NOWA EDYCJA
2023–2025

7

Matematyka z kluczem

PODRĘCZNIK DO MATEMATYKI
DLA KLASY SIÓDMEJ SZKOŁY PODSTAWOWEJ

neon

W wersji cyfrowej znajdziesz oznaczenia usuniętych treści z podstawy w 2024

nowa era

Droga Nowa Ero,

Nigdy bym nie publikowała publicznie książek wydawnictw, które działają na uczciwych zasadach.

Wasza firma jednak promuje masowy dodruk, całkowicie niepotrzebnych książek, które mogłyby zastąpione wersjami elektronicznymi!

Co prawda e-booki są dostępne na waszej stronie, jednak:

- W przeciwieństwie do fizycznej książki, licencja na e-book kończy się po roku. Oznacza to, że jeżeli moja córka chciałaby powtórzyć sobie całą wiedzę do matury, musiałabym jej kupić wszystkie wasze książki od nowa.
- Waszych e-booków nie da się pobrać! Wymagają one dostęp do internetu, co uniemożliwia ich użycie na naszej wsi, gdzie zasięg jest ograniczony.
- Wasze e-booki nie działają na telefonach komórkowych!!!
- Wasze e-booki sprzedawane są po tej samej (albo wyższej) cenie co regularne książki. Cena e-booka powinna być niższa, gdyż e-booki wymagają elektronicznego czytnika (tabletu)!

Czas rozpocząć nową erę (o ironio), w której papier nie jest bezczelnie marnowany dla pieniędzy. Przedstawiam e-book, który spełnia wszystkie oczekiwania uczniów.

Dbajmy o środowisko, zróbmy to dla młodych pokoleń.

7

Marcin Braun, Agnieszka Mańkowska, Małgorzata Paszyńska
Karolina Wej, Wojciech Babiański
Ewa Szmytkiewicz, Jerzy Janowicz

Matematyka z kluczem

PODRĘCZNIK DO MATEMATYKI
DLA KLASY SIÓDMEJ SZKOŁY PODSTAWOWEJ

OZNACZENIA W E-PODRĘCZNIKU

Ikona na górze strony sygnalizuje zmiany, które obowiązują od 2024 r.

W ten sposób oznaczono treści, które nie są już wymagane.

nowa era
Twoje mocne strony

Matematyka z kluczem

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców: **mgr. Tadeusza Marczewskiego, dr. hab. Edwarda Tutaja, dr Katarzyny Kozłowskiej**.

Etap edukacyjny: II
Typ szkoły: szkoła podstawowa
Rok dopuszczenia: 2020

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 875/4/2020/z1

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki dla klas 4–8 szkoły podstawowej* autorstwa Marcina Brauna, Agnieszki Mańkowskiej, Małgorzaty Paszyńskiej. Program dostępny jest na stronie internetowej www.dlanauczyciela.pl

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na **www.legalnakultura.pl**

Wykorzystywanie treści niniejszego Utworu, w jakiejkolwiek formie lub w jakimkolwiek procesie, do celów eksploracji tekstu i danych, uczenia maszynowego, rozwoju i/lub szkolenia i/lub wzbogacania sztucznej inteligencji jakiegokolwiek rodzaju jest surowo zabronione.

© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2023
ISBN 978-83-267-4665-9

Koncepcja podręcznika: Agnieszka Nowakowska, Dawid Szczypiński.
Redakcja merytoryczna: Renata Sawicka, Magdalena Spalińska, Paulina Staniszewska-Tudruj.
Współpraca redakcyjna: Anna Dubiel, Jan Baranowski, Marcin Minda, Katarzyna Radzimińska, Ewa Rucińska, Beata Zając, Elżbieta Zięcina, Robert Pysiak. **Opracowanie redakcyjne infografik:** Urszula Cielniak. **Konsultacje merytoryczne:** Piotr Drozdowski, Barbara Sasim-Leciejewska, Anna Staszak, dr Krystyna Dałek, Ewa Muszyńska, Jacek Klisowski, János Tischler (Węgierski Instytut Kultury), Barbara Galas, Krzysztof Spaliński.
Redakcja i korekta językowa: Paulina Szulim, Marta Zuchowicz, Kinga Tarnowska, Joanna Sawicka.
Nadzór artystyczny: Kaia Pichler. **Opieka graficzna:** Ewa Kaletyn.
Projekt okładki: Paulina Tomaszewska, Małgorzata Gregorczyk, Aleksandra Szpunar, Maciej Galiński.
Projekt graficzny: Re:design, Klaudia Jarocka-Ciok, Marek Błoszko. **Opracowanie graficzne:** Aleksandra Szpunar, Paulina Tomaszewska, Maciej Galiński, Ewa Kaletyn. **Fotoedycja:** Bogdan Wańkowicz, Katarzyna Iwan-Malawska. **Rysunki merytoryczne:** Andrzej Oziębło. **Ilustracje:** Ewelina Baran, Elżbieta Buczkowska, Rafał Buczkowski, Marta Długokęcka, Wioleta Herczyńska, Agata Knajdek, Krzysztof Mrawiński, Marek Nawrocki, Joanna Ptak, Ewa Sowulewska. **Mapy:** Jarosław Jakubiak.
Realizacja projektu graficznego: Mariusz Trzaskalski.

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Druk i oprawa: Quad/Graphics Europe Sp. z o.o.

Krótki przewodnik po podręczniku

Na dobry początek
– atrakcyjne wprowadzenie do lekcji.

Zapamiętaj
– nowe pojęcia i reguły.

Dobra rada
pomoże ci ominąć trudności.



Przykłady i ćwiczenia
– przećwicz nowe umiejętności.

Zadanie z kluczem
Zacznij od poziomu A i zgodnie z instrukcją dojdź do ostatniego poziomu.

← P3

Odsyłacz do przykładu
– przypomnij sobie sposób rozwiązania.

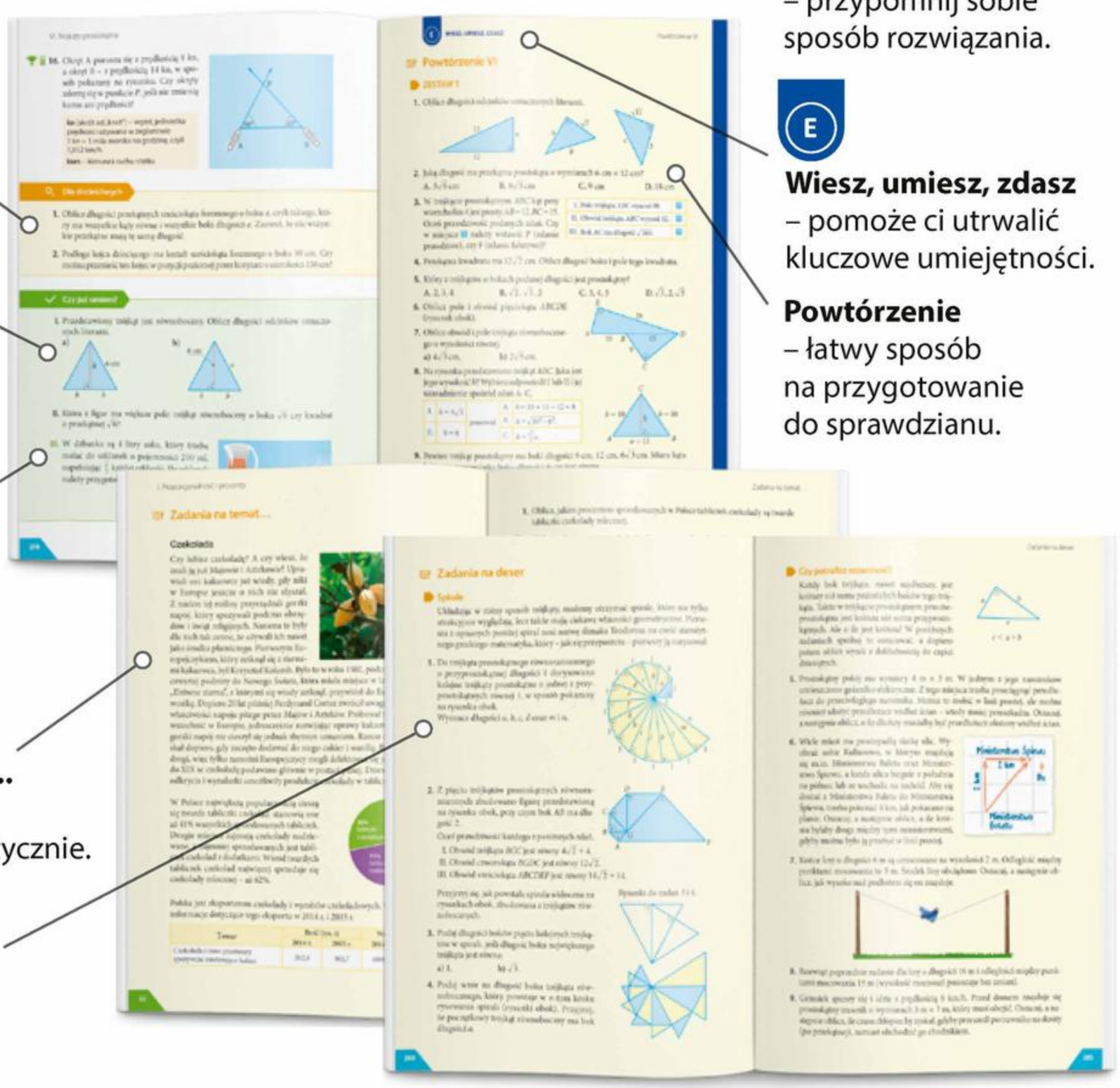
Dla dociekliwych
– naucz się więcej, niż to konieczne.

Czy już umiem?
– sprawdź stopień opanowania materiału.

Wiesz, umiesz, zdasz
– pomoże ci utrwalić kluczowe umiejętności.

Powtórzenie
– łatwy sposób na przygotowanie do sprawdzianu.

Dodatkowe zadanie dotyczące innego działu lub tematu.



Zadania na temat...
– zestaw zadań powiązanych tematycznie.

Zadania na deser
– dodatkowe ciekawe zadania.

zadania wymagające większego zaangażowania

zadania trudne, nietypowe

zadania na dowodzenie

zadania wymagające złożonych obliczeń

Spis treści

I. PROPORCJONALNOŚĆ I PROCENTY

1. Proporcjonalność prosta 6
2. Ułamek liczby 13
3. Co to jest procent 19
4. Obliczanie procentu danej liczby 30
5. Wyznaczanie liczby, gdy dany jest jej procent 37
6. O ile procent więcej, o ile procent mniej 43
7. Obliczenia procentowe 51

Powtórzenie I 58
Zadania na temat... 62
Zadania na deser 64

II. POTĘGI

1. Potęga o wykładniku naturalnym 66
2. Potęgi o tych samych podstawach 74
3. Własności potęgowania 81
4. Notacja wykładnicza 86
5. Obliczenia w notacji wykładniczej 92

Powtórzenie II 100
Zadania na temat... 102
Zadania na deser 104

III. PIERWIASTKI

1. Pierwiastek kwadratowy 106
2. Szacowanie pierwiastków 114
3. Własności pierwiastkowania 120
4. Pierwiastek trzeciego stopnia 127
5. Działania na pierwiastkach sześciennych 134
6. Działania na potęgach i pierwiastkach 140

Powtórzenie III 145
Zadania na temat... 147
Zadania na deser 149

IV. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

1. Od wzorków do wzorów 150
2. Suma algebraiczna i jej wyrazy 161
3. Opuszczanie nawiasów 169
4. Porządkowanie wyrazów w sumach algebraicznych 178
5. Wyrażenia algebraiczne i procenty 186

Powtórzenie IV 192
Zadania na temat... 194
Zadania na deser 196

V. RÓWNANIA

1. Co to jest równanie 198
2. Rozwiązywanie równań 204
3. Zadania tekstowe 214
4. Zadania tekstowe z procentami 223
5. Przekształcanie wzorów 231
Powtórzenie V 237
Zadania na temat... 239
Zadania na deser 241

VI. TRÓJKĄTY PROSTOKĄTNE

1. Twierdzenie Pitagorasa 242
2. Twierdzenie Pitagorasa – zadania 253
3. Kwadrat i jego połowa 260
4. Trójkąt równoboczny i jego połowa 268
Powtórzenie VI 279
Zadania na temat... 282
Zadania na deser 284

VII. UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH

1. Geometria kartki w kratkę 286
2. Punkty w układzie współrzędnych 293
3. Długości i pola w układzie współrzędnych 300
4. Odcinki w układzie współrzędnych 307
Powtórzenie VII 313
Zadania na temat... 315
Zadania na deser 316

Odpowiedzi 319
Indeks 335

1 Proporcjonalność prosta

Na dobry początek

Butlonos to gatunek delfina zamieszkujący wszystkie oceany. Długość ciała dorosłych osobników dochodzi do 3,6 m.

Butlonosy żywią się różnymi gatunkami ryb, krewetkami i mątwami. Żyją zwykle w grupach od 10 do 25 osobników, choć zdarzają się też samotne osobniki. Nierzadko jednak grupy delfinów łączą się w stada liczące kilkaset osobników i wspólnie polują na ryby.

		← Ile razy więcej delfinów...				
LICZBA OSOBNIKÓW	1	10	25	50	75	100
ŚREDNIA DZIENNA ILOŚĆ POŻYWIENIA (W KG)	10	100	?	500	?	1000
						...tyle razy więcej kilogramów ryb. →

Pytania i polecenia

- W tabeli przedstawiono zależność między liczbą delfinów a średnią ilością ich dziennego pożywienia. Ile kilogramów pożywienia zjada średnio dziennie grupa 25 delfinów? A grupa 75 delfinów? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Jeśli za 2 kg truskawek zapłacimy 8 zł, to łatwo obliczymy, ile zapłacimy za 6 kg tych owoców.



		· 3		· 1,5	
Liczba kilogramów	2	6	1	3	4,5
Kwota do zapłaty [zł]	8	24	4	12	18
		· 3		· 1,5	

Gdy kupimy trzy razy więcej truskawek, zapłacimy trzy razy więcej. W takim przypadku mówimy, że koszt zakupu truskawek jest **proporcjonalny** do kupionej ilości.
Sformułujemy teraz **definicję**. Definicja to wyjaśnienie jakiegoś pojęcia.

Zapamiętaj

Definicja proporcjonalności

Mówimy, że dwie dodatnie wielkości są **wprost proporcjonalne**, jeśli:
- wraz ze wzrostem jednej wielkości druga rośnie **tyle samo razy**

lub
- wraz ze zmniejszaniem się jednej wielkości druga zmniejsza się **tyle samo razy**.

Przyjrzyjmy się jeszcze raz tym dwóm wprost proporcjonalnym wielkościom.

Liczba kilogramów	1	2	3	4,5	6
Kwota do zapłaty [zł]	4	8	12	18	24

· 4 zł

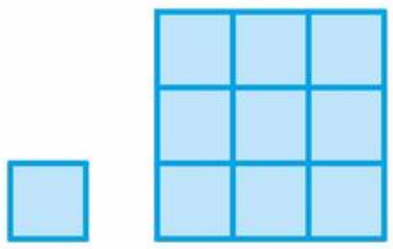
Aby obliczyć kwotę do zapłaty, mnożymy liczbę kilogramów przez cenę 4 zł, a więc iloraz kwoty do zapłaty przez liczbę kilogramów jest zawsze taki sam – równy cenie 4 zł (sprawdź!).

Zapamiętaj

Iloraz wielkości wprost proporcjonalnych jest stały.

Kwadrat o dłuższym boku ma większy obwód i większe pole. Jednak:

3 razy dłuższy bok to 3 razy większy obwód. Długość boku i obwód kwadratu **są** wprost proporcjonalne.



3 razy dłuższy bok to 9 razy większe pole. Długość boku i pole kwadratu **nie są** wprost proporcjonalne.

Przykład 1

Czy opłata za przejazd taksówką jest proporcjonalna do przebytej odległości?

Jeśli przejedziemy tą taksówką 1 km, zapłacimy:
$6 \text{ zł} + 2 \text{ zł} = 8 \text{ zł}$.
Jeśli przejedziemy 2 km, zapłacimy:
$6 \text{ zł} + 2 \cdot 2 \text{ zł} = 10 \text{ zł}$.

Liczba kilometrów	1	2
Kwota do zapłaty [zł]	8	10



Sposób I

Opłata za przebycie dwa razy dłuższej drogi (2 km) **nie jest** dwa razy większa. Dlatego opłata **nie jest** proporcjonalna do przebytej drogi, chociaż im dłuższa droga, tym większa opłata.

Zwróć uwagę na słowa „tyle samo razy" w definicji.

Sposób II

$\frac{8}{1} = 8$, $\frac{10}{2} = 5$

Iloraz nie jest taki sam, wielkości nie są proporcjonalne.

Ćwiczenie 1

Czy podane wielkości są proporcjonalne?

a) kwota zapłacona za porcję sera i masa tej porcji
b) wiek ojca i wiek córki młodszej od niego o 30 lat

Przykład 2

E

Za 9 paczek paneli podłogowych zapłacono 1372,68 zł. Ile zapłacimy za 3 takie paczki?

Sposób I

Obliczamy cenę jednej paczki: $1372{,}68 \text{ zł} : 9 = 152{,}52 \text{ zł}$.
Teraz łatwo obliczyć koszt 3 paczek: $152{,}52 \text{ zł} \cdot 3 = 457{,}56 \text{ zł}$.

Sposób II

3 paczki to 3 razy mniej niż 9 paczek, więc także koszt będzie 3 razy mniejszy:
$1372{,}68 \text{ zł} : 3 = 457{,}56 \text{ zł}$.

Ćwiczenie 2

Jadąc ze stałą prędkością, rowerzysta przejechał 2320 m w czasie 7 min. Jaką drogę pokonał, jadąc z tą samą prędkością przez 21 min?

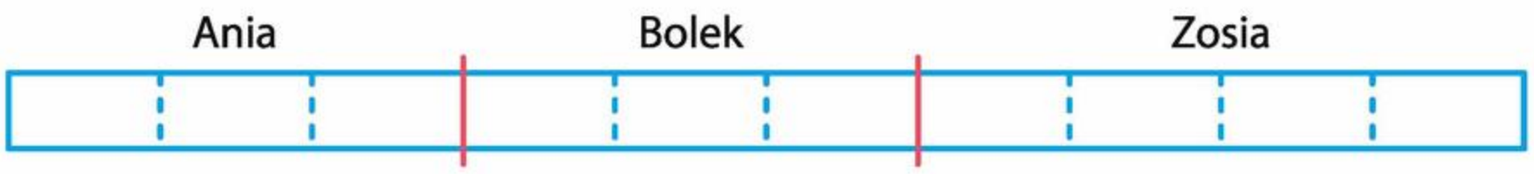
Podział proporcjonalny

Przykład 3

E

Ania, Bolek i Zosia kupili razem los na loterii. Ania i Bolek złożyli się po 3 zł, a Zosia dała 4 zł. Ustalili, że jeśli wygrają, to podzielą się nagrodą proporcjonalnie do wysokości wpłaconej kwoty. Okazało się, że wygrali 75 zł. Jak powinni się podzielić?

Los kosztował: 3 zł + 3 zł + 4 zł = 10 zł.



Sposób I

Podzielmy wygraną na 10 równych części. Każda z nich to 75 zł : 10 = 7,50 zł.
Ania dostanie 3 takie części, czyli 3 · 7,50 zł = 22,50 zł.
Bolek również otrzyma 3 części, czyli 22,50 zł.
Zosia dostanie 4 części, czyli 4 · 7,50 zł = 30 zł.

Sposób II

Cena losu wynosi 10 zł. Z tej kwoty Ania i Bolek zapłacili po $\frac{3}{10}$, a Zosia $\frac{4}{10}$.
W związku z tym każde z nich powinno otrzymać:

Ania	Bolek	Zosia
$\frac{3}{10} \cdot 75 = 22{,}50$ [zł]	$\frac{3}{10} \cdot 75 = 22{,}50$ [zł]	$\frac{4}{10} \cdot 75 = 30$ [zł]

W sytuacji opisanej w przykładzie 3 mówimy, że kwota została podzielona **w stosunku 3 : 3 : 4**. Zauważ, że aby dokonać takiego podziału, dzielimy całość na 3 + 3 + 4 = 10 równych części.

Ćwiczenie 3

Dwie rodziny, trzyosobowa i czteroosobowa, zebrały razem 42 kg śliwek. Zbierający podzielili owoce pomiędzy rodziny proporcjonalnie do liczby osób. Ile kilogramów śliwek dostała każda z rodzin?



Zadania

1. W którym przypadku koszt karmy dla kotów jest proporcjonalny do liczby kupionych puszek?



2. Czy podane wielkości są proporcjonalne?

a) długość krawędzi sześcianu i jego objętość

b) liczba jajek w pełnych pudełkach takich jak na rysunku i liczba tych pudełek

c) czas jazdy samochodu i droga pokonana przez ten samochód jadący z prędkością $50\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

d) czas trwania wycieczki i droga pokonana w tym czasie przez grupę, która często robi postoje



3. W tabeli przedstawiono drogę, jaką przejechał rowerzysta w czasie pierwszej sekundy jazdy, w czasie pierwszych dwóch sekund jazdy itd. Czy droga jest proporcjonalna do czasu?

a)

Czas (s)	1	2	3	4	5
Droga (m)	6	12	18	24	30

b)

Czas (s)	1	2	3	4	5
Droga (m)	5	10	15	19	22

4. Pan Kuba przeszedł 2,14 km w czasie 18 min 50 s. W jakim czasie przejdzie z taką samą prędkością drogę 1,07 km?

5. Pani Iza przebiegła 5 km w czasie 27 min. Jak sądzisz, czy dystans 10 km przebiegnie w czasie równym 54 min, dłuższym czy krótszym od 54 min? Dlaczego?

6. Ania chciała upiec ciasto czekoladowe, ale okazało się, że ma tylko 150 g masła. Oblicz, ile powinna użyć pozostałych składników wymienionych obok, aby zachować proporcje między nimi.

Składniki:

200 g masła
320 g gorzkiej czekolady 70%
4 jajka
280 g cukru trzcinowego
1 łyżeczka ekstraktu waniliowego
160 g mąki



7. Ze składników wymienionych w zadaniu 6 można zrobić 12 babeczek. Oblicz, ile poszczególnych składników należy użyć do przygotowania:

a) 18 takich babeczek, **b)** 21 takich babeczek.

8. Z wymienionych obok składników można przygotować 12 małych racuchów.

a) Oblicz, ile gramów dyni potrzeba do usmażenia 30 takich racuchów.

b) Ile małych racuchów z dyni można usmażyć, wykorzystując 5 szklanek mąki?



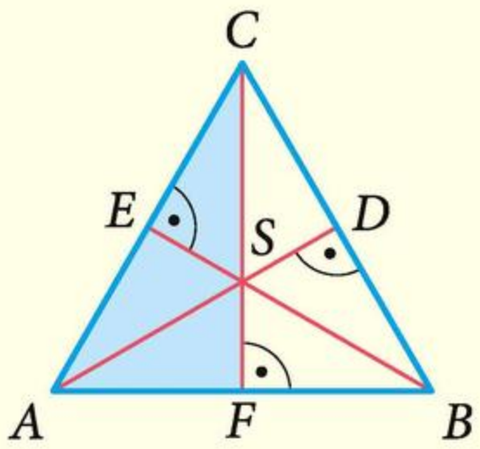
E **9.** Woda królewska to mieszanina kwasu solnego i azotowego w stosunku objętości 3 : 1. Jest ona tak silnie żrąca, że rozpuszcza się w niej nawet złoto, którego nie rozpuszcza żaden ze składowych kwasów samodzielnie. Ile centymetrów sześciennych poszczególnych kwasów należy zmieszać, aby uzyskać 100 cm^3 wody królewskiej?

10. Narysuj w zeszycie w kratkę odcinek i podziel go w stosunku 2 : 3 : 6. Jaką długość odcinka wybrać, aby najłatwiej go podzielić?

Dla dociekliwych

Wysokości trójkąta równobocznego przecinają się w jednym punkcie. Sprawdzimy, jak jest położony ten punkt. Zauważ, że wysokości dzielą trójkąt równoboczny na 6 identycznych trójkątów prostokątnych.

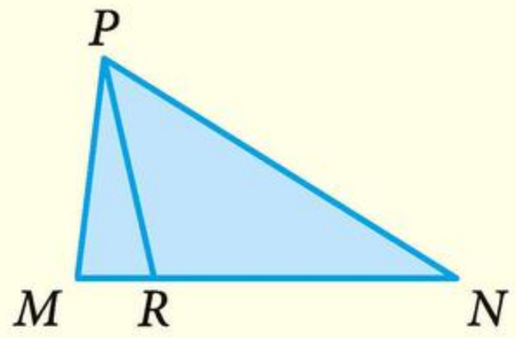
1. Ile wszystkich trójkątów jest na rysunku 1?



Rys. 1

2. Popatrz na trójkąt *AFC*. Odcinek *AS* dzieli go na dwa trójkąty: *AFS* i *ASC*. W jakim stosunku są pola tych trójkątów? Uzasadnij odpowiedź.

3. Popatrz na rysunek 2. Co można powiedzieć o stosunku długości odcinków *MR* i *RN*, jeśli wiadomo, że pole trójkąta *PRN* jest cztery razy większe od pola trójkąta *PMR*? Jak uzasadnisz odpowiedź?



Rys. 2

4. Korzystając z rysunku 1 oraz rozwiązań zadań 2 i 3, podaj stosunek, w jakim punkt *S* dzieli wysokość *CF* w trójkącie równobocznym *ABC*. Uzasadnij odpowiedź.

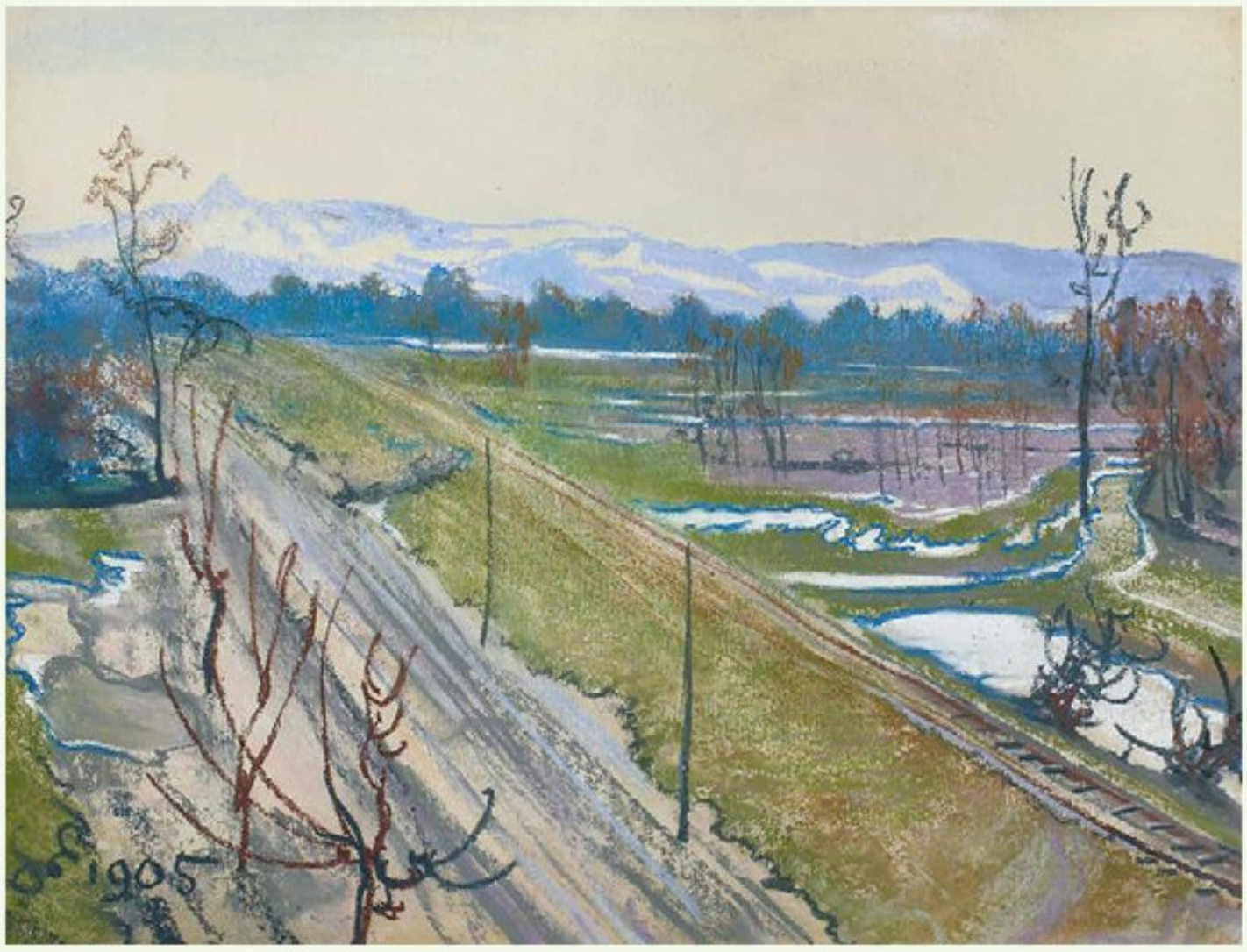
5. Uzasadnij, że punkt *S* dzieli odcinek *AD* w stosunku 1 : 2.

6. Uzasadnij, że $ES = \frac{1}{3}EB$.

Czy już umiem?

I. Czy w opisanych punktach ksero Alfa i Beta opłata za kopiowanie jest proporcjonalna do liczby kopiowanych stron?
- W punkcie Alfa płacimy 15 gr za stronę.
- W punkcie Beta opłata wynosi 20 gr za każdą z pierwszych stu stron, ale za sto pierwszą i każdą następną stronę – tylko 10 gr.

II. Obraz, którego zdjęcie pokazano poniżej, ma w rzeczywistości szerokość 62 cm. Oblicz rzeczywistą wysokość tego obrazu.



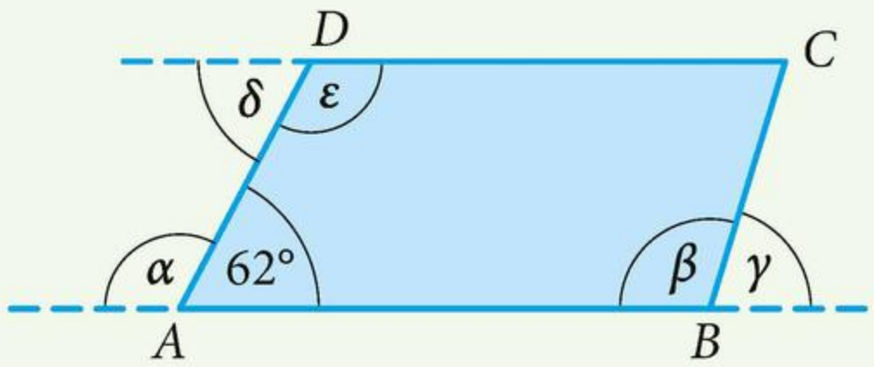
Stanisław Wyspiański *Widok z okna pracowni na Kopiec Kościuszki*

III. Możemy przyjąć, że na długich trasach ilość paliwa spalanego przez samochód jest wprost proporcjonalna do długości przejechanej drogi. Kierowca obliczył, że na przejechanie 350 km auto potrzebowało 25 litrów paliwa. Do końca trasy pozostało 150 km, a w zbiorniku było jeszcze 10 litrów paliwa. Czy z takim zapasem samochód dotrze do celu bez tankowania?

IV. W czworokącie $ABCD$ przedstawionym na rysunku $AB \parallel CD$.

a) Jakim czworokątem jest czworokąt $ABCD$?

b) Które spośród kątów oznaczonych literami greckimi możesz obliczyć na podstawie informacji podanych na rysunku? Podaj miary tych kątów.



2 Ułamek liczby

Na dobry początek >

Do prawidłowego funkcjonowania twój organizm potrzebuje różnorodnych składników odżywczych.



piramida zdrowego żywienia

Pytania i polecenia

- Powinniśmy jeść jak najwięcej warzyw i owoców, przy czym trzy razy więcej warzyw niż owoców. Jaką część warzyw i owoców powinny stanowić warzywa?
- Błonnik stanowi $\frac{1}{11}$ masy pieczywa białego i $\frac{1}{30}$ pieczywa pełnoziarnistego. Dziennie należy dostarczyć organizmowi 25 g błonnika. Ile pieczywa jasnego zawiera taką ilość błonnika? A ile ciemnego?

W wielu sytuacjach interesuje nas określona część jakiejś wielkości. Mówimy na przykład o połowie klasy, ćwiartce chleba lub o trzech czwartych zarobków.

Zapamiętaj

Aby obliczyć ułamek liczby, mnożymy liczbę przez ten ułamek.

Przykład 1.1

W zespole tanecznym są 24 osoby, $\frac{3}{8}$ z nich to chłopcy. Ile dziewcząt jest w tym zespole?

Sprawdźmy najpierw, ilu jest chłopców.

Obliczamy $\frac{3}{8}$ liczby 24.

$$\frac{3}{\cancel{8}_{1}} \cdot \cancel{24}^{3} = 9$$

W takim razie dziewcząt jest $24 - 9 = 15$.

Przykład 1.2

E

Tomek odrabiał lekcje od 14.45 do 16.20. Dwie piąte tego czasu poświęcił na rozwiązywanie zadań z matematyki. Przez ile minut zajmował się pozostałymi przedmiotami?

Od 14.45 do 16.20 upływa 1 h 35 min, czyli 95 min.

Sposób I

Obliczamy $\frac{2}{5}$ czasu poświęconego przez Tomka na odrabianie lekcji.

$$\frac{2}{\cancel{5}_{1}} \cdot \cancel{95}^{19} = \frac{2}{1} \cdot 19 = 38$$

Tomek rozwiązywał zadania z matematyki przez 38 min, więc przez $95 - 38 = 57$ minut odrabiał lekcje z innych przedmiotów.

Sposób II

Tomek rozwiązywał zadania z matematyki przez $\frac{2}{5}$ czasu, więc pozostałe przedmioty zajęły mu $\frac{3}{5}$ czasu.

$$\frac{3}{\cancel{5}_{1}} \cdot \cancel{95}^{19} = \frac{3}{1} \cdot 19 = 57$$

Tomek odrabiał lekcje z innych przedmiotów przez 57 minut.

Ćwiczenie 1

Drożdżówka kosztowała 1 zł 20 gr. Jej cenę obniżono o $\frac{1}{3}$. Ile kosztuje teraz?

Przykład 2

W szkole są trzy klasy siódme. Klasa 7a liczy 24 osoby, 7b − 22 osoby, a 7c – tylko 18 osób. Jaką część wszystkich uczniów klas siódmych stanowią uczniowie 7a?

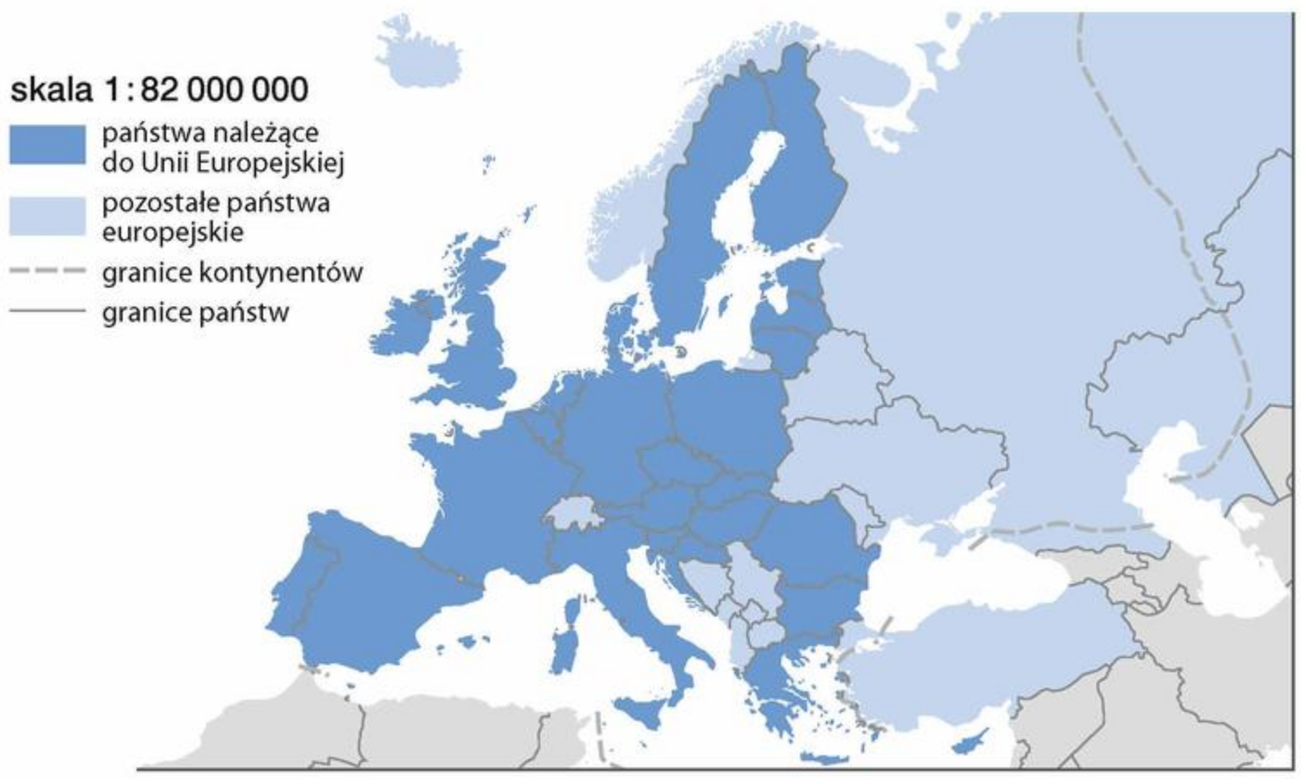
We wszystkich klasach siódmych łącznie uczą się $24 + 22 + 18 = 64$ osoby.

Uczniowie klasy 7a stanowią $\frac{24}{64}$ tej liczby. Ten ułamek można jeszcze skrócić: $\frac{24}{64} = \frac{3}{8}$.

Uczniowie klasy 7a stanowią więc $\frac{3}{8}$ wszystkich uczniów klas siódmych w tej szkole.

Ćwiczenie 2

W 2018 roku w Europie było 46 państw (łącznie z tymi, które tylko częściowo leżą na naszym kontynencie). Spośród nich 28 należało do Unii Europejskiej. Jaka część państw leżących w Europie należała w 2018 roku do Unii?



Przykład 3

Świeże grzyby podczas suszenia tracą $\frac{9}{10}$ swojej masy. Jaką ilość grzybów poddano suszeniu, jeżeli otrzymano 15 dag suszu?

Skoro grzyby tracą w trakcie suszenia $\frac{9}{10}$ swojej masy, z każdej porcji świeżych grzybów pozostanie $1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$ tej porcji. Oznacza to, że ususzono dziesięciokrotnie więcej grzybów, niż waży otrzymany susz, czyli:

$10 \cdot 15$ dag $= 150$ dag $= 1{,}5$ kg.

Ususzono 1,5 kg grzybów.



Ćwiczenie 3

Podczas projekcji nudnego filmu „Gdzie widać obłoki?” z kina wyszło przed końcem seansu $\frac{3}{4}$ widzów. W sali zostało tylko 12 osób. Ile osób przyszło na ten film?

Przykład 4

Każdy pracownik firmy Ledew otrzymał na koniec roku premię w wysokości 0,12 swojej miesięcznej pensji. Premia pana Tadeusza wyniosła 360 zł. Oblicz wysokość jego miesięcznej pensji.

Obliczenia będą łatwiejsze, jeśli zamienimy 0,12 na ułamek zwykły.

$$0{,}12 = \frac{\cancel{12}^{\,3}}{\cancel{100}_{\,25}} = \frac{3}{25}$$

Teraz możemy obliczyć wysokość pensji pana Tadeusza.

$\frac{3}{25}$ pensji → 360 zł

$\frac{1}{25}$ pensji → 360 zł : 3 = 120 zł

Cała pensja (czyli $\frac{25}{25}$ pensji) wynosi $25 \cdot 120$ zł = 3000 zł.

Ćwiczenie 4

Klasa 7b zebrała 63 kg makulatury, co stanowi 0,075 ilości zebranej przez wszystkich uczniów szkoły. Ile makulatury zebrano w tej szkole?

Zadania

1. Zapisz odpowiednie działanie i oblicz, ile to minut:
a) pół godziny lekcyjnej, **b)** $\frac{1}{12}$ godziny zegarowej, **c)** $\frac{6}{10}$ godziny lekcyjnej.

2. Dwa psy zjadły puszkę karmy o masie 650 g. Sita zjadła $\frac{8}{13}$ tej porcji, a Kumpel zjadł pozostałą część.
a) Jaką część karmy zjadł Kumpel?
b) Ile gramów karmy zjadła Sita, a ile zjadł Kumpel?

3. Godzina lekcyjna – jaka to część doby? Odpowiedź podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

4. Kasia piekła muffiny waniliowe. Obok podano masę każdego ze składników. Jakim ułamkiem masy wszystkich składników można wyrazić zawartość:
a) mąki, **b)** mleka, **c)** jajek?



5. Oblicz, jakim ułamkiem roku są 3 tygodnie, jeśli jest to rok:
a) zwykły, **b)** przestępny.

6. Zosia kupiła 4 batony po 1,40 zł za sztukę oraz 2,4 kg jabłek po 4,50 zł za 1 kg. Wydała trzecią część pieniędzy, które miała. Ile pieniędzy miała Zosia?

E **7.** Na targu cena jednego kilograma truskawek wzrosła od wczoraj o 2,40 zł, co stanowi $\frac{2}{5}$ wczorajszej ceny. Ile kosztował 1 kg truskawek wczoraj, a ile kosztuje dziś?

8. Na klombie posadzono różne kwiaty. Róże zajmują $\frac{3}{20}$ powierzchni klombu, czyli 6 m^2.

a) Ile metrów kwadratowych zajmują pelargonie, które posadzono na $\frac{2}{5}$ klombu?

b) Bratki zajmują 0,125 klombu. Na ilu metrach kwadratowych zostały one posadzone?

c) Jaką część klombu zajmują tulipany rosnące na 2,5 m^2?



róże



pelargonie



bratki



tulipany

9. Uczniowie klas szóstych i siódmych szkoły w Dobrocinie postanowili wesprzeć schronisko dla zwierząt i zbierali puszki z karmą. W szkole są trzy klasy siódme. Klasa 7a zebrała 15 puszek, 7b – 34 puszki, a 7c – 28 puszek. Klasy szóste zebrały tylko $\frac{5}{7}$ tego, co klasy siódme. Ile puszek zebrali szóstoklasiści? Jaką część puszek zebranych przez klasy szóste i siódme zebrali szóstoklasiści, a jaką – klasa 7a?

E **10.** Janek wstał o 7.00, o 8.00 rozpoczął lekcje, o 13.30 wyszedł ze szkoły. O 14.00 poszedł na boisko i przez $\frac{1}{18}$ doby grał w piłkę nożną. Następne $\frac{3}{4}$ godziny zajęły mu odpoczynek i obiad. Potem Janek odrabiał lekcje – trwało to $\frac{3}{11}$ czasu, który spędził w szkole. O której godzinie chłopiec skończył odrabiać lekcje?

11. Agata poprosiła w sklepie o 1 kg jabłek. Okazało się, że dostała 5 owoców. Ile przeciętnie waży woda w jednym takim jabłku?

E **12.** Marta kupiła 40 dag suszonych jabłek. Ile dekagramów wody, a ile suchej masy jest w tych jabłkach?

13. W pewnej porcji suszonych jabłek jest 10 dag wody. Ile ważą te jabłka? Ile waży sucha masa?

14. Ile kilogramów świeżych jabłek trzeba ususzyć, aby otrzymać 1 kg suszonych jabłek?

Świeże jabłko zawiera około $\frac{8}{10}$ wody, a suszone około $\frac{2}{10}$ wody. Resztę stanowi tzw. sucha masa.



Dla dociekliwych

1. Troje uczniów 20-osobowej klasy zapytano, jaka część klasy była w danym dniu nieobecna. Ania odpowiedziała, że $\frac{1}{4}$, Bartek – że $\frac{1}{3}$, a Celina – że $\frac{1}{5}$. Kto na pewno się mylił? Dlaczego?

2. W klasie 7a piątkę z klasówki dostała $\frac{1}{4}$ uczniów, a szóstkę otrzymało $\frac{2}{7}$ uczniów. Ilu uczniów liczy ta klasa?

3. W klasie 7b co czwarty uczeń dostał piątkę z klasówki, a $\frac{1}{3}$ wszystkich uczniów dostała czwórkę. Ilu uczniów może liczyć ta klasa? Wymień wszystkie możliwości.

4. W Światowym Konkursie Sprowadzania Ułamków do Wspólnego Mianownika wzięło udział mniej niż 100 osób, z których $\frac{1}{4}$ reprezentowała Afrykę, $\frac{2}{7}$ Amerykę Północną, $\frac{3}{14}$ Amerykę Południową, $\frac{1}{21}$ Azję i $\frac{3}{28}$ Australię. Pozostali uczestnicy to przedstawiciele Europy. Ilu reprezentantów Europy wzięło udział w zawodach?

Czy już umiem?

I. Tata Kasi pracował w piątek do późnego wieczora. Położył się spać o północy, a w sobotę wstał już o 6.30. Po południu zdrzemnął się półtorej godziny. Potem znów pracował do północy. Jaką część soboty przespał tata Kasi?

II. W szkole jest 420 uczniów. Dziewczęta stanowią $\frac{3}{7}$ uczniów tej szkoły. Wśród chłopców aż $\frac{7}{8}$ trenuje pływanie. Ilu chłopców w tej szkole nie trenuje pływania?

III. Maciek w sobotę bardzo długo siedział przy komputerze. Przez $\frac{4}{7}$ tego czasu, czyli 2 godziny, przygotowywał projekt na lekcję geografii. Połowę pozostałego czasu wyszukiwał informacje potrzebne mu do udziału w konkursie biologicznym. Resztę czasu spędził przy wybieraniu i obrabianiu zdjęć z wakacji. Jak długo Maciek zajmował się zdjęciami?

IV. Pociąg z Suwałk wyrusza rano, a do Warszawy przyjeżdża po południu. Na zegarach podano godzinę jego odjazdu z Suwałk oraz godzinę przyjazdu do Warszawy. Odległość z Suwałk do Warszawy wynosi 324 km. Z jaką średnią prędkością jedzie ten pociąg na tej trasie?





3 Co to jest procent

Na dobry początek ›

Skład produktów spożywczych, przedstawienie wyników ankiet, podatki czy wyprzedaże — wszędzie tam spotykamy procenty.

W ciągu ostatnich 10 lat spożycie pieczywa i produktów zbożowych spadło o 26%.

1 litr 2%

SER 55% tłuszczu

68 g produktu dostarcza:	396 kJ 95 kcal 5%

Jogurt naturalny

tłuszcz **10%**
białko **9%**
węglowodany **4%**

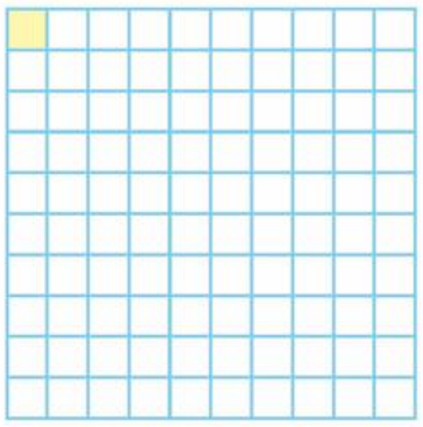
Tylko jeden na stu Polaków nie jada pieczywa wcale, 95% sięga po chleb lub bułki przynajmniej raz dziennie.

Przy wyborze produktów spożywczych zwracamy uwagę przede wszystkim na świeżość (79%), smak (45%) i cenę (37%).

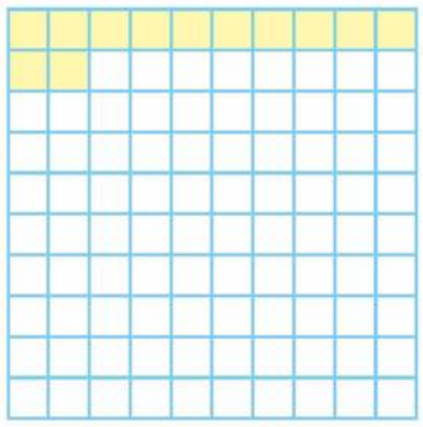
Pytania i polecenia

- Wymień kilka sytuacji, w których możesz spotkać się z użyciem słowa „procent”.
- Co oznacza 2% na opakowaniu mleka, a co 10% na opakowaniu jogurtu?
- Co oznacza informacja, że 95% Polaków sięga po pieczywo przynajmniej raz dziennie?
- Jak inaczej przekazać informację: „Tylko jeden na stu Polaków nie jada pieczywa wcale”?

Jeśli pewną całość podzielimy na 100 jednakowych części, to jedna taka część stanowi jedną setną tej całości. Możemy to wyrazić za pomocą ułamka zwykłego jako $\frac{1}{100}$, ułamka dziesiętnego jako $0{,}01$ lub w procentach jako 1%.



$\frac{1}{100} = 0{,}01$ pola kwadratu
to 1% pola kwadratu.



$\frac{12}{100} = 0{,}12$ pola kwadratu
to 12% pola kwadratu.

Zapamiętaj

Jeden procent pewnej wielkości to jej jedna setna. Oznaczamy go symbolem 1%.

Zwróćmy uwagę, że procenty zawsze są powiązane z jakąś wielkością, np. mówiąc „około 50% Polaków nosi okulary", stwierdzamy, że nosi je mniej więcej połowa spośród 38 mln Polaków.

Zamiana procentu na ułamek

Przykład 1.1

Wyraź procent podanej wielkości jako ułamek zwykły nieskracalny oraz ułamek dziesiętny tej wielkości.

a) 17% powierzchni działki

b) 2% mieszkańców Łodzi

c) 123% ceny laptopa

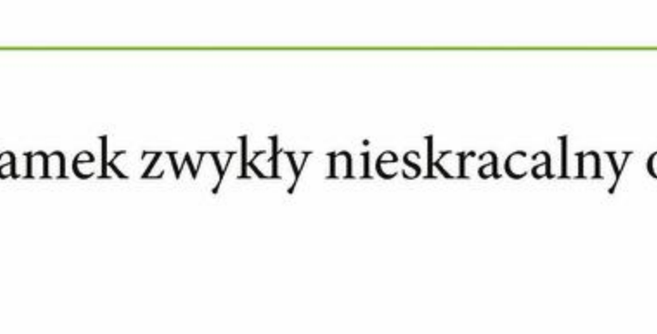
a) 17% powierzchni działki to $\frac{17}{100} = 0{,}17$ tej powierzchni.

b) 2% mieszkańców Łodzi

to $\frac{2}{100} = \frac{1}{50}$,

czyli inaczej $\frac{2}{100} = 0{,}02$ liczby tych mieszkańców.

Czasem powstały ułamek zwykły można skrócić…



… albo wyłączyć z niego całości.

c) 123% ceny laptopa to $\frac{123}{100} = 1\frac{23}{100}$,

czyli inaczej $\frac{123}{100} = 1{,}23$ tej ceny.

Przykład 1.2

Wyraź procent pewnej wielkości jako ułamek dziesiętny oraz ułamek zwykły nieskracalny tej wielkości.

a) 37,5% **b)** 0,04%

a) 37,5% to $\frac{37,5}{100} = \frac{375}{1000} = 0,375$; Rozszerzamy przez 10.

37,5% to $\frac{375}{1000} = \frac{75}{200} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$ Skracamy trzy razy przez 5.

b) 0,04% to $\frac{0,04}{100} = \frac{4}{10000} = 0,0004$; Rozszerzamy przez 100.

0,04% to $\frac{4}{10000} = \frac{1}{2500}$ Skracamy przez 4.

Ćwiczenie 1

Wyraź procent pewnej wielkości jako ułamek dziesiętny oraz ułamek zwykły nieskracalny tej wielkości.

a) 20% **b)** 7,5% **c)** 154%

Zamiana ułamka na procent

Najłatwiej zamienia się na procent ułamki dziesiętne.

Przykład 2

Przedstaw ułamek dziesiętny podanej wielkości jako procent tej wielkości.

a) 0,6 pojemności akwarium **b)** 1,35 zysku firmy **c)** 0,085 masy sera

a) $0,6 = \frac{6}{10} = \frac{60}{100}$ pojemności akwarium to 60% tej pojemności.

b) $1,35 = \frac{135}{100}$ zysku firmy to 135% tego zysku.

c) $0,085 = \frac{85}{1000} = \frac{8,5}{100}$ masy sera to 8,5% tej masy.

Dobra rada

Zamieniając procent na ułamek dziesiętny, dzielimy liczbę przez 100, czyli przesuwamy przecinek o dwa miejsca w lewo, i pomijamy znak %.

14% to 0,14

2% to 0,02

Zamieniając ułamek dziesiętny na procent, mnożymy liczbę przez 100, czyli przesuwamy przecinek o dwa miejsca w prawo, i dopisujemy symbol %.

0,79 to 79%

0,0073 to 0,73%

Ćwiczenie 2

Przedstaw ułamek dziesiętny pewnej wielkości jako procent tej wielkości.

a) 0,1 **b)** 0,95 **c)** 0,03 **d)** 0,007

Gdy chcemy zamienić ułamek zwykły na procent, często najpierw zamieniamy ten ułamek na ułamek o mianowniku 100.

Słowo **procent** pochodzi od łacińskiego ***pro centum*** – na sto.

Przykład 3

Zamień ułamek zwykły pewnej wielkości na procent tej wielkości. W razie potrzeby zaokrąglij wynik.

a) $\frac{7}{10}$ **b)** $\frac{4}{50}$ **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** $\frac{1}{7}$

a) $\frac{7}{10} = \frac{70}{100}$ pewnej wielkości to 70% tej wielkości.

b) $\frac{4}{50} = \frac{8}{100}$ pewnej wielkości to 8% tej wielkości.

c) $\frac{2}{3} = 0{,}6666... \approx 0{,}667$ pewnej wielkości to około 66,7% tej wielkości.

d) $\frac{1}{7} = 0{,}1428... \approx 0{,}143$ pewnej wielkości to około 14,3% tej wielkości.

Ćwiczenie 3.1

Zamień ułamek zwykły na procent.

a) $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{2}{5}$ **c)** $\frac{13}{25}$ **d)** $\frac{5}{6}$

Ćwiczenie 3.2

Przyjrzyj się zdjęciu i odpowiedz na pytania. Odpowiedź zapisz jako ułamek zwykły, ułamek dziesiętny i procent.

a) Jaka część piłek jest koloru niebieskiego?
b) Jaka część piłek jest jednokolorowa?
c) Jaka część piłek jest dwukolorowa?



Dobra rada

Niektóre przeliczenia warto zapamiętać.

Część całości	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{2}$
Procent całości	25%	$33\frac{1}{3}\% \approx 33\%$	50%	$66\frac{2}{3}\% \approx 67\%$	75%	100%	150%

Jakim procentem jednej liczby jest druga liczba

Jeśli chcemy obliczyć, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba, najpierw zastanawiamy się, **jaką część** pierwszej liczby stanowi ta druga.

Przykład 4

Jakim procentem liczby 50 jest liczba:

a) 8, **b)** 120?

a) Zapiszmy, jakim ułamkiem liczby 50 jest liczba 8: $\frac{8}{50}$. Teraz ułamek $\frac{8}{50}$ wyraźmy w procentach: $\frac{8}{50} = \frac{16}{100}$, czyli 16%.

Zatem liczba 8 to 16% liczby 50.

Uczniowie planowali zebrać 50 kg makulatury, ale zebrali tylko 8 kg.

b) Postępując analogicznie jak w podpunkcie a), otrzymujemy: $\frac{120}{50} = \frac{240}{100}$, czyli liczba 120 to 240% liczby 50.

Uczniowie planowali zebrać 50 kg makulatury, ale zebrali aż 120 kg.

Ćwiczenie 4

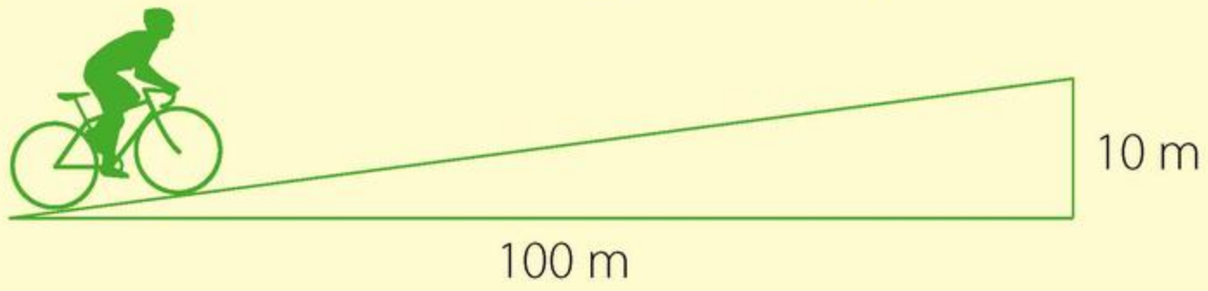
Oblicz, ile procent liczby 480 stanowi podana liczba.

a) 240 **b)** 60 **c)** 120 **d)** 960

Czy wiesz, że…

Tabliczka „10%" pod znakiem przedstawionym obok oznacza, że różnica wysokości między początkiem wzniesienia a jego końcem stanowi 10% odległości w poziomie. Na przykład między punktami oddalonymi w poziomie o 100 m droga wznosi się o 10 m.





Przykład 5

W klasie 7d uczy się 18 dziewcząt i 12 chłopców. Jaki procent tej klasy stanowią dziewczęta, a jaki chłopcy?

Wszystkich uczniów w klasie jest $18 + 12 = 30$. Zapisujemy w postaci ułamka liczbę dziewcząt w tej klasie: $\frac{18}{30}$, a następnie wyrażamy go w procentach:
$\frac{\cancel{18}^{\,6}}{\cancel{30}_{\,10}} = \frac{6}{10} = \frac{60}{100}$, czyli 60%.
Zatem 60% klasy to dziewczęta.
Aby obliczyć, jaki procent klasy stanowią chłopcy, możemy wykonać obliczenia podobnie jak w przypadku dziewcząt lub od 100% odjąć 60%:
$100\% - 60\% = 40\%$.
Chłopcy stanowią więc 40% całej klasy.

Ćwiczenie 5

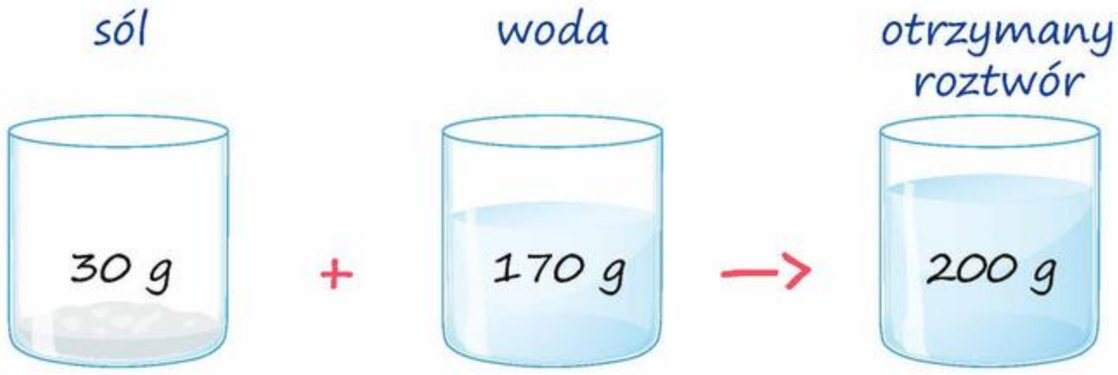
Spójrz na grupę osób czekających na autobus i odpowiedz, ile procent tej grupy stanowią osoby, które:

a) stoją,
b) siedzą,
c) są ubrane w długie spodnie,
d) mają na głowie kapelusz,
e) stoją i mają bordowe buty,
f) mają czarne lub białe buty.



Roztwory

Kiedy wsypiemy sól do wody, sól się rozpuści. Powstanie wtedy **roztwór** soli w wodzie. Dobrze wiesz, że gdy do szklanki wody wsypiemy więcej soli, to woda stanie się bardziej słona. Mówimy wtedy, że otrzymaliśmy roztwór o większym **stężeniu**.



30 g soli + 170 g wody = 200 g roztworu

$$\text{stężenie} = \frac{\text{masa soli}}{\text{masa roztworu}} = \frac{30\,\text{g}}{200\,\text{g}} = \frac{15}{100} = 15\%$$

Stężenie mierzymy w procentach. Oznacza ono, jaki procent masy roztworu stanowi masa soli rozpuszczonej w wodzie.

Podobnie otrzymujemy roztwory innych substancji, np. cukru, i analogicznie obliczamy ich stężenie.

Przykład 6

W naczyniu znajduje się 10 kg roztworu, który otrzymano w wyniku rozpuszczenia w wodzie 2 kg soli. Oblicz stężenie procentowe otrzymanego roztworu.

Obliczamy, jakim procentem masy roztworu jest masa soli: $\frac{2}{10} = \frac{20}{100}$, czyli 20%.
Stężenie procentowe tego roztworu wynosi 20%.

! Stężenie procentowe roztworu wskazuje, jakim procentem masy **całego roztworu** jest masa substancji rozpuszczonej.

Ćwiczenie 6

W naczyniu znajdują się 4 kg syropu powstałego ze zmieszania cukru z wodą. Oblicz stężenie procentowe syropu, jeśli na jego przygotowanie zużyto 1 kg cukru.

Zadania

1. Wykonaj polecenia. ▶ Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A ← P1.1

Przedstaw procent pewnej wielkości jako ułamek dziesiętny oraz ułamek zwykły nieskracalny tej wielkości.

a) 25% **c)** 40% **e)** 75% **g)** 85%
b) 120% **d)** 64% **f)** 300% **h)** 150%

poziom B ← P1.2

Przedstaw procent pewnej wielkości jako ułamek dziesiętny oraz ułamek zwykły nieskracalny tej wielkości.

a) 45,5% **c)** 3,2% **e)** 0,6% **g)** $33\frac{1}{3}\%$
b) $66\frac{2}{3}\%$ **d)** 27,5% **f)** 2,5% **h)** 82,8%

poziom C ← P2

Zamień ułamek dziesiętny pewnej wielkości na procent tej wielkości.

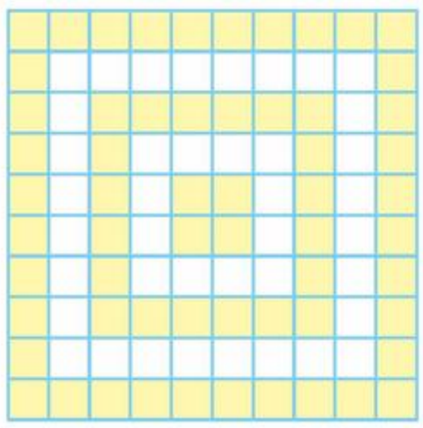
a) 0,05 **c)** 1,39 **e)** 3,08 **g)** 0,67
b) 0,78 **d)** 0,6 **f)** 0,2 **h)** 2,8

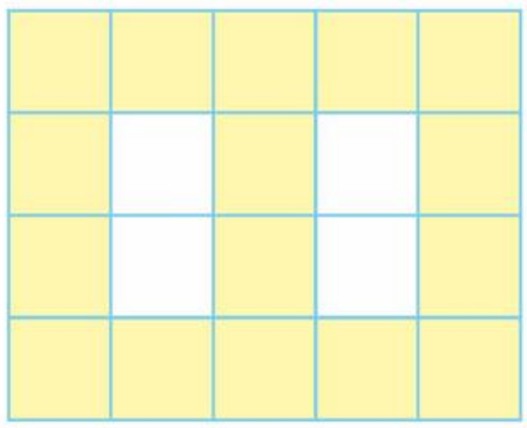
poziom D ← P3

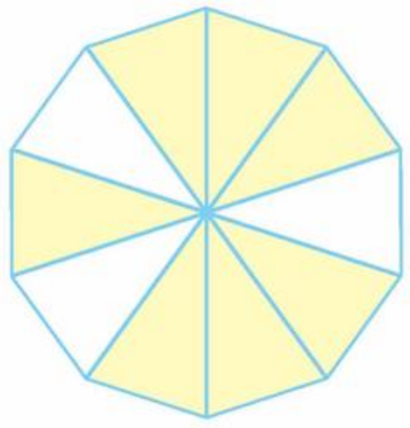
Zamień ułamek zwykły pewnej wielkości na procent tej wielkości. W razie potrzeby zaokrąglij wynik do jednego miejsca po przecinku.

a) $\frac{7}{8}$ **b)** $\frac{1}{6}$ **c)** $1\frac{13}{15}$ **d)** $\frac{4}{3}$ **e)** $\frac{2}{5}$ **f)** $\frac{7}{12}$ **g)** $\frac{1}{4}$ **h)** $\frac{5}{9}$

2. Jaką część figury zamalowano? Odpowiedź podaj w postaci ułamka zwykłego i procentu.

a) 

b) 

c) 

3. Tomasz zapełnił 24% pamięci komputera. Ile procent wolnej pamięci pozostało?

4. W 2003 roku w Polsce odbyło się referendum w sprawie przystąpienia Polski do Unii Europejskiej.

a) Do urn poszło wówczas 59% Polaków uprawnionych do głosowania. Jaki procent Polaków uprawnionych do głosowania nie wziął udziału w referendum?

b) Wyniki referendum były następujące: 77% głosujących było za przystąpieniem Polski do Unii Europejskiej, 22% przeciw, a reszta głosów była nieważna. Jaki był procent głosów nieważnych?

5. Sformułuj zdanie tak, aby zawarta w nim informacja była wyrażona w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

a) Franek wydał 25% swoich oszczędności na bilet do zoo.

b) W sadzie pana Jerzego grusze stanowią 40% wszystkich drzew.

c) Tłuszcz stanowi 80% masy masła.

6. Zapisz podaną informację, używając pojęcia procentu.

a) Wakacje w Grecji spędza 3 spośród 10 klientów biur podróży.

b) W klasie Agaty 12 z 20 uczniów to chłopcy.

c) Średnio 5 na 8 osób wchodzących do sklepu odzieżowego nic nie kupuje.

d) Średnio dwie osoby na pięć boją się dentysty.

e) Co trzeci uczeń naszej szkoły uczy się języka niemieckiego.

7. W szklance jest 200 g roztworu soli o stężeniu 6%, a w kubku jest 300 g takiego samego roztworu. Mieszamy te dwa roztwory. Ile będzie ważył otrzymany roztwór i jakie będzie jego stężenie procentowe?

8. Tomek sporządził wykres kołowy ilustrujący rozkład dnia swojego młodszego brata Janka od poniedziałku do piątku. Odpowiedz, jaki procent doby w tych dniach Janek:

a) spędza w szkole,

b) przesypia,

c) łącznie przeznacza na odrabianie lekcji i posiłki.



Czy wiesz, że…

Długie nazwy miast często są skracane. Na przykład nazwa Gorzów Wielkopolski jest zapisywana „Gorzów Wlkp.", a zamiast „Warszawa" piszemy w skrócie „W-wa". Nic jednak nie przebije skrótu „LA" oznaczającego miasto Los Angeles, jeśli weźmiemy pod uwagę, że samo „Los Angeles" jest już skrótem od pierwotnej nazwy „El Pueblo de Nuestra Señora la Reina de los Ángeles del Río de Porciúncula" („Miasteczko Naszej Pani Królowej Aniołów nad rzeką Porciuncula").

9. Oblicz, jaki procent liter w nazwie miasta stanowią litery tworzące jego skrót.

a) Gorzów Wielkopolski – Gorzów Wlkp.
b) Warszawa – W-wa
c) Los Angeles – LA
d) pełna dawna nazwa miasta Los Angeles – LA



10. W księgarni internetowej w poniedziałek zrealizowano 25 zamówień (paczki zostały wysłane do klientów), ale 4 z nich w późniejszym terminie zostały zwrócone. Z kolei we wtorek zrealizowano 50 przesyłek, z których 6 później zwrócono. Którego dnia procent zwróconych przesyłek był większy?

11. Na diagramie przedstawiono oceny uczniów klasy 7e ze sprawdzianu z matematyki. Odpowiedz, ile procent osób uczęszczających do tej klasy otrzymało:

a) piątkę,
b) piątkę lub szóstkę,
c) ocenę niższą niż piątka.



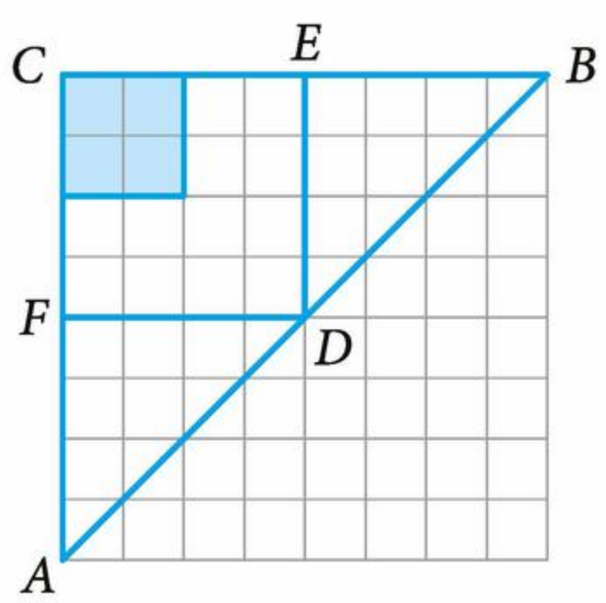
12. Oblicz masę i stężenie procentowe roztworu, który otrzymamy po zmieszaniu:

a) 5 g cukru i 45 g wody,
b) 30 g cukru i 210 g wody.

Gdy obliczamy stężenie procentowe, bierzemy pod uwagę masę roztworu, a nie wody.

E **13.** Popatrz na ilustrację.

a) Jaki procent powierzchni kwadratu *CEDF* pokolorowano na niebiesko?
b) Jaki procent powierzchni trójkąta *ABC* pokolorowano na niebiesko?



14. W Unii Europejskiej na 100 studiujących mężczyzn przypadają 124 studiujące kobiety. Ile procent wszystkich osób studiujących w UE to panie, a ile panowie?

15. Do podanego ułamka zwykłego dobierz równy mu w przybliżeniu procent z ramki. Szacuj, nie wykonuj dokładnych obliczeń.

a) $\frac{14}{203}$ **b)** $\frac{23}{31}$ **c)** $\frac{13}{39}$ **d)** $\frac{3}{91}$

0,5%	3%	7%	18%	33%	51%	74%	83%

16. W klasie 7a jest 20 osób, w tym 12 dziewcząt. We wszystkich klasach siódmych uczy się 96 osób, a cała szkoła liczy 800 uczniów.

a) Jaki procent uczniów klasy 7a stanowią dziewczęta?
b) Jaki procent uczniów klas siódmych stanowią dziewczęta z 7a?
c) Jaki procent uczniów szkoły stanowią dziewczęta z 7a?

17. Do klubu sportowego należało 200 osób, z tego 10% trenowało koszykówkę. Ostatnio do klubu dołączyło 50 koszykarzy. Jaki procent wszystkich zawodników w klubie stanowią teraz koszykarze?

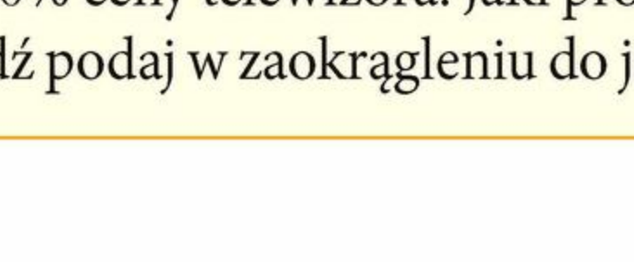
18. **a)** Wśród podanych ułamków wskaż te, które po zamianie na procent i zaokrągleniu do pełnych procentów dają wynik 17%.

$\frac{33}{200}$ $\frac{7}{37}$ $\frac{9}{51}$ $\frac{9}{52}$ $\frac{7}{41}$

b) Znajdź ułamek o własności opisanej w podpunkcie a) i jak najmniejszym mianowniku. Uzasadnij, że nie ma ułamków o tej własności i mianowniku mniejszym niż podany przez ciebie.

Dla dociekliwych

1. Przyjrzyj się rysunkowi. Cały prostokąt symbolizuje liczbę A podzieloną na 10 równych części. Zamalowana część symbolizuje liczbę B.



a) Jaką część liczby A stanowi liczba B?
b) Jaki procent liczby A stanowi liczba B?
c) Jaką część liczby B stanowi liczba A?
d) Jaki procent liczby B stanowi liczba A?

2. Liczba B stanowi 50% liczby A. Wykonaj odpowiedni rysunek i odpowiedz, jaki procent liczby B stanowi liczba A.

3. Cena komputera stanowi 60% ceny telewizora. Jaki procent ceny komputera stanowi cena telewizora? Odpowiedź podaj w zaokrągleniu do jednego miejsca po przecinku.

Czy już umiem?

I. W szkole, do której uczęszcza Magda, obowiązuje system oceniania przedstawiony w tabeli. Magda z ostatniego testu z matematyki uzyskała 25 punktów na 40 możliwych. Jaką ocenę otrzymała?

A. dopuszczającą
B. dostateczną
C. dobrą
D. bardzo dobrą

Procent	Ocena
mniej niż 40%	niedostateczna
40–59%	dopuszczająca
60–74%	dostateczna
75–85%	dobra
86–99%	bardzo dobra
100% i powyżej*	celująca

* za zadania dodatkowe

II. Która część całości jest większa?

a) 70% czy $\frac{3}{4}$ **b)** 82% czy $\frac{4}{5}$ **c)** 71% czy $\frac{5}{7}$ **d)** 45% czy $\frac{11}{24}$

III. Jaki procent poprzedniej ceny stanowi nowa cena?

a)



b)



IV. Na kurs tańca zapisało się 15 dziewcząt i 10 chłopców. Jaki procent liczby wszystkich uczestników kursu stanowią chłopcy?

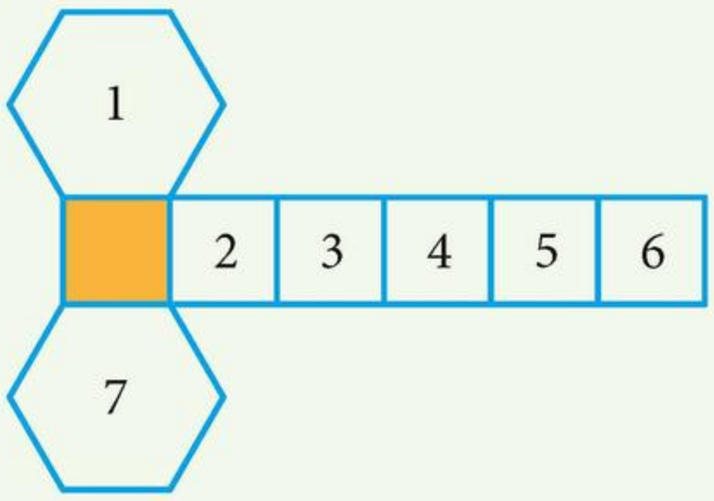
A. $66\frac{2}{3}\%$ **B.** 50% **C.** 40% **D.** $33\frac{1}{3}\%$

V. Na rysunkach poniżej przedstawiono dwie siatki tej samej bryły.

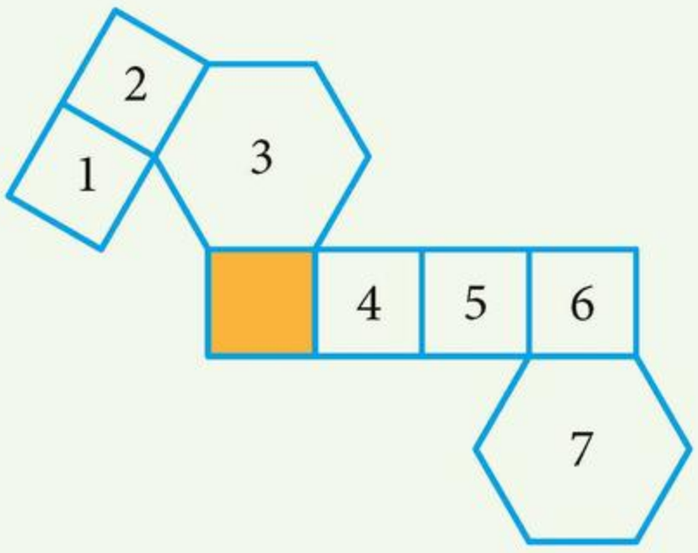
a) Jaka to bryła?

b) Która ze ścian znajduje się naprzeciwko ściany pomalowanej na pomarańczowo?

(1)



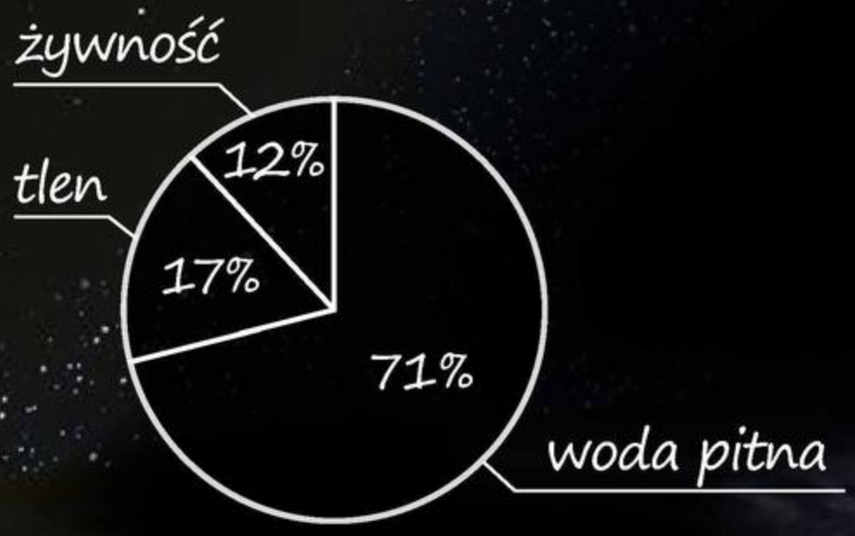
(2)



4 Obliczanie procentu danej liczby

Na dobry początek

Przyjmuje się, że do przeżycia w kosmosie jednego dnia astronauta przeciętnej postury potrzebuje minimum 5 kg zapasów, z czego 71% to woda pitna, 17% – tlen, a tylko 12% – żywność.



astronauta we wnętrzu statku kosmicznego



Dziennie astronauta potrzebuje:

$\frac{71}{100} \cdot 5\,\text{kg} = 3{,}55\,\text{kg}$ wody pitnej

$\frac{17}{100} \cdot 5\,\text{kg} = 0{,}85\,\text{kg}$ tlenu

$\frac{12}{100} \cdot 5\,\text{kg} = ?\,\text{kg}$ żywności

Nie zapominajmy o higienie – w kosmosie też trzeba ją zachować. Dzienna masa wody do celów użytkowych jest równa 500% łącznej dziennej masy wody do picia, tlenu i żywności.

Pytania i polecenia

- Ile kilogramów żywności dziennie potrzebuje astronauta?
- Ile wody zużywa dziennie astronauta?

Wiesz już, że aby obliczyć ułamek liczby, mnożymy liczbę przez ten ułamek. Podobnie postępujemy, gdy obliczamy procent danej liczby, ponieważ procent to też ułamek, tylko inaczej zapisany.

Przykład 1

Zbudowano już 83% z 200-kilometrowego odcinka autostrady. Ile to kilometrów?

Obliczamy 83% liczby 200.

Sposób I

$83\% \cdot 200 = \frac{83}{100} \cdot 200 = 166$

Zbudowano 166 km autostrady.

Tak warto liczyć na kalkulatorze:



Sposób II

Najpierw obliczamy 1% liczby 200, a następnie otrzymany wynik mnożymy przez 83.

$1\% \cdot 200 = \frac{1}{100} \cdot 200 = 2, \quad 2 \cdot 83 = 166$

Zbudowano 166 km autostrady.

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) 25% liczby 500 **b)** 17% liczby 300 **c)** 3% liczby 27

Kiedy zakładamy **lokatę** bankową, oddajemy swoje oszczędności do dyspozycji banku. W zamian za to bank powiększa je o pewną kwotę zwaną **odsetkami**. **Oprocentowanie lokaty** wskazuje, jaki **procent** pieniędzy wpłaconych na lokatę stanowią odsetki.

W Polsce bank nie wypłaca właścicielowi lokaty całych odsetek, ale jedynie 81% ich wartości. Pozostałe 19% bank przekazuje do urzędu skarbowego jako podatek.

Przykład 2

Mama Krysi wpłaciła do banku 6000 zł na roczną lokatę oprocentowaną 3% w skali roku. Ile wyniosą odsetki od tej lokaty naliczone przez bank po upływie roku? Jaką kwotę odsetek dostanie mama Krysi po odliczeniu podatku?



Obliczamy kwotę odsetek od lokaty:

$3\% \cdot 6000 = \frac{3}{100} \cdot 6000 = 180$ [zł].

Naliczone odsetki wynoszą 180 zł.

Mama Krysi dostanie 81% tej kwoty, czyli $\frac{81}{100} \cdot 180 = 145{,}80$ [zł].

Czy wiesz, że…

Banki obracają pieniędzmi, co oznacza, że pieniądze wpłacone przez jednych klientów (m.in. na lokaty) mogą być pożyczane innym klientom tego banku w postaci np. kredytów. Z kolei klienci zaciągający kredyt w banku zobowiązują się do spłacenia zadłużenia oraz wpłaty dodatkowej kwoty (odsetek), której wysokość jest określona w procentach.



Ćwiczenie 2

Wpłacamy do banku na lokatę kwotę 4000 zł. Oblicz wysokość rocznych odsetek po opodatkowaniu, jeśli oprocentowanie lokaty w skali roku wynosi:

a) 3%, **b)** 4%, **c)** 4,5%.

Przykład 3

E

Do klubu sportowego należy łącznie 450 juniorów i juniorek, z czego 24% trenuje koszykówkę. W juniorskiej sekcji koszykówki dziewczęta stanowią 25% zawodników. Ile osób liczy ta sekcja? Ile dziewcząt, a ilu chłopców w niej trenuje?

Obliczamy, ile juniorów i juniorek trenuje koszykówkę:

$$24\% \cdot 450 = \frac{24}{100} \cdot 450 = 108.$$

Z treści zadania wiemy, że dziewczęta stanowią 25% juniorskiej sekcji koszykówki, zatem liczba dziewcząt trenujących w tej sekcji to:

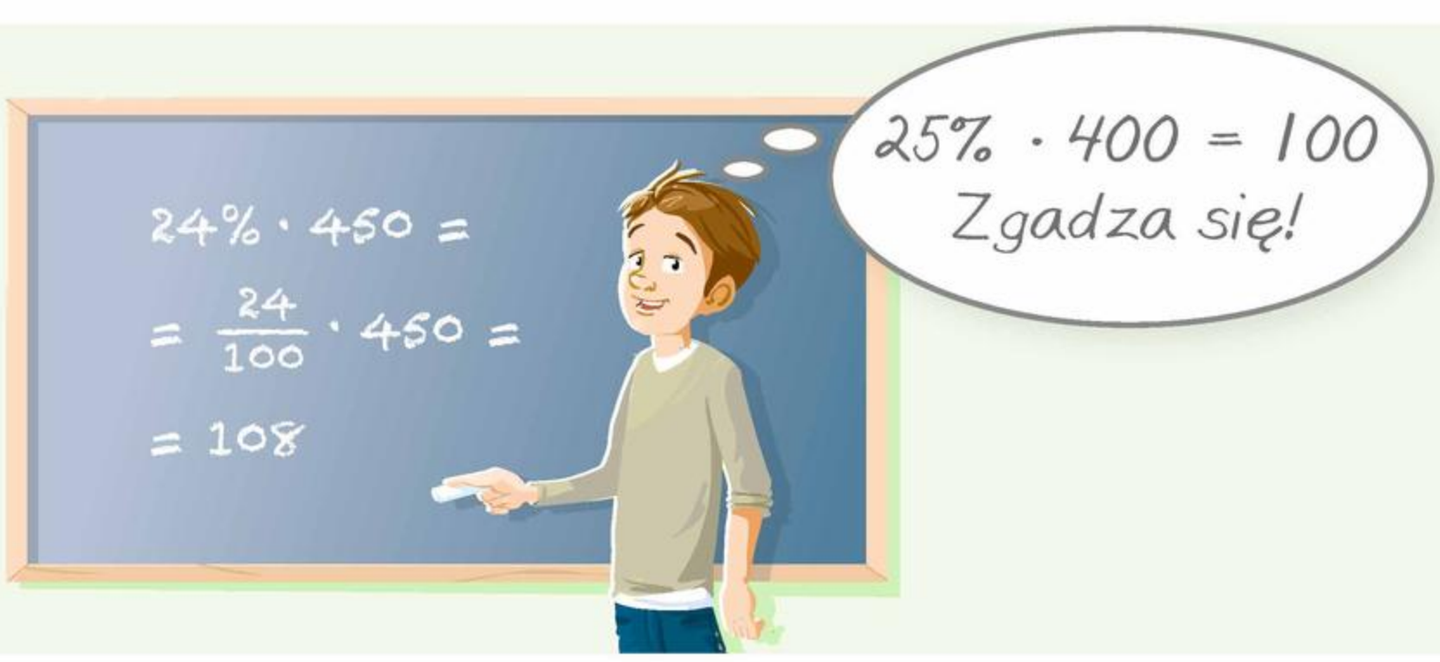
$$25\% \cdot 108 = \frac{1}{4} \cdot 108 = 27.$$

Aby obliczyć liczbę chłopców należących do juniorskiej sekcji koszykówki, wystarczy od liczby wszystkich jej członków odjąć liczbę dziewcząt należących do tej sekcji: $108 - 27 = 81$.

Do juniorskiej sekcji koszykówki należy 108 osób, w tym 27 dziewcząt i 81 chłopców.

Dobra rada

Zanim podasz końcowy wynik, oszacuj go.



Ćwiczenie 3

Obsada aktorska musicalu „Shrek", wystawianego w Teatrze Muzycznym w Gdyni, liczyła 65 osób. Kobiety stanowiły 40% artystów biorących udział w przedstawieniu. Ile aktorek grało w tym musicalu?

Zadania

1. Oblicz w pamięci.

a) 10% liczby: 36, 180, 2
b) 1% liczby: 2900, 40, 7
c) 25% liczby: 24, 100, 8
d) 20% liczby: 70, 610, 3
e) 5% liczby: 40, 140, 800
f) 150% liczby: 60, 14, 180

2. Oblicz.

a) 23% liczby 500
b) 65% liczby 70
c) 18% liczby 350
d) 45% liczby 32
e) 70% liczby 48
f) 90% liczby 0,4
g) 75% liczby 300
h) 0,05% liczby 9

3. Która liczba jest większa?

a) 12% liczby 20 czy 10% liczby 25
b) 45% liczby 3 czy 0,6% liczby 250
c) 8% liczby 1000 czy 0,8% liczby 9000
d) 150% liczby 2 czy 0,5% liczby 600

4. Do każdego z podanych wyrażeń dopasuj wartość z ramki. Nie wykonuj dokładnych obliczeń.

I. 3% liczby 102 **II.** 25% liczby 397 **III.** 31% liczby 23 **IV.** 9% liczby 29

2,61		7,13		65,5		99,25	
	3,06		31,12		74		108,15

5. Tata Bartka wpłacił oszczędności na lokaty roczne w trzech różnych bankach (wysokości wpłaconych kwot oraz oprocentowanie lokat podano w tabeli).

Nazwa banku	Kwota wpłacona na lokatę	Oprocentowanie lokaty
Bank A	6000 zł	5,0%
Bank B	7000 zł	4,5%
Bank C	8000 zł	4,0%

W którym banku kwota odsetek będzie najwyższa?

6. Pani Alicja wpłaciła 12 000 zł na lokatę o oprocentowaniu rocznym 2%. O ile większą kwotę odsetek uzyskałaby, gdyby oprocentowanie lokaty wynosiło 3,5%?

7. Agnieszka wpłaciła do banku 2000 zł na lokatę progresywną. Odsetki wynoszą 4% od 800 zł, a 4,5% od pozostałych 1200 zł. Podatek od odsetek wynosi 19%, a pozostałą część odsetek razem z ulokowanymi pieniędzmi Agnieszka wypłaci po roku. Czy wypłacone pieniądze, wystarczą na zakup sprzętu snowboardowego, który kosztuje 2083 zł?

LOKATA PROGRESYWNA	
Wkład	**Oprocentowanie w skali roku**
do 800 zł	4%
powyżej 800 zł	4,5%

8. W skład mieszanki studenckiej wchodzi: 25% orzeszków ziemnych, 30% rodzynek złotych, 15% rodzynek sułtańskich, 10% orzechów nerkowca, 8% żurawiny. Reszta to migdały.

a) Oblicz masę migdałów w 250-gramowej paczce mieszanki.

b) Czy w mieszance studenckiej jest więcej rodzynek, czy orzechów?



9. Pan Krzysztof zarabia miesięcznie 3500 zł. W grudniu otrzymał premię wysokości 120% miesięcznych zarobków. Oblicz wysokość grudniowej premii pana Krzysztofa.

10. Powierzchnia Słowińskiego Parku Narodowego obejmuje jeziora i rzeki, część akwenu Morza Bałtyckiego i lądy. W tabeli zestawiono procentowy udział poszczególnych rodzajów powierzchni parku. Korzystając z informacji zawartych w tabeli, wykonaj zadania.

Jeziora i rzeki	**Morze Bałtyckie**	**Powierzchnia lądowa (lasy, wydmy itp.)**
30%	34%	36%

a) Powierzchnia Słowińskiego Parku Narodowego liczy około 33 000 ha. Ile hektarów zajmują jeziora i rzeki, ile morze, a ile lądy?

b) W roku 1976 powierzchnia Słowińskiego Parku Narodowego była zdecydowanie mniejsza niż obecnie. Oblicz powierzchnię tego parku narodowego w roku 1976, jeśli jego ówczesna powierzchnia stanowiła 55% obecnej.

E **11.** W Morzu Adriatyckim jest 4% soli. Na wyspie Pag w Chorwacji z wody tego morza uzyskuje się sól. Ile kilogramów soli można otrzymać z 50 kg tej wody morskiej?



12. Do 237 g dwunastoprocentowego roztworu soli dodano 163 g roztworu soli o takim samym stężeniu procentowym.

a) Jakie będzie stężenie procentowe otrzymanego roztworu?
b) Ile soli będzie w otrzymanym roztworze?

13. Pan Tomasz i pan Piotr pracują w jednej firmie na takich samych stanowiskach i w 2018 roku zarabiali po 3000 zł miesięcznie. Od 1 stycznia 2019 roku szef postanowił znacząco podnieść ich wynagrodzenie.

Piotr

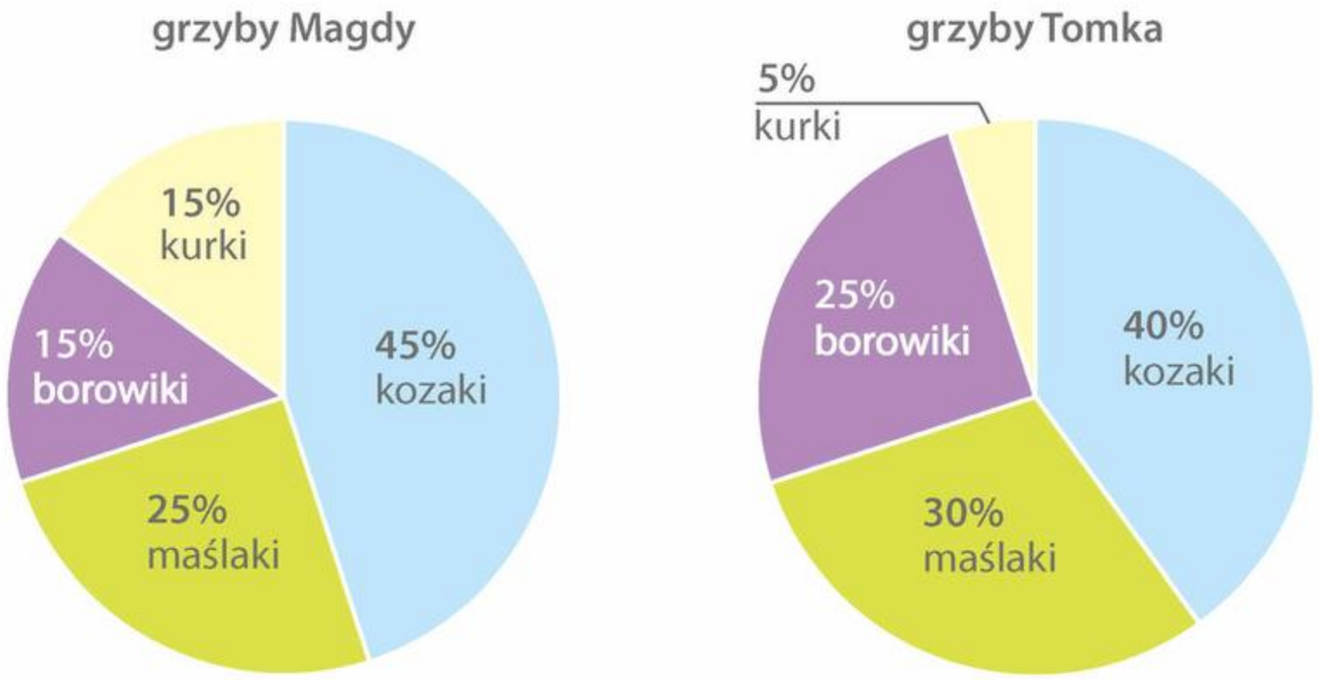
1 stycznia 2019 roku –
podwyżka o 60%

Tomasz

1 stycznia 2019 roku –
podwyżka o 20%
1 marca 2019 roku –
podwyżka o 20%
1 czerwca 2019 roku –
podwyżka o 20%

a) Który z panów miał wyższe wynagrodzenie w grudniu 2019 roku?
b) Który z panów zarobił więcej w ciągu całego roku 2019?

14. Magda i Tomek wrócili z grzybobrania. Każde z nich zebrało po 40 grzybów różnych gatunków. Procentowy udział poszczególnych gatunków w ogólnej liczbie grzybów zebranych przez Magdę i Tomka przedstawiono na diagramach kołowych. Na podstawie diagramów odpowiedz na pytania.



a) Magda i Tomek postanowili, że ususzą borowiki i kozaki. Kto z nich przyniósł więcej grzybów do suszenia?
b) Tomek zebrał więcej maślaków niż Magda. O ile?
c) Magda zebrała 3 razy więcej grzybów jednego z gatunków niż Tomek. Którego?

15. Każdy bok kwadratu o obwodzie równym 48 cm zwiększono o 30%. O ile procent wzrosło pole tego kwadratu?

Dla dociekliwych

1. W klasie są 24 osoby. Połowę stanowią dziewczęta, a $\frac{3}{4}$ dziewcząt chodzi na kółko matematyczne.

a) Ile dziewcząt jest w tej klasie?
b) Ile dziewcząt chodzi na kółko matematyczne?
c) Jaką część klasy stanowią dziewczęta chodzące na kółko matematyczne? Odpowiedź podaj w postaci ułamka nieskracalnego.
d) Jak znaleźć odpowiedź na pytanie z podpunktu c), nie korzystając z liczby osób w klasie?

2. Wśród fotografii przyrodniczych $\frac{3}{4}$ stanowiły zdjęcia owadów, a $\frac{2}{3}$ zdjęć owadów przedstawiało motyle. Jaka część fotografii przedstawiała motyle?



3. Na klasówce z matematyki obecnych było 96% uczniów klasy 7a. Spośród nich 25% próbowało rozwiązać zadanie na szóstkę. Wśród tych, którzy próbowali, pięćdziesięciu procentom udało się je rozwiązać poprawnie. Jaki procent klasy rozwiązał poprawnie to zadanie?

Czy już umiem?

I. Czarne porzeczki to bogate źródło witaminy C, która stanowi aż 0,18% ich masy. Oblicz, ile witaminy C dostarczysz organizmowi, jeśli zjesz 200 g czarnych porzeczek.



II. Ośrodek kultury zorganizował jednodniowe warsztaty muzyczne. Początkowo chęć udziału w zajęciach zadeklarowało 120 osób. Ostatecznie na warsztaty nie przybyło 15% spośród zgłoszonych osób. Ile osób spośród tych, które zadeklarowały udział, nie przyszło na zajęcia?

III. Mama Mateusza wpłaciła do banku 2000 zł na lokatę roczną oprocentowaną 5% w skali roku. Ile pieniędzy wypłaci jej bank po upływie roku? Uwzględnij 19% podatku od odsetek.

A. 2100 zł **B.** 81 zł **C.** 2081 zł **D.** 100 zł

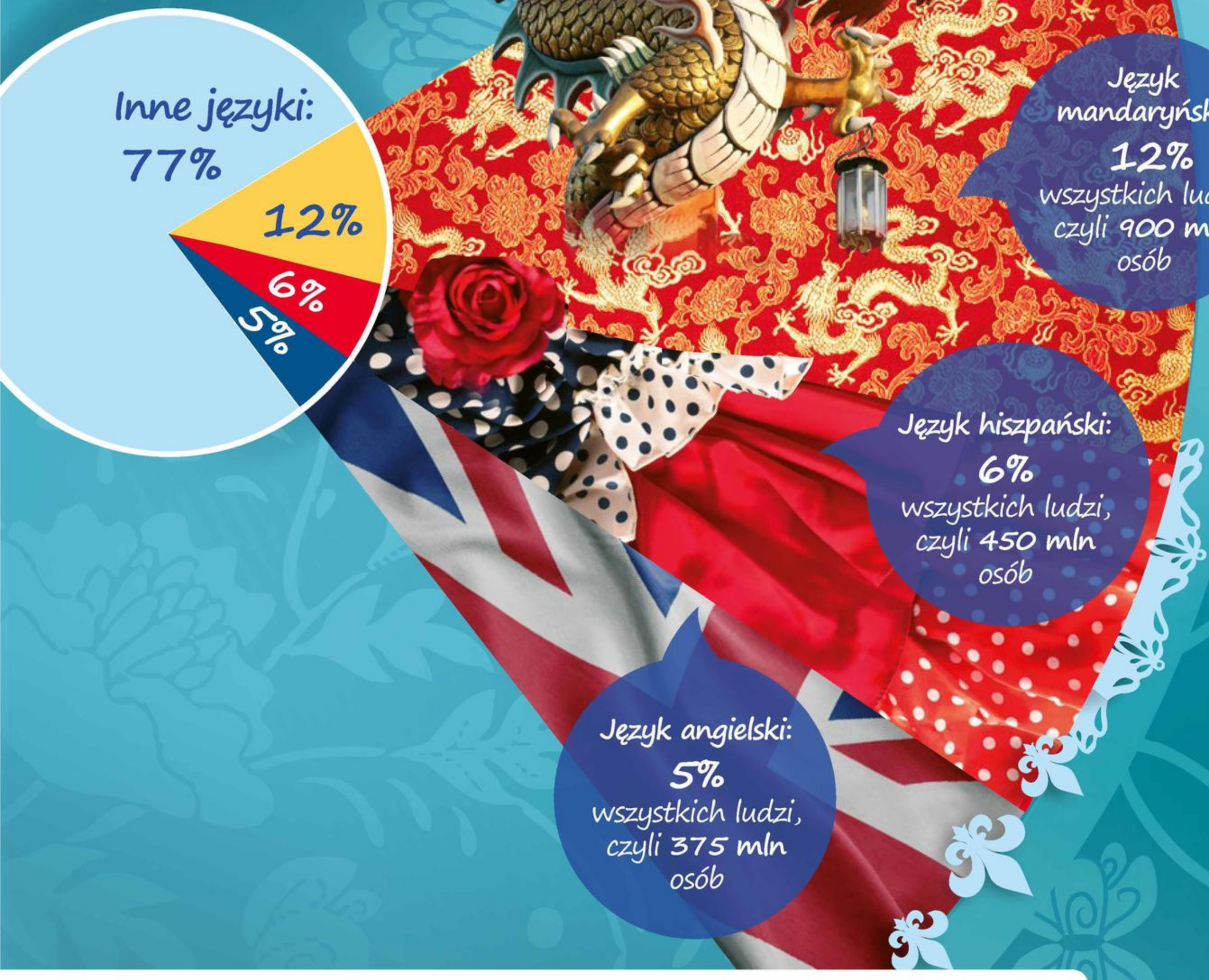
IV. Oblicz.

a) $2\frac{1}{4}\cdot 3\frac{1}{3}$ **b)** $(-0{,}5)\cdot 0{,}03$ **c)** $\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(-0{,}01)$

5 Wyznaczanie liczby, gdy dany jest jej procent

Na dobry początek

Języki mandaryński, hiszpański i angielski to języki ojczyste dla ponad 23% ludzi na świecie.



Pytania i polecenia

- Oszacuj, ile osób mieszkało na świecie, kiedy przygotowano tę ilustrację.

Zdarza się, że wiemy, ile wynosi określony procent danej liczby, a samą tę liczbę musimy dopiero wyznaczyć. Czasami jest to bardzo łatwe, np. jeśli 50% pewnej liczby (czyli jej połowa) jest równe 6, to szukana liczba wynosi 12.

Przykład 1.1

Znajdź liczbę, której 10% jest równe 5.

$10\% \rightarrow 5$

$100\% \rightarrow 50$ Mnożymy przez 10, aby otrzymać 100% szukanej liczby.

Szukana liczba to 50.

Ania wydała 5 zł, czyli 10% swoich oszczędności.



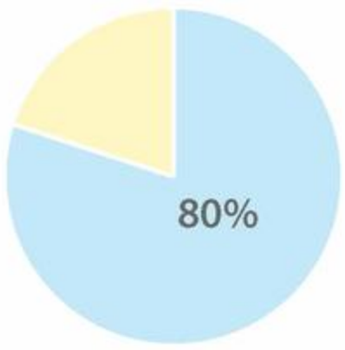
Przykład 1.2

Znajdź liczbę, której 80% jest równe 12.

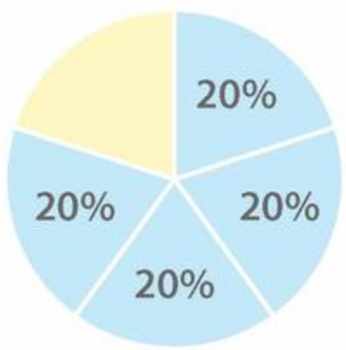
$80\% \rightarrow 12$

$20\% \rightarrow 12 : 4 = 3$ Dzielimy przez 4, bo 20% to 4 razy mniej niż 80%.

$100\% \rightarrow 3 \cdot 5 = 15$ Mnożymy przez 5, aby otrzymać 100% szukanej liczby.



80% to 12



20% to $12 : 4 = 3$



100% to $3 \cdot 5 = 15$

Ćwiczenie 1

Znajdź liczbę, której:

a) 1% jest równe 14,
b) 5% jest równe 6,
c) 25% jest równe 24,
d) 50% jest równe 0,9,
e) 75% jest równe 15,
f) 200% jest równe 84.

W trudniejszych przypadkach obliczamy najpierw, ile wynosi 1% szukanej liczby.

Przykład 2.1

Znajdź liczbę, której 7% jest równe 17,5.

$7\% \rightarrow 17{,}5$

$1\% \rightarrow 17{,}5 : 7 = 2{,}5$

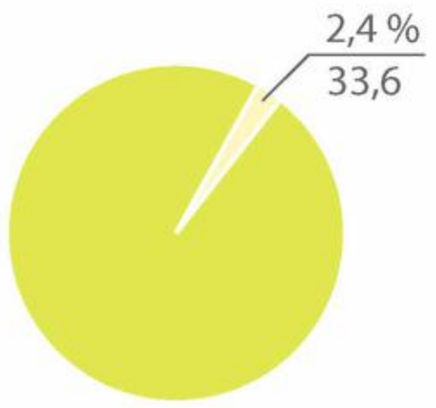
$100\% \rightarrow 2{,}5 \cdot 100 = 250$

Szukana liczba to 250.

Ania wydała 17,50 zł, czyli 7% swoich oszczędności.

Przykład 2.2

Znajdź liczbę, której 2,4% wynosi 33,6.



2,4% → 33,6

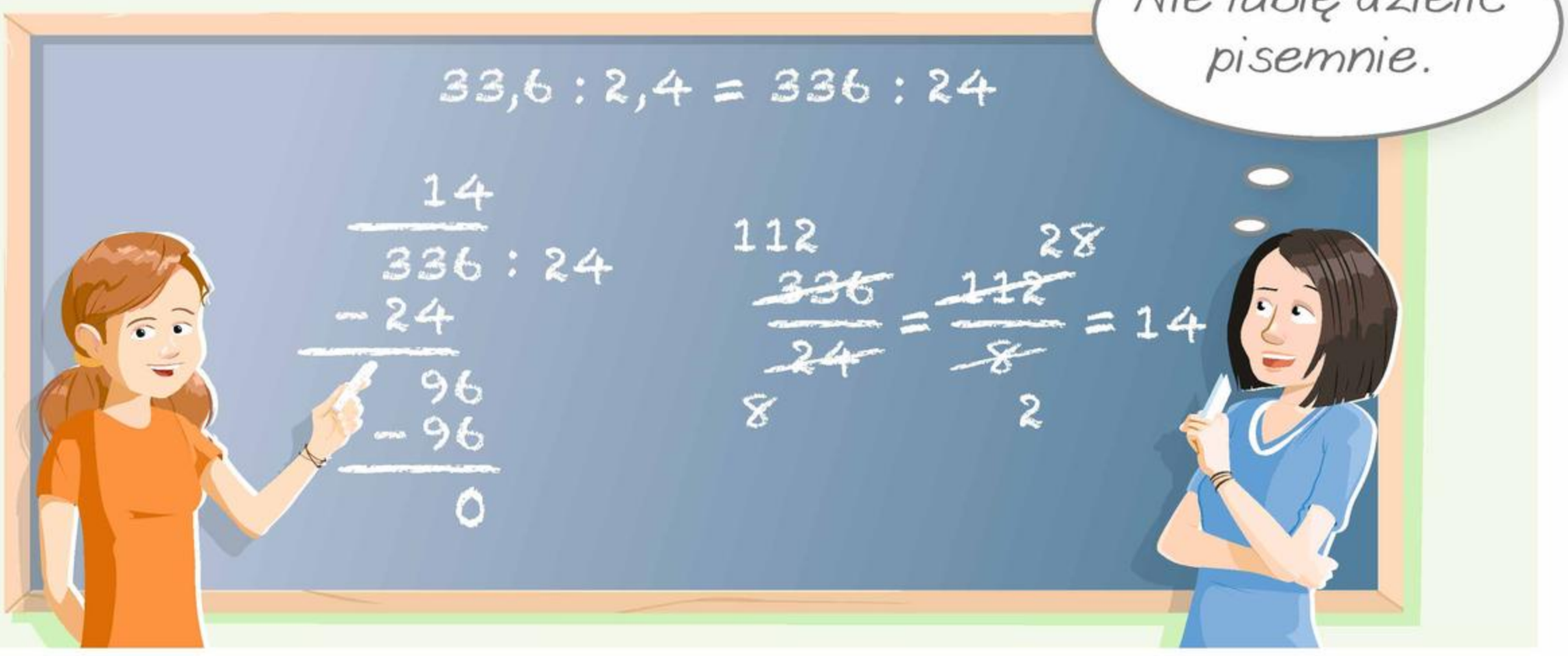
1% → 33,6 : 2,4 = 14

100% → 14 · 100 = 1400

Szukana liczba to 1400.

Dobra rada

Zamiast dzielić pisemnie, często wygodniej jest zapisać dzielenie w postaci ułamka i skrócić ten ułamek.



Ćwiczenie 2

Znajdź liczbę, której:

a) 3% wynosi 6, **b)** 4% wynosi 20, **c)** 8% wynosi 72.

Zadania

1. Wykonaj polecenia. ▶ Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

← P1.1

Wyznacz liczbę, której:

a) 25% wynosi 18,
b) 200% wynosi 75,
c) 10% wynosi 3,
d) 1% wynosi 0,8,
e) 50% wynosi 2,5,
f) 10% wynosi 359,
g) 25% wynosi 7,
h) 100% wynosi 126,
i) 200% wynosi 100.

poziom B

← P1.2

Wyznacz liczbę, której:

a) 5% wynosi 27,
b) 15% wynosi 18,
c) 75% wynosi 162,
d) 30% wynosi 12,
e) 80% wynosi 16,
f) 2% wynosi 5,
g) 40% wynosi 82,
h) 60% wynosi 78,
i) 5% wynosi 11.

poziom C

← P2.1

Wyznacz liczbę, której:

a) 24% wynosi 36,
b) 12% wynosi 42,
c) 15% wynosi 75,
d) 36% wynosi 648,
e) 72% wynosi 18,
f) 48% wynosi 24,
g) 65% wynosi 39,
h) 9% wynosi 405,
i) 46% wynosi 138.

poziom D

← P2.2

Wyznacz liczbę, której:

a) 3,2% wynosi 120,
b) 16,7% wynosi 83,5,
c) 27,5% wynosi 385,
d) 30,5% wynosi 122,
e) 135,5% wynosi 271,
f) 48,2% wynosi 72,3,
g) 6,25% wynosi 0,72,
h) 3,5% wynosi 7,
i) 101,5% wynosi 101,5.

2. Oblicz:

a) 30% liczby, jeśli jej 7% jest równe 126,
b) 75% liczby, jeśli jej 11% jest równe 176,
c) 15% liczby, jeśli jej 90% jest równe 180.

3. Nie wykonując dokładnych obliczeń, znajdź w ramce liczbę, której:

a) 24% wynosi 33,6,
b) 31% wynosi 2,945,
c) 11% wynosi 5,775,
d) 120% wynosi 28,8.

9,5	24	52,5	70	110	140

4. Na podstawie podanej informacji oblicz liczbę uczniów danej klasy.

a) Na lekcji były obecne 24 osoby, które stanowiły 80% uczniów tej klasy.
b) Na lekcji obecnych było 12 chłopców i 8 dziewcząt. Nauczyciel matematyki zauważył, że jest to 75% chłopców i $66\frac{2}{3}$% dziewcząt uczęszczających do tej klasy.

5. Dziś w klasie 7c obecnych było 80% uczniów, a pięć osób było nieobecnych. Ilu uczniów liczy ta klasa?

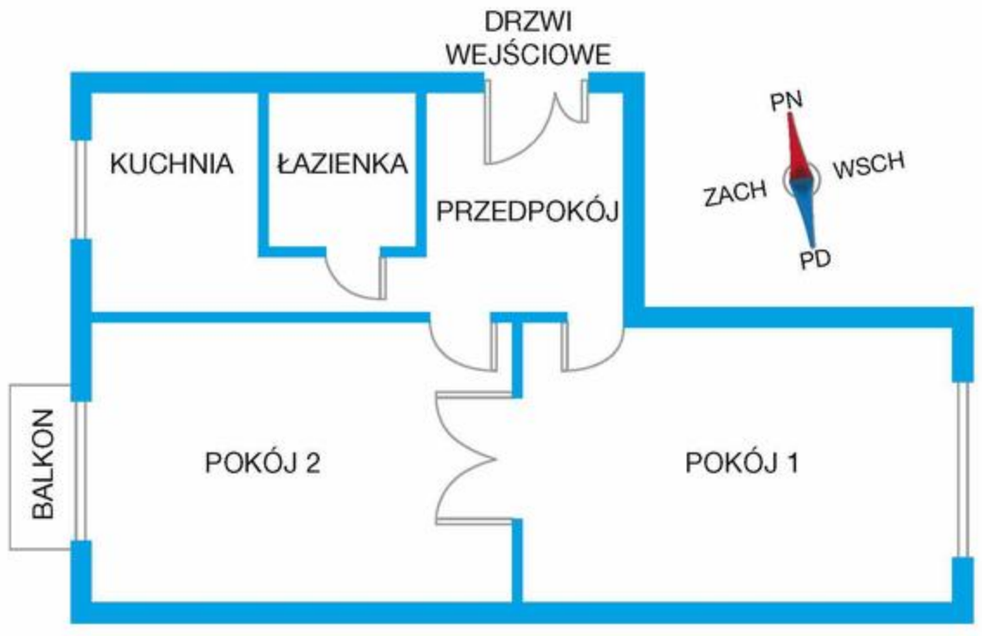
6. Osoby na zdjęciu to 16% uczestników wycieczki. Ile osób było na tej wycieczce? Czy jest możliwe, aby osoby na zdjęciu stanowiły 12% uczestników pewnej wycieczki?



7. Organizm dorosłego człowieka zawiera przeciętnie 70% wody. Szymon obliczył, że w organizmie jego taty powinno być 56 kg wody. Ile waży tata Szymona?

E

8. Kuchnia w mieszkaniu przedstawionym na planie obok ma wymiary 3 m × 2,5 m. Jej powierzchnia stanowi 15% powierzchni całego mieszkania. Natomiast powierzchnia pokoju 1 stanowi 35% powierzchni mieszkania. Jaka jest powierzchnia pokoju 1?



9. Rozwiąż zadania. Co mają ze sobą wspólnego?

a) W konkursie wzięło udział 2% uczniów szkoły, czyli 30 osób. Ilu uczniów jest w tej szkole?

b) W roztworze o stężeniu 2% znajduje się 30 g soli. Jaka jest masa roztworu?

10. Rozwiąż zadania. Co mają ze sobą wspólnego?

a) W sali gimnastycznej jest 12 osób – sami dorośli. Ile dzieci powinno wejść do sali, aby dorośli stanowili 6% wszystkich osób?

b) Ile wody należy dodać do 12 g cukru, aby uzyskać roztwór o stężeniu 6%?

11. W Morzu Bałtyckim jest 0,8% soli, a w Morzu Adriatyckim 4% soli. Ile wody z Morza Bałtyckiego potrzeba, aby uzyskać tyle samo soli co z 200 kg wody z Morza Adriatyckiego?



12. Ile samochodów stoi na parkingu, jeśli trzy kabriolety stanowią 10% wszystkich samochodów osobowych, a osobowe to 40% wszystkich samochodów na parkingu?

13. Ile owoców znajduje się w koszyku, jeśli 12 śliwek to 40% owoców pestkowych, a owoce pestkowe to 60% wszystkich znajdujących się w nim owoców?

14. Oblicz liczbę, jeżeli:

a) 30% z jej 70% jest równe 21,

b) 40% z jej 12% jest równe 7,5.

15. Na pokładzie promu płynącego do Karlskrony było 225 dzieci. Stanowiły one 12,5% wszystkich pasażerów.

a) Ustal liczbę pasażerów tego promu.

b) W drodze powrotnej na pokładzie było mniej dorosłych i o 9 dzieci mniej. Dzieci stanowiły 13,5% wszystkich wracających. O ile osób zmniejszyła się liczba dorosłych wracających promem?



Dla dociekliwych

1. Świeże śliwki zawierają około 70% wody, a suszone – około 20%. Chcemy uzyskać kilogram suszonych śliwek i zastanawiamy się, ile świeżych owoców trzeba kupić do ususzenia. Spróbuj to obliczyć. Jeśli ci się nie uda, odpowiedz na pytania.

a) W śliwkach znajdują się woda i pozostałe substancje zwane suchą masą. Czy podczas suszenia zmienia się ilość wody zawarta w owocach? Czy zmienia się ilość suchej masy?

b) Ile wody, a ile suchej masy jest w kilogramie suszonych śliwek?

c) Ile suchej masy jest w interesującej nas porcji świeżych śliwek?

d) Jaki procent świeżych śliwek stanowi sucha masa?

e) Ile potrzeba świeżych śliwek, aby otrzymać 1 kg suszonych śliwek?

2. Ile potrzeba 15-procentowego roztworu cukru, aby po odparowaniu części wody uzyskać 100 g roztworu 20-procentowego?

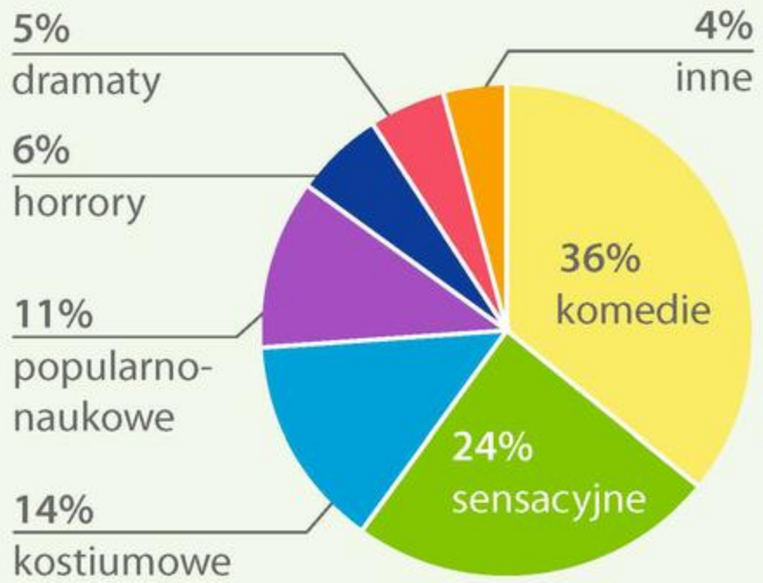
Czy już umiem?

I. Podczas sprawdzianu z matematyki Krzysiek zdobył 22 punkty. Jego nauczyciel powiedział mu, że uzyskana przez niego liczba punktów stanowi 55% wszystkich możliwych do zdobycia punktów. Oblicz, ile maksymalnie punktów można było uzyskać ze sprawdzianu.

II. Cukier w 15-procentowym roztworze wodnym ma masę 75 g. Oblicz masę roztworu i masę wody.

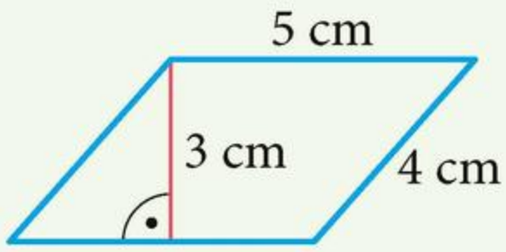
III. Na diagramie przedstawiono zestawienie odpowiedzi na pytanie: „Jakie filmy oglądasz najczęściej?" zadane uczniom pewnej szkoły. Każdy z nich wskazał jedną z siedmiu odpowiedzi.

Dramaty i filmy kostiumowe wskazało łącznie 76 osób. Ile osób brało udział w badaniu? Ile osób wskazało filmy sensacyjne?



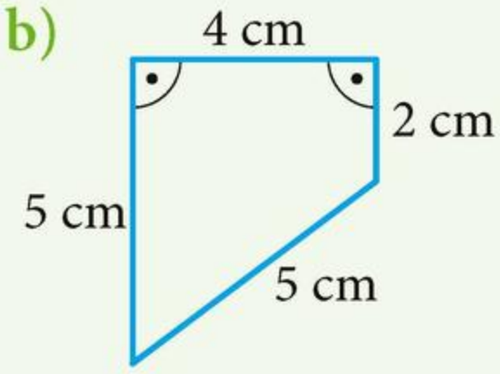
IV. Oblicz pole figury przedstawionej na rysunku.

a)

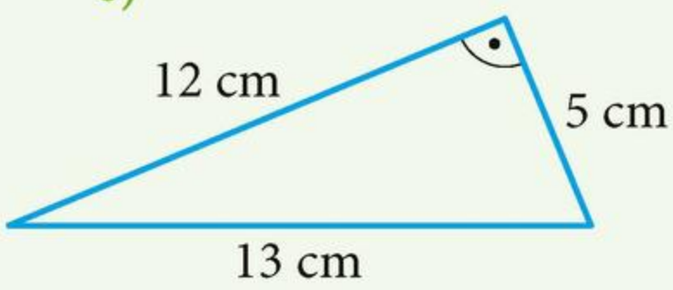


równoległobok

b)



c)



6

O ile procent więcej, o ile procent mniej

Na dobry początek ›

Na stoisku z bakaliami można kupić paczkowane orzechy włoskie. W małych opakowaniach mieści się 40 dag orzechów, a w dużych – o 50% więcej.



Pytania i polecenia

- O ile procent masa orzechów w małym opakowaniu jest mniejsza od masy orzechów w dużym opakowaniu?
- Którą paczkę orzechów bardziej opłaca się kupić?

Przykład 1.1

Wyznacz liczbę o 15% większą od 40.

Sposób I

Na początek obliczamy 15% liczby 40:

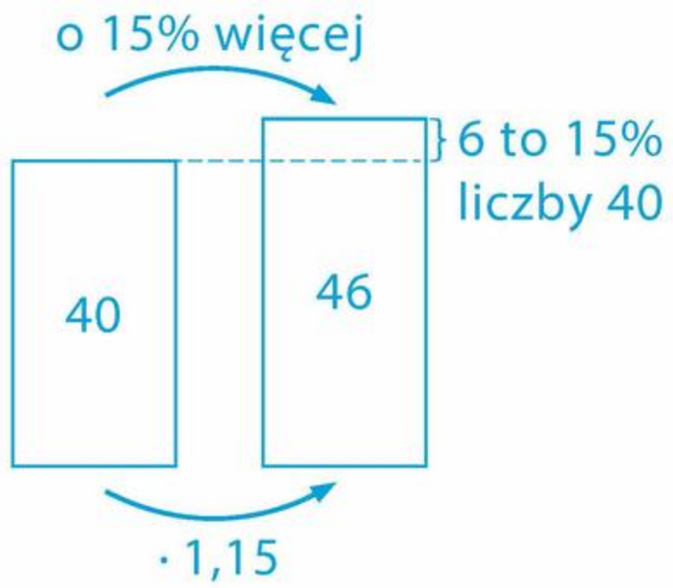
15% z 40 to $\frac{15}{100} \cdot 40 = 6$.

Liczba o 15% większa od 40 jest więc równa:

$40 + 6 = 46$.

Działania te można zapisać następująco:

$40 + \frac{15}{100} \cdot 40 = 40 + 6 = 46$.



Sposób II

Liczba o 15% większa od liczby 40 to 115% liczby 40.

$1{,}15 \cdot 40 = \frac{115}{100} \cdot 40 = 46$

Przykład 1.2

Wyznacz liczbę o 15% mniejszą od 40.

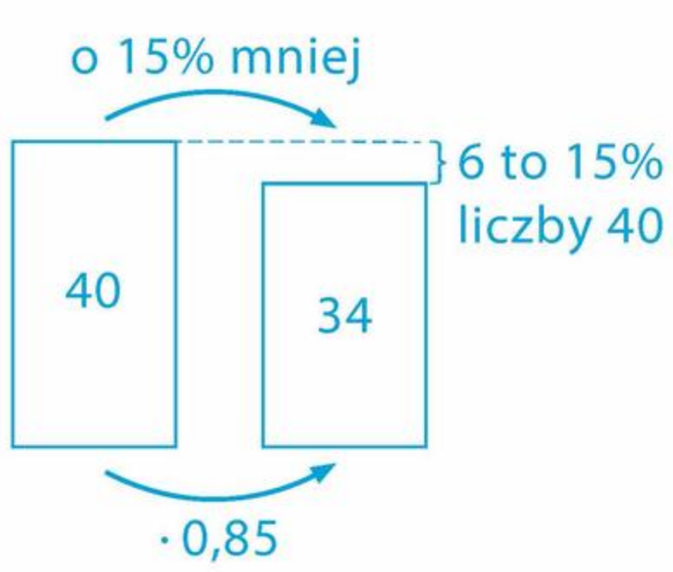
Sposób I

Obliczamy 15% liczby 40:

15% z 40 to $\frac{15}{100} \cdot 40 = 6$.

Liczba o 15% mniejsza od 40 jest równa:

$40 - 6 = 34$.



Sposób II

Liczba o 15% mniejsza od liczby 40 to 85% liczby 40.

$\frac{85}{100} \cdot 40 = 34$

Dobra rada

Zwiększanie i zmniejszanie liczby o dany procent warto przedstawiać w postaci odpowiedniego mnożenia (jak w przykładach powyżej). Jest to wygodne zwłaszcza wtedy, gdy wykonujemy obliczenia na kalkulatorze.

O 15% więcej niż 40?



O 15% mniej niż 40?



Ćwiczenie 1

Wyznacz liczbę:
a) o 10% mniejszą od 50,
b) o 12% większą od 25,
c) o 175% większą od 80,
d) o 100% mniejszą od 1245.

Przykład 2

E

Bluza kosztowała 80 zł. W czasie wyprzedaży jej cenę obniżono o 35%.
Oblicz, ile należało zapłacić za tę bluzę po obniżce.

Sposób I

Obliczamy kwotę, o którą obniżono cenę: 35% z 80 zł to $0{,}35 \cdot 80$ zł $= 28$ zł.
Odejmujemy tę kwotę od początkowej ceny bluzy: 80 zł $-$ 28 zł $= 52$ zł.

Sposób II

Ustalamy, jaki procent ceny początkowej stanowi obecna cena bluzy:
$100\% - 35\% = 65\%$.
Obliczamy ten procent ceny początkowej: 65% z 80 zł to $0{,}65 \cdot 80$ zł $= 52$ zł.

W czasie wyprzedaży bluza kosztowała 52 zł.

Ćwiczenie 2

Bilet normalny do kina jest o 80% droższy od biletu ulgowego. Oblicz, ile zapłacimy za dwa bilety normalne, jeśli cena biletu ulgowego to 15 zł.

Przykład 3

E

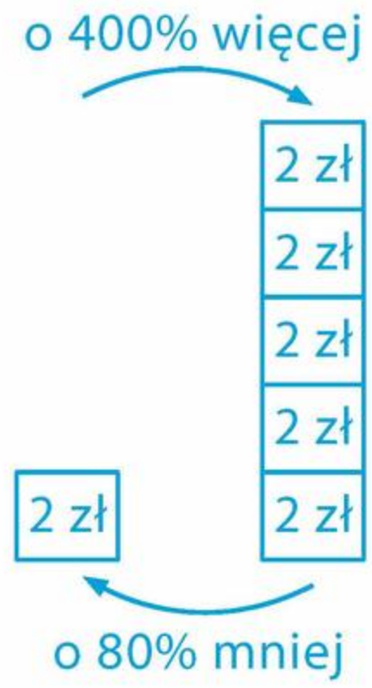


Kilogram cytryn kosztuje 10 zł, a kilogram jabłek 2 zł.
Oblicz, o ile procent:
a) cytryny są droższe od jabłek,
b) jabłka są tańsze od cytryn.

Najpierw obliczamy różnicę cen 1 kg cytryn i 1 kg jabłek:
10 zł $-$ 2 zł $= 8$ zł.

a) Obliczamy, jakim procentem ceny jabłek jest kwota 8 zł:
$\frac{8}{2} = 4$, czyli 400%.
Cytryny są droższe od jabłek o 400%.

b) Obliczamy, jakim procentem ceny cytryn jest kwota 8 zł:
$\frac{8}{10} = \frac{80}{100}$, czyli 80%.
Jabłka są tańsze od cytryn o 80%.



W podpunktach a) i b) przykładu 3 otrzymaliśmy różne wyniki, ponieważ w pierwszym przypadku interesował nas procent **ceny jabłek**, a w drugim – procent **ceny cytryn**. Ta sama kwota, 8 zł, stanowi 400% ceny jabłek, ale 80% ceny cytryn.

Dobra rada

W zadaniach z procentami zawsze trzeba się zastanowić, jaka wielkość stanowi nasze 100%.

Ćwiczenie 3.1

Kilogram rodzynek kosztuje 21 zł, a suszonych jabłek 28 zł. Oblicz, o ile procent:

a) kilogram suszonych jabłek jest droższy od kilograma rodzynek,
b) kilogram rodzynek jest tańszy od kilograma suszonych jabłek.

Ćwiczenie 3.2

W piekarni JAGODA ceny wszystkich wypieków z poprzedniego dnia zostały obniżone o ten sam procent. Na podstawie informacji z rysunku oblicz, ile kosztuje bułka z nasionami, jeśli poprzedniego dnia kosztowała 1,5 zł.



Przykład 4

W trakcie trwania programu telewizyjnego prowadzono głosowanie mające wyłonić najlepszego spośród dwojga finalistów. Piotr uzyskał 30 głosów, a Karina otrzymała 45 głosów.

a) Ile procent głosów dostała Karina, a ile otrzymał Piotr?
b) O ile więcej głosów niż Piotr dostała Karina?
c) O ile procent więcej głosów niż Piotr dostała Karina?

a) Karina i Piotr uzyskali w sumie $30 + 45 = 75$ głosów. Z tej liczby:

Piotr dostał $\frac{30}{75} = \frac{2}{5} = \frac{40}{100}$, czyli 40% głosów,

Karina dostała $\frac{45}{75} = \frac{3}{5} = \frac{60}{100}$, czyli 60% głosów.

b) $45 - 30 = 15$, a więc Karina dostała o 15 głosów więcej niż Piotr.

c) Teraz musimy obliczyć, jaki procent głosów otrzymanych przez Piotra (30) stanowi różnica (15).

$\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$, czyli 50%

Karina dostała o 50% głosów więcej niż Piotr.

To można obliczyć w pamięci: Karina dostała o połowę więcej głosów, a połowa to 50%.

Karina dostała 60% głosów, a Piotr otrzymał 40% głosów. Czy nie powinniśmy więc powiedzieć, że Karina dostała o 20% głosów więcej? Nie, bo gdy pytamy „o ile procent więcej niż Piotr", odnosimy się do **wyniku Piotra**, a nie do liczby wszystkich oddanych głosów.

Jeśli jednak interesuje nas różnica wielkości 60% i 40%, możemy użyć pojęcia **punktów procentowych**. Mówimy, że Karina dostała o 20 punktów procentowych więcej niż Piotr.

Zapamiętaj

Punkty procentowe to różnica między wielkościami wyrażonymi w procentach.

Ćwiczenie 4

Stopa bezrobocia w Polsce w lutym 2018 r. wynosiła 6,8%, a w lutym 2019 r. – 6,1%. O ile punktów procentowych zmalała w tym czasie stopa bezrobocia?

Zadania

1. Piłka plażowa kosztowała 40 zł, ale jej cenę podniesiono o 5%. Ile kosztuje piłka po podwyżce?

2. Oblicz ceny ubrań w promocji.



E **3.** W zimie łyżwy kosztowały 120 zł, a rolki 90 zł. Na wiosnę cenę łyżew obniżono o 20%, a cenę rolek podwyższono o 25%.

a) Ile kosztowały łyżwy, a ile rolki po zmianach cen?

b) Gdyby ktoś kupował jednocześnie łyżwy i rolki, to czy więcej zapłaciłby w zimie, czy po wiosennej zmianie cen?

4. Na zajęcia kółka matematycznego chodziło 6 chłopców i 4 dziewczynki. Później do grupy dołączyły 2 dziewczynki.

a) O ile procent zwiększyła się liczba uczestników kółka?
b) O ile procent zwiększyła się liczba dziewczynek?
c) Jaki procent uczestników kółka stanowiły dziewczynki wcześniej, a jaki później?
d) O ile punktów procentowych zwiększył się odsetek dziewczynek wśród uczestników kółka?

5. Agnieszka i Paweł kolekcjonują bilety na mecze reprezentacji Polski mężczyzn w siatkówkę. Paweł ma już 20 biletów, a Agnieszka 15. Oblicz, o ile procent:

a) liczba biletów zebranych przez Agnieszkę jest mniejsza od liczby biletów zebranych przez Pawła,
b) liczba biletów Pawła jest większa od liczby biletów Agnieszki.

6. Wyraź w procentach zmianę opisaną poniżej.

a) Paliwo samochodowe w lutym kosztowało 5 zł za litr, a w grudniu 6 zł za litr.
b) Mieszkanie kupione w zeszłym roku za 320 000 zł, obecnie jest warte 360 000 zł.
c) Agata dotąd otrzymywała 15 zł kieszonkowego, od następnego miesiąca będzie dostawać 25 zł.
d) Czas Tomka w biegu na 100 m wynosi 15 s. Podczas ostatnich zawodów chłopiec poprawił swój wynik o 1 sekundę.

7. W ramce podane są aktualne ceny ośmiu produktów. Nie wykonując dokładnych obliczeń, wybierz z ramki cenę produktu, o którym wiadomo, że:

a) kosztował 129 zł, a jego cenę obniżono o 15%,
b) kosztował 232 zł, a jego cenę obniżono o 27%,
c) kosztował 48 zł, a jego cenę podwyższono o 9%.

13,32 zł	19,35 zł	52,32 zł
83,35 zł		109,65 zł
130,42 zł	169,36 zł	205 zł

8. Oblicz na kalkulatorze ceny produktów z zadania 7. Każdą cenę obliczaj za pomocą jednego działania (jak w „Dobrej radzie" na s. 44). Sprawdź, czy twoje oszacowania były trafne.

E **9.** W maju rower kosztował 1800 zł. W sierpniu jego cenę obniżono o 15%, a po miesiącu o dalsze 20%. Ile będzie trzeba zapłacić za ten rower we wrześniu? Ile by kosztował, gdyby w sierpniu jego cena została obniżona od razu o 35%?

10. Początkowa cena trampek wynosiła 100 zł. O ile procent się zmieniła, jeśli:

a) najpierw obniżono ją o 20%, a potem podwyższono o 20%,
b) najpierw obniżono ją o 30%, a potem podwyższono o 40%,
c) najpierw podwyższono ją o 40%, a potem obniżono o 30%?

Zastanów się, która wielkość w zadaniu stanowi 100%.

11. W tabeli przedstawiono liczby ludności trzech najludniejszych krajów świata (w milionach) w 2010 r. i 2017 r.

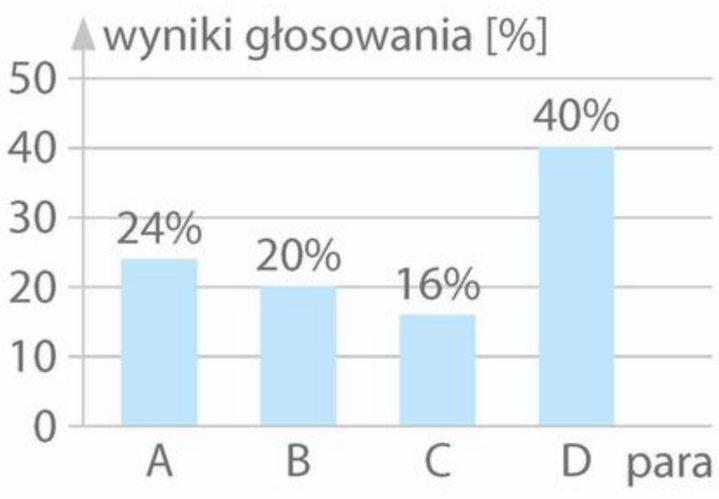
Państwo	2010 r.	2017 r.
Chiny	1360	1410
Indie	1231	1339
USA	309	324



a) Które z wymienionych krajów miały w 2017 r. ponad miliard mieszkańców?
b) Oblicz, o ile procent wzrosła liczba mieszkańców każdego z tych państw w okresie od 2010 r. do 2017 r.

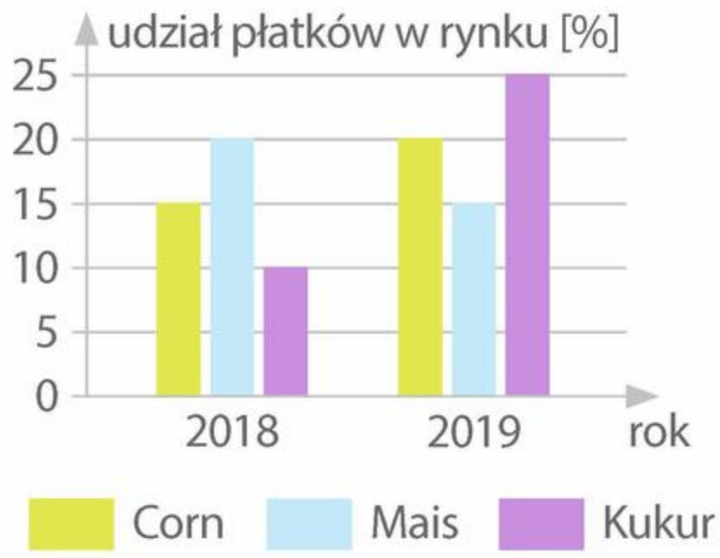
12. Podczas turnieju tańca publiczność głosowała na jedną z czterech par.

a) Która para otrzymała więcej głosów: A czy B? O ile punktów procentowych więcej? O ile procent więcej?
b) Która para otrzymała mniej głosów: A czy B? O ile punktów procentowych mniej? O ile procent mniej?



13. Na diagramie przedstawiono procentowy udział w rynku płatków śniadaniowych w latach 2018–2019 trzech firm: Corn, Mais, Kukur.

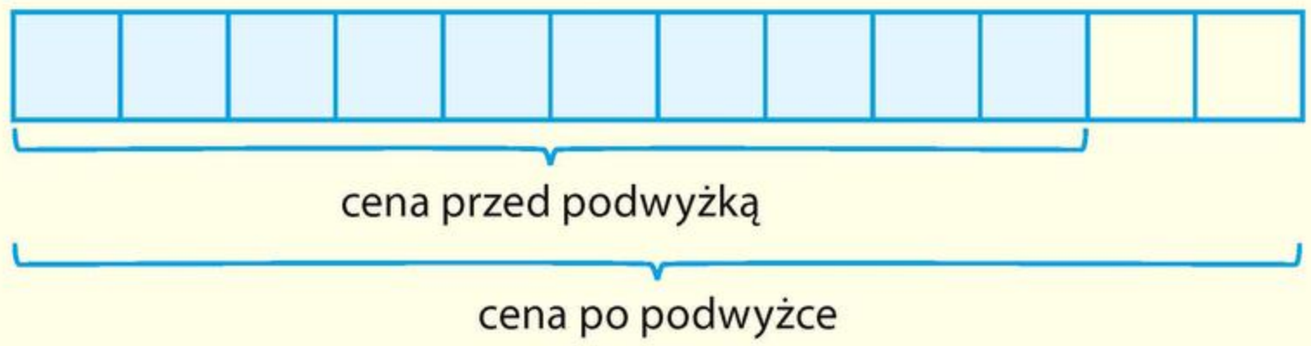
a) Odczytaj z diagramu, o ile punktów procentowych zmienił się w tym okresie udział w rynku każdej z wymienionych firm.
b) O ile procent wzrósł udział w rynku płatków firmy Kukur?
c) O ile procent zmniejszył się udział w rynku płatków firmy Mais?



14. W drugiej turze wyborów na przewodniczącego samorządu były dwie kandydatki: Lila i Kasia. Na Lilę głosowało o 50% więcej osób niż na Kasię. O ile punktów procentowych wynik Lili był lepszy od wyniku Kasi?

Dla dociekliwych

1. Na okres ferii cenę karnetów narciarskich podniesiono o 20%. Tę sytuację przedstawia ilustracja. Na jej podstawie odpowiedz na pytania.



a) Jaką część ceny karnetu po podwyżce stanowi cena przed podwyżką?
b) Jaki procent ceny karnetu po podwyżce stanowi cena przed podwyżką? Zaokrąglij wynik do pełnych procentów.
c) O ile procent trzeba obniżyć cenę karnetów po feriach, aby wróciła do poprzedniej wysokości? Zaokrąglij wynik do pełnych procentów.

2. W czasie wyprzedaży ceny obniżono o 20%. Wykonaj odpowiedni rysunek i odpowiedz, o ile procent wyższa była cena przed wyprzedażą.

3. Cenę obniżono o 50%, a następnie podniesiono o 50%. Czy po tych dwóch zmianach cena była wyższa, czy niższa niż na początku? O ile procent?

Czy już umiem?

I. Cena komputera została obniżona z 2000 zł do 1300 zł. O ile procent zmalała cena tego komputera?

II. Dwa sklepy sprzedają ten sam model obuwia w różnych cenach. Oba sklepy wprowadziły obniżki. Pierwszy, w którym buty kosztowały 250 zł, obniżył ich cenę o 25%. Drugi, który sprzedawał takie same buty w cenie 220 zł, objął je rabatem w wysokości 20%.



a) Ile kosztowały buty po obniżkach?
b) W którym sklepie po obniżce buty były droższe? O ile złotych?

III. Poparcie dla budowy linii energetycznej w kwietniu wynosiło 27%, w maju 32%, a w czerwcu 30%.

a) O ile punktów procentowych wzrosło poparcie dla budowy linii w czerwcu w porównaniu z kwietniem?
b) O ile procent spadło to poparcie w czerwcu w porównaniu z majem?

IV. Oblicz: 2^3, 3^2, $2 \cdot 3$, $3 \cdot 2$. Które działania mają taki sam wynik?

7 Obliczenia procentowe

Na dobry początek

Kasia kupiła babci na imieniny bukiet kwiatów oraz figurkę aniołka i torebkę do zapakowania prezentu. Za wszystko zapłaciła 37,50 zł. Przyjrzyj się paragonowi, który otrzymała. Jakie informacje zawiera?



Pytania i polecenia

- Zapisz, ile wynosi cena brutto figurki aniołka.
- Zapisz, ile wynosi VAT od ceny figurki.
- Zapisz, ile wynosi cena netto figurki.
- Czy podatek VAT stanowi 23% ceny netto, czy ceny brutto?

Obniżki i podwyżki

Przykład 1

E

Cena piłki po obniżce o 25% wynosi 36 zł. Ile kosztowała ta piłka przed przeceną?



Skoro cenę obniżono o 25%, to obecna cena stanowi 75% ceny początkowej.
Wiemy więc, że 75% początkowej ceny wynosi 36 zł.

Sposób I

Obliczamy, ile wynosi 1% początkowej ceny: $36 \text{ zł} : 75 = 0{,}48 \text{ zł}$.
A więc początkowa cena wynosi $100 \cdot 0{,}48 \text{ zł} = 48 \text{ zł}$.

Sposób II

Obliczenia znacznie się uproszczą, gdy zauważymy, że 75% ceny to $\frac{3}{4}$ tej ceny.
$\frac{3}{4}$ szukanej ceny wynosi 36 zł, więc $\frac{1}{4}$ szukanej ceny wynosi $36 \text{ zł} : 3 = 12 \text{ zł}$, zatem szukana cena wynosi $4 \cdot 12 \text{ zł} = 48 \text{ zł}$.

Ćwiczenie 1

Oblicz początkową cenę roweru, który przeceniony o 35% kosztuje 715 zł.

Podatek VAT

Wiele zadań z procentami dotyczy podatków, a wśród nich – podatku od towarów i usług, czyli VAT.

Cena brutto = cena netto + podatek VAT

Zapamiętaj

Stawka VAT to określony **procent ceny netto**.

Czy wiesz, że…

Skrót VAT pochodzi od pierwszych liter angielskiej nazwy tego podatku, czyli od *Value Added Tax* (czytaj: walju edyd taks, podatek od wartości dodanej). Podstawową stawką VAT w Polsce jest 23%. Na niektóre towary i usługi obowiązują stawki niższe: 8% i 5%. Najniższą stawką VAT są objęte m.in. książki i żywność.

Przykład 2

Cena netto roweru trekkingowego wynosi 2500 zł. Oblicz, ile wynosi cena brutto tego roweru, uwzględniająca podatek VAT w wysokości 23%.

Cena brutto stanowi 123% ceny netto, a więc wynosi:

$1{,}23 \cdot 2500 = 3075$ [zł].

Ćwiczenie 2

W hurtowniach podawane są zazwyczaj ceny netto towarów. Przy sprzedaży doliczana jest kwota podatku VAT. Ile kosztuje kurtka, jeśli jej cena netto w hurtowni wynosi 240 zł (odzież jest objęta VAT-em w wysokości 23%)?

Przykład 3

Deska snowboardowa kosztuje 738 zł. Jest to jej cena brutto, na którą składa się cena netto oraz 23-procentowy podatek VAT obliczany od ceny netto. Oblicz cenę netto deski oraz wartość podatku VAT.



Cena brutto (738 zł) stanowi 123% ceny netto:

$123\% \rightarrow 738$ zł

$1\% \rightarrow 738 : 123 = 6$ [zł]

$100\% \rightarrow 6 \cdot 100 = 600$ [zł] cena netto

Wartość podatku VAT można obliczyć dwoma sposobami.

Sposób I. Od ceny brutto odejmujemy cenę netto: 738 zł − 600 zł = 138 zł.

Sposób II. Obliczamy 23% ceny netto: $0{,}23 \cdot 600$ zł = 138 zł.

Cena deski netto wynosi 600 zł, a podatek VAT wynosi 138 zł.

Ćwiczenie 3

Cena brutto telewizora LED wynosi 1968 zł. Oblicz, ile będzie kosztować ten telewizor w trakcie trwania promocji „Wszystko bez VAT!”, jeżeli stawka VAT na telewizory wynosi 23%.



Roztwory

Przykład 4

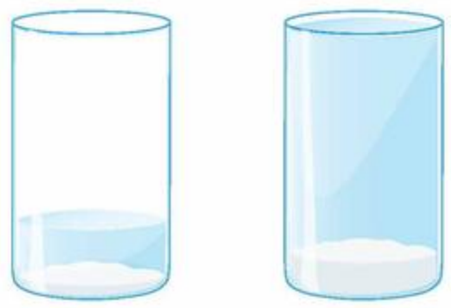
Do jednego naczynia wlano 120 g roztworu soli, który uzyskano w wyniku rozpuszczenia w wodzie 15 g soli, a do drugiego naczynia wlano 0,5 kg roztworu soli, w skład którego wchodzi 75 g soli. Który roztwór ma większe stężenie procentowe?

W pierwszym roztworze sól stanowi $\frac{15}{120}$ masy całości, czyli:

$\frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{120}_{40}} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8} = \frac{125}{1000} = \frac{12{,}5}{100}$, co oznacza 12,5%.

Drugi roztwór ma masę 0,5 kg = 500 g, z czego 75 g stanowi sól. Tak więc sól stanowi:

$\frac{\cancel{75}^{15}}{\cancel{500}_{100}} = \frac{15}{100} = 0{,}15$, czyli 15%.



sól:	15 g	75 g
roztwór:	120 g	500 g

Większe stężenie procentowe ma drugi roztwór.

Ćwiczenie 4

W jednym naczyniu było 300 g 15-procentowego wodnego roztworu siarczanu miedzi $CuSO_4$, a w drugim – roztwór uzyskany w wyniku rozpuszczenia 5 g czystego siarczanu miedzi w 20 g wody. W którym naczyniu stężenie siarczanu było większe?



Kryształy siarczanu miedzi

Przykład 5

Do 200 g 6-procentowego wodnego roztworu cukru dolano 100 g wody. Jakie jest stężenie otrzymanego roztworu?

W roztworze było $0{,}06 \cdot 200\,\text{g} = 12\,\text{g}$ cukru. Ta ilość nie zmieniła się po dolaniu wody.

Nowy roztwór ma masę 300 g i zawiera 12 g cukru. Zatem jego stężenie wynosi $\frac{12}{300} = 0{,}04$, czyli 4%.

Otrzymany roztwór ma stężenie 4%.

Ćwiczenie 5

W szklance było 200 g wodnego roztworu soli o stężeniu 2%. Po pewnym czasie ze szklanki odparowało 40 g wody. Jakie jest stężenie pozostałego roztworu?

Zadania

(E) **1.** Montaż drzwi kosztował 300 zł, a montaż okna 100 zł. Po roku koszt montażu takich samych drzwi wzrósł o 10%, a takiego samego okna zmalał o 5%. O ile procent zmienił się łączny koszt montażu obu elementów?

2. Kasia lubi piec babeczki. Niestety za każdym razem 20% pieczonych ciastek przypala w piekarniku. Ile babeczek musi upiec, aby otrzymać 32 niespalone ciastka?

3. Biuro Turystyczne Riwiera w przypadku rezygnacji z wycieczki nie zwraca pełnej wpłaconej kwoty. Odpowiedz na pytania, opierając się na przytoczonych zapisach regulaminu jednej z ofert.

a)

```
Jeśli rezygnacja z wyjazdu nastąpi miesiąc przed terminem
wyjazdu, to biuro potrąca 132 zł, czyli 8% ceny wycieczki.
```

Ile kosztuje ta wycieczka?

b)

```
Jeśli rezygnacja z wyjazdu następuje na 2 tygodnie
przed terminem wyjazdu, to potrącana jest kwota 297 zł.
```

Jaki to procent ceny wycieczki?

c)

```
Jeśli rezygnacja nastąpi na tydzień przed terminem wyjazdu,
to biuro potrąca 36% ceny wycieczki.
```

Jaka to kwota?

(E) **4.** Na obozie letnim każdy uczestnik wybrał jedne zajęcia popołudniowe. Do wyboru były wspinaczka, kręgle oraz basen. 45% uczestników wybrało kręgle, 15 obozowiczów – wspinaczkę, a 18 – basen. Ile osób było na obozie?

5. Mleko typu light, czyli o obniżonej zawartości tłuszczu, to takie, które zawiera nie więcej niż 1,5% tłuszczu. Mleko w dwulitrowej butelce waży około 2 kg, a zawiera 25 g tłuszczu. Czy w tej butelce jest mleko typu light?

(E) **6.** W promocji „3 za 2” przy zakupie dwóch koszulek w cenie 30 zł każda, trzecią koszulkę w tej samej cenie otrzymuje się gratis. O ile procent niższa jest cena jednej koszulki w tej promocji od normalnej ceny tej koszulki?

A. o 50% **B.** o $33\frac{1}{3}\%$ **C.** o $66\frac{2}{3}\%$ **D.** o 10%

7. Podstawowa stawka podatku VAT w Polsce do końca 2010 roku wynosiła 22%, a od stycznia 2011 roku jest to 23%. O ile złotych mniej kosztowałby rower, którego cena netto to 1600 zł, gdyby stawka VAT nie została podniesiona?

8. Rodzice Magdy kupili telewizor i laptop. Jakie kwoty zastąpiono na fakturze literami A, B, C, D? Korzystając z przedstawionych informacji, wykonaj odpowiednie obliczenia.

Lp.	Nazwa towaru	Cena netto	Ilość	VAT	Kwota VAT	Cena brutto
1	Telewizor 46"	3 200,00	1	23%	B	D
2	Laptop 15,6", RAM 8 GB	A	1	23%	C	2 583,00

9. **a)** W jednym stadzie było 100 owiec. 20% tego stada stanowiły czarne owce. W drugim stadzie było 200 owiec. 20% tego stada również stanowiły czarne owce. Stada połączono. Ile owiec jest w powstałym stadzie? Ile procent tych owiec stanowią czarne owce?

b) Mieszamy 100 gramów dwudziestoprocentowego roztworu cukru i 200 gramów dwudziestoprocentowego roztworu cukru. Ile gramów roztworu otrzymamy? Jakie będzie jego stężenie?

10. Czy mieszając w odpowiednich proporcjach dwa roztwory soli: jeden 20-procentowy, a drugi 40-procentowy, możemy otrzymać roztwór o podanym stężeniu?

a) 10% **b)** 20% **c)** 30% **d)** 35% **e)** 40% **f)** 60%

11. **a)** Na konkurs przyszło 10 chłopców i 30 dziewczynek. Ile osób przyszło na konkurs? Jaki procent z nich stanowią chłopcy?

b) W 30 g wody rozpuszczono 10 g cukru. Jaka jest masa powstałego roztworu? Jakie jest jego stężenie?

12. **a)** Na wycieczkę pojechało 200 uczniów. 40% tej grupy stanowili chłopcy. Ilu chłopców pojechało na wycieczkę? A ile dziewczynek?

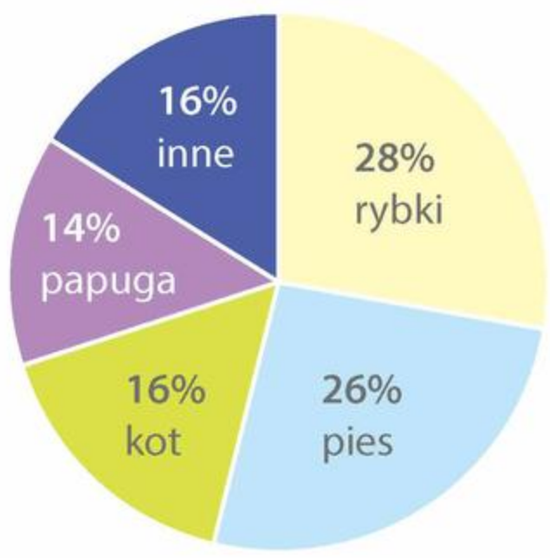
b) Ile soli i ile wody jest w 200 g 40-procentowego roztworu soli?

13. Wszystkich uczniów szkoły w Zwierzyńcu zapytano, czy mają w domu zwierzę. Ich odpowiedzi przedstawiono na pierwszym diagramie. Tych, którzy odpowiedzieli twierdząco, poproszono o sprecyzowanie, jakie zwierzę mają w domu, poprzez wybranie jednej odpowiedzi. Wyniki te przedstawiono na drugim diagramie. Jaki procent uczniów tej szkoły ma w domu kota?

I. Czy masz w domu zwierzę?



II. Jakie to zwierzę?



14. Jakie będzie stężenie wodnego roztworu soli, jeśli do 150 g roztworu 4-procentowego dolejemy 50 g wody?

15. Do jednego naczynia wlano 5 kg roztworu soli o stężeniu 9% i 15 kg roztworu soli o stężeniu 18%. Jakie stężenie ma otrzymany roztwór?

16. Komputer kosztuje 2400 zł brutto. Jaka jest jego cena netto, jeśli stawka VAT wynosi 23%?

Dla dociekliwych

1. Stawka podatku VAT (5%, 8% lub 23%) zawsze odnosi się do ceny netto. Jaki procent ceny brutto stanowi VAT w każdym z tych przypadków?

2. W 2011 r. podniesiono podstawową stawkę VAT z 22% do 23%.

a) O ile punktów procentowych podniesiono tę stawkę?
b) O ile procent zwiększył się podatek, jeśli nie zmieniła się cena netto towaru?
c) O ile procent sprzedawca musiał obniżyć cenę netto towaru, jeśli nie chciał podwyższać jego ceny brutto?

Czy już umiem?

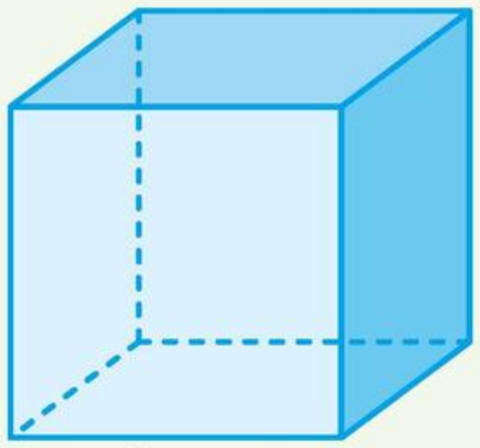
I. Za noclegi na wycieczce uczniowie mieli zapłacić 200 zł, a za wyżywienie 250 zł. Wyżywienie podrożało o 10%, a na noclegi była promocja 12,5%. Jak zmienił się łączny koszt noclegów i wyżywienia?

II. W 15-procentowym roztworze jest 66 g soli. Oblicz masę tego roztworu.

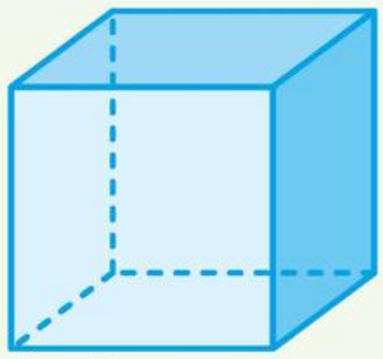
III. Jajko kurze klasy wagowej L waży 65 g, a jego żółtko 20 g, natomiast jajko bez skorupki waży 56 g. Ile procent masy jajka stanowi jego żółtko, a ile skorupka? Wynik zaokrąglij do pełnych procentów.

IV. Ilu takich sześciennych klocków potrzeba, aby zbudować sześcian o objętości 1 litra?

a)



b)



Powtórzenie I

ZESTAW 1

1. Nowożeńcy zaprosili na wesele 80 gości. Co czwarty z nich ma mniej niż 30 lat. Jaki procent gości weselnych stanowią osoby poniżej trzydziestego roku życia?

A. 20% **B.** 25% **C.** 32% **D.** 40%

2. Zamień podane ułamki na procenty.

a) $\frac{14}{25}$ **b)** $\frac{27}{20}$ **c)** $\frac{7}{4}$ **d)** $\frac{31}{40}$ **e)** $\frac{7}{8}$ **f)** $\frac{4}{3}$

3. Spośród 250 uczniów pewnej szkoły 130 bierze udział w zajęciach dodatkowych oferowanych przez szkołę. Oblicz, jaki procent uczniów tej szkoły stanowią uczniowie uczęszczający na zajęcia dodatkowe.

4. Na diagramie przedstawiono miesięczną frekwencję (procent obecności na lekcjach) w klasie 7c. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań. Czy w miejscu ? należy umieścić literę P, oznaczającą zdanie prawdziwe, czy F – oznaczającą zdanie fałszywe?



I.	Najniższa frekwencja była w maju i czerwcu.	?
II.	W miesiącach jesiennych frekwencja w klasie rosła.	?
III.	Średnia frekwencja w tym roku szkolnym wynosiła 91%.	?
IV.	W żadnym miesiącu frekwencja nie była równa 97%.	?

5. Na koncert przybyło 900 osób. 60% tej grupy stanowiły kobiety. Ilu mężczyzn było na tym koncercie?

A. 540 **B.** 600 **C.** 360 **D.** 180

6. Wśród siódmoklasistów w pewnej szkole 60% wybrało język niemiecki jako drugi język obcy. Reszta wybrała język hiszpański. Oceń prawdziwość podanych zdań. Zdecyduj, czy w miejsce ? wstawić literę P (oznaczającą zdanie prawdziwe), czy F (oznaczającą zdanie fałszywe).

I.	Język niemiecki wybrało o 20% osób więcej niż język hiszpański.	?
II.	Język niemiecki wybrało o 50% osób więcej niż język hiszpański.	?
III.	Odsetek osób, które wybrały język niemiecki, jest o 20 punktów procentowych wyższy niż odsetek osób, które wybrały język hiszpański.	?

7. Kasia otrzymała kupon rabatowy do sklepu internetowego uprawniający do piętnastoprocentowej zniżki na zakupy o łącznej wartości powyżej 50 zł. Kasia dodała do koszyka zakupy o łącznej wartości 65 zł. Ile zapłaci za wybrane towary, jeśli skorzysta z kuponu rabatowego?

8. Asia zdobyła z testu z matematyki 60 punktów na 80 możliwych.

a) Mira zdobyła o 5% punktów więcej niż Asia. Ile punktów zdobyła Mira?
b) Jola zdobyła o 5% punktów mniej niż Asia. Ile punktów zdobyła Jola?

9. Dwie rodziny, 4-osobowa i 5-osobowa, wyjechały na weekendową wycieczkę do Paryża. Kosztami, które wyniosły 10 620 zł, podzieliły się proporcjonalnie do liczby osób. Oblicz, ile zapłaciła każda z rodzin.



10. Ania wyjechała na wakacje do Szkocji. Przez 27 dni, czyli 90% czasu spędzonego przez nią w tym kraju, padał deszcz. Jak długo trwał pobyt Ani w Szkocji?

11. W tabeli przedstawiono procentowy udział Brazylii, Meksyku i Wietnamu w światowym zbiorze kawy w latach 2000 i 2010.

a) O ile punktów procentowych zwiększył się udział Wietnamu w światowym zbiorze kawy w tych latach, a o ile zmalał udział Meksyku?
b) O ile procent wzrósł udział Brazylii w światowym zbiorze kawy w tych latach?

Kraj	2000 r.	2010 r.
Brazylia	25%	34%
Wietnam	10,6%	13,2%
Meksyk	4,5%	3%

Źródło: http://stat.gov.pl.

12. Czy podane zdania są prawdziwe?

I. Liczba 18 stanowi 30% liczby 60. **II.** Liczba 18 stanowi 180% liczby 10.

13. Paczka terakoty kosztuje 32 zł netto. Ile zapłacimy za nią w sklepie, uwzględniając 23-procentowy podatek VAT?

14. Ile cukru i ile wody należy zmieszać, aby otrzymać 120 g wodnego roztworu cukru o stężeniu 15%?

15. Liczba o 17% mniejsza od liczby 856,24 to

A. $0{,}17 \cdot 856{,}24$. **B.** $1{,}17 \cdot 856{,}24$. **C.** $0{,}83 \cdot 856{,}24$. **D.** $1{,}83 \cdot 856{,}24$.

16. Wanda chce przygotować lemoniadę według przepisu z bloga kulinarnego. Oblicz, ile pomarańczy oraz ile nasion kardamonu będzie jej potrzebne do przygotowania 18 porcji lemoniady.



ZESTAW 2

1. 35% pewnej liczby to

A. 0,65 tej liczby. **B.** 0,035 tej liczby. **C.** $\frac{7}{20}$ tej liczby. **D.** $\frac{20}{7}$ tej liczby.

2. Oblicz, jakim procentem:

a) roku jest kwartał,
b) doby jest 9 godzin,
c) godziny zegarowej jest godzina lekcyjna,
d) wszystkich dni tygodnia są dni robocze.

3. We wrześniu książka kosztowała 36 zł. W październiku jej cenę obniżono o 15%, a następnie w listopadzie podniesiono o 15%. Ile kosztowała książka po tych zmianach?

4. Dzienne zapotrzebowanie trzynastolatka na białko wynosi około 75 g. Białko zawarte w awokado stanowi około 2% jego masy. Ile gramów awokado dziennie musiałby zjeść trzynastolatek, aby zapewnić sobie dzienną porcję białka?

5. W pewnej szkole w klasach szóstych uczy się 100 uczniów, w siódmych 120, a w ósmych 125. Na diagramie przedstawiono procent uczniów wypożyczających książki z biblioteki w kolejnych trzech miesiącach.

a) Ilu uczniów klas ósmych wypożyczyło książki w październiku?
b) Ilu uczniów klas 6–8 tej szkoły wypożyczyło książki w listopadzie?
c) Czy w grudniu było więcej szósto- czy siódmoklasistów wypożyczających książki w bibliotece? O ile więcej?



6. Opakowanie soczewek kontaktowych (6 sztuk) kosztuje 129,60 zł. Soczewki są objęte 8-procentowym podatkiem VAT. Ile wyniosłaby cena tego opakowania soczewek, gdyby były one objęte 23-procentową stawką VAT?

7. Dwadzieścia pięć osób zapytano o to, jak spędzą sylwestra. Ich odpowiedzi przedstawiono na diagramie kołowym. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. Sześć osób deklaruje, że sylwestra spędzi w domu.
II. 15% osób jeszcze nie wie, jak spędzi sylwestra.



8. Asia wsypała do 150 g herbaty 10 g cukru, a Kasia do 235 g herbaty 15 g cukru. Która z herbat, Asi czy Kasi, ma większe stężenie procentowe cukru? Wybierz odpowiedź I lub II i jej uzasadnienie spośród zdań oznaczonych literami A–D.

I.	Asi	ponieważ	A.	$\frac{10}{150} > \frac{15}{235}$
			B.	$\frac{10}{150} < \frac{15}{235}$
II.	Kasi		C.	$\frac{10}{160} > \frac{15}{250}$
			D.	$\frac{10}{160} < \frac{15}{250}$

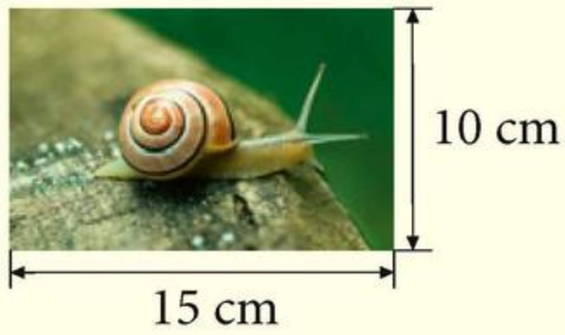
9. Drut o długości 3 m podzielono na trzy części. Pierwsza z nich ma 70 cm długości, a długość drugiej części stanowi 140% długości pierwszej. Oceń prawdziwość każdego z podanych zdań. Czy w miejsce ? należy wstawić literę P, oznaczającą zdanie prawdziwe, czy F – oznaczającą zdanie fałszywe?

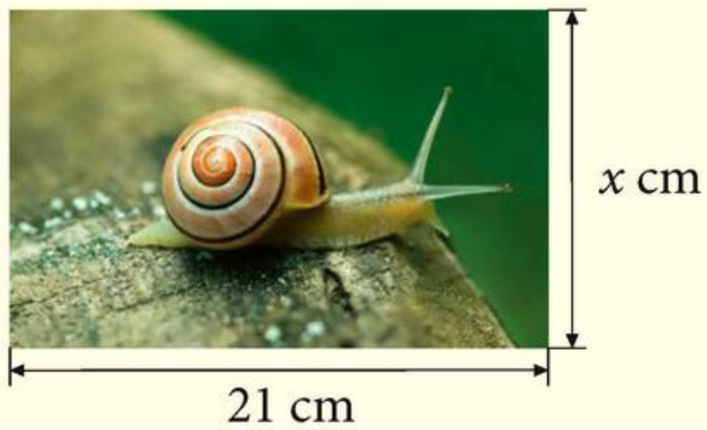
I.	Druga część drutu jest dłuższa od pierwszej o 40%.	?
II.	Pierwsza część drutu jest krótsza od drugiej o 40%.	?
III.	Druga część drutu stanowi około $\frac{1}{3}$ całego drutu.	?

10. W tabeli przedstawiono powierzchnie i ceny kilku mieszkań. Czy cena mieszkania jest proporcjonalna do jego powierzchni?

Powierzchnia (m^2)	30	60	80	90	100
Cena (tys. zł)	120	180	200	225	250

11. Wykonano powiększoną kopię zdjęcia ślimaka. Korzystając z podanych informacji, oblicz x.





12. Agata, Marek i Zbyszek pomagali sąsiadce w ogródku. Agata zaczęła pracę o 9.00, Marek o 10.00, a Zbyszek o 11.00. Wszyscy pracowali do południa. Za swoją pracę otrzymali 54 zł, które podzielili proporcjonalnie do czasu pracy. Ile zarobiło każde z nich?

13. Ile wody należy dolać do 2 kg piętnastoprocentowego roztworu soli, aby uzyskać roztwór dziesięcioprocentowy?

Zadania na temat…

Czekolada



Czy lubisz czekoladę? A czy wiesz, że znali ją już Majowie i Aztekowie? Uprawiali oni kakaowce już wtedy, gdy nikt w Europie jeszcze o nich nie słyszał. Z nasion tej rośliny przyrządzali gorzki napój, który spożywali podczas obrzędów i świąt religijnych. Nasiona te były dla nich tak cenne, że używali ich nawet jako środka płatniczego. Pierwszym Europejczykiem, który zetknął się z ziarnami kakaowca, był Krzysztof Kolumb. Było to w roku 1502, podczas jego ostatniej, czwartej podróży do Nowego Świata, która miała miejsce w latach 1502–1504. „Dziwne ziarna", z którymi się wtedy zetknął, przywiózł do Europy jako ciekawostkę. Dopiero 20 lat później Ferdynand Cortez zwrócił uwagę na pobudzające właściwości napoju pitego przez Majów i Azteków. Próbował ten napój rozpowszechnić w Europie, jednocześnie rozwijając uprawy kakaowca. Początkowo gorzki napój nie cieszył się jednak zbytnim uznaniem. Rzesze zwolenników zyskał dopiero, gdy zaczęto dodawać do niego cukier i wanilię. Był jednak bardzo drogi, więc tylko zamożni Europejczycy mogli delektować się jego smakiem. Aż do XIX w. czekoladę podawano głównie w postaci pitnej. Dziewiętnastowieczne odkrycia i wynalazki umożliwiły produkcję czekolady w tabliczkach.

W Polsce największą popularnością cieszą się twarde tabliczki czekolad: stanowią one aż 41% wszystkich sprzedawanych tabliczek. Drugie miejsce zajmują czekolady nadziewane, a najmniej sprzedawanych jest tabliczek czekolad z dodatkami. Wśród twardych tabliczek czekolad najwięcej sprzedaje się czekolady mlecznej – aż 62%.



Polska jest eksporterem czekolady i wyrobów czekoladowych. W tabeli podano informacje dotyczące tego eksportu w 2014 r. i 2015 r.

Towar	Ilość (tys. t)		Wartość (mln zł)	
	2014 r.	2015 r.	2014 r.	2015 r.
czekolada i inne przetwory spożywcze zawierające kakao	262,6	302,7	4880,0	5792,4

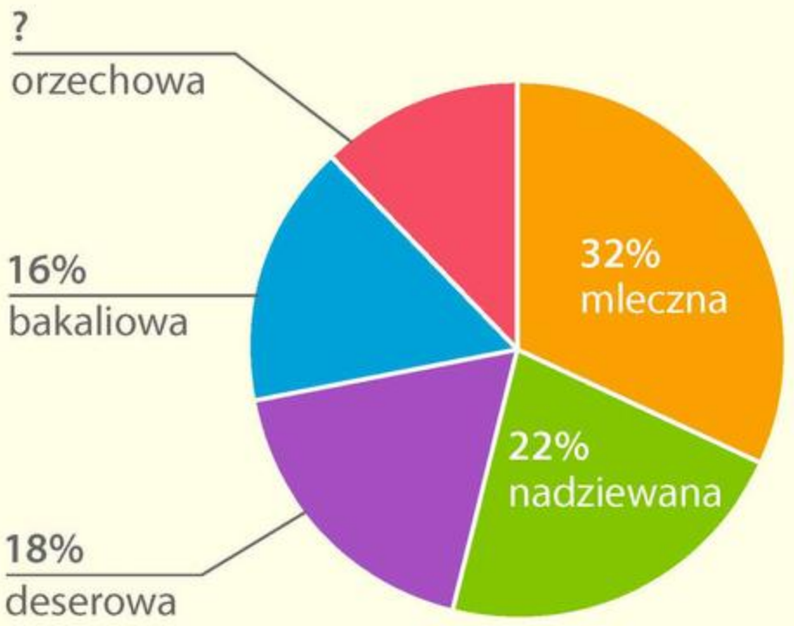
1. Oblicz, jakim procentem sprzedawanych w Polsce tabliczek czekolady są twarde tabliczki czekolady mlecznej.

2. Oblicz, o ile procent wzrosła ilość eksportowanych czekolad i innych przetworów spożywczych zawierających kakao w roku 2015 w porównaniu z rokiem 2014.

3. Oblicz, o ile procent więcej zarobiliśmy w Polsce w roku 2015 na eksporcie czekolady i innych przetworów zawierających kakao w porównaniu z rokiem 2014.

4. O ile kilogramów mniej eksportowano czekolady i innych przetworów zawierających kakao w roku 2014 w porównaniu z rokiem 2015?

5. W szkole zapytano 150 uczniów, jaką czekoladę lubią najbardziej. Wyniki przedstawiono na diagramie. Oblicz, o ilu uczniów więcej woli czekoladę mleczną niż orzechową.



Informacja do zadań 6–10

Czekolada przedstawiona na ilustracji ma masę 150 g. W tabeli podano informacje o jej wartościach odżywczych.



Wartość odżywcza	100 g
wartość energetyczna	540 kcal
białko	6,3 g
węglowodany	58,4 g

6. Janek odłamał 4 kostki czekolady. Jaki to procent całej tabliczki?

A. $11\frac{1}{9}\%$ **B.** 9% **C.** 0,36% **D.** 4%

7. Tylko jedno z podanych wyrażeń **nie pozwoli** obliczyć masy (w gramach) białka w $\frac{3}{4}$ takiej tabliczki czekolady. Które?

A. $\frac{9}{8} \cdot 6{,}3$ **B.** $75\% \cdot 9{,}45$ **C.** $\frac{3}{4} \cdot 6{,}3$ **D.** $\frac{3}{4} \cdot 6{,}3 \cdot 1{,}5$

8. Oblicz, jaką wartość energetyczną ma 25% tabliczki czekolady.

9. Oblicz, jaki procent całej tabliczki czekolady powinno się zjeść, aby dostarczyć do organizmu 7,3 g węglowodanów.

10. Agnieszka, Magda i Małgosia kupiły jedną czekoladę. Agnieszka zjadła kilka kawałków czekolady, około 16,7% tabliczki, Magda – 8 kostek czekolady, a Małgosia – $\frac{5}{18}$ całej tabliczki. Oblicz, jaki procent tabliczki pozostał.

Zadania na deser

Procenty i podział proporcjonalny

1. Ania piekła pierniczki – gwiazdki i serduszka. Okazało się, że stosunek liczby gwiazdek do serduszek wynosi 2 : 3. Ile procent pierniczków upieczonych przez Anię to serduszka?

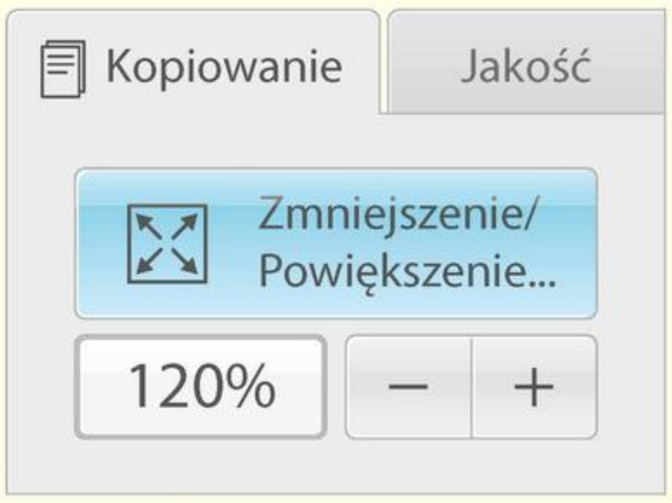


2. Jacek, Tomek i Wojtek kupili 25 m linki i rozdzielili ją między siebie w stosunku 1 : 4 : 5. Jacek miał najkrótszy kawałek, a Wojtek najdłuższy. Ile procent linki otrzymał Tomek?

3. Janek, Zosia i Magda przygotowywali dekorację na bal – wycinali i malowali niewielkie rybki. Gdy skończyli pracę, okazało się, że Zosia zrobiła trzy razy więcej rybek niż Janek, a Magda – aż cztery razy więcej niż Janek. Ile procent wszystkich rybek zrobiła Zosia?

Procenty i kserograf

Wiele kserografów pozwala zmniejszać i zwiększać kopiowany obraz. Gdy ustawimy powiększenie np. na 120%, każda długość na kopii stanowić będzie 120% długości na oryginale. Na przykład jeśli narysujemy odcinek długości 10 cm, to po odbiciu z powiększeniem 120% otrzymamy odcinek o długości 12 cm.



4. W jakiej skali powiększymy lub pomniejszymy rysunek, jeśli odbijemy go na kserografie przy podanym ustawieniu?

a) 200% **b)** 50% **c)** 20%

5. Jak należy ustawić kserograf, aby otrzymać rysunek w podanej skali?

a) 3 : 1 **b)** 1 : 4 **c)** 1 : 10

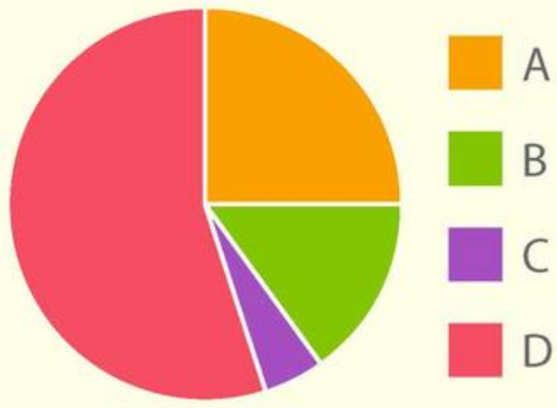
6. Mapę w skali 1 : 50 000 powiększyliśmy na kserografie ustawionym na 200%. Jaka jest skala odbitki mapy?

Procenty i diagramy

7. Dopasuj procenty z ramki do części A, B, C i D diagramu kołowego.

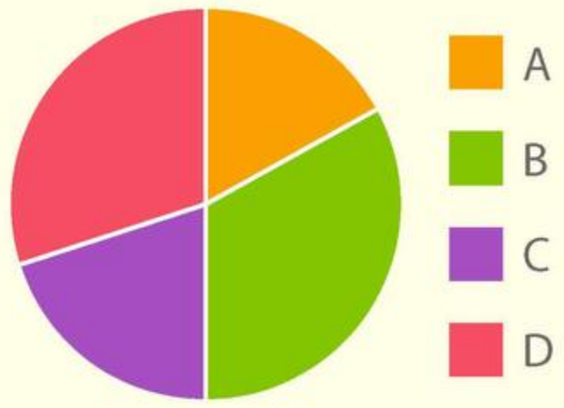
a)

5%	15%	25%	35%	45%	55%



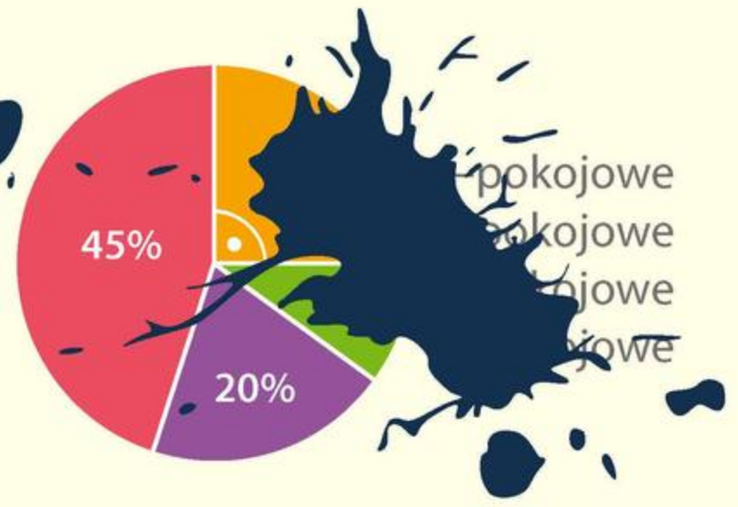
b)

7% 17% 20% 30% 33%



8. Kuba zapisał, ile mieszkań poszczególnych rodzajów znajduje się w jego bloku. Dane przedstawił na dwa sposoby: za pomocą diagramu słupkowego i kołowego. Niestety, na kartkę wylał się tusz i niektóre informacje zostały zamazane. Wywnioskuj z pozostałych informacji, ile mieszkań poszczególnych rodzajów znajduje się w bloku Kuby. Zapisz te dane w samodzielnie zaprojektowanej tabeli.





Zadania różne

9. Zapoznaj się z informacjami zamieszczonymi w tabeli, a następnie wykonaj polecenia i odpowiedz na pytania.

ŚREDNIA MASA NIEDŹWIEDZI BRUNATNYCH (kg)				
	Wiosna		Jesień	
	Samce	Samice	Samce	Samice
Chorwacja i Słowenia	248	115	243	141
Szwecja i Norwegia	201	96	273	158

Źródło: Swenson et al., Oecologia 2007 Aug 153(1): 37–47.

a) Czy między wiosną a jesienią masa niedźwiedzi zmniejsza się, czy zwiększa? O ile procent? Odpowiedzi podaj osobno dla poszczególnych płci i położenia geograficznego. Przedstaw je w samodzielnie zaprojektowanej tabeli.

b) Czy zmiany są większe na północy, czy na południu Europy? Czy większe są wśród samic, czy wśród samców?

10. Z naczynia z wodą wyparowało 18% wody. Oblicz, ile wody znajdowało się początkowo w naczyniu, jeśli pozostało w nim 41 litrów wody.

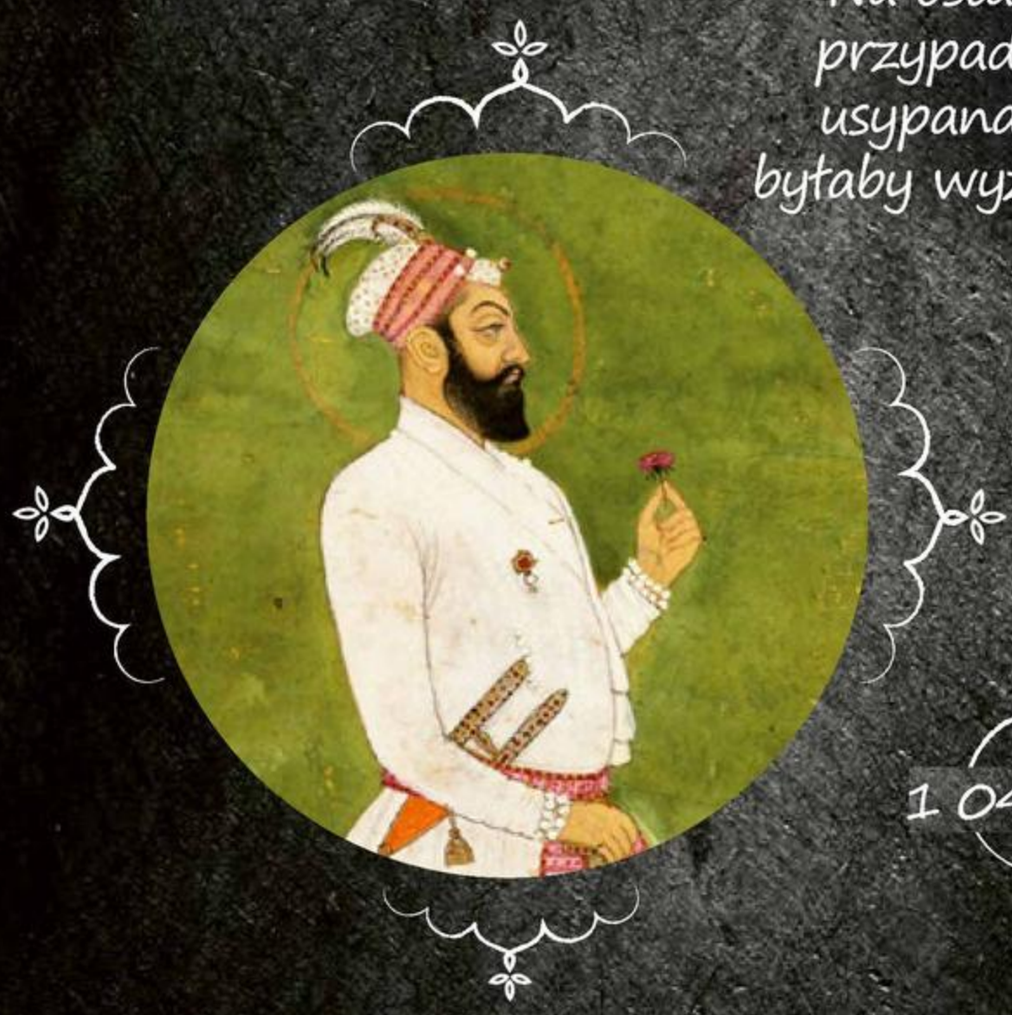
11. Narysuj trójkąt równoramienny, w którym długość podstawy to 40% obwodu.

12. Największy kąt trójkąta stanowi 50% sumy kątów tego trójkąta. Jaki to trójkąt?

1 Potęga o wykładniku naturalnym

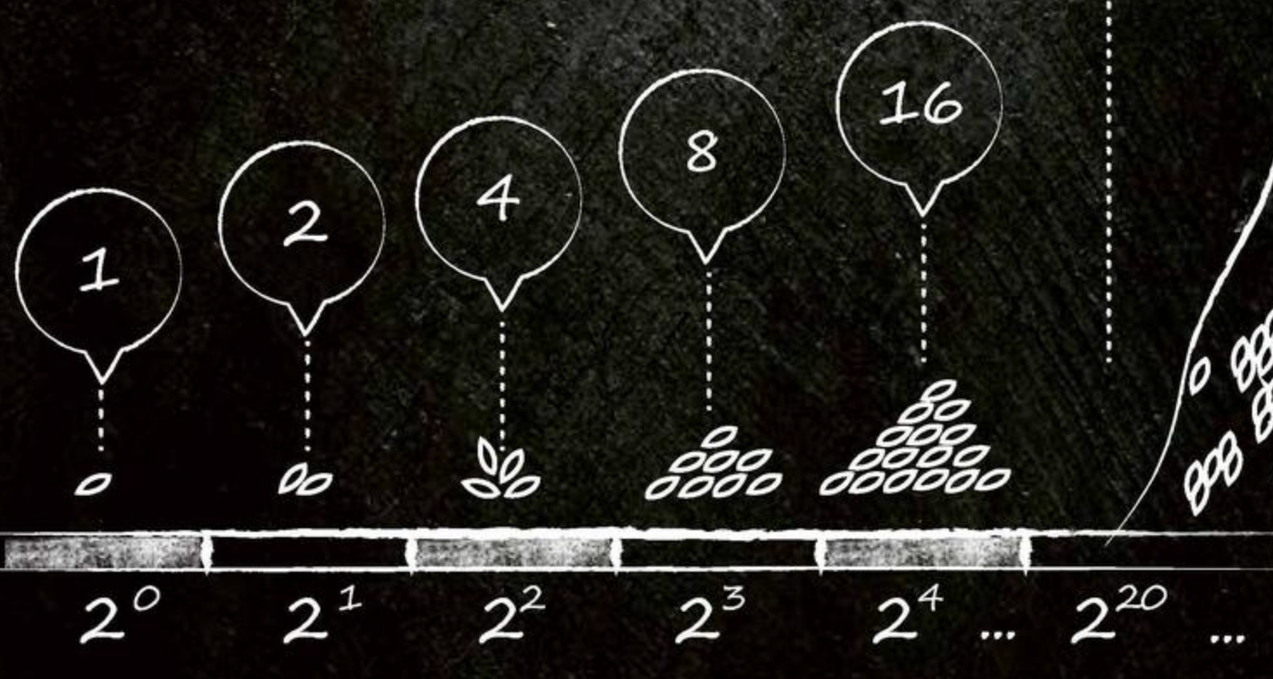
Na dobry początek

Legenda głosi, że władca Indii był tak zachwycony grą w szachy, że postanowił obdarować jej wynalazcę. Ten, poproszony o wskazanie nagrody, poprosił o coś, co wydawało się władcy bardzo skromne: o tyle ziaren pszenicy, aby na pierwsze pole szachownicy przypadło 1 ziarenko, na drugie – 2 ziarenka i na każde następne – dwa razy więcej niż na poprzednie. I co się okazało? Na całym świecie nie ma takiej ilości ziarna pszenicy!



Na ostatnie pole szachownicy przypadłoby 2^{63} ziaren. Góra usypana ze wszystkich ziaren byłaby wyższa od Mount Everestu.





Pytania i polecenia

- Ile ziaren przypadało na czwarte pole szachownicy? A ile na dziesiąte?
- Na 26. pole przypada tyle ziaren, ile zajmie połowę spichlerza. Na które pole przypada tyle ziaren, ile zajmie cały spichlerz?

Wiesz już, jak obliczyć kwadrat i sześcian liczby, czyli jej drugą i trzecią potęgę. W bardzo podobny sposób obliczamy potęgę czwartą, piątą itd.

$5 \cdot 5 = 5^2$ — Iloczyn $5 \cdot 5$, zapisany w skrócie jako 5^2, to **kwadrat** liczby 5 (**druga potęga** liczby 5).

$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$ — Iloczyn $5 \cdot 5 \cdot 5$ to inaczej 5^3, czyli **sześcian** liczby 5 (**trzecia potęga** liczby 5).

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^7$ — Wyrażenie 5^7 to **siódma potęga** liczby 5. Mówimy też, że liczba 5 jest **podniesiona do siódmej potęgi**.

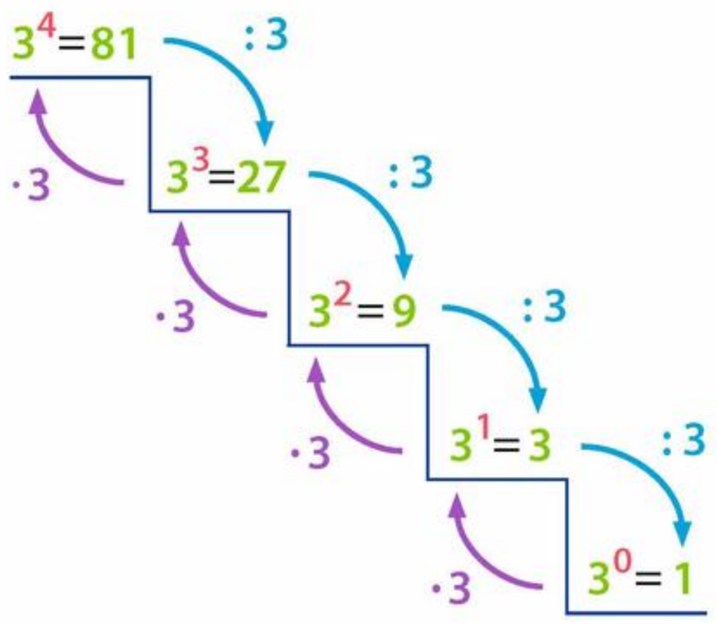
$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}} = a^n$$

wykładnik potęgi

podstawa potęgi

Jak określić pierwszą albo zerową potęgę np. liczby 3? Spójrz na schemat.

Aby zejść o schodek niżej, czyli zmniejszyć wykładnik potegi o 1, wykonujemy **dzielenie** przez 3. Dla zachowania tej regularności możemy przyjąć, że $3^1 = 3$, $3^0 = 1$.



Tak samo postępujemy w przypadku potęg o innych podstawach niż 3.

Zapamiętaj

Dla dowolnej liczby a przyjmujemy $a^1 = a$.

Dla dowolnej liczby $a \neq 0$ przyjmujemy $a^0 = 1$.

Przykład 1

Zapisz jako a^n oraz w postaci iloczynu i oblicz:

a) piątą potęgę liczby 6,

b) czwartą potęgę liczby $\frac{1}{2}$,

c) potęgę o podstawie 1,1 i wykładniku 4,

d) potęgę o podstawie -3 i wykładniku 3.

a) $6^5 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 7776$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

c) $1{,}1^4 = 1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1 = 1{,}4641$

d) $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

Ćwiczenie 1

Zapisz w postaci iloczynu oraz jako a^n i oblicz (możesz korzystać z kalkulatora):

a) siódmą potęgę liczby 8,

b) trzecią potęgę liczby $-\frac{3}{4}$,

c) potęgę o podstawie 2,5 i wykładniku 5,

d) potęgę o podstawie $-1{,}2$ i wykładniku 4.

Dobra rada

Potęgowanie pozwala krócej zapisać wielokrotne mnożenie:

$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$

Mnożenie pozwala krócej zapisać wielokrotne dodawanie:

$2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8.$

$$2^4 \neq 2 \cdot 4.$$

Przykład 2

Oblicz.

a) $(-2)^4$ **b)** -2^4 **c)** $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ **d)** $\frac{2^3}{3}$

a) $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 4 \cdot 4 = 16$

b) $-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$

Nie ma nawiasu, więc potęgujemy liczbę 2, a minus zapisujemy przed wynikiem.

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{8}{27}$

d) $\frac{2^3}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

Nie ma nawiasu, więc potęgowanie wykonujemy przed dzieleniem (kreska ułamkowa oznacza dzielenie).

W podpunkcie c) pokazano, jak potęguje się ułamek zwykły:

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^3}{3^3}.$

Podobnie postępujemy w przypadku dowolnej potęgi dowolnego ułamka.



Zapamiętaj

Aby podnieść do potęgi ułamek zwykły, podnosimy do potęgi osobno licznik i osobno mianownik tego ułamka.

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, ale $\frac{a^n}{b} = \frac{(a^n)}{b}$, gdzie $n \neq 0, b \neq 0$.

Ćwiczenie 2

Oblicz i porównaj wyniki.

a) $(-3)^2$ oraz -3^2 **b)** $(-4)^3$ oraz -4^3 **c)** $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ oraz $\frac{1^3}{2}$

Przykład 3

Oblicz.

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^0$ **b)** $\left(1\frac{1}{2}\right)^3$ **c)** $\left(-2\frac{1}{2}\right)^2$

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$

b) $\left(1\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$

c) $\left(-2\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-2\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-2\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{2}\cdot 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$

! $a^0 = 1$ dla dowolnego $a \neq 0$.

! Iloczyn dwóch liczb ujemnych jest liczbą dodatnią.

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ **b)** $\left(2\frac{1}{2}\right)^4$ **c)** $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$ **d)** $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$ **e)** $(-3{,}9)^0$

Przykład 4

Dla jakich liczb x zachodzi równość $x^4 = 256$?

Spróbujmy odgadnąć właściwą liczbę.

- Czy $x = 5$? Obliczamy: $5^4 = 625$ – za dużo.
- Czy $x = 3$? Obliczamy: $3^4 = 81$ – za mało.
- Czy $x = 4$? Obliczamy: $4^4 = 256$ – zgadza się.

Zatem liczba 4 spełnia warunki zadania.
Ale czy jest jedyną taką liczbą? Zauważmy, że gdy podnosimy liczbę ujemną do czwartej potęgi, to wynik jest dodatni. Mamy więc drugą możliwość: $x = -4$.

Są dwie liczby, dla których zachodzi podana równość: 4 oraz -4.



Ćwiczenie 4

Dla jakich liczb x zachodzi podana równość?

a) $x^2 = 64$ **b)** $x^3 = 64$ **c)** $x^6 = 64$

! Iloczyn parzystej liczby czynników ujemnych jest liczbą dodatnią.

Czy wiesz, że…

GOOGOL = 10^{100}, czyli jedynka i sto zer, to nazwa liczby wymyślona przez dziewięcioletniego chłopca. Jego wuj – matematyk Edward Kasner – poprosił go o nazwanie bardzo dużej liczby. Kasner użył tej nazwy po raz pierwszy w swojej książce „Matematyka i wyobraźnia" (1940).
Nazwa wyszukiwarki internetowej Google pochodzi od nazwy liczby googol. Podczas rejestracji popełniono jednak błąd, wpisując zamiast googol.com znane wszystkim google.com.

Przykład 5

Zapisz podaną liczbę w postaci potęgi o podstawie 10 lub potęgi o podstawie 0,1.

a) 10 000 000 **b)** 0,000001

a) Gdy mnożymy liczbę naturalną przez 10, na końcu pojawia się dodatkowe zero. Dlatego:

$10^{1} = 10$ (1 zero) $10^{2} = 100$ (2 zera) $10^{3} = 1000$ (3 zera)

Wobec tego $10\,000\,000 = 10^{7}$.

b) Gdy mnożymy liczbę przez 0,1, przesuwamy przecinek w lewo o jedno miejsce. Dlatego:

$0{,}1^{1} = 0{,}1$ (1 miejsce po przecinku) $0{,}1^{2} = 0{,}01$ (2 miejsca po przecinku) $0{,}1^{3} = 0{,}001$ (3 miejsca po przecinku)

Wobec tego $0{,}000001 = 0{,}1^{6}$.

Dobra rada

$10^{5} = 100\,000$ — 5 zer. Jaka potęga – tyle zer.

$0{,}1^{5} = 0{,}00001$ — 5 miejsc po przecinku. Jaka potęga – tyle miejsc po przecinku.

Ćwiczenie 5

Zapisz podaną liczbę w postaci potęgi liczby 10 lub liczby 0,1.

a) 10 000 **b)** 100 000 **c)** 10 **d)** 0,001 **e)** 0,00001 **f)** 1

Zadania

1. Zapisz w postaci iloczynu oraz jako a^n, a następnie oblicz:
a) piątą potęgę liczby -1,
b) drugą potęgę liczby 11,
c) potęgę o podstawie 5 i wykładniku 4,
d) potęgę o podstawie 2 i wykładniku 9.

2. Oblicz.
a) 3^6 **b)** $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ **c)** $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ **d)** $\left(2\frac{2}{3}\right)^3$ **e)** $(1{,}3)^2$

3. Oblicz.
a) $(-4)^2$, $(-4)^3$, $(-4)^4$ **b)** 2^3, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $(-0{,}2)^3$, $0{,}02^3$

4. Oblicz.
a) 2^2+2^3 **b)** 3^1+3^3 **c)** 5^1+5^4 **d)** $\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

5. Zapisz bez wykonywania obliczeń:
a) kwadrat liczby 382,
b) trzecią potęgę liczby $\frac{18}{37}$,
c) n-tą potęgę liczby 5,
d) liczbę -23 podniesioną do potęgi z.

6. Określ liczbę zer występujących w zapisie dziesiętnym danej liczby.
a) 10^2 **b)** 10^3 **c)** 10^4 **d)** 10^{1000}

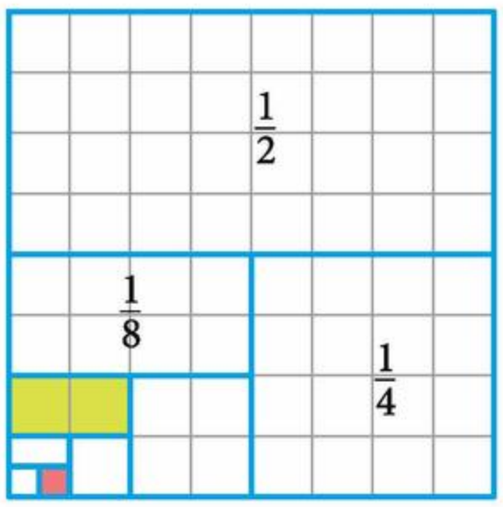
7. Oblicz.
a) $0{,}1^2$; $0{,}1^3$; $0{,}1^4$; $0{,}1^8$ **b)** $0{,}4^2$; $0{,}4^3$; $0{,}4^4$

8. Podaj liczbę dodatnią oraz liczbę ujemną, które należy podnieść do kwadratu, aby otrzymać:
a) 16, **b)** 81, **c)** $\frac{1}{4}$, **d)** 0,36, **e)** $3\frac{1}{16}$.

9. Podaj wartości potęg liczby -1 o kilku kolejnych wykładnikach naturalnych: $(-1)^0$, $(-1)^1$, $(-1)^2$, $(-1)^3$, $(-1)^4$, ... Co zauważasz? Zapisz swoje wnioski.

10. Podaj liczbę, którą należy podnieść do trzeciej potęgi, aby otrzymać:
a) 8, **c)** $\frac{1}{8}$, **e)** -1, **g)** 27 000, **i)** $\frac{8}{27}$,
b) -8, **d)** $-\frac{1}{8}$, **f)** 0, **h)** 0,000001, **j)** $-1\frac{61}{64}$.

11. Kwadrat o polu równym 1 podzielono w sposób przedstawiony obok (liczby oznaczają pola poszczególnych części uzyskanych w wyniku podziału). Zapisz w postaci potęgi liczby $\frac{1}{2}$:
a) pole żółtego prostokąta,
b) pole czerwonego kwadratu.



12. W sobotę 1 kwietnia 2017 roku Jacek się nudził i opublikował post na portalu społecznościowym. W niedzielę (2 kwietnia) jego post udostępniło pięć osób. W poniedziałek każdy z udostępnionych w niedzielę postów udostępniło kolejne pięć osób itd. Zapisz za pomocą potęgi i oblicz, ile osób udostępniło post:

a) we wtorek 4 kwietnia,
b) w środę 5 kwietnia,
c) w sobotę trzy tygodnie po 1 kwietnia.

Porównaj swoje wyniki z liczbą ludności Warszawy (2 mln), Polski (38 mln), świata (7 mld).



Jacek
1 kwietnia

Mycie rąk powoduje wypadki drogowe! Każdy, kto spowodował wypadek drogowy, mył ręce przynajmniej raz w życiu.

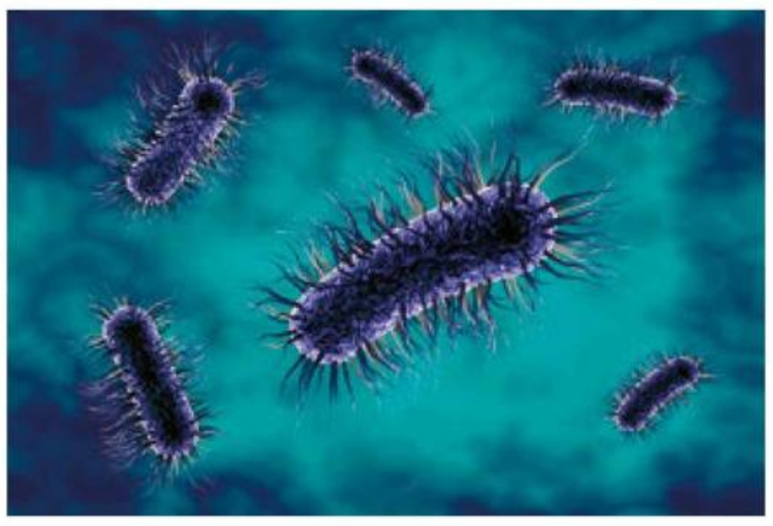
Producenci mydła ukrywają ten niewygodny fakt!

13. W 1965 roku Gordon Moore, jeden z założycieli firmy Intel, sformułował prawo rozwoju komputerów, które w obecnie przyjętej wersji głosi, że moc obliczeniowa komputerów, pojemność ich dysków itp. zwiększają się dwukrotnie co dwa lata. W roku 2017 typowy laptop miał dysk o pojemności 0,5 terabajta. Oblicz, ile terabajtów pojemności powinien mieć zgodnie z prawem Moore'a dysk laptopa w roku 2027.



Harvard Mark 1 – pierwszy komputer cyfrowy, stworzony w latach 1937–44 przez zespół konstruktorów z firmy IBM.

14. Bakterie rozmnażają się przez podział – z jednej bakterii powstają dwie mniejsze, które następnie rosną i znów się dzielą. Załóżmy, że bakterie pewnego gatunku dzielą się co 15 minut. Ile bakterii powstanie z jednej po 2 godzinach? Odpowiedź zapisz za pomocą potęgi i oblicz.



15. Pani Ania Zapominalska wpłaciła do banku 1000 zł. Po każdym pełnym roku jej stan konta powiększał się o 2% (po uwzględnieniu podatku). Po roku miała więc $1{,}02 \cdot 1000$ zł, a po dwóch latach $1{,}02 \cdot 1{,}02 \cdot 1000$ zł. Ile miała na koncie po 20 latach? Zapisz odpowiednie działanie (użyj potęgowania) i oblicz.

16. W nowej firmie na dokumenty przeznaczono regał złożony z trzech półek, każda o długości 1 m. Po pierwszym roku działalności dokumenty zajęły segregator o grubości 10 cm. Firma rozwijała się prężnie i w każdym roku dokumenty zajmowały dwa razy więcej takich segregatorów niż w roku poprzednim. Spróbuj najpierw odgadnąć odpowiedzi na poniższe pytania, a następnie wykonaj obliczenia.

a) W którym roku działalności firmy trzeba będzie dokupić drugi regał?
b) Na ile lat wystarczy drugi regał, jeśli będzie miał taką samą pojemność?

17. W 1 roku naszej ery centurion Marek pożyczył swojemu koledze 20 denarów na 1 procent rocznie.

a) Ile denarów powinien zwrócić kolega Marka dzisiaj, gdyby obaj tego dożyli?

b) Denar rzymski był warty tyle, ile 3,89 g srebra. Przelicz kwotę obliczoną w podpunkcie a) na złotówki. Gram srebra kosztował we wrześniu 2019 roku 2,30 zł. Możesz skorzystać z tej ceny albo znaleźć aktualne dane.

Dla dociekliwych

Gdy podnosimy liczbę 2 do kolejnych potęg, otrzymujemy coraz większe liczby:
2, 4, 8, 16, ...
Inaczej jest z liczbą $\frac{1}{2}$. Jej kolejne potęgi są coraz mniejsze: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, ...

1. Sprawdź, co się dzieje, gdy podnosimy do kolejnych potęg daną liczbę.

a) 3 **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** -3 **d)** $-\frac{1}{3}$

2. Podaj dwa przykłady liczb, których kolejne potęgi:

a) są coraz większe,
b) są coraz mniejsze,
c) są raz ujemne, raz dodatnie,
d) są stale takie same.

Czy już umiem?

I. Oblicz.

a) 4^3 **b)** 25^0 **c)** 18^1 **d)** $0{,}2^4$ **e)** $\left(1\frac{1}{2}\right)^3$

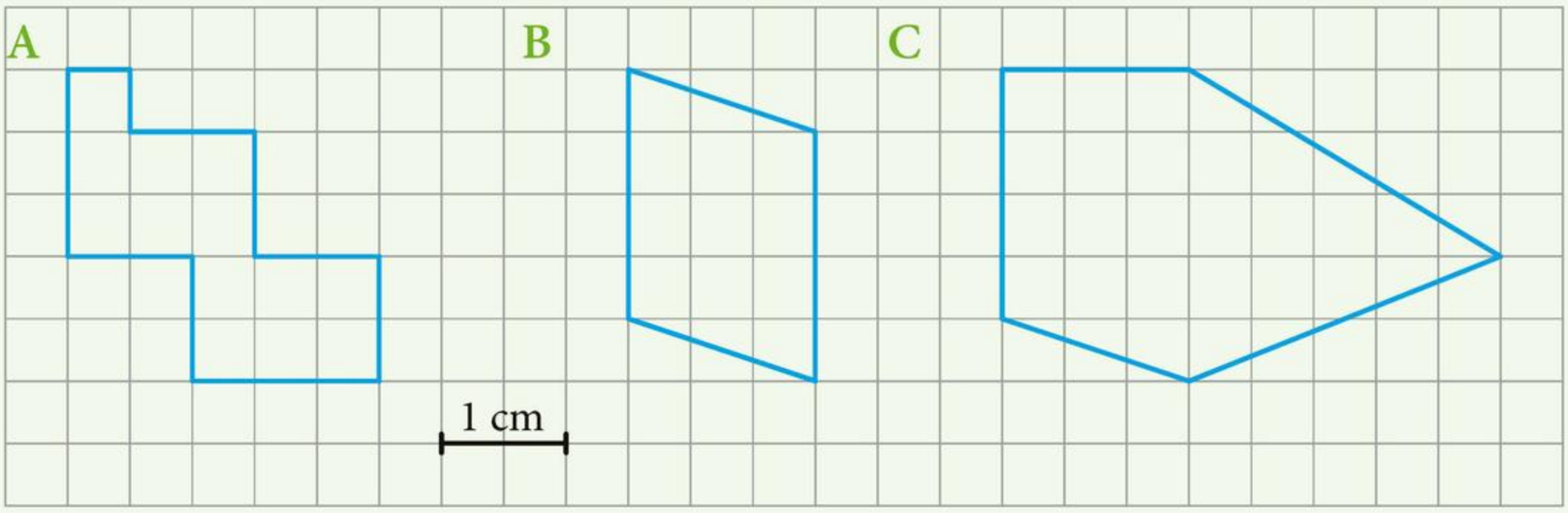
II. Czy podane liczby są równe?

a) -2^4 i $(-2)^4$ **b)** $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ i $\frac{1^4}{3}$ **c)** -2^3 i $(-2)^3$ **d)** 1^{25} i 25^1 **e)** 18^0 i 81^0

III. Zapisz podaną liczbę jako potęgę liczby 10.

a) dziesięć tysięcy **b)** sto milionów **c)** 1 000 000 000 000

IV. Oblicz pola wszystkich figur i obwód figury A.



2 Potęgi o tych samych podstawach

Na dobry początek

W dominie przedstawionym na ilustracji kostki zestawiono tak, aby działania na sąsiadujących polach miały taki sam wynik.



Pytania i polecenia

- W układance brakuje trzech klocków. Zastanów się, które z pokazanych klocków można wstawić w zaznaczone miejsca.

Wyrażenia zawierające potęgi często można upraszczać.

Przykład 1

Zapisz iloczyn potęg $2^2 \cdot 2^3$ w postaci jednej potęgi.

$$2^2 \cdot 2^3 = \underbrace{2 \cdot 2}_{2 \text{ czynniki}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ czynniki}} = 2^{2+3} = 2^5$$

$2 + 3$ – 5 czynników

Podobnie można postępować przy mnożeniu potęg o dowolnych jednakowych podstawach i dowolnych wykładnikach naturalnych.

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ czynników}} = a^{n+m}$$

$n + m$ czynników

Zapamiętaj

Wzór na iloczyn potęg o tej samej podstawie

Aby pomnożyć potęgi o tej samej podstawie, dodajemy ich wykładniki, a podstawę pozostawiamy bez zmian.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

gdzie $a \neq 0$, n, m – liczby naturalne

Ćwiczenie 1

Przedstaw za pomocą jednej potęgi i oblicz.

a) $10^5 \cdot 10^3$ **b)** $3^2 \cdot 3^4$

W podobny sposób postępujemy przy dzieleniu potęg o jednakowych podstawach.

Przykład 2

Zapisz iloraz potęg $2^5 : 2^3$ w postaci jednej potęgi.

$$2^5 : 2^3 = \frac{2^5}{2^3} = \frac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}^{5 \text{ czynników}}}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ czynniki}}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}}} = 2^{5-3} = 2^2$$

Ogólnie, przy dzieleniu potęg o tych samych podstawach (różnych od 0) i dowolnych wykładnikach naturalnych n i m, takich że $n \geqslant m$, postępujemy następująco:

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ czynników}}}{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ czynników}}} = \frac{\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ czynników}} \cdot \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n-m \text{ czynników}}}{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ czynników}}} = a^{n-m}$$

Zapamiętaj

Wzór na iloraz potęg o tej samej podstawie

Aby podzielić potęgi o tej samej podstawie, odejmujemy ich wykładniki, a podstawę pozostawiamy bez zmian.

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

gdzie $a \neq 0$, n, m – liczby naturalne i $n \geqslant m$

Ćwiczenie 2

Przedstaw za pomocą jednej potęgi i oblicz.

a) $10^6 : 10^2$ **b)** $\frac{3^{104}}{3^{102}}$

Przykład 3

E

Zapisz wyrażenie $(3^2)^4$ w postaci potęgi o podstawie 3.

Kwadrat liczby 3 możemy zapisać jako iloczyn.

$3^2 = 3 \cdot 3$

Czwarta potęga tego wyrażenia to:

$$(3^2)^4 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = \underbrace{(3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3)}_{\text{4 razy po 2 czynniki, czyli 8 czynników}} = 3^{4 \cdot 2} = 3^8.$$

Podobnie jest przy potęgowaniu potęgi o dowolnej podstawie różnej od zera i dowolnym wykładniku naturalnym.

$$(a^n)^m = \underbrace{\underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ czynników}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ czynników}}}_{m \text{ razy po } n \text{ czynników}} = a^{n \cdot m}$$

Zapamiętaj

Wzór na potęgowanie potęgi

Aby podnieść potęgę do potęgi, mnożymy wykładniki, a podstawę pozostawiamy bez zmian.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

gdzie $a \neq 0$, n, m – liczby naturalne

Ćwiczenie 3

Zapisz wyrażenie w postaci potęgi.

a) $(3^2)^5$ **b)** $(10^3)^4$ **c)** $((-2)^4)^3$ **d)** $((-1)^8)^7$

Podczas wykonywania dłuższych działań na potęgach będziemy korzystać z poznanych wzorów.

Dobra rada

Jeśli nie pamiętasz jeszcze wzorów, wypisz je na kartce. Korzystaj z niej podczas rozwiązywania zadań.



Przykład 4

Oblicz.

a) $(2017^{1008})^2 : 2017^{2015}$ **b)** $3^6 : 10^5$ **c)** $(457^3)^2 : (457^3 \cdot 457^4)$

a) $(2017^{1008})^2 : 2017^{2015} =$
$= 2017^{1008 \cdot 2} : 2017^{2015} =$
$= 2017^{2016} : 2017^{2015} =$
$= 2017^{2016-2015} =$
$= 2017^1 = 2017$

b) $3^6 : 10^5 =$
$= 729 : 100\,000 =$
$= 0{,}00729$

Podstawy są różne, nie możemy odejmować wykładników.

Dlatego obliczamy każdą potęgę osobno i dzielimy.

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
$a^n : a^m = a^{n-m}$

c) $(457^3)^2 : (457^3 \cdot 457^4) = 457^{3 \cdot 2} : 457^{3+4} = 457^6 : 457^7$

Aby podzielić mniejszą liczbę (457^6) przez większą (457^7), możemy przejść do zapisu w postaci ułamka (patrz „Dobra rada" s. 39).

$$457^6 : 457^7 = \frac{457^6}{457^7} = \frac{\cancel{457^6}^{\,1}}{\cancel{457^6}_{\,1} \cdot 457^1} = \frac{1}{457^1} = \frac{1}{457}$$

Korzystamy z faktu, że $457^7 = 457^6 \cdot 457^1$.

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $(11^3)^4 : (11^2)^5$ **b)** $\frac{2^2 \cdot 2^{10}}{(2^3)^5}$

Zadania

1. Wykonaj polecenia. ▶ Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

← P1, P2

Zapisz w postaci jednej potęgi.

a) $2 \cdot 2^2 \cdot 2^5$ **c)** $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0$ **e)** $0{,}4^7 : 0{,}4^3$ **g)** $(-0{,}1)^2 \cdot (-0{,}1)^6$

b) $5^8 : 5^6$ **d)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2$ **f)** $10^9 : 10^5$ **h)** $(-0{,}5)^0 \cdot (-0{,}5)^2 \cdot (-0{,}5)^1$

poziom B

Zapisz w postaci jednej potęgi.

a) $3^7 : 3^2 \cdot 3^5$ **e)** $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)$

b) $0{,}2^4 \cdot 0{,}2^3 : 0{,}2^2$ **f)** $5^2 \cdot 5^0 : 5^1$

c) $\left(-\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^4 : \left(-\frac{1}{4}\right)^2$ **g)** $(-8)^9 : (-8)^4 \cdot (-8)^2$

d) $(-10)^8 : (-10)^1 \cdot (-10)^7$ **h)** $(-0{,}1)^6 \cdot (-0{,}1)^4 : (-0{,}1)^2$

poziom C

← P3

Przedstaw liczbę w postaci a^n i oblicz.

a) $(5^2)^2$ **c)** $((-1)^{10})^{30}$ **e)** $(0{,}1^2)^3$ **g)** $((-2)^3)^3$

b) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^5\right)^0$ **d)** $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^2$ **f)** $\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right)^1$ **h)** $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^1\right)^2$

MISTRZ

Zapisz w postaci jednej potęgi.

a) $(7^{12} : 7^2 \cdot 7^2) : (7^2 \cdot 7^3)$ **b)** $\frac{(5^2 \cdot 5^0)^4 : 5^2}{5 \cdot (5^3 : 5)}$ **c)** $\frac{\left((-3)^7 : \left((-3)^2\right)^2\right)^4}{\left((-3)^5 \cdot (-3)\right)^2}$

2. Z którego wzoru można skorzystać, aby uprościć podane wyrażenie?

a) $2^{15} : 2^{13}$ **b)** $2^{15} \cdot 2^{13}$ **c)** $2^{15} + 2^{13}$ **d)** $(2^{15})^{13}$ **e)** $2^{15} - 2^{13}$ **f)** $\frac{2^{15}}{2^{13}}$

Wybierz odpowiedź z ramki.

I. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
II. $a^n : a^m = a^{n-m}$
III. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
IV. z żadnego z wymienionych

3. Zapisz w postaci jednej potęgi.

a) $a^2 \cdot a^4$
b) $b^2 \cdot b^{22}$
c) $(-c)^2 \cdot (-c) \cdot (-c)^3$
d) $x^3 \cdot x^4 \cdot x^7$
e) $x^{12} : x^4,\ x \neq 0$
f) $\frac{(-x)^8}{(-x)^5},\ x \neq 0$
g) $(-b)^6 : (-b)^3,\ b \neq 0$
h) $\frac{m^{16}}{m^4},\ m \neq 0$
i) $\frac{(-y)^{13} : (-y)^5}{(-y)^4},\ y \neq 0$

4. Jaki wykładnik należy wpisać w miejsce ?, aby otrzymać równość?

a) $5^9 = 5^6 \cdot 5^{?}$
b) $6^{12} = 6^{?} \cdot 6$
c) $4^8 = 4^{10} : 4^{?}$
d) $3^{10} = 3^{?} : 3^4$
e) $1 = 9^2 \cdot 9^5 : 9^{?}$
f) $8^7 = 8^{?} \cdot (8^{11} : 8^6)$

5. Przedstaw w postaci jednej potęgi.

a) $((2^2)^3)^4$
b) $((3^3)^4)^5$
c) $(5^2 \cdot 5^3)^4$
d) $(7^3 \cdot 7)^6$
e) $(4^8 : 4^3)^3$
f) $(9^9 : 9)^2$
g) $(6^3)^2 \cdot 6^5$
h) $8 \cdot (8^4)^5$

6. Oblicz.

a) $(9^5 \cdot 9^9) : (9^8 \cdot 9^4)$
b) $(7^3 \cdot 7^2 : 7^5) \cdot \frac{7^4}{7^2}$
c) $\frac{8^3 : 8^0 \cdot 8^{11}}{8^5 \cdot 8^7}$
d) $100 \cdot 10^2$
e) $1000 \cdot 10^4$
f) $0{,}01 \cdot 10^4$

7. Oblicz:

a) ile to milionów: $(10^4)^2$,
b) ile to tysięcy: $\frac{(10^5)^2}{10^6}$.

E **8.** Masa Ziemi jest 10^{24} razy większa od masy dorosłego kota. Liczba 10^{24} **nie jest** równa

A. $(10^{20})^4$.
B. $(10^8)^3$.
C. $10^{20} \cdot 10^4$.
D. $10^{30} : 10^6$.



9. Przedstaw liczbę $x = 60^{60}$ w postaci:

a) iloczynu potęg o tej samej podstawie, **b)** potęgi potęgi.

W każdym przypadku przedstaw liczbę x na trzy różne sposoby.

10. Oblicz wartości dziesięciu kolejnych potęg liczby 3 i zaobserwuj, jak zmieniają się w nich cyfry jedności. Na tej podstawie odpowiedz:

a) ile jest równa cyfra jedności liczby 3^{2016},

b) czy wynik odejmowania $3^{2017} - 3^{2013}$ jest podzielny przez 10.

11. Ile zer w zapisie dziesiętnym ma liczba $(10^{100})^{10}$?

A. 110 **B.** 120 **C.** 1000 **D.** 1001

Dla dociekliwych

Kilogram to 1000 g, kilometr to 1000 m, jednak kilobajt (jednostka pojemności pamięci komputera) to nie 1000 bajtów, ale 1024 bajty. Dlaczego? Wewnątrz komputera wszystkie obliczenia wykonywane są w systemie dwójkowym, w którym ważną rolę odgrywają potęgi o podstawie 2, a $2^{10} = 1024$ to w przybliżeniu 1000 (czyli 10^3) – dlatego przyjęto przedrostek „kilo".

Przybliżona równość $2^{10} \approx 10^3$ pozwala szacować duże potęgi liczby 2, na przykład:

$2^{31} = 2 \cdot 2^{30} = 2 \cdot (2^{10})^3 \approx 2 \cdot (10^3)^3 = 2 \cdot 10^9 = 2\,000\,000\,000$ (2 miliardy).

1. Przypomnij sobie legendę ze s. 66. Zapisz w przybliżeniu bez użycia potęg, ile ziaren pszenicy powinno się znaleźć na ostatnim polu szachownicy.

2. Bakterie rozmnażają się przez podział. Jeśli tylko mają dość pokarmu, co pewien czas z jednej bakterii powstają dwie nowe. Ile bakterii powstanie z jednej po dobie, a ile po tygodniu, jeśli ich liczba podwaja się co godzinę? Podaj przybliżoną liczbę.

3. Oblicz na kalkulatorze 6^9. Oszacuj 6^{20}.

Czy już umiem?

I. Zapisz w postaci jednej potęgi.

a) $2^{10} \cdot 2^2$ **b)** $2^{10} : 2^2$ **c)** $(2^{10})^2$

II. Oblicz.

a) $3^3 - 3^1$ **b)** $(10^3)^2$ **c)** $10^9 - 10^8$ **d)** $7^{20} : 7^{18}$

III. Przedstaw w postaci jednej potęgi.

a) $(3^2 \cdot 3^5)^3$ **b)** $((2^3)^4)^5$ **c)** $(9^7 : 9)^2$

IV. Wykonaj działania.

a) $-0{,}9 + 1\frac{1}{4}$ **b)** $2{,}6 - (-1{,}8)$ **c)** $15\frac{5}{18} + 124\frac{7}{12}$ **d)** $7\frac{3}{8} - 1\frac{3}{4}$

3 Własności potęgowania

Na dobry początek >

Zobacz na przykładach, jak ogromny wpływ na wynik potęgowania ma pominięcie nawiasu.

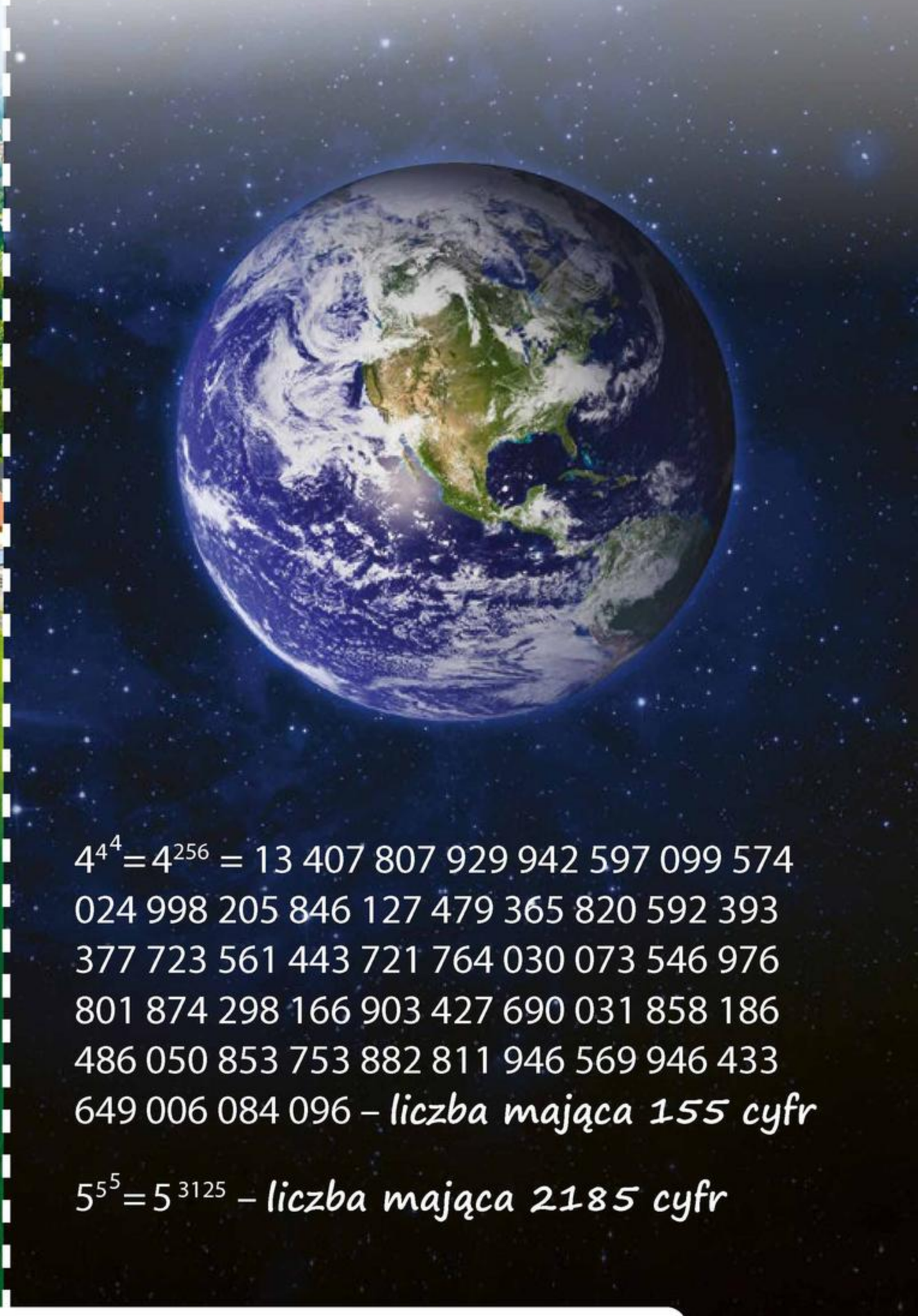
$(2^2)^2 = 4^2 = 16$ $\quad$ $2^{2^2} = 2^4 = 16$

$(3^3)^3 = 27^3 = 19\,683$ $\quad$ $3^{3^3} = 3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987$

liczba mieszkańców niewielkiego miasta

liczba 1000 razy większa niż liczba wszystkich ludzi na Ziemi





$(4^4)^4 = 256^4 = 4\,294\,967\,296$

$4^{4^4} = 4^{256} = 13\,407\,807\,929\,942\,597\,099\,574\,024\,998\,205\,846\,127\,479\,365\,820\,592\,393\,377\,723\,561\,443\,721\,764\,030\,073\,546\,976\,801\,874\,298\,166\,903\,427\,690\,031\,858\,186\,486\,050\,853\,753\,882\,811\,946\,569\,946\,433\,649\,006\,084\,096$ – *liczba mająca 155 cyfr*

$(5^5)^5 = 3125^5 = 298\,023\,223\,876\,953\,125$

$5^{5^5} = 5^{3125}$ – *liczba mająca 2185 cyfr*

Pytania i polecenia

- Która liczba w zapisie dziesiętnym ma więcej zer i o ile? Ile razy większa jest ta liczba?

  a) $(10^2)^3$ czy 10^{2^3} $\quad$ b) 10^{2^5} czy $(10^2)^5$

Umiemy upraszczać wyrażenia zawierające potęgi o jednakowych podstawach. Można też upraszczać wyrażenia zawierające potęgi o różnych podstawach, ale takich samych wykładnikach.

Przykład 1.1

Zapisz w postaci jednej potęgi iloczyn $2^3 \cdot 4^3$.

Zapisujemy każdą z potęg w postaci iloczynu, a następnie zamieniamy kolejność czynników.

$$2^3 \cdot 4^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 = (2 \cdot 4)^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^3$$

Przykład 1.2

Zapisz w postaci jednej potęgi iloraz: **a)** $2^3 : 7^3$, **b)** $8^5 : 4^5$.

a) Zapisujemy każdą z potęg w postaci iloczynu, a dzielenie za pomocą kreski ułamkowej.

$$2^3 : 7^3 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{7 \cdot 7 \cdot 7}$$

Ponieważ ułamki mnożymy „licznik razy licznik, mianownik razy mianownik", możemy przekształcić to wyrażenie do postaci:

$$2^3 : 7^3 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \left(\frac{2}{7}\right)^3.$$

b) $8^5 : 4^5 = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{8}{4} \cdot \frac{8}{4} \cdot \frac{8}{4} \cdot \frac{8}{4} \cdot \frac{8}{4} = \left(\frac{8}{4}\right)^5 = 2^5$

Zapamiętaj

Wzory na potęgę iloczynu i potęgę ilorazu

Dla dowolnych liczb a i b różnych od zera oraz dowolnej liczby naturalnej n prawdziwe są następujące zależności:

- potęga iloczynu jest równa iloczynowi potęg o tym samym wykładniku:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

- potęga ilorazu jest równa ilorazowi potęg o tym samym wykładniku:

$$(a : b)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n : b^n$$

Ćwiczenie 1

Zapisz iloczyn lub iloraz w postaci jednej potęgi.

a) $2^7 \cdot 17^7$ **b)** $18^3 : 2^3$ **c)** $200^8 : 4^8$ **d)** $12^9 \cdot 3^9$

Czasem po zapisaniu wyrażenia w postaci jednej potęgi okazuje się, że łatwo obliczyć wartość tego wyrażenia.

Przykład 2

Zapisz wyrażenie w postaci potęgi iloczynu lub ilorazu i oblicz jego wartość.

a) $8^5 \cdot 0{,}25^5$ **b)** $\frac{18^4}{6^4}$

a) $8^5 \cdot 0{,}25^5 = (8 \cdot 0{,}25)^5 = 2^5 = 32$

b) $\frac{18^4}{6^4} = \left(\frac{18}{6}\right)^4 = 3^4 = 81$

Ćwiczenie 2

Zapisz wyrażenie w postaci potęgi iloczynu lub ilorazu i oblicz jego wartość.

a) $6^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$ **b)** $0{,}2^4 \cdot 10^4$ **c)** $35^3 : 7^3$ **d)** $(-50)^5 : 25^5$

Bardziej złożone wyrażenia

Czasem przy wykonywaniu obliczeń trzeba skorzystać z kilku własności potęgowania, czyli kilku wzorów.

Przykład 3

E

Oblicz: **a)** $9^{15} : 3^{28}$, **b)** $2^{20} \cdot 0{,}25^9$.

a) Obliczenie każdej z potęg 9^{15} i 3^{28} z osobna byłoby czasochłonne, spróbujemy więc przekształcić dane wyrażenie do prostszej postaci. Ani wykładniki, ani podstawy tych potęg nie są równe. Jednak podstawy nie są zupełnie przypadkowymi liczbami, bo $9 = 3^2$. Możemy wykorzystać ten fakt.

$9^{15} : 3^{28} = (3^2)^{15} : 3^{28} =$ Korzystamy ze wzoru na potęgowanie potęgi.

$= 3^{30} : 3^{28} =$ Korzystamy ze wzoru na iloraz potęg o tej samej podstawie.

$= 3^{30-28} = 3^2 = 9$

b) Zauważmy, że $0{,}25 = \frac{1}{4}$. Korzystając z tej równości, możemy rozwiązać przykład podobnie jak poprzedni.

$2^{20} \cdot 0{,}25^9 = 2^{20} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^9 = 2^{20} \cdot \frac{1}{4^9} = \frac{2^{20}}{4^9} = \frac{2^{20}}{(2^2)^9} = \frac{2^{20}}{2^{18}} = 2^2 = 4$

Ćwiczenie 3

Zapisz wyrażenie w postaci jednej potęgi.

a) $2 \cdot 4 \cdot 16$ **b)** $4^9 \cdot 0{,}5^7$

Przykład 4

E

Przedstaw w postaci jednej potęgi: $\frac{(3^5 \cdot 3^3)^4}{(3^8 : 3^2)^4}$.

Sposób I

$$\frac{(3^5 \cdot 3^3)^4}{(3^8 : 3^2)^4} = \frac{(3^8)^4}{(3^6)^4} = \frac{3^{32}}{3^{24}} = 3^8$$

Sposób II

$$\frac{(3^5 \cdot 3^3)^4}{(3^8 : 3^2)^4} = \left(\frac{3^8}{3^6}\right)^4 = (3^2)^4 = 3^8$$

Sposób III

$$\frac{(3^5 \cdot 3^3)^4}{(3^8 : 3^2)^4} = \frac{(3^5)^4 \cdot (3^3)^4}{(3^8)^4 : (3^2)^4} = \frac{3^{20} \cdot 3^{12}}{3^{32} : 3^8} = \frac{3^{32}}{3^{24}} = 3^8$$

Ćwiczenie 4

Przedstaw w postaci jednej potęgi i oblicz $\frac{4^9 : (4 \cdot 4^2)^2}{(4^3 : 4^2)^2}$. Wybierz sposób, który jest dla ciebie najprostszy.

Zadania

1. Zapisz w postaci jednej potęgi.

a) $5^7 \cdot 2^7$ **b)** $6^8 : 3^8$ **c)** $0{,}4^6 \cdot 15^6$ **d)** $\left(\frac{3}{5}\right)^5 : 3^5$ **e)** $(-2{,}7)^8 : \left(-\frac{9}{10}\right)^8$

2. Zapisz w postaci jednej potęgi i oblicz.

a) $2^3 \cdot 15^3$ **b)** $21^4 : 7^4$ **c)** $0{,}125^{191} \cdot 8^{191}$ **d)** $1{,}69^2 : 1{,}3^2$ **e)** $\left(1\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^4$

3. Zapisz w postaci jednej potęgi o podstawie 2.

a) $(2^4)^3$ **b)** $4 \cdot 2^{15}$ **c)** $4^5 \cdot 2^3$ **d)** $\frac{8^3}{16^2}$ **e)** $4^{10} : 2^7$ **f)** $\frac{2 \cdot 16^3}{8^4}$

4. Zapisz w postaci jednej potęgi o podstawie 9.

a) 81^4 **b)** 3^2 **c)** 3^6 **d)** $81 \cdot 3^6$ **e)** $27^2 : 3^4$ **f)** $\frac{9 \cdot 27^4}{3^6}$

5. Zapisz podaną liczbę w postaci potęgi o podstawie 10.

a) sto tysięcy **b)** tysiąc do potęgi czwartej **c)** sto milionów do kwadratu

E **6.** Zapisz w postaci jednej potęgi i oblicz.

a) $4^6 \cdot 0{,}5^{12}$ **c)** $8^2 \cdot 2^{12} \cdot 0{,}125^6$ **e)** $\left(\frac{1}{4}\right)^5 : 0{,}125^3$

b) $0{,}5^9 \cdot 800^3$ **d)** $27^5 : (3^4 \cdot 9^2)^2$ **f)** $0{,}027^4 \cdot 0{,}09^2 \cdot 0{,}3 : 0{,}0081^4$

E **7.** Zapisz w postaci potęgi.

a) $5^{30} + 5^{30} + 5^{30} + 5^{30} + 5^{30}$

b) $2^{14} + 2^{14} + 2^{14} + 2^{14}$

Zauważ, że:
$3^2 + 3^2 + 3^2 = 3 \cdot 3^2 = 3^3$.

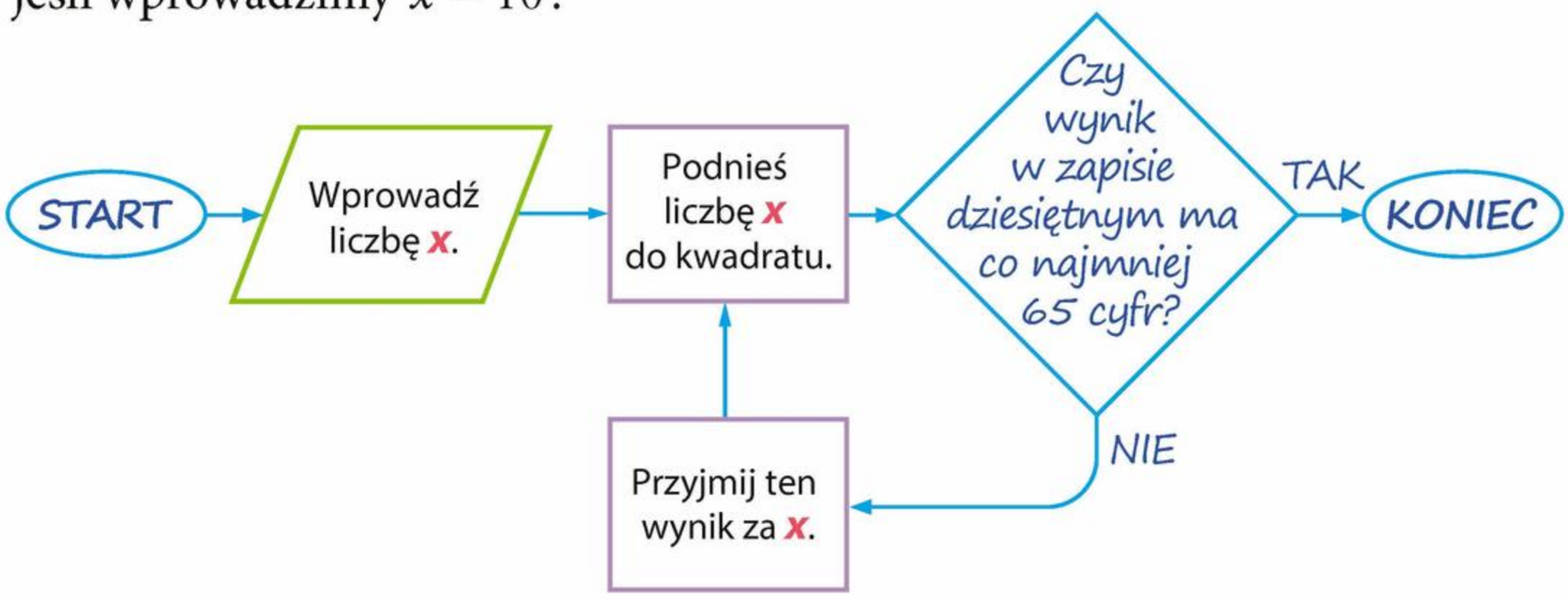
8. Zapisz wyrażenie w postaci potęgi.

a) $6^{2n} \cdot 6^{n}$ **b)** $3^{7n} : 3^{3n}$ **c)** $8^{3n+1} \cdot 8^{n}$ **d)** $9^{2n+4} : 9^{n-4}$ **e)** $x^{3} \cdot (x^{2})^{7}$

9. Rozwiąż równanie (zgadnij liczbę x lub skorzystaj z własności potęg).

a) $2^{8} \cdot x = 2^{11}$ **b)** $(-3)^{5} : (-3)^{x} = (-3)^{5}$ **c)** $(5^{x})^{2} = 25^{6}$ **d)** $(10^{3})^{x} = 100^{6}$

10. Przeanalizuj poniższy algorytm. Ile razy wykonamy podnoszenie do kwadratu, jeśli wprowadzimy $x = 10$?



11. Ile cyfr ma zapis dziesiętny podanej liczby, jeśli $x = 10^{10}$ oraz $y = 100^{100}$?

a) x^{10} **b)** y^{100} **c)** $x \cdot y$ **d)** $\frac{y}{x}$ **e)** y^{x}

Dla dociekliwych

Przypomnij sobie ilustrację ze s. 66 i „Dla dociekliwych" ze s. 80.

1. Oblicz, ile ważyłaby pszenica na ostatnim polu szachownicy, jeśli jedno ziarenko waży 0,08 g. Porównaj wynik z rocznymi zbiorami pszenicy na całym świecie. Znajdź tę informację w dostępnych źródłach.

Czy już umiem?

I. Zapisz w postaci potęgi o podstawie 4.

a) 16^{7} **b)** 2^{10} **c)** 8^{4}

II. Zapisz w postaci jednej potęgi i oblicz.

a) $0{,}6^{3} \cdot 5^{3}$ **b)** $\left(\frac{2}{9}\right)^{4} : \left(\frac{4}{9}\right)^{4}$ **c)** $\left(\frac{5}{7}\right)^{5} \cdot \left(2\frac{4}{5}\right)^{5}$ **d)** $(-6{,}4)^{6} : \left(-\frac{8^{2}}{10}\right)^{6}$

III. Przedstaw w postaci jednej potęgi i oblicz: $\frac{3^{4} \cdot (3^{3})^{2}}{(3^{5} : 3^{2})^{3}}$.

IV. Rozłóż na czynniki pierwsze każdą z liczb: 175, 180, 98.

4 Notacja wykładnicza

Na dobry początek ›

Jak różna może być wielkość obiektów we Wszechświecie? Przyjrzyj się osi poniżej (wszystkie wielkości podane są w metrach).



Pytania i polecenia

- Pomiędzy jakimi obiektami na osi należy umieścić człowieka?
- Ryjówka aksamitna razem z ogonem ma 10 centymetrów długości. Pomiędzy jakimi obiektami na osi należy ją umieścić? A pomiędzy jakimi — leukocyt o średnicy 10 mikrometrów (1 mikrometr = $\frac{1}{1\,000\,000}$ metra)?

Liczby bardzo duże

Niektóre wielkości fizyczne są bardzo duże, przez co ich zapis jest długi i niewygodny. Można jednak zapisywać je krócej.

Odległość Ziemi od Słońca:

$$\underbrace{150\,000\,000\,000}_{\text{11 cyfr}}\ \text{m} = 1{,}5 \cdot 100\,000\,000\,000\ \text{m} = 1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m}$$

liczba większa lub równa 1 i mniejsza od 10

potęga o podstawie 10

Ten sposób zapisu liczb nosi nazwę **notacji wykładniczej** (lub **notacji naukowej**).

Umawiamy się, że w tym zapisie liczba, przez którą mnożymy potęgę dziesiątki, jest nie mniejsza niż 1 i mniejsza od 10, na przykład dla liczby 73 000 000:

- $7{,}3 \cdot 10^7$ – to **jest** notacja wykładnicza, bo $1 < 7{,}3 < 10$,
- $73 \cdot 10^6$ – to **nie jest** notacja wykładnicza, bo $73 > 10$.

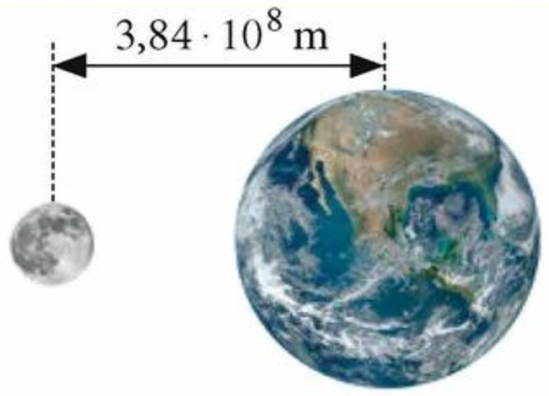
Przykład 1.1

Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

a) 5 000 000 **b)** 384 000 000 m

a) $5\,000\,000 = 5 \cdot 1\,000\,000 = 5 \cdot 10^6$

b) $384\,000\,000\ \text{m} = 3{,}84 \cdot 100\,000\,000\ \text{m} = 3{,}84 \cdot 10^8\ \text{m}$



Przykład 1.2

E

Zapisz liczbę $7{,}45 \cdot 10^8$ bez użycia notacji wykładniczej.

$7{,}45 \cdot 10^8 = 7{,}45 \cdot 100\,000\,000 = 745 \cdot 1\,000\,000 = 745\,000\,000$

Ćwiczenie 1.1

Zapisz bez użycia notacji wykładniczej liczbę $6{,}7 \cdot 10^5$.

Ćwiczenie 1.2

Wszystkie podane wyrażenia oznaczają tę samą liczbę. Które z nich jest zapisem w notacji wykładniczej?

A. 9 300 000 **B.** $9300 \cdot 10^3$ **C.** $93 \cdot 10^5$ **D.** $9{,}3 \cdot 10^6$ **E.** $0{,}93 \cdot 10^7$

Ćwiczenie 1.3

Zapisz w notacji wykładniczej prędkość światła: $1\,080\,000\,000\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Liczby bardzo małe

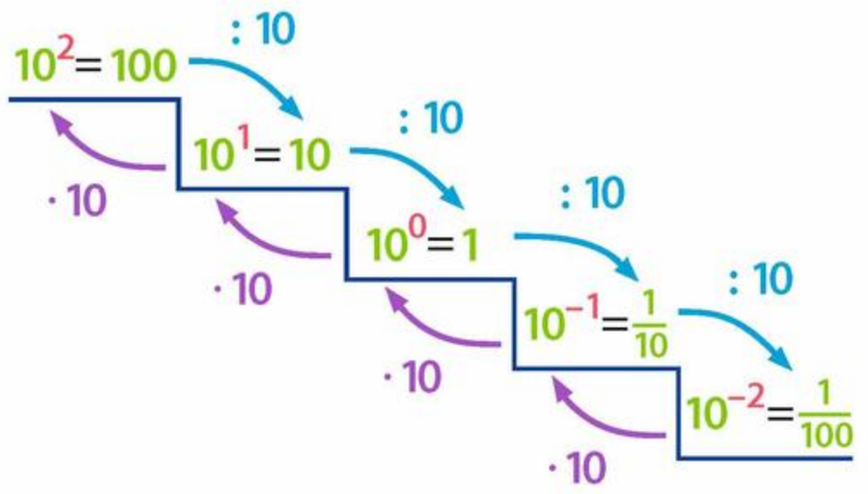
Umiemy już zapisywać w wygodniejszej postaci bardzo duże wielkości. Bardzo małe liczby także możemy zapisać krócej, posługując się potęgami liczby 10.

Masa protonu:

$$0,\underbrace{000000000000000000000000}_{\text{24 cyfry}}167\ \text{g} = 1{,}67 \cdot 0{,}000000000000000000000001\ \text{g} = 1{,}67 \cdot \frac{1}{10^{24}}\ \text{g}$$

Taki zapis jest łatwiejszy, ale potęga liczby 10 znajduje się w mianowniku ułamka zwykłego.

Aby zapisać taki ułamek w inny sposób, możemy posłużyć się potęgą o wykładniku całkowitym ujemnym. W sformułowaniu jej definicji pomoże nam schemat w formie schodów (jak na s. 67)



Możemy się więc umówić, że ułamek $\frac{1}{10^n}$ będziemy zapisywać jako potęgę 10^{-n}. Podobnie określa się potęgę o wykładniku całkowitym ujemnym dla dowolnej podstawy z wyjątkiem 0 (zero nie może pojawić się w mianowniku).

Zapamiętaj

Dla dowolnej liczby $a \neq 0$ i dowolnej liczby naturalnej n:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Przykład 2.1

Oblicz 10^{-9}. Zapisz wynik w postaci ułamka zwykłego, ułamka dziesiętnego oraz słownie.

$10^{-9} = \frac{1}{10^9} = \frac{1}{1\,000\,000\,000} = 0{,}000000001$ (jedna miliardowa)

Przykład 2.2

Zapisz w postaci potęgi liczby 10 ułamek 0,0001.

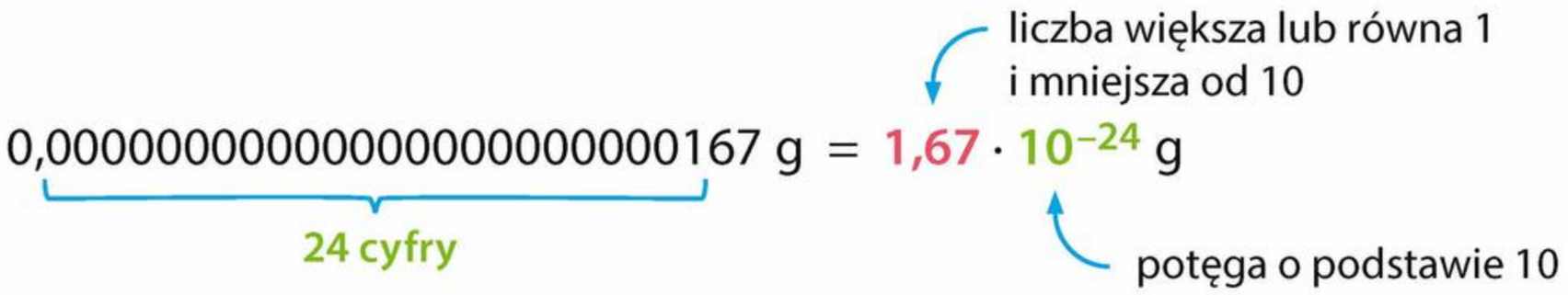
$0{,}0001 = \frac{1}{10\,000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$

Ćwiczenie 2

a) Oblicz 10^{-6}. Zapisz wynik w postaci ułamka zwykłego, ułamka dziesiętnego oraz słownie.

b) Zapisz w postaci potęgi liczby 10 ułamek $0{,}0000001$.

Masę protonu można zapisać w postaci:



Możemy teraz sformułować definicję zapisu liczby w notacji wykładniczej.

Zapamiętaj

Zapis liczby dodatniej w **notacji wykładniczej** to przedstawienie tej liczby w postaci iloczynu:

$$a \cdot 10^n$$

gdzie n jest liczbą całkowitą, a zaś jest liczbą, która spełnia warunek: $1 \leqslant a < 10$.

Przykład 3.1

Zapisz liczbę w notacji wykładniczej:

a) $0{,}000005$, **b)** $0{,}000247$.

a) $0{,}000005 = 5 \cdot 0{,}000001 = 5 \cdot 10^{-6}$

b) $0{,}000247 = 2{,}47 \cdot 0{,}0001 = 2{,}47 \cdot 10^{-4}$

Dobra rada

Gdy nabierzesz wprawy, nie musisz zapisywać pośrednich kroków przy przechodzeniu na notację wykładniczą.

$68\,000\,000 = 6{,}8 \cdot 10^7$

wykładnik 7

przecinek przesunął się o 7 miejsc w lewo

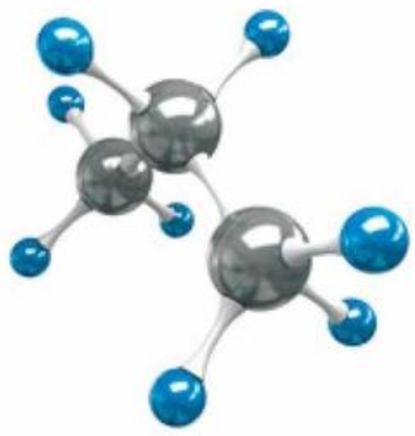
$0{,}000247 = 2{,}47 \cdot 10^{-4}$

wykładnik –4

przecinek przesunął się o 4 miejsca w prawo

Przykład 3.2

Cząsteczka propanu waży $7{,}4 \cdot 10^{-23}$ g.
Zapisz tę wielkość bez użycia notacji wykładniczej.
$7{,}4 \cdot 10^{-23}\ \text{g} = 0{,}00000000000000000000074\ \text{g}$



Ćwiczenie 3

a) Zapisz liczbę $0{,}00000078$ w notacji wykładniczej.
b) Zapisz liczbę $8{,}3 \cdot 10^{-8}$ bez użycia notacji wykładniczej.

Zadania

1. Oblicz. Zapisz wynik w postaci ułamka zwykłego, dziesiętnego i słownie.
a) 10^{-1} **b)** 10^{-2} **c)** 10^{-3}

2. Zapisz podaną wielkość w notacji wykładniczej.
a) średnica Ziemi – 13 000 km
b) średnica Słońca – 1 400 000 km
c) powierzchnia lądów na Ziemi – 149 000 000 km^2
d) powierzchnia oceanów na Ziemi – 361 000 000 km^2

3. Zapisz podaną wielkość w notacji wykładniczej.
a) średnica włosa – 0,0001 m
b) średnica komórki bakterii – 0,0000002 m
c) wielkość wirusa ospy – 0,00000025 m
d) wielkość ziarenka piasku – 0,0000625 m

4. Przeczytaj tekst. Podane w nim liczby zapisz w notacji wykładniczej.

Czy wiesz, że…

Masa Słońca wynosi prawie
2 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 kg.
Wydaje się ona ogromna, ale ponieważ średnica naszej gwiazdy wynosi 1 390 000 km, to 1 cm^3 materii ze Słońca miałby masę 1,4 g, a więc mniej niż kawałek żelaza o tej samej wielkości.



Słońce

Zupełnie inaczej jest z gwiazdami zwanymi białymi karłami. Należy do nich Syriusz B, odległy od Ziemi o 81 000 000 000 000 000 km, który ma masę taką jak Słońce, ale jego średnica, 11 600 km, jest mniejsza od średnicy Ziemi. Materia w tej gwieździe ma taką gęstość, że gdyby można nabrać jej na łyżeczkę do herbaty o pojemności 5 cm^3, to taka porcja ważyłaby 8500 kg (8,5 tony), czyli tyle co spora ciężarówka.

5. Zapisz podaną liczbę w notacji wykładniczej.

a) dwadzieścia tysięcy
b) pięćdziesiąt dwa tysiące
c) osiemnaście milionów
d) siedem tysięcznych
e) sto osiemdziesiąt pięć stutysięcznych
f) osiemnaście milionowych

6. Zapisz liczbę bez użycia notacji wykładniczej.

a) $8 \cdot 10^6$
b) $2{,}4 \cdot 10^7$
c) $1{,}34 \cdot 10^4$
d) $7 \cdot 10^{-5}$
e) $8{,}9 \cdot 10^{-4}$
f) $6{,}67 \cdot 10^{-6}$

7. Zapisz podane liczby bez użycia notacji wykładniczej.

a) stado bizonów: 10^5 osobników
b) ławica łososi: do 10^7 ryb
c) wielkie mrowisko: do 10^8 mrówek
d) rekordowa chmara szarańczy: $1{,}25 \cdot 10^{14}$ owadów



Bizony

Dla dociekliwych

1. Oblicz. Skorzystaj z definicji potęgi o wykładniku ujemnym na s. 88.

a) 4^{-2} **b)** 5^{-1} **c)** 3^{-3}

2. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 2.

a) 1 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** 0,25

3. Zapisz w postaci jednej potęgi i oblicz: $457^6 : 457^7$. Porównaj swoje obliczenia z rozwiązaniem przykładu 4c ze s. 78. Czy wynik jest taki sam?

Czy już umiem?

I. Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

a) 130 000 000 **b)** 0,000000075 **c)** siedemset dwa miliardy

II. Zapisz liczbę cyframi bez użycia notacji wykładniczej.

a) $8{,}7 \cdot 10^7$ **b)** $8{,}39 \cdot 10^{-5}$

III. Oblicz.

a) $-1\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$ **b)** $\left(108\frac{5}{6} - 111\frac{3}{4}\right) \cdot 3$

5 Obliczenia w notacji wykładniczej

Na dobry początek

Zastanówmy się nad wielkościami różnych obiektów w otaczającym nas świecie. Są wśród nich takie, których wymiary łatwo możemy zapisać: stół, samochód, pagórek za miastem czy nawet Mount Everest.
Spróbujmy jednak pomyśleć o obiektach znacznie mniejszych.



Pytania i polecenia

- Zapisz w wygodniejszej jednostce masę kropli wody.
- W szklance mieści się 250 g wody. Ile kropli wody jest w szklance wody?

Porównywanie liczb

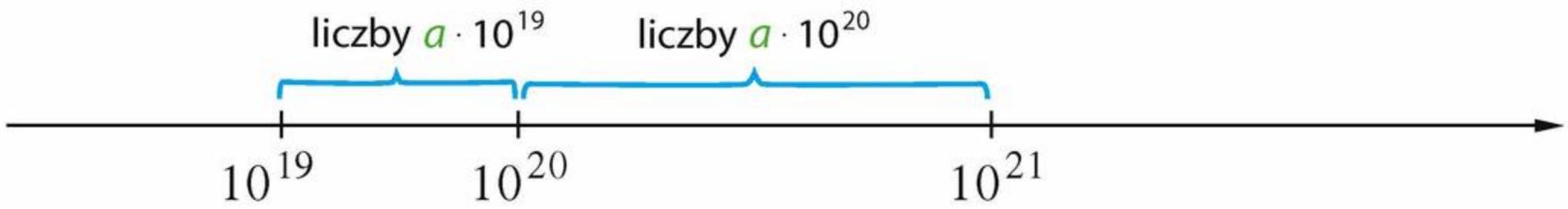
Przykład 1

Porównaj liczby $8{,}45 \cdot 10^{19}$ oraz $1{,}2 \cdot 10^{20}$.

$8{,}45 < 10$, więc

$8{,}45 \cdot 10^{19} < 10 \cdot 10^{19} = 10^{20} < 1{,}2 \cdot 10^{20}$

Widzimy, że porównywanie liczb w notacji wykładniczej jest łatwe: wystarczy porównać wykładniki potęg liczby 10. Właśnie po to przyjęto umowę, że liczba a w zapisie wykładniczym spełnia warunek $1 \leqslant a < 10$. Dzięki temu żadna liczba postaci $a \cdot 10^{19}$ nie przekracza 10^{20} ani nie jest mniejsza od 10^{19}.



Ćwiczenie 1

Porównaj liczby.

a) $3{,}2 \cdot 10^{15}$ i $6{,}8 \cdot 10^{14}$

b) $2 \cdot 10^{-18}$ i $1{,}8 \cdot 10^{-21}$

c) $4 \cdot 10^{-5}$ i $4 \cdot 10^{3}$

d) $2{,}3 \cdot 10^{7}$ i $4 \cdot 10^{7}$

Aby wykonywać obliczenia na wielkościach zapisanych w notacji wykładniczej, nie trzeba znać żadnych specjalnych metod. Wystarczą poznane już prawa działań.

Przykład 2

Słońce ma masę około $2 \cdot 10^{30}$ kg, a Ziemia „zaledwie” około $6 \cdot 10^{24}$ kg. Ile razy masa Słońca jest większa niż masa Ziemi?

$$\frac{2 \cdot 10^{30}}{6 \cdot 10^{24}} = \frac{2}{6} \cdot \frac{10^{30}}{10^{24}} = \frac{1}{3} \cdot 10^{30-24} = \frac{1}{3} \cdot 10^{6} \approx$$

$$\approx 0{,}33 \cdot 10^{6} = 3{,}3 \cdot \frac{1}{10} \cdot 10^{6} = 3{,}3 \cdot 10^{5}$$

Słońce jest cięższe od Ziemi około $3{,}3 \cdot 10^{5}$ razy (około 330 000 razy).

W zapisie bez notacji wykładniczej łatwo się pomylić w liczbie zer.

$$\frac{2\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000}{6\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000} =$$

$$= \frac{2\,000\,000}{6} \approx 330\,000$$

Ćwiczenie 2

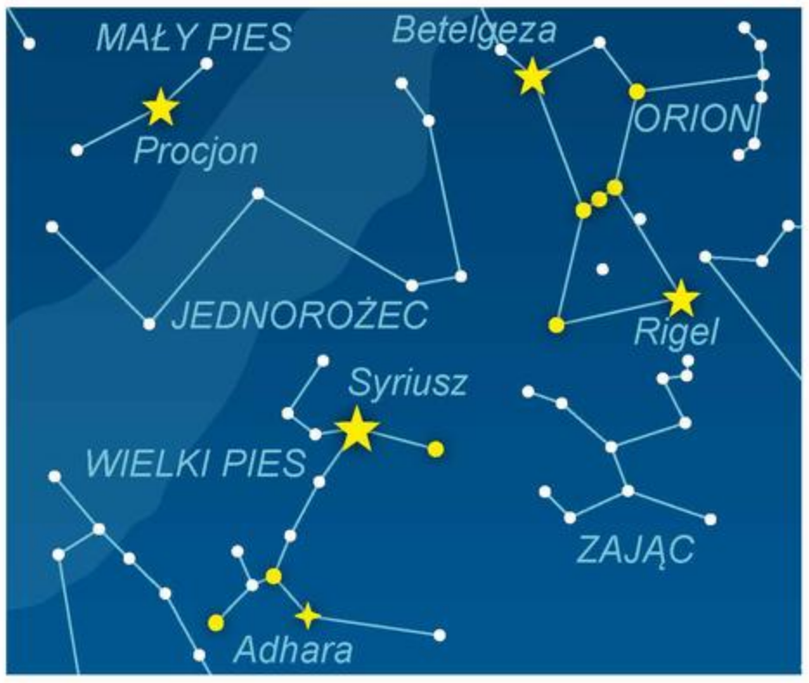
Masa Księżyca wynosi $7 \cdot 10^{22}$ kg. Ile razy Księżyc jest lżejszy od Ziemi?

Dodawanie i odejmowanie

Liczby zapisane w notacji wykładniczej łatwo dodawać i odejmować, gdy wykładniki potęg liczby 10 są takie same. W przeciwnym wypadku trzeba je tak przekształcić, aby uzyskać równe wykładniki.

Przykład 3.1

Najjaśniejsza gwiazda na niebie (poza Słońcem) to widoczny zwłaszcza zimą Syriusz. Gdy popatrzymy na niego przez teleskop, możemy dostrzec, że składa się on z dwóch gwiazd. Pierwsza z nich ma masę $4{,}02 \cdot 10^{30}$ kg, a druga $1{,}94 \cdot 10^{30}$ kg. Jaka jest łączna masa tego układu gwiazd?



$4{,}02 \cdot 10^{30} + 1{,}94 \cdot 10^{30} = 5{,}96 \cdot 10^{30}$

Przykład 3.2

Ziemia ma masę $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, a Księżyc $7 \cdot 10^{22}$ kg. Jaka jest ich łączna masa?

$5{,}97 \cdot 10^{24} + 7 \cdot 10^{22} = 597 \cdot 10^{22} + 7 \cdot 10^{22} = 604 \cdot 10^{22} = 6{,}04 \cdot 10^{24}$

Ćwiczenie 3

Jezioro Mamry zawiera około 10^{12} litrów wody, a jezioro Śniardwy około $6{,}6 \cdot 10^{11}$ litrów wody.

a) Ile litrów wody w sumie zawierają te jeziora?
b) O ile litrów wody więcej zawiera jezioro Mamry?

Wykładniki ujemne

Zajmijmy się teraz liczbami bardzo małymi. Okazuje się, że prawa działań na potęgach, które uzasadniliśmy dla wykładników naturalnych, są prawdziwe dla wszystkich wykładników całkowitych, gdy podstawa jest różna od 0.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad (a^n)^m = a^{n \cdot m} \qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$a^n : a^m = a^{n-m} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Przykład 4

Cząsteczka wody ma masę $3 \cdot 10^{-23}$ g, a cząsteczka insuliny $9{,}68 \cdot 10^{-21}$ g. Ile razy cząsteczka insuliny jest cięższa od cząsteczki wody?

$$\frac{9{,}68 \cdot 10^{-21}}{3 \cdot 10^{-23}} = \frac{9{,}68}{3} \cdot \frac{10^{-21}}{10^{-23}} \approx 3{,}2 \cdot 10^{-21-(-23)} = 3{,}2 \cdot 10^{-21+23} = 3{,}2 \cdot 10^{2} =$$

$$= 3{,}2 \cdot 100 = 320$$

Cząsteczka insuliny jest 320 razy cięższa od cząsteczki wody.

Ćwiczenie 4

Ludzka komórka jajowa ma masę $3{,}6 \cdot 10^{-6}$ g, a ludzki plemnik $2{,}2 \cdot 10^{-11}$ g. Ile razy lżejszy jest plemnik?

Nazwy liczb a notacja wykładnicza

Na co dzień częściej używamy nazw wielkich liczb i skrótów tych nazw (patrz tabela) niż notacji wykładniczej. Warto umieć stosować oba sposoby zapisu takich liczb.

Czy wiesz, że…

Polski bilion to amerykański trylion. Różne nazwy tej samej liczby wynikają z odmiennych zasad nazewnictwa potęg dziesiątki. W części krajów jako podstawowe przyjęto potęgi, które w wykładniku mają wielokrotność 6 (m.in. w Polsce), w innych będące wielokrotnościami 3 (m.in. w Stanach Zjednoczonych). Powoduje to błędy w tłumaczeniach.

Liczba	Nazwa polska	Nazwa amerykańska
10^{3}	tysiąc (tys.)	thousand
10^{6}	milion (mln)	million (m.)
10^{9}	miliard (mld)	billion (b.)
10^{12}	bilion (bln)	trillion
10^{15}	biliard	quadrillion
10^{18}	trylion	quintillion
10^{21}	tryliard	sextillion

Przykład 5.1

Zapisz w notacji wykładniczej 650 miliardów.

1 mld $= 10^{9}$, więc $650 \cdot 10^{9} = 6{,}5 \cdot 100 \cdot 10^{9} = 6{,}5 \cdot 10^{2} \cdot 10^{9} = 6{,}5 \cdot 10^{11}$

Przykład 5.2

Zapisz słownie liczbę $2{,}3 \cdot 10^{14}$, stosując polskie nazewnictwo.

Szukamy w tabeli na s. 95 liczby, która nie przekracza $2{,}3 \cdot 10^{14}$, a ma własną nazwę.

Jest to 10^{12}, czyli bilion. Chcemy zapisać daną liczbę jako „coś $\cdot 10^{12}$”.

$2{,}3 \cdot 10^{14} = 2{,}3 \cdot 10^{2} \cdot 10^{12} = 2{,}3 \cdot 100 \cdot 10^{12} = 230 \cdot 10^{12} = 230$ bilionów

Ćwiczenie 5

Zapisz za pomocą notacji wykładniczej liczbę 120 milionów, a słownie – liczbę $7{,}6 \cdot 10^{10}$. Która z tych liczb jest większa?

Przedrostki

Od dawna wiesz już, że 1000 metrów to 1 **kilo**metr, a 1000 gramów to 1 **kilo**gram. Również inne wielokrotności i ułamki jednostek możemy określać za pomocą przedrostków, na przykład:

- 10^{6} V = 1 MV (1 000 000 woltów to 1 **mega**wolt),
- 10^{6} W = 1 MW (1 000 000 watów to 1 **mega**wat),
- 10^{-6} s = 1 μs ($\frac{1}{1\,000\,000}$ sekundy to 1 **mikro**sekunda).

Przedrostki te i ich symbole przedstawiono w tabeli obok.

Przedrostek (symbol)	Mnożnik	
tera (T)	1 000 000 000 000	10^{12}
giga (G)	1 000 000 000	10^{9}
mega (M)	1 000 000	10^{6}
kilo (k)	1000	10^{3}
hekto (h)	100	10^{2}
deka (da)	10	10^{1}
decy (d)	0,1	10^{-1}
centy (c)	0,01	10^{-2}
mili (m)	0,001	10^{-3}
mikro (μ)	0,000001	10^{-6}
nano (n)	0,000000001	10^{-9}
piko (p)	0,000000000001	10^{-12}

Przykład 6

W mrowisku znajduje się 50 mln mrówek (czyli $5 \cdot 10^{7}$ mrówek). Jedna mrówka waży przeciętnie $3 \cdot 10^{-3}$ g. Ile w sumie ważą mrówki w mrowisku?

$\mathbf{5} \cdot 10^{7} \cdot \mathbf{3} \cdot 10^{-3}\,\text{g} = \mathbf{15} \cdot 10^{7+(-3)}\,\text{g} = \mathbf{15} \cdot 10^{4}\,\text{g}$

Ten wynik możemy zapisać w notacji wykładniczej:

$\mathbf{15} \cdot 10^{4}\,\text{g} = \mathbf{1{,}5} \cdot \mathbf{10^{1}} \cdot 10^{4}\,\text{g} = \mathbf{1{,}5} \cdot 10^{5}\,\text{g}$.

Jednak łatwiej nam będzie sobie wyobrazić, ile to naprawdę jest, jeśli zamienimy jednostkę na kilogramy:

$\mathbf{15} \cdot 10^{4}\,\text{g} = 150\,000\,\text{g} = 150\,\text{kg}$.



Ćwiczenie 6

Najcięższym ssakiem na świecie jest wieloryb płetwal błękitny ($1{,}4 \cdot 10^5$ kg), a najlżejszym – ryjówka etruska (2 g). Ile ryjówek waży tyle co jeden wieloryb?

Przykład 7

Bakteria salmonelli waży 0,6 ng, natomiast najmniejszy owad, jeden z gatunków wszy, waży 5 μg. Który z tych organizmów jest cięższy i ile razy?

Zapiszmy obie wielkości w notacji wykładniczej. Znaczenie przedrostków n (nano) i μ (mikro) sprawdzamy w tabeli na s. 96.

$1 \text{ ng} = 10^{-9}$ g, więc $0{,}6 \text{ ng} = 0{,}6 \cdot 10^{-9} \text{ g} = 6 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-9} \text{ g} = 6 \cdot 10^{-10}$ g

$1 \text{ μg} = 10^{-6}$ g, więc $5 \text{ μg} = 5 \cdot 10^{-6}$ g

Jak widać, owad jest cięższy. Aby obliczyć, ile razy cięższy, należy podzielić te wielkości:

$$\frac{5 \cdot 10^{-6} \text{ g}}{6 \cdot 10^{-10} \text{ g}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{10^{-6}}{10^{-10}} \approx 0{,}83 \cdot 10^{-6-(-10)} = 0{,}83 \cdot 10^{-6+10} = 0{,}83 \cdot 10^4 = 8300$$

Najmniejszy owad jest około 8300 razy cięższy od bakterii salmonelli.

Ćwiczenie 7

Wirus mozaiki tytoniowej – wywołujący chorobę niektórych roślin, w tym tytoniu – ma masę 0,07 pg. Ile razy wirus ten jest lżejszy od bakterii salmonelli o masie 0,6 ng?

Zadania

1. Zapisz liczby x, y, z w porządku rosnącym.

a) $x = 6{,}2 \cdot 10^{15}$, $y = 8{,}3 \cdot 10^{14}$, $z = 7{,}3 \cdot 10^{16}$

b) $x = 7 \cdot 10^{-12}$, $y = 4 \cdot 10^{-9}$, $z = 9 \cdot 10^{-11}$

2. Liczby zapisane w notacji wykładniczej zostały częściowo zasłonięte. Mimo to uporządkuj je od najmniejszej do największej.

$a = \bullet \cdot 10^7$ $b = \bullet \cdot 10^8$ $c = 5 \cdot 10^{-\bullet}$ $d = \bullet \cdot 10^9$

3. Oblicz. Wynik zapisz w notacji wykładniczej.

a) $(7 \cdot 10^6) \cdot (1{,}1 \cdot 10^5)$

b) $(2 \cdot 10^{-8}) \cdot (3{,}8 \cdot 10^6)$

c) $(9{,}6 \cdot 10^{-7}) \cdot (2 \cdot 10^{-2})$

d) $(4 \cdot 10^{10})^3$

e) $(0{,}8 \cdot 10^{-8})^2$

f) $\frac{7{,}5 \cdot 10^{15}}{8 \cdot 10^8}$

g) $(7 \cdot 10^{13}) : (2 \cdot 10^{-10})$

h) $(7{,}4 \cdot 10^{25}) : (2 \cdot 10^{18})$

i) $(5{,}1 \cdot 10^{-25}) : (1{,}7 \cdot 10^{15})$

4. Objętość piasku pokrywającego Pustynię Błędowską (zwaną polską Saharą) szacuje się na $2{,}5 \cdot 10^9$ m^3. Przyjmij, że każdy metr sześcienny zawiera $8 \cdot 10^9$ ziaren piasku, i oblicz, ile ziaren piasku znajduje się na terenie Pustyni Błędowskiej. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej oraz słownie.

5. Najmniejszą planetą Układu Słonecznego jest Merkury. Jego masa wynosi $3{,}3 \cdot 10^{23}$ kg. Dla porównania masa Ziemi wynosi $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg.

a) O ile kilogramów większa jest masa Ziemi?

b) Oszacuj, ile razy większa jest masa Ziemi.

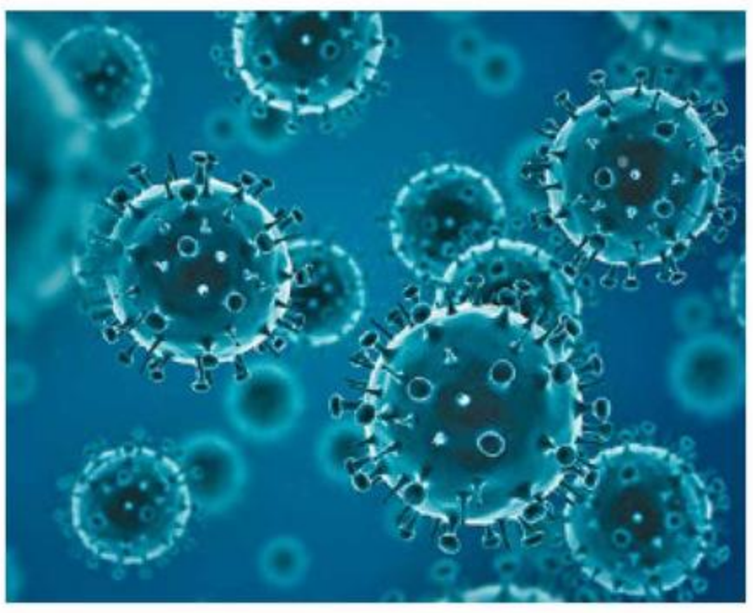
Wskazówka. Dobierz wygodne przybliżenia masy Ziemi i masy Merkurego.

6. Średnica Merkurego wynosi $4{,}9 \cdot 10^6$ m, a średnica Ziemi $1{,}3 \cdot 10^7$ m.

a) Podaj te wielkości w kilometrach.

b) Która z planet ma większą średnicę? Oszacuj ile razy. Porównaj wynik z odpowiedzią do zadania 5 b).

7. Wirus grypy ma średnicę około $9 \cdot 10^{-8}$ cm. Ile centymetrów będzie miał na zdjęciu z mikroskopu powiększającego sto milionów razy?



8. Zapisz w notacji wykładniczej, ile to sekund.

a) 8 nanosekund **b)** 25 pikosekund

9. Zapisz w notacji wykładniczej, ile to herców.

a) 200 gigaherców **b)** 12 teraherców

W hercach (symbol: Hz) określamy, ile razy w ciągu sekundy coś się powtarza.
Na przykład telewizor oznaczony 400 Hz wyświetla obraz 400 razy na sekundę.

10. Ile razy średnica piłki tenisowej (6,5 centymetra) jest większa od średnicy czerwonej krwinki (10 mikrometrów)? Wynik podaj w notacji wykładniczej.

11. Ile razy wirus ospy (300 nanometrów) jest mniejszy od bakterii E. coli (3 mikrometry)? Wynik podaj w notacji wykładniczej.



12. Płatek śniegu ma masę około 3 mg. W wannie mieści się 250 litrów, czyli 250 kg wody. Czy woda powstała ze stopienia miliarda takich płatków zmieści się w tej wannie?

13. Oblicz. Zapisz wynik w notacji wykładniczej.

a) $\dfrac{(5{,}1 \cdot 10^6) \cdot (1{,}5 \cdot 10^{-5})}{1{,}7 \cdot 10^{16}}$ **b)** $\dfrac{(6{,}5 \cdot 10^{-12}) \cdot (5 \cdot 10^{-18})}{2{,}5 \cdot 10^{-30}}$ **c)** $\dfrac{(3{,}6 \cdot 10^{14}) \cdot (1{,}2 \cdot 10^{-12})}{(6 \cdot 10^{-6}) \cdot (0{,}8 \cdot 10^{12})}$

14. Zapisz w notacji wykładniczej oraz słownie (według polskich nazw) kwoty widoczne na banknotach.

a)



b)



c)



d)



Dla dociekliwych

1. Oblicz masę cząsteczki wody H_2O.

2. Oblicz różnicę między masą atomu tlenu a masą atomu wodoru.

3. Oblicz masę jednej cząsteczki:
a) dwutlenku węgla CO_2,
b) metanu CH_4.

Masy atomów

wodór (H)	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg
węgiel (C)	$1{,}99 \cdot 10^{-26}$ kg
tlen (O)	$2{,}66 \cdot 10^{-26}$ kg

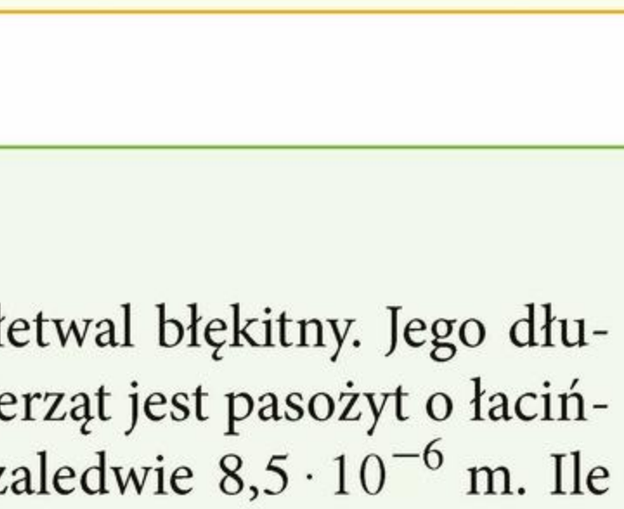
Czy już umiem?

I. Największym zwierzęciem na świecie jest wieloryb płetwal błękitny. Jego długość wynosi nawet 30 m. Jednym z najmniejszych zwierząt jest pasożyt o łacińskiej nazwie *Myxobolus shekel*, który osiąga długość zaledwie $8{,}5 \cdot 10^{-6}$ m. Ile razy jest on krótszy od płetwala błękitnego?

II. Wskaż sumę liczb $2{,}5 \cdot 10^{10}$ i $7{,}8 \cdot 10^{10}$.

A. $1{,}03 \cdot 10^{9}$ **B.** $1{,}03 \cdot 10^{10}$ **C.** $1{,}03 \cdot 10^{11}$ **D.** $10{,}3 \cdot 10^{20}$

III. Nić pajęcza ma grubość około $7 \cdot 10^{-6}$ m i jest obiektem na granicy widzialności ludzkiego oka. Włos ludzki ma średnio grubość 0,00007 m. Ile razy włos jest grubszy od nici pajęczej?



IV. Wymień czworokąty, w których przekątne dzielą się na połowy.

Powtórzenie II

ZESTAW 1

1. Po podniesieniu liczby $-3\frac{1}{3}$ do kwadratu otrzymamy

A. $-11\frac{1}{9}$. **B.** $-9\frac{1}{9}$. **C.** $9\frac{1}{9}$. **D.** $11\frac{1}{9}$.

2. Ile jest równa wartość potęgi $(-10)^0$?

A. -10 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 10

3. Uporządkuj liczby 4^2, 5^2, 2^4, 3^3 w kolejności od najmniejszej do największej.

4. Iloczyn liczb 2^3 i 2^8 można zapisać w postaci

A. 2^{11}. **B.** 2^{24}. **C.** 4^{11}. **D.** 4^{24}.

5. Wskaż wartość wyrażenia $3^4 \cdot 3^6 : 3^3$.

A. 3^8 **B.** 9^8 **C.** 3^7 **D.** 3^{27}

6. Oblicz.

a) $\left(1\frac{3}{4}\right)^2$ **b)** $\left(-1\frac{2}{5}\right)^3$ **c)** $\left(-3\frac{4}{7}\right)^2$ **d)** $\left(2\frac{1}{3}\right)^3$

7. Oblicz.

a) $\frac{3 \cdot 3^2}{3^8 : 3^7}$ **b)** $\frac{5^7 : 5^7}{5^5 : 5^4}$ **c)** $\frac{(4^5 \cdot 4^9) : 4^6}{4^2 \cdot 4^4}$ **d)** $\frac{(2^4 : 2^2 \cdot 2^2)^2}{2^6 : 2^2}$

8. Zapisz w notacji wykładniczej.

a) $850\,000\,000$ **b)** $0{,}00000017$

ZESTAW 2

1. Oblicz.

a) $0{,}03^1 + 0{,}3^3$ **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$ **c)** $2^5 - (3^2 - 3^3)$

2. Która z liczb jest większa?

a) 2^5 czy 2^7

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ czy $\left(\frac{1}{2}\right)^7$

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$ czy $\left(-\frac{1}{2}\right)^7$

d) 4^3 czy 3^4

e) $(-5)^3$ czy $(-4)^3$

f) 5^3 czy 4^3

3. Wskaż wartość wyrażenia $5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3$.

A. 5^{15} **B.** 25^3 **C.** 5^4 **D.** 25^{15}

4. W tabeli zapisano cztery liczby. Dokończ zdanie, wybierając odpowiedź spośród podanych.

I.	$-(-3^2)$
II.	$-(-3)^3$
III.	$(-2)^3 \cdot (-2)^4$
IV.	$-(-2)^3 \cdot (-2^4)$

Liczbami ujemnymi są

A. liczby I i II.
B. liczby III i IV.
C. liczby II i III.
D. wszystkie podane liczby.

5. Ustal, która z liczb, $(2^2)^3$ czy $2^{(2^3)}$, jest większa i ile razy.

6. Wśród liczb: 2^{24}, 16^4, 64^5, 4^{15}, 8^8, 256^2 wskaż pary liczb równych.

7. Wiek Słońca szacuje się na około $4{,}5 \cdot 10^9$ lat. Z badań paleontologów wynika, że *homo sapiens* (człowiek myślący) pojawił się na Ziemi około 200 tysięcy lat temu. Ile razy Słońce jest starsze od gatunku ludzkiego? Odpowiedź zapisz w notacji wykładniczej.

8. Maksymalna prędkość występująca w przyrodzie to prędkość światła, która wynosi $3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Największą prędkość w świecie zwierząt osiąga sokół wędrowny podczas lotu pikującego – około $90 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Najszybszym samolotem załogowym jest zwiadowczy Blackbird, którego maksymalna prędkość to około $1000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ile razy szybszy od sokoła jest samolot, a ile razy szybsze od sokoła jest światło?



9. Która z podanych wielkości jest większa?

a) $1{,}8 \cdot 10^3$ kg czy $2{,}5 \cdot 10^6$ g
b) $3{,}5 \cdot 10^{-3}$ mm czy $3{,}4 \cdot 10^{-6}$ m
c) $4{,}8 \cdot 10^3$ g czy $4{,}8 \cdot 10^{-3}$ kg
d) $2{,}3 \cdot 10^2$ mg czy $2{,}3 \cdot 10^{-6}$ t

10. Za pomocą teleskopów można dostrzec obiekty odległe od Ziemi o 10^{10} lat świetlnych. Ile razy odległość ta jest większa od średnicy Drogi Mlecznej, która wynosi około 100 000 lat świetlnych?

Rok świetlny to odległość, jaką pokonuje światło w ciągu roku. Odległość ta wynosi $9{,}46 \cdot 10^{15}$ m.



Droga Mleczna

Zadania na temat…

Jak wyobrazić sobie niewyobrażalne

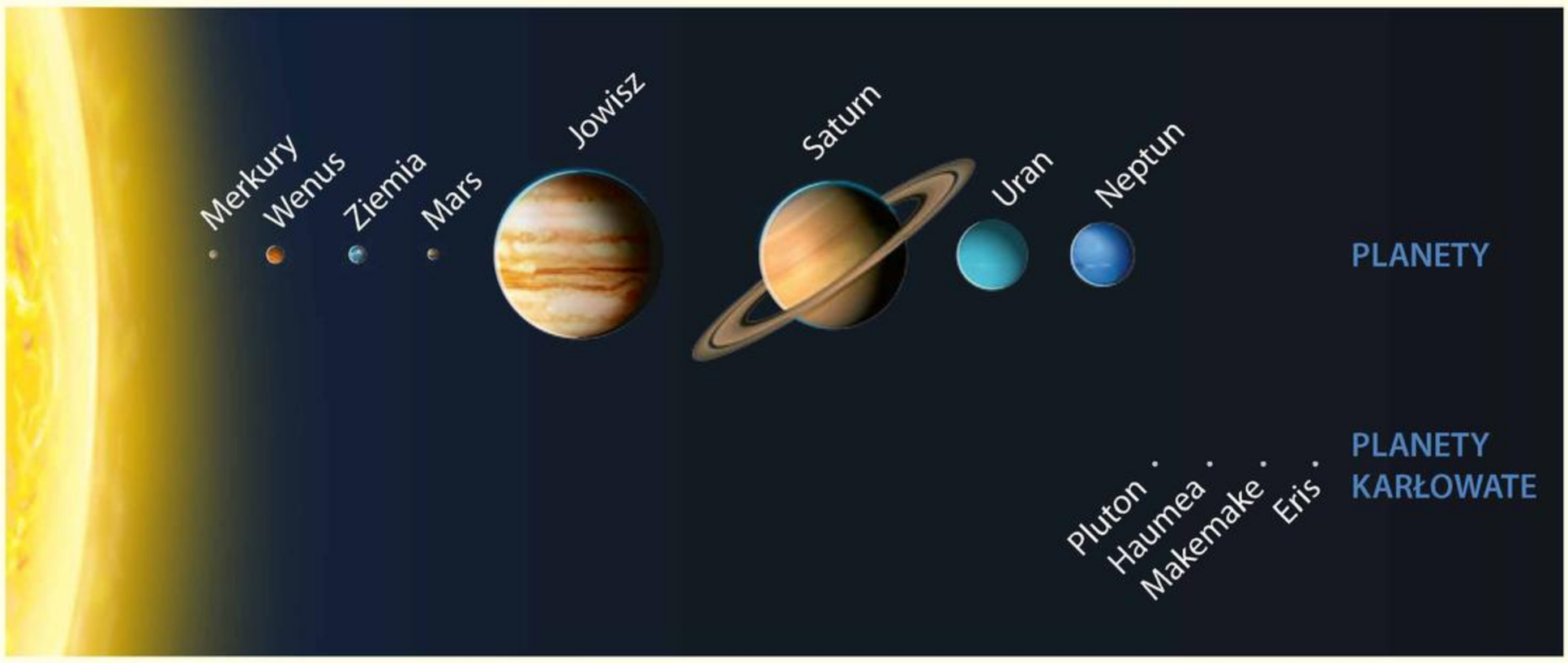
Odległości w kosmosie są tak duże, że nasza wyobraźnia zaczyna zawodzić. Setki tysięcy kilometrów, miliony kilometrów, setki milionów kilometrów... – wszystko to wydaje się po prostu bardzo wielkie.

Układ Słoneczny na stole

Wyobraźmy sobie model Układu Słonecznego. Aby zmieścił się na stole, możemy zmniejszyć wszystkie rozmiary 10^{13} razy. Wówczas Pluton, planeta karłowata na obrzeżach Układu Słonecznego, znajdzie się w odległości 59 cm od Słońca. Ziemię od naszej gwiazdy dzielić będzie zaledwie 1,5 cm, a Marsa – 2,3 cm. Największym problemem w budowie takiego modelu jest fakt, że po zmniejszeniu w tej samej skali ciała niebieskie będą niezauważalnie małe – nawet Słońce, którego rzeczywista średnica to 1,4 mln km, a cóż dopiero Ziemia o średnicy 13 tys. km.

Ziemia jak łebek od szpilki

Spróbujmy więc wyobrazić sobie drugi model Układu Słonecznego, w którym Ziemia będzie miała wielkość łebka od szpilki. Dla uproszczenia rachunków przyjmijmy, że jej średnica wyniesie 1,3 mm. Tak malutka Ziemia znalazłaby się w odległości aż 15 m od Słońca! Największa z planet, Jowisz, będzie miała średnicę 1,4 cm, czyli podobną do owocu czereśni, a jej odległość od Słońca wyniesie aż 78 m.



Atom jak łebek od szpilki

Podobne modele pozwalają nam porównywać wymiary obiektów bardzo małych. Wiemy, że atomy, wirusy i bakterie są tak małe, że nie widać ich gołym okiem. Atomy mają średnicę około 10^{-10} m, rozmiar wirusa to 10^{-7} m, a bakteria ma około 0,001 mm. Jak myślisz, jaki rozmiar miałyby wirusy i bakterie w modelu, w którym atom miałby średnicę 1 mm?

1. Odległości w pierwszym modelu zostały zmniejszone w stosunku do rzeczywistych 10^{13} razy, czyli

A. bilion razy.
B. dziesięć bilionów razy.
C. sto bilionów razy.
D. biliard razy.



Ziemia widziana z Księżyca

2. Oblicz rzeczywiste odległości Ziemi, Marsa i Plutona od Słońca.

3. Jakie byłyby średnice Słońca i Ziemi w pierwszym modelu?

4. W drugim modelu wszystkie odległości zostały zmniejszone 10^{10} razy. Jak zapisać słownie liczbę 10^{10}?

5. Jaką średnicę miałoby Słońce w drugim modelu?

6. W jakiej odległości od Słońca znalazłby się Pluton w drugim modelu?

7. Czy drugi z opisanych modeli dałoby się umieścić w sali lekcyjnej? A na boisku szkolnym?

8. Zastanów się nad odpowiedzią na pytanie kończące tekst na poprzedniej stronie. Spróbuj ją odgadnąć, a następnie wykonaj rachunki.

9. Jaką długość miałaby mrówka, która w rzeczywistości ma 3 mm, przy powiększeniu opisanym we fragmencie tekstu „Atom jak łebek od szpilki”? Czy taka mrówka zmieściłaby się na boisku szkolnym? W twojej miejscowości? W Polsce?



Zadania na deser

Zadania o ostatnich cyfrach liczb

1. Oblicz 4^1, 4^2, 4^3, 4^4, 4^5. Jaką ostatnią cyfrę będzie miała liczba4^6? A jaką 4^7? Jak można to określić bez obliczania potęgi?

2. Które potęgi liczby 2 kończą się cyfrą 6? Podaj przykłady i uogólnij odpowiedź.

3. Ustal ostatnią cyfrę podanej liczby.

a) 2^{2015} **b)** 3^{123} **c)** 4^{1000} **d)** 7^{256}

4. Znajdź liczbę, której wszystkie potęgi o wykładniku naturalnym dodatnim mają taką samą ostatnią cyfrę. Znajdź cztery takie liczby jednocyfrowe. Czy to już wszystkie takie liczby?

5. Czy liczba $2^{2020} + 9^{2010}$ jest podzielna przez 5? Uzasadnij odpowiedź.

Przedstawianie liczb w postaci sumy potęg liczby 2

6. Przedstaw w postaci potęgi lub sumy potęg o podstawie 2 liczby: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

7. Przedstaw w postaci sumy potęg o podstawie 2 liczby: $2^2 - 1$, $2^3 - 1$, $2^4 - 1$, $2^5 - 1$. Co zauważasz?

8. Przypomnij sobie legendę ze s. 66. Ile ziarenek pszenicy byłoby na całej szachownicy?



9. Każdą dodatnią liczbę naturalną można przedstawić w postaci sumy różnych potęg liczby 2.

a) Wyjaśnij, dlaczego w powyższym stwierdzeniu jest mowa tylko o **dodatnich** liczbach naturalnych.

b) Przedstaw w ten sposób liczby: 50, 100, 200, 111.

Skracanie potęg

10. Ile jest równa połowa liczby 2^{90}? Wybierz poprawną odpowiedź. Uzasadnij ją oraz wyjaśnij, dlaczego pozostałe odpowiedzi są błędne.

A. 1^{45} B. 1^{90} C. 2^{45} D. 2^{89}

11. Wskaż liczbę równą $\frac{3^{99}}{3}$.

A. 1^{99} B. 3^{33} C. 3^{96} D. 3^{98}

12. Wskaż liczbę równą $\frac{6^{99}}{3}$.

A. 2^{99} B. 6^{33} C. $2^{99} \cdot 3^{98}$ D. 6^{98}

13. Wskaż wszystkie liczby równe $\frac{6^7}{3^3}$.

A. 2^4 **B.** $2^7 \cdot 3^4$ **C.** $2^3 \cdot 6^4$ **D.** 6^4

14. Wskaż wszystkie liczby równe $\frac{12^{2020}}{3^{1000}}$.

A. 4^{2020} **B.** $2^{4040} \cdot 3^{1020}$ **C.** $4^{1000} \cdot 12^{1020}$ **D.** $4^{2020} \cdot 3^{1020}$

Wzrost wartości w potęgowaniu

Podczas rozwiązywania zadań 15 i 16 możesz wykorzystać fakt, że $2^{10} = 1024 \approx 1000$ oraz wnioski z zadania 7.

15. Zosia 1 kwietnia poznała straszliwy sekret i następnego dnia zdradziła go tylko dwóm najlepszym koleżankom. Potem już milczała jak zaklęta. Oblicz, ile osób będzie znało straszliwy sekret po tygodniu, czyli 8 kwietnia, a ile po miesiącu, czyli 1 maja, jeśli każdy, kto poznał sekret, postąpi tak jak Zosia – nazajutrz po poznaniu sekretu zdradzi go tylko dwóm nowym osobom.



16. Jasiek przez rok będzie dostawać co miesiąc kieszonkowe.
Rodzice dali mu wybór:
- albo w pierwszym miesiącu dostanie 40 zł, a w każdym następnym o 5 zł więcej niż w poprzednim,
- albo w pierwszym miesiącu dostanie 0,50 zł, a w każdym następnym miesiącu dwa razy więcej niż w poprzednim.

a) Wyobraź sobie, że jesteś na miejscu Jaśka. Którą propozycję wybierzesz?
b) Oblicz, ile kieszonkowego dostanie Jasiek przez cały rok, jeśli zdecyduje się na pierwszą propozycję.
c) Oblicz, ile kieszonkowego dostanie Jasiek przez cały rok, jeśli zdecyduje się na drugą propozycję.
d) W którym przypadku łączna roczna kwota kieszonkowego będzie wyższa i o ile?

Zadania różne

17. Sprawdź, czy podane wyrażenia są równe. Jeśli nie – spróbuj wyjaśnić dlaczego.

a) $(2+3)^2$ i 2^2+3^2 **b)** $(10-8)^2$ i 10^2-8^2 **c)** $2^3 \cdot (2+3)^3$ i 10^3

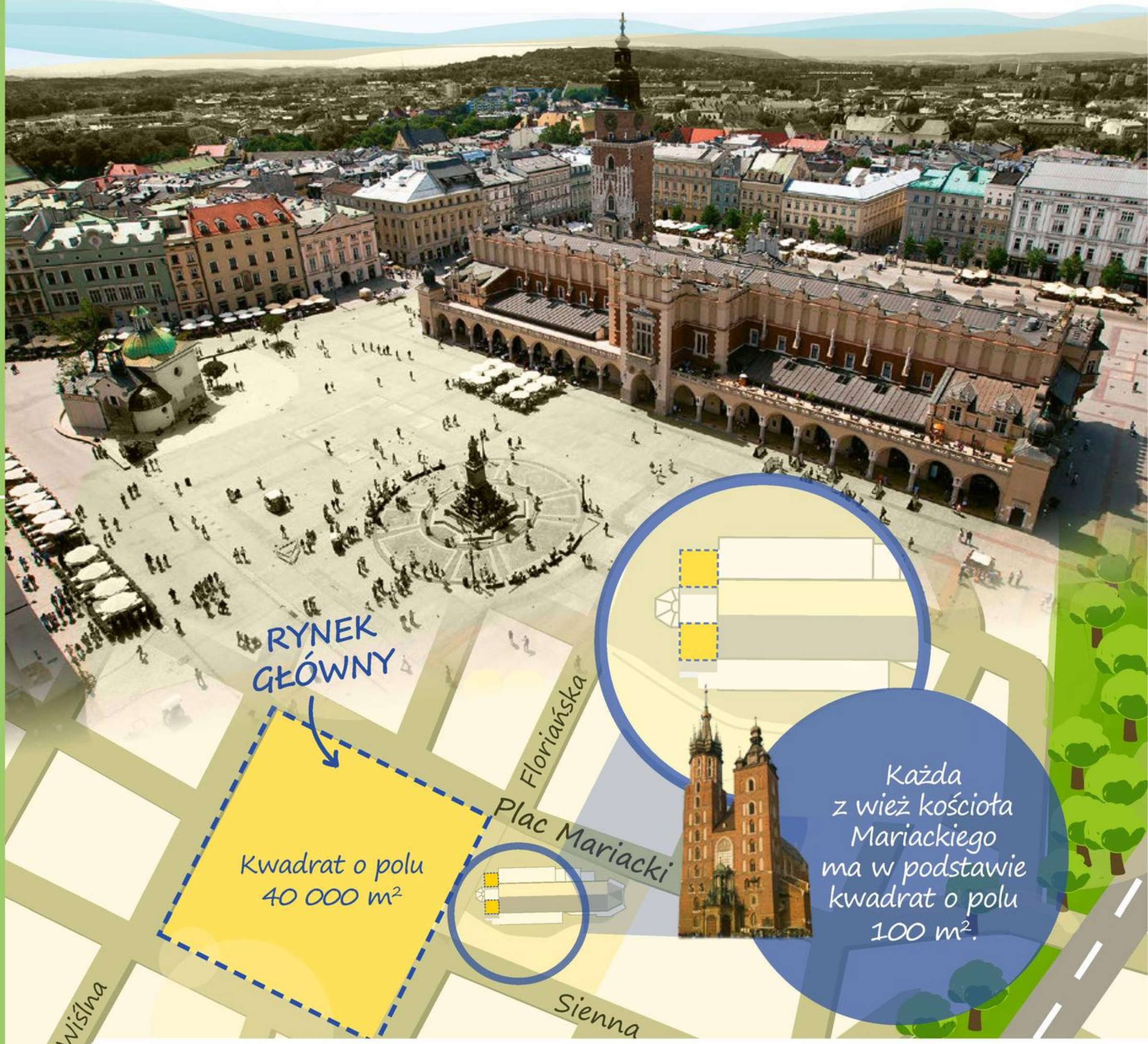
18. Wyznacz x.

a) $5^x : 5^3 = 5^8$
b) $4^7 \cdot 4^x = 4^{18}$
c) $8^{14} : 8^x = 8^{13}$
d) $7^x \cdot 7^3 = 7^{10}$
e) $12^9 = 12^{16} : 12^x$
f) $15^{27} = (15^x \cdot 15^2)^9$
g) $24^{11} = x^4 \cdot 24^7$
h) $x^3 \cdot 10^5 = 100^4$
i) $2^2 \cdot 2^x \cdot 4 = 4^5$

1 Pierwiastek kwadratowy

Na dobry początek >

W XII i XIII wieku w europejskich miastach wytyczano regularne, prostokątne rynki. Rynek Główny w Krakowie założony w 1257 roku ma kształt kwadratu o polu około 40 000 m^2. Przy jego północno-wschodnim narożniku znajduje się kościół Mariacki.



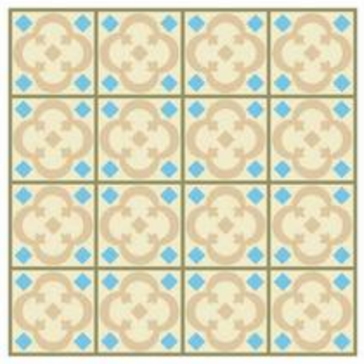
Pytania i polecenia

- Podaj długość boku Rynku Głównego w Krakowie.
- Podaj wymiary podstawy wieży kościoła Mariackiego.
- Właściciel restauracji chciałby na Rynku Głównym urządzić letni ogródek w kształcie kwadratu o powierzchni 121 m^2. Ile będzie wynosiła długość boku ogrodzonego obszaru?

Pierwiastkowanie

Przykład 1

Z 16 jednakowych kwadratowych płytek ułożono kwadrat taki, jak pokazano na rysunku. Ile płytek będzie leżeć wzdłuż jednego boku, jeżeli ułożymy kwadrat z 25 takich płytek?



Aby ułożyć kwadrat z 16 płytek, położono je w czterech rzędach, po 4 płytki w rzędzie: $4 \cdot 4 = 4^2 = 16$.
Jeżeli kwadrat ma się składać z 25 płytek, musimy ułożyć pięć rzędów po 5 płytek w rzędzie: $5 \cdot 5 = 25 = 5^2$, co oznacza, że wzdłuż boku będzie leżeć 5 płytek.

Ćwiczenie 1.1

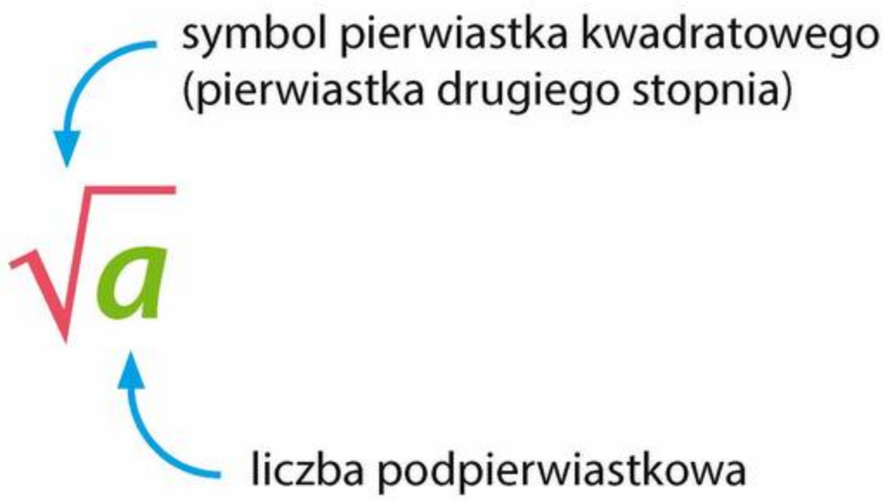
Ile kwadratowych płytek leży wzdłuż jednego boku kwadratu, który jest ułożony z 81 płytek?

Ćwiczenie 1.2

Ile wynosi długość boku kwadratu o polu równym $100\ \text{cm}^2$?

W przykładzie szukaliśmy odpowiedzi na pytanie, jaka liczba dodatnia podniesiona do kwadratu daje wynik 25. Okazało się, że taką liczbą jest 5.

Poznamy teraz nowe działanie – pierwiastkowanie.



Przyjrzyj się poniższym przykładom.

$\sqrt{16} = 4$, bo $4^2 = 16$
$\sqrt{25} = 5$, bo $5^2 = 25$
$\sqrt{81} = 9$, bo $9^2 = 81$
$\sqrt{100} = 10$, bo $10^2 = 100$

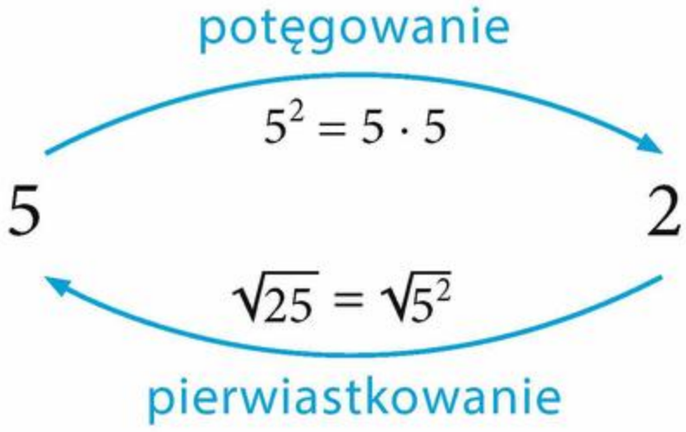
$\sqrt{25}$ czytamy:
pierwiastek z 25
albo pierwiastek kwadratowy z 25,
albo pierwiastek drugiego stopnia z 25

Aby obliczyć **pierwiastek kwadratowy**, szukamy takiej liczby **nieujemnej** (czyli dodatniej lub równej zero), która podniesiona do kwadratu jest równa liczbie pod pierwiastkiem. Obliczanie pierwiastka nazywamy także **wyciąganiem pierwiastka.**

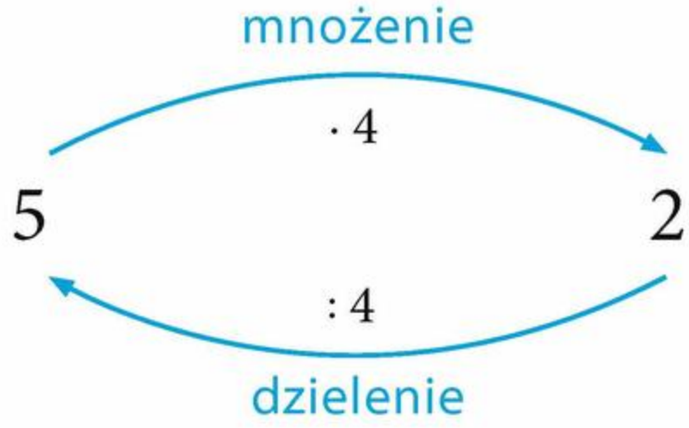
Pierwiastek kwadratowy a podnoszenie do kwadratu liczb naturalnych

Pierwiastkowanie to działanie związane z potęgowaniem, podobnie jak dzielenie jest związane z mnożeniem czy dodawanie z odejmowaniem.

Zauważ, że:



Podobnie jak:



Dobra rada

Warto pamiętać kwadraty liczb naturalnych znane z tabliczki mnożenia oraz podane obok kwadraty większych liczb – pomaga to w wyciąganiu pierwiastków.
Np.: $9 \cdot 9 = 81$, czyli $9^2 = 81$, czyli $\sqrt{81} = 9$

$11^2 = 121$	$16^2 = 256$
$12^2 = 144$	$17^2 = 289$
$13^2 = 169$	$18^2 = 324$
$14^2 = 196$	$19^2 = 361$
$15^2 = 225$	$20^2 = 400$

Przykład 2

Podaj wartość pierwiastka i uzasadnij odpowiedź.

a) $\sqrt{36}$ **b)** $\sqrt{1}$ **c)** $\sqrt{0}$ **d)** $\sqrt{144}$ **e)** $\sqrt{256}$

a) $\sqrt{36} = 6$, bo $6^2 = 36$

b) $\sqrt{1} = 1$, bo $1^2 = 1$

c) $\sqrt{0} = 0$, bo $0^2 = 0$

d) $\sqrt{144} = 12$, bo $12^2 = 144$

e) $\sqrt{256} = 16$, bo $16^2 = 256$

! Te liczby znasz z tabliczki mnożenia.

! Do takich przykładów przydaje się znajomość kwadratów większych liczb.

Ćwiczenie 2

Podaj wartość pierwiastka i uzasadnij odpowiedź.

a) $\sqrt{49}$ **b)** $\sqrt{196}$ **c)** $\sqrt{289}$

Znak liczby pod pierwiastkiem

Wiesz, że:

$7^2 = 49$
kwadrat liczby dodatniej jest dodatni

$(-7)^2 = 49$
kwadrat liczby ujemnej jest dodatni

Gdy podniesiemy dowolną liczbę do kwadratu, nigdy nie otrzymamy wyniku ujemnego. Dlatego liczba pod pierwiastkiem nie może być ujemna. Na przykład nie można wyciągnąć pierwiastka kwadratowego z -49, bo żadna liczba podniesiona do kwadratu nie daje wyniku -49.



Znak pierwiastka

$\sqrt{25} = 5$, bo $5^2 = 25$

Wiesz jednak, że również $(-5)^2 = 25$.

Przyjęto, że **pierwiastek kwadratowy** jest **liczbą nieujemną**. Gdyby nie przyjęto takiego założenia, pierwiastek kwadratowy miałby dwa różne wyniki (dodatni i ujemny), a działanie musi mieć jednoznaczny wynik.

Zapamiętaj

Pierwiastek kwadratowy nigdy nie jest liczbą ujemną.
Liczba pod pierwiastkiem kwadratowym nie może być ujemna.

Definicję pierwiastka możemy sformułować następująco:

Zapamiętaj

Pierwiastkiem kwadratowym z liczby nieujemnej a nazywamy taką liczbę nieujemną b, dla której $b^2 = a$. Piszemy wówczas $b = \sqrt{a}$.
Pierwiastek kwadratowy nazywany jest również **pierwiastkiem drugiego stopnia**.

Pierwiastek z ułamka

Potrafimy już podnosić do kwadratu ułamki zwykłe. Dzięki tej umiejętności możemy w niektórych sytuacjach wyciągnąć pierwiastek z ułamka zwykłego. Aby wyciągnąć pierwiastek z liczby mieszanej, zamieniamy ją na ułamek niewłaściwy.

Przykład 3

Oblicz pierwiastek i uzasadnij odpowiedź.

a) $\sqrt{\frac{49}{81}}$ **b)** $\sqrt{2\frac{14}{25}}$ **c)** $\sqrt{0{,}04}$ **d)** $\sqrt{0{,}36}$ **e)** $\sqrt{2{,}89}$

a) $\sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{7}{9}$, bo $\left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{49}{81}$

b) $\sqrt{2\frac{14}{25}} = \sqrt{\frac{64}{25}} = \frac{8}{5}$, bo $\left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{64}{25}$

c) $\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$, bo $0{,}2^2 = 0{,}04$

inaczej: $\sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{2}{10}$, bo $\left(\frac{2}{10}\right)^2 = \frac{4}{100}$

d) $\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$, bo $0{,}6^2 = 0{,}36$

inaczej: $\sqrt{\frac{36}{100}} = \frac{6}{10}$, bo $\left(\frac{6}{10}\right)^2 = \frac{36}{100}$

e) $\sqrt{2{,}89} = 1{,}7$, bo $1{,}7^2 = 1{,}7 \cdot 1{,}7 = 2{,}89$

inaczej: $\sqrt{\frac{289}{100}} = \frac{17}{10}$, bo $\left(\frac{17}{10}\right)^2 = \frac{289}{100}$

Ćwiczenie 3

Podaj wartość pierwiastka i uzasadnij odpowiedź.

a) $\sqrt{\frac{25}{16}}$ **b)** $\sqrt{1\frac{7}{9}}$ **c)** $\sqrt{0{,}25}$ **d)** $\sqrt{2{,}25}$

Pierwiastki w złożonych wyrażeniach

Pierwiastki mogą występować w bardziej złożonych wyrażeniach arytmetycznych.

Przykład 4

Oblicz.

a) $2\sqrt{25}$ **b)** $\sqrt{144} + \sqrt{256} + \sqrt{324}$ **c)** $\frac{2+2\sqrt{16}}{5-\sqrt{4}}$

a) $2\sqrt{25} = 2 \cdot 5 = 10$

b) $\sqrt{144} + \sqrt{256} + \sqrt{324} = 12 + 16 + 18 = 46$

c) $\frac{2+2\sqrt{16}}{5-\sqrt{4}} = \frac{2+2\cdot 4}{5-2} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$

Znak mnożenia między liczbą a pierwiastkiem możemy pominąć:
$2\sqrt{25}$ oznacza $2 \cdot \sqrt{25}$.

Korzystamy z informacji podanych w „Dobrej radzie" na s. 108.

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $3\sqrt{49} - 2\sqrt{4}$ **b)** $\frac{\sqrt{121}+\sqrt{81}}{\sqrt{225}-\sqrt{169}}$ **c)** $\frac{(3+4\sqrt{9})(6-\sqrt{16})}{\sqrt{36}}$

Pierwiastek i kwadrat

Pierwiastkowanie jest działaniem odwrotnym do potęgowania.

Przykład 5

Oblicz.

a) $\sqrt{7569 \cdot 7569}$ **b)** $\sqrt{7569} \cdot \sqrt{7569}$

a) $\sqrt{7569 \cdot 7569} = \sqrt{7569^2} = 7569$

Obliczając $\sqrt{7569^2}$, szukamy odpowiedzi na pytanie, jaką liczbę należy podnieść do kwadratu, aby otrzymać 7569^2. Oczywiście ta liczba to 7569.

b) $\sqrt{7569} \cdot \sqrt{7569} = (\sqrt{7569})^2 = 7569$

Zgodnie z określeniem pierwiastka, $\sqrt{7569}$ to taka liczba, która podniesiona do kwadratu daje 7569.

Zapamiętaj

Dla dowolnej nieujemnej liczby a:

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = \sqrt{a \cdot a} = a$$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) $\sqrt{37^2}$ **b)** $\sqrt{159} \cdot \sqrt{159}$ **c)** $\sqrt{3210 \cdot 3210}$ **d)** $(\sqrt{67\,324})^2$

Zadania

1. Oblicz pierwiastek i uzasadnij odpowiedź. ▶ Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A ← P2

a) $\sqrt{9}$ **c)** $\sqrt{10\,000}$ **e)** $\sqrt{64}$ **g)** $\sqrt{2500}$

b) $\sqrt{121}$ **d)** $\sqrt{81}$ **f)** $\sqrt{144}$ **h)** $\sqrt{169}$

poziom B ← P3

a) $\sqrt{\frac{1}{16}}$ **c)** $\sqrt{\frac{9}{25}}$ **e)** $\sqrt{\frac{1}{25}}$ **g)** $\sqrt{\frac{81}{144}}$

b) $\sqrt{\frac{36}{121}}$ **d)** $\sqrt{\frac{4}{49}}$ **f)** $\sqrt{\frac{49}{100}}$ **h)** $\sqrt{\frac{64}{100}}$

poziom C

← P3

a) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$ **c)** $\sqrt{5\frac{19}{25}}$ **e)** $\sqrt{2\frac{2}{49}}$ **g)** $\sqrt{2\frac{7}{9}}$

b) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ **d)** $\sqrt{3\frac{1}{16}}$ **f)** $\sqrt{6\frac{1}{4}}$ **h)** $\sqrt{2\frac{9}{36}}$

poziom D

← P3

a) $\sqrt{0{,}04}$ **c)** $\sqrt{6{,}25}$ **e)** $\sqrt{1{,}44}$ **g)** $\sqrt{0{,}01}$

b) $\sqrt{0{,}0144}$ **d)** $\sqrt{2{,}25}$ **f)** $\sqrt{0{,}64}$ **h)** $\sqrt{0{,}0009}$

2. Jaką liczbę trzeba wstawić w miejsce a, aby otrzymać równość?

a) $\sqrt{a} = 5$ **c)** $\sqrt{a} = 9$ **e)** $\sqrt{a} = 0{,}5$ **g)** $\sqrt{a} = 0{,}1$

b) $\sqrt{a} = 8$ **d)** $\sqrt{a} = 12$ **f)** $\sqrt{a} = 1{,}1$ **h)** $\sqrt{a} = 0{,}03$

3. Oblicz obwód kwadratu o podanym polu.

a) $1\ \text{m}^2$ **b)** $81\ \text{dm}^2$ **c)** $1{,}44\ \text{cm}^2$ **d)** $0{,}0036\ \text{km}^2$ **e)** $1\frac{9}{16}\ \text{mm}^2$

4. Oblicz.

a) $\sqrt{12 \cdot 12}$ **b)** $\sqrt{14^2}$ **c)** $(\sqrt{18})^2$ **d)** $\sqrt{9^2}$ **e)** $\left(\sqrt{3\frac{1}{16}}\right)^2$

5. Oblicz.

a) $\sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{25}$ **d)** $\sqrt{225} + \sqrt{16^2} - \sqrt{81}$ **g)** $\sqrt{2\frac{1}{4}} - \sqrt{\frac{1}{4}}$

b) $15 + 2(\sqrt{5})^2 + \sqrt{0}$ **e)** $\frac{16+\sqrt{16}}{16} \cdot \sqrt{16}$ **h)** $\frac{\sqrt{26}^2}{\sqrt{49}+\sqrt{36}} \cdot \sqrt{0{,}0001}$

c) $6\sqrt{0{,}04} - 0{,}3\sqrt{25}$ **f)** $\sqrt{8 - \frac{8}{9}} - \sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2}$ **i)** $\sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}(3 - \sqrt{64})$

6. Jaką długość ma bok kwadratu o polu takim samym jak pole prostokąta na rysunku obok?



7. Rolnik przeznaczył pod zasiew nowej odmiany żyta część pola w kształcie kwadratu o powierzchni $400\ \text{m}^2$. Oblicz, ile metrów sznurka zużył do wytyczenia tego obszaru.



8. Oblicz.

a) $\sqrt{(\sqrt{225} - 2\sqrt{25}) \cdot 5} - 5$ **c)** $\sqrt{(4\sqrt{400} - 4\sqrt{100}) \cdot 10} - 30$

b) $4 - \sqrt{21 - \sqrt{16} \cdot \sqrt{9}}$ **d)** $\sqrt{25\sqrt{25} - 25} - \sqrt{9\sqrt{9} + 9}$

9. Oblicz.

a) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}}}}$ **b)** $\sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{9}}}}}}$

Dla dociekliwych

Ile wynosi $\sqrt{4489}$? Oszacujmy:
liczba 4489 jest większa od $60^2 = 3600$ i mniejsza od $70^2 = 4900$, więc
$60 < \sqrt{4489} < 70$.

Teraz popatrzmy na ostatnią cyfrę liczby 4489. Aby kwadrat liczby miał na końcu cyfrę 9, sama ta liczba musi się kończyć cyfrą 3 albo 7. Sprawdźmy:

$63^2 = 3969$ – za mało

$67^2 = 4489$ – zgadza się

1. Oblicz, nie używając kalkulatora.

a) $\sqrt{5625}$ **b)** $\sqrt{961}$ **c)** $\sqrt{4096}$ **d)** $\sqrt{11025}$

2. Podane pierwiastki są liczbami naturalnymi. Każda plama zasłania jedną cyfrę. Oblicz, nie używając kalkulatora.

a) $\sqrt{17\bullet 4}$ **b)** $\sqrt{2\bullet\bullet 1}$ (2 rozwiązania)

Czy już umiem?

I. Oblicz. Uzasadnij odpowiedź.

a) $\sqrt{225}$ **b)** $\sqrt{\frac{16}{81}}$ **c)** $\sqrt{4\frac{21}{25}}$ **d)** $\sqrt{0{,}0081}$

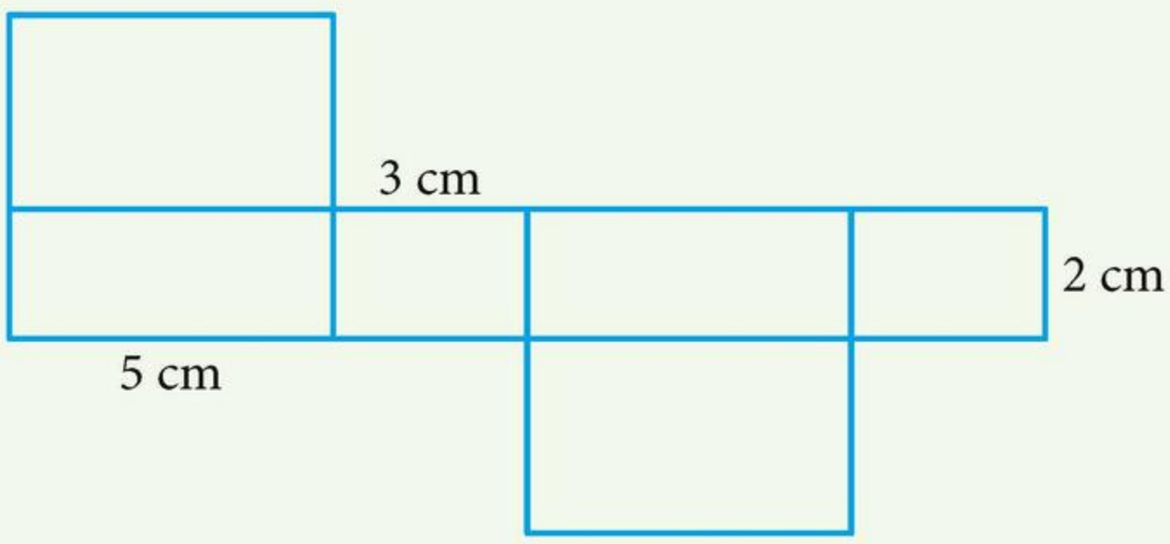
II. Ile wynosi obwód kwadratu o polu równym $225\ \text{cm}^2$?

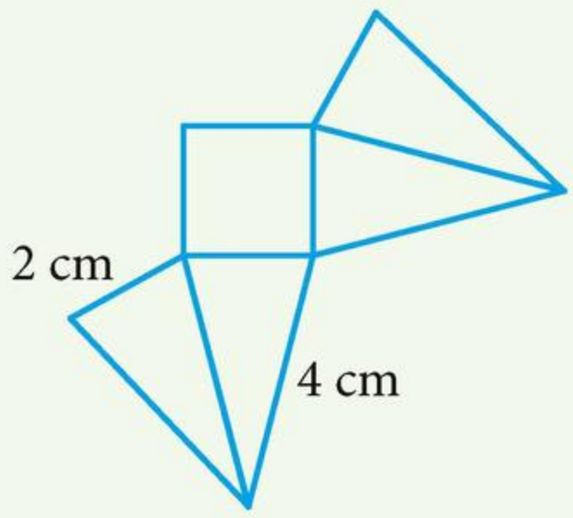
A. 15 cm **B.** 40 cm **C.** 60 cm **D.** 80 cm

III. Oblicz.

a) $\sqrt{121} + \sqrt{144} + \sqrt{64}$ **b)** $\sqrt{0{,}04} + \sqrt{0{,}09} + \sqrt{0{,}49}$ **c)** $\sqrt{7\frac{1}{9}} - \sqrt{1\frac{28}{36}}$

IV. Poniżej przedstawiono siatkę prostopadłościanu oraz siatkę ostrosłupa, którego podstawą jest kwadrat, a krawędzie boczne są równe. Oblicz sumę długości krawędzi każdej z tych brył.



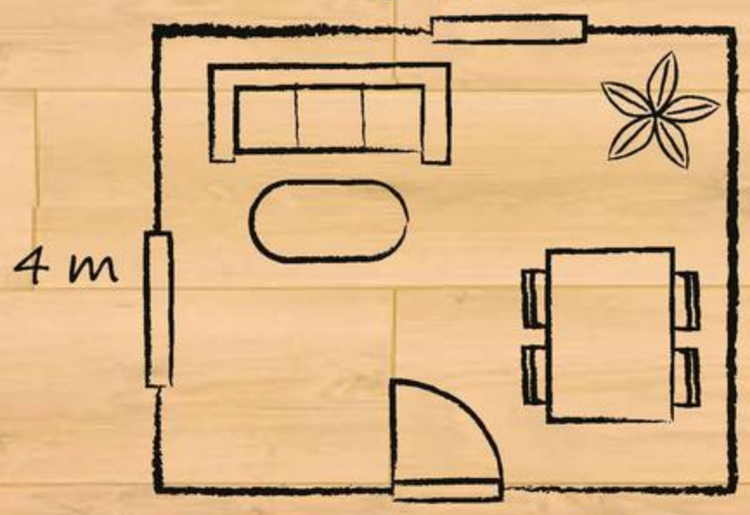


2 Szacowanie pierwiastków

Na dobry początek

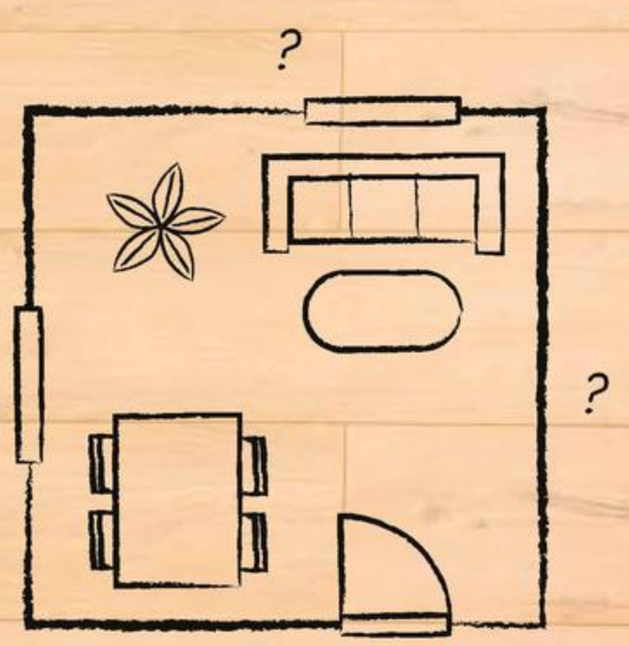
Rodzice Radka planują generalny remont mieszkania. Zastanawiają się nad zmianą układu ścian i kształtu salonu z prostokątnego na kwadratowy. Chcieliby jednak, aby powierzchnia salonu pozostała taka sama.

Oto salon rodziców Radka:



Powierzchnia salonu:
$4 \cdot 5 = 20\ m^2$

Jakie wymiary ma kwadratowy pokój o takiej samej powierzchni?





Pytania i polecenia

- Oblicz długość boku kwadratu o polu 20 m^2.
- Podaj z dokładnością do 1 cm wymiary salonu po przebudowie.
- O ile cm^2 powierzchnia kwadratowego salonu o zaproponowanych przez ciebie wymiarach różni się od powierzchni prostokątnego salonu? ($1\ m^2 = 10\,000\ cm^2$)

W poszukiwaniu $\sqrt{2}$

Umiemy obliczyć pierwiastki z niektórych liczb naturalnych.

$\sqrt{0}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{14}$	$\sqrt{15}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt{17}$
=	=			=					=							=	
0	1			2					3							4	

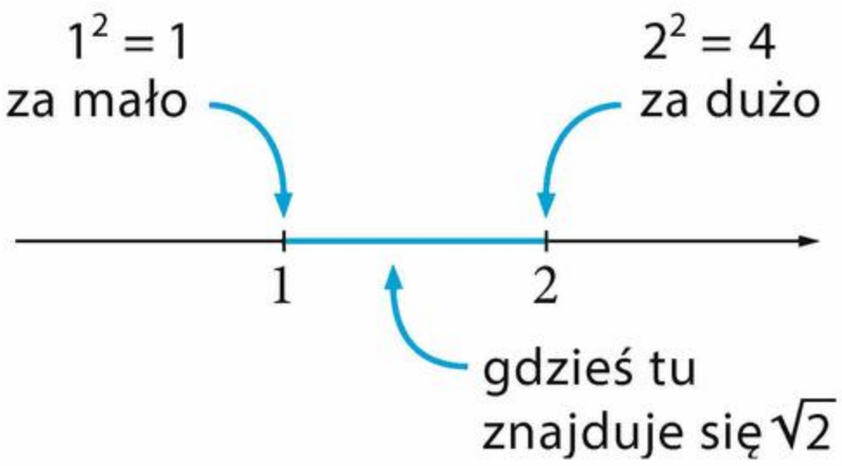
A co z pozostałymi liczbami? Spróbujmy znaleźć $\sqrt{2}$.

Przykład 1

Znajdź dwie kolejne liczby o jednej cyfrze po przecinku, między którymi na osi liczbowej mieści się $\sqrt{2}$.

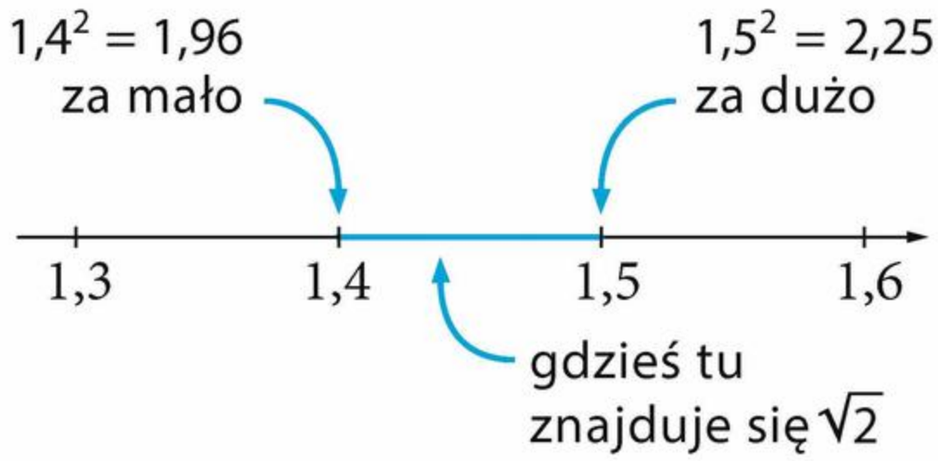
Na początek zauważmy, że $\sqrt{2}$ mieści się między 1 a 2, bo:
$1^2 = 1$ – to mniej niż 2, czyli za mało,
$2^2 = 4$ – to więcej niż 2, czyli za dużo.

Nie znaleźliśmy $\sqrt{2}$, ale wiemy, że musi się mieścić między 1 a 2.



Poszukajmy więc liczby z jednym miejscem po przecinku, która po podniesieniu do kwadratu byłaby zbliżona do 2.
Obliczamy na kalkulatorze:

$1{,}1^2 = 1{,}21$ – za mało
$1{,}2^2 = 1{,}44$ – za mało
$1{,}3^2 = 1{,}69$ – za mało
$1{,}4^2 = 1{,}96$ – troszeczkę za mało
$1{,}5^2 = 2{,}25$ – za dużo

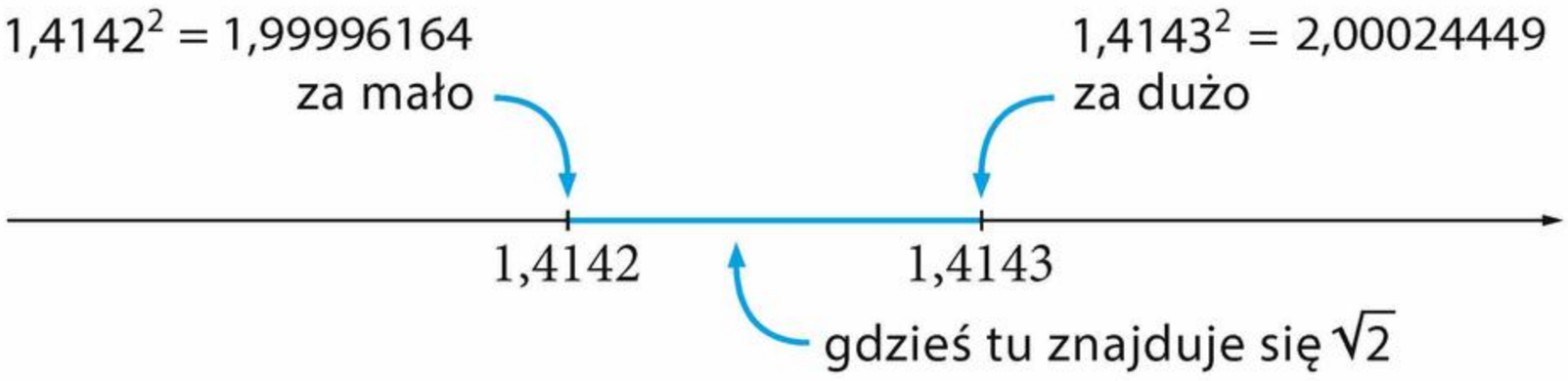


W takim razie $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$.

Ćwiczenie 1

Znajdź dwie kolejne liczby o dwóch cyfrach po przecinku, między którymi na osi liczbowej mieści się $\sqrt{2}$.

W ten sam sposób można szukać kolejnych cyfr po przecinku, czyli coraz dokładniejszych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$.



Można udowodnić, że te próby nigdy się nie skończą: nie otrzymamy ułamka dziesiętnego, którego kwadrat jest równy 2. Nigdy też nie pojawi się okres, jak w przypadku ułamka $\frac{1}{3} = 0{,}333333...$ albo ułamka $\frac{17}{44} = 0{,}38636363...$ Można udowodnić, że liczby $\sqrt{2}$ nie da się zapisać w postaci ułamka zwykłego.

Liczby wymierne i liczby niewymierne

Liczby całkowite, dodatnie i ujemne ułamki oraz dodatnie i ujemne liczby mieszane nazywamy **liczbami wymiernymi**. Każdą taką liczbę można zapisać w postaci ułamka (czasami jest to ułamek niewłaściwy): $\frac{1}{2}$, $0{,}75 = \frac{3}{4}$, $-0{,}6 = -\frac{3}{5}$, $0 = \frac{0}{1}$, $1{,}5 = \frac{3}{2}$, $0{,}017 = \frac{17}{1000}$, $0{,}333... = \frac{1}{3}$, $0{,}386363... = \frac{17}{44}$.

Zapamiętaj

Liczba wymierna to liczba, którą można zapisać jako ułamek zwykły, czyli w postaci $\frac{a}{b}$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi i $b \neq 0$ (czytamy: b jest różne od zera).

Każdą liczbę wymierną można zapisać w postaci skończonego lub okresowego ułamka dziesiętnego.

Liczby $\sqrt{2}$ nie da się zapisać w postaci ułamka zwykłego, więc $\sqrt{2}$ jest **liczbą niewymierną**.

Pierwiastka z 2 nie da się zapisać prościej niż w postaci $\sqrt{2}$.

W obliczeniach możemy używać przybliżeń:
$\sqrt{2} \approx 1{,}4$ albo $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, albo $\sqrt{2} \approx 1{,}414$, albo $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$, albo ...

Pierwiastki wymierne i niewymierne

Wszystkie liczby, z których wyciągaliśmy pierwiastki na poprzednich lekcjach, były tak dobrane, aby wynik był liczbą wymierną. Jest jednak wiele liczb, których pierwiastki nie są wymierne. Na przykład liczbami niewymiernymi są: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ i wiele innych.

Zapamiętaj

Pierwiastek z liczby naturalnej albo jest liczbą naturalną, albo jest liczbą niewymierną.

Spójrzmy na pierwiastki z początkowych liczb naturalnych.

$\sqrt{0}$ $\sqrt{1}$ $\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{4}$ $\sqrt{5}$ $\sqrt{6}$ $\sqrt{7}$ $\sqrt{8}$ $\sqrt{9}$ $\sqrt{10}$ $\sqrt{11}$ $\sqrt{12}$ $\sqrt{13}$ $\sqrt{14}$ $\sqrt{15}$ $\sqrt{16}$ $\sqrt{17}$

Niektóre z nich są liczbami **wymiernymi**, ale wiele pierwiastków z liczb naturalnych to liczby **niewymierne**.

$\sqrt{2} = 1{,}414213562373095048801688724209698078569$

Szacowanie pierwiastków

Wiemy już, że np. $\sqrt{53}$ jest liczbą niewymierną. Nie możemy zapisać go w postaci ułamka zwykłego ani dziesiętnego, możemy go jednak oszacować.

Przykład 2

E

Między jakimi kolejnymi liczbami naturalnymi na osi liczbowej znajduje się $\sqrt{53}$?

Przypomnijmy sobie kwadraty liczb naturalnych.
Liczba 53 znajduje się pomiędzy $7^2 = 49$ a $8^2 = 64$,
więc $\sqrt{53}$ znajduje się między 7 a 8.

! $7^2 < 53 < 8^2$
więc
$7 < \sqrt{53} < 8$

Aby uzyskać dokładniejsze przybliżenia pierwiastków, używamy kalkulatora. Kalkulator obok pokazuje nam **przybliżenie** liczby $\sqrt{53}$.



Ćwiczenie 2

Między jakimi kolejnymi liczbami naturalnymi na osi liczbowej znajduje się $\sqrt{78}$?

Przykład 3

E

Znajdź przybliżenie liczby $10\sqrt{3} - 5$. Przyjmij, że $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.

$10\sqrt{3} - 5 \approx 10 \cdot 1{,}73 - 5 = 17{,}3 - 5 = 12{,}3$

Ćwiczenie 3

Oblicz przybliżoną wartość wyrażenia. Użyj przybliżeń pierwiastków z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku. Wynik podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

a) $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$ **b)** $\sqrt{4} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ **c)** $\sqrt{9} - 6\sqrt{3}$

Zapamiętaj

Z przybliżonych wartości pierwiastków, np. $\sqrt{3} \approx 1{,}73$, korzystamy w zadaniach z kontekstem praktycznym lub gdy jest to napisane w poleceniu. W pozostałych przypadkach podajemy dokładne wartości, np. $\sqrt{3}$, $\sqrt{3} - 1$, $2\sqrt{3}$.

9671875376948073176679737990732478462107038850 3

Zadania

1. Wśród poniższych liczb wskaż liczby niewymierne.

a) $\sqrt{16}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{90}$

b) $\sqrt{91}$, $\sqrt{100}$, $\sqrt{164}$, $\sqrt{169}$, $\sqrt{289}$, $\sqrt{298}$

E **2.** Między jakimi kolejnymi liczbami naturalnymi na osi liczbowej położone są podane liczby niewymierne? Odpowiedź zapisz w postaci nierówności, np. $9 < \sqrt{90} < 10$.

a) $\sqrt{30}$ **b)** $\sqrt{75}$ **c)** $\sqrt{120}$ **d)** $\sqrt{200}$

3. Podaj przybliżone wartości pierwiastków $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ z dokładnością do:

a) 0,001, **b)** jednego miejsca po przecinku, **c)** części setnych.

Czy podane przybliżenie pierwiastka jest mniejsze, czy większe od pierwiastka?

4. Znajdź wszystkie liczby naturalne leżące na osi liczbowej między podanymi liczbami.

a) $\sqrt{2}$ i $\sqrt{38}$ **b)** $\sqrt{10}$ i $\sqrt{40}$ **c)** $\sqrt{8}$ i $\sqrt{300}$

5. Wokół kwadratowego trawnika wytyczono ścieżkę szerokości 1,5 m (rysunek obok). Trawnik i ścieżka zajmują razem obszar równy P. Oblicz powierzchnię trawnika, jeśli:

a) $P = 121\ \text{m}^2$, **b)** $P = 361\ \text{m}^2$.



6. Z okazji Międzynarodowego Dnia Koloru, który przypada 21 marca, uczniowie przygotowali 500 różnokolorowych karteczek o wymiarach 1 dm × 1 dm. Zdecydowali, że z jak największej ich liczby ułożą wielki kwadrat.

a) Jakie wymiary będzie miał ten kwadrat?

b) Ile karteczek pozostanie do innych celów?



E **7.** Korzystając z przybliżeń podanych w ramce, oblicz przybliżoną wartość iloczynu.

a) $5\sqrt{2}$ **c)** $4\sqrt{10}$

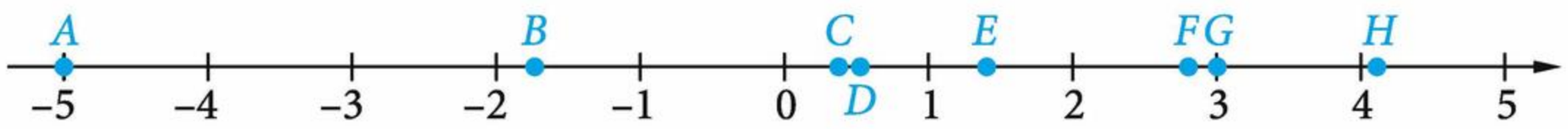
b) $2\sqrt{3}$ **d)** $7\sqrt{5}$

$\sqrt{2} \approx 1{,}41$ $\sqrt{5} \approx 2{,}24$

$\sqrt{3} \approx 1{,}73$ $\sqrt{10} \approx 3{,}16$

8. Dopasuj podane liczby do liter odpowiadających wskazanym miejscom na osi liczbowej.

$$\sqrt{17},\ \sqrt{8},\ \sqrt{\tfrac{1}{4}},\ \sqrt{2},\ \sqrt{\tfrac{16}{100}},\ -\sqrt{3},\ -\sqrt{25},\ (\sqrt{3})^2$$



3432764157273501384623091229702492483605585 07

9. Porównaj wyrażenia, a następnie zdecyduj, który znak: $<$, $=$, $>$ należy wstawić w miejsce ?. Użyj przybliżeń pierwiastków z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

a) $\sqrt{5}+\sqrt{6}$? $\sqrt{11}$ **b)** $\sqrt{7}+\sqrt{7}$? $\sqrt{14}$ **c)** $\sqrt{5}-\sqrt{2}$? $\sqrt{3}$

Dla dociekliwych

1. Podaj przybliżoną wartość $\sqrt{2}$ z dokładnością do jednego miejsca po przecinku. Podnieś to przybliżenie do kwadratu. Zaokrąglij otrzymany wynik do jednego miejsca po przecinku. Czy otrzymana liczba jest równa 2?

2. Podaj przybliżoną wartość $\sqrt{2}$ z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku. Podnieś to przybliżenie do kwadratu. Zaokrąglij otrzymany wynik do dwóch miejsc po przecinku. Czy otrzymana liczba jest równa 2?

3. Wykonaj polecenia analogiczne jak w zadaniach 1 i 2 dla przybliżeń liczby $\sqrt{2}$ do trzech miejsc po przecinku oraz do całości.

Czy już umiem?

I. Między jakimi kolejnymi liczbami naturalnymi na osi liczbowej położona jest podana liczba niewymierna? Odpowiedź zapisz w postaci nierówności, np. $7 < \sqrt{60} < 8$.

a) $\sqrt{41}$ **b)** $\sqrt{111}$ **c)** $\sqrt{237}$

II. Znajdź przybliżoną wartość $\sqrt{8}$ z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

III. Oblicz wartość iloczynu, używając przybliżeń pierwiastków do części dziesiątych.

a) $2\sqrt{3}$ **b)** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ **c)** $0{,}2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$

IV. Czy prawdą jest, że $1{,}41-\sqrt{2}=0$? Wybierz odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie spośród zdań oznaczonych literami A–C.

TAK	ponieważ	A.	1,41 to przybliżenie $\sqrt{2}$
NIE		B.	$\sqrt{2} < 1{,}41$
		C.	jeśli odejmujemy równe liczby, to otrzymujemy 0

V. Rozwiąż równanie i sprawdź rozwiązanie.

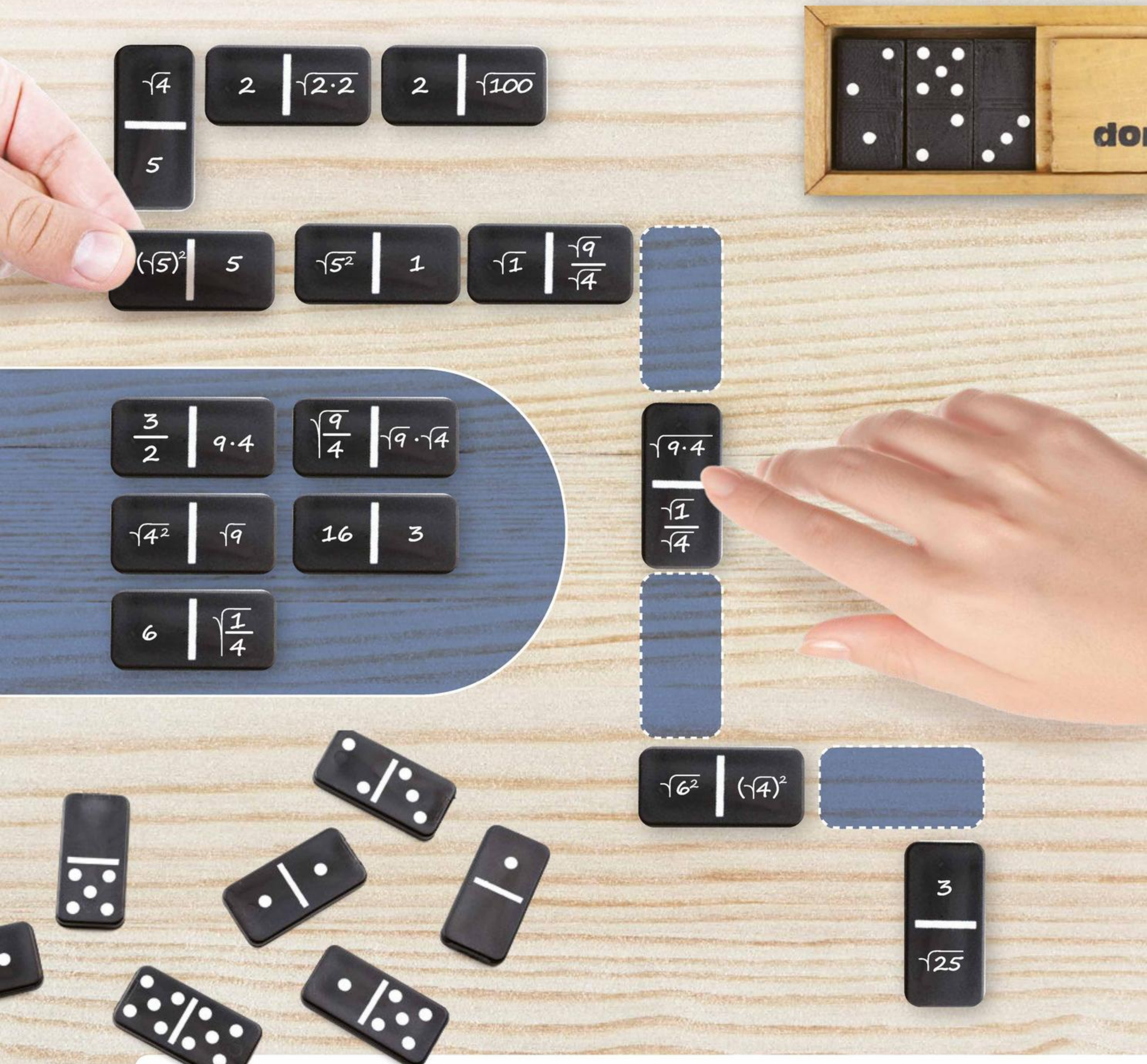
a) $x+x=10$ **b)** $x+2\cdot x=12$ **c)** $3\cdot x-x=4$

3721264412149709993583141322665927505592755 79...

3 Własności pierwiastkowania

Na dobry początek

Przed nami gra w domino z pierwiastkami.



Pytania i polecenia

- W układance brakuje trzech klocków. Zastanów się, które z pokazanych klocków można wstawić w zaznaczone miejsca.
- Podaj przykłady klocków, które można dołożyć na końcach układanki.

Pierwiastek z iloczynu i z ilorazu

Przyjrzyjmy się czterem parom działań.

mnożenie	$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$	$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$	**równe wyniki**
dzielenie	$\sqrt{\frac{64}{4}} = \sqrt{16} = 4$	$\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{4}} = 8 : 2 = 4$	**równe wyniki**
dodawanie	$\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$	$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$	**różne wyniki**
odejmowanie	$\sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$	$\sqrt{100} - \sqrt{64} = 10 - 8 = 2$	**różne wyniki**

Widzimy, że:

$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$ i $\sqrt{\frac{64}{4}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{4}}$,

natomiast dla dodawania i odejmowania podobne równości nie zachodzą.

Można udowodnić, że w przypadku mnożenia i dzielenia takie równości zachodzą dla dowolnych liczb nieujemnych.

Zapamiętaj

Dla dowolnych nieujemnych liczb a i b **pierwiastek z iloczynu** jest równy iloczynowi pierwiastków.

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Dla dowolnej nieujemnej liczby a oraz dodatniej liczby b **pierwiastek z ilorazu** jest równy ilorazowi pierwiastków.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Upraszczanie obliczeń

Poznane wzory możemy wykorzystać do upraszczania obliczeń w wielu przykładach rachunkowych.

Przykład 1 E

Oblicz najprostszym sposobem.

a) $\sqrt{\frac{64}{625}} \cdot \sqrt{\frac{625}{4}}$ **b)** $\sqrt{18 \cdot 200}$ **c)** $\sqrt{36} + \sqrt{64}$ **d)** $\sqrt{36 + 64}$

a) $\sqrt{\frac{64}{625}} \cdot \sqrt{\frac{625}{4}} = \sqrt{\frac{\overset{16}{\cancel{64}}}{\underset{1}{\cancel{625}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{625}}}{\underset{1}{\cancel{4}}}} = \sqrt{16} = 4$

b) $\sqrt{18 \cdot 200} = \sqrt{18 \cdot 2 \cdot 100} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{100} = 6 \cdot 10 = 60$

c) W przypadku sumy pierwiastków nie mamy do dyspozycji żadnego sposobu uproszczenia rachunków, musimy więc obliczyć każdy pierwiastek osobno, a następnie znaleźć ich sumę.

$\sqrt{36}+\sqrt{64}=6+8=14$

$\sqrt{36}+\sqrt{64}\neq\sqrt{36+64}$

d) $\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$

Ćwiczenie 1

Oblicz najprostszym sposobem.

a) $\sqrt{25\cdot 121\cdot 4}$

b) $\sqrt{\frac{9}{16}\cdot\frac{4}{81}}$

c) $\sqrt{16+9}$

d) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}$

e) $\sqrt{169-144}$

f) $\sqrt{\frac{8}{5}}\cdot\sqrt{\frac{125}{2}}$

Włączanie liczby pod pierwiastek

Przykład 2.1

Zapisz $4\sqrt{2}$ w postaci pierwiastka.

Zauważmy, że $4=\sqrt{4^2}$, a następnie skorzystajmy ze wzoru $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$.

$4\sqrt{2}=\sqrt{4^2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{4^2\cdot 2}=\sqrt{32}$

Zapisywanie iloczynu liczby i pierwiastka w postaci pierwiastka nazywamy **włączaniem liczby pod pierwiastek** (lub: pod znak pierwiastka).
Włączanie liczby pod pierwiastek przydaje się na przykład wtedy, gdy chcemy porównać dwie liczby zapisane w postaci wyrażeń z pierwiastkami.

Przykład 2.2

Która z liczb jest większa?

$3\sqrt{5}$ czy $5\sqrt{3}$

Włączmy liczbę pod znak pierwiastka:

$3\sqrt{5}=\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{45}$

$3\sqrt{5}=\sqrt{3\cdot 3\cdot 5}$

$5\sqrt{3}=\sqrt{5^2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{25\cdot 3}=\sqrt{75}$

Teraz łatwo porównać liczby: $\sqrt{45}<\sqrt{75}$, czyli $3\sqrt{5}<5\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 2.1

Włącz liczbę pod pierwiastek.

a) $4\sqrt{2}$ **b)** $3\sqrt{6}$ **c)** $0{,}5\sqrt{3}$ **d)** $0{,}9\sqrt{10}$

Ćwiczenie 2.2

Porównaj liczby.

a) $3\sqrt{2}$ i $2\sqrt{3}$ **b)** $7\sqrt{3}$ i $9\sqrt{2}$

Wyłączanie liczby przed pierwiastek

Czasami trzeba wykonać operację odwrotną do włączania liczby pod pierwiastek: przekształcamy np. $\sqrt{32}$ do postaci $4\sqrt{2}$. Mówimy wtedy o **wyłączaniu liczby przed pierwiastek** (lub: przed znak pierwiastka).

Przykład 3

Wyłącz liczbę przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt{18}$ **b)** $\sqrt{504}$

Wiesz, że $3\sqrt{2} = \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 2}$, więc $\sqrt{3 \cdot 3 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$.

a) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

Liczbę 18 przedstawiliśmy w postaci iloczynu $9 \cdot 2$, bo pierwiastek z 9 jest liczbą naturalną.

b) Przy dużych liczbach, gdy trudno wykonać obliczenia w pamięci, możemy rozłożyć liczbę pod pierwiastkiem na czynniki pierwsze – w ten sposób znajdziemy kwadraty, które są dzielnikami tej liczby.

$504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$

Teraz widać, jak można wyłączyć z liczby 504 pełne kwadraty:

$504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 7.$

Wobec tego: $\sqrt{504} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 7} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2 \cdot 7} = 6\sqrt{14}$.

Uwaga. Umawiamy się, że polecenie „Wyłącz liczbę przed znak pierwiastka" oznacza, że pod pierwiastkiem ma zostać najmniejsza możliwa liczba naturalna. Dlatego zapisania równości $\sqrt{504} = 2\sqrt{126}$ nie uznamy za wykonanie takiego polecenia.

Ćwiczenie 3

Wyłącz liczbę przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt{8}$ **b)** $\sqrt{500}$ **c)** $\sqrt{72}$ **d)** $\sqrt{98}$

Zapamiętaj

Dla $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$:

$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$$

Dodawanie wyrażeń zawierających pierwiastki

Przykład 4

Zapisz w prostszej postaci.

a) $3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{20} + \sqrt{125}$ **c)** $\sqrt{25} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$

a) Zauważmy, że: $3\sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}$

oraz $2\sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2}$,

więc $3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

b) Pierwiastków z różnych liczb nie można tak po prostu dodać. Wyłączmy jednak liczbę przed pierwiastek w obu składnikach.

$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$

$\sqrt{125} = \sqrt{25 \cdot 5} = 5\sqrt{5}$

Nasze wyrażenie przyjmuje prostszą postać, w której można wykonać dodawanie.

$\sqrt{20} + \sqrt{125} = 2\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$

c) $\sqrt{25} + \sqrt{3} + \sqrt{6} = 5 + \sqrt{3} + \sqrt{6}$

Sumy $5 + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ nie da się zapisać prościej.

Ćwiczenie 4

Zapisz w prostszej postaci.

a) $5\sqrt{2} + \sqrt{2}$ **b)** $9\sqrt{10} - 4\sqrt{10} - 2\sqrt{10}$ **c)** $\sqrt{45} - \sqrt{20}$ **d)** $\sqrt{48} + \sqrt{27}$

Zapamiętaj

Wiele liczb niewymiernych ma dość skomplikowany zapis:

$5 + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ $3\sqrt{2} + 1$ $2\sqrt{3} - \sqrt{5}$

Nie da się ich zapisać prościej.

Zadania

1. Wykonaj polecenia. ▶ Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

← P2.1

Włącz liczbę pod pierwiastek.

a) $7\sqrt{2}$ **c)** $\frac{1}{3}\sqrt{18}$ **e)** $\frac{1}{2}\sqrt{8}$ **g)** $3\sqrt{11}$ **i)** $5\sqrt{5}$

b) $0{,}4\sqrt{3}$ **d)** $5\sqrt{7}$ **f)** $0{,}2\sqrt{7}$ **h)** $\frac{2}{5}\sqrt{15}$ **j)** $\frac{1}{4}\sqrt{6}$

poziom B

← P3

Wyłącz liczbę przed pierwiastek.

a) $\sqrt{48}$ **c)** $\sqrt{245}$ **e)** $\sqrt{800}$ **g)** $\sqrt{24}$ **i)** $\sqrt{80}$

b) $\sqrt{216}$ **d)** $\sqrt{450}$ **f)** $\sqrt{50}$ **h)** $\sqrt{75}$ **j)** $\sqrt{192}$

poziom C

← P4a

Zapisz w prostszej postaci.

a) $2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-\sqrt{3}$ **d)** $5\sqrt{7}-3\sqrt{7}$ **g)** $4\sqrt{8}-5\sqrt{8}+6\sqrt{8}$

b) $3\sqrt{5}-4\sqrt{5}+\sqrt{5}$ **e)** $\sqrt{11}-5\sqrt{11}+7\sqrt{11}$ **h)** $-\sqrt{3}-3\sqrt{3}+10\sqrt{3}$

c) $4\sqrt{2}+5\sqrt{2}$ **f)** $6\sqrt{6}+2\sqrt{6}-7\sqrt{6}$ **i)** $7\sqrt{15}-2\sqrt{15}$

poziom D

← P4b

Zapisz w prostszej postaci.

a) $4\sqrt{3}-\sqrt{27}-2\sqrt{12}$ **d)** $\sqrt{63}+3\sqrt{7}-\sqrt{28}$ **g)** $\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{32}$

b) $2\sqrt{125}-3\sqrt{45}+4\sqrt{5}$ **e)** $5\sqrt{11}-\sqrt{44}+\sqrt{99}$ **h)** $3\sqrt{3}+\sqrt{48}+\sqrt{75}$

c) $\sqrt{200}-\sqrt{162}+\sqrt{2}$ **f)** $\sqrt{20}-\sqrt{45}+\sqrt{500}$ **i)** $2\sqrt{8}-\sqrt{18}+5\sqrt{50}$

2. Oblicz.

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ **c)** $\sqrt{225-144}$ **e)** $\sqrt{12}:\sqrt{\frac{3}{4}}$ **g)** $\sqrt{64\cdot 25}$

b) $\sqrt{4{,}9}\cdot\sqrt{10}$ **d)** $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$ **f)** $\sqrt{0{,}09+0{,}16}$ **h)** $\sqrt{\frac{0{,}36}{0{,}81}}$

E **3.** Oblicz.

a) Ile razy liczba $\sqrt{54}$ jest większa od liczby $\sqrt{6}$?

b) O ile liczba $\sqrt{54}$ jest większa od liczby $\sqrt{6}$?

4. Porównaj liczby.

a) $\sqrt{16+9}$ i $\sqrt{16}+\sqrt{4}$ **b)** $\sqrt{25-9}$ i $\sqrt{25}-\sqrt{9}$ **c)** $2\sqrt{7}$ i $\sqrt{3\cdot 7}$

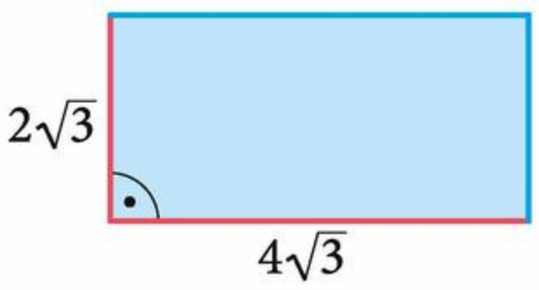
5. Zapisz podane liczby w kolejności rosnącej: $3\sqrt{12}$, $12\sqrt{3}$, $0{,}5\sqrt{32}$.

6. Czy wszystkie działania mają jednakowy wynik? Odpowiedź uzasadnij.

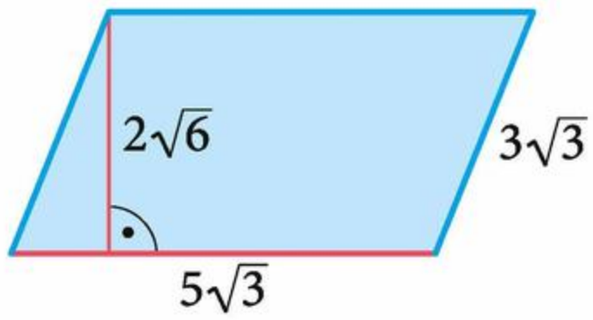
I. $\sqrt{25\cdot 121}$ **II.** $\sqrt{(-25)\cdot(-121)}$ **III.** $-\sqrt{25\cdot 121}$

E **7.** Oblicz pole i obwód figury przedstawionej na rysunku.

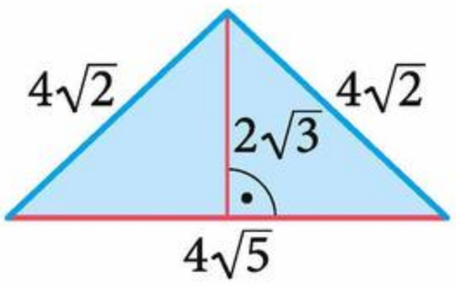
a) prostokąt



b) równoległobok



c) trójkąt



8. Korzystając z przybliżeń z ramki, oblicz przybliżoną wartość pierwiastka.

a) $\sqrt{8}$ **b)** $\sqrt{20}$ **c)** $\sqrt{50}$ **d)** $\sqrt{200}$

$\sqrt{2} \approx 1{,}41$
$\sqrt{5} \approx 2{,}24$

9. Oblicz długość boku kwadratu o polu takim samym jak pole prostokąta na rysunku.



10. Dla jakiej wartości x podana równość jest prawdziwa?

a) $x\sqrt{2} = \sqrt{18}$ **b)** $2x\sqrt{3} = \sqrt{108}$ **c)** $x\sqrt{28} = 2\sqrt{175}$ **d)** $\frac{x\sqrt{5}}{3} = 2\sqrt{45}$

Dla dociekliwych

1. O polu prostokąta o wymiarach $\sqrt{45} \times \sqrt{n}$ wiadomo, że jest liczbą całkowitą.

a) Znajdź najmniejszą liczbę n o tej własności.

b) Opisz wszystkie liczby n o tej własności.

2. Jak zmieniłyby się odpowiedzi do zadania 1, gdyby liczbę 45 zastąpić liczbą 2904?

Czy już umiem?

I. Liczba $\sqrt{72}$ jest równa

A. $8\sqrt{2}$. **B.** $7\sqrt{2}$. **C.** $6\sqrt{2}$. **D.** $5\sqrt{2}$.

II. Która z liczb jest największa: $4\sqrt{6}$, $5\sqrt{7}$ czy $6\sqrt{5}$? Uzasadnij odpowiedź.

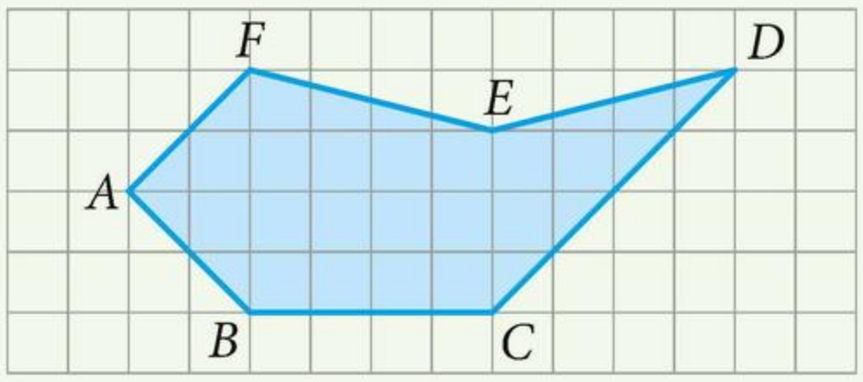
III. Zapisz w prostszej postaci.

a) $\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - \sqrt{3}$ **b)** $\sqrt{2} + 3\sqrt{32}$ **c)** $0{,}2\sqrt{500} + 5\sqrt{5} - \sqrt{25}$

IV. Znajdź na rysunku sześciokąta:

a) dwa boki prostopadłe i dwa boki równoległe,

b) kąt ostry, kąt prosty, kąt rozwarty i kąt wklęsły.

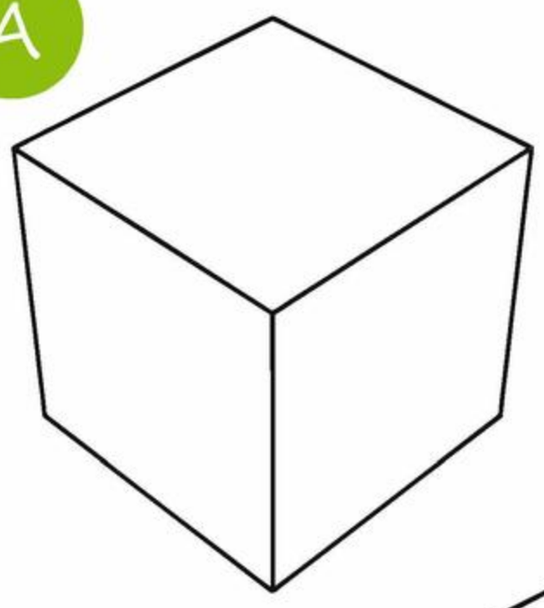


4 Pierwiastek trzeciego stopnia

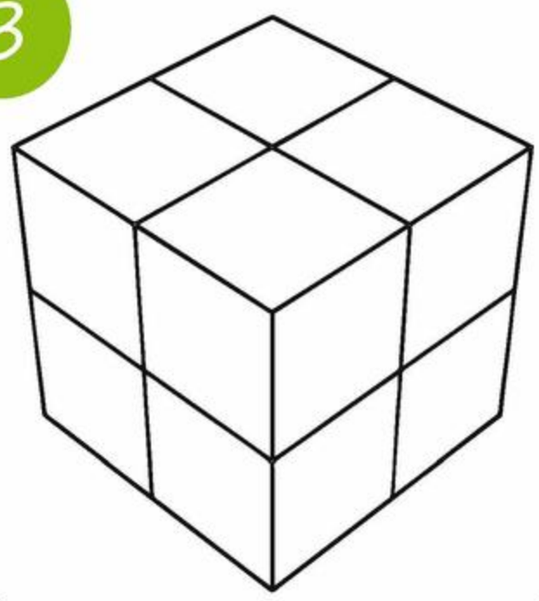
Na dobry początek >

Na rysunkach pokazano sześciany zbudowane z sześciennych kostek. Poniżej zapisano, z ilu kostek zbudowano trzy z tych sześcianów.

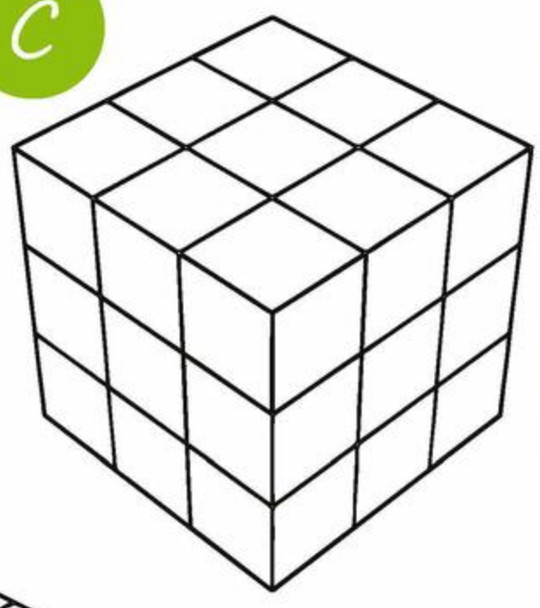
A



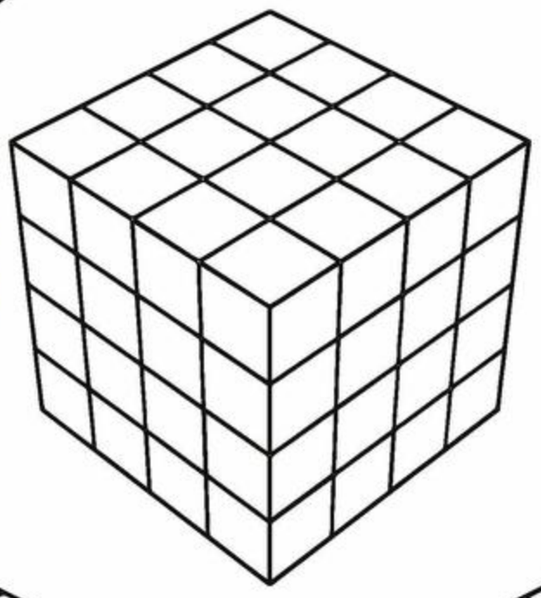
B



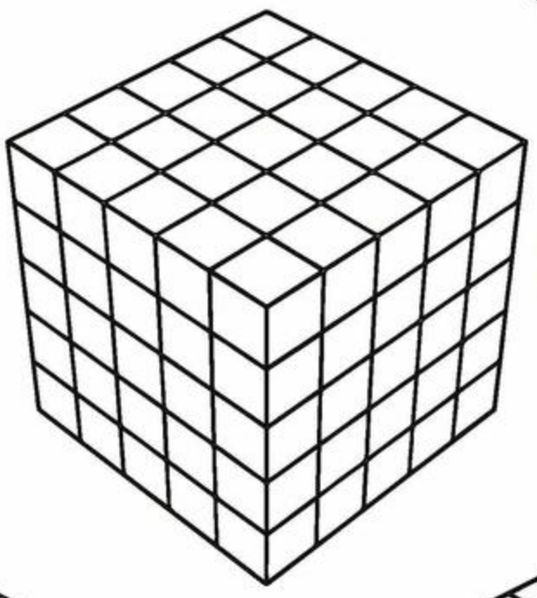
C



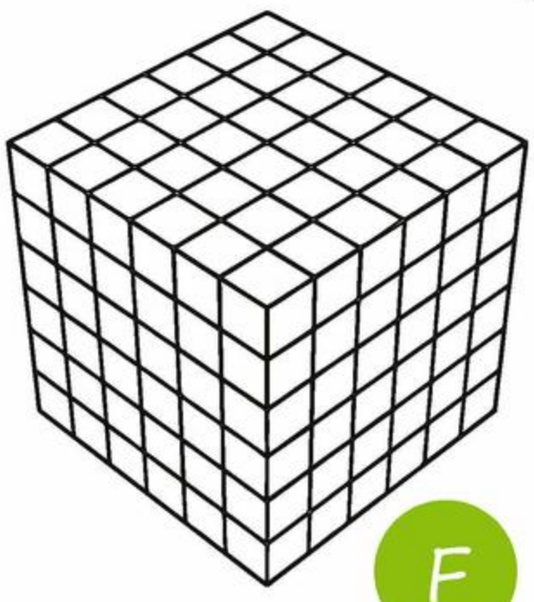
D



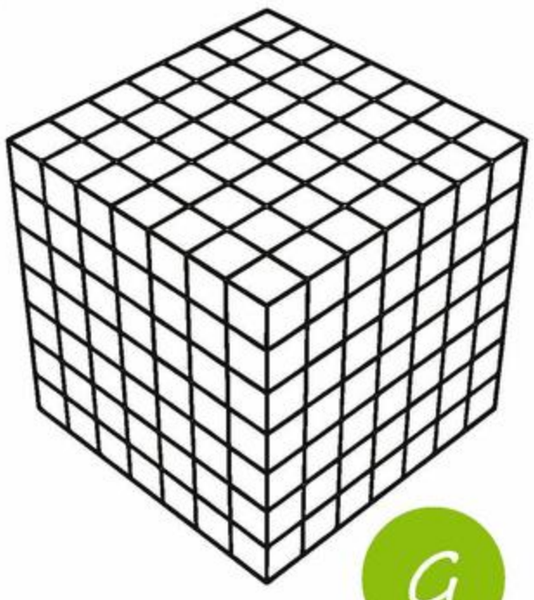
E



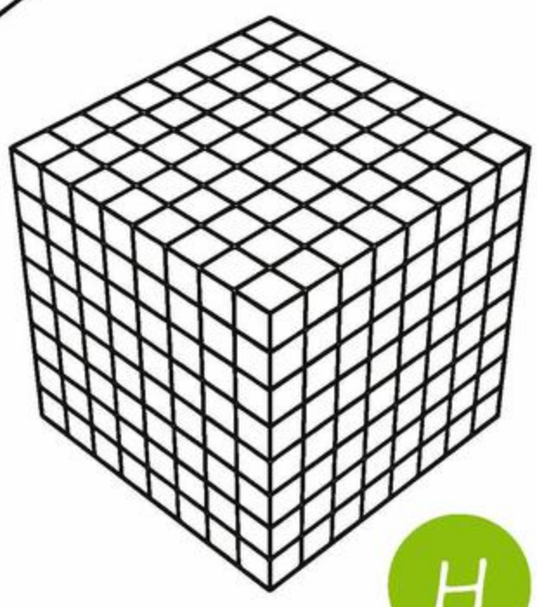
F



G



H



8 kostek

27 kostek

125 kostek

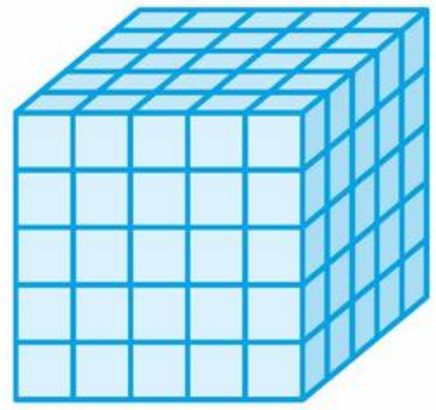
Pytania i polecenia

- Dopasuj odpowiedni rysunek do liczby kostek.
- Jakiej długości krawędź ma sześcian zbudowany z n^3 kostek?

Wyciąganie pierwiastka sześciennego (trzeciego stopnia)

Przykład 1

Na rysunku przedstawiono sześcian składający się z jednakowych sześciennych klocków. Klocki układają się w pięć warstw, przy czym każdą z nich tworzy 25 klocków, ułożonych w pięciu rzędach po 5 klocków w każdym rzędzie. Sześcian składa się więc z $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ klocków.



Ustal, ile takich klocków należy ułożyć wzdłuż krawędzi sześcianu, który ma się składać z 27 klocków.

Szukamy liczby, której trzecia potęga jest równa 27. Taką liczbą jest 3:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27.$$

Wzdłuż krawędzi budowanego sześcianu należy ułożyć 3 klocki.

Mówimy, że liczba 3 jest **pierwiastkiem sześciennym** z liczby 27.

Stwierdzenie to zapisujemy następująco: $\sqrt[3]{27} = 3$.

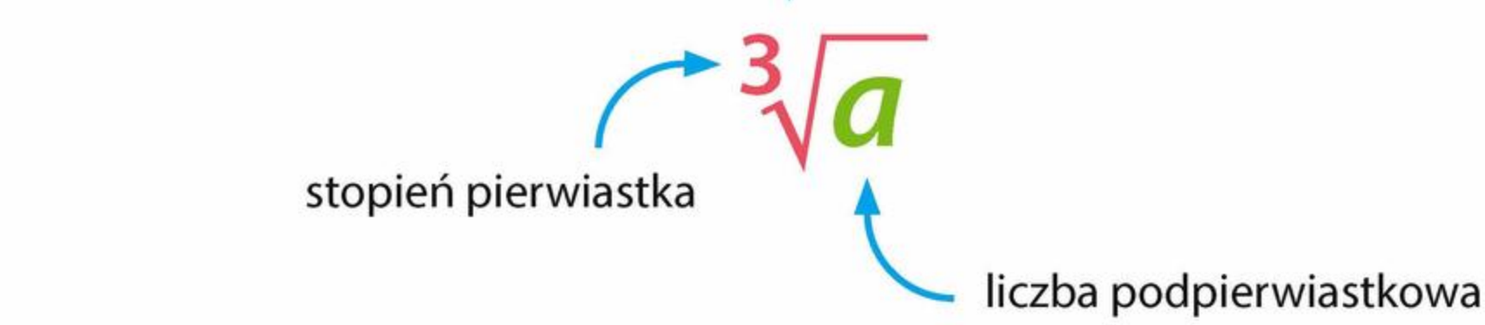
Ćwiczenie 1.1

Ile sześciennych klocków leży wzdłuż krawędzi sześcianu, który jest zbudowany z 64 klocków?

Ćwiczenie 1.2

Podaj długość krawędzi sześcianu o objętości $1000\ \text{cm}^3$.

Jeśli chcemy znaleźć liczbę, której kwadrat znamy, wyciągamy pierwiastek kwadratowy.
Jeśli chcemy znaleźć liczbę, której sześcian znamy, wyciągamy pierwiastek sześcienny.



Na przykład:

- $\sqrt[3]{8} = 2$, bo $2^3 = 8$,
- $\sqrt[3]{1000} = 10$, bo $10^3 = 1000$.

Podobnie:

- $\sqrt{49} = 7$, bo $7^2 = 49$,
- $\sqrt{100} = 10$, bo $10^2 = 100$.

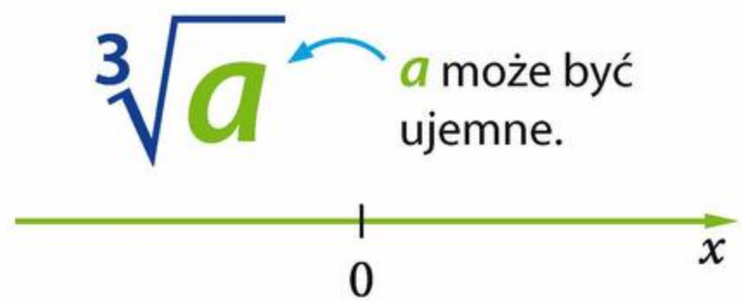
Zapamiętaj

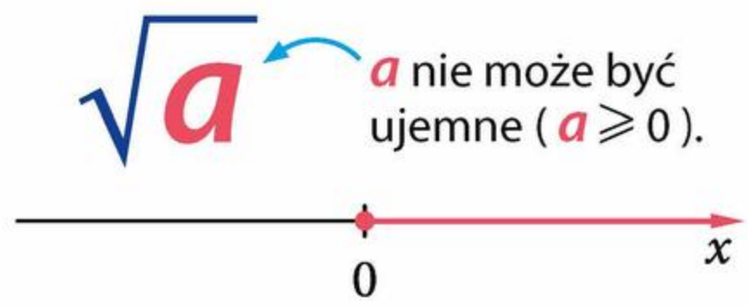
Pierwiastkiem sześciennym z liczby a nazywamy taką liczbę b, dla której $b^3 = a$.
Piszemy wówczas $b = \sqrt[3]{a}$.

Pierwiastek sześcienny nazywa się również **pierwiastkiem trzeciego stopnia**.

Zauważ, że:

- jeśli podniesiemy liczbę do sześcianu, możemy otrzymać wartość ujemną, więc **pierwiastek trzeciego stopnia** możemy wyciągać **z dowolnej liczby**.
- jeśli podniesiemy liczbę do kwadratu, zawsze otrzymamy wartość nieujemną, więc **pierwiastek kwadratowy** możemy wyciągać tylko **z liczb nieujemnych**.





Dobra rada

Przy obliczaniu pierwiastków sześciennych korzystaj z trzecich potęg liczb naturalnych!

$2^3 = 8$	$4^3 = 64$	$6^3 = 216$	$8^3 = 512$
$3^3 = 27$	$5^3 = 125$	$7^3 = 343$	$9^3 = 729$

Przykład 2

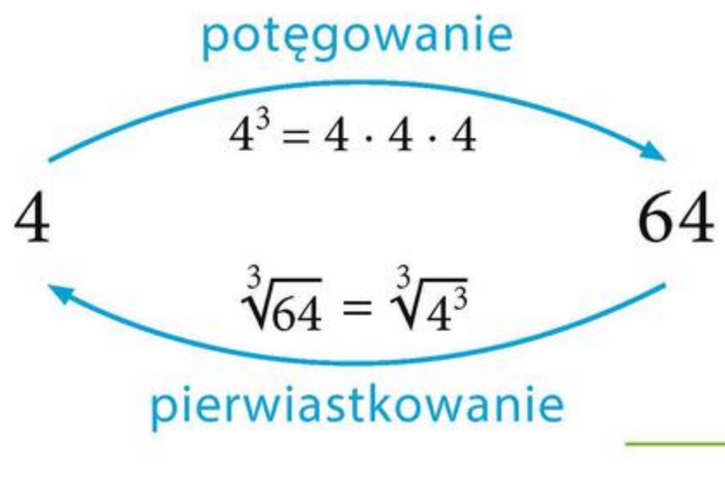
Podaj pierwiastek trzeciego stopnia i uzasadnij odpowiedź.

a) $\sqrt[3]{64}$ **b)** $\sqrt[3]{-64}$ **c)** $\sqrt[3]{0} = 0$

a) $\sqrt[3]{64} = 4$, bo $4^3 = 64$

b) $\sqrt[3]{-64} = -4$, bo $(-4)^3 = -64$

c) $\sqrt[3]{0} = 0$, bo $0^3 = 0$



Ćwiczenie 2

Oblicz, korzystając z informacji podanych w ramce.

a) $\sqrt[3]{512}$ **b)** $\sqrt[3]{-512}$ **c)** $\sqrt[3]{343}$ **d)** $\sqrt[3]{-125}$

Zauważ, że
$\sqrt[3]{-125} = -\sqrt[3]{125}$.

Gdy podnosimy ułamek zwykły do trzeciej potęgi, możemy podnieść do tej potęgi osobno licznik i osobno mianownik. Korzystając z tej własności, możemy obliczać pierwiastki sześcienne z niektórych ułamków.

Przykład 3

Podaj pierwiastek trzeciego stopnia i uzasadnij odpowiedź.

a) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$ **b)** $\sqrt[3]{0{,}008}$ **c)** $\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}$

a) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$, bo $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$

b) $\sqrt[3]{0{,}008} = 0{,}2$, bo $(0{,}2)^3 = 0{,}008$ inaczej: $\sqrt[3]{\frac{8}{1000}} = \frac{2}{10}$, bo $\left(\frac{2}{10}\right)^3 = \frac{8}{1000}$

c) $\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}} = \sqrt[3]{-\frac{64}{27}} = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$, bo $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3 = \left(-\frac{4}{3}\right)^3 = -\frac{64}{27} = -2\frac{10}{27}$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) $\sqrt[3]{-\frac{8}{729}}$ **b)** $\sqrt[3]{-0{,}000125}$ **c)** $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$

Pierwiastek sześcienny i trzecia potęga

Przykład 4

Oblicz.

a) $\sqrt[3]{179 \cdot 179 \cdot 179}$ **b)** $\left(\sqrt[3]{79\,507}\right)^3$

a) Obliczając $\sqrt[3]{179 \cdot 179 \cdot 179}$, szukamy odpowiedzi na pytanie, jaką liczbę należy podnieść do sześcianu, aby otrzymać $179 \cdot 179 \cdot 179$. Oczywiście ta liczba to 179.

$\sqrt[3]{179 \cdot 179 \cdot 179} = 179$

b) Zgodnie z określeniem pierwiastka sześciennego, $\sqrt[3]{79\,507}$ to taka liczba, która podniesiona do sześcianu daje 79 507, czyli: $\left(\sqrt[3]{79\,507}\right)^3 = 79\,507$.

Zapamiętaj

Dla dowolnej liczby a:

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a \cdot a \cdot a} = a$$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $\sqrt[3]{17 \cdot 17 \cdot 17}$ **b)** $(\sqrt[3]{-343})^3$ **c)** $\sqrt[3]{117^3}$

Szacowanie pierwiastków

Dla dowolnej liczby **całkowitej** n liczba $\sqrt[3]{n}$ jest albo liczbą **całkowitą**, albo **niewymierną**, np.:

$\sqrt[3]{8} = 2$ $\sqrt[3]{9}$

$\sqrt[3]{-64} = -4$ $\sqrt[3]{-20}$

Podobnie:
dla dowolnej liczby **naturalnej** n liczba $\sqrt{n}$ jest albo liczbą **naturalną**, albo **niewymierną**, np.:
$\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{101}$

Przykład 5

Między jakimi kolejnymi liczbami naturalnymi na osi liczbowej znajduje się $\sqrt[3]{20}$?

Zauważmy, że $2^3 = 8$ i $3^3 = 27$, zatem

$2^3 < 20 < 3^3$, więc $2 < \sqrt[3]{20} < 3$.

Podobnie szacujemy wartość np. $\sqrt{165}$.

$12^2 = 144$ i $13^2 = 169$, zatem

$12^2 < 165 < 13^2$, więc

$12 < \sqrt{165} < 13$.

Ćwiczenie 5

Między jakimi kolejnymi liczbami naturalnymi na osi liczbowej znajduje się $\sqrt[3]{100}$?

Zadania

1. Podaj pierwiastek trzeciego stopnia i uzasadnij odpowiedź.

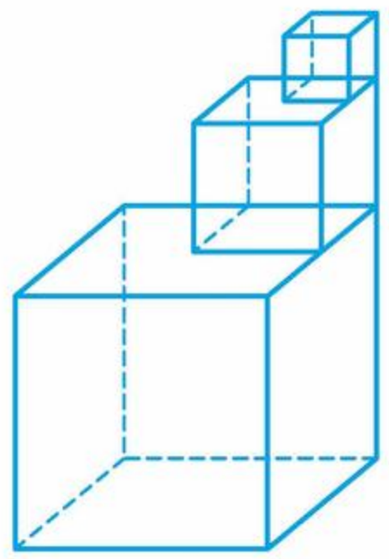
a) $\sqrt[3]{-1}$ **c)** $\sqrt[3]{-0{,}008}$ **e)** $\sqrt[3]{-0{,}064}$ **g)** $\sqrt[3]{-0{,}125}$ **i)** $\sqrt[3]{-0{,}000512}$

b) $\sqrt[3]{216}$ **d)** $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$ **f)** $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$ **h)** $\sqrt[3]{1\frac{61}{64}}$ **j)** $\sqrt[3]{4\frac{17}{27}}$

2. Z trzech sześciennych klocków o objętościach V_1, V_2 i V_3 zbudowano wieżę taką, jak pokazano na rysunku. Oblicz jej wysokość, jeśli objętości klocków są równe:

a) $V_1 = 1000\ \text{cm}^3$, $V_2 = 512\ \text{cm}^3$, $V_3 = 216\ \text{cm}^3$,

b) $V_1 = 1331\ \text{cm}^3$, $V_2 = 729\ \text{cm}^3$, $V_3 = 125\ \text{cm}^3$.



3. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{125}+\sqrt[3]{8}$ **c)** $\sqrt[3]{-1000}+\sqrt[3]{27}$ **e)** $(\sqrt{3})^2+(\sqrt{7})^2$ **g)** $(\sqrt[3]{9})^3-\sqrt[3]{7^3}$

b) $\sqrt[3]{125}-\sqrt[3]{64}$ **d)** $\sqrt[3]{512}-\sqrt[3]{-216}$ **f)** $\sqrt{11^2}-2\sqrt{3^2}$ **h)** $4\sqrt[3]{6^3}-(\sqrt[3]{-12})^3$

4. Znajdź x.

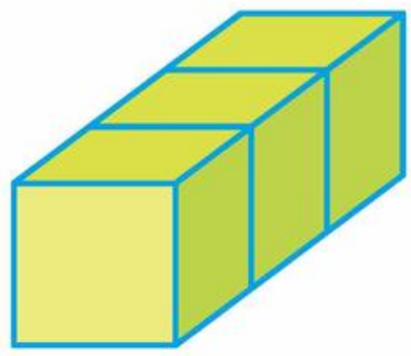
a) $\sqrt[3]{x}=3$ **b)** $\sqrt[3]{x}=-10$ **c)** $\sqrt[3]{x}=5$

5. Naziemna część sklepu firmy Apple w Nowym Jorku ma kształt sześcianu o objętości równej około 729 m^3. Czy można go obejść dookoła, wykonując 50 kroków po 80 cm każdy?



6. Objętość prostopadłościanu o wymiarach 4 cm × 8 cm × 16 cm jest równa objętości sześcianu o krawędzi a. Wyznacz długość krawędzi sześcianu.

E **7.** Prostopadłościenny klocek – taki, jak pokazano na rysunku – można pociąć na trzy sześciany o objętości 64 dm^3 każdy. Wszystkie ściany tego klocka pomalowano na zielono. Oblicz łączną powierzchnię zielonych ścian.



8. Między jakimi kolejnymi liczbami naturalnymi na osi liczbowej znajduje się:

a) $\sqrt[3]{300}$, **b)** $\sqrt[3]{822}$, **c)** $\sqrt[3]{1005}$?

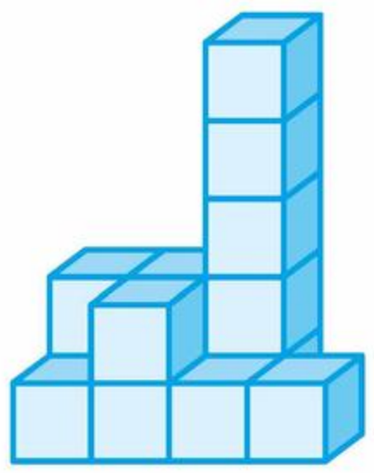
9. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{3^3+4^3+5^3}$ **b)** $\sqrt[3]{6^3+3^3+10^2}$ **c)** $\sqrt[3]{14^2-13^2}$ **d)** $\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{64}}$

E **10.** Budowlę przedstawioną na rysunku ułożono z jednakowych sześciennych klocków. (Żaden klocek nie wisi w powietrzu). Ile co najmniej klocków trzeba dołożyć, aby powstał sześcian:

a) jeżeli możemy przekładać klocki tej budowli,

b) jeżeli wszystkie klocki z budowli mają pozostać na swoim miejscu?



11. Drewniany sześcienny klocek o objętości 8000 cm^3 pomalowano na zielono, a następnie pocięto na 64 małe sześciany o równych objętościach.

a) Oblicz długość krawędzi klocka.

b) Oblicz długość krawędzi małego sześcianu.

c) Ile jest małych sześcianów, które mają dokładnie dwie ściany pomalowane na zielono?

Dla dociekliwych

Podobnie jak pierwiastek kwadratowy czy sześcienny możemy określić pierwiastki innych stopni.

$\sqrt[4]{625} = 5$, bo $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ (czytamy: pierwiastek czwartego stopnia z 625)

$\sqrt[5]{243} = 3$, bo $3^5 = 243$ (czytamy: pierwiastek piątego stopnia z 243)

1. Oblicz pierwiastek i uzasadnij odpowiedź.

a) $\sqrt[4]{10\,000}$ **d)** $\sqrt[5]{3125}$ **g)** $\sqrt[6]{1\,000\,000\,000\,000}$

b) $\sqrt[4]{81}$ **e)** $\sqrt[6]{64}$ **h)** $\sqrt[4]{1\,000\,000\,000\,000}$

c) $\sqrt[5]{32}$ **f)** $\sqrt[10]{1024}$ **i)** $\sqrt[12]{1\,000\,000\,000\,000}$

2. Oszacuj wartość pierwiastka.

a) $\sqrt[4]{810\,003}$ **b)** $\sqrt[5]{99\,999}$

3. Czy można wyciągać pierwiastek czwartego stopnia z liczby ujemnej? Dlaczego? A pierwiastek piątego stopnia?

Czy już umiem?

I. Podaj wartość pierwiastka.

a) $\sqrt[3]{1}$ **b)** $\sqrt[3]{-8000}$ **c)** $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$ **d)** $\sqrt[3]{-\frac{125}{216}}$

II. Między jakimi kolejnymi liczbami naturalnymi na osi liczbowej położone są liczby: $\sqrt[3]{1402}$, $\sqrt[3]{2020}$?

III. Kostka Rubika ma objętość równą $\frac{1331}{8}\,\text{cm}^3$. Oblicz wysokość wieży zbudowanej z dziesięciu takich kostek postawionych jedna na drugiej.



IV. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{216} + \sqrt[3]{(-4)^3}$ **d)** $\sqrt{64} - \sqrt[3]{64}$

b) $\sqrt[3]{-0{,}027} + \sqrt[3]{0{,}001}$ **e)** $\sqrt[3]{-0{,}001} + \sqrt{6{,}25}$

c) $\sqrt[3]{-0{,}008} - \sqrt[3]{-8}$ **f)** $-\sqrt{144} - \sqrt[3]{-512}$

V. Dane są liczby: $x = 2\frac{1}{4}$, $y = 1{,}5$. Oblicz:

a) iloraz tych liczb, **c)** iloczyn tych liczb,

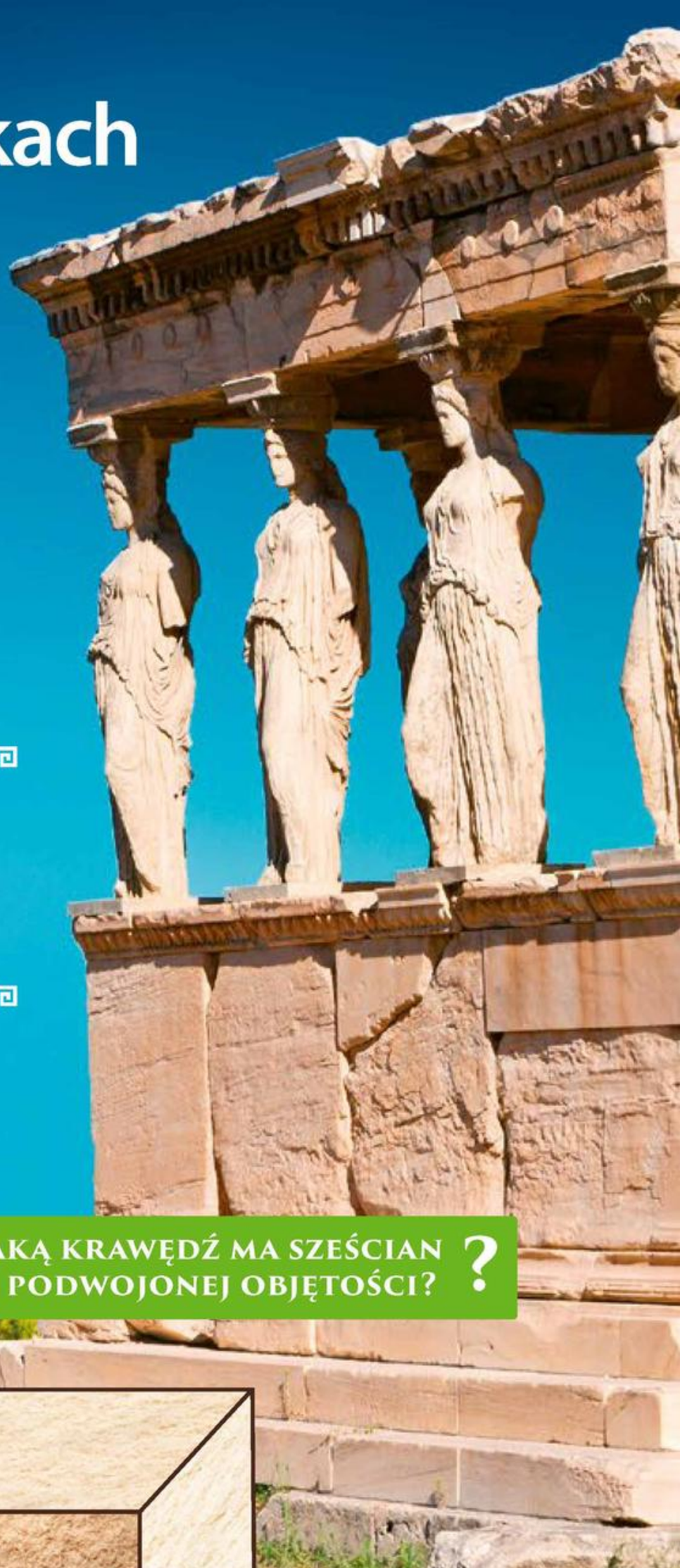
b) sumę tych liczb, **d)** różnicę tych liczb.

5 Działania na pierwiastkach sześciennych

Na dobry początek

Delos, wyspa na Morzu Egejskim, była w starożytności poświęcona greckiemu bogu Apollowi. Według legendy, gdy wybuchła tam zaraza, mieszkańcy otrzymali od wyroczni przepowiednię:

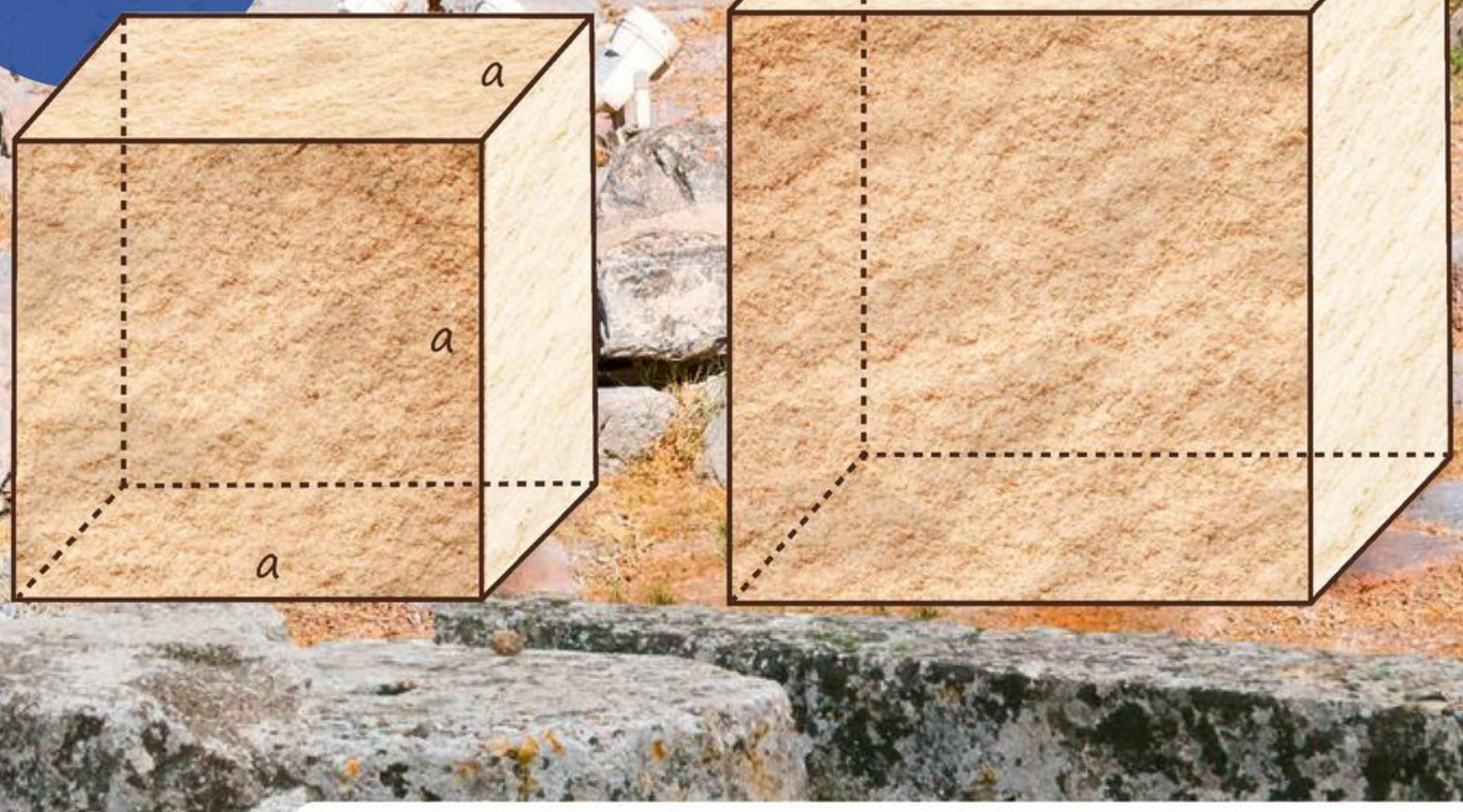
ZARAZA NIE USTANIE DOPÓTY, DOPÓKI SZEŚCIENNY OŁTARZ BOGA NIE ZOSTANIE POWIĘKSZONY TAK, BY DWUKROTNIE ZWIĘKSZYĆ OBJĘTOŚĆ.



Zwiększamy sześcian tak, aby podwoić jego objętość: $V = 2 \cdot a^3$

JAKĄ KRAWĘDŹ MA SZEŚCIAN O PODWOJONEJ OBJĘTOŚCI?

Objętość sześcianu o krawędzi a: $V = a^3$



Pytania i polecenia

- Ile jest równa długość krawędzi sześcianu o objętości $2 \cdot a^3$?
- Czy ta długość może być liczbą wymierną? A całkowitą? Zakładamy, że a jest liczbą naturalną.

Poznane własności działań na pierwiastkach kwadratowych są prawdziwe również dla pierwiastków trzeciego stopnia.

Pierwiastek z iloczynu i ilorazu

Zapamiętaj

Pierwiastek z iloczynu

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

dla $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

dla dowolnych liczb a i b

Pierwiastek z ilorazu

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

dla $a \geqslant 0$ i $b > 0$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

dla dowolnego a i $b \neq 0$

W wypadku dodawania i odejmowania podobne równości **nie zachodzą**, np.:
$\sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$, ale $\sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$.
Podobnie: $\sqrt[3]{216 + 125 + 1 + 1} = \sqrt[3]{343} = 7$,
ale $\sqrt[3]{216} + \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} = 6 + 5 + 1 + 1 = 13$.

Przykład 1

Oblicz.

a) $\sqrt[3]{8 \cdot 125}$ **b)** $\sqrt[3]{-27 \cdot 125}$ **c)** $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$ **d)** $\sqrt[3]{-\frac{27}{125}}$

a) $\sqrt[3]{8 \cdot 125} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{125} = 2 \cdot 5 = 10$

b) $\sqrt[3]{-27 \cdot 125} = \sqrt[3]{-27} \cdot \sqrt[3]{125} = -3 \cdot 5 = -15$

c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$

d) $\sqrt[3]{-\frac{27}{125}} = \frac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$

Podobnie:
$\sqrt{9 \cdot 25} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{25} = 3 \cdot 5 = 15$,
$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$.

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $\sqrt[3]{-8 \cdot 64}$ **b)** $\sqrt[3]{-\frac{125}{512}}$ **c)** $\sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{8}$ **d)** $\sqrt[3]{64 \cdot 0{,}008}$

Włączanie liczby pod znak pierwiastka

Przykład 2

Włącz liczbę pod znak pierwiastka w wyrażeniu $2\sqrt[3]{3}$.

Wiemy, że $2 = \sqrt[3]{2^3}$, więc

$$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}.$$

Podobnie włączamy liczbę pod znak pierwiastka np. w wyrażeniu $3\sqrt{5}$:

$3 = \sqrt{3^2}$, więc

$3\sqrt{5} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} =$
$= \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}.$

Ćwiczenie 2

Włącz liczbę pod pierwiastek.

a) $3\sqrt[3]{4}$ **b)** $4\sqrt[3]{3}$ **c)** $10\sqrt[3]{-1{,}1}$ **d)** $0{,}5\sqrt[3]{56}$

Wyłączanie liczby przed znak pierwiastka

Czynnością odwrotną do włączania liczby pod pierwiastek jest **wyłączanie liczby przed pierwiastek.**

Przykład 3.1

Wyłącz liczbę przed znak pierwiastka $\sqrt[3]{270}$.

Będziemy przekształcać pierwiastek **sześcienny**, więc rozkładamy liczbę 270 na czynniki tak, aby znaleźć w tym rozkładzie **sześcian** pewnej liczby.

$270 = 27 \cdot 10 = 3^3 \cdot 10,$

więc

$$\sqrt[3]{270} = \sqrt[3]{27 \cdot 10} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{10} = 3\sqrt[3]{10}.$$

Podobnie wyłączamy liczbę przed znak pierwiastka np. dla $\sqrt{175}$:

$175 = 25 \cdot 7 = 5^2 \cdot 7$, więc

$\sqrt{175} = \sqrt{25 \cdot 7} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{7} =$
$= 5\sqrt{7}.$

Zapamiętaj

$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ dla $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$

$\sqrt[3]{a^3 b} = a\sqrt[3]{b}$ dla dowolnych liczb a i b

Czasem trudno jest od razu rozłożyć liczbę na czynniki przydatne w dalszych obliczeniach. Wtedy może pomóc rozłożenie jej na czynniki pierwsze.

Przykład 3.2

Wyłącz liczbę przed znak pierwiastka $\sqrt[3]{37125}$.

Rozkładamy liczbę pod pierwiastkiem na czynniki pierwsze:

$37125 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 = 3^3 \cdot 5^3 \cdot 11.$

Przekształcamy pierwiastek **trzeciego stopnia**, więc przed znak pierwiastka możemy wyłączyć te czynniki pierwsze, które w rozkładzie są w trzeciej potędze.

$\sqrt[3]{37125} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 5^3 \cdot 11} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{11} = 3 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{11} = 15\sqrt[3]{11}$

Podobnie wyłączamy liczbę przed znak pierwiastka np. dla $\sqrt{2420}$:

$2420 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11^2$, więc

$\sqrt{2420} = \sqrt{2^2 \cdot 5 \cdot 11^2} =$

$= 2 \cdot 11 \cdot \sqrt{5} = 22\sqrt{5}.$

Ćwiczenie 3

Wyłącz liczbę przed pierwiastek.

a) $\sqrt[3]{16}$ **b)** $\sqrt[3]{54}$ **c)** $\sqrt[3]{-250}$ **d)** $\sqrt[3]{-9000}$

Wyłączanie liczby przed pierwiastek pozwala upraszczać wiele wyrażeń.

Przykład 4

Zapisz w prostszej postaci sumę $\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{-135}$.

Wyłączamy liczby przed pierwiastki.

$\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{-135} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} - \sqrt[3]{27 \cdot 5} = 2\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{5}$

Zarówno w odjemnej, jak i w odjemniku występuje liczba $\sqrt[3]{5}$, więc wyrażenie możemy uprościć, podobnie jak postępowaliśmy w przypadku pierwiastków kwadratowych (s. 124):

$2\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{5} = -\sqrt[3]{5}$, czyli $\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{-135} = -\sqrt[3]{5}$.

Podobnie upraszczamy np. sumę $\sqrt{20} + \sqrt{125}$:

$\sqrt{20} + \sqrt{125} =$

$= \sqrt{4 \cdot 5} + \sqrt{25 \cdot 5} =$

$= 2\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = 7\sqrt{5}.$

Ćwiczenie 4

Zapisz w prostszej postaci sumę:

a) $7\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{-4}$, **b)** $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$.

Zadania

1. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{-6{,}4} \cdot \sqrt[3]{10}$ **c)** $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{32}$ **e)** $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{-2}}$

b) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5}$ **d)** $\frac{\sqrt[3]{-32}}{\sqrt[3]{4}}$ **f)** $\frac{\sqrt[3]{750}}{\sqrt[3]{48}}$

2. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{36}$ **b)** $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{0{,}032}$ **c)** $\frac{\sqrt[3]{540}}{\sqrt[3]{20}}$ **d)** $\frac{\sqrt[3]{640}}{\sqrt[3]{-10}}$

3. Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt[3]{48}$ **c)** $\sqrt[3]{-375}$ **e)** $\sqrt[3]{800}$ **g)** $\sqrt[3]{24}$ **i)** $\sqrt[3]{-80}$

b) $\sqrt[3]{216}$ **d)** $\sqrt[3]{459}$ **f)** $\sqrt[3]{500}$ **h)** $\sqrt[3]{56}$ **j)** $\sqrt[3]{-243}$

4. Zapisz w prostszej postaci.

a) $6\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{9} - 3$ **b)** $\sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{-8}$ **c)** $\sqrt[3]{-80} + \sqrt[3]{-10}$

5. Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt{320}$ **b)** $\sqrt[3]{320}$ **c)** $\sqrt{80\,000}$ **d)** $\sqrt[3]{80\,000}$

6. Oblicz przybliżoną wartość wyrażenia z dokładnością do części setnych, korzystając z faktu, że $\sqrt[3]{5} \approx 1{,}709975946676$.

a) $2\sqrt[3]{5}$ **b)** $\sqrt[3]{5 \cdot 27}$ **c)** $\sqrt[3]{40}$ **d)** $\sqrt[3]{5\,000\,000}$

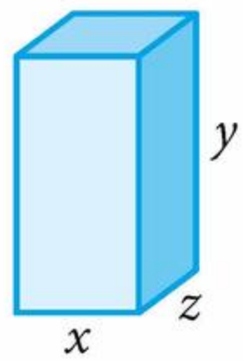
7. Prostokąt o wymiarach $x \times y$ i kwadrat mają równe pola. Oblicz długość boku kwadratu, jeśli:

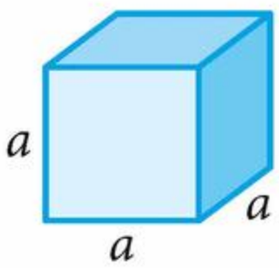
a) $x = \sqrt{24}$ cm, $y = \sqrt{6}$ cm, **b)** $x = \sqrt{32}$ cm, $y = \sqrt{8}$ cm.

E **8.** Prostopadłościan i sześcian mają równe objętości. Oblicz długość krawędzi a sześcianu, jeśli:

a) $x = \sqrt[3]{4}$ cm, $y = \sqrt[3]{6}$ cm, $z = \sqrt[3]{9}$ cm,

b) $x = \sqrt[3]{2}$ cm, $y = \sqrt[3]{4}$ cm, $z = 2$ cm.





9. Porównaj liczby $\sqrt{\sqrt[3]{1\,000\,000}}$ oraz $\sqrt[3]{\sqrt{1\,000\,000}}$.

10. Wiedząc, że $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 37 = 3108$, wyciągnij sprytnie liczbę przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt{21 \cdot 3108}$ **c)** $\sqrt[3]{2 \cdot 49 \cdot 3108}$

b) $\sqrt{111 \cdot 3108}$ **d)** $\sqrt[3]{9 \cdot 49 \cdot 3108}$

Dla dociekliwych

Spróbujmy zdefiniować pierwiastek jako... potęgę. Jaki wykładnik powinna mieć taka potęga, żeby poznane przez nas prawa działań na potęgach i pierwiastkach nadal obowiązywały?
Wyobraźmy sobie, że liczbę $\sqrt{2}$ zapisujemy jako potęgę liczby 2, musimy tylko znaleźć właściwy wykładnik.
Jeśli $\sqrt{2} = 2^x$, to:
$2^1 = 2 = \sqrt{2}^2 = (2^x)^2 = 2^{2x}$, czyli $2^1 = 2^{2x}$.
W takim razie powinniśmy przyjąć, że $x = \frac{1}{2}$, czyli $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$.

1. Zapisz pierwiastek w postaci potęgi.

a) $\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt{7}$

2. Zapisz wyrażenie w postaci potęgi liczby 2. Skorzystaj z praw działań na potęgach.

a) $(\sqrt{2})^3$ **b)** $2\sqrt{2}$ **c)** $4\sqrt{2}$ **d)** $\frac{1}{2}$ **e)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **f)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$

3. Jak zapisać podany pierwiastek w postaci potęgi liczby 7?

a) $\sqrt[3]{7}$ **b)** $\sqrt[n]{7}$

4. Jak zapisać $\sqrt[n]{a}$ w postaci potęgi o podstawie a (dla $a \geqslant 0$)?

Czy już umiem?

I. Oblicz.

a) $\frac{\sqrt[3]{10\,000}}{\sqrt[3]{10}}$ **b)** $\sqrt[3]{320} \cdot \sqrt[3]{0{,}2}$ **c)** $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{64}$ **d)** $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

II. Które z podanych wyrażeń jest równe różnicy $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2}$?

A. $2\sqrt[3]{2}$ **B.** $\sqrt[3]{52}$ **C.** $\sqrt[3]{108}$ **D.** $3\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{2}$

III. Pewien sześcian ma taką samą objętość jak prostopadłościan o wymiarach $1{,}5\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} \times \frac{4}{3}$. Oblicz długość krawędzi tego sześcianu.

IV. Oblicz cenę zestawu w promocji.

a)



~~153 zł~~
−10%

b)



~~180 zł~~
−15%

6 Działania na potęgach i pierwiastkach

Na dobry początek

Na planszy do gry znajduje się dziewięć baszt połączonych mostami. Zasady gry przedstawiono obok.

Instrukcja

- Zaczynasz grę na polu START.
- Po mostach przechodzisz na kolejne baszty, ale tylko zgodnie z kierunkiem strzałek i tylko wtedy, gdy liczby na basztach po obu stronach mostu są równe.
- Przechodzisz na kolejne baszty tak długo, aż dalszy ruch nie będzie możliwy.



Pytania i polecenia

- Zagraj w grę. Litery na mostach, przez które przejdziesz, czytane kolejno utworzą nazwę „matematycznego miejsca”, w którym matematyk nie lubi niewymierności.

Usuwanie niewymierności z mianownika

Przykład 1

Porównaj liczby $3\sqrt{2}$ i $\frac{6}{\sqrt{2}}$.

Łatwiej będzie porównać liczby, gdy w mianowniku ułamka nie będzie pierwiastka.

W tym celu możemy rozszerzyć ułamek przez $\sqrt{2}$.

$$\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

Okazuje się, że $3\sqrt{2}$ i $\frac{6}{\sqrt{2}}$ to dwa sposoby zapisu tej samej liczby.

Przekształcanie ułamka do takiej postaci, w której w mianowniku nie występuje niewymierny pierwiastek, nazywa się **usuwaniem niewymierności z mianownika.**

Ćwiczenie 1.1

Sprawdź, czy podane liczby są równe.

a) $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ i $\frac{2}{\sqrt{6}}$ **b)** $2\sqrt{7}$ i $\frac{14}{\sqrt{7}}$

Ćwiczenie 1.2

Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ **b)** $\frac{4}{\sqrt{3}}$ **c)** $\frac{1}{2\sqrt{5}}$ **d)** $\frac{5}{2\sqrt{10}}$

Potęgi i pierwiastki

Co się dzieje, gdy pierwiastek kwadratowy podnosimy do trzeciej potęgi?

Przykład 2

Oblicz $(2\sqrt{3})^3$.

$$(2\sqrt{3})^3 = 2^3 \cdot (\sqrt{3})^3 = 8 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 8 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $(3\sqrt{2})^3$ **b)** $\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)^3$

Wiemy, że dla **liczb nieujemnych** a: $\sqrt{a^2} = a$. A jak jest dla liczb ujemnych?

Przykład 3

Oblicz: **a)** $\sqrt{(-10)^2}$, **b)** $\sqrt{(-1{,}5)^2}$.

a) $\sqrt{(-10)^2} = \sqrt{100} = 10$ **b)** $\sqrt{(-1{,}5)^2} = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$

Zauważmy, że wynikiem działania $\sqrt{(-10)^2}$ jest wartość bezwzględna liczby -10.
$\sqrt{(-10)^2} = \sqrt{100} = 10 = |-10|$

Podobnie jest dla dowolnej liczby ujemnej. Również dla liczb dodatnich i zera można napisać $\sqrt{a^2} = |a|$, bo dla takich liczb $|a| = a$.

Zapamiętaj

Dla dowolnej liczby a:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Ćwiczenie 3

Oblicz: **a)** $\sqrt{(-17)^2}$, **b)** $\sqrt{23^2}$, **c)** $\sqrt{0^2}$.

Zadania

1. Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **b)** $\frac{2}{\sqrt{5}}$ **c)** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ **d)** $\frac{2}{3\sqrt{5}}$ **e)** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ **f)** $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

2. Sprawdź, czy liczby są równe.

a) $\frac{3}{\sqrt{15}}$ i $\frac{\sqrt{15}}{5}$ **b)** $2\sqrt{8}$ i $\frac{4}{\sqrt{8}}$ **c)** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ i $\frac{3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}$

3. Usuń niewymierność z mianownika. Korzystając z przybliżenia $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, podaj przybliżoną wartość wyrażenia po zaokrągleniu do jednego miejsca po przecinku.

a) $\frac{8}{\sqrt{2}}$ **b)** $\frac{6}{\sqrt{8}}$ **c)** $\frac{10}{\sqrt{2}}$

4. Oblicz.

a) $\sqrt{8^2} + \sqrt{36^2}$ **c)** $(\sqrt{28})^2 - (\sqrt{16})^2$ **e)** $\sqrt[3]{1000^2} + \sqrt{100^3}$

b) $\sqrt[3]{27^3} + \sqrt[3]{3^3}$ **d)** $(\sqrt[3]{9})^3 - (\sqrt[3]{19})^3$ **f)** $(\sqrt{64})^3 - \sqrt[3]{8^2}$

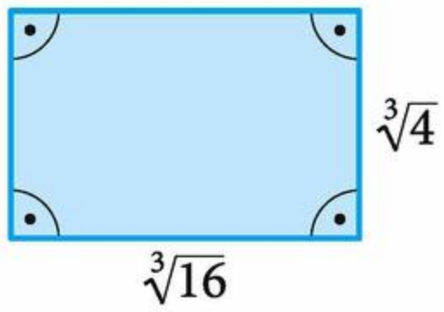
5. Doprowadź podaną liczbę do postaci $a\sqrt{b}$, gdzie a jest liczbą całkowitą i b jest liczbą naturalną.

a) $8\sqrt{3}+\sqrt{27}$ **c)** $\sqrt{48}+\sqrt{12}$ **e)** $\sqrt{72}+\sqrt{50}-\sqrt{32}$

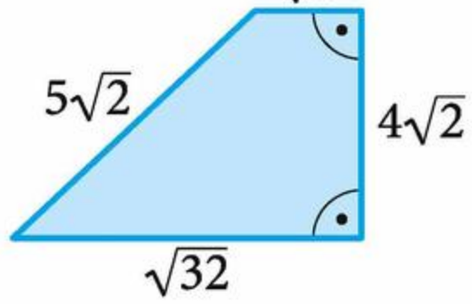
b) $7\sqrt{5}-\sqrt{125}$ **d)** $\sqrt{75}-\sqrt{300}$ **f)** $\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{500}$

6. Oblicz obwód i pole figury.

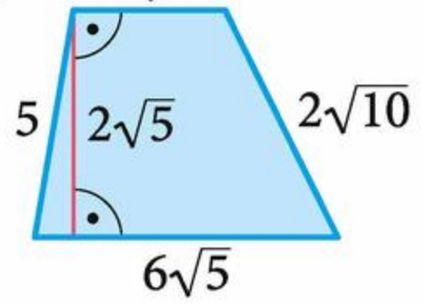
a)



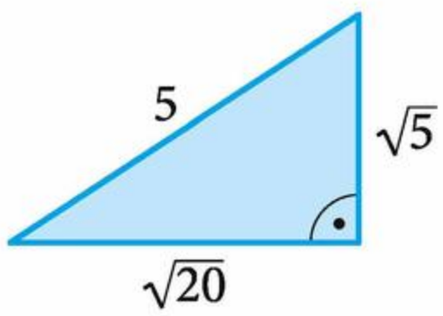
c)



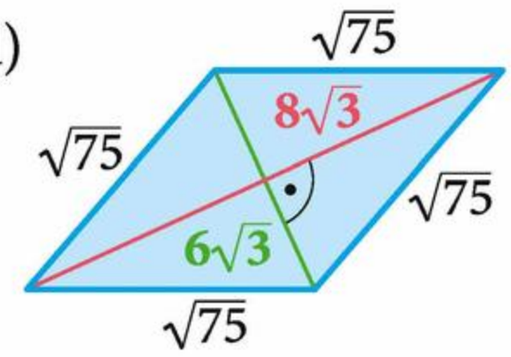
e)



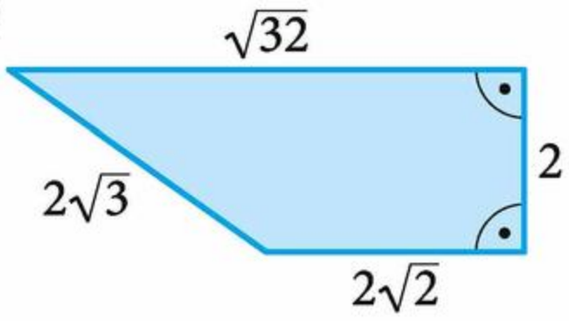
b)



d)



f)



7. Dane są cztery zestawy wyrażeń. Dobierzcie się w trójki. Każda osoba w trójce wybiera inne wyrażenie z zestawu i wykonuje obliczenia. Sprawdźcie, czy otrzymaliście jednakowe wyniki. Jeśli nie – poszukajcie błędu.

I. $\frac{2^3+2^0}{2^6}$	$\frac{9^9:(3^6\cdot 3^4)}{6^6}$	$\frac{81\cdot 3^4}{3^6:0{,}5^6}$
II. $-\frac{\sqrt{5^3}}{\sqrt{2^2+1^2}}$	$\sqrt[3]{-\frac{500}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}}}$	$\frac{5}{6}:\frac{4\cdot(-9)^3}{3\left(\sqrt{18^2}\right)^3}$
III. $\frac{\sqrt[3]{10000}}{\sqrt[3]{(3^4-3^0):8}}$	$2\cdot\left(3\sqrt{5}-\frac{10}{\sqrt{5}}\right)^2$	$\frac{(4^9:2^{14})^2}{(\sqrt{10})^{14}}\cdot 5^8$
IV. $\sqrt[3]{8^2:0{,}2^6}$	$50\cdot\frac{2^5+2^5}{(2^3)^4:2^{3+4}}$	$36+1:\left(\frac{\sqrt{8}}{2}-\frac{2}{\sqrt{8}}\right)^{12}$

8. Prostopadłościan o wymiarach $x \times y \times z$ i sześcian mają taką samą objętość. Oblicz długość krawędzi sześcianu, jeśli:

a) $x=\sqrt{2}$ cm, $y=\sqrt{8}$ cm, $z=2$ cm,

b) $x=2\sqrt{12}$ cm, $y=3\sqrt{6}$ cm, $z=\sqrt{18}$ cm.

9. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\left(\left(\sqrt{2^3}\right)^6\right)^0$ **b)** $\sqrt{10\cdot\sqrt[3]{1000}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ **c)** $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}\cdot\sqrt[3]{0{,}008}+\frac{\sqrt{4\,000\,000}}{\sqrt{10\,000}}$

Dla dociekliwych

1. Przeanalizuj przykład w ramce.

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}} = \frac{3 \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

Na jego podstawie usuń niewymierność z mianownika podanego ułamka.

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ **b)** $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$ **c)** $\frac{5}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^2}$ **d)** $\frac{4}{\sqrt[3]{7^2}}$ **e)** $\frac{3}{\sqrt[3]{9}}$

Podobnie możemy usuwać niewymierność z mianownika, jeżeli w mianowniku są pierwiastki innych stopni.

2. Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{6}{\sqrt[4]{2}}$ **b)** $\frac{9}{\sqrt[5]{3}}$ **c)** $\frac{1}{\left(\sqrt[4]{5}\right)^3}$ **d)** $\frac{8}{\sqrt[5]{2^2}}$ **e)** $\frac{2}{\sqrt[4]{8}}$

Czy już umiem?

I. Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ **b)** $\frac{1}{4\sqrt{5}}$ **c)** $\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

II. Która z liczb jest równa liczbie $\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{8}}$?

A. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $3\sqrt{2}$ **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

III. Oblicz.

a) $\left(\sqrt{(-5)^2}\right)^3$ **b)** $(2\sqrt{7})^2 + \sqrt[3]{729}$ **c)** $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^3$ **d)** $3\sqrt{32} + 5\sqrt{18}$

IV. Z którego wzoru można skorzystać, aby uprościć podane wyrażenie?

a) $3^7 \cdot 3^8$ **b)** $4^6 - 2^6$ **c)** $(2^8)^8$ **d)** $2^5 + 2^3$ **e)** $(2^5)^2$ **f)** $12^4 \cdot 12^3$ **g)** $\frac{8^5}{8^1}$ **h)** $2^5 - 2^3$ **i)** $\frac{2^5}{2^3}$

Wybierz odpowiedź z ramki.

A. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

B. $a^n : a^m = a^{n-m}$ $(n \geqslant m,\ a \neq 0)$

C. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

D. z żadnego z wymienionych

Powtórzenie III

ZESTAW 1

1. Oblicz.

a) $\sqrt{81}$ **c)** $\sqrt{64}+\sqrt[3]{64}$ **e)** $\sqrt{\frac{16}{121}}$ **g)** $\sqrt{196\cdot 4}+\sqrt{100}$

b) $\sqrt[3]{-1}$ **d)** $\sqrt{0{,}16}$ **f)** $\sqrt{1\frac{11}{25}}$ **h)** $\sqrt[3]{27\cdot 64\cdot 125}$

2. Oblicz, wykorzystując poznane własności działań na pierwiastkach.

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$ **b)** $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$ **c)** $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$ **d)** $\sqrt[3]{0{,}6}\cdot\sqrt[3]{0{,}36}$

3. Oblicz, wykorzystując poznane własności działań na pierwiastkach.

a) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ **b)** $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{63}}$ **c)** $\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}}$ **d)** $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{192}}$

4. Wyłącz liczbę przed pierwiastek.

a) $\sqrt{12}$ **b)** $\sqrt{20}$ **c)** $\sqrt{45}$ **d)** $\sqrt{108}$ **e)** $\sqrt[3]{48}$ **f)** $\sqrt[3]{128}$

5. Oblicz.

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{15}$ **b)** $\sqrt{\frac{4}{5}}\cdot\sqrt{0{,}6}\cdot\sqrt{12}$ **c)** $\sqrt[3]{1\frac{1}{5}}\cdot\sqrt[3]{2{,}5}\cdot\sqrt[3]{1\frac{1}{8}}$

6. Podaj dwie kolejne liczby całkowite, między którymi leży na osi liczbowej podany pierwiastek.

a) $\sqrt{7}$ **b)** $-\sqrt{15}$ **c)** $-\sqrt{85}$ **d)** $\sqrt{162}$ **e)** $\sqrt[3]{-75}$ **f)** $\sqrt[3]{245}$

7. Oblicz.

a) $\sqrt{131^2}$ **b)** $\sqrt{19}\cdot 2\cdot\sqrt{19}$ **c)** $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}$

8. Włącz liczbę pod znak pierwiastka.

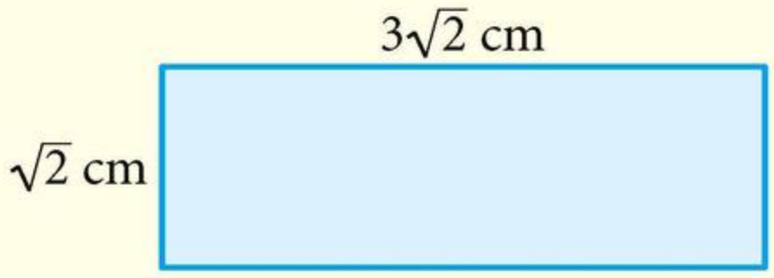
a) $2\sqrt{3}$ **b)** $3\sqrt{3}$ **c)** $5\sqrt{2}$ **d)** $5\sqrt{5}$ **e)** $3\sqrt[3]{3}$ **f)** $10\sqrt[3]{3}$

9. Usuń niewymierność z mianownika.

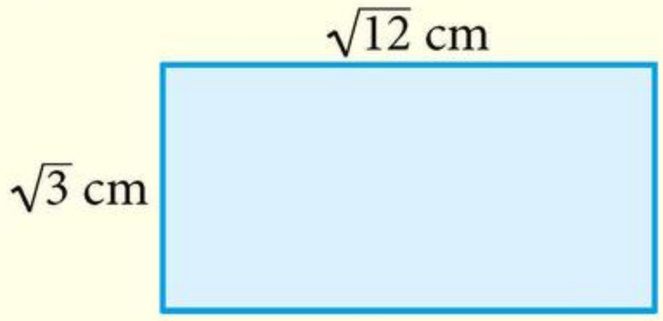
a) $\frac{4}{\sqrt{2}}$ **b)** $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ **c)** $\frac{4}{\sqrt{3}}$ **d)** $\frac{6}{5\sqrt{3}}$

10. Oblicz pole i obwód prostokąta przedstawionego na rysunku.

a)



b)



ZESTAW 2

1. Uporządkuj liczby: $\frac{1}{2}$, $-\sqrt{9}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{27}$, $\frac{7}{6}$, $\sqrt[3]{8}$, $0,(4)$, $\sqrt{0,25}$ w kolejności od najmniejszej do największej.

2. Oblicz.

a) $\left(1\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right)^2$ **b)** $-2\cdot 5^2$ **c)** $\frac{-4^2}{\sqrt{25-9}}$ **d)** $\left(\sqrt{121}-7\frac{1}{2}\right)^3$

3. Oblicz.

a) $\sqrt{\sqrt{81}}$ **b)** $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ **c)** $\sqrt[3]{\sqrt[3]{1}}$ **d)** $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$

4. Wśród poniższych liczb wskaż wszystkie te, które są liczbami wymiernymi.

$\sqrt{1,44}$, $\sqrt{\frac{1}{16}}$, $\sqrt{\frac{64}{81}}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{\frac{49}{16}}$, $\sqrt[3]{12}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[3]{-1000}$

5. Która z liczb jest większa: $5\sqrt{3}$ czy $\sqrt{74}$?

6. Oblicz pole prostokąta o bokach długości:

a) $\sqrt{3}$ cm i $\sqrt{27}$ cm, **b)** $2\sqrt{6}$ cm i $6\sqrt{2}$ cm, **c)** $3\sqrt{15}$ cm i $2\sqrt{10}$ cm.

7. Liczbę x zapisz w postaci $a\sqrt{2}$. Podaj jej przybliżenie dziesiętne, korzystając z przybliżenia $\sqrt{2}\approx 1,4$.

a) $x=\sqrt{18}$ **b)** $x=\sqrt{50}$ **c)** $x=\sqrt{8}+\sqrt{200}$

8. Najmniejszą spośród liczb: $9\sqrt{2}$, $2\sqrt{6}$, $8\sqrt{3}$, $4\sqrt{5}$ jest liczba

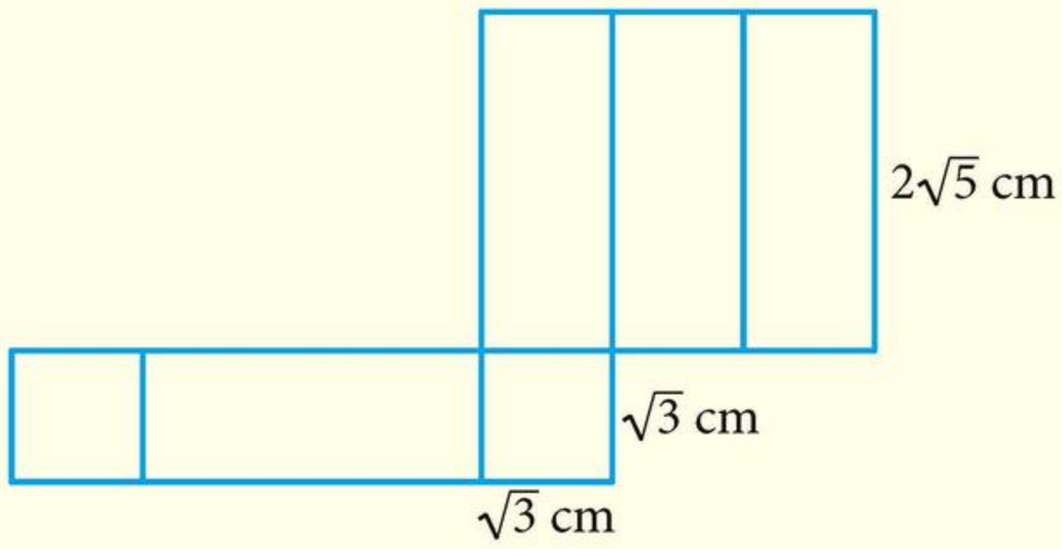
A. $9\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $8\sqrt{3}$. **D.** $4\sqrt{5}$.

9. Przedstaw w prostszej postaci sumę $\sqrt{50}+\sqrt{18}$.

10. Uprość wyrażenie.

a) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$ **b)** $\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ **c)** $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

11. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu, którego siatkę przedstawiono na rysunku.



Zadania na temat…

Grecy i liczby niewymierne

Czy 2 i 5 to liczby? A $\frac{2}{7}$, 0, -8, $\sqrt{2}$? My bez wahania odpowiemy, że tak. Ale nie zawsze tak było.

Starożytni Grecy liczbami nazywali tylko liczby naturalne dodatnie. Ułamki uważali za proporcje liczb. Pierwiastek z 2, którego niewymierność odkryto około 500 r. p.n.e., uważano za proporcję odcinków. I to nie byle jakich odcinków: tyle właśnie razy dłuższa jest przekątna kwadratu od jego boku.

Greccy matematycy uważali, że niektórych odcinków nie da się opisać za pomocą liczb, dlatego rozwijali przede wszystkim geometrię jako dziedzinę ogólniejszą od arytmetyki.

Z liczbami więcej do czynienia mieli starożytni astronomowie. Właśnie oni nie później niż w I wieku n.e. wynaleźli *cyfrę* zero. Ale nie *liczbę* zero. Dość łatwo było im zauważyć, że potrzebny jest znak oznaczający puste miejsce w liczbie, np. odróżniający 12 od 102. Znacznie trudniej było uznać, że „nic" też można uważać za samodzielną liczbę.

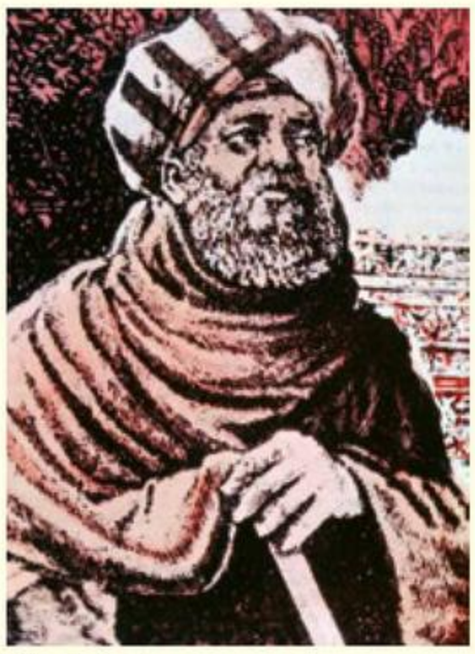
Hindusi, zero i liczby ujemne

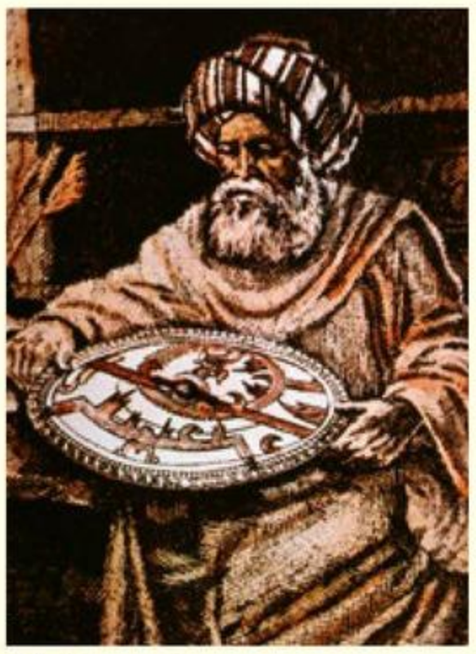
Zero jako cyfra pojawiło się w podobnym okresie także w Indiach. Natomiast zero jako liczba oraz liczby ujemne są już bez wątpienia wynalazkiem matematyków ze średniowiecznych Indii. Hindusi zajmowali się arytmetyką jako sztuką dla sztuki, interesowały ich własności działań i nie widzieli przeszkód, aby rozważać także wynik odejmowania $5 - 5$ albo nawet $5 - 6$.

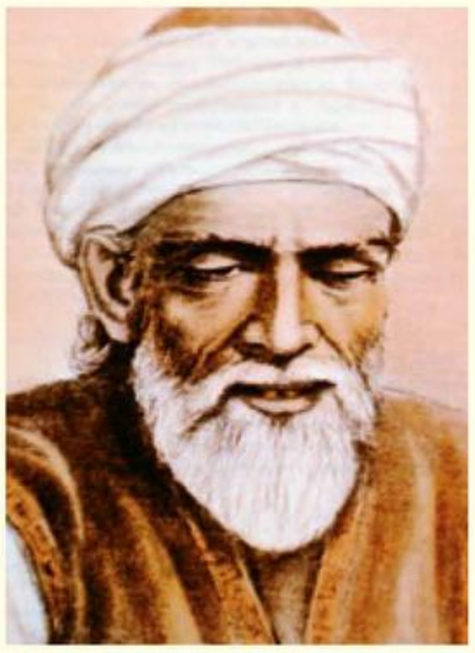
Pierwsze wzmianki na temat liczb ujemnych znajdujemy w hinduskich dziełach z VII wieku n.e., czyli z okresu, gdy po upadku Cesarstwa Rzymskiego nauka europejska praktycznie nie istniała.

Kiedy zaś na naszym kontynencie ludzie znowu zaczęli zajmować się matematyką, najpierw uczyli się jej od uczonych arabskich, którzy przekazali im także wiedzę Hindusów i Greków.


Al-Kindi


Thabit ibn Qurrah


Al-Battani


Abu al-Wafa

Pierwszym ważnym samodzielnym osiągnięciem średniowiecznych Europejczyków było rozwiązanie równań trzeciego stopnia, czyli takich, w których niewiadoma występuje w trzeciej potędze, np. $x^3 + 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x = 150$. Takie równanie może mieć jedno, dwa lub trzy rozwiązania. Aby znaleźć te rozwiązania, matematycy posługiwali się w obliczeniach liczbami ujemnymi, ale gdy ostateczne rozwiązanie było ujemne – odrzucali je, bo nadal nie uważali liczb ujemnych za pełnoprawne liczby.

Co dalej?

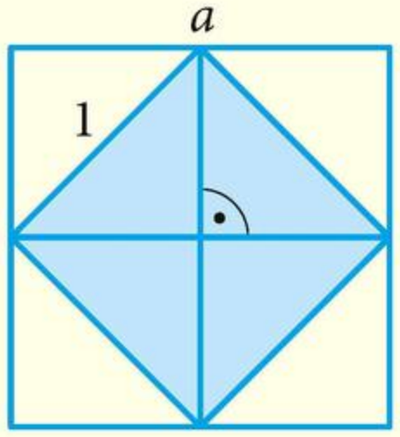
Dziś w szkole także uczy się o różnych rodzajach liczb stopniowo, choć nie dokładnie w takiej kolejności, w jakiej odkrywano je w dawnych czasach. Małe dzieci znają tylko liczby naturalne, potem pojawiają się dodatnie ułamki, następnie liczby ujemne i wreszcie w siódmej klasie – liczby niewymierne. Czy to wszystko? Matematycy, fizycy i inżynierowie znają też inne rodzaje liczb, ale to już zupełnie inna historia.

1. Ile mniej więcej lat dzieli nas od odkrycia liczb niewymiernych, a ile – od odkrycia liczb ujemnych?

2. Ile mniej więcej kilometrów dzieli nas od miejsca odkrycia liczb niewymiernych, a ile – od miejsca odkrycia liczb ujemnych? Możesz skorzystać z mapy.

3. Uzasadnij, że przekątna kwadratu o boku 1 ma długość $\sqrt{2}$.

Wskazówka. Skorzystaj z rysunku. Porównaj pole kwadratu o boku a i pole kwadratu o boku 1.



4. W zapisie działania $10 \cdot 2 - 2 - 18 = 0$ występują dwie cyfry zero. Która z nich oznacza liczbę zero?

5. **a)** Czy suma liczb naturalnych zawsze jest liczbą naturalną? A różnica, iloczyn, iloraz (pomijamy dzielenie przez zero)? Jeśli nie, podaj przykład.

Różnica liczb naturalnych nie zawsze jest liczbą naturalną, np. 5 – 7 nie jest liczbą naturalną.

b) A jak jest dla liczb całkowitych, wymiernych, niewymiernych? Odpowiedzi zapisz w tabeli narysowanej w zeszycie według wzoru.

	Suma	**Różnica**	**Iloczyn**	**Iloraz**
liczby naturalne	TAK	NIE (np. 5 – 7)	?	?
liczby całkowite	?	?	?	?
liczby wymierne	?	?	?	?
liczby niewymierne	?	?	?	?

Zadania na deser

1. Rozwiąż łamigłówkę. Jednakowe litery oznaczają jednakowe cyfry, a różne litery – różne cyfry. Oznaczenia BA, KA itp. oznaczają liczby dwucyfrowe, MRU i MUR – liczby trzycyfrowe.

a) $\sqrt{\text{BA}} = \text{N} = \sqrt[3]{\text{AN}}$

b) $\sqrt{\text{KA}} = \text{J} = \text{A} - \sqrt{\text{K}}$

c) $\sqrt{\text{MRU}} - \sqrt{\text{MUR}} = \sqrt{\text{M}}$

d) $\text{A} \cdot \text{B} = \sqrt{\text{CB}} = \text{A} + \text{C}$

e) $\text{A} \cdot \text{B} = \sqrt{\text{CB}} = \text{B} + \text{C}$

2. Uporządkuj rosnąco liczby: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[5]{5}$.

3. Nie korzystając z kalkulatora, wskaż wartość pierwiastka.

a) $\sqrt[3]{19\,683}$ 23 27 53 57

b) $\sqrt[3]{941\,192}$ 32 38 92 98

Wskazówka. Skorzystaj ze sposobu opisanego dla pierwiastków kwadratowych w „Dla dociekliwych" na s. 113.

4. Janek podzielił odcinek AB na dwa odcinki w stosunku 2 : 3. Prostokąt, którego boki mają takie długości jak te odcinki, ma pole 726 cm^2. Jaką długość miał odcinek AB?

5. Znajdź x, dla którego zachodzi podana równość. W podpunkcie e) są dwa rozwiązania.

a) $\sqrt[3]{125} = \sqrt{x}$

b) $\sqrt[3]{0{,}125} = \sqrt{x}$

c) $\sqrt[3]{x} = \sqrt{121}$

d) $\sqrt[3]{x} = \sqrt{1{,}21}$

e) $\sqrt[3]{x} = \sqrt{x}$

f) $\sqrt[3]{x} = -\sqrt{49}$

6. Dla jakich liczb naturalnych n istnieje pierwiastek $\sqrt{81 - 3 \cdot n}$? Dla jakich liczb naturalnych n ten pierwiastek jest liczbą wymierną?

7. Oblicz sprytnie.

a) $\sqrt{1111 - 22}$

b) $\sqrt{111111 - 222}$

c) $\sqrt{11111111 - 2222}$

d) $\sqrt{\underbrace{11\ldots11}_{\text{200 jedynek}} - \underbrace{2\ldots2}_{\text{100 dwójek}}}$

8. Czy podane liczby są odwrotne? Czy są przeciwne? Uzasadnij odpowiedzi.

a) $\sqrt{2}$ oraz $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $1 - \sqrt{2}$ oraz $\sqrt{2} - 1$

c) $1 + \sqrt{2}$ oraz $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

9. Oblicz.

$$\sqrt{\frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + \ldots + 100 \cdot 200}{2 \cdot 25 + 4 \cdot 50 + 6 \cdot 75 + \ldots + 200 \cdot 2500}}$$

10. Znajdź taką liczbę naturalną dodatnią n, że $\sqrt[3]{3 \cdot n}$ oraz $\sqrt[4]{4 \cdot n}$ są liczbami naturalnymi. Ile jest takich liczb n?

1 Od wzorków do wzorów

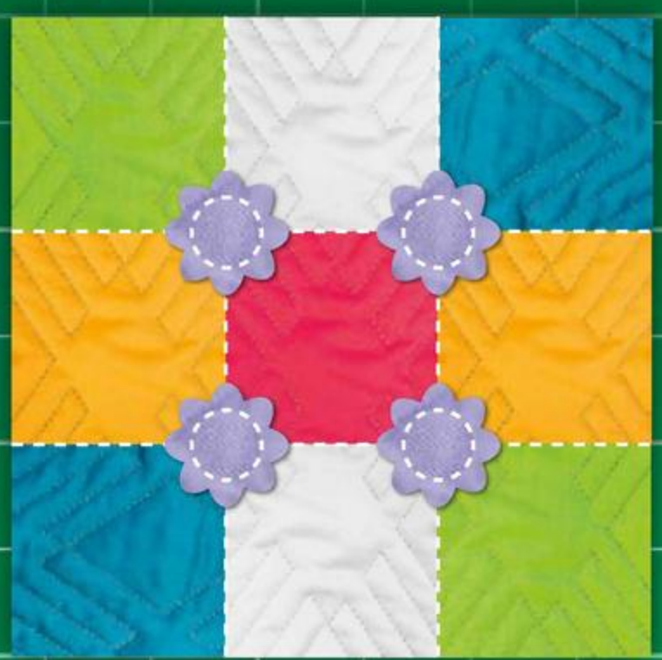
Na dobry początek

Janek zszywa patchwork z kwadratowych kawałków materiału. Na każdym połączeniu czterech kawałków doszywa ozdobny kwiatek. Oto kolejne etapy pracy.

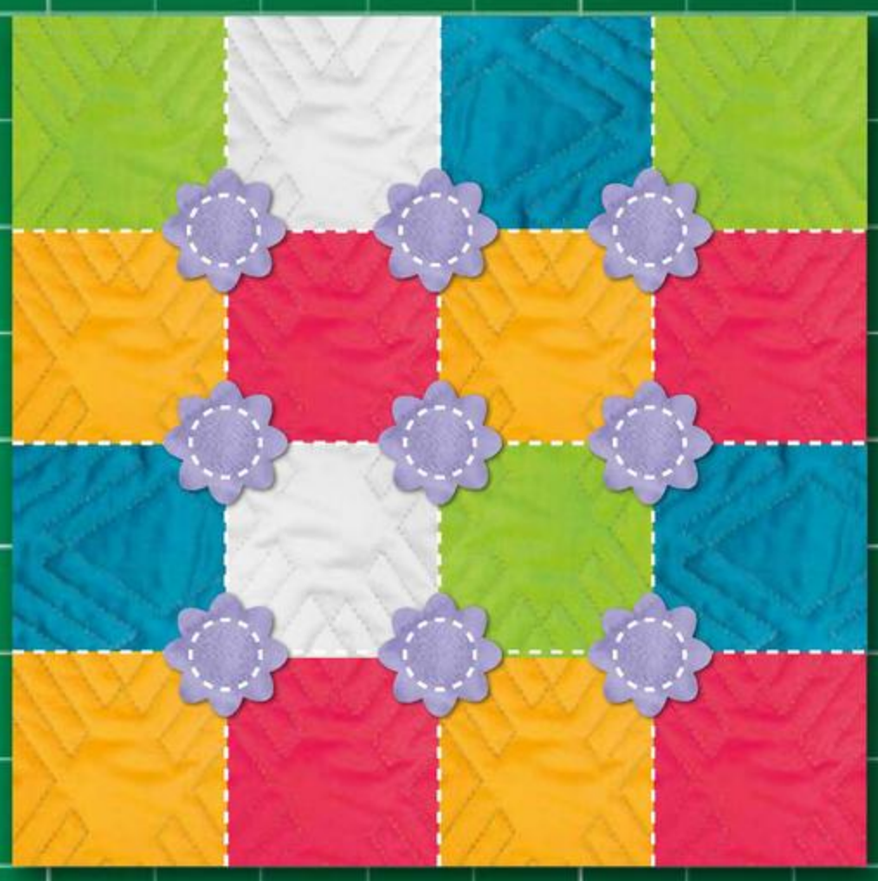
4 zszyte kwadraty –
1 kwiatek



9 zszytych kwadratów –
4 kwiatki



16 zszytych kwadratów –
9 kwiatków



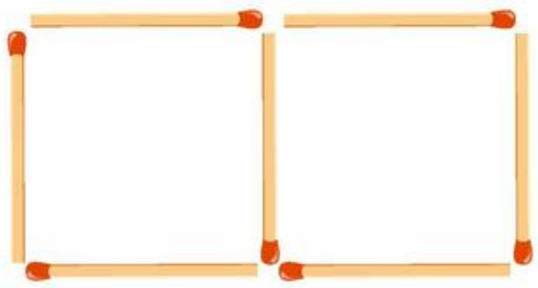
Pytania i polecenia

- Ile kwiatków należy przyszyć na patchwork 5 kwadratów × 5 kwadratów? Spróbuj to przewidzieć, a następnie wykonaj rysunek pomocniczy i sprawdź swoją odpowiedź.
- A ile na ogromny patchwork 30 kwadratów × 30 kwadratów?

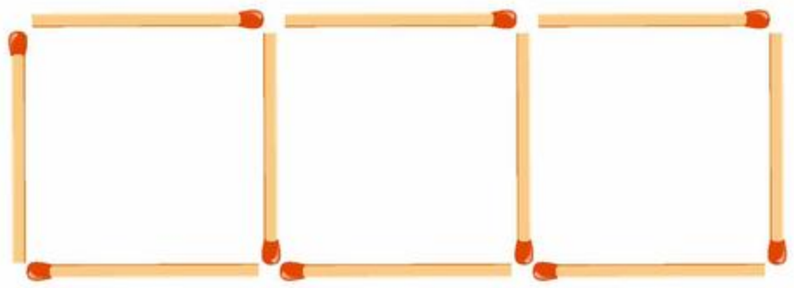
Przyjrzyj się rysunkom.



1 kwadrat – 4 zapałki



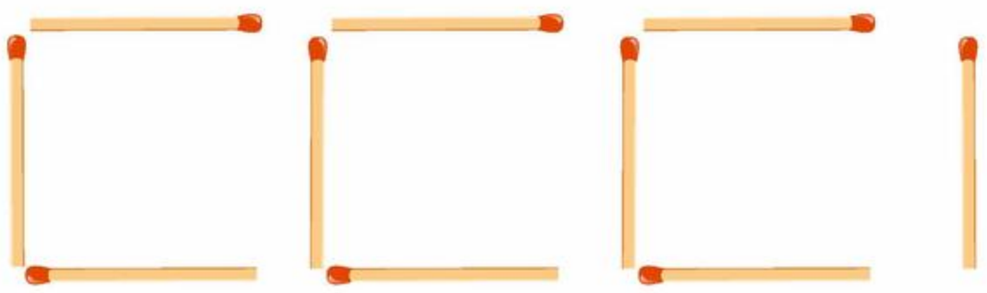
2 kwadraty – 7 zapałek



3 kwadraty – 10 zapałek

Ilu zapałek potrzeba, aby w ten sam sposób ułożyć cztery kwadraty, pięć kwadratów oraz sześć kwadratów? A ilu – aby ułożyć sto kwadratów w jednym rzędzie? A tysiąc kwadratów? W tym przypadku rysowanie byłoby zbyt pracochłonne. Możemy to obliczyć znacznie szybciej, jeśli zauważymy **ogólną zależność**, pozwalającą znaleźć liczbę zapałek dla dowolnej liczby kwadratów.

Każdy kwadrat składa się z trzech zapałek (bo czwarty bok należy już do następnego kwadratu). Dopiero na końcu musimy dodać jeszcze jedną zapałkę, żeby zamknąć rysunek.



Możemy powiedzieć: „Łącznie jest trzy razy tyle zapałek, ile kwadratów, i jeszcze jedna". Żeby unikać takich długich opisów słownych, w matematyce dla uproszczenia stosujemy symbole literowe. Jeśli liczbę kwadratów oznaczymy literą n, możemy zapisać liczbę zapałek jako:

$$3 \cdot n + 1$$

trzy razy tyle, ile kwadratów i jeszcze jedna zapałka

Wyrażenia algebraiczne

Przypomnijmy, że zapis jednego lub kilku działań na liczbach, np.:

$3 \cdot 5 + 1$ $\qquad$ $3 - 8$ $\qquad$ $17 \cdot (15 : 5 \cdot 23 - 14 : 5) - 12$

nazywamy **wyrażeniem arytmetycznym**.

Szerszym pojęciem jest **wyrażenie algebraiczne**. Mogą w nim wystąpić nie tylko konkretne liczby, lecz także litery zastępujące liczby, np.:

$3 \cdot n - 1$ $\qquad$ $a - b$ $\qquad$ $x \cdot (15 : m \cdot n^3 - m : 5) - r$

Słowo ***arytmetyka*** pochodzi z języka greckiego, a słowo ***algebra*** – z języka arabskiego.

Zapamiętaj

W wyrażeniach algebraicznych oprócz (lub zamiast) liczb mogą się pojawiać także litery.

Litery w takim wyrażeniu nazywamy **zmiennymi**. Na przykład zmienną w rozważaniach dotyczących układania kwadratów z zapałek jest litera n.
Słowo „zmienna" oznacza, że n może się zmieniać: czasem oznacza liczbę 2, czasem liczbę 3, a kiedy indziej 100. Dzięki temu jednym wyrażeniem możemy opisać sytuację dla różnych danych. Na przykład w geometrii jeden wzór $P = ab$ opisuje sposób obliczania pól prostokątów o wszystkich możliwych bokach.

Wartość wyrażenia algebraicznego

Wyrażenie algebraiczne nie oznacza żadnej konkretnej liczby. Kiedy jednak określimy, jaką liczbę symbolizuje zmienna, wyrażenie zyskuje określoną wartość liczbową.
Popatrzmy na przykład, jakie wartości przyjmuje nasze wyrażenie opisujące liczbę zapałek: $3 \cdot n + 1$ dla różnych wartości n (czyli różnych liczb kwadratów).

n kwadratów	$(3 \cdot n + 1)$ zapałek	Z ilu zapałek ułożymy te kwadraty?
$n = 1$	$3 \cdot n + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 3 + 1 = 4$	1 kwadrat ułożymy z 4 zapałek.
$n = 2$	$3 \cdot n + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7$	2 kwadraty ułożymy z 7 zapałek.
$n = 3$	$3 \cdot n + 1 = 3 \cdot 3 + 1 = 9 + 1 = 10$	3 kwadraty ułożymy z 10 zapałek.
$n = 100$	$3 \cdot n + 1 = 3 \cdot 100 + 1 = 301$	100 kwadratów ułożymy z 301 zapałek.
$n = 1000$	$3 \cdot n + 1 = 3 \cdot 1000 + 1 = 3001$	1000 kwadratów ułożymy z 3001 zapałek.

Przykład 1.1

Oblicz wartość wyrażenia dla podanych wartości zmiennych.

a) $x \cdot (x + 2)$ dla $x = 3$
b) $5 \cdot x^2 + 1$ dla $x = -2$
c) $(x^2 - 1) \cdot y$ dla $x = -5$, $y = 3$

a) Przepisujemy wyrażenie. W kolejnym kroku zamiast litery oznaczającej zmienną wpisujemy liczbę – wartość tej zmiennej, a następnie wykonujemy działania.

$$x \cdot (x + 2) = 3 \cdot (3 + 2) = 3 \cdot 5 = 15$$

b) Podstawiamy podaną wartość zmiennej w miejsce x. Zwróć uwagę, że -2 wpisujemy w nawiasie, ponieważ do kwadratu podnosimy całą liczbę x, czyli -2. Następnie wykonujemy działania.

$$5 \cdot x^2 + 1 = 5 \cdot (-2)^2 + 1 = 5 \cdot 4 + 1 = 20 + 1 = 21$$

c) Tym razem mamy dwie zmienne – w miejsce każdej z nich podstawiamy odpowiednią liczbę.

$$(x^2 - 1) \cdot y = ((-5)^2 - 1) \cdot 3 = (25 - 1) \cdot 3 = 24 \cdot 3 = 72$$

Jak już wiesz, przy mnożeniu pierwiastka przez liczbę można pominąć kropkę oznaczającą mnożenie, np. $2 \cdot \sqrt{3}$ zapisujemy krócej jako $2\sqrt{3}$. Podobnie jest z wyrażeniami algebraicznymi, np. $2 \cdot x$ zapisujemy krócej jako $2x$.

Zapamiętaj

Znak mnożenia można pominąć:

- przed symbolem zmiennej:
  $2 \cdot x = 2x$
  $x \cdot y = xy$
  $(a+b) \cdot y = (a+b)y$
- przed nawiasem:
  $2 \cdot (a+b) = 2(a+b)$
  $x \cdot (a+b) = x(a+b)$
  $(a+1) \cdot (a+2) = (a+1)(a+2)$

Natomiast nie możemy pominąć znaku mnożenia przed liczbami, np. w zapisie $x \cdot 2$ albo $(x+y) \cdot 2$.

Przykład 1.2

Oblicz wartość wyrażenia dla podanych wartości zmiennych.

a) xy dla $x = 5$ i $y = -1$

Podstawiamy wartości zmiennych do wyrażenia:

$xy = 5 \cdot (-1) = -5$

b) $(a+2)b$ dla $a = 5$ i $b = 3$

$(a+2)b = (5+2) \cdot 3 = 7 \cdot 3 = 21$

! Jeśli w miejsce zmiennych wstawiamy liczby, musimy dopisać znak mnożenia. Pamiętaj też, że liczby ujemne (w tym przykładzie liczbę −1) wpisujemy w nawiasie.

Ćwiczenie 1

Oblicz wartość wyrażenia dla podanych wartości zmiennych.

a) $12s + l$ dla $s = 4$ i $l = 2$ **b)** $6ab + 1$ dla $a = 4$ i $b = -2$

Znak minus przed zmienną

Przykład 2

Oblicz wartość wyrażenia $-x$ dla:

a) $x = 2$, **b)** $x = -3$, **c)** $x = 0$.

a) Skoro $x = 2$, to $-x = -2$.

b) Skoro $x = -3$, to $-x = -(-3) = 3$.

c) Skoro $x = 0$, to $-x = -0 = 0$.

Zapamiętaj

Zapis $-x$ oznacza liczbę przeciwną do x. Nie zawsze jest ona ujemna!

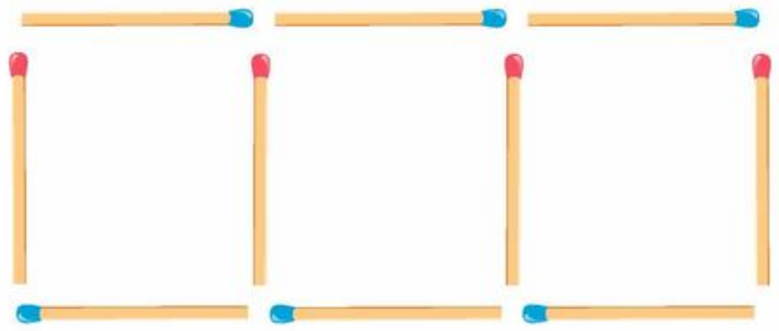
Ćwiczenie 2

Czy dla podanej wartości z wartość wyrażenia $-2z$ jest dodatnia, czy ujemna?

a) $z = 1800$ **b)** $z = -900$ **c)** $z = 0$

Równość wyrażeń algebraicznych

Zadanie dotyczące budowania kwadratów z zapałek można rozwiązać także w inny sposób.



Policzmy osobno zapałki ułożone poziomo i pionowo. Zapałek ułożonych poziomo na górze jest tyle, ile kwadratów, czyli n. Tyle samo jest ich na dole. Natomiast zapałek pionowych jest o jedną więcej niż kwadratów, czyli $n + 1$.

W sumie zapałek jest: $\underset{\text{góra}}{n} + \underset{\text{dół}}{n} + (\underset{\text{ułożone pionowo}}{n + 1})$

Wcześniej opisaliśmy liczbę zapałek w n kwadratach za pomocą wyrażenia $3n + 1$. Ale skoro mamy tu inne rozwiązanie tego samego zadania, to dla każdej liczby wstawionej w miejsce zmiennej n wartość każdego z tych dwóch wyrażeń musi być taka sama, np. dla $n = 100$ otrzymamy:

$n + n + (n + 1) = 100 + 100 + (100 + 1) = 301$ i $3n + 1 = 3 \cdot 100 + 1 = 301$.

W takiej sytuacji mówimy, że dwa wyrażenia **są równe**. Zapisujemy to:
$3n + 1 = n + n + (n + 1)$.

Natomiast np. wyrażenia $3n + 1$ i $n^3 + 1$ nie są równe:
wprawdzie dla $n = 0$ oba mają wartość 1, lecz np. dla $n = 1$ pierwsze z nich ma wartość 4, a drugie – wartość 2.

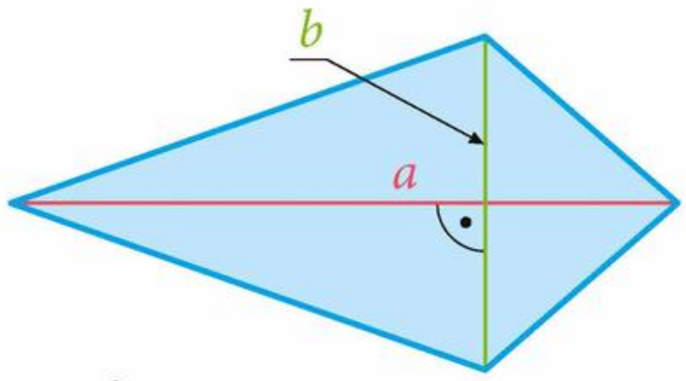
Wyrażenia algebraiczne w geometrii

Z wyrażeniami algebraicznymi mieliśmy do czynienia już wcześniej przy obliczaniu pól figur, na przykład: $\frac{1}{2}ah$, $\frac{1}{2}(a + b)h$.

Kiedy obliczamy pole figury, korzystając ze wzoru, to obliczamy wartość wyrażenia algebraicznego dla konkretnych wartości zmiennych, czyli długości odpowiednich odcinków w tej figurze.

Przykład 3

Pole deltoidu o przekątnych a i b można obliczyć ze wzoru: $P = \frac{ab}{2}$.



Oblicz pole deltoidu o przekątnych $a = 10$ cm i $b = 20$ cm.

Podstawiamy dane do wzoru: $P = \frac{10\text{ cm} \cdot 20\text{ cm}}{2} = 100\text{ cm}^2$.

Ćwiczenie 3.1

Oblicz pole trapezu o podstawach $a = 2$ cm, $b = 5$ cm i wysokości $h = 2{,}5$ cm.

Niektóre wzory zapisywaliśmy na kilka sposobów. Na przykład pole trapezu można zapisać jako:

$\frac{a+b}{2} \cdot h$ albo $\frac{1}{2}(a+b)h$.

Oznacza to, że posługiwaliśmy się równymi wyrażeniami algebraicznymi.

Ćwiczenie 3.2

Które z wyrażeń opisują pole trójkąta o podstawie a i wysokości h?

I. $\frac{1}{2}ah$ II. $\frac{ah}{2}$ III. $\frac{a}{2} \cdot \frac{h}{2}$

Wyrażenia algebraiczne i pieniądze

Przykład 4

E

Jabłka kosztują 3,20 zł za kilogram, a gruszki 4,50 zł za kilogram. Ile zapłacimy za x kg jabłek i y kg gruszek? Zapisz wyrażenie algebraiczne, a następnie wykonaj obliczenia dla $x = 2$ i $y = 3$.

Aby obliczyć, ile trzeba zapłacić za jabłka, mnożymy ich masę x przez cenę za 1 kg: $x \cdot 3{,}2$.

Podobnie obliczymy, ile trzeba zapłacić za gruszki: $y \cdot 4{,}5$.

W sumie zapłacimy: $x \cdot 3{,}2 + y \cdot 4{,}5$.

Dla $x = 2$ i $y = 3$ suma wyniesie:

$x \cdot 3{,}2 + y \cdot 4{,}5 = 2 \cdot 3{,}2 + 3 \cdot 4{,}5 = 6{,}4 + 13{,}5 = 19{,}9$ [zł].



Za 2 kg jabłek i 3 kg gruszek zapłacimy 19,90 zł.

Ćwiczenie 4

Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego ogólny koszt zakupu biletów do teatru: n biletów normalnych po 60 zł i u biletów ulgowych po 30 zł. Oblicz wartość zapisanego wyrażenia dla $n = 2$ i $u = 25$. Co oznacza otrzymana wartość?



Wyrażenia algebraiczne i arkusz kalkulacyjny

Wyrażenia algebraiczne stosuje się m.in. w **arkuszach kalkulacyjnych**. Jeśli umiemy zapisać wyrażenie opisujące to, co chcemy obliczać, to rachunki (dla różnych danych) może za nas wykonać program komputerowy.

Po włączeniu takiego programu widzimy na ekranie dużą tabelę. W każde z jej pól (komórek) można wpisać liczbę lub tekst, a także wyrażenie algebraiczne, do którego komputer podstawi wartości zmiennych wpisanych w innych komórkach. Trzeba tylko pamiętać, że zamiast liter takich jak x czy y na oznaczenie zmiennych używamy nazw pól, w których znajdują się wartości zmiennych (np. B5 to pole w kolumnie B i wierszu 5).

Kwotę 6,4 komputer obliczył na podstawie wyrażenia B5*C5, czyli

„pomnóż liczbę w kolumnie B i wierszu 5

przez liczbę w kolumnie C i wierszu 5".

Łączna kwota została obliczona w komórce D8 za pomocą wyrażenia D5+D6.

D5 f_x =B5*C5

	A	B	C	D
1				
2	Owoce	Waga	Cena za 1 kg	Do zapłaty
3		(kg)		(zł)
4				
5	jabłka	2	3,2	6,4
6	gruszki	3	4,5	13,5
7				
8				19,9

Gdy wpiszemy inną liczbę w komórce B5 lub C5 (czyli zmienimy cenę jabłek albo ich masę), automatycznie zmienią się wartości w komórkach D5 (kwota do zapłaty za jabłka) oraz D8 (łączny koszt zakupów).

D5 f_x =B5*C5

	A	B	C	D
1				
2	Owoce	Waga	Cena za 1 kg	Do zapłaty
3		(kg)		(zł)
4				
5	jabłka	1,3	3,2	4,16
6	gruszki	3	4,5	13,5
7				
8				17,66

Zadania

1. Oblicz wartość wyrażenia dla podanych wartości zmiennych. Pamiętaj o informacji z ramki „Zapamiętaj" ze s. 153 ▶ Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A
← P1.1a

a) $4k - 8$ dla $k = 2$

b) $\frac{2}{3b-2}$ dla $b = 3$

c) $\frac{a^2+5a}{6}$ dla $a = 3$

d) $2x + x^2$ dla $x = 4$

e) $p^2 - p^3$ dla $p = 2$

f) $3m - 1$ dla $m = 4$

g) $\frac{2}{5}(y+3)^2$ dla $y = 7$

h) $t(t+2)$ dla $t = 5$

i) $\frac{3z^2-2z}{153}$ dla $z = 0$

poziom B
← P1.1b

a) $5m + m^2$ dla $m = -3$

b) $\frac{4{,}5+2b^2}{3}$ dla $b = -3$

c) $k^2 - k^3$ dla $k = -2$

d) $3x^2 + 2x$ dla $x = -1$

e) $\frac{-7}{8-4a}$ dla $a = -1$

f) $2(4p+1) - 5$ dla $p = -1$

g) $y(y+3)$ dla $y = -4$

h) $\frac{3}{4}(t-2)^2$ dla $t = -6$

i) $\frac{4z-2}{11}$ dla $z = -2$

poziom C
← P1.1c

a) $\frac{2a-b^2}{4}$ dla $a = 5$ i $b = -3$

b) $3{,}5x + 5y$ dla $x = -5$ i $y = 2$

c) $3x - \frac{1}{2}y$ dla $x = 6$ i $y = -4$

d) $\frac{4}{t+3s}$ dla $t = -3$ i $s = -2$

e) $3mn + m^2n$ dla $m = 2$ i $n = -6$

f) $2r(p+1)^2$ dla $p = -4$ i $r = -2$

g) $\frac{2}{7}(c-2d)^2$ dla $c = 2$ i $d = -6$

h) $0{,}2d^2(c-d)$ dla $c = 0$ i $d = -5$

2. Oblicz wartość wyrażenia $-x$ dla:

a) $x = 5$, **b)** $x = 0$, **c)** $x = -4$.

3. Wyraź odpowiedź na pytanie za pomocą wyrażenia algebraicznego.

a) Kilogram bananów kosztuje k złotych. Ile to groszy?

b) Dorota ma p centymetrów wzrostu. Ile to metrów?

c) Jabłka kosztują j zł za kilogram, a droższe od nich pomarańcze p zł za kilogram. O ile droższe są pomarańcze od jabłek?

d) Zeszyt kosztuje M złotych, a długopis N złotych. Ile zapłacimy za pięć zeszytów i dwa długopisy?


2019-09-20 nr wydr.1513
PARAGON FISKALNY
ZESZYT
5x M =
DŁUGOPIS
2x N =
SUMA ZŁ

E

4. W sklepiku szkolnym herbata kosztuje x złotych, a drożdżówka jest o 80 groszy od niej tańsza.

a) Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego, ile złotych kosztuje drożdżówka.

b) Oblicz wartość wyrażenia z podpunktu a) dla $x = 2$, czyli wyznacz cenę drożdżówki, jeśli herbata kosztuje 2 zł.

c) Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego, ile zapłacimy za herbatę i dwie drożdżówki.

5. Poniżej przedstawiono cennik biletów jednego z gdańskich kin.

Rodzaj biletu	Opis	Cena
normalny	dla osób bez uprawnienia do zniżek	21,50 zł
ulgowy	dla seniorów powyżej 60. roku życia oraz dla dzieci poniżej 12 lat	17,50 zł
student/uczeń	dla studentów i uczniów, za okazaniem ważnej legitymacji	17,00 zł
grupowy	dla grup powyżej 15 osób, cena za 1 osobę	15,00 zł

a) Oblicz, ile zapłacimy za dwa bilety normalne, jeden ulgowy i dwa studenckie.
b) Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, ile zapłacimy za x biletów normalnych, y ulgowych i z uczniowskich.
c) O ile złotych więcej zapłacimy za n biletów normalnych niż za 2 ulgowe dla $n > 1$?

6. Na kiermaszu wyrobów ludowych można kupić wiklinowe kosze po k zł za sztukę oraz kolorowe wycinanki – małe po m zł, a duże po d zł. Janek kupił 2 kosze i 3 małe wycinanki, a Ewa kupiła 7 małych wycinanek i jedną dużą.

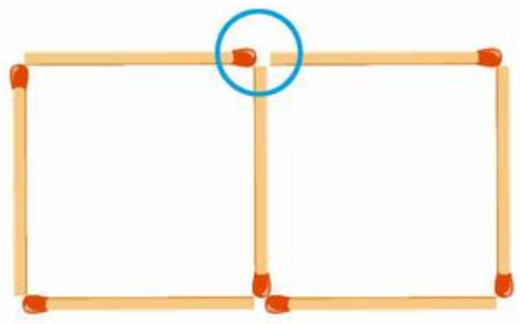


a) Ile zapłaci Janek, a ile Ewa?
b) Za dwa kosze zapłacimy więcej niż za trzy duże wycinanki. Zapisz o ile więcej.

7. Czy podane wyrażenia są równe? Jeśli nie są – podaj przykład wartości zmiennej, dla której wartości wyrażeń się różnią.

a) $2x$ i $x+x$ **b)** $2\cdot(x+1)$ i $2x+1$ **c)** $5-x$ i $x-5$

E **8.** Spójrz na rysunek obok. Zapisz wyrażenie pozwalające obliczyć dla n kwadratów, w ilu punktach układanki stykają się trzy zapałki. Oblicz wartość tego wyrażenia dla $n = 4$, a następnie wykonaj odpowiedni rysunek i sprawdź swoją odpowiedź.



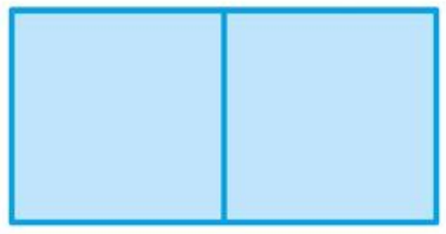
9. Kuba powiedział, że wyrażenia $3\cdot(x+1)$ i $x\cdot(x^2+2)+3$ są równe, ponieważ obliczył wartości każdego z nich najpierw dla $x = 1$, potem dla $x = 0$, a na koniec dla $x = -1$ i za każdym razem otrzymał taki sam wynik.

a) Sprawdź, czy obliczenia Kuby są poprawne.
b) Wybierz wartość x różną od 0, 1 i -1, a następnie oblicz wartość obu wyrażeń dla tego x.
c) Czy wyrażenia $3(x+1)$ i $x(x^2+2)+3$ są równe?
d) Na czym polegał błąd Kuby?

10. Niech n będzie pewną liczbą naturalną dodatnią. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego:

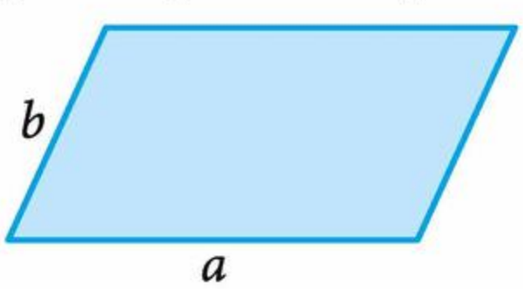
a) następną liczbę naturalną, **b)** poprzednią liczbę naturalną.

11. Dwa kwadraty o boku a zestawiono w jeden prostokąt jak na rysunku. Zapisz wyrażenia pozwalające obliczyć jego pole i obwód.



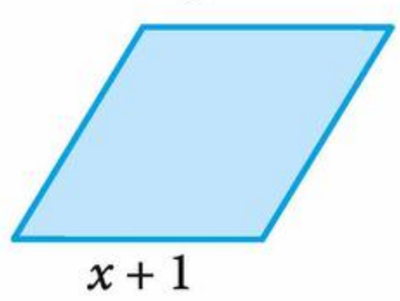
12. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego obwód narysowanej figury.

a)



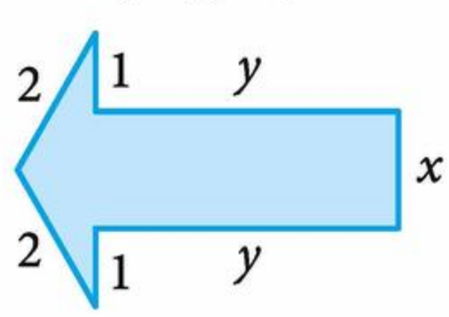
równoległobok

b)



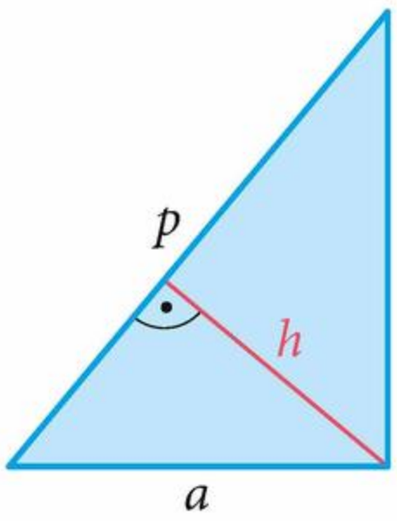
romb

c)



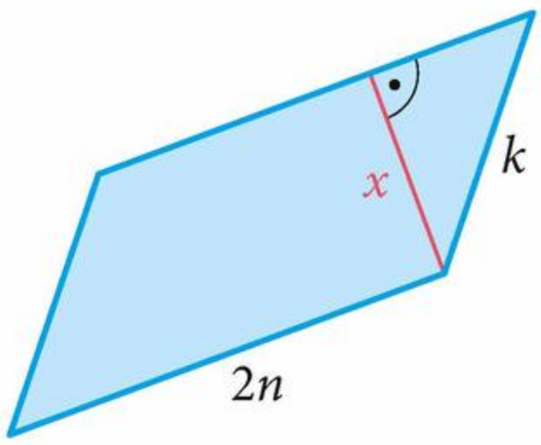
13. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego pole narysowanej figury.

a)



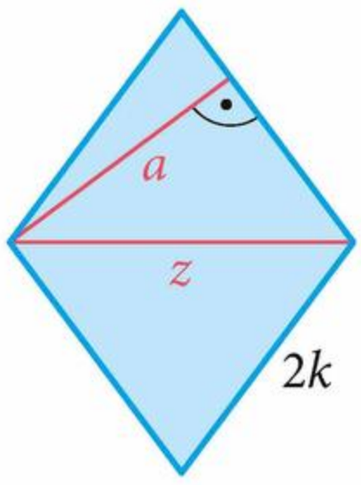
trójkąt prostokątny

b)



równoległobok

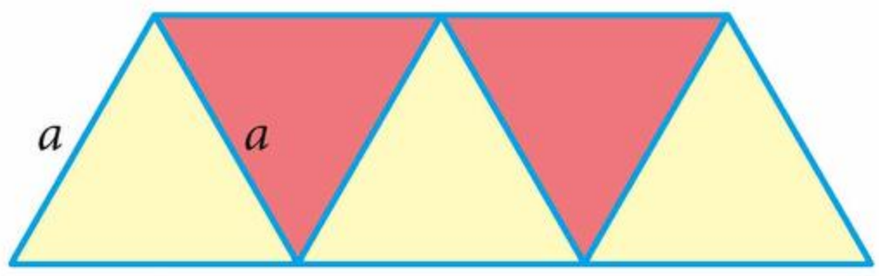
c)



romb

14. Staś ma s lat, jego mama jest od niego 4 razy starsza, a tata jest o 3 lata starszy od mamy. Zapisz wyrażenie algebraiczne pozwalające obliczyć, ile lat mają w sumie.

E **15.** Z pięciu trójkątów równobocznych o boku a można ułożyć trapez o obwodzie $7a$ (rysunek obok). Ile będzie wynosił obwód trapezu zbudowanego w ten sam sposób z n takich trójkątów?



16. Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące:

a) obwód trójkąta, którego długości boków są trzema kolejnymi liczbami naturalnymi, a pierwsza z nich jest równa n,

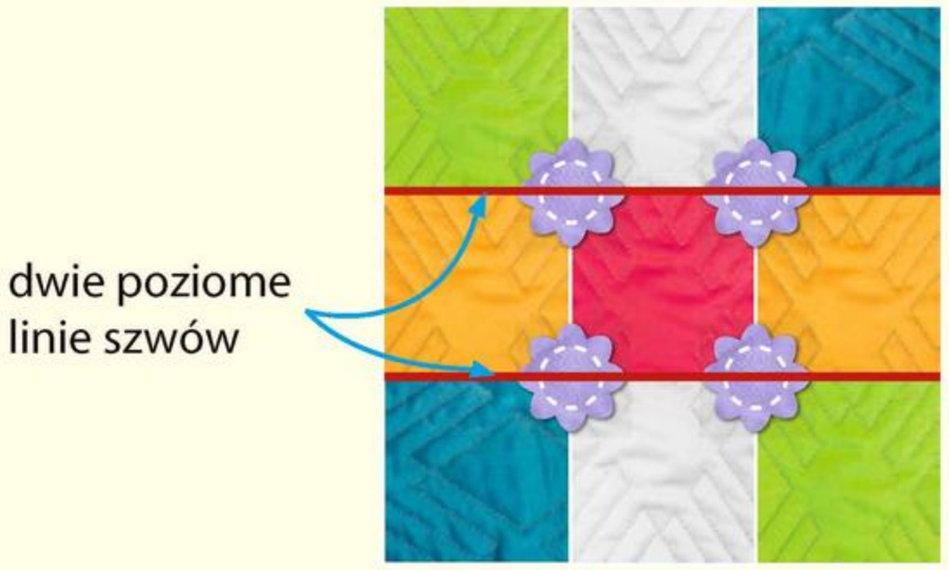
b) pole prostokąta, którego długości boków są dwiema kolejnymi liczbami parzystymi, a pierwsza z nich jest równa $2n$,

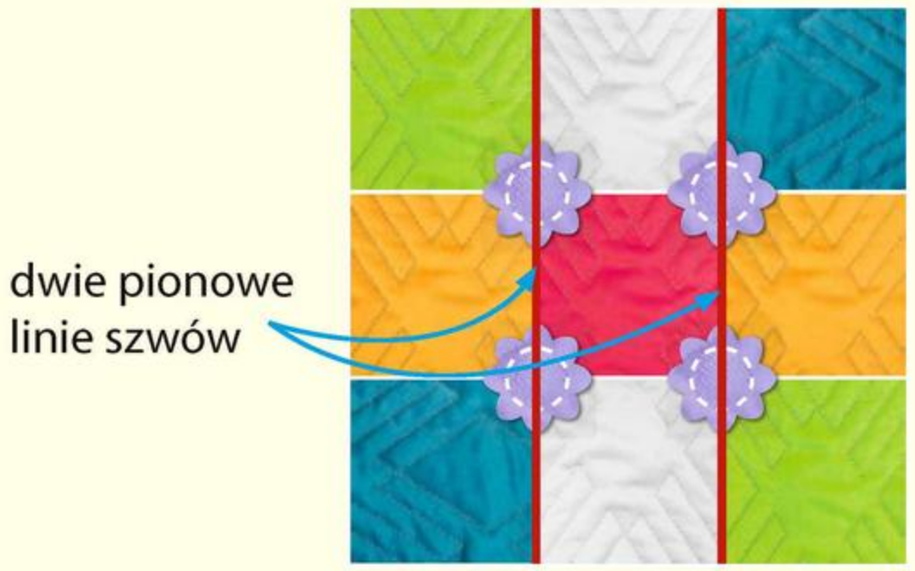
c) pole rombu, którego długości przekątnych są dwiema kolejnymi liczbami nieparzystymi, a pierwsza z nich jest równa $2n + 1$.

Dla dociekliwych

Na s. 150 rozważaliśmy, ile kwiatków przyszywamy do patchworku. Teraz zajmiemy się długością szwów. Zakładamy, że patchwork szyjemy z kwadratów o boku 1 dm.

Aby obliczyć łączną długość wszystkich linii szwów, możemy popatrzeć osobno na szwy wzdłuż linii pionowych i wzdłuż linii poziomych.





1. Ile jest poziomych, a ile pionowych linii szwów na patchworku 4×4? A ile na patchworku o wymiarach $n \times n$?

2. Jaką długość ma jedna linia szwu na patchworku 3×3? A 4×4? A ile na patchworku o wymiarach $n \times n$?

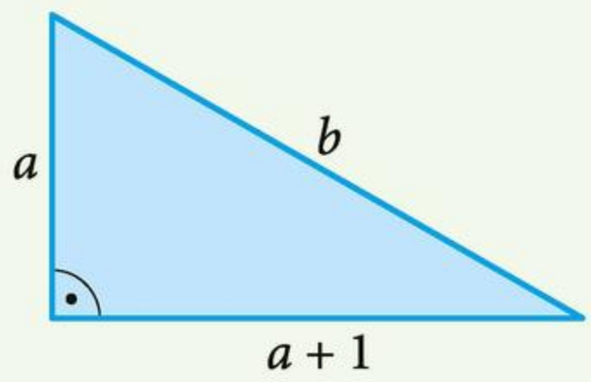
3. Jaka jest łączna długość linii szwów na patchworku o wymiarach $n \times n$? Wykonaj obliczenia dla $n = 30$.

Czy już umiem?

I. Kuba ma x lat, jego siostra Zosia jest od niego dwa razy starsza, a ich brat Artur jest o osiem lat młodszy od Zosi. Zapisz wyrażenie algebraiczne pozwalające obliczyć, ile lat mają w sumie.

II. Oblicz wartość wyrażenia $(3 - x)(1 + 2y)$ dla $x = -2,\ y = 3$.

III. **a)** Zapisz w postaci wyrażeń algebraicznych obwód i pole trójkąta przedstawionego na rysunku.
b) Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, o ile suma długości przyprostokątnych jest większa od długości przeciwprostokątnej.



IV. Oszacuj, które z podanych działań mają wynik większy niż 2000.

(1) $40{,}728 \cdot 51{,}17$ (2) $175\,000 - 163\,500$ (3) $18\,700 : 8900$

2 Suma algebraiczna i jej wyrazy

Na dobry początek

Kto z nas nie lubi zagadek? Wykonaj poniższe polecenia i przekonaj się, że niezależnie od wybranej liczby na końcu zawsze otrzymasz 8.

- Pomyśl liczbę.
- Pomnóż ją przez 2.
- Do wyniku dodaj 8.
- Odejmij teraz początkową liczbę.
- Odejmij jeszcze raz początkową liczbę.
- Podaj wynik.



Pytania i polecenia

- Porównaj swoje wyniki z wynikami koleżanek i kolegów. Co możesz powiedzieć o tych wynikach? Dlaczego są takie, a nie inne?
- Pomyślaną liczbę oznacz literą x, a następnie zapisz kolejne kroki zagadki przy użyciu tego oznaczenia. Co się dzieje z liczbą x?

Suma algebraiczna

Spójrz na wyrażenie arytmetyczne:
$218 + 15 - 17 + 5 - 118$.
W klasie czwartej wykonywalibyśmy te działania od lewej do prawej, co jest dość kłopotliwe. Dzisiaj wiesz, że takie wyrażenie można zapisać jako sumę liczb dodatnich i ujemnych.
$218 + 15 - 17 + 5 - 118 = (+218) + (+15) + (-17) + (+5) + (-118)$

Tak więc na wyrażenie $218 + 15 - 17 + 5 - 118$, mimo że występuje w nim odejmowanie, możemy patrzeć jak na sumę, której składnikami są liczby:
218, **15**, **−17**, **5**, **−118**.

Podobnie można traktować sumę, w której występują liczby i zmienne. Poszczególne składniki takiej sumy nazywamy jej **wyrazami**.

Przykład 1

Wypisz wyrazy sumy algebraicznej: $2x + 4x^2 - 5 + 6x - 7y + 15$.

$2x + 4x^2 - 5 + 6x - 7y + 15 =$

$= 2x + 4x^2 + (-5) + 6x + (-7y) + 15$

Wyrazami tej sumy są:

$2x, \quad 4x^2, \quad -5, \quad 6x, \quad -7y, \quad 15$

Ćwiczenie 1

Wypisz wyrazy sumy algebraicznej: $x^2 + 2x - 5 + 7x - 9y + 5 - 2$.

Dobra rada

Wyodrębniając wyrazy sumy algebraicznej, pamiętaj o znakach!



Wyrazy podobne

Przyjrzyjmy się jeszcze raz sumie z przykładu 1.
$2x + 4x^2 \underline{- 5} + 6x - 7y \underline{+ 15}$
Liczby -5 oraz 15 można po prostu dodać – ich suma to 10.
Wyrazy $2x$ oraz $6x$ również można dodać:
$2x + 6x = 8x$, bo:
$2x + 6x = x + x + x + x + x + x + x + x = 8x$ $\qquad 6x = 6 \cdot x = x + x + x + x + x + x$

Wobec tego naszą sumę można uprościć.

$\underline{\underline{2x}} + 4x^2 \underline{-5} \underline{\underline{+6x}} - 7y \underline{+15} =$

$= \underline{\underline{8x}} + 4x^2 \underline{+10} - 7y$

Dalej już nie da się upraszczać. Dopóki nie podstawimy w miejsce x konkretnej wartości, nie możemy dodać na przykład $8x$ i $4x^2$.

Zapamiętaj

Wyrazy, w których występują te same zmienne w tych samych potęgach, nazywamy **wyrazami podobnymi**.

Te wyrazy są podobne:

1 i $-102{,}5$

$-x$ i $19x$

$-2xy^2$ i xy^2

Te wyrazy nie są podobne:

$2x$ i $2y$, bo występują w nich inne zmienne

$2x$ i $3xy$, bo w pierwszym wyrazie nie ma y

$2xy$ i $-xy^2$, bo nie zgadzają się potęgi zmiennej y

Wyrazy podobne możemy dodawać, np. $5x^2y - 3x^2y = 2x^2y$. Wyrazów, które nie są podobne, nie możemy dodawać.

Zapamiętaj

Dodawanie wyrazów podobnych nazywamy także ich **redukcją**. Mówimy, że **redukujemy** wyrazy podobne.

Przykład 2

Zredukuj wyrazy podobne.

a) $3x - x + 2x + x$

b) $x + y - 2x + 5 - y + 3$

c) $2x^2 + 3x - 5x^2 + 1 - y + 4$

d) $3x^3y - 2xy - 4x^3y - 4xy^3$

a) $3x - x + 2x + x = 5x$

$3x - x + 2x + x = 3x - 1x + 2x + 1x = 5x$

$3 - 1 + 2 + 1 = 5$

b) $\underline{x} \underline{\underline{+ y}} \underline{-2x} \underline{\underline{\underline{+5}}} \underline{\underline{-y}} \underline{\underline{\underline{+3}}} =$

$= \underline{-x} \underline{\underline{\underline{+8}}}$

Wyrazy podobne podkreślamy w jednakowy sposób (znak przed wyrazem należy do tego wyrazu).

Redukujemy: $\underline{x - 2x} = \underline{-x}$, $\underline{\underline{y - y}} = \underline{\underline{0}}$, $\underline{\underline{\underline{5 + 3}}} = \underline{\underline{\underline{8}}}$.

c) $\underline{2x^2} + 3x \underline{-5x^2} \underline{\underline{+1}} - y \underline{\underline{+4}} =$

$= \underline{-3x^2} + 3x - y + \underline{\underline{5}}$

Wyrazy podobne podkreślamy w jednakowy sposób.

Redukujemy: $\underline{2x^2 - 5x^2} = \underline{-3x^2}$, $\underline{\underline{1 + 4}} = \underline{\underline{5}}$.

d) $\underline{3x^3y} - 2xy \underline{-4x^3y} - 4xy^3 =$

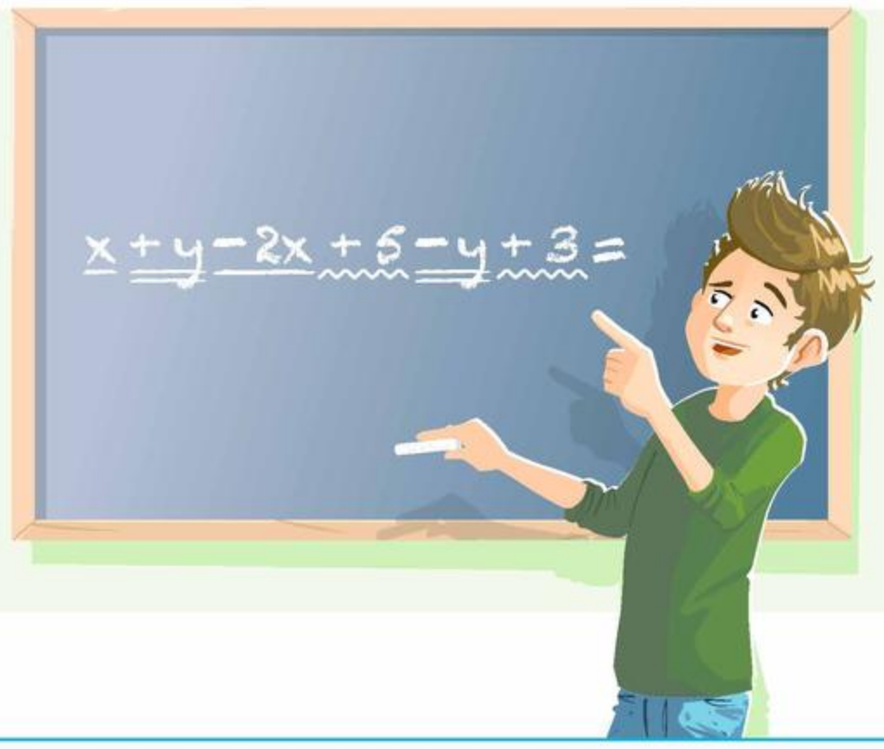
$= -x^3y - 2xy - 4xy^3$

Wyrazami podobnymi są $3x^3y$ i $-4x^3y$, ale $-4xy^3$ ani $-2xy$ nie są do nich podobne.

Redukujemy: $3x^3y - 4x^3y = -x^3y$, bo $3 - 4 = -1$.

Dobra rada

Podkreślaj wyrazy podobne w jednakowy sposób. Dzięki temu nie zapomnisz o żadnym z nich przy redukcji. Pamiętaj, aby wyraz podkreślać razem ze znakiem.



Zapamiętaj

x to inaczej $\mathbf{1} \cdot x$ $\quad$ $-x$ to inaczej $\mathbf{-1} \cdot x$

Ćwiczenie 2

Zredukuj wyrazy podobne.

a) $5y + 2y - y - 5 - 3y$ $\quad$ **b)** $xy^2 + 4x^2y - x^2y + 7xy^2$

Dobra rada

Jeśli w sumie algebraicznej napotkasz wyrazy różniące się tylko znakiem, możesz je skreślić, ponieważ ich suma jest równa 0.

$2x - 2x = 0$

więc

$\cancel{2x} + 5 - y - \cancel{2x} = 5 - y$

$-7y + 7y = 0$

więc

$8x - \cancel{7y} + 2 + \cancel{7y} = 8x + 2$

Przykład 3

Jacek wymyślił sztuczkę magiczną: *Pomyśl dowolną liczbę. Dodaj 20. Odejmij 16. Odejmij liczbę, którą pomyślałeś na początku. A teraz zgadnę: wynikiem jest 4.*

a) Sprawdź sztuczkę Jacka dla kilku liczb. Czy możesz mieć pewność, że będzie działać także dla dowolnej innej liczby?

b) Uzasadnij sztuczkę Jacka za pomocą wyrażeń algebraicznych.

a) Sprawdźmy sztuczkę dla liczb 10, 5 i 20.

$\cancel{10} + 20 - 16 - \cancel{10} = 4$

$\cancel{5} + 20 - 16 - \cancel{5} = 4$

$\cancel{20} + 20 - 16 - \cancel{20} = 4$

Sprawdzenie sztuczki dla kilku liczb, a nawet dla kilku milionów liczb, nie gwarantuje, że wynik jest taki sam dla **wszystkich** liczb.

b) Oznaczmy pomyślaną liczbę literą x. Zgodnie z poleceniami Jacka otrzymujemy:

$x + 20 - 16 - x = x + 4 - x = 4$.

Teraz możemy mieć pewność, że sztuczka działa zawsze.

Ćwiczenie 3

Pomyśl jakąś liczbę. Dodaj do niej 7. Następnie odejmij 6, potem dodaj 4. Odejmij liczbę pomyślaną na początku. Podaj wynik. Uzasadnij za pomocą wyrażeń algebraicznych, że wynik będzie zawsze taki sam.

Wystarczy jeden przykład, aby stwierdzić, że jakieś zdanie **nie jest** prawdziwe dla wszystkich liczb. Jeśli jednak chcemy mieć pewność, że zdanie jest prawdziwe dla wszystkich liczb, to nie wystarczy nawet milion przykładów – trzeba przedstawić rozumowanie obejmujące wszystkie liczby, np. rozumowanie z wykorzystaniem wyrażeń algebraicznych.

Nazywanie wyrażeń algebraicznych

Dlaczego wyrażenie $3x + 2y$ (czyli $3 \cdot x + 2 \cdot y$) nazywamy sumą, a nie iloczynem, skoro występuje w nim zarówno mnożenie, jak i dodawanie? Aby odpowiedzieć na to pytanie, przyjrzyj się wyrażeniu, w którym plamy zakryły wszystko oprócz działania, które byłoby wykonane jako ostatnie:

$$\square + \square$$

Mimo tych plam wiemy, że wyrażenie to jest sumą dwóch wyrażeń. Nie przestaniemy go nazywać sumą nawet wtedy, gdy usuniemy plamy i zobaczymy tam inne działania:

$$3 \cdot x + 2 \cdot y$$

Możemy natomiast powiedzieć dokładniej, że jest to suma wyrażeń $3 \cdot x$ oraz $2 \cdot y$ albo suma iloczynów $3 \cdot x$ i $2 \cdot y$.
Zauważ, że gdy obliczamy wartość tego wyrażenia dla konkretnych liczb x i y, dodawanie jest **ostatnim** wykonywanym działaniem.

Przykład 4

Nazwij wyrażenie algebraiczne.

a) $2x + 7y$ to suma wyrażeń $2x$ i $7y$.

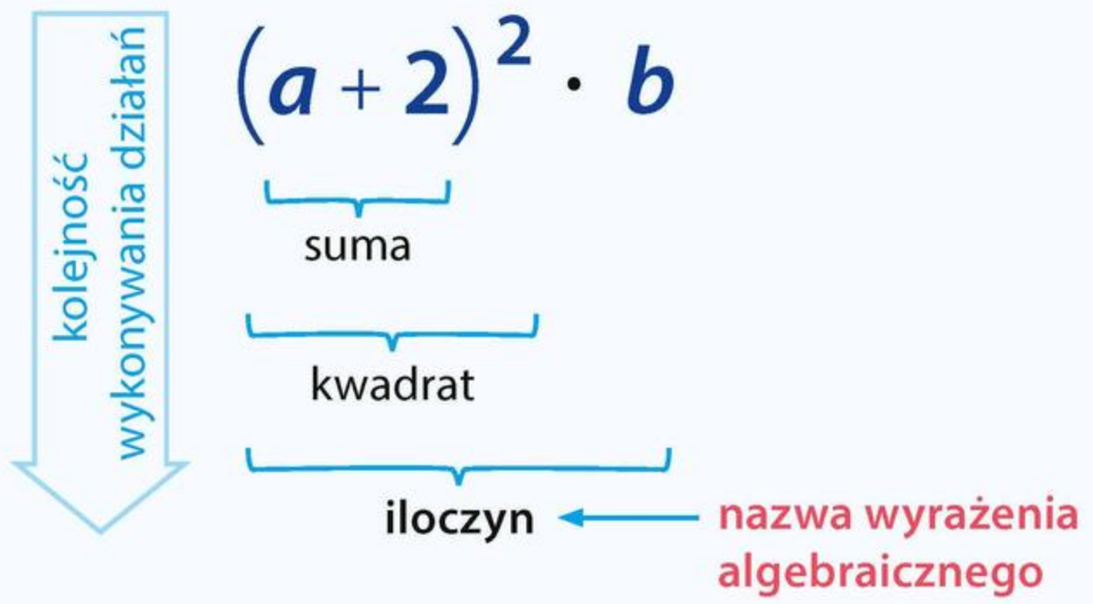
b) $p - \frac{q}{3}$ to różnica wyrażeń p i $\frac{q}{3}$.

c) $2 \cdot (a + b)$ to iloczyn liczby 2 i wyrażenia $a + b$.

d) $\frac{m+n}{7}$ to iloraz wyrażenia $m + n$ przez liczbę 7.

Zapamiętaj

Wyrażenie algebraiczne bierze nazwę od ostatniego działania wykonywanego przy obliczaniu jego wartości zgodnie z zasadą kolejności wykonywania działań.



Ćwiczenie 4

Nazwij wyrażenie algebraiczne.

a) $a+2b$ **b)** $(a+2)\cdot b$ **c)** $(a-b):(a+1)$

Zwróć uwagę, że wyrażenie $3-2x$ możemy nazwać:
- różnicą wyrażeń 3 oraz $2x$,
- sumą wyrażeń 3 oraz $-2x$.

Zadania

1. Wykonaj polecenia. ▶ Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A ← P1

Wypisz wyrazy sumy algebraicznej.

a) $3x+7y+5$ **c)** b^2-4ac **e)** $-3a^2+2ab-b^2$

b) $c^3-3bc-\frac{1}{3}b^2c$ **d)** $-\frac{1}{2}n^2+8n-4$ **f)** $9xy-3x+y^2$

poziom B ← P2a

Zredukuj wyrazy podobne.

a) $5x-x+2x$ **c)** $3z-5z+z$ **e)** $-k+k-k$

b) $a-2a+a$ **d)** $-2k+k-3k$ **f)** $m+3m-m$

poziom C ← P2b

Zredukuj wyrazy podobne.

a) $x+y-2x-y+1$ **c)** $-k-m+1-2m+k$ **e)** $5p+s-2s-2+5$

b) $-2x-y-x+3x$ **d)** $2x-x+k+3-x$ **f)** $6h-7j-j-6-h$

poziom D ← P2c

Zredukuj wyrazy podobne.

a) $2x-y^2+3y^2-x+x^2$ **d)** $-2+2a^3-a^2+2a^2-a^3$

b) $3+5a-2a-5b^2-3$ **e)** $5x^2-y^3-x+y^3-2x^2-x$

c) $-4a^2+a-b^2-2a-a+2b^2$ **f)** $-8m^2+7m-7+9n^2-m+m^2$

2. Pogrupuj wyrazy podane w ramce, tak aby w jednej grupie znajdowały się wyrazy podobne. Ile grup powstało?

$6xy^2$	$-3x^2y$	$8x^2yz^2$	$4xy^2$	x^2z^2y
$-9x^2y$	$6x^2yz^2$	xy^2	$0{,}001xy^2$	$2y^2x$

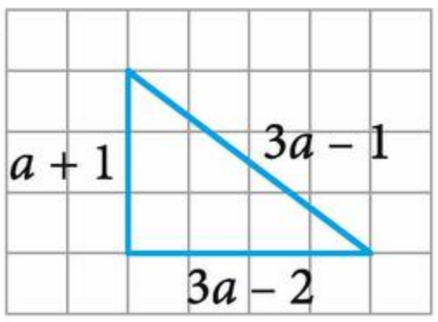
3. Jeśli zredukujemy wyrazy podobne w wyrażeniu $7p + p$, otrzymamy $8p$.

a) Czy jeśli obliczysz wartości wyrażeń $7p + p$ oraz $8p$ dla $p = 65$, uzyskasz ten sam wynik? Odpowiedź uzasadnij.

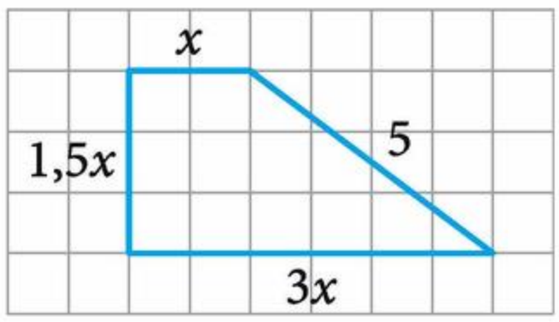
b) A czy dla innych wartości p też tak będzie? Odpowiedź uzasadnij.

E **4.** Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące obwód narysowanej figury, a następnie je uprość, redukując wyrazy podobne.

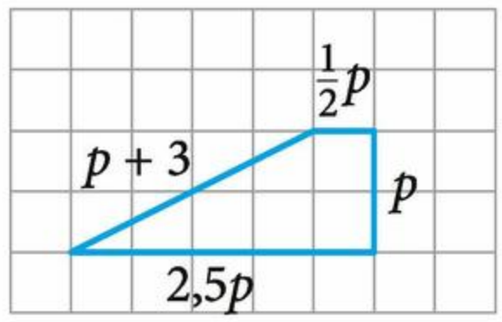
a)



b)



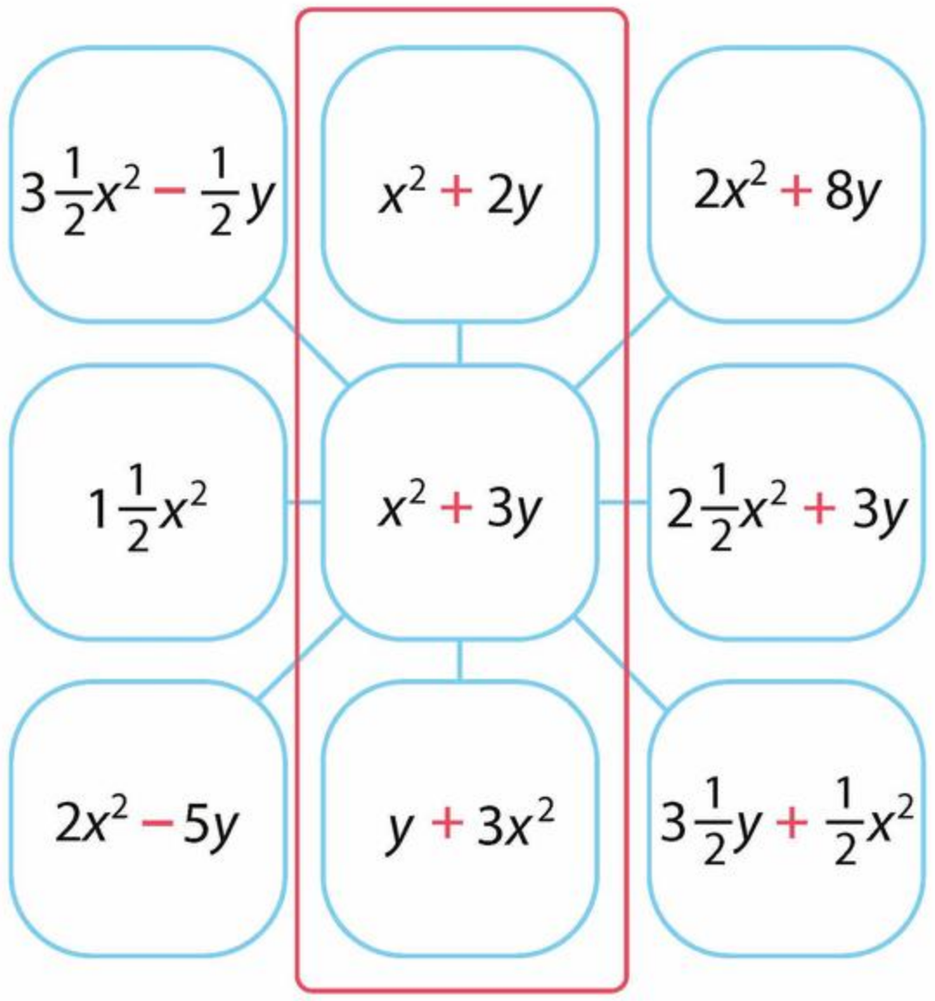
c)



5. Rozpatrz sumy wyrażeń leżących wzdłuż tej samej linii (rysunek obok), np.

$x^2 + 2y \quad + \quad x^2 + 3y \quad + \quad y + 3x^2$

Sprawdź, czy wszystkie te sumy są równe.



6. Spośród podanych niżej wyrażeń wypisz:

a) sumy,
b) iloczyny,
c) ilorazy.

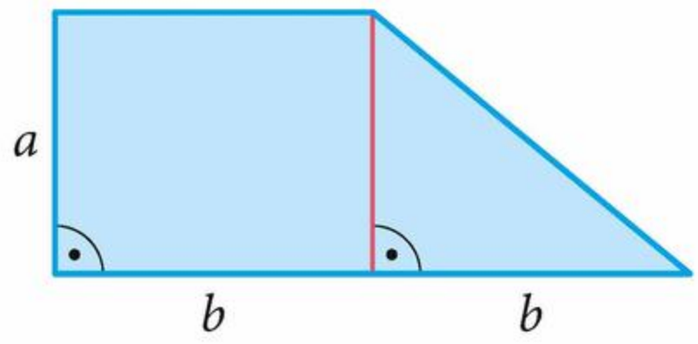
$2(x+3) \qquad 2x+3 \qquad \frac{2}{x+3}$

$\frac{2}{3}x \qquad \frac{2}{3}x+1 \qquad \frac{2}{3}(x+1)$

7. Pomyśl jakąś liczbę. Pomnóż ją przez 2. Następnie dodaj 8. Podziel wynik przez 2. Odejmij liczbę pomyślaną na początku. Podaj wynik. Uzasadnij za pomocą wyrażeń algebraicznych, że wynik będzie zawsze taki sam. Ile będzie wynosił?

8. Na rysunku przedstawiono trapez prostokątny. Opisz jego pole za pomocą wyrażenia będącego:

a) sumą,
b) różnicą,
c) iloczynem,
d) ilorazem.



Dla dociekliwych

1. Niech n będzie liczbą naturalną.

a) Jak zapisać następną liczbę naturalną? Jak jeszcze następną? A jak poprzednią?

b) Zapisz wyrażenie oznaczające sumę trzech kolejnych liczb naturalnych. Uprość je, redukując wyrazy podobne.

c) Udowodnij, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3.

d) Czy suma kolejnych czterech liczb naturalnych jest zawsze podzielna przez 4? A suma pięciu kolejnych liczb naturalnych przez 5? Uzasadnij odpowiedzi.

2. Dla jakich k suma k kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez k? Czy umiesz uzasadnić swoje przypuszczenia?

Czy już umiem?

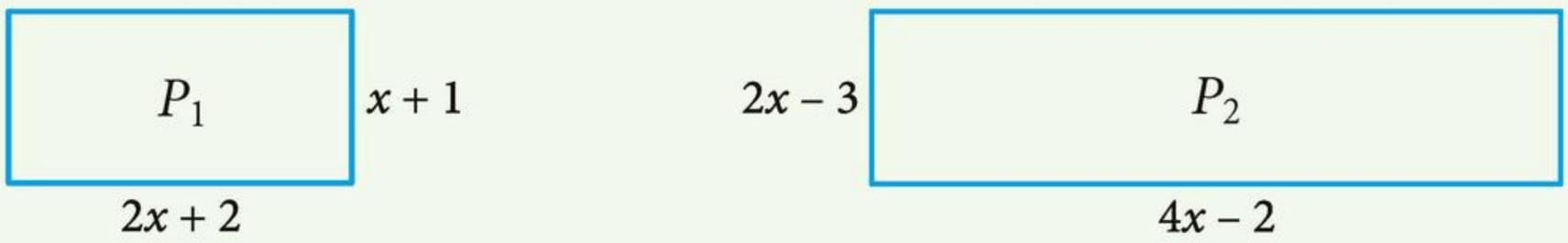
I. Wypisz wyrazy sumy algebraicznej.

$2x^2 - 5x + 2xy + 15x + 2$

II. Po redukcji wyrazów podobnych w wyrażeniu $2x - x - 5xy + 4xy$ otrzymamy

A. $2 - xy$. **B.** $x - xy$. **C.** $x - 9xy$. **D.** $9xy + 3x$.

III. Dane są prostokąty P_1 i P_2. Zapisz wyrażenia opisujące ich obwody. Przedstaw odpowiedź w najprostszej postaci.



IV. Do każdego przedmiotu przedstawionego na zdjęciach poniżej dobierz z ramki jego pojemność.

$0{,}5\ cm^3$	$5\ cm^3$	$50\ cm^3$	$250\ cm^3$	$2\ l$	$10\ l$	$200\ l$	$2000\ l$



3 Opuszczanie nawiasów

Na dobry początek

Dwie węgierskie turystki Laura i Emma podróżują po Polsce. Po górskiej wycieczce zamówiły w schronisku zupę pomidorową, żurek i porcję pierogów na spółkę.



Laura

Összeadtam mindegyik árat złotyban, az összeget pedig átszámoltam forintra:
$70 \cdot (3 + 4 + 8) = 1050$

Emma

Mindegyik árat átszámoltam złotyról forintra, azután pedig összeadtam:
$70 \cdot 3 + 70 \cdot 4 + 70 \cdot 8 = 1050$

Pytania i polecenia

Laura i Emma zastanawiają się, ile kosztował posiłek w przeliczeniu na forinty. Każda z nich wykonała obliczenia inną metodą, którą opisują słownie.

- Jeśli nie rozumiesz po węgiersku, domyśl się z obliczeń, na czym polegały te sposoby.
- Ile forintów kosztuje 1 zł?
- Ceny potraw i kurs forinta mogą się zmieniać. Zapisz obliczenia Laury i Emmy, jeśli zupa pomidorowa kosztuje x, żurek y, pierogi z, a 1 zł jest warty f forintów.

Dodawanie i odejmowanie wyrażeń algebraicznych

Oto dwa wyrażenia algebraiczne:

$x^2 - x + 1$ oraz $2x - 3$

Te wyrażenia możemy np.:
- dodać – ich sumą jest wyrażenie $(x^2 - x + 1) + (2x - 3)$,
- odjąć – ich różnicą jest wyrażenie $(x^2 - x + 1) - (2x - 3)$.

Aby uprościć wyrażenia powstałe w wyniku dodawania i odejmowania, musimy najpierw pozbyć się nawiasów. Zasadom opuszczania nawiasów przyjrzyjmy się najpierw na przykładzie wyrażeń arytmetycznych (czyli takich, które zawierają tylko liczby).

Nawias, przed którym stoi znak plus, można po prostu opuścić, np.:
$2 + (3 + 4) = 2 + 3 + 4$.

Inaczej jest, gdy przed nawiasem znajduje się minus.

Przyjrzyj się zadaniu i jego dwu rozwiązaniom.

Ania miała 12 zł. Gdy w kawiarni płaciła za galaretkę, podała kasjerce banknot 10 zł i otrzymała 3 zł reszty. Ile pieniędzy jej zostało? Zapisz rozwiązanie za pomocą jednego wyrażenia.

Sposób I

Działanie: **12 − 10 + 3**
Obliczenia: $12 - 10 + 3 = 2 + 3 = 5$



Sposób II

Ile kosztowała galaretka? $10 - 3$
Ile pieniędzy zostało Ani? **12 − (10 − 3)**
Obliczenia: $12 - (10 - 3) = 12 - 7 = 5$

Wyrażenia zapisane w obydwu sposobach rozwiązania opisują tę samą sytuację i są równe:

$$12 - 10 + 3 = 12 - (10 - 3)$$

Podobnie jest z wyrażeniami algebraicznymi.

Zapamiętaj

Jeśli przed nawiasem jest znak minus, to opuszczając nawias, należy zmienić znak każdego wyrazu w nawiasie na przeciwny.

$$-(\square + \bigcirc - \triangle) = -\square - \bigcirc + \triangle$$

Przykład 1

Opuść nawiasy i zredukuj wyrazy podobne.

a) $3x+(4x-3y+z)$ **b)** $3x-(4x-3y+z)$

a) $3x+(4x-3y+z)=\underline{3x}\ \underline{+4x}-3y+z=$
$=7x-3y+z$

Opuszczamy nawiasy bez zmiany znaków poszczególnych wyrazów, ponieważ przed nawiasem jest znak plus.

b) $3x-(4x-3y+z)=\underline{3x}\ \underline{-4x}+3y-z=$
$=-x+3y-z$

Opuszczamy nawiasy, zmieniając znak każdego wyrazu w nawiasie na przeciwny, ponieważ przed nawiasem jest znak minus.

Ćwiczenie 1

Opuść nawiasy i zredukuj wyrazy podobne.

a) $5x-(4-2x)$ **b)** $4x-(2x+3y-7)$ **c)** $-(7-5x)+(7-5x)$

Mnożenie sumy przez liczbę

Aby obliczyć iloczyn $9\cdot 17$, możemy postępować w sposób opisany poniżej.

- Liczbę 17 traktujemy jako sumę $10+7$.
- Mnożąc tę sumę przez 9, mnożymy każdy ze składników osobno.
- Dodajemy otrzymane iloczyny.

$9\cdot 17$

$9\cdot(10+7)$

$9\cdot 10=90$ i $9\cdot 7=63$

$90+63=153$

Podobnie postępujemy, gdy mnożymy sumę algebraiczną przez liczbę.

Przykład 2

Wykonaj mnożenie sumy algebraicznej przez liczbę.

a) $3(2x+5)=3\cdot 2x+3\cdot 5=6x+15$

Każdy wyraz w nawiasie mnożymy przez 3.

b) $(x+7)\cdot 4=x\cdot 4+7\cdot 4=4x+28$

Każdy wyraz w nawiasie mnożymy przez 4.

c) $-4(x-2y)=-4\cdot x+(-4)\cdot(-2y)=-4x+8y$

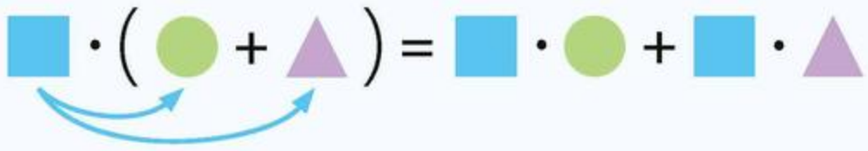
Każdy wyraz w nawiasie mnożymy przez -4, a $(-4)\cdot(-2y)=8y$.

d) $(-2a^2+8)\cdot(-2)=4a^2-16$

Każdy wyraz w nawiasie mnożymy przez -2.

Zapamiętaj

Aby pomnożyć sumę algebraiczną przez liczbę, należy pomnożyć każdy wyraz sumy przez tę liczbę.



Ćwiczenie 2

Wykonaj mnożenie sumy algebraicznej przez liczbę.

a) $3(2a+5)$ **b)** $(-3b+2)\cdot 5$ **c)** $-4\cdot(-c^3+2c^2)$ **d)** $(-12+8d)\cdot(-2)$

Dzielenie sumy algebraicznej przez liczbę wykonujemy podobnie: każdy wyraz sumy dzielimy przez tę liczbę.

Przykład 3

Wykonaj dzielenie sumy algebraicznej przez liczbę.

a) $(4a+6b):2 = 4a:2+6b:2 = 2a+3b$ Każdy wyraz w nawiasie dzielimy przez 2.

b) $(8ab+4a-1):4 = 2ab+a-\frac{1}{4}$ Każdy wyraz w nawiasie dzielimy przez 4.

c) $\frac{6x+9}{3} = \frac{6x}{3}+\frac{9}{3} = 2x+3$ Dzielimy każdy ze składników przez 3.

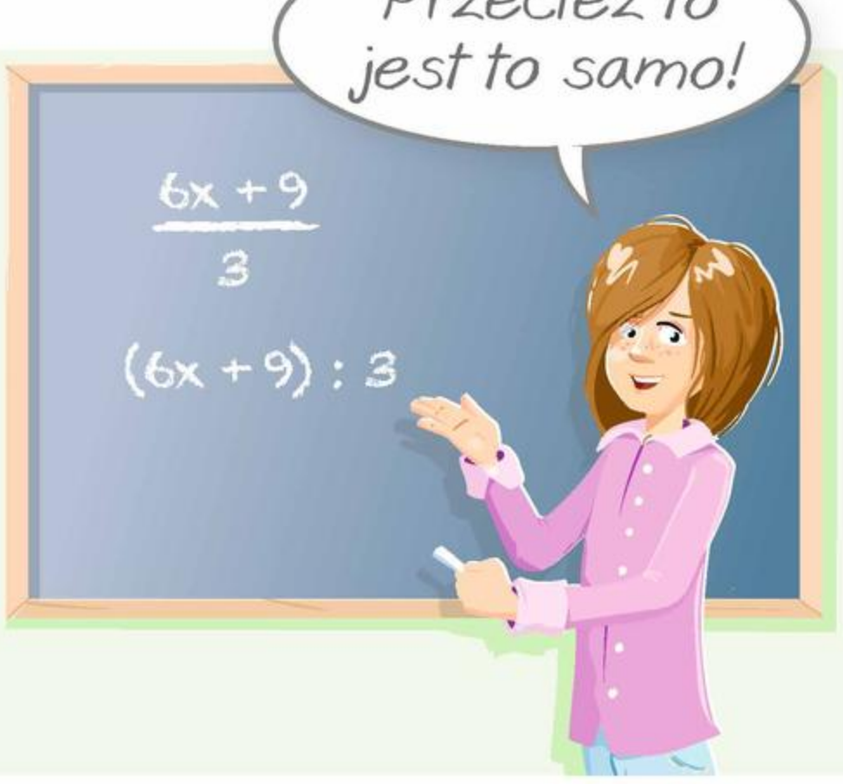
Ćwiczenie 3

Wykonaj dzielenie sumy algebraicznej przez liczbę.

a) $(6c^3+3b^2+2):3$ **b)** $\frac{-2d+4}{2}$

Dobra rada

Pamiętaj, że kreska ułamkowa zastępuje znak dzielenia.



Bardziej złożone obliczenia

Często w obliczeniach musimy wykorzystywać jednocześnie różne umiejętności.

Przykład 4

Uprość wyrażenie.

a) $(4x-3y)-(x-y)+(-2x+5y)=$

Opuszczamy nawiasy. Zmieniamy znak każdego wyrazu w nawiasie, przed którym jest minus.

$=\underline{4x}\ \underline{\underline{-3y}}\ \underline{-x}\ \underline{\underline{+y}}\ \underline{-2x}\ \underline{\underline{+5y}}=$

Podkreślamy i redukujemy wyrazy podobne.

$=x+3y$

b) $a-2(3-a)-(4+a)=$

Mnożymy: $-2\cdot 3=-6$ oraz $-2\cdot(-a)=2a$ oraz opuszczamy nawiasy.

$=\underline{a}\ \underline{\underline{-6}}\ \underline{+2a}\ \underline{\underline{-4}}\ \underline{-a}=$

Podkreślamy i redukujemy wyrazy podobne.

$=2a-10$

c) $\frac{12x-6}{2}-\frac{6-9x}{3}+\frac{2x+4}{2}=$

Wykonujemy dzielenia, wyniki wpisujemy w nawiasie.

$=(6x-3)-(2-3x)+(x+2)=$

Opuszczamy nawiasy.

$=\underline{6x}\ \underline{\underline{-3}}\ \underline{\underline{-2}}\ \underline{+3x}\ \underline{+x}\ \underline{\underline{+2}}=$

Podkreślamy i redukujemy wyrazy podobne.

$=10x-3$

Zapamiętaj

Kreska ułamkowa zastępuje nie tylko dzielenie, lecz także nawias, np.:

$$7x-\frac{12x-6}{2}=7x-(6x-3)$$

Ćwiczenie 4

Uprość wyrażenie.

a) $4(x-5)-2(2x+8)$ **b)** $7-\frac{10-5x}{5}$ **c)** $\frac{8-12x}{4}-\frac{9-12x}{3}$

Zadania

1. Wykonaj polecenia. ▶ Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

Opuść nawiasy i zredukuj wyrazy podobne.

← P1

a) $-3xy-(2x-y+2xy)$

b) $4ab+(2a-3ab)$

c) $-(3p-r)-2r$

d) $-st-(-2t+s)$

e) $4-(m+5-n)$

f) $4g-(-2h+g-3)$

poziom B

← P2

Pomnóż sumę algebraiczną przez liczbę.

a) $3\cdot(ab+2a)$ **c)** $(-3d+8)\cdot 4$ **e)** $(x-5)\cdot 2$ **g)** $(2cd-3)\cdot 8$

b) $(3d-9)\cdot(-1)$ **d)** $-3\cdot(x+7)$ **f)** $-4\cdot(a-3)$ **h)** $(xy+y)\cdot(-2)$

poziom C

← P3

Wykonaj dzielenie.

a) $(10x-5y+1):5$ **c)** $(12p-9r-2):3$ **e)** $(3m+6):6$

b) $\frac{2a-6ab}{2}$ **d)** $\frac{4g-8h+1}{2}$ **f)** $\frac{8t-4s}{4}$

poziom D

← P4

Uprość wyrażenie.

a) $2(x-8)-3(y-2x^2)$ **d)** $\frac{4t-8}{4}+(-6t+2s-1):2$

b) $\frac{9a+3b}{3}-\frac{4a-8b}{2}+a$ **e)** $-6x-(3x-y)+4(-2x+y)$

c) $-5(p-r+4)-(3r-5p)+16$ **f)** $\frac{12g+4}{2}-\frac{10g-1}{5}$

MISTRZ

Wśród podanych pięciu sum algebraicznych są dwie pary wyrażeń równych. Wskaż je.

I. $-(x-2)-[x-(5-2x)]-5x$

II. $-x-(2-x)-(5-2x)-5x$

III. $-(x-2)-[x-(5-2x)-5x]$

IV. $-x-[2-(x-5)-2x]-5x$

V. $-[x-(2-x)-(5-2x)]-5x$

2. Dane są wyrażenia algebraiczne F i G. Wyznacz F + G oraz F − G.

a) $F=x,\ \ G=-6x+4$ **d)** $F=2x-y,\ \ G=-(x-2y)$

b) $F=8,\ \ G=-(4y+5)$ **e)** $F=-(2a-b),\ \ G=2a+b$

c) $F=a^2-4,\ \ G=8-a^2$ **f)** $F=-(a-b),\ \ G=-(a+b)$

3. Oto algebraiczna tabliczka dodawania. Sumy w niej zasłonięto literami.

+	$2x^2-x$	$3x^2+x$	x^2-2x
$-(2x^2+x)$	A	D	A
$-(x^2-2x)$	A	R	Y
$-(-2x^2+3x)$	T	I	K

$$x^2-2x+\left(-(x^2-2x)\right)$$

Oblicz te sumy, uporządkuj je i sprawdź, czy znajdują się wśród wyrażeń poniżej.

$3x^2-5x,\ \ -2x,\ \ 2x^2+3x,\ \ 5x^2-2x,\ \ -x^2-3x,\ \ 4x^2-4x,\ \ 0,\ \ x^2,\ \ x^2+x$

Litery odpowiadające kolejnym sumom utworzą hasło.

4. Dwóch pracowników sklepu internetowego pakuje paczki do wysyłki. Jeden z nich pakuje x paczek na godzinę, a drugi y paczek na godzinę. Ile paczek spakują razem przez 8 godzin?



Zapisz odpowiednie wyrażenie na dwa sposoby:

I. najpierw oblicz, ile paczek spakuje każdy z nich w ciągu 8 godzin,

II. najpierw oblicz, ile paczek spakują razem w ciągu godziny.

Sprawdź, czy otrzymane wyrażenia są równe.

5. Ola wymyśliła sztuczkę magiczną:

Pomyśl jakąś liczbę. Dodaj do niej 8. Wynik pomnóż przez 2. Odejmij 10. Oblicz połowę z wyniku. Odejmij liczbę, którą pomyślałeś na początku. Teraz zgadnę! Wyszło ci 3.

Uzasadnij za pomocą wyrażeń algebraicznych, że zawsze otrzymamy liczbę 3.

6. Jacek wymyślił sztuczkę magiczną:

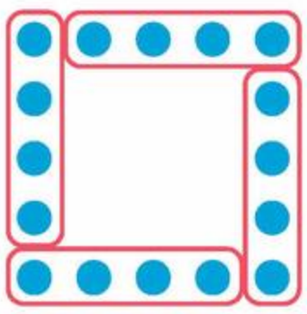
Z talii kart bez figur wylosuj jedną kartę. Do wylosowanej liczby dodaj 4. Wynik pomnóż przez 3, odejmij liczbę wylosowaną na początku, a następnie podziel przez 2. Podaj mi wynik, a zgadnę, jaka liczba była wylosowana na początku.

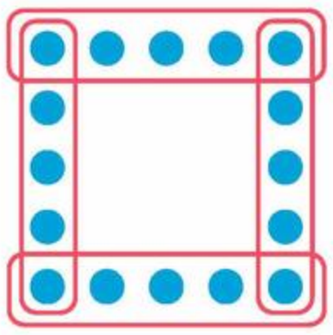


Koleżanka Jacka, Agata, podała swój wynik: 14. Jaką liczbę wylosowała Agata?

E **7.** Wzdłuż brzegu kwadratu rysujemy kropki – po n przy każdym boku. Na rysunkach przedstawiono tę sytuację dla $n = 5$. Liczbę wszystkich narysowanych kropek można wyznaczyć na wiele sposobów. Na rysunkach pokazano dwa z nich.

Na każdym boku zliczamy $n - 1$ kropek.





Na każdym boku zliczamy n kropek, ale kropki w rogach policzyliśmy 2 razy, więc trzeba każdą z nich odjąć jeden raz.

a) Wymyśl jeszcze dwa sposoby liczenia.

b) Zapisz wyrażenia odpowiadające tym czterem sposobom liczenia, a następnie uzasadnij, że te wyrażenia są równe.

8. Jakie liczby można wpisać w miejsce ? w wyrażeniu:

$$?\,(3x - 2) + ?\,(3 - 2y),$$

aby po wykonaniu mnożenia i redukcji wyrazów podobnych otrzymać wyrażenie $9x - 4y$?

9. Dane są trzy zestawy wyrażeń algebraicznych. Dobierzcie się w trójki. Niech każda osoba w trójce wybierze inne wyrażenie z zestawu I, opuści nawiasy i zredukuje wyrazy podobne. Następnie sprawdźcie, czy otrzymaliście jednakowe wyniki. Jeśli nie – poszukajcie błędu. To samo zróbcie w pozostałych zestawach.

I. $y+2x+(y-x)$
$-3x-(-x+y)+(3x+3y)$
$3y-(-x+y)-(x-y)+(x-y)$

II. $k+(m-k)$
$2k+(k-m)-(2k+m)+(3m-k)$
$2mk+(2km-m-k)-(-2m-2k)-2k\cdot 2m-k$

III. $2a-(c-2a)$
$-(a-2c)+2a-(c-2a)-(2c-a)$
$-2+2a\cdot(-2c)-(2c-a-2)-(-a-c)+c\cdot(-2a)\cdot(-2)+2a$

Dla dociekliwych

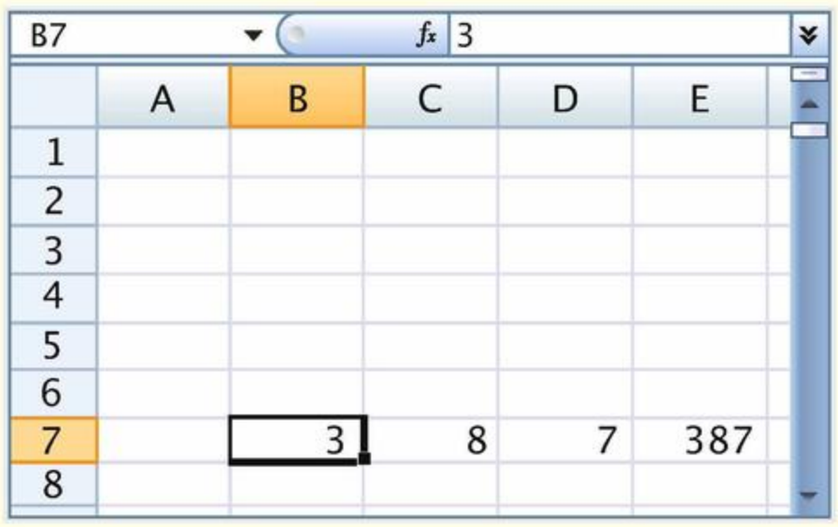
Liczbę 429 można zapisać w postaci:
$429 = 4\cdot 100 + 2\cdot 10 + 9$.
Ogólnie – liczbę o cyfrze setek a, cyfrze dziesiątek b i cyfrze jedności c możemy zapisać w postaci: $100a + 10b + c$.

1. Zapisz wyrażenie oznaczające liczbę dwucyfrową o cyfrze dziesiątek x i cyfrze jedności y.

2. Zapisz wyrażenie oznaczające liczbę z zadania 1 po zmianie kolejności cyfr.

3. Zapisz wyrażenie, za pomocą którego arkusz kalkulacyjny oblicza liczbę trzycyfrową na podstawie cyfr podanych w trzech osobnych komórkach.

W komórki B7, C7, D7 wpisujemy ręcznie poszczególne cyfry. W komórce E7 ma pojawić się liczba trzycyfrowa.



4. Udowodnij, że gdy do dowolnej liczby dwucyfrowej dodamy liczbę powstałą po zmianie kolejności jej cyfr, otrzymamy sumę podzielną przez 11.

5. Zapisujemy dowolną liczbę trzycyfrową, a następnie dwa razy przenosimy pierwszą cyfrę na koniec. W ten sposób otrzymujemy trzy liczby (np. 123, 231 i 312). Udowodnij, że suma tak uzyskanych trzech liczb zawsze jest podzielna przez 37.

Czy już umiem?

I. Wykonaj działania.

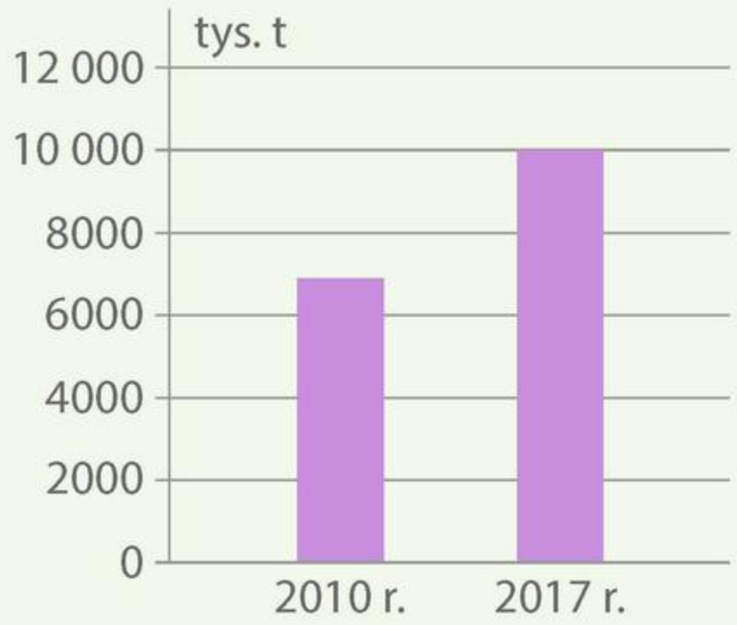
a) $-5(x-2y)$ **b)** $\frac{8x+20}{2}$

II. Uprość wyrażenie.

a) $5-(2-7x)$ **b)** $8+3a+2(5-a)$ **c)** $-2(c+6)+4(7-b-3c)$

III. Udowodnij, że jeśli do dowolnej liczby dodamy 6, wynik pomnożymy przez 2, następnie odejmiemy 10, podzielimy przez 2 i odejmiemy liczbę daną na początku, to otrzymamy 1.

IV. Na diagramie słupkowym przedstawiono ilość odpadów z gospodarstw domowych w roku 2010 i 2017, a na diagramach kołowych – podział tych odpadów na segregowane i niesegregowane. Czy podane zdanie jest prawdziwe? Jeśli nie, to popraw je tak, aby było prawdziwe.

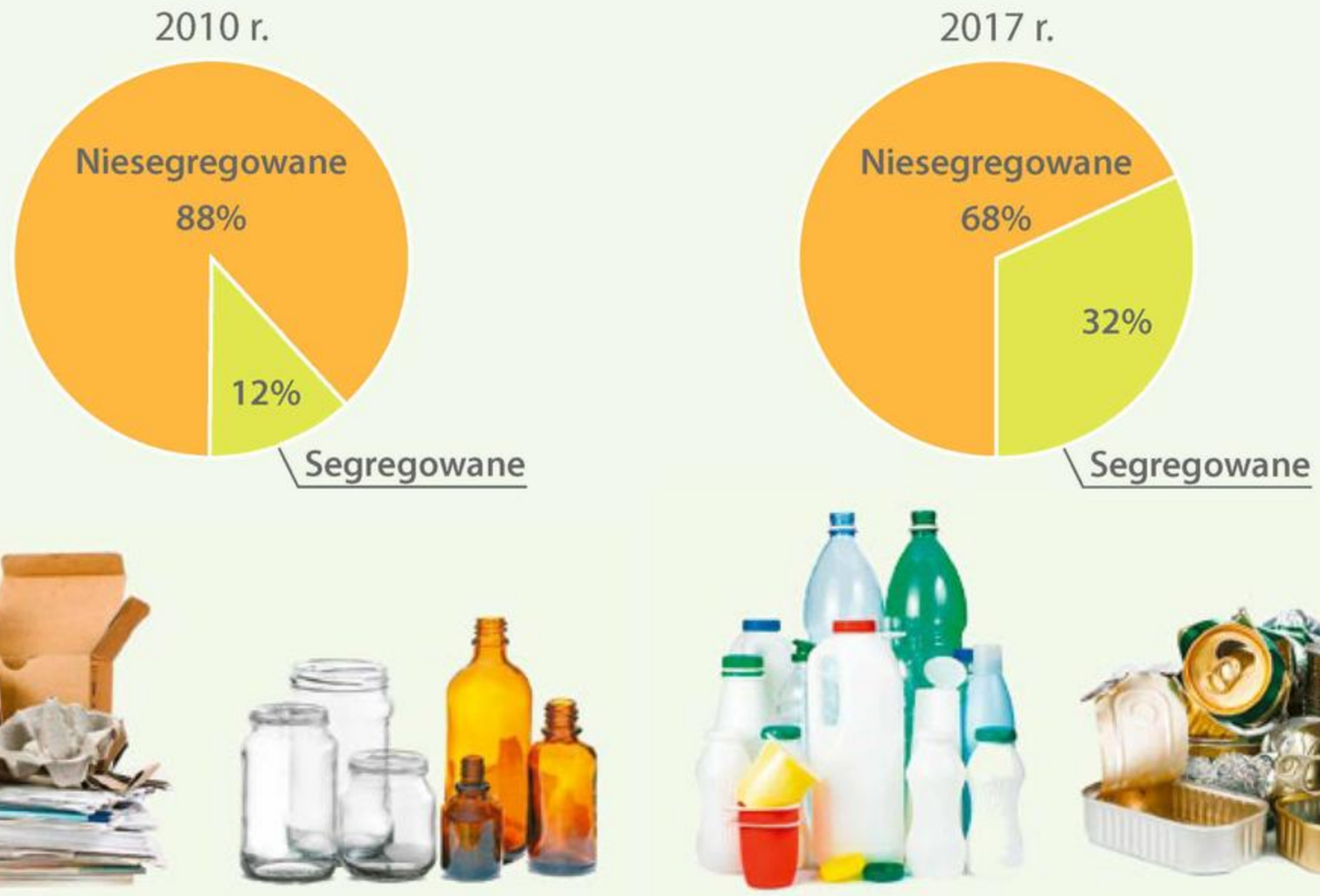


a) W 2017 roku wszystkie odpady z gospodarstw domowych ważyły około 10 tys. ton.

b) W gospodarstwach domowych w 2017 roku segregowano o 20% więcej odpadów niż w 2010 roku.

c) W 2017 roku mniej więcej $\frac{1}{3}$ odpadów z gospodarstw domowych stanowiły odpady segregowane.

d) W 2017 roku łączna waga niesegregowanych odpadów z gospodarstw domowych była mniejsza niż w 2010 roku.



4 Porządkowanie wyrazów w sumach algebraicznych

Na dobry początek

Przyjrzyj się przedmiotom pokazanym na zdjęciu, a następnie spróbuj rozwiązać poniższą łamigłówkę.

GIN^2O^3RW

$ACNRTY^2$

A^2EPRT

$A^2KŁSTUZ$

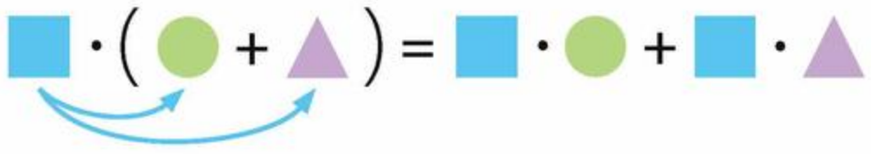


Pytania i polecenia

- Litery w nazwach czterech przedmiotów znajdujących się na zdjęciu uporządkowano w szczególny sposób. Najpierw ułożono alfabetycznie litery występujące w nazwie, a następnie liczbę występowania danej litery zapisano w postaci potęgi. W ten sposób z wyrazu OAZA otrzymalibyśmy A^2OZ.
  Spróbuj odszyfrować jak najwięcej z ukrytych nazw.
  Dla ułatwienia podajemy pierwsze litery wyrazów: W, P, C, S.

Mnożenie sumy algebraicznej przez wyrażenie

Umiesz już pomnożyć sumę algebraiczną przez liczbę. Mnożenie przez wyrażenie zawierające zmienne przebiega w ten sam sposób, zgodnie ze znanym już schematem.



Analogicznie wykonujemy mnożenie, gdy składników sumy jest więcej.

Przykład 1

Wykonaj mnożenie.

a) $x(y+3)$ **b)** $-2a(5b+4)$ **c)** $-5x(y^2-2)$

a) $x(y+3) = x \cdot y + x \cdot 3 = xy + 3x$ Każdy wyraz w nawiasie mnożymy przez x.

b) $-2a(5b+4) = -2a \cdot 5b + (-2a) \cdot 4 =$ Każdy wyraz w nawiasie mnożymy przez $(-2a)$.

$= -10ab - 8a$ Zwróć uwagę na znaki.

c) $-5x(y^2-2) = -5xy^2 + 10x$ $(-5x) \cdot (-2) = +10x$

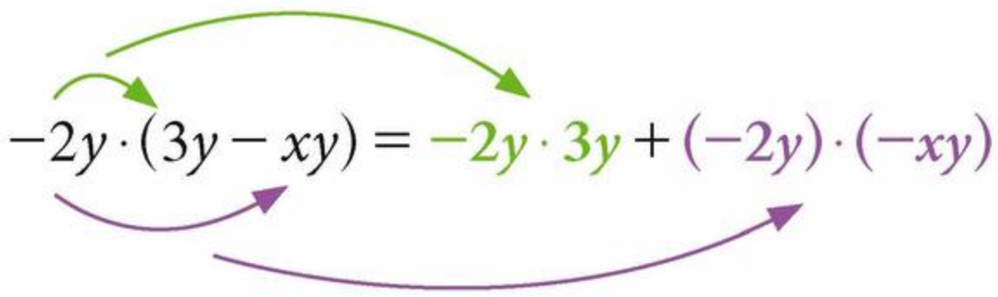
Ćwiczenie 1

Wykonaj mnożenie.

a) $2x(7+y)$ **b)** $-2a(b-c)$

Porządkowanie wyrazów

Wykonajmy mnożenie:



Wyrazy otrzymanej sumy są dość skomplikowane.

$\underbrace{-2y \cdot 3y} + \underbrace{(-2y) \cdot (-xy)}$

Na pierwszy rzut oka trudno je nawet wskazać.
Każdy z tych wyrazów należy uporządkować.

$-2y \cdot 3y = -6y^2$ $-2y \cdot 3y = -2 \cdot y \cdot 3 \cdot y = -2 \cdot 3 \cdot y \cdot y = -6y^2$

$(-2y) \cdot (-xy) = 2xy^2$ $-xy = -1 \cdot xy$, $(-2) \cdot (-1) = 2$, $y \cdot xy = xy^2$

Wyrazy porządkujemy według zasady:

$$-5xy^2$$

Na początku liczba (czyli współczynnik liczbowy)

Potem zmienne w kolejności alfabetycznej

Każda zmienna tylko raz, w odpowiedniej potędze

Uporządkowanie wyrazu pozwala nie tylko skrócić zapis, lecz także łatwiej zauważyć, czy wyrazy są podobne.

Wyrazy nieuporządkowane – trudno ocenić, czy są podobne

$-2x \cdot (-3)yx$ i $5yx^2$

$-y \cdot x^2 \cdot (-y^2)$ i $7x^2 \cdot (-y^2)$

Wyrazy uporządkowane – od razu widać, czy są podobne

$6x^2y$ i $5x^2y$ są podobne

x^2y^3 i $(-7)x^3y^2$ nie są podobne

Przykład 2

E

Uprość wyrażenie.

a) $ab(3a-b)-b(2a^2-a)=$

$=ab \cdot 3a - ab \cdot b - b \cdot 2a^2 + b \cdot a =$ — Porządkujemy każdy z wyrazów.

$=3a^2b - ab^2 - 2a^2b + ab =$ — Podkreślamy i redukujemy wyrazy podobne.

$= a^2b - ab^2 + ab$

b) $(2x+5)\cdot(-x)-(y-x)\cdot 2x=$ — Wykonujemy mnożenie.

$=2x \cdot (-x) + 5 \cdot (-x) - y \cdot 2x - (-x) \cdot 2x =$ — Porządkujemy każdy z wyrazów.

$=-2x^2 + (-5x) - 2xy - (-2x^2) =$ — Opuszczamy nawiasy.

$= -2x^2 - 5x - 2xy + 2x^2 =$ — Podkreślamy i redukujemy wyrazy podobne.

$= -5x - 2xy$

Ćwiczenie 2

Uprość wyrażenie.

a) $x(x-2y^2)-2y(xy-3)$

b) $-3x(y-2x^2)-(3+4y)\cdot 2xy-5x^3$

Często po uproszczeniu wyrażenia algebraicznego łatwiej obliczyć jego wartość.

Przykład 3

Oblicz wartość wyrażenia $5a^2 - 5a(a-1) - (a-b)$ dla $a = \frac{3}{4}$ i $b = 2$.

To zadanie można wykonać, podstawiając podane wartości a i b do wyrażenia. Jest to jednak bardzo pracochłonne, a duża liczba obliczeń zwiększa ryzyko pomyłki.

$$5a^2 - 5a(a-1) - (a-b) =$$
$$= 5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 5 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4} - 1\right) - \left(\frac{3}{4} - 2\right) = 5 \cdot \frac{9}{16} - 5 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - \left(-1\frac{1}{4}\right) =$$
$$= \frac{45}{16} + \frac{15}{16} + 1\frac{1}{4} = \frac{60}{16} + 1\frac{1}{4} = \frac{15}{4} + 1\frac{1}{4} = 3\frac{3}{4} + 1\frac{1}{4} = 5$$

Łatwiej jest najpierw uprościć wyrażenie, a potem podstawić wartości zmiennych.

$5a^2 - 5a(a-1) - (a-b) = 5a^2 - 5a^2 + 5a - a + b = 4a + b$

Dla $a = \frac{3}{4}$ i $b = 2$ wyrażenie $4a + b$ przyjmuje wartość:

$4a + b = 4 \cdot \frac{3}{4} + 2 = 3 + 2 = 5.$

Ćwiczenie 3

Oblicz wartość wyrażenia dla podanych wartości zmiennych.

a) $y(2x - 3y) - (y^2 - xy) - 2y^2$ dla $x = -0{,}3$ i $y = 1\frac{2}{3}$

b) $2x^2 - x(x-y) + y(x-3)$ dla $x = \frac{1}{2}$ i $y = -2{,}5$

Wyodrębnianie wyrazów

Do tej pory skomplikowane sumy algebraiczne otrzymywaliśmy w wyniku mnożenia, więc nie mieliśmy wątpliwości, gdzie kończy się jeden wyraz, a gdzie zaczyna drugi. Jeśli jednak zobaczymy taką sumę zapisaną przez inną osobę, możemy mieć kłopot z wyodrębnieniem wyrazów tej sumy.

Przykład 4

Uporządkuj wyrazy sumy algebraicznej.

a) $3a \cdot 5x + 7xy \cdot 3 - 5$

b) $2x \cdot (-4)y + y^2z + z^2x$

c) $5a + 2ab \cdot 3b + 2(-a)b$

a) $3a \cdot 5x + 7xy \cdot 3 - 5$

Wyrazy sumy algebraicznej są rozdzielone znakami dodawania i odejmowania.

Wyrazami tej sumy są: $3a \cdot 5x$, $7xy \cdot 3$, -5.
Po uporządkowaniu mają one postać: $15ax$, $21xy$, -5.
Całą sumę możemy teraz zapisać w uporządkowanej postaci:
$3a \cdot 5x + 7xy \cdot 3 - 5 = 15ax + 21xy - 5$.

b) $2x \cdot (-4)y + y^2z + z^2x =$

$= -8xy + y^2z + xz^2$

W iloczynie $2x \cdot (-4)y$ minus jest znakiem liczby ujemnej, nie oznacza on odejmowania.

c) $5a + 2ab \cdot 3b + 2(-a)b =$

$= 5a + 6ab^2 - 2ab$

W wyrażeniu $2(-a)b$ minus nie oznacza odejmowania, ale liczbę przeciwną do a.

Ćwiczenie 4

Przepisz do zeszytu sumę algebraiczną, otocz pętlami jej wyrazy, a następnie je uporządkuj.

a) $5a \cdot 2b - 8ca + 9$

b) $5a + 6a \cdot (-b) - b \cdot (-3)b$

Przykład 5

Uporządkuj wyrazy sumy algebraicznej, a następnie zredukuj wyrazy podobne.

$xy^2 \cdot (-2x) + 3xy^2 \cdot 2y - xy \cdot (-yx) =$ Otaczamy wyrazy pętlami i porządkujemy.

$= -2x^2y^2 + 6xy^3 + x^2y^2 =$ Teraz widać wyrazy podobne – podkreślamy je

$= -x^2y^2 + 6xy^3$ i redukujemy: $-2x^2y^2 + x^2y^2 = -x^2y^2$.

Ćwiczenie 5

Przepisz do zeszytu sumę algebraiczną, otocz pętlami jej wyrazy, a następnie je uporządkuj. Na koniec zredukuj wyrazy podobne.

a) $-4ab \cdot (-5) + 4ab^2 + a(-2) \cdot b - ab \cdot (-a)$

b) $(-2a) \cdot 5 \cdot (-b) + a \cdot 7ab - 2b \cdot (-3a) \cdot 2a$

Dobra rada

Jak ułatwić sobie upraszczanie sumy algebraicznej?

1. Najpierw wyodrębnij jej wyrazy – w zeszycie możesz je otoczyć pętlami.

2. Uporządkuj każdy wyraz.

3. Zredukuj wyrazy podobne.

$a^2b^2a \cdot (-2)a + ab^2a - 3a^4b^2 =$

$= -2a^4b^2 + a^2b^2 - 3a^4b^2 =$

$= -5a^4b^2 + a^2b^2$

Zadania

1. Wykonaj polecenia. ▶ Jeśli poprawnie rozwiążesz dwa kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

← P1

Wykonaj mnożenie.

a) $-x(x-3a+1)$

b) $3p(p-2)$

c) $-4a(-a+5b+6)$

d) $5z(-y+x-z)$

e) $-2m(n-m+3)$

f) $k(-g-4)$

poziom B

← P2

Uprość wyrażenie.

a) $x(x-2)+2(x+x^2-5)$

b) $a(a-b)-2a(b-a)$

c) $s(-t+1)-t(s-w+t)$

d) $-m(n-o)-3o(-m+n)$

e) $c(a+b-2c)+2b(-c-a)$

f) $x(y^2-y)+y(-x^2+x)$

poziom C

← P4

Przepisz do zeszytu sumę algebraiczną, otocz pętlami jej wyrazy, a następnie je uporządkuj.

a) $2a\cdot 3b-2b\cdot(-3b)+5a\cdot 2$

b) $3s\cdot(-2t)w-4w\cdot(-5)s+(-t)\cdot 2s$

c) $x\cdot(-3)\cdot(-y)-2y\cdot(-3xy)$

d) $-4m^2\cdot(-3n^3)-6m^3\cdot(-n^2)+7n\cdot m$

e) $(-2)\cdot x\cdot 5yz-3x\cdot(-3xz)+5yz\cdot(-z)$

f) $5a\cdot(-2b)+4b\cdot(-a)\cdot b+a\cdot(-3)$

poziom D

← P5

Przepisz do zeszytu sumę algebraiczną, otocz pętlami jej wyrazy, a następnie je uporządkuj. Na koniec zredukuj wyrazy podobne.

a) $5a\cdot 6b-2\cdot(-5a)+2a\cdot 3-b\cdot a$

b) $a^2b\cdot b+aba-2abba-a^2\cdot(-4b)$

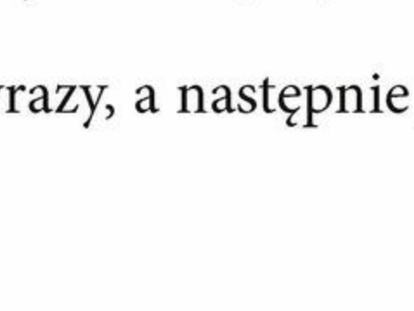
c) $st^2\cdot(-2s)-3st\cdot(-5t)+2s^2\cdot 3t^2-t^2\cdot(-s)$

d) $-3x\cdot(-2)y+4x\cdot(-3xy)+2y\cdot(-x)-x^2\cdot(-5y)$

e) $pr\cdot 3p^2r-(-rp)\cdot(-2pr)+3\cdot prprp-r^2\cdot 4pp$

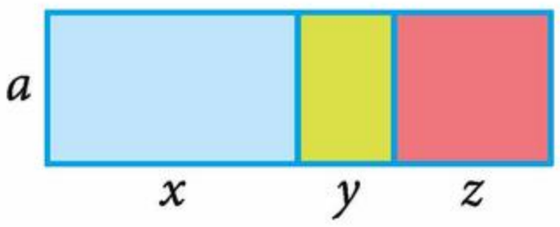
f) $2x\cdot(-5x)y-7\cdot(-3xy)+2xy\cdot 3x-(-4xy)\cdot(-2)$

2. Sytuację przedstawioną na rysunku można opisać za pomocą wzoru $a(x+y)=ax+ay$, co oznacza, że pole prostokąta o bokach długości a i $x+y$ jest równe sumie pól prostokątów o bokach a i x oraz a i y.

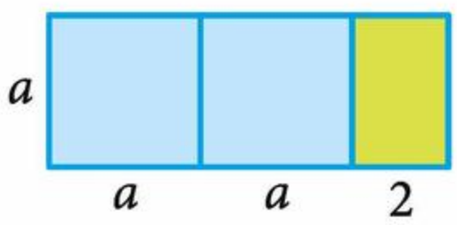


Wyraź za pomocą wzoru sytuację przedstawioną na rysunku.

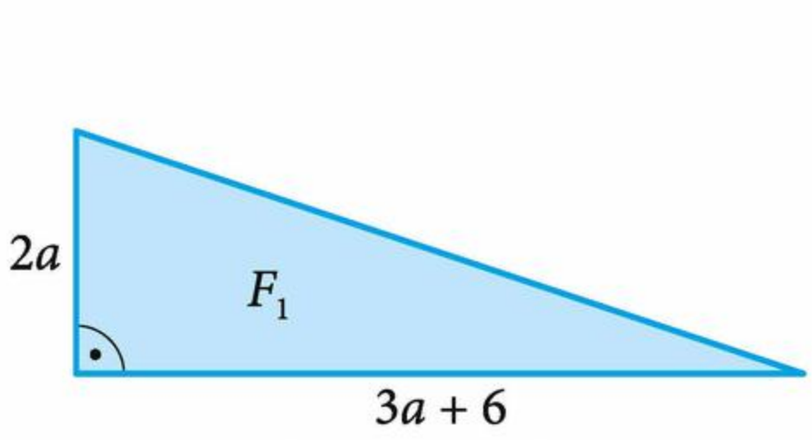
a)



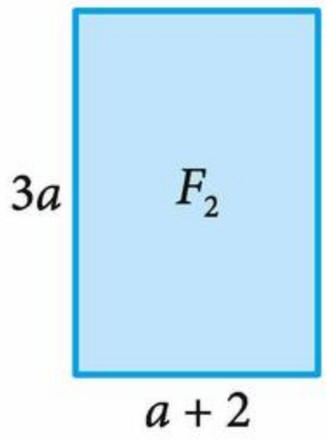
b)



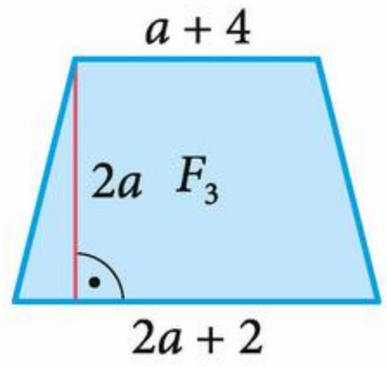
3. Sprawdź, czy pola figur F_1, F_2, F_3 są równe.



trójkąt prostokątny



prostokąt



trapez

4. Dane są cztery zestawy wyrażeń algebraicznych. Dobierzcie się w trójki. Niech każda osoba w trójce wybierze inne wyrażenie z zestawu I, wykona mnożenie i zredukuje wyrazy podobne. Następnie sprawdźcie, czy otrzymaliście jednakowe wyniki. Jeśli nie – poszukajcie błędu. To samo zróbcie w pozostałych zestawach.

I. $n^2 - 3n(n+2)$
$-5n(-2n+3) - 3n(4n-3)$
$-4n(n-2m+3) - 2n(-n+3m-5) - 2n(m+2)$

II. $x^2 + 4x(3y-x) + 6y(y-2x)$
$2x(y-1{,}5x) - 3y\left(-2y+\frac{2}{3}x\right)$
$-x\left(3y^2 - 4\frac{1}{2}x\right) + \left(5x^2 - 3y^2\right)\cdot(-1{,}5) - 3y\left(-xy - \frac{1}{2}y\right)$

III. $-3a^2 + 2a(a-4)$
$a(3-a) - 2{,}75(4a-3) - 8\frac{1}{4}$
$(3a^2 - 4ab)\cdot(-5) - 4b(2a-ab) - 2a(4-7a+6b+2b^2)$

IV. $p(4p-5s) - s(-5p+2s)$
$2p(2p-s) - s(p-s)\cdot(-2)$
$\frac{2}{3}p(6p-2s+4) - \frac{1}{6}s(1+12s-8p) - \frac{1}{3}\left(8p - \frac{1}{2}s\right)$

E **5.** Które z wyrażeń **nie opisuje** pola narysowanego trapezu?

A. $3x(x+2)$
B. $\frac{1}{2}(6x^2 + 12x)$
C. $\frac{3}{2}x(2x+4)$
D. $\frac{1}{2}x(3x+6)$

:D **6.** Uzasadnij, że:

a) wartość wyrażenia $3(x-2y) + 2\left(y^2 - x + 1\right) - 2y(y-3)$ nie zależy od wartości zmiennej y,

b) wartość wyrażenia $6y^2 - 4y(2x-1) + 2y(-2y+x-4) + 2x - 2x(1-3y)$ nie zależy od wartości zmiennej x.

7. Przez co należy pomnożyć sumę algebraiczną $3x - 2xy + 4y^2$, aby otrzymać podane wyrażenie?

a) $6x^2 - 4x^2y + 8xy^2$

b) $1{,}5x^2y - x^2y^2 + 2xy^3$

c) $15xy^2 - 10xy^3 + 20y^4$

d) $4{,}5x^3y - 3x^3y^2 + 6x^2y^3$

Dla dociekliwych

Umiesz już wykonać mnożenie: $4(x+y) = 4x + 4y$.
Zdarzają się sytuacje, w których warto skorzystać z tej równości w drugą stronę, tzn. zamienić $4x + 4y$ na $4(x+y)$. Taką operację nazywamy „wyłączaniem wspólnego czynnika przed nawias". Czasami jest to bardzo łatwe, czasami zaś trzeba się dłużej zastanowić, jaki czynnik możemy wyłączyć. Na przykład:

- $2a - 2b = 2(a-b)$
- $2a - 10b = 2a - 2 \cdot 5b = 2(a-5b)$
- $2a^2 + 9ab = a(2a+9b)$

1. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $8ab - 6ab^2$

b) $4x^3 - 2x^2 + 2x$

c) $35xy^3 + 56y$

d) $\frac{1}{121}k^2l - \frac{1}{15}k^3l^4$

2. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias i oblicz.

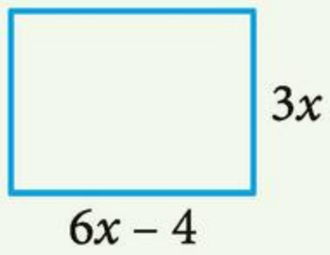
a) $7 \cdot 3{,}5 + 3 \cdot 3{,}5$

b) $12{,}125 \cdot 6{,}78 + 6{,}78 \cdot 7{,}875$

c) $524 \cdot 1432 + 1512 \cdot 1432 - 36 \cdot 1432$

Czy już umiem?

I. Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące pole przedstawionego obok prostokąta, a następnie wykonaj mnożenie.



II. Wykonaj mnożenie.

a) $x(5x^2 - x)$

b) $-x(5x^2 - x)$

c) $-x(-5x^2 - x)$

III. Opuść nawiasy, a następnie zredukuj wyrazy podobne.

a) $ab(b - a^2) - (ab - a^3 + b) \cdot b$

b) $-0{,}3a\left(a - 3\frac{1}{3}\right) + 0{,}3a^2$

IV. Oblicz.

a) $\frac{(2^2)^3}{4 \cdot 2^3}$

b) $(2^2 + 3^2)^2$

c) $2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^3$

d) $\frac{6^5}{3^3 \cdot 2^3}$

5 Wyrażenia algebraiczne i procenty

Na dobry początek >

Cechą charakterystyczną wód morskich jest ich zasolenie. Określa ono, ile gramów soli mineralnych jest zawartych w 1 kg wody morskiej.

Morze Bałtyckie





Zasolenie Morza Bałtyckiego nie jest jednolite – zmniejsza się w miarę oddalania od Cieśnin Duńskich i zwiększa się wraz z głębokością.

Przeciętne zasolenie oceanu wynosi ok. 3,5%: w 1000 g wody morskiej rozpuszczonych jest 35 g soli.





Temperatury powietrza nad Morzem Martwym należą do najwyższych na Ziemi, co sprzyja parowaniu wody i wytrącaniu się soli.

Pytania i polecenia

- Ile gramów soli znajduje się średnio w 1 kilogramie wody w Bałtyku?
- Ile średnio soli wytrąci się po odparowaniu 1 kilograma wody z Morza Martwego? Ile kilogramów wody z Bałtyku potrzeba, aby po odparowaniu uzyskać taką samą ilość soli?

Stosowanie wyrażeń algebraicznych ułatwia rozwiązywanie wielu zadań dotyczących procentów. Aby z tego skorzystać, nauczymy się zapisywać wyrażenia algebraiczne z użyciem procentów.

Przykład 1

E

Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego:

a) 65% liczby x,

b) 120% wartości wyrażenia ab,

c) 40% wartości wyrażenia $0{,}6m$.

a) 65% liczby x to inaczej $\frac{65}{100}$ tej liczby, czyli $\frac{65}{100}x$ lub $0{,}65x$.

b) 120% wartości wyrażenia ab to inaczej $1{,}2ab$.

c) 40% wartości wyrażenia $0{,}6m$ to inaczej $0{,}4 \cdot (0{,}6m) = 0{,}4 \cdot 0{,}6m = 0{,}24m$.

Ćwiczenie 1

Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego:

a) 40% liczby a,

b) 60% wartości wyrażenia xy,

c) 180% wartości wyrażenia $0{,}3u$.

Procent procentu

Przykład 2

W klasach siódmych pewnej szkoły jest 40% chłopców i 60% dziewcząt. Na kółko matematyczne chodzi 20% chłopców i 30% dziewcząt. Jaki procent siódmoklasistów chodzi na kółko?

Wprowadzamy oznaczenie:
x – liczba osób w klasach siódmych.

Chłopcy to 40% uczniów klas siódmych, czyli 0,4 liczby x:

$0{,}4x$ – liczba chłopców w klasach siódmych.

20% tej liczby, czyli 0,2 tej liczby, chodzi na kółko.

Zapisujemy wyrażenie podobnie jak w przykładzie 1c).

$0{,}2 \cdot 0{,}4x = 0{,}08x$ – liczba chłopców chodzących na kółko

Analogicznie postępujemy w przypadku dziewcząt.

$0{,}6x$ – liczba dziewcząt w klasach siódmych

$0{,}3 \cdot 0{,}6x = 0{,}18x$ – liczba dziewcząt chodzących na kółko

W sumie na kółko matematyczne chodzi:

$0{,}08x + 0{,}18x = 0{,}26x$, czyli 26% wszystkich siódmoklasistów.

W dziale I rozwiązywaliśmy podobne zadania, jednak wtedy podana była liczba osób stanowiąca 100%. Teraz nie znamy tej liczby. Dlatego korzystamy z wyrażeń algebraicznych.

Ćwiczenie 2

Spośród wszystkich uczniów szkoły Weroniki 15% stanowią siódmoklasiści, a 20% siódmoklasistów to klasa 7a. Jaki procent uczniów szkoły stanowią uczniowie 7a?

Przykład 3

Oprocentowanie rocznej lokaty (patrz. s. 31) wynosi 2%, a podatek od odsetek 19%. O ile procent wzrośnie kwota na rachunku lokaty po upływie roku?

Sposób I

x – wpłacona kwota

$0{,}02x$ – kwota odsetek po roku

$0{,}19 \cdot 0{,}02x = 0{,}0038x$ – kwota podatku od odsetek

$x + 0{,}02x - 0{,}0038x = 1{,}0162x$ – kwota na rachunku lokaty po roku

$1{,}0162x$ to $101{,}62\%x$, czyli kwota na rachunku lokaty po roku jest wyższa od wpłaconej o 1,62%.

Sposób II

x – wpłacona kwota

$0{,}02x$ – kwota odsetek po roku

Skoro podatek stanowi 19% odsetek, to na rachunku dopisane zostanie pozostałe 81% odsetek, czyli:

$0{,}81 \cdot 0{,}02x = 0{,}0162x$.

Kwota na rachunku lokaty wzrośnie o $0{,}0162$ wpłaconej kwoty, czyli o jej 1,62%.

Ćwiczenie 3

Antosia planowała zakupy: 40% pieniędzy zamierzała wydać na płyty, a 60% na książki. Okazało się, że w sklepie jest promocja – ceny wszystkich płyt obniżono o 10%. O ile procent mniej zapłaci Antosia za całe zakupy, jeśli kupi tylko to, co planowała?

O ile procent mniej, o ile procent więcej

Przypomnijmy, że gdy chcemy znaleźć liczbę większą lub mniejszą o określony procent od danej liczby, najwygodniej jest wykonać odpowiednie mnożenie. Podobnie zapisujemy zmiany o określony procent w przypadku wyrażeń algebraicznych.

Przykład 4

a) W lesie rośnie 180 dębów i o 30% więcej buków. Ile jest buków?
b) W lesie rośnie 180 dębów i o 30% mniej olch. Ile jest olch?

dąb 

buk 

olcha 

c) Zapisz wyrażenie oznaczające liczbę o 30% większą niż x.
d) Zapisz wyrażenie oznaczające liczbę o 30% mniejszą niż x.

a) Liczba buków stanowi 130% liczby dębów, czyli jest ich:
$\frac{130}{100} \cdot 180 = 1{,}3 \cdot 180 = 234$.

b) Liczba olch stanowi $100\% - 30\% = 70\%$ liczby dębów, czyli jest ich:
$\frac{70}{100} \cdot 180 = 0{,}7 \cdot 180 = 126$.

c) Liczba o 30% większa niż x to 130% liczby x, czyli $1{,}3x$.

d) Liczba o 30% mniejsza niż x to 70% liczby x, czyli $0{,}7x$.

Ćwiczenie 4.1

Oblicz za pomocą jednego mnożenia:
a) liczbę o 20% większą od 80, **b)** liczbę o 20% mniejszą od 80.

Ćwiczenie 4.2

Zapisz wyrażenie oznaczające liczbę:
a) o 20% większą od y, **b)** o 45% mniejszą od x, **c)** o 13% większą od $0{,}8x$.

Przykład 5

E

Cena została podniesiona o 20%, a następnie obniżona o 10%.
O ile procent wyższa jest obecna cena od ceny początkowej?

Nie znamy początkowej ceny, możemy ją jednak oznaczyć literą x. Po podwyżce cena wzrosła do $1{,}2x$, a po obniżce wynosiła:
$0{,}9 \cdot (1{,}2x) = 0{,}9 \cdot 1{,}2x = 1{,}08x$.
$1{,}08x$ to $108\%x$, czyli cena x wzrosła o 8%.

Ćwiczenie 5

O ile procent zmniejszyła się cena, jeśli najpierw obniżono ją o 10%, a później jeszcze o 20%?



Zadania

1. Zapisz:
a) działanie pozwalające obliczyć 13% liczby 837,
b) 13% liczby x,
c) działanie pozwalające obliczyć liczbę o 17% większą od 921,
d) liczbę o 17% większą od x,
e) działanie pozwalające obliczyć liczbę o 15% mniejszą od 739,
f) liczbę o 15% mniejszą od x.

2. Zapisz:
a) 80% liczby x,
b) 70% liczby $0{,}8x$,
c) 70% z 80% liczby x,
d) liczbę o 20% większą od x,
e) liczbę o 20% większą od $1{,}1x$,
f) liczbę o 20% większą od liczby o 20% większej od x.

3. W wyborach do samorządu szkolnego głosy oddało 60% uczniów szkoły. Najwięcej głosów zyskał kandydat, którego poparło 40% głosujących. Ile procent uczniów tej szkoły głosowało na tego kandydata?

E **4.** Noclegi stanowią 25% całkowitego kosztu wycieczki, a wyżywienie 35% tego kosztu. Właściciel pensjonatu zaproponował nocleg w pokojach o 15% droższych, zachęcając rabatem na wyżywienie w wysokości 20%. Czy opłaca się przyjąć taką ofertę?

5. Uczniowie pojechali do zoo w mieście Dvůr Králové. Ponieważ 40% kosztów wycieczki trzeba było zapłacić w koronach czeskich, a kurs korony spadł z 16 gr do 14 gr, wycieczka była tańsza, niż planowano. O ile procent zmniejszył się jej koszt?



6. O jaki procent zmieniła się cena kalafiora, jeśli:
a) obniżono ją dwukrotnie o 10%,
b) podwyższono ją dwukrotnie o 10%?

E **7.** Oblicz, o ile procent zmieniła się cena gry planszowej, jeśli jej cenę:
a) najpierw obniżono o 10%, a następnie podwyższono o 10%,
b) najpierw obniżono o 40%, a następnie podwyższono o 50%,
c) najpierw podwyższono o 40%, a następnie obniżono o 50%.

8. W prostokącie o bokach a i $2a$ dłuższy bok wydłużono o 20%, a krótszy skrócono o 20%.

a) Czy pole prostokąta zmniejszyło się, czy zwiększyło? O ile procent?
b) Czy obwód prostokąta zmniejszył się, czy zwiększył? O ile procent?

9. Trzy towary objęto jednakową stawką VAT (patrz s. 52). Mamy obliczyć koszt zakupu tych towarów. Uzasadnij, że nie ma znaczenia, czy:
- najpierw dodamy ceny netto, a potem doliczymy VAT do ich sumy,
- najpierw obliczymy ceny brutto poszczególnych towarów, a potem je zsumujemy.

Dla dociekliwych

1. Cenę pewnego towaru podniesiono o 25%. O ile procent należy ją obniżyć, aby wróciła do poprzedniego poziomu? Spróbuj to obliczyć (pamiętaj, że nie znamy konkretnej ceny!), a jeśli ci się nie uda, przeczytaj wskazówkę.

Wskazówka. Oznaczmy początkową cenę literą x. Po podwyżce cena wzrośnie do $1{,}25x$. Trzeba ją teraz obniżyć o $0{,}25x$. Jaki procent nowej ceny (czyli $1{,}25x$) stanowi kwota obniżki (czyli $0{,}25x$)?

2. Podatek VAT na nabiał stanowi 5% jego ceny netto (patrz s. 52). Jaki procent ceny brutto stanowi ten podatek?

Czy już umiem?

I. Zapisz liczbę:

a) o 40% większą niż 75% liczby x, **b)** o 10% mniejszą niż 80% liczby x.

II. Ciasta na Święto Szkoły upiekło 8% dziewcząt i 12% chłopców. Jaki to procent uczniów, jeśli chłopcy stanowią 45% wszystkich uczniów tej szkoły?

III. Cenę zabawki podniesiono przed Bożym Narodzeniem o 30%, a po Świętach obniżono o 20%. O ile procent droższa jest zabawka po tych dwóch zmianach?

IV. Skorzystaj z informacji podanych na ilustracji i odpowiedz na pytanie.

a) Ile trzeba zapłacić za 1,45 kg jabłek i cytrynę ważącą 14 dag?
b) Ile waży jabłko, za które trzeba zapłacić 56 gr?



Powtórzenie IV

ZESTAW 1

1. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego liczbę:

a) będącą sumą liczb x i 2,

b) będącą trzecią częścią liczby k,

c) 12 razy większą od różnicy liczb x i y,

d) o 3 mniejszą od podwojonej liczby a,

e) równą 40% liczby k,

f) o 25% mniejszą od liczby x.

2. W sadzie rosną jabłonie, wiśnie i grusze. Jabłoni jest x, wiśni jest dwa razy mniej niż jabłoni, a grusz – o pięć więcej niż wiśni. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, ile drzew rośnie w sadzie. Przedstaw zapisane wyrażenie w najprostszej postaci.



3. Oblicz wartość wyrażenia dla podanych wartości zmiennych.

a) $2x - 3y + 8$ dla $x = 4, y = -3$

b) $\frac{x-y}{x+y}$ dla $x = 1, y = \frac{1}{2}$

4. Uporządkuj wyrażenie.

a) $2x^3 \cdot 3x$

b) $\frac{1}{3}xy \cdot 6y^2$

c) $6b \cdot (-a)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)a^3 b$

5. Dane wyrażenie algebraiczne przedstaw w najprostszej postaci.

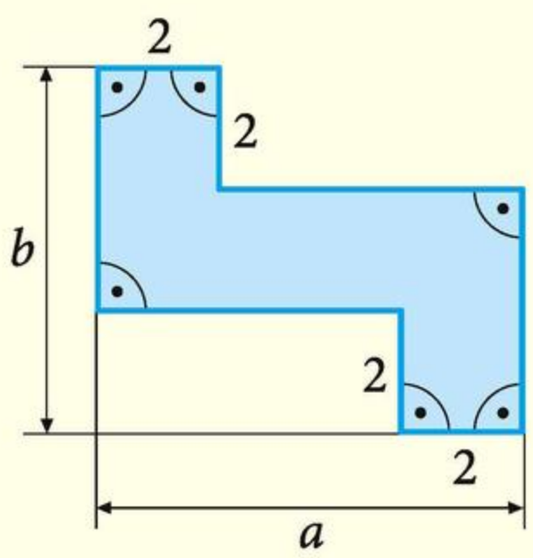
a) $2a^2 - 3b + 6b + 5a$

b) $(5a + 3b) : \frac{1}{2}$

c) $2x(4x - 1) + 4x$

6. Na rysunku przedstawiono wielokąt, którego kolejne boki są prostopadłe.

Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań. Zapisz w zeszycie numery zdań i przy każdym z nich wstaw literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F, jeśli zdanie jest fałszywe.



I.	Obwód tego wielokąta opisuje wyrażenie $2a + 2b$.
II.	Pole tego wielokąta jest równe $ab - 4a + 8$.

7. Wyrażenie $5000 + 85xy$ opisuje całkowity koszt pewnego obozu (w złotych), x oznacza liczbę uczestników, a y czas trwania obozu (w dniach). Oblicz, ile zapłacono za tygodniowy pobyt na obozie 20 uczestników.

8. Spodnie kosztowały s złotych. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, ile będą kosztowały po:

a) podwyżce o 15%,

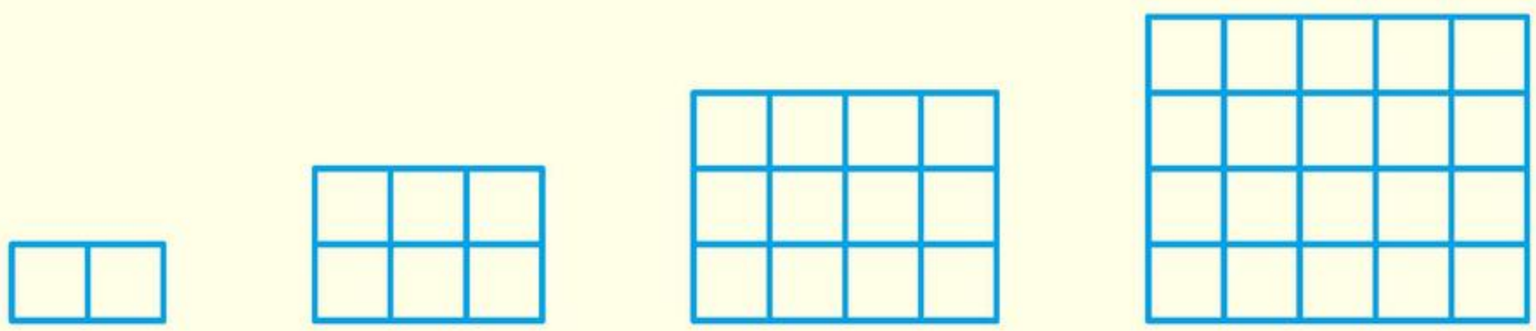
b) obniżce o 15%.

9. Sklep oferuje 10% rabatu przy zakupie roweru i 5% rabatu przy zakupie kasku. Niech x oznacza cenę roweru przed obniżką, a y cenę kasku przed obniżką. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, ile zapłacimy za rower i kask z rabatem.



ZESTAW 2

1. Z małych kwadratów o boku długości x tworzymy kolejno prostokąty w sposób pokazany na rysunku. Zapisz wzór na obwód i pole n-tego prostokąta.



2. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego:

a) sumę liczby dwa razy większej niż x i liczby o 30% mniejszej od y,
b) iloczyn 150% liczby a i 35% liczby b.

3. Która figura ma większe pole: prostokąt o bokach x oraz $x + 2$ czy trapez o podstawach długości x oraz $x + 2$ i wysokości x? Ile wynosi różnica tych pól?

4. Jedna z podstaw trapezu ma długość x, a druga jest od niej trzy razy dłuższa. Pole tego trapezu wynosi $4x^2$. Wyznacz wysokość tego trapezu.

5. Doprowadź dane wyrażenie do najprostszej postaci.

a) $(-2y)(3x + y) - 2x(x - y)$ **b)** $\frac{3x+9}{3} - \frac{2x-9}{4}$

6. W pewnej szkole w klasie 7a jest o 4 uczniów więcej niż w klasie 7b liczącej x uczniów, a w klasie 7c jest o 20% mniej uczniów niż w klasie 7a. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, ilu uczniów jest łącznie w tych trzech klasach. Wynik zapisz w najprostszej postaci.

7. Bartek kupił 3 napoje i 2 ciastka, a Monika 3 ciastka i 2 napoje. Napój kosztuje x zł, a ciastko jest od niego droższe o 20%. Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące, o ile więcej zapłaci Monika od Bartka.

8. Cenę nart obniżono po sezonie o 20%, a potem jeszcze o 25%. O ile procent łącznie obniżono tę cenę?

9. Ania zastanawiała się, czy kupić książkę z zagranicznej księgarni wysyłkowej. Zanim się zdecydowała, wyrażona w euro cena wraz z wysyłką została obniżona o 10%, ale euro zdrożało o 5%. O ile procent mniej zapłaci Ania za książkę wraz z wysyłką, jeśli teraz zdecyduje się na zakup?

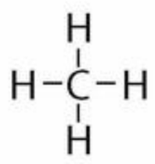
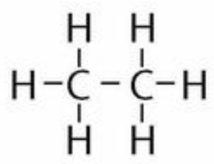
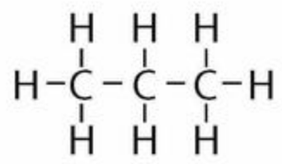
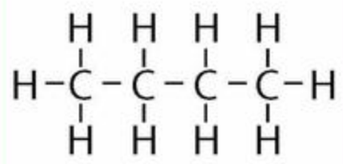
Zadania na temat…

Węglowodory

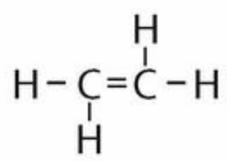
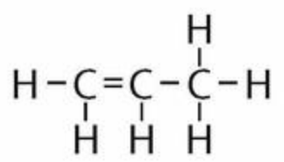
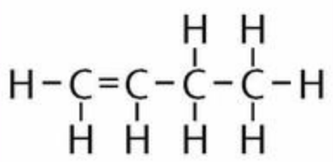
Węglowodory to związki chemiczne węgla i wodoru. Stanowią one ważne źródło energii.

Węglowodory można uporządkować, gromadząc w jednej grupie związki o podobnych wzorach, ale różniące się liczbą atomów węgla (C) i wodoru (H). Mówimy, że węglowodory tworzą szeregi. Poniżej przedstawiono trzy takie szeregi oraz przykłady związków chemicznych, które do nich należą.

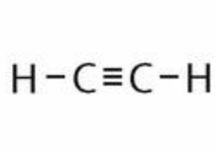
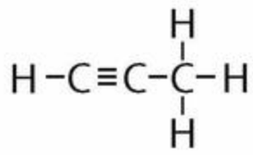
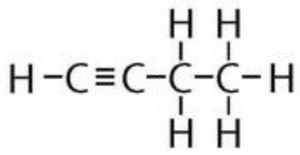
Alkany

	metan	etan	propan	butan
wzór sumaryczny	CH_4	C_2H_6	C_3H_8	C_4H_{10}
wzór strukturalny				

Alkeny

	eten	propen	buten
wzór sumaryczny	C_2H_4	C_3H_6	C_4H_8
wzór strukturalny			

Alkiny

	etyn	propyn	butyn
wzór sumaryczny	C_2H_2	C_3H_4	C_4H_6
wzór strukturalny			



Gaz ziemny składa się głównie z metanu.



Gaz w butlach to mieszanina propanu i butanu.



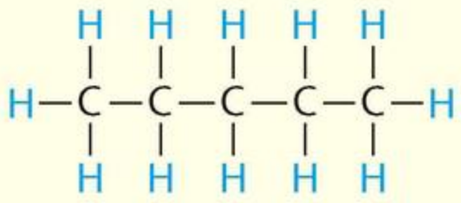
Benzyna to mieszanina wielu różnych węglowodorów.

1. Czym się różnią wzory sumaryczne etanu, etenu i etynu?
2. Kolejny alkan w szeregu to pentan. Jak się nazywają kolejne: alken i alkin? Zapisz wzory sumaryczne wszystkich trzech związków.
3. Ogólny wzór sumaryczny alkinów ma postać C_nH_{2n-2}. Wyjaśnij, dlaczego gdy atomów węgla jest n, to atomów wodoru jest $2n - 2$.
4. Zapisz w analogiczny sposób ogólne wzory sumaryczne alkanów i alkenów.
5. Dekan, deken i dekin mają po 10 atomów węgla. Ile atomów wodoru ma każdy z nich? Zapisz ich wzory sumaryczne.

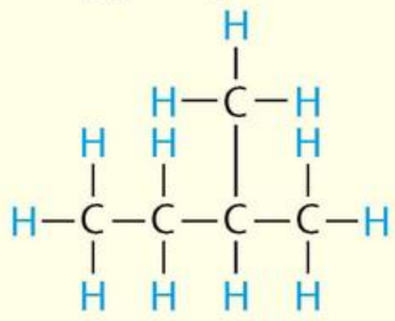
Izomery

Pięć atomów węgla i dwanaście atomów wodoru tworzących pentan (C_5H_{12}) nie zawsze łączy się tak samo. Istnieją trzy możliwości:

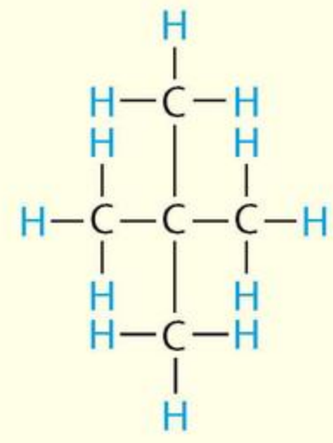
I.



II.



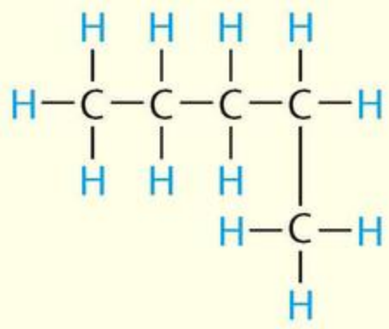
III.



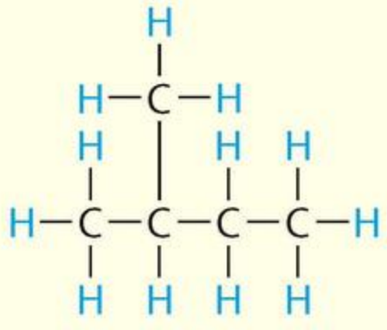
6. Czym się różnią powyższe trzy wzory strukturalne?

Przedstawione wyżej związki nazywamy izomerami C_5H_{12}. Nie istnieje więcej takich izomerów. Na ilustracji A przedstawiono ten sam izomer co na rysunku I, ponieważ istotne są połączenia między atomami, a nie ich rozmieszczenie graficzne.

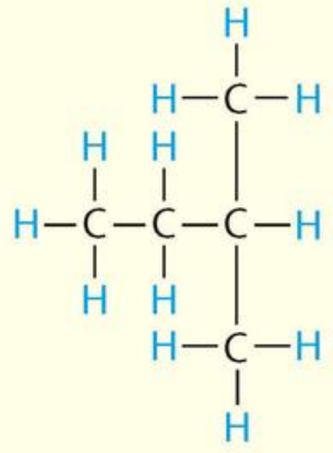
A.



B.



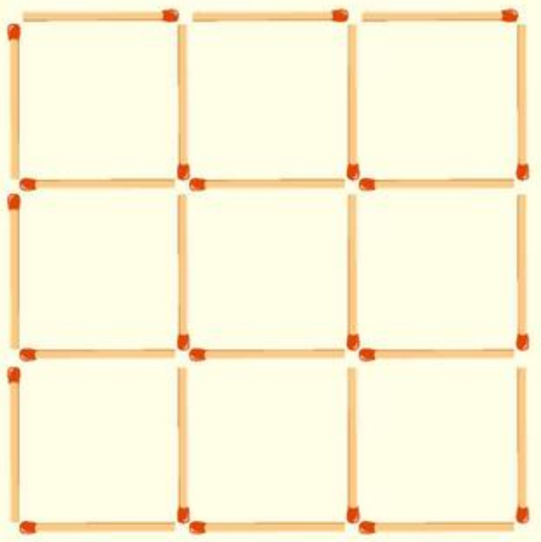
C.



7. Na którym z rysunków: I, II czy III przedstawiono ten sam izomer C_5H_{12} co na rysunku B?
8. Na którym z rysunków: I, II czy III przedstawiono ten sam izomer C_5H_{12} co na rysunku C?
9. Butan ma dwa izomery. Narysuj ich wzory strukturalne.
10. Narysuj wzory strukturalne wszystkich pięciu izomerów heksanu C_6H_{14}.

Zadania na deser

Wzory i wzorki



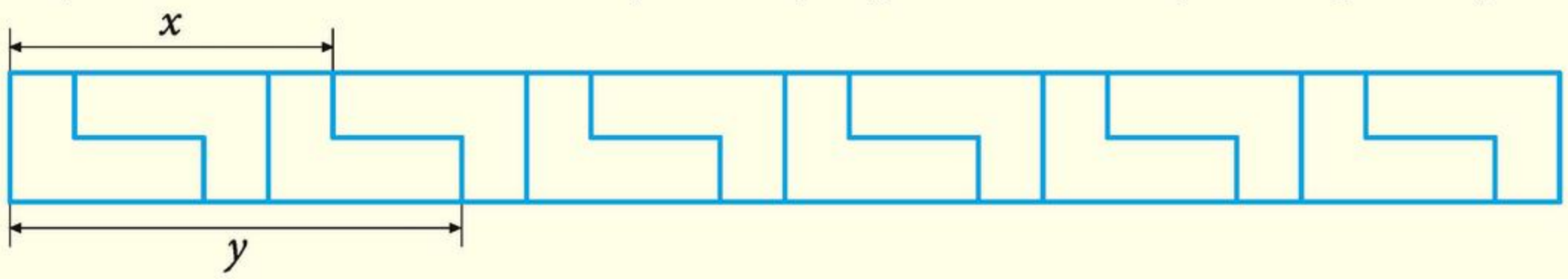
1. Na rysunku przedstawiono kwadrat ułożony z zapałek, który ma 3×3 oczka.

a) Ile zapałek potrzeba do ułożenia kwadratu mającego 5×5 oczek?

b) Ile zapałek potrzeba do ułożenia kwadratu mającego $n \times n$ oczek?

c) Ile oczek będzie miał kwadrat ułożony w podobny sposób z 220 zapałek? Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne i spróbuj odgadnąć, kiedy ma ono wartość 220.

2. Pas ziemi oddzielający trawnik od ścieżki rowerowej podzielono na jednakowe rabaty kwiatowe w kształcie litery L, tak jak pokazano na rysunku poniżej.



Korzystając z informacji podanych na rysunku, zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego długość tego pasa ziemi, gdy rabatek jest:

a) 12 (jak na rysunku), **b)** 912, **c)** 1000, **d)** $2n$.

3. Drewniany sześcienny klocek o krawędzi 3 cm pomalowano na zielono, a następnie pocięto na sześcienne kostki o krawędzi 1 cm każda. Spośród tych kostek sześć ma jedną ścianę zieloną, a dwanaście – dwie ściany zielone. Ile kostek o krawędzi 1 cm z jedną ścianą zieloną, a ile z dwiema ścianami zielonymi otrzymano by, gdyby wyjściowy klocek miał krawędź długości:

a) 4 cm, **b)** n cm, gdzie $n \geqslant 3$?

Procenty

Wskazówka. Przed rozwiązaniem zadań zapoznaj się z ramką „Dla dociekliwych” na s. 191.

4. Jola ma o 50% więcej sukienek niż Ola. O ile procent mniej sukienek ma Ola?

5. **a)** Cenę jabłek obniżono o 20%. O ile procent należy podnieść ich obecną cenę, aby była równa cenie początkowej?

b) Cenę deficytowego towaru podniesiono o 60%. O ile procent należy ją obniżyć, aby była równa cenie początkowej?

6. Długość jednego boku prostokąta zmniejszono o 25%. O ile procent należy zwiększyć długość drugiego boku prostokąta, aby jego pole pozostało takie samo?

7. Cena nart przed sezonem wzrosła o 16%. O jaki procent należałoby obniżyć nową cenę po sezonie, aby narty kosztowały tyle samo co przed sezonem? Wynik zaokrąglij do 1%.

Podzielność liczb

Wskazówka. Przed rozwiązaniem zadań zapoznaj się z ramkami „Dla dociekliwych" na s. 168 i 176.

8. W wyrażeniach w ramce zmienna n oznacza liczbę naturalną. Wybierz z ramki liczby:

a) podzielne przez 3 dla każdego n,
b) niepodzielne przez 3 dla żadnego n,
c) podzielne przez 3 dla niektórych n.

$3n$ $\quad 6n+2$ $\quad 3n+1$ $\quad 6n$ $\quad 4n$ $\quad 6(n+2)$

9. Uzasadnij, że liczba trzycyfrowa, której cyfry są kolejnymi liczbami naturalnymi, jest podzielna przez 3.

10. Uzasadnij, że suma pięciu kolejnych liczb naturalnych podzielnych przez 3 jest podzielna przez 15.

11. Uzasadnij, że jeśli od dowolnej czterocyfrowej liczby naturalnej odejmiemy sumę jej cyfr, to otrzymamy liczbę podzielną przez 9.

12. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba

$$n(n-5)-n(n-3)-4(n-3)$$

jest podzielna przez 6.

Wartości wyrażeń

13. Dla jakich liczb x podane wyrażenie ma wartości dodatnie, dla jakich ujemne, a dla jakich – wartość 0?

a) $\dfrac{(5-2x)^2}{8-2^2}$ **b)** $\dfrac{(x-3)^2}{-2-(-1)^3}$

14. a) Dla pewnych liczb a i b ($b \neq 0$) wartość wyrażenia $\dfrac{a-1}{b}$ jest równa 4. Ile wynosi wartość wyrażenia $\dfrac{3a-3}{b}$ dla tych samych liczb a i b?

b) Dla pewnych liczb a i b ($a \neq 1$, $b \neq 0$) wartość wyrażenia $\dfrac{a-1}{b}$ jest równa 5. Ile wynosi wartość wyrażenia $\dfrac{2a-2}{b}-\dfrac{10b}{a-1}$ dla tych samych liczb a i b?

1 Co to jest równanie

Na dobry początek

Z Władysławowa do Helu można dojechać pociągiem.
Pociąg przejeżdża przez kilka miejscowości:
Kuźnicę, Juratę, Jastarnię i Chałupy.



1. Chałupy leżą między Władysławowem a Kuźnicą.
2. Jastarnia sąsiaduje z Juratą.
3. W drodze powrotnej z Helu jako pierwszą mijamy Juratę.

Pytania i polecenia

- Dopasuj litery B–E do nazw miejscowości.
- Z Kuźnicy do Władysławowa jest dwa razy dalej niż do Jastarni, a 8 km bliżej niż do Helu. Z Władysławowa do Helu jest 36 km. Ile kilometrów jest z Kuźnicy do Jastarni?

Równania znamy już od dawna. Zauważ, że w każdym równaniu możemy wyróżnić **lewą stronę**, **znak równości** i **prawą stronę**. W prostych równaniach, które spotykaliśmy w klasach 4–6, po prawej stronie znajdowała się zwykle liczba. Jednak równania mogą być bardziej skomplikowane, np.:



Zarówno lewa, jak i prawa strona równania mogą być dowolnymi wyrażeniami algebraicznymi, ale przynajmniej z jednej strony muszą pojawić się zmienne. W szkole podstawowej będziemy się zajmować równaniami, w których występuje tylko jedna zmienna. Nazywamy ją **niewiadomą**.

Rozwiązanie równania

W równaniu interesuje nas, jaką liczbą możemy zastąpić x, aby lewa strona była równa prawej. Taką liczbę nazywamy **rozwiązaniem** (lub **pierwiastkiem**) równania. W prostych przypadkach rozwiązanie można odgadnąć, np. liczba 5 jest rozwiązaniem równania $x + 10 = 3x$, gdyż po wstawieniu liczby 5 w miejsce x otrzymujemy:

Lewa strona $= x + 10 = 5 + 10 = 15$

Prawa strona $= 3x = 3 \cdot 5 = 15$

Lewa = Prawa

Mówimy także, że liczba 5 **spełnia równanie** $x + 10 = 3x$.

! Każde z poniższych zdań znaczy to samo:
- Liczba 5 jest rozwiązaniem równania $x + 10 = 3x$.
- Liczba 5 spełnia równanie $x + 10 = 3x$.
- Liczba 5 jest pierwiastkiem równania $x + 10 = 3x$.

Przykład 1

Dane jest równanie $2x + 3(x + 2) = 36$. Sprawdź, czy jego rozwiązaniem jest liczba:

a) $x = 5$, **b)** $x = 6$.

a) Po podstawieniu w miejsce x liczby 5 otrzymujemy:

Lewa strona $= 2x + 3(x + 2) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot (5 + 2) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 10 + 21 = 31$

Prawa strona $= 36$ Lewa $\neq$ Prawa

Liczba 5 nie jest rozwiązaniem danego równania (czyli nie spełnia tego równania).

b) Dla $x = 6$:

Lewa strona $= 2x + 3(x + 2) = 2 \cdot 6 + 3 \cdot (6 + 2) = 36$

Prawa strona $= 36$ L = P

Liczba 6 jest rozwiązaniem danego równania (czyli spełnia dane równanie).

! Lewą stronę równania oznaczamy L, a prawą P.

Ćwiczenie 1

a) Wśród liczb 6, 8, 10 wskaż rozwiązanie równania $3x - 4 = 20$.

b) Wśród liczb -2, $\frac{1}{2}$, 3 wskaż rozwiązanie równania $7y - 15 = 6$.

c) Wśród liczb -2, $\frac{1}{2}$, 2 wskaż rozwiązanie równania $3x - 2(x + 5) = -12$.

Ile rozwiązań może mieć równanie?

Nie każde równanie ma jedno rozwiązanie.

Zapamiętaj

Równanie może nie mieć rozwiązań, może mieć jedno rozwiązanie lub kilka, a nawet nieskończenie wiele rozwiązań. Polecenie „rozwiąż równanie" oznacza „znajdź wszystkie jego rozwiązania".

Przykład 2.1

Podaj rozwiązania równania $x^2 = 36$.

Równanie jest spełnione przez każdą z liczb 6 i -6, bo $6^2 = 36$ i $(-6)^2 = 36$.

Obie te liczby są rozwiązaniami równania $x^2 = 36$.



Przykład 2.2

Jakie liczby spełniają równanie $x + 1 = x$?

Takich liczb **nie ma** – jeśli do jakiejś liczby dodamy 1, na pewno nie otrzymamy tej samej liczby.

Przykład 2.3

Jakie liczby spełniają równanie $0 \cdot x = 0$?

To równanie spełnia **każda** liczba – dowolna liczba pomnożona przez 0 daje w wyniku 0. Równanie $0 \cdot x = 0$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Ćwiczenie 2

Wśród podanych równań wskaż: jedno, które ma nieskończenie wiele rozwiązań, jedno, które ma dwa rozwiązania, dwa równania, które mają po jednym rozwiązaniu, oraz dwa, które nie mają rozwiązań.

I. $x + 3 = 5$ **III.** $2x - 5 = 2x$ **V.** $\sqrt{x} = 9$

II. $x + x = 2x$ **IV.** $x^2 = 64$ **VI.** $x^2 = -4$

Równania a zadania tekstowe

Zajmiemy się teraz układaniem równań do zadań tekstowych.

Przykład 3

Przedstaw w postaci równania sytuację opisaną w zadaniu.

Dwie herbaty i ciastko za 3 zł kosztują razem 11 zł. Ile kosztuje herbata?

Pytanie w treści zadania często podpowiada nam, co możemy wybrać jako niewiadomą. W tym zadaniu jest to cena herbaty. Wprowadzamy oznaczenie:

x – cena herbaty

$2x$ – koszt dwóch herbat Dwie herbaty kosztują dwa razy więcej niż jedna herbata.

$2x + 3 = 11$

dwie herbaty i ciastko za 3 zł kosztują razem 11 zł

Rozwiązaniem równania zapisanego w przykładzie jest cena herbaty. Rozwiązanie tak prostego równania możemy odgadnąć: $x = 4$, a więc herbata kosztuje 4 zł.

Ćwiczenie 3

Przedstaw w postaci równania sytuację opisaną w zadaniu.

Jaś jest o 4 lata starszy od Małgosi. W sumie mają 14 lat. Ile lat ma Małgosia?

Zadania

1. Sprawdź, która z liczb: -7, -2, 0 spełnia podane równanie.

a) $4x + 8 = 0$ **c)** $2x + 5 = -9$ **e)** $(x + 1) : 3 = -2$

b) $\frac{1}{2}x + 3 = 2$ **d)** $3 - 2x = 17$ **f)** $(x + 4) : 2 = 2$

2. Sprawdź, czy podana liczba x spełnia równanie.

a) $x^2 + 3x = 2x + 6,\ x = 2$ **d)** $x^3 + 4x^2 = x(x + 2),\ x = 1$

b) $x^2 - 4x = 6 - x,\ x = -1$ **e)** $\frac{2}{x^2 + 2} = \frac{x}{6},\ x = 2$

c) $2x - 13 = x^2 + 5,\ x = -3$ **f)** $3^x - 2 = (x + 2)^2,\ x = 3$

3. Ułóż i zapisz trzy równania, których rozwiązaniem jest liczba 3.

4. **a)** Każda z liczb: 1, 2, 3, 4, 5 jest rozwiązaniem jednego z równań w ramce. Sprawdź którego i zapisz obliczenia. Ustaw równania w takiej kolejności, aby liczba 1 była rozwiązaniem pierwszego, liczba 2 – rozwiązaniem drugiego itd. Litery odpowiadające równaniom utworzą hasło.

$x(3-x)=0$	$6x+6=30$	$x^2(6-x)=4x+5$	$2^x-1=x$	$2x^2+3x=14$
T	R	A	W	A

b) Niektóre z podanych równań mają więcej rozwiązań. Które z tych równań spełnia także liczba 0?

5. Podane równanie ma tylko jedno rozwiązanie. Znajdź je.

a) $15+x=25$ **c)** $3-x=5$ **e)** $3x=21$ **g)** $x:8=4$

b) $7-x=-1$ **d)** $x-16=4$ **f)** $x\cdot 4=36$ **h)** $64:x=16$

6. Zgadnij rozwiązania równań z niebieskiej ramki, a następnie do każdego z nich dobierz z czerwonej ramki równanie, które ma takie samo rozwiązanie.

I. $x+3=7$ **II.** $x:2=5$ **III.** $5x=15$ **IV.** $20:x=10$

A. $\frac{17+x}{2x+4}=x-1$ **C.** $x^2-(x-2)^2=(x-4)^2$

B. $x^2+28=11x$ **D.** $x^3+x=x\cdot 5$

7. Ułóż równanie odpowiadające treści zadania.

a) Michał jest dwa razy młodszy od swojego brata. W sumie mają 39 lat. Ile lat ma Michał?

b) Zbieram na rower. Niestety, nawet gdybym miał trzy razy tyle pieniędzy, ile udało mi się zebrać do tej pory, to i tak zabrakłoby mi 100 zł na zakup roweru, który kosztuje 940 zł. Ile mam pieniędzy?

8. Ułóż zadanie do równania $(x+3)\cdot x=70$.

9. Spośród podanych równań jedno nie ma rozwiązania, jedno ma tylko jedno rozwiązanie, jedno ma dwa rozwiązania, a jedno ma nieskończenie wiele rozwiązań. Wskaż każde z nich.

I. $x(x-1)+x=x^2$ **II.** $x^2+2=3x$ **III.** $x^2+8=0$ **IV.** $3x+7=4$

10. Jakie liczby spełniają równanie?

a) $\sqrt[3]{x^3}=x$ **b)** $\sqrt{x^2}=x$

Dla dociekliwych

W równaniu może wystąpić więcej niż jedna niewiadoma, np.:

$x + y = 11$, $3x + y = 20$, $2x = y$, $a \cdot b \cdot c = 0$.

Rozwiązaniem równania z jedną niewiadomą jest liczba. Czego szukamy, gdy chcemy rozwiązać równanie z dwiema niewiadomymi?

Popatrzmy na równanie $x + y = 11$.

Jeśli wstawimy 0 w miejsce x i 11 w miejsce y, to otrzymamy $0 + 11 = 11$, czyli równość. Para liczb $x = 0$ i $y = 11$ jest więc rozwiązaniem tego równania. Innymi jego rozwiązaniami są np. pary liczb: $x = 5$ i $y = 6$ lub $x = 8$ i $y = 3$.

1. Wymień jeszcze trzy rozwiązania równania $x + y = 11$.

2. Jaką liczbę należy wstawić w miejsce ?, żeby para liczb x, y była rozwiązaniem równania $x + y = 11$?

a) $x = -3$ i $y =$? **b)** $x =$? i $y = \frac{1}{3}$ **c)** $x = 12\,345$ i $y =$?

3. Ile różnych rozwiązań ma równanie $x + y = 11$?

a) Czy można wstawić dowolną liczbę w miejsce x i znaleźć taką liczbę y, aby otrzymać rozwiązanie równania?

b) Czy można wstawić dowolną liczbę w miejsce y i znaleźć taką liczbę x, aby otrzymać rozwiązanie równania?

c) Czy można wstawić jednocześnie dowolną liczbę x i dowolną liczbę y, i w ten sposób otrzymać rozwiązanie równania?

4. Podaj kilka rozwiązań równania $3x + y = 20$.

Czy już umiem?

I. Która liczba jest rozwiązaniem równania $3(x - 1) = 3 + x$?

A. 2 **B.** -1 **C.** -3 **D.** 3

II. Liczba 6 spełnia równanie

A. $2x - \frac{1}{2} = -x + 4{,}5$.

B. $-x^2 - 5 = 4x$.

C. $x(x - 3) = -x + 24$.

D. $x + 3{,}5 = -1{,}5$.

III. Ułóż równanie odpowiadające treści zadania.
Mama Oli jest od niej starsza trzy razy i jednocześnie o 28 lat. Ile lat ma Ola?

IV. Oblicz.

a) $5 + (-2)$ **b)** $-2 + (-7)$ **c)** $5 - (-2)$ **d)** $-8 - 10$

2 Rozwiązywanie równań

Na dobry początek

W starożytnym Egipcie jednostki pomiarowe wywodziły się od części ludzkiego ciała. Podstawową jednostką był łokieć (ok. 52,5 cm), który dzielił się na dłonie, a te z kolei dzieliły się na palce.



Z tzw. kamienia z Palermo można odczytać m.in. poziom wylewów Nilu w kolejnych latach, podany w egipskich miarach. Oto dane z 5 lat, przeliczone na palce:



rok V	rok IV	rok III	rok II	rok I
3 łokcie to 84 palce	2 łokcie 2 palce to 58 palców		3 łokcie 5 dłoni 2 palce to 106 palców	3 łokcie 4 dłonie 3 palce to 103 palce

hieroglify czytamy od prawej do lewej

Pytania i polecenia

- Ile palców ma łokieć?
- Ile palców ma dłoń (jako jednostka miary)?
- Wskaż hieroglify oznaczające łokieć, dłoń i palec.

Równania równoważne

Umiemy już odgadywać liczby spełniające proste równania. Teraz poznamy metody pozwalające rozwiązywać bardziej skomplikowane równania.

Wyobraźmy sobie portfel i portmonetkę, w których znajdują się takie same kwoty pieniędzy (stąd znak równości między nimi).



Do portfela i portmonetki dokładamy po 10 zł. Nie musimy wiedzieć, ile pieniędzy jest w środku, żeby stwierdzić, że po tej operacji kwoty nadal będą równe.



Podobnie będzie, gdy weźmiemy dwa takie portfele i dwie portmonetki (wszystkie z jednakową kwotą pieniędzy).



Analogicznie postępujemy w przypadku równań. Na przykład jeśli do obu stron równania **dodamy tę samą liczbę**, strony nadal będą równe.

$2x - 10 = 9$

$2x - 10 + 10 = 9 + 10$

Podobnie jest w przypadku odejmowania, mnożenia przez liczbę różną od 0 i dzielenia przez liczbę różną od 0. Po każdej takiej operacji otrzymujemy **równanie równoważne** danemu, czyli takie, które ma takie same rozwiązania.

Lewa strona + 5 = Prawa strona + 5
Lewa strona + 5x = Prawa strona + 5x

Do obu stron równania można dodać tę samą liczbę albo to samo wyrażenie algebraiczne.

Lewa strona – 5 = Prawa strona – 5
Lewa strona – 5x = Prawa strona – 5x

Od obu stron równania można odjąć tę samą liczbę albo to samo wyrażenie algebraiczne.

Lewa strona = Prawa strona

Lewa strona · 5 = Prawa strona · 5

Obie strony równania można pomnożyć przez tę samą liczbę różną od zera.

Lewa strona : 5 = Prawa strona : 5

Obie strony równania można podzielić przez tę samą liczbę różną od zera.

Wszystkie opisane czynności **wolno** nam wykonywać, ale **warto** wykonywać jedynie te, które powodują, że równanie staje się coraz prostsze.

Przykład 1

Rozwiąż równanie.

a) $9x - 6 = 39$ **b)** $\frac{1}{3}x + 11 = 26$

a) $9x - 6 = 39$

Aby pozbyć się składnika -6, możemy **dodać** 6 do obu stron równania:

$9x - 6 + 6 = 39 + 6$, czyli

$9x = 45$.

Teraz możemy **podzielić** obie strony równania przez 9:

$9x : 9 = 45 : 9$, czyli

$x = 5$.

Rozwiązaniem równania $x = 5$ jest po prostu liczba 5. Operacje, które wykonywaliśmy, nie zmieniają rozwiązań. W takim razie ta liczba jest także rozwiązaniem danego równania $9x - 6 = 39$ (i wszystkich równań, które zapisaliśmy po drodze). Sprawdzamy: $\mathrm{L} = 9x - 6 = 9 \cdot 5 - 6 = 45 - 6 = 39$, $\mathrm{P} = 39$, $\mathrm{L} = \mathrm{P}$.

b) $\frac{1}{3}x + 11 = 26$ | Odejmujemy liczbę 11 od lewej strony i od prawej strony równania.

$\frac{1}{3}x + 11 - 11 = 26 - 11$

$\frac{1}{3}x = 15$ | Mnożymy lewą stronę i prawą stronę równania przez 3.

$\frac{1}{3}x \cdot 3 = 15 \cdot 3$

$x = 45$

Rozwiązaniem równania jest liczba 45.

Sprawdzenie: $\mathrm{L} = \frac{1}{3} \cdot 45 + 11 = 15 + 11 = 26$, $\mathrm{P} = 26$, $\mathrm{L} = \mathrm{P}$.

Dobra rada

Sprawdzaj rozwiązanie, podstawiając je do początkowego równania. Pozwoli to wykryć ewentualne błędy.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $9x + 13 = 85$ **b)** $12x - 15 = 33$ **c)** $2x - 18 = 3$

Operacje na równaniach można opisywać za pomocą symboli działań. Zamiast tak:

$\frac{1}{3}x + 11 = 26$ | Odejmujemy liczbę 11 od lewej strony i od prawej strony równania.

możemy pisać tak:

$\frac{1}{3}x + 11 = 26$ | – 11

Przenoszenie na drugą stronę równania

Dodawanie do obu stron równania i odejmowanie od obu stron równania tej samej liczby można inaczej opisywać jako „przenoszenie liczby ze zmienionym znakiem na drugą stronę równania". Podobnie możemy postępować z wyrażeniami zawierającymi zmienne.

Przykład 2

Rozwiąż równanie.

a) $x + 9 = 11$ **b)** $x - 13 = 35$

Opiszemy rozwiązanie na dwa sposoby.

a) Sposób I

$x + 9 = 11 \quad |-9$
$x + 9 - 9 = 11 - 9$
$x = 2$

Odejmujemy 9 od obu stron równania.

Sposób II

$x + 9 = 11$
$x = 11 - 9$
$x = 2$

Przenosimy 9 na drugą stronę równania ze zmienionym znakiem.

Sprawdzenie: $L = x + 9 = 2 + 9 = 11$,
$P = 11, L = P.$

Przeniesienie liczby 9 ze zmienionym znakiem na drugą stronę równania jest tym samym co odjęcie liczby 9 od obu stron równania.

b) Sposób I

$x - 13 = 35 \quad |+13$
$x - 13 + 13 = 35 + 13$
$x = 48$

Dodajemy 13 do obu stron równania.

Sposób II

$x - 13 = 35$
$x = 35 + 13$
$x = 48$

Przenosimy –13 na drugą stronę równania ze zmienionym znakiem.

Sprawdzenie: $L = x - 13 = 48 - 13 = 35$,
$P = 35, L = P.$

Przeniesienie liczby -13 ze zmienionym znakiem na drugą stronę równania jest tym samym co dodanie liczby 13 do obu stron równania.

Zapamiętaj

Przenoszenie liczby ze zmienionym znakiem na drugą stronę równania to inny zapis dodawania do obu stron równania lub odejmowania od obu stron równania.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie. Zacznij od przeniesienia odpowiedniej liczby na drugą stronę równania i zmiany znaku tej liczby.

a) $7x - 6 = 29$ **b)** $13x + 5 = 31$ **c)** $8x + 17 = -7$ **d)** $0{,}5x - 14 = 2$

Zastosowanie redukcji wyrazów podobnych

Do tej pory rozwiązywaliśmy równania, w których niewiadoma występowała tylko raz. Gdy niewiadoma występuje wiele razy, warto wykonać redukcję wyrazów podobnych.

Przykład 3.1

Rozwiąż równanie $2x + 5x + 3 = 31$.

$2x + 5x + 3 = 31 \quad | -3$

$2x + 5x = 31 - 3$

$2x + 5x = 28$ Redukujemy wyrazy podobne.

$7x = 28 \quad | :7$

$x = 4$

Sprawdzenie: $L = 2x + 5x + 3 = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 3 = 8 + 20 + 3 = 31$,

$P = 31$, $L = P$.

Przykład 3.2

Rozwiąż równanie $2x - 9 = 6 - 3x$.

Rozwiążemy równanie, korzystając z przenoszenia wyrazów sumy na drugą stronę równania ze zmienionym znakiem. Jeśli wolisz, możesz stosować dodawanie wyrażeń do obu stron równania.

$2x - 9 = 6 - 3x$ Przenosimy 9 na prawą stronę ze zmienionym znakiem.

$2x = 6 - 3x + 9$ Redukujemy wyrazy podobne: $6 + 9 = 15$.

$2x = 15 - 3x$ Przenosimy $3x$ na lewą stronę ze zmienionym znakiem.

$2x + 3x = 15$ Redukujemy wyrazy podobne.

$5x = 15 \quad | :5$

$x = 3$

Sprawdzenie: $L = 2x - 9 = 2 \cdot 3 - 9 = 6 - 9 = -3$,

$P = 6 - 3x = 6 - 3 \cdot 3 = 6 - 9 = -3$, $L = P$.

Dobra rada

Zwróć uwagę, że aby rozwiązać równanie, przenosimy wyrazy zawierające niewiadomą na jedną stronę równania, a liczby na drugą.

$2x + 5 = x + 7$

$2x - x = 7 - 5$

lub

$-3x + 8 = x$

$8 = x + 3x$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

a) $3 - x = 2x + 1$ **b)** $5x - 5 = 16 - 2x$ **c)** $\frac{1}{2}x + 3 = x - 3$

Równania a wyrażenia algebraiczne

Zauważmy, że inaczej posługujemy się znakiem = w przypadku przekształcania wyrażenia algebraicznego niż podczas rozwiązywania równania.

Polecenie	Uprość wyrażenie $x(x-2)-x^2$.	Rozwiąż równanie $x(x-2)-x^2=9-5$.
Czym jest *x*?	x jest **zmienną**. Może przyjmować różne wartości.	x jest **niewiadomą** – na początku nie wiemy, jaką liczbę należy wstawić w jej miejsce, aby zachodziła równość lewej i prawej strony równania.
Co oznacza znak =?	Stwierdzenie: Dla każdego x wyrażenia po obu stronach znaku = mają równe wartości.	Pytanie: Dla jakiego x wyrażenia po obu stronach znaku = mają równą wartość?
Co robimy?	Przekształcamy **wyrażenie**, łącząc jego kolejne, coraz prostsze postacie znakami =. $x(x-2)-x^2 =$ $= x^2 - 2x - x^2 =$ $= -2x$	Przekształcamy **strony równania** tak, żeby wyznaczyć rozwiązanie. $x^2 - 2x - x^2 = 9 - 5$ $-2x = 4 \quad \vert : (-2)$ $x = -2$
Dla jakich *x* wyrażenia połączone znakiem = przyjmują tę samą wartość?	Dla **każdego** x.	Tylko dla tych x, które są **rozwiązaniami** równania.

Dobra rada

Czytaj uważnie polecenie w zadaniu – od niego zależy znaczenie znaku =.

5. Dane wyrażenie algebraiczne przedstaw w najprostszej postaci.

a) $2a^2 - 3b + 6b + 5a$ **b)** $(5a + 3b) : \frac{1}{2}$ **c)** $2x(4x - 1) + 4x$

4. Rozwiąż równanie.

a) $5(x - 7) + 2 = -28$

b) $2(x - 1) + 3(x + 1) = 26$

c) $4(3 - x) + 9 = 7(2 + x) + 29$

d) $9 = 5x + 6 - 5(x - 0{,}6)$

Równania o różnej liczbie rozwiązań

Przykład 4

Rozwiąż równanie.

a) $-(x-2)+3(x-1)+2=0$

b) $7x-(4x-10)=3x+12$

c) $4-2(3x-1)=6-6x$

We wszystkich tych równaniach występują nawiasy. Aby móc zredukować wyrazy podobne, musimy najpierw te nawiasy opuścić (patrz s. 170).

a) $-(x-2)+3(x-1)+2=0$ Opuszczamy nawiasy.

$\underline{-x}+\underline{\underline{2}}+\underline{3x}\,\underline{\underline{-3}}+\underline{\underline{2}}=0$ Redukujemy wyrazy podobne.

$2x+1=0 \quad |-1$

$2x=-1 \quad |:2$

$x=-\frac{1}{2}$

Sprawdzenie: $\mathrm{L}=-(x-2)+3(x-1)+2=-\left(-\frac{1}{2}-2\right)+3\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)+2=$

$=2\frac{1}{2}+3\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)+2=2\frac{1}{2}-4\frac{1}{2}+2=0, \qquad \mathrm{P}=0, \qquad \mathrm{L}=\mathrm{P}.$

b) $7x-(4x-10)=3x+12$ Opuszczamy nawiasy.

$7x-4x+10=3x+12$ Przenosimy $3x$ na lewą stronę ze zmienionym znakiem.

$\underline{7x}\,\underline{-4x}+10\,\underline{-3x}=12$ Redukujemy wyrazy podobne.

$0\cdot x+10=12 \quad |-10$

$0\cdot x=2$

Nie ma liczby, która pomnożona przez 0 dawałaby w wyniku 2. Wobec tego równanie $0\cdot x=2$ nie ma rozwiązania (patrz s. 200), czyli dane równanie nie ma rozwiązań.

c) $4-2(3x-1)=6-6x$ Opuszczamy nawiasy.

$4-6x+2=6-6x$ Przenosimy wyrazy zawierające niewiadomą na lewą stronę, a liczby na prawą.

$-6x+6x=6-4-2$

$0\cdot x=0$

Każda liczba pomnożona przez 0 daje w wyniku 0, czyli każda liczba jest rozwiązaniem równania $0\cdot x=0$ (patrz s. 200) oraz równania danego w zadaniu.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

a) $3-(x+5)+2(x+1)=0$ **b)** $-6(1-x)=6x-2$ **c)** $4-(2x+5)=-2x-1$

Zadania

1. Rozwiąż równanie. ▶ Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A ← P1, 2

a) $3x - 8 = -7$ **d)** $2x + 9 = 1$ **g)** $9x - 40 = 14$

b) $4x - 2 = -2$ **e)** $7x - 9 = 5$ **h)** $20x + 7 = 31$

c) $15x + 19 = 10$ **f)** $8x + 5 = -7$ **i)** $6x - 25 = -25$

poziom B ← P3.2

a) $3x - 8 = 2x + 4$ **d)** $7x - 5 = 6x + 8$ **g)** $12x + 4 = 11x + 15$

b) $5x - 3 = 4x + 6$ **e)** $5x - 8 = 4x + 9$ **h)** $3x - 1 = 2x + 1$

c) $7x - 9 = 6x - 8$ **f)** $9x - 4 = 8x + 5$ **i)** $2x + 7 = x - 1$

poziom C ← P4

a) $4x - 3(3x - 5) = 6x + 4$ **e)** $0{,}6(x + 2) - (0{,}4x - 0{,}6) = 0{,}2(1 - x)$

b) $8 - (4x - 12) = 8x - (3x - 2)$ **f)** $2\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}(3 - 6x) = x + 2$

c) $\frac{5}{4}(1 - x) - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}(x - 4) + 3$ **g)** $5x - 6(x + 7) = 8x - 9(10 + x)$

d) $7(x + 2) - x = 5(x - 2)$ **h)** $0{,}1(x - 10) - 0{,}6x = 1{,}5x - 4$

poziom D ← P4

a) $4x - 3(x - 3) = x - 4$ **e)** $2(2x + 1) = 4x + 3$

b) $2x - (3 - 2x) = 5 + x - x$ **f)** $9x + 3 = 7(x - 2) + 17$

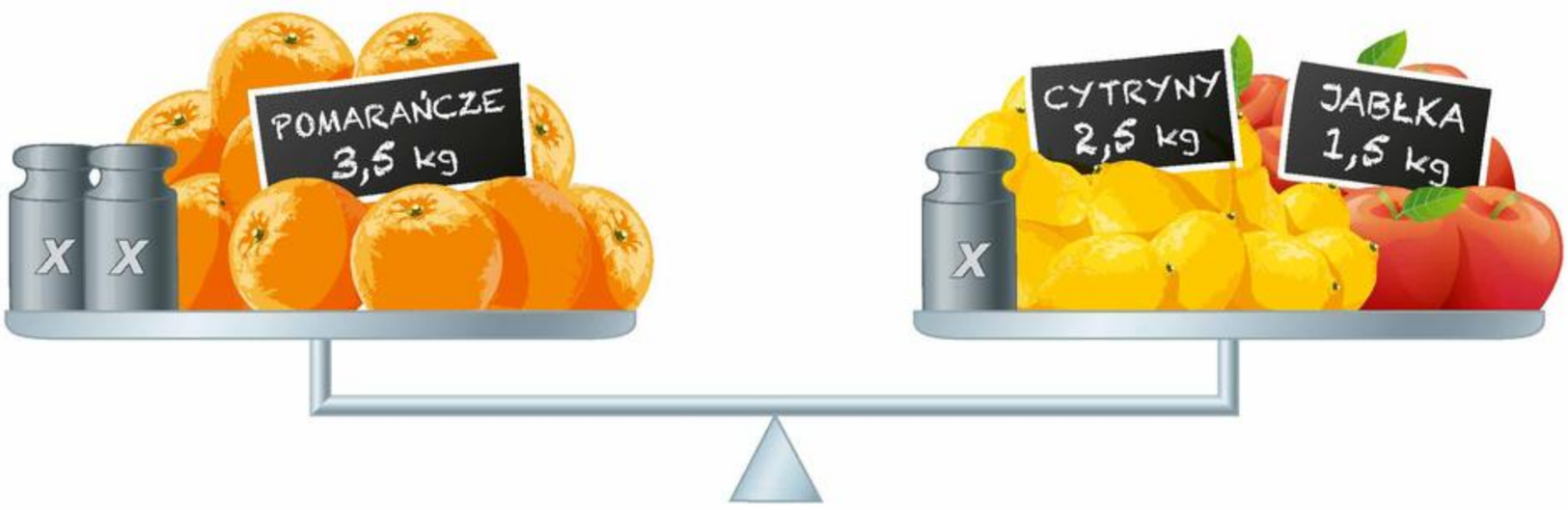
c) $5(x - 2) + (3 + x) = 6x - 7$ **g)** $5x - 9 + x = 3(2x - 3)$

d) $-(x + 1) + 8x = 5x - 9$ **h)** $4(3x - 2) + 5 = 2(6x - 4) + x$

MISTRZ

a) $\frac{12 - x}{4} = \frac{x + 4}{12}$ **b)** $\frac{3x - 2}{4} = \frac{4x - 5}{3}$ **c)** $\frac{x - 3}{6} = 2(3x + 1)$ **d)** $3\left(1 - \frac{x}{3}\right) = \frac{5x - 1}{9}$

2. Oblicz, ile waży odważnik, jeśli szalki wagi są w równowadze. Zapisz i rozwiąż odpowiednie równanie.



3. Rozwiąż wybrane równanie. Sprawdź, czy liczba, która jest jego rozwiązaniem, spełnia również pozostałe równania.

I. $5x - 3 = 7x - 11$ **III.** $2x - 8 + 3x - 2 = 6 + x$

II. $x^2 - 2x = x + 4$ **IV.** $x - 2x + 3x - 4x + 10 = 2$

4. Rozwiąż równania. Znajdź ich rozwiązania w ramce. Zapisz litery odpowiadające rozwiązaniom kolejnych równań i odczytaj hasło.

1 K	2 R	3 G	4 Y	5 A	6 I	7 B

I. $4x = 12$

II. $8x + 15 = 11x + 9$

III. $7x + 4 = 9x - 6$

IV. $5x - 3 = 3x + 11$

5. Na dwóch stolikach leżą polskie monety: złotówki, dwuzłotówka, pięciozłotówka oraz kilka jednakowych monet kolekcjonerskich – jak na zdjęciu. Na każdym stoliku jest taka sama kwota. Jaką wartość ma moneta kolekcjonerska?



6. Rozwiąż równania. Ustaw rozwiązania w kolejności rosnącej. Litery przy odpowiednich równaniach utworzą hasło.

K $2x - 3x - 4x + 7 = x + 7$

O $2x + 8 = 5 + x$

Z $20 - x = x - 14$

A $3x - 5 = 2x + 2$



7. Dane są cztery zestawy równań. Dobierzcie się w trójki. Niech każda osoba w trójce wybierze inne równanie z zestawu I i je rozwiąże. Następnie sprawdźcie, czy otrzymaliście jednakowe rozwiązania. Jeśli nie – poszukajcie błędu. To samo zróbcie w pozostałych zestawach.

I. $3x - 4 = 5x - 6$

$8x - (5 - 2x) = 3x + 2$

$\frac{2}{3}(1 - x) - 1\frac{1}{3} = \frac{1}{3}(x - 6) + \frac{1}{3}$

II. $x + 2 = 3(x + 1)$

$5(x + 2) - 2x = -(x - 8)$

$\frac{2(x+2)}{3} = 4x + 3$

III. $2x - 3 = \frac{1}{3}x + 2$

$-5x + 4 = 3 - 2(x + 4)$

$2(4 - x) - 3 = -3(x - 4) - 4$

IV. $4(x - 2) = 6(x - 1)$

$\frac{2}{5}x + 4 = -3{,}6x$

$\frac{3(x-1)+2}{4} = x$

8. Rozwiąż równanie. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

a) $x = 3\left[3 - (4 - 2x)\right]$

b) $5\left[2 - 6(x - 1)\right] = 10$

c) $2 - \left[x - 3(x - 4)\right] = 5$

d) $5(2 - x) = 10 - \left[4 + 3(x - 3)\right]$

e) $1 - \left[5(x + 2) - 7\right] = 6(-x - 3)$

f) $4 - \left\{4 - \left[4 - (4 - x)\right]\right\} = 4$

9. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 18 = x(x-2)$ **b)** $6x(3-2x) = 5 + 4x(7-3x)$

10. Połącz podane wyrażenia w takie trzy pary, aby po wstawieniu znaku = między wyrażenia w parze powstały trzy równania: jedno sprzeczne, czyli takie, które nie ma rozwiązania, drugie tożsamościowe, czyli takie, którego rozwiązaniem jest każda liczba, i trzecie, które ma jedno rozwiązanie. Każdego z podanych wyrażeń możesz użyć jeden raz. Rozwiąż powstałe równania.

$6x - 4$ $3(2x-6)$ $2x + 3x - 4$

$-2(2-3x)$ $6(x-2)$ $4(1{,}5x+1)$

Dla dociekliwych

1. **a)** Sprawdź, czy liczba 2 jest rozwiązaniem równania:
$(x-1)(x-2)(x+3) = 0$.

b) To równanie ma jeszcze dwa rozwiązania. Odgadnij je i sprawdź swoje przypuszczenia.

2. Rozwiąż równanie, czyli znajdź jego wszystkie rozwiązania.

a) $(x-1)(x-4)(x-6) = 0$ **c)** $x(x-2)(2x-1) = 0$

b) $(x+2)(x-3)(x+5) = 0$ **d)** $x^2(x^2-4)(x^2-9) = 0$

3. Podaj przykład równania, które jest spełnione przez dziesięć różnych liczb.

Czy już umiem?

I. Rozwiązaniem równania $3(x-2) + x = x - 3$ jest liczba

A. 2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** -2.

II. Rozwiąż równanie.

a) $4x - 2 = 32$ **b)** $15 - 3(x-4) = 2x + 2(3+x)$

III. Ile rozwiązań ma podane równanie?

a) $x - (1-2x) = 3x - 1$ **b)** $5x + 7 = 4x + 7$ **c)** $7x - (2-x) = 6x + 3$

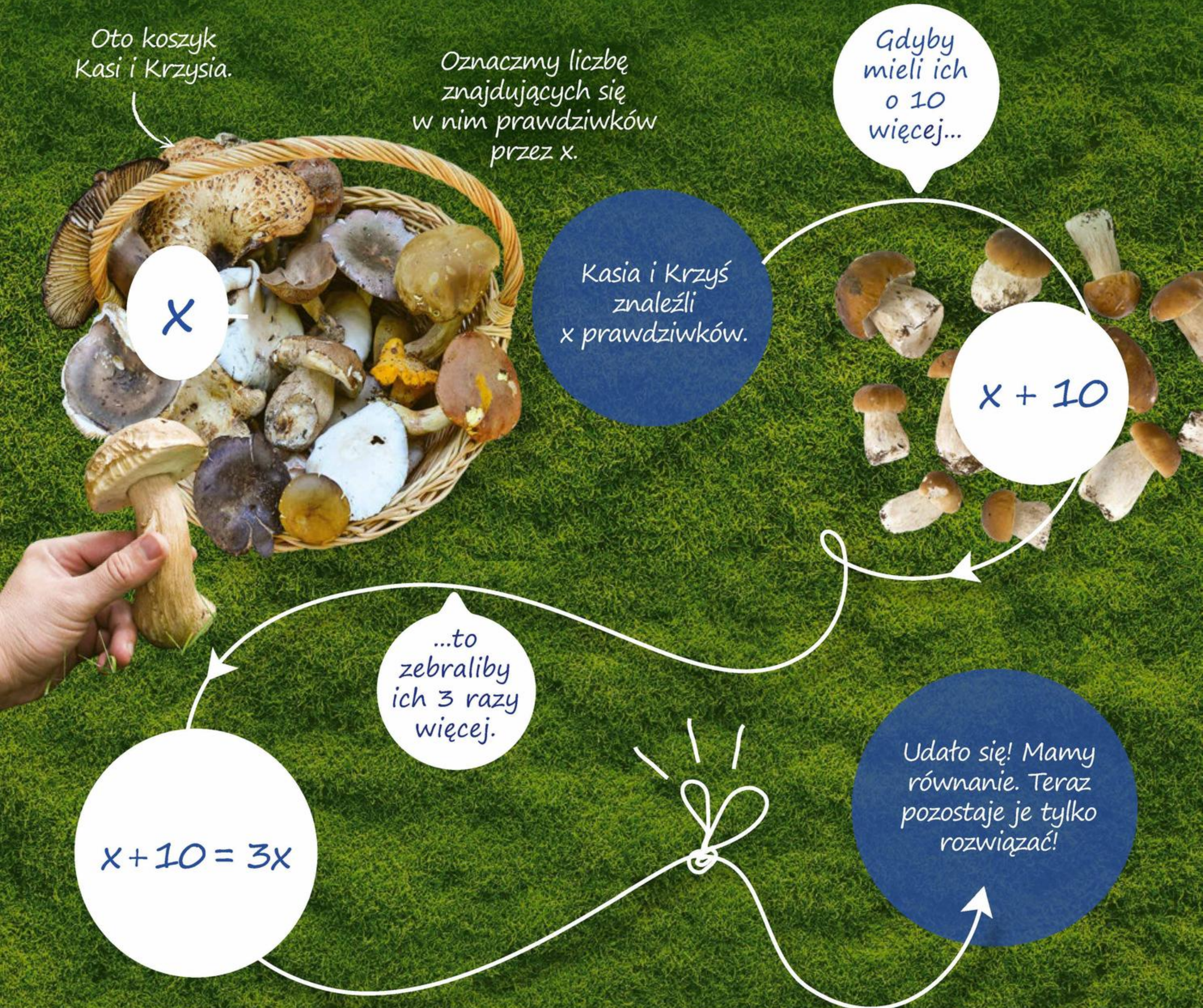
IV. Dane są dwa kąty trójkąta. Oblicz miarę trzeciego kąta. Czy ten trójkąt jest równoramienny? A równoboczny? Czy jest prostokątny?

a) 60°, 60° **b)** 35°, 55° **c)** 35°, 110°

3 Zadania tekstowe

Na dobry początek

Kasia i jej brat Krzyś zbierali grzyby. Po grzybobraniu okazało się, że gdyby mieli w koszyku o 10 prawdziwków więcej, to zebraliby ich 3 razy więcej. Ile prawdziwków mieli w koszyku?



Pytania i polecenia

- Rozwiąż ułożone równanie. Ile prawdziwków zebrały dzieci?
- W koszyku były jeszcze gąski. Gdyby Kasia i Krzyś zebrali ich 4 razy więcej, to mieliby o 12 gąsek więcej. Ile gąsek znalazło rodzeństwo?

Przykład 1

E

Kasia i Basia są bliźniaczkami. Kiedy się urodziły, ich mama miała 28 lat, a ich tata miał 30 lat. Obecnie wszyscy mają w sumie 126 lat. Ile lat mają teraz bliźniaczki?

Niewiadomą jest wiek bliźniaczek. Oznaczmy go literą x. Zapiszmy obecny wiek poszczególnych osób w rodzinie:

x → wiek Kasi

x → wiek Basi

$x + 28$ → wiek mamy

$x + 30$ → wiek taty

$x + x + x + 28 + x + 30$ → suma lat wszystkich osób w rodzinie

Ta suma równa jest 126, możemy więc zapisać równanie:

$x + x + x + 28 + x + 30 = 126$ Redukujemy wyrazy podobne.

$4x + 58 = 126 \quad | - 58$

$4x = 68 \quad | : 4$

$x = 17$

Sprawdzenie z treścią zadania:

Kasia ma 17 lat, Basia 17 lat, mama $17 + 28 = 45$ lat, tata $17 + 30 = 47$ lat, w sumie mają $17 + 17 + 45 + 47 = 126$ lat. Zgadza się!

Odp. Bliźniaczki mają po 17 lat.

Ćwiczenie 1

Monika kupiła mleko za 2,50 zł, twaróg za 3,40 zł oraz 10 jednakowych bułek. Za zakupy zapłaciła 8,40 zł. Ile kosztowała jedna bułka?

Dobra rada

Odpowiedź do zadania tekstowego sprawdzaj z treścią zadania, a nie z równaniem. Znajdziesz w ten sposób także ewentualne błędy powstałe przy układaniu równania, a nie tylko w jego rozwiązaniu.

Treść zadania →

Równanie nie pasuje do treści →

Dobre rozwiązanie złego równania →

Sprawdzenie równania →

Niesłusznie zadowolony uczeń →

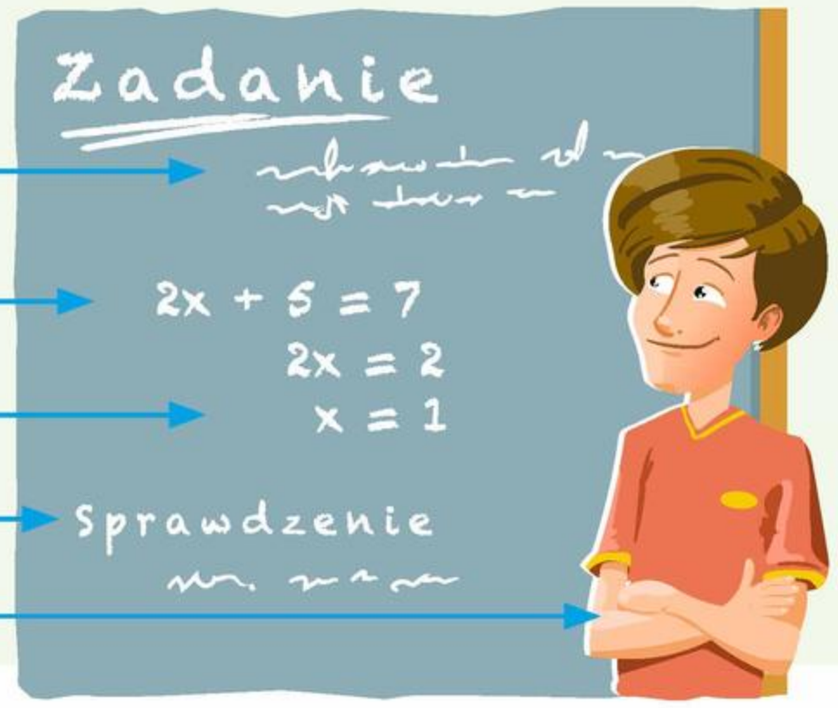


Tabela może pomóc

Przykład 2

Mama jest 3 razy starsza od Asi. 5 lat temu była od niej aż 5 razy starsza. Ile razy starsza od Asi będzie mama za 10 lat?

Aby uporządkować podane informacje, narysujemy tabelę. Choć w tym zadaniu mamy ostatecznie obliczyć, ile razy starsza od Asi będzie mama za 10 lat, znacznie łatwiej będzie za niewiadomą przyjąć obecny wiek Asi, ponieważ do niego odnoszą się pozostałe informacje. Oznaczamy go literą x.

	5 lat temu	Dziś	Za 10 lat
wiek Asi		x	
wiek mamy			

Możemy teraz wpisać do tabeli kolejne informacje podane w treści zadania:

- mama jest teraz 3 razy starsza od Asi, ma więc $3x$ lat
- wiek Asi 5 lat temu: $x - 5$
- wiek Asi za 10 lat: $x + 10$
- wiek mamy 5 lat temu: $3x - 5$
- wiek mamy za 10 lat: $3x + 10$

	5 lat temu	Dziś	Za 10 lat
wiek Asi	$x - 5$	x	$x + 10$
wiek mamy	$3x - 5$	$3x$	$3x + 10$

Nie wykorzystaliśmy jeszcze informacji, że 5 lat temu mama była 5 razy starsza od Asi. Tę informację możemy zapisać w postaci równania:

$$\underbrace{3x - 5}_{\text{wiek mamy 5 lat temu}} = \underbrace{5}_{\text{5 razy większy niż}} \cdot \underbrace{(x - 5)}_{\text{wiek Asi 5 lat temu}}$$

Rozwiązujemy równanie.

$3x - 5 = 5(x - 5)$ Opuszczamy nawiasy.

$3x - 5 = 5x - 25$ Przenosimy wyrazy zawierające niewiadomą na lewą stronę, a liczby na prawą.

$3x - 5x = -25 + 5$ Redukujemy wyrazy podobne.

$-2x = -20 \quad | : (-2)$

$x = 10$ To jest wiek Asi dziś.

Do naszej tabeli możemy wpisać wartości liczbowe zapisanych wyrażeń.

	5 lat temu	Dziś	Za 10 lat
wiek Asi	$x - 5$ (5)	x (10)	$x + 10$ (20)
wiek mamy	$3x - 5$ (25)	$3x$ (30)	$3x + 10$ (40)

Widzimy teraz, że za 10 lat Asia będzie miała 20 lat, a jej mama 40 lat, zatem mama będzie 2 razy starsza od Asi.

Sprawdzenie z treścią zadania: $3 \cdot 10 = 30$, $5 \cdot 5 = 25$.

Odp. Za 10 lat mama będzie 2 razy starsza od Asi.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż zadanie. Przygotuj w tym celu odpowiednią tabelę.
Sebastian jest o 30 lat młodszy od swojego taty. Za 5 lat będzie od niego 3 razy młodszy. Ile lat ma Sebastian?

Przykład 3

E

Tadek ma 50 zł w monetach 2 zł i 5 zł. W sumie monet jest 16.
Ile jest dwuzłotówek, a ile pięciozłotówek?

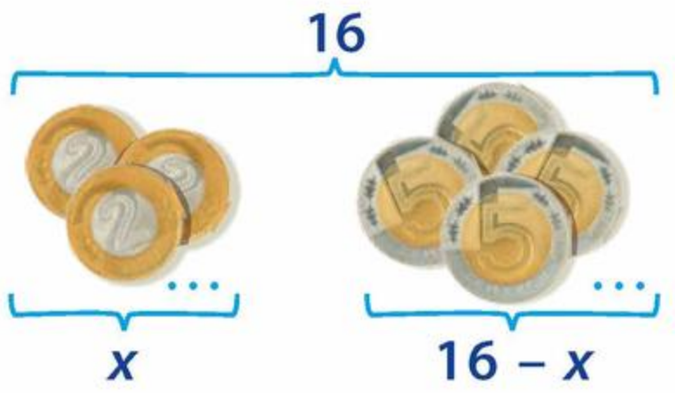
Mamy obliczyć dwie wielkości: liczbę dwuzłotówek i liczbę pięciozłotówek. Możemy wybrać jedną z nich jako niewiadomą, na przykład oznaczmy:

x → liczba monet 2 zł

$2x$ → łączna wartość monet 2 zł

$16 - x$ → liczba monet 5 zł

$5(16 - x)$ → łączna wartość monet 5 zł



Łączna wartość wszystkich monet Tadka to 50 zł.
Zapisujemy równanie i je rozwiązujemy.

$2x + 5(16 - x) = 50$ Opuszczamy nawiasy.

$2x + 80 - 5x = 50$ Redukujemy wyrazy podobne.

$-3x + 80 = 50 \quad | -80$

$-3x = -30 \quad | : (-3)$

$x = 10$

$16 - x = 6$

Sprawdzenie:
$10 + 6 = 16$ – razem jest 16 monet
$10 \cdot 2 + 6 \cdot 5 = 20 + 30 = 50$ – razem jest 50 zł

Odp. Tadek ma 10 monet o nominale 2 zł i 6 monet o nominale 5 zł.

Ćwiczenie 3

Iza trzyma w skarbonce 120 zł. Ma łącznie 75 monet – są to dwuzłotówki i złotówki. Ile monet o nominale 2 zł ma Iza?

Dobra rada

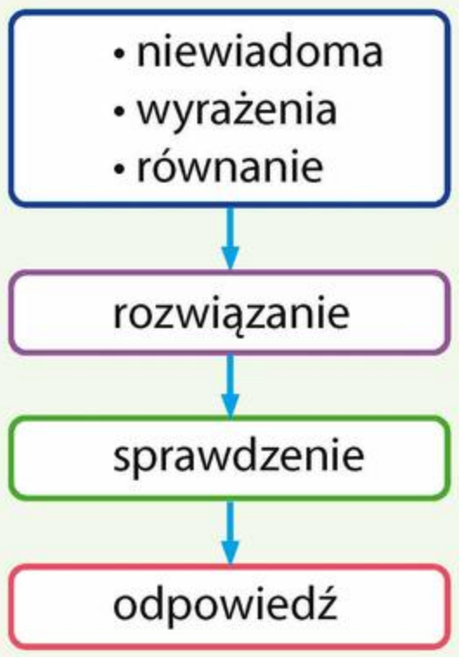
Schemat rozwiązywania zadań tekstowych

Zapisz: *– co jest niewiadomą,*
– wyrażenia potrzebne do ułożenia równania,
– równanie.

Rozwiąż *równanie.*

Sprawdź *odpowiedź z treścią zadania.*

Zapisz *odpowiedź.*



Zadania z treścią geometryczną

Przykład 4

W trójkącie równoramiennym kąt między ramionami jest o 36° większy od kąta przy podstawie. Oblicz miary kątów tego trójkąta.

Musimy wybrać niewiadomą. Może to być kąt przy podstawie.

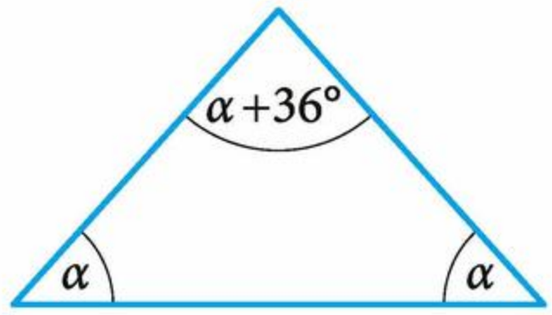
α ⟶ kąt przy podstawie (są dwa takie kąty)

$\alpha + 36°$ ⟶ kąt między ramionami

W zadaniach geometrycznych – poza informacjami podanymi w zadaniu – czasami trzeba skorzystać z własności figur. Wiemy, że suma kątów trójkąta wynosi 180°. W naszym przypadku oznacza to, że:

$\alpha + \alpha + (\alpha + 36°) = 180°$.

Kąt między ramionami jest o 36° większy:



W przypadku zadań o treści geometrycznej warto sporządzić rysunek pomocniczy.

Rozwiązujemy równanie.

$3\alpha + 36° = 180°$ $\quad | - 36°$

$3\alpha = 144°$ $\quad | : 3$

$\alpha = 48°$

Zatem kąt między ramionami tego trójkąta ma miarę:
$\alpha + 36° = 48° + 36° = 84°$.

Sprawdzenie: $48° + 48° + 84° = 180°$. Zgadza się!

Odp. Miary kątów przy podstawie trójkąta są równe 48°, a miara kąta między jego ramionami wynosi 84°.

Ćwiczenie 4

Kąt przy podstawie trójkąta równoramiennego ma miarę o 27° większą niż kąt między jego ramionami. Oblicz miary kątów tego trójkąta.

Zadania

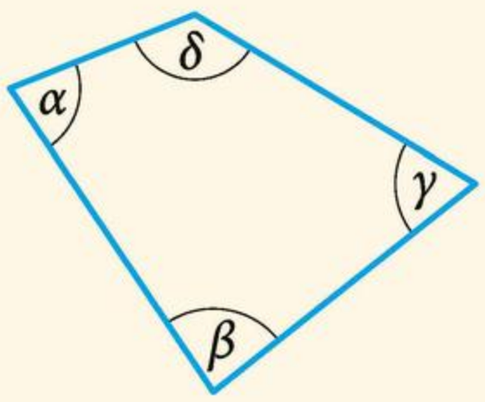
Uwaga. Wszystkie poniższe zadania rozwiąż za pomocą równań.

1. Ania i Robert są rodzeństwem. Ania jest o 5 lat starsza od Roberta. W sumie mają 33 lata. Ile lat ma Ania?

2. Wojtek kupił zeszyt, ołówek i karteczki samoprzylepne. Zeszyt był trzy razy droższy niż ołówek, a karteczki – o złotówkę droższe od ołówka. Wojtek zapłacił w sumie 15 zł. Ile złotych kosztował zeszyt, ile – ołówek, a ile – karteczki?

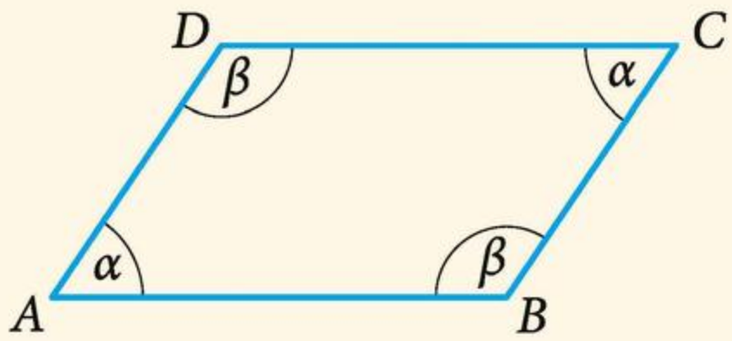
Kąty w czworokącie

dowolny czworokąt



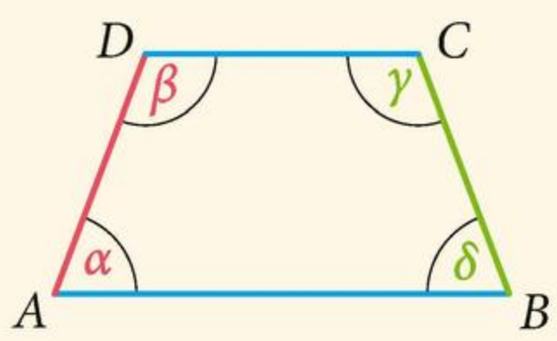
$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

równoległobok



$\alpha + \beta = 180°$
$AB \parallel CD$
$AD \parallel BC$

trapez

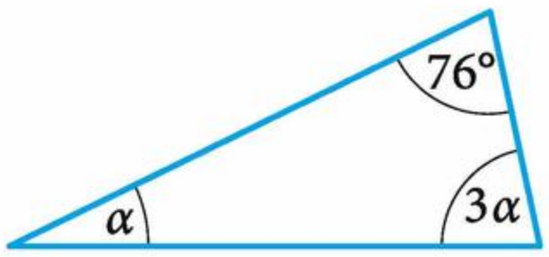


$\alpha + \beta = 180°$
$\gamma + \delta = 180°$
$AB \parallel CD$

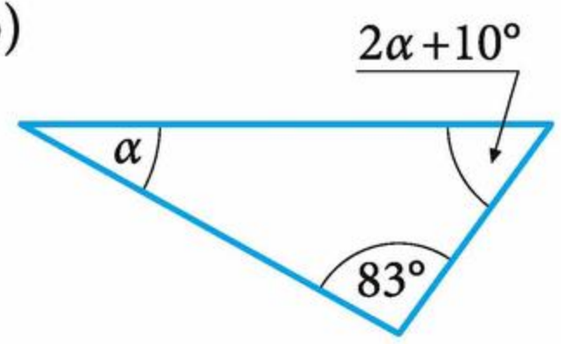
Suma kątów przy jednym ramieniu.

3. Znajdź miarę kąta α.

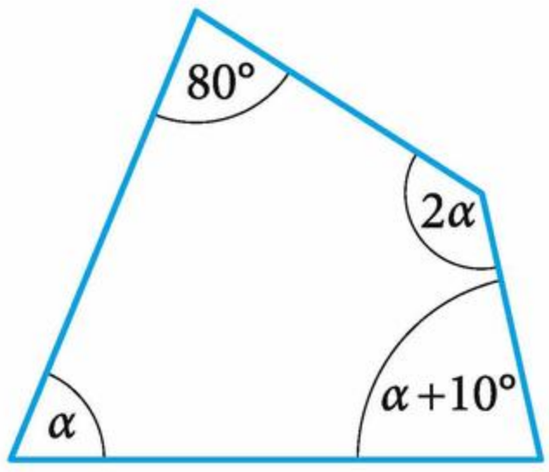
a)



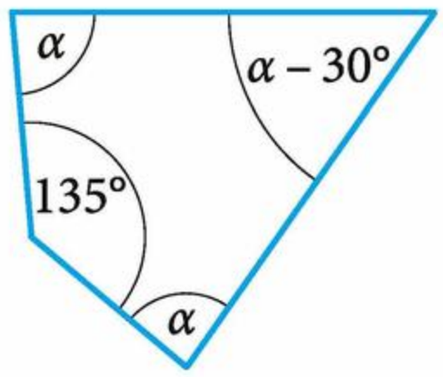
b)



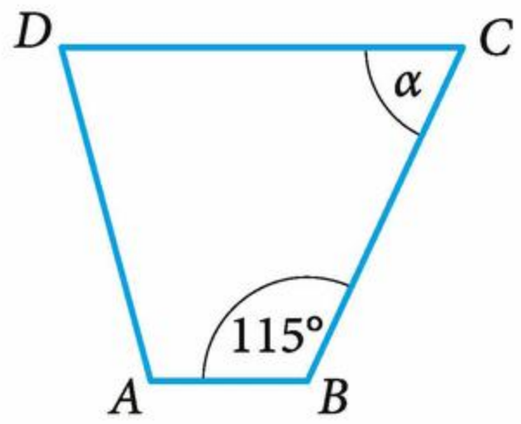
c)



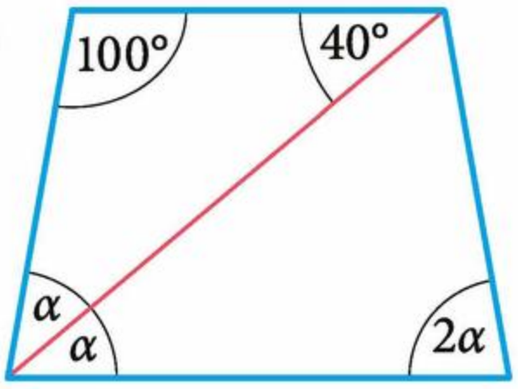
d)



e) $AB \parallel CD$



f)



4. Turysta przeszedł 72 km w ciągu trzech dni. Pierwszego dnia przeszedł najwięcej, drugiego dnia – dwa razy mniej niż pierwszego, a trzeciego dnia – połowę tego co pierwszego i drugiego dnia w sumie. Ile kilometrów turysta przeszedł każdego dnia?

Wskazówka. Pamiętaj, że $x : 2$ możesz również zapisać jako $\frac{1}{2}x$.

5. W czterech koszykach są 82 śliwki. W pierwszym i drugim koszyku jest po tyle samo śliwek, w trzecim – 3 razy więcej niż w pierwszym, a w ostatnim – o 22 śliwki mniej niż w trzecim koszyku. Ile śliwek jest w pierwszym koszyku?

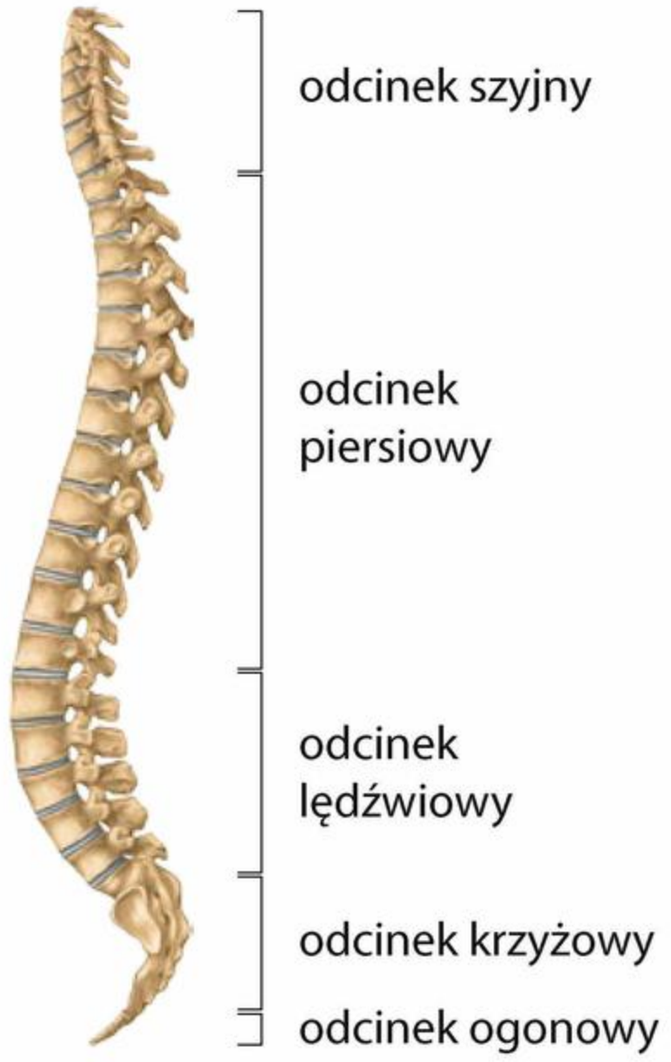


6. W klasie 7a, liczącej 24 osoby, ze sprawdzianu z matematyki uczniowie otrzymali dwa razy więcej ocen bardzo dobrych niż dobrych i ocen dobrych o 6 więcej niż dostatecznych. Dwie osoby dostały oceny celujące. Oblicz, ilu uczniów otrzymało ocenę dobrą lub bardzo dobrą, jeżeli wiadomo, że nikt nie dostał oceny dopuszczającej ani niedostatecznej.

7. Widownia Sceny Kameralnej w Teatrze Polskim we Wrocławiu może łącznie pomieścić 262 widzów. Na parterze znajduje się 178 miejsc, natomiast na balkonie jest 5 rzędów miejsc. W pierwszym z nich jest o jedno miejsce mniej niż w każdym z pozostałych rzędów. Ile miejsc jest w pierwszym rzędzie na balkonie?



8. Kręgosłup człowieka składa się z 24 kręgów przedkrzyżowych, 5 kręgów krzyżowych, zrośniętych w jedną kość, i 4 szczątkowych kręgów ogonowych, tworzących kość guziczną. Kręgi przedkrzyżowe dzielimy na szyjne, piersiowe i lędźwiowe. Kręgów szyjnych jest o 2 więcej niż lędźwiowych, a kręgów piersiowych jest tyle co szyjnych i lędźwiowych razem. Wypisz liczby kręgów we wszystkich odcinkach kręgosłupa.



9. Jeden z boków kwadratu wydłużono o 3 cm, a drugi skrócono o 1 cm i otrzymano prostokąt o obwodzie 32 cm.

a) Oblicz pole i obwód początkowego kwadratu.

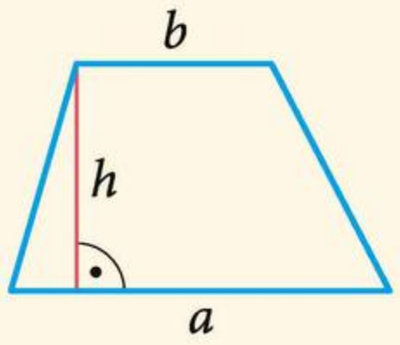
b) Oblicz pole powstałego prostokąta.

10. W trójkącie o obwodzie 41 cm jeden z boków jest dwa razy dłuższy od najkrótszego, a inny bok jest o 13 cm dłuższy od najkrótszego. Podaj długości boków tego trójkąta.

11. Drut o długości 44 cm przecięto na dwie części. Z każdej z nich wykonano ramkę: jedną kwadratową, drugą prostokątną. Jeden bok prostokąta jest równy połowie boku kwadratu, a drugi bok prostokąta jest o 1 cm dłuższy od boku kwadratu. Oblicz sumę pól powierzchni ograniczonych ramkami wykonanymi z tego drutu.

12. Obwód trójkąta ABC wynosi 38 cm. Oblicz długości jego boków, jeśli wiadomo, że bok AB jest trzy razy dłuższy od boku AC, a bok BC jest o 4 cm krótszy od boku AB.

13. Trapez o wysokości 14 cm ma pole równe 280 cm^2. Oblicz długości obu podstaw trapezu, jeżeli jedna z nich jest o 4 cm dłuższa od $\frac{1}{3}$ drugiej.



$$P = \frac{1}{2}(a+b)h$$

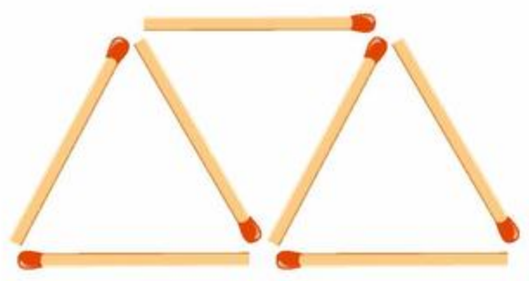
14. Na ilustracji przedstawiono cenniki dwóch firm taksówkowych.

RODZAJ OPŁATY	TAXI MICHAŁ	TAXI MONIKA
opłata początkowa	6,00 zł	2,40 zł
opłata za 1 km	1,80 zł	2,40 zł

a) Zapisz działanie, które pozwoli obliczyć koszt przejazdu 3 km taksówką firmy Taxi Michał.
b) Ile kilometrów trzeba przejechać, aby koszt przejazdu taksówką każdej z firm był taki sam?

15. Tobiasz jest o 3 lata starszy od swojej siostry Klaudii, a Klaudia jest o 30 lat młodsza od ich mamy. Tata ma 40 lat. W sumie cała czwórka ma 100 lat. Ile lat ma Tobiasz?
Rozwiąż to zadanie dwoma sposobami: raz za niewiadomą przyjmij wiek Tobiasza, a raz wiek mamy. Który sposób jest dla ciebie łatwiejszy?

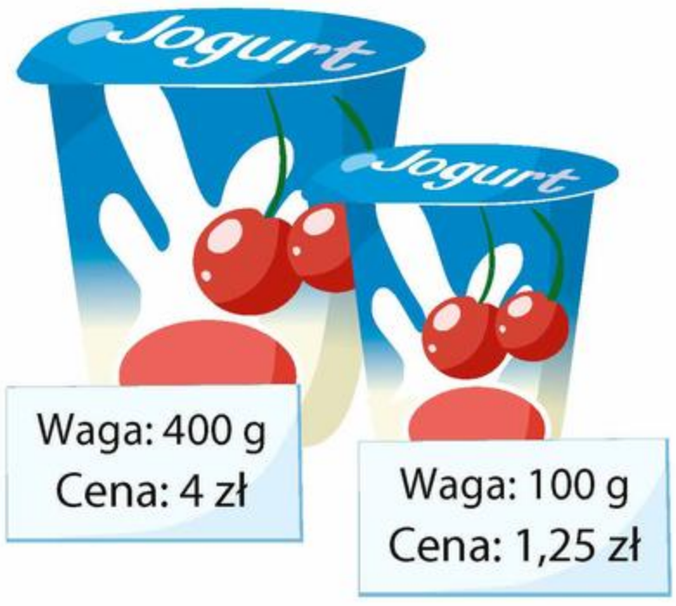
16. Układamy w rzędzie trójkąty równoboczne z zapałek jak na rysunku.
a) Ile trójkątów możemy ułożyć, jeśli mamy 101 zapałek?
b) Czy wszystkie te trójkąty utworzą trapez (jak na rysunku obok), czy inną figurę? A jeśli inną, to jaką?
c) Ile zapałek znajdzie się wewnątrz figury, a ile na jej brzegu?



17. Odpowiedz na pytania dotyczące wieku krewnych Kuby.
a) Kuzyn Kuby, Kacper, ma o 5 lat młodszą siostrę. Siedem lat temu Kacper był sześć razy starszy od siostry. Ile lat ma Kacper, a ile jego siostra?
b) Tata ośmioletniego Kuby jest od niego czterokrotnie starszy. Za ile lat tata Kuby będzie od niego dwa razy starszy?
c) Kuba ma dwie siostry, Olę i Elę. Ola ma 18 lat, a Ela jest od niej o 4 lata młodsza. Ile lat temu Ola była dwa razy starsza od Eli?
Wskazówka. Takie zadania warto rozwiązywać za pomocą tabeli.

18. W konkursie było 20 pytań. Za każde z nich można było uzyskać 3 punkty lub 5 punktów. Uczestnik, który poprawnie odpowiedział na wszystkie pytania, zdobywał w sumie 70 punktów. Ile było pytań za 5 punktów?

19. Paweł kupił 12 jogurtów. Zapłacił za nie w sumie 37 zł. Ile kupił jogurtów małych, a ile dużych?



20. Czwartą część wszystkich pasażerów autobusu stanowiły kobiety. Na przystanku wysiadła jedna kobieta i wsiadło dwóch mężczyzn. Kiedy autobus ruszał z tego przystanku, kobiety stanowiły jedną piątą pasażerów. Ilu pasażerów było wtedy w autobusie?

Wskazówka. Zadanie można rozwiązać za pomocą tabeli.

Dla dociekliwych

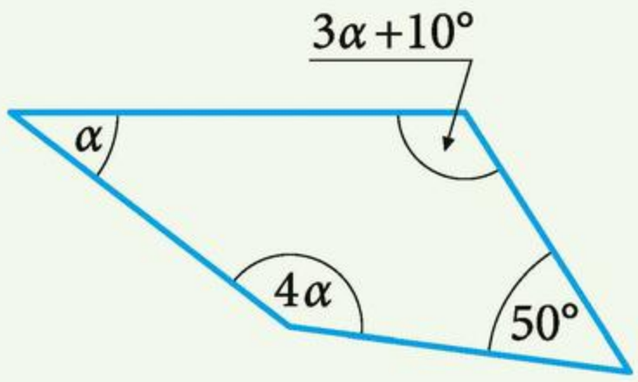
1. Znajdź za pomocą równania liczbę o podanych własnościach.

a) Suma cyfr tej dwucyfrowej liczby wynosi 10. Jeśli zamienimy cyfry miejscami, to otrzymamy liczbę o 36 mniejszą.

b) Suma cyfr tej trzycyfrowej liczby jest równa 9, przy czym liczba ta ma taką samą cyfrę setek i dziesiątek. Suma tej liczby i liczby otrzymanej po zamianie miejscami cyfr jedności i dziesiątek jest równa 477.

Czy już umiem?

I. Oblicz miary kątów czworokąta przedstawionego na rysunku.



II. Kamil jest o 4 lata starszy od swojego brata. Brat jest 3 razy młodszy od Kamila. Ile lat mają w sumie?

III. Po podwórku chodzą kury i króliki. Razem mają 30 głów i 100 nóg. Ile jest kur?

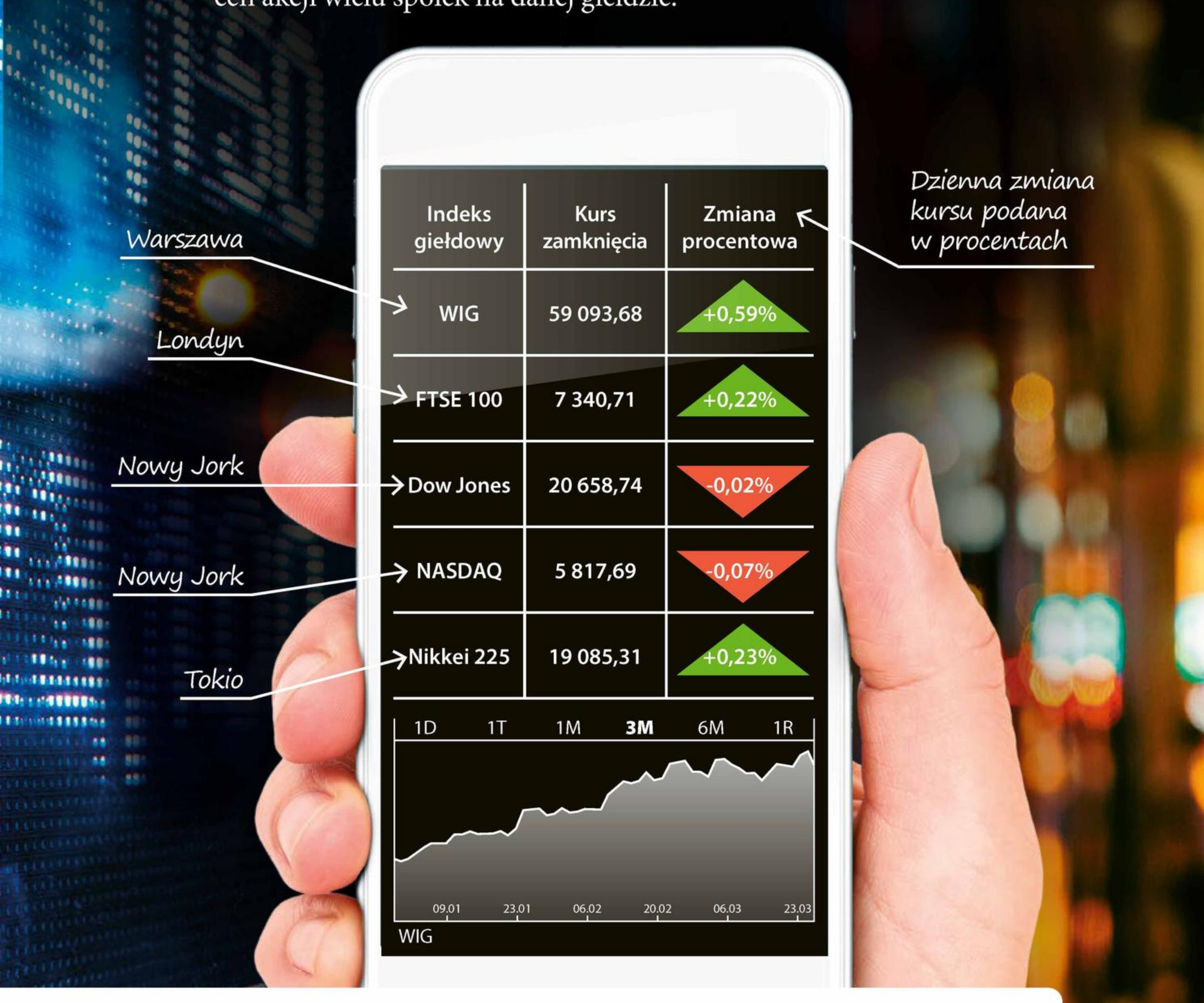
IV. Narysuj:
- kwadrat i jedną z jego przekątnych,
- trójkąt równoboczny i jedną z jego wysokości.

Zapisz na każdym rysunku miary otrzymanych kątów.

4 Zadania tekstowe z procentami

Na dobry początek

Inwestorzy giełdowi obserwują notowania na giełdach – ułatwia im to podejmowanie decyzji dotyczących np. kupna lub sprzedaży akcji różnych spółek. Indeks giełdowy pozwala opisać za pomocą jednej liczby zmiany cen akcji wielu spółek na danej giełdzie.



Pytania i polecenia

Wartość indeksów giełdowych jest podawana w punktach. Powyżej pokazano wartość różnych indeksów giełdowych pewnego dnia. Zielona strzałka oznacza wzrost indeksu giełdowego w stosunku do poprzedniego notowania, a czerwona strzałka – jego spadek.

- Wartość ilu indeksów wzrosła, a ilu zmalała?
- Który indeks zanotował największy procentowy spadek, a który – największy procentowy wzrost?

Przykład 1

E

W czerwcu cenę pokoju w pensjonacie „Bursztyn” nad morzem podniesiono o 30%, a pod koniec września obniżono ją o 25%. Po tych dwóch zmianach cena wynosi 117 zł. Ile kosztowało wynajęcie pokoju przed zmianami ceny?

Oznaczmy:

x → początkowa cena wynajmu pokoju (w zł)

$1{,}3x$ → cena wynajmu pokoju po podwyżce w czerwcu (w zł)

$0{,}75 \cdot 1{,}3x$ → cena wynajmu pokoju po obniżce we wrześniu (w zł)

Patrz przykład 5 na s. 189.

Układamy i rozwiązujemy równanie.

$0{,}75 \cdot 1{,}3x = 117$

$0{,}975x = 117 \quad | : 0{,}975$

$x = 120$ [zł]

Sprawdzenie:
Po podwyżce: 130% kwoty 120 zł, czyli $1{,}3 \cdot 120$ zł = 156 zł.
Po obniżce: 75% kwoty 156 zł, czyli $0{,}75 \cdot 156$ zł = 117 zł.

Odp. Początkowo wynajęcie pokoju kosztowało 120 zł.

Ćwiczenie 1

Cenę kurtki obniżono o 20%, a potem jeszcze o 20%. Po tych obniżkach kurtka kosztuje 288 zł. Ile kosztowała początkowo? Ile kosztowała po pierwszej obniżce?

Przykład 2

Pani Magda, pan Dariusz i pan Robert pracują w jednej firmie. Miesięczne zarobki pana Dariusza są o 15% wyższe od pensji pani Magdy, a pana Roberta – o 10% niższe od zarobków pani Magdy. Ile zarabia pan Dariusz, jeśli wszyscy troje łącznie zarabiają 10 980 zł miesięcznie?

Oznaczmy literą x miesięczne zarobki pani Magdy (w złotych), bo do tej wielkości odwołują się wszystkie informacje w zadaniu. Wówczas zarobki pana Dariusza wynoszą $\frac{115}{100}x$, a zarobki pana Roberta $\frac{90}{100}x$.

Zapisujemy równanie i je rozwiązujemy.

$x + \frac{115}{100}x + \frac{90}{100}x = 10\,980 \quad | \cdot 100$

$100x + 115x + 90x = 1\,098\,000$

$305x = 1\,098\,000 \quad | : 305$

$x = 3600$ [zł] pensja pani Magdy

Sprawdzenie:
Pani Magda zarabia 3600 zł,
pan Dariusz 4140 zł, a pan Robert $0{,}9 \cdot 3600$ zł = 3240 zł.
Razem zarabiają
3600 zł + 4140 zł + 3240 zł = 10 980 zł.

Zatem pan Dariusz zarabia $\frac{115}{100} \cdot 3600 = 4140$ [zł].

Odp. Pan Dariusz zarabia 4140 zł.

Ćwiczenie 2

W pierwszym miesiącu pracy stażyści Piotr, Arek i Bartek zarobili w sumie 3600 zł. Pensja Arka stanowiła 75% wynagrodzenia Piotra, a Bartek otrzymał o 600 zł mniej niż Piotr i Arek łącznie. Ile zarobił każdy ze stażystów?

Przykład 3

Puszka farby A jest o 20% tańsza od puszki farby B. Farba A jest mniej wydajna – na pomalowanie tej samej powierzchni potrzeba jej o 40% więcej. W efekcie za farbę A potrzebną do pomalowania mieszkania należy zapłacić o 60 zł więcej niż za farbę B. Ile kosztuje farba A, a ile farba B w ilości odpowiedniej do pomalowania mieszkania?

Oznaczmy:

x → koszt odpowiedniej ilości farby B

$0{,}8x$ → tyle kosztowałaby farba A, gdyby była tak samo wydajna jak farba B

$1{,}4 \cdot 0{,}8x$ → koszt odpowiedniej ilości farby A



Wiemy, że różnica kosztów farb to 60 zł, czyli:

$1{,}4 \cdot 0{,}8x - x = 60$

$1{,}12x - x = 60$

$0{,}12x = 60 \quad | : 0{,}12$

$x = 500$ [zł]

Koszt zakupu odpowiedniej ilości farby A to:

$x + 60 = 500 + 60 = 560$ [zł].

Odp. Farba B kosztuje 500 zł, a farba A – 560 zł.

Sprawdzenie:
Koszt farby B: 500 zł.
Koszt takiej samej ilości farby A:
$0{,}8 \cdot 500$ zł = 400 zł.
Koszt odpowiedniej ilości farby A:
$1{,}4 \cdot 400$ zł = 560 zł.

Ćwiczenie 3

Mieszkanie składa się z łazienki, przedpokoju, prostokątnej kuchni, sypialni oraz kwadratowego salonu. Kuchnia o powierzchni 7 m^2 ma szerokość o 50% mniejszą i długość o 30% mniejszą niż długość boku salonu. Jaką powierzchnię ma salon?



Roztwory

Przykład 4

W naczyniu znajduje się 5 kg roztworu soli o stężeniu 3%. Ile soli należy dosypać do naczynia, aby uzyskać roztwór o stężeniu 5%?

W rozwiązaniu tego zadania może pomóc rysunek.
Literą x oznaczamy masę dosypanej soli.

! Stężenie procentowe roztworu soli oznacza, jaki procent masy roztworu stanowi masa soli.



sól:	3% z 5 kg to 0,15 kg	x kg	$(0{,}15 + x)$ kg
woda:	97% z 5 kg to 4,85 kg	0 kg	$(4{,}85 + 0)$ kg
w sumie:	5 kg	x kg	$(5 + x)$ kg

W początkowym roztworze masa soli wynosiła:
$0{,}03 \cdot 5 \text{ kg} = 0{,}15 \text{ kg}$.

Po dosypaniu x kg soli nowy roztwór zawierał $0{,}15 + x$ kg soli. Z treści zadania wynika, że ilość ta ma stanowić 5% masy całego roztworu, czyli $0{,}05 \cdot (5 + x)$. Zapisujemy odpowiednie równanie i je rozwiązujemy.

$$0{,}05 \cdot (5 + x) = 0{,}15 + x \quad | \cdot 100$$

$$5 \cdot (5 + x) = 15 + 100x$$

$$25 + 5x = 15 + 100x \quad | -5x$$

$$25 = 15 + 95x \quad | -15$$

$$95x = 10 \quad | : 95$$

$$x = \frac{10}{95} \approx 0{,}105 \text{ [kg]}$$

Sprawdzenie:
Po dosypaniu soli roztwór będzie miał masę:
5 kg + 0,105 kg = 5,105 kg,
w tym:
0,15 kg + 0,105 kg = 0,255 kg soli.

Stężenie będzie wynosiło: $\frac{0{,}255}{5{,}105} \approx 0{,}05$, czyli 5%.

Odp. Należy dosypać około 105 gramów soli.

Ćwiczenie 4

Ile gramów cukru należy dosypać do 180 g roztworu cukru o stężeniu 5%, aby otrzymać roztwór cukru o stężeniu 10%?

Przykład 5

W naczyniu znajduje się 10 kg roztworu soli o stężeniu 9%. Ile wody należy dolać do tego naczynia, aby otrzymać roztwór o stężeniu 6%?

Literą x oznaczamy masę dolanej wody.



sól:	9% z 10 kg to 0,9 kg	0 kg	0,9 kg
woda:	91% z 10 kg to 9,1 kg	x kg	$(9{,}1 + x)$ kg
w sumie:	10 kg	x kg	$(10 + x)$ kg

Początkowy roztwór zawierał $0{,}09 \cdot 10$ kg $= 0{,}9$ kg soli.
Po dolaniu x kg wody masa roztworu wyniosła $(10 + x)$ kg, ale masa soli nie uległa zmianie.

Możemy zatem zapisać równanie i je rozwiązać.

0,06 · (10 + x) = 0,9
6% masy nowego roztworu to **masa soli**

$0{,}06 \cdot (10 + x) = 0{,}9 \quad | \cdot 100$

$6 \cdot (10 + x) = 90$

$60 + 6x = 90 \quad | - 60$

$6x = 30 \quad | : 6$

$x = 5$ [kg]

Odp. Należy dolać 5 kg wody.

Sprawdzenie:
Po dolaniu 5 kg wody roztwór będzie miał masę 15 kg, w tym 0,9 kg soli.
Stężenie wyniesie więc
0,9 : 15 = 0,06, czyli 6%.

Ćwiczenie 5

Ile wody należy dolać do 600 g pięcioprocentowego roztworu soli, aby otrzymać roztwór trzyprocentowy?

Zapamiętaj

Dosypanie soli powoduje zwiększenie stężenia roztworu.
Dolanie wody powoduje zmniejszenie stężenia roztworu.

Zadania

1. Oblicz początkową cenę telewizora, jeśli wiadomo, że:

a) po podwyżce ceny o 5% zapłacimy za niego o 40 zł więcej,
b) po obniżce ceny o 8% kosztuje on 828 zł.

2. Bluzka kosztowała tyle samo w każdym z dwóch sklepów. Jeden ze sklepów obniżył ceny o 15%, a drugi o 30% – nowe ceny różnią się teraz o 18 zł. Ile kosztuje bluzka w drugim sklepie?

E **3.** Wiosną cena nart została obniżona o 30%, a jesienią podwyższona o 35%.

a) Czy teraz narty są tańsze, czy droższe niż na samym początku?
b) Ile kosztowały narty początkowo, jeśli po jesiennej podwyżce kosztują 1134 zł?

4. Po dwóch kolejnych podwyżkach ceny o 10% płacimy za 10 litrów benzyny o 8,40 zł więcej. Ile kosztował litr benzyny przed podwyżkami, a ile kosztuje teraz?

E **5.** Rowerzyści wybrali się na czterodniową wycieczkę. Drugiego dnia przejechali o 20% więcej niż pierwszego, trzeciego – o 10% mniej niż drugiego, a czwartego – o 4 km mniej niż trzeciego, czyli tyle samo co pierwszego. Jak długa była trasa?

6. Podczas wakacji Ola i Julka zarobiły w sumie 2500 zł. Gdyby pierwsza z nich zarobiła o 30% więcej, a druga o 30% mniej, to wynagrodzenie Oli byłoby o 650 zł wyższe od zarobku Julii. Ile podczas wakacji zarobiła Ola, a ile Julia?

7. Właściciel wydawnictwa „Czarne Psy" zastanawia się, czy opublikować kryminał „Piwnica w Caffè Falconera". Obliczył, że za tłumaczenie, redakcję i opracowanie graficzne książki zapłaci 25 000 zł, za reklamę 11 000 zł, a za papier i druk 6 zł za egzemplarz. Za każdy sprzedany egzemplarz wydawca uzyska 15 zł, z czego 10% otrzyma od niego autor, Giuseppe di Lodelancia.



Ile egzemplarzy musi wydrukować i sprzedać wydawca:
a) aby nie ponieść straty,
b) aby zysk stanowił 10% przychodu (tzn. pieniędzy uzyskanych ze sprzedaży)?

8. **a)** W sali jest tylko 50 mężczyzn. Ile kobiet powinno przyjść do tej sali, aby mężczyźni stanowili 12,5% obecnych?

b) Z iloma gramami wody należy zmieszać 50 g soli, aby otrzymać 12,5-procentowy roztwór?

9. **a)** W stadzie liczącym 2000 owiec czarne owce stanowią 12% wszystkich owiec. Ile czarnych owiec należy dołączyć do tego stada, aby stanowiły one 20% wszystkich owiec?

b) Ile cukru należy dosypać do 2 kilogramów roztworu cukru o stężeniu 12%, aby otrzymać dwudziestoprocentowy roztwór cukru?

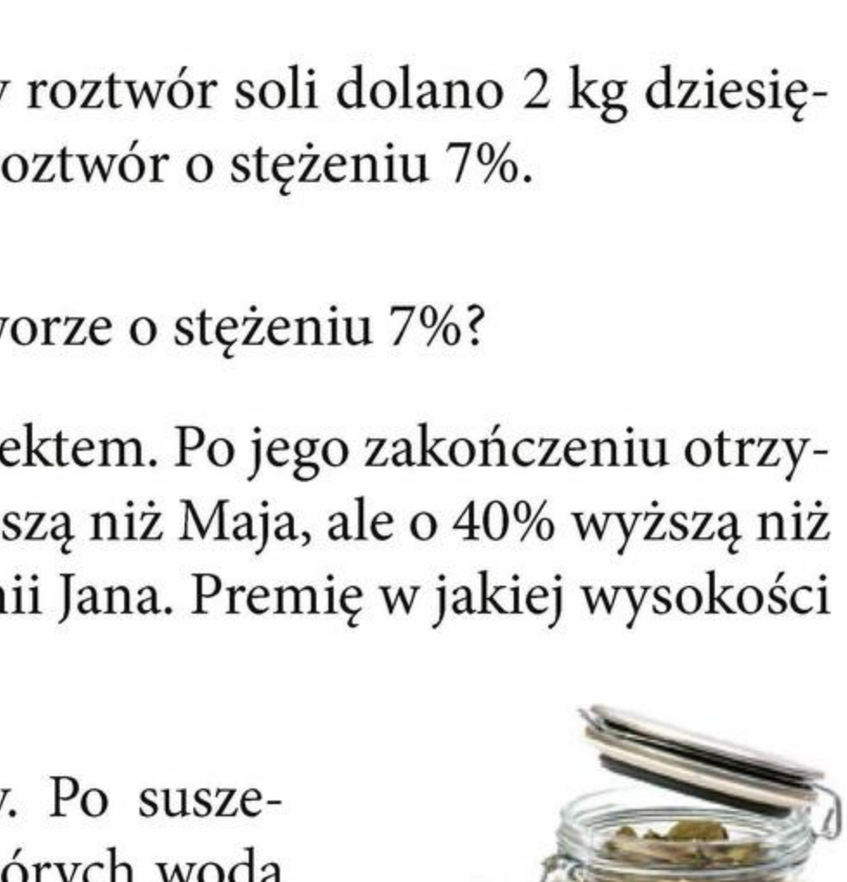
10. **a)** Ile było kilogramów sześcioprocentowego roztworu soli, jeśli po dolaniu do niego 4 kg wody otrzymano roztwór czteroprocentowy?

b) Do roztworu soli o stężeniu 10% dodano 0,5 kg soli i otrzymano roztwór piętnastoprocentowy. Ile jest w nowym roztworze kilogramów soli, a ile wody?

11. Rozwiąż bez użycia równań.

a) W technikum samochodowym w klasie 1a jest 25 osób, dziewczęta stanowią 8% tej klasy. W klasie 1b są 32 osoby, dziewczęta stanowią 12,5% tej klasy. Wszyscy uczniowie klas 1a i 1b pojechali na wycieczkę do Wieliczki. Ile procent uczestników wycieczki stanowiły dziewczęta?

b) Zmieszano 25 g ośmioprocentowego roztworu soli z 32 g roztworu soli o stężeniu 12,5%. Jakie jest stężenie otrzymanego roztworu?



Kopalnia soli w Wieliczce

12. Do naczynia zawierającego pięcioprocentowy roztwór soli dolano 2 kg dziesięcioprocentowego roztworu soli i otrzymano roztwór o stężeniu 7%.

a) Ile było roztworu pięcioprocentowego?

b) Ile kilogramów wody, a ile soli jest w roztworze o stężeniu 7%?

13. Łucja, Maja i Jan pracowali wspólnie nad projektem. Po jego zakończeniu otrzymali premię. Łucja otrzymała premię 40% niższą niż Maja, ale o 40% wyższą niż Jan. Premia Mai była o 400 zł wyższa od premii Jana. Premię w jakiej wysokości otrzymało każde z nich?

14. Świeżo zebrane grzyby zawierały 90% wody. Po suszeniu uzyskano 0,6 kg suszonych grzybów, w których woda stanowiła 20% masy. Ile świeżych grzybów przetworzono?



15. W tabeli przedstawiono zmiany kursu akcji w kolejnych miesiącach (wyrażone w procentach).

Nazwa firmy	Czerwiec	Lipiec
BYCZEK	+5	+2
MIŚ	+4	−5

a) O ile procent wzrosła cena akcji firmy Byczek w opisanym czasie?

b) O ile procent spadła cena akcji firmy Miś w opisanym czasie?

c) Pani Jola zainwestowała 1 czerwca 10 000 zł w akcje obu firm. Do końca lipca zyskała na swojej inwestycji 544 zł. Ile zainwestowała w akcje firmy Byczek, a ile w akcje firmy Miś?

Dla dociekliwych

1. Chcemy przygotować 200 gramów 40-procentowego roztworu kwasu siarkowego. Mamy do dyspozycji tylko roztwory o stężeniu 10% i 50%. Ile wziąć jednego, a ile drugiego?

Wskazówka. Jeśli nie umiesz rozwiązać zadania od razu, wykonaj kolejne polecenia.

- Oznacz masę roztworu 10-procentowego w docelowym roztworze literą x. Jak zapisać wtedy masę roztworu 50-procentowego?
- Ile gramów czystego kwasu jest w x g roztworu 10-procentowego? Ile w roztworze 50-procentowym?
- Ile gramów czystego kwasu ma być w roztworze, który chcemy uzyskać?
- Jak wykorzystać te informacje do zapisania równania?

2. Ocet to roztwór kwasu octowego w wodzie. Można kupić ocet 6-procentowy lub 10-procentowy. Ile trzeba wziąć poszczególnych roztworów, aby uzyskać 100 g roztworu o stężeniu 9%?

Czy już umiem?

I. Ile kosztował garnitur, jeśli po obniżce o 15% jego cena wynosi 807,50 zł?

E **II.** Pani Magda dostała 20% podwyżki, a następnie jeszcze 25% podwyżki. Teraz zarabia o 1300 zł więcej niż przed podwyżkami. Jaka jest jej obecna pensja?

E **III.** Ile cukru należy dosypać do trzech kilogramów jego roztworu wodnego o stężeniu 10%, aby otrzymać roztwór o dwukrotnie większym stężeniu?

A. 0,375 g **B.** 375 g **C.** 3 kg **D.** 0,6 kg

IV. Kuba, Grześ i Antek otrzymują od rodziców kieszonkowe. Chłopcy zauważyli, że Grześ dostaje o 15% większą kwotę niż Kuba, a Antek o 5% mniejszą niż Kuba. W sumie chłopcy dostają 62 zł.

Wskaż równanie opisujące treść zadania, jeśli x oznacza, ile złotych kieszonkowego dostaje Kuba.

A. $1{,}15x + 0{,}95x = 62$

B. $0{,}15x + 0{,}5x + x = 62$

C. $1{,}05x + 0{,}85x = 62$

D. $1{,}15x + 0{,}95x + x = 62$

V. Oblicz.

a) $\sqrt{3^2 + 4^2}$ **c)** $(\sqrt{17})^2$ **e)** $\sqrt{1}$

b) $\sqrt{81}$ **d)** $\sqrt{0}$ **f)** $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

5 Przekształcanie wzorów

Na dobry początek

W Polsce temperatury zazwyczaj wyrażamy, posługując się skalą Celsjusza. Tymczasem w Stanach Zjednoczonych na co dzień korzysta się ze skali Fahrenheita (czytaj: farenhajta).

Skala Celsjusza



Anders Celsjusz, 1701–1744, szwedzki astronom i fizyk

0°C – temperatura topnienia lodu

Skala Fahrenheita

Gabriel Daniel Fahrenheit, 1686–1736, fizyk urodzony w Gdańsku



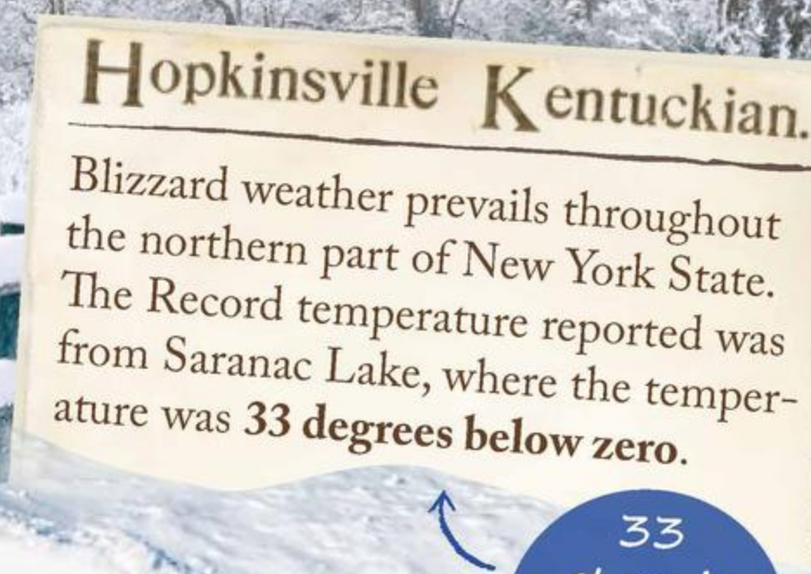
32°F – temperatura topnienia lodu





25 gr. ILUSTROWANY KURYER CODZIENNY

I tak w Kolbuszowej wykazywał termometr w południe –44 st. C., a w Kąclowej koło Grybowa nawet –48 st. C.



Hopkinsville Kentuckian.

Blizzard weather prevails throughout the northern part of New York State. The Record temperature reported was from Saranac Lake, where the temperature was **33 degrees below zero**.

33 stopnie poniżej zera

$$T = \frac{9}{5}t + 32 \ [°F]$$

t – temperatura w skali Celsjusza [°C]

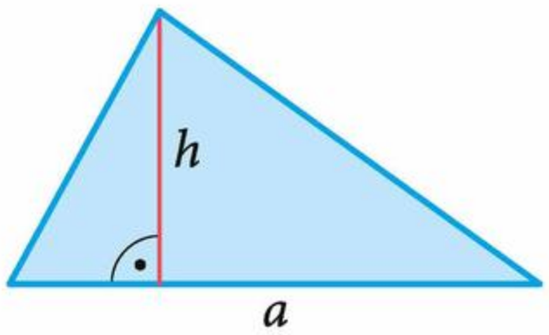
T – temperatura w skali Fahrenheita [°F]

$$t = (T-32) \cdot \frac{5}{9} \ [°C]$$

Pytania i polecenia

- Z termometru można odczytać, że 0°C to 32°F. Sprawdź to za pomocą obliczeń.
- Podaj w stopniach Celsjusza temperaturę równą zero stopni Fahrenheita.
- W styczniu 1910 roku w stanie Nowy Jork zanotowano −33 stopnie Fahrenheita. W lutym 1929 roku w Polsce mrozy sięgały prawie −50 stopni Celsjusza. W Kąclowej koło Grybowa zanotowano wówczas nieoficjalny rekord temperatury: −48°C. Gdzie było zimniej i o ile?

Wzory opisują zależności między wielkościami. We wzorze znajdziemy informację, w jaki sposób, znając jedne wielkości, można obliczyć inne.



$P = \frac{1}{2}ah$

$pole = \frac{1}{2} \cdot podstawa \cdot wysokość$



$v = \frac{s}{t}$

$prędkość = \frac{droga}{czas}$

Przykład 1

Wzór $h = \frac{v^2}{2g}$ pozwala obliczyć, jaką wysokość h osiągnie ciało podrzucone pionowo w górę z prędkością początkową v. Litera g oznacza wartość przyspieszenia ziemskiego (przyspieszenia grawitacyjnego), $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Oblicz, jaką wysokość osiągnie piłka podrzucona do góry z prędkością $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Podstawiamy do wzoru znane wielkości:

$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{10^2}{2 \cdot 10} = 5$ [m].

Piłka osiągnie wysokość 5 m.

Obliczenia na jednostkach:

$$\frac{\left(\frac{m}{s}\right)^2}{\frac{m}{s^2}} = \frac{m^2}{s^2} : \frac{m}{s^2} = \frac{\overset{m}{\cancel{m^2}}}{\underset{1}{\cancel{s^2}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{s^2}}}{\underset{1}{\cancel{m}}} = m$$

Ćwiczenie 1

Jaką wysokość osiągnie piłka rzucona pionowo do góry z prędkością $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$?

Rozwiążmy teraz odwrotny problem.

Przykład 2

Oblicz, z jaką prędkością trzeba rzucić pionowo do góry piłkę, aby osiągnęła wysokość:

a) 1 m, **b)** 4 m, **c)** 20 m, **d)** 10 m.

Gdy podstawimy dane do wzoru $h = \frac{v^2}{2g}$, otrzymamy równanie:

a) $1 = \frac{v^2}{2 \cdot 10} \quad | \cdot (2 \cdot 10)$

$2 \cdot 10 \cdot 1 = v^2$ Wykonujemy działania.

$20 = v^2$ Wyciągamy pierwiastek ($v > 0$).

$v = \sqrt{20} \approx 4{,}5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$

Piłkę należy rzucić do góry z prędkością około $4{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) $4 = \frac{v^2}{2 \cdot 10}$

$2 \cdot 10 \cdot 4 = v^2$

$80 = v^2$

$v = \sqrt{80} \approx 8{,}9 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$

Piłkę należy rzucić do góry z prędkością około $8{,}9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Znaczna część obliczeń powtarza się w podpunktach a) i b), co więcej – będzie się powtarzać także w kolejnych przykładach. Aby uniknąć żmudnych rachunków, możemy zapisać powtarzające się obliczenia tylko raz, używając symboli literowych, a dane liczbowe podstawić na końcu. Takie obliczenia na symbolach nazywamy **przekształceniem wzoru.**

$h = \frac{v^2}{2g} \quad | \cdot 2g$

$2gh = v^2$

$v^2 = 2gh$ Wyciągamy pierwiastek (prędkość nie jest ujemna).

$v = \sqrt{2gh}$

W ten sposób **przekształciliśmy wzór**, tak aby **wyznaczyć** z niego v. Kolejne przykłady możemy rozwiązać teraz bardzo szybko.

c) Dla $h = 20$ m: $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 20} = \sqrt{400} = 20 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$.

d) Dla $h = 10$ m: $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 10} = \sqrt{200} \approx 14 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$.

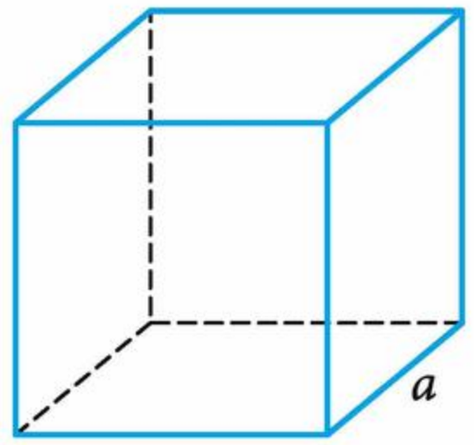
Zapamiętaj

Przy przekształcaniu wzorów wolno wykonywać takie same operacje jak przy rozwiązywaniu równań. Różnica polega na tym, że we wzorze nie tylko niewiadoma, lecz także dane są oznaczone literami.

Ćwiczenie 2

a) Zależność między długością krawędzi sześcianu a jego polem powierzchni całkowitej jest opisana wzorem $P = 6a^2$. Wyznacz z niego a.

b) Zależność między długością krawędzi sześcianu a jego objętością jest opisana wzorem $V = a^3$. Wyznacz z niego a.



Przykład 3

Prędkość w ruchu jednostajnym obliczamy ze wzoru: $v = \frac{s}{t}$ ($prędkość = \frac{droga}{czas}$). Wyznacz z niego czas.

$v = \frac{s}{t} \quad | \cdot t$

$vt = s \quad | : v$

$t = \frac{s}{v}$

Ćwiczenie 3

Ze wzoru określającego ciśnienie $p = \frac{F}{S}$ $\left(ciśnienie = \frac{siła}{powierzchnia}\right)$ wyznacz S.

Przykład 4

Przekształć wzór na pole trapezu $P = \frac{1}{2}(a+b)h$ tak, aby otrzymać wzór na długość podstawy a.

$P = \frac{1}{2}(a+b)h \quad | \cdot 2$

$2P = (a+b)h \quad | : h$

$\frac{2P}{h} = a + b \quad | - b$

$\frac{2P}{h} - b = a$, czyli $a = \frac{2P}{h} - b$.

Ćwiczenie 4

Zapisz wzór na obwód L trójkąta równoramiennego o ramionach a i podstawie b, a następnie wyznacz z niego b.

Zadania

1. Z podanego wzoru wyznacz każdą z występujących w nim zmiennych.

a) $P_c = P_p + P_b$ **b)** $P = ah$ **c)** $a = \frac{F}{m}$ **d)** $d = \frac{m}{V}$

2. Ze wzoru na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}ah$, gdzie a jest długością jednego z boków, a h – wysokością opuszczoną na ten bok, wyznacz h.

3. W wysokich górach, gdzie ciśnienie atmosferyczne jest niższe, woda wrze w temperaturze niższej od 100°C. Zależność między wysokością nad poziomem morza a temperaturą wrzenia wody opisuje wzór: $t = 100 - 0{,}0033h$, gdzie t jest temperaturą w stopniach Celsjusza, a h – wysokością n.p.m. w metrach.

a) Oblicz, w jakiej temperaturze wrze woda w schronisku na Turbaczu (zbudowanym na wysokości 1283 m n.p.m.).

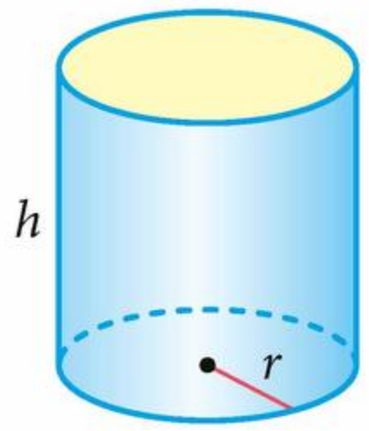
b) Z podanego wzoru wyznacz h.

c) Oblicz, na jakiej wysokości woda wrze w temperaturze 85°C, a na jakiej – w temperaturze 80°C. Korzystając z atlasu, wskaż góry o zbliżonej wysokości.



4. Jeśli przez urządzenie elektryczne podłączone do napięcia U płynie prąd o natężeniu I, to w czasie t urządzenie to zużywa energię elektryczną $E = UIt$. Wyznacz z tego wzoru wszystkie występujące w nim wielkości.

5. Każdy z podanych niżej wzorów można wykorzystać do obliczenia pola powierzchni całkowitej walca (P_c – pole powierzchni całkowitej, P_p – pole podstawy, P_b – pole powierzchni bocznej). Wyznacz ze wzoru podaną zmienną.



a) $P_c = 2P_p + P_b$, P_p **b)** $P_c = 2P_p + 2\pi rh$, r

6. Przyspieszenie ciała opisuje, jak szybko się ono rozpędza. Jeśli ciało porusza się z prędkością v_p, a potem w czasie t rozpędza się do prędkości v_k, to jego przyspieszenie obliczamy ze wzoru $a = \frac{v_k - v_p}{t}$. Przekształć ten wzór tak, aby wyznaczyć każdą z występujących w nim wielkości.

7. Energię kinetyczną (czyli energię ruchu) ciała obliczamy ze wzoru $E = \frac{1}{2}mv^2$, gdzie m jest masą poruszającego się ciała, a v jego prędkością. Wyznacz z tego wzoru:

a) masę ciała przy danej prędkości i energii kinetycznej,
b) prędkość ciała przy danej masie i energii kinetycznej.

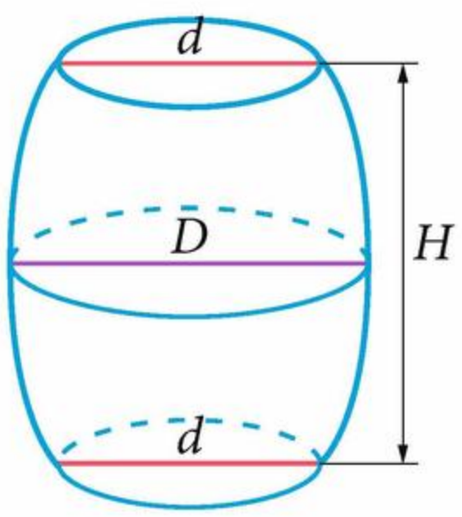
8. Biegacze długodystansowi zamiast podawać prędkość biegu, używają wielkości zwanej tempem. Tempo wskazuje, ile czasu zajmuje zawodnikowi przebiegnięcie 1 km, np. tempo 4:30 min/km oznacza, że dana osoba przebiega 1 km w czasie 4 min 30 s.

a) Oblicz, z jaką prędkością w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ porusza się biegacz, jeśli jego tempo wynosi: 5 min/km, 6 min/km, 7:30 min/km.
b) Zapisz wzór pozwalający obliczyć, z jaką prędkością v (w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$) porusza się biegacz, jeśli jego tempo wynosi x min/km.
c) Ze wzoru zapisanego w podpunkcie b) wyznacz x.
d) Korzystając ze wzoru przekształconego w podpunkcie c), oblicz tempo biegacza przemieszczającego się z prędkością 10 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Czy wynik zgadza się z wcześniejszymi obliczeniami?

9. Przybliżoną pojemność V beczki o wymiarach przedstawionych na rysunku można obliczyć ze wzoru:

$V = \frac{1}{4}H(2D^2 + d^2)$.

Jeśli chcemy otrzymać wynik w litrach (czyli decymetrach sześciennych), wymiary beczki wstawiamy w decymetrach.



a) Oblicz pojemność beczki o wymiarach:
$d = 80$ cm, $D = 120$ cm, $H = 1{,}5$ m.
b) Wyznacz ze wzoru H i d.

Dla dociekliwych

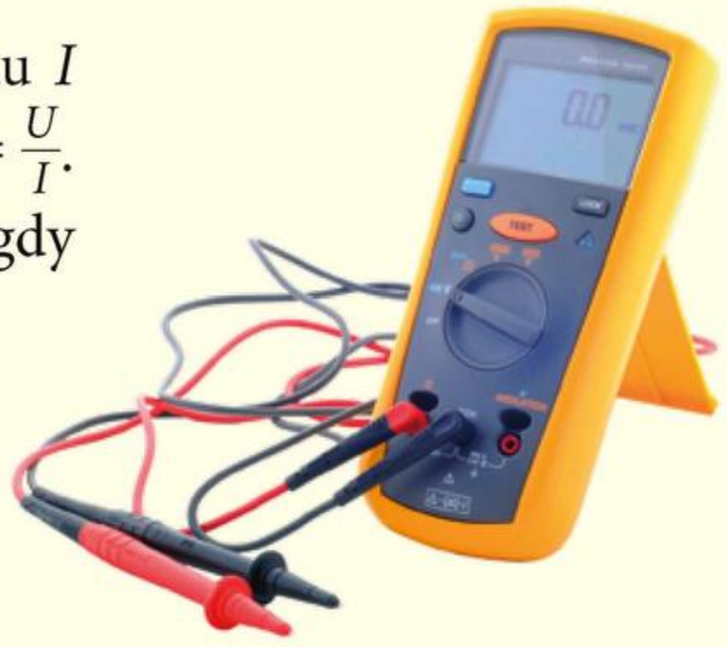
Pole P kwadratu możemy obliczyć ze wzoru $P = a^2$, a jego obwód L – ze wzoru $L = 4a$. Jak wyprowadzić wzór pozwalający obliczyć pole kwadratu, gdy znamy jego obwód? Do obliczenia pola kwadratu jest nam potrzebna długość jego boku. Wyznaczmy ją więc ze wzoru na obwód:

$a = \frac{L}{4}$.

Następnie podstawiamy otrzymane wyrażenie w miejsce a do wzoru $P = a^2$, dzięki czemu otrzymujemy $P = \left(\frac{L}{4}\right)^2$.

1. Opór elektryczny R, napięcie U, natężenie prądu I oraz moc P powiązane są wzorami: $P = UI$, $R = \frac{U}{I}$. Wyprowadź wzór pozwalający obliczyć moc, gdy znamy:

a) opór i napięcie,
b) opór i natężenie.



Czy już umiem?

Przyjmijmy oznaczenia:
F – siła, m – masa, g – przyspieszenie ziemskie, d – gęstość, V – objętość, p – ciśnienie, h – wysokość, E – energia, v – prędkość.

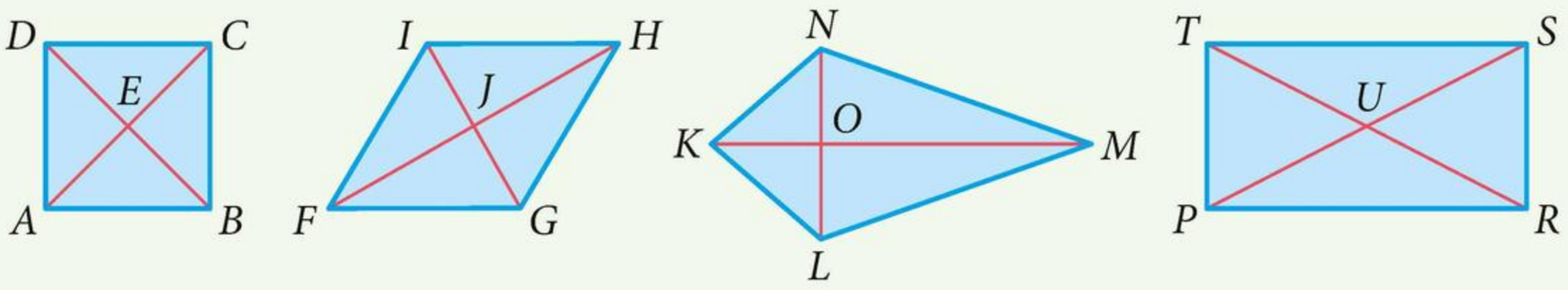
I. Z podanego wzoru fizycznego wyznacz wskazane obok wielkości.

a) $F = mg$, m, g **b)** $d = \frac{m}{V}$, m, V **c)** $p = dgh$, d, g, h

II. Ze wzoru $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$ wyznacz:

a) g, **b)** v.

III. Na rysunku przedstawiono kwadrat, romb, deltoid i prostokąt oraz zaznaczono ich przekątne. Wypisz wszystkie powstałe trójkąty prostokątne.



Powtórzenie V

ZESTAW 1

1. Wymień wszystkie liczby spośród: 0, 1, 2, 3, 4, które spełniają równanie $x^3 + 4x = 5x^2$.

2. Zapisz równanie odpowiadające opisanej sytuacji.



a) W szkolnym barze herbata kosztowała x, a drożdżówka była od niej o 80 gr tańsza. Sebastian zapłacił 4 zł 40 gr za jedną herbatę i dwie drożdżówki.

b) Kasia ma x lat i jest 3 razy młodsza od swojego taty. Razem mają 44 lata.

3. Na przyjęcie urodzinowe Magda zaprosiła kilku chłopców i dwa razy więcej dziewcząt. W przyjęciu uczestniczyło łącznie 19 osób. Ilu chłopców i ile dziewcząt zaprosiła Magda?

4. Sprawdź, czy równanie jest spełnione przez liczbę 5.

a) $7 + 3x = 2(4 - x)$

b) $4(6 - x) = 2(x - 3)$

c) $0{,}5x + 20 = 4{,}4x$

d) $20 + x = 20 - [20 - (20 - x)]$

5. Rozwiąż równanie.

a) $5(x - 7) + 2 = -28$

b) $2(x - 1) + 3(x + 1) = 26$

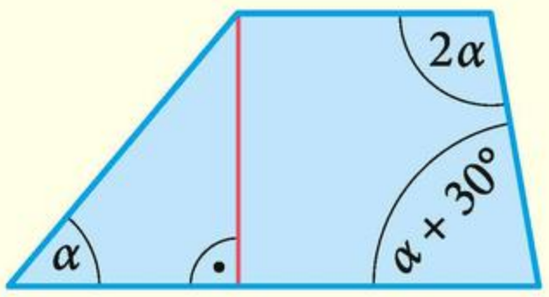
c) $4(3 - x) + 9 = 7(2 + x) + 29$

d) $9 = 5x + 6 - 5(x - 0{,}6)$

6. Wyznaczono dwie działki budowlane, położone jak na rysunku obok. Jedna działka ma kształt kwadratu, a druga prostokąta, którego jeden bok jest o 12 m dłuższy od drugiego. Do ogrodzenia obu działek i postawienia płotu między nimi potrzeba 180 m bieżących siatki. W ogrodzeniu każdej z działek zamontowano bramę szerokości 3 m. Oblicz pole każdej z tych działek.



7. Oblicz miary kątów trapezu przedstawionego na rysunku obok.



8. Wyznacz U oraz I z podanego wzoru.

a) $P = UI$ **b)** $R = \frac{U}{I}$

9. Cenę krzesła podniesiono o 10%, a następnie obniżono o 20%.

a) O ile procent cena krzesła jest teraz niższa niż na początku?

b) Cena krzesła wynosi obecnie 176 zł. Ile wynosiła na początku?

ZESTAW 2

1. Jakie wyrażenie można wstawić w miejsce ?, aby równanie $(2x-3)\cdot\frac{1}{2}=3x+?$:

a) miało dokładnie jedno rozwiązanie,
b) nie miało rozwiązania,
c) miało nieskończenie wiele rozwiązań?

2. Czy równania $x^2+1=26$ oraz $5(x-2)=x+10$ są równoważne (tzn. mają takie same rozwiązania)? Wybierz odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie spośród zdań A–C.

TAK	ponieważ	A.	$x=0$ nie jest rozwiązaniem żadnego z tych równań
		B.	liczba 5 spełnia każde z tych równań
NIE		C.	równanie $x^2+1=26$ ma dwa rozwiązania, a równanie $5(x-2)=x+10$ ma tylko jedno rozwiązanie

3. Pani Barbara jest trzy razy starsza od swojej córki. Pięć lat temu była starsza od córki czterokrotnie. Ile lat ma pani Barbara?

4. Ania, Janek i Marek mają razem 670 zł oszczędności. Ania ma o 30 zł więcej niż Janek, a Marek – dwa razy więcej pieniędzy od Janka. Ile pieniędzy ma każde z dzieci?

5. Początkowo na zajęciach teatralnych dziewczyny stanowiły 75% liczby wszystkich obecnych. Gdy przyszły jeszcze 3 spóźnione koleżanki, okazało się, że dziewczyny stanowią 80% liczby obecnych. Ilu chłopców jest na zajęciach?

6. Mama przygotowała zalewę do ogórków kiszonych: zmieszała 12 g soli z wodą i otrzymała kilogram zalewy. Okazało się, że otrzymany roztwór jest za słaby. Ile soli trzeba dosypać, aby otrzymać zalewę pięcioprocentową?

7. W dzbanku znajduje się 500 g roztworu cukru o stężeniu 15%. Ile gramów wody należy dolać, aby otrzymać roztwór o stężeniu 12%?

8. W 18 kg mieszanki orzechów 60% to orzechy włoskie. Oblicz, ile kilogramów orzechów włoskich należy usunąć, aby otrzymać mieszankę zawierającą 55% orzechów włoskich.



9. Ze 150 kg roztworu soli odparowano 60 kg wody i otrzymano roztwór o stężeniu 5%. Oblicz stężenie procentowe roztworu przed odparowaniem wody.

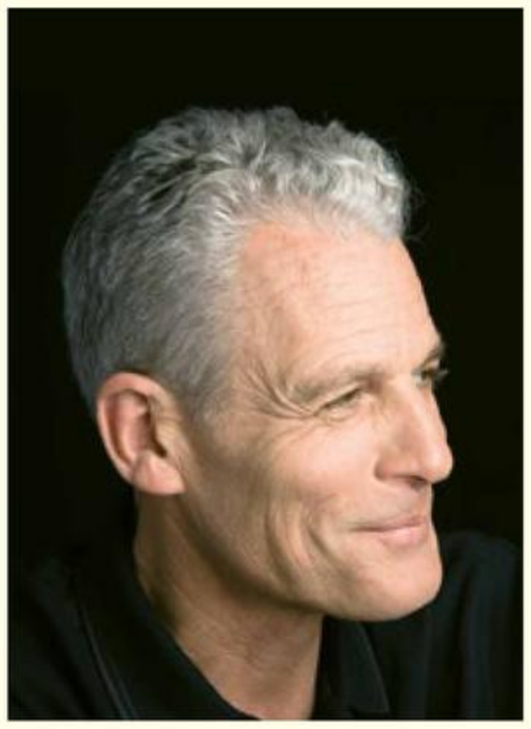
10. Podaj wzór na pole P rombu o przekątnych e i f. Z zapisanego wzoru wyznacz f.

Zadania na temat…

Paradoks bliźniąt

Czy wiesz, że czas płynie wolniej, gdy się poruszamy?

Wyobraź sobie dwóch 30-letnich braci bliźniaków, z których jeden wybrał się w podróż kosmiczną z bardzo dużą prędkością (prędkość tę obliczysz w zadaniu 9). Gdy w statku kosmicznym minął rok, 31-letni astronauta wrócił na Ziemię. Tam spotkał swojego 70-letniego brata – na Ziemi bowiem minęło aż 40 lat.





Takie zdarzenie nie miało dotąd miejsca, ponieważ nie dysponujemy dostatecznie szybkimi statkami kosmicznymi, a różnica upływu czasu jest tym większa, im szybciej się poruszamy. Zaczyna ona być zauważalna, gdy zbliżamy się do prędkości światła wynoszącej $300\,000\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$, czyli ponad miliard $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Osiągnięcie, a tym bardziej przekroczenie tej prędkości, jest niemożliwe. W stosunku do tak olbrzymiej wielkości nawet nasze rakiety poruszają się powoli.

Różnice w upływie czasu opisuje wzór:

$$t_1 = t_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

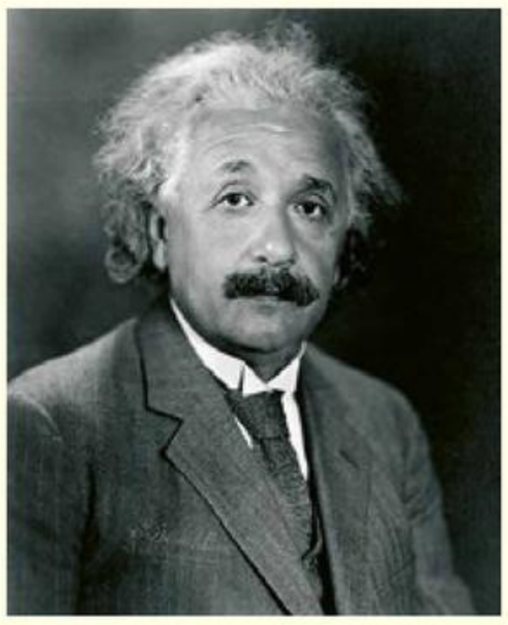
w którym:

t_1 – czas, który minął według obserwatora w ruchu (np. bliźniaka astronauty),

t_0 – czas, który minął według obserwatora, który się nie porusza (np. bliźniaka na Ziemi),

v – prędkość ruchu bliźniaka astronauty względem jego brata na Ziemi,

c – prędkość światła w próżni, wynosząca $300\,000\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$.



Ten wzór wyprowadził Albert Einstein na początku XX wieku. Dopiero 66 lat później, w 1971 roku, wykonano doświadczenie, w którym jeden z dwóch bardzo dokładnych zegarów przewieziono samolotem dookoła świata. Po powrocie spóźniał się on w stosunku do czekającego bez ruchu „zegara bliźniaka".

1. W którym roku Albert Einstein wyprowadził wzór opisujący różnice w upływie czasu?

2. Oblicz, jaką częścią prędkości światła jest:

a) prędkość rowerzysty równa $6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (czyli około $20\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$),

b) prędkość samochodu równa $30\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (czyli około $100\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$),

c) prędkość rakiety lecącej na Księżyc równa $11\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Wskazówka. Zwróć uwagę na jednostki: $1\ \text{km} = 1000\ \text{m}$, więc $1\ \frac{\text{km}}{\text{s}} = 1000\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

3. Astronauta wystartował z Ziemi 1 stycznia 2117 roku i wrócił, gdy na naszej planecie minęło 300 dni. Podczas podróży jego prędkość była równa $297\,000\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Ile dni minęło według astronauty?

4. Astronauta wyleciał z Ziemi 1 stycznia 2117 roku i wrócił, gdy według zegarów w jego statku kosmicznym i według jego poczucia czasu minął rok. Poruszał się w tym czasie z prędkością równą 99,9% prędkości światła ($v = 0{,}999c$). Który rok był na Ziemi, gdy tam wrócił?

5. W lutym 2017 roku odkryto układ planetarny zawierający aż siedem planet podobnych do Ziemi. Trzy z nich znajdują się w takiej odległości od swojej gwiazdy, że nie jest tam ani za zimno, ani za gorąco i być może na którejś z nich istnieje życie. Planety te znajdują się aż 40 lat świetlnych od Ziemi, tzn. światło przebywa odległość od nich do Ziemi w czasie 40 lat. Żaden statek kosmiczny nie może osiągnąć ani tym bardziej przekroczyć prędkości światła, jednak w miarę rozwoju techniki prędkość naszych pojazdów może się zbliżać do prędkości światła. Czy astronauci wysłani na te planety mogliby tam dotrzeć i nie zestarzeć się o 40 lat? Czy mogliby potem wrócić i opowiedzieć nam, co widzieli?

6. Rowerzysta jechał z prędkością $6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ przez godzinę (według zegara na wieży ratusza). Oblicz, o jaki ułamek sekund krótszy był czas wycieczki według rowerzysty. Dlaczego na co dzień nie obserwujemy takich różnic czasu?

Wskazówka. Obliczenia najwygodniej wykonywać za pomocą kalkulatora naukowego (może to być kalkulator w komputerze przełączony na widok naukowy).

7. Osoby, które amatorsko uprawiają sport, np. biegają lub jeżdżą na rowerze, wolniej się starzeją. Czy wynika to z podanego wzoru?

8. Jaki wynik dałby podany wzór, gdyby ruch odbywał się z prędkością światła albo szybciej? Dlaczego nie jest to problemem?

9. Ze wzoru podanego na s. 239 wyznacz v. Oblicz, z jaką prędkością trzeba się poruszać, aby czas płynął 40 razy wolniej niż dla osób spoczywających (a więc np. aby okresowi 40 lat na Ziemi odpowiadał okres 1 roku dla podróżującego bliźniaka).

Zadania na deser

Różne równania

1. Przyjrzyj się kolejnym równaniom. Każde z nich ma dwa rozwiązania. Znajdź je.

(1) $|x| = 4$ (2) $|x + 1| = 4$ (3) $|3x + 1| = 4$ (4) $3|x| + 1 = 4$

2. Przyjrzyj się kolejnym równaniom. Każde z nich ma jedno rozwiązanie. Znajdź je.

(1) $2^x = 32$ (3) $5 \cdot 2^x = 40$ (5) $4 \cdot 2^x + 7 = 39$ (7) $2^x \cdot 2^{2x} = 512$

(2) $2^{x+1} = 32$ (4) $2^{4x+9} = 32$ (6) $2^x \cdot 2^x \cdot 2^x = 8$ (8) $2^x \cdot 4^x = 64$

Zadania tekstowe

3. W spotkaniu w domu kultury brało udział 180 osób, dla których ustawiono łącznie 60 krzeseł i trzyosobowych kanap. Niestety nie dla wszystkich wystarczyło miejsc siedzących. Stosunek liczby osób stojących do siedzących był równy 1 : 4. Oblicz, ile kanap ustawiono.

4. Babcia i dziadek mają w sumie 140 lat. Dziadek ma dwa razy tyle lat, ile babcia miała wtedy, kiedy dziadek miał tyle, ile babcia ma teraz. Ile lat ma babcia, a ile dziadek?



Wskazówka. Dziadek ma x lat, a babcia $(140 - x)$ lat. Które z nich jest starsze? Zapisz w postaci wyrażenia, jaka jest między nimi różnica wieku. Ile lat temu było „wtedy”? Ile lat miała wtedy babcia?

5. Z powodu problemów firmy, w której pracuje pan Jan, kierownictwo podjęło decyzję o obniżce pensji. W jej wyniku pan Jan otrzymał w lutym o 10% niższą pensję niż w styczniu. W marcu jego zarobki zmalały o kolejne 10% w porównaniu z poprzednim miesiącem. Łącznie w pierwszym kwartale roku pan Jan zarobił o 1160 zł mniej, niż oczekiwał. Ile wynosiła pensja pana Jana w styczniu?

Co się stanie, kiedy...

Wzory pozwalają nie tylko obliczyć jedną wielkość, kiedy znamy inne, lecz także zorientować się, jak zmienia się jedna wielkość, gdy zmieniają się inne.

6. Rozważmy wzór na prędkość: $v = \frac{s}{t}$. Jak się zmieni prędkość v, gdy:

a) droga s zwiększy się 2 razy, czyli w tym samym czasie pokonamy 2 razy większą odległość,

b) czas t zwiększy się 2 razy, czyli pokonamy tę samą drogę w 2 razy dłuższym czasie?

7. Rozważmy wzór na energię kinetyczną: $E = \frac{1}{2}mv^2$. Jak się zmieni E, gdy:

a) masa m zwiększy się 2 razy, **b)** prędkość v zwiększy się 2 razy?

1 Twierdzenie Pitagorasa

Na dobry początek

Cukiernia „Złoty pociąg” słynie z gorzkiej czekolady. Najpopularniejsze są kwadratowe tabliczki pakowane po trzy. Każda z nich ma inne wymiary, tak dobrane, że po zetknięciu tabliczek narożnikami powstaje trójkąt prostokątny.

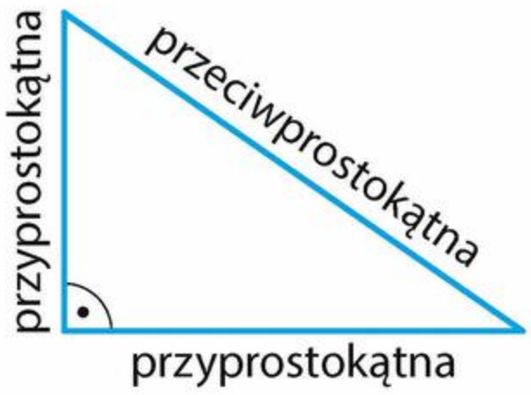


Pytania i polecenia

- Popatrz na rozpakowane czekolady.
  Czy więcej kostek zawierają dwie mniejsze, czy jedna duża tabliczka czekolady?

Słowo „twierdzenie” w matematyce oznacza zdanie, które można uzasadnić. Wiele twierdzeń znasz, choć może nie wiesz, że tak je nazywamy. Oto przykłady:
– Jeśli liczba jest podzielna przez 6, to jest parzysta.
– Kwadrat ma przekątne równej długości.

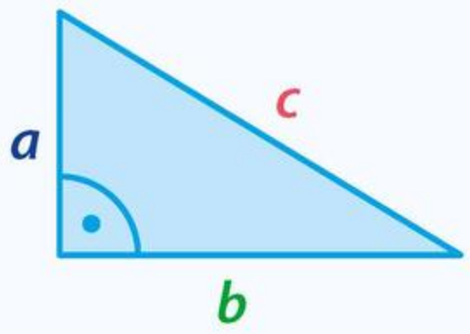
Teraz poznasz nowe twierdzenie. Dotyczy ono trójkątów prostokątnych. Na rysunku obok przypominamy nazwy boków w takim trójkącie.



Zapamiętaj

Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Czy wiesz, że…

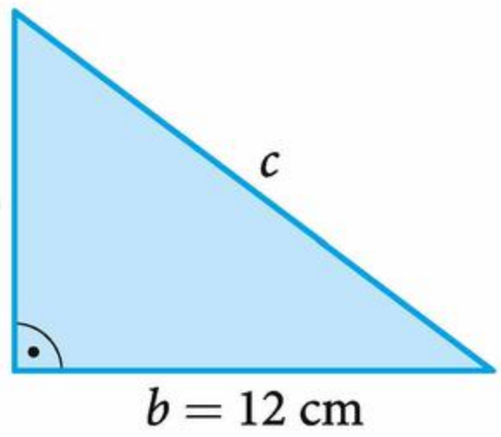
Pitagoras z Samos (ok. 580 p.n.e. – ok. 496 p.n.e.) był greckim matematykiem i filozofem. Założył związek religijno-polityczny, w którego dorobku znalazło się wiele odkryć naukowych, szczególnie z dziedziny matematyki. Związek ten przetrwał aż do połowy IV w. p.n.e. Sam Pitagoras nie pozostawił żadnych prac.



Przykład 1

Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 9 cm i 12 cm. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Wykonujemy rysunek pomocniczy. Oznaczamy przez a i b długości przyprostokątnych trójkąta, a przez c – długość przeciwprostokątnej. Wówczas na mocy twierdzenia Pitagorasa:



$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 9^2 + 12^2$$
$$c^2 = 81 + 144$$
$$c^2 = 225$$
$$c = \sqrt{225}$$
$$c = 15 \text{ [cm]}$$

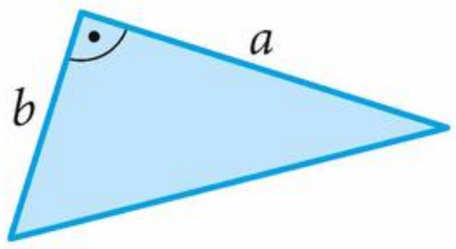
! Równanie $c^2 = 225$ ma dwa rozwiązania: $c = 15$ i $c = -15$. Jednak w tym zadaniu c jest długością boku trójkąta, więc jest liczbą dodatnią.

Zatem przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość 15 cm.

Ćwiczenie 1

Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości a i b.

a) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm
b) $a = 15$ cm, $b = 20$ cm
c) $a = 5$ cm, $b = 12$ cm



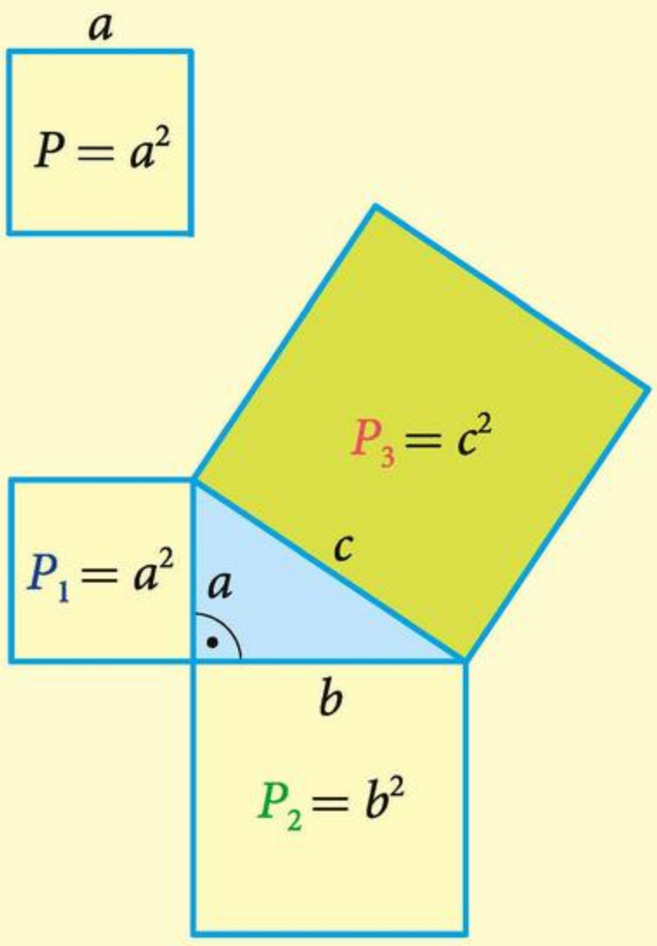
Czy wiesz, że…

Kwadrat długości odcinka to inaczej pole kwadratu, w którym ten odcinek jest bokiem. Dlatego drugą potęgę nazywamy kwadratem.

Twierdzenie Pitagorasa możemy więc zapisać w następującej formie:

Suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej tego trójkąta.

$$P_1 + P_2 = P_3$$

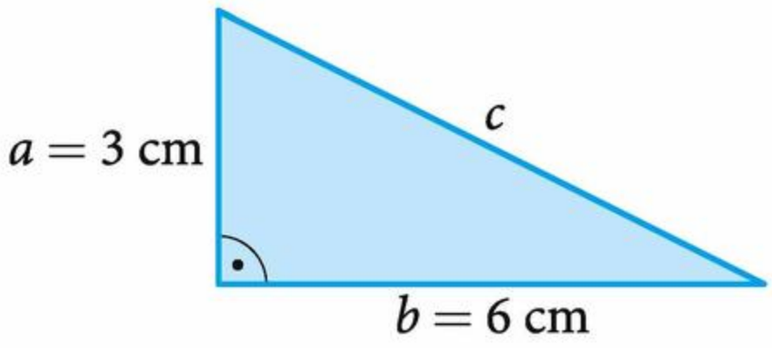


Przykład 2

Oblicz obwód trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości $a = 3$ cm i $b = 6$ cm.

Wykonujemy rysunek pomocniczy, a następnie obliczamy długość przeciwprostokątnej c, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 3^2 + 6^2$$
$$c^2 = 9 + 36$$
$$c^2 = 45$$
$$c = \sqrt{45}$$
$$c = 3\sqrt{5} \text{ [cm]}$$



Obwód tego trójkąta wynosi:
$3 + 6 + 3\sqrt{5} = 9 + 3\sqrt{5}$ [cm].

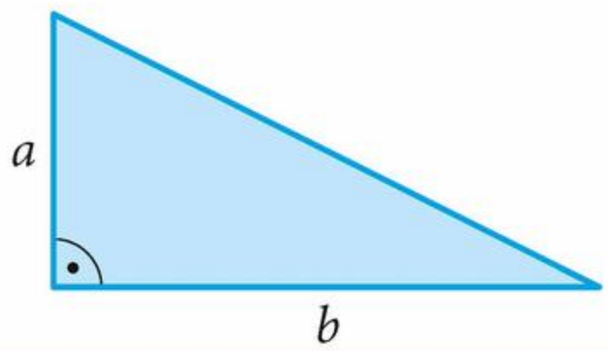
Ćwiczenie 2

Oblicz obwód trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości a i b.

a) $a = 2$ cm, $b = 4$ cm

b) $a = 4$ cm, $b = 6$ cm

c) $a = 7$ cm, $b = 24$ cm



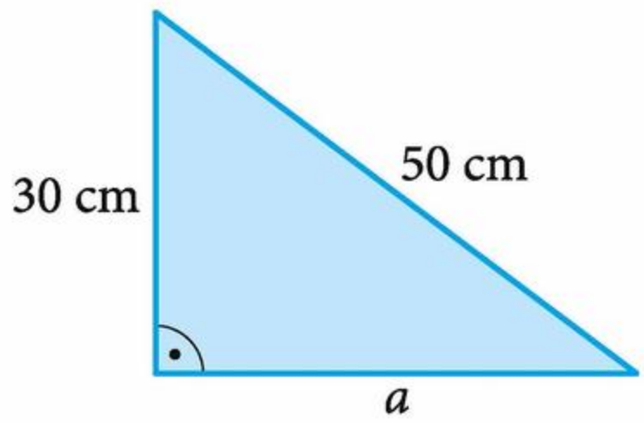
Przykład 3

Dwa boki trójkąta prostokątnego, z których jeden jest przeciwprostokątną, mają długości 30 cm i 50 cm. Oblicz długość trzeciego boku.

Wykonujemy rysunek pomocniczy, na którym zaznaczamy dane. Pamiętamy przy tym, że przeciwprostokątna jest najdłuższym bokiem trójkąta prostokątnego. Długość trzeciego boku oznaczamy literą a.

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$a^2 + 30^2 = 50^2$$
$$a^2 + 900 = 2500$$
$$a^2 = 2500 - 900$$
$$a^2 = 1600$$
$$a = 40 \text{ [cm]}$$



Druga przyprostokątna ma długość 40 cm.

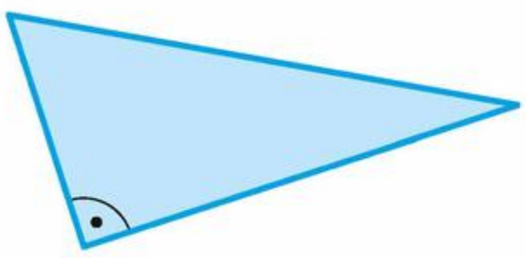
Ćwiczenie 3

Dane są dwa boki trójkąta prostokątnego, z których jednym jest przeciwprostokątna. Oblicz długość trzeciego boku.

a) 12 cm, 20 cm

b) 8 cm, 6 cm

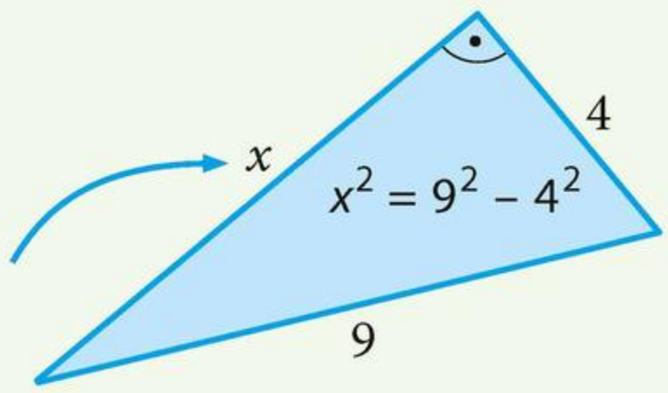
c) 6 cm, 9 cm



Dobra rada

Zawsze zastanów się, który bok obliczasz: najdłuższy czy jeden z krótszych.

Obliczamy jeden z krótszych boków, więc musimy odejmować.

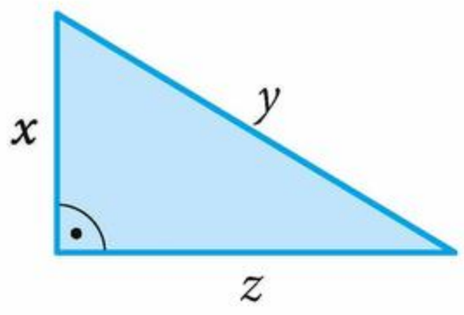


Nie zawsze boki trójkąta prostokątnego oznaczamy literami a, b i c.

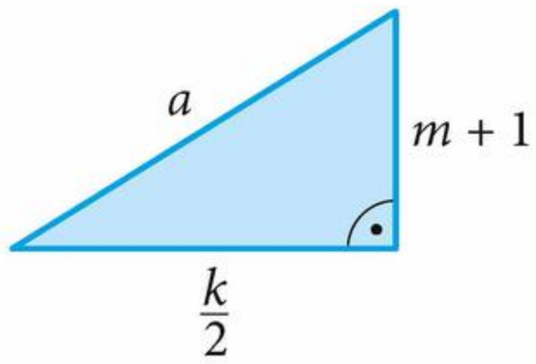
Przykład 4

Zapisz równość, która wynika z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta przedstawionego na rysunku.

a)



b)



a) Długości przyprostokątnych oznaczono literami x i z, a długość przeciwprostokątnej – literą y. Zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa dla tego trójkąta zachodzi równość:

$$x^2 + z^2 = y^2.$$

b) Długości przyprostokątnych oznaczono wyrażeniami $\frac{k}{2}$ i $m + 1$, a długość przeciwprostokątnej – literą a. Zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa dla tego trójkąta zachodzi równość:

$$\left(\frac{k}{2}\right)^2 + (m+1)^2 = a^2$$

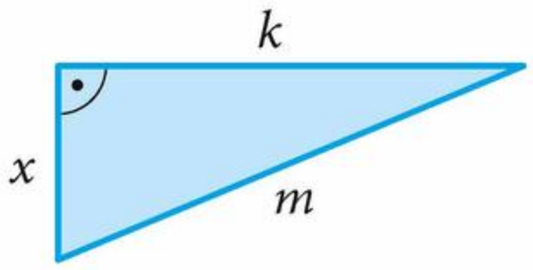
Możemy także zapisać:

$$\frac{k^2}{4} + (m+1)^2 = a^2$$

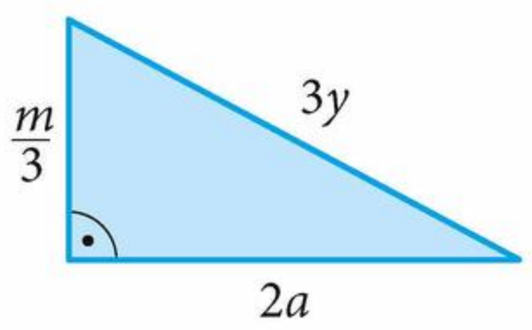
Ćwiczenie 4

Zapisz równość, która wynika z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta przedstawionego na rysunku.

a)



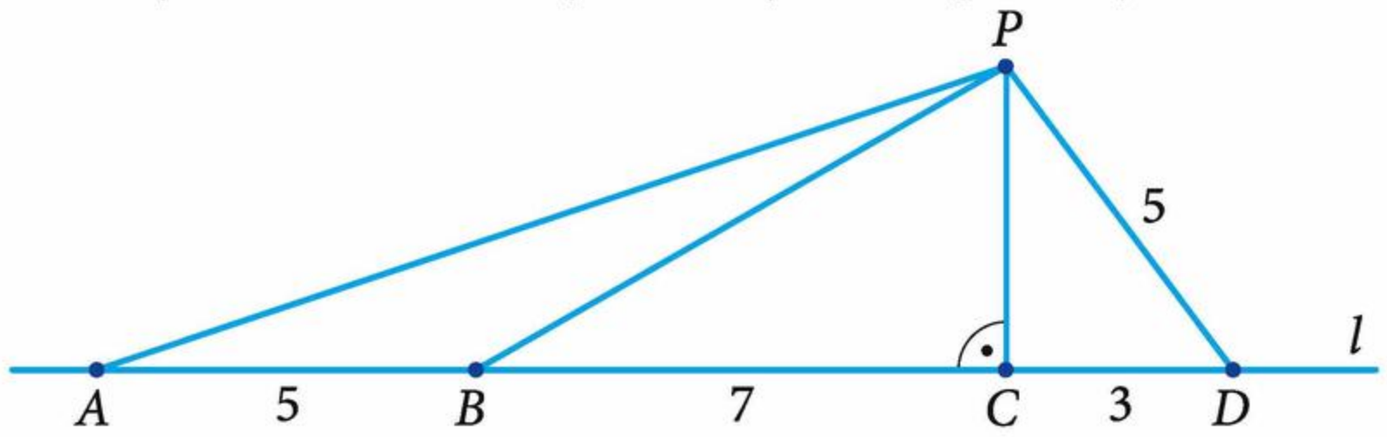
b)



Przykład 5

E

Oblicz odległości punktu P od punktów A, B, C leżących na prostej l, korzystając z danych zamieszczonych na rysunku poniżej.



Odległości punktu P od punktów A, B, C są równe odpowiednio długościom odcinków PA, PB i PC. Zauważmy, że odcinki te są bokami trzech różnych trójkątów prostokątnych – odpowiednio ACP, BCP i CDP. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa. Ponieważ długości dwóch boków CD i DP trójkąta CDP są znane, zaczynamy od obliczenia długości odcinka PC.

Dla trójkąta CDP:

$PC^2 + CD^2 = DP^2$, czyli $PC^2 + 3^2 = 5^2$.

Z tego wynika, że:

$PC^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$, zatem $PC = 4$.

Następnie znajdujemy długości odcinków PB i PA.

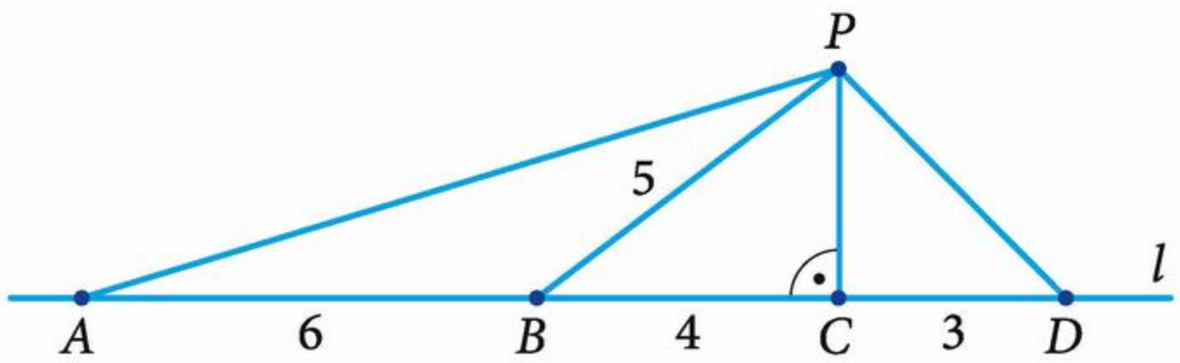
Dla trójkąta BCP: $PB^2 = PC^2 + 7^2 = 16 + 49 = 65$, zatem $PB = \sqrt{65}$.

Dla trójkąta ACP: $PA^2 = PC^2 + (5+7)^2 = 16 + 144 = 160$, zatem $PA = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$.

Odległość punktu P od punktu A jest równa $4\sqrt{10}$, od punktu B wynosi $\sqrt{65}$, a od punktu C wynosi 4.

Ćwiczenie 5

Oblicz długości odcinków AP, CP i DP. Który z tych odcinków jest najkrótszy?



Długość najkrótszego odcinka łączącego punkt P z prostą l to odległość punktu P od prostej l.

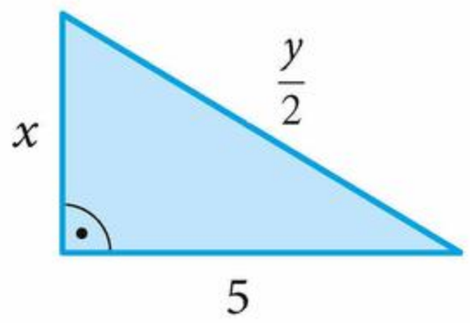
Zadania

1. Wykonaj polecenia. ▶ Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

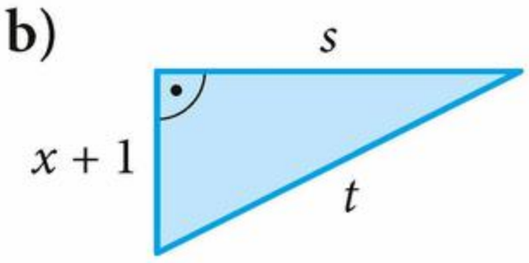
poziom A Zapisz równość, która wynika z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta na rysunku.

← P4

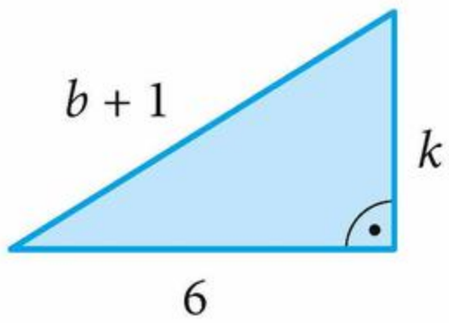
a)



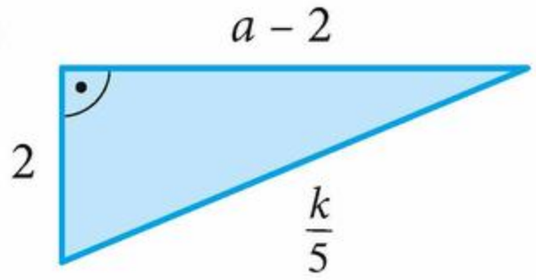
b)



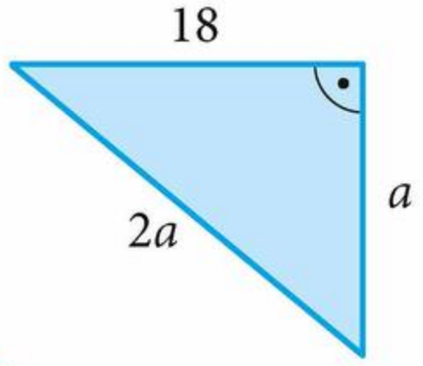
c)



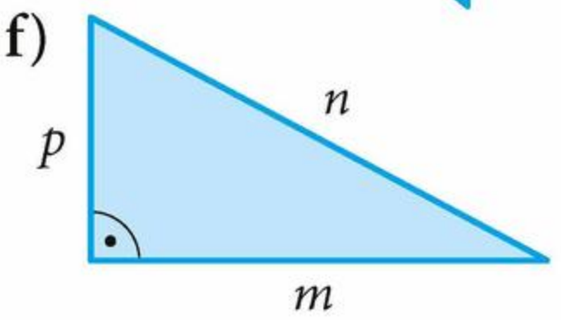
d)



e)



f)



poziom B

← P1

Dane są długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego. Oblicz długość jego przeciwprostokątnej. Do obliczeń możesz użyć kalkulatora.

a) 10, 24 **b)** 72, 21 **c)** 12, 35 **d)** 18, 80 **e)** 105, 100 **f)** 16, 30

poziom C

← P3

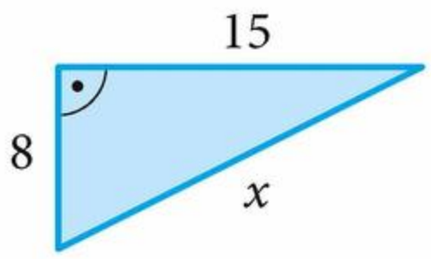
Dane są długości dwóch boków trójkąta prostokątnego. Jeden z nich jest przeciwprostokątną. Oblicz długość trzeciego boku. Do obliczeń możesz użyć kalkulatora.

a) 15, 39 **b)** 58, 40 **c)** 68, 32 **d)** 8, 17 **e)** 37, 12 **f)** 7, 25

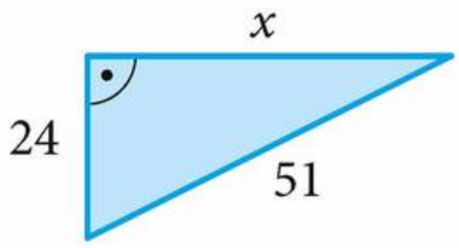
poziom D

Oblicz długość trzeciego boku trójkąta. Do obliczeń możesz użyć kalkulatora.

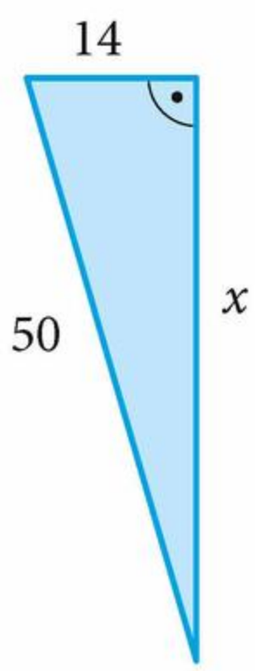
a)



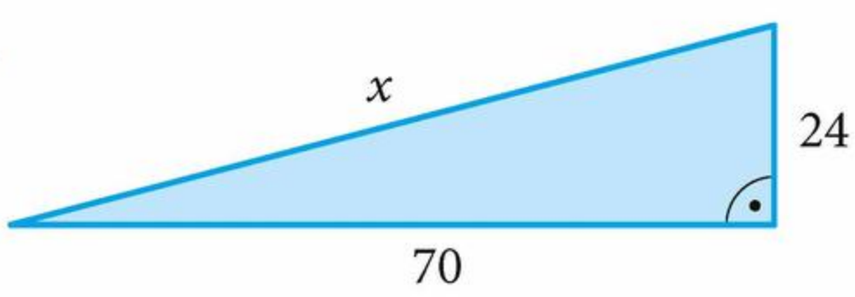
b)



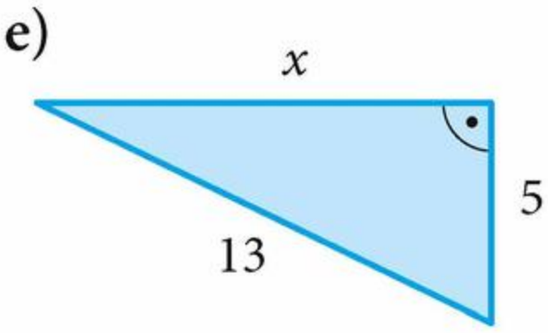
c)



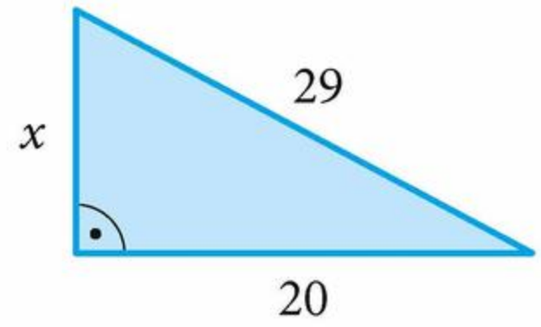
d)



e)



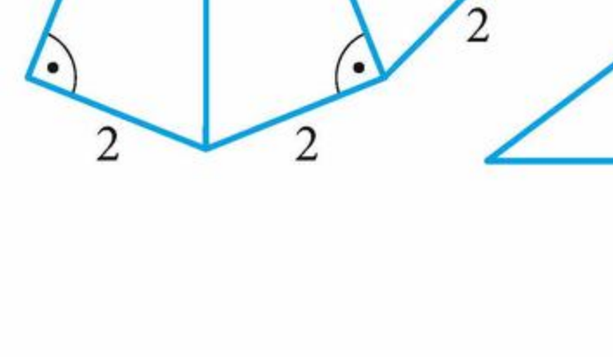
f)



MISTRZ

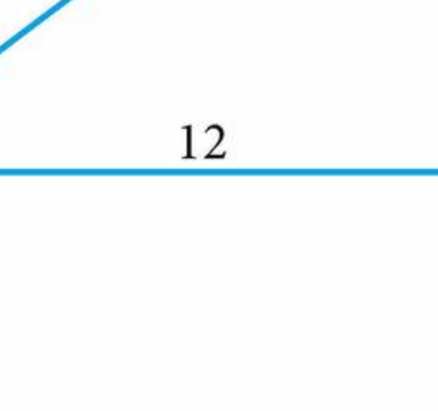
Oblicz długość odcinka oznaczonego literą.

a)



b)

c)



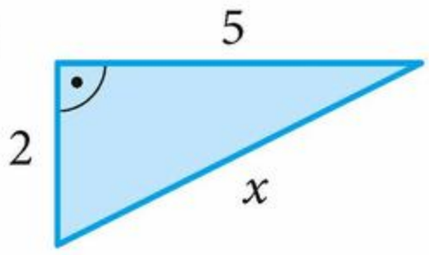
d)

e)

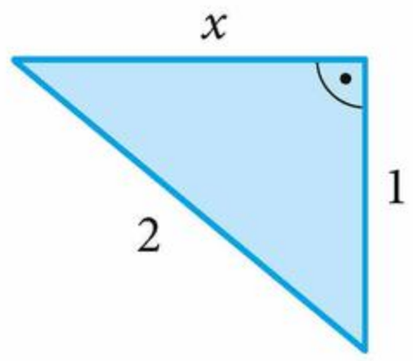
2. Oblicz długość trzeciego boku trójkąta. ▶ Jeśli poprawnie rozwiążesz dwa przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

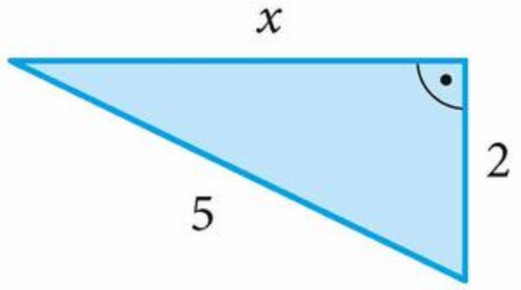
a)



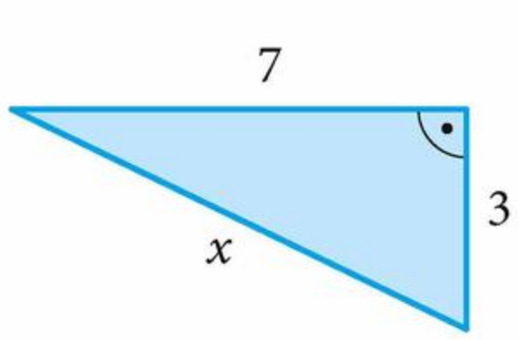
b)



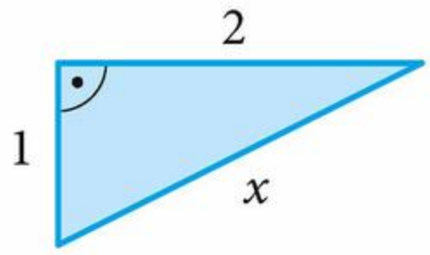
c)



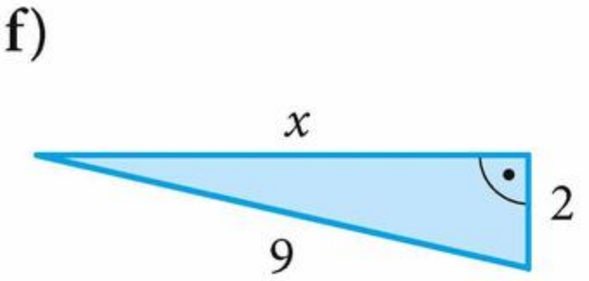
d)



e)

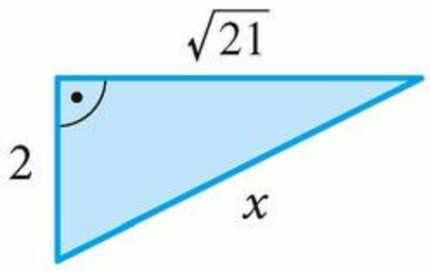


f)

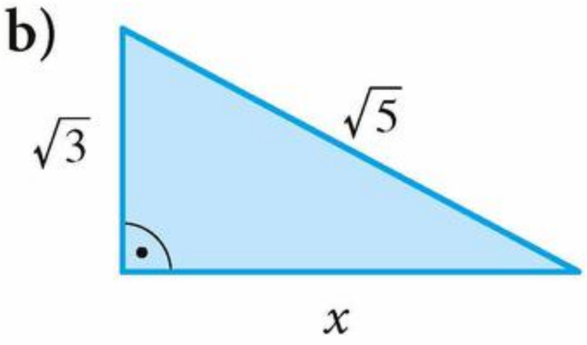


poziom B

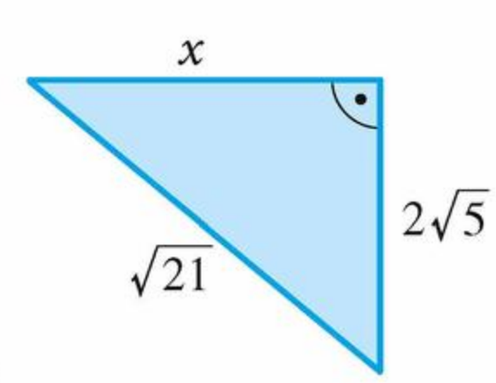
a)



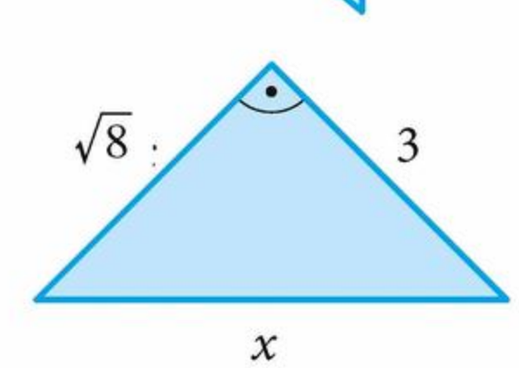
b)



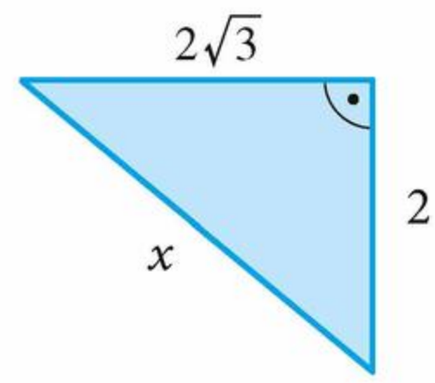
c)



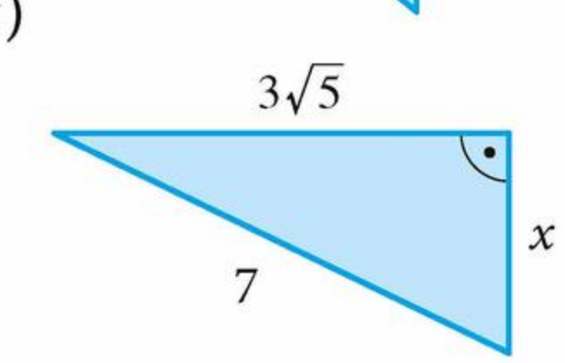
d)



e)

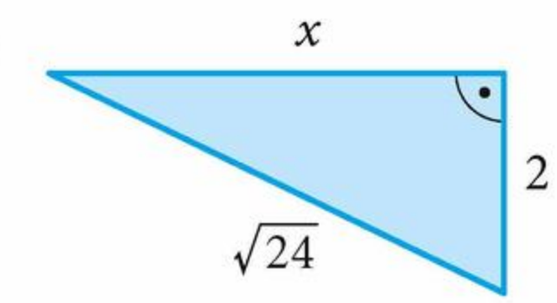


f)

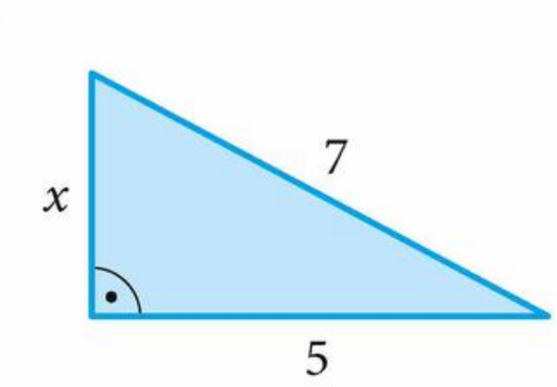


poziom C Pamiętaj o wyłączeniu liczby przed znak pierwiastka.

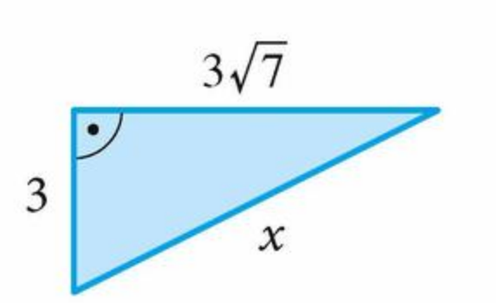
a)



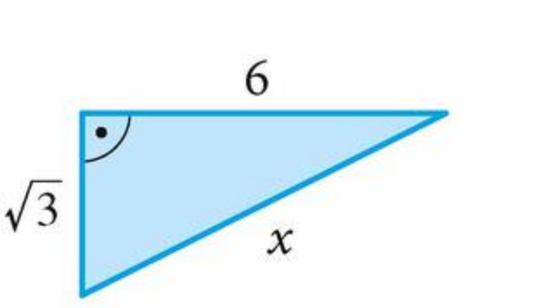
b)



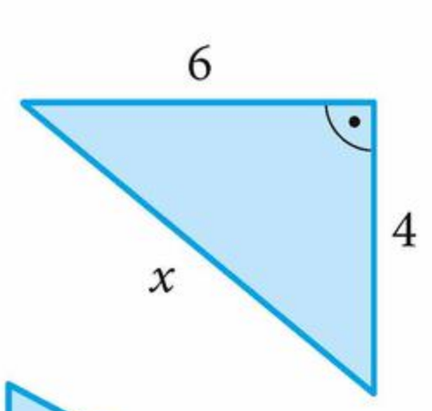
c)



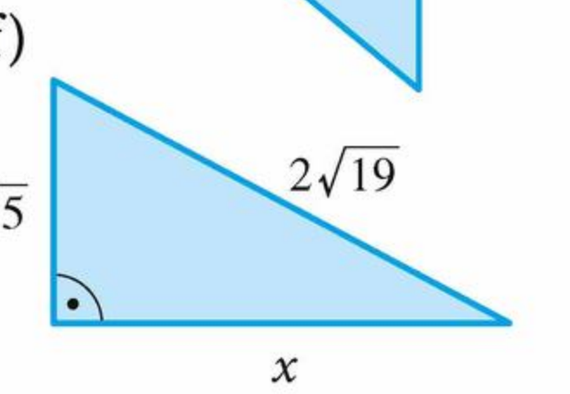
d)



e)



f)



3. Oblicz:

a) długość krótszej przyprostokątnej trójkąta prostokątnego, jeśli jego najdłuższy bok ma $2\sqrt{3}$ cm, a średni $\sqrt{10}$ cm,

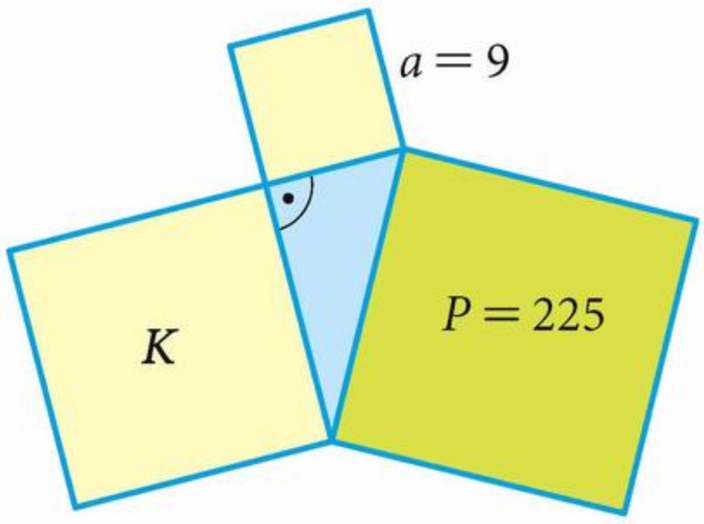
b) długość podstawy trójkąta prostokątnego równoramiennego, którego ramię ma długość $5\sqrt{8}$ cm,

c) obwód trójkąta prostokątnego równoramiennego o przyprostokątnej długości $7\sqrt{2}$ cm.

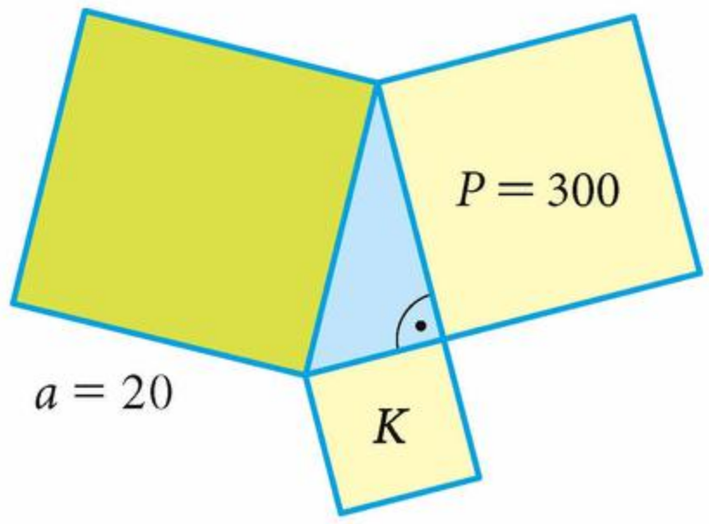
Zanim przystąpisz do obliczeń, wykonaj rysunek i zapisz na nim podane długości.

4. Oblicz pole kwadratu K, jeśli wszystkie figury zbudowane na bokach trójkąta prostokątnego to kwadraty. Wykorzystaj informacje podane na rysunku.

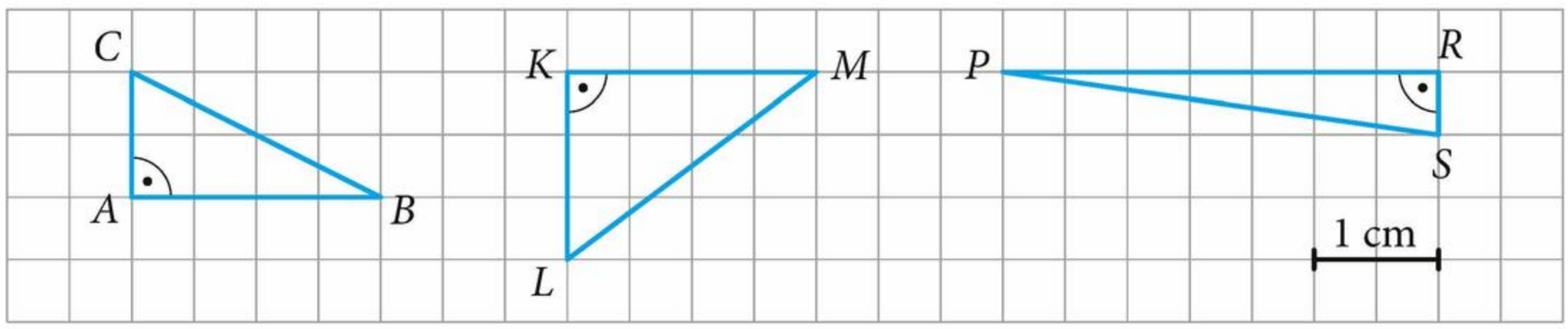
a)



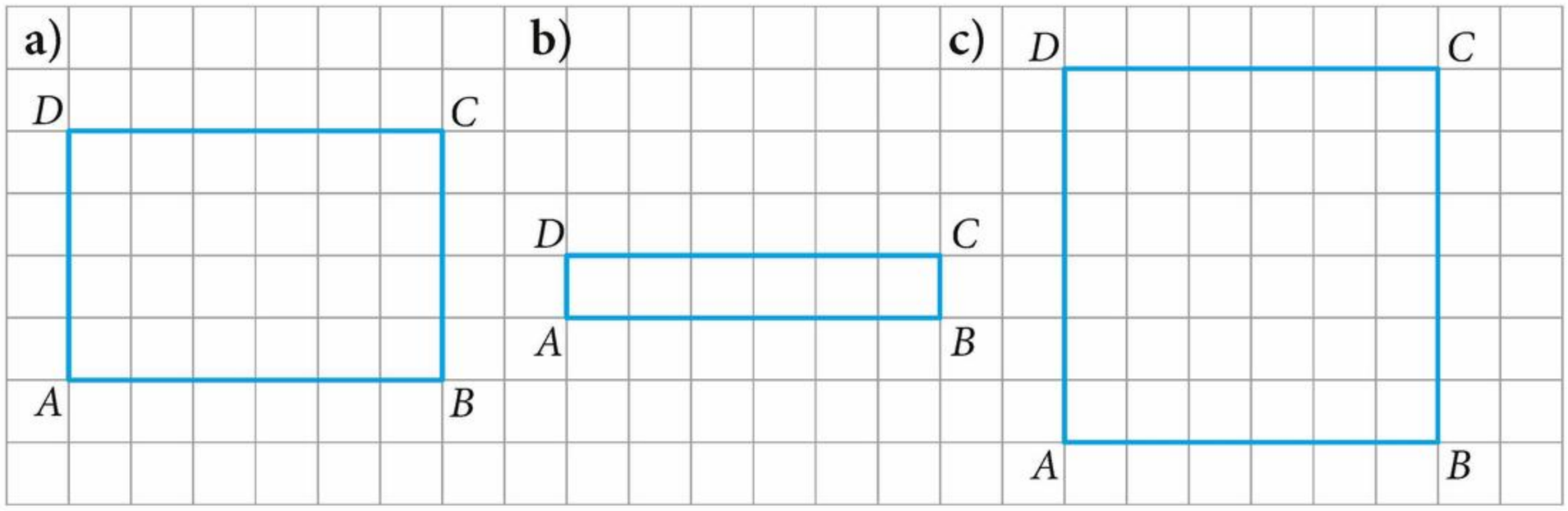
b)



5. Odczytaj z kratki długości przyprostokątnych narysowanych trójkątów i oblicz długości ich przeciwprostokątnych.



6. Oblicz długość przekątnej prostokąta $ABCD$.



Czy wiesz, że…

Określając rozmiar telewizora, podajemy długość przekątnej jego ekranu. Informację tę zwykle wyraża się w calach (1 cal = 2,54 cm). Według zaleceń specjalistów miejsce, z którego oglądamy telewizję, powinno znajdować się w trzykrotnie większej odległości od telewizora niż długość przekątnej jego ekranu.



7. Ewa ma 35-calowy telewizor. Wyznacz wymiary jego ekranu w calach i centymetrach (z dokładnością do 1 cm), jeśli jego wysokość wynosi 21 cali.

8. Ania chce kupić do komputera monitor o rozmiarze nieprzekraczającym 22 cali. Czy monitor o wymiarach 18 cali × 12 cali spełnia ten wymóg?

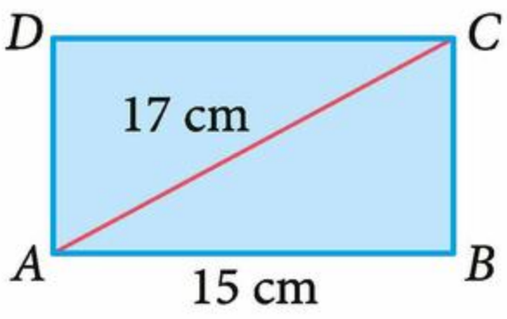
9. Obecnie na rynku są dostępne telewizory 90-calowe.

a) Z odległości ilu metrów powinniśmy oglądać telewizję, mając taki telewizor?

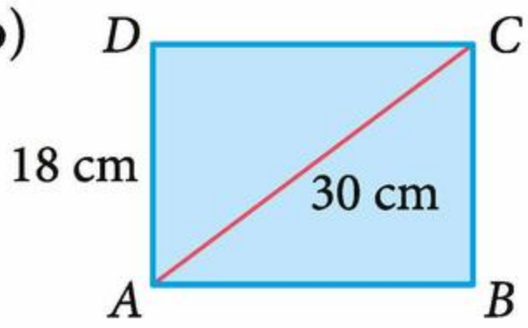
b) Czy telewizor 90-calowy o wysokości 1,1 m zmieści się do szafki RTV o szerokości 2 m?

10. Oblicz obwód i pole prostokąta $ABCD$.

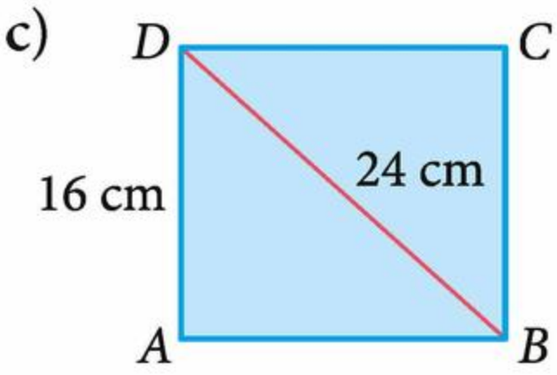
a)



b)

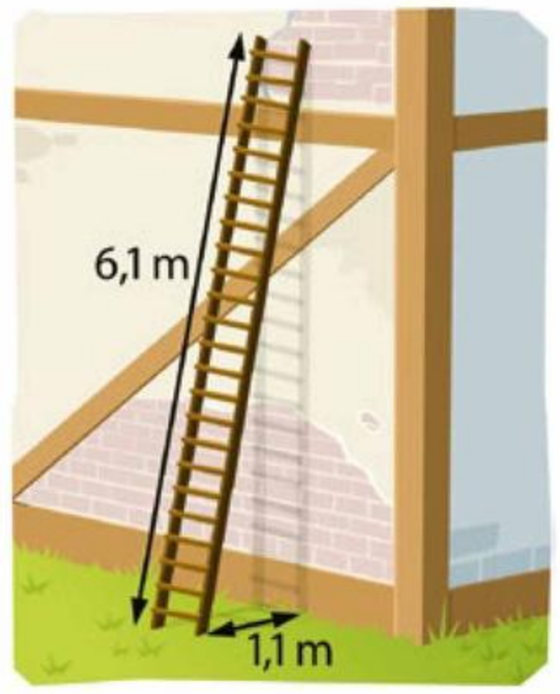


c)



E **11.** Z kwadratowego arkusza kartonu o boku długości 50 cm odcięto w czterech narożach trójkąty prostokątne o przyprostokątnych długości 18 cm i 24 cm. Ile jest równy obwód części arkusza pozostałej po odcięciu naroży?

E **12.** Drabinę długości 6,1 m oparto o ścianę budynku. Podstawa drabiny odsunięta jest od ściany o 1,1 m (rysunek obok). Jak wysoko sięga drabina?



13. Tomek, stojąc w oknie swojego pokoju, puszczał lusterkiem zajączki w kierunku trawnika przed domem. Zajączki były widoczne na trawniku w punkcie P w odległości 8 m od domu. Oblicz odległość między lusterkiem a punktem P, jeżeli lusterko znajdowało się na wysokości 6 m nad ziemią.

14. Punkty A i B należą do prostej m. Oblicz odległość punktu P od prostej m, jeżeli odcinek PB jest prostopadły do prostej m oraz $AB = 2{,}4$ cm, $AP = 2{,}5$ cm.

15. Oblicz obwód i pole prostokąta, jeśli jeden jego bok jest:

a) dwa razy dłuższy od drugiego, a jego przekątna ma długość $4\sqrt{5}$ cm,

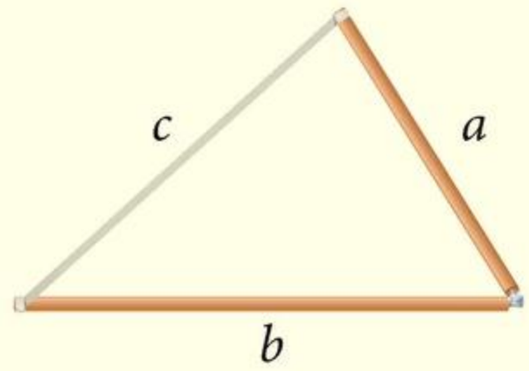
b) trzy razy dłuższy od drugiego, a jego przekątna ma długość $5\sqrt{10}$ cm.

16. Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest 3 razy dłuższa od drugiej, a przeciwprostokątna ma długość $8\sqrt{10}$. Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.

17. Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ma długość 4 cm, a druga jest trzy razy krótsza od przeciwprostokątnej. Oblicz obwód tego trójkąta.

Dla dociekliwych

Wyobraź sobie model trójkąta zbudowany z dwóch listewek połączonych zawiasem oraz gumki łączącej ich przeciwległe końce. Listewki mają określone długości a i b, natomiast długość gumki (c) zmienia się, w miarę jak gumka rozciąga się lub kurczy.



Listewki ustawiamy tak, aby tworzyły kąt prosty. Wówczas zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa zachodzi równość $a^2 + b^2 = c^2$.

1. Zmieniamy kąt między listewkami, tak aby gumka się skurczyła. Czy równość $a^2 + b^2 = c^2$ nadal jest spełniona? Jeśli nie, to jaką nierównością możemy ją zastąpić? Czy kąt między listewkami jest ostry, czy rozwarty?

2. Co się stanie, gdy gumkę rozciągniemy?

3. Przepisz i uzupełnij twierdzenie.

Jeśli a, b, c są bokami trójkąta, to:
- gdy $a^2 + b^2 > c^2$, to kąt naprzeciwko boku c jest ...
- gdy $a^2 + b^2 = c^2$, to kąt naprzeciwko boku c jest ...
- gdy $a^2 + b^2 < c^2$, to kąt naprzeciwko boku c jest ...

4. Czy trójkąt o podanych bokach jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny?

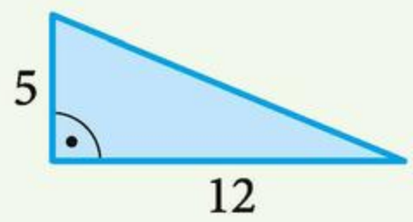
a) 3, 3, 5 **b)** 4, 4, 5 **c)** 3, 5, 5

Czy już umiem?

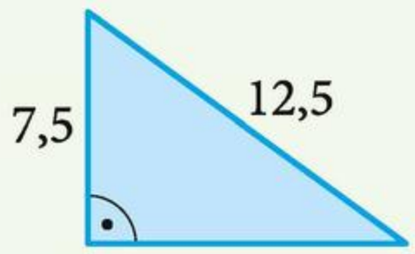
I. Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ma długość 9, a przeciwprostokątna ma długość $5\sqrt{5}$. Jaką długość ma druga przyprostokątna?

II. Oblicz obwód trójkąta przedstawionego na rysunku.

a)



b)



III. Drabina oparta o ścianę domu sięga na wysokość 6 m. Podstawa drabiny odsunięta jest od ściany domu o 1,75 m. Oblicz długość tej drabiny.

IV. Oblicz.

a) $\frac{(2^{19} \cdot 2^{21})^3}{2^{118}}$ **b)** $\frac{15^{30} \cdot 32^6}{81^7 \cdot 10^{30}}$

2 Twierdzenie Pitagorasa – zadania

Na dobry początek

Kubizm to kierunek w malarstwie i rzeźbie, który rozwinął się we Francji na początku XX wieku. Nie stosuje się w nim zasad perspektywy, a kompozycję upraszcza się do geometrycznych kształtów.



Martwa natura z gitarą
Juan Gris, 1913

Pytania i polecenia

- Powyżej pokazano obraz olejny hiszpańskiego przedstawiciela kubizmu – Juana Grisa. Przyjrzyj się, w jaki sposób artysta wykorzystał geometryczne figury do przedstawienia rzeczywistości. Czy potrafisz znaleźć na obrazie trójkąty prostokątne?

Przykład 1

Oblicz pole trójkąta równoramiennego o ramieniu 13 cm i podstawie 10 cm.

Narysujmy ten trójkąt. Pole trójkąta obliczamy ze wzoru $P = \frac{1}{2}ah$. Zaznaczmy na rysunku wysokość h.

Zauważamy, że dzieli ona nasz trójkąt na dwa trójkąty prostokątne. Dla każdego z nich można zapisać twierdzenie Pitagorasa.

$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2$

$h^2 + 5^2 = 13^2$

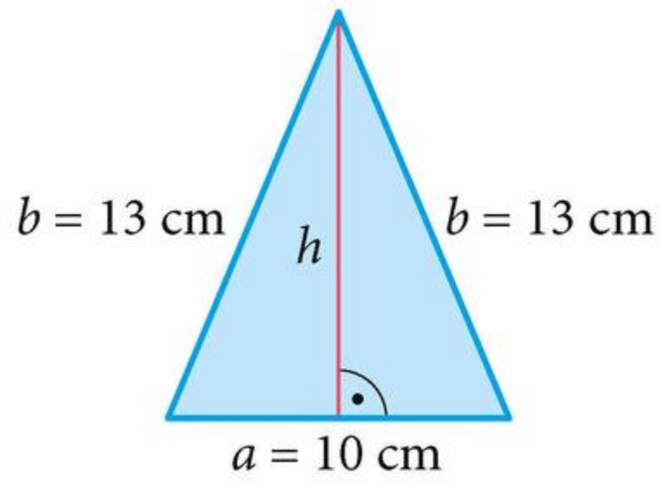
$h^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$

$h = \sqrt{144} = 12$ [cm]

W takim razie:

$P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$ [cm^2].

Pole trójkąta wynosi 60 cm^2.



Ćwiczenie 1

Wysokość trójkąta równoramiennego wynosi 8 cm i opuszczona jest na podstawę o długości 12 cm. Oblicz długość ramienia tego trójkąta.

Dobra rada

Twierdzenie Pitagorasa stosujemy często w zadaniach, w których nie ma mowy o trójkącie prostokątnym. Wtedy główna trudność polega na tym, aby taki trójkąt zauważyć.

Przykład 2

Oblicz wysokość rombu o przekątnych długości 18 cm i 24 cm.

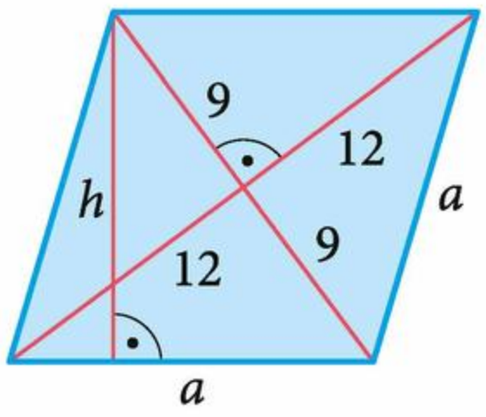
Wysokość występuje we wzorze na pole: $P = ah$ (romb jest równoległobokiem). Oznacza to, że jeśli znamy pole i długość boku rombu, możemy obliczyć jego wysokość. Oznaczmy bok rombu przez a i obliczmy jego długość. Przekątne rombu są prostopadłe i dzielą się na połowy, zatem na podstawie twierdzenia Pitagorasa:

$a^2 = 9^2 + 12^2$

$a^2 = 81 + 144$

$a^2 = 225$

$a = 15$ [cm]



Obliczamy pole rombu, wykorzystując długości przekątnych.

$P = \frac{24 \cdot 18}{2} = 216\ [\text{cm}^2]$

Otrzymane wartości podstawiamy do wzoru na pole rombu $P = ah$, gdzie h jest szukaną wysokością.

$216 = 15h$

$h = 14{,}4\ [\text{cm}]$

Wysokość rombu jest równa 14,4 cm.

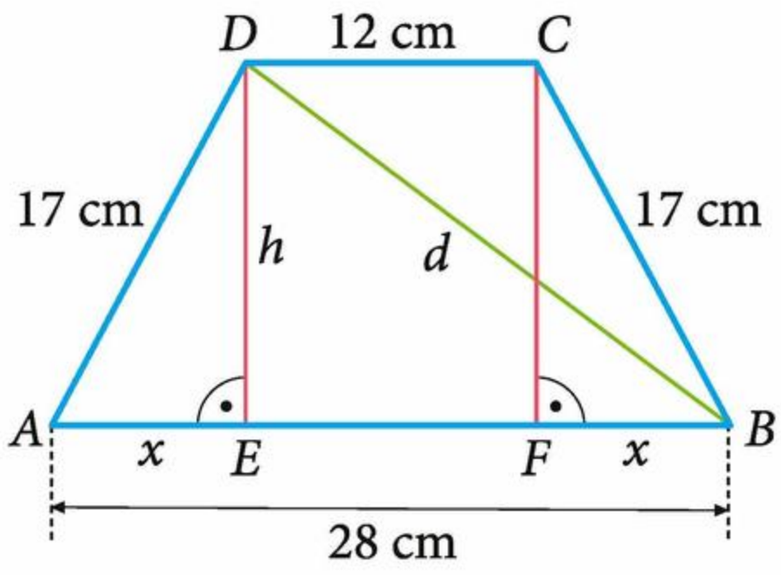
Ćwiczenie 2

Oblicz wysokość rombu o przekątnych długości 16 cm i 30 cm.

Przykład 3

Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 12 cm i 28 cm. Oblicz długość przekątnej tego trapezu, jeżeli jego ramię ma długość 17 cm.

Przyjmijmy oznaczenia takie jak na rysunku. Do obliczenia długości przekątnej trapezu wykorzystamy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta DEB. Wcześniej musimy obliczyć pomocnicze długości: x oraz h.



Krok 1.

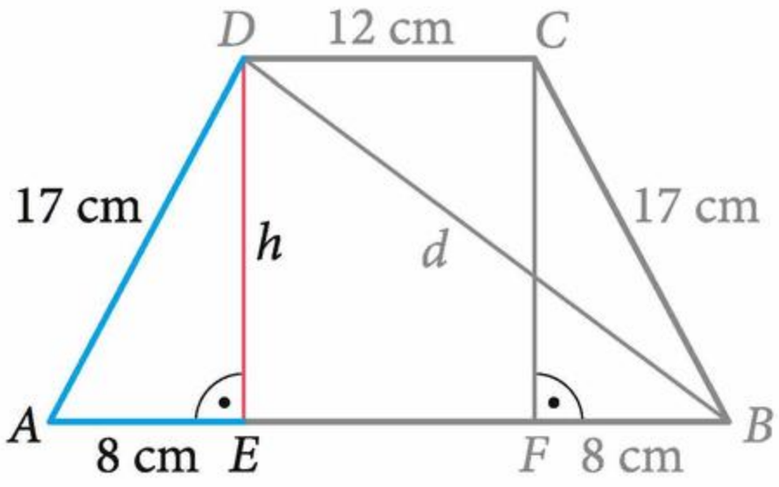
Zauważmy, że: $AB = x + EF + x$ i $EF = 12$ cm.
Stąd obliczamy długość x.

$28 = 2x + 12$

$2x = 16$, czyli $x = 8\ [\text{cm}]$

Krok 2.

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AED i obliczamy wysokość h.



$AE^2 = DE^2 + AD^2$

$8^2 + h^2 = 17^2$

$h^2 = 289 - 64$

$h^2 = 225$

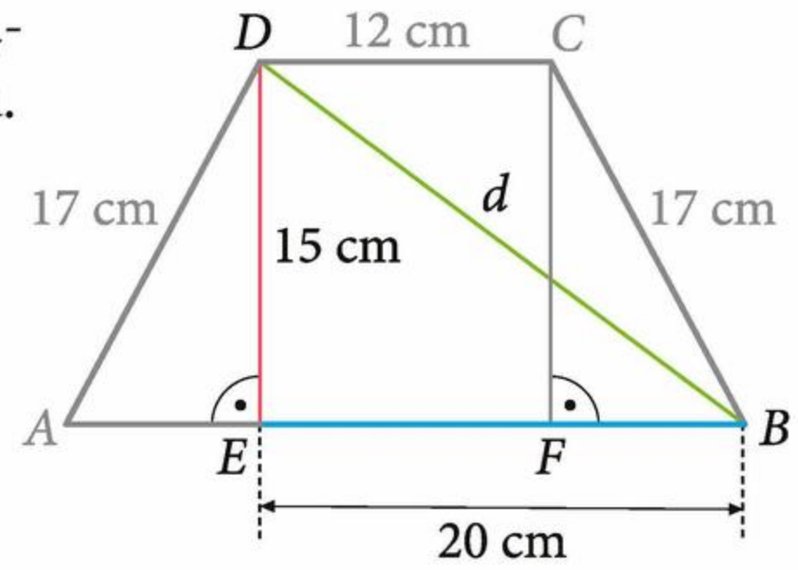
$h = 15\ [\text{cm}]$

Krok 3.

Obliczamy długość boku EB trójkąta DEB: $EB = EF + x = 12 + 8 = 20\ [\text{cm}]$.

Krok 4.

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DEB i obliczamy długość przekątnej trapezu.



$$DB^2 = EB^2 + DE^2$$
$$d^2 = 20^2 + 15^2$$
$$d^2 = 400 + 225$$
$$d^2 = 625$$
$$d = 25 \text{ [cm]}$$

Przekątna trapezu ma długość 25 cm.

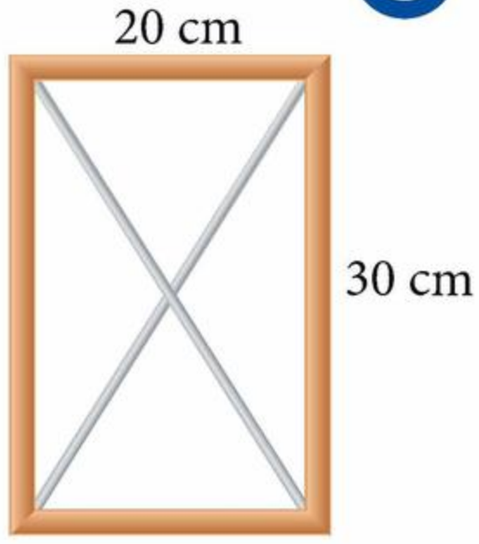
Ćwiczenie 3

Dany jest trapez równoramienny o podstawach długości 16 cm i 56 cm oraz ramieniu długości 25 cm. Oblicz długość przekątnej tego trapezu.

Przykład 4

E

Aby wzmocnić prostokątną drewnianą ramkę o wymiarach 20 cm × 30 cm, łączymy dwoma kawałkami drutu jej przeciwległe wierzchołki. Jaką długość ma każdy z tych kawałków?



Oznaczmy literą x długość jednego kawałka drutu. Zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa:

$$x^2 = 20^2 + 30^2$$
$$x^2 = 400 + 900 = 1300$$
$$x = \sqrt{1300} = 10\sqrt{13}$$

Potrzebujemy kawałka drutu o długości $10\sqrt{13}$ cm. Oczywiście na żadnej miarce nie ma kreski z napisem „$10\sqrt{13}$”. Musimy więc znaleźć przybliżoną wartość tej liczby w postaci ułamka dziesiętnego. Za pomocą kalkulatora w komputerze możemy obliczyć, że:

$10\sqrt{13}$ cm $\approx$ 36,05551275463989 cm.

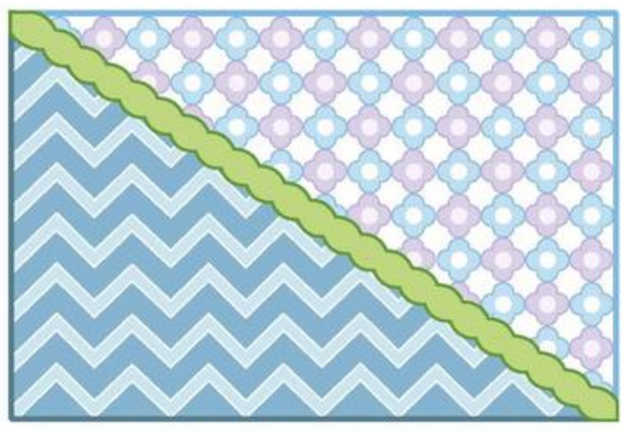
Nie należy jednak podawać odpowiedzi z taką dokładnością. Czternaście miejsc po przecinku oznacza, że chcemy zmierzyć długość kawałka drutu z dokładnością do 10^{-14} cm, czyli z dokładnością do średnicy jądra atomowego. W rzeczywistości nie zmierzymy kawałka drutu z dokładnością większą niż 1 mm, więc z taką dokładnością należy podać wynik:

$10\sqrt{13}$ cm $\approx$ 36,1 cm.

W praktyce trzeba wziąć drut nieco dłuższy, żeby go przymocować do ramki.

Ćwiczenie 4

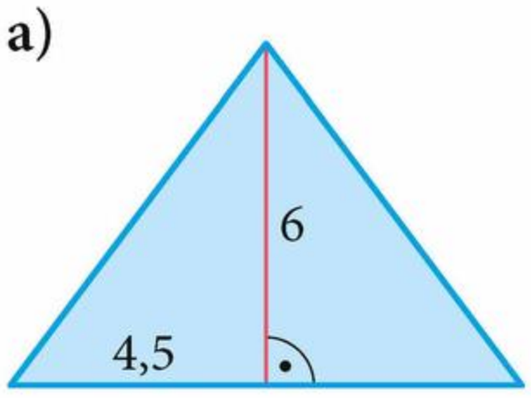
Ela szyje prostokątną dwukolorową poszewkę na poduszkę według pokazanego wzoru. Poszewka ma mieć wymiary 40 cm × 60 cm. Po przekątnej, wzdłuż łączenia kolorów, Ela chce naszyć ozdobną lamówkę (na przedniej i tylnej stronie poszewki). Ile lamówki powinna kupić?



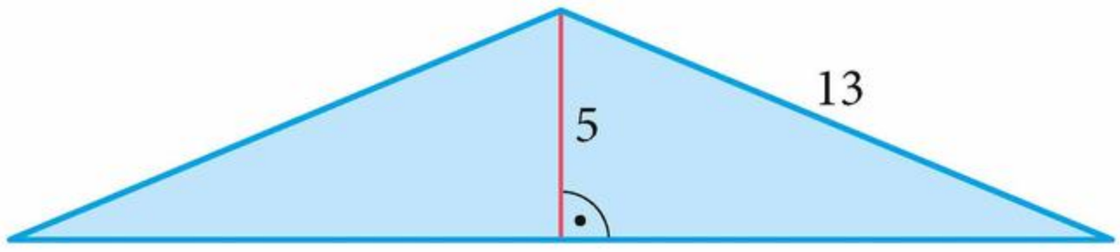
Zadania

1. Na rysunku przedstawiono trójkąt równoramienny. Oblicz jego obwód i pole.

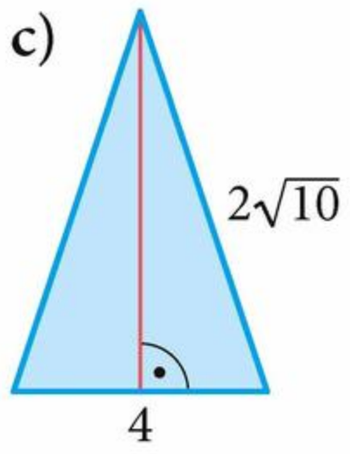
a)



b)

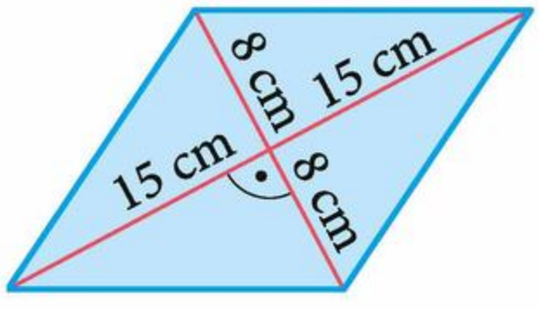


c)

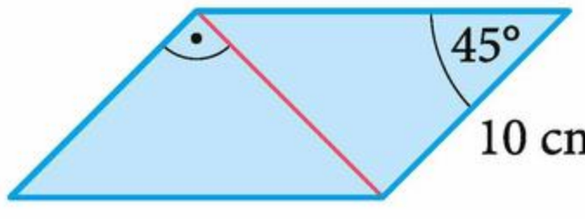


2. Oblicz obwód i pole czworokąta przedstawionego na rysunku.

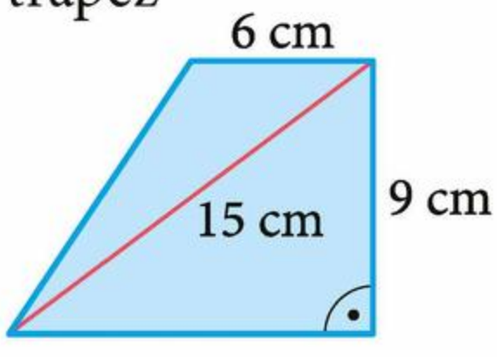
a) romb



b) równoległobok

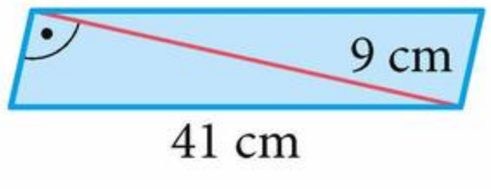


c) trapez

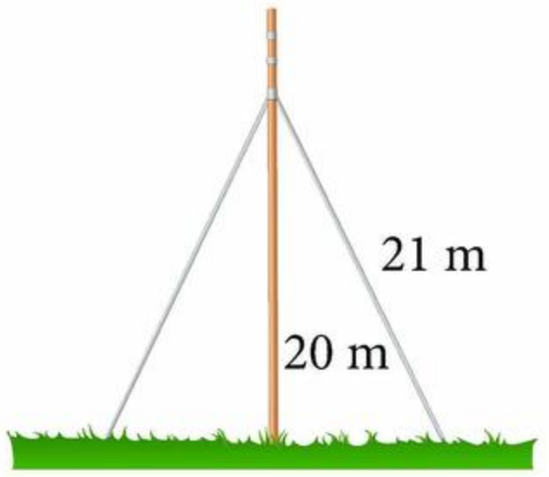


3. Obwód rombu jest równy 100 cm, a jedna z jego przekątnych ma długość 14 cm. Oblicz pole tego rombu oraz jego wysokość.

4. W równoległoboku o bokach 9 cm i 41 cm krótsza przekątna jest prostopadła do krótszego boku. Oblicz pole tego równoległoboku oraz jego wysokości.



5. Na rysunku przedstawiono schemat mocowania masztu dwiema linami. Jak daleko od podstawy masztu trzeba zamocować liny? Spróbuj najpierw odgadnąć przybliżony wynik, a potem wykonaj obliczenia.



6. Drzwi mają szerokość 90 cm i wysokość 2 m. Czy można przez nie przenieść długą prostokątną płytę sklejki o podanej szerokości?

a) 210 cm **b)** 220 cm

7. Tablica dziecięca o wysokości 108 cm została rozłożona na szerokość 0,5 m. Jaka jest wysokość tablicy po rozłożeniu? Wynik podaj z dokładnością do centymetra.



8. Czy parasol o długości 62 cm zmieści się na dnie walizki o wymiarach wewnętrznych 37 cm × 55 cm?

E **9.** Rafał skonstruował latawiec w kształcie deltoidu. Wykorzystał dwie listewki o długościach 30 cm i 56 cm. Krótszą z nich przymocował w odległości 20 cm od jednego z końców dłuższej listewki. Na koniec postanowił wzmocnić brzeg latawca taśmą. Jak długą taśmę musi przygotować?

10. W trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę jest równa $8\sqrt{2}$ cm. Oblicz obwód tego trójkąta, jeżeli jego pole jest równe $32\sqrt{2}$ cm^2.

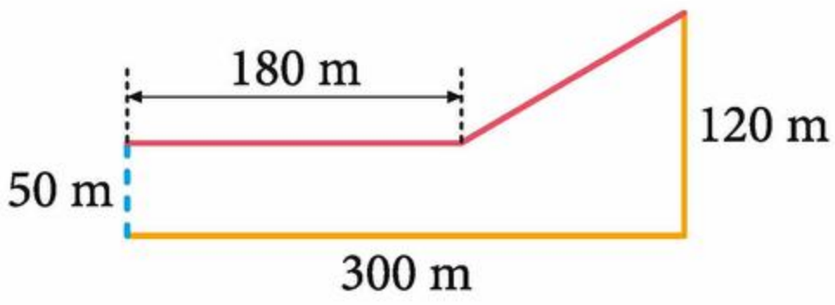
11. Oblicz pole trapezu prostokątnego o podstawach długości 4 cm i 10 cm oraz dłuższym ramieniu długości 8 cm.

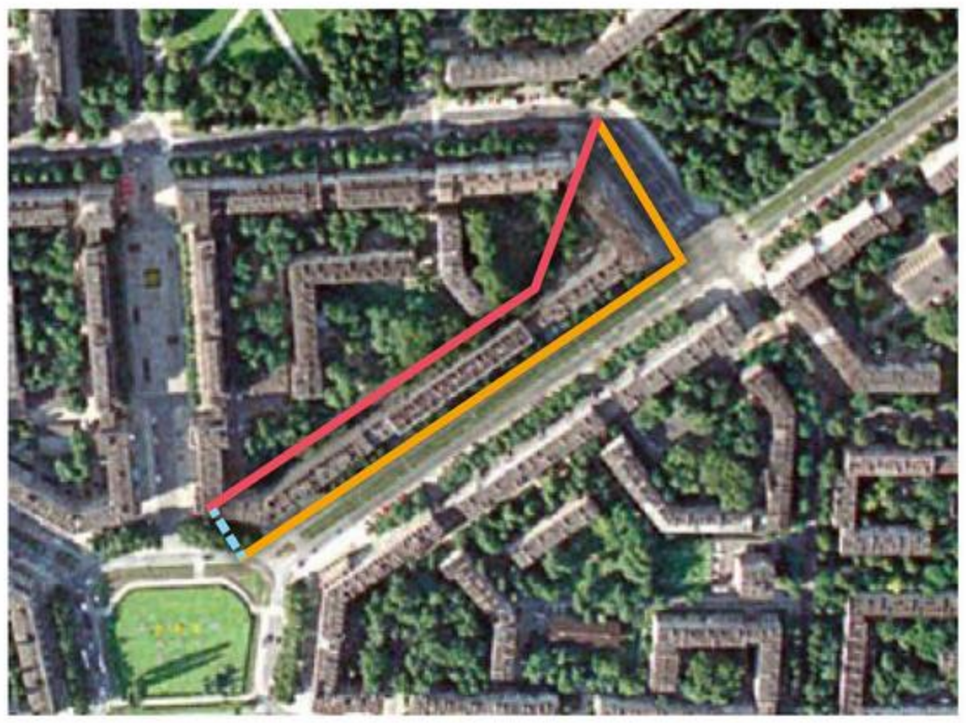
12. Stary Rynek w Bydgoszczy jest w przybliżeniu prostokątem o wymiarach 80 m × 110 m. Jaką drogę przebywamy pomiędzy przeciwległymi rogami tego rynku, idąc wzdłuż budynków, a jaką – idąc po przekątnej? O ile procent krótsza jest droga po przekątnej?

E **13.** Dwa statki wypłynęły z tego samego portu o godzinie 12.00. Jeden z nich płynął na północ z prędkością 5 kn, a drugi na zachód z prędkością 12 kn. Jaka będzie odległość między tym statkami o godzinie 14.00, jeśli nie zmienią prędkości ani kierunku ruchu? Odpowiedź podaj w milach morskich.

Uwaga. 1 kn (węzeł) to jednostka prędkości: 1 mila morska na godzinę. Mila morska to 1852 m.

14. Na zdjęciu lotniczym przedstawiono fragment Nowej Huty z zaznaczonymi dwoma trasami: pomarańczową i czerwoną. Długości poszczególnych odcinków tych tras przedstawiono na poniższym rysunku.

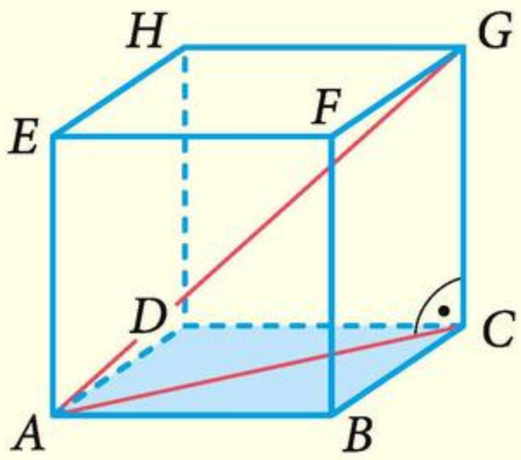


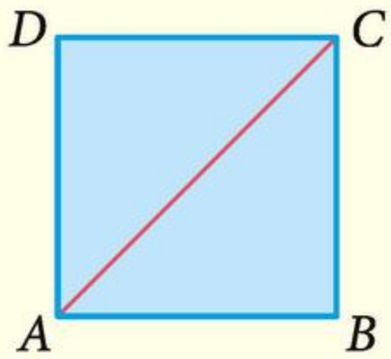


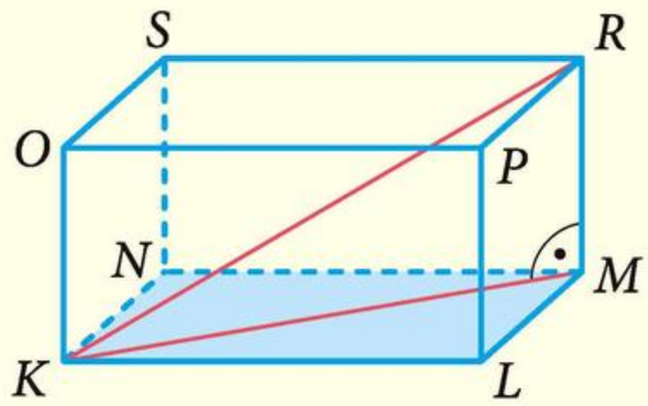
Która z tych tras jest krótsza i o ile?

Dla dociekliwych

Na rysunkach przedstawiono kolejno: sześcian, jego podstawę i prostopadłościan.







1. Krawędź sześcianu *ABCDEFGH* ma długość 3.

a) Oblicz długość przekątnej jego podstawy.
b) Narysuj trójkąt *ACG*. Zapisz na swoim rysunku długości znanych boków.
c) Oblicz długość przekątnej sześcianu.

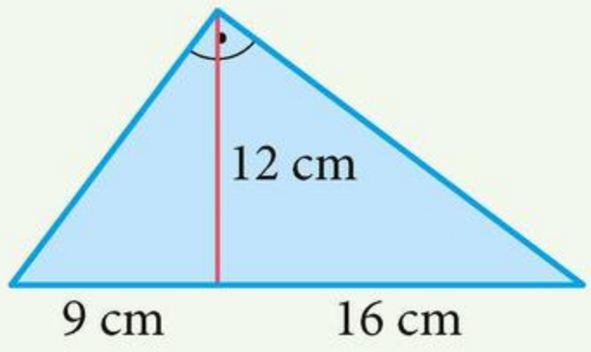
2. Oblicz długość przekątnej sześcianu o krawędzi a.

3. Oblicz długość przekątnej prostopadłościanu o podanych wymiarach.

a) $4 \times 3 \times 2$ **b)** $a \times b \times c$

Czy już umiem?

I. W trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego jest równa 12 cm i dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości 9 cm i 16 cm. Oblicz obwód tego trójkąta.



II. Oblicz obwód i pole trapezu prostokątnego, którego krótsza podstawa i wysokość są równe 5 cm, a dłuższa przekątna ma 13 cm długości.

III. Do szklanki o średnicy podstawy 6 cm i wysokości 16 cm włożono słomkę długości 24 cm jak na rysunku. Czy ponad brzeg szklanki będzie wystawać kawałek słomki dłuższy niż 5 cm? Uzasadnij odpowiedź.



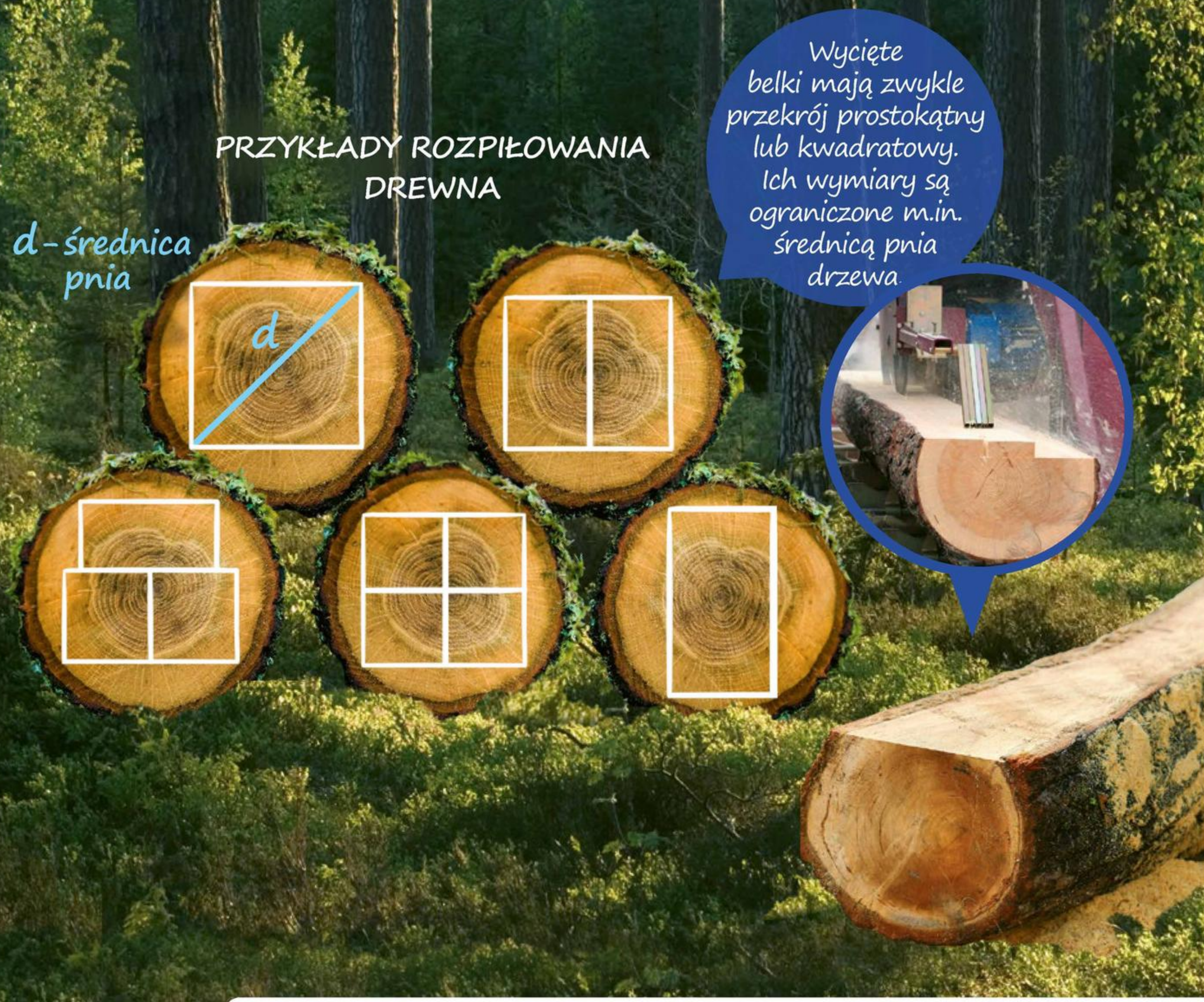
E **IV.** Na podstawie podanego rozkładu jazdy oblicz średnią prędkość pociągu na trasie z Kutna do stacji Bydgoszcz Główna, jeśli wiadomo że trasa ta ma długość 160 km.

Stacja	Przyjazd	Odjazd
Kutno		14:35
Włocławek	15:15	15:16
Aleksandrów Kujawski	15:40	15:41
Toruń Główny	15:54	15:57
Bydgoszcz Główna	16:35	

3 Kwadrat i jego połowa

Na dobry początek

W tartakach do rozpiłowywania kłód (ściętych pni drzew) używa się specjalnych maszyn. Aby obrabiać drewno jak najwydajniej, wycina się elementy o różnych wymiarach. Wybór kształtu uzależniony jest od rodzaju drewna, wymiarów kłody i przeznaczenia uzyskiwanych elementów.



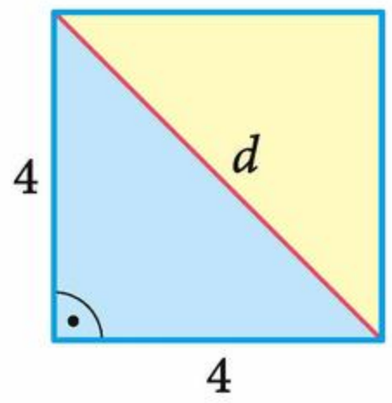
Pytania i polecenia

- Jaka powinna być minimalna średnica pnia, jeśli chcemy z niego otrzymać belkę, której przekrojem jest prostokąt o wymiarach 30 cm × 40 cm?
- Czy z pnia o średnicy 40 cm można uzyskać belkę, której przekrojem jest kwadrat o boku 30 cm?

Przykład 1.1

Oblicz długość przekątnej kwadratu o boku długości 4.

Przekątna kwadratu dzieli go na dwa trójkąty prostokątne równoramienne i jest ich wspólną przeciwprostokątną. Oznaczmy ją literą d.



Zatem na mocy twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego będącego połową kwadratu:

$$d^2 = 4^2 + 4^2$$
$$d^2 = 16 + 16$$
$$d^2 = 32$$
$$d = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

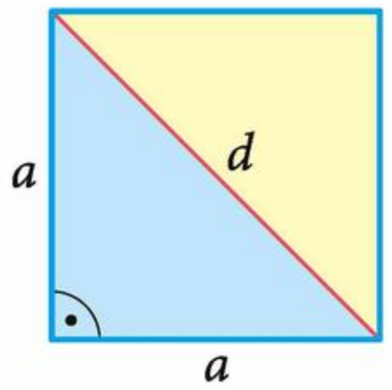
Przekątna kwadratu o boku 4 ma długość $4\sqrt{2}$.

Przykład 1.2

Uzasadnij, że przekątna kwadratu o boku a ma długość równą $a\sqrt{2}$.

Oznaczmy przekątną kwadratu literą d.

Analogicznie jak w przykładzie 1.1 korzystamy z twierdzenia Pitagorasa. Stosujemy je dla trójkąta prostokątnego równoramiennego o przyprostokątnych długości a i przeciwprostokątnej długości d.



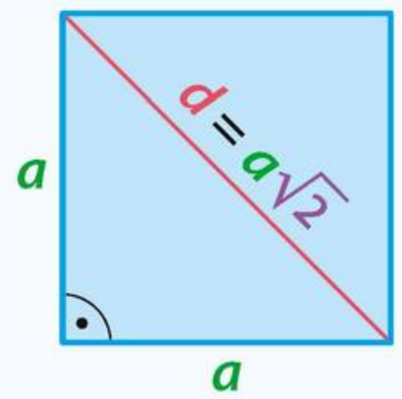
$$d^2 = a^2 + a^2$$
$$d^2 = 2a^2$$
$$d = \sqrt{2a^2}$$
$$d = a\sqrt{2}$$

Udowodniliśmy, że przekątna kwadratu o boku a ma długość $a\sqrt{2}$.

Zapamiętaj

Przekątna kwadratu o boku a ma długość:

$$d = a\sqrt{2}$$



Ćwiczenie 1

Oblicz długość przekątnej kwadratu o boku a.

a) $a = 5$ **b)** $a = 8$ **c)** $a = 0{,}25$ **d)** $a = \sqrt{2}$ **e)** $a = \sqrt{3}$

Przykład 2.1

Oblicz długość boku kwadratu, którego przekątna ma długość $5\sqrt{2}$ cm.

Podobnie jak poprzednio, oznaczmy długość boku kwadratu literą a, a jego przekątną – literą d.

Sposób I

Zgodnie ze wzorem uzasadnionym w przykładzie 1.2 wiemy, że:

$d = a\sqrt{2}$,

czyli w naszym przypadku:

$5\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

Stąd $a = 5$ [cm].

Sposób II

Obliczenia są podobne jak w sposobie I, ale nieco dłużej wykonujemy je na symbolach literowych, a dopiero potem podstawiamy wartości liczbowe.

$d = a\sqrt{2} \quad | : \sqrt{2}$

$\frac{d}{\sqrt{2}} = a$

$a = \frac{d}{\sqrt{2}}$

Ponieważ w naszym przypadku $d = 5\sqrt{2}$ cm, otrzymujemy $a = 5$ cm.

Przykład 2.2

Oblicz długość boku kwadratu, którego przekątna ma długość 4 cm.

Możemy wykonać obliczenia podobnie jak poprzednio albo skorzystać z uzasadnionego już wzoru $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$. W naszym przypadku $d = 4$ cm, więc otrzymujemy:

$a = \frac{4}{\sqrt{2}}$ [cm].

Aby usunąć niewymierność z mianownika, rozszerzamy ułamek przez $\sqrt{2}$.

$a = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ [cm]

Dobra rada

Usuwaj niewymierności z mianownika. Często pozwala to zauważyć, że pozornie różne liczby są w rzeczywistości równe.



Ćwiczenie 2

Oblicz długość boku kwadratu, jeśli jego przekątna ma długość:

a) $8\sqrt{2}$, **b)** 3, **c)** $2y$.

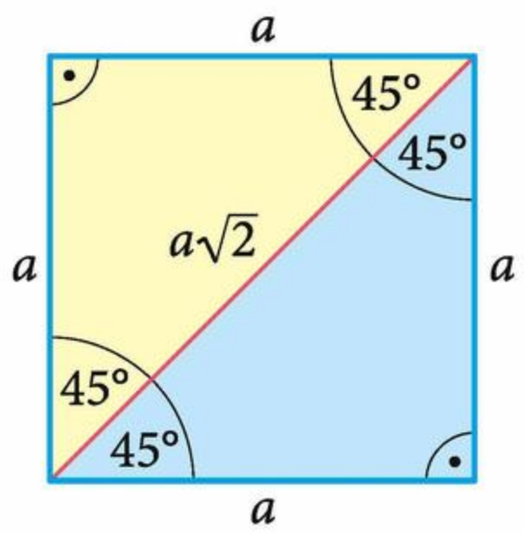
Przykład 3.1

Przekątna kwadratu o boku długości a dzieli go na dwa trójkąty. Ile wynoszą miary kątów tych trójkątów? Ile wynoszą długości ich boków?

Przekątna dzieli kwadrat na dwa jednakowe trójkąty prostokątne równoramienne.

Miary ich kątów wynoszą: 45°, 45°, 90°,

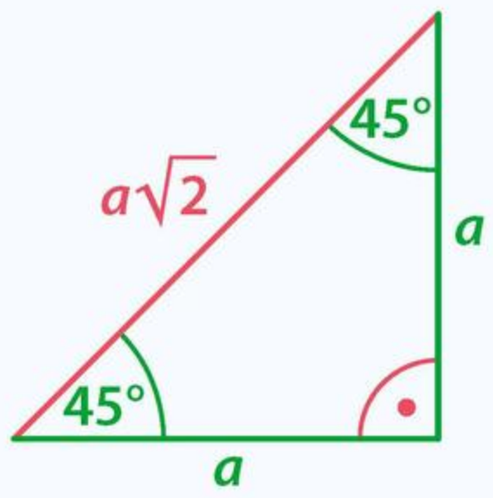
a długości boków: a, a, $a\sqrt{2}$.



Zapamiętaj

Trójkąt o kątach **90°**, **45°**, **45°** ma boki długości:

a, ***a***, $a\sqrt{2}$.



Przykład 3.2

Przeciwprostokątna w trójkącie prostokątnym równoramiennym ma długość 10 cm. Oblicz długość przyprostokątnej tego trójkąta.

Niech a oznacza długość przyprostokątnej trójkąta. Wówczas:

$$a\sqrt{2} = 10,$$

$$a = \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}\ [\text{cm}].$$

Przyprostokątna trójkąta ma długość $5\sqrt{2}$ cm.

Ćwiczenie 3

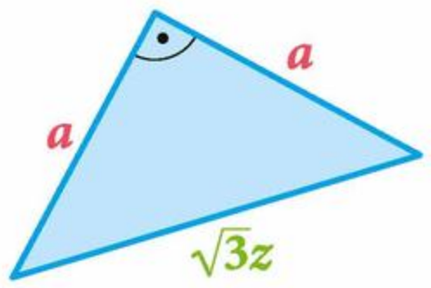
Oblicz obwód trójkąta prostokątnego równoramiennego, którego przeciwprostokątna ma długość:

a) 5 cm, **b)** 9 cm, **c)** $6\sqrt{2}$ cm, **d)** $\sqrt{6}$ cm.

Czasem dane w zadaniu nie są wyrażone liczbami, ale są podane w postaci wyrażeń algebraicznych, np. kwadrat o boku a, przekątna o długości $3d$, wysokość rombu to $x + 2y$. W takiej sytuacji zazwyczaj także odpowiedź jest wyrażeniem algebraicznym.

Przykład 4

W trójkącie prostokątnym równoramiennym najdłuższy bok ma długość $\sqrt{3}z$. Jakie długości mają pozostałe boki?



Najdłuższy bok, czyli przeciwprostokątna, ma długość $\sqrt{3}z$. Tę wielkość traktujemy jako daną, choć zapisana jest w postaci wyrażenia algebraicznego ze zmienną z. Oznacza to, że również długości pozostałych boków mamy zapisać w postaci wyrażeń algebraicznych zawierających zmienną z.

Znamy zależność pomiędzy długościami **przeciwprostokątnej** i **przyprostokątnej**:

$d = \sqrt{2} \cdot a$.

W naszym przypadku możemy zapisać: $\sqrt{3}z = \sqrt{2} \cdot a$.

Przekształcamy ten wzór tak, aby wyznaczyć z niego a.

$\sqrt{3}z = \sqrt{2} \cdot a \quad | : \sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}z = a$, czyli $a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}z$ Usuwamy niewymierność z mianownika.

$a = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}z$, więc $a = \frac{\sqrt{6}}{2}z$

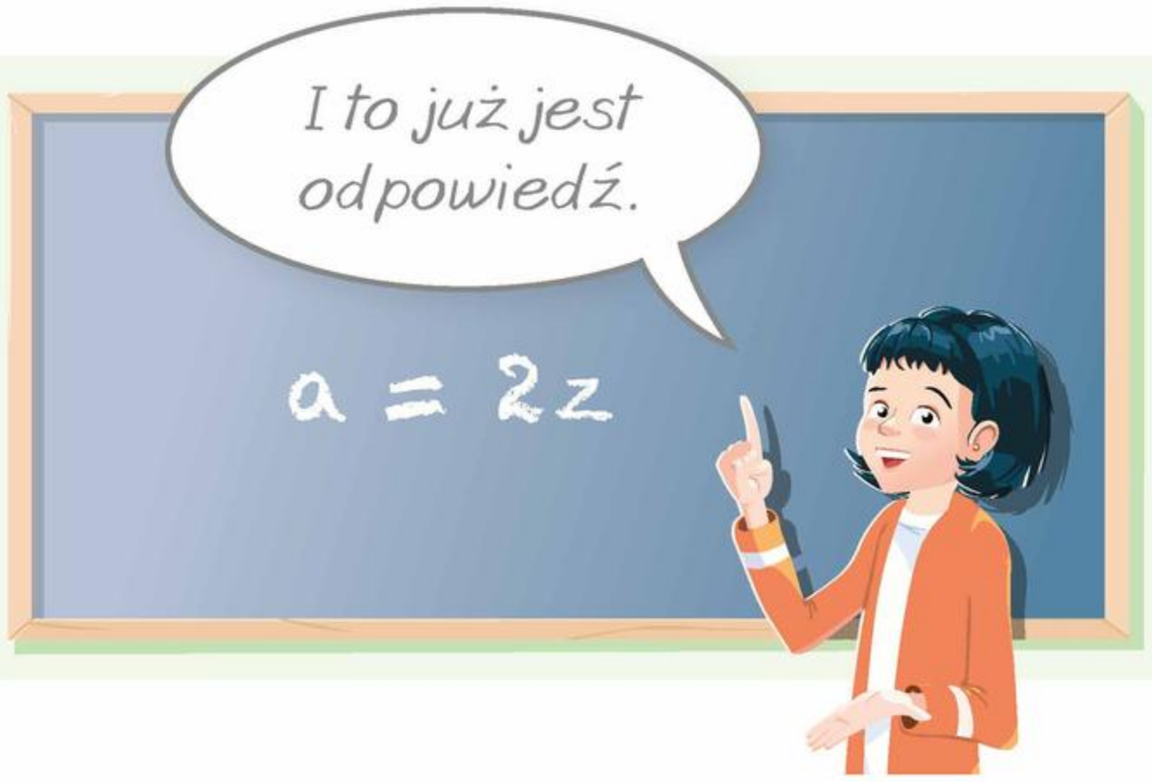
To już jest odpowiedź: zapisaliśmy a w postaci wyrażenia zawierającego liczby i wielkość z, którą w tym zadaniu traktujemy jako daną.

Ćwiczenie 4

Bok kwadratu ma długość $\sqrt{2}\,c$. Wyznacz długość przekątnej tego kwadratu.

Dobra rada

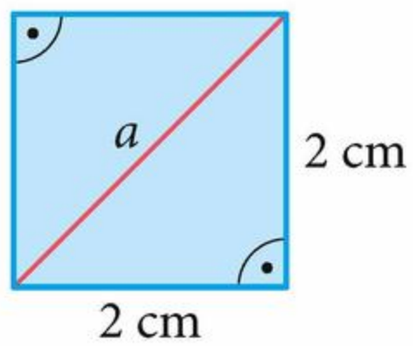
Pamiętaj, że w odpowiedzi do zadania oprócz liczb mogą się pojawić zmienne, które występują jako dane w jego treści.



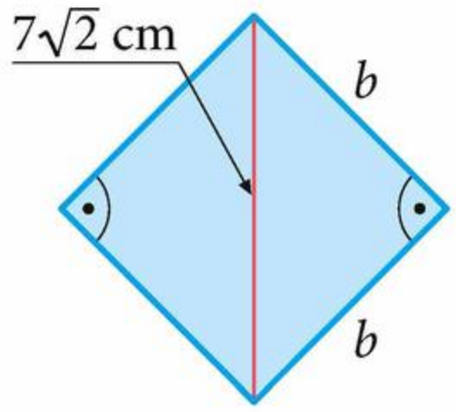
Zadania

1. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.

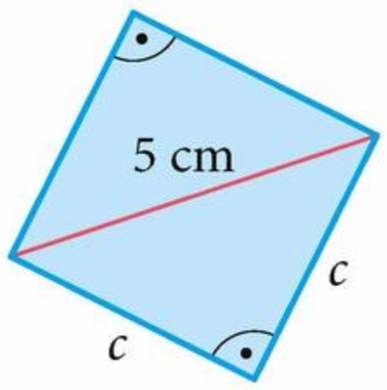
a)



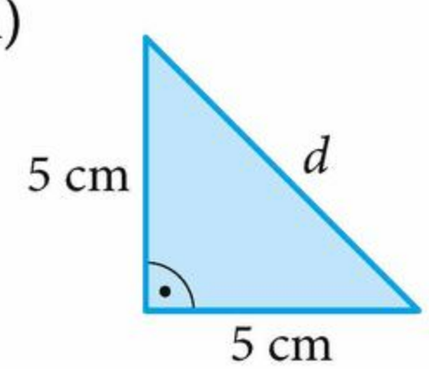
b)



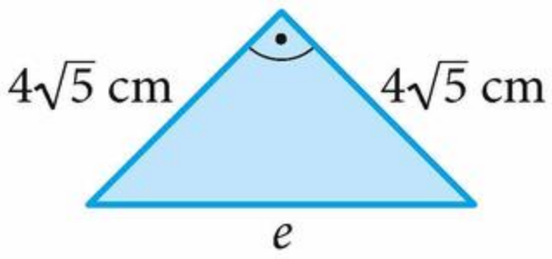
c)



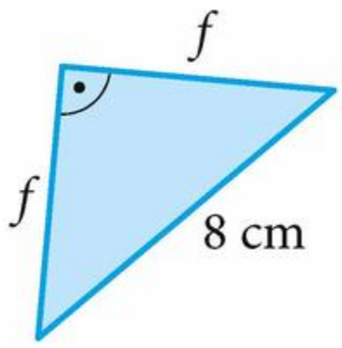
d)



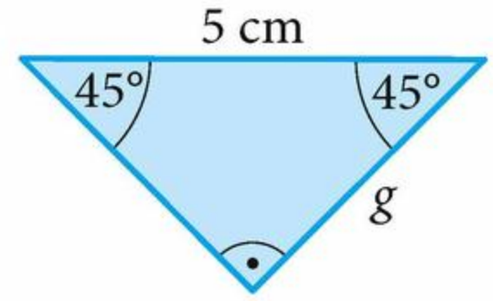
e)



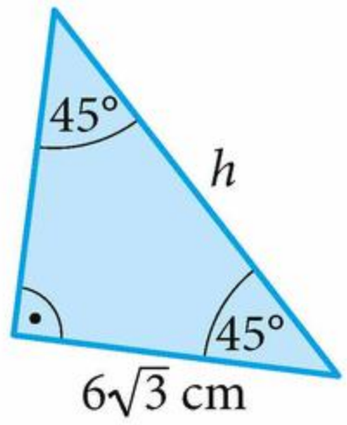
f)



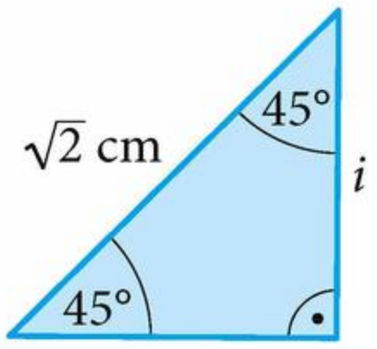
g)



h)



i)

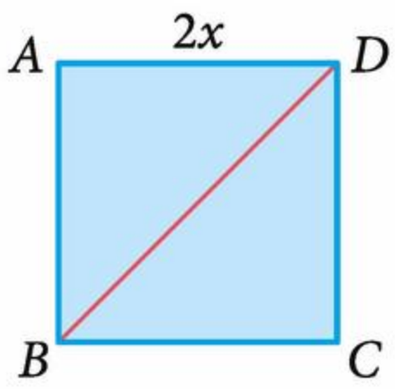


2. Oblicz długość przekątnej kwadratu o podanym boku.

a) 5 cm **b)** 2 km **c)** $2\sqrt{2}$ cm **d)** $4\sqrt{8}$ dm **e)** $2\sqrt{3}$ cm **f)** $\frac{4}{\sqrt{2}}$ cm

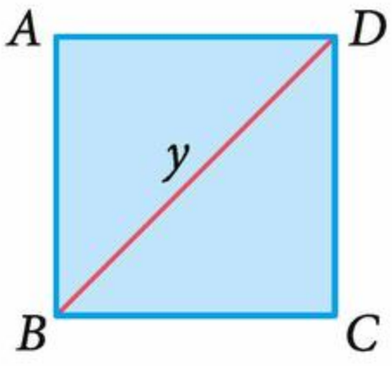
3. Czworokąt $ABCD$ jest kwadratem. Korzystając z danych na rysunku, wyznacz długości odcinków wypisanych poniżej.

a)



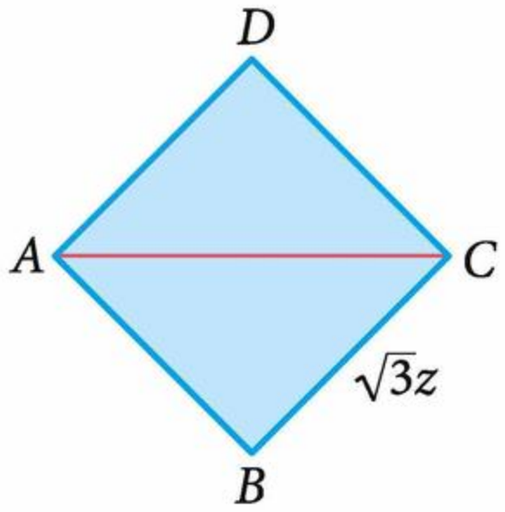
$BD = ?$

b)



$AB = ?$

c)



$AC = ?$

4. Oblicz długość przekątnej kwadratu o danym obwodzie.

a) 10 cm **b)** $50\sqrt{2}$ cm **c)** $8\sqrt{3}$ cm **d)** $8y$

5. Oblicz obwód i pole kwadratu o danej przekątnej.

a) $9\sqrt{2}$ cm **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm **c)** $\frac{1}{2}$ cm **d)** $3x$

6. Kwadrat $ABCD$ ma bok długości 4 cm. Ustal, ile cm mają wysokości trójkąta ABC.

Czy wiesz, że…

Światło wywiera nacisk na każdą powierzchnię, na którą pada. Na Ziemi nie uda nam się popchnąć wózka, świecąc na niego latarką, ponieważ siły oporu są zbyt duże. Jednak w przestrzeni kosmicznej, gdzie nie ma oporów ruchu, odpowiednio duży żagiel oświetlony światłem słonecznym może stanowić napęd niewielkiego statku kosmicznego.



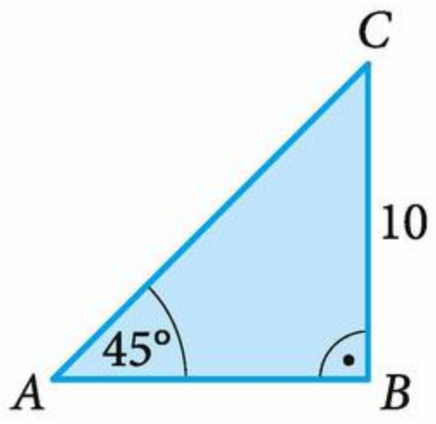
Próby takiej dokonano w czerwcu 2015 roku. Satelita LightSail miał kwadratowy żagiel o powierzchni 32 m^2, wykonany z syntetycznego materiału – mylaru – o grubości 4,5 mikrometra.

7. Na podstawie informacji zawartych w ramce „Czy wiesz, że...” oblicz długość przekątnej kosmicznego żagla satelity LightSail.

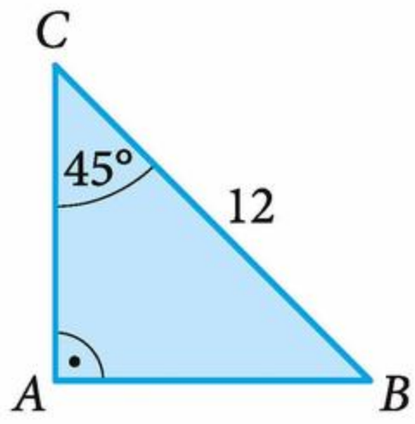
8. Jaką długość ma przekątna kwadratu o polu równym 48 cm^2?

9. Oblicz obwód i pole trójkąta ABC.

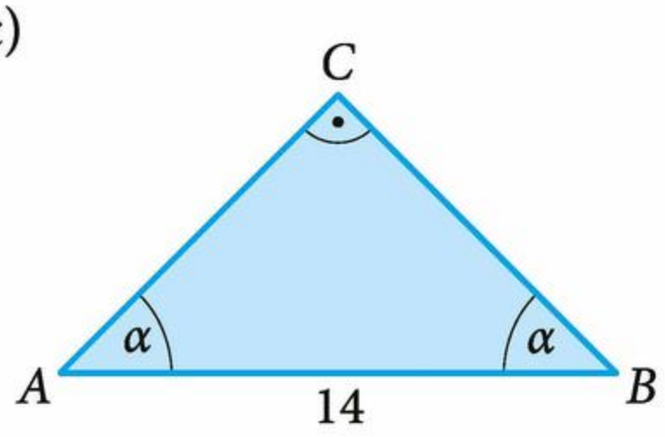
a)



b)

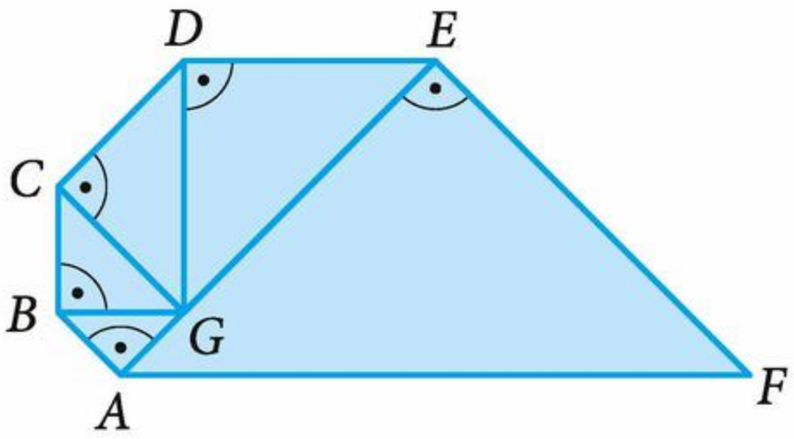


c)

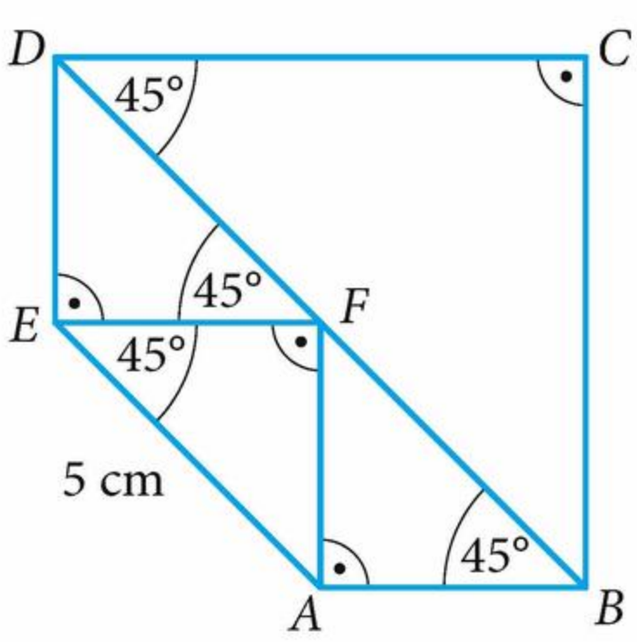


10. Jeden z boków trójkąta o kątach 90°, 45°, 45° ma długość 12 cm. Jakie długości mają pozostałe boki? Rozpatrz wszystkie możliwości.

E **11.** Z pięciu trójkątów prostokątnych równoramiennych zbudowano figurę przedstawioną na rysunku obok, przy czym bok AB ma długość 3. Oblicz obwód sześciokąta $ABCDEF$.

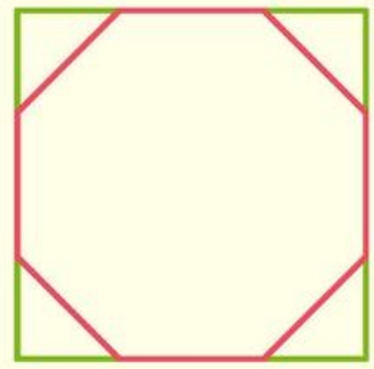


E **12.** Oblicz obwód i pole pięciokąta $ABCDE$ przedstawionego na rysunku obok.



13. Udowodniliśmy, że przekątna kwadratu jest $\sqrt{2}$ razy dłuższa od jego boku. Udowodnij ten sam fakt inną metodą, nie korzystając z twierdzenia Pitagorasa, ale ze znanych ci wzorów na pola czworokątów.

Dla dociekliwych



Gdy podzielimy w odpowiednim stosunku każdy bok kwadratu na trzy części i odetniemy jego rogi, powstanie ośmiokąt foremny, czyli taki, który ma równe boki i równe kąty.

1. W jakim stosunku należy podzielić bok kwadratu?

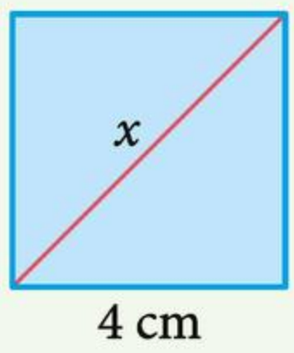
2. Oblicz w przybliżeniu, jaki procent powierzchni kwadratu odcinamy. Możesz skorzystać z kalkulatora.

3. Oblicz długości przekątnych ośmiokąta foremnego o boku a. Zauważ, że nie wszystkie przekątne mają tę samą długość.

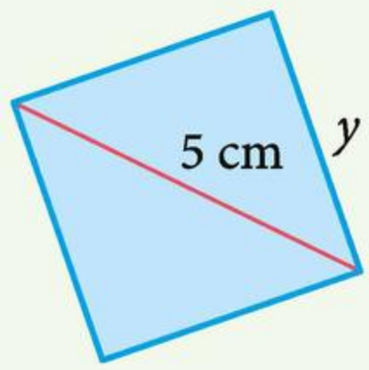
Czy już umiem?

I. Czworokąt przedstawiony na rysunku jest kwadratem. Oblicz długość odcinka oznaczonego literą.

a)

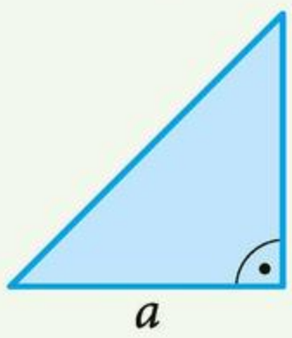


b)

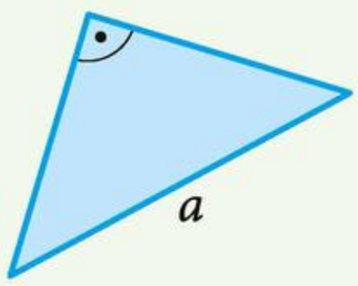


II. W trójkącie prostokątnym równoramiennym dany jest bok a. Wyznacz pozostałe boki tego trójkąta.

a)



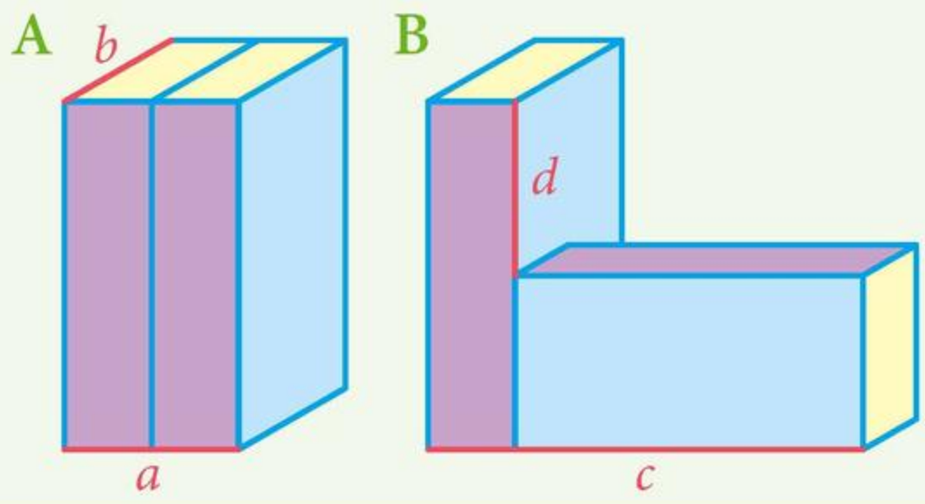
b)



III. Oblicz obwód trójkąta prostokątnego równoramiennego o polu 18 cm^2.

IV. Z czterech jednakowych klocków w kształcie prostopadłościanu o wymiarach 1 cm × 2 cm × 4 cm zbudowano bryły A i B takie jak na rysunku.

a) Podaj długości odcinków a, b, c i d.
b) Oblicz objętość bryły B.
c) Porównaj objętości obydwu brył.
d) Która bryła ma większe pole powierzchni: A czy B? Uzasadnij odpowiedź.

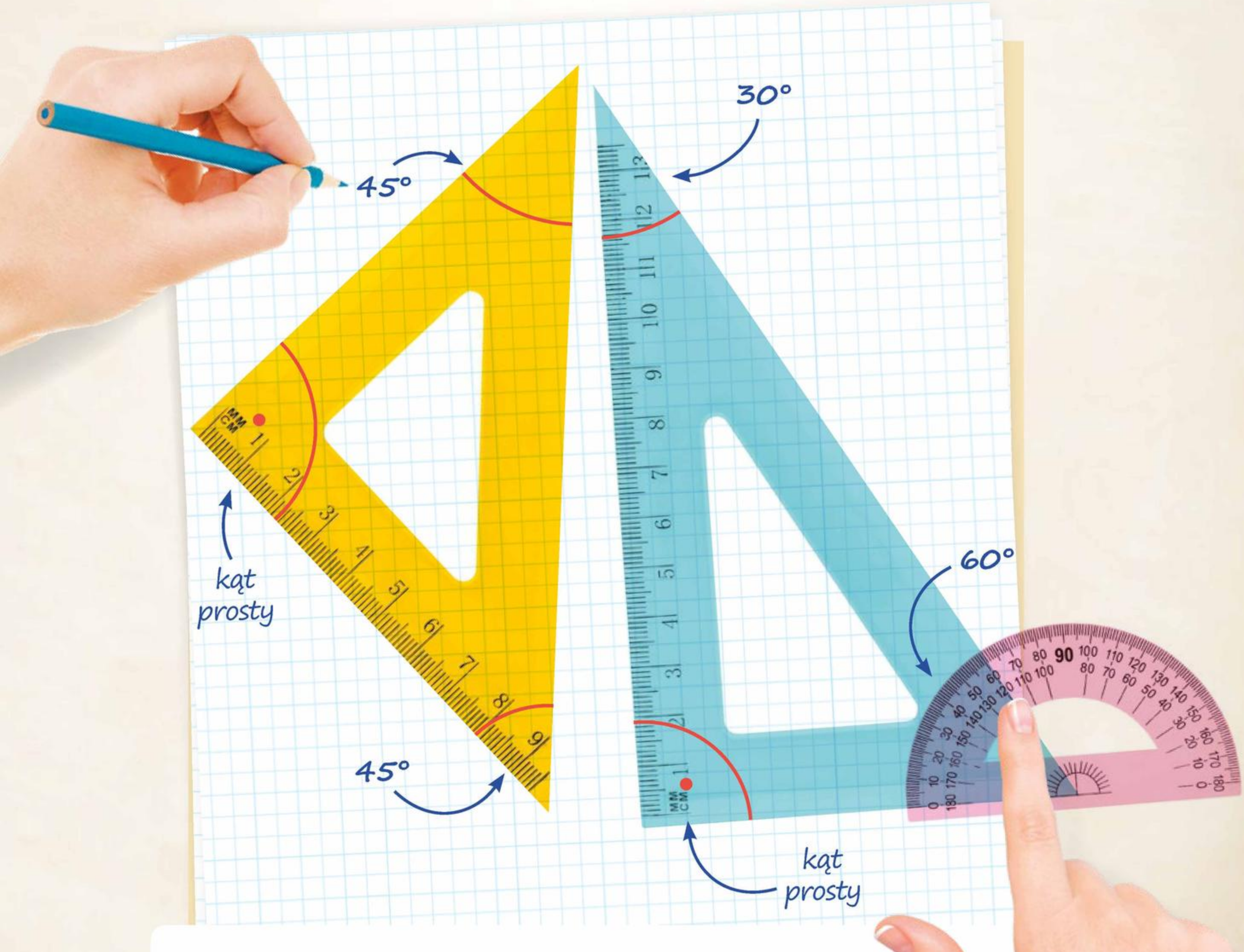


4 Trójkąt równoboczny i jego połowa

Na dobry początek

Magda i Ula mają zestawy dwóch ekierek. W każdym z nich jedna ekierka jest podobna do żółtej, a druga – do niebieskiej na zdjęciu poniżej.

Dziewczyny postanowiły, że każda z nich zmierzy kąty w swoich ekierkach. Przyjrzyj się, jakie wyniki otrzymały.



Pytania i polecenia

- Zmierz dwie krótsze krawędzie własnej ekierki o kształcie podobnym do żółtej na zdjęciu. Co zauważasz? Zmierz także najdłuższą i najkrótszą krawędź ekierki podobnej do niebieskiej na zdjęciu. Co zauważasz?
- Jakie figury można ułożyć, mając do dyspozycji dwie żółte lub dwie niebieskie ekierki?

Przykład 1.1

Oblicz wysokość trójkąta równobocznego o boku długości 8.

Wysokość trójkąta równobocznego dzieli go na dwa identyczne trójkąty prostokątne i jest ich wspólną przyprostokątną. Oznaczmy ją literą h.
Zatem na mocy twierdzenia Pitagorasa:

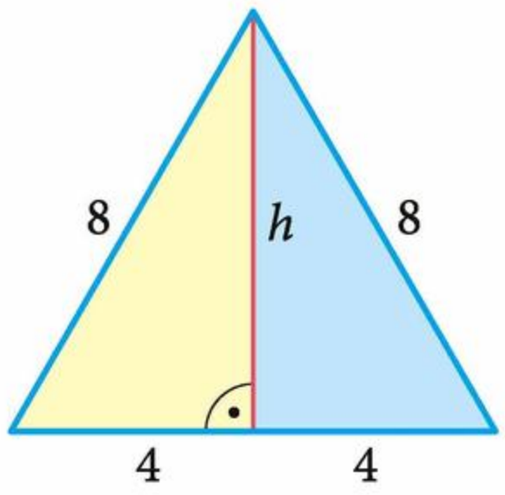
$4^2 + h^2 = 8^2$

$h^2 = 64 - 16$

$h^2 = 48$

$h = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$

Wysokość tego trójkąta równobocznego jest równa $4\sqrt{3}$.



Przykład 1.2

Uzasadnij, że wysokość trójkąta równobocznego o boku a jest równa $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

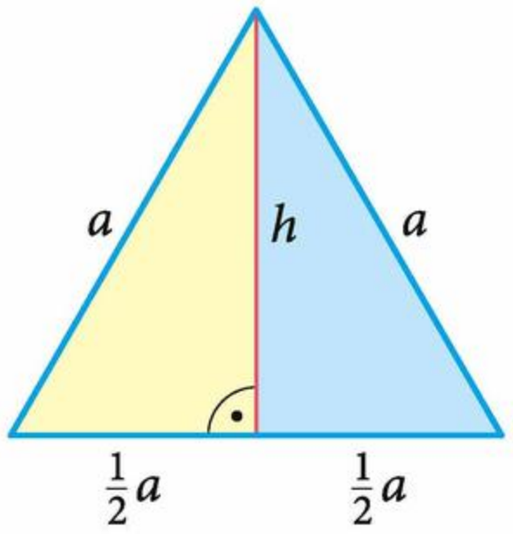
Oznaczmy wysokość literą h. Analogicznie jak w przykładzie 1.1 korzystamy z twierdzenia Pitagorasa. Zapisujemy je dla trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej a i przyprostokątnych $\frac{1}{2}a$ oraz h:

$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h^2 = a^2$

$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$

$h^2 = \frac{3a^2}{4}$

$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$



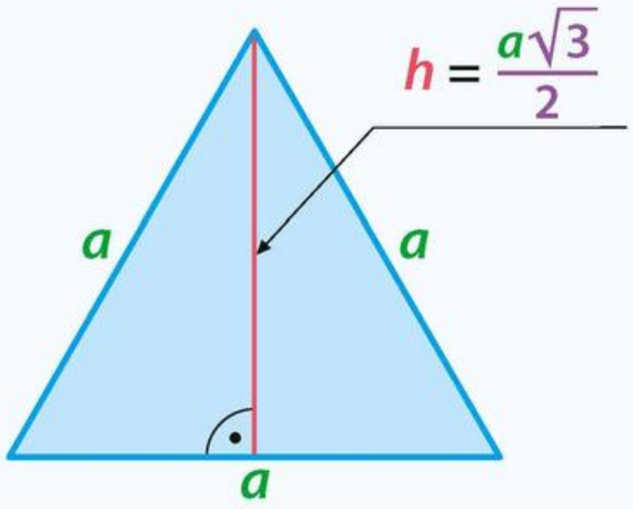
Uzasadniliśmy, że wysokość trójkąta równobocznego o boku a jest równa $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Zapamiętaj

Wysokość trójkąta równobocznego o boku a

jest równa:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



Ćwiczenie 1

Oblicz wysokość trójkąta równobocznego o boku długości a.

a) $a = 4$ **b)** $a = 7$ **c)** $a = 12$ **d)** $a = \sqrt{3}$ **e)** $a = \sqrt{2}$ **f)** $a = 2\sqrt{6}$

Przykład 2.1

Oblicz pole trójkąta równobocznego o boku 5 cm.

Sposób I

Pole trójkąta o podstawie a i wysokości h możemy obliczyć ze wzoru $P = \frac{1}{2}ah$. Znamy długość podstawy: $a = 5$ cm, natomiast wysokość możemy obliczyć ze wzoru wyprowadzonego w przykładzie 1.2:

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

W naszym przypadku $h = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ [cm].

Wobec tego $P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$ [cm^2].

Sposób II

Obliczenia przebiegają podobnie, ale dłużej posługujemy się symbolami literowymi, a dopiero na koniec podstawiamy dane liczbowe.

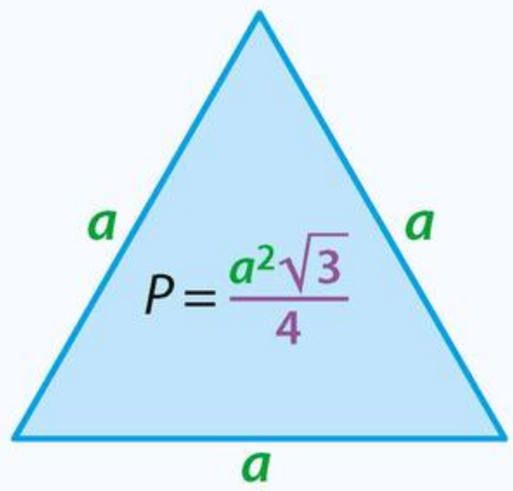
$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, więc $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, czyli $P = \frac{25\sqrt{3}}{4}$ [cm^2]

Drugi sposób rozwiązania tego przykładu ma tę zaletę, że wyprowadzony wzór można zastosować także do innych wartości a.

Zapamiętaj

Pole trójkąta równobocznego o boku a jest równe:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



Przykład 2.2

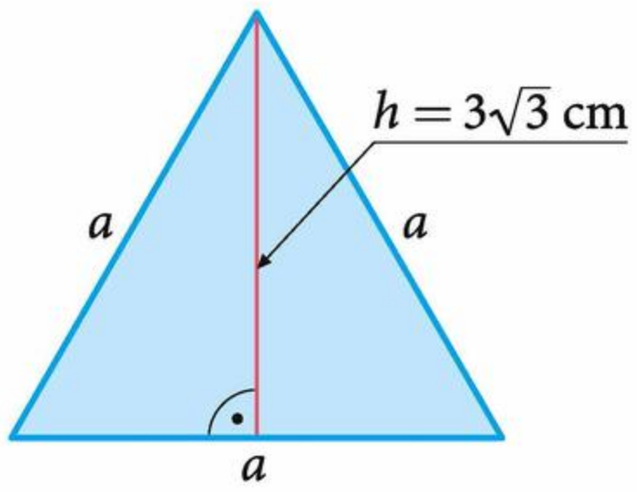
Oblicz pole trójkąta równobocznego o wysokości $3\sqrt{3}$ cm.

Oznaczmy długość boku trójkąta literą a, a wysokość literą h. Obliczamy a, korzystając ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego.

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \quad | \cdot 2$$

$$a\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \quad | : \sqrt{3}$$

$$a = 6 \text{ [cm]}$$



Podstawiamy długość boku do wzoru na pole trójkąta równobocznego.

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}\ [\text{cm}^2]$$

Pole trójkąta jest równe $9\sqrt{3}$ cm^2.

Ćwiczenie 2

Oblicz pole trójkąta równobocznego o danym boku a lub wysokości h.

a) $a = 2$ cm **b)** $a = 2\sqrt{6}$ cm **c)** $h = 2$ cm **d)** $h = 2\sqrt{6}$ cm

Umiejętność obliczania przekątnej kwadratu pozwoliła nam rozwiązywać zadania dotyczące trójkąta, który stanowi połowę kwadratu. Podobnie jest z trójkątem równobocznym i jego połową.

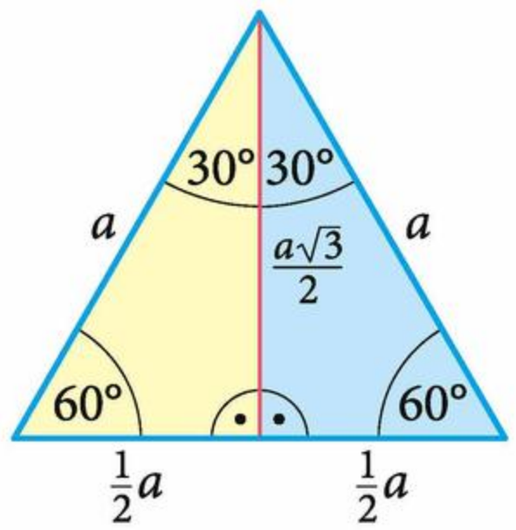
Przykład 3.1

Wysokość trójkąta równobocznego o boku długości a dzieli go na dwa trójkąty. Ile wynoszą miary kątów w tych trójkątach? Ile wynoszą długości ich boków?

Wysokość trójkąta równobocznego dzieli ten trójkąt na dwa identyczne trójkąty prostokątne.

Miary ich kątów wynoszą: 30°, 60°, 90°,

a długości boków: a, $\frac{1}{2}a$, $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



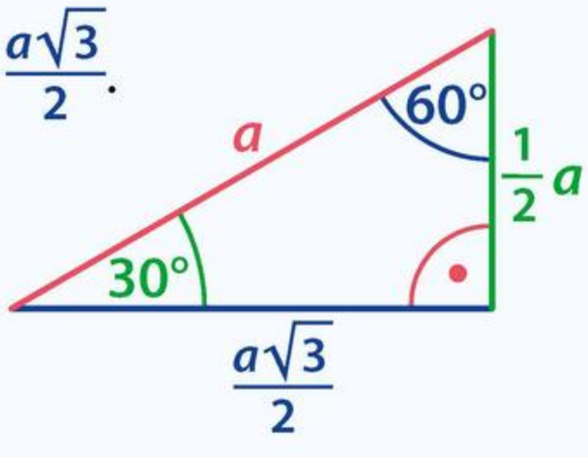
Zapamiętaj

Trójkąt o kątach **30°**, **60°**, **90°** ma boki długości: a, $\frac{1}{2}a$, $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bok o długości a leży naprzeciw kąta **90°**,

bok o długości $\frac{1}{2}a$ – naprzeciw kąta **30°**,

a bok o długości $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ – naprzeciw kąta **60°**.



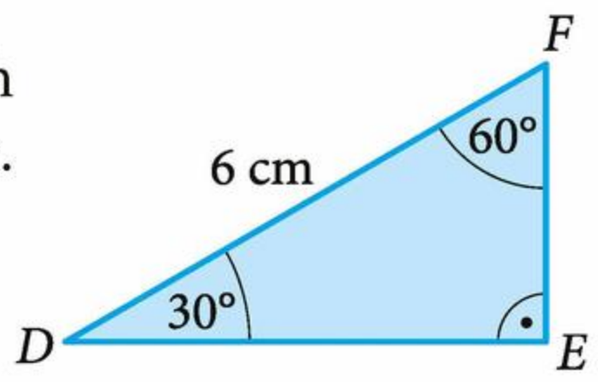
Przykład 3.2

Na rysunku obok przedstawiono trójkąt DEF o kątach 30°, 60°, 90°. Oblicz długości jego przyprostokątnych.

Najdłuższy bok DF ma długość 6 cm, zatem:

$$EF = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} = 3\,\text{cm}, \quad DE = \frac{6\sqrt{3}}{2}\,\text{cm} = 3\sqrt{3}\,\text{cm}.$$

Przyprostokątne trójkąta mają długości 3 cm oraz $3\sqrt{3}$ cm.



Ćwiczenie 3

Oblicz obwód trójkąta o kątach 30°, 60° i 90°, jeśli jego:

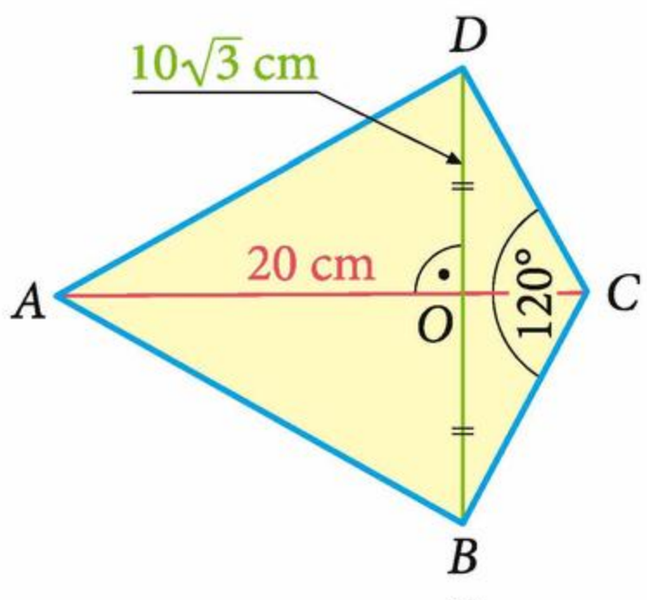
a) przeciwprostokątna ma długość 8 cm,
b) krótsza przyprostokątna ma długość 5 cm,
c) dłuższa przyprostokątna ma długość 12 cm.

! W dowolnym trójkącie najdłuższy bok leży naprzeciw największego kąta, a najkrótszy bok – naprzeciw najmniejszego kąta.

Z własności połowy kwadratu i połowy trójkąta równobocznego można korzystać w bardziej skomplikowanych zadaniach. Często trudność polega na tym, aby odpowiednio podzielić większą figurę i otrzymać takie właśnie trójkąty.

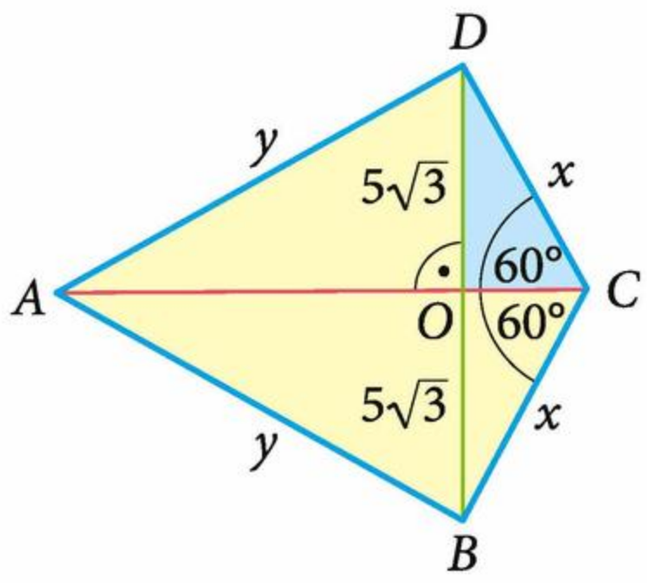
Przykład 4

Dany jest deltoid $ABCD$ o przekątnych $AC = 20$ cm i $BD = 10\sqrt{3}$ cm oraz kącie BCD o mierze 120° (rysunek obok). Oblicz obwód tego deltoidu.



Sporządzamy dodatkowy rysunek pomocniczy, pamiętając o własnościach deltoidu:
- przekątne przecinają się pod kątem prostym,
- punkt przecięcia przekątnych dzieli jedną z nich (DB) na połowy,
- przekątna AC dzieli kąty między równymi bokami ($\sphericalangle DAB$ i $\sphericalangle DCB$) na połowy.

Wprowadzamy oznaczenia x i y.



Krok 1.

Zauważmy, że trójkąt OCD jest trójkątem o kątach 90°, 60°, 30° i że znamy długość jego boku OD (jest on połową przekątnej BD).

$OD = 5\sqrt{3}$ cm

Możemy zatem obliczyć długości pozostałych boków trójkąta OCD: DC oraz OC.

$OD = x\frac{\sqrt{3}}{2}$, czyli $5\sqrt{3} = x\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad | : \sqrt{3}$

$5 = x \cdot \frac{1}{2}$ $\quad | \cdot 2$

$x = 10$ [cm] Jest to długość jednego boku deltoidu.

Wyznaczmy też długość odcinka OC, którą wykorzystamy w kolejnym kroku.

$$OC = \frac{1}{2}x = 5 \text{ [cm]}$$

Krok 2.

Najpierw obliczamy długość odcinka AO.

$$AO = AC - OC = 20 - 5 = 15 \text{ [cm]}$$

Aby obliczyć długość drugiego boku deltoidu, wykorzystamy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta AOD.

$$y^2 = AO^2 + OD^2$$

$$y^2 = 15^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2$$

Zatem $y = \sqrt{225 + 75} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$ [cm].

Jest to długość drugiego boku deltoidu.

Krok 3.

Obliczamy obwód deltoidu.

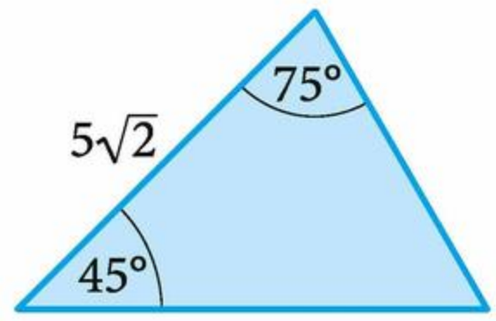
$$2x + 2y = 2 \cdot 10 + 2 \cdot 10\sqrt{3} = \left(20 + 20\sqrt{3}\right) \text{[cm]}$$

Obwód deltoidu $ABCD$ jest równy $\left(20 + 20\sqrt{3}\right)$ cm.

Ćwiczenie 4

Oblicz długości pozostałych boków trójkąta przedstawionego na rysunku.

Wskazówka. Poprowadź wysokość z wierzchołka kąta o mierze 75°. Oblicz miary kątów w powstałych trójkątach.



Dobra rada

Znajomość wzorów z tej lekcji przyspiesza wiele obliczeń. Jeśli jednak je zapomnisz:
- *wyprowadź wzory samodzielnie z twierdzenia Pitagorasa*

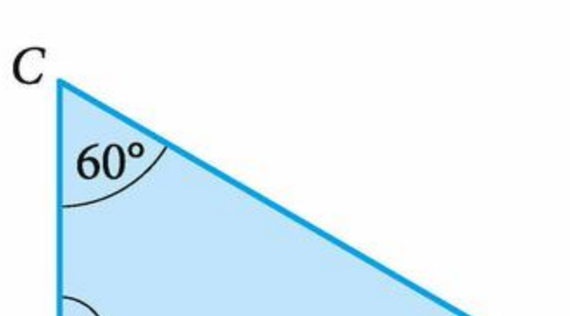
albo
- *rozwiąż zadanie bez wzorów, korzystając bezpośrednio z twierdzenia Pitagorasa.*

Przykład 5

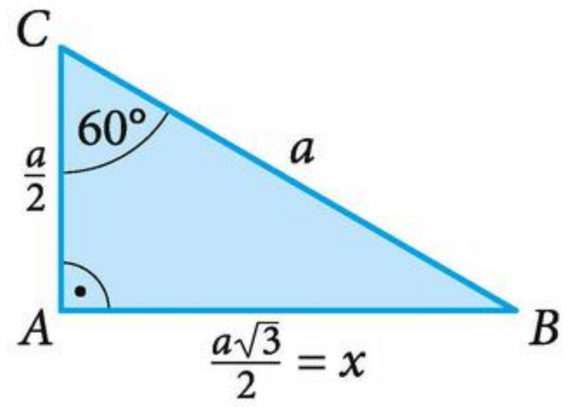
W trójkącie ABC dane są: $\sphericalangle CAB = 90°$, $\sphericalangle ACB = 60°$ oraz $AB = x$. Wyznacz długości pozostałych boków tego trójkąta.

Zaczynamy od wykonania rysunku pomocniczego.

Zgodnie z treścią zadania traktujemy x jako wielkość daną. Długości pozostałych boków mamy zapisać w postaci wyrażeń algebraicznych zawierających x.



Suma kątów każdego trójkąta wynosi 180°, więc $\sphericalangle ABC = 30°$ jako trzeci kąt trójkąta ABC. Jeśli długość przeciwprostokątnej oznaczymy literą a, to w trójkącie o takich kątach:



$AC = \frac{1}{2}a$ oraz $AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Skoro $AB = x$, to:

$\frac{a\sqrt{3}}{2} = x \quad | \cdot 2$

$a\sqrt{3} = 2x \quad | : \sqrt{3}$

$a = \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{2x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}x = BC$

Stąd:

$AC = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}x = \frac{\sqrt{3}}{3}x.$

Tak więc pozostałe boki trójkąta mają długości $\frac{2\sqrt{3}}{3}x$ oraz $\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

Ćwiczenie 5

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego równoramiennego ma długość d. Wyznacz długości jego przyprostokątnych.

Zadania

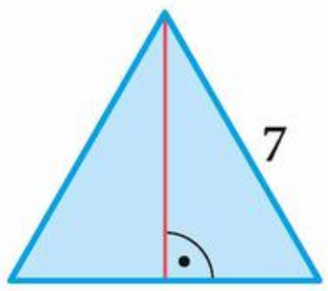
1. Wykonaj polecenia. ▶ Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

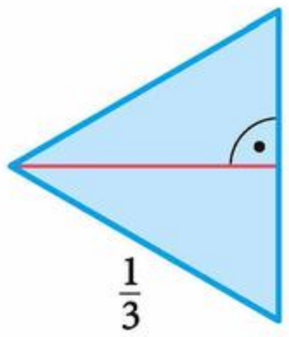
Oblicz wysokość trójkąta równobocznego o wymiarach podanych na rysunku.

← P1.1

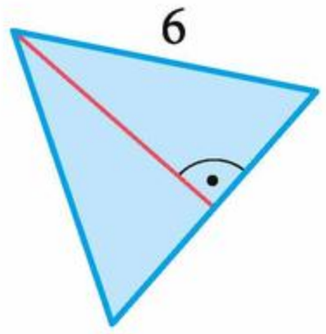
a)



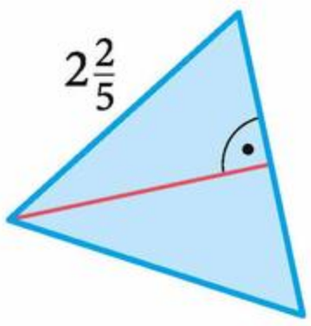
c)



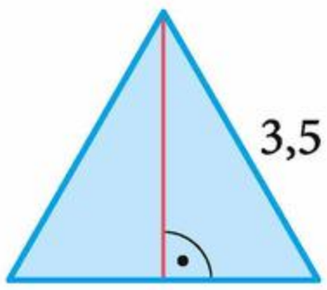
e)



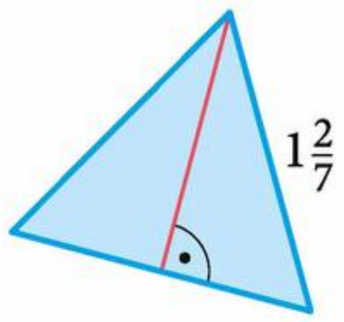
b)



d)



f)

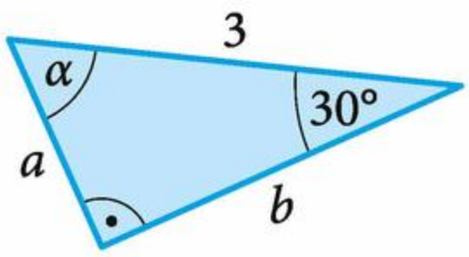


poziom B

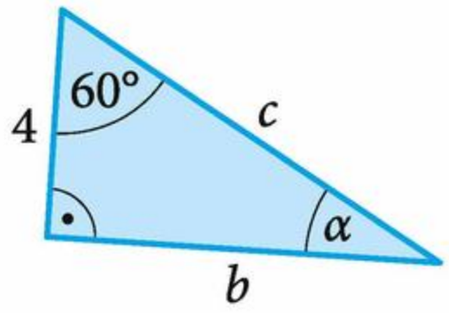
← P3.2

Oblicz miarę kąta α i długości boków oznaczonych literami.

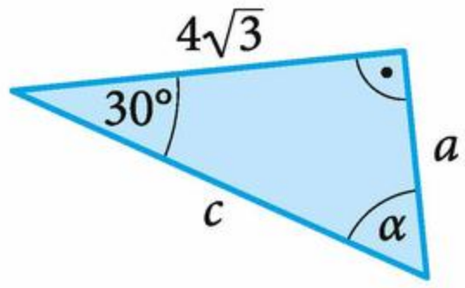
a)



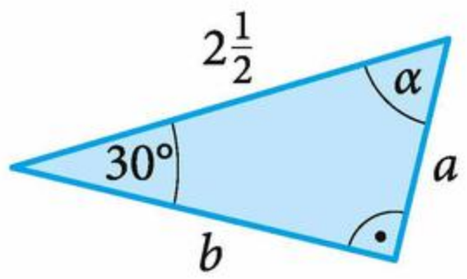
b)



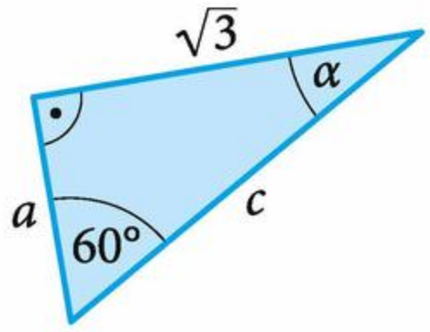
c)



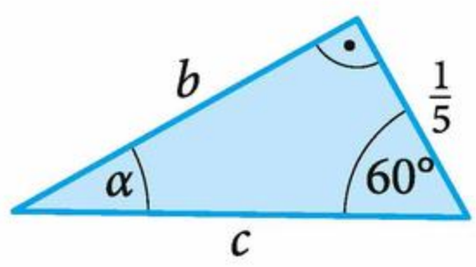
d)



e)



f)

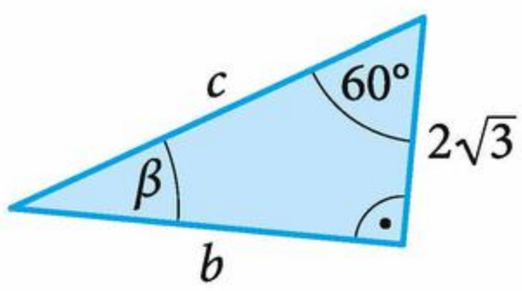


poziom C

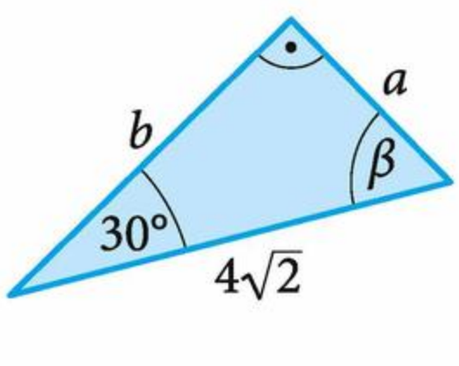
← P3.2

Oblicz miarę kąta β i długości boków oznaczonych literami.

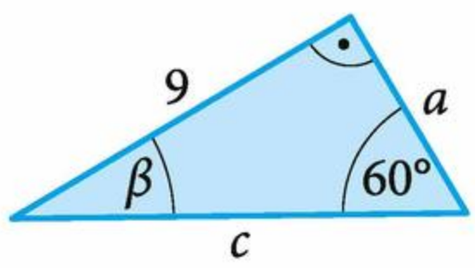
a)



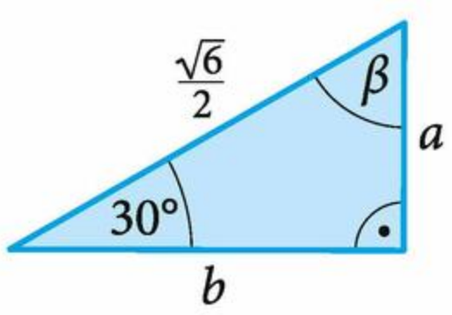
b)



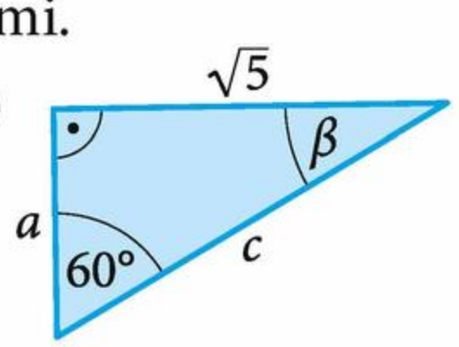
c)



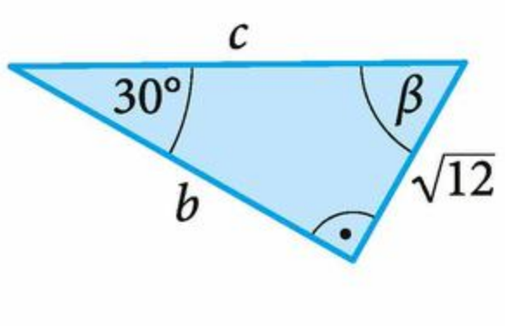
d)



e)



f)

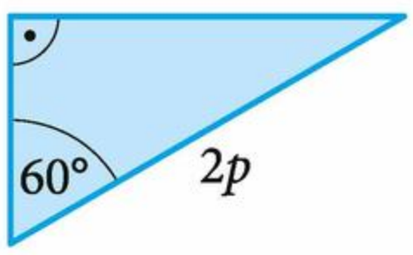


poziom D

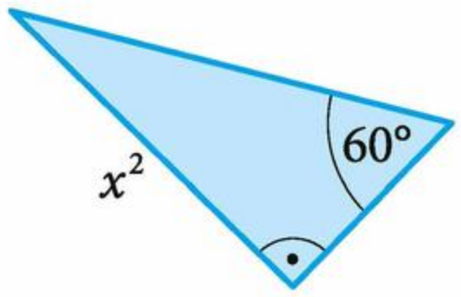
← P5

Oblicz brakujące długości boków.

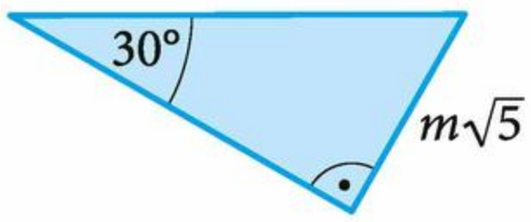
a)



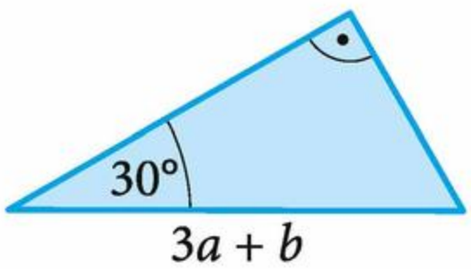
b)



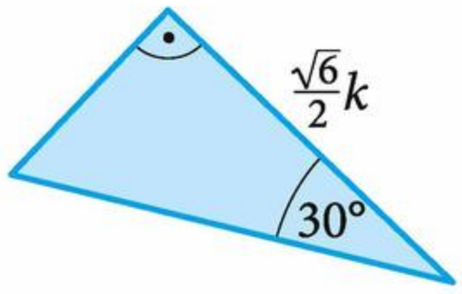
c)



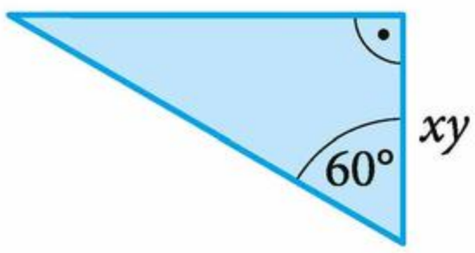
d)



e)



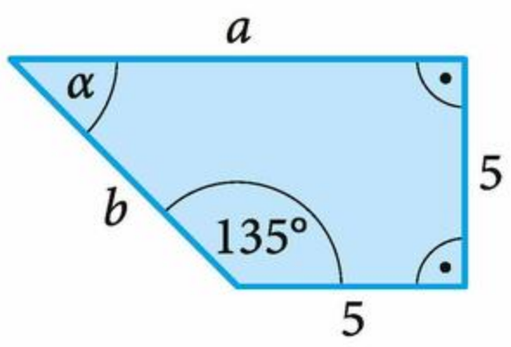
f)



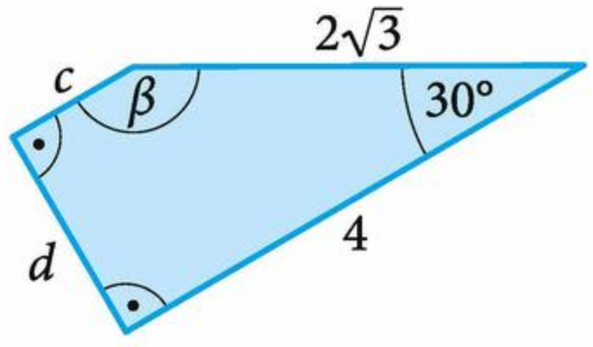
MISTRZ

Oblicz miarę kąta i długości boków oznaczonych literami.

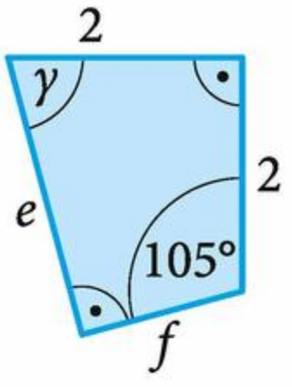
a)



b)



c)



2. Oblicz wysokość i pole trójkąta równobocznego o danym boku.

a) 10 cm **b)** 16 cm **c)** $\sqrt{27}$ cm

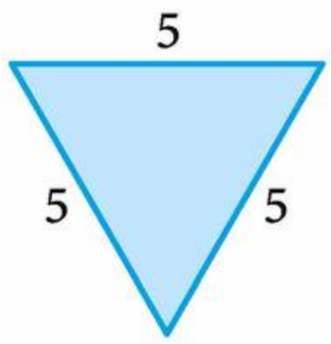
3. Oblicz:

a) wysokość i obwód trójkąta równobocznego o polu równym $49\sqrt{3}$,
b) obwód i pole trójkąta równobocznego, którego wysokość jest równa 3.

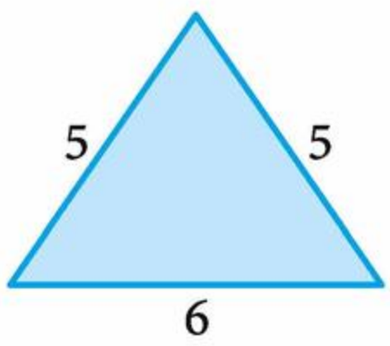
4. Sprawdź, czy pole trójkąta równobocznego o wysokości 18 cm jest większe od pola kwadratu o przekątnej 18 cm.

5. Oblicz pole i obwód trójkąta.

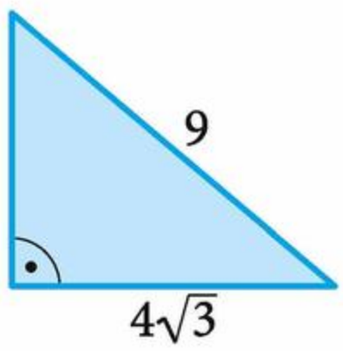
a)



b)

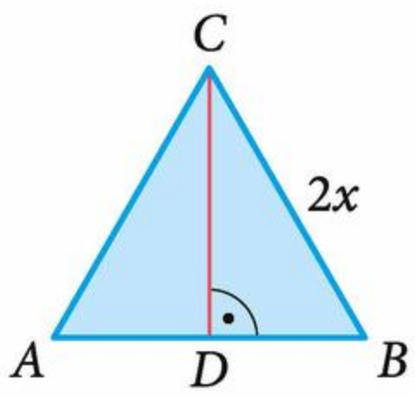


c)



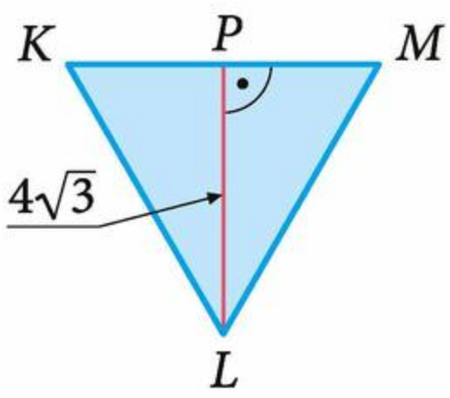
6. Przedstawiony trójkąt jest równoboczny. Korzystając z danych na rysunku, wyznacz długości odcinków wypisanych poniżej.

a)



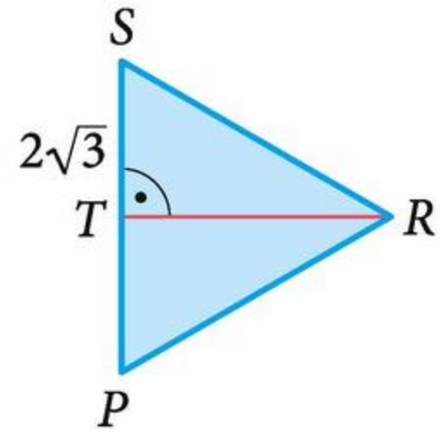
$BD = ?$
$AB = ?$
$CD = ?$

b)



$PM = ?$
$KM = ?$
$KL = ?$

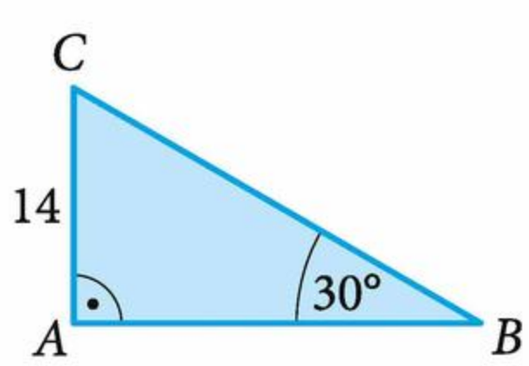
c)



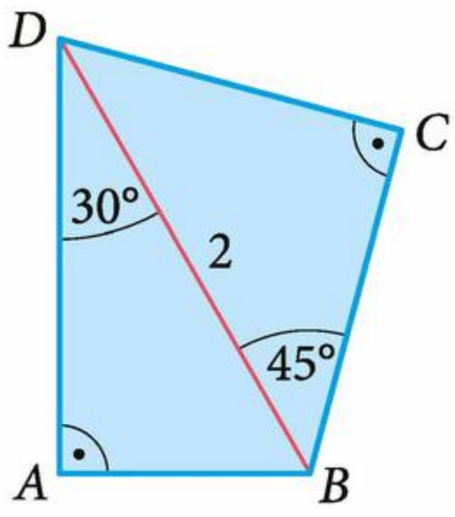
$SP = ?$
$SR = ?$
$TR = ?$

7. Oblicz obwód narysowanej figury.

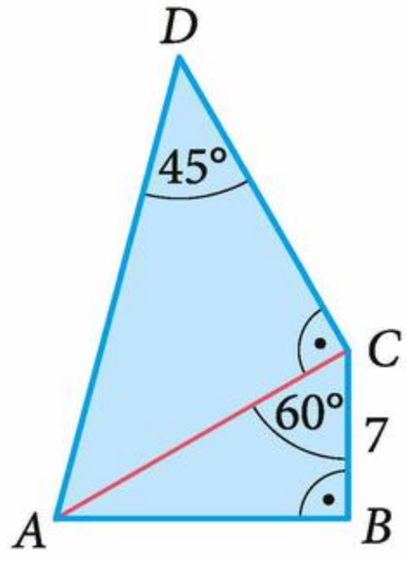
a)



b)



c)

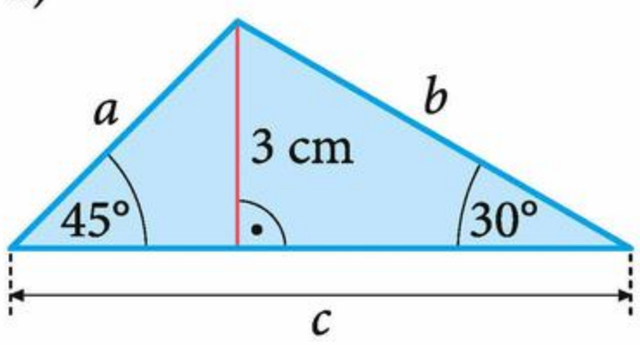


8. Jeden z boków trójkąta o kątach 90°, 60°, 30° ma długość 8 cm. Jaką długość mają pozostałe boki? Rozpatrz wszystkie możliwości.

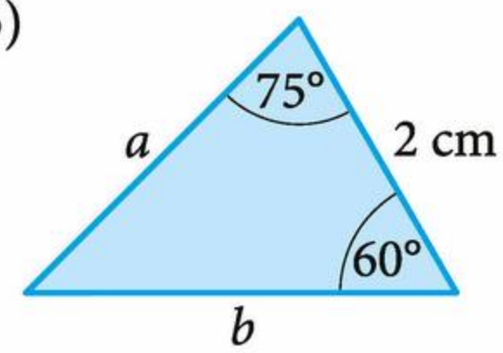
9. Przekątna prostokąta jest dwukrotnie dłuższa od jednego z jego boków. Wyznacz miarę kąta ostrego między przekątnymi tego prostokąta.

E **10.** Oblicz długości boków oznaczonych literami.

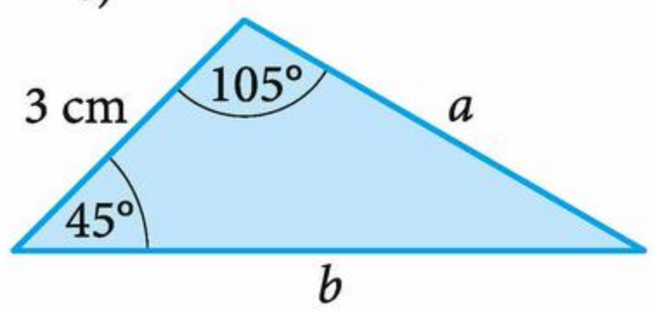
a)



b)

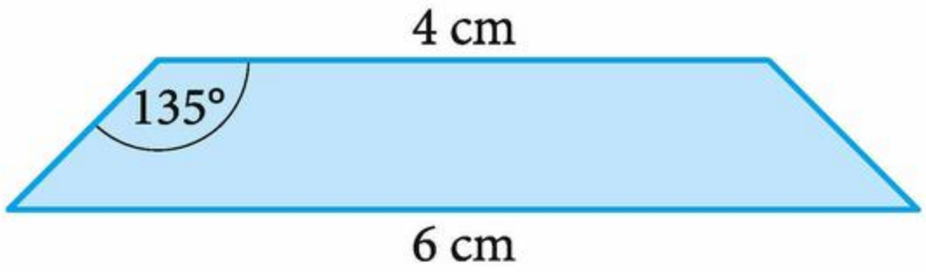


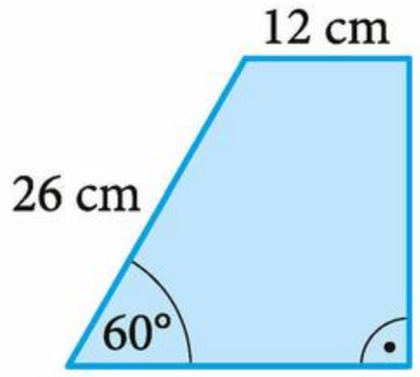
c)



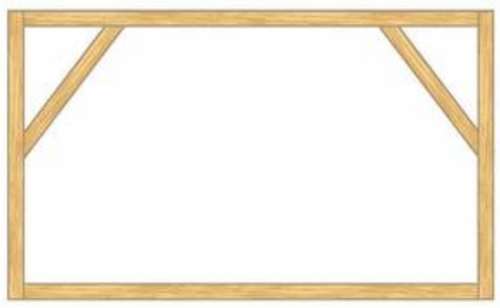
11. Oblicz pole rombu o boku długości 12 cm i kącie ostrym równym:
a) 60°, **b)** 45°, **c)** 30°.

12. Na rysunku przedstawiono dwa trapezy: równoramienny i prostokątny. Oblicz ich pola i obwody.



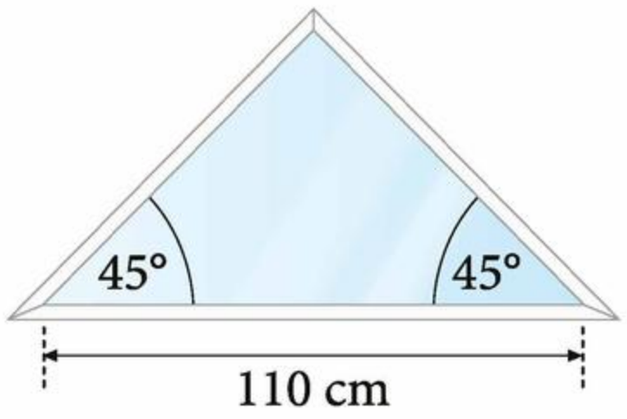


E **13.** Belki podtrzymujące strop w pomieszczeniu o wysokości 4,5 m zamocowano 2,5 m nad podłogą. Są one nachylone do poziomu pod kątem 60°. Jaka jest długość każdej z tych pochyłych belek?

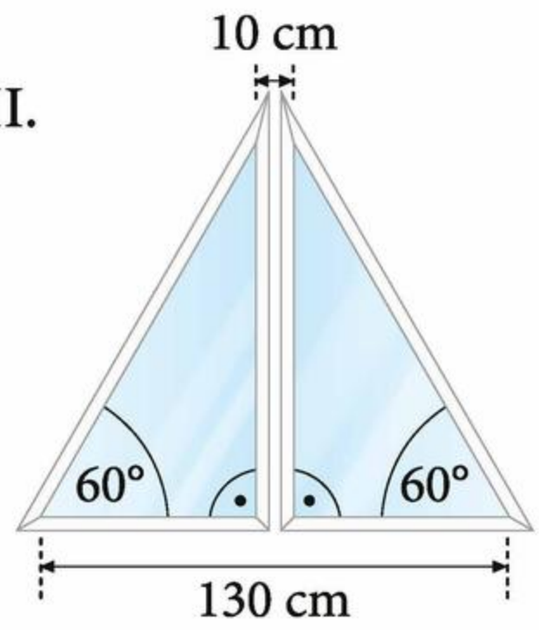


14. Przez które z okien wpada więcej światła?

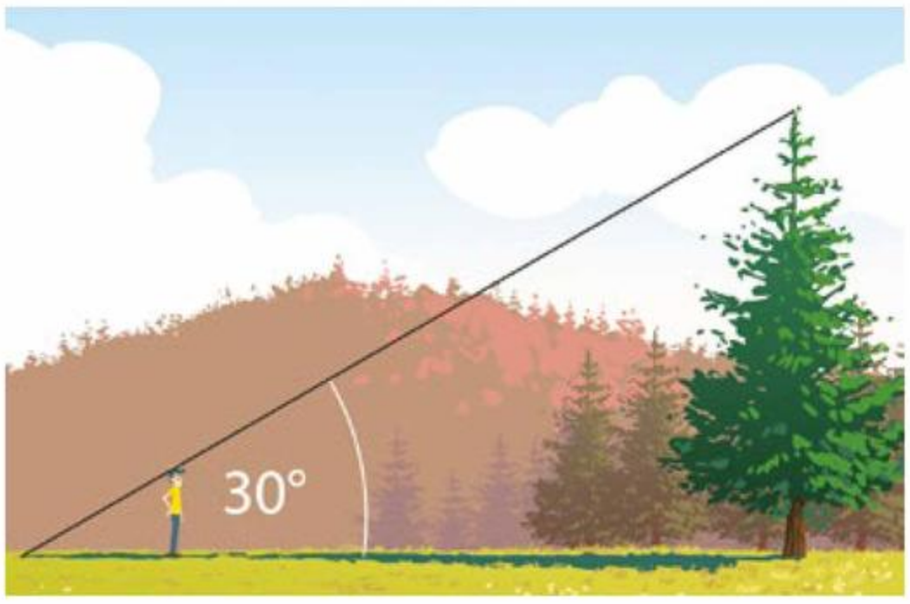
I.



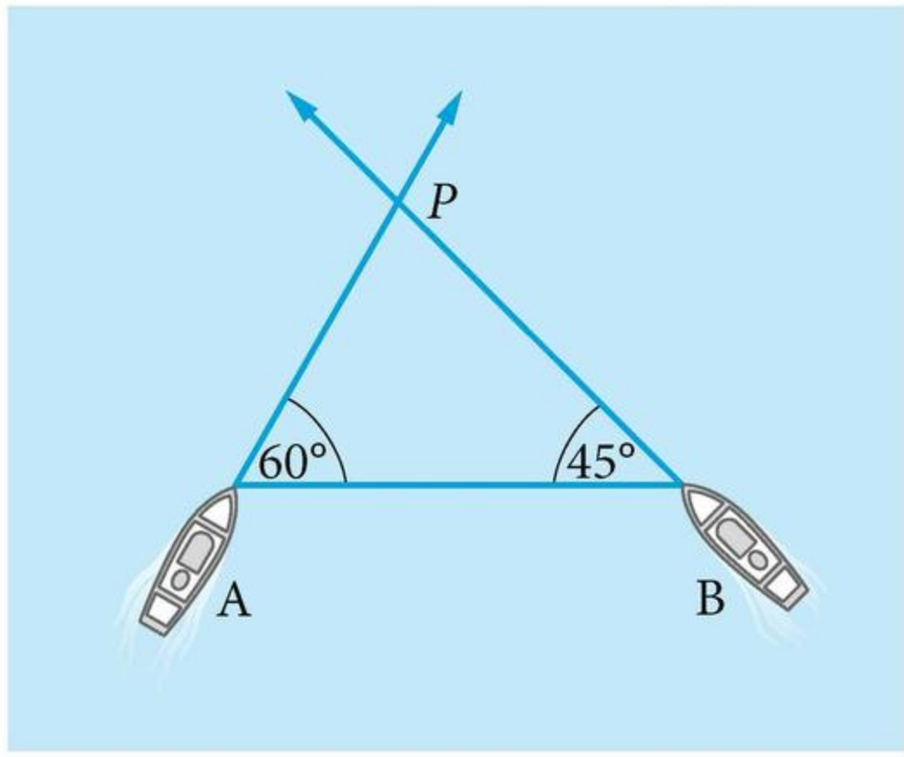
II.



15. Sauli mieszka w Helsinkach. To miasto leży na 60. równoleżniku, dlatego pierwszego dnia wiosny w południe promienie słoneczne padają tu pod kątem 30° do powierzchni ziemi. Tego dnia Sauli stanął w odległości 17,2 m od drzewa i stwierdził, że jego cień kończy się w tym samym miejscu co cień drzewa. Sauli ma 160 cm wzrostu. Jaka jest wysokość drzewa?



16. Okręt A porusza się z prędkością 8 kn, a okręt B – z prędkością 14 kn, w sposób pokazany na rysunku. Czy okręty zderzą się w punkcie P, jeśli nie zmienią kursu ani prędkości?



kn (skrót od „knot") – węzeł, jednostka prędkości używana w żeglarstwie
1 kn = 1 mila morska na godzinę, czyli 1,852 km/h.
kurs – kierunek ruchu statku

Dla dociekliwych

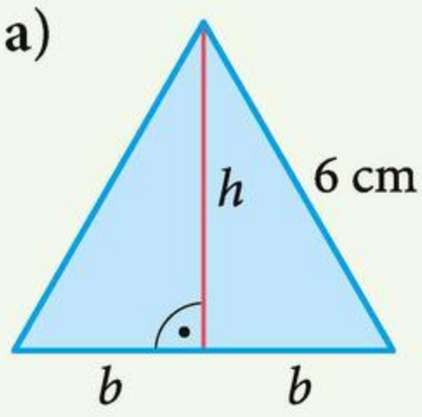
1. Oblicz długości przekątnych sześciokąta foremnego o boku a, czyli takiego, który ma wszystkie kąty równe i wszystkie boki długości a. Zauważ, że nie wszystkie przekątne mają tę samą długość.

2. Podłoga kojca dziecięcego ma kształt sześciokąta foremnego o boku 90 cm. Czy można przenieść ten kojec w pozycji poziomej przez korytarz o szerokości 150 cm?

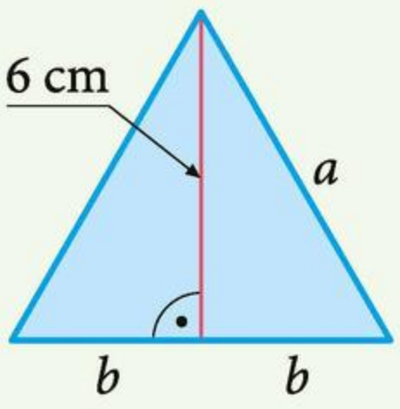
Czy już umiem?

I. Przedstawiony trójkąt jest równoboczny. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.

a)



b)



II. Która z figur ma większe pole: trójkąt równoboczny o boku $\sqrt{6}$ czy kwadrat o przekątnej $\sqrt{6}$?

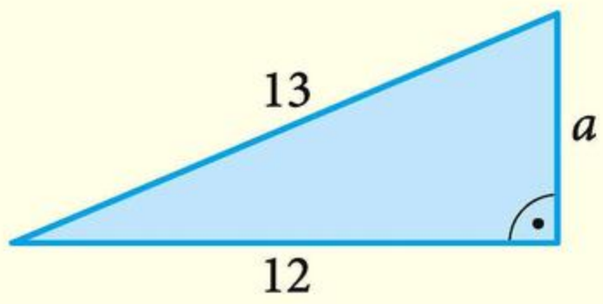
III. W dzbanku są 4 litry soku, który trzeba rozlać do szklanek o pojemności 200 ml, napełniając $\frac{2}{3}$ każdej szklanki. Ile szklanek należy przygotować?

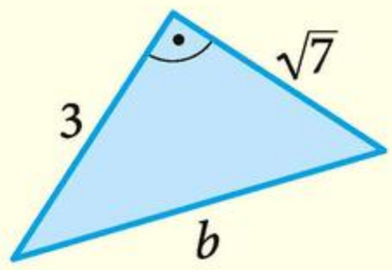


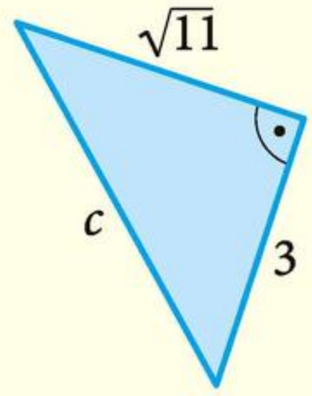
Powtórzenie VI

ZESTAW 1

1. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.







2. Jaką długość ma przekątna prostokąta o wymiarach 6 cm × 12 cm?

A. $5\sqrt{6}$ cm **B.** $6\sqrt{5}$ cm **C.** 9 cm **D.** 18 cm

3. W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku A jest prosty, $AB = 12, BC = 15$. Oceń prawdziwość podanych zdań. Czy w miejsce ? należy wstawić P (zdanie prawdziwe), czy F (zdanie fałszywe)?

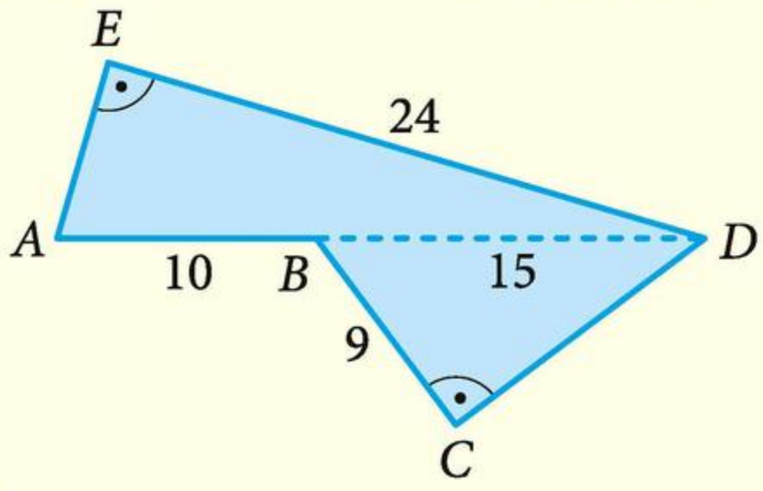
I.	Pole trójkąta ABC wynosi 90.	?
II.	Obwód trójkąta ABC wynosi 32.	?
III.	Bok AC ma długość $\sqrt{369}$.	?

4. Przekątna kwadratu ma $12\sqrt{2}$ cm. Oblicz długość boku i pole tego kwadratu.

5. Który z trójkątów o bokach podanej długości jest prostokątny?

A. 2, 3, 4 **B.** $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2$ **C.** 3, 4, 5 **D.** $\sqrt{3}, 2, \sqrt{5}$

6. Oblicz pole i obwód pięciokąta $ABCDE$ (rysunek obok).

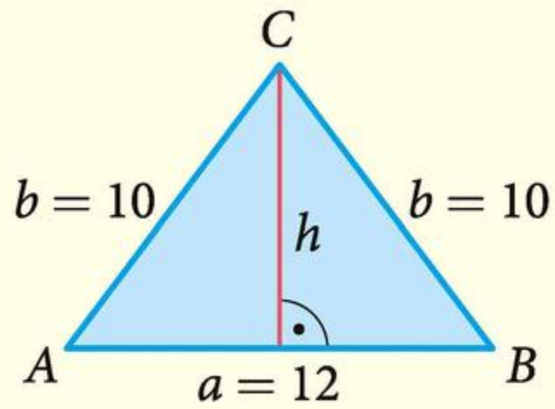


7. Oblicz obwód i pole trójkąta równobocznego o wysokości równej:

a) $4\sqrt{3}$ cm, **b)** $2\sqrt{5}$ cm.

8. Na rysunku przedstawiono trójkąt ABC. Jaka jest jego wysokość h? Wybierz odpowiedź I lub II i jej uzasadnienie spośród zdań A–C.

I.	$h = 5\sqrt{3}$	ponieważ	A.	$h = 10 + 10 - 12 = 8$
			B.	$h = \sqrt{10^2 - 6^2}$
II.	$h = 8$		C.	$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$



9. Pewien trójkąt prostokątny ma boki długości 6 cm, 12 cm, $6\sqrt{3}$ cm. Miara kąta leżącego naprzeciwko boku długości 6 cm jest równa

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

10. Pewien trójkąt prostokątny ma boki długości 6 cm, 6 cm, $6\sqrt{2}$ cm. Miara kąta leżącego naprzeciwko boku długości $6\sqrt{2}$ cm jest równa

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

11. Oblicz obwód trójkąta prostokątnego ABC, w którym kąt BAC jest prosty oraz:
a) $AC = 8$, $BC = 17$, **b)** $AC = 8$, $\sphericalangle ACB = 60°$, **c)** $BC = 16$, $\sphericalangle ABC = 45°$.

12. Przekątna prostokątnej działki rekreacyjnej ma długość 30 m i tworzy z dłuższym bokiem kąt 30°. Ile trzeba zapłacić za ogrodzenie tej działki siatką ogrodzeniową, jeśli metr bieżący siatki kosztuje 13 zł, a na bramę wjazdową należy zostawić 3 m (w obliczeniach przyjmij, że $\sqrt{3} \approx 1{,}73$)?

13. Oblicz długość cienia rzucanego przez jeden z najwyższych budynków w Polsce – Sky Tower we Wrocławiu o wysokości 212 m – w momencie gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt 30°. Odpowiedź podaj z dokładnością do 1 m.



14. Ramię trójkąta równoramiennego ma długość 12 cm, a wysokość opuszczona na podstawę jest równa $6\sqrt{3}$ cm. Jakie są miary kątów tego trójkąta?

15. Przeczytaj informację prasową.

> Łódzka Państwowa Straż Pożarna otrzymała najnowocześniejszą drabinę strażacką w Europie. Drabina ta może być wysunięta na długość 42 metrów.



Opisana drabina jest zamocowana na wozie 2,4 m nad ziemią. Na jaką wysokość sięgnie, jeśli zostanie podniesiona pod kątem 60°? Wynik zaokrąglij do dziesiątych części metra.

ZESTAW 2

1. Oblicz długość odcinka oznaczonego literą x na rysunku obok.

2. Jeśli przekątne rombu są równe 18 cm i 24 cm, to jego obwód wynosi

A. 42 cm. **C.** 120 cm.

B. 60 cm. **D.** 216 cm.

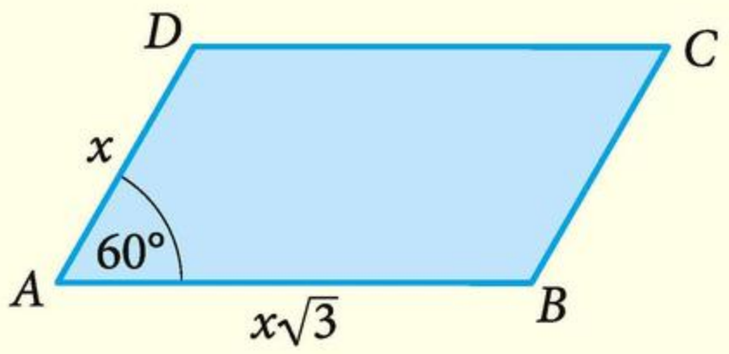
3. Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest dwa razy dłuższa od drugiej, a przeciwprostokątna ma długość 15 cm. Dłuższa przyprostokątna tego trójkąta jest równa

A. 3 cm. **B.** 6 cm. **C.** $3\sqrt{5}$ cm. **D.** $6\sqrt{5}$ cm.

4. Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC o kącie prostym przy wierzchołku A. Na przyprostokątnej AB wybrano taki punkt D, że $\sphericalangle ADC = 60°$. Oblicz pole i obwód trójkąta DBC, jeśli wiadomo, że $AD = 5$ cm.

5. Dłuższa podstawa trapezu równoramiennego ma długość 12 cm i tworzy z ramieniem długości $2\sqrt{3}$ cm kąt o mierze 30°. Oblicz wysokość tego trapezu i długość krótszej podstawy.

6. Oblicz pole równoległoboku przedstawionego na rysunku dla $x = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.



7. W równoległoboku o kącie ostrym równym 45° krótsza przekątna ma długość $6\sqrt{2}$ cm i dzieli ten równoległobok na dwa trójkąty prostokątne. Oblicz jego obwód.

8. Krótsza przekątna dzieli trapez prostokątny na trójkąt prostokątny i trójkąt równoboczny. Wysokość trapezu wynosi $4\sqrt{3}$ cm. Oblicz pole i obwód tego trapezu.

9. W trapezie równoramiennym krótsza podstawa i ramiona mają długość k cm, a dłuższa podstawa ma długość $2k$ cm. Oceń prawdziwość podanych zdań. Czy w miejsce ? należy wstawić P (zdanie prawdziwe), czy F (zdanie fałszywe)?

I.	Kąt rozwarty w tym trapezie ma miarę 120°.	?
II.	Pole trapezu jest równe $\frac{3\sqrt{3}}{4}k^2$.	?
III.	Przekątna tego trapezu jest dwa razy dłuższa od jego ramienia.	?

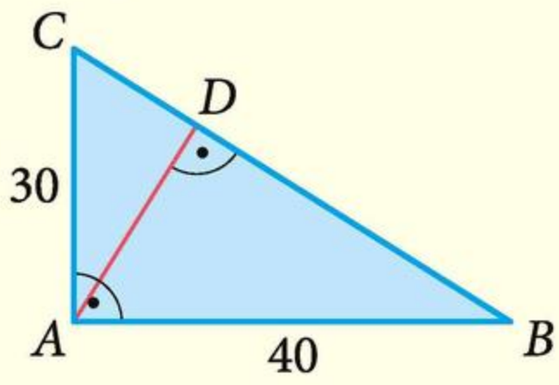
10. Oblicz wysokości trójkąta prostokątnego o bokach 50 cm, 120 cm i 130 cm.



11. Startujący samolot wznoszący się z prędkością $80\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ po 2 minutach znalazł się na wysokości około 2,5 kilometra nad ziemią, dokładnie nad domem Janka. Jak daleko od miejsca oderwania się samolotu od ziemi znajduje się dom Janka?

12. Na rysunku przedstawiono trójkąt prostokątny i jego wysokość. Jaką długość ma odcinek AD? Wybierz odpowiedź I lub II oraz jej uzasadnienie spośród zdań A–C.

I.	$AD = 20$	ponieważ	A.	$\sphericalangle ABD = 30°$
II.	$AD = 24$		B.	trójkąt ABD jest równoramienny
			C.	$\frac{1}{2}AD \cdot CB = \frac{1}{2}AC \cdot AB$



Zadania na temat…

Drabiny

Rozwój nauki i techniki sprawia, że wiele przedmiotów, zachowując nazwę, zupełnie zmienia wygląd. Przykładem może być telefon. Dzisiejszy smartfon w niczym nie przypomina dawnego aparatu telefonicznego z korbką.



Fot. 1

Mogłoby się wydawać, że przedmiotem, który się nie zmienia, jest drabina. Większość używanych drabin to dość proste urządzenia. Ale jest wyjątek – to drabiny strażackie (nazywane też pożarniczymi). Osiągają one bardzo dużą długość (fot. 1), co powoduje wiele problemów konstrukcyjnych i technologicznych.

Po drabinach pożarniczych nie trzeba chodzić. Mają one specjalne kosze, w których można wjechać na samą górę (fot. 2). Z takich koszy strażacy mogą prowadzić akcję gaśniczą. Umożliwiają one także ewakuowanie zagrożonych osób z dużych wysokości. Operator drabiny steruje nią za pomocą komputera (fot. 3).



Fot. 2



Fot. 3

Straż pożarna w wielu miastach w Polsce dysponuje drabinami o długości 37 m, choć zdarzają się i dłuższe. W 2016 roku na wystawie Ratownictwo, Zabezpieczenia i Technika Przeciwpożarowa w Kielcach zwiedzający mogli oglądać najdłuższą na świecie drabinę pożarniczą, a nawet wjechać na nią. Miała ona aż 68 m długości.

Drabina strażacka nie może jednak być ustawiana pionowo. Największy możliwy kąt jej nachylenia do poziomu to 75° – wtedy sięga ona na wysokość równą ok. 96% jej długości.

Drabiny pożarnicze bywają wykorzystywane nie tylko w czasie pożarów. Często służą do ratowania… kotów, które wspięły się zbyt wysoko i boją się zejść, do strącania sopli lodu lub wchodzenia do niedostępnych mieszkań.

Rozwiąż zadania przy użyciu kalkulatora.

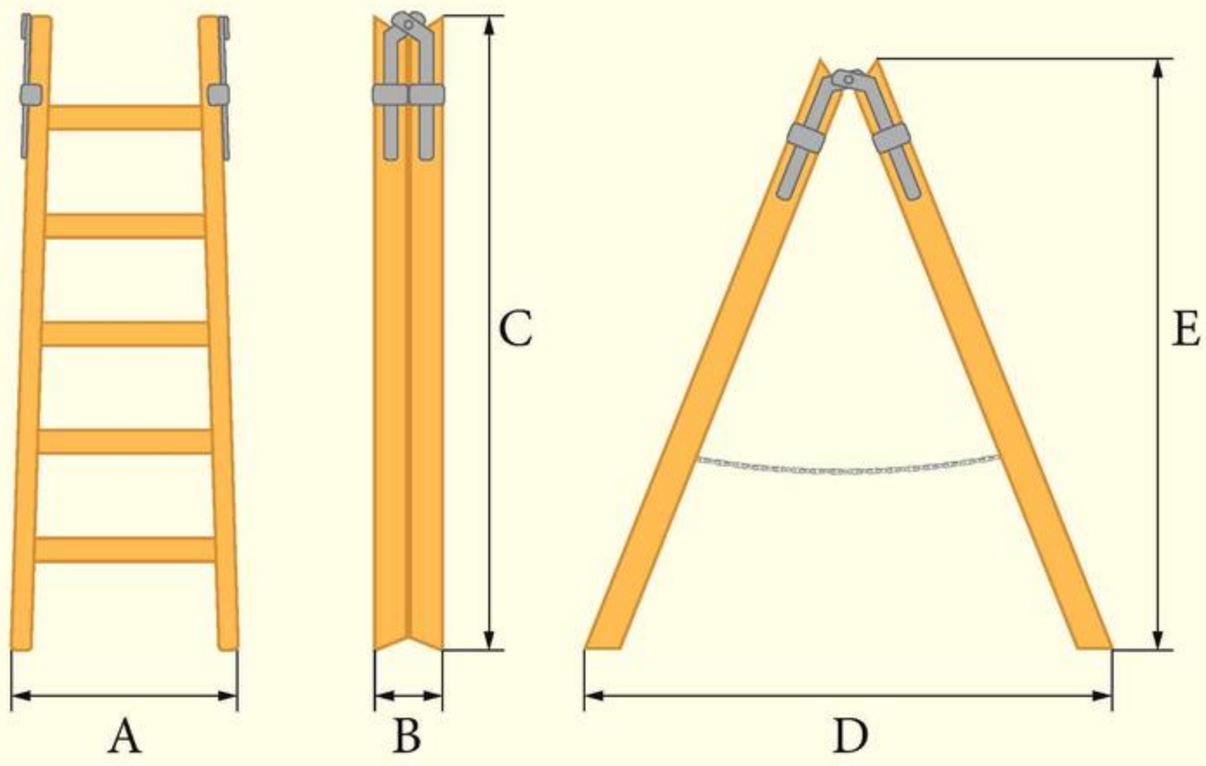
1. Do jakiej wysokości sięga prezentowana na targach w Kielcach najdłuższa drabina świata przy maksymalnym kącie nachylenia do poziomu?

2. Jedna kondygnacja (piętro lub parter) ma przeciętnie wysokość 3 m. Do którego piętra może sięgnąć najdłuższa drabina strażacka?

3. Jednostki straży pożarnej w wielu miastach dysponują drabinami o długości 37 m. Do którego piętra może sięgnąć taka drabina przy maksymalnym kącie nachylenia do poziomu?

4. Samochód strażacki ma drabinę o długości 37 m zamontowaną na platformie o wysokości 1 m.
a) Samochód stoi w odległości 20 m od budynku. Do jakiej wysokości sięga drabina, jeśli jej górny koniec znajduje się tuż przy budynku? Które to piętro?
b) O ile pięter wyżej sięgnie ta drabina, jeśli samochód stanie w odległości 12 m od budynku?
c) Samochód stanął w odległości 15 m od budynku. Na jaką długość trzeba wysunąć drabinę, aby sięgnęła do 6 piętra (czyli 7 kondygnacji)?

5. Oto fragment oferty producenta drewnianych drabin malarskich. Wyznacz brakujące liczby.





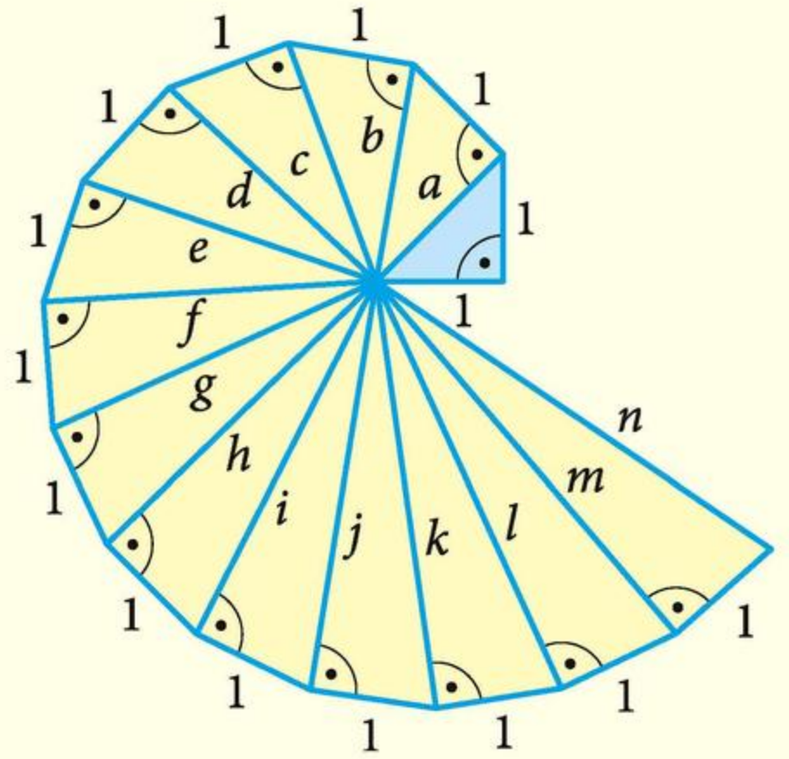
Model	A	B	C	D	E
I	550	130	1590	1000	?
II	580	130	?	1150	1800
III	620	130	2120	?	2000
IV	660	130	2370	1400	?

Zadania na deser

Spirale

Układając w różny sposób trójkąty, możemy otrzymać spirale, które nie tylko atrakcyjnie wyglądają, lecz także mają ciekawe własności geometryczne. Pierwsza z opisanych poniżej spiral nosi nazwę ślimaka Teodorosa na cześć starożytnego greckiego matematyka, który – jak się przypuszcza – pierwszy ją narysował.

1. Do trójkąta prostokątnego równoramiennego o przyprostokątnej długości 1 dorysowano kolejne trójkąty prostokątne o jednej z przyprostokątnych równej 1, w sposób pokazany na rysunku obok.
Wyznacz długości a, b, c, d oraz m i n.



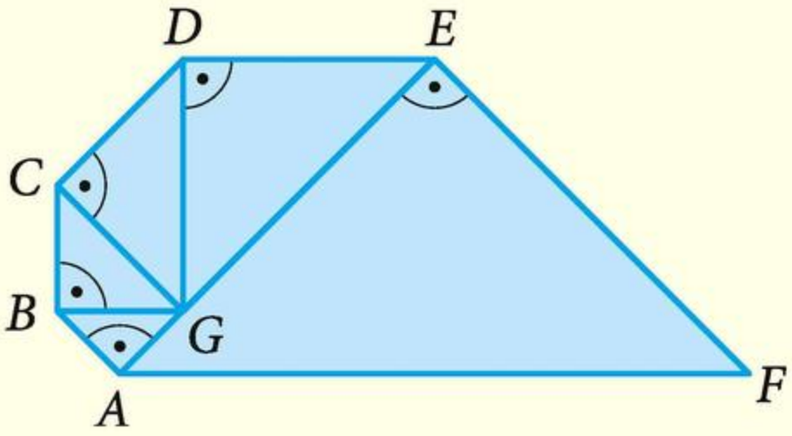
2. Z pięciu trójkątów prostokątnych równoramiennych zbudowano figurę przedstawioną na rysunku obok, przy czym bok AB ma długość 2.

Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. Obwód trójkąta BGC jest równy $4\sqrt{2} + 4$.

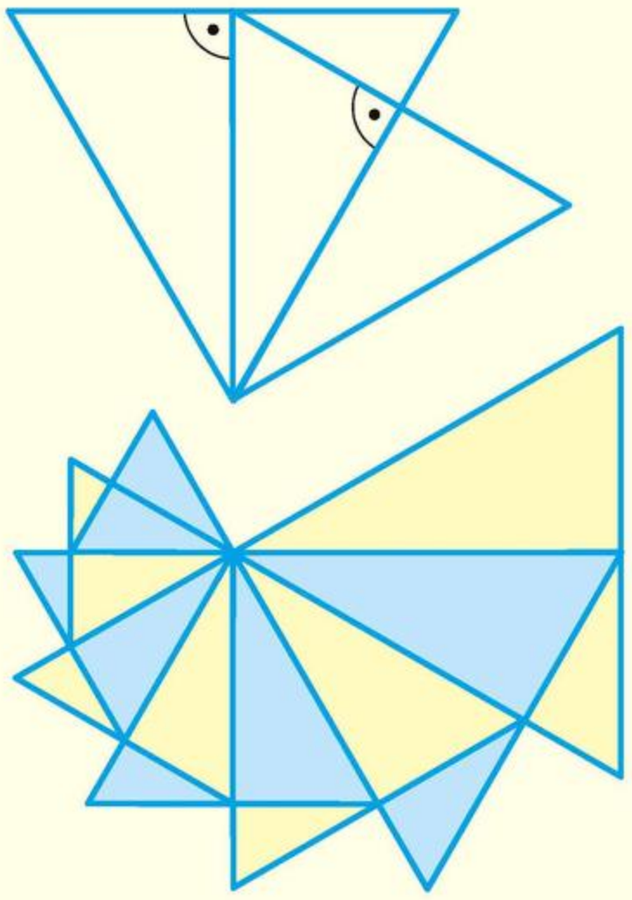
II. Obwód czworokąta $BGDC$ jest równy $12\sqrt{2}$.

III. Obwód sześciokąta $ABCDEF$ jest równy $14\sqrt{2} + 14$.



Przyjrzyj się, jak powstała spirala widoczna na rysunkach obok, zbudowana z trójkątów równobocznych.

Rysunki do zadań 3 i 4



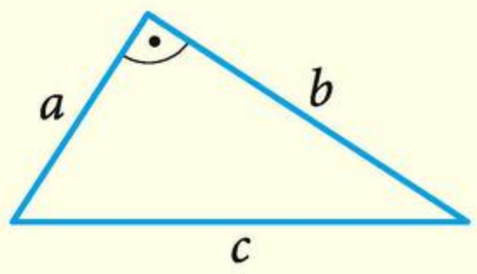
3. Podaj długości boków pięciu kolejnych trójkątów w spirali, jeśli długość boku największego trójkąta jest równa:

a) 1, **b)** $\sqrt{3}$.

4. Podaj wzór na długość boku trójkąta równobocznego, który powstaje w n-tym kroku rysowania spirali (rysunki obok). Przyjmij, że początkowy trójkąt równoboczny ma bok długości a.

Czy potrafisz oszacować?

Każdy bok trójkąta, nawet najdłuższy, jest krótszy niż suma pozostałych boków tego trójkąta. Także w trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna jest krótsza niż suma przyprostokątnych. Ale o ile jest krótsza? W poniższych zadaniach spróbuj to oszacować, a dopiero potem oblicz wynik z dokładnością do części dziesiątych.



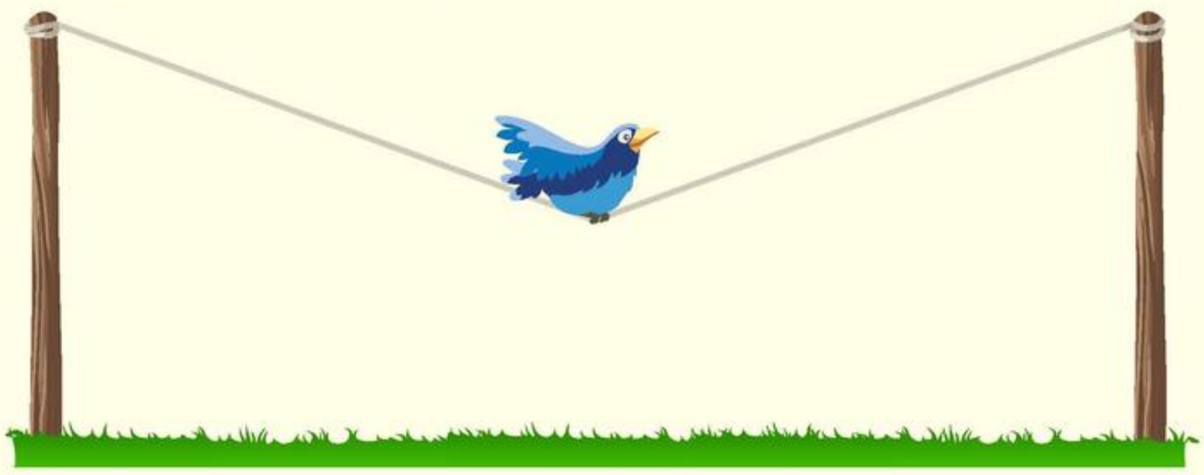
$c < a + b$

5. Prostokątny pokój ma wymiary 4 m × 5 m. W jednym z jego narożników umieszczono gniazdko elektryczne. Z tego miejsca trzeba przeciągnąć przedłużacz do przeciwległego narożnika. Można to zrobić w linii prostej, ale można również ułożyć przedłużacz wzdłuż ścian – wtedy mniej przeszkadza. Oszacuj, a następnie oblicz, o ile dłuższy musiałby być przedłużacz ułożony wzdłuż ścian.

6. Wiele miast ma prostopadłą siatkę ulic. Wyobraź sobie Kulturowo, w którym znajdują się m.in. Ministerstwo Baletu oraz Ministerstwo Śpiewu, a każda ulica biegnie z południa na północ lub ze wschodu na zachód. Aby się dostać z Ministerstwa Baletu do Ministerstwa Śpiewu, trzeba pokonać 4 km, jak pokazano na planie. Oszacuj, a następnie oblicz, o ile krótsza byłaby droga między tymi ministerstwami, gdyby można było ją przebyć w linii prostej.



7. Końce liny o długości 6 m są umocowane na wysokości 2 m. Odległość między punktami mocowania to 5 m. Środek liny obciążono. Oszacuj, a następnie oblicz, jak wysoko nad podłożem się on znajduje.



8. Rozwiąż poprzednie zadanie dla liny o długości 16 m i odległości między punktami mocowania 15 m (wysokość mocowań pozostaje bez zmian).

9. Grzesiek spieszy się i idzie z prędkością 6 km/h. Przed domem znajduje się prostokątny trawnik o wymiarach 5 m × 7 m, który chłopiec musi obejść. Oszacuj, a następnie oblicz, ile czasu by zyskał, gdyby przeszedł po trawniku na skróty (po przekątnej), zamiast obchodzić go chodnikiem.

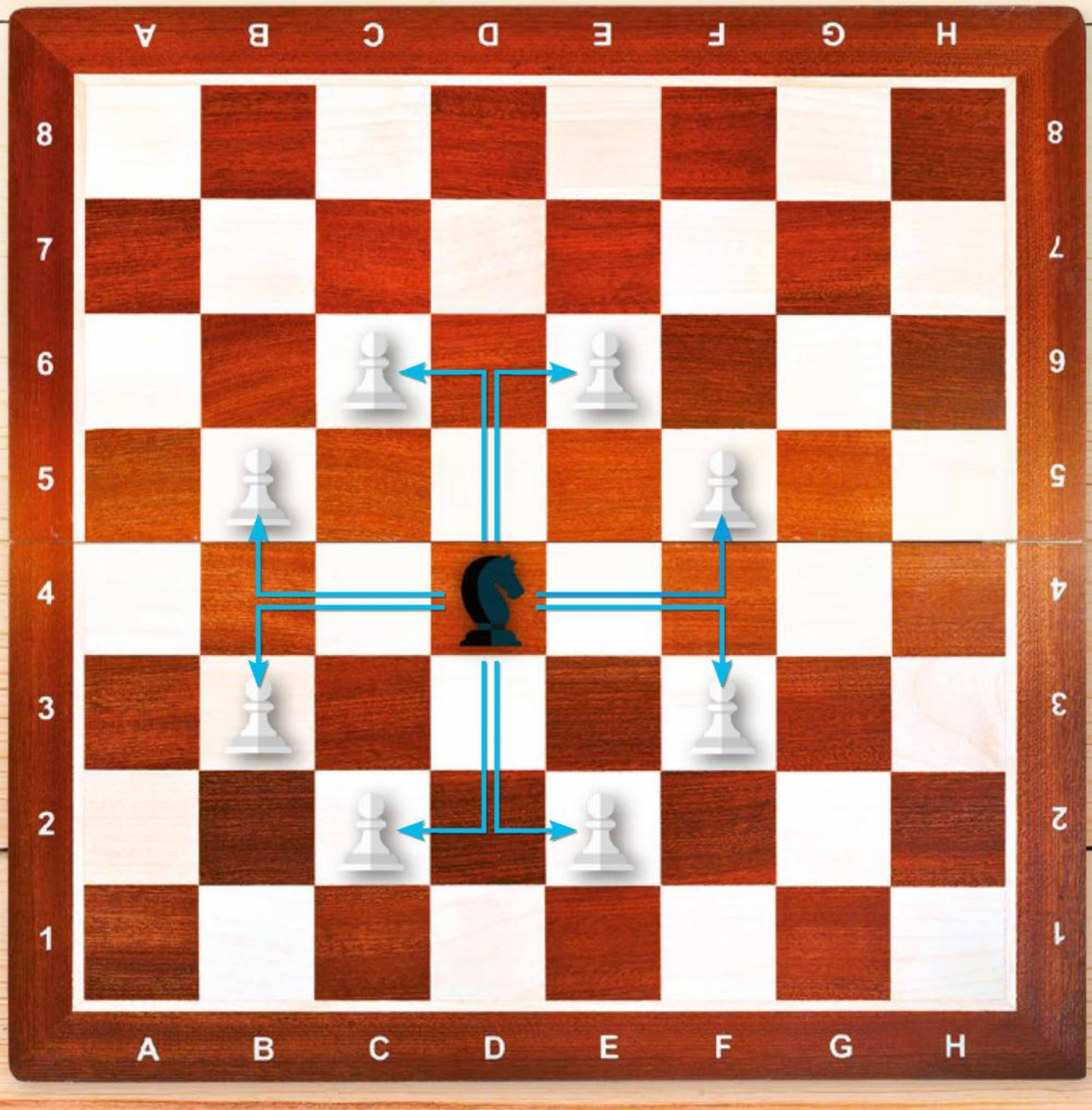
Geometria kartki w kratkę

Na dobry początek

Skoczek, zwany koniem, porusza się po szachownicy w najbardziej skomplikowany sposób ze wszystkich figur szachowych: o dwa pola w pionie lub poziomie i jedno pole w kierunku prostopadłym.



Na szachownicy widzisz białe pionki. Czarny koń może zbić każdy z tych pionków w jednym ruchu.



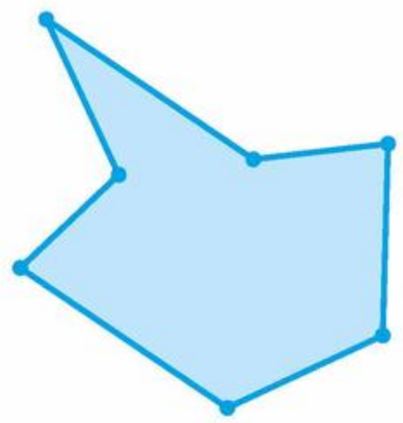


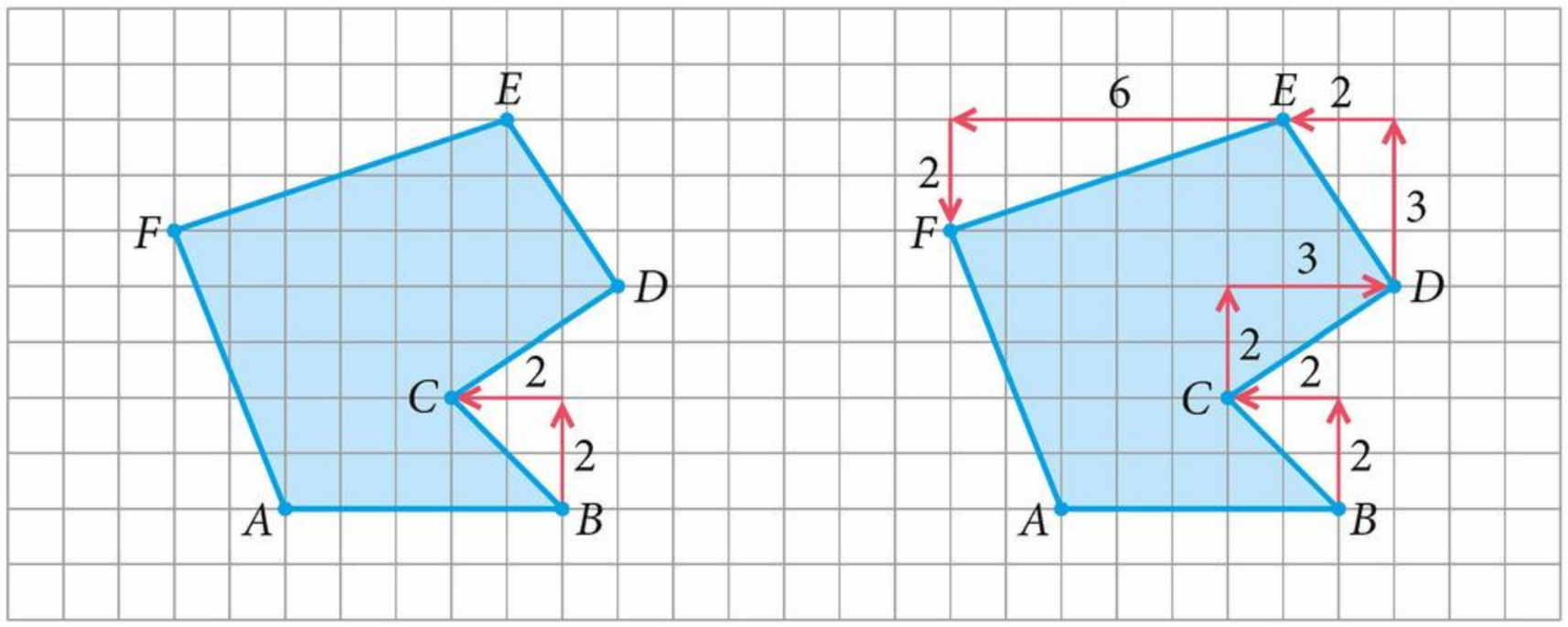
Pytania i polecenia

- Na polach D6 i G7 ustaw dwa czarne konie (możesz użyć np. monet).
- Następnie ustaw dwa białe konie na takich polach, aby każdy koń mógł zbić oba konie innego koloru.
- Te cztery figury szachowe są wierzchołkami czworokąta. Jaki to czworokąt? Uzasadnij odpowiedź.

Przerysowywanie figur

Aby dokładnie przerysować wielokąt narysowany na gładkim papierze, trzeba wielu przyrządów – linijki, kątomierza, cyrkla. Jeśli taki wielokąt jest narysowany na kratce, a jego wierzchołki znajdują się w **punktach kratowych**, czyli na skrzyżowaniu kratek, to dokładne przerysowanie figury na papierze w kratkę jest znacznie łatwiejsze. Na rysunku poniżej przedstawiono sposób przerysowywania takiej figury





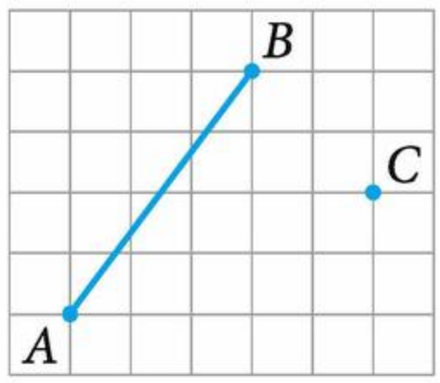
Odcinki równoległe

Kratka może również zastąpić ekierkę – wzdłuż poziomych i pionowych linii bez trudu narysujemy odcinki prostopadłe i równoległe. Takie odcinki możemy też rysować wzdłuż przekątnych kratek.

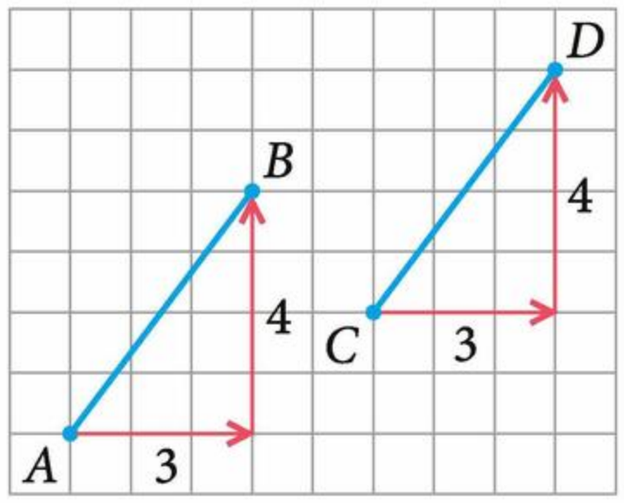
Kratkę można także wykorzystać do narysowania odcinka prostopadłego lub równoległego do dowolnego odcinka o wierzchołkach w punktach kratowych.

Przykład 1

Narysuj odcinek CD równy odcinkowi AB, równoległy do niego i położony tak, aby jego dolny koniec znalazł się w zaznaczonym punkcie C.

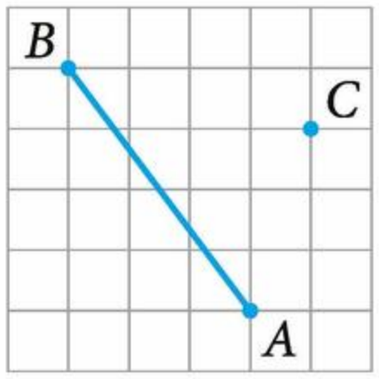


Możemy znaleźć końce odcinka podobnie jak wierzchołki wielokąta $ABCDEF$ na rysunku powyżej. Z punktu A do punktu B przesuwamy się o 3 kratki w prawo i o 4 kratki w górę, zatem z punktu C do punktu D przemieszczamy się w ten sam sposób.



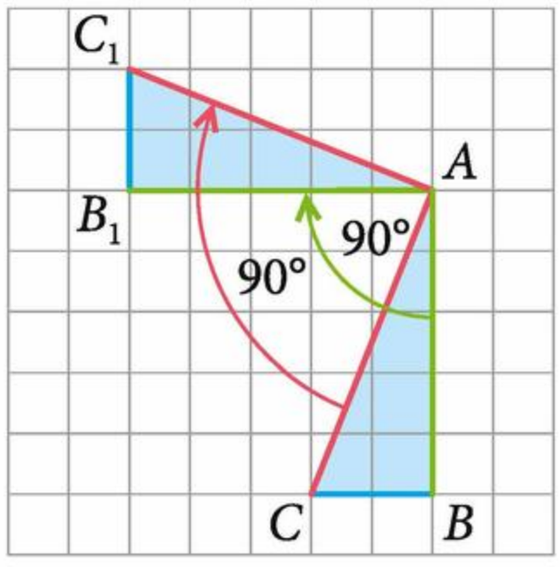
Ćwiczenie 1

Zaznacz w zeszycie w kratkę punkty A, B, C tak jak na rysunku. Narysuj odcinki CD i BM równe odcinkowi AB i równoległe do niego. Punkt B ma być dolnym końcem odcinka BM, a punkt C górnym końcem odcinka CD.



Odcinki prostopadłe

Narysujmy trójkąt prostokątny ABC, którego wierzchołki leżą w punktach kratowych, a przyprostokątne biegną po liniach kratki. Zauważmy, że dłuższa przyprostokątna AB leży na linii pionowej.
Narysujmy teraz ten trójkąt obrócony o $90°$, czyli tak, aby dłuższa przyprostokątna leżała poziomo. Nowy trójkąt ma wierzchołki A, B_1, C_1.



Zauważmy, że:

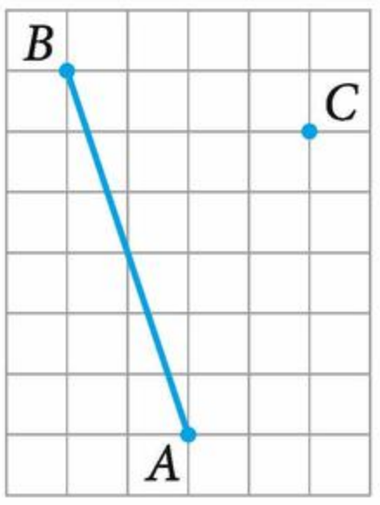
- **krótsze przyprostokątne obu trójkątów są prostopadłe ($CB \perp C_1B_1$),**
- **dłuższe przyprostokątne obu trójkątów są prostopadłe ($AB \perp AB_1$),**
- **przeciwprostokątne obu trójkątów są prostopadłe ($AC \perp AC_1$).**

To spostrzeżenie wykorzystamy do rysowania na kratce odcinków prostopadłych.

Przykład 2

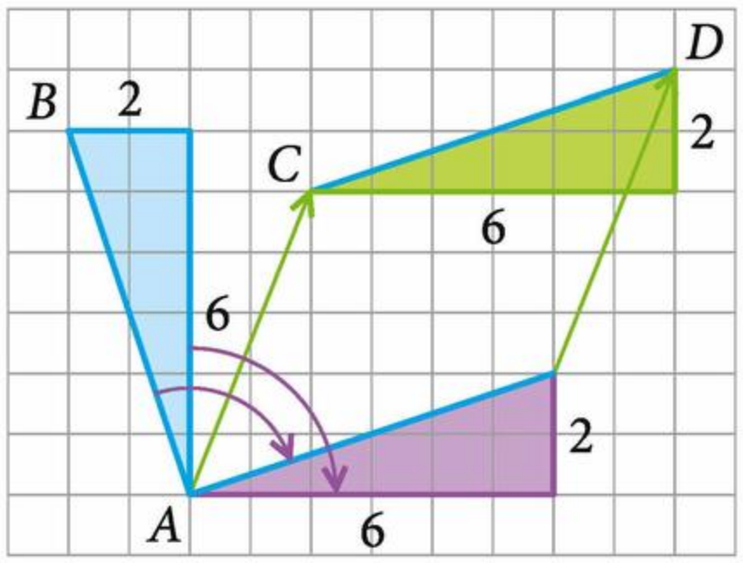
Narysuj odcinek CD równy odcinkowi AB i prostopadły do niego, ale nieprzecinający odcinka AB.

Odcinek AB możemy uznać za przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego o bokach biegnących po liniach kratek. Jest to **trójkąt o przyprostokątnych długości 6 kratek i 2 kratek**.



Obracamy go o 90°, a następnie **przesuwamy** tak, aby w punkcie C znalazł się wierzchołek, odpowiadający punktowi A.

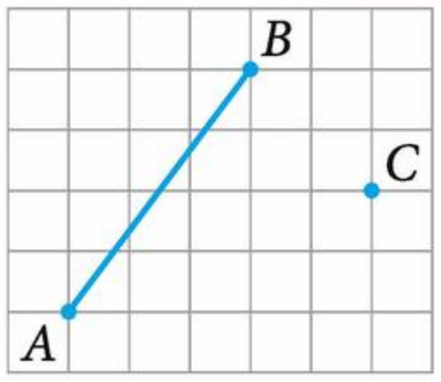
Przeciwprostokątna CD powstałego zielonego trójkąta jest prostopadła do AB i równa odcinkowi AB.



Zauważmy, że z punktu A do punktu B przesuwamy się o 6 kratek w górę i o 2 kratki w lewo, a z punktu C do punktu D – o 6 kratek w prawo i o 2 kratki w górę. Nie musisz rysować trójkątów – możesz je sobie tylko wyobrażać.

Ćwiczenie 2

Zaznacz w zeszycie w kratkę punkty A, B, C tak jak na rysunku obok. Narysuj odcinek CD równy odcinkowi AB i prostopadły do niego, ale nieprzecinający odcinka AB.



Dobra rada

Jeśli masz kłopot z wyobrażeniem sobie, jak jest położony trójkąt po obrocie, to obróć książkę lub zeszyt!

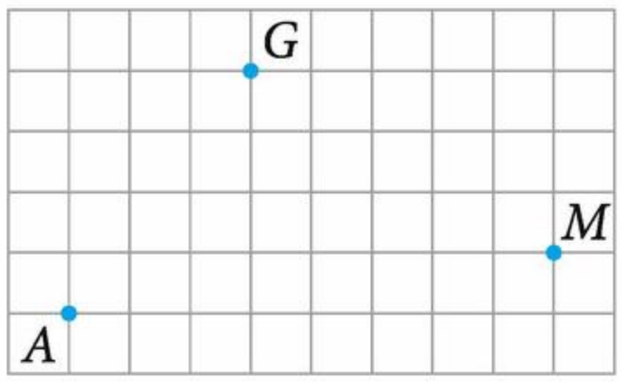


Figury na kratkach

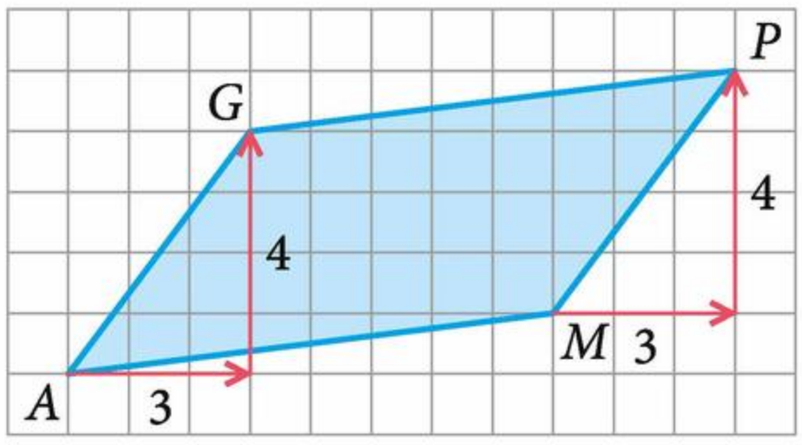
Umiejętność rysowania na kratce prostych prostopadłych i równoległych przydaje się podczas rysowania figur o różnych własnościach.

Przykład 3

Dane są wierzchołki A, G, M równoległoboku $AGPM$. Narysuj ten równoległobok.



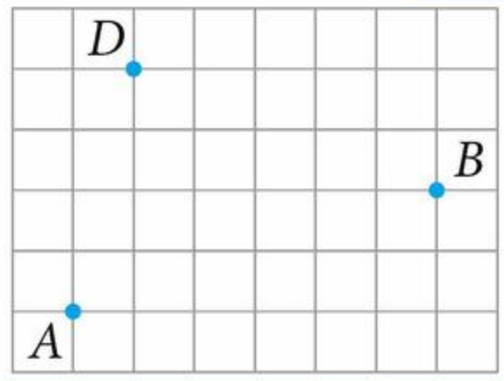
Żeby narysować równoległobok, musimy znać położenie jego czwartego wierzchołka, czyli punktu P. Odcinki AG i MP są przeciwległymi bokami w równoległoboku $AGPM$, więc muszą być równe i równoległe.



Szukamy zatem takiego punktu P, żeby odcinek MP był równy i równoległy do odcinka AG, a punkt M był jego dolnym końcem – jak w przykładzie 1. Następnie rysujemy równoległobok.

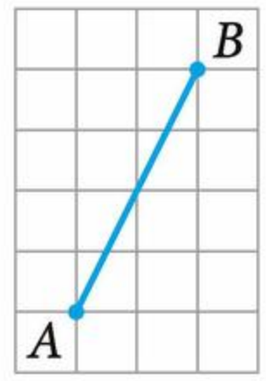
Ćwiczenie 3

Zaznacz w zeszycie w kratkę punkty A, B, D tak samo jak na rysunku obok. Znajdź punkt C taki, aby czworokąt $ABCD$ był równoległobokiem.



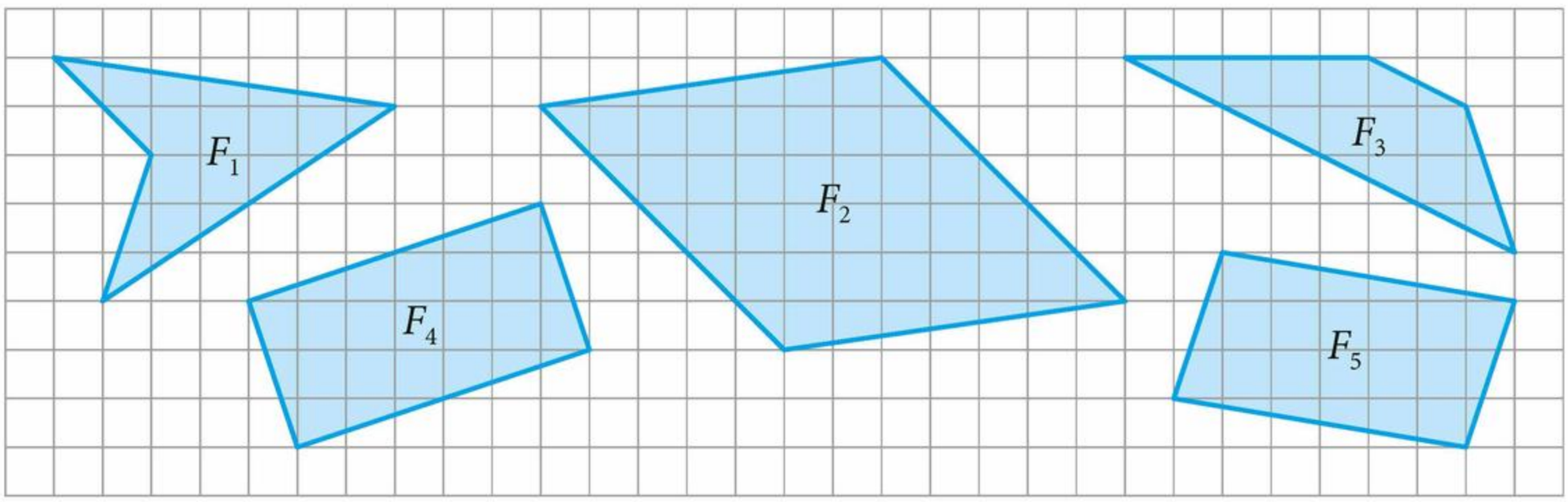
Zadania

1. Przerysuj do zeszytu w kratkę odcinek AB, a następnie narysuj:
a) odcinek CD tej samej długości i równoległy do AB,
b) odcinek EF tej samej długości i prostopadły do AB,
c) odcinek GH dwa razy dłuższy od AB i równoległy do niego,
d) odcinek IJ dwa razy dłuższy od AB i prostopadły do niego.



2. Narysuj na kratce ukośny odcinek AB o wierzchołkach w punktach kratowych. Następnie narysuj odcinki:
a) BC i AD prostopadłe do AB,
b) EF prostopadły do AB i przecinający AB,
c) GH prostopadły do AB i nieprzecinający AB.

3. Przerysuj figury do zeszytu w kratkę. Wskaż wśród nich prostokąt, trapez, równoległobok i romb. Uzasadnij odpowiedź.



4. Narysuj czworokąt $ABCD$ zgodnie z opisem. Określ rodzaj otrzymanego czworokąta.
a) Zaznacz punkt A w dowolnym punkcie kratowym. Przesuń się o dwie kratki w prawo i o trzy w dół, a otrzymasz punkt B. Z punktu B przesuń się o pięć kratek w prawo i o trzy w górę – otrzymasz punkt C. Stamtąd przesuń się o pięć kratek w lewo i o trzy kratki w górę, aby otrzymać punkt D.
b) Zaznacz w dowolnym punkcie kratowym punkt A. Aby otrzymać punkt C, przesuń się z punktu A o cztery kratki w lewo. Z punktu C przesuń się o dwie kratki w prawo i o trzy w górę – otrzymasz punkt B. Stamtąd przesuń się o sześć kratek w dół – otrzymasz punkt D.

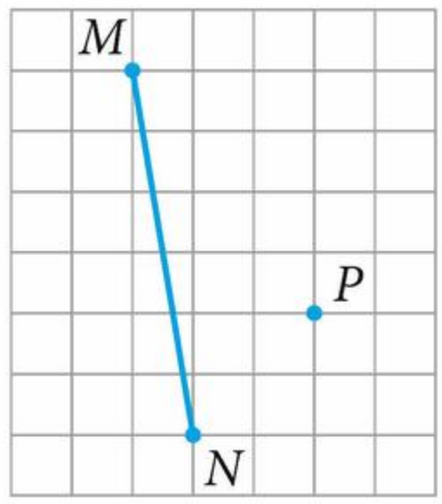
5. Zaznacz na kratce punkty A, B, C leżące w punktach kratowych i położone tak, aby odcinki AB i AC były ukośne, a punkt C nie leżał na odcinku AB. Następnie narysuj:

a) odcinek CK równy odcinkowi AB, równoległy do AB i położony tak, aby punkt C był jego dolnym końcem,

b) odcinek CL równy odcinkowi AB, równoległy do AB i położony tak, aby punkt C był jego górnym końcem,

c) odcinek CP równy odcinkowi AB i równoległy do AB. To zadanie ma dwa rozwiązania. Podaj je.

6. Przerysuj rysunek do zeszytu w kratkę. Narysuj odcinek PR równy odcinkowi MN i prostopadły do MN. To zadanie ma dwa rozwiązania. Podaj je.



7. Narysuj na kratce ukośny odcinek AB o wierzchołkach w punktach kratowych. Narysuj prostokąt $ABCD$, w którym $BC = 2AB$. To zadanie ma dwa rozwiązania. Podaj je.

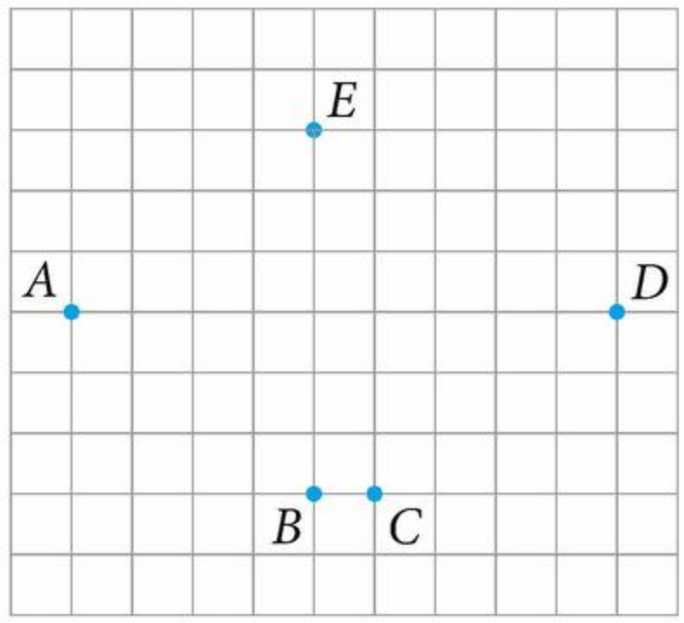
8. Znajdź wymienione figury o wierzchołkach w punktach zaznaczonych na rysunku.

a) trójkąt prostokątny

b) trapez równoramienny

c) równoległobok

d) pięć trójkątów rozwartokątnych

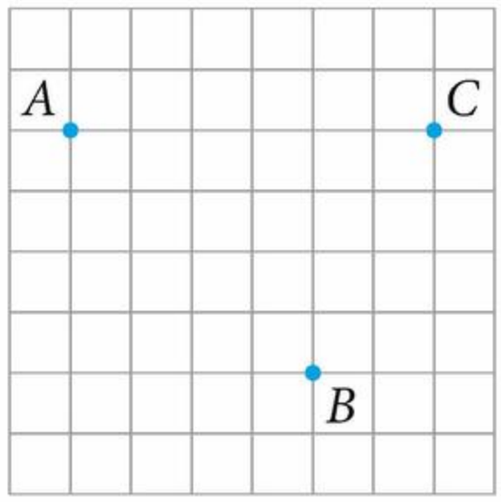


9. Zaznacz w zeszycie punkty M i P tak jak na rysunku do zadania 6.

a) Znajdź sześć takich punktów kratowych: A, B, C, D, E, F, aby każdy z trójkątów: MPA, MPB, ..., MPF był trójkątem prostokątnym.

b) Zaznacz jeszcze dwa punkty o tej własności.

10. Zaznacz w zeszycie w kratkę punkty A, B, C tak jak na rysunku obok. Znajdź punkt kratowy D taki, aby:



a) czworokąt $ABCD$ był równoległobokiem,

b) czworokąt $ADBC$ był równoległobokiem,

c) czworokąt $ACBD$ był trapezem równoramiennym o podstawach AC i BD,

d) czworokąt $ADBC$ był trapezem prostokątnym,

e) czworokąt $ABCD$ był trapezem prostokątnym,

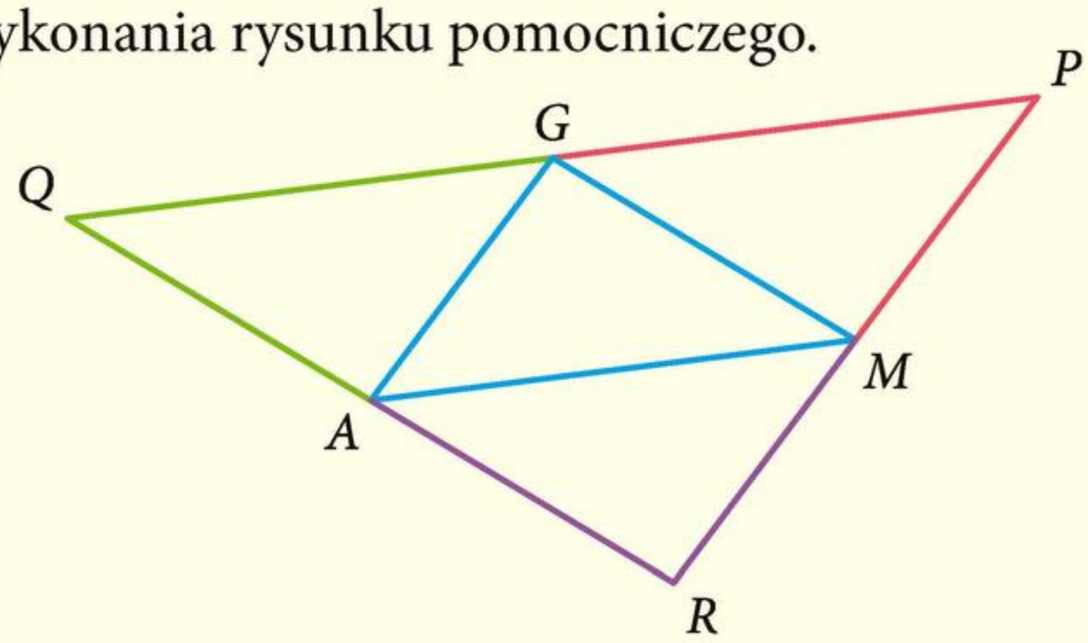
f) punkt D był wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABD, w którym $AD = BD$ (podaj trzy różne rozwiązania).

Dla dociekliwych

O punktach A, G, M danych w przykładzie 3 wiadomo, że są wierzchołkami pewnego równoległoboku. Jak narysować ten równoległobok?

Tym razem nie wiemy, które z trzech odcinków: AG, GM czy AM są bokami równoległoboku, a który jest jego przekątną, więc musimy rozpatrzeć różne przypadki.

Zaczynamy od wykonania rysunku pomocniczego.



Jak widać, istnieją trzy możliwe rozwiązania. Jedno z nich znaleźliśmy w przykładzie 3 – tam przekątną był odcinek GM. Podobnie znajdujemy pozostałe dwa rozwiązania.

1. Narysuj te równoległoboki.

2. Zaznacz w zeszycie w kratkę punkty A, B, C tak jak na rysunku do ćwiczenia 3. Znajdź taki punkt D, aby punkty A, B, C i D były wierzchołkami równoległoboku. Rozpatrz wszystkie przypadki.

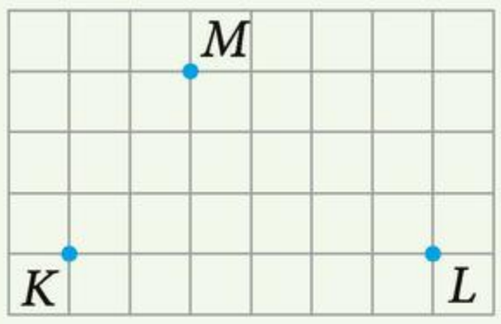
Czy już umiem?

I. Przerysuj do zeszytu w kratkę odcinek AB. Narysuj kwadrat $ABCD$. Znajdź dwa rozwiązania.



II. Punkty K, L, M są trzema wierzchołkami pewnego równoległoboku. Zaznacz je według wzoru w zeszycie w kratkę i narysuj ten równoległobok.

Uwaga. Zadanie ma trzy rozwiązania. Znajdź przynajmniej jedno z nich.



III. Zaznacz na kratce punkty K, L, M z poprzedniego zadania. Znajdź taki punkt kratowy N, aby czworokąt:

a) $KLMN$ był trapezem prostokątnym,
b) $KLNM$ był trapezem równoramiennym.

IV. Oblicz: $\sqrt{121}$, $\sqrt{333^2}$, $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$, $\sqrt{20}-\sqrt{5}$.

2 Punkty w układzie współrzędnych

Na dobry początek >

Dwóch piratów wyruszyło na poszukiwanie skarbu. Jeden drugiemu nie ufał za grosz. Aby mieć pewność, że kompan nie sięgnie po złoto bez zgody drugiego, podzielili się zdobytymi informacjami. Jeden wziął mapę, drugi – opis, jak z niej korzystać.



Na mapie jest narysowana siatka, na której 1 bok kratki odpowiada 100 krokom.

Opis

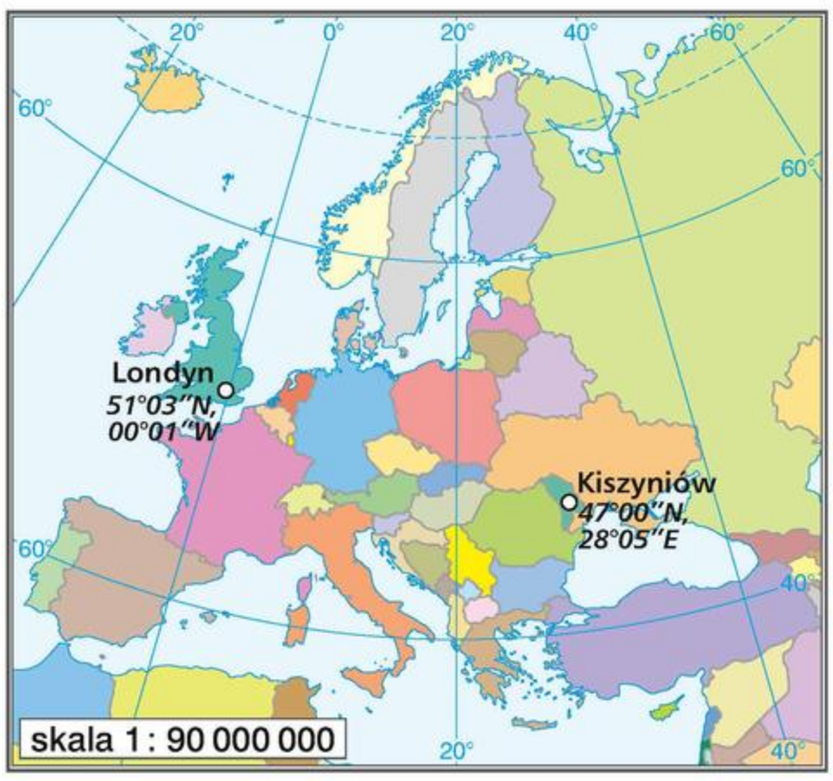
Stań w punkcie (4, 4).
Idź 300 kroków na zachód.
Idź 100 kroków na południe.
Tam jest skarb.

Pytania i polecenia

- W którym punkcie znajduje się skarb?
- Czy potrafisz zaszyfrować punkt na mapie, w którym zaznaczono różę wiatrów?
- Czy potrafisz opisać, na czym polega szyfr?

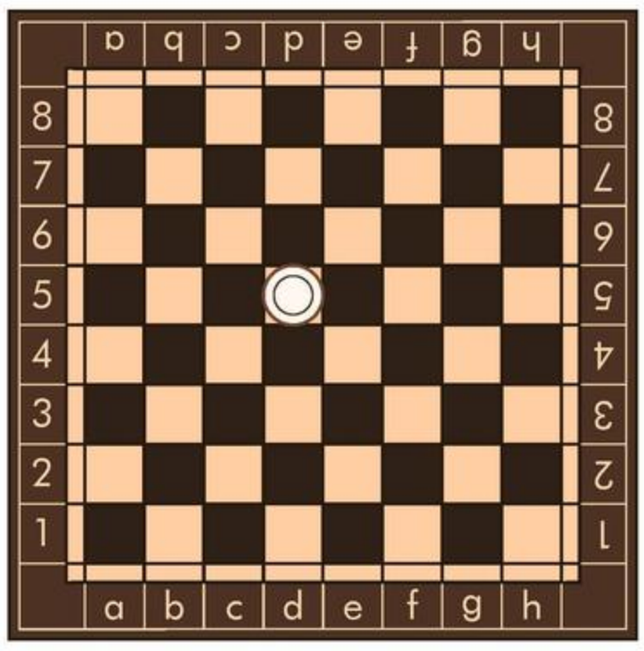
W różnych sytuacjach potrzebny jest dokładny opis położenia punktu.

Położenie jakiegoś miejsca na Ziemi określamy, podając jego szerokość i długość geograficzną.



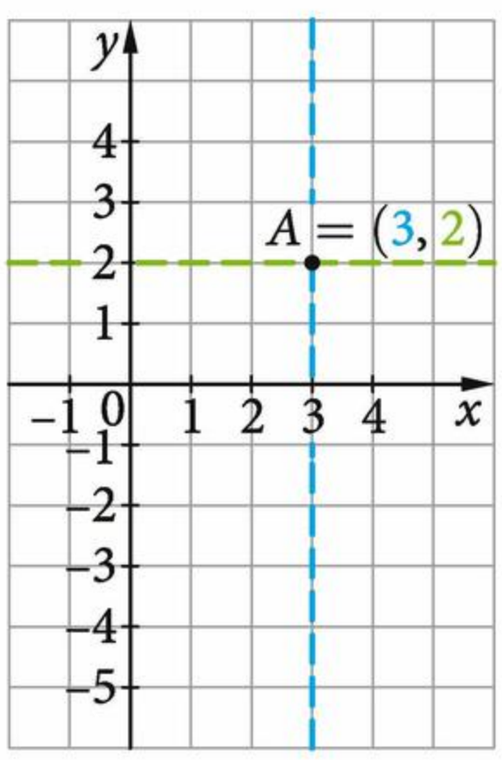
Kiszyniów: 47°00'N 28°05'E
Londyn: 51°03'N 0°01'E

W szachach i warcabach położenie figur i pionków na planszy określają linie pól w pionie oznaczone literami oraz linie pól w poziomie oznaczone cyframi. Dzięki temu każde pole ma swoją nazwę.



Pionek znajduje się na polu **d5**.

W matematyce do określania położenia punktów na płaszczyźnie używamy układu współrzędnych.



Czy wiesz, że…

Prostokątny układ współrzędnych nazywany jest również **kartezjańskim**. Nazwa ta pochodzi od nazwiska francuskiego matematyka, fizyka i filozofa René Descartes'a (czytaj: re**ne** de**ka**rta) – Kartezjusza (1596–1650), który wymyślił sposób opisu położenia punktów na płaszczyźnie za pomocą liczb. Połączył w ten sposób algebrę z geometrią, co spowodowało ogromny rozwój matematyki w XVII wieku.

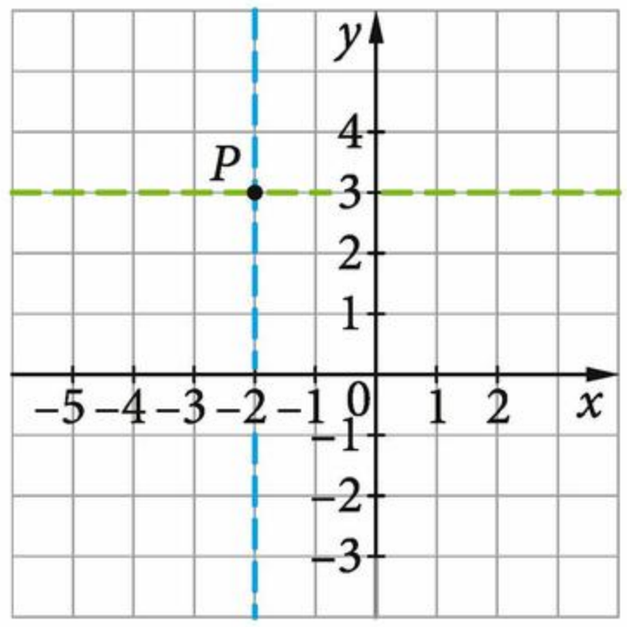
Osie układu współrzędnych są prostopadłe, ich wspólny punkt O nazywamy **początkiem układu współrzędnych**. Na każdej z osi wybieramy jednostkę. Każdemu punktowi na płaszczyźnie z określonym układem współrzędnych odpowiada para liczb, np. $A = (3, 2)$. Liczby te nazywamy **współrzędnymi punktu**.

Na rysunku powyżej pierwszą współrzędną punktu A jest 3. Odczytujemy ją z osi poziomej x. Drugą współrzędną, którą odczytujemy z osi pionowej y, jest 2.

Jak zapisujemy współrzędne punktu?
$A = (3, 2)$,
co czytamy:
punkt A o współrzędnych trzy, dwa.

Przykład 1

Zapisz współrzędne punktu P zaznaczonego w układzie współrzędnych na rysunku.



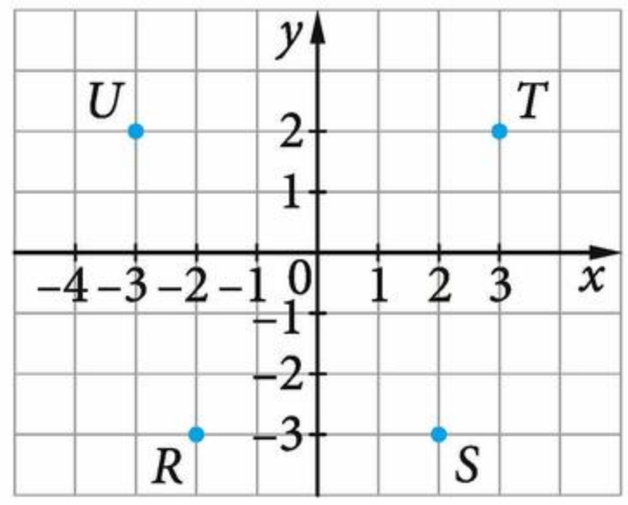
Aby odczytać współrzędną x, rysujemy albo wyobrażamy sobie prostą przechodzącą przez punkt P i prostopadłą do osi x (przerywana linia niebieska). Z rysunku odczytujemy, że przecina ona oś x w punkcie -2. Jest to pierwsza współrzędna punktu P.

Aby odczytać współrzędną y, rysujemy albo wyobrażamy sobie prostą przechodzącą przez punkt P i prostopadłą do osi y (przerywana linia zielona). Jej punkt przecięcia z osią y ma współrzędną 3.

Zatem punkt P ma współrzędne $x = -2$ i $y = 3$, co zapisujemy $P = (-2, 3)$.

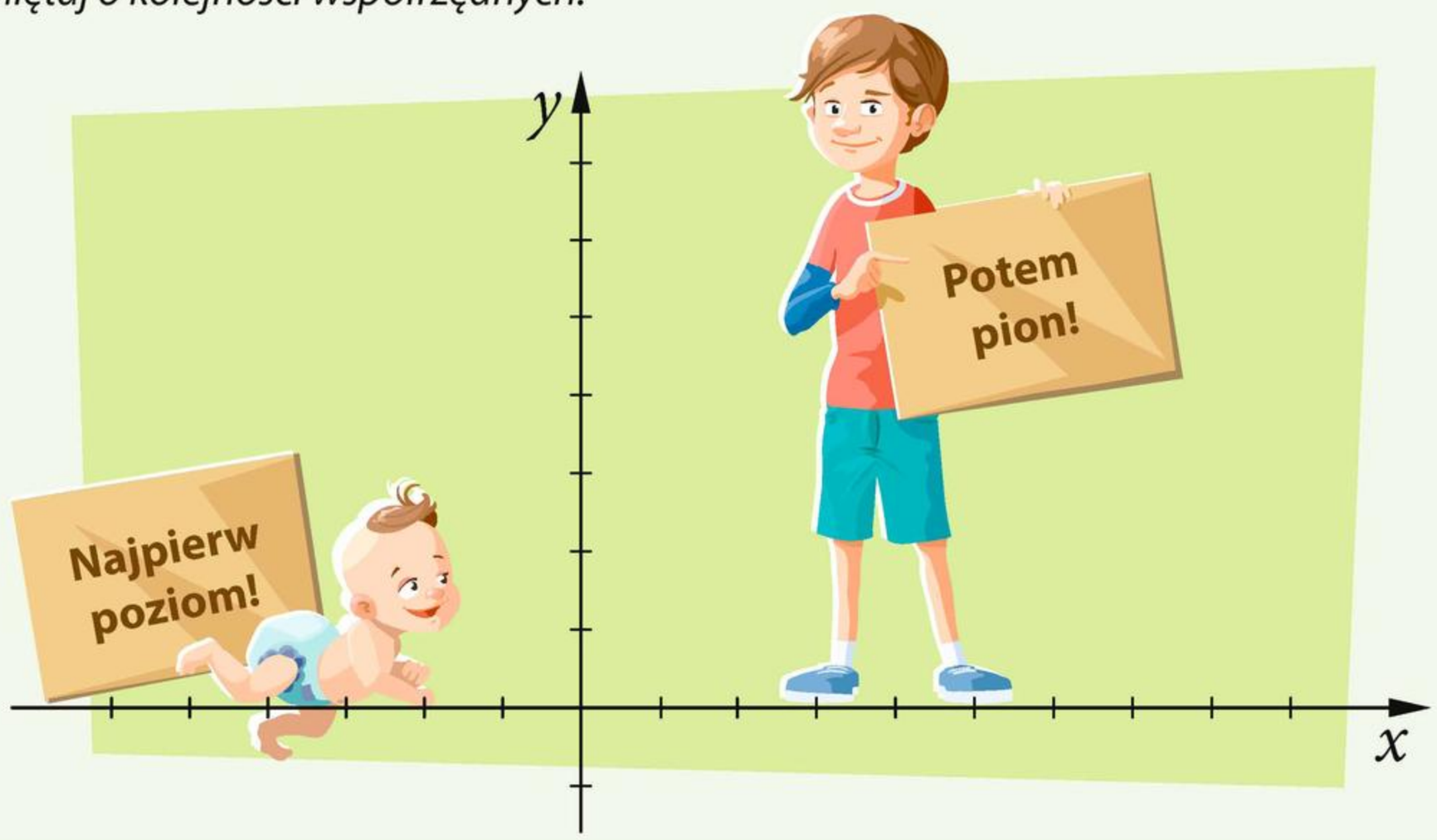
Ćwiczenie 1

Zapisz w zeszycie współrzędne punktów R, S, T i U zaznaczonych na rysunku.



Dobra rada

Pamiętaj o kolejności współrzędnych.



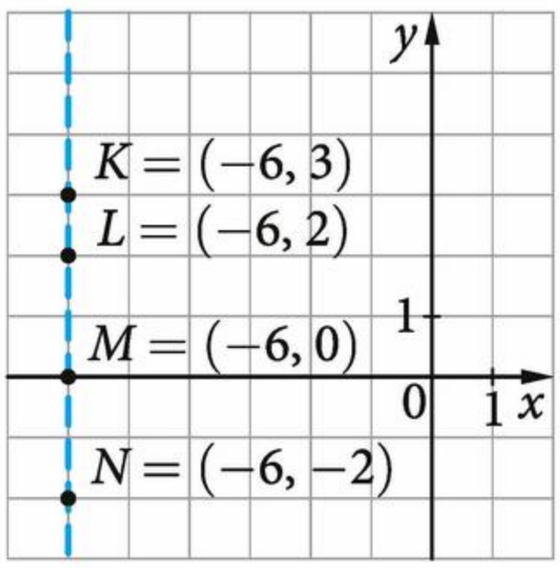
Przykład 2

Zaznacz w układzie współrzędnych punkt $A = (-6, 4)$.

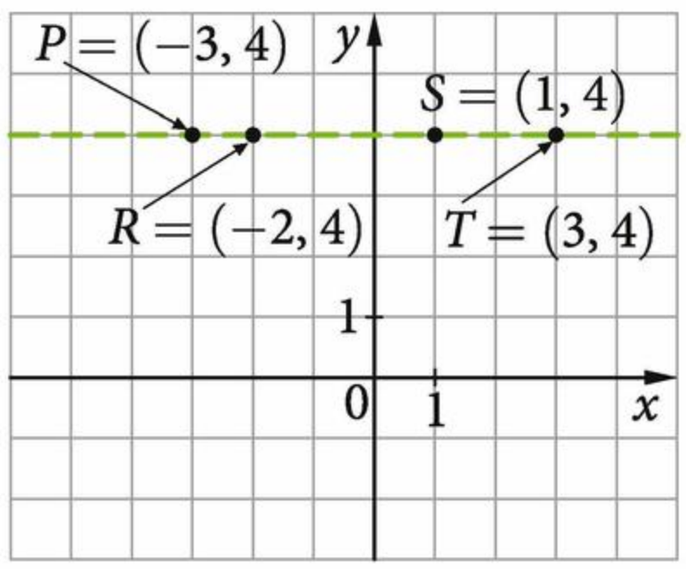
Rysujemy układ współrzędnych. Najpierw znajdujemy na osi x pierwszą współrzędną szukanego punktu: -6. Zauważmy, że wszystkie punkty mające pierwszą współrzędną -6 położone są na prostej prostopadłej do osi x zaznaczonej przerywaną niebieską linią (rys. 1).

Następnie zaznaczamy na osi y drugą współrzędną punktu: 4. Punktów o drugiej współrzędnej 4 jest nieskończenie wiele i wszystkie one leżą na prostej prostopadłej do osi y (przerywana zielona linia, rys. 2).

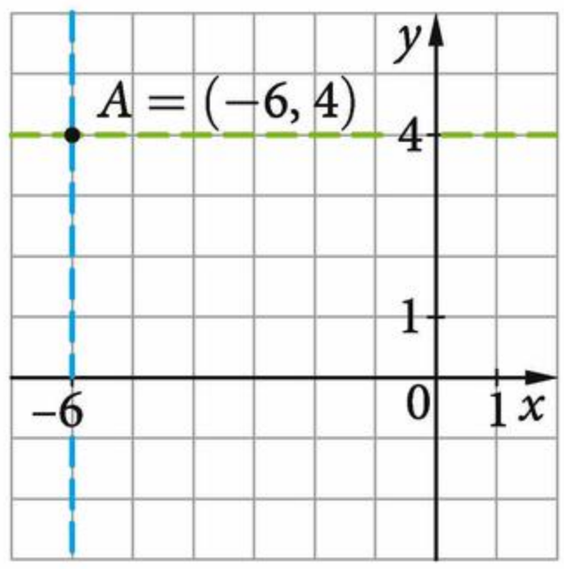
Szukany punkt A leży zarówno na linii niebieskiej, jak i zielonej, a więc jest to ich punkt przecięcia (rys. 3).



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Gdy nabierzesz wprawy, nie musisz rysować przerywanych linii – wystarczy je sobie wyobrazić.

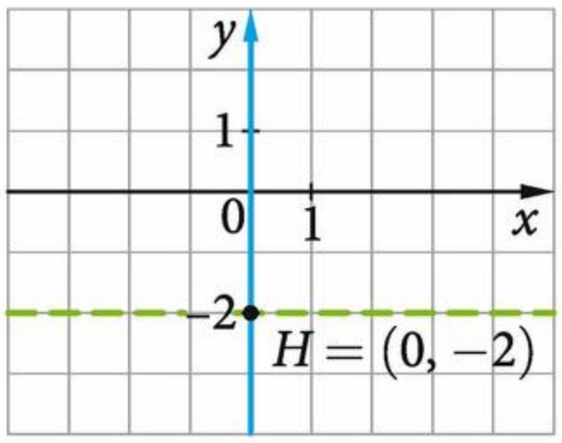
Ćwiczenie 2

Zaznacz w układzie współrzędnych punkty: $B = (-3, 2)$, $C = (-2, -1)$, $D = (4, -3)$.

Przykład 3

Zaznacz w układzie współrzędnych punkt $H = (0, -2)$.

Punkt o pierwszej współrzędnej 0 leży na osi y. Druga współrzędna punktu H jest równa -2, więc H jest punktem przecięcia osi y i prostej zaznaczonej zieloną przerywaną linią.

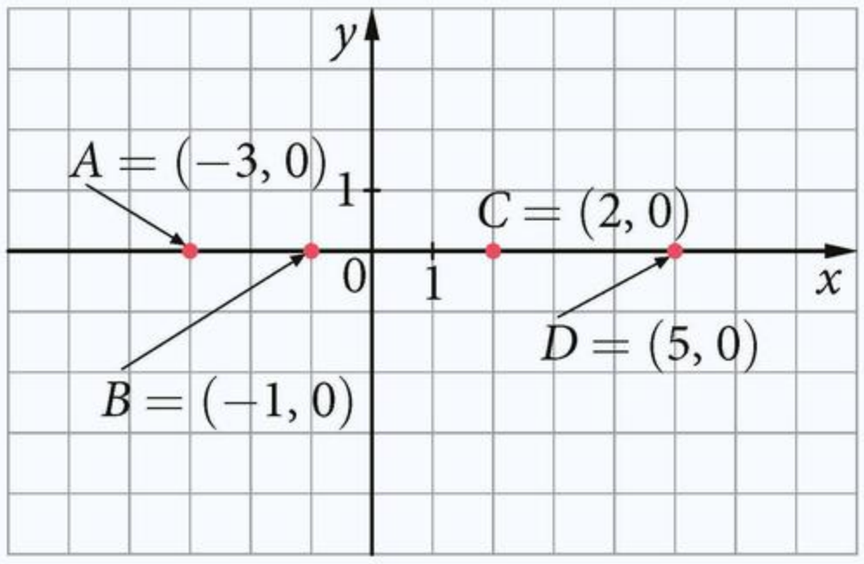


Ćwiczenie 3

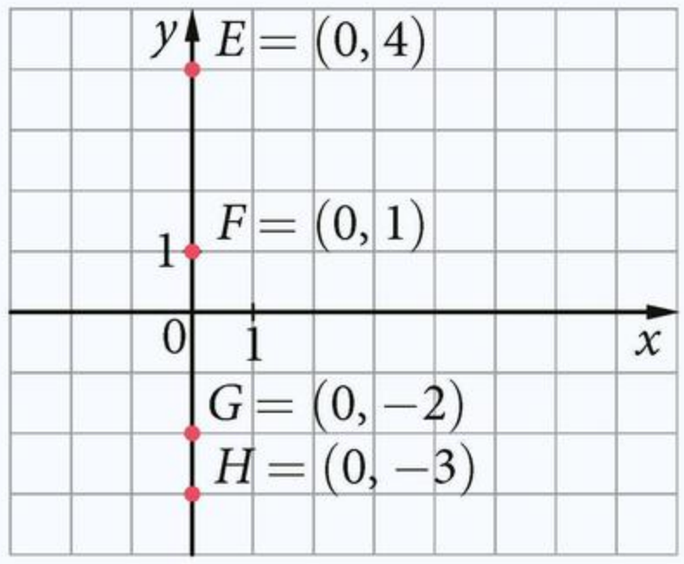
Zaznacz w układzie współrzędnych punkty: $K = (-1, 0)$, $L = (3, 0)$ i $M = (0, 5)$.

Zapamiętaj

Wszystkie punkty leżące na osi x mają drugą współrzędną (y) równą 0.



Wszystkie punkty leżące na osi y mają pierwszą współrzędną (x) równą 0.

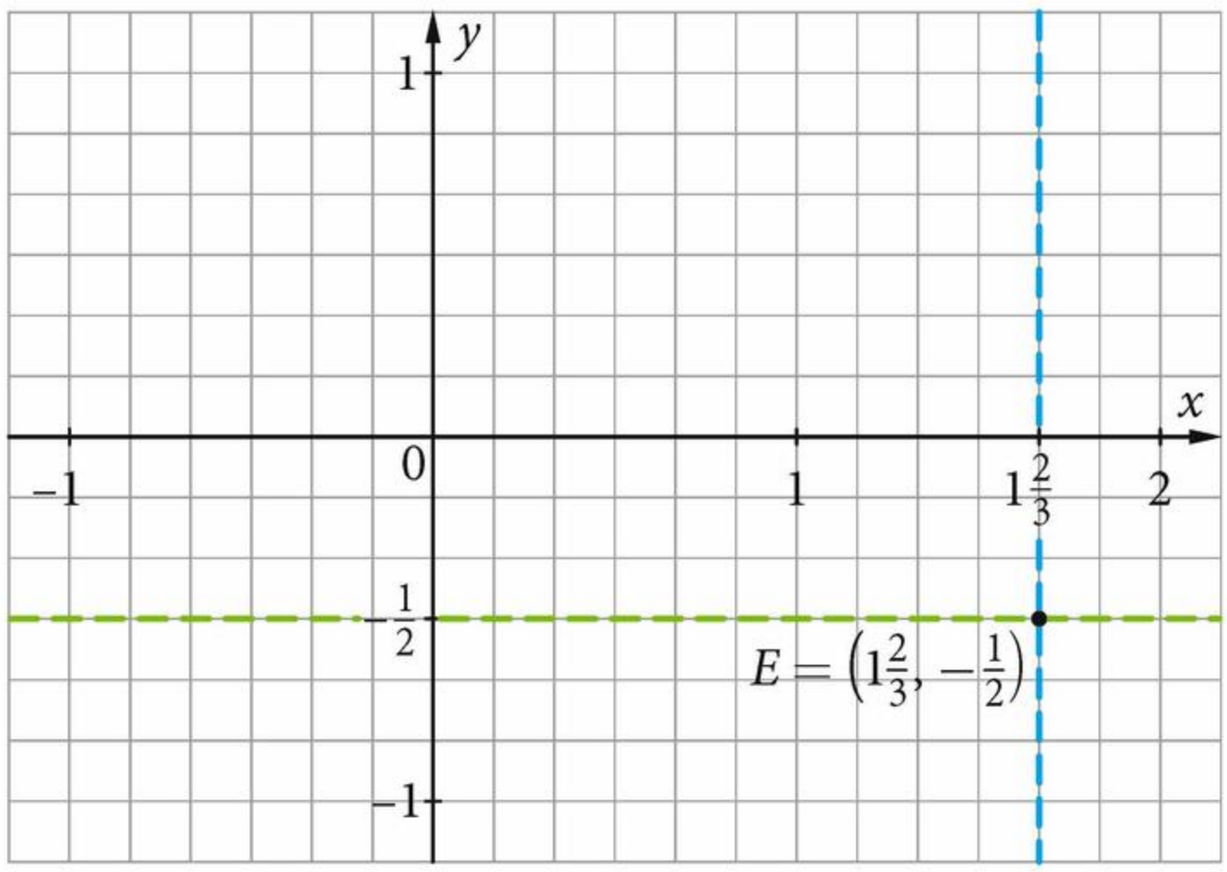


Przykład 4

Zaznacz w układzie współrzędnych punkt $E = \left(1\frac{2}{3},\ -\frac{1}{2}\right)$.

Aby zaznaczyć w układzie współrzędnych punkt E, postępujemy tak samo jak w przykładzie 2. Punkt E ma współrzędne ułamkowe, więc warto wybrać odpowiednią jednostkę na osiach układu współrzędnych.

Współrzędne szukanego punktu E są liczbami zawierającymi ułamki o mianowniku 3 i 2, więc wygodnie jest przyjąć jednostkę równą 6 kratek tak jak na rysunku poniżej.



Ćwiczenie 4

Zaznacz w układzie współrzędnych punkty $F = \left(1\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4}\right)$ i $G = \left(-2{,}5;\ -\frac{1}{4}\right)$.

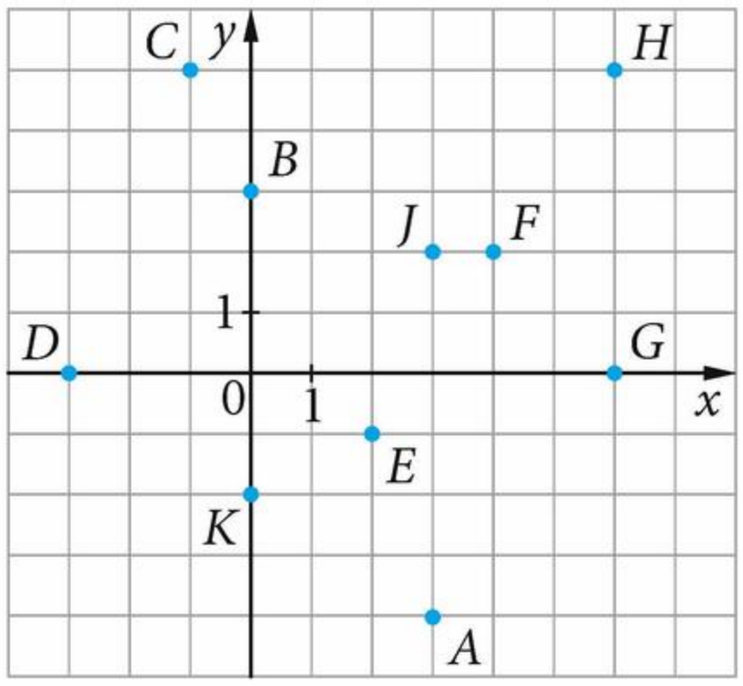
Zadania

1. **a)** Odczytaj współrzędne punktów zaznaczonych w układzie współrzędnych.

b) Wypisz wszystkie pary punktów, których współrzędna y jest taka sama. Jak są położone takie punkty?

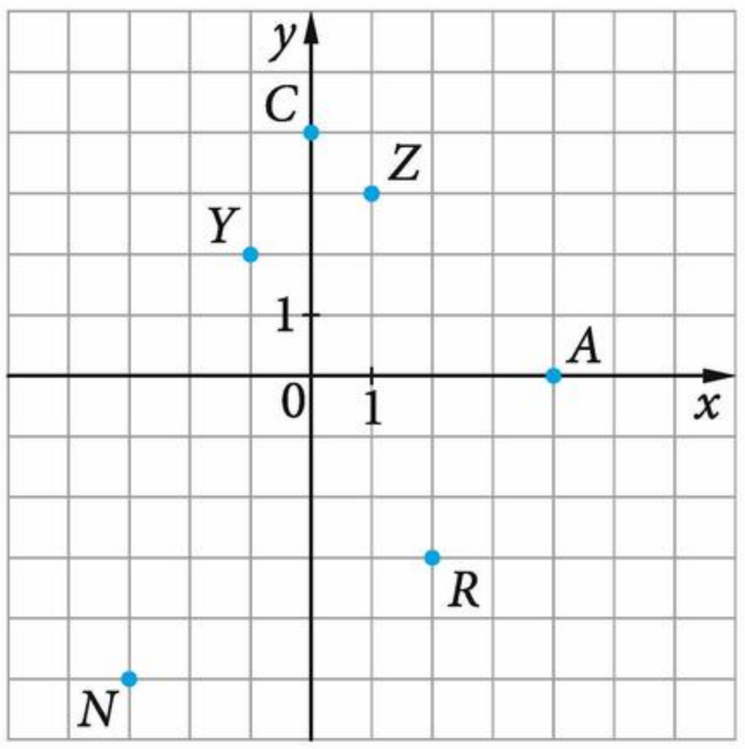
c) Wypisz wszystkie punkty, których pierwsza współrzędna jest równa zero. Jak są położone takie punkty?

d) Wypisz wszystkie punkty, których druga współrzędna jest równa zero. Jak są położone takie punkty?



2. Rozszyfruj wiadomość zakodowaną na rysunku obok:

$(-3, -5), (4, 0), (2, -3), (0, 4), (-1, 2), (1, 3)$.



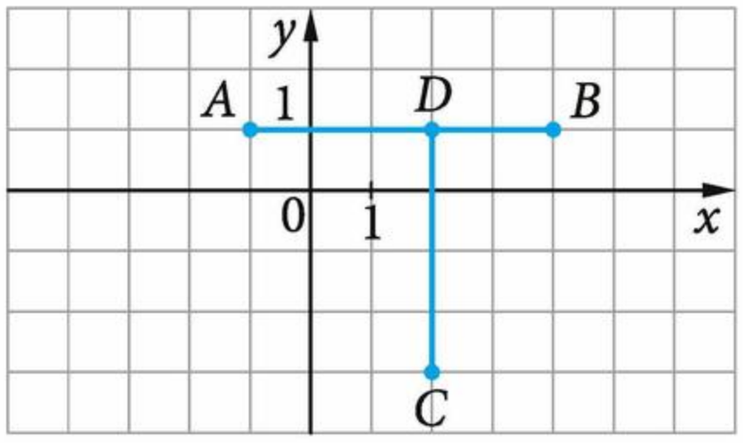
3. Narysuj układ współrzędnych i zaznacz w nim punkty:

$A = (-1, -3)$, $D = (4{,}5; 6)$,

$B = (3, -1\frac{1}{2})$, $E = (-3, 0)$,

$C = (-4, 4)$, $F = (0, 2)$.

4. W układzie współrzędnych (rysunek obok) narysowane są odcinki AB i CD. Dla każdego z nich podaj współrzędne czterech dowolnych punktów, które na nim leżą.



5. W układzie współrzędnych zaznacz punkty: $K=(0,0), L=(3,4), M=(6,0), N=(3,-4)$. Połącz kolejno te punkty odcinkami. Jakim czworokątem jest figura $KLMN$?

6. Odpowiedz, w którym punkcie: A, B, C czy D się znajdziesz, jeżeli z punktu $(3, 1)$ przemieścisz się o 11 jednostek w górę, a następnie o 7 jednostek w lewo i 13 jednostek w dół.

$A = (-1, -6)$ $B = (-1, -2)$ $C = (-4, -1)$ $D = (-7, -2)$

7. Punkty $A = (-7, -5), B = (2, -5), C = (2, -1)$ są wierzchołkami prostokąta $ABCD$. Podaj współrzędne punktu D. Narysuj ten prostokąt w układzie współrzędnych.

8. Punkty $A = (-3, -2)$ i $B = (-3, 4)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Zaproponuj współrzędne wierzchołka C, tak aby powstały trójkąt był:

a) rozwartokątny, **b)** ostrokątny, **c)** prostokątny, **d)** równoramienny.

9. Narysuj układ współrzędnych.

a) Zaznacz w nim odcinki o końcach w punktach o podanych współrzędnych. Zaznaczone odcinki utworzyły fragment wyrazu. Jaki to wyraz?

(3, 3) i (5, 1)	(−12, 3) i (−10, 1)	(−2, 3) i (2, 3)	(9, 1) i (11, 1)
(0, −1) i (0, 3)	(8, −1) i (10, 3)	(−7, −1) i (−5, 3)	(−10, 1) i (−8, 3)
(−6, 1) i (−4, 1)	(7, −1) i (7, 3)	(−12, −1) i (−12, 3)	(10, 3) i (12, −1)

b) Podaj współrzędne końców odcinków pozwalających dokończyć wyraz, którego fragment odczytaliśmy w podpunkcie a).

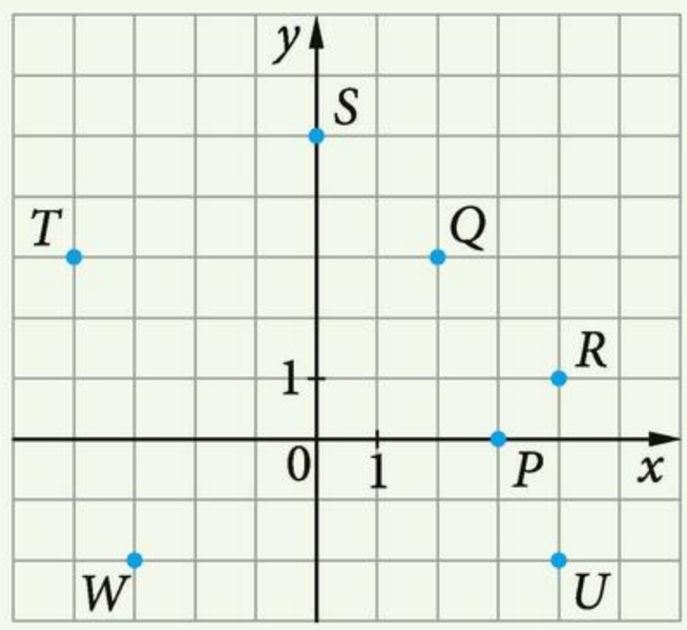
Dla dociekliwych

1. Punkty $B = (137, -98)$, $C = (137, -58)$, $D = (107, -58)$ są wierzchołkami prostokąta $ABCD$. Podaj współrzędne wierzchołka A.

2. Przekątna AC prostokąta z zadania 1 jest bokiem kwadratu $ACEF$. Podaj współrzędne pozostałych wierzchołków kwadratu $ACEF$. Rozpatrz wszystkie przypadki.

Czy już umiem?

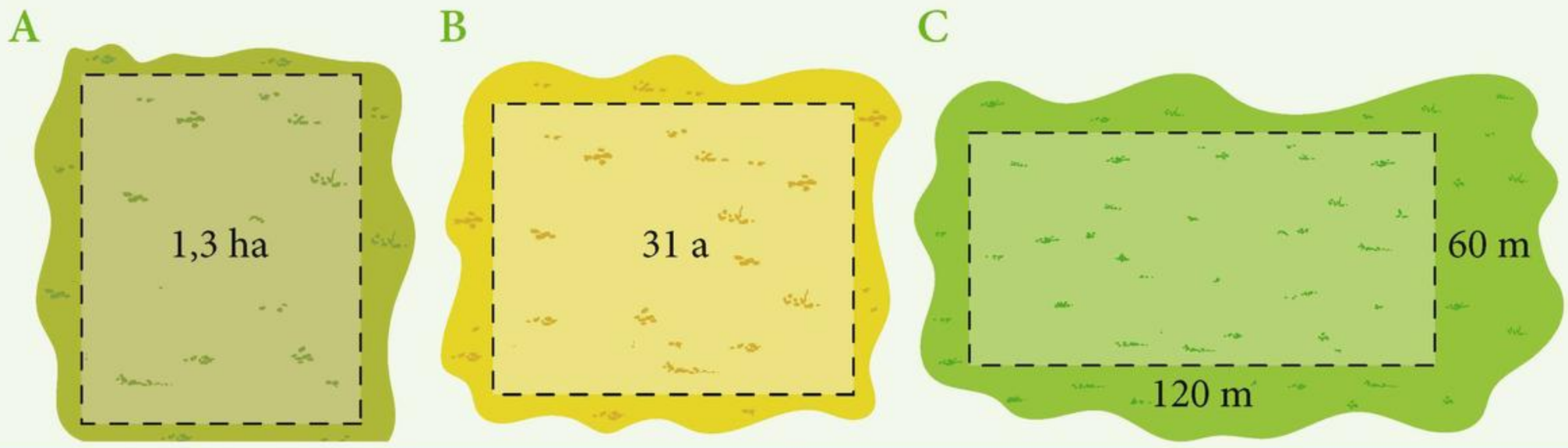
I. Odczytaj współrzędne punktów zaznaczonych w układzie współrzędnych.



II. Narysuj układ współrzędnych, a następnie zaznacz w nim punkty: $A = (-3, -6)$, $B = (-3, 3)$, $C = (-2, 5)$, $D = (-2, -4)$. Połącz punkty odcinkami, tak aby otrzymać czworokąt $ABCD$. Nazwij powstałą figurę.

III. Punkty $A = (-5, -6)$, $B = (1, -6)$, $C = (1, -1)$ są wierzchołkami prostokąta $ABCD$. Podaj współrzędne wierzchołka D. Narysuj ten prostokąt w układzie współrzędnych.

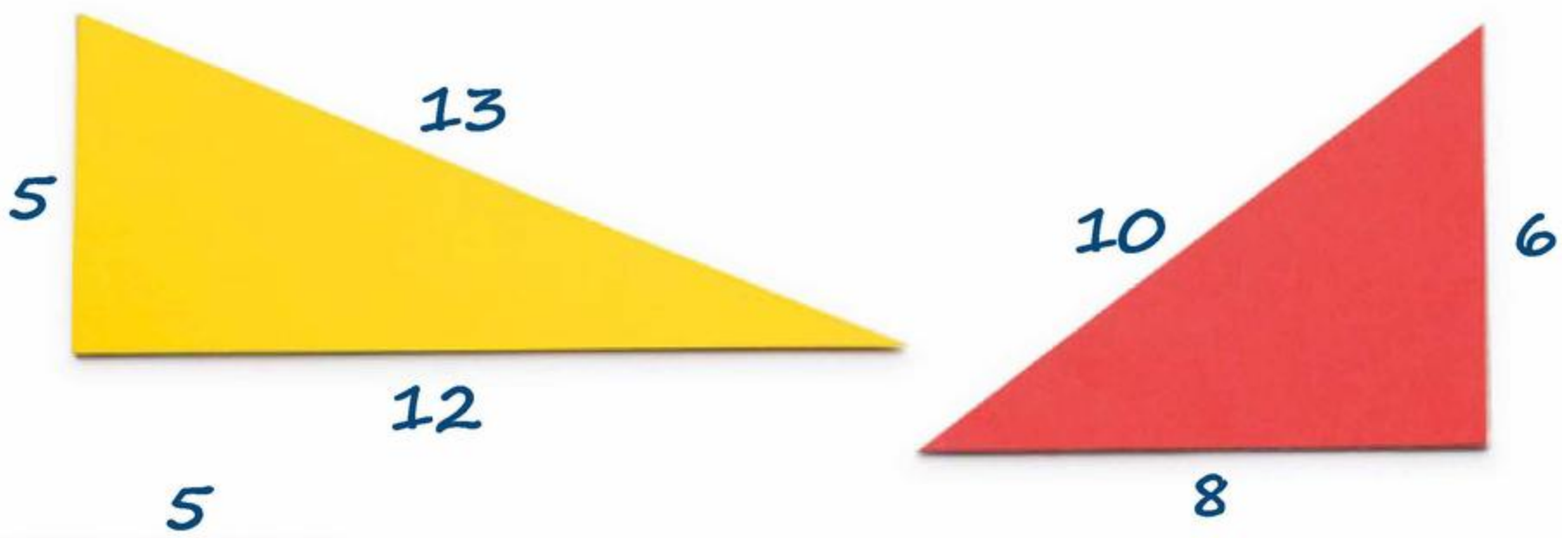
IV. Uporządkuj pola od najmniejszego do największego.



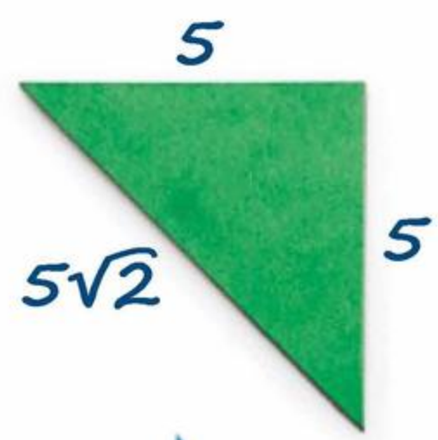
3 Długości i pola w układzie współrzędnych

Na dobry początek

Wykorzystajmy trójkąty prostokątne do znalezienia odległości między punktami w układzie współrzędnych.

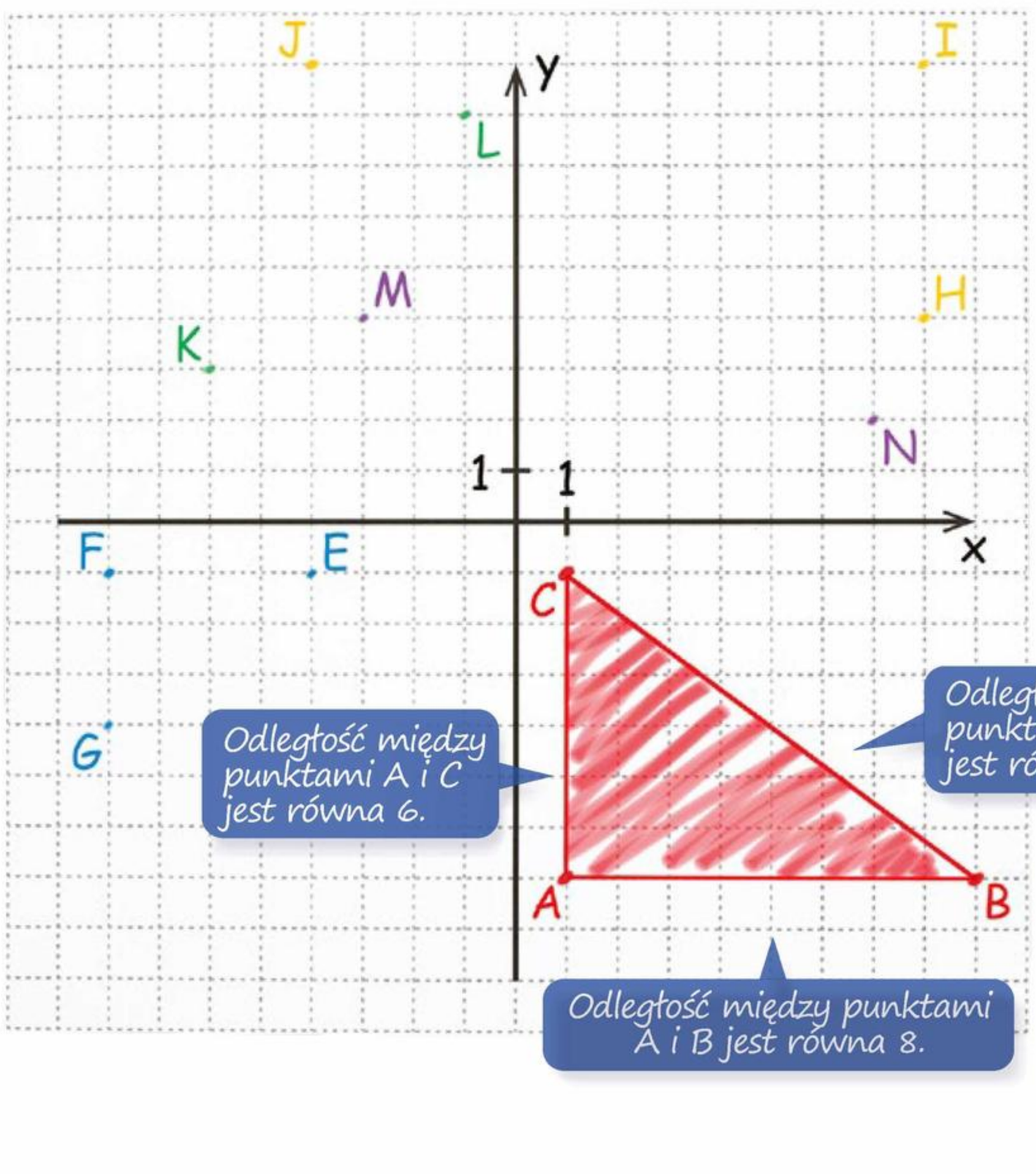


Trójkąt o bokach długości 6, 8, 10 świetnie nadaje się do odczytania odległości między punktami A, B i C.







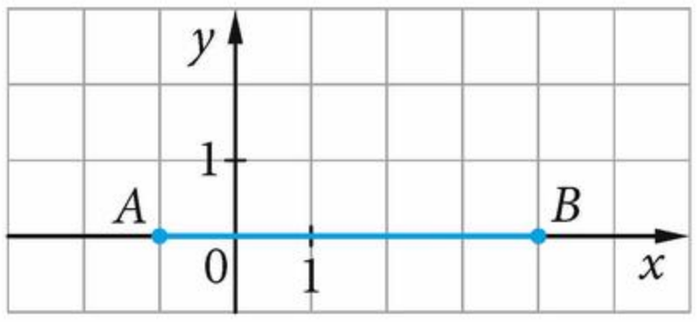


Pytania i polecenia

- Ustal odległości między:
  a) trzema żółtymi punktami,
  b) trzema niebieskimi punktami,
  c) dwoma zielonymi punktami,
  d) dwoma fioletowymi punktami.

Długość odcinka w układzie współrzędnych

Długość odcinka narysowanego w układzie współrzędnych określamy w jednostce wyznaczonej na osiach tego układu.



$AB = 5$



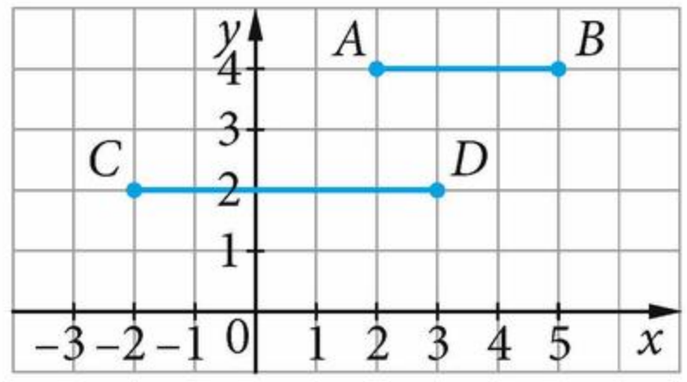
$AB = 5$

Powyżej narysowano dwa układy współrzędnych. W każdym z nich narysowano odcinek AB o długości 5 jednostek. Zwróć uwagę, że długość odcinka wyrażamy w jednostkach zaznaczonych na osi, a nie w centymetrach.

Przykład 1

Podaj długości odcinka AB o końcach $A = (2,4)$ i $B = (5,4)$ oraz odcinka CD o końcach $C = (-2, 2)$ i $D = (3, 2)$.

Po narysowaniu odcinka AB w układzie współrzędnych liczymy jednostki między punktami A i B. Długość odcinka AB wynosi 3 jednostki, co zapisujemy $AB = 3$.



Długość odcinka CD wynosi 5 jednostek, czyli $CD = 5$.

Zauważ, że w tej sytuacji długości odcinków możemy także obliczyć za pomocą odejmowania: $AB = 5 - 2 = 3$, $CD = 3 - (-2) = 3 + 2 = 5$.

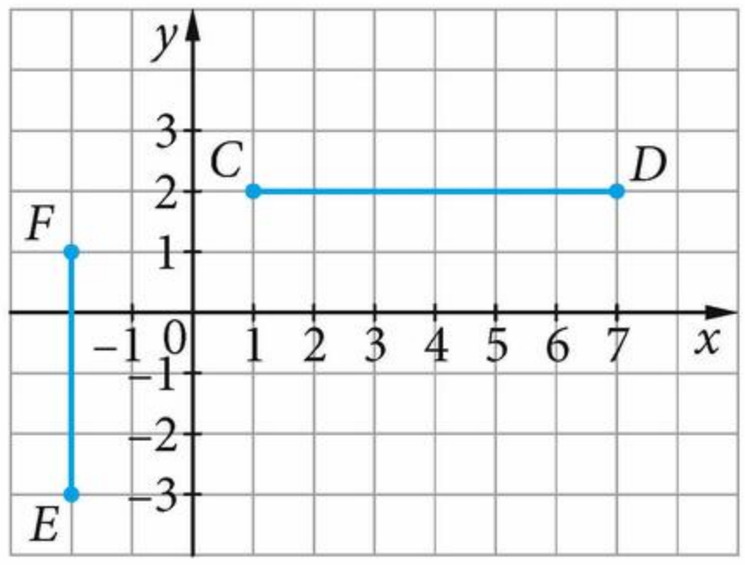
Odcinek AB jest równoległy do osi x, dlatego łatwo można podać jego długość. Podobnie jest z odcinkami równoległymi do osi y.

Ćwiczenie 1

Z rysunku obok odczytaj długość odcinka o końcach w podanych punktach.

a) $C = (1,2)$ i $D = (7,2)$

b) $E = (-2,-3)$ i $F = (-2,1)$



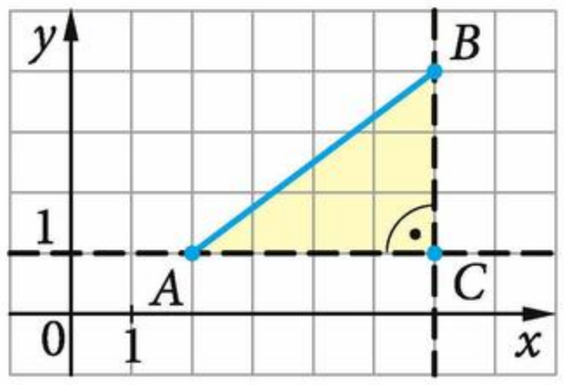
Aby wyznaczyć długości odcinków nierównoległych do osi układu współrzędnych, możemy skorzystać z twierdzenia Pitagorasa.

Przykład 2

E

Oblicz odległość między punktami $A = (2, 1)$ i $B = (6, 4)$.

Poprowadźmy przez punkt A prostą równoległą do osi x, a przez punkt B – prostą równoległą do osi y. Punkt przecięcia tych prostych oznaczmy literą C. Zwróćmy uwagę, że otrzymany trójkąt ACB jest prostokątny, a odcinek AB jest jego przeciwprostokątną.



$AC = 4$ i $BC = 3$, więc na mocy twierdzenia Pitagorasa:

$$AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

Odległość między punktami A i B wynosi 5.

Ćwiczenie 2

Narysuj w układzie współrzędnych odcinek AB, a następnie oblicz jego długość.

a) $A = (4, 1), B = (1, 5)$ **b)** $A = (-5, -2), B = (7, 3)$ **c)** $A = (-3, 1), B = (6, -2)$

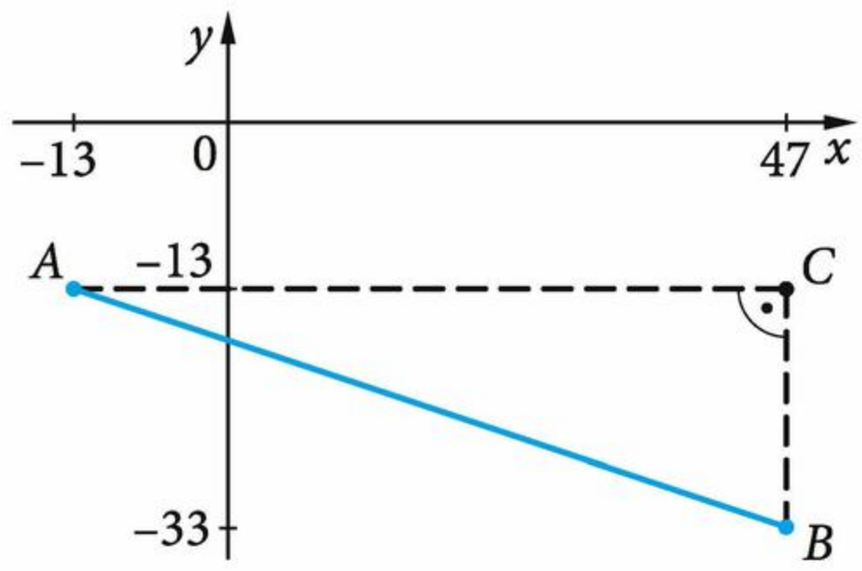
Gdy obliczamy odległości między punktami, nie musimy zawsze wykonywać dokładnego rysunku. Czasami wystarczy naszkicować albo tylko wyobrazić sobie położenie tych punktów w układzie współrzędnych.

Przykład 3

Oblicz odległość między punktami $A = (-13, -13)$ i $B = (47, -33)$.

Szkicujemy układ współrzędnych. Zaznaczamy w nim przybliżone położenie punktów A i B.

Zaznaczamy taki punkt C, aby odcinki AC i BC były równoległe do osi układu. Wtedy trójkąt ABC jest prostokątny. Obliczamy długości jego boków.



$AC = 47 - (-13) = 60$

$BC = -13 - (-33) = -13 + 33 = 20$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC:

$AB^2 = 60^2 + 20^2 = 3600 + 400 = 4000$

$AB = \sqrt{4000} = 10\sqrt{40} = 20\sqrt{10}$

Kolejność odejmowania: od większej współrzędnej odejmujemy mniejszą.

Dobra rada

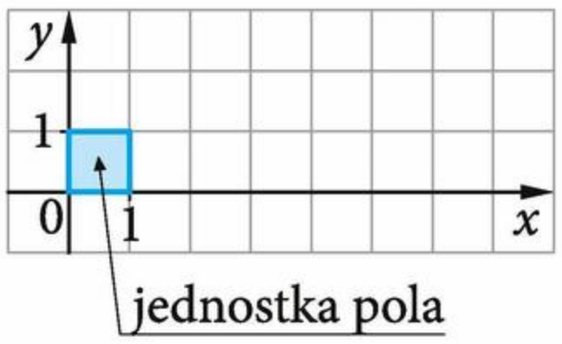
Wykonując schematyczny rysunek, nie odliczaj jednostek, ale zwracaj uwagę na położenie punktów względem osi i na położenie jednego punktu względem drugiego.

Ćwiczenie 3

Oblicz długość odcinka AB, jeśli $A = (1, -120)$, $B = (1, 230)$.

Pole figury w układzie współrzędnych

Umiejętność obliczania długości odcinków w układzie współrzędnych możemy wykorzystać do obliczania pól figur. Jako jednostkę pola przyjmujemy pole kwadratu o boku długości 1 jednostki osi.



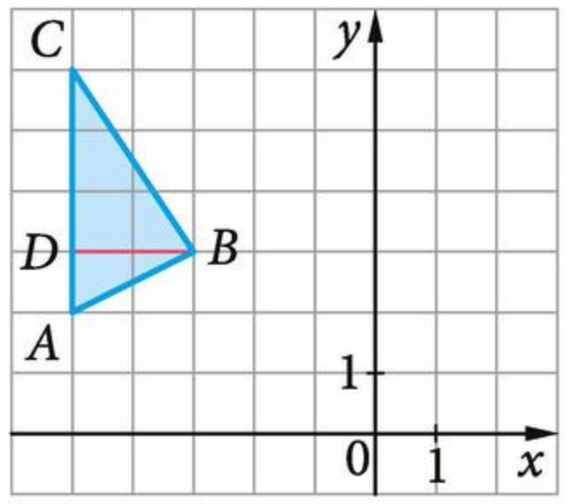
Przykład 4

Oblicz pola trójkątów ABC i KLM, gdzie $A = (-5, 2)$, $B = (-3, 3)$, $C = (-5, 6)$, $K = (3, 2)$, $L = (7, 3)$, $M = (5, 6)$.

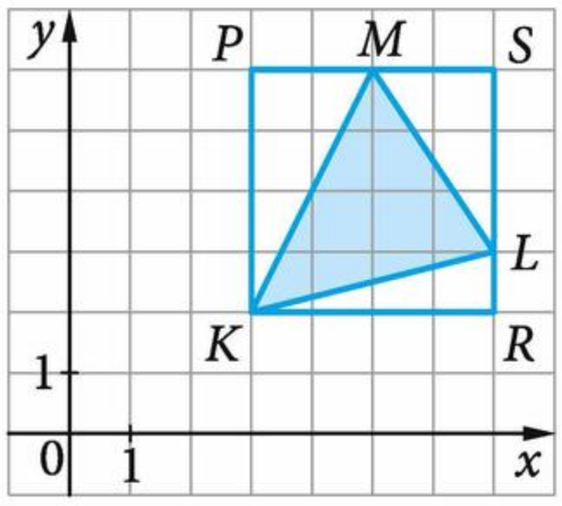
Zaczynamy od wykonania rysunków.

W trójkącie ABC bok AC biegnie po liniach kratek, więc łatwo możemy odczytać, że $AC = 4$. Wysokość BD opuszczona na ten bok również biegnie po liniach kratek, widać więc, że $BD = 2$. Zatem:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4.$$



W przypadku trójkąta KLM warto narysować prostokąt $KRSP$ (tym razem jest on kwadratem) jak na rysunku obok. Składa się on z interesującego nas trójkąta oraz z trzech trójkątów prostokątnych: PKM, KRL, LSM, których pola można łatwo obliczyć.



$$P_{PKM} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$$

$$P_{KRL} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 2$$

$$P_{LSM} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$$

Odczytujemy z rysunku długość boku kwadratu $KRSP$ i obliczamy jego pole.

$$P_{KRSP} = 4 \cdot 4 = 16$$

Pole trójkąta KLM możemy teraz obliczyć jako różnicę pola kwadratu i pól trójkątów.

$$P_{KLM} = P_{KRSP} - P_{PKM} - P_{KRL} - P_{LSM} = 16 - 4 - 2 - 3 = 7$$

Ćwiczenie 4

Oblicz pole czworokąta $ABCD$, gdzie $A = (2, -1)$, $B = (4, -1)$, $C = (5, 2)$, $D = (3, 1)$.

Zadania

1. Oblicz długości odcinków AB, BC i CD. ▶ Jeśli poprawnie obliczysz długości wszystkich trzech odcinków w jednym przykładzie, możesz przejść na następny poziom.

poziom A ← P1

a) $A = (1, 2)$, $B = (1, 4)$, $C = (-2, 4)$, $D = (-2,0)$

b) $A = (1, 5)$, $B = (3, 5)$, $C = (3, -2)$, $D = (2, -2)$

c) $A = (3, 2)$, $B = (1, 2)$, $C = (1, 0)$, $D = (-7, 0)$

d) $A = (1, 6)$, $B = (4, 6)$, $C = (-2, 6)$, $D = (-2, 0)$

poziom B ← P2

a) $A = (1, 3)$, $B = (2, 5)$, $C = (5, 1)$, $D = (2, 4)$

b) $A = (3, -3)$, $B = (-9, 2)$, $C = (-7, -2)$, $D = (-3, -3)$

c) $A = (-2, -2)$, $B = (-2, 1)$, $C = (4, -7)$, $D = (-1, -19)$

d) $A = (3, -2)$, $B = (2, -1)$, $C = (1, 9)$, $D = (-1, 4)$

poziom C ← P3

Możesz użyć kalkulatora.

a) $A = (17, 83)$, $B = (116, 103)$, $C = (176, 23)$, $D = (193, -121)$

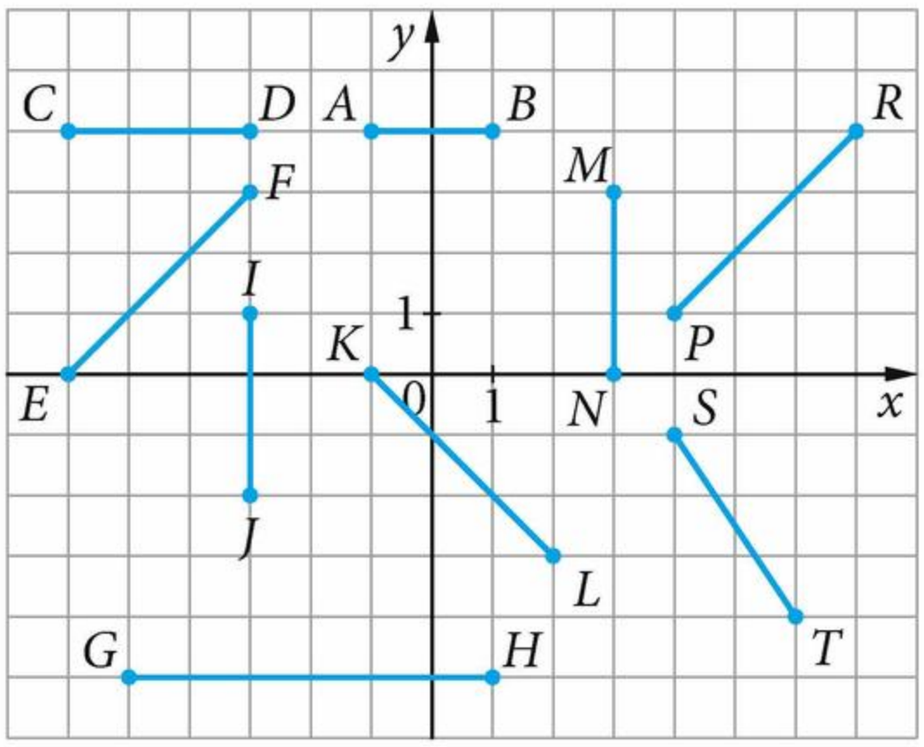
b) $A = (13, 82)$, $B = (-87, -118)$, $C = (3, -238)$, $D = (43, -118)$

c) $A = (-18, 8)$, $B = (-48, 32)$, $C = (-38, 72)$, $D = (-122, 259)$

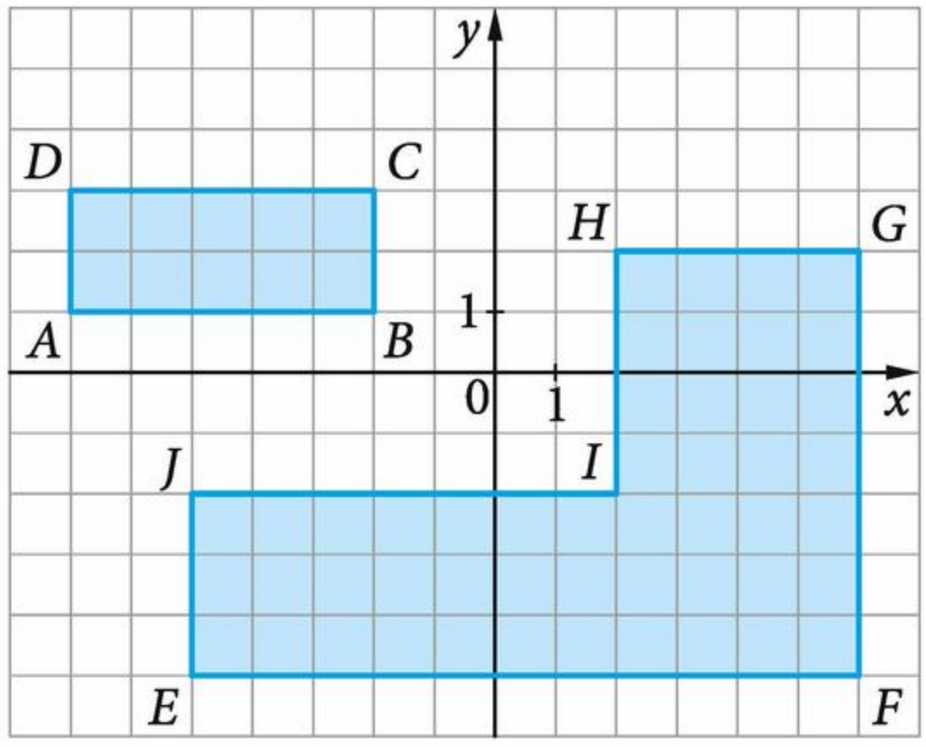
d) $A = (-13, 23)$, $B = (-63, -97)$, $C = (41, -250)$, $D = (141, -450)$

2. Które z odcinków na rysunku 1 mają długość 3?

3. Oblicz obwody wielokątów narysowanych w układzie współrzędnych (rys. 2).



Rys. 1



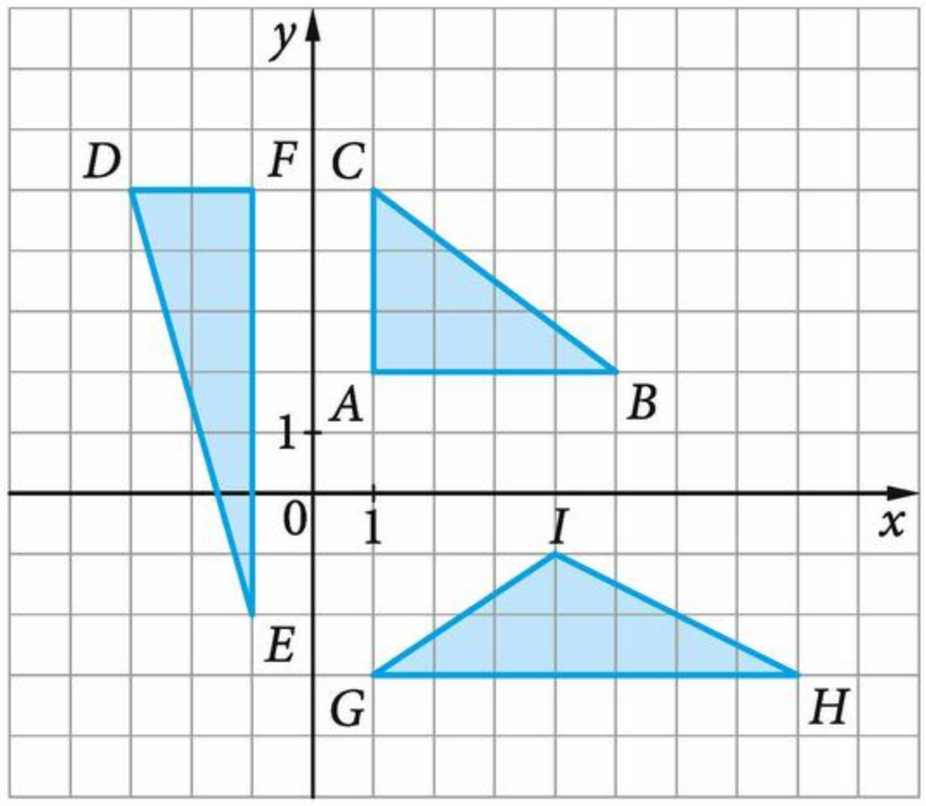
Rys. 2

4. Punkty: $A = (-3, -2)$, $B = (4, -2)$ i $C = (4, 5)$ są trzema wierzchołkami prostokąta $ABCD$.

a) Oblicz obwód tego prostokąta.

b) Podaj współrzędne wierzchołka D.

5. Oblicz pola trójkątów narysowanych w układzie współrzędnych obok. Wybierz jeden z nich i oblicz jego obwód.



6. Narysuj trójkąt ABC i oblicz jego pole.

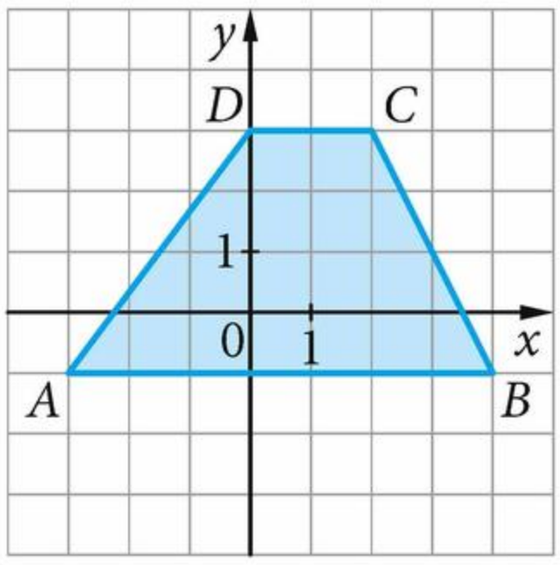
a) $A = (3, 2)$, $B = (7, 2)$, $C = (3, 6)$

b) $A = (-2, 1)$, $B = (0, 1)$, $C = (0, 9)$

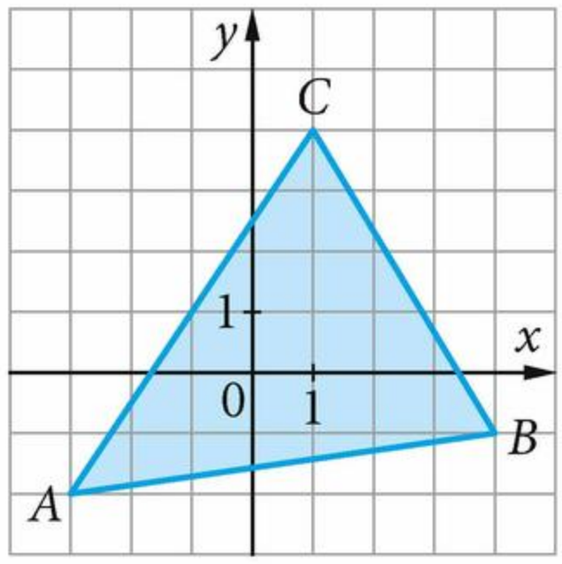
c) $A = (0, -2)$, $B = (4, -2)$, $C = (2, 2)$

E **7.** Oblicz obwód i pole wielokąta.

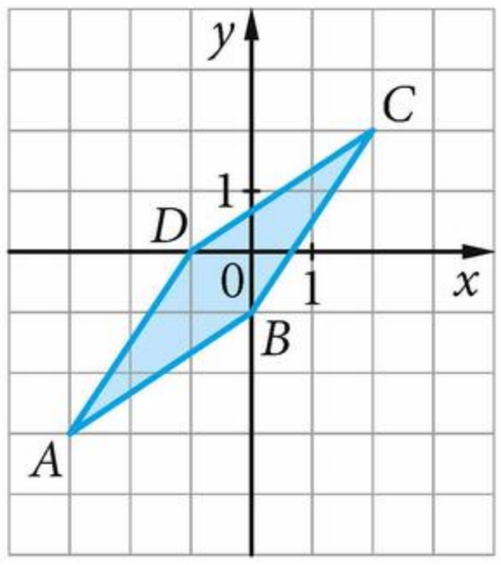
a)



b)



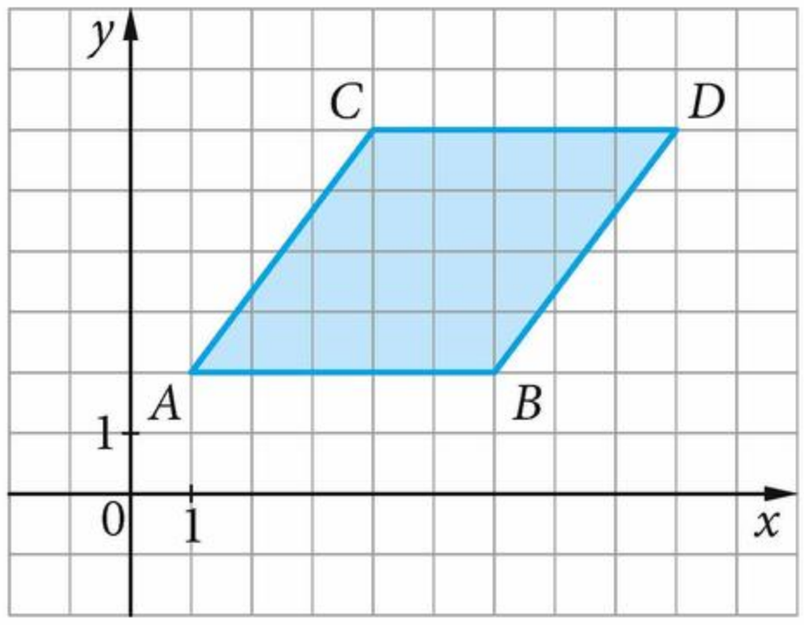
c)



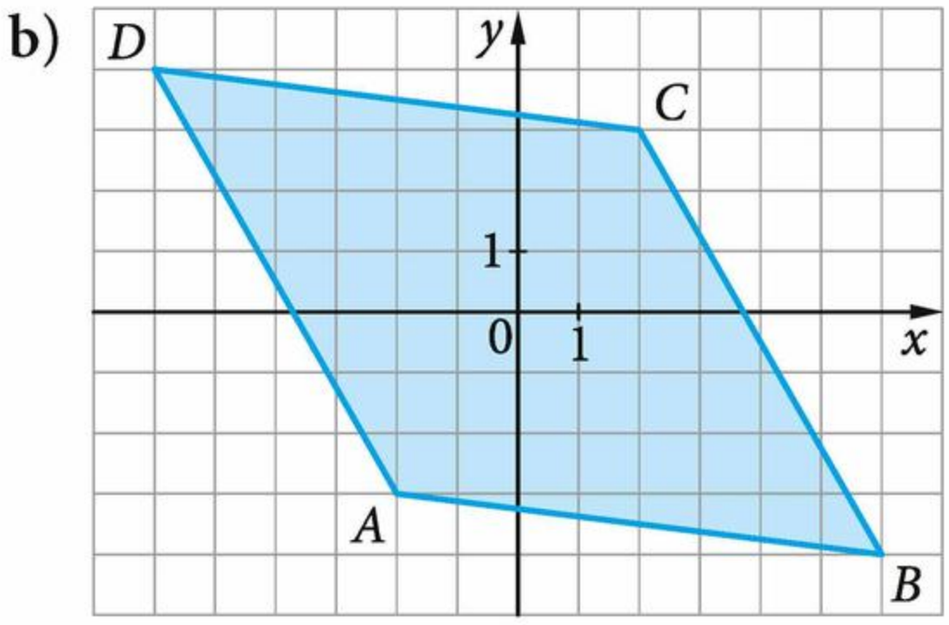
8. Punkty: $A = (0, 4)$, $B = (-3, 0)$, $C = (0, -6)$ i $D = (3, 0)$ to wierzchołki czworokąta $ABCD$. Zaznacz je w układzie współrzędnych i narysuj ten czworokąt. Oblicz jego pole i obwód. Jaki to rodzaj czworokąta?

9. Uzasadnij, że równoległobok przedstawiony na rysunku jest rombem. Oblicz jego pole co najmniej na dwa sposoby.

a)



b)



10. Zaznacz w układzie współrzędnych punkty $A = (0, 0)$ i $B = (6, 0)$. Narysuj dowolny równoległobok $ABCD$ o polu 18. Zapisz współrzędne wierzchołków C i D.

11. Dany jest wielokąt $ABCDEF$ o wierzchołkach: $A = (-6, 0)$, $B = (-3, -4)$, $C = (-1, -1)$, $D = (1, -1)$, $E = (3, 3)$ i $F = (-3, 3)$. Oblicz jego pole.

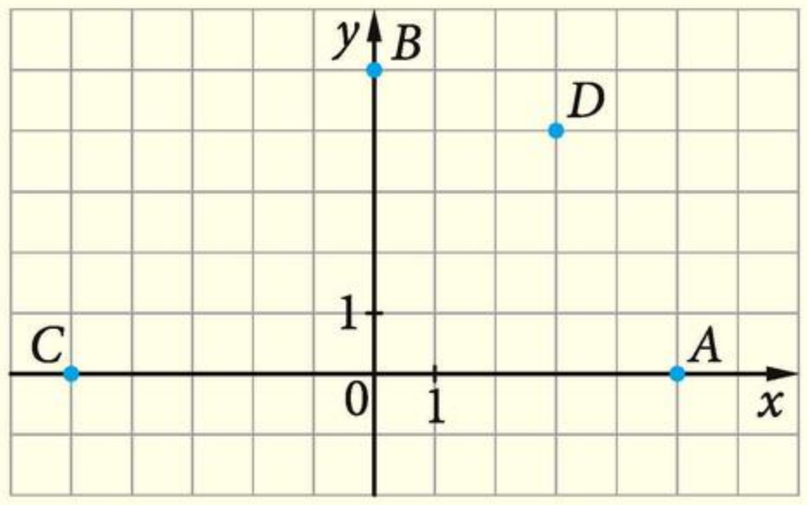
Wskazówka. Podziel wielokąt na figury, których pola łatwo obliczyć. Zwróć uwagę, aby ich wierzchołki leżały w punktach o współrzędnych całkowitych.

12. Narysuj równoległobok $ABCD$, gdzie $A = (-6, 0)$, $B = (6, 0)$, tak aby jego pole było równe 60, a obwód 50.

Dla dociekliwych

1. Oblicz odległość każdego z zaznaczonych punktów od początku układu współrzędnych. Sprawdź, czy wynik jest zawsze taki sam.

2. Czy można znaleźć więcej punktów o takiej samej odległości od początku układu współrzędnych? Czy można znaleźć taki punkt o współrzędnej $x = -4$? Czy tylko jeden? A punkt o współrzędnej $x = 1$? Jak są położone w układzie współrzędnych wszystkie punkty o takiej własności?



Czy już umiem?

I. Oblicz długości boków trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (-3, -4)$, $B = (-3, 2)$, $C = (-5, 2)$.

II. Oblicz obwód kwadratu, którego jeden z boków ma końce w punktach $(-20, 0)$ i $(20, -40)$.

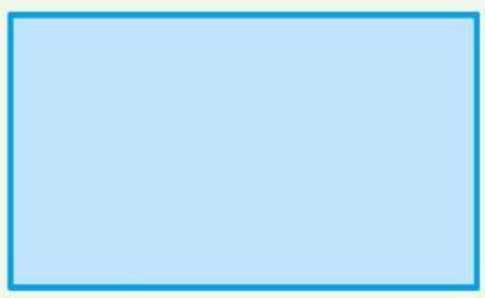
III. Oblicz pole trójkąta ABC o wierzchołkach: $A = (0, -3)$, $B = (1, 2)$, $C = (-2, 4)$.

IV. Ile osi symetrii ma narysowana figura? Jak są położone te osie?

a) kwadrat



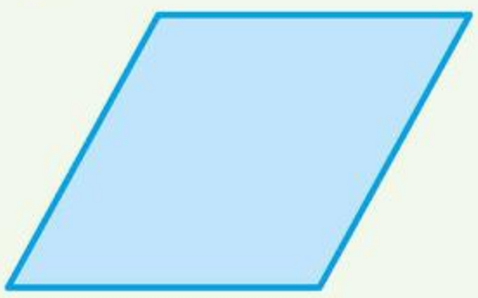
b) prostokąt



c) trójkąt równoboczny



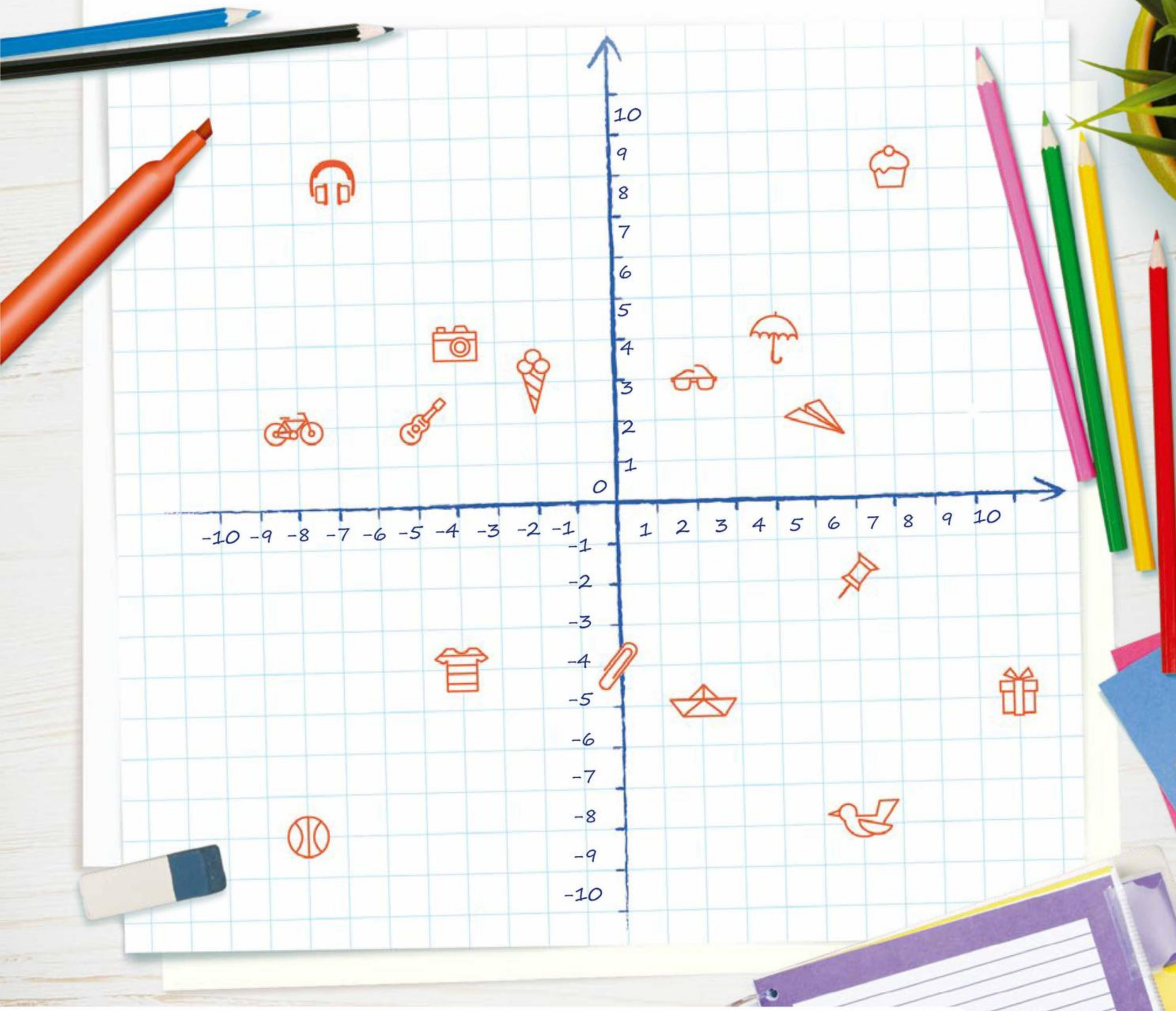
d) romb



4 Odcinki w układzie współrzędnych

Na dobry początek

W punktach o współrzędnych całkowitych umieszczono różne obrazki.



Pytania i polecenia

- Znajdź trzy obrazki leżące na jednej prostej.
- Znajdź cztery obrazki leżące w punktach, które są wierzchołkami:
  a) trapezu, b) równoległoboku, c) rombu.
  Czy potrafisz znaleźć więcej niż jedno rozwiązanie?

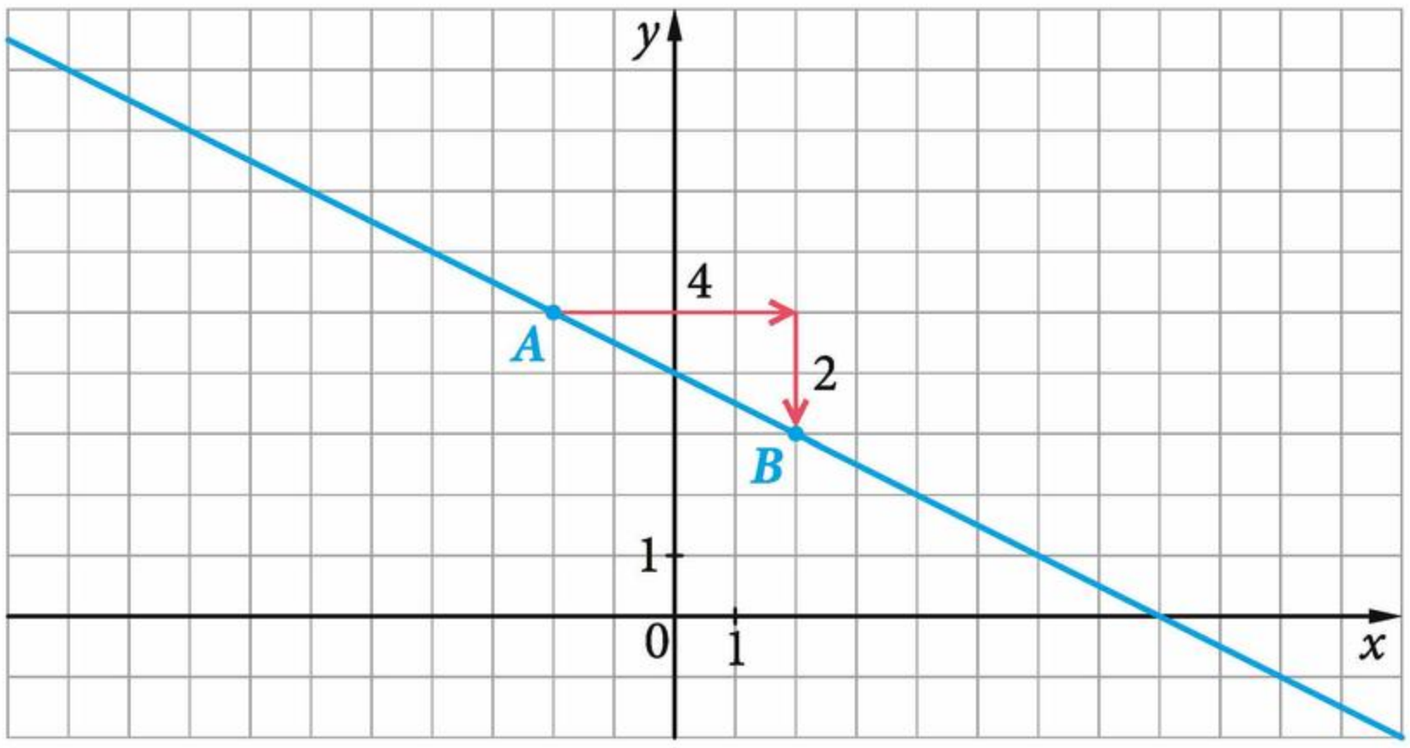
Rozwiązując zadania dotyczące figur w układzie współrzędnych, warto korzystać z poznanych sposobów rysowania figur na papierze w kratkę.

Odcinki równe i równoległe

Przykład 1

E

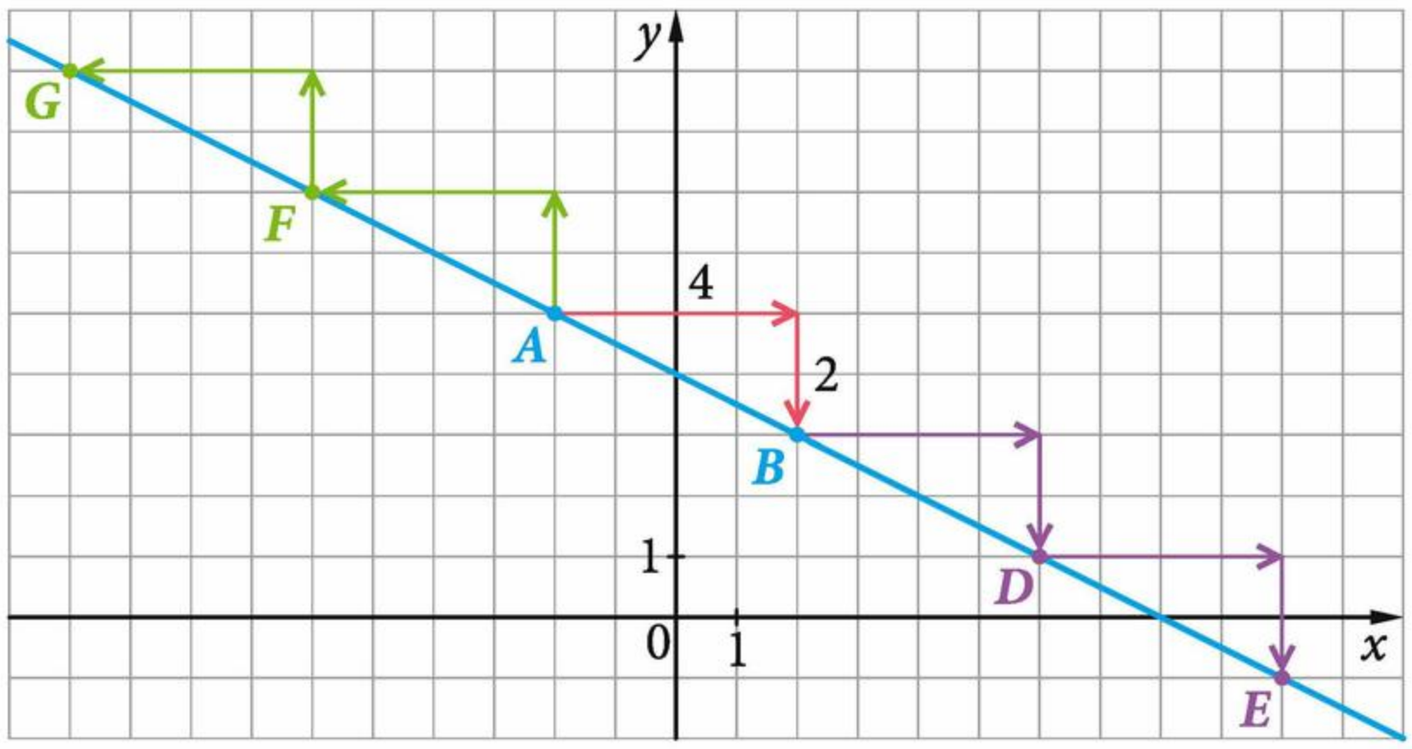
Dane są punkty $A = (-2, 5)$ i $B = (2, 3)$. Narysuj prostą AB. Znajdź kilka innych punktów, które leżą na tej prostej i mają obie współrzędne całkowite.



Zauważmy, że aby dotrzeć z punktu A do punktu B po liniach kratki, można przesunąć się o 4 jednostki w prawo i o 2 jednostki w dół (w dowolnej kolejności).

Wobec tego niektóre punkty leżące na tej prostej możemy zaznaczyć:

- **przesuwając się z punktu B o 4 jednostki w prawo i 2 w dół, być może kilka razy – tak otrzymujemy punkty D i E,**
- **przesuwając się z punktu A o 2 jednostki w górę i 4 w lewo, być może kilka razy – tak otrzymujemy punkty F i G.**



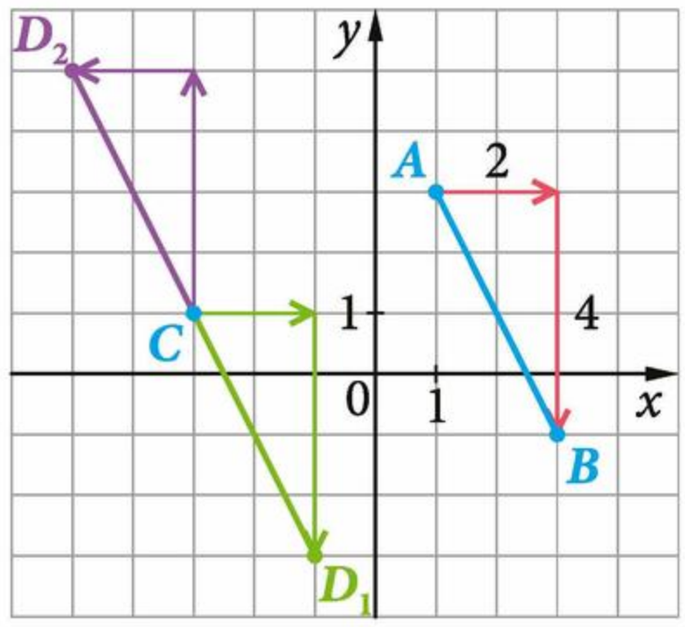
Ćwiczenie 1

Dane są punkty $A = (-3, 0)$ i $B = (0, 3)$. Narysuj prostą AB. Znajdź kilka innych punktów, które leżą na tej prostej i mają obie współrzędne całkowite.

Przykład 2

Dane są punkty: $A = (1, 3)$, $B = (3, -1)$, $C = (-3, 1)$. Narysuj odcinek CD równy odcinkowi AB i równoległy do niego. Odczytaj z rysunku współrzędne punktu D.

Rozwiązanie zaczynamy od zaznaczenia w układzie współrzędnych punktów A, B i C. Dalej postępujemy podobnie jak w przykładzie 1 na s. 287.



Łatwo odczytać z rysunku, że z punktu A do punktu B przesuwamy się o 2 kratki w prawo i o 4 kratki w dół. I odwrotnie: z punktu B do A przesuwamy się o 4 kratki w górę i 2 w lewo. Zatem z punktu C do punktu D możemy dotrzeć, przesuwając się:

- albo o **2 kratki w prawo i 4 w dół**,
- albo o **4 kratki w górę i 2 w lewo**.

Otrzymane dwa rozwiązania oznaczamy D_1 i D_2.

Widzimy, że $D_1 = (-1, -3)$, $D_2 = (-5, 5)$.

Ćwiczenie 2

Dane są punkty: $A = (-1, 0)$, $B = (2, 2)$, $C = (0, 4)$. Narysuj odcinek CD równy odcinkowi AB i równoległy do niego. Odczytaj z rysunku współrzędne punktu D.

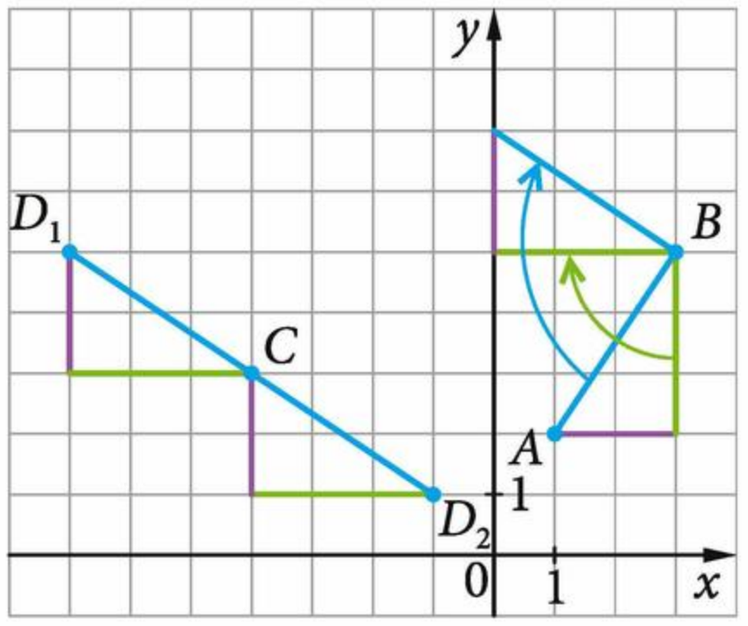
Odcinki równe i prostopadłe

Przykład 3

Dane są punkty: $A = (1, 2)$, $B = (3, 5)$, $C = (-4, 3)$. Narysuj odcinek CD równy odcinkowi AB i prostopadły do niego. Odczytaj współrzędne punktu D.

Rozwiązanie zaczynamy od zaznaczenia w układzie współrzędnych punktów A, B i C. Dalej postępujemy podobnie jak w przykładzie 2 na s. 288.

Rysujemy trójkąt prostokątny, w którym AB jest przeciwprostokątną, a przyprostokątne leżą na liniach kratek. Następnie obracamy go o 90° (w dowolną stronę) i przesuwamy tak, aby jeden z końców przeciwprostokątnej znalazł się w punkcie C. Mamy dwie możliwości, ponieważ przeciwprostokątna ma dwa końce.



Na rysunku znajdują się oba rozwiązania. Odczytujemy współrzędne znalezionych punktów: $D_1 = (-7, 5)$, $D_2 = (-1, 1)$.

Ćwiczenie 3

Dane są punkty: $A = (0, 0)$, $B = (-3, 2)$, $C = (0, 4)$. Narysuj odcinek CD równy odcinkowi AB i prostopadły do niego. Odczytaj współrzędne punktu D.

Środek odcinka

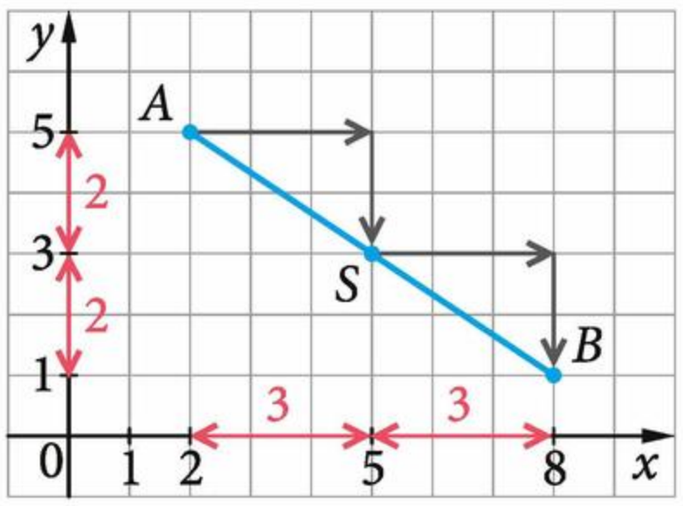
Przykład 4

E

Znajdź współrzędne środka odcinka AB, gdzie $A = (2, 5)$, $B = (8, 1)$.

Rysujemy układ współrzędnych i zaznaczamy w nim dane punkty.

Z punktu A do punktu B przesuwamy się o 6 jednostek w prawo i 4 jednostki w dół. W połowie drogi z A do B będziemy, gdy przesuniemy się o 3 jednostki w prawo i 2 jednostki w dół.
Odczytujemy z rysunku współrzędne środka odcinka AB: $S = (5, 3)$.



Zauważmy, że:
- liczba 5 znajduje się na osi w środku między liczbami 2 i 8, czyli jest ich średnią arytmetyczną,
- liczba 3 znajduje się na osi w środku między liczbami 1 i 5, czyli jest ich średnią arytmetyczną.

$A = (2, 5)$
$B = (8, 1)$
$S = \left(\frac{2+8}{2}, \frac{5+1}{2}\right)$

Zapamiętaj

Współrzędne środka odcinka to średnie arytmetyczne odpowiednich współrzędnych jego końców.

Ćwiczenie 4

Znajdź środek odcinka o końcach w punktach $(0, 4)$ i $(5, 6)$.

Zauważ, że gdy dany jest środek odcinka i jeden z jego końców, to łatwo można znaleźć drugi koniec tego odcinka.
Rozważmy sytuację przedstawioną na rysunku do przykładu 4. Z punktu A do środka odcinka przesuwamy się o 3 kratki w prawo i 2 kratki w dół. Ze środka odcinka do punktu B musimy się przesunąć jeszcze raz w ten sam sposób (o 3 kratki w prawo i 2 kratki w dół).

Zadania

1. Zaznacz w układzie współrzędnych punkty $A = (1, 2)$ i $B = (3, -4)$. Narysuj:

a) odcinek CD równy odcinkowi AB i równoległy do niego,
b) odcinek EF równy odcinkowi AB i prostopadły do niego,
c) odcinek GH dwa razy dłuższy od AB i równoległy do niego,
d) odcinek IJ dwa razy dłuższy od AB i prostopadły do niego,
e) odcinek KL dwa razy krótszy od AB i równoległy do niego,
f) odcinek MN dwa razy krótszy od AB i prostopadły do niego.

Zapisz współrzędne końców narysowanych przez siebie odcinków.

2. Dane są punkty: $A = (0, -3)$, $B = (0, 4)$, $C = (3, 2)$.
Znajdź taki punkt D, aby czworokąt $ABCD$ był:

a) równoległobokiem,
b) trapezem równoramiennym.

Polecenie „znajdź punkt" w zadaniach dotyczących układu współrzędnych oznacza „podaj współrzędne punktu".

E **3.** Znajdź środek odcinka AB o końcach w podanych punktach.

a) $A = (2, 5)$, $B = (-5, 1)$ **b)** $A = (1, 3)$, $B = (0, -7)$ **c)** $A = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $B = (3\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

E **4.** Jeden koniec odcinka znajduje się w punkcie $(1, 3)$, a jego środek w punkcie $(4, 5)$. Jakie współrzędne ma drugi koniec tego odcinka?

5. Dane są punkty $A = (2, 2)$ i $B = (5, 3)$.

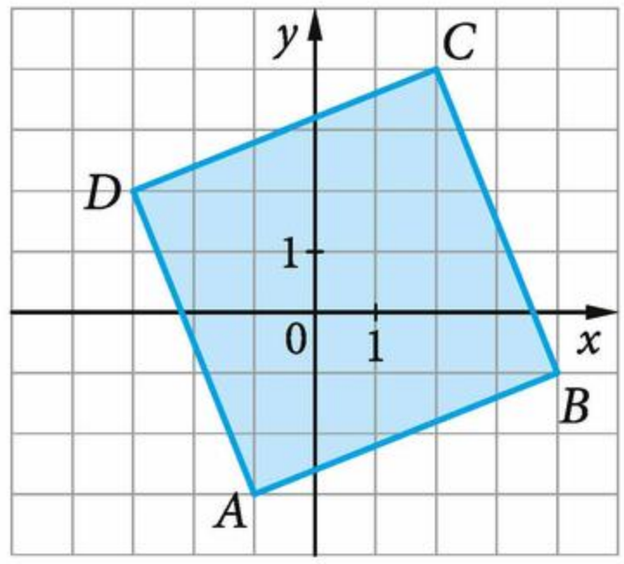
a) Podaj współrzędne trzech innych punktów leżących na prostej AB.
b) Czy punkt o współrzędnych $(-5, 0)$ leży na prostej AB? Odpowiedź uzasadnij.

6. Znajdź czwarty wierzchołek równoległoboku, jeśli wiadomo, że jego trzema wierzchołkami są punkty: $(-1, 0)$, $(3, -2)$ i $(4, 1)$.

Uwaga. Zapoznaj się z informacjami w „Dla dociekliwych" na s. 292.

:D **7.** Wykaż, że przedstawiony obok czworokąt jest kwadratem. Oblicz długość jego boku.

Wskazówka. Pamiętaj, że nie każdy czworokąt o równych bokach jest kwadratem.



:D **8.** Dany jest trójkąt ABC o wierzchołkach: $A = (-5, 2)$, $B = (1, -6)$, $C = (-1, 5)$. Uzasadnij na dwa sposoby, że jest on prostokątny. Który ze sposobów jest wygodniejszy?

9. Znajdź punkty A, B, C, D o współrzędnych całkowitych, tak aby czworokąt $ABCD$ był rombem, którego przekątne przecinają się w punkcie $(5, -2)$, a jego obwód jest równy 40.

Dla dociekliwych

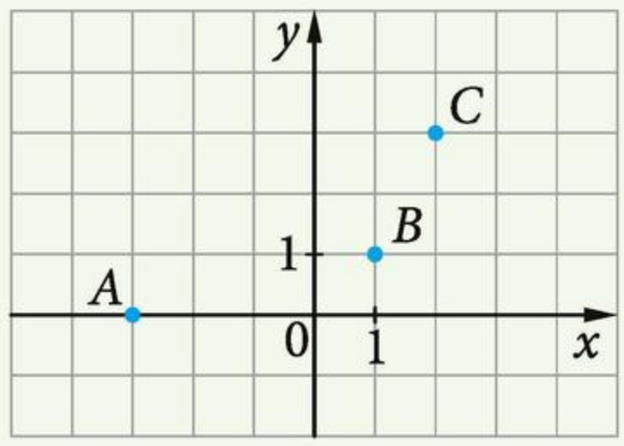
1. Prosta przechodzi przez punkty A i B. Znajdź wszystkie punkty, przez które przechodzi ta prosta i które mają obie współrzędne naturalne.

a) $A = (-2, 10), B = (18, -5)$

b) $A = (-201, 310), B = (221, -323)$

Czy już umiem?

I. Narysuj układ współrzędnych i zaznacz w nim punkty A, B, C jak na rysunku obok. Znajdź taki punkt D, aby czworokąt $ABCD$ był równoległobokiem.



II. Dane są punkty $G = (0, 5)$ i $H = (8, 0)$. Znajdź takie punkty K, L, M, aby:

a) punkt K był środkiem odcinka GH,

b) punkt H był środkiem odcinka GL,

c) punkt G był środkiem odcinka HM.

III. Przekątne rombu $ABCD$ przecinają się w punkcie $S = (-1, 2)$. Wiedząc, że $A = (-1, -2)$ i $B = (2, 2)$, znajdź pozostałe wierzchołki rombu i oblicz jego pole.

IV. Niektóre słowa używane na lekcji matematyki mają więcej niż jedno znaczenie. Dobierz ilustracje w pary.

(1) x^2

(2) $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$

(3) $\sqrt{a}$

(4) x^5

(5)

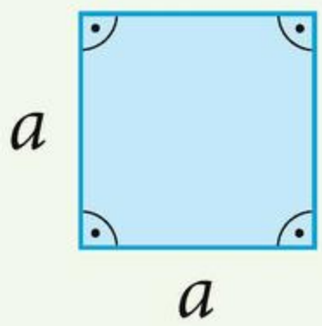
A



B



C



D



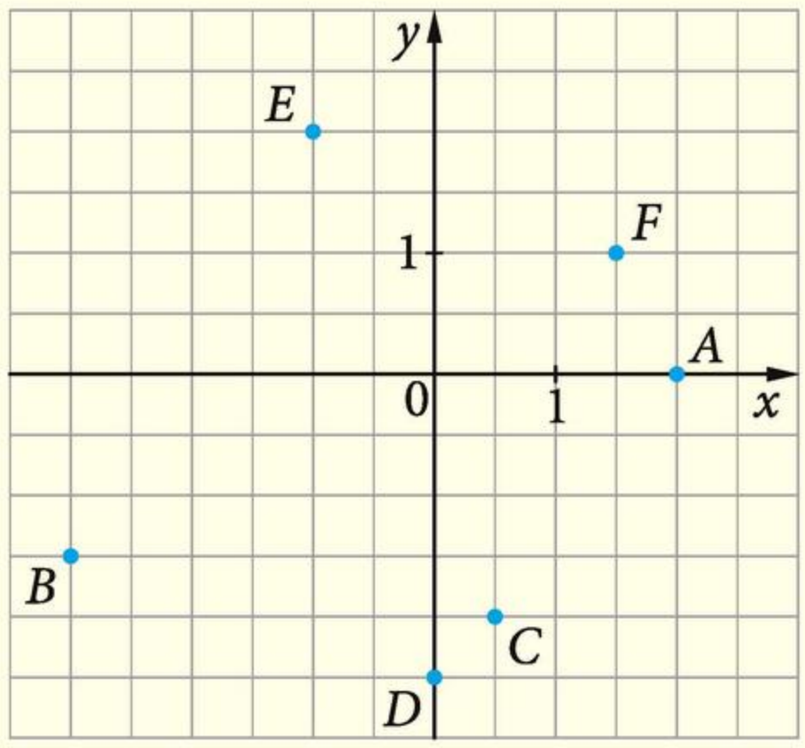
E



Powtórzenie VII

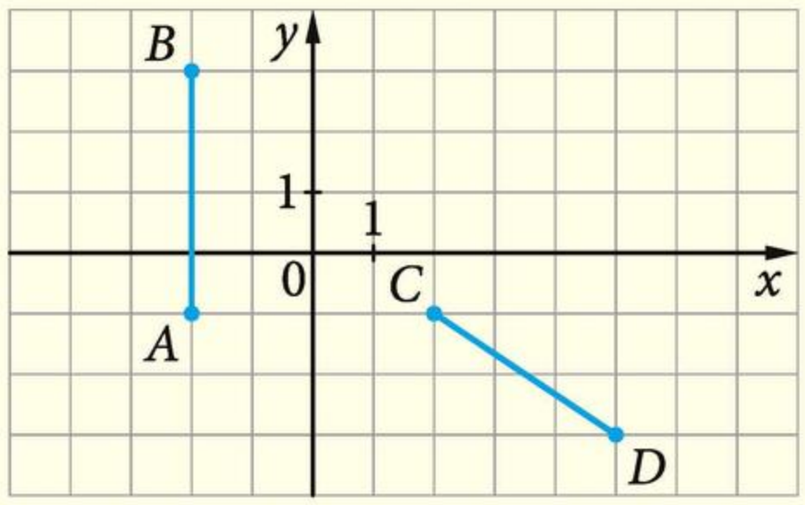
ZESTAW 1

1. Podaj współrzędne punktów zaznaczonych na rysunku obok.



2. Narysuj układ współrzędnych i zaznacz w nim punkty:
$A = (-4, -2)$, $B = (-1, 1)$, $C = (2, -3)$,
$D = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $E = (1; 1{,}5)$, $F = (0, 2)$.

3. Znajdź trzeci wierzchołek trójkąta prostokątnego równoramiennego, w którym jedna przyprostokątna ma końce w punktach $A = (-2, -1)$ i $B = (3, -1)$. Podaj wszystkie cztery rozwiązania.

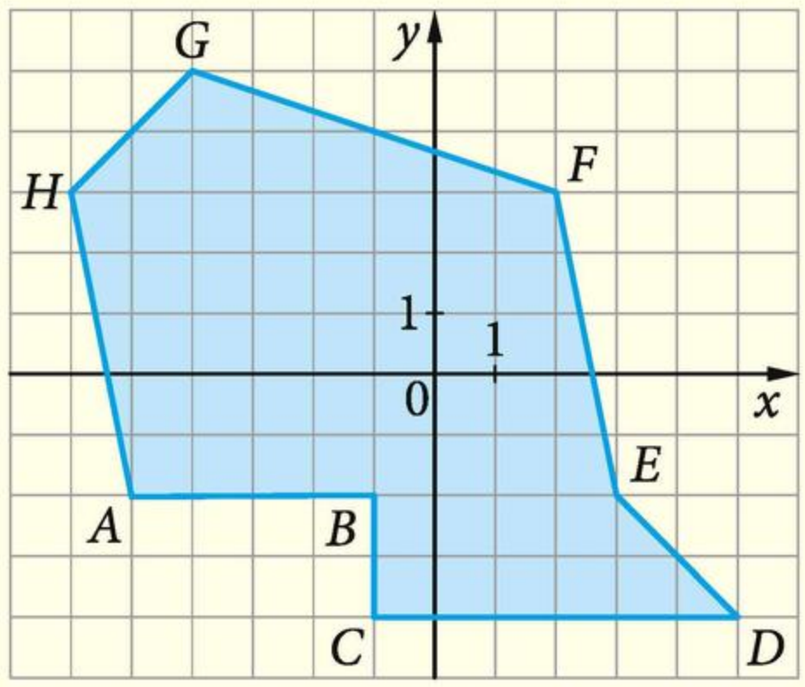


4. Oblicz długości odcinków przedstawionych na rysunku obok.

5. Znajdź środek odcinka o końcach w punktach $(-4, 2)$ i $(2, 0)$.

6. Jeden koniec odcinka znajduje się w punkcie $(-1, -2)$, a jego środek w punkcie $(-4, -5)$. Jakie współrzędne ma drugi koniec odcinka?

7. Dane są punkty $A = (-2, 3)$ oraz $B = (1, 1)$. Znajdź jeszcze trzy punkty o współrzędnych całkowitych leżące na prostej AB.



8. Punkty $A = (-5, -3)$, $B = (1, -1)$ i $C = (0, 2)$ są trzema wierzchołkami prostokąta $ABCD$. Podaj współrzędne punktu D. Oblicz pole i obwód tego prostokąta.

9. Dany jest wielokąt $ABCDEFGH$ (rysunek obok). Oblicz jego pole.

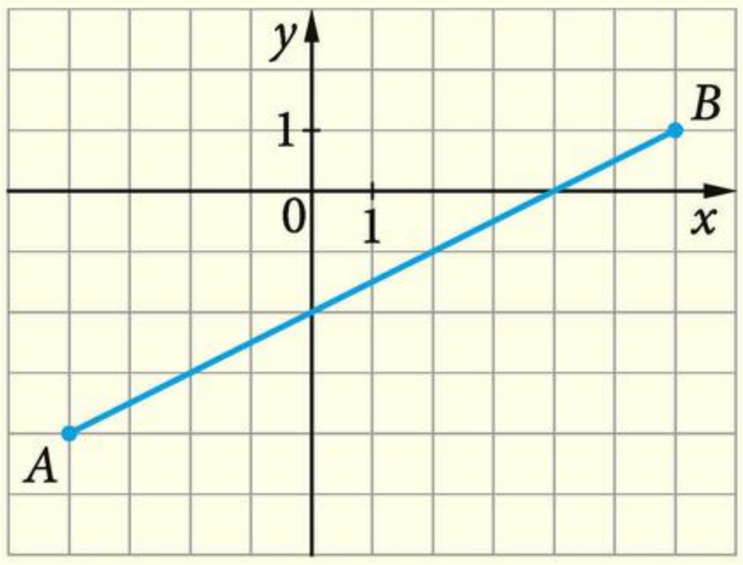
10. Dany jest czworokąt $ABCD$, gdzie $A = (0, 0)$, $B = (5, 0)$, $C = (8, 4)$, $D = (3, 4)$. Czy ten czworokąt jest rombem? Wybierz odpowiedź T (tak) lub N (nie) i jej uzasadnienie spośród zdań A–C.

T	ponieważ	**A.**	odcinki AB i CD są równoległe
N		**B.**	$3^2 + 4^2 = 5^2$, więc $AB = BC = CD = AD$
		C.	przekątne czworokąta nie są równoległe do osi układu współrzędnych

ZESTAW 2

1. W układzie współrzędnych dany jest odcinek AB. Podaj współrzędne punktu, który leży na tym odcinku i jednocześnie:

a) leży na osi x,
b) leży na osi y,
c) ma pierwszą współrzędną -2,
d) ma drugą współrzędną -1.



2. Dane są punkty: $A = (-3, -1)$, $B = (6, 5)$, $C = (-2, 1)$. Znajdź współrzędne takiego punktu D, żeby $AB = CD$ oraz:

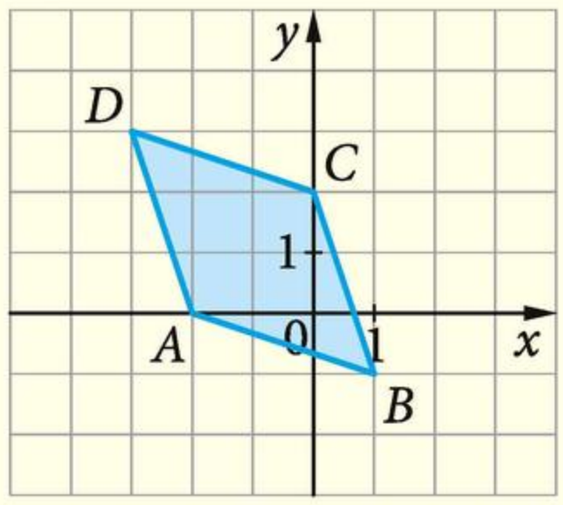
a) odcinek CD był prostopadły do AB, **b)** odcinek CD był równoległy do AB.

Podaj wszystkie rozwiązania.

3. Oblicz pole trójkąta ABC, którego wierzchołki mają współrzędne: $A = (-4, -3)$, $B = (6, -1)$, $C = (-2, 5)$.

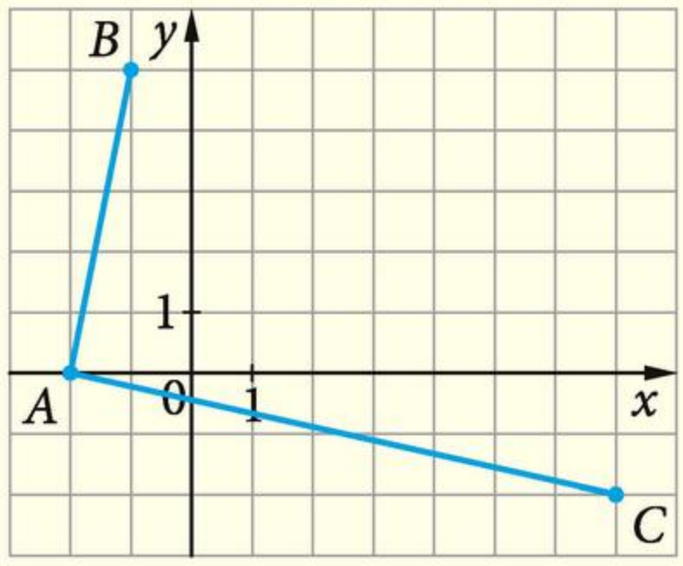
4. Sprawdź, czy czworokąt $ABCD$ jest kwadratem, jeśli $A = (-5, 2)$, $B = (-1, 4)$, $C = (1, 0)$, $D = (-3, -2)$.

5. Jakim czworokątem jest figura $ABCD$ na rysunku obok? Uzasadnij odpowiedź.



6. Punkty $A = (-4, -3)$, $B = (6, -1)$ i $C = (-2, 5)$ są trzema wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Znajdź współrzędne czwartego wierzchołka. Oblicz pole znalezionego równoległoboku.

7. Przyjrzyj się rysunkowi obok. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.



I.	Odcinek AC jest dwa razy dłuższy niż odcinek AB.	P	F
II.	Odcinki AB i AC są prostopadłe.	P	F

8. Punkty $A = (5, 4)$, $B = (4, 2)$, $C = (8, 0)$, $D = (10, 4)$ są wierzchołkami czworokąta $ABCD$.

a) Ile kątów prostych ma ten czworokąt?
b) Czy w tym czworokącie można wskazać równe boki? Jeśli tak, to które?
c) Uzasadnij, że pole czworokąta $ABCD$ jest trzy razy większe od pola trójkąta ABC.

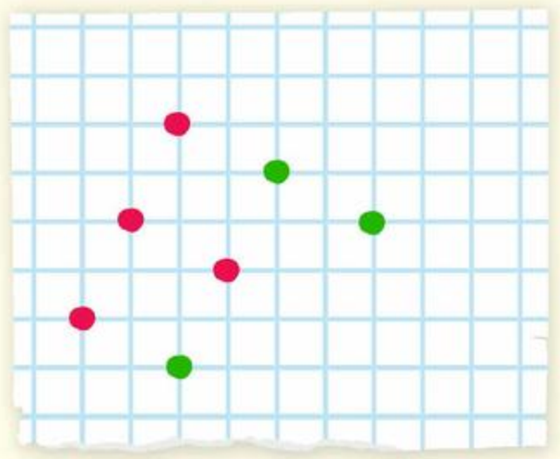
Zadania na temat…

Gra „Stačiakampis”

Przed nami wakacje i więcej czasu. Oto przykład gry strategicznej, do której wystarczy kartka w kratkę i dwa pisaki różnych kolorów. Gracze stawiają na przemian kropki w punktach kratowych – każdy swoim kolorem. Wygrywa ten, kto pierwszy zaznaczy swoje punkty w czterech wierzchołkach prostokąta.

1. Nazwa gry oznacza *prostokąt* w pewnym języku. Dowiedz się, jaki to język.

2. Na rysunku obok jest pokazana rozgrywka między graczem czerwonym i zielonym.

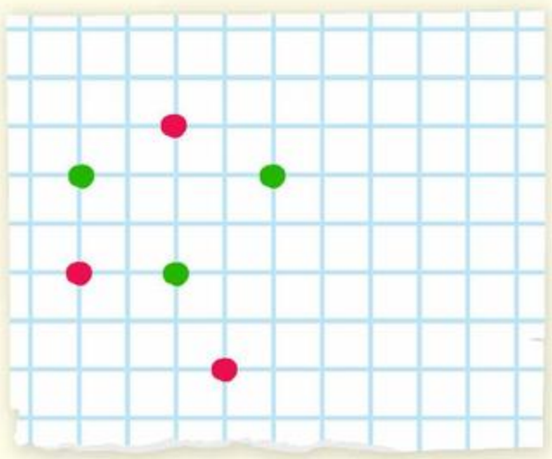


a) Który z graczy wykonał pierwszy ruch w tej rozgrywce?

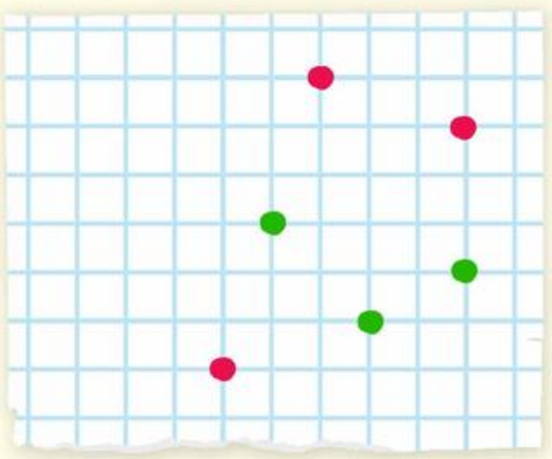
b) Który z graczy ma szansę wygrać tę rozgrywkę w swoim następnym ruchu?

3. Jesteś graczem czerwonym. Następny ruch w pokazanej rozgrywce należy do ciebie. Przerysuj ilustrację na kartkę w kratkę i zakończ grę w jednym ruchu.

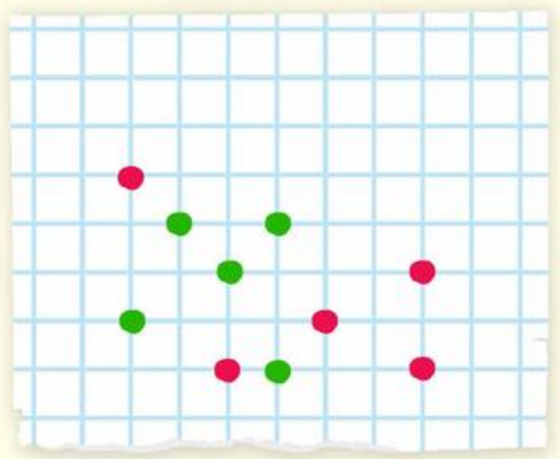
a)



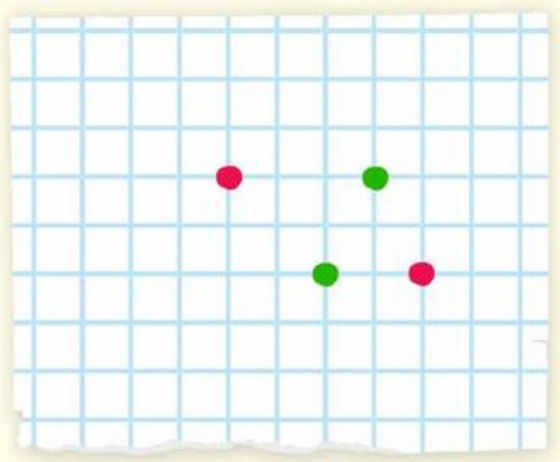
b)



c)

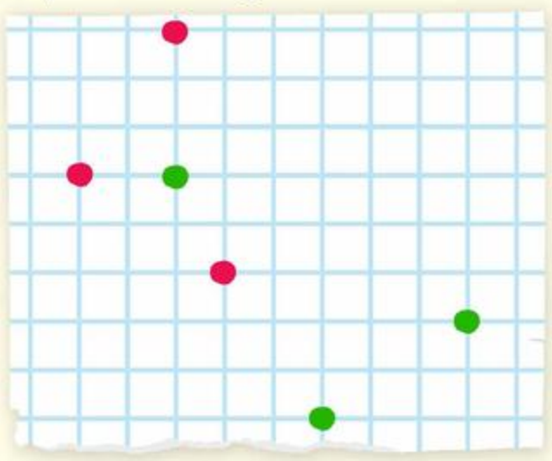


4. Zaznacz na kartce w kratkę cztery punkty tak jak na rysunku obok. Zaznacz czarnym kolorem sześć punktów kratowych, które wraz z dwoma już narysowanymi punktami zielonymi mogą być brane pod uwagę przez gracza zielonego jako brakujące wierzchołki prostokątów. Wykonaj to samo polecenie na nowej kartce dla punktów czerwonych.

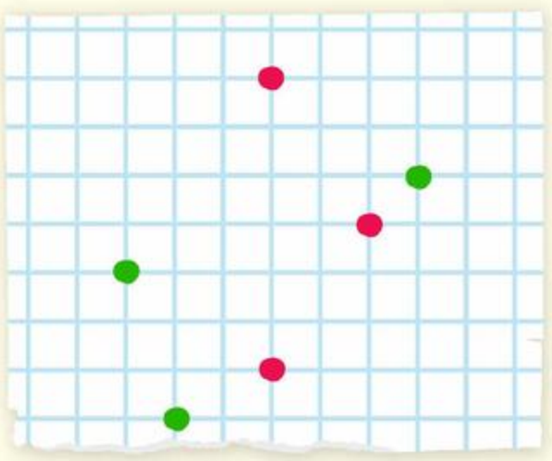


5. Przeanalizuj rozgrywkę. Który gracz wygra ją w następnym ruchu, jeśli ten ruch należy do niego?

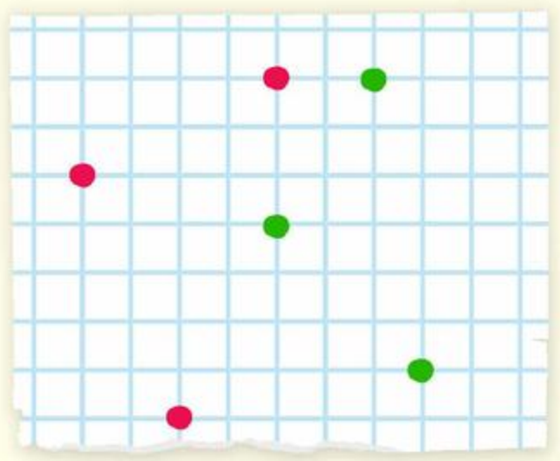
a)



b)



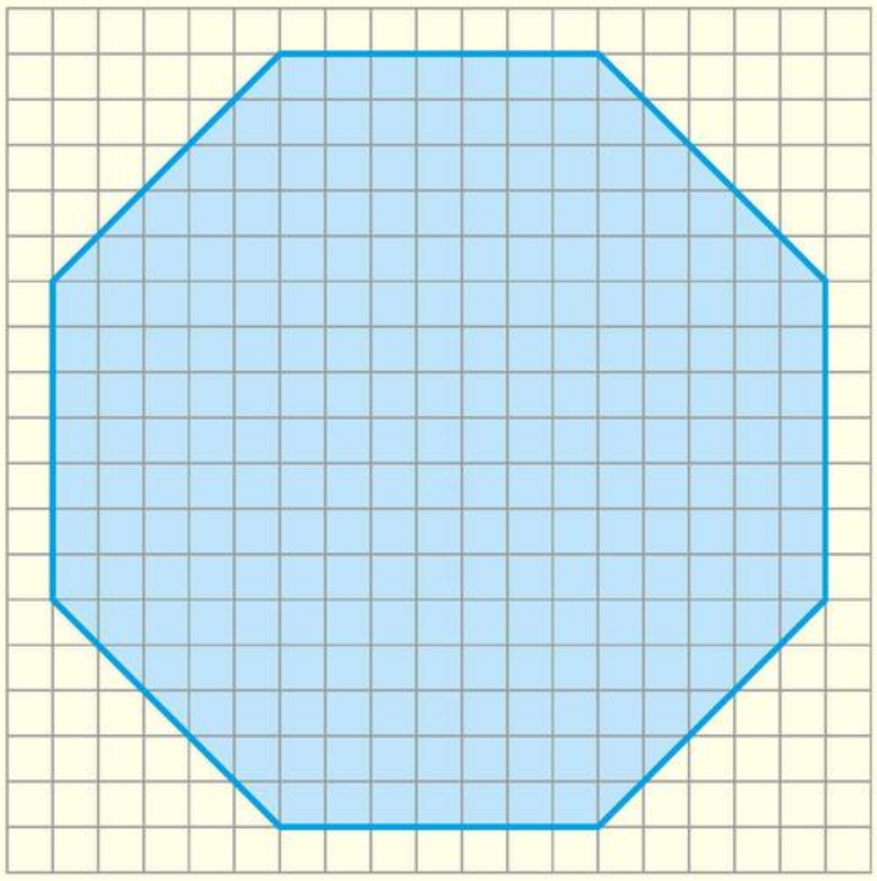
c)



6. Dobierzcie się w pary i rozegrajcie kilka partii gry „Stačiakampis”. Powodzenia!

Zadania na deser

Wielokąty na kratce



1. Przyjrzyj się rysunkowi ośmiokąta na kratce.

a) Uzasadnij, że wszystkie jego kąty są równe. Jaką miarę ma każdy z nich?

b) Czy ten ośmiokąt ma równe boki? Najpierw sprawdź to za pomocą linijki, a następnie wykonaj odpowiednie obliczenia. Który ze sposobów pozwolił uzyskać poprawny wynik? Dlaczego tylko ten?

Ogólnie – nie da się znaleźć równych odcinków o końcach w punktach kratowych, z których jeden narysowany jest wzdłuż linii kratki, a drugi – wzdłuż przekątnych kratek.
Wyobraźmy sobie odcinek leżący wzdłuż n kratek i odcinek leżący wzdłuż m przekątnych kratek. Jeśli przyjmiemy bok kratki jako 1, to pierwszy z odcinków ma długość n, a drugi $m\sqrt{2}$. Gdyby te odcinki były równe, zachodziłaby równość $n = m\sqrt{2}$. W takim razie $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$, czyli liczba $\sqrt{2}$ byłaby wymierna, a nie jest.

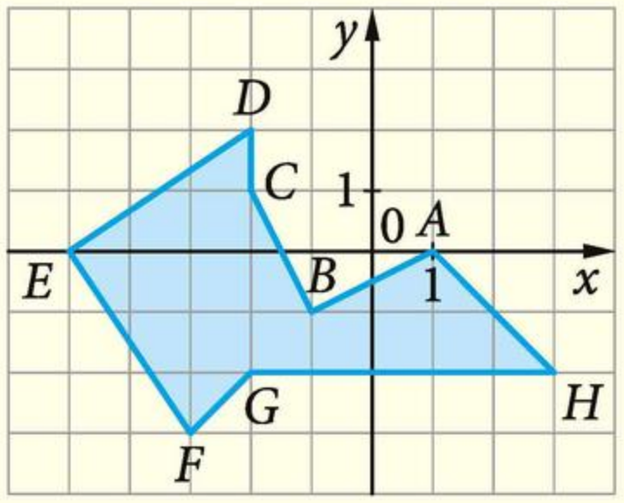
2. Narysuj na dużej kartce w kratkę trójkąt równoramienny o podstawie 30 kratek i wysokości 26 kratek oraz o wierzchołkach w punktach kratowych.

a) Sprawdź, czy jest on równoboczny: najpierw za pomocą linijki, następnie za pomocą odpowiednich obliczeń.

b) Czy można narysować trójkąt równoboczny tak, aby jeden bok leżał wzdłuż linii kratki i wszystkie wierzchołki znajdowały się w punktach kratowych? Odpowiedź uzasadnij.

Jeszcze jeden ośmiokąt

Spójrz na rysunek i rozwiąż zadania 3–5.



3. **a)** Wypisz wszystkie cztery pary boków prostopadłych ośmiokąta $ABCDEFGH$.

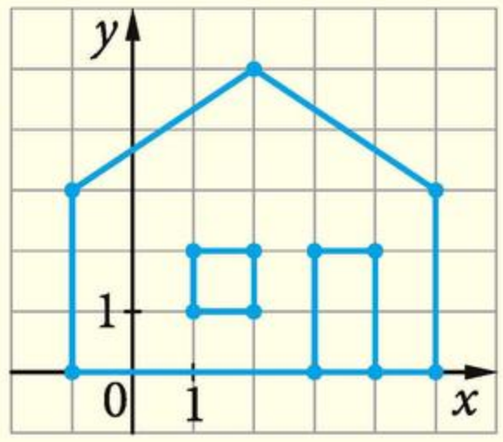
b) Wypisz wszystkie boki ośmiokąta, które mają taką samą długość jak AB.

4. Cztery wierzchołki ośmiokąta $ABCDEFGH$ są równocześnie wierzchołkami pewnego rombu. Które to punkty? Oblicz pole tego rombu.

5. Łącząc punkty A, B, C, D, E, F, G, H w innej kolejności, można otrzymać inny ośmiokąt. Jaki to ośmiokąt? Spróbuj znaleźć kilka różnych rozwiązań.

Co można zrobić z domkiem?

Przerysuj do zeszytu niebieski domek.



6. Narysuj czerwony domek według instrukcji zamieszczonej w ramce. Co się stało z domkiem?

> Szczyt niebieskiego domku ma współrzędne (2, 5). Aby otrzymać szczyt czerwonego domku, zamieniamy współrzędną *x* na przeciwną, współrzędną *y* zostawiamy bez zmian. Czerwony domek będzie miał szczyt w punkcie (–2, 5). W ten sam sposób zmieniamy współrzędne wszystkich punktów.

7. Narysuj zielony domek według instrukcji w ramce. Co się stało z domkiem?

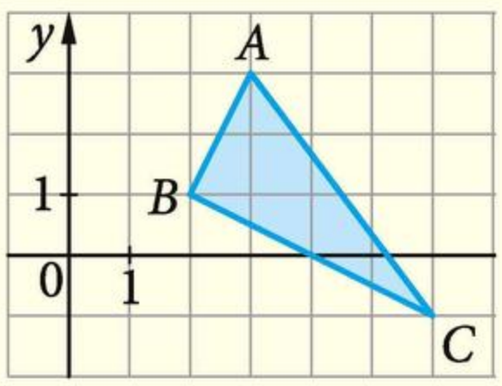
> Szczyt niebieskiego domku ma współrzędne (2, 5). Zamieniamy współrzędną *x* na *y* i odwrotnie. Szczyt zielonego domku będzie miał współrzędne (5, 2). W ten sam sposób zmieniamy współrzędne wszystkich punktów.

8. Wyobraź sobie, że oś *x* to brzeg jeziora, nad którym stoi niebieski domek. Napisz instrukcję, według której należy zmienić współrzędne domku, aby otrzymać rysunek jego odbicia w wodzie.

Co się stanie z wielokątem?

9. Zaznacz w układzie współrzędnych punkt $A = (3, -1)$. Połącz go odcinkiem z punktem $O = (0, 0)$, czyli początkiem układu współrzędnych. Wydłuż dwukrotnie odcinek OA, dorysowując odcinek AA_1, równy odcinkowi OA i do niego równoległy. Podaj współrzędne punktu A_1.

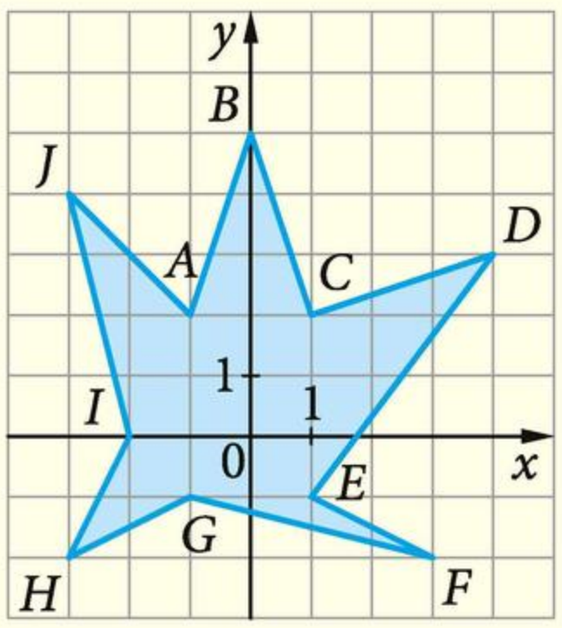
10. Przerysuj trójkąt ABC. Połącz każdy z jego wierzchołków z punktem $(0, 0)$. Wydłuż dwukrotnie każdy z odcinków OA, OB i OC jak w zadaniu 9. Otrzymasz odcinki OA_1, OB_1 i OC_1. Połącz odcinkami punkty A_1, B_1 i C_1. Porównaj otrzymaną figurę z trójkątem ABC. Co zauważasz?



11. Porównaj współrzędne punktów A, B, C i A_1, B_1, C_1. Co zauważasz?

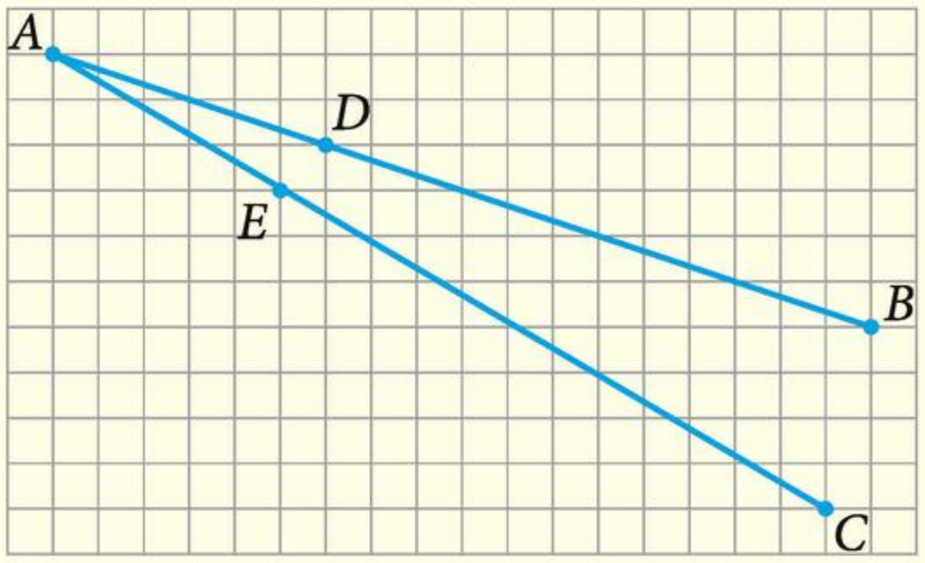
12. Przerysuj wielokąt pokazany na rysunku obok. Jak sądzisz, co się stanie, gdy wykonasz polecenia z zadania 10? Wykonaj takie ćwiczenie i sprawdź swoje przewidywania.

Uwaga. Przekształcenie, które wykonujesz w zadaniach 10 i 12, nosi nazwę „**jednokładność** o środku *O* i skali 2”.



Czy punkty leżą na jednej prostej?

Na rysunku przedstawiono odcinki AB i AC oraz punkty D i E. Punkty A, B, C, D, E są punktami kratowymi. Wydaje się, że punkt D leży na odcinku AB, a punkt E leży na odcinku AC. Ale czy tak jest naprawdę?



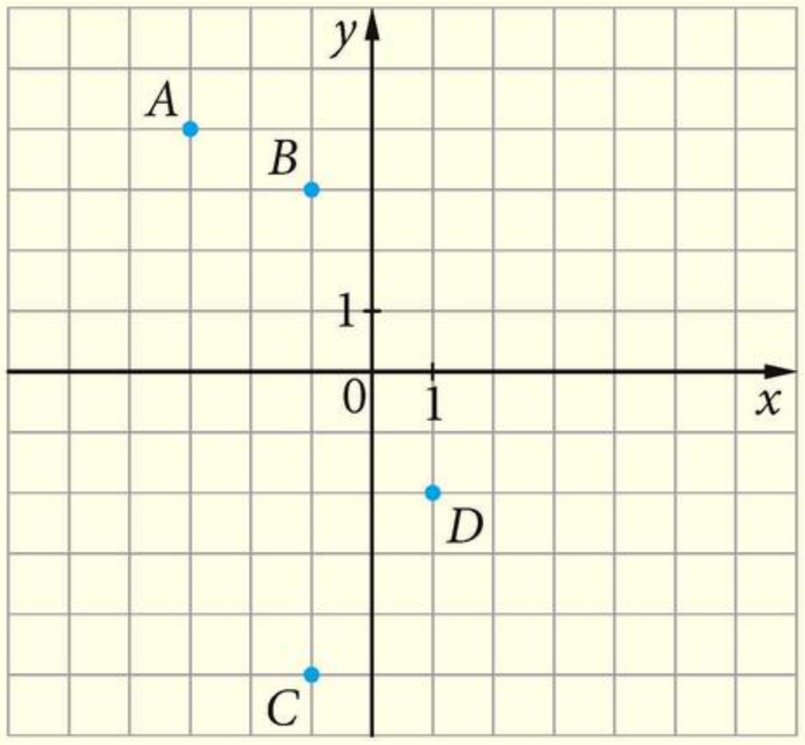
Okazuje się, że zamiast sprawdzać, czy punkt D leży na prostej AB, łatwiej jest sprawdzić, czy punkt B leży na prostej AD. W obu przypadkach pytanie sprowadza się do tego, czy punkty A, D i B leżą na jednej prostej.

13. Zaznacz w zeszycie w kratkę punkty A, B i D tak jak na rysunku powyżej. Narysuj odcinek AD i przedłuż go, dorysowując na jego prawym końcu kolejne odcinki równe i równoległe. Czy otrzymana prosta rzeczywiście przechodzi przez punkt B?

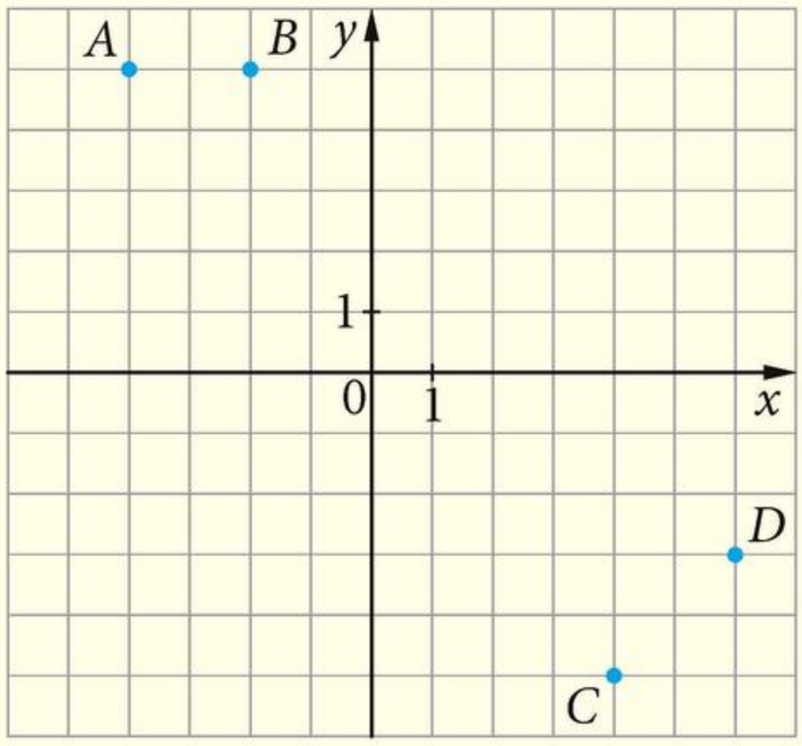
14. W analogiczny sposób sprawdź, czy punkty A, E i C leżą na jednej prostej.

15. Znajdź punkt przecięcia prostych AB i CD.

a)

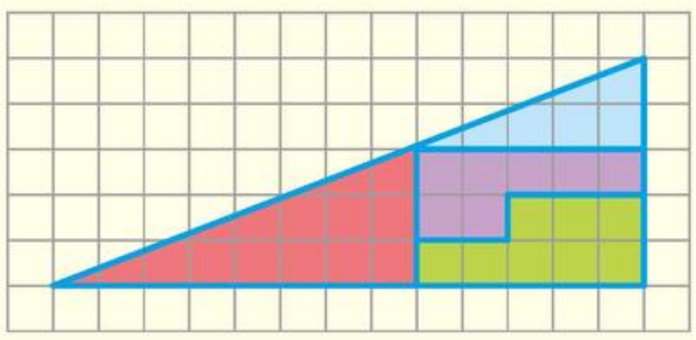


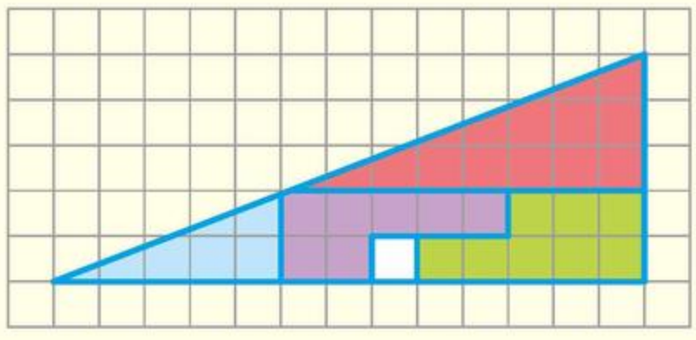
b)



Znikający kwadrat

16. Popatrz na ilustrację poniżej. Trójkąt przedstawiony na rysunku po lewej stronie podzielono na kilka wielokątów. Gdy poskładano je w inny sposób (jak na rysunku po prawej stronie), okazało się, że powstał taki sam trójkąt, ale brakuje w nim jednego kwadratu. Jak to możliwe?





ODPOWIEDZI

I. PROPORCJONALNOŚĆ I PROCENTY

s. 8 1. Proporcjonalność prosta

Ćwiczenia **1. a)** tak **b)** nie **2.** 6960 m **3.** Rodzina trzyosobowa dostała 18 kg śliwek, a czteroosobowa – 24 kg śliwek. **Zadania** **1.** w pierwszym **2. a)** nie **b)** tak **c)** tak **d)** nie **3. a)** tak **b)** nie **4.** 9 min 25 s **5.** raczej dłuższym **6.** 240 g czekolady, 3 jajka, 210 g cukru, $\frac{3}{4}$ łyżeczki ekstraktu, 120 g mąki **7. a)** 300 g masła, 480 g czekolady, 6 jajek, 420 g cukru, $1\frac{1}{2}$ łyżeczki ekstraktu, 240 g mąki **b)** 350 g masła, 560 g czekolady, 7 jajek, 490 g cukru, $1\frac{3}{4}$ łyżeczki ekstraktu, 280 g mąki **8. a)** 500 g **b)** 120 **9.** 75 cm^3 kwasu solnego i 25 cm^3 kwasu azotowego **10.** 11 kratek **Dla dociekliwych** 1. 16 **2.** 1 : 2 **3.** 1 : 4 **4.** 1 : 2 **Czy już umiem?** I. Alfa – tak, Beta – nie II. 47 cm III. nie IV. **a)** trapezem **b)** $\alpha = \varepsilon = 118°$, $\delta = 62°$

s. 14 2. Ułamek liczby

Ćwiczenia **1.** 80 gr **2.** $\frac{14}{23}$ **3.** 48 **4.** 840 kg **Zadania** **1. a)** $22\frac{1}{2}$ **b)** 5 **c)** 27 **2. a)** $\frac{5}{13}$ **b)** Sita 400 g, Kumpel 250 g **3.** $\frac{1}{32}$ **4. a)** $\frac{125}{354}$ **b)** $\frac{15}{59}$ **c)** $\frac{10}{59}$ **5. a)** $\frac{21}{365}$ **b)** $\frac{7}{122}$ **6.** 49,20 zł **7.** wczoraj: 6 zł, dzisiaj: 8,40 zł **8. a)** 16 m^2 **b)** 5 m^2 **c)** $\frac{1}{16}$ **9.** Szóstoklasiści zebrali 55 puszek, czyli $\frac{5}{12}$ wszystkich puszek. Klasa 7a zebrała $\frac{5}{44}$ wszystkich puszek. **10.** o 17.35 **11.** 16 dag **12.** 8 dag wody, 32 dag suchej masy **13.** Jabłka ważą 50 dag, a sucha masa 40 dag. **14.** 4 kg **Dla dociekliwych** **1.** Bartek, bo $\frac{1}{3}$ liczby 20 nie jest liczbą naturalną. **2.** 28 **3.** 12, 24, 36 **4.** 8 **Czy już umiem?** I. $\frac{1}{3}$ II. 30 III. 45 min IV. 67,5 $\frac{km}{h}$

s. 21 3. Co to jest procent

Ćwiczenia **1. a)** $0,2 = \frac{1}{5}$ **b)** $0,075 = \frac{3}{40}$ **c)** $1,54 = \frac{77}{50}$ **2. a)** 10% **b)** 95% **c)** 3% **d)** 0,7% **3.1. a)** 75% **b)** 40% **c)** 52% **d)** $83\frac{1}{3}$% **3.2. a)** $\frac{1}{10}$; 0,1; 10% **b)** $\frac{7}{10}$; 0,7; 70% **c)** $\frac{3}{10}$; 0,3; 30% **4. a)** 50% **b)** 12,5% **c)** 25% **d)** 200% **5. a)** $66\frac{2}{3}$% **b)** $33\frac{1}{3}$% **c)** 60% **d)** 0% **e)** 20% **f)** $66\frac{2}{3}$% **6.** 25% **Zadania** **1. poziom A** **a)** 0,25; $\frac{1}{4}$ **b)** 1,2; $\frac{6}{5}$ **c)** 0,4; $\frac{2}{5}$ **d)** 0,64; $\frac{16}{25}$ **e)** 0,75; $\frac{3}{4}$ **f)** 3; 3 **g)** 0,85; $\frac{17}{20}$ **h)** 1,5; $\frac{3}{2}$ **poziom B** **a)** 0,455; $\frac{91}{200}$ **b)** 0,(6); $\frac{2}{3}$ **c)** 0,032; $\frac{4}{125}$ **d)** 0,275; $\frac{11}{40}$ **e)** 0,006; $\frac{3}{500}$ **f)** 0,025; $\frac{1}{40}$ **g)** 0,(3); $\frac{1}{3}$ **h)** 0,828; $\frac{207}{250}$ **poziom C** **a)** 5% **b)** 78% **c)** 139% **d)** 60% **e)** 308% **f)** 20% **g)** 67% **h)** 280% **poziom D** **a)** 87,5% **b)** 16,7% **c)** 186,7% **d)** 133,3% **e)** 40% **f)** 58,3% **g)** 25% **h)** 55,6% **2. a)** $\frac{3}{5}$, 60% **b)** $\frac{4}{5}$, 80% **c)** $\frac{7}{10}$, 70% **3.** 76% **4. a)** 41% **b)** 1% **5. a)** Franek wydał $\frac{1}{4}$ swoich oszczędności na bilet do zoo. **b)** W sadzie pana Jerzego grusze stanowią $\frac{2}{5}$ wszystkich drzew. **c)** Tłuszcz stanowi $\frac{4}{5}$ masy masła. **6. a)** Wakacje w Grecji spędza 30% klientów biur podróży. **b)** W klasie Agaty 60% uczniów to chłopcy. **c)** Średnio 62,5% osób wchodzących do sklepu odzieżowego nic nie kupuje. **d)** Średnio 40% osób boi się dentysty. **e)** $33\frac{1}{3}$% uczniów naszej szkoły uczy się języka niemieckiego. **7.** masa: 500 g; stężenie: 6% **8. a)** 25% **b)** 37,5% **c)** $16\frac{2}{3}$% **9. a)** około 56% **b)** 37,5% **c)** 20% **d)** około 3,3% **10.** w poniedziałek **11. a)** 25% **b)** 37,5% **c)** 62,5% **12. a)** masa: 50 g; stężenie: 10% **b)** masa: 240 g; stężenie: 12,5% **13. a)** 25% **b)** 12,5% **14.** panie: $55\frac{5}{14}$%, panowie: $44\frac{9}{14}$% **15. a)** 7% **b)** 74% **c)** 33% **d)** 3% **16. a)** 60% **b)** 12,5% **c)** 1,5% **17.** 28% **18. a)** $\frac{33}{200}$, $\frac{9}{52}$, $\frac{7}{41}$ **b)** $\frac{1}{6}$ **Dla dociekliwych** **1. a)** $\frac{4}{5}$ **b)** 80% **c)** 1,25 **d)** 125% **2.** 200% **3.** 166,7% **Czy już umiem?** I. B II. **a)** $\frac{3}{4}$ **b)** 82% **c)** $\frac{5}{7}$ **d)** $\frac{11}{24}$ III. **a)** 75% **b)** 74% IV. C V. **a)** graniastosłup sześciokątny **b)** (1): 4, (2): 6

s. 31 **4. Obliczanie procentu danej liczby**

Ćwiczenia **1. a)** 125 **b)** 51 **c)** 0,81 **2. a)** 97,2 zł **b)** 129,6 zł **c)** 145,8 zł **3.** 26 **Zadania** **1. a)** 3,6, 18, 0,2 **b)** 29, 0,4, 0,07 **c)** 6, 25, 2 **d)** 14, 122, 0,6 **e)** 2, 7, 40 **f)** 90, 21, 270 **2. a)** 115 **b)** 45,5 **c)** 63 **d)** 14,4 **e)** 33,6 **f)** 0,36 **g)** 225 **h)** 0,0045 **3. a)** 10% liczby 25 **b)** 0,6% liczby 250 **c)** 8% liczby 1000 **d)** liczby są równe **4.** I. 3,06; II. 99,25; III. 7,13; IV. 2,61 **5.** w banku C **6.** o 180 zł **7.** nie **8. a)** 30 g **b)** więcej jest rodzynek **9.** 4200 zł **10. a)** jeziora i rzeki: 9900 ha, morze: 11 220 ha, lądy: 11 880 ha **b)** 18 150 ha **11.** 2 kg **12. a)** 12% **b)** 48 g **13. a)** pan Tomasz **b)** pan Piotr **14. a)** Tomek **b)** o 2 maślaki **c)** kurek **15.** o 69% **Dla dociekliwych** **1. a)** 12 **b)** 9 **c)** $\frac{3}{8}$ **2.** $\frac{1}{2}$ **3.** 12% **Czy już umiem?** **I.** 0,36 g **II.** 18 **III.** C **IV. a)** 7,5 **b)** −0,015 **c)** 0,0025

s. 38 **5. Wyznaczanie liczby, gdy dany jest jej procent**

Ćwiczenia **1. a)** 1400 **b)** 120 **c)** 96 **d)** 1,8 **e)** 20 **f)** 42 **2. a)** 200 **b)** 500 **c)** 900 **Zadania** **1. poziom A** **a)** 72 **b)** 37,5 **c)** 30 **d)** 80 **e)** 5 **f)** 3590 **g)** 28 **h)** 126 **i)** 50 **poziom B** **a)** 540 **b)** 120 **c)** 216 **d)** 40 **e)** 20 **f)** 250 **g)** 205 **h)** 130 **i)** 220 **poziom C** **a)** 150 **b)** 350 **c)** 500 **d)** 1800 **e)** 25 **f)** 50 **g)** 60 **h)** 4500 **i)** 300 **poziom D** **a)** 3750 **b)** 500 **c)** 1400 **d)** 400 **e)** 200 **f)** 150 **g)** 11,52 **h)** 200 **i)** 100 **2. a)** 540 **b)** 1200 **c)** 30 **3. a)** 140 **b)** 9,5 **c)** 52,5 **d)** 24 **4. a)** 30 **b)** 28 **5.** 25 **6.** 25 osób; nie jest możliwe **7.** 80 kg **8.** 17,5 m^2 **9. a)** 1500 uczniów **b)** 1500 g **10. a)** 188 dzieci **b)** 188 g **11.** 1000 kg **12.** 75 samochodów **13.** 50 owoców **14. a)** 100 **b)** 156,25 **15. a)** 1800 **b)** o 191 osób **Dla dociekliwych** **1. a)** Ilość wody się zmienia. Ilość suchej masy się nie zmienia. **b)** 20 dag wody, 80 dag suchej masy **c)** 80 dag **d)** 30% **e)** $2\frac{2}{3}$ kg **2.** $133\frac{1}{3}$ g **Czy już umiem?** **I.** 40 punktów **II.** masa roztworu: 500 g, masa wody: 425 g **III.** 400 osób; 96 osób **IV. a)** 15 cm^2 **b)** 14 cm^2 **c)** 30 cm^2

s. 45 **6. O ile procent więcej, o ile procent mniej**

Ćwiczenia **1. a)** 45 **b)** 28 **c)** 220 **d)** 0 **2.** 54 zł **3.1. a)** o $33\frac{1}{3}$% **b)** o 25% **3.2.** 1,20 zł **4.** o 0,7 punktu procentowego **Zadania** **1.** 42 zł **2.** sweter: 72 zł, T-shirt: 16 zł, bluza: 32 zł **3. a)** łyżwy 96 zł, rolki 112,50 zł **b)** więcej w zimie **4. a)** o 20% **b)** o 50% **c)** wcześniej 40%, później 50% **d)** o 10 punktów procentowych **5. a)** mniejsza o 25% **b)** większa o $33\frac{1}{3}$% **6. a)** zdrożało o 20% **b)** zdrożało o 12,5% **c)** więcej o $66\frac{2}{3}$% **d)** poprawił o $6\frac{2}{3}$% **7. a)** 109,65 zł **b)** 169,36 zł **c)** 52,32 zł **8.** 109,65 zł; 169,36 zł; 52,32 zł **9.** 1224 zł, 1170 zł **10. a)** obniżono o 4% **b)** obniżono o 2% **c)** obniżono o 2% **11. a)** Chiny i Indie **b)** Chiny o 3,7%, Indie o 8,8%, USA o 4,9% **12. a)** Para A uzyskała o 4 punkty procentowe więcej głosów niż para B i o 20% więcej głosów niż para B. **b)** Para B uzyskała o 4 punkty procentowe mniej głosów niż para A i o $16\frac{2}{3}$% głosów mniej niż para A. **13. a)** Corn: wzrost o 5 punktów procentowych, Mais: spadek o 5 punktów procentowych, Kukur: wzrost o 15 punktów procentowych **b)** wzrósł o 150% **c)** zmniejszył się o 25% **14.** o 20 punktów procentowych **Dla dociekliwych** **1. a)** $\frac{5}{6}$ **b)** 83% **c)** o 17% **2.** o 25% **3.** niższa o 25% **Czy już umiem?** I. o 35% **II. a)** w pierwszym sklepie 187,50 zł, w drugim 176 zł **b)** w pierwszym, o 11,50 zł **III. a)** o 3 punkty procentowe **b)** o 6,25% **IV.** $2^3 = 8$, $3^2 = 9$, $2 \cdot 3 = 6 = 3 \cdot 2$

s. 52 **7. Obliczenia procentowe**

Ćwiczenia **1.** 1100 zł **2.** 295,20 zł **3.** 1600 zł **4.** w drugim naczyniu **5.** 2,5% **Zadania** **1.** o 6,25% **2.** 40 babeczek **3. a)** 1650 zł **b)** 18% **c)** 594 zł **4.** 60 **5.** tak **6.** B **7.** 16 zł mniej **8.** A: 2100, B: 736, C: 483, D: 3936 **9. a)** 300 owiec; 20% **b)** 300 g; 20% **10. a)** nie **b)** nie **c)** tak **d)** tak **e)** nie **f)** nie **11. a)** 40 osób; 25% **b)** 40 g; 25% **12. a)** 80 chłopców i 120 dziewczynek **b)** 80 g soli i 120 g wody

13. 12,16% **14.** 3% **15.** 15,75% **16.** 1951,22 zł **Dla dociekliwych** **1.** 5% ceny netto to ok. 4,76% ceny brutto, 8% ceny netto to ok. 7,41% ceny brutto, 23% ceny netto to ok. 18,70% ceny brutto **2. a)** o 1 punkt procentowy **b)** o ok. 4,55% **c)** o ok. 0,81% **Czy już umiem?** I. Łączny koszt noclegów i wyżywienia nie zmienił się. II. 440 g III. żółtko: ok. 31%, skorupka: ok. 14% IV. **a)** 8 **b)** 125

s. 58 **Powtórzenie I**

Zestaw 1 **1.** B **2. a)** 56% **b)** 135% **c)** 175% **d)** 77,5% **e)** 87,5% **f)** $133\frac{1}{3}\%$ **3.** 52% **4.** I. F, II. P, III. F, IV. F **5.** C **6.** I. F, II. P, III. P **7.** 55,25 zł **8. a)** 63 punkty **b)** 57 punktów **9.** Rodzina 4-osobowa zapłaciła 4720 zł, a rodzina 5-osobowa – 5900 zł. **10.** 30 dni **11. a)** Wietnam – o 2,6 punktów procentowych, Meksyk – o 1,5 punktu procentowego **b)** o 36% **12.** Oba zdania są prawdziwe. **13.** 39,36 zł **14.** 18 g cukru i 102 g wody **15.** C **16.** 9 pomarańczy, 27 nasion kardamonu **Zestaw 2** **1.** C **2. a)** 25% **b)** 37,5% **c)** 75% **d)** $71\frac{3}{7}\%$ **3.** 35,19 zł **4.** 3750 g **5. a)** 85 uczniów **b)** 128 uczniów **c)** siódmoklasistów, o 4 więcej **6.** 147,60 zł **7.** I. F, II. F **8.** I. C **9.** I. P, II. F, III. P **10.** nie **11.** 14 **12.** Agata 27 zł, Marek 18 zł, Zbyszek 9 zł **13.** 1000 g

s. 62 **Zadania na temat...**

1. 25,42% **2.** o ok. 15,27% **3.** o ok. 18,70% **4.** o 40 100 000 kg **5.** o 30 uczniów **6.** A **7.** C **8.** 202,5 kcal **9.** $8\frac{1}{3}\%$ **10.** $33\frac{1}{3}\%$

s. 64 **Zadania na deser**

1. 60% **2.** 40% **3.** 37,5% **4. a)** 2 : 1 **b)** 1 : 2 **c)** 1 : 5 **5. a)** 300% **b)** 25% **c)** 10% **6.** 1 : 25 000 **7. a)** A – 25%, B – 15%, C – 5%, D – 55% **b)** A – 17%, B – 33%, C – 20%, D – 30% **8.** 1-pokojowe: 4 mieszkania, 2-pokojowe: 10 mieszkań, 3-pokojowe: 18 mieszkań, 4-pokojowe: 8 mieszkań **9. a)** Masa samców niedźwiedzi w Chorwacji i Słowenii zmniejsza się, masa samic oraz wszystkich niedźwiedzi w Szwecji i Norwegii rośnie. **b)** Większe zmiany są na północy. Większe są wśród samic. **10.** 50 l **12.** prostokątny

II. POTĘGI

s. 68 **1. Potęga o wykładniku naturalnym**

Ćwiczenia **1. a)** $8^7 = 2\,097\,152$ **b)** $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{64}$ **c)** $2{,}5^5 = 97{,}65625$ **d)** $(-1{,}2)^4 = 2{,}0736$ **2. a)** $(-3)^2 = 9 > -3^2 = -9$ **b)** $(-4)^3 = -64 = -4^3$ **c)** $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} < \frac{1^3}{2} = \frac{1}{2}$ **3. a)** $\frac{1}{32}$ **b)** $\frac{625}{16} = 39\frac{1}{16}$ **c)** $-\frac{27}{125}$ **d)** $-\frac{64}{27} = -2\frac{10}{27}$ **e)** 1 **4. a)** 8 lub −8 **b)** 4 **c)** 2 lub −2 **5. a)** 10^4 **b)** 10^5 **c)** 10^1 **d)** $0{,}1^3$ **e)** $0{,}1^5$ **f)** 10^0 lub $0{,}1^0$ **Zadania** **1. a)** $(-1)^5 = -1$ **b)** $11^2 = 121$ **c)** $5^4 = 625$ **d)** $2^9 = 512$ **2. a)** 729 **b)** $\frac{1}{16}$ **c)** $\frac{32}{243}$ **d)** $\frac{512}{27} = 18\frac{26}{27}$ **e)** 1,69 **3. a)** 16, −64, 256 **b)** 8; $\frac{1}{8}$; −0,008; 0,000008 **4. a)** 12 **b)** 30 **c)** 630 **d)** $\frac{3}{4}$ **5. a)** 382^2 **b)** $\left(\frac{18}{37}\right)^3$ **c)** 5^n **d)** $(-23)^z$ **6. a)** 2 zera **b)** 3 zera **c)** 4 zera **d)** 1000 zer **7. a)** 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00000001 **b)** 0,16; 0,064; 0,0256 **8. a)** 4 i −4 **b)** 9 i −9 **c)** $\frac{1}{2}$ i $-\frac{1}{2}$ **d)** 0,6 i −0,6 **e)** $1\frac{3}{4}$ i $-1\frac{3}{4}$ **9.** Potęgi o wykładnikach parzystych są równe 1, a o wykładnikach nieparzystych są równe (−1). **10. a)** 2 **b)** −2 **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** $-\frac{1}{2}$ **e)** −1 **f)** 0 **g)** 30 **h)** 0,01 **i)** $\frac{2}{3}$ **j)** $-\frac{5}{4}$ **11. a)** $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^8$ **12. a)** $5^3 = 125$ **b)** $5^4 = 625$ **c)** $5^{21} = 476\,837\,158\,203\,125$ **13.** 16 terabajtów **14.** $2^8 = 256$ **15.** $1{,}02^{20} \cdot 1000$ zł $\approx$ 1485,95 zł **16. a)** w piątym **b)** na niecały rok **17. a)** ok. 10 614 111 923 denarów **b)** ok. 94 964 459 375 zł **Dla dociekliwych** 1. a) 3, 9, 27, 81, 243, ... **b)** $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \ldots$ **c)** −3, 9, −27, 81, −243, ... **d)** $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, \ldots$ **Czy już umiem?** I. **a)** 64 **b)** 1 **c)** 18 **d)** 0,0016 **e)** $3\frac{3}{8}$ II. **a)** nie **b)** nie **c)** tak **d)** nie **e)** tak III. **a)** 10^4 **b)** 10^8 **c)** 10^{12} IV. A: $P = 3{,}25$ cm^2, Obw. = 10 cm, B: $P = 3$ cm^2, C: $P = 6{,}5$ cm^2

s. 75 **2. Potęgi o tych samych podstawach**

Ćwiczenia **1. a)** $10^8 = 100\,000\,000$ **b)** $3^6 = 729$ **2. a)** $10^4 = 10\,000$ **b)** $3^2 = 9$ **3. a)** 3^{10} **b)** 10^{12} **c)** $(-2)^{12}$ **d)** $(-1)^{56}$ **4. a)** 121 **b)** $\frac{1}{8}$ **Zadania** **1. poziom A a)** 2^8 **b)** 5^2 **c)** $\left(\frac{1}{3}\right)^6$ **d)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$ **e)** $0{,}4^4$ **f)** 10^4 **g)** $(-0{,}1)^8$ **h)** $(-0{,}5)^3$ **poziom B a)** 3^{10} **b)** $0{,}2^5$ **c)** $\left(-\frac{1}{4}\right)^7$ **d)** $(-10)^{14}$ **e)** $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ **f)** 5^1 **g)** $(-8)^7$ **h)** $(-0{,}1)^8$ **poziom C a)** $5^4 = 625$ **b)** $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$ **c)** $(-1)^{300} = 1$ **d)** $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$ **e)** $0{,}1^6 = 0{,}000001$ **f)** $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$ **g)** $(-2)^9 = -512$ **h)** $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ **MISTRZ a)** 7^7 **b)** 5^3 **c)** $(-3)^0$ **2. a)** II **b)** I **c)** IV **d)** III **e)** IV **f)** II **3. a)** a^6 **b)** b^{24} **c)** $(-c)^6$ **d)** x^{14} **e)** x^8 **f)** $(-x)^3$ **g)** $(-b)^3$ **h)** m^{12} **i)** $(-y)^4$ **4. a)** 3 **b)** 11 **c)** 2 **d)** 14 **e)** 7 **f)** 2 **5. a)** 2^{24} **b)** 3^{60} **c)** 5^{20} **d)** 7^{24} **e)** 4^{15} **f)** 9^{16} **g)** 6^{11} **h)** 8^{21} **6. a)** 81 **b)** 49 **c)** 64 **d)** 10 000 **e)** 10 000 000 **f)** 100 **7. a)** 100 mln **b)** 10 tys. **8.** A **9. a)** np. $x = 60^{10} \cdot 60^{20} \cdot 60^{30} = = 60^{58} \cdot 60^2 = 60^{15} \cdot 60^{15} \cdot 60^{15} \cdot 60^{15}$ **b)** np. $x = (60^{10})^6 = ((60^3)^4)^5 = (60^{12})^5$ **10. a)** 1 **b)** tak **11.** C **Dla dociekliwych** **1.** 8 000 000 000 000 000 000 **2.** po jednej dobie $2^{24} \approx 16\,000\,000$, po tygodniu $2^{168} \approx 256 \cdot 1000^{16}$, $6^9 = 10\,077\,696 \approx 10^7$, $6^{20} \approx 36 \cdot 10^{14}$ **Czy już umiem?** **I. a)** 2^{12} **b)** 2^8 **c)** 2^{20} **II. a)** 24 **b)** 1 000 000 **c)** 900 000 000 **d)** 49 **III. a)** 3^{21} **b)** 2^{60} **c)** 9^{12} **IV. a)** 0,35 **b)** 4,4 **c)** $139\frac{31}{36}$ **d)** $5\frac{5}{8}$

s. 82 **3. Własności potęgowania**

Ćwiczenia **1. a)** 34^7 **b)** 9^3 **c)** 50^8 **d)** 36^9 **2. a)** $\left(\frac{6}{3}\right)^3 = 8$ **b)** $(0{,}2 \cdot 10)^4 = 16$ **c)** $\left(\frac{35}{7}\right)^3 = 125$ **d)** $\left(-\frac{50}{25}\right)^5 = -32$ **3. a)** 2^7 **b)** 2^{11} **4.** 4 **Zadania** **1. a)** 10^7 **b)** 2^8 **c)** 6^6 **d)** $\left(\frac{1}{5}\right)^5$ **e)** 3^8 **2. a)** $30^3 = 27\,000$ **b)** $3^4 = 81$ **c)** $1^{191} = 1$ **d)** $1{,}3^2 = 1{,}69$ **e)** $2^4 = 16$ **3. a)** 2^{12} **b)** 2^{17} **c)** 2^{13} **d)** 2^1 **e)** 2^{13} **f)** 2^1 **4. a)** 9^8 **b)** 9^1 **c)** 9^3 **d)** 9^5 **e)** 9^1 **f)** 9^4 **5. a)** 10^5 **b)** 10^{12} **c)** 10^{16} **6. a)** $1^{12} = 1$ **b)** $100^3 = 1\,000\,000$ **c)** $1^6 = 1$ **d)** $\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$ **e)** $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$ **f)** $0{,}3^1 = 0{,}3$ **7. a)** 5^{31} **b)** 2^{16} **8. a)** 6^{3n} **b)** 3^{4n} **c)** 8^{4n+1} **d)** 9^{n+8} **e)** x^{17} **9. a)** $x = 8$ **b)** $x = 0$ **c)** $x = 6$ **d)** $x = 4$ **10.** 6 razy **11. a)** 101 **b)** 20 001 **c)** 211 **d)** 191 **e)** $2 \cdot 10^{12} + 1$ **Dla dociekliwych** **1.** ok. $7{,}38 \cdot 10^{11}$ t; zbiory pszenicy na świecie w 2016 r. to ok. 750 mln t, czyli ok. 1000 razy mniej **Czy już umiem?** **I. a)** 4^{14} **b)** 4^5 **c)** 4^6 **II. a)** $3^3 = 27$ **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ **c)** $2^5 = 32$ **d)** $1^6 = 1$ **III.** $3^1 = 3$ **IV.** $175 = 5^2 \cdot 7$, $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $98 = 2 \cdot 7^2$

s. 87 **4. Notacja wykładnicza**

Ćwiczenia **1.1.** 670 000 **1.2.** D **1.3.** $1{,}08 \cdot 10^9$ **2. a)** $\frac{1}{1000000}$; 0,000001; jedna milionowa **b)** 10^{-7} **3. a)** $7{,}8 \cdot 10^{-7}$ **b)** 0,000000083 **Zadania** **1. a)** $\frac{1}{10}$, 0,1, jedna dziesiąta **b)** $\frac{1}{100}$, 0,01, jedna setna **c)** $\frac{1}{1000}$, 0,001, jedna tysięczna **2. a)** $1{,}3 \cdot 10^4$ km **b)** $1{,}4 \cdot 10^6$ km **c)** $1{,}49 \cdot 10^8$ km^2 **d)** $3{,}61 \cdot 10^8$ km^2 **3. a)** $1 \cdot 10^{-4}$ m **b)** $2 \cdot 10^{-7}$ m **c)** $2{,}5 \cdot 10^{-7}$ m **d)** $6{,}25 \cdot 10^{-5}$ m **4.** $2 \cdot 10^{30}$ kg; $1{,}39 \cdot 10^6$ km; $1 \cdot 10^0$ cm^3; $1{,}4 \cdot 10^0$ g; $8{,}1 \cdot 10^{16}$ km; $1{,}16 \cdot 10^4$ km; $5 \cdot 10^0$ cm^3; $8{,}5 \cdot 10^3$ kg **5. a)** $2 \cdot 10^4$ **b)** $5{,}2 \cdot 10^4$ **c)** $1{,}8 \cdot 10^7$ **d)** $7 \cdot 10^{-3}$ **e)** $1{,}85 \cdot 10^{-3}$ **f)** $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ **6. a)** 8 000 000 **b)** 24 000 000 **c)** 13 400 **d)** 0,00007 **e)** 0,00089 **f)** 0,00000667 **7. a)** 100 000 osobników **b)** 10 000 000 ryb **c)** 100 000 000 mrówek **d)** 125 000 000 000 000 owadów **Dla dociekliwych** **1. a)** $\frac{1}{16}$ **b)** $\frac{1}{5}$ **c)** $\frac{1}{27}$ **2. a)** 2^0 **b)** 2^{-1} **c)** 2^{-2} **3.** tak **Czy już umiem?** **I. a)** $1{,}3 \cdot 10^8$ **b)** $7{,}5 \cdot 10^{-8}$ **c)** $7{,}02 \cdot 10^{11}$ **II. a)** 87 000 000 **b)** 0,0000839 **III. a)** $-\frac{8}{15}$ **b)** $-8\frac{3}{4}$

s. 93 **5. Obliczenia w notacji wykładniczej**

Ćwiczenia **1. a)** $3{,}2 \cdot 10^{15} > 6{,}8 \cdot 10^{14}$ **b)** $2 \cdot 10^{-18} > 1{,}8 \cdot 10^{-21}$ **c)** $4 \cdot 10^{-5} < 4 \cdot 10^3$ **d)** $2{,}3 \cdot 10^7 < < 4 \cdot 10^7$ **2.** ok. 86 razy **3. a)** $1{,}66 \cdot 10^{12}$ l **b)** o $3{,}4 \cdot 10^{11}$ l **4.** ok. 164 000 razy **5.** $1{,}2 \cdot 10^8 < 76$ miliardów **6.** $7 \cdot 10^7$ **7.** ok. 8571 razy **Zadania** **1. a)** $y < x < z$ **b)** $x < z < y$ **2.** $c < a < b < d$

3. a) $7{,}7 \cdot 10^{11}$ **b)** $7{,}6 \cdot 10^{-2}$ **c)** $1{,}92 \cdot 10^{-8}$ **d)** $6{,}4 \cdot 10^{31}$ **e)** $6{,}4 \cdot 10^{-17}$ **f)** $9{,}375 \cdot 10^{6}$ **g)** $3{,}5 \cdot 10^{23}$ **h)** $3{,}7 \cdot 10^{7}$ **i)** $3 \cdot 10^{-40}$ **4.** $2 \cdot 10^{19}$, dwadzieścia trylionów **5. a)** o $5{,}64 \cdot 10^{24}$ kg **b)** ok. 20 razy **6. a)** $4{,}9 \cdot 10^{3}$ km; $1{,}3 \cdot 10^{4}$ km **b)** Ziemia ma ok. 2,6 raza większą średnicę. **7.** 9 cm **8. a)** $8 \cdot 10^{-9}$ s **b)** $2{,}5 \cdot 10^{-11}$ s **9. a)** $2 \cdot 10^{11}$ Hz **b)** $1{,}2 \cdot 10^{13}$ Hz **10.** $6{,}5 \cdot 10^{3}$ **11.** 10 **12.** Nie zmieści się. **13. a)** $4{,}5 \cdot 10^{-15}$ **b)** $1{,}3 \cdot 10^{1}$ **c)** $9 \cdot 10^{-5}$ **14. a)** $1 \cdot 10^{6}$, milion **b)** $2 \cdot 10^{6}$, dwa miliony **c)** $1 \cdot 10^{14}$, sto bilionów **d)** $5 \cdot 10^{10}$, pięćdziesiąt miliardów **Dla dociekliwych** **1.** $2{,}992 \cdot 10^{-26}$ kg **2.** $2{,}494 \cdot 10^{-26}$ kg **3. a)** $7{,}31 \cdot 10^{-26}$ kg **b)** $2{,}654 \cdot 10^{-26}$ kg **Czy już umiem?** **I.** ok. 3 529 412 razy **II.** C **III.** 10 razy **IV.** kwadrat, prostokąt, romb, równoległobok

s. 100 **Powtórzenie II**

Zestaw 1 **1.** D **2.** C **3.** $4^2 = 2^4 < 5^2 < 3^3$ **4.** A **5.** C **6. a)** $3\frac{1}{16}$ **b)** $-2\frac{93}{125}$ **c)** $12\frac{37}{49}$ **d)** $12\frac{19}{27}$ **7. a)** 9 **b)** $\frac{1}{5}$ **c)** 16 **d)** 16 **8. a)** $8{,}5 \cdot 10^{8}$ **b)** $1{,}7 \cdot 10^{-7}$ **Zestaw 2** **1. a)** 0,057 **b)** $\frac{1}{72}$ **c)** 50 **2. a)** 2^7 **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ **c)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^7$ **d)** 3^4 **e)** $(-4)^3$ **f)** 5^3 **3.** C **4.** B **5.** Liczba $2^{(2^3)}$ jest większa 4 razy. **6.** trzy pary równych liczb: 64^5 i 4^{15}, 2^{24} i 8^8 oraz 16^4 i 256^2 **7.** $2{,}25 \cdot 10^{4}$ **8.** Samolot jest szybszy od sokoła ok. 11 razy, a światło ok. $3{,}3 \cdot 10^{6}$ razy. **9. a)** druga **b)** pierwsza **c)** pierwsza **d)** druga **10.** 10^5 razy

s. 102 **Zadania na temat...**

1. B **2.** Ziemia: $1{,}5 \cdot 10^{8}$ km, Mars: $2{,}3 \cdot 10^{8}$ km, Pluton: $5{,}9 \cdot 10^{9}$ km **3.** Słońce 0,14 mm, Ziemia 0,0013 mm **4.** dziesięć miliardów **5.** 14 cm **6.** 590 m **8.** Wirusy miałyby 1 m, a bakterie 10 m średnicy. **9.** 30 km

s. 104 **Zadania na deser**

1. $4^1 = 4$, $4^2 = 16$, $4^3 = 64$, $4^4 = 256$, $4^5 = 1024$. Ostatnia cyfra 4^6 to 6, a 4^7 to 4. Ta cyfra zależy od tego, czy wykładnik potęgi jest parzysty czy nieparzysty. **2.** Ostatnią cyfrę równą 6 mają potęgi liczby 2 o wykładniku podzielnym przez 4. **3. a)** 8 **b)** 7 **c)** 6 **d)** 1 **4.** 0, 1, 5, 6. To wszystkie takie liczby jednocyfrowe. **5.** nie **6.** 2^0, 2^1, 2^1+2^0, 2^2, 2^2+2^0, 2^2+2^1, $2^2+2^1+2^0$, 2^3, 2^3+2^0, 2^3+2^1 **7.** 2^1+2^0, $2^2+2^1+2^0$, $2^3+2^2+2^1+2^0$, $2^4+2^3+2^2+2^1+2^0$ **8.** $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{63} = 2^{64}-1$ **9. b)** $50 = 2^5+2^4+2^1$, $100 = 2^6+2^5+2^2$, $200 = 2^7+2^6+2^3$, $111 = 2^6+2^5+2^3+2^2+2^1+2^0$ **10.** D **11.** D **12.** C **13.** B i C **14.** B, C i D **15.** po tygodniu 2^8-1, czyli 255 osób, po miesiącu $2^{31}-1$, czyli 2 147 483 647 osób (ok. 2 miliardów osób) **16. b)** 810 zł **c)** 2047,50 zł **d)** w drugim przypadku o 1237,50 zł wyższa **17. a)** nie **b)** nie **c)** tak **18. a)** 11 **b)** 11 **c)** 1 **d)** 7 **e)** 7 **f)** 1 **g)** 24 lub −24 **h)** 10 **i)** 6

III. PIERWIASTKI

s. 107 **1. Pierwiastek kwadratowy**

Ćwiczenia **1.1.** 9 **1.2.** 10 cm **2. a)** 7 **b)** 14 **c)** 17 **3. a)** $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ **c)** 0,5 **d)** 1,5 **4. a)** 17 **b)** 10 **c)** 5 **5. a)** 37 **b)** 159 **c)** 3210 **d)** 67 324 **Zadania** **1. poziom A** **a)** 3 **b)** 11 **c)** 100 **d)** 9 **e)** 8 **f)** 12 **g)** 50 **h)** 13 **poziom B** **a)** $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{6}{11}$ **c)** $\frac{3}{5}$ **d)** $\frac{2}{7}$ **e)** $\frac{1}{5}$ **f)** $\frac{7}{10}$ **g)** $\frac{3}{4}$ **h)** $\frac{4}{5}$ **poziom C** **a)** $1\frac{1}{4}$ **b)** $1\frac{1}{2}$ **c)** $2\frac{2}{5}$ **d)** $1\frac{3}{4}$ **e)** $1\frac{3}{7}$ **f)** $2\frac{1}{2}$ **g)** $1\frac{2}{3}$ **h)** $1\frac{1}{2}$ **poziom D** **a)** 0,2 **b)** 0,12 **c)** 2,5 **d)** 1,5 **e)** 1,2 **f)** 0,8 **g)** 0,1 **h)** 0,03 **2. a)** 25 **b)** 64 **c)** 81 **d)** 144 **e)** 0,25 **f)** 1,21 **g)** 0,01 **h)** 0,0009 **3. a)** 4 m **b)** 36 dm **c)** 4,8 cm **d)** 0,24 km **e)** 5 mm **4. a)** 12 **b)** 14 **c)** 18 **d)** 9 **e)** $3\frac{1}{16}$ **5. a)** 12 **b)** 25 **c)** −0,3 **d)** 22 **e)** 5 **f)** $\frac{16}{9}$ **g)** 1 **h)** 0,02 **i)** 3 **6.** 1,6 dm **7.** 80 m **8. a)** 0 **b)** 1 **c)** −10 **d)** 4 **9. a)** 2 **b)** 3 **Dla dociekliwych** **1. a)** 75 **b)** 31 **c)** 64 **d)** 105 **2. a)** 42 **b)** 49 lub 51 **Czy już umiem?** **I. a)** 15 **b)** $\frac{4}{9}$ **c)** $2\frac{1}{5}$ **d)** 0,09 **II.** C **III. a)** 31 **b)** 1,2 **c)** $1\frac{1}{3}$ **IV.** prostopadłościan: 40 cm, ostrosłup: 24 cm

s. 115 **2. Szacowanie pierwiastków**

Ćwiczenia **1.** $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ **2.** $8 < \sqrt{78} < 9$ **3. a)** 4,6 **b)** –0,4 **c)** –7,4 **Zadania** **1. a)** $\sqrt{17}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{90}$ **b)** $\sqrt{91}$, $\sqrt{164}$, $\sqrt{298}$ **2. a)** $5 < \sqrt{30} < 6$ **b)** $8 < \sqrt{75} < 9$ **c)** $10 < \sqrt{120} < 11$ **d)** $14 < \sqrt{200} < 15$ **3. a)** 2,236, mniejsze, 2,449, mniejsze, 2,646, większe **b)** 2,2, mniejsze, 2,4, mniejsze, 2,6, mniejsze **c)** 2,24, większe, 2,45, większe, 2,65, większe **4. a)** 2, 3, 4, 5, 6 **b)** 4, 5, 6 **c)** 3, 4, ..., 16, 17 **5. a)** 64 m² **b)** 256 m² **6. a)** 22 dm × 22 dm **b)** 16 **7. a)** 7,05 **b)** 3,46 **c)** 12,64 **d)** 15,68 **8.** $A = -\sqrt{25}$, $B = -\sqrt{3}$, $C = \sqrt{\frac{16}{100}}$, $D = \sqrt{\frac{1}{4}}$, $E = \sqrt{2}$, $F = \sqrt{8}$, $G = (\sqrt{3})^2$, $H = \sqrt{17}$ **9. a)** $\sqrt{5} + \sqrt{6} > \sqrt{11}$ **b)** $\sqrt{7} + \sqrt{7} > \sqrt{14}$ **c)** $\sqrt{5} - \sqrt{2} < \sqrt{3}$ **Dla dociekliwych** **1.** tak **2.** nie **3.** nie, nie **Czy już umiem?** **I. a)** $6 < \sqrt{41} < 7$ **b)** $10 < \sqrt{111} < 11$ **c)** $15 < \sqrt{237} < 16$ **II.** 2,8 **III. a)** 3,4 **b)** 0,7 **c)** 0,476 **IV.** NIE, A **V. a)** $x = 5$ **b)** $x = 4$ **c)** $x = 2$

s. 122 **3. Własności pierwiastkowania**

Ćwiczenia **1. a)** 110 **b)** $\frac{1}{6}$ **c)** 5 **d)** 12 **e)** 5 **f)** 10 **2.1. a)** $\sqrt{32}$ **b)** $\sqrt{54}$ **c)** $\sqrt{0{,}75}$ **d)** $\sqrt{8{,}1}$ **2.2. a)** $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$ **b)** $7\sqrt{3} < 9\sqrt{2}$ **3. a)** $2\sqrt{2}$ **b)** $10\sqrt{5}$ **c)** $6\sqrt{2}$ **d)** $7\sqrt{2}$ **4. a)** $6\sqrt{2}$ **b)** $3\sqrt{10}$ **c)** $\sqrt{5}$ **d)** $7\sqrt{3}$ **Zadania** **1. poziom A a)** $\sqrt{98}$ **b)** $\sqrt{0{,}48}$ **c)** $\sqrt{2}$ **d)** $\sqrt{175}$ **e)** $\sqrt{2}$ **f)** $\sqrt{0{,}28}$ **g)** $\sqrt{99}$ **h)** $\sqrt{2\frac{2}{5}}$ **i)** $\sqrt{125}$ **j)** $\sqrt{\frac{3}{8}}$ **poziom B a)** $4\sqrt{3}$ **b)** $6\sqrt{6}$ **d)** $7\sqrt{5}$ **d)** $15\sqrt{2}$ **e)** $20\sqrt{2}$ **f)** $5\sqrt{2}$ **g)** $2\sqrt{6}$ **h)** $5\sqrt{3}$ **i)** $4\sqrt{5}$ **j)** $8\sqrt{3}$ **poziom C a)** $4\sqrt{3}$ **b)** 0 **c)** $9\sqrt{2}$ **d)** $2\sqrt{7}$ **e)** $3\sqrt{11}$ **f)** $\sqrt{6}$ **g)** $5\sqrt{8}$ **h)** $6\sqrt{3}$ **i)** $5\sqrt{15}$ **poziom D a)** $-3\sqrt{3}$ **b)** $5\sqrt{5}$ **c)** $2\sqrt{2}$ **d)** $4\sqrt{7}$ **e)** $6\sqrt{11}$ **f)** $9\sqrt{5}$ **g)** $-\sqrt{2}$ **h)** $12\sqrt{3}$ **i)** $26\sqrt{2}$ **2. a)** 4 **b)** 7 **c)** 9 **d)** 3 **e)** 4 **f)** 0,5 **g)** 40 **h)** $\frac{2}{3}$ **3. a)** 3 razy **b)** o $2\sqrt{6}$ **4. a)** $\sqrt{16+9} < \sqrt{16} + \sqrt{4}$ **b)** $\sqrt{25-9} > \sqrt{25} - \sqrt{9}$ **c)** $2\sqrt{7} > \sqrt{3 \cdot 7}$ **5.** $0{,}5\sqrt{32} < 3\sqrt{12} < 12\sqrt{3}$ **6.** nie **7. a)** $P = 24$, Obw. $= 12\sqrt{3}$ **b)** $P = 30\sqrt{2}$, Obw. $= 16\sqrt{3}$ **c)** $P = 4\sqrt{15}$, Obw. $= 8\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$ **8. a)** 2,82 **b)** 4,48 **c)** 7,05 **d)** 14,1 **9. a)** 4 **b)** $\sqrt{30}$ **10. a)** $x = 3$ **b)** $x = 3$ **c)** $x = 5$ **d)** $x = 18$ **Dla dociekliwych** **1. a)** $n = 5$ **b)** n jest iloczynem liczby 5 i kwadratu liczby naturalnej **2. a)** $n = 6$ **b)** n jest iloczynem liczby 6 i kwadratu liczby naturalnej **Czy już umiem?** **I.** C **II.** $6\sqrt{5}$ **III. a)** $5\sqrt{3}$ **b)** $13\sqrt{2}$ **c)** $7\sqrt{5} - 5$ **IV. a)** prostopadłe: AB i AF, AB i CD; równoległe: AF i CD **b)** kąt ostry: $\sphericalangle CDE$; kąt prosty: $\sphericalangle BAF$; kąt rozwarty: $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle AFE$; kąt wklęsły: $\sphericalangle DEF$

s. 128 **4. Pierwiastek trzeciego stopnia**

Ćwiczenia **1.1.** 4 **1.2.** 10 cm **2. a)** 8 **b)** −8 **c)** 7 **d)** −5 **3. a)** $-\frac{2}{9}$ **b)** –0,05 **c)** $-\frac{3}{2}$ **4. a)** 17 **b)** −343 **c)** 117 **5.** $4 < \sqrt[3]{100} < 5$ **Zadania** **1. a)** −1 **b)** 6 **c)** −0,2 **d)** $\frac{1}{3}$ **e)** −0,4 **f)** $1\frac{1}{2}$ **g)** −0,5 **h)** $1\frac{1}{4}$ **i)** −0,08 **j)** $1\frac{2}{3}$ **2. a)** 24 cm **b)** 25 cm **3. a)** 7 **b)** 1 **c)** −7 **d)** 14 **e)** 10 **f)** 5 **g)** 2 **h)** 36 **4. a)** 27 **b)** −1000 **c)** 125 **5.** tak **6.** 8 cm **7.** 224 dm² **8. a)** 6 i 7 **b)** 9 i 10 **c)** 10 i 11 **9. a)** 6 **b)** 7 **c)** 3 **d)** 2 **10. a)** 13 klocków **b)** 111 klocków **11. a)** 20 cm **b)** 5 cm **c)** 24 **Dla dociekliwych** **1. a)** 10 **b)** 3 **c)** 2 **d)** 5 **e)** 2 **f)** 2 **g)** 100 **h)** 1000 **i)** 10 **2. a)** ok. 30 **b)** ok. 10 **3.** Z liczby ujemnej nie można wyciągnąć pierwiastka czwartego stopnia, a piątego stopnia – można. **Czy już umiem?** **I. a)** 1 **b)** −20 **c)** $\frac{3}{10}$ **d)** $-\frac{5}{6}$ **II.** $11 < \sqrt[3]{1402} < 12$, $12 < \sqrt[3]{2020} < 13$ **III.** 55 cm **IV. a)** 2 **b)** −0,2 **c)** 1,8 **d)** 4 **e)** 2,4 **f)** −4 **V. a)** $1\frac{1}{2}$ **b)** $3\frac{3}{4}$ **c)** $3\frac{3}{8}$ **d)** $\frac{3}{4}$

s. 135 **5. Działania na pierwiastkach sześciennych**

Ćwiczenia **1. a)** −8 **b)** $-\frac{5}{8}$ **c)** 8 **d)** 0,8 **2. a)** $\sqrt[3]{108}$ **b)** $\sqrt[3]{192}$ **c)** $\sqrt[3]{-1100}$ **d)** $\sqrt[3]{7}$ **3. a)** $2\sqrt[3]{2}$ **b)** $3\sqrt[3]{2}$ **c)** $-5\sqrt[3]{2}$ **d)** $-10\sqrt[3]{9}$ **4. a)** $5\sqrt[3]{4}$ **b)** $6\sqrt[3]{2}$ **Zadania** **1. a)** −4 **b)** 5 **c)** 8 **d)** −2 **e)** −3 **f)** $\frac{5}{2}$ **2. a)** 6 **b)** 0,4 **c)** 3 **d)** −4 **3. a)** $2\sqrt[3]{6}$ **b)** 6 **c)** $-5\sqrt[3]{3}$ **d)** $3\sqrt[3]{17}$ **e)** $2\sqrt[3]{100}$ **f)** $5\sqrt[3]{4}$ **g)** $2\sqrt[3]{3}$ **h)** $2\sqrt[3]{7}$ **i)** $-2\sqrt[3]{10}$ **j)** $-3\sqrt[3]{9}$ **4. a)** $4\sqrt[3]{9} - 3$ **b)** $3\sqrt[3]{3} + 2$ **c)** $-3\sqrt[3]{10}$ **5. a)** $8\sqrt{5}$ **b)** $4\sqrt[3]{5}$ **c)** $200\sqrt{2}$ **d)** $20\sqrt[3]{10}$ **6. a)** 3,42 **b)** 5,13 **c)** 3,42 **d)** 171,00 **7. a)** $2\sqrt{3}$ cm **b)** 4 cm **8. a)** $\sqrt[3]{6}$ cm

b) $\sqrt[3]{4}$ cm **9.** $\sqrt{\sqrt[3]{1000\,000}} = \sqrt[3]{\sqrt{1000\,000}}$ **10. a)** $42\sqrt{37}$ **b)** $222\sqrt{7}$ **c)** $14\sqrt[3]{111}$ **d)** $21\sqrt[3]{148}$
Dla dociekliwych **1. a)** $3^{\frac{1}{2}}$ **b)** $7^{\frac{1}{2}}$ **2. a)** $2^{\frac{3}{2}}$ **b)** $2^{\frac{3}{2}}$ **c)** $2^{\frac{5}{2}}$ **d)** 2^{-1} **e)** $2^{-\frac{1}{2}}$ **f)** $2^{-\frac{3}{2}}$ **3. a)** $7^{\frac{1}{3}}$ **b)** $7^{\frac{1}{n}}$
4. $a^{\frac{1}{n}}$ **Czy już umiem?** **I. a)** 10 **b)** 4 **c)** 7 **d)** 2 **II.** A **III.** $\sqrt[3]{4}$ **IV. a)** 137,70 zł **b)** 153 zł

s. 141 **6. Działania na potęgach i pierwiastkach**

Ćwiczenia **1.1. a)** nie **b)** tak **1.2. a)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ **c)** $\frac{\sqrt{5}}{10}$ **d)** $\frac{\sqrt{10}}{4}$ **2. a)** $54\sqrt{2}$ **b)** $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ **3. a)** 17 **b)** 23 **c)** 0 **Zadania** **1. a)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **b)** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **c)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **d)** $\frac{2\sqrt{5}}{15}$ **e)** $\frac{\sqrt{15}}{5}$ **f)** $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ **2. a)** tak **b)** nie **c)** tak **3. a)** 5,6 **b)** 2,1 **c)** 7,1 **4. a)** 44 **b)** 30 **c)** 12 **d)** −10 **e)** 1100 **f)** 508 **5. a)** $11\sqrt{3}$ **b)** $2\sqrt{5}$ **c)** $6\sqrt{3}$ **d)** $-5\sqrt{3}$ **e)** $7\sqrt{2}$ **f)** $-5\sqrt{5}$ **6. a)** Obw. $= 2\sqrt[3]{4} + 4\sqrt[3]{2}$, $P = 4$ **b)** Obw. $= 5 + 3\sqrt{5}$, $P = 5$ **c)** Obw. $= 14\sqrt{2}$, $P = 20$ **d)** Obw. $= 20\sqrt{3}$, $P = 72$ **e)** Obw. $= 5 + 9\sqrt{5} + 2\sqrt{10}$, $P = 45$ **f)** Obw. $= 2 + 6\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$, $P = 6\sqrt{2}$ **7. I.** $\frac{9}{64}$ **II.** −5 **III.** 10 **IV.** 100 **8. a)** 2 cm **b)** 6 cm **9. a)** 1 **b)** 5 **c)** 20,3 **Dla dociekliwych** **1. a)** $\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$ **b)** $\frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$ **c)** $\sqrt[3]{5}$ **d)** $\frac{4\sqrt[3]{7}}{7}$ **e)** $\sqrt[3]{3}$ **2. a)** $3\sqrt[4]{8}$ **b)** $3\sqrt[5]{81}$ **c)** $\frac{\sqrt[4]{5}}{5}$ **d)** $4\sqrt[5]{8}$ **e)** $\sqrt[4]{2}$
Czy już umiem? **I. a)** $\frac{\sqrt{7}}{7}$ **b)** $\frac{\sqrt{5}}{20}$ **c)** $2\sqrt{6}$ **II.** B **III. a)** 125 **b)** 37 **c)** $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ **d)** $27\sqrt{2}$ **IV. a)** A **b)** D **c)** C **d)** D **e)** C **f)** A **g)** B **h)** D **i)** B

s. 145 **Powtórzenie III**

Zestaw 1 **1. a)** 9 **b)** −1 **c)** 12 **d)** 0,4 **e)** $\frac{4}{11}$ **f)** $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ **g)** 38 **h)** 60 **2. a)** 6 **b)** 9 **c)** 2 **d)** 0,6 **3. a)** 3 **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** 3 **d)** $\frac{3}{4}$ **4. a)** $2\sqrt{3}$ **b)** $2\sqrt{5}$ **c)** $3\sqrt{5}$ **d)** $6\sqrt{3}$ **e)** $2\sqrt[3]{6}$ **f)** $4\sqrt[3]{2}$ **5. a)** 15 **b)** 2,4 **c)** 1,5 **6. a)** 2 i 3 **b)** −4 i −3 **c)** −10 i −9 **d)** 12 i 13 **e)** −5 i −4 **f)** 6 i 7 **7. a)** 131 **b)** 38 **c)** 6 **8. a)** $\sqrt{12}$ **b)** $\sqrt{27}$ **c)** $\sqrt{50}$ **d)** $\sqrt{125}$ **e)** $\sqrt[3]{81}$ **f)** $\sqrt[3]{3000}$ **9. a)** $2\sqrt{2}$ **b)** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ **c)** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ **d)** $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ **10. a)** Obw. $= 8\sqrt{2}$ cm, $P = 6$ cm^2 **b)** Obw. $= 6\sqrt{3}$ cm, $P = 6$ cm^2 **Zestaw 2** **1.** $-\sqrt{9} < 0,(4) < \frac{1}{2} = \sqrt{0,25} < \frac{7}{6} < \sqrt{4} = \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{27}$ **2. a)** $\frac{49}{144}$ **b)** −50 **c)** 4 **d)** $42\frac{7}{8}$ **3. a)** 3 **b)** 2 **c)** 1 **d)** 3 **4.** $\sqrt{1,44}$, $\sqrt{\frac{1}{16}}$, $\sqrt{\frac{64}{81}}$, $\sqrt{\frac{49}{16}}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[3]{-1000}$ **5.** $5\sqrt{3}$ **6. a)** 9 cm^2 **b)** $24\sqrt{3}$ cm^2 **c)** $30\sqrt{6}$ cm^2 **7. a)** $3\sqrt{2} \approx 4,2$ **b)** $5\sqrt{2} \approx 7$ **c)** $12\sqrt{2} \approx 16,8$ **8.** B **9.** $8\sqrt{2}$ **10. a)** 1 **b)** $3\sqrt{2}$ **c)** $\frac{3\sqrt{15}}{5}$ **11.** $V = 6\sqrt{5}$ cm^3, $P_c = (8\sqrt{15} + 6)$ cm^2

s. 147 **Zadania na temat...**

1. ok. 2500 lat; ok. 1400 lat **2.** ok. 1500 km; ok. 6000 km **4.** druga **5. a)** tak; nie, np. 5 – 7; tak; nie, np. 2 : 4
b)

	Suma	**Różnica**	**Iloczyn**	**Iloraz**
liczby naturalne	TAK	NIE (np. 5 – 7)	TAK	NIE (np. ...)
liczby całkowite	TAK	TAK	TAK	NIE (np. ...)
liczby wymierne	TAK	TAK	TAK	TAK
liczby niewymierne	NIE (np. ...)	NIE (np. ...)	NIE (np. ...)	NIE (np. ...)

s. 149 **Zadania na deser**

1. a) A = 6, B = 1, N = 4 **b)** A = 9, J = 7, K = 4 **c)** M = 1, R = 9, U = 6 **d)** A = 2, B = 4, C = 6 **e)** A = 9, B = 1, C = 8 **2.** $\sqrt[5]{5} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ **3. a)** 27 **b)** 98 **4.** 55 cm **5. a)** $x = 25$ **b)** $x = 0,25$ **c)** $x = 1331$ **d)** $x = 1,331$ **e)** $x = 0$ lub $x = 1$ **f)** $x = -343$ **6.** istnieje dla $n \leqslant 27$; jest liczbą wymierną dla $n = 0$, $n = 15$, $n = 24$, $n = 27$ **7.** a) 33 **b)** 333 **c)** 3333 **d)** 33…33 (100 trójek) **8. a)** liczby odwrotne **b)** liczby przeciwne **c)** To nie są liczby odwrotne ani przeciwne. **9.** $\frac{1}{5}$ **10.** np.: $n = 4^3 \cdot 3^8 = 419\,904$, $n = 4^3 \cdot 3^8 \cdot 17^{12}$; nieskończenie wiele

IV. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

s. 153 1. Od wzorków do wzorów

Ćwiczenia **1. a)** 50 **b)** −47 **2. a)** ujemna **b)** dodatnia **c)** ani ujemna, ani dodatnia **3.1.** 8,75 cm² **3.2.** I i II **4.** $60n + 30u$, 870 zł **Zadania** **1. poziom A** **a)** 0 **b)** $\frac{2}{7}$ **c)** 4 **d)** 24 **e)** −4 **f)** 11 **g)** 40 **h)** 35 **i)** 0 **poziom B** **a)** −6 **b)** 7,5 **c)** 12 **d)** 1 **e)** $-\frac{7}{12}$ **f)** −11 **g)** 4 **h)** 48 **i)** $-\frac{10}{11}$ **poziom C** **a)** $\frac{1}{4}$ **b)** −7,5 **c)** 20 **d)** $-\frac{4}{9}$ **e)** −60 **f)** −36 **g)** 56 **h)** 25 **2. a)** −5 **b)** 0 **c)** 4 **3. a)** $100k$ **b)** $0{,}01p$ **c)** $p - j$ **d)** $5M + 2N$ **4. a)** $x - 0{,}8$ **b)** 1,20 zł **c)** $x + 2(x - 0{,}8)$ **5. a)** 94,50 zł **b)** $21{,}5x + 17{,}5y + 17z$ **c)** $21{,}5n - 35$ **6. a)** Janek $(2k + 3m)$ [zł], Ewa $(7m + d)$ [zł] **b)** o $(2k - 3d)$ [zł] **7. a)** tak **b)** nie, np. dla $x = 1$ **c)** nie, np. dla $x = 0$ **8.** $2n - 2$, 6 **9. a)** poprawne **c)** nie **10. a)** $n + 1$ **b)** $n - 1$ **11.** $P = 2a^2$, $L = 6a$ **12. a)** $2(a + b)$ **b)** $4(x + 1)$ **c)** $x + 2y + 6$ **13. a)** $\frac{ph}{2}$ **b)** $2nx$ **c)** $2ak$ **14.** $9s + 3$ **15.** $an + 2a$ **16. a)** $n + n + 1 + n + 2$ **b)** $2n(2n + 2)$ **c)** $\frac{1}{2}(2n + 1)(2n + 3)$ **Dla dociekliwych** **1.** 4 × 4: 3 poziome i 3 pionowe; $n \times n$: $(n - 1)$ poziomych i $(n - 1)$ pionowych **2.** 3 × 3: 3 dm, 4 × 4: 4 dm, $n \times n$: n dm **3.** $2n(n - 1)$; dla $n = 30$: 1740 dm **Czy już umiem?** **I.** $5x - 8$ **II.** 35 **III. a)** Obw. $= a + a + 1 + b$, $P = \frac{a(a+1)}{2}$ **b)** $a + a + 1 - b$ **IV.** Większe niż 2000 są wynikiem działań (1) i (2).

s. 162 2. Suma algebraiczna i jej wyrazy

Ćwiczenia **1.** x^2, $2x$, -5, $7x$, $-9y$, 5, −2 **2. a)** $3y - 5$ **b)** $3x^2y + 8xy^2$ **3.** 5 **4. a)** suma liczby a i iloczynu liczb 2 i b **b)** iloczyn sumy liczb a i 2 oraz liczby b **c)** iloraz różnicy liczb a i b przez sumę liczb a i 1 **Zadania** **1. poziom A** **a)** $3x$, $7y$, 5 **b)** c^3, $-3bc$, $-\frac{1}{3}b^2c$ **c)** b^2, $-4ac$ **d)** $-\frac{1}{2}n^2$, $8n$, −4 **e)** $-3a^2$, $2ab$, $-b^2$ **f)** $9xy$, $-3x$, y^2 **poziom B** **a)** $6x$ **b)** 0 **c)** $-z$ **d)** $-4k$ **e)** $-k$ **f)** $3m$ **poziom C** **a)** $-x + 1$ **b)** $-y$ **c)** $-3m + 1$ **d)** $k + 3$ **e)** $5p - s + 3$ **f)** $5h - 8j - 6$ **poziom D** **a)** $x^2 + x + 2y^2$ **b)** $3a - 5b^2$ **c)** $-4a^2 - 2a + b^2$ **d)** $a^3 + a^2 - 2$ **e)** $3x^2 - 2x$ **f)** $-7m^2 + 6m + 9n^2 - 7$ **2.** trzy grupy: I. $6xy^2$, $4xy^2$, xy^2, $0{,}001xy^2$ i $2xy^2$ II. $-3x^2y$, $-9x^2y$ III. $8x^2yz^2$, x^2z^2y, $6x^2yz^2$ **3. a)** tak **b)** Dla każdej wartości p wyniki będą takie same. **4. a)** $7a - 2$ **b)** $5{,}5x + 5$ **c)** $5p + 3$ **5.** Wszystkie sumy są równe $5x^2 + 6y$ **6. a)** $2x + 3$, $\frac{2}{3}x + 1$ **b)** $2(x + 3)$, $\frac{2}{3}x$, $\frac{2}{3}(x + 1)$ **c)** $\frac{2}{x+3}$ **7.** 4 **8. a)** $ab + \frac{ab}{2}$ **b)** $2ab - \frac{ab}{2}$ **c)** $1{,}5ab$ **d)** $\frac{3ab}{2}$ **Dla dociekliwych** **1. a)** $n + 1$, $n + 2$, $n - 1$ **b)** $3n + 3$ **d)** nie, tak **Czy już umiem?** **I.** $2x^2$, $-5x$, $2xy$, $15x$, 2 **II.** B **III.** Obwód prostokąta P_1: $6x + 6$, obwód prostokąta P_2: $12x - 10$ **IV.** łyżeczka: 5 cm³, wanna: 200 l, wiadro: 10 l, kubek: 250 cm³

s. 171 3. Opuszczanie nawiasów

Ćwiczenia **1. a)** $7x - 4$ **b)** $2x - 3y + 7$ **c)** 0 **2. a)** $6a + 15$ **b)** $-15b + 10$ **c)** $4c^3 - 8c^2$ **d)** $-16d + 24$ **3. a)** $2c^3 + b^2 + \frac{2}{3}$ **b)** $-d + 2$ **4. a)** −36 **b)** $x + 5$ **c)** $x - 1$ **Zadania** **1. poziom A** **a)** $-5xy - 2x + y$ **b)** $ab + 2a$ **c)** $-3p - r$ **d)** $-st - s + 2t$ **e)** $-m + n - 1$ **f)** $3g + 2h + 3$ **poziom B** **a)** $3ab + 6a$ **b)** $-3d + 9$ **c)** $-12d + 32$ **d)** $-3x - 21$ **e)** $2x - 10$ **f)** $-4a + 12$ **g)** $16cd - 24$ **h)** $-2xy - 2y$ **poziom C** **a)** $2x - y + \frac{1}{5}$ **b)** $a - 3ab$ **c)** $4p - 3r - \frac{2}{3}$ **d)** $2g - 4h + \frac{1}{2}$ **e)** $\frac{1}{2}m + 1$ **f)** $2t - s$ **poziom D** **a)** $6x^2 + 2x - 3y - 16$ **b)** $2a + 5b$ **c)** $2r - 4$ **d)** $s - 2t - 2\frac{1}{2}$ **e)** $-17x + 5y$ **f)** $4g + 2\frac{1}{5}$ **MISTRZ** I i V, II i IV **2. a)** $F + G = -5x + 4$, $F - G = 7x - 4$ **b)** $F + G = -4y + 3$, $F - G = 4y + 13$ **c)** $F + G = 4$, $F - G = 2a^2 - 12$ **d)** $F + G = x + y$, $F - G = 3x - 3y$ **e)** $F + G = 2b$, $F - G = -4a$ **f)** $F + G = -2a$, $F - G = 2b$ **3.** KARIATYDA **4.** I. $8x + 8y$, II. $8(x + y)$ **5.** $\frac{1}{2}\big((x + 8) \cdot 2 - 10\big) - x = 3$ **6.** 8 **9.** I. $x + 2y$ II. m III. $4a - c$ **Dla dociekliwych** **1.** $10x + y$ **2.** $10y + x$ **3.** $B7 \cdot 100 + C7 \cdot 10 + D7$ **Czy już umiem?** **I. a)** $-5x + 10y$ **b)** $4x + 10$ **II. a)** $7x + 3$ **b)** $a + 18$ **c)** $-4b - 14c + 16$ **III.** $\big[(x + 6) \cdot 2 - 10\big] : 2 - x = 1$ **IV. a)** tak **b)** nie, np. W gospodarstwach domowych w 2017 r.

sortowano około 3 razy więcej odpadów niż w 2010 r. **c)** tak **d)** nie, np. W 2017 r. łączna waga niesortowanych odpadów z gospodarstw domowych była większa niż w 2010 r.

s. 179 **4. Porządkowanie wyrazów w sumach algebraicznych**

Ćwiczenia **1. a)** $14x + 2xy$ **b)** $-2ab + 2ac$ **2. a)** $x^2 - 4xy^2 + 6y$ **b)** $x^3 - 8xy^2 - 9xy$ **3. a)** $-18\frac{1}{6}$ **b)** $5\frac{1}{4}$ **4. a)** $10ab - 8a + 9$ **b)** $5a - 6ab + 3b^2$ **5. a)** $a^2b + 4ab^2 + 18ab$ **b)** $19a^2b + 10ab$ **Zadania** **1. poziom A** **a)** $-x^2 + 3ax - x$ **b)** $3p^2 - 6p$ **c)** $4a^2 - 20ab - 24a$ **d)** $-5yz + 5xz - 5z^2$ **e)** $-2mn + 2m^2 - 6m$ **f)** $-kg - 4k$ **poziom B** **a)** $3x^2 - 10$ **b)** $3a^2 - 3ab$ **c)** $s - t^2 - 2st + tw$ **d)** $-mn + 4mo - 3no$ **e)** $-2c^2 - 2ab + ac - bc$ **f)** $-x^2y + xy^2$ **poziom C** **a)** $10a + 6b^2 + 6ab$ **b)** $-2st + 20sw - 6stw$ **c)** $6xy^2 + 3xy$ **d)** $6m^3n^2 + 12m^2n^3 + 7mn$ **e)** $9x^2z - 5yz^2 - 10xyz$ **f)** $-3a - 4ab^2 - 10ab$ **poziom D** **a)** $16a + 29ab$ **b)** $-a^2b^2 + 5a^2b$ **c)** $4s^2t^2 + 16st^2$ **d)** $-7x^2y + 4xy$ **e)** $6p^3r^2 - 5p^2r^2$ **f)** $-4x^2y + 13xy$ **2. a)** $a(x + y + z) = ax + ay + az$ **b)** $a(a + a + 2) = a^2 + a^2 + 2a$ **3.** $P_1 = P_2 = P_3 = 3a^2 + 6a$ **4.** I. $-2n^2 - 6n$ II. $-3x^2 + 6y^2$ III. $-a^2 - 8a$ IV. $4p^2 - 2s^2$ **5.** D **7. a)** $2x$ **b)** $\frac{1}{2}xy$ **c)** $5y^2$ **d)** $1{,}5x^2y$ **Dla dociekliwych** **1. a)** $2ab(4 - 3b)$ **b)** $2x(2x^2 - x + 1)$ **c)** $7y(5xy^2 + 8)$ **d)** $k^2l\left(\frac{1}{121} - \frac{1}{15}kl^3\right)$ **2. a)** $3{,}5 \cdot (7 + 3) = 35$ **b)** $6{,}78 \cdot (12{,}125 + 7{,}875) = 135{,}6$ **c)** $1432 \cdot (524 + 1512 - 36) = 2\,864\,000$ **Czy już umiem?** I. $3x(6x - 4) = 18x^2 - 12x$ II. **a)** $5x^3 - x^2$ **b)** $-5x^3 + x^2$ **c)** $5x^3 + x^2$ III. **a)** $-b^2$ **b)** a IV. **a)** 2 **b)** 169 **c)** 625 **d)** 36

s. 187 **5. Wyrażenia algebraiczne i procenty**

Ćwiczenia **1. a)** $0{,}4a$ **b)** $0{,}6xy$ **c)** $0{,}54u$ **2.** 3% **3.** o 4% mniej **4.1. a)** 96 **b)** 64 **4.2. a)** $1{,}2y$ **b)** $0{,}55x$ **c)** $0{,}904x$ **5.** o 28% **Zadania** **1. a)** $0{,}13 \cdot 837$ **b)** $0{,}13x$ **c)** $1{,}17 \cdot 921$ **d)** $1{,}17x$ **e)** $0{,}85 \cdot 739$ **f)** $0{,}85x$ **2. a)** $0{,}8x$ **b)** $0{,}7 \cdot 0{,}8x$ **c)** $0{,}7 \cdot 0{,}8x$ **d)** $1{,}2x$ **e)** $1{,}2 \cdot 1{,}1x$ **f)** $1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot x$ **3.** 24% **4.** tak **5.** o 5% **6. a)** o 19% **b)** o 21% **7. a)** Cena zmniejszyła się o 1%. **b)** Cena zmniejszyła się o 10%. **c)** Cena zmniejszyła się o 30%. **8. a)** Pole zmniejszyło się o 4%. **b)** Obwód zwiększył się o $6\frac{2}{3}$%. **Dla dociekliwych** **1.** o 20% **2.** ok. 4,8% **Czy już umiem?** I. **a)** $1{,}05x$ **b)** $0{,}72x$ II. 9,8% III. o 4% IV. **a)** 4,83 zł **b)** 20 dag

s. 192 **Powtórzenie IV**

Zestaw 1 **1. a)** $x + 2$ **b)** $\frac{1}{3}k$ **c)** $12(x - y)$ **d)** $2a - 3$ **e)** $0{,}4k$ **f)** $0{,}75x$ **2.** $2x + 5$ **3. a)** 25 **b)** $\frac{1}{3}$ **4. a)** $6x^4$ **b)** $2xy^3$ **c)** $-3a^5b^2$ **5. a)** $2a^2 + 5a + 3b$ **b)** $10a + 6b$ **c)** $8x^2 + 2x$ **6.** I P, II P **7.** 16 900 zł **8. a)** $1{,}15s$ **b)** $0{,}85s$ **9.** $0{,}9x + 0{,}95y$ **Zestaw 2** **1.** obwód: $4nx + 2x$, pole: $n^2x^2 + nx^2$ **2. a)** $2x + 0{,}7y$ **b)** $1{,}5a \cdot 0{,}35b$ **3.** prostokąt, o x **4.** $2x$ **5. a)** $-2x^2 - 2y^2 - 4xy$ **b)** $\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{4}$ **6.** $2{,}8x + 7{,}2$ **7.** $0{,}2x$ **8.** o 40% **9.** o 5,5%

s. 194 **Zadania na temat...**

1. liczbą atomów wodoru **2.** pentan: C_5H_{12}, penten: C_5H_{10}, pentyn C_5H_8 **4.** alkany: C_nH_{2n+2}, alkeny: C_nH_{2n} **7.** II **8.** II

s. 196 **Zadania na deser**

1. a) 60 **b)** $2n(n + 1)$ **c)** $10 \cdot 10 = 100$ **2. a)** $2x + 2y$ **b)** $152(x + y)$ **c)** $166\frac{2}{3}(x + y)$ **d)** $\frac{n}{3}(x + y)$ **3. a)** 24 – jedną, 24 – dwie **b)** $6(n - 2)^2$ – jedną, $12(n - 2)$ – dwie **4.** o $33\frac{1}{3}$% mniej **5. a)** o 25% **b)** o 37,5% **6.** zwiększyć o $33\frac{1}{3}$% **7.** ok. 14% **8. a)** $3n$, $6n$, $6(n + 2)$ **b)** $3n + 1$, $6n + 2$ **c)** $4n$ **13. a)** wartość 0 dla $x = 2{,}5$, dla pozostałych dodatnie **b)** wartość 0 dla $x = 3$, dla pozostałych ujemne **14. a)** 12 **b)** 8

V. RÓWNANIA

s. 200 **1. Co to jest równanie**

Ćwiczenia **1. a)** 8 **b)** 3 **c)** −2 **2.** nieskończenie wiele rozwiązań: II; dwa rozwiązania: IV; jedno rozwiązanie: I, V; brak rozwiązań: III, VI **3.** $x + (x + 4) = 14$, 5 lat **Zadania** **1. a)** −2 **b)** −2 **c)** −7 **d)** −7 **e)** −7 **f)** 0 **2. a)** tak **b)** nie **c)** nie **d)** nie **e)** tak **f)** tak **4. a)** WATRA **b)** $x(3 - x) = 0$, $2^x - 1 = x$ **5. a)** 10 **b)** 8 **c)** −2 **d)** 20 **e)** 7 **f)** 9 **g)** 32 **h)** 4 **6.** I – B (4), II – C (10), III – A (3), IV – D (2) oraz IV – C (2) **7.** np.: **a)** $x + 2x = 39$ **b)** $3x + 100 = 940$ **9.** I: nieskończenie wiele rozwiązań II: dwa rozwiązania III: nie ma rozwiązań IV: jedno rozwiązanie **10. a)** Każda liczba jest rozwiązaniem. **b)** Każda liczba nieujemna jest rozwiązaniem. **Dla dociekliwych** **2. a)** 14 **b)** $10\frac{2}{3}$ **c)** −12 334 **3.** nieskończenie wiele **a)** tak **b)** tak **c)** nie **Czy już umiem?** I. D II. C III. np. $3x = x + 28$ IV. **a)** 3 **b)** −9 **c)** 7 **d)** −18

s. 206 **2. Rozwiązywanie równań**

Ćwiczenia **1. a)** $x = 8$ **b)** $x = 4$ **c)** $x = 10{,}5$ **2. a)** $x = 5$ **b)** $x = 2$ **c)** $x = -3$ **d)** $x = 32$ **3. a)** $x = \frac{2}{3}$ **b)** $x = 3$ **c)** $x = 12$ **4. a)** $x = 0$ **b)** nie ma rozwiązań **c)** każda liczba jest rozwiązaniem **Zadania** **1. poziom A** **a)** $x = \frac{1}{3}$ **b)** $x = 0$ **c)** $x = -\frac{3}{5}$ **d)** $x = -4$ **e)** $x = 2$ **f)** $x = -1{,}5$ **g)** $x = 6$ **h)** $x = \frac{6}{5}$ **i)** $x = 0$ **poziom B** **a)** $x = 12$ **b)** $x = 9$ **c)** $x = 1$ **d)** $x = 13$ **e)** $x = 17$ **f)** $x = 9$ **g)** $x = 11$ **h)** $x = 2$ **i)** $x = -8$ **poziom C** **a)** $x = 1$ **b)** $x = 2$ **c)** $x = \frac{1}{2}$ **d)** $x = -24$ **e)** $x = -4$ **f)** $x = \frac{3}{5}$ **g)** nie ma rozwiązań **h)** $x = 1{,}5$ **poziom D** **a), e)** nie ma rozwiązań **c), g)** każda liczba jest rozwiązaniem **b)** $x = 2$ **d)** $x = -4$ **f)** $x = 0$ **h)** $x = 5$ **MISTRZ** **a)** $x = 8$ **b)** $x = 2$ **c)** $x = -\frac{3}{7}$ **d)** $x = 2$ **2.** $2x + 3{,}5 = x + 4$, $x = 0{,}5$ [kg] **3.** $x = 4$, tak **4.** GRAB **5.** 2 zł **6.** K $x = 0$, O $x = -3$, Z $x = 17$, A $x = 7$, OKAZ **7.** I. $x = 1$ II. $x = -0{,}5$ III. $x = 3$ IV. $x = -1$ **8. a)** $x = \frac{3}{5}$ **b)** $x = 1$ **c)** $x = 7{,}5$ **d)** $x = -2{,}5$ **e)** $x = -16$ **f)** $x = 4$ **9. a)** $x = 9$ **b)** $x = -\frac{1}{2}$ **10.** $3(2x - 6) = 4(1{,}5x + 1)$ – równanie nie ma rozwiązania, $6x - 4 = -2(2 - 3x)$ – każda liczba jest rozwiązaniem, $2x + 3x - 4 = 6(x - 2)$ – równanie ma jedno rozwiązanie: $x = 8$ **Dla dociekliwych** **1. a)** tak **b)** $x = 1$, $x = -3$ **2. a)** $x = 1$, $x = 4$, $x = 6$ **b)** $x = -2$, $x = 3$, $x = -5$ **c)** $x = 0$, $x = 2$, $x = \frac{1}{2}$ **d)** $x = 0$, $x = -2$, $x = 2$, $x = -3$, $x = 3$ **Czy już umiem?** I. C II. **a)** $x = 8\frac{1}{2}$ **b)** $x = 3$ III. **a)** nieskończenie wiele **b)** jedno **c)** jedno IV. **a)** 60°, trójkąt równoramienny, równoboczny **b)** 90°, trójkąt prostokątny **c)** 35°, trójkąt równoramienny

s. 215 **3. Zadania tekstowe**

Ćwiczenia **1.** 0,25 zł **2.** 10 lat **3.** 45 **4.** 42°, 69°, 69° **Zadania** **1.** 19 lat **2.** zeszyt: 8,40 zł, ołówek: 2,80 zł, karteczki: 3,80 zł **3. a)** 26° **b)** 29° **c)** 67,5° **d)** 85° **e)** 65° **f)** 40° **4.** pierwszego dnia 32 km, drugiego dnia 16 km, trzeciego dnia 24 km **5.** 13 **6.** 21 uczniów **7.** 16 miejsc **8.** 5 kręgów lędźwiowych, 7 kręgów szyjnych i 12 kręgów piersiowych **9. a)** $P = 49$ cm^2, $L = 28$ cm **b)** 60 cm^2 **10.** 7 cm, 14 cm, 20 cm **11.** 57 cm^2 **12.** 18 cm, 14 cm i 6 cm **13.** 13 cm i 27 cm **14.** 6 km **15.** 12 lat **16. a)** 50 trójkątów **b)** równoległobok **c)** 49 zapałek wewnątrz, 52 na brzegu **17. a)** 13 lat i 8 lat **b)** za 16 lat **c)** 10 lat temu **18.** 5 pytań **19.** 4 jogurty małe, 8 jogurtów dużych **20.** 25 **Dla dociekliwych** **1. a)** 73 **b)** 225 **Czy już umiem?** **I.** 37,5°, 50°, 122,5°, 150° **II.** 8 lat **III.** 10 kur

s. 224 **4. Zadania tekstowe z procentami**

Ćwiczenia **1.** początkowo: 450 zł, po pierwszej obniżce: 360 zł **2.** Piotr: 1200 zł, Arek: 900 zł, Bartek: 1500 zł **3.** 20 m^2 **4.** 10 g **5.** 400 g **Zadania** **1. a)** 800 zł **b)** 900 zł **2.** 84 zł **3. a)** tańsze **b)** 1200 zł **4.** 4 zł, 4,84 zł **5.** 214 km **6.** Ola: 1200 zł, Julka: 1300 zł **7. a)** 4800 egzemplarzy

b) 6000 egzemplarzy **8. a)** 350 kobiet **b)** 350 g **9. a)** 200 **b)** 200 g **10. a)** 8 kg **b)** 1,35 kg soli, 7,65 kg wody **11. a)** ok. 10,5% **b)** ok. 10,5% **12. a)** 3 kg **b)** 4,65 kg wody i 0,35 kg soli **13.** Łucja: 420 zł, Maja: 700 zł, Jan: 300 zł **14.** 4,8 kg **15. a)** o 7,1% **b)** o 1,2% **c)** 8000 zł na akcje firmy Byczek, 2000 zł na akcje firmy Miś **Dla dociekliwych** **1.** 50 g roztworu 10-procentowego i 150 g roztworu 50-procentowego **2.** 25 g octu 6-procentowego i 75 g octu 10-procentowego **Czy już umiem?** **I.** 950 zł **II.** 3900 zł **III.** B **IV.** D **V. a)** 5 **b)** 9 **c)** 17 **d)** 0 **e)** 1 **f)** 9

s. 232 **5. Przekształcanie wzorów**

Ćwiczenia **1.** 1,25 m **2. a)** $a=\frac{\sqrt{6P}}{6}$ **b)** $a=\sqrt[3]{V}$ **3.** $S=\frac{F}{p}$ **4.** $L=2a+b$, $b=L-2a$ **Zadania** **1. a)** $P_p=P_c-P_b$, $P_b=P_c-P_p$ **b)** $a=\frac{P}{h}$, $h=\frac{P}{a}$ **c)** $F=ma$, $m=\frac{F}{a}$ **d)** $m=dV$, $V=\frac{m}{d}$ **2.** $h=\frac{2P}{a}$ **3. a)** ok. 96°C **b)** $h=\frac{100-t}{0{,}0033}$ **c)** 85°C na wysokości ok. 4545 m n.p.m., 80°C na wysokości 6061 m n.p.m. **4.** $U=\frac{E}{It}$, $I=\frac{E}{Ut}$, $t=\frac{E}{UI}$ **5. a)** $\frac{P_c-P_b}{2}$ **b)** $r=\frac{P_c-2P_b}{2\pi h}$ **6.** $t=\frac{v_k-v_p}{a}$, $v_k=at+v_p$, $v_p=v_k-at$ **7. a)** $m=\frac{2E}{v^2}$ **b)** $v=\sqrt{\frac{2E}{m}}$ **8. a)** 12 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, 10 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, 8 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ **b)** $v=\frac{60}{x}$ **c)** $x=\frac{60}{v}$ **d)** 6 $\frac{\text{min}}{\text{km}}$; tak **9. a)** 1320 l **b)** $H=\frac{4V}{2D^2+d^2}$, $d=\sqrt{\frac{4V}{H}-2D^2}$ **Dla dociekliwych** **1. a)** $P=\frac{U^2}{R}$ **b)** $P=RI^2$ **Czy już umiem?** **I. a)** $m=\frac{F}{g}$, $g=\frac{F}{m}$ **b)** $m=dV$, $V=\frac{m}{d}$ **c)** $d=\frac{p}{gh}$, $g=\frac{p}{dh}$, $h=\frac{p}{dg}$ **II. a)** $g=\frac{E-\frac{1}{2}mv^2}{mh}$ **b)** $v=\sqrt{\frac{2(E-mgh)}{m}}$ **III.** *ABC, BCD, CDA, DBA, ABE, BCE, CDE, DAE, FGJ, GHJ, HIJ, IFJ, KLO, LMO, MNO, NKO, PRS, RST, STP, TPR*

s. 237 **Powtórzenie V**

Zestaw 1 **1.** 0, 1, 4 **2. a)** $x+2(x-0{,}8)=4{,}4$ **b)** $x+3x=44$ **3.** 6 chłopców, 12 dziewcząt **4. a)** nie **b)** tak **c)** nie **d)** nie **5. a)** $x=1$ **b)** $x=5$ **c)** $x=-2$ **d)** każda liczba jest rozwiązaniem **6.** 900 m² i 540 m² **7.** 50°, 80°, 100°, 130° **8. a)** $U=\frac{P}{I}$, $I=\frac{P}{U}$ **b)** $U=RI$, $I=\frac{U}{R}$ **9. a)** o 12% **b)** 200 zł

Zestaw 2 **1. a)** np. $\frac{1}{2}$ **b)** np. $2-2x$ **c)** np. $-1{,}5-2x$ **2.** NIE, C **3.** 45 lat **4.** Janek: 160 zł, Ania: 190 zł, Marek: 320 zł **5.** 3 **6.** 40 g **7.** 125 g **8.** 2 kg **9.** 3% **10.** $P=\frac{ef}{2}$, $f=\frac{2P}{e}$

s. 239 **Zadania na temat...**

1. w 1905 r. **2. a)** $\frac{1}{50\,000\,000}$ **b)** $\frac{1}{10\,000\,000}$ **c)** $\frac{1}{27\,273}$ **3.** 42 dni **4.** 2139 **5.** tak, nie **6.** $7{,}2\cdot10^{-13}$ s **7.** nie **9.** ok. 299 906 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$

s. 241 **Zadania na deser**

1. **(1)** $x=4$, $x=-4$ **(2)** $x=3$, $x=-5$ **(3)** $x=1$, $x=-\frac{5}{3}$ **(4)** $x=1$, $x=-1$ **2.** **(1)** $x=5$ **(2)** $x=4$ **(3)** $x=3$ **(4)** $x=-1$ **(5)** $x=3$ **(6)** $x=1$ **(7)** $x=3$ **(8)** $x=2$ **3.** 42 kanapy **4.** babcia: 60 lat, dziadek: 80 lat **5.** 4000 zł **6. a)** Prędkość zwiększy się 2 razy. **b)** Prędkość zmniejszy się 2 razy. **7. a)** Energia zwiększy się 2 razy. **b)** Energia zwiększy się 4 razy.

VI. TRÓJKĄTY PROSTOKĄTNE

s. 244 **1. Twierdzenie Pitagorasa**

Ćwiczenia **1. a)** 5 cm **b)** 25 cm **c)** 13 cm **2. a)** $(6+2\sqrt{5})$ cm **b)** $(10+2\sqrt{13})$ cm **c)** 56 cm **3. a)** 16 cm **b)** $2\sqrt{7}$ cm **c)** $3\sqrt{5}$ cm **4. a)** $x^2+k^2=m^2$ **b)** $\left(\frac{m}{3}\right)^2+(2a)^2=(3y)^2$ **5.** $AP=\sqrt{109}$, $CP=3$, $DP=3\sqrt{2}$, najkrótszy CP **Zadania** **1. poziom A** **a)** $x^2+25=\frac{y^2}{4}$ **b)** $(x+1)^2+5^2=t^2$ **c)** $6^2+k^2=(b+1)^2$ **d)** $4+(a-2)^2=\frac{k^2}{25}$ **e)** $18^2+a^2=(2a)^2$ **f)** $p^2+m^2=n^2$ **poziom B** **a)** 26 **b)** 75 **c)** 37 **d)** 82 **e)** 145 **f)** 34 **poziom C** **a)** 36 **b)** 42 **c)** 60 **d)** 15 **e)** 35 **f)** 24 **poziom D** **a)** 17 **b)** 45 **c)** 48 **d)** 74 **e)** 12 **f)** 21 **MISTRZ** **a)** 17 **b)** $\sqrt{21}$ **c)** 5 **d)** 15 **e)** 25 **2. poziom A** **a)** $\sqrt{29}$ **b)** $\sqrt{3}$ **c)** $\sqrt{21}$ **d)** $\sqrt{58}$ **e)** $\sqrt{5}$ **f)** $\sqrt{77}$ **poziom B** **a)** 5 **b)** $\sqrt{2}$ **c)** 1 **d)** $\sqrt{17}$ **e)** 4 **f)** 2 **poziom C** **a)** $2\sqrt{5}$ **b)** $2\sqrt{6}$ **c)** $6\sqrt{2}$ **d)** $4\sqrt{3}$ **e)** $2\sqrt{13}$ **f)** $2\sqrt{14}$ **3. a)** $\sqrt{2}$ cm **b)** 20 cm **c)** $(14+14\sqrt{2})$ cm **4. a)** 144 **b)** 100 **5.** $BC=\sqrt{5}$ cm,

$LM = 2{,}5$ cm, $PS = 25\sqrt{2}$ mm **6. a)** $\sqrt{13}$ cm **b)** $5\sqrt{37}$ mm **c)** $3\sqrt{2}$ cm **7.** 21 cali × 28 cali, około 53 cm × 71 cm **8.** tak **9. a)** 6,86 m **b)** nie **10. a)** $L = 46$ cm, $P = 120$ cm^2 **b)** $L = 84$ cm, $P = 432$ cm^2 **c)** $L = (32 + 16\sqrt{5})$ cm, $P = 128\sqrt{5}$ cm^2 **11.** 152 cm **12.** 6 m **13.** 10 m **14.** 0,7 cm **15. a)** Obw. = 24 cm, $P = 32$ cm^2 **b)** Obw. = 40 cm, $P = 75$ cm^2 **16.** 24, 8 **17.** $(4 + 4\sqrt{2})$ cm

Dla dociekliwych **1.** Gumka skurczy się. W miejscu równości będzie nierówność $a^2 + b^2 > c^2$. **2.** Będzie zachodzić nierówność $a^2 + b^2 < c^2$. **3.** ostry, prosty, rozwarty **4. a)** rozwartokątny, **b)**, **c)** ostrokątny **Czy już umiem?** **I.** $2\sqrt{11}$ **II. a)** 30 **b)** 30 **III.** 6,25 m **IV. a)** 4 **b)** 9

s. 254 **2. Twierdzenie Pitagorasa – zadania**

Ćwiczenia **1.** 10 cm **2.** $14\frac{2}{17}$ cm **3.** 39 cm **4.** przynajmniej $40\sqrt{13}$ cm, czyli około 144,4 cm

Zadania **1. a)** Obw. = 24, $P = 27$ **b)** Obw. = 50, $P = 60$ **c)** Obw. = $4 + 4\sqrt{10}$, $P = 12$ **2. a)** Obw. = 68 cm, $P = 240$ cm^2 **b)** Obw. = $(20 + 20\sqrt{2})$ cm, $P = 100$ cm^2 **c)** Obw. = $(27 + 3\sqrt{13})$ cm, $P = 81$ cm^2 **3.** $P = 336$ cm^2, $h = 13\frac{11}{25}$ cm **4.** $P = 360$ cm^2, $h_1 = 40$ cm, $h_2 = 8\frac{32}{41}$ cm **5.** ok. 6,4 m **6. a)** tak **b)** nie **7.** ok. 105 cm **8.** tak **9.** 128 cm **10.** 32 cm **11.** $14\sqrt{7}$ cm^2 **11.** wzdłuż budynków: 190 m, po przekątnej: ok. 136 m, droga po przekątnej jest krótsza o ok. 28,4% **13.** 26 mil morskich **14.** Krótsza jest trasa czerwona, o ok. 101,1 m **Dla dociekliwych** **1. a)** $3\sqrt{2}$ **c)** $3\sqrt{3}$ **2.** $a\sqrt{3}$ **3. a)** $\sqrt{29}$ **b)** $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ **Czy już umiem?** **I.** 60 cm **II.** Obw. = $(22 + \sqrt{74})$ cm, $P = 42{,}5$ cm^2 **III.** tak **IV.** $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$

s. 261 **3. Kwadrat i jego połowa**

Ćwiczenia **1. a)** $5\sqrt{2}$ **b)** $8\sqrt{2}$ **c)** $0{,}25\sqrt{2}$ **d)** 2 **e)** $\sqrt{6}$ **2. a)** 8 **b)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **c)** $y\sqrt{2}$ **3. a)** $(5 + 5\sqrt{2})$ cm **b)** $(9 + 9\sqrt{2})$ cm **c)** $(12 + 6\sqrt{2})$ cm **d)** $(2\sqrt{3} + \sqrt{6})$ cm **4.** $2c$ **Zadania** **1. a)** $2\sqrt{2}$ cm **b)** 7 cm **c)** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm **d)** $5\sqrt{2}$ cm **e)** $4\sqrt{10}$ cm **f)** $4\sqrt{2}$ cm **g)** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm **h)** $6\sqrt{6}$ cm **i)** 1 cm **2. a)** $5\sqrt{2}$ cm **b)** $2\sqrt{2}$ km **c)** 4 cm **d)** 16 dm **e)** $2\sqrt{6}$ cm **f)** 4 cm **3. a)** $BD = 2\sqrt{2}x$ **b)** $AB = \frac{\sqrt{2}y}{2}$ **c)** $AC = \sqrt{6}z$ **4. a)** $2{,}5\sqrt{2}$ cm **b)** 25 cm **c)** $2\sqrt{6}$ cm **d)** $2\sqrt{2}y$ **5. a)** Obw. = 36 cm, $P = 81$ cm^2 **b)** Obw. = 2 cm, $P = 0{,}25$ cm^2 **c)** Obw. = $\sqrt{2}$ cm, $P = 0{,}125$ cm^2 **d)** Obw. = $6\sqrt{2}x$, $P = 4{,}5x^2$ **6.** $h_1 = h_2 = 4$ cm, $h_3 = 2\sqrt{2}$ cm **7.** 8 m **8.** $4\sqrt{6}$ cm **9. a)** Obw. = $20 + 10\sqrt{2}$, $P = 50$ **b)** Obw. = $12 + 12\sqrt{2}$, $P = 36$ **c)** Obw. = $14 + 14\sqrt{2}$, $P = 49$ **10.** 12 cm, $12\sqrt{2}$ cm lub $6\sqrt{2}$ cm, $6\sqrt{2}$ cm **11.** $24 + 24\sqrt{2}$ **12.** Obw. = $(15\sqrt{5} + 5)$ cm, $P = 43{,}75$ cm^2 **Dla dociekliwych** **1.** $1 : \sqrt{2} : 1$ **2.** ok. 17% **3.** $(\sqrt{2} + 1)a$, $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}\,a$, $\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}\,a$ **Czy już umiem?** **I. a)** $x = 4\sqrt{2}$ cm **b)** $y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm **II. a)** a, $\sqrt{2}a$ **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ **III.** $(12 + 6\sqrt{2})$ cm **IV. a)** $a = b = d = 2$ cm, $c = 5$ cm **b)** 16 cm^3 **c)** są równe **d)** B

s. 269 **4. Trójkąt równoboczny i jego połowa**

Ćwiczenia 1. **a)** $2\sqrt{3}$ **b)** $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ **c)** $6\sqrt{3}$ **d)** 1,5 **e)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **f)** $3\sqrt{2}$ **2. a)** $\sqrt{3}$ cm^2 **b)** $6\sqrt{3}$ cm^2 **c)** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm^2 **d)** $8\sqrt{3}$ cm^2 **3. a)** $(12 + 4\sqrt{3})$ cm **b)** $(15 + 5\sqrt{3})$ cm **c)** $(12 + 12\sqrt{3})$ cm **4.** $\frac{10\sqrt{3}}{3}$, $5 + \frac{5\sqrt{3}}{3}$ **5.** $\frac{\sqrt{2}}{2}d$, $\frac{\sqrt{2}}{2}d$ **Zadania** **1. poziom A** **a)** $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\frac{6\sqrt{3}}{5}$ **c)** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **d)** $\frac{7\sqrt{3}}{4}$ **e)** $3\sqrt{3}$ **f)** $\frac{9\sqrt{3}}{14}$ **poziom B** **a)** 1,5, $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 60° **b)** 8, $4\sqrt{3}$, 30° **c)** 4, 8, 60° **d)** $1\frac{1}{4}$, $\frac{5\sqrt{3}}{4}$, 60° **e)** 1, 2, 30° **f)** $\frac{2}{5}$, $\frac{\sqrt{3}}{5}$, 30° **poziom C** **a)** $4\sqrt{3}$, 6, 30° **b)** $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{6}$, 60° **c)** $6\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$, 30° **d)** $\frac{\sqrt{6}}{4}$, $\frac{3\sqrt{2}}{4}$, 60° **e)** $\frac{\sqrt{15}}{3}$, $\frac{2\sqrt{15}}{3}$, 30° **f)** $4\sqrt{3}$, 6, 60° **poziom D** **a)** $\sqrt{3}p$, p **b)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2$, $\frac{\sqrt{3}}{3}x^2$ **c)** $2\sqrt{5}m$, $\sqrt{15}m$ **d)** $\frac{3a+b}{2}$, $\frac{(3a+b)\sqrt{3}}{2}$ **e)** $\sqrt{2}k$, $\frac{\sqrt{2}}{2}k$ **f)** $2xy$, $\sqrt{3}xy$ **MISTRZ** **a)** $\alpha = 45°$, $b = 5\sqrt{2}$, $a = 10$ **b)** $\beta = 150°$, $d = \sqrt{3}$, $c = 1$ **c)** $\gamma = 75°$, $f = \sqrt{2}$, $e = \sqrt{6}$ **2. a)** $h = 5\sqrt{3}$ cm, $P = 25\sqrt{3}$ cm^2 **b)** $h = 8\sqrt{3}$ cm, $P = 64\sqrt{3}$ cm^2 **c)** $h = 4{,}5$ cm, $P = 6{,}75\sqrt{3}$ cm^2 **3. a)** $h = 7\sqrt{3}$,

Obw. = 42 **b)** Obw. = $6\sqrt{3}$, $P = 3\sqrt{3}$ **4.** Jest większe. **5. a)** $P = \frac{25\sqrt{3}}{4}$, Obw. = 15 **b)** $P = 12$, Obw. = 16 **c)** $P = 6\sqrt{11}$, Obw. = $9 + \sqrt{33} + 4\sqrt{3}$ **6. a)** $BD = x$, $AB = 2x$, $CD = \sqrt{3}x$ **b)** $PM = 4$, $KM = 8$, $KL = 8$ **c)** $SP = 4\sqrt{3}$, $SR = 4\sqrt{3}$, $TR = 6$ **7. a)** Obw. = $42 + 14\sqrt{3}$ **b)** Obw. = $1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$ **c)** Obw. = $21 + 14\sqrt{2} + 7\sqrt{3}$ **8.** $8\sqrt{3}$ cm, 16 cm lub 4 cm, $4\sqrt{3}$ cm lub $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm, $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm **9.** 60° **10. a)** $a = 3\sqrt{2}$ cm, $b = 6$ cm, $c = (3 + 3\sqrt{3})$ cm **b)** $a = \sqrt{6}$ cm, $b = (1 + \sqrt{3})$ cm **c)** $a = 3\sqrt{2}$ cm, $b = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{2}\right)$cm **11. a)** $72\sqrt{3}$ cm^2 **b)** $72\sqrt{2}$ cm^2 **c)** 72 cm^2 **12.** trapez równoramienny: $P = 5$ cm^2, Obw. = $(10 + 2\sqrt{2})$ cm, trapez prostokątny: $P = 240{,}5\sqrt{3}$ cm^2, Obw. = $(63 + 13\sqrt{3})$ cm **13.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ m **14.** II **15.** ok. 11,5 m **16.** Nie zderzą się. **Dla dociekliwych** **1.** $\sqrt{3}a$, $2a$ **2.** nie **Czy już umiem?** **I. a)** $h = 3\sqrt{3}$ cm, $b = 3$ cm **b)** $a = 4\sqrt{3}$ cm, $b = 2\sqrt{3}$ cm **II.** Większe pole ma kwadrat. **III.** 30

s. 279 **Powtórzenie VI**

Zestaw 1 **1.** $a = 5$, $b = 4$, $c = 2\sqrt{5}$ **2.** B **3.** I. F, II. F, III. F **4.** $a = 12$ cm, $P = 144$ cm^2 **5.** C **6.** $P = 138$, Obw. = 62 **7. a)** Obw. = 24 cm, $P = 16\sqrt{3}$ cm^2 **b)** Obw. = $4\sqrt{15}$ cm, $P = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm^2 **8.** II, B **9.** A **10.** D **11. a)** 40 **b)** $24 + 8\sqrt{3}$ **c)** $16 + 16\sqrt{2}$ **12.** 1025,7 zł **13.** $212\sqrt{3}$ m $\approx$ 367 m **14.** 60°, 60°, 60° **15.** ok. 38,8 m **Zestaw 2** **1.** 17 **2.** B **3.** D **4.** $P = \frac{25}{2}(3 - \sqrt{3})$ cm^2, Obw. = $(5 + 5\sqrt{3} + 5\sqrt{6})$ cm **5.** $h = \sqrt{3}$ cm, $a = 6$ cm **6.** 50 cm^2 **7.** $(24 + 12\sqrt{2})$ cm **8.** $P = 24\sqrt{3}$ cm^2, Obw. = $(20 + 4\sqrt{3})$ cm **9.** I. P, II. P, III. F **10.** $h_1 = 50$ cm, $h_2 = 120$ cm, $h_3 = 46\frac{2}{13}$ cm **11.** ok. 9,3 km **12.** II, C

s. 282 **Zadania na temat...**

1. ok. 65,3 m **2.** do 21. piętra **3.** do 11. piętra **4. a)** ok. 32 m, 10. piętro **b)** o 1 piętro **c)** 23–25 m **5.** IE: 1510, IIC: 1890, IIID: 1410, IVE: 2260

s. 284 **Zadania na deser**

1. $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$, c = 2, $d = \sqrt{5}$, $m = \sqrt{14}$, $n = \sqrt{15}$ **2.** I. P II. F III. F **3. a)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3\sqrt{3}}{8}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{9\sqrt{3}}{32}$ **b)** $\frac{3}{2}$, $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{9\sqrt{3}}{16}$, $\frac{27}{32}$ **4.** $a_n = a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ **5.** ok. 2,6 m **6.** ok. 1170 m **7.** ok. 34 cm **8.** Lina będzie częściowo leżała na ziemi. **9.** ok. 2 s

VII. UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH

s. 290 **1. Geometria kartki w kratkę**

Zadania **3.** F_4 – prostokąt, F_3 – trapez, F_5 – równoległobok, F_2 – romb **4. a)** deltoid **b)** romb **8. a)** trójkąt BCE **b)** trapez $ABCD$ **c)** równoległobok $ACDE$ **d)** trójkąty: ABD, ACD, ADE, ABC, BCD **Czy już umiem?** **IV.** $\sqrt{121} = 11$, $\sqrt{333^2} = 333$, $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = 10$, $\sqrt{20} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$

s. 295 **2. Punkty w układzie współrzędnych**

Ćwiczenia **1.** $R = (-2, -3)$, $S = (2, -3)$, $T = (3, 2)$, $U = (-3, 2)$ **Zadania** **1. a)** $A = (3, -4)$, $B = (0, 3)$, $C = (-1, 5)$, $D = (-3, 0)$, $E = (2, -1)$, $F = (4, 2)$, $G = (6, 0)$, $J = (3, 2)$, $K = (0, -2)$, $H = (6, 5)$ **b)** współrzędna y taka sama: C i H, D i G, F i J **c)** B, K – leżą na osi y **d)** D, G – leżą na osi x **2.** NARCYZ **5.** romb **6.** C **7.** $D = (-7, -1)$ **8. a)** np. (0, −3) **b)** np. (2, 0) **c)** np. (0, 4) **d)** np. (0, 1) **9. a)** MATMA **b)** (−8, −1) i (−8, 3), (−5, 3) i (−3, −1), (3, −1) i (3, 3), (5, 1) i (7, 3) **Dla dociekliwych** **1.** $A = (107, -98)$ **2.** $E = (97, -28)$, $F = (67, -68)$ lub $E = (177, -88)$, $F = (147, -128)$ **Czy już umiem?** **I.** $P = (3, 0)$, $Q = (2, 3)$, $R = (4, 1)$, $S = (0, 5)$, $T = (-4, 3)$, $U = (4, -2)$, $W = (-3, -2)$ **II.** równoległobok **III.** $D = (-5, -1)$ **IV.** B, C, A

s. 301 **3. Długości i pola w układzie współrzędnych**

Ćwiczenia **1. a)** 6 **b)** 4 **2. a)** 5 **b)** 13 **c)** $3\sqrt{10}$ **3.** $AB = 350$ **4.** $P_{ABCD} = 4{,}5$ **Zadania** **1. poziom A** **a)** $AB = 2$, $BC = 3$, $CD = 4$ **b)** $AB = 2$, $BC = 7$, $CD = 1$ **c)** $AB = 2$, $BC = 2$, $CD = 8$ **d)** $AB = 3$, $BC = 6$, $CD = 6$ **poziom B** **a)** $AB = \sqrt{5}$, $BC = 5$, $CD = 3\sqrt{2}$ **b)** $AB = 13$, $BC = 2\sqrt{5}$, $CD = \sqrt{17}$ **c)** $AB = 3$, $BC = 10$, $CD = 13$ **d)** $AB = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{101}$, $CD = \sqrt{29}$ **poziom C** **a)** $AB = 101$, $BC = 100$, $CD = 145$ **b)** $AB = 100\sqrt{5}$, $BC = 150$, $CD = 40\sqrt{10}$ **c)** $AB = 6\sqrt{41}$, $BC = 10\sqrt{17}$, $CD = 205$ **d)** $AB = 130$, $BC = 185$, $CD = 100\sqrt{5}$ **2.** CD, IJ, MN **3.** $\text{Obw.}_{ABCD} = 14$, $\text{Obw.}_{EFGHIJ} = 36$ **4. a)** $\text{Obw.}_{ABCD} = 28$ **b)** $D = (-3, 5)$ **5.** $P_{ABC} = 6$, $P_{DEF} = 7$, $P_{GHI} = 7$, $\text{Obw.}_{ABC} = 12$, $\text{Obw.}_{DEF} = 9 + \sqrt{53}$, $\text{Obw.}_{GHI} = 7 + 2\sqrt{5} + \sqrt{13}$ **6. a)** 8 **b)** 8 **c)** 8 **7. a)** $\text{Obw.}_{ABCD} = 14 + 2\sqrt{5}$, $P_{ABCD} = 18$ **b)** $\text{Obw.}_{ABC} = 5\sqrt{2} + \sqrt{34} + 2\sqrt{13}$, $P_{ABC} = 19$ **c)** $\text{Obw.}_{ABCD} = 4\sqrt{13}$, $P_{ABCD} = 5$ **8.** deltoid, $P_{ABCD} = 30$, $\text{Obw.}_{ABCD} = 10 + 6\sqrt{5}$ **9. a)** 20 **b)** 52 **10.** np. $C = (12, 3)$, $D = (6, 3)$ **11.** $P_{ABCDEF} = 33{,}5$ **12.** $C = (18, 5)$, $D = (6, 5)$ lub $C = (-6, 5)$, $D = (-18, 5)$ lub $C = (-6, -5)$, $D = (-18, -5)$ lub $C = (18, -5)$, $D = (6, -5)$ **Dla dociekliwych** **1.** $OA = OB = OC = OD = 5$ **2.** tak; tak, np.: $(-4, 3)$, $(-4, -3)$; tak, np.: $(1, 2\sqrt{6})$, $(1, -2\sqrt{6})$; punkty na okręgu o środku $(0, 0)$ i promieniu 5 **Czy już umiem?** **I.** $AB = 6$, $BC = 2$, $CA = 2\sqrt{10}$ **II.** $160\sqrt{2}$ **III.** $P_{ABC} = 8{,}5$ **IV. a)** 4 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 2

s. 309 **4. Odcinki w układzie współrzędnych**

Ćwiczenia **2.** $D_1 = (3, 6)$, $D_2 = (-3, 2)$ **3.** $D_1 = (2, 7)$, $D_2 = (-2, 1)$ **4.** $S = (2{,}5; 5)$ **Zadania** **2. a)** $D = (3, -5)$ **b)** $D = (3, -1)$ **3. a)** $(-1{,}5; 3)$ **b)** $(0{,}5; -2)$ **c)** $(2; 0{,}5)$ **4.** $(7, 7)$ **5. a)** np. $(-1, 1)$, $(8, 4)$, $(11, 5)$ **b)** nie **6.** $(0, 3)$ lub $(8, -1)$ lub $(-2, -3)$ **7.** $\sqrt{29}$ **9.** np. $A = (5, -8)$, $B = (13, -2)$, $C = (5, 4)$, $D = (-3, -2)$ **Dla dociekliwych** **1. a)** $(2, 7)$, $(6, 4)$, $(10, 1)$, $(14, -2)$ **b)** $(1, 7)$, $(3, 4)$, $(5, 1)$ **Czy już umiem?** **I.** $D = (-2, 2)$ **II. a)** $K = (4; 2{,}5)$ **b)** $L = (16, -5)$ **c)** $M = (-8, 10)$ **III.** $C = (-1, 6)$, $D = (-4, 2)$, $P_{ABCD} = 24$ **IV.** (1) – C, (2) – E, (3) – A, (4) – B, (5) – D

s. 313 **Powtórzenie VII**

Zestaw 1 **1.** $A = (2, 0)$, $B = (-3; -1{,}5)$, $C = (0{,}5; -2)$, $D = (0; -2{,}5)$, $E = (-1, 2)$, $F = (1{,}5; 1)$ **3.** $(-2, -6)$ lub $(3, -6)$ lub $(3, 4)$ lub $(-2, 4)$ **4.** $AB = 4$, $CD = \sqrt{13}$ **5.** $(-1, 1)$ **6.** $(-7, -8)$ **7.** np. $(4, -1)$, $(-5, 5)$, $(-8, 7)$ **8.** $D = (-6, 0)$, $P_{ABCD} = 20$, $\text{Obw.}_{ABCD} = 6\sqrt{10}$ **9.** $P = 58$ **10.** T–B **Zestaw 2** **1. a)** $(4, 0)$ **b)** $(0, -2)$ **c)** $(-2, -3)$ **d)** $(2, -1)$ **2. a)** $D = (4, -8)$ lub $D = (-8, 10)$ **b)** $D = (7, 7)$ lub $D = (-11, -5)$ **3.** $P_{ABC} = 38$ **4.** tak **5.** romb **6.** $D_1 = (-12, 3)$, $D_2 = (8, 7)$, $D_3 = (4, -9)$, pole każdego równoległoboku: 76 **7.** I. F, II. F **8. a)** 2 kąty proste **b)** Boki BC i CD są równe. **c)** $P_{ABCD} = 15$, $P_{ABC} = 5$

s. 315 **Zadania na temat...**

1. litewski **2. a)** czerwony **b)** zielony **5. a)** czerwony **b)** zielony **c)** żaden z nich

s. 316 **Zadania na deser**

1. a) 135° **b)** boki nie są równe **2. a)** nie jest równoboczny **b)** nie można **3. a)** AB i BC, DE i EF, CD i GH, FG i HA **b)** BC **4.** A, D, E, G, $P_{ADEG} = 12$ **5.** np. $ACDEFHGB$ **6.** Jest symetryczny do niebieskiego domku względem osi pionowej. **7.** Jest symetryczny do niebieskiego domku względem prostej przechodzącej przez punkty $(0, 0)$ i $(1, 1)$. **8.** Należy zamienić współrzędne y punktów na przeciwne. **9.** $A_1 = (6, -2)$ **10.** Boki trójkąta $A_1B_1C_1$ są 2 razy dłuższe od boków trójkąta ABC. **11.** Współrzędne punktów A_1, B_1, C_1 są równe współrzędnym punktów A, B, C pomnożonym przez 2. **13.** tak **14.** Punkty A, E, C nie leżą na jednej prostej. **15. a)** $(3, 1)$ **b)** $(14, 5)$ **16.** Przeciwprostokątne niebieskiego i czerwonego trójkąta w rzeczywistości nie leżą na jednej prostej.

INDEKS

A
algebra 151
arkusz kalkulacyjny 156
arytmetyka 151

C
cena brutto 52
– netto 52

I
iloczyn potęg o tej samej podstawie 75
iloraz potęg o tej samej podstawie 75

K
kwadrat liczby 67

L
liczba podpierwiastkowa 107, 128
liczby nieujemne 107
– niewymierne 116
– wymierne 116
lokata bankowa 31

N
niewiadoma 199
notacja naukowa 87
– wykładnicza 87, 88

O
odsetki 31
oprocentowanie lokaty 31

P
pierwiastek 107
– drugiego stopnia 107, 109
– kwadratowy 107, 109
– równania 199
– sześcienny 128, 129
– trzeciego stopnia 128, 129
– z iloczynu 121, 135
– z ilorazu 121, 135
pierwiastkowanie 107, 111
początek układu współrzędnych 294
podatek VAT 52
podstawa potęgi 67
pole trójkąta równobocznego 270
potęga 67
– iloczynu 82
– ilorazu 82
potęgowanie potęgi 77
procent 20, 22
prostokątny układ współrzędnych 294
przedrostki 96
przekątna kwadratu 261
przekształcanie wzorów 233
przybliżenie 117
punkt procentowy 47

R
redukcja wyrazów podobnych 163
rozwiązanie równania 199
równanie 199
– równoważne 205

S
stawka VAT 52
stężenie procentowe 24, 25, 226
stopień pierwiastka 128
suma algebraiczna 162
sześcian liczby 67

Ś
środek odcinka 310

T
twierdzenie 243
– Pitagorasa 243, 244

U
układ kartezjański 294
– współrzędnych 294
ułamek liczby 14
usuwanie niewymierności z mianownika 141

V
VAT 52

W
wartość wyrażenia algebraicznego 152
wielkości wprost proporcjonalne 7
włączanie czynnika pod pierwiastek 122, 136
współrzędne punktu 294
wykładnik potęgi 67
wyłączanie liczby przed pierwiastek 123, 136
wyrazy podobne 163
– sumy algebraicznej 162
wyrażenie algebraiczne 151
– arytmetyczne 151
wysokość trójkąta równobocznego 269
wzór 232

Z
zmienna 152, 209

Zdjęcie na okładce: Getty Images/Corbis/fstop/Antenna

Zdjęcia pochodzą ze zbiorów:
Agencja Gazeta: Mikołaj Kuras s. 282 (strażak na drabinie), Tomasz Stanczak s. 282 (operator drabiny); Air Photo Gorpol/Wojciech Gorgolewski s. 258 (Nowa Huta); Archiwum Wydawnictwa s. 34 (logo SPN), s. 63, 102, 231 (Celsjusz, Kurier codzienny, Hopkinsville Kentuckian), s. 250 (telewizor); Bank Note Museum/http://www.banknote.ws/s. 99 (banknoty); BE&W: Alamy Stock Photo - Adrian Sherratt s. 175 (magazyn), Art Directors & TRIP s. 147, Paul Thompson Images s. 106 (kościół Mariacki), Science Source s. 239 (Einstein); Depositphotos: adogslifephoto s. 168 (wanna), ajafoto s. 220 (kosz ze śliwkami), AlessandroMassimiliano s. 225 (mieszkanie), dionoanomalia s. 177 (słoiki), karandaev s. 155, kolesnikovserg s. 191 (cytryny), lifeonwhite s. 212 (koza), mizar_219842 s. 191 (jabłka), spaxiax s. 237 (drożdżówki), vaterzenga s. 175 (karty), YVDavid s. 168 (łyżka), Zerbor s. 189 (dąb); Diomedia: DeAgostini/DEA PICTURE LIBRARY s. 204 (kamień z Palermo); East News: AP/FOTOLINK/Gdansk University of Technology Press Office s. 231 (Fahrenheit), Cultura/Image Source/Magdalena Niemczyk s. 13 (piramida), Dariusz ZAROD s. 234, Enstock/Camara Lucida RM/Diego Jaramillo s. 132, Jan Kucharzyk s. 281, MENNICA POLSKA SA s. 212 (moneta z sokołem), NASA/eyevine s. 239 (astronauta), Polska Press/DARIUSZ GDESZ s. 282 (strażacy), Reporter/Tomasz Żurek s. 220 (teatr), Science Photo Library/Russell Kightley s. 86 (chloroplast); Forum/Bartłomiej Kudowicz s. 280 (Sky Tower); Fotoflesz/Łukasz Kasprzak s. 280 (drabina straży pożarnej); Getty Images: Corbis Documentary/Corbis VCG s. 30 (astronauta w statku), Corbis Historical/Historical Picture Archive s. 66 (władca), Hulton Archive s. 204 (Anubis), iStock Editorial/Getty Images Plus/Popartic s. 133, iStock/Getty Images Plus - s. 237 (herbata), Andrew Waugh s. 17 (róża), balipadma s. 41 (prom), esolla s. 17 (bratek), Ilmar Idiyatullin s. 17 (pelargonia), lekcej s. 41 (morze), motorolka s. 34 (wyspa Pag), saiko3p s. 59, SvetlanaK s. 10, tomazl s. 17 (tulipan), iStockphoto/omgimages s. 40, Universal Images Group/Education Images s. 72 (Mark I), Westend61 s. 19; Muzeum Narodowe w Warszawie/Piotr Ligier s. 12; NASA/ESA, M. Robberto (Space Telescope Science Institute/ESA) and the Hubble Space Telescope Orion Treasury Project Team s. 86 (galaktyka Orion Nebula), NASA s. 266; Shutterstock: 3d_man s. 90 (propan), 3DMAVR s. 258 (tablica), AdeleD s. 51 (torba), Africa Studio s. 74 (dłoń 1), Albina Glisic s. 194 (butle), Aleksandar Grozdanovski s. 168 (wiadro), Aleksandrs Samuilovs s. 43 (morele), Alexandar Iotzov s. 43 (orzechy), Alexander Raths s. 72 (chłopiec), Amanda Carden s. 90 (Słońce), ANCH s. 220 (3 kosze ze śliwkami), Andrei Shumskiy s. 268 (dłoń 1), Andrey_Kuzmin s. 242 (etykieta), Anna Yunak s. 51 (anioł), arigato s. 120 (tło), Artem Furman s. 51 (dłoń), artform s. 204 (hieroglify), Ase s. 86 (kula ziemska z miastem), Baranov E s. 87, BMJ s. 260 (las), Bronwyn Photo s. 231 (zaspy śniegu), buradaki s. 81 (Ziemia), Chookiat K s. 140 (krokodyl), Chromatic Studio s. 283, CMT Photography s. 120 (domino), colors s. 43 (blat), Cosmos Studio s. 168 (kubek), Dar1930 s. 169 (żurek), Denis Vrublevski s. 74 (domino 1), Dennis Jacobsen s. 101 (sokół), Denys Prykhodov s. 268 (dłoń 2), Deyan Georgiev s. 214 (dłoń z grzybem), De Visu s. 106 (Kraków); Diana Taliun s. 15 (suszone grzyby), s. 214 (prawdziwki), Didecs s. 46 (bułka), Dima Moroz s. 150 (tkaniny), s. 160, Dina Saeed s. 178, Dionisvera s. 238, Dr.Pixel s. 86 (zaskroniec), dream studio s. 127, dreamerb s. 98 (wirus), Drozdowski s. 229 (suszone grzyby), Erena.Wilson s. 37 (jedwab), esfera s. 37 (flaga), Evan Lorne s. 177 (papier, szkło, metal, plastik), Everett - Art. S. 253 (obraz), Everett Historical s. 243, Evgeny Karandaev s. 307, exopixel s. 268 (przybory szkolne), Fer Gregory s. 161 (kapelusz, magik), ffolas s. 29 (hulajnoga), finchfocus s. 103 (mrówka), foodonwhite s. 13 (fasola), Gigra s. 112, guteksk7 s. 223 (smartfon), hkeita s. 103 (Ziemia), holbox s. 37 (falbany), Hunter Bliss Images s. 253 (rama), I love photo s. 140 (posadzka na planszy 1), ILYA AKINSHIN s. 120 (dłoń 1), Iryna Denysova s. 13 (czosnek, kolendra), Ivaylo Ivanov s. 66 (ziarno), Jack Frog s. 114, Jiri Vaclavek s. 54, John A Davis s. 101 (radioteleskop), Kateryna Kon s. 72 (bakterie), katjen s. 223 (tło), Kavun Halyna s. 242 (opakowanie od czekolady), Kichigin s. 98 (płatek), kingfisher s. 86 (mrówka), LeManna s. 231 (pejzaż zimowy), lkpro s. 134 (Erechtejon), Madlen s. 204 (węgiel), MaraZe s. 169 (pomidorowa), Marie C Fields s. 150 (tkaniny), Markus Gann s. 86 (Słońce), matiascausa s. 74 (dłoń 2), MaxCab s. 150 (przyrządy krawieckie), maxstockphoto s. 66 (szachownica), MedusArt s. 169 (ozdoba serwetek), Mny-Jhee s. 81 (wioska), mohd farid s. 236, Mopic s. 86 (proton), MyImages – Micha s. 74 (domino w pudełku), Namefoto s. 37 (smok), Nawanon s. 205 (portmonetka), Neirfy s. 51 (kwiaty), nevodka s. 13 (nabiał), New Africa s. 170, Nicholas Clay Photography s. 140 (tło planszy), Nickolay Vinokurov s. 186 (Morze Martwe), Norman Chan s. 62, Now Design s. 286 (tło), NS Photograph s. 13 (ziarna fasoli), Oleg_Mit s. 205 (10 zł), Olha Insight s. 231 (strzałki), OSABEE s. 300 (przybory szkolne), ouh_desire s. 169 (deski), Piti Tan s. 120 (domino w pudełku), Polych s. 61, prapann s. 134 (piaskowiec), PT Images s. 239 (mężczyzna), rangizzz s. 214 (tło), RicoK s. 186 (klif), Roobcio s. 38, roundstripe s. 260 (przekrój drewna), rsooll s. 104, S_Photo s. 51 (stół), s. 169 (stół i widok), Sarunyu_foto s. 150 (tło), Seqoya s. 169 (pierogi), Sergey Uryadnikov s. 250 (hipopotam), Severe s. 134 (chmury), Shutterstock s. 13 (sałata), Spalnic s. 13 (łosoś), specnaz s. 189 (olcha), STILLFX s. 66 (tło), stockcreations s. 169 (menu), StockPhotoAstur s. 13 (makaron), stokkete s. 105, StudioByTheSea s. 189 (buk), studiogi s. 13 (mięso), subarashii21 s. 293 (pirat 2), tanialerro.art s. 225 (sklep budowlany), Targn Pleiades s. 6 (delfin z rybą), Tatchaphol s. 140 (pionki), testing s. 49, Tom Wang s. 161 (cyfra 2), topseller s. 13 (truskawki, grejfrut), Tribalium s. 293 (pirat 1), Triff s. 86 (Droga Mleczna), s. 204 (tło), turkkub s. 140 (tło), Turtix s. 268 (kartka), tuulijumala s. 231 (termometr), Umpaporn s. 242 (taca), Uriy s. 177 (butelki po lekach), Vadim Sadovski s. 30 (astronauta na Księżycu), s. 86 (Ziemia), Vadym Zaitsev s. 242 (czekolada), vata s. 74 (tło), Vladimir Wrangel s. 212 (1, 2, 5 zł), s. 217, Vladyslav Starozhylov s. 194 (tankowanie), Vtls s. 194 (palnik), vvoe s. 74 (domino 2), s. 286 (szachownica), weedezign s. 43 (tło), Willyam Bradberry s. 6 (delfiny), Xseon s. 229 (Wieliczka), YuTrof. 96, zhu difeng s. 293 (statek); Thinkstock/Getty Images: amana images RF/KOICHI SAITO s. 92 (tło), Hemera/Alexey Aleshkin s. 293 (piracka flaga), iStockphoto – s. 242 (srebrne opakowanie), s. 260 (pień), Aleksandar Milutinovic s. 214 (kosz grzybów), anna1311 s. 7, 45, 92 (liść); antonioscarpi s. 15 (prawdziwki), Avolke s. 22, Betty4240 s. 91, blueringmedia s. 140 (posadzka na planszy 2), ekinyalgin s. 120 (dłoń 2), gemenacom s. 24, genkur s. 260 (tartak), Highwaystarz-Photography s. 241, lovelyday12 s. 99 (pajęczyna), lucky-photographer s. 86 (sekwoja), LUNAMARINA s. 27, Martina_L s. 34 (mieszanka), Nastco s. 293 (mapa), Photography Firm s. 205 (portfel), pioneer111 s. 29 (rower), sanapadh s. 46 (drożdżówka), scisettialfio s. 17 (jabłka), vencavolrab s. 92 (krople), Volosina s. 36 (porzeczka), Polka Dot Images s. 232, Purestock s. 36 (motyl), Zoonar/E.Lam s. 79; Marcin Braun s. 190; Miłosz Budzyński s. 300 (trójkąty); Przemek Szostok s. 169 (kapelusz).

	Imię i nazwisko	Klasa	Rok szkolny
1.	.....	.....	.....
2.	.....	.....	.....
3.	.....	.....	.....

Matematyka z kluczem

Cechy podzielności liczb

Liczba jest podzielna przez:

- **2** – gdy jej ostatnią cyfrą jest: 0, 2, 4, 6 lub 8
- **3** – gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3
- **4** – gdy jej ostatnie dwie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4
- **5** – gdy jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5
- **9** – gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9
- **10** – gdy jej ostatnią cyfrą jest 0
- **25** – gdy jej ostatnie dwie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 25
- **100** – gdy jej ostatnie dwie cyfry to 00
- **1000** – gdy jej ostatnie trzy cyfry to 000

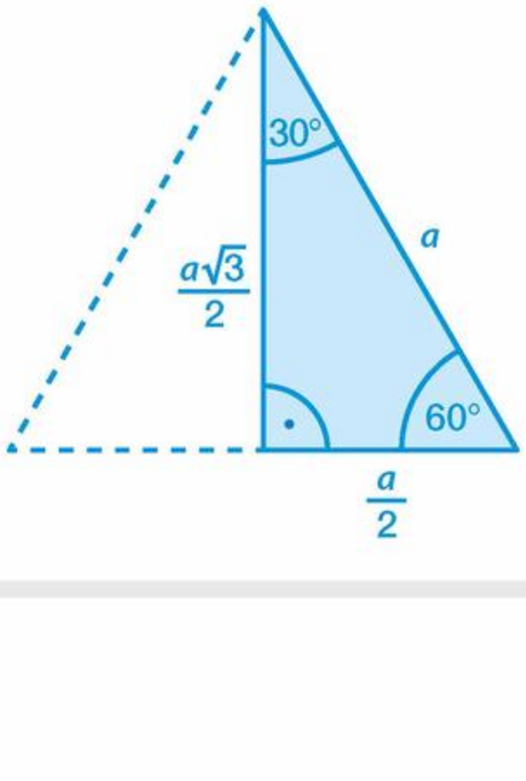
Kwadraty liczb

$11^2 = 121$	$15^2 = 225$	$19^2 = 361$
$12^2 = 144$	$16^2 = 256$	$20^2 = 400$
$13^2 = 169$	$17^2 = 289$	$21^2 = 441$
$14^2 = 196$	$18^2 = 324$	$22^2 = 484$

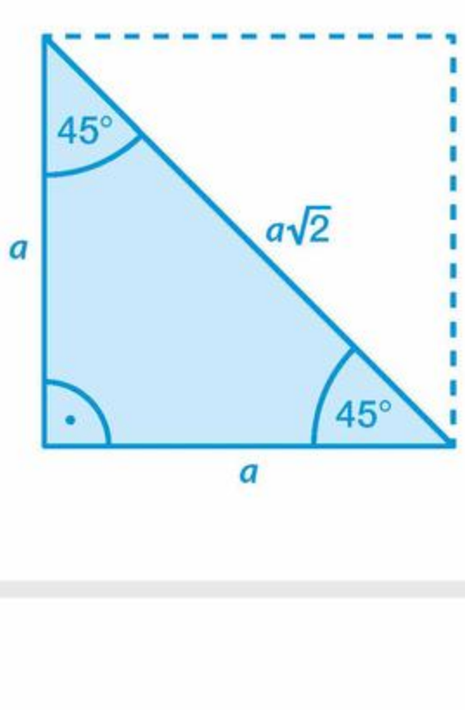
Sześciany liczb

$2^3 = 8$	$6^3 = 216$
$3^3 = 27$	$7^3 = 343$
$4^3 = 64$	$8^3 = 512$
$5^3 = 125$	$9^3 = 729$

Połowa trójkąta równobocznego



Połowa kwadratu



Nowa Era Sp. z o.o.

www.nowaera.pl nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-4665-9