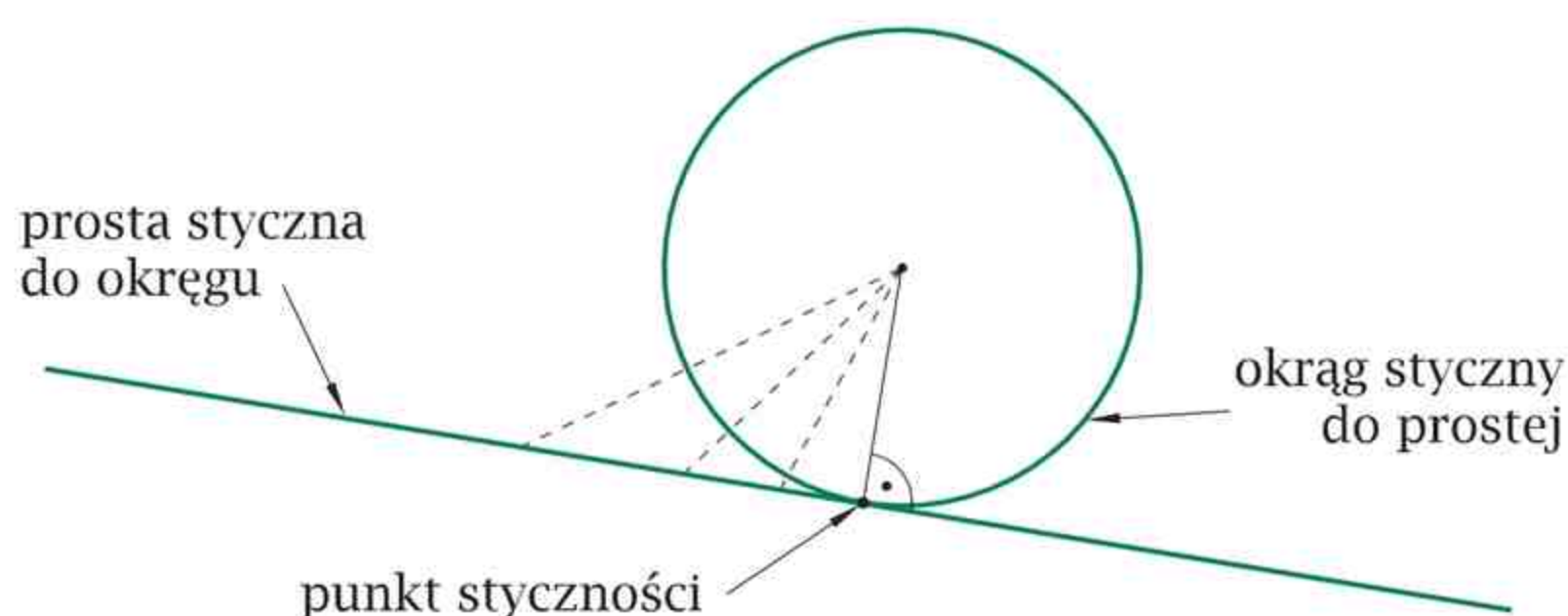
1 Styczna do okręgu

Przyjrzyj się rysunkom. Prosta może mieć z okręgiem dwa punkty wspólne, może mieć jeden punkt wspólny, może też nie mieć żadnego punktu wspólnego.



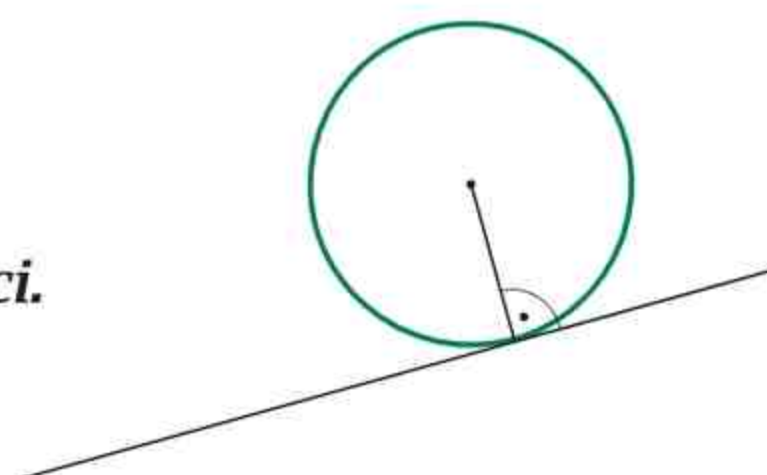
ĆWICZENIE. Narysuj dowolną prostą i zaznacz punkt S w odległości 3 cm od tej prostej. Ile punktów wspólnych z prostą ma okrąg o środku S i promieniu r , gdy: a) $r < 3$ cm, b) $r > 3$ cm, c) $r = 3$ cm?

Mówimy, że **prosta jest styczna do okręgu**, jeżeli ma z tym okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny. Punkt ten nazywamy punktem styczności.



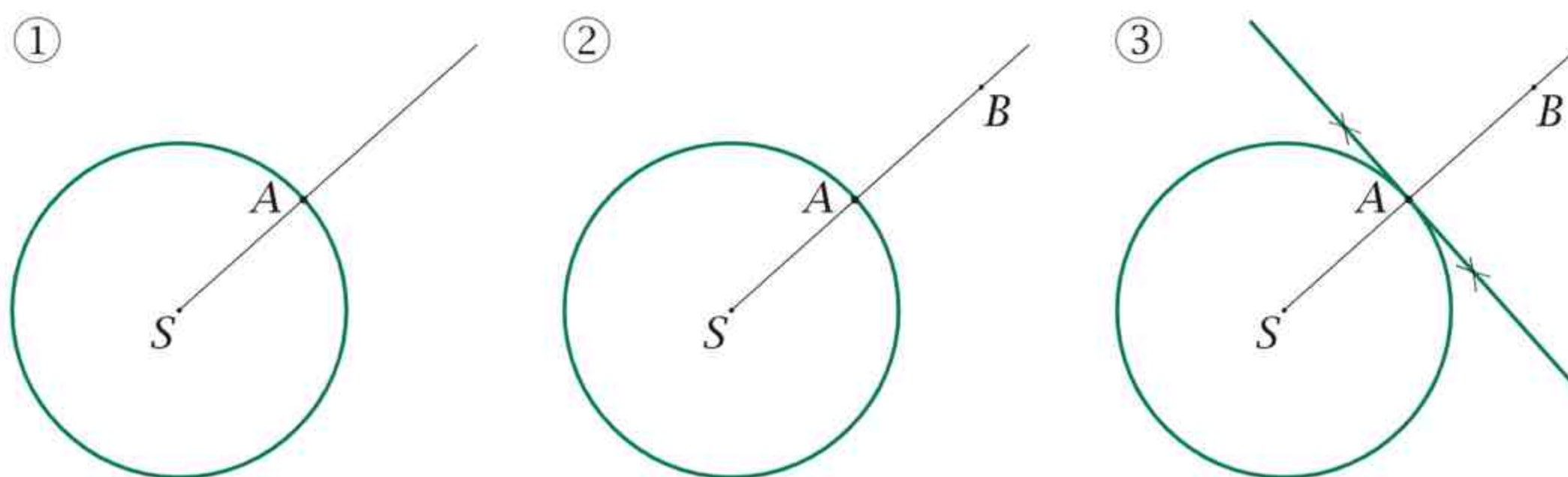
Zauważ, że promień poprowadzony do punktu styczności jest najkrótszym z odcinków łączących środek okręgu ze styczną (inne odcinki mają długość większą od promienia okręgu). Wiemy, że odcinek łączący punkt z prostą jest najkrótszy, gdy jest prostopadły do prostej. Wynika stąd następująca własność:

Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności.



Konstrukcja

Konstrukcja stycznej do okręgu, przechodzącej przez dany punkt na okręgu.



- ① Prowadzimy półprostą SA .
- ② Wyznaczamy na narysowanej półprostej punkt B , taki że $|SB| = 2 \cdot |SA|$.
- ③ Kreślimy symetralną odcinka SB .

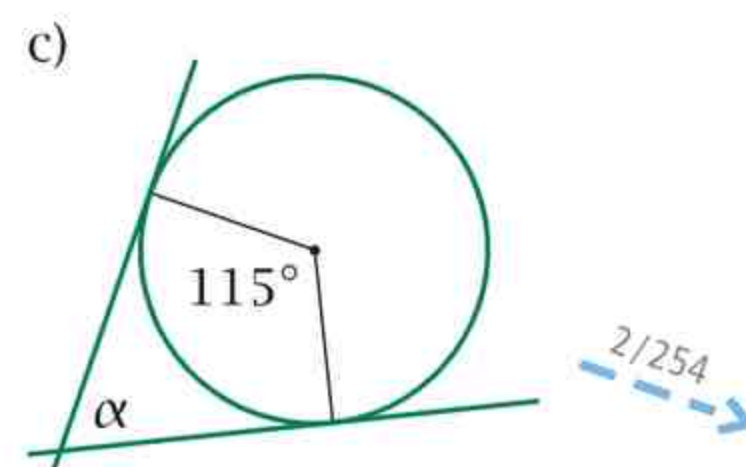
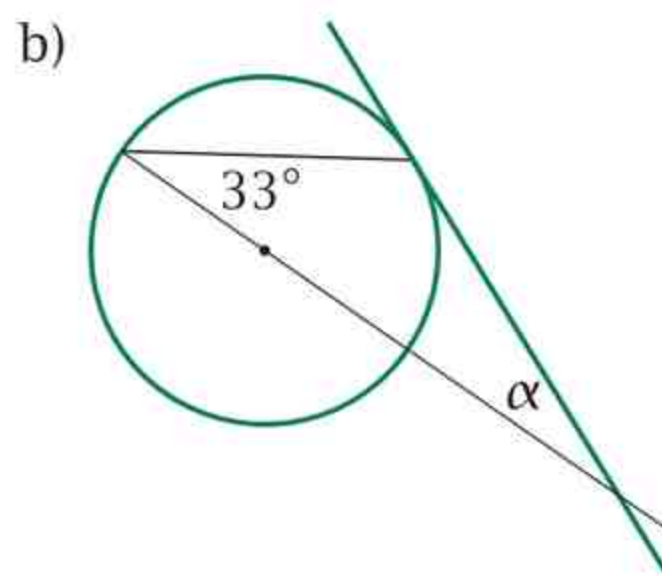
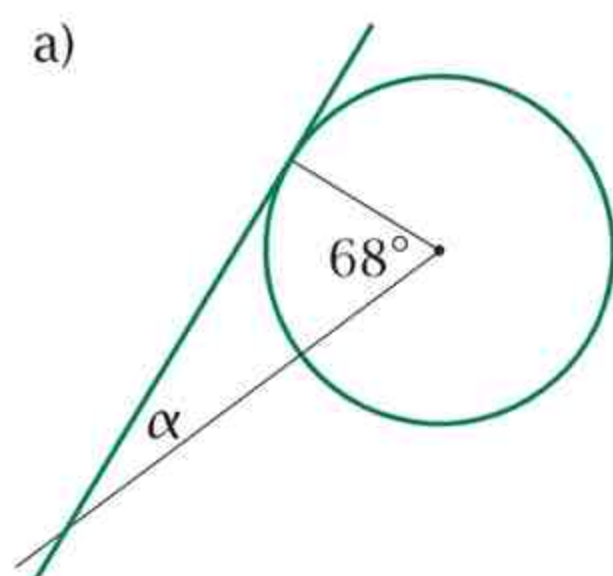
Zadania

1. Zbadaj, ile punktów wspólnych może mieć okrąg z figurą złożoną z dwóch prostych. Rozważ różne położenia prostych względem siebie.
2. Rysujemy pięć okręgów o tym samym środku S . Najmniejszy okrąg ma promień 2 cm, a każdy następny ma promień o 1 cm dłuższy od poprzedniego. Ustal, ile jest punktów wspólnych tej rodziny okręgów z prostą, od której punkt S jest odległy o:
 - a) 1 cm b) 5 cm c) 6,9 cm
3. Wyobraź sobie, że na kartce w linie rysujemy okręgi. Odległość między sąsiednimi liniami wynosi 8 mm.
 - a) W ilu punktach łącznie okrąg o środku leżącym na jednej z linii i o promieniu 5 cm przecinałby linie na kartce?
 - b) Gdzie powinien leżeć środek okręgu o promieniu 3 cm, aby przecinał jak najmniej linii?
 - c) Uzasadnij, że niezależnie od tego gdzie leży środek okręgu o promieniu 2 cm, ma on zawsze 10 punktów wspólnych z liniami na kartce.
4. a) Narysuj dowolny okrąg, zaznacz na nim punkt A . Skonstruuj prostą styczną do tego okręgu, przechodzącą przez punkt A .
 b) Narysuj dowolną prostą i zaznacz punkt S nieleżący na tej prostej. Skonstruuj okrąg o środku S , styczny do narysowanej prostej.



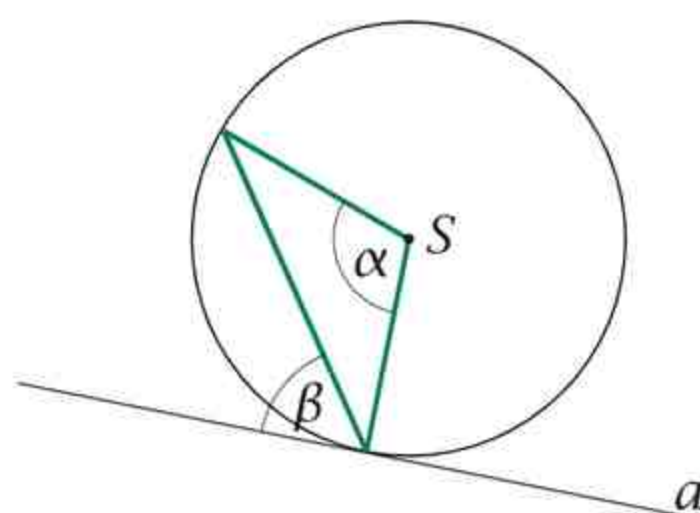
5. a) Narysuj dwie proste równoległe. Skonstruuj okrąg do nich styczny.
 b) Narysuj dwie proste prostopadłe. Skonstruuj okrąg do nich styczny.
6. Narysuj okrąg i dowolną jego cięciwę. Skonstruuj styczną do tego okręgu, równoległą do narysowanej cięciwy. (Są dwie takie proste).
7. Na prostej stycznej do okręgu o środku S i promieniu 3 cm zaznaczono odcinek AB o długości 4 cm. Jakie pole ma trójkąt SAB ?

8. Narysowane proste są styczne do okręgów. Oblicz miarę kąta α .



9. Cięciwa AB ma taką samą długość jak promień okręgu. Przez punkty A i B poprowadzono styczne do okręgu, przecinające się w punkcie C . Oblicz miary kątów trójkąta ABC .

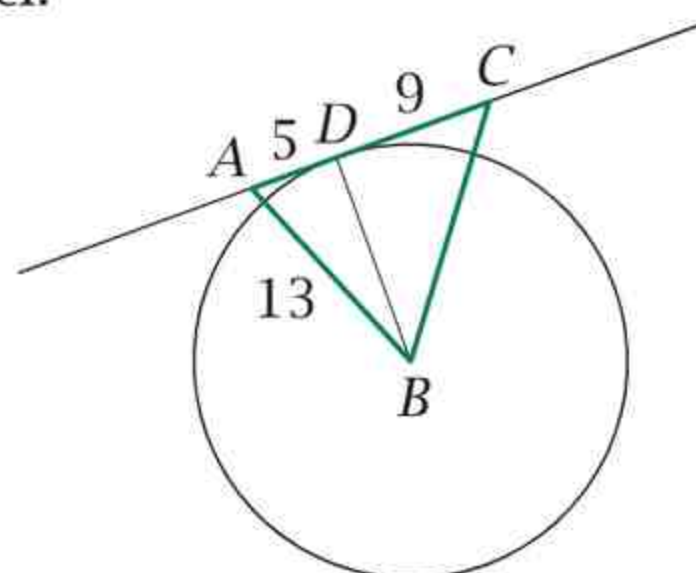
10. Na rysunku obok prosta a jest styczna do okręgu o środku S . Uzasadnij, że kąt α jest 2 razy większy niż kąt β .



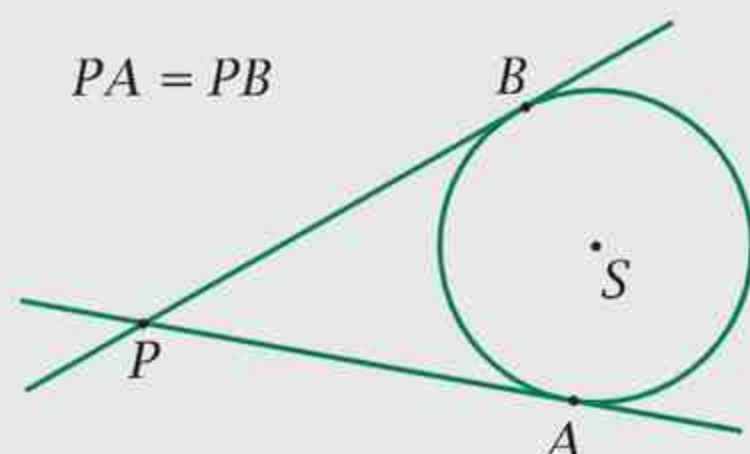
11. Okrąg o promieniu r jest styczny do dwóch prostych, które są prostopadłe. Jaka jest odległość środka tego okręgu od punktu przecięcia prostych?

12. Z punktu A poprowadzono styczną do okręgu o promieniu 20. Odległość tego punktu od środka okręgu wynosi 25. Oblicz odległość między punktem A i punktem styczności.

13. Popatrz na rysunek obok. Prosta AC jest styczna do okręgu o środku B w punkcie D . Oblicz obwód trójkąta ABC .

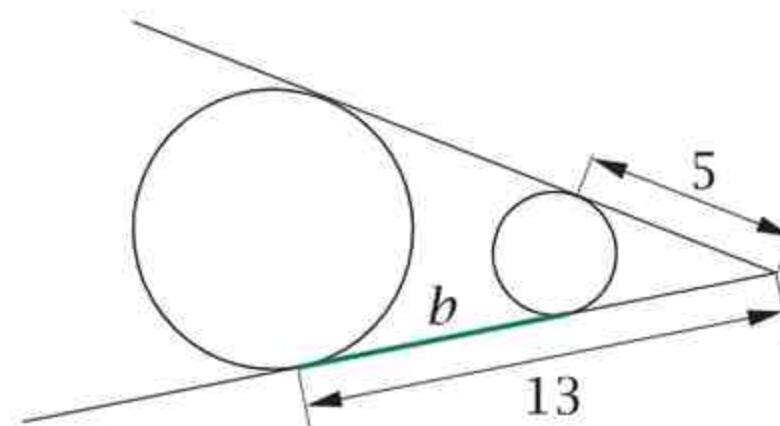
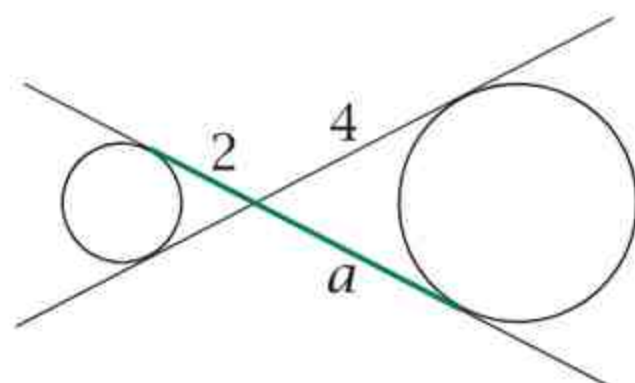


Ciekawostka

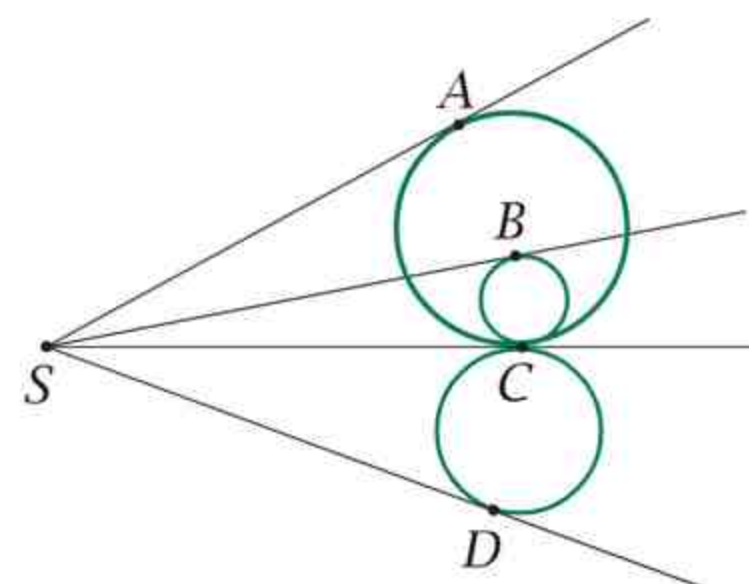


Jeżeli dwie styczne do okręgu przecinają się w punkcie P , to odcinki łączące punkt P z punktami styczności mają tę samą długość.

14. a) Uzasadnij własność podaną w ciekawostce.
 b) Oblicz długości odcinków a i b zaznaczonych na poniższych rysunkach. (Końce tych odcinków to punkty styczności okręgów z prostą).



- c) Na rysunku obok półproste o początku S są styczne do narysowanych okręgów. Uzasadnij, że punkty styczności — A , B , C i D leżą na okręgu o środku S i promieniu SA .



Sprawdź, czy umiesz

1. Przez punkty A i B leżące na okręgu o środku S poprowadzono dwie styczne do tego okręgu. Styczne te przecięły się w punkcie P . Która równość jest fałszywa?

A. $SB^2 + BP^2 = PS^2$

C. $AP^2 = PS^2 - SA^2$

B. $AS^2 + AB^2 = SB^2$

D. $AS - SB = 0$

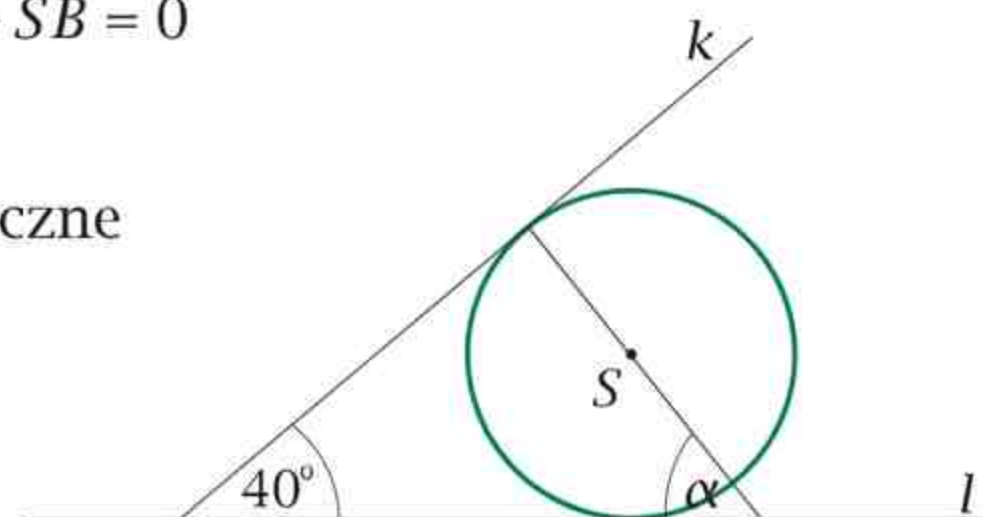
2. Na rysunku obok proste k i l są styczne do okręgu. Kąt α ma miarę:

A. 40°

C. 70°

B. 50°

D. 140°

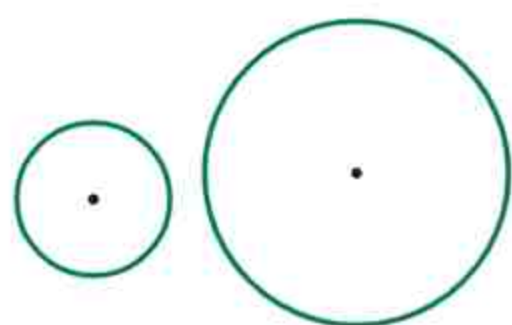


2 Wzajemne położenie dwóch okręgów

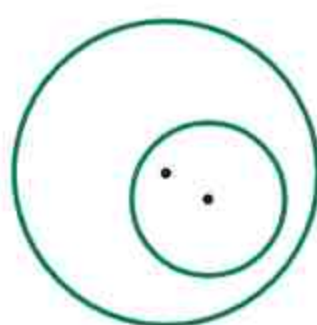
ĆWICZENIE A. Odcinek AB ma 5 cm. Okrąg o środku A ma promień 2 cm. Ustal, ile punktów wspólnych z tym okręgiem ma okrąg o środku B i promieniu:

- a) 2,5 cm b) 3 cm c) 4 cm d) 6 cm e) 7 cm f) 8 cm

Dwa okręgi mogą być względem siebie położone w różny sposób.

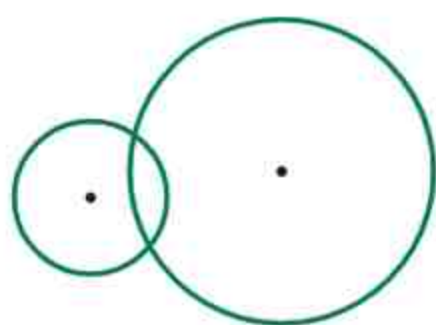


Okręgi rozłączne

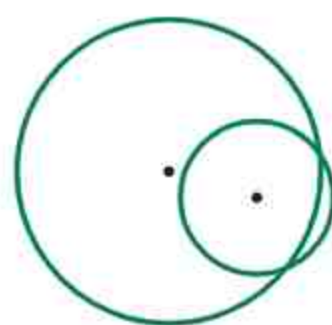


Okręgi rozłączne

- Mogą nie mieć punktów wspólnych. Mówimy wówczas, że są rozłączne.

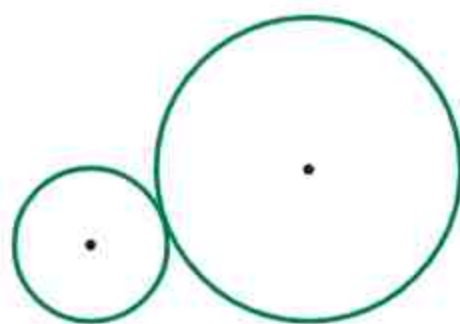


Okręgi przecinające się

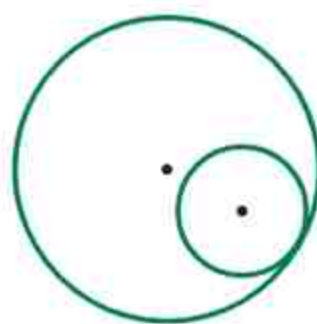


Okręgi przecinające się

- Mogą mieć dwa punkty wspólne. Mówimy wówczas, że się przecinają.



Okręgi styczne zewnętrznie

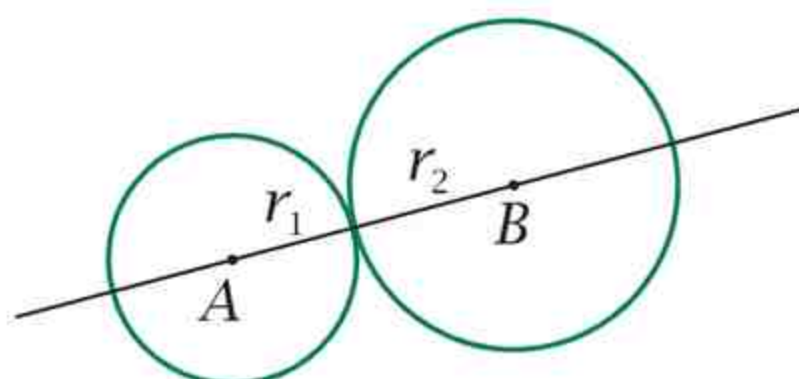


Okręgi styczne wewnętrznie

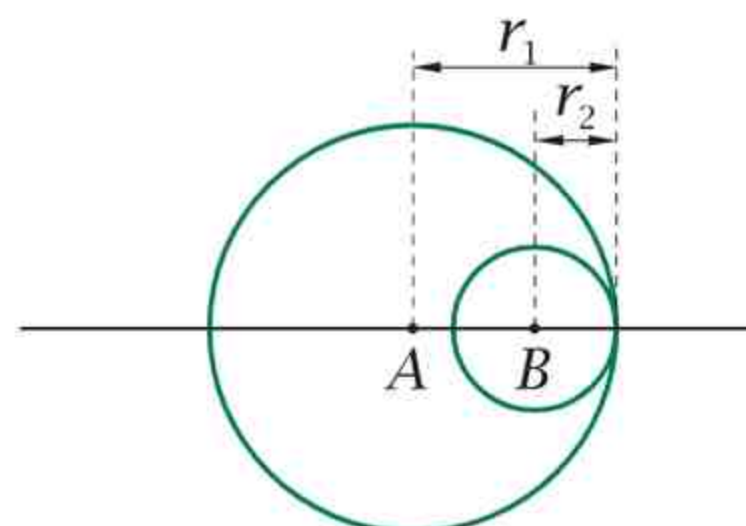
- Mogą mieć jeden punkt wspólny. Tak położone okręgi nazywamy okręgami stycznymi.

ĆWICZENIE B. Spróbuj narysować dwa okręgi styczne zewnętrznie, których promienie mają 1,5 cm i 2,5 cm.

Prosta przechodząca przez środki dwóch okręgów stycznych przechodzi także przez punkt styczności.



$$AB = r_1 + r_2$$



$$AB = r_1 - r_2$$

Zadania

1. Okrąg o środku S ma promień 5 cm, a okrąg o środku P ma promień 7 cm. Ustal, jakie jest wzajemne położenie tych okręgów, jeśli:

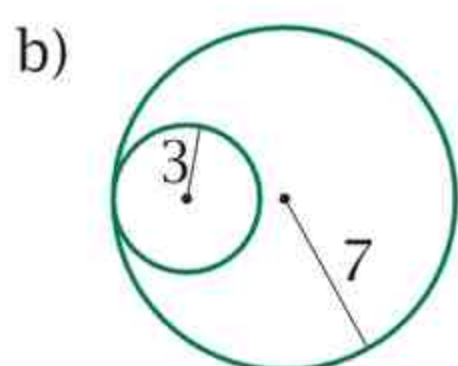
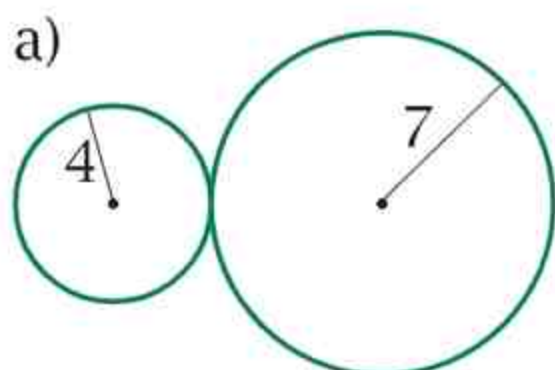
a) $SP = 10$

b) $SP = 12$

c) $SP > 15$

d) $SP < 2$

2. Ustal, ile punktów wspólnych może mieć prosta z figurą zbudowaną z dwóch okręgów.



3. Okręgi narysowane obok są styczne. Oblicz, jaka jest odległość między środkami tych okręgów.

4. Określ, jaka jest odległość między środkami okręgów o promieniach 5 cm i 8 cm, gdy:

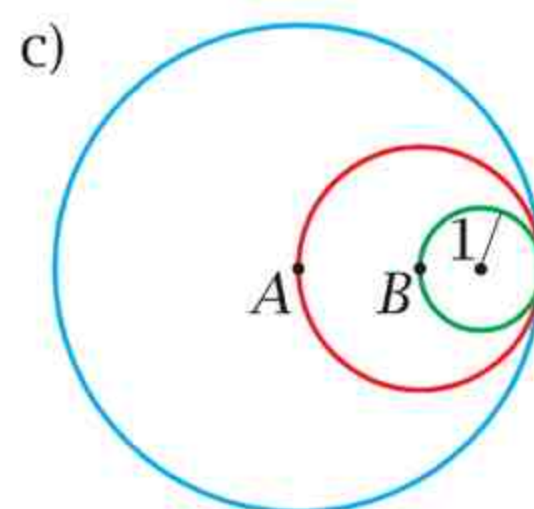
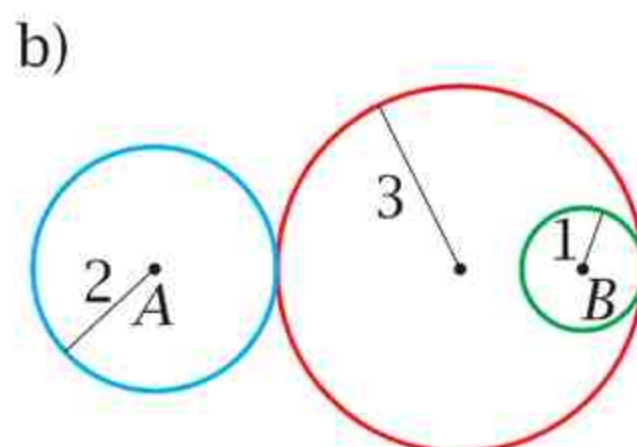
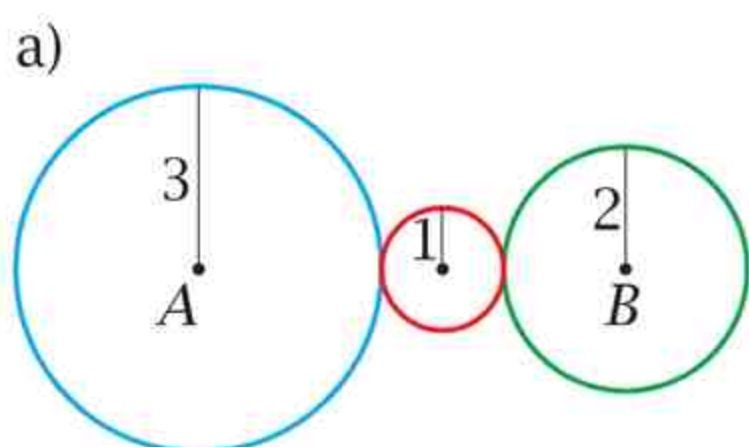
a) okręgi te są styczne zewnętrznie,

b) okręgi są styczne wewnętrznie,

c) mniejszy okrąg przechodzi przez środek większego,

d) większy okrąg przechodzi przez środek mniejszego.

5. Punkty A i B to środki odpowiednich okręgów. Czerwony okrąg jest styczny zarówno do niebieskiego, jak i do zielonego okręgu. Środki wszystkich okręgów leżą na jednej prostej. Oblicz długość odcinka AB .



6. Ustal, jak są położone względem siebie dwa okręgi, jeśli:

a) jeden z nich ma środek w punkcie $A = (-1, 7)$ i promień długości 5, a drugi ma środek w punkcie $B = (11, 2)$ i promień długości 8,

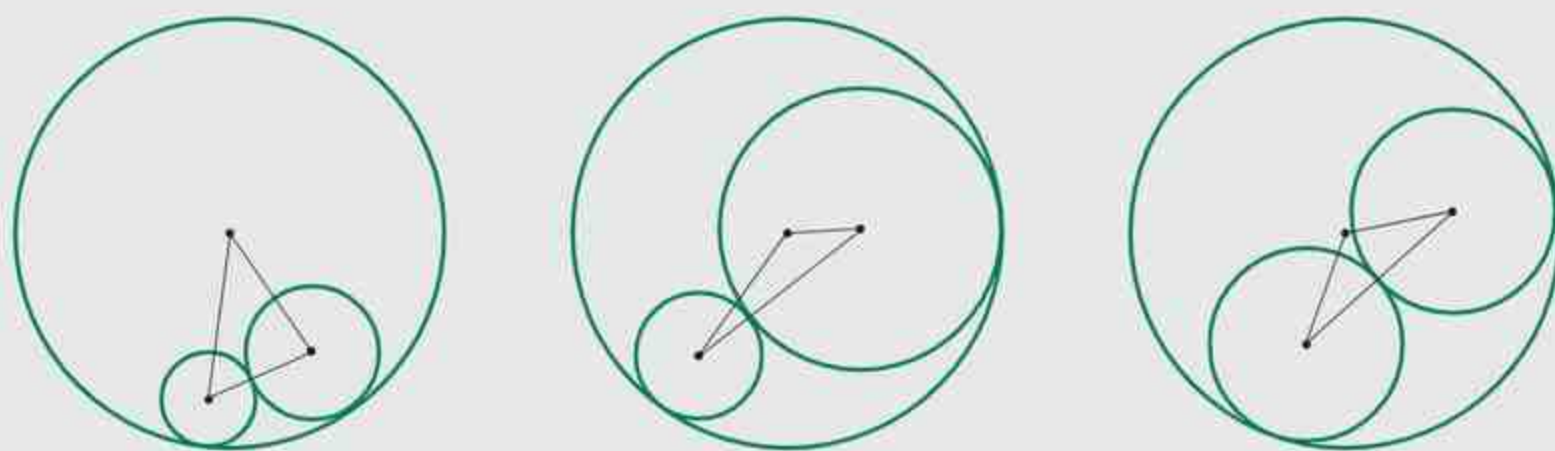
b) jeden z nich ma środek w punkcie $S = (-9, 4)$ i promień długości 5, a drugi ma środek w punkcie $P = (-5, 1)$ i promień długości 3.

7. Okrąg o środku w punkcie $S = (0, 5)$ ma promień długości 1 i jest styczny do okręgu o środku A i promieniu długości 10. Punkt A leży na osi y . Jakie ma współrzędne? Uwaga. Zadanie ma 4 rozwiązania.

*8. Czy w garnku o średnicy 24 cm zmieszczą się (ustawione pionowo, obok siebie) 4 słoiki o średnicy 10 cm każdy?

Ciekawostka

Na każdym z poniższych rysunków największy okrąg ma promień długości r , a dwa mniejsze okręgi są styczne do siebie i jednocześnie styczne wewnętrznie do większego okręgu. Można wykazać, że każdy z zaznaczonych trójkątów ma taki sam obwód.



*9. Jaki obwód mają trójkąty, o których mowa w powyższej ciekawostce?

Sprawdź, czy umiesz

- Odcinek AB ma długość 8 cm. Ile punktów wspólnych ma okrąg o środku A i promieniu 4 cm z okręgiem o środku B i promieniu 12 cm?

A. 1 punkt wspólny	C. 3 punkty wspólne
B. 2 punkty wspólne	D. nie mają punktów wspólnych
- Okrąg o środku $S = (0, 5)$ i promieniu 2 jest styczny zewnętrznie do okręgu o środku P i promieniu r , gdy:

A. $P = (0, 0)$ i $r = 5$	C. $P = (0, 6)$ i $r = 1$
B. $P = (0, 10)$ i $r = 3$	D. $P = (0, -10)$ i $r = 12$

→ zadania uzupełniające 4–7, str. 254

3

Liczba π . Długość okręgu

Wyobraź sobie, że rozcinamy okrąg i „prostujemy” linię, która ten okrąg tworzyła. Otrzymany w ten sposób odcinek ma taką samą długość jak okrąg.



Każdy okrąg jest brzegiem pewnego koła. Długość okręgu nazywana jest też obwodem koła.

Zauważmy, że im większa średnica okręgu, tym większa jest długość okręgu. Zastanówmy się, jaki jest związek między tymi wielkościami.



ĆWICZENIE A. Przygotuj przedmiot, którego brzeg ma kształt okręgu (np. puszkę lub nakrętkę od słoika).

Zmierz średnicę tego przedmiotu.

Zmierz jego obwód, tzn. długość okręgu (używając miary krawieckiej lub nitki).

Podziel długość okręgu przez długość średnicy; możesz użyć kalkulatora.

Powtórz takie pomiary i rachunki dla kilku przedmiotów. Porównaj otrzymane wyniki.

Już w czasach starożytnych zauważono, że stosunek długości okręgu do długości średnicy jest dla wszystkich okręgów tą samą liczbą. Liczbę tę oznaczamy grecką literą π (czytamy: *pi*).

$$\frac{\text{długość okręgu}}{\text{długość średnicy}} = \pi$$

Liczba π nie jest wymierna, jej rozwinięcie dziesiętne jest nieskończone i nieokresowe.

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937...$$

ĆWICZENIE B. a) Rozszyfruj, jaki związek z liczbą π mają podane niżej teksty w języku polskim, angielskim i szwedzkim.

JAŚ O KOLE Z WERWĄ DYSKUTUJE,
BO DOBRZE TEMAT TEN CZUJE.
ZASTĄPIŁ LUDOLFINĘ SŁOWAMI WIERSZYKA.
CZY TY JUŻ ODGADLEŚ, SKĄD ZMIANA TA WYNIKA?...

FOR A TIME I STOOD PONDERING
ON CIRCLE SIZES. THE LARGE
COMPUTER MAINFRAME QUIETLY PROCESSED
ALL OF ITS ASSEMBLY CODE. INSIDE MY ENTIRE...

HÖR I ALLA I KWALL ARKIMEDES
JU LOVADE KOMMA. HAN SKALL
PITALETS VANSKLIGA SIFFROR FRAMSALLA
FÖR ER. DEM FÖRVISSO. RÄTT MÄNGEN EJ MINNES...

b) Wymyśl zdanie, w którym liczby liter w kolejnych wyrazach odpowiadają kolejnym cyfrom rozwinięcia dziesiętnego liczby π .

Ciekawostka

Matematycy od dawna starają się wyznaczyć jak najwięcej cyfr rozwinięcia dziesiętnej liczby π . W 1610 roku holenderski uczony Ludolf van Ceulen podał 35 cyfr po przecinku. Na jego cześć liczba π nazywana jest czasem **ludolfiną**. Angielski matematyk William Shanks podał w 1874 roku 707 cyfr po przecinku. Okazał się jednak pechowcem — kilkadziesiąt lat później zauważono, że popełnił błąd przy obliczaniu 528. cyfry po przecinku. Dziś za pomocą komputera można obliczyć miliony cyfr rozwinięcia dziesiętnej liczby π .

Wszystkie znane dowody świadczące, że liczba π jest niewymierna, wymagają wiedzy z matematyki wykraczającej poza program szkolny. Pierwszy dowód podał matematyk Johann Lambert w 1761 roku.

Liczba π występuje w wielu zagadnieniach matematycznych. Pełni ona tak szczególną rolę, że uczeni, poszukując kontaktu z cywilizacjami pozaziemskimi, wysłali w kosmos drogą radiową informację o wartości liczby π . Wierzą, że inteligentne istoty spoza Ziemi (o ile istnieją) znają tę liczbę i rozpoznają nasz komunikat.

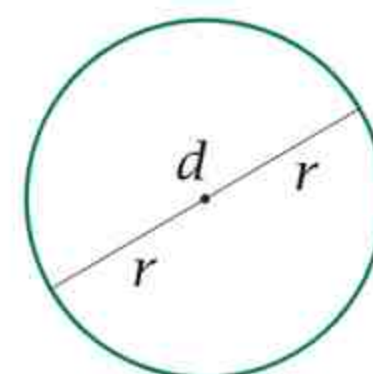
Wiemy już, że dla każdego okręgu o długości l i średnicy d zachodzi równość $\frac{l}{d} = \pi$. Przekształcając tę równość, otrzymamy zależność:

$$l = \pi d$$

Ponieważ średnica jest dwukrotnie większa od promienia okręgu, więc długość okręgu o promieniu r można obliczyć ze wzoru:

$$\text{Długość okręgu: } l = 2\pi r$$

r — długość promienia okręgu



ĆWICZENIE C. Oblicz przybliżoną długość okręgu o promieniu 5 m, przyjmując różne zaokrąglenia liczby π :

- a) $\pi \approx 3$ b) $\pi \approx 3,1$ c) $\pi \approx 3,14$ d) $\pi \approx 3,142$

Gdy obliczamy przybliżoną długość okręgu, musimy przyjąć pewne zaokrąglenie liczby π . Najczęściej wystarczy przyjąć, że $\pi \approx 3,14$.

Przykład

Jaki promień ma koło o obwodzie 20 cm?

$$l = 2\pi r$$

$$20 = 2\pi r$$

Stosujemy wzór na długość okręgu.

$$r = \frac{20}{2\pi} = \frac{10}{\pi} \approx 3,2 \text{ [cm]}$$

$$\frac{10}{\pi} \approx 3,2$$

Odp. Promień koła jest równy $\frac{10}{\pi}$ cm (czyli około 3,2 cm).

Zadania

1. Marek obliczał przybliżoną wartość liczby π , używając roweru. Koło wykonało pełny obrót. Odległość między punktami A i B wynosi 2,5 m. Średnica koła roweru Marka ma 0,8 m. Jakie przybliżenie liczby π otrzymał Marek?



Ciekawostka

Oto liczba π podana z dokładnością do 13 miejsca po przecinku:

$$\pi \approx 3,1415926535898$$

W czasach starożytnych nie były znane ułamki dziesiętne, używano natomiast przybliżeń liczby π w postaci ułamków zwykłych.

$$\pi \approx \frac{25}{8} \text{ — Babilonia (XX w. p.n.e.)}$$

$$\pi \approx \frac{22}{7} \text{ — Grecja (III w. p.n.e.)}$$

$$\pi \approx \frac{355}{113} \text{ — Chiny (V w. n.e.)}$$

2. Znajdź rozwinięcia dziesiętne ułamków zwykłych podanych w ciekawostce obok, a następnie zaokrąglij je do piątego miejsca po przecinku. Który z podanych ułamków jest najdokładniejszym przybliżeniem liczby π ?

3. Biblia (I Księga Królewska, rozdział 7, werset 23) podaje, że na zlecenie króla Salomona zbudowano kolisty zbiornik na wodę o obwodzie 30 łokci i średnicy 10 łokci. Jakie przybliżenie liczby π wynika z tych informacji?

4. Zapisz w jak najprostszej postaci.

a) $3,5 \cdot 2\pi$

c) $3\pi \cdot 2\pi$

e) $4\pi - 2,5\pi$

g) $\frac{3\pi + 6\pi}{3\pi}$

b) $3\pi \cdot 4$

d) $2\pi + 3\pi$

f) $\frac{3\pi}{\pi}$

h) $\frac{6\pi - 6}{2}$

5. a) Podaj długości okręgów o promieniach:

1 2 1,4 $\frac{2}{7}$

- b) Podaj długości okręgów o średnicach:

1 5 $\frac{2}{3}$ 4,2

- c) Podaj długości promieni kół o obwodach:

π 2 10π $0,6\pi$

6. Jeden z odcinków ma taką samą długość jak okrąg. Który?



7. a) Oblicz przybliżone długości okręgów o promieniach:

2 m

0,3 cm

10 km

b) Oblicz przybliżone długości okręgów o średnicach:

2 m

0,4 cm

200 m

c) Oblicz przybliżone długości promieni kół o obwodach:

1 m

628 mm

3,5 cm

10/254

8. Rulon o średnicy 8 cm należy obwiązać wstążką. Jak długa powinna być ta wstążka, jeśli na węzeł i kokardę potrzeba 20 cm?

9. Czy drutu o długości 60 cm wystarczy na wykonanie:

a) obręczy w kształcie okręgu o promieniu 10 cm,

b) dwóch obręczy, każda o promieniu 4 cm,

c) dwóch obręczy, z których jedna ma promień 6 cm, a druga 3 cm?

11/254

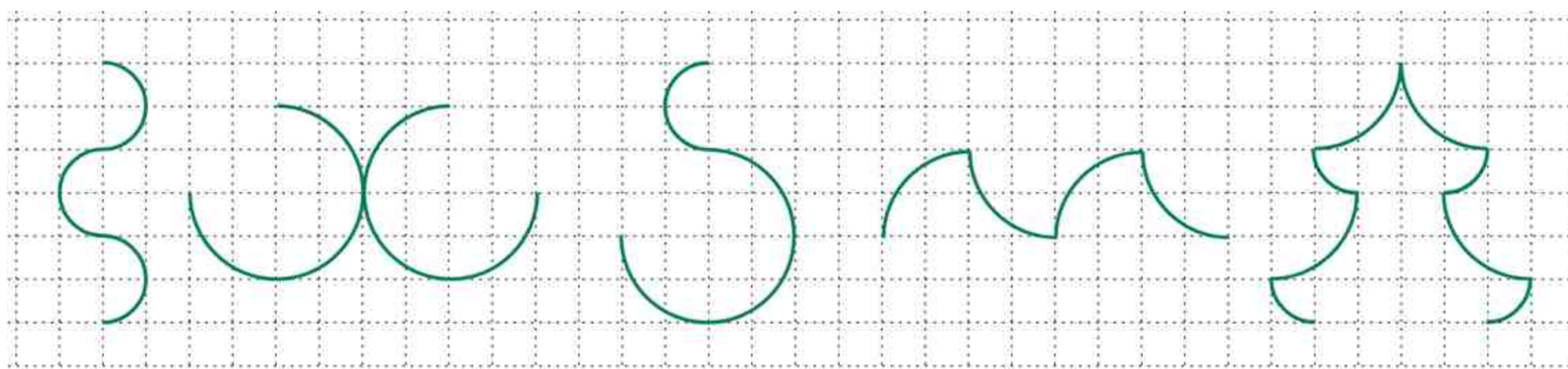
10. Nerozciągnięta gumka do włosów ma długość 9 cm. Ile razy dłuższa stanie się ta gumka, gdy nałoży się ją na butelkę o średnicy 9 cm?

11. Jaki obwód ma figura, która:

a) jest ćwiartką koła o promieniu 2 m,

b) jest półkolem wyciętym z koła o średnicy 5 m?

12. Oblicz długości esów-floresów (przyjmij, że bok kratki ma długość 1).



16/255



13. Każdy z czterech chłopców ma rozpiętość ramion równą 140 cm. Czy zdołają razem objąć pień drzewa o średnicy 180 cm?

14. Końce wskazówek zegara na wieży ratuszowej są oddalone od środka tarczy o 1 m i 1,5 m. Jaką drogę w ciągu godziny pokonuje koniec wskazówki minutowej, a jaką koniec wskazówki godzinowej?

15. W ciągu minuty karuzela obraca się 5 razy. Chłopiec siedzi na koniku w odległości 5 m od środka karuzeli. Jaką drogę pokonuje chłopiec w ciągu 5 minut?

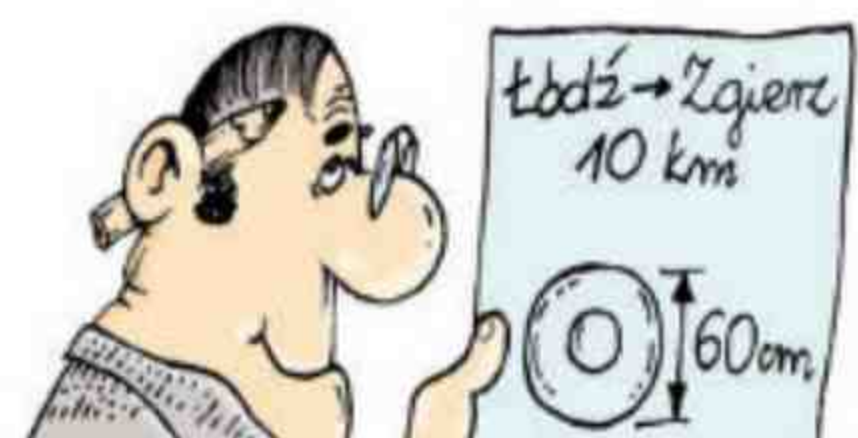


16. *Gdy moneta się obraca, to posuwa się do przodu
I po jednym swym obrocie robi trasę jej obwodu.
Policz, miły czytelniku, jaką drogę pokonuje,
kiedy tocząc się po stole, dwa obroty wykonuje.*



*Pewien rachmistrz z miasta Łodzi zamierzał
Na przejażdżkę się wybrać do Zgierza.
Aby w drodze się zbytnio nie nudzić,
Postanowił liczeniem się trudzić.
Więc na pętli średnicę kół zmierzył,
Długość trasy znał z Łodzi do Zgierza
I policzył bez żadnych kłopotów,
Ile koło wykona obrotów.*

17. Ile obrotów wykonuje koło tramwaju na drodze z Łodzi do Zgierza?

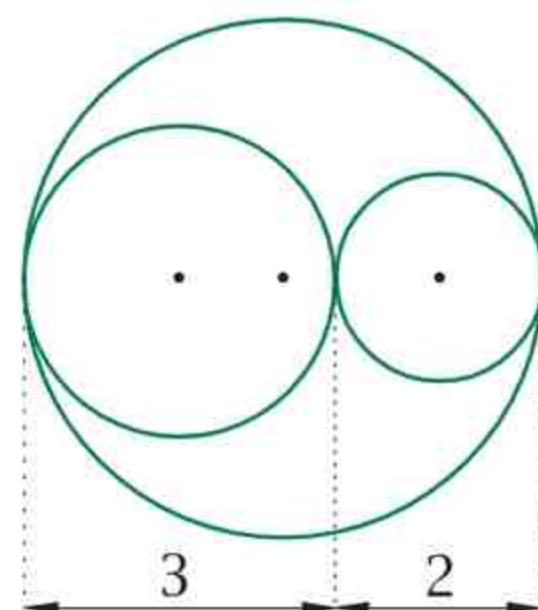




18. a) Koło dorożki ma średnicę 1 m. Ile pełnych obrotów wykona to koło na drodze 100 m?

b) Koło samochodu osobowego ma promień 30 cm. Ile pełnych obrotów wykonuje to koło na drodze 1 km?

19. a) Porównaj obwód dużego koła na rysunku obok z sumą obwodów dwóch mniejszych kół.
b) Znajdź promień r okręgu, którego długość jest równa sumie długości wszystkich trzech okręgów przedstawionych obok. Jaka jest zależność między długością r a promieniami narysowanych okręgów?

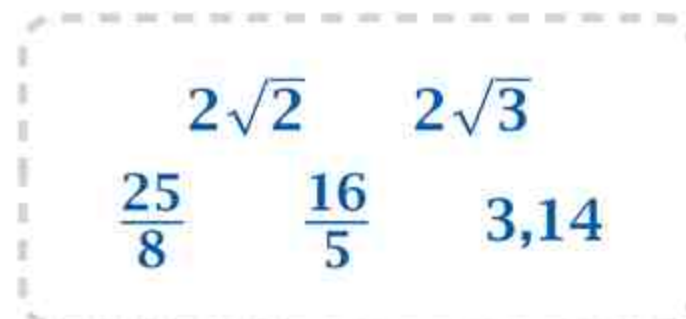


20. a) Dane są dwa okręgi, jeden o promieniu 10 cm, a drugi — o promieniu 10 m. O ile zwiększy się długość mniejszego okręgu, a o ile — większego, gdy promień każdego z tych okręgów zwiększymy o 1 cm.
■ b) Uzasadnij, że jeśli promień okręgu zwiększymy o a , to długość tego okręgu zwiększy się o $2\pi a$.

Sprawdź, czy umiesz

1. Ile liczb mniejszych od π zapisano obok?

- A. jedną C. trzy
B. dwie D. więcej niż trzy



2. Okrąg o średnicy 2 ma długość:

- A. 4π B. $2 \cdot 3,14$ C. 2π D. $4 \cdot 3,14$

3. Koło o promieniu 10 i kwadrat mają taki sam obwód. Wobec tego bok kwadratu ma długość:

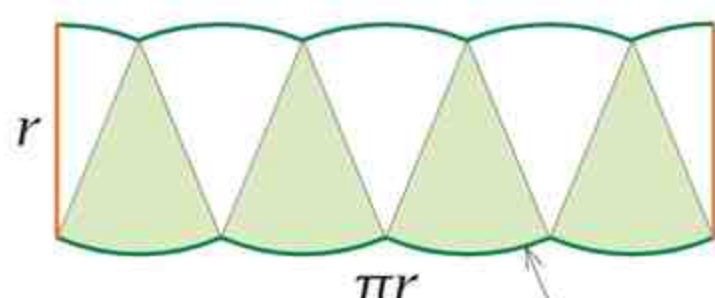
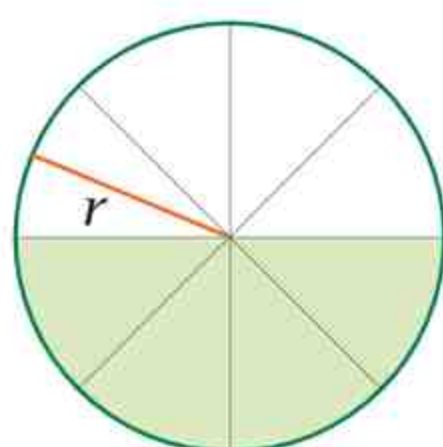
- A. 5π B. $\frac{5}{4}\pi$ C. 10π D. $2,5\pi$

4. Koło, które na drodze 100 m obróciło się 25 razy, ma promień równy:

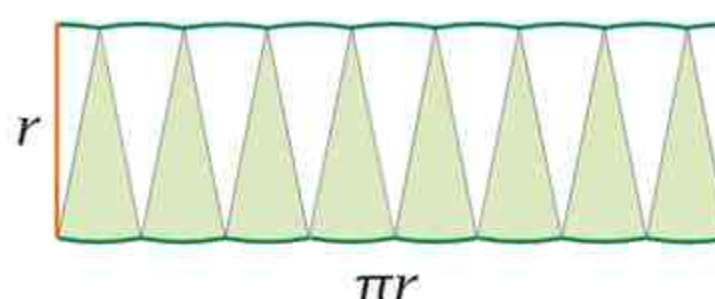
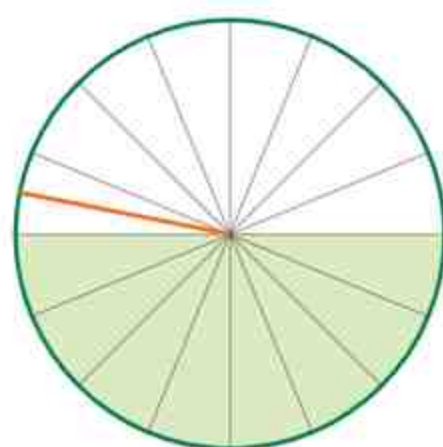
- A. ok. 0,6 m B. ok. 20 cm C. ok. 1,3 m D. ok. 80 cm

4 Pole koła

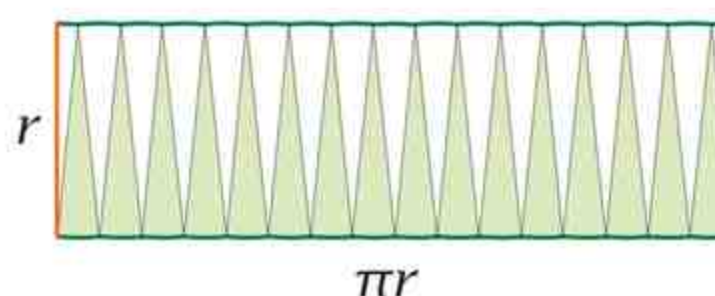
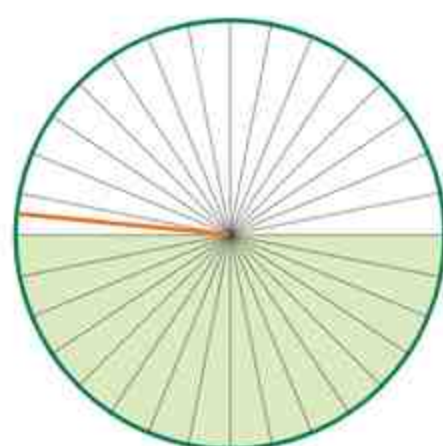
Popatrz, jak można podzielić koło i z otrzymanych części ułożyć figurę przypominającą prostokąt.



Długość tej linii jest równa długości półokręgu.



Im więcej jest części, na które dzielimy koło, tym bardziej ułożona figura przypomina prostokąt.



Można dojść do wniosku, że pole koła jest równe polu prostokąta o bokach πr i r .

Pole koła: $P = \pi r^2$

r — długość promienia koła

Przykład

Plama oleju na jeziorze miała kształt koła o promieniu 10 m. Po pewnym czasie promień plamy zwiększył się o 1 m. O ile wzrosło pole powierzchni plamy?

$$P_1 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$$

$$P_2 = \pi \cdot 11^2 = 121\pi$$

$$P_2 - P_1 = 121\pi - 100\pi = 21\pi \approx 66$$

Podstawiamy 10 m i 11 m do wzoru na pole koła. Wynik otrzymamy w metrach kwadratowych.

Obliczamy różnicę pól.

Odp. Pole powierzchni plamy wzrosło o $21\pi \text{ m}^2$, czyli o około 66 m^2 .

Zadania

1. a) Podaj, jakie pola mają koła o promieniach:

3 $\frac{2}{3}$ 1 π

b) Podaj, jakie pola mają koła o średnicach:

6 2,5 1 π

2. Oblicz, ile w przybliżeniu wynosi pole koła:

a) o promieniu 3 cm,

d) o średnicy 2,2 m,

b) o promieniu 0,2 m,

e) o obwodzie 3π cm,

c) o średnicy 20 cm,

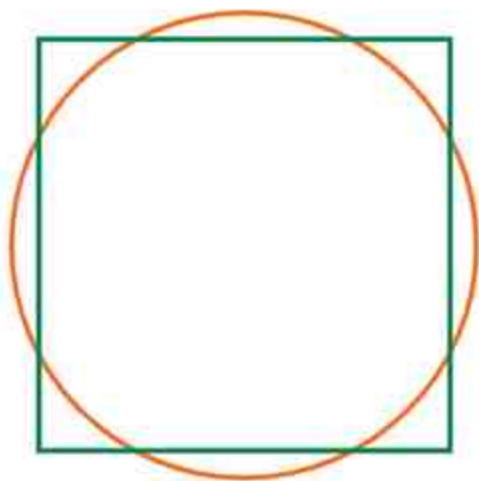
f) o obwodzie $\frac{3\pi}{4}$ m.

3. Oblicz promienie kół o polach:

a) 16π cm² b) 100π m² c) $0,04\pi$ dm² d) π km² e) $\frac{9}{16}\pi$ mm²

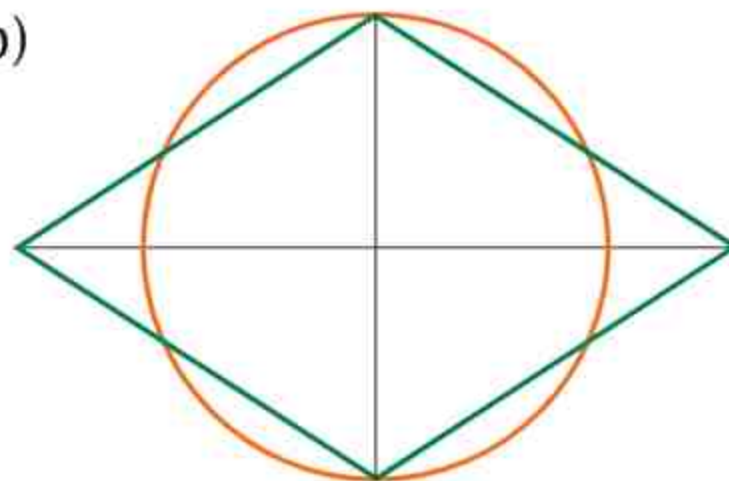
4. Jak myślisz, która z narysowanych figur ma większe pole — koło czy czworokąt?

a)



Promień koła ma 13 mm.
Bok kwadratu ma 23 mm.

b)



Średnica koła ma 26 mm.
Przekątne rombu mają 26 mm i 40 mm.

Ciekawostka

W 1858 roku odnaleziono papiirus, na którym 1600 lat p.n.e. Egipcjanie spisali 84 zadania matematyczne oraz ich rozwiązania. Od nazwiska pierwszego Europejczyka, do którego ręk trafił ten dokument, nazywany jest on papiirusem Rhinda. Z tego dokumentu wynika, że w starożytnym Egipcie obliczano pole koła o średnicy d według wzoru: $P = (d - \frac{1}{9}d)^2$.

5. Oblicz pole koła o promieniu 10 cm (przyjmij $\pi \approx 3,14$). Przeczytaj zamieszczoną obok ciekawostkę. Porównaj swój wynik z wynikiem, jaki otrzymaliby starożytni Egipcjanie.

6. Dane jest koło o promieniu 8. Ustal, jak zmieni się pole tego koła, jeśli:

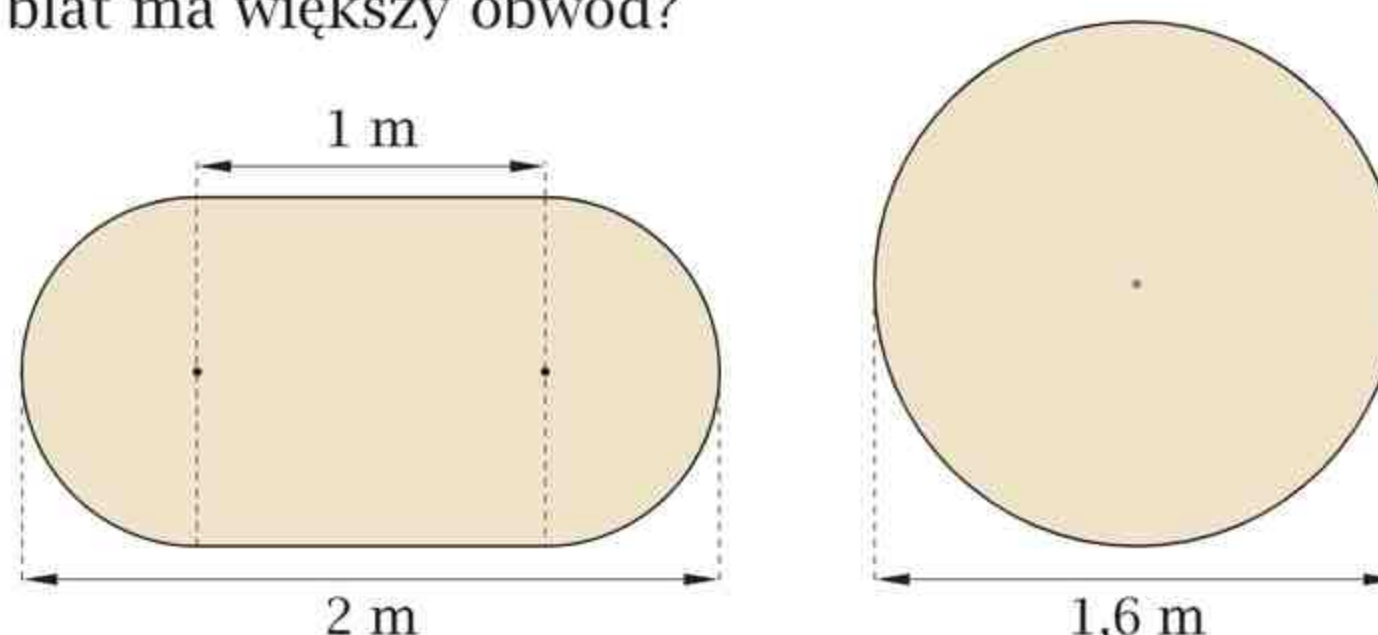
a) promień zwiększymy o 2, b) promień zwiększymy 2 razy.



7. Największą na świecie okrągłą pizzę wyprodukowano w Rzymie w 2012 r. Miała ona średnicę 39,6 m. Ile metrów kwadratowych tej pizzy otrzymałby każdy z uczniów twojej klasy, gdybyście podzielili ją między siebie na równe części?

8. Blaty dwóch stołów narysowano w jednakowej skali.

- a) Który blat ma większą powierzchnię?
b) Który blat ma większy obwód?



9. a) Oblicz pole koła o obwodzie:

16π cm π m $0,12\pi$ mm $\frac{2}{3}\pi$ km 4 dm

- b) Oblicz obwód koła o polu:

16π cm² $\frac{4}{9}\pi$ m² $0,25\pi$ mm² 2π dm² 3 km²

10. Jaką długość ma bok kwadratu, którego pole jest równe polu koła o średnicy 10?

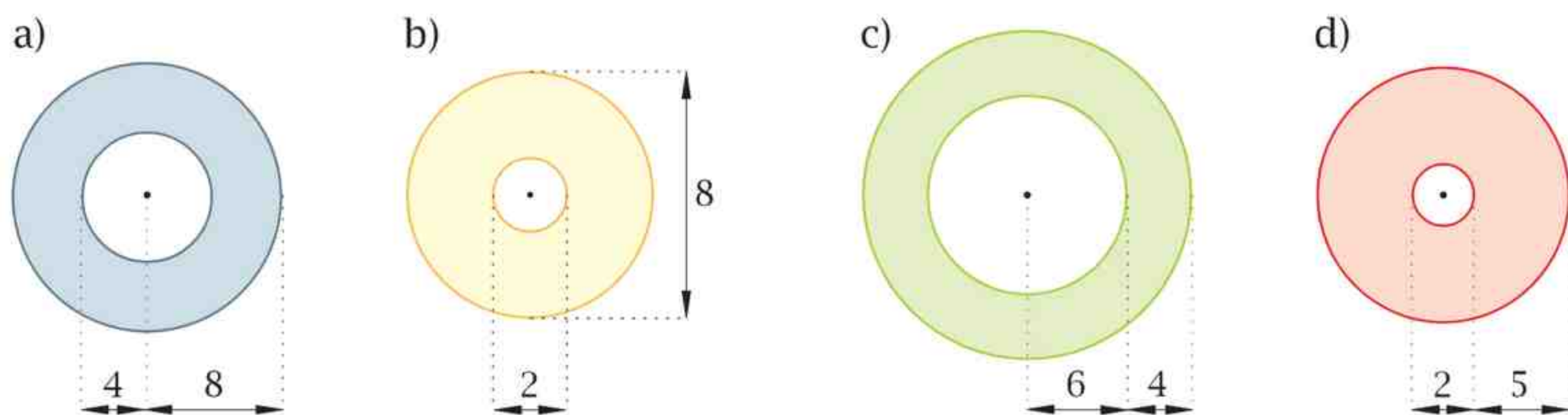
Ciekawostka

Przez ponad dwa tysiące lat wielu matematyków bezskutecznie próbowało skonstruować za pomocą cyrkla i linijki kwadrat, którego pole byłoby równe polu danego koła. Problem ten nazwano **kwadraturą koła**. Dopiero w 1882 roku Ferdinand Lindemann wykazał, że takiej konstrukcji wykonać nie można!

Istnieją jednak przybliżone rozwiązania kwadratury koła. Jedno z ciekawszych podał w 1685 roku Adam Adamandy Kochański, nadworny matematyk króla Jana Sobieskiego i nauczyciel królewicza Jakuba. Znane jest też rozwiązanie kwadratury koła za pomocą innych przyborów niż cyrkiel i linijka.

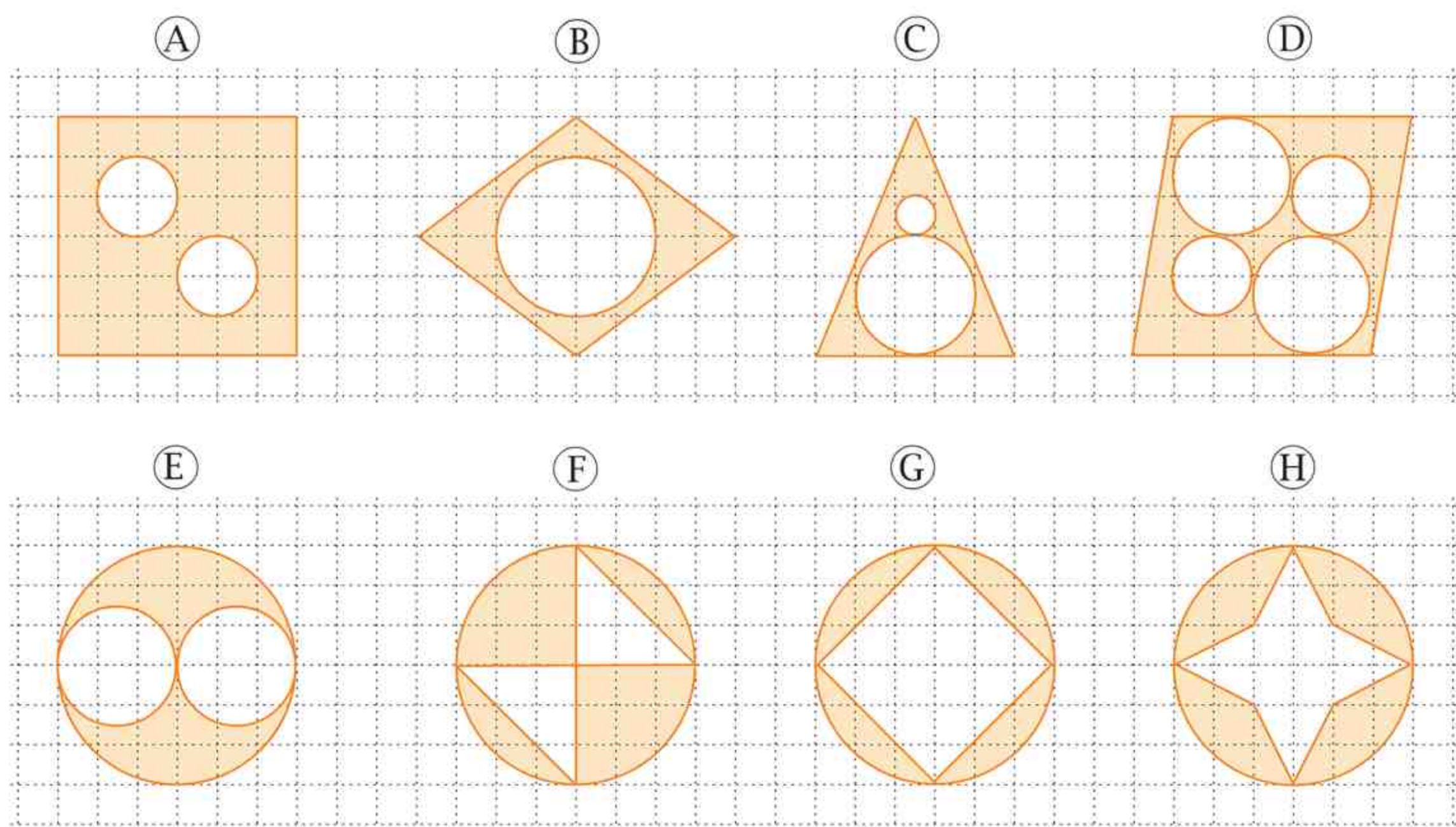
- *11. Koło i kwadrat mają równe pola. Ile razy obwód kwadratu jest większy niż obwód koła?

12. Oblicz pola zacieniowanych pierścieni.

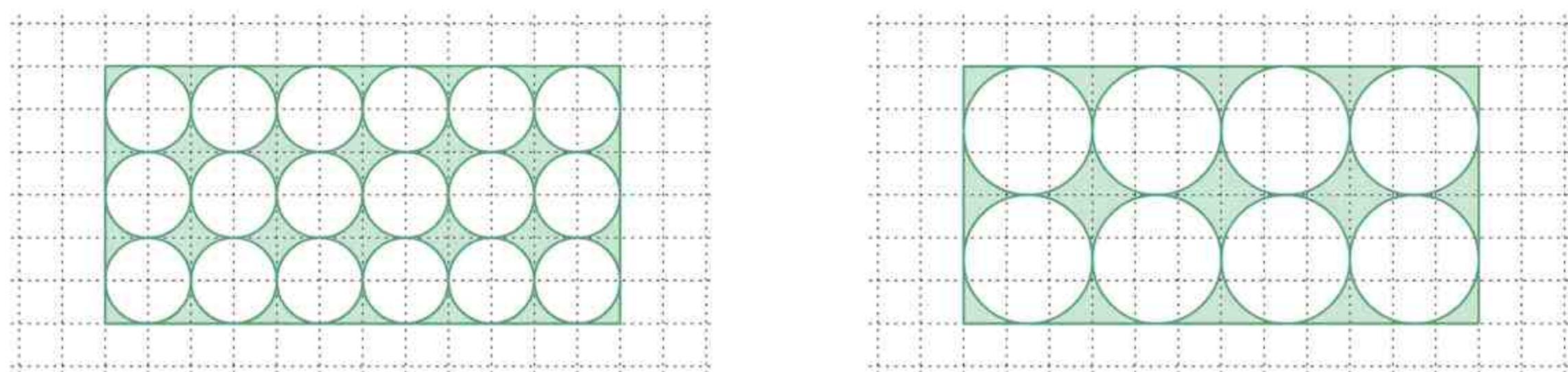


13. Klomb ma kształt koła o średnicy 8 m. Wokół klombu biegnie chodnik o szerokości 2 m. Jaką powierzchnię ma chodnik?

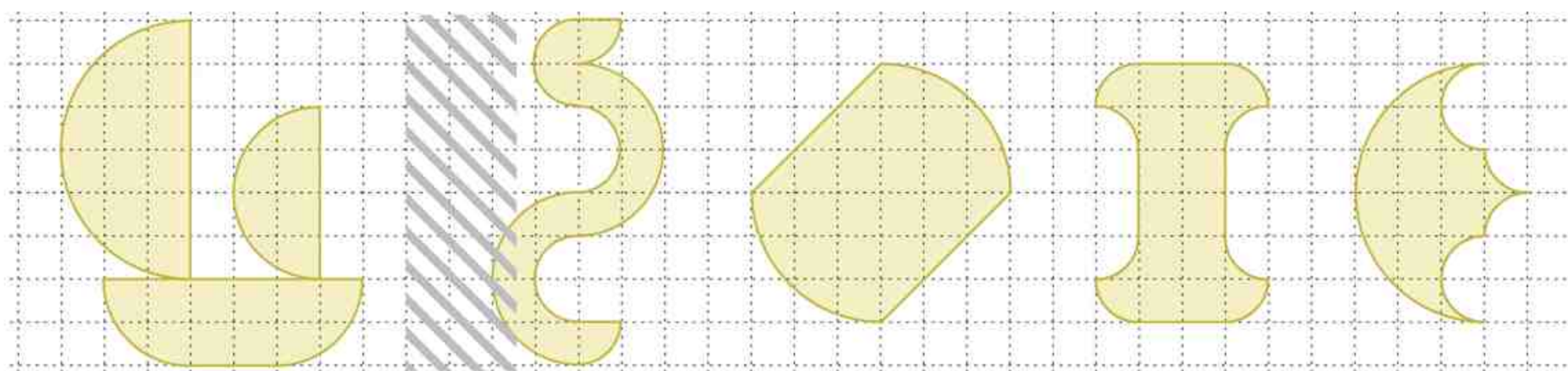
14. Przyjmijmy, że pole jednej kratki jest równe 1. Jakie pola mają pokolorowane części figur?



15. Porównaj pola zacieniowanych figur.

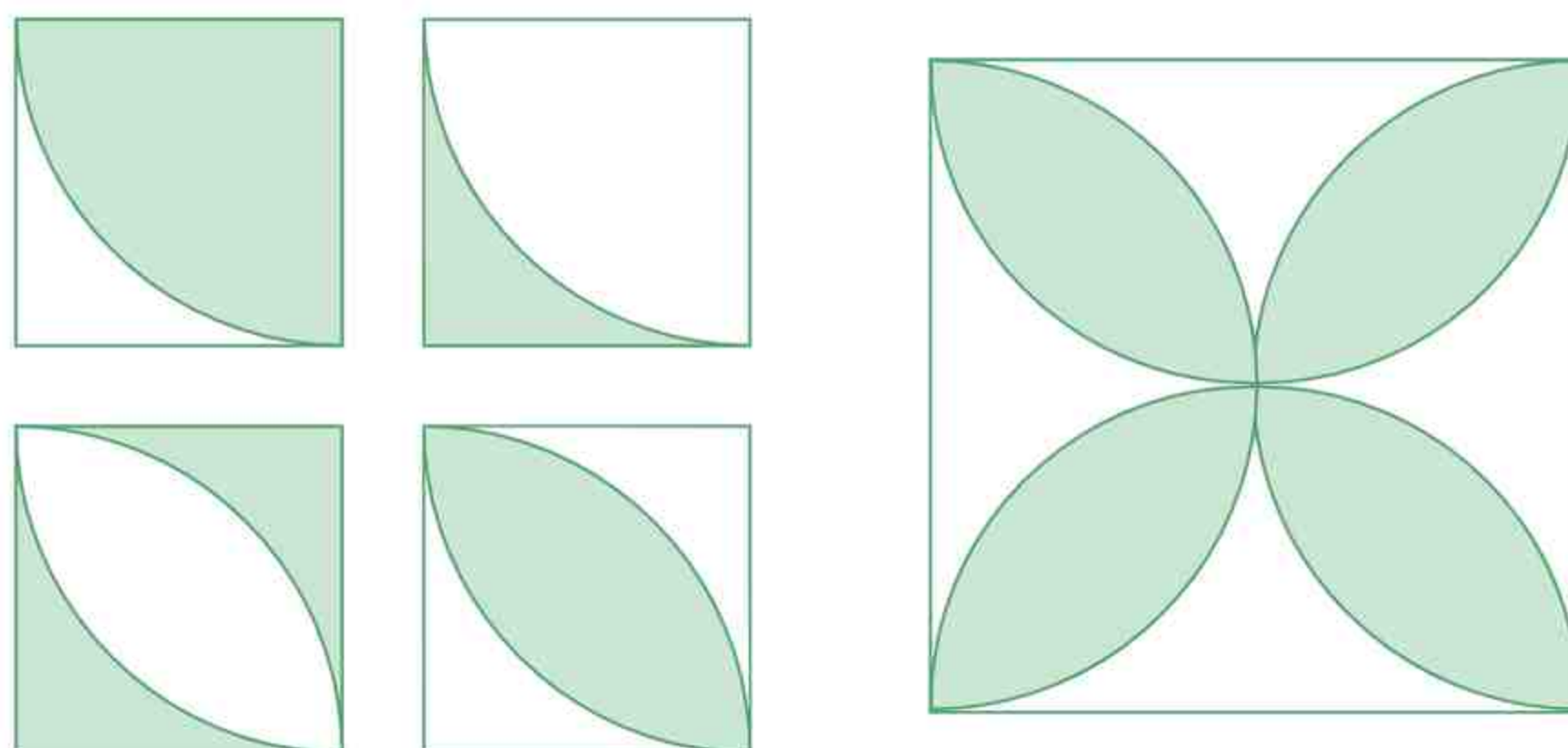


16. Oblicz pola figur (przyjmij, że pole kratki jest równe 1).

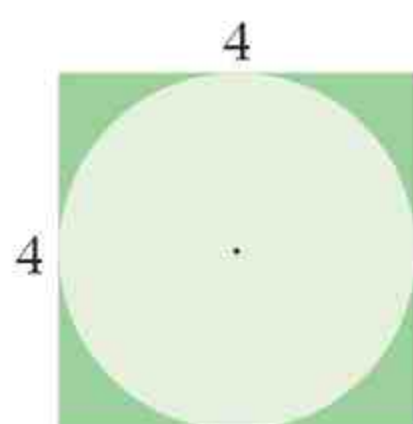


27/256

17. Każdy z czterech mniejszych kwadratów przedstawionych poniżej ma bok długości 2 cm, a większy kwadrat ma bok długości 4 cm. Oblicz pola zacieniowanych figur.



Sprawdź, czy umiesz



1. Która z podanych liczb najdokładniej określa, jaki procent narysowanego kwadratu przykrywa koło?

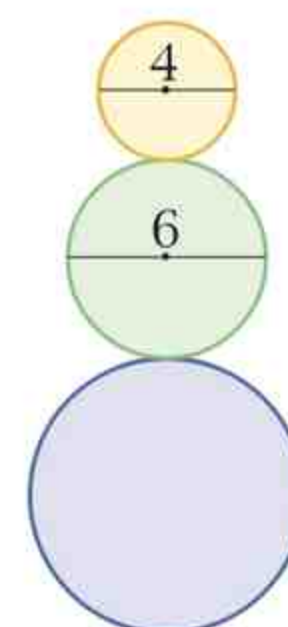
- A. 50% B. 67% C. 79% D. 85%

2. Pole koła o obwodzie 2 m jest równe:

- A. $\pi \text{ m}^2$ B. $\frac{1}{\pi} \text{ m}^2$ C. 1 m^2 D. $\pi^2 \text{ m}^2$

3. Suma pól dwóch mniejszych kół na rysunku obok jest równa polu trzeciego koła. Promień największego koła jest równy:

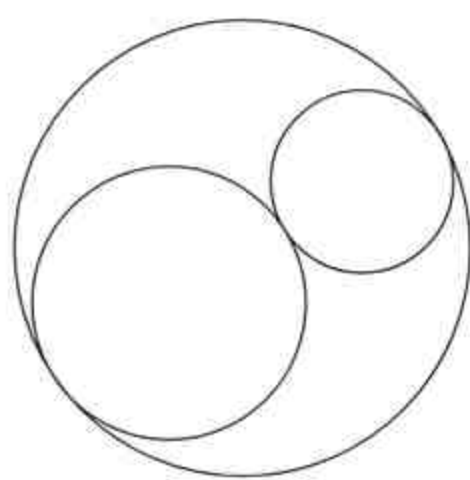
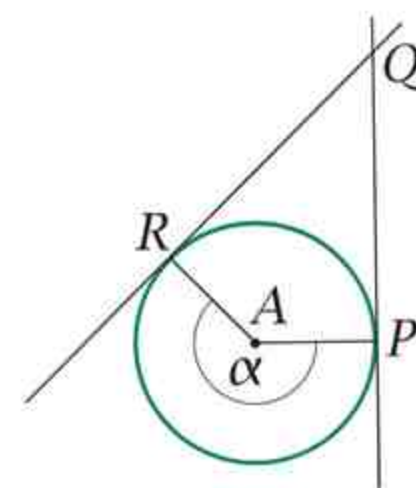
- A. 4 B. 13 C. $\sqrt{13}$ D. 5



Przed klasówką

1. Na rysunku obok proste PQ i QR są styczne do okręgu o środku A . Kąt PQR jest równy:

- A. $\frac{\alpha}{2}$ C. $\alpha - 180^\circ$
 B. $\alpha - 90^\circ$ D. $360^\circ - \alpha$



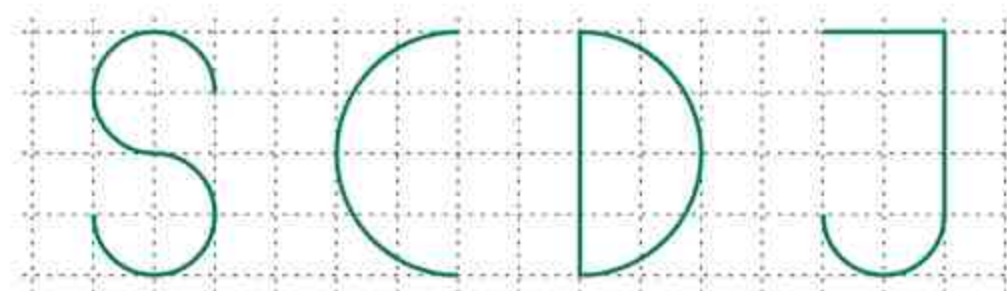
2. Okręgi przedstawione na rysunku obok są styczne, a ich środki leżą na jednej prostej. Najmniejszy okrąg ma średnicę 4 cm, a największy ma średnicę 10 cm. Odległość między środkami dwóch mniejszych okręgów jest równa:

- A. 5 cm B. 6 cm C. 8 cm D. 14 cm

3. Jaki jest promień koła, którego obwód jest równy 8?

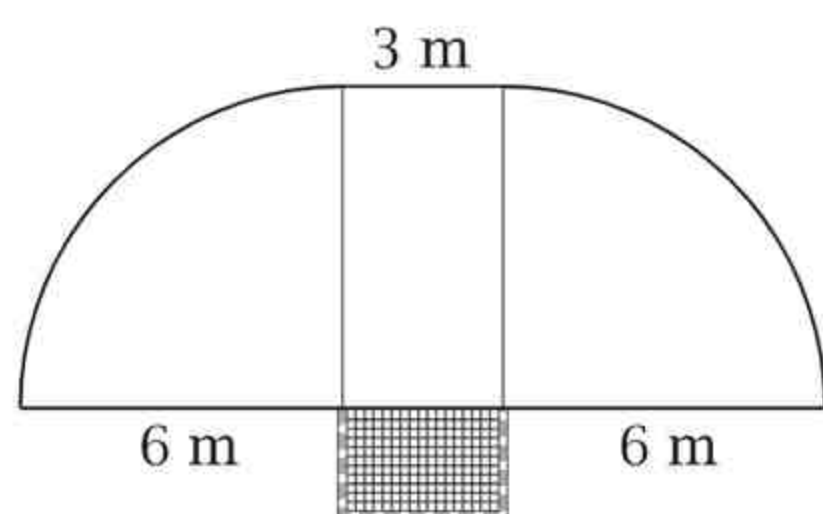
- A. $\frac{4}{\pi}$ B. 4π C. 4 D. $\frac{\pi}{4}$

4. Litery narysowane obok zbudowane są z części okręgów i odcinków. Jakimi literami należy zastąpić kwadraciki?



a) Najdłuższa linia tworzy literę ■.

b) Najkrótsza linia tworzy literę ■.

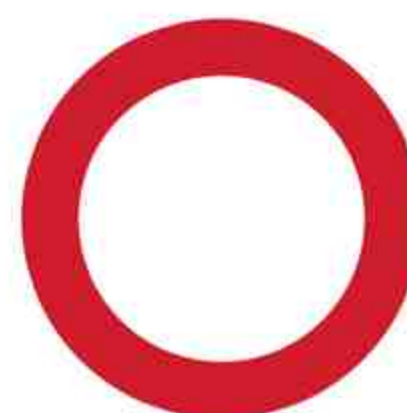


5. Pole bramkowe w piłce ręcznej to dwie ćwiartki kół i prostokąt o wymiarach jak na rysunku obok. W polu bramkowym może przebywać tylko bramkarz. Ustal, jaką powierzchnię zajmuje to pole (z dokładnością do 0,1 m²).

- A. ok. 56,5 m² C. ok. 88,3 m²
 B. ok. 74,5 m² D. ok. 131 m²

6. Znaki drogowe mają różne wielkości. Największy znak zakazu ruchu ma średnicę 1 m, a czerwony pasek na takim znaku ma szerokość 10 cm. Jaki procent pola powierzchni znaku jest biały?

- A. 90% B. 81% C. 75% D. 64%



7. Czy istnieje koło, którego obwód ma tyle metrów, ile metrów kwadratowych ma jego pole? Wybierz odpowiedź „tak” lub „nie” oraz jej uzasadnienie spośród zdań od A do D.

① Tak, ponieważ...

② Nie, ponieważ...

A — ...koło o promieniu 1 ma tę własność.

B — ...koło o obwodzie 4π ma tę własność.

C — ...koło o promieniu 1 nie ma tej własności.

D — ...obwód wyraża się zawsze inną liczbą niż pole.

8. Na rysunku obok pokazano walec drogowy. Ile pełnych obrotów wykona przedni wał tego walca na drodze 1 km?

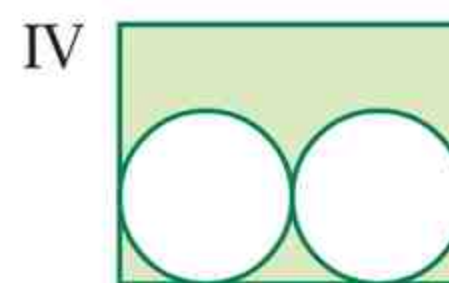
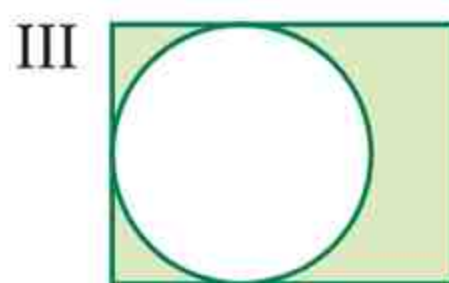
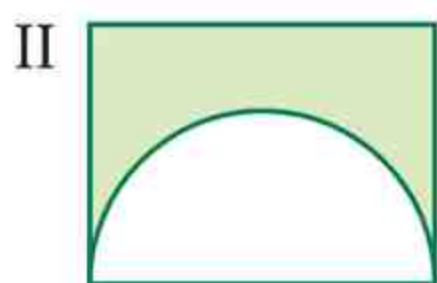
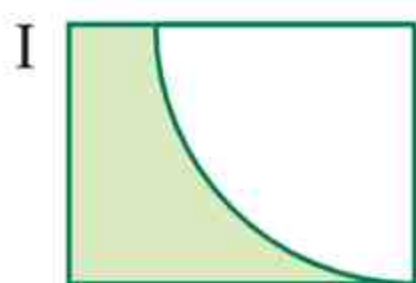
A. 265 B. 266 C. 532 D. 884



9. Z koła o promieniu 10 cm wycięto mniejsze koło w ten sposób, że każda z otrzymanych części ma takie samo pole. Jaka długość ma promień mniejszego koła?

A. 3,5 cm B. $2\sqrt{5}$ cm C. $5\sqrt{2}$ cm D. 5 cm

10. Z prostokątów o wymiarach 3×4 wycięto koła lub ich części. Figury I, II, III i IV to zacieniowane części prostokąta.



Oceń prawdziwość zdań:

a) Figury I i IV mają takie same pola.

PRAWDA/FALSZ

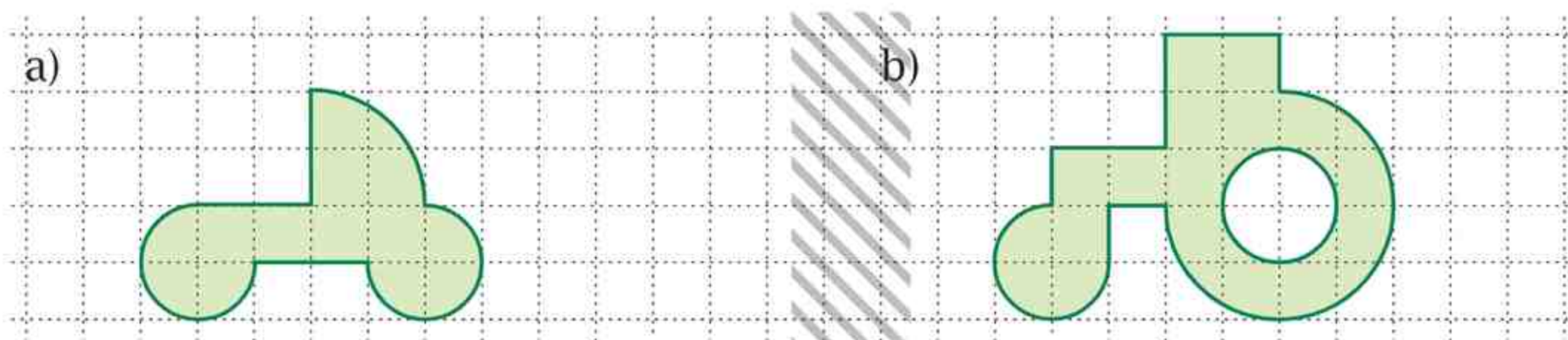
b) Figura IV ma większe pole niż figura II.

PRAWDA/FALSZ

c) Figura II ma o $\frac{\pi}{4}$ większe pole niż figura I.

PRAWDA/FALSZ

11. Zapisz w postaci wyrażeń algebraicznych pola i obwody zacieniowanych figur. Przyjmij, że bok kratki ma długość a .



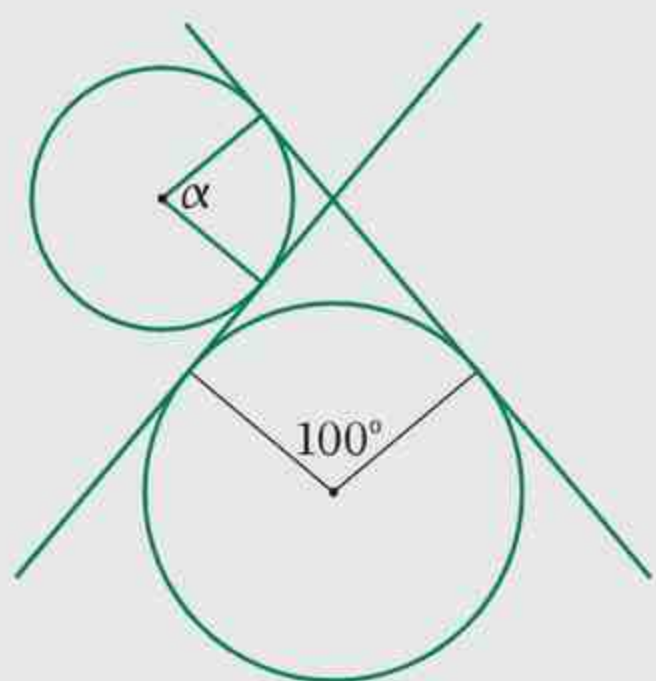
Zadania uzupełniające

Styczna do okręgu

1. Prosta AB jest styczna w punkcie B do okręgu o środku S i promieniu 5. Ustal, jaką długość ma:

- odcinek AS , gdy $AB = 10$,
- odcinek AB , gdy $AS = 10$.

→ 2. Narysowane proste są styczne do okręgów. Jaką miarę ma kąt α ?



→ 3. Odcinek AB jest średnicą okręgu o środku S . Na okręgu tym wybieramy punkt D , taki że kąt DSA ma miarę 110° . Przez punkty A i D prowadzimy styczne do okręgu, przecinające się w punkcie C . Oblicz miary kątów czworokąta o wierzchołkach A, B, C i D .

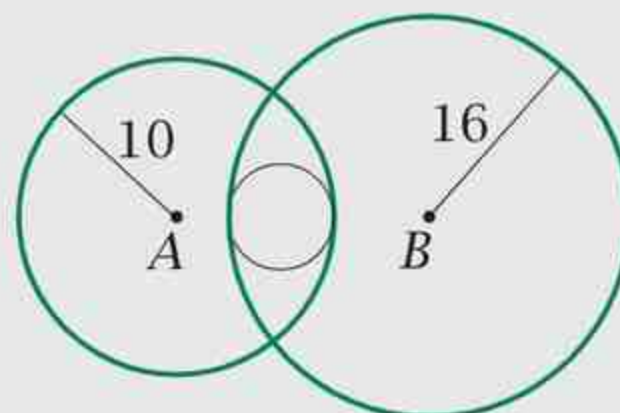
Wzajemne położenie dwóch okręgów

4. a) Dana jest „rodzina” pięciu okręgów o wspólnym środku S i promieniach długości: 1, 2, 3, 4, 5. W odległości d od punktu S rysujemy prostą. Określ, ile punktów wspólnych ma ta prosta z okręgami, gdy:

- $d = 4$, • $d = 3,5$, • $2 < d < 3$.

b) Dana jest „rodzina” stu okręgów o wspólnym środku S . Długości promieni tych okręgów wynoszą: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 100. Prosta p ma z tą rodziną okręgów 113 wspólnych punktów. Jaka jest odległość S od prostej p ?

→ 5. Rysunek przedstawia dwa przecinające się okręgi oraz okrąg styczny wewnętrznie do każdego z nich. Odcinek AB ma długość 20. Jaki jest promień najmniejszego okręgu?



→ 6. Początek układu współrzędnych jest środkiem okręgu, który przechodzi przez punkt $A = (-6, -2)$. Okrąg o środku w punkcie $S = (-2, 0)$ przechodzi przez punkt $B = (-3, -5)$. Jakie jest wzajemne położenie tych okręgów?

→ 7. Okrąg o środku w punkcie $S = (3, 2)$ i promieniu długości 2 jest styczny do okręgu o środku $P = (-9, -3)$. Jaką długość ma promień drugiego okręgu?

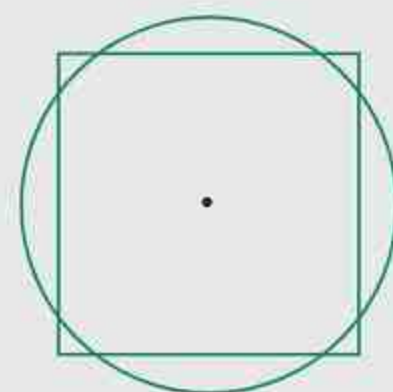
Uwaga. Rozpatrz dwa przypadki.

Liczba π . Długość okręgu

→ 8. Ustal, jaką długość ma okrąg:

- o promieniu 7,5,
- o promieniu $\frac{2}{3}$,
- o promieniu $\sqrt{2}$,
- o średnicy 3,2,
- o średnicy $3\frac{3}{4}$,
- o średnicy $3\sqrt{2}$.

9. Która z figur przedstawionych na rysunku ma większy obwód: kwadrat czy koło? Zmierz długości odpowiednich odcinków i wykonaj obliczenia.



→ 10. Oblicz średnicę okrągłego pnia drzewa, którego obwód wynosi:

- 50 cm
- 1 m
- 4 m

→ 11. Czy z drutu o długości 1 m można wykonać dwie obręcze, z których jedna ma średnicę 20 cm, a druga — 10 cm?

12. Koń biega po padoku na lonży o długości 4 m. Przyjmij, że $\pi \approx \frac{22}{7}$.

a) Jaką drogę pokonał ten koń, jeśli przebiegł 5 okrążeń?

b) Ile okrążeń powinien przebiec koń, aby dystans, jaki pokona, był większy niż 10 km?



----- Ciekawostka

Montując licznik rowerowy, należy wprowadzić do urządzenia wartość obwodu koła roweru.



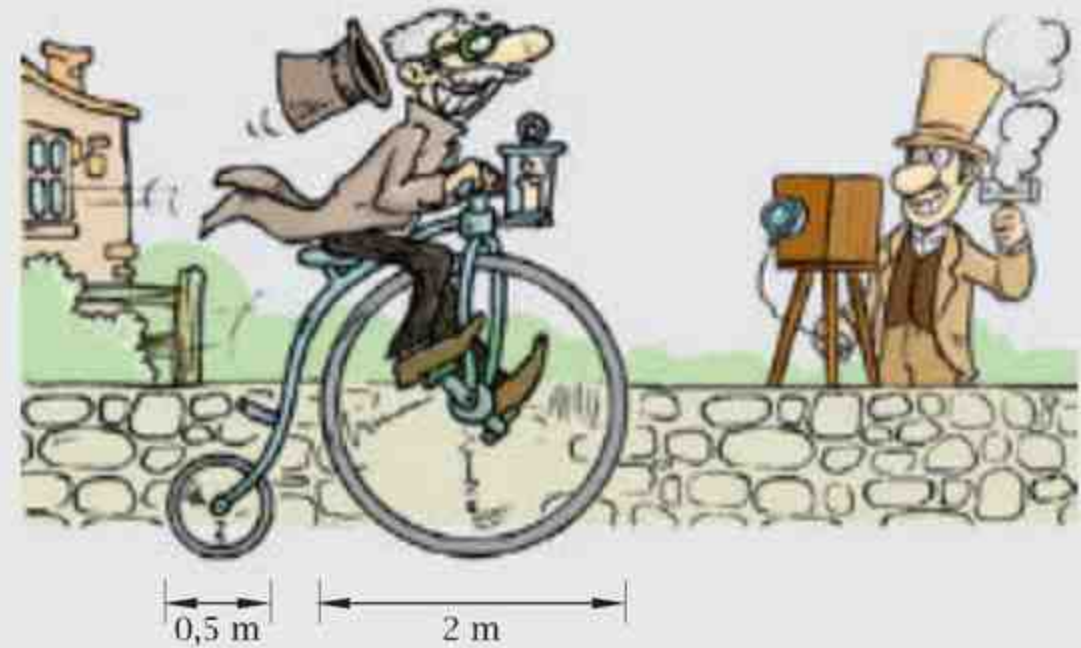
W instrukcji licznika zaleca się wpisać liczbę $3,14 \times \text{średnica koła}$. Na podstawie liczby obrotów kół roweru licznik wskazuje przejechaną odległość.

*13. Przeczytaj ciekawostkę. Jacek wpisał do licznika, że koła jego roweru mają 60 cm średnicy. Licznik jego roweru po miesiącu pokazał, że Jacek pokonał już 762 km.

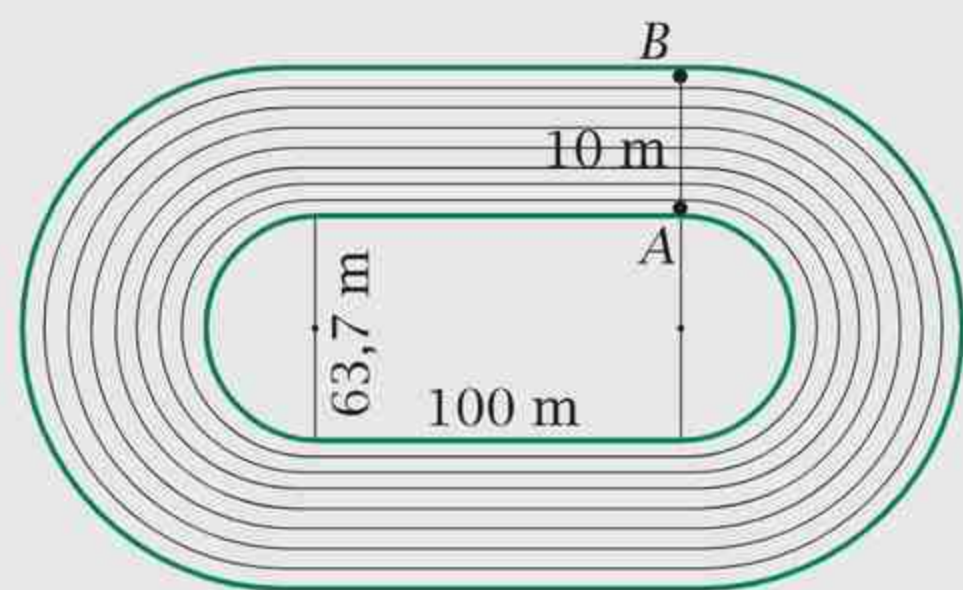
a) O ile większą odległość pokazałby licznik, gdyby zamiast $\pi \approx 3,14$ przyjąć przybliżenie $\pi \approx 3,1416$?

b) Okazało się, że średnica kół Jacka wynosi 59 cm. O ile mniejszą odległość wskazałby licznik roweru, gdyby Jacek wpisał właściwą średnicę kół?

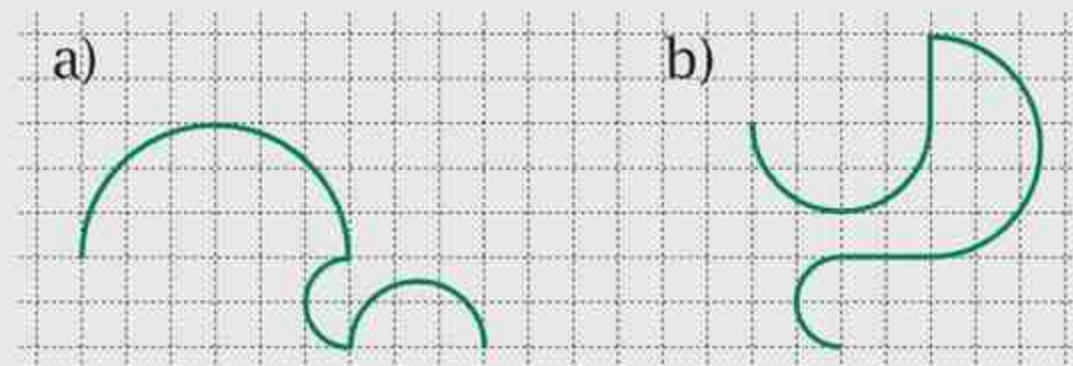
14. Popatrz na rysunek. Na pewnym odcinku drogi duże koło bicykla wykonało 100 obrotów. Ile obrotów wykonało w tym samym czasie małe koło? Ile obrotów wykona duże koło, w czasie gdy małe koło wykona 100 obrotów?



15. Na rysunku podano wymiary stadionu. Zawodnicy A i B przebiegli po swoich torach jedno okrążenie. Oszacuj, o ile dłuższy dystans przebiegł zawodnik B.



16. Oblicz długości narysowanych linii. Przyjmij, że bok kratki ma długość 1.



17. Na każdym rysunku linia czerwona to półokrąg o średnicy 12, a linia zielona zbudowana jest z jednakowych półokręgów. Jak myślisz, która z nich jest dłuższa? Sprawdź swoje przypuszczenia za pomocą rachunków.



18. Cztery jednakowe puszki o średnicy 5 cm każda oklejono taśmą. Jaką co najmniej długość musi mieć taśma?



Pole koła

→ **19.** Oblicz pole koła:

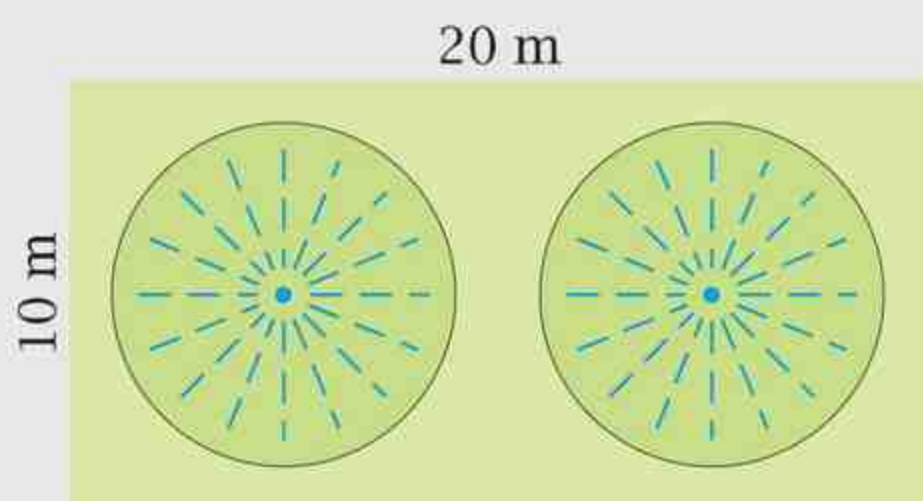
- a) o promieniu 1,2 m,
- b) o średnicy 3,6 dm,
- c) o obwodzie 4π cm.

→ **20.** Oblicz, jaki promień ma koło o polu:

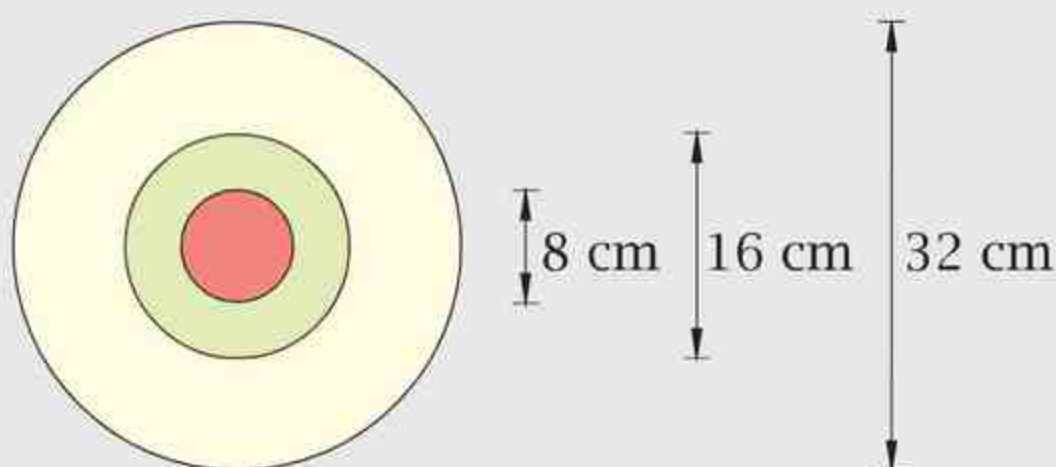
- a) 16π cm² b) 10 cm² c) 400 m²

21. Czy większy promień ma koło o polu 15π cm² czy koło o obwodzie 8π cm?

22. Każdy ze spryskiwaczy podlewa obszar w kształcie koła o promieniu 4 m. Która część działki ma większą powierzchnię — podlana czy niepodlana?



→ **23.** Oblicz pola obszarów narysowanej tarczy.



24. Oblicz, o ile większe jest pole koła o promieniu 4 od:

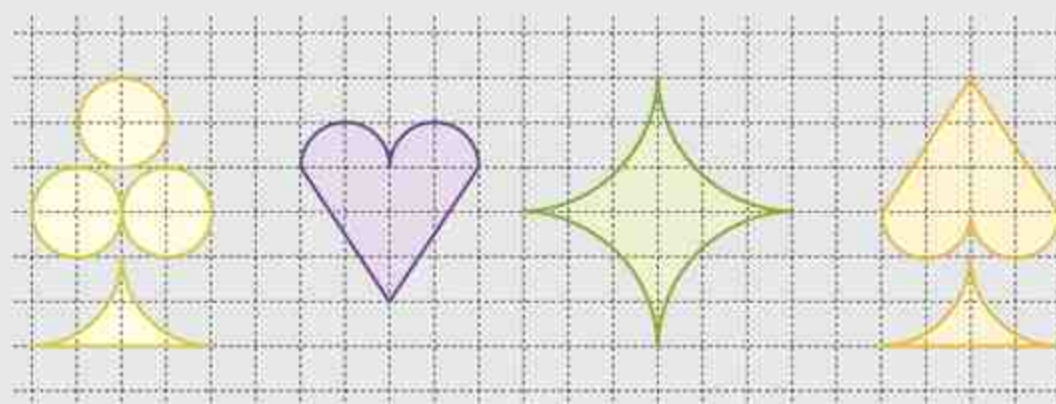
- a) pola koła o średnicy 4,
- b) pola koła o promieniu $\frac{1}{4}$,
- c) pola koła o promieniu 1?

25. Pizzeria oferuje pizzę w trzech wielkościach. Oblicz, ile w przybliżeniu kosztuje 1 dm² pizzy każdego rodzaju.

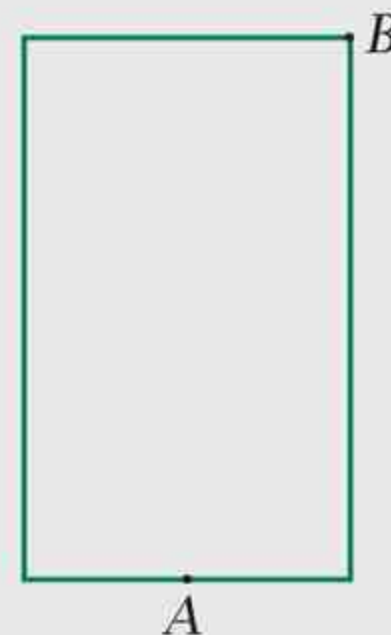


→ **26.** Koło i kwadrat mają równe obwody. Oblicz stosunek ich pól.

→ **27.** Oblicz pola zacieniowanych figur. Przyjmij, że bok kratki ma długość 1.



***28.** Antek i Bogdan mieli uwiązać kozę na zewnątrz płotu odgradzającego warzywnik od pastwiska. Warzywnik ma wymiary 4 m × 7 m, a sznurek 4 m. Antek chce przywiązać kozę w punkcie A, a Bogdan w punkcie B. Która propozycja jest dla kozy lepsza?



VIII RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

- 1** Ile jest możliwości?
- 2** Obliczanie prawdopodobieństw (cd.)

➤ Przed klasówką, s. 269

➤ Zadania uzupełniające, s. 270

1 Ile jest możliwości?

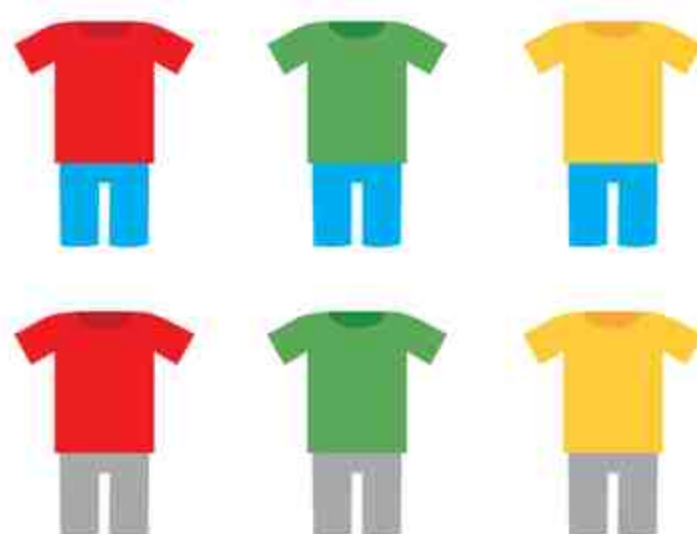
Jacek codziennie jeździ na rowerze. Ma trzy koszulki kolarskie: czerwoną, zieloną i żółtą oraz spodenki w dwóch kolorach — niebieskie i szare.



Policzmy, na ile sposobów może wybrać strój do jazdy na rowerze.

To, jak się Jacek ubierze, zależy od dwóch decyzji. Pierwsza z decyzji to wybór koszulki. Ma tutaj 3 możliwości. Druga z decyzji to wybór spodenek. Przy ich wyborze ma 2 możliwości.

Jacek do każdej z 3 koszulek może dobrać jeden z dwóch kolorów spodenek. Poniżej przedstawiono wszystkie możliwości.



Zamiast rysować koszulki i spodenki, można wypisać wszystkie możliwości, na przykład za pomocą takiej tabeli. Zapis *NC* w tabeli oznacza niebieskie spodenki i czerwoną koszulkę, a zapis *SZ* — szare spodenki i zieloną koszulkę.

		koszulki		
		<i>C</i>	<i>Z</i>	<i>Ż</i>
spodenki	<i>N</i>	<i>NC</i>	<i>NZ</i>	<i>NŻ</i>
	<i>S</i>	<i>SC</i>	<i>SZ</i>	<i>SŻ</i>

Jak widać, strój można skompletować na tyle sposobów, ile wynosi iloczyn $2 \cdot 3$. Jacek ma więc 6 możliwości wybrania stroju.

ĆWICZENIE A. Na ile sposobów Jacek mógłby wybrać ubiór do jazdy na rowerze, gdyby dokupił jeszcze białą koszulkę i czarne spodenki?

Podobny sposób zliczania możliwości można stosować w wielu różnych sytuacjach.

Przykład

W pudełku znajduje się 5 klocków w kształcie cyfr od 1 do 5. Z tych cyfr mamy utworzyć liczbę dwucyfrową.

a) Najpierw wybieramy jedną cyfrę, zapisujemy ją i wrzucamy z powrotem do pudełka. Potem wybieramy kolejną cyfrę i dopisujemy ją do poprzedniej cyfry jako cyfrę jedności. Ile różnych liczb możemy w ten sposób otrzymać?

Liczba możliwości:

$$5 \cdot 5 = 25$$

Pierwszą cyfrę można wybrać na 5 sposobów i do każdej tak wybranej cyfry można dopisać jedną z 5 cyfr.

Odp. W ten sposób możemy otrzymać 25 liczb.

b) Najpierw wybieramy jedną cyfrę (nie wkładamy jej z powrotem do pudełka), a następnie wybieramy kolejną cyfrę i ustawiamy ją obok poprzedniej jako cyfrę jedności. Ile różnych liczb możemy w ten sposób otrzymać?

Liczba możliwości:

$$5 \cdot 4 = 20$$

Pierwszą cyfrę można wybrać na 5 sposobów i do każdej tak wybranej cyfry można dobrać jedną z pozostałych 4 cyfr.

Odp. W ten sposób możemy otrzymać 20 liczb.

Każdy z powyższych przykładów można byłoby rozwiązać, wypisując wszystkie liczby, które można uzyskać, np. za pomocą tabeli.

a)		druga wylosowana cyfra				
		1	2	3	4	5
pierwsza wylosowana cyfra	1	11	12	13	14	15
	2	21	22	23	24	25
	3	31	32	33	34	35
	4	41	42	43	44	45
	5	51	52	53	54	55

b)		druga wylosowana cyfra				
		1	2	3	4	5
pierwsza wylosowana cyfra	1	×	12	13	14	15
	2	21	×	23	24	25
	3	31	32	×	34	35
	4	41	42	43	×	45
	5	51	52	53	54	×

ĆWICZENIE B. Dla każdego ze sposobów losowań przedstawionych w przykładzie, korzystając z opisanej metody lub tabelki, ustal, ile razy otrzymalibyśmy liczbę, której:

a) suma cyfr jest równa 6,

b) suma cyfr jest równa 7.

ĆWICZENIE C. Ile różnych liczb moglibyśmy otrzymać przy pierwszym sposobie losowania, a ile przy drugim, gdyby w pudełku oprócz cyfr od 1 do 5 były jeszcze cyfry 7 i 8?

Przykład

W klasie VIII a jest 12 chłopców i 14 dziewcząt.

a) Z klasy tej należy wybrać chłopca i dziewczynkę, którzy na koniec roku szkolnego mają podziękować pani woźnej za jej pracę. Chłopiec ma wręczyć kwiaty, a dziewczynka — składać życzenia. Ile takich dwuosobowych delegacji można wybrać z tej klasy?

Liczba delegacji:

$$12 \cdot 14 = 168$$

Chłopca można wybrać na 12 sposobów i do każdego wybranego chłopca można dobrać dziewczynkę na 14 sposobów.

Odp. Można wybrać 168 różnych delegacji.

b) Do pana dyrektora mają pójść dwie dziewczynki. Pierwsza z nich ma wręczyć kwiaty, a druga — składać życzenia. Na ile sposobów można wybrać tak określoną parę dziewcząt?

Dwie dziewczynki:

$$14 \cdot 13 = 182$$

Dziewczynkę wręczającą kwiaty można wybrać na 14 sposobów i do każdej tak wybranej dziewczynki można dobrać drugą dziewczynkę (która ma składać życzenia) spośród pozostałych 13 dziewcząt.

Odp. Można wybrać 182 pary dziewcząt.

Powyższe przykłady można także rozwiązać, opisując możliwe pary uczniów, np. w sposób podany poniżej.

a)	dziewczęta					b)	dziewczęta					
	d_1	d_2	d_3	...	d_{14}		d_1	d_2	d_3	...	d_{14}	
chłopcy	c_1	$c_1 d_1$	$c_1 d_2$	$c_1 d_3$	...	$c_1 d_{14}$	d_1	$\times$	$d_1 d_2$	$d_1 d_3$	...	$d_1 d_{14}$
	c_2	$c_2 d_1$	$c_2 d_2$	$c_2 d_3$	...	$c_2 d_{14}$	d_2	$d_2 d_1$	$\times$	$d_2 d_3$	...	$d_2 d_{14}$
	c_3	$c_3 d_1$	$c_3 d_2$	$c_3 d_3$	...	$c_3 d_{14}$	d_3	$d_3 d_1$	$d_3 d_2$	$\times$	...	$d_3 d_{14}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	c_{12}	$c_{12} d_1$	$c_{12} d_2$	$c_{12} d_3$	...	$c_{12} d_{14}$	d_{14}	$d_{14} d_1$	$d_{14} d_2$	$d_{14} d_3$	...	$\times$

Druga tabela pokazuje, że wiele delegacji składa się z tych samych osób, na przykład te same dziewczeta są w parach $d_2 d_3$ i $d_3 d_2$. Traktujemy jednak te pary jako różne, ponieważ w delegacji $d_2 d_3$ dziewczynka d_2 wręcza kwiaty, a d_3 składa życzenia, natomiast w delegacji $d_3 d_2$ jest odwrotnie.

Warto też zauważyć, że w obu przypadkach opisanych w przykładzie, gdybyśmy najpierw wybrali osobę składającą życzenia, a potem osobę wręczającą kwiaty, to liczba możliwych delegacji by się nie zmieniła.

Metodę zliczania możliwości, którą opisaliśmy wcześniej, można też stosować, gdy problem wymaga podjęcia więcej niż dwóch decyzji.

Przykład

Na karuzeli dla małych dzieci jest 15 miejsc na figurach różnych zwierząt. Na ile sposobów można na tej karuzeli wybrać miejsca dla dwojga dzieci, na ile — dla trojga dzieci, a na ile — dla czworga dzieci?

Liczba możliwości,
gdy dzieci jest dwoje:

$$15 \cdot 14 = 210$$

Pierwszemu dziecku przydzielamy jedno z 15 miejsc i dla każdego tak wybranego miejsca można drugiemu dziecku przydzielić jedno z 14 pozostałych miejsc.

Liczba możliwości,
gdy dzieci jest troje:

$$15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$$

Pierwszej dwójce dzieci przydzielamy miejsca na $15 \cdot 14$ sposobów i dla każdej tak wybranej pary miejsc można trzeciemu dziecku przydzielić jedno z 13 pozostałych miejsc.

Liczba możliwości,
gdy dzieci jest czworo:

$$15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 = 32\,760$$

Pierwszej trójce dzieci przydzielamy miejsca na $15 \cdot 14 \cdot 13$ sposobów i dla każdej tak wybranej trójki miejsc można czwartemu dziecku przydzielić jedno z 12 pozostałych miejsc.

Odp. Dwojgu dzieciom można przydzielić miejsca na 210 sposobów, trojgu — na 2730 sposobów, a czworgu — na 32 760 sposobów.

Czasami, aby ustalić liczbę możliwości, musimy dodać obliczone wyniki z dwóch odrębnych przypadków.

Przykład

W miejscowości letniskowej jest pizzeria i pierogarnia. W pizzerii można kupić 8 rodzajów pizzy i 5 różnych napojów, a w pierogarni można wybrać 7 różnych rodzajów pierogów i 6 napojów. Ile różnych zestawów składających się z dania i napoju można wybrać, stołując się tylko w pizzerii lub pierogarni?



Liczba zestawów w pizzerii:

$$8 \cdot 5 = 40$$

Danie wybieramy na 8 sposobów, a napój — na 5 sposobów.

Liczba zestawów w pierogarni:

$$7 \cdot 6 = 42$$

Danie wybieramy na 7 sposobów, a napój — na 6 sposobów.

Liczba zestawów łącznie:

$$40 + 42 = 82$$

Odp. Można wybrać 82 różne zestawy.

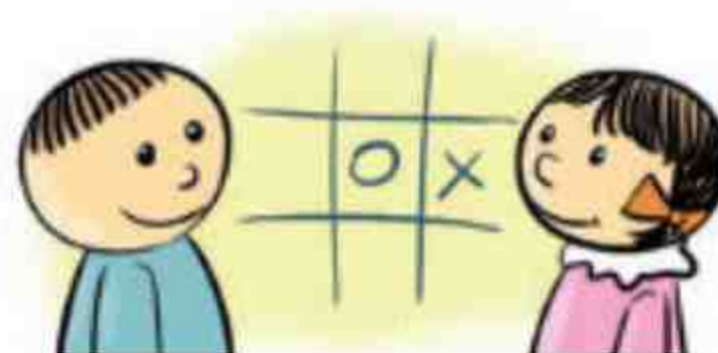
Zadania

1. a) Mechanizm przerzutek pewnego roweru ma 4 koła zębate z przodu i 7 z tyłu. Na ile sposobów można w tym rowerze ustawić przerzutki?
 b) Klawiatura fortepianu składa się z 52 białych i 36 czarnych klawiszy. Ile różnych dźwięków można zagrać, naciskając jeden biały i jeden czarny klawisz?
 c) Pani Aniela umie gotować 5 różnych zup i 10 różnych drugich dań. Przez ile dni może serwować dwudaniowy obiad bez powtarzania zestawu?

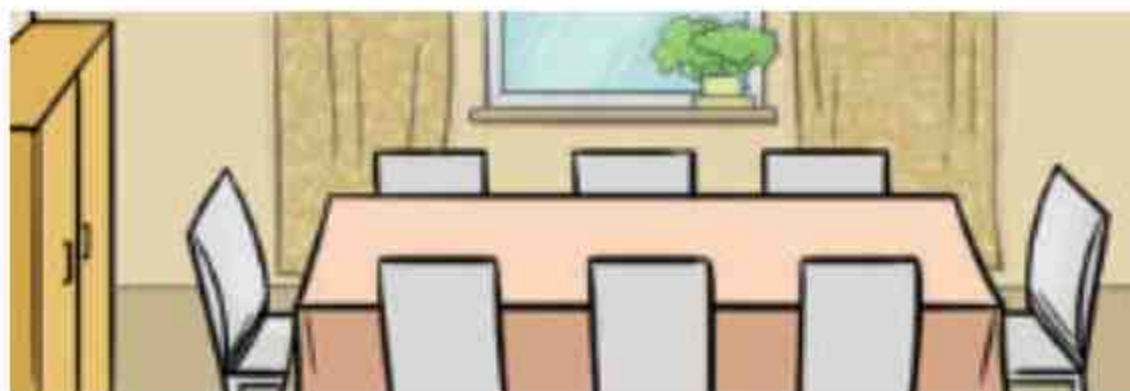


2. a) W pudełku jest 12 różnych kredek. Na ile sposobów można przydzielić po jednej kredce dwojgu dzieciom?
 b) Na ile sposobów 2 osoby mogą zająć miejsca w autobusie, w którym jest 30 wolnych miejsc?
 c) W pudełku jest 11 kart z liczbami naturalnymi od 10 do 20. Losujemy najpierw jedną kartę, potem drugą i układamy ją obok pierwszej (z jej prawej strony). Ile różnych liczb czterocyfrowych można utworzyć w ten sposób?
3. Lucyna kupiła 7 nowych segregatorów w różnych kolorach. Do jednego z nich chce wkładać klasówki z matematyki, a do drugiego — prace z języka polskiego. Na ile sposobów może wybrać segregatory do przechowywania materiałów z tych dwóch przedmiotów?
4. W hali fabrycznej na dwóch ścianach są okna. Na jednej ścianie jest 14 okien, a na drugiej jest 10 okien. Na ile sposobów można otworzyć okna, aby na każdej ze ścian z oknami jedno było otwarte?

5. Jacek z Agatką grają w kółko i krzyżyk. Jacek rysuje pierwsze kółko, a po nim Agatka rysuje krzyżyk. Na ile sposobów mogą zaznaczyć te dwa pierwsze znaki?



6. Wybierając dowolną sylabę z pierwszego worka i dowolną — z drugiego worka, można utworzyć wyraz. Ile różnych słów można w ten sposób utworzyć?



7. Popatrz na rysunek obok. Na ile sposobów można przydzielić miejsca przy tym stole:

- a) dwóm osobom,
- b) trzem osobom?

2/270

8. Leszek ma w kurtce 5 kieszeni. Ustal, na ile sposobów może schować w kieszeniach swojej kurtki:

- a) klucze i telefon,
- b) klucze i telefon, ale tak, aby znalazły się w różnych kieszeniach,



9. Na ile sposobów możesz umieścić dwa przedmioty w kieszeniach ubrania, które masz dziś na sobie? Na ile sposobów możesz umieścić trzy przedmioty w twoich kieszeniach? Zakładamy, że przedmioty nie muszą trafić do różnych kieszeni.



10. Alina może pójść do szkoły siedmioma różnymi drogami.

- a) Na ile sposobów Alina może wybrać drogę do szkoły i z powrotem?
- b) Na ile sposobów Alina może wybrać drogę do szkoły i z powrotem tak, aby nie wracać tą samą drogą?

11. W lodziarni jest 12 smaków lodów, 4 rodzaje posypek, 5 różnych rodzajów polew i 3 rodzaje wafli. Oblicz, na ile sposobów można wybrać w tej lodziarni:

- a) jedną gałkę lodów w wafle (bez dodatków),
- b) jedną gałkę lodów w wafle z posypką,
- c) jedną gałkę lodów w wafle z posypką i polewą.

12. a) Ile jest liczb dwucyfrowych podzielnych przez 5, a ile wśród nich jest liczb o różnych cyfrach?

- b) Ile jest liczb trzycyfrowych podzielnych przez 5, a ile wśród nich jest liczb parzystych?



6/270

11/271

13. Tworzymy kod, wybierając znaki z 26 wielkich liter i 10 cyfr. Ustal, ile różnych kodów można utworzyć przy opisanych warunkach.

- a) Kod składa się z dwóch dowolnych liter.
- b) Kod składa się z dwóch różnych cyfr.
- c) Kod składa się z trzech różnych liter.
- d) Kod składa się z trzech różnych cyfr.
- e) Pierwszym znakiem kodu jest litera, a drugim znakiem jest cyfra.
- f) Kod składa się z trzech znaków, ale pierwsze dwa znaki to litery, a trzeci znak jest cyfrą.



14. Państwo Kownaccy spodziewają się dziecka, ale nie wiedzą, jakiej będzie płci. Chcą dziecku nadać dwa imiona. Przygotowali listę 12 imion żeńskich i 10 imion męskich. Ile różnych zestawów dwóch imion dla przyszłego dziecka mogą przygotować, korzystając z tych list?

***15.** Na pianinie można zagrać 88 różnych dźwięków, a na dzwonkach można zagrać 27 dźwięków. Wyobraź sobie, że masz zagrać na tych instrumentach dwa dźwięki — kolejno, jeden po drugim. Ile różnych sekwencji dwudźwiękowych możesz zagrać, jeśli:

- a) dźwięk może się powtórzyć,
- b) nie chcesz zagrać tego samego dźwięku dwa razy na tym samym instrumencie?

Sprawdź, czy umiesz

1. Na półmisku leżą: jabłko, gruszka, śliwka, brzoskwinia i nektarynka. Chłopiec i dziewczynka wybierają po jednym owocu. Na ile różnych sposobów mogą to zrobić?

- A. 10 B. 20 C. 25 D. 40

2. Pan Sędziński chce kupić samochód. Rozważa dwa różne modele. Pierwszy z modeli jest sprzedawany w sześciu kolorach i z trzema typami silników. Drugi z modeli oferowany jest w dziesięciu kolorach i ma pięć typów silników. Ile jest różnych samochodów, spośród których pan Sędziński może dokonać wyboru?

- A. 24 B. 68 C. 128 D. 450

2

Obliczanie prawdopodobieństw (cd.)

Metody ustalania liczby możliwości opisane w poprzednim temacie przydają się czasami przy obliczaniu prawdopodobieństwa.

Przykład

W pierwszej szufladzie są 4 czapki — dwie białe, różowa i zielona. W drugiej szufladzie jest 5 szalików — trzy zielone, czerwony i biały. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losując czapkę i szalik, otrzymamy komplet w tym samym kolorze?

	szaliki				
	z_1	z_2	z_3	c	b
b_1	b_1z_1	b_1z_2	b_1z_3	b_1c	b_1b
b_2	b_2z_1	b_2z_2	b_2z_3	b_2c	b_2b
r	rz_1	rz_2	rz_3	rc	rb
z	zz_1	zz_2	zz_3	zc	zb

Wypisujemy wszystkie możliwości za pomocą tabelki i zaznaczamy te, które spełniają opisany warunek.

Liczba wszystkich możliwych zestawów:

$$N = 4 \cdot 5 = 20$$

Czapkę wybieramy na 4 sposoby i do każdej wybranej czapki dobieramy szalik na 5 sposobów.

Liczba możliwych kompletów w tym samym kolorze:

$$n = 5$$

Czapka i szalik mogą być zielone lub białe.

Prawdopodobieństwo:

$$P = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Odp. Prawdopodobieństwo wybrania kompletu w jednym kolorze wynosi $\frac{1}{4}$.

ĆWICZENIE. Korzystając z powyższej tabeli, oblicz prawdopodobieństwo, że:

- wyberzemy białą czapkę i czerwony szalik,
- wyberzemy czapkę i szalik w dwóch różnych kolorach,
- wyberzemy różową czapkę, a szalik nie będzie biały.

Gdy chcemy ustalić liczbę możliwości spełniających podany warunek, czasami łatwiej obliczyć najpierw, ile zdarzeń nie spełnia tego warunku, a następnie otrzymaną liczbę odjąć od liczby wszystkich możliwych wyników.

Przykład

W talii są 52 karty, w tym 4 asy. Karol i Gosia wybierają kolejno po jednej karcie. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że co najmniej jedno z nich nie wylosuje asa?

Liczba możliwości wylosowania dwóch kart:

$$N = 52 \cdot 51 = 2652$$

Karol wybiera kartę na 52 sposoby i po każdym takim wyborze Gosia może wybrać jedną z pozostałych 51 kart.

Liczba możliwości wylosowania dwóch asów:

$$4 \cdot 3 = 12$$

Karol może wybrać asa na 4 sposoby i po każdym takim wyborze Gosia może wybrać jednego z pozostałych 3 asów.

Liczba możliwości, gdy co najmniej jedna osoba nie wylosuje asa:

$$n = 2652 - 12 = 2640$$

Prawdopodobieństwo:

$$P = \frac{2640}{2652} = \frac{220}{221}$$

Odp. Prawdopodobieństwo tego, że co najmniej jedna z osób nie wylosuje asa, wynosi $\frac{220}{221}$.

Zadania

1. Rysujemy prostokąt, którego wymiary ustalamy, rzucając sześcienną kostką do gry. Jeden bok ma taką długość w centymetrach, jak wynik pierwszego rzutu, a drugi bok — jak wynik drugiego rzutu. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że:
 - a) otrzymamy prostokąt o polu większym niż 10 cm^2 ,
 - b) otrzymamy prostokąt o obwodzie mniejszym niż 20 cm,
 - c) otrzymany prostokąt będzie miał pole większe niż 10 cm^2 , a obwód mniejszy niż 20 cm.
2. Każdy z dwóch graczy rzuca kolejno sześcienną kostką do gry. Wygrywa gracz, który wyrzuci większą liczbę oczek. Gdy obaj gracze wyrzucą tyle samo oczek, jest remis.
 - a) Jakie jest prawdopodobieństwo remisu?
 - b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pierwszy gracz wygra?



3. Marek i Darek spędzają piątkowe popołudnia w jednym z trzech skateparków. Każdy z chłopców wybiera skatepark losowo. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w najbliższy piątek chłopcy:

- a) spotkają się w jednym skateparku,
- b) będą w różnych skateparkach.

4. Karolina ma trzy sześciennie kostki do gry: białą, żółtą i zieloną. Losowo wybiera jedną z nich i rzuca. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że:

- a) wybrana kostka będzie żółta i wypadnie na niej 5 oczek,
- b) wybrana kostka będzie zielona i wypadnie na niej parzysta liczba oczek,
- c) wybrana kostka nie będzie biała i liczba oczek na niej nie będzie liczbą pierwszą.

5. Pani Grażyna, korzystając z internetu, używa 3 loginów i 7 haseł, jednak często zapomina, które z nich trzeba zastosować. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że pani Grażynie uda się zalogować na danej stronie internetowej, gdy:

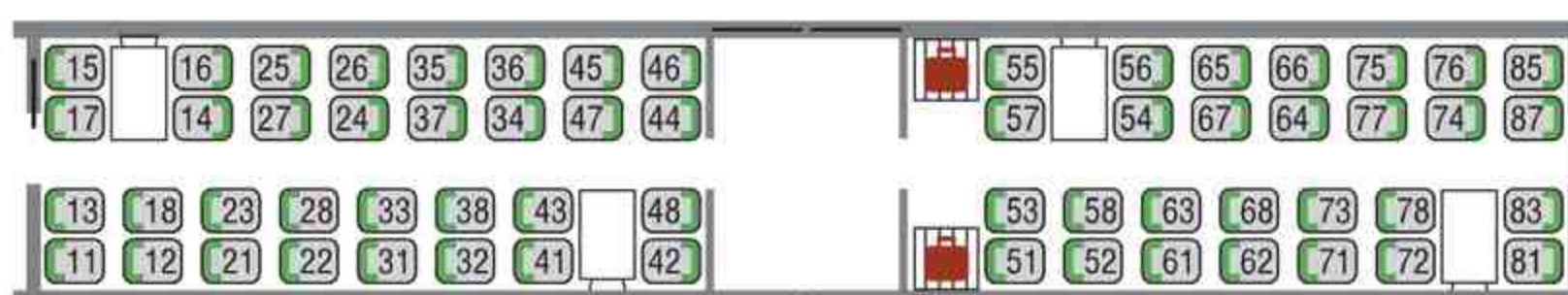
- a) wybierze losowo jeden ze swoich loginów i jedno ze swoich haseł,
- b) pamięta, że hasło na tej stronie to jedno z dwóch, których używa, a login wybierze losowo,
- c) pamięta, że login na tej stronie to jeden z dwóch loginów, których używa, a hasło wybierze losowo.

6. Pan Marian chce kupić w kwiaciarni goździki w jednym z 5 kolorów (czerwonym, różowym, białym, żółtym lub fioletowym). Zastanawia się, czy bukiet ozdobić asparagusem i wstążką, czy dodać tylko asparagus, czy tylko wstążkę, czy też bukiet zostawić bez ozdób. Zakładając, że pan Marian podejmuje swoje decyzje w kwiaciarni w sposób losowy, oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybrał:

- a) czerwone goździki bez ozdób,
- b) różowe lub białe goździki z wstążką,
- c) białe goździki z jedną z ozdób,
- d) goździki, które nie są czerwone i mają chociaż jedną z ozdób.

7. Wśród 6 różnokolorowych patyczków jeden jest krótszy od pozostałych. Dwie osoby kolejno wyciągają po jednym patyczku. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że żadna z osób nie wyciągnie krótszego patyczka?

8. a) W wagonie II klasy pociągu osobowego jest 10 przedziałów. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dwie osoby, które wsiadły do tego wagonu, znajdą się w tym samym przedziale, a jakie — że będą podróżować w różnych przedziałach.
- b) W każdym przedziale jest 8 miejsc. Dwie osoby wsiadły do przedziału nr 5. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że obie siedzą przodem do kierunku jazdy.
9. Na rysunku przedstawiono rozkład miejsc w wagonie pociągu pendolino. Zakładamy, że system sprzedaży biletów przydziela je losowo. Kupujemy dwa bilety na miejsca w tym wagonie.



Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że miejsca będą:

- a) przy oknie, c) przy tym samym stoliku,
 b) przy stoliku, *d) miały numer kończący się tą samą cyfrą.
10. Ania zapisała trzycyfrową liczbę naturalną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ta liczba:
- a) jest większa od 500, d) składa się z takich samych cyfr,
 b) jest podzielna przez 10, e) składa się z różnych cyfr,
 c) jest podzielna przez 5, f) jest parzysta i mniejsza od 700.

Sprawdź, czy umiesz

1. W finale zawodów bierze udział 8 równorzędnych zawodników (każdy z nich ma taką samą szansę wygrania zawodów). Dwóch z tych zawodników należy do jednego klubu. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że zajmą oni dwa pierwsze miejsca?
- A. $\frac{1}{28}$ B. $\frac{1}{32}$ C. $\frac{1}{56}$ D. $\frac{1}{64}$
2. Marcin rzuca dwiema kostkami: czworościenną — z liczbami od 1 do 4 oraz sześcienną — z liczbami od 1 do 6. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma otrzymanych liczb jest liczbą pierwszą?
- A. $\frac{5}{24}$ B. $\frac{7}{24}$ C. $\frac{11}{24}$ D. $\frac{13}{24}$

Przed klasówką

1. W domu jest 5 rodzajów owoców, jogurt, maślanka i kefir. Marcin chce przygotować koktajl, wybierając jeden z rodzajów owoców oraz jogurt lub kefir. Małgosia nie lubi jednego z owoców, więc chce wybrać jeden z pozostałych owoców i dodać do niego jogurt, maślanke lub kefir.

Która osoba może zrobić więcej rodzajów koktajli?

A. Małgosia B. Marcin

O ile więcej?

C. o 1 więcej D. o 2 więcej

2. Pan Alojzy kupuje ser i pieczywo w jednym z dwóch sklepów. W pierwszym ma do wyboru 3 gatunki chleba i 6 rodzajów serów, a w drugim — 6 gatunków chleba i 4 rodzaje serów (inne niż w pierwszym sklepie). Gdy pan Alojzy wybierze już sklep, kupuje w nim oba produkty. Na ile sposobów może przy takim postępowaniu wybrać chleb i ser?

A. na 18 sposobów C. na 24 sposoby

B. na 90 sposobów D. na 42 sposoby

3. Na pięciu kartkach zapisano znaki: I, V, X, C, M. Losujemy kolejno dwie kartki i układamy je obok siebie w takiej kolejności, w jakiej były wylosowane. Prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy liczbę poprawnie zapisaną w systemie rzymskim wynosi:

A. 0,7 B. 0,8 C. 0,84 D. 0,96

4. Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry i obliczamy sumę oczek otrzymanych w obu rzutach. Czy sumę 6 możemy otrzymać z takim samym prawdopodobieństwem jak sumę 8?

① Tak, ponieważ...

② Nie, ponieważ...

A — ...każdy wynik rzutu kostką jest jednakowo prawdopodobny.

B — ...prawdopodobieństwo otrzymania sumy 6 jest równe $\frac{1}{6}$, więc jest większe.

C — ...prawdopodobieństwo otrzymania każdego z tych wyników jest równe $\frac{5}{36}$.

D — ...sumę 7 otrzymamy z większym prawdopodobieństwem niż sumę 6 i niż sumę 8.

5. Na ściankach czworościennej kostki znajdują się liczby od 1 do 4. Rzucamy dwiema takimi kostkami i obliczamy różnicę otrzymanych liczb (od większej odejmujemy mniejszą). Jaki jest najbardziej prawdopodobny wynik?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Zadania uzupełniające

Ile jest możliwości?

1. Ania i Jakub kupili niezależnie od siebie bilety do kina w tym samym rzędzie. Jest w nim 12 miejsc. Na ile sposobów mogły być im przydzielone te miejsca?
- 2. W poczekalni jest 8 wolnych krzeseł. Ustal, na ile sposobów mogą zająć miejsca na tych krzesłach:
 - a) 2 osoby, b) 3 osoby, c) 4 osoby.
3. Na basenie jest 10 torów. Na ile sposobów można przydzielić tory:
 - a) dwóm zawodnikom,
 - b) trzem zawodnikom,
 - c) pięciu zawodnikom?
4. Odtwarzacz wybiera losowo piosenkę z zestawu 20 utworów.
 - a) Na ile sposobów odtwarzacz może wybrać dwie pierwsze piosenki?
 - b) Na ile sposobów odtwarzacz może wybrać dwie pierwsze piosenki tak, aby były to różne utwory?
 - c) Na ile sposobów odtwarzacz może wybrać trzy różne piosenki?
5. Podczas festiwalu można wysłuchać dwóch koncertów: jednego wieczornego i jednego nocnego. Festiwal oferuje 6 wieczornych koncertów odbywających się w tym samym czasie i w różnych miejscach oraz 4 koncerty nocne.
 - a) Ile możliwości wyboru dwóch koncertów: wieczornego i nocnego ma uczestnik tego festiwalu?
 - b) Dla najwytrwalszych słuchaczy festiwal oferuje też trzy koncerty poranne. Ilu wyborów wieczornego, nocnego i porannego koncertu może dokonać uczestnik tego festiwalu?

- 6. W pewnej pizzerii w ramach promocji można bezpłatnie dostać jeden z 15 dodatków i jeden z 5 sosów.

- a) Na ile sposobów można wybrać zestaw promocyjny?
- b) Jeśli pizzeria doda do promocyjnego zestawu jeden z 3 napojów, to na ile sposobów można będzie wybrać taki powiększony zestaw?



7. W pewnym meczu piłkarskim trener może wymienić dwóch zawodników. Wśród rezerwowych jest 3 obrońców i 2 napastników. Na ile sposobów może wybrać parę złożoną z obrońcy i napastnika?



8. W klasie VIII b jest 13 dziewcząt i 15 chłopców. Oblicz, ile maili zostanie wysłanych w każdej z opisanych sytuacji. Zakładamy, że uczniowie nie wysyłają maili do siebie.

- a) Każdy uczeń tej klasy wyśle jedną wiadomość do wszystkich koleżanek i kolegów z tej klasy.
- b) Jedną wiadomość wyśle każdy chłopiec do wszystkich kolegów, a każda dziewczynka — do wszystkich koleżanek.
- c) Każdy chłopiec wyśle maila do wszystkich koleżanek i otrzyma odpowiedź drogą mailową.



9. Mucha i biedronka chcą usiąść na szachownicy. Na ile sposobów mogą dokonać wyboru pól, na których usiądą, jeśli:
- wybiorą różne pola,
 - wybiorą białe pola (niekoniecznie różne),
 - wybiorą pola o różnych kolorach?

10. Ile jest liczb trzycyfrowych, w których cyfra 5 występuje dokładnie dwa razy?

- 11. Z cyfr od 1 do 5 układamy liczby trzycyfrowe. Ile można utworzyć różnych liczb:
- parzystych,
 - parzystych o różnych cyfrach,
 - podzielnych przez 9,
 - podzielnych przez 9 i o różnych cyfrach?

Obliczanie prawdopodobieństw (cd.)

12. W pojemniku są kule ponumerowane różnymi liczbami. Losujemy jedną kulę, zwracamy ją do pojemnika, a potem losujemy drugą kulę. Czy bardziej prawdopodobne jest wylosowanie dwóch różnych kul, gdy kul w pojemniku jest 50, czy wtedy, gdy jest ich 51?

13. Rzucamy dwa razy czworościenną kostką. Na jej ściankach są liczby naturalne od 1 do 4. Co jest bardziej prawdopodobne: że iloczyn otrzymanych liczb jest większy od 4 czy że jest mniejszy od 6?

14. Spośród kartek, na których zapisane są litery P, A, R, A, wybrano losowo dwie i zapisano w kolejności losowania. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że otrzymano słowo AR?



15. Drzwi mają trzy zamki. Do każdego z zamków pasuje tylko jeden klucz z pęku ośmiu kluczy. Wybieramy losowo zamek i klucz. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że klucz będzie pasował do zamka?



16. Marcin ma dwie jednakowe sześciennie kostki z liczbami od 1 do 6 oraz jedną kostkę czworościenną z liczbami od 1 do 4. O ile większe jest prawdopodobieństwo otrzymania sumy liczb większej od 4, gdy Marcin rzuca dwiema kostkami sześciennymi, niż wtedy, gdy rzuca dwiema różnymi kostkami?

17. Spośród 21 liczb naturalnych od 0 do 20 losujemy kolejno dwie liczby, które stanowią współrzędne punktu w układzie współrzędnych. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrany punkt będzie spełniał podany warunek:

- Obie współrzędne są parzyste.
- Tylko jedna współrzędna jest parzysta.
- Punkt leży na osi y .
- Punkt nie ma jednakowych współrzędnych.

18. Ala ma zestaw 20 farbek w różnych kolorach i pudełko z 20 kredkami o takich samych kolorach jak farbki. Wśród kolorów farbek i kredek są 4 odcienie niebieskiego. Ala wybiera losowo jedną farbkę i jedną kredkę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- farbka i kredka mają ten sam kolor,
- ani farbka, ani kredka nie są koloru niebieskiego,
- farbka albo kredka (ale nie obie jednocześnie) jest niebieska.



19. W portmonetce znajduje się 6 monet: 10 gr, 20 gr, 50 gr, 1 zł, 2 zł i 5 zł. Asia i Basia wyciągnęły z portmonetki kolejno losowo po jednej monecie.

- Jakie jest prawdopodobieństwo, że łączna kwota wyciągnięta przez dziewczęta jest większa od 1 zł?
- Jakie jest prawdopodobieństwo, że kwota wyciągnięta przez Basię jest dwa razy większa od kwoty wyciągniętej przez Asię?

20. W worku są kule białe i niebieskie ponumerowane kolejnymi liczbami. Stosunek kul białych do niebieskich jest równy 1:2.

- Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli niebieskiej?
- Losujemy kolejno dwie kule bez zwracania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że obie będą niebieskie, gdy w tym worku są 2 kule niebieskie, a jakie — gdy są 4 kule niebieskie?

21. Na kartkówce z geografii podana była lista 8 państw i lista 10 miast, wśród których były wszystkie stolice państw z pierwszej listy. Należało połączyć w pary państwa z ich stolicami. Trzy osoby rozwiązywały to zadanie w różny sposób. Dla każdej z nich oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że ta osoba poprawnie połączyła państwo z miastem.

- Marek wybrał losowo jedno z państw i połączył z losowo wybranym miastem.
- Ania skreśliła z listy miast dwa, które nie są stolicami żadnego z państw z listy, a z pozostałych miast wybrała jedno i połączyła z losowo wybranym państwem.
- Romek poprawnie połączył 5 państw z ich stolicami, a z pozostałych państw wybrał jedno i połączył je z losowo wybranym miastem z pozostałych na liście.

22. Na promocyjnej zdrapce umieszczono w sposób losowy liczby naturalne od 1 do 9. Należy odkryć (zdrapać) dwie liczby. Gdy ich suma będzie większa od 10, wygrywamy nagrodę. Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej?



23. W pudełku są 3 kulki czerwone i 4 niebieskie. Łucja wyciąga losowo jedną kulkę, a Julek — drugą. Łucja wygrywa, gdy obie kulki są tego samego koloru, a Julek — gdy są różnych kolorów.

- Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wygra Łucja, a jakie — że Julek?
- Jak można zmienić liczby kulek w pudełku, aby każdy miał taką samą szansę wygrania?

Odpowiedzi

str. 12-13: 1. a) 29, 44, 122, 250, 810, 966, b) XLV, CLIX, MCMXLIV, CDXLIV, CDLXIX, MMMDCCC, DCCCLXVI. 2. 1876, 1688, 1880, 1927, 1700. 3. Katedra w Krakowie; Bazylika Mariacka. 4. Po 84 latach; 22 lata; MDCXXVI. 5. a) MCCCXXXVII-MCDLIII, b) MCCCXLVIII-MCCCLII, c) MLXXIX-MCII, d) MDXIX-MDXXII. 6. MDXXVI; MDLVI lub MDXLVI. 7. a) MDCLXVI, b) MMMCMXCIX. 8. a) MCCXXVIII.

str. 18-19: 1. $a = 89$, $b = 196$, $c = 51$, $d = 16$. 3. a) 67, b) 40. 4. a) $m - 5$, $m - 11$, $m + 25$, b) 0, 11, 0, 2. 5. a) 0, b) 2, c) 2. 6. a) Przez 3 i 5, b) przez 2, 3, 4 i 9, c) przez 3, d) 2, 3, 5, 9 i 10. 9. a) 1; 35, b) 2; 12, c) 2; 60, d) 4; 24, e) 50; 300, f) 2; 1804. 10. a) 6; 1260, b) 10; 18 900, c) 21; 8820, d) 7; 16 170. 11. a) $2^2 \cdot 3 \cdot 5$; $2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^7 \cdot 11^5 \cdot 13^2$, b) $3 \cdot 5^7 \cdot 13$; $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^8 \cdot 13^2$. 12. $24 \text{ cm} \times 24 \text{ cm}$. 13. a) Na trzynastym miejscu, b) na jedenastym miejscu.

str. 23-26: 1. a) $\frac{5}{142}$, b) $\frac{7}{23}$, c) $\frac{1}{2}$, d) 3,81, e) 2,(5), f) 1,44, g) $-\frac{1}{7}$, h) -2,3, i) -0,33. 3. d , a , b , e , c , f . 4. Alaska, Teksas, Kalifornia, Montana, Nowy Meksyk. 5. D. Zygmunta Starego, D. Augusta II Mocnego, D. Stefana Batorego, D. Stanisława Augusta, D. Jana Kazimierza. 6. $A = -0,(7)$, $B = -0,(70)$, $C = \left(-\frac{1}{3}\right)^3$, $D = \left(-\frac{1}{3}\right)^2$, $E = \left(\frac{8}{9}\right)^2$, $F = \left(\frac{9}{8}\right)^2$. 7. a) 8, $\frac{9}{25}$, -1, 1, b) $\frac{49}{25}$, $-\frac{125}{8}$, -1,44, -64. 8. a) 3^{14} , b) $(-9)^4$, c) $(-1)^0$, d) $6,7^7$, e) $\left(\frac{2}{3}\right)^6$, f) $\left(\frac{5}{4}\right)^3$, g) $(-1,1)^3$, h) $\left(-\frac{3}{5}\right)^5$, i) $0,7^4$. 9. 5 miliardów, 30 bilionów, biliard, biliard. 10. a) $2,346 \cdot 10^5$, $4,07 \cdot 10^7$, $3,2 \cdot 10^8$, $7,6 \cdot 10^{10}$, b) $7 \cdot 10^6$, $5 \cdot 10^5$, $6 \cdot 10^{10}$, $1,95 \cdot 10^{10}$, c) $2 \cdot 10^{-2}$, $5,03 \cdot 10^{-5}$, $5,3 \cdot 10^{-4}$, $5,28 \cdot 10^{-5}$. 12. a) $2,4 \cdot 10^9$, $3,2 \cdot 10^4$, b) $1 \cdot 10^8$, $4 \cdot 10^8$, $1,5 \cdot 10^{-5}$, $2 \cdot 10^{-5}$. 13. a) $4 \cdot 10^4$, b) 357 mld, c) $67 \cdot 10^4$, d) $254 \cdot 10^8$. 14. 3, 4; 4, 5; 14, 15; 2, 3; -4, -3; 0, 1; -4, -3. 15. a) $>$, b) $<$, c) $<$, d) $>$, e) $<$, f) $>$. 16. a) $2 + \sqrt{19}$, b) $\sqrt{69} - 5$, c) 1, d) 7, e) 7, f) 4.

str. 29-33: 1. a) 347 600; 739,1; 452, b) 3,476; 0,007391; 0,00452, c) 34,76; 0,007391; 0,000452, d) 34760; 7391; 452. 2. a) 2050 m, 0,755 m, 30,5 m, b) 12 dag, 115 dag, 20 dag. 3. a) 750 a, 30 a, 10 000 a, b) $0,03 \text{ m}^2$, 6000 m^2 , 75 m^2 . 4. a) $8,5 \text{ dm}^3$, 5000 dm^3 , 2 dm^3 , b) 0,5 l, 1 500 000 l, 0,00006 l, c) 6000 cm^3 , $20 000 \text{ cm}^3$, 20 cm^3 , d) $7 000 000 \text{ m}^3$, $0,001 \text{ m}^3$, 70 m^3 . 5. a) $2500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $70 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, ok. $13,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $0,02 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, b) $0,03 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $450 000 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $1,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. 6. 17,10 zł. 7. 8, $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{2}{25}$, 16, $\frac{3}{40}$, $\frac{4}{9}$. 8. a) -28, -12, 9, b) -42, 72, -25, c) $3, 6\frac{4}{11}, 4\frac{2}{7}$, d) $9\frac{2}{3}, 11\frac{2}{5}, -\frac{6}{7}$, e) $\frac{10}{11}, \frac{5}{12}, \frac{1}{4}$, f) $\frac{2}{15}, \frac{6}{7}, -1\frac{7}{8}$, g) 1,2; 0,5; -0,9, h) 0,6; -4,8; 0,2. 9. a) $-11\frac{1}{4}$, b) -3, c) $-\frac{7}{32}$, d) $\frac{2}{3}$, e) -3,5, f) $\frac{9}{14}$, g) 5,45, h) $-2\frac{11}{24}$, i) 0,8, j) -15,6, k) -2,82, l) 16,25, m) 0,246, n) -0,644, o) $-2\frac{5}{12}$.

10. a) 52, b) -17, c) -9, d) 36, e) 6, f) 3. 11. a) 2, b) $-\frac{9}{7}$, c) $1\frac{1}{8}$, d) $-4\frac{8}{9}$, e) $\frac{5}{8}$, f) -9,4. 12. a) Ok. 4667 kroków, b) 33 tys. zł, c) ok. 7,273 mld, d) ok. 3500 razy, e) 200 tys. 13. $126\frac{2}{3}$ t; $12\frac{2}{3}$ t. 14. 11 szklanek. 15. a) 48 łyżeczek, b) $\frac{3}{8}$ filiżanki, c) 12 łyżek. 16. a) $\frac{553}{900}$, b) ok. 2 razy więcej. 17. a) 25,16, b) 2,408, c) 34,272, d) 1,52608, e) 45,2, f) 4,02. 18. a) >, b) <, c) <, d) <, e) <, f) <. 20. a) Ok. 1500 km, b) więcej niż 400. 21. Ok. 1 mln zł.

str. 35-37: 1. a) $(\frac{2}{3})^5$, b) $1,5^5$, c) 6^6 , d) 2^5 . 2. a) 9, b) 8, c) 625, d) 9. 3. Tak; $\frac{2}{5}$. 4. a) $\frac{1}{3^2}$, b) 3^{10} , c) $\frac{1}{3^4 \cdot 2^2}$, d) $0,1^3$, e) 2^{28} , f) $2^{11} \cdot 3^5$. 5. a) 3^5 , b) $1,5^{11}$, c) $3 \cdot 2^{11}$. 6. a) 10^{21} mld, b) 10^{24} mln, c) 10^6 bilionów. 7. a) 250 mln, b) 39 mld, c) 7280 bilionów. 8. a) $3,57 \cdot 10^6$, b) $2,53 \cdot 10^6$, c) $1,3 \cdot 10^{13}$, d) $2,75 \cdot 10^{-2}$, e) $1,82 \cdot 10^{31}$, f) $5 \cdot 10^4$. 9. a) $4,25 \cdot 10^7$ razy, b) 10^{-8} m. 10. a) $9,927 \cdot 10^6$, b) $3,23 \cdot 10^{15}$, c) $3,8125 \cdot 10^{13}$, d) $1,085 \cdot 10^9$. 11. a) $3\sqrt{5}$, b) $24\sqrt{7}$, c) 15, d) 12, e) $\frac{8}{3}$, f) $2,5\sqrt[3]{7}$, g) $3\sqrt[3]{10}$, h) -40. 12. a) $2\sqrt{3}$, b) $2\sqrt{5}$, c) $5\sqrt{2}$, d) $6\sqrt{5}$, e) $2\sqrt[3]{2}$, f) $10\sqrt[3]{2}$. 13. a) $2\sqrt{3}$, b) $6\sqrt{6}$, c) $\frac{35}{2}\sqrt{2}$, d) $6\sqrt{2}$, e) $8\sqrt{3}$, f) $-12\sqrt{2}$. 14. a) 3, b) 2, c) 0,8, d) 1, e) $\frac{2}{3}$, f) 0,3, g) -3, h) -4, i) $-\frac{1}{2}$. 15. a) $2\sqrt{5}$, b) $\frac{\sqrt{6}}{6}$, c) $\frac{4}{5}\sqrt{10}$. 16. a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, b) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$, c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, d) $\frac{2\sqrt{5}}{15}$.

str. 40-44: 3. a) MCDXLIV, b) MMMDCCCLXXXVIII. 4. $\overline{VXLIX}$, $\overline{XCCCXXXVI}$, $\overline{MCXI}$. 5. ① i ④. 7. a) Nie; tak, b) tak; tak. 10. c, b, a, d. 11. b, c, e, d, a. 12. $\frac{1}{9,5}$, $\frac{1}{8,9}$, $\frac{8,9}{9,6}$, $\frac{8,9}{9,5}$, $\frac{9,5}{8,9}$, $\frac{9,6}{8,9}$. 13. a) $2,8 \cdot 10^7$, b) $3,5 \cdot 10^{11}$, c) $2,5 \cdot 10^5$, d) $6,1 \cdot 10^7$. 14. a) $2 \cdot 10^{-6}$ cm, b) $3,2 \cdot 10^{-4}$. 15. a) 63,4142, b) 16,321, c) 2,38171, d) -8,0321. 16. a) Trzy, b) trzy, c) pięć, d) jedenaście. 17. a) 17, 18, b) -7, -6, c) -3, -2, d) -15, -14. 18. a) 378,2, b) 6,0512, c) 4,9725, d) 750. 19. a) 70 m; 0,51 m; 0,255 m, b) 230 cm; 7540 cm; 0,22 cm, c) 60 kg; 0,25 kg; 3,5 kg, d) 2 ha; 200 ha; 0,0001 ha. 20. a) $0,28 \frac{m}{s}$, ok. $16,7 \frac{m}{s}$, $0,025 \frac{m}{s}$, b) $0,36 \frac{km}{h}$, $432 \frac{km}{h}$, $0,048 \frac{km}{h}$. 21. a) $-8\frac{1}{2}$, b) $-\frac{2}{7}$, c) $-\frac{3}{2}$, d) 3,89, e) 0,64, f) -0,6, g) $-1\frac{3}{8}$, h) $-2\frac{19}{30}$, i) 3, j) $-\frac{10}{21}$. 22. a) $-8\frac{1}{2}$, b) $13\frac{1}{3}$, c) 5,3, d) $\frac{9}{16}$. 23. a) 36 sekund, b) 144 minuty, c) 3,1 godziny, d) $\frac{3}{16}$ doby, e) 25 minut, f) $183\frac{1}{20}$ minuty. 24. a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$, d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{30}$ lub $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$. 25. a) $4\frac{4}{5}$, b) $\frac{1}{12}$, c) $\frac{3}{13}$, d) 8, e) $\frac{3}{4}$, f) 6. 26. a) $5\frac{1}{2}$, b) $2\frac{1}{4}$, c) $-\frac{52}{81}$, d) 0,5, e) $15\frac{2}{3}$. 27. a) 1,24 osoby, b) 91,44 a, c) 350 kg. 28. $\frac{5}{12}$. 29. a) W 100 kg, b) 10 ml, c) 1,35 t. 30. a) $3,6 m^3$, b) $1,5 \cdot 10^{10}$ ziaren. 31. a) 3862,50 zł, b) 213,31 zł, c) 2,43 zł, d) 1669,70 zł. 32. $\frac{8}{15}$. 33. O 1,58 zł. 34. 45 dag; 35 dag. 35. a) $731,52 \text{ cm} \times 243,84 \text{ cm}$; $40,2336 \text{ m} \times 16,4592 \text{ m}$, b) ok. 12 jardów; ok. 10 jardów. 36. a) O 18 750 skrupułów, b) 63,36 kg. 37. 1,35024; 1,43987. 38. a) 1,04999; 0,95001, b) 1,00499; 0,99501. 39. a) Nie, b) tak, c) tak, d) tak. 40. a) Nie, b) tak. 42. a) Nie, b) mniej, c) dłużej. 43. a) 2^8 , b) 7^{10} , c) 17^{28} ,

d) 4^5 . 44. a) 25, b) 0,001, c) $\frac{2}{5}$, d) 0,001. 45. a) 2, b) 216, c) 100, d) 27.
 48. a) $6 \cdot 10^{17}$, b) $8,3 \cdot 10^{10}$, c) $3 \cdot 10^7$, d) $1,9 \cdot 10^6$. 49. $2,2144 \cdot 10^6 \text{ km}^2$. 50. a) $\frac{\sqrt{5}}{12}$,
 b) $\frac{7\sqrt{5}}{6}$, c) $\frac{13\sqrt{6}}{4}$, d) $11\frac{1}{4}$, e) $\frac{3}{4}$, f) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 51. $2\sqrt{3}$ i $\sqrt{12}$; $(2\sqrt{2})^2$ i $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$; $\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}$
 i $3\sqrt{2}$. 52. a) $2\sqrt{10}$, b) $24\sqrt{3}$, c) $1,4\sqrt{6}$, d) $3\sqrt[3]{2}$, e) $2\sqrt[3]{3}$, f) $-2\sqrt[3]{3}$. 53. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$,
 b) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$, c) $\frac{5\sqrt{7}}{14}$.

str. 47-49: 2. a) $1000x + 5$, b) $5 + \frac{y}{1000}$, c) $100x + y$, d) $a + \frac{b}{100}$, e) $h + \frac{a}{100}$, f) $g + \frac{m}{60}$.
 3. a) $-4x^2 + x + 5$, b) $\frac{8}{5}p^2 + \frac{1}{3}p + 4$, c) $-2a^3 + 8a^2 - 11a$, d) $-\frac{5}{3}b^2 + \frac{11}{4}b - 3$, e) $2,3m^2 +$
 $+0,4m - 5$, f) $-2n^3 + 1,1n^2 + 1,3n$. 4. a) $-8x - 2$, b) $4y - 10$, c) $9x^2 - 11$, d) 0,
 e) $3x$, f) $6\frac{1}{2}$. 5. a) $x^2 + 5x + 4$, b) $8x^2 + 8x - 6$, c) $-x^2 - 4x + 21$, d) $-z^2 - 4z + 6$,
 e) $-10k - 12$, f) $-3ab + 6b^2$. 6. a) $x^2 + 14x + 49$, b) $4x^2 - 4x + 1$, c) $25x^2 + 20xy + 4y^2$.
 7. a) $P = \frac{5}{6}ab$, obwód = $2a + 2b$, b) $P = a^2 + b^2 + 4ab$, obwód = $4a + 8b$, c) $P = y^2 - x^2 +$
 $+2xy$, obwód = $4x + 4y$, d) $P = 3a^2 + 5a + 15$, obwód = $10a + 16$. 8. a) $1 - a$, b) $-x$,
 c) $2x - y$, d) $-2a - 1$. 9. a) -42 , b) $-7\frac{1}{7}$, c) 10, d) $-2\frac{23}{25}$. 10. a) $x + 2$,
 b) $x - 3$, c) $4x - 20$, d) $-6a - 1$. 11. $x - y$. 12. a) 6; -6 , b) 11; -9 . 14. a) $a - x$
 chłopców; $\frac{2}{11}(a - x)$; $\frac{1}{55}x + \frac{2}{11}a$, b) $b + 17$ lat; $b + 7$ lat; $b + 12$ lat; $b + 5$ lat, $b + 22$ lat;
 $b + 4$ lat; $b - 3$ lata; $b + 14$ lat, c) $0,6x$ [zł]; $2(3x - 5)$ [zł], d) $190^\circ - 2\alpha$, e) $370^\circ - 3\alpha$.
 15. a) $3n - 2$, b) $45a^2 - 67,5a$, c) $10,4x$, d) $5 - 0,3x - 0,25y$, e) $0,1p - 0,2$.

str. 52-56: 1. a) Żadna, b) obie, c) żadna, d) 3. 2. a) $x = -2$, b) $x = -1$, c) $x = -4$.
 3. a) $x = 3$, b) $x = \frac{3}{4}$, c) $x = -2,5$, d) równanie tożsamościowe, e) $x = 1$, f) $x = -\frac{5}{4}$.
 4. a) $x = \frac{5}{3}$, b) $x = 1$, c) $x = \frac{16}{7}$, d) $x = -7$, e) równanie tożsamościowe, f) równanie
 sprzeczne. 5. a) $x = -\frac{8}{9}$, b) $x = 3$, c) $x = \frac{37}{11}$. 6. a) $x = -\frac{29}{36}$, b) $x = -6$, c) $x = \frac{5}{4}$,
 d) $x = -\frac{19}{16}$. 7. a) Nie ma, b) nieskończenie wiele, c) jedno, d) nieskończenie wiele,
 e) brak, f) brak. 8. a) Brak; jedno, b) nieskończenie wiele; brak, c) $m = 5$; nie.
 9. a) $f = \frac{2P}{e}$, $e \neq 0$, b) $H = \frac{3V}{ab}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, c) $b = \frac{2P}{h} - a$, $h \neq 0$, d) $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$, e) $a = \frac{2h}{\sqrt{3}}$,
 f) $a = \frac{2P}{r} - b - c$, $r \neq 0$. 10. a) $a = 8$, b) $a = -4$. 11. a) $x = 2$, b) $x = 2$, c) $x = 2$.
 12. a) 3 cm, 4 cm, 4 cm, b) 1 cm. 13. 23 zł. 14. 51 kg. 15. 222 strony. 16. 100 tys.
 nudziarzy i 20 tys. fantastów. 17. 1 gr. 18. 35 pokoi. 19. 8 razy. 20. 2550 zł.
 21. 37 zł. 22. Nie można. 23. 36 cukierków. 24. 6 lat. 25. 85 cm. 26. 21 osób.
 27. 32 skrzynie. 28. 18 litrów. 29. 65 jaj. 30. Kości ważą 0,25 kg, a mięso 0,75 kg.

str. 58-59: 1. a) $x = 4\frac{1}{5}$, b) $y = 1\frac{3}{4}$, c) $t = 7\frac{1}{3}$, d) $z = 2\frac{3}{13}$, e) $p = 3,7$, f) $n = 2\frac{3}{5}$.
 2. a) $x = -2$, b) $x = -5$, c) $x = \frac{11}{25}$, d) $x = -\frac{1}{10}$, e) $x = 2,5$, f) $x = -8$. 3. $b = 18$.
 4. a) $\frac{24}{32}$, b) $\frac{27}{21}$. 5. O godzinie 23 : 54. 6. 54 pracowników. 7. 20 losów. 8. a) 9,
 b) 6.

str. 62–63: 2. a) 0,6 l, b) 3,9 kg. 3. a) 250 par, b) 810 zł. 5. 10,32 zł. 6. O kąt $11^\circ 15'$.
7. $1\frac{1}{8}$ szklanki mleka, 0,75 kg maki; 150 g cukru, 3 jajka, 3,75 dag drożdży. 8. 7 mg.
9. 64 kg. 10. Około 2,2 l. 11. Nie. 12. 60 kg. 13. 27 szylingów i 6 pensów.

str. 66–70: 1. a) $-\frac{a^2}{2}$, b) $\frac{3}{2}x^2$, c) x^2 , d) $-\frac{4}{3}m^2$. 4. a) $2bc - 1$, b) $3x - 3z$,
c) $-x^3 - x^2 - 15x$, d) $3b + 4$. 5. a) $-1,5x + 2$, b) $0,25x - 0,25$, c) $\frac{1}{2}$, d) $\frac{5}{6}x - 3\frac{2}{3}$,
e) $3x - 8y$, f) a , g) 3, h) $-2p + 8$. 6. a) $x^2 - 5$, b) $2y^2 + 2y - \sqrt{3}y - \sqrt{3}$,
c) $a^2 - \sqrt{3}a + \sqrt{2}a - \sqrt{6}$, d) $-k^2 - \sqrt{2}k + 4$. 7. a) $x^2 - 2y^2 - 4x - 2y - 17$, b) $-11a + 6$,
c) $2x^2 + x + 3$, d) $2m^2 - m - 3n$. 8. a) $7k$, b) $\frac{1}{5}k$, c) $\frac{1}{2}k - 10$, d) $\frac{4}{5}k^2$. 9. $4a^2 - 3ab + 14$.
10. a) $a + 3b$, b) $a - 3b$. 11. W $\frac{m+2}{8}$ przedziałach. 12. $2x(y - 1)$ zł. 13. a) $\frac{4}{3}x + \frac{5}{6}$ [zł],
b) $-3x + 42,5$ [zł], c) $1,5x + 5$ [zł]. 14. $P = \frac{5}{8}a^2$. 15. a) $P = x^2 + 8x + 12$, b) $P = \frac{3}{2}a + 2h$.
16. a) O $(3t - 5p)$ g, b) $\frac{40s}{3t}$ razy. 17. $12n(g + p + \frac{t}{100})$. 18. a) $x = 1$, b) $x = 3$,
c) $x = -\frac{11}{14}$, d) $x = 7$. 19. a) Równanie sprzeczne, b) równanie tożsamościowe,
c) $x = -\frac{3}{5}$, d) $x = \frac{9}{17}$. 20. a) $x = -\frac{23}{8}$, b) $x = \frac{8}{7}$, c) $x = -6$, d) $x = \frac{13}{4}$. 22. 60 m^2 .
23. 490 samochodów. 24. 600 kg. 25. 12 osób. 26. 9,50 zł. 27. $s = v \cdot t$, $t = \frac{s}{v}$.
28. a) 2 min 5 s, b) 6 cm. 29. a) Z prędkością większą niż $43,2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, b) ok. 833 razy
szybciej, c) prędkość sokoła jest o $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ większa od prędkości strzały. 30. Prędkość
ptaków jest większa o ok. $24 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. 31. a) Ok. 6,5 s, b) 100,8 cm, c) ok. $1,39 \frac{\text{cm}}{\text{min}}$, d) $90 \frac{\text{m}}{\text{h}}$.
32. 8 km. 33. Ok. $45,7 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. 34. $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. 35. Po $\frac{2}{3}$ s. 36. Ok. 9 min. 37. Ok. $4,86 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
38. a) $x = -5,5$, b) $x = -2$, c) $x = \frac{5}{7}$, d) $x = 0$. 39. 1. 40. 270 cm. 41. 11 goli.
42. 240 kcal; 3 g; 18 g. 43. 36 sekund. 44. Około 2,3 km. 45. 205 znaków na minutę.
46. 46 km. 47. 12 myszy.

str. 75–78: 1. a) Trzy, b) 30° , 70° , 80° oraz 40° , 60° , 80° . 2. a) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 48^\circ$,
 $\gamma = 65^\circ$, b) $\alpha = 65^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 25^\circ$. 3. 50° i 50° lub 80° i 20° . 4. $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 155^\circ$,
 $\gamma = 28^\circ$. 5. a) $P = 7,5$. 6. a) $P = 10$, b) $P = 2$. 7. ③. 10. a) $M = (3, 5)$, $N = (7, 8)$,
 $K = (-5, -1)$. 12. a) $\alpha = 115^\circ$, $\beta = 100^\circ$, b) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 50^\circ$, c) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 130^\circ$.
13. Równoległobok: 70° , 110° , 70° , 110° ; romb: 66° , 114° , 66° , 114° ; trapez: 50° , 50° ,
 130° , 130° . 14. 23,5; 18; 22; 11; 22. 15. a) $P = 4\sqrt{6}$, b) obwód $= 8\sqrt{5}$. 16. 7,2 cm.
17. $4\frac{8}{13}$. 18. $P = 16$. 19. a) Nie, b) nie.

str. 83–86: 1. a) $P = 16$, b) $P = 4$, c) $P = 10$. 3. a) $8P$, b) $\frac{1}{8}S$. 6. L. 7. a) $x = 10$,
b) $y = 8$, c) $z = 2\sqrt{10}$, d) $a = \sqrt{2}$, e) $b = \sqrt{47}$, f) $c = 2$. 8. a) $AB = \sqrt{61}$, b) $AB = 10$,
c) $AB = \sqrt{14}$. 9. a) 30, b) 30 cm, c) $P = 10\sqrt{6} \approx 24,5$. 10. Ok. 1,1 m i ok. 1,3 m;
ok. 1,4 m; ok. 4,5 m; ok. 28,5 m; ok. 19,4 cm; ok. 3,8 m. 11. 12,5 mili od portu.
12. Około 224 m. 13. Tak. 14. $AC = \sqrt{2}$, $AD = \sqrt{3}$, $AE = 2$, $AF = \sqrt{5}$, $AG = \sqrt{6}$,
 $AH = \sqrt{7}$, $AI = 2\sqrt{2}$.

str. 88-92: 1. a) $x = 17$, b) $y = \sqrt{119}$, c) $z = \sqrt{74}$. 2. a) $4\sqrt{2}$, b) $5\sqrt{5}$, c) $\sqrt{34}$.
 3. Tak. 4. $P = 3\sqrt{62} \text{ cm}^2 \approx 23,6 \text{ cm}^2$. 5. 10 cm. 6. 36 cm. 7. $6\sqrt{5}$. 8. 9,6 cm.
 9. a) $6\sqrt{5} + 28$, b) $\sqrt{39} + 43$, c) 24. 10. $2\sqrt{33} \text{ cm} \approx 11,5 \text{ cm}$. 11. Tak. 12. O ok. 4 cm
 ($2(1 - \sqrt{1 - 0,2^2}) \approx 0,04$). 13. a) $x = 2\sqrt{6}$, b) $y = \sqrt{57}$, c) $z = 10\sqrt{2} - 12$. 14. 8 cm.
 15. Co najmniej 12 warstw. 16. $P = 9$. 17. Około 3 s. 18. 32 cm. 19. O około
 3 cm. 20. $P = 48 \text{ cm}^2$. 21. 9,1 m od ziemi. 22. a) $\frac{8}{\sqrt{5}}$, b) $9\frac{3}{13} \text{ cm}$. 23. a) $x = 3$,
 b) $y = 2\sqrt{41}$, c) $z = 4\sqrt{11}$. 24. $2\sqrt{78} \text{ m} \approx 17,7 \text{ m}$. 25. a) 2,5 m, b) ok. 2,29 m.

str. 95-96: 1. a) $7\sqrt{6}$, b) dłuższa, c) o $2\sqrt{2} \text{ cm} \approx 2,8 \text{ cm}$. 2. a) $\sqrt{2}$, b) $10\sqrt{2}$,
 c) o $\sqrt{2}$. 3. Druga, krótsza o $10 - 5\sqrt{2} \text{ m}$, czyli o ok. 2,93 m. 4. $24 + 12\sqrt{2}$. 5. a) $6\sqrt{3}$,
 b) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$, c) 1,5, d) $6\sqrt{2}$. 6. a) $P = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$, b) $P = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$, c) $P = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$,
 d) $P = \frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$. 7. a) $\frac{8}{\sqrt{3}}$, b) $P = 25\sqrt{3}$, c) 2. 8. $P = \frac{7\sqrt{3}}{3}$, obwód = $\frac{14}{\sqrt{3}}$. 9. $P = 2\sqrt{3} + 2$.
 10. $P = 4\sqrt{3} + 12$.

str. 99-101: 1. a) $8 + 4\sqrt{2}$, b) $\sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{2}$, c) $4\sqrt{2} + 4$. 2. a) $a = 4$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 2,5$,
 $d = 2,5\sqrt{3}$, $e = 6$, $f = 12$, $g = 6$, $h = 3\sqrt{3}$, b) $a = 3,5$, $b = 3,5\sqrt{3}$, $c = 8$, $d = 4\sqrt{3}$, $e = 4\sqrt{3}$,
 $f = 4$, $g = 1$, $h = 2$. 3. a) $\frac{6}{\sqrt{3}}$, $\frac{12}{\sqrt{3}}$, b) $\frac{9}{\sqrt{3}}$, $\frac{18}{\sqrt{3}}$, c) $\frac{10}{\sqrt{3}}$, $\frac{20}{\sqrt{3}}$, d) $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$. 4. a) $6 + 2\sqrt{3}$,
 b) $\frac{6}{\sqrt{3}} + 2$, c) $3 + \sqrt{3}$. 5. $x = \frac{10}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{6}{\sqrt{2}}$, $z = 4$. 6. a) $4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 12$, b) $3\sqrt{3} +$
 $+ 3\sqrt{6} + 9$, c) $5\sqrt{2} + 5\sqrt{3} + 5$. 7. $8\sqrt{2} + \frac{24}{\sqrt{3}} + 8$. 8. $\frac{8}{\sqrt{3}}$. 9. a) 15 m, b) ok. 462 m.
 10. a) $(2\sqrt{3} + 10) \text{ cm} \approx 13,5 \text{ cm}$, b) $15 + 3\sqrt{3}$. 11. Ok. 2,9 m. 12. $(10\sqrt{2} + 20) \text{ cm} \approx$
 $\approx 34,1 \text{ cm}$. 13. 30 cm.

str. 104-105: 1. a) $2\sqrt{5}$, b) 5, c) $6\sqrt{2}$, d) 5. 2. Przez K: $\sqrt{34} + 4$; przez L: $\sqrt{29} + 5$;
 droga przez L jest dłuższa. 3. a) $4\sqrt{26}$, b) $2\sqrt{58} + 6$, c) $4\sqrt{10} + 10$. 4. 5; $\sqrt{10}$;
 10; $3\sqrt{2}$; 13. 5. P_1 — na okręgu; P_2 — wewnątrz okręgu, P_3 — na zewnątrz okręgu.
 6. $P = (4, 2\sqrt{5})$, $R = (4, -2\sqrt{5})$. 7. A, B i D. 8. a) (10, 7), b) (-2, 17), c) (-7, -5),
 d) (-7, -9). 9. a) $B = (16, 11)$, b) $B = (-15, -10)$. 11. a) $S = (2, 6)$, $r = 5$, b) $S = (2, \frac{1}{2})$,
 $r = 6,5$. 12. $S = (10, 20)$, $D = (70, 40)$.

str. 114-118: 1. 50° , 50° , 80° . 2. a) 60° , 120° , 60° , 120° , b) 60° , 120° , 60° , 120° ,
 c) 30° , 150° , 150° , 30° . 3. $DB = 3$. 4. a) $P = 24$, b) $P = 25\frac{2}{3}$, c) $P = 27$. 5. Pierwsza;
 o $\frac{a}{2}$. 6. 2 razy. 7. $P = 16$; obwód = $6 + 2\sqrt{5}$. 9. $10\sqrt{3} \text{ cm}$ lub $10\sqrt{5} \text{ cm}$. 10. $18 + 6\sqrt{3}$.
 12. a) $x = 3\sqrt{6}$, b) $y = \sqrt{21}$. 13. 15 cm. 14. $\sqrt{10}$. 15. $P = 100\sqrt{2} \text{ cm}^2 \approx 141,4 \text{ cm}^2$.
 16. 44 cm. 18. $P = 180 \text{ cm}^2$. 19. $4\sqrt{41}$. 20. $P = 270 \text{ cm}^2$. 21. $\sqrt{55}$, $3\sqrt{5}$, $3 + \sqrt{65}$.
 22. a) Ok. 1,74 m, b) ok. 1,47 m, c) 0,75 m; 1,25 m. 23. Ok. 2,8 m. 24. $100\sqrt{29} \text{ m} \approx$
 $\approx 539 \text{ m}$. 25. 20. 26. $P = 60$; 12; $9\frac{3}{13}$ i $9\frac{3}{13}$. 27. $P = 25 \text{ cm}^2$; obwód = $(10\sqrt{2} + 10) \text{ cm} \approx$
 $\approx 24,14 \text{ cm}$. 28. $2\sqrt{3}$; 20. 29. a) Tak, b) nie. 30. $DB = 6 + 6\sqrt{3}$; $P = 36\sqrt{3} + 36$;

obwód = $24 + 12\sqrt{2}$. 31. $4\sqrt{3}$. 32. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 33. a) O $2\sqrt{2}$, b) o $\sqrt{3}$. 34. $\sqrt{41}$.
 35. a) $x = \frac{10}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{5}{\sqrt{3}}$, b) $x = 6\sqrt{2}$, $y = 12$, c) $x = 12$, $y = 12\sqrt{3}$. 36. a) $4 + 2\sqrt{2}$,
 b) $9 + 3\sqrt{3}$, c) $4 + \frac{12}{\sqrt{3}}$, d) $5\sqrt{3} + 15$. 37. 1500 m n.p.m. 38. $35 + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$. 39. $P =$
 $= (20 + 4\sqrt{3}) \text{ cm}^2 \approx 26,9 \text{ cm}^2$. 40. $(12 + \frac{10}{\sqrt{3}}) \text{ dm} \approx 18 \text{ dm}$. 41. $P = \frac{9\sqrt{3}+27}{2} \text{ cm}^2$. 42. $AB =$
 $= (5 - \frac{5}{\sqrt{3}}) \text{ m} \approx 2,1 \text{ m}$. 43. $\sqrt{41} + 13$; $8 + 4\sqrt{2} + \sqrt{58}$. 44. AC. 45. Tak. 46. P_1 i P_3 ;
 P_2 — wewnątrz okręgu, P_4 — na zewnątrz okręgu.

str. 122-124: 1. a) $a = 3$, b) $b = 48$, c) $c = 1$, d) $d = 25$, e) $e = 2,3$, f) $f = 400$,
 g) $g = 0,08$, h) $h = 7$, i) $i = 20$, j) $j = 2$, k) $k = 200$, l) $l = 400$. 2. a) 60%,
 b) 228 g, c) 24 kg. 3. a) 200 zł, b) 220, c) 400 l, d) 120%, e) 20 000 m = 20 km.
 4. Nie. 5. $1,5 \text{ cm}^3$. 6. Ok. 22%. 7. $a = 4,4$, $b = 22,3$, $c = 1,8$. 8. 320 osób; 40 osób.
 9. a) 22,8 mln km^3 , b) 1 425 mln km^3 . 10. a) 12,5%, b) 2,7 dag, c) $133\frac{1}{3} \text{ g}$.
 11. a) Ok. 2,1 kg, b) 120 g, c) masa soli — 55 dag, masa wody — 4,95 kg. 12. Ok. 7%.

str. 127-129: 1. a) 2700 zł, b) 450 m, c) o 4% mniej, d) o 25% więcej, e) 400 zł,
 f) 200 zł. 2. a) $1,5n$, b) $0,8n$. 3. a) $0,9a$, b) $0,65a$, c) $1,2a$, d) $1,26a$, e) $0,96a$.
 4. a) O 20%, b) 1012 zł, c) 320 zł. 5. a) O 50%, b) wzrósł o 360 zł. 6. Zmalała.
 7. 38 492 tys. osób. 8. a) 2,3%, b) 2511,67 zł. 9. 2080 zł; 2163,20 zł. 10. a) O 20 p.p.,
 b) o 50% więcej. 11. O 1 p.p.; o 50% więcej. 12. O ok. 9%. 13. 11 osób.

str. 131-133: 1. Ten drugi. 2. a) 147,60 zł, b) 700 zł, c) netto — 300 zł, brutto
 — 369 zł. 3. 277 778 zł; 22 222 zł. 4. 1840 zł. 5. a) 25,92 zł, b) 6 zł, c) 24 zł.
 6. Ok. 19%; tak. 7. a) 4664 zł, b) 15 000 zł. 8. a) 3043,98 zł, b) 8443,98 zł,
 c) 16270,06 zł. 9. a) A: 840 talarów, 2400 talarów; B: 750 talarów, 2700 talarów;
 C: 900 talarów, 3500 talarów, b) 6000 talarów, c) 1800 talarów, d) 9000 talarów.

str. 136-139: 2. a) 6314 mm, b) o około 7%, c) 736 mm. 3. a) O 3 zł; o 60%,
 b) kupować we wtorek lub w środę, sprzedawać w piątek, sobotę lub niedzielę, c) 8 zł
 na akcjach firmy A i 2 zł na akcjach firmy B, d) 1250. 4. a) O 10 100 osób,
 b) około 11,5 razy więcej, c) w karate, d) 25 zawodników. 5. c) Na A. Małosolnego
 głosowało 441 osób, na M. Mizerię — 450 osób, d) więcej w wielkopolskim, e) małopolskie;
 51 głosów, f) liczba członków THO wynosi 19 274, w wyborach wzięło udział
 15 419 członków, g) A. Małosolny otrzymał o 1388 głosów więcej. 6. a) Ok. 32,8 tys.,
 b) prawie 4 razy, c) ok. 328; ok. 27 przedstawień miesięcznie, d) ok. 178, e) o ok. 50.

str. 141: 1. a) 130 zł i 390 zł, b) 8 t i 20 t, c) 3,9 m i 9,1 m, d) 50 l, 100 l i 150 l,
 e) 240 km, 360 km i 600 km, f) 4 dni, 10 dni i 14 dni. 2. a) 10 cm, b) 2,24 dm.

3. Ania — 0,25 kg, Basia — 0,5 kg, Kasia — 0,75 kg. 4. 3,75 g. 5. Ok. 158 kg.
6. 325 km. 7. 108 l i 360 l.

str. 143–145: 1. a) $\frac{1}{6}$, b) $\frac{7}{18}$. 2. a) $\frac{3}{10}$, b) $\frac{11}{39}$. 3. a) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, b) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,
d) 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$. 4. a) Są tak samo prawdopodobne, b) są tak samo prawdopodobne, c) są
tak samo prawdopodobne. 5. a) $\frac{2}{23}$, b) $\frac{5}{23}$, c) $\frac{5}{23}$, d) $\frac{5}{23}$. 6. a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{4}$. 7. ①
i ③. 8. Np. 6 białych i 19 czarnych. 9. a) $\frac{4}{11}$, $\frac{2}{11}$, b) $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{5}$. 10. a) $\frac{6}{11}$, b) $\frac{20}{33}$, c) $\frac{7}{15}$.

str. 148–156: 1. a) 200°C; 250°C, b) o 10¹⁰ i o 11⁴⁰, c) 250°C; 30 minut, d) rosła
przez 25 minut, a malała przez 1 godzinę i 10 minut, e) włączono o godzinie 10⁰⁵,
a wyłączono o godzinie 11⁰⁰. 2. a) 3 m nad lustrem, b) ok. 4,5 m nad lustrem,
c) 4,5 m od brzegu basenu, d) 9 m od brzegu basenu, e) 3 m. 3. a) Dorota —
4, Marek — 3–, Kuba — 4+, b) 17 punktów; 12 punktów, c) celująca lub niedo-
stateczna. 4. a) 6 minut; 0,5 km od domu, b) na przystanku, c) 6 km, d) na
trzecim, e) 3 minuty, f) o 8⁰². 5. a) 105 g, b) 7,5 g, c) 3 łyżeczki, d) 1 łyżeczka;
97,5 g, e) 6 minut. 6. a) Ok. 80%, b) 4 stycznia i 19 stycznia, c) od 11 stycznia do
26 stycznia, d) 11 stycznia, e) ok. 29 dni; 9 lutego oraz 9 marca lub 10 marca, f) od
1 lutego do 9 lutego oraz od 24 lutego do końca lutego. 7. a) 59 lat, b) Kazimierz
Jagiellończyk, c) 10 lat; 20 lat, d) Władysław Jagiełło, e) trzech, f) nie, g) Wła-
dysław Warneńczyk, Jan Olbracht, Zygmunt August, h) 53 lata. 8. a) 152 mln km,
b) w styczniu; w lipcu, c) oddala, d) w kwietniu i w październiku. 9. a) W Suwałkach
1°C, w Szczecinie 2°C, b) w Suwałkach o godz. 11⁰⁰ i 22⁰⁰, w Szczecinie o godz. 10⁰⁰
i 24⁰⁰, c) w Suwałkach od 0⁰⁰ do 11⁰⁰ i od 22⁰⁰ do 24⁰⁰, w Szczecinie od 0⁰⁰ do 10⁰⁰,
d) o 13⁰⁰ i o 21⁰⁰, e) od 13⁰⁰ do 21⁰⁰, f) 5°C w Suwałkach, 4°C w Szczecinie;
o 16⁰⁰, g) –4°C. 10. a) Gdynia — 17 godz., Bombaj — 13 godz., Kapsztad — 14
godz., b) w Bombaju, c) tak, d) 9,5 godz., e) w pierwszej połowie roku; w Gdyni
rośnie, w Kapsztadzie maleje. 11. a) Na Wenus, b) nad Wenus na wysokości ok.
65 km, nad Marsem na wysokości ok. 270 km, c) ok. 100 km, d) ok. 90 km, e) do
ok. 65 km, f) najpierw temperatura spada, a od wysokości ok. 175 km zaczyna rosnać.
12. a) 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ lub ok. 85 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, b) o 1 km więcej; o ok. 2 km więcej, c) A — ok. 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$,
B i C — ok. 65 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. 13. a) 80°F; ok. 27°C, b) 10 razy. 14. a) Na trzecim wykresie,
b) 4 minuty; 16 minut, c) 10 m; 7 m, d) drugi wykres. 15. Azor — ③, Reksio — ④,
Burek — ②, Szarik — ①. 16. Pierwsze naczynie — ②, drugie naczynie — ④, trzecie
naczynie — ③, czwarte naczynie — ①. 18. ③.

str. 160–166: 1. a) 935 osób, b) 696 osób, c) 79%. 2. a) Ok. 8%, b) ok. 22%.
3. $DE = 4$, $BE = 2\sqrt{34}$. 4. a) 3, b) 4 punktów, c) 50 punktów. 5. 5 dziewcząt

i 15 chłopców. 6. 20 g śmietany i 180 g mleka. 7. 130; 262; 33%. 8. Nie. 9. 12%.
 10. O 21%; o 33,1%. 11. 2000 szelek. 12. a) O 30 zł, b) 2475 zł, c) 3400 zł.
 13. a) 180 zł, b) o 191,02 zł. 14. a) 811,84 zł, b) 12 018,41 zł, c) 233 974,36 zł.
 15. a) 4,32 zł, b) 0,75 zł, c) o 2,25 zł. 16. a) 86,10 zł, b) 1932 zł. 17. a) O 100 zł,
 b) o ok. 6,5%. 18. 2,29 zł; ok. 46%. 20. a) 452 zł, b) 216,96 zł, c) 1600 zł.
 21. W Chinach o 18%, w Indiach o 38%. 22. a) 620 osób, b) 50 osób, c) 950 osób,
 d) niektórzy ankietowani wskazali kilka typów kuchni, e) 171 osób; 17,1%, f) ok. 8%,
 g) 19 osób. 23. a) O 86,8 g, b) węglowodany — 92,4 g, białka — 38,05 g, c) tak,
 d) ok. 233 g. 24. 192 dziewczęta i 240 chłopców. 25. Marian — 4000 zł, Stefan —
 14 000 zł, Jerzy — 2000 zł. 26. 420 zł. 27. 660 l wody i 240 l soku. 28. a) $\frac{4}{11}$, $\frac{2}{11}$,
 b) $\frac{4}{10}$, $\frac{5}{10}$. 29. a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{3}{20}$, c) $\frac{1}{5}$. 30. a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{10}$, c) $\frac{9}{10}$, d) $\frac{17}{90}$. 31. a) Ok. 3 miesiące,
 b) ok. 3 miesiące. 33. a) Ok. 8 cm, b) 7 miesięcy, c) 10 miesięcy. 34. a) 8 km,
 b) 1,5 godziny, c) po trzech godzinach; 10 km, d) $3\frac{1}{3} \frac{\text{km}}{\text{h}}$. 35. a) Ok. 80°C; ok. 5 km
 n.p.m., b) ok. 95°C; ok. 70°C, c) ok. 2300 m n.p.m, d) miejscowość B. 36. a) -8°C,
 b) -2°C, c) -9°C, d) -14°C.

str. 170-173: 1. a) $V = 10 \text{ cm}^3$; $P = 52 \text{ cm}^2$, b) $V = 1,728 \text{ cm}^3$; $P = 8,64 \text{ cm}^2$. 2. Ma
 większą objętość. 3. a) $P = 54$, b) $P = 250 \text{ cm}^2$. 4. $P = 54,1 \text{ cm}^2$. 5. a) Nie,
 b) tak. 6. O 2,5 cm. 7. a) 7,2 kg, b) ok. 111 m. 8. 0,792 m³ betonu. 9. 3,75 cm.
 10. 1 litr; 4 razy więcej. 12. a) $P = 48 \text{ dm}^2$, b) $P = (18\sqrt{3} + 144) \text{ cm}^2 \approx 175 \text{ cm}^2$,
 c) $P = (48\sqrt{3} + 108) \text{ cm}^2 \approx 191 \text{ cm}^2$. 13. a) $V = 128$, b) $V = \frac{63\sqrt{3}}{4}$, c) $V = 54\sqrt{3}$.
 14. a) $V = 67,5$, $P = 87 + 9\sqrt{34}$, b) $V = 320$, $P = 264 + 20\sqrt{13}$. 16. a) $V = 18\sqrt{3}$,
 b) $V = 36$, c) $V = 135$. 17. $V = (250\sqrt{3} + 936) \text{ cm}^3 \approx 1369 \text{ cm}^3$. 18. $V = 72$.

str. 175-177: 1. a) $\sqrt{34}$ i $\sqrt{41}$, b) $4\sqrt{2}$, $\sqrt{41}$ i 5, c) $5\sqrt{5}$, $10\sqrt{2}$, $2\sqrt{29}$ i $2\sqrt{89}$.
 2. a) $10\sqrt{2} \text{ cm} \approx 14,1 \text{ cm}$, b) 14 cm i $7\sqrt{3} \text{ cm} \approx 12,1 \text{ cm}$. 3. $V = 72\sqrt{7}$. 4. Ten z pra-
 wej strony. 5. a) $P = 144 + 72\sqrt{2}$, b) $P = 180 + 36\sqrt{2}$. 6. a) $2\sqrt{43}$, b) $\sqrt{106}$,
 c) $8\sqrt{2}$. 7. a) $10\sqrt{3}$, b) $a\sqrt{3}$, c) jest to sześcián o krawędzi $\frac{10}{\sqrt{3}} \text{ cm} \approx 5,8 \text{ cm}$.
 8. a) $5\sqrt{2} \text{ cm} \approx 7,1 \text{ cm}$, b) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. 9. $2\sqrt{61} \text{ cm} \approx 15,6 \text{ cm}$ i $4\sqrt{13} \text{ cm} \approx 14,4 \text{ cm}$.
 10. $V = 450\sqrt{3}$. 11. a) $\sqrt{6}$, b) $\sqrt{11}$, c) $3\sqrt{3}$, d) $\sqrt{2 + n^2}$. 12. $2\sqrt{41} \text{ cm} \approx 12,8 \text{ cm}$
 i $2\sqrt{34} \text{ cm} \approx 11,7 \text{ cm}$.

str. 181-183: 1. a) 10; 6, b) 8; 5, c) 14; 8. 2. a) 10; 6, b) 24; 13, c) 200; 101,
 d) $2n$; $n+1$. 3. a) 10; 11, b) 30. 4. a) Tak, b) tak. 5. a) 32, b) 30, c) 19,5,
 d) $12\sqrt{3}$, e) $20 + \sqrt{34}$, f) $8 + 8\sqrt{2} + 2\sqrt{17}$. 6. ②, ④ i ⑦. 7. a) 12 cm, b) 6 cm,
 c) 1 dm, d) 5,8 mm.

str. 186-187: 1. ① Ostrosłup czworokątny, ② ostrosłup prawidłowy sześciokątny, ③ ostrosłup prawidłowy trójkątny, ④ czworościan foremny. 4. a) $P = 64 + 32\sqrt{21}$, b) $P = 180 + 25\sqrt{3}$, c) $P = 36\sqrt{5} + 24\sqrt{3}$. 5. a) $P = 144 \text{ cm}^2$, b) $P = 336 \text{ cm}^2$. 6. $6\sqrt{2}$. 7. 26 litrów. 8. 20 cm; nie; nie. 9. $P = 96\sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 166,3 \text{ cm}^2$. 10. 8 ścian; $P = 50\sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 86,6 \text{ cm}^2$.

str. 189-190: 1. a) $V = 12$, b) $V = \frac{20\sqrt{3}}{3}$, c) $V = 6\sqrt{3}$. 2. a) $V = 96 \text{ cm}^3$, b) $V = 23\frac{1}{3} \text{ cm}^3$, c) $V = 32 \text{ cm}^3$. 3. $V = 426\frac{2}{3} \text{ cm}^3$. 4. a) 3 cm, b) 12 cm^2 , c) 12 m. 6. Jest sześcianem o krawędzi $2\sqrt[3]{18} \text{ cm}$, czyli około 5,2 cm. 7. Ok. 3433 km; nie można. 8. Nie. 9. $V = 20\frac{5}{6} \text{ cm}^3$. 10. a) $V = 12$, b) $V = 4$.

str. 194-197: 1. $x = 2\sqrt{7}$, $y = 4\sqrt{6}$, $z = \frac{6}{\sqrt{2}}$. 2. $V = \frac{32\sqrt{2}}{3}$. 3. Około 218,6 m. 4. $2\sqrt{35} \text{ cm} \approx 11,8 \text{ cm}$. 5. 6, $3\sqrt{5}$, $3\sqrt{6}$. 6. $x = 2\sqrt{22}$, $y = 2\sqrt{26}$, $z = 2\sqrt{13}$. 7. a) $V = 6\sqrt{66} \text{ cm}^3 \approx 48,7 \text{ cm}^3$, b) $P = \frac{81\sqrt{3} + 27\sqrt{127}}{4} \text{ cm}^2 \approx 111,1 \text{ cm}^2$, c) $V = 96\sqrt{3} \text{ cm}^3 \approx 166,3 \text{ cm}^3$. 8. $\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ m} \approx 0,8 \text{ m}$. 9. a) $2\sqrt{7}$, b) $V = 24\sqrt{2}$, c) $\sqrt{93}$. 10. 5 cm i 13 cm. 11. X — ok. 24,7 m, Y — ok. 26,6 m. 12. a) $\sqrt{119}$, b) $\sqrt{13}$, c) $4\sqrt{3}$. 13. W ostrosłupie A: $\sqrt{41}$, $\sqrt{41}$, 5; w ostrosłupie B: $\sqrt{33}$, $\sqrt{33}$, $\sqrt{33}$. 14. $V = 36\sqrt{15}$. 15. a) $V_A = 32 + \frac{32\sqrt{7}}{3}$, $V_B = 40,5\sqrt{3} + 60,75\sqrt{2}$, b) $V_C = 48\sqrt{3}$, $V_D = 300$, c) $P = 276 + 12\sqrt{34}$. 16. $60\sqrt{2}$.

str. 200-204: 1. $800\sqrt{2} \text{ cm}^2 \approx 1131,4 \text{ cm}^2$. 2. Objętość pierwszego graniastosłupa jest dwa razy mniejsza od objętości drugiego. 3. a) $V = 75\sqrt{3} \text{ cm}^3 \approx 129,9 \text{ cm}^3$, $P = (12,5\sqrt{3} + 180) \text{ cm}^2 \approx 201,7 \text{ cm}^2$, b) $V = 72\sqrt{3} \text{ cm}^3 \approx 124,7 \text{ cm}^3$, $P = (12\sqrt{3} + 144) \text{ cm}^2 \approx 164,8 \text{ cm}^2$. 4. $V = 296 \text{ cm}^3$. 5. $2\sqrt{3} \text{ dm} \approx 3,46 \text{ dm}$. 6. a) $V = 54$, $P = 62 + 6\sqrt{41} + 6\sqrt{2}$, b) $V = 48$, $P = 74 + 6\sqrt{41}$. 7. $V = 128\sqrt{3} \text{ cm}^3 \approx 221,7 \text{ cm}^3$. 8. $V = 24\sqrt{3} \text{ cm}^3 \approx 41,6 \text{ cm}^3$ lub $V = 36\sqrt{3} \text{ cm}^3 \approx 62,4 \text{ cm}^3$. 9. a) Tak, b) tak, c) nie, dwie, d) nie, trzy. 10. $V = 512\sqrt{2} \text{ cm}^3 \approx 724,1 \text{ cm}^3$. 11. $2\sqrt{30}$. 12. a) $y = 6\sqrt{2}$, b) $t = 10\sqrt{3}$. 13. $6\sqrt{7}$. 14. a) Nie, b) nie, c) tak. 15. a) Tak, b) tak. 16. a) Nie, b) tak, c) tak. 17. 33 cm. 18. a) 18,75 cm, b) krawędź podstawy — 10 cm, krawędź boczna — 15 cm. 19. ②, ③, ④ i ⑤. 20. $P = 48 + 36\sqrt{6} + 8\sqrt{209}$. 21. ③. 22. $P = 2 + \sqrt{2}$. 24. a) $P = (100 + 20\sqrt{119}) \text{ cm}^2 \approx 318,2 \text{ cm}^2$, b) $P = (294\sqrt{3} + 1008) \text{ cm}^2 \approx 1517,2 \text{ cm}^2$. 25. Nie. 26. $P = 168 + 16\sqrt{3}$; $P = 6 + 2\sqrt{3}$. 27. a) 8, 10, 10, $2\sqrt{34}$, b) $P = 108$. 28. Drugi. 29. $V = 12$. 30. a) 6 razy mniejsza, b) 6 razy mniejsza. 31. a) Pola powierzchni są takie same, b) objętość drugiej bryły jest 2 razy większa. 32. $\frac{3\sqrt{10}}{2}$. 33. a) $V = 360 \text{ cm}^3$, b) $P = (10\sqrt{265} + 14\sqrt{73} + 36\sqrt{17}) \text{ cm}^2 \approx 430,8 \text{ cm}^2$. 34. a) $6\sqrt{2}$, b) 4, c) $\sqrt{7}$. 35. $P = 360$. 36. $P = (4 + 4\sqrt{17}) \text{ cm}^2 \approx 20,5 \text{ cm}^2$. 37. $2\sqrt{21} \approx 9,2 \text{ cm}$; $V = 48\sqrt{7} \text{ cm}^3 \approx 127 \text{ cm}^3$. 38. a) $P = 9\sqrt{2}$, b) $P = 8\sqrt{5}$. 39. a) 12,

b) $\frac{\sqrt{1221}}{3}$. 40. $V = \frac{64\sqrt{23}}{3} \text{ cm}^3 \approx 102,3 \text{ cm}^3$. 41. w, z, x, y . 43. $3\sqrt{2}$. 44. $2\sqrt[3]{3}$.
45. $V = 384$. 46. $P = 16$. 47. $P = 100\sqrt{14} \text{ cm}^2 \approx 374,2 \text{ cm}^2$.

str. 209–211: 7. Żyłka, listek, czubek beretu, pasek, ptak. 15. a) $A' = (-1, 2)$, $B' = (3, 5)$, $C' = (-2, -4)$, b) $A' = (1, -2)$, $B' = (-3, -5)$, $C' = (2, 4)$. 16. a) $(-5, -1)$, $(-3, 1)$, $(5, 2)$, $(4, -2)$, b) $(5, 1)$, $(3, -1)$, $(-5, -2)$, $(-4, 2)$. 18. $2d$.

str. 213–215: 2. a) 4, b) nieskończenie wiele, c) 1, d) 2, e) 2, f) 5. 3. Równoboczny — 3, równoramienny — 1, pozostałe — nie mają osi symetrii. 4. a) Wskazówka. 16 liter ma oś symetrii i 4 litery mają więcej niż jedną oś symetrii. 8. a) 2; nieskończenie wiele; 1, b) proste równoległe — nieskończenie wiele, proste prostopadłe — 4, proste przecinające się, które nie są prostopadłe — 2. 10. ③, ④, ⑥. 12. Ze środkowej.

str. 217: 5. Wskazówka. Punkt P leży na symetralnej odcinka AB , więc $AP = PB$. Jaką figurę tworzą wszystkie punkty B , które są odległe od punktu P o tę samą odległość AP ? 8. 65° , 90° .

str. 220: 3. 105° , 50° , 25° . 7. Wskazówka. Jak wygląda zbiór punktów, których odległość od jednego ramienia kąta jest równa a ?

str. 222–223: 4. Ryba, czubek beretu, spławik, haczyk, ząb. 6. a) $\mathcal{F}_2$, b) B . 8. $A' = (1, 6)$, $B' = (-8, -3)$, $C' = (4, -2)$. 9. $P = 72 \text{ cm}^2$. 10. $P = 48 \text{ cm}^2$. 11. 32 cm. 12. Wskazówka. Oznacz dane punkty literami A, B, C . Poprowadź proste przez punkt A i środek odcinka BC , przez punkt B i punkt symetryczny do C względem punktu A oraz przez punkt C i punkt symetryczny do B względem punktu A . [Uwaga. Są jeszcze dwa inne rozwiązania].

str. 225–227: 1. a) Tak, b) nie, c) tak, d) tak. 5. a) Tak, b) tak. 6. a) Przekątne muszą się przecinać w połowie. 9. Proste równoległe — nieskończenie wiele, w pozostałych wypadkach — 1. 11. ①, ② i ④. 12. Wskazówka. Jeżeli punkt kratowy należy do koła, to punkt symetryczny do niego względem środka też należy do tego koła. Oprócz środka w kole znajduje się więc parzysta liczba punktów kratowych.

str. 230–232: 2. Figura 4. 3. Trapezem równoramiennym. 4. a) Tak, b) tak, c) tak, d) tak. 7. Gdy proste k, l, l' są równoległe — na 4 części, gdy proste k, l, l' się pokrywają — na 2 części, gdy proste k, l, l' się przecinają — na 6 części, gdy proste l i l' się pokrywają, a prosta k jest do nich prostopadła — na 4 części. 8. 2α . 9. a) $2a$, b) $P = 2a^2$. 10. a) Tak, b) nie, c) tak, d) nie, e) tak, f) nie,

g) nie. 11. a) $A' = (-2, -1)$, $B' = (-2, -4)$; $A'' = (2, 1)$, $B'' = (2, 4)$, b) równoległobok.
 13. b) Dwie, c) pięć. 16. a) 1 lub 2, b) 0, 1, 2 lub 4, c) 1 lub 2, d) 2 lub nieskończenie wiele, e) 1 lub nieskończenie wiele. 18. 6 cm i 6 cm. Wskazówka. Jaki to trójkąt? 20. a) Tak, b) tak. 21. a) 4 i 2, b) 4 i 2. 22. Wskazówka. $\sphericalangle DOA = \sphericalangle CAO = \sphericalangle OAD$, więc trójkąt OAD jest równoramienny; równoramienny jest też trójkąt OEB . 27. Prostokątem. 28. Okrąg o dwa razy większym promieniu. 29. Dwie. 31. Jedna. 32. a) 2 osie; tak, b) 7 osi; nie, c) 10 osi; tak. 35. $M = (35, 12)$, $N = (-15, 12)$.

str. 235-237: 2. a) 10, b) 3, c) 0. 7. $P = 6 \text{ cm}^2$. 8. a) $\alpha = 22^\circ$, b) $\alpha = 24^\circ$, c) $\alpha = 65^\circ$. 9. $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$. 11. $r\sqrt{2}$. 12. 15. 13. 42. 14. b) $a = 6$, $b = 8$.

str. 239-240: 1. a) Przecinają się, b) są styczne zewnętrznie, c) są rozłączne, d) są rozłączne. 3. a) 11, b) 4. 4. a) 13 cm, b) 3 cm, c) 5 cm, d) 8 cm. 5. a) 7, b) 7, c) 2. 6. a) Są styczne zewnętrznie, b) przecinają się. 7. $(0, -6)$ lub $(0, -4)$, lub $(0, 14)$, lub $(0, 16)$. 8. Nie. 9. $2r$.

str. 243-246: 1. $\pi \approx 3,125$. 2. 3,125; 3,14286; 3,14159; $\frac{355}{113}$. 3. $\pi \approx 3$. 4. a) 7π , b) 12π , c) $6\pi^2$, d) 5π , e) $1,5\pi$, f) 3, g) 3, h) $3\pi - 3$. 5. a) 2π ; 4π ; $2,8\pi$; $\frac{4}{7}\pi$, b) π ; 5π ; $\frac{2}{3}\pi$; $4,2\pi$, c) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{\pi}$; 5; 0,3. 6. Trzeci. 8. Około 45 cm. 9. a) Nie, b) tak, c) tak. 10. $\pi \approx 3,14$ razy. 11. a) $(\pi + 4) \text{ m}$, b) $(2,5\pi + 5) \text{ m}$. 12. 3π ; 6π ; 4π ; 4π ; 6π . 13. Nie. 14. Wskazówka minutowa: $3\pi \text{ m} \approx 9,4 \text{ m}$, wskazówka godzinowa: $\frac{\pi}{6} \text{ m} \approx 0,5 \text{ m}$. 15. Około 785 m. 16. Około 14,4 cm. 17. $\frac{50\,000}{3\pi} \approx 5308$ obrotów. 18. a) 31 pełnych obrotów, b) 530 pełnych obrotów. 19. a) Obwód dużego koła jest równy sumie obwodów dwóch mniejszych kół. b) $r = 5$, r jest równe sumie długości promieni narysowanych okręgów. 20. a) Mniejszego o $2\pi \text{ cm}$, większego o $0,02\pi \text{ m} = 2\pi \text{ cm}$.

str. 248-251: 1. a) 9π ; $\frac{4}{9}\pi$; π ; π^3 , b) 9π ; $1,5625\pi$; $0,25\pi$; $\frac{\pi^3}{4}$. 3. a) 4 cm, b) 10 m, c) 0,2 dm, d) 1 km, e) $\frac{3}{4} \text{ mm}$. 4. a) Koło, b) koło. 5. 314 cm^2 . Egipcjanie otrzymaliby około 316 cm^2 . 6. a) Zwiększy się o 36π , b) zwiększy się o 192π (czyli 4 razy). 8. a) Okrągły, b) owalny. 9. a) $64\pi \text{ cm}^2$; $\frac{1}{4}\pi \text{ m}^2$; $0,0036\pi \text{ mm}^2$; $\frac{1}{9}\pi \text{ km}^2$; $\frac{4}{\pi} \text{ dm}^2$, b) $8\pi \text{ cm}$; $\frac{4}{3}\pi \text{ m}$; $\pi \text{ mm}$; $2\sqrt{2}\pi \text{ dm}$; $2\sqrt{3}\pi \text{ km}$. 10. $5\sqrt{\pi}$. 11. $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ razy. 12. a) $P = 48\pi$, b) $P = 15\pi$, c) $P = 64\pi$, d) $P = 35\pi$. 13. Około 63 m^2 . 14. (A) $36 - 2\pi$, (B) $24 - 4\pi$, (C) $15 - 2,5\pi$, (D) $36 - 6,5\pi$, (E) $4,5\pi$, (F) $9\pi - 9$, (G) $9\pi - 18$, (H) $9\pi - 12$. 15. Pola zacieniowanych figur są równe. 16. $4 + 8,5\pi$; 4π ; $9 + 4,5\pi$; 16; $2 + 3\pi$. 17. $\pi \text{ cm}^2$; $(4 - \pi) \text{ cm}^2$; $(8 - 2\pi) \text{ cm}^2$; $(2\pi - 4) \text{ cm}^2$; $(8\pi - 16) \text{ cm}^2$.

str. 254-256: 1. a) $5\sqrt{5}$, b) $5\sqrt{3}$. 2. $\alpha = 80^\circ$. 3. $90^\circ, 55^\circ, 145^\circ, 70^\circ$. 4. a) 3 punkty; 4 punkty; 6 punktów; b) 44. 5. 3. 6. Przecinają się. 7. 11 lub 15. 8. a) 15π , b) $\frac{4}{3}\pi$, c) $2\sqrt{2}\pi$, d) $3,2\pi$, e) $3\frac{3}{4}\pi$, f) $3\sqrt{2}\pi$. 9. Kwadrat. 10. a) $\frac{50}{\pi}$ cm $\approx 15,9$ cm, b) $\frac{1}{\pi}$ m $\approx 0,3$ m, c) $\frac{4}{\pi}$ m $\approx 1,3$ m. 11. Tak. 12. a) $40\pi \approx 125,7$ m, b) 398 okrążeń. 13. a) O około 388 m, b) o 12,7 km. 14. 400 obrotów; 25 obrotów. 15. O $20\pi \approx 63$ m. 16. a) $5,5\pi$, b) $5,5\pi + 4$. 17. a) Są równe, b) są równe. 18. $20 + 5\pi \approx 36$ cm. 19. a) $P = 1,44\pi$ m², b) $P = 3,24\pi$ dm², c) $P = 4\pi$ cm². 20. a) 4 cm, b) $\sqrt{\frac{10}{\pi}}$ cm, c) $\frac{20}{\sqrt{\pi}}$ m. 21. Koło o obwodzie 8π cm. 22. Podłana. 23. $P = 16\pi$ cm²; $P = 48\pi$ cm²; $P = 192\pi$ cm². 24. a) O 12π , b) o $15\frac{15}{16}\pi$, c) o 15π . 25. 2,26 zł; 1,59 zł; 0,96 zł. 26. Stosunek pola koła do pola kwadratu wynosi $\frac{4}{\pi}$. 27. $P = 8 + \pi$; $P = 6 + \pi$; $P = 36 - 9\pi$; $P = 14 - \pi$. 28. Propozycja Bogdana.

str. 262-264: 1. a) Na 28 sposobów, b) 1872 dźwięki, c) przez 50 dni. 2. a) Na 132 sposoby, b) na 870 sposobów, c) 110 liczb. 3. Na 42 sposoby. 4. Na 140 sposobów. 5. Na 72 sposoby. 6. 24 słowa. 7. a) Na 56 sposobów, b) na 336 sposobów. 8. a) Na 25 sposobów, b) na 20 sposobów. 10. a) Na 49 sposobów, b) na 42 sposoby. 11. a) Na 36 sposobów, b) na 144 sposoby, c) na 720 sposobów. 12. a) 18 liczb, 17 liczb, b) 180 liczb, 90 liczb. 13. a) 676 kodów, b) 90 kodów, c) 15 600 kodów, d) 720 kodów, e) 260 kodów, f) 6760 kodów. 14. 222 zestawy. 15. a) 13 225 sekwencji, b) 13 110 sekwencji.

str. 266-268: 1. a) $\frac{17}{36}$, b) $\frac{5}{6}$, c) $\frac{11}{36}$. 2. a) $\frac{1}{6}$, b) $\frac{5}{12}$. 3. a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{2}{3}$. 4. a) $\frac{1}{18}$, b) $\frac{1}{6}$, c) $\frac{1}{3}$. 5. a) $\frac{1}{21}$, b) $\frac{1}{6}$, c) $\frac{1}{14}$. 6. a) $\frac{1}{20}$, b) $\frac{1}{10}$, c) $\frac{1}{10}$, d) $\frac{3}{5}$. 7. $\frac{2}{3}$. 8. a) $\frac{1}{10}$; $\frac{9}{10}$, b) $\frac{3}{14}$. 9. a) $\frac{29}{118}$, b) $\frac{4}{59}$, c) $\frac{4}{295}$, d) $\frac{98}{885}$. 10. a) $\frac{499}{900}$, b) $\frac{1}{10}$, c) $\frac{1}{5}$, d) $\frac{1}{100}$, e) $\frac{18}{25}$, f) $\frac{1}{3}$.

str. 270-272: 1. Na 132 sposoby. 2. a) Na 56 sposobów, b) na 336 sposobów, c) na 1680 sposobów. 3. a) Na 90 sposobów, b) 720 sposobów, c) 30 240 sposobów. 4. a) Na 400 sposobów, b) na 380 sposobów, c) na 6840 sposobów. 5. a) 24 możliwości, b) 72 wybory. 6. a) Na 75 sposobów, b) na 225 sposobów. 7. Na 6 sposobów. 8. a) 756 maili, b) 366 maili, c) 390 maili. 9. a) Na 4032 sposoby, b) na 1024 sposoby, c) na 2048 sposobów. 10. 26 liczb. 11. a) 50 liczb, b) 24 liczby, c) 19 liczb, d) 12 liczb. 12. Gdy kul jest 51. 13. Oba zdarzenia są jednakowo prawdopodobne. 14. $\frac{1}{6}$. 15. $\frac{1}{8}$. 16. O $\frac{1}{12}$. 17. a) $\frac{121}{441}$, b) $\frac{220}{441}$, c) $\frac{1}{21}$, d) $\frac{20}{21}$. 18. a) $\frac{1}{20}$, b) $\frac{16}{25}$, c) $\frac{8}{25}$. 19. a) $\frac{4}{5}$, b) $\frac{1}{10}$. 20. a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{5}$. 21. a) Marek — $\frac{1}{10}$, b) Ania — $\frac{1}{8}$, c) Romek — $\frac{1}{5}$. 22. $\frac{4}{9}$. 23. a) $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$.

Skorowidz

- cechy podzielności liczb 15
- cechy przystawania trójkątów 73
- centylion 25
- Ceulen, Ludolf van 242
- czworościan 179
 - foremny 179
- decylion 25
- długość okręgu 242
- dwusieczna kąta 218
- działania
 - na pierwiastkach 34
 - na potęgach 34
- figury
 - osiowosymetryczne 213
 - środkowosymetryczne 224
- figury symetryczne
 - względem prostej 206
 - względem punktu 221
- graniastosłup
 - pochyły 169
 - prawidłowy 169
 - prosty 169
- inflacja 128
- kąt zewnętrzny wielokąta 109
- Kepler Johannes 187
- Kochański Adam Amandy 249
- konstrukcja
 - dwusiecznej kąta 219
 - stycznej do okręgu 235
 - symetralnej odcinka 216
- kwadrat 74
- kwadratura koła 249
- kwadrylion 25, 36
- kwintylion 25
- Lambert Johann 242
- Leonardo da Vinci 209
- liczba π 241
- liczby
 - całkowite 21
 - naturalne 21
 - niewymierne 23
 - pierwsze 15-16
 - wymierne 21
 - złożone 16
- Lindemann Ferdinand 249
- Ludolfina 242
- Mellis John 63
- nonilion 25
- notacja wykładnicza 22
- objętość
 - graniastosłupa 169
 - ostrosłupa 189
 - prostopadłościanu 170
 - sześciianu 170
- odsetki 126
- okręgi
 - rozłączne 238
 - styczne 238
- oktylion 25
- ostrosłup 178
 - prawidłowy 179
- ośmiościan foremny 197
- oś symetrii figury 213
- papirus Rhinda 248
- pierwiastek 23
- piramida Cheopsa 190
- Pitagoras 81
- pole
 - czworokąta 74
 - koła 247
 - trójkąta równobocznego 94
- pole powierzchni
 - graniastosłupa 169
 - ostrosłupa 184
- prawdopodobieństwo 142

prędkość średnia 68
 procent 120
 promil 123
 proporcja 57
 prosta styczna do okręgu 234
 prostokąt 74
 przekątna
 — graniastosłupa 174
 — kwadratu 93
 przybliżenia liczby π 243
 punkty procentowe 129
 romb 74
 rozkład liczby na czynniki pierwsze 16, 40
 roztwór 124
 równanie
 — sprzeczne 52
 — tożsamościowe 52
 równoległobok 74
 sekstylion 25
 septylion 25
 Shanks William 242
 Sokrates 13
 spodek wysokości 179, 193
 stella octangula 187
 styczna do okręgu 234
 symetralna odcinka 216
 system rzymski 10-11
 środek
 — odcinka 102-103
 — symetrii figury 224
 środkowa trójkąta 110
 trapez 74, 75
 trójkąt
 — o kątach 90° , 45° , 45° 97
 — o kątach 90° , 30° , 60° 97
 trylion 25, 36
 trysekcja kąta 219
 twierdzenie
 — o długościach boków trójkąta 73
 — o dwusiecznej kąta 219
 — o kanapce 227
 — o mapie 227
 — o punkcie przecięcia wysokości trójkąta równobocznego 193
 — o stycznych do okręgu 234, 237
 — o sumie miar kątów trójkąta 73
 — o symetralnej odcinka 216
 — Pitagorasa 80, 81
 usuwanie niewymierności z mianownika 37
 Wantzel Pierre 219
 wielkości wprost proporcjonalne 60
 wielokrotności liczb 17
 wierzchołek ostrosłupa 179
 własność proporcji 58
 wyrazy proporcji
 — skrajne 57
 — środkowe 57
 wysokość ostrosłupa 179
 wzory dotyczące trójkąta równobocznego 94
 zamiana
 — jednostek 29
 — ułamka na procent 121

Wszystkie książki Wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.

Zamówienia można składać w księgarni internetowej: www.ksiegarnia.gwo.pl

lub nadsyłać listownie pod adresem:

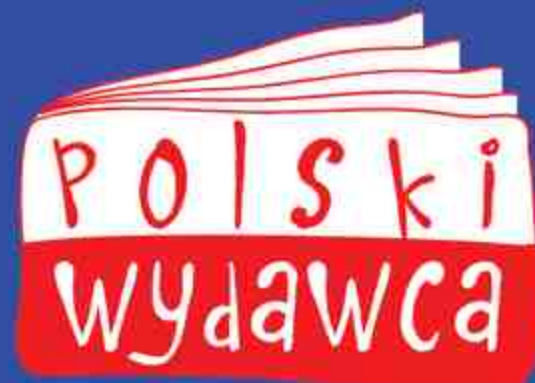
Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe

80-305 Gdańsk 5, skrytka pocztowa 80

tel. 801 643 917, 58 340 63 63

fax 58 340 63 61, 58 340 63 66

<http://www.gwo.pl> e-mail: handel@gwo.pl



Podręcznik spełnia kryteria *Ustawy o systemie oświaty* i obowiązującej podstawy programowej. Został dopuszczony do użytku szkolnego.
Numer w wykazie MEN: 780/5/2018

Ucząc się matematyki z tym podręcznikiem, dowiesz się m.in.:

- Co to była hekatomba?
- Kto skonstruował lunetę?
- Jaką część doby przesypia kot?
- Który król z dynastii Jagiellonów rządził najdłużej?
- W jakiej temperaturze wrze woda na szczycie Mount Everestu?
- Jak starożytni Rzymianie zapisywali liczby większe od 4000?
- Z jaką prędkością porusza się ślimak?
- Ile waży metr sześcienny styropianu?
- Co to jest ludolfina?
- Jaką część powierzchni USA stanowi Kalifornia?