

NOWA EDYCJA
2024–2026

5

CZĘŚĆ I

Matematyka z kluczem

PODRĘCZNIK DO MATEMATYKI
DLA KLASY PIĄTEJ SZKOŁY PODSTAWOWEJ



$$\frac{2}{4}$$



+

$$0,05$$



-

$$1\frac{1}{2}$$

$$-5$$



neon



W wersji cyfrowej
znajdziesz oznaczenia
usuniętych treści
z podstawy w 2024

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



nowa
era

Droga Nowa Ero,

Nigdy bym nie publikowała publicznie książek wydawnictw, które działają na uczciwych zasadach.

Wasza firma jednak promuje masowy dodruk, całkowicie niepotrzebnych książek, które mogłyby zastąpione wersjami elektronicznymi!

Co prawda e-booki są dostępne na waszej stronie, jednak:

- W przeciwieństwie do fizycznej książki, licencja na e-book kończy się po roku. Oznacza to, że jeżeli moja córka chciałaby powtórzyć sobie całą wiedzę do matury, musiałabym jej kupić wszystkie wasze książki od nowa.
- Waszych e-booków nie da się pobrać! Wymagają one dostęp do internetu, co uniemożliwia ich użycie na naszej wsi, gdzie zasięg jest ograniczony.
- Wasze e-booki nie działają na telefonach komórkowych!!!
- Wasze e-booki sprzedawane są po tej samej (albo wyższej) cenie co regulame książki. Cena e-booka powinna być niższa, gdyż e-booki wymagają elektronicznego czytnika (tabletu)!

Czas rozpocząć nową erę (o ironio), w której papier nie jest beczelnie marnowany dla pieniędzy. Przedstawiam e-book, który spełnia wszystkie oczekiwania uczniów.

Dbajmy o środowisko, zróbmy to dla młodych pokoleń.

5

Marcin Braun
Agnieszka Mańkowska
Małgorzata Paszyńska

Matematyka z kluczem

PODRĘCZNIK DO MATEMATYKI
DLA KLASY PIĄTEJ SZKOŁY PODSTAWOWEJ
CZĘŚĆ I

OZNACZENIA W E-PODRĘCZNIKU



Ikona na górze strony sygnalizuje zmiany, które obowiązują od 2024 r.



W ten sposób oznaczono treści, które nie są już wymagane.



Twoje mocne strony

Matematyka z kluczem

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:

mgr. Tadeusza Marczewskiego, dr. hab. Edwarda Tutaja, dr Katarzyny Kozłowskiej.

Etap edukacyjny: II

Typ szkoły: szkoła podstawowa

Rok dopuszczenia: 2018

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 875/2/2018

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki dla klas 4–8 szkoły podstawowej* autorstwa Marcina Brauna, Agnieszki Mańkowskiej, Małgorzaty Paszyńskiej.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujemy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl

Wykorzystywanie treści niniejszego Utworu, w jakiegokolwiek formie lub w jakimkolwiek procesie, do celów eksploracji tekstu i danych, uczenia maszynowego, rozwoju i/lub szkolenia i/lub wzbogacania sztucznej inteligencji jakiegokolwiek rodzaju jest surowo zabronione.



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2024
ISBN 978-83-267-4963-6

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Urszula Cielniak, Elżbieta Rokicka, Renata Sawicka, Magdalena Spalińska, Paulina Staniszevska-Tudruj.

Redakcja językowa: Agnieszka Grzegółka-Maciejewska, Grażyna Oleszkowicz, Joanna Sawicka, Paulina Szulim.

Korekta językowa: Aleksandra Hofman.

Konsultacje dydaktyczne: Izabella Adamowska, Maciej Bugaj, Krystyna Danecka, Anna Deptuła, Barbara Galas, Maria Noskiewicz, Krystyna Nowicka, Krzysztof Rokicki, Grzegorz Szymczyk.

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler. **Opieka graficzna:** Ewa Kaletyn.

Projekt okładki: Paulina Tomaszewska, Maciej Galiński.

Projekt graficzny: Maciej Galiński, Małgorzata Gregorczyk, Paulina Tomaszewska, re:design.

Opracowanie graficzne: Ewelina Baran, Aleksandra Szpunar, Ewa Kaletyn, Klaudia Jarocka-Ciok, Alicja Skupin-Podwojewska.

Realizacja projektu graficznego: Dorota Gajda.

Ilustracje: Krzysztof Mrawiński, Marek Nawrocki, Adam Gierasimiuk, Ewa Sowulewska.

Rysunki techniczne: Zuzanna Dudzic, Artur Polakowski.

Mapy: Redakcja Kartograficzna Nowa Era. **Fotoedycja:** Beata Chromik, Katarzyna Iwan-Malawska.

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl, Centrum Kontakt: 58 721 48 00

Spis treści

Krótki przewodnik po podręczniku	4
Od Autorów	6

I Liczby naturalne

1. Działania pamięciowe	8
2. Potęgowanie	15
3. Kolejność wykonywania działań	20
4. Cyfry rzymskie	26
5. Obliczenia przybliżone	33
6. Dodawanie i odejmowanie pisemne	38
7. Mnożenie pisemne	43
8. Dzielenie i podzielność	48
9. Liczby pierwsze i liczby złożone	53
10. Dzielenie pisemne	58
<i>Powtórzenie przed klasówką</i>	64
<i>Zadania na temat...</i>	66
<i>Zadania na deser</i>	68

II Figury geometryczne

1. Płaszczyzna, proste i półproste	72
2. Kąty. Rodzaje kątów	79
3. Mierzenie kątów	88
4. Rodzaje i własności trójkątów	97
5. Własności niektórych trójkątów	102
6. Wysokość trójkąta	110

7. Równoległoboki	116
8. Wysokość równoległoboku	122
9. Trapezy	126
10. Klasyfikacja czworokątów	132
<i>Powtórzenie przed klasówką</i>	137
<i>Zadania na temat...</i>	139
<i>Zadania na deser</i>	140

III Ułamki zwykłe

1. Ułamek jako część i jako iloraz	144
2. Rozszerzanie i skracanie ułamków	151
3. Dodawanie i odejmowanie ułamków o tych samych mianownikach	161
4. Dodawanie i odejmowanie ułamków o różnych mianownikach	167
5. Mnożenie ułamka przez liczbę naturalną. Ułamek liczby	174
6. Mnożenie ułamków	182
7. Odwrotności liczb	188
8. Dzielenie ułamków	191
9. Działania na ułamkach	197
<i>Powtórzenie przed klasówką</i>	203
<i>Zadania na temat...</i>	205
<i>Zadania na deser</i>	208
Odpowiedzi	210

Krótki przewodnik po podręczniku

Na dobry początek
– atrakcyjne wprowadzenie
do lekcji.

-  Pracuj samodzielnie.
-  Pracujcie w parach.
-  Pracujcie w kilka osób.



Zadanie z kluczem

Zacznij od poziomu A
i zgodnie z instrukcją dojdź
do ostatniego poziomu.

Jeśli czujesz się na siłach,
czeka na Ciebie jeszcze
poziom Mistrza!

poziom A

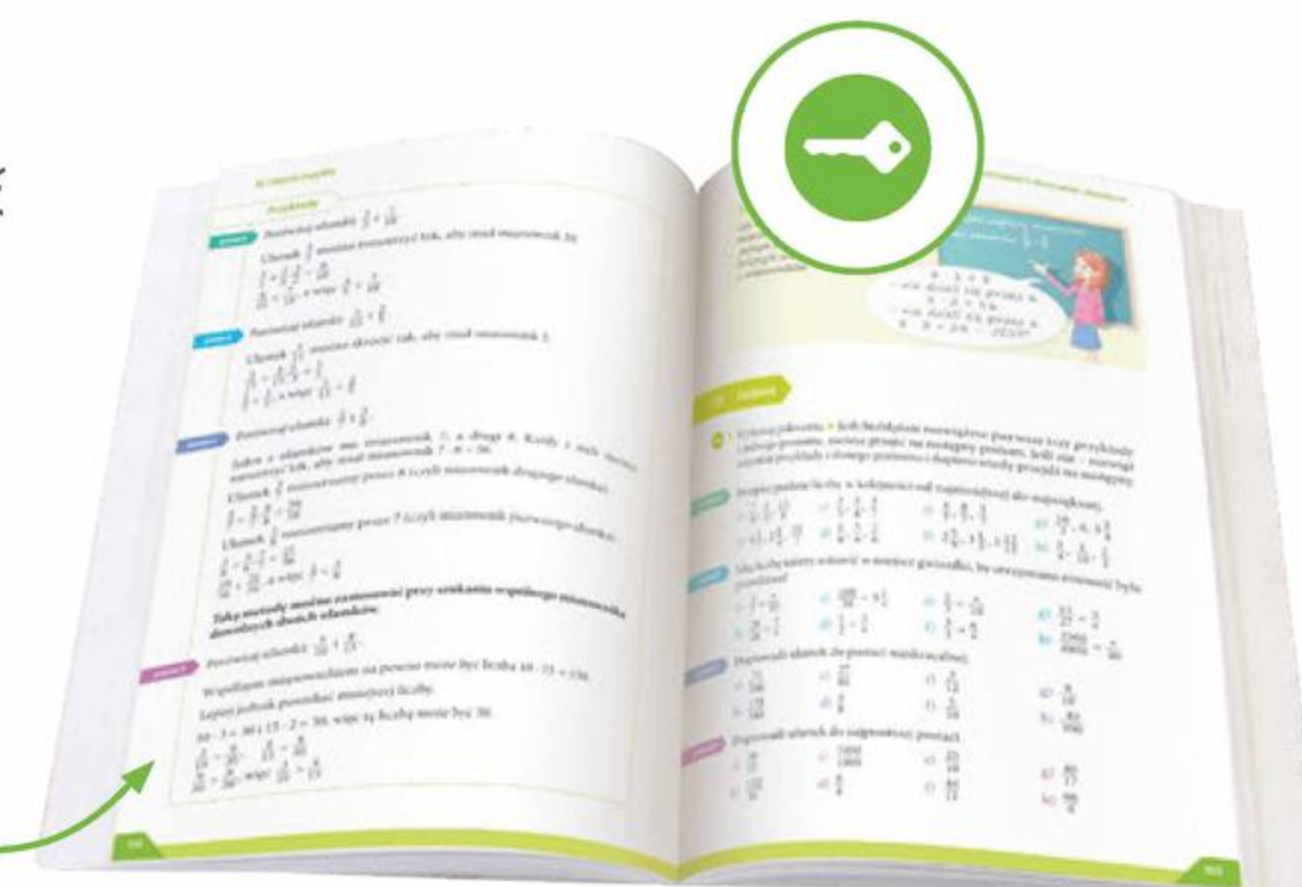
poziom B

poziom C

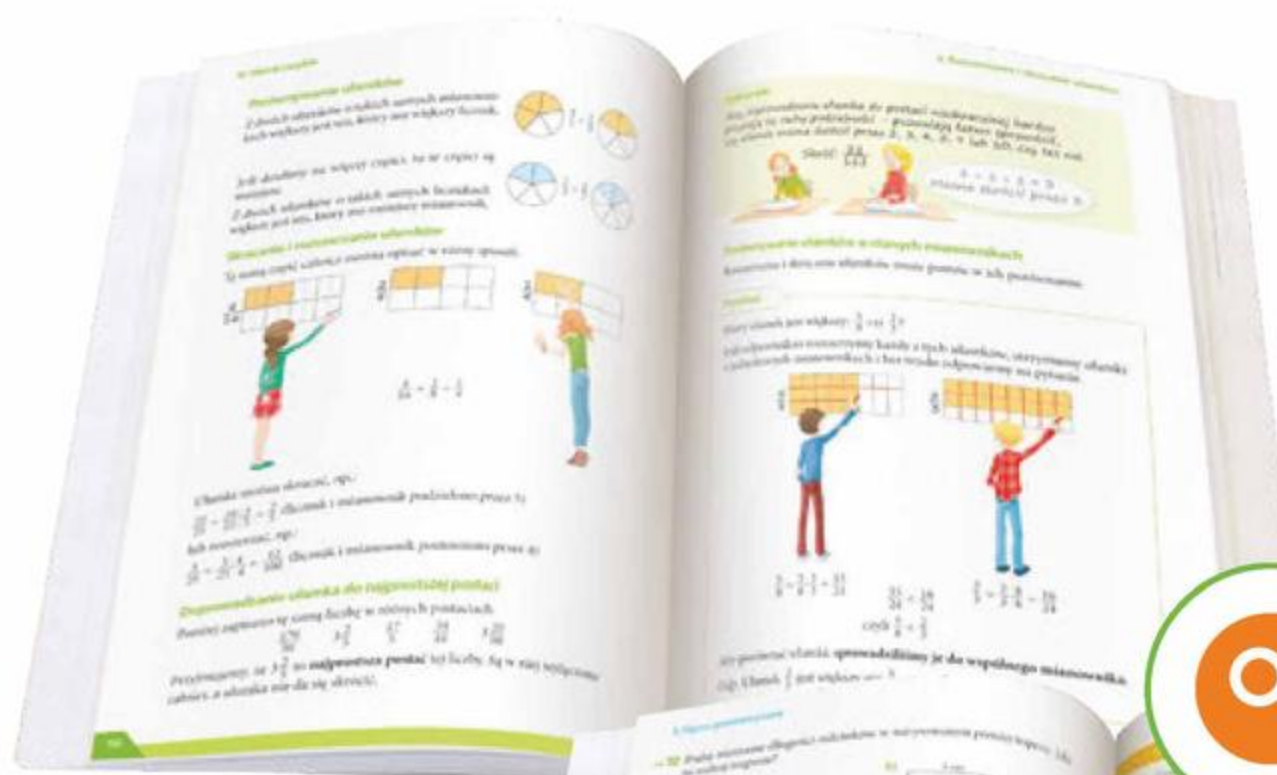
poziom D

poziom E

MISTRZ



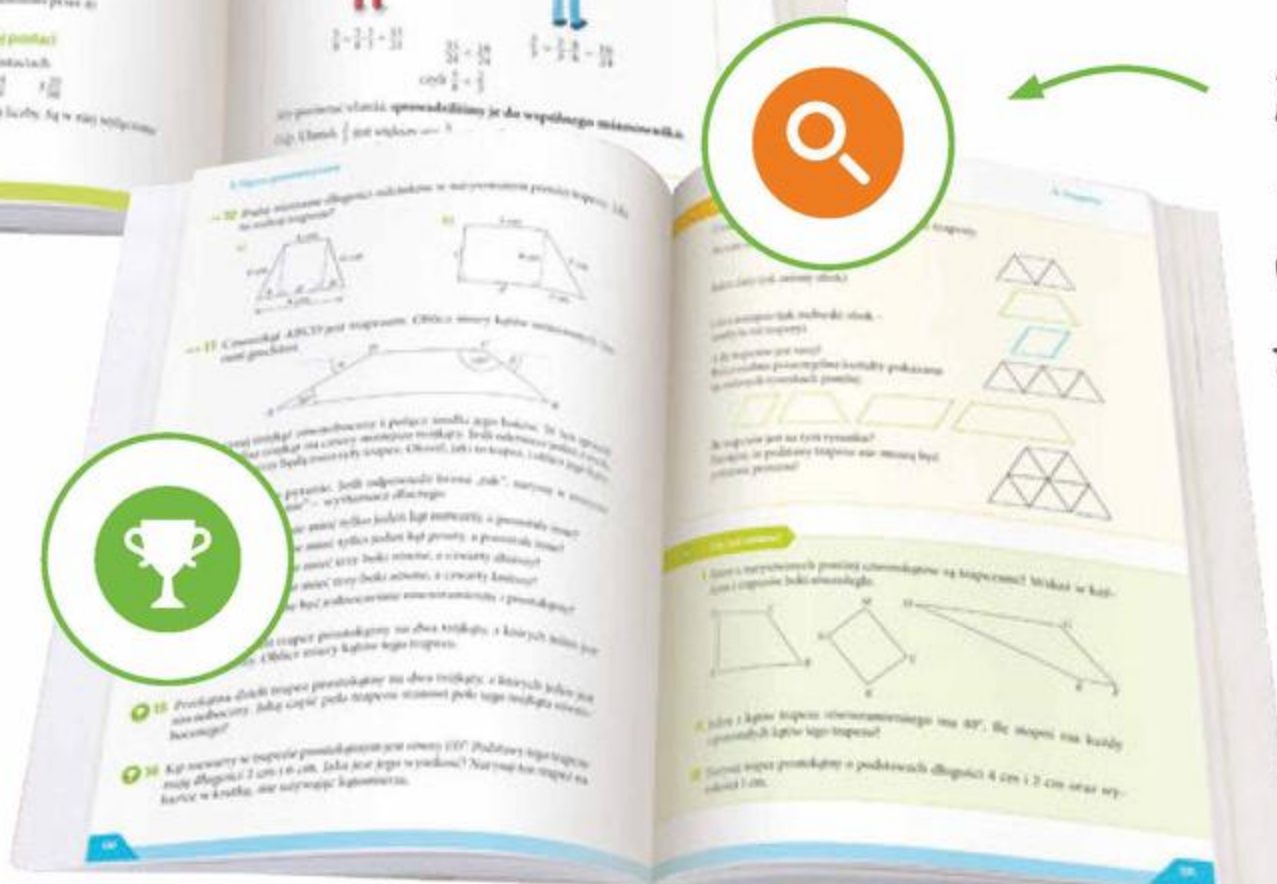
Przykłady podobne
do zadania z kluczem.



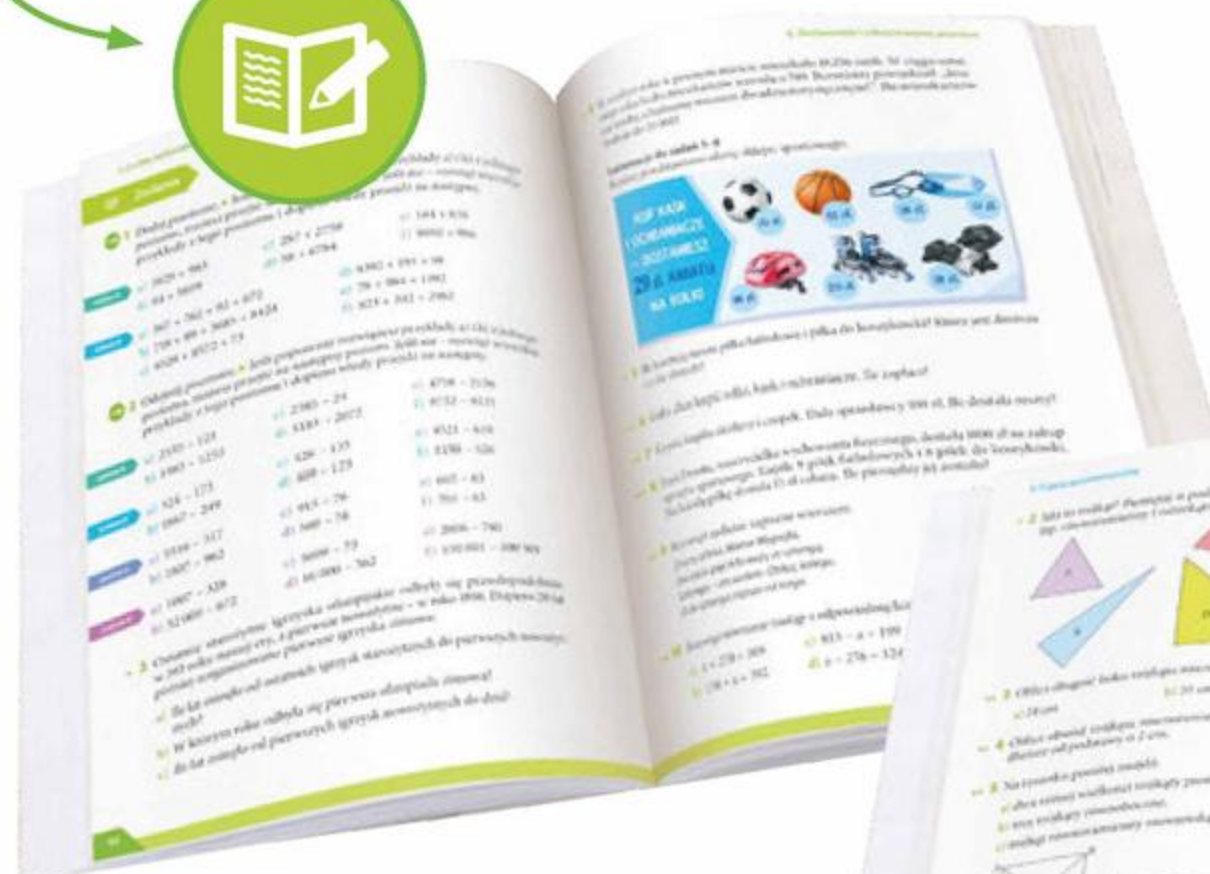
Dobra rada
pomoże Ci ominąć
trudności.

Dla dociekliwych
– naucz się
więcej, niż
to konieczne.

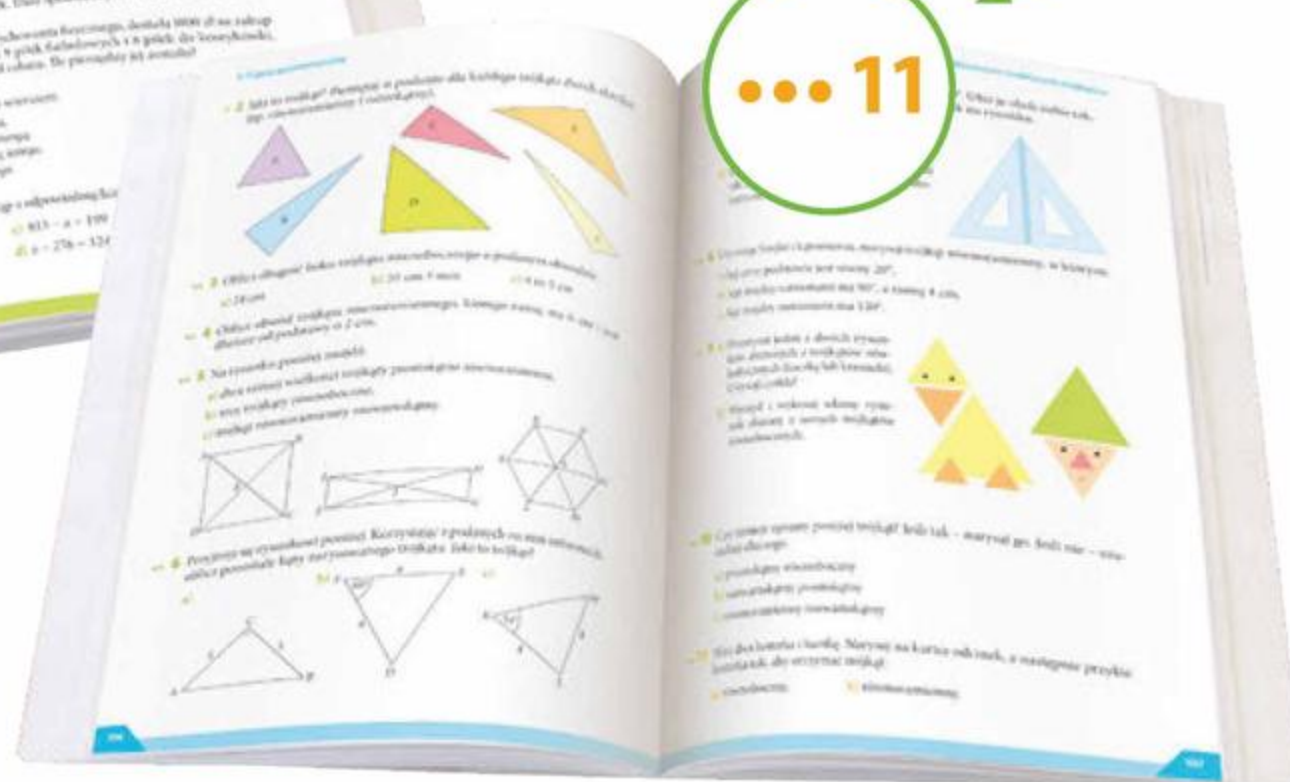
Kropkami oznaczamy
stopień trudności zadań,
a pucharem – zadania
wymagające więcej pracy
lub pomysłowości.



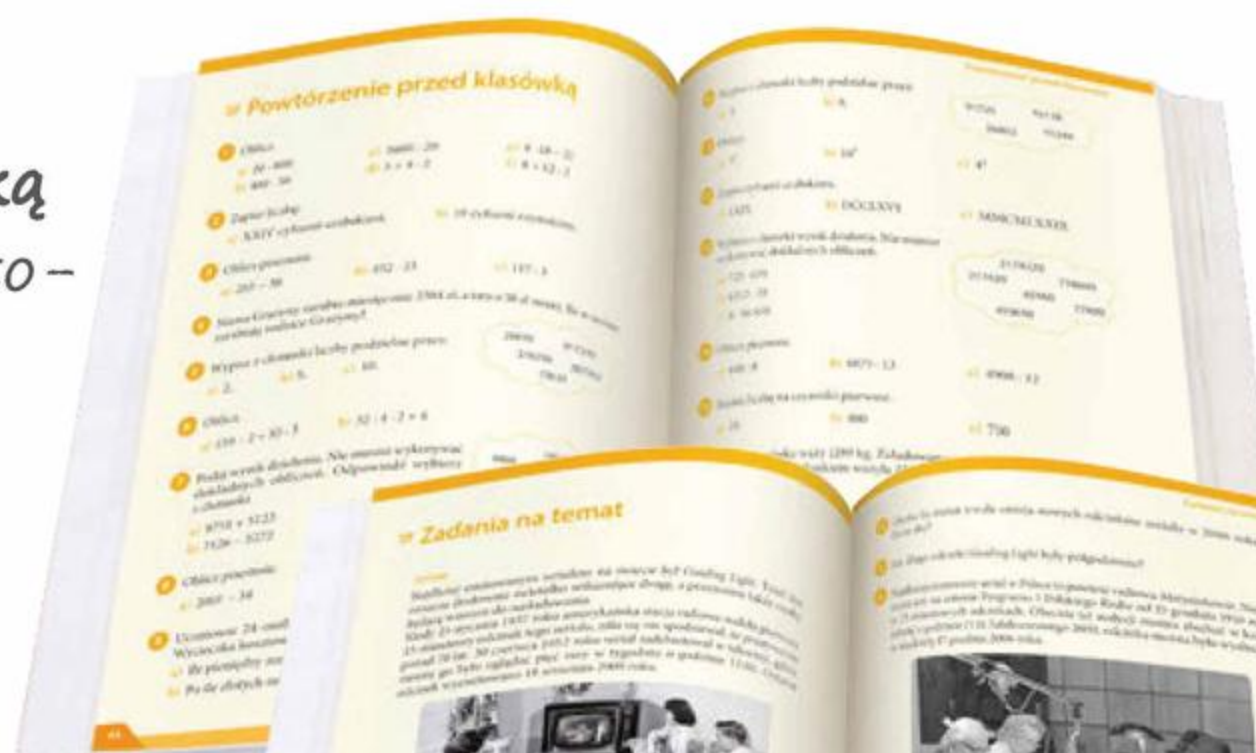
Pamiętaj, aby zadania rozwiązywać w zeszycie przedmiotowym.



Wykonując zadanie z pomarańczowym numerem, doświadczysz matematyki poprzez grę lub zabawę.



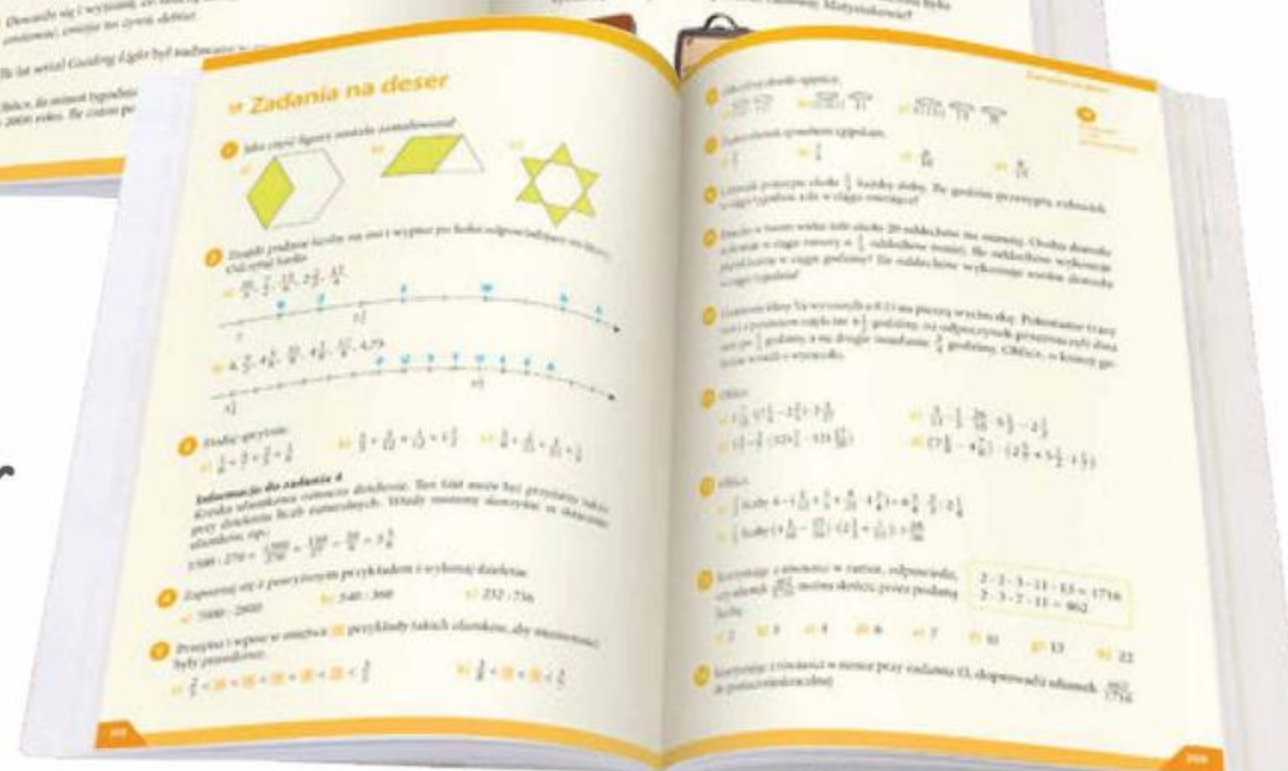
Powtórzenie przed klasówką – łatwy sposób na przygotowanie do sprawdzianu.



Zadania na temat... – zestaw zadań powiązanych tematycznie.



Zadania na deser – dodatkowe ciekawe zadania.



Od Autorów

Witamy w klasie piątej.

W tym roku nie tylko zajmiemy się nowymi tematami, lecz także powtórzymy wiele treści z klasy czwartej. Jeśli więc masz zaległości z zeszłego roku, możesz je teraz nadrobić. Jeśli nie – możesz jeszcze lepiej wyćwiczyć swoje umiejętności.

Nie poddawaj się, gdy czegoś nie wiesz albo nie umiesz. Możesz przecież szukać wiadomości w podręczniku lub poprosić o pomoc nauczyciela. Pamiętaj też, że czasami potrzeba kilku nieudanych prób, aby kolejna zakończyła się rozwiązaniem zadania.

Życzymy powodzenia!
Autorzy

Pamiętaj, że podręcznik, który masz przed sobą, w kolejnych latach będzie służył Twoim młodszym koleżankom i kolegom. Dbaj o niego, nie pisz w nim, zadania rozwiązuj w zeszycie przedmiotowym.

Redakcja



8 MB



16 MB



Liczby naturalne

Jedno zdjęcie z moich wakacji zajmuje 4 MB.
Ile zdjęć o takim rozmiarze mogę nagrać na płytę CD-ROM?

24 MB

4 MB

700 MB



4 MB





Na dobry początek

Kółko i krzyżyk

Przygotujcie 10 pionków lub małych przedmiotów i komplet kartoników z cyframi 1–9. Ułóżcie je w następujący sposób:

jako pierwszy
kartonik z cyfrą 1



obok stos
potasowanych
kartoników
z cyframi 2–5



nieco dalej stos
potasowanych kartoników
z cyframi 6–9



- Jedynka oraz cyfra widoczna na pierwszym stosie tworzą liczbę dwucyfrową.

np. 15

- Pierwszy gracz mnoży ją przez liczbę widoczną na drugim stosie i stawia pionek na planszy na polu z wynikiem.

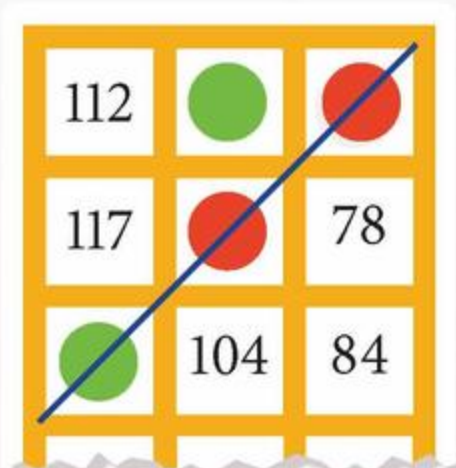
np. $15 \cdot 8 = 120$

- Drugi gracz zdejmuję po jednej karcie ze stosów, nie ruszając kartonika z cyfrą 1, oblicza iloczyn otrzymanych liczb i stawia drugi pionek na polu z wynikiem. Jeżeli pole już jest zajęte, traci ruch.

- Gracze na przemian zdejmują kartoniki i ustawiają pionki na polach z wynikami.

- Gra toczy się tak długo, aż któryś z graczy postawi pionek jako trzeci w jednej linii z dowolnymi pionkami na planszy.

- Jeżeli zabraknie kart, potasujcie te odłożone.



112	96	72
117	98	78
120	104	84
126	105	90
135	108	91

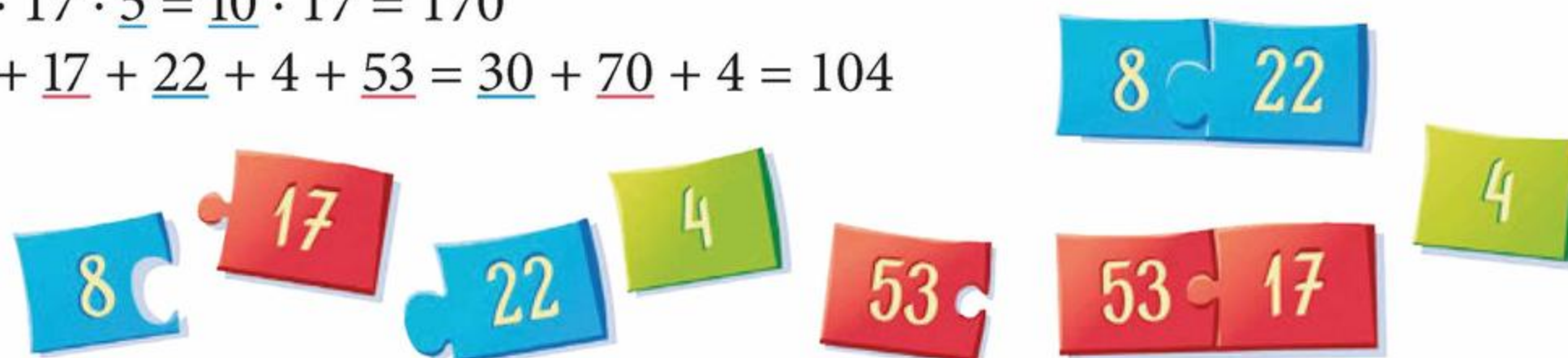
Jak można sobie ułatwić obliczenia?

- W dodawaniu i mnożeniu można zamieniać kolejność liczb:

$$4 + 29 + 16 = 4 + 16 + 29 = 20 + 29 = 49$$

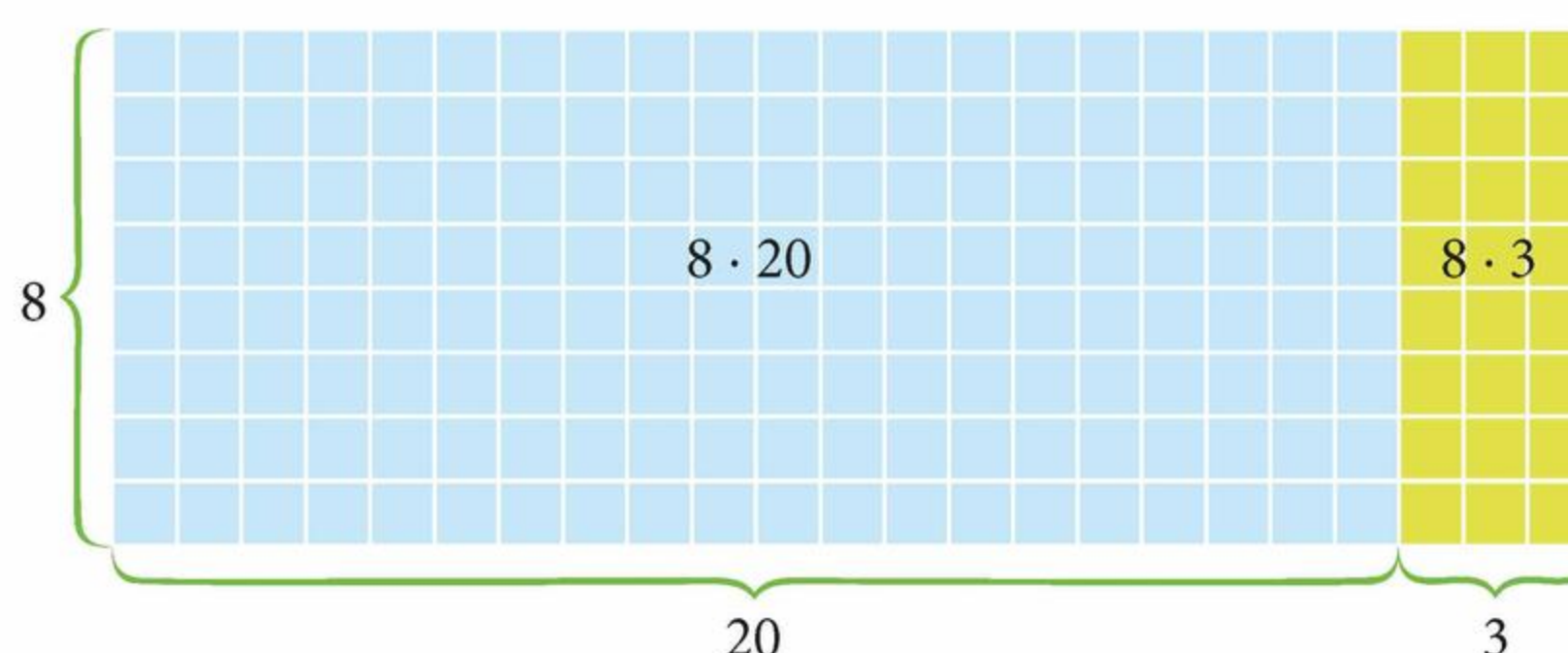
$$2 \cdot 17 \cdot 5 = 10 \cdot 17 = 170$$

$$8 + 17 + 22 + 4 + 53 = 30 + 70 + 4 = 104$$



- Można mnożyć „po kawałku”:

$$8 \cdot 23 = 8 \cdot 20 + 8 \cdot 3 = 160 + 24 = 184$$



- Czasami przy mnożeniu można też skorzystać z odejmowania.

Zamiast mnożyć tak:

$$29 \cdot 6 = 20 \cdot 6 + 9 \cdot 6 = 120 + 54 = 174,$$

można obliczać:

$$29 \cdot 6 = 30 \cdot 6 - 1 \cdot 6 = 180 - 6 = 174$$

- Czasami liczby łatwo podzielić „po kawałku” w pamięci:

$$268 : 2 = 200 : 2 + 60 : 2 + 8 : 2 = 100 + 30 + 4 = 134$$

W niektórych wypadkach wymaga to większej pomysłowości:

$$238 : 7 = 210 : 7 + 28 : 7 = 30 + 4 = 34$$

- Mnożąc liczby z zerami na końcu, możemy najpierw pomnożyć liczby otrzymane po odrzuceniu zer, a następnie do wyniku dopisać z prawej strony wszystkie odrzucone zera:

$$4 \cdot 2 = 8 \text{ (banknotów)}$$

$$4 \cdot 20 = 80 \text{ (złotych)}$$

$$4 \cdot 2000 = 8000 \text{ (groszy)}$$

$$70 \cdot 400 = 28000$$

$$800 \cdot 500 = 400000$$

$$23 \cdot 60 = 1380, \text{ bo } 23 \cdot 6 = 20 \cdot 6 + 3 \cdot 6 = 120 + 18 = 138$$



I. Liczby naturalne

- Podobnie możemy postąpić przy dzieleniu liczby, która ma zera na końcu:
 $800 : 4 = 200$ $4000 : 5 = 800$ $2680 : 2 = 1340$
- Jeżeli i dzielna, i dzielnik mają zera na końcu, możemy pominąć tyle samo zer w dzielnej i dzielniku, a iloraz się nie zmieni.

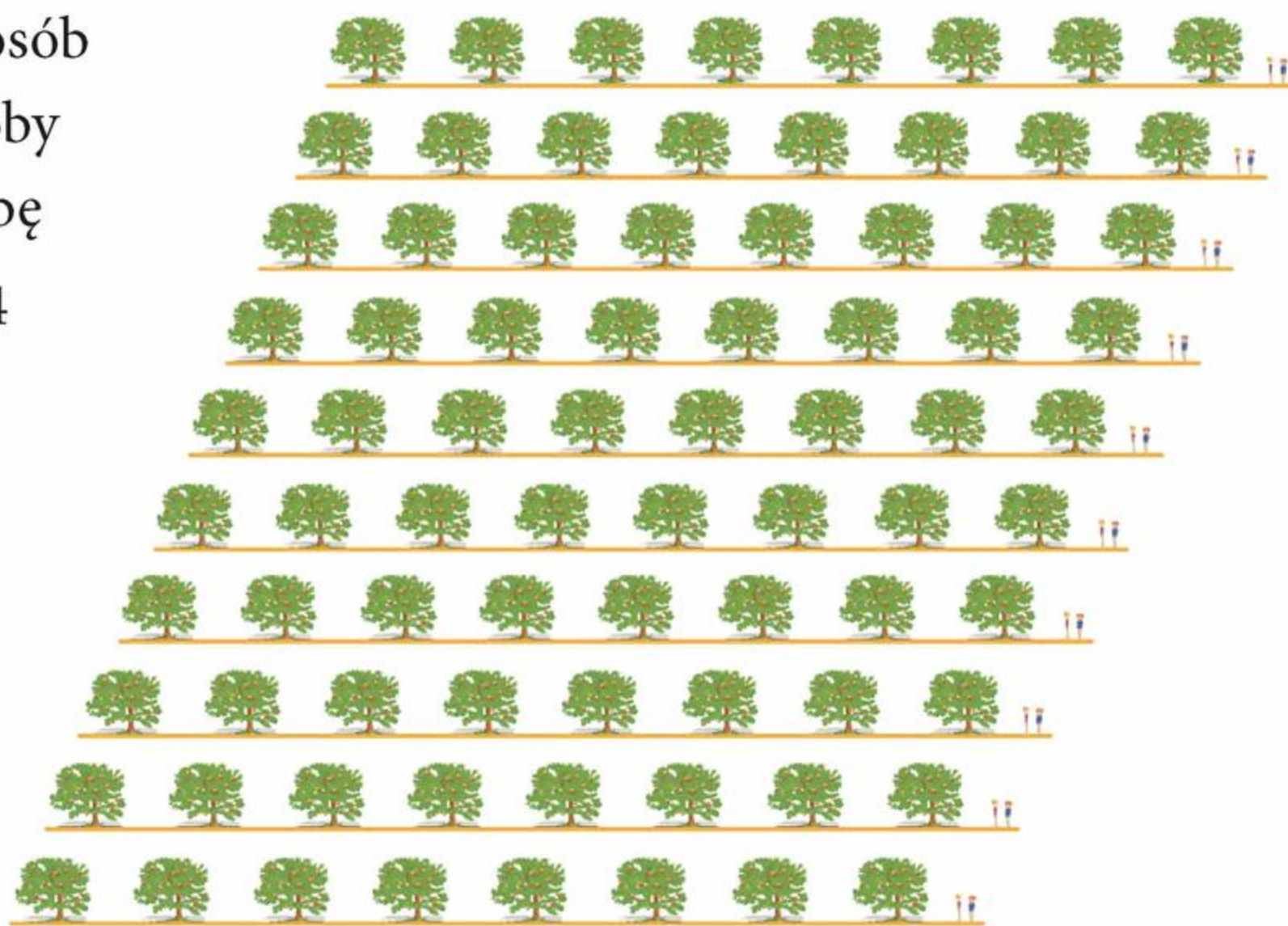
20 osób zbiera jabłka z 80 drzew. Ile drzew przypada na osobę?

80 drzew na 20 osób

8 drzew na 2 osoby

4 drzewa na osobę

$$80 : 20 = 8 : 2 = 4$$



Przykłady

Oblicz.

a) $12000 : 600$

$$12000 : 600 = 120 : 6 = 20$$

b) $4000 : 80$

$$4000 : 80 = 400 : 8 = 50$$

Dobra rada

Przyglądaj się różnym sposobom obliczeń. Mogą się okazać łatwiejsze niż twoje.

$$102 - 99 = ?$$

Trzeba obliczyć pisemnie.

Ja zawsze odejmuję najpierw dziesiątki, potem jedności.

Przecież to 3.
 $99 \xrightarrow{+1} 100 \xrightarrow{-2} 102$





Zadania



1 Wykonaj polecenia. ► Jeśli poprawnie rozwiążesz przykłady a) i b) z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom. Jeśli nie – rozwiąż wszystkie pozostałe przykłady z tego poziomu i dopiero wtedy przejdź na następny.

poziom A

Przepisz działanie, podkreśl w jednakowy sposób liczby, które najłatwiej dodać, i oblicz sumę.

a) $52 + 36 + 18 + 4$

c) $17 + 58 + 12 + 3$

e) $27 + 13 + 18 + 2$

b) $18 + 73 + 27$

d) $78 + 56 + 12$

f) $52 + 18 + 43$

poziom B

Oblicz.

a) $70 \cdot 600$

c) $80 \cdot 50$

e) $800 \cdot 90$

b) $400 : 5$

d) $6400 : 8$

f) $72\,000 : 8$

poziom C

Oblicz.

a) $1600 : 20$

c) $5400 : 600$

e) $2000 : 40$

b) $3000 : 60$

d) $49\,000 : 70$

f) $14\,000 : 700$

poziom D

Oblicz.

a) $69 \cdot 8$

c) $23 \cdot 4$

e) $49 \cdot 4$

b) $639 : 3$

d) $204 : 2$

f) $27 \cdot 5$

poziom E

Oblicz.

a) $720 \cdot 40$

c) $42 \cdot 600$

e) $370 \cdot 400$

b) $68\,200 : 20$

d) $484\,000 : 400$

f) $6900 \cdot 200$

• **2** Oblicz.

a) $256 + 0$

d) $823 \cdot 0$

g) $182 : 1$

b) $0 + 649$

e) $1 \cdot 245$

h) $167 : 167$

c) $0 \cdot 274$

f) $642 \cdot 1$

i) $0 : 973$

• **3** Ile zapłacimy za średnie porcje lodów dla całej 27-osobowej klasy?



- **4** Przygotujcie dla każdego z was komplet kartoników z cyframi od 1 do 9.

Każde z was tasuje swoje kartoniki. Wykładasz jeden kartonik, druga osoba kładzie obok swój – tak powstaje liczba dwucyfrowa. Wykładając kolejne pary kartoników, tworzycie jeszcze osiem takich liczb. Pilnujcie, by zawsze ta sama osoba wykladała kartonik z cyfrą dziesiątek.

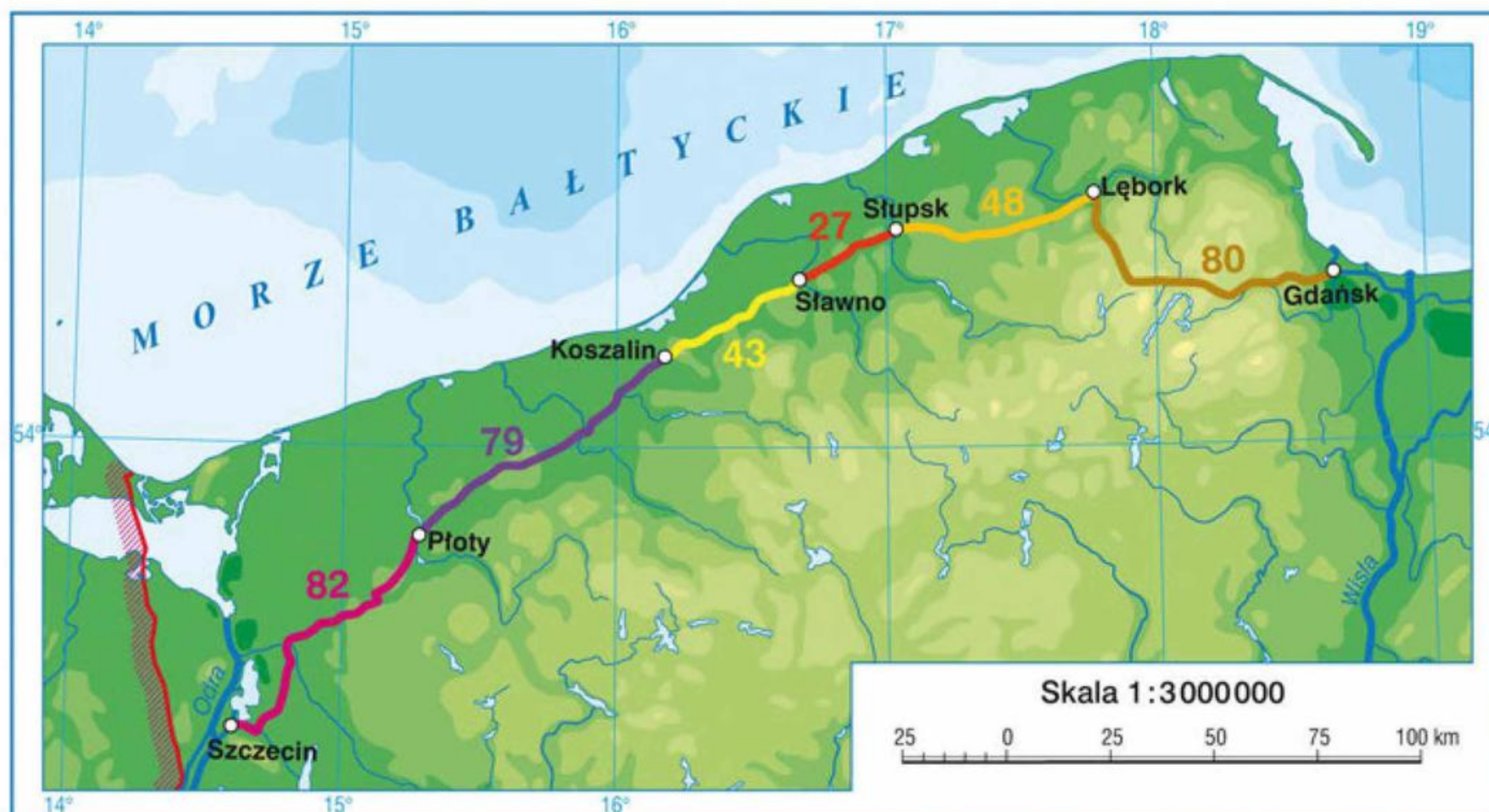
Spośród utworzonych liczb dwucyfrowych wybieracie teraz na zmianę pary liczb tak, aby liczby w parze łatwo było dodać. Która liczba została bez pary?

Obliczacie sumę wszystkich dziewięciu ułożonych liczb i porównujecie wynik z wynikami innych osób w klasie.

- **5** W morzach żyje wiele bardzo dużych zwierząt. Na przykład orka, ważąca 7000 kg, jest znacznie cięższa od żyrafy (o wadze 1400 kg), a nawet od słonia (ważącego 6000 kg). Jednak w środowisku morskim orka wcale nie należy do olbrzymów – rekin wielorybi jest od niej 2 razy cięższy, a największy z wielorybów, płetwal błękitny, jest 10 razy cięższy od rekina wielorybiego.

- a) Oblicz wagę każdego z wymienionych zwierząt morskich.
- b) Ile razy cięższa jest orka od żyrafy? O ile kilogramów jest cięższa?
- c) Ile razy cięższy od orki jest płetwal błękitny? A ile razy jest on cięższy od żyrafy?

- **6** Liczby na mapie oznaczają odległości w kilometrach między wybranymi miastami. Ile kilometrów trzeba pokonać, jadąc zaznaczoną trasą z Gdańska do Szczecina? Wykonaj dodawanie w takiej kolejności, by było jak najłatwiejsze.



- **7** Według mitologii greckiej Amfitryta, żona Posejdona, była jedną z nereid – słynących z urody morskich boginek. Wyobraź sobie, że na imieniny Amfitryty każda z jej pięćdziesięciu siostr przyniosła w prezencie 40 pereł. Zadowolona solenizantka kazała wykonać z nich naszyjniki, po 25 pereł w każdym. Ile pereł dostała Amfitryta? Ile naszyjników można z nich wykonać?
- **8** Statkiem wycieczkowym może płynąć 186 osób, w tym sześćoosobowa załoga. Bilet kosztuje 40 zł. Ile pieniędzy wpłynie do kasy, jeśli zostaną sprzedane bilety na wszystkie miejsca?



- **9** Podziel „po kawałku”.

a) $128 : 4$	c) $196 : 7$	e) $282 : 6$
b) $144 : 6$	d) $416 : 8$	f) $375 : 5$

- **10** Przepisz, zastępując ? odpowiednimi liczbami.

a) $17 \cdot 4 = 17 \cdot 2 \cdot 2 = ? \cdot 2 = ?$	c) $14 \cdot 5 = 14 \cdot 10 : 2 = ? : 2 = ?$
b) $68 : 4 = 68 : 2 : 2 = ? : 2 = ?$	d) $95 : 5 = 95 \cdot 2 : 10 = ? : 10 = ?$

- **11** Oblicz podobnie jak w zadaniu 10.

a) $27 \cdot 4$	c) $52 : 4$	e) $12 \cdot 5$	g) $115 : 5$
b) $73 \cdot 4$	d) $104 : 4$	f) $73 \cdot 5$	h) $70 : 5$

- **12** Oblicz jak najprostszym sposobem.

a) $(49 + 17 + 31 + 23) \cdot 0 + 12$
 b) $(18 + 35 + 15 + 32) : (18 + 35 + 15 + 32)$
 c) $(47 + 8 + 13 + 52) - (52 + 13 + 8 + 47)$

- 13** W jednym stawie pływa 3 razy więcej ryb niż w drugim. Ile ryb pływa w każdym stawie, jeśli w obu stawach jest ich 648?



Dla dociekliwych

Mnożenie „po kawałku” można stosować także do liczb dwucyfrowych, i to na kilka sposobów.

Sposób 1

$$15 \cdot 12 = 15 \cdot 10 + 15 \cdot 2 = 180$$

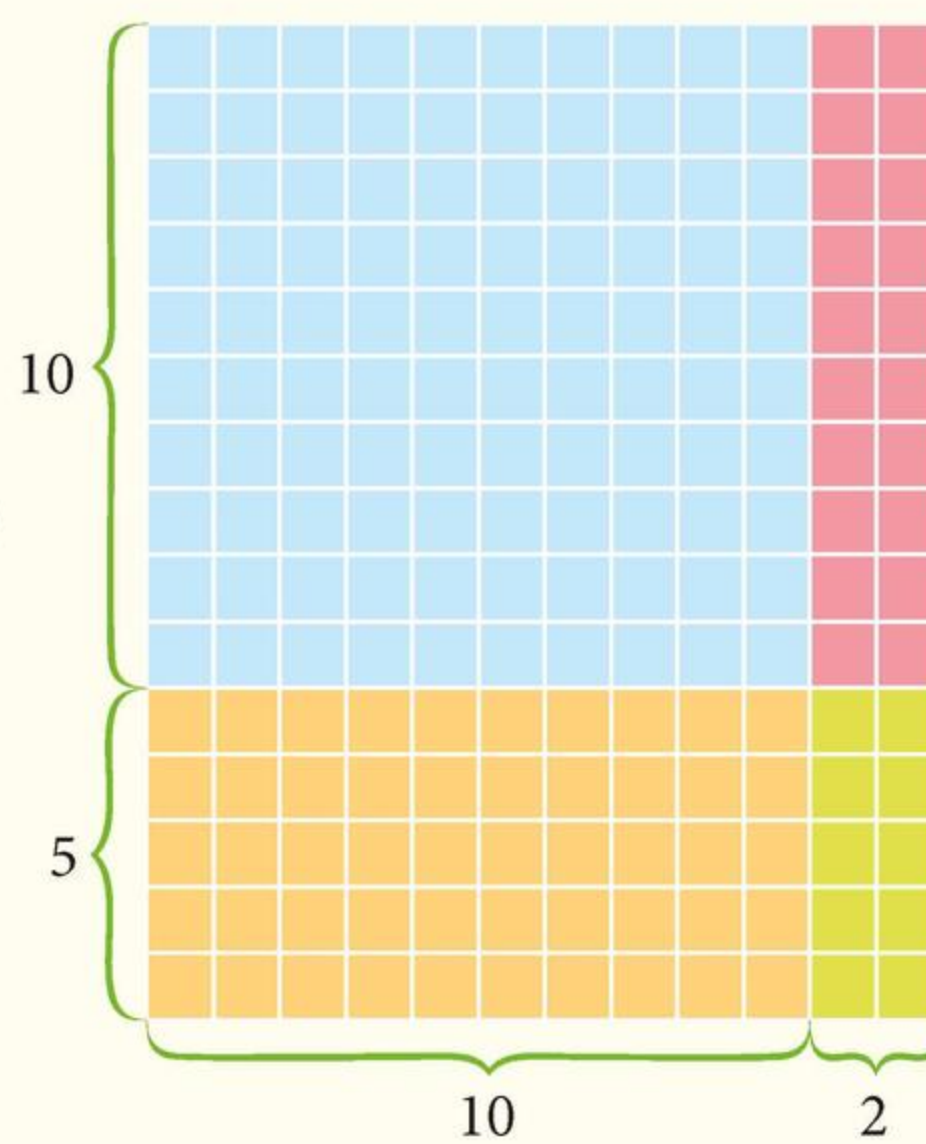
Sposób 2

$$15 \cdot 12 = 10 \cdot 12 + 5 \cdot 12 = 180$$

Sposób 3

$$15 \cdot 12 = 10 \cdot 10 + 10 \cdot 2 + 5 \cdot 10 + 5 \cdot 2 = 180$$

Rysunek obok wyjaśnia, dlaczego można tak obliczać.



- 1** Zilustruj pierwsze dwa sposoby mnożenia $15 \cdot 12$.

- 2** Oblicz trzema sposobami.

a) $12 \cdot 11$

b) $13 \cdot 15$

- 3** Oblicz wybranym sposobem.

a) $15 \cdot 17$

c) $32 \cdot 18$

e) $25 \cdot 25$

b) $17 \cdot 17$

d) $52 \cdot 15$

f) $18 \cdot 42$



Czy już umiem?

- I Oblicz.

a) $57 \cdot 8$

b) $720 \cdot 3000$

c) $2000 : 50$

- II Oblicz sumę tak, aby dodawanie było jak najprostsze.

$$18 + 34 + 32 + 66$$

- III Pole powierzchni województwa kujawsko-pomorskiego jest równe $18\,000 \text{ km}^2$. Województwo opolskie ma pole powierzchni dwa razy mniejsze, a województwo mazowieckie – dwa razy większe niż pole powierzchni województwa kujawsko-pomorskiego. Oblicz pole powierzchni województwa mazowieckiego.



Na dobry początek

Dziurkacz

- ▶ Przygotuj kilka małych kartek lub serwetek. Jedną z nich złoż raz na pół, drugą dwa razy na pół, trzecią trzy razy itd. Ile razy udało ci się zgiąć kartkę (serwetkę)?
- ▶ Każdą ze złożonych kartek lub serwetek przebij pineską albo nóżką cyrkla tak, aby przedziurawić wszystkie warstwy. Rozprostuj je. Ile dziurek pojawiło się w każdej z nich? Zapisz liczbę dziurek w kolejnych kartkach (serwetkach). Co zauważasz?

Iloczyn jednakowych czynników możemy zapisać, stosując **potęgowanie**.

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$$

2 czynniki

Czytamy: 4 do potęgi drugiej
lub 4 do kwadratu

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

3 czynniki

Czytamy: 4 do potęgi trzeciej
lub 4 do sześciannu

Podobnie określamy czwartą, piątą i wyższe potęgi.

Czytamy:

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

4 czynniki

trzy do potęgi czwartej

$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$$

5 czynników

trzy do potęgi piątej

$$3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$$

6 czynników

trzy do potęgi szóstej

Pierwsza potęga dowolnej liczby to ta sama liczba.

$$2^1 = 2$$

jedna dwójka

$$3^1 = 3$$

jedna trójka

$$7^1 = 7$$

jedna siódemka

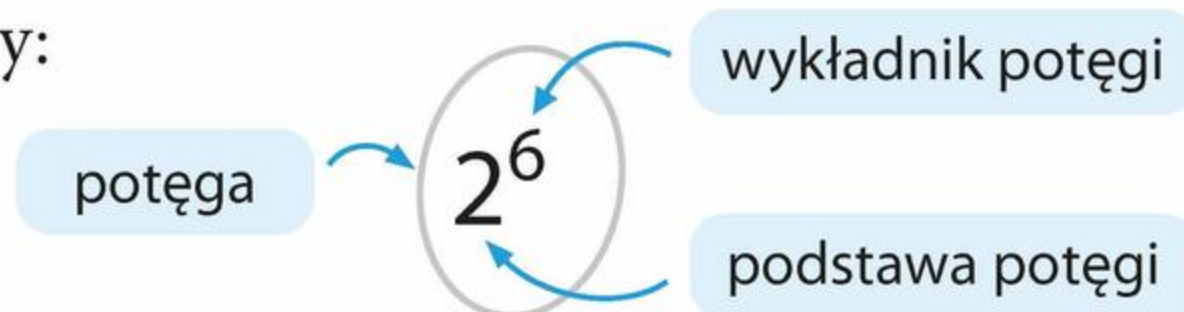
Zauważ, że **dowolna potęga liczby 1 jest równa 1**, a **dowolna potęga liczby 0 jest równa 0**.

$$1^7 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

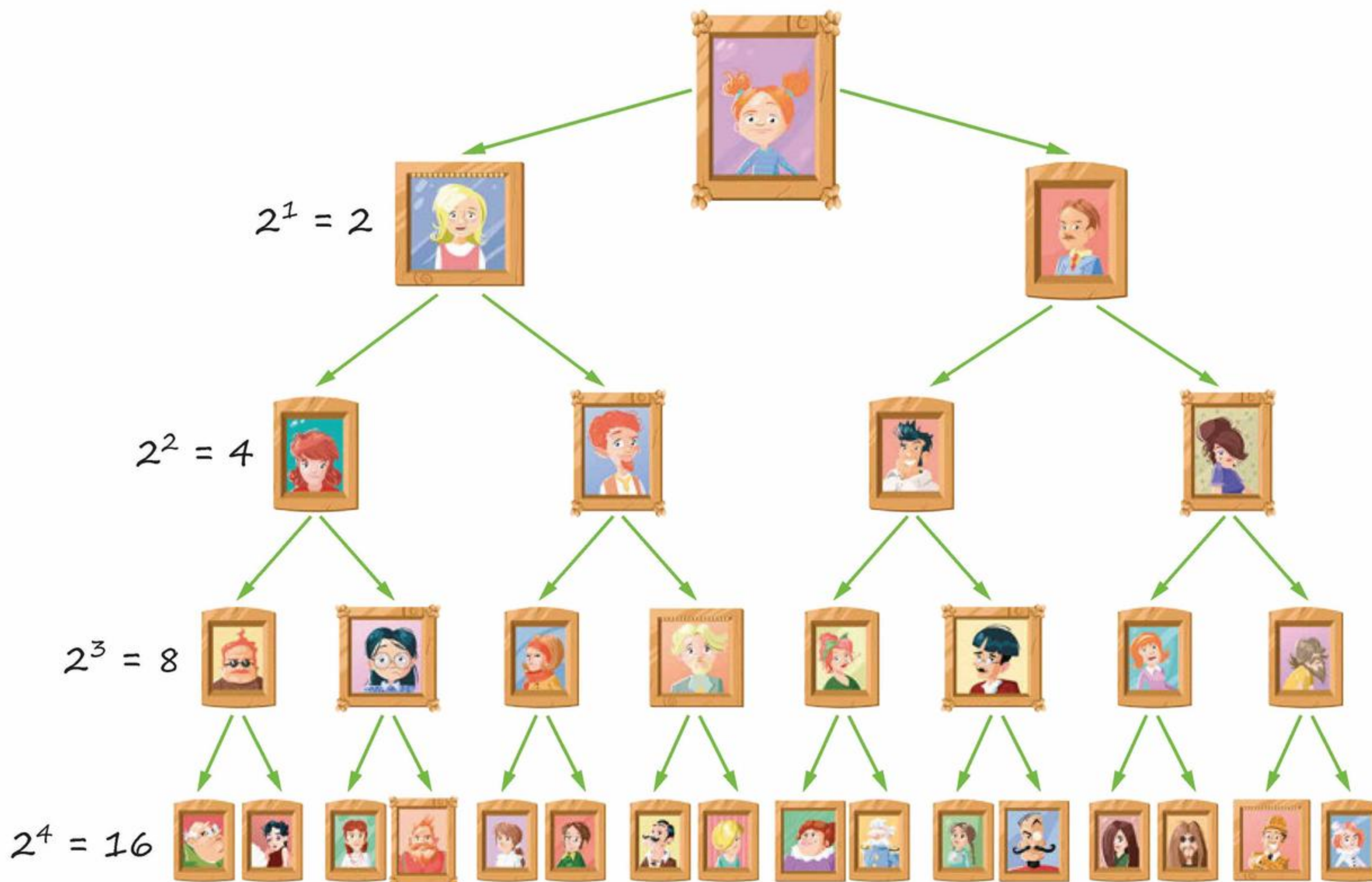
$$0^7 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

I. Liczby naturalne

Zapamiętaj te nazwy:



Zobacz, jak szybko rosną potęgi.



Liczba 2 podniesiona do potęgi 4 to 16,
a liczba 2 podniesiona do potęgi 10 to aż 1024.



Zadania

- 1** Wykonaj polecenia. ► Jeśli poprawnie rozwiążesz dwa kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

Zapisz iloczyn w postaci potęgi.

a) $12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12$

b) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

c) $23 \cdot 23 \cdot 23 \cdot 23$

d) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

e) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$

f) $9 \cdot 9 \cdot 9$

poziom B

Zapisz potęgę w postaci iloczynu jednakowych czynników.

a) 5^7

b) 3^4

c) 14^2

d) 7^6

e) 13^5

f) 18^3

poziom C

Oblicz.

- a) 2^5 b) 4^3 c) 1^6 d) 2^4 e) 3^4 f) 0^8

poziom D

Zapisz potęgę w postaci iloczynu jednakowych czynników i oblicz za pomocą kalkulatora.

- a) 17^4 b) 3^8 c) 24^4 d) 7^5 e) 45^3 f) 21^5

- 2 Narysuj w zeszycie w kratkę kwadraty o boku długości: 1 kratki, 2 kratek, 3 kratek, 4 kratek. Oblicz, z ilu kratek składa się każdy z nich. Z ilu kratek składałby się kwadrat o boku długości 10 kratek, a z ilu kwadrat o boku długości 100 kratek?

- 3 Przeczytaj potęgę. W podpunktach a) i b) przeczytaj ją na dwa sposoby.

- a) 2^3 b) 5^2 c) 10^1 d) 15^7

- 4 Emir miał cztery żony. Każda z nich urodziła czworo dzieci – samych synów. Każdy z dorosłych już synów poślubił cztery kobiety. Każda z nich również urodziła czworo dzieci. Zapisz w postaci potęgi liczby 4, ile żon miał ten emir, ilu miał synów, ile synowych i ile wnucząt. Oblicz otrzymane potęgi.

emir – tytuł dostojników, książąt i niektórych władców w krajach arabskich, muzułmańskich

Według Słownika wyrazów obcych i zwrotów obcojęzycznych Władysława Kopalińskiego

- 5 Pewna bakteria rozmnaża się w ten sposób, że dzieli się na dwie bakterie. Każda z tych nowych bakterii rośnie i już po godzinie także dzieli się na dwie. Zapisz w postaci potęgi, ile bakterii powstanie z jednej po 2 godz., 3 godz., 5 godz. i po 10 godz. od chwili pierwszego podziału. Oblicz otrzymane potęgi.
- 6 Na niektórych kalkulatorach można w prosty sposób obliczać potęgi. Wciśnij kolejno na kalkulatorze klawisze:



Jakie liczby pojawiają się w okienku kalkulatora, gdy wielokrotnie naciskasz klawisz ze znakiem równości? Sprawdź, czy to samo dzieje się w kalkulatorze kolegi. Oblicz za pomocą kalkulatora potęgi: 2^6 , 5^6 , 8^4 .



I. Liczby naturalne

- **7** Oblicz: 10^1 , 10^2 , 10^3 , 10^4 , 10^5 . Zapisz w postaci potęgi liczby 10 następujące liczby: 1 000 000, 100 000 000, 1 000 000 000 000. Czy umiesz je nazwać?
- **8** Przepisz, wstawiając w miejsce ? znak $<$, $>$ lub $=$.
- a) 2^3 ? $2 \cdot 3$ c) $4 + 4$? 4^2
b) 2^3 ? 3^2 d) 2^5 ? 5^2
- **9** a) Oblicz 2^{10} .
b) Do której co najmniej potęgi należy podnieść 2, aby otrzymać liczbę większą od 4000?
- **10** Na karteczce obok podano nazwy niektórych dużych liczb.
- a) Zapisz cyframi (ale nie w postaci potęgi) liczby: miliard, bilion, trylion.
b) Zapisz cyframi (ale nie w postaci potęgi) liczby: trzy tysiące, trzy miliony, trzy miliardy, trzy biliony.
c) Jak się nazywa tysiąc milionów, jak milion tysięcy, a jak milion milionów?
d) Ile milionów ma trylion?
- **11** Rzęsa wodna, rosnąca w stawie, każdego kolejnego dnia zajmuje dwa razy większą część jego powierzchni. Po piętnastu dniach zajmowała już pół stawu. Ile dni potrzebuje na porośnięcie drugiej połowy?

Niektóre potęgi liczby 10.

10^3	tysiąc
10^6	milion
10^9	miliard
10^{12}	bilion
10^{15}	biliard
10^{18}	trylion



-  **12** Jaka jest ostatnia cyfra podanej liczby? Określ ją, nie obliczając potęgi. Uzasadnij odpowiedź.

a) 6^{83} b) 4^{82} c) 3^{80}

-  **13** Czy podana liczba jest podzielna przez 5? Uzasadnij odpowiedź.

a) 15^{70} b) $2014 + 9^{20}$



Dla dociekliwych

- 1** W iloczynie $2^3 \cdot 2^4$ zapisz potęgi w postaci iloczynów jednakowych czynników, a następnie całe otrzymane wyrażenie zapisz jako potęgę liczby 2. Wykonaj te same polecenia dla iloczynów $2^2 \cdot 2^6$ oraz $2^3 \cdot 2^2$.

- 2** Zapisz iloczyn potęg w postaci jednej potęgi.

a) $2^7 \cdot 2^{13}$ b) $2^{14} \cdot 2^{27} \cdot 2^6$

- 3** Oblicz kolejno.

a) 3^2 i 3^4 b) 2^3 i 2^6 c) 3^5 i 3^{10}

Czy musisz wykonać dziewięć mnożeń, aby obliczyć 3^{10} ?

- 4** Zapisz sumę $2^9 + 2^9$ w postaci potęgi o podstawie 2.

Uwaga. Najpierw zamień dodawanie jednakowych składników na mnożenie.

- 5** Czy można zapisać podaną sumę w postaci jednej potęgi?

a) $3^7 + 3^7 + 3^7$ b) $3^5 + 3^5$



Czy już umiem?

- I** Zapisz w postaci potęgi.

a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ b) 5 c) $122 \cdot 122 \cdot 122 \cdot 122 \cdot 122$

- II** Oblicz.

a) 3^5 b) 10^4 c) 1^{150} d) 0^{13}

- III** Kolejka turystyczna składa się z pięciu wagoników. W każdym wagoniku jest pięć ławek, a na każdej ławce – pięć miejsc. Zapisz w postaci potęgi liczby 5, ile miejsc siedzących jest w tej kolejce. Oblicz tę potęgę.

Kolejność wykonywania działań

  Na dobry początek

Kto skreśli więcej liczb?

Wypisz w zeszycie kolejne liczby od 0 do 29.

- ▶ Z czterech różnych cyfr wylosowanych przez nauczyciela, nawiasów i znaków działań układasz wyrażenia. Na przykład z cyfr 2, 5, 1, 7 możesz ułożyć różne wyrażenia. Jednym z nich jest $7 \cdot 5 - 21$ o wartości 14.

Zapisujesz wyrażenie w zeszycie, a jego wartość wykreślasz spośród wypisanych liczb.

Ile liczb udało ci się skreślić?

- ▶ Przestrzegaj poniższych zasad:
 - cyfry możesz dowolnie łączyć, tworząc liczby wielocyfrowe,
 - w jednym wyrażeniu nie musisz wykorzystać wszystkich wylosowanych cyfr,
 - nie możesz używać jednej cyfry wielokrotnie.

Kolejność wykonywania działań

1. Działania w nawiasach.
2. Potęgowanie.
3. Dzielenie i mnożenie – w takiej kolejności, w jakiej występują.
4. Odejmowanie i dodawanie – w takiej kolejności, w jakiej występują.



Przykłady

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> $10 - 6 + 2 = 4 + 2 = 6$
ale
$10 - (6 + 2) = 10 - 8 = 2$ | działania w kolejności ich występowania
<hr/> najpierw działanie w nawiasie |
| <ul style="list-style-type: none"> $20 : 2 \cdot 5 = 10 \cdot 5 = 50$
ale
$20 : (2 \cdot 5) = 20 : 10 = 2$ | działania w kolejności ich występowania
<hr/> najpierw działanie w nawiasie |
| <ul style="list-style-type: none"> $4 + 2 \cdot 10 = 4 + 20 = 24$
ale
$(4 + 2) \cdot 10 = 6 \cdot 10 = 60$ | najpierw mnożenie, potem dodawanie
<hr/> najpierw działanie w nawiasie |
| <ul style="list-style-type: none"> $500 - 10 \cdot 2^2 = 500 - 10 \cdot 4 = 500 - 40 = 460$
ale
$500 - (10 \cdot 2)^2 = 500 - 20^2 = 500 - 400 = 100$ | najpierw potęgowanie, potem mnożenie
<hr/> najpierw działanie w nawiasie, potem potęgowanie, na końcu odejmowanie |
| <ul style="list-style-type: none"> $2 \cdot [5 - (3 + 1)] = 2 \cdot [5 - 4] = 2 \cdot 1 = 2$ | najpierw działanie w nawiasie, w którym nie ma już innych nawiasów |

Rozwiązanie zadania tekstowego często można zapisać w postaci jednego wyrażenia. Ta umiejętność przyda się także w następnych klasach, kiedy będziemy rozwiązywać zadania, wprowadzając niewiadomą x .

Przykład

Ania kupiła dwa bloki po 3 zł i kredki za 5 zł.
Ile reszty dostanie, gdy da sprzedawcy banknot 20 zł?

Sposób 1

Bloki kosztują:	$2 \cdot 3 = 6$
Kredki kosztują:	5
Razem Ania zapłaci:	$6 + 5 = 11$
Reszta:	$20 - 11 = 9$ [zł]

Sposób 2

$20 - (\underbrace{2 \cdot 3}_{\text{za bloki}} + \underbrace{5}_{\text{za kredki}}) = 20 - (6 + 5) = 20 - 11 = 9$ [zł]
 tyle Ania zapłaci

Odp. Ania dostanie 9 zł reszty.



$$2 \cdot 3 \text{ zł} + 5 \text{ zł}$$

Przykład

Dwaj bracia poszli razem do sklepu. Każdy z nich wybrał blok za 3 zł i kredki za 5 zł. Ile reszty dostaną, gdy dadzą sprzedawcy banknot 20 zł?

Sposób 1

Każdy brat zapłaci: $3 + 5 = 8$
 Razem zapłacą: $2 \cdot 8 = 16$
 Reszta: $20 - 16 = 4$ [zł]

Sposób 2

tyle zapłaci
każdy brat
 $20 - 2 \cdot (3 + 5) = 20 - 2 \cdot 8 = 20 - 16 = 4$ [zł]
 tyle zapłacą obaj



Odp. Bracia dostaną 4 zł reszty.

$$2 \cdot (3 \text{ zł} + 5 \text{ zł})$$

Dobra rada

Aby nie popełniać błędów, warto zapisywać rozwiązania dłuższych wyrażeń linijka pod linijką, za każdym razem dokładnie przepisując wszystkie liczby z jeszcze niewykonanych działań.

$$\begin{aligned} & [(35 - 13 \cdot 2) \cdot 3 - 5] : 11 = \\ & = [(35 - 26) \cdot 3 - 5] : 11 = \\ & = [9 \cdot 3 - 5] : 11 = \\ & = [27 - 5] : 11 = \\ & = 22 : 11 = 2 \end{aligned}$$



Zadania



1 Oblicz wartość wyrażenia. Zapisuj kolejne etapy obliczania. ► Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

a) $2 + 5 \cdot 4$

d) $8 - 2 \cdot 3$

g) $10 - 2 \cdot 2$

b) $(2 + 5) \cdot 4$

e) $(10 - 2) \cdot 2$

h) $(3 + 2) \cdot 3$

c) $2 \cdot 5 - 4$

f) $5 + 3 \cdot 2$

i) $4 \cdot 5 - 1$

poziom B

a) $8 : 4 \cdot 2$

c) $10 - 2 + 1$

e) $12 : 6 \cdot 2$

b) $8 : 4 : 2$

d) $7 - 5 - 1$

f) $9 : 3 : 3$

poziom C

- a) $2 \cdot [7 - (3 - 1)]$ c) $3 \cdot [4 + 2 \cdot (1 + 1)]$ e) $10 + 2 \cdot [3 + 2 : (1 + 1)]$
 b) $16 : [2 + 8 : (2 + 2)]$ d) $8 - [2 \cdot (5 - 1) - 3]$ f) $[2 \cdot (3 - 1) + 6] : 5$

poziom D

- a) $5 \cdot 2^2 + 1$ c) $3^2 - 2^2$ e) $3^2 - 2^3$
 b) $4 \cdot 1^3 - 2$ d) $19 - 2^3 - 1^3$ f) $10^3 : 10 + 2^2$

poziom E

- a) $3 \cdot 5 + 12 : (3 + 1)$ c) $12 - (6 - 5) + 2 \cdot 4$ e) $10 : (10 - 3 : 1 \cdot 3)$
 b) $16 : 2 \cdot 2 - 2 + 1$ d) $30 : (6 - 4 : 2 : 2)$ f) $4 : 2 \cdot (3 - 2 + 1)$

MISTRZ

- a) $6^2 : (5^2 - 4^2) \cdot (2^1 + 2)$
 b) $(3^2 \cdot 11 + 1^{11}) : 5^2 \cdot (4 - 1^8 + 1^7)$
 c) $[(5 \cdot 2)^3 - 5 \cdot 2^3] : (5 \cdot 2)$
 d) $(1 + 2^1 + 2^2 + 2^3) : (1 + 2^1)$
 e) $(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) : (1 + 2 + 3)$
 f) $(1^1 + 2^1 + \dots + 5^1) \cdot (1^1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^{100})$

- 2 Jak obliczyć, ile kosztują zakupy? Wybierz właściwe wyrażenie z chmurki.



$2 + 3 + 4$
 $2 + 3 \cdot 4$ $3 \cdot (2 + 4)$
 $3 \cdot 2 + 4$

CENNIK
 zeszyt – 2 zł długopis – 4 zł

- 3 Rozwiąż zadanie za pomocą jednego wyrażenia. Przyjmij, że każdy samochód ma 4 koła, a motocykl 2.
- a) Na parkingu stoją samochody: 3 zielone i 2 czerwone. Ile kół mają te samochody?
- b) Na parkingu stoją 3 samochody i motocykl. Ile kół mają te pojazdy?
- 4 Dwaj chłopcy mieli razem 12 zł. Za te pieniądze kupili dla każdego po jednym lodzie w cenie 3 zł i – na spółkę – napój za 2 zł. Pozostałe pieniądze podzielili równo między siebie. Jaka kwota przypadła na każdego z nich? Rozwiązanie zadania zapisz w postaci jednego wyrażenia.

- **5** Za pomocą których wyrażeń możesz rozwiązać poniższe zadanie?

Halina kupiła pięć kostek mydła „Szafirek” po 2 zł i dwie szczoteczki do zębów po 6 zł. Zapłaciła banknotem 50 zł. Ile reszty dostała?

- A** $50 - 4 - 2 - 6$ **C** $50 - 4 \cdot 2 - 2 \cdot 6$ **E** $50 - 5 \cdot 2 + 2 \cdot 6$
B $50 - (4 + 2 + 6)$ **D** $50 - 5 \cdot 2 - 2 \cdot 6$ **F** $50 - (5 \cdot 2 + 2 \cdot 6)$

Wskazówka Są dwa takie wyrażenia.

- **6** Ułóż zadanie tekstowe, które można rozwiązać za pomocą podanego wyrażenia.

- a)** $20 - (3 \cdot 4 + 2)$ **b)** $20 - 3 \cdot 4 + 2$ **c)** $20 - 3 \cdot (4 + 2)$

- **7** Zapisz cyfry: 5 4 3 2 1. Wstawiając między nie znaki działań i nawiasy, możesz utworzyć różne wyrażenia, np.:

$5 + (4 + 3) \cdot (2 + 1)$ o wartości 26
lub $54 + 32 - 1$ o wartości 85.

Układaj w ten sposób różne wyrażenia tak, aby ich wartościami były kolejno liczby: 0, 1, 2, ..., 8. Jeśli chcesz, spróbuj ułożyć wyrażenia o innych wartościach.

Ile nawiasów
otworzysz, tyle
samo zamknij.



- **8** Wciśnij na kalkulatorze kolejno klawisze:

$2 + 3 \times 2 =$

Czy kalkulator obliczył wynik działania $2 + 3 \cdot 2$, czy działania $(2 + 3) \cdot 2$?

Czy kalkulator, którego używasz, „przestrzega” właściwej kolejności wykonywania działań? Postaraj się sprawdzić pod tym kątem różne kalkulatory.

Uwaga. Jeśli możesz skorzystać z komputera z systemem Windows, wybierz aplikację *Kalkulator* i sprawdź jej dwie wersje: *Standardowy* i *Naukowy*.

- **9** Troje dzieci złożyło się po 8 zł, aby kupić mamie w prezencie książkę za 23 zł. Okazało się, że cenę książki obniżono o 4 zł. Ile pieniędzy zostało dzieciom? Rozwiązanie zadania zapisz w postaci jednego wyrażenia.

- **10** Przepisz wyrażenie i wstaw nawiasy tak, aby otrzymać podany wynik.

- a)** $4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 + 4$ wynik: 10
b) $20 - 12 : 2 + 1 + 1$ wynik: 17
c) $2 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 1$ wynik: 60

- ... 11 Wśród siedmiu podanych działań są trzy pary o jednakowych wynikach. Spróbuj bez liczenia odgadnąć, które działania tworzą te pary, a następnie wykonaj rachunki i sprawdź swoje przypuszczenia.

A $23 + (17 - 2)$

D $23 + (17 + 2)$

F $23 + 17 - 2$

B $23 - (17 + 2)$

E $23 - 17 - 2$

G $23 - 17 + 2$

C $23 - (17 - 2)$



- 12 Karol zebrał 17 grzybów – o 5 więcej niż Beata. Beata zebrała 2 razy więcej grzybów niż Tomek. O ile więcej grzybów zebrała Beata niż Tomek? Rozwiązanie zadania zapisz w postaci jednego wyrażenia.



Dla dociekliwych

- Na dwóch półkach stoi w sumie 28 książek. Na pierwszej półce jest o 6 książek więcej niż na drugiej. Ile książek stoi na pierwszej półce? Rozwiąż zadanie, zapisując rozwiązanie w postaci jednego wyrażenia.
- W dwóch bibliotekach jest w sumie 16 856 książek. W pierwszej z nich jest o 1348 książek więcej niż w drugiej. Ile książek jest w pierwszej bibliotece? Zapisz wyrażenie, za pomocą którego można rozwiązać to zadanie, ale nie wykonuj rachunków.



Czy już umiem?

- Oblicz.

a) $4 + 3 \cdot 2$	c) $4 \cdot 8 - 12 : (3 + 1)$
b) $12 - 4 - 1$	d) $50 - 2 \cdot 3^2 + 1$
- Zając waży 5 kg, a wilk 10 razy tyle. O ile kilogramów wilk jest cięższy od zająca? Rozwiąż to zadanie, zapisując rozwiązanie w postaci jednego wyrażenia.
- Wybierz wyrażenie, które może być rozwiązaniem poniższego zadania.
W sklepiu szkolnym było 100 zeszytów. Trzej uczniowie klasy 5a kupili po 2 zeszyty w linię i po 7 zeszytów w kratkę. Ile zeszytów zostało w sklepiu?

A $100 - 5 - 5 - 7$	C $100 - 5 \cdot (2 + 7)$	E $100 - 3 \cdot 2 + 7$
B $100 - 3 \cdot 2 - 7$	D $100 - 3 \cdot (2 + 7)$	F $100 - (5 \cdot 2 + 7)$

 Na dobry początek

Liczby z zapalek

Weź pięć zapalek albo patyczków. Będziesz z nich układać cyfry rzymskie: I, V, X, a z tych cyfr – liczby.

Na zdjęciu widzisz liczbę XVI,
czyli – w innym zapisie – 16.



- ▶ Ułóż z pięciu zapalek jak największą liczbę zapisaną cyframi rzymskimi.
- ▶ Jaką najmniejszą liczbę można ułożyć ze wszystkich pięciu zapalek?
- ▶ Teraz możesz użyć dodatkowych zapalek do układania znaków + i –. Ułóż ze wszystkich zapalek działanie o jak największym i działanie o jak najmniejszym wyniku.



Zagadki z zapalek

Przestaw w każdej zagadce jedną zapalkę, by otrzymać prawdziwą równość.

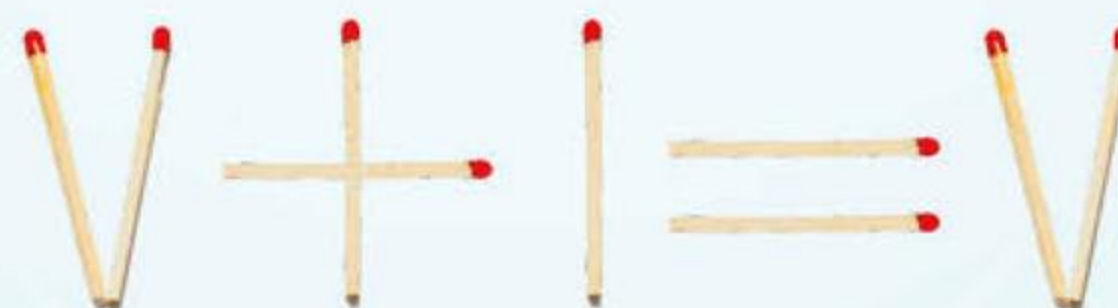
Zagadka 1



Zagadka 2



Zagadka 3



Na ilustracjach różne liczby zostały zapisane za pomocą **cyfr rzymskich**.



Władysław IV
panował w XVII wieku



Dla odróżnienia od cyfr rzymskich używane przez nas cyfry od 0 do 9 są nazywane **cyframi arabskimi**.

W rzymskim zapisie używamy następujących cyfr:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Liczby zapisujemy w tym systemie na ogół tak: piszemy cyfry w kolejności od największej do najmniejszej i dodajemy je.

XII to 12, bo $10 + 1 + 1 = 12$

XVI to 16, bo $10 + 5 + 1 = 16$

CCLXI to 261, bo $100 + 100 + 50 + 10 + 1 = 261$

Wyjątek stanowi sześć wypisanych niżej liczb. W tych liczbach mniejsza cyfra stoi przed większą. Wtedy zamiast dodawać – odejmujemy:

IV to 4, bo $5 - 1 = 4$

IX to 9, bo $10 - 1 = 9$

XL to 40, bo $50 - 10 = 40$

XC to 90, bo $100 - 10 = 90$

CD to 400, bo $500 - 100 = 400$

CM to 900, bo $1000 - 100 = 900$

Przykłady

$$\text{LXIII} = 60 + 3 = 63$$

$$\text{CCXCVI} = 200 + 90 + 6 = 296$$

$$\text{CVII} = 100 + 7 = 107$$

$$\text{MMCDLXXXIV} = 2000 + 400 + 80 + 4 = 2484$$

Zauważ, że nigdy nie zapisujemy obok siebie więcej niż trzech jednakowych cyfr.

Dobra rada

Aby łatwiej ci było odczytać liczbę zapisaną cyframi rzymskimi, możesz oddzielić w niej, np. kreskami, tysiące, setki, dziesiątki, jedności.

tysiące		setki		dziesiątki		jedności	
MM		CM		LXX		IV	
2000	+	900	+	70	+	4	= 2974

Podobnie można postępować przy zapisywaniu liczb cyframi rzymskimi.

Sto jedenaście!

Trzy!

Zwróć uwagę, że w liczbach zapisanych cyframi arabskimi ta sama cyfra może oznaczać co innego. Na przykład w liczbie 111 pierwsza jedynka oznacza 1 setkę, druga 1 dziesiątkę, a trzecia 1 jedność. Natomiast w systemie rzymskim w liczbie III każda cyfra I oznacza jedność.

**Zadania**

1 Zapisz liczby cyframi arabskimi. ► Jeśli poprawnie zapiszesz dwie kolejne liczby z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

a) VI

c) V

e) XI

b) IX

d) III

f) IV

poziom B

a) XXXVII

d) XIX

g) XXIII

b) XXIX

e) XXVI

h) XIII

c) XVIII

f) XXIV

i) XXXIV

poziom C

a) LXII

d) LXIX

g) LXXXIX

b) XCIX

e) XCVIII

h) XCIV

c) LXXVII

f) LXXXVIII

i) XLIV

poziom D

- a) MMCD
b) MDCC
c) MCCC

- d) MMCM
e) MDCCC
f) MMCC

- g) MMMDC
h) MMCCC
i) MDC

poziom E

- a) MCDXCVIII
b) MDCCCXLVI

- c) MCMLXXI
d) MCMXCIX

- e) MMCCCXLIV
f) MMCDXXIII



2 Zapisz liczby cyframi rzymskimi. ► Jeśli poprawnie zapiszesz dwie kolejne liczby z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

- a) 4
b) 12

- c) 10
d) 9

- e) 8
f) 7

poziom B

- a) 39
b) 28
c) 32

- d) 14
e) 27
f) 23

- g) 24
h) 16
i) 29

poziom C

- a) 45
b) 78
c) 52

- d) 91
e) 64
f) 46

- g) 59
h) 49
i) 61

poziom D

- a) 1900
b) 2400
c) 3200

- d) 2600
e) 900
f) 1400

- g) 3400
h) 2500
i) 1100

poziom E

- a) 1939
b) 1695

- c) 2390
d) 1484

- e) 3496
f) 2213

- 3** Który bilet do kina wybierzesz, jeśli chcesz siedzieć jak najbliżej ekranu, a który, jeśli chcesz usiąść jak najdalej?

I



II



III



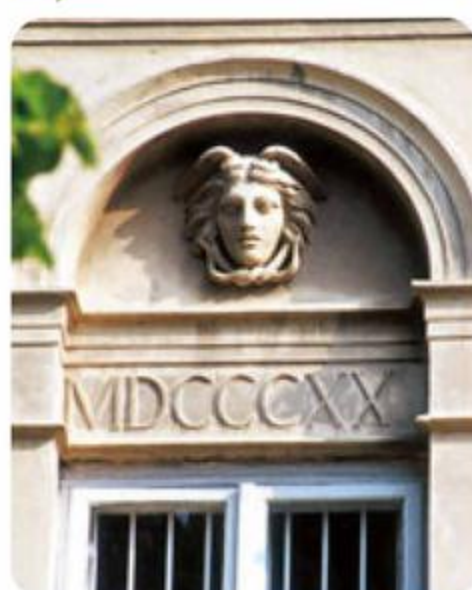
I. Liczby naturalne

- **4** Jak ustawić cyfry rzymskie: C, X, V, I, aby otrzymać możliwie największą liczbę, a jak – by liczba była możliwie najmniejsza?
- **5** W którym roku zbudowano przedstawioną budowlę?

a)



b)



c)



- **6** Zapisz podane daty cyframi arabskimi. Napisz też – w zapisie rzymskim i arabskim – w którym wieku miały miejsce wymienione wydarzenia.



Chrzest Polski
CMLXVI



Unia lubelska
MDLXIX



Konstytucja 3 maja
MDCCXCI



Odzyskanie przez Polskę
niepodległości po rozbiorach
MCMXVIII

- **7** Poszukaj w swojej okolicy napisów zawierających cyfry rzymskie. Postaraj się znaleźć takie, aby niektóre zawarte w nich liczby były większe od 39. Przepisz te liczby do zeszytu, a następnie zapisz je cyframi arabskimi. Obok każdej napisz, gdzie się pojawiła. Jeśli chcesz, możesz zrobić album z rysunkami albo zdjęciami takich napisów.

- ... 8 Liczby na rysunku zostały częściowo zamazane. A jednak da się je odczytać! Zapisz te liczby cyframi rzymskimi i arabskimi.

XV  II C  CLX  X  V

- ... 9 Znajdź na zdjęciu liczby rzymskie i zapisz je cyframi arabskimi. Zastanów się, kto mógłby ci pomóc w odczytaniu reszty tekstu.



- ... 10 Ułóż zapałki tak, jak przedstawiono poniżej. Przekładając tylko jedną zapałkę, spraw, aby równość była prawdziwa. Ułóż podobną zagadkę. Daj ją do rozwiązania koledze lub koleżance z ławki. Jeśli chcesz, możesz opracować zbiór łamigłówek tego typu.

a) 

b) 

c) 

-  11 Na tablicy narysowano kwadrat magiczny ułożony z dziewięciu kolejnych liczb naturalnych zapisanych cyframi rzymskimi. Niestety, ktoś starł wszystkie cyfry I oraz V. Obok przedstawiono kwadrat z tymi cyframi, które pozostały. Przerysuj kwadrat, przepisz widoczne na rysunku cyfry i dopisz brakujące.

X		X
X	X	
	X	X



Dla dociekliwych

W czasach, gdy na co dzień używano liczb rzymskich, dużo trudniej było wykonywać działania. Mnożenia XIX razy LXXIV nie można wykonać pisemnie. Jak więc radzono sobie z takimi działaniami? Jednym ze sposobów było „mnożenie egipskie”. Oto dwa przykłady mnożeń: XIII razy LVI oraz XXXVI razy XLVII. Dla uproszenia są one zapisane cyframi arabskimi.

$$13 \cdot 56 = ?$$

$$13 = 1 + 4 + 8$$

$$(1) \quad 56 \checkmark$$

$$(2) \quad 112$$

$$(4) \quad 224 \checkmark$$

$$(8) \quad 448 \checkmark$$

$$56 + 224 + 448 = 728,$$

$$\text{więc } 13 \cdot 56 = 728$$

$$\text{Zatem } XIII \cdot LVI = DCCXXVIII.$$

$$36 \cdot 47 = ?$$

$$36 = 4 + 32$$

$$(1) \quad 47$$

$$(2) \quad 94$$

$$(4) \quad 188 \checkmark$$

$$(8) \quad 376$$

$$(16) \quad 752$$

$$(32) \quad 1504 \checkmark$$

$$188 + 1504 = 1692,$$

$$\text{więc } 36 \cdot 47 = 1692$$

$$\text{Zatem } XXXVI \cdot XLVII = MDCXCII.$$

- 1 Przyjrzyj się rozpisany powyżej przykładom i rozszyfruj, na czym polega „mnożenie egipskie”. Oblicz w podobny sposób podany iloczyn.

a) $12 \cdot 83$

b) $21 \cdot 25$

c) $23 \cdot 31$

Sprawdź obliczenia, wykonując mnożenie pisemne.



Czy już umiem?

I Zapisz cyframi arabskimi.

a) XXXIV

b) LXVII

c) MMCDXCIX

II Zapisz cyframi rzymskimi.

a) 24

b) 67

c) 2893

III Która z liczb jest największa?

MCMXC

MMCX

MCXIII

5

Obliczenia przybliżone



Na dobry początek

Kto ma więcej?

- ▶ Przygotuj komplet kartoników z cyframi od 0 do 9. Potasuj je i wyłóż po kolei 6 kartoników, tworząc z zapisanych na nich cyfr dwie liczby trzycyfrowe. Drugi gracz robi to samo. Jeżeli na pierwszym lub czwartym wyłożonym kartoniku będzie cyfra 0, wymień ją na kolejny kartonik.
- ▶ Każdy z was szacuje sumę swoich liczb. Punkt zdobywa gracz, którego suma jest większa. Nie musicie obliczać sum, aby przyznać punkt. Na ogół wystarczy, że je oszacujecie. Jeśli jednak macie wątpliwości, sprawdźcie wynik na kalkulatorze.
- ▶ Wygrywa ten, kto pierwszy zdobędzie 3 punkty.



Pytania i polecenia

Ala wyłożyła 6 kartoników i otrzymała liczby 406 i 879, a Bartek liczby 320 i 915. Kto w tej partii otrzyma punkt? Oszacuj, czyja suma jest większa.



Czasami wystarczy nam przybliżony wynik działania.

Oblicz: $507 \cdot 889$.									
A. 4823					C. 1396				
B. 450723					D. 50673				



$500 \cdot 900 = 450000$
Tylko B. pasuje.

Przybliżone obliczenia wykorzystujemy na co dzień w wielu sytuacjach.

Przykład

Czy na zakup zestawu przedstawionego na ilustracji wystarczy 3000 zł?
Czy wystarczy 2500 zł?



Komputer mniej niż 1500,
monitor mniej niż 900,
oprogramowanie mniej niż 500.

$$1463 + 855 + 463 < 1500 + 900 + 500 = 2900$$

Czyli 3000 zł wystarczy.

Komputer ponad 1400,
monitor ponad 800,
oprogramowanie ponad 400.

$$1463 + 855 + 463 > 1400 + 800 + 400 = 2600$$

Zatem 2500 zł nie wystarczy.



Przykład

Pod koniec wycieczki z zebranych pieniędzy zostało 100 zł.
Sprawdź, czy to wystarczy, aby kupić deser za 4,25 zł każdemu z:

- a) 18 uczestników,
- b) 25 uczestników,
- c) 21 uczestników.

a) Szacujemy:

$$18 \cdot 4,25 < 20 \cdot 5 = 100$$

Gdyby uczestników wycieczki było 20, a deser kosztowałby 5 zł, to trzeba byłoby wydać 100 zł. Ponieważ uczestników jest mniej, a deser jest tańszy, pieniędzy na pewno wystarczy.

b) Szacujemy:

$$25 \cdot 4,25 < 25 \cdot 5 = 125$$

Gdyby deser kosztował 5 zł, to pieniędzy by nie wystarczyło. Ale to jeszcze nie znaczy, że nie wystarczy ich na deser po 4,25 zł.

Musimy policzyć inaczej:

$$25 \cdot 4,25 > 25 \cdot 4 = 100$$

Gdyby deser kosztował 4 zł, to wydalibyśmy wszystkie pieniądze. Ale kosztuje on 4,25 zł. Na taki deser nie wystarczy.

c) Szacujemy:

$$21 \cdot 4,25 < 21 \cdot 5 = 105$$

$$21 \cdot 4,25 > 21 \cdot 4 = 84$$

Gdyby deser kosztował 5 zł, to pieniędzy by nie wystarczyło. Gdyby kosztował 4 zł, to by wystarczyło. Nie wiemy, jak jest z deserem za 4,25 zł. W tym wypadku trzeba wykonać dokładniejsze obliczenia.

**Dobra rada**

Szacować warto na co dzień. Jeśli na przykład oszacujesz wartość zakupów, możesz łatwo zorientować się, czy wystarczy ci pieniędzy, i przygotować odpowiednią kwotę.

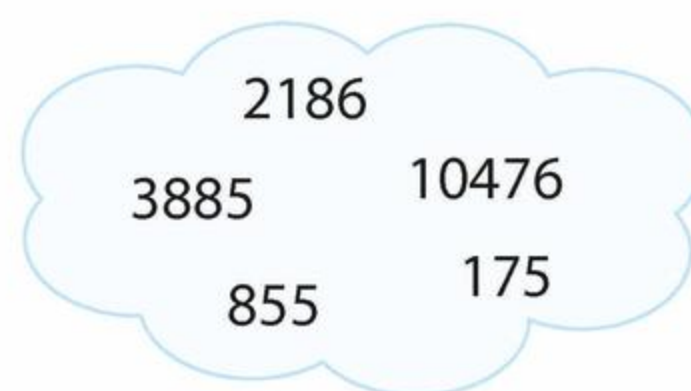




Zadania

- **1** Bez wykonywania dokładnych obliczeń dopasuj do działania wynik z chmurki.

- a) $274 + 581$ c) $432 - 257$
b) $2361 + 1524$ d) $27 \cdot 388$



- **2** Most ma nośność 8000 kg, czyli wytrzymałe ciężar pojazdów ważących do 8000 kg. Czy może na niego bezpiecznie wjechać ciężarówka ważąca 5239 kg z przyczepą ważącą 3287 kg?

- **3** Nauczycielka oddała Igorowi kartkówkę i powiedziała, że pomylił się w trzech działaniach. Jeśli szybko powie w których, dostanie wyższą ocenę. Czy umiesz wskazać te działania bez wykonywania dokładnych obliczeń?

a) $231 + 12 = 353$	c) $259 - 18 = 111$	e) $550 - 42 = 508$
b) $226 + 10 = 236$	d) $7 \cdot 56 = 392$	f) $4 \cdot 81 = 544$

- **4** W domu Tomka jest dużo książek. Na regałach w pokoju rodziców stoi 3155 książek, w pokoju Tomka i jego siostry są 594 książki, a w gabinecie 1273 książki. Oprócz tego w kuchni stoją 3 książki kucharskie. Oszacuj, czy w domu Tomka jest więcej niż:

- a) 4500 książek, b) 5500 książek, c) 6500 książek.

- **5** W klasie jest 28 uczniów. Czy 100 zł wystarczy, aby każdemu z nich kupić napój za 1,50 zł i drożdżówkę za 1,40 zł?

- **6** Bilet do kina kosztuje 18,50 zł. Czy 60 zł wystarczy na cztery takie bilety?

- **7** Czy w roku jest więcej niż:

- a) 1000 godzin, b) 10 000 godzin, c) 100 000 godzin?

- **8** Oszacuj:

- a) ilu jest uczniów w twojej szkole,
b) jak wysoko sięgałaby wieża ustawiona ze wszystkich uczniów twojej klasy w sposób pokazany na rysunku obok,
c) ile kartek mają wszystkie zeszyty szkolne wszystkich uczniów twojej klasy.
Wymyśl podobne zadania i postaraj się je rozwiązać.





- 9 Oszacuj wyniki działań i zapisz je w kolejności rosnącej. Litery podane obok każdego działania utworzą hasło. Odczytaj je.

$$R \ 7542 \cdot 38 - 60 \ 754$$

$$K \ 1 \ 375 \ 244 - 5012 \cdot 199$$

$$A \ 1 \ 010 \ 101 : (8463 : 4232)$$

$$A \ 16 \ 242 - 74 \cdot 91$$



Dla dociekliwych

Pan Jacek miał 1383 zł, a wydał 616 zł. Czy zostało mu więcej niż 600 zł? A czy zostało mu więcej niż 800 zł?

$$1383 - 616 < 1400 - 600 = 800$$

Gdyby miał 1400 zł, a wydał tylko 600 zł, zostałoby mu 800 zł.

W rzeczywistości miał mniej niż 1400 zł, a wydał więcej niż 600 zł.

Zostało mu zatem mniej niż 800 zł.

$$1383 - 616 > 1300 - 700 = 600$$

Gdyby miał tylko 1300 zł, a wydał 700 zł, zostałoby mu 600 zł.

W rzeczywistości miał więcej niż 1300 zł, a wydał mniej niż 700 zł.

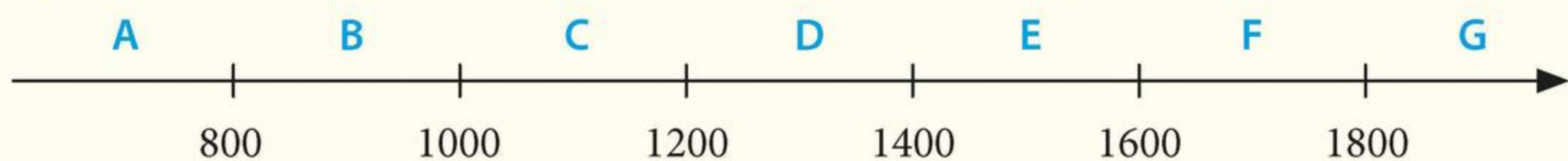
Zostało mu zatem więcej niż 600 zł.

- 1 W lesie rośło 2578 drzew. Wichura złamała 295 z nich. Czy zostało ponad 2300 niepołamanych?
- 2 W którym fragmencie osi liczbowej znajdzie się podana różnica? Podaj odpowiednią literę.

a) $2536 - 882$

b) $3283 - 1715$

c) $2931 - 2015$



Czy już umiem?

- I Podaj wynik działania. Odpowiedź wybierz z chmurki.

a) $4532 + 1278$

b) $8273 - 3523$

c) $275 \cdot 82$

1530
5810 22550
4750

- II Dwaj kierowcy, prowadzący na zmianę autokar, stwierdzili, że w kolejnych dniach przejechali: 873 km, 982 km, 1330 km. Czy to w sumie więcej niż 3000 km? Odpowiedź uzasadnij, wykonując szacowanie.
- III Czy 200 zł wystarczy na zakup ośmiu pizz po 23 zł? A czy wystarczy na to 150 zł? Odpowiedzi uzasadnij, wykonując szacowanie.

Dodawanie i odejmowanie pisemne

  Na dobry początek **Do stu, do tysiąca**

Potasujcie razem dwa komplety kartoników z cyframi od 0 do 9.

- ▶ Wyłóż dwa kartoniki i utwórz z nich liczbę dwucyfrową. Powiedz, ile brakuje jej do 100. Potem wyłóż następne dwa kartoniki itd.
- ▶ Druga osoba niech sprawdza poprawność wyników. Następnie zamieńcie się rolami.
- ▶ W drugiej części zabawy wykładaj po trzy kartoniki, tworząc liczby trzy-cyfrowe, i określaj, ile brakuje im do 1000. Pozostałe zasady są takie same.

Żeby ułatwić sobie dodawanie lub odejmowanie dużych liczb, można stosować działania pisemne.

Dodawanie

Przykłady

poziom A

			1		
		4	2	5	
	+	3	3	9	
		7	6	4	

$$2 + 3 + 1 = 6$$

$$5 + 9 = 14$$

Szacowanie ułatwia sprawdzenie, czy otrzymany wynik nie jest błędny.

Szacujemy: $400 + 300 = 700$,
czyli $425 + 339$ to około 700.
764 to około 700.



Podręcznik
s. 34
Obliczenia
przybliżone

poziom B

		1	2		
		3	4	8	
		5	2	9	
	+	7	9	7	
		1	6	7	4

Szacujemy: $300 + 500 + 800 = 1600$,
czyli $348 + 529 + 797$ to około 1600.
1674 to około 1600.

Dobra rada

- W dodawaniu pisemnym starannie podpisuj liczby jedna pod drugą.
- Nie zapominaj o liczbie przenoszonej do następnej kolumny!

Odejmowanie

Przykłady

poziom A

		6	4	7	
	-		2	6	
		6	2	1	

Szacujemy: $650 - 25 = 625$,
czyli $647 - 26$ to około 625.
621 to około 625.

$$\begin{array}{r} \text{Spr.} \quad 621 \\ + \quad 26 \\ \hline 647 \end{array}$$

poziom B

			6	13	
		8	7	3	
	-		4	9	
		8	2	4	

Szacujemy: $900 - 50 = 850$,
czyli $873 - 49$ to około 850.
824 to około 850.

$$\begin{array}{r} \text{Spr.} \quad \overset{1}{8}24 \\ + \quad 49 \\ \hline 873 \end{array}$$

poziom C

			9		
		1	10	15	
		2	0	5	
	-		7	8	
		1	2	7	

Szacujemy: $200 - 80 = 120$,
czyli $205 - 78$ to około 120.
127 to około 120.

$$\begin{array}{r} \text{Spr.} \quad \overset{1}{1}\overset{1}{2}7 \\ + \quad 78 \\ \hline 205 \end{array}$$

poziom D

		0	9	9	11	
		1	0	0	1	
	-			9	4	
			9	0	7	

Szacujemy: $1000 - 100 = 900$,
czyli $1001 - 94$ to około 900.
907 to około 900.

$$\begin{array}{r} \text{Spr.} \quad \overset{1}{9}\overset{1}{0}7 \\ + \quad 94 \\ \hline 1001 \end{array}$$

Dobra rada

- W odejmowaniu pisemnym starannie podpisuj liczby jedna pod drugą.
- Nie zapominaj o „pożyczce” z sąsiedniej kolumny.
- Sprawdzaj odejmowanie za pomocą dodawania, zwłaszcza jeśli zdarzają ci się błędy.



Zadania



1 Dodaj pisemnie. ► Jeśli poprawnie rozwiążesz przykłady a) i b) z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom. Jeśli nie – rozwiąż wszystkie przykłady z tego poziomu i dopiero wtedy przejdź na następny.

poziom A

a) $5629 + 983$

c) $287 + 2758$

e) $184 + 839$

b) $84 + 5819$

d) $58 + 6784$

f) $8692 + 986$

poziom B

a) $567 + 762 + 92 + 672$

d) $8392 + 193 + 98$

b) $718 + 89 + 3685 + 8424$

e) $78 + 984 + 1392$

c) $6528 + 8572 + 73$

f) $823 + 342 + 2982$



2 Odejmij pisemnie. ► Jeśli poprawnie rozwiążesz przykłady a) i b) z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom. Jeśli nie – rozwiąż wszystkie przykłady z tego poziomu i dopiero wtedy przejdź na następny.

poziom A

a) $2535 - 121$

c) $2385 - 24$

e) $4758 - 2136$

b) $1983 - 1233$

d) $5183 - 2072$

f) $8752 - 8121$

poziom B

a) $524 - 173$

c) $426 - 135$

e) $4521 - 610$

b) $1867 - 249$

d) $409 - 123$

f) $1430 - 520$

poziom C

a) $5516 - 317$

c) $915 - 76$

e) $602 - 83$

b) $1807 - 962$

d) $560 - 78$

f) $701 - 63$

poziom D

a) $1007 - 328$

c) $5009 - 73$

e) $2006 - 780$

b) $52\,000 - 672$

d) $10\,000 - 562$

f) $150\,001 - 100\,501$

- 3** Ostatnie starożytne igrzyska olimpijskie odbyły się prawdopodobnie w 393 roku naszej ery, a pierwsze nowożytne – w roku 1896. Dopiero 28 lat później zorganizowano pierwsze igrzyska zimowe.

- a) Ile lat minęło od ostatnich igrzysk starożytnych do pierwszych nowożytnych?
- b) W którym roku odbyła się pierwsza olimpiada zimowa?
- c) Ile lat minęło od pierwszych igrzysk nowożytnych do dziś?

- **4** W zeszłym roku w pewnym mieście mieszkało 18 256 osób. W ciągu ostatniego roku liczba mieszkańców wzrosła o 789. Burmistrz powiedział: „Jeszcze trochę, a będziemy miastem dwudziestotysięcznym!”. Ilu mieszkańców brakuje do 20 000?

Informacje do zadań 5–8

Poniżej przedstawiono ofertę sklepu sportowego.

**KUP KASK
I OCHRANIACZE
– DOSTANIESZ
29 zł RABATU
NA ROLKI**



- **5** Ile kosztują razem piłka futbolowa i piłka do koszykówki? Która jest droższa i o ile złotych?
- **6** Kuba chce kupić rolki, kask i ochraniacze. Ile zapłaci?
- **7** Krysia kupiła okulary i czepek. Dała sprzedawcy 100 zł. Ile dostała reszty?
- **8** Pani Dorota, nauczycielka wychowania fizycznego, dostała 1000 zł na zakup sprzętu sportowego. Kupiła 9 piłek futbolowych i 8 piłek do koszykówki. Na każdą piłkę dostała 15 zł rabatu. Ile pieniędzy jej zostało?
- **9** Rozwiąż zadanie zapisane wierszem.
*Znany atleta, Wiktor Wygrajło,
 Dwieście pięć kilo waży ze sztangą.
 Sztanga – sto siedem. Oblicz, kolego,
 O ile sztanga cięższa od niego.*
- **10** Rozwiąż równanie (zastąp x odpowiednią liczbą).

a) $x + 278 = 509$

b) $134 + x = 302$

c) $813 - x = 199$

d) $x - 276 = 124$



- ... 11 Obok podano daty uznane za początek i koniec niektórych okresów w historii Polski.

- a) Oblicz, ile lat trwał każdy okres.
b) W którym z tych okresów zawiera się XV wiek?

Panowanie Piastów	966–1370
Panowanie Jagiellonów	1386–1572
Panowanie królów elekcyjnych	1573–1795
Polska pod zaborami	1795–1918
Pierwsza wojna światowa	1914–1918
Dwudziestolecie międzywojenne	1918–1939
Druga wojna światowa	1939–1945
Polska Ludowa	1945–1989

-  12 Rozszyfruj działania. W każdym przykładzie różne litery odpowiadają różnym cyfrom, a jednakowe – tym samym. Ostatni przykład ma dwa rozwiązania. Spróbuj znaleźć oba.

a)
$$\begin{array}{r} K A R K \\ + K R A K \\ \hline B A R K A \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} L I S \\ + L A S \\ \hline S A L A \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} T U P \\ T U P \\ + T U P \\ \hline B U T \end{array}$$

Wskazówka Spróbuj rozwiązać przykład z podpunktu a). Jeśli masz z tym trudności, skorzystaj z pytań i poleceń pomocniczych.

- Spójrz na rząd tysięcy. Czy wynik działania $K + K$ jest liczbą jedno- czy dwucyfrową? Gdzie jeszcze występuje takie działanie?
- Czy suma R i A jest równa K (jak wynikałoby z sumowania dziesiątek) czy R (jak wynikałoby z sumowania setek)? Ile w takim razie równe jest A ?



Czy już umiem?

I Oblicz pisemnie.

a) $6425 + 89$

b) $1634 + 14 + 765$

II Oblicz pisemnie.

a) $1245 - 367$

b) $5008 - 549$

III Tove Jansson (1914–2001) jest znana przede wszystkim jako autorka książek o Muminkach. Pierwsza z tych książek, *Małe trolle i duża powódź*, została opublikowana w roku 1945. Ostatnią, zatytułowaną *Dolina Muminków w listopadzie*, wydano 26 lat później.

- a) Jak długo żyła autorka opowieści o Muminkach?
b) W którym roku ukazała się *Dolina Muminków w listopadzie*?
c) Czy od ukazania się pierwszej książki o Muminkach minęło więcej niż pół wieku?



Na dobry początek

Bingo

Narysuj w zeszycie kwadrat o boku 4 cm i podziel go na kwadraty o boku 1 cm.

- ▶ W pola tak przygotowanej planszy wpisz w dowolnej kolejności liczby:
0, 25, 30, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 49, 54, 56, 63, 64, 72, 81.
- ▶ Niech drugi gracz wpisz na swojej planszy te same liczby, ale w innej kolejności.
- ▶ Potasujcie dwa zestawy kartoników z cyframi od 5 do 9.
- ▶ Wyłóżcie równocześnie po jednym kartoniku.
- ▶ Obliczcie iloczyn wyłożonych liczb i skreślcie go – każdy na swojej planszy.
- ▶ Grajcie tak długo, aż ktoś będzie miał 4 skreślenia w jednej linii (pionowej, poziomej lub ukośnej). Wówczas woła on: „Bingo!” i wygrywa.
- ▶ Gdy zabraknie kartoników, potasujcie jeszcze raz te już wykorzystane i układajcie od nowa.

Przypomnij sobie zasady mnożenia pisemnego.

Przykłady

poziom A

			3	4		
			4	7	8	
	.				5	
		2	3	9	0	

$$5 \cdot 4 + 3 = 23 \quad 5 \cdot 7 + 4 = 39 \quad 5 \cdot 8 = 40$$

			6	4		
			2	7	6	
	.				8	
		2	2	0	8	

$$8 \cdot 2 + 6 = 22 \quad 8 \cdot 7 + 4 = 60 \quad 8 \cdot 6 = 48$$

poziom B

				5	2	7	
		.		1	8	3	
			1	5	8	1	
		4	2	1	6	0	
	+	5	2	7	0	0	
		9	6	4	4	1	

$$\begin{aligned} &\leftarrow 527 \cdot 3 \\ &\leftarrow 527 \cdot 80 \\ &\leftarrow 527 \cdot 100 \end{aligned}$$

				2	3	7	9	
		.			2	4	6	
			1	4	2	7	4	
			9	5	1	6	0	
	+	4	7	5	8	0	0	
		5	8	5	2	3	4	

$$\begin{aligned} &\leftarrow 2379 \cdot 6 \\ &\leftarrow 2379 \cdot 40 \\ &\leftarrow 2379 \cdot 200 \end{aligned}$$

Dobra rada

Mnożenie można wykonywać w dowolnej kolejności, ale wygodniej jest zapisać na dole liczbę, która ma mniej cyfr (nie licząc zer).



Tak jest szybciej!

$$\begin{array}{r} 349 \\ \cdot 56 \\ \hline 2094 \\ + 17450 \\ \hline 19544 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \cdot 349 \\ \hline 504 \\ 2240 \\ + 16800 \\ \hline 19544 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 287 \\ \cdot 5009 \\ \hline 2583 \\ + 1435000 \\ \hline 1437583 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5009 \\ \cdot 287 \\ \hline 35063 \\ 400720 \\ + 1001800 \\ \hline 1437583 \end{array}$$

poziom C

			2	5	6	0	0			
		.		3	2	0	0	0		
			5	1	2					
	+	7	6	8	0					
		8	1	9	2	0	0	0	0	0

			2	5	6	0	0			
		.		3	2	0				
			5	1	2					
	+	7	6	8	0					
		8	1	9	2	0	0	0		

poziom D

				4	2	6	
		.		2	0	7	
			2	9	8	2	
	+	8	5	2	0	0	
		8	8	1	8	2	

$426 \cdot 7$

$426 \cdot 200$

				4	2	6	
		.		2	0	0	7
			2	9	8	2	
	+	8	5	2	0	0	0
		8	5	4	9	8	2

$426 \cdot 7$

$426 \cdot 2000$

Dobra rada

Jeśli mylisz się w mnożeniu pisemnym, sprawdź, czy:

- dobrze znasz tabliczkę mnożenia,
- mnożysz przez wszystkie cyfry drugiej liczby,
- wyniki mnożenia przez kolejne cyfry zapisujesz w odpowiednim miejscu i nie zapominasz o zerach na końcu.



Zadania

- 1** Pomnóż pisemnie. ► Jeśli poprawnie rozwiążesz przykłady a) i b) z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom. Jeśli nie – rozwiąż wszystkie przykłady z tego poziomu i dopiero wtedy przejdź na następny.

poziom A

a) $9 \cdot 683$

c) $534 \cdot 5$

e) $5482 \cdot 7$

b) $578 \cdot 8$

d) $4 \cdot 6171$

f) $6 \cdot 6528$

poziom B

a) $34 \cdot 6542$

c) $1583 \cdot 42$

e) $2713 \cdot 452$

b) $7562 \cdot 263$

d) $526 \cdot 821$

f) $29 \cdot 572$

poziom C

a) $59\,000 \cdot 400$

c) $3400 \cdot 400$

e) $7300 \cdot 410$

b) $8500 \cdot 240$

d) $78\,000 \cdot 620$

f) $74 \cdot 78\,000$

poziom D

a) $255 \cdot 107$

c) $845 \cdot 1002$

e) $1003 \cdot 782$

b) $2008 \cdot 345$

d) $2007 \cdot 431$

f) $842 \cdot 2005$

- 2** W autobusie jest 47 miejsc dla pasażerów. Czy 6 takich autobusów wystarczy, aby zabrać na wycieczkę 245 uczniów i 15 opiekunów?
- 3** Kangur jednym skokiem może pokonać 9 metrów. Czy dwanaście takich skoków to więcej niż 100 metrów?



- 4** Serce człowieka przepompowuje 5 litrów krwi w ciągu minuty.

- a) Ile litrów krwi przepompowuje serce człowieka w ciągu doby? Jak to możliwe, skoro człowiek nie ma tyle krwi?
- b) Ile 360-litrowych wanien napełniłaby wodą pompa, która pracowałaby przez całą dobę tak wydajnie jak serce?

Czy wiesz, że...

Całkowita ilość krwi dorosłego człowieka to około 5 litrów (dokładna ilość zależy m.in. od masy ciała). Dziecko w twoim wieku ma około 4 litrów krwi.

- **5** W gospodarstwie rosną dwie odmiany tulipanów: żółte – w 105 rzędach po 30 kwiatów w każdym i czerwone – w 70 rzędach po 28 kwiatów w każdym. Ile tulipanów rośnie w tym gospodarstwie?

- **6** W Polsce pod uprawę róż przeznaczono około 130 hektarów ziemi (1 hektar to 10 tys. m²). Na powierzchni 1 hektara rośnie średnio 85 000 krzewów róż. Ile krzewów róż rośnie w Polsce na terenach przeznaczonych pod ich uprawę?



- **7** Grecy wierzyli, że gdy Afrodyta kroczyła po ziemi, za każdym jej krokiem wyrastały kwiaty. Załóżmy, że za każdym krokiem wyrastało 7 kwiatów, a Afrodyta stawiała 406 kroków, aby pokonać odległość 1 stadionu. Ile kwiatów wyrosłoby, gdyby udała się pieszo z Olimpu do Aten, oddalonych od niego o 1900 stadionów?

Afrodyta – grecka bogini miłości, u Rzymian znana jako Wenus

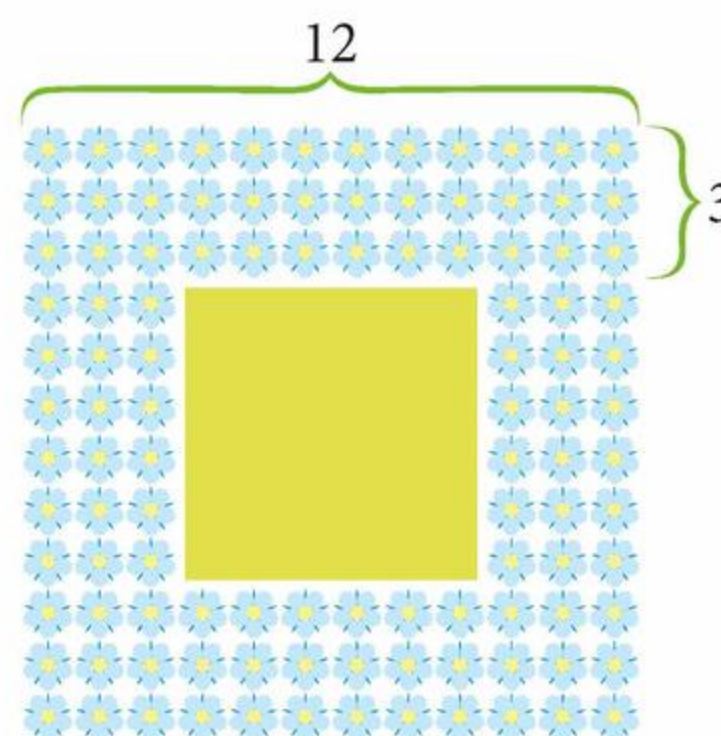
stadion – grecka miara długości, około 200 m

- **8** Na prostokątnym klombie o wymiarach 135 cm × 27 dm posadzono frezje. Na jeden kwiat przeznaczono kwadrat o boku 9 cm. Ile kwiatów zmieściło się na tym klombie?

- 🏆 **9** Ogrodnik zasadził kwiaty wokół kwadratowego trawnika. Układ tych kwiatów przedstawiono na rysunku obok.

a) Ile kwiatów zasadził ogrodnik?

b) Ile byłoby kwiatów, gdyby wzdłuż każdego boku trawnika mieściło się ich nie 12, ale 31, a pas kwiatów był szeroki nie na 3, lecz na 6 kwiatów?



- 🏆 **10** Rozszyfruj działania. W każdym przykładzie różne litery odpowiadają różnym cyfrom, a te same – jednakowym.

a)

$$\begin{array}{r} \text{A L A} \\ \cdot \text{A R A} \\ \hline \text{K A K} \\ + \text{K A K} \\ \hline \text{K A J A K} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} \text{S A S} \\ \cdot \text{L A S} \\ \hline \text{L A L} \\ + \text{N A N} \\ \hline \text{N O S A L} \end{array}$$

c)

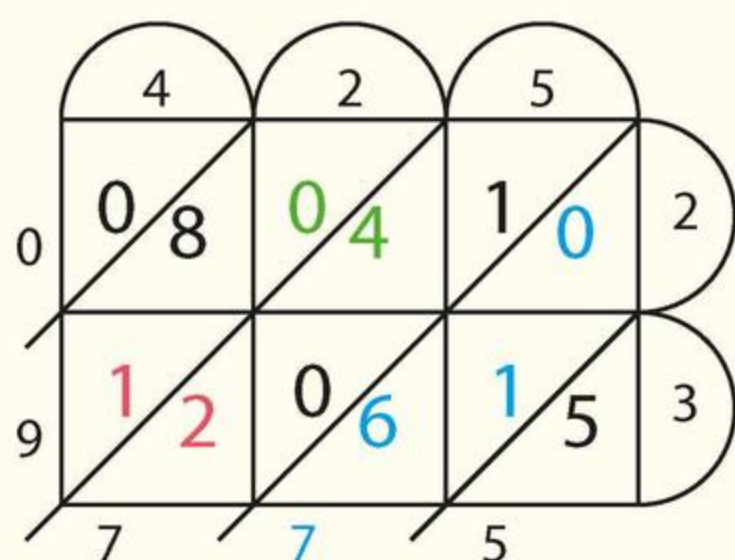
$$\begin{array}{r} \text{C O} \\ \cdot \text{T O} \\ \hline \text{B O} \\ + \text{S O K} \\ \hline \text{O N O} \end{array}$$

- 11** Odpowiedz bez wykonywania obliczeń, jaka jest ostatnia cyfra iloczynu $13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19$? Uzasadnij odpowiedź.

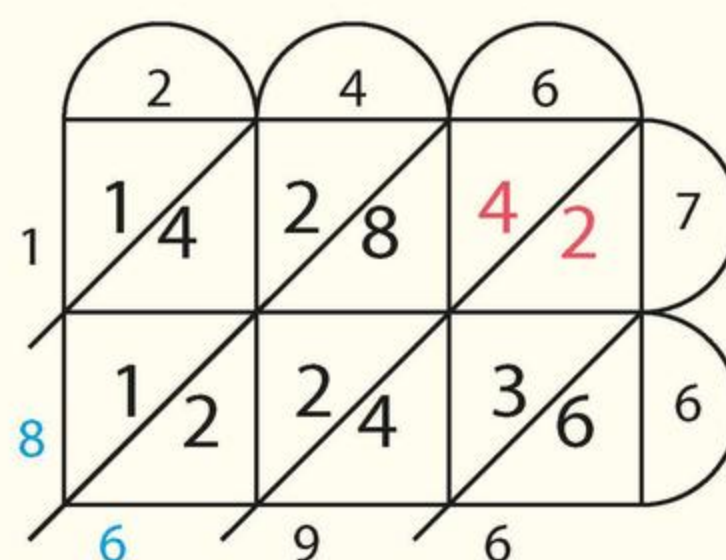


Dla ciekliwych

Nasz sposób nie jest jedyną możliwą metodą mnożenia pisemnego. Przyjrzyj się uważnie, jak mnożą liczby twoi rówieśnicy w Indiach.



$$425 \cdot 23 = 9775$$



$$246 \cdot 76 = 18\,696$$

- Skąd się biorą czerwone liczby: **12** w pierwszym działaniu i **42** w drugim?
 - Dlaczego w pierwszym działaniu na zielono wpisano **04**, a nie **4**?
 - Popatrz na niebieskie cyfry w pierwszym działaniu. Skąd się bierze **7**?
 - Sprawdź w drugim działaniu, jak otrzymano niebieskie cyfry **6** i **8**.
 - Jak odczytujemy wynik mnożenia?
- 1** Pomnóż liczby sposobem hinduskim. Sprawdź wyniki zwykłą metodą.
- a) $562 \cdot 14$ b) $287 \cdot 56$



Czy już umiem?

- I** Oblicz pisemnie.
- a) $824 \cdot 52$ b) $76\,000 \cdot 320$ c) $1006 \cdot 7$
- II** Ciężarówka ma ładowność 3289 kg. Ile maksymalnie kilogramów towaru może przewieźć 14 takich ciężarówek?
- III** Pan Artur nie najadł się omletem i narzeka: „Cóż to jest 200 gramów omle-tu? Rekord świata wynosi 32 330 razy więcej!”. Ile kilogramów ważył rekor-dowy omlet?

 Na dobry początek **Żądam podzielności**

Przygotujcie dwa komplety kartoników z cyframi od 0 do 9.

- ▶ Pierwszy gracz kładzie na ławce kartonik z dowolną cyfrą i mówi np.: „Przez 3”, co oznacza, że następna osoba ma utworzyć liczbę podzielną przez 3.
- ▶ Drugi gracz układa z prawej strony cyfry leżącej na ławce drugą cyfrę tak, aby (zgodnie z żądaniem) otrzymana liczba dwucyfrowa była podzielna przez 3, po czym mówi np.: „Przez 5”.
- ▶ Trzeci gracz dokłada kolejną cyfrę tak, aby otrzymana liczba trzycyfrowa była podzielna przez 5 itd.
- ▶ Możecie żądać podzielności przez 2, 3, 5 i 9.
- ▶ Jeśli któryś gracz nie dołoży odpowiedniej cyfry, wypada z gry.
- ▶ Wygrywa ten, kto do końca pozostanie w grze.

Przyjrzyj się iloczynom:

$0 \cdot 4$ $1 \cdot 4$ $2 \cdot 4$ $3 \cdot 4$ $4 \cdot 4$

Są nimi liczby:

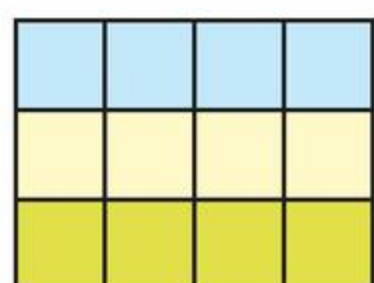
0 4 8 12 16

Te liczby nazywamy **wielokrotnościami** liczby 4.

Wielokrotności liczby 4 są **podzielne** przez 4, to znaczy dzielą się przez 4 bez reszty.

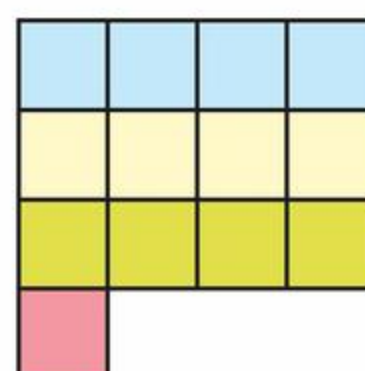
Inne liczby nie są podzielne przez 4, to znaczy przy dzieleniu ich przez 4 zostaje reszta.

$12 : 4 = 3$, bo $3 \cdot 4 = 12$,
czyli 4 mieści się 3 razy w 12.



12 jest zatem podzielne przez 4.

$13 : 4 = 3 \text{ r } 1$, bo $3 \cdot 4 + 1 = 13$,
czyli 4 mieści się 3 razy w 13 i zostaje reszta 1.



13 nie jest zatem podzielne przez 4.

Gdy mamy sprawdzić, czy jedna liczba jest podzielna przez drugą, nie zawsze musimy wykonać odpowiednie dzielenie. Często łatwiej jest skorzystać z **cech podzielności**.

Oto niektóre z nich:

- Liczba jest podzielna przez 2 (czyli jest parzysta), gdy jej ostatnia cyfra to: 0, 2, 4, 6 lub 8.
- Liczba jest podzielna przez 5, gdy jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5.
- Liczba jest podzielna przez 10, gdy jej ostatnią cyfrą jest 0.
- Liczba jest podzielna przez 4, gdy jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4.
- Liczba jest podzielna przez 3, gdy suma jej cyfr jest liczbą podzielną przez 3.
- Liczba jest podzielna przez 9, gdy suma jej cyfr jest liczbą podzielną przez 9.

Przykłady

- Liczba 2585 jest podzielna przez 5, bo jej ostatnią cyfrą jest 5.
- Liczba 5043 jest podzielna przez 3, bo suma $5 + 0 + 4 + 3 = 12$ jest podzielna przez 3.

$$\begin{array}{r} 16 \\ 5043 : 3 \\ -3 \\ \hline 20 \end{array}$$

Czy liczba 5043
jest podzielna
przez 3?

Wystarczy dodać cyfry:
 $5 + 0 + 4 + 3 = 12$.
Jest podzielna!



- Liczba 6372 jest podzielna przez 9, bo suma $6 + 3 + 7 + 2 = 18$ jest podzielna przez 9.
- Liczba 4208 nie jest podzielna przez 9, bo suma $4 + 2 + 0 + 8 = 14$ nie jest podzielna przez 9.

Przykłady

- Liczba 2712 jest podzielna przez 4, bo jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę 12, która jest podzielna przez 4.
- Liczba 6346 nie jest podzielna przez 4, bo jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę 46, która nie jest podzielna przez 4.



Zadania

- **1** Wymień kilka wielokrotności liczby 6.
- **2** Które z liczb w chmurce są podzielne przez 3?
A które przez 9?



- **3** Ile razy mieści się:

a) 2 w 11,

b) 5 w 28,

c) 12 w 100?

- **4** Wypisz z chmurki liczby podzielne przez:

a) 2,

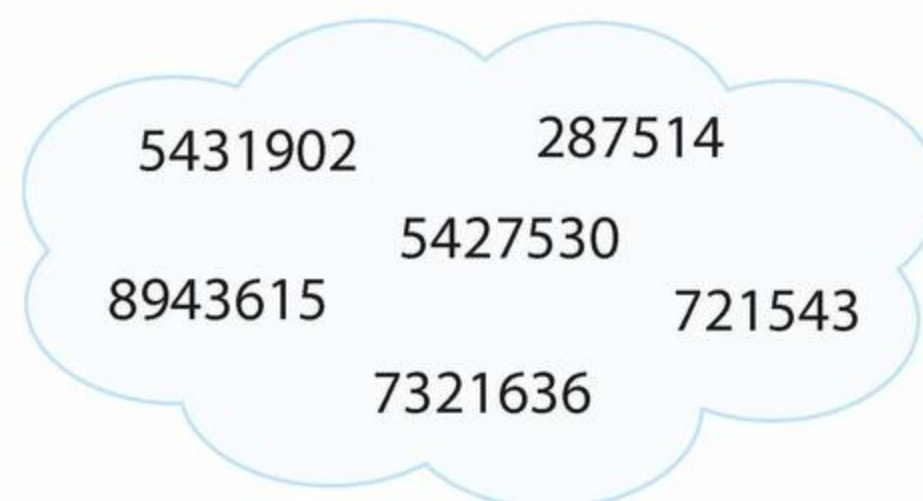
d) 9,

b) 3,

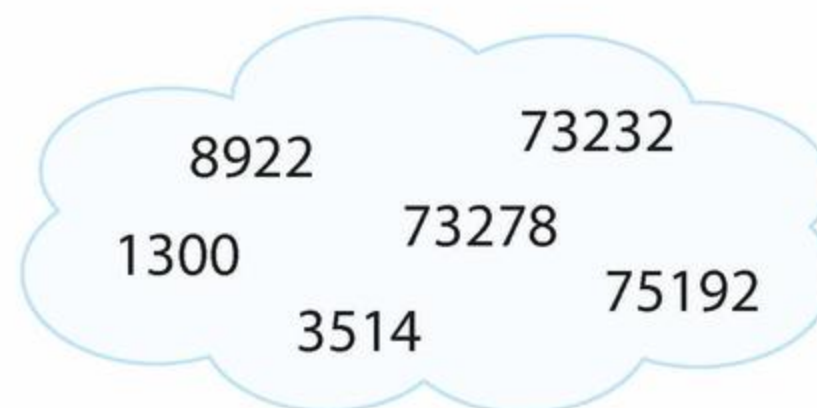
e) 2 i 9,

c) 5,

f) 3 i 5.



- **5** W chmurce są trzy liczby podzielne przez 4.
Wypisz je.



- **6** Wykonaj dzielenie z resztą.

a) $13 : 3$ b) $20 : 4$ c) $19 : 6$ d) $29 : 5$

- **7** a) W mikrobusie jest 7 miejsc. Ile co najmniej takich mikrobusów potrzeba, aby przewieźć 58 osób?

b) Bilet kosztuje 7 zł. Ile biletów w tej cenie można kupić za 58 zł?

- **8** Wypisz kilka wielokrotności liczby 100. Jak sprawdzić, czy liczba jest podzielna przez 100? A jak sprawdzić, czy jest podzielna przez 1000?

- **9** W szkole jest 354 uczniów. Czy na apelu można ich wszystkich ustawić parami? A trójkami? A czwórkami? A piątkami? Czy można byłoby ich tak ustawić, gdyby 14 uczniów było nieobecnych?

- **10** Za pomocą kalkulatora sprawdź, czy liczba 24 955 jest podzielna przez:

a) 7, b) 13, c) 31.

Wskazówka Jeśli w wyniku dzielenia liczb pojawia się liczba z przecinkiem (albo kropką), to znaczy, że dzielenia nie da się wykonać bez reszty.

- **11** Oblicz pisemnie iloczyn $7 \cdot 183$. Podaj resztę z dzielenia przez 7 liczby:

a) 1280, b) 1281, c) 1283, d) 1288.

- **12** Znajdź najmniejszą czterocyfrową wielokrotność liczby 197.

-  **13** Liczby: 13531, 1221, 20402 nie zmieniają się, gdy czytamy je od końca. Takie liczby nazywamy palindromicznymi.

a) Ile liczb palindromicznych możesz otrzymać, układając na różne sposoby karteczki z cyframi: 1, 1, 2, 2, 3, 3? Pamiętaj, że za każdym razem masz wykorzystać wszystkie karteczki.

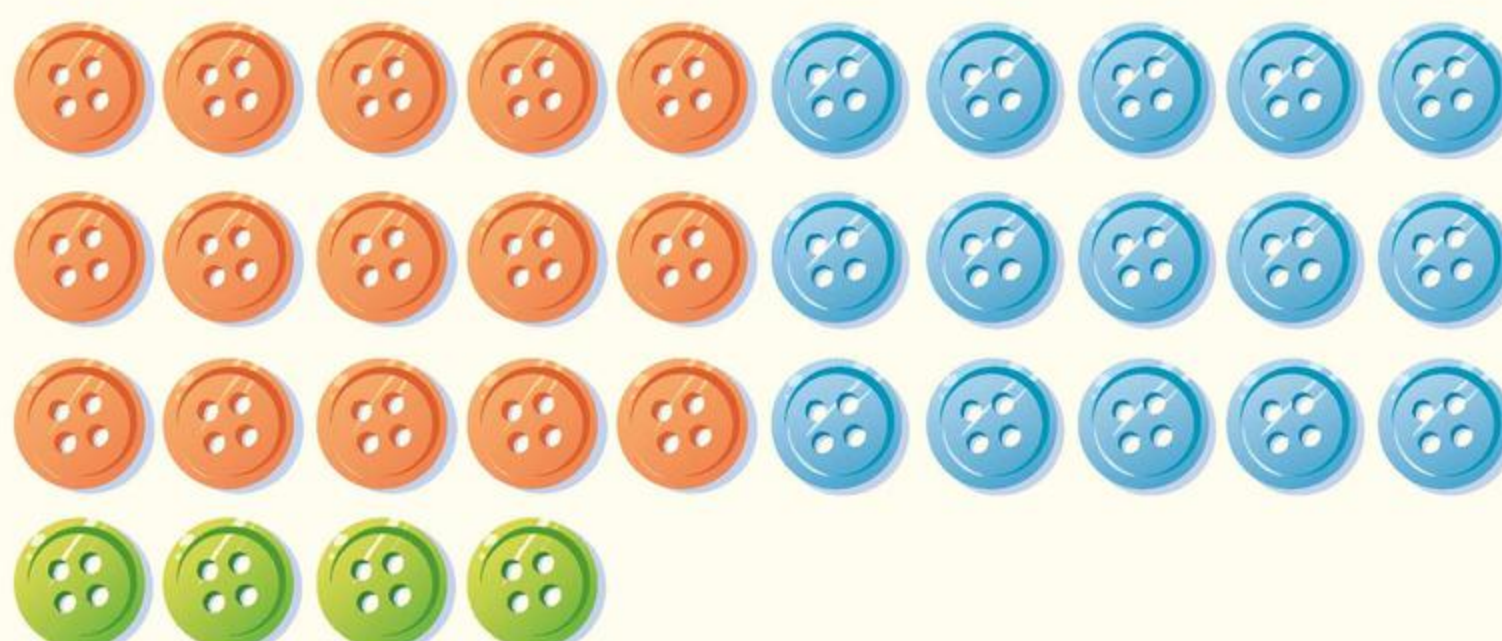
b) Ile liczb otrzymanych w podpunkcie a) jest podzielnych przez 3?

c) Ile liczb otrzymanych w podpunkcie a) jest podzielnych przez 6?

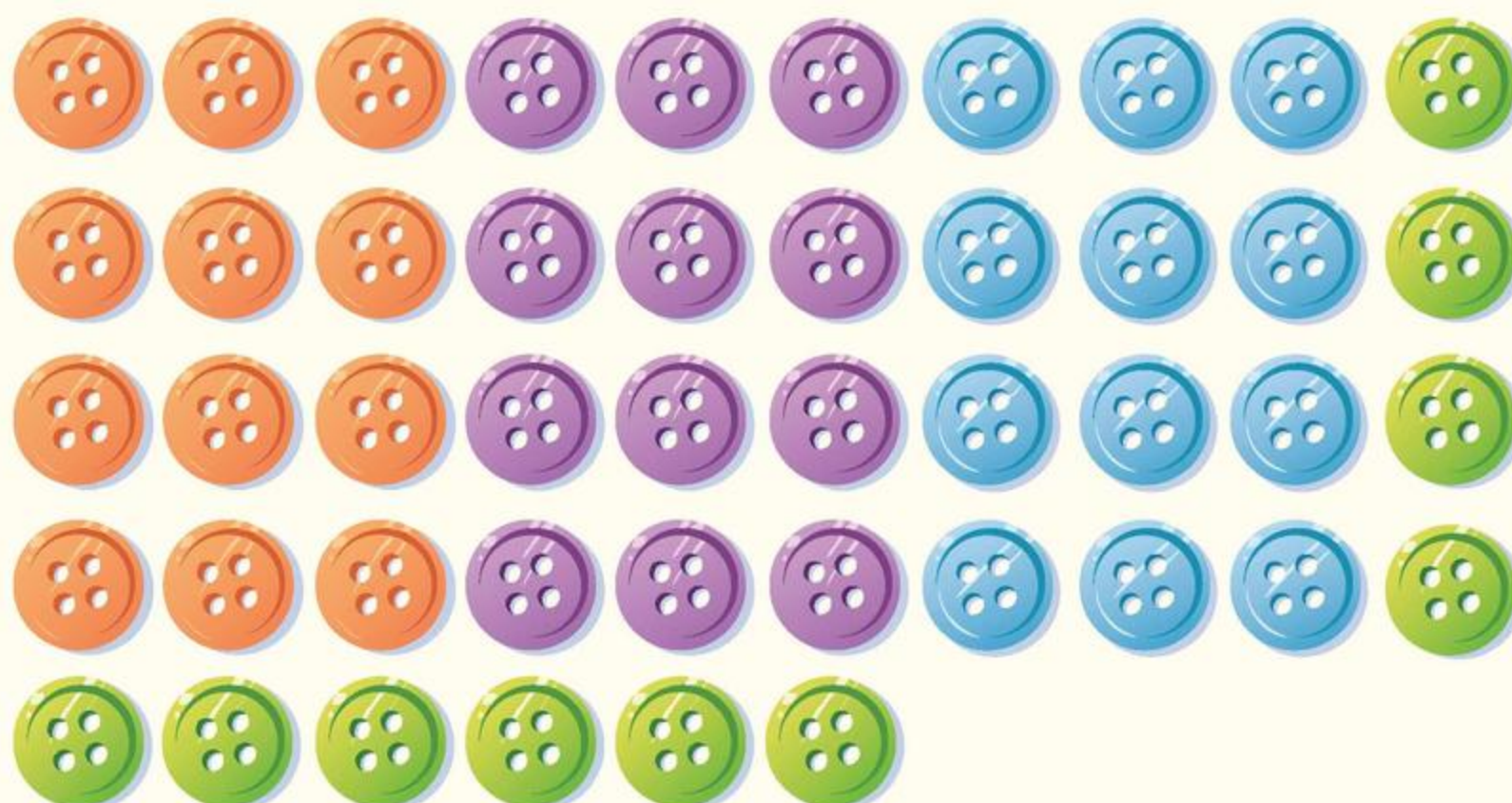


Dla dociekliwych

Na poniższym rysunku widzisz 34 guziki. Czy taką liczbę guzików można podzielić na 2 równe części? Jak wynika z rysunku, pełne dziesiątki (czyli u nas 30 guzików) zawsze można podzielić na 2 równe części. Możliwość podziału całego zbioru na 2 równe części zależy więc od liczby pozostałych guzików – są 4, więc można je tak podzielić, ale gdyby było ich np. 3, nie byłoby to możliwe. Jeśli zatem interesuje nas podzielność liczby przez 2, wystarczy sprawdzić, jaka jest jej ostatnia cyfra – cyfra jedności.



Na kolejnym rysunku jest 46 guzików. Tym razem sprawdzimy, czy można je podzielić na 3 równe części. Z każdej dziesiątki weźmy 9 guzików – te guziki da się podzielić na 3 równe części. Do podziału mamy teraz: po jednym pozostawionym guziku z każdej dziesiątki (w sumie 4) oraz pozostałe guziki (6) – te, o których informuje cyfra jedności. Jest ich więc wszystkich tyle, ile wynosi suma cyfr liczby 46. Okazuje się, że 46 nie jest podzielne przez 3, bo $4 + 6$ nie jest podzielne przez 3.



- 1 Zilustruj w podobny sposób cechę podzielności przez 5.
- 2 Wykonaj podobny rysunek ilustrujący, że liczba 51 jest podzielna przez 3, bo $5 + 1$ jest podzielne przez 3.
- 3 Pokaż na podobnym rysunku, że 72 jest liczbą podzielną przez 9.
- 4 Czy umiesz zrobić podobny rysunek dla liczby 352?



Czy już umiem?

- I Sprawdź, czy można podzielić bez reszty:
 - a) 7245 przez 5,
 - b) 1782 przez 9,
 - c) 2713 przez 3.
- II Liczba 656 jest wielokrotnością liczby 8. Podaj trzy następne wielokrotności liczby 8.
- III Ile razy mieści się:
 - a) 8 w 63,
 - b) 7 w 50,
 - c) 13 w 7?

Liczby pierwsze i liczby złożone



Na dobry początek

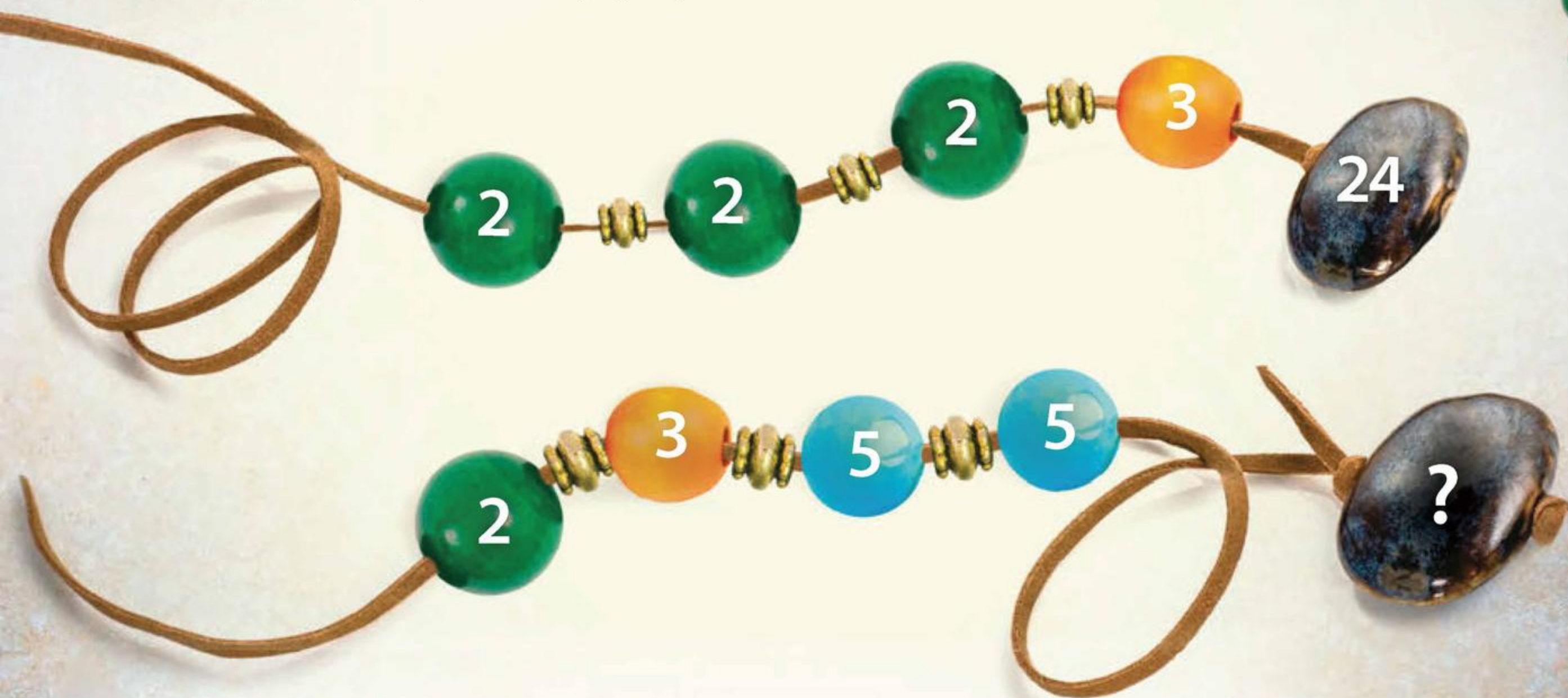
Kto da więcej

- ▶ Wylosujcie po jednej spośród liczb: 30, 36, 56, 84, 88, 100.
- ▶ Każdy z was zapisuje wylosowaną liczbę jako iloczyn czynników naturalnych większych od 1. Starajcie się, aby tych czynników było jak najwięcej.

Na przykład liczbę 24 można zapisać tak: $24 = 2 \cdot 12 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$

dwa czynniki trzy czynniki cztery czynniki

- ▶ Kto z was rozłożył swoją liczbę na więcej czynników? Czy można rozłożyć tę liczbę na jeszcze więcej czynników?



Pytania i polecenia

Koraliki na rzemykach ilustrują iloczyn czynników danej liczby. Na pierwszym rzemyku widzisz liczby, które pomnożone przez siebie dają liczbę 24.

- Jaką liczbę ilustrują koraliki na drugim rzemyku?
- Ile koralików będzie nawleczonych na rzemyk ilustrujący liczbę 70?
- Podaj przykład liczby, którą można zilustrować za pomocą samych zielonych koralików.

Liczba 6 dzieli się bez reszty przez: 1, 2, 3 i 6. Mówimy, że liczby 1, 2, 3 i 6 są **dzielnikami** liczby 6.

Liczba pierwsza to taka liczba naturalna, która ma tylko dwa dzielniki: 1 i siebie samą.

Liczbami pierwszymi są: 2, 3, 5, 7, 11, 13...

Liczba złożona to liczba naturalna, która ma więcej niż dwa dzielniki.

Liczbami złożonymi są np.:

- 4, bo jest podzielna przez 1, 2, 4,
- 6, bo jest podzielna przez 1, 2, 3, 6,
- 111, bo jest podzielna przez 1, 111 i np. 3.

Liczb 0 i 1 nie zaliczamy ani do liczb pierwszych, ani do liczb złożonych.



Dobra rada

Kiedy masz uzasadnić, że liczba jest złożona, skorzystaj z tabliczki mnożenia lub cech podzielności.

Na przykład:

- 42 jest liczbą złożoną, bo $42 = 6 \cdot 7$, czyli dzielnikami liczby 42 są 6 i 7.
- 3785 jest liczbą złożoną, bo jej ostatnią cyfrą jest 5, czyli dzielnikiem liczby 3785 jest 5.
- 5247 jest liczbą złożoną, bo suma jej cyfr, czyli 18, jest podzielna przez 9, czyli dzielnikiem liczby 5247 jest 9.

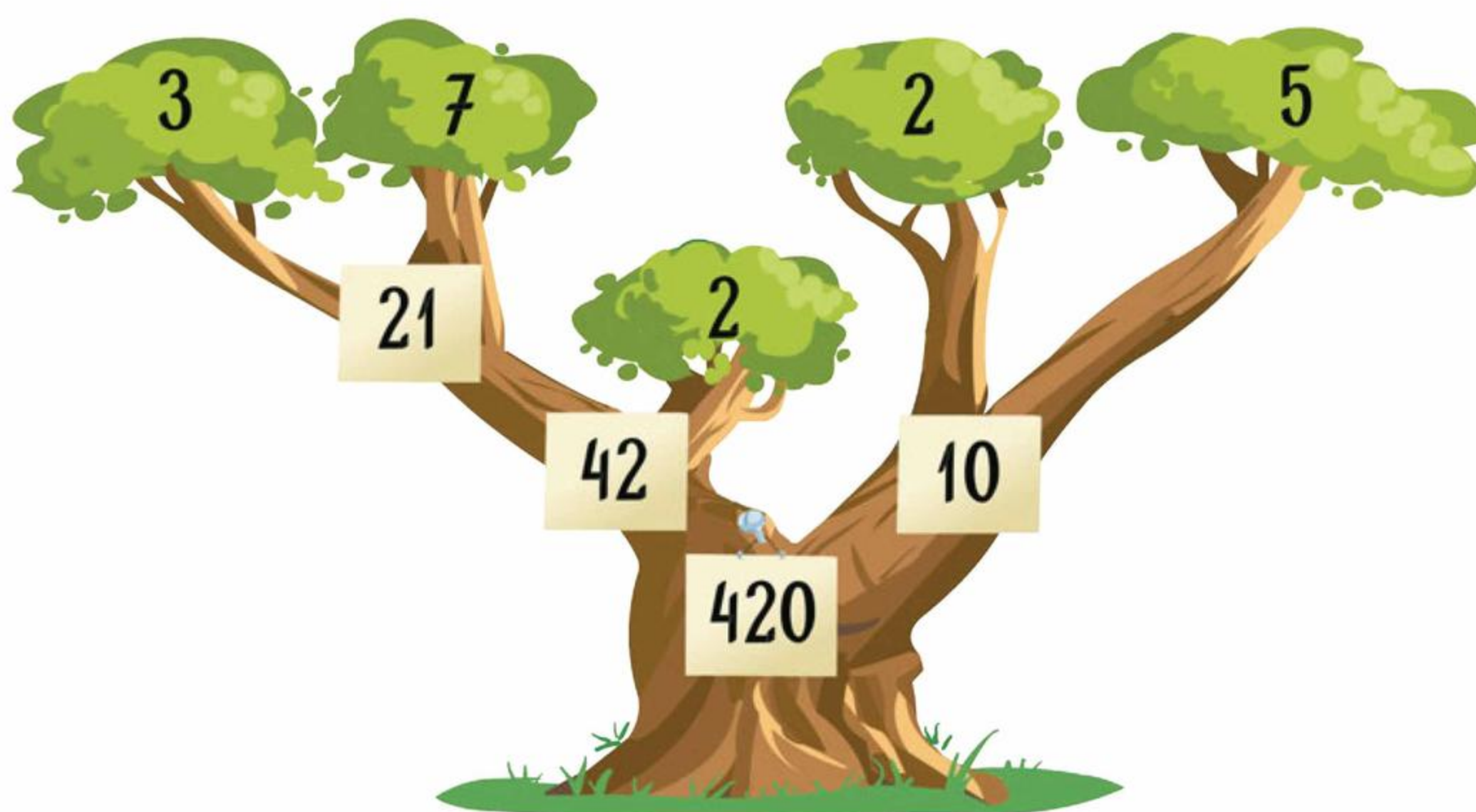
Każdą liczbę złożoną można zapisać jako iloczyn liczb pierwszych, np. $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$. Taki zapis nazywamy **rozkładem na czynniki pierwsze**.

Jeśli chcesz rozłożyć liczbę złożoną na czynniki pierwsze, zapisz ją w postaci iloczynu czynników naturalnych (różnych od 1). Potem każdy z tych czynników zapisuj w postaci iloczynu jeszcze mniejszych liczb. Postępuj tak dotąd, aż otrzymasz tylko takie czynniki, które są liczbami pierwszymi.

Przykłady

$$\bullet \quad 60 = \underbrace{6 \cdot 10}_{\substack{\text{6 i 10 można} \\ \text{jeszcze rozłożyć}}} = \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5}_{\substack{\text{2, 3, 2, 5 to już} \\ \text{czynniki pierwsze}}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}_{\substack{\text{warto je} \\ \text{uporządkować}}} = \underbrace{2^2 \cdot 3 \cdot 5}_{\substack{\text{można to zapisać} \\ \text{krócej za pomocą} \\ \text{potęg}}}$$

$$\bullet \quad 420 = 42 \cdot 10 = 2 \cdot 21 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$



Zadania

- 1 Wypisz jak najwięcej dzielników podanej liczby.

a) 5

b) 9

c) 12

d) 15

Uwaga. Podczas rozwiązywania zadań 2–4 korzystaj z cech podzielności.

- 2 Dlaczego żadna z liczb: 4, 9, 10, 12, 145, 291 nie jest liczbą pierwszą?

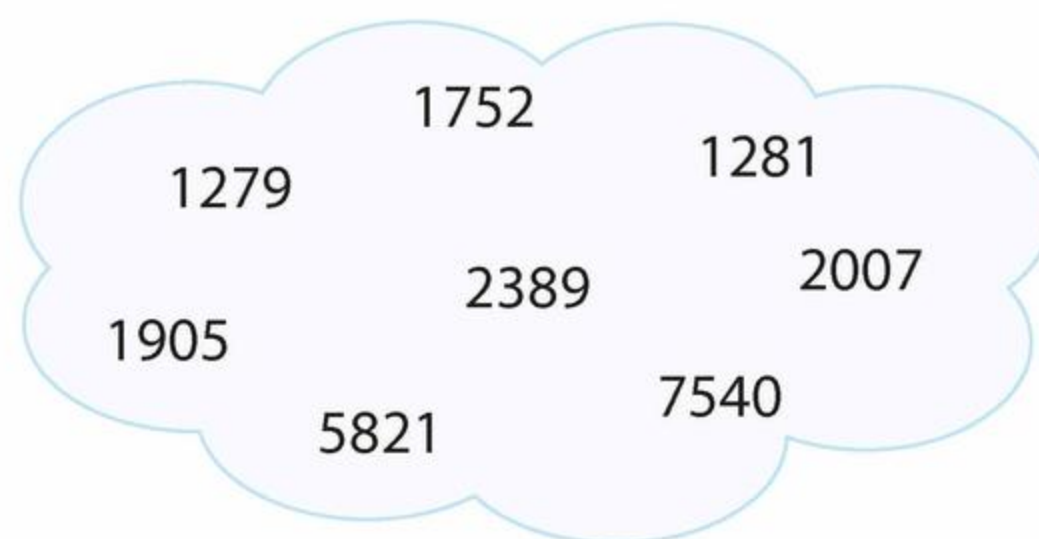


- **3** Które z podanych liczb są liczbami pierwszymi?

2, 3, 8, 17, 21, 23, 25, 100, 117, 717

- **4** W chmurce są trzy liczby pierwsze. Które to liczby?

Wskazówka Sprawdź najpierw, które z liczb w chmurce są podzielne przez 2, przez 3 albo przez 5.



- **5** Rozłóż podaną liczbę na czynniki pierwsze.

a) 300 b) 490 c) 5600 d) 99 e) 2000 f) 480

- **6** Z 24 sześciennych kostek do gry można ułożyć prostopadłościan, na przykład o wymiarach $2 \times 3 \times 4$.

Czy z poniższej liczby kostek można ułożyć prostopadłościan o każdej krawędzi dłuższej niż krawędź jednej kostki? Jeśli tak – podaj jego wymiary, jeśli nie – uzasadnij dlaczego.



a) 12 b) 17 c) 14 d) 500

- **7** Oto rozkład pewnej liczby na czynniki pierwsze: $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Co to za liczba? Jak najprościej można ją obliczyć?

- **8** Oto rozkład pewnej liczby na czynniki pierwsze: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$. Oblicz tę liczbę, a następnie odpowiedz, czy jest ona podzielna przez:

a) 2, b) 3, c) 5.

- **9** Oto rozkład pewnej liczby na czynniki pierwsze: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$. Czy ta liczba jest podzielna przez:

a) 10, b) 6, c) 4, d) 7?

- **10** Oto rozkład pewnej liczby na czynniki pierwsze: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11$. Nie obliczając tej liczby, odpowiedz, czy jest ona podzielna przez:

a) 2, b) 3, c) 5, d) 7, e) 12, f) 9.

- ... **11** Rozłóż na czynniki pierwsze liczbę 21, a następnie podane iloczyny.
 a) $21 \cdot 5$ b) $21 \cdot 21$ c) $21 \cdot 4$
- ... **12** Rozłóż na czynniki pierwsze liczbę 5 razy większą od iloczynu liczb 24 i 35.
- ... **13** Rozłóż liczbę na czynniki pierwsze. Skorzystaj z równości w ramce.
 a) 1260 c) 12 600
 b) 1650 d) $1260 \cdot 1650$
- $$35 \cdot 36 = 1260$$

$$30 \cdot 55 = 1650$$
- ... **14** Liczba x ma następujący rozkład na czynniki pierwsze:
 $x = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 13$, natomiast liczba y ma rozkład $y = 2 \cdot 11 \cdot 13$.
 Zapisz rozkład na czynniki pierwsze ilorazu $x : y$.
-  **15** Rozłóż podaną liczbę na czynniki pierwsze.
 a) 555 b) 510 c) 385



Dla ciekliwych

Rozkład liczby na czynniki (niekoniecznie będące liczbami pierwszymi) przydaje się przy pamięciowym mnożeniu niektórych liczb, np.:

$$18 \cdot 15 = \underline{9} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{5} = \underline{27} \cdot \underline{10} = 270$$

$$18 \cdot 3 = \underline{3} \cdot 6 \cdot \underline{3} = \underline{9} \cdot 6 = 54$$

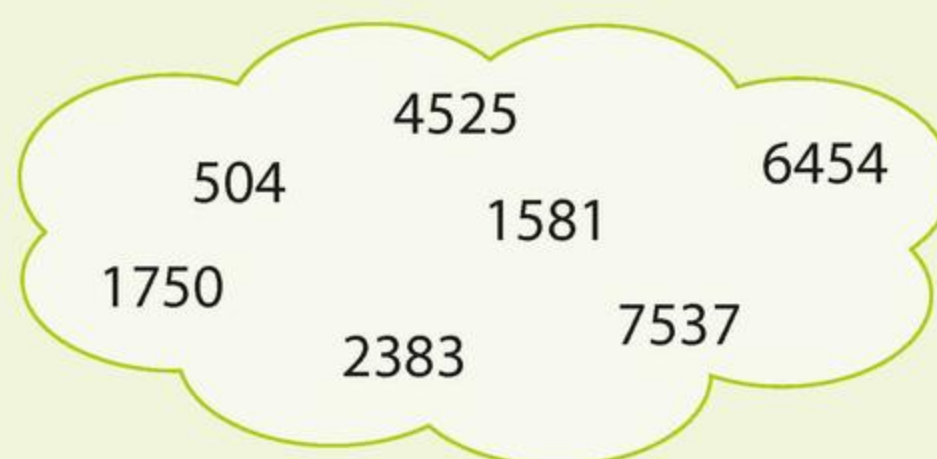
1 Pomnóż w podobny sposób.

- a) $6 \cdot 45$ c) $28 \cdot 50$ e) $3 \cdot 24$
 b) $22 \cdot 15$ d) $18 \cdot 4$ f) $14 \cdot 4$



Czy już umiem?

- I Wymień wszystkie dzielniki liczby 18.
- II Wśród liczb w chmurce są dwie liczby pierwsze. Które to liczby?
- III Rozłóż na czynniki pierwsze liczbę 110.





Na dobry początek

Podział łupów

Podzielcie się na 3-osobowe grupy. Przygotujcie dla każdego z was dziesięć większych i dziesięć mniejszych prostokątnych kartoników. Na większych zapiszcie „100 zł”, na mniejszych „10 zł”. Będą to banknoty do gry. Wykonajcie też po dziesięć monet 1-złotowych. Weźcie 582 zł (5 banknotów 100-złotowych, 8 banknotów 10-złotowych i 2 monety 1-złotowe).

- ▶ Zastanówcie się, jak podzielić tę kwotę równo między 3 osoby.
- ▶ 3 banknoty 100-złotowe łatwo podzielić – dajcie po jednym każdej osobie.
- ▶ Dwóch banknotów 100-złotowych nie da się podzielić między 3 osoby. Można je zamienić na 20 banknotów 10-złotowych.
- ▶ Macie teraz 28 banknotów 10-złotowych. Ile z nich można rozdzielić po równo między 3 osoby? Podzielcie je, a pozostałe banknoty wymieńcie na monety 1-złotowe.
- ▶ Ile macie monet? Podzielcie je pomiędzy 3 osoby.
- ▶ Ile pieniędzy dostała każda osoba? W podobny sposób podzielcie 714 zł między 3 osoby, a następnie 725 zł między 5 osób.

Przykłady

poziom A

Jak podzielić 582 zł między 3 osoby? Ile pieniędzy dostanie każda osoba?

Mamy 5 setek, 8 dziesiątek i 2 złotówki.

		1					
		5	8	2	:	3	
	-	3	↓				
		2	8				

Najpierw dzielimy setki:

- każdy dostaje po 1 setce,
- wykorzystaliśmy 3 setki ($3 \cdot 1 = 3$),
- zostały 2 setki ($5 - 3 = 2$).

Rozmieńmy te setki na dziesiątki.

Mamy razem 28 dziesiątek.

		1	9				
		5	8	2	:	3	
	-	3		↓			
		2	8				
	-	2	7	↓			
			1	2			

Teraz dzielimy dziesiątki:

- każdy dostaje po 9 dziesiątek,
- wykorzystaliśmy 27 dziesiątek ($9 \cdot 3 = 27$),
- została 1 dziesiątka ($28 - 27 = 1$).

Rozmieńmy dziesiątkę na złotówki.

Mamy razem 12 złotych.

		1	9	4			
		5	8	2	:	3	
	-	3					
		2	8				
	-	2	7				
			1	2			
		-	1	2			
				0			

Na końcu dzielimy złotówki.
Każdy dostaje po 4.

Zatem $582 : 3 = 194$.

Odp. Każda osoba dostanie 194 zł.

$$\begin{array}{r} \text{Spr.} \quad 194 \\ \cdot \quad 3 \\ \hline 582 \end{array}$$

Dobra rada

Zauważ, że przy dzieleniu pisemnym wykonujesz wciąż te same czynności.

Podziel!
Pomnóż!
Odejmij!
Spisz!



poziom B

Jak podzielić 584 zł między 3 osoby? Ile pieniędzy dostanie każda osoba?

		1	9	4			
		5	8	4	:	3	
	-	3					
		2	8				
	-	2	7				
			1	4			
		-	1	2			
				2			

Dzielenie przebiega tak jak poprzednio,
ale zostają 2 złotówki – to jest reszta.

Zatem $584 : 3 = 194 \text{ r } 2$.

$$\begin{array}{r} \text{Spr.} \quad 194 \\ \cdot \quad 3 \\ \hline 582 \\ 582 + 2 = 584 \end{array}$$

Odp. Każda osoba dostanie 194 zł, zostanie 2 zł.

poziom C

			2				
		1	4	3	8	:	7
		-	1	4			
			0				

7 w 14 mieści się 2 razy.

			2	0			
		1	4	3	8	:	7
		-	1	4			
			0	3			

7 nie mieści się w 3,
czyli mieści się 0 razy.

			2	0	5		
		1	4	3	8	:	7
		-	1	4			
			0	3	8		
			-	3	5		
				3			

7 w 38 mieści się 5 razy,
a więc $1438 : 7 = 205 \text{ r } 3$.

$$\begin{array}{r} \text{Spr.} \quad 205 \\ \cdot \quad 7 \\ \hline 1435 \end{array}$$

$$1435 + 3 = 1438$$

poziom D

Przez liczby dwucyfrowe dzielimy podobnie.

			7	2	8		
		8	7	3	6	:	12
		-	8	4			
			3	3			
			-	2	4		
				9	6		
				-	9	6	
					0		

12 w 87 mieści się 7 razy,
12 w 33 mieści się 2 razy,
12 w 96 mieści się 8 razy.

$$\text{Zatem } 8736 : 12 = 728.$$

$$\begin{array}{r} \text{Spr.} \quad 728 \\ \cdot \quad 12 \\ \hline 1456 \\ + 7280 \\ \hline 8736 \end{array}$$

Dobra rada

Kiedy dzielisz przez liczbę jednocyfrową, przypomnij sobie tabliczkę mnożenia przez tę liczbę.

Kiedy dzielisz przez liczbę dwucyfrową, możesz wypisać kolejne wielokrotności tej liczby (jak w zadaniu 8 na s. 62).

$$\begin{array}{l} 1 \cdot 12 = 12 \\ 2 \cdot 12 = 24 \\ 3 \cdot 12 = 36 \\ 4 \cdot 12 = 48 \end{array}$$





Zadania



1 Podziel pisemnie. ► Jeśli poprawnie rozwiążesz dwa kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

a) $138 : 6$

c) $2415 : 7$

e) $1302 : 6$

b) $1001 : 7$

d) $468 : 9$

f) $196 : 7$

poziom B

a) $1398 : 9$

c) $1292 : 6$

e) $1027 : 3$

b) $271 : 4$

d) $620 : 7$

f) $380 : 7$

poziom C

a) $312 : 3$

c) $3010 : 6$

e) $4549 : 9$

b) $1225 : 6$

d) $1430 : 7$

f) $5620 : 8$

poziom D

a) $616 : 11$

c) $1326 : 13$

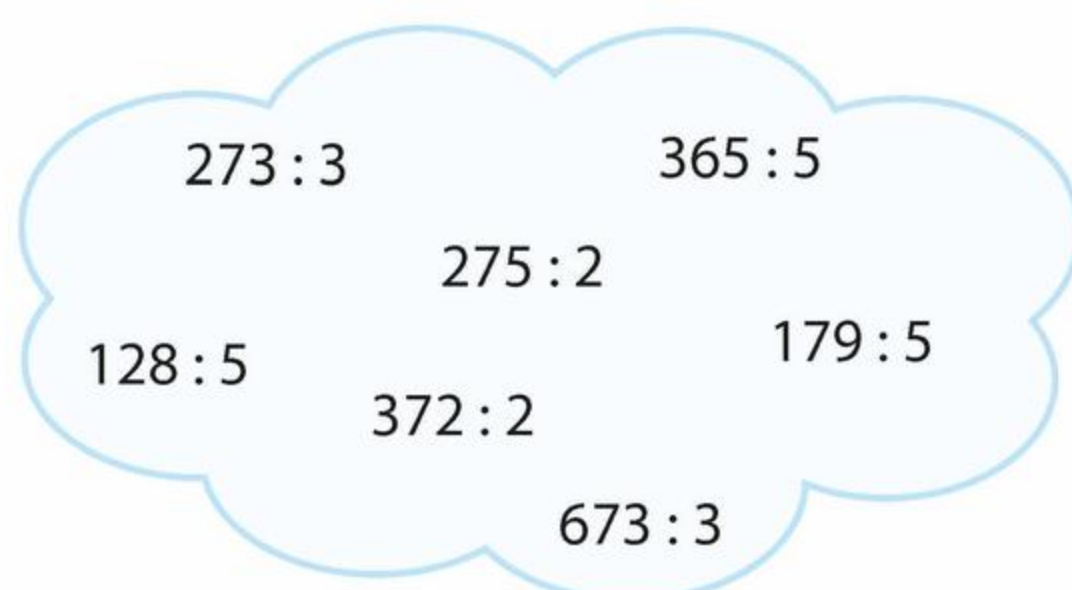
e) $812 : 14$

b) $3100 : 15$

d) $1260 : 12$

f) $1068 : 12$

- **2** Rada Rodziców postanowiła, że kupi na nagrody w konkursie jednakowe książki po 8 zł. Może na to przeznaczyć 184 zł. Ile książek kupi za tę kwotę?
- **3** Mieszkańcy bloku złożyli się na remont ogrodzenia. Każda z 9 rodzin wpłaciła 700 zł. Koszt remontu wyniósł 4779 zł. Pozostałe pieniądze zostały podzielone na równe kwoty i zwrócone rodzinom. Ile przypadło na każdą z nich?
- **4** Z chmurki wybierz tylko te dzielenia, które da się wykonać bez reszty. Przepisz je do zeszytu i wykonaj.



- **5** Rozwiąż równanie.

a) $7 \cdot x = 2457$

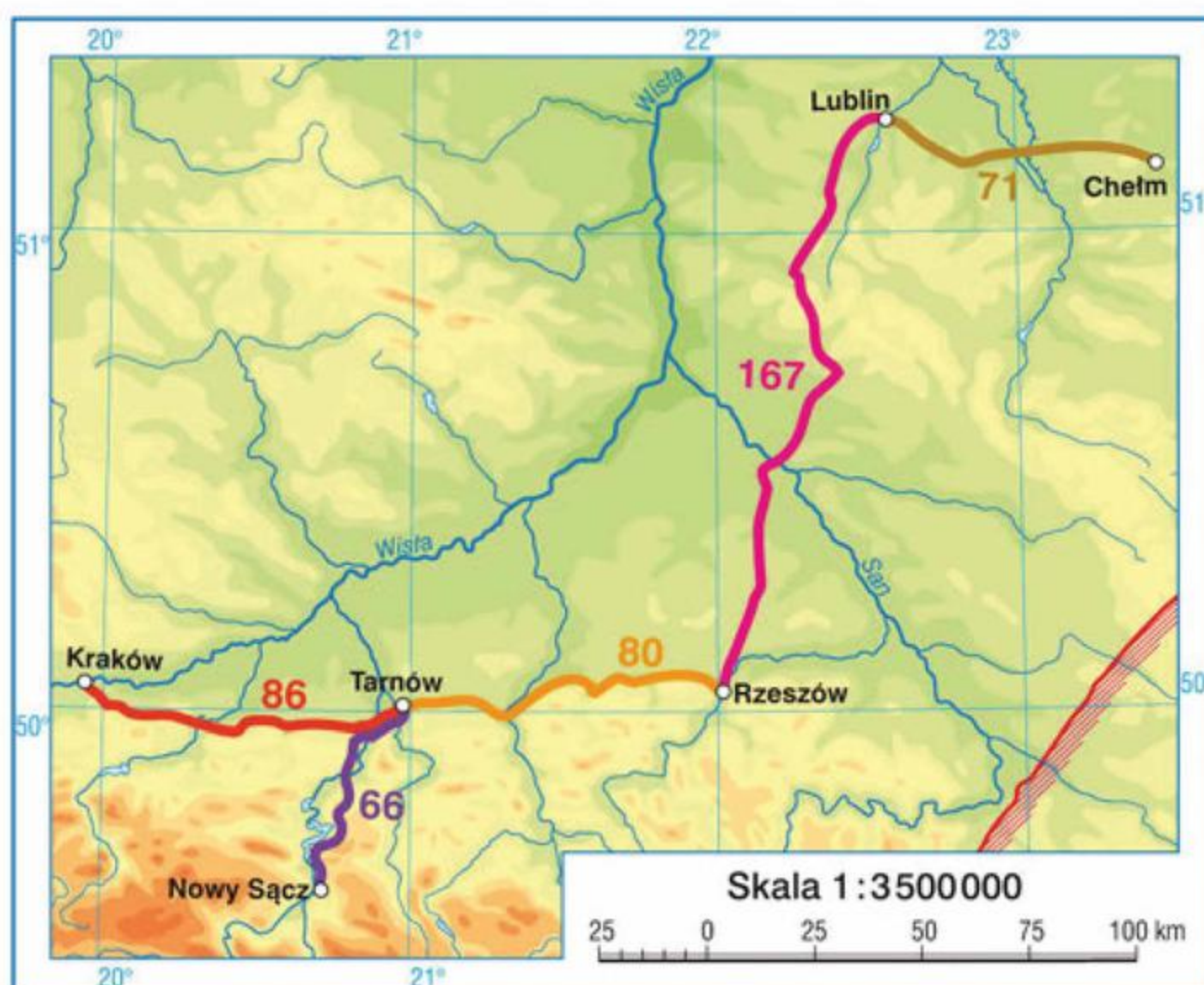
c) $3155 : x = 5$

b) $6 \cdot x = 1224$

d) $x : 23 = 115$

I. Liczby naturalne

- **6** O wpół do siódmej rano pan Jacek wyruszył samochodem z Nowego Sącza do Tarnowa. Stamtąd pojechał przez Rzeszów i Lublin do Chełma. Na miejsce dotarł o wpół do pierwszej po południu. Jaką odległość pokonywał średnio w ciągu godziny?



- **7** Jakie liczby zniknęły pod plamami na rachunku?

„Biurokrata” sp.j.
ul. Papierowa 17, 23–250 Urzędów

RACHUNEK

Artykuł	Cena jednostkowa	Ilość	Wartość zakupu
Papier kserograficzny	16	[plama]	400
Cienkopis	3	[plama]	144
Tusz do drukarki	[plama]	6	[plama]
RAZEM:			1000

- **8** Oblicz iloraz. Skorzystaj z równości podanych w ramce.

a) $9176 : 37$

b) $29\,750 : 37$

c) $7800 : 37$

$1 \cdot 37 = 37$	$6 \cdot 37 = 222$
$2 \cdot 37 = 74$	$7 \cdot 37 = 259$
$3 \cdot 37 = 111$	$8 \cdot 37 = 296$
$4 \cdot 37 = 148$	$9 \cdot 37 = 333$
$5 \cdot 37 = 185$	$10 \cdot 37 = 370$

- ... 9 Kasia i Krzyś wyruszyli pociągami z Warszawy o godzinie 6.00 rano. Kasia jechała do Petersburga i dotarła tam następnego dnia o 11.45 czasu polskiego. Podróż Krzysia do Radomia trwała 17 razy krócej niż podróż Kasi. O której godzinie Krzyś dojechał do Radomia?

Wskazówka Czas jazdy pociągu do Petersburga wyraż w minutach.

- ... 10 Rozwiąż zadanie zapisane wierszem.

Osiemnaście kartonów pakuję czym prędzej,
Do każdego z nich wkładam dziewięćdziesiąt pędzli.
Przyszedł szef i tak mówi: „Kartony zmienimy
I te same pędzle w piętnastu zmieścimy!”
Wiesz już wszystko, co trzeba, więc oblicz dokładnie,
Ile pędzli po zmianie na karton przypadnie.



- ... 11 Rozłóż liczbę na czynniki pierwsze.

a) 1275

b) 3465

c) 22 950



Dla dociekliwych

- 1 Ania ma 3 razy mniej znaczków niż Basia, a Kasia ma 3 razy więcej znaczków niż Basia. Razem mają ich 273. Ile znaczków ma Ania, ile Basia, a ile Kasia?
- 2 Tomek ma siedem razy więcej znaczków niż Jaś, a Grześ ma o 200 znaczków mniej niż Tomek. W sumie mają ich 1420. Ile znaczków ma każdy z nich?



Czy już umiem?

- I Podziel pisemnie.
a) $144 : 6$ b) $2700 : 13$
- II Jedna z liczb w chmurce jest wielokrotnością liczby 5. Znajdź tę liczbę i podziel ją pisemnie przez 5.
- III Rowerzysta planuje przejechać 798 km w czasie dwutygodniowej wyprawy. Ile kilometrów średnio w ciągu dnia zamierza pokonywać ten rowerzysta?



Powtórzenie przed klasówką

1 Oblicz.

a) $20 \cdot 800$

c) $1600 : 20$

e) $4 \cdot (8 - 2)$

b) $400 \cdot 50$

d) $5 + 4 \cdot 2$

f) $8 + 12 : 2$

2 Zapisz liczbę:

a) XXIV cyframi arabskimi,

b) 19 cyframi rzymskimi.

3 Oblicz pisemnie.

a) $203 - 38$

b) $452 \cdot 23$

c) $117 : 3$

4 Mama Grażyny zarabia miesięcznie 2304 zł, a tata o 58 zł mniej. Ile w sumie zarabiają rodzice Grażyny?

5 Wypisz z chmurki liczby podzielne przez:

a) 2,

b) 5,

c) 10.

29870

817293

276356

287362

72635

6 Oblicz.

a) $(10 - 2 + 8) \cdot 3$

b) $32 : 4 \cdot 2 + 4$

7 Podaj wynik działania. Nie musisz wykonywać dokładnych obliczeń. Odpowiedź wybierz z chmurki.

a) $8751 + 5123$

c) $2648 + 6816$

b) $7126 - 5272$

d) $6156 - 5822$

9464

1854

724

334

13874

8 Oblicz pisemnie.

a) $2001 - 34$

b) $50\,300 \cdot 20\,020$

c) $1771 : 7$

9 Uczniowie 24-osobowej klasy zebrali na wycieczkę po 18 zł od osoby. Wycieczka kosztowała 384 zł.

a) Ile pieniędzy zostało?

b) Po ile złotych można oddać uczniom?

Zadania na temat...

Seriale

Najdłużej emitowanym serialem na świecie był *Guiding Light*. Tytuł ten oznacza dosłownie światółko wskazujące drogę, a przerośnie także osobę będącą wzorem do naśladowania.

Kiedy 25 stycznia 1937 roku amerykańska stacja radiowa nadała pierwszy 15-minutowy odcinek tego serialu, nikt się nie spodziewał, że przetrwa on ponad 70 lat. 30 czerwca 1952 roku serial zadebiutował w telewizji, gdzie można go było oglądać pięć razy w tygodniu o godzinie 15.00. Ostatni odcinek wyemitowano 18 września 2009 roku.



W latach 1952–1956 serial był emitowany zarówno w radiu, jak i w telewizji. 9 września 1968 roku odcinki zostały wydłużone z 15 do 30 minut i zaprzestano ich emisji na żywo. 7 listopada 1977 roku nadano pierwszy odcinek trwający aż godzinę. We wrześniu 2006 roku został wyemitowany 15 000. odcinek serialu (był to zarazem odcinek 17 456., licząc z nadanymi w radiu). W tamtym okresie oglądało ten serial 2,6 mln Amerykanów.

- 1 Dowiedz się i wyjaśnij, co znaczą słowa:
emitować, emisja na żywo, debiut.
- 2 Ile lat serial *Guiding Light* był nadawany w amerykańskiej telewizji?
- 3 Oblicz, ile minut tygodniowo amerykański widz oglądał nowe odcinki serialu w 2006 roku. Ile czasu poświęcał na to w roku 1958?

- 4 Około ilu minut trwała emisja nowych odcinków serialu w 2006 roku? Ile to dni?
- 5 Jak długo odcinki *Guiding Light* były półgodzinne?
- 6 Najdłużej emitowany serial w Polsce to powieść radiowa *Matysiakowie*. Nadawana jest na antenie Programu I Polskiego Radia od 15 grudnia 1956 roku w 25-minutowych odcinkach. Obecnie tej audycji można słuchać w każdą sobotę o godzinie 13.10. Jubileuszowego 2600. odcinka można było wysłuchać w niedzielę 17 grudnia 2006 roku.



- a) Od ilu lat nadawana jest powieść radiowa *Matysiakowie*?
- b) Około ilu godzin i minut rocznie trzeba poświęcić, by wysłuchać wszystkich nowych odcinków tego serialu?
- c) W którym roku został przedstawiony 3000. odcinek serialu radiowego *Matysiakowie*?
- d) Na zdjęciach przedstawiono trzy odbiorniki radiowe i podano rok, od którego były produkowane. Na którym z tych odbiorników można było wysłuchać pierwszego odcinka powieści radiowej *Matysiakowie*?



Stolica – 1955 r.



Turysta – 1956 r.

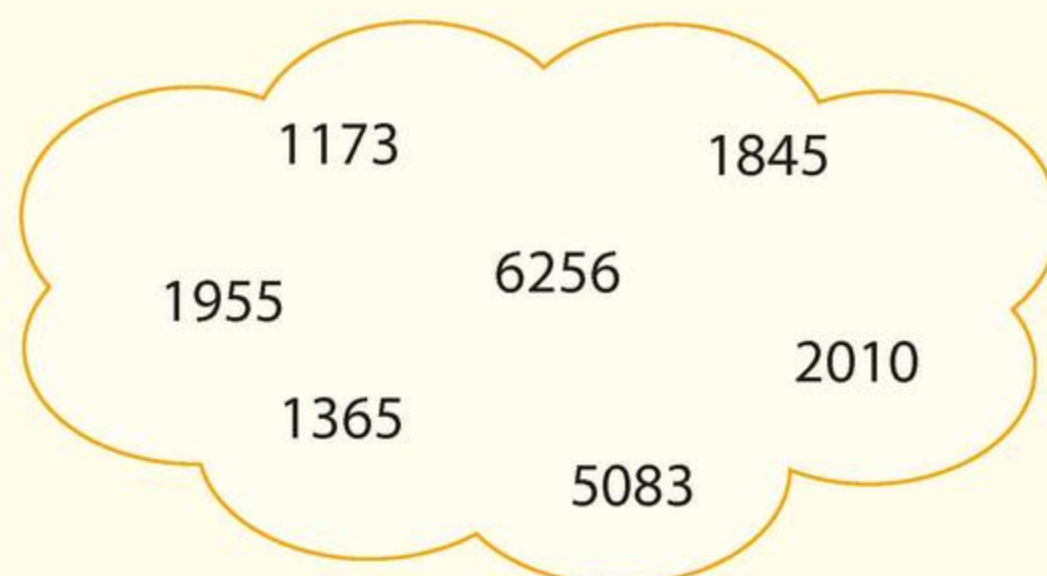


Śleza – 1973 r.



Zadania na deser

- 1 Wybierz z chmurki wszystkie liczby podzielne przez 3. Każdą z nich podziel pisemnie przez 3. Spośród otrzymanych ilorazów wybierz te, które są podzielne przez 5, i podziel je pisemnie przez 5.



- 2 Rozłóż liczbę na czynniki pierwsze.

 a) 630

b) 1656

c) 945

Informacje do zadań 3 i 4

Oto tajny szyfr. Dla uproszczenia ograniczymy się do słów zawierających trzy litery: A, K, R. Oznaczmy je liczbami: A = 1, K = 2, R = 3.

Pokażemy, jak zaszyfrować słowo KARK.

- Wpisujemy litery do tabelki.
- Pod każdą literą zapisujemy jej oznaczenie liczbowe.
- W następnym wierszu wpisujemy kolejne liczby pierwsze.
- Zapisujemy ich potęgi pokazaną obok metodą.
- Obliczamy te potęgi.
- Mnożymy otrzymane wyniki:
 $4 \cdot 3 \cdot 125 \cdot 49 = 73\,500$.

K	A	R	K
2	1	3	2
2	3	5	7
2^2	3^1	5^3	7^2
4	3	125	49

Liczba 73500 to zaszyfrowane słowo KARK.

- 3 Zaszyfruj słowa: AR, AKR, RAK. Sprawdź, co one znaczą.



- ✂ 4 Rozszyfruj słowa: 270, 10500, 9450, 26460.

Wskazówka Zaczynij od rozłożenia liczby na czynniki pierwsze, np.

$$270 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1.$$

- 5 Przyjrzyj się mapce i oblicz.

- a) Jaką długość łącznie mają lądowe granice Polski?
b) Ile wynosi całkowita długość granic Polski?



Informacje do zadania 6

Przeczytaj uważnie polecenia i przyjrzyj się wykonanym czynnościom.

- Zapisz dowolną liczbę trzycyfrową bez zera na końcu. 356
- Zapisz tę liczbę od końca. 653
- Odejmij obie zapisane liczby (mniejszą od większej). 653

$$\begin{array}{r} - 356 \\ \hline 297 \end{array}$$
- Zapisz otrzymaną różnicę od końca. 792
- Dodaj dwie ostatnio otrzymane liczby. 792

$$\begin{array}{r} + 297 \\ \hline 1089 \end{array}$$

- 6 Wykonaj powyższe polecenia na kilku wybranych liczbach. Co zauważasz? Czy umiesz to wyjaśnić?

- 7 Oszacuj wyniki podanych działań. Ustaw działania w takiej kolejności, aby ich wyniki były uporządkowane od najmniejszego do największego. Litery utworzą hasło. Odczytaj je.

W $394 \cdot 19$

L $83 \cdot 9252$

W $325 \cdot 219$

E $26\,282 + 79\,263$

A $25\,638 - 17\,524$

8 Przeczytaj informacje podane na karteczce. Odpowiedz na pytania.

- Jak długo żył Zygmunt Stary?
- Ile miał lat, gdy został królem?
- Jak długo rządził Polską?
- Ile lat miał Zygmunt Stary, a ile królowa Bona w dniu ślubu?

W roku MDVI na tron polski wstąpił Zygmunt I, zwany później Starym. Zasłynął on mądrymi rządami. Zawarł pokój z sułtanem tureckim. Stoczył ostatnią wojnę z zakonem krzyżackim, w której wyniku zakon został rozwiązany. Włączył Mazowsze do Polski. Wspierał włoskich artystów: architektów, rzeźbiarzy, malarzy. Przebudował Wawel.



Zygmunt Stary
(MCDLXVII–MDXLVIII)

Znaną postacią jest także jego żona – królowa Bona, pochodząca z włoskiego książęcego rodu Sforzów [czytaj: Sforców]. Ich ślub odbył się w MDXVIII roku. Polacy zawdzięczają Bonie otwarcie na włoską kulturę, a także... włoszczyznę, czyli sprowadzone przez nią do Polski włoskie warzywa – nieznane u nas wcześniej.



Bona Sforza
(MCDXCIV–MDLVII)

- Przez jaką liczbę należy pomnożyć 548, aby otrzymać 548 548?
 - Znajdź liczbę, która ma następujący rozkład na czynniki pierwsze:
 $7 \cdot 11 \cdot 13$.
 - Uzasadnij bez wykonywania obliczeń, że liczba 548 548 jest podzielna przez 7.
 - Uzasadnij bez wykonywania obliczeń, że liczba 257 257 jest podzielna przez 7.
 - Pewną liczbę trzycyfrową zapisujemy dwukrotnie i otrzymujemy liczbę sześciocyfrową. Uzasadnij, że każda otrzymana w ten sposób liczba jest podzielna przez 13.
- 10
- Przez jaką liczbę należy pomnożyć 47, aby otrzymać 474747?
 - Sprawdź, czy liczba będąca odpowiedzią w podpunkcie a) dzieli się przez 37.
 - Pewną liczbę dwucyfrową zapisujemy trzykrotnie i otrzymujemy liczbę sześciocyfrową. Uzasadnij, że każda otrzymana w ten sposób liczba jest podzielna przez 37.



II

Figury geometryczne

W kalejdoskopie różnokolorowe szkiełka odbijają się w lustrach, dzięki czemu powstają przepiękne obrazy. Spróbuj zaprojektować obraz, który mógłby powstać w kalejdoskopie ze szkiełek w kształcie prostokątów, kwadratów i kół.

*Prawie jak
w kalejdoskopie!*



1 Płaszczyzna, proste i półproste

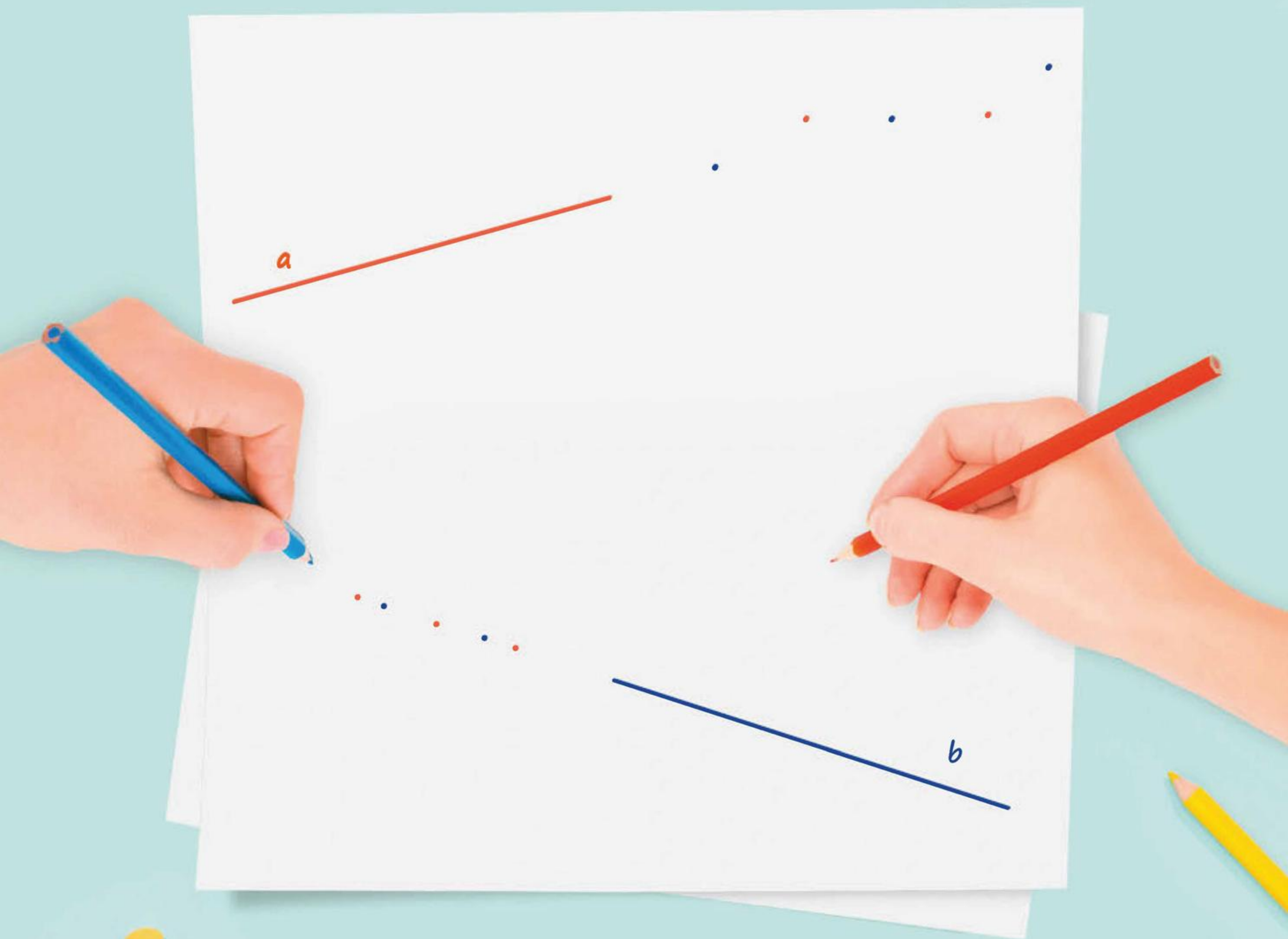


Na dobry początek

Czy punkt leży na prostej?

Weźcie gładką kartkę.

- Narysujcie na niej mały fragment prostej. Następnie na zmianę dwoma różnymi kolorami rysujcie punkty tak, aby każdy kolejny leżał dalej od narysowanego fragmentu prostej i jednocześnie był punktem tej prostej.

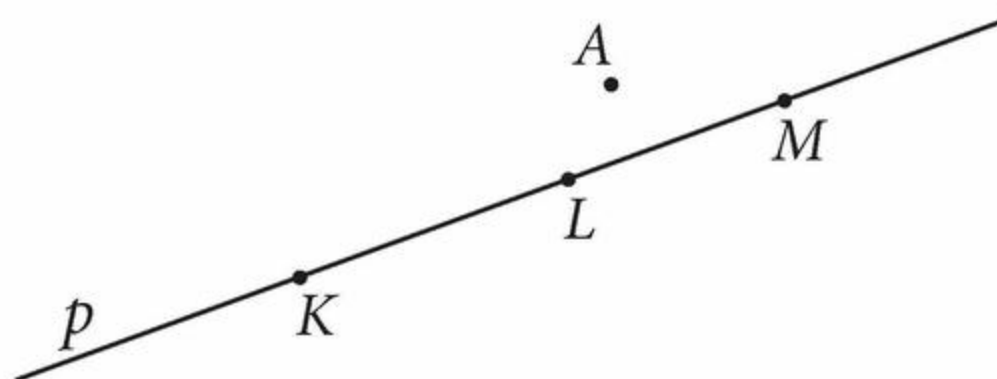


Pytania i polecenia

Ile spośród zaznaczonych punktów leży na każdej z prostych a i b ?

O prostej, odcinku, trójkącie czy okręgu mówimy, że są figurami leżącymi na płaszczyźnie.

Płaszczyzna jest nieograniczona i można ją sobie wyobrazić jako niekończącą się płaską kartkę.

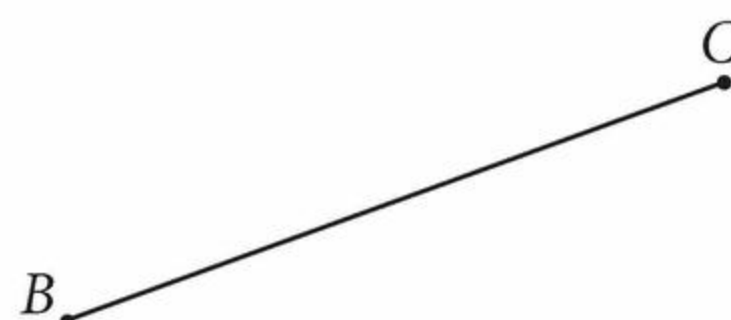


Punkty oznaczamy wielkimi literami, np.: A, B, C .

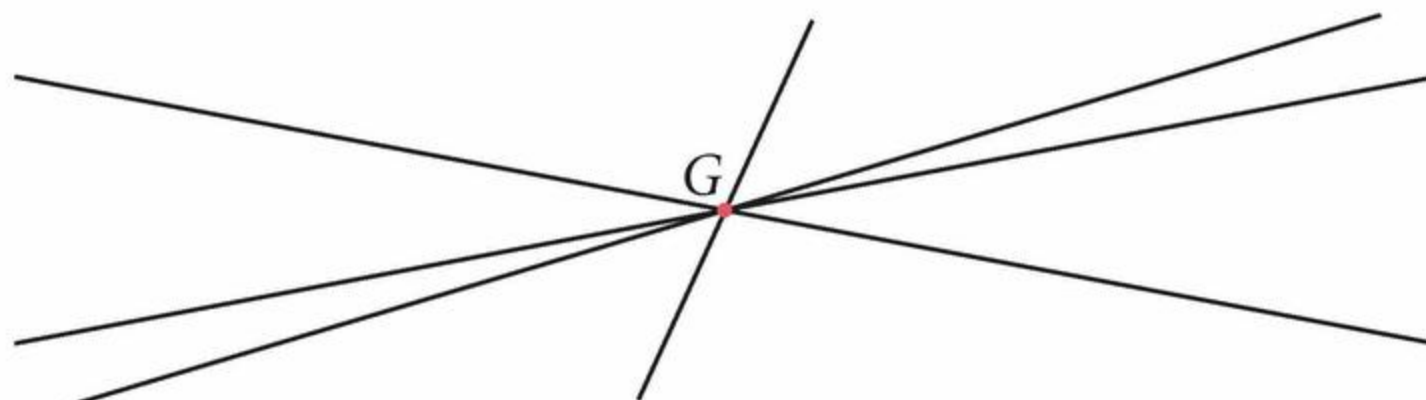
Proste oznaczamy małymi literami, np.: p, r, a, b .

Prostą p z rysunku powyżej możemy też nazwać np. prostą KL lub ML .

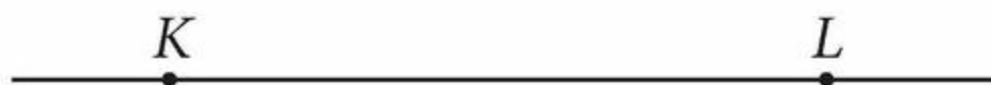
Odcinek najczęściej nazywamy, podając oznaczenia punktów, które są jego końcami, np.: BC, AB, KL .



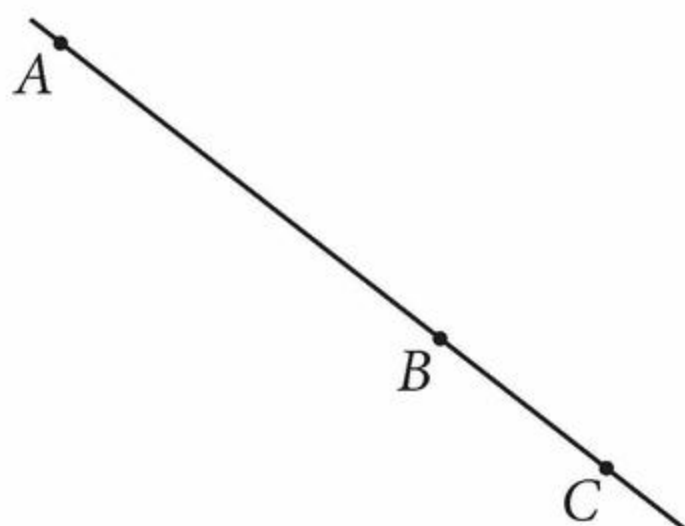
Przez jeden punkt przechodzi nieskończenie wiele prostych.



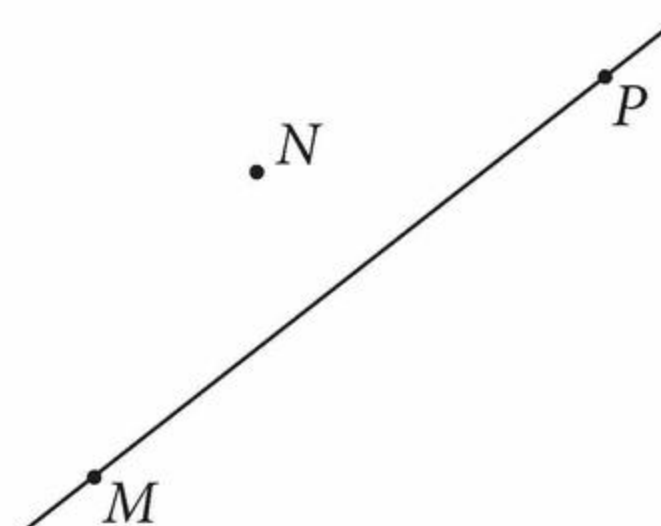
Przez dwa różne punkty można zawsze poprowadzić tylko jedną prostą.



Przez trzy lub więcej punktów nie zawsze można poprowadzić prostą.



Przez punkty A, B, C
można poprowadzić prostą.



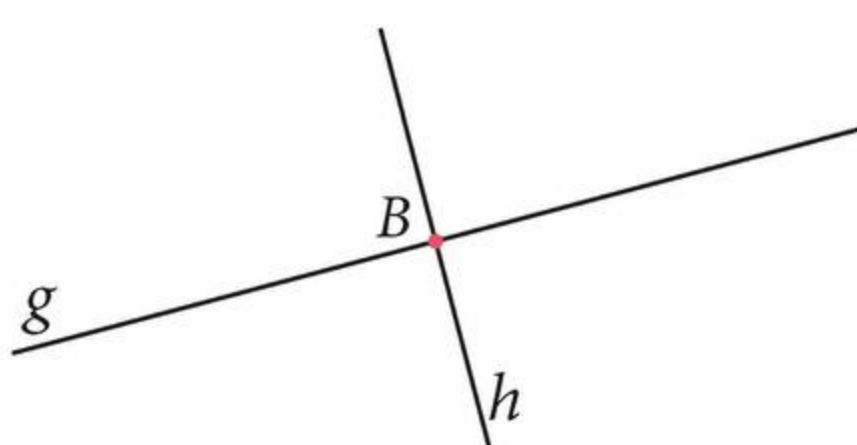
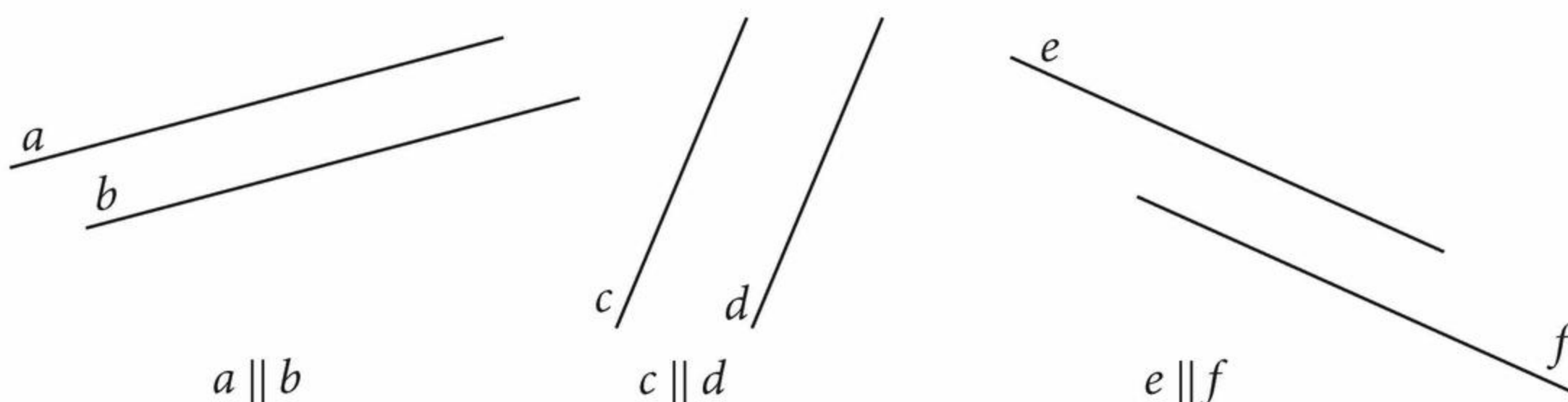
Przez punkty M, N, P
nie można poprowadzić prostej.

Dwie proste na płaszczyźnie

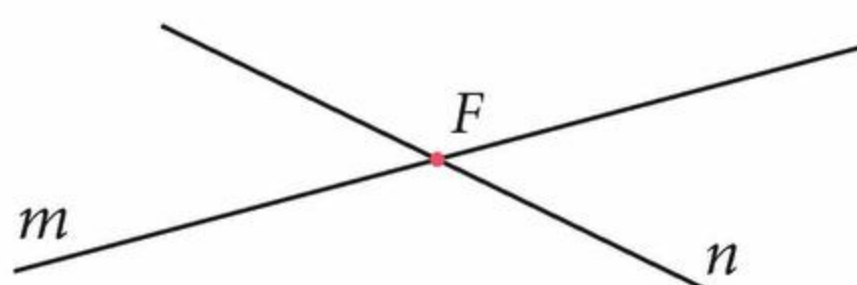
Dwie proste na płaszczyźnie mogą się przecinać w jednym punkcie lub mogą się nie przecinać.

Proste, które się nie przecinają, nazywamy prostymi **równoległymi**.

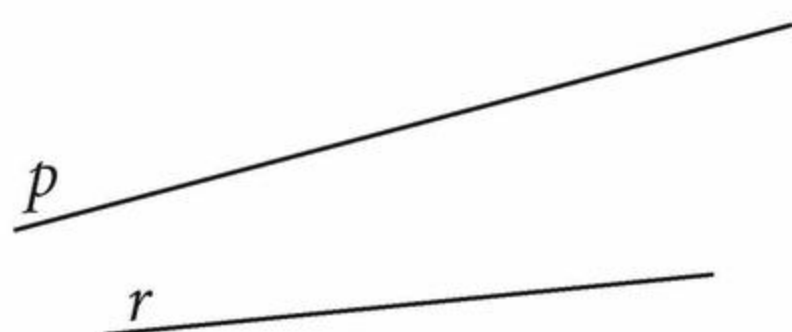
Jeśli proste a i b są równoległe, piszemy: $a \parallel b$.



Proste g i h przecinają się w punkcie B pod kątem prostym. Są **prostopadłe**. Zapisujemy to tak: $g \perp h$.



Proste m i n przecinają się w punkcie F . Nie są prostopadłe.



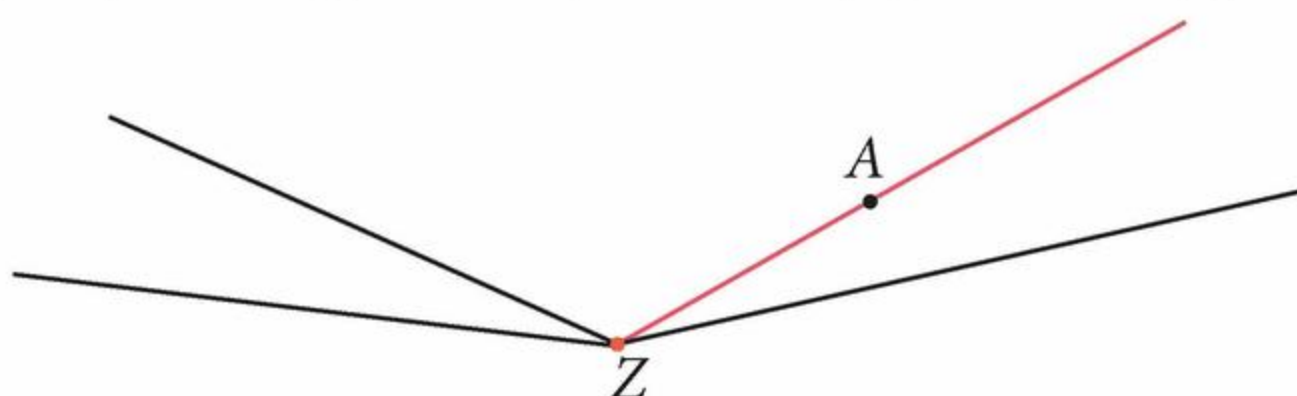
Proste p i r przecinają się. Punkt przecięcia leży poza kartką.

To jest **półprosta**. Ma początek, ale nie ma końca.



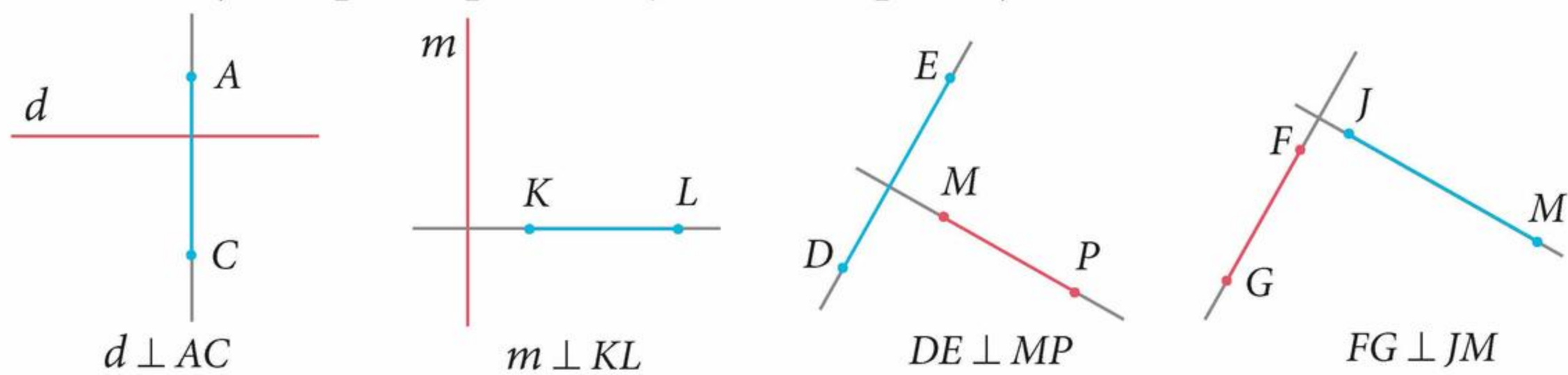
Punkt R jest początkiem tej półprostej.

Każdy punkt jest początkiem wielu półprostych. Aby wskazać, o której półprostej mówimy, podajemy dwa punkty – najpierw punkt będący jej początkiem, a następnie jeden z pozostałych należących do niej punktów.

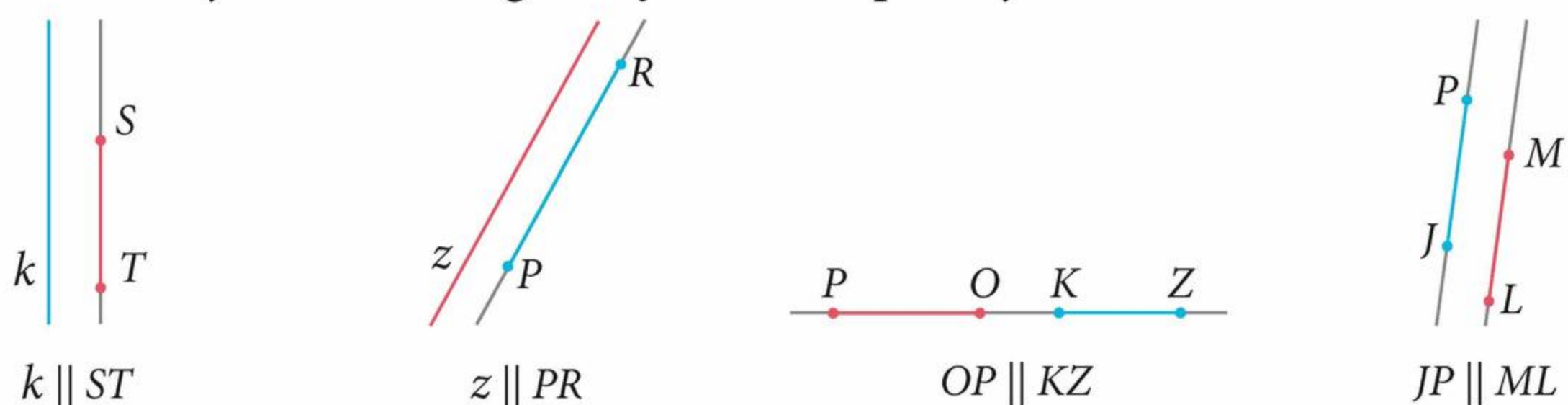


Czerwonym kolorem narysowana jest półprosta ZA .

Odcinki i półproste są prostopadłe, gdy leżą na prostopadłych prostych. Podobnie jest z prostopadłością odcinka i prostej.

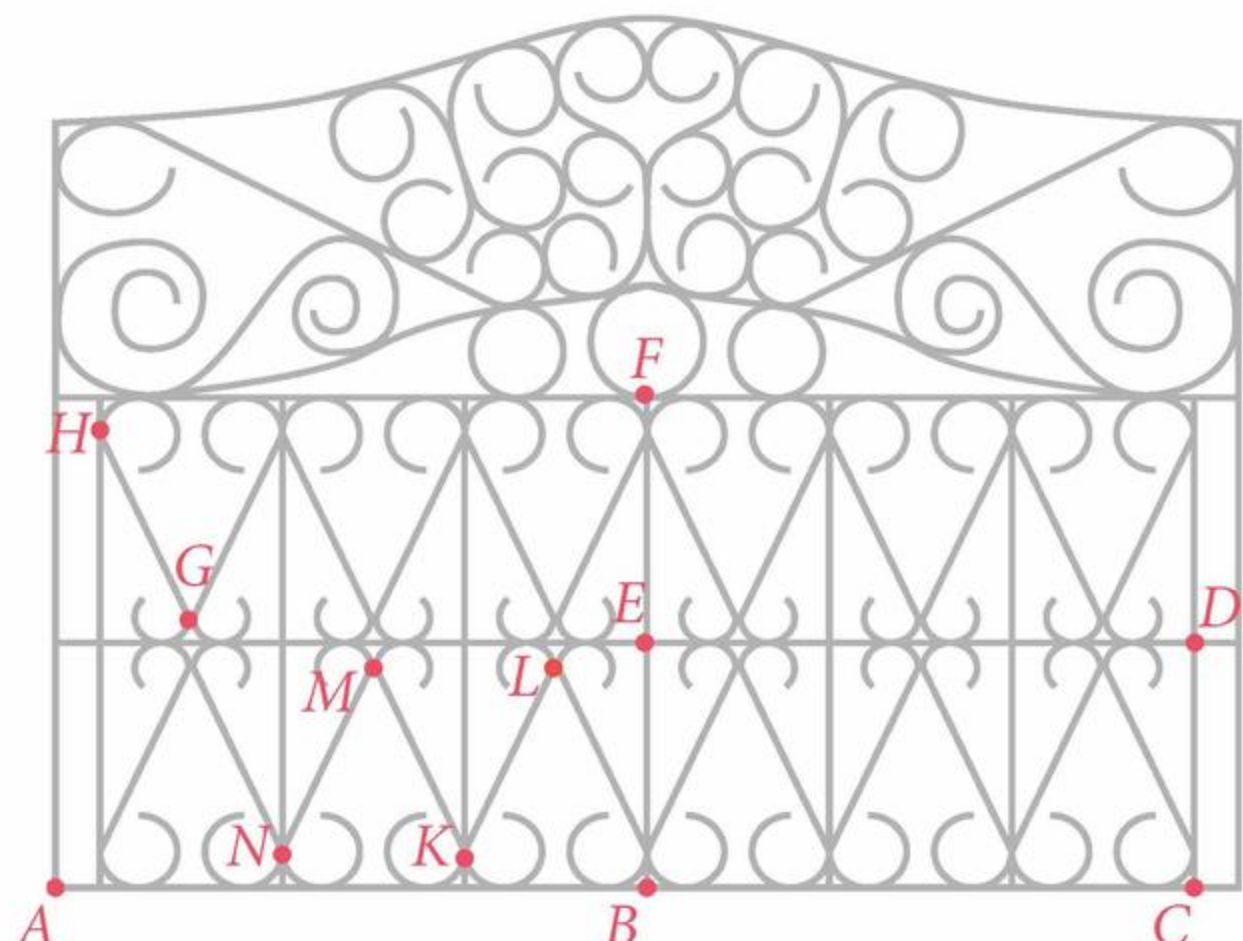
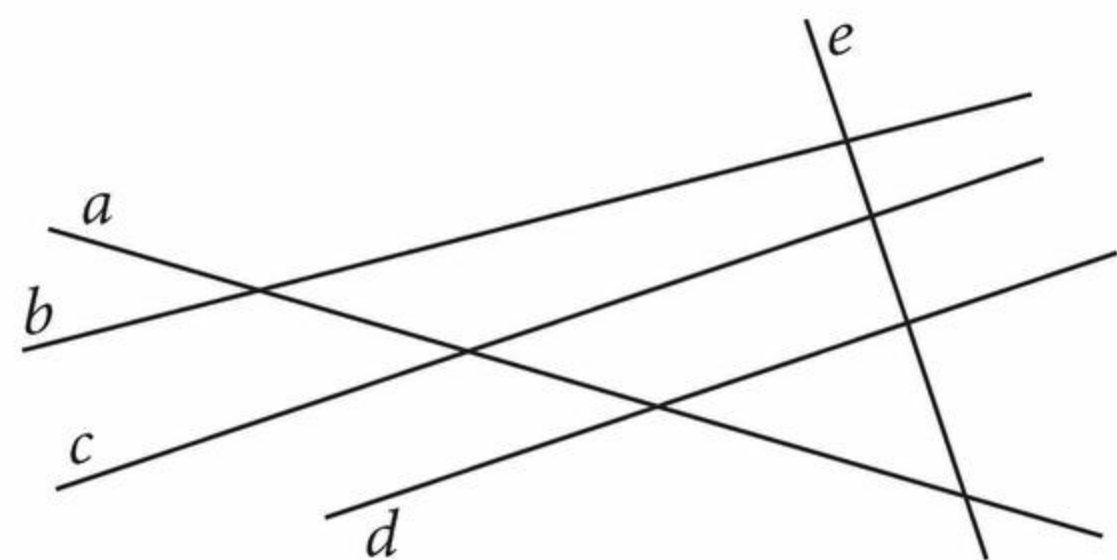


Odcinki i półproste są równoległe, gdy leżą na prostych równoległych. Także odcinki i półproste leżące na tej samej prostej są równoległe. Podobnie jest z równoległością odcinka i prostej.



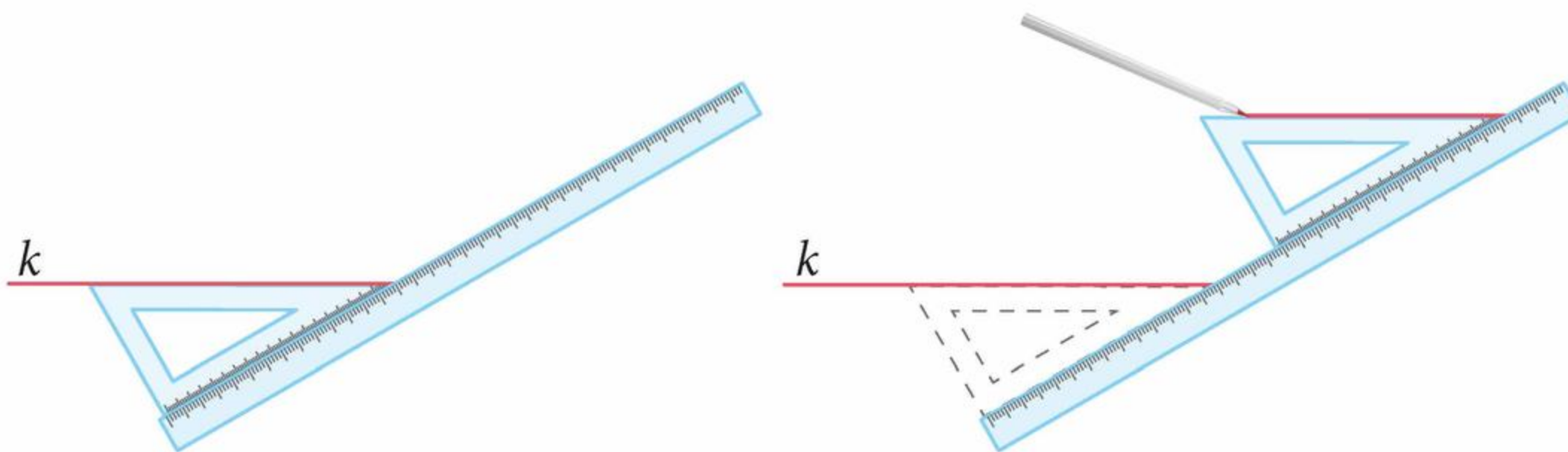
Zadania

- **1** Narysuj punkty A i B. Ile prostych przechodzi przez oba te punkty? Wykonaj odpowiedni rysunek.
- **2** Wypisz wszystkie znalezione na rysunku:
 - a) pary prostych równoległych,
 - b) pary prostych prostopadłych,
 - c) proste przecinające prostą c.
- **3** Znajdź na rysunku odcinki prostopadłe i odcinki równoległe. Wypisz trzy pary odcinków prostopadłych i trzy pary odcinków równoległych.
- **4** Wskaż w swoim otoczeniu przykłady odcinków równoległych i odcinków prostopadłych.



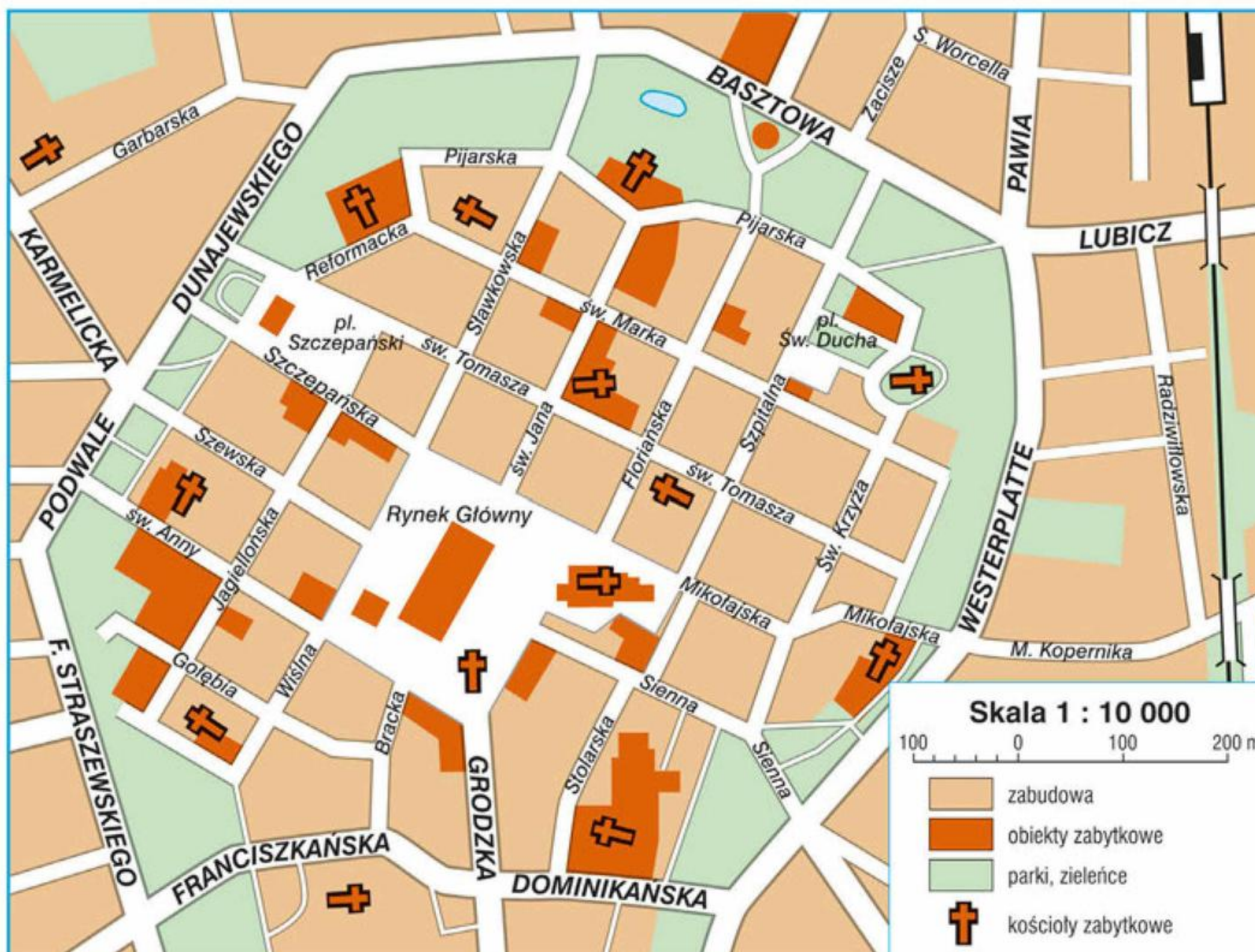
II. Figury geometryczne

- **5** Narysuj punkty A i B . Następnie na zielono narysuj półprostą AB , a na niebiesko półprostą BA . Jaka figura została oznaczona dwoma kolorami?
- **6** Narysuj prostą l , a następnie przy użyciu ekierki narysuj pięć prostych prostopadłych do prostej l . Oznacz je. Jak są położone te proste względem siebie?
- **7** Przyjrzyj się rysunkom poniżej. Narysuj prostą k , a następnie za pomocą linijki i ekierki narysuj pięć prostych równoległych do prostej k .



- **8** W miastach zakładanych w średniowieczu układ ulic często jest bardzo regularny. Znajdź na planie Starego Miasta w Krakowie trzy ulice:
 - a) równoległe do ulicy Szpitalnej,
 - b) prostopadłe do ulicy Szpitalnej.

Dowiedz się, dokąd prowadzi najszersza ulica odchodząca od Rynku Głównego.



•• 9 Narysuj punkty A , B , C , a następnie:

- a) na zielono – odcinek BC ,
 b) na żółto – prostą AB ,
 c) na niebiesko – półprostą AC ,
 d) na fioletowo – półprostą CA .

•• 10 Narysuj równoległe proste a i b . Następnie narysuj prostą c prostopadłą do b i prostą d równoległą do c . Jak położone są względem siebie proste:

- a) b i d ,
 b) a i c ,
 c) a i d ?

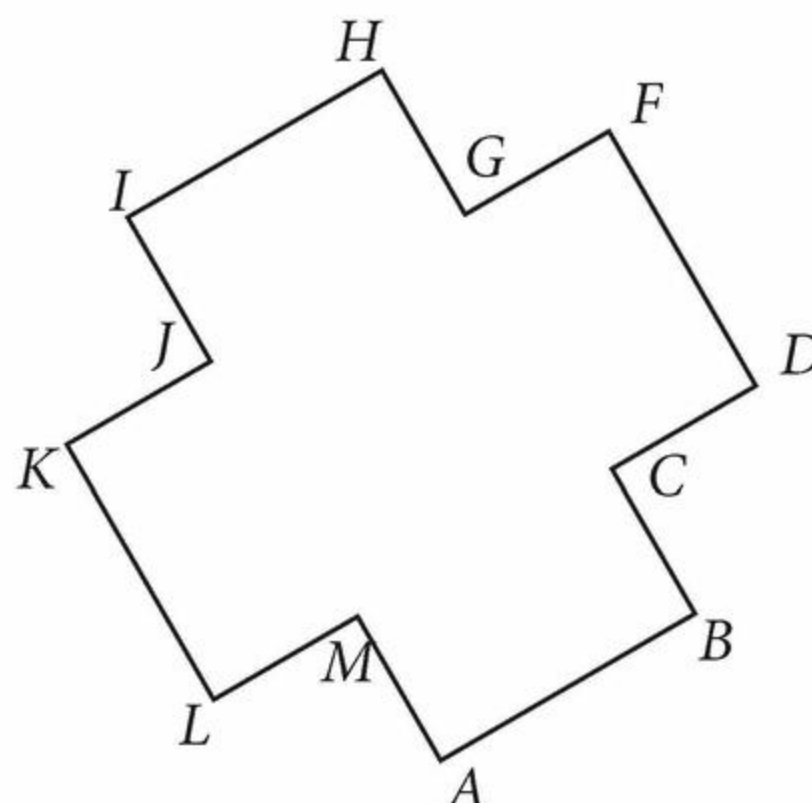
•• 11 Wypisz z rysunku obok wszystkie odcinki:

- a) równoległe do odcinka AB ,
 b) prostopadłe do odcinka AB .

•• 12 Wypisz te litery drukowane, które są zbudowane tylko z odcinków.

A B C D E F G H I J K L Ł
 M N O P R S T U V W Y Z

- a) W których z nich występują odcinki równoległe?
 b) W których z nich występują odcinki prostopadłe?



••• 13 Narysuj prostą m oraz dwa różne punkty A i B nieleżące na tej prostej. Następnie narysuj:

- a) prostą prostopadłą do prostej m , przechodzącą przez punkt A ,
 b) prostą równoległą do prostej m , przechodzącą przez punkt B ,
 c) półprostą o początku w punkcie A , równoległą do prostej m .
 Ile jest takich półprostych?
 d) odcinek o jednym końcu w punkcie B , prostopadły do prostej m . Ile jest takich odcinków?



Podręcznik
 s. 76, zad. 7
 Rysowanie
 prostych
 równoległych

••• 14 Popatrz na zaznaczone obok punkty.
 Nie rysując żadnych prostych ani odcinków,
 odpowiedz na pytania.

- a) Czy na prostej AB leży punkt D ?
 b) Czy odcinki AB i CD się przecinają?
 c) Czy proste AB i CD się przecinają?
 d) Czy półproste AB i CD się przecinają?
 e) Czy półproste AB i DC się przecinają?

$A \cdot$

$\cdot B$

$\cdot C$

$D \cdot$

15 Narysuj prostą i zaznacz na niej cztery punkty.

- Wskaż odcinek, którego końcami są dwa z zaznaczonych punktów. Ile takich odcinków możesz wskazać?
- Ile będzie odcinków o końcach w zaznaczonych punktach, jeśli dorysujesz jeszcze jeden punkt?
- A ile ich będzie, jeśli na prostej zaznaczysz aż dziesięć punktów?



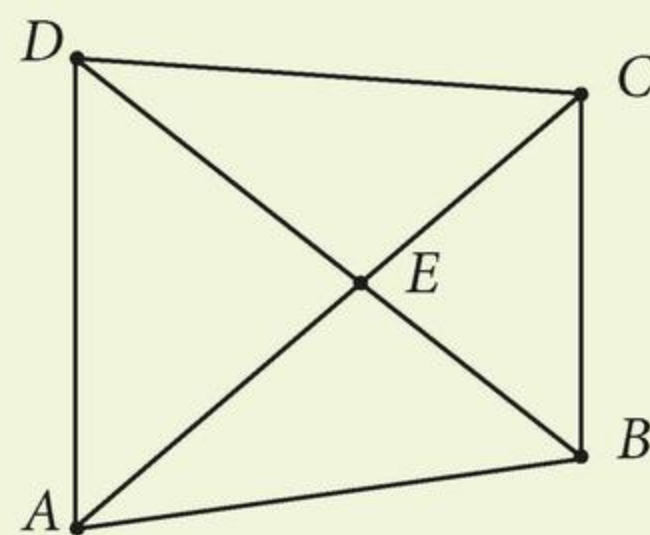
Dla dociekliwych

Narysuj na gładkiej kartce dwie równoległe proste: a i b . Następnie narysuj dwie równoległe proste: c i d , nierównoległe do prostych a i b . Ile jest punktów przecięcia prostych? Ile punktów przecięcia może powstać, gdy narysujesz jeszcze jedną prostą, nierównoległą do żadnej z prostych: a , b , c , d ? Podaj wszystkie możliwości i wykonaj odpowiednie rysunki.



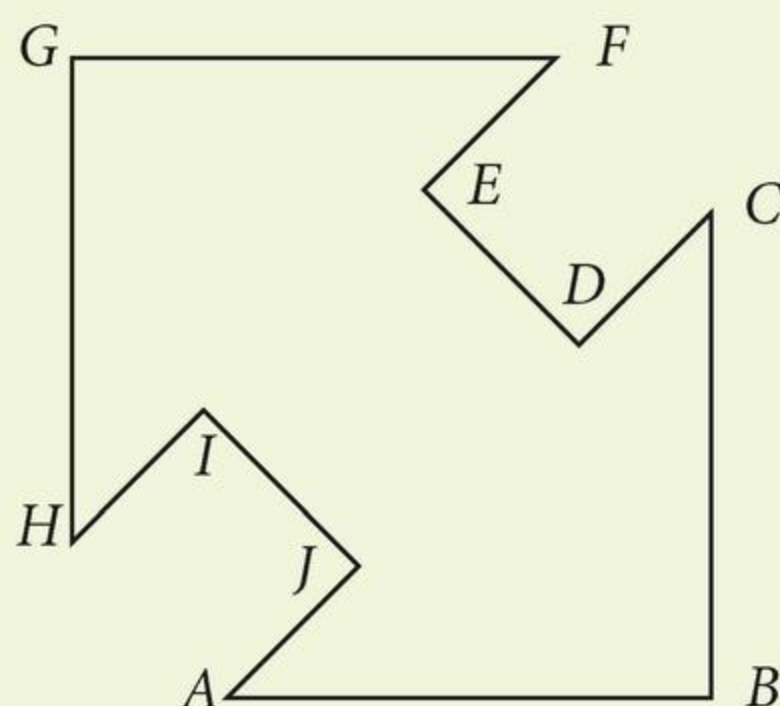
Czy już umiem?

I Które z punktów zaznaczonych na rysunku należą do odcinka BD ?



II Popatrz na rysunek obok i wypisz wszystkie odcinki:

- równoległe do odcinka AB ,
- prostopadłe do odcinka AB ,
- równoległe do odcinka AJ .



III Narysuj punkty A , B , C nieleżące na jednej prostej, a następnie narysuj:

- na zielono – odcinek BC ,
- na niebiesko – prostą AC ,
- na czarno – półprostą AB .

2

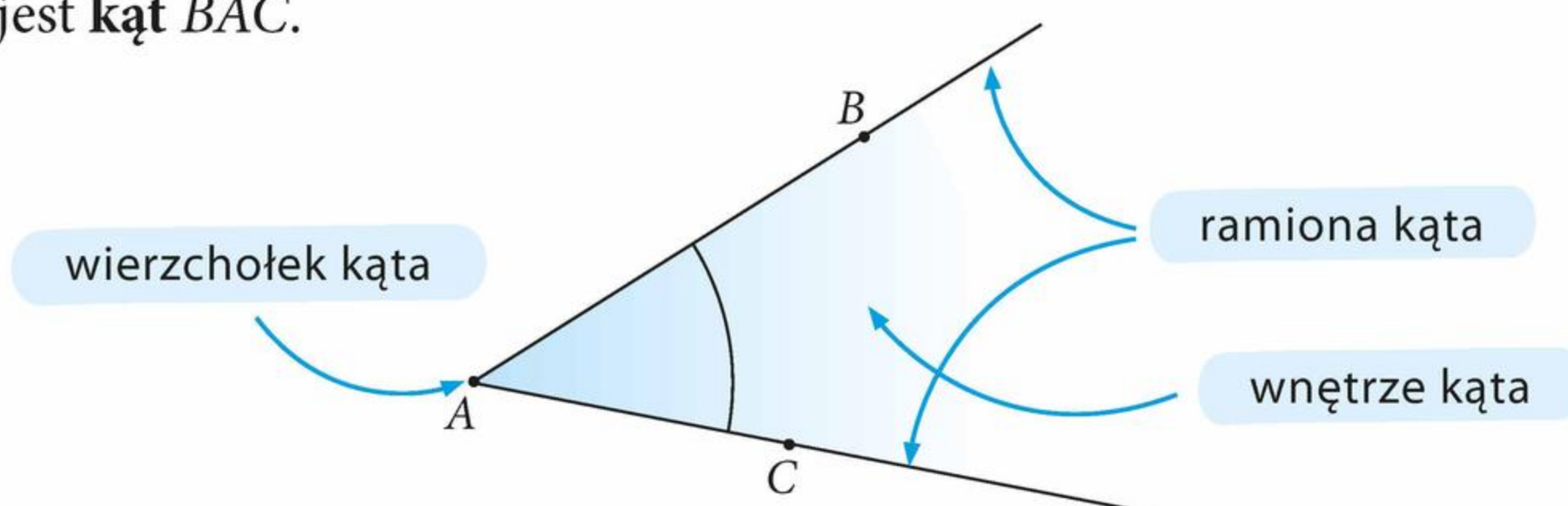
Kąty. Rodzaje kątów

  Na dobry początek

Wycinamy kąty

- ▶ Złóż kartkę, rozłóż ją i złóż jeszcze raz tak, aby linie zgięcia przecięły się, ale nie były prostopadłe.
- ▶ Rozłóż kartkę. Narysuj cyrklem okrąg o promieniu 3 cm i środku w punkcie przecięcia otrzymanych linii. Następnie czterema różnymi kolorami zamaluj obszary powstałe między liniami zgięcia.
- ▶ Rozetnij kartkę na liniach zgięcia. Masz przed sobą cztery kąty. Przyjrzyj się im, a następnie obejrzyj kąty otrzymane przez kolegę lub koleżankę z ławki. Nie wyrzucaj kątów, będą potrzebne później.

To jest **kąt BAC**.

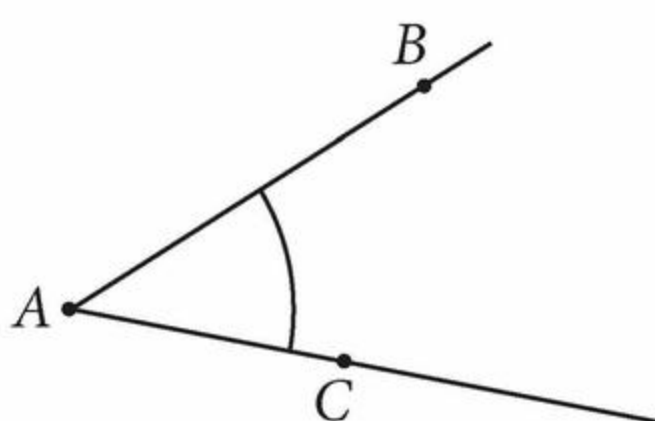


Punkt A nazywamy **wierzchołkiem kąta**.

Półproste AB i AC nazywamy **ramionami kąta**.

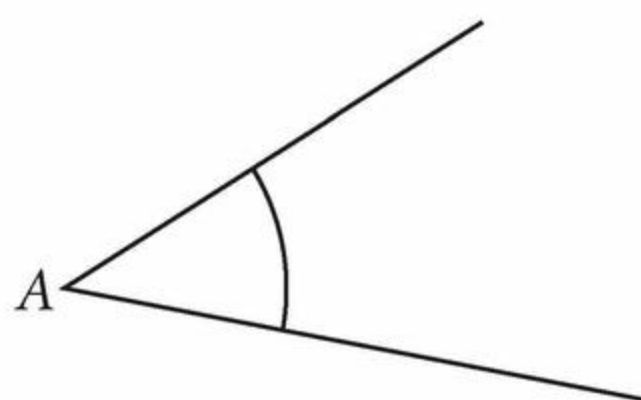
Część płaszczyzny między ramionami kąta to **wnętrze kąta**.

Kąty można oznaczać na różne sposoby:



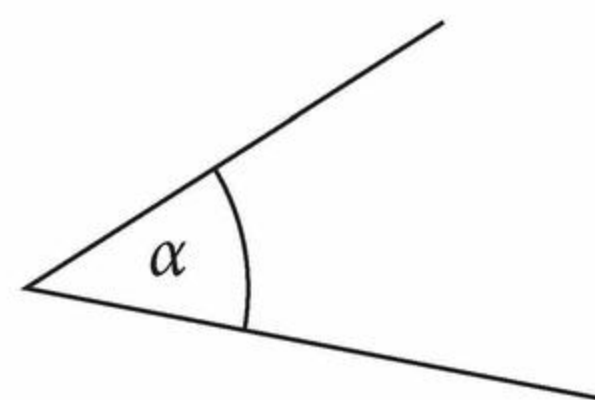
$\sphericalangle BAC$ lub $\sphericalangle CAB$

Czytamy:
kąt BAC lub kąt CAB
(punkt A jest wierzchołkiem
kąta, a półproste AB i AC
jego ramionami).



$\sphericalangle A$

Czytamy:
kąt A
(punkt A jest
wierzchołkiem kąta).



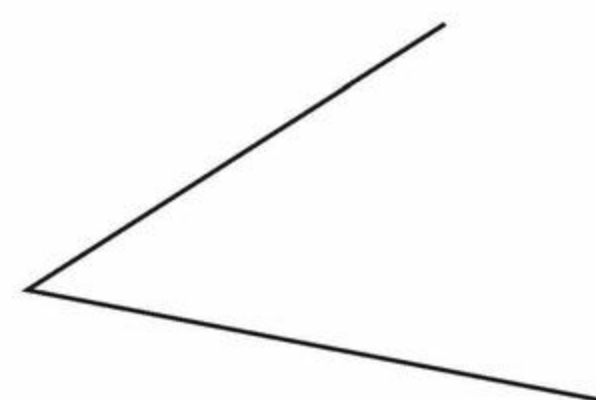
kąt α

Czytamy:
kąt alfa
(α – pierwsza litera
greckiego alfabetu).

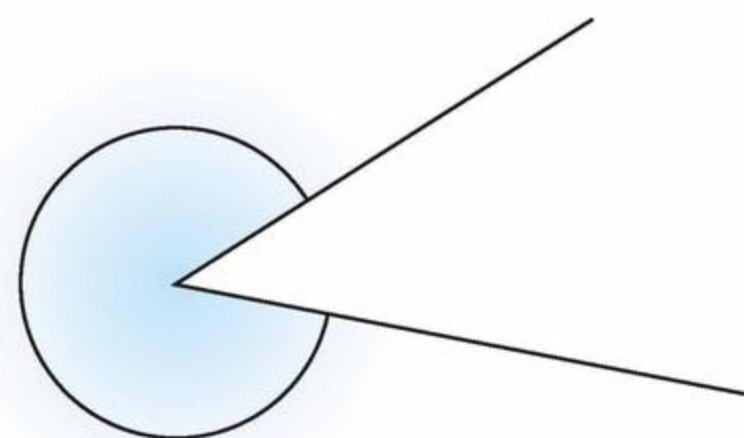
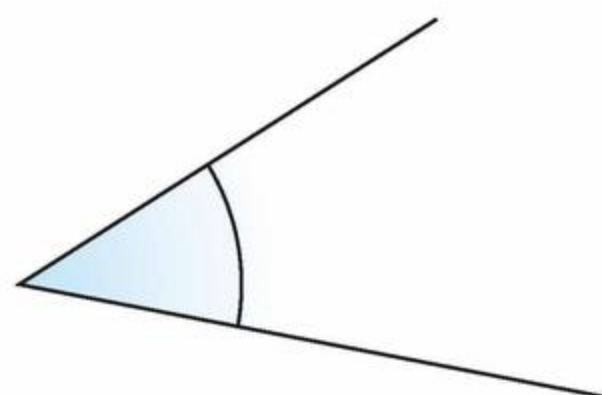
W matematyce często używa się liter alfabetu greckiego. Przedstawiono je w tabeli poniżej wraz z polską wymową.

Alfabet grecki			
α – alfa (a)	η – eta (e)	ν – ni (n)	τ – tau (t)
β – beta (b)	θ – teta (th)	ξ – ksi (ks, x)	υ – ipsylon (y)
γ – gamma (g)	ι – jota (i)	$\omicron$ – omikron (o)	φ – fi (f)
δ – delta (d)	κ – kappa (k)	π – pi (p)	χ – chi (ch)
ε – epsilon (e)	λ – lambda (l)	ρ – ro (r)	ψ – psi (ps)
ζ – dzeta (z)	μ – mi (m)	σ – sigma (s)	ω – omega (o)

Na rysunku obok można znaleźć dwa różne kąty.



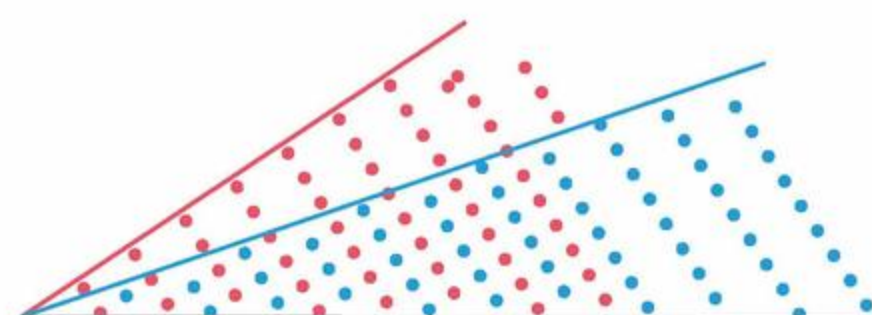
Zaznaczenie łukiem pozwala je odróżnić.



Porównywanie kątów

Dwa kąty na rysunku obok mają ten sam wierzchołek i jedno ramię wspólne.

Kąt czerwony jest większy od kąta niebieskiego.



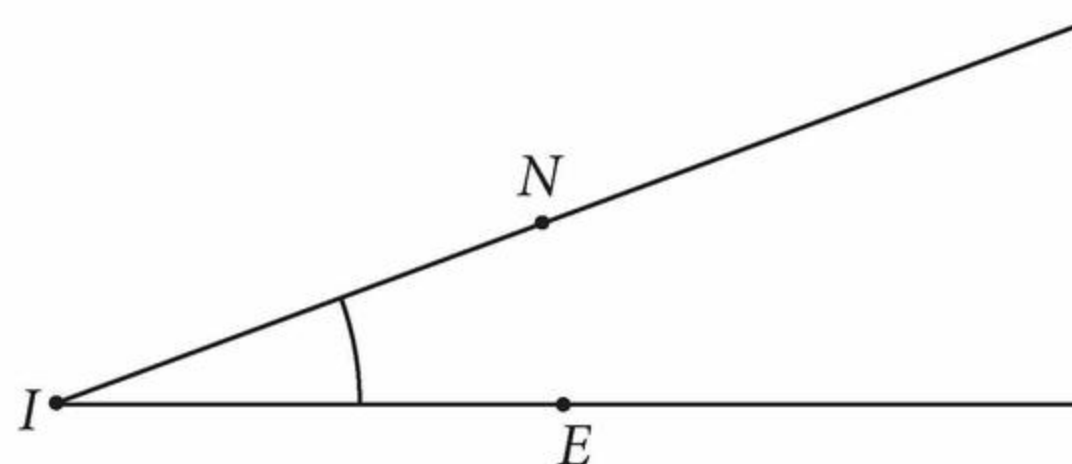
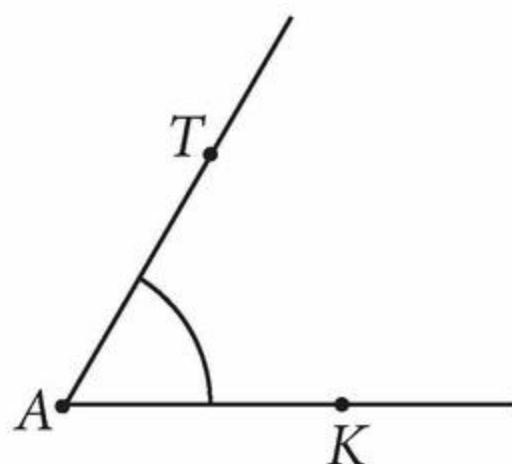
Który kąt
jest większy?

Te kąty są równe.



Przykład

Który z narysowanych poniżej kątów jest większy?

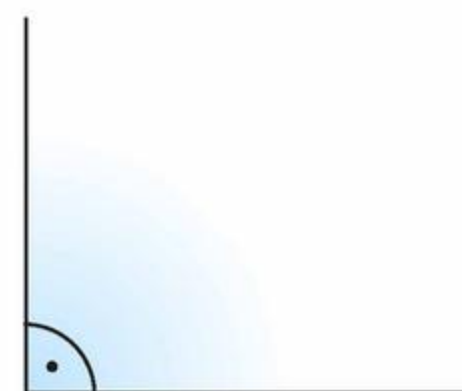


Żeby odpowiedzieć na to pytanie, wyobraź sobie, że wycinasz jeden z kątów i nakładasz na drugi, podobnie jak robią to dzieci na ilustracji na poprzedniej stronie.

Odp. Większym kątem jest kąt TAK .

Kąty: prosty, półpełny i pełny

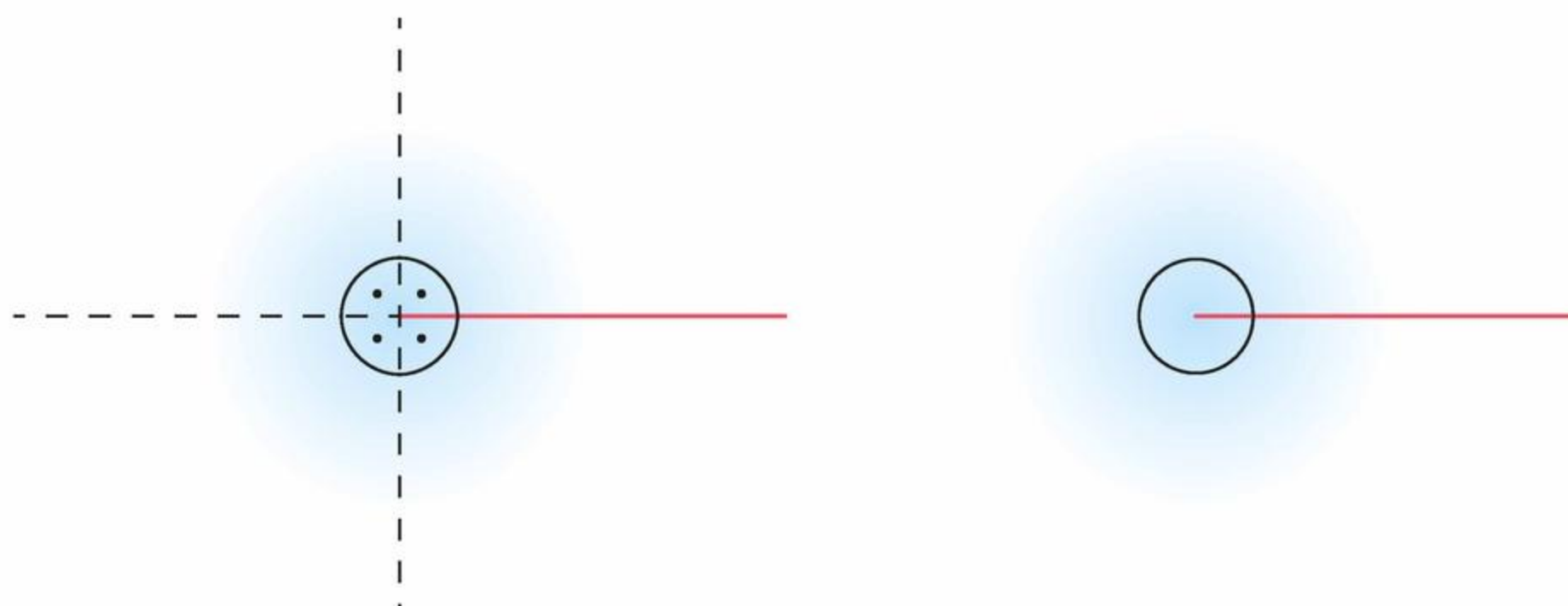
Kąt, którego ramiona są prostopadłe, to **kąt prosty**. Kąt prosty oznaczamy łukiem z kropką.



Dwa kąty proste ułożone tak jak na rysunku poniżej tworzą **kąt półpełny**. Jedno z ramion kąta półpełnego jest przedłużeniem drugiego ramienia tego kąta.

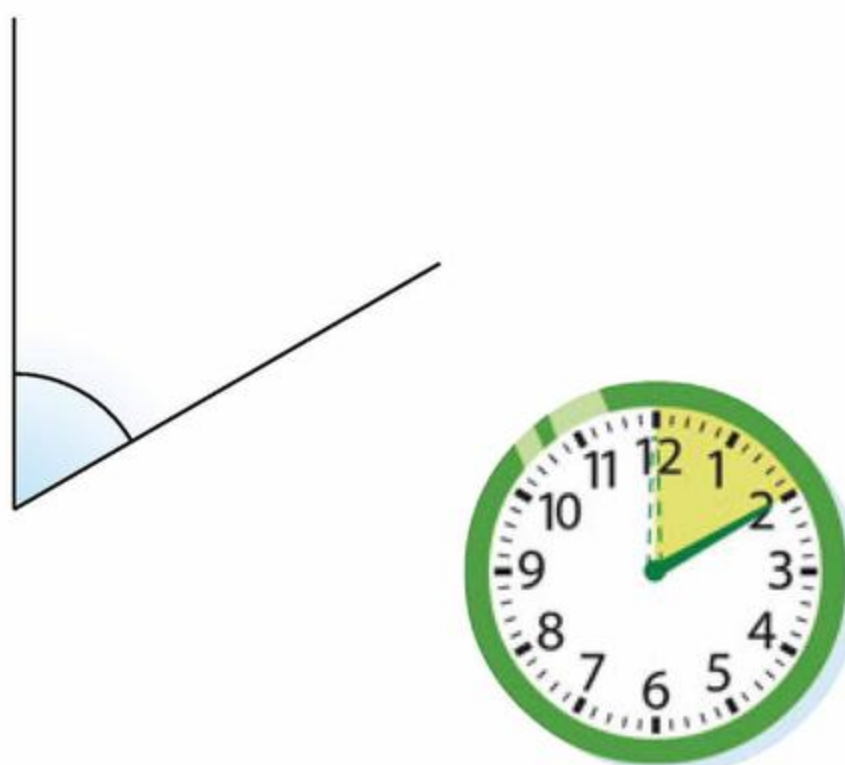


Cztery kąty proste ułożone tak jak na rysunku poniżej tworzą **kąt pełny**.

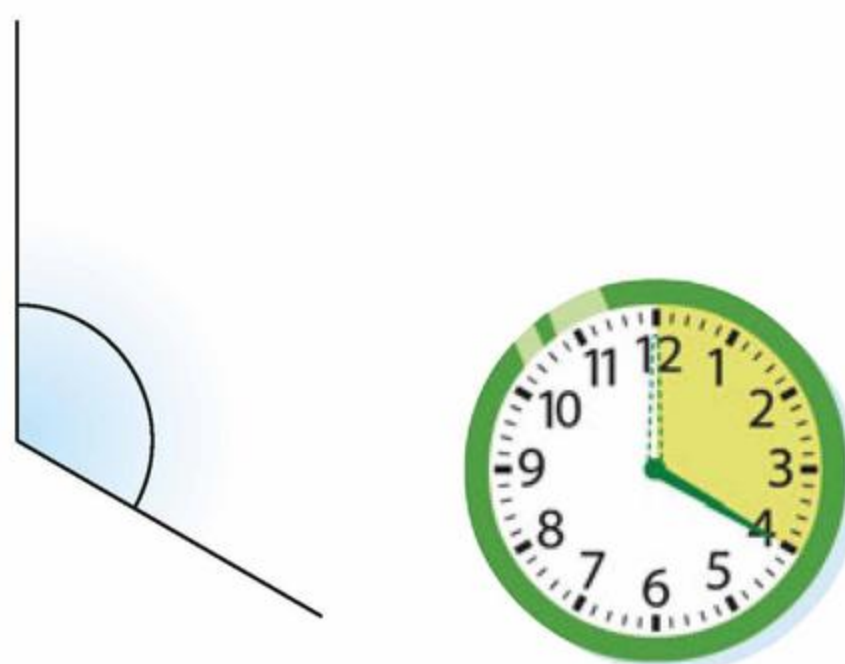


Kąty: ostre, rozwarte i wklęsłe

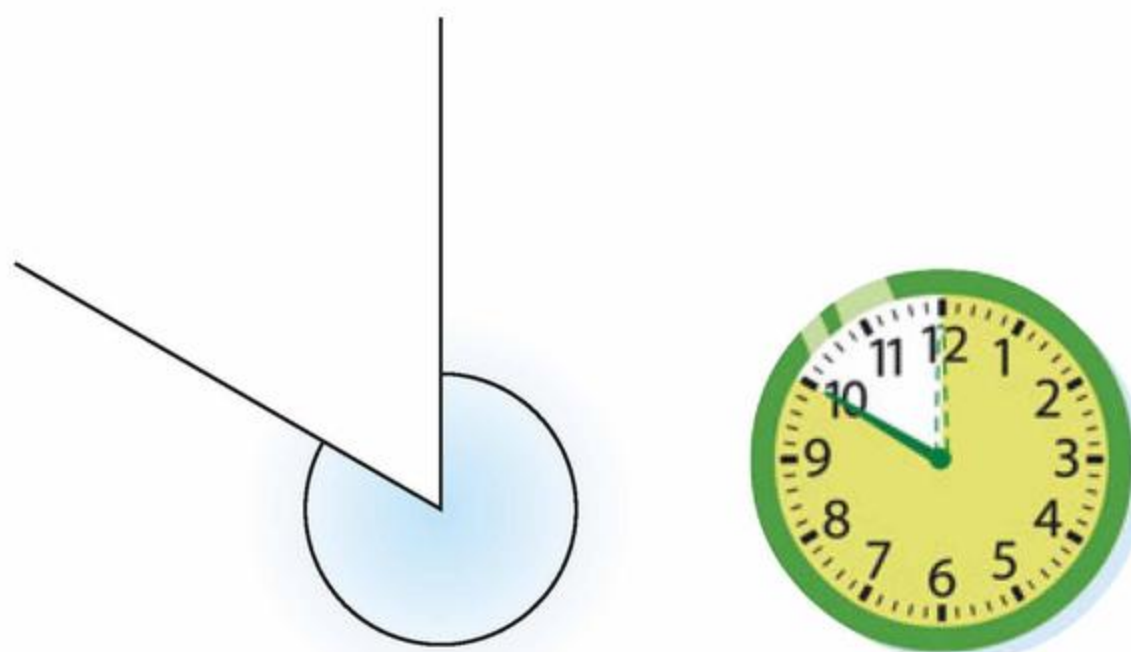
Kąty mniejsze od kąta prostego to **kąty ostre**.



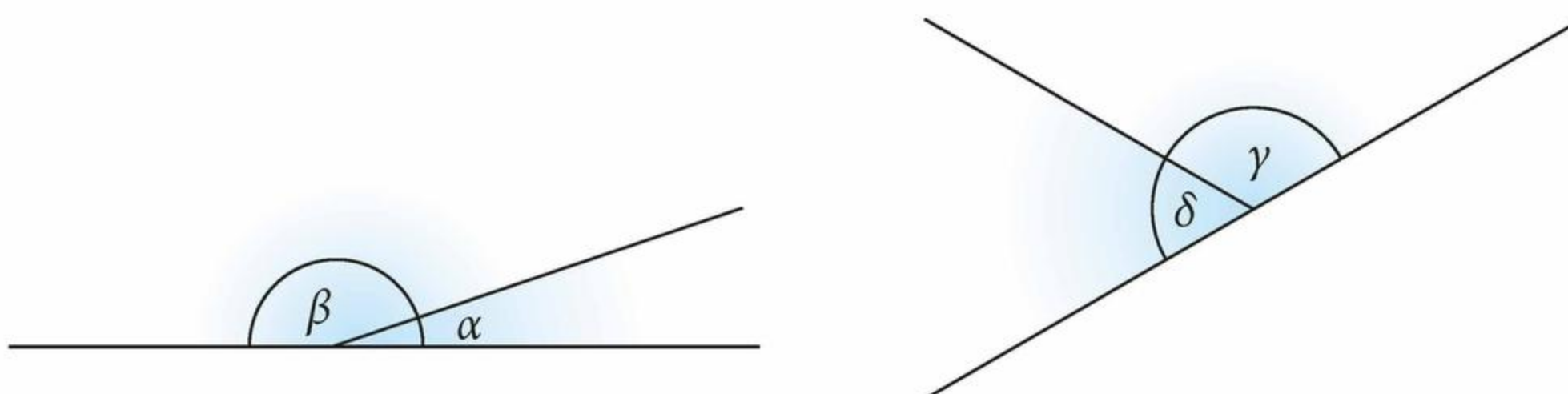
Kąty większe od kąta prostego, ale mniejsze od kąta półpełnego, to **kąty rozwarte**.



Kąty większe od kąta półpełnego, ale mniejsze od kąta pełnego, to **kąty wklęsłe**.

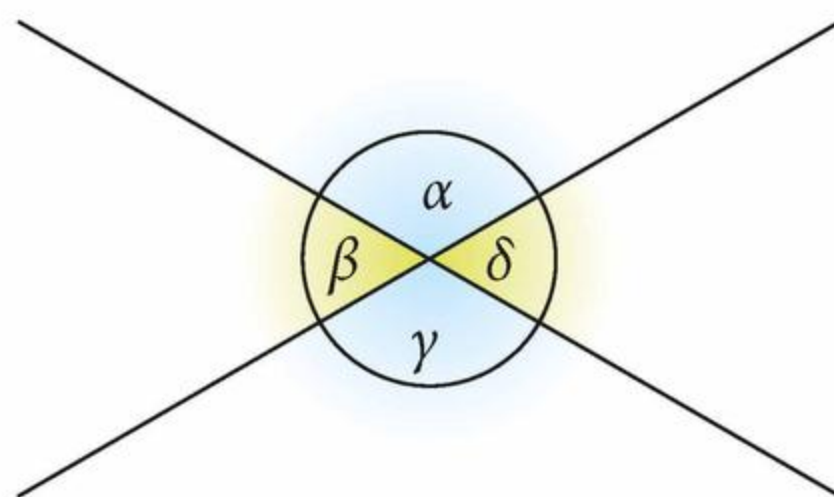


Kąty przyległe



Kąty α i β na rysunku powyżej tworzą kąt półpełny. Podobnie kąty γ i δ . Tak położone kąty nazywamy **kątami przyległymi**.

Kąty wierzchołkowe



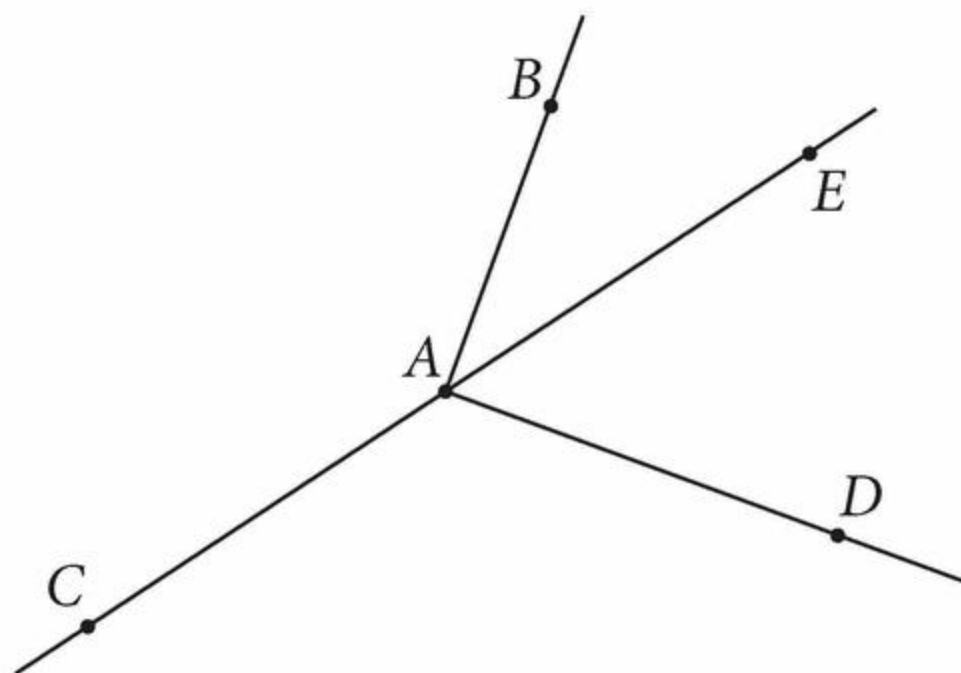
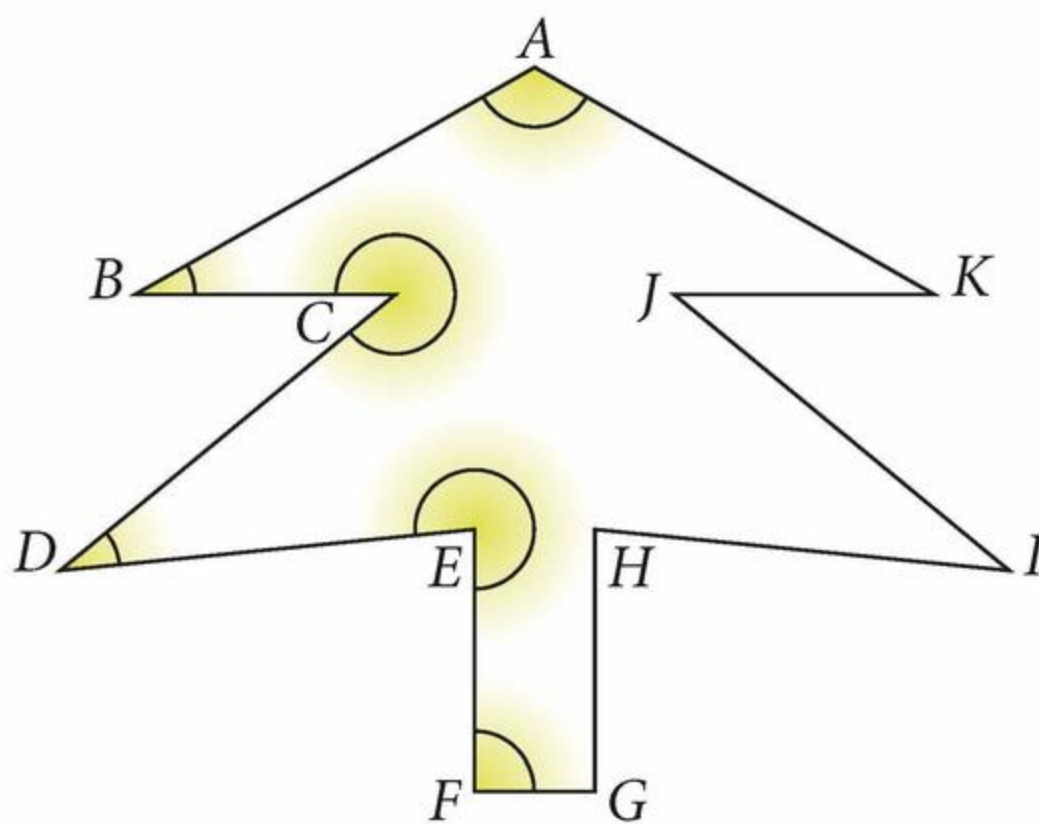
Kąty α i γ są równe. Tak położone kąty między dwiema prostymi nazywamy **kątami wierzchołkowymi**. Czy potrafisz wskazać na tym rysunku inną parę kątów wierzchołkowych?

Czy potrafisz wskazać na tym rysunku pary kątów przyległych?



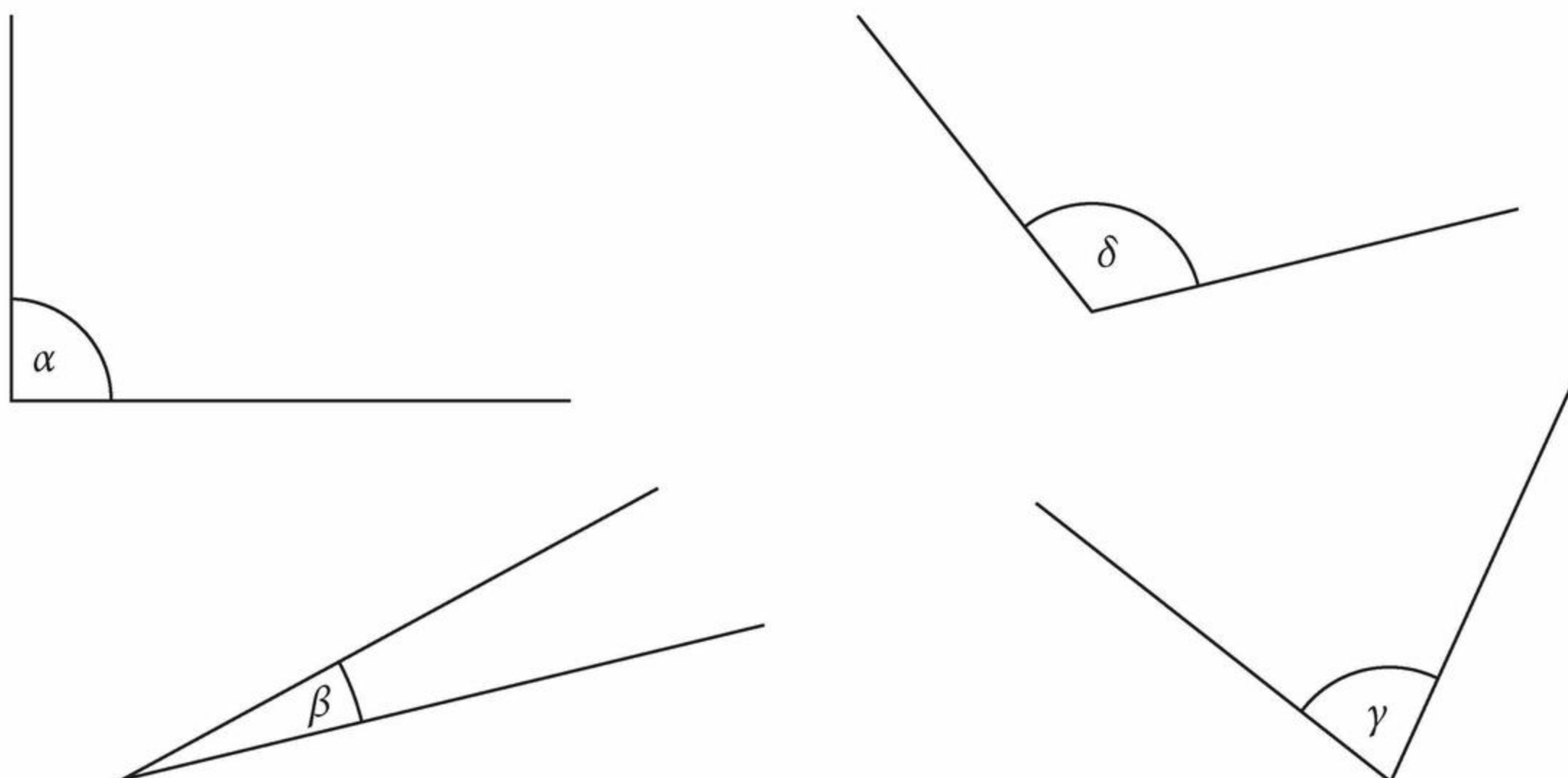
Zadania

- **1** Spróbuj przeczytać greckie słowo *γεωμετρία*, istniejące od lat także w języku polskim.
- **2** Narysuj kąty: ostry, prosty, rozwarty, półpełny i wklęsły. Oznacz literami wierzchołki kątów i punkty na ich ramionach. Podpisz wszystkie kąty (np. „kąt rozwarty BCD ”).
- **3** Wypisz kąty zaznaczone na rysunku obok łukami. Określ rodzaj każdego z tych kątów.
- **4** Wskaż w swoim otoczeniu kilka przykładów kątów i określ rodzaj każdego z nich (czyli ustal, czy jest ostry, prosty, rozwarty, półpełny, pełny czy wklęsły).
- **5** Znajdź na rysunku obok:
 - a) dwa kąty ostre,
 - b) dwa kąty rozwarte,
 - c) kąt prosty,
 - d) kąt półpełny.
 Zapisz ich nazwy.



II. Figury geometryczne

- **6** Weź do ręki kąty wycięte podczas zabawy „Wycinamy kąty” i wykonaj polecenia.
 - a) Znajdź dwa kąty równe.
 - b) Wybierz dwa różne kąty i wskaż większy z nich.
 - c) Wykorzystując ekierkę, wskaż kąty większe od kąta prostego.
 - d) Sprawdź, czy wśród wszystkich wyciętych kątów jest kąt mniejszy od każdego z kątów twojej ekierki.
- **7** Wskaż kąt najmniejszy i kąt największy. Następnie wypisz nazwy wszystkich kątów od najmniejszego do największego.



- **8** Którą godzinę wskazuje zegar? Jakiego rodzaju kąt: ostry, prosty czy rozwarty tworzą wskazówki tego zegara?

a)



b)



c)



- **9** Jakiego rodzaju kąt tworzą wskazówki zegara o podanej godzinie?

a) 15.00

b) 2.15

c) 18.00

- **10** Ustaw wskazówki zegara tak, aby tworzyły kąt:

a) ostry,

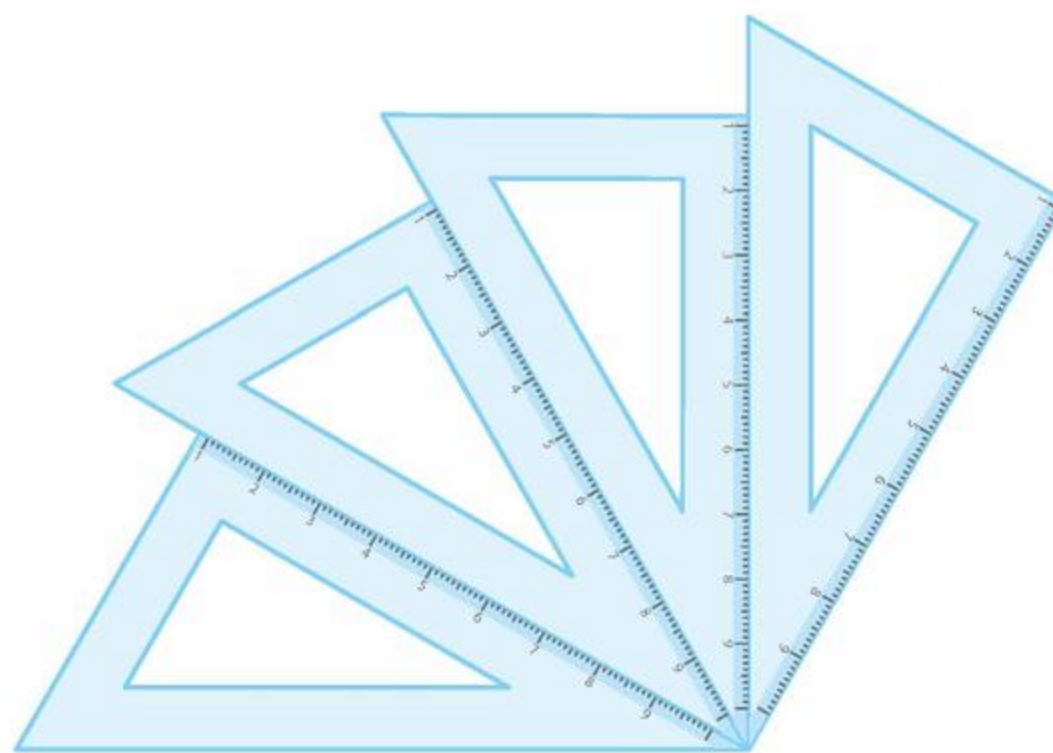
b) prosty,

c) rozwarty,

d) półpełny.

- 11 Jakiego rodzaju kąt zakresli minutowa wskazówka zegara:
- w ciągu kwadransa,
 - w ciągu pół godziny,
 - w czasie jednej godziny,
 - od godziny 12.10 do godziny 12.25?
- 12 Jakiego rodzaju kąt zakresli wskazówka godzinowa zegara w ciągu:
- dwóch godzin,
 - dziwięciu godzin,
 - pięciu godzin?
- 13 Ćwiczenie wykonajcie w kilkusobowych grupach. Zbierzcie jak najwięcej ekierek. Wybierzcie te ekierki, które mają każdy bok innej długości.

- W każdej z ekierek wskaźcie najmniejszy kąt.
- Sprawdźcie, czy najmniejsze kąty ekierek są równe.
- Ułóżcie wszystkie ekierki na blacie ławki tak, aby wierzchołki najmniejszych kątów stykały się w jednym punkcie.
- Jaki kąt powstanie z trzech takich kątów?
- Jaki kąt powstanie z sześciu takich kątów?
- Z ilu najmniejszych kątów takich ekierek można ułożyć kąt ostry, a z ilu – rozwarty?



Ułóżcie teraz ekierki tak, aby stykały się wierzchołkami innych kątów. Wymyślcie kilka podobnych pytań i na nie odpowiedzcie.

- 14 Przyjrzyj się fragmentowi planu miejscowości wypoczynkowej. Zaznaczone na nim działki są wielokątami o różnych kątach.

Które działki mają:

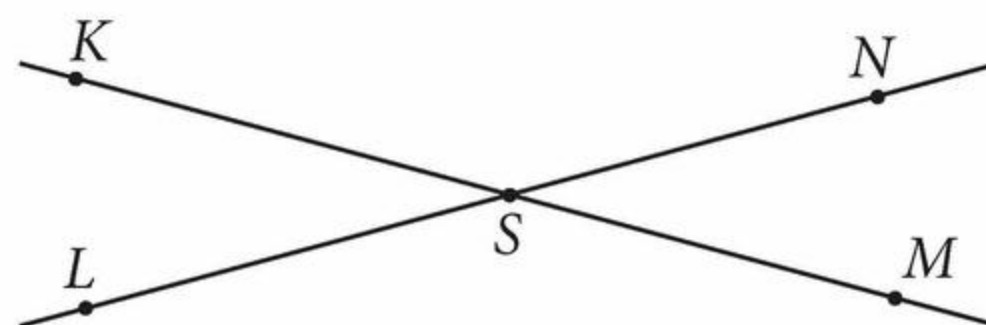
- kąt prosty,
- co najmniej dwa kąty ostre,
- dwa kąty ostre i dwa kąty rozwarte,
- kąt rozwarty, kąt ostry i dwa kąty proste?



•• 15 Znajdź na rysunku:

- dwie pary kątów wierzchołkowych,
- cztery pary kątów przyległych.

Zapisz ich nazwy.



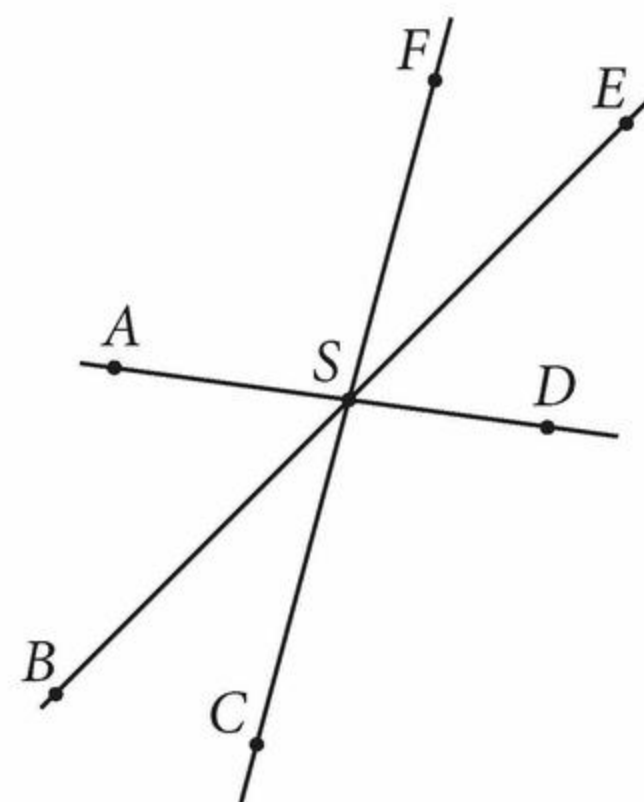
•• 16 Uporządkuj wachlarze, biorąc pod uwagę ich kąt rozchylenia – od najmniejszego do największego kąta. Następnie odczytaj hasło, a dowiesz się, jak nazywa się wachlarz w języku japońskim.



••• 17 Znajdź na rysunku:

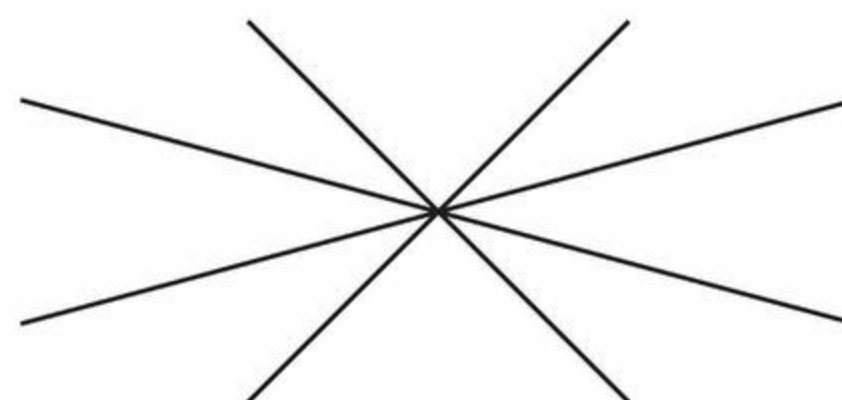
- kąt równy kątowi ASC,
- parę ostrych kątów wierzchołkowych,
- parę rozwartych kątów wierzchołkowych,
- kąt przyległy do kąta DSE,
- inną parę kątów przyległych.

Zapisz ich nazwy.



••• 18 O godzinie 3.00 wskazówki zegara tworzą dwa kąty, z których jeden jest prosty, a drugi wklęsły. Czy jest taka godzina, o której żaden z utworzonych przez wskazówki zegara kątów nie jest wklęsły?

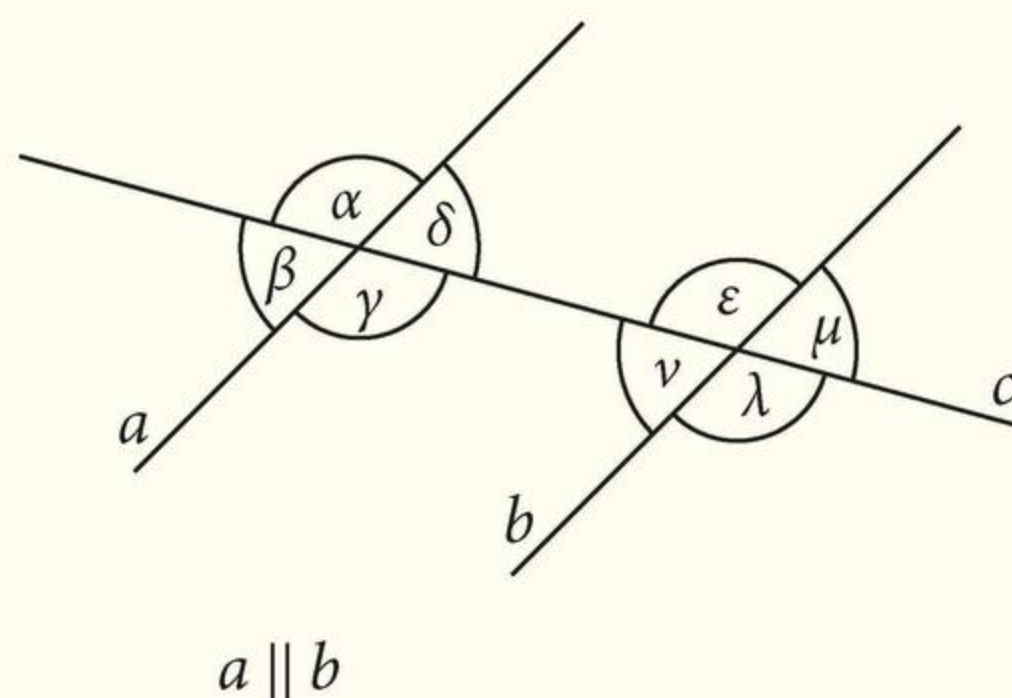
🏆 19 Ile kątów ostrych, ile prostych i ile rozwartych widać na rysunku obok?





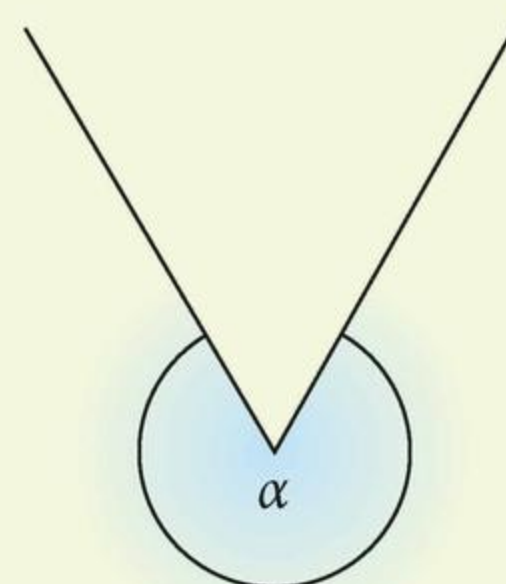
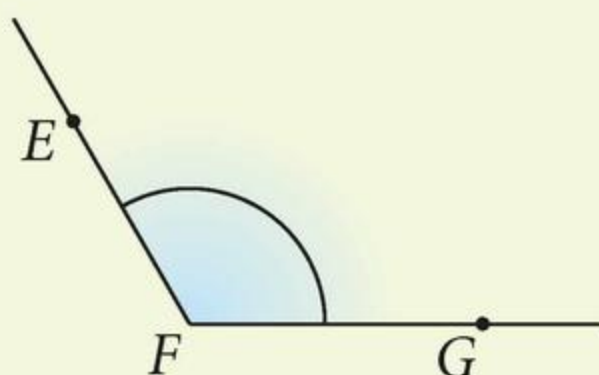
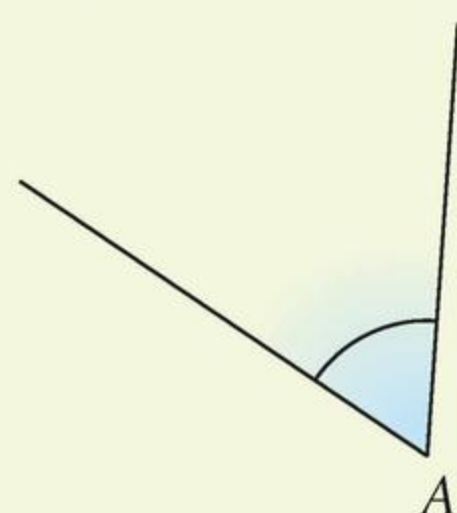
Dla dociekliwych

Przerysuj zamieszczoną obok ilustrację. Pamiętaj, że proste a i b mają być równoległe. Drugi podobny rysunek wykonaj na kartce z bloku. Następnie rozetnij rysunek wzdłuż prostych i sprawdź, które kąty są równe. Na rysunku w zeszycie zaznacz równe kąty takim samym kolorem.

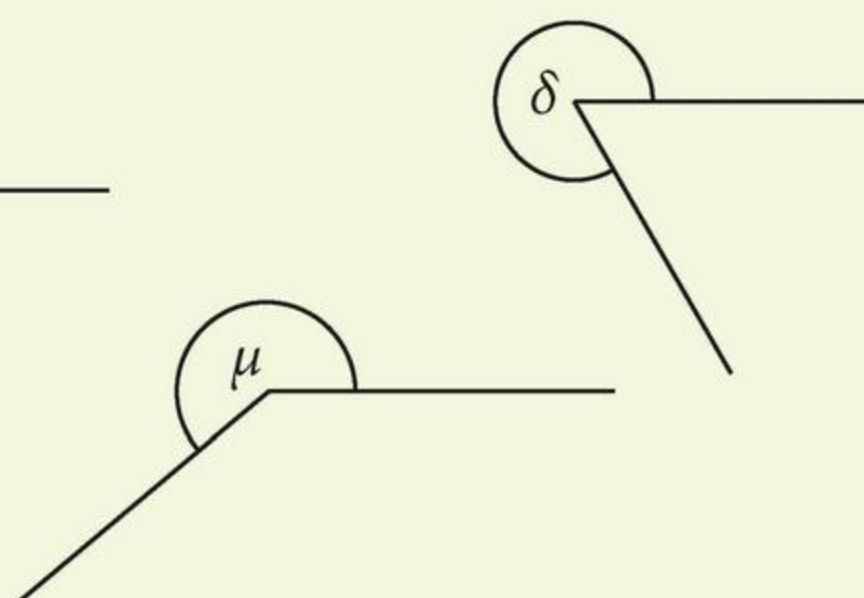
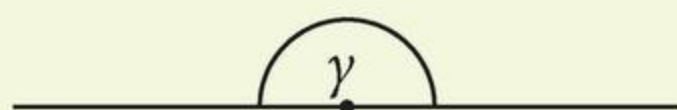
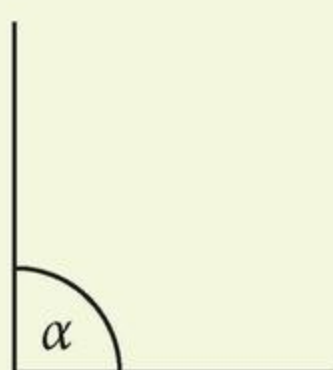
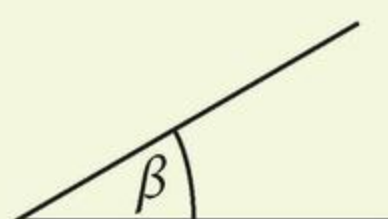


Czy już umiem?

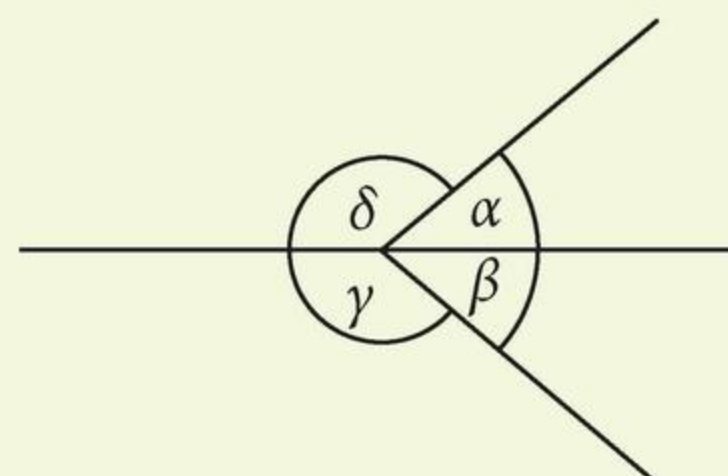
- I Zapisz nazwy kątów przedstawionych na rysunkach. Następnie określ, jakiego rodzaju kątem jest każdy z nich.



- II Uporządkuj kąty od najmniejszego do największego. Zapisz w odpowiedniej kolejności ich nazwy.



- III Który kąt jest przyległy do kąta β ?

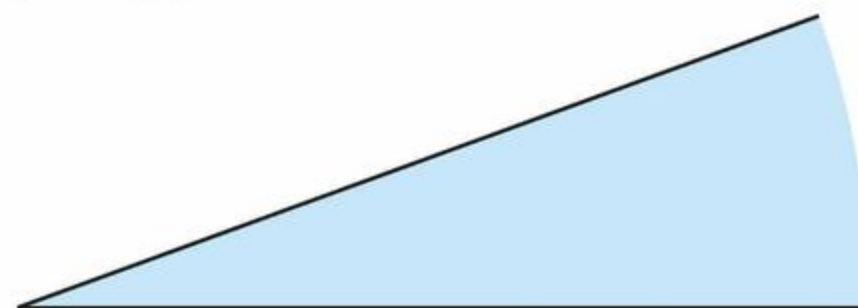


3 Mierzenie kątów

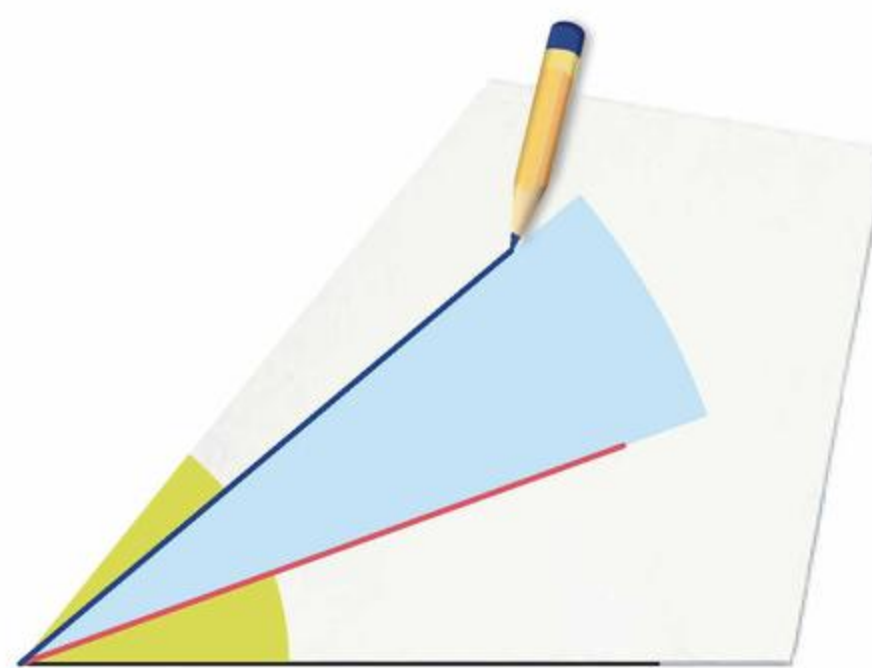
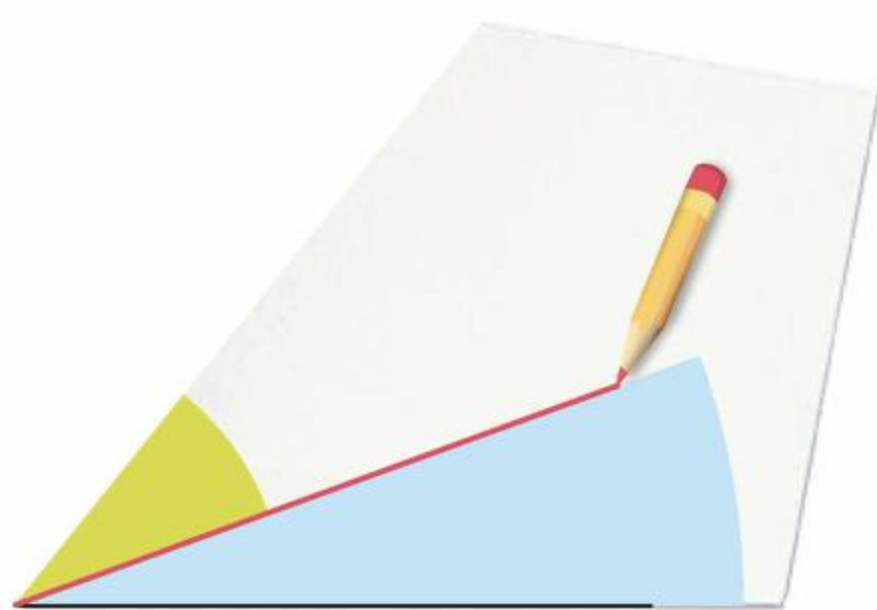
  Na dobry początek

Mierzymy kąty

Wytnij z papieru miarkę do mierzenia kątów podobną do przedstawionej na rysunku.



- ▶ Skorzystaj z kątów wyciętych podczas zabawy „Wycinamy kąty” opisanej na stronie 79.
Oszacuj, ile razy twoja miarka zmieści się w każdym z tych kątów.
- ▶ Sprawdź swoje szacowanie.

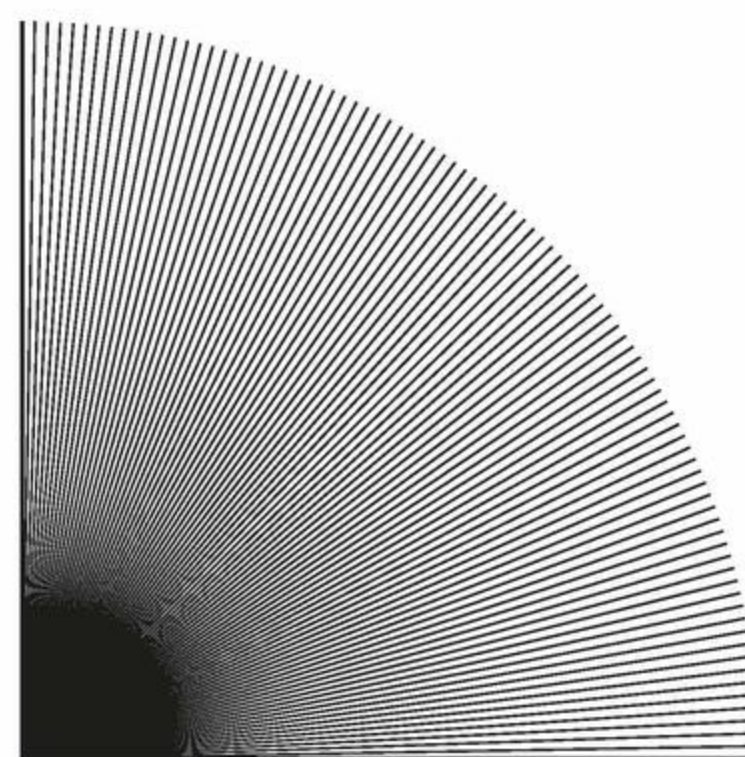


Kąty mierzymy w stopniach.

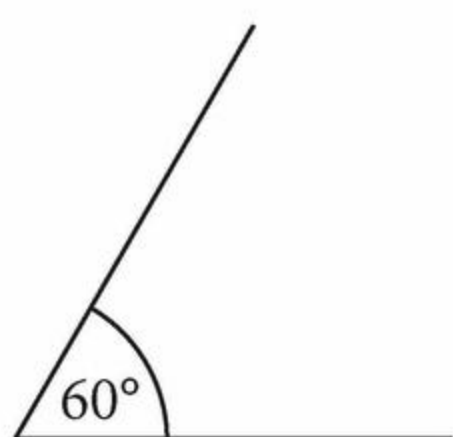
Na rysunku obok kąt prosty podzielono na 90 równych kątów. Każdy z nich ma **1 stopień**.

Kąt prosty ma więc 90 stopni (w skrócie: 90°).

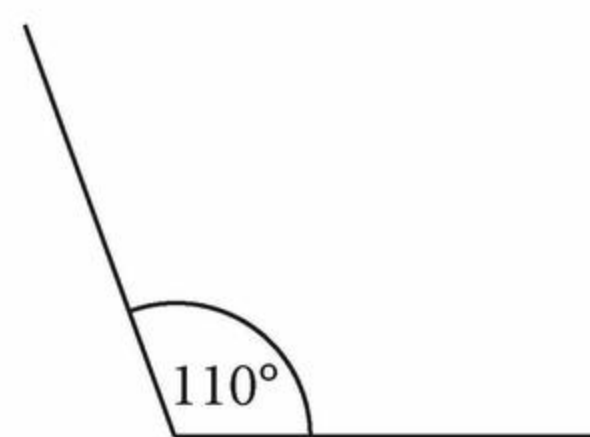
Mówimy też, że kąt prosty **ma miarę** 90° .



Kąt półpełny ma 180 stopni (180°), a kąt pełny 360 stopni (360°).



Każdy kąt ostry ma mniej niż 90° .



Każdy kąt rozwarty ma więcej niż 90° i mniej niż 180° .

Przykład

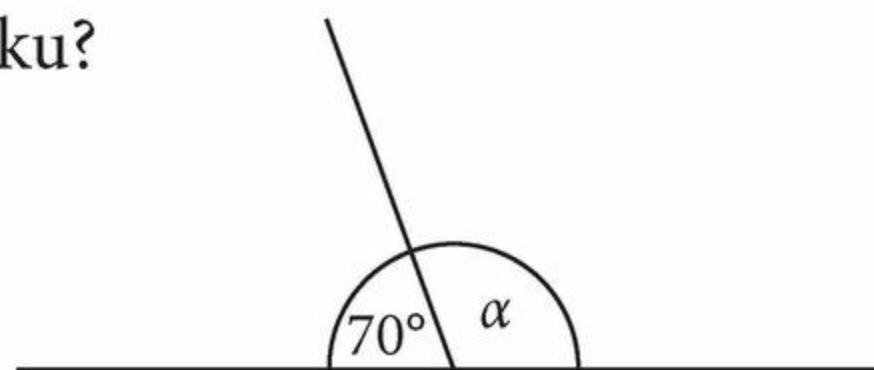
Ile stopni ma kąt α przedstawiony na rysunku?

Kąt α i kąt 70° są kątami przyległymi,
a więc razem tworzą kąt półpełny,
czyli kąt 180° .

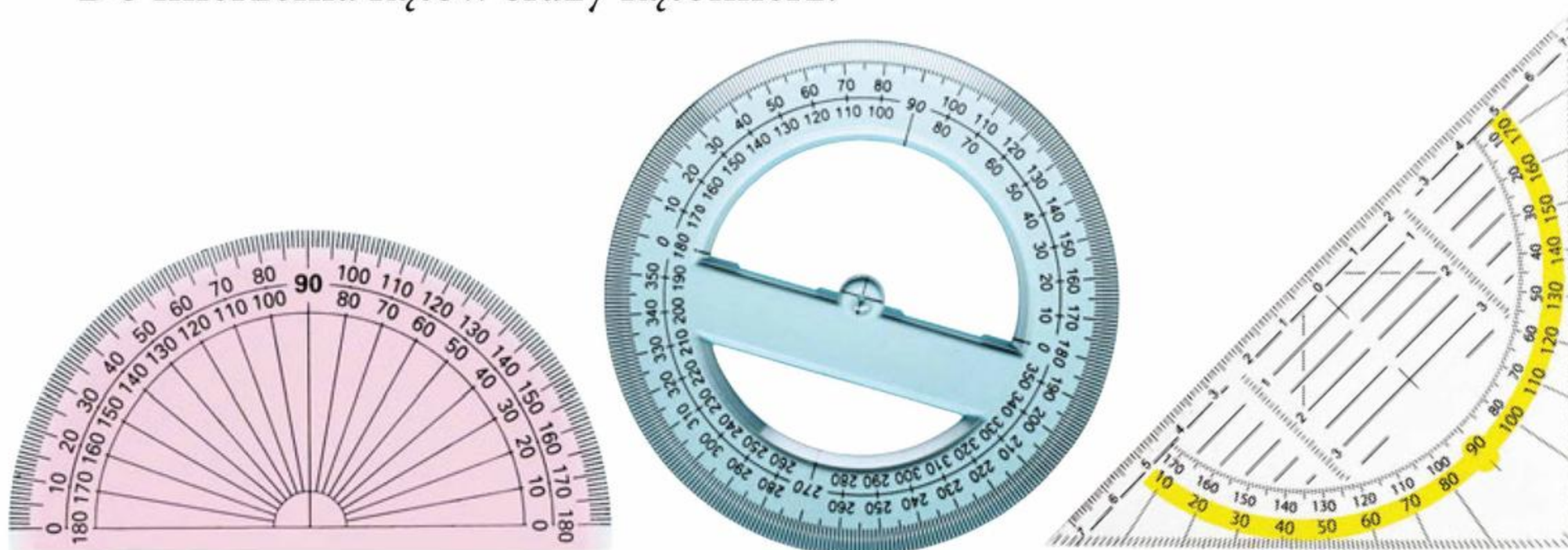
$$\alpha + 70^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 110^\circ$$

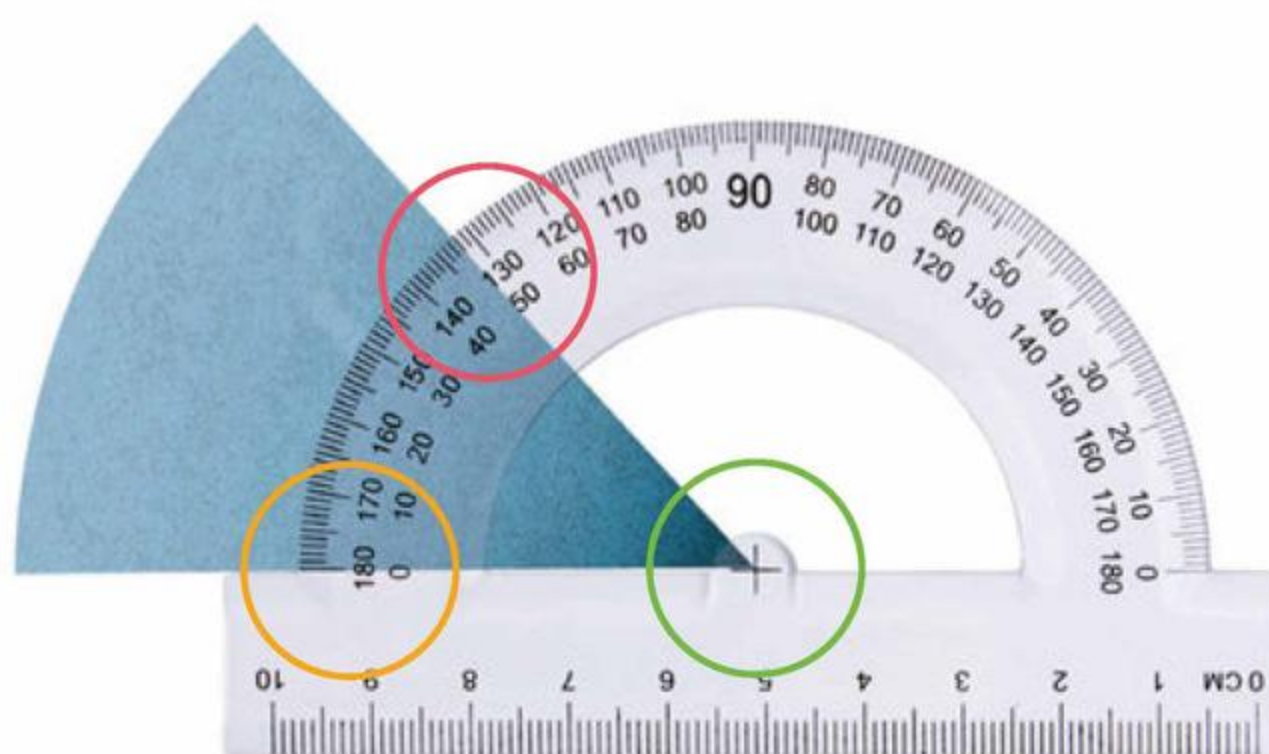
Odp. Kąt α ma 110° .



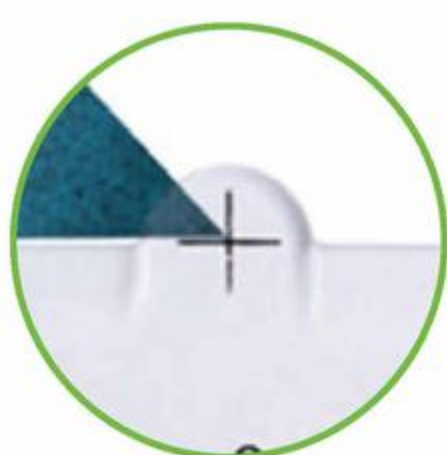
Do mierzenia kątów służy kątomierz.



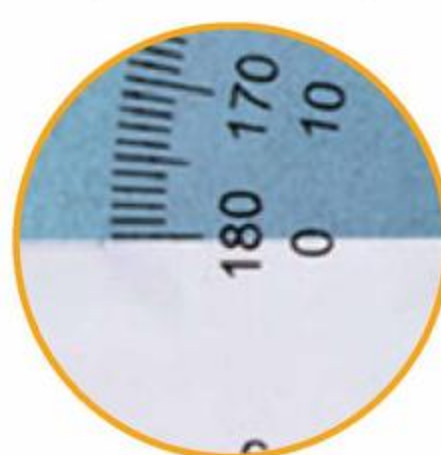
Jak mierzymy kąty?



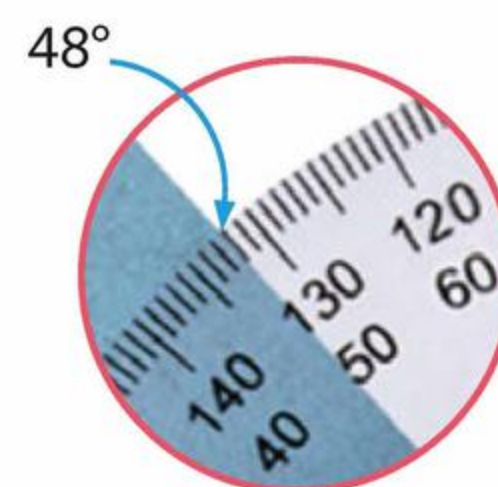
Ustaw kątomierz tak, aby
wierzchołek kąta znalazł się
w wyznaczonym miejscu,



a ramię kąta przechodziło
przez 0° na jednej skali –
z tej skali będziesz korzystać.



Odczytaj miarę
z właściwej skali: 48° .



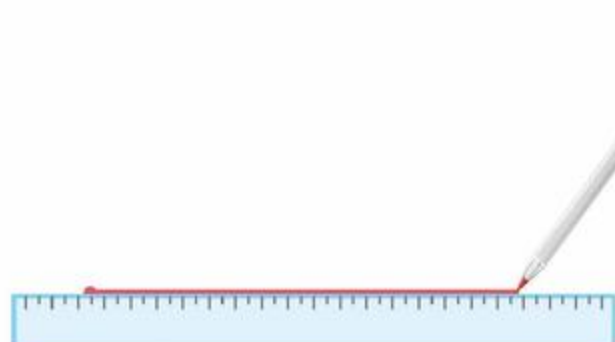
Dobra rada

Przed przystąpieniem do mierzenia kąta zawsze zastanów się, czy mierzysz kąt ostry czy rozwarty. Pozwoli ci to uniknąć błędów.



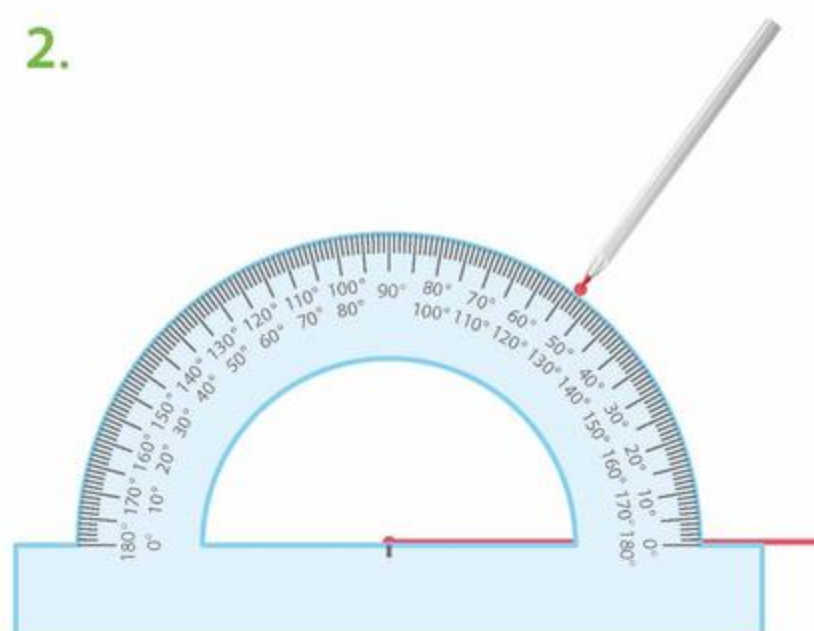
Jak narysować kąt o podanej liczbie stopni?

1.



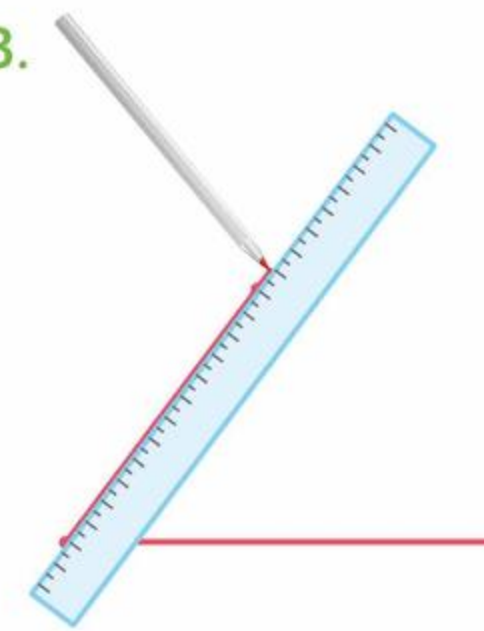
Zaznaczamy wierzchołek i rysujemy jedno ramię kąta.

2.



Ustawiamy kątomierz jak przy mierzeniu kątów. Zaznaczamy punkt przy właściwej skali kątomierza.

3.



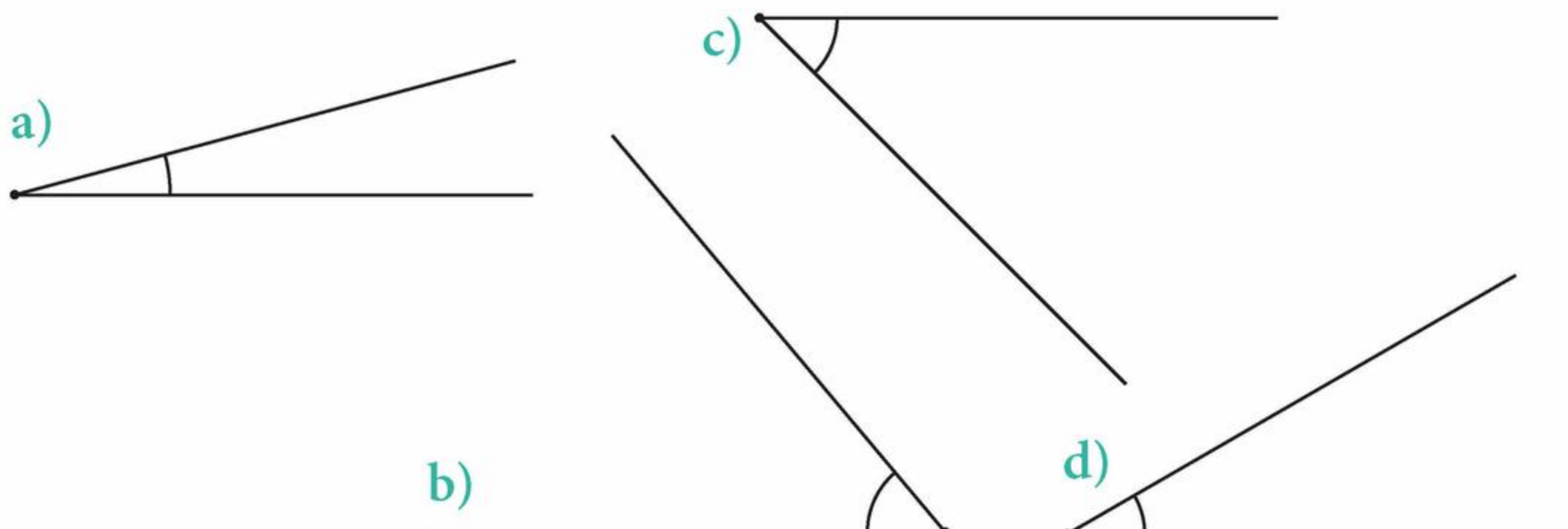
Rysujemy drugie ramię kąta.



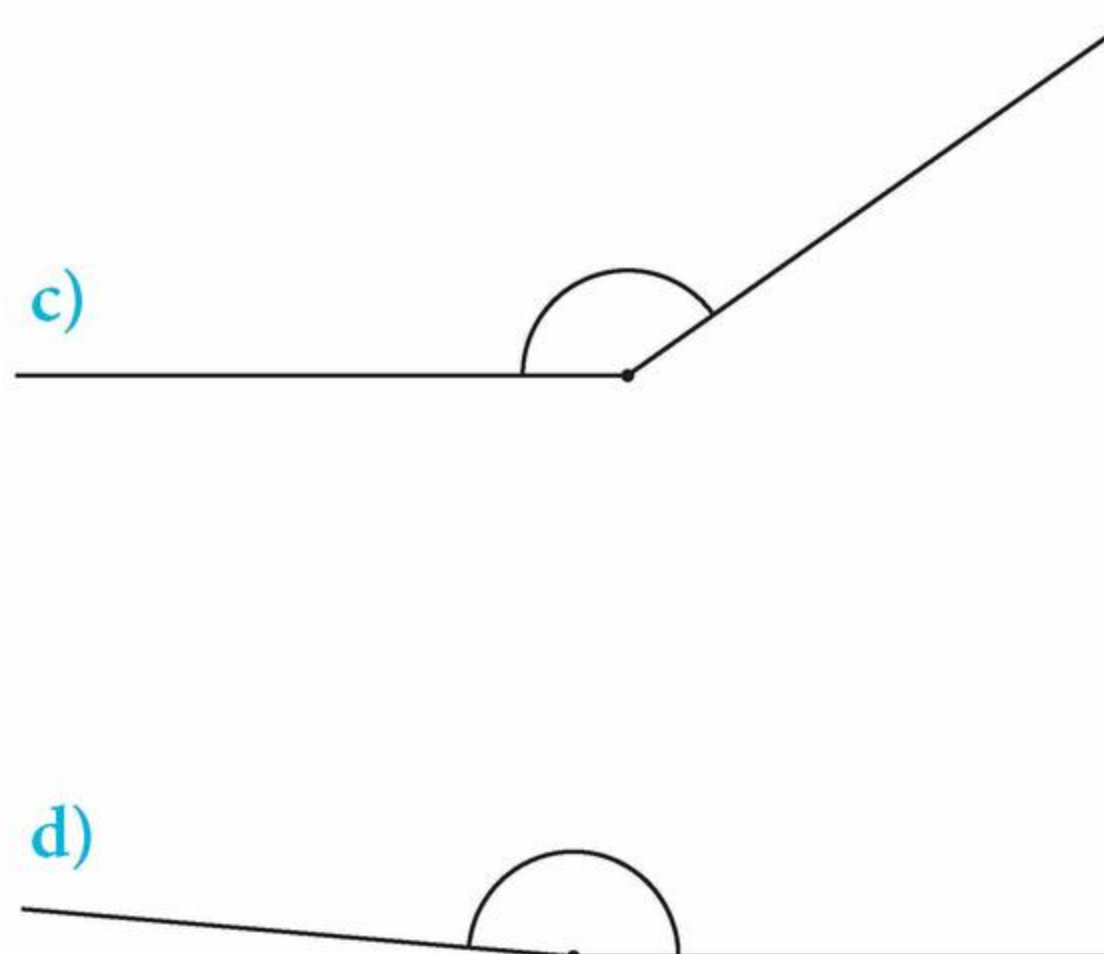
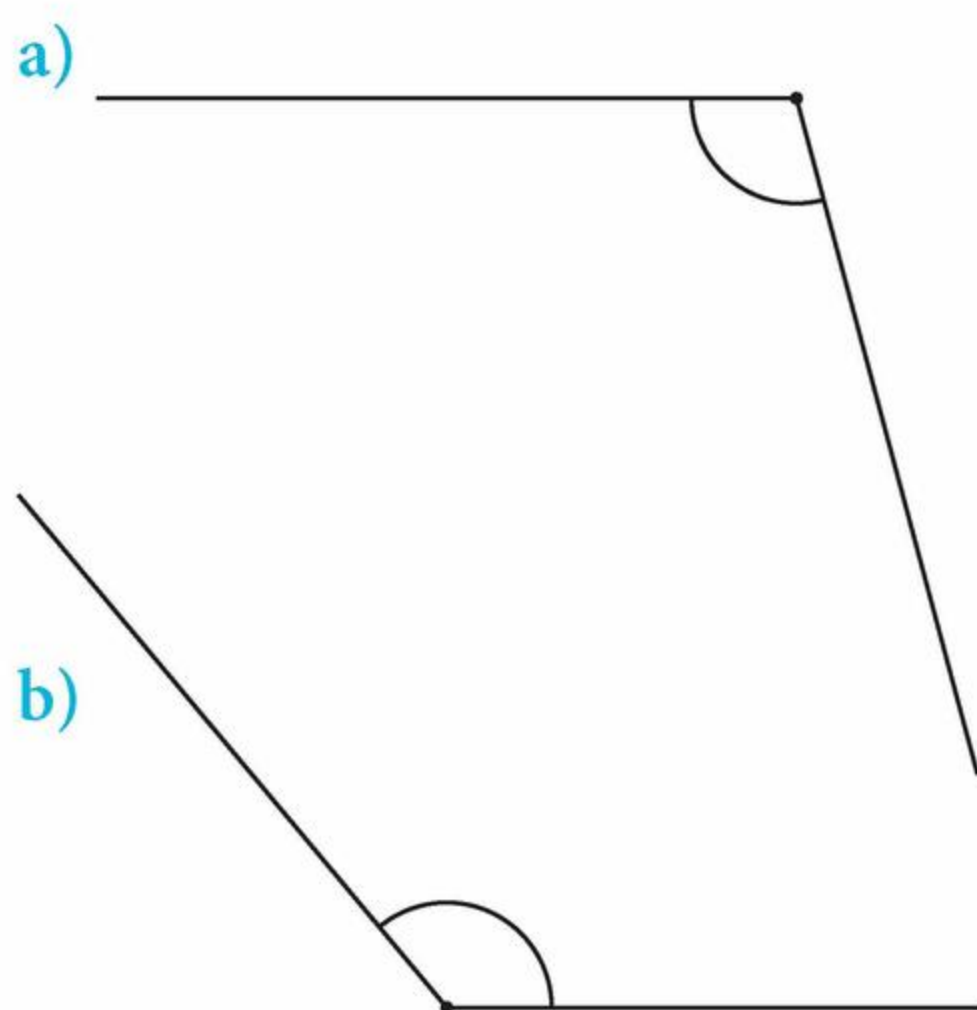
Zadania

- 1** Zmierz narysowane kąty. ► Jeśli poprawnie zmierzysz dwa kąty z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

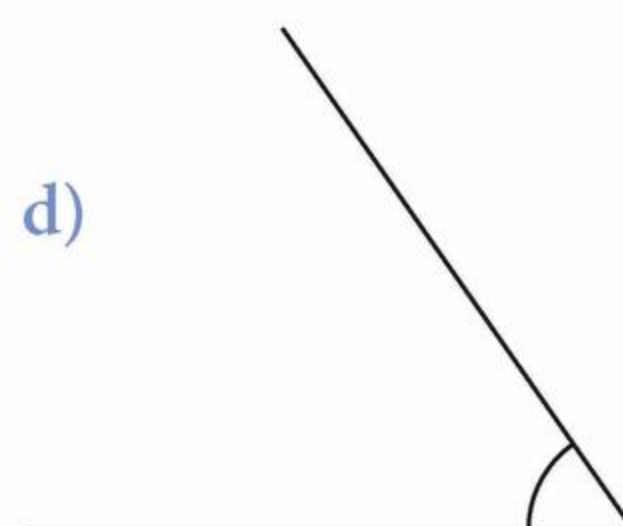
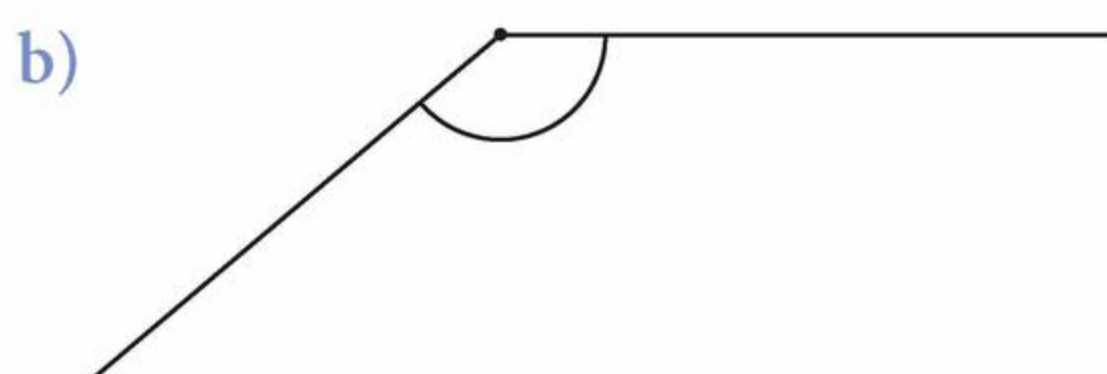
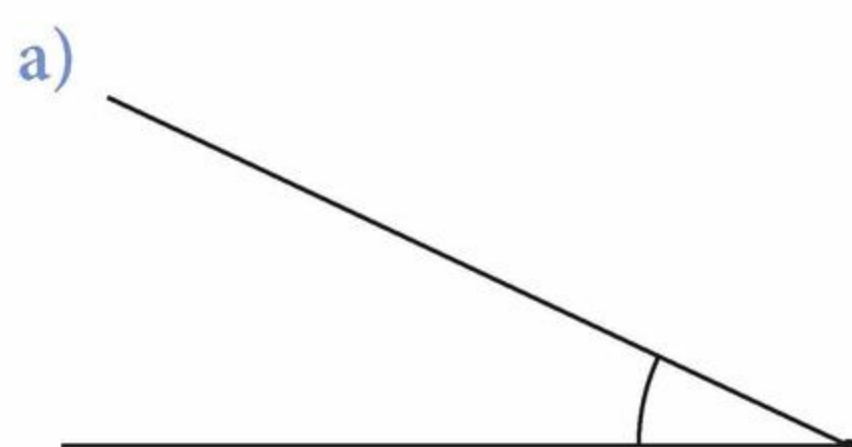
poziom A



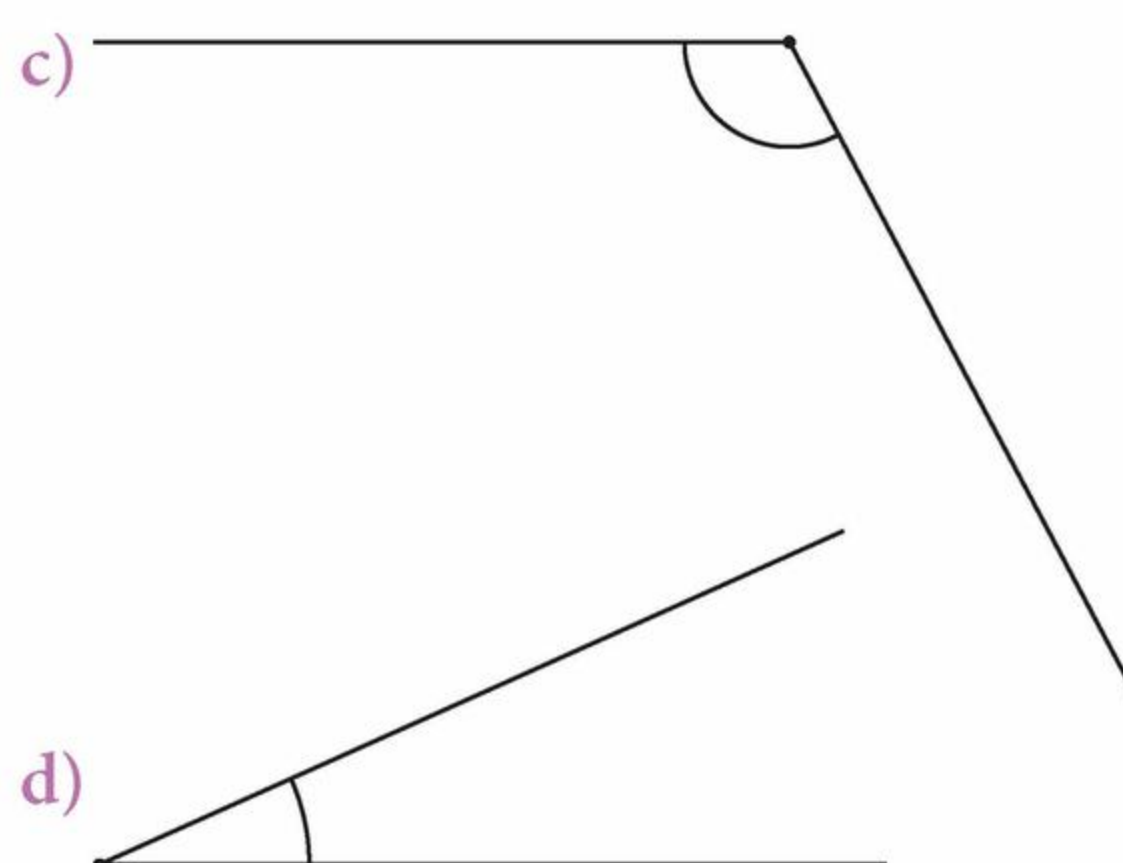
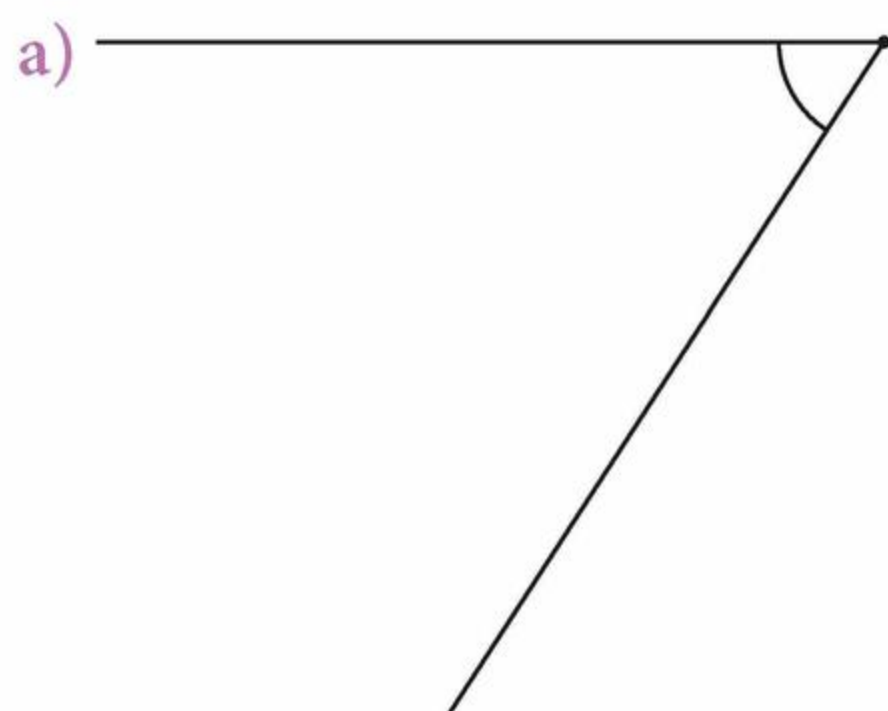
poziom B

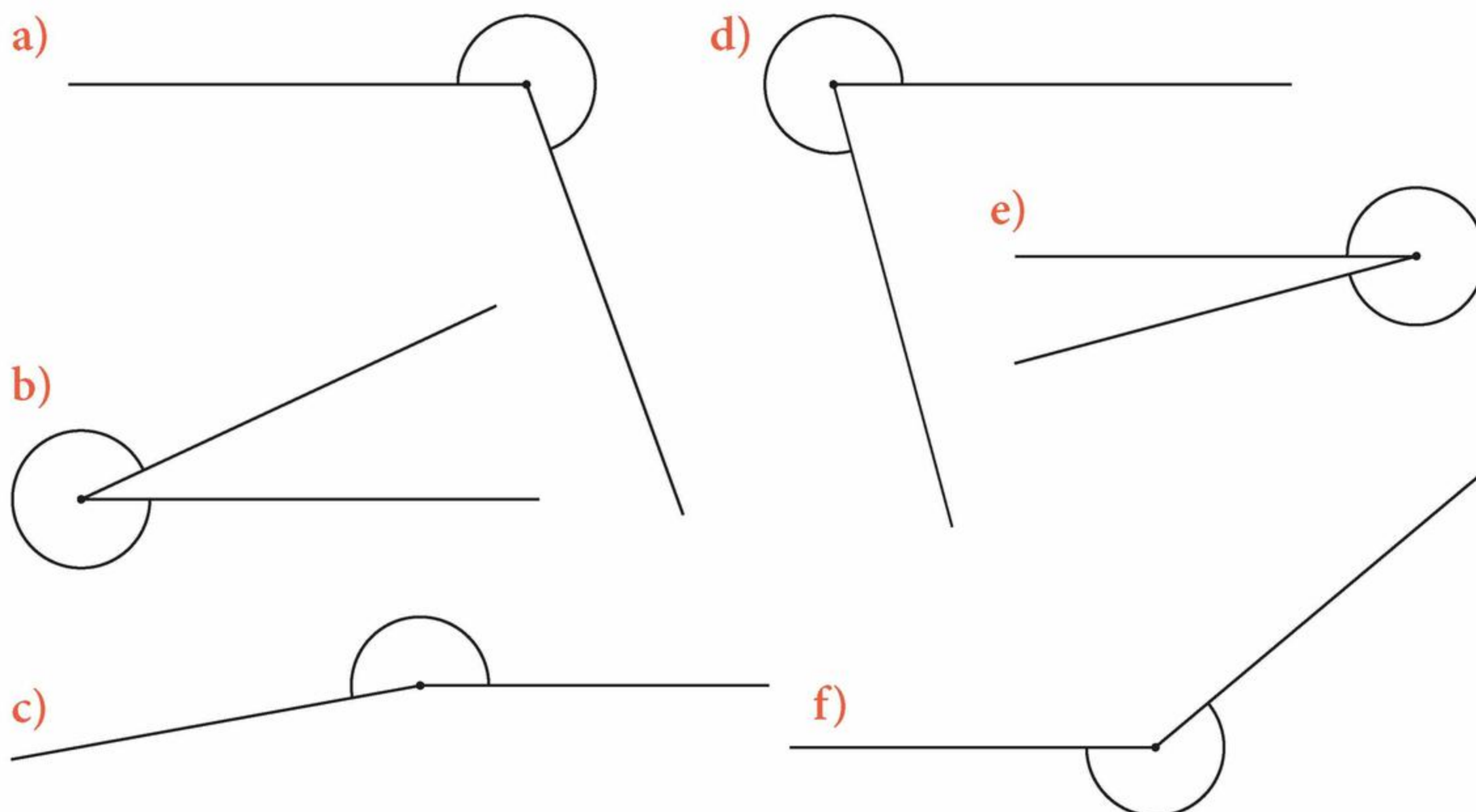


poziom C



poziom D





Wskazówka Skorzystaj z informacji zawartych w ramce „Dla dociekliwych” na s. 96.

- **2** Jakiego rodzaju to kąt? Wybierz określenie z chmurki.

a) 45°

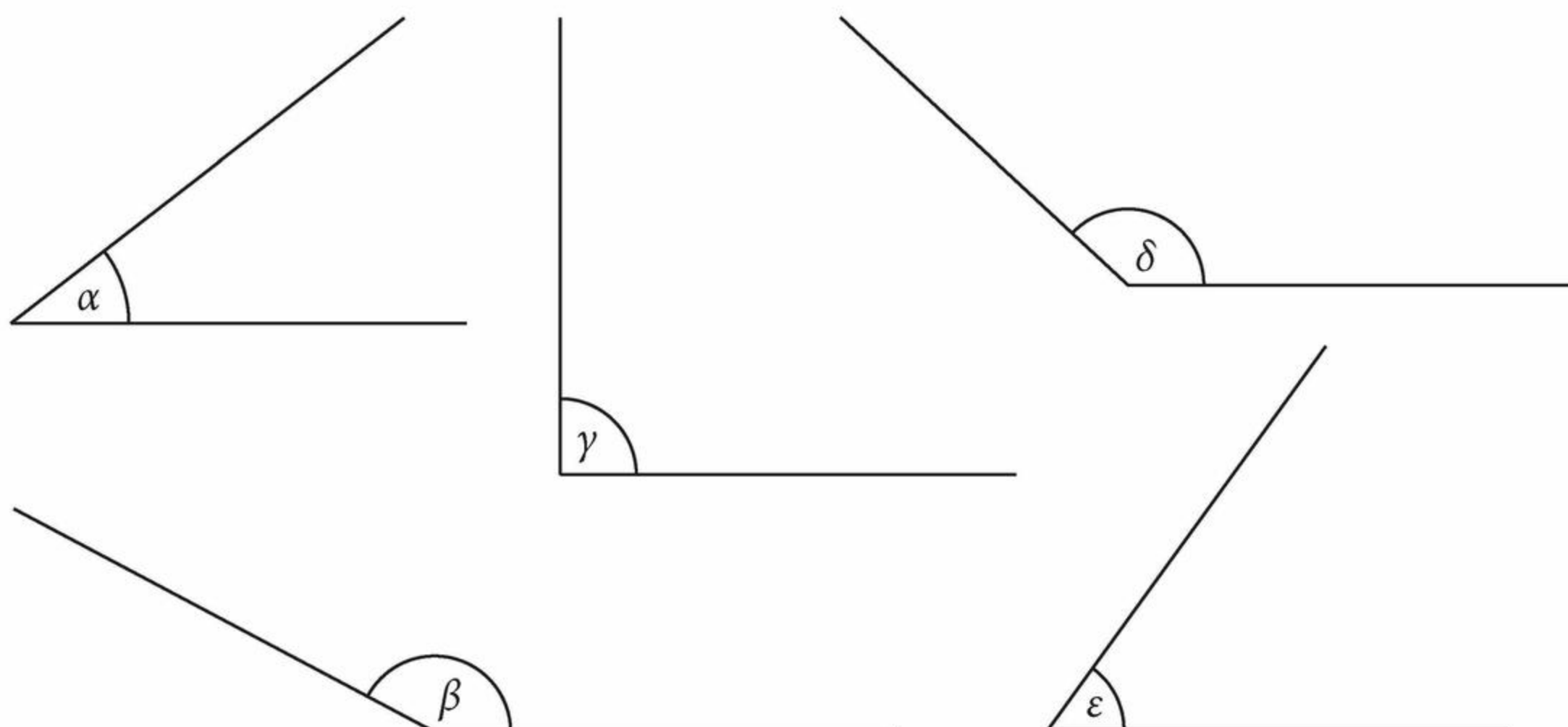
c) 289°

b) 173°

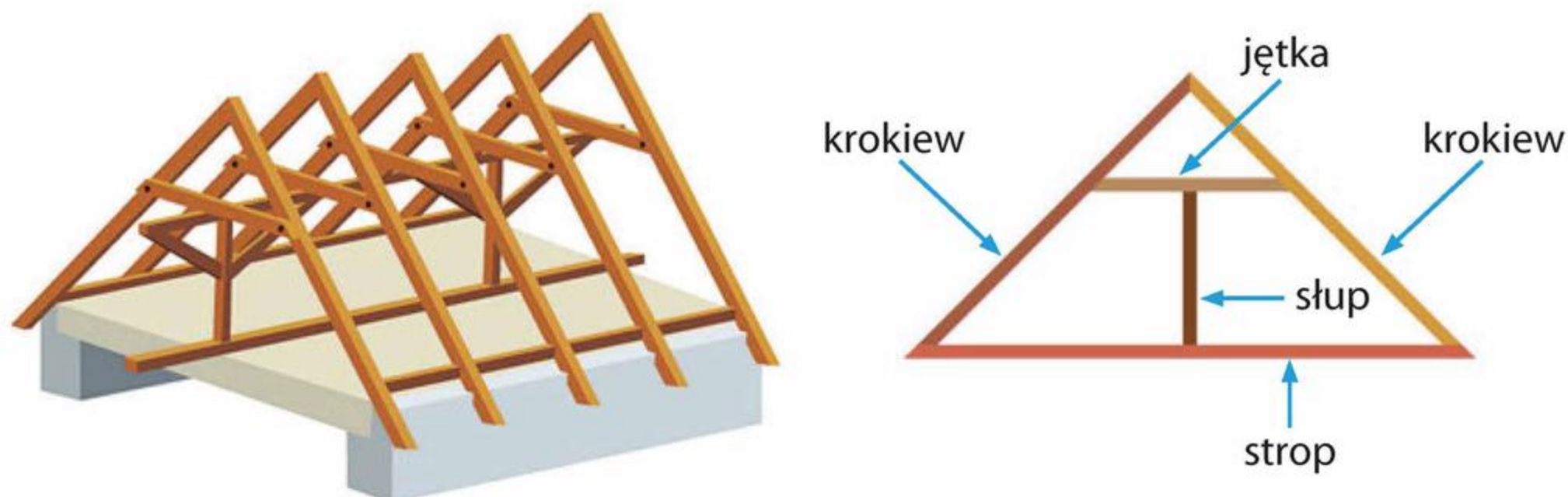
d) 90°



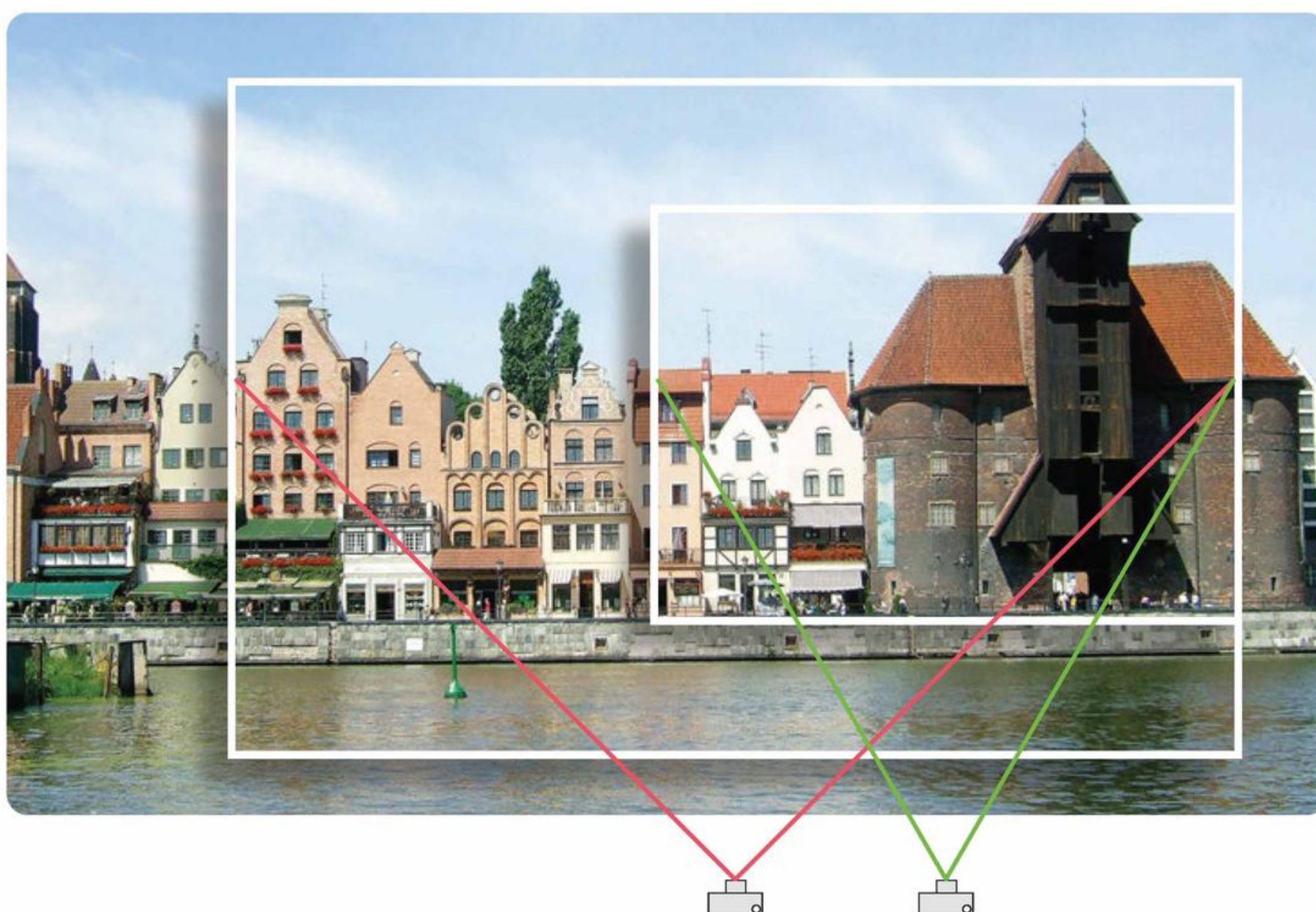
- **3** Narysuj dwa kąty ostre i dwa rozwarte. Nazwij je. Zmierz narysowane kąty i zapisz wyniki pomiarów.
- **4** Oszacuj, ile stopni ma każdy z narysowanych kątów, a następnie zmierz je kątomierzem. Jakiego rodzaju są to kąty?



- 5 Narysuj kąty: 85° , 162° , 137° , 47° .
- 6 Czy wiesz, że wiele murowanych budynków ma drewnianą konstrukcję dachu? Taka konstrukcja jest przedstawiona na rysunkach poniżej.



- a) Sprawdź za pomocą ekierki, czy krokwie tego dachu są prostopadłe. Które elementy konstrukcji są prostopadłe?
 - b) Zmierz oba kąty, które tworzy krokiew z jętką. Oblicz ich sumę, aby sprawdzić, czy udało ci się je dokładnie zmierzyć.
- 7 Dwóch turystów chciało zrobić zdjęcia domów stojących nad Motławą w Gdańsku. Jeden z nich może sfotografować większy obszar, ponieważ ma w aparacie obiektyw szerokokątny. Zmierz na rysunku kąty, które zostały objęte przez obiektywy.



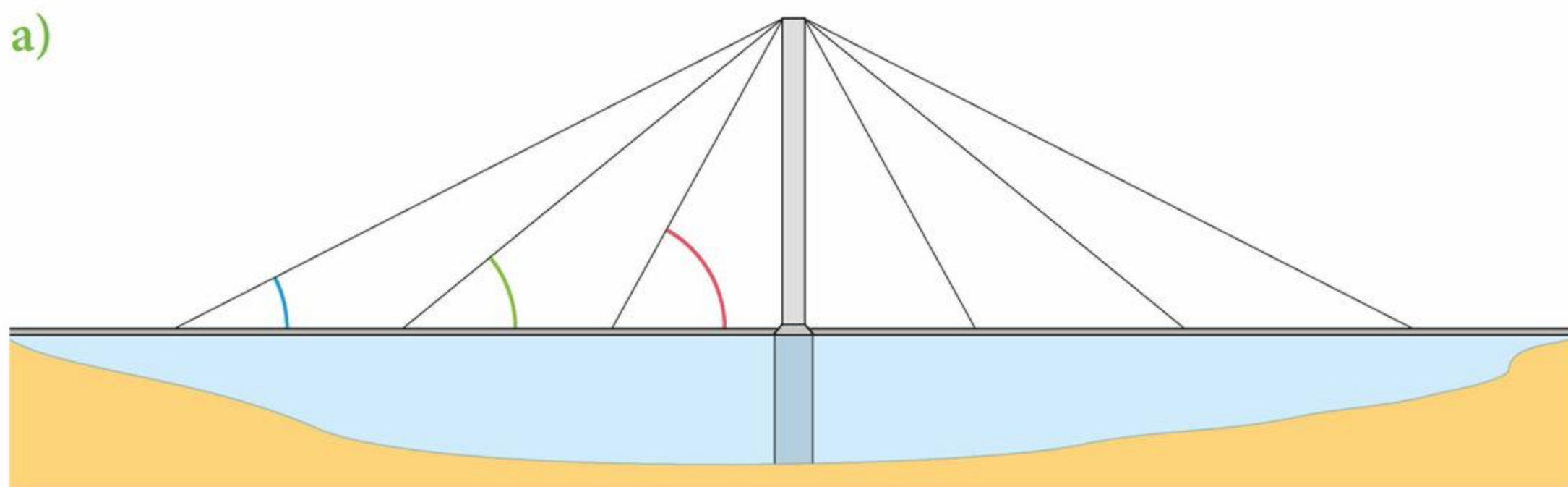
- **8** Jedno z was podaje, ile stopni ma mieć kąt, a drugie go rysuje, używając kątomierza. Jeśli rysunek zostanie wykonany z dokładnością do 2° , rysujący otrzymuje punkt. Potem zamieniacie się rolami. Powtarzacie zabawę kilkakrotnie. Wygrywa ten, kto zbierze więcej punktów.

Uwaga. „Z dokładnością do 2° ” oznacza, że miara narysowanego kąta może różnić się najwyżej o 2° od miary, która została podana na początku.

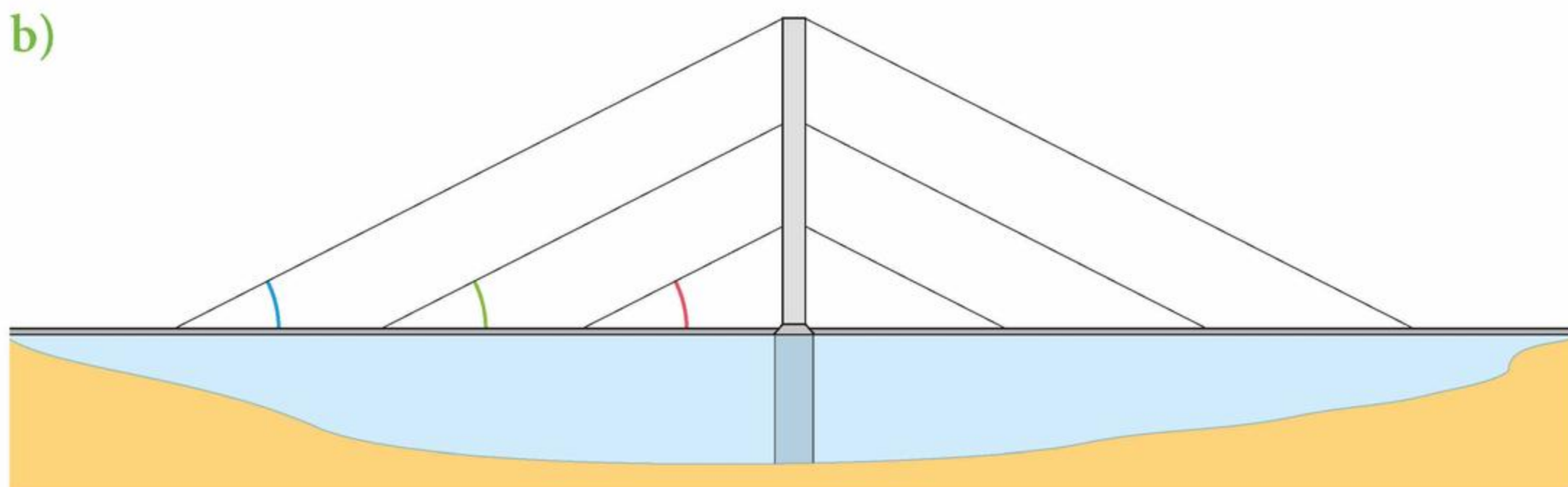
- **9** Narysuj kąt za pomocą linijki, ale bez kątomierza. Druga osoba najpierw szacuje, ile stopni ma ten kąt, a następnie go mierzy. Punkt można otrzymać za oszacowanie wielkości kąta z dokładnością do 10° oraz za jego prawidłowe zmierzenie. Potem zamieniacie się rolami. Powtarzacie zabawę kilkakrotnie. Wygrywa ten, kto zbierze więcej punktów.

- **10** Na ilustracji przedstawiono most wiszący widziany z boku. Który kąt jest największy: zaznaczony na czerwono, zielono czy na niebiesko? A może wszystkie są równe?

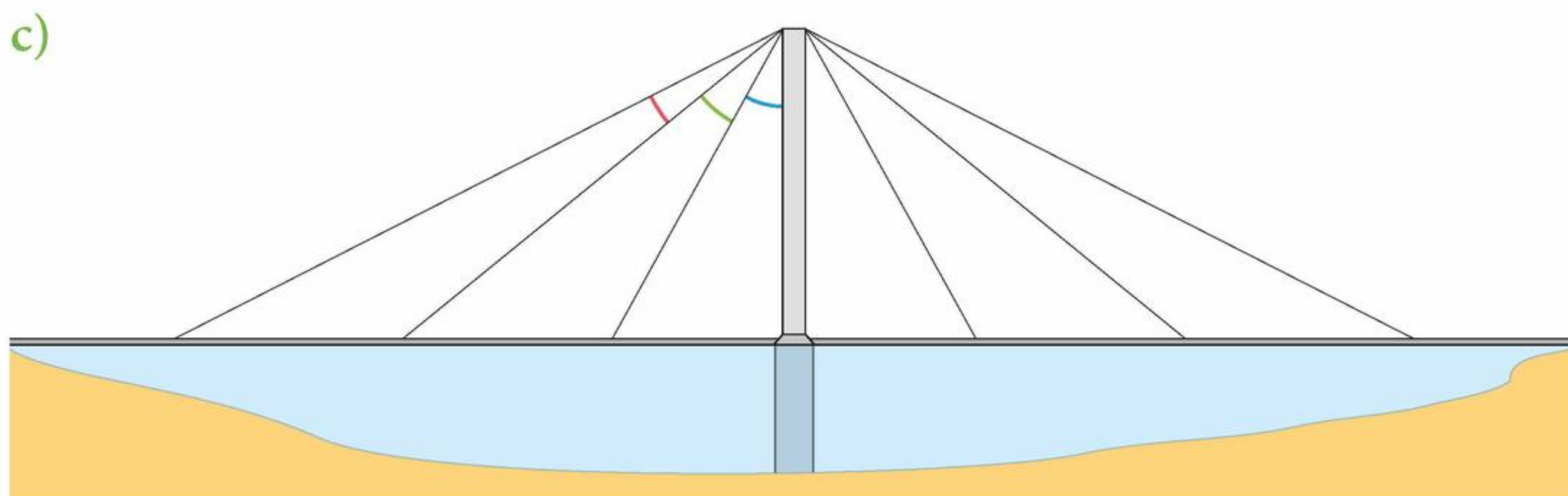
a)



b)



c)



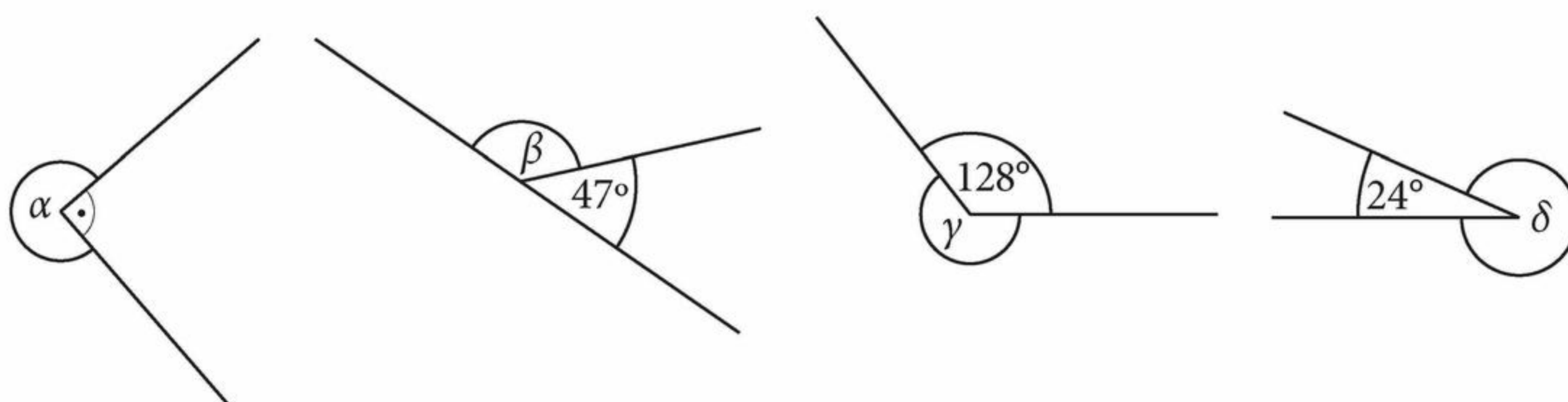
- 11 Ile stopni ma kąt, o który obróci się minutowa wskazówka zegara w podanym czasie? Jaki to rodzaj kąta?

a) 15 min c) $\frac{1}{2}$ godz. e) 40 min
b) 1 godz. d) 5 min f) 20 min

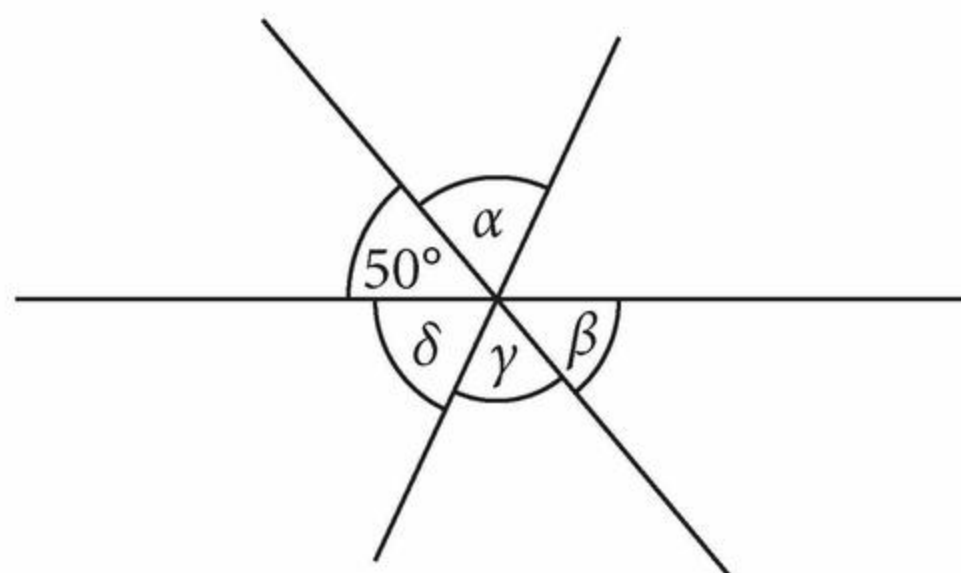
- 12 Ile stopni ma kąt, o który obróci się godzinowa wskazówka zegara w podanym czasie? Jaki to rodzaj kąta?

a) 2 godz. b) 1 godz. c) 20 min

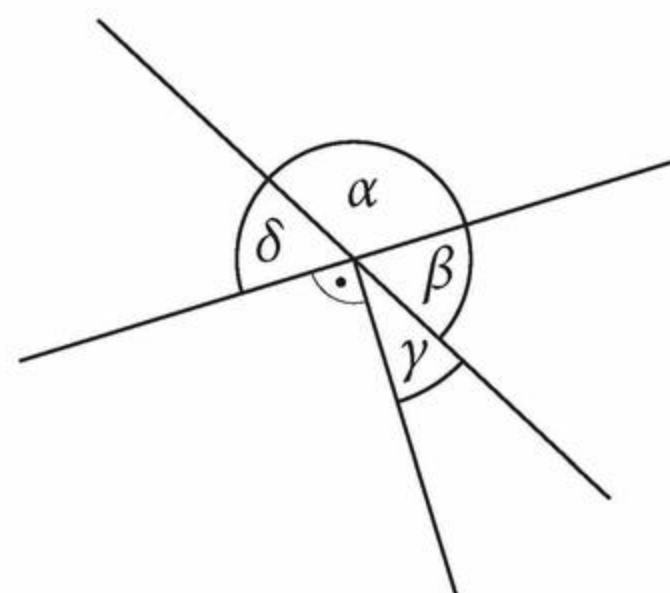
- 13 Oblicz miary kątów: α , β , γ i δ .



- ... 14 Oblicz, ile stopni mają kąty podpisane literami greckimi, wiedząc, że kąty γ i δ są równe.



- ... 15 Oblicz, ile stopni mają kąty oznaczone literami greckimi, wiedząc, że kąt α jest dwa razy większy od kąta β .



- 🏆 16 Kąty α , β i γ tworzą kąt półpełny. Kąt α jest trzy razy mniejszy od kąta β i o 20° mniejszy od kąta γ . Oblicz miary tych kątów.

- 🏆 17 Ile stopni ma kąt między wskazówkami zegara o podanej godzinie? Pamiętaj, że wskazówka godzinowa porusza się przez cały czas!

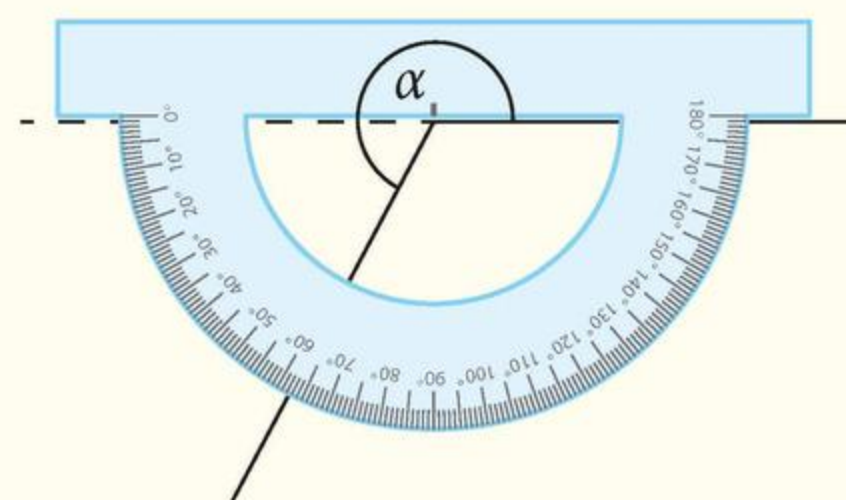
a) 12.30 b) 11.20 c) 2.10



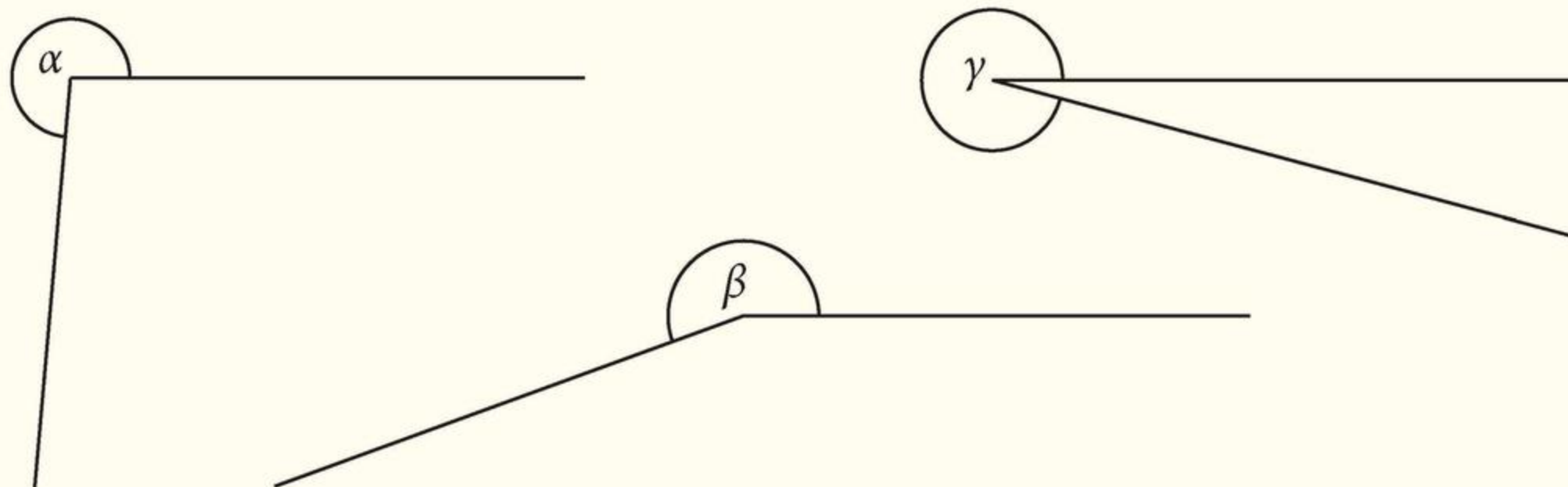
Dla dociekliwych

Na rysunku pokazano, jak można zmierzyć kąt wklęsły, wykorzystując to, że kąt półpełny ma 180° .

$$\alpha = 180^\circ + 62^\circ = 242^\circ$$



- 1 Jak inaczej można zmierzyć ten kąt? Wykorzystaj to, że kąt pełny ma 360° .
- 2 Zmierz narysowane poniżej kąty dwoma różnymi sposobami.

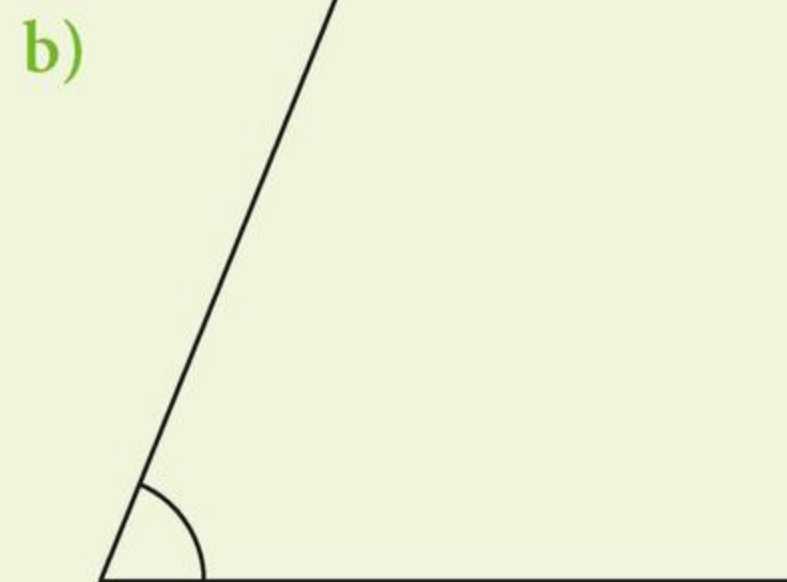
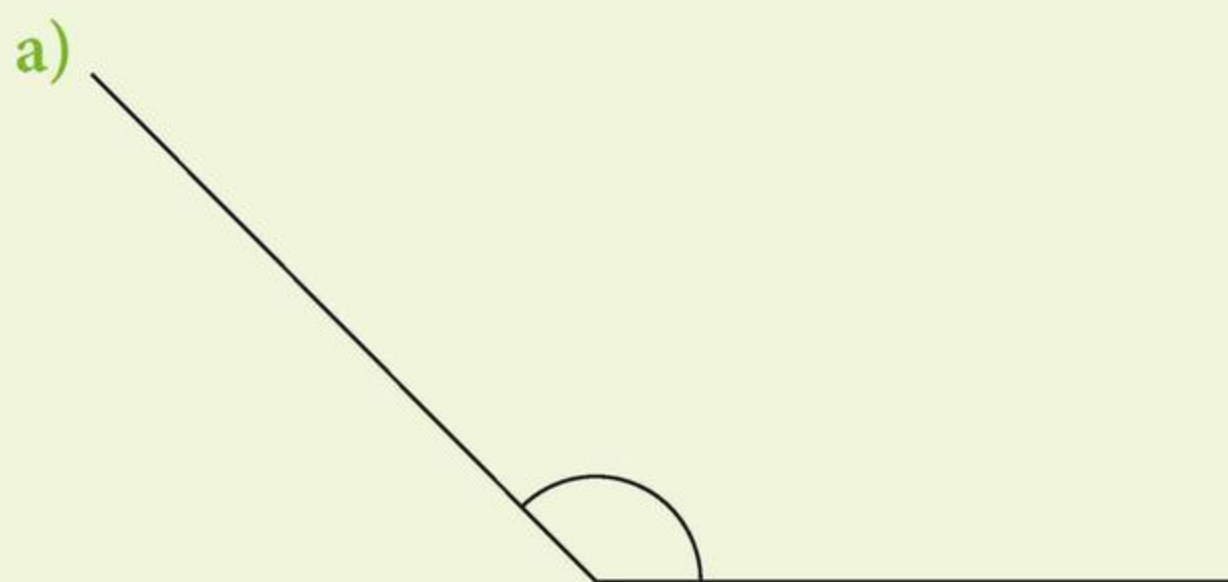


- 3 Narysuj kąty: 250° , 300° , 215° . Wykonaj to dwoma sposobami.



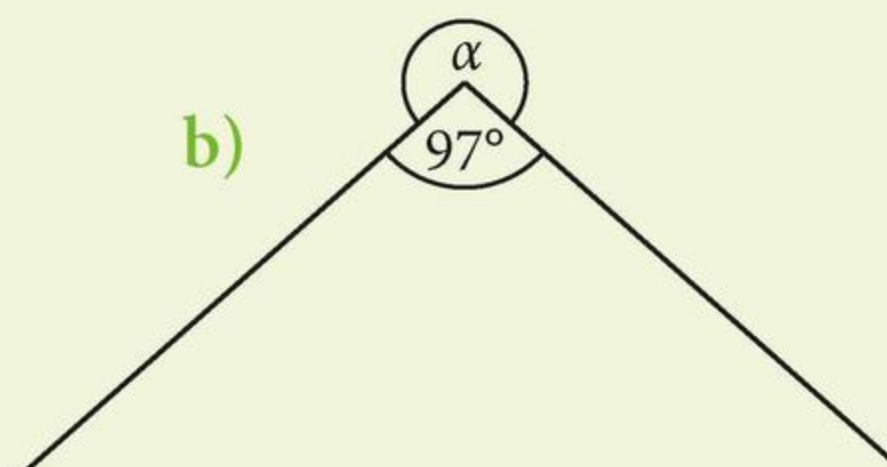
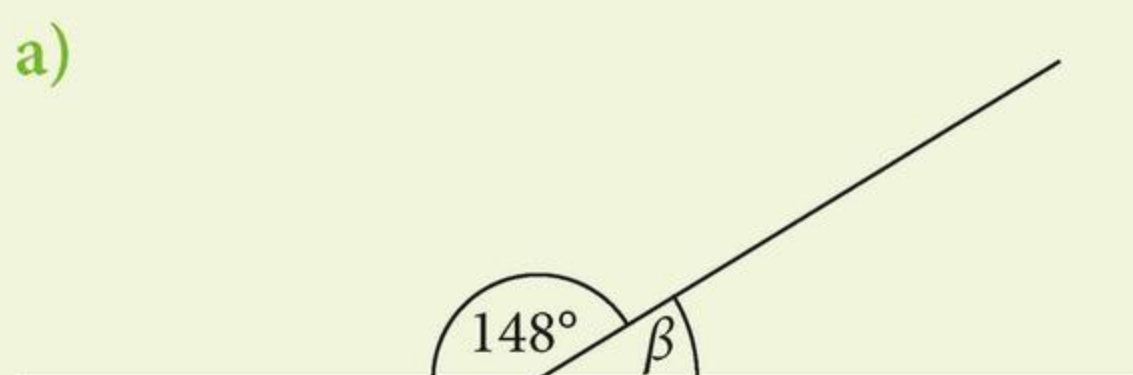
Czy już umiem?

- I Określ rodzaj kąta. Zmierz ten kąt i zapisz, ile ma stopni.



- II Narysuj kąt 37° i 160° .

- III Ile stopni ma kąt oznaczony literą grecką?



Rodzaje i własności trójkątów

  Na dobry początek

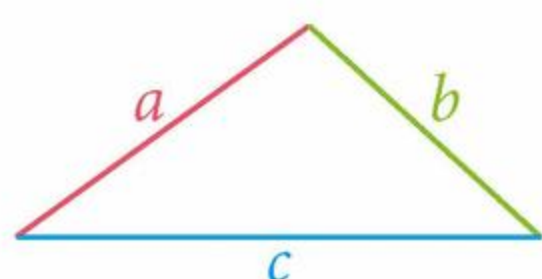
Budujemy trójkąty

Przygotuj cztery patyczki o długościach: 4 cm, 5 cm, 10 cm, 12 cm.
Wybieraj po trzy dowolne patyczki i buduj z nich trójkąty.

- ▶ Z których trzech patyczków można zbudować trójkąt?
- ▶ Z których trzech patyczków nie udało się zbudować trójkąta?
- ▶ Jaki warunek muszą spełniać patyczki, by można było zbudować z nich trójkąt?

Czy można zbudować trójkąt z patyczków o długościach: 2 cm, 5 cm, 7 cm?

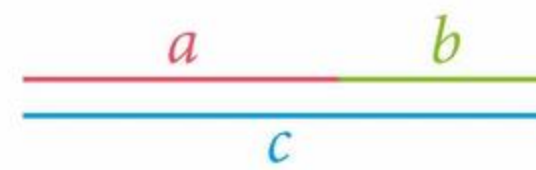
Nie zawsze z trzech odcinków można zbudować trójkąt.



$$a + b > c$$



$$a + b < c$$



$$a + b = c$$

Z trzech odcinków można zbudować trójkąt, gdy najdłuższy odcinek jest krótszy od sumy dwóch pozostałych.

Przykłady

- Czy z odcinków o długościach: 2 m, 3 m i 4 m można zbudować trójkąt?
 $2 + 3 = 5 > 4$ Najdłuższy odcinek jest krótszy niż suma pozostałych.
Odp. Z tych odcinków można zbudować trójkąt.
- Czy z odcinków o długościach: 3,5 cm, 28 mm i 0,7 dm można zbudować trójkąt?

$$a = 3,5 \text{ cm} = 35 \text{ mm} \quad b = 28 \text{ mm} \quad c = 0,7 \text{ dm} = 7 \text{ cm} = 70 \text{ mm}$$

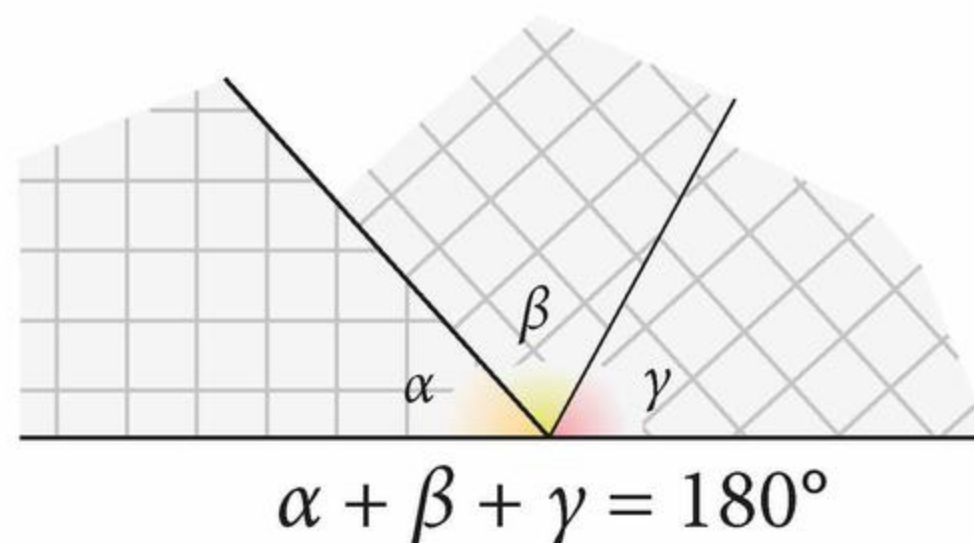
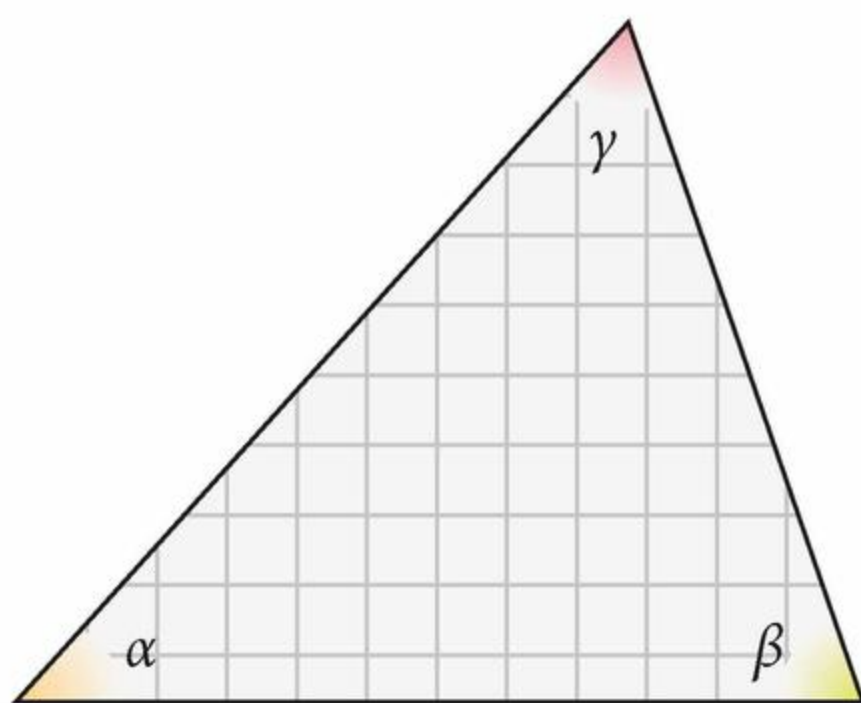
Najdłuższy jest odcinek c .

$$a + b = 35 \text{ mm} + 28 \text{ mm} = 63 \text{ mm}, \text{ czyli } a + b < c.$$

Najdłuższy odcinek jest dłuższy niż suma dwóch pozostałych.

Odp. Z tych odcinków nie można zbudować trójkąta.

Suma kątów trójkąta



Jeśli wszystkie kąty trójkąta ułożymy tak, jak to pokazano na rysunku z prawej strony, przekonamy się, że razem tworzą kąt półpełny.

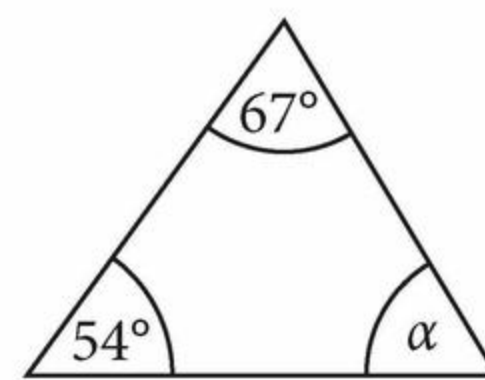
Suma kątów trójkąta wynosi 180° .

Przykład

Oblicz kąt α w narysowanym obok trójkącie.

$$\alpha = 180^\circ - (67^\circ + 54^\circ) = 180^\circ - 121^\circ = 59^\circ$$

Odp. Kąt α ma 59° .



Przykład

Oblicz kąt α w narysowanym obok trójkącie.

Zauważ, że dwa kąty na rysunku oznaczono tą samą literą: α . Oznacza to, że są one równe.

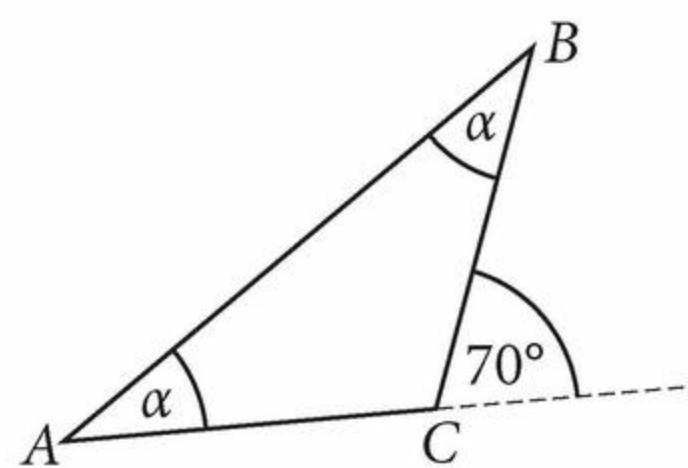
Najpierw obliczamy kąt BCA przyległy do kąta 70° :

$$\sphericalangle BCA = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

Dwa pozostałe kąty są równe i mają w sumie:

$$2 \cdot \alpha = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ, \text{ czyli } \alpha = 35^\circ.$$

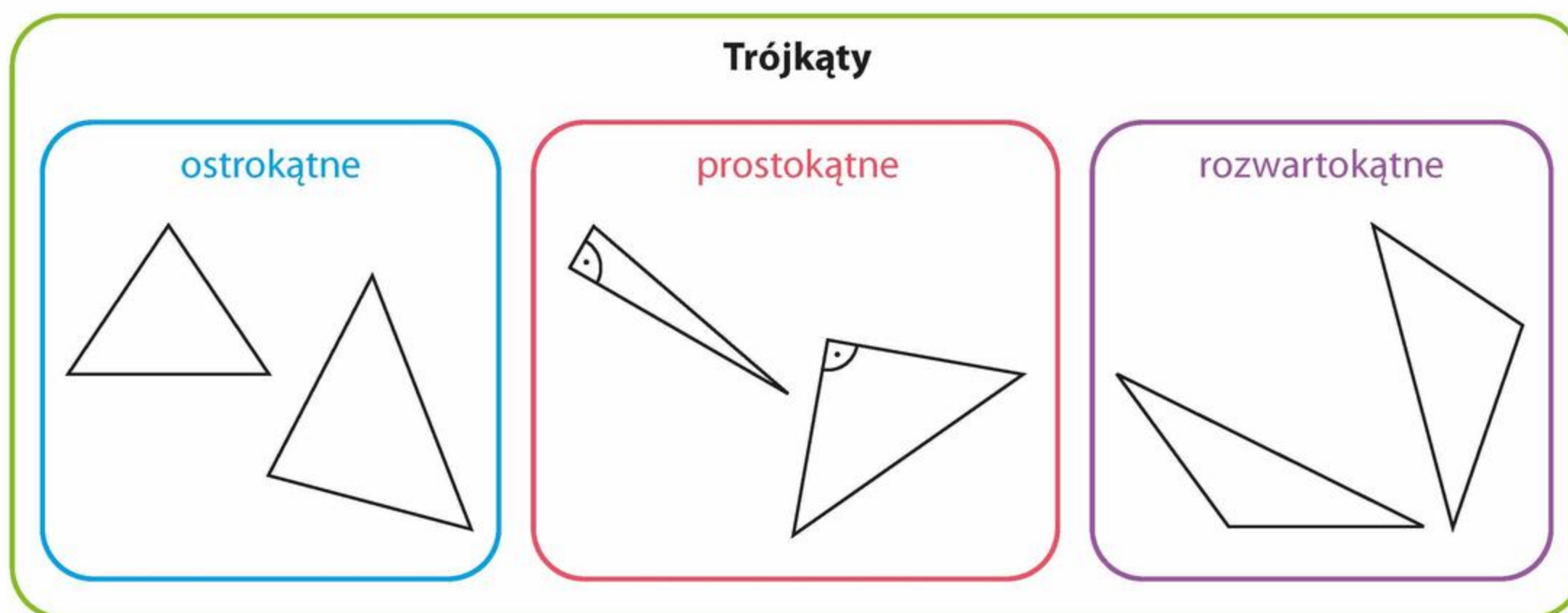
Odp. Kąt α ma 35° .



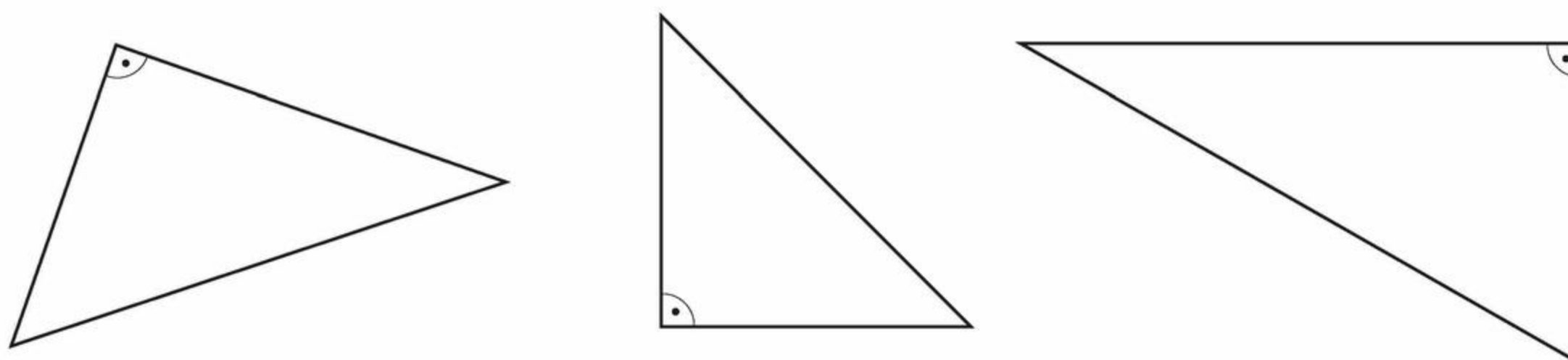
Rodzaje trójkątów – podział ze względu na kąty

Trójkąty można podzielić na trzy rodzaje, biorąc pod uwagę ich kąty. W każdym trójkącie przynajmniej dwa kąty są ostre.

- Jeśli trzeci kąt także jest ostry, trójkąt nazywamy **ostrokątnym**.
- Jeśli trzeci kąt jest prosty, trójkąt nazywamy **prostokątnym**.
- Jeśli trzeci kąt jest rozwarty, trójkąt nazywamy **rozwartokątnym**.

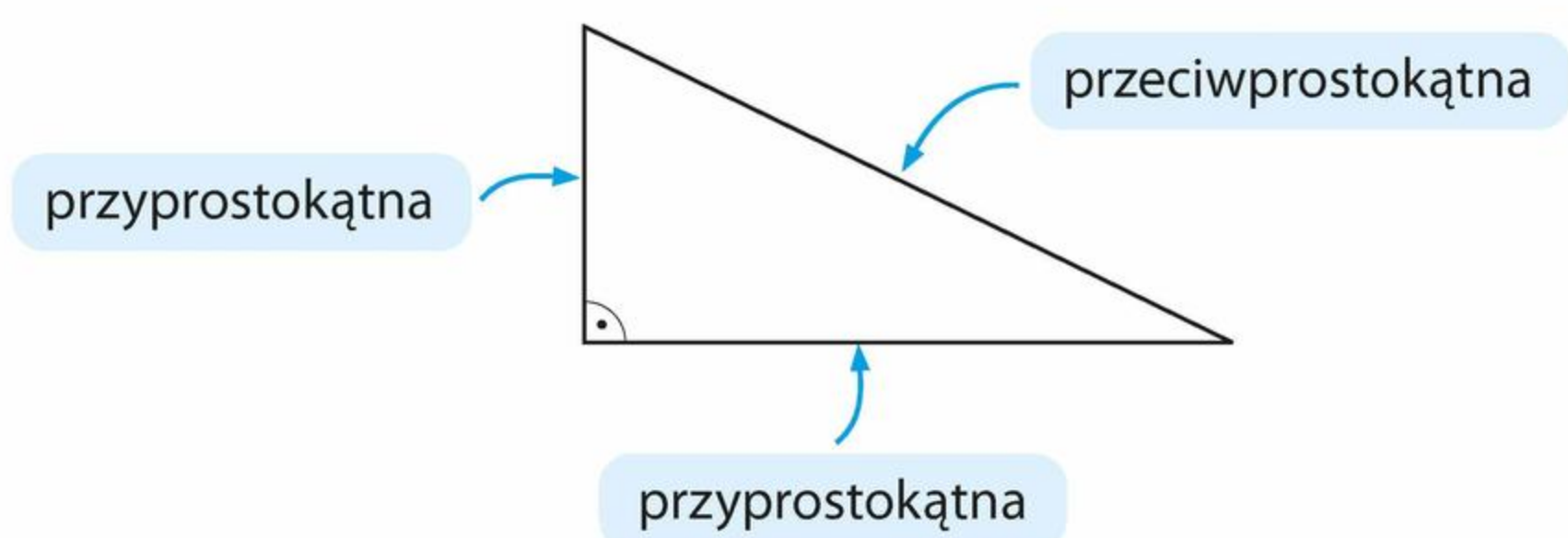


Trójkąt prostokątny



Każdy z pokazanych wyżej trójkątów ma jeden kąt prosty i dwa kąty ostre. Dwa kąty ostre w trójkącie prostokątnym mają razem 90° .

W trójkącie prostokątnym boki mają swoje nazwy.



Przeciwprostokątna jest najdłuższym bokiem trójkąta prostokątnego.



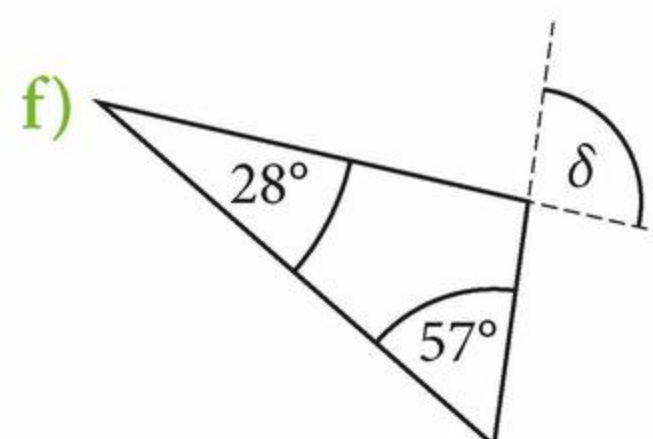
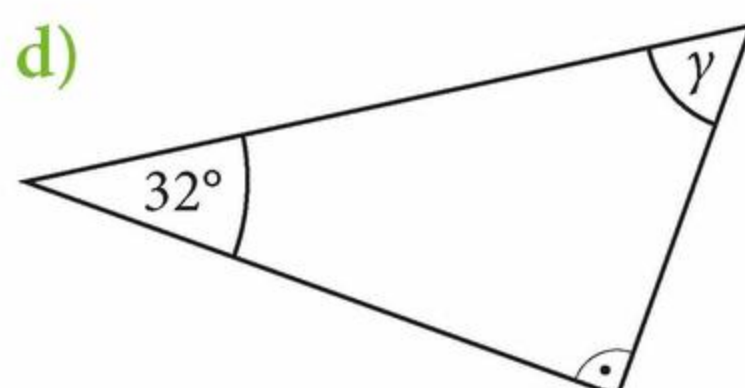
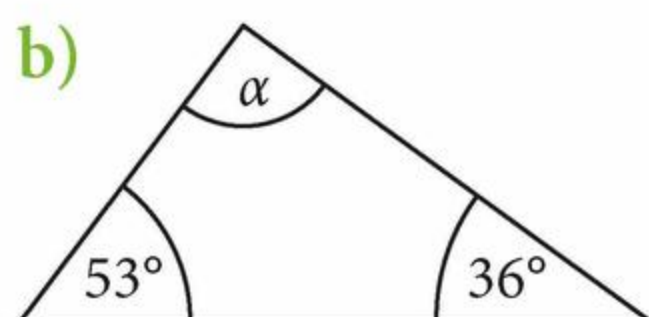
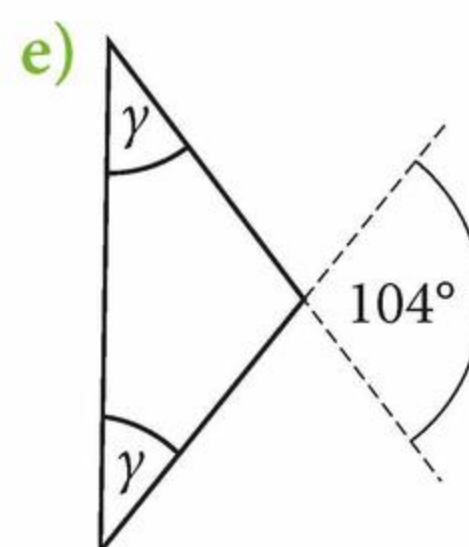
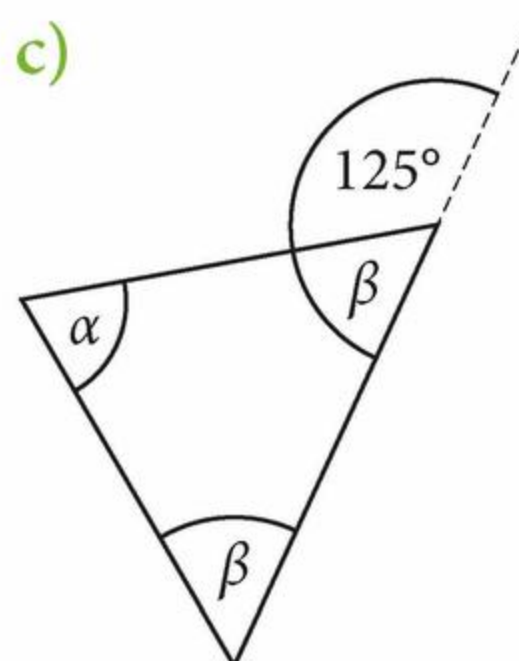
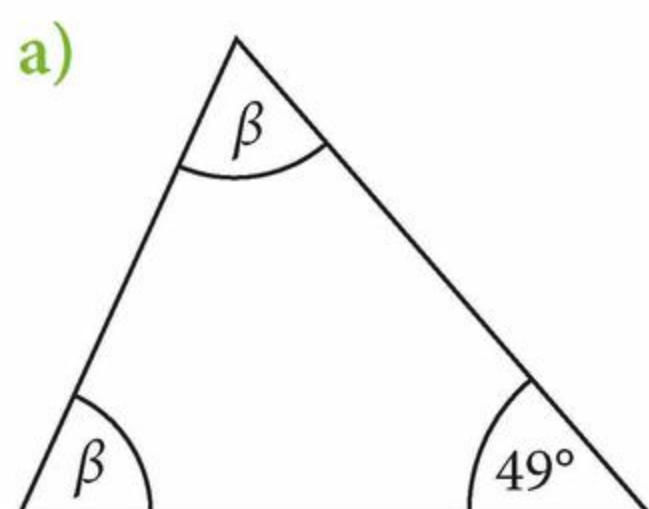
Zadania

- **1** Czy z odcinków o podanych długościach można zbudować trójkąt?
 - a) 5 cm, 8 cm, 9 cm
 - b) 18 m, 18 m, 42 m
 - c) 4,5 km, 1,5 km, 3,5 km
 - d) 2,3 dm, 10 dm, 7,7 dm

- **2** Narysuj starannie trójkąt i wytnij go. Każdy z jego kątów oznacz innym kolorem.

Odedrzyj kąty trójkąta i ułóż je tak, jak na rysunku na stronie 98. Jaki kąt utworzyły kąty trójkąta? Porównaj swój wynik z wynikami innych uczniów. Powtórz to ćwiczenie z dwoma innymi trójkątami.

- **3** Oblicz kąty oznaczone literami greckimi.



- **4** Narysuj trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 3 cm i 4 cm. Zmierz długość przeciwprostokątnej i kąty ostre tego trójkąta.
- **5** Trójkąt ma wszystkie kąty równe. Ile stopni ma każdy z jego kątów? Korzystając z kątomierza, narysuj taki trójkąt.
- **6** W trójkącie dwa kąty są równe, a trzeci ma 90° . Oblicz, ile stopni ma każdy z dwóch równych kątów tego trójkąta. Narysuj dwa takie trójkąty różniące się wielkością.
- **7** Narysuj trójkąt. Podziel go na dwa trójkąty prostokątne. Czy każdy trójkąt da się podzielić w ten sposób?
- **8** Odległość od szkoły do domu Ali wynosi 3 km, a do domu Oli 2 km. Narysuj takie ustawienie szkoły i domów, aby odległość między domami była jak najmniejsza, i takie, aby była jak największa. Oblicz te odległości.
- 🏆 **9** Jeden z kątów trójkąta jest dwa razy mniejszy od drugiego i trzykrotnie mniejszy od trzeciego. Ile stopni ma każdy z kątów tego trójkąta? Narysuj taki trójkąt.



Dla dociekliwych

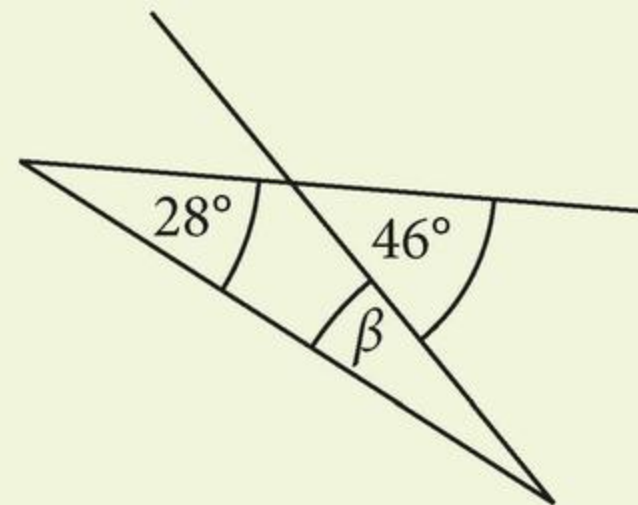
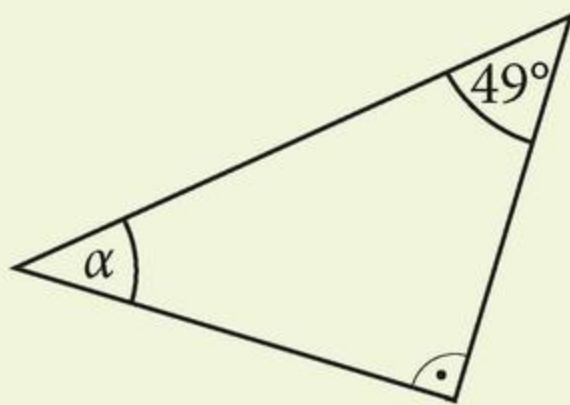
Przekątna dzieli czworokąt na dwa trójkąty. Czasem przy rozwiązywaniu zadań dotyczących czworokątów możemy więc korzystać z własności trójkątów.

- 1 Czy istnieje czworokąt $ABCD$ o bokach:
 $AB = 8 \text{ cm}$, $BC = 10 \text{ cm}$, $CD = 9 \text{ cm}$, $DA = 7 \text{ cm}$ i przekątnej $AC = 17 \text{ cm}$?
- 2 Czy istnieje czworokąt $ABCD$ o bokach:
 $AB = 5 \text{ cm}$, $BC = 7 \text{ cm}$, $DA = 5 \text{ cm}$ i przekątnej $BD = 9 \text{ cm}$?
- 3 Czy istnieje czworokąt o bokach długości: 6 cm , 13 cm , 4 cm i 11 cm oraz przekątnej równej 17 cm ?
- 4 Ile wynosi suma kątów czworokąta?



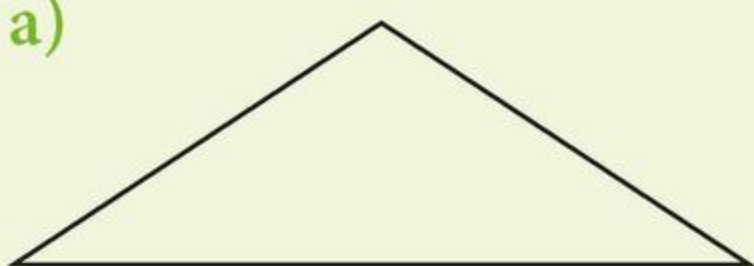
Czy już umiem?

- I Czy z odcinków o podanych długościach można zbudować trójkąt?
 - a) 123 m , 29 m , 96 m
 - b) 352 cm , $6,48 \text{ m}$, 100 dm
- II Ile stopni ma kąt α , a ile kąt β ?

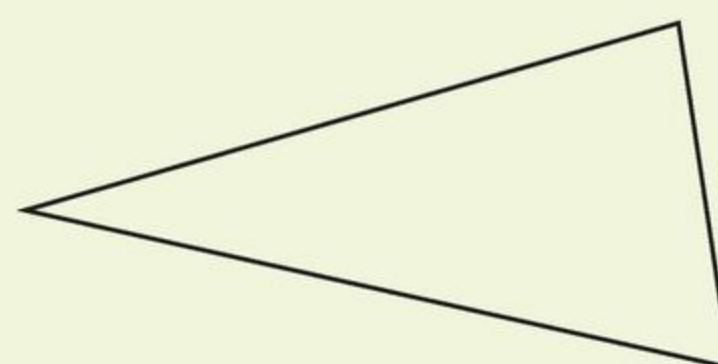


- III Jaki to rodzaj trójkąta?

a)



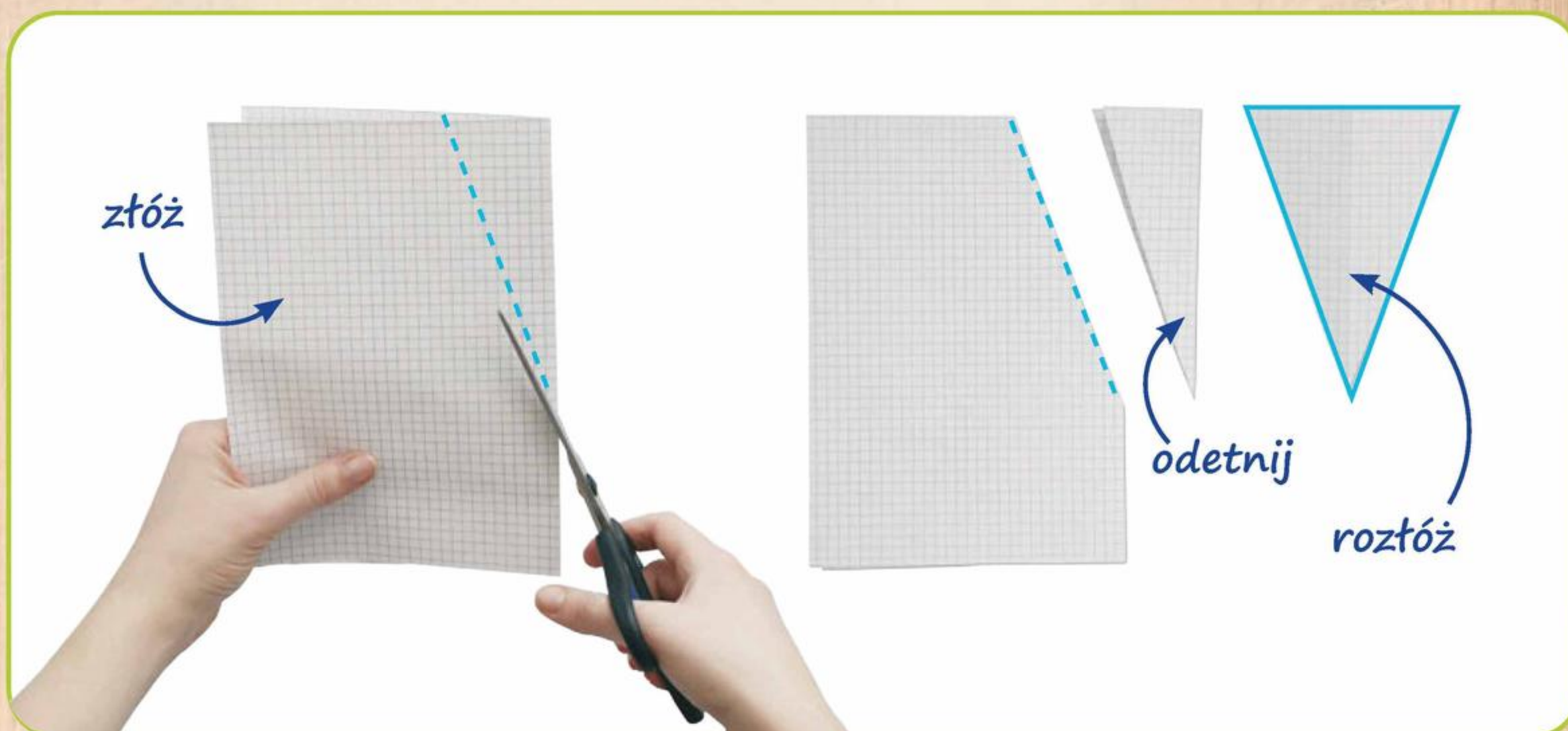
b)



  Na dobry początek

Jaki to trójkąt?

Złóż kartkę na pół wzdłuż kratek i od strony zagięcia odetnij trójkąt.
Rozłóż otrzymany trójkąt.

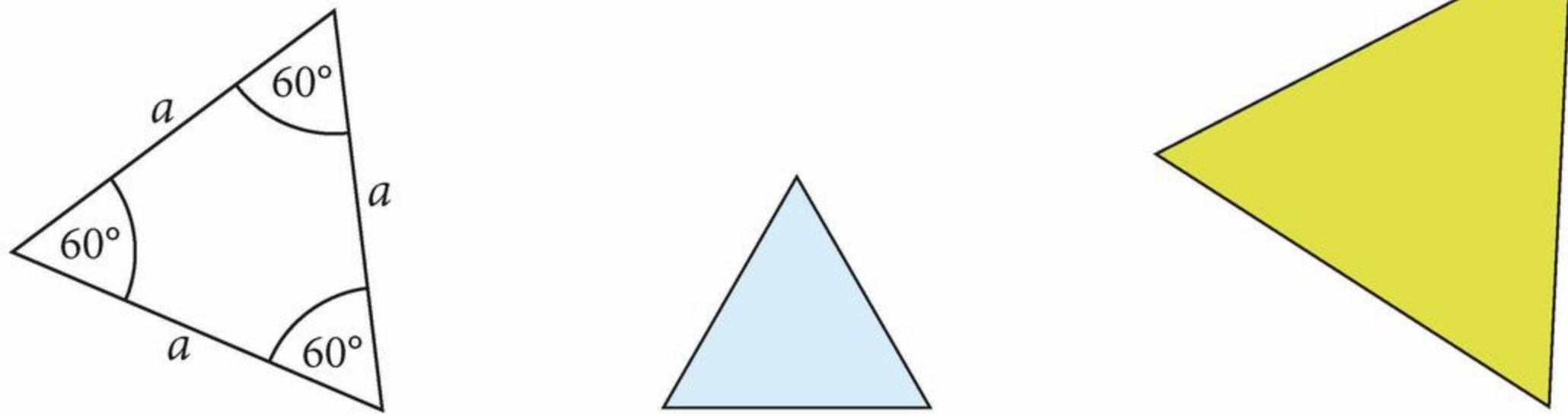


Oto przykłady
trójkątów wyciętych
z kartki zgodnie
z instrukcją

Pytania i polecenia

- Co można powiedzieć o bokach wyciętego trójkąta?
- Co można powiedzieć o kątach tego trójkąta?
- Ile osi symetrii ma ten trójkąt?

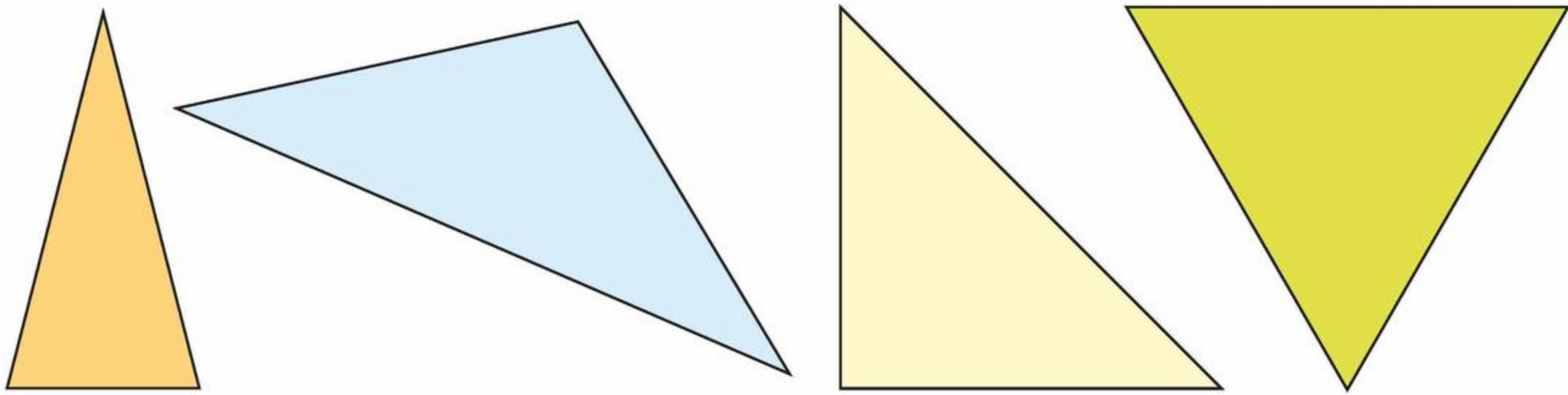
To są trójkąty równoboczne.



Trójkąt równoboczny ma wszystkie boki równe. Taki trójkąt ma też równe wszystkie kąty.

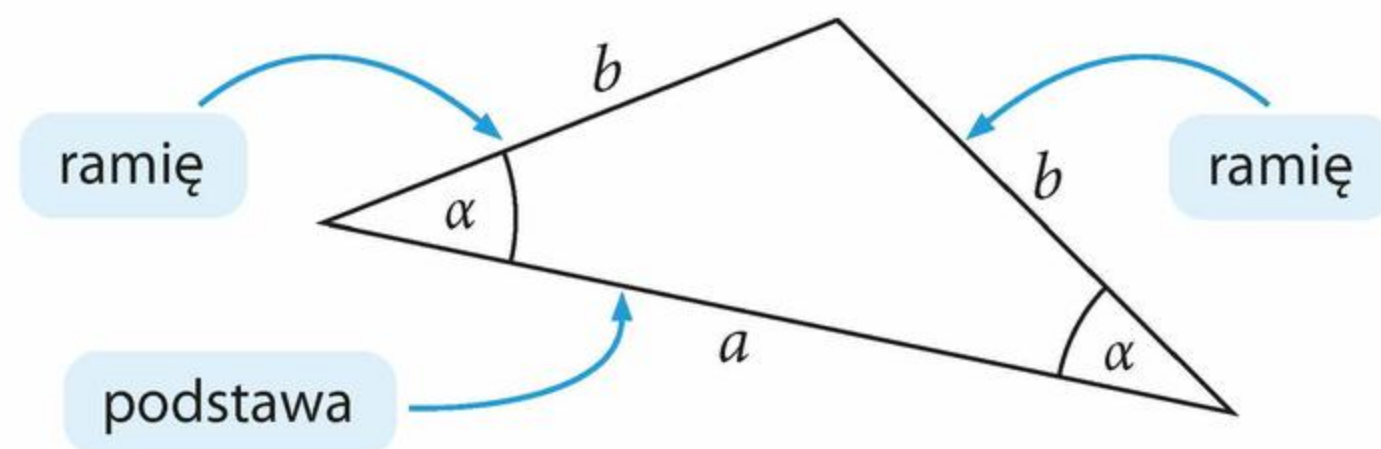
W trójkącie równobocznym każdy z kątów ma 60° .

To są trójkąty równoramienne.



Trójkąt równoramienny ma przynajmniej dwa boki równe. To znaczy, że trójkąt równoboczny też należy do trójkątów równoramiennych.

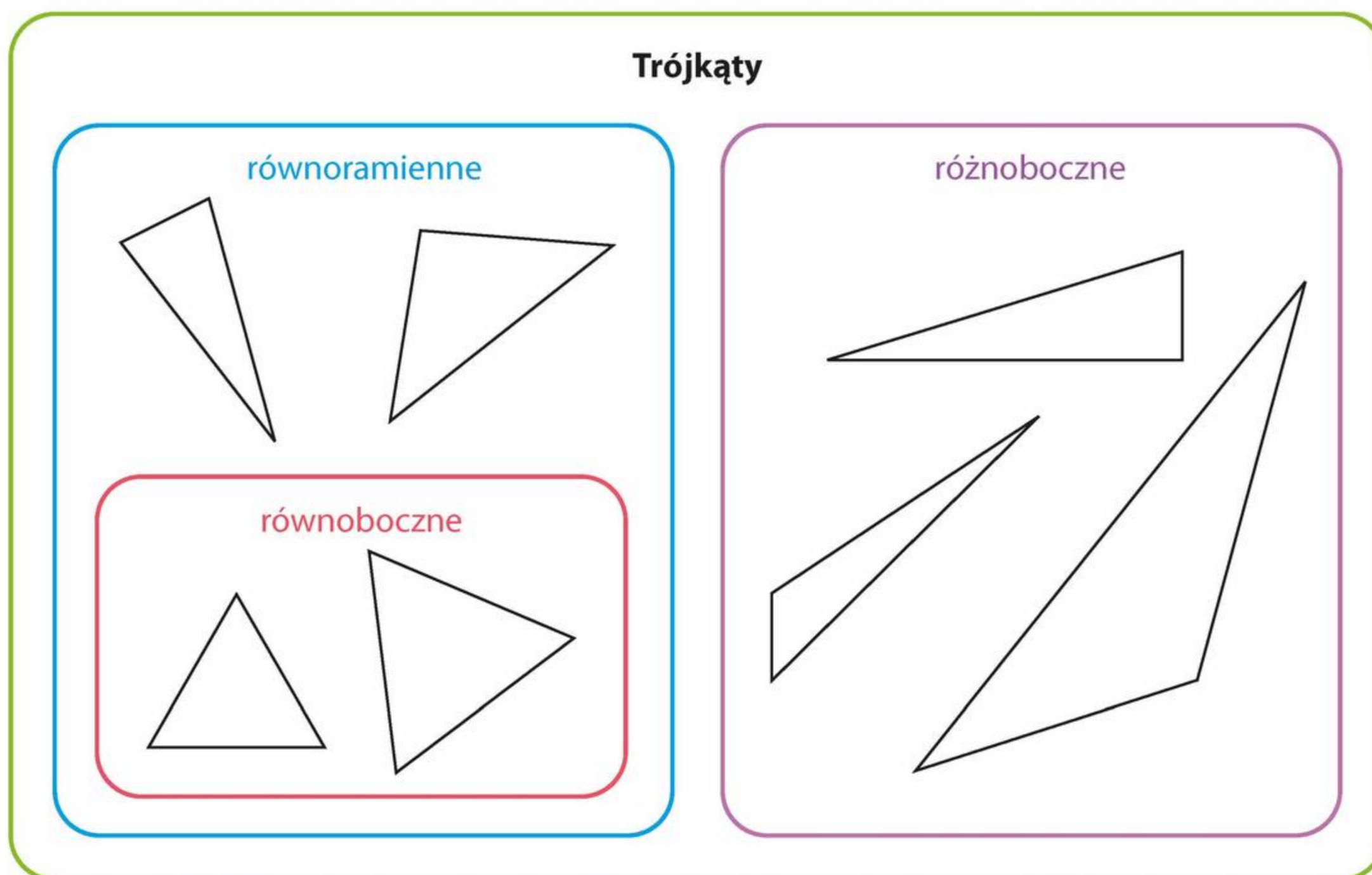
Dwa boki takiej samej długości nazywamy **ramionami** trójkąta. Trzeci bok to **podstawa** trójkąta.



W trójkącie równoramiennym kąty leżące przy podstawie są równe.

Jeżeli każdy bok trójkąta ma inną długość, to taki trójkąt nazywamy **różnobocznym**.

Rodzaje trójkątów – podział ze względu na boki



Przykład

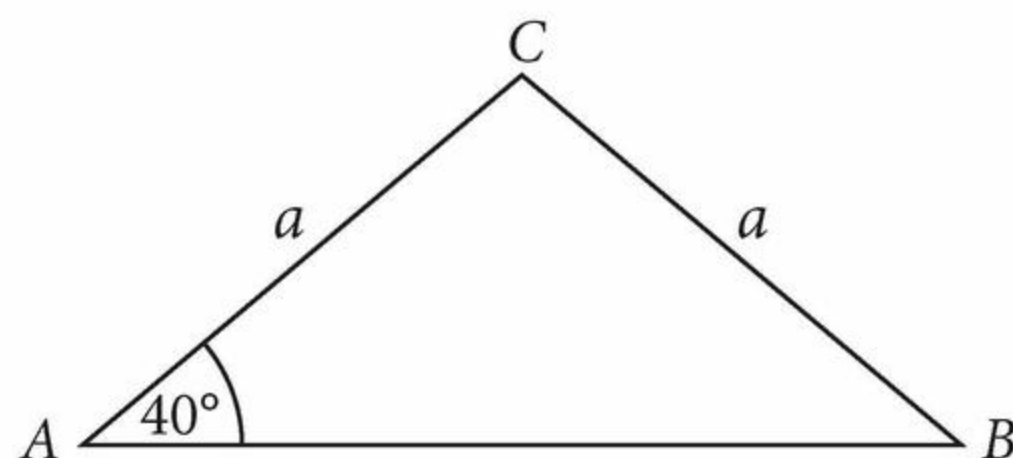
W trójkącie równoramionym kąt przy podstawie ma 40° . Podaj miary pozostałych kątów tego trójkąta.

Wykonujemy schematyczny rysunek i zaznaczamy na nim dane.

Kąty przy podstawie w trójkącie równoramionym są równe, a więc $\sphericalangle B = 40^\circ$.

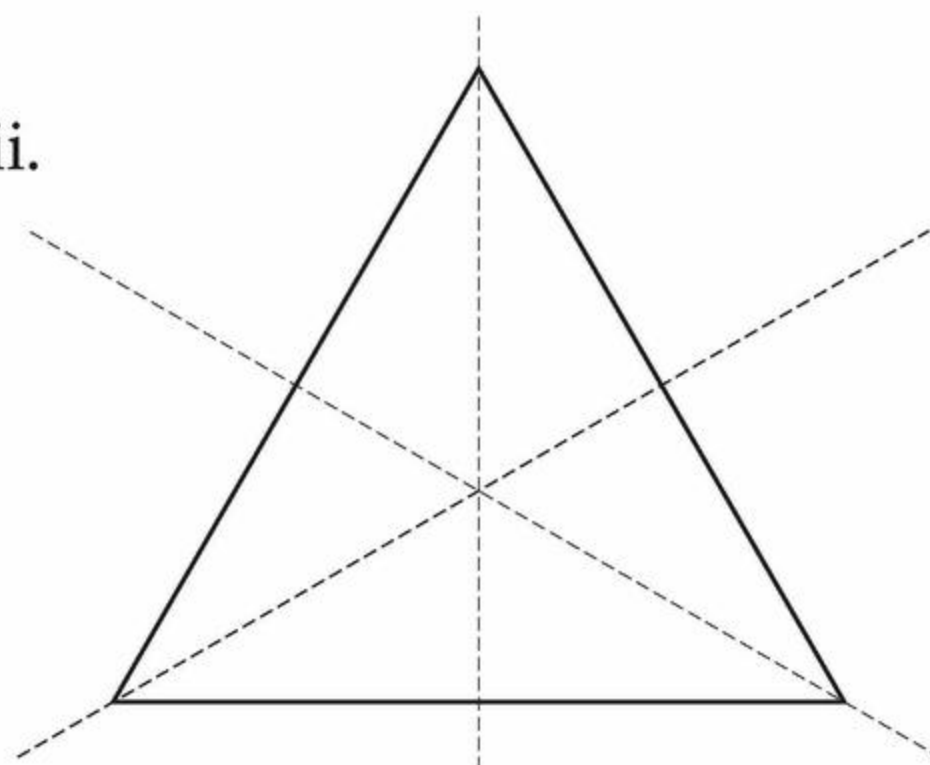
Suma kątów w trójkącie wynosi 180° , zatem $\sphericalangle C = 180^\circ - (40^\circ + 40^\circ) = 100^\circ$.

Odp. Pozostałe kąty mają 40° i 100° .

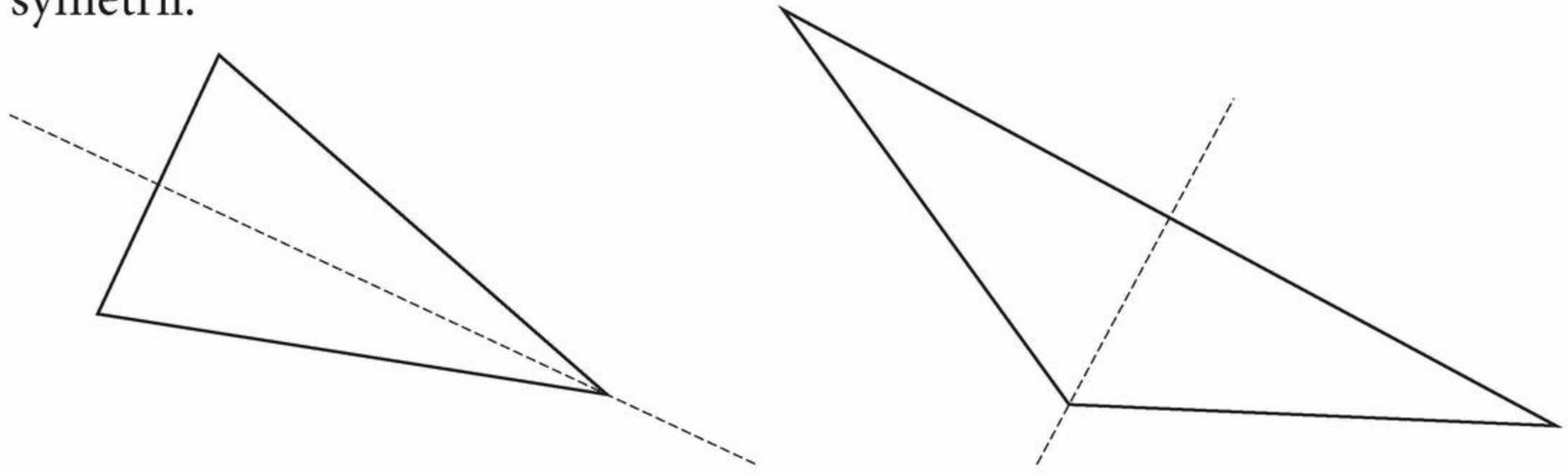


Osie symetrii trójkąta

Trójkąt równoboczny ma trzy osie symetrii.



Trójkąt, który jest równoramienny, ale nie jest równoboczny, ma jedną oś symetrii.

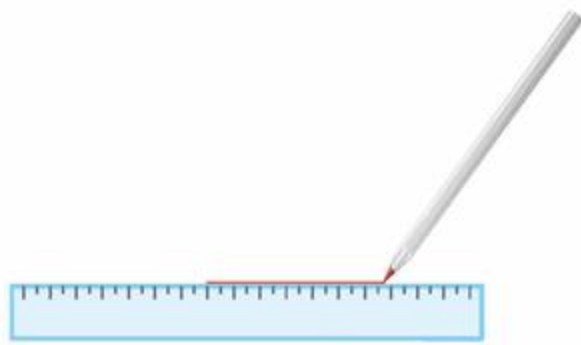


Inne trójkąty nie mają osi symetrii.

Rysowanie trójkąta równobocznego

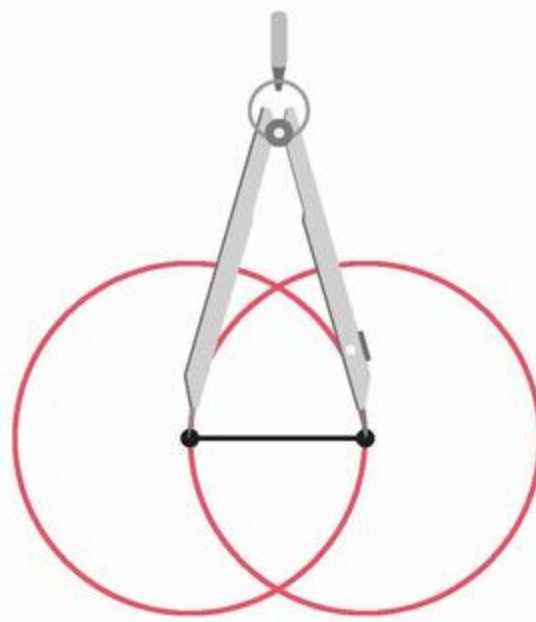
Trójkąt równoboczny możemy łatwo narysować za pomocą cyrkla i linijki.

1.



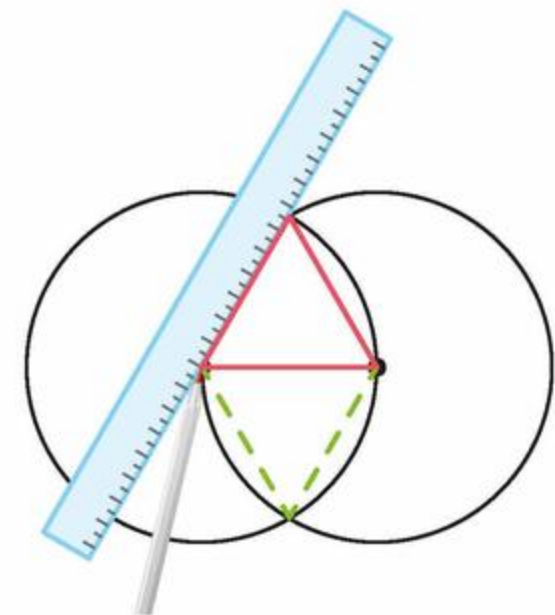
Rysujemy jeden bok trójkąta.

2.



Wokół każdego z końców boku rysujemy okrąg o promieniu równym długości boku.

3.



Okręgi przecinają się w dwóch punktach. Wybieramy jeden z nich i łączymy z końcami pierwszego boku.



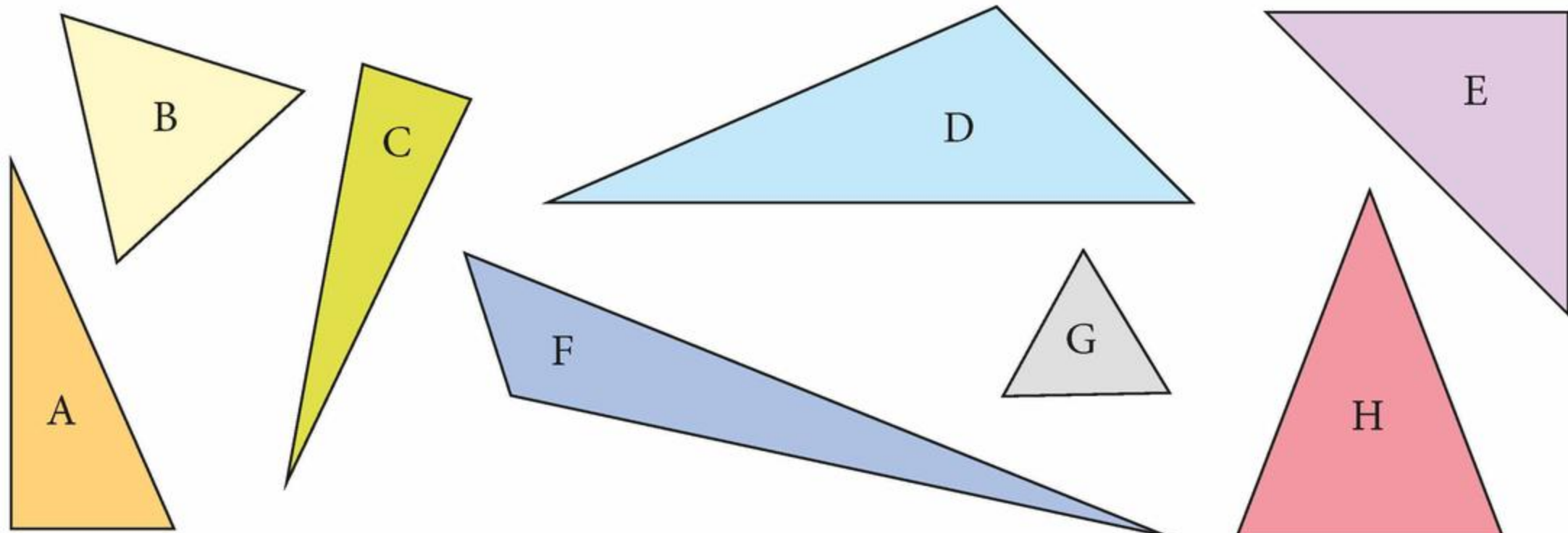
Zadania

- 1 Które spośród narysowanych poniżej trójkątów są:

a) równoboczne,

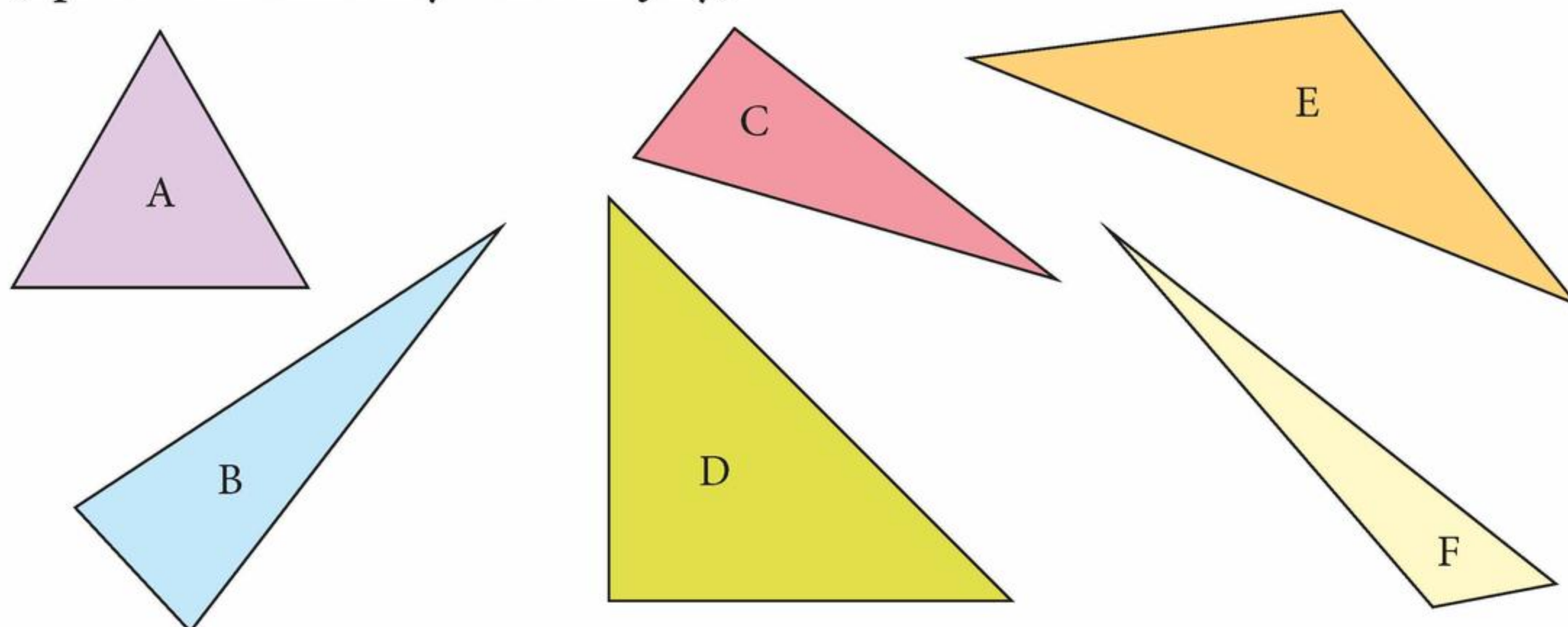
b) równoramiennie,

c) prostokątne?

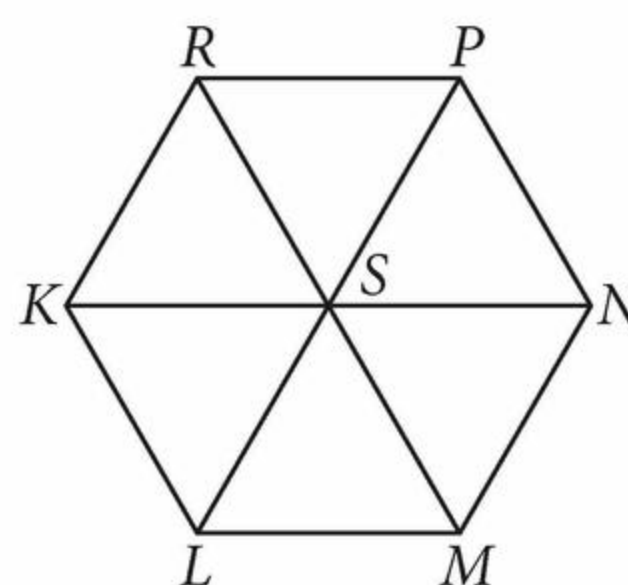
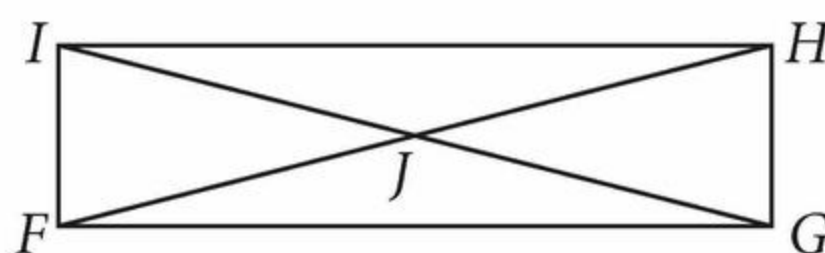
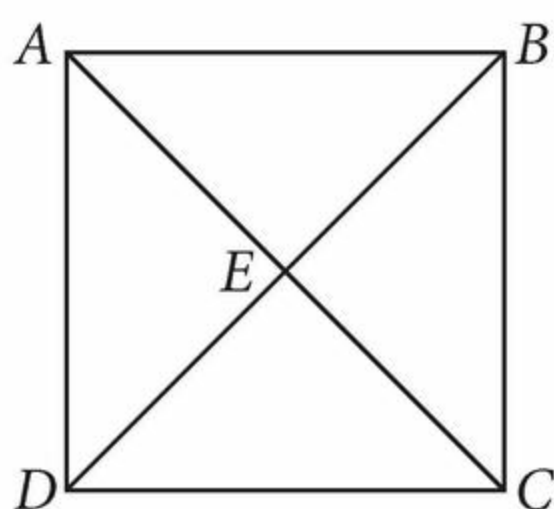


II. Figury geometryczne

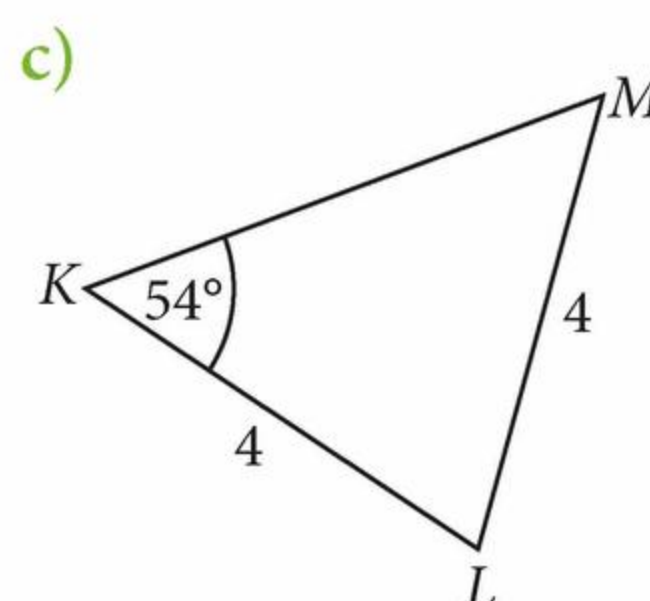
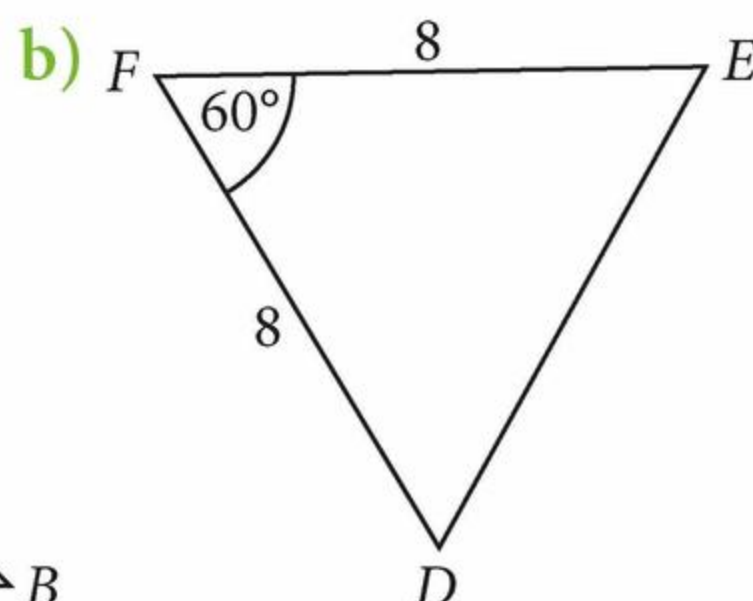
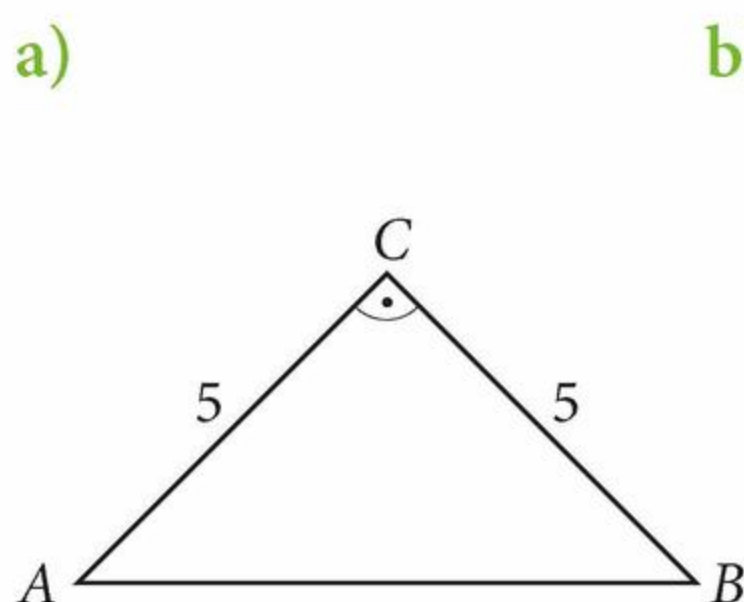
- **2** Jaki to trójkąt? Pamiętaj o podaniu dla każdego trójkąta dwóch określeń (np. równoramienny i ostrokątny).



- **3** Oblicz długość boku trójkąta równobocznego o podanym obwodzie.
a) 24 cm b) 31 cm 5 mm c) 4 m 5 cm
- **4** Oblicz obwód trójkąta równoramiennego, którego ramię ma 6 cm i jest dłuższe od podstawy o 2 cm.
- **5** Na rysunku poniżej znajdź:
a) dwa różnej wielkości trójkąty prostokątne równoramienne,
b) trzy trójkąty równoboczne,
c) trójkąt równoramienny rozwartokątny.

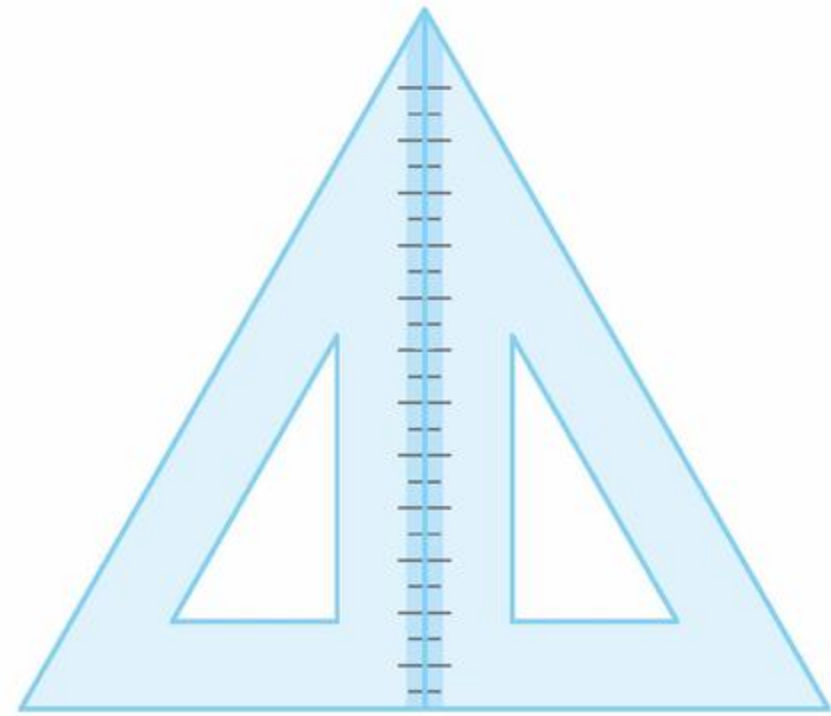


- **6** Przyjrzyj się rysunkowi poniżej. Korzystając z podanych na nim informacji, oblicz pozostałe kąty narysowanego trójkąta. Jaki to trójkąt?



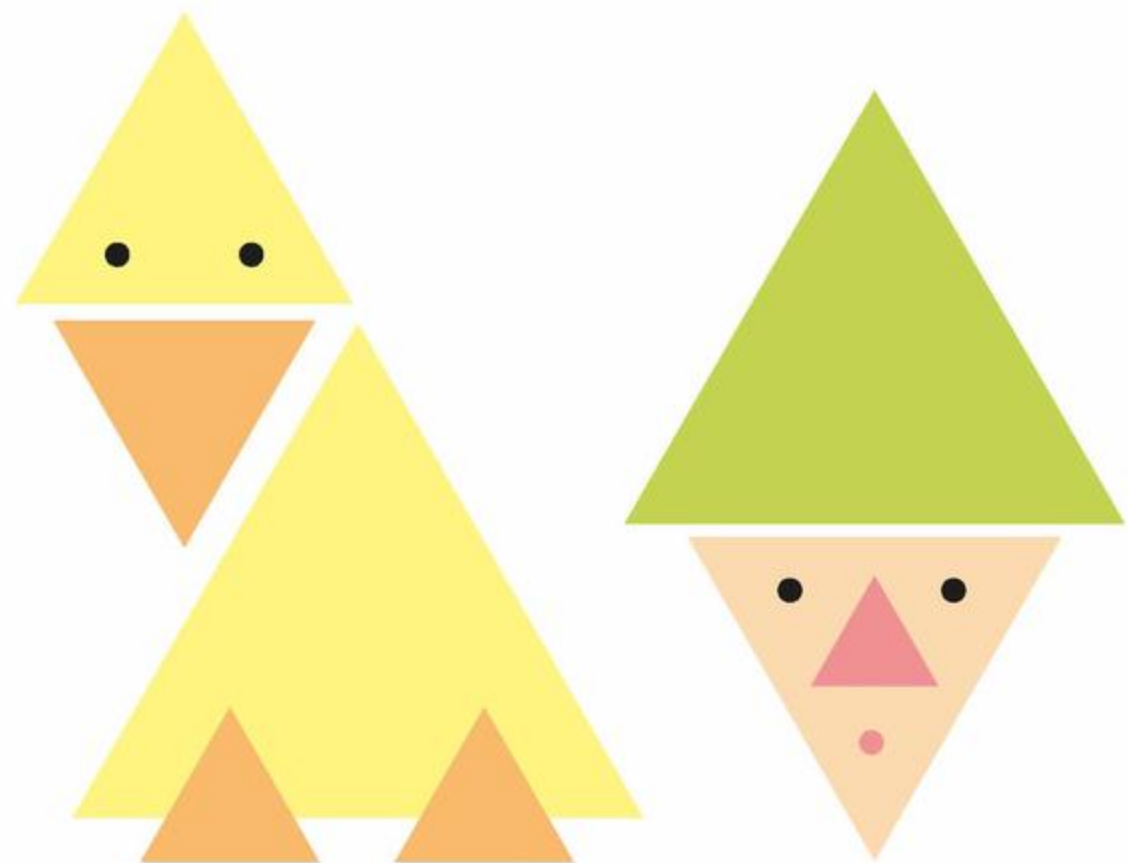
- 7 Weź dwie identyczne ekierki o kątach 30° , 60° i 90° . Ułóż je obok siebie tak, aby stykały się dłuższymi przyprostokątnymi jak na rysunku.

- a) Jaki trójkąt powstał z ekierki? Jaka jest zależność między długościami najkrótszego i najdłuższego boku ekierki?
- b) Jaki trójkąt otrzymasz, układając ekierki tak, aby stykały się krótszymi przyprostokątnymi?



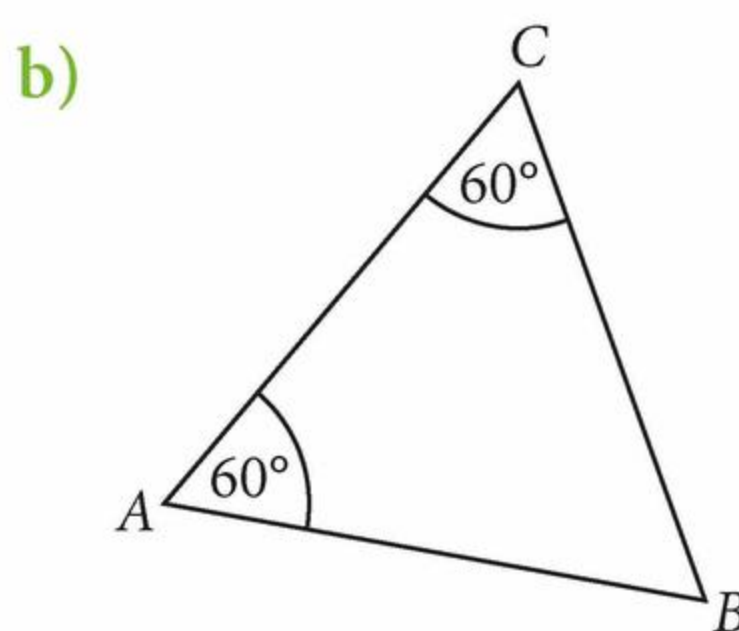
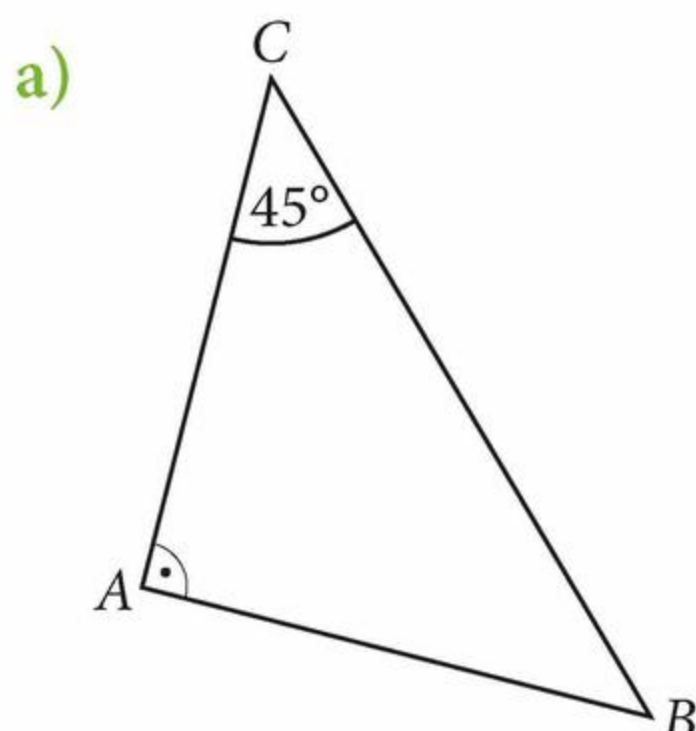
- 8 Używając linijki i kątomierza, narysuj trójkąt równoramienny, w którym:
 - a) kąt przy podstawie jest równy 20° ,
 - b) kąt między ramionami ma 90° , a ramię 4 cm,
 - c) kąt między ramionami ma 120° .

- 9 a) Przerysuj jeden z dwóch rysunków złożonych z trójkątów równobocznych (kaczkę lub krasnalą). Używaj cyrkla!
- b) Wymyśl i wykonaj własny rysunek złożony z samych trójkątów równobocznych.



- 10 Czy istnieje opisany poniżej trójkąt? Jeśli tak – narysuj go. Jeśli nie – uzasadnij dlaczego.
 - a) prostokątny równoboczny
 - b) rozwartokątny prostokątny
 - c) równoramienny rozwartokątny
- 11 Weź dwa lusterka i kartkę. Narysuj na kartce odcinek, a następnie przyłóż lusterka tak, aby otrzymać trójkąt:
 - a) równoboczny,
 - b) równoramienny.

- **12** Na rysunku poniżej podano miary dwóch kątów trójkąta. Ile stopni ma trzeci kąt tego trójkąta? Które boki tego trójkąta są równe?



- **13** Poniżej podane są kąty α i β trójkąta ABC . Oblicz trzeci kąt tego trójkąta. Czy ten trójkąt jest równoramienny? A czy jest prostokątny?

a) $\alpha = 40^\circ, \beta = 100^\circ$

c) $\alpha = 45^\circ, \beta = 100^\circ$

e) $\alpha = 20^\circ, \beta = 90^\circ$

b) $\alpha = 40^\circ, \beta = 50^\circ$

d) $\alpha = 45^\circ, \beta = 90^\circ$

f) $\alpha = 80^\circ, \beta = 50^\circ$

- **14** Na lekcji geometrii uczniowie rysowali trójkąty. Nauczyciel poprosił, aby każdy uczeń policzył wszystkie osie symetrii swojego trójkąta i powiedział, ile ich jest. Oto odpowiedzi czwórki uczniów.

Adam: „Mój trójkąt nie ma osi symetrii”.

Bartek: „Mój ma jedną”.

Czarek: „Mój ma dwie”.

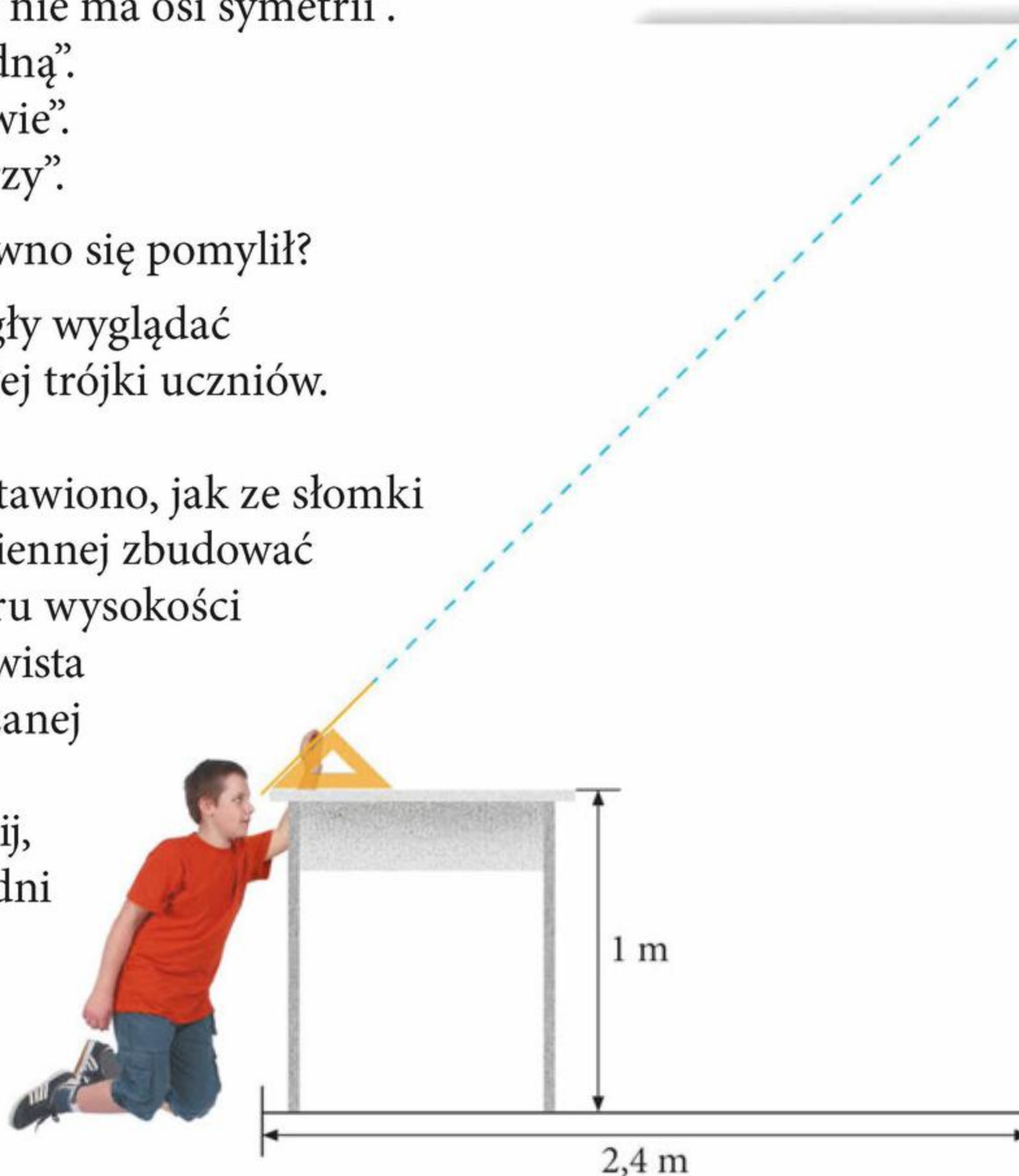
Danuta: „Mój ma trzy”.

a) Kto z nich na pewno się pomylił?

b) Narysuj, jak mogły wyglądać trójkąty pozostałej trójki uczniów.

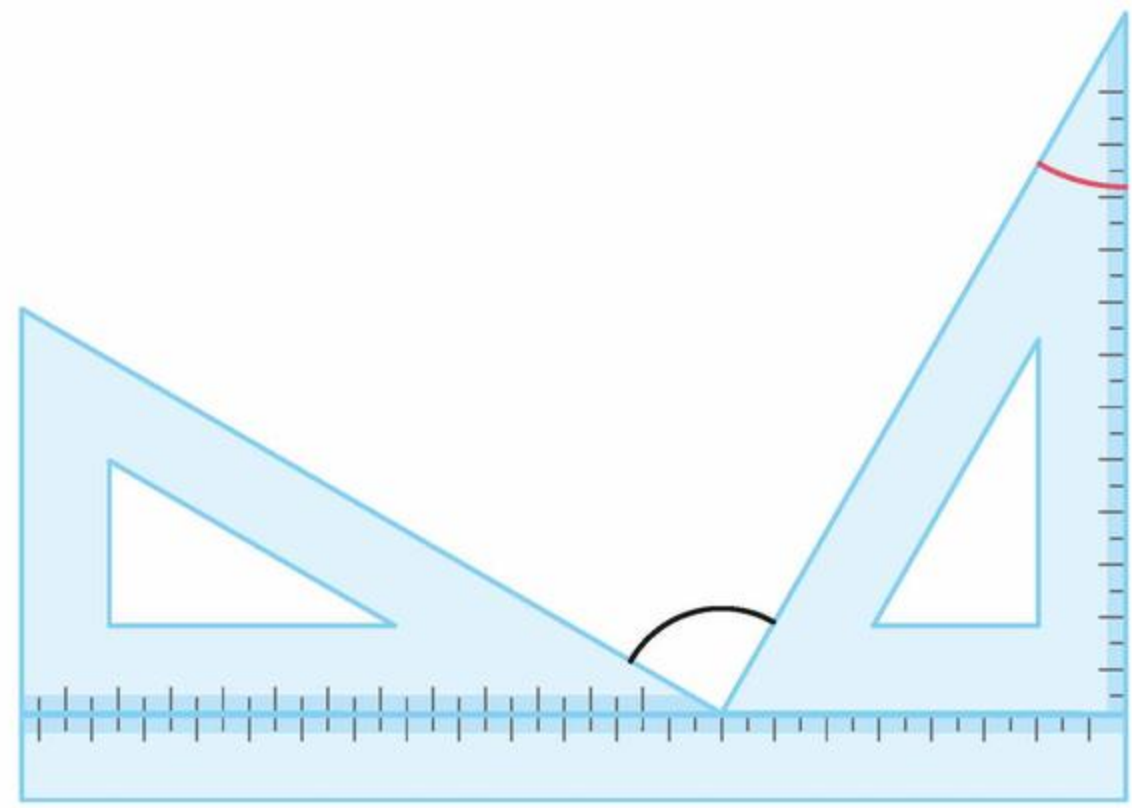
- **15** Na ilustracji przedstawiono, jak ze słomki i ekierki równoramiennej zbudować przyrząd do pomiaru wysokości sali. Jaka jest rzeczywista wysokość sali pokazanej na rysunku?

Odpowiedź uzasadnij, wykonując odpowiedni rysunek. Spróbuj zmierzyć tą metodą swój pokój.



... 16 Dwie jednakowe ekierki ułożono tak, jak pokazano na rysunku.

- Ile stopni ma kąt zaznaczony czerwonym łukiem?
- Ile stopni ma kąt zaznaczony czarnym łukiem?
- Dlaczego przeciwprostokątne tak ułożonych ekierek są prostopadłe?



... 17 Jeden z kątów trójkąta równoramiennego ma 120° . Ramię tego trójkąta ma długość 5 cm. Oś symetrii dzieli ten trójkąt na dwa mniejsze. Jaką długość ma najkrótszy bok mniejszego trójkąta?



Dla dociekliwych

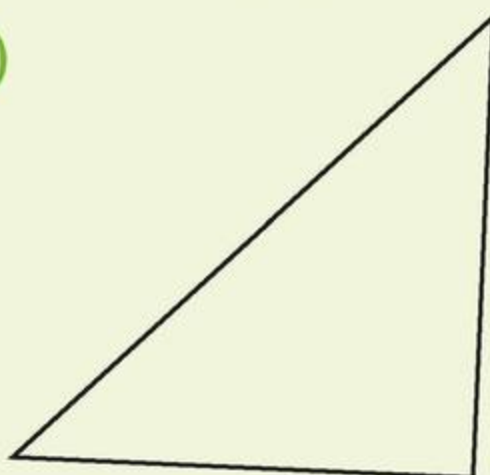
- Wiesz już, jak narysować trójkąt równoboczny. Co by było, gdybyśmy po narysowaniu pierwszego boku zmienili rozwartość cyrkla? Sprawdź to!
- Narysuj za pomocą cyrkla i linijki trójkąt równoramienny o podstawie 3 cm i ramieniu 4 cm.
- Narysuj za pomocą cyrkla i linijki trójkąt o bokach: 4 cm, 5 cm, 6 cm.



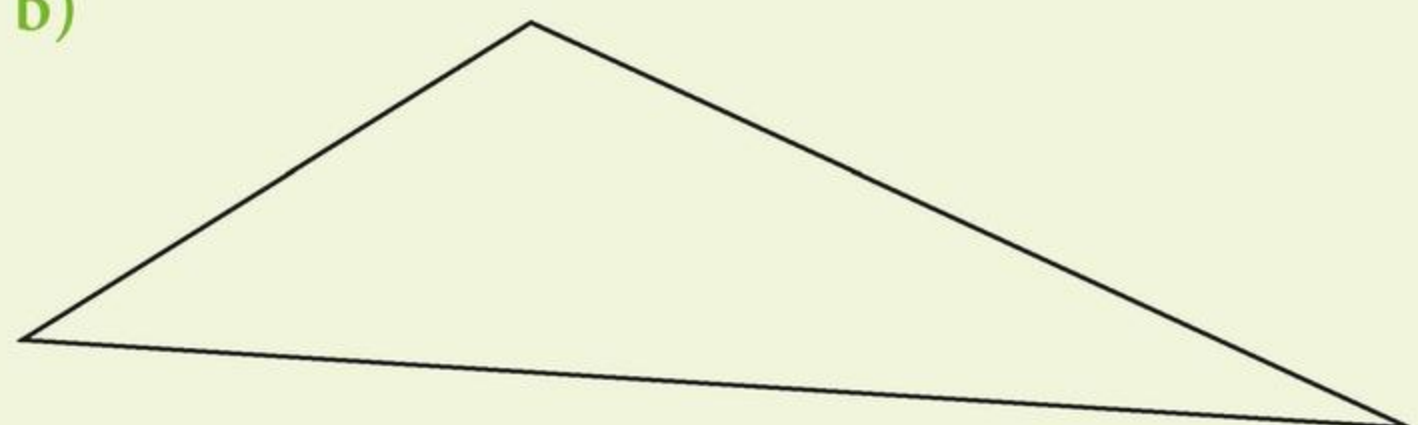
Czy już umiem?

I Jaki to trójkąt? Podaj dwa określenia.

a)



b)



- II Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 8 cm i jest o 3 cm dłuższa od każdego z jego ramion. Oblicz obwód tego trójkąta.
- III Jeden z kątów trójkąta ma 50° , a drugi o 30° więcej. Oblicz trzeci kąt tego trójkąta. Czy ten trójkąt jest prostokątny? A czy jest równoramienny?

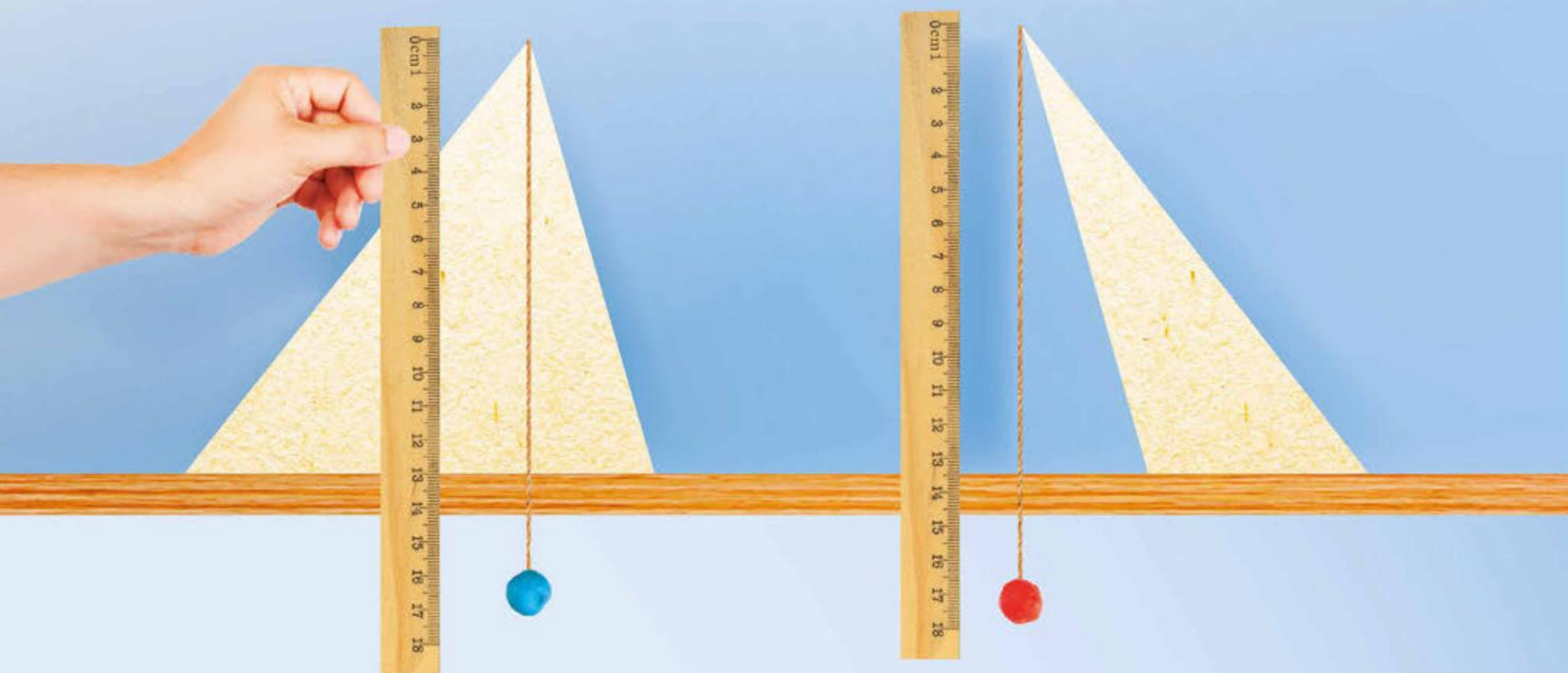


Na dobry początek

Jaka wysokość?

Przygotujcie pion, czyli nitkę z zawieszonym na końcu małym ciężarkiem (np. kulką plasteliny), książkę oraz wycięte z kartonu trzy trójkąty: ostrokątny, prostokątny i rozwartokątny.

- ▶ Ustawcie książkę pionowo na brzegu ławki. Opuśćcie pion z górnego brzegu książki.
- ▶ Przyłóżcie do pionu linijkę i zmierzcie wysokość książki.
- ▶ Teraz ustawcie książkę inaczej – tak, by stała grzbietem na ławce. Znowu zmierzcie jej wysokość.
- ▶ Weźcie wycięty trójkąt ostrokątny. Ustawcie go pionowo na brzegu ławki. Wskażcie jego najwyższy punkt i zmierzcie wysokość w ten sam sposób, w jaki mierzyliście wysokość książki.
- ▶ Zmierzcie inne wysokości tego samego trójkąta, ustawiając go na innych bokach.
- ▶ Zmierzcie wysokości pozostałych trójkątów.

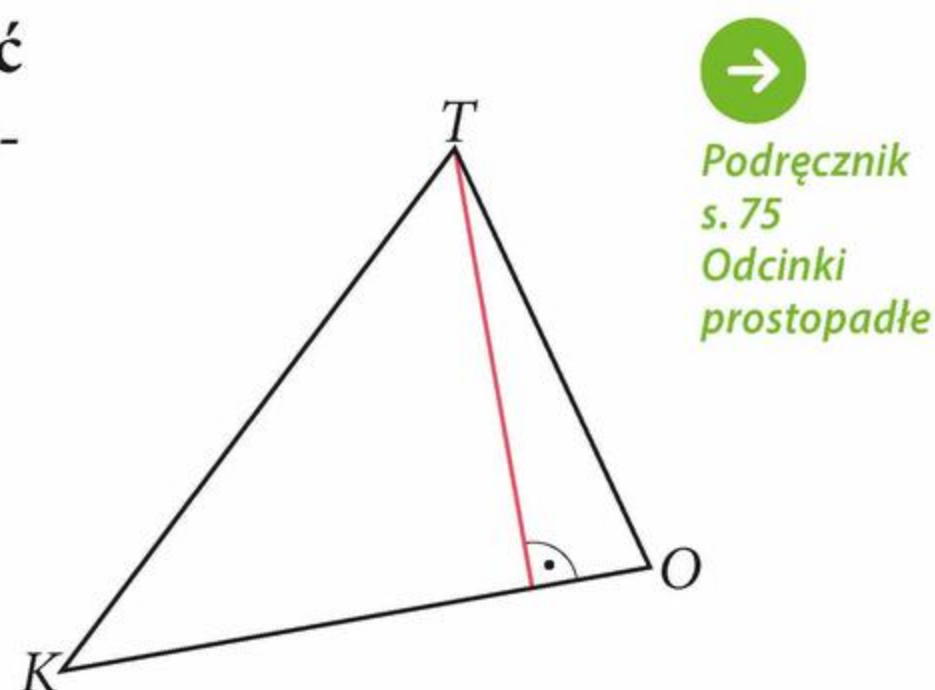


Pytania i polecenia

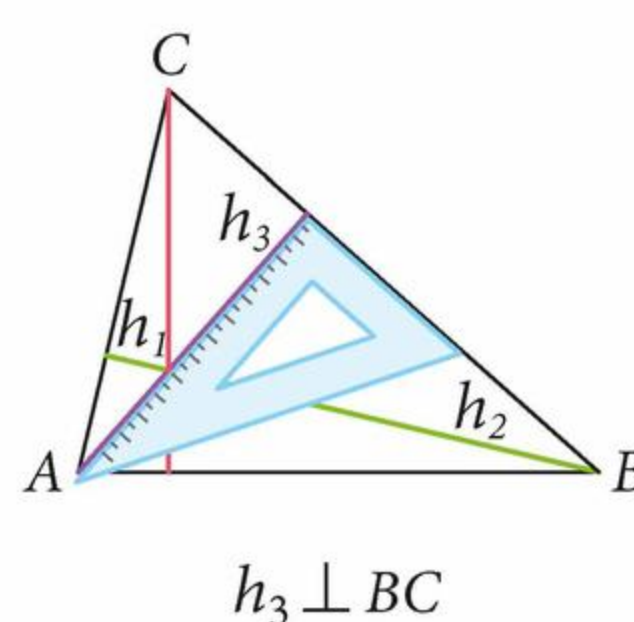
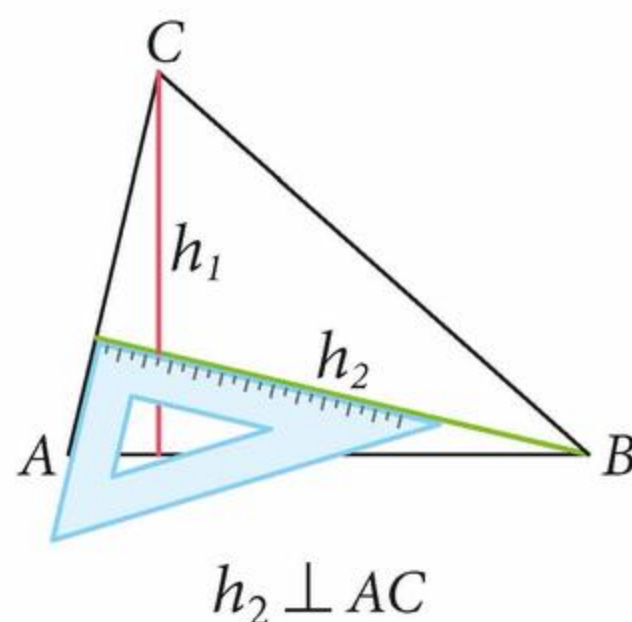
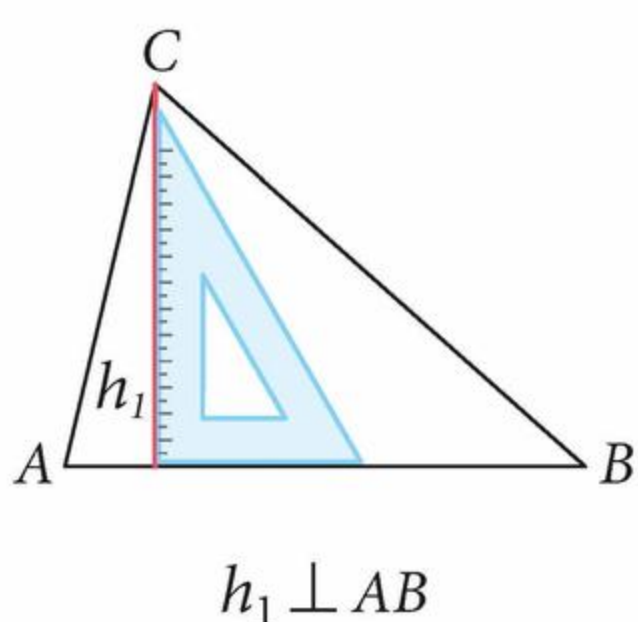
Odczytaj z rysunków wysokość pokazanych trójkątów. Czy jak postawimy trójkąty na innych bokach, to ich wysokość się zmieni?

Czerwony odcinek na rysunku to **wysokość** trójkąta KOT . Została ona opuszczona z wierzchołka T na bok KO .

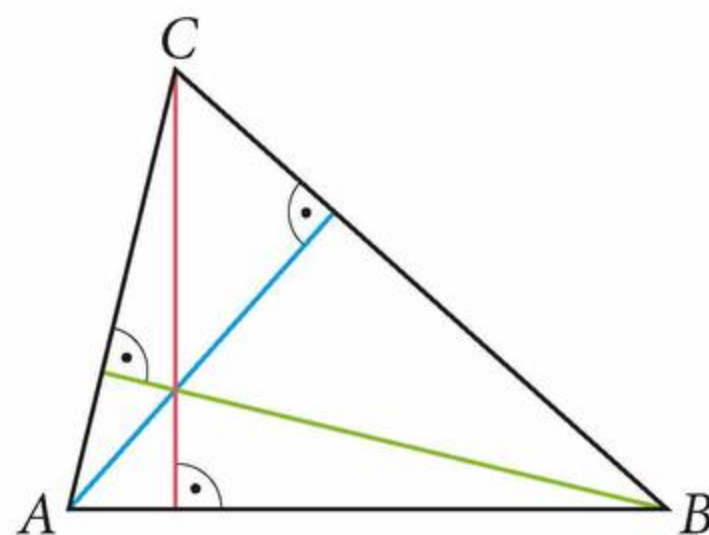
Wysokość jest zawsze prostopadła do boku trójkąta, na który została opuszczona.



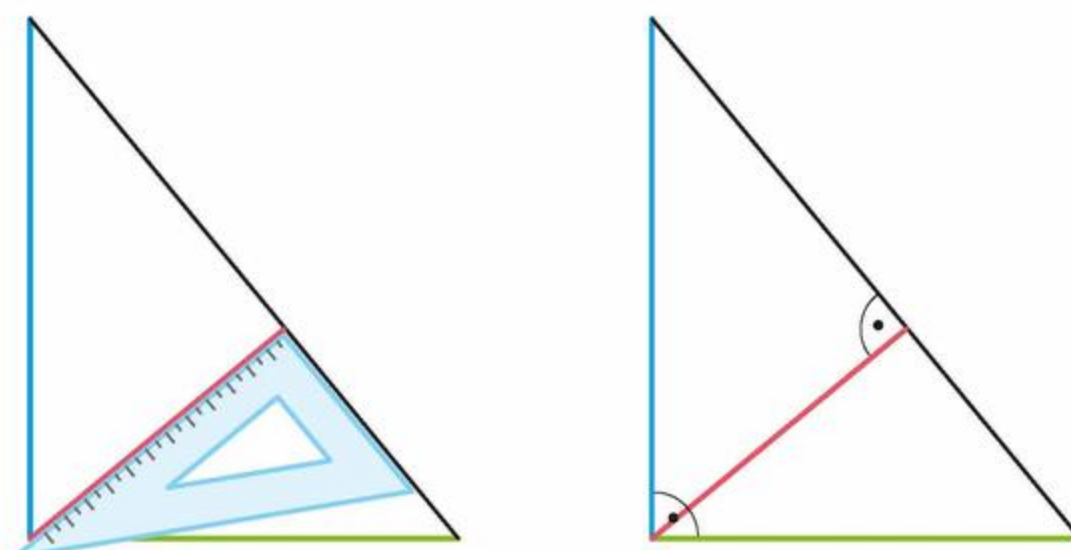
Każdy trójkąt ma trzy wierzchołki. Z każdego wierzchołka możemy opuścić wysokość. Dlatego każdy trójkąt ma trzy wysokości.



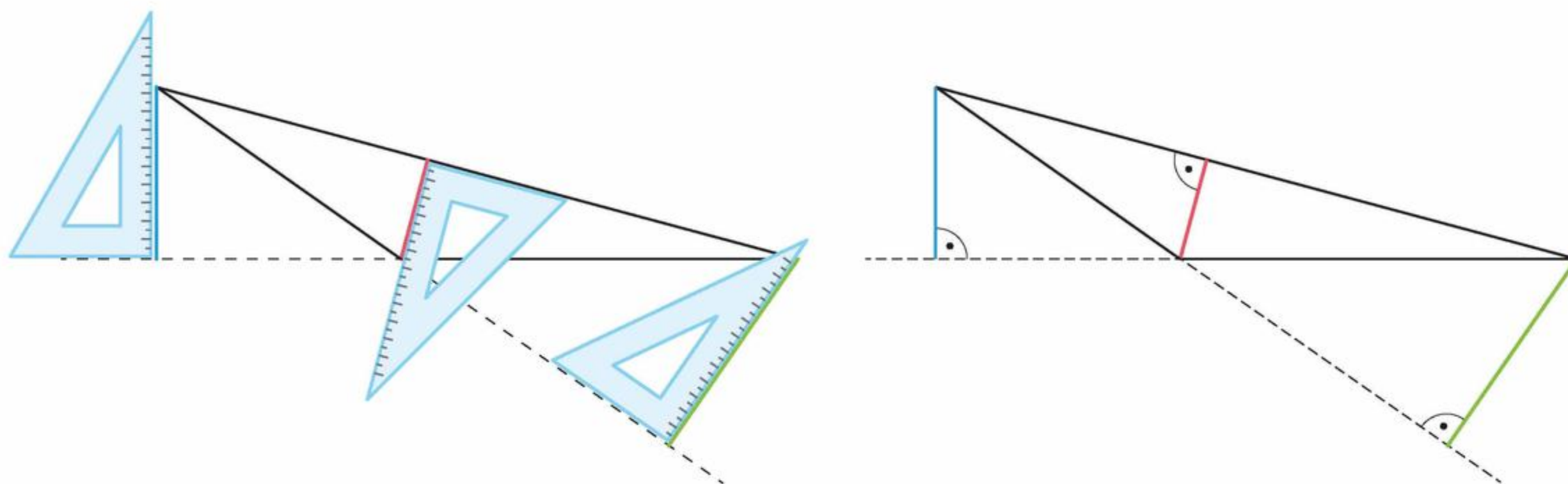
W trójkącie ostrokątnym wszystkie wysokości leżą wewnątrz trójkąta.



W trójkącie prostokątnym dwie wysokości są równocześnie bokami tego trójkąta (przyprostokątnymi), a trzecia leży wewnątrz trójkąta.

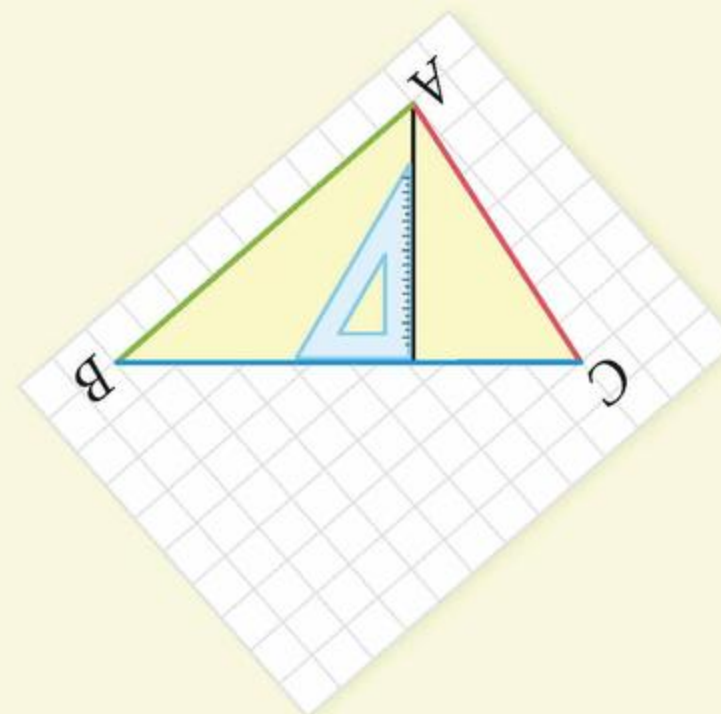
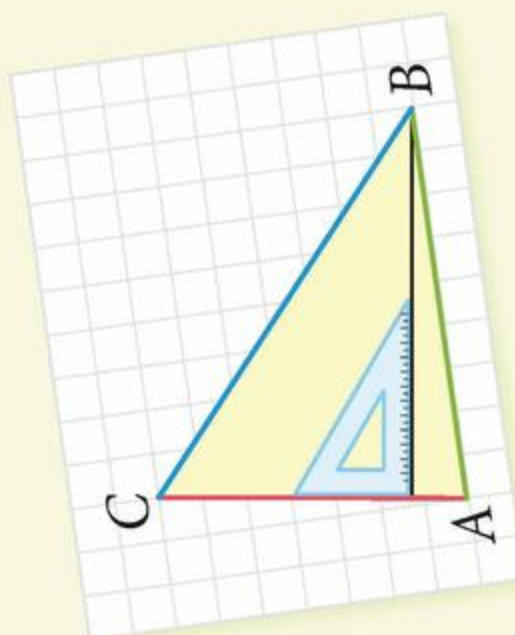
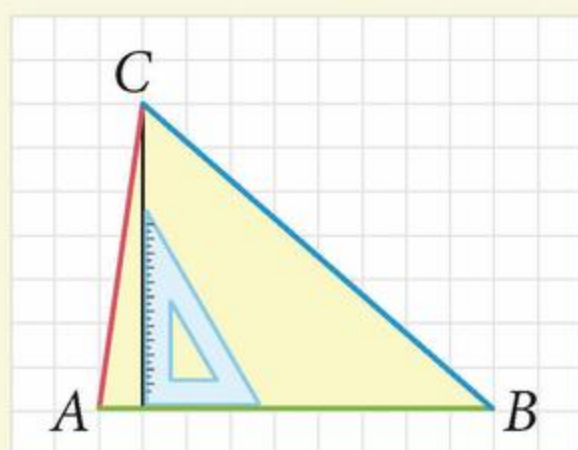


W trójkącie rozwartokątnym tylko jedną wysokość (zaznaczoną na czerwono) możemy opuścić na bok trójkąta. Leży ona wewnątrz trójkąta. Pozostałe dwie wysokości opuszczają się na przedłużenia boków. Leżą więc one na zewnątrz trójkąta.



Dobra rada

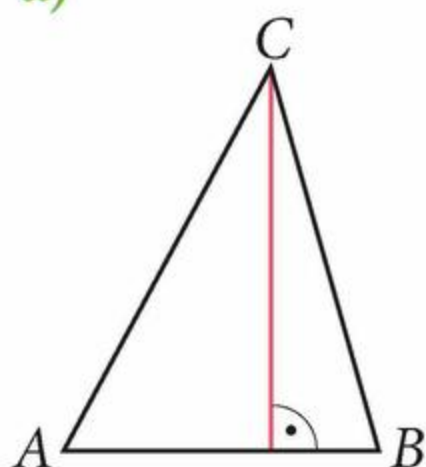
Wysokość rysuj zawsze prostopadłe do podstawy, na którą ma być opuszczona. Jeśli trudno ci to sobie wyobrazić, obróć odpowiednio kartkę, na której narysowany jest trójkąt.



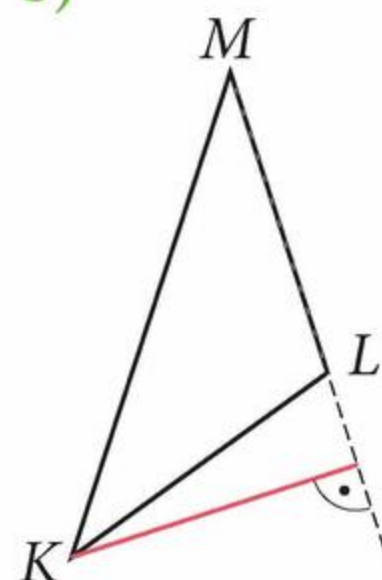
Zadania

- 1 Na rysunku zaznaczono na czerwono jedną z wysokości trójkąta. Z którego wierzchołka ją poprowadzono? Do którego boku jest ona prostopadła?

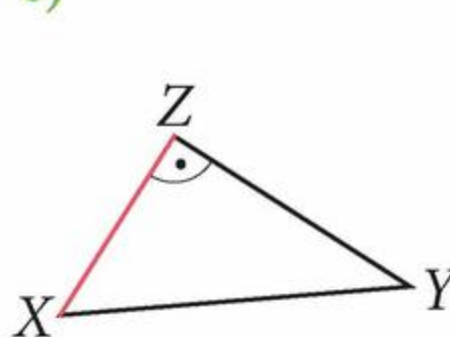
a)



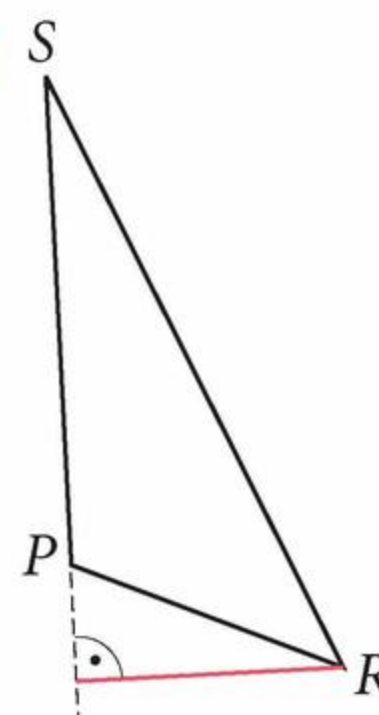
b)



c)

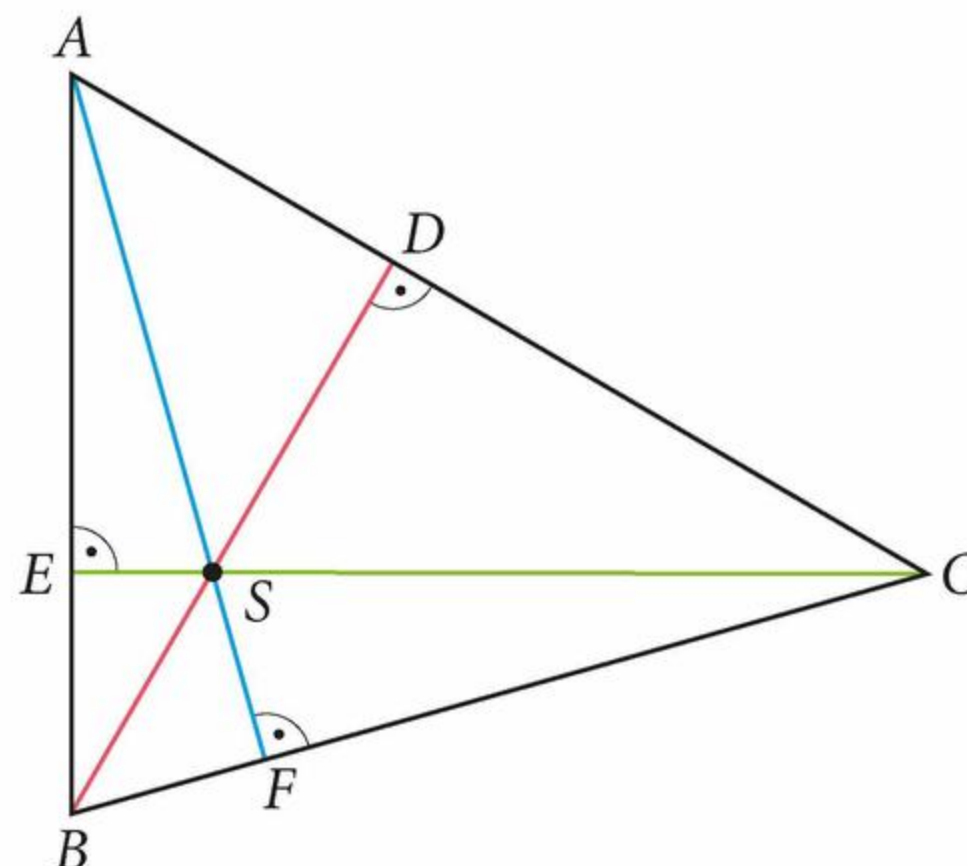


d)

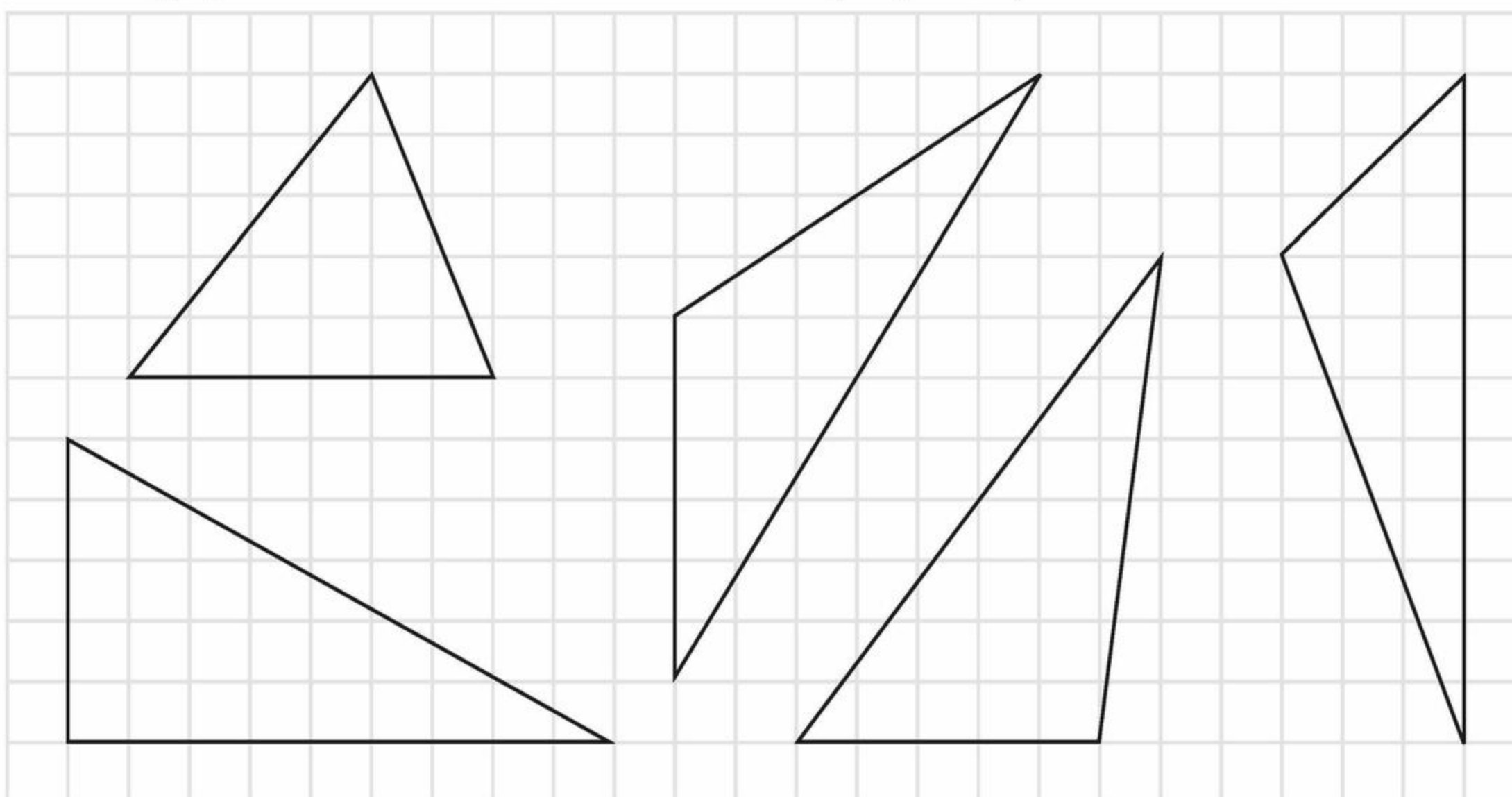


- **2** Przyjrzyj się trójkątowi na rysunku obok. Podaj, na który bok opuszczona jest wysokość:

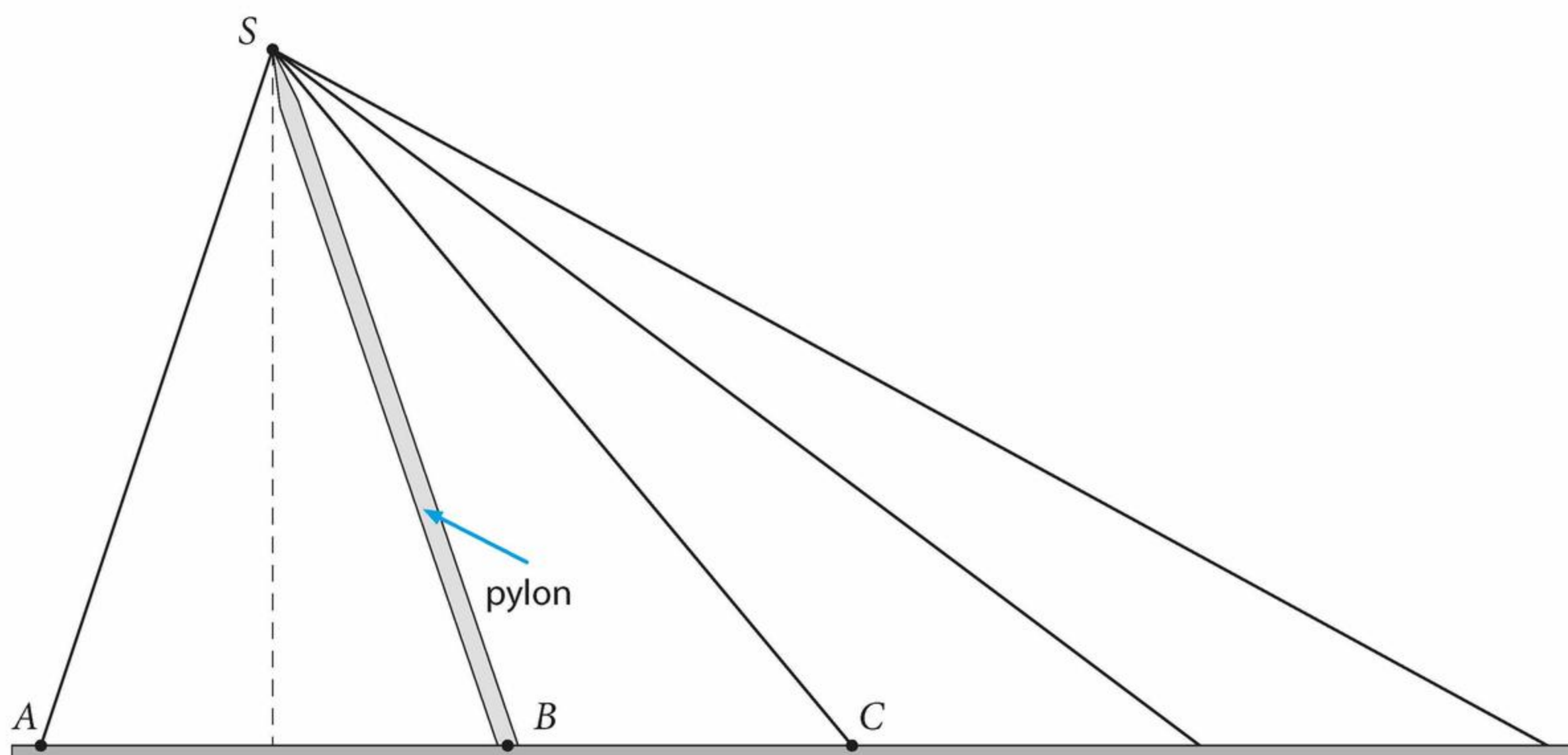
- a) CE ,
- b) AF ,
- c) BD .



- **3** Wytnij z papieru trójkąt prostokątny, a następnie kredkami w trzech różnych kolorach narysuj na nim jego wysokości.
- **4**
 - a) Na kartce zaznacz punkt. Złóż kartkę tak, aby linia zgięcia była prostopadła do brzegu kartki i przechodziła przez punkt. Zaznacz kąt prosty.
 - b) Wytnij z papieru trójkąt ostrokątny, a następnie złóż go trzykrotnie tak, aby linie zgięcia były wysokościami trójkąta.
Uwaga. Po każdym złożeniu kartki musisz ją rozprostować i dopiero wtedy złożyć ponownie.
- **5** Pracujcie w parach. Jedno z was rysuje na kartce trójkąt rozwartokątny. Następnie składa kartkę wzdłuż jednego z boków trójkąta i stawia trójkąt pionowo na tym boku. Druga osoba przykłada do wierzchołka pion i rysuje odcinek wzdłuż pionu – będzie to wysokość trójkąta. Rozłóżcie kartkę i powtórzcie ćwiczenie dla pozostałych boków.
- **6** Przerysuj poniższe trójkąty. W każdym z nich co najmniej jedną wysokość można poprowadzić wzdłuż kratek. Narysuj te wysokości.



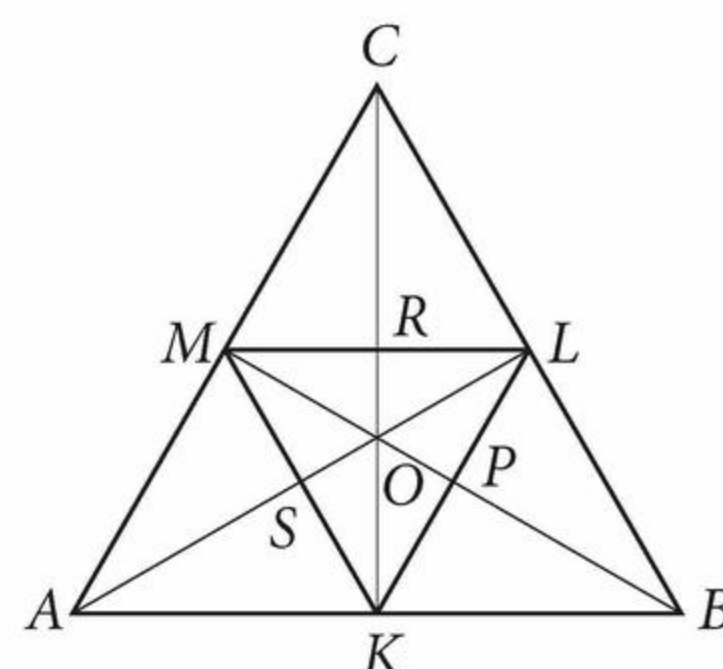
- **7** Narysuj trzy trójkąty: ostrokątny różnoboczny, równoboczny oraz rozwartokątny równoramienny. Posługując się ekierką, narysuj wysokości każdego z nich.
- **8** Narysuj trójkąt równoboczny i jedną z jego wysokości. Ta wysokość dzieli trójkąt na dwa mniejsze trójkąty. Oblicz kąty tych trójkątów.
- **9** Na rysunku w skali 1 cm – 1 m przedstawiono most wiszący. Most ten podtrzymują liny przymocowane do słupa zwanego pylonem.
 - a) Na jakiej wysokości nad powierzchnią mostu jest szczyt pylonu?
 - b) Jaka jest rzeczywista wysokość trójkąta ABS opuszczona z wierzchołka S ?
 - c) Jaka jest rzeczywista wysokość trójkąta BCS opuszczona z wierzchołka S ?



- **10** W trójkącie równoramiennym o kącie przy podstawie równym 20° poprowadzono wysokość z wierzchołka kąta między ramionami. Ta wysokość podzieliła trójkąt na dwa mniejsze trójkąty. Jakie kąty mają te trójkąty?
- **11** Narysuj trójkąt o bokach 5 cm i 4 cm oraz kącie 100° między tymi bokami. Narysuj wysokości tego trójkąta.
- **12** Narysuj trójkąt o bokach 7,5 cm i 2,5 cm oraz kącie 40° między tymi bokami. Jaki to rodzaj trójkąta? Narysuj jego najdłuższą wysokość. Jak jest położona ta wysokość względem najkrótszego boku trójkąta?

- 13** W trójkącie równobocznym ABC połączono środki boków. Otrzymany trójkąt KLM też jest równoboczny. W wysokościach trójkąta ABC zawierają się także wysokości trójkąta KLM . Znajdź na rysunku i wypisz wszystkie wysokości trójkąta:

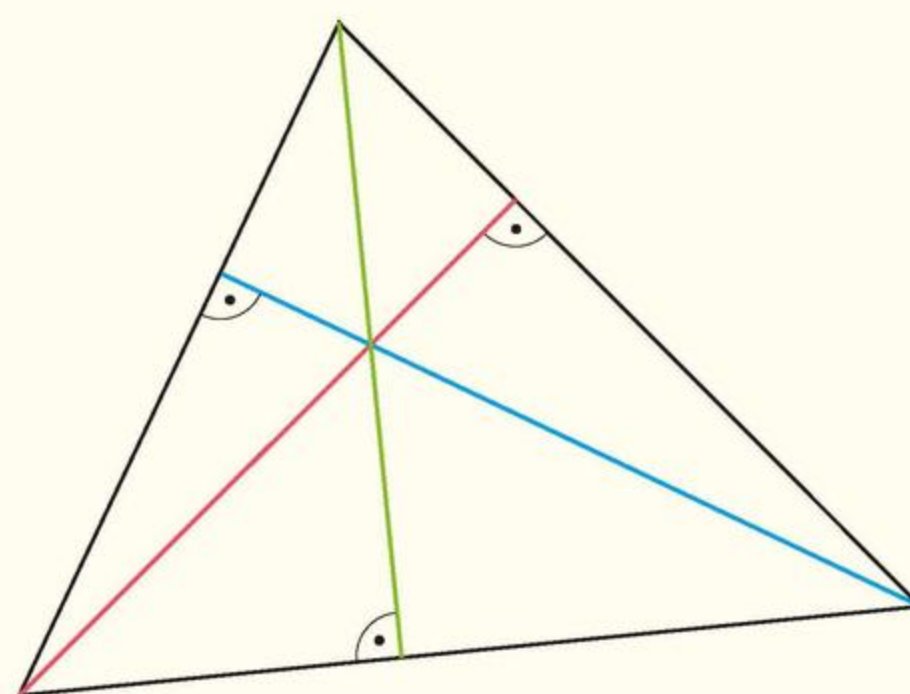
a) KBO , b) ABO , c) MOL .



Dla ciekawych

W trójkącie ostrokątnym wszystkie wysokości przecinają się w jednym punkcie. Ten punkt znajduje się wewnątrz trójkąta.

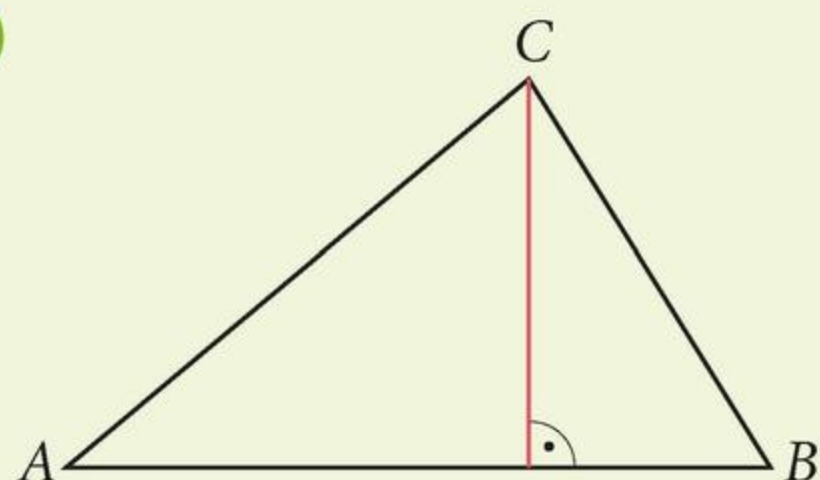
- 1 Czy w trójkącie prostokątnym wysokości mają punkt wspólny? Jeśli tak, to gdzie się on znajduje?
- 2 Podobną własność mają wysokości w trójkącie rozwartokątnym. Spróbuj ją odkryć i sformułować.



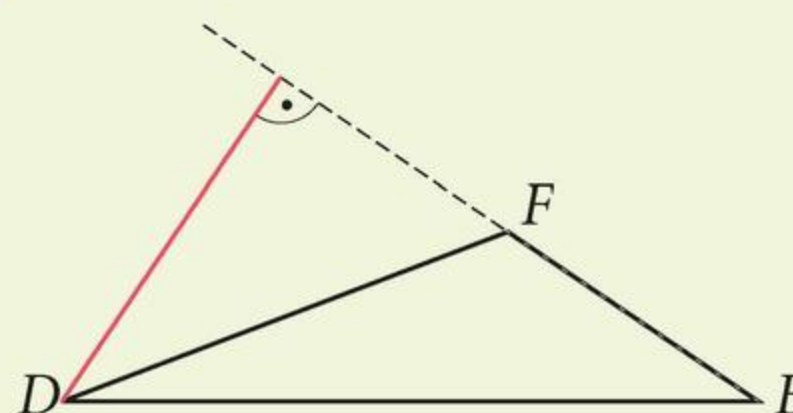
Czy już umiem?

- I Z którego wierzchołka trójkąta poprowadzono wysokość? Do którego boku jest ona prostopadła?

a)



b)



- II Narysuj trójkąt o kątach 30° i 70° . Posługując się ekierką, narysuj jego wysokości.
- III Narysuj trójkąt równoramienny, w którym jeden z kątów ma 135° . Narysuj wysokości tego trójkąta.



Na dobry początek

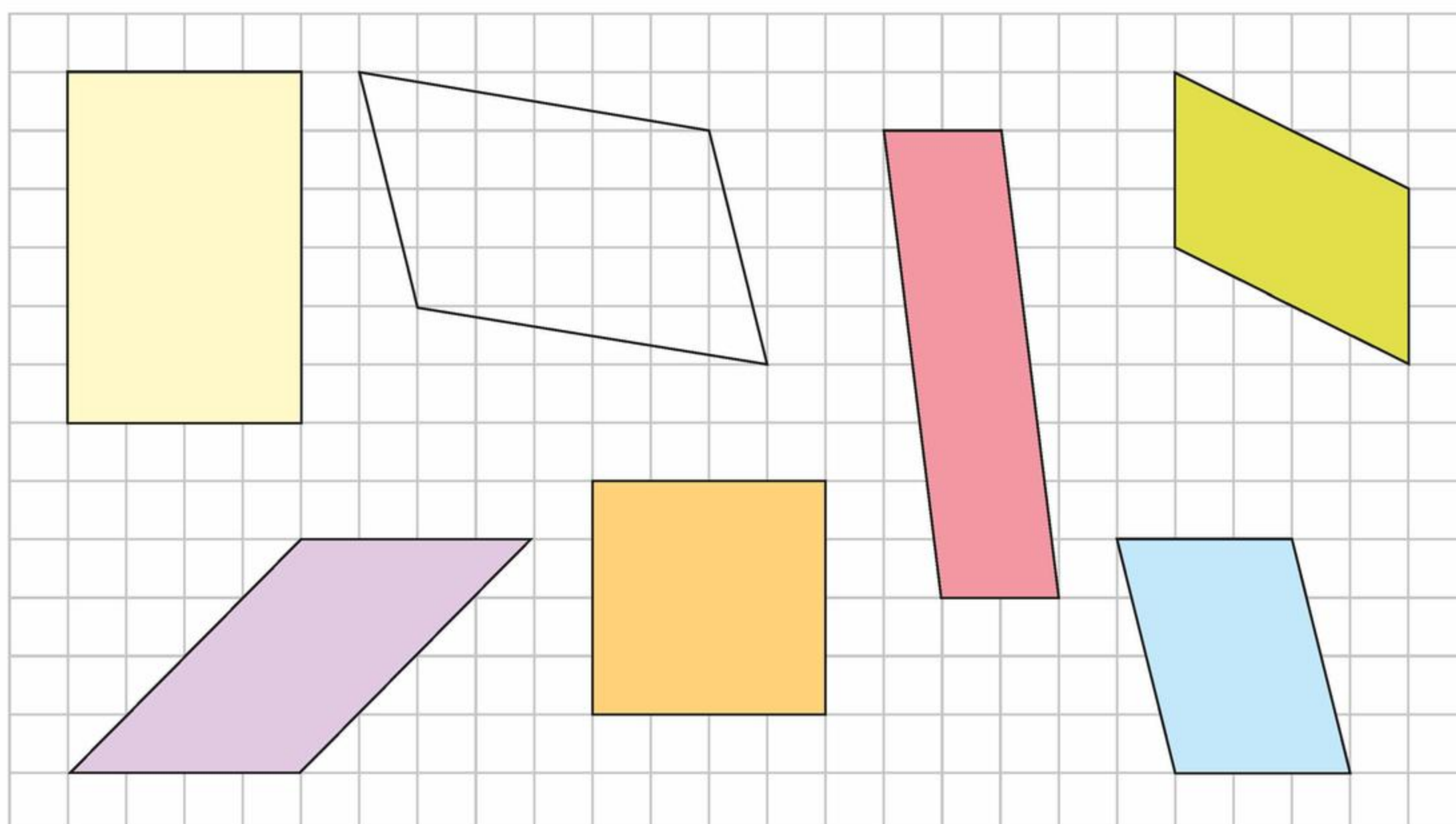
Kwadrat czy nie kwadrat?

- ▶ Weź kartkę i złóż ją w dowolny sposób na dwie części. Złóż ją drugi raz, łącząc końce linii pierwszego zgięcia. Narysuj odcinek o końcach leżących na liniach zgięć jak na zdjęciu.



- ▶ Odetnij część kartki wzdłuż zaznaczonego odcinka. Gdy rozłożysz odciętą część, okaże się, że ma ona kształt czworokąta o równych bokach.
- ▶ Zbadaj własności tej figury.
 - Ile ma kątów ostrych, prostych, rozwartych?
 - Ile ma osi symetrii? Ile ma przekątnych?
 - Pod jakim kątem przecinają się jej przekątne?
- ▶ Co jeszcze można powiedzieć o tej figurze?

To są równoległoboki.

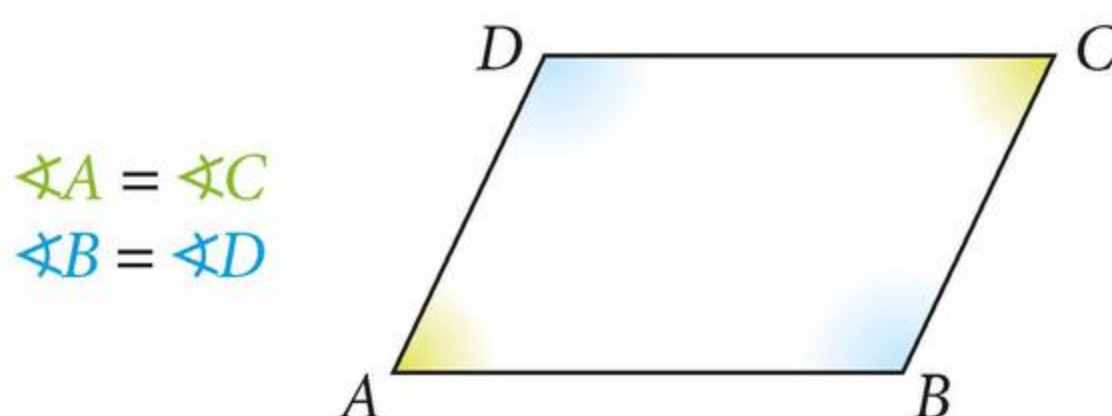


Równoległobok to czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

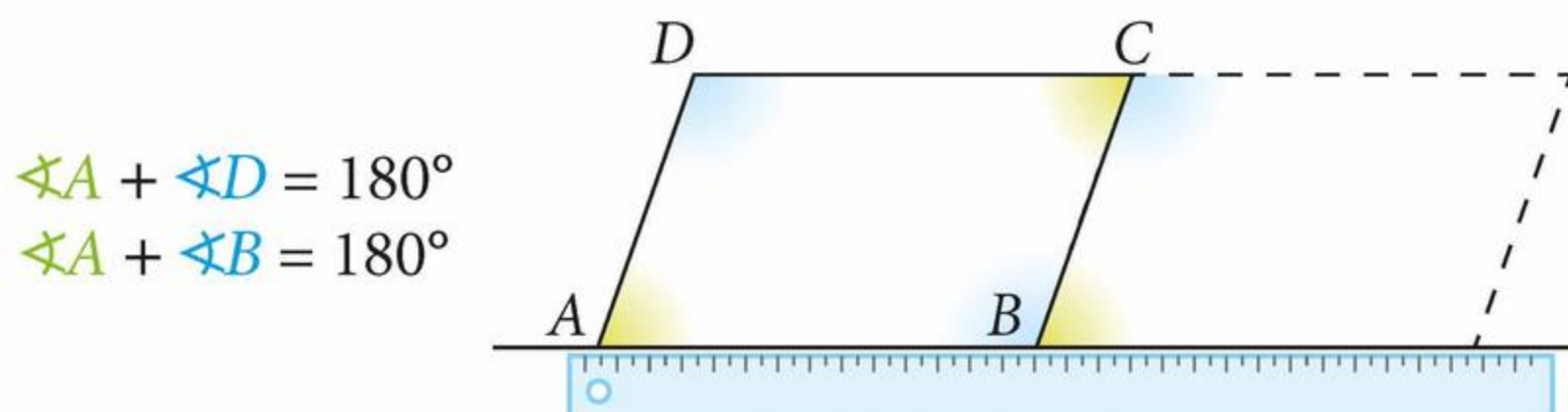


Przeciwnie boki równoległoboku mają tę samą długość.

Kąty równoległoboku leżące naprzeciwko siebie są równe.



Kąty leżące przy jednym boku równoległoboku mają w sumie 180° .

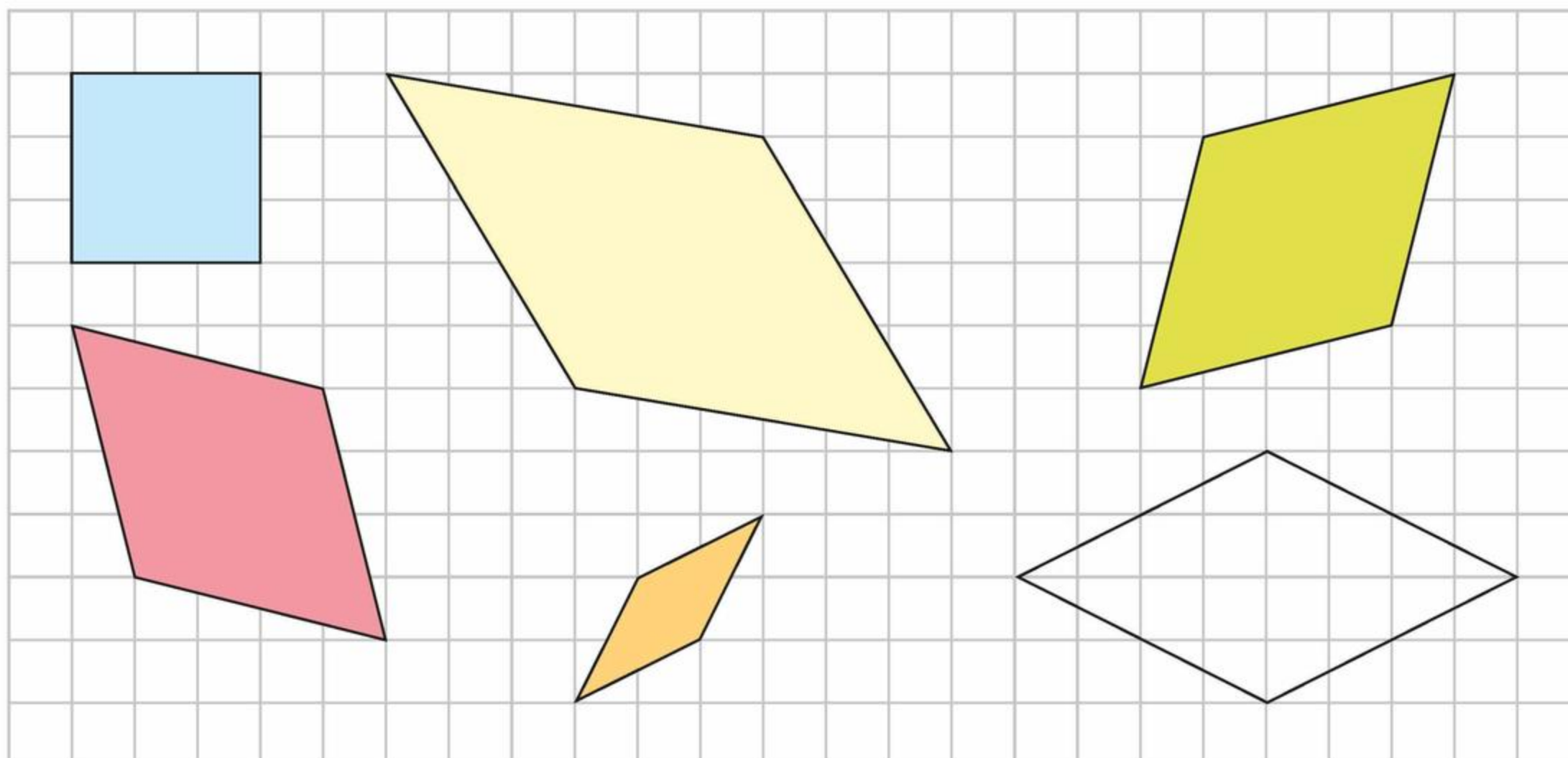


Prostokąt także jest równoległobokiem.

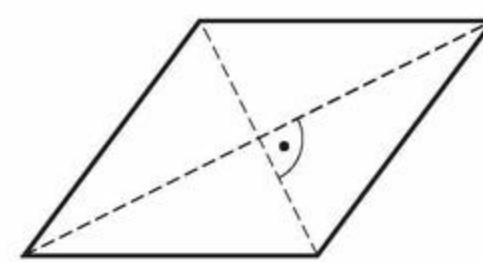
Jest to równoległobok, który ma wszystkie kąty proste.



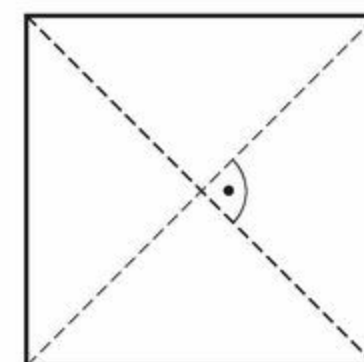
To są romby.



Romb to równoległobok, który ma wszystkie boki równe. Przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym, a punkt przecięcia dzieli każdą z nich na połowy.



Kwadrat ma równe boki, a więc też jest rombem. Jak w każdym rombie, jego przekątne przecinają się pod kątem prostym, a punkt przecięcia dzieli każdą z nich na połowy. W odróżnieniu od innych rombów kwadrat ma przekątne równej długości.

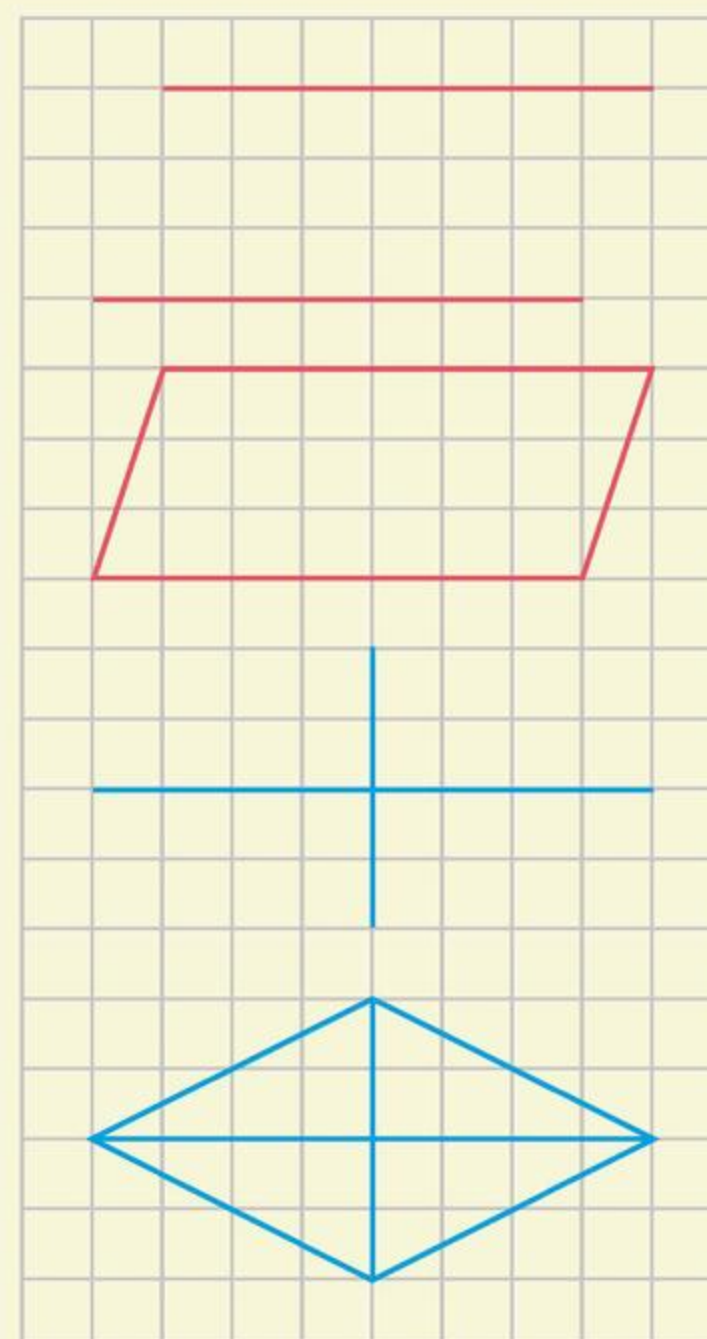


Dobra rada

Aby narysować **równoległobok** w zeszycie w kratkę, zacznij od narysowania wzdłuż linii kratek dwóch równych odcinków.

Wystarczy połączyć ich końce (jak na rysunku obok), aby otrzymać równoległobok.

Rysowanie **rombu** najlepiej rozpocząć od narysowania jego przekątnych. Trzeba tylko pamiętać, że powinny być prostopadłe i dzielić się na połowy. Najłatwiej to uzyskać, jeśli jedna z nich jest pionowa, a druga pozioma. Potem wystarczy połączyć ich końce.

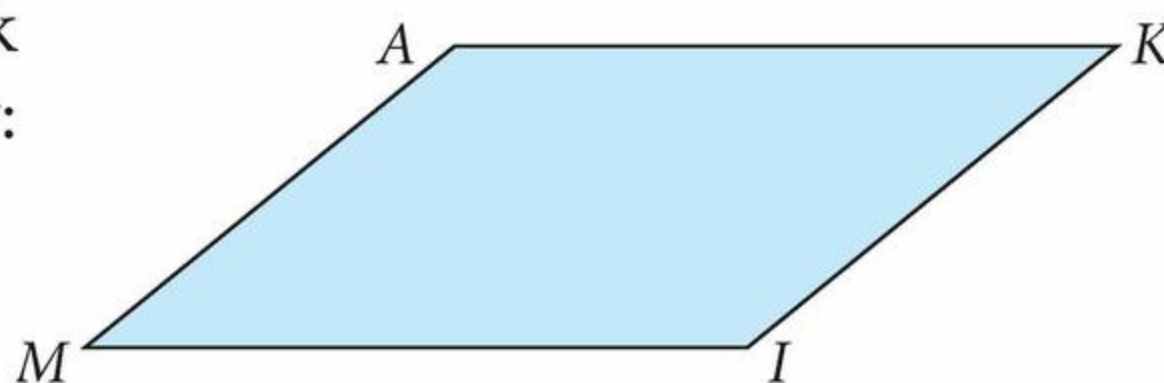


Zadania

- **1** Narysuj prostokąt o bokach 2 cm i 3 cm. Oznacz jego wierzchołki literami A, B, C, D. Wypisz nazwy:
 - a) wszystkich boków,
 - b) boków prostopadłych do boku AB,
 - c) boków długości 2 cm,
 - d) przekątnych.
- **2** Złóż kartkę i wytnij z niej dwa identyczne trójkąty równoboczne. Ile różnych równoległoboków można z nich ułożyć?

- **3** Przyjrzyj się narysowanemu obok równoległobokowi. Wypisz nazwy:

- a) boków równoległych,
- b) przekątnych.

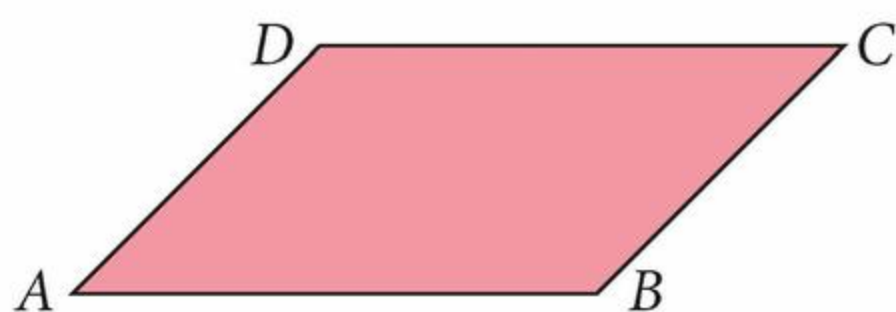


- **4** Oblicz obwód:

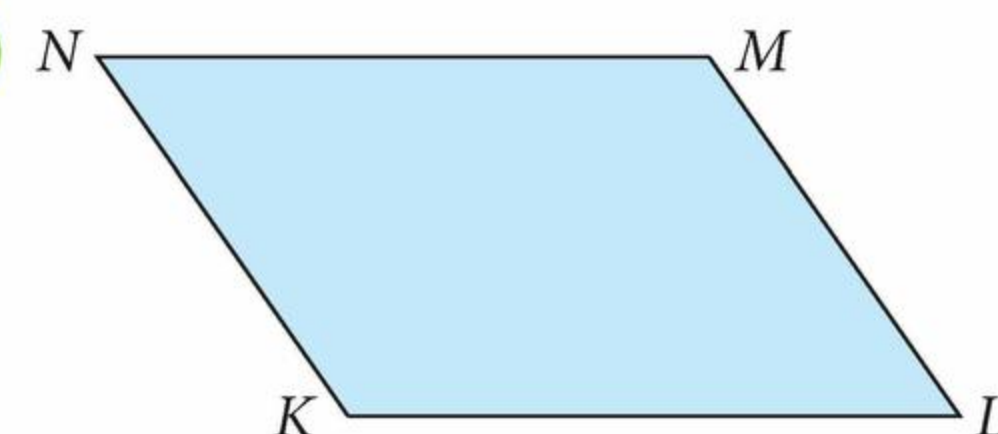
- a) rombu o boku 3 cm,
- b) równoległoboku o bokach 2,5 cm i 4 cm.

- **5** Zmierz boki i kąty narysowanego równoległoboku.

a)



b)



- **6** Narysuj:

- a) kwadrat o obwodzie 24 cm,
- b) prostokąt o obwodzie 32 cm i jednym z boków 6 cm.

- **7** Korzystając z „Dobrej rady” ze strony 118, narysuj na kartce w kratkę:

- a) dwa różne równoległoboki o jednym boku długości 2 cm,
- b) romb o przekątnych długości 3 cm i 6 cm.

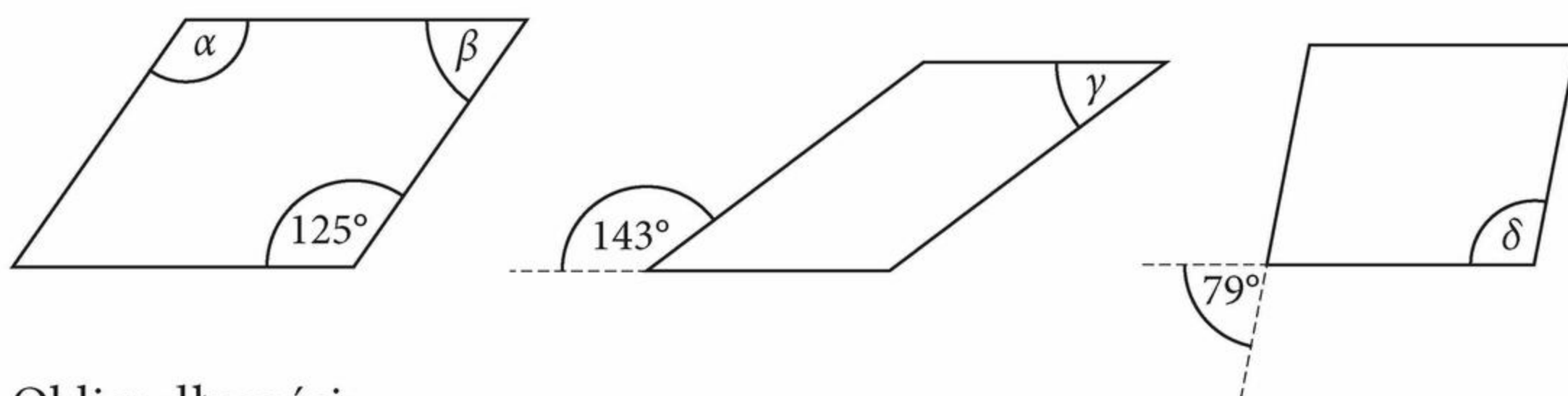
- **8** Korzystając z „Dobrej rady” ze strony 118, narysuj na kartce w kratkę romb, którego każda przekątna ma długość 6 cm. Sprawdź, czy ten romb ma kąty proste. Jak nazywa się taki romb?

- **9** Narysuj trzy różne równoległoboki o bokach długości 2 cm i 5 cm.

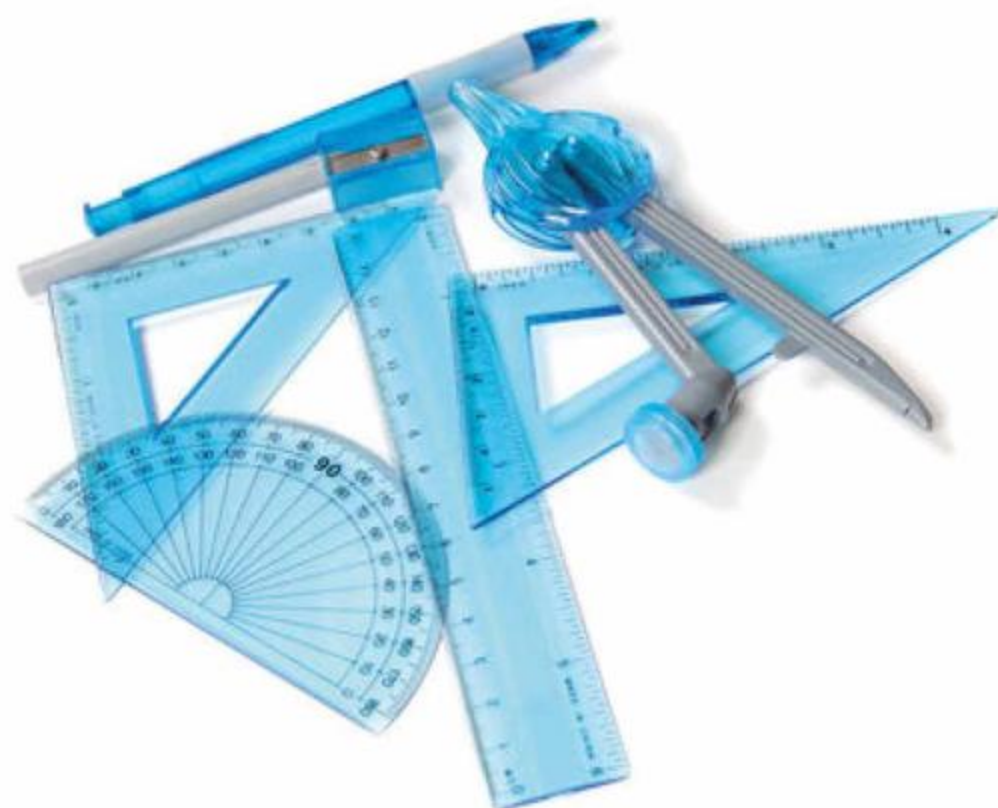
- **10** Wytnij z papieru romb, który nie jest kwadratem, i równoległobok, który nie jest ani rombem, ani prostokątem. Złóż każdą z tych figur tak, aby móc odpowiedzieć na pytania.

- Ile osi symetrii ma romb, który nie jest kwadratem?
- Ile osi symetrii ma równoległobok, który nie jest ani rombem, ani prostokątem?

- 11 W narysowanych poniżej równoległobokach oblicz kąty α , β , γ i δ .



- 12 Oblicz długości:
- boków rombu o obwodzie 48 cm,
 - pozostałych boków równoległoboku o obwodzie 62 cm, w którym jeden bok ma 18 cm.
- 13 Narysuj i wytnij z papieru równoległobok, prostokąt, romb oraz kwadrat. Złóż każdą z tych figur tak, aby linie zgięcia były jej przekątnymi. Używając cyrkla, kątomierza i ekierki, zbadaj własności przekątnych tych figur.
- 14 Narysuj prostokąt o przekątnej długości 6 cm i kącie między przekątną a bokiem równym 60° . Skorzystaj z przyrządów geometrycznych.
- 15 Posługując się przyborami geometrycznymi, narysuj na gładkim papierze daną figurę. Oblicz jej obwód. Narysuj i zmierz jej przekątne.
- równoległobok o bokach 3 cm i 4 cm oraz kącie między nimi równym 30°
 - romb o boku długości 4 cm i kącie między bokami równym 45°
- 16 Przekątne równoległoboku przecinają się w punkcie, który dzieli każdą z nich na połowy. Wiedząc o tym, narysuj równoległobok o przekątnych 8 cm i 10 cm oraz kącie między nimi równym 115° .
- 17 Narysuj romb o obwodzie 32 cm i kącie ostrym równym 30° .
- 18 W rombie o boku 3 cm jedna z przekątnych ma również długość 3 cm. Oblicz kąty tego rombu i narysuj go, używając cyrkla i linijki.





Dla ciekliwych

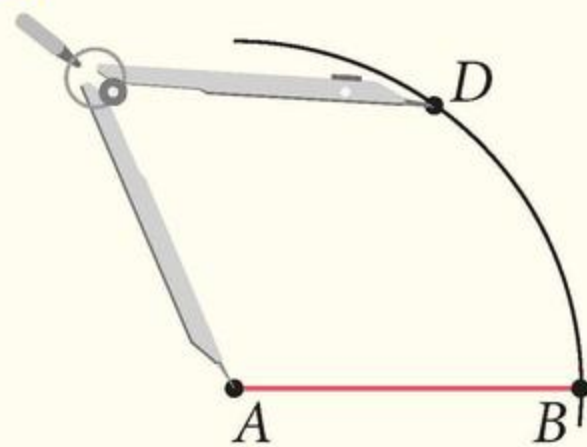
Popatrz, jak narysować romb o danej długości boku, np. 2 cm.

1.



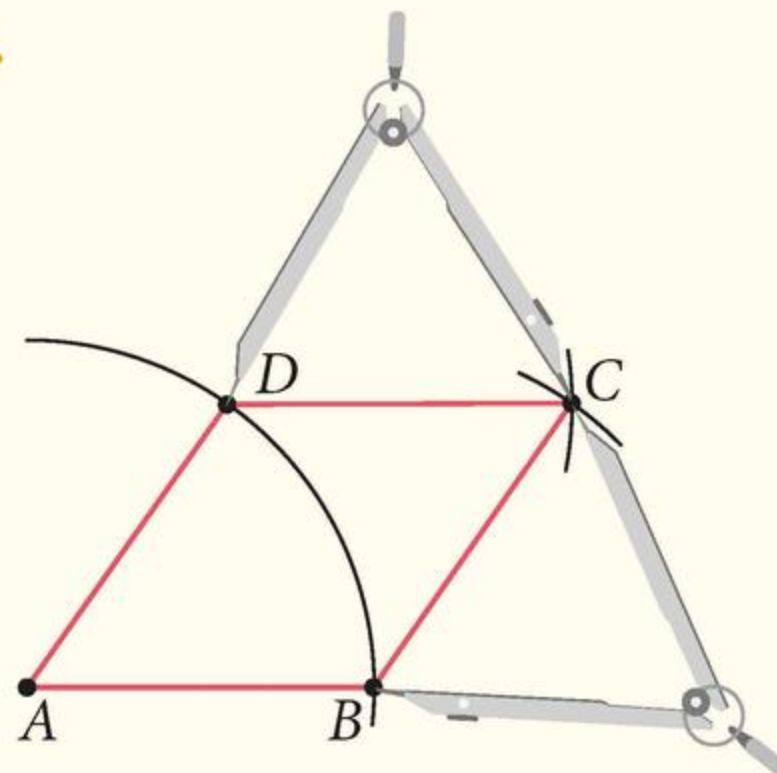
Narysuj odcinek AB o danej długości. Będzie to jeden z boków rombu.

2.



Narysuj wokół punktu A łuk o promieniu AB . Wybierz na nim dowolny punkt D – to będzie trzeci wierzchołek rombu.

3.



Narysuj wokół punktów B i D łuki o promieniu AB . Ich punkt przecięcia C to ostatni wierzchołek rombu.

- 1 Wyjaśnij, dlaczego tak narysowany czworokąt ma wszystkie boki równe.
- 2 Narysuj na gładkim papierze dwa różne romby o boku długości 4 cm.
- 3 Narysuj prostą a i punkt D leżący poza tą prostą. Wybierz dowolny punkt na prostej a i oznacz go literą A . Narysuj romb $ABCD$ tak, aby wierzchołek B również leżał na prostej a . Narysuj prostą DC . Jak są położone względem siebie proste a i DC ?
- 4 Narysuj prostą b i punkt X leżący poza tą prostą. Za pomocą cyrkla i linijki narysuj prostą c równoległą do b i przechodzącą przez punkt X .



Czy już umiem?

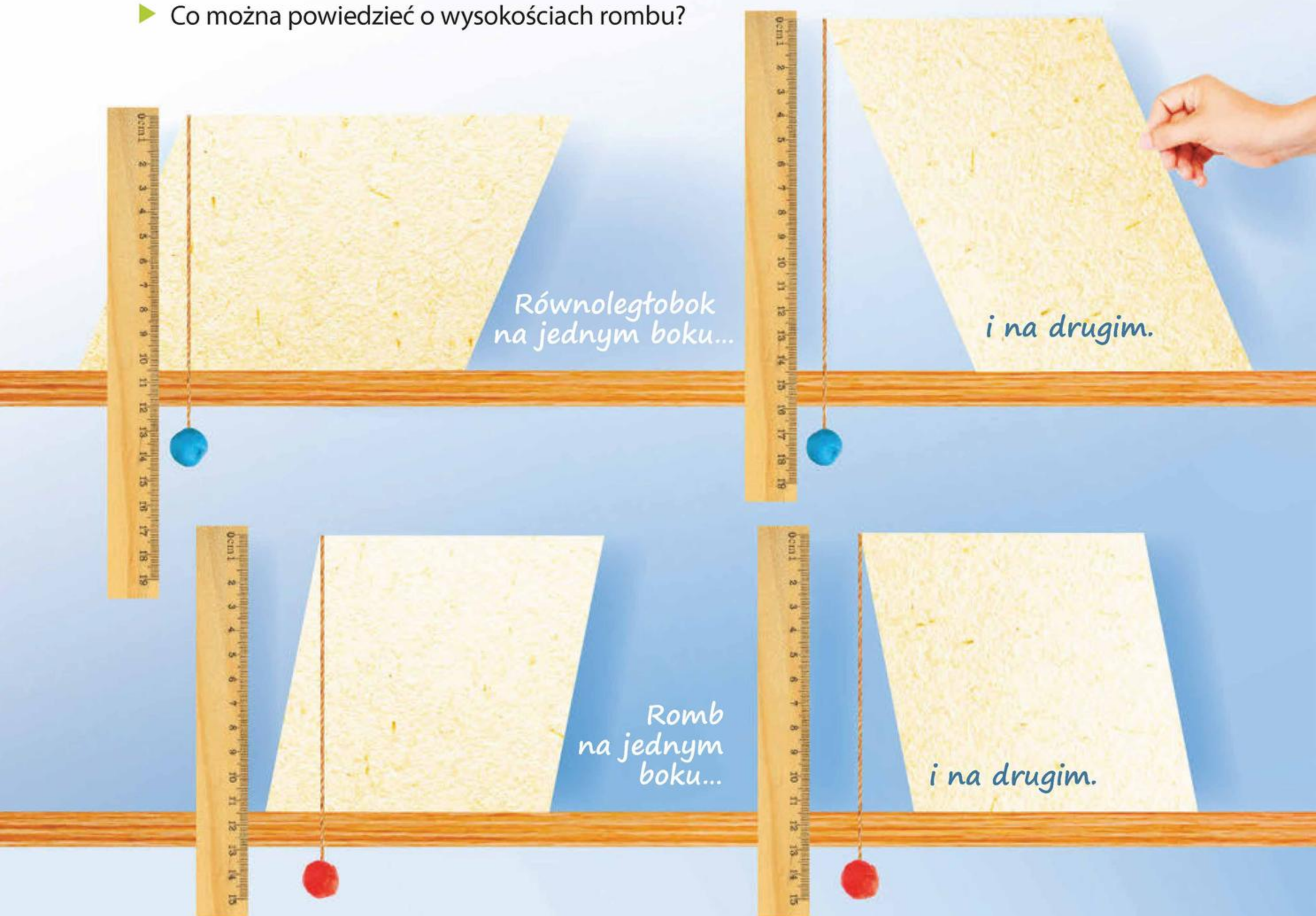
- I Narysuj na kartce w kratkę romb o przekątnych długości 4 cm i 6 cm.
- II Jeden z kątów równoległoboku ma 142° . Oblicz pozostałe kąty tego równoległoboku.
- III Oblicz długości pozostałych boków równoległoboku, w którym jeden z boków ma długość 8 cm, a obwód jest równy 46 cm.

Na dobry początek

Wysokość równoległoboku

Wytnijcie ze sztywnego papieru równoległobok i romb. Przygotujcie pion i linijkę, jak w zabawie „Jaka wysokość?” na stronie 110.

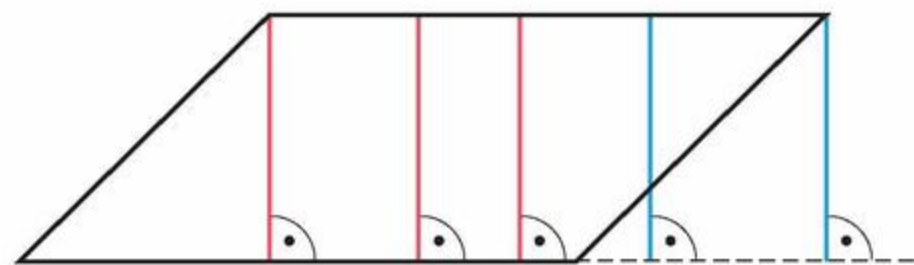
- ▶ Ustawcie wycięty równoległobok pionowo na brzegu ławki.
- ▶ Zmierzcie jego wysokość za pomocą pionu i linijki.
- ▶ Ustawcie go na sąsiednim boku i znowu zmierzcie wysokość.
- ▶ Teraz zmierzcie w ten sam sposób wysokość wyciętego rombu.
- ▶ Co można powiedzieć o wysokościach rombu?



Pytania i polecenia

Odczytaj wysokości równoległoboku i rombu z rysunków powyżej.

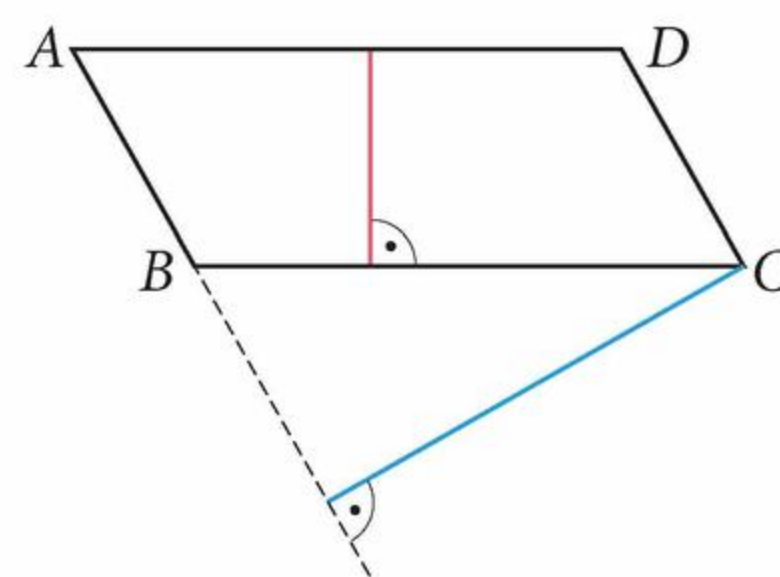
Każdy z czerwonych odcinków na rysunku obok łączy dwa równoległe boki równoległoboku i jest do nich prostopadły. Taki odcinek nazywamy **wysokością równoległoboku**.



Wysokość może także łączyć bok z przedłużeniem drugiego boku. Niebieskie odcinki na rysunku powyżej są więc także wysokościami równoległoboku. Wszystkie niebieskie i czerwone odcinki są równe.

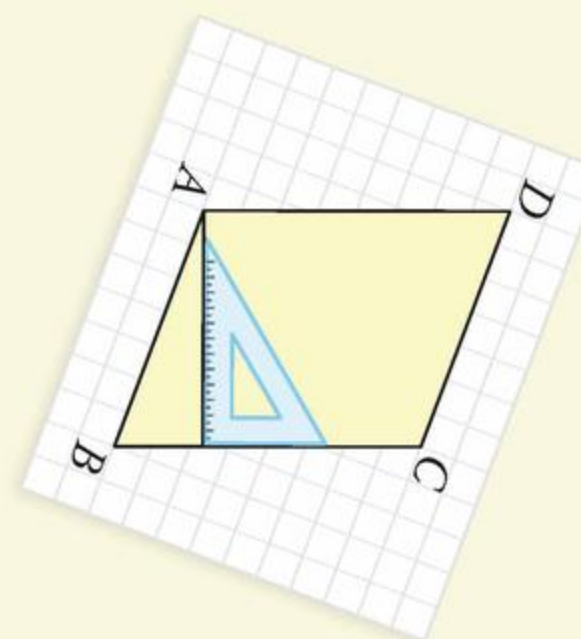
Mówimy, że wysokość jest opuszczona na dany bok, jeśli jest do tego boku prostopadła. Na przykład na rysunku obok czerwona wysokość jest opuszczona na bok BC . Możemy również powiedzieć, że jest ona opuszczona na bok AD .

Wysokości opuszczone na sąsiednie boki równoległoboku są na ogół różnej długości.



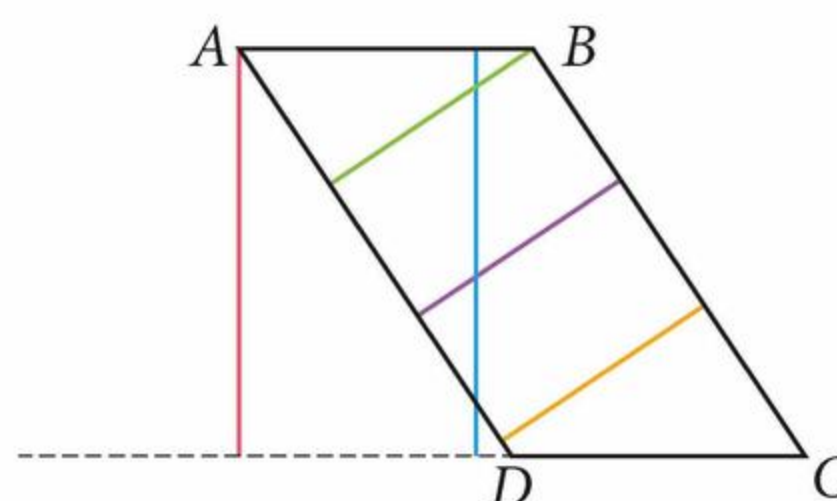
Dobra rada

Rysowanie wysokości jest najłatwiejsze, gdy jest ona ustawiona pionowo. Jeśli tak nie jest, popatrz na równoległobok z innej strony. Możesz na przykład obrócić kartkę, na której jest narysowany.

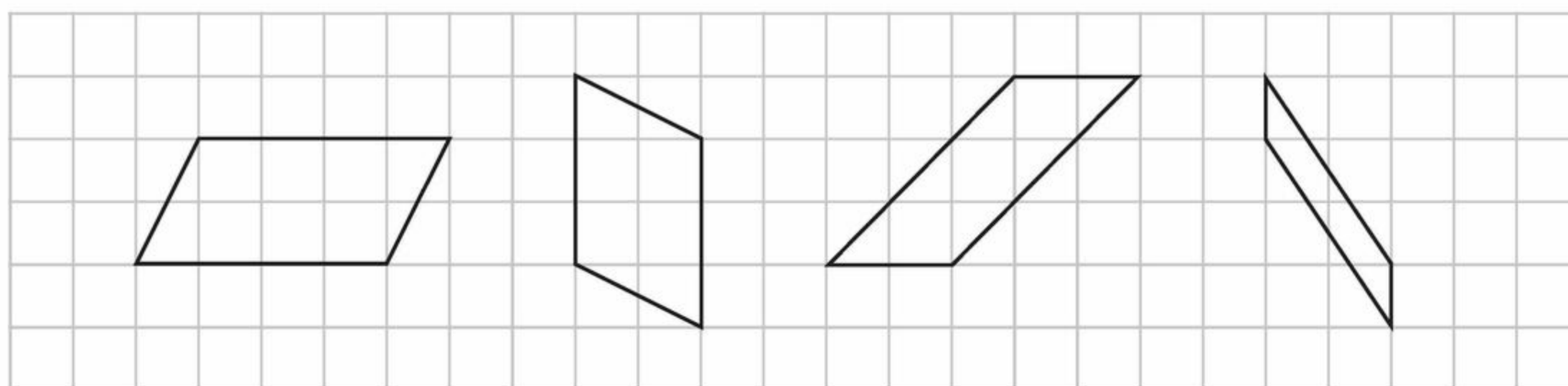


Zadania

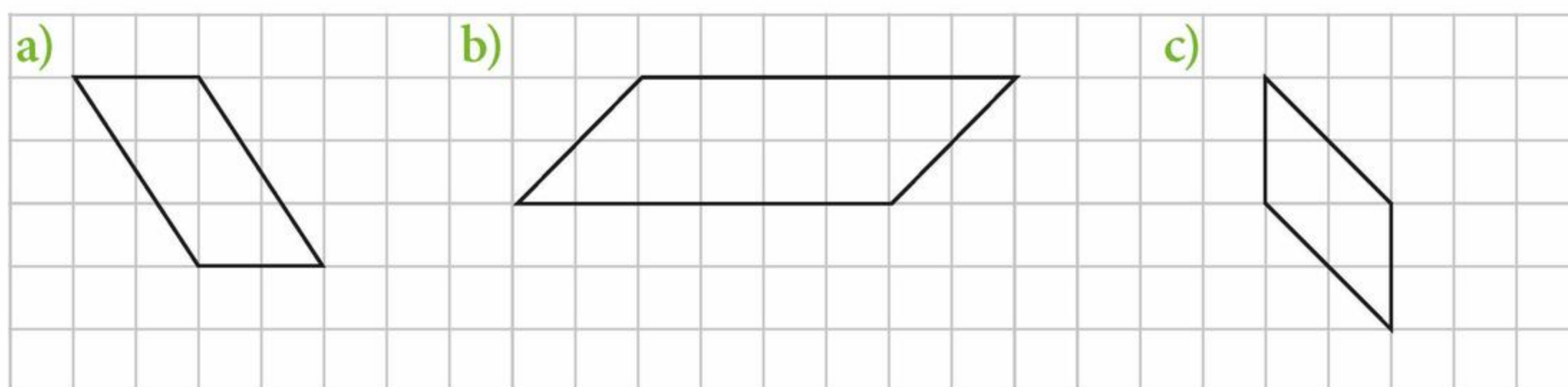
- **1** Które wysokości równoległoboku $ABCD$ są prostopadłe do boku AB , a które do boku BC ?
- **2** Narysuj na kartce w kratkę równoległobok i poprowadź jego trzy równe wysokości.
- **3** Narysuj trzy równoległoboki o wysokości 2 cm.



- **4** Przerysuj do zeszytu poniższe równoległoboki. Narysuj w każdym z nich jedną wysokość. Korzystaj z kretek – nie używaj ekierki.



- **5** Narysuj dwa różne równoległoboki o bokach 2 cm i 5 cm. Narysuj i zmierz dwie różne wysokości każdego z nich.
- **6** Narysuj romb o przekątnych 4 cm i 7 cm. Narysuj za pomocą ekierki jego wysokość i zmierz ją.
- **7** Narysuj na kartce w kratkę równoległobok, którego bok ma 4 cm, a wysokość prostopadła do tego boku ma 3 cm. Ile jest takich równoległoboków?
- **8** Narysuj równoległobok o bokach 3 cm i 4 cm i kącie ostrym 30° . Zmierz dwie różne wysokości narysowanego równoległoboku.
- **9** Przerysuj poniższy równoległobok i narysuj jego dwie różne wysokości. Korzystaj z kretek – nie używaj ekierki.



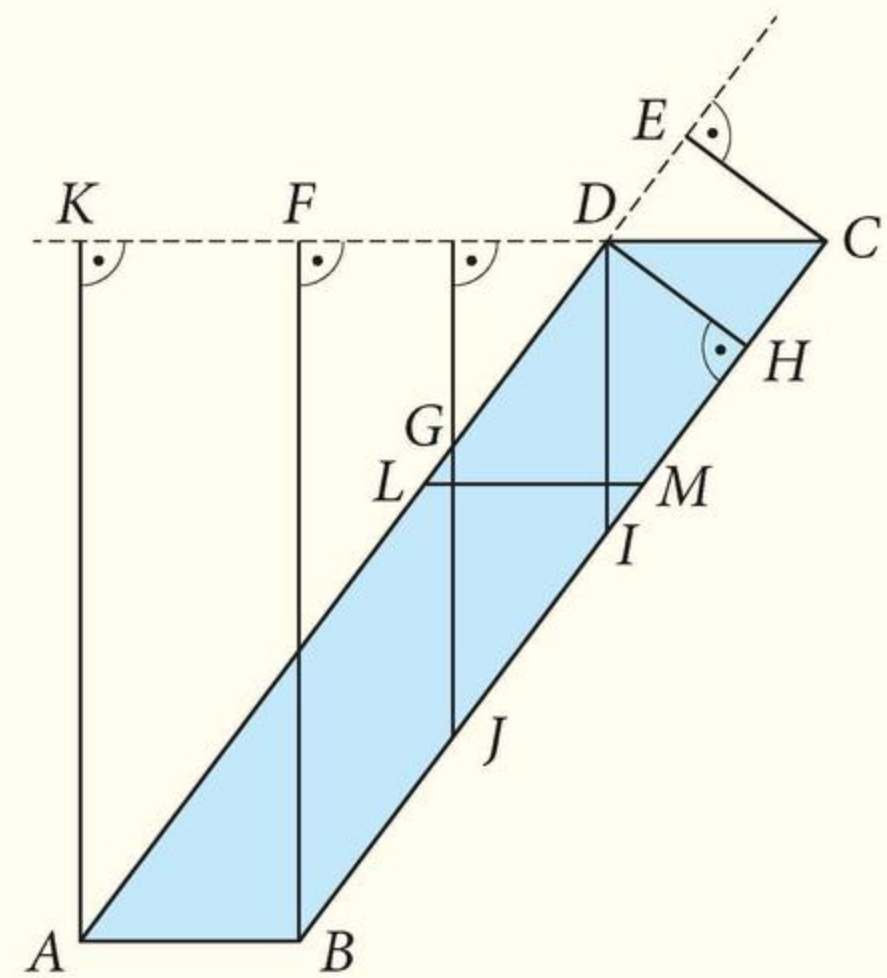
- **10** Narysuj równoległobok o wysokościach 3 cm i 4 cm. Ile takich równoległoboków można narysować?
- 🏆 **11** Jeden z boków równoległoboku ma 5 mm długości, a wysokość opuszczona na ten bok wynosi 1 mm. Czy ten równoległobok może mieć obwód:

a) 10 mm,	c) 12 mm,	e) 800 km,
b) 11 mm,	d) 3 cm,	f) 5000 km?



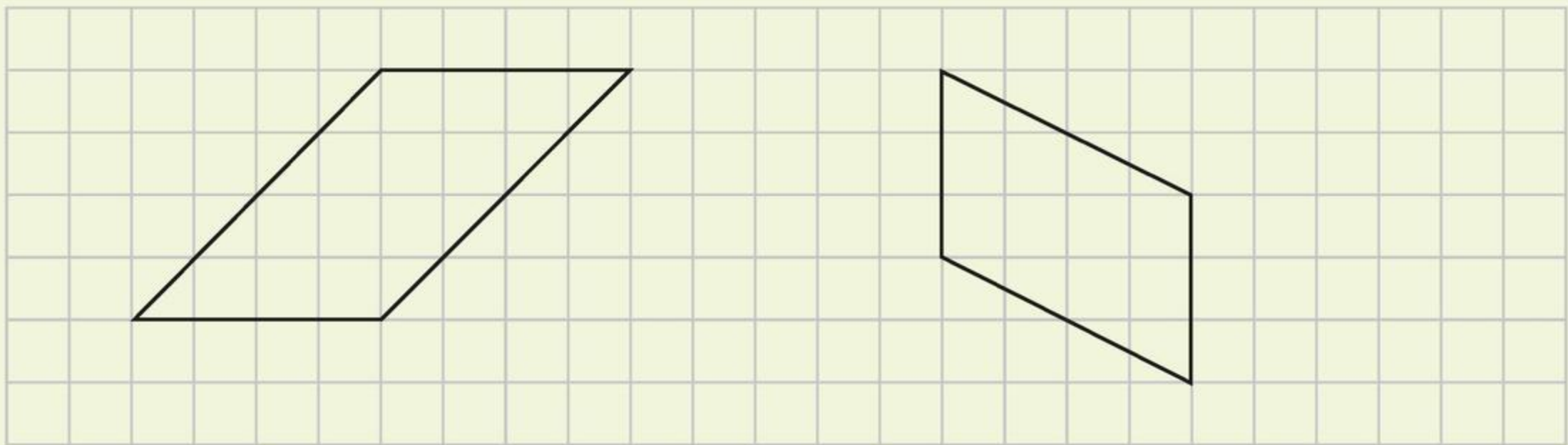
Dla ciekliwych

- 1 Które z narysowanych odcinków są wysokościami równoległoboku $ABCD$?
- 2 Ile jest równa wysokość opuszczona na bok AB ?
- 3 Ile jest równa wysokość opuszczona na bok AD ?
- 4 Narysuj w zeszycie kilka różnych równoległoboków, które będą miały wysokości takie same jak równoległobok $ABCD$.

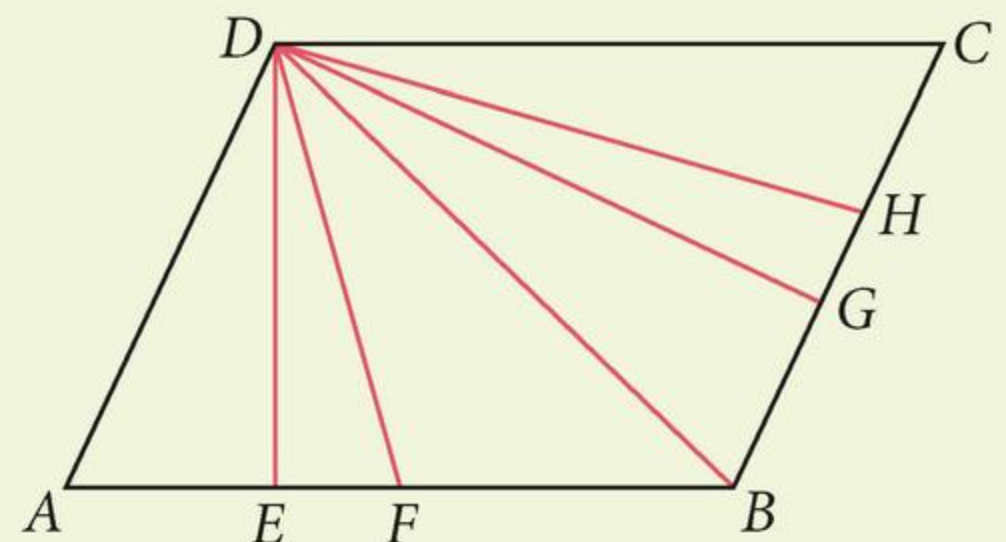


Czy już umiem?

- I Przerysuj równoległoboki. Narysuj w każdym z nich jedną wysokość. Korzystaj z kretek – nie używaj ekierki.



- II Które z czerwonych odcinków są wysokościami równoległoboku $ABCD$? Na które boki opuszczono te wysokości?



- III Narysuj równoległobok o bokach 4 cm i 6 cm oraz kącie między bokami równym 60° . Narysuj i zmierz wysokości tego równoległoboku.

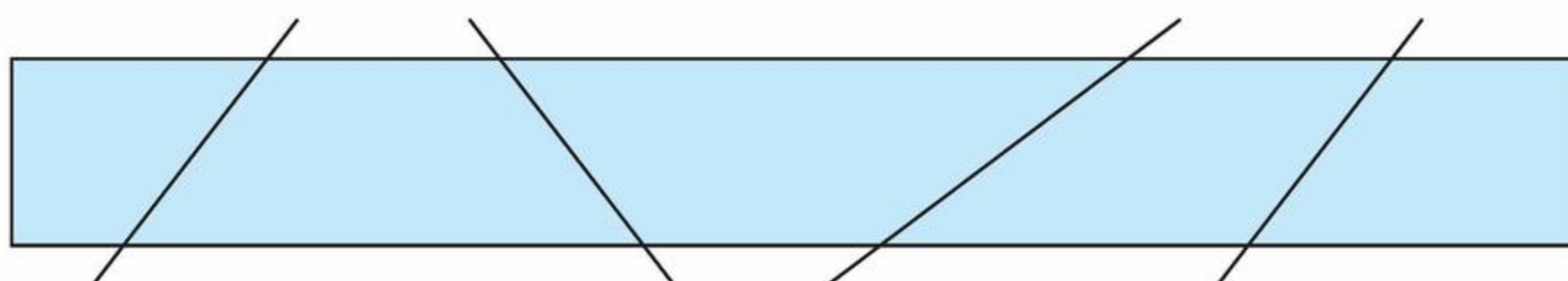
9 Trapezy

  Na dobry początek

Tniemy pasek

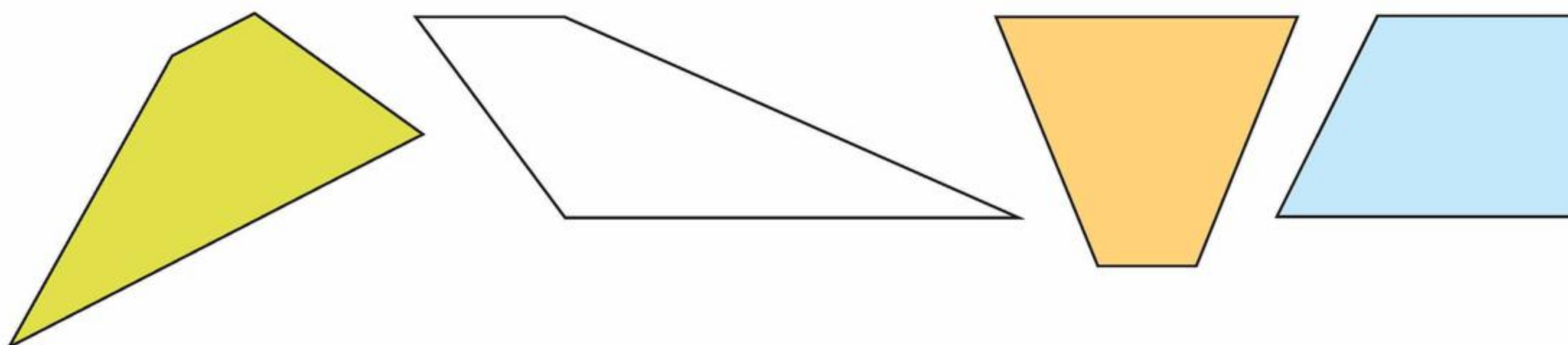
Przygotuj kredki lub flamastry.

- ▶ Wytnij z papieru prostokąt o wymiarach $13\text{ cm} \times 3\text{ cm}$ i potnij go prostymi cięciami na kilka czworokątów podobnie jak na rysunku.



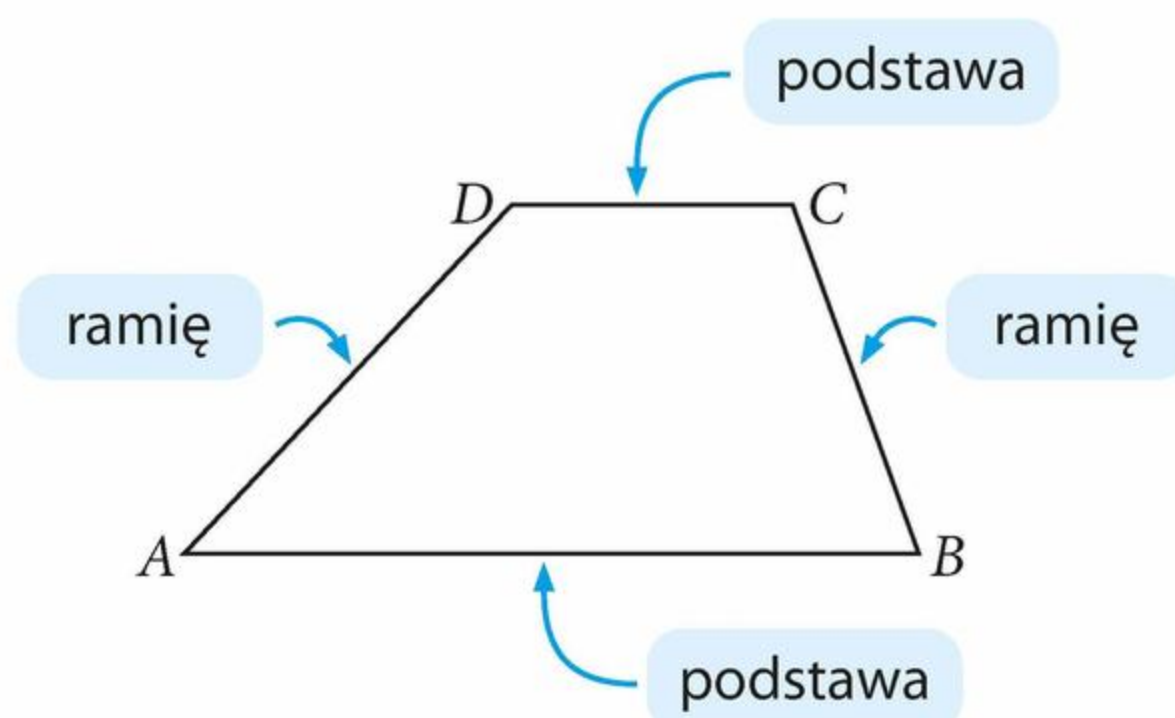
- ▶ W każdym czworokącie zaznacz na czerwono boki równoległe.
- ▶ Następnie w każdym czworokącie narysuj zielonym kolorem odcinek łączący dwa równoległe boki i prostopadły do jednego z nich. Wskaż inny bok prostopadły do zielonego odcinka.
- ▶ Zmierz długości zielonych odcinków. Co możesz o nich powiedzieć?

To są trapezy.



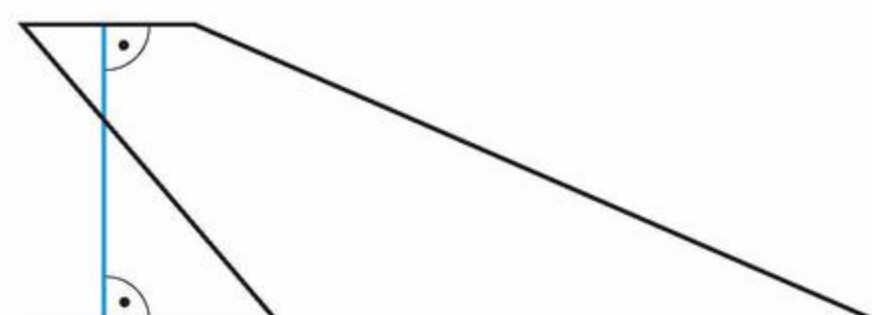
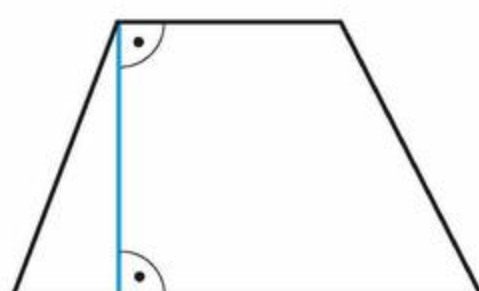
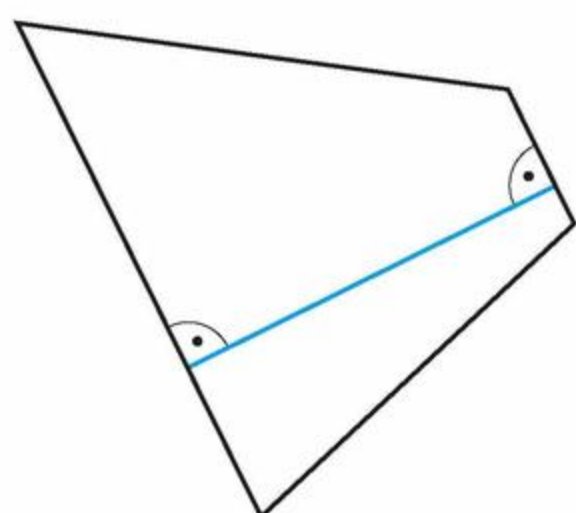
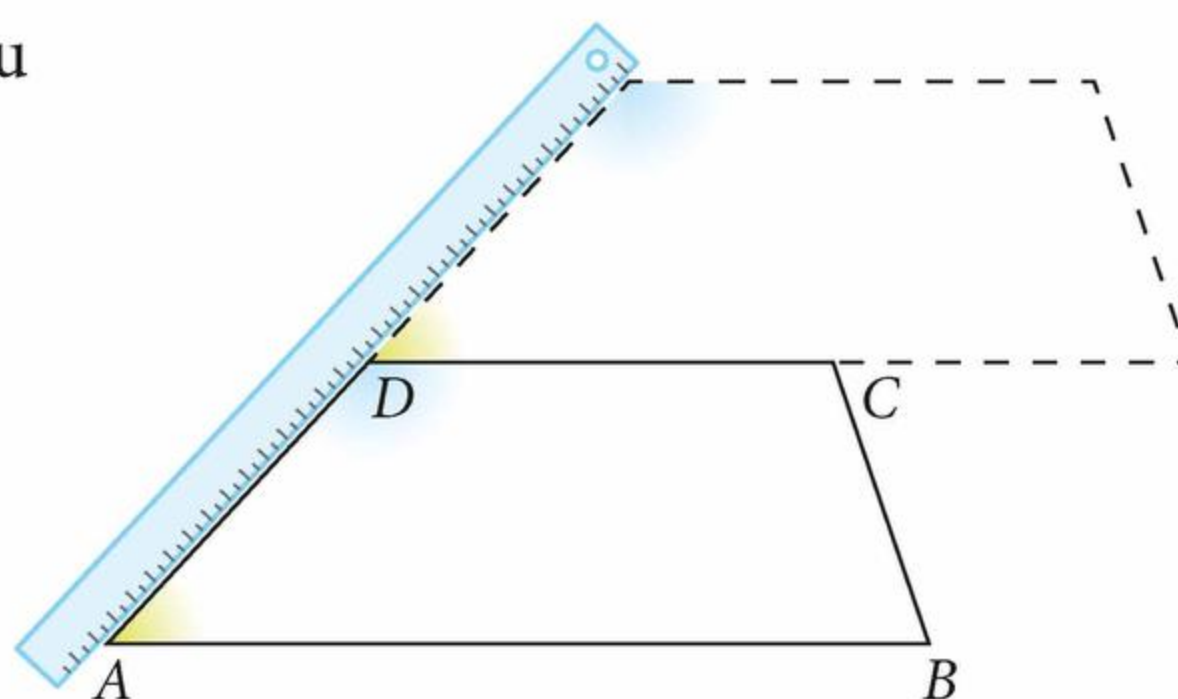
Trapez to czworokąt, który ma jedną parę lub dwie pary boków równoległych.

Równoległe boki trapezu nazywamy **podstawami**.
Pozostałe boki trapezu nazywamy jego **ramionami**.



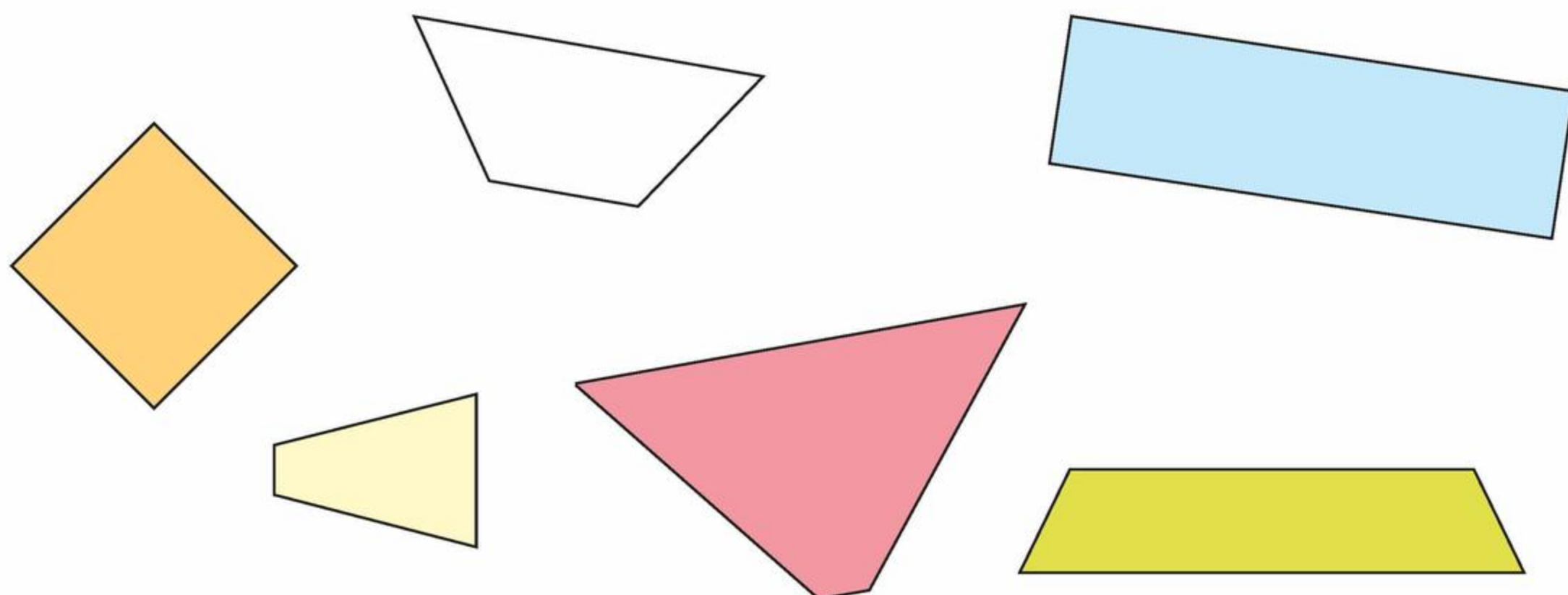
Kąty leżące przy jednym ramieniu trapezu mają w sumie 180° .

$$\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180^\circ$$

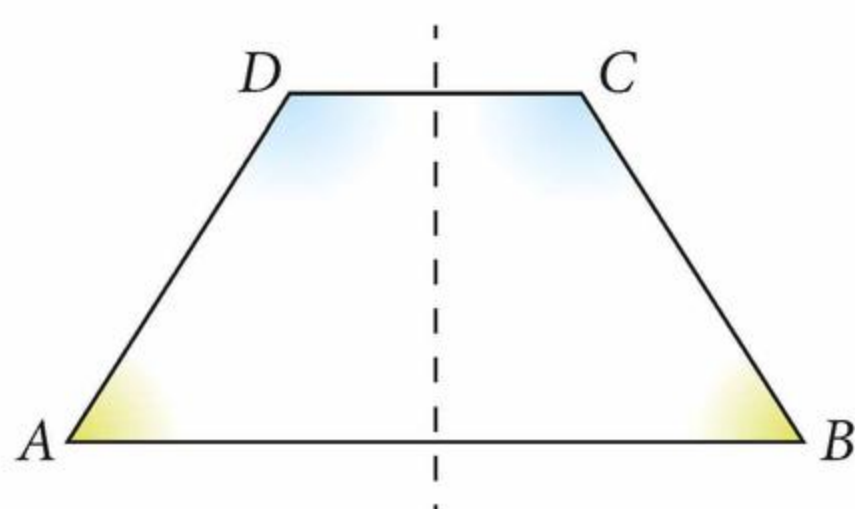


W trapezie wysokość rysujemy tylko między bokami równoległymi. Łączy ona te boki (albo ich przedłużenia) i jest do nich prostopadła.

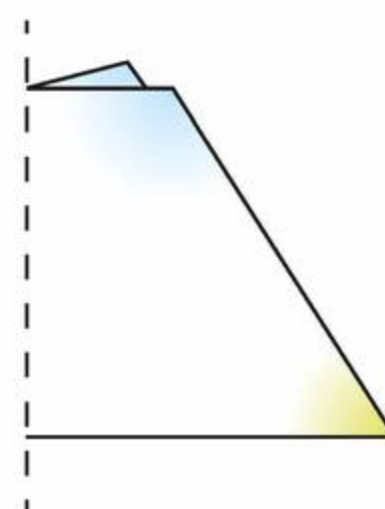
To są trapezy równoramienne.



Trapez równoramienny ma równe ramiona i oś symetrii.

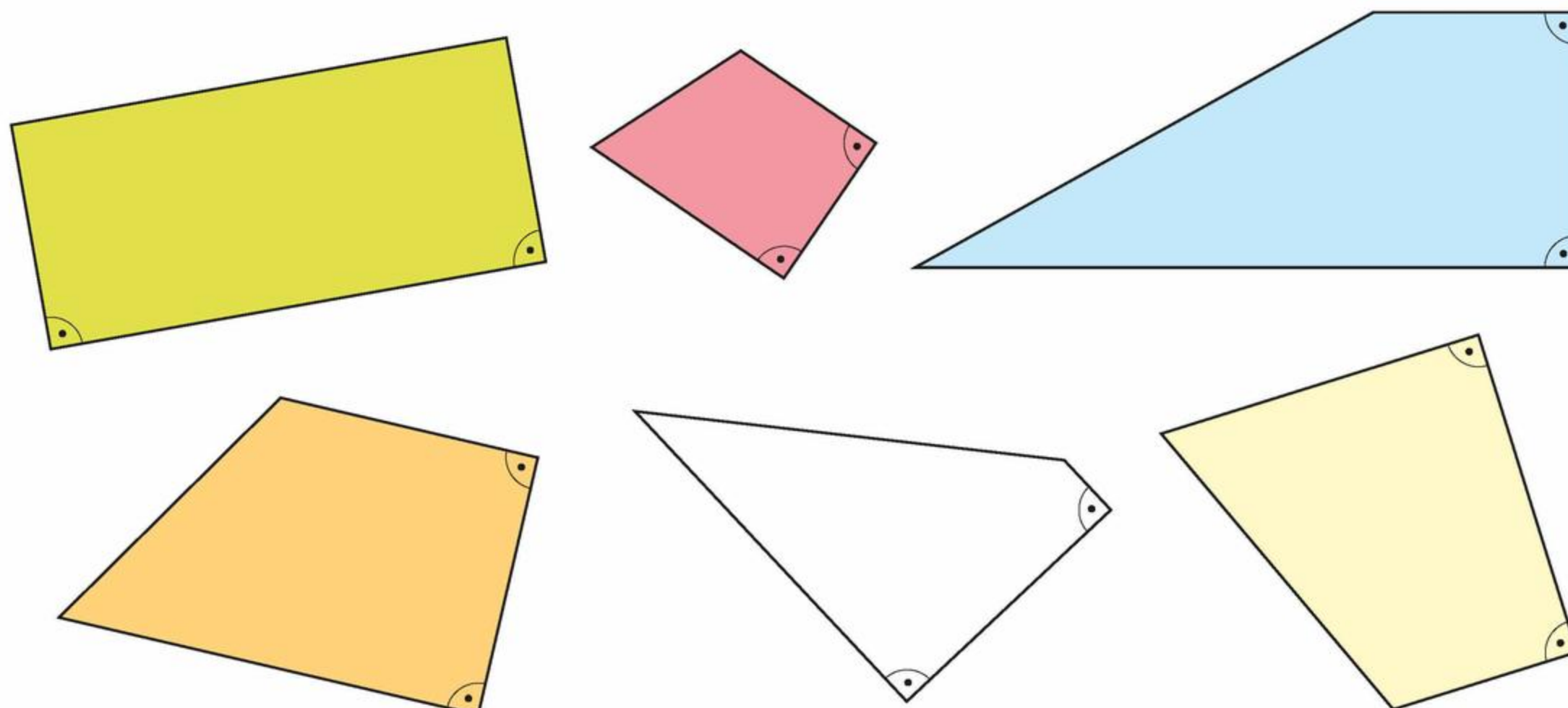


$$AD = BC$$



W trapezie równoramiennym kąty przy tej samej podstawie są równe. Jak to sprawdzić? Wyobraź sobie, że składasz wycięty z papieru trapez wzdłuż osi symetrii. Odpowiednie kąty na obu jego połówkach pokryją się.

To są trapezy prostokątne.

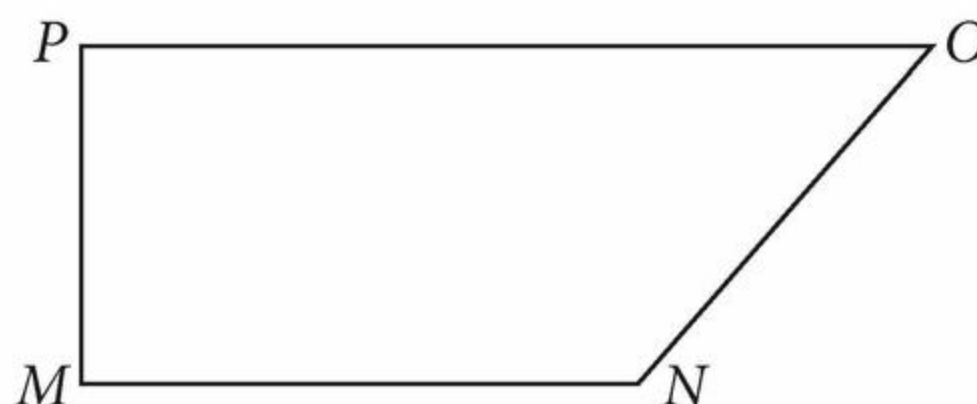
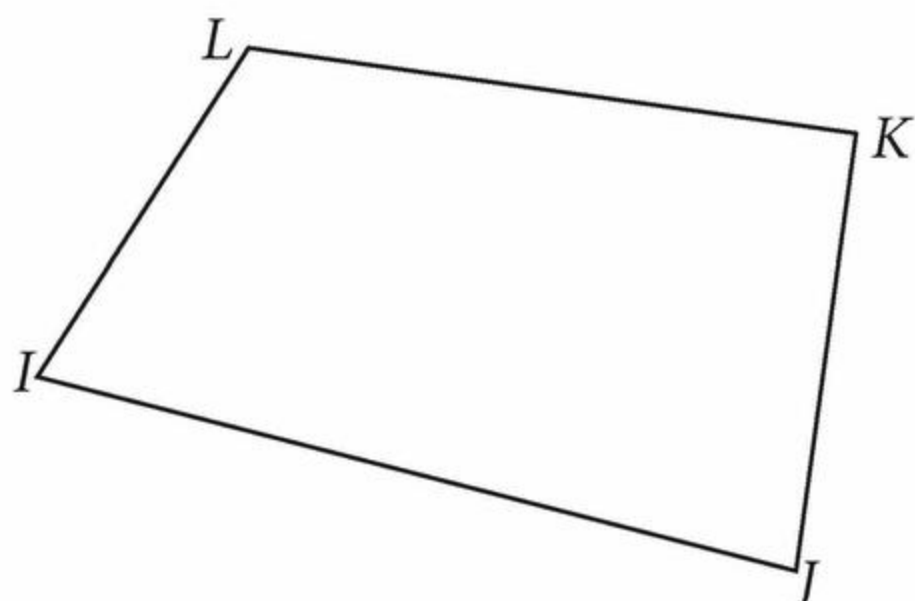
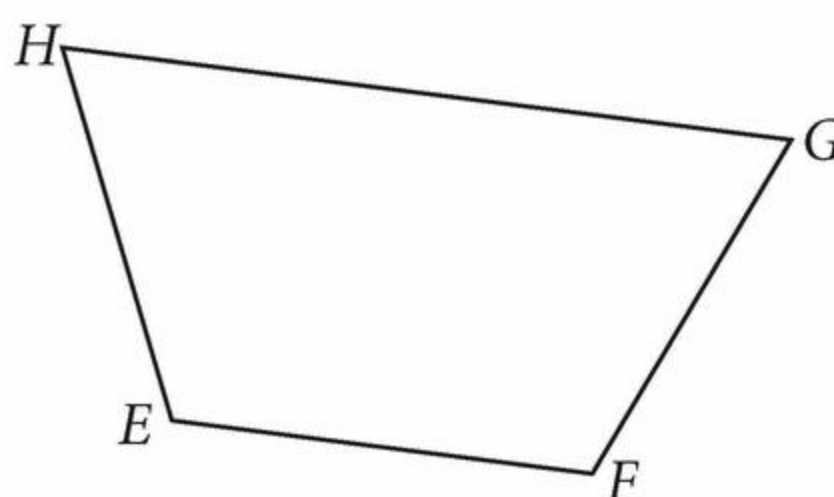
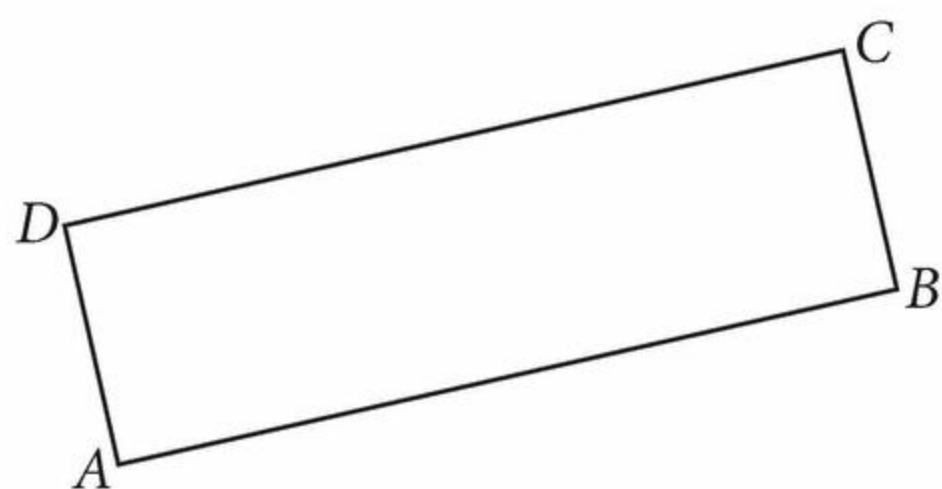


Trapez prostokątny ma przynajmniej jedno ramię prostopadłe do podstaw. To ramię jest jednocześnie wysokością trapezu.



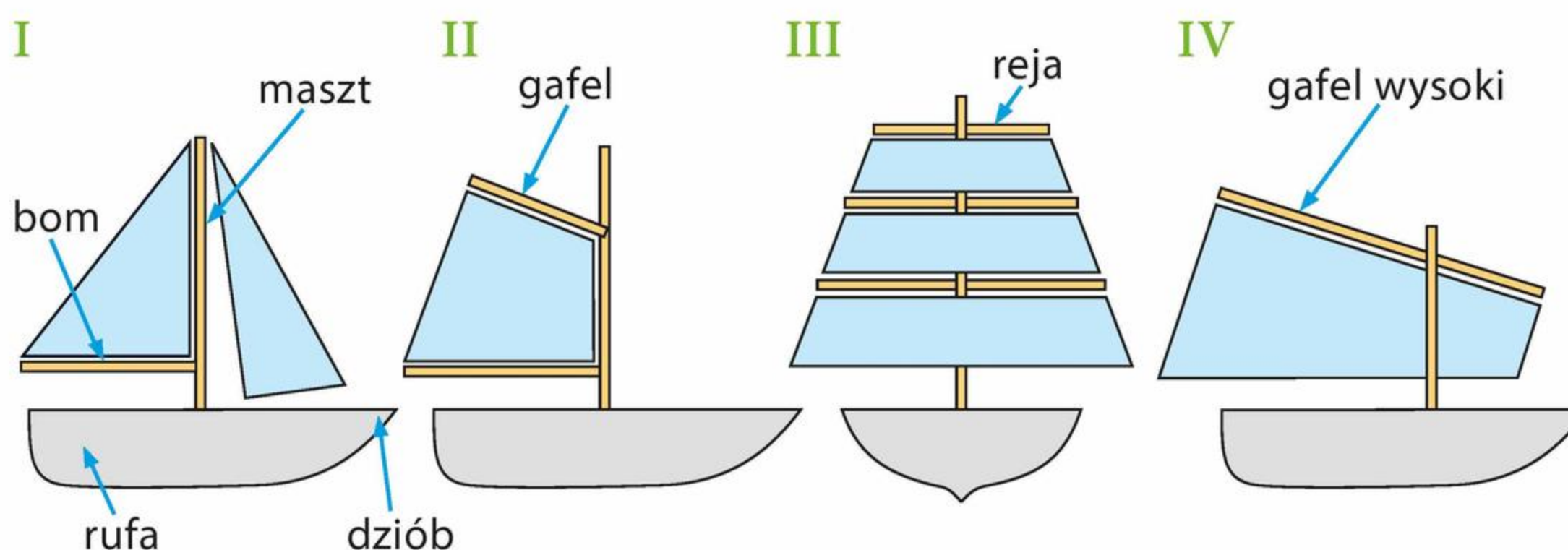
Zadania

- 1 Ile trapezów znajduje się na rysunku poniżej? W każdym trapezie wskaż boki równoległe.



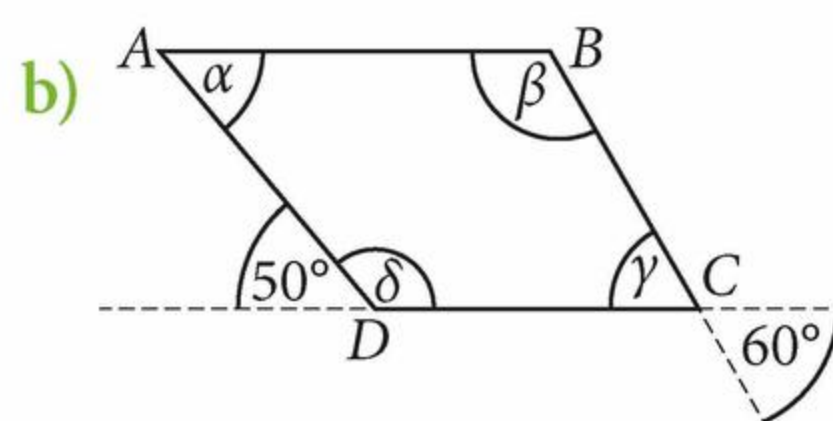
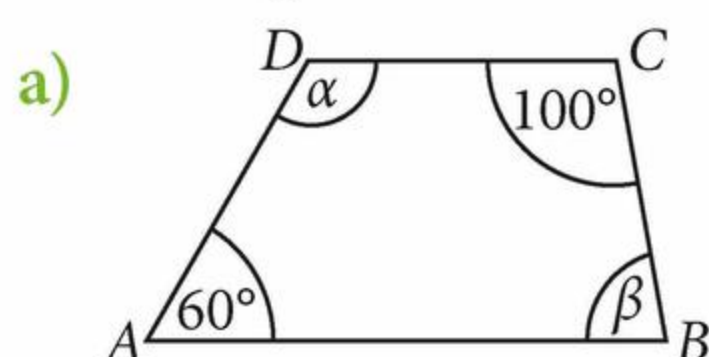
- 2 Narysuj dwa różne trapezy o podstawach długości 4 cm i 6 cm.
- 3 Narysuj trapez o podstawach 3 cm i 2 cm oraz wysokości 2 cm. Ile jest różnych trapezów o podanych wymiarach?

- 4 Jakie kształty mają żagle przedstawione na schematycznych rysunkach? Które żagle mają kształt trapezu?



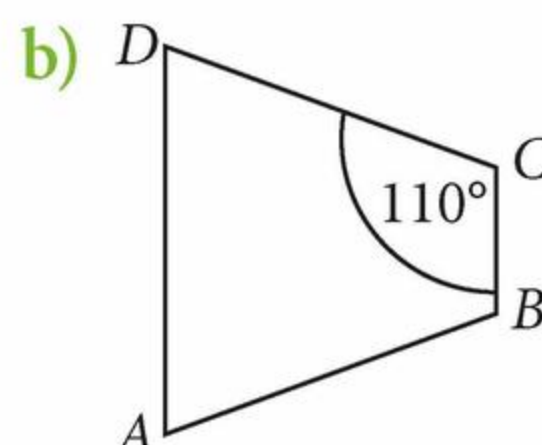
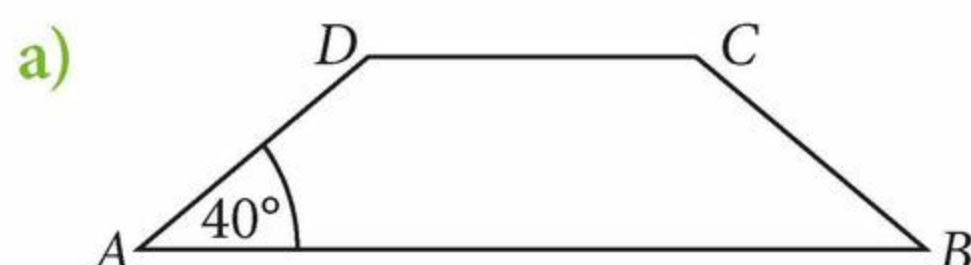
- 5 Narysuj trapez prostokątny o wysokości 4 cm oraz podstawach długości 3 cm i 5 cm. Ile jest różnych trapezów o podanych wymiarach?
- 6 Narysuj trapez:
- o dłuższej podstawie długości 8 cm i kątach przy tej podstawie równych 50° i 60° ,
 - równoramienny o kącie przy podstawie równym 45° i ramieniu długości 2 cm,
 - prostokątny, którego dłuższe ramię ma długość 4 cm, a jeden z kątów jest równy 30° .

- 7 Czworokąt $ABCD$ jest trapezem. Oblicz jego kąty oznaczone na rysunku literami greckimi.

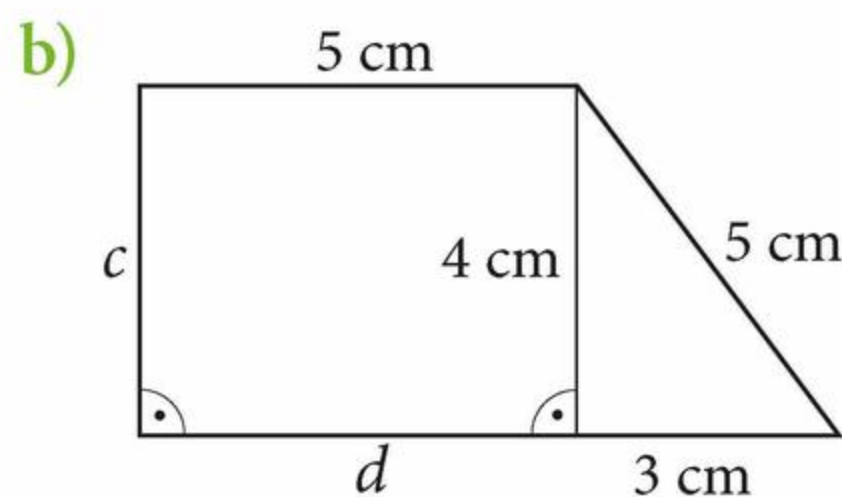
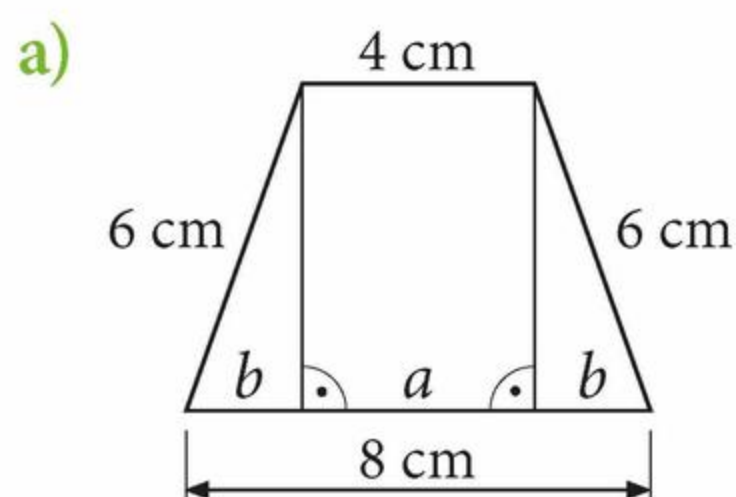


- 8 Oblicz pozostałe kąty trapezu prostokątnego, w którym jeden kąt ma:
- 65° ,
 - 110° .

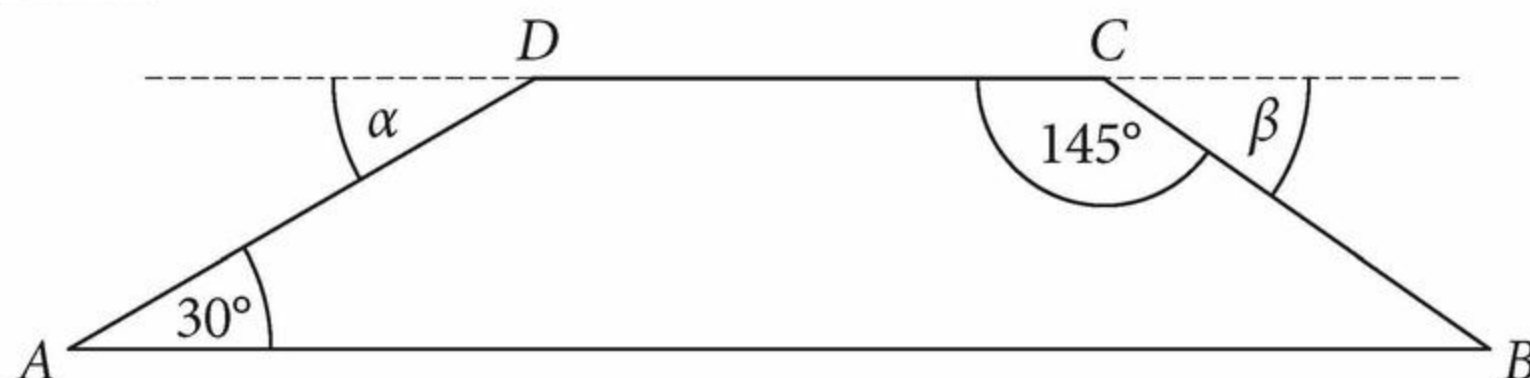
- 9 Trapez $ABCD$, którego jeden z kątów podano na rysunku, jest równoramienny. Oblicz pozostałe kąty tego trapezu.



- 10 Podaj nieznane długości odcinków w narysowanym poniżej trapezie. Jaki to rodzaj trapezu?



- 11 Czworokąt $ABCD$ jest trapezem. Oblicz miary kątów oznaczonych literami greckimi.



- 12 Narysuj trójkąt równoboczny i połącz środki jego boków. W ten sposób podzielisz trójkąt na cztery mniejsze trójkąty. Jeśli odetniesz jeden z nich, pozostałe trzy będą tworzyły trapez. Określ, jaki to trapez, i oblicz jego kąty.

- 13 Odpowiedz na pytanie. Jeśli odpowiedź brzmi „tak”, narysuj w zeszycie przykład. Jeśli „nie” – wytłumacz dlaczego.

- Czy trapez może mieć tylko jeden kąt rozwarty, a pozostałe inne?
- Czy trapez może mieć tylko jeden kąt prosty, a pozostałe inne?
- Czy trapez może mieć trzy boki równe, a czwarty dłuższy?
- Czy trapez może mieć trzy boki równe, a czwarty krótszy?
- Czy trapez może być jednocześnie równoramienny i prostokątny?

- 14 Przekątna dzieli trapez prostokątny na dwa trójkąty, z których jeden jest równoboczny. Oblicz miary kątów tego trapezu.

-  15 Przekątna dzieli trapez prostokątny na dwa trójkąty, z których jeden jest równoboczny. Jaką część pola trapezu stanowi pole tego trójkąta równobocznego?

-  16 Kąt rozwarty w trapezie prostokątnym jest równy 135° . Podstawy tego trapezu mają długości 2 cm i 6 cm. Jaka jest jego wysokość? Narysuj ten trapez na kartce w kratkę, nie używając kątomierza.



Dla dociekliwych

Z trójkątów równobocznych można budować trapezy.

Na tym rysunku są trzy trapezy.

Jeden duży (jak zielony obok)

i dwa mniejsze (jak niebieski obok – romby to też trapezy).

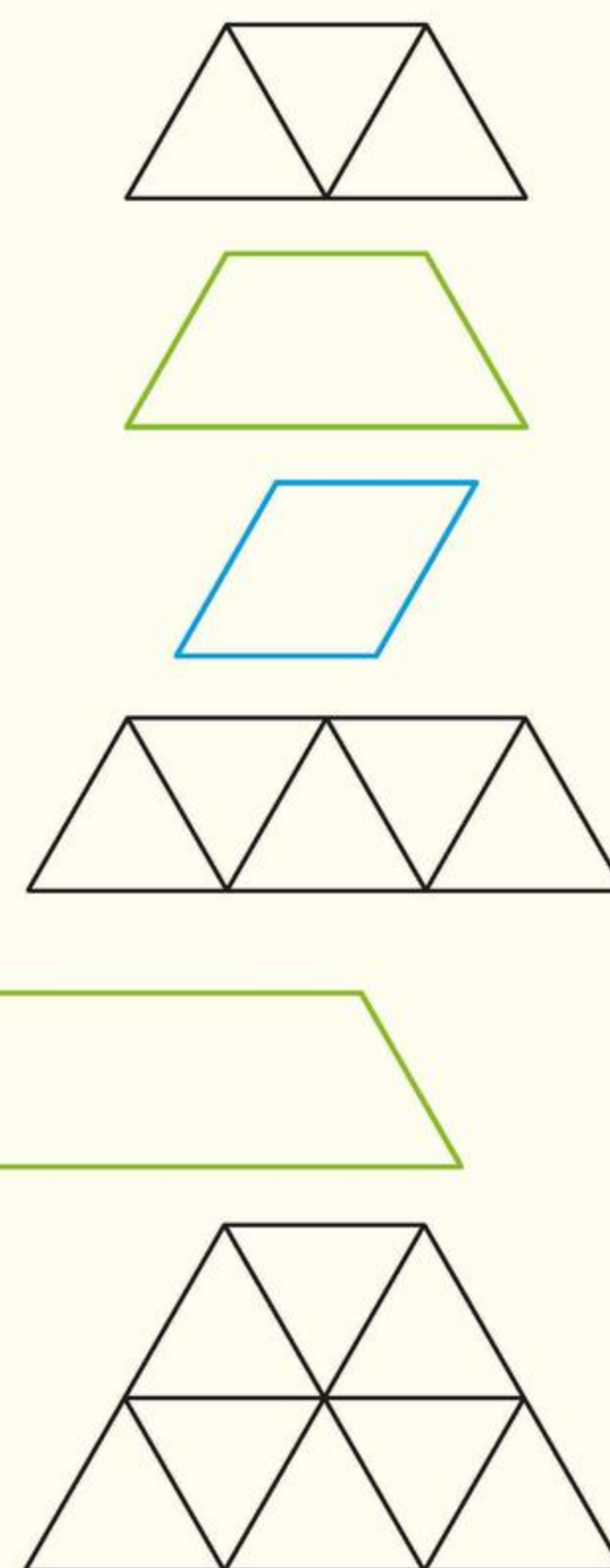
A ile trapezów jest tutaj?

Policz osobno poszczególne kształty pokazane na zielonych rysunkach poniżej.



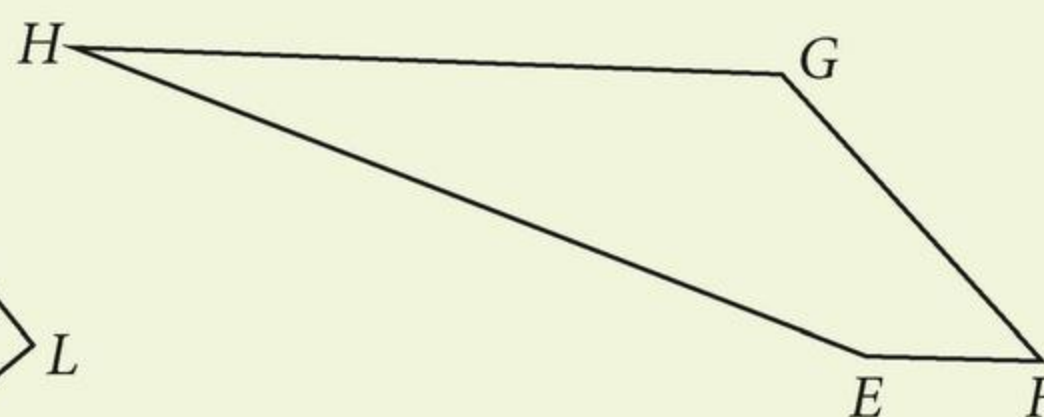
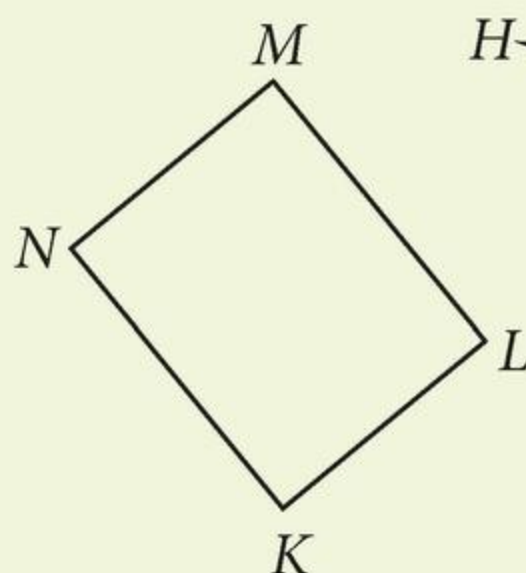
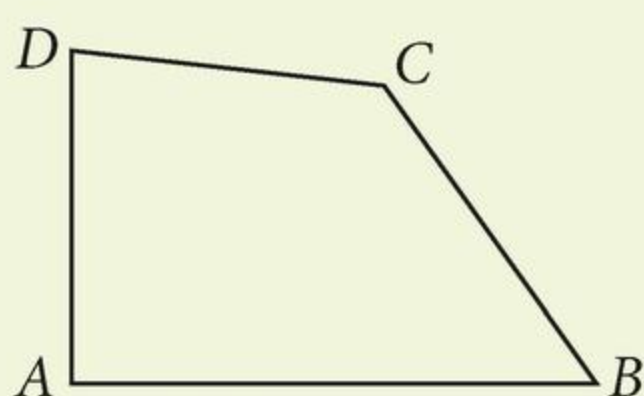
Ile trapezów jest na tym rysunku?

Pamiętaj, że podstawy trapezu nie muszą być położone poziomo!



Czy już umiem?

- I Które z narysowanych poniżej czworokątów są trapezami? Wskaż w każdym z trapezów boki równoległe.



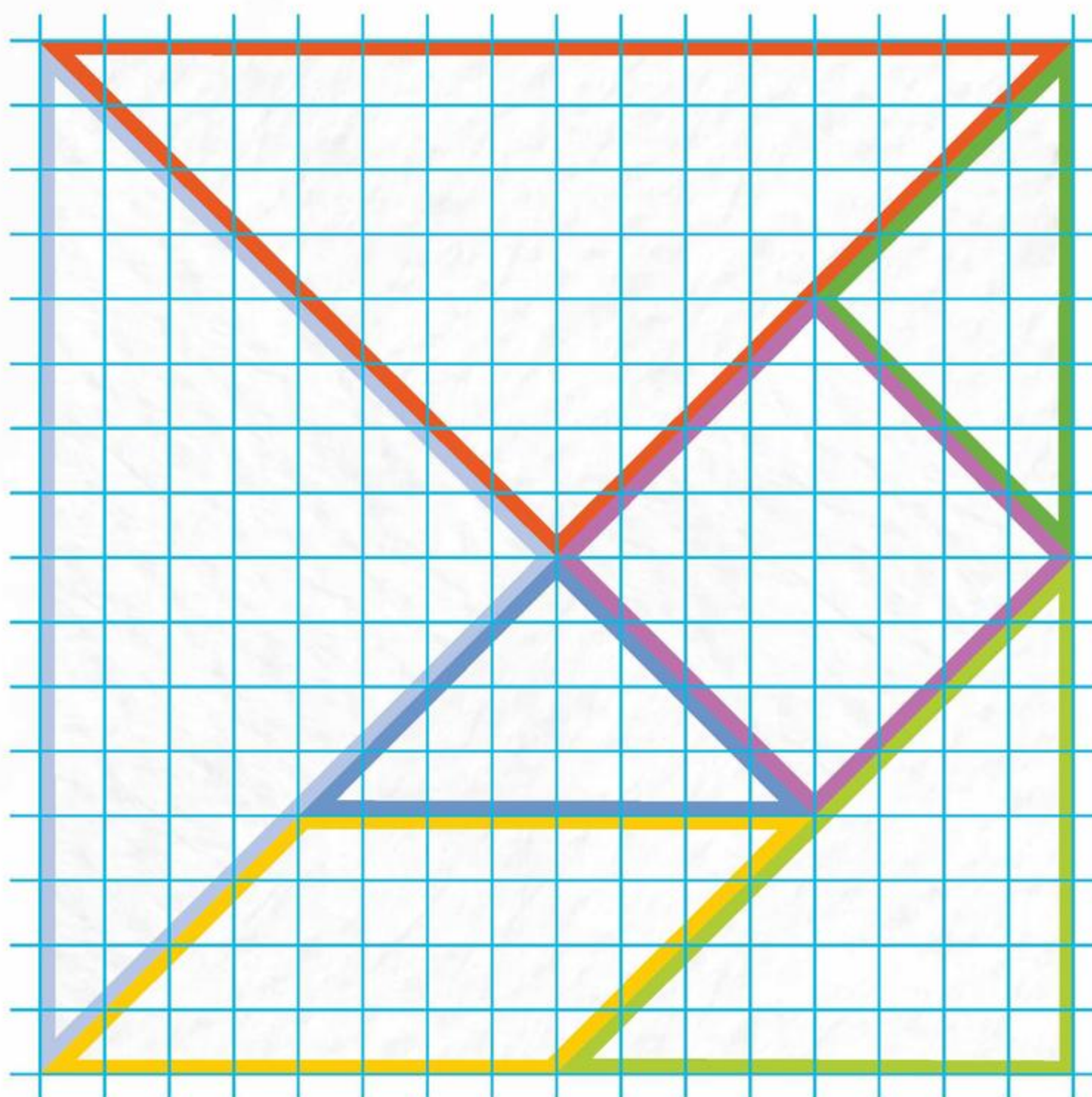
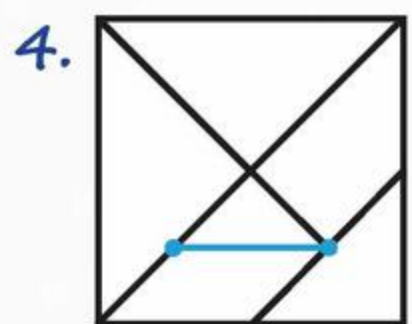
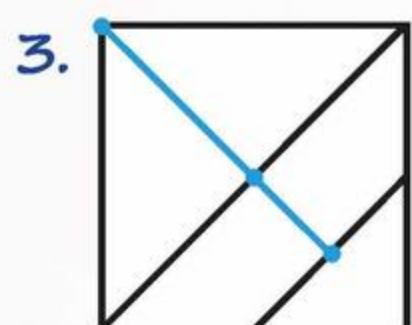
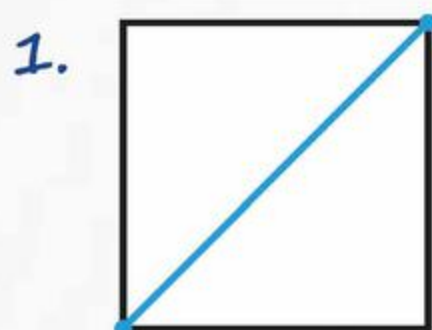
- II Jeden z kątów trapezu równoramiennego ma 40° . Ile stopni ma każdy z pozostałych kątów tego trapezu?
- III Narysuj trapez prostokątny o podstawach długości 4 cm i 2 cm oraz wysokości 1 cm.

 Na dobry początek

Tangram

Tangram to kwadrat podzielony na siedem części zwanych tanami. Narysuj na kartce w kratkę tangram o rozmiarach $8\text{ cm} \times 8\text{ cm}$. Wytnij go i potnij na części.

Jak przygotować tangram?



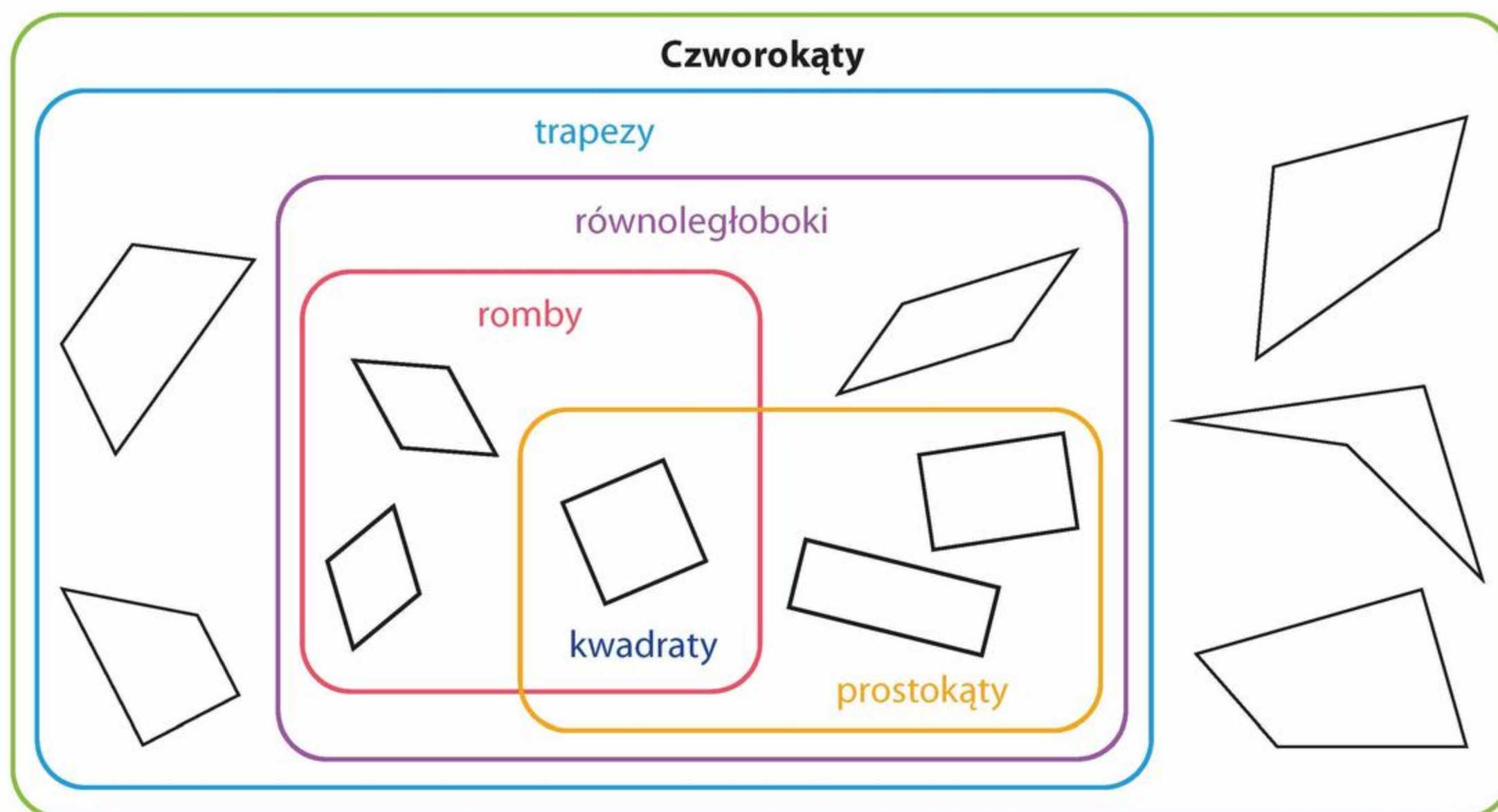
*prostokąt złożony
z tanów*

Pytania i polecenia

- Ułóż z tanów jak najwięcej różnych czworokątów: kwadratów, prostokątów niebędących kwadratami, równoległoboków niebędących prostokątami, trapezów prostokątnych, trapezów równoramiennych.
- Z ilu tanów można ułożyć prostokąt o rozmiarach takich jak niebieski prostokąt pokazany powyżej? Czy można go ułożyć tylko na jeden sposób?

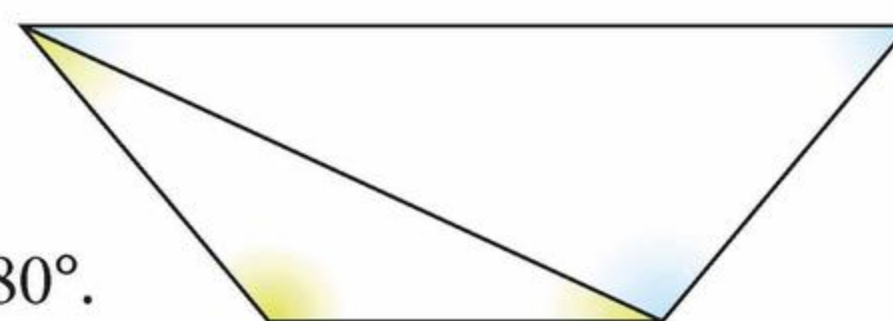
Z tangramu będziesz jeszcze korzystać, więc po zakończeniu ćwiczenia schowaj wszystkie elementy do koperty.

Znasz już wiele rodzajów czworokątów. Popatrz, jak można je przedstawić na schemacie.



Każdy czworokąt możemy podzielić na dwa trójkąty.

Suma kątów każdego trójkąta jest równa 180° .



Zauważ, że na rysunku zaznaczone są wszystkie kąty czworokąta. Dlatego:

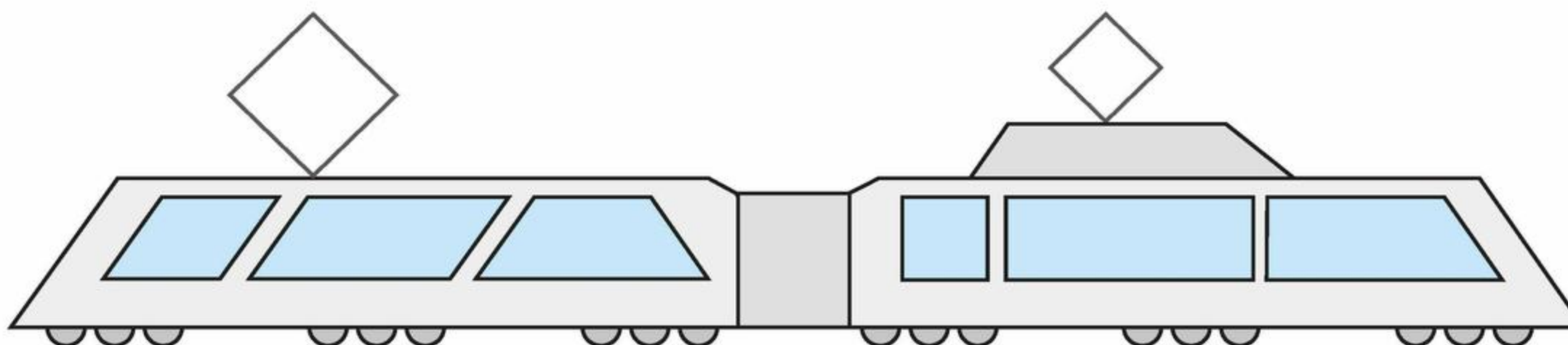
Suma kątów czworokąta wynosi 360° .

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$



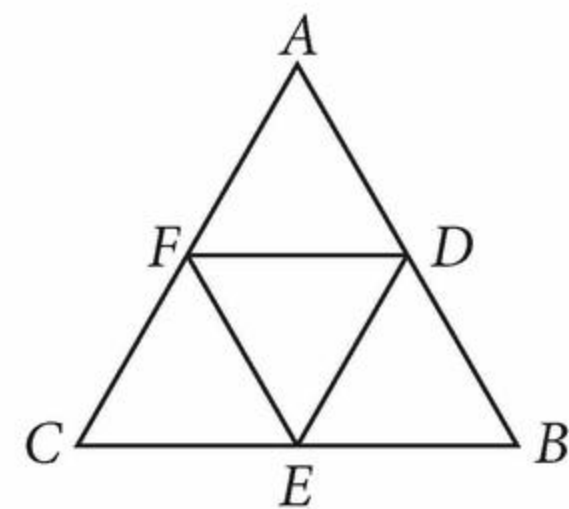
Zadania

- 1 Znajdź na rysunku jak najwięcej wielokątów różnego rodzaju. Nazwij je. Które z nich są trapezami? Które są równoległobokami? Ułóż własne pytania.



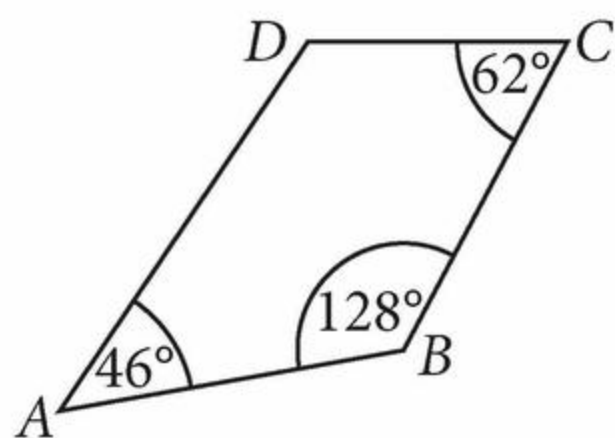
II. Figury geometryczne

- **2** Na rysunku obok punkty D , E i F są środkami boków trójkąta równobocznego ABC . Jakiego rodzaju czworokąty widzisz na rysunku?

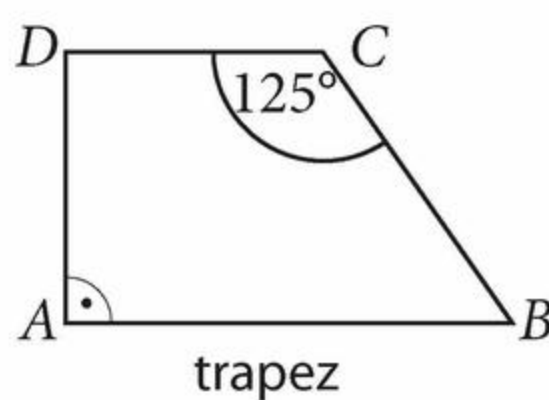


- **3** Ile stopni ma każdy z kątów czworokąta? Zapisz obliczenia.

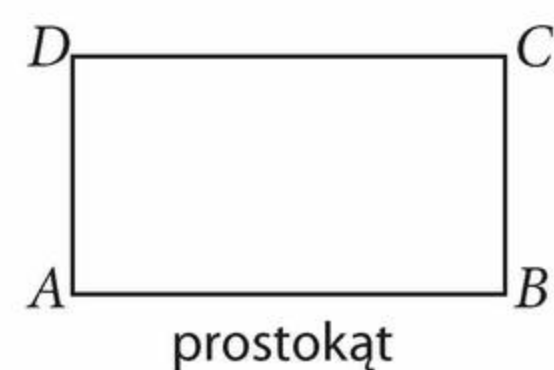
a)



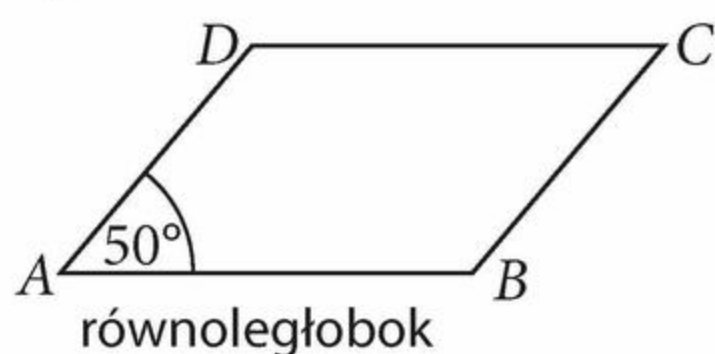
c)



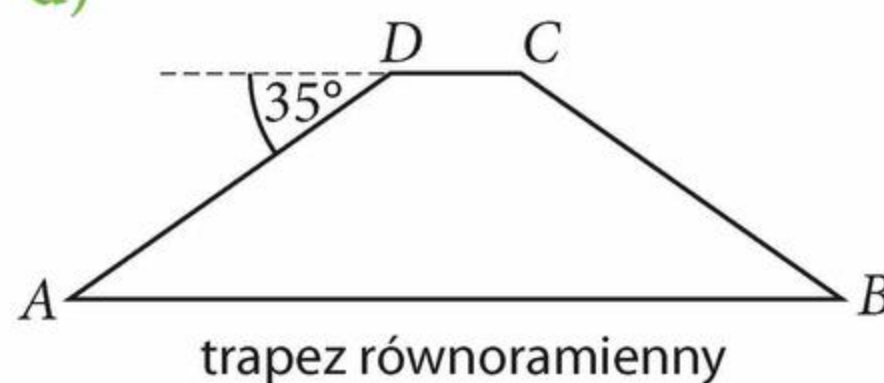
e)



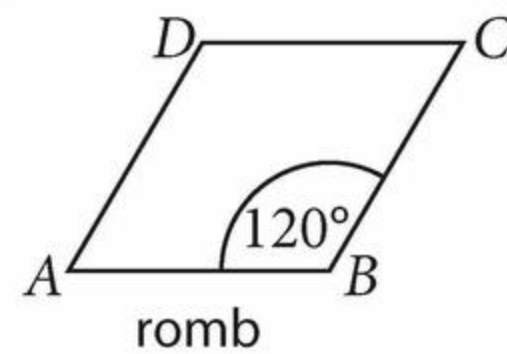
b)



d)



f)

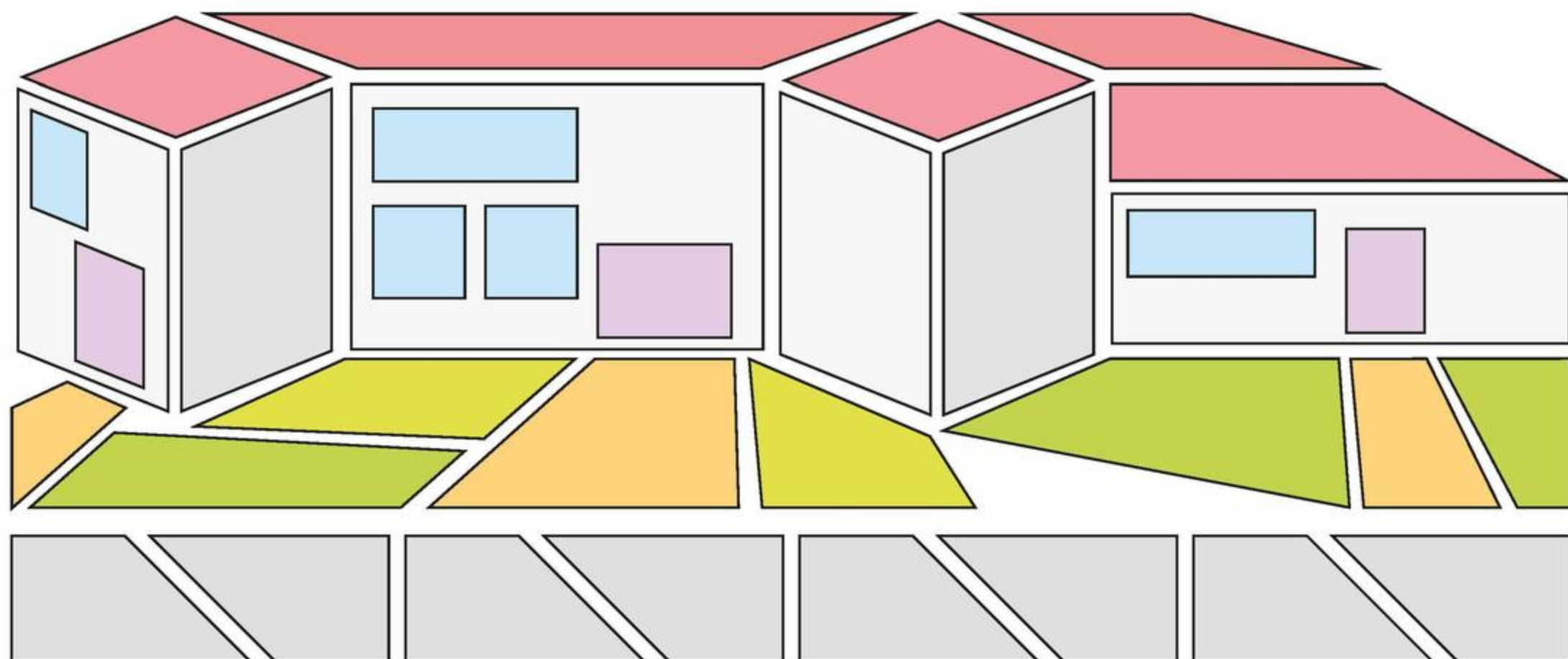


- **4** Jakie słowo w wierszyku ukryło się pod plamą? Ułóż własny wierszyk o innej figurze geometrycznej.

Na trąbie swojej głośno trąb:

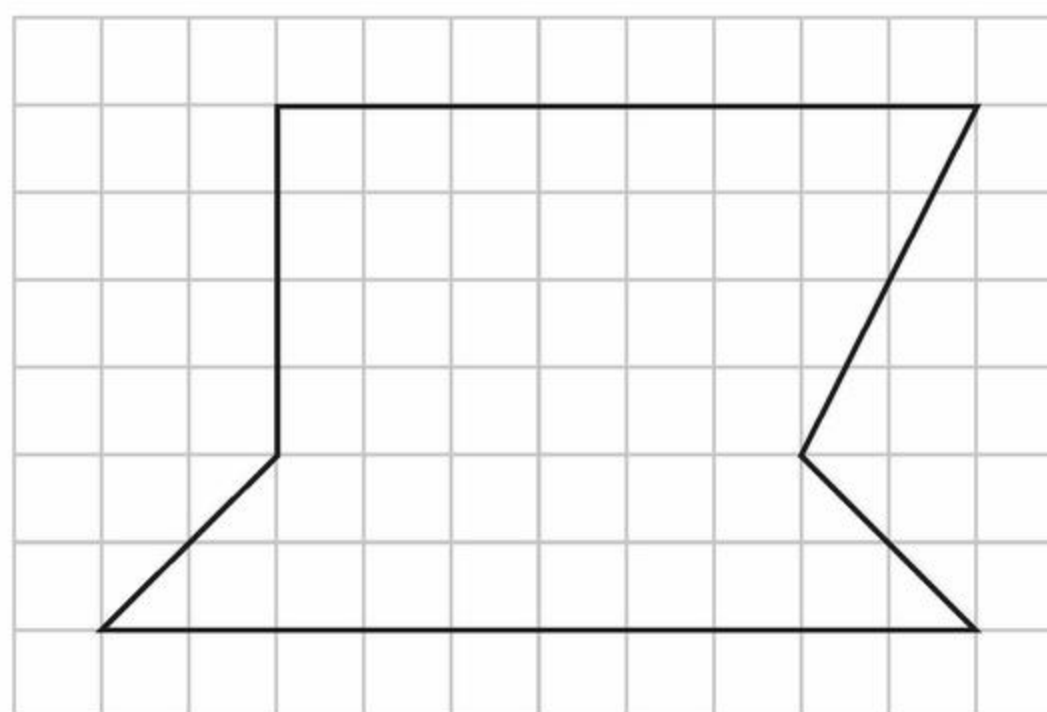
Ma wszystkie boki równe

- **5** Policz, ile równoległoboków jest na poniższym rysunku. Ile jest prostokątów? Ile jest rombów?

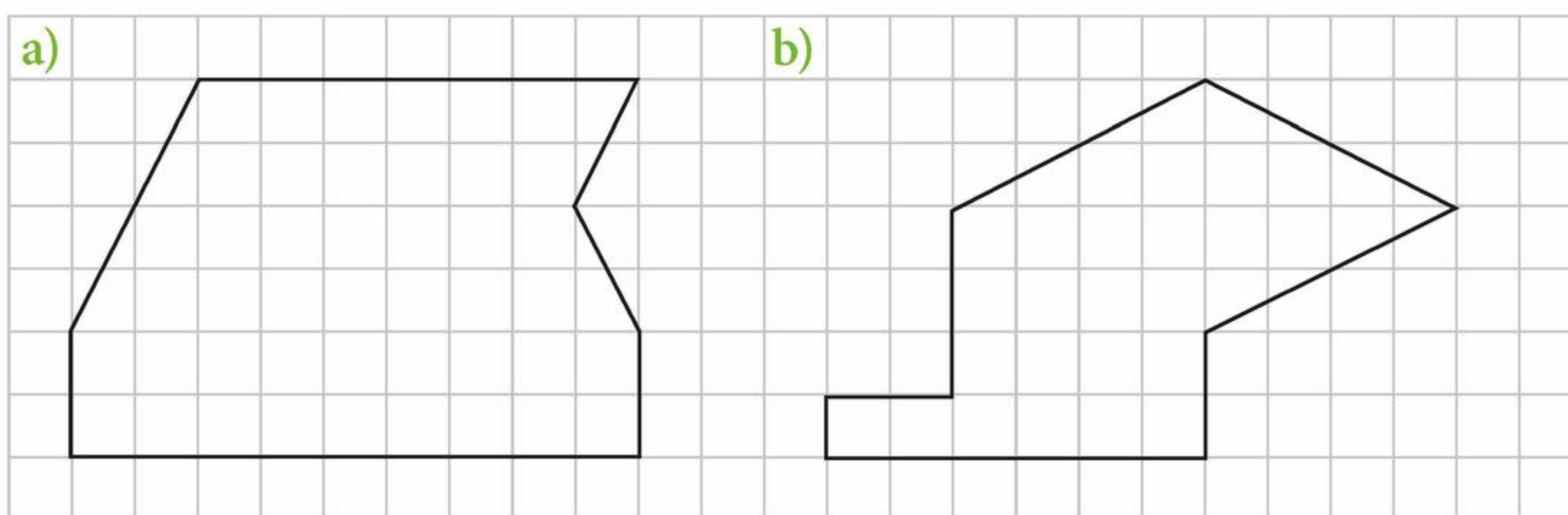


- 6 Przerysuj do zeszytu figurę przedstawioną na rysunku, a następnie podziel ją na:

- dwa trapezy,
- prostokąt, trójkąt i trapez,
- trapez równoramienny, równoległobok niebędący prostokątem i trójkąt.



- 7 Przerysuj do zeszytu figurę przedstawioną na rysunku, a następnie podziel ją na czworokąty. Określ, jakie to rodzaje czworokątów.



- 8 Oceń, czy zdanie jest prawdziwe.

- Każdy równoległobok jest rombem.
- Każdy romb jest równoległobokiem.
- Każdy równoległobok jest prostokątem.
- Niektóre trapezy są rombami.
- Każdy romb jest kwadratem.

- 9 Marta przeczytała na stronie 133, że czworokąt można podzielić na dwa trójkąty i dlatego suma jego kątów wynosi $2 \cdot 180^\circ$. Marta stwierdziła: „Umiem podzielić czworokąt na cztery trójkąty, więc suma jego kątów powinna wynosić $4 \cdot 180^\circ$ ”.

- Narysuj, jak można podzielić czworokąt na cztery trójkąty.
- Wyjaśnij, dlaczego z takiego podziału nie wynika, że suma kątów czworokąta wynosi $4 \cdot 180^\circ$.

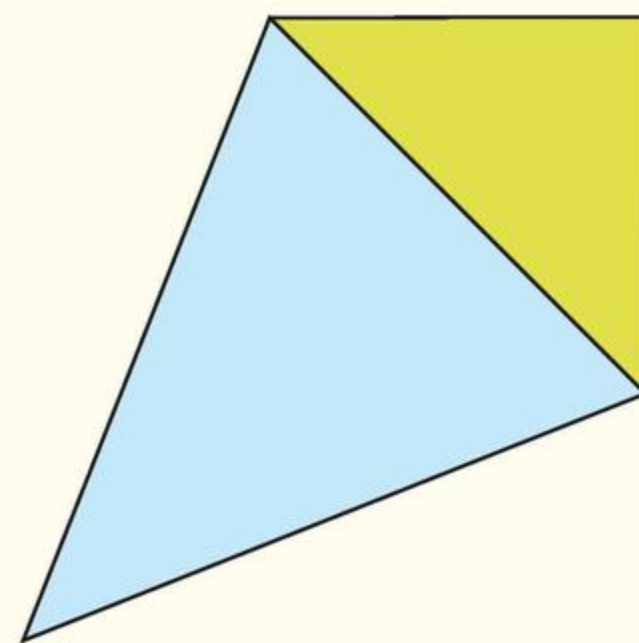
- 🏆 10 Czy czworokąt może mieć trzy kąty równe, a czwarty inny? Jeśli tak – narysuj go. Jeśli nie – wyjaśnij dlaczego.



Dla dociekliwych

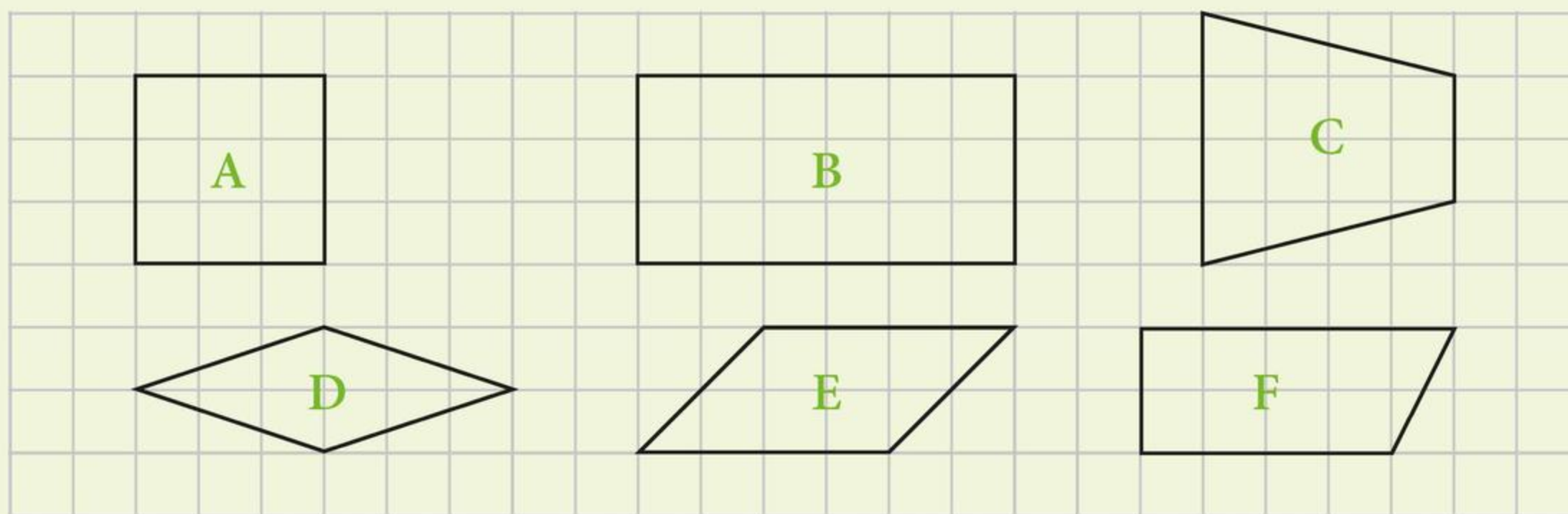
Wytnij z papieru trójkąt równoramienny.
Następnie wytnij drugi trójkąt równoramienny
o takiej samej podstawie, ale innej długości ramion.
Złóż trójkąty podstawami jak na rysunku.
Otrzymały czworokąt w kształcie latawca to deltoid.

- Co możesz powiedzieć o długościach jego boków?
- Co możesz powiedzieć o jego kątach?
- Ile przekątnych ma deltoid?
- Ile stopni mają kąty między przekątnymi?
- Jakie inne własności mają te przekątne?
- Na jakie figury przekątne dzielą ten czworokąt?



Czy już umiem?

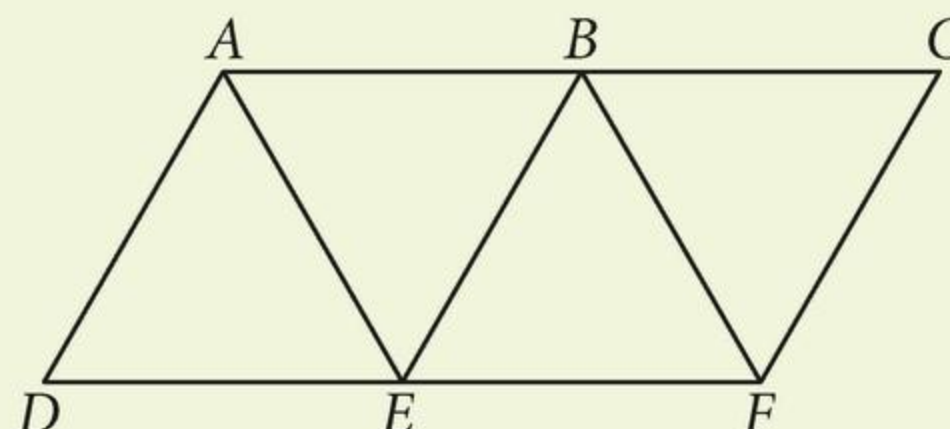
I Na których rysunkach przedstawiono równoległoboki, a na których trapezy?



II Pewien czworokąt ma kąty: 60° , 60° , 90° . Ile stopni ma czwarty kąt tego czworokąta?

III Wiedząc, że wszystkie narysowane poniżej trójkąty są równoboczne, znajdź na rysunku:

- romb,
- równoległobok niebędący rombem,
- trapez niebędący równoległobokiem.

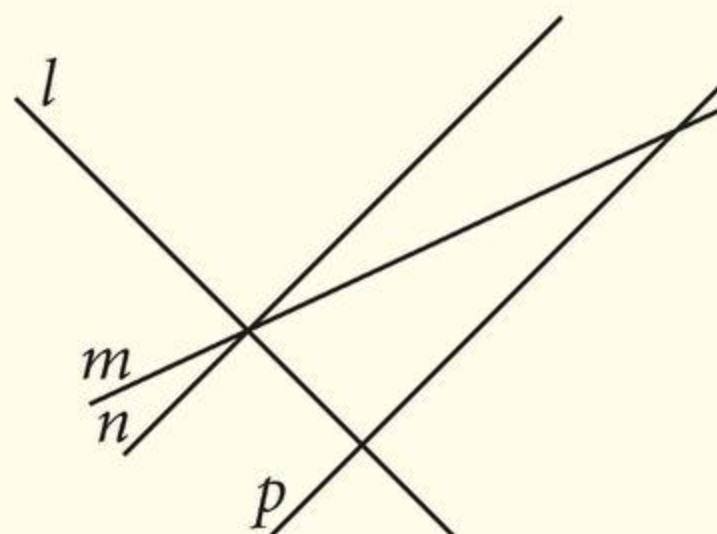


Powtórzenie przed klasówką

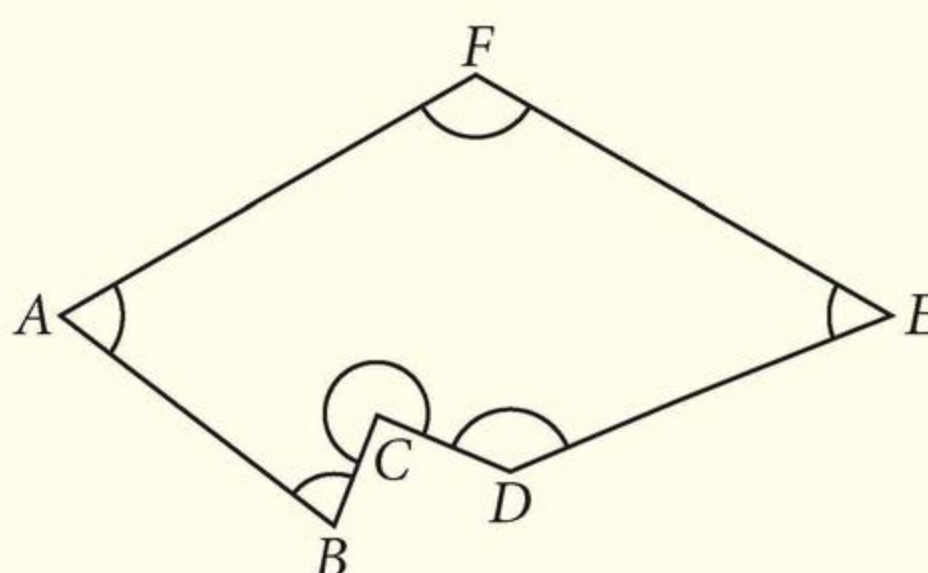
- 1 Używając odpowiednich przyrządów, zbadaj, jak są położone proste na rysunku.

Wypisz nazwy wszystkich par prostych:

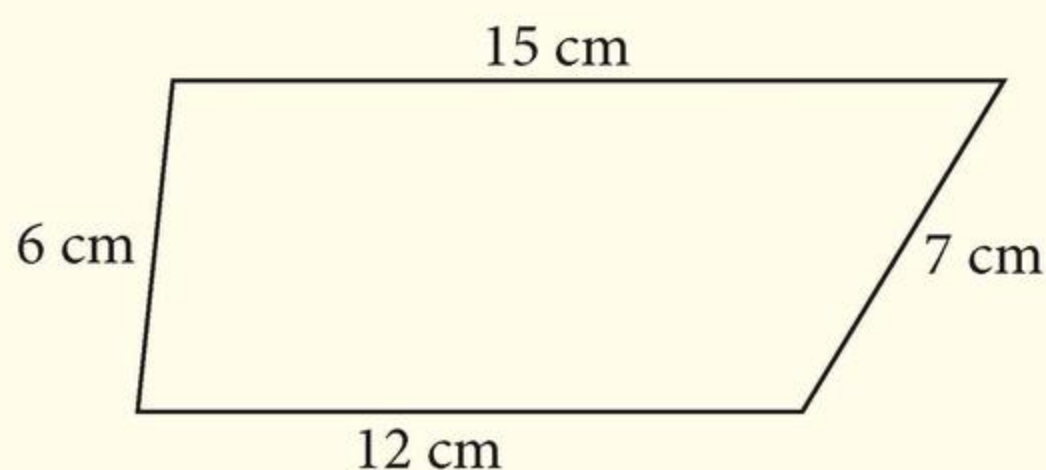
- a) równoległych,
- b) prostopadłych,
- c) przecinających się, ale nie prostopadłych.



- 2 Które z kątów narysowanego wielokąta są ostre, które proste, a które rozwarte? Użyj ekierki, aby to sprawdzić.



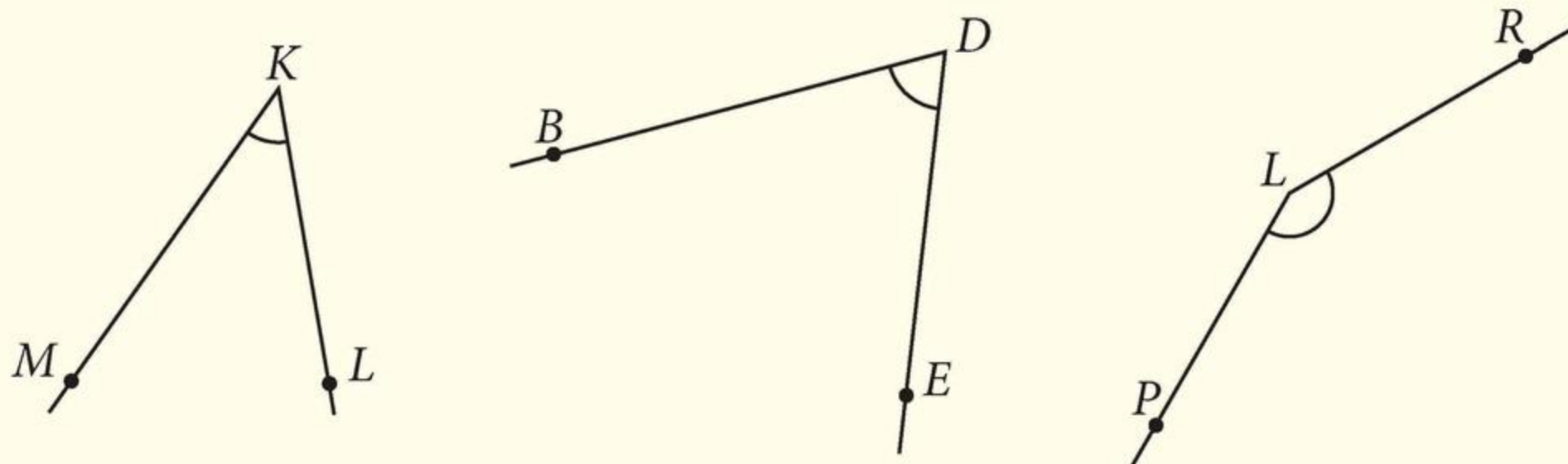
- 3 Oblicz obwód narysowanego obok wielokąta.



- 4 Narysuj kąt:

- a) 45° ,
- b) 60° ,
- c) 110° .

- 5 Zapisz nazwy narysowanych kątów, określ ich rodzaje i zmierz je.

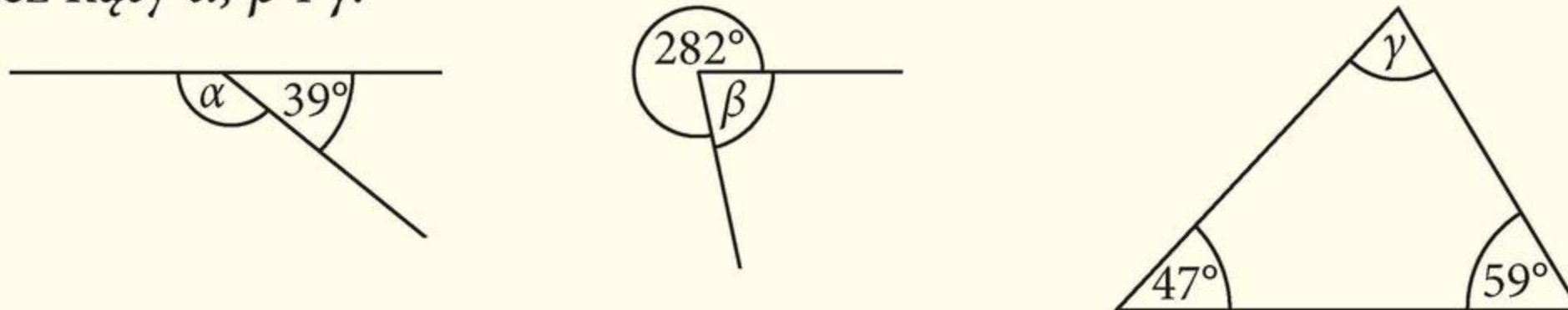


- 6 Na gładkiej kartce narysuj prostą l i zaznacz na niej punkt B . Poprowadź prostą prostopadłą do prostej l przechodzącą przez punkt B .

- 7 Na gładkiej kartce narysuj prostą m oraz punkt C nieleżący na prostej m . Poprowadź prostą równoległą do prostej m przechodzącą przez punkt C .

- 8 Narysuj trójkąt ostrokątny, oznacz jego wierzchołki, a następnie z każdego wierzchołka poprowadź wysokość.

- 9 Oblicz kąty α , β i γ .

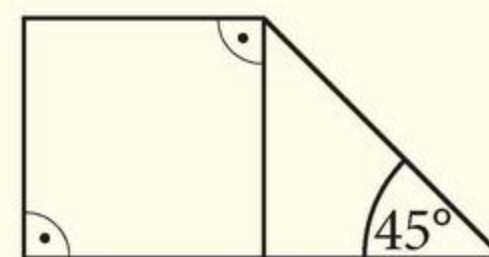


- 10 Narysuj trójkąt rozwartokątny, oznacz jego wierzchołki, a następnie z każdego wierzchołka poprowadź wysokość.

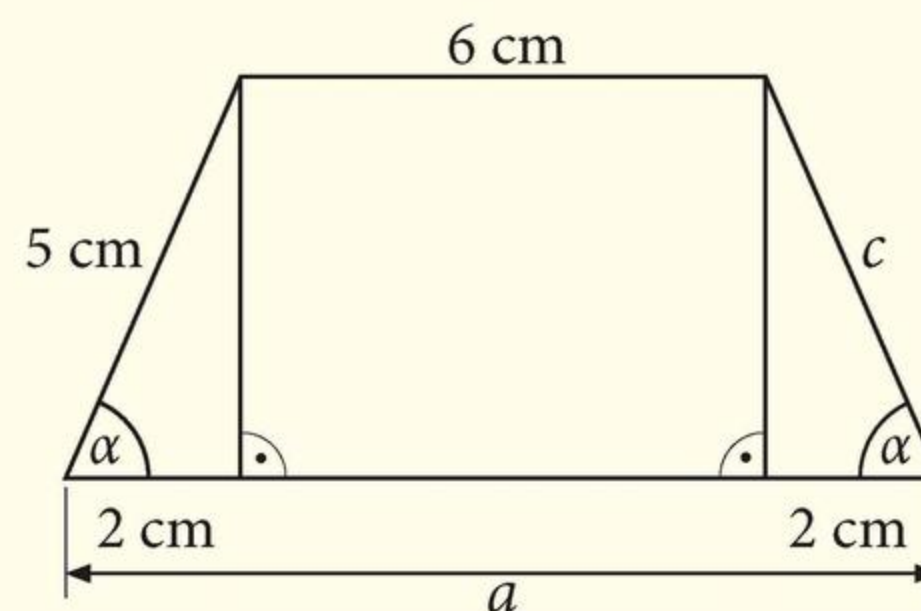
- 11 Narysuj równoległobok o bokach długości 5 cm i 3,5 cm oraz kącie ostrym równym 45° . Następnie narysuj i zmierz wysokości tego równoległoboku opuszczone na dwa sąsiednie boki.

- 12 Oblicz:

a) kąty w narysowanym obok trapezie,



b) nieznane długości odcinków w narysowanym obok trapezie.



- 13 Punkt przecięcia przekątnych równoległoboku dzieli każdą z nich na połowy. Wiedząc o tym, narysuj równoległobok o przekątnych długości 6 cm i 8 cm oraz kącie między nimi równym 128° .

- 14 Oblicz kąty trójkąta równoramiennego, wiedząc, że jest wśród nich kąt:

a) 90° , b) 120° , c) 54° (rozważ dwa przypadki).

- 15 Trapez równoramienny ma krótszą podstawę długości 2 cm, dłuższą podstawę 4 cm i jeden z kątów 60° . Podaj pozostałe boki i kąty tego trapezu.

Zadania na temat...

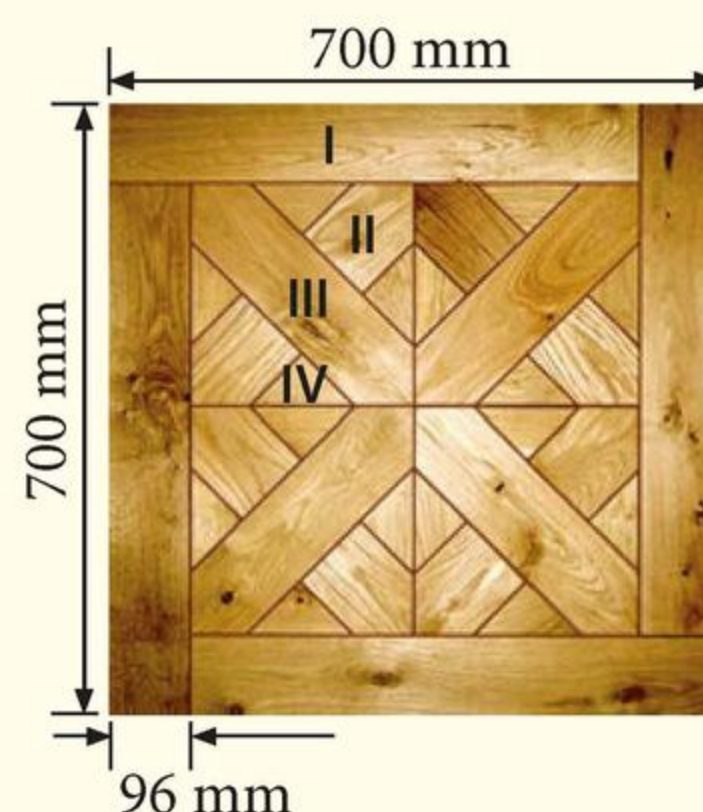
Piękne parkiety

Podłoga z drewnianych klepek to parkiet. Po ułożeniu jest wiórkowana lub cyklinowana, a następnie woskowana lub lakierowana. Parkiet zwykle układa się z jednakowych klepek. Czasem jednak, by podkreślić charakter i stylistykę wnętrza, stosuje się klepki o różnych kształtach, formach i kolorystyce, wykonane z różnych gatunków drewna.

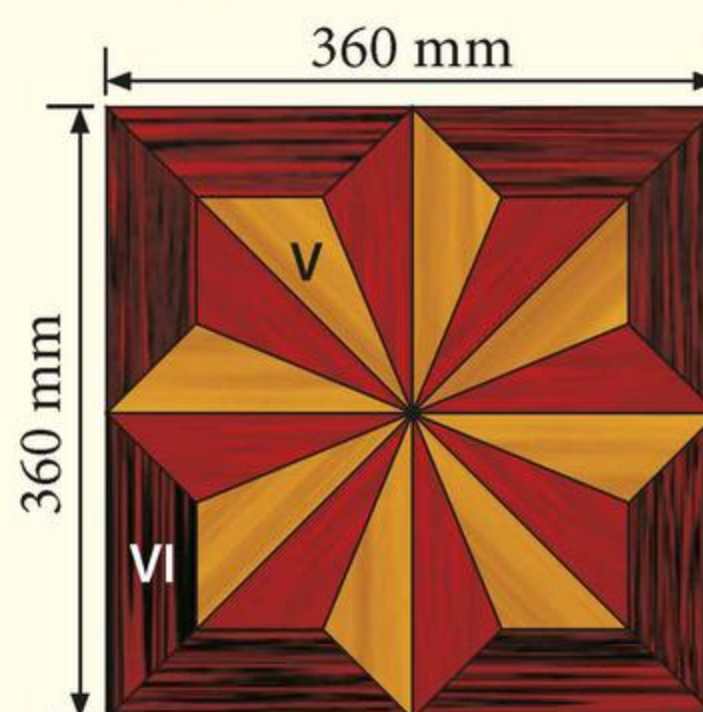


- 1 Liczbami: I, II, III i IV oznaczono na zdjęciu obok różne wielokąty. Jakie to wielokąty?
- 2 Oblicz kąty wielokątów: II, III i IV.
- 3 Oblicz obwód prostokąta oznaczonego liczbą I.
- 4 Ile par boków równoległych można wskazać w wielokącie III?
- 5 Ile par boków prostokątnych można wskazać w wielokącie II?
- 6 Jakiego rodzaju trójkątem jest figura IV? Podaj dwie nazwy.
- 7 Figura III ma obwód większy niż figura II. Ile razy? Odpowiedź uzasadnij rysunkiem.
- 8 Jakiego rodzaju trójkątem jest figura V ze zdjęcia obok? Oblicz jego kąty.
- 9 Jaką figurą jest wielokąt VI ze zdjęcia obok? Oblicz jego kąty.

Zdjęcie do zadań 1–7



Zdjęcie do zadań 8 i 9

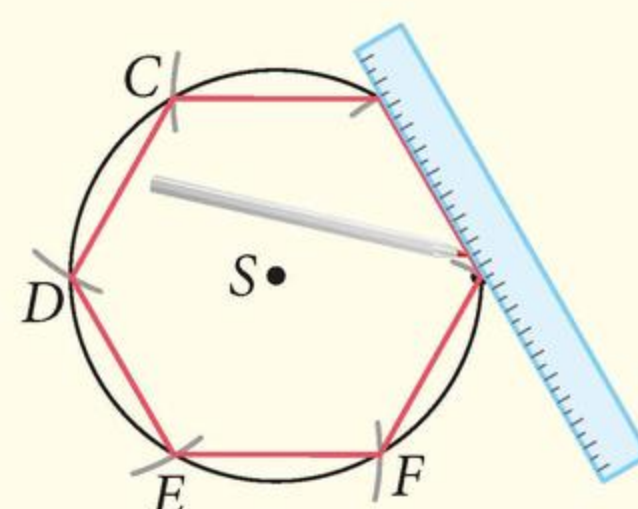
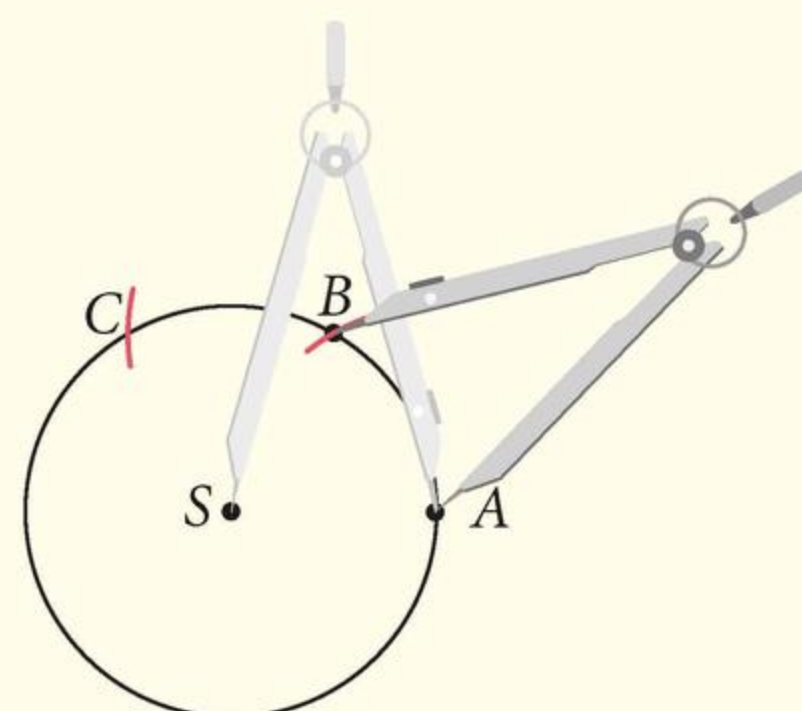


Zadania na deser

Informacje do zadań 1–3

Jak narysować **sześciokąt foremny**, czyli taki, który ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe?

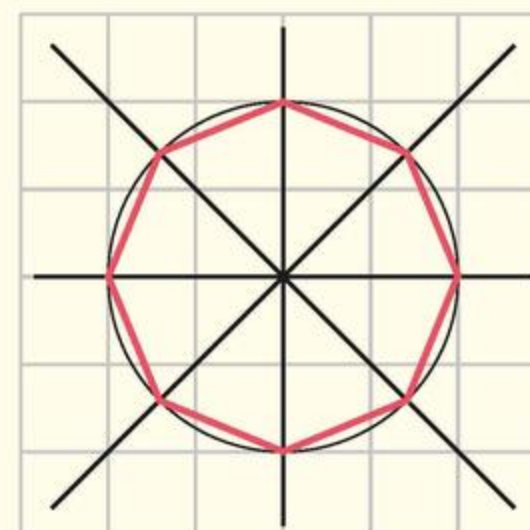
- Rysujemy okrąg o środku S i promieniu 2 cm. Na tym okręgu zaznaczamy dowolny punkt A . Nie zmieniając rozstawienia cyrkla, zaznaczamy na okręgu kolejno: punkt B , leżący w odległości 2 cm od A , punkt C w odległości 2 cm od B itd.
- Po kilkakrotnym powtórzeniu tej czynności znajdujemy się znów w punkcie A . Teraz łączymy odcinkami zaznaczone na okręgu punkty – otrzymaliśmy sześciokąt foremny.



- 1 Narysuj sześciokąt foremny zgodnie z powyższym opisem. Połącz wierzchołki tego sześciokąta ze środkiem okręgu i odpowiedz na pytania.
 - a) Na ile trójkątów został podzielony sześciokąt? Jakie to trójkąty?
 - b) Ile stopni ma kąt między sąsiednimi bokami sześciokąta foremnego?
 - c) Ile razy dłuższa od boku sześciokąta jest jego najdłuższa przekątna?
 - d) Jaki jest obwód narysowanego przez ciebie sześciokąta foremnego?
 - e) Ile osi symetrii ma sześciokąt foremny? Narysuj je.
- 2 Znajdź w sześciokącie foremnym podzielonym na trójkąty równoległobok oraz trapez. Jaki to rodzaj równoległoboku? Jaki to rodzaj trapezu? Narysuj je osobno i zapisz na rysunkach, ile stopni mają ich kąty.
- 3 Narysuj na kartonie sześciokąt foremny, wytnij go i za pomocą tego szablonu narysuj na zwykłej kartce 10 sześciokątów ułożonych tak, aby nie zostawały między nimi puste miejsca. Co ci przypomina otrzymany rysunek?

- 4 Wielokąt nazywamy foremny, jeśli spełnia dwa warunki: ma wszystkie boki równe i ma wszystkie kąty równe.
- Jak inaczej nazywa się trójkąt foremny?
 - Czy każdy prostokąt jest czworokątem foremny? Czy jest nim każdy romb? A każdy kwadrat?

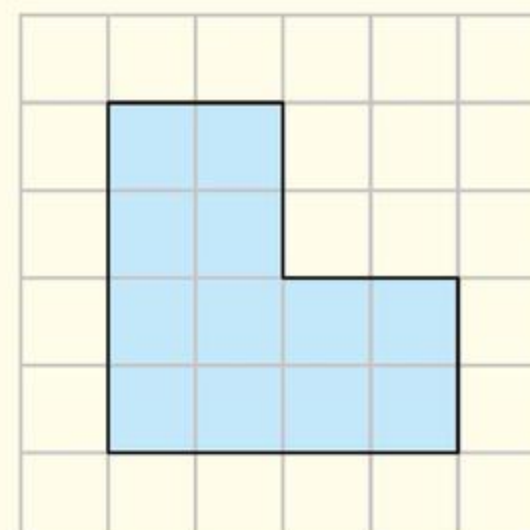
- 5 Na rysunku pokazano, jak na papierze w kratkę można narysować ośmiokąt foremny.



- Narysuj taki ośmiokąt. Zaczynij od wykreślenia okręgu o promieniu 4 cm.
- Oblicz kąty tego ośmiokąta. Zwróć uwagę, że jest on podzielony na trójkąty równoramienne.

- 6 Naszkicuj dwunastokąt foremny i oblicz jego kąty.

- 7 Narysuj na kartce w kratkę figurę taką jak na rysunku. Podziel ją na cztery jednakowe części. Jakim wielokątem jest każda z tych części?



- 8 Podziel kwadrat:

- na trójkąty równoramienne,
- na trójkąty równoramienne, ale nie prostokątne,
- na trójkąty równoramienne, ale nie prostokątne, tak, aby trójkątów było jak najmniej.

Uwaga. Kwadrat można podzielić na cztery takie trójkąty.

- 9 Podziel kwadrat na części, z których można ułożyć:

- dwa jednakowe kwadraty,
- dwa jednakowe kwadraty, tak aby części było jak najmniej.

Uwaga. Można podzielić kwadrat na cztery takie części.

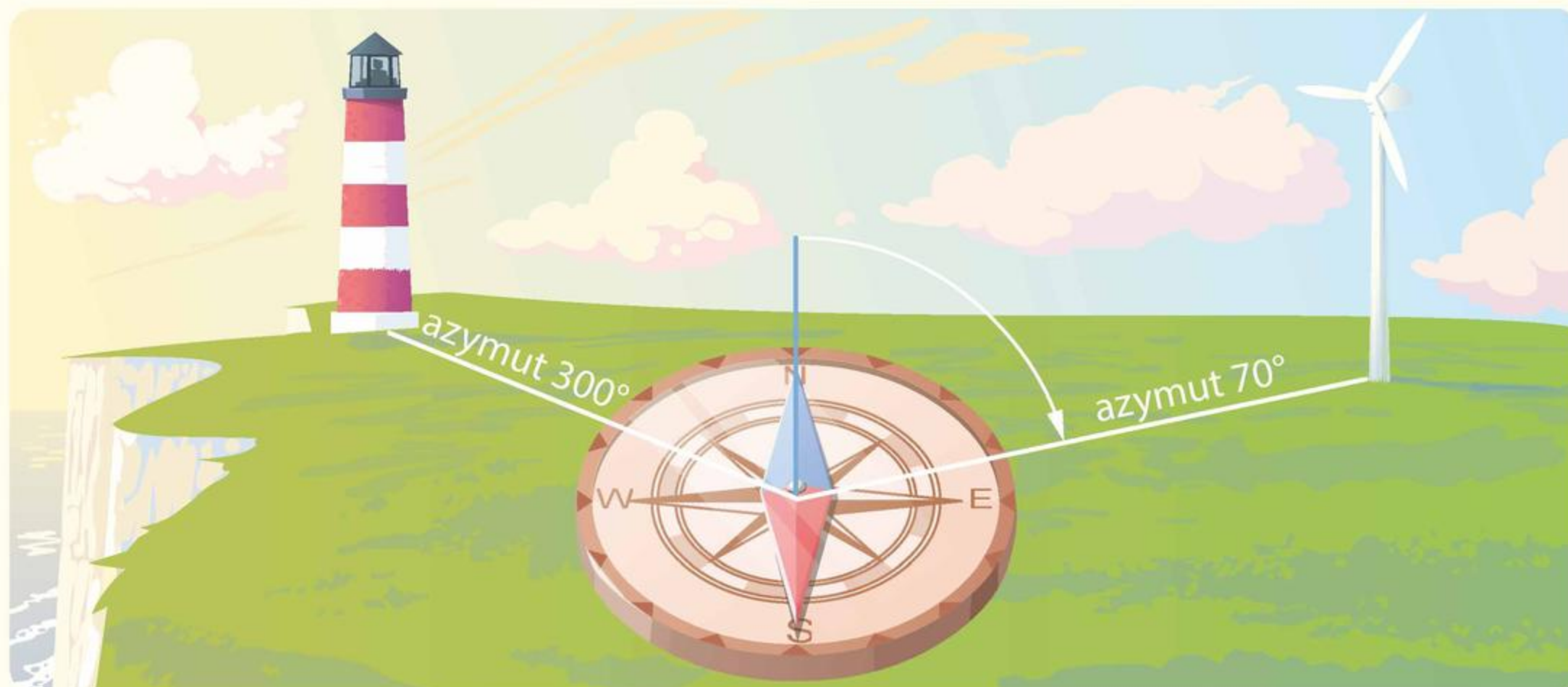
- 10 Sześciokąt ma 6 wierzchołków. Z każdego z nich wychodzą 3 przekątne. Jednak sześciokąt nie ma $3 \cdot 6 = 18$ przekątnych, ale tylko 9. Dlaczego?

- 11 Ile przekątnych wychodzi z jednego wierzchołka siedmiokąta? Ile wszystkich przekątnych ma siedmiokąt?

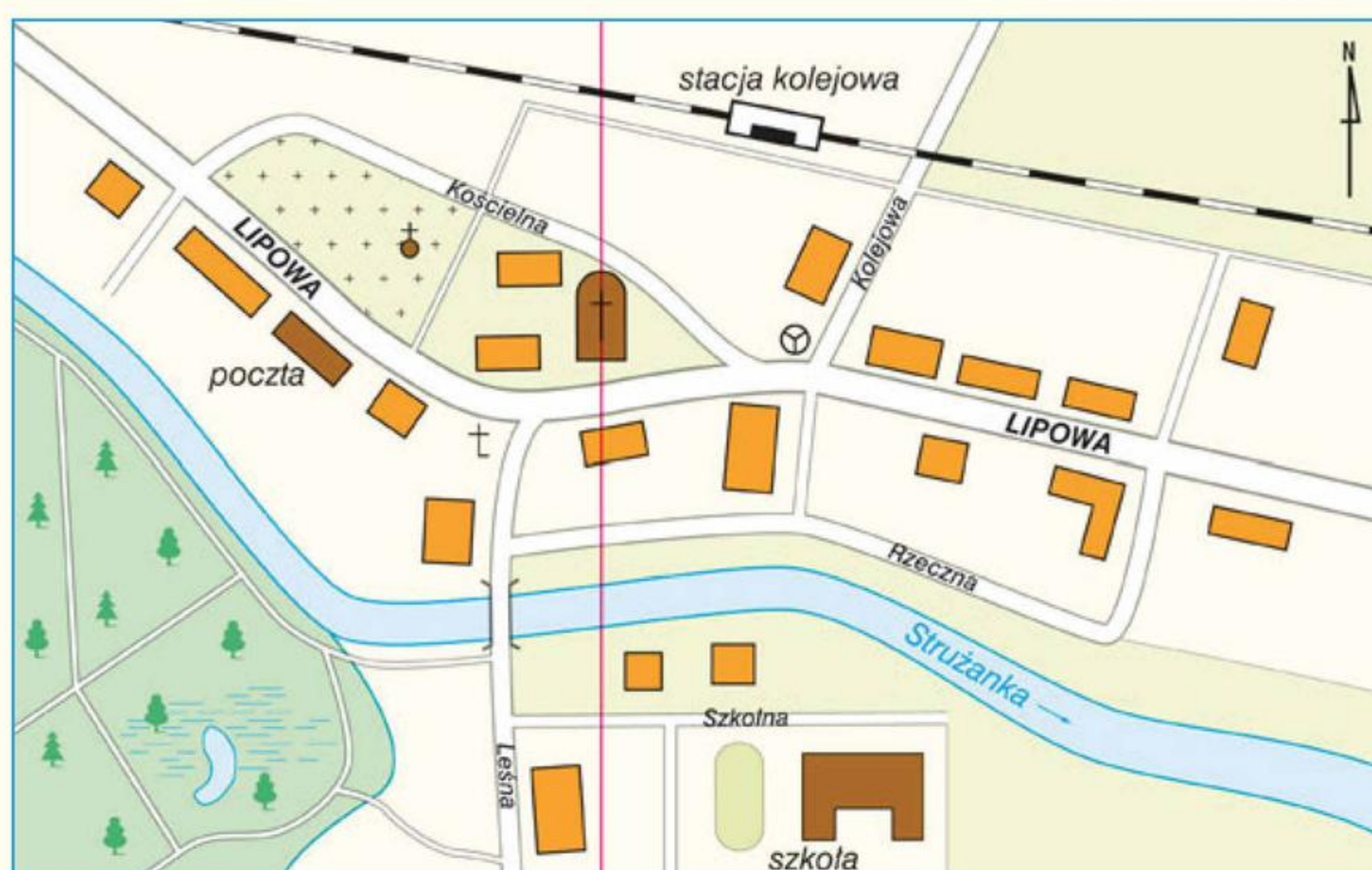
- 12 Ile wszystkich przekątnych ma dziesięciokąt?

Informacje do zadań 13–15

Azymut to kąt między kierunkiem północnym a kierunkiem, w którym idziemy lub w którym znajduje się interesujący nas obiekt. Ten kąt mierzymy zawsze zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Przykłady przedstawiono na rysunku poniżej.



- 13** Na jaki azymut idziesz, gdy kierujesz się:
- a) na wschód, b) na zachód, c) na południowy wschód?
- 14** Kasia weszła na wieżę kościoła i za pomocą kompasu wyznacza azymut na różne obiekty we wsi – stację kolejową, szkołę i most. Zmierz te azymuty na poniższej mapie.



- 15** Harcerze wyszli z obozu i skierowali się na azymut 90° . Przeszli 3 km, potem skręcili i kolejne 2 km przeszli na azymut 150° . Następnie pokonali jeszcze 5 km na azymut 270° i 2 km na azymut 30° . W ten sposób wrócili do obozu. Naszkicuj trasę wycieczki. Przyjmij skalę 1 cm – 1 km.



Ułamki zwykłe

Cała nuta to tyle
samo co dwie
półnuty. A ile to
ósemek?

Cała
nuta



ma
wartość

1

Półnuta



ma
wartość

$\frac{1}{2}$

Ćwierćnuta



ma
wartość

$\frac{1}{4}$

Ósemka



ma
wartość

$\frac{1}{8}$





Na dobry początek

Zabieram!

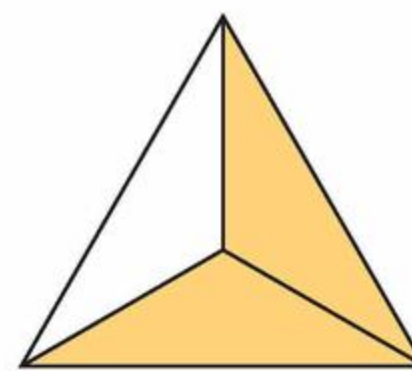
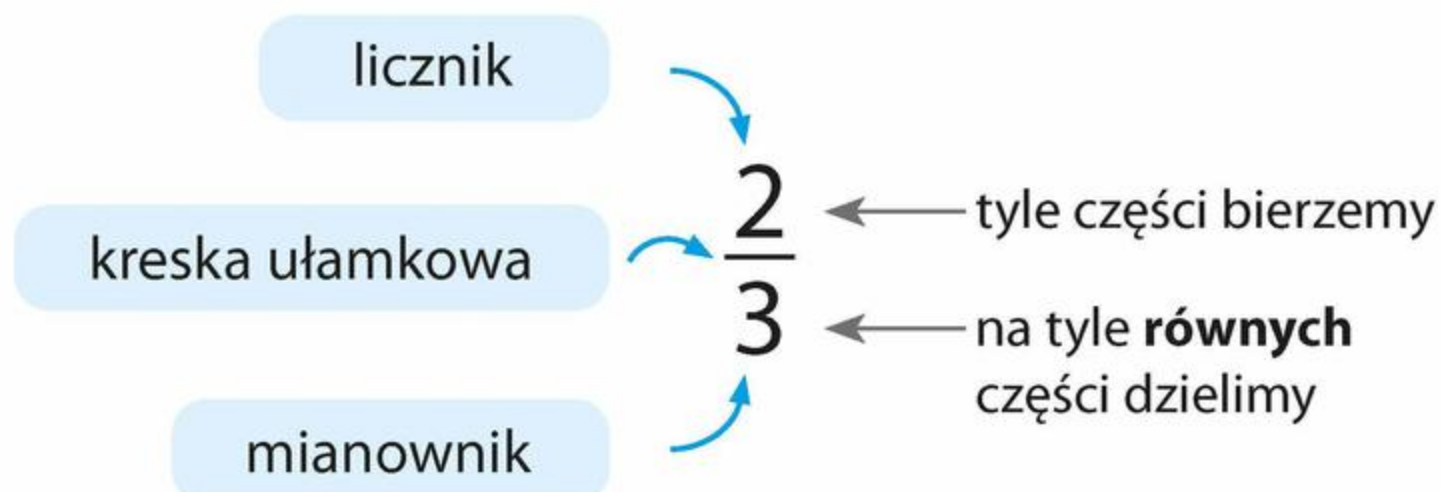
- ▶ Połóżcie na ławce kilkanaście podobnych przedmiotów (np. 12 kredek, 15 szyszek, 17 nakrętek po napojach itp.). Usiądźcie wokół ławki i na zmianę wydawajcie polecenia, np.: „Zabierz $\frac{1}{3}$ leżących na stole kredek.”
- ▶ Zadaniem osoby siedzącej obok jest wykonać to polecenie i powiedzieć: „Zabieram!”
- ▶ Pamiętajcie, że polecenia powinny być wykonalne, np. jeśli na ławce jest 15 kredek, nie można zabrać spośród nich $\frac{1}{4}$ kredek. Zabawa kończy się w momencie, gdy na ławce leży już tylko jeden przedmiot.



Pytania i polecenia

- Na drzewie siedzi 15 papużek. Czy może się zdarzyć, że odleci $\frac{2}{3}$ ptaków? A czy może odlecieć $\frac{3}{4}$ ptaków?
- Odleciała $\frac{1}{3}$ ptaków. Ile zostało?

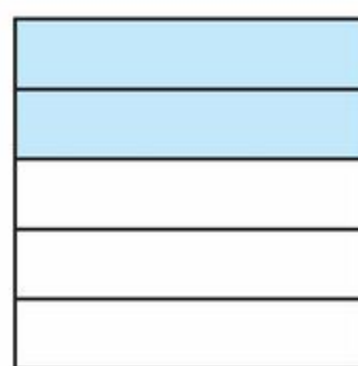
Przypomnijmy, czego uczyliśmy się o ułamkach.



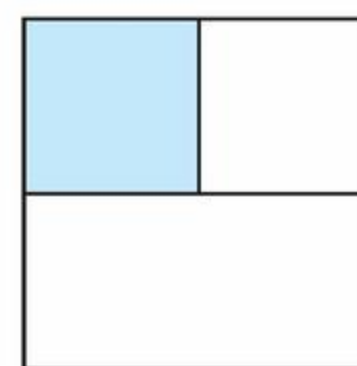
Ułamek może opisywać część całości. W takim ułamku licznik jest mniejszy od mianownika. Taki ułamek to **ułamek właściwy**.



$$\frac{1}{9}$$



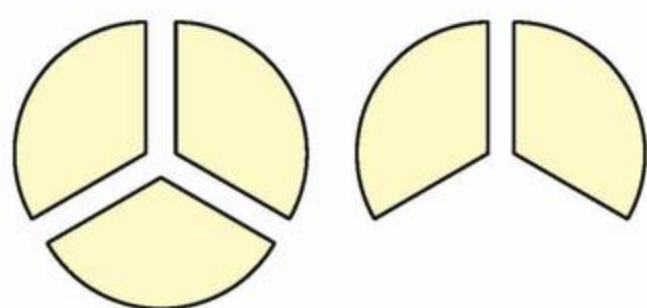
$$\frac{2}{5}$$



$$\frac{1}{4}$$

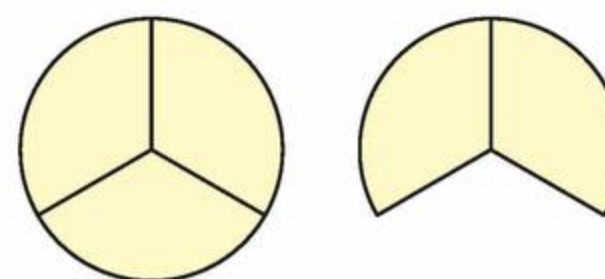
Część zamalowana na ostatnim rysunku **nie** jest równa $\frac{1}{3}$, bo części kwadratu nie są tej samej wielkości.

Ułamek może też oznaczać całość lub więcej niż całość, np. $\frac{4}{4} = 1$, $\frac{5}{3} > 1$. Wtedy licznik jest równy mianownikowi lub większy od mianownika. Taki ułamek to **ułamek niewłaściwy**.



$$\frac{2}{3}$$

=



$$1\frac{2}{3}$$

Liczby takie jak: $1\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{4}$, $4\frac{1}{3}$, $3\frac{5}{9}$ to **liczby mieszane**.

Zamiana liczb mieszanych na ułamki

$$3\frac{2}{5} = \frac{17}{5}, \text{ bo } 3 \cdot 5 + 2 = 17.$$



$3 \cdot 5$ części



+



2 części

= 17 części

Kreska ułamkowa zastępuje znak dzielenia.

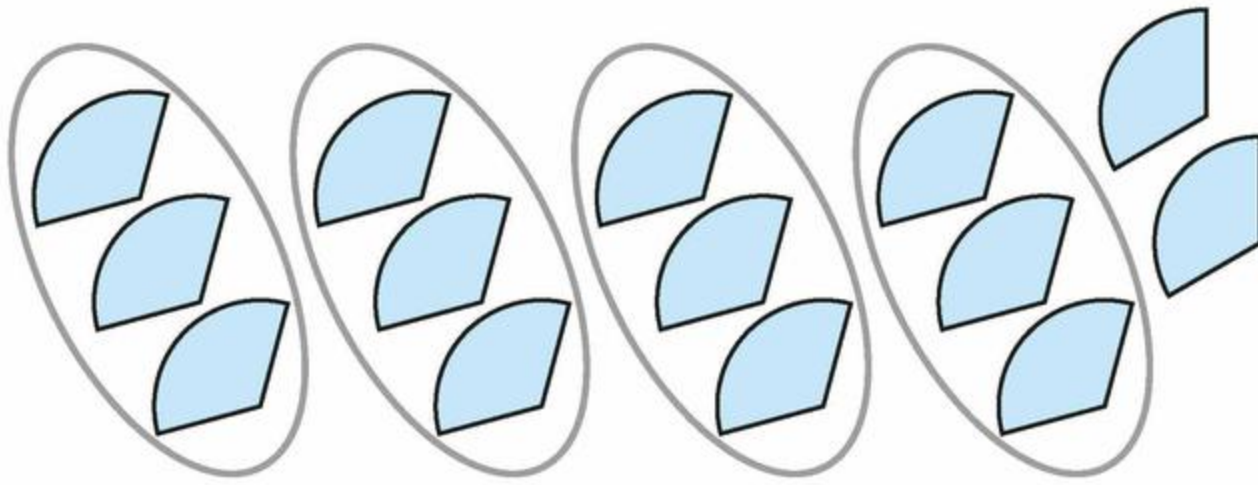
$$5 : 6 = \frac{5}{6}$$

$$\frac{3}{4} = 3 : 4$$

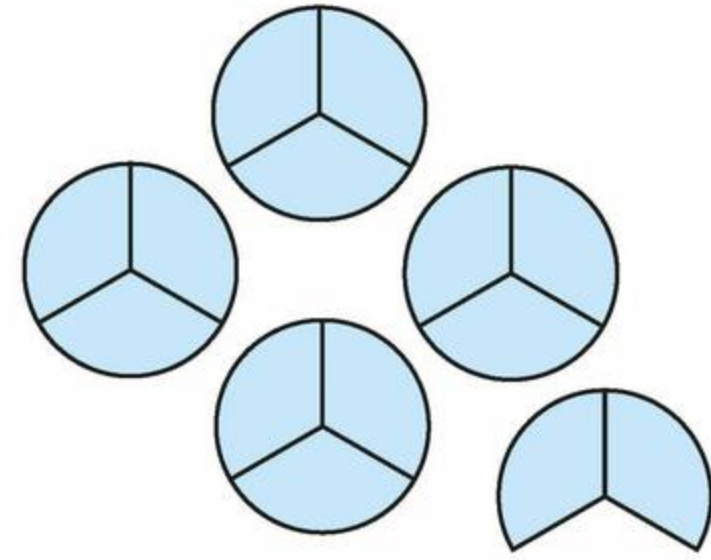
$$\frac{8}{2} = 8 : 2 = 4$$

Zamiana ułamków niewłaściwych na liczby mieszane, czyli wyłączanie całości

$$\frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}, \text{ bo } 14 : 3 = 4 \text{ r } 2$$



$$14 : 3 = 4 \text{ r } 2$$



$$\frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

Przykład

Na półce stoi 12 butelek wody gazowanej i 7 butelek wody niegazowanej. Jaką część wszystkich butelek stanowią te z wodą gazowaną?

Na półce jest $12 + 7 = 19$ butelek. Każda butelka to $\frac{1}{19}$ wszystkich butelek. W takim razie 12 butelek z wodą gazowaną to $\frac{12}{19}$ wszystkich butelek.

Odp. Butelki z wodą gazowaną stanowią $\frac{12}{19}$ wszystkich butelek na półce.

Przykład

Na stole było 15 cukierków. Kuba zabrał $\frac{1}{3}$ cukierków. Ile cukierków wziął Kuba?

$\frac{1}{3}$ to jedna z trzech równych części.

Trzeba 15 cukierków podzielić na 3 równe części.

$$15 : 3 = 5$$

Odp. Kuba wziął 5 cukierków.



Przykład

Zosia miała 5 m wstążki. Podzieliła ją na 3 równe kawałki. Jaką długość ma każdy kawałek?

$$5 : 3 = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

Odp. Każdy kawałek ma długość $1\frac{2}{3}$ m.

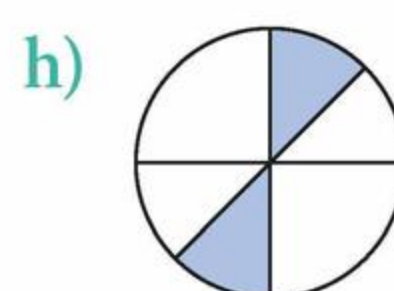
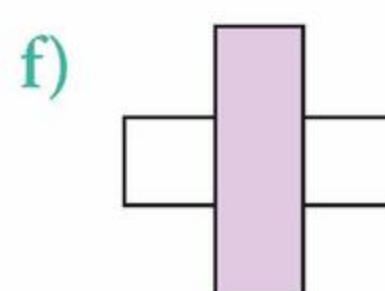
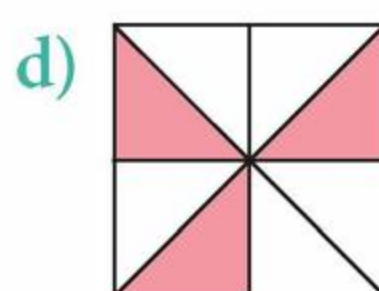
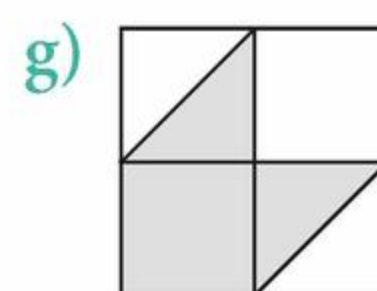
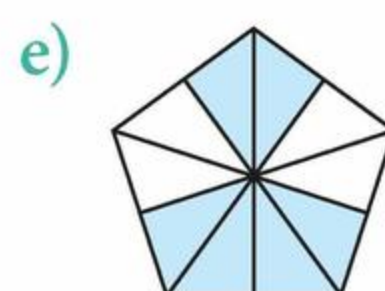
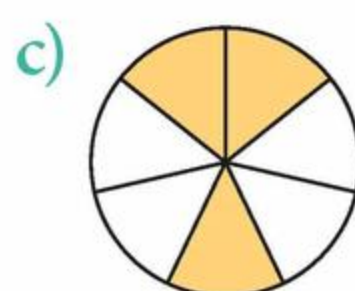
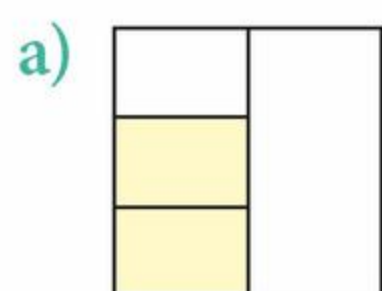


Zadania

- 1** Wykonaj polecenia. ► Jeśli bezbłędnie rozwiązesz pierwsze dwa przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom. Jeśli nie – rozwiąż wszystkie przykłady z danego poziomu i dopiero wtedy przejdź na następny.

poziom A

Napisz, jaką część figury pomalowano.



poziom B

Zapisz w postaci dzielenia.

a) $\frac{24}{8}$

c) $\frac{5}{7}$

e) $\frac{3}{2}$

g) $\frac{5}{12}$

i) $\frac{17}{8}$

b) $\frac{167}{34}$

d) $\frac{23}{9}$

f) $\frac{1}{6}$

h) $\frac{12}{5}$

j) $\frac{25}{11}$

poziom C

Zamień na ułamki niewłaściwe.

a) $12\frac{3}{7}$

c) $1\frac{2}{3}$

e) $3\frac{4}{5}$

g) $2\frac{1}{4}$

i) 3

b) $35\frac{8}{10}$

d) $1\frac{1}{7}$

f) $6\frac{2}{5}$

h) $2\frac{3}{4}$

j) $11\frac{2}{7}$

poziom D

Zamień ułamki niewłaściwe na liczby mieszane lub liczby naturalne.

a) $\frac{99}{5}$

c) $\frac{3}{2}$

e) $\frac{6}{3}$

g) $\frac{20}{7}$

i) $\frac{20}{8}$

b) $\frac{24}{8}$

d) $\frac{5}{3}$

f) $\frac{12}{5}$

h) $\frac{53}{10}$

j) $\frac{20}{10}$

MISTRZ

- a) Zamień ułamki niewłaściwe na liczby mieszane, korzystając z działania w ramce.

$$\frac{3405}{148}, \frac{3400}{23}, \frac{3454}{148}, \frac{3454}{23}$$

$$23 \cdot 148 = 3404$$

- b) Zamień na ułamek niewłaściwy liczbę $13\frac{8}{25}$.

Zamień na liczby mieszane ułamki: $\frac{330}{25}, \frac{999}{25}, \frac{333}{13}, \frac{345}{25}, \frac{345}{13}$.

Wykorzystaj poprzednie obliczenia.

- 2 W grupie tanecznej jest 12 tancerzy początkujących i 8 zaawansowanych. Jaką część tej grupy stanowią początkujący?

III. Ułamki zwykłe

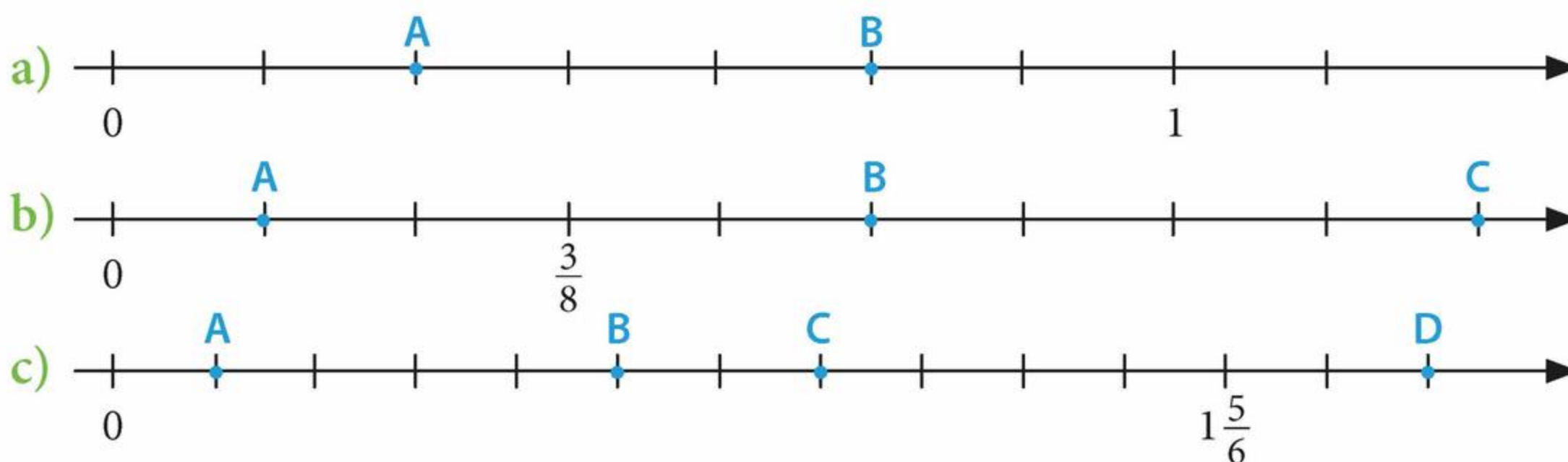
- **3** Zosia wstawiła do wazonu 15 róż, ale już drugiego dnia trzy róże wyrzuciła, bo zwiędły. Jaka część róż pozostała?
- **4** Małgosia, Zosia i Ania podzieliły się po równo wstążką o długości 2 m. Ile metrów wstążki dostała każda dziewczynka?
- **5** Przygotujcie dwa komplety kartoników z cyframi od 0 do 9. Pierwsza osoba losuje 2 kartoniki i układa z nich liczbę dwucyfrową. To będzie licznik ułamka. Kładziecie pod utworzoną liczbą długopis lub ołówek jako kreśkę ułamkową. Druga osoba ze swoich kartoników odkłada na bok 0 i losuje jeden kartonik – mianownik ułamka. Pierwsza osoba zamienia tak otrzymany ułamek na liczbę mieszaną, a druga osoba – sprawdza poprawność zamiany. Następnie zamieniacie się rolami i powtarzacie zabawę.
- **6** Potasujcie dwa komplety kartoników z cyframi od 1 do 9. Pierwsza osoba losuje 3 kartoniki i układa z nich liczbę mieszaną. Zadaniem drugiej osoby jest zamiana tej liczby na ułamek niewłaściwy, a pierwszej – sprawdzenie poprawności zamiany. Następnie zamieniacie się rolami i powtarzacie zabawę.
- **7** Pomnóż pisemnie $32 \cdot 141$, a następnie zamień na ułamki niewłaściwe liczby:
 $141\frac{1}{32}$, $141\frac{11}{32}$, $32\frac{100}{141}$.
- **8** Podziel pisemnie $135 : 6$, a następnie zamień na liczby mieszane ułamki $\frac{135}{6}$ i $\frac{137}{6}$.
- **9** W turnieju brało udział osiem 4-osobowych zespołów. Podczas przerwy przywieziono 20 pizz. Jedną dostało jury, a pozostałe rozdzielono równo pomiędzy zespoły. Ile pizz otrzymał każdy zespół?
- **10** Na rysunku na stronie 132 znajduje się **tangram**, czyli kwadrat podzielony na siedem części, nazywanych tanami. Narysuj tangram i zapisz na każdym z tanów ułamek określający, jaka to część całego kwadratu. Aby ułatwić sobie zadanie, możesz pociąć na części drugi taki sam tangram i sprawdzić, ile razy dany tan mieści się w kwadracie.
Porównaj swoje odpowiedzi z odpowiedziami innych.
Czy wszyscy opisaliście tany w ten sam sposób?
- **11** Dominik zbiera zakrętki od butelek po soczkach. Ma ich 369. Jedna trzecia jego kolekcji to zakrętki zagraniczne. Ile polskich zakrętek ma Dominik?

- 12 W koszu były 24 jabłka. Bartek, Krzyś i Tomek wzięli część z nich na wycieczkę. Kto wziął najwięcej jabłek? Ile jabłek zostało w koszu?



- 13 Na stole leżało 81 śliwek. Najpierw przyszła Ania i zjadła $\frac{1}{9}$ wszystkich śliwek. Potem pojawiła się Basia i zjadła $\frac{1}{8}$ pozostałych śliwek. Trzecia, Cesia, zjadła $\frac{1}{7}$ śliwek, które leżały na stole, gdy przyszła. Danka zjadła $\frac{1}{6}$ reszty śliwek. Która z nich zjadła najwięcej śliwek? Ile śliwek zostało?
- 14 Harcerze: Zbyszek, Tomek i Jurek skończyli wartę i poszli do stołówki coś zjeść. Druhna Ewa pobiegła po pierogi dla nich, lecz zanim wróciła, chłopcy zdążyli zasnąć. Druhna Ewa przyniosła 27 pierogów, postawiła miskę na stole i wyszła. Najpierw obudził się Zbyszek, zjadł $\frac{1}{3}$ pierogów, które były w misce, i poszedł spać. Następnie obudził się Tomek, zjadł $\frac{1}{3}$ pierogów, które zobaczył w misce, i poszedł spać. Ostatni obudził się Jurek, odliczył uczciwie $\frac{1}{3}$ pierogów, które były w misce, zjadł je i też poszedł spać. Ile pierogów zostało? Jak należy sprawiedliwie podzielić między chłopców pozostałe pierogi?

- 15 Odczytaj liczby oznaczone na osi literami.



- 16** Mama postawiła na stole torebkę cukierków dla Joli, Zosi i Krysi. Przyszła Jola, odliczyła $\frac{1}{3}$ cukierków z torebki, zabrała je i wyszła. Potem przyszła Zosia, odliczyła $\frac{1}{3}$ pozostałych cukierków, zabrała je i też wyszła. Ostatnia przyszła Krysia, odliczyła $\frac{1}{3}$ cukierków z torebki i schowała do kieszeni. Przed wyjściem policzyła, że w torebce zostały 24 cukierki. Ile cukierków przyniosła mama?



Dla dociekliwych

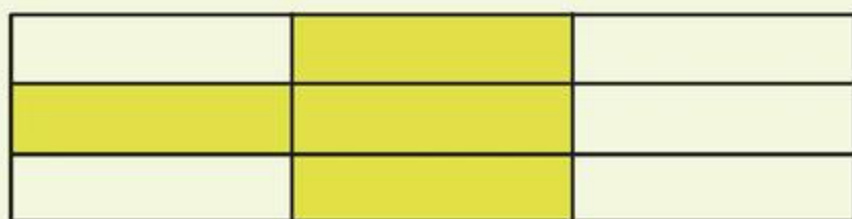
- 1** W koszu jest 40 jabłek. $\frac{1}{5}$ wszystkich jabłek to antonówki. Niestety, część jabłek się zepsuła i tylko $\frac{3}{5}$ wszystkich jabłek to jabłka zdrowe.
 - a) Ile antonówek jest w koszu?
 - b) Ile jest w koszu zdrowych jabłek? Ile jest jabłek zepsutych?
- 2** Dziewięć osób z Vb, czyli $\frac{1}{3}$ klasy, występowało na apelu. Ile osób jest w tej klasie?
- 3** $\frac{2}{5}$ wszystkich cukierków w torebce to cukierki czekoladowe. Jest ich 14. Ile jest wszystkich cukierków w tej torebce?
- 4** Jeśli obliczymy $\frac{3}{7}$ pewnej liczby, to otrzymamy 15. Jaka to liczba?



Czy już umiem?

- I** Jaką część prostokąta zamalowano? Jaka część pozostała niezamalowana?

a)



b)



- II** Zamień liczby mieszane na ułamki niewłaściwe, a ułamki niewłaściwe na liczby mieszane lub liczby naturalne.

$$1\frac{2}{3}, 7\frac{3}{11}, \frac{12}{5}, \frac{12}{3}$$

- III** Sok z sześciu dwulitrowych kartonów rozdzielono równo między pięciu zawodników. Ile litrów soku otrzymał każdy zawodnik?



Na dobry początek

Loteryjka

Podzielcie się na grupy liczące od 2 do 4 osób. Przygotujcie karty do gry: wytnijcie ze sztywnego papieru 24 kartoniki. Zapiszcie na nich kolorami ułamki.

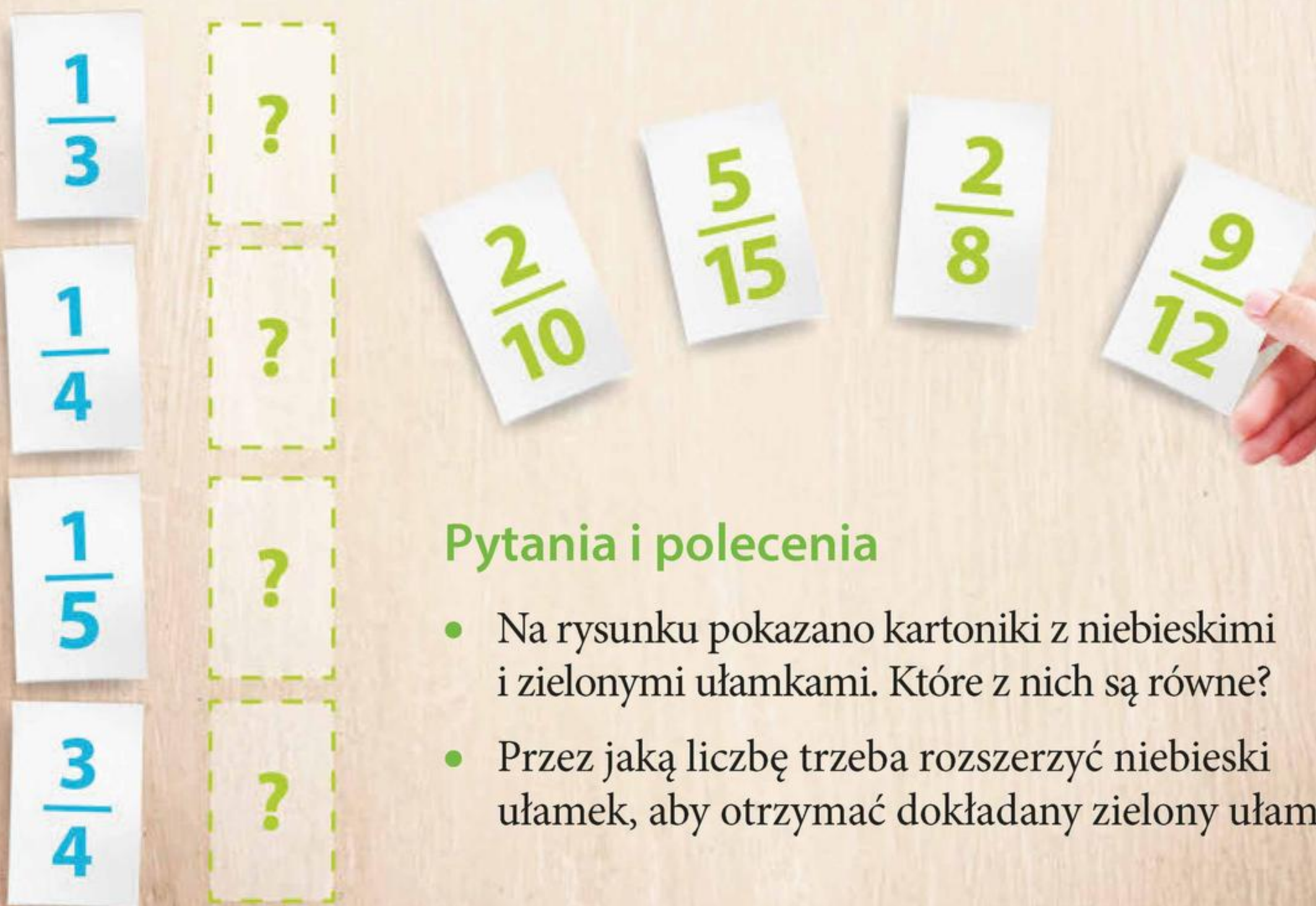
Na niebiesko: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$.

Na zielono: $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{4}{20}$, $\frac{5}{15}$, $\frac{5}{20}$, $\frac{5}{25}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{15}{20}$.

Na czarno: $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$.

Karty z czarnymi ułamkami schowajcie od razu do koperty – będą potrzebne później.

- ▶ Wyłóżcie na stół karty z niebieskimi ułamkami.
- ▶ Potasujcie i rozdajcie każdemu po cztery karty z zielonymi ułamkami.
- ▶ Każdy uczestnik zabawy kolejno:
 - wybiera jedną z otrzymanych kart,
 - szuka wśród kart leżących na stole ułamka równego ułamkowi zapisanemu na wybranej przez siebie karcie,
 - układa swoją kartę obok równego niebieskiego ułamka,
 - mówi, przez jaką liczbę trzeba rozszerzyć niebieski ułamek, aby otrzymać ułamek z dokładanej karty.

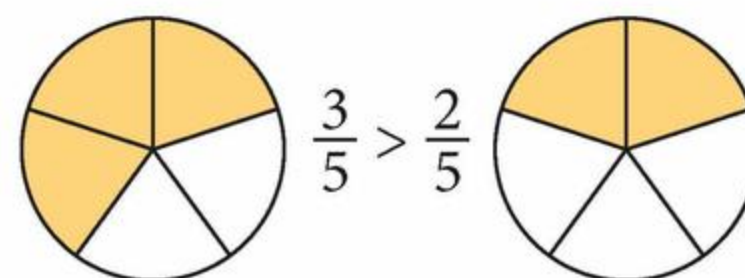


Pytania i polecenia

- Na rysunku pokazano kartoniki z niebieskimi i zielonymi ułamkami. Które z nich są równe?
- Przez jaką liczbę trzeba rozszerzyć niebieski ułamek, aby otrzymać dokładany zielony ułamek?

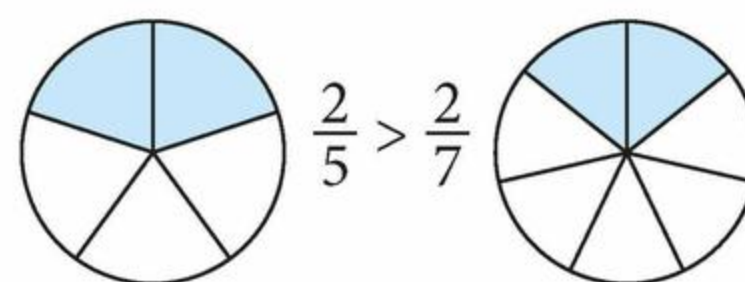
Porównywanie ułamków

Z dwóch ułamków o takich samych mianownikach większy jest ten, który ma większy licznik.



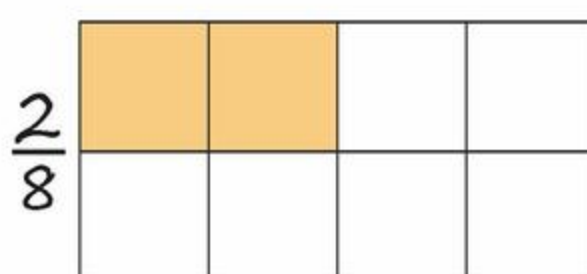
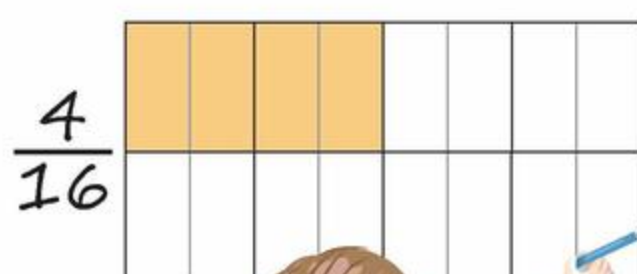
Jeśli dzielimy na więcej części, to te części są mniejsze.

Z dwóch ułamków o takich samych licznikach większy jest ten, który ma mniejszy mianownik.



Skracanie i rozszerzanie ułamków

Tę samą część całości można opisać w różny sposób.



$$\frac{4}{16} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Ułamki można skracać, np.:

$$\frac{10}{25} = \frac{10:5}{25:5} = \frac{2}{5} \text{ (licznik i mianownik podzielono przez 5)}$$

lub rozszerzać, np.:

$$\frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{12}{100} \text{ (licznik i mianownik pomnożono przez 4)}$$

Doprowadzanie ułamka do najprostszej postaci

Poniżej zapisano tę samą liczbę w różnych postaciach.

$$\frac{170}{50} \quad 3\frac{2}{5} \quad \frac{17}{5} \quad \frac{34}{10} \quad 3\frac{20}{50}$$

Przyjmujemy, że $3\frac{2}{5}$ to **najprostsza postać** tej liczby. Są w niej wyłączone całości, a ułamka nie da się skrócić.

Dobra rada

Przy doprowadzaniu ułamka do postaci nieskracalnej bardzo przydają się cechy podzielności – pozwalają łatwo sprawdzić, czy ułamek można skrócić przez 2, 3, 4, 5, 9 lub 10, czy też nie.

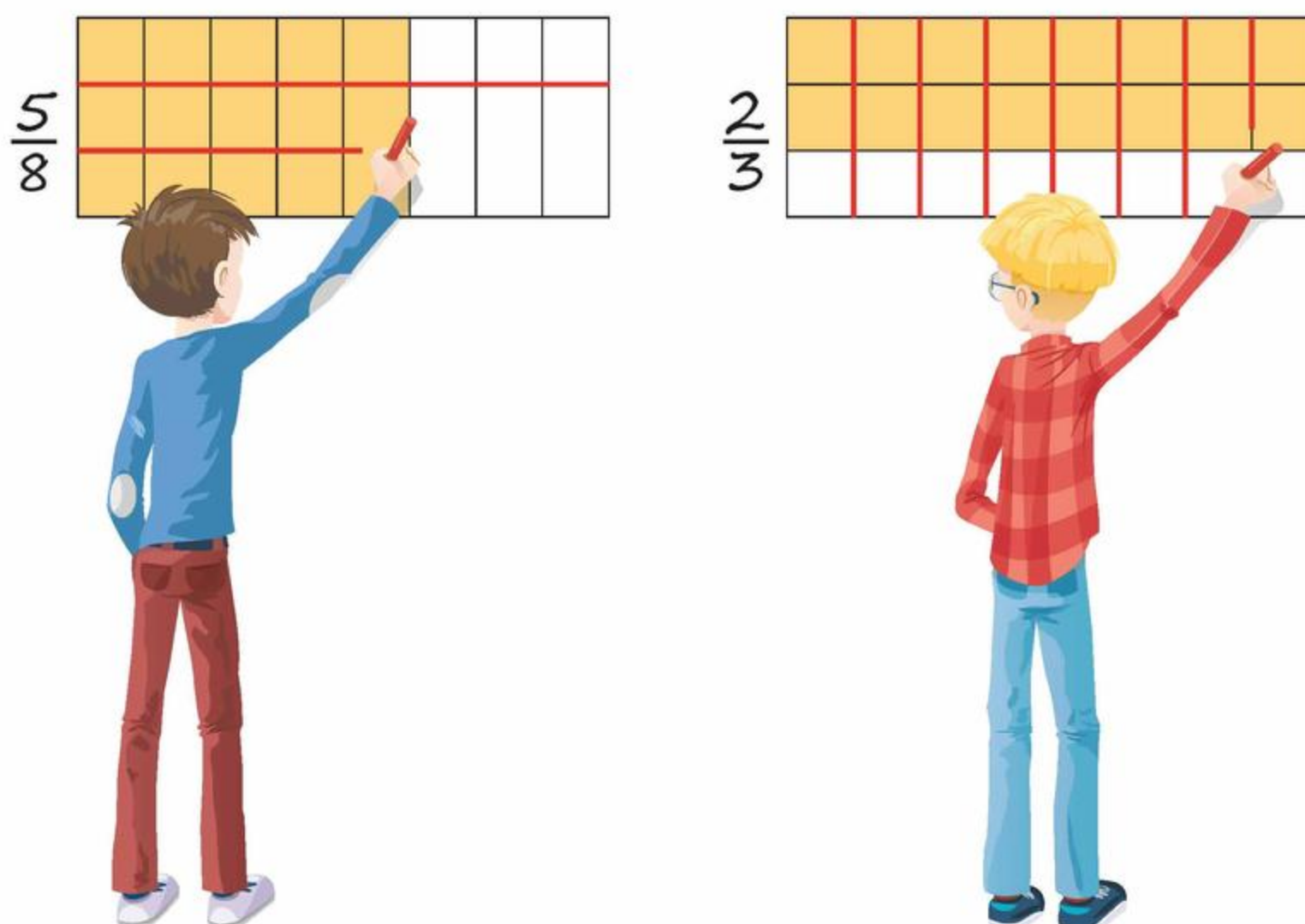
**Porównywanie ułamków o różnych mianownikach**

Rozszerzanie i skracanie ułamków może pomóc w ich porównaniu.

Przykład

Który ułamek jest większy: $\frac{5}{8}$ czy $\frac{2}{3}$?

Jeśli odpowiednio rozszerzymy każdy z tych ułamków, otrzymamy ułamki o jednakowych mianownikach i bez trudu odpowiemy na pytanie.



$$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{15}{24}$$

$$\frac{15}{24} < \frac{16}{24}$$

$$\text{czyli } \frac{5}{8} < \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{16}{24}$$

Aby porównać ułamki, **sprowadziliśmy je do wspólnego mianownika**.

Odp. Ułamek $\frac{2}{3}$ jest większy niż $\frac{5}{8}$.

Przykłady

poziom A

Porównaj ułamki: $\frac{3}{5}$ i $\frac{7}{10}$.Ułamek $\frac{3}{5}$ można rozszerzyć tak, aby miał mianownik 10.

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$$

$$\frac{6}{10} < \frac{7}{10}, \text{ a więc } \frac{3}{5} < \frac{7}{10}$$

poziom B

Porównaj ułamki: $\frac{3}{15}$ i $\frac{2}{5}$.Ułamek $\frac{3}{15}$ można skrócić tak, aby miał mianownik 5.

$$\frac{3}{15} = \frac{3:3}{15:3} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5} < \frac{2}{5}, \text{ a więc } \frac{3}{15} < \frac{2}{5}$$

poziom C

Porównaj ułamki: $\frac{2}{7}$ i $\frac{3}{8}$.Jeden z ułamków ma mianownik 7, a drugi 8. Każdy z nich można rozszerzyć tak, aby miał mianownik $7 \cdot 8 = 56$.Ułamek $\frac{2}{7}$ rozszerzamy przez 8 (czyli mianownik drugiego ułamka).

$$\frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 8}{7 \cdot 8} = \frac{16}{56}$$

Ułamek $\frac{3}{8}$ rozszerzamy przez 7 (czyli mianownik pierwszego ułamka).

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 7}{8 \cdot 7} = \frac{21}{56}$$

$$\frac{16}{56} < \frac{21}{56}, \text{ a więc } \frac{2}{7} < \frac{3}{8}$$

Taką metodę można zastosować przy szukaniu wspólnego mianownika dowolnych dwóch ułamków.

poziom D

Porównaj ułamki: $\frac{3}{10}$ i $\frac{4}{15}$.Wspólnym mianownikiem na pewno może być liczba $10 \cdot 15 = 150$.

Lepiej jednak poszukać mniejszej liczby.

 $10 \cdot 3 = 30$ i $15 \cdot 2 = 30$, więc tą liczbą może być 30.

$$\frac{3}{10} = \frac{9}{30}, \quad \frac{4}{15} = \frac{8}{30}$$

$$\frac{9}{30} > \frac{8}{30}, \text{ więc } \frac{3}{10} > \frac{4}{15}$$

Dobra rada

Jak można szukać wspólnego mianownika dwóch ułamków? Jednym ze sposobów jest sprawdzanie kolejnych wielokrotności większego z mianowników.

Znajdź wspólny mianownik dla ułamków $\frac{3}{8}$ i $\frac{5}{6}$

$8 \cdot 1 = 8$
– nie dzieli się przez 6
 $8 \cdot 2 = 16$
– nie dzieli się przez 6
 $8 \cdot 3 = 24$ – JEST!

**Zadania**

1 Wykonaj polecenia. ► Jeśli bezbłędnie rozwiążesz pierwsze trzy przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom. Jeśli nie – rozwiąż wszystkie przykłady z danego poziomu i dopiero wtedy przejdź na następny.

poziom A

Przepisz podane liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

a) $\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{13}{9}$

c) $\frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{3}{7}$

e) $\frac{4}{7}, \frac{8}{7}, \frac{1}{7}$

g) $\frac{10}{3}, 4, 3\frac{3}{4}$

b) $4\frac{1}{7}, 2\frac{1}{4}, \frac{33}{7}$

d) $\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{2}{6}$

f) $2\frac{5}{9}, 3\frac{1}{5}, 1\frac{12}{15}$

h) $\frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}$

poziom B

Jaką liczbę należy wstawić w miejsce gwiazdki, by otrzymana równość była prawdziwa?

a) $\frac{3}{7} = \frac{*}{35}$

c) $\frac{100}{30} = 3\frac{1}{*}$

e) $\frac{1}{2} = \frac{*}{10}$

g) $\frac{15}{27} = \frac{5}{*}$

b) $\frac{28}{48} = \frac{7}{*}$

d) $\frac{1}{2} = \frac{3}{*}$

f) $\frac{3}{5} = \frac{6}{*}$

h) $\frac{3500}{4000} = \frac{*}{40}$

poziom C

Doprowadź ułamek do postaci nieskracalnej.

a) $\frac{75}{100}$

c) $\frac{27}{81}$

e) $\frac{3}{12}$

g) $\frac{8}{10}$

b) $\frac{170}{340}$

d) $\frac{4}{8}$

f) $\frac{5}{10}$

h) $\frac{40}{100}$

poziom D

Doprowadź ułamek do najprostszej postaci.

a) $\frac{50}{15}$

c) $\frac{5400}{1000}$

e) $\frac{25}{10}$

g) $\frac{40}{17}$

b) $\frac{132}{51}$

d) $\frac{6}{4}$

f) $\frac{44}{11}$

h) $\frac{66}{9}$

MISTRZ

a) Czy istnieje ułamek:

- większy od $\frac{7}{101}$ i mniejszy od $\frac{8}{101}$,
- większy od $\frac{3}{21}$ i mniejszy od $\frac{3}{20}$,
- większy od $\frac{3}{6}$ i mniejszy od $\frac{134}{268}$?

Jeśli tak – zapisz taki ułamek, jeśli nie – uzasadnij dlaczego.

b) Uporządkuj ułamki od najmniejszego do największego – przepisuj je kolejno, wstawiając pomiędzy nie znak $<$ lub $=$.

$$\frac{1}{3}, 1\frac{1}{123}, 2\frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{5}{15}, \frac{7}{15}, \frac{9}{15}, \frac{12}{36}, \frac{18}{24}, \frac{20}{24}, \frac{39}{15}, \frac{123}{123}$$



2 Wykonaj polecenia. ► Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

Rozszerz jeden z ułamków tak, aby otrzymać ułamki o jednakowych mianownikach. Porównaj ułamki.

- | | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| a) $\frac{4}{7}, \frac{5}{14}$ | c) $\frac{5}{6}, \frac{11}{24}$ | e) $\frac{4}{9}, \frac{2}{3}$ | g) $2\frac{1}{4}, 2\frac{3}{8}$ |
| b) $5\frac{2}{3}, 5\frac{3}{6}$ | d) $\frac{2}{3}, \frac{8}{15}$ | f) $\frac{7}{18}, \frac{2}{6}$ | h) $\frac{4}{9}, \frac{2}{3}$ |

poziom B

Skróć jeden z ułamków tak, aby otrzymać ułamki o jednakowych mianownikach. Porównaj ułamki.

- | | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| a) $\frac{4}{5}, \frac{9}{15}$ | c) $\frac{15}{27}, \frac{4}{9}$ | e) $\frac{5}{12}, \frac{9}{36}$ | g) $\frac{12}{14}, \frac{4}{7}$ |
| b) $\frac{8}{26}, \frac{5}{13}$ | d) $\frac{1}{2}, \frac{5}{10}$ | f) $\frac{6}{8}, \frac{1}{4}$ | h) $\frac{12}{21}, \frac{5}{7}$ |

poziom C

Sprowadź ułamki do wspólnego mianownika i je porównaj.

- | | | | |
|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| a) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ | c) $\frac{4}{7}, \frac{7}{9}$ | e) $\frac{5}{6}, \frac{9}{11}$ | g) $\frac{5}{7}, \frac{2}{3}$ |
| b) $\frac{3}{5}, \frac{4}{7}$ | d) $\frac{2}{9}, \frac{7}{10}$ | f) $\frac{3}{5}, \frac{3}{4}$ | h) $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}$ |

poziom D

Sprowadź ułamki do wspólnego mianownika. Postaraj się, aby ten mianownik był jak najmniejszy. Porównaj ułamki.

- | | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| a) $\frac{5}{6}, \frac{4}{9}$ | c) $\frac{5}{8}, \frac{7}{12}$ | e) $\frac{1}{20}, \frac{2}{30}$ | g) $\frac{7}{9}, \frac{5}{6}$ |
| b) $\frac{3}{4}, \frac{7}{10}$ | d) $\frac{5}{9}, \frac{7}{15}$ | f) $\frac{5}{6}, \frac{7}{8}$ | h) $\frac{1}{4}, \frac{2}{10}$ |

MISTRZ

Sprowadź ułamki do najmniejszego wspólnego mianownika i je porównaj.

a) $\frac{5}{8}, \frac{11}{12}, \frac{2}{3}$

b) $\frac{4}{21}, \frac{9}{14}, \frac{2}{6}$

c) $\frac{5}{24}, \frac{7}{36}, \frac{3}{8}$

- **3** Doprowadź ułamek do postaci nieskracalnej.

a) $\frac{5}{10}$

c) $\frac{60}{100}$

e) $\frac{125}{1000}$

b) $\frac{25}{100}$

d) $\frac{8}{100}$

f) $\frac{150}{1000}$

- **4** Rozszerz ułamek tak, aby miał mianownik 10 lub 100.

a) $\frac{4}{5}$

d) $\frac{3}{50}$

g) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{1}{2}$

e) $\frac{1}{25}$

h) $\frac{3}{25}$

c) $\frac{1}{20}$

f) $\frac{1}{4}$

i) $\frac{7}{20}$

- **5** Zapisz odpowiedzi w postaci ułamków. Pamiętaj o ich skróceniu! Jaka część narysowanych kwiatków to kwiatki:

- a) żółte,
- b) czerwone,
- c) niebieskie,
- d) trójpłatkowe,
- e) w kolorze innym niż niebieski?



- **6** Podzielcie się na grupy liczące od 2 do 4 osób. Każda grupa przygotowuje 24 karty z ułamkami z gry „Loteryjka” ze strony 151. Losujecie dwie karty z ułamkami i kładzicie je na stole. Każdy z graczy zapisuje na kartce wspólny mianownik, do którego można te ułamki sprowadzić. Kto zrobił to poprawnie, otrzymuje punkt. Jeśli zapisaliście różne wspólne mianowniki, to dodatkowy punkt otrzymują ci, którzy wskazali najmniejszy.
- **7** Zagrajcie w parach. Potrzebne wam będą karty z ułamkami z gry „Loteryjka” ze strony 151. Każdy z was tasuje karty swojej loteryjki i wyklada po jednej z nich. Ten, kto wyłożył kartę z większym ułamkiem, uzasadnia, że jego ułamek jest większy, i zabiera obie karty. Jeśli wylosowaliście karty z równymi ułamkami, to następuje dogrywka – losujecie jeszcze raz po jednej karcie i zwycięzca zabiera wszystkie cztery karty.

Uwaga. Jeśli macie dużo czasu, możecie grać według zasad gry w wojnę.

- **8** Sprawdź na przedstawionej poniżej tabliczce ułamków, które ułamki o mianowniku 10 można zapisać w prostszej postaci. Zapisz odpowiednie równości.

Na przykład: $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

- **9** Porównaj pary ułamków, sprowadzając je do wspólnego mianownika. Sprawdź odpowiedzi na tabliczce ułamków.

a) $\frac{2}{3}$ i $\frac{5}{8}$

c) $\frac{4}{5}$ i $\frac{5}{8}$

e) $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{7}$

b) $\frac{1}{5}$ i $\frac{2}{9}$

d) $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{5}$

f) $\frac{2}{3}$ i $\frac{5}{7}$

- **10** Zeus Gromowładny zirytował się na bogów olimpijskich i zaczął ciskać w nich piorunami. $\frac{1}{3}$ gromów skierował na Posejdona, $\frac{2}{5}$ na Aresa, a $\frac{1}{9}$ na Hermesa. Resztę piorunów zostawił sobie na później. Który z bogów najbardziej zdenerwował władcę Olimpu?

Postacie z mitologii greckiej

Zeus (w mitologii rzymskiej: Jowisz) – władca bogów, najważniejszy na Olimpie

Posejdon (w mitologii rzymskiej: Neptun) – władca mórz i oceanów

Ares (w mitologii rzymskiej: Mars) – bóg wojny

Hermes (w mitologii rzymskiej: Merkury) – posłaniec bogów, opiekun podróżnych i kupców



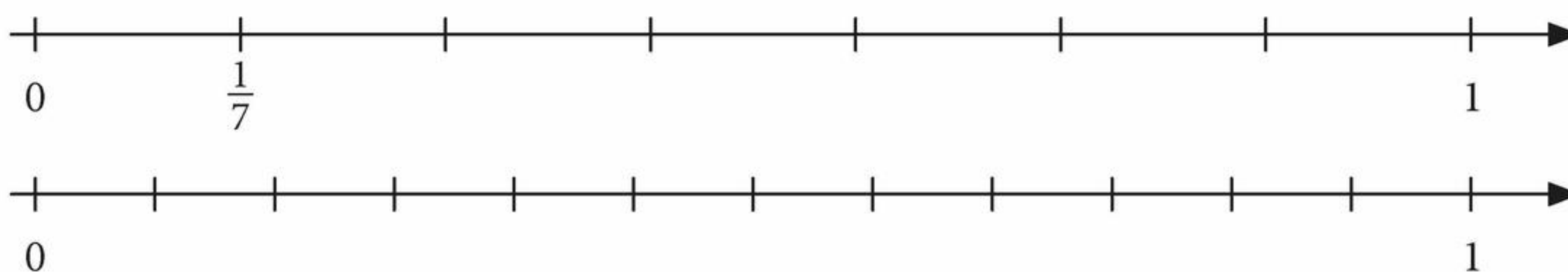
- ... 11 Gracie w 3-osobowych grupach. Będą wam potrzebne karty z zielonymi i niebieskimi ułamkami z gry „Loteryjka” ze strony 151. Tasujecie je i rozdajecie. Celem gry jest układanie na stole serii równych ułamków.

Uczestnicy po kolei wykonują ruch. Mogą:

- wyłożyć jedną ze swoich kart na stół,
- dołożyć swoją kartę do karty leżącej na stole, aby stworzyć serię,
- dołożyć swoją kartę do serii leżącej na stole,
- połączyć w serię leżące na stole karty lub serie.

Dokładając kartę lub łącząc serie, trzeba uzasadnić swój ruch. Za właściwe uzasadnienie gracz otrzymuje punkt. Gra kończy się, gdy wszystkie karty leżą na stole, tworząc serie. Wygrywa ten, kto zdobył najwięcej punktów.

- ... 12 Przyjrzyj się osiom i na ich podstawie porównaj podane ułamki.



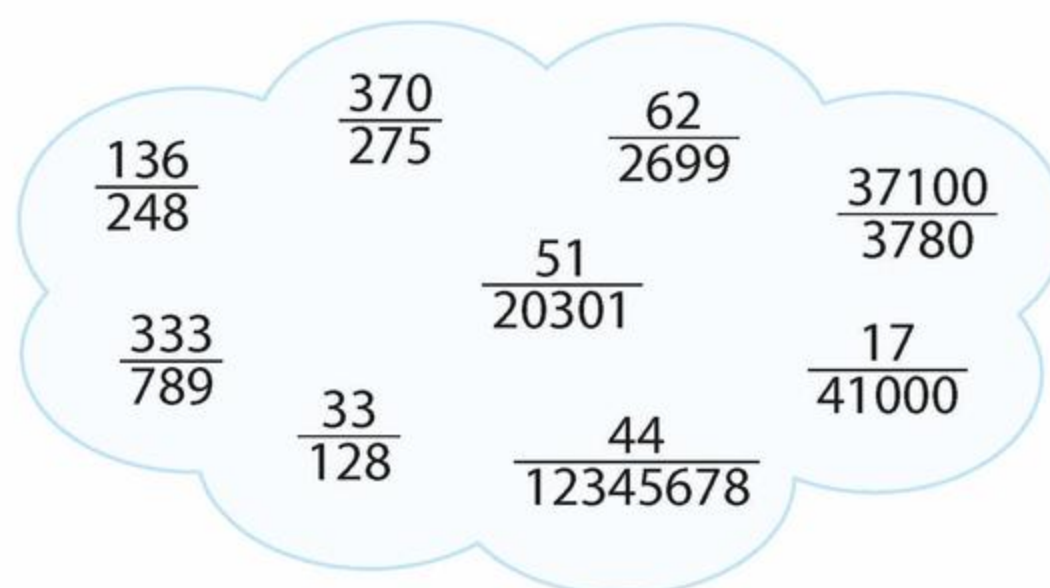
a) $\frac{2}{7}$ i $\frac{8}{12}$

b) $\frac{2}{7}$ i $\frac{4}{12}$

c) $\frac{6}{7}$ i $\frac{11}{12}$

d) $\frac{3}{7}$ i $\frac{5}{12}$

- ... 13 Wśród ułamków w chmurce tylko trzy są nieskracalne. Znajdź je. Przepisz pozostałe ułamki i przy każdym z nich podaj liczbę, przez którą można go skrócić. Skorzystaj z cech podzielności.



- ... 14 Zapisz ułamki w kolejności od najmniejszego do największego.

$$\frac{999}{998}, \frac{998}{997}, \frac{997}{998}, \frac{998}{999}$$

- 🏆 15 a) Przyjrzyj się ułamkowi $\frac{30}{45}$. Ile wynosi suma licznika i mianownika w tym ułamku? Jakiemu nieskracalnemu ułamkowi jest on równy?
- b) Znajdź ułamek równy ułamkowi $\frac{3}{4}$, ale taki, w którym suma licznika i mianownika wynosi 77.
- c) Suma licznika i mianownika w pewnym ułamku wynosi 34. Czy ten ułamek może być równy ułamkowi $\frac{3}{4}$?



Dla dociekliwych

Niektóre ułamki można porównywać sprytnie.

Która liczba jest większa:

- $\frac{13}{15}$ czy $\frac{12}{17}$?

W pierwszym ułamku jest więcej części i są one większe, więc $\frac{13}{15} > \frac{12}{17}$.

- $\frac{17}{16}$ czy $\frac{135}{136}$?

$\frac{17}{16}$ to więcej niż 1, $\frac{135}{136}$ to mniej niż 1, więc $\frac{17}{16} > \frac{135}{136}$.

- $\frac{4}{9}$ czy $\frac{11}{21}$?

$\frac{4}{9}$ to mniej niż pół, a $\frac{11}{21}$ to więcej niż pół, więc $\frac{4}{9} < \frac{11}{21}$.

- $\frac{7}{8}$ czy $\frac{9}{10}$?

W $\frac{7}{8}$ do całości brakuje $\frac{1}{8}$, a w $\frac{9}{10}$ do całości brakuje $\frac{1}{10}$, czyli mniej, więc $\frac{7}{8} < \frac{9}{10}$.

1 Porównaj ułamki.

a) $\frac{3}{7}$ i $\frac{12}{23}$

d) $\frac{5}{7}$ i $\frac{9}{11}$

g) $\frac{135}{134}$ i $\frac{134}{135}$

b) $\frac{3}{7}$ i $\frac{2}{11}$

e) $\frac{22}{23}$ i $\frac{122}{123}$

h) $\frac{56}{111}$ i $\frac{732}{1480}$

c) $\frac{4}{3}$ i $\frac{111}{112}$

f) $\frac{15}{17}$ i $\frac{17}{19}$

i) $\frac{19}{20}$ i $\frac{20}{21}$



Czy już umiem?

I Doprowadź ułamek do najprostszej postaci.

a) $\frac{12}{9}$

b) $\frac{8}{10}$

c) $\frac{123}{30}$

II Porównaj liczby.

a) $4\frac{3}{7}$ i $8\frac{1}{3}$

b) $\frac{2}{5}$ i $\frac{2}{7}$

c) $\frac{4}{9}$ i $\frac{11}{20}$

III Wśród poniższych ułamków tylko jeden jest nieskracalny. Znajdź go. Zapisz liczby, przez które można skrócić pozostałe ułamki.

$$\frac{305}{590}, \frac{176}{334}, \frac{321}{963}, \frac{143}{343}, \frac{111}{888}$$

Dodawanie i odejmowanie ułamków o tych samych mianownikach



Na dobry początek

O ile się różnią

Przygotujcie dwa pionki. Każda osoba wybiera sobie jedną liczbę spośród liczb widocznych na osi i stawia pionek w miejscu odpowiadającym tej liczbie.

- Pierwszy gracz odejmuje mniejszą ze wskazanych liczb od większej, czyli zapisuje na kartce:

WIĘKSZA LICZBA – MNIEJSZA LICZBA =

i wpisuje wynik w postaci liczby mieszanej.

- Drugi gracz przeskakuje pionkiem kolejne pola, aż znajdzie się na miejscu pierwszego gracza, obliczając jednocześnie, o ile przesuwa ten pionek. W ten sposób sprawdza poprawność wyniku.
- Następnie powtarzacie kolejkę, zamieniając się rolami.

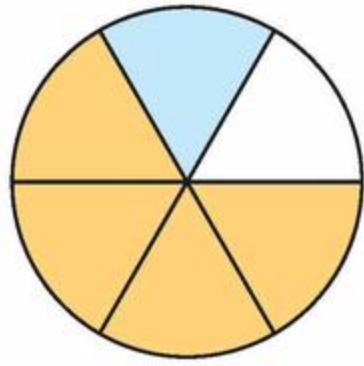


Pytania i polecenia

Odszukaj na osi $3\frac{3}{5}$ i $5\frac{2}{5}$. Od większej z tych dwóch liczb odejmij mniejszą, a następnie sprawdź wynik na osi, przeskakując pionkiem przez kolejne pola.

III. Ułamki zwykłe

Jeśli ułamki mają takie same mianowniki, to łatwo obliczyć ich sumę lub różnicę. Obliczamy sumę lub różnicę liczników, a mianownik pozostawiamy bez zmian.



$$\frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$



$$\frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{4}{10}$$

Przykłady

Oblicz.

poziom A

$$2\frac{5}{9} + \frac{2}{9} = 2\frac{7}{9} \quad (\text{bo } 5 + 2 = 7, \text{ a mianownik zostaje bez zmian})$$

$$1\frac{12}{17} - \frac{8}{17} = 1\frac{4}{17} \quad (\text{bo } 12 - 8 = 4, \text{ a mianownik zostaje bez zmian})$$

poziom B

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{8}{8} = 1 \quad (\text{wynik doprowadzamy do najprostszej postaci})$$

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = 1\frac{2}{4} = 1\frac{1}{2}$$

$$\frac{13}{15} - \frac{8}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

poziom C

$$2\frac{5}{8} + 4\frac{5}{8} = 6\frac{10}{8} = 7\frac{2}{8} = 7\frac{1}{4} \quad (\text{osobno dodajemy całości i ułamki})$$

$$3\frac{7}{12} - 1\frac{5}{12} = 2\frac{2}{12} = 2\frac{1}{6} \quad (\text{osobno odejmujemy całości i ułamki})$$

poziom D

$$1\frac{2}{5} + 3\frac{4}{5} + 5\frac{1}{5} = 9\frac{7}{5} = 10\frac{2}{5}$$

$$3\frac{5}{7} + \left(4\frac{3}{7} - \frac{1}{7}\right) = 3\frac{5}{7} + 4\frac{2}{7} = 7\frac{7}{7} = 8 \quad (\text{najpierw wykonujemy działanie w nawiasie})$$

poziom E

$$8\frac{2}{7} - 2\frac{5}{7} = ?$$

Nie możemy odjąć osobno całości i osobno ułamków, bo od $\frac{2}{7}$ nie można odjąć $\frac{5}{7}$.

Sposób 1

Zamieniamy jedną całość na ułamek.

$$8\frac{2}{7} - 2\frac{5}{7} = 7\frac{9}{7} - 2\frac{5}{7} = 5\frac{4}{7}$$

Sposób 2

Odejmujemy po kawałku.

$$8\frac{2}{7} - 2\frac{5}{7} = 6\frac{2}{7} - \frac{5}{7} = 6 - \frac{3}{7} = 5\frac{4}{7}$$

odejmujemy 2

odejmujemy $\frac{2}{7}$

Sposób 3

Obliczamy, o ile różni się $2\frac{5}{7}$ od $8\frac{2}{7}$, czyli ile trzeba dodać do $2\frac{5}{7}$, żeby otrzymać $8\frac{2}{7}$. Popatrz na schemat:

$$2\frac{5}{7} \xrightarrow{+\frac{2}{7}} 3 \xrightarrow{+5} 8 \xrightarrow{+\frac{2}{7}} 8\frac{2}{7}$$

$$8\frac{2}{7} - 2\frac{5}{7} = \frac{2}{7} + 5 + \frac{2}{7} = 5\frac{4}{7}$$

Dobra rada

W odejmowaniu łatwo się pomylić, więc warto je sprawdzać za pomocą dodawania.

**Zadania**

- 1** Wykonaj polecenia. ► Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

Oblicz.

a) $\frac{3}{8} + 5\frac{2}{8}$

c) $4\frac{3}{7} + \frac{3}{7}$

e) $\frac{1}{5} + 3\frac{1}{5}$

g) $\frac{2}{13} + 1\frac{8}{13}$

b) $2\frac{4}{9} - \frac{2}{9}$

d) $6\frac{5}{9} - \frac{1}{9}$

f) $8\frac{6}{11} - \frac{4}{11}$

h) $3\frac{5}{7} - \frac{1}{7}$

poziom B

Oblicz. Doprowadź wynik do najprostszej postaci.

a) $\frac{7}{9} - \frac{1}{9}$

c) $\frac{7}{12} + \frac{8}{12}$

e) $\frac{4}{9} + \frac{8}{9}$

g) $\frac{5}{6} - \frac{3}{6}$

b) $\frac{5}{8} + \frac{3}{8}$

d) $\frac{5}{8} - \frac{1}{8}$

f) $\frac{11}{15} + \frac{7}{15}$

h) $\frac{17}{20} + \frac{17}{20}$

poziom C

Oblicz. Doprowadź wynik do najprostszej postaci.

a) $5\frac{3}{7} + 2\frac{6}{7}$

c) $6\frac{2}{5} + 5\frac{3}{5}$

e) $4\frac{2}{5} + 3\frac{4}{5}$

g) $3\frac{5}{6} + 2\frac{5}{6}$

b) $3\frac{5}{8} - 1\frac{1}{8}$

d) $7\frac{5}{6} - 3\frac{1}{6}$

f) $7\frac{3}{4} - 2\frac{1}{4}$

h) $11\frac{4}{9} - 5\frac{1}{9}$

poziom D

Oblicz. Doprowadź wynik do najprostszej postaci.

a) $5\frac{2}{7} + 1\frac{3}{7} - \frac{1}{7}$

c) $2\frac{2}{3} - (4\frac{2}{3} - 3\frac{1}{3})$

e) $3\frac{1}{5} + 5\frac{3}{5} - 2\frac{2}{5}$

b) $4\frac{5}{9} - 2\frac{4}{9} + 3\frac{2}{9}$

d) $7\frac{8}{9} - (1\frac{4}{9} + 2\frac{3}{9})$

f) $11\frac{5}{7} - 3\frac{2}{7} - 4\frac{3}{7}$

poziom E

Oblicz i sprawdź wynik.

a) $5 - \frac{4}{7}$

d) $4\frac{1}{4} - 1\frac{3}{4}$

g) $3\frac{2}{9} - 1\frac{5}{9}$

b) $3\frac{2}{5} - 1\frac{4}{5}$

e) $6 - \frac{2}{3}$

h) $7\frac{3}{14} - 3\frac{5}{14}$

c) $7\frac{4}{11} - 2\frac{9}{11}$

f) $5\frac{3}{8} - 2\frac{5}{8}$

i) $5 - \frac{5}{9}$

MISTRZ

Oblicz.

a) $14\frac{3}{5} - (2\frac{4}{5} + 2\frac{4}{5} + 3\frac{1}{5})$

c) $138\frac{1}{9} - 135\frac{4}{9} + 127\frac{2}{3} - 117\frac{1}{3} + 3\frac{2}{3}$

b) $3\frac{2}{5} + 5\frac{1}{7} + 2\frac{2}{3} + 4\frac{1}{3} + 5\frac{3}{5}$

d) $18\frac{7}{11} + 6\frac{1}{5} + 17\frac{6}{11} + 19\frac{4}{5} - 13\frac{2}{11}$

- **2** Przygotujcie kartoniki z liczbami od 1 do 9 oraz karty z niebieskimi ułamkami z zabawy „Loteryjka” ze strony 151. Pierwsza osoba wyklada kartonik z liczbą naturalną, a druga osoba – kartonik z ułamkiem. Teraz pierwsza osoba oblicza różnicę: liczba naturalna minus ułamek. Potem zamieniacie się rolami. Za każdy poprawnie obliczony wynik gracz otrzymuje $\frac{1}{5}$ punktu. Gra kończy się, gdy jeden z graczy zdobędzie cały punkt.
- **3** Mama kupiła śliwki, umyła je i włożyła do miski. Jacek zjadł $\frac{2}{9}$ wszystkich śliwek, a Kasia i Bartek po $\frac{1}{9}$.
 - a) Jaka część śliwek została zjedzona?
 - b) Jaka część śliwek pozostała w misce?
 - c) Kto zjadł więcej śliwek: Jacek czy Kasia z Bartkiem?
- **4** Zapisz siedem różnych przykładów dodawania, którego wynikiem jest $2\frac{1}{7}$.
- **5** Uczniowie klasy Vb umówili się, że na Dzień Nauczyciela własnoręcznie przygotowują upominki. Wielu z nich chciało zrobić kwiaty. $\frac{1}{7}$ klasy zdecydowało się na kwiaty wykonane techniką origami, tyle samo osób – na kwiaty rysowane lub malowane, $\frac{2}{7}$ klasy przygotowało kwiaty z bibułki. Pozostali mieli inne propozycje.
 - a) Jaka część klasy wymyśliła inne podarunki?
 - b) Czy w tej klasie mogło być 20 uczniów? A czy mogło ich być 28?



- **6** Oblicz sprytnie. Skorzystaj z tego, że w dodawaniu wolno zmieniać kolejność składników.

a) $3\frac{2}{7} + 1\frac{1}{3} + 2\frac{5}{7}$ b) $5\frac{4}{9} + 2\frac{2}{3} + 5\frac{1}{3}$

- **7** Na Olimpie stała amfora z nektarem – napojem bogów. Było w niej $10\frac{4}{5}$ dikotylna nektaru. Podeszła do niej spragniona Atena i wypila $1\frac{2}{5}$ dikotylna nektaru. Następnie niezręczny Hefajstos wylał z amfory aż $3\frac{3}{5}$ dikotylna napoju. Hermes, przelatując w pośpiechu, wypił jeszcze $\frac{1}{5}$ dikotylna. Ile nektaru pozostało w amforze? Czy Hermes wypił więcej czy mniej niż szklankę nektaru?

dikotyln – grecka miara objętości płynów, około $\frac{1}{2}$ litra (2 szklanki)



- **8** Oblicz sprytnie kolejne sumy.

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \quad \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \quad \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7} + \frac{4}{7} + \frac{5}{7} + \frac{6}{7}$$

Zapisz następną podobną sumę. Oblicz ją. Jakie własności mają kolejne sumy? Czy potrafisz uzasadnić swoje obserwacje?

- **9** Maciek przejrzał swoje skarby i stwierdził, że ma 5 kawałków sznurka. Dwa z tych kawałków mają po 2 m, trzeci $7\frac{1}{3}$ m, czwarty $5\frac{1}{3}$ m, a ostatni – aż 10 m. Ile metrów sznurka ma Maciek?

- **10** Kasia wyszła z domu, $\frac{1}{20}$ godziny schodziła po schodach i przez $\frac{1}{5}$ godziny jechała rowerem na trening judo. Następnie $\frac{1}{6}$ godziny zajęło jej przebieranie się w szatni. Trening trwał dwa razy po $\frac{3}{4}$ godziny z ćwierćgodzinną przerwą pośrodku. Przebieranie po treningu zajęło Kasi $\frac{1}{4}$ godziny, a jazda rowerem do domu $\frac{1}{3}$ godziny. Na koniec $\frac{1}{4}$ godziny poświęciła łącznie na schowanie roweru do piwnicy i wejście po schodach.

Wykonaj kolejno poniższe polecenia.

- Oblicz, ile minut zajęły Kasi poszczególne czynności.
- Ile godzin zajęły one łącznie?
- Podaj wynik działania:

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

-  **11** Przepisz działania, zamieniając figury na odpowiednie cyfry. W każdym przykładzie jednakowe figury oznaczają jednakowe cyfry, różne figury – różne cyfry. Wynik zapisano w najprostszej postaci.

a) $\frac{3}{\triangle} + \frac{\triangle}{3} + \frac{\square}{\triangle} = \square \frac{\square}{3}$

b) $5\frac{3}{\triangle} - 3\frac{5}{\triangle} + \frac{5}{\square} = 3$



Dla dociekliwych

1 Oblicz.

a) $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{10}{7}$

b) $\frac{1^1}{9} + \frac{1^2}{9} + \frac{1^3}{9} + \dots + \frac{1^{100}}{9}$

c) $\frac{1}{5} + \frac{4}{5} + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} + \frac{1}{7} + \frac{6}{7} + \dots + \frac{1}{20} + \frac{19}{20}$

d) $\left(\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \dots + \frac{6}{7}\right) : \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{8}{9} + \frac{1}{11} + \frac{2}{11} + \dots + \frac{10}{11}\right)$

e) $\frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \dots + \frac{4}{5}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}$

2 Oblicz sprytnie.

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32}$

b) $\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{10}}$



Czy już umiem?

I Oblicz.

a) $4\frac{2}{5} + 5\frac{4}{5}$

b) $8 - 1\frac{4}{7}$

c) $3\frac{3}{4} - 1\frac{1}{4}$

II Oblicz i sprawdź wynik.

a) $3\frac{1}{5} - 2\frac{4}{5}$

b) $8\frac{2}{7} - 3\frac{5}{7}$

c) $7\frac{3}{11} - 5\frac{9}{11}$

- III** Jacek miał $6\frac{3}{5}$ m sznurka. Odciął kolejno: $1\frac{1}{5}$ m, $2\frac{3}{5}$ m i $1\frac{2}{5}$ m. Ile metrów sznurka mu zostało?

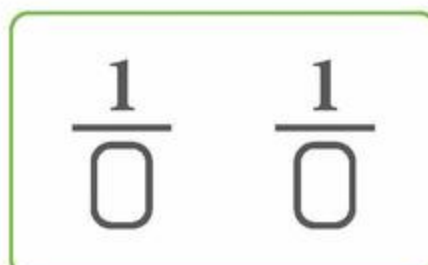
Dodawanie i odejmowanie ułamków o różnych mianownikach



Na dobry początek

Wspólny mianownik

Przygotujcie kartoniki z cyframi od 2 do 9 i planszę według wzoru.



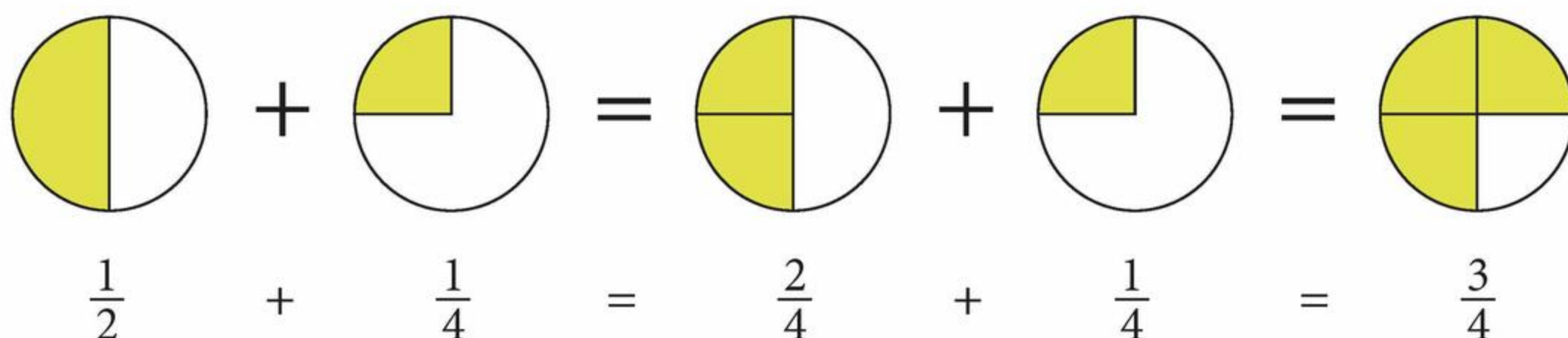
- ▶ Wylosujcie dwa kartoniki i ułóżcie je w pustych polach na planszy – w ten sposób otrzymacie dwa ułamki.
- ▶ Podaj liczbę, która może być wspólnym mianownikiem tych ułamków. Jeśli zrobisz to poprawnie, zdobywasz punkt. Druga osoba też może zdobyć punkt, jeśli poda mniejszy wspólny mianownik.
- ▶ Potem wylosujcie nowe kartoniki, utwórzcie nowe ułamki i zamieńcie się rolami. Wygrywa ten, kto zdobędzie więcej punktów.

Dodawanie i odejmowanie ułamków o jednakowych mianownikach jest proste – wystarczy dodać lub odjąć ich liczniki, a mianownik pozostawić bez zmiany. A co wtedy, gdy mamy dodawać lub odejmować ułamki o różnych mianownikach?



$\frac{1}{2}$ jabłka i $\frac{1}{4}$ jabłka to razem $\frac{3}{4}$ jabłka.

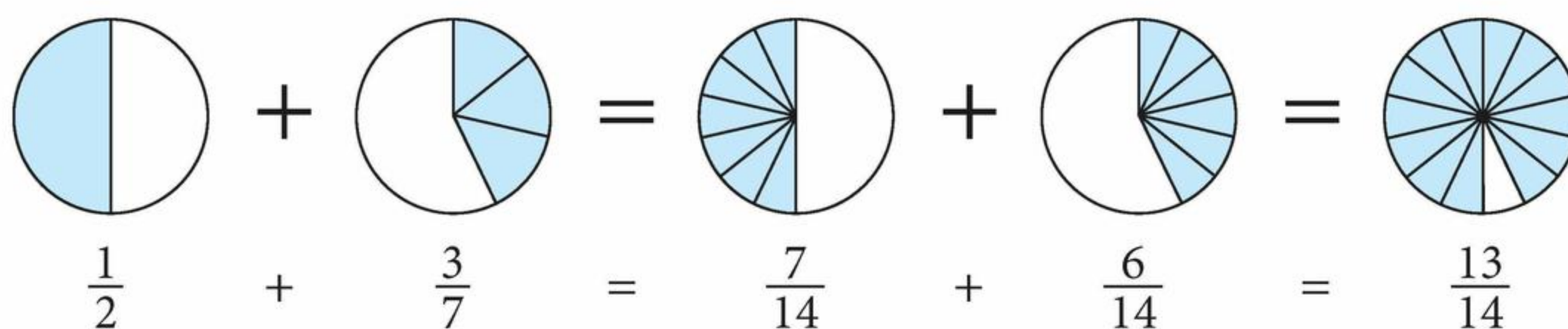
Jak dodawać takie ułamki?



Ułamki $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4}$ można sprowadzić do wspólnego mianownika, a potem już łatwo je dodać.

III. Ułamki zwykłe

Podobnie można dodać dowolne dwa ułamki, np.: $\frac{1}{2} + \frac{3}{7} = \frac{7}{14} + \frac{6}{14} = \frac{13}{14}$.



Tak samo postępujemy przy odejmowaniu, np.: $\frac{1}{2} - \frac{3}{7} = \frac{7}{14} - \frac{6}{14} = \frac{1}{14}$.

Dobra rada

Dopóki nie nabierzesz wprawy, możesz zapisywać, jak rozszerzasz ułamki.

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{7} = \frac{1 \cdot 7}{2 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{7}{14} + \frac{6}{14} = \frac{13}{14}$$

Aby dodać lub odjąć dwa ułamki o różnych mianownikach, musisz sprowadzić je do wspólnego mianownika.

Przykłady

Oblicz.

poziom A

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{3}{7} - \frac{4}{21} = \frac{9}{21} - \frac{4}{21} = \frac{5}{21}$$

rozszerzam przez 4

rozszerzam przez 3

poziom B

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{12}{15} - \frac{5}{15} = \frac{7}{15}$$

rozszerzam przez 3

rozszerzam przez 5

Dobra rada

Jeśli nie masz lepszego pomysłu, zawsze możesz rozszerzyć pierwszy ułamek przez mianownik drugiego, a drugi – przez mianownik pierwszego.

$$\frac{5}{7} + \frac{3}{4} = \frac{20}{28} + \frac{21}{28} = \frac{41}{28} = 1\frac{13}{28}$$

$$\frac{5}{7} + \frac{3}{4}$$

rozszerz przez 4 rozszerz przez 7

poziom C

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{7} = \frac{21}{35} + \frac{20}{35} = \frac{41}{35} = 1\frac{6}{35}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{5} = \frac{25}{30} - \frac{6}{30} = \frac{19}{30}$$

poziom D

$$\frac{2}{9} + \frac{5}{6} = \frac{4}{18} + \frac{15}{18} = \frac{19}{18} = 1\frac{1}{18}$$

Dobra rada

Zawsze szukaj jak najmniejszych wspólnych mianowników – będzie ci łatwiej liczyć!

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{12}$$

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{12} = \frac{60}{72} + \frac{42}{72} = \frac{102}{72} = 1\frac{30}{72} = 1\frac{15}{36} = 1\frac{5}{12}$$

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{12} = \frac{10}{12} + \frac{7}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$$



poziom E

$$2\frac{2}{3} + 3\frac{1}{2} = 2\frac{4}{6} + 3\frac{3}{6} = 5\frac{7}{6} = 6\frac{1}{6}$$

$$3\frac{3}{4} - 1\frac{1}{5} = 3\frac{15}{20} - 1\frac{4}{20} = 2\frac{11}{20}$$

**Zadania**

1 Wykonaj polecenia. ► Jeśli poprawnie rozwiązesz trzy kolejne przykłady z danego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

Rozszerz jeden z ułamków i wykonaj działanie. Pamiętaj, aby doprowadzić wynik do najprostszej postaci.

a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$

d) $\frac{7}{12} + \frac{3}{4}$

g) $\frac{2}{3} - \frac{5}{9}$

b) $\frac{3}{10} + \frac{2}{5}$

e) $\frac{2}{5} + \frac{7}{15}$

h) $\frac{2}{5} - \frac{7}{20}$

c) $\frac{4}{7} - \frac{1}{14}$

f) $\frac{3}{8} + \frac{3}{4}$

i) $\frac{4}{5} - \frac{3}{20}$

poziom B

Sprowadź ułamki do wspólnego mianownika i wykonaj działanie. Doprowadź wynik do najprostszej postaci.

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$

d) $\frac{4}{7} - \frac{1}{6}$

g) $\frac{1}{8} + \frac{1}{5}$

b) $\frac{2}{5} - \frac{1}{4}$

e) $\frac{3}{7} + \frac{1}{4}$

h) $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{7} + \frac{2}{9}$

f) $\frac{1}{2} - \frac{3}{9}$

i) $\frac{7}{8} - \frac{1}{3}$

poziom C

Sprowadź ułamki do wspólnego mianownika i wykonaj działanie. Doprowadź wynik do najprostszej postaci.

a) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$

d) $\frac{2}{3} - \frac{2}{4}$

g) $\frac{4}{5} + \frac{4}{6}$

b) $\frac{3}{5} + \frac{4}{7}$

e) $\frac{5}{9} + \frac{1}{2}$

h) $\frac{4}{7} - \frac{1}{2}$

c) $\frac{6}{8} - \frac{1}{5}$

f) $\frac{5}{7} + \frac{2}{3}$

i) $\frac{2}{3} - \frac{2}{5}$

poziom D

Sprowadź ułamki do wspólnego mianownika i wykonaj działanie. Pamiętaj, żeby znaleźć jak najmniejszy wspólny mianownik. Doprowadź wynik do najprostszej postaci.

a) $\frac{2}{10} + \frac{4}{15}$

d) $\frac{4}{9} - \frac{5}{12}$

g) $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$

b) $\frac{3}{8} - \frac{1}{6}$

e) $\frac{7}{15} + \frac{9}{10}$

h) $\frac{17}{21} - \frac{3}{14}$

c) $\frac{5}{6} + \frac{2}{9}$

f) $\frac{5}{6} - \frac{5}{9}$

i) $\frac{5}{6} - \frac{4}{15}$

poziom E

Oblicz.

a) $4\frac{3}{7} + 1\frac{1}{5}$

d) $3\frac{2}{9} + 1\frac{5}{6}$

g) $11\frac{1}{11} + 3\frac{2}{33}$

b) $5\frac{2}{3} - 2\frac{1}{4}$

e) $7\frac{3}{4} - 5\frac{1}{3}$

h) $4\frac{5}{7} - 1\frac{1}{2}$

c) $4\frac{3}{10} - 2\frac{1}{5}$

f) $4\frac{2}{15} + 2\frac{7}{10}$

i) $2\frac{3}{7} - \frac{2}{5}$

MISTRZ

Oblicz.

a) $5\frac{1}{3} - 2\frac{6}{7}$

b) $11\frac{2}{3} + 4\frac{1}{2} - 5\frac{14}{15}$

c) $1345\frac{123}{246} - 1344\frac{3}{4}$

- 2 Piotr i Paweł jedli pierniczki. Piotr zjadł $\frac{1}{6}$, a Paweł $\frac{1}{8}$ wszystkich pierniczeków.

- Jaką część pierniczeków zjedli w sumie?
- Jaka część pierniczeków została?



- **3** Wyłóżcie na stół karty z zabawy „Loteryjka” ze strony 151. Gracze po kolei wybierają spośród kart leżących na stole po dwie karty i obliczają sumę zapisanych na nich ułamków. Jeśli zrobią to poprawnie, zabierają karty jako swoje punkty (każda karta to 1 punkt). Jeśli źle – karty zostają na stole. Gra kończy się, gdy na stole zabraknie już kart. Wygrywa ten, kto zdobył najwięcej kart (punktów).

- **4** Gracie według zasad z zadania 3, tylko tym razem obliczacie różnice ułamków z wybranych kart.

- **5** Rozwiąż równanie.

a) $3\frac{1}{2} - x = 1\frac{1}{4}$ b) $7\frac{3}{4} - y = 3\frac{1}{2}$ c) $1\frac{1}{4} + z = 4\frac{1}{2}$

- **6** Mama poprosiła dzieci, żeby wyplewiły grządki. Dominika wyplewiła $\frac{1}{4}$ wszystkich grządek, Jaś $\frac{2}{5}$, a Tomek $\frac{1}{5}$.

- a) Jaką część wszystkich grządek wyplewiły dzieci?
- b) Jaką część grządek trzeba jeszcze wyplewić?
- c) Kto wyplewił najwięcej grządek, a kto najmniej?
- d) Kto wyplewił więcej grządek: Jaś czy Dominika z Tomkiem?

- **7** Łakomy Miś zjadł na śniadanie $\frac{3}{5}$ garnuszka miodu, na drugie śniadanie jeszcze $\frac{1}{4}$ garnuszka, a na obiad resztę. Jaką część garnuszka miodu zjadł Miś na obiad?



- **8** Wyłóżcie na stół karty z zabawy „Loteryjka” ze strony 151. Przygotujcie dodatkowo puste karteczki. Będziecie na nich zapisywać wyniki działań. Każdy kolejny gracz zabiera ze stołu dwie karty i oblicza sumę zapisanych na nich ułamków. Następnie zapisuje wynik na pustej karteczce i dokłada ją do kart biorących udział w grze. Jeśli obliczy poprawnie, otrzymuje punkt. Gra kończy się, gdy na stole zostanie jedna karta. Wygrywa ten, kto zdobył najwięcej punktów.

- **9** Oblicz.

a) $7\frac{1}{4} - (2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2})$ c) $6\frac{5}{6} - (3\frac{1}{8} + 1\frac{1}{2})$
 b) $7\frac{1}{4} - 2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2}$ d) $6\frac{5}{6} - 3\frac{1}{8} + 1\frac{1}{2}$

... 10 Rozwiąż zadanie zapisane wierszem.



ostróżka

Trzy ósme grządki zajmie ostróżka
– Błękitne lampki na smukłych nóżkach.
Na trzeciej części miłki zasiejmy,
Szóstą zaś zajmą dalie promienne.
Jaka część grządki została wolna?
Tutaj zamieszka stokrotka polna.



miłek



dalia



stokrotka

11 Przepisz działania, zamieniając figury na odpowiednie cyfry. W każdym przykładzie jednakowe figury oznaczają jednakowe cyfry, a różne figury – różne cyfry.

a) $\frac{\text{pink square}}{12} + \frac{1}{\text{yellow diamond}} + \frac{1}{\text{red triangle}} = \frac{\text{pink square}}{12} + \frac{\text{red triangle}}{12} + \frac{\text{yellow diamond}}{12} = \frac{12}{12} = 1$

b) $\frac{\text{pink square}}{9} + \frac{\text{pink square}}{\text{yellow diamond}} + \frac{\text{red triangle}}{9} = \frac{\text{pink square}}{9} + \frac{\text{yellow diamond}}{9} + \frac{\text{red triangle}}{9} = \frac{9}{9} = \text{pink square}$

c) $\frac{1}{\text{pink square}} + \frac{1}{\text{red triangle}} + \frac{1}{\text{yellow diamond}} + \frac{\text{red triangle}}{\text{pink square}} = \frac{18}{\text{pink square}} = 1$



Dla dociekliwych

Ułamki o liczniku 1 nazywamy ułamkami prostymi albo egipskimi. W starożytnym Egipcie ułamki o liczniku 1 zapisywano, stawiając znak  nad odpowiednią liczbą, np.:

$\frac{\text{circle over 1}}{111} \text{ to } \frac{1}{3}, \frac{\text{circle over 1}}{1111} \text{ to } \frac{1}{4}, \text{ a } \frac{\text{circle over 1}}{111111} \text{ to } \frac{1}{23}, \text{ bo } 1 = 1, 11 = 10.$

Inne ułamki przedstawiano jako sumy różnych ułamków prostych, np.: ułamek $\frac{5}{6}$ w starożytnym Egipcie przedstawiano jako $\frac{\text{circle over 1}}{11} \frac{\text{circle over 1}}{1111}$, czyli sumę $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ (sprawdź, że to $\frac{5}{6}$).

Przyjrzyj się przykładom rozkładania ułamków na ułamki egipskie.

• $\frac{7}{12}$

Największy ułamek prosty mniejszy od $\frac{7}{12}$ to $\frac{1}{2}$.

$$\frac{7}{12} - \frac{1}{2} = \frac{7}{12} - \frac{6}{12} = \frac{1}{12}$$

Otrzymana różnica jest ułamkiem prostym, czyli $\frac{7}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}$.

• $\frac{5}{11}$

Porównajmy ułamek $\frac{5}{11}$ z ułamkami: $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$ itd.

Największy ułamek prosty mniejszy od $\frac{5}{11}$ to $\frac{1}{3}$.

$$\frac{5}{11} - \frac{1}{3} = \frac{15}{33} - \frac{11}{33} = \frac{4}{33}$$

$\frac{4}{33}$ nie jest ułamkiem prostym, więc trzeba szukać dalej.

Największy ułamek prosty mniejszy od $\frac{4}{33}$ to $\frac{1}{9}$.

$$\frac{4}{33} - \frac{1}{9} = \frac{12}{99} - \frac{11}{99} = \frac{1}{99}$$

Otrzymana różnica jest ułamkiem prostym, czyli $\frac{5}{11} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{99}$.

1 Przedstaw ułamek w postaci sumy różnych ułamków egipskich.

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{7}{10}$

c) $\frac{5}{8}$

d) $\frac{7}{15}$

e) $\frac{9}{20}$

2 Przedstaw podane ułamki w postaci sum różnych ułamków egipskich.

$\frac{2}{11}, \frac{3}{11}, \frac{4}{11}, \frac{5}{11}, \frac{6}{11}, \frac{7}{11}$



Czy już umiem?

I Oblicz.

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{5}$

b) $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$

c) $\frac{7}{20} - \frac{1}{4}$

II Oblicz.

a) $5\frac{1}{4} - 2\frac{1}{6}$

b) $4\frac{1}{3} + 2\frac{1}{6}$

c) $4\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4}$

III W dzbanku o pojemności 2 litrów było $1\frac{3}{4}$ litra soku. Mikołaj wypił $\frac{1}{3}$ litra soku. Ile litrów soku zostało w dzbanku?

Mnożenie ułamka przez liczbę naturalną. Ułamek liczby



Na dobry początek

Rzymski kupiec



W OPIEKĘ WEŹCIE MARKA PORCJUSZA,
BOGOWIE, KIEDY W DROGĘ WYRUSZA.
W PUSZCZE ZAMGLONE, W BLUSZCZE JAK WNYKI,
W KRAJ NADBAŁTYCKI MROCZNY I DZIKI,
BY JANTAR WODOM MORZA WYRWANY
NIEŚĆ DO OJCZYZNY SWEJ UKOCHANEJ.

Rzymski kupiec wybierał się na wyprawę do dalekich krajów, aby przywieźć stamtąd jantar, czyli bursztyn. Przed wyjazdem chciał złożyć ofiary bogom, by w dalekiej i niebezpiecznej podróży zapewnić sobie ich przychyłność. Przeznaczył na to 24 denary i ruszył w wędrówkę po świątyniach, zostawiając w każdej odpowiednią liczbę denarów.





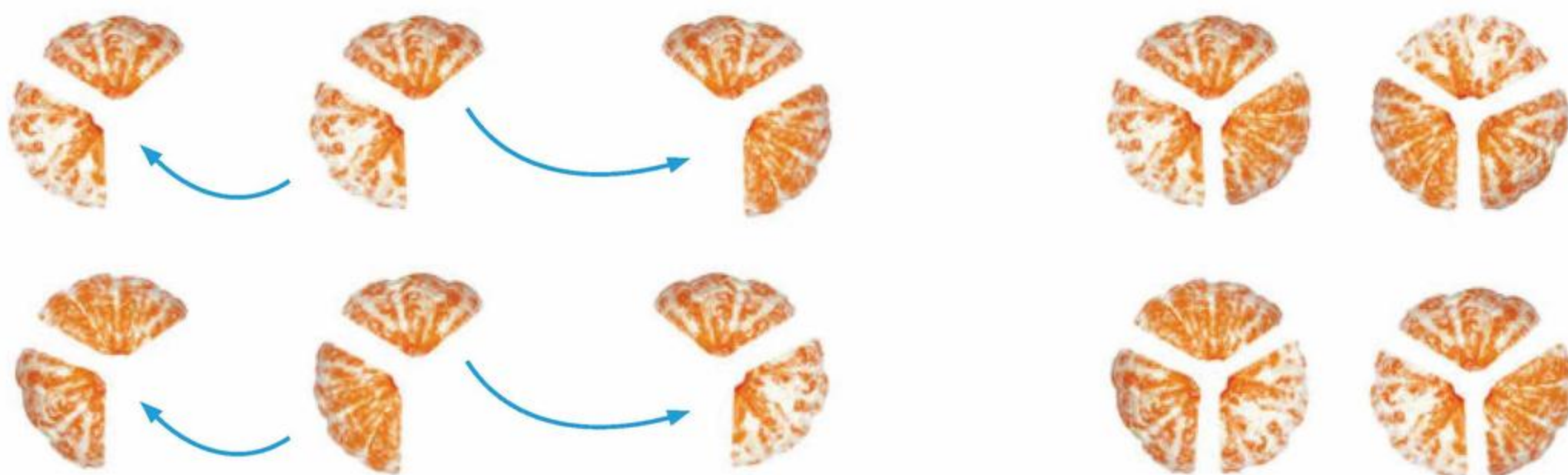
Pytania i polecenia

- Wyobraź sobie, że jesteś rzymskim kupcem. Przygotuj 24 „denary” (np. kulki plasteliny). Wędruj po świątyniach, zostawiając denary, a następnie odpowiedz na pytania.
 - a) Ile denarów zostało kupcowi po złożeniu ofiary we wszystkich świątyniach?
 - b) Ile denarów zostawił w każdej świątyni?
 - c) Jaką część pieniędzy, które miał, wchodząc do świątyni Jowisza, zostawił w tej świątyni? Odpowiedz na to pytanie także w odniesieniu do pozostałych świątyń.
 - d) Jaka część z 24 denarów została w poszczególnych świątyniach?
- Porównaj swoje odpowiedzi z odpowiedziami innych lub powtórz wędrowkę, odwiedzając świątynie w innej kolejności, i odpowiedz na pytania jeszcze raz. Które odpowiedzi zależą od kolejności odwiedzania świątyń?

III. Ułamki zwykłe

Porównaj dwa zadania.

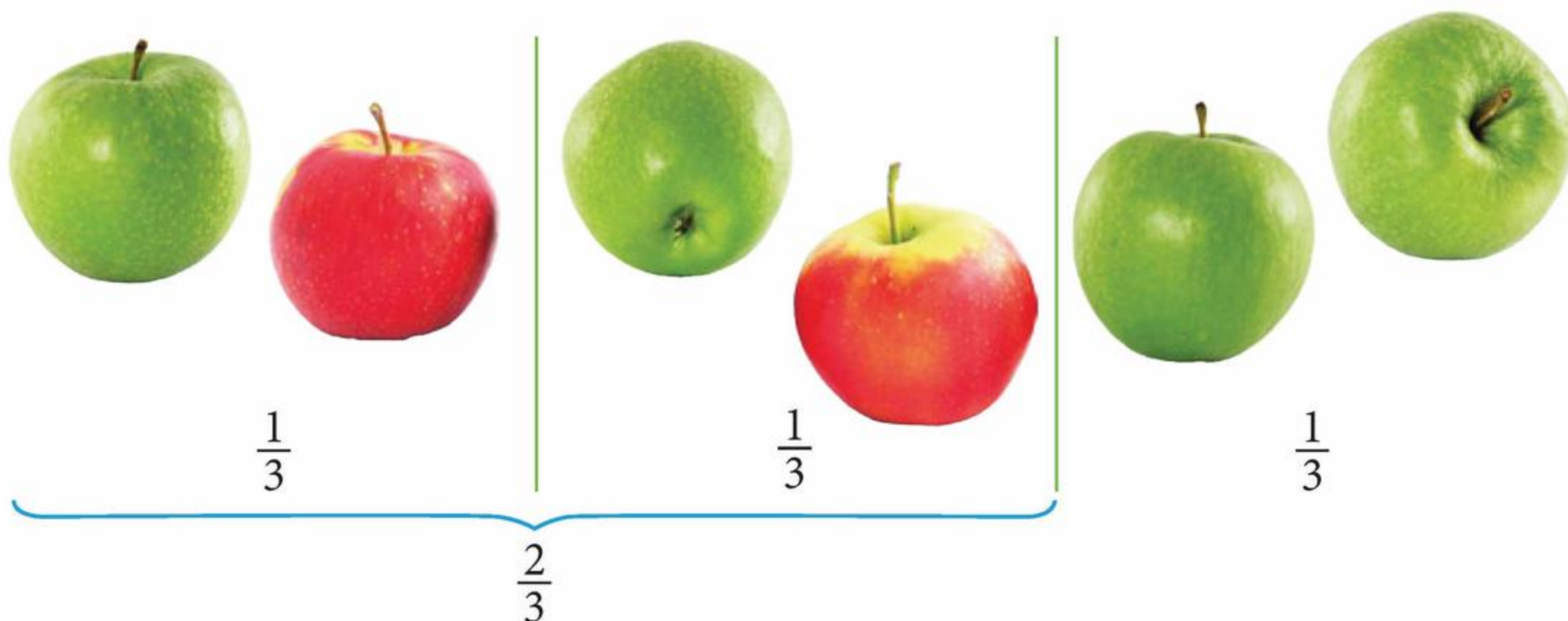
- Na stole leży 6 porcji po $\frac{2}{3}$ mandarynki. Ile całych mandarynek podzielono?



$$6 \cdot \frac{2}{3} = 4$$

Odp. Podzielono 4 całe mandarynki.

- Na stole leży 6 jabłek. Ania zabrała ze stołu $\frac{2}{3}$ wszystkich jabłek. Ile jabłek zabrała?



$\frac{2}{3}$ z sześciu to 4,

czyli $\frac{2}{3} \cdot 6 = 4$

Odp. Ania zabrała 4 jabłka.

$\frac{2}{3}$ liczby 6 to 6 razy po $\frac{2}{3}$

$$\frac{2}{3} \cdot 6 = 6 \cdot \frac{2}{3}$$

Jak wykonujemy takie mnożenia?

$$5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{4} = \frac{15}{4}$$

Mnożymy licznik ułamka przez liczbę naturalną (mianownik pozostaje bez zmian).

Przykłady

Oblicz.

poziom A

$$3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7} = \frac{6}{7}$$

poziom B

$$\frac{4}{5} \cdot 3 = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

poziom C

Jeśli to możliwe, przed wykonaniem obliczeń skróć ułamek.

$$\frac{7}{9} \cdot 3 = \frac{7 \cdot \cancel{3}^1}{\cancel{9}_3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$

$$12 \cdot \frac{5}{6} = \frac{\cancel{12}^2 \cdot 5}{\cancel{6}_1} = 10 \text{ (nie zapisujemy } \frac{10}{1}, \text{ bo } \frac{10}{1} = 10 : 1 = 10)$$

Dobra rada

Skracaj jak najwcześniej!

Naucz się tego na prostych przykładach. W dłuższych działaniach zaoszczędzi ci to wiele pracy.

$$\cancel{13}^1 \cdot \frac{19}{\cancel{26}_2} = \frac{19}{2} = 9\frac{1}{2}$$

$$13 \cdot \frac{19}{26} =$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \cdot 19 \\ \hline 117 \\ + 130 \\ \hline 247 \end{array}$$

$$247 : 26 =$$



poziom D

Wykonaj mnożenie $3 \cdot 2\frac{4}{5}$.

Sposób 1

$$3 \cdot 2\frac{4}{5} = 6\frac{12}{5} = 8\frac{2}{5}$$

$$\text{bo } 3 \cdot 2 = 6 \text{ i } 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$$

Sposób 2

$$3 \cdot 2\frac{4}{5} = 3 \cdot \frac{14}{5} = \frac{3 \cdot 14}{5} = \frac{42}{5} = 8\frac{2}{5}$$

Przykład

W klasie jest 24 uczniów. Na lekcji muzyki okazało się, że $\frac{1}{6}$ klasy gra na gitarze. Ile to osób?

Sposób 1

$\frac{1}{6}$ to jedna z 6 równych części. Jeśli podzielimy klasę na 6 równych części, to w każdej będą $24 : 6 = 4$ osoby.

Sposób 2

Mamy obliczyć $\frac{1}{6}$ z 24. Wykonujemy mnożenie.

$$\frac{1}{6} \cdot 24 = \frac{1 \cdot \cancel{24}^4}{\cancel{6}_1} = 4$$

Odp. Na gitarze grają 4 osoby.

Przykład

W klasie jest 24 uczniów. Jedenaście lat skończyło już $\frac{2}{3}$ klasy. Ile to osób?

Sposób 1

$\frac{1}{3}$ klasy to $24 : 3 = 8$ osób,

$\frac{2}{3}$ klasy to dwie takie części,

a więc $\frac{2}{3}$ klasy to $2 \cdot 8 = 16$ osób.

Odp. 16 uczniów skończyło 11 lat.

Sposób 2

Wykonujemy mnożenie.

$$\frac{2}{3} \cdot 24 = \frac{2 \cdot \cancel{24}^8}{\cancel{3}_1} = 16$$

Aby obliczyć ułamek danej liczby, można pomnożyć ułamek przez tę liczbę.



Zadania



1 Wykonaj polecenia. ► Jeśli poprawnie rozwiązesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

Oblicz. Pamiętaj, aby doprowadzić wynik do najprostszej postaci.

a) $2 \cdot \frac{3}{11}$

c) $3 \cdot \frac{11}{50}$

e) $\frac{4}{9} \cdot 2$

g) $5 \cdot \frac{2}{17}$

b) $\frac{2}{15} \cdot 4$

d) $4 \cdot \frac{1}{7}$

f) $\frac{1}{10} \cdot 7$

h) $3 \cdot \frac{2}{7}$

poziom B

Oblicz. Wynik zapisz w postaci liczby mieszanej.

a) $2 \cdot \frac{7}{11}$

c) $7 \cdot \frac{11}{50}$

e) $\frac{4}{9} \cdot 5$

g) $5 \cdot \frac{8}{17}$

b) $\frac{13}{15} \cdot 4$

d) $10 \cdot \frac{1}{7}$

f) $\frac{7}{10} \cdot 7$

h) $3 \cdot \frac{5}{7}$

poziom C

Oblicz. Skróć przed obliczeniem iloczynu. Doprowadź wynik do najprostszej postaci.

a) $2 \cdot \frac{5}{12}$

c) $14 \cdot \frac{1}{7}$

e) $\frac{4}{9} \cdot 6$

g) $3 \cdot \frac{7}{12}$

b) $\frac{2}{15} \cdot 6$

d) $33 \cdot \frac{3}{55}$

f) $\frac{1}{10} \cdot 5$

h) $8 \cdot \frac{5}{12}$

poziom D

Oblicz. Doprowadź wynik do najprostszej postaci.

a) $2 \cdot 3\frac{2}{3}$

c) $3 \cdot 3\frac{3}{7}$

e) $2\frac{1}{9} \cdot 10$

g) $3 \cdot 1\frac{5}{12}$

b) $1\frac{2}{5} \cdot 6$

d) $4 \cdot 1\frac{1}{5}$

f) $3\frac{7}{10} \cdot 5$

h) $8 \cdot 2\frac{5}{12}$

MISTRZ

Oblicz. Doprowadź wynik do najprostszej postaci.

a) $111 \cdot \frac{2}{3}$

c) $16 \cdot \frac{17}{128}$

e) $100 \cdot \frac{3}{125}$

b) $\frac{5}{37} \cdot 111$

d) $477 \cdot \frac{10}{27}$

f) $\frac{7}{1000} \cdot 8$

• 2 Oblicz.

$\frac{4}{7} \cdot 7$

$\frac{2}{5} \cdot 5$

$\frac{3}{4} \cdot 4$

Co zauważasz? Zapisz trzy podobne mnożenia.

•• 3 Oblicz.

$\frac{2}{3} \cdot 9$

$\frac{4}{7} \cdot 21$

$\frac{3}{5} \cdot 10$

Zapisz pięć podobnych mnożeń. Wynik ma być liczbą naturalną, ale inną niż licznik ułamka.

- 4 Przygotujcie 10 kartoników i zapiszcie na nich liczby: 4, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 21, 30, 45. Dobierzcie się w pary. Pierwsza osoba losuje spośród kartoników licznik, a druga – mianownik ułamka. Spróbujcie podać jak największą liczbę, przez którą można skrócić ten ułamek. Następnie jedno z was wypisuje wszystkie dzielniki licznika, a drugie – wszystkie dzielniki mianownika. Znajdźcie największą liczbę, przez którą dzieli się i licznik, i mianownik. Czy dobrze odgadliście? Rozegrajcie kilka partii.

- **5** Poniżej znajdziesz mnożenie wykonane bez skracania. Rozwiąż samodzielnie ten sam przykład, skracając przed obliczeniem iloczynu. Sprawdź, czy wynik jest taki sam.

a) $15 \cdot \frac{7}{10} = \frac{15 \cdot 7}{10} = \frac{105}{10} = 10\frac{5}{10} = 10\frac{1}{2}$

b) $\frac{17}{26} \cdot 13 = \frac{17 \cdot 13}{26} = \frac{221}{26} = 8\frac{13}{26} = 8\frac{1}{2}$

c) $30 \cdot \frac{29}{33} = \frac{870}{33} = 26\frac{12}{33} = 26\frac{4}{11}$

W którym przypadku obliczenia były łatwiejsze?

- **6** Pracujcie w parach. Przygotujcie planszę z szablonem działania. Z zestawu kartoników z cyframi od 1 do 9 pierwsza osoba losuje dwa i układa z nich ułamek. Druga osoba dokłada w wolne miejsca na planszy takie liczby ze swojego zestawu, aby działanie było poprawne. Potem zamieniacie się rolami.

$$\frac{0}{0} \cdot 0 = 0$$

- **7** W koszu jest 30 gruszek. Klapsy stanowią $\frac{2}{5}$ wszystkich gruszek, a $\frac{4}{15}$ stanowią bery.

a) Ile jest klapsów?

b) Ile jest ber?



- **8** Oblicz dwoma sposobami, ile to jest:

a) $\frac{2}{5}$ z 15 jabłek,

b) $\frac{3}{4}$ z 32 uczniów,

c) $\frac{5}{6}$ z 3 czekolad.

- **9** Co jest większe:

a) $\frac{2}{3}$ czy $\frac{1}{4}$,

b) $\frac{2}{3}$ liczby 24 czy $\frac{1}{4}$ liczby 24,

c) $\frac{2}{3}$ liczby 6 czy $\frac{1}{4}$ liczby 20?

- **10** Hefajstos wykuwał dla Zeusa Gromowładnego pioruny w swej podziemnej kuźni. W ciągu trzech dni wykuł ich aż 48. Pierwszego dnia wykuł $\frac{3}{8}$ wszystkich piorunów, a drugiego $\frac{1}{3}$. Ile piorunów wykuł Hefajstos pierwszego, ile drugiego, a ile trzeciego dnia?

Hefajstos

(w mitologii rzymskiej: Wulkan) – bóg ognia, kowalstwa i innych rzemiosł

- ... **11** Na basen chodzi $\frac{2}{3}$ uczniów klasy 5a i $\frac{4}{7}$ uczniów klasy 5b, czyli po 16 osób z każdej klasy. Ilu uczniów liczy klasa 5a, a ilu klasa 5b?
-  **12** W pewnej klasie $\frac{1}{3}$ wszystkich uczniów chodzi na basen, a o 4 uczniów więcej, czyli dokładnie połowa klasy, uczęszcza na kurs tańca. Ilu uczniów liczy ta klasa?
-  **13** Troje dzieci wzięło śliwki ze skrzynki. Ania wzięła $\frac{1}{3}$ wszystkich śliwek i jeszcze jedną śliwkę, Tomek wziął $\frac{1}{4}$ początkowej liczby śliwek i jeszcze dwie śliwki, a Julka wzięła $\frac{1}{5}$ początkowej liczby śliwek i jeszcze trzy. W skrzynce zostało 20 śliwek. Ile śliwek było w skrzynce na początku?



Dla dociekliwych

Od dawna umiesz mnożyć liczby naturalne i wiesz, że:

- mnożenie przez 0 zawsze daje w wyniku 0,
- mnożenie przez 1 nie zmienia mnożonej liczby,
- wynik mnożenia jest większy od każdej z mnożonych liczb (nie dotyczy mnożenia przez 0 ani przez 1),
- można zamienić kolejność czynników, a wynik się nie zmieni.

Zbadaj, które z tych reguł są prawdziwe, gdy jednym z czynników jest liczba naturalna, a drugim – ułamek.



Czy już umiem?

I Oblicz.

a) $3 \cdot \frac{4}{5}$

b) $4 \cdot \frac{5}{12}$

c) $17 \cdot \frac{3}{34}$

II Oblicz dwoma sposobami, ile to jest:

a) $\frac{3}{7}$ z 14 bochenków chleba,

b) $\frac{2}{5}$ z 30 samochodów.

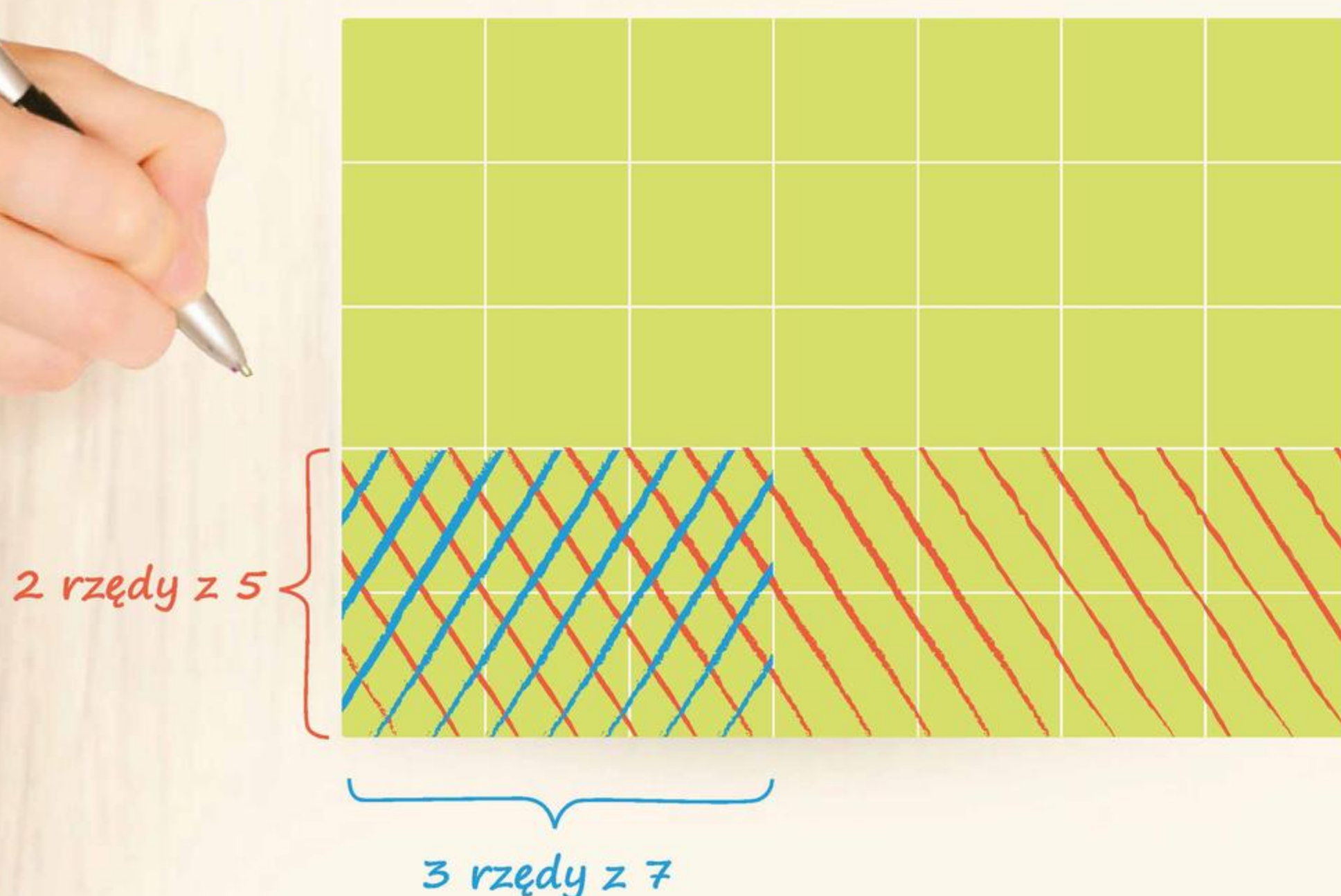
III Na stole leży 15 cukierków. Wśród nich $\frac{2}{3}$ to cukierki owocowe, $\frac{1}{5}$ cukierki czekoladowe, a reszta to krówki. Ile cukierków każdego rodzaju leży na stole?

 Na dobry początek

Ułamek ułamka

Na rysunku przedstawiającym prostokąt złożony z kwadratów takiej samej wielkości Kasia zakreskowała 2 poziome rzędy kwadratów, a Marcin na tym fragmencie zaznaczył 3 pionowe rzędy.

Kasia:
Zaznaczyłam
2 rzędy z 5,
czyli $\frac{2}{5}$ całego
prostokąta.

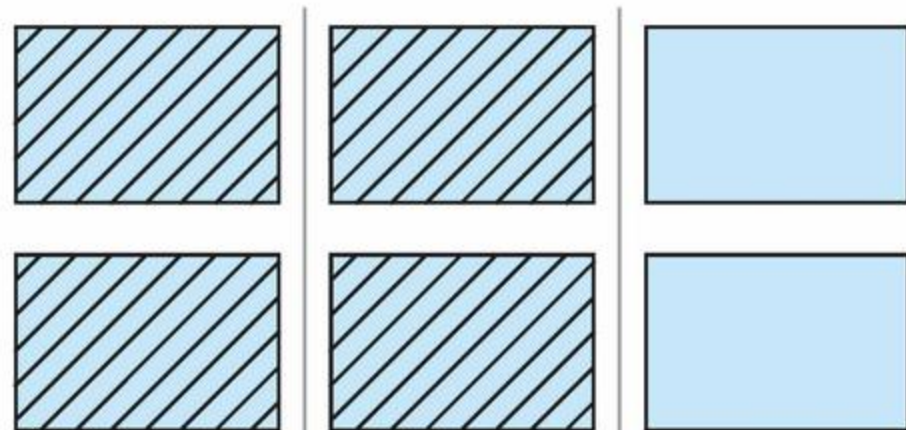


Marcin:
Na części zakre-
skowanej przez Kasię
zaznaczyłem 3 rzędy
z 7, czyli $\frac{3}{7}$ tego,
co zaznaczyła
Kasia.

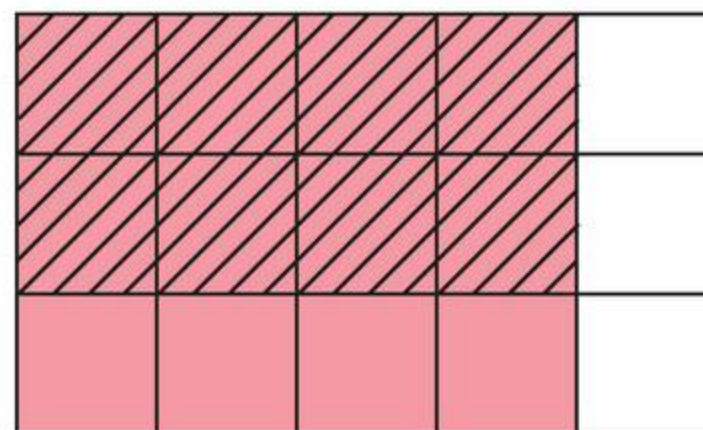
Pytania i polecenia

- Jaką część całego prostokąta zaznaczył Marcin?
- Jakie działanie na ułamkach $\frac{2}{5}$ i $\frac{3}{7}$ należy wykonać, aby opisać zaznaczoną przez Marcina część prostokąta?
- Narysuj w zeszycie prostokąt o wymiarach 5 na 9 kratek. Zakreskuj na czerwono $\frac{4}{5}$ prostokąta. Druga osoba niech zakreskuje innym kolorem $\frac{2}{9}$ części zakreskowanej przez ciebie. Jaka część prostokąta jest zakreskowana jednocześnie dwoma kolorami?

Przyjrzyj się poniższemu rysunkowi.



6 prostokątów

 $\frac{4}{5}$ prostokąta

$\frac{2}{3}$ z sześciu prostokątów

to $\frac{2}{3} \cdot 6$ prostokątów.

$$\frac{2}{3} \cdot 6 = 4$$

$\frac{2}{3}$ z czterech piątych prostokąta

to $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$ prostokąta.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

Mnożenie ułamków zwykłych:
mnożymy licznik przez licznik, a mianownik przez mianownik.

Przykłady

Oblicz. Przed pomnożeniem skróć, jeśli to możliwe.

poziom A

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}$$

poziom B

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot \cancel{3}^1}{\cancel{3}_1 \cdot 5} = \frac{2}{5} \text{ (skracamy przez 3)}$$

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{\cancel{4}^2 \cdot 5}{7 \cdot \cancel{6}_3} = \frac{10}{21} \text{ (skracamy przez 2)}$$

$$\frac{7}{9} \cdot \frac{2}{35} = \frac{\cancel{7}^1 \cdot 2}{9 \cdot \cancel{35}_5} = \frac{2}{45} \text{ (skracamy przez 7)}$$

$56 = 8 \cdot 7$
 $63 = 9 \cdot 7$
Skróćę przez 7.



Pamiętaj!

Skracamy ułamki tylko przy ich mnożeniu.

Zawsze skracamy liczbę z licznika z liczbą z mianownika.

Dobra rada

Jak rozpoznać, przez co skracać?



$$\frac{2}{\cancel{7}_1} \cdot \frac{\cancel{7}^1}{11}$$

Ta sama liczba

$$\frac{1}{\cancel{10}_1} \cdot \frac{\cancel{20}^2}{53}$$

Cechy podzielności

$$\frac{5}{\cancel{12}_2} \cdot \frac{\cancel{42}^7}{11}$$

Tabliczka mnożenia
($12 = 2 \cdot 6$, $42 = 7 \cdot 6$)

poziom C

$$\frac{5}{12} \cdot \frac{9}{10} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot \overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{4}{\cancel{12}} \cdot \underset{2}{\cancel{10}}} = \frac{3}{8} \text{ (skracamy 9 i 12 przez 3, a 5 i 10 przez 5)}$$

$$\frac{21}{40} \cdot \frac{2}{35} = \frac{\overset{3}{\cancel{21}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{20}{\cancel{40}} \cdot \underset{5}{\cancel{35}}} = \frac{3}{100} \text{ (skracamy 2 i 40 przez 2, a 21 i 35 przez 7)}$$

Dobra rada

Skracanie zaawansowane – gdy mnożenie jest trudniejsze.
Jak rozpoznać, przez co skracać?

$$\frac{2}{17} \cdot \frac{34}{11}$$

$$\frac{1}{72} \cdot \frac{135}{53}$$

$$\frac{5}{777} \cdot \frac{222}{13}$$



Jedna liczba
dzieli się przez
drugą bez
reszty
($34 = 17 \cdot 2$)

Cechy podzielności
($1 + 3 + 5 = 9$;
 $7 + 2 = 9$,
czyli każda z liczb
135 i 72
jest podzielna przez 9)

Wspólny dzielnik
($222 = 2 \cdot 111$,
 $777 = 7 \cdot 111$)

poziom D

$$1\frac{1}{7} \cdot 2\frac{2}{3} = \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{3} = \frac{64}{21} = 3\frac{1}{21}$$

$$1\frac{2}{3} \cdot 3\frac{2}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{17}{5} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot 17}{3 \cdot \underset{1}{\cancel{5}}} = \frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$$

$$2\frac{4}{5} \cdot 3\frac{4}{7} = \frac{14}{5} \cdot \frac{25}{7} = \frac{\overset{2}{\cancel{14}} \cdot \overset{5}{\cancel{25}}}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{1}{\cancel{7}}} = 10$$

Pamiętaj!

Aby pomnożyć liczby mieszane,
musisz najpierw zamienić je na ułamki niewłaściwe.

Dobra rada

Chcesz skracać? Nie zawsze możesz!



$$\frac{2}{7} + \frac{7}{11}$$

$$3\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{11}$$

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{7}{11}$$

Nie skracamy
w dodawaniu!

Najpierw zamieniamy
liczbę mieszaną
na ułamek!

Nie skracamy
licznika
z licznikiem!



Zadania

- 1** Wykonaj polecenia. ► Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

Oblicz.

a) $\frac{2}{7} \cdot \frac{4}{9}$

c) $\frac{7}{11} \cdot \frac{7}{10}$

e) $\frac{1}{9} \cdot \frac{4}{5}$

g) $\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3}$

b) $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{11}$

d) $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{8}$

f) $\frac{4}{7} \cdot \frac{4}{9}$

h) $\frac{4}{7} \cdot \frac{8}{11}$

poziom B

Oblicz. Skróć przed wykonaniem mnożenia.

a) $\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{5}$

c) $\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{8}$

e) $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4}$

g) $\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{10}$

b) $\frac{4}{7} \cdot \frac{14}{15}$

d) $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{12}$

f) $\frac{2}{5} \cdot \frac{10}{11}$

h) $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{8}$

poziom C

Oblicz. Skróć przed wykonaniem mnożenia.

a) $\frac{3}{7} \cdot \frac{14}{27}$

c) $\frac{7}{12} \cdot \frac{3}{7}$

e) $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9}$

g) $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{20}$

b) $\frac{3}{5} \cdot \frac{15}{24}$

d) $\frac{5}{27} \cdot \frac{6}{35}$

f) $\frac{5}{16} \cdot \frac{4}{15}$

h) $\frac{33}{70} \cdot \frac{10}{11}$

poziom D

Oblicz. Pamiętaj o skracaniu.

a) $1\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{4}$

c) $2\frac{4}{5} \cdot 1\frac{1}{7}$

e) $6\frac{2}{3} \cdot 2\frac{7}{10}$

g) $1\frac{7}{8} \cdot 3\frac{1}{5}$

b) $1\frac{3}{5} \cdot 7\frac{1}{2}$

d) $1\frac{1}{10} \cdot 1\frac{3}{22}$

f) $2\frac{3}{5} \cdot 1\frac{9}{26}$

h) $2\frac{2}{5} \cdot 2\frac{3}{4}$

MISTRZ

Oblicz. Skróć przed wykonaniem mnożenia.

a) $\frac{13}{17} \cdot \frac{34}{39}$

b) $9\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{98}$

c) $26\frac{1}{5} \cdot \frac{15}{262}$

d) $11\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{39}$

- **2** Oblicz.

a) $\frac{2}{3}$ liczby 15

b) $\frac{2}{3}$ liczby 7

c) $\frac{2}{3}$ liczby $\frac{1}{5}$

d) $\frac{2}{3}$ liczby $1\frac{1}{2}$

- **3** Poniżej znajdziesz mnożenie wykonane bez skracania. Rozwiąż ten sam przykład, skracając przed obliczeniem iloczynu. Sprawdź, czy wynik jest taki sam jak w książce.

a) $\frac{15}{21} \cdot \frac{7}{25} = \frac{15 \cdot 7}{21 \cdot 25} = \frac{105}{525} = \frac{21}{105} = \frac{7}{35} = \frac{1}{5}$

b) $\frac{17}{26} \cdot \frac{13}{34} = \frac{17 \cdot 13}{26 \cdot 34} = \frac{221}{884} = \frac{1}{4}$

W którym przypadku obliczenia były łatwiejsze?

III. Ułamki zwykłe

- **4** Dobierzcie się w pary. Rozłóżcie karty z gry „Loteryjka” ze strony 151. Na zmianę wybieracie po dwie karty i podajecie iloczyn zapisanych na nich ułamków. Zapisujecie wykonane działania.

- **5** Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2}{3} \cdot x = \frac{10}{21}$

c) $\frac{2}{5} \cdot x = 2$

e) $\frac{3}{4} \cdot x = 6$

b) $x \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{35}$

d) $x \cdot \frac{3}{7} = 1$

f) $x \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$

- **6** Oblicz. Ustaw wyniki od najmniejszego do największego i odczytaj hasło. Wyjaśnij, co ono oznacza. Jeśli nie wiesz – sprawdź w słowniku.

H $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10}$

D $3\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{5}$

A $\frac{3}{4} \cdot 2\frac{2}{5}$

A $3\frac{1}{5} \cdot 2\frac{3}{8}$

L $\frac{3}{5} \cdot 1\frac{1}{2}$

L $\frac{4}{5} \cdot 1\frac{1}{4}$

E $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}$



- **7** Kasia i Jacek zebrali razem $2\frac{1}{4}$ litra jagód. Wracając, spotkali młodszego brata Kasi i poczęstowali go zebranymi owocami. Malec zjadł ze smakiem $\frac{2}{9}$ zebranych przez nich jagód. Ile jagód przynieśli do domu?

- **8** W 1,5-litrowym dzbanku było $\frac{2}{3}$ litra soku. Ania wypila $\frac{1}{4}$ tego soku. Jaką część litra soku wypila?

- **9** Wykonaj działania. Każdy wynik powinien wystąpić dwa razy.

a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}$

c) $\frac{5}{4} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{16}$

e) $1\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12}$

b) $2\frac{5}{8} \cdot \frac{5}{7} - \frac{3}{4}$

d) $2\frac{1}{12} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{6} + \frac{7}{16}$

f) $3\frac{3}{8} - 1\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{2}$

- **10** Wykonaj kolejne polecenia.

• Oblicz $\frac{7}{9} \cdot 5\frac{2}{5}$.

• Wynik pomnóż przez $2\frac{2}{9}$.

• Oblicz $\frac{3}{7}$ otrzymanej liczby.

... **11** Dzbanek o pojemności $2\frac{1}{2}$ litra był napełniony wodą do $\frac{1}{3}$ swojej pojemności. Kamil dolał do niego sok z trzech ćwierćlitrowych kartoników. Czy w dzbanku jest teraz więcej wody czy soku?

... **12** a) $\frac{3}{4}$ z $\frac{2}{5}$ godziny – jaka to część godziny? Ile to minut? Ile to sekund?
b) $\frac{3}{4}$ z $\frac{2}{5}$ metra – jaka to część metra? Ile to centymetrów? Ile to milimetrów?

 **13** Jaś mówi: „Pomyślałem pewną liczbę i pomnożyłem ją przez $\frac{3}{4}$. Wynik pomnożyłem przez $1\frac{2}{3}$. Potem dodałem $\frac{1}{6}$ i otrzymałem $\frac{2}{3}$ ”. Jaką liczbę pomyślał Jaś?



Dla dociekliwych

Przyjrzyj się przykładowi sprytnego mnożenia.

$$\frac{1}{2} \cdot 24\frac{2}{19} = \frac{1}{2} \cdot 24 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{19} = 12\frac{1}{19}$$

1 Oblicz dwoma sposobami.

a) $\frac{3}{4} \cdot 8\frac{8}{9}$

b) $\frac{1}{2} \cdot 12\frac{2}{5}$

c) $\frac{3}{5} \cdot 20\frac{1}{4}$

2 Oblicz sprytnym sposobem.

a) $\frac{1}{3} \cdot 3003\frac{3}{118}$

b) $\frac{2}{5} \cdot 5555\frac{55}{222}$

c) $\frac{2}{3} \cdot 369\frac{1}{248}$



Czy już umiem?

I Oblicz.

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$

b) $\frac{4}{15} \cdot \frac{5}{12}$

c) $\frac{7}{9} \cdot \frac{7}{11}$

II Oblicz.

a) $\frac{5}{6} \cdot 1\frac{1}{5}$

b) $1\frac{2}{3} \cdot 3\frac{4}{5}$

c) $1\frac{5}{7} \cdot \frac{14}{15}$

III Na talerzu leżało $\frac{3}{4}$ kg wiśni. Tomek zjadł $\frac{2}{3}$ wiśni z talerza. Ile ważyły wiśnie zjedzone przez Tomka? Czy to więcej czy mniej niż 30 dag?

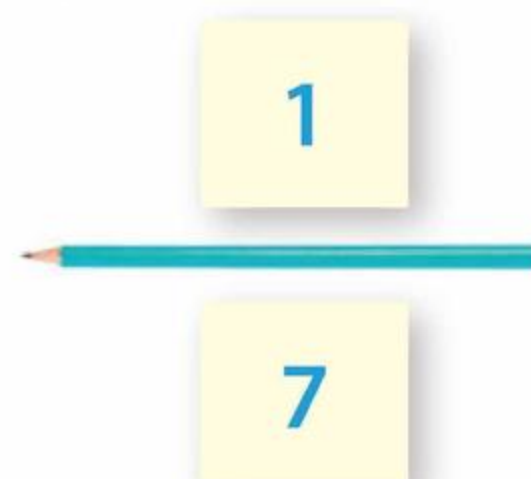


Na dobry początek

Tylko jeden

Przygotujcie swoje komplety kartoników z cyframi od 1 do 9.

- ▶ Wylosuj dwa kartoniki. Pierwszy niech będzie licznikiem, a drugi – mianownikiem ułożonego przez ciebie ułamka. Użyj ołówka jako kreski ułamkowej.
- ▶ Druga osoba niech ułoży ze swoich kart ułamek lub wybierze liczbę naturalną tak, aby iloczyn waszych liczb był równy 1.



Jeśli iloczyn dwóch liczb jest równy 1, to jedna z tych liczb jest **odwrotnością** drugiej.

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = 1$$

$\frac{4}{5}$ to odwrotność liczby $\frac{5}{4}$ $\frac{5}{4}$ to odwrotność liczby $\frac{4}{5}$

Odwrotność liczby 1 to 1.

Liczba 0 nie ma odwrotności.

Przykłady

poziom A

Odwrotnością liczby $\frac{2}{3}$ jest liczba $\frac{3}{2}$ – żeby ją otrzymać, zamieniamy miejscami licznik i mianownik ułamka.

poziom B

Odwrotnością liczby $\frac{1}{7}$ jest $\frac{7}{1}$, czyli 7.

Odwrotnością liczby 6 jest liczba $\frac{1}{6}$.

poziom C

$2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$, więc odwrotnością liczby $2\frac{1}{3}$ jest liczba $\frac{3}{7}$.

Aby znaleźć odwrotność liczby mieszanej, trzeba najpierw zamienić tę liczbę na ułamek niewłaściwy.



Zadania

1 Znajdź odwrotności podanych liczb. ► Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

- | | | | | |
|-------------------|--------------------|------------------|-------------------|--------------------|
| a) $\frac{2}{7}$ | c) $\frac{17}{15}$ | e) $\frac{4}{5}$ | g) $\frac{3}{14}$ | i) $\frac{4}{17}$ |
| b) $\frac{4}{11}$ | d) $\frac{5}{7}$ | f) $\frac{3}{8}$ | h) $\frac{15}{2}$ | j) $\frac{5}{202}$ |

poziom B

- | | | | | |
|------------------|-------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| a) 7 | c) 136 | e) 5 | g) 14 | i) 3 |
| b) $\frac{1}{5}$ | d) $\frac{1}{30}$ | f) $\frac{1}{8}$ | h) $\frac{1}{14}$ | j) $\frac{1}{12}$ |

poziom C

- | | | | | |
|-------------------|--------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| a) $7\frac{1}{2}$ | c) $1\frac{6}{15}$ | e) $2\frac{2}{5}$ | g) $3\frac{2}{7}$ | i) $3\frac{2}{5}$ |
| b) $4\frac{1}{5}$ | d) $5\frac{1}{30}$ | f) $8\frac{1}{4}$ | h) $5\frac{1}{8}$ | j) $4\frac{1}{2}$ |

MISTRZ

- a) Odwrotnością pewnej liczby mieszanej jest ułamek $\frac{7}{25}$. Jaka to liczba?
 b) Znajdź odwrotność odwrotności odwrotności odwrotności liczby $5\frac{3}{7}$.

- **2** Jaka liczba jest równa swojej odwrotności?
- **3** Podaj pięć liczb, których odwrotności są mniejsze od tych liczb.
- **4** Podaj pięć liczb, których odwrotności są większe od tych liczb.
- **5** Dane są liczby $\frac{3}{5}$ i $2\frac{1}{2}$.
 - a) Dodaj te liczby, a następnie znajdź odwrotność otrzymanej sumy.
 - b) Znajdź odwrotności danych liczb, a następnie oblicz sumę tych odwrotności.
 - c) Czy odpowiedzi w podpunktach a) i b) są takie same?
- **6** Co jest większe: odwrotność liczby $4\frac{1}{5}$ czy odwrotność liczby $5\frac{1}{3}$?
- **7** Znajdź liczbę naturalną, która jest:
 - a) o $1\frac{1}{2}$ większa od swojej odwrotności,
 - b) o $2\frac{2}{3}$ większa od swojej odwrotności,
 - c) o $7\frac{7}{8}$ większa od swojej odwrotności.

- ... 8 Zadanie polega na wykonywaniu kolejno następujących poleceń:
zapisz ułamek właściwy, podaj jego odwrotność, od wyniku odejmij 1,
podaj odwrotność wyniku.

- a) Wykonaj te polecenia dla trzech różnych ułamków o liczniku 2.
b) Wykonaj te polecenia dla trzech różnych ułamków o mianowniku 7.
c) Jaką liczbę otrzymasz, wykonując te polecenia dla ułamka $\frac{48}{88}$?

- 9 Ułamek właściwy $\frac{\blacksquare}{\blacktriangle}$ i liczba mieszana $\blacksquare\frac{1}{\blacksquare}$ są liczbami odwrotnymi. Jaką cyfrę zastąpiono kwadratem, a jaką trójkątem? Ile rozwiązań ma to zadanie?



Dla dociekliwych

Przyjrzyj się dwóm sposobom dzielenia ułamków przez liczby naturalne.

Sposób 1

(można go stosować w niektórych przypadkach)

$$\frac{6}{15} : 3 = \frac{2}{15}$$

$$10\frac{4}{5} : 2 = 5\frac{2}{5}$$

Sposób 2

(można go stosować zawsze)

$$\frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} : 3 = \frac{2}{15}$$

1 Oblicz.

- | | | | | |
|-----------------------|------------------------|----------------------------|------------------------|-----------------------|
| a) $\frac{2}{7} : 2$ | d) $\frac{5}{7} : 5$ | g) $100\frac{30}{73} : 10$ | j) $\frac{4}{5} : 4$ | m) $\frac{2}{7} : 5$ |
| b) $\frac{6}{11} : 3$ | e) $\frac{4}{5} : 2$ | h) $16\frac{8}{9} : 4$ | k) $\frac{7}{11} : 3$ | n) $\frac{3}{5} : 11$ |
| c) $\frac{8}{15} : 4$ | f) $6\frac{9}{10} : 3$ | i) $14\frac{7}{30} : 7$ | l) $\frac{7}{15} : 10$ | o) $7\frac{1}{2} : 4$ |



Czy już umiem?

I Podaj odwrotność liczby.

- a) $\frac{3}{4}$ b) 12 c) $\frac{7}{9}$

II Podaj odwrotność liczby.

- a) $5\frac{3}{4}$ b) $12\frac{1}{3}$ c) $2\frac{7}{9}$

III Jaka liczba nie ma odwrotności? Jaka liczba jest równa swojej odwrotności?



Na dobry początek

Ile części?

- ▶ Narysuj trzy koła. Wyobraź sobie, że są to pizze. Wytnij je i podziel na porcje wielkości $\frac{1}{4}$ pizzy. Policz, ile jest porcji. Zapisz działanie $3 : \frac{1}{4}$ i podaj jego wynik.
- ▶ Ponownie narysuj i wytnij trzy papierowe pizze. Tym razem podziel je na porcje wielkości $\frac{3}{4}$ pizzy. Ile porcji teraz otrzymasz? Zapisz działanie $3 : \frac{3}{4}$ i podaj jego wynik.



Pytania i polecenia

Przyjrzyj się podzielonym pizzom na zdjęciu. Ile osób może się poczęstować, jeżeli każda ma dostać $\frac{2}{6}$ pizzy?

Przykłady

- Pizzę podzielono na porcje po $\frac{1}{6}$ pizzy.
Ile porcji otrzymano?

$$1 : \frac{1}{6} = 6$$

Odp. Otrzymano 6 porcji.



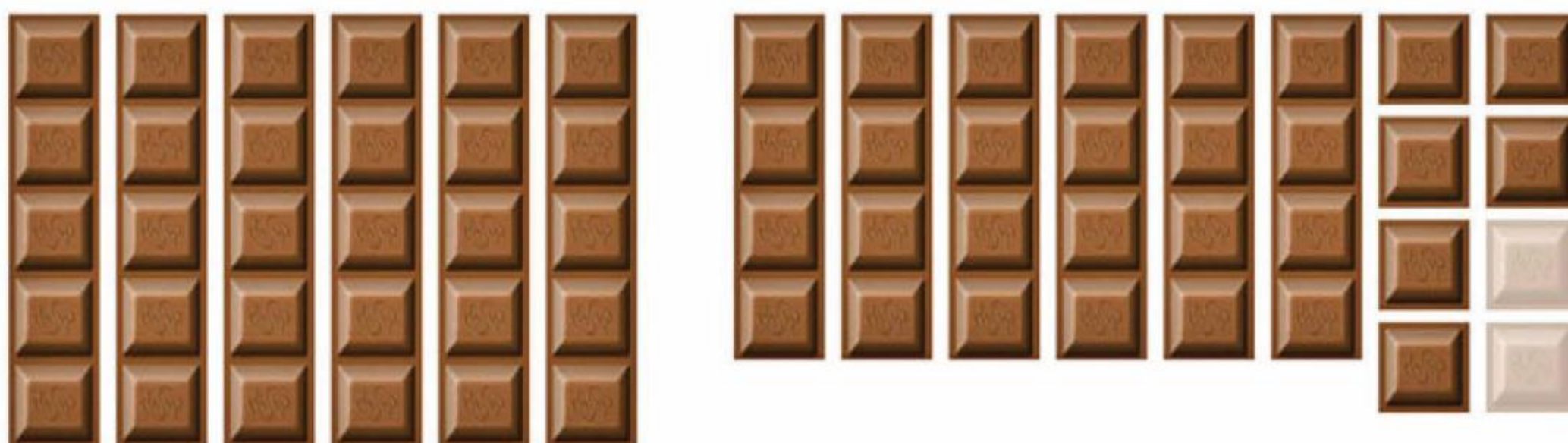
- Trzy jabłka podzielono na porcje po $\frac{3}{4}$ jabłka. Ile porcji otrzymano?



$$3 : \frac{3}{4} = 4$$

Odp. Otrzymano 4 porcje.

- Hania ma sześć batoników. Chce je podzielić na porcje po $\frac{4}{5}$ batonika (czyli po 4 kawałki). Ile porcji otrzyma?



$$6 : \frac{4}{5} = 7\frac{1}{2}$$

Odp. Hania otrzyma $7\frac{1}{2}$ porcji.

Popatrz na działania, które wykonano w przykładach, i porównaj je z zapisanymi obok.

$$1 : \frac{1}{6} = 6$$

$$1 \cdot 6 = 6$$

$$3 : \frac{3}{4} = 4$$

$$\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{4}{\cancel{3}_1} = 4$$

$$6 : \frac{4}{5} = 7\frac{1}{2}$$

$$6 \cdot \frac{5}{4} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \cdot 5}{\cancel{4}_2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$$

Dzielenie przez liczbę można zastąpić mnożeniem przez odwrotność tej liczby.

Przykłady

poziom A

Oblicz.

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}$$

$$\frac{5}{7} : 2 = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{14}$$

$$\frac{4}{7} : \frac{3}{5} = \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 3} = \frac{20}{21}$$

poziom B

Oblicz.

$$\frac{3}{7} : \frac{2}{7} = \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{2} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{7}_1}{\cancel{7}_1 \cdot 2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \quad (\text{skracamy przez } 7)$$

$$\frac{4}{15} : \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \cdot \frac{5}{2} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}}_1}{\cancel{15}_3 \cdot \cancel{2}_1} = \frac{2}{3} \quad (\text{skracamy przez } 2 \text{ i przez } 5)$$

$$10 : \frac{2}{7} = 10 \cdot \frac{7}{2} = \frac{\overset{5}{\cancel{10}} \cdot 7}{\cancel{2}_1} = 35 \quad (\text{skracamy przez } 2)$$

Dobra rada

Po zamianie dzielenia na mnożenie sprawdź, czy ułamki można skrócić.

poziom C

Oblicz. Pamiętaj, że liczby mieszane trzeba zamienić na ułamki.

$$\frac{3}{7} : 2\frac{1}{7} = \frac{3}{7} : \frac{15}{7} = \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{15} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{7}_1}{\cancel{7}_1 \cdot \overset{5}{15}} = \frac{1}{5}$$

$$1\frac{2}{3} : 3\frac{2}{5} = \frac{5}{3} : \frac{17}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{17} = \frac{5 \cdot 5}{3 \cdot 17} = \frac{25}{51}$$



Zadania

- 1** Oblicz. ► Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

a) $\frac{2}{7} : \frac{5}{9}$

c) $\frac{1}{11} : \frac{7}{10}$

e) $\frac{1}{9} : \frac{4}{5}$

g) $\frac{4}{9} : \frac{5}{7}$

b) $\frac{3}{5} : \frac{7}{11}$

d) $\frac{5}{7} : \frac{3}{8}$

f) $\frac{4}{7} : \frac{5}{9}$

h) $\frac{4}{7} : \frac{3}{11}$

poziom B

a) $\frac{1}{9} : \frac{5}{6}$

c) $\frac{4}{9} : \frac{6}{7}$

e) $\frac{2}{7} : \frac{4}{9}$

g) $\frac{3}{7} : \frac{9}{14}$

b) $\frac{4}{25} : \frac{2}{15}$

d) $\frac{4}{7} : \frac{2}{21}$

f) $\frac{2}{5} : \frac{6}{15}$

h) $\frac{4}{7} : \frac{2}{3}$

poziom C

a) $1\frac{2}{3} : 2\frac{1}{6}$

c) $2\frac{4}{7} : 2\frac{1}{4}$

e) $6\frac{2}{3} : 2\frac{1}{2}$

g) $1\frac{7}{8} : 3\frac{3}{4}$

b) $1\frac{3}{5} : 7\frac{1}{5}$

d) $1\frac{3}{10} : 1\frac{1}{12}$

f) $2\frac{2}{5} : 1\frac{3}{5}$

h) $4\frac{2}{5} : 2\frac{3}{4}$

MISTRZ

Oblicz. Skróć przed wykonaniem mnożenia.

a) $\frac{13}{25} : \frac{39}{425}$

c) $26\frac{1}{5} : \frac{262}{15}$

b) $9\frac{4}{5} : 6\frac{8}{15}$

d) $14\frac{3}{10} : 28\frac{6}{10}$

- **2** Dwadzieścia pięć cukierków waży $\frac{3}{4}$ kg. Ile waży jeden cukierek? Podaj odpowiedź w kilogramach, a następnie w dekagramach.
- **3** Poniżej zapisano dzielenie wykonane bez skracania. Rozwiąż samodzielnie ten sam przykład, pamiętając o skracaniu. Sprawdź, czy otrzymany wynik jest taki sam.

a) $\frac{15}{21} : \frac{3}{35} = \frac{15}{21} \cdot \frac{35}{3} = \frac{15 \cdot 35}{21 \cdot 3} = \frac{525}{63} = \frac{175}{21} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$

b) $\frac{17}{26} : \frac{34}{39} = \frac{17}{26} \cdot \frac{39}{34} = \frac{17 \cdot 39}{26 \cdot 34} = \frac{663}{884} = \frac{3}{4}$

W którym przypadku obliczenia były łatwiejsze?

- **4** Dobierzcie się w pary. Rozłóżcie karty z gry „Loteryjka” ze strony 151. Na zmianę wybieracie po dwie karty i podajecie wynik dzielenia przedstawionych na nich ułamków. Zapisujecie wykonane działania.
- **5** W 1,5-litrowym dzbanku było $\frac{2}{3}$ litra soku. Dorotka rozlała sok po równo do 4 szklanek. Ile soku jest w każdej szklance?

- 6 Rozwiąż równanie i sprawdź rozwiązanie.

a) $\frac{2}{3} : x = \frac{10}{21}$

c) $x : \frac{1}{4} = 12$

e) $x : \frac{2}{3} = \frac{3}{8}$

b) $\frac{4}{7} : x = \frac{4}{35}$

d) $\frac{2}{5} : x = 2$

f) $\frac{3}{7} : x = 1$

- 7 Na podwieczorek kupiono $3\frac{3}{4}$ kg czereśni po 8 zł za kilogram i podzielono je na 30 jednakowych porcji. Ile waży jedna porcja? Ile kosztuje jedna porcja?



- 8 Dwanaścioro turystów przygotowało napój z półtora litra soku i $2\frac{1}{2}$ litra wody. Ile dostanie każda osoba, jeśli napój podzielimy po równo? Podaj odpowiedź w litrach.
- 9 W dwudziestolitrowym garnku ugotowano $12\frac{1}{2}$ litra kompotu.
- a) Kompot będzie rozlewany do dzbanków o pojemności $1\frac{1}{4}$ litra każdy. Ile dzbanków trzeba przygotować, aby rozlać do nich cały ugotowany kompot?
- b) Załóżmy, że porcja kompotu to $\frac{1}{5}$ litra. Ile takich porcji można otrzymać z przygotowanego kompotu?
- 10 Alina zebrała $2\frac{1}{2}$ koszyka malin, a Balladyna $1\frac{3}{4}$ koszyka.
- a) O ile więcej zebrała Alina?
- b) Ile razy więcej zebrała Alina?
- 11 Jacek podzielił pewną liczbę naturalną przez pewien ułamek i otrzymał iloraz dwa razy większy od dzielnej. Przez jaki ułamek dzielił?

- 🏆 12 W poniższym działaniu jednakowe figury oznaczają jednakowe cyfry, a różne figury – różne cyfry. Znajdź wynik.

a) $\frac{\triangle}{\bullet} : \frac{\triangle\triangle}{\bullet}$

b) $1\frac{\diamond}{\square} : \left(\frac{\diamond}{\square} + \frac{\diamond}{\diamond}\right)$

- 🏆 13 Przerysuj do zeszytu schemat dzielenia:

$$\frac{\boxed{?}}{\boxed{?}} : \frac{\boxed{?}}{\boxed{?}}$$

Wpisz w miejsce $\boxed{?}$ cyfry 6, 7, 8, 9 – każdą raz i tak, aby wynik dzielenia był jak największy. Podaj dwa rozwiązania.



Dla dociekliwych

Popatrz na przykłady.

$$2 : 6 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$5\frac{7}{100} : 15\frac{21}{100} = \frac{1}{3}$$

$$40004 : 120012 = \frac{40004}{120012} = \frac{1}{3}$$

1 Oblicz.

a) $2222\frac{11}{117} : 4444\frac{22}{117}$

c) $222\frac{4}{17} : 333\frac{6}{17}$

b) $133\frac{5}{222} : 399\frac{15}{222}$

d) $4\frac{231}{1000} : 12\frac{693}{1000}$

2 Jaką liczbę należy wstawić w miejsce x , aby otrzymać równość?

a) $333\frac{222}{569} : x = \frac{1}{2}$

b) $x : 102\frac{9}{55} = \frac{1}{3}$

c) $303\frac{15}{68} : x = \frac{3}{7}$

3 a) Oblicz wynik mnożenia $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$.

b) Ułóż inne mnożenie ułamków złożonych z cyfr 2, 3, 5, 7, które da taki sam wynik.

c) Ułóż dwa dzielenia ułamków złożonych z cyfr 2, 3, 5, 7, z których każde da taki sam wynik, jak obliczony wcześniej.

4 Używając tylko cyfr 2, 3, 5 i 7, ułóż dwa mnożenia i dwa dzielenia ułamków takie, że wynik każdego z nich będzie liczbą odwrotną do wyniku z zadania 3.



Czy już umiem?

I Oblicz.

a) $\frac{3}{4} : \frac{1}{7}$

b) $\frac{7}{9} : \frac{7}{9}$

c) $\frac{4}{15} : \frac{8}{9}$

II Oblicz.

a) $5\frac{5}{6} : 2\frac{1}{3}$

b) $2\frac{2}{3} : 3\frac{1}{5}$

c) $4\frac{3}{8} : \frac{5}{8}$

III Mama kupiła na przyjęcie imieninowe $2\frac{1}{4}$ kg lodów i podzieliła je na porcje po $\frac{3}{8}$ kg lodów w każdej. Ile takich porcji przygotowała?



Na dobry początek

Co z tym zrobić?

- ▶ Rozłóżcie karty z zabawy „Loteryjka” ze strony 151.
- ▶ Wylosuj dwa ułamki. Druga osoba niech wybierze działanie, które chce na nich wykonać (dodawanie, odejmowanie, mnożenie lub dzielenie), i niech obliczy wynik tego działania. Sprawdź, czy wynik jest poprawny.
- ▶ Zapiszcie działanie. Potem zamieńcie się rolami.

Aby wykonać działania na ułamkach, zazwyczaj trzeba najpierw zapisać te ułamki we właściwej postaci. Najczęściej stosowane operacje to:

sprowadzanie do wspólnego mianownika

potrzebne przy
dodawaniu i odejmowaniu

niepotrzebne przy
mnożeniu i dzieleniu

zamiana liczb mieszanych na ułamki niewłaściwe

niepotrzebna przy
dodawaniu i odejmowaniu

potrzebna przy
mnożeniu i dzieleniu

Potęgowanie ułamków

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{27}{125}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{243}$$

Uwaga. Jeśli chcesz podnieść ułamek do potęgi, musisz zapisać go w nawiasie.

$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$, ale $\frac{2^5}{3} = \frac{32}{3}$, bo kreska ułamkowa oznacza dzielenie, a potęgowanie wykonuje się przed dzieleniem!

„Sprytne” działania na ułamkach

Przykłady

• Dodawanie

Wykonując serię dodawań ułamków, można najpierw dodawać ułamki o tym samym mianowniku lub te, które łatwo sprowadzić do wspólnego mianownika.

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{3} + 1\frac{3}{4} + 3\frac{1}{3} = \frac{3}{7} + 1\frac{3}{4} + \underline{4} = \frac{12}{28} + 1\frac{21}{28} + 4 = 5\frac{33}{28} = 6\frac{5}{28}$$

• Mnożenie i dzielenie

Wykonując serię mnożeń i dzieleni ułamków, najlepiej jest przyjąć następującą kolejność czynności:

1. zamienić wszystkie liczby mieszane na ułamki,
2. zamienić każde dzielenie na mnożenie przez odwrotność,
3. zapisać całe działanie, stosując jedną kreskę ułamkową,
4. poskracać,
5. obliczyć wynik.

$$\frac{3}{5} : \frac{2}{13} \cdot 2\frac{1}{4} : 2\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{13} = \frac{3}{5} : \frac{2}{13} \cdot \frac{9}{4} : \frac{21}{8} \cdot \frac{7}{13} = \frac{3}{5} \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{8}{21} \cdot \frac{7}{13} =$$

$$= \frac{\cancel{3}^1 \cdot \cancel{13}^1 \cdot 9 \cdot \cancel{8}^1 \cdot \cancel{7}^1}{5 \cdot \cancel{2}_1 \cdot \cancel{4}_1 \cdot \cancel{21}_1 \cdot \cancel{13}_1} = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}$$

• Kolejność wykonywania działań

Wykonując obliczenia, pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

$$3\frac{2}{5} - 2\frac{2}{3} : 5\frac{1}{3} =$$

Dzielenie wykonujemy przed odejmowaniem; żeby podzielić, musimy zamienić liczby mieszane na ułamki.

$$= 3\frac{2}{5} - \frac{8}{3} : \frac{16}{3} =$$

Zamiast dzielić, mnożymy przez odwrotność.

$$= 3\frac{2}{5} - \frac{\cancel{8}^1}{\cancel{3}_1} \cdot \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{16}_2} =$$

Po skróceniu od razu widać wynik mnożenia.

$$= 3\frac{2}{5} - \frac{1}{2} =$$

Żeby odjąć, musimy znaleźć wspólny mianownik. W liczbie mieszanej zamieniamy tylko ułamek ($\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$, $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$).

$$= 3\frac{4}{10} - \frac{5}{10} =$$

Ponieważ od $\frac{4}{10}$ nie można odjąć $\frac{5}{10}$, zamieniamy jedną całość na ułamek.

$$= 2\frac{14}{10} - \frac{5}{10} = 2\frac{9}{10}$$



Zadania

• 1 Oblicz.

a) $\frac{2}{3} \cdot 0$

c) $\frac{2}{3} \cdot 1$

e) $\frac{2}{3} - 0$

b) $\frac{2}{3} + 0$

d) $\frac{2}{3} + 1$

f) $0 : \frac{2}{3}$

• 2 Oblicz.

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 5$

b) $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \cdot 5$

c) $\frac{4}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}$

d) $3 - \frac{2}{7} + \frac{5}{7}$

•• 3 Oblicz sprytnie.

a) $\frac{2}{5} + 4\frac{3}{7} + \frac{3}{5}$

c) $3\frac{2}{7} + 1\frac{1}{3} + 4\frac{3}{7} + 2\frac{1}{6} + \frac{1}{2}$

b) $4\frac{2}{3} + 2\frac{3}{7} + \frac{1}{3} + \frac{4}{7}$

d) $2\frac{3}{5} + \frac{2}{9} + 3\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{7}{10}$

•• 4 Oblicz sprytnie.

a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{27}$

c) $1\frac{3}{7} : 1\frac{1}{4} \cdot \frac{7}{16}$

b) $2\frac{1}{3} \cdot 4\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{7}$

d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10}$

•• 5 Oblicz.

a) $\frac{2}{15} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}$

b) $(3\frac{2}{9} + 4\frac{5}{6}) \cdot 9$

c) $\frac{2}{3} \cdot (7\frac{4}{20} - 3\frac{3}{4})$

d) $7\frac{4}{5} - 1\frac{1}{5} \cdot 2\frac{1}{2}$

•• 6 Pracujecie w 3-osobowych grupach. Poniżej są zamieszczone cztery serie działań po 3 przykłady. Przykład a) jest najłatwiejszy, c) – najtrudniejszy. Każde z was rozwiązuje inny przykład z pierwszej serii.

Uwaga. Wszystkie przykłady z jednej serii powinny mieć ten sam wynik. Jeśli tak jest – rozwiązujecie kolejną serię działań, jeśli nie – wspólnie szukacie błędu i wyjaśnacie, na czym on polega.

I seria

a) $\frac{3}{5} + \frac{2}{3}$

b) $1\frac{4}{5} : 1\frac{1}{2} + \frac{1}{15}$

c) $2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{3} : 3\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$

II seria

a) $3\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{8}$

b) $(8\frac{1}{6} - 4\frac{29}{30}) \cdot \frac{3}{8}$

c) $2\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{5} : (7\frac{8}{21} - \frac{3}{7} \cdot 11)$

III seria

a) $\frac{7}{9} : \frac{5}{9}$

b) $1\frac{2}{5} : 2\frac{1}{3} + 2\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{11}$

c) $1\frac{3}{4} \cdot (3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{5} + 1\frac{1}{3}) : 1\frac{9}{14} \cdot \frac{1}{7}$

IV seria

a) $4\frac{1}{3} - 1\frac{3}{5}$

b) $1\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{4}{9} \cdot 2\frac{2}{5}$

c) $(3\frac{1}{15} - 1\frac{3}{5}) \cdot 5 - 2 \cdot 3\frac{2}{3} + 13\frac{2}{3} : 5$

- **7** Z ułamków $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$ oraz dowolnych znaków działań i, ewentualnie, nawiasów ułóż wyrażenie. Oblicz jego wartość. Następnie ułóż z tych samych ułamków kilka innych wyrażen. Porównaj swoje wyniki z wynikami innych. Kto uzyskał największy wynik? A kto uzyskał najmniejszy wynik?
- **8** Wybierz i wykonaj jeden z poniższych przykładów. Sprawdź, czy otrzymany wynik jest taki sam jak podany. Jeśli nie, poszukaj błędu i popraw rozwiązanie.

$$4\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{2} - 3\frac{2}{3} \cdot 2\frac{2}{11} = 3\frac{1}{2}$$

$$4\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{11} \cdot 3\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{3} - 3\frac{2}{9} \cdot 3 = 7$$

$$\left(11\frac{2}{7} + 4\frac{5}{7}\right) \cdot \frac{3}{4} + \left(4\frac{1}{5} + 2\frac{3}{5}\right) \cdot 5 + \left(7\frac{1}{3} + 5\frac{2}{3}\right) \cdot 9 = 163$$

$$\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{14} \cdot \frac{15}{20} + \frac{4}{5} \cdot \frac{20}{21} \cdot \frac{7}{2} = 2\frac{19}{24}$$

Jeśli chcesz, możesz ułatwić sobie zadanie, przepisując przykład na osobnej kartce i zapisując wyniki kolejnych obliczeń na karteczkach – jak na rysunku.

$$8\frac{4}{5} \cdot 3\frac{1}{8} - 2\frac{2}{13} : 2\frac{9}{13}$$

$$8\frac{4}{5} \cdot 3\frac{1}{8} - 2\frac{2}{13} : 2\frac{9}{13} =$$

$$\frac{44}{5} \cdot \frac{25}{8} - \frac{28}{13} : \frac{35}{13} = \frac{44}{5} \cdot \frac{25}{8} - \frac{28}{13} : \frac{35}{13} =$$

$$\frac{55}{2} - \frac{28}{13} \cdot \frac{13}{35} = \frac{55}{2} - \frac{28}{13} \cdot \frac{13}{35} =$$

$$27\frac{1}{2} - \frac{4}{5} = 27\frac{1}{2} - \frac{4}{5} =$$

$$26\frac{3}{2} - \frac{4}{5} = 26\frac{3}{2} - \frac{4}{5} =$$

$$26\frac{15}{10} - \frac{8}{10} = 26\frac{15}{10} - \frac{8}{10} =$$

$$26\frac{7}{10} - \frac{1}{10} = 26\frac{7}{10}$$

- ... 9 Które liczby można, a których nie można skrócić w wyrażeniu $\frac{2}{3} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{18}$?
Znajdź w tabeli właściwe odpowiedzi i odczytaj hasło.

	2 i 6	5 i 10	3 i 6	18 i 10	18 i 6	6 i 10	3 i 18	2 i 18
Można skrócić	<i>K</i>	<i>A</i>	<i>W</i>	<i>E</i>	<i>W</i>	<i>S</i>	<i>U</i>	<i>Y</i>
Nie można skrócić	<i>M</i>	<i>I</i>	<i>Z</i>	<i>O</i>	<i>K</i>	<i>R</i>	<i>Z</i>	<i>E</i>

- ... 10 Które liczby można, a których nie można skrócić w wyrażeniu $2\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{15}{6}$?
Znajdź w tabeli właściwe odpowiedzi i odczytaj hasło.

	3 i 9	9 i 15	10 i 15	2 i 10	10 i 6	2 i 6	15 i 6	5 i 10
Można skrócić	<i>W</i>	<i>Z</i>	<i>Ó</i>	<i>R</i>	<i>L</i>	<i>W</i>	<i>I</i>	<i>C</i>
Nie można skrócić	<i>D</i>	<i>N</i>	<i>I</i>	<i>E</i>	<i>R</i>	<i>N</i>	<i>A</i>	<i>K</i>

- ... 11 Magda zebrała $\frac{3}{4}$ litra jagód, Tomek $1\frac{1}{3}$ litra, a Małgosia $1\frac{1}{4}$ litra. W domu dzieci wsypały zebrane jagody do miski. Mama wykorzystała $\frac{2}{5}$ zebranych jagód do ciasta, które upiekła na deser. Ile litrów jagód zużyła mama do ciasta? Ile litrów jagód zostało w misce?



- ... 12 Uczniowie klasy Vb stanowią $\frac{2}{25}$ wszystkich uczniów szkoły. Trzecia część uczniów tej klasy wystąpiła w szkolnym przedstawieniu. Jaką część uczniów szkoły stanowili grający w przedstawieniu aktorzy z Vb?
- ... 13 Krysia postanowiła upiec chleb. Zmieszała $1\frac{1}{2}$ kg mąki, $\frac{1}{4}$ kg siemienia lnianego, $\frac{1}{12}$ kg ziaren słonecznika, $\frac{1}{20}$ kg soli. Dodała do tego $\frac{1}{10}$ kg drożdży i $1\frac{2}{3}$ litra wody, wyrobiła i rozdzieliła ciasto na 3 blaszki. Ile waży ciasto w jednej blaszce? (Założ, że w każdej blaszce jest tyle samo ciasta).
Uwaga. 1 litr wody waży 1 kg.



Dla dociekliwych

Szukając wspólnego mianownika, możesz wykorzystać rozkład liczb na czynniki pierwsze. Ułatwi on znalezienie najmniejszego wspólnego mianownika.

Ułamki, dla których szukamy wspólnego mianownika	Mianowniki			Najmniejszy wspólny mianownik
$\frac{1}{6}$ i $\frac{1}{14}$	$6 = 2 \cdot 3$	$14 = 2 \cdot 7$	$\begin{array}{c} 6 \\ 3 \cdot \underbrace{2 \cdot 7}_{14} \end{array}$	$3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$
$\frac{1}{15}$ i $\frac{3}{20}$	$15 = 3 \cdot 5$	$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$	$\begin{array}{c} 15 \\ 3 \cdot \underbrace{5 \cdot 2 \cdot 2}_{20} \end{array}$	$3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 = 60$

- 1 Znajdź najmniejszy wspólny mianownik podanych ułamków, wiedząc, że $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

a) $\frac{1}{210}$ i $\frac{1}{9}$

c) $\frac{1}{210}$ i $\frac{1}{8}$

e) $\frac{1}{210}$ i $\frac{1}{490}$

b) $\frac{1}{210}$ i $\frac{1}{15}$

d) $\frac{1}{210}$ i $\frac{1}{140}$

- 2 Znajdź najmniejszy wspólny mianownik podanych ułamków, korzystając z rozkładu ich mianowników na czynniki pierwsze.

a) $\frac{3}{16}$ i $\frac{1}{360}$

b) $\frac{3}{21}$ i $\frac{4}{15}$

c) $\frac{2}{110}$ i $\frac{11}{125}$



Czy już umiem?

I Oblicz.

a) $\frac{3}{8} + \frac{5}{6}$

b) $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6}$

c) $\frac{3}{8} : \frac{5}{6}$

d) $\frac{5}{6} : \frac{3}{8}$

II Oblicz.

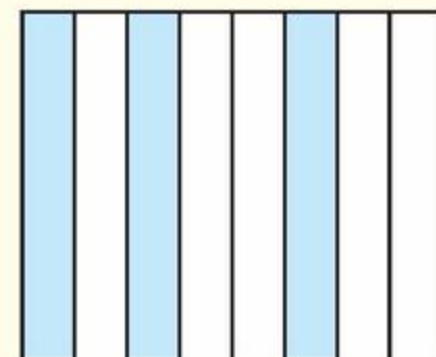
a) $2\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$

b) $3\frac{1}{5} \cdot (5\frac{1}{4} - 2\frac{3}{4})$

- III Mendel to $\frac{1}{4}$ kopy, tuzin to $\frac{4}{5}$ mendla. Jaką część kopy jest tuzin? Rozwiąż to zadanie, korzystając tylko z podanych w nim informacji, a następnie dowiedz się, ile to jest: tuzin, mendel i kopa.

Powtórzenie przed klasówką

- 1 Jaką część prostokąta zamalowano?



- 2 Zamień liczbę mieszaną na ułamek niewłaściwy.

a) $2\frac{1}{2}$

b) $3\frac{4}{5}$

c) $9\frac{3}{10}$

- 3 Zamień ułamek na liczbę mieszaną.

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{5}{3}$

c) $\frac{15}{4}$

- 4 Jaką liczbę należy wstawić w miejsce gwiazdki, żeby równość była prawdziwa?

a) $\frac{3}{4} = \frac{*}{12}$

b) $\frac{10}{24} = \frac{*}{12}$

c) $\frac{1}{2} = \frac{*}{12}$

d) $\frac{50}{120} = \frac{*}{12}$

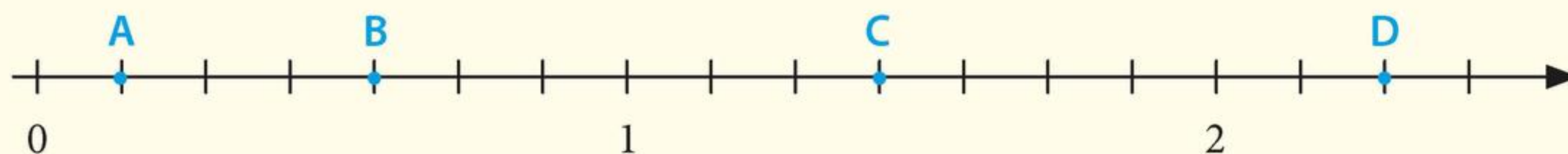
- 5 Oblicz.

a) $\frac{2}{5} + \frac{3}{5}$

b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

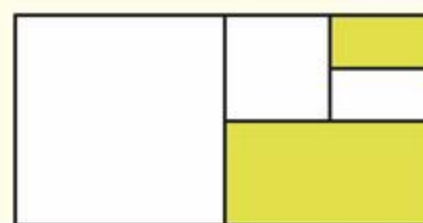
c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}$

- 6 Jakie liczby oznaczono na osi literami?



- 7 Michał zebrał $\frac{2}{9}$ litra poziomek, Krzys $\frac{4}{9}$ litra, a Mateusz $\frac{5}{9}$ litra. Czy trzej przyjaciele zebrali razem mniej, czy więcej niż litr poziomek?

- 8 Jaką część prostokąta zamalowano?



- 9 Przekształć odpowiednio podane liczby i wskaż, która z nich jest większa.

a) $\frac{5}{7}$ czy $\frac{7}{9}$

b) $\frac{15}{12}$ czy $1\frac{1}{5}$

c) $\frac{5}{12}$ czy $\frac{3}{8}$

- 10 Oblicz.

a) $\frac{4}{7} + \frac{3}{4}$

b) $3\frac{2}{7} - 1\frac{5}{7}$

c) $\frac{5}{12} + \frac{9}{20}$

d) $\frac{3}{5} : \frac{4}{7}$

- 11 Oblicz, pamiętając o skracaniu.

a) $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$

b) $\frac{4}{21} : \frac{3}{14}$

- 12 Na klasową wycieczkę pojechało 30 uczniów. Po południu uczniowie mieli czas wolny. Wtedy $\frac{1}{3}$ klasy poszła grać w piłkę nożną, $\frac{2}{5}$ klasy wybrało się na spacer, a pozostali czytali książki.

a) Jaka część klasy czytała książki?

b) Ile osób poszło na spacer?

- 13 Oblicz.

a) $5\frac{3}{8} - 3\frac{5}{6}$

c) $145\frac{3}{10} - 142\frac{7}{15}$

e) $3\frac{2}{9} : 19\frac{1}{3}$

b) $3\frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{2}{9} + \frac{1}{3}$

d) $2\frac{2}{7} \cdot 2\frac{5}{8}$

- 14 Oblicz.

a) $1\frac{3}{7} - \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3}$

b) $(\frac{2}{5} + \frac{3}{4}) : 6\frac{2}{3}$

- 15 Jaką literą oznaczono na osi podaną liczbę.



a) $\frac{13}{12}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{3}{2}$

- 16 Oblicz sprytnie.

a) $5\frac{4}{9} + 2\frac{7}{17} + 1\frac{2}{9} + 8\frac{10}{17} + \frac{1}{3}$

b) $1\frac{5}{13} \cdot \frac{5}{9} \cdot 5\frac{1}{5}$

- 17 W dzbanku zmieszano ćwierć litra soku oraz dwa i pół litra wody. Otrzymany napój rozlano po równo do 11 szklanek. Ile napoju jest w każdej szklance?

- 18 Oblicz.

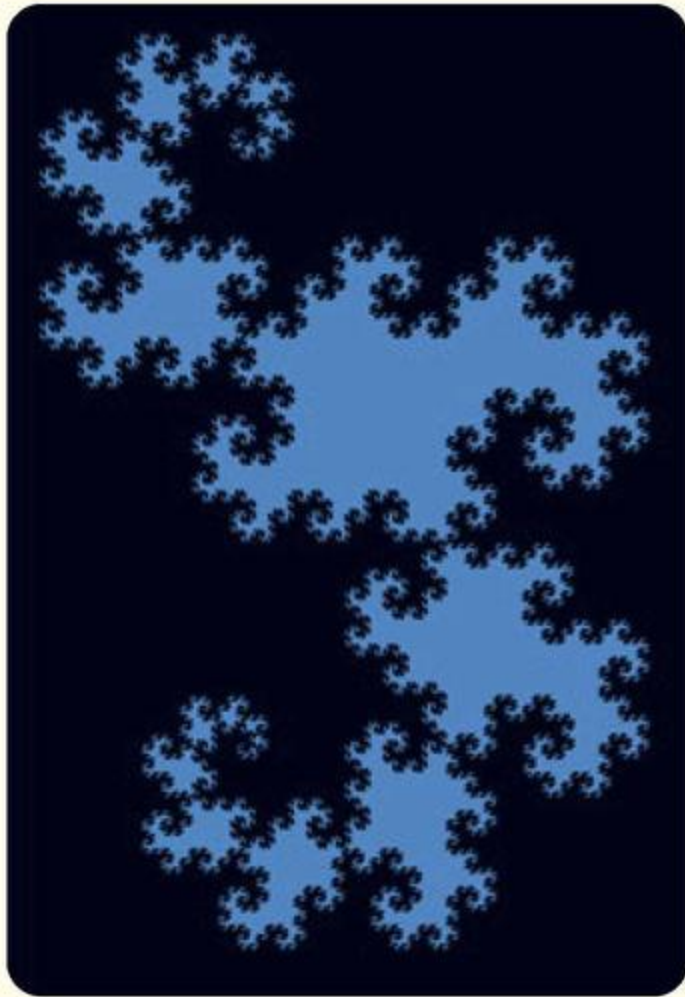
$\frac{3}{14} \cdot (1 + 3\frac{1}{5} - 4\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{7} - 1)$

- 19 Oblicz $\frac{2}{3}$ liczby $1\frac{2}{7}$.

Zadania na temat...

Fraktale

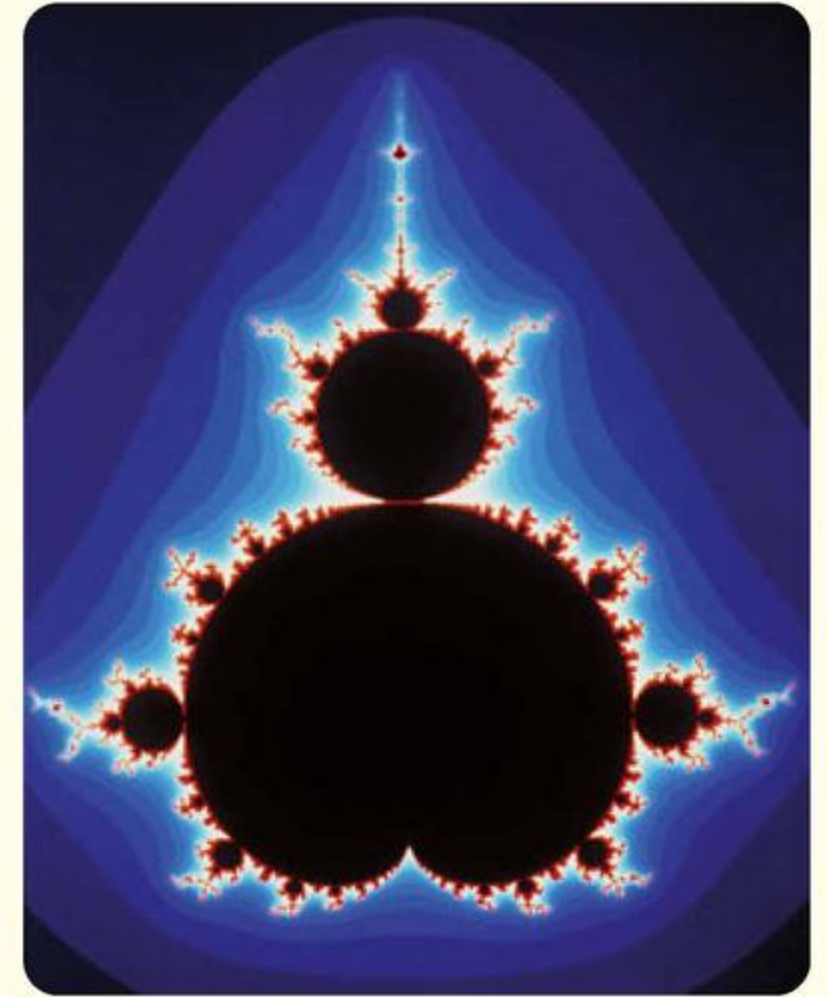
Obejrzyj uważnie poniższe ilustracje.



smok Heighwaya

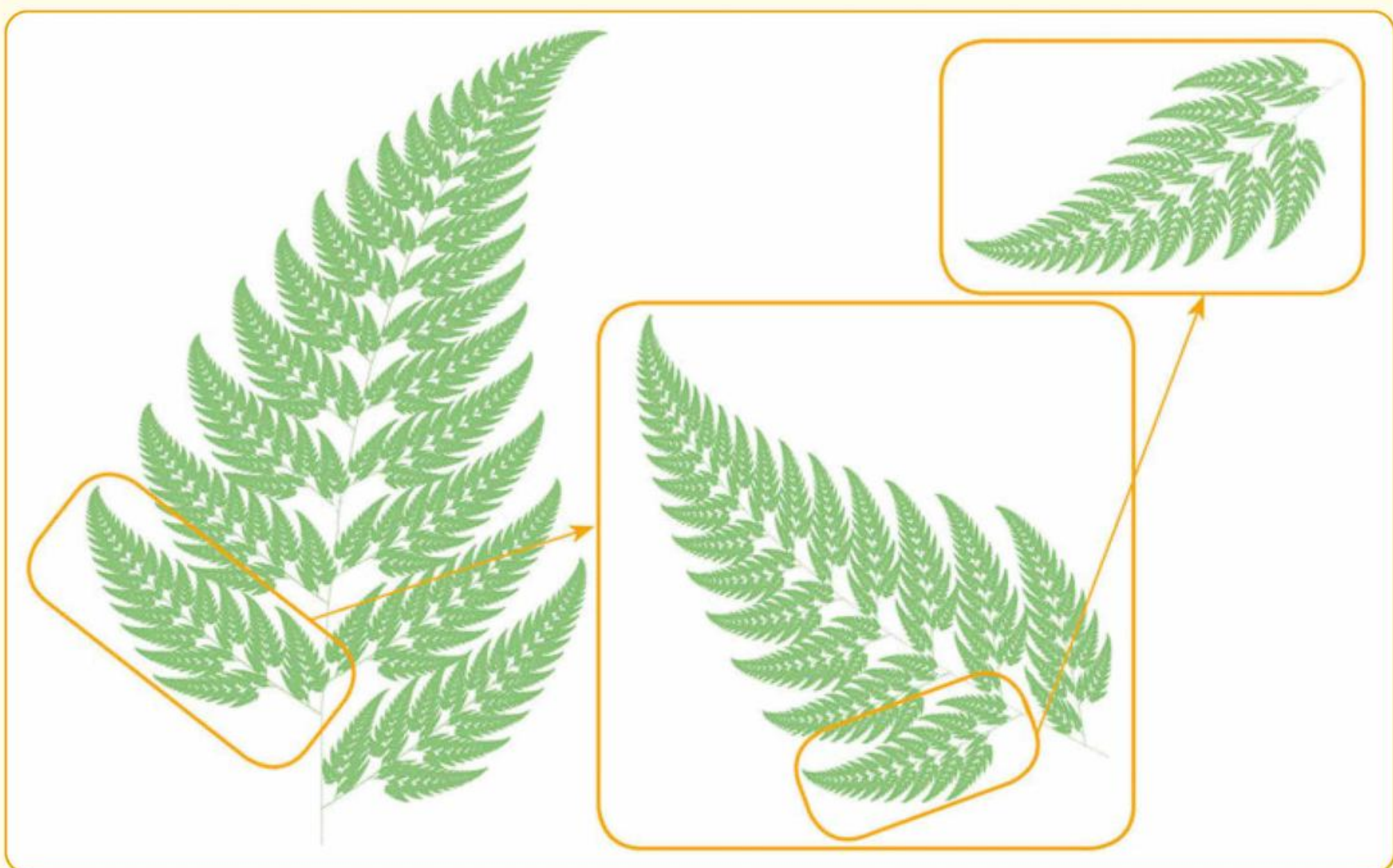


paproć Barnsleya



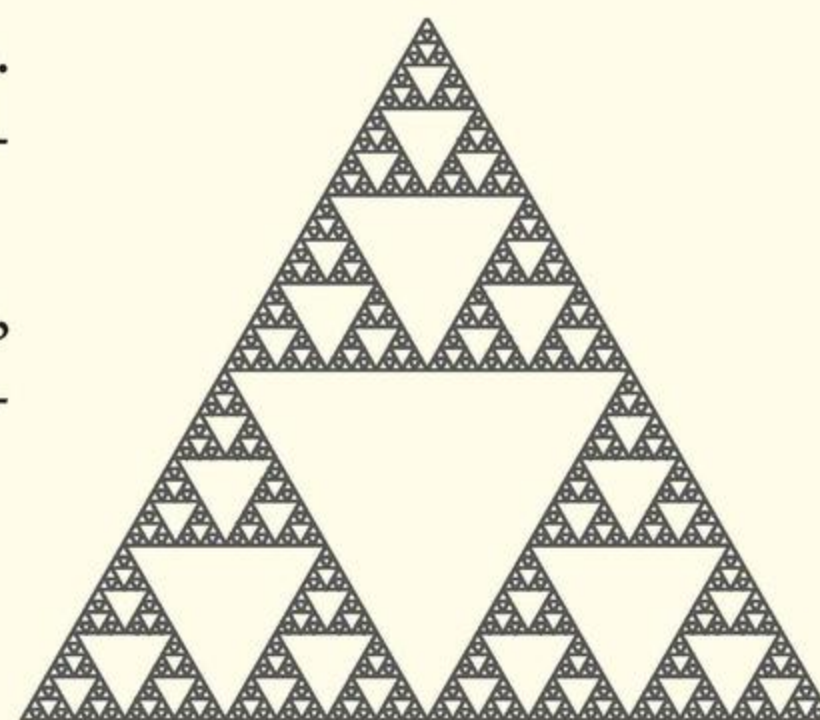
żuk Mandelbrota

A teraz przyjrzyj się poniższym ilustracjom. Przedstawiają one kolejne powiększenia fragmentu liścia paproci Barnsleya.

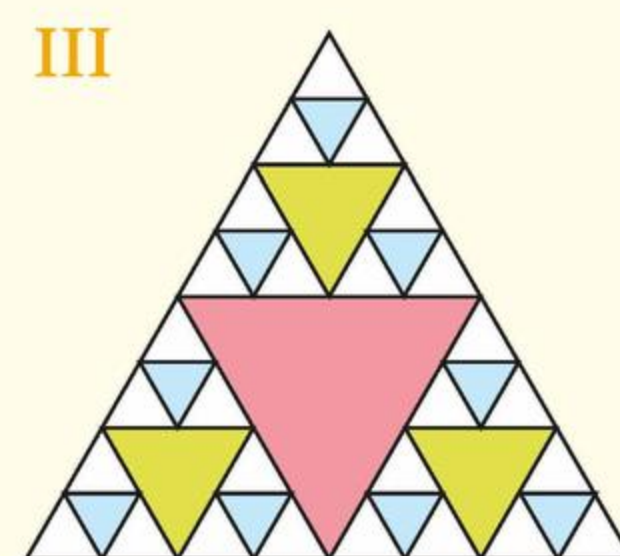
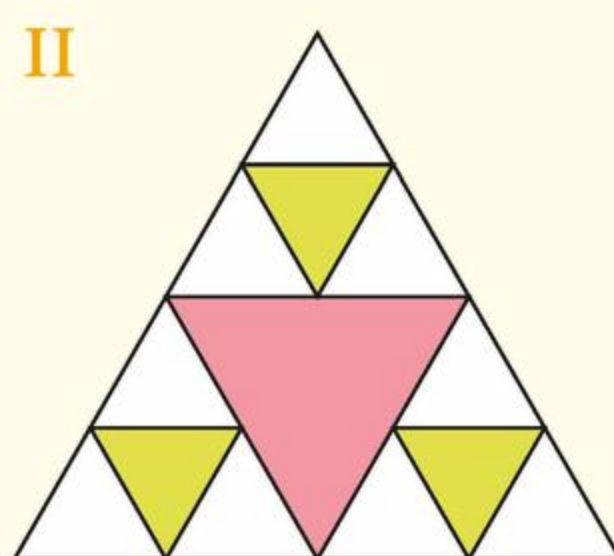
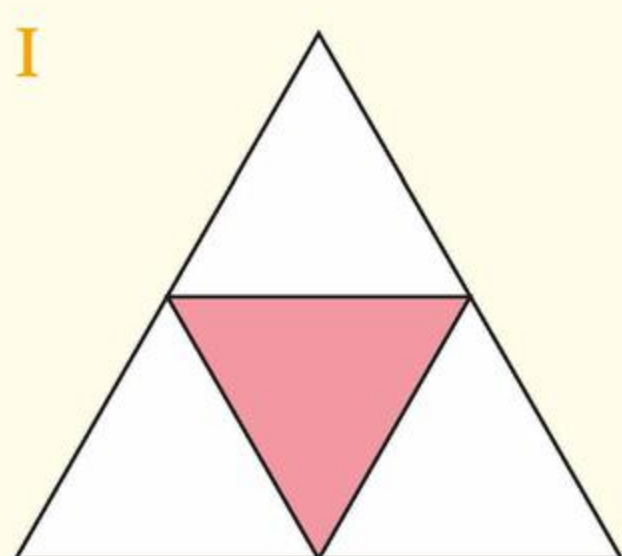


Fragment liścia paproci przypomina cały liść. Tę własność nazywamy samopodobieństwem. Figury o tej własności to **fraktale**. Fraktale to figury samopodobne.

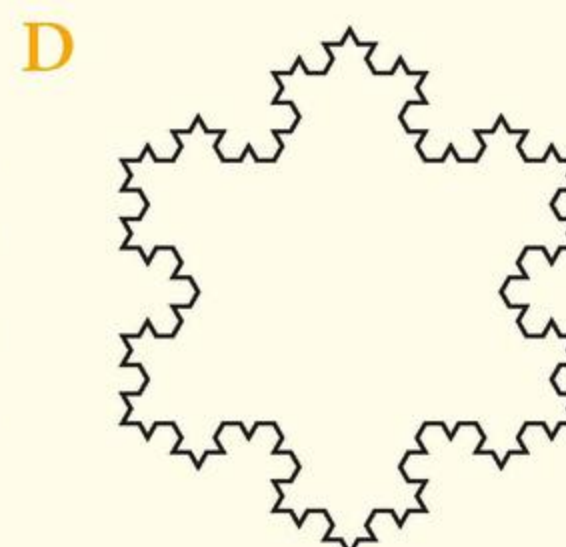
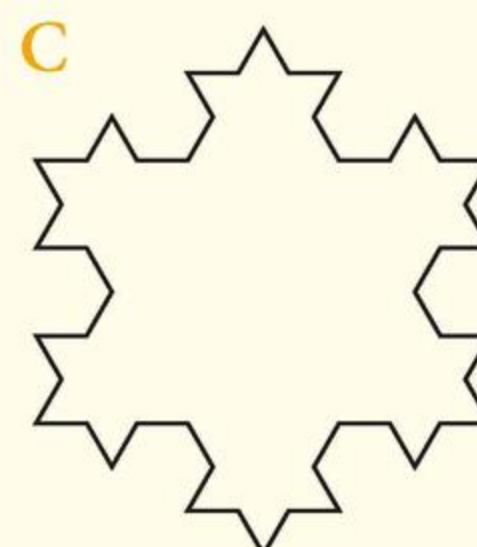
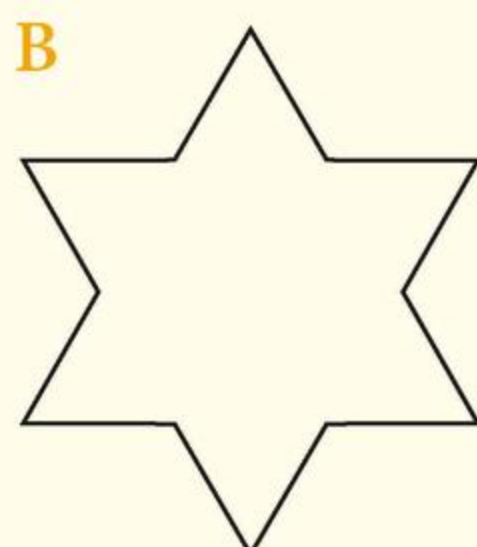
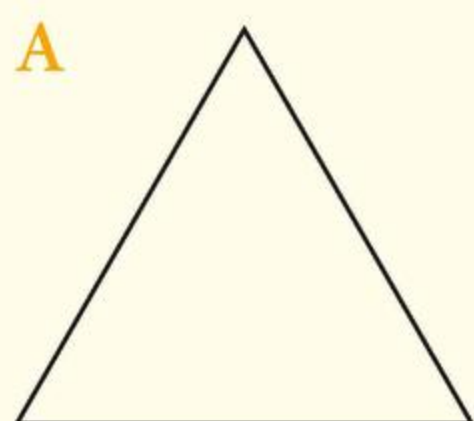
Oto fraktal zwany **trójkątem Sierpińskiego**. Powstaje on z trójkąta równobocznego w wyniku usuwania w kolejnych krokach jego części. Aby otrzymać ostateczny kształt fraktala, należałoby powtarzać te kroki w nieskończoność.



My narysujemy tylko cztery pierwsze figury. Zaczynamy od trójkąta równobocznego. Kolorami oznaczamy fragmenty, które usuwamy w kolejnych krokach.



Inny fraktal, **śnieżynka Kocha**, także powstaje z trójkąta równobocznego. Popatrz, w jaki sposób.



- 1 Każdy z trójkątów I, II, III powyżej jest podzielony na części. Przyjrzyj się im i odpowiedz na pytania.
 - a) Z ilu równych części składa się trójkąt I? Jaką częścią trójkąta I jest czerwony trójkąt?
 - b) Ile zielonych trójkątów potrzeba, aby ułożyć cały trójkąt II? Jaką częścią trójkąta II jest zielony trójkąt?
 - c) Ile niebieskich trójkątów potrzeba, aby ułożyć cały trójkąt III? Jaką częścią trójkąta III jest niebieski trójkąt?

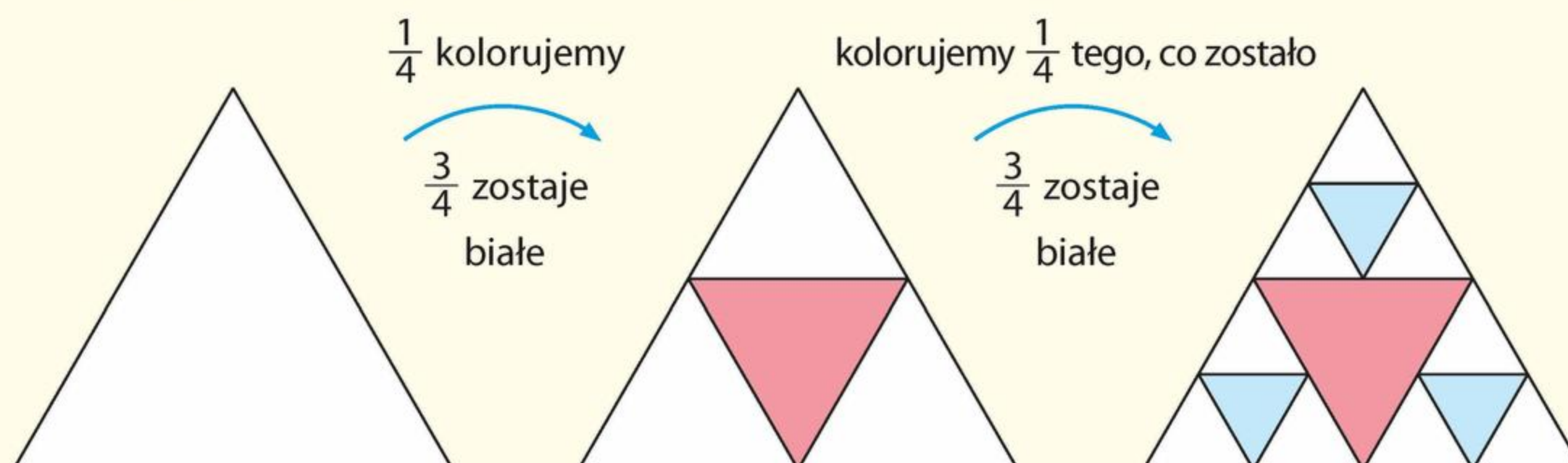


Waław Sierpiński
(1882–1969)

wybitny polski matematyk,
profesor Uniwersytetu
Warszawskiego

- 2 Przyjrzyj się rysunkowi III na stronie 206 i odpowiedz na pytania.
- Jaka część dużego trójkąta jest czerwona, jaka jest zielona, a jaka niebieska?
 - Jakiej części dużego trójkąta nie usunięto (jaka część pozostała biała)?
 - Jaka część dużego trójkąta jest kolorowa? Oblicz to dwoma sposobami: za pierwszym razem korzystając z odpowiedzi na pytanie w podpunkcie a), a za drugim razem z odpowiedzi na pytanie w podpunkcie b).

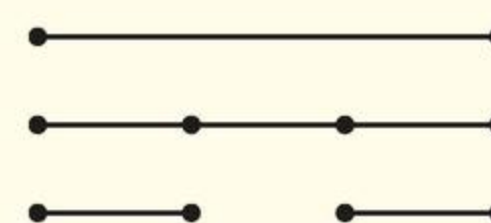
- 3 Przyjrzyj się schematowi.



- Ze schematu wynika, że na rysunku II na stronie 206 białe pozostało $\frac{3}{4}$ z $\frac{3}{4}$ dużego trójkąta, czyli $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ dużego trójkąta. Sprawdź na rysunku, czy obliczony wynik jest poprawny.
- Oblicz podobnie, jaka część trójkąta zostanie biała na rysunku III na stronie 206.

- 4 Przy rysowaniu śnieżynki Kocha każdy odcinek na brzegu figury zmienia się w kolejnym kroku tak, jak pokazano na poniższych rysunkach.

- Odcinek na pierwszym rysunku ma długość 1 cala. Odcinek ten dzielimy na trzy równe części. Jaką długość (w calach) ma każda z tych części?



- Cztery odcinki na ostatnim rysunku są równe. Jaką długość (w calach) ma ta linia?



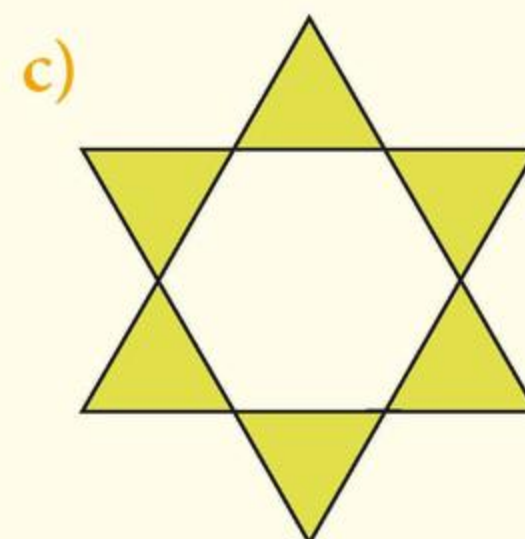
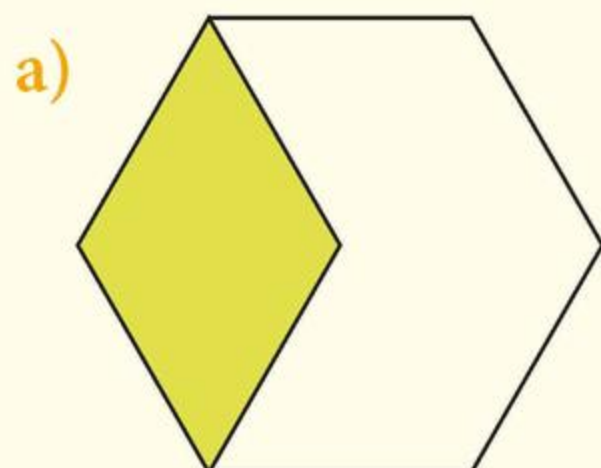
- Przepisz i uzupełnij zdanie.

Długość linii, która powstaje w kolejnym kroku, to ? długości linii z poprzedniego kroku.

- 5 Na rysunku A na stronie 206 przedstawiono trójkąt równoboczny o boku długości 1 cala. Jaką długość ma jego brzeg? Jaką długość ma brzeg figury na rysunku B? A na pozostałych dwóch rysunkach? Do obliczeń wykorzystaj sposób z zadania 3 i obserwacje z zadania 4.

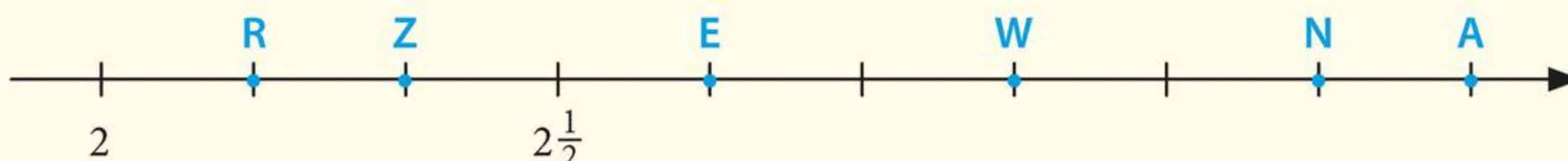
Zadania na deser

1 Jaka część figury została zamalowana?

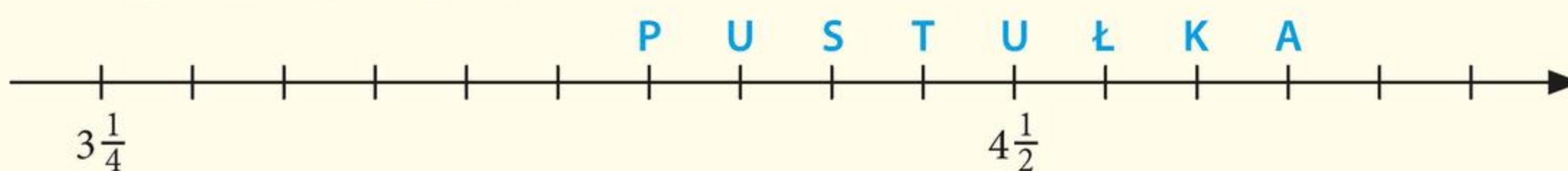


2 Znajdź podane liczby na osi i wypisz po kolei odpowiadające im litery. Odczytaj hasło.

a) $\frac{10}{3}, \frac{7}{2}, \frac{13}{6}, 2\frac{2}{3}, \frac{12}{4}$.



b) $4, \frac{9}{2}, 4\frac{5}{8}, \frac{35}{8}, 4\frac{1}{8}, \frac{17}{4}, 4,75$



3 Dodaj sprytnie.

a) $\frac{1}{6} + \frac{4}{7} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{3} + \frac{5}{12} + \frac{1}{12} + 1\frac{1}{2}$

c) $\frac{5}{9} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{9}$

Informacja do zadania 4

Kreska ułamekowa oznacza dzielenie. Ten fakt może być przydatny także przy dzieleniu liczb naturalnych. Wtedy możemy skorzystać ze skracania ułamków, np.:

$$1500 : 270 = \frac{1500}{270} = \frac{150}{27} = \frac{50}{9} = 5\frac{5}{9}$$

4 Zapoznaj się z powyższym przykładem i wykonaj dzielenie.

a) $7000 : 2800$

b) $540 : 360$

c) $252 : 756$

5 Przepisz i wpisz w miejsce ? przykłady takich ułamków, aby nierówności były prawdziwe.

a) $\frac{2}{5} < ? < ? < ? < ? < ? < \frac{3}{5}$

b) $\frac{3}{8} < ? < ? < \frac{3}{7}$



Podręcznik
s. 172
Dla dociekliwych

- 6 Odszyfruj ułamki egipskie.

a) $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$

- 7 Zapisz ułamek sposobem egipskim.

a) $\frac{1}{7}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{6}{10}$

d) $\frac{8}{15}$

- 8 Człowiek przesypia około $\frac{1}{3}$ każdej doby. Ile godzin przesypia człowiek w ciągu tygodnia, a ile w ciągu miesiąca?

- 9 Dziecko w twoim wieku robi około 20 oddechów na minutę. Osoba dorosła wykonuje w ciągu minuty o $\frac{1}{5}$ oddechów mniej. Ile oddechów wykonuje piątoklasista w ciągu godziny? Ile oddechów wykonuje osoba dorosła w ciągu tygodnia?

- 10 Uczniowie klasy Va wyruszyli o 8.15 na pieszą wycieczkę. Pokonanie trasy tam i z powrotem zajęło im $4\frac{1}{2}$ godziny, na odpoczynek przeznaczili dwa razy po $\frac{1}{5}$ godziny, a na drugie śniadanie $\frac{3}{4}$ godziny. Oblicz, o której godzinie wrócili z wycieczki.

- 11 Oblicz.

a) $1\frac{7}{18} \cdot (7\frac{1}{3} - 2\frac{2}{5}) : 2\frac{1}{27}$

c) $\frac{3}{13} : \frac{1}{5} \cdot \frac{26}{55} \cdot 5\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}$

b) $5\frac{4}{7} + \frac{3}{7} \cdot (123\frac{3}{5} - 121\frac{17}{20})$

d) $(7\frac{1}{8} - 4\frac{7}{8}) : (2\frac{5}{7} + 5\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{7})$

- 12 Oblicz.

a) $\frac{2}{3}$ liczby $4 - (\frac{1}{12} + \frac{3}{4} + \frac{8}{21} \cdot 1\frac{3}{4}) + 6\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} : 2\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{5}$ liczby $(4\frac{1}{16} - \frac{15}{16}) \cdot (2\frac{1}{3} + \frac{1}{15}) : 1\frac{18}{36}$

- 13 Korzystając z równości w ramce, odpowiedz, czy ułamek $\frac{462}{1716}$ można skrócić przez podaną liczbę.

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 = 1716$$

$$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 462$$

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 6 e) 7 f) 11 g) 13 h) 22

- 14 Korzystając z równości w ramce przy zadaniu 13, doprowadź ułamek $\frac{462}{1716}$ do postaci nieskracalnej.

Odpowiedzi

I Liczby naturalne

s. 11 1. Działania pamięciowe

➔ 1

poziom A a) 110 b) 118 c) 90 d) 146 e) 60 f) 113

poziom B a) 42 000 b) 80 c) 4000 d) 800 e) 72 000 f) 9000

poziom C a) 80 b) 50 c) 9 d) 700 e) 50 f) 20

poziom D a) 552 b) 213 c) 92 d) 102 e) 196 f) 135

poziom E a) 28 800 b) 3410 c) 25 200 d) 1210 e) 148 000 f) 1 380 000

2 a) 256 b) 649 c) 0 d) 0 e) 245 f) 642 g) 182 h) 1 i) 0

3 81 zł 5 a) Rekin wielorybi waży 14 000 kg, a płetwal błękitny 140 000 kg. b) Orka jest 5 razy cięższa od żyrafy. Waży o 5600 kg więcej. c) Płetwal błękitny jest 20 razy cięższy od orki i 100 razy cięższy od żyrafy. 6 359 km 7 2000 pereł, 80 naszyjników

8 7200 zł 9 a) $128 : 4 = 100 : 4 + 28 : 4 = 32$ b) $144 : 6 = 120 : 6 + 24 : 6 = 24$

c) $196 : 7 = 140 : 7 + 56 : 7 = 28$ d) $416 : 8 = 400 : 8 + 16 : 8 = 52$

e) $282 : 6 = 240 : 6 + 42 : 6 = 47$ f) $375 : 5 = 350 : 5 + 25 : 5 = 75$

10 a) $17 \cdot 4 = 17 \cdot 2 \cdot 2 = 34 \cdot 2 = 68$ b) $68 : 4 = 68 : 2 : 2 = 34 : 2 = 17$

c) $14 \cdot 5 = 14 \cdot 10 : 2 = 140 : 2 = 70$ d) $95 : 5 = 95 \cdot 2 : 10 = 190 : 10 = 19$

11 a) $27 \cdot 4 = 27 \cdot 2 \cdot 2 = 54 \cdot 2 = 108$ b) $73 \cdot 4 = 73 \cdot 2 \cdot 2 = 146 \cdot 2 = 292$

c) $52 : 4 = 52 : 2 : 2 = 26 : 2 = 13$ d) $104 : 4 = 104 : 2 : 2 = 52 : 2 = 26$

e) $12 \cdot 5 = 12 \cdot 10 : 2 = 120 : 2 = 60$ f) $73 \cdot 5 = 73 \cdot 10 : 2 = 730 : 2 = 365$

g) $115 : 5 = 115 \cdot 2 : 10 = 230 : 10 = 23$ h) $70 : 5 = 70 \cdot 2 : 10 = 140 : 10 = 14$

12 a) 12 b) 1 c) 0 13 W jednym stawie pływa 486 ryb, a w drugim 162.

Dla dociekliwych 2 a) 132 b) 195 3 a) 255 b) 289 c) 576 d) 780 e) 625 f) 756

Czy już umiem? I a) 456 b) 2 160 000 c) 40 II 150 III 36 000 km²

s. 16 2. Potęgowanie

➔ 1

poziom A a) 12⁵ b) 7⁶ c) 23⁴ d) 1⁸ e) 8¹⁰ f) 9³

poziom B a) 5 · 5 · 5 · 5 · 5 · 5 · 5 b) 3 · 3 · 3 · 3 c) 14 · 14 d) 7 · 7 · 7 · 7 · 7 · 7 e) 13 · 13 · 13 · 13 · 13
f) 18 · 18 · 18

poziom C a) 32 b) 64 c) 1 d) 16 e) 81 f) 0

poziom D a) 83 521 b) 6561 c) 331 776 d) 16 807 e) 91 125 f) 4 084 101

4 Emir miał $4^1 = 4$ żony, $4^2 = 16$ synów, $4^3 = 64$ synowe, $4^4 = 256$ wnucząt.
 5 Po 2 godzinach będą $2^2 = 4$ bakterie, po 3 godzinach $2^3 = 8$, po 5 godzinach $2^5 = 32$,
 a po 10 godzinach $2^{10} = 1024$. 7 $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10\,000$,
 $10^5 = 100\,000$, $1\,000\,000 = 10^6$, $100\,000\,000 = 10^8$, $1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$ 8 a) >
 b) < c) < d) > 9 a) 1024 b) do dwunastej 10 a) 1 000 000 000, 1 000 000 000 000,
 1 000 000 000 000 000 000 b) 3000, 3 000 000, 3 000 000 000, 3 000 000 000 000
 c) miliard, miliard, bilion d) bilion 11 Potrzebuje jeszcze jednego dnia.
 12 a) 6 b) 6 c) 1 13 a) tak b) tak

Dla dociekliwych 1 $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$, $2^2 \cdot 2^6 = 2^8$, $2^3 \cdot 2^2 = 2^5$ 2 a) 2^{20} b) 2^{47}
 3 a) $3^2 = 9$, $3^4 = 81$ b) $2^3 = 8$, $2^6 = 64$ c) $3^5 = 243$, $3^{10} = 59\,049$ 4 $2^9 + 2^9 = 2^{10}$
 5 a) tak, jako 3^8 b) nie

Czy już umiem? I a) 3^4 b) 5^1 c) 122^5 II a) 243 b) 10 000 c) 1 d) 0 III $5^3 = 125$

s. 22 3. Kolejność wykonywania działań

➡ 1

poziom A a) 22 b) 28 c) 6 d) 2 e) 16 f) 11 g) 6 h) 15 i) 19

poziom B a) 4 b) 1 c) 9 d) 1 e) 4 f) 1

poziom C a) 10 b) 4 c) 24 d) 3 e) 18 f) 2

poziom D a) 21 b) 2 c) 5 d) 10 e) 1 f) 104

poziom E a) 18 b) 15 c) 19 d) 6 e) 10 f) 4

MISTRZ a) 16 b) 16 c) 96 d) 5 e) 5 f) 1500

2 a) $3 \cdot 2 + 4$ b) $3 \cdot (2 + 4)$ c) $2 + 3 \cdot 4$ 3 a) $4 \cdot (3 + 2) = 20$ b) $3 \cdot 4 + 2 = 14$

4 $[12 - (2 \cdot 3 + 2)] : 2 = 2$ [zł] 5 D lub F 9 $3 \cdot 8 - (23 - 4) = 5$ [zł]

10 a) $4 \cdot 5 - (2 \cdot 3 + 4) = 10$ b) $20 - 12 : (2 + 1) + 1 = 17$ lub $20 - 12 : (2 + 1 + 1) = 17$

c) $2 \cdot [3 + 9 \cdot (2 + 1)] = 60$ 11 A i F, B i E, C i G 12 $17 - 5 - (17 - 5) : 2 = 6$

Dla dociekliwych 1 $(28 - 6) : 2 + 6 = 17$ 2 $(16\,856 - 1348) : 2 + 1348$ lub
 $(16\,856 + 1348) : 2$

Czy już umiem? I a) 10 b) 7 c) 29 d) 33 II $10 \cdot 5 - 5 = 45$ [kg] III D

s. 28 4. Cyfry rzymskie

➡ 1

poziom A a) 6 b) 9 c) 5 d) 3 e) 11 f) 4

poziom B a) 37 b) 29 c) 18 d) 19 e) 26 f) 24 g) 23 h) 13 i) 34

poziom C a) 62 b) 99 c) 77 d) 69 e) 98 f) 88 g) 89 h) 94 i) 44

poziom D a) 2400 b) 1700 c) 1300 d) 2900 e) 1800 f) 2200 g) 3600 h) 2300 i) 1600

poziom E a) 1498 b) 1846 c) 1971 d) 1999 e) 2344 f) 2423

Odpowiedzi

➡ 2

poziom A a) IV b) XII c) X d) IX e) VIII f) VII

poziom B a) XXXIX b) XXVIII c) XXXII d) XIV e) XXVII f) XXIII g) XXIV h) XVI i) XXIX

poziom C a) XLV b) LXXVIII c) LII d) XCI e) LXIV f) XLVI g) LIX h) XLIX i) LXI

poziom D a) MCM b) MMCD c) MMMCC d) MMDC e) CM f) MCD g) MMMCD
h) MMD i) MC

poziom E a) MCMXXXIX b) MDCXCV c) MMCCCXC d) MCDLXXXIV
e) MMMCDXCVI f) MMCCXIII

3 Najbliżej z biletom I, najdalej z II. 4 Największa CXVI, najmniejsza XCIV. 5 a) 1520

b) 1820 c) 1827 6 966, wiek X (10); 1569, wiek XVI (16); 1791, wiek XVIII (18);

1918, wiek XX (20) 8 XVIII (18), CCCLXXXIV (384) 9 3; 1688; 1944; 1956

11

IX	VIII	XIII
XIV	X	VI
VII	XII	XI

Czy już umiem? I a) 34 b) 67 c) 2499 II a) XXIV b) LXVII c) MMDCCCXCIII
III MMCX

s. 36 5. Obliczenia przybliżone

1 a) 855 b) 3885 c) 175 d) 10 476 2 nie 3 działania: a), c) i f) 4 a) tak b) nie
c) nie 5 tak 6 nie 7 a) tak b) nie c) nie 9 ARKA

Dla dociekliwych 1 nie 2 a) F b) E c) B

Czy już umiem? I a) 5810 b) 4750 c) 22 550 II tak III 200 zł wystarczy,
a 150 zł nie wystarczy.

s. 40 6. Dodawanie i odejmowanie pisemne

➡ 1

poziom A a) 6612 b) 5903 c) 3045 d) 6842 e) 1023 f) 9678

poziom B a) 2093 b) 12 916 c) 15 173 d) 8683 e) 2454 f) 4147

➡ 2

poziom A a) 2414 b) 750 c) 2361 d) 3111 e) 2622 f) 631

poziom B a) 351 b) 1618 c) 291 d) 286 e) 3911 f) 910

poziom C a) 5199 b) 845 c) 839 d) 482 e) 519 f) 638

poziom D a) 679 b) 51 328 c) 4936 d) 9438 e) 1226 f) 49 500

3 a) 1503 b) w 1924 roku 4 955 5 125 zł. Droższa jest piłka futbolowa – o 21 zł. 6 318 zł

7 47 zł 8 182 zł 9 9 kg 10 a) $x = 231$ b) $x = 168$ c) $x = 614$ d) $x = 400$

11 a) Wymienione okresy trwały odpowiednio: 404 lata, 186 lat, 222 lata, 123 lata, 4 lata, 21 lat, 6 lat, 44 lata. **b)** W okresie panowania Jagiellonów. **12 a)** B = 1, A = 0, K = 5, R = 4
b) S = 1, A = 2, L = 6, I = 4 **c)** U = 0, P = 1, T = 3, B = 9 lub U = 9, P = 7, T = 1, B = 5

Czy już umiem? **I a)** 6514 **b)** 2413 **II a)** 878 **b)** 4459 **III a)** 87 lat **b)** w 1971 r. **c)** tak

s. 45 7. Mnożenie pisemne

➔ 1

poziom A a) 6147 **b)** 4624 **c)** 2670 **d)** 24 684 **e)** 38 374 **f)** 39 168

poziom B a) 222 428 **b)** 1 988 806 **c)** 66 486 **d)** 431 846 **e)** 1 226 276 **f)** 16 588

poziom C a) 23 600 000 **b)** 2 040 000 **c)** 1 360 000 **d)** 48 360 000 **e)** 2 993 000 **f)** 5 772 000

poziom D a) 27 285 **b)** 692 760 **c)** 846 690 **d)** 865 017 **e)** 784 346 **f)** 1 688 210

2 tak **3** tak **4 a)** 7200 **b)** 20 **5** 5110 **6** 11 050 000 **7** 5 399 800 **8** 450

9 a) 108 **b)** 600 **10 a)** $212 \cdot 202 = 42\,824$ **b)** $202 \cdot 402 = 81\,204$ **c)** $15 \cdot 35 = 525$ **11** 0

Czy już umiem? **I a)** 42 848 **b)** 24 320 000 **c)** 7042 **II** 46 046 kg **III** 6466 kg

s. 50 8. Dzielenie i podzielność

2 Podzielne przez 3: 540, 297, 411. Podzielne przez 9: 540, 297. **3 a)** 5 **b)** 5 **c)** 8

4 a) 5 427 530, 5 431 902, 7 321 636, 287 514 **b)** 5 431 902, 8 943 615, 287 514

c) 8 943 615, 5 427 530 **d)** 8 943 615, 287 514 **e)** 287 514 **f)** 8 943 615 **5** 1300, 73232, 75192 **6 a)** 4 r 1 **b)** 5 r 0 **c)** 3 r 1 **d)** 5 r 4 **7 a)** 9 **b)** 8 **9** Można ich ustawić parami

i trójkami, a czwórkami i piątkami nie. Można by ich było ustawić parami, czwórkami i piątkami. **10 a)** tak **b)** nie **c)** tak **11** 1281 **a)** 6 **b)** 0 **c)** 2 **d)** 0 **12** 1182

13 a) Jest ich 6: 123 321, 132 231, 213 312, 231 132, 312 213, 321 123. **b)** wszystkie **c)** dwie

Czy już umiem? **I a)** tak **b)** tak **c)** nie **II** 664, 672, 680 **III a)** 7 **b)** 7 **c)** 0

s. 55 9. Liczby pierwsze i liczby złożone

1 a) 1, 5 **b)** 1, 3, 9 **c)** 1, 2, 3, 4, 6, 12 **d)** 1, 3, 5, 15 **3** 2, 3, 17, 23 **4** 1279, 5821, 2389

5 a) $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ **b)** $490 = 2 \cdot 5 \cdot 7^2$ **c)** $5600 = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 7$ **d)** $99 = 3^2 \cdot 11$

e) $2000 = 2^4 \cdot 5^3$ **f)** $480 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$ **6 a)** tak, $2 \times 2 \times 3$ **b)** nie **c)** nie **d)** tak, np. $2 \times 5 \times 50$

7 630 **8 a)** tak **b)** tak **c)** tak **9 a)** tak **b)** tak **c)** nie **d)** nie **10 a)** tak **b)** tak **c)** nie

d) tak **e)** tak **f)** nie **11 a)** $3 \cdot 5 \cdot 7$ **b)** $3^2 \cdot 7^2$ **c)** $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ **12** $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$

13 a) $1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ **b)** $1650 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11$ **c)** $12\,600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

d) $1260 \cdot 1650 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$ **14** $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$ **15 a)** $555 = 3 \cdot 5 \cdot 37$

b) $510 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$ **c)** $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$

Dla dociekliwych **1 a)** $6 \cdot 45 = 2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 15 = 30 \cdot \underline{9} = 270$ lub $6 \cdot 45 = \underline{2} \cdot 3 \cdot \underline{5} \cdot 9 = \underline{10} \cdot 27 = 270$

b) $22 \cdot 15 = 2 \cdot \underline{11} \cdot \underline{3} \cdot 5 = 10 \cdot \underline{33} = 330$ **c)** $28 \cdot 50 = \underline{2} \cdot 14 \cdot \underline{50} = \underline{100} \cdot 14 = 1400$

d) $18 \cdot 4 = 9 \cdot \underline{2} \cdot \underline{4} = 9 \cdot \underline{8} = 72$ **e)** $3 \cdot 24 = 3 \cdot 3 \cdot \underline{8} = 9 \cdot \underline{8} = 72$

f) $14 \cdot 4 = 2 \cdot \underline{7} \cdot \underline{4} = 8 \cdot \underline{7} = 56$

Czy już umiem? I 1, 2, 3, 6, 9, 18 II 7537 i 2383 III $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$

s. 61 **10. Dzielenie pisemne**

➔ 1

poziom A a) 23 b) 143 c) 345 d) 52 e) 217 f) 28

poziom B a) 155 r 3 b) 67 r 3 c) 215 r 2 d) 88 r 4 e) 342 r 1 f) 54 r 2

poziom C a) 104 b) 204 r 1 c) 501 r 4 d) 204 r 2 e) 505 r 4 f) 702 r 4

poziom D a) 56 b) 206 r 10 c) 102 d) 105 e) 58 f) 89

2 23 3 169 zł 4 $273 : 3 = 91$, $365 : 5 = 73$, $372 : 2 = 186$ 5 a) $x = 351$ b) $x = 204$

c) $x = 631$ d) $x = 2645$ 6 64 km 7 Papier 25, cienkopis 48, tusz 76 i 456

8 a) 248 b) 804 r 2 c) 210 r 30 9 o 7.45 10 108 11 a) $1275 = 3 \cdot 5^2 \cdot 17$

b) $3465 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ c) $22\,950 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 17$

Dla dociekliwych 1 Ania: 21, Basia: 63, Kasia: 189 2 Jaś ma 108 znaczków, Tomek 756, Grześ 556.

Czy już umiem? I a) 24 b) 207 r 9 II $1535 : 5 = 307$ III 57

s. 64 **Powtórzenie przed klasówką**

1 a) 16 000 b) 20 000 c) 80 d) 13 e) 24 f) 14 2 a) 24 b) XIX 3 a) 165 b) 10 396

c) 39 4 4550 zł 5 a) 29 870, 276 356, 287 362 b) 29 870, 72 635 c) 29 870 6 a) 48

b) 20 7 a) 13 874 b) 1854 c) 9464 d) 334 8 a) 1967 b) 1 007 006 000 c) 253

9 a) 48 zł b) po 2 zł 10 a) 91 725, 26 802 b) 26 802 11 a) 81 b) 100 000 c) 4

12 a) 69 b) 766 c) 2979 13 a) 459 650 b) 217 420 c) 774 840

14 a) 106 b) 375 c) 409 15 a) $24 = 2^3 \cdot 3$ b) $480 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$ c) $750 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$

16 109 kg 17 a) LXXVIII b) DCXLIX c) MMMCXCIII 18 44 19 685 zł

20 $1554 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 37$

s. 66 **Zadania na temat...**

2 57 lat 3 W 2006 roku: 300 minut tygodniowo, w 1958 roku: 75 minut tygodniowo.

4 15 600 minut; to ponad 10 dni. 5 9 lat 6 b) 21 godz. 40 min c) w 2014 roku

d) na Stolicy i na Turyście

s. 68 **Zadania na deser**

1 $1173 : 3 = 391$, $1365 : 3 = 455$, $1845 : 3 = 615$, $2010 : 3 = 670$,

$455 : 5 = 91$, $615 : 5 = 123$, $670 : 5 = 134$ 2 a) $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

b) $1656 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 23$ c) $945 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ 3 AR: 54, AKR: 2250, RAK: 600 4 270: ARA,

10500: KARA, 9450: ARKA, 26460: KRAK 5 a) 3071 km b) 3511 km 6 Wynik jest zawsze równy 1089. 7 WAWEL 8 a) 81 lat b) 39 c) 42 lata d) Zygmunt 51 lat, Bona 24 lata

9 a) przez 1001 b) 1001 10 a) przez 10101

II Figury geometryczne

s. 75 1. Płaszczyzna, proste i półproste

2 a) $c i d$ b) $e i c, e i d$ c) a, b, e 5 odcinek AB 8 a) np. Floriańska, św. Jana, Sławkowska
b) np. Sienna, Mikołajska, św. Marka 10 a) są prostopadłe b) są prostopadłe
c) są prostopadłe 11 a) LM, CD, KJ, FG, HI b) AM, CB, FD, GH, IJ, KL
12 A, E, F, H, I, K, L, Ł, M, N, T, V, W, Y, Z a) E, F, H, N, Z b) E, F, H, L, Ł, T 13 c) dwie
d) nieskończenie wiele 14 a) nie b) nie c) tak d) nie e) tak 15 a) 6 b) 10 c) 45

Czy już umiem? I B, E, D II a) GF b) BC, GH c) HI, DC, EF

s. 83 2. Kąty. Rodzaje kątów

1 geometria 3 $\sphericalangle KAB$ rozwarty, $\sphericalangle ABC$ ostry, $\sphericalangle BCD$ wklęsły, $\sphericalangle CDE$ ostry, $\sphericalangle DEF$ wklęsły,
 $\sphericalangle EFG$ prosty 5 a) $\sphericalangle BAE, \sphericalangle EAD$ b) $\sphericalangle BAC, \sphericalangle CAD$ c) $\sphericalangle BAD$ d) $\sphericalangle CAE$
7 $\beta < \gamma < \alpha < \delta$ 8 a) 3.30, kąt ostry b) 9.00, kąt prosty c) 1.28, kąt rozwarty
9 a) prosty b) ostry c) półpełny 11 a) prosty b) półpełny c) pełny d) prosty
12 a) ostry b) wklęsły c) rozwarty 14 a) III, IV, V, VIII b) I, II, III, VI, VII c) I, II, VI
d) V 15 a) $\sphericalangle KSL$ i $\sphericalangle MSN$ oraz $\sphericalangle LSM$ i $\sphericalangle NSK$ b) $\sphericalangle KSL$ i $\sphericalangle LSM, \sphericalangle LSM$ i $\sphericalangle MSN,$
 $\sphericalangle MSN$ i $\sphericalangle NSK, \sphericalangle NSK$ i $\sphericalangle KSL$ 16 hasło: SENSU 17 a) $\sphericalangle DSF$ b) np. $\sphericalangle BSC$ i $\sphericalangle ESF$
c) np. $\sphericalangle BSD$ i $\sphericalangle ESA$ d) $\sphericalangle BSD$ lub $\sphericalangle ESA$ e) np. $\sphericalangle ASF$ i $\sphericalangle ASC$ 18 tak, np. 6.00
19 10 ostrych, 4 proste i 10 rozwartych

Czy już umiem? I $\sphericalangle A$ ostry, $\sphericalangle EFG$ rozwarty, α wklęsły II $\beta < \alpha < \omega < \gamma < \mu < \delta$ III γ

s. 90 3. Mierzenie kątów

➡ 1

poziom A a) 15° b) 50° c) 45° d) 30°

poziom B a) 105° b) 130° c) 145° d) 175°

poziom C a) 25° b) 140° c) 165° d) 55°

poziom D a) 57° b) 173° c) 118° d) 24°

MISTRZ a) 250° b) 335° c) 190° d) 285° e) 345° f) 220°

2 a) ostry b) rozwarty c) wklęsły d) prosty 4 $\alpha = 38^\circ, \beta = 152^\circ, \gamma = 90^\circ, \delta = 138^\circ,$
 $\varepsilon = 55^\circ$ 6 a) Prostopadłe są: krokwie, jętka i słup, strop i słup. b) $45^\circ, 135^\circ$ 7 $90^\circ, 60^\circ$
10 a) czerwony b) są równe c) niebieski 11 a) 90° b) 360° c) 180° d) 30° e) 240°
f) 120° 12 a) 60° b) 30° c) 10° 13 $\alpha = 270^\circ, \beta = 133^\circ, \gamma = 232^\circ, \delta = 336^\circ$
14 $\beta = 50^\circ, \alpha = \gamma = \delta = 65^\circ$ 15 $\alpha = 120^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 30^\circ, \delta = 60^\circ$ 16 $\alpha = 32^\circ, \beta = 96^\circ,$
 $\gamma = 52^\circ$ 17 a) 165° b) 140° c) 5°

Czy już umiem? I a) rozwarty, 135° b) ostry, 69° III a) 32° b) 263°

s. 99 **4. Rodzaje i własności trójkątów**

1 a) tak b) nie c) tak d) nie 3 a) $\beta = 65,5^\circ$ b) $\alpha = 91^\circ$ c) $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 55^\circ$ d) $\gamma = 58^\circ$
 e) $\gamma = 38^\circ$ f) $\delta = 95^\circ$ 4 Przeciwprostokątna ma 5 cm, a kąty mają około 53° i 37° .
 5 60° 6 45° 7 tak 8 Najmniejsza: 1 km, największa: 5 km. 9 30° , 60° , 90°

Dla dociekliwych 1 Nie, gdyż $CD + DA < 17$. 2 Tak, gdyż $AB + AD > 9$.

3 Nie, każda przekątna czworokąta o takich bokach musiałaby być krótsza niż 17 cm.

4 360°

Czy już umiem? I a) tak b) nie II $\alpha = 41^\circ$, $\beta = 18^\circ$ III a) rozwartokątny b) ostrokątny

s. 105 **5. Własności niektórych trójkątów**

1 a) B, G b) B, C, E, G, H c) A, E 2 A: równoboczny i ostrokątny, B: równoramienny i ostrokątny, C: różnoboczny i prostokątny, D: równoramienny i prostokątny, E: równoramienny i rozwartokątny, F: różnoboczny i rozwartokątny 3 a) 8 cm
 b) 10 cm 5 mm c) 1 m 35 cm 4 16 cm 5 a) np. AED i DBA b) np. KLS, MNS, PRS
 c) np. FJG 6 a) 45° , 45° , równoramienny prostokątny b) 60° , 60° , równoboczny
 c) 54° , 72° , równoramienny ostrokątny 10 a) nie b) nie c) tak 12 a) 45° , $AB = AC$
 b) 60° , $AB = BC = AC$ 13 a) $\gamma = 40^\circ$ b) $\gamma = 90^\circ$ c) $\gamma = 35^\circ$ d) $\gamma = 45^\circ$ e) $\gamma = 70^\circ$
 f) $\gamma = 50^\circ$ Prostokątne są trójkąty w podpunktach b), d), e). Równoramienne są trójkąty w podpunktach a), d), f). 14 a) Czarek 15 3,4 m 17 2,5 cm

Czy już umiem? I a) równoramienny prostokątny b) różnoboczny rozwartokątny

II 18 cm III Trzeci kąt ma 50° ; trójkąt nie jest prostokątny, jest równoramienny.

s. 112 **6. Wysokość trójkąta**

1 a) z wierzchołka C, do boku AB b) z wierzchołka K, do boku ML c) z wierzchołka X, do boku YZ d) z wierzchołka R, do boku PS 2 a) AB b) BC c) AC 8 30° , 60° , 90°
 9 a) 6 m b) 6 m c) 6 m 10 20° , 70° , 90° 13 a) OK, KB, KP b) OK, AM, BL
 c) OR, MS, LP

Dla dociekliwych 1 Tak, jest to wierzchołek kąta prostego. 2 Przedłużenia wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten znajduje się na zewnątrz trójkąta.

Czy już umiem? I a) z wierzchołka C, do boku AB b) z wierzchołka D, do boku EF

s. 118 **7. Równoległoboki**

1 a) AB, BC, CD, AD b) AD, BC d) AC, BD 3 a) $MA \parallel KI$ oraz $MI \parallel AK$ b) MK i AI
 4 a) 12 cm b) 13 cm 5 a) $AB = CD = 3$ cm, $AD = BC = 2$ cm, $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB = 45^\circ$,
 $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 135^\circ$ b) $KL = MN = 3,5$ cm, $LM = KN = 2,5$ cm,
 $\sphericalangle KLM = \sphericalangle MNK = 55^\circ$, $\sphericalangle NKL = \sphericalangle NML = 125^\circ$ 8 kwadrat
 11 $\alpha = 125^\circ$, $\beta = 55^\circ$, $\gamma = 37^\circ$, $\delta = 101^\circ$ 12 a) 12 cm b) 18 cm, 13 cm, 13 cm

15 a) obwód 14 cm b) obwód 16 cm 18 60° , 120° , 60° , 120°

Czy już umiem? II 142° , 38° , 38° III 15 cm, 15 cm, 8 cm

s. 123 8. Wysokość równoległoboku

1 Do boku AB : czerwona i niebieska, do boku BC : zielona, fioletowa i żółta.

7 nieskończenie wiele 10 nieskończenie wiele

11 a) nie b) nie c) tak d) tak e) tak f) tak

Dla dociekliwych 1 AK, BF, CE, DH 2 4 cm 3 1 cm

Czy już umiem? II DE (na bok AB) i DG (na bok BC)

s. 128 9. Trapezy

1 Są 3 trapezy. W trapezie $ABCD$: $AB \parallel CD$ i $AD \parallel BC$. W trapezie $EFGH$: $EF \parallel GH$.

W trapezie $MNOP$: $MN \parallel OP$. 3 nieskończenie wiele 4 I – trójkąty, II – czworokąt,

III – trapezy, IV – trapez 5 jeden 7 a) $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 80^\circ$ b) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, $\delta = 130^\circ$ 8 a) 90° , 90° , 115° b) 90° , 90° , 70° 9 a) 40° , 140° , 140° b) 110° , 70° , 70°

10 a) $a = 4$ cm, $b = 2$ cm; trapez równoramienny b) $c = 4$ cm, $d = 5$ cm; trapez prostokątny

11 $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 35^\circ$ 12 Trapez równoramienny o kątach 120° , 120° , 60° , 60° .

13 a) tak b) nie c) tak d) tak e) tak 14 90° , 90° , 60° , 120° 15 $\frac{2}{3}$ 16 4 cm

Czy już umiem? I Trapezy: $EFGH$ i $KLMN$. W trapezie $EFGH$: $EF \parallel GH$, w trapezie $KLMN$: $MN \parallel KL$ i $NK \parallel ML$. II 40° , 140° , 140°

s. 133 10. Klasyfikacja czworokątów

2 romb, trapez równoramienny 3 a) $\sphericalangle A = 46^\circ$, $\sphericalangle B = 128^\circ$, $\sphericalangle C = 62^\circ$, $\sphericalangle D = 124^\circ$

b) $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 50^\circ$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 130^\circ$ c) $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sphericalangle B = 55^\circ$, $\sphericalangle C = 125^\circ$, $\sphericalangle D = 90^\circ$

d) $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 35^\circ$, $\sphericalangle D = \sphericalangle C = 145^\circ$ e) $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90^\circ$ f) $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 60^\circ$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 120^\circ$ 4 romb 5 16 równoległoboków, 8 prostokątów, 4 romby

8 Prawdziwe są zdania b) i d). 9 b) Nie wszystkie kąty trójkątów otrzymanych z takiego podziału tworzą kąty danego czworokąta. 10 Może, np. deltoid o kątach: 110° , 110° , 110° , 30° .

Czy już umiem? I Równoległoboki – na rysunkach A, B, D i E.

Trapezy – na wszystkich rysunkach. II 150° III a) np. $ADEB$ b) $ADFC$ c) np. $AEFC$

s. 137 Powtórzenie przed klasówką

1 a) $n \parallel p$ b) $n \perp l$, $p \perp l$ c) $m \perp l$, $m \perp n$, $m \perp p$ 2 kąty ostre: $\sphericalangle FAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle DEF$;

kątów prostych nie ma; kąty rozwarte: $\sphericalangle CDE$, $\sphericalangle AFE$ 3 40 cm 5 $\sphericalangle MKL = 45^\circ$, ostry; $\sphericalangle BDE = 70^\circ$, ostry; $\sphericalangle PLR = 150^\circ$, rozwarty 9 $\alpha = 141^\circ$, $\beta = 78^\circ$, $\gamma = 74^\circ$

12 a) 45° , 135° , 90° , 90° b) $a = 10$ cm, $c = 5$ cm 14 a) 90° , 45° , 45° b) 120° , 30° , 30°

c) 54° , 63° , 63° lub 54° , 54° , 72° 15 ramiona: po 2 cm; kąty: 60° , 120° , 120°

s. 139 **Zadania na temat...**

1 I – prostokąt, II – pięciokąt, III – sześciokąt, IV – trójkąt 2 II: $90^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 90^\circ, 135^\circ$; III: $90^\circ, 135^\circ, 135^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 135^\circ$; IV: $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$ 3 1400 mm 4 3 pary
5 3 pary 6 równoramiennym prostokątnym 7 2 razy 8 rozwartokątnym o kątach $22,5^\circ, 45^\circ, 112,5^\circ$ 9 trapezem równoramiennym o kątach $45^\circ, 135^\circ, 135^\circ, 45^\circ$

s. 140 **Zadania na deser**

1 a) na 6 trójkątów równobocznych b) 120° c) 2 razy e) 6 2 Są to: romb o kątach $60^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ oraz trapez równoramienny o kątach $60^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 60^\circ$.
4 a) trójkąt równoboczny b) każdy kwadrat 5 b) Każdy kąt ma 135° . 6 Każdy kąt ma 150° . 7 sześciokątem 10 Licząc w ten sposób, każdą przekątną liczymy dwa razy.
11 4; wszystkich przekątnych jest 14. 12 35 13 a) 90° b) 270° c) 135°
14 stacja na azymut 40° , szkoła 150° , most na rzece 200°

III Ułamki zwykłe

s. 147 **1. Ułamek jako część i jako iloraz**

➔ 1

poziom A a) $\frac{2}{6}$ b) $\frac{2}{6}$ c) $\frac{3}{7}$ d) $\frac{3}{8}$ e) $\frac{6}{10}$ f) $\frac{3}{5}$ g) $\frac{4}{8}$ h) $\frac{2}{8}$

poziom B a) $24:8$ b) $167:34$ c) $5:7$ d) $23:9$ e) $3:2$ f) $1:6$ g) $5:12$ h) $12:5$ i) $17:8$ j) $25:11$

poziom C a) $\frac{87}{7}$ b) $\frac{358}{10}$ c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{8}{7}$ e) $\frac{19}{5}$ f) $\frac{32}{5}$ g) $\frac{9}{4}$ h) $\frac{11}{4}$ i) $\frac{3}{1}$ j) $\frac{79}{7}$

poziom D a) $19\frac{4}{5}$ b) 3 c) $1\frac{1}{2}$ d) $1\frac{2}{3}$ e) 2 f) $2\frac{2}{5}$ g) $2\frac{6}{7}$ h) $5\frac{3}{10}$ i) $2\frac{4}{8}$ j) 2

MISTRZ a) $23\frac{1}{148}, 147\frac{19}{23}, 23\frac{50}{148}, 150\frac{4}{23}$ b) $\frac{333}{25}, 13\frac{5}{25}, 39\frac{24}{25}, 25\frac{8}{13}, 13\frac{20}{25}, 26\frac{7}{13}$

2 $\frac{12}{20}$ 3 $\frac{12}{15}$ 4 $\frac{2}{3}$ m 7 $\frac{4513}{32}, \frac{4523}{32}, \frac{4612}{141}$ 8 $22\frac{3}{6}, 22\frac{5}{6}$ 9 $2\frac{3}{8}$ pizzy 11 246

12 Najwięcej wziął Bartek. Zostało 6 jabłek. 13 Każda zjadła 9 śliwek. Zostało 45 śliwek.

14 Zostało 8 pierogów; Tomek powinien dostać 3, a Jurek 5. 15 a) $A = \frac{2}{7}, B = \frac{5}{7}$

b) $A = \frac{1}{8}, B = \frac{5}{8}, C = 1\frac{1}{8}$ c) $A = \frac{1}{6}, B = \frac{5}{6}, C = 1\frac{1}{6}, D = 2\frac{1}{6}$ 16 81

Dla dociekliwych 1 a) 8 b) zdrowych 24, zepsutych 16 2 27 3 35 4 35

Czy już umiem? I a) zamalowana: $\frac{4}{9}$, niezamalowana: $\frac{5}{9}$ b) zamalowana: $\frac{2}{6}$, niezamalowana: $\frac{4}{6}$ II $\frac{5}{3}, \frac{80}{11}, 2\frac{2}{5}, 4$ III $2\frac{2}{5}$ litra

s. 155 **2. Rozszerzanie i skracanie ułamków**

➔ 1

poziom A a) $\frac{4}{9} < \frac{7}{9} < \frac{13}{9}$ b) $2\frac{1}{4} < 4\frac{1}{7} < \frac{33}{7}$ c) $\frac{3}{7} < \frac{3}{5} < \frac{3}{4}$ d) $\frac{1}{6} < \frac{2}{6} < \frac{5}{6}$ e) $\frac{1}{7} < \frac{4}{7} < \frac{8}{7}$

f) $1\frac{12}{15} < 2\frac{5}{9} < 3\frac{1}{5}$ g) $\frac{10}{3} < 3\frac{3}{4} < 4$ h) $\frac{1}{10} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

poziom B a) 15 b) 12 c) 3 d) 6 e) 5 f) 10 g) 9 h) 35

poziom C a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{1}{2}$ g) $\frac{4}{5}$ h) $\frac{2}{5}$

poziom D a) $3\frac{1}{3}$ b) $2\frac{10}{17}$ c) $5\frac{2}{5}$ d) $1\frac{1}{2}$ e) $2\frac{1}{2}$ f) 4 g) $2\frac{6}{17}$ h) $7\frac{1}{3}$

MISTRZ a) Np. $\frac{75}{1010}$, bo $\frac{7}{101} < \frac{75}{1010} < \frac{8}{101}$. Np. $\frac{30}{205}$, bo $\frac{3}{21} < \frac{30}{205} < \frac{3}{20}$. $\frac{3}{6} = \frac{134}{268}$, więc taki ułamek nie istnieje.

b) $\frac{1}{3} = \frac{12}{36} = \frac{5}{15} < \frac{7}{15} < \frac{9}{15} = \frac{3}{5} < \frac{3}{4} = \frac{18}{24} < \frac{20}{24} = \frac{5}{6} < \frac{123}{123} < 1\frac{1}{123} < 2\frac{3}{5} = \frac{39}{15}$

➡ 2

poziom A a) $\frac{8}{14} > \frac{5}{14}$ b) $5\frac{4}{6} > 5\frac{3}{6}$ c) $\frac{20}{24} > \frac{11}{24}$ d) $\frac{10}{15} > \frac{8}{15}$ e) $\frac{4}{9} < \frac{6}{9}$ f) $\frac{7}{18} > \frac{6}{18}$
g) $2\frac{2}{8} < 2\frac{3}{8}$ h) $\frac{4}{9} < \frac{6}{9}$

poziom B a) $\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$ b) $\frac{4}{13} < \frac{5}{13}$ c) $\frac{5}{9} > \frac{4}{9}$ d) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ e) $\frac{5}{12} > \frac{3}{12}$ f) $\frac{3}{4} > \frac{1}{4}$ g) $\frac{6}{7} > \frac{4}{7}$ h) $\frac{4}{7} < \frac{5}{7}$

poziom C a) $\frac{8}{12} < \frac{9}{12}$ b) $\frac{21}{35} > \frac{20}{35}$ c) $\frac{36}{63} < \frac{49}{63}$ d) $\frac{20}{90} < \frac{63}{90}$ e) $\frac{55}{66} > \frac{54}{66}$ f) $\frac{12}{20} < \frac{15}{20}$
g) $\frac{15}{21} > \frac{14}{21}$ h) $\frac{7}{14} > \frac{6}{14}$

poziom D a) $\frac{15}{18} > \frac{8}{18}$ b) $\frac{15}{20} > \frac{14}{20}$ c) $\frac{15}{24} > \frac{14}{24}$ d) $\frac{25}{45} > \frac{21}{45}$ e) $\frac{3}{60} < \frac{4}{60}$ f) $\frac{20}{24} < \frac{21}{24}$ g) $\frac{14}{18} < \frac{15}{18}$
h) $\frac{5}{20} > \frac{4}{20}$

MISTRZ a) $\frac{5}{8} < \frac{2}{3} < \frac{11}{12}$ b) $\frac{4}{21} < \frac{2}{6} < \frac{9}{14}$ c) $\frac{7}{36} < \frac{5}{24} < \frac{3}{8}$

3 a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{2}{25}$ e) $\frac{1}{8}$ f) $\frac{3}{20}$ 4 a) $\frac{8}{10}$ b) $\frac{5}{10}$ c) $\frac{5}{100}$ d) $\frac{6}{100}$ e) $\frac{4}{100}$

f) $\frac{25}{100}$ g) $\frac{75}{100}$ h) $\frac{12}{100}$ i) $\frac{35}{100}$ 5 a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{5}{6}$ 9 a) $\frac{16}{24} > \frac{15}{24}$

b) $\frac{9}{45} < \frac{10}{45}$ c) $\frac{32}{40} > \frac{25}{40}$ d) $\frac{5}{15} < \frac{6}{15}$ e) $\frac{21}{28} > \frac{20}{28}$ f) $\frac{14}{21} < \frac{15}{21}$ 10 Ares

12 a) $\frac{2}{7} < \frac{8}{12}$ b) $\frac{2}{7} < \frac{4}{12}$ c) $\frac{6}{7} < \frac{11}{12}$ d) $\frac{3}{7} > \frac{5}{12}$

13 nieskracalne: $\frac{62}{2699}$, $\frac{33}{128}$, $\frac{17}{41000}$; $\frac{136}{248}$ – przez 8; $\frac{370}{275}$ – przez 5;

$\frac{37100}{3780}$ – przez 140; $\frac{333}{789}$ – przez 3; $\frac{51}{20301}$ – przez 3; $\frac{44}{12345678}$ – przez 2

14 $\frac{997}{998} < \frac{998}{999} < \frac{999}{998} < \frac{998}{997}$ 15 a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{33}{44}$ c) Nie, bo 34 nie jest podzielne przez 7.

Dla dociekliwych 1 a) $\frac{3}{7} < \frac{12}{23}$ b) $\frac{3}{7} > \frac{2}{11}$ c) $\frac{4}{3} > \frac{111}{112}$ d) $\frac{5}{7} < \frac{9}{11}$ e) $\frac{22}{23} < \frac{122}{123}$

f) $\frac{15}{17} < \frac{17}{19}$ g) $\frac{135}{134} > \frac{134}{135}$ h) $\frac{56}{111} > \frac{732}{1480}$ i) $\frac{19}{20} < \frac{20}{21}$

Czy już umiem? I a) $1\frac{1}{3}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $4\frac{1}{10}$ II a) $4\frac{3}{7} < 8\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{5} > \frac{2}{7}$ c) $\frac{4}{9} < \frac{11}{20}$

III nieskracalny: $\frac{143}{343}$; $\frac{305}{590}$ – przez 5; $\frac{176}{334}$ – przez 2; $\frac{321}{963}$ – przez 3; $\frac{111}{888}$ – przez 111

s. 163 3. Dodawanie i odejmowanie ułamków o tych samych mianownikach

➡ 1

poziom A a) $5\frac{5}{8}$ b) $2\frac{2}{9}$ c) $4\frac{6}{7}$ d) $6\frac{4}{9}$ e) $3\frac{2}{5}$ f) $8\frac{2}{11}$ g) $1\frac{10}{13}$ h) $3\frac{4}{7}$

poziom B a) $\frac{2}{3}$ b) 1 c) $1\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $1\frac{1}{3}$ f) $1\frac{1}{5}$ g) $\frac{1}{3}$ h) $1\frac{7}{10}$

poziom C a) $8\frac{2}{7}$ b) $2\frac{1}{2}$ c) 12 d) $4\frac{2}{3}$ e) $8\frac{1}{5}$ f) $5\frac{1}{2}$ g) $6\frac{2}{3}$ h) $6\frac{1}{3}$

poziom D a) $6\frac{4}{7}$ b) $5\frac{1}{3}$ c) $1\frac{1}{3}$ d) $4\frac{1}{9}$ e) $6\frac{2}{5}$ f) 4

poziom E a) $4\frac{3}{7}$ b) $1\frac{3}{5}$ c) $4\frac{6}{11}$ d) $2\frac{1}{2}$ e) $5\frac{1}{3}$ f) $2\frac{3}{4}$ g) $1\frac{2}{3}$ h) $3\frac{6}{7}$ i) $4\frac{4}{9}$

MISTRZ a) $5\frac{4}{5}$ b) $21\frac{1}{7}$ c) $16\frac{2}{3}$ d) 49

3 a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{5}{9}$ c) tyle samo 5 a) $\frac{3}{7}$ klasy b) W klasie nie mogło być 20 uczniów, a mogło być 28 uczniów. 6 a) $7\frac{1}{3}$ b) $13\frac{4}{9}$ 7 $5\frac{3}{5}$ dikotylna; Hermes wypił mniej niż szklankę. 8 Kolejne sumy to: 1, 2, 3. Następnie będzie 4 i kolejne liczby naturalne. 9 $26\frac{2}{3}$ m 10 schodzenie po schodach: 3 min, jazda rowerem: 12 min, przebieganie: 10 min, trening: dwa razy po 45 min, przerwa: 15 min, przebieganie po treningu: 15 min, jazda rowerem do domu: 20 min, schowanie roweru i wejście po schodach: 15 min; 3 godz.; 3 11 a) $\blacktriangle 3$, $\blacksquare 2$ lub $\blacktriangle 5$, $\blacksquare 2$ b) $\blacktriangle 8$, $\blacksquare 4$

Dla dociekliwych 1 a) $7\frac{6}{7}$ b) $11\frac{1}{9}$ c) 16 d) $\frac{1}{3}$ e) 2 2 a) 1 b) 1

Czy już umiem? I a) $10\frac{1}{5}$ b) $6\frac{3}{7}$ c) $2\frac{1}{2}$ II a) $\frac{2}{5}$ b) $4\frac{4}{7}$ c) $1\frac{5}{11}$ III $1\frac{2}{5}$ m

s. 169 4. Dodawanie i odejmowanie ułamków o różnych mianownikach

→ 1

poziom A a) $1\frac{1}{4}$ b) $\frac{7}{10}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $1\frac{1}{3}$ e) $\frac{13}{15}$ f) $1\frac{1}{8}$ g) $\frac{1}{9}$ h) $\frac{1}{20}$ i) $\frac{13}{20}$

poziom B a) $\frac{8}{15}$ b) $\frac{3}{20}$ c) $\frac{41}{63}$ d) $\frac{17}{42}$ e) $\frac{19}{28}$ f) $\frac{1}{6}$ g) $\frac{13}{40}$ h) $\frac{1}{12}$ i) $\frac{13}{24}$

poziom C a) $1\frac{5}{12}$ b) $1\frac{6}{35}$ c) $\frac{11}{20}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $1\frac{1}{18}$ f) $1\frac{8}{21}$ g) $1\frac{7}{15}$ h) $\frac{1}{14}$ i) $\frac{4}{15}$

poziom D a) $\frac{7}{15}$ b) $\frac{5}{24}$ c) $1\frac{1}{18}$ d) $\frac{1}{36}$ e) $1\frac{11}{30}$ f) $\frac{5}{18}$ g) $1\frac{7}{12}$ h) $\frac{25}{42}$ i) $\frac{17}{30}$

poziom E a) $5\frac{22}{35}$ b) $3\frac{5}{12}$ c) $2\frac{1}{10}$ d) $5\frac{1}{18}$ e) $2\frac{5}{12}$ f) $6\frac{5}{6}$ g) $14\frac{5}{33}$ h) $3\frac{3}{14}$ i) $2\frac{1}{35}$

MISTRZ a) $2\frac{10}{21}$ b) $10\frac{7}{30}$ c) $\frac{3}{4}$

2 a) $\frac{7}{24}$ b) $\frac{17}{24}$ 5 a) $x = 2\frac{1}{4}$ b) $y = 4\frac{1}{4}$ c) $z = 3\frac{1}{4}$ 6 a) $\frac{17}{20}$ b) $\frac{3}{20}$ c) najwięcej Jaś, najmniej Tomek d) Dominika z Tomkiem 7 $\frac{3}{20}$ 9 a) $1\frac{5}{12}$ b) $8\frac{5}{12}$ c) $2\frac{5}{24}$ d) $5\frac{5}{24}$ 10 $\frac{1}{8}$ 11 a) $\blacksquare 5$, $\blacklozenge 3$, $\blacktriangle 4$ lub $\blacksquare 5$, $\blacklozenge 4$, $\blacktriangle 3$, lub $\blacksquare 4$, $\blacklozenge 2$, $\blacktriangle 6$, lub $\blacksquare 4$, $\blacklozenge 6$, $\blacktriangle 2$ b) $\blacksquare 1$, $\blacklozenge 3$, $\blacktriangle 5$ c) $\blacksquare 18$, $\blacktriangle 9$, $\blacklozenge 3$ lub $\blacksquare 18$, $\blacktriangle 2$, $\blacklozenge 3$

Dla dociekliwych 1 a) $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ b) $\frac{7}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ c) $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

d) $\frac{7}{15} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{120}$ e) $\frac{9}{20} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{180}$ 2 $\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$; $\frac{3}{11} = \frac{1}{4} + \frac{1}{44}$; $\frac{4}{11} = \frac{1}{3} + \frac{1}{33}$; $\frac{5}{11} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{99}$; $\frac{6}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{22}$; $\frac{7}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{88}$

Czy już umiem? I a) $\frac{13}{15}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{1}{10}$ II a) $3\frac{1}{12}$ b) $6\frac{1}{2}$ c) $2\frac{3}{4}$ III $1\frac{5}{12}$

s. 178 **5. Mnożenie ułamka przez liczbę naturalną. Ułamek liczby**

➔ 1

poziom A a) $\frac{6}{11}$ b) $\frac{8}{15}$ c) $\frac{33}{50}$ d) $\frac{4}{7}$ e) $\frac{8}{9}$ f) $\frac{7}{10}$ g) $\frac{10}{17}$ h) $\frac{6}{7}$ poziom B a) $1\frac{3}{11}$ b) $3\frac{7}{15}$ c) $1\frac{27}{50}$ d) $1\frac{3}{7}$ e) $2\frac{2}{9}$ f) $4\frac{9}{10}$ g) $2\frac{6}{17}$ h) $2\frac{1}{7}$ poziom C a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{4}{5}$ c) 2 d) $1\frac{4}{5}$ e) $2\frac{2}{3}$ f) $\frac{1}{2}$ g) $1\frac{3}{4}$ h) $3\frac{1}{3}$ poziom D a) $7\frac{1}{3}$ b) $8\frac{2}{5}$ c) $10\frac{2}{7}$ d) $4\frac{4}{5}$ e) $21\frac{1}{9}$ f) $18\frac{1}{2}$ g) $4\frac{1}{4}$ h) $19\frac{1}{3}$ MISTRZ a) 74 b) 15 c) $2\frac{1}{8}$ d) $176\frac{2}{3}$ e) $2\frac{2}{5}$ f) $\frac{7}{125}$ 2 4, 2, 3 3 6, 12, 6 7 a) 12 b) 8 8 a) 6 jabłek b) 24 uczniów c) $2\frac{1}{2}$ czekolady9 a) $\frac{2}{3} > \frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{3}$ liczby 24 to więcej niż $\frac{1}{4}$ liczby 24 c) $\frac{2}{3}$ liczby 6 to mniejniż $\frac{1}{4}$ liczby 20 10 Pierwszego dnia 18, drugiego 16, trzeciego 14.

11 klasa 5a: 24 uczniów, klasa 5b: 28 uczniów 12 24 13 120 śliwek

Czy już umiem? I a) $2\frac{2}{5}$ b) $1\frac{2}{3}$ c) $1\frac{1}{2}$ II a) 6 bochenków b) 12 samochodów

III Jest 10 cukierków owocowych, 3 czekoladowe i 2 krówki.

s. 185 **6. Mnożenie ułamków**

➔ 1

poziom A a) $\frac{8}{63}$ b) $\frac{12}{55}$ c) $\frac{49}{110}$ d) $\frac{15}{56}$ e) $\frac{4}{45}$ f) $\frac{16}{63}$ g) $\frac{4}{27}$ h) $\frac{32}{77}$ poziom B a) $\frac{1}{15}$ b) $\frac{8}{15}$ c) $\frac{1}{18}$ d) $\frac{5}{21}$ e) $\frac{3}{14}$ f) $\frac{4}{11}$ g) $\frac{3}{10}$ h) $\frac{3}{14}$ poziom C a) $\frac{2}{9}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{2}{63}$ e) $\frac{1}{6}$ f) $\frac{1}{12}$ g) $\frac{1}{15}$ h) $\frac{3}{7}$ poziom D a) $3\frac{3}{4}$ b) 12 c) $3\frac{1}{5}$ d) $1\frac{1}{4}$ e) 18 f) $3\frac{1}{2}$ g) 6 h) $6\frac{3}{5}$ MISTRZ a) $\frac{2}{3}$ b) $1\frac{1}{2}$ c) $1\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{10}$ 2 a) 10 b) $4\frac{2}{3}$ c) $\frac{2}{15}$ d) 1 5 a) $x = \frac{5}{7}$ b) $x = \frac{1}{5}$ c) $x = 5$ d) $x = 2\frac{1}{3}$ e) $x = 8$ f) $x = \frac{1}{3}$ 6 HELLADA 7 $1\frac{3}{4}$ litra 8 $\frac{1}{6}$ litra 9 a) $\frac{15}{16}$ b) $1\frac{1}{8}$ c) $\frac{15}{16}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $1\frac{1}{8}$ f) $\frac{3}{4}$ 10 $4\frac{1}{5}$; $9\frac{1}{3}$; 4 11 Jest więcej wody. 12 a) 18 min = 1080 s b) 30 cm = 300 mm13 $\frac{2}{5}$ Dla dociekliwych 1 a) $\frac{3}{4} \cdot 8\frac{8}{9} = \frac{3}{4} \cdot \frac{80}{9} = 6\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4} \cdot 8 + \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = 6\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2} \cdot 12\frac{2}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{62}{5} = 6\frac{1}{5}$; $\frac{1}{2} \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = 6\frac{1}{5}$ c) $\frac{3}{5} \cdot 20\frac{1}{4} = \frac{3}{5} \cdot \frac{81}{4} = 12\frac{3}{20}$; $\frac{3}{5} \cdot 20 + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = 12\frac{3}{20}$ 2 a) $1001\frac{1}{118}$ b) $2222\frac{11}{111}$ c) $246\frac{1}{372}$ Czy już umiem? I a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{49}{99}$ II a) 1 b) $6\frac{1}{3}$ c) $1\frac{3}{5}$ III $\frac{1}{2}$ kg; to więcej niż 30 dag.

s. 189 **7. Odwrotności liczb**

➔ 1

poziom A a) $\frac{7}{2}$ b) $\frac{11}{4}$ c) $\frac{15}{17}$ d) $\frac{7}{5}$ e) $\frac{5}{4}$ f) $\frac{8}{3}$ g) $\frac{14}{3}$ h) $\frac{2}{15}$ i) $\frac{17}{4}$ j) $\frac{202}{5}$

poziom B a) $\frac{1}{7}$ b) 5 c) $\frac{1}{136}$ d) 30 e) $\frac{1}{5}$ f) 8 g) $\frac{1}{14}$ h) 14 i) $\frac{1}{3}$ j) 12

poziom C a) $\frac{2}{15}$ b) $\frac{5}{21}$ c) $\frac{5}{7}$ d) $\frac{30}{151}$ e) $\frac{5}{12}$ f) $\frac{4}{33}$ g) $\frac{7}{23}$ h) $\frac{8}{41}$ i) $\frac{5}{17}$ j) $\frac{2}{9}$

MISTRZ a) $3\frac{4}{7}$ b) $5\frac{3}{7}$

2 1 5 a) suma: $3\frac{1}{10}$, odwrotność sumy: $\frac{10}{31}$ b) odwrotności: $1\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$,

suma odwrotności: $2\frac{1}{15}$ 6 odwrotność liczby $4\frac{1}{5}$ 7 a) 2 b) 3 c) 8 8 c) $1\frac{1}{5}$

9 $\blacktriangle = \blacksquare^2 + 1$, czyli $\blacktriangle$ oznacza liczbę o 1 większą niż $\blacksquare^2$. Ponieważ $\blacksquare$ i $\blacktriangle$ są liczbami jednocyfrowymi, więc jest jedno rozwiązanie: $\blacksquare = 2$ i $\blacktriangle = 5$.

Dla dociekliwych 1 a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{2}{11}$ c) $\frac{2}{15}$ d) $\frac{1}{7}$ e) $\frac{2}{5}$ f) $2\frac{3}{10}$ g) $10\frac{3}{73}$ h) $4\frac{2}{9}$ i) $2\frac{1}{30}$ j) $\frac{1}{5}$ k) $\frac{7}{33}$ l) $\frac{7}{150}$ m) $\frac{2}{35}$ n) $\frac{3}{55}$ o) $1\frac{7}{8}$

Czy już umiem? I a) $1\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $1\frac{2}{7}$ II a) $\frac{4}{23}$ b) $\frac{3}{37}$ c) $\frac{9}{25}$ III 0 nie ma odwrotności; 1 jest równe swojej odwrotności.

s. 194 **8. Dzielenie ułamków**

➔ 1

poziom A a) $\frac{18}{35}$ b) $\frac{33}{35}$ c) $\frac{10}{77}$ d) $1\frac{19}{21}$ e) $\frac{5}{36}$ f) $1\frac{1}{35}$ g) $\frac{28}{45}$ h) $2\frac{2}{21}$

poziom B a) $\frac{2}{15}$ b) $1\frac{1}{5}$ c) $\frac{14}{27}$ d) 6 e) $\frac{9}{14}$ f) 1 g) $\frac{2}{3}$ h) $\frac{6}{7}$

poziom C a) $\frac{10}{13}$ b) $\frac{2}{9}$ c) $1\frac{1}{7}$ d) $1\frac{1}{5}$ e) $2\frac{2}{3}$ f) $1\frac{1}{2}$ g) $\frac{1}{2}$ h) $1\frac{3}{5}$

MISTRZ a) $5\frac{2}{3}$ b) $1\frac{1}{2}$ c) $1\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$

2 0,03 kg = 3 dag 5 $\frac{1}{6}$ litra 6 a) $x = 1\frac{2}{5}$ b) $x = 5$ c) $x = 3$ d) $x = \frac{1}{5}$ e) $x = \frac{1}{4}$ f) $x = \frac{3}{7}$

7 $\frac{1}{8}$ kg; 1 zł 8 $\frac{1}{3}$ litra 9 a) 10 dzbanków b) $62\frac{1}{2}$ 10 a) o $\frac{3}{4}$ koszyka b) $1\frac{3}{7}$ razy

11 przez $\frac{1}{2}$ 12 a) $\frac{1}{11}$ b) 1 13 $\frac{8}{6} : \frac{7}{9}$ lub $\frac{9}{7} : \frac{6}{8}$, lub $\frac{9}{6} : \frac{7}{8}$, lub $\frac{8}{7} : \frac{6}{9}$

Dla dociekliwych 1 a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{3}$ 2 a) $x = 666\frac{444}{569}$ b) $x = 34\frac{3}{55}$

c) $x = 707\frac{35}{68}$ 3 a) $\frac{10}{21}$ b) $\frac{5}{3} \cdot \frac{2}{7}$ c) np. $\frac{2}{3} : \frac{7}{5}$, $\frac{5}{3} : \frac{7}{2}$ 4 $\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{5}$, $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2}$, np. $\frac{3}{2} : \frac{5}{7}$, $\frac{3}{5} : \frac{2}{7}$

Czy już umiem? I a) $5\frac{1}{4}$ b) 1 c) $\frac{3}{10}$ II a) $2\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{6}$ c) 7 III 6

s. 199 **9. Działania na ułamkach**

1 a) 0 b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $1\frac{2}{3}$ e) $\frac{2}{3}$ f) 0 2 a) 3 b) 5 c) $1\frac{1}{5}$ d) $3\frac{3}{7}$ 3 a) $5\frac{3}{7}$ b) 8

c) $11\frac{5}{7}$ d) $7\frac{16}{45}$ 4 a) $\frac{1}{9}$ b) 12 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{10}$ 5 a) $\frac{2}{5}$ b) $72\frac{1}{2}$ c) $2\frac{3}{10}$ d) $4\frac{4}{5}$

9 MAZOWSZE 10 DZIELNIK 11 Mama zużyła $1\frac{1}{3}$ litra, zostały 2 litry. 12 $\frac{2}{75}$

13 $1\frac{13}{60}$ kg

Dla dociekliwych 1 a) 630 b) 210 c) 840 d) 420 e) 1470 2 a) 720 b) 105 c) 2750

Czy już umiem? I a) $1\frac{5}{24}$ b) $\frac{5}{16}$ c) $\frac{9}{20}$ d) $2\frac{2}{9}$ II a) $1\frac{3}{4}$ b) 8 III $\frac{1}{5}$

s. 203 **Powtórzenie przed klasówką**

1 $\frac{3}{8}$ 2 a) $\frac{5}{2}$ b) $\frac{19}{5}$ c) $\frac{93}{10}$ 3 a) $1\frac{1}{2}$ b) $1\frac{2}{3}$ c) $3\frac{3}{4}$ 4 a) 9 b) 5 c) 6 d) 5

5 a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{15}{28}$ 6 $A = \frac{1}{7}$, $B = \frac{4}{7}$, $C = 1\frac{3}{7}$, $D = 2\frac{2}{7}$ 7 Więcej niż litr.

8 $\frac{5}{16}$ 9 a) $\frac{45}{63} < \frac{49}{63}$ b) $1\frac{1}{4} > 1\frac{1}{5}$ c) $\frac{10}{24} > \frac{9}{24}$ 10 a) $1\frac{9}{28}$ b) $1\frac{4}{7}$ c) $\frac{13}{15}$ d) $1\frac{1}{20}$

11 a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{8}{9}$ 12 a) $\frac{4}{15}$ b) 12 13 a) $1\frac{13}{24}$ b) $4\frac{50}{63}$ c) $2\frac{5}{6}$ d) 6 e) $\frac{1}{6}$ 14 a) $1\frac{1}{7}$

b) $\frac{69}{400}$ 15 a) L b) D c) I d) R 16 a) 18 b) 4 17 $\frac{1}{4}$ litra 18 $\frac{3}{10}$ 19 $\frac{6}{7}$

s. 205 **Zadania na temat...**

1 a) 4, $\frac{1}{4}$ b) 16, $\frac{1}{16}$ c) 64, $\frac{1}{64}$ 2 a) czerwona: $\frac{1}{4}$, zielona: $\frac{3}{16}$, niebieska: $\frac{9}{64}$ b) $\frac{27}{64}$

c) $\frac{37}{64}$ 3 b) $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$ 4 a) $\frac{1}{3}$ cala b) $\frac{4}{3}$ cala c) Długość linii, która powstaje

w kolejnym kroku, to $\frac{4}{3}$ długości linii z poprzedniego kroku.

5 Długość brzegu trójkąta z rysunku A wynosi 3 cale. Długość brzegu figury z rysunku B wynosi $\frac{4}{3} \cdot 3 = 4$ [cale]. Długość brzegu figury z rysunku C wynosi $\frac{4}{3} \cdot 4 = 5\frac{1}{3}$ [cala].

Długość brzegu figury z rysunku D wynosi $\frac{4}{3} \cdot \frac{16}{3} = 7\frac{1}{9}$ [cala].

s. 208 **Zadania na deser**

1 a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ 2 a) NAREW b) PUŁTUSK 3 a) $1\frac{4}{7}$ b) $2\frac{1}{3}$ c) $\frac{13}{15}$ 4 a) $2\frac{1}{2}$

b) $1\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ 5 a) Np.: $\frac{2}{5} < \frac{21}{50} < \frac{22}{50} < \frac{23}{50} < \frac{24}{50} < \frac{25}{50} < \frac{3}{5}$ b) Np.: $\frac{3}{8} < \frac{22}{56} < \frac{23}{56} < \frac{3}{7}$

6 a) $\frac{7}{12}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{5}$ 7 a) ||||| b) || |||| c) || || d) || ||||

8 w ciągu tygodnia: 56 godz., w ciągu miesiąca: 240 godz.

9 piątklasista: 1200 oddechów w ciągu godziny; osoba dorosła: 161 280 oddechów

w ciągu tygodnia 10 Wrócili o 13.54. 11 a) $3\frac{4}{11}$ b) $6\frac{9}{28}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{4}$

12 a) $\frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{2} = 3$ b) $\frac{1}{5} \cdot 5 = 1$ 13 a) tak b) tak c) nie d) tak e) nie f) tak g) nie h) tak

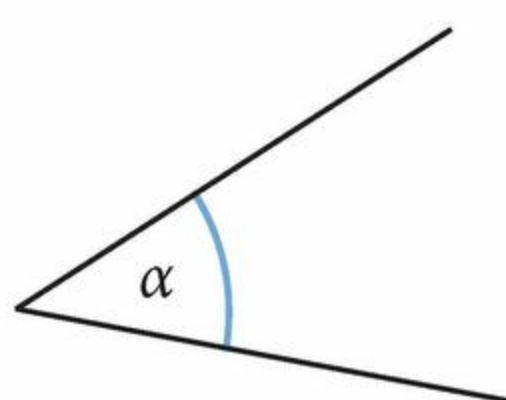
14 $\frac{462}{1716} = \frac{7}{26}$

Zdjęcia: Archiwum wydawnictwa: s. 9, 30 (malarstwo), 70, Jan Baranowski s. 30 (inskrypcje), Jerzy Matuszewski s. 31, Maciej Wróbel s. 23, 26 (XVI z zapalek), 27 (tablica), 41 (ochraniacze), 102 (wycinanie trójkąta), 116, 167, 176 (mandarynki), 192 (jabłka), PPHU KLIF Andrzej Pastuszek s. 139; East News: ARCHIWUM KARLICKI/Mieczysław Karlicki Collection s. 27 (Waza), Science Photo Library/SSH s. 205; Getty Images: Archive Photos/Lambert s. 66, Corbis s. 71, Gallo Images/Travel Ink s. 27 (inskrypcja), iStock/Getty Images Plus - okładka (dziewczynka), ONOKY/Eric Audras s. 143; Narodowe Archiwum Cyfrowe: s. 206; PAP: CAF/Henryk Rosiak s. 67 (słuchowisko); Anita Andrzejewska i Andrzej Pilichowski-Ragno: s. 108; Eugeniusz Szczygieł/Muzeum Radia, Radzionków: s. 67 (stare radia); Shutterstock: Alesikka s. 41 (rolki), AlexGreenArt s. 175 (akwarela – świerki), alicja neumiler s. 53 (wisiorki), Andrei Mayatnik s. 151 (kartki papieru), Barbara Neveu s. 26 (kolorowe zapalaki), B_K_Design s. 172 (dalia), Brum s. 53 (narzędzia i koraliki), Bruno Sommerfeld s. 89 (kątomierz 3), Chutikarn Y s. 161 (kości do gry), Cincinart s. 174 (akwarela - pejzaż), Claudio Baldini s. 89 (kątomierz 2), Dale Wagler s. 18, Daniel_P s. 26 (liczba z zapalek), David P. Smith s. 120, Dmitry Galaganov s. 191 (metalowe garnki), Dusty Cline s. 41 (piłka do kosza, piłka nożna), Evan Lorne s. 170, Goodmoments s. 8 (klocki), happydancing s. 182 (roślina), i9370 s. 164, inavanhateren s. 93, inxti s. 41 (czepek, okulary pływackie), Ioannis Ioannou s. 165, Katariina Järvinen s. 86 (wachlarz 2, 4), Luminis s. 41 (kask), M. Unal Ozmen s. 11, M Victoria s. 172 (stokrotka), Mallmo s. 72 (tablet i przybory szkolne), Master1305 s. 191 (kucharz), michael ledray s. 195, Nigel Paul Monckton s. 89 (kątomierz 1), Pandora Studio s. 33 (gra w karty), Peter Turner Photography s. 46, primopiano s. 33 (podłoga), puchan s. 13, raksha1905 s. 192 (pizza), rattiya lamrod s. 132, rattiya lamrod s. 161 (materiały biurowe), RenataOs s. 180, Rikard Stadler s. 201, Rjedwards s. 172 (ostróżka), ryasick photography s. 86 (wachlarz 3), Sergiu Bretea s. 86 (wachlarz 1), Shutterstock s. 161 (pinezki), Tekkol s. 53 (zielone korale), Tina Bits s. 174 (monety), Trentemoller s. 174, 175 (Ateny), Ufulum s. 86 (wachlarz 5), Yuri Arcurs s. 7, Zhukov s. 72 (kartka papieru); Thinkstock/Getty Images: Hemera s. 176 (zielone jabłka), iStockphoto - s. 45, akovKalinin s. 144 (dżungla), cherezoff s. 72 (dłoni), CnOra s. 182 (drewniana powierzchnia, kartka, długopis), Coprid s. 110, 122 (linijka), dziewul s. 102 (drewniana podłoga), Epsilon5th s. 110, 122 (kulka z plasteliny), goir s. 102 (notatnik), gurkoao s. 182 (ręka z ołówkiem), HAKINMHAN s. 182 (przedmioty na stole), Kritchanut s. 110, 122 (stół), Mizina s. 191 (pizza), monticello s. 171, natrot s. 110, 122 (kartka papieru), Ninell_Art s. 110, 122 (dłoni), ottoblotto s. 102 (nożyczki), phongphan5922 s. 151 (drewniana powierzchnia), Sergii Kateryniuk s. 182 (ręce i kartki papieru), StockPhotosArt s. 89 (kątomierz 4), Suradech14 s. 151 (ręka), thawats s. 144 (papugi), thumb s. 176 (czerwone jabłka), yana_boyko s. 174 (gałązka oliwna), Thinkstock/Getty Images s. 17, Hemera/JosT Elias - okładka (kątomierz), Zoonar/N.Sorokin s. 72 (dłoni); Getty Images/iStock/Getty Images Plus/hraska s. 172 (młotek).

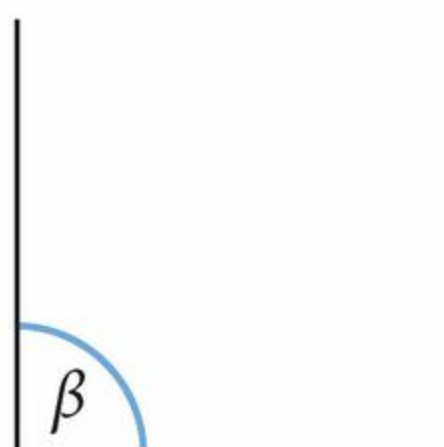
Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Imię i nazwisko	Klasa	Rok szkolny
1.		
2.		
3.		

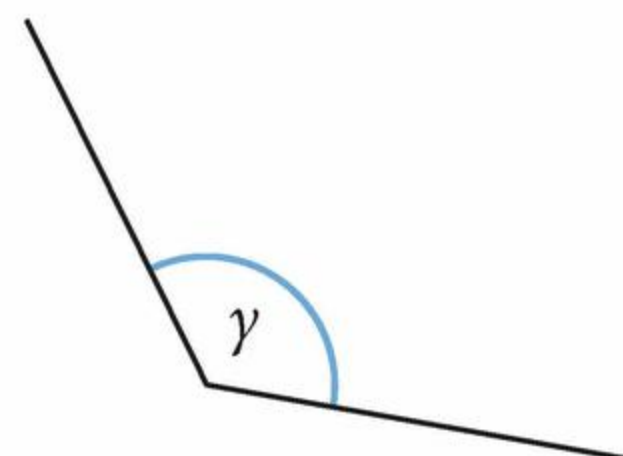
RODZAJE KĄTÓW



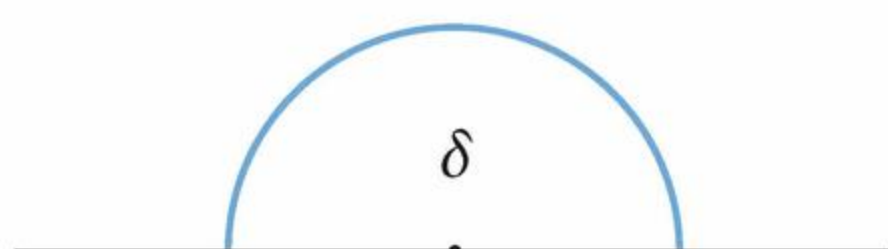
$\alpha < 90^\circ$
kąt ostry



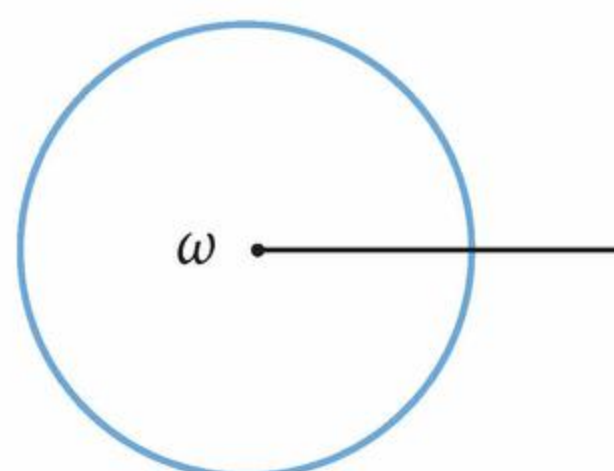
$\beta = 90^\circ$
kąt prosty



$\gamma > 90^\circ$ i $\gamma < 180^\circ$
kąt rozwarty

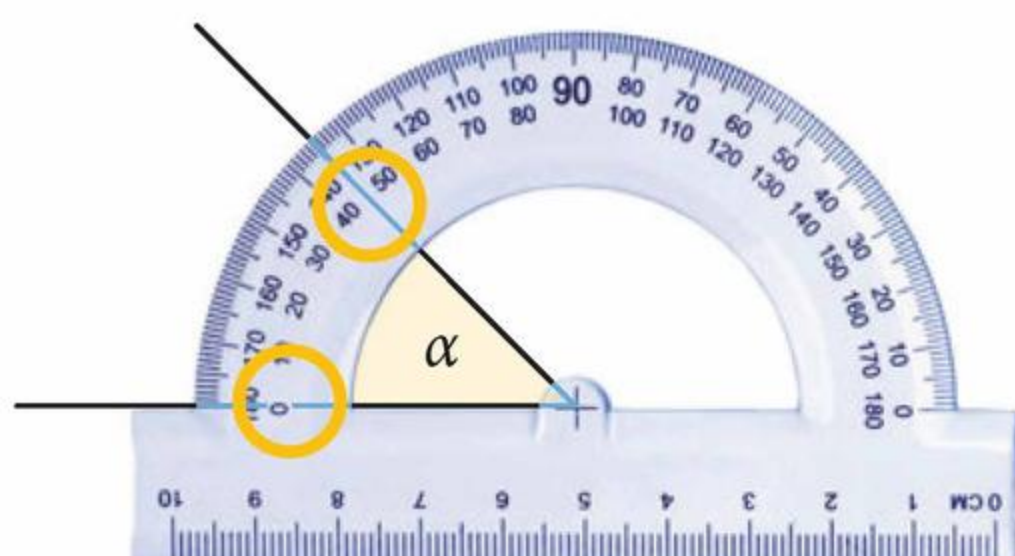


$\delta = 180^\circ$
kąt półpełny

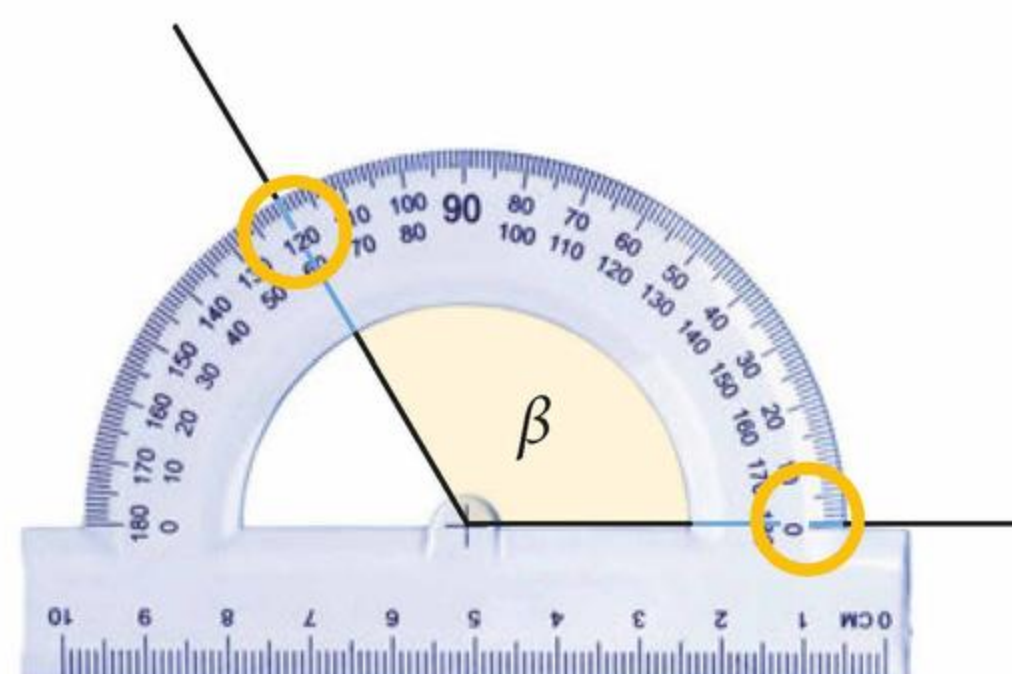


$\omega = 360^\circ$
kąt pełny

MIERZENIE KĄTÓW



$\alpha = 45^\circ$



$\beta = 120^\circ$