NOWA EDYCJA
2024–2026

8

Matematyka z kluczem

PODRĘCZNIK DO MATEMATYKI
DLA KLASY ÓSMEJ SZKOŁY PODSTAWOWEJ

neon

W wersji cyfrowej znajdziesz oznaczenia usuniętych treści z podstawy w 2024

nowa era

Droga Nowa Ero,

Nigdy bym nie publikowała publicznie książek wydawnictw, które działają na uczciwych zasadach.

Wasza firma jednak promuje masowy dodruk, całkowicie niepotrzebnych książek, które mogłyby zastąpione wersjami elektronicznymi!

Co prawda e-booki są dostępne na waszej stronie, jednak:

- W przeciwieństwie do fizycznej książki, licencja na e-book kończy się po roku. Oznacza to, że jeżeli moja córka chciałaby powtórzyć sobie całą wiedzę do matury, musiałabym jej kupić wszystkie wasze książki od nowa.
- Waszych e-booków nie da się pobrać! Wymagają one dostęp do internetu, co uniemożliwia ich użycie na naszej wsi, gdzie zasięg jest ograniczony.
- Wasze e-booki nie działają na telefonach komórkowych!!!
- Wasze e-booki sprzedawane są po tej samej (albo wyższej) cenie co regularne książki. Cena e-booka powinna być niższa, gdyż e-booki wymagają elektronicznego czytnika (tabletu)!

Czas rozpocząć nową erę (o ironio), w której papier nie jest bezczelnie marnowany dla pieniędzy. Przedstawiam e-book, który spełnia wszystkie oczekiwania uczniów.

Dbajmy o środowisko, zróbmy to dla młodych pokoleń.

8

Marcin Braun, Agnieszka Mańkowska, Małgorzata Paszyńska
Karolina Wej, Wojciech Babiański
Ewa Szmytkiewicz, Jerzy Janowicz

Matematyka z kluczem

PODRĘCZNIK DO MATEMATYKI
DLA KLASY ÓSMEJ SZKOŁY PODSTAWOWEJ

OZNACZENIA W E-PODRĘCZNIKU

Ikona na górze strony sygnalizuje zmiany, które obowiązują od 2024 r.

W ten sposób oznaczono treści, które nie są już wymagane.

nowa era
Twoje mocne strony

Matematyka z kluczem

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców: **dr. hab. Edwarda Tutaja, mgr Kingi Gałązki, dr Katarzyny Kozłowskiej**.

Etap edukacyjny: II
Typ szkoły: szkoła podstawowa
Rok dopuszczenia: 2021

Numer ewidencyjny w wykazie MEiN: 875/5/2021/z1

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki dla klas 4–8 szkoły podstawowej* autorstwa Marcina Brauna, Agnieszki Mańkowskiej, Małgorzaty Paszyńskiej.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na **www.legalnakultura.pl**

Wykorzystywanie treści niniejszego Utworu, w jakiejkolwiek formie lub w jakimkolwiek procesie, do celów eksploracji tekstu i danych, uczenia maszynowego, rozwoju i/lub szkolenia i/lub wzbogacania sztucznej inteligencji jakiegokolwiek rodzaju jest surowo zabronione.

© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2024
ISBN 978-83-267-4942-1

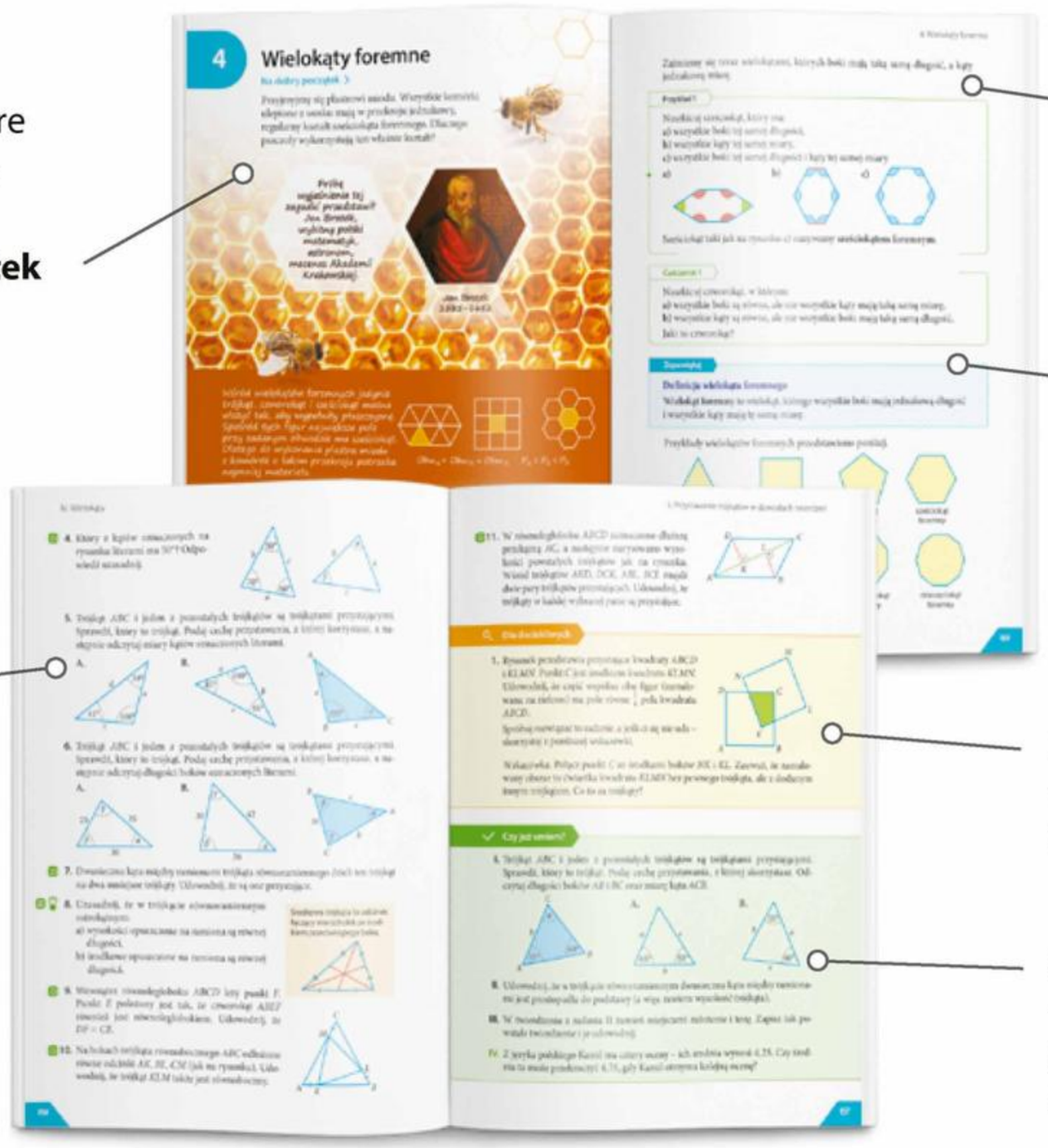
Koncepcja podręcznika: Agnieszka Nowakowska, Dawid Szczypiński.
Redakcja merytoryczna: Renata Sawicka, Magdalena Spalińska, Paulina Staniszewska-Tudruj. **Współpraca redakcyjna**: Anna Dubiel, Jan Baranowski, Aleksandra Jankowska, Marcin Minda, Katarzyna Radzimińska, Ewa Rucińska, Elżbieta Zięcina, Robert Pysiak.
Opracowanie redakcyjne infografik: Urszula Cielniak.
Konsultacje merytoryczne: Barbara Sasim-Leciejewska, Jacek Klisowski, Barbara Galas.
Redakcja i korekta językowa: Dorota Rzeszewska, Joanna Sawicka, Paulina Szulim, Marta Zuchowicz, Kinga Tarnowska.
Nadzór artystyczny: Kaia Pichler. **Opieka graficzna:** Ewa Kaletyn, Ewelina Baran.
Projekt okładki: Paulina Tomaszewska, Małgorzata Gregorczyk, Aleksandra Szpunar, Maciej Galiński.
Projekt graficzny: Re:design, Klaudia Jarocka-Ciok, Marek Błoszko.
Opracowanie graficzne: Aleksandra Szpunar, Paulina Tomaszewska, Maciej Galiński, Ewa Kaletyn, Alicja Skupin-Podwojewska. **Fotoedycja:** Katarzyna Iwan-Malawska, Bogdan Wańkowicz.
Rysunki techniczne: Andrzej Oziębło. **Ilustracje:** Elżbieta Buczkowska, Rafał Buczkowski, Zuzanna Dudzic, Wioleta Herczyńska, Agata Knajdek, Krzysztof Mrawiński, Marek Nawrocki, Joanna Ptak, Ewa Sowulewska.
Mapa: Mikołaj Cacopulos. **Realizacja projektu graficznego:** Mariusz Trzaskalski.

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Krótki przewodnik po podręczniku

DZIAŁY I–V
składają się
z elementów, które
już dobrze znasz.

Na dobry początek
wprowadzi Cię
w nowy temat.



Zadania
to niezbędny
element
treningu.

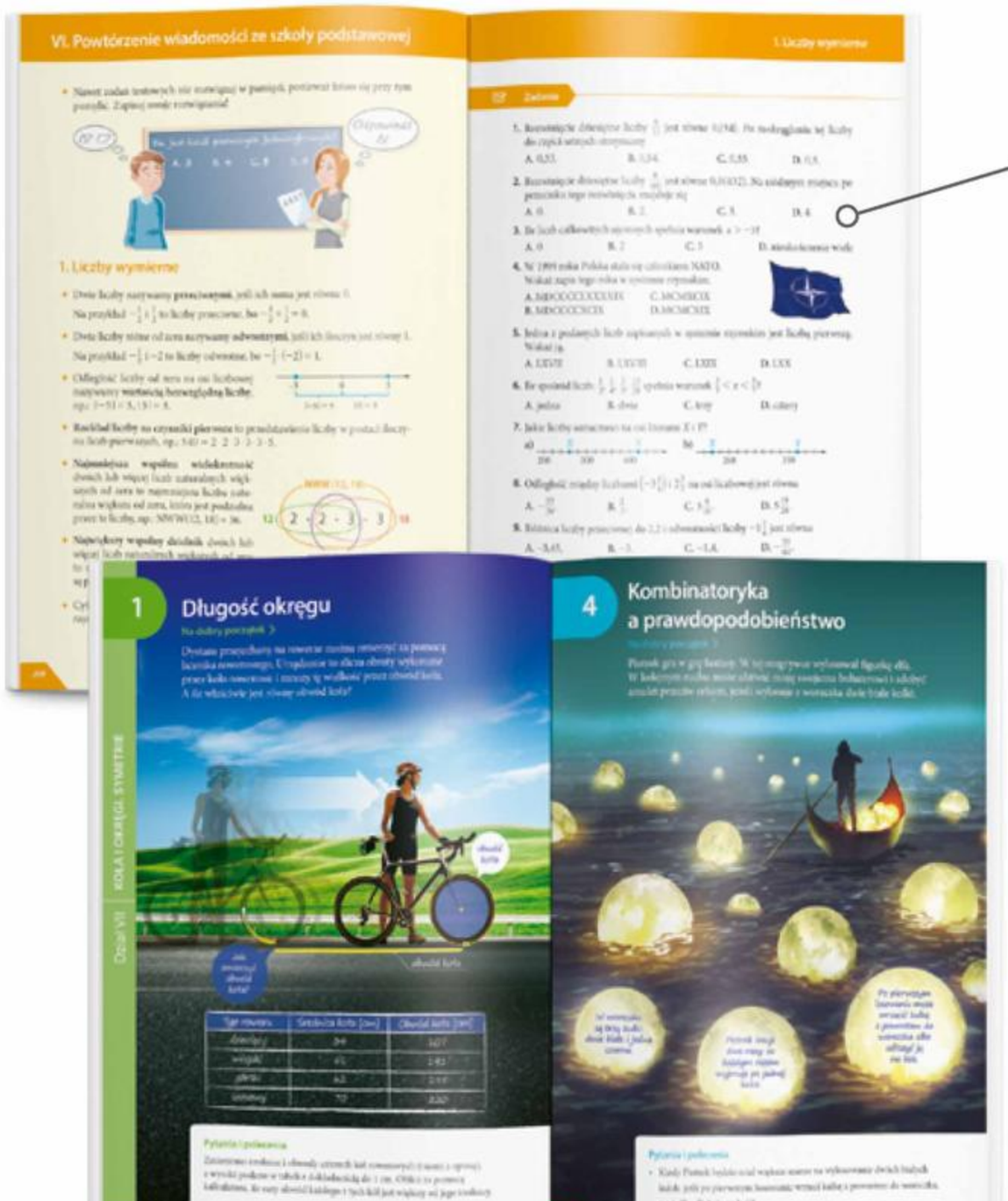
**Przykłady
i ćwiczenia**
– przećwicz
nowe
umiejętności.

Zapamiętaj
– ważne
pojęcia i reguły.

Dla dociekliwych
– naucz się więcej,
niż to konieczne.

Czy już umiem?
– sprawdź stopień
opanowania
materiału.

DZIAŁ VI
– powtórzenie
wiadomości
ze szkoły
podstawowej
zebranych
w 11 tematach.



**Tematy
powtórzeniowe**
obejmują
najważniejsze
wiadomości oraz
zestawy zadań.

DZIAŁY VII i VIII
zawierają treści
omawiane
po egzaminie
ósmoklasisty.

Po egzaminie
– poznaj zagadnienia
dotyczące koła i okręgu
oraz kombinatoryki
i prawdopodobieństwa.

Z myślą o rozwoju kompetencji matematycznych w niektórych tematach wprowadzane są treści wykraczające w pewnym stopniu poza wymagania podstawy programowej.

zadania wymagające większego zaangażowania

zadania trudne, nietypowe

zadania na dowodzenie

zadania wymagające złożonych obliczeń

Spis treści

Krótki przewodnik po podręczniku 3

I. STATYSTYKA I PRAWDOPODOBIEŃSTWO

1. Diagramy i wykresy 6
2. Średnia arytmetyczna 17
3. Zbieranie i porządkowanie danych 26
4. Czy statystyka mówi prawdę 34
5. Proste doświadczenia losowe 44

Powtórzenie I 51
Zadania na temat... 55
Zadania na deser 57

II. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE I RÓWNANIA

1. Liczby na osi liczbowej 60
2. Wyrażenia algebraiczne 68
3. Mnożenie sum algebraicznych 75
4. Równania 82

Powtórzenie II 88
Zadania na temat... 90
Zadania na deser 92

III. FIGURY NA PŁASZCZYŹNIE

1. Własności kątów 94
2. Kąty – zadania 104
3. Twierdzenie matematyczne i jego dowód 112
4. Nierówność trójkąta 124

Powtórzenie III 130
Zadania na temat... 132
Zadania na deser 134

IV. WIELOKĄTY

1. Figury przystające 136
2. Cechy przystawania trójkątów 142
3. Przystawanie trójkątów w dowodach twierdzeń 150
4. Wielokąty foremne 158

Powtórzenie IV 165
Zadania na temat... 168
Zadania na deser 170

V. GEOMETRIA PRZESTRZENNA

1. Graniastosłupy ... 172
2. Objętość graniastosłupa ... 182
3. Pole powierzchni graniastosłupa ... 190
4. Ostrosłupy ... 198
5. Objętość ostrosłupa ... 206
6. Pole powierzchni ostrosłupa ... 210
7. Graniastosłupy i ostrosłupy – zadania ... 216
8. Bryły – zadania ... 225

Powtórzenie V ... 231
Zadania na temat... ... 234
Zadania na deser ... 236

VI. POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI ZE SZKOŁY PODSTAWOWEJ

1. Liczby wymierne ... 238
2. Praktyczna matematyka ... 242
3. Procenty ... 246
4. Potęgi ... 250
5. Pierwiastki ... 252
6. Wyrażenia algebraiczne ... 254
7. Równania, proporcjonalność prosta ... 257
8. Figury płaskie ... 260
9. Bryły ... 266
10. Statystyka i prawdopodobieństwo ... 270
11. Sposoby rozwiązywania zadań ... 275

VII. KOŁA I OKRĘGI. SYMETRIE

1. Długość okręgu ... 280
2. Pole koła ... 287
3. Długość okręgu i pole koła – zadania ... 293
4. Oś symetrii i środek symetrii ... 300
5. Symetralna odcinka i dwusieczna kąta ... 309
Powtórzenie VII ... 314
Zadania na temat... ... 316
Zadania na deser ... 318

DO REALIZACJI PRZED EGZAMINEM

VIII. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

1. Reguła mnożenia ... 320
2. Zastosowania reguły mnożenia ... 326
3. Obliczanie prawdopodobieństwa ... 333
4. Kombinatoryka a prawdopodobieństwo ... 338
Powtórzenie VIII ... 342
Na zakończenie... ... 343

Odpowiedzi ... 345
Indeks ... 359

1

Diagramy i wykresy

Na dobry początek ›

Gejzery to gorące źródła, okresowo wyrzucające słupy wody i parę wodną. Najwięcej jest ich w Parku Narodowym Yellowstone w USA. Naukowcy monitorują aktywność wulkaniczną tych terenów m.in. dzięki stałemu pomiarowi temperatury wody i powietrza. Jak interpretować takie wykresy?



Gwałtowny i regularny wzrost temperatury wody niedaleko ujścia gejzera to efekt wyrzucania przez niego gorącej wody.

Ten gejzer wybucha regularnie co 40 minut.

Duże różnice temperatury między dniem a nocą mogą świadczyć o tym, że dzień był słoneczny.

Pytania i polecenia

Skorzystaj z danych na wykresach i odpowiedz na pytania.

- O ile stopni wzrosła temperatura wody po wybuchu gejzera około 9.00?
- Którego dnia było najzimniej?
- Jak sądzisz, kiedy w parku Yellowstone świeciło słońce?

* Źródło: https://volcanoes.usgs.gov/volcanoes/yellowstone/monitoring_norris_temp.html

Statystyka to dziedzina nauki zajmująca się zbieraniem danych, ich analizowaniem oraz opracowywaniem.

Przykład 1

E

Dane dotyczące liczby osób trenujących w sekcjach sportowych w województwie pomorskim w 2018 roku zostały przedstawione w postaci diagramu słupkowego, tabeli i diagramu kołowego (źródło: https://bdl.stat.gov.pl). Korzystając z tych informacji, odpowiedz na pytania.

a) Która z wymienionych sekcji sportowych była najliczniejsza?
b) Ile osób trenowało lekkoatletykę?
c) O ile osób więcej trenowało piłkę ręczną niż karate?
d) O ile większy był odsetek osób trenujących piłkę siatkową niż odsetek osób trenujących żeglarstwo?
e) Czy można stwierdzić, która sekcja była najmniej liczna?



Sekcja sportowa	Liczba osób
Piłka nożna	19 668
Piłka siatkowa	3933
Lekkoatletyka	3463
Piłka ręczna	2562
Koszykówka	2665
Pływanie	2062
Karate	1704
Żeglarstwo	1542
Pozostałe	18 450
Razem	**56 049**



a) Z diagramu słupkowego łatwo odczytać, że najliczniejszą sekcją sportową była sekcja piłki nożnej.
b) Dokładna liczba osób trenujących lekkoatletykę podana jest w tabeli: 3463.
c) Różnicę możemy obliczyć na podstawie danych z tabeli: $2562 - 1704 = 858$.
d) Z diagramu kołowego odczytujemy, że siatkówkę trenowało 7% ćwiczących, a żeglarstwo 3% tej grupy, a więc różnica wynosiła 4 **punkty procentowe**.
e) Diagramy i tabela zawierają pozycję „Pozostałe", obejmującą sekcje mniej liczne od wymienionych z nazwy. Nie można jednak stwierdzić, jakie sekcje wchodziły w skład „Pozostałych", a tym bardziej – która z nich była najmniej liczna.

Istnieje wiele sposobów prezentacji danych. Każdy z nich pozwala na dostrzeżenie innych zależności. Szybkie porównanie ilościowe danych jest możliwe dzięki diagramowi słupkowemu czy kołowemu. Z tabel można odczytać dokładne dane liczbowe służące do szczegółowych analiz i porównań. Przedstawienie wyników w postaci procentowej pokazuje poszczególne dane na tle całości.

Ćwiczenie 1

Odpowiedz na pytania na podstawie informacji z przykładu 1. Podaj źródło informacji, z którego korzystasz.

a) Które sekcje liczą ponad 2500 osób?
b) Czy piłkę siatkową trenuje ponad dwa razy więcej osób niż żeglarstwo?

Ułóż po dwa pytania do tabeli i do każdego z diagramów podanych w przykładzie 1.

Zwróć uwagę, że w treści przykładu podaliśmy informację, skąd pochodzą dane. Postępując w ten sposób, nie tyko doceniamy pracę osób, które te dane zebrały i opracowały, lecz także sprawiamy, że nasz tekst jest bardziej wiarygodny – każdy może samodzielnie sprawdzić, czy w podanych informacjach nie ma błędu.

Zapamiętaj

Jeśli przytaczamy jakieś dane, także w formie wykresów czy tabel, zawsze powinniśmy podać ich źródło.

Czy wiesz, że…

Główny Urząd Statystyczny (GUS) zajmuje się zbieraniem, analizą i udostępnianiem informacji statystycznych związanych z różnymi dziedzinami naszego życia. Te dane publikowane są na stronie internetowej https://stat.gov.pl/.

Wykresy liniowe

Gdy chcemy przedstawić graficznie, jak zmieniała się interesująca nas wielkość, często korzystamy z **wykresów liniowych**.

Czy wiesz, że…

Termograf to urządzenie, które nie tylko mierzy temperaturę powietrza, lecz także rysuje wykres jej zmian.



Przykład 2

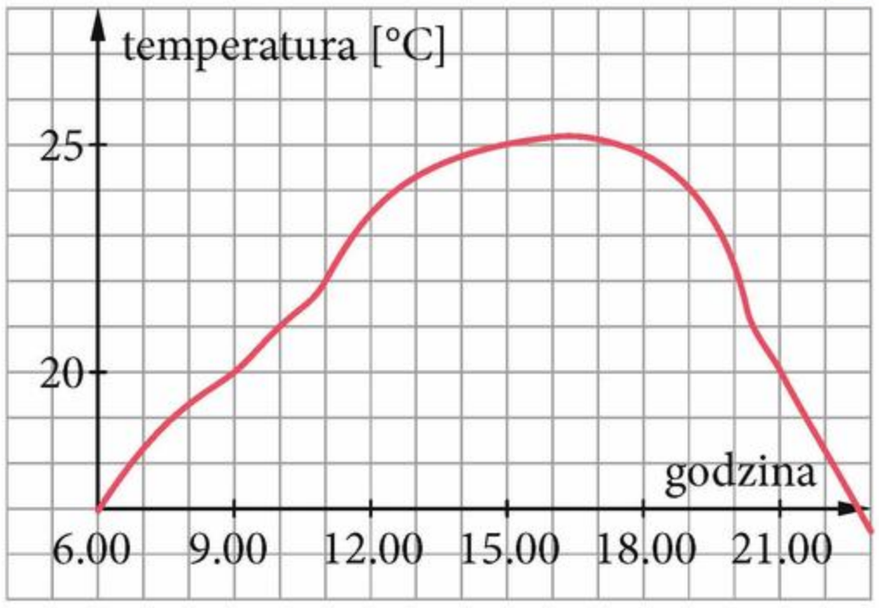
E

Wykres z termografu przedstawia zmiany temperatury powietrza w pewnym mieście. Odczytaj z wykresu:

a) jaka temperatura była o 10.00,

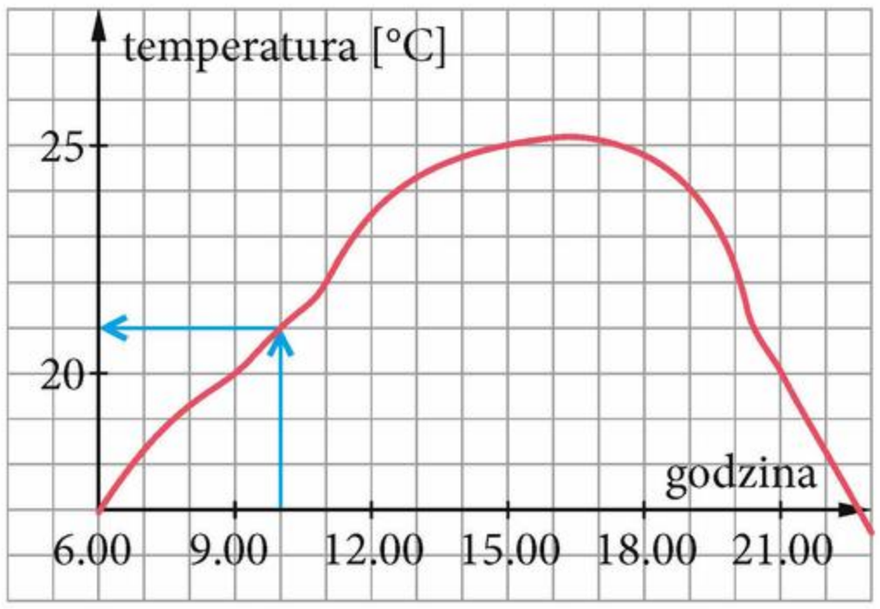
b) w jakich godzinach temperatura przekraczała 20°C,

c) kiedy temperatura rosła, a kiedy spadała.



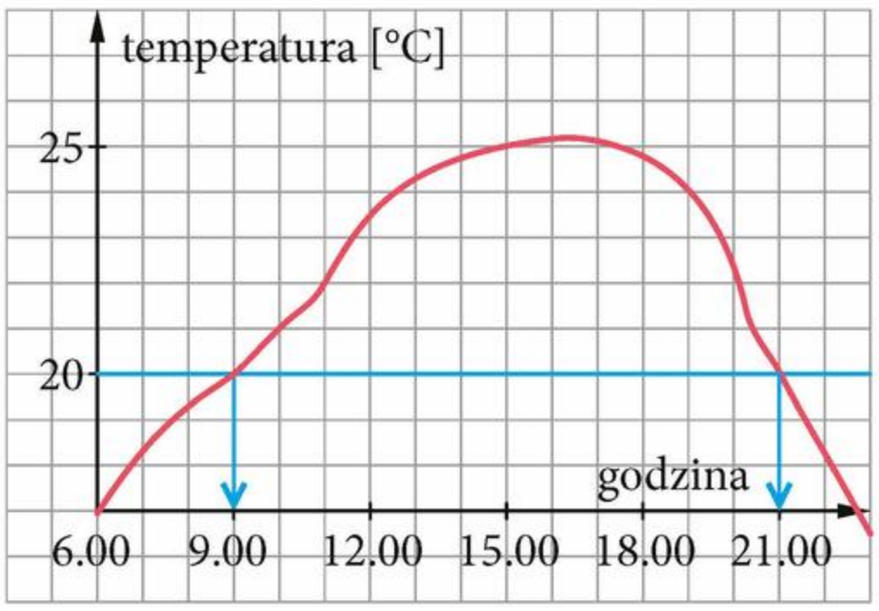
Aby odczytać informacje z wykresu, należy zapoznać się z opisami osi. Tutaj na osi poziomej zaznaczono godziny, a na osi pionowej – temperaturę.

a) Znajdujemy na osi poziomej godzinę 10.00 i sprawdzamy, na jakiej wysokości znajduje się wykres nad tym punktem osi (rysunek obok). Z pionowej osi odczytujemy temperaturę: 21°C.

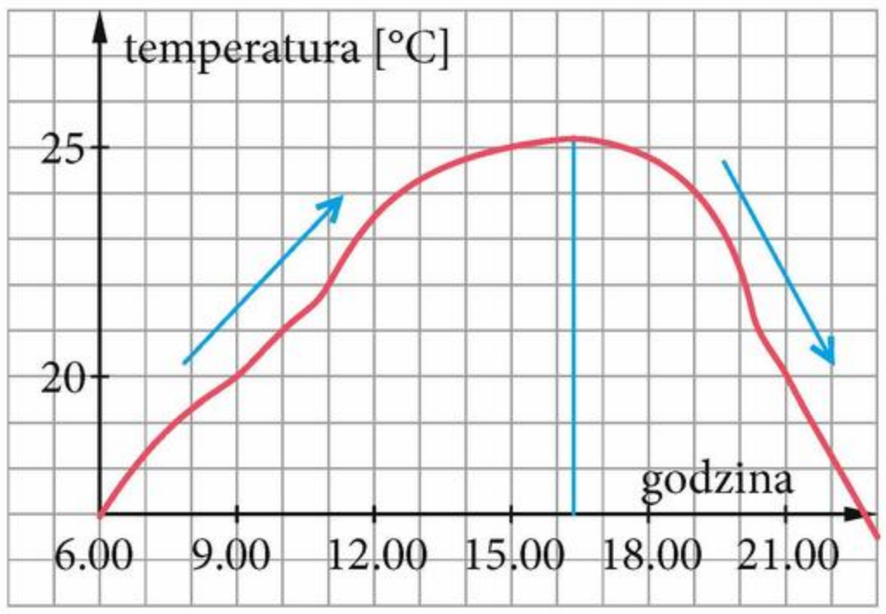


b) Sposób odczytywania danych przedstawiono na rysunku 1 poniżej. Zaznaczamy pomocniczą poziomą prostą na wysokości 20°C. Przecina ona dany wykres w dwóch punktach, odpowiadających godzinom 9.00 i 21.00 – wtedy temperatura była równa 20°C. Temperatura była wyższa pomiędzy tymi godzinami – wykres leży wtedy powyżej naszej linii pomocniczej.

c) Widzimy, że od godziny 6.00 do około 16.00 temperatura rosła, osiągnęła wartość maksymalną około 16.00, a następnie spadała (rys. 2).



Rys. 1



Rys. 2

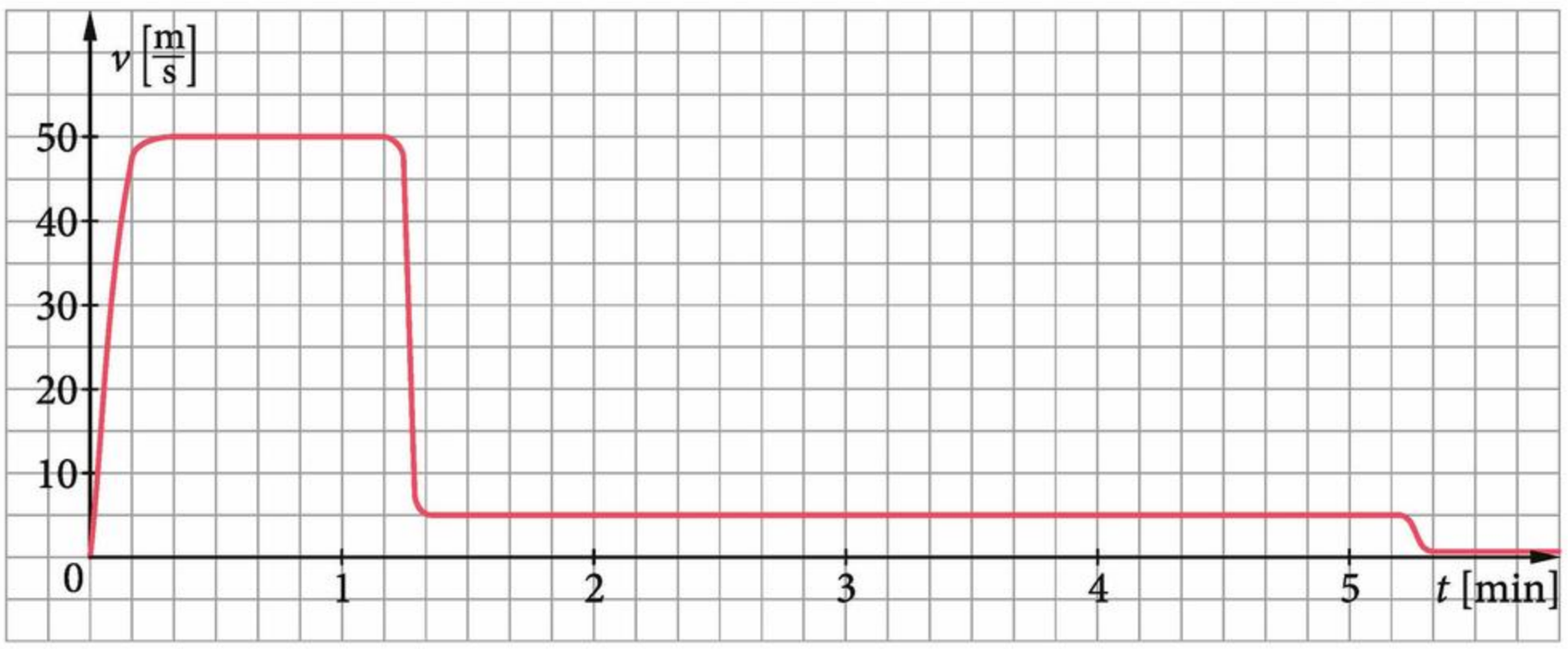
Ćwiczenie 2

Odczytaj z wykresu w przykładzie 2, jaka temperatura była w południe. Czy zaraz po południu temperatura rosła, czy spadała?

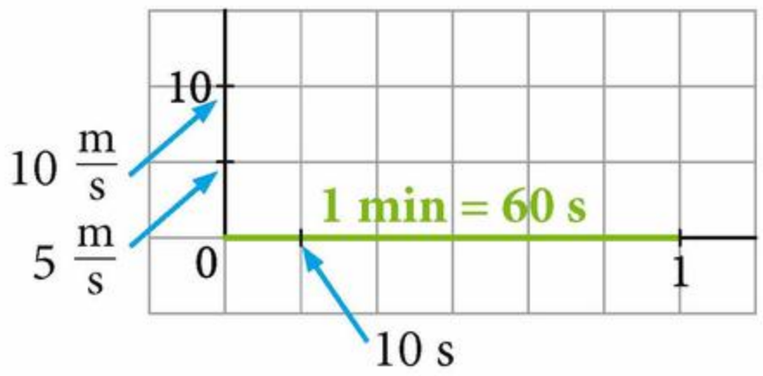
Przykład 3

Na wykresie poniżej przedstawiono zmiany prędkości spadochroniarza podczas skoku. Na początku skoku spadochroniarz nie otwiera spadochronu. Jego prędkość najpierw szybko rośnie. Rośnie też opór powietrza, więc po pewnym czasie prędkość skoczka przestaje rosnąć – dalej spada on ze stałą prędkością. Otworzenie spadochronu powoduje gwałtowne zmniejszenie prędkości spadania aż do stałej, niewielkiej prędkości. Odczytaj z wykresu odpowiedzi na pytania.

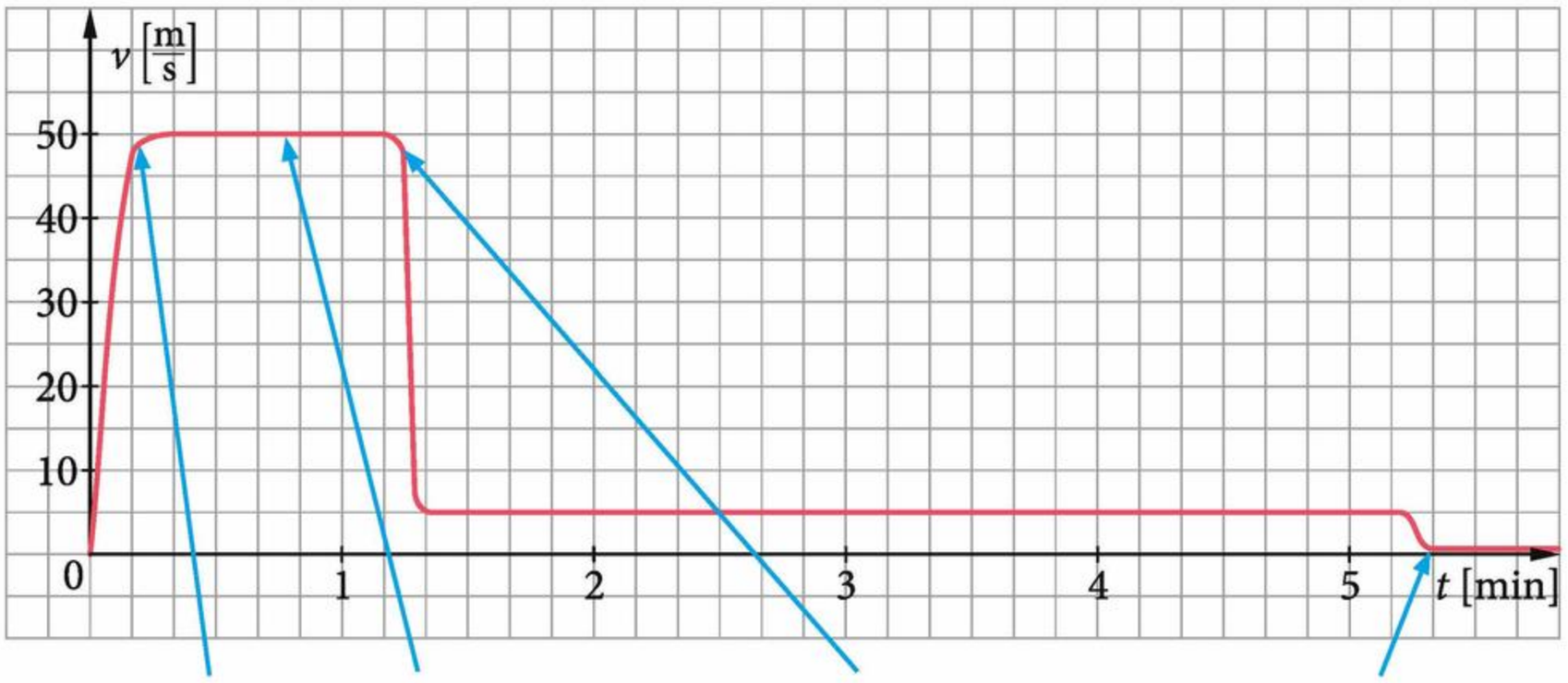
a) Po jakim czasie od chwili startu skoczek otworzył spadochron?
b) Z jaką prędkością poruszał się skoczek tuż przed otwarciem spadochronu?
c) Z jaką stałą prędkością skoczek opadał tuż przed lądowaniem?
d) Jak długo trwał skok?



Najpierw zapoznajemy się z opisami osi. Z poziomej osi odczytujemy czas trwania skoku spadochroniarza (w minutach), z pionowej osi – prędkość (w metrach na sekundę).



Przeanalizujmy teraz zmiany prędkości.



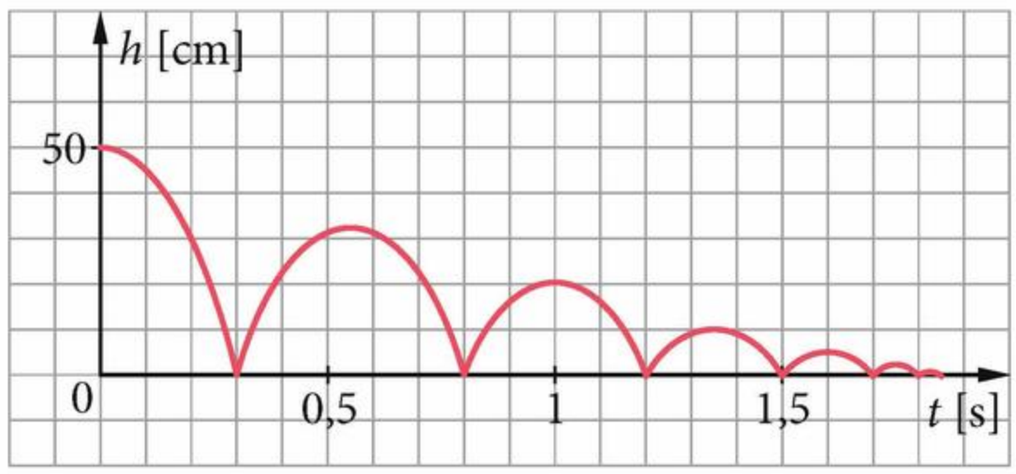
Teraz możemy odpowiedzieć na pytania.

a) Po 1 min 10 s od startu. **b)** 50 $\frac{m}{s}$ **c)** 5 $\frac{m}{s}$ **d)** 5 min 20 s

Ćwiczenie 3

Upuszczona piłeczka podskakiwała, odbijając się od podłogi. Na wykresie przedstawiono zmiany wysokości piłeczki nad podłogą. Odczytaj z wykresu:

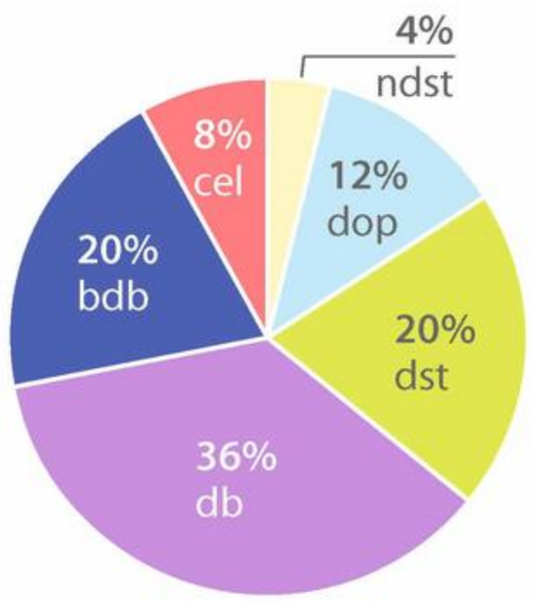
a) z jakiej wysokości upuszczono piłeczkę,
b) po jakim czasie od upuszczenia piłeczka spadła na podłogę,
c) na jaką wysokość piłeczka wzniosła się po drugim odbiciu.



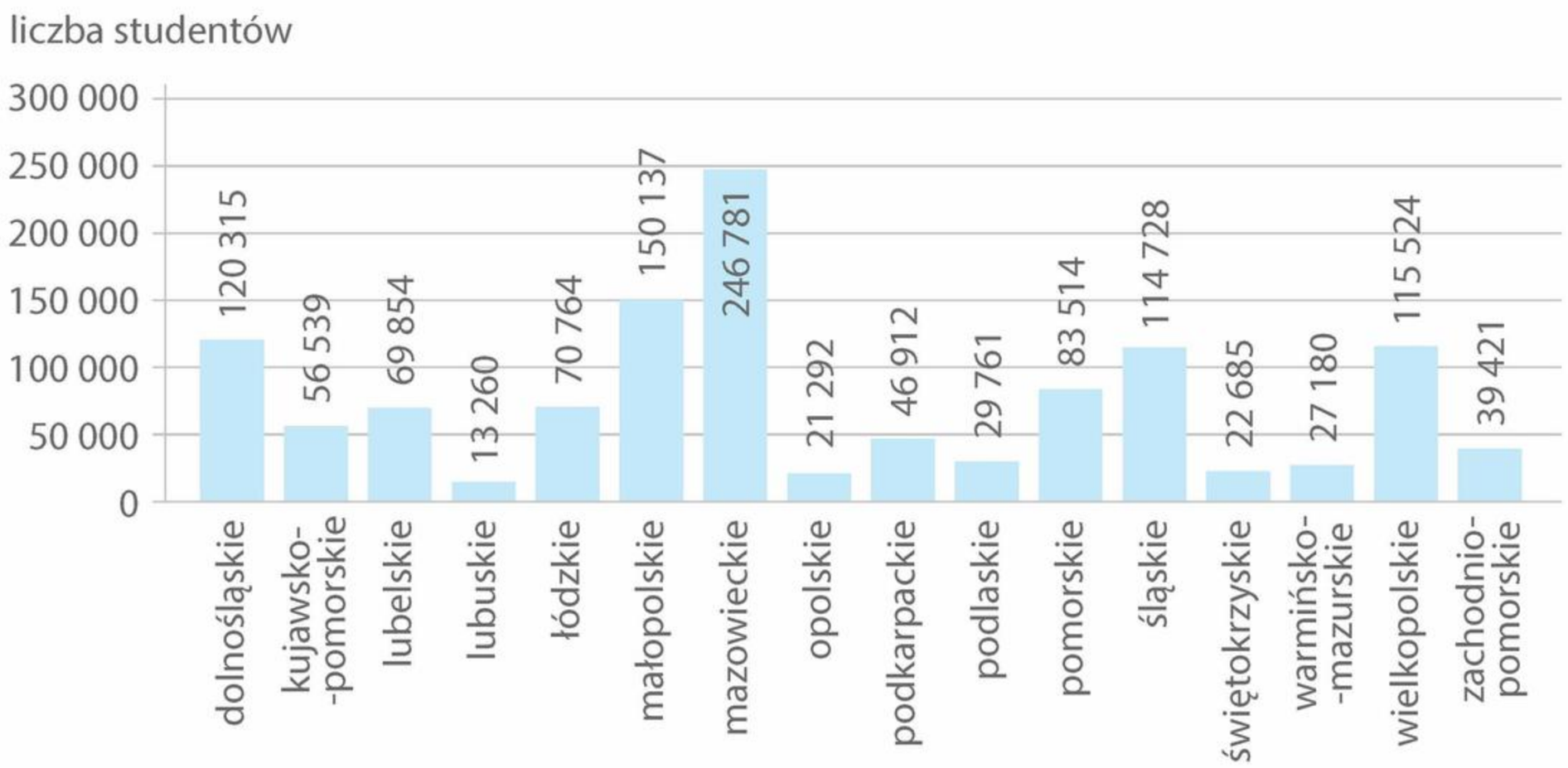
Zadania

1. Na diagramie obok przedstawiono wyniki sprawdzianu, które uzyskali uczniowie 25-osobowej klasy.

a) Oblicz, ilu uczniów otrzymało poszczególne oceny.
b) Przedstaw wyniki tego sprawdzianu w postaci tabeli i diagramu słupkowego.



2. Na podstawie diagramu przedstawiającego liczbę studentów szkół wyższych w Polsce w poszczególnych województwach w 2018 roku odpowiedz na pytania.



Źródło: https://bdl.stat.gov.pl/

a) Ilu studentów studiowało w województwie wielkopolskim w 2018 roku?
b) W którym województwie było najwięcej studentów, a w którym najmniej?
c) W których województwach uczyło się powyżej 100 000 studentów?
d) O ilu studentów więcej było w województwie dolnośląskim niż w opolskim?

3. W tabeli przedstawiono, ile osób mieszkało w 2018 roku w czterech województwach o największej liczbie ludności oraz w woj. opolskim, gdzie liczba ludności była najmniejsza. Dla każdego z województw ujętych w tabeli oblicz, jaki procent ludności stanowili studenci. Skorzystaj z informacji podanych w zadaniu 2. Przedstaw przybliżone wyniki obliczeń na diagramie słupkowym.

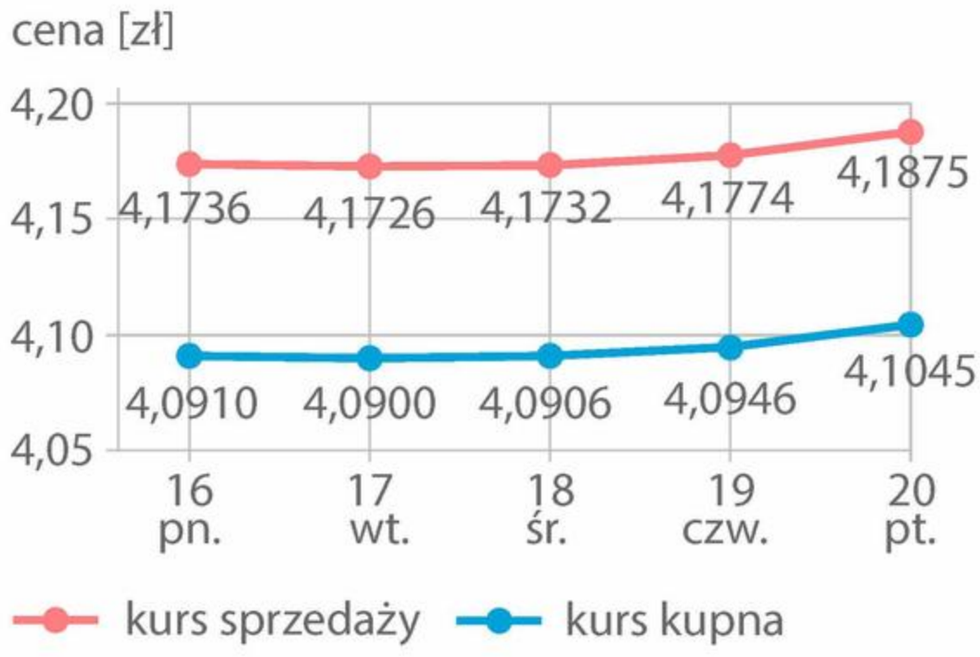
Województwo	Ludność [tys.]
mazowieckie	5403
śląskie	4534
wielkopolskie	3494
małopolskie	3401
opolskie	987

Źródło: https://bdl.stat.gov.pl/

4. Na wykresie liniowym przedstawiono średni kurs franka szwajcarskiego w pięciu kolejnych dniach września w 2020 roku.

a) W których dniach kurs kupna franka był wyższy od kursu z dnia poprzedniego, a w których dniach niższy?

b) Kiedy różnica między kursem sprzedaży a kursem kupna franka była największa?



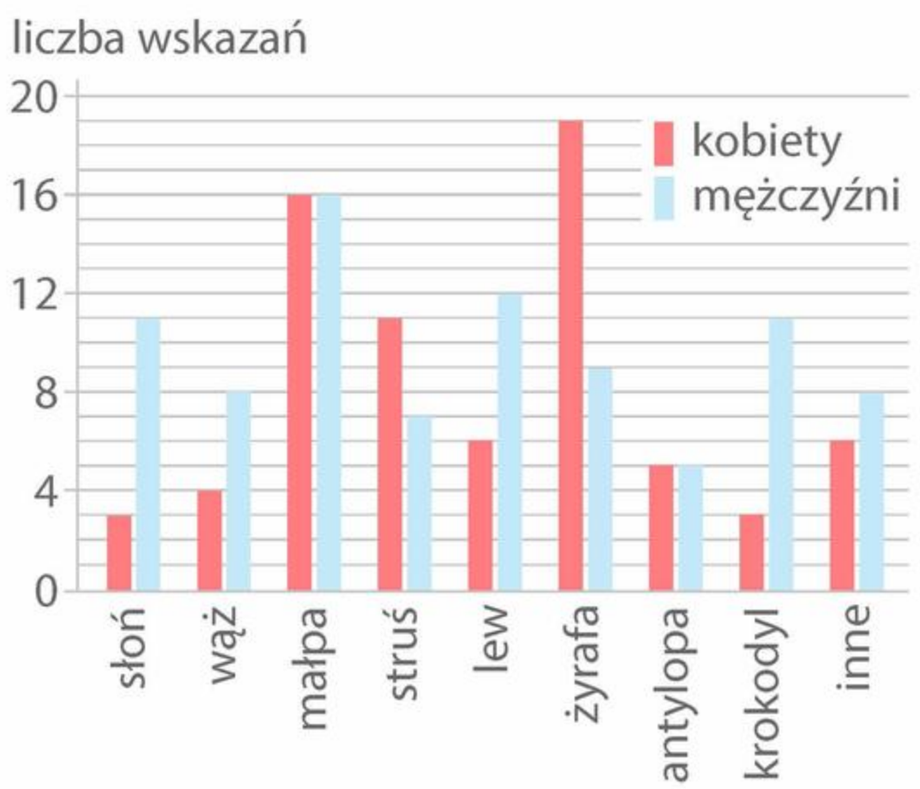
Źródło: https://www.nbp.pl/

Wszystkie informacje na wykresach w zadaniu 4 zostały przedstawione za pomocą kropek opisanych liczbami. Linie łączące kropki ułatwiają korzystanie z wykresu, ale **nie pokazują** pośrednich wartości (czyli kursu franka o różnych godzinach).

5. Łucja i Adam przeprowadzili ankietę przy wyjściu z ogrodu zoologicznego. Prosili zwiedzających o podanie nazwy zwierzęcia, które najbardziej im się spodobało. Wyniki sondażu przedstawili na diagramie.

a) Jaki procent osób, które wskazały słonia, stanowią kobiety?

b) Jaki procent ankietowanych kobiet stanowią te, które wskazały słonia?



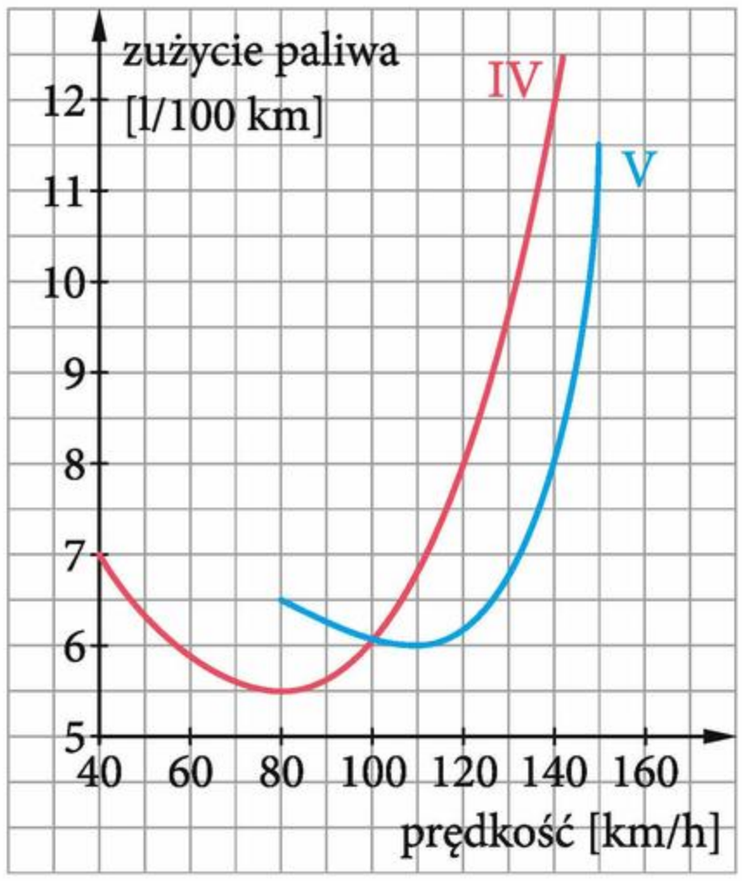
6. W 24-osobowej klasie uczniowie otrzymali następujące stopnie ze sprawdzianu z języka polskiego: dopuszczający – 2 uczniów, dostateczny – 4 uczniów, dobry – 10 uczniów, bardzo dobry – 5 uczniów, a celujący – 3 uczniów. Przedstaw te dane w postaci diagramu słupkowego i kołowego.

Użyj kątomierza.

100% → całe koło → 360°

1% → $\frac{1}{100}$ koła → 3,6°

Informacja do zadań 7 i 8
Na wykresach przedstawiono zależność między zużyciem paliwa na 100 km przez pewien samochód a jego prędkością podczas jazdy po płaskiej, prostej drodze. Poszczególne wykresy odpowiadają jeździe na różnych biegach (oznaczonych znakami rzymskimi).



7. Odczytaj z wykresów:

a) jakie jest zużycie paliwa podczas jazdy z prędkością 120 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ na IV biegu,

b) przy jakiej prędkości samochód jadący na IV biegu spala 7 l paliwa na 100 km,

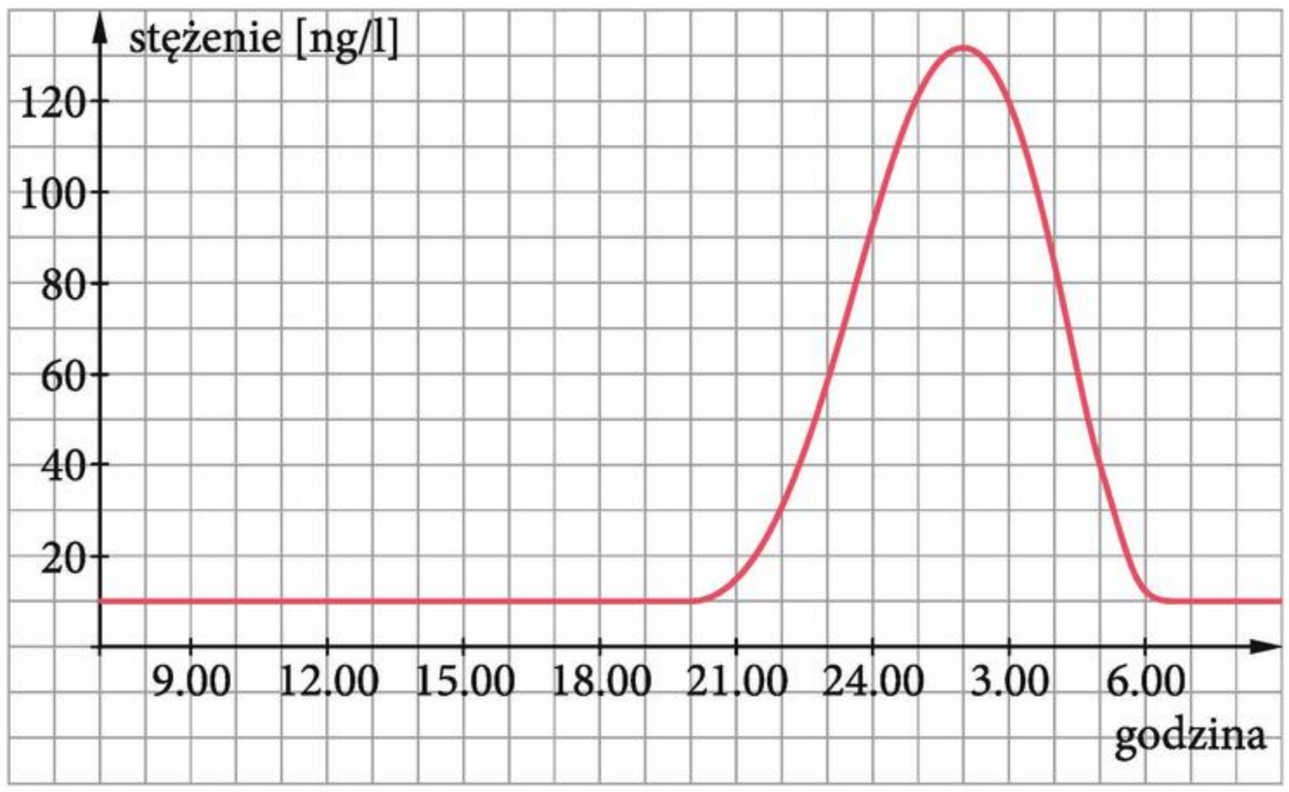
c) przy jakiej prędkości zużycie paliwa na V biegu jest najmniejsze,

d) z jaką prędkością i na którym biegu warto jechać, aby zużywać najmniej paliwa,

e) przy jakiej prędkości warto zmienić bieg z IV na V.

8. Jak myślisz, dlaczego wykres dla V biegu urywa się z lewej strony przy prędkości 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a z prawej – przy prędkości 150 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

9. Na wykresie przedstawiono zmiany stężenia hormonu zwanego melatoniną we krwi przeciętnego 15-latka. Melatonina reguluje rytm dobowy – jej stężenie odpowiada za to, czy jesteśmy senni.



Jednostką stężenia jest nanogram melatoniny na 1 litr krwi.
Nanogram (ng) to miliardowa część grama.

a) Jakie jest minimalne, a jakie maksymalne stężenie melatoniny?

b) W jakich godzinach stężenie melatoniny jest najniższe?

c) O której godzinie stężenie jest najwyższe?

d) W jakich godzinach stężenie melatoniny rośnie, w jakich maleje, a w jakich pozostaje bez zmian?

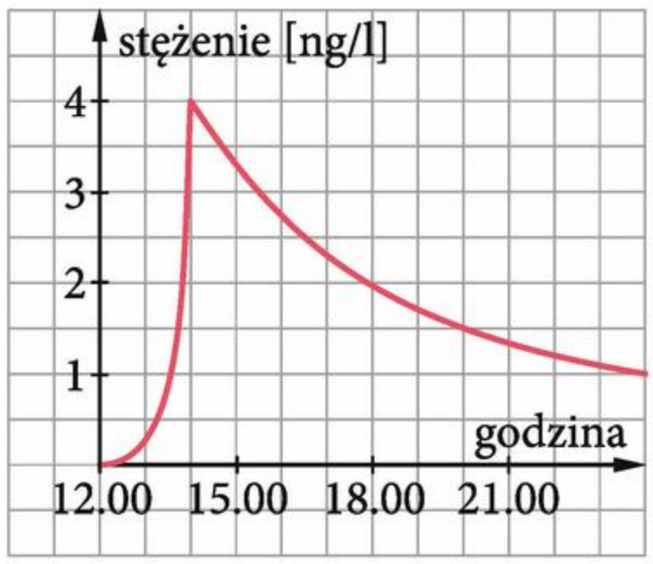
e) W jakich godzinach stężenie melatoniny jest większe od połowy stężenia maksymalnego?

f) U niektórych osób organizm wydziela za mało melatoniny. Jak myślisz, czy osoby te są senne w ciągu dnia, czy raczej mają kłopoty z zasypianiem w nocy?

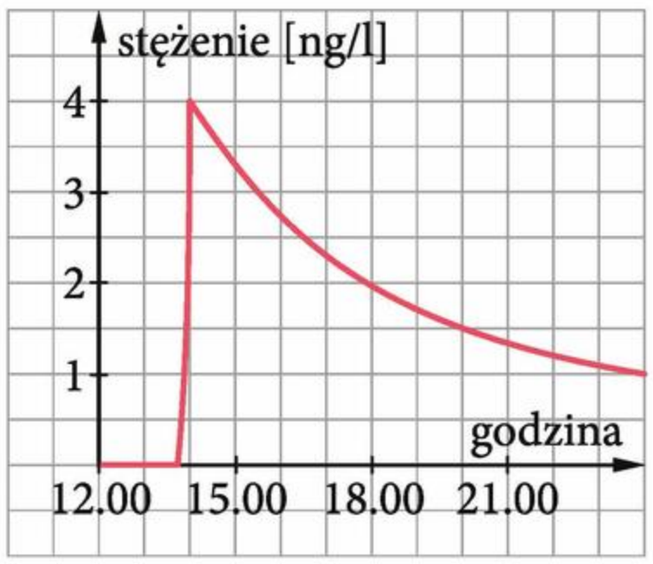
Informacja do zadań 10 i 11

Na wykresach przedstawiono zmiany stężenia pewnego leku we krwi pacjentów.

I.



II.



10. Odczytaj z wykresu I odpowiedzi na pytania.

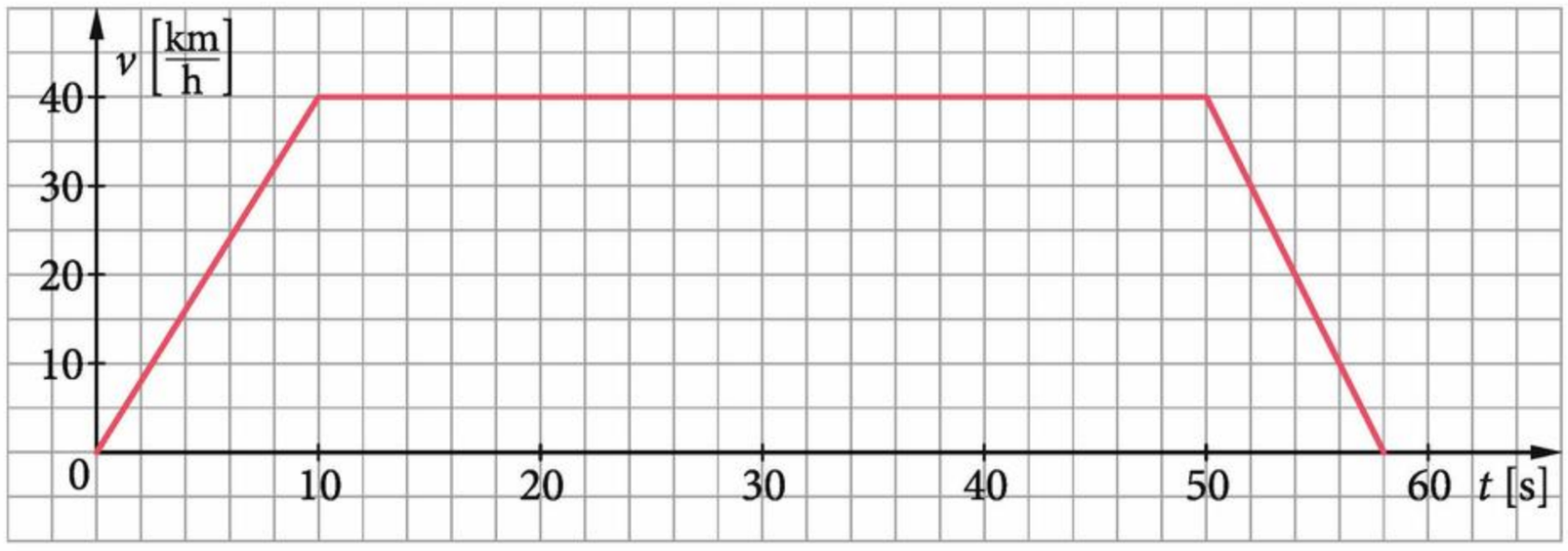
a) O której godzinie podano lek?

b) O której godzinie lek osiągnął najwyższe stężenie i ile ono wynosiło?

c) Lek działa, gdy jego stężenie we krwi przekracza 2 ng/l. O której godzinie lek zaczął działać, a o której przestał?

11. Porównaj wykresy I i II. W którym przypadku lek podano doustnie, a w którym w postaci zastrzyku dożylnego? Uzasadnij odpowiedź.

E **12.** Na wykresie przedstawiono zależność prędkości tramwaju od czasu jazdy.



Na podstawie wykresu odpowiedz na pytania.

a) Jak długo tramwaj się rozpędzał?

b) Jaką największą prędkość osiągnął?

c) Jak długo tramwaj jechał z maksymalną prędkością?

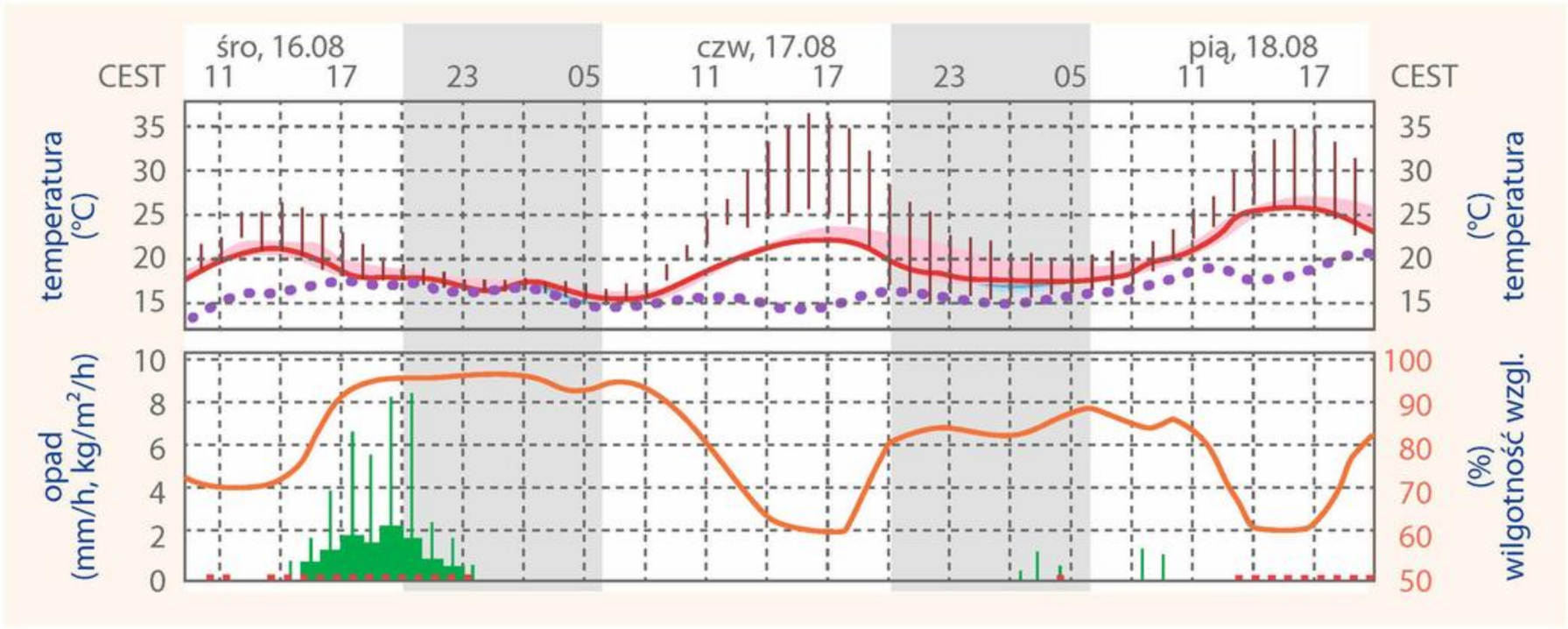
d) Jak długo trwało hamowanie?

e) Jaką drogę pokonał tramwaj w czasie, gdy poruszał się z maksymalną prędkością?

13. W tabeli przedstawiono wyniki pomiarów temperatury powietrza, wykonanych pewnego dnia. Na podstawie tej tabeli naszkicuj wykres przedstawiający zależność temperatury od czasu.

Godzina	6.00	8.00	10.00	12.00	14.00	16.00	18.00	20.00
Temperatura [°C]	10	9	11	15	18	17	14	11

14. Poniżej przedstawiono fragment prognozy pogody publikowanej przez Interdyscyplinarne Centrum Modelowania Uniwersytetu Warszawskiego (www.meteo.pl).



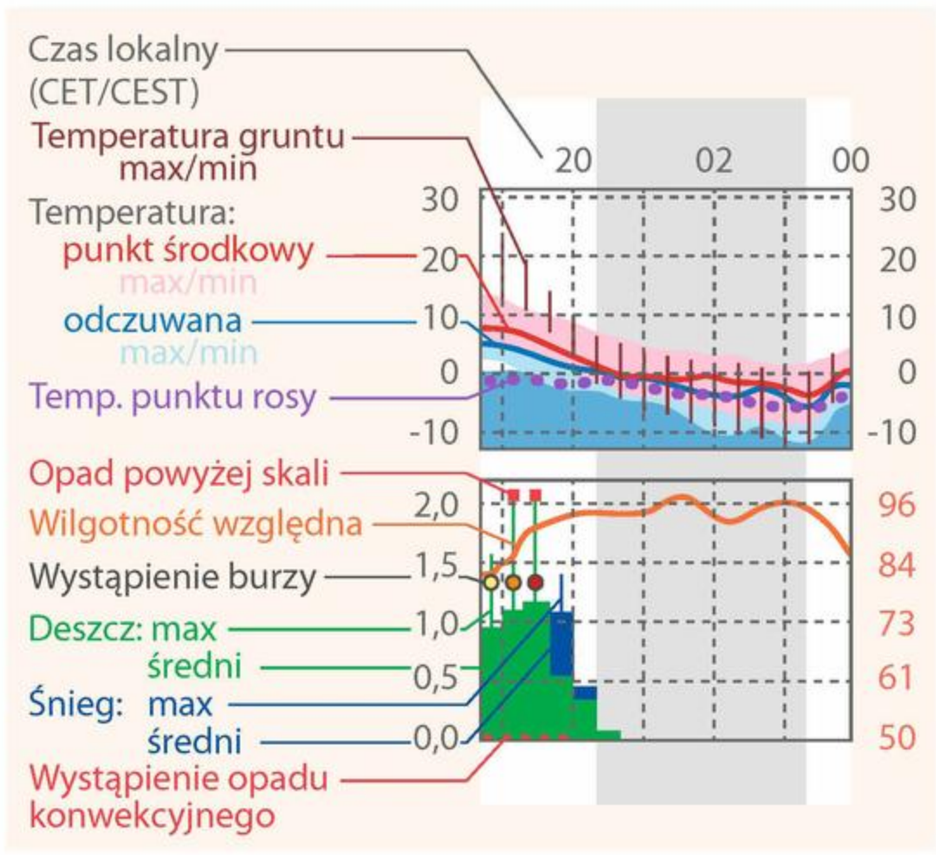
Zapoznaj się z legendą obok podpunktów a)–d) i odpowiedz na pytania.

a) Jaką temperaturę powietrza zapowiadano na godzinę 14.00 w środę?

b) Jaka była najwyższa temperatura powietrza prognozowana na czwartek i na którą godzinę ją zapowiadano?

c) W którym z wymienionych dni miał spaść silny deszcz, w którym – niewielki opad?

d) Porównaj zmiany temperatury powietrza i wilgotności powietrza. Co zauważasz?



Dla dociekliwych

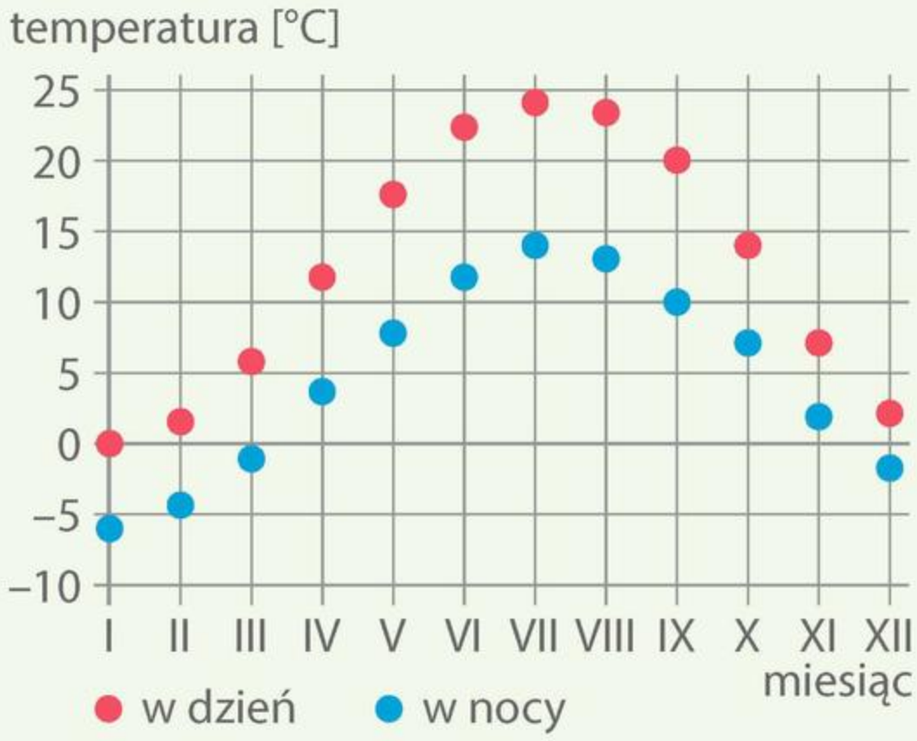
Z wykresu często można wywnioskować znacznie więcej, niż się wydaje na pierwszy rzut oka.

1. Oszacuj, z jakiej wysokości skoczył spadochroniarz, którego ruch przedstawiono na wykresie w przykładzie 3 na s. 10. Przyjmujemy, że spadochroniarz spadał w przybliżeniu pionowo. Spróbuj rozwiązać zadanie samodzielnie, a jeśli ci się nie uda, skorzystaj z podanych wskazówek.

Wskazówki.
- Wysokość, z jakiej skakał spadochroniarz, jest równa przebytej przez niego drodze.
- Rozpędzanie i hamowanie zajmowały niewiele czasu i spadochroniarz przebył w tym czasie niewielką drogę. Ponieważ w zadaniu masz tylko szacować, możesz tę drogę pominąć.
- Oblicz oddzielnie drogę przebytą przed otwarciem spadochronu i po jego otwarciu.

Czy już umiem?

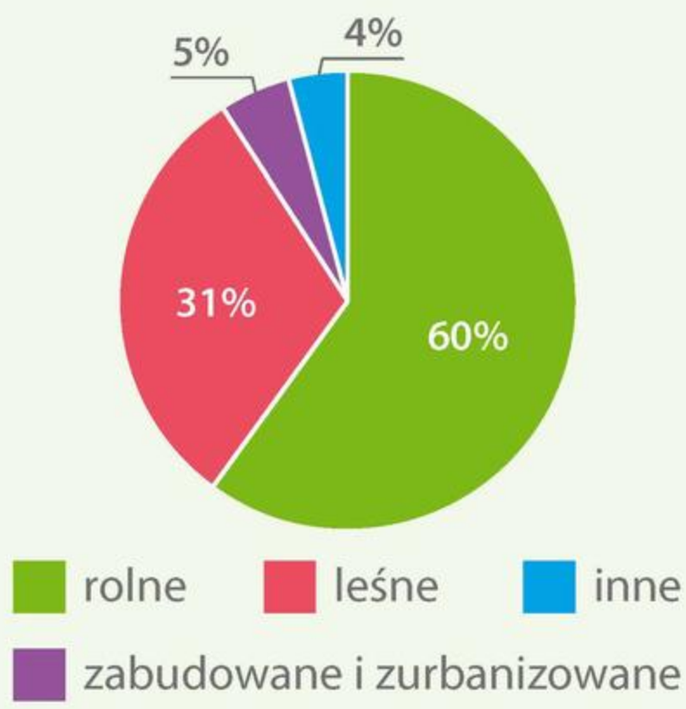
I. Na wykresie przedstawiono średnią miesięczną temperaturę powietrza w dzień oraz w nocy w Krakowie.



a) W którym miesiącu średnia temperatura w dzień była najniższa?

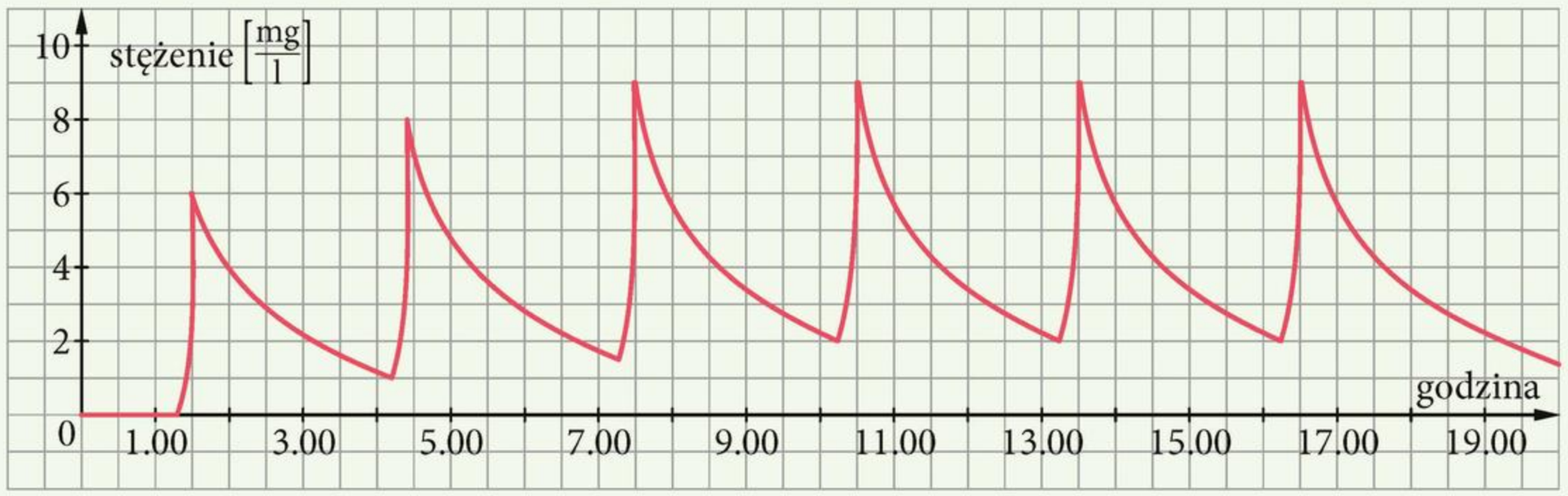
b) W których miesiącach średnia temperatura w nocy była ujemna?

II. Powierzchnia Polski wynosi ok. 30 mln hektarów. Na diagramie przedstawiono sposób wykorzystania tej powierzchni w różnych celach. Oceń prawdziwość podanych zdań.



1. Grunty rolne w Polsce zajmują około 18 mln ha.
2. Lasy stanowią prawie $\frac{1}{3}$ powierzchni kraju.

III. Na wykresie przedstawiono zmiany stężenia leku we krwi pacjenta. Lek był podany w kilku dawkach. Lek działa, jeśli jego stężenie we krwi przekracza 2 mg/l.



a) Ile razy pacjentowi podano lek? Co ile godzin?

b) Jakie stężenie osiągnął lek po pierwszej dawce, jakie – po drugiej dawce, a jakie – po następnych?

c) Do jakiej wartości spadło stężenie leku po trzeciej dawce?

d) Czy o godzinie 4.00 lek działał?

IV. Oblicz.

a) $2\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)$ **b)** $0{,}45 \cdot 0{,}08$ **c)** $2100 : 30\,000$

2

Średnia arytmetyczna

Na dobry początek ›

Marcin Gortat to pierwszy Polak, który zagrał w finale koszykarskiej ligi NBA. W sezonie 2016/2017 grał w drużynie Washington Wizards.

Punkty zdobyte w meczach rundy zasadniczej w sezonie 2016/2017:

4, 14, 15, 12, 8, 14, 13, 4, 18, 10, 16, 10, 10, 12, 10, 10, 12, 21, 10, 6, 4, 9, 7, 16, 12, 9, 21, 14, 8, 4, 13, 19, 13, 12, 19, 7, 10, 10, 12, 6, 7, 12, 12, 8, 16, 15, 17, 15, 21, 12, 16, 14, 14, 12, 12, 11, 6, 12, 12, 6, 7, 6, 11, 2, 15, 7, 8, 8, 6, 4, 4, 8, 10, 7, 6, 4, 7, 8, 16, 11, 8, 16

Polak rozegrał 82 mecze, w których zdobył średnio ok. 10,77 punktu.

Pytania i polecenia

- Punkty zdobyte przez Marcina Gortata w meczach rundy zasadniczej w sezonie 2016/2017 podano chronologicznie. Oblicz średnią liczbę punktów zdobytych w pierwszych dziesięciu meczach tego sezonu.
  Czy jest wyższa, czy niższa od średniej liczby punktów zdobytych we wszystkich meczach w tym sezonie?
- Inny koszykarz uzyskał taką samą średnią liczbę punktów w takiej samej liczbie meczów. Czy oznacza to, że zdobył taką samą liczbę punktów w kolejnych meczach?

Średnia arytmetyczna

Przykład 1

Poniżej przedstawiono fragment dziennika z ocenami Krzysia i Magdy z matematyki. Oblicz średnią ocen każdego z uczniów.

Średnia ocen to suma wszystkich ocen podzielona przez ich liczbę.

Klasa: 8d **Przedmiot:** Matematyka

Nr	Nazwisko i imię	Okres 1
		Oceny
11	Małecki Krzysztof	4 4 5 3 6 5
12	Markiewicz Magdalena	5 6 5 4 6 4 6

Obliczamy średnią ocen Krzysia:

$$\frac{\text{suma ocen}}{\text{liczba ocen}} = \frac{4+4+5+3+6+5}{6} = \frac{27}{6} = 4{,}5$$

Obliczamy średnią ocen Magdy:

$$\frac{\text{suma ocen}}{\text{liczba ocen}} = \frac{5+6+5+4+6+4+6}{7} = \frac{36}{7} \approx 5{,}14$$

Odp. Średnia ocen Krzysia wynosiła 4,5, a średnia ocen Magdy – około 5,14.

Zapamiętaj

Średnią arytmetyczną liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy liczbę: $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

$$\text{średnia arytmetyczna} = \frac{\text{suma danych}}{\text{liczba danych}}$$

Ćwiczenie 1

Oblicz średnią arytmetyczną liczb: 2, 2, 7, 6, 5.

Przykład 2

E

Na diagramie obok przedstawiono oceny semestralne z historii w klasie 8d. Oblicz średnią tych ocen.

Aby obliczyć średnią, musimy ustalić sumę ocen oraz ich liczbę, równą liczbie wszystkich uczniów tej klasy:

1 dwójka	to w sumie	2
4 trójki	to w sumie	12
6 czwórek	to w sumie	24
6 piątek	to w sumie	30
3 szóstki	to w sumie	18
20 ocen daje w sumie		86



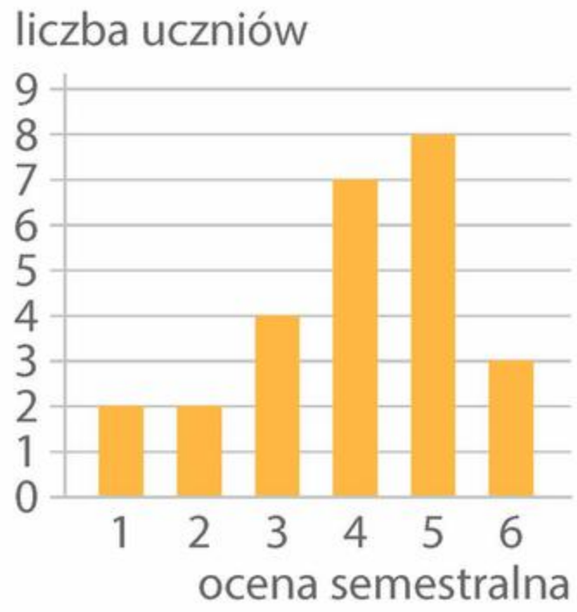
Odp. Średnia ocen semestralnych z historii w klasie 8d jest równa: $\frac{86}{20} = 4{,}3$.

Ćwiczenie 2

Na diagramie obok przedstawiono oceny semestralne z języka polskiego w klasie 8a.

a) Odpowiedz bez wykonywania obliczeń, czy średnia tych ocen jest wyższa, czy niższa niż 3,5.

b) Oblicz średnią tych ocen i sprawdź, czy twoja odpowiedź w podpunkcie a) jest poprawna.



Czy można obliczać średnią ze średnich?

Przykład 3

Dorota gra w piłkę ręczną. W pewnym tygodniu grała w dwóch meczach; w jednym z nich zdobyła 2 bramki, a w drugim 4. W następnym tygodniu brała udział w trzech meczach i strzeliła w nich 4, 5 i 6 bramek. Oblicz średnią liczbę bramek zdobytych przez Dorotę:

a) w pierwszym tygodniu,

b) w drugim tygodniu,

c) w obu tygodniach.



a) $\frac{2+4}{2} = 3$

b) $\frac{4+5+6}{3} = 5$

c) $\frac{2+4+4+5+6}{5} = \frac{21}{5} = \frac{42}{10} = 4{,}2$

Zauważmy, że średnia liczba bramek w obu tygodniach (4,2) nie jest równa średniej obu średnich $\left(\frac{3+5}{2} = 4\right)$. Równość zachodziłaby, gdyby w obu tygodniach Dorota brała udział w takiej samej liczbie meczów. Średnie mogłyby też przypadkowo być równe przy odpowiednio dobranych liczbach, nie jest to jednak regułą.

Ćwiczenie 3

Joasia uczy się dwóch języków obcych. Z angielskiego dostała w tym miesiącu szóstkę i czwórkę, a z hiszpańskiego trzy czwórki. Oblicz jej średnią ocen z angielskiego, z hiszpańskiego i z obu języków łącznie. Czy średnia ocen z obu języków jest równa średniej średnich ocen z angielskiego i hiszpańskiego?

Średnia a suma danych

Przykład 4

E

Tomek miał z angielskiego siedem ocen, których średnia wynosiła 4,0. Kiedy dostał jeszcze jedną ocenę, jego średnia ocen wzrosła do 4,25. Jaka to była ocena?

Zapiszmy wszystkie dane w tabeli:

	Liczba ocen	Średnia ocen
Najpierw	7	4,0
Później	8	4,25

Rozwiązanie zadania będzie łatwiejsze, gdy będziemy rozważać nie tylko średnią, lecz także sumę ocen. Możemy zapisać ją w dodatkowej kolumnie.

$$\frac{\text{suma danych}}{\text{liczba danych}} = \text{średnia}$$

$$\text{suma danych} = \text{średnia} \cdot \text{liczba danych}$$

	Liczba ocen	Średnia ocen	Suma ocen
Najpierw	7	4,0	$7 \cdot 4 = 28$
Później	8	4,25	$8 \cdot 4{,}25 = 34$

Widzimy teraz, że suma ocen zwiększyła się o 6, a więc nową oceną była szóstka.

Dobra rada

Znacznie ułatwisz sobie rozwiązywanie wielu zadań dotyczących średniej arytmetycznej, jeśli weźmiesz pod uwagę sumę danych.



Ćwiczenie 4

Kasia ma z matematyki osiem ocen, których średnia wynosi 4,75. W najbliższym tygodniu dostanie kolejną ocenę. Czy ma szansę, aby jej średnia ocen była wyższa niż 4,8?

Mediana

Oprócz średniej ważną wielkością opisującą dane liczbowe jest mediana. Aby wyznaczyć medianę, należy najpierw **uporządkować zestaw danych**, czyli ustawić je w kolejności od najmniejszej do największej lub odwrotnie.

Zapamiętaj

Mediana uporządkowanego zestawu danych to:

- liczba znajdująca się w środku tego zestawu – w przypadku nieparzystej liczby danych w zestawie;
- średnia arytmetyczna dwóch środkowych liczb w zestawie – w przypadku parzystej liczby danych w zestawie.

1, 2, 2, 3, 4

mediana: 2

1, 2, 2, 3, 4, 4

mediana: $\frac{2+3}{2} = 2{,}5$

Przykład 5.1

Siedmioro uczniów zapisało na tablicy swój wzrost w centymetrach:
165, 159, 174, 160, 168, 160, 171.
Uporządkuj te dane, a następnie znajdź ich medianę.

Dane porządkujemy w kolejności od najmniejszej do największej:

159, 160, 160, 165, 168, 171, 174

Liczba 165 znajduje się pośrodku, jest więc medianą tego zestawu danych.

Przykład 5.2

Do danych z przykładu 5.1 dopisano wzrost jeszcze jednego ucznia: 176. Uporządkuj nowy, ośmioelementowy zestaw danych, a następnie znajdź medianę.

Tak jak w poprzednim przykładzie porządkujemy dane w kolejności rosnącej i wskazujemy parę środkowych liczb: 165 i 168.

159, 160, 160, 165, 168, 171, 174, 176

Średnia arytmetyczna dwóch środkowych liczb, czyli $\frac{165+168}{2} = 166{,}5$, jest medianą tego zestawu danych.



Dobra rada

Pamiętaj, że aby obliczyć medianę, dane trzeba uporządkować (ustawić w kolejności).

Ćwiczenie 5

Wyznacz medianę podanego zestawu liczb.

a) 7, 4, 3, 2, 8 **b)** 0, 0, 1, 2, 4, 0, 0, 6, 6, 3, 4, 0

Co lepsze: średnia czy mediana?

Przykład 6

Na pokaz filmu „Księżna, która była smokiem", dozwolonego od 12 lat, przyszło 7 osób: czworo trzynastolatków i 64-letni dziadek z dwoma 12-letnimi wnukami.

a) Jaki jest średni wiek osób obecnych w kinie?
b) Jaka jest mediana ich wieku?

a) $\frac{4 \cdot 13 + 64 + 2 \cdot 12}{7} = \frac{140}{7} = 20$

b) Ustawiamy dane w kolejności rosnącej. Ponieważ liczb jest 7, znajdujemy środkową z nich: 12, 12, 13, 13, 13, 13, 64.

Odp. Średnia wieku widzów wynosi 20 lat, a mediana 13 lat.

Z treści zadania od razu wiemy, że prawie wszyscy widzowie to nastolatki. Średnia wieku wynosząca 20 lat nie opisuje nam odpowiednio tej sytuacji. Dzieje się tak dlatego, że wystarczy jedna osoba o wiele starsza od pozostałych, żeby znacznie podnieść średnią.

Podobnie jest w wielu innych sytuacjach. Na przykład średnie krajowe wynagrodzenie nie daje dobrego wyobrażenia o tym, ile ludzie na ogół zarabiają, bo jest ono zawyżone przez wysokie dochody stosunkowo małej grupy osób o najwyższych zarobkach.

W takich przypadkach znacznie lepsze wyobrażenie o przeciętnym wieku czy dochodzie daje mediana. Zauważ, że gdyby w przykładzie 6 zamiast dziadka przyszedł 85-letni pradziadek, średnia wieku podniosłaby się do 23 lat, ale mediana by się nie zmieniła.

Ćwiczenie 6

W pewnej firmie prezes zarabia 11 000 zł, księgowy 4000 zł, a czterej pracownicy po 3000 zł. Ile wynosi średnia płaca, a ile mediana płac w tej firmie?

Zadania

1. Oto oceny pewnego ucznia na koniec siódmej klasy. Oblicz ich średnią i medianę.

a) 5, 5, 6, 4, 4, 5, 4, 5, 4, 4, 4, 6, 4, 3

b) 3, 2, 5, 2, 3, 2, 4, 4, 3, 3, 2, 4, 3, 2, 3

c) 4, 4, 5, 4, 3, 4, 4, 4, 5, 4, 3, 3, 3, 4

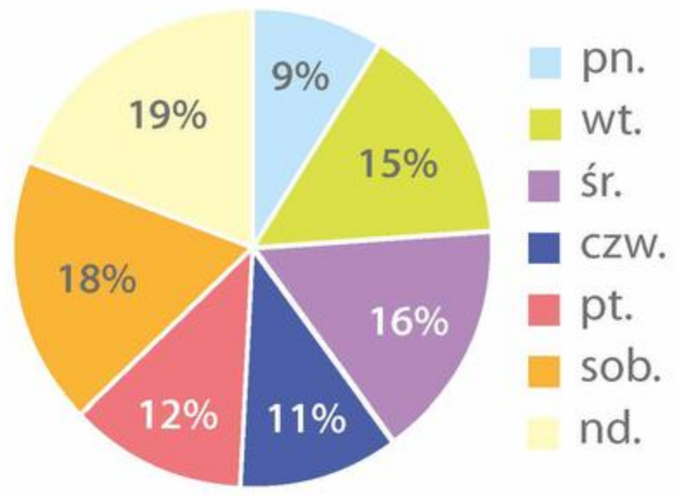
2. Wojtek ma z matematyki trzy czwórki i siedem piątek. Jaka jest średnia jego ocen z tego przedmiotu?

E **3.** Na diagramie przedstawiono, ile rodzeństwa mają uczniowie klasy 8c.

a) Ile osób jest w tej klasie?
b) Ile rodzeństwa mają średnio uczniowie tej klasy?
c) Wypisz w kolejności rosnącej, ile rodzeństwa mają poszczególne osoby.
d) Znajdź medianę liczby rodzeństwa.



4. Magda prowadzi blog modowy. Rozkład procentowy wejść na jej stronę w ciągu tygodnia przedstawiono na diagramie kołowym. Wiadomo, że we wtorek blog Magdy odwiedzono 60 razy. Oblicz średnią dzienną liczbę wejść na stronę w ciągu tego tygodnia oraz medianę dziennej liczby wejść na stronę.



5. W konkursie matematycznym startowali uczniowie klas ósmych i siódmych. Uzyskali oni wyniki zapisane w tabeli. Oblicz:

a) średni wynik siódmoklasistów,
b) średni wynik ósmoklasistów,
c) średnią liczb obliczonych w podpunktach a) i b),
d) średni wynik wszystkich zawodników.

Zawodnik	Klasa	Wynik
Liliana K.	8	20
Stanisław M.	8	20
Małgorzata T.	7	16
Anna W.	8	15
Marcin G.	8	15
Katarzyna P.	7	14
Wiktor H.	8	12

E **6.** Średnia temperatur zmierzonych w południe w ciągu pierwszych trzech dni stycznia wyniosła 4°C, a w ciągu pierwszych czterech dni 5°C. Oblicz, jaką temperaturę odnotowano 4 stycznia.

7. Średnia temperatur zmierzonych w południe w pierwszym tygodniu wiosny wyniosła 3°C, a w ciągu dwóch następnych tygodni 9°C. Jaka była średnia temperatur zmierzonych w ciągu pierwszych trzech tygodni wiosny?

8. Na podstawie odpowiedniej tabeli oblicz:

a) średnią ocen ze sprawdzianu wszystkich uczniów klasy 8a,
b) średnią ocen ze sprawdzianu wszystkich uczniów klas siódmych.

Grupa	Liczba osób	Średnia ocen
dziewczęta 8a	12	4,25
chłopcy 8a	8	3,75

Klasa	Liczba osób	Średnia ocen
7a	18	3,50
7b	27	4,00
7c	30	4,10

9. Klasa sportowa liczy 27 osób, z czego jedną trzecią stanowią chłopcy. Średni wzrost chłopców w tej klasie jest równy 183 cm, a dziewcząt 174 cm. Oblicz średni wzrost wszystkich uczniów tej klasy.

10. Pan Wojciech chciał podjąć pracę w pewnej firmie, dlatego w kilku źródłach zasięgnął informacji o oferowanych w niej wynagrodzeniach.

- Od dyrektora dowiedział się, że średnie wynagrodzenie w jego firmie to 5500 zł.
- Jeden z pracowników powiedział mu w zaufaniu, że połowa zatrudnionych zarabia ponad 3500 zł, a połowa – mniej.
- Inny pracownik stwierdził, że w tej firmie najczęściej wypłacane jest wynagrodzenie w wysokości 3000 zł.

Która z tych informacji była rzetelna? Wysokość zarobków w tej firmie przedstawiono w tabeli.

Wynagrodzenie miesięczne w zł	Liczba osób
19 000	1
10 000	1
5000	3
4000	1
3000	6

11. Podaj sześć liczb, których średnia jest równa 4, a mediana wynosi 5.

12. **a)** Do zestawu liczb 4, 6, 7, 8 dopisz jedną liczbę, tak aby średnia tych liczb była równa 5.
b) Do zestawu liczb 5, 7, 9, 11 dopisz jedną liczbę, tak aby średnia tych liczb wzrosła o 2.

13. **a)** Do zestawu liczb 14, 15, 22, 31 dopisz jedną liczbę, tak aby mediana otrzymanego zestawu była równa 21.
b) Do zestawu liczb 15, 18, 20, 21, 23 dopisz jedną liczbę, tak aby mediana otrzymanego zestawu była równa 20,5.

E **14.** Ania z klasy 8d stara się o świadectwo z wyróżnieniem, które otrzymują uczniowie ze średnią co najmniej 4,75 i bardzo dobrym lub wzorowym zachowaniem. Przewiduje, że na koniec roku z 8 na 15 przedmiotów będzie miała piątkę, a z pozostałych przedmiotów jej ocena waha się między czwórką a piątką. Ile co najmniej piątek Ania musi jeszcze zdobyć, jeśli już teraz wie, że z zachowania będzie mieć ocenę bardzo dobrą?

Dla dociekliwych

Maciek dostał z matematyki szóstkę za pracę domową i czwórkę z klasówki. Nauczyciel powiedział, że ocena z klasówki liczy się jak trzy oceny z prac domowych. Maciek obliczył więc swoją średnią ocen w następujący sposób:
$\frac{6+4+4+4}{4} = \frac{18}{4} = 4{,}5$. Można to zapisać krócej: $\frac{6+3\cdot 4}{1+3} = \frac{18}{4} = 4{,}5$.

Liczba 3 wskazuje, ile razy ocena z klasówki (czwórka) jest ważniejsza od oceny z pracy domowej. Nazywamy ją **wagą** tej oceny, a średnią z uwzględnieniem wagi nazywamy **średnią ważoną**. Ogólnie, średnią ważoną n liczb $a_1, a_2, ..., a_n$ z wagami odpowiednio $w_1, w_2, ..., w_n$ obliczamy ze wzoru:

$$\frac{a_1 w_1 + a_2 w_2 + ... + a_n w_n}{w_1 + w_2 + ... + w_n}$$

1. Oblicz średnią ważoną ocen: 4 (z wagą 3), 4 (z wagą 2), 3 (z wagą 2), 6 (z wagą 3). Porównaj ją ze średnią tych samych liczb, ale bez uwzględnienia wag.

2. Bez wykonywania obliczeń odpowiedz, czy średnia ważona:

a) liczby 10 z wagą 3 i liczby 8 z wagą 1 jest większa, czy mniejsza od 9,
b) liczby 9 z wagą 1 i liczby 7 z wagą 2 jest większa, czy mniejsza od 8.

3. Kasia dostała już pięć ocen z matematyki: 4, 3, 5, 5, 3, wszystkie z wagą 1. Czeka ją jeszcze klasówka, z której dostanie ocenę z wagą 3. Czy ma szansę, żeby po tej klasówce średnia ważona jej ocen była większa niż 4,5?

Czy już umiem?

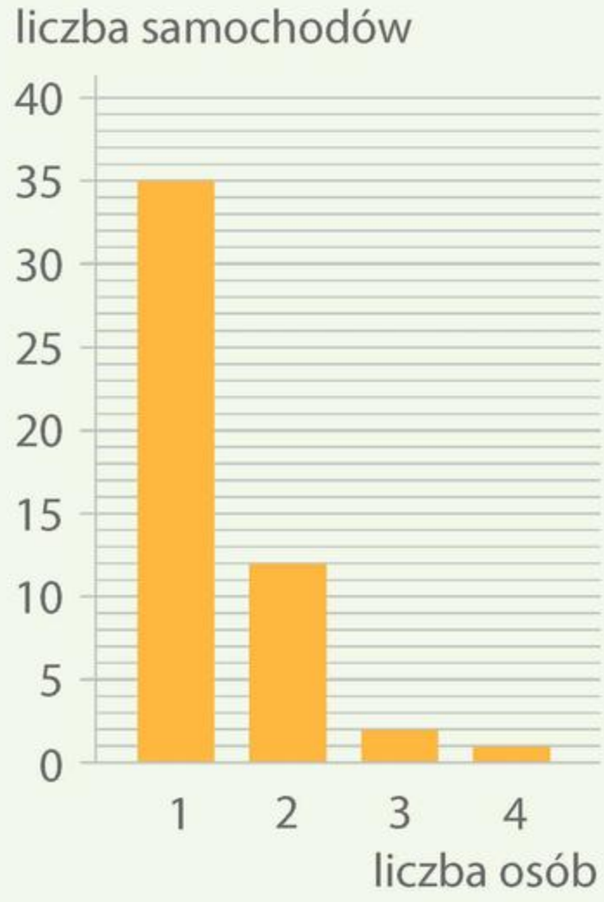
Informacja do zadań I i II

Uczestnicy sześciodniowego rajdu rowerowego przebyli podczas pierwszych pięciu dni odcinki o długościach: 60 km, 45 km, 53 km, 64 km, 58 km.

I. **a)** Ile średnio kilometrów pokonywali dziennie w ciągu pierwszych pięciu dni?
b) Wyznacz medianę odległości pokonanych w ciągu pierwszych pięciu dni rajdu.

II. Ile kilometrów uczestnicy rajdu muszą przejechać w ciągu ostatniego dnia, aby średnia długość przebytych dziennie odcinków trasy wyniosła 60 km?

III. Uczniowie chcieli zbadać, ile średnio osób jedzie jednym samochodem. Zapisali liczby osób w 50 samochodach przejeżdżających ulicą. Wyniki przedstawili na diagramie słupkowym. Na jego podstawie wyznacz średnią liczbę osób w samochodzie.



IV. Zapisz w postaci jednej potęgi i oblicz.

a) $\frac{2^4 \cdot (2^{48})^2}{2^{200} : 2^{104}}$

b) $\frac{2^3 \cdot 5^3}{4^7 \cdot 0{,}25^7}$

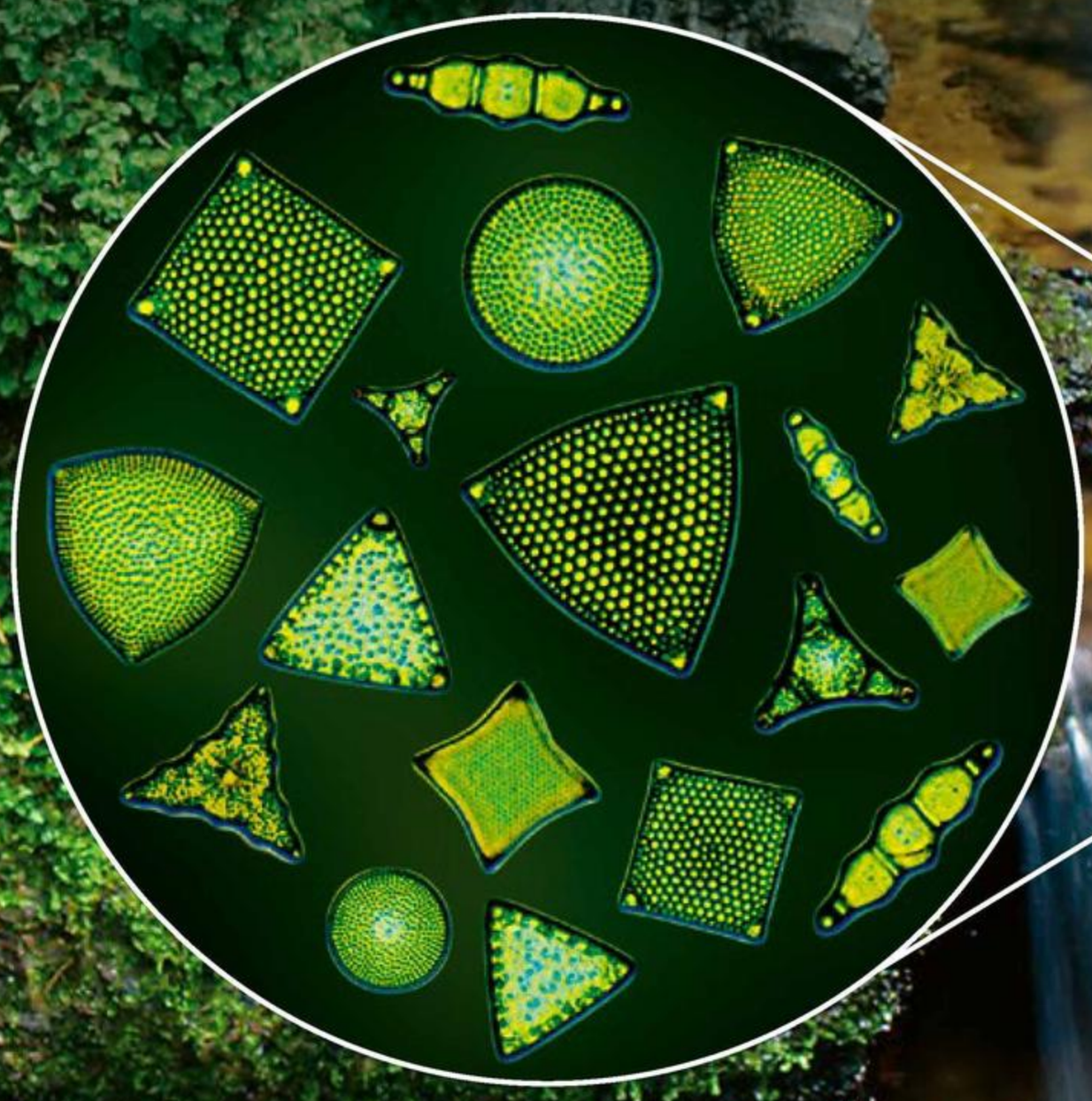
3

Zbieranie i porządkowanie danych

Na dobry początek

Okrzemki to glony mikroskopijnej wielkości – mają od 1,5 µm do 5000 µm (czyli od 0,0015 mm do 5 mm) i misterne krzemionkowe szkielety. Należą do grupy najlepszych wskaźników stanu wód powierzchniowych. Na podstawie występowania określonych gatunków okrzemek i ich ilości można ocenić stopień czystości wody.

Pobrane z jezior i rzek próbki służą do obliczania tzw. indeksów okrzemkowych, na których podstawie określa się stan ekologiczny wód w pięciostopniowej skali.



W Polsce występuje około 3500 gatunków okrzemek.

Pytania i polecenia

- Gatunki okrzemek różnią się między innymi kształtem. Przyjrzyj się zdjęciu powyżej, na którym pokazano okrzemki widziane pod mikroskopem. Jak myślisz, ile jest tam gatunków okrzemek? Który jest najliczniejszy?

Umiesz już czytać i rysować diagramy, obliczać średnią arytmetyczną oraz wyznaczać medianę. Pora wykorzystać te umiejętności do samodzielnego zbierania i porządkowania danych. W treści tematu i zadaniach znajdziesz przykładowe tematy badań. Kiedy będziesz samodzielnie przeprowadzać ankietę, wybierz taki temat, który cię interesuje.

Jak zadawać pytania?

Przykład 1.1

Zosia i Norbert chcieli zbadać, w jaki sposób uczniowie na ogół docierają do szkoły. W tym celu przygotowali ankietę dla wszystkich trzech klas ósmych w swojej szkole.

Zaznacz w odpowiedniej kratce, jak docierasz do szkoły.
☐ *pieszo*
☐ *rowerem, na hulajnodze albo na rolkach*
☐ *komunikacją miejską*
☐ *samochodem*

Najwięcej uczniów zakreślało kilka kratek albo pisało obok nich, że bywa różnie. Jeden uczeń nic nie zaznaczył i wyjaśnił, że mama odwozi go na motocyklu. Co mogą zrobić Zosia i Norbert, żeby poprawić ankietę?

Mogą zapytać o jeden konkretny dzień – wtedy sposób dotarcia do szkoły jest tylko jeden. Warto także, aby wzięli pod uwagę, że nie przewidzą wszystkich możliwości. Oto jak może wyglądać ich ankieta po poprawieniu:

Zaznacz w odpowiedniej kratce, jak dzisiaj dotarłaś/dotarłeś do szkoły.
☐ *pieszo*
☐ *rowerem, na hulajnodze albo na rolkach*
☐ *komunikacją miejską*
☐ *samochodem*
☐ *w inny sposób*

Zapamiętaj

Pytanie musi być precyzyjne – każdy uczestnik ankiety powinien rozumieć, o co dokładnie pytamy i jak ma udzielić odpowiedzi.

Dobra rada

Wśród odpowiedzi do wyboru zwykle warto dopisać „inne", bo czasem nie jesteśmy w stanie przewidzieć wszystkich możliwości.

Niezależnie od tego, jak **formułujemy** pytania, trzeba je zadawać uprzejmie!

Zapamiętaj

Jeśli chcesz przeprowadzić ankietę, przedstaw się, wyjaśnij, na jaki temat jest badanie i dlaczego je prowadzisz. Powiedz, że ankieta jest anonimowa. Dopiero potem zapytaj, czy dana osoba chce wziąć udział w badaniu. Nie zapomnij podziękować za udzielenie odpowiedzi.



Jak zbierać dane?

Wróćmy do ankiety Zosi i Norberta.

Przykład 1.2

Jakie czynniki mogą mieć wpływ na wyniki ankiety z przykładu 1.1 (w wersji poprawionej)? Jak można zaradzić takiemu wpływowi?

Z codziennego doświadczenia wiemy, że gdy jest bardzo zimno albo pada deszcz, więcej osób korzysta z samochodów, ewentualnie z transportu publicznego, a mniej chodzi na piechotę albo jeździ rowerem. Dlatego pogoda w dniu przeprowadzania ankiety może mieć wpływ na uzyskane odpowiedzi. Aby dostać odpowiedzi bardziej uniwersalne, trzeba zadać to samo pytanie kilka razy, w różnych porach roku i przy różnej pogodzie.

Dane z ankiet przeprowadzonych w poszczególnych dniach można opracować łącznie (np. obliczając średni procent dojeżdżających samochodem), ale jeszcze ciekawiej będzie porównać wyniki z poszczególnych dni. W ten sposób możemy się przekonać, jak duży wpływ na wybór środka transportu ma pogoda lub pora roku.

Zapamiętaj

Zastanów się, co może wpłynąć na wynik badania. Potem możesz zbadać ten wpływ, porównując wyniki tej samej ankiety prowadzonej w różnych sytuacjach.

Jak zapisywać i porządkować wyniki?

Czasami już podczas zapisywania wyników można ułatwić sobie dalszą pracę.

Przykład 2

Kasia, Wojtek i Ula chcieli zbadać, jak ubierają się jesienią różne osoby. Każde z nich stanęło na ulicy i zapisywało, jak są ubrani przechodnie. Oto ich notatki. Porównaj stosowane w nich sposoby zapisu.

Kasia

kurtka, koszula, polar, koszula, T-shirt, płaszcz, T-shirt, kurtka, kurtka, polar, polar, polar, płaszcz, kurtka, płaszcz, koszula, kurtka, polar, T-shirt, polar, kurtka, płaszcz, koszula, koszula, polar, polar, koszula,

Wojtek

kurtka/płaszcz	polar/sweter	długi rękaw	krótki rękaw
𝍸	𝍸	𝍸	𝍸

Ula

kurtka/płaszcz	polar/sweter	długi rękaw	krótki rękaw
𝍸	𝍸	𝍸	𝍸

Kasia miała najwięcej pracy z zapisywaniem danych, a przy ich opracowywaniu będzie musiała policzyć poszczególne odpowiedzi. Wojtek i Ula mogli szybciej i wygodniej notować, bo przy każdej osobie stawiali tylko jedną kreskę. Notatki Uli są najłatwiejsze do dalszego opracowania, bo kreski pogrupowane są po 5, więc od razu widać ich liczbę. Na przykład w kurtkę lub płaszcz ubranych było $3 \cdot 5 + 1 = 16$ osób.

Dobra rada

Jeśli prowadzicie badanie podobne do opisanego w przykładzie 2 w zatłoczonym i ruchliwym miejscu, to możecie się umówić, że jedno z was liczy tylko osoby w kurtkach i płaszczach, drugie – osoby w swetrach i polarach itd.

Jak przedstawiać wyniki?

Sposób przedstawiania danych zależy od tego, do czego mają one służyć.

Przykład 3

Uczniowie przeprowadzili ankietę, w której pytali o liczbę zwierząt domowych posiadanych przez uczniów ich klasy. Wyniki przedstawili w różny sposób. Czym się różnią te sposoby? Który z nich pozwala najłatwiej wyciągnąć wnioski?

Numer w dzienniku	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Liczba zwierząt	0	0	1	2	1	1	2	0	1	2	0	4	1	0	2	2	0	1	2	0

Diagram I

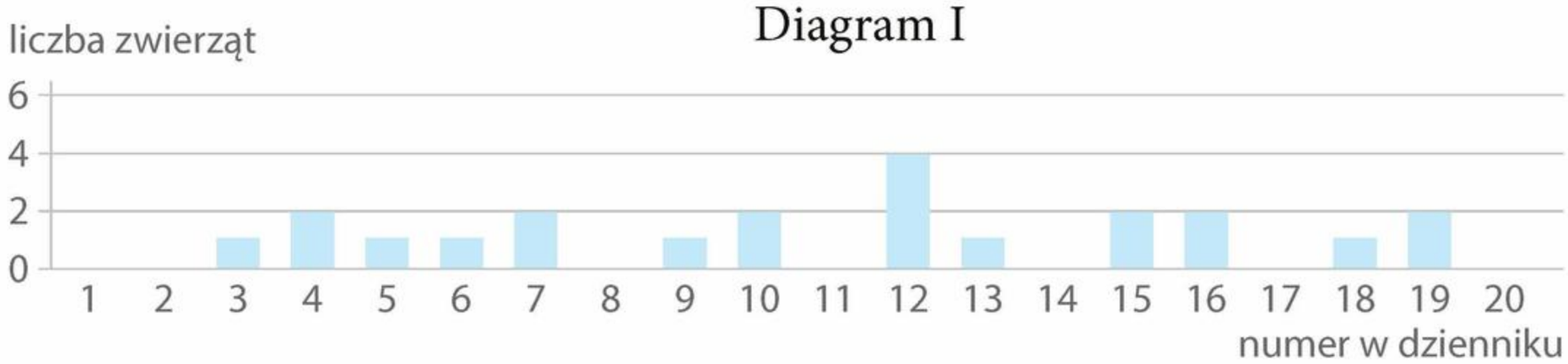


Diagram II

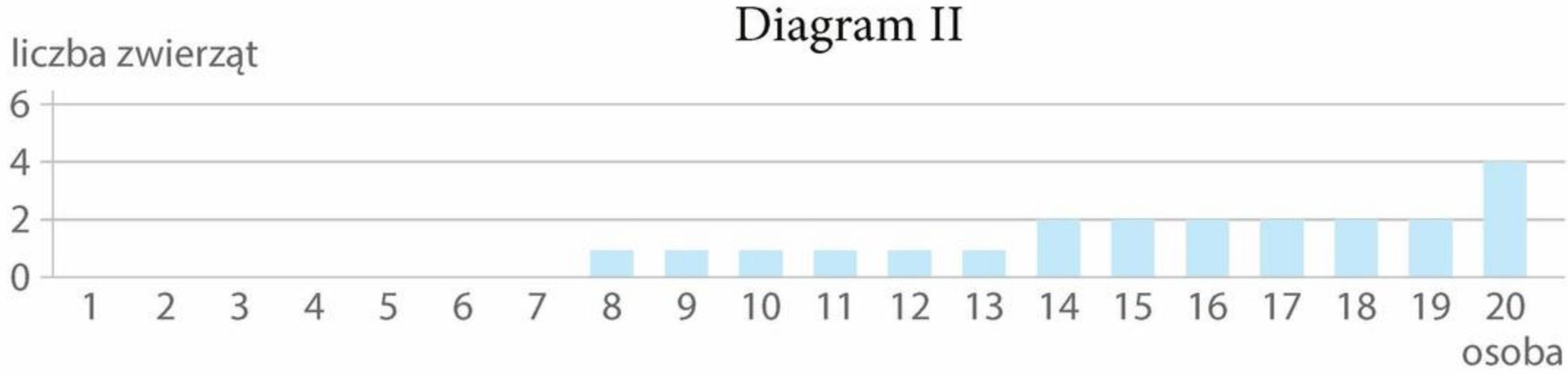


Diagram III

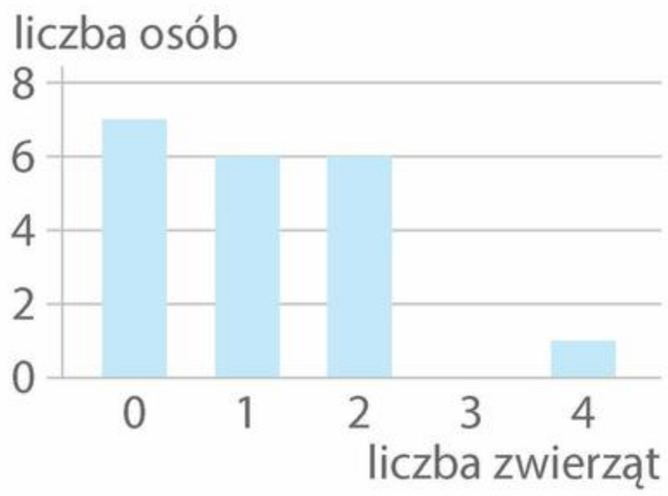


Diagram IV

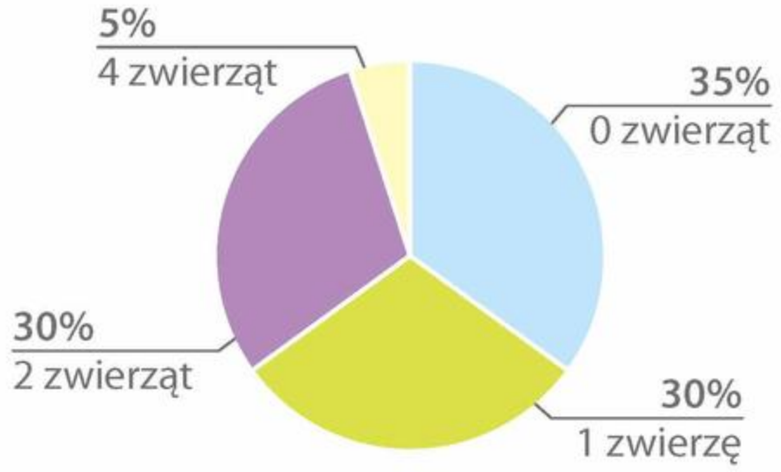


Tabela i diagram I zawierają **surowe**, czyli nieuporządkowane dane. Na ich podstawie można się zorientować, ile zwierząt mają poszczególne osoby, ale trudno wysnuć wnioski ogólne. Nieco bardziej czytelny jest diagram II, gdzie osoby uporządkowano według liczby zwierząt, a nie według listy w dzienniku.

Jednak dopiero diagramy III i IV przedstawiają **opracowane** dane. Diagram III pozwala łatwo porównywać liczby osób, które nie mają zwierząt, mają jedno zwierzę itd. Natomiast diagram IV pozwala natychmiast określić, jaką część wszystkich uczniów stanowią posiadacze danej liczby zwierząt.

Zadania

1. Agnieszka przeprowadziła w ósmej klasie badanie. Na kartce formatu A4 narysowała bezładnie 53 kółka. Następnie pokazywała kartkę różnym osobom przez 3 sekundy i prosiła o oszacowanie liczby kółek. Oto wyniki, jakie uzyskała:

34, 32, 20, 30, 33, 100, 35, 21, 30, 37, 32, 42, 50, 40, 30, 37, 30, 40.

a) Oblicz średnią arytmetyczną i wyznacz medianę tych wyników. Porównaj średnią i medianę z prawdziwą liczbą kółek.

b) Przerysuj do zeszytu tabelę i ją uzupełnij.

Wyniki	10–19	20–29	30–39	40–49	50–59	…	100–109
Liczba takich wyników	0	2	?	?	?	…	?

Na podstawie tabeli sporządź diagram słupkowy.

2. Magda i Marcin przeprowadzili takie samo badanie, jak opisane w poprzednim zadaniu, ale w klasie 3. Uzyskali następujące dane:

29, 28, 45, 30, 10010, 32, 52, 45, 45, 90, 30, 20, 45, 50, 100, 25, 50, 33, 20, 90, 38, 32, 25, 35.

Opracuj je podobnie jak w zadaniu 1 i porównaj z danymi z zadania 1.

3. Ola i Arek postanowili zbadać, czy różne osoby mają podobne wyczucie jednostek długości. Poprosili każdą z 20 osób, aby na białej gładkiej kartce naszkicowała odręcznie odcinek długości 5 cm. Następnie zmierzyli rzeczywiste długości narysowanych odcinków. Otrzymali następujące dane (w milimetrach):

62, 44, 50, 52, 47, 50, 47, 26, 38, 45, 30, 35, 38, 45, 45, 50, 29, 38, 50, 100.

a) Oblicz średnią arytmetyczną i wyznacz medianę tych wyników. Porównaj je z zadaną długością 5 cm.

b) Przedstaw te dane za pomocą diagramu słupkowego.

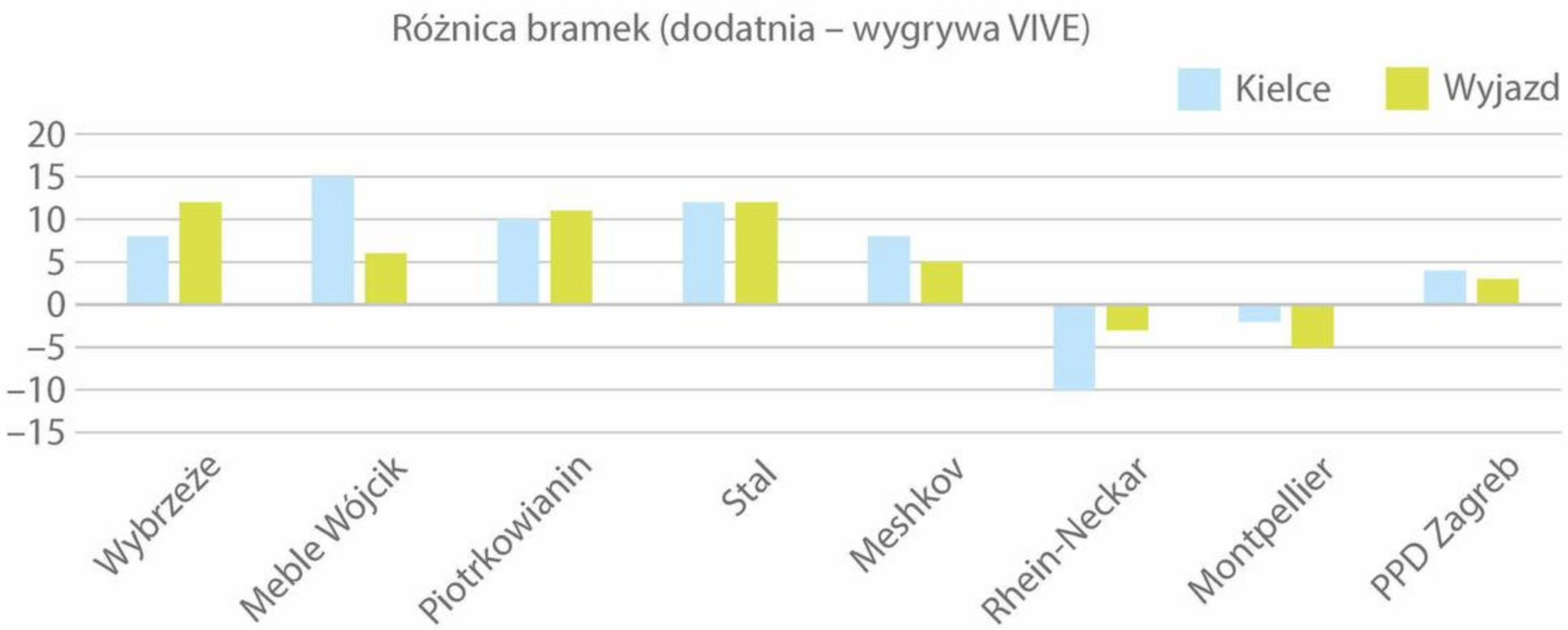
c) Ile osób narysowało odcinek, którego długość różni się od oczekiwanej o mniej niż 5 mm?

4. Kuba i Oliwia, uczniowie klas ósmych, zapytali rówieśników, do jakiej szkoły chcą pójść po ukończeniu szkoły podstawowej. Dane zebrali w tabeli. Opracuj je i przedstaw wyniki badania w wybrany przez siebie sposób.

Liceum	Technikum	Szkoła branżowa
𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍷	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	𝍸 𝍸 𝍷

5. Maciek zastanawiał się, jak duży wpływ na wynik meczu ma gra na własnym boisku. Postanowił sprawdzić to na przykładzie swojej ulubionej drużyny – piłkarzy ręcznych z PGE VIVE Kielce. Wyniki meczów z sezonu 2016/2017 (z wybranymi drużynami) zebrał w tabeli.

Na podstawie tej tabeli sporządził wykres w arkuszu kalkulacyjnym.



Przeanalizuj wykres i odpowiedz na pytania.

a) Czy miejsce spotkania miało wpływ na to, kto wygrał mecz?

b) W ilu procentach przypadków VIVE uzyskało korzystniejszą różnicę bramek w Kielcach niż na wyjeździe, a w ilu – na odwrót? Czy to duża różnica?

c) Jeśli temat cię zainteresował, możesz w podobny sposób zbadać wyniki VIVE w całym sezonie 2016/2017 albo wyniki innej drużyny w innym sezonie.

6. Oto kilka pytań ankietowych. Zmień je tak, aby stały się bardziej precyzyjne.

1) Ile czasu poświęcasz na oglądanie telewizji? ☐ mało ☐ średnio ☐ dużo
2) Czy masz daleko do szkoły? ☐ tak ☐ nie
3) Czy na wigilii jest u ciebie dużo osób? ☐ tak ☐ nie
4) Czy znasz się na gatunkach ptaków? ☐ tak ☐ nie ☐ trudno powiedzieć

7. Uczniowie przygotowali ankietę zawierającą pytanie:

Gdzie spędziłaś/spędziłeś ostatnie wakacje?

☐ *w domu* ☐ *nad morzem* ☐ *w górach*
☐ *nad jeziorem* ☐ *za granicą* ☐ *w innym miejscu*

Odpowiedzi na to pytanie chcieli przedstawić w postaci procentowego diagramu kołowego. Dlaczego może się to okazać niemożliwe?

8. Wybierz interesujący cię problem, a następnie zbierz i opracuj dane statystyczne z nim związane. Wyciągnij wnioski z opracowanych danych.

Dla dociekliwych

Czasami (np. przy ocenianiu skoków narciarskich) przyjmuje się zasadę, że spośród zebranych danych odrzuca się wartości skrajne, tzn. liczbę najmniejszą i największą. Zobaczmy, jak to wygląda na przykładzie danych z zadania 2 na s. 31.

1. Jakie są wartości skrajne wśród danych w tym zadaniu?

2. Oblicz średnią arytmetyczną i wyznacz medianę tych danych, pomijając wartości skrajne. Porównaj je ze średnią i medianą uzyskanymi bez ich pomijania.

3. Jak zmieni się diagram słupkowy przedstawiający te dane, jeśli usuniemy wartości skrajne?

Czy już umiem?

Informacja do zadań I–III

Przemek i Kamil chcieli się przekonać, w ilu językach uczniowie ich szkoły umieją się przywitać. Prosili więc uczniów z różnych klas, aby powiedzieli „dzień dobry" w tylu językach, w ilu umieją. Chłopcy nagrywali te wypowiedzi i sprawdzali ich poprawność (czasami prosili kogoś o pomoc). Na koniec zapisywali liczbę języków, w których dana osoba umie się poprawnie przywitać. Oto zebrane przez nich wyniki:
3, 5, 3, 4, 6, 3, 4, 4, 5, 6, 8, 5, 3, 4, 3, 6, 4, 3, 12, 4, 5.

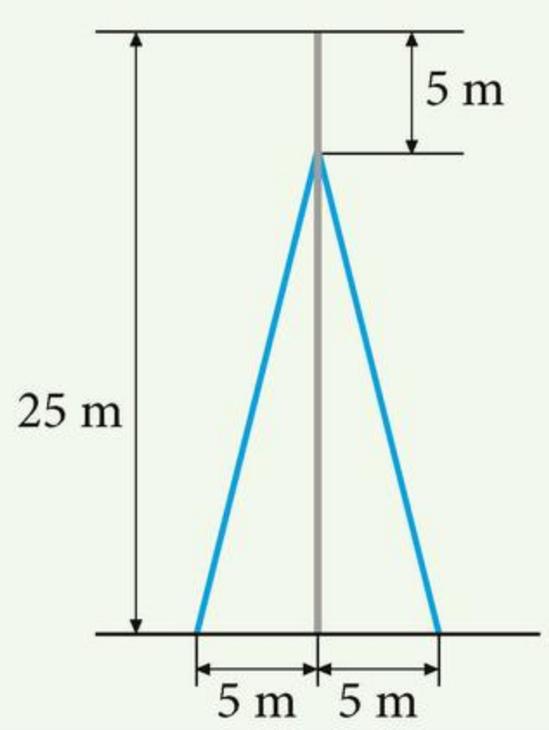
I. Który z wymienionych czynników może mieć wpływ na wyniki takiego badania?

A. To, w której klasie prowadzono badanie.
B. Dzień tygodnia, w którym prowadzono badanie.

II. Oblicz średnią arytmetyczną oraz wyznacz medianę danych zebranych przez Przemka i Kamila.

III. Przedstaw dane zebrane przez chłopców na diagramie wybranego rodzaju.

IV. Oblicz długość każdej z niebieskich lin podtrzymujących maszt przedstawiony na rysunku. Podaj dokładny wynik oraz wynik z dokładnością do 1 cm.



4

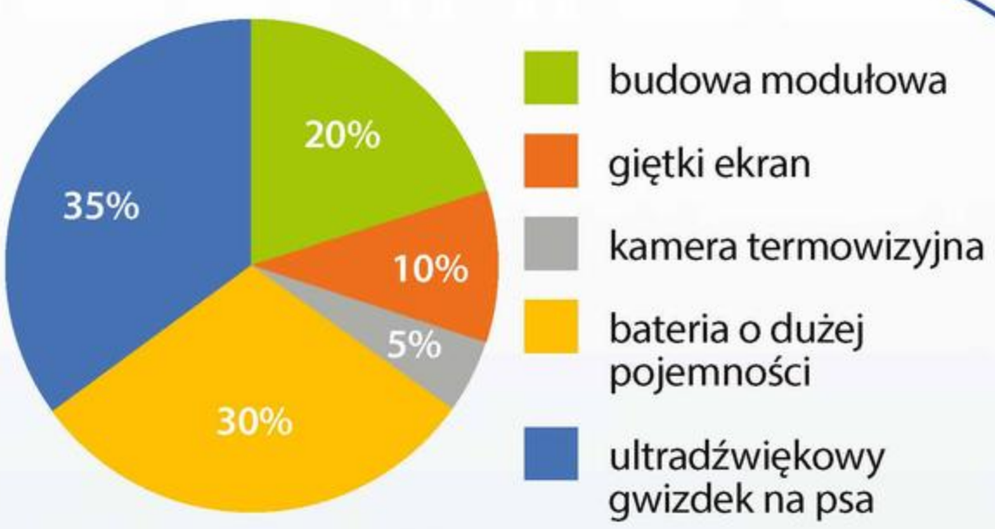
Czy statystyka mówi prawdę

Na dobry początek >

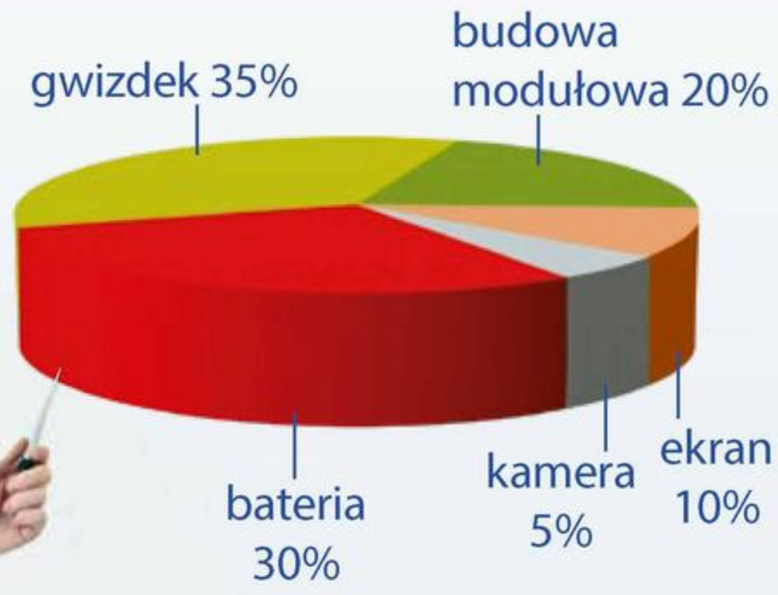
Firma chce wyprodukować nowy model telefonu różniący się od dotychczasowego jedną dodatkową funkcją. Przeprowadziła więc wśród klientów sondaż, aby ustalić, jakiej funkcji oczekują. Prezes, który ciągle zapominał naładować telefon, postanowił jednak przeforsować swój wybór.

Nowa funkcja	budowa modułowa	giętki ekran	kamera termowizyjna	bateria o dużej pojemności	ultradźwiękowy gwizdek na psa
Wynik sondażu	20%	10%	5%	30%	35%

Na podstawie tabeli z wynikami sondażu przygotował diagram kołowy,



a następnie inaczej go pokolorował i ustawił pod pewnym kątem.



Ten diagram pokazał radzie nadzorczej.

Pytania i polecenia

- Którą funkcję, zgodnie z przeprowadzonym sondażem, powinna wybrać rada nadzorcza?
- Jak myślisz, którą funkcję telefonu wybrał prezes?
- Jakie elementy graficzne diagramu mogą mu pomóc przeforsować swój pomysł?

Programy komputerowe, takie jak arkusz kalkulacyjny, pozwalają na graficzne przedstawianie danych w różny sposób. Niektóre sposoby mogą powodować błędne rozumienie danych przez ich odbiorcę. Pokażemy teraz, na co zwrócić uwagę, aby poprawnie odczytać informacje z diagramów.

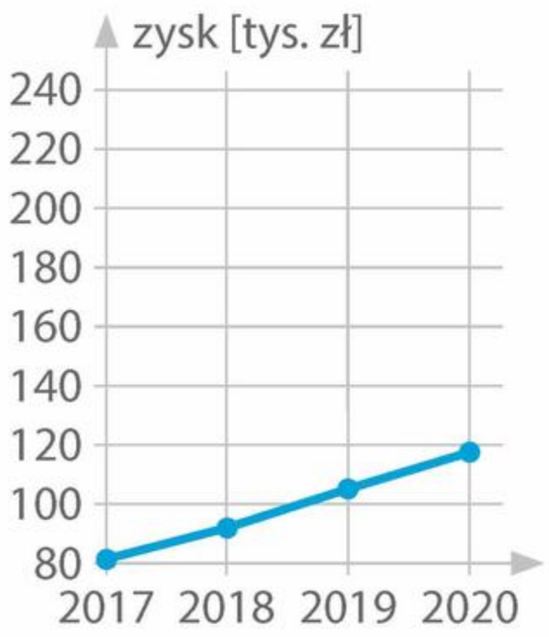
Przykład 1

E

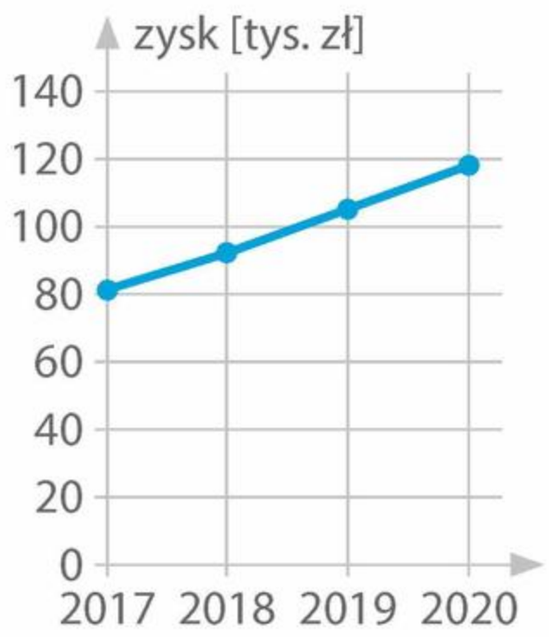
W tabeli przedstawiono zysk fabryki doniczek w czterech kolejnych latach.

Rok	2017	2018	2019	2020
Zysk [tys. zł]	81	92	105	118

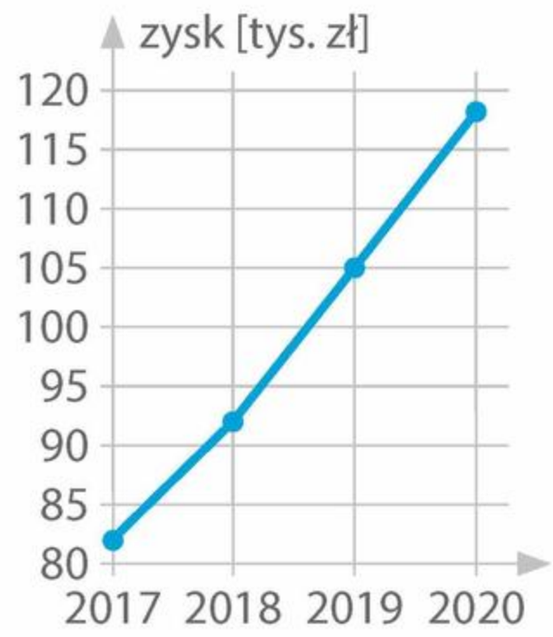
W zależności od sposobu przedstawienia tych danych na wykresie nieuważni odbiorcy mogą sformułować bardzo różne wnioski.



W okresie 2017–2020 zysk fabryki był niezbyt wysoki, rósł wolno, ale systematycznie.



W latach 2017–2020 fabryka osiągała znaczące zyski, z roku na rok coraz wyższe.



Zysk w latach 2017–2020 bardzo szybko rósł, co świadczy o dynamicznym rozwoju fabryki.

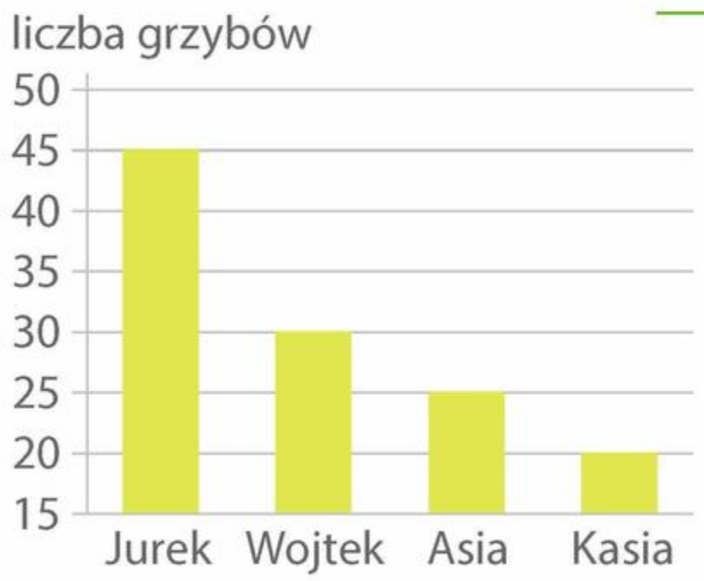
Zauważ, że wystarczy zmienić skalę na jednej z osi, aby odbiorcy zupełnie inaczej zinterpretowali te same wyniki.

Dobra rada

Aby właściwie zinterpretować dane na wykresie, należy dokładnie zapoznać się z opisami osi.

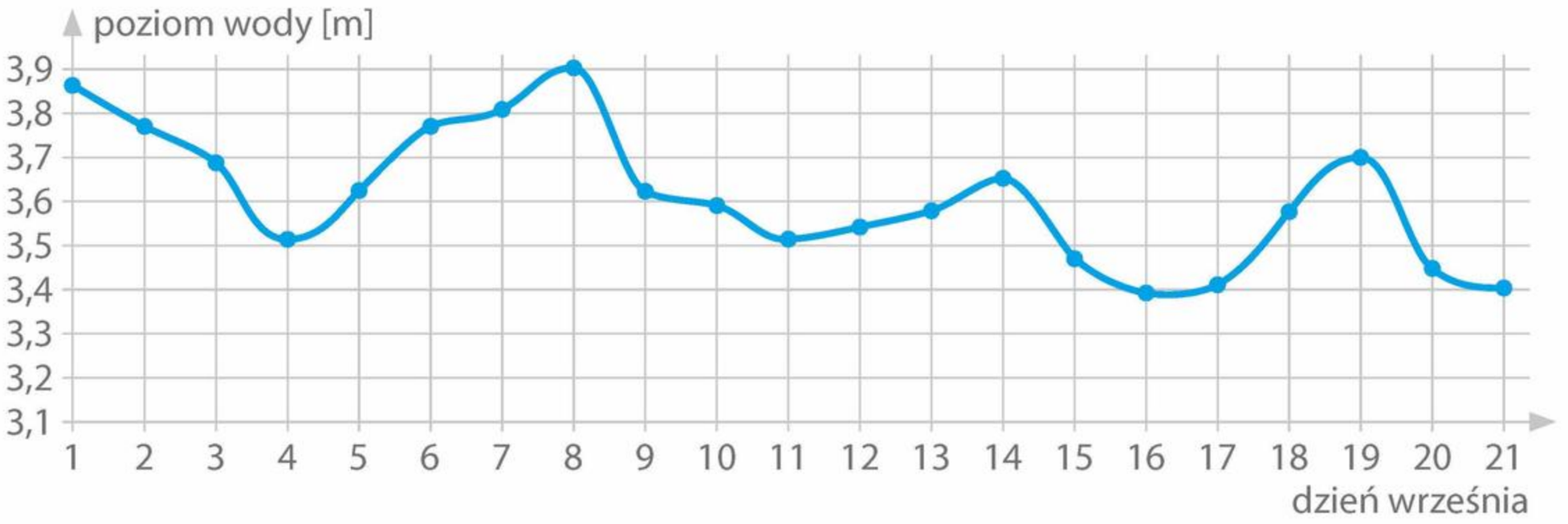
Ćwiczenie 1

Na diagramie przedstawiono wyniki konkursu zbierania grzybów. Czy prawdą jest, że Jurek zebrał dwukrotnie więcej grzybów niż Wojtek, a Asia dwukrotnie więcej niż Kasia?



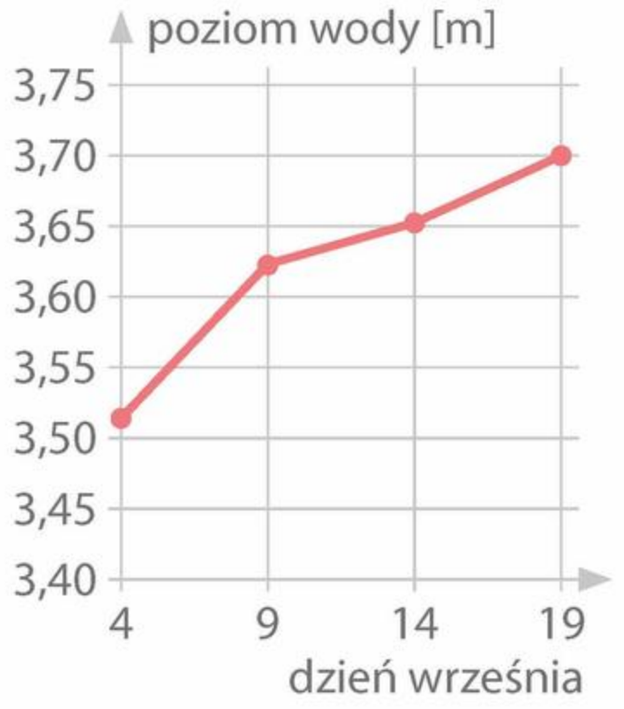
Przykład 2

Od 1 do 21 września pewnego roku raz dziennie mierzono poziom wody w rzece Matemce. Wyniki przedstawiono na wykresie.



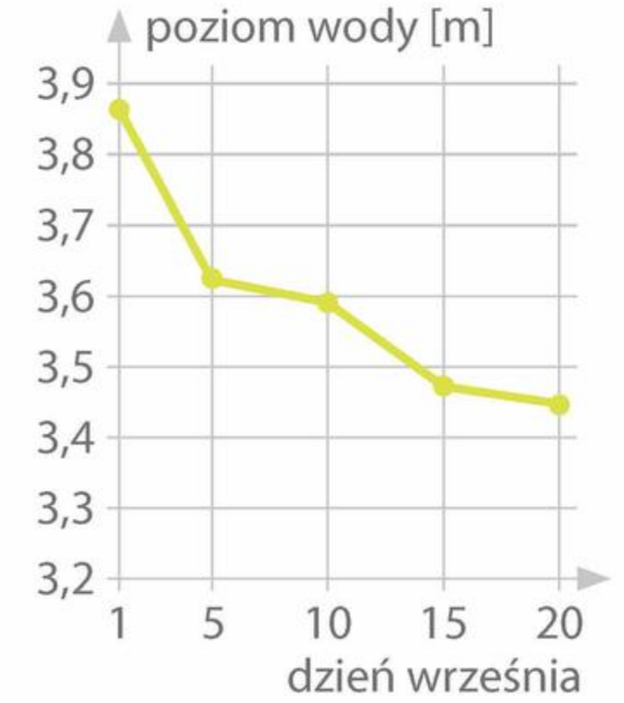
Uznano, że nie trzeba prezentować wyników wszystkich pomiarów, ponieważ wykres staje się zbyt szczegółowy. Zdecydowano się przedstawić co piąty pomiar, czyli z: 4, 9, 14 i 19 września.





Przygotowany w ten sposób wykres sugerował, że poziom wody w rzece systematycznie rośnie. Wykres ten nie odzwierciedlał jednak stanu faktycznego, w związku z tym sporządzono wykres poziomu wody w innych dniach: 1, 5, 10, 15 i 20 września.





Przez ograniczenie liczby danych przedstawionych na wykresie można odnieść wrażenie, że poziom wody w Matemce jest z każdym dniem coraz niższy.

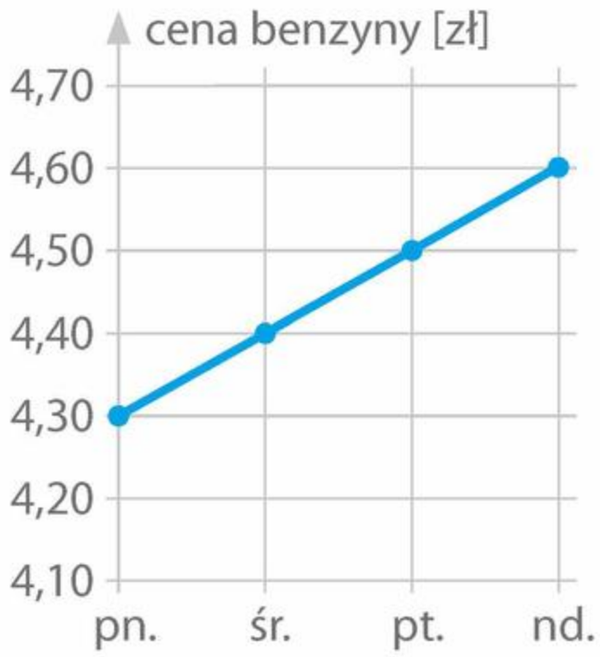
Zapamiętaj

Prezentując zjawiska na wykresach, należy tak dobierać liczbę danych, aby nie wprowadzać odbiorcy w błąd.

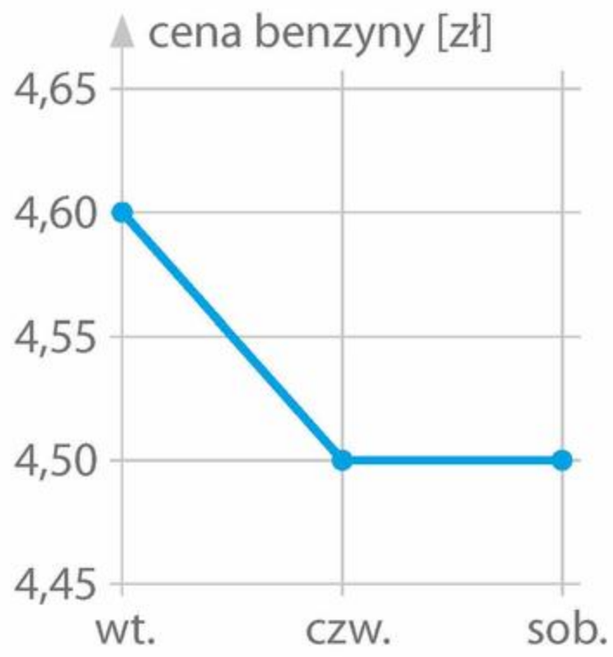
Ćwiczenie 2

Dwa wykresy przedstawiają cenę benzyny na pewnej stacji paliw w różnych dniach tego samego tygodnia.

I.



II.



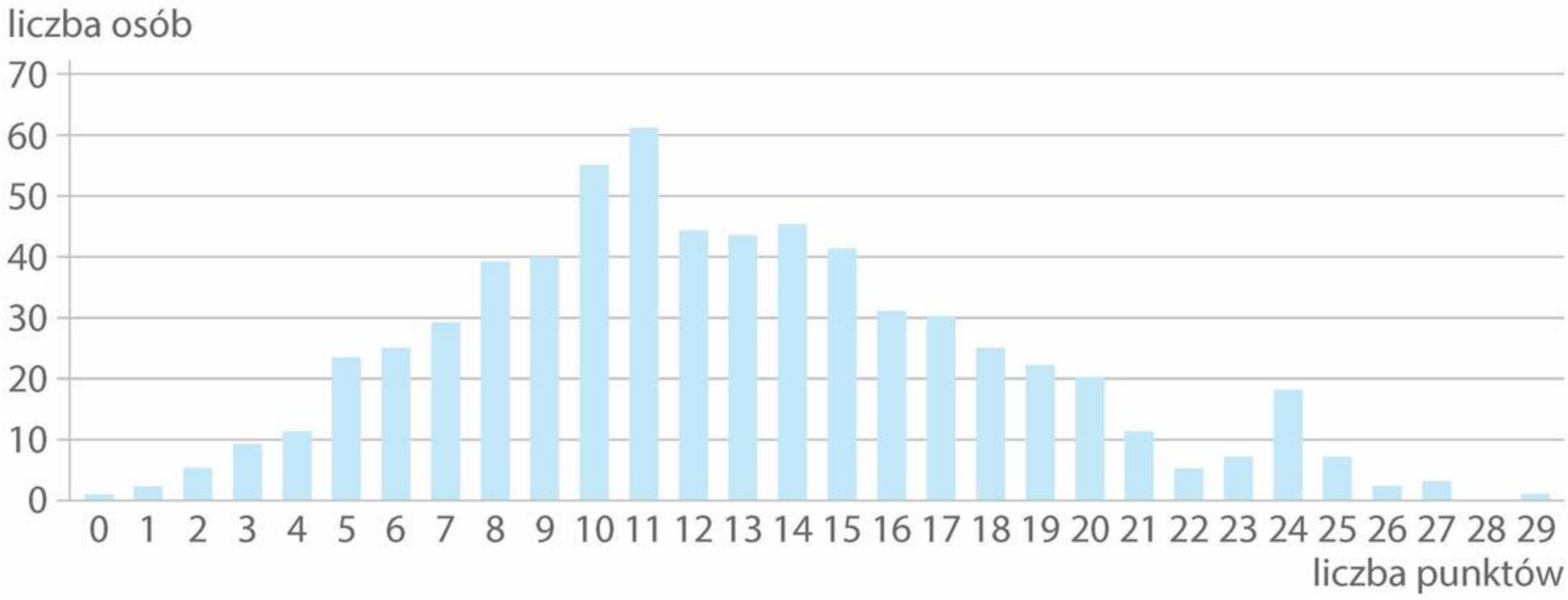
a) Jakie wrażenie można odnieść, patrząc na wykres I, a jakie – patrząc na wykres II?

b) Sporządź jeden wykres przedstawiający dane z obu wykresów, czyli cenę benzyny we wszystkie dni tygodnia. Na jego podstawie opowiedz, jak zmieniała się cena benzyny w danym tygodniu.

Przykład 3

W grupie 655 uczniów przeprowadzono test z matematyki.

Diagram I



Na diagramie I przedstawiono wyniki tego testu.

Trzy kolejne diagramy przedstawiają te same dane, ale różnie pogrupowane.

a) W jaki sposób pogrupowano dane na diagramach II–IV?

b) Jakie wnioski na temat stopnia trudności egzaminu można wyciągnąć z diagramów II–IV? Który z tych wniosków jest zgodny z prawdą?

Diagram II

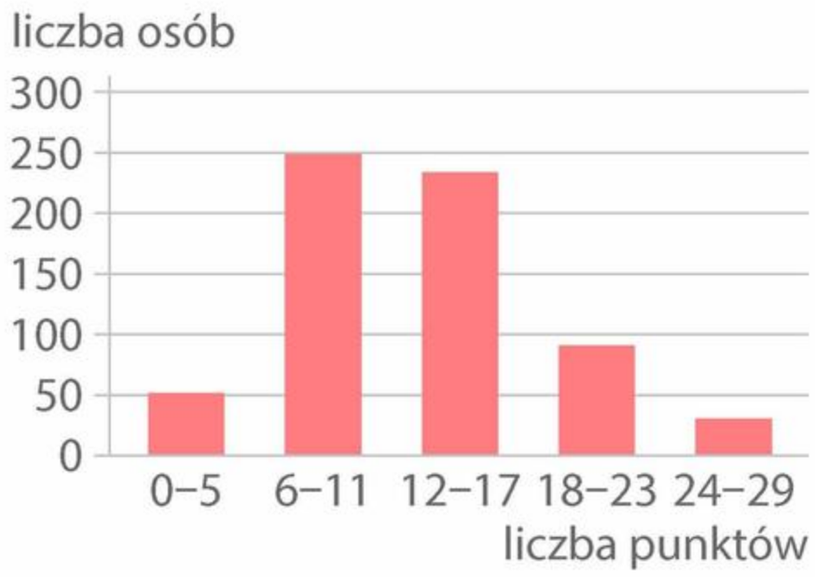


Diagram III

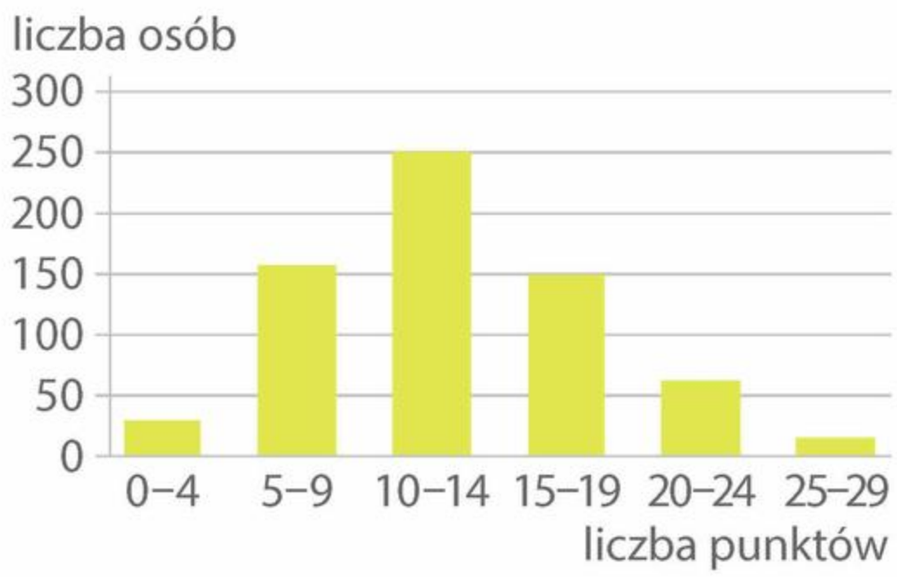


Diagram IV



a) Na diagramie II wyniki pogrupowano w pięć przedziałów, z których każdy obejmuje 6 możliwych wyników (od 0 do 5, od 6 do 11 itd).
Na diagramie III wyniki pogrupowano w mniejsze przedziały, z których każdy obejmuje tylko 5 możliwych wyników. Tych przedziałów jest sześć.
Na diagramie IV przedziały są nierówne – pierwsze dwa i ostatni obejmują po 6 możliwych wyników, a trzeci aż 12 możliwych wyników.

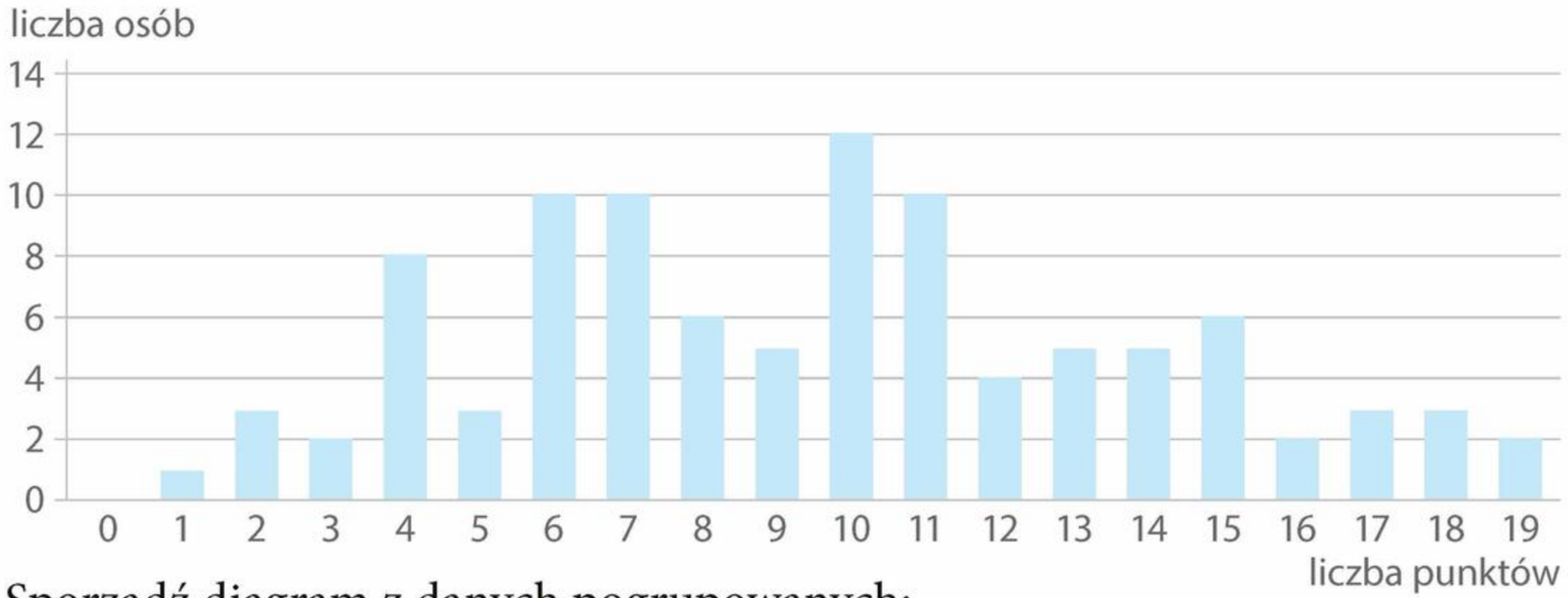
b) Na podstawie diagramu II można stwierdzić, że egzamin był trudny: dużo osób miało niskie wyniki (od 6 do 11 punktów), następna duża grupa uzyskała wyniki średnie.
Diagram III sugeruje, że egzamin był średnio trudny: większość osób uzyskała średnie wyniki.
Na podstawie diagramu IV możemy wywnioskować, że egzamin był łatwy: większość uczniów dostała wysoką liczbę punktów.
Ostatni wniosek jest całkowicie błędny, bo nie można porównywać liczby uczniów, jeśli przedziały nie mają równej długości.
Aby ocenić diagramy II i III, trzeba najpierw przeanalizować diagram I, przedstawiający wszystkie dane. Na jego podstawie możemy stwierdzić, że egzamin nie był dla uczniów zbyt łatwy – najwięcej osób otrzymało 10 lub 11 punktów, najwyższych wyników było niewiele, ogólne wrażenie jest takie, że przeważały wyniki średnie lub słabe. Podobne wnioski możemy wyciągnąć na podstawie analizy diagramów II i III.

Zapamiętaj

Jeśli grupujesz dane, przedziały muszą mieć równą długość. Trzeba ją dobrać tak, aby ogólne wrażenie po obejrzeniu diagramu było takie samo, jak po obejrzeniu diagramu przedstawiającego dane szczegółowe.

Ćwiczenie 3

Na diagramie przedstawiono wyniki pracy klasowej z matematyki, którą pisało 100 ósmoklasistów.



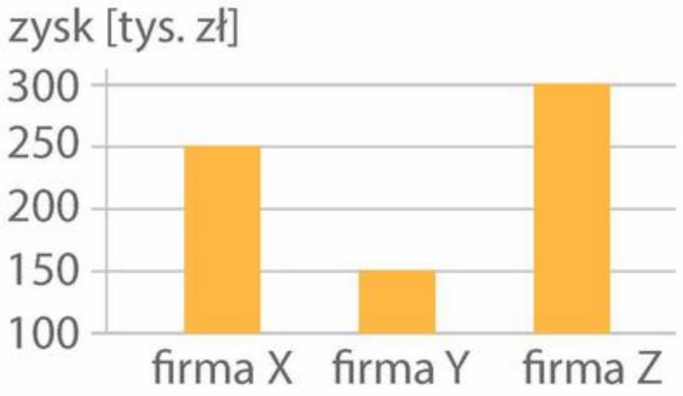
Sporządź diagram z danych pogrupowanych:
a) w cztery przedziały, **b)** w pięć przedziałów.
Czy na podstawie obu diagramów można wysnuć takie same wnioski?

Zadania

1. Na diagramie przedstawiono zysk firm X, Y i Z.

a) O ile złotych większy jest zysk firmy X od zysku firmy Y?

b) Ile razy większy jest zysk firmy Z od zysku firmy Y?



E **2.** Na diagramie przedstawiono sprzedaż etui do telefonów komórkowych w pewnym sklepie w pierwszych pięciu miesiącach roku. Na podstawie tego diagramu oceń prawdziwość podanych zdań.

I. W lutym sprzedaż była dwa razy mniejsza niż w styczniu.

II. Od lutego do maja sprzedaż stale rosła.

III. Od lutego do maja sprzedaż wzrosła kilkukrotnie.

IV. Od lutego do maja sprzedaż wzrosła o około 45%.



3. W pewnej klasie pod koniec każdego miesiąca uczniowie odpowiadali na pytanie „Czy w tym miesiącu uprawiałeś/uprawiałaś sport na świeżym powietrzu?”. Procent odpowiedzi twierdzących przedstawiono w tabeli i na kilku diagramach utworzonych za pomocą arkusza kalkulacyjnego.

Miesiąc	% uczniów
styczeń	30
luty	50
marzec	15
kwiecień	20
maj	60

Diagram I



Diagram II

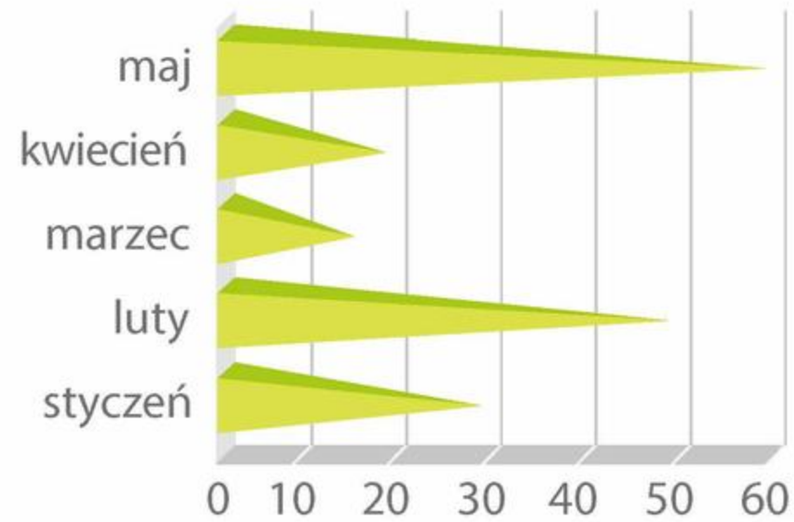


Diagram III



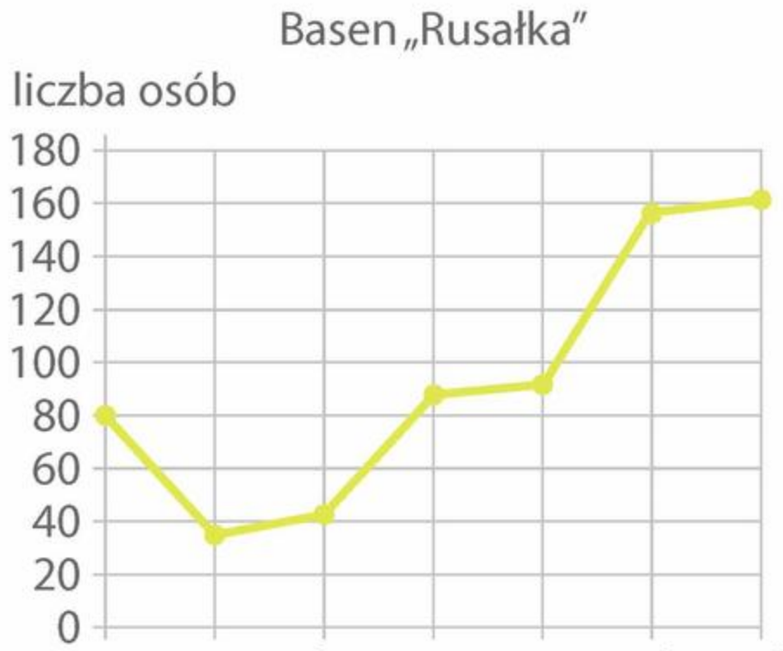
a) Suma liczb w tabeli to 175. Czy to możliwe, że jest więcej niż 100 procent uczniów?
b) Czy dane z tabeli można przedstawić na diagramie kołowym? Dlaczego?
c) Który diagram najlepiej przedstawia dane z tabeli? Dlaczego?
d) Z którego diagramu najtrudniej jest właściwie odczytać informacje? Jakie błędy łatwo przy tym popełnić?
e) Który diagram jest najbardziej atrakcyjny wizualnie? Przedyskutuj swoją odpowiedź z koleżanką lub kolegą.

4. Na diagramie kołowym przedstawiono wyniki sondażu „Do jakiego miasta chcemy pojechać na wycieczkę klasową?”.

a) Oszacuj na podstawie diagramu, ile procent głosów oddano na poszczególne miasta. Na które oddano najwięcej głosów? A może był remis?
b) Sprawdź w odpowiedziach na końcu podręcznika, jakie były rzeczywiste wyniki sondażu. Wyjaśnij, dlaczego tak wykonany diagram może wprowadzić w błąd.

5. Wykresy przedstawiają liczbę osób na dwóch basenach w ciągu tygodnia.





Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. Na basenie „Wodnik" we wtorek było więcej osób niż w poniedziałek, a na basenie „Rusałka" – na odwrót.
II. W niedzielę na basenie „Rusałka" było więcej osób niż na basenie „Wodnik".
III. W piątek na obu basenach była prawie taka sama liczba osób.

6. W pewnym konkursie, w którym wzięło udział 305 uczniów, można było zdobyć od 0 do 34 punktów. Rozkład wyników przedstawiono w tabeli.

Liczba punktów	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Liczba osób	0	0	2	1	0	6	7	3	4	7	9	13	15	19	21	20	18	21

Liczba punktów	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
Liczba osób	16	14	14	13	11	7	9	10	10	8	8	5	6	2	3	2	1

Sporządź diagram słupkowy z danych pogrupowanych:

a) w pięć przedziałów równej długości,
b) w siedem przedziałów równej długości.

7. Na diagramie przedstawiono liczbę wypadków drogowych spowodowanych przez kierowców w różnym wieku. Patrząc na niego, można odnieść wrażenie, że najbezpieczniej jeżdżą osoby najstarsze i najmłodsze, a osoby w wieku 25–59 lat to najgorsi kierowcy. Nie jest to jednak prawda.



Źródło: https://statystyka.policja.pl/st/ruch-drogowy/76562,Wypadki--drogowe-raporty-roczne.html

a) Dlaczego tak skonstruowany diagram wprowadza w błąd?
b) Znajdź oryginalne dane (adres internetowy podany jest pod diagramem) i wyjaśnij, jak na ich podstawie stwierdzić, która grupa wiekowa jeździ najmniej bezpiecznie.

8. a) Czy pamiętasz z siódmej klasy zadanie o Jacku, który opublikował zamieszczony obok post? Stwierdzenie, że każdy, kto spowodował wypadek drogowy, mył ręce przynajmniej raz w życiu, jest prawdziwe. Dlaczego **nie wynika** stąd, że mycie rąk jest przyczyną wypadków?



Jacek
1 kwietnia

Mycie rąk powoduje wypadki drogowe! Każdy, kto spowodował wypadek drogowy, mył ręce przynajmniej raz w życiu.

Producenci mydła ukrywają ten niewygodny fakt!

b) Większość osób, które w ostatnim roku wygrały najwyższe nagrody w grach liczbowych, jadła ziemniaki. Czy to znaczy, że jedzenie ziemniaków sprzyja wygranym?

c) Jest prawdą, że osoby, które zmarły w ostatnim roku, zażywały średnio więcej lekarstw niż osoby, które ten rok przeżyły. Można się jednak spodziewać, że to nie lekarstwa im zaszkodziły. Jak więc można wyjaśnić ten fakt?

d) Kasia zauważyła, że większość osób przychodzących do szkoły na piechotę uprawia jakiś sport. Wyciągnęła z tego wniosek, że docieranie do szkoły pieszo zachęca do uprawiania sportu. Czy wniosek Kasi jest poprawny? Co jeszcze należałoby zbadać, aby móc wyciągnąć taki wniosek?

e) Stwierdzono, że na plażach nad Bałtykiem w dniach, w których sprzedano więcej lodów, zanotowano także więcej interwencji ratowników wodnych. Czy z tego wynika, że po zjedzeniu lodów jesteśmy bardziej narażeni na utonięcie?

Dla dociekliwych

1. W pewnej szkole zorganizowano konkurs matematyczny dla klas ósmych. Wystartowało w nim dziesięcioro uczniów. W tabeli przedstawiono wyniki uczestników z pierwszego etapu (maksymalny wynik to 15 punktów).

Po zawodach Ania, Basia i Czarek spierali się, która klasa wypadła w nich najlepiej. Na podstawie tabeli przedstaw stwierdzenia, które mogą posłużyć jako argument, że:

a) najlepiej wypadła 8a,
b) najlepiej wypadła 8b,
c) najlepiej wypadła 8c.

Imię	Klasa	Punkty
Ania	8a	13
Wojtek	8a	10
Basia	8b	12
Marcin	8b	12
Jacek	8b	8
Anzelm	8c	13
Kamila	8c	13
Czarek	8c	6
Jurek	8c	5
Krysia	8c	3

Czy już umiem?

I. Na diagramie przedstawiono kurs akcji pewnej spółki w dwóch kolejnych latach. Na jego podstawie oceń prawdziwość zdań.



1. W ciągu 2019 roku kurs akcji tej spółki wzrósł trzykrotnie.
2. W ciągu 2019 roku kurs akcji tej spółki wzrósł o 20 zł.

II. Na wykresach przedstawiono zmianę sprzedaży dwóch rodzajów soku w ciągu kilku miesięcy. Na podstawie wykresów oceń prawdziwość zdań.

1. Sprzedaż obu rodzajów soku wzrastała.
2. Sprzedaż soku porzeczkowego wzrastała szybciej.





III. Na trzech wykresach przedstawiono wartość sprzedaży w pewnej firmie. Wykres A pokazuje dane dla kolejnych miesięcy, wykres B – dla okresów trzymiesięcznych (kwartałów), wykres C – dla okresów czteromiesięcznych. Jakie wrażenie odniesiemy po obejrzeniu poszczególnych wykresów? Dopasuj do każdego wykresu jeden z opisów 1–3.

A



B



C



1. Sprzedaż początkowo się nie zmieniała, a później zaczęła spadać.
2. Po okresie stagnacji rozpoczął się wzrost sprzedaży.
3. Obserwujemy wahania sprzedaży, ale można powiedzieć, że średnio się ona nie zmienia.

IV. Oblicz.

a) $2300 \cdot 30\,000$

b) $4\frac{1}{5} \cdot 1\frac{3}{7}$

c) $-2\frac{4}{9} : \left(-1\frac{2}{9}\right)$

5 Proste doświadczenia losowe

Na dobry początek

Mecze różnych dyscyplin sportowych zaczynają się od rzutu monetą. Po ustaleniu, której drużynie przypada orzeł, a której reszka, sędzia rzuca monetą i wynik tego rzutu decyduje, która drużyna rozpocznie rozgrywkę.



Pytania i polecenia

- Czy przy proponowanych sposobach losowania każda z drużyn A i B ma taką samą szansę na to, że sędzia ją wylosuje?
- Co należy zmienić w podanych sposobach losowania, aby każdy z nich mógł zastąpić rzut monetą?

Doświadczenie losowe

Rzut monetą, rzut kostką do gry, losowanie liczb w lotto, wyciąganie losu z pudełka – to przykłady eksperymentów, które w matematyce nazywamy **doświadczeniami losowymi**.

Doświadczenie losowe ma różne możliwe wyniki. Na przykład w rzucie monetą są to orzeł i reszka.



Prawdopodobieństwo

Wyobraź sobie grę dla dwóch osób, która polega na pojedynczym rzucie sześcienną kostką. Jeśli wypadnie liczba oczek podzielna przez 3, to wygrywa zawodnik A, a jeśli niepodzielna przez 3 – wygrywa zawodnik B. Czy taka gra jest sprawiedliwa, tzn. czy obaj zawodnicy mają taką samą szansę na wygraną?

Oczywiście, że nie! W rzucie kostką jest 6 możliwych wyników. Zawodnik A wygrałby tylko w dwóch przypadkach (3 oczka i 6 oczek), a przeciwnik – aż w czterech (1, 2, 4, 5 oczek). Innymi słowy, zawodnik A wygrywałby tylko w $\frac{1}{3}$ przypadków. W takich sytuacjach mówimy, że **prawdopodobieństwo** jego wygranej wynosi $\frac{1}{3}$.



Natomiast zawodnik B wygrałby w $\frac{2}{3}$ przypadków, czyli prawdopodobieństwo jego wygranej wynosi $\frac{2}{3}$.

Zapamiętaj

Prawdopodobieństwo określa, jaką część wszystkich możliwych wyników doświadczenia stanowią te, które nas interesują.

Czy wiesz, że…

Poza kostkami sześciennymi w wielu grach stosuje się m.in. kostki w kształcie czworościanów, dwunastościanów lub dwudziestościanów foremnych (patrz zdjęcia). Zwykle na ściankach kostek umieszcza się liczby naturalne, począwszy od 1.



kostka czworościenna



kostka dwunastościenna



kostka dwudziestościenna

Obliczanie prawdopodobieństwa

Przykład 1

E

Rzucamy jeden raz sześcienną kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadną:

a) więcej niż 2 oczka,
b) równo 4 oczka?



liczba oczek większa niż 2 – są cztery możliwości

a) Liczba wszystkich możliwych wyników: 6.
Liczba wyników większych od dwóch oczek: 4 (3 oczka, 4 oczka, 5 oczek i 6 oczek).
p – prawdopodobieństwo wyrzucenia więcej niż 2 oczek

$$p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Oznacza to, że wyniki większe od 2 stanowią $\frac{2}{3}$ wszystkich wyników.

b) Liczba możliwych wyników: 6.
Liczba interesujących nas wyników: 1 (cztery oczka).
p – prawdopodobieństwo wyrzucenia czterech oczek

$$p = \frac{1}{6}$$

Ćwiczenie 1

Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia orła w rzucie monetą?

Przykład 2

Rzucamy dwunastościenną kostką (patrz zdjęcie na poprzedniej stronie). Jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymamy liczbę pierwszą?

Wszystkie możliwe wyniki: liczby od 1 do 12 – jest ich 12.

Wyniki, które są liczbami pierwszymi: 2, 3, 5, 7 i 11 – jest ich 5.

p – prawdopodobieństwo otrzymania liczby pierwszej

$$p = \frac{5}{12}$$

Ćwiczenie 2

Jakie jest prawdopodobieństwo, że w rzucie dwudziestościenną kostką (patrz zdjęcie na poprzedniej stronie) uzyskamy wynik większy od 12?

Jaką wartość może mieć prawdopodobieństwo?

Przykład 3.1

Jakie jest prawdopodobieństwo, że kiedy rzucimy zwykłą sześcienną kostką do gry, otrzymamy mniej niż 8 oczek?

Otrzymanie mniej niż 8 oczek jest całkowicie pewne.

Wszystkie możliwe wyniki: liczba oczek od 1 do 6. Jest **6** możliwych wyników.

Wyniki mniejsze od 8: wszystkie **6** możliwych wyników.

p – prawdopodobieństwo otrzymania liczby oczek mniejszej od 8

$p = \frac{6}{6} = 1$

Przykład 3.2

Jakie jest prawdopodobieństwo, że kiedy rzucimy zwykłą sześcienną kostką do gry, otrzymamy więcej niż 100 oczek?

Jest to niemożliwe. Wśród **6** możliwych wyników rzutu kostką nie ma ani jednego większego niż 100 oczek, czyli jest **0** wyników większych niż 100 oczek.

p – prawdopodobieństwo otrzymania liczby oczek większej niż 100

$p = \frac{0}{6} = 0$

Ćwiczenie 3

Kule przedstawione na zdjęciu wrzucamy do woreczka i losujemy jedną z nich. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy:

a) kulę żółtą, **b)** kulę z numerem, **c)** kulę niebieską?





Zapamiętaj

Prawdopodobieństwo zdarzenia ma wartość:

0 – jeśli zdarzenie jest **niemożliwe**

1 – jeśli zdarzenie jest **pewne**

pomiędzy 0 a 1 – dla zdarzeń, które nie są ani niemożliwe, ani pewne

Prawdopodobieństwo a częstość

Przeprowadźcie w klasie eksperyment. Niech każdy uczeń rzuci 10 razy sześcienną kostką. Zapiszcie, ile w całej klasie wypadło jedynek, dwójek itd. Następnie obliczcie, jaką część łącznej liczby rzutów stanowią te, w których:

a) wypadło jedno oczko, **b)** wypadła parzysta liczba oczek.

Porównajcie obliczone ułamki z prawdopodobieństwem opisanych zdarzeń.

Prawdopodobieństwo określa, jak częsty jest dany wynik zdarzenia. Jeśli na przykład prawdopodobieństwo wyrzucenia jednego oczka w rzucie kostką wynosi $\frac{1}{6}$, to znaczy, że gdy rzucamy wiele razy, otrzymamy jedno oczko mniej więcej w $\frac{1}{6}$ przypadków. Na przykład przy 60 rzutach mniej więcej 10 razy wyrzucimy jedno oczko. Zapewne nie będzie to dokładnie 10, tylko np. 9 albo 12; nie spodziewamy się jednak, że otrzymamy jedynkę np. tylko 2 razy albo aż 38 razy.

Nie oznacza to jednak, że kiedy np. w grze planszowej pięć razy z rzędu wypadła ci jedynka, to teraz dla wyrównania zacznie wypadać rzadziej.

Czy wiesz, że…

Gdy rzucamy kostką 40 razy, nie jest wykluczone, że otrzymamy jedno oczko we wszystkich rzutach, ale jest to niesłychanie mało prawdopodobne.
Gdyby wokół każdej z 400 miliardów gwiazd naszej galaktyki krążyła zamieszkana planeta i na każdej z tych planet 7 miliardów istot co sekundę rzucałoby 40 kostkami, to tylko raz na 150 lat zdarzałoby się – gdziekolwiek w galaktyce – że wypadną same jedynki.



Przykład 4

Rzucamy 50 razy dwunastościenną kostką. Jakiej liczby wyników równych 7 możemy się spodziewać?

Prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby 7 jest równe $\frac{1}{12}$. Tak więc mniej więcej w $\frac{1}{12}$ rzutów można się spodziewać otrzymania liczby 7.

$\frac{1}{12}$ liczby 50 to $\frac{1}{12} \cdot 50 = 4\frac{1}{6}$.

Oczywiście nie jest możliwe, że siódemka wypadnie $4\frac{1}{6}$ razy. Można się spodziewać, że wypadnie ona **około 4 razy**.

Ćwiczenie 4

Podczas gry zawodnicy rzucają w sumie 100 razy sześcienną kostką. Jakiej liczby wyników równych 6 mogą się spodziewać?

Zadania

1. Rzucamy jeden raz sześcienną kostką do gry. Odpowiedz, jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymana liczba oczek będzie:

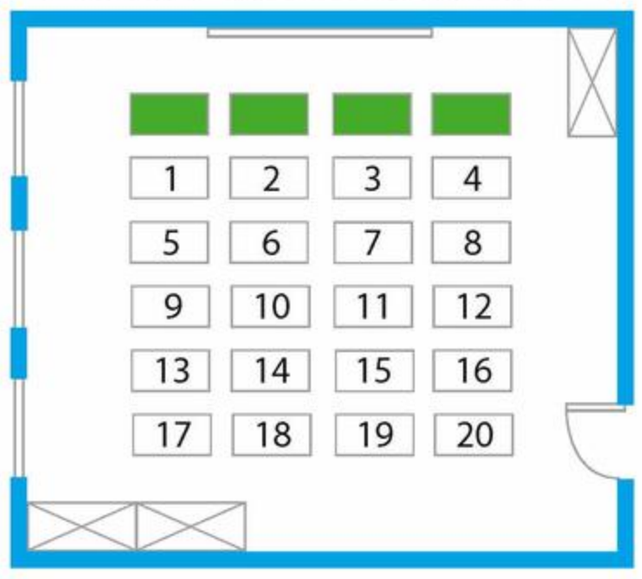
a) mniejsza od 6,
b) parzysta,
c) równa 53,
d) mniejsza od 53,
e) liczbą jednocyfrową,
f) liczbą pierwszą.

E **2.** W szufladzie są skarpetki: 10 czarnych, 8 białych i 6 różowych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągnięta po ciemku z szuflady skarpetka:

a) będzie biała,
b) nie będzie czarna?

E **3.** Uczniowie wchodzący do sali, w której odbędzie się egzamin, losują numer stolika, przy którym będą siedzieć. Miejsca dla członków komisji oznaczono kolorem zielonym. Ania wchodzi do sali jako pierwsza. Jakie jest prawdopodobieństwo, że nie będzie siedziała tuż przy komisji?

Plan sali egzaminacyjnej nr 1



4. Wyobraź sobie, że pewnego dnia w Polsce każdy obywatel rzuca jeden raz dwunastościenną kostką. Ile mniej więcej osób wyrzuci siódemkę?

5. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losując jedną osobę z grupy widocznej na zdjęciu, wylosujemy:



a) dziecko siedzące na barana,
b) osobę w czarnej koszulce,
c) osobę siedzącą na podłodze,
d) dziecko poniżej 10 lat,
e) osobę w niebieskiej bluzce,
f) mężczyznę w marynarce lub bluzie,
g) kobietę, ale nie małą dziewczynkę,
h) osobę bez okularów?

6. Na loterię przygotowano 16 losów: 8 wygrywających i 8 przegrywających.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej w pierwszym losowaniu?

b) Ile losów pustych (przegrywających) należy dodać, aby prawdopodobieństwo wygranej w pierwszym losowaniu zmalało do $\frac{1}{10}$?

7. Na loterii jest o 30 więcej losów pustych (przegrywających) niż wygrywających. Prawdopodobieństwo wybrania losu wygrywającego wynosi $\frac{1}{5}$. Ile jest wszystkich losów?

Dla dociekliwych

1. Rozwiąż zadania.

I. W sali było 20 kobiet i 80 mężczyzn. Kiedy później weszła tam grupa osób, w której było tyle samo mężczyzn co kobiet, okazało się, że kobiety stanowią 30% wszystkich obecnych. Ile osób było w grupie, która przyszła później?

II. Do szklanego naczynia wlano 20-procentowy roztwór wodny soli o masie 100 g. Ile 50-procentowego roztworu należy dolać, aby po wymieszaniu otrzymać roztwór 30-procentowy?

III. Na loterię przygotowano 80 losów przegrywających i 20 wygrywających. Chcemy dołożyć jeszcze trochę losów, tyle samo przegrywających i wygrywających, aby prawdopodobieństwo wygranej wzrosło do $\frac{3}{10}$. Ile losów musimy dodać łącznie?

2. Wymyśl jeszcze dwa podobne zadania.

Czy już umiem?

I. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w rzucie sześcienną kostką wypadną 3 oczka?

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $\frac{3}{6}$ **D.** $\frac{3}{4}$

II. W klasie Ani 6 osób nie przygotowało się dziś do lekcji matematyki, a pozostałych 18 osób jest przygotowanych. Na lekcji nauczyciel wybiera losowo jednego ucznia do odpowiedzi. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana zostanie osoba, która się nie przygotowała dziś do lekcji?

A. $\frac{1}{18}$ **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{3}$

III. Na loterii jest 10 losów wygrywających i 20 losów przegrywających. Ile losów przegrywających należy dodać, aby prawdopodobieństwo wygranej zmniejszyło się do $\frac{1}{5}$?

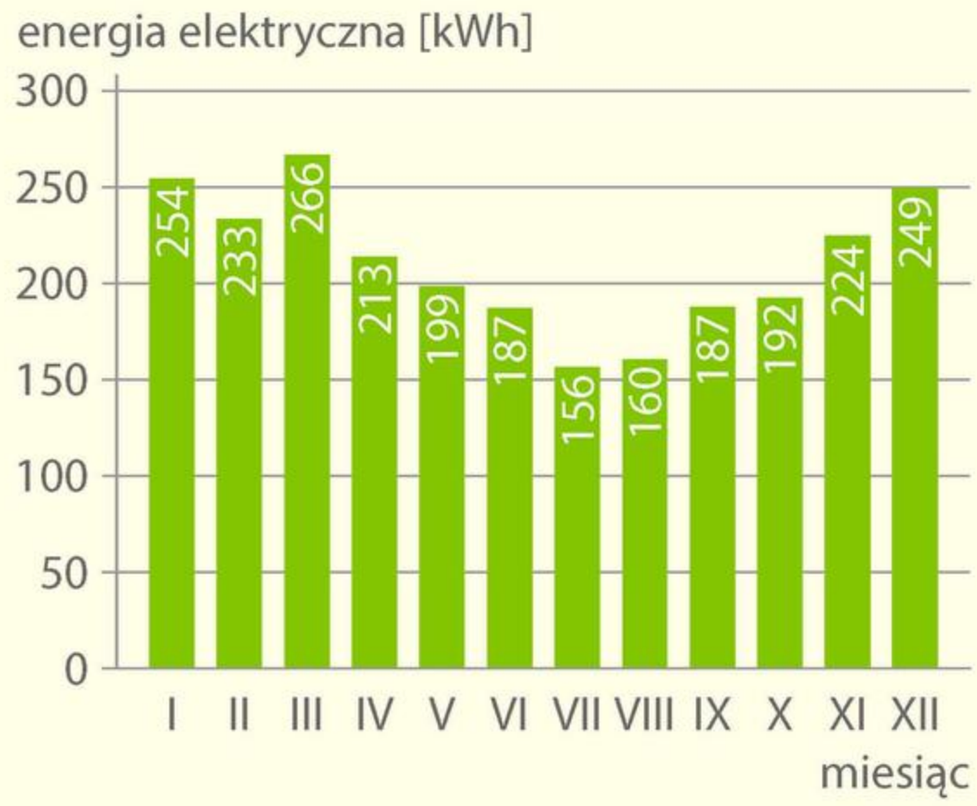
IV. Rozwiąż równanie i wykonaj sprawdzenie.

$2x - 4 = 5x + 1$

Powtórzenie I

ZESTAW 1

1. Na diagramie przedstawiono zużycie energii elektrycznej przez rodzinę Magdy w ciągu roku w podziale na poszczególne miesiące. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań. Zdecyduj, czy w miejsce ? wstawić literę P, oznaczającą zdanie prawdziwe, czy F – oznaczającą zdanie fałszywe.

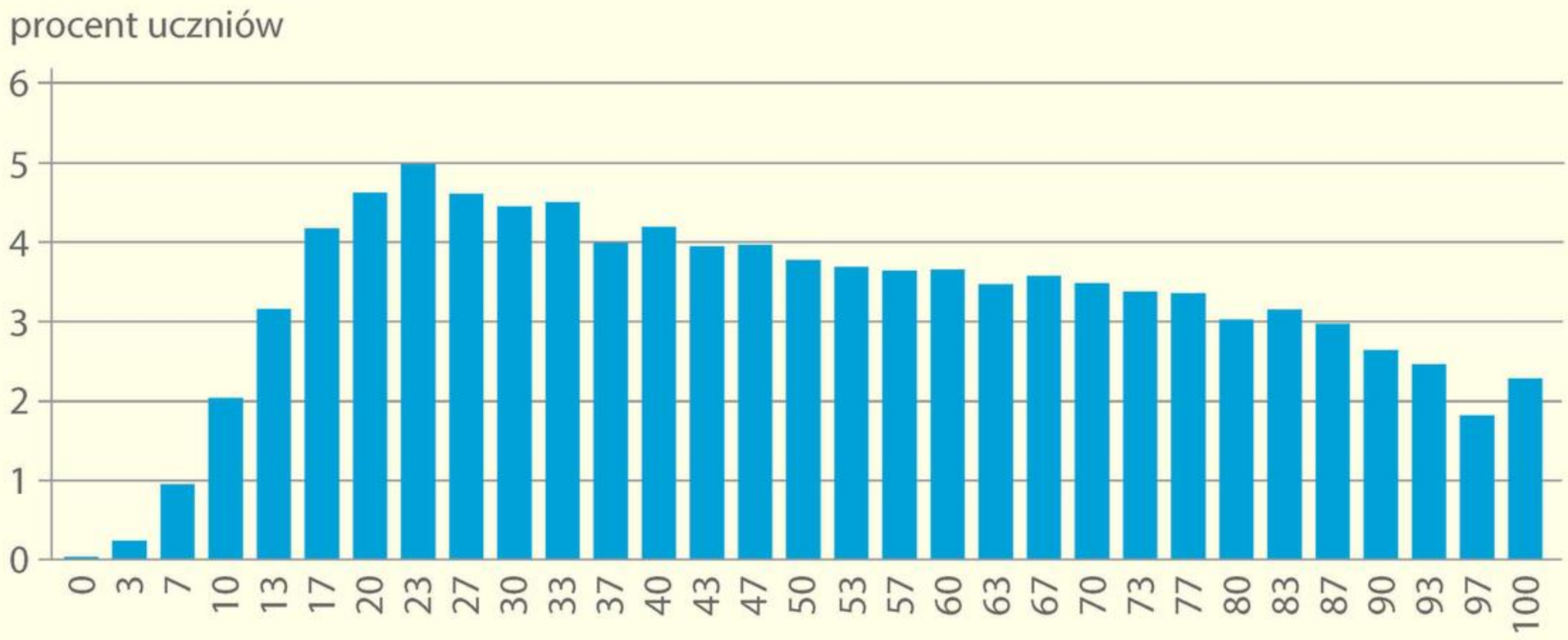


I.	Najwięcej energii rodzina Magdy zużyła w styczniu.	?
II.	Największy wzrost zużycia energii między dwoma kolejnymi miesiącami można zauważyć między październikiem a listopadem.	?
III.	W drugim kwartale roku zużycie energii wyniosło 599 kWh.	?

2. Wzrost pięciu zawodniczek w drużynie koszykówki wynosi: 193 cm, 170 cm, 191 cm, 193 cm, 184 cm. Oblicz średni wzrost zawodniczki.

3. Tomek biega codziennie. Od poniedziałku do niedzieli przebiegł kolejno: 5 km, 6,5 km, 8 km, 7 km, 9 km, 8,5 km i 8,5 km. Oblicz średnią liczbę kilometrów pokonywanych dziennie przez Tomka i porównaj ją z medianą.

4. Na diagramie przedstawiono wyniki procentowe egzaminu ósmoklasisty z matematyki w województwie mazowieckim w 2020 roku.



Źródło: https://bip.oke.waw.pl/

a) Ile procent uczniów uzyskało wynik równy 80%?
b) Jaki wynik został uzyskany przez największy procent uczniów?
c) Jakie wyniki zostały uzyskane przez mniej niż 2% uczniów?

5. Oblicz średnią ocen ucznia, którego świadectwo przedstawiono obok. Jak zmieniłaby się średnia ocen, gdyby:

a) wszystkie oceny były o jeden stopień niższe,

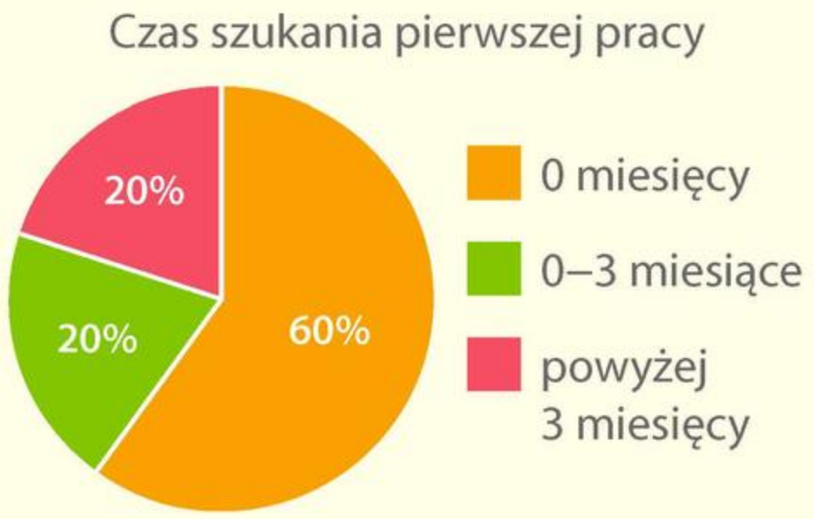
b) ocena z geografii była o stopień wyższa, a z chemii – o stopień niższa,

c) oceny z języka polskiego i języków obcych były o dwa stopnie niższe?

WYNIKI KLASYFIKACJI ROCZNEJ

zachowanie	wzorowe
religia / etyka	celujący
Obowiązkowe zajęcia edukacyjne	
język polski	bardzo dobry
język angielski	dobry
język niemiecki	bardzo dobry
muzyka	celujący
plastyka	bardzo dobry
historia	dobry
wiedza o społeczeństwie	celujący
geografia	dobry
biologia	celujący
chemia	celujący
fizyka	celujący
matematyka	celujący
informatyka	celujący
wychowanie fizyczne	celujący

6. Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego publikowało dane na temat absolwentów różnych kierunków studiów. Diagram przygotowano na podstawie danych o absolwentach matematyki, którzy ukończyli Uniwersytet Warszawski. Na podstawie diagramu oceń prawdziwość podanych zdań.



I. Spośród absolwentów $\frac{3}{5}$ znalazło swoją pierwszą pracę od razu.

II. Osób, które znalazły pierwszą pracę od razu, było o 40% więcej niż tych, które szukały jej ponad 3 miesiące.

III. Odsetek osób, które znalazły pierwszą pracę od razu, był o 40 punktów procentowych wyższy niż odsetek osób, które szukały pracy ponad 3 miesiące.

IV. W grupie 20 absolwentów przeciętnie 6 znalazło pracę natychmiast.

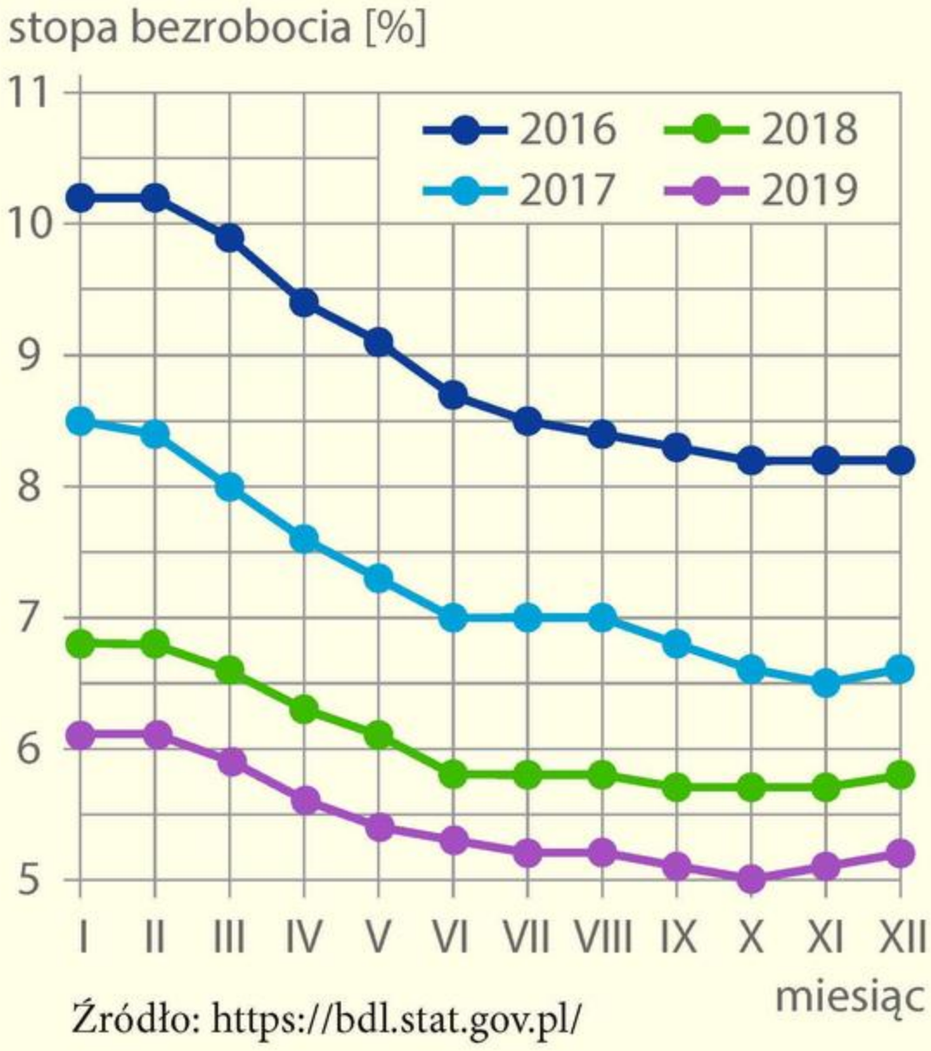
7. Na wykresie przedstawiono zmiany stopy bezrobocia w Polsce w latach 2016–2019.

a) W którym miesiącu 2017 roku stopa bezrobocia była najwyższa, a w którym miesiącu najniższa?

b) W których miesiącach 2019 roku stopa bezrobocia wynosiła co najmniej 5,5%?

c) Kiedy stopa bezrobocia w Polsce w okresie styczeń 2017 – luty 2018 była najniższa, a kiedy najwyższa?

d) O ile punktów procentowych stopa bezrobocia w marcu 2017 roku była wyższa niż w październiku 2019 roku?



Źródło: https://bdl.stat.gov.pl/

8. Na podstawie wykresu do zadania 7 oceń prawdziwość podanych zdań. Zdecyduj, czy w miejsce ? wstawić literę P, oznaczającą zdanie prawdziwe, czy F – oznaczającą zdanie fałszywe.

I.	Przez cały rok 2018 stopa bezrobocia spadała.	?
II.	Od czerwca do sierpnia 2017 roku stopa bezrobocia była stała.	?
III.	W roku 2019 stopa bezrobocia najpierw rosła, potem przez dłuższy czas spadała, ustabilizowała się na trzy miesiące, a na koniec wzrosła.	?

9. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kiedy rzucimy jeden raz dwudziestościenną kostką, otrzymamy wynik dwucyfrowy?

10. W pudełku znajduje się 5 kul białych, 5 czerwonych i 10 zielonych. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań. Zdecyduj, czy w miejsce ? wstawić literę P, oznaczającą zdanie prawdziwe, czy F – oznaczającą zdanie fałszywe.

I.	Wyciągnięcie kuli białej jest tak samo prawdopodobne jak wyciągnięcie kuli czerwonej.	?
II.	Jeśli do pudełka dołożymy 5 kul białych, to prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej będzie trzykrotnie większe niż prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli czerwonej.	?

ZESTAW 2

1. Na diagramie przedstawiono liczbę rodzeństwa uczniów klasy 8a.

a) Ilu uczniów liczy ta klasa?
b) Jaka jest średnia liczba dzieci przypadająca na rodzinę ucznia tej klasy?
c) Jaka jest mediana liczby dzieci w rodzinie?

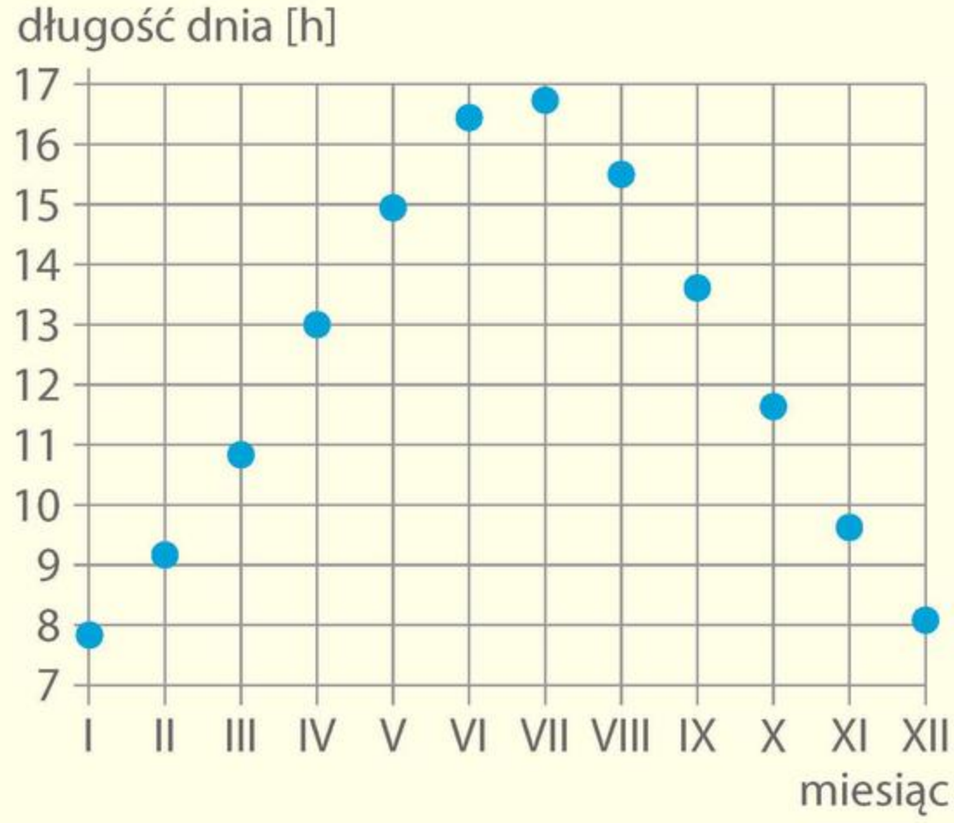


2. Do liczb 3, 5 i 4 dopisano jeszcze jedną liczbę. Średnia arytmetyczna otrzymanego zestawu liczb wyniosła 5. Jaką liczbę dopisano?

3. Wyznacz medianę zestawu liczb 1, 4, 8, 6, 5.

4. Wykres przedstawia długość dnia (liczoną między wschodem a zachodem słońca) w Warszawie w pierwszym dniu każdego miesiąca roku.

a) Który z tych dni jest najdłuższy? Jaka jest jego długość?
b) W jakim okresie długość dnia przekracza 14 godzin?



5. Na wykresie obok przedstawiono, ile procent gospodarstw domowych w Polsce w latach 2003–2014 posiadało samochód osobowy. W którym roku liczba gospodarstw domowych wyposażonych w samochód osobowy przekroczyła 50% liczby wszystkich gospodarstw domowych w Polsce?

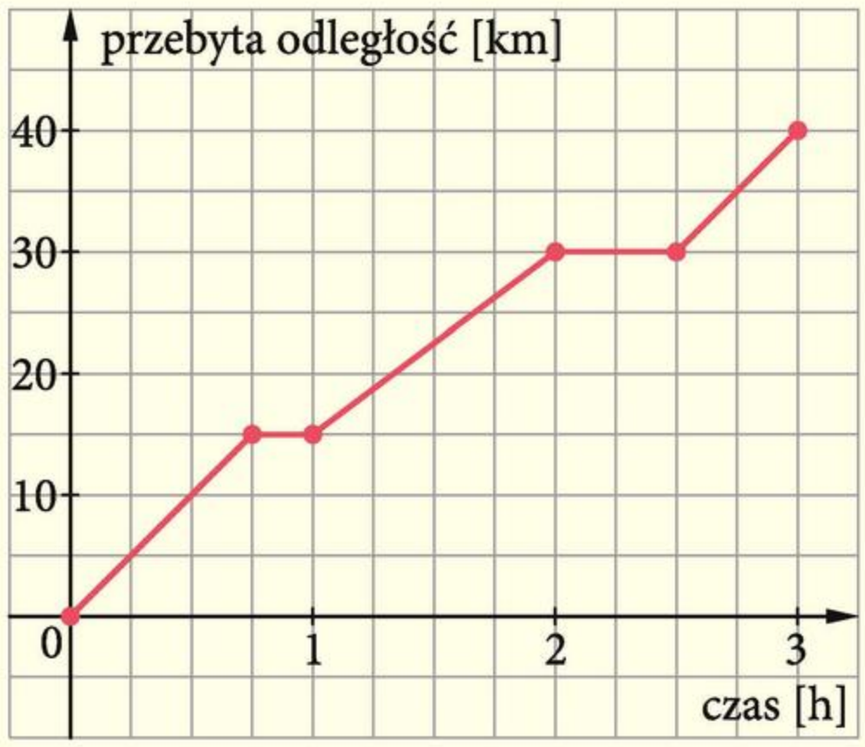


Źródło: https://bdl.stat.gov.pl/

6. Ania była z przyjaciółmi na wycieczce rowerowej. Na wykresie obok przedstawiono, jak zmieniała się liczba przebytych przez nich kilometrów w zależności od czasu.

a) Podaj łączny czas postojów podczas tej wyprawy.

b) Oblicz, ile wynosiła średnia prędkość jazdy przed pierwszym postojem, a ile między pierwszym a drugim postojem.



7. Diagramy pokazują, jaką część mieszkańców Krakowa stanowiły osoby w poszczególnych przedziałach wiekowych. Czy na podstawie diagramów można ocenić prawdziwość podanych zdań? Jeśli tak, zrób to. Jeśli nie, uzasadnij dlaczego.



I. Osoby poniżej 40. roku życia stanowiły dawniej prawie $\frac{3}{4}$ mieszkańców, a obecnie stanowią tylko nieco ponad połowę.

II. Odsetek osób poniżej 20. roku życia zmniejszył się o kilkanaście punktów procentowych.

III. Obecnie w Krakowie żyje mniej osób poniżej 20. roku życia niż dawniej.

IV. Odsetek osób w wieku 60 lat i starszych zwiększył się kilkukrotnie.

8. Na loterię przygotowano 80 losów, z których 20 wygrywa. Ile losów wygrywających należy dołożyć, aby prawdopodobieństwo wygranej w pierwszym losowaniu wzrosło do $\frac{1}{3}$?

Zadania na temat…

I komu wierzyć?

W internecie można szybko i łatwo znaleźć potrzebne informacje. Niestety, w sieci każdy może opublikować wszystko, co mu przyjdzie do głowy. Skąd więc mamy wiedzieć, że znalezione informacje są rzetelne, a nie wynikają z błędu, niewiedzy albo nawet złej woli?



Wcale nie jest łatwo znaleźć to, czego szukasz.

Pierwsze pytanie, które powinniśmy sobie zadać, to: czy autorowi informacji z internetu uwierzylibyśmy poza światem wirtualnym? Jeśli na przykład obawiasz się, że Ziemi grozi zderzenie z asteroidą, to czy zapytasz o to przypadkowo spotkaną osobę? W rzeczywistym świecie z pewnością nie – takie pytania wolimy zadać astronomowi.

Podobnie powinniśmy postępować w sieci. Każdy może opublikować post w serwisie społecznościowym. Jeśli jednak chcesz znaleźć wypowiedź prawdziwego astronoma, musisz poszukać strony obserwatorium astronomicznego albo uniwersytetu. Podobnie portal pisma medycznego „Medycyna Praktyczna", którego autorzy są lekarzami, jest dużo bardziej wiarygodny niż grupa dyskusyjna „jak sobie radzicie z chorobami", gdzie mogą się pojawić porady nie tylko mało pomocne, ale wręcz szkodliwe dla zdrowia i życia.

Dobrą – choć niełatwą – metodą weryfikacji informacji jest zajrzenie do źródeł. Zawsze warto przynajmniej zerknąć, czy autor w ogóle podał jakieś źródła i czy są one wiarygodne.



Pamiętaj o źródłach!

Encyklopedie

W internecie jest też wiele encyklopedii. Najbardziej znana jest tworzona społecznie i dostępna bezpłatnie Wikipedia. Co prawda każdy może uzupełniać i zmieniać jej treść, jednak błędy zdarzają się dość rzadko.

Wiele tradycyjnych encyklopedii, przygotowywanych przez specjalistów, także można znaleźć w internecie. Na przykład pod adresem https://www.britannica.com/ dostępna jest *Encyclopaedia Britannica*.

Dane statystyczne

Jeśli poszukujesz danych statystycznych, wejdź na stronę stat.gov.pl. Znajdziesz tam m.in. „Rocznik Statystyczny Rzeczypospolitej Polskiej" (możesz też wejść, używając linku https://stat.gov.pl/obszary-tematyczne/roczniki-statystyczne/), który zawiera ogromne ilości danych nie tylko o Polsce, lecz także o świecie.

Osobom dobrze znającym angielski można polecić... Centralną Agencję Wywiadowczą, czyli CIA. Agencja ta zajmuje się nie tylko działaniami wywiadowczymi, lecz także pozyskiwaniem różnych informacji, a te z nich, które nie są tajne, udostępnia na stronie https://www.cia.gov/the-world-factbook/.

1. Jak sądzisz, czy opisana niżej strona internetowa jest godna zaufania?

a) Strona o medycynie – autor podpisuje się Dr Dom i wszystkim chętnym udziela porad dotyczących wszelkich problemów zdrowotnych.

b) Strona o medycynie – autorzy tekstów to lekarze, podpisują się imieniem i nazwiskiem oraz podają nazwy szpitali, w których pracują.

c) Strona na temat pewnego miasta prowadzona przez klub miłośników tego miasta przy muzeum regionalnym.

d) Blog kulinarny prowadzony przez ucznia, który zamieszcza na nim przepisy znalezione w sieci.

2. Na stronie Głównego Urzędu Statystycznego znajdź „Rocznik Statystyczny Rzeczypospolitej Polskiej" z roku 2016.

a) Znajdź w nim informacje o długości granic Polski z poszczególnymi krajami i przedstaw te dane za pomocą diagramu kołowego.

b) Znajdź w nim informacje, jak zmniejszała się produkcja żarówek żarowych w ciągu ostatnich lat. Przedstaw te dane za pomocą wykresu liniowego. Czy umiesz wyjaśnić przyczynę tego spadku produkcji? Poszukaj odpowiednich informacji.

3. Znajdź w internecie portal historyczny *Histmag* oraz portal *Nauka o klimacie*, a także stronę *National Geographic Polska*. Zapisz po dwie znalezione tam informacje, które cię zainteresowały.

4. Odwiedź serwis internetowy YouTube i wybierz po dwa filmy z każdego z podanych kanałów. Co cię w nich zaciekawiło?

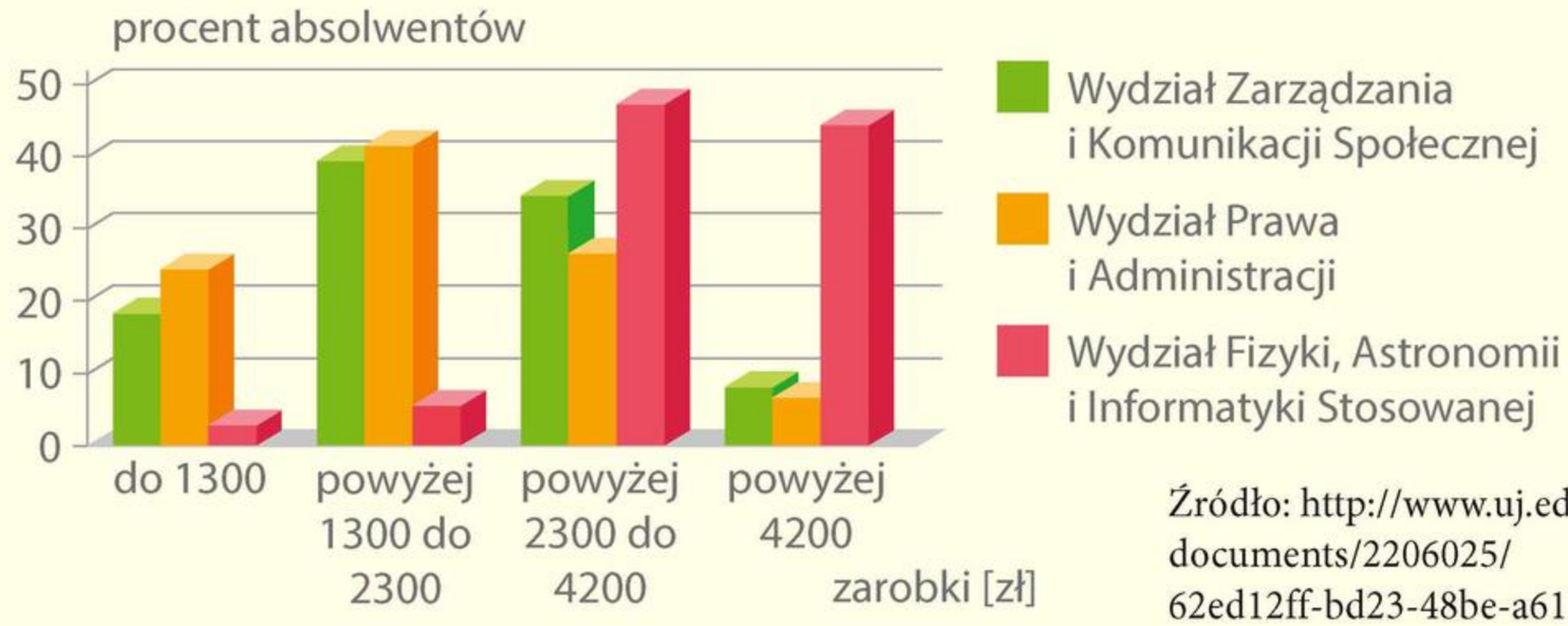
emce☐ Nauka. To lubię Madame Polyglot Crash Course

Uwaga. Na kanale Crash Course oprócz dźwięku po angielsku możesz włączyć angielskie napisy – pomoże to lepiej zrozumieć tekst, a jednocześnie jest skuteczną metodą nauki języka.

Zadania na deser

Diagramy i wykresy

1. Przedstawione dane, pochodzące z 2010 roku, dotyczą płac absolwentów trzech wydziałów Uniwersytetu Jagiellońskiego.



Źródło: http://www.uj.edu.pl/documents/2206025/62ed12ff-bd23-48be-a617-abe839dd747c

a) Czy większy był procent absolwentów Wydziału Prawa zarabiających od 1300 zł do 2300 zł, czy absolwentów Wydziału Fizyki zarabiających powyżej 4200 zł?

b) W tabeli przedstawiono dokładne dane dotyczące zarobków absolwentów Wydziału Fizyki. Przedstaw je na diagramie kołowym.

Zarobki brutto [zł]	do 1300	powyżej 1300 do 2300	powyżej 2300 do 4200	powyżej 4200
Procent absolwentów	2,8	5,6	47,2	44,4

c) W którym przedziale mieściła się mediana zarobków absolwentów Wydziału Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego?

2. Zapoznaj się z diagramem i na jego podstawie określ prawdziwość zdań.

I. Chrześcijanie stanowili około $\frac{2}{3}$ mieszkańców Polski.
II. Prawosławni stanowili około 3% mieszkańców Polski.
III. Do cerkwi chodził prawie co czwarty mieszkaniec Polski.
IV. Około 10% mieszkańców Polski stanowili żydzi.

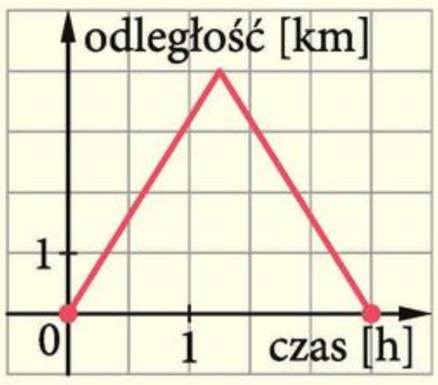
Uwaga. Piszemy „Żydzi”, gdy mamy na myśli naród, ale „żydzi”, gdy mowa o wyznawcach religii.



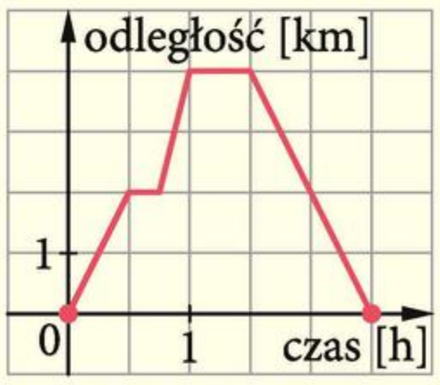
Źródło: „Statystyka Polski”, seria C, zeszyt 94, GUS, Warszawa 1938

3. Kuba wybrał się w sobotę na 2,5-godzinny spacer ze swoim psem Amigo. Po raz pierwszy zatrzymał się, gdy rozmawiał krótko z sąsiadką o pogodzie. Drugi raz zatrzymał się na pół godziny, by omówić z kolegą ostatnią klasówkę. Który z poniższych wykresów może ilustrować, jak w trakcie tego spaceru zmieniała się odległość Kuby od domu w zależności od czasu?

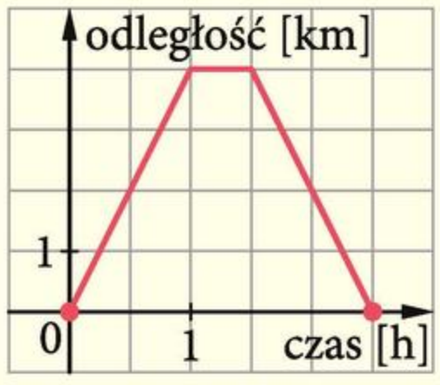
A.



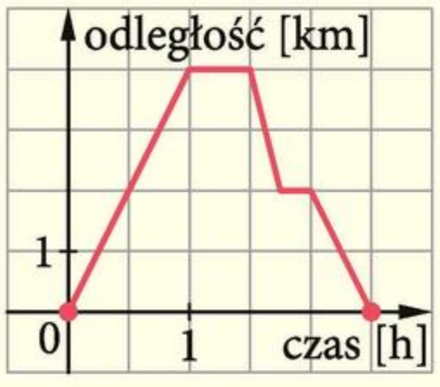
B.



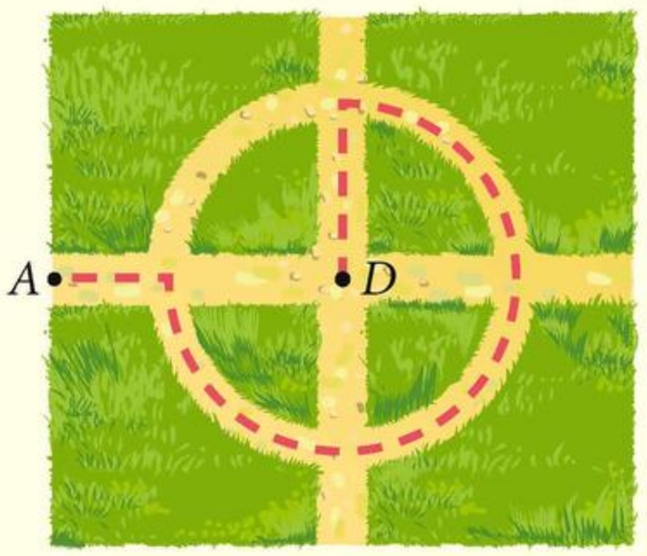
C.



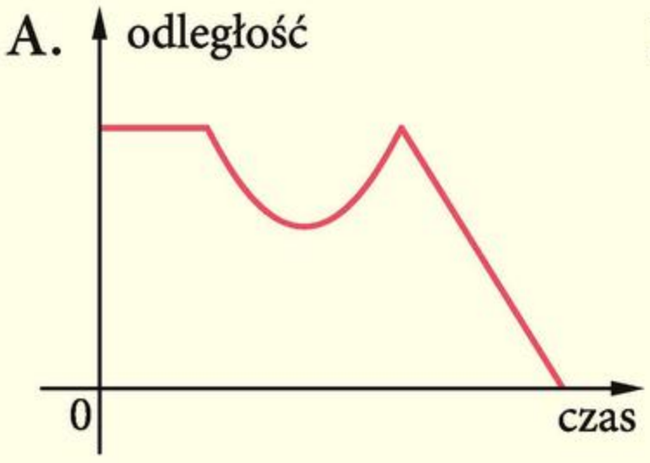
D.



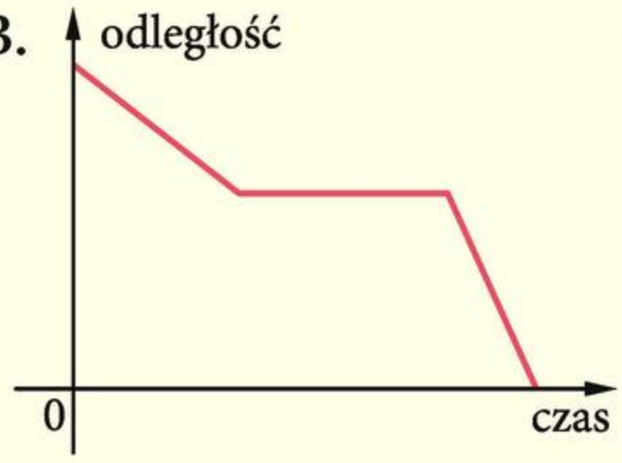
4. Pan Roman spacerował ze stałą prędkością. Trasę jego spaceru od punktu *A* (przy bramie parku) do punktu *D* (ławka pod starym dębem) zaznaczono kolorem czerwonym. Wskaż wykres, na którym przedstawiono, jak podczas spaceru zmieniała się odległość pana Romana od ławki.



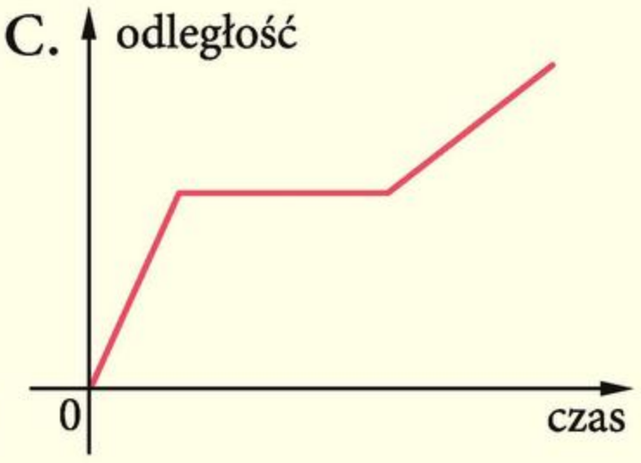
A.



B.

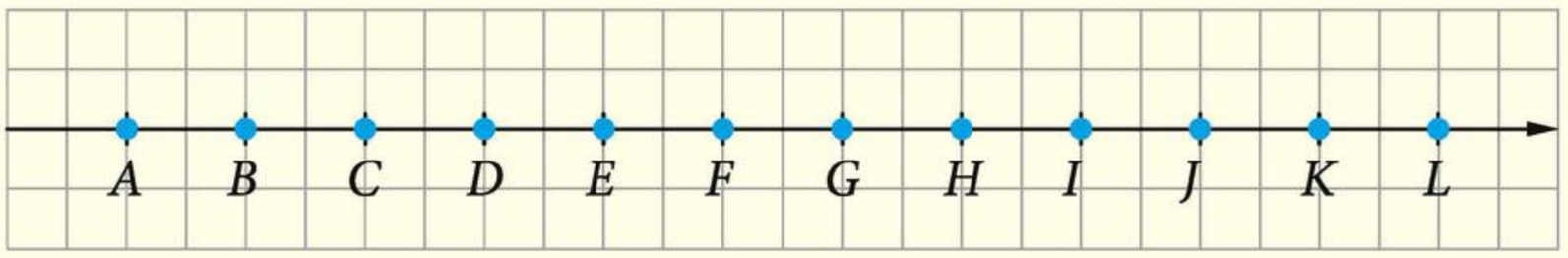


C.



Średnia arytmetyczna

5. Liczby na osi oznaczono literami *A*, *B*, *C*, …, *L* (patrz rysunek).



a) Którą literą oznaczono średnią arytmetyczną liczb *D* i *J*?
b) Literą *E* oznaczono średnią liczby *A* i pewnej liczby. Co to za liczba?
c) Jak oznaczono średnią czterech liczb: *B*, *D*, *H*, *J*?
d) Gdzie na osi znajduje się średnia czterech liczb: *B*, *D*, *H*, *L*?

6. Średnia wieku pięciu zawodników wynosi 25 lat. Średnia wieku czterech zawodników wynosi 24,25 roku. Ile lat ma piąty zawodnik?

7. W pewnej rodzinie średnia wieku rodziców wynosi 47 lat, średnia wieku dzieci wynosi 12 lat, a średnia wieku całej rodziny to 22 lata. Ile dzieci jest w tej rodzinie?

Diagramy łodygowo-listkowe

Przedstawiony obok rozkład jazdy tramwajów linii 14 w Warszawie to przykład tabeli łodygowo-listkowej. Po lewej stronie tabeli (łodyga) zapisano godziny odjazdu tramwaju. Po stronie prawej zapisano minuty kolejnych odjazdów (listki) w danej godzinie.

Zapis **9** | 06 16 28 40 52
oznacza pięć wartości:
9.06, 9.16, 9.28, 9.40 i 9.52.

Z takiej tabeli łatwo odczytać m.in., o której godzinie odjeżdża pierwszy i ostatni tramwaj z danego przystanku, co ile minut odjeżdża w danej godzinie, w jakich porach dnia kursuje najczęściej, ile tramwajów odjeżdża np. przed 7 rano.

14 linia tramwajowa
przystanek: **Pl. Zbawiciela 04** » **Banacha**
dzień powszedni

godz.	minuty							
5	37	57						
6	13	25	32	39	52			
7	04	16	30	38	46	54		
8	02	10	18	26	34	42	50	58
9	06	16	28	40	52			
10	04	16	28	40	52			
11	04	16	28	40	52			
12	04	16	28	40	52			
13	04	16	28	40	52			
14	04	16	28	40	52			
15	04	14	22	30	38	46	54	
16	02	10	18	26	34	42	50	58
17	06	14	22	30	38	46	54	
18	02	10	18	28	34	40	52	
19	04	16	28	40	52			
20	04	17	27	37				
21	17							

godziny odjazdu – łodyga
minuty odjazdu – listki

Źródło: https://wtp.waw.pl

8. Przyjrzyj się podanemu wyżej rozkładowi jazdy.

a) Ile czasu będziesz czekać na tramwaj 14, jeśli przyjdziesz na przystanek o 6.57?
b) W których godzinach tramwaje tej linii jeżdżą najczęściej?

9. Wzrost (w centymetrach) zawodników polskiej drużyny siatkarzy, którzy w 2018 roku zdobyli mistrzostwo świata, został zapisany w postaci tabeli łodygowo-listkowej. Pierwszy wiersz tabeli zawiera wzrost trzech zawodników: 180 cm, 184 cm, 188 cm.

łodyga	listki
18	0 4 8
19	2 3 6 6 8 9
20	1 5 5 8
21	0



a) Ilu zawodników liczyła polska drużyna siatkarzy na mistrzostwach świata?
b) Ilu zawodników miało 205 cm wzrostu?
c) Czy zawodników o wzroście poniżej 200 cm było więcej niż zawodników o wzroście co najmniej 200 cm?
d) Ilu zawodników miało ponad 195 cm wzrostu?
e) Oblicz średnią i medianę wzrostu zawodników.

1 Liczby na osi liczbowej

Na dobry początek

Płeć aligatorów, krokodyli oraz żółwi zależy od temperatury, w jakiej znajduje się jajo podczas inkubacji. Zakresy temperatur, w jakich rozwijają się poszczególne płcie, są różne dla różnych gatunków.

Zależność między temperaturą podczas inkubacji a płcią aligatora amerykańskiego

Temperatura	Płeć
30°C i poniżej	wyłącznie samice
30,5–32°C	obie płcie
32,5–33°C	wyłącznie samce
33,5–34,5°C	obie płcie
35°C i powyżej	wyłącznie samice

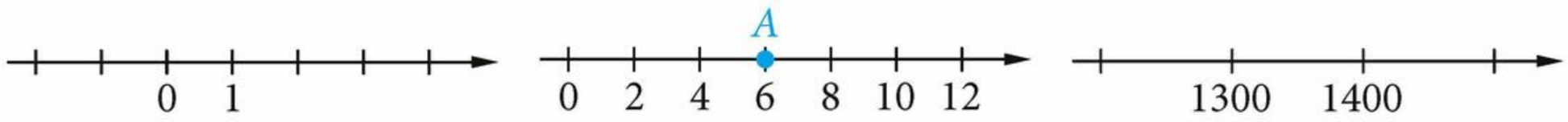


Pytania i polecenia

- Powyżej pokazano wartości temperatury w pięciu różnych inkubatorach, w których umieszczono jaja aligatora amerykańskiego. W których inkubatorach wylęgną się samce, a w których samice? W których przypadkach nie da się tego przewidzieć?

Oś liczbowa

Już od wielu lat korzystasz z różnych osi liczbowych.



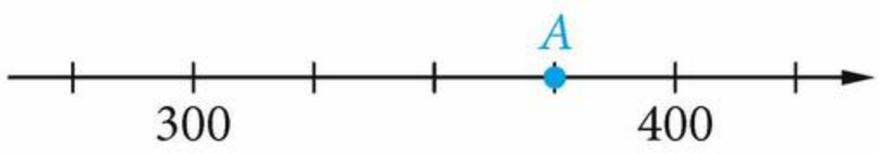
Liczbę odpowiadającą punktowi na osi liczbowej nazywamy **współrzędną tego punktu**. Zapis $A = 6$ oznacza, że współrzędna punktu A jest równa 6.

Przykład 1

E

Odczytaj współrzędne punktów zaznaczonych na osi liczbowej.

a)



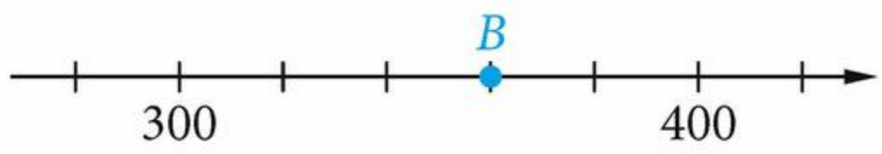
Odstęp między liczbami 300 i 400 podzielono na cztery równe części.

$100 : 4 = 25$, czyli kolejne kreski odpowiadają liczbom 325, 350 i 375.

Zatem współrzędna punktu A jest równa 375:

$A = 375$

b)



Odstęp między liczbami 300 i 400 podzielono na pięć równych części.

$100 : 5 = 20$, czyli kolejne kreski odpowiadają liczbom 320, 340, 360 i 380.

Zatem współrzędna punktu B jest równa 360:

$B = 360$

Ćwiczenie 1

Odczytaj współrzędne punktów A, B i C.

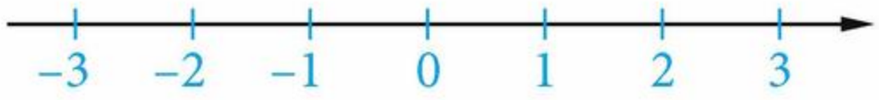


Liczby naturalne, całkowite, wymierne i niewymierne na osi liczbowej

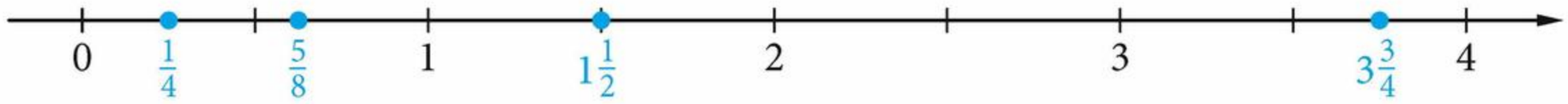
Na osi liczbowej często zaznaczamy tylko **liczby naturalne**



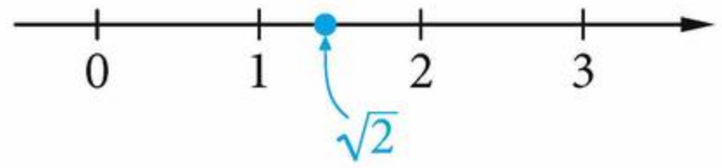
albo tylko **liczby całkowite.**



Na osi można też zaznaczyć dowolną **liczbę wymierną** (czyli taką, którą można przedstawić w postaci ułamka zwykłego).



Na osi znajdują się także liczby niewymierne.



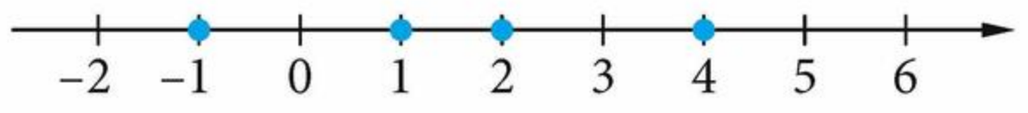
Zbiory liczb na osi liczbowej

Na osi często zaznaczamy nie tylko pojedyncze liczby, lecz także zbiory liczb.

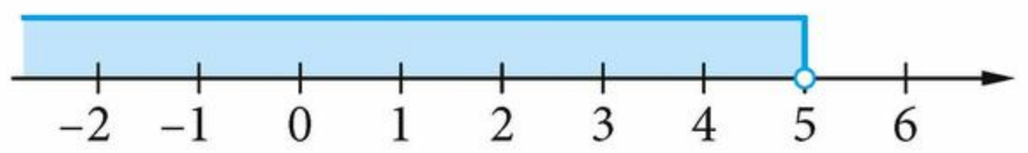
Przykład 2.1

Zaznacz na osi zbiór liczb spełniających warunek $x < 5$.

Bardzo łatwo jest zaznaczyć kilka takich liczb, np. 4, 2, 1, –1.



Zauważmy, że wszystkie takie liczby leżą na lewo od 5. Zaznaczamy to w sposób przedstawiony na rysunku.



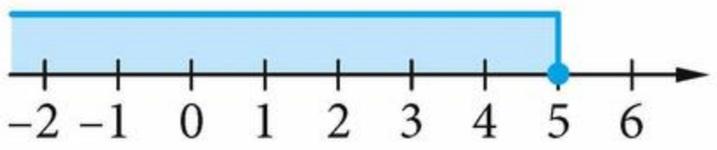
Niezamalowane kółko przy liczbie 5 oznacza, że ta liczba nie została zaznaczona.

Przykład 2.2

Zaznacz na osi zbiór liczb spełniających podany warunek.

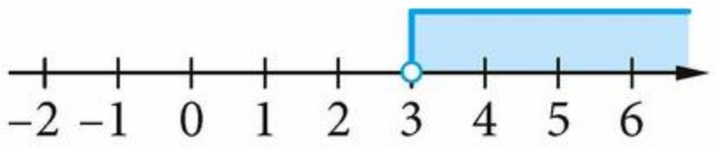
a) $x \leqslant 5$ **b)** $x > 3$ **c)** $x \geqslant -4$

a) Zapis $x \leqslant 5$ oznacza, że x jest liczbą mniejszą lub równą 5.

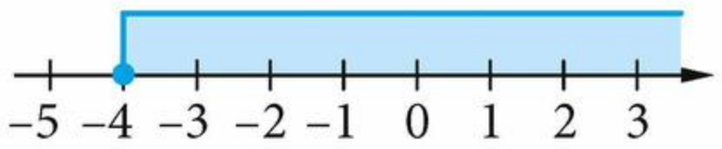


Zamalowane kółko przy liczbie 5 oznacza, że została ona zaznaczona, ponieważ spełnia podany warunek.

b) Zaznaczamy liczby większe od 3, zatem kółko przy liczbie 3 zostawiamy niezamalowane.



c) Zapis $x \geqslant -4$ oznacza, że x jest liczbą większą lub równą -4.



Ćwiczenie 2

Zaznacz na osi zbiór liczb spełniających podany warunek.

a) $x < 6$ **b)** $x \geqslant 0$ **c)** $x > -1$

Przykład 3

Zapisz warunek, który spełniają liczby zaznaczone na osi.

a)



Zaznaczono liczby mniejsze od 7. Przy liczbie 7 kółko jest niezamalowane, czyli ta liczba nie jest zaznaczona.

$x < 7$

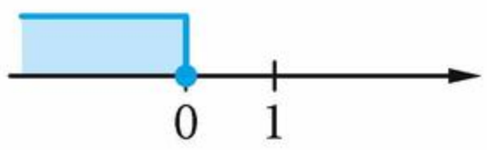
b)



Zaznaczono liczby większe lub równe 7. Przy liczbie 7 kółko jest zamalowane, czyli ta liczba jest zaznaczona.

$x \geqslant 7$

c)



$x \leqslant 0$

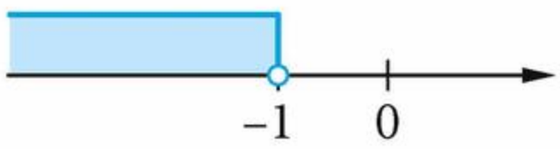
Ćwiczenie 3

Zapisz warunek, który spełniają liczby zaznaczone na osi.

a)



b)



Przykład 4

Dany jest zbiór liczb spełniających warunek $x < 3$.

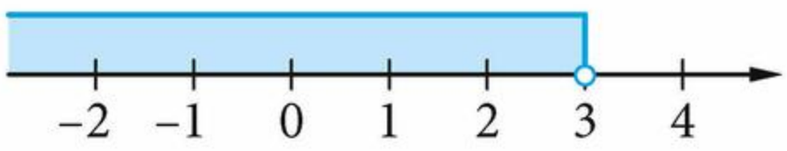
a) Zaznacz ten zbiór na osi liczbowej.

b) Podaj przykład pięciu liczb całkowitych spełniających ten warunek.

c) Podaj największą **liczbę naturalną** spełniającą ten warunek.

d) Czy istnieje największa liczba spełniająca ten warunek?

a)



b) Na przykład: −8, −7, 0, 1, 2.

c) Największa liczba naturalna spełniająca ten warunek to 2.

d) W podpunkcie c) podaliśmy największą liczbę naturalną spełniającą ten warunek, ale tym razem nie jesteśmy ograniczeni do liczb naturalnych.
Istnieją liczby wymierne i niewymierne większe od 2 i mniejsze od 3, np. $2\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{5}$, 2,4, $\sqrt{5}$.
Zauważ, że w nieskończoność możemy podawać coraz większe takie liczby, np. 2,9; 2,99; 2,999; 2,9999 itd.
A więc nie istnieje największa liczba spełniająca warunek $x < 3$.

Ćwiczenie 4

a) Zaznacz na osi liczby spełniające warunek $x > -3$. Podaj najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą ten warunek. Czy istnieją liczby mniejsze od podanej przez ciebie spełniające ten warunek?

b) Zaznacz na osi liczby spełniające warunek $x \geqslant -5$. Podaj najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą ten warunek. Czy istnieją liczby mniejsze od podanej przez ciebie spełniające ten warunek?

Dobra rada

Niezamalowane, czyli „PUSTE" kółko oznacza, że w tym miejscu jest pusto, tzn. w zaznaczonym zbiorze nie ma tej liczby.

Zadania

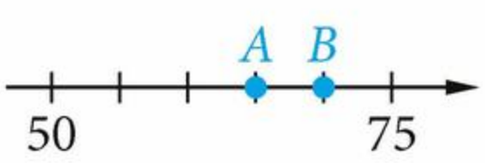
1. Wykonaj polecenia. ▶ Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

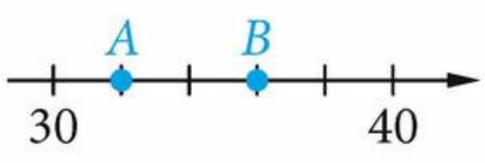
← P1

Odczytaj współrzędne punktów zaznaczonych na osi.

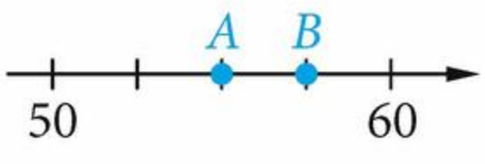
a)



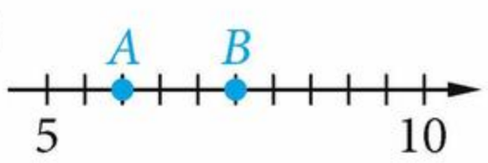
b)



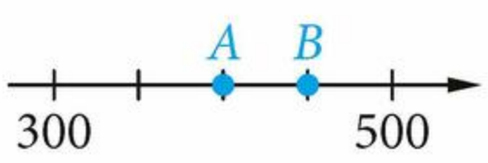
c)



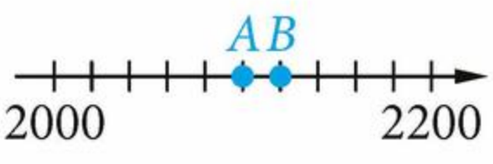
d)



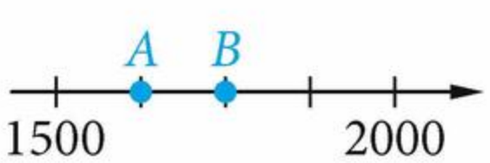
e)



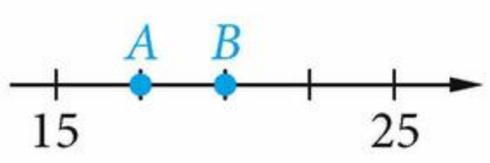
f)



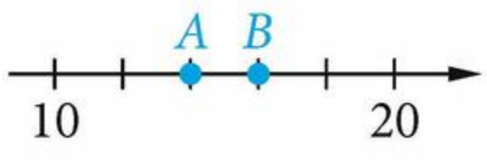
g)



h)



i)



poziom B

← P2

Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej zbiór liczb spełniających podany warunek.

a) $x > -2$

b) $x \leqslant 1{,}25$

c) $x \geqslant -20$

d) $x \leqslant 7$

e) $x > -12$

f) $x \leqslant 4{,}5$

g) $x \geqslant -2$

h) $x < -7$

i) $x > -5$

j) $x > -5{,}5$

k) $x \leqslant 4$

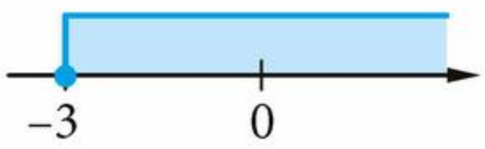
l) $x < 0$

poziom C

← P3

Zapisz warunek, który spełniają liczby zaznaczone na osi.

a)



b)



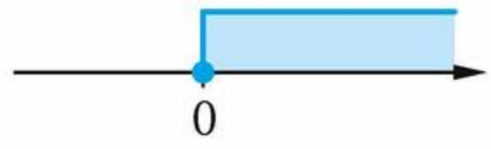
c)



d)



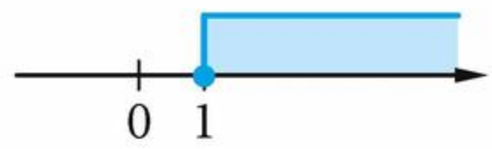
e)



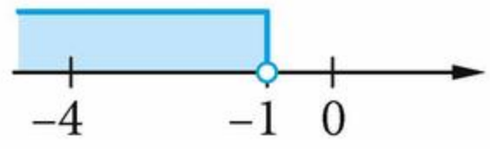
f)



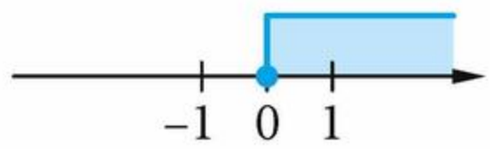
g)



h)



i)



poziom D

← P4

Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej zbiór liczb spełniających podany warunek. Czy istnieje najmniejsza liczba całkowita należąca do tego zbioru? Jeśli tak – podaj ją. Czy istnieje największa liczba całkowita należąca do tego zbioru? Jeśli tak – podaj ją.

a) $x \geqslant -15$ **b)** $x < -15$ **c)** $x > -2{,}75$ **d)** $x > 1{,}25$ **e)** $x \leqslant -8{,}5$ **f)** $x < -5$ **g)** $x > -12$ **h)** $x \geqslant -2{,}8$ **i)** $x < -7$

MISTRZ

Zapisz warunek, który spełniają liczby zaznaczone na osi.

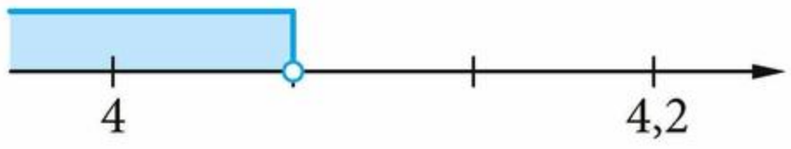
a)



b)



c)



d)



2. Zaznacz na osi podaną liczbę i liczbę do niej przeciwną. Zaznacz na rysunku odległość każdej z tych liczb od 0.

a) 5 **b)** −3 **c)** 7 **d)** 0

3. Zaznacz podaną liczbę na osi. Zaznacz na rysunku jej odległość od zera. Oblicz wartość bezwzględną tej liczby.

a) −7 **b)** 4 **c)** −5 **d)** 0

Wartość bezwzględna liczby

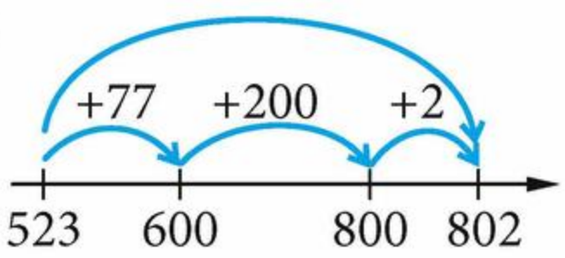
$|-2| = 2 \quad |2| = 2$

$|-17{,}8| = 17{,}8$

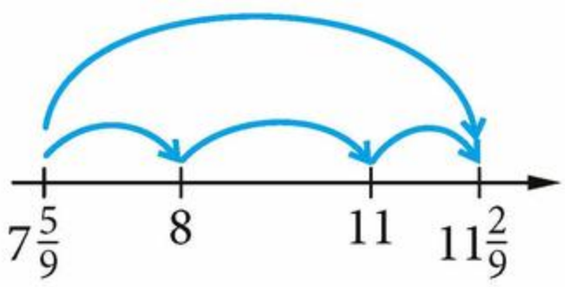
$|0{,}329| = 0{,}329$

4. Na osi liczbowej zilustrowano obliczanie różnicy dwóch liczb. Zapisz odpowiednie odejmowanie i podaj jego wynik.

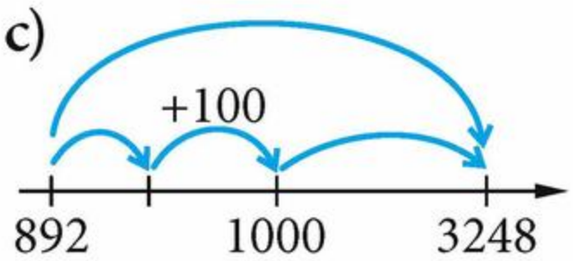
a)



b)



c)

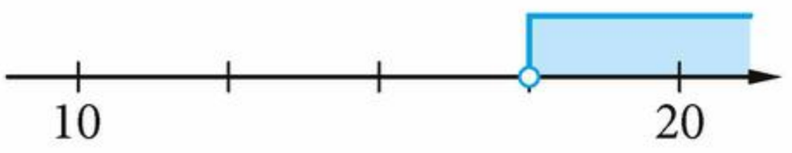


5. Zaznacz na osi zbiór liczb spełniających podany warunek. Podaj, o ile istnieje, największą liczbę naturalną spełniającą ten warunek lub napisz, że taka liczba nie istnieje.

a) $x < 8$ **b)** $x > 3$ **c)** $x \leqslant 4$ **d)** $x \leqslant 0$

6. Zapisz warunek, który spełniają liczby zaznaczone na osi.

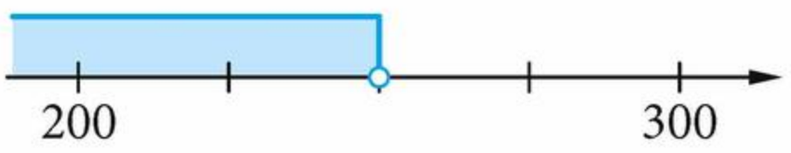
a)



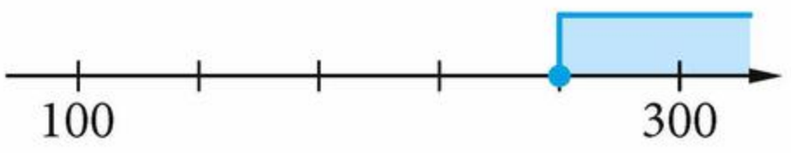
b)



c)



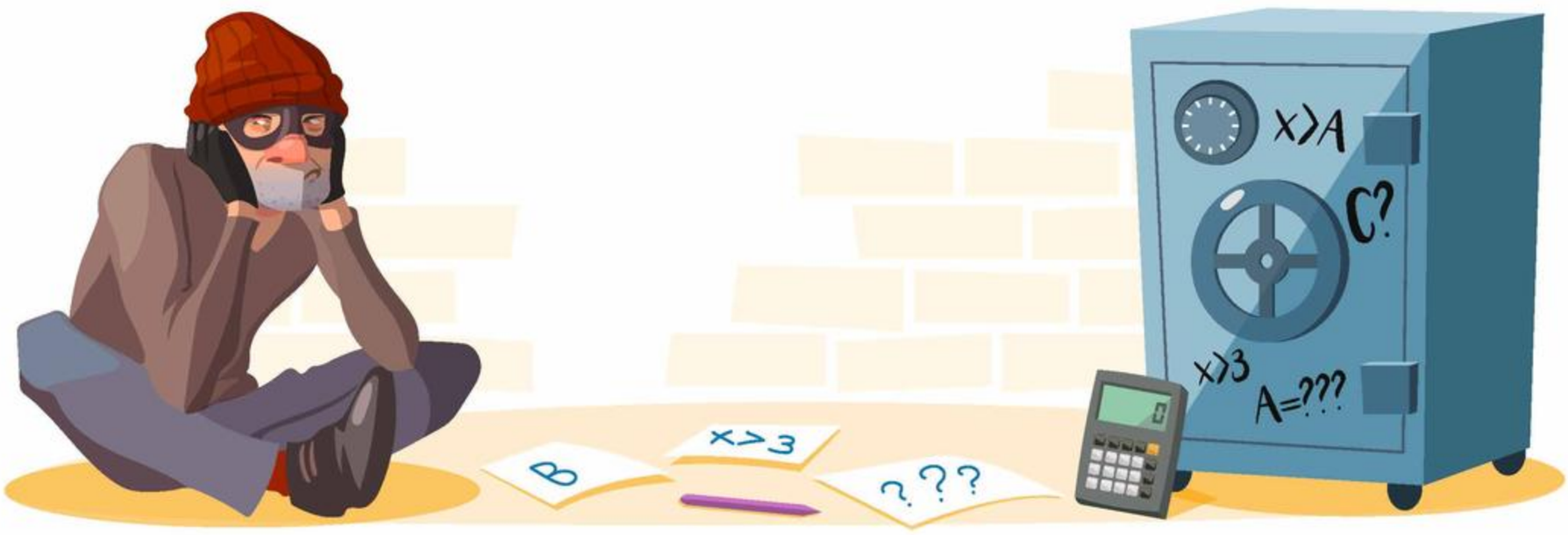
d)



7. Zaznacz różnymi kolorami na jednej osi liczby spełniające warunki $x < 8$ i $x \geqslant 4$. Wymień wszystkie liczby całkowite spełniające jednocześnie oba te warunki. Ile jest tych liczb?

8. Ustal, jaki jest pięciocyfrowy kod ABCDE do sejfu, jeśli wiadomo, że:

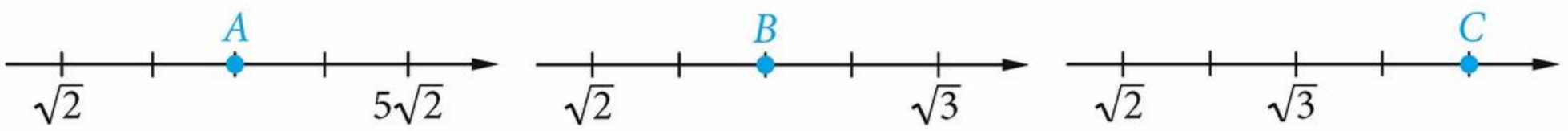
A – największa liczba naturalna spełniająca warunek $x \leqslant 7$,
B – najmniejsza liczba całkowita spełniająca warunek $x > 3$,
C – odpowiedź na pytanie, ile liczb całkowitych spełnia jednocześnie warunki $x > -33$ i $x \leqslant -24$,
D – liczba spełniająca jednocześnie warunki $x >$ A i $x <$ C,
E – odpowiedź na pytanie, o ile się różnią liczby A i C.



9. Narysuj oś liczbową (pamiętaj, aby dobrać odpowiednią jednostkę). Zaznacz na niej obydwie podane liczby. Oblicz średnią arytmetyczną tych liczb, a następnie również zaznacz ją na osi.

a) 248 i 252 **b)** $3\frac{2}{7}$ i $4\frac{1}{7}$ **c)** $-0{,}03$ i $0{,}03$ **d)** -200 i 1400

10. Jakie liczby są oznaczone na osi literami A, B i C?



Dla dociekliwych

Gdy myślimy o liczbach niewymiernych, często posługujemy się ich przybliżeniami dziesiętnymi. Może się więc wydawać, że na osi będziemy zaznaczać te liczby bardzo niedokładnie.

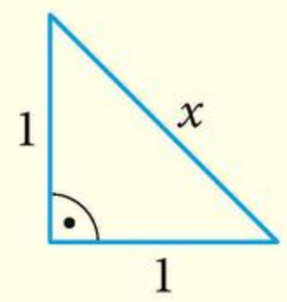
Okazuje się jednak, że to nieprawda! Każdy pierwiastek kwadratowy możemy precyzyjnie zaznaczyć na osi, i to nie posługując się jego przybliżeniem dziesiętnym.

Wystarczy, że umiemy skonstruować odcinek o takiej długości.

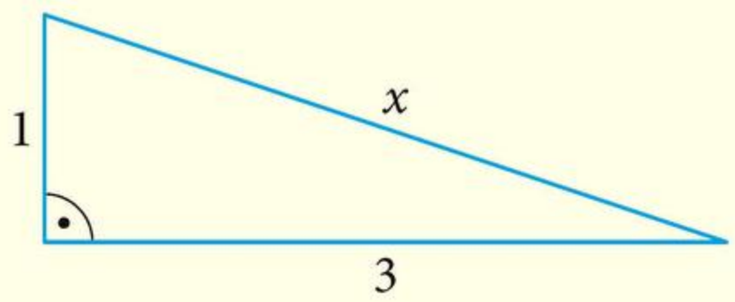
Spróbuj samodzielnie wymyślić, jak dokładnie zaznaczyć na osi liczbowej $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$. Jeśli przydadzą ci się podpowiedzi – rozwiąż kolejne zadania.

1. Oblicz długość odcinka oznaczonego literą.

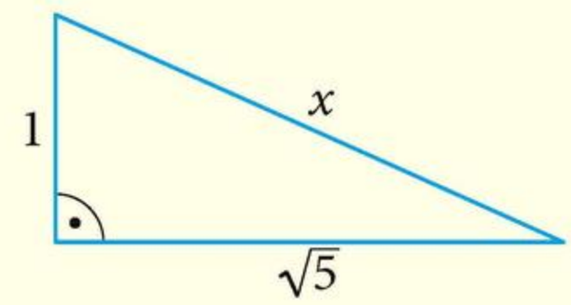
a)



b)



c)

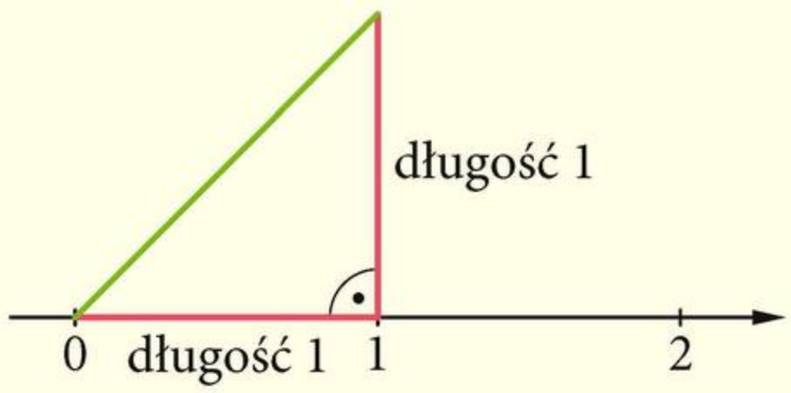


2. Zaproponuj długości boków trójkąta prostokątnego tak, aby jego przeciwprostokątna miała podaną długość.

a) $\sqrt{7}$ **b)** $\sqrt{11}$ **c)** $\sqrt{3}$

3. Narysuj oś liczbową (od 0 do 1 przyjmij odległość 4 cm). Wykonaj kolejne polecenia.

- Narysuj w zeszycie rysunek taki jak zamieszczony obok.
- Jaką długość ma zielony odcinek?
- Za pomocą cyrkla wbitego w punkt 0 zaznacz na osi punkt $\sqrt{2}$.
- Sprawdź za pomocą linijki, czy zaznaczony punkt odpowiada przybliżonej wartości $\sqrt{2}$.



4. Zaznacz na osi punkt odpowiadający liczbie $\sqrt{3}$.

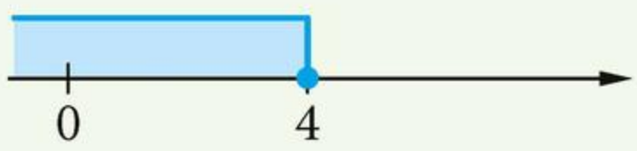
Czy już umiem?

I. Zapisz warunek, który spełniają liczby zaznaczone na osi.

a)



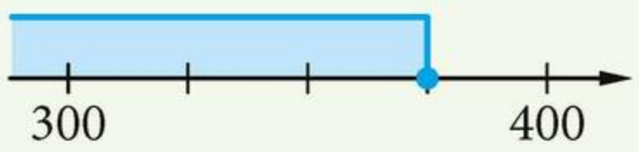
b)



II. Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej zbiór liczb spełniających podany warunek. Podaj najmniejszą liczbę naturalną należącą do tego zbioru.

a) $x > 2$ **b)** $x \leqslant 9$

III. Zapisz warunek, który spełniają liczby zaznaczone na osi.



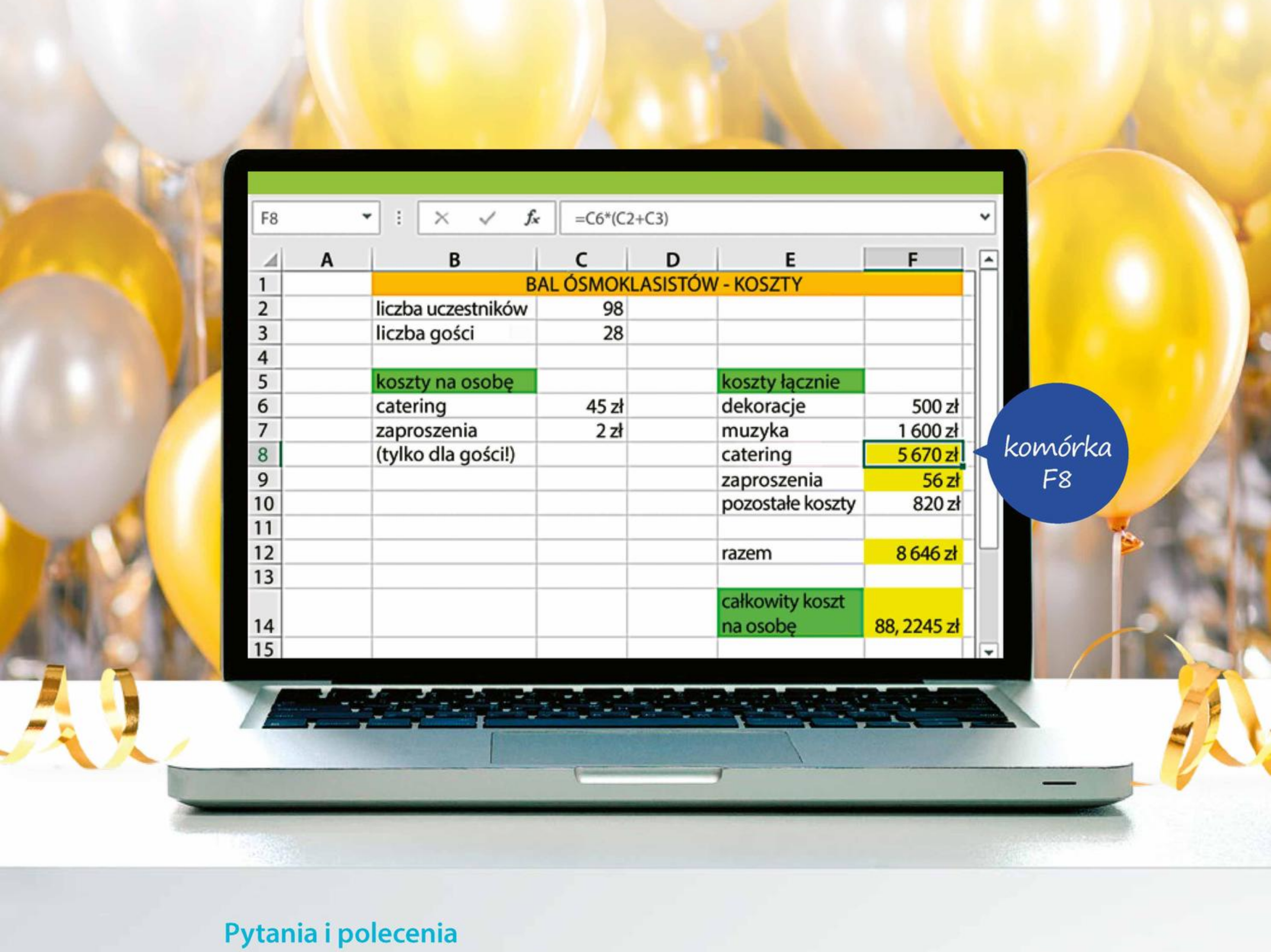
IV. Podaj:

a) największą liczbę trzycyfrową,
b) najmniejszą liczbę czterocyfrową podzielną przez 3,
c) największą ujemną liczbę dwucyfrową.

2 Wyrażenia algebraiczne

Na dobry początek >

Uczniowie klas ósmych planują bal na zakończenie szkoły podstawowej. Ela i Staś z 8c przygotowali arkusz kalkulacyjny, który pomoże zaplanować wydatki i obliczyć koszt balu. Na żółto zaznaczyli wszystkie komórki, w których wartość jest obliczana automatycznie.



Pytania i polecenia

- W komórce F8 zaznaczonej niebieską ramką jest obliczany łączny koszt cateringu. W pasku na górze arkusza jest formuła, która pozwala obliczyć ten koszt: =C6*(C2+C3). Wyjaśnij sposób obliczeń.
- Zapisz formułę, za pomocą której jest obliczana wartość w komórce F9.
- W której komórce zapisano formułę =F12/C2?
- Okazało się, że na udział w balu zdecydowało się jeszcze 3 uczniów. W której komórce trzeba umieścić taką informację? Wypisz adresy komórek, których wartość zmieni się w związku z tą sytuacją.

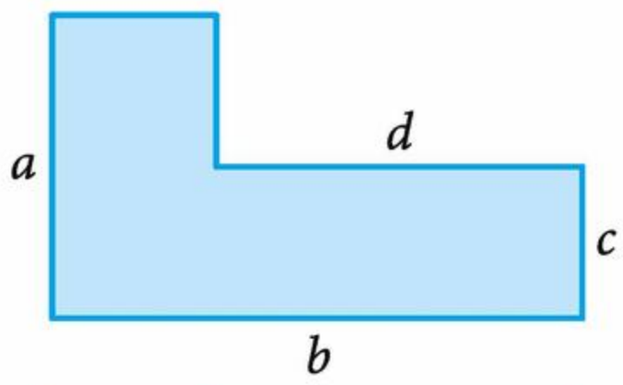
Gdy wielokrotnie wykonujemy podobne obliczenia, często używamy arkusza kalkulacyjnego. Formuły zapisywane w arkuszu to wyrażenia algebraiczne.

Innym przykładem wykorzystania wyrażeń algebraicznych są wzory na pola i obwody figur geometrycznych czy wzory fizyczne.

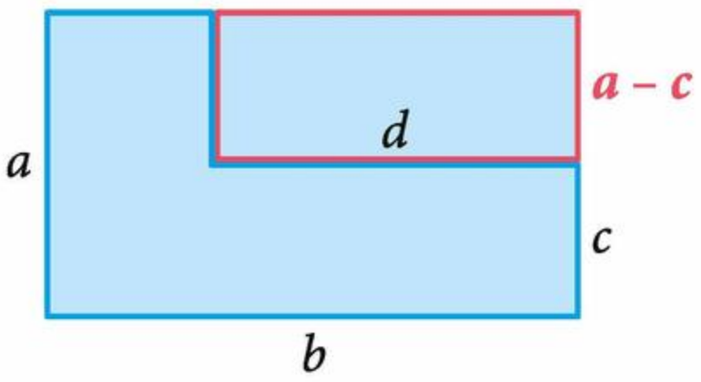
Wartość wyrażenia algebraicznego

Przykład 1.1

Sześciokąt przedstawiony na rysunku ma sąsiednie boki prostopadłe. Zapisz wzór na pole takiego sześciokąta, a następnie oblicz to pole dla $a = 5$, $b = 8$, $c = 2$, $d = 6$.



Zauważmy, że przedstawiony sześciokąt możemy otrzymać, odcinając od prostokąta o bokach a i b mniejszy prostokąt, o bokach $a - c$ i d.
Zatem pole P takiego sześciokąta wyraża się wzorem:



$P = ab - (a - c)d$.

Aby obliczyć pole sześciokąta dla danych wartości a, b, c, d, podstawiamy te dane do wzoru, tzn. zastępujemy litery we wzorze odpowiednimi liczbami.
Dla $a = 5$, $b = 8$, $c = 2$, $d = 6$ pole jest równe:

$ab - (a - c)d = 5 \cdot 8 - (5 - 2) \cdot 6 = 40 - 3 \cdot 6 = 40 - 18 = 22$.

Ćwiczenie 1.1

Oblicz pole sześciokąta z przykładu 1.1 dla $a = 10$, $b = 8$, $c = 3$, $d = 5$.

Obliczanie pola figury na podstawie wzoru jest przykładem **obliczania wartości wyrażenia algebraicznego** dla podanych wartości zmiennych.

Przykład 1.2

Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla podanych wartości zmiennych x i y.

a) $2 + x^2$ dla $x = -5$

$2 + x^2 = 2 + (-5)^2 = 2 + 25 = 27$

b) $-x + xy$ dla $x = -2$ i $y = 5$

$-x + xy = -(-2) + (-2) \cdot 5 = 2 + (-10) = -8$

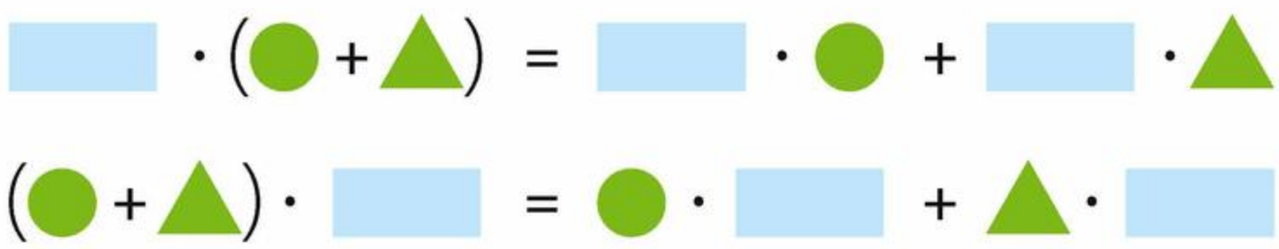
Ćwiczenie 1.2

Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla podanych wartości x i y.

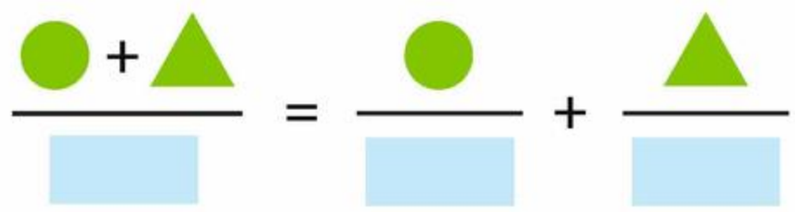
a) $x + x^3$ dla $x = 3$ **b)** $4xy - 2(2 + x)$ dla $x = -1$ i $y = 2$

Mnożenie i dzielenie sumy algebraicznej przez wyrażenie

W wielu sytuacjach wyrażenia algebraiczne należy przekształcić. Przypomnijmy, że aby pomnożyć sumę algebraiczną przez wyrażenie, należy pomnożyć każdy wyraz sumy przez to wyrażenie.



Podobnie postępujemy w przypadku dzielenia sumy przez wyrażenie.



Zwróć uwagę, że nie można w podobny sposób dzielić przez sumę, np.:

$$\frac{15}{3+5} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}, \quad \text{ale} \quad \frac{15}{3} + \frac{15}{5} = 5 + 3 = 8.$$

Przykład 2

Zapisz podane wyrażenie w postaci sumy, czyli bez użycia nawiasów.

a) $x - 2(a - b) = x - 2a + 2b$ $(-2) \cdot (-b) = 2b$

b) $k + (m - 3n) \cdot 2 = k + 2m - 6n$ $m \cdot 2 = 2m,\ -3n \cdot 2 = -6n$

c) $\frac{14 + 2p}{2} = 7 + p$ Dzielimy przez 2 każdy wyraz w liczniku.

d) $ab - (a - c)d = ab - ad + cd$ Minus przed nawiasem oznacza mnożenie przez –1.

Zauważ, że w podpunkcie d) przekształciliśmy wyrażenie z przykładu 1.1 opisujące pole sześciokąta. **Równość wyrażeń** oznacza, że bez względu na to, jakie liczby podstawimy w miejsce zmiennych, wyrażenia po obu stronach znaku równości będą miały tę samą wartość. Na przykład dla $a = 5$, $b = 8$, $c = 2$, $d = 6$ otrzymujemy:

$ab - ad + cd = 5 \cdot 8 - 5 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 40 - 30 + 12 = 22,$

czyli taki sam wynik jak w przykładzie 1.1.

Ćwiczenie 2

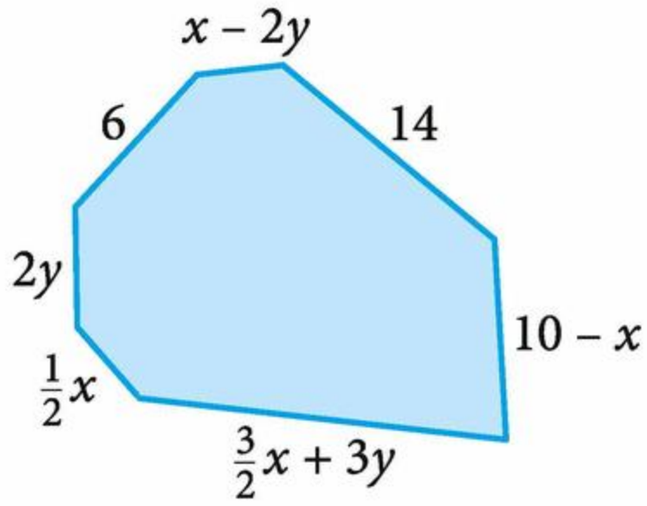
Wykonaj działania i zapisz podane wyrażenie w postaci sumy.

a) $2 + 3(x - 2y)$ **b)** $4x - (y - z) \cdot 2$ **c)** $2x - (2 - y)$ **d)** $10 - \frac{6a - 9b}{3}$

Redukcja wyrazów podobnych

Przykład 3

Wyznacz i zapisz w najprostszej postaci obwód siedmiokąta przedstawionego na rysunku.



Obwód wielokąta to suma długości jego boków, w tym przypadku wynosi on więc:

$\frac{1}{2}x + 2y + 6 + x - 2y + 14 + 10 - x + \frac{3}{2}x + 3y.$

W zapisanym wyrażeniu występują **wyrazy podobne**, tzn. różniące się co najwyżej współczynnikiem liczbowym. Warto podkreślić je w jednakowy sposób. Ułatwi to ich redukcję (czyli dodawanie).

$\underline{\frac{1}{2}x} \underline{\underline{+ 2y}} \underline{\underline{+ 6}} \underline{+ x} \underline{\underline{- 2y}} \underline{\underline{+ 14}} \underline{\underline{+ 10}} \underline{- x} \underline{+ \frac{3}{2}x} \underline{\underline{+ 3y}} =$

$= 2x + 3y + 30$

$\frac{1}{2}x + \cancel{x} - \cancel{x} + \frac{3}{2}x = 2x$

$\cancel{2y} - \cancel{2y} + 3y = 3y$

$6 + 14 + 10 = 30$

Ćwiczenie 3

Zapisz podane wyrażenie w najprostszej postaci.

a) $2a + 2 + 2b - 3a + b - 5$ **b)** $x - 2y + 5x - 3 - 2x + 5y$

Upraszczanie wyrażeń algebraicznych

W wielu sytuacjach, aby uprościć wyrażenie, musimy wykonać zarówno mnożenie, jak i redukcję wyrazów podobnych.

Przykład 4

E

Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

a) $x(6x + 4) - x^2$

b) $8x(2x - 3) - x(6 - 2x)$

a) $x(6x + 4) - x^2 = \underline{6x^2} + 4x \underline{- x^2} =$

$= 5x^2 + 4x$

Redukujemy wyrazy podobne.

$5x^2$ i $4x$ to nie są wyrazy podobne, ponieważ różnią się potęgą x.

b) $8x(2x - 3) - x(6 - 2x) =$

Każdy wyraz w pierwszym nawiasie mnożymy przez $8x$, a w drugim przez $-x$.

$= \underline{16x^2} \underline{\underline{- 24x}} \underline{\underline{- 6x}} \underline{+ 2x^2} =$

$= 18x^2 - 30x$

Redukujemy wyrazy podobne.

Ćwiczenie 4

Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

a) $-4x^2 + 3x(x-6)$ **b)** $x(2x-y) - y(x-2y)$

Zadania

1. Wykonaj polecenia. ▶ Jeśli poprawnie rozwiążesz pierwsze dwa przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom. Jeśli nie – rozwiąż wszystkie pozostałe przykłady z danego poziomu i dopiero wtedy przejdź na następny poziom.

poziom A

← P1

Oblicz wartość wyrażenia dla podanych wartości zmiennych.

a) $2x^2 - 8y$ dla $x = -3$ i $y = -2$

b) $\frac{m^3+4n}{6}$ dla $m = 1$ i $n = 2$

c) $2{,}5 \cdot (z-1)(z+1)$ dla $z = 5$

d) $a(b-7)^2$ dla $a = 2$ i $b = 5$

e) $cd^2 - c^2d$ dla $c = -1$ i $d = -2$

f) $p^2(2r-3)$ dla $p = -2$ i $r = 6$

poziom B

← P2

Opuść nawiasy.

a) $-8(2c-d) - cd$

b) $3c - \frac{15d-5cd}{5}$

c) $4t - p(2s-3)$

d) $5p + (-pr + p^2) \cdot (-2)$

e) $2b + \frac{6a-9ab}{3}$

f) $xy - (-3) \cdot (x-1)$

poziom C

← P3

Zredukuj wyrazy podobne.

a) $2x^2y - 2xy^2 - 4x^2y + 4xy^2$

b) $3p - 6 + pr + 2p - 4pr + 2$

c) $3a - 2b + ab - 4a - 8ab$

d) $4s^3t + 6st^3 - 2s^3t + 5st^3$

e) $8c - 5d - 2cd + 5c - 8d + 2cd$

f) $5w - 2z - 3 + 7w + 9$

poziom D

← P4

Opuść nawiasy, a następnie zredukuj wyrazy podobne.

a) $3(a+2b) - (b-2a) + 9\left(b - \frac{a}{3}\right)$

b) $-6a + 2(3a-b) - 4(-2a+b)$

c) $2(x+3y) - x(3-y) + 4y(1-x)$

d) $2x(x+3y) - 6y(x-2y) - 8y^2$

e) $xy - x(3xy+y) + y(-2x+4x^2)$

f) $-x^2(y-xy) - xy(2x^2 - x - y^2)$

2. Uprość wyrażenie:

$a(2-ab) - b(a-3a) - 2ab(a+1) + 3a^2b,$

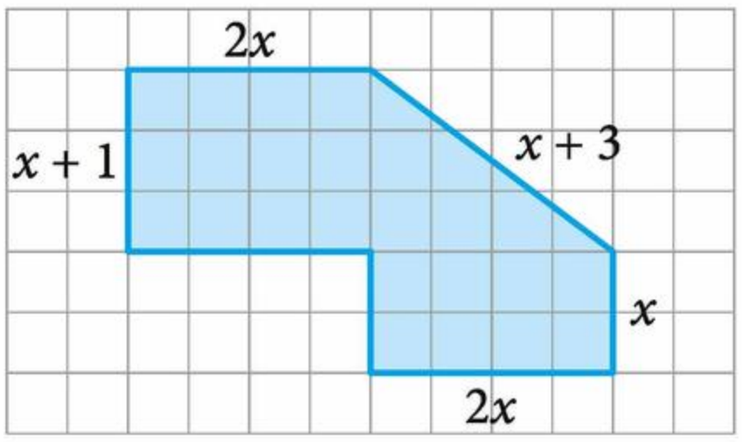
a następnie oblicz jego wartość dla

a) $a = 10$ i $b = 5$,

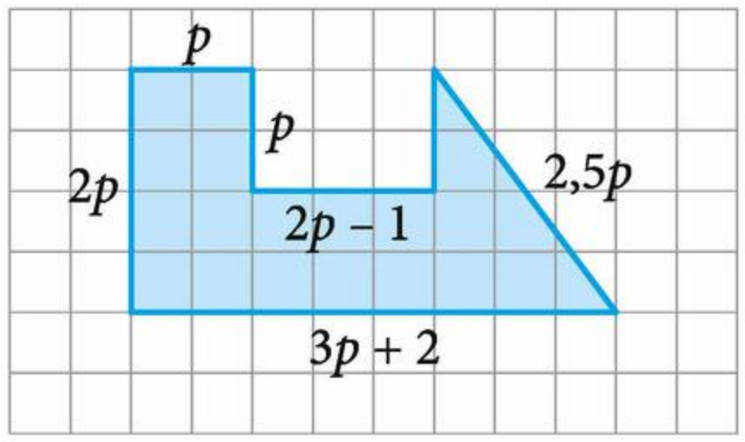
b) $a = 4$ i $b = \frac{\sqrt{7}+2}{13}$.

3. Zapisz w najprostszej postaci wyrażenie opisujące obwód figury przedstawionej na rysunku.

a)



b)



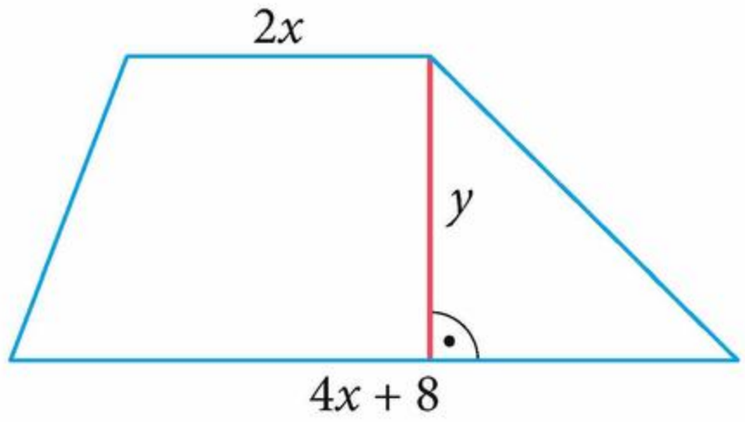
E **4.** Zapisz w najprostszej postaci wyrażenie opisujące pole figury przedstawionej na rysunku.

a)



prostokąt

b)



trapez

:D **5.** Uzasadnij, że dla dowolnych x i y wartość wyrażenia:

a) $6(x+y+2)-3y+3(2x-y)-12x$ jest równa 12,

b) $-3(9x^2y^2-3xy^2-2)+4{,}5xy^2(6x-2)$ jest równa 6.

6. **a)** W czasie wyprzedaży cena butów została obniżona o 20%, a potem jeszcze o 30%. O ile procent zmniejszyła się początkowa cena na skutek obu obniżek?

b) Gdy malarz stał się sławny, jego obrazy zdrożały o 120%. Później, gdy przyznano mu ważną nagrodę artystyczną, zdrożały jeszcze o 80%. O ile procent łącznie zdrożały obrazy?

Liczba o 30% większa od x to $1{,}3x$, a liczba o 30% mniejsza od x to $0{,}7x$.

c) Cena kawy wzrosła o 30%, a gdy spadła jej sprzedaż, cena została obniżona o 25%. Czy po tych dwóch zmianach ceny kawa kosztuje więcej czy mniej niż na początku? O ile procent więcej lub mniej?



7. Wykonaj odpowiednie rysunki i sprawdź poprawność podanej obok informacji dla $n = 5$ oraz $n = 6$.

Wielokąt o n wierzchołkach ma $\frac{n(n-3)}{2}$ przekątnych.

E **8.** Dane są trzy wyrażenia: $A = 2x - y$, $B = 3x^2 - 3x + y$ oraz $C = -3x$. Zapisz i doprowadź do najprostszej postaci:

a) sumę A + B, **b)** różnicę A − B, **c)** iloczyn A · C.

9. Dane jest wyrażenie algebraiczne $X = n(u + t)$ i nieznane wyrażenie Y. Wiadomo, że $X + Y = nu + ta$. Wyznacz wyrażenie Y.

Dla dociekliwych

1. Wyobraź sobie, że wybierasz kilka utworów do układu tanecznego. Utwórz arkusz kalkulacyjny, który będzie obliczał łączny czas trwania piosenek i podawał go w minutach i sekundach. Na ilustracji obok pokazano, jak może działać taki arkusz: pierwszy utwór trwa 2 min 15 s, drugi 3 min 50 s, trzeci 1 min 20 s; łącznie trwają 6 min 85 s, co arkusz przelicza automatycznie na 7 min 25 s.

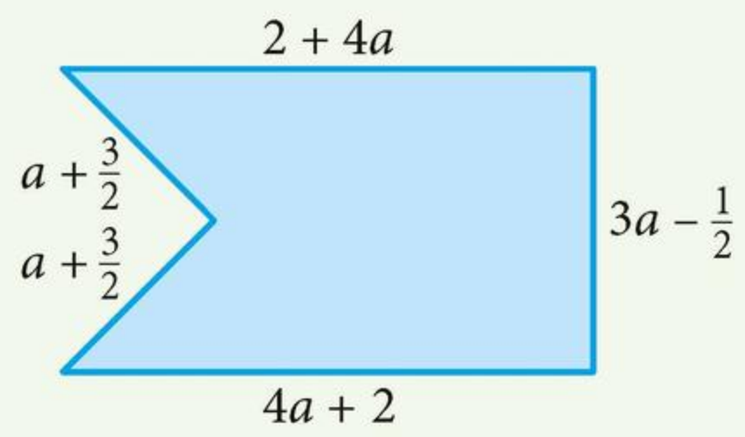
A1

	A	B	C	D
1				
2		min	s	
3	utwór 1	2	15	
4	utwór 2	3	50	
5	utwór 3	1	20	
6				
7				
8		6	85	
9				
10	razem	7	25	
11				

Wskazówka. Przydatna może być funkcja LICZBA.CAŁK(…).

Czy już umiem?

I. Ile wynosi obwód figury narysowanej obok?



II. Uprość wyrażenie, a następnie oblicz jego wartość dla podanych wartości x i y.

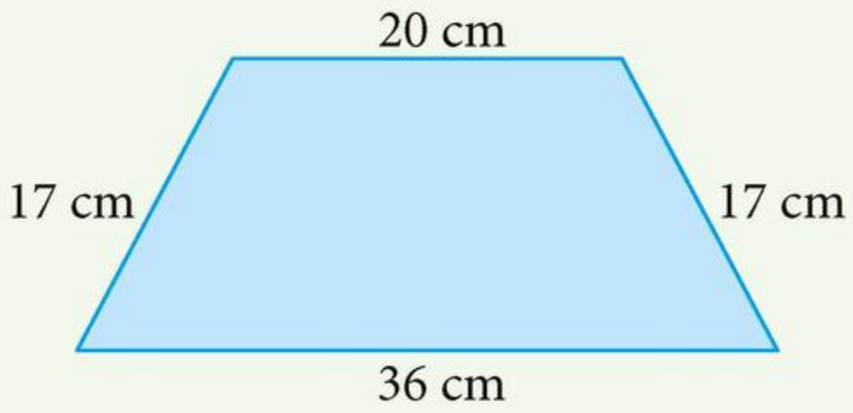
a) $1{,}2x + y - (1{,}3x - 2y) + (0{,}8x - 2y)$, $\quad x = 5, y = 1{,}8$

b) $3x(x - 2y) - 2y(y - 3x)$, $\quad x = 5, y = -5$

c) $6(x - 2) - (5 - 2x) \cdot (-3)$, $\quad x = \frac{2}{3}$

III. Cenę kurtki obniżono w czasie przeceny o 20%, a następnie jeszcze o 40%. O ile procent łącznie została obniżona początkowa cena kurtki?

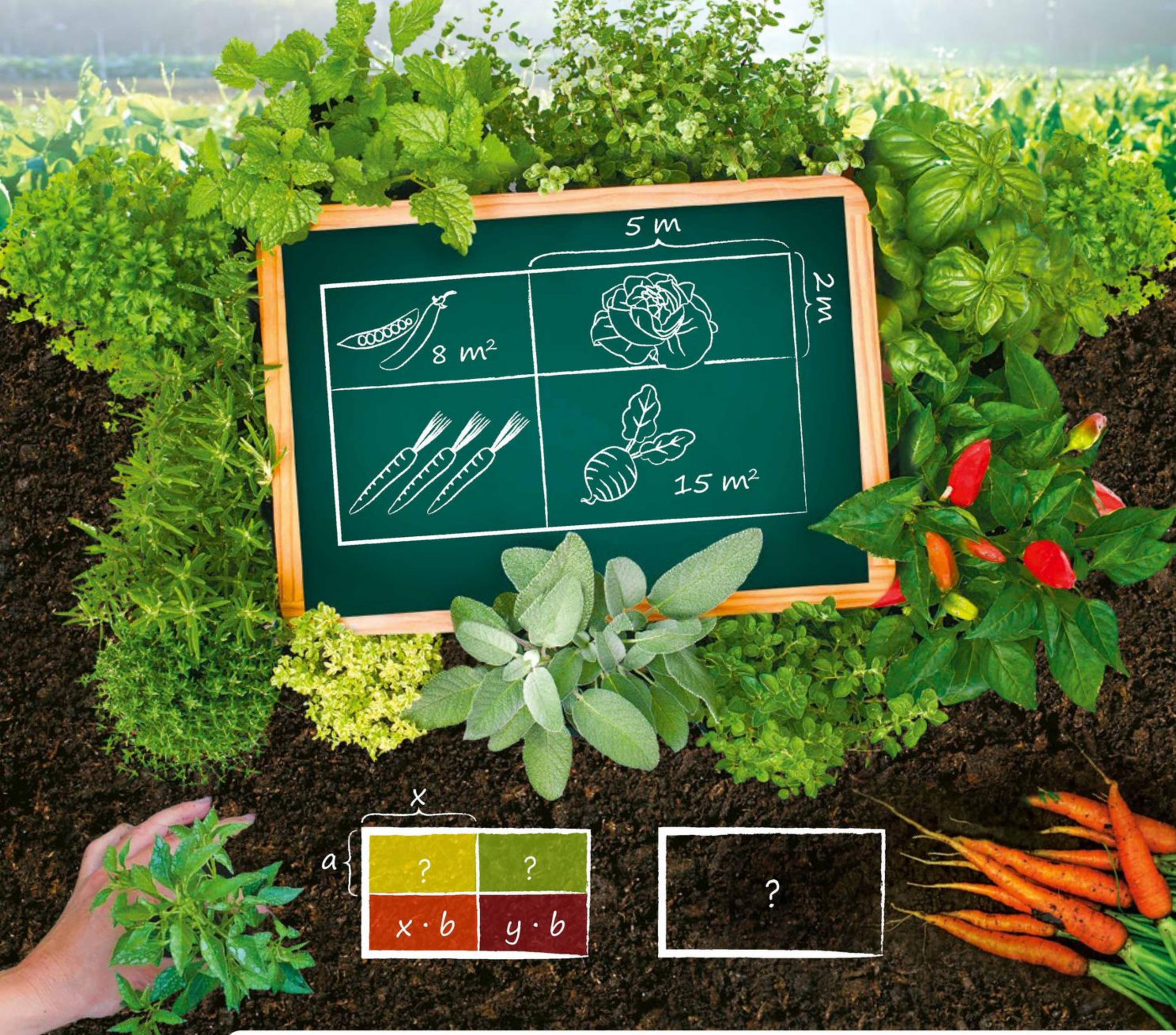
IV. Oblicz obwód i pole trapezu o wymiarach podanych na rysunku.



3 Mnożenie sum algebraicznych

Na dobry początek

Pani Jola postanowiła na swojej działce wydzielić prostokątny ogródek warzywny i zasadzić groszek, sałatę, marchewkę i buraki. Zrobiła plan, co gdzie chce posadzić.



Pytania i polecenia

- Przyjrzyj się informacjom na planie pani Joli. Jaką powierzchnię przewidziała ona na marchewkę?
- Jakimi wyrażeniami algebraicznymi należy zastąpić znaki zapytania na prostokątach powyżej?

W poprzednim temacie przypomnieliśmy, jak pomnożyć sumę algebraiczną przez wyrażenie.

$$(\bullet + \blacktriangle)\cdot \square = \bullet \cdot \square + \blacktriangle \cdot \square$$

A jak pomnożyć dwie sumy algebraiczne, na przykład $(a+b)\cdot(c+d)$?
Najpierw mnożymy każdy składnik pierwszej sumy przez całą drugą sumę:

$$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot(c+d) + b\cdot(c+d) =$$

Otrzymane iloczyny umiemy już obliczyć:

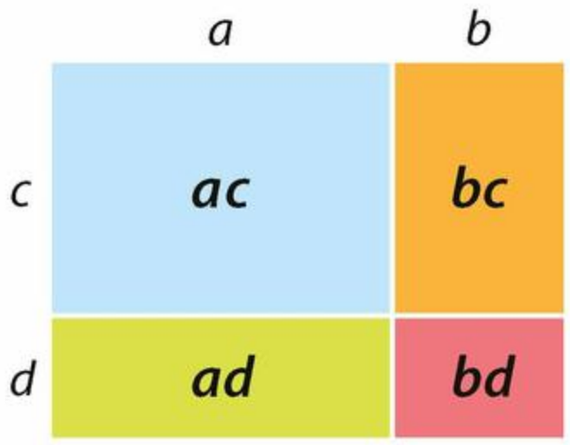
$$= a\cdot(c+d) + b\cdot(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Ostatecznie otrzymujemy równość:

$$(a+b)\cdot(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Jeśli a, b, c, d oznaczają liczby dodatnie, można tę równość zilustrować graficznie.

Pole dużego prostokąta wynosi $(a+b)\cdot(c+d)$, ale można je też wyznaczyć jako sumę pól czterech prostokątów, czyli jest równe $ac + ad + bc + bd$.



Zapamiętaj

Aby pomnożyć dwie sumy algebraiczne, należy każdy wyraz jednej sumy pomnożyć przez każdy wyraz drugiej sumy.

$$(a+b)\cdot(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Przykład 1

Wykonaj mnożenie. Jeżeli otrzymasz wyrazy podobne, zredukuj je.

a) $(a+4)(a-2)$ **b)** $(a-b)(2-a)$

a) $(a+4)(a-2) = a^2 \underline{-2a} \underline{+4a} - 8 =$
$= a^2 + 2a - 8$

b) $(a-b)(2-a) = 2a - a^2 - 2b + ab$

W zapisie iloczynu sum algebraicznych możemy pominąć znak mnożenia między nawiasami.

$(-b)\cdot(-a) = +ab$

Ćwiczenie 1

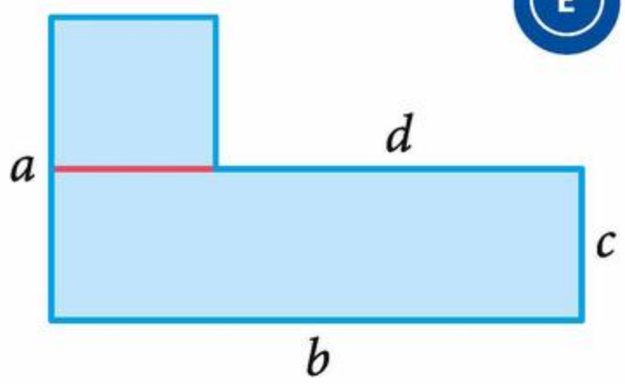
Wykonaj mnożenie. Jeżeli otrzymasz wyrazy podobne, zredukuj je.

a) $(p+6)(p-q)$ **b)** $(x+1)(2x+6)$ **c)** $(2a-b)(4a-3b)$

Przykład 2

E

Dany jest sześciokąt z przykładu 1.1 na s. 69. Wyprowadź wzór na jego pole, korzystając z podziału przedstawionego na rysunku.



Dolny prostokąt ma sąsiednie boki b i c, więc jego pole jest równe bc. Natomiast wymiary górnego prostokąta to $a-c$ oraz $b-d$, więc jego pole wynosi $(a-c)(b-d)$. Wobec tego pole P sześciokąta jest równe:

$P = bc + (a-c)(b-d)$.

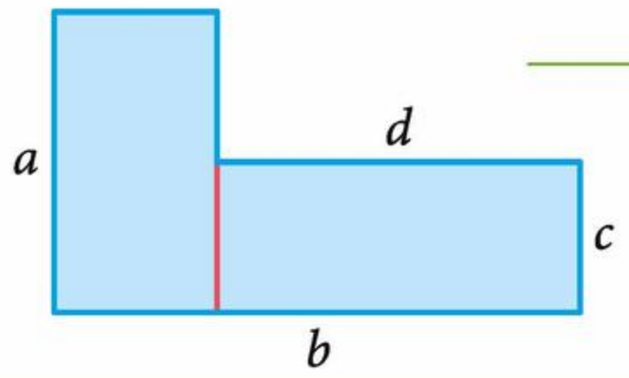
Uprośćmy to wyrażenie.

$P = bc + (a-c)(b-d) = \underline{bc} + ab - ad \underline{- bc} + cd = ab - ad + cd$

Zauważ, że po wykonaniu obliczeń otrzymaliśmy to samo wyrażenie co w podpunkcie d) przykładu 2 na s. 70.

Ćwiczenie 2

Wyprowadź wzór na pole sześciokąta z przykładu powyżej, korzystając z podziału przedstawionego na rysunku obok.



Przykład 3

Uprość wyrażenie $xy - (x+3)(x-y)$.

$xy - (x+3)(x-y) =$ Otrzymany iloczyn zapisujemy w nawiasie (minus dotyczy całego iloczynu).

$= xy - \left(x^2 - xy + 3x - 3y\right) =$ Opuszczamy nawias.

$= \underline{xy} - x^2 \underline{+ xy} - 3x + 3y =$ Redukujemy wyrazy podobne.

$= 2xy - x^2 - 3x + 3y$

Ćwiczenie 3

Uprość podane wyrażenie.

a) $(a-2)(3b-a) - a(a-b)$ **b)** $(-x+2y)(y-3) - (x-y)(x-2)$

Obliczenia z pierwiastkami

Zasady mnożenia sum algebraicznych możemy stosować także do obliczeń, w których nie ma zmiennych, ale występują pierwiastki.

Przykład 4

Oblicz.

a) $(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-1)$ **b)** $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$

Postępujemy analogicznie jak w przypadku mnożenia sum algebraicznych.

a) $(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-1)=(\sqrt{3})^2-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2=$

$=3-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2=1+\sqrt{3}$

$(\sqrt{3})^2=3$
$-\sqrt{3}+2\sqrt{3}=\sqrt{3}$
$\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{3\cdot 2}$

b) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})=2(\sqrt{3})^2-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-(\sqrt{2})^2=$

$=6-\sqrt{6}+2\sqrt{6}-2=4+\sqrt{6}$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-1)$ **b)** $(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})$ **c)** $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-2\sqrt{2})$

Dłuższe przykłady

Przykład 5

Wykonaj mnożenie $(x-3)(x^2+x-2)$. Jeżeli otrzymasz wyrazy podobne, zredukuj je.

Zauważmy, że w jednej sumie algebraicznej mamy dwa składniki, a w drugiej – trzy. Nie ma znaczenia, w jakiej kolejności wykonamy mnożenie tych sum.

$(x-3)(x^2+x-2)=x^3+x^2-2x-3x^2-3x+6=x^3-2x^2-5x+6$

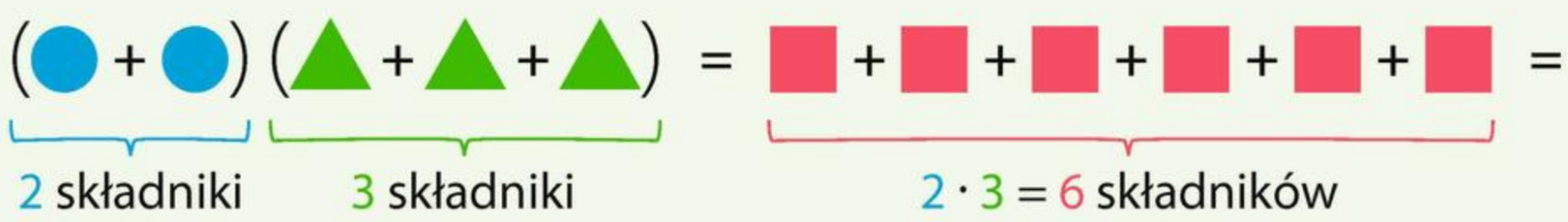
Ćwiczenie 5

Wykonaj mnożenie. Jeżeli otrzymasz wyrazy podobne, zredukuj je.

a) $(x+3)(2x^2-x+3)$ **b)** $(2x-y+6)(x+3y)$

Dobra rada

Przed redukcją sprawdź, czy masz wszystkie składniki.



Zadania

1. Wykonaj polecenia. ▶ Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

← P1

Wykonaj mnożenie. Jeżeli otrzymasz wyrazy podobne, zredukuj je.

a) $(x-4)(x-2)$
b) $(3k-2)(k-4)$
c) $(2m-1)(m+1)$
d) $(6c+1)(c-1)$
e) $(4-d)(2d+2)$
f) $(5-n)(n+3)$
g) $(2x-1)(x-2)$
h) $(5a+3)(a-1)$
i) $(y-4)(1-3y)$

poziom B

← P1

Wykonaj mnożenie. Jeżeli otrzymasz wyrazy podobne, zredukuj je.

a) $(2b+a)(3-b)$
b) $(-x+3xy)(3-b)$
c) $(st-3)(5+st)$
d) $(2a-b)(a-2b)$
e) $(m-n)(n-m)$
f) $(-2a+k)(2k+3a)$
g) $(z+3x)(2z+1)$
h) $(-4-k)(-2k+2y)$
i) $(1-x)(1+3y)$

poziom C

← P3

Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci.

a) $8xy-(2x-3)(4y-5)$
b) $(2x-3y)(5+x)+15(y-x)$
c) $(5x-y)(2y-x)-11xy$
d) $2(x+y)-(1-2x)(1+2y)$
e) $(4a-1)(2b+2)+2b(1-2a)$
f) $(2a+b)(a-1)-(b-1)(a+2)$

MISTRZ

Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci.

a) $(2s-4t-1)(t-s)-(s-2t-3)(t+s)$
b) $(3m+1)(2m-1)(m-2)$
c) $a-(a-1-b)(a+5)$
d) $x^2y-\left(x-y^2-1\right)\left(x^2+2y-3\right)$

2. Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla $x=-0{,}5$.

a) $x^2-(x+2)(x-1)$
b) $(x+2)\big(6(x+4)-5(x+6)\big)$

3. Dany jest prostokąt o bokach długości a i $a+2$.

a) Przedstaw wzór na pole tego prostokąta w postaci sumy algebraicznej.
b) Krótszy bok tego prostokąta przedłużono o 1, a dłuższy skrócono o 1, w wyniku czego powstał kwadrat. Wyznacz różnicę między polem kwadratu a polem prostokąta.

4. Oblicz.

a) $(3-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$

b) $\sqrt{3}-(\sqrt{3}-5)(4+\sqrt{3})$

c) $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$

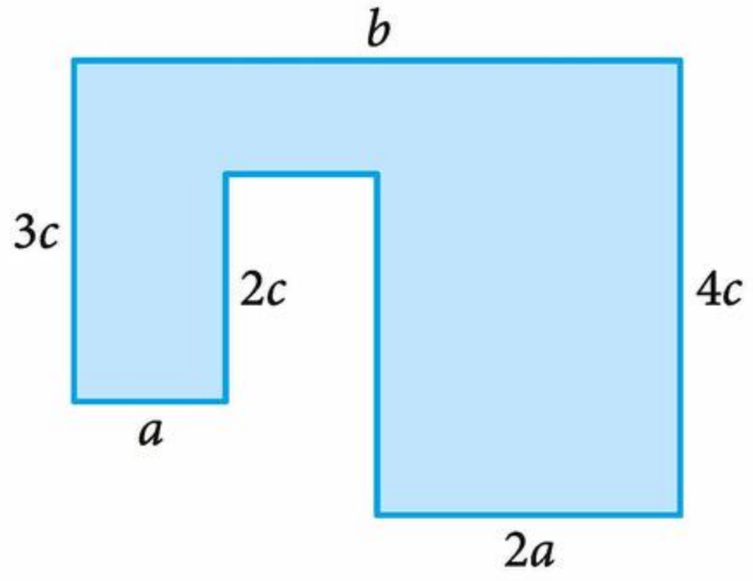
d) $(\sqrt{3}-2)(5+\sqrt{2})-\sqrt{6}$

5. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby x wartość podanego wyrażenia jest nieujemna.

a) $(3x-6)(4x-2)-(6x+3)(2x-6)$

b) $(3x-2)(2x-1)-(5x-2)(x-1)$

6. Ośmiokąt na rysunku obok ma sąsiednie boki prostopadłe. Wyraź pole takiego ośmiokąta za pomocą wyrażenia algebraicznego. Rozwiąż zadanie na trzy sposoby i sprawdź, czy w każdym przypadku otrzymasz ten sam wynik.



7. Przekształć iloczyn $2(a+3b)(3a-2b)$ na dwa sposoby:

(1) najpierw mnożąc 2 przez wyrażenie w pierwszym nawiasie,

(2) najpierw mnożąc wyrażenia w nawiasach.

Porównaj otrzymane wyniki.

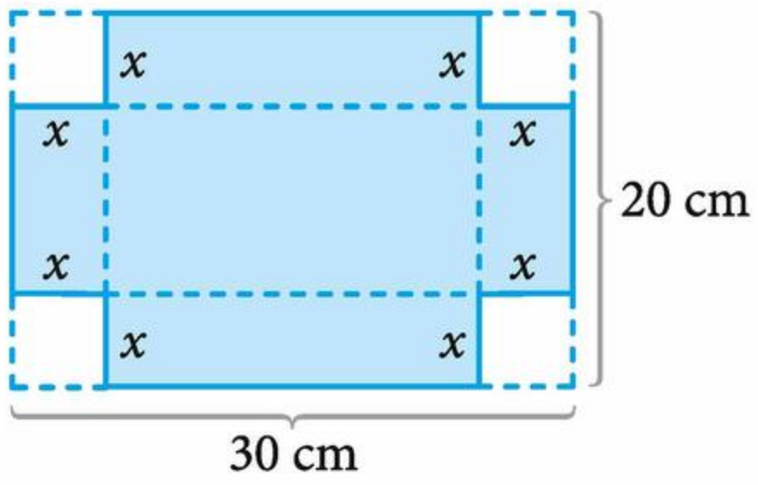
Kiedy mnożysz dwa z trzech czynników, pamiętaj, aby wynik zapisać w nawiasie.

8. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci.

a) $x-3(x-y)(2+x)$

b) $3-6(x+1)(a-1)$

9. Z prostokątnego arkusza tektury o bokach 30 cm i 20 cm wycięto w rogach kwadraty o boku x cm tak, aby po odpowiednim sklejeniu otrzymać otwarte pudełko. Uzasadnij, że pojemność tego pudełka wyraża się wzorem $V = 4x^3 - 100x^2 + 600x$.



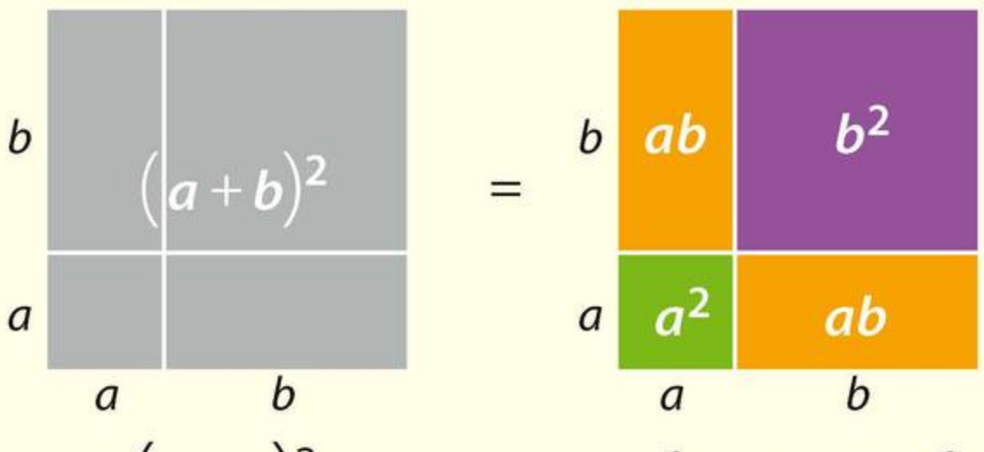
Dla dociekliwych

W wielu obliczeniach pojawiają się kwadraty sumy lub różnicy dwóch wyrażeń. Można je wyznaczać jako iloczyny sum algebraicznych, np.:
$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$,
warto jednak zapamiętać wzory zwane **wzorami skróconego mnożenia**.

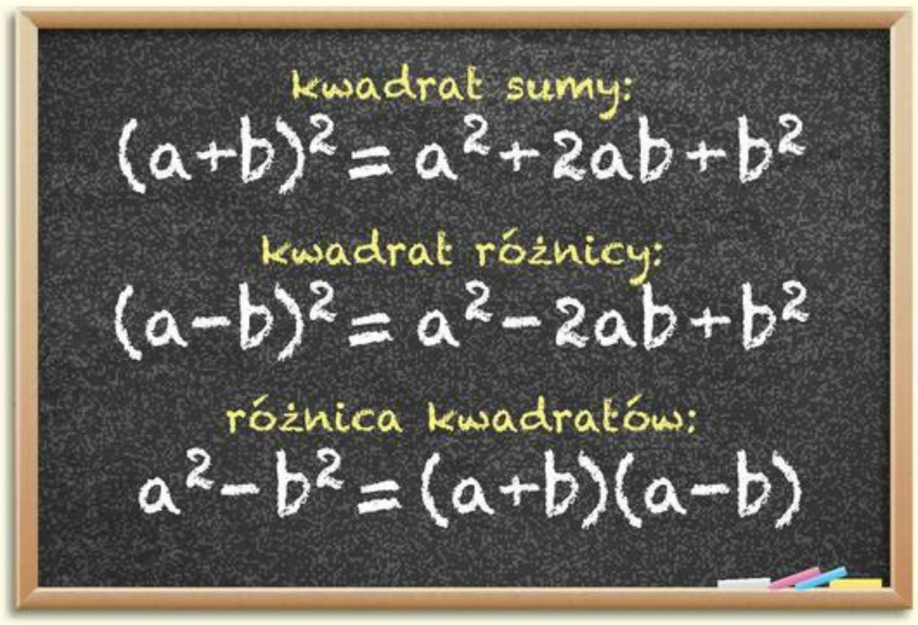
Wzór na kwadrat sumy (zapisany na tablicy na następnej stronie) można uzasadnić algebraicznie:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Można go także uzasadnić geometrycznie:



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



1. Uzasadnij algebraicznie podany wzór skróconego mnożenia.

a) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ **b)** $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

2. Zapisz wyrażenie w postaci sumy, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

a) $(x-2y)^2$ **b)** $(x+5)^2$ **c)** $(5-xy)(5+xy)$

3. Oblicz, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia. Ułóż i rozwiąż kilka podobnych przykładów.

a) 1002^2 **b)** 997^2 **c)** $1004 \cdot 996$

4. Oblicz iloczyn $(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})$, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia. Ułóż i rozwiąż kilka podobnych przykładów.

Czy już umiem?

I. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci.

a) $(x+2)(2x-1)$ **b)** $3x^2-(x-2)(4+x)$

II. Prostokąt ma boki $3a+1$ i $a-2$. Zapisz wzory na jego pole i obwód. Doprowadź te wzory do najprostszej postaci.

III. Uzasadnij, że wartość wyrażenia $x^2-(x-3)(x+3)$ nie zależy od wartości zmiennej x.

IV. W pewnym roku 8 czerwca wypadł we wtorek. Którego dnia nie wypadł piątek?

A. 28 maja **C.** 10 lipca

B. 25 czerwca **D.** 20 sierpnia



4 Równania

Na dobry początek

Wykorzystajmy cylindry, grajka i klauna do stworzenia matematycznego zadania.



Pytania i polecenia

- Literą *c* oznaczyliśmy wysokość cylindra. Zapisz wzrost klauna w postaci wyrażenia algebraicznego.
- Przyjrzyj się sytuacji przedstawionej na ilustracji, a następnie ułóż i rozwiąż równanie pozwalające obliczyć wysokość cylindra.

Przykład 1

Rozwiąż równanie $3x-4(2-x)=3x+12$.

$3x-4(2-x)=3x+12$ — Wykonujemy mnożenie i opuszczamy nawiasy.

$3x-8+4x=3x+12$ — Redukujemy wyrazy podobne po każdej stronie znaku równości.

$7x-8=3x+12$ — Przenosimy (zmieniając znak) niewiadome na jedną, a liczby na drugą stronę znaku równości.

$7x-3x=12+8$ — Redukujemy wyrazy podobne po każdej stronie znaku równości.

$4x=20 \quad |:4$ — Dzielimy obie strony równania przez 4 (współczynnik przy x).

$x=5$

Sprawdzenie:

$L=3x-4(2-x)=3\cdot 5-4\cdot(2-5)=15-4\cdot(-3)=15+12=27,$

$P=3x+12=3\cdot 5+12=15+12=27,\ L=P$ – zgadza się!

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie. **a)** $5(2-3x)=1-(7-x)$ **b)** $3x-(1-x)=-2(4-x)$

Równania i ułamki

Przykład 2

Rozwiąż równanie $\frac{x}{3}=4-\frac{x+3}{6}$.

Obliczenia będą prostsze, jeśli pozbędziemy się ułamków. W tym celu mnożymy obie strony równania przez liczbę będącą wielokrotnością 3 i 6, np. przez 6.

$\frac{x}{3}=4-\frac{x+3}{6} \quad |\cdot 6$ — Mnożymy przez 6 lewą stronę stronę równania i oba składniki prawej strony.

$\overset{2}{\cancel{6}}\cdot\frac{x}{\cancel{3}_{1}}=6\cdot 4-\overset{1}{\cancel{6}}\cdot\frac{x+3}{\cancel{6}_{1}}$

$2x=24-(x+3)$ — Minus odnosi się do całego wyrażenia $x+3$, więc piszemy je w nawiasie.

$2x=24-x-3$

$2x+x=21$

$3x=21 \quad |:3$

$x=7$

Sprawdzenie: $L=\frac{x}{3}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3},\ P=4-\frac{x+3}{6}=4-\frac{7+3}{6}=4-\frac{10}{6}=4-\frac{5}{3}=2\frac{1}{3},$

$L=P$ – zgadza się!

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie. **a)** $2-\frac{x}{4}=\frac{3x}{2}+5$ **b)** $x-\frac{4x+1}{3}=\frac{1}{6}+3x$

Dobra rada

Zwróć uwagę na kolejne kroki podczas rozwiązywania równania.



Równania i mnożenie sum algebraicznych

Przykład 3.1

Rozwiąż równanie $(x-1)(x+3)=x^2$.

$(x-1)(x+3)=x^2$ — Mnożymy sumy algebraiczne i przenosimy x^2 na lewą stronę równania ze zmienionym znakiem.

$\cancel{x^2}+3x-x-3-\cancel{x^2}=0$ — Redukujemy wyrazy podobne.

$2x-3=0$ — Przenosimy -3 na drugą stronę równania ze zmienionym znakiem.

$2x=3 \quad |:2$ — Dzielimy obie strony równania przez 2.

$x=1\frac{1}{2}$

Sprawdzenie:

$\mathrm{L}=(x-1)(x+3)=\left(1\frac{1}{2}-1\right)\left(1\frac{1}{2}+3\right)=\frac{1}{2}\cdot 4\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}=\frac{9}{4}$,

$\mathrm{P}=\left(1\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$, L = P – zgadza się!

Przykład 3.2

Rozwiąż równanie $x-(4x-1)(x+3)=13-4x^2$.

$x-(4x-1)(x+3)=13-4x^2$

$x-(4x^2+12x-x-3)=13-4x^2$ — Otrzymany iloczyn zapisujemy w nawiasie (minus dotyczy całego iloczynu).

$x-(4x^2+11x-3)=13-4x^2$

$\underline{x}-4x^2\underline{-11x}+3=13-4x^2$

$-4x^2-10x+3=13-4x^2$

$-\cancel{4x^2}-10x+\cancel{4x^2}=13-3$

$-10x=10 \quad |:(-10)$

$x=-1$

Sprawdzenie:

$\mathrm{L}=x-(4x-1)(x+3)=-1-\left[4\cdot(-1)-1\right]\cdot(-1+3)=-1-(-5)\cdot 2=-1+10=9$,

$\mathrm{P}=13-4x^2=13-4\cdot(-1)^2=13-4=9$, L = P – zgadza się!

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie $3x^2-(x+1)(3x+2)=0$.

Zadania

1. Rozwiąż równanie. ▶ Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A ← P1

a) $x-(2x-1)-2x=2(3x-4)$
b) $3(x-2)-(x-3)=-(5x-4)$
c) $-(5x-3)=2(4-x)-3x$
d) $-2(5x-7)-3x=2(x-8)$
e) $2x+(-3x+4)=-4(3x-1)$
f) $(5-x)-(x+1)-9=-(2x+5)$
g) $-(5x+4)+(x-1)-(1-x)=0$
h) $4x-8-(x+3)+2x=-(2x-3)$

poziom B ← P2

a) $\frac{x+1}{2}+x=\frac{x+2}{3}$
b) $\frac{2(x+1)-3}{4}=\frac{x}{5}$
c) $\frac{8-x}{2}+\frac{5+x}{4}=12\left(1-\frac{x}{48}\right)$
d) $\frac{x+4}{2}-5=-3$
e) $\frac{3x+2}{4}+5=\frac{2x+1}{3}$
f) $\frac{x+2}{4}+1=\frac{x+6}{4}$
g) $\frac{x}{3}+2=7$
h) $\frac{4-x+2}{7}=\frac{8x-3+2x}{-10}$

poziom C ← P3

a) $(x+3)(1-2x)+2x^2=0$
b) $(x+4)(x-1)=x(x+2)+9x-1$
c) $x^2-(x+3)(x-3)=9$
d) $(x+2)(x-3)=x^2+4$
e) $(x-4)(x+6)=x(x-4)$
f) $(2x-1)(3x-1)-(3x-2)(2x-3)=0$
g) $(4-x)(2x+3)+2x^2=6$
h) $(2x+3)(3x-1)+4=(6x-2)(x+1)$

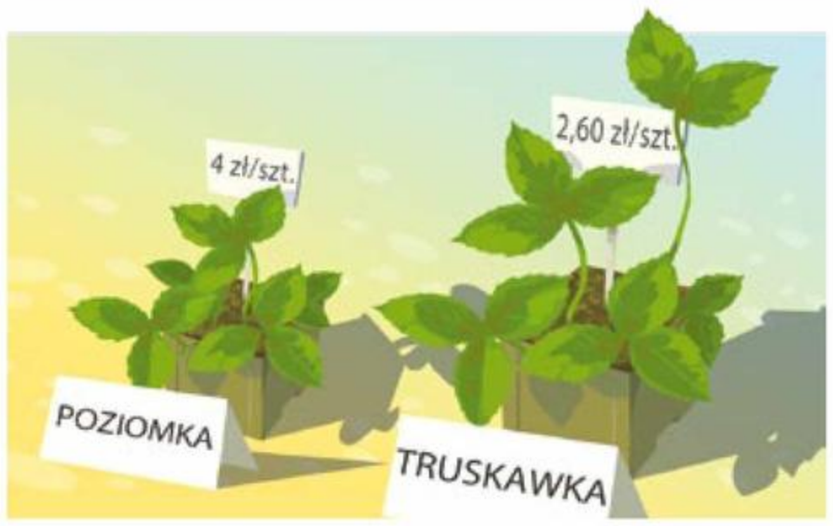
2. Na balkonie sali teatralnej jest 5 rzędów miejsc, a na parterze 15. W każdym rzędzie na parterze jest o 7 miejsc więcej niż w każdym rzędzie na balkonie. Łącznie jest tyle miejsc, ile dni w roku zwykłym. Ile miejsc jest w rzędzie na parterze?

3. Dwutomowe wydanie „Opowieści z Narnii" C.S. Lewisa liczy łącznie 1080 stron. Pierwszy tom ma o 138 stron mniej niż drugi. Ile stron ma pierwszy tom, a ile drugi?

Zacznij tak:

x	liczba stron w tomie I
$1080-x$	liczba stron w tomie II

4. Ania postanowiła posadzić w ogrodzie truskawki i poziomki. Kupiła łącznie 25 sadzonek po cenach takich jak na ilustracji obok. Zapłaciła za nie 79 zł. Ile sadzonek poziomek kupiła Ania?



5. W barze mlecznym pierogi leniwe były tanie jak barszcz. Gdy cenę pierogów podwyższono o 10%, a cenę barszczu obniżono o 20%, pierogi stały się droższe od barszczu o 1,50 zł. Ile kosztowały pierogi po zmianie cen?

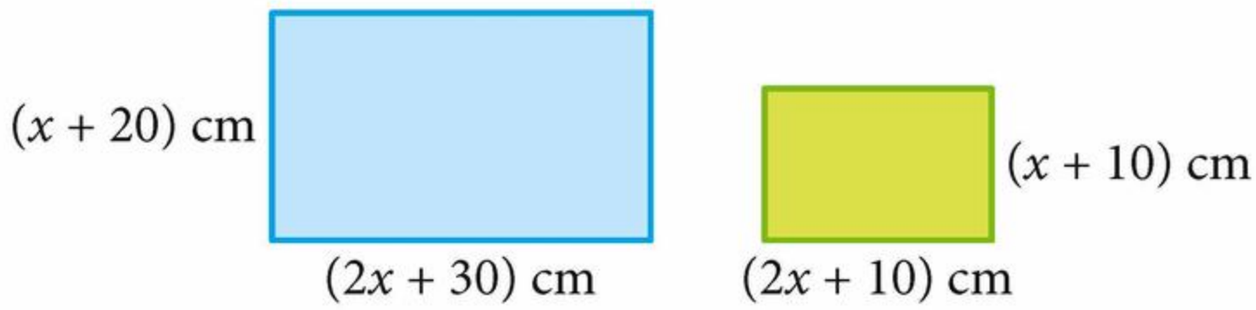
6. Najpopularniejszym drzewem leśnym w Polsce jest sosna. Lasy, w których dominuje ten gatunek, zajmują 58% powierzchni lasów w Polsce. Lasy z przewagą jodeł i świerków stanowią $\frac{1}{11}$ powierzchni polskich lasów, a pozostałe 30,5 tys. km^2 to lasy z przewagą drzew liściastych. Ile km^2 powierzchni zajmują lasy w Polsce? Ile to hektarów?



E **7.** W 2019 roku do szkół branżowych poszła $\frac{1}{7}$ absolwentów szkoły podstawowej, do liceów ogólnokształcących – połowa absolwentów, a do techników i szkół artystycznych poszło o około 50 tys. osób mniej niż do liceów ogólnokształcących. Ilu było wszystkich absolwentów klas ósmych?

8. Na wigilię u państwa Podarkowskich każdy uczestnik przygotowuje prezent dla każdego z pozostałych. Gdy prezenty były już gotowe, okazało się, że na wigilii będą cztery dodatkowe osoby. Z tego powodu liczba wszystkich prezentów wzrosła aż o 92. Ile osób będzie na wigilii?

9. Różnica pól prostokątów przedstawionych na rysunku wynosi 900 cm^2. Oblicz obwody tych prostokątów.



10. Dane są dwa czworokąty: prostokąt o wymiarach $(4x+1)$ cm $\times$ $(x+3)$ cm i kwadrat o boku $(2x+7)$ cm. Pole kwadratu jest o 91 cm^2 większe od pola prostokąta. Oblicz różnicę między obwodem kwadratu i obwodem prostokąta.

11. Z kwadratu $ABCD$ utworzono prostokąt $KLMN$, zwiększając jeden z boków o 3, a drugi zmniejszając o 2. Gdyby jednego boku kwadratu nie zmieniono, a drugi zwiększono o 1, powstałby inny prostokąt, o polu o 6 większym niż prostokąt $KLMN$. Co można powiedzieć o długości boku kwadratu $ABCD$?

12. Wśród podanych równań są dwa, które mają po dwa rozwiązania, jedno równanie z jednym rozwiązaniem oraz dwa równania, które nie mają rozwiązania. Podaj rozwiązanie każdego z równań.

I. $x^2 + x^2 = 32$ II. $3a^2 + 4 = 4$ III. $2b^2 + 5 = 3$

IV. $c^2 = 5$ V. $2x^2 - 3x^2 = 25$

13. Rozwiąż równanie. Pamiętaj, żeby podać wszystkie rozwiązania.

a) $2(x-1)(3-x)=8x-24$

b) $(2x-5)(2x+5)=x^2-28$

Dla dociekliwych

Trójkąty prostokątne, w których długości wszystkich boków wyrażone są liczbami naturalnymi, nazywamy **trójkątami pitagorejskimi**. Trzy długości boków trójkąta pitagorejskiego tworzą tzw. **trójkę pitagorejską**.
Przykłady trójek pitagorejskich:

3, 4, 5 5, 12, 13 6, 8, 10 7, 24, 25 8, 15, 17

Aby uzyskać trójkę pitagorejską a, b, c, możemy skorzystać ze wzorów:
$a=m^2-n^2$, $b=2mn$, $c=m^2+n^2$,
gdzie m i n są liczbami naturalnymi i $m>n$.

1. Korzystając z informacji podanej powyżej, wyznacz trójkę pitagorejską a, b, c dla:

a) $m=2$, $n=1$, **c)** $m=4$, $n=1$,

b) $m=3$, $n=2$, **d)** $m=4$, $n=3$.

Wyznacz kilka trójek pitagorejskich dla innych m i n.

2. Przygotuj arkusz kalkulacyjny pozwalający generować trójki pitagorejskie.

Czy już umiem?

I. Rozwiąż równanie.

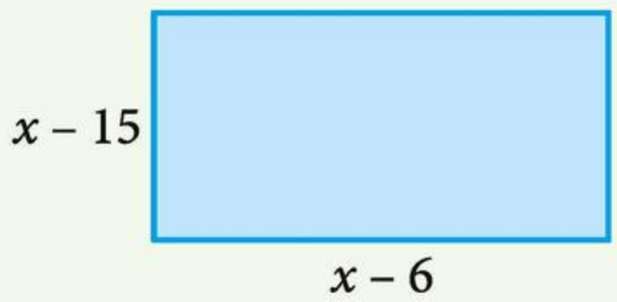
a) $2(x-1)+3x=4-(2-2x)$

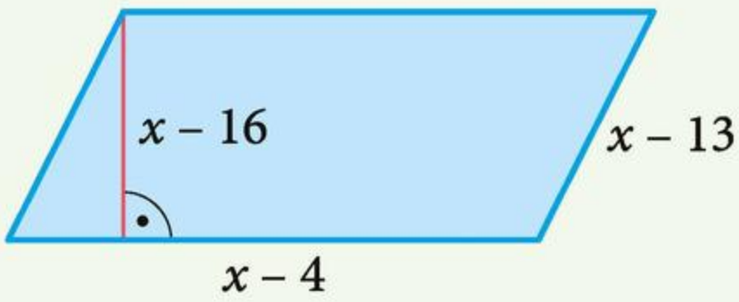
b) $1-\frac{x-2}{6}=-x+\frac{3(x-1)}{4}$

c) $2(x-1)(2x+3)=4x^2+5x-6$

d) $3(2x-2)-4=-6(4-x)+14$

II. Przedstawione na rysunku czworokąty: prostokąt i równoległobok, mają równe pola. Oblicz ich obwody.





III. Rozłóż na czynniki pierwsze liczbę 3528. Następnie doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie $\sqrt{3528}$.

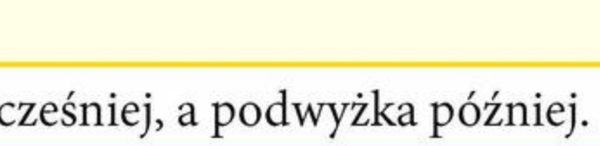
Powtórzenie II

ZESTAW 1

1. Wykonaj mnożenie. Jeżeli otrzymasz wyrazy podobne, zredukuj je.

a) $(a+2)(a-4)$ **b)** $(a-3)(a-5)$ **c)** $(a-2)(4a+3)$

2. Zapisz pole przedstawionego obok prostokąta w postaci wyrażenia algebraicznego, a następnie doprowadź to wyrażenie do jak najprostszej postaci.



3. Dane są wyrażenia: $A = 3x + 1$, $B = 2x^2 - 1$, $C = 5x$.
Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. Wyrażenie $A \cdot B$ jest równe $6x^3 + 2x^2 - 3x - 1$.
II. Wyrażenie $A \cdot C$ jest równe $8x + 1$.
III. Wyrażenie $(A + C) \cdot B$ jest równe $16x^3 + 2x^2 - 8x - 1$.

4. Cena skutera została obniżona o 30%, później jednak podniesiono ją o 40%. Jak zmieniła się początkowa cena? Wybierz odpowiedź I lub II i jej uzasadnienie spośród zdań A–C.

I.	Zwiększyła się,	ponieważ	A.	obniżka nastąpiła wcześniej, a podwyżka później.
II.	Zmniejszyła się,		B.	$1 - 0{,}3 + 0{,}4 = 1{,}1$.
			C.	$0{,}7 \cdot 1{,}4 = 0{,}98$.

5. W czasie inflacji cena złota wzrastała o 100% w ciągu każdego tygodnia. O ile procent wzrosła po czterech tygodniach?

6. Na szkolne przedstawienie charytatywne sprzedawano bilety normalne i ulgowe. Bilety normalne stanowiły $\frac{4}{7}$ wszystkich sprzedanych biletów, a ulgowych sprzedano o 11 mniej niż normalnych. Ile biletów sprzedano na przedstawienie?

7. Widzowie, którzy przyszli do kina na premierę najnowszego filmu, kupili łącznie 240 opakowań rodzynek w czekoladzie i orzeszków. Do kasy wpłynęło za te przekąski 1614 zł. Oblicz, ile opakowań poszczególnych przekąsek sprzedano, jeśli jedno opakowanie rodzynek kosztuje 5 zł, a jedno opakowanie orzeszków 8 zł.

8. Rozwiąż równanie.

a) $2x + x - 3 - 4x = 5x + 9$ **c)** $2x + 7(2 - x) = 3(2 - 2x) + x$
b) $x + 2(x - 5) = 7 - (x - 1)$ **d)** $4x - 2(x - 3) = x - (2x - 1) - 4$

9. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{4+x}{2} - x = 0$ **b)** $\frac{x-2}{5} = \frac{3+4x}{2}$ **c)** $3 - \frac{2x+7}{5} = 4$

ZESTAW 2

1. Wyrażenie $(x+3)(x-1)-(x+1)(x-3)$ można zapisać w postaci

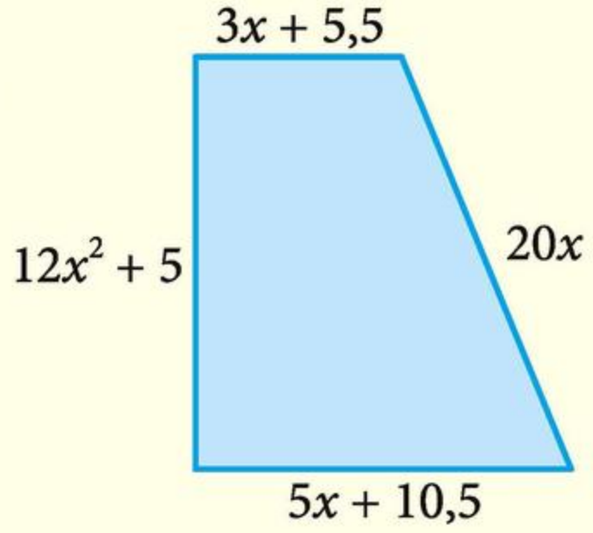
A. $2x^2-6$. **B.** $2x^2+4x$. **C.** $4x-6$. **D.** $4x$.

2. Uzasadnij, że wartość wyrażenia $(x-2)(x+1)-x(x+3)+4(x+5)$ nie zależy od tego, jaką liczbę wstawimy w miejsce x.

3. Na rysunku obok przedstawiono trapez prostokątny. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. Obwód trapezu jest równy $12x^2+28x+15$.

II. Pole trapezu jest równe $48x^3+96x^2+20x+40$.



4. Ile wynosi różnica między polem kwadratu o boku x cm i polem prostokąta, którego jeden bok jest o 2 cm dłuższy od boku kwadratu, a drugi o 3 cm krótszy od boku tego kwadratu?

5. Oblicz i uprość wynik.

a) $(2\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+2)$ **b)** $(2\sqrt{3}+1)(1-\sqrt{3})$ **c)** $(\sqrt{3}-2\sqrt{2})(\sqrt{2}-2\sqrt{3})$

6. Barbara jest trzy razy starsza od swojej córki Ani. Za 13 lat będzie od niej dwa razy starsza. Ile lat obecnie ma mama, a ile córka?

7. Gdy wśród mężczyzn modne stały się brody, cena akcji firmy produkującej maszynki do golenia spadła o 30%. Kiedy moda się zmieniła, cena tych akcji wzrosła o 20%. Po tych dwóch zmianach jedna akcja kosztuje o 48 zł mniej niż na początku. Jaka jest obecna cena jednej akcji?

8. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{3-x}{4}+\frac{2x+1}{3}=\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{x+1}{3}-3x=-(2-x)$ **c)** $14-\frac{8-12x}{4}=2(7-x)+6$

9. Rozwiąż równanie.

a) $x(x-4)+56=x^2$ **b)** $(x-1)(x+2)=(x+3)(x+4)$

10. Rozwiąż równanie.

a) $2x(5+x)-2=6(x-2)+2x^2$ **b)** $-x(x+4)+3=x(7-x)+5(x-9)$

11. Ile rozwiązań ma równanie $2x+3x(x-1)=(x-1)(3x+2)$?

A. ani jednego **B.** jedno **C.** dwa **D.** nieskończenie wiele

12. Jaką liczbą należy zastąpić ? w równaniu, aby rozwiązaniem tego równania była liczba 1?

a) $(x-1)(2-x)=2x-x^2+$? **b)** $x-2(3-x)+4=x-(3+$? $)$

Zadania na temat…

Trójkąt Pascala

Choć ten trójkątny układ liczb znany był już w XI w., dziś nazywamy go imieniem Blaise'a Pascala (czytaj: bleza paskala), francuskiego matematyka żyjącego w XVII w.



Blaise Pascal

Trójkąt ten przedstawiono na ilustracji poniżej. Powstaje on w następujący sposób:

- zapisujemy liczbę 1 – tworzy ona najwyższy, zerowy wiersz trójkąta,
- pod spodem zapisujemy pierwszy wiersz trójkąta składający się z dwóch liczb 1,
- w następnych wierszach na początku i na końcu stoi 1, a każda z pozostałych liczb jest sumą dwóch liczb sąsiadujących z nią w wierszu powyżej – na przykład czwórka zaznaczona na niebiesko to suma stojących powyżej liczb 1 i 3 (jak pokazują strzałki).

0							1							
1						1		1						
2					1		2		1					
3				1		3		3		1				
4			1		4		6		4		1			
5		1		5		10		10		5		1		
6	1		6		15		20		15		6		1	

Okazuje się, że trójkąt Pascala ma wiele ciekawych własności – niektóre z nich poznasz, rozwiązując zadania. Trójkąt ten ma także wiele ważnych zastosowań.

Zobaczmy na przykład, jak wygląda wyrażenie $(x+y)^3$ zapisane w postaci uporządkowanej sumy algebraicznej.

$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y)$

Po pomnożeniu kolejnych nawiasów, redukcji wyrazów podobnych i uporządkowaniu wyrazów w kolejności od największej do najmniejszej potęgi zmiennej x otrzymamy wyrażenie:

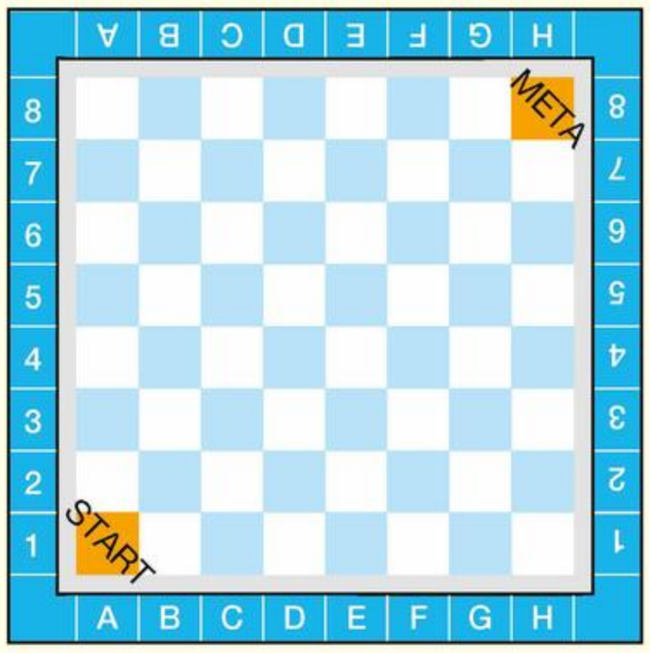
$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

Wykonaj opisane działania i sprawdź!

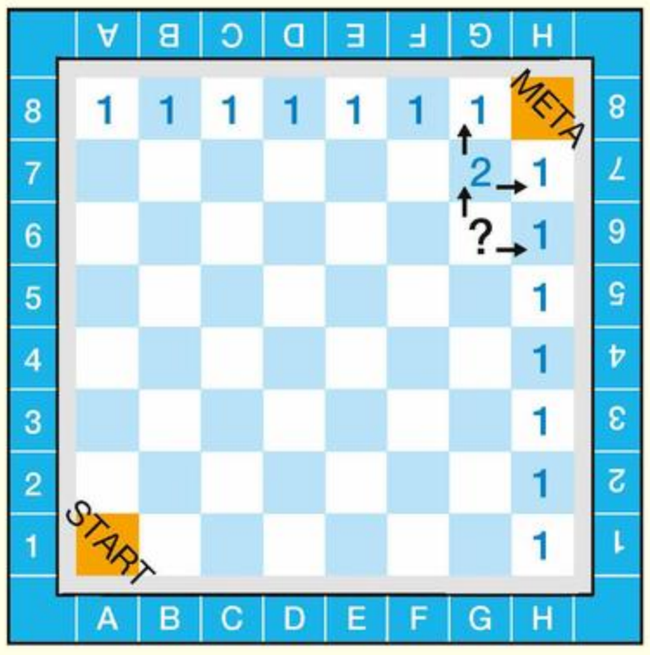
Kolejne współczynniki w tym wyrażeniu, czyli liczby 1, 3, 3, 1, stanowią trzeci wiersz trójkąta Pascala. Co ważniejsze, liczby w czwartym wierszu stanowią współczynniki wyrażenia otrzymanego analogicznie dla $(x+y)^4$ itd. – każdy kolejny wiersz wiąże się w opisany sposób z odpowiednią potęgą sumy $(x+y)$.

Jednak trójkąt Pascala pojawia się także w zupełnie innych sytuacjach. Jedną z nich jest następująca zagadka.

Ustawiamy pionek na polu START i przesuwamy go na pole META, przy czym możemy poruszać się tylko w górę lub w prawo. Na ile sposobów można przejść ze STARTU do METY?



Spróbujmy rozwiązać to zadanie od końca. Napiszmy na każdym polu, na ile sposobów można z niego dojść do mety. Z pól w najwyższym wierszu i prawej kolumnie można poruszać się tylko na jeden sposób, piszemy więc na nich „1”. Z pola z niebieską dwójką można pójść w prawo lub w górę, są więc dwie możliwości. A jak będzie na polu ze znakiem zapytania? Można pójść w górę (a stamtąd są jeszcze dwie drogi) albo w prawo (skąd jest jeszcze jedna droga), w sumie są więc trzy możliwości, zatem zamiast znaku zapytania powinniśmy napisać „3”. Gdy będziemy tak postępować dalej, okaże się, że liczby na szachownicy przypominają trójkąt Pascala, ale inaczej ułożony.



1. Przepisz do zeszytu trójkąt Pascala przedstawiony na s. 90 i dopisz do niego jeszcze dwa wiersze.
2. Oblicz sumy liczb w kolejnych wierszach trójkąta Pascala, tzn. 1, 1 + 1, 1 + 2 + 1 itd. Zapisz otrzymane wyniki po kolei. Co zauważasz?
3. Zaznacz na swoim trójkącie Pascala pętlami liczby podzielne przez 3. Jak są ułożone?
4. Zaznacz liczby podzielne przez 3 w trójkącie Pascala o 18 wierszach. Jak są ułożone?

   Uwaga. Tworząc ten trójkąt, możesz zamiast liczb zapisywać tylko ich reszty z dzielenia przez 3. Zastanów się, co zapisać pod 1 i 2, a co pod 2 i 2.
5. Poszukaj innych regularności w trójkącie Pascala.
6. Zapisz $(x+y)^4$ w postaci uporządkowanej sumy algebraicznej. Znasz już odpowiednie wyrażenie dla $(x + y)^3$, wystarczy więc, że pomnożysz je przez $(x+y)$. Przyjrzyj się współczynnikom przy x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3 i y^4. W którym wierszu trójkąta Pascala znajdziesz liczby równe tym współczynnikom?
7. Przerysuj szachownicę pokazaną na górze strony i dokończ opisane tam rozumowanie. Czy w zapisanych liczbach zauważasz trójkąt Pascala? Ile jest możliwych dróg ze startu do mety?

Zadania na deser

Podzielność liczb

Przeanalizuj rozwiązanie zadania.

> Uzasadnij, że liczba $2345 \cdot 364\,527$ jest podzielna przez 45.

Nie musimy obliczać iloczynu. Wystarczy, że zauważymy dwa fakty:

- liczba 2345 jest podzielna przez 5, więc można ją zapisać jako $5 \cdot a$, gdzie a oznacza liczbę naturalną,
- liczba 364 527 jest podzielna przez 9 (uzasadnij!), więc można ją zapisać jako $9 \cdot b$, gdzie b oznacza liczbę naturalną.

$$2345 \cdot 364\,527 = 5a \cdot 9b = 45 \cdot ab$$

Zatem rozważana liczba jest podzielna przez 45, bo można ją zapisać jako $45 \cdot ab$ i iloczyn ab jest liczbą naturalną.

1. Uzasadnij, że:

a) iloczyn $3\,798\,325 \cdot 3\,769\,232$ jest podzielny przez 100,
b) liczba $(37\,815)^2$ jest podzielna przez 25.

2. Czy wyrażenie $2x$ zawsze opisuje liczbę parzystą? Podaj taką wartość x, dla której $2x$ to liczba naturalna nieparzysta. Jaką liczbą musi być x, aby $2x$ było liczbą parzystą?

3. Niech n oznacza liczbę naturalną. Zapisz wyrażenie ze zmienną n, opisujące:

a) liczbę parzystą,
b) liczbę nieparzystą,
c) liczbę podzielną przez 3,
d) liczbę, która przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3.

Przeanalizuj rozwiązanie zadania.

> Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba K jest podzielna przez 5.
> $K = (4n - 1)(n - 2) + (4 - n)(2 - n)$

Zacznijmy od przekształcenia wyrażenia K:

$$K = (4n - 1)(n - 2) + (4 - n)(2 - n) = 4n^2 - 8n - n + 2 + 8 - 4n - 2n + n^2 =$$
$$= 5n^2 - 15n + 10$$

K jest sumą liczb podzielnych przez 5, więc jest podzielne przez 5.

4. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba postaci:

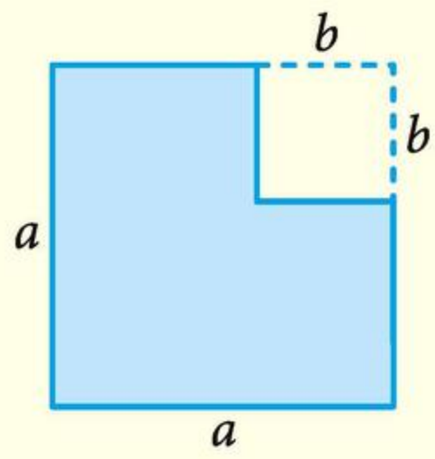
a) $(2n - 3)(n + 4) + (n - 3)(n + 2) - n$ jest podzielna przez 3,
b) $(3n - 4)(2n - 5) - (2n - 1)(5 - 2n)$ jest podzielna przez 5,
c) $(6n - 3)(n + 4) - (3n - 2)(2n - 1)$ jest podzielna przez 7.

5. **a)** Pewna liczba przy dzieleniu przez 8 daje resztę 3. Uzasadnij, że kwadrat tej liczby pomniejszony o 1 jest liczbą podzielną przez 8.
b) Pewna liczba przy dzieleniu przez 8 daje resztę 3. Uzasadnij, że kwadrat tej liczby przy dzieleniu przez 16 daje resztę 9.
c) Sumę kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych pomniejszono o 2. Uzasadnij, że otrzymana liczba jest podzielna przez 8.
d) Pewna liczba przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2. Uzasadnij, że podwojony kwadrat tej liczby przy dzieleniu przez 7 daje resztę 1.
e) Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 12 sumy kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych wynosi 11.

Wzory skróconego mnożenia w zadaniach i dowodach

6. Z dużego kartonowego kwadratu o boku a wycięto kwadratowy narożnik o boku b. Tak powstała niebieska figura widoczna na rysunku obok. Oblicz a i b, wiedząc, że są to liczby naturalne, a pole niebieskiej figury jest równe 21.

Uwaga. Zadanie ma dwa rozwiązania.

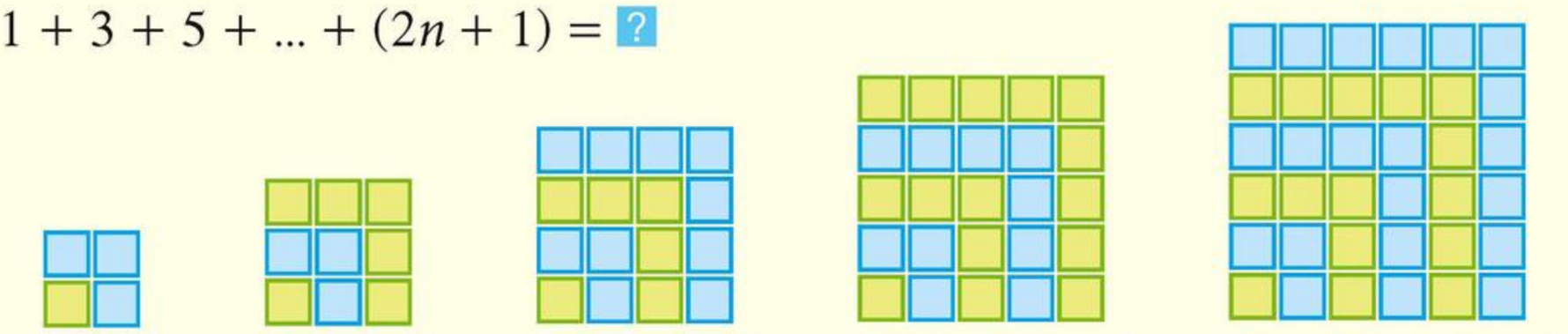


7. Udowodnij, że podane wyrażenie ma wartość nieujemną dla dowolnych wartości zmiennych. Czy zawsze jego wartość jest dodatnia?

a) $x^2 - 2xy + y^2$ **b)** $a^2 - 6a + 9$ **c)** $4b^2 - 12b + 9$ **d)** $4b^2 - 12b + 10$

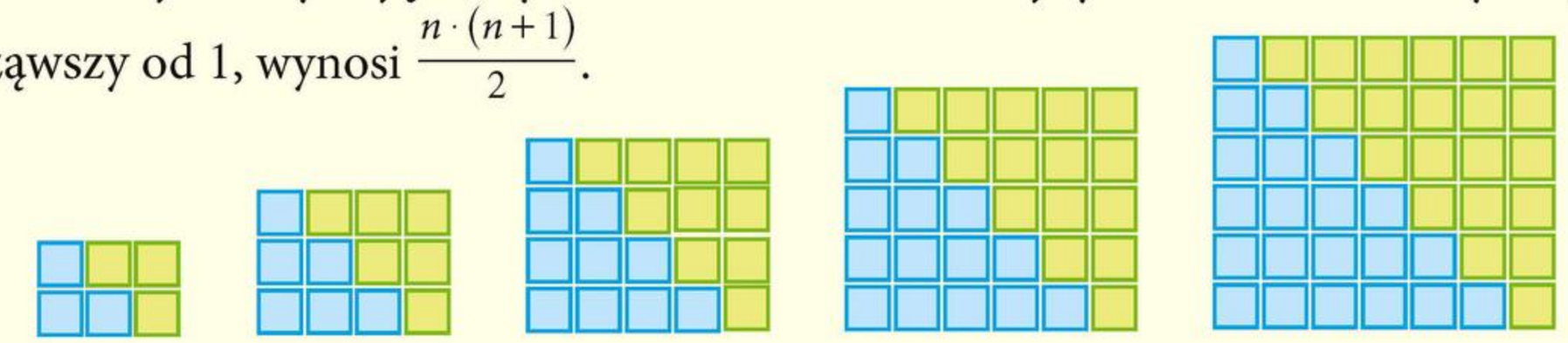
Algebra bez algebry

8. Spójrz na rysunki. Znajdź podaną sumę.
a) $1 + 3 + 5 + \ldots + 11 + 13 =$?
b) $1 + 3 + 5 + \ldots + 99 =$?
c) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) =$?



9. Uzasadnij na podstawie rysunków z poprzedniego zadania, że suma k kolejnych nieparzystych liczb naturalnych, począwszy od 1, jest równa k^2.

10. Uzasadnij, korzystając z rysunku, że suma n kolejnych liczb naturalnych, począwszy od 1, wynosi $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$.



1 Własności kątów

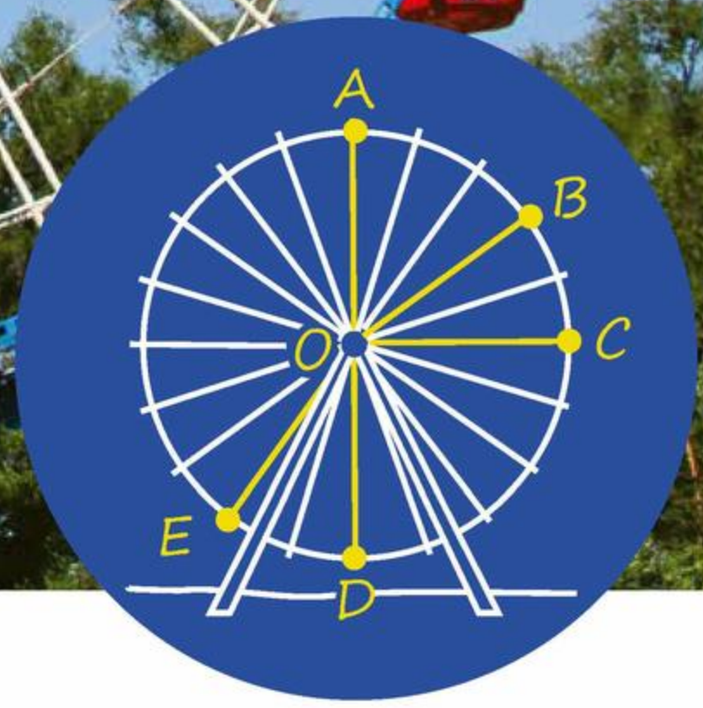
Na dobry początek ›

Diabelski młyn to ogromna karuzela. Wygląda jak wielkie koło, na którego obręczy są zamocowane w regularnych odstępach wagoniki.



Diabelski młyn stanowi znakomity punkt widokowy.

Ta karuzela ma 20 wagoników. Od każdego z nich do środka koła prowadzi stalowe ramię podtrzymujące obręcz.



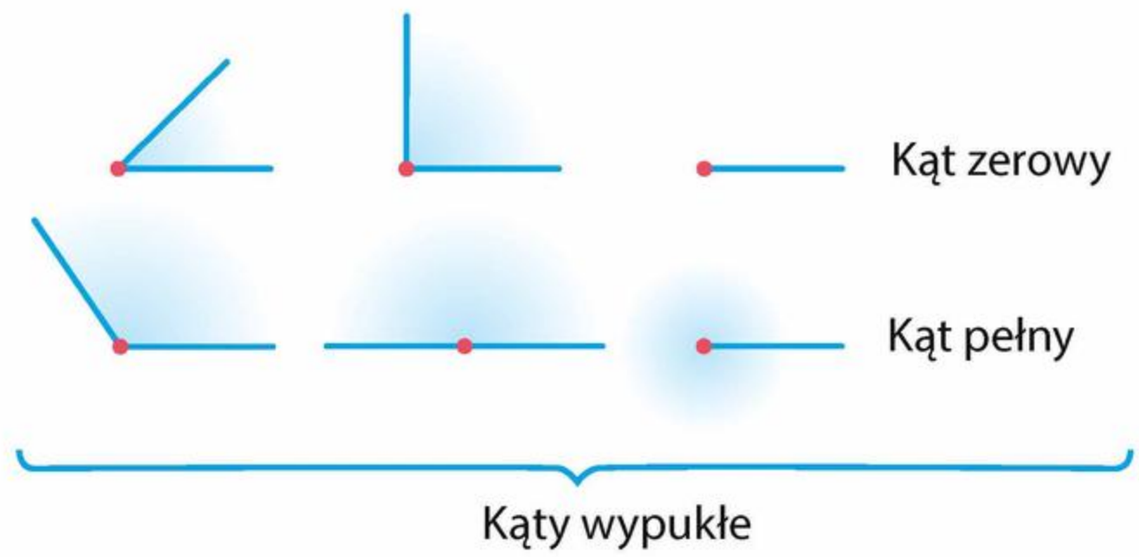
Pytania i polecenia

- Jaki kąt wyznaczają ramiona dwóch kolejnych wagoników karuzeli przedstawionej na rysunku?
- Końce pięciu ramion karuzeli i jej środek oznaczono literami. Które z tych ramion wyznaczają kąt prosty? Podaj nazwy tych kątów.
- Wskaż kąt między zaznaczonymi ramionami, którego miara jest większa od kąta półpełnego. Jak nazywamy taki kąt?

Przypomnimy teraz i uzupełnimy najważniejsze pojęcia oraz fakty związane z kątami. Będziemy z nich korzystać w kolejnych tematach.

Litery alfabetu greckiego:
α – alfa
β – beta
γ – gamma
δ – delta
ε – epsilon
φ – fi

Kąty wypukłe i wklęsłe

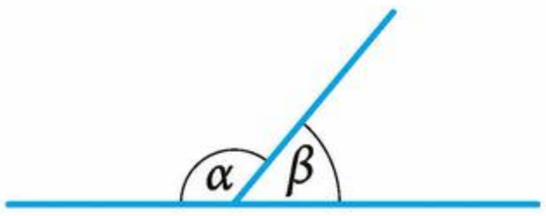




Kąt wklęsły ma miarę większą niż 180° i mniejszą niż 360°.

Kąty przyległe i wierzchołkowe

Kąty przyległe to kąty, które mają jedno ramię wspólne, a ich pozostałe ramiona tworzą prostą. Suma miar kątów przyległych wynosi 180°.



$\alpha + \beta = 180°$

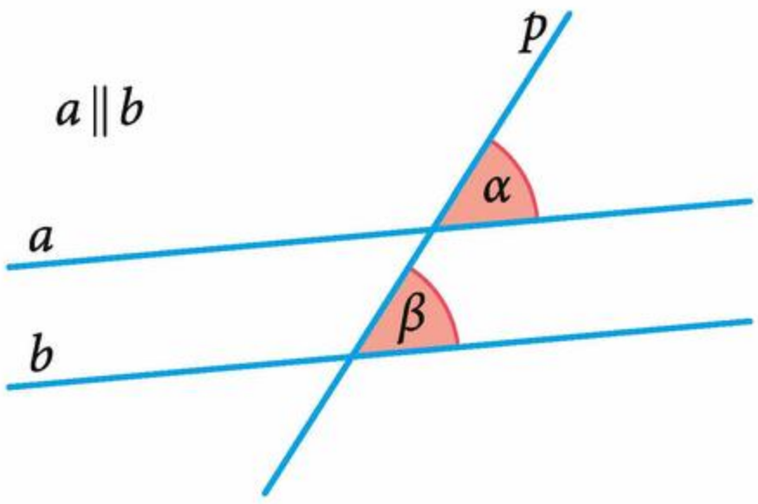
Kąty wierzchołkowe to kąty, których ramiona leżą na przecinających się prostych, a jedynym punktem wspólnym tych kątów jest ich wierzchołek. Kąty wierzchołkowe są równe.



$\gamma = \delta$

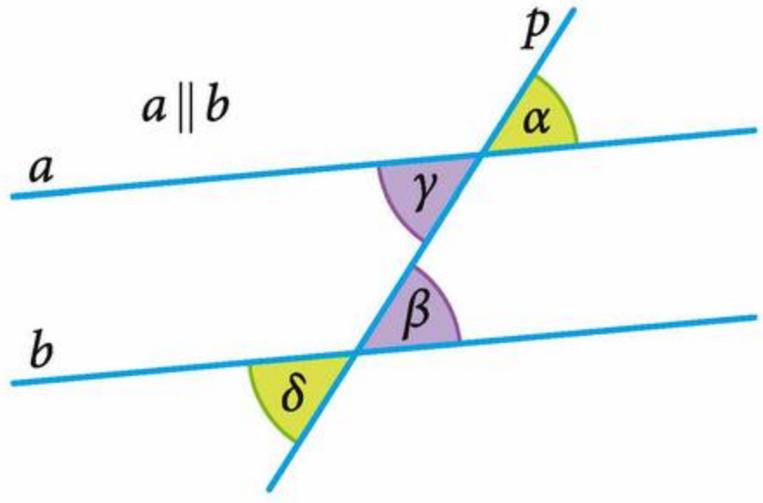
Kąty odpowiadające i naprzemianległe

Kąty odpowiadające



Kąty położone tak jak kąty α i β na powyższym rysunku nazywamy kątami odpowiadającymi.
Gdy proste a i b są równoległe, kąty odpowiadające są równe: $\alpha = \beta$.

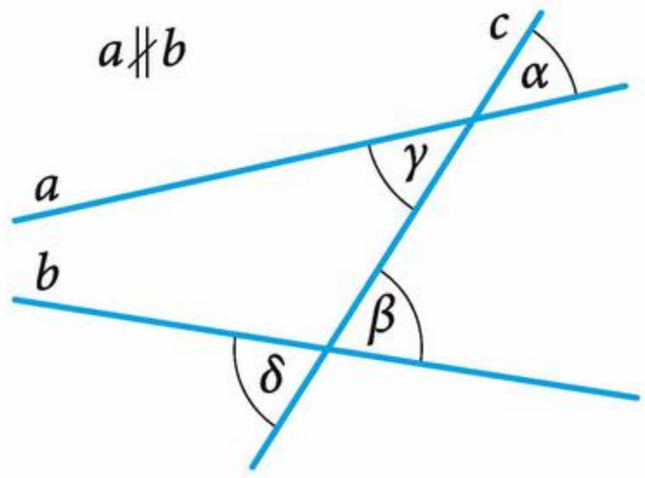
Kąty naprzemianległe



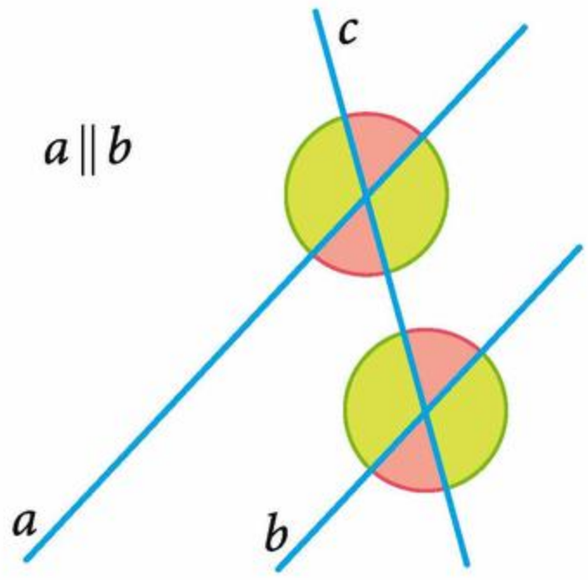
Kąty położone tak jak kąty γ i β oraz α i δ nazywamy kątami naprzemianległymi. Gdy proste a i b są równoległe, kąty naprzemianległe są równe: $\gamma = \beta$, $\alpha = \delta$.

Zauważmy, że jeśli proste a i b nie są równoległe, to równość odpowiednich kątów nie zachodzi.

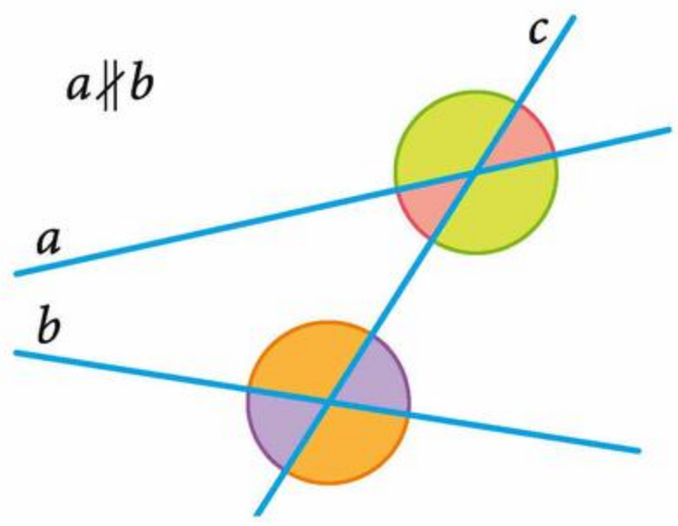
$$\alpha \neq \beta,\ \gamma \neq \beta,\ \alpha \neq \delta$$



Mamy więc dwie możliwe sytuacje.



Proste a i b są równoległe i przecina je trzecia prosta:
otrzymujemy osiem kątów, wśród których po cztery kąty są równe.



Proste a i b nie są równoległe i przecina je trzecia prosta:
otrzymujemy osiem kątów, wśród których równe są tylko kąty wierzchołkowe.

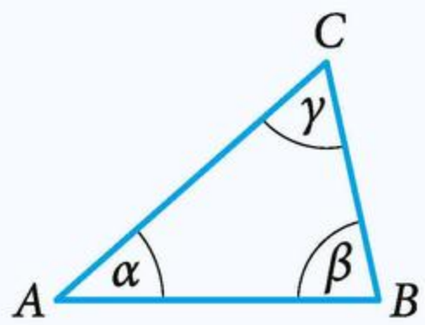
Kąty w trójkącie

Zapamiętaj

Twierdzenie o sumie miar kątów trójkąta

Suma miar kątów trójkąta jest równa 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

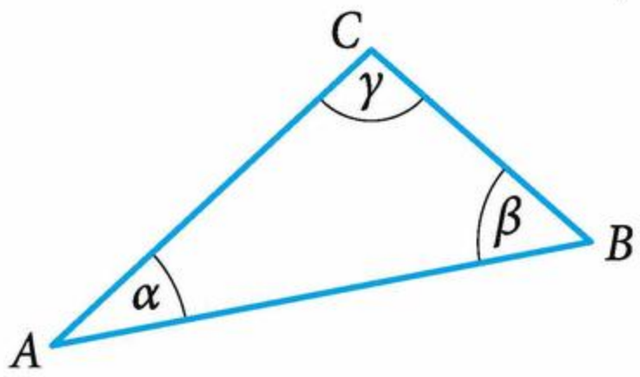


To twierdzenie znasz od dawna, ale czy umiesz udowodnić, że jest prawdziwe? Zauważ, że nie wystarczy zmierzenie kątów w przykładowych trójkątach. Nie jesteśmy w stanie sprawdzić każdego trójkąta, musimy więc przeprowadzić ogólne rozumowanie dotyczące wszystkich trójkątów.

Przykład 1

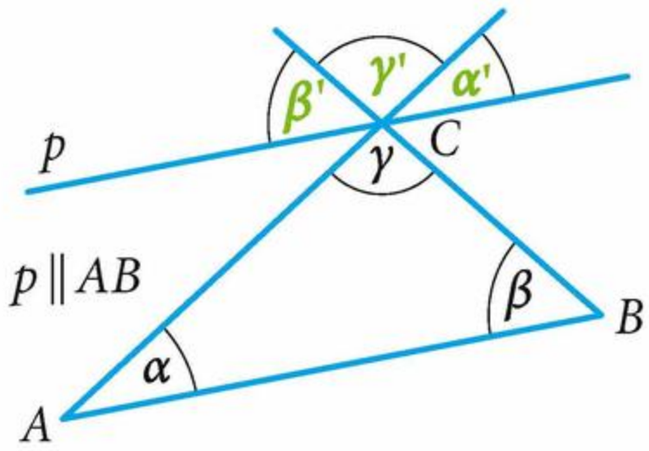
Udowodnij twierdzenie o sumie miar kątów trójkąta.

Narysujmy trójkąt i oznaczmy miary jego kątów literami α, β i γ. Mamy przeprowadzić rozumowanie, w wyniku którego otrzymamy równość $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.



Twierdzenie mamy udowodnić dla wszystkich trójkątów, więc rysunek nie powinien przedstawiać jakiegoś szczególnego rodzaju trójkąta, np. prostokątnego albo równoramiennego.

Przedłużamy boki AC i BC i rysujemy prostą równoległą do boku AB przechodzącą przez wierzchołek C. W ten sposób pojawia się kilka nowych kątów.



Kąty w trójkącie wydają się niepowiązane ze sobą. Jednak na rysunku obok możemy znaleźć kąty równe oraz kąty o wspólnym wierzchołku – to ułatwi nam szukanie ich sumy.

Zauważamy, że:

$\alpha' = \alpha$ ← bo są to kąty odpowiadające

$\beta' = \beta$ ← bo są to kąty odpowiadające

$\gamma' = \gamma$ ← bo są to kąty wierzchołkowe

Zapisujemy, z jakich faktów korzystamy.

Ponadto kąty α', β' i γ' tworzą razem kąt półpełny, wobec tego:

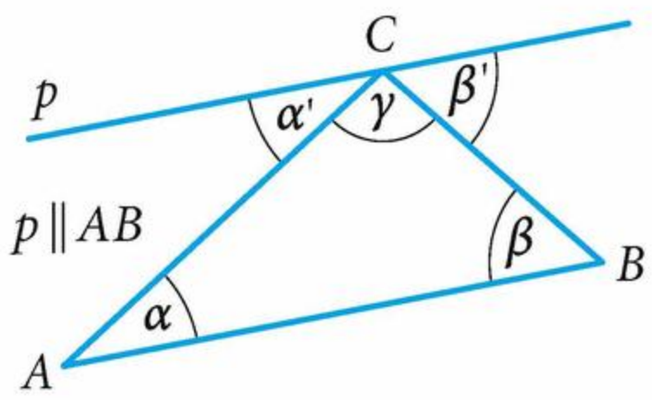
$\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma' = 180°$,

co było do udowodnienia.

W zadaniach typu „Udowodnij" nie ma pytania, więc rozwiązania nie kończymy odpowiedzią. Koniec naszego rozumowania podkreślamy stwierdzeniem typu: „co było do udowodnienia", „co należało udowodnić".

Ćwiczenie 1.1

Prosta p na rysunku obok jest równoległa do boku AB trójkąta ABC. Udowodnij twierdzenie o sumie miar kątów trójkąta, korzystając z tego rysunku.



Ćwiczenie 1.2

Udowodnij, że suma miar kątów ostrych w trójkącie prostokątnym wynosi 90°.

Twierdzenie o sumie miar kątów dotyczy **wszystkich** trójkątów. W niektórych szczególnych trójkątach można znaleźć dodatkowe zależności. Jedną z nich opisaliśmy w ćwiczeniu 1.2.

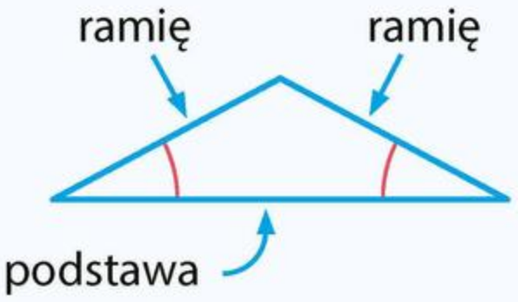
Zapamiętaj

Suma miar kątów ostrych w trójkącie prostokątnym wynosi 90°.

Kolejna zależność dotyczy trójkątów równoramiennych. Znasz ją od dawna, a udowodnimy ją w przykładzie 2.1 na s. 152.

Zapamiętaj

Kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego mają równe miary.



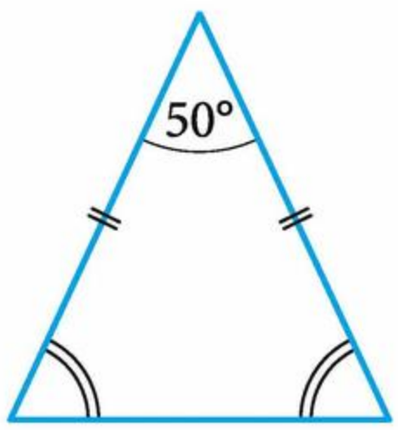
Przykład 2

Jeden z kątów trójkąta równoramiennego ma miarę $50°$. Jakie miary mają pozostałe kąty tego trójkąta?

Nie wiemy, czy podaną miarę ma kąt między ramionami, czy kąt przy podstawie, dlatego musimy rozważyć dwa przypadki.

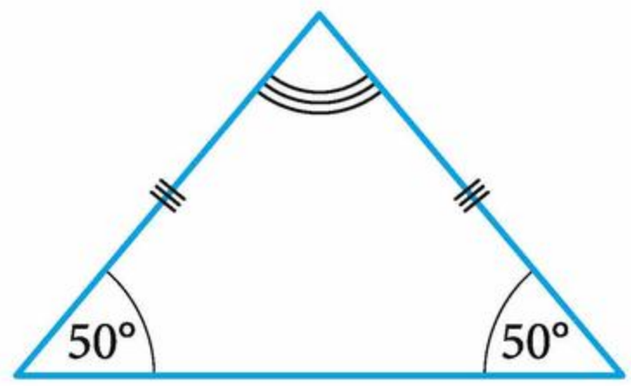
Na rysunkach zaznaczamy w jednakowy sposób równe boki i równe kąty.

I. Kąt między ramionami ma miarę $50°$.



Kąty przy podstawie są równe, a ich suma wynosi $180° - 50° = 130°$, więc każdy z nich ma $65°$.

II. Każdy z dwóch kątów przy podstawie ma miarę $50°$.



Trzeci kąt ma miarę $180° - 2 \cdot 50° = 80°$.

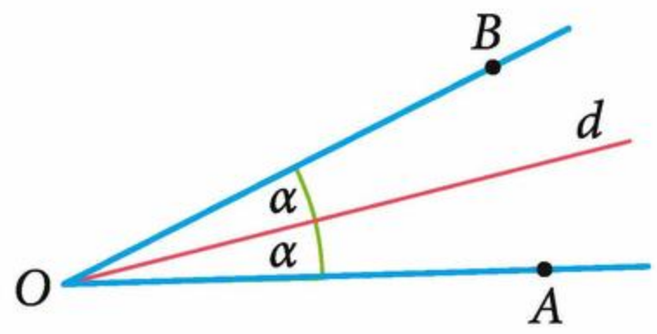
Odp. Pozostałe kąty trójkąta mają miary $65°$ i $65°$ lub $50°$ i $80°$.

Ćwiczenie 2

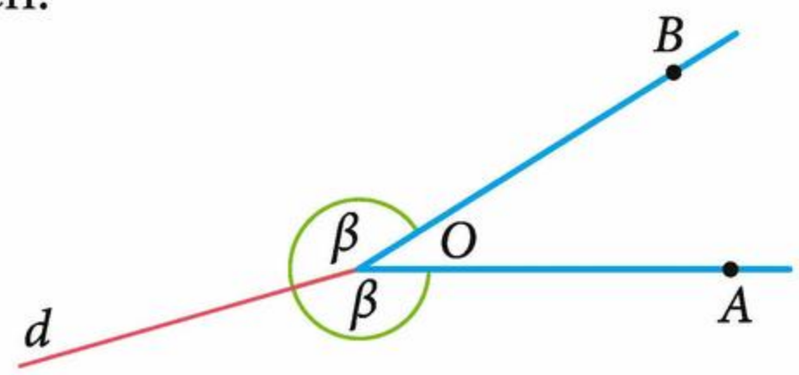
Jeden z kątów trójkąta równoramiennego ma miarę $120°$. Jakie miary mają pozostałe kąty tego trójkąta? Ile rozwiązań ma to zadanie? Dlaczego?

Dwusieczna kąta

Dwusieczną kąta nazywamy półprostą o początku w wierzchołku kąta, która dzieli ten kąt na dwa kąty o równych miarach.



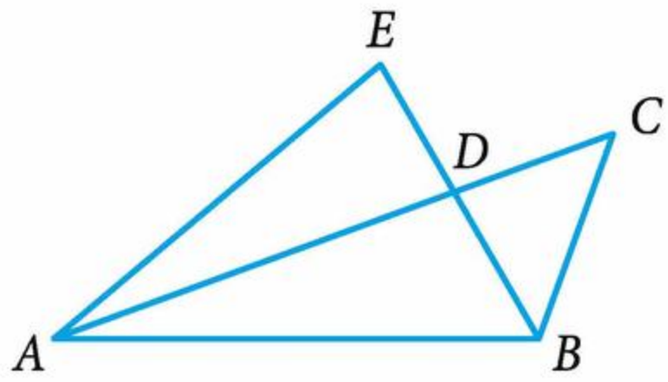
dwusieczna kąta ostrego *AOB*



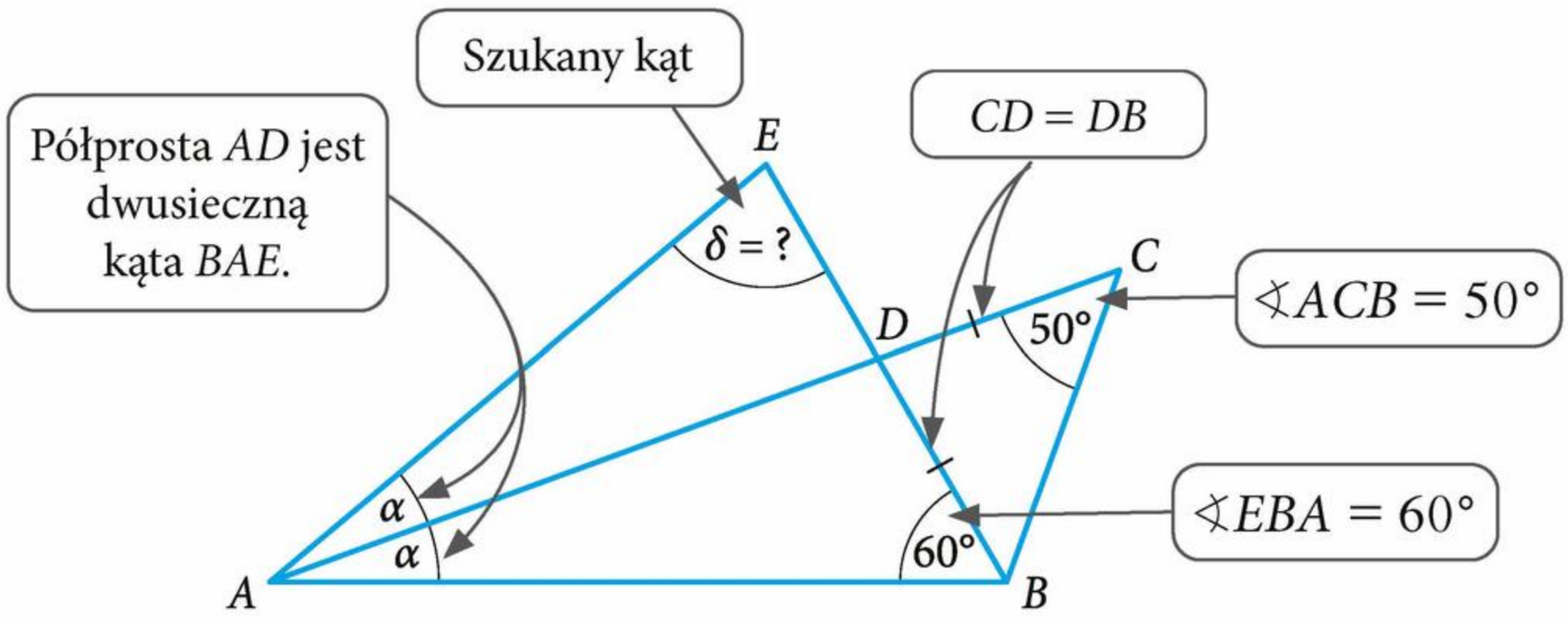
dwusieczna kąta wklęsłego *AOB*

Przykład 3

Trójkąty ABC i ABE są położone jak na rysunku. Półprosta AD jest dwusieczną kąta BAE. Oblicz miarę kąta AEB, wiedząc, że $\sphericalangle EBA = 60°$, $\sphericalangle ACB = 50°$ oraz $CD = DB$.



Zaznaczamy na rysunku wszystkie informacje podane w zadaniu. Oznaczamy też wielkości, które mamy znaleźć.



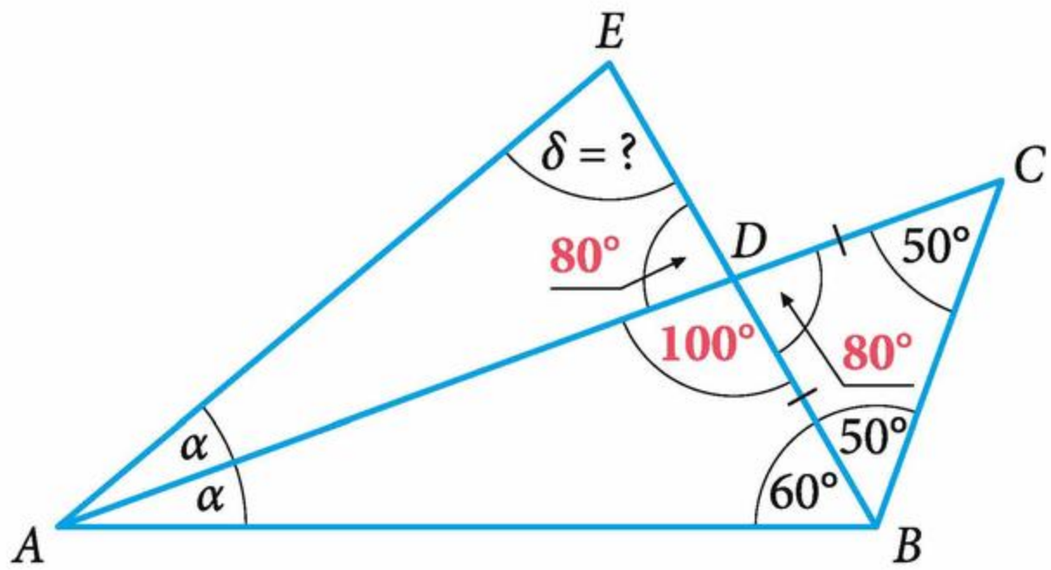
$CD = DB$, czyli trójkąt BDC jest równoramienny i umiemy obliczyć miary wszystkich jego kątów:

$\sphericalangle DBC = 50°$, $\sphericalangle BDC = 180° - 2 \cdot 50° = 80°$.

Kąty BDC i ADE są wierzchołkowe, więc $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BDC = 80°$.

Kąty BDC i ADB są przyległe, więc $\sphericalangle ADB = 180° - \sphericalangle BDC = 180° - 80° = 100°$.

Nie obliczymy od razu szukanego kąta, ale możemy obliczyć miary innych kątów i te wyniki wykorzystać do znalezienia rozwiązania.



Kolejno obliczane miary kątów zapisujemy na rysunku. Zauważ, że musi on być wystarczająco duży, aby dopisywane informacje były czytelne.

Aby obliczyć miarę kąta AEB, musimy jeszcze znaleźć miarę kąta α. Możemy skorzystać z sumy miar kątów trójkąta ABD (lub trójkąta ABC).

$\alpha = 180° - 100° - 60° = 20°$ ← z sumy miar kątów trójkąta ABD

$\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAE = 20°$ ← bo AD jest dwusieczną

$\sphericalangle AED = 180° - 80° - 20° = 80°$ ← z sumy miar kątów trójkąta ADE

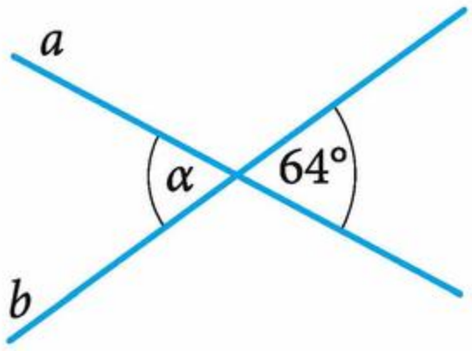
Odp. Kąt AEB ma miarę $80°$.

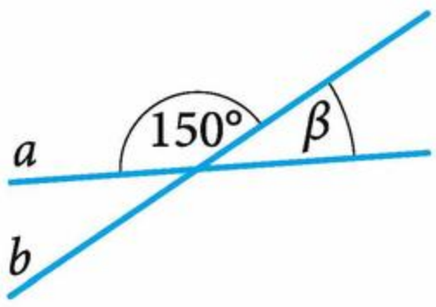
Ćwiczenie 3

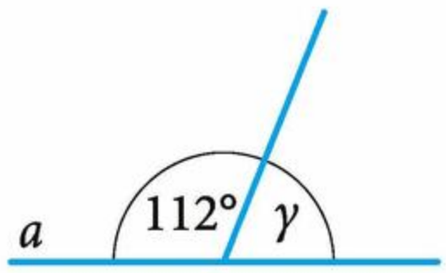
Rozwiąż przykład 3 innym sposobem, bez obliczania kątów o wierzchołku D. Zacznij od wyznaczenia miary kąta CBD, a następnie skorzystaj z sumy miar kątów trójkąta ABC.

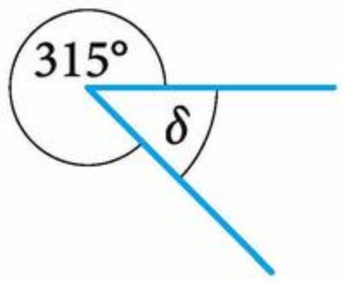
Zadania

1. Wyznacz miary kątów α, β, γ i δ.

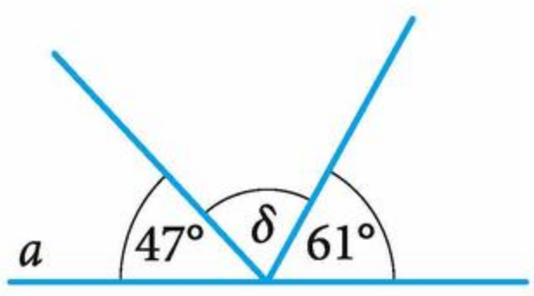


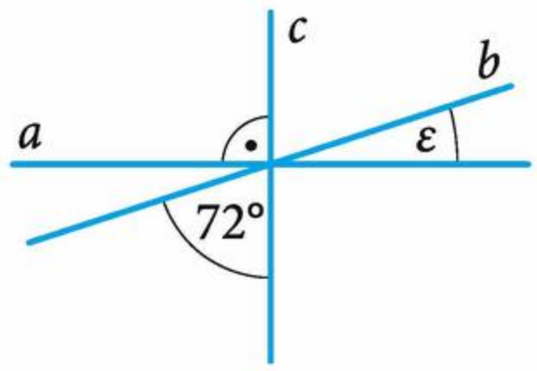


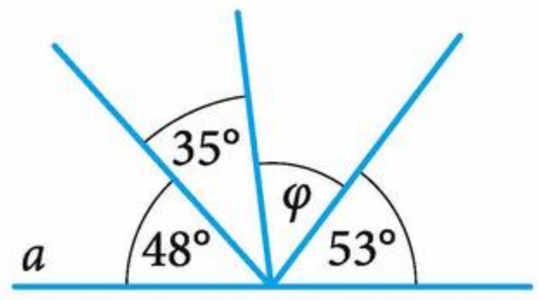




2. Wyznacz miary kątów δ, ε i φ.

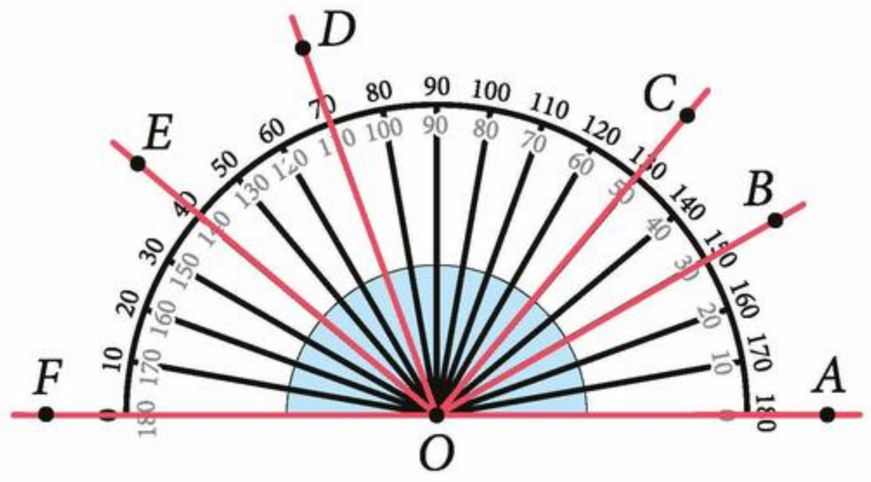






3. Podaj miary wymienionych kątów.

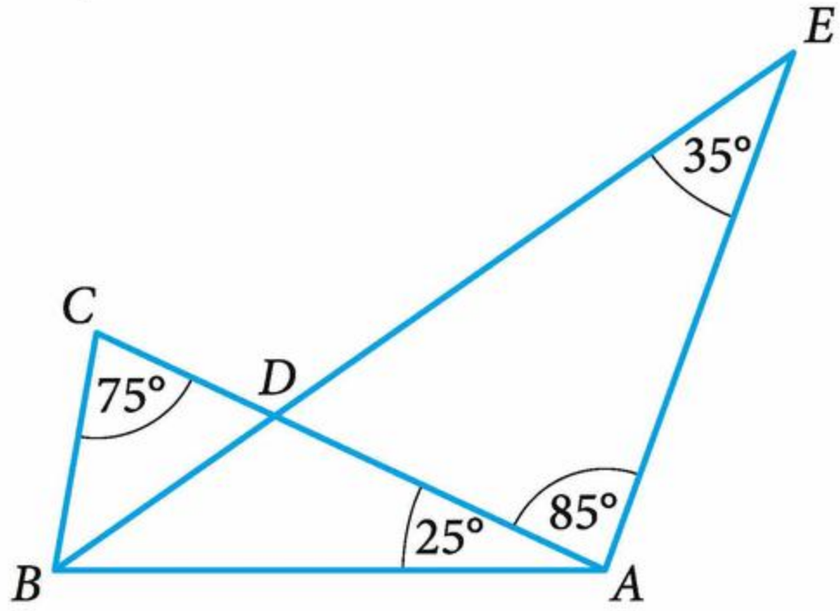
a) kąt wklęsły AOB i kąt wypukły AOB
b) kąt wklęsły BOC i kąt wypukły BOC
c) kąt wklęsły BOE i kąt wypukły BOE
d) kąt AOF



4. Dane są dwa spośród trzech kątów trójkąta. Ustal, czy jest to trójkąt ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny. Czy jest to trójkąt równoramienny?

a) 37°, 53° **b)** 18°, 61° **c)** 67°, 46°

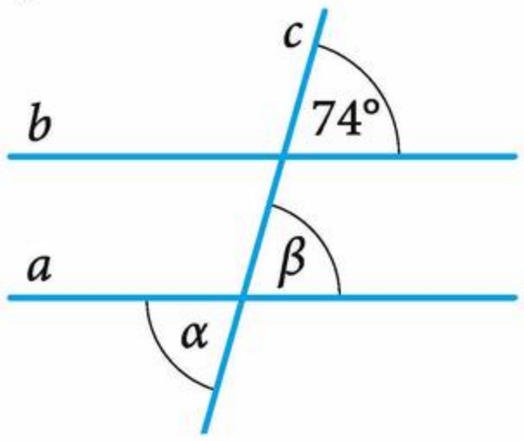
5. Przekątne prostokąta $ABCD$ przecinają się w punkcie P. Miara kąta APB jest równa 137°. Podaj miarę kąta wypukłego:
a) CPD, **b)** APD.



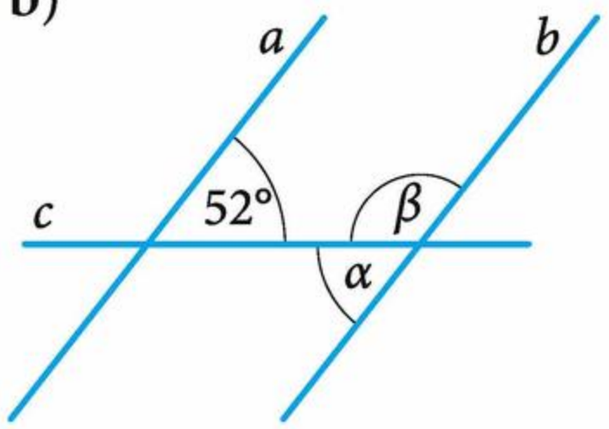
6. Dane są trójkąty ABC i ABE położone jak na rysunku. Wyznacz miary kątów wypukłych CBA, EBA i CBD.

7. Proste a i b są równoległe. Podaj miary kątów α i β.

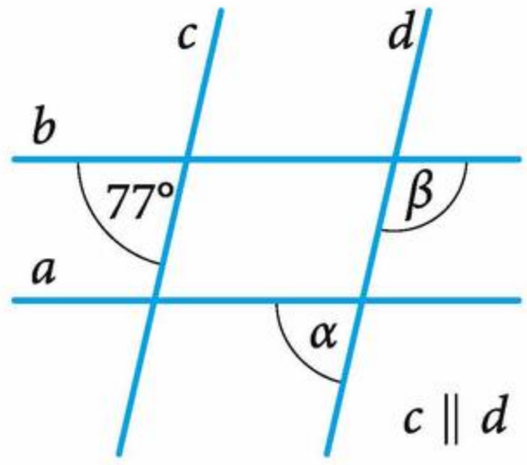
a)



b)

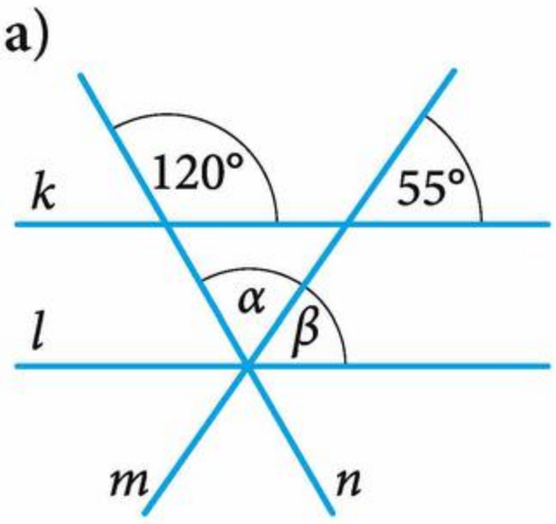


c)

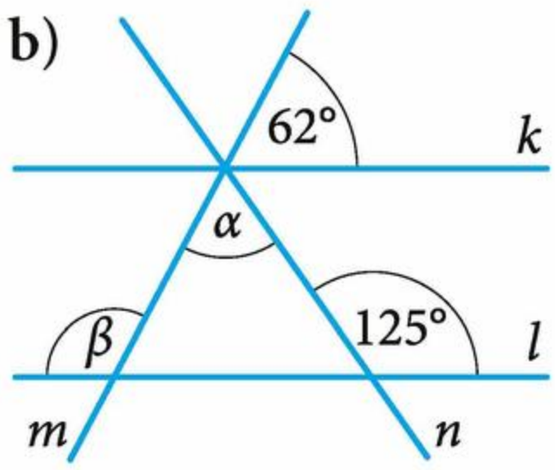


8. Proste k i l są równoległe. Podaj miary kątów α i β.

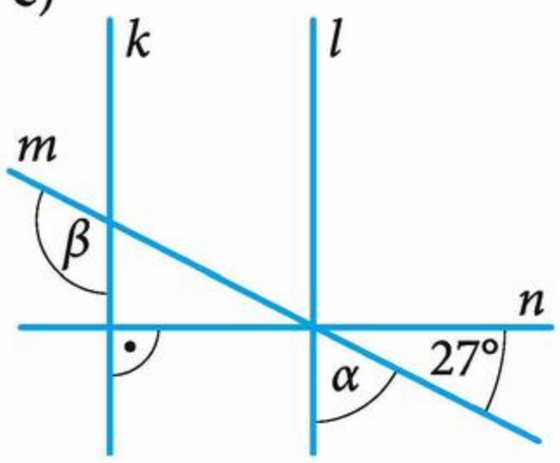
a)



b)

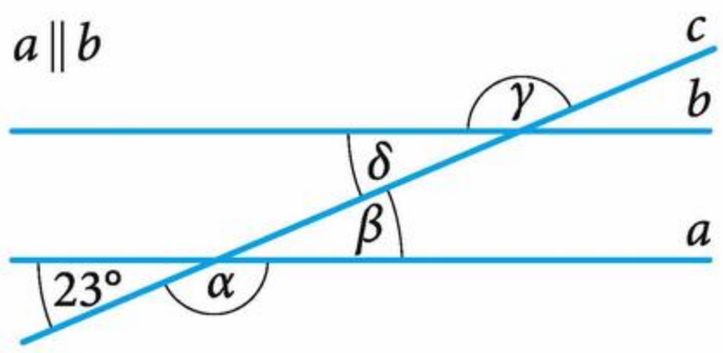


c)

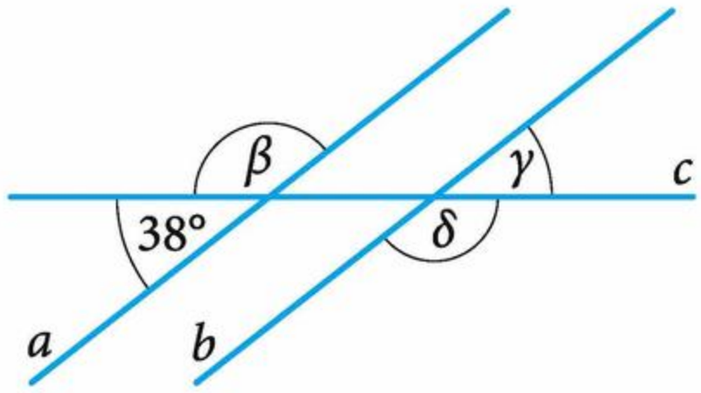


9. Oblicz te miary kątów oznaczonych literami greckimi, które można wyznaczyć na podstawie danych z rysunku. Pamiętaj, że proste możesz uznać za równoległe tylko wtedy, gdy ta informacja została podana.

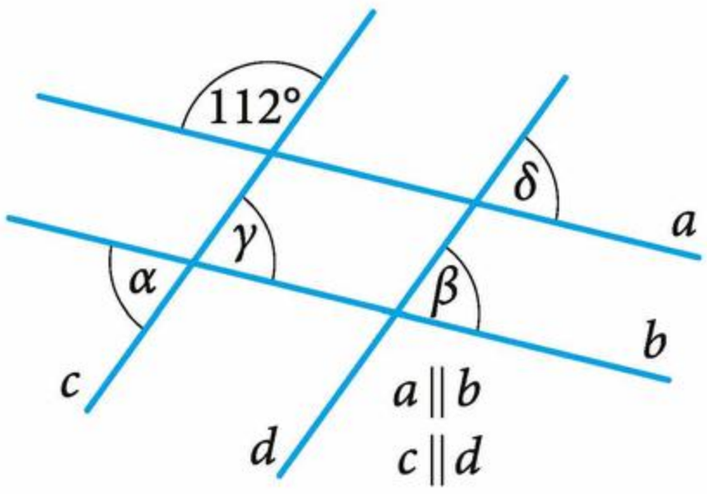
a)



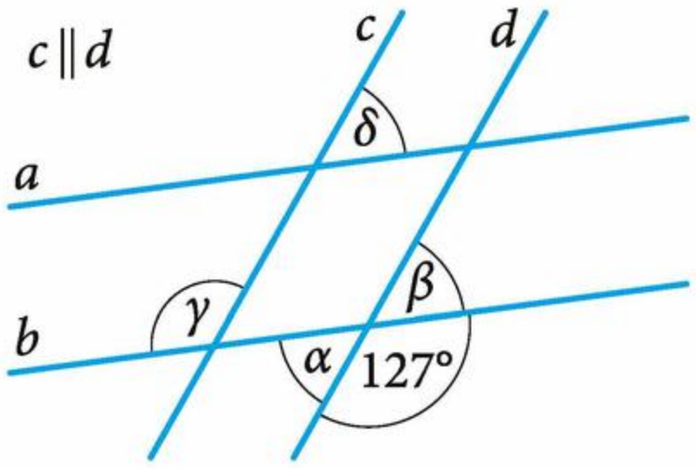
c)



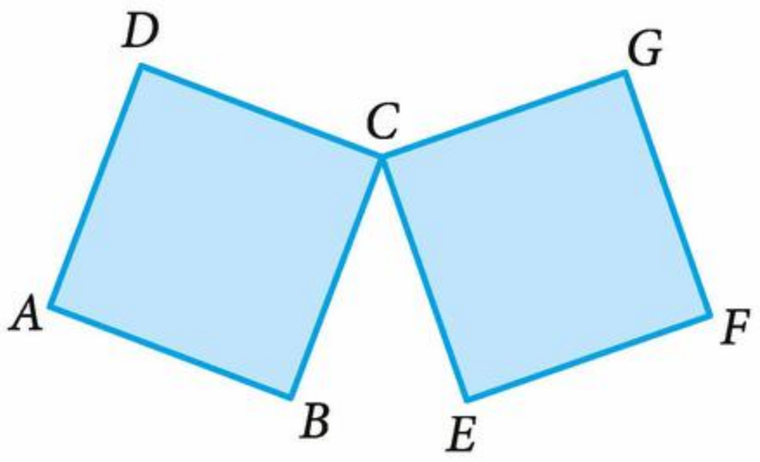
b)



d)

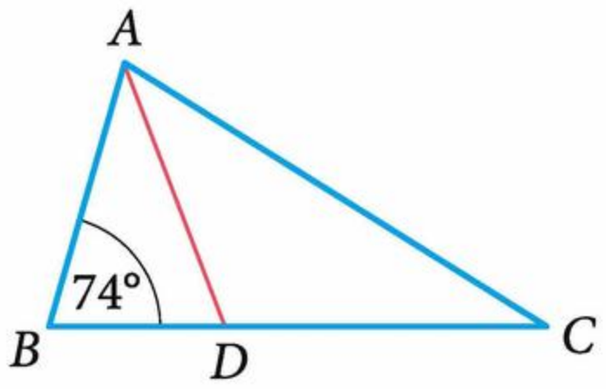


E **10.** Kwadraty $ABCD$ i $EFGC$ mają równe boki i są położone jak na rysunku obok. Wierzchołki B i E oraz D i G połączono odcinkami. Kąt CBE ma $70°$. Oblicz miarę kąta CDG.

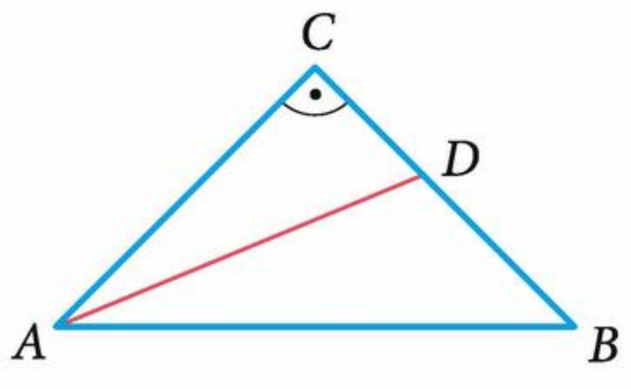


11. Trójkąt ABC jest trójkątem równoramiennym, w którym $AC = BC$. Odcinek AD jest zawarty w dwusiecznej kąta BAC. Oblicz miary kątów trójkąta ABD.

a)



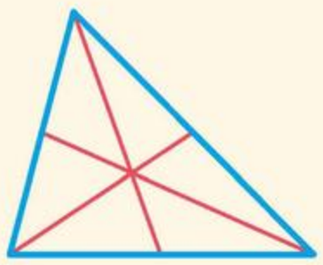
b)



12. **a)** Jeden z kątów trójkąta równoramiennego ma $100°$. Dwusieczne kątów dzielą ten trójkąt na sześć trójkątów. Oblicz miary kątów tych trójkątów.

b) Dwa kąty w trójkącie mają $40°$ i $60°$. Dwusieczne kątów dzielą ten trójkąt na sześć trójkątów. Oblicz miary kątów tych trójkątów. Czy wśród tych trójkątów są trójkąty równoramienne? Ile ich jest?

W każdym trójkącie dwusieczne trzech jego kątów przecinają się w jednym punkcie.



13. Wewnątrz kwadratu $ABCD$ umieszczono punkt E tak, że trójkąt ABE jest równoboczny. Oblicz miary kątów trójkąta CDE.

Dla dociekliwych

Sfera to powierzchnia kuli. Jaka figura na sferze może odpowiadać odcinkowi? Powinna to być najkrótsza linia łącząca dwa punkty.

Wyobraź sobie dwa punkty na kuli ziemskiej. Jeśli leżą one na tym samym południku, najkrótszą linią, która je łączy na sferze, jest fragment tego południka. Podobnie jeśli dwa punkty leżą na równiku, to najkrótszą linią je łączącą jest fragment równika.



Ale dla punktów leżących na tym samym równoleżniku, który nie jest równikiem, jest już inaczej. Najłatwiej to zaobserwować w okolicach bieguna. Najkrótsza linia na sferze łącząca czerwone punkty nie biegnie wzdłuż równoleżnika, lecz przez biegun.



1. Wyobraź sobie, że stoisz na równiku i patrzysz przed siebie na wschód (wzdłuż równika). Następnie obracasz się i patrzysz przed siebie na północ, czyli wzdłuż południka. O jaki kąt się obracasz? Ten kąt to kąt między równikiem i południkiem.



2. Wyobraź sobie, że stoisz na biegunie północnym twarzą do południka 0°. Następnie obracasz się w lewo i stajesz twarzą do południka 25° długości geograficznej wschodniej. O jaki kąt się obracasz? Jaki jest kąt między południkami 0° i 25°?



3. Trójkąt sferyczny to figura, której wierzchołkami są trzy punkty na sferze, a bokami najkrótsze linie łączące te punkty. Wyobraźmy sobie trójkąt sferyczny na powierzchni kuli ziemskiej o następujących wierzchołkach: biegun północny, punkt leżący na równiku i południku 0°, punkt leżący na równiku i południku 90° długości geograficznej wschodniej. Bokami tego trójkąta są odpowiednie fragmenty południków i fragment równika.

a) Jaki kąt w tym trójkącie tworzy równik z dowolnym południkiem?
b) Jaki kąt w tym trójkącie tworzą na biegunie północnym południki 0° i 90°?
c) Jaka jest suma miar kątów tego trójkąta sferycznego?

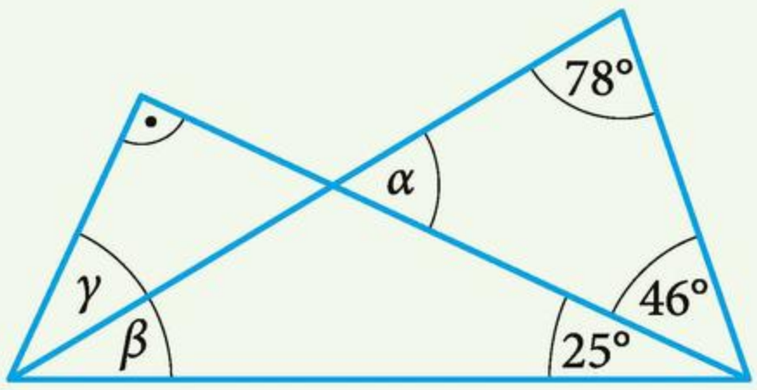
Czy już umiem?

I. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

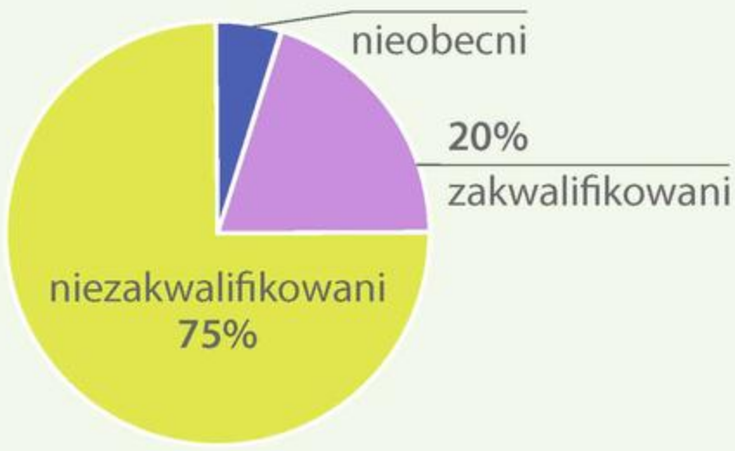
1. Dwa kąty ostre mogą być kątami przyległymi.
2. Dwie proste równoległe przecina trzecia prosta. Wśród powstałych kątów mogą być kąty o miarach 75° i 175°.
3. Kąt przy podstawie trójkąta równoramiennego może mieć miarę 95°.
4. Kąt przy podstawie trójkąta równoramiennego może mieć miarę 85°.

II. Trójkąt równoboczny rozcięto na dwa trójkąty. Najmniejszy kąt w jednym z powstałych trójkątów ma miarę 10°. Oblicz miary kątów drugiego trójkąta.

III. Wyznacz miary kątów α, β i γ położonych jak na rysunku obok.



IV. Na lekcjach WF wszyscy uczniowie klas ósmych, z wyjątkiem czworga nieobecnych, przystąpili do testu sprawnościowego kwalifikującego do udziału w zawodach lekkoatletycznych. Wyniki przedstawiono na diagramie. Ilu uczniów brało udział w tym teście?



2 Kąty – zadania

Na dobry początek >

Figury geometryczne interesują nie tylko matematyków. Kolorowe płytki o geometrycznych kształtach można ułożyć w piękne mozaiki, które stanowią ozdobę niejednego wnętrza.



Oto przykłady wzorów, które można uzyskać, wykorzystując płytki w kształcie rombu.



dwa rodzaje płytek: kwadraty i romby niebędące kwadratami



jeden rodzaj płytek: romby niebędące kwadratami



jeden rodzaj płytek: romby niebędące kwadratami

Pytania i polecenia

- Przyjrzyj się płytkom na pokazanych mozaikach.
  Czy aby ułożyć takie wzory, można użyć płytek o dowolnych kątach?

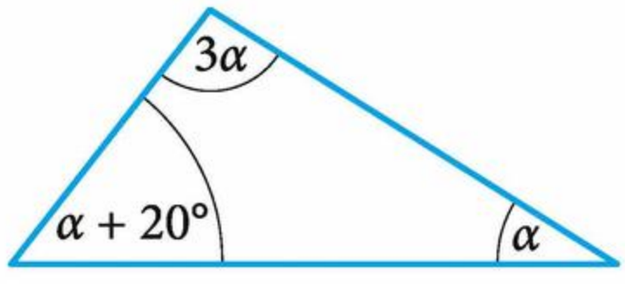
Do rozwiązywania zadań geometrycznych możemy wykorzystać równania.

Przykład 1

E

Najmniejszy kąt trójkąta jest o $20°$ mniejszy od drugiego kąta i trzy razy mniejszy od trzeciego. Oblicz miary kątów tego trójkąta.

Wykonujemy rysunek. Miarę najmniejszego kąta oznaczamy literą α.



Korzystając z przyjętego oznaczenia, zapisujemy na rysunku informacje dane w zadaniu.

Układamy równanie, korzystając z twierdzenia o sumie miar kątów trójkąta, i je rozwiązujemy.

$\alpha + (\alpha + 20°) + 3\alpha = 180°$ ← suma miar kątów trójkąta

$5\alpha + 20° = 180°$ $\quad | - 20°$ ← od obu stron równania odejmujemy $20°$

$5\alpha = 160°$ $\quad | : 5$

$\alpha = 32°$

Obliczamy miary pozostałych kątów trójkąta:

$32° + 20° = 52°, \quad 32° \cdot 3 = 96°.$

Odp. Trójkąt ma kąty o miarach $32°$, $52°$ i $96°$.

Sprawdzenie:
Suma obliczonych miar kątów:
$32° + 52° + 96° = 180°$.
Zgadza się.

Ćwiczenie 1

W czworokącie dwa kąty są równe, trzeci jest równy ich sumie, a czwarty kąt ma miarę o $36°$ mniejszą niż trzeci. Oblicz miary kątów tego czworokąta.

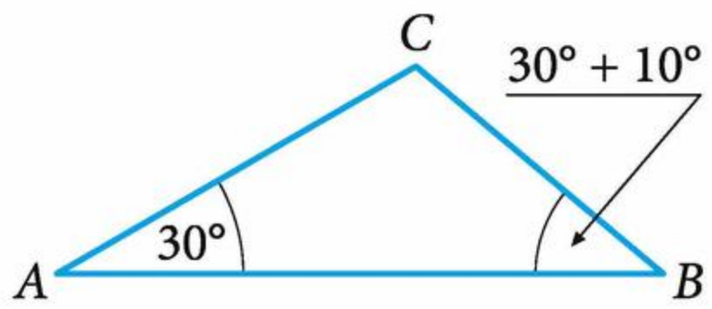
Suma miar kątów czworokąta jest równa $360°$.

Rozwiążemy teraz dwa bardzo podobne przykłady. Zwróć uwagę na podobieństwa i różnice między nimi.

Przykład 2.1

Jeden z kątów trójkąta ma miarę $30°$, a drugi jest od niego o $10°$ większy. Oblicz miarę trzeciego kąta w tym trójkącie.

Wykonujemy rysunek i zaznaczamy na nim informacje podane w zadaniu.



Obliczamy miarę trzeciego kąta.

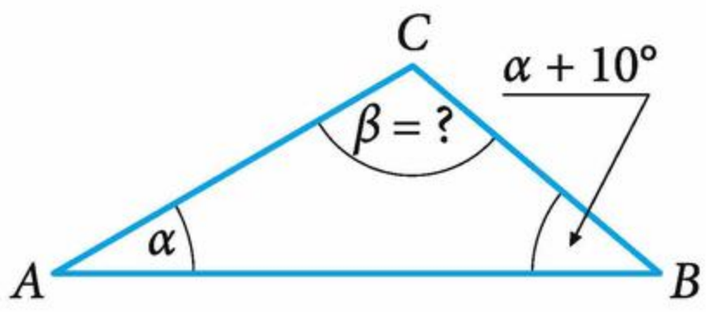
$\sphericalangle ACB = 180° - 30° - (30° + 10°) = 110°$ ← z sumy miar kątów trójkąta ABC

Odp. Trzeci kąt ma miarę $110°$.

Przykład 2.2

Jeden z kątów trójkąta ma miarę α, a drugi jest od niego o $10°$ większy. Wyznacz miarę trzeciego kąta w tym trójkącie.

Wykonujemy rysunek i zaznaczamy na nim informacje podane w zadaniu.



Na tym rysunku wszystkie kąty są oznaczone literami greckimi, jednak traktujemy je różnie. Kąt α jest dany, więc jego miary możemy używać w obliczeniach i odpowiedzi. Kąt β mamy znaleźć – oznaczamy to znakiem zapytania.

Obliczamy miarę trzeciego kąta.

$\sphericalangle ACB = 180° - \alpha - (\alpha + 10°) =$ ← z sumy miar kątów trójkąta ABC

$= 180° - \alpha - \alpha - 10° =$ Redukujemy wyrazy podobne.

$= 170° - 2\alpha$

Odejmowanie $180° - 30° - (30° + 10°)$ można po prostu wykonać.
Wyrażenie $170° - 2\alpha$ zawiera dany kąt α, dlatego zostawiamy je w tej postaci.

Odp. Trzeci kąt ma miarę $\beta = 170° - 2\alpha$.

Jedna z danych w przykładzie 2.2 była zapisana za pomocą zmiennej (α), więc odpowiedź nie jest liczbą, lecz wyrażeniem algebraicznym zawierającym tę zmienną. Zauważ, że w odpowiedzi mogą wystąpić **tylko te zmienne**, które były podane jako dane w treści zadania.

Dobra rada

W zadaniach, w których pojawiają się dane zapisane symbolami literowymi, zwracaj szczególną uwagę, aby odróżniać je od szukanych. Możesz np. przy wielkościach szukanych pisać znak zapytania lub oznaczać je innym kolorem.

Ćwiczenie 2

Jeden z kątów trójkąta ma miarę α, a drugi jest od niego trzy razy większy. Jaką miarę ma trzeci kąt tego trójkąta?

Dobra rada

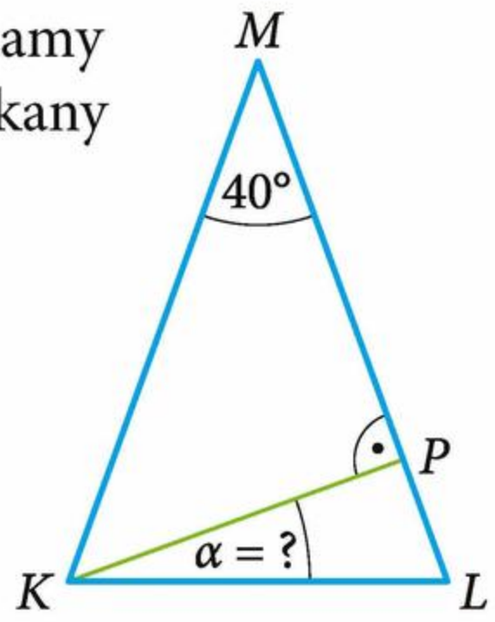
Jeśli dane w zadaniu są zapisane symbolami literowymi i sprawia ci to trudność, możesz najpierw rozwiązać zadanie, podstawiając w miejsce tych symboli konkretne wartości, a następnie przeprowadzić analogiczne rozumowanie, stosując wyrażenia algebraiczne.

Przykład 3.1

E

W trójkącie równoramiennym KLM ramiona KM i LM tworzą kąt $40°$, a KP jest wysokością opuszczoną na bok LM. Oblicz miarę kąta LKP.

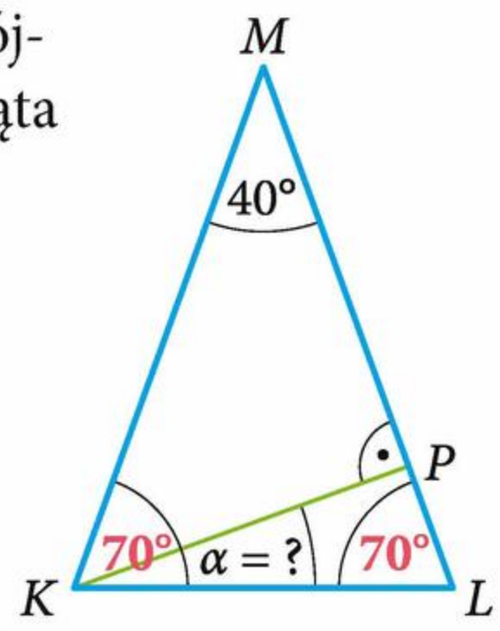
Wykonujemy rysunek i zaznaczamy na nim dane z zadania oraz szukany kąt (oznaczony α).



Jeśli nie umiesz od razu obliczyć miary kąta α, zastanów się, miary których kątów potrafisz obliczyć na podstawie danych. Zaznacz je na rysunku i sprawdź, czy okażą się przydatne.

W trójkącie równoramiennym umiemy obliczyć kąty przy podstawie.

$\sphericalangle KLM = (180° - 40°) : 2 = 70°$ ← z sumy miar kątów trójkąta i własności trójkąta równoramiennego



Zaznaczamy na rysunku obliczone miary kątów. Znając miarę kąta PLK, łatwo obliczymy miarę kąta LKP, czyli α.

$\alpha = 90° - 70° = 20°$ ← z sumy miar kątów ostrych w trójkącie prostokątnym KLP

Odp. Kąt LKP ma miarę $20°$.

Ćwiczenie 3.1

W trójkącie równoramiennym KLM ramiona KM i LM tworzą kąt $20°$, a KP jest wysokością opuszczoną na bok LM. Oblicz miarę kąta LKP.

Przykład 3.2

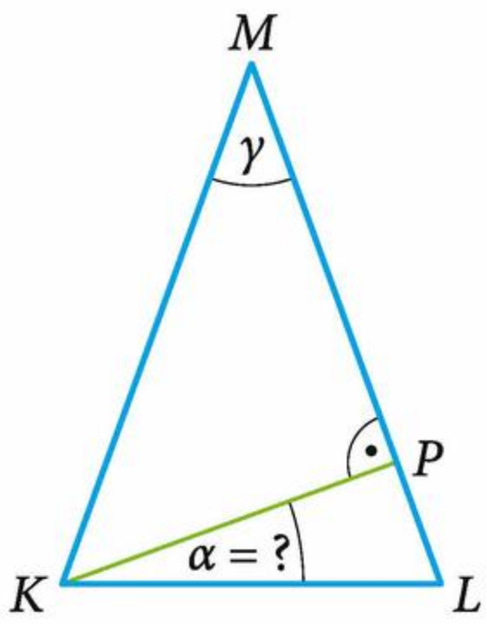
W trójkącie ostrokątnym równoramiennym KLM ramiona KM i LM tworzą kąt γ. Wyznacz kąt LKP, gdzie KP jest wysokością opuszczoną na bok LM.

Wykonujemy rysunek.

Obliczamy miary kątów LKM i KLM, korzystając z sumy miar kątów trójkąta i własności trójkąta równoramiennego.

$\sphericalangle LKM = \sphericalangle KLM =$

$= (180° - \gamma) : 2 = 90° - \frac{1}{2}\gamma$



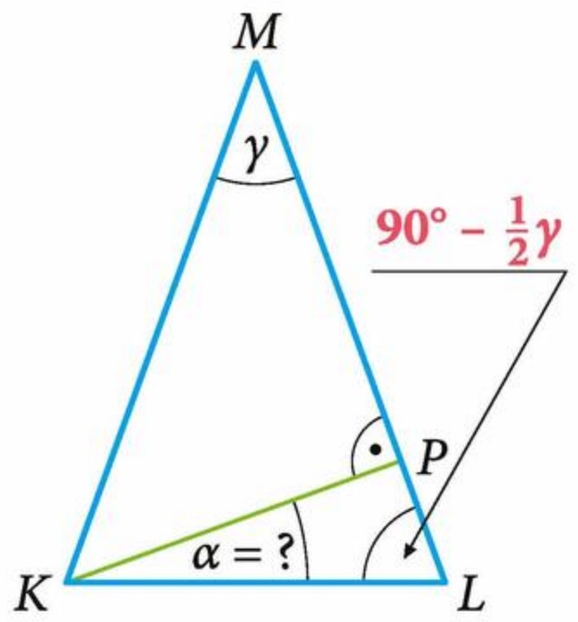
Rysunek jest analogiczny do poprzedniego. Zauważ, że wśród dwóch kątów oznaczonych literami kąt γ jest dany, natomiast kąt α mamy wyznaczyć.

Zapisujemy na rysunku miarę kąta KLM. Znając miarę kąta KLP, łatwo obliczymy miarę kąta PKL, czyli α.

$\alpha = 90° - \left(90° - \frac{1}{2}\gamma\right) =$ ← z sumy miar kątów ostrych w trójkącie prostokątnym

$= 90° - 90° + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\gamma$

Odp. Kąt LKP ma miarę $\frac{1}{2}\gamma$.



W przykładzie 3.1 i ćwiczeniu 3.1 wyznaczony kąt LKP to połowa danego kąta KML. Dzięki obliczeniom na wyrażeniach algebraicznych wykonanym w przykładzie 3.2 możemy zauważyć, że kąt LKP jest **zawsze** dwa razy mniejszy od kąta KML.

Ćwiczenie 3.2

W trójkącie równoramiennym ABC kąt ACB między ramionami ma miarę α mniejszą od 60°, a odcinek CD jest wysokością. Wewnątrz tego trójkąta na odcinku CD leży punkt P taki, że trójkąt ABP jest równoboczny. Wyznacz miarę kąta PAC.

Kąty w czworokątach

Przypomnimy teraz własności kątów w czworokątach. Pokażemy, że wynikają one z faktów, o których była mowa w poprzednim temacie.

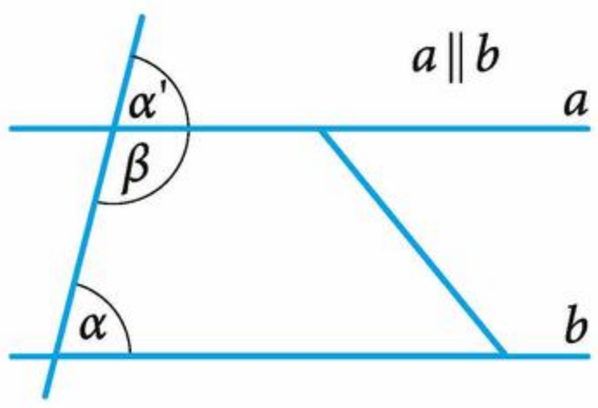
Trapez to czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

Jeśli przedłużymy ramię i obie podstawy trapezu, otrzymamy dwie proste równoległe a i b przecięte trzecią prostą.

$\alpha = \alpha'$ ← kąty odpowiadające

$\alpha' + \beta = 180°$ ← kąty przyległe

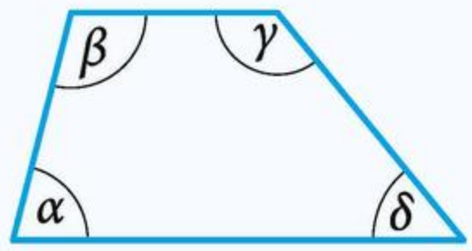
Więc $\alpha + \beta = 180°$.



Takie samo rozumowanie można przeprowadzić dla drugiej pary kątów.

Zapamiętaj

Suma miar kątów przy ramieniu trapezu jest równa 180°.

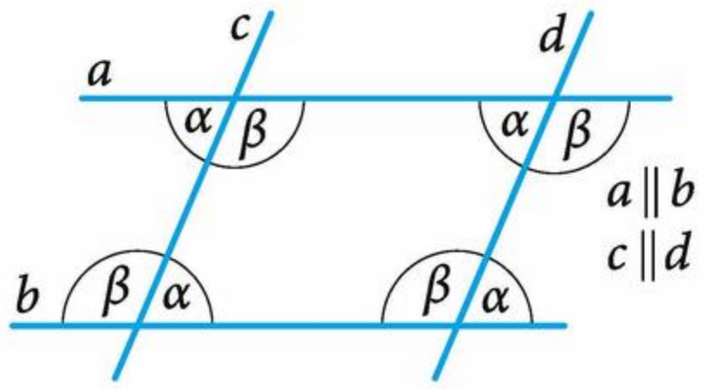


$\alpha + \beta = 180°$

$\gamma + \delta = 180°$

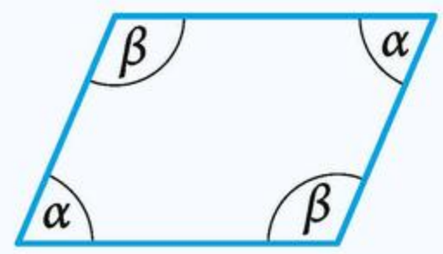
Równoległobokiem nazywamy czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

Rysunek obok można wykorzystać do zauważenia dwóch ważnych faktów.



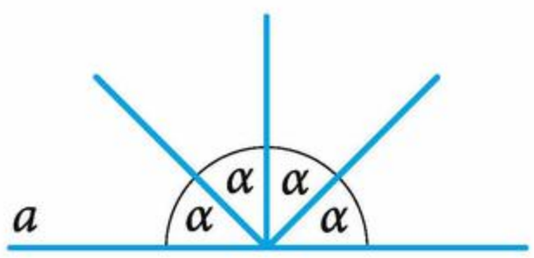
Zapamiętaj

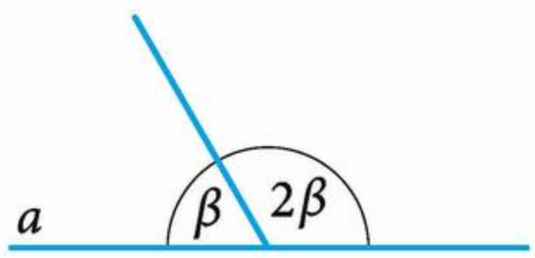
- Przeciwległe kąty równoległoboku są równe.
- Suma miar kątów przy dowolnym boku równoległoboku jest równa 180°.



Zadania

1. Wyznacz miary kątów α, β i γ.



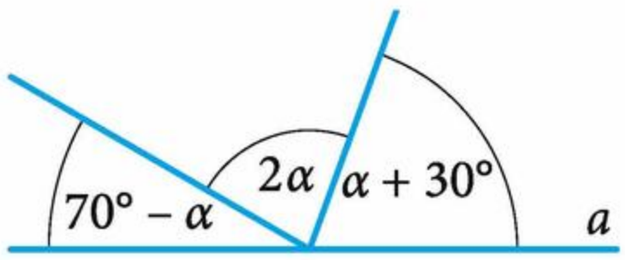




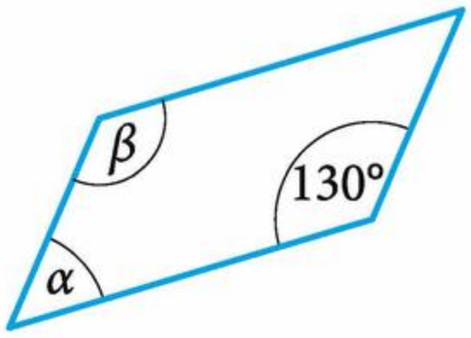
2. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę o 80° większą niż drugi z nich. Wyznacz miary kątów ostrych tego trójkąta.

3. Dwie przecinające się proste utworzyły cztery kąty. Jeden z nich ma miarę β. Wykonaj rysunek ilustrujący tę sytuację i wpisz na nim wyrażenia opisujące miary pozostałych kątów.

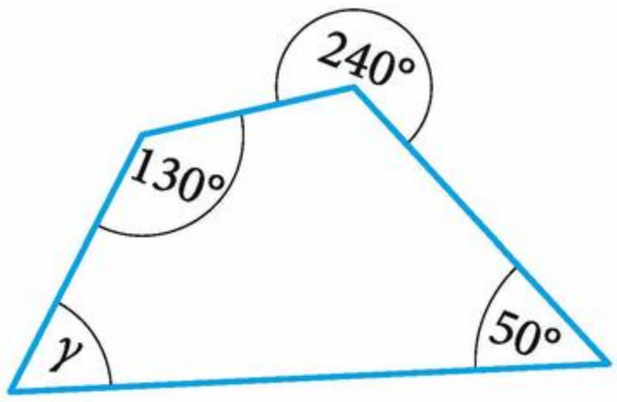
4. Oblicz miary kątów przedstawionych na rysunku.



5. Oblicz miary kątów α, β, γ.



równoległobok



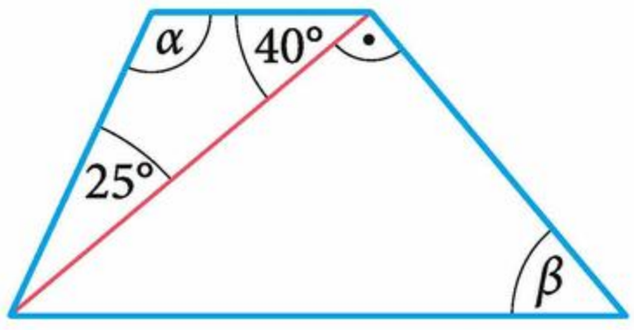
dowolny czworokąt

6. Jeden z kątów czworokąta jest trzy razy mniejszy od największego kąta, a pozostałe dwa kąty są równe i mają w sumie 200°. Wyznacz miary kątów tej figury.

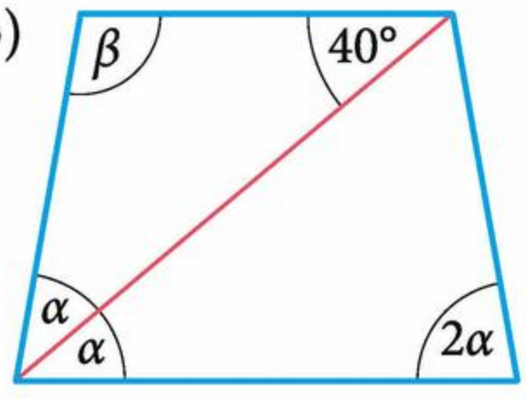
7. Oblicz miary kątów równoległoboku, jeśli jego:
a) dłuższa przekątna tworzy z bokami kąty 17° i 33°,
b) krótsza przekątna tworzy z bokami kąty 62° i 83°.

E **8.** W podanym trapezie wyznacz miary kątów α i β.

a)



b)



9. **a)** Kąt ostry trapezu równoramiennego ma 30°. O ile stopni więcej ma jego kąt rozwarty?

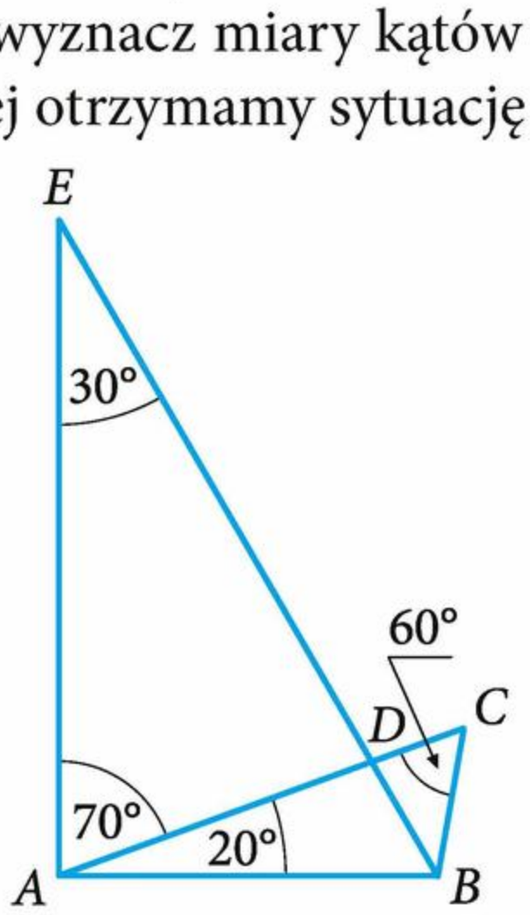
b) Kąt ostry trapezu równoramiennego ma 70°. O ile stopni więcej ma jego kąt rozwarty?

c) Kąt ostry trapezu równoramiennego ma miarę α. Zapisz wyrażenie pozwalające obliczyć różnicę między kątem rozwartym a kątem ostrym w tym trapezie.

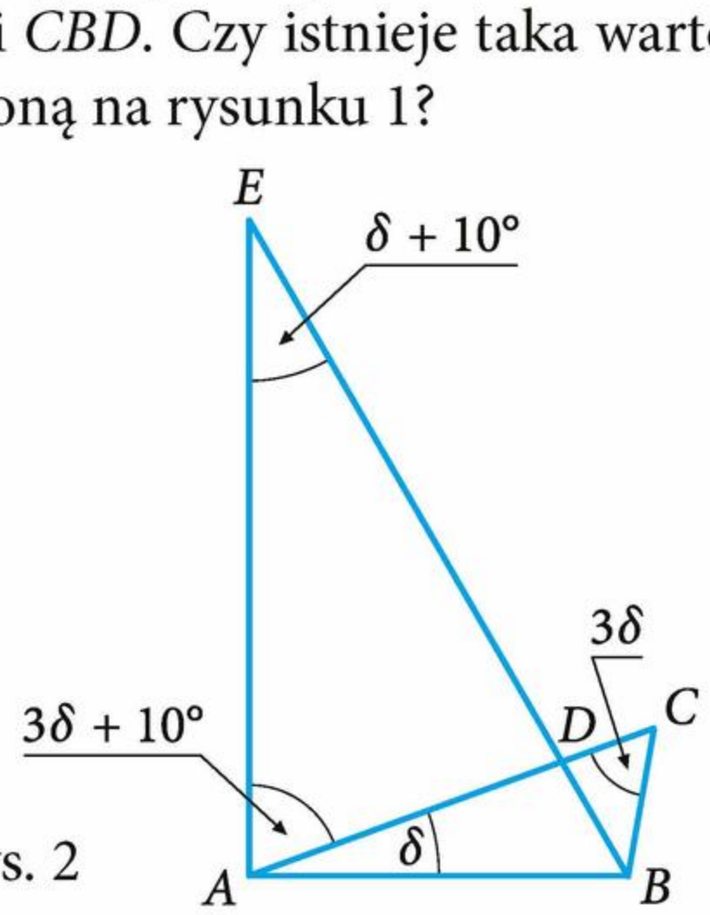
d) Sprawdź, czy po podstawieniu $\alpha = 70°$ do wyrażenia z podpunktu c) otrzymasz takie same wartości liczbowe jak w podpunkcie b).

10. **a)** Na rysunku 1 podano miary niektórych kątów trójkątów ABC i ABE. Oblicz miary kątów CBA, EBA i CBD.

b) Na rysunku 2 kąt CAB ma miarę δ. Korzystając z podanych zależności między kątami, wyznacz miary kątów CBA, EBA i CBD. Czy istnieje taka wartość δ, dla której otrzymamy sytuację przedstawioną na rysunku 1?



Rys. 1

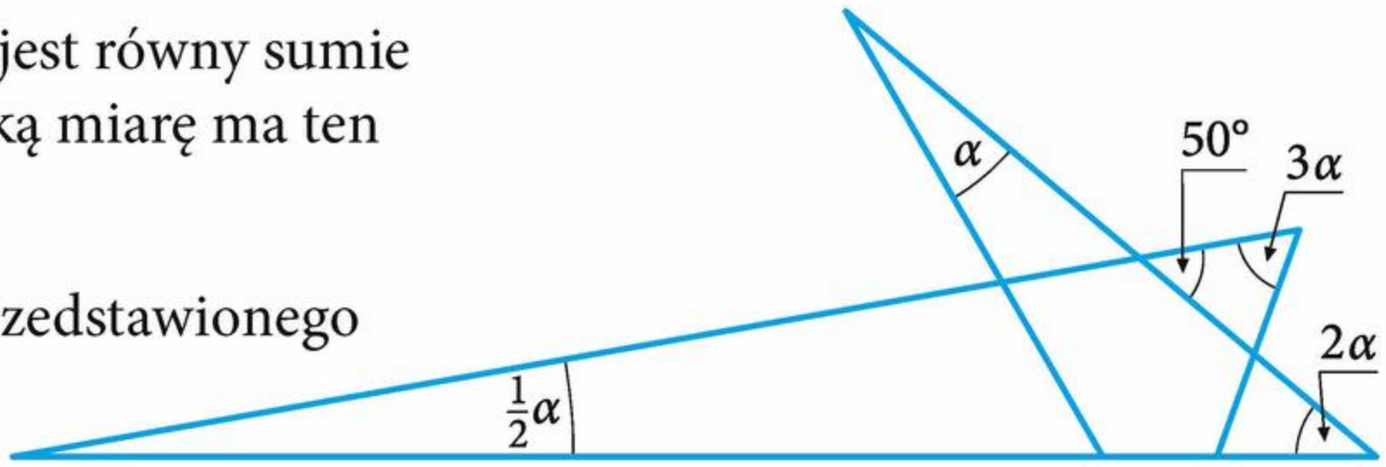


Rys. 2

E **11.** Miara jednego z kątów trójkąta jest średnią arytmetyczną miar pozostałych kątów. Jaką miarę ma średni kąt? Podaj dwa przykłady takich trójkątów.

12. Jeden z kątów trójkąta jest równy sumie pozostałych dwóch. Jaką miarę ma ten największy kąt?

13. Oblicz miarę kąta α przedstawionego na rysunku obok.

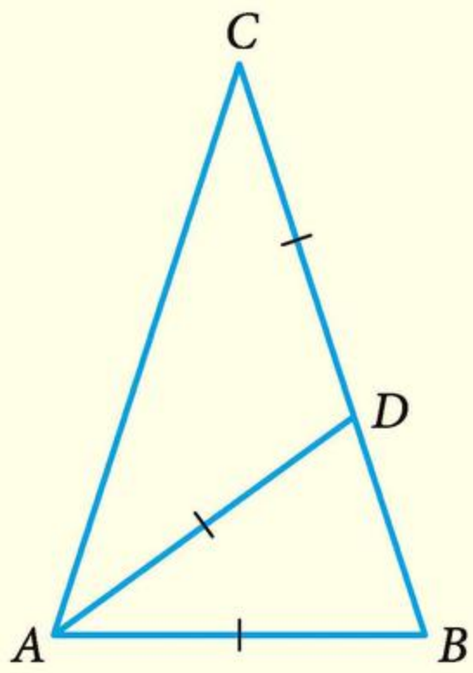


Dla dociekliwych

Rozwiąż podane zadanie. Jest dość trudne, ale nie poddawaj się zbyt łatwo. Jeśli znajdziesz odpowiedź samodzielnie, poczujesz niezwykłą satysfakcję. Jeżeli po kilku próbach nie wpadniesz na pomysł rozwiązania, wróć do zadania po tygodniu. Do naszych wskazówek zajrzyj dopiero wtedy, gdy poczujesz absolutną bezsilność. Pamiętaj, że nawet jeśli rozwiążesz to zadanie samodzielnie dopiero za 2 miesiące, to radość będzie warta takiego czekania!

1. Boki AC i BC trójkąta ABC są równe. Na boku BC można znaleźć taki punkt D, że $AB = AD = DC$. Oblicz kąty trójkąta ABC.

Wskazówki.
- Przerysuj rysunek do zeszytu i zaznacz na nim literą α równe kąty trójkąta ADC.
- Wyznacz kąty CDA oraz ADB.
- Wyznacz kąt DBA, korzystając z własności trójkąta DBA.
- Wyznacz kąty BAD oraz BAC.
- Jakie informacje z zadania jeszcze nie zostały wykorzystane? Skorzystaj z nich.

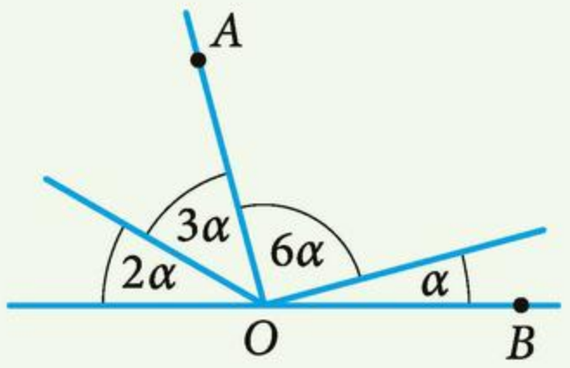


Spróbuj rozwiązać to zadanie samodzielnie innym sposobem, np. zaczynając od oznaczenia literą α równych kątów w trójkącie ABC.

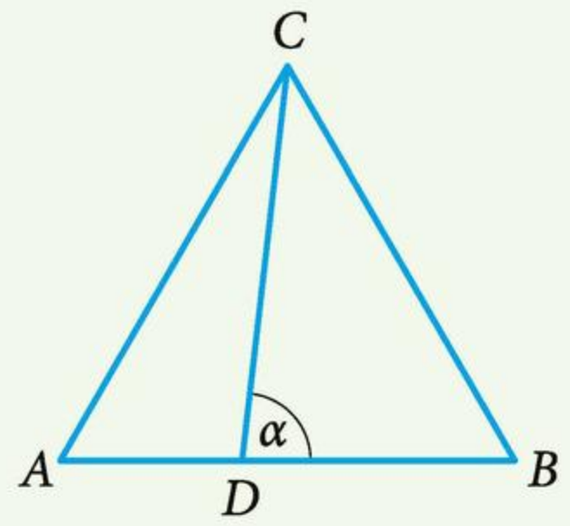
Czy już umiem?

I. Jaką miarę ma kąt AOB przedstawiony na rysunku?

A. 100°
B. 105°
C. 110°
D. 115°



II. W trójkącie równobocznym ABC punkt D leży na boku AB (patrz rysunek obok), a kąt CDB ma miarę α $(60° < \alpha < 120°)$. Wyznacz miarę kąta DCA.



III. Jeden z kątów równoległoboku jest o 20° większy od drugiego. Podaj miary wszystkich kątów tego równoległoboku.

IV. Które z podanych wydarzeń miało miejsce w roku MCDXLIV?

A. Bitwa pod Warną (1444 r.)
B. Wielki pożar Londynu (1666 r.)
C. Narodziny Montezumy II (1466 r.)
D. Ustawienie kolumny Zygmunta w Warszawie (1644 r.)

3 Twierdzenie matematyczne i jego dowód

Na dobry początek

Widzimy trzy białe owce. Myślimy sobie:



Pytania i polecenia

- Przyjrzyj się zdaniom powyżej. Które z nich są trafnymi wnioskami z analizy sytuacji przedstawionej na zdjęciu?

Znasz już wiele twierdzeń matematycznych, wśród nich najsłynniejsze – twierdzenie Pitagorasa.

Twierdzeniami są również fakty proste do zaobserwowania, np. „Liczba naturalna zakończona cyfrą 0 lub 5 jest podzielna przez 5".

Zapamiętaj

Słowo „twierdzenie" w matematyce oznacza zdanie, którego prawdziwość można udowodnić.

Matematyk nie zadowala się jednak samym opisaniem zauważonej zależności. Twierdzeniem nazwie tylko takie zdanie, któremu towarzyszy **dowód**, czyli rozumowanie uzasadniające, dlaczego to zdanie jest prawdziwe. Natomiast jeśli uważamy, że coś jest prawdą, ale ten fakt nie ma jeszcze dowodu, to mówimy, że mamy do czynienia z **hipotezą**.

Założenie i teza twierdzenia

W każdym twierdzeniu wyróżniamy dwie części. Pokażemy je na przykładzie znanych ci już twierdzeń:

- Jeśli **liczba jest podzielna przez 6**, to **jest parzysta**.
- **W równoległoboku przekątne przecinają się w punkcie, który jest środkiem każdej z nich**.
- **W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej**.

W tych twierdzeniach zapisaliśmy:

- na zielono **założenie**, czyli warunki, w których dane twierdzenie można stosować,
- na czerwono **tezę**, czyli opis tego, co się dzieje, gdy założenie jest spełnione.

Założenie i tezę najłatwiej wskazać wtedy, gdy twierdzenie jest sformułowane tak jak w pierwszym przykładzie, czyli z użyciem spójników „jeśli" i „to". Wówczas założenie jest między tymi spójnikami, a teza na końcu zdania.

Jeśli założenie, to teza.

Przykład 1

Sformułuj podane twierdzenie, używając spójników „jeśli" i „to". Wskaż w twierdzeniu założenie i tezę.

a) W równoległoboku przekątne przecinają się w punkcie, który jest środkiem każdej z nich.

b) Ostatnia cyfra liczby podzielnej przez 10 to 0.

a) Jeśli figura jest równoległobokiem, to jej przekątne przecinają się w punkcie, który jest środkiem każdej z nich.

Założenie: figura jest równoległobokiem.
Teza: przekątne tej figury przecinają się w punkcie, który jest środkiem każdej z nich.

b) Jeśli liczba jest podzielna przez 10, to jej ostatnią cyfrą jest 0.

Założenie: liczba jest podzielna przez 10.
Teza: ostatnią cyfrą tej liczby jest 0.

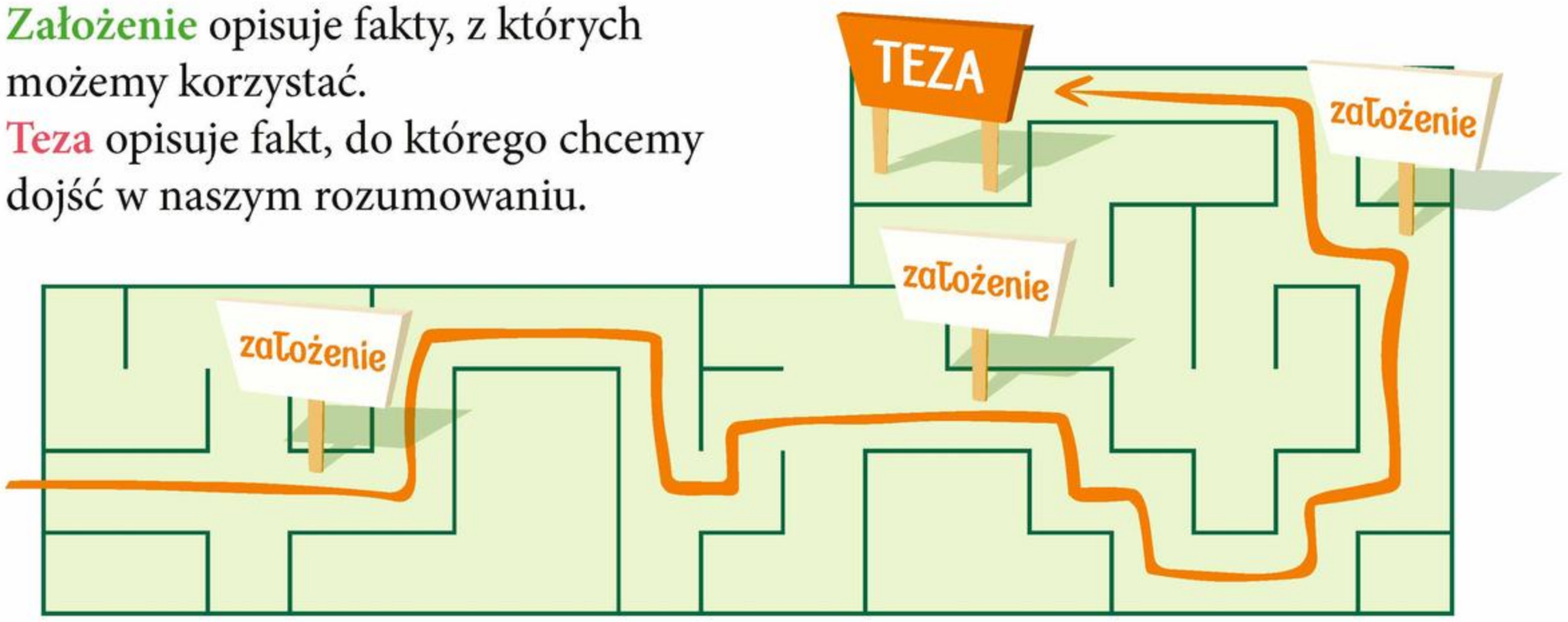
Ćwiczenie 1

Sformułuj podane twierdzenie, używając spójników „jeśli" i „to". Wskaż w twierdzeniu założenie i tezę.

a) Romb ma co najmniej dwie osie symetrii.
b) Suma cyfr liczby podzielnej przez 3 jest podzielna przez 3.

Wyodrębnienie założenia i tezy przydaje się wówczas, gdy chcemy udowodnić twierdzenie.

Założenie opisuje fakty, z których możemy korzystać.
Teza opisuje fakt, do którego chcemy dojść w naszym rozumowaniu.



Przykład 2

Udowodnij, że przekątna prostokąta dzieli go na dwa trójkąty o równych polach.

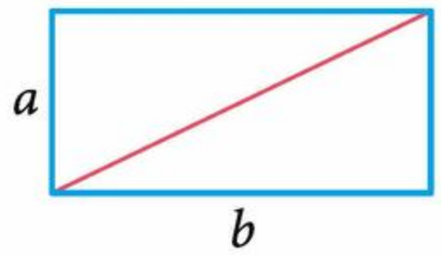
Zapisujemy zdanie, które mamy udowodnić, w taki sposób, aby było widać założenie i tezę.

Jeśli **prostokąt podzielono przekątną na dwa trójkąty**,
to **trójkąty te mają równe pola**.

Założenie: prostokąt podzielono przekątną na dwa trójkąty.
Teza: trójkąty te mają równe pola.

Dowód

Rysujemy prostokąt i jego przekątną, oznaczamy długości boków prostokąta literami a i b.



Przekątna dzieli prostokąt na dwa trójkąty prostokątne.

Korzystamy z założeń: prostokąt ma wszystkie kąty proste, więc trójkąty, które powstały, też mają kąty proste.

Każdy z nich ma jedną przyprostokątną o długości a i drugą o długości b, a więc każdy z nich ma pole $\frac{1}{2}ab$.

Zatem **trójkąty te mają równe pola**, co należało udowodnić.

Doszliśmy do tezy, więc kończymy dowód.

Ćwiczenie 2

Udowodnij, że przekątna rombu dzieli go na dwa trójkąty o równych polach.

Zapamiętaj

Dowód kończymy, gdy w rozumowaniu dojdziemy do tezy twierdzenia.

Czy to zdanie jest prawdziwe?

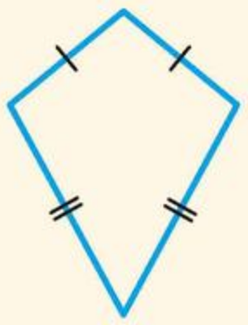
Przykład 3

Czy podane zdanie jest prawdziwe, tzn. czy jest twierdzeniem? Dlaczego?

a) Jeśli czworokąt ma prostopadłe przekątne d_1 i d_2 leżące wewnątrz tego czworokąta, to jego pole wynosi $\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

b) Jeśli czworokąt ma prostopadłe przekątne, to jest deltoidem.

Deltoid to czworokąt, który ma dwie pary sąsiednich boków równych.
Romb również jest deltoidem.



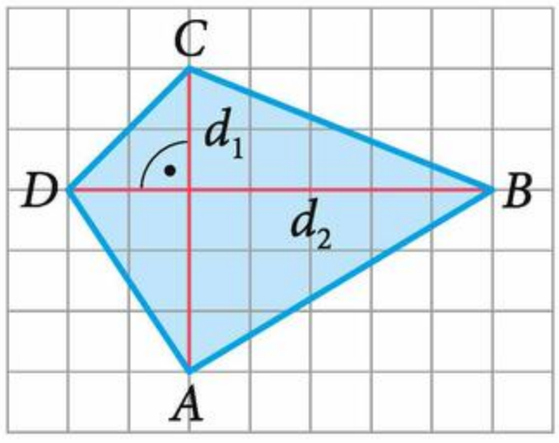
a) Tak, podane zdanie **jest** twierdzeniem – możemy udowodnić jego prawdziwość.
Zaczniemy od wypisania założenia i tezy.

Założenie: czworokąt ma prostopadłe przekątne d_1 i d_2 leżące wewnątrz niego.

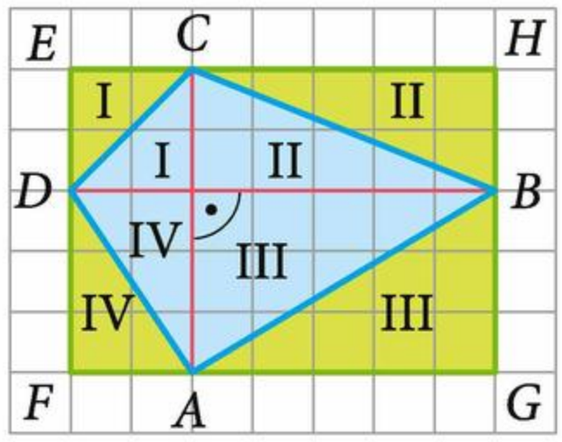
Teza: pole tego czworokąta wynosi $\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, czyli $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

Dowód

Rysujemy czworokąt $ABCD$ o prostopadłych przekątnych d_1 i d_2 leżących wewnątrz tego czworokąta.



Dorysujmy prostokąt *EFGH* jak na rysunku obok. W ten sposób otrzymamy osiem trójkątów.



Zauważmy, że jednakowo oznaczone trójkąty mają równe pola.

$P_{EFGH} = d_1 \cdot d_2$

$P_{ABCD} = P_{EFGH} : 2$, czyli $P_{ABCD} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$,

co należało udowodnić.

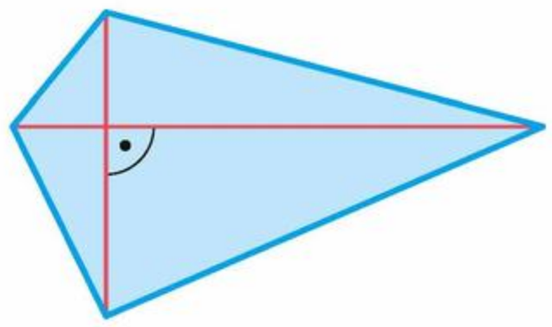
Jest to prawda dla wszystkich takich czworokątów, a nie tylko dla tego na rysunku.

Otrzymaliśmy tezę twierdzenia, czyli zakończyliśmy dowód.

b) Zdanie: „Jeśli czworokąt ma prostopadłe przekątne, to jest deltoidem" **nie jest** prawdziwe.

Aby to udowodnić, wystarczy podać przykład odpowiedniego czworokąta.

Czworokąt przedstawiony obok ma prostopadłe przekątne, lecz nie jest deltoidem.



Każde ze zdań w podpunktach a) i b) w powyższym przykładzie dotyczy **wszystkich** czworokątów o opisanych własnościach.

Aby uzasadnić odpowiedź w podpunkcie b), podaliśmy tylko jeden przykład. Wskazany czworokąt nie jest deltoidem i to wystarczy, aby wykazać, że **nie wszystkie** czworokąty o prostopadłych przekątnych są deltoidami.

W podpunkcie a) nie wystarczy podawanie przykładów. Nawet gdyby były ich tysiące, to i tak nie byłyby to **wszystkie** przypadki – pozostałaby wątpliwość, czy nie znajdzie się inny czworokąt, który spełnia założenie, ale jego pole nie jest równe $\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$. Dlatego niezbędne jest ogólne rozumowanie.

Zapamiętaj

Gdy zajmujemy się zdaniem dotyczącym **wszystkich** przypadków spełniających pewne założenie, to aby udowodnić, że zdanie:

- NIE JEST PRAWDZIWE, wystarczy znaleźć jeden przykład, który to potwierdza;
- JEST PRAWDZIWE, nie wystarczy nawet wiele potwierdzających to przykładów.

Ćwiczenie 3

Czy podane zdanie jest prawdziwe? Uzasadnij odpowiedź.

a) Jeśli liczba kończy się cyfrą 0, to jest podzielna przez 5.

b) Jeśli liczba jest podzielna przez 5, to kończy się cyfrą 0.

Zastanówmy się, czy zdanie podane w ramce jest twierdzeniem.

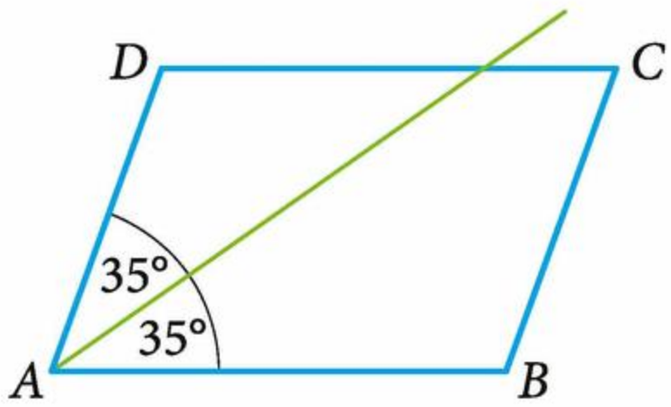
W równoległoboku dwusieczne dwóch sąsiednich kątów przecinają się pod kątem prostym.

Zdanie dotyczy dowolnego (czyli każdego) równoległoboku. Nie wiemy, czy jest prawdziwe, więc warto zacząć od sprawdzenia przykładów, czyli od zbadania kąta przecięcia dwusiecznych w konkretnych równoległobokach.
Zajmijmy się np. równoległobokiem o kącie ostrym $70°$.

Przykład 4.1

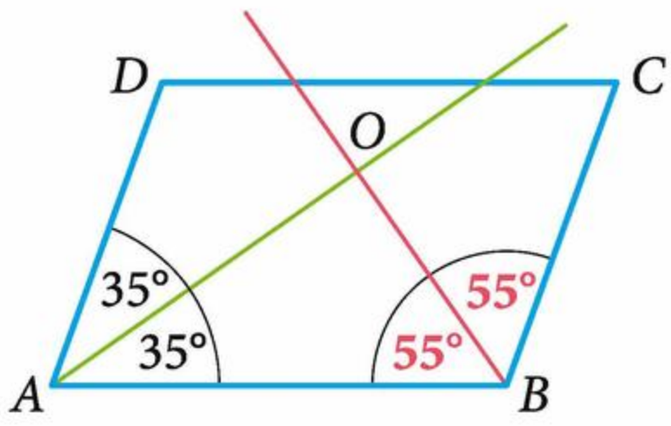
Kąt ostry równoległoboku ma miarę $70°$. Jaką miarę ma kąt między dwusiecznymi sąsiednich kątów tego równoległoboku?

Sporządzamy rysunek.



Na rysunku zaznaczamy od razu połowy kąta ostrego (po $35°$).

$\sphericalangle ABC = 180° - \sphericalangle DAB = 110°$ ← suma miar sąsiednich kątów równoległoboku wynosi $180°$



Na rysunku podpisujemy połowy kąta rozwartego.

W trójkącie AOB znamy dwa kąty, a trzeci chcemy obliczyć.

$\sphericalangle AOB = 180° - 35° - 55° = 90°$ ← suma miar kątów trójkąta AOB wynosi $180°$

Odp. Kąt między dwusiecznymi sąsiednich kątów jest prosty.

Ćwiczenie 4.1

Kąt ostry równoległoboku ma miarę $60°$. Jaką miarę ma kąt między dwusiecznymi sąsiednich kątów tego równoległoboku?

Zarówno w przykładzie 4.1, jak i w ćwiczeniu 4.1 otrzymaliśmy ten sam wynik. Możemy podejrzewać, że w każdym równoległoboku kąt między dwusiecznymi sąsiednich kątów jest prosty. Spróbujmy to udowodnić.

Przykład 4.2

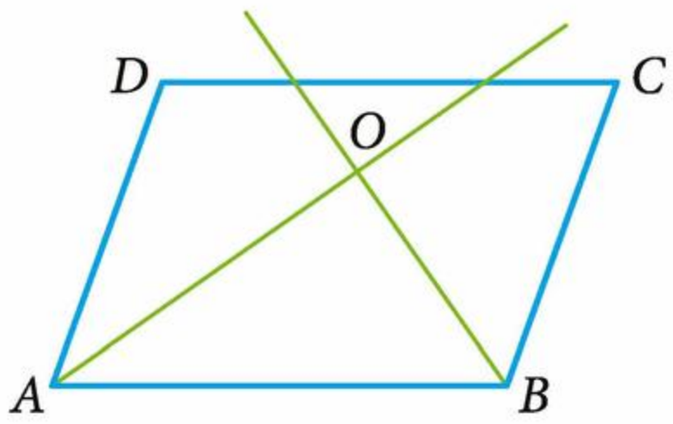
Udowodnij, że w równoległoboku dwusieczne sąsiednich kątów przecinają się pod kątem prostym.

Założenie: czworokąt jest równoległobokiem.

Teza: dwusieczne jego sąsiednich kątów przecinają się pod kątem prostym.

Dowód

Rysujemy równoległobok $ABCD$ i dwusieczne kątów DAB i ABC. Oznaczamy punkt przecięcia tych dwusiecznych literą O.

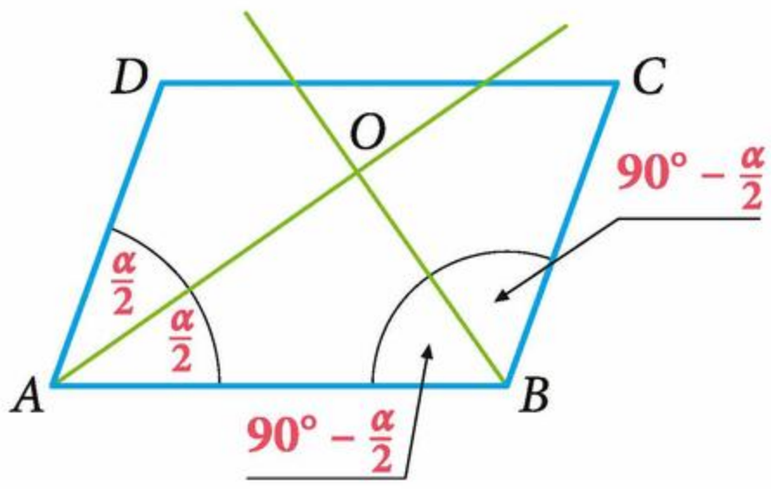


Chcemy udowodnić, że $\sphericalangle AOB = 90°$. Najprościej byłoby obliczyć miarę tego kąta. Nie mamy jednak żadnych danych, więc wprowadzamy zmienne, aby przeprowadzić dalsze rozumowanie.

Przyjmijmy, że $\sphericalangle DAB = \alpha$. Dwusieczna dzieli ten kąt na kąty o miarach $\frac{\alpha}{2}$.

$\sphericalangle ABC = 180° - \alpha$ ← suma sąsiednich kątów równoległoboku to 180°

$\frac{\sphericalangle ABC}{2} = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$ ← dwusieczna dzieli kąt na połowy



Zaznaczamy na rysunku połowy kąta DAB i połowy kąta ABC.

Przeprowadzamy podobne obliczenia jak w przykładzie 4.1, ale zamiast działań na liczbach wykonujemy przekształcenia wyrażeń algebraicznych.

$\sphericalangle AOB = 180° - \frac{\alpha}{2} - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)$ ← suma miar kątów trójkąta AOB wynosi 180°

$\sphericalangle AOB = 180° - \frac{\alpha}{2} - 90° + \frac{\alpha}{2} = 90°$, co należało udowodnić.

Dobra rada

Zanim rozpoczniesz dowód, możesz sprawdzić kilka przykładów. Pamiętaj jednak, że nie jest to część dowodu, tylko droga do jego znalezienia.

Ćwiczenie 4.2

Udowodnij, że w każdym trójkącie prostokątnym kąt rozwarty między dwusiecznymi kątów ostrych ma taką samą miarę.

Przykład 5

Udowodnij, że jeżeli przekątna trapezu równoramiennego jest zawarta w dwusiecznej jego kąta ostrego, to ten trapez ma trzy równe boki.

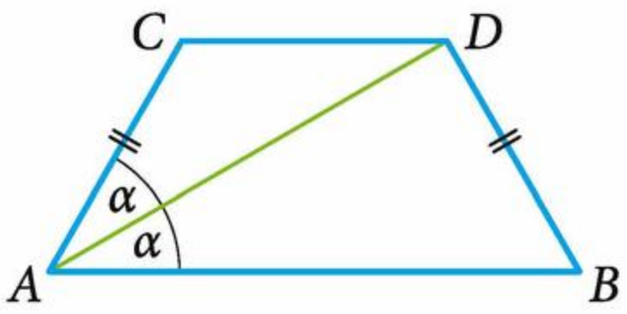
Założenie: przekątna trapezu równoramiennego jest zawarta w dwusiecznej jego kąta ostrego.

Teza: trapez ma trzy boki równe.

Dowód

Wykonujemy rysunek i zaznaczamy na nim wszystkie dane.

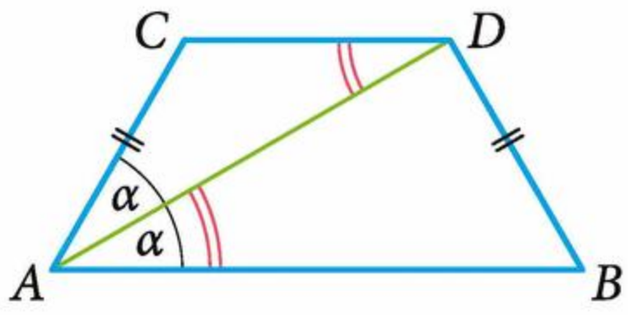
Trapez jest równoramienny, więc wiemy, że ma równe dwa boki: $AC = BD$. Chcemy pokazać, że ma też trzeci bok tej samej długości.



Spróbujmy myśleć od końca: chcemy udowodnić, że $AC = CD$. W takim razie kąt CDA powinien być równy kątowi CAD, czyli α. Jak można uzasadnić równość tych kątów?

Proste AB i CD są równoległe, więc:

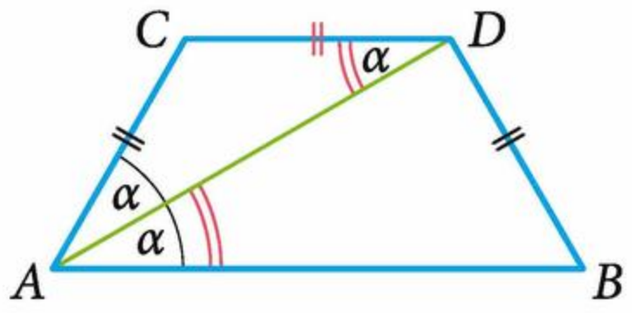
$\sphericalangle CDA = \sphericalangle DAB$ ← kąty naprzemianległe



Kąty naprzemianległe zaznaczyliśmy na rysunku czerwonymi łukami.

$\sphericalangle DAB = \sphericalangle CAD$ ← AD jest dwusieczną

Stąd $\sphericalangle CDA = \sphericalangle CAD = \alpha$, czyli trójkąt ACD jest równoramienny i $CD = AC = BD$, co było do udowodnienia.



Dobra rada

W zadaniach geometrycznych (nie tylko na dowodzenie) zwykle nie ma gotowego sposobu rozwiązania. Próbuj różnych możliwości, rób rysunki i zaznaczaj na nich to, co już wiesz.



Ćwiczenie 5

Przekątna pewnego trapezu zawiera się w dwusiecznej kąta ostrego, ale ten trapez nie jest równoramienny. Co można powiedzieć o bokach trapezu?

Zadania

1. Sformułuj podane twierdzenie, używając spójników „jeżeli” i „to”. Wskaż założenie i tezę.

a) Wynik mnożenia dwóch liczb wymiernych jest liczbą wymierną.
b) Suma dwóch liczb nieparzystych jest liczbą parzystą.
c) Zdrowy pies ma cztery nogi.
d) Przekątne prostokąta są równe.

2. Czy zamieszczone zdjęcie jest dowodem prawdziwości podanego zdania?

a) Wszystkie koty na świecie są rude.
b) Na świecie są rude koty.
c) Na świecie są czarne koty.
d) To nieprawda, że wszystkie koty na świecie są czarne.

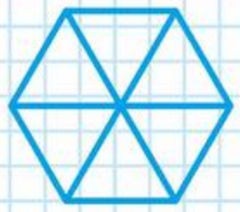


3. Ania, Basia, Czarek i Damian rozwiązywali zadanie podane w ramce poniżej. Oceń, czy ich rozwiązania są poprawne. Uzasadnij swoją odpowiedź.

Czy prawdziwe jest zdanie: „Suma miar kątów w każdym sześciokącie wynosi 720°”? Uzasadnij odpowiedź.

- Rozwiązanie Ani

To zdanie jest prawdziwe.
Uzasadnienie:
Sześciokąt na rysunku składa się z 6 trójkątów równobocznych, więc ma 6 kątów po 120°, a $6 \cdot 120^\circ = 720^\circ$.



- Rozwiązanie Basi

To zdanie jest prawdziwe.
Uzasadnienie:
Jeśli narysuję wszystkie 3 przekątne wychodzące z jednego wierzchołka jakiegoś sześciokąta, to sześciokąt będzie podzielony na 4 trójkąty. Suma kątów w trójkącie to 180° stopni, a $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$.

- Rozwiązanie Czarka

To zdanie nie jest prawdziwe, bo sześciokąt składa się z 6 trójkątów równobocznych, a suma kątów w trójkącie to 180°, więc suma kątów sześciokąta to $6 \cdot 180^\circ = 1080^\circ$.

- Rozwiązanie Damiana

To zdanie jest prawdziwe.

4. Czy podane zdanie jest prawdziwe? Uzasadnij odpowiedź.
a) Jeśli liczba jest podzielna przez 4, to jest podzielna przez 2.
b) Jeśli liczba jest podzielna przez 2, to jest podzielna przez 4.

5. Uczniowie rozwiązywali zadanie podane w ramce poniżej. Oceń, które z pokazanych rozwiązań są poprawne. Uzasadnij swoje zdanie.

Czy prawdziwe jest zdanie: „Jeśli do liczby dwucyfrowej dodamy liczbę o przestawionych cyfrach, to otrzymamy liczbę podzielną przez 11”? Uzasadnij odpowiedź.

- Ania

Nie, to nieprawda.

- Bartek

Tak, to prawda.

- Czarek

Nie, to nieprawda, bo nie ma cechy podzielności przez 11.

- Dominika

Tak, to prawda, bo np.
87 + 78 = 165, 165 : 11 = 15,
i 37+73 = 110, 110 : 11 = 10.

- Edwin

Tak, to prawda. Sprawdziłem dla wszystkich liczb dwucyfrowych.
Zrobiłem to w tabeli:

Liczba	Liczba po przestawieniu cyfr	Suma	Dzielenie przez 11	Czy dobrze?
10	01	11	11 : 11 = 1	tak
11	11	22	22 : 11 = 2	tak
12	21	33	33 : 11 = 3	tak
98	89	187	187 : 11 = 17	tak
99	99	198	198 : 11 = 18	tak

- Gabrysia

Tak, to prawda.
Liczbę o cyfrze dziesiątek a i o cyfrze jedności b zapisujemy jako 10a + b.
Po zmianie kolejności cyfr będzie to 10b + a.
(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b
Każdy składnik tej sumy jest podzielny przez 11, więc suma jest podzielna przez 11.

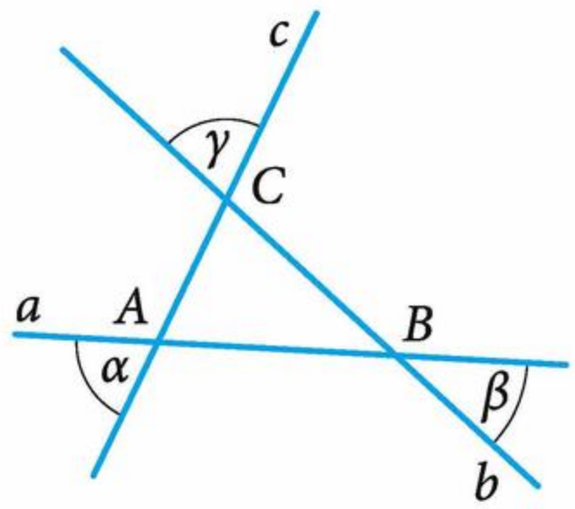
:D **6.** Udowodnij podane niżej twierdzenie.

Jeśli punkt E leży na boku CD prostokąta $ABCD$, to pole trójkąta ABE jest połową pola prostokąta $ABCD$.

7. Udowodnij podane niżej twierdzenie.

Dla dowolnego punktu E leżącego wewnątrz prostokąta $ABCD$ suma pól trójkątów ABE i CDE jest równa połowie pola prostokąta $ABCD$.
Zacznij od zapisania założenia i tezy.

8. Trzy proste przecinają się parami w punktach A, B i C (patrz rysunek). Udowodnij, że $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.



9. Wykaż, że trójkąt o podanych kątach jest prostokątny.

a) α, α, 2α **b)** α, 2α, 3α

10. Czy można podać jako przykład liczbę 35, aby udowodnić, że zdanie:

a) „Liczba, która kończy się cyfrą 5, jest podzielna przez 5” jest prawdziwe,
b) „Liczba, która jest podzielna przez 7, kończy się cyfrą 7” jest nieprawdziwe,
c) „Liczba, która kończy się cyfrą 7, jest podzielna przez 7” jest nieprawdziwe?
Wyjaśnij dlaczego.

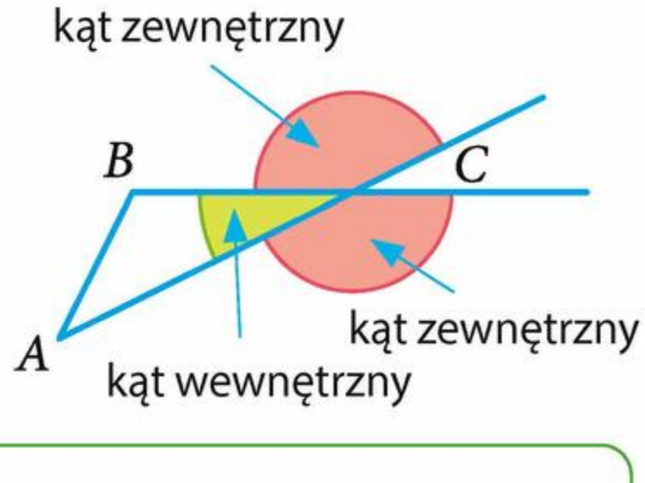
11. **a)** W równoległoboku $ABCD$ kąt ABC ma miarę $130°$. Na półprostej AB, poza odcinkiem AB, wybrano punkt E tak, że $BE = BC$. Oblicz miarę kąta AEC.

b) W równoległoboku $ABCD$ kąt rozwarty ABC ma miarę 2α. Na półprostej AB, poza odcinkiem AB, wybrano punkt E tak, że $BE = BC$. Udowodnij, że kąt AEC ma miarę α.

12. Udowodnij, że dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe.

Jeśli chcesz, możesz najpierw wykonać kolejno poniższe polecenia.
I. Narysuj kąty przyległe, z których jeden ma $40°$. Zapisz na rysunku miary obu kątów.
II. Narysuj dwusieczne obu kątów. Zapisz na rysunku miary powstałych kątów.
III. Jaką miarę ma kąt między dwusiecznymi?
IV. Narysuj kąty przyległe, z których jeden ma miarę α. Zapisz na rysunku miary obu kątów. Udowodnij, że dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe.

13. Kąt zewnętrzny trójkąta to kąt przyległy do kąta wewnętrznego tego trójkąta (patrz rysunek).
Udowodnij, że kąt zewnętrzny przy dowolnym wierzchołku trójkąta jest równy sumie kątów wewnętrznych przy dwóch pozostałych wierzchołkach.



Jeśli chcesz, możesz najpierw wykonać kolejno poniższe polecenia.
I. W trójkącie ABC kąty wewnętrzne przy wierzchołkach A i B mają miary $20°$ i $30°$. Oblicz miarę kąta zewnętrznego przy wierzchołku C.
II. W trójkącie ABC kąty wewnętrzne przy wierzchołkach A i B mają miary α i β. Wyznacz miarę kąta wewnętrznego przy wierzchołku C. Udowodnij początkowe twierdzenie.

:D **14.** W równoległoboku $ABCD$ kąt DAB jest ostry, a bok AB jest dwa razy dłuższy od boku BC. Punkt S jest środkiem boku AB. Wykaż, że trójkąt CSD jest prostokątny.

Jeśli chcesz, możesz najpierw wykonać kolejno poniższe polecenia.

I. Oblicz miarę kąta CSD, wiedząc, że $\sphericalangle DAB = 80°$.

II. Wyznacz miarę kąta CSD, wiedząc, że $\sphericalangle DAB = \alpha$. Udowodnij początkowe twierdzenie.

:D **15.** Udowodnij, że przekątne rombu dzielą jego kąty na połowy.

:D **16.** W trójkącie ABC kąt o wierzchołku C jest prosty. Na prostej AB leżą kolejno punkty D, A, B i E, przy czym $DA = AC$ i $BE = BC$. Udowodnij, że $\sphericalangle DCE = 135°$.

:D **17.** Na boku BC trójkąta ABC wybrano punkty D i E tak, aby $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ABC$, a odcinek AE był zawarty w dwusiecznej kąta DAB. Udowodnij, że $AC = CE$.

Dla dociekliwych

Bardzo często dowód twierdzenia może być przeprowadzony różnymi sposobami. Na przykład istnieje ponad 100 różnych dowodów twierdzenia Pitagorasa!

1. W przykładzie 3a) na s. 115 dowodziliśmy, że jeśli czworokąt ma prostopadłe przekątne d_1 i d_2 leżące wewnątrz czworokąta, to jego pole jest równe $\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$. Udowodnij to twierdzenie, korzystając ze wzoru na pole trójkąta.

2. Znajdź trzy różne dowody twierdzenia z zadania 6 na s. 121.

Czy już umiem?

I. Udowodnij, że suma miar kątów ośmiokąta jest równa 1080°.

II. Czy podane zdanie jest prawdziwe? Uzasadnij odpowiedź.

a) Jeśli liczba naturalna jest podzielna przez 6 i przez 2, to jest podzielna przez 12.
b) Jeśli liczba naturalna jest podzielna przez 5 i przez 2, to jest podzielna przez 10.

III. Punkty C, D i E leżą na prostej p, a punkty A i B poza tą prostą. Odcinek AB jest równoległy do p. Udowodnij, że trójkąty ABC, ABD i ABE mają równe pola.

IV. Czy liczba 24 363 jest podzielna przez 9? Wybierz odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie spośród zdań A–C.

TAK	ponieważ	A.	liczba 18 jest podzielna przez 9.
NIE		B.	liczba 63 jest podzielna przez 9.
		C.	liczba 3 nie jest podzielna przez 9.

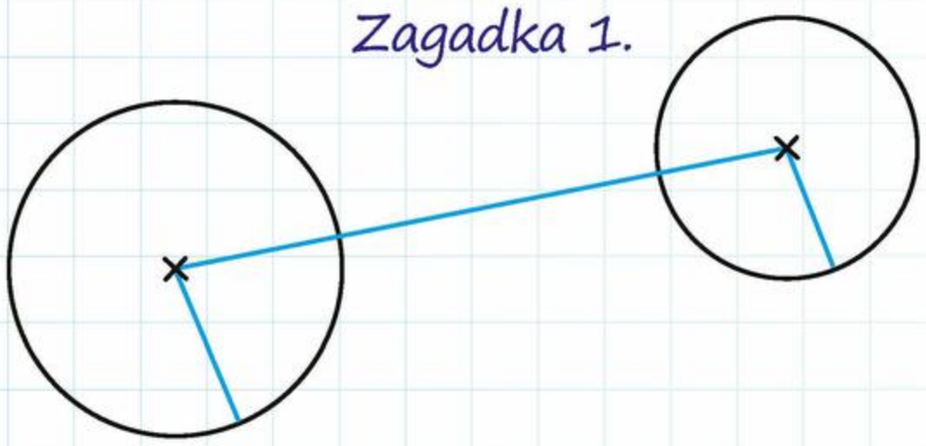
4 Nierówność trójkąta

Na dobry początek ›

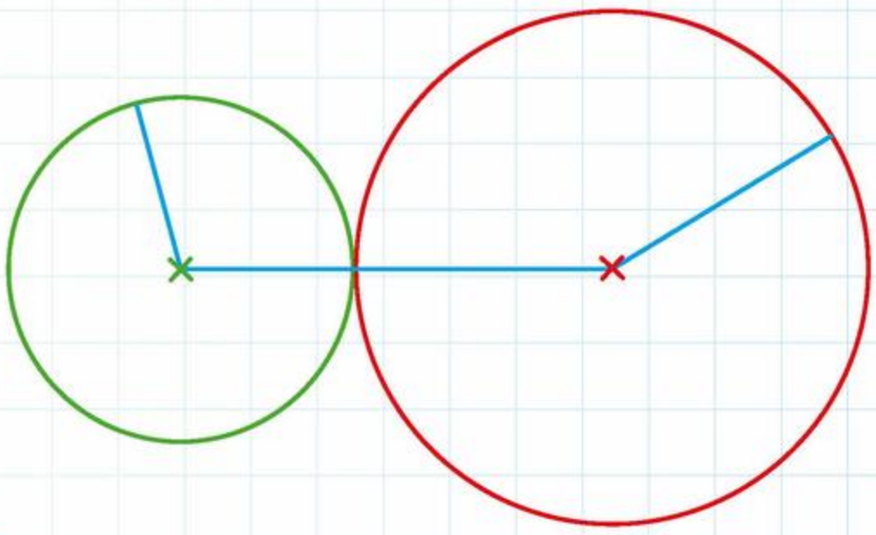
Spróbujcie rozwiązać poniższe zagadki.

Czy z niebieskich odcinków można zbudować trójkąt?

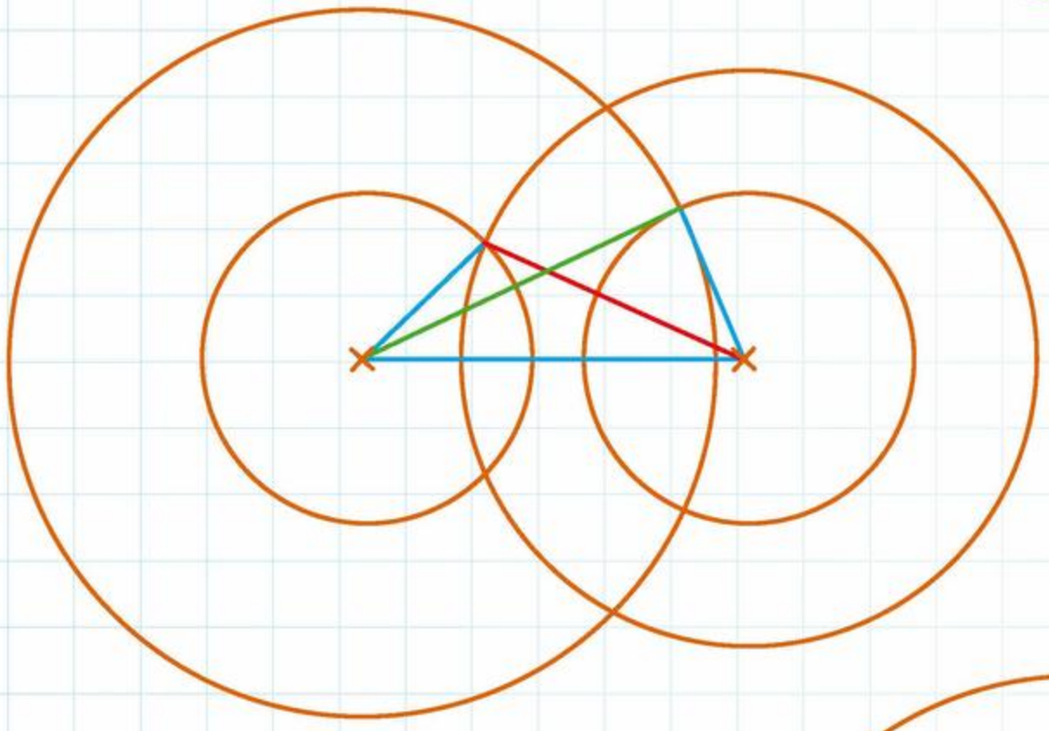
Zagadka 1.



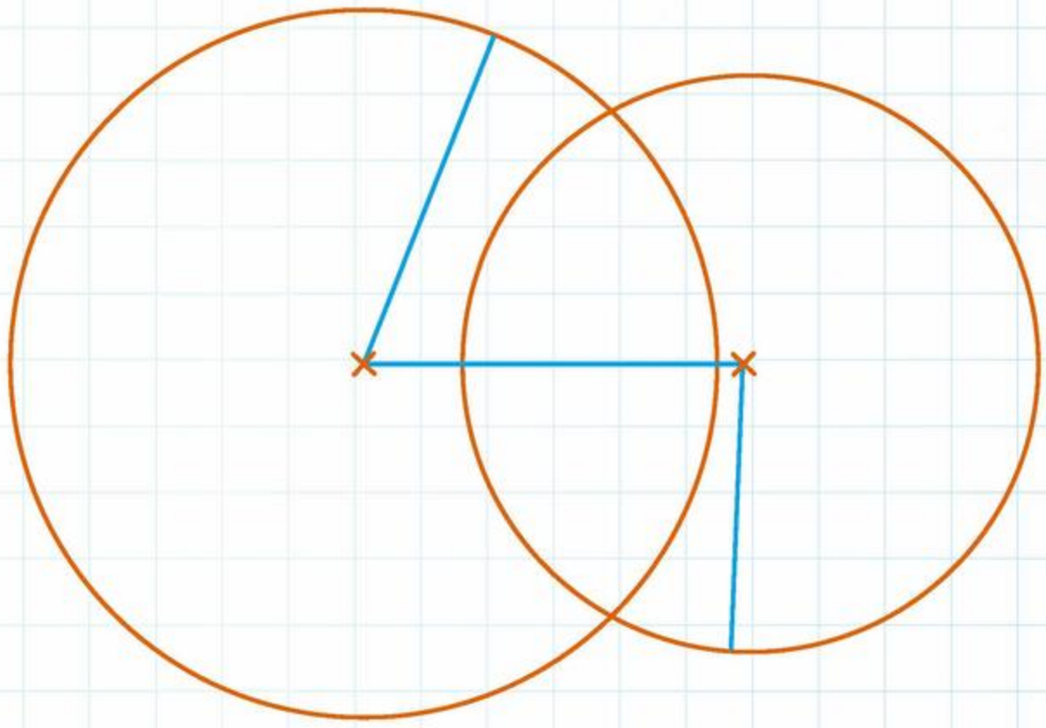
Zagadka 2.



Zagadka 3.



Zagadka 4.



Nierówność trójkąta poznaliśmy we wcześniejszych latach nauki. Jest to fakt zgodny z intuicją – wiemy, że najkrótsza droga z punktu do punktu biegnie po linii prostej.

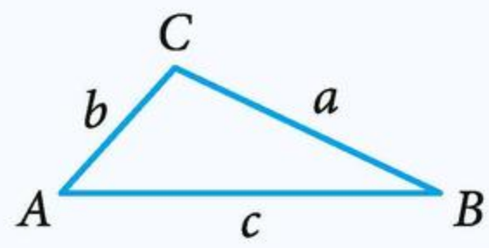


Zapamiętaj

Warunek trójkąta (nierówność trójkąta)

W trójkącie suma długości każdych dwóch boków jest większa od długości trzeciego boku.

$$a + b > c$$
$$a + c > b$$
$$b + c > a$$



Zauważ, że dla punktów A, B, C równość $AB + BC = AC$ oznacza, że punkt B leży na odcinku AC.



Przykład 1

Czy istnieje trójkąt o bokach 10 cm, 13 cm i 21 cm?

Z nierówności trójkąta wynika, że musimy sprawdzić trzy warunki.

- Czy $10 + 13 > 21$?
  TAK
- Czy $21 + 10 > 13$?
  TAK
- Czy $21 + 13 > 10$?
  TAK

Odp. Istnieje trójkąt o bokach długości 10 cm, 13 cm i 21 cm.

Ćwiczenie 1

Czy istnieje trójkąt o bokach podanej długości?

a) 15 cm, 13 cm, 11 cm **b)** 7 cm, 14 cm, 21 cm

Gdy znamy długości wszystkich boków trójkąta, to co najmniej dwie nierówności są oczywiste. W przykładzie 1 wiadomo, że $21 > 13$ i $21 > 10$, więc każda z tych nierówności będzie nadal prawdziwa, gdy do 21 dodamy jakąś wartość.

W praktyce wystarczy więc sprawdzać, czy suma dwóch krótszych odcinków jest dłuższa od najdłuższego. Jeśli w zadaniu nie są podane długości wszystkich boków, możemy nie wiedzieć, który z nich jest najdłuższy.

Przykład 2

Trójkąt ma boki 10 cm i 15 cm. Jaką długość może mieć trzeci bok tego trójkąta?

Oznaczmy długość (w centymetrach) trzeciego boku literą x.

Wiemy, że długości boków tego trójkąta muszą spełniać następujące trzy warunki:

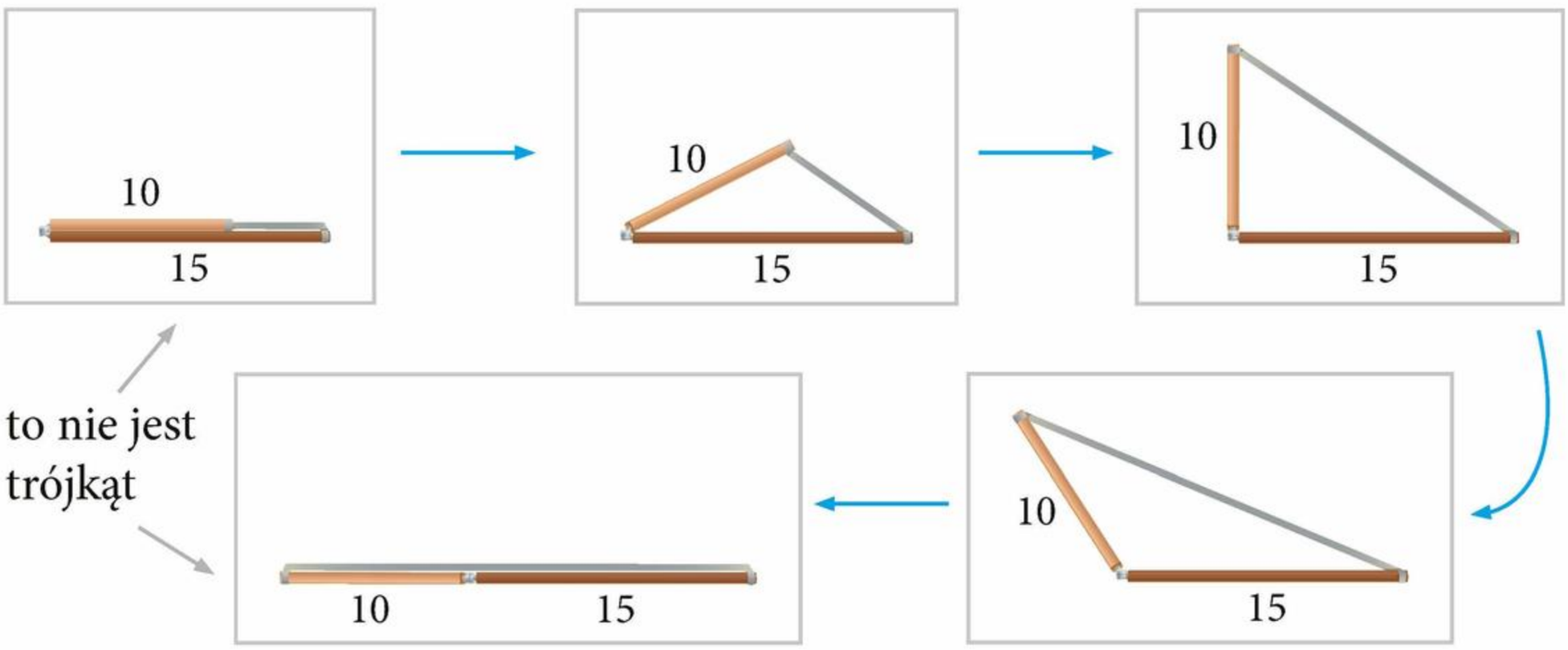
$15 + x > 10$	$15 + 10 > x$	$10 + x > 15$
Ten warunek jest spełniony dla każdej wartości x.	Ten warunek jest spełniony, gdy $x < 25$.	Ten warunek jest spełniony, gdy $x > 5$.

Odp. Trzeci bok trójkąta musi być dłuższy niż 5 cm i krótszy niż 25 cm.

Zauważmy, że wynik naszych obliczeń można przedstawić graficznie.

Wyobraź sobie dwie listewki: o długości 10 cm i 15 cm. Końce tych listewek z jednej strony łączymy zawiasem, a z drugiej – gumką.

Długość gumki zmienia się wraz ze zmianą ułożenia listewek (czyli kąta między listewkami). Jest najmniejsza, równa 5 cm, gdy listewki są złożone, największa zaś, równa 25 cm, gdy są rozłożone tak, że leżą wzdłuż prostej. Kiedy gumka ma długość pomiędzy 5 cm a 25 cm, listewki i gumka tworzą trójkąt.



Ćwiczenie 2

a) Dwa boki trójkąta mają 12 cm i 5 cm. Jaka może być długość trzeciego boku?

b) Dwa boki trójkąta mają 4,7 cm i 6,8 cm. Ile centymetrów może mieć trzeci bok, jeśli jego długość w centymetrach wyraża się liczbą naturalną?

Przykład 3

Dane są punkty A, B, C takie, że: $AB = 10$, $BC = 15$ i $AC = 25$.
Jak jest położony punkt B?

$AB + BC = AC$, więc punkt B leży na odcinku AC, w odległości 10 od punktu A.

Ćwiczenie 3

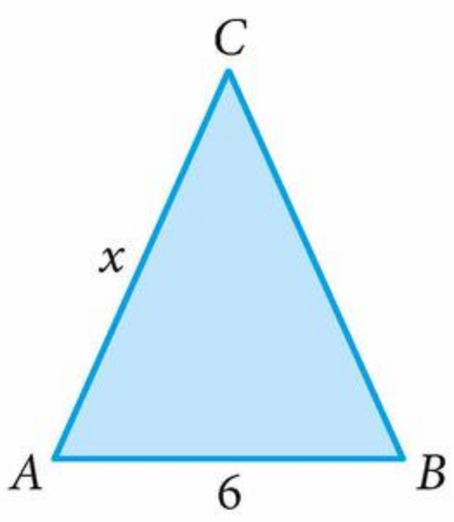
Dane są punkty A, B, C takie, że: $AB = 10$, $BC = 15$ i $AC = 5$.
Jak jest położony punkt A?

Przykład 4

W trójkącie równoramiennym o obwodzie 24 jeden z boków ma długość 6. Podaj długości wszystkich boków tego trójkąta.

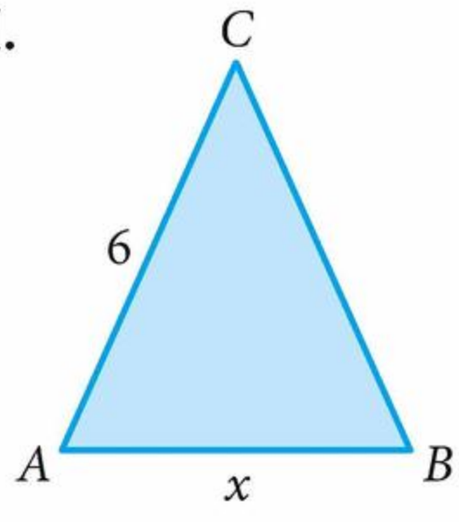
Wykonujemy rysunek. Nie wiemy, czy dany odcinek to podstawa, czy ramię, więc musimy rozpatrywać dwa przypadki.

I.



$2x + 6 = 24$
$2x = 18$
$x = 9$

II.



$x + 12 = 24$
$x = 12$

Podobnie postępowaliśmy przy obliczaniu kątów w trójkątach równoramiennych – też rozpatrywaliśmy dwa przypadki (s. 98).

Otrzymaliśmy dwa rozwiązania spełniające ułożone równania:

9, 9 i 6 oraz 6, 6 i 12.

Musimy jeszcze sprawdzić, czy odcinki o wyznaczonych długościach mogą być bokami trójkąta.

Czy $9 < 9 + 6$? Tak. Czy $12 < 6 + 6$? Nie, więc taki trójkąt nie istnieje.

Odp. Boki tego trójkąta mają długości 9, 9 i 6.

Ćwiczenie 4

W trójkącie równoramiennym o obwodzie 20 jeden z boków ma długość:

a) 2, **b)** 8.

Podaj długości wszystkich boków tego trójkąta.

Zadania

1. Czy można zbudować trójkąt o bokach podanej długości?

a) 1,7 cm, 3,5 cm, 1,9 cm **b)** 1,6 cm, 3 cm, 1,3 cm

2. Czy istnieje trójkąt, którego dwa boki mają długości 1 km i 1 m? Jeśli nie – wyjaśnij dlaczego, jeśli tak – podaj przykładową długość trzeciego boku.

3. Dwa boki trójkąta mają długości 6 cm i 8 cm. Jaką długość może mieć trzeci bok tego trójkąta?

4. W trójkącie równoramiennym ramię ma długość 23 cm. Jaką długość może mieć podstawa tego trójkąta?

5. W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 23 cm. Jaką długość może mieć ramię tego trójkąta?

6. Obwód trójkąta równoramiennego jest równy 20. Jaką długość może mieć:

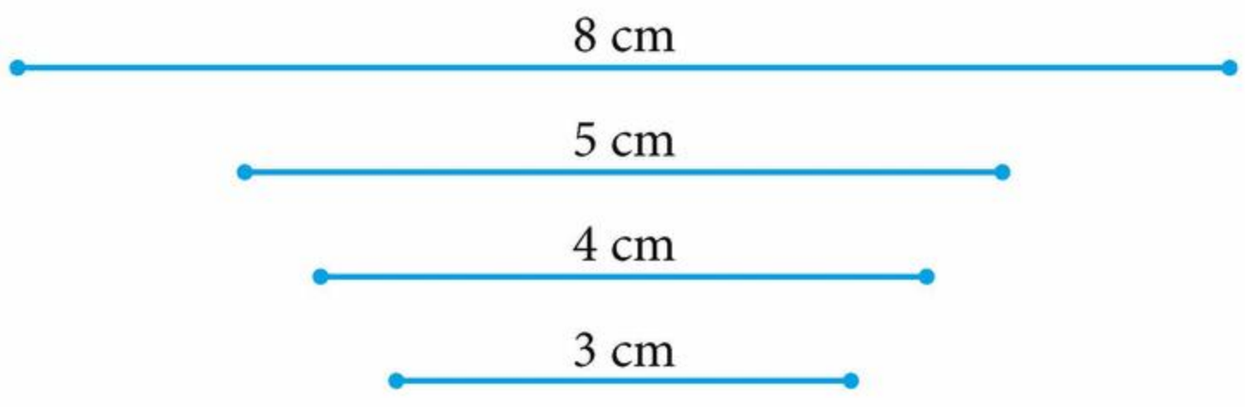
a) ramię tego trójkąta,
b) podstawa tego trójkąta?

7. Dane są długości dwóch odcinków: $AB = 5$ cm i $BC = 7$ cm. Wykonaj rysunek ilustrujący wzajemne położenie punktów A, B i C, jeśli:

a) $AC = 2$ cm, **b)** $AC = 12$ cm.

E **8.** Punkty A, B, C leżą na jednej prostej, przy czym $AB = 20$ cm, a $BC = 7$ cm. Podaj długość odcinka AC. Rozważ wszystkie przypadki.

9. Dane są cztery odcinki o podanych długościach. Z których trzech spośród tych odcinków można zbudować trójkąt? Na ile sposobów możesz dokonać wyboru?



:D **10.** Udowodnij, że w dowolnym czworokącie każdy bok jest krótszy od sumy trzech pozostałych.

Wskazówka. Oznacz wierzchołki czworokąta literami A, B, C, D i zacznij od znalezienia warunku, jaki musi spełniać odcinek AC.

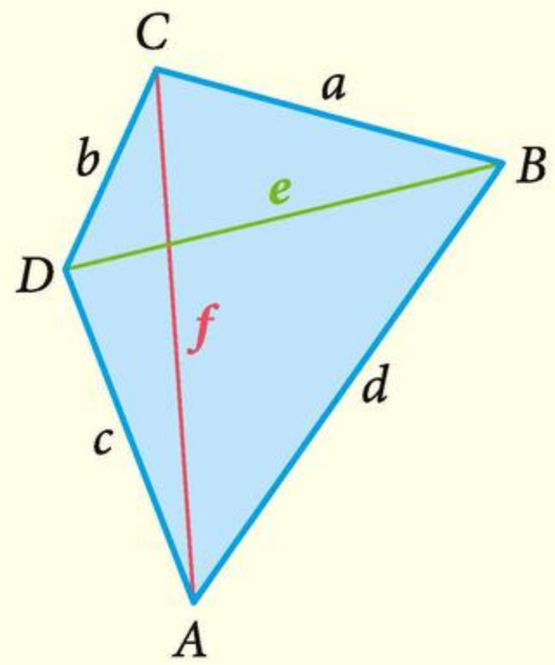
11. Dane są odcinki o długościach $AB = 12$, $BC = 5$, $CD = 10$. Jaką długość może mieć odcinek AD?

Dla dociekliwych

Nierówność trójkąta wydaje się oczywista, jednak może służyć do dowodzenia znacznie mniej oczywistych faktów. W tym celu będzie nam potrzebna umiejętność przekształcania nierówności. Będziemy korzystać z trzech spostrzeżeń:

- Jeśli $a < b$, to także $a + c < b + c$ (do obu stron nierówności można dodać tę samą liczbę).
- Jeśli $a < b$, to $2a < 2b$ i $\frac{1}{2}a < \frac{1}{2}b$ (obie strony nierówności można pomnożyć przez 2 lub przez $\frac{1}{2}$; tak samo można pomnożyć obie strony nierówności przez inną liczbę DODATNIĄ).
- Jeśli $a < b$ i $c < d$, to $a + c < b + d$.

Zbadamy teraz zależność między sumą długości przekątnych a obwodem dowolnego czworokąta. Rysujemy czworokąt i oznaczamy jego boki i przekątne. Oznaczamy literą L obwód czworokąta: $L = a + b + c + d$.



1. Zapisz nierówność trójkąta dla trójkąta ABD oraz trójkąta BCD. Korzystając z tych nierówności, wykaż, że $2e < L$.

2. Wykaż, że $2f < L$.

3. Korzystając z nierówności udowodnionych w zadaniach 1 i 2, udowodnij, że w dowolnym czworokącie suma długości przekątnych jest mniejsza od obwodu tego czworokąta.

Czy już umiem?

I. Czy istnieje trójkąt o bokach podanej długości?

a) 2 cm, 5 cm, 8 cm **b)** 3 m, 4 m, 6 m

II. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

1. Istnieje trójkąt równoramienny, którego dwa boki mają długości 12 cm i 12 m.
2. Istnieje trójkąt równoramienny o ramieniu 12 cm i podstawie 12 m.

III. Dwa boki trójkąta mają 30 cm i 43 cm. Jaką długość może mieć trzeci bok?

IV. Bluzka kosztowała 80 zł. Na początku sezonu jej cenę podwyższono o 15%, a po sezonie obniżono o 15%. Ile kosztuje bluzka po obu tych zmianach?

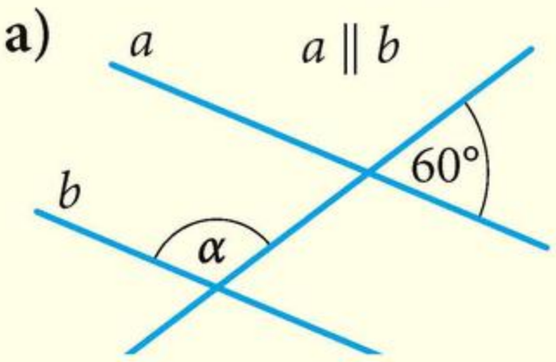
A. 1,80 zł **B.** 78,20 zł **C.** 80 zł **D.** 92 zł

Powtórzenie III

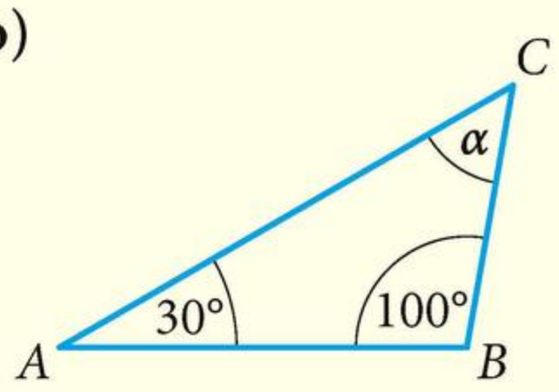
ZESTAW 1

1. Wyznacz miarę kąta α.

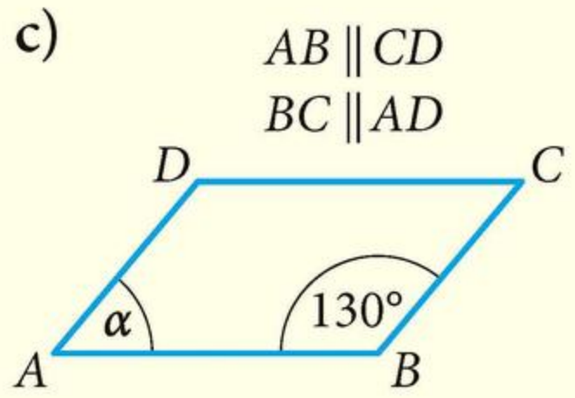
a)



b)

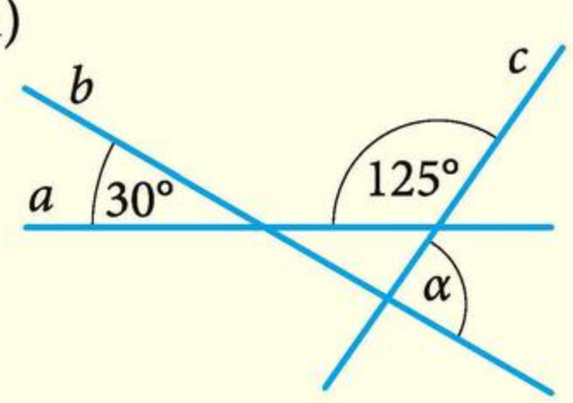


c)

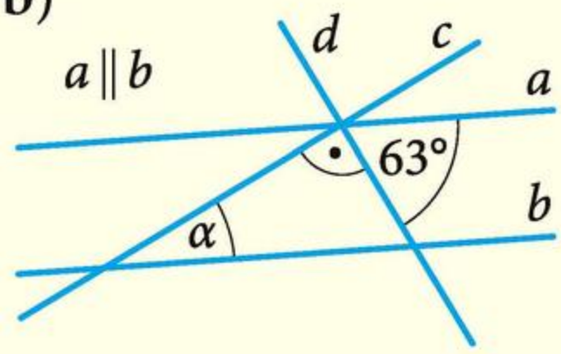


2. Wyznacz miarę kąta α.

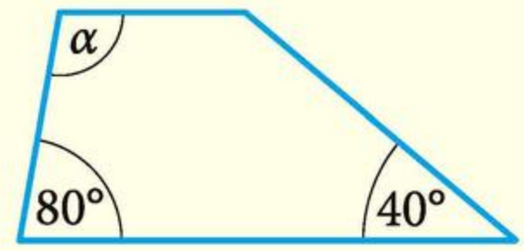
a)



b)



c)



trapez

3. Dwa boki trójkąta mają długości 7 cm i 11 cm. Trzeci bok może mieć długość

A. 2 cm. **B.** 4 cm. **C.** 8 cm. **D.** 18 cm.

4. Jeden z kątów trójkąta równoramiennego ma 20°. Wyznacz miary pozostałych kątów tego trójkąta. Rozpatrz wszystkie możliwe przypadki.

5. Jeden z kątów równoległoboku jest o 40° większy od drugiego kąta. Oblicz miary wszystkich kątów tego równoległoboku.

6. W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie jest 3 razy mniejszy od kąta przy wierzchołku. Oblicz miary kątów tego trójkąta.

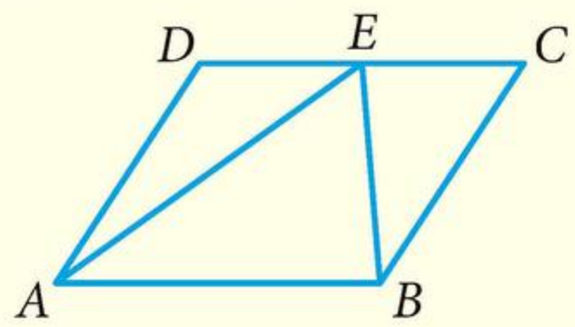
7. Dwa spośród kątów trójkąta mają 20° i 30°. Czy ten trójkąt jest rozwartokątny? Wybierz odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie spośród zdań A–C.

TAK	ponieważ	A.	$20 < 90$ oraz $30 < 90$.
NIE		B.	$180 - 20 - 30 > 90$.
		C.	nie ma kąta rozwartego.

8. Wskaż założenie i tezę w podanym twierdzeniu.

a) Jeśli liczba jest podzielna przez 3, to suma jej cyfr jest podzielna przez 3.
b) Przekątne rombu są prostopadłe.

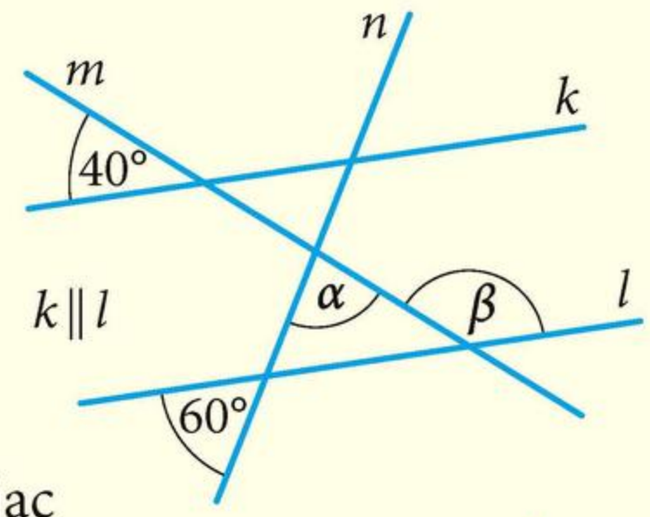
:D **9.** Dany jest równoległobok $ABCD$ i punkt E leżący na boku CD tego równoległoboku. Udowodnij, że pole trójkąta ABE jest połową pola równoległoboku $ABCD$.



ZESTAW 2

1. Suma miar kątów α i β (rysunek obok) jest równa

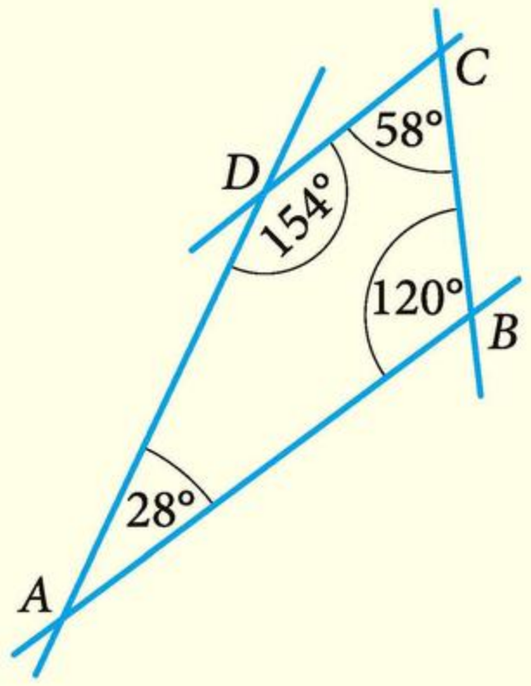
A. 180°.
C. 220°.
B. 200°.
D. 240°.



2. Ile trójkątów różnobocznych można zbudować, mając do dyspozycji odcinki długości 2 cm, 4 cm, 5 cm i 7 cm?

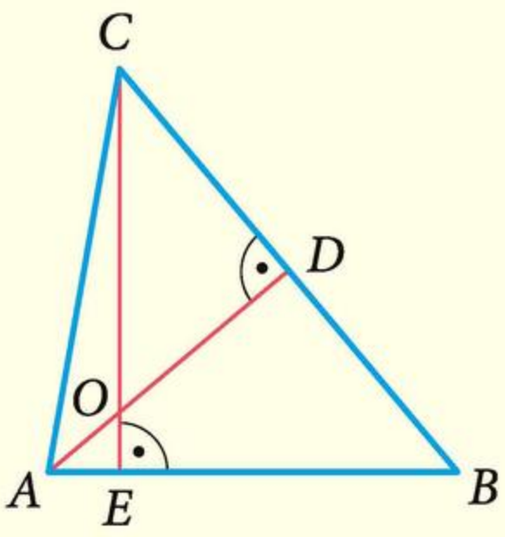
3. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB = BC$. Dwusieczna kąta przy podstawie tworzy z przeciwległym bokiem kąt o mierze 60°. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC.

4. Zdecyduj, czy czworokąt $ABCD$ przedstawiony na rysunku jest trapezem. Wybierz odpowiedź i jej uzasadnienie spośród zdań A–C.



TAK	ponieważ	A.	suma miar jego kątów wynosi 360°.
NIE		B.	suma miar kątów przy żadnym z boków nie wynosi 180°.
		C.	boki AB i DC są równoległe.

5. Dany jest trójkąt równoramienny ABC. Kąt ABC ma miarę 50° oraz $AB = AC$ (patrz rysunek). Odcinki AD i CE są wysokościami tego trójkąta. Podaj miary kątów trójkąta AOC.



6. Jeden z kątów ostrych trapezu jest dwa razy mniejszy od drugiego kąta ostrego, a jeden z kątów rozwartych jest równy sumie kątów ostrych. Oblicz miary kątów tego trapezu. Rozpatrz wszystkie przypadki. Narysuj ten trapez i zapisz na rysunku miary kątów.

7. Wskaż w podanym twierdzeniu założenie i tezę. Wykonaj rysunek do podpunktu a).

a) Jeśli trójkąty mają tę samą podstawę AB, a ich wierzchołki C i D leżą na tej samej prostej równoległej do podstawy AB, to te trójkąty mają równe pola.

b) Iloczyn liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą.

:D **8.** W kwadracie $ABCD$ na bokach AB, BC, CD i DA zaznaczono kolejno punkty E, F, G i H w taki sposób, że $AE = BF = CG = DH$. Udowodnij, że czworokąt $EFGH$ jest rombem.

:D **9.** Na okręgu o średnicy AB zaznaczono punkt C i otrzymano trójkąt ABC. Udowodnij, że długość odcinka łączącego środek boku AB z wierzchołkiem C jest równa połowie długości boku AB.

Zadania na temat…

300 lat na jedno zadanie?!

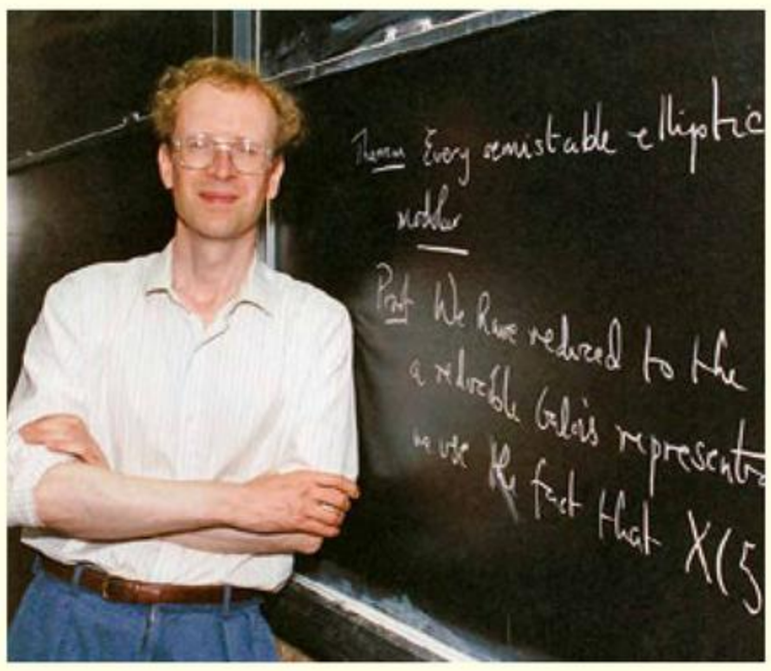
Myślisz, że godzina pracy nad rozwiązaniem jednego zadania to dużo? Są problemy, nad którymi matematycy głowią się przez setki lat.

Jedna z ciekawszych historii dotyczących dowodzenia twierdzeń jest związana z **Wielkim Twierdzeniem Fermata**:

> Jeśli n jest liczbą naturalną większą od 2, to nie istnieją dodatnie liczby naturalne x, y, z, które spełniałyby równanie $x^n + y^n = z^n$.

Francuski matematyk żyjący w XVII w., Pierre de Fermat, na marginesie jednej z czytanych książek pozostawił notatkę: „Znalazłem zaiste zadziwiający dowód tego twierdzenia. Niestety, margines jest zbyt mały, by go pomieścić". Dziś przypuszcza się, że dowód, o którym pisał Fermat, zawierał błędy. Przez ponad 300 lat matematycy bezskutecznie starali się udowodnić (lub obalić) Wielkie Twierdzenie Fermata. Niektórzy przedstawiali dowody dla konkretnych wartości n, np. już w XVIII w. Leonhard Euler (czytaj: leonard ojler) udowodnił, że dla $n = 3$ rzeczywiście nie istnieją odpowiednie x, y, z.

Dopiero około 30 lat temu udało się to twierdzenie udowodnić i było to jedno z największych osiągnięć w matematyce XX w. Autorem dowodu jest angielski matematyk **Andrew Wiles** (czytaj: endrju łajlz). Dowód został przedstawiony podczas trzech wykładów w Cambridge w 1993 r. Autor skorzystał w nim z narzędzi matematycznych nieznanych w czasach Fermata. Niedługo później okazało się, że dowód zawiera luki, które jednak Wilesowi udało się uzupełnić.



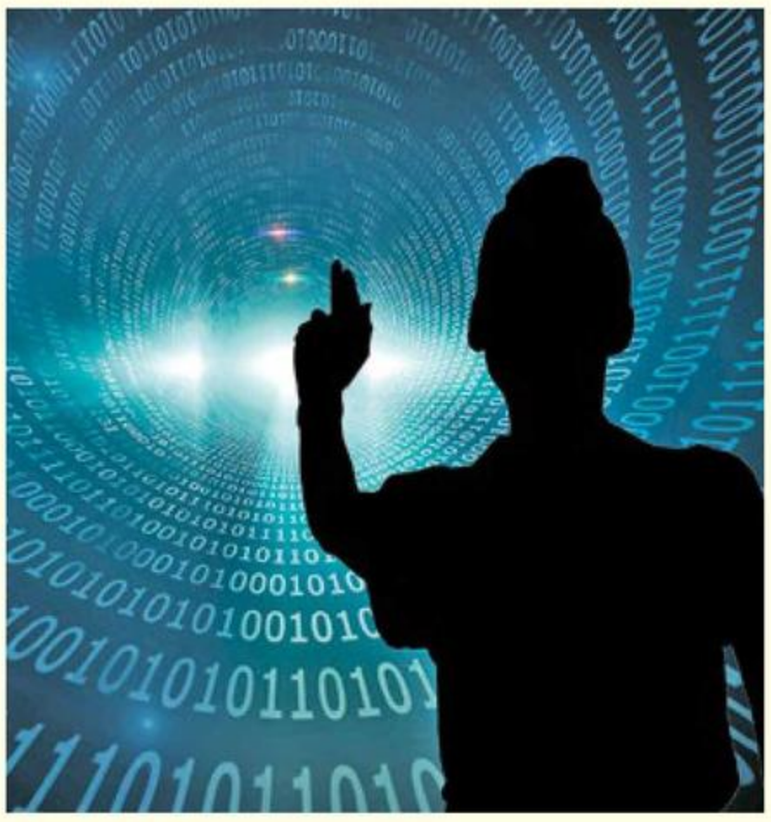
Jednym z tzw. problemów otwartych, czyli takich, które wciąż nie mają dowodu, jest **mocna hipoteza Goldbacha**:

> Każda liczba naturalna parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych.

Ten problem sformułowano w XVIII w., więc czeka na rozwiązanie od ponad 250 lat. Pokazano już, że można rozkładać w ten sposób liczby mniejsze niż 10^{17}. Zauważono również, że większe liczby mają zazwyczaj więcej niż jeden taki rozkład. Oba te fakty sugerują, że hipoteza jest prawdziwa. Niestety, nadal nie potrafimy jej udowodnić.

Opisane wyżej dwa problemy są niezwykłe. Do zrozumienia ich sformułowań wystarczy znajomość najprostszych pojęć matematycznych (np. liczba naturalna, liczba pierwsza). Natomiast nad znalezieniem ich dowodów pracują pokolenia matematyków, również tych najwybitniejszych. Pomyłki, luki i braki w dowodach są dla nich chlebem powszednim. Warto zapoznać się z poniższą wypowiedzią Wilesa i pamiętać o niej, gdy wydaje nam się, że już zbyt długo bezskutecznie walczymy z jakimś zadaniem.

„Moje doświadczenia z uprawianiem matematyki najlepiej można chyba opisać, porównując je do wędrówki po ciemnym niezbadanym domu. Wchodzę do pierwszego pokoju: panuje w nim zupełny mrok. Błądzę po omacku i wpadam na meble, ale stopniowo uczę się, gdzie stoi każdy z nich. Po jakichś sześciu miesiącach znajduję wyłącznik i naraz wszystko staje się jasne, widzę dokładnie, gdzie jestem. A potem wchodzę do następnego ciemnego pokoju i spędzam tam następne sześć miesięcy. I każde z tych olśnień – czasem trwają one tylko chwilę, a czasem dzień albo dwa – jest tylko kulminacją owych wielu miesięcy błądzenia po omacku i bez nich byłoby niemożliwe".



Prace nad dowodami twierdzeń przyczyniają się do rozwoju wielu gałęzi matematyki i techniki. Bez nich nie mielibyśmy dziś chociażby poczty elektronicznej, bankomatów, telefonów komórkowych czy muzyki w formacie mp3.

1. Zapisz równanie występujące w Wielkim Twierdzeniu Fermata dla $n = 2$ i podaj kilka trójek dodatnich liczb naturalnych x, y, z, które spełniają to równanie. Skąd znasz równanie w takiej postaci?

2. Zapisz równanie występujące w Wielkim Twierdzeniu Fermata dla trzech wybranych wartości n większych niż 2.

3. Zapisz twierdzenie związane z Wielkim Twierdzeniem Fermata, które udowodnił Euler. Podaj założenie i tezę tego twierdzenia.

4. Wybierz jedno z równań zapisanych przez ciebie w rozwiązaniu zadania 2. Znajdź liczby x, y, z, które nie muszą być naturalne dodatnie, ale spełniają to równanie.

5. Podaj założenie i tezę Wielkiego Twierdzenia Fermata.

6. Sformułuj hipotezę Goldbacha z użyciem spójników „jeśli" i „to".

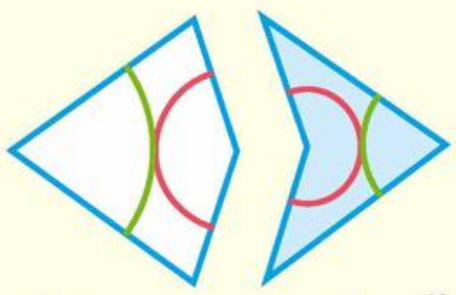
7. Przedstaw każdą jednocyfrową liczbę parzystą większą od 2 w postaci sumy dwóch liczb pierwszych.

8. Na ile sposobów można przedstawić liczbę 20 w postaci sumy dwóch liczb pierwszych? Podaj te sposoby. A jak jest z liczbą 36?

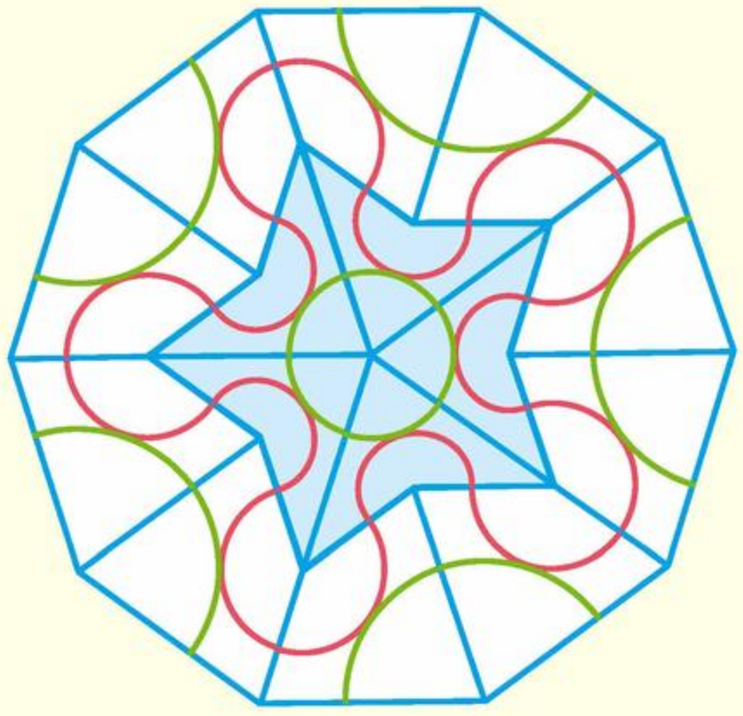
Zadania na deser

Mozaika Penrose'a

Roger Penrose (czytaj: rodżer penroz), współczesny matematyk i fizyk, odkrył, że istnieją takie dwa czworokąty, z których można układać niezwykłe kompozycje, nazywane parkietażami. Figury te powstały po rozcięciu rombu.



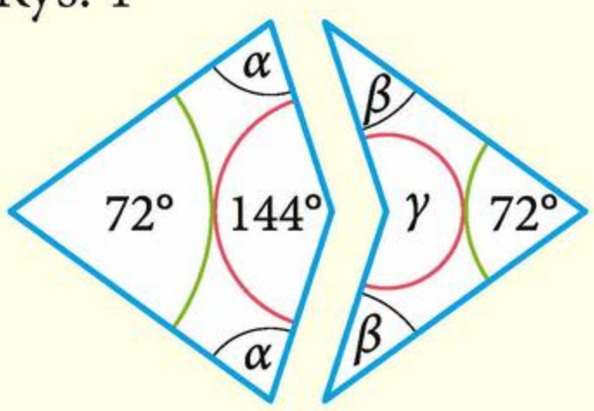
latawiec strzałka



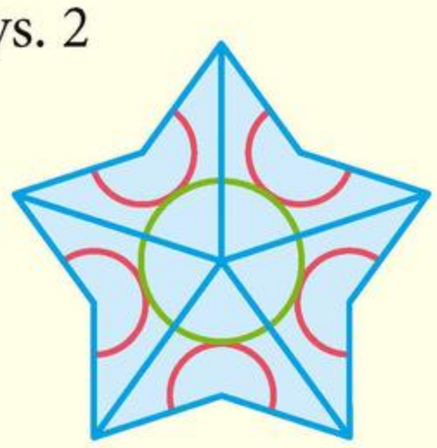
Łuki zaznaczone na figurach ułatwiają łączenie czworokątów, a dzięki falistym liniom powstają dodatkowe wzory. Fragment parkietażu widoczny na rysunku można powielać w nieskończoność, ale latawce i strzałki można połączyć też tak, że wzór nie będzie się powtarzać.

1. Oblicz miary kątów α, β, γ zaznaczonych w czworokątach używanych do układania mozaiki Penrose'a (rys. 1).

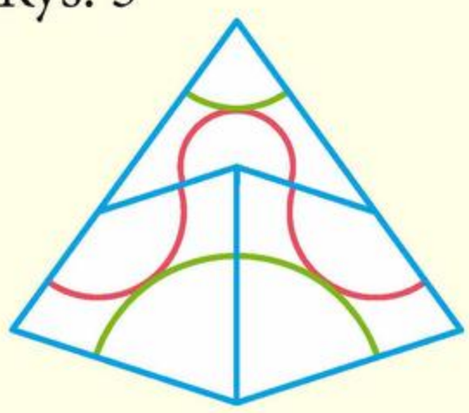
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



2. Na rysunkach 2 i 3 pokazano sposoby ułożenia fragmentu mozaiki Penrose'a o wspólnym wierzchołku. Narysuj inne sposoby ułożenia latawców i strzałek tak, aby miały wspólny wierzchołek (jest jeszcze pięć takich możliwości).

Sofizmaty

Sofizmat to „dowód", w którym umyślnie popełniono błąd, kamuflując go tak, aby nie było go łatwo zauważyć.
Przeczytaj poniższe sofizmaty. Spróbuj znaleźć błędy, które w nich popełniono. Jeśli ci się to nie uda, skorzystaj ze wskazówek umieszczonych w odpowiedziach.

Uwaga. W każdym z rozumowań umieszczonych w ramce jest **ukryty błąd**!

3. Pokażemy, że 1 zł = 1 gr.

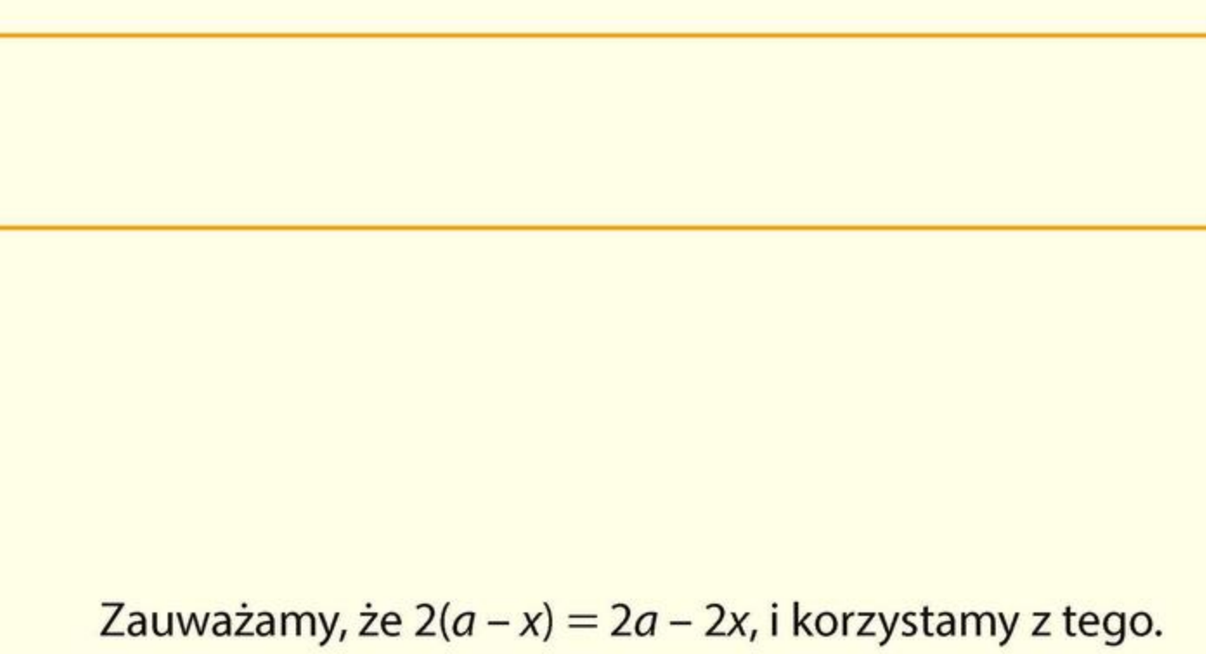
$$1\text{ zł} = 100\text{ gr} = 10\text{ gr} \cdot 10\text{ gr} = 0{,}1\text{ zł} \cdot 0{,}1\text{ zł} = 0{,}01\text{ zł}$$

4. Pokażemy, że 6 kg = 6 t.

$$6\text{ t} = 6000\text{ kg} = 200\text{ kg} \cdot 30\text{ kg} = 0{,}2\text{ t} \cdot 0{,}03\text{ t} = 0{,}006\text{ t} = 6\text{ kg}$$

5. Pokażemy, że 64 = 65.

Kwadrat o boku 8 (czyli polu 64) dzielimy na dwa jednakowe trójkąty i dwa jednakowe czworokąty, jak na rysunku po lewej stronie.



Następnie z otrzymanych elementów układamy prostokąt, jak na drugim rysunku. Otrzymany prostokąt ma wymiary 13 × 5, czyli pole 65. Obie figury są ułożone z jednakowych elementów, więc mają równe pola, czyli 64 = 65.

6. Pokażemy, że 2 = 1.

Niech $a = x \quad | + a$

$a + a = a + x$

$2a = a + x \quad | - 2x$

$2a - 2x = a + x - 2x$

$2a - 2x = a - x$

$2(a - x) = a - x \quad | : (a - x)$

$2 = 1$

Zauważamy, że $2(a - x) = 2a - 2x$, i korzystamy z tego.

7. Pokażemy, że każde dwie liczby rzeczywiste są równe.

Weźmy dowolne dwie liczby rzeczywiste a i b takie, że $a > b$. Skoro liczba a jest większa, to istnieje taka liczba $c > 0$, że $a = b + c$.

$a = b + c \quad | \cdot (a - b)$

$a(a - b) = (b + c)(a - b)$

$aa - ab = ab + ac - bb - bc \quad | - ac$

$aa - ab - ac = ab - bb - bc$

Korzystamy z równości:

$a(a - b - c) = aa - ab - ac$ oraz $b(a - b - c) = ba - bb - bc$.

$a(a - b - c) = b(a - b - c) \quad | : (a - b - c)$

$a = b$

1 Figury przystające

Na dobry początek >

W produkcji masowej szczególną wagę przywiązuje się do tego, by wytwarzane produkty miały taki sam kształt i rozmiar. Artykuły, np. wyroby ciastkarskie, schodzące z taśmy produkcyjnej są poddawane szczegółowej kontroli.

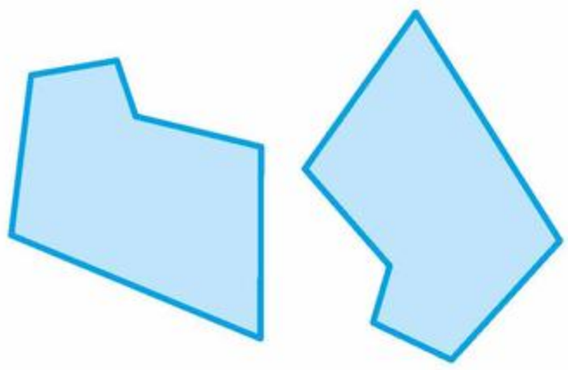


Pytania i polecenia

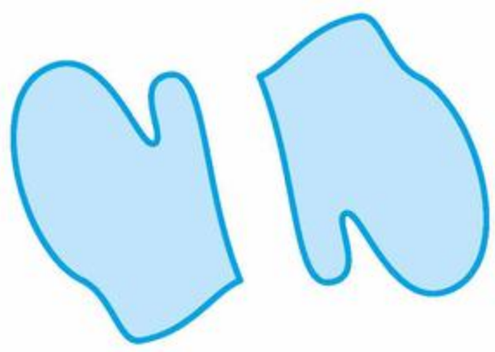
- Przyjrzyj się ciasteczkowym ludzikom. Które z nich mają taki sam kształt i rozmiar jak ciasteczkowy ludzik w kółku?

Przyjrzyj się rysunkom. Każdy z nich przedstawia dwie identyczne figury. Mają one jednakowy kształt i taką samą wielkość, tylko znajdują się w innym miejscu i są inaczej położone. Gdyby wyciąć jedną z figur, można by ją ułożyć na drugiej (na rysunku III wymagałoby to odwrócenia na drugą stronę), a wówczas figury by się pokryły.

I.



II.



III.



Zapamiętaj

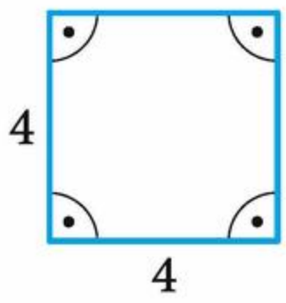
Figury, które mają jednakowy kształt i taką samą wielkość, nazywamy **figurami przystającymi**.

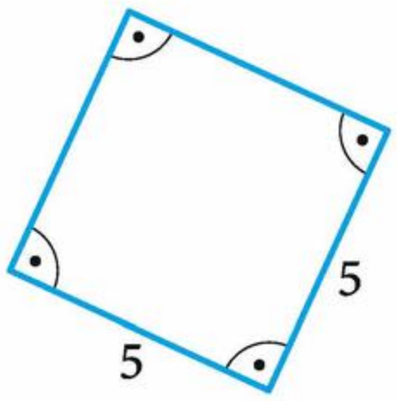
Możemy więc powiedzieć, że na każdym z powyższych rysunków przedstawiono parę figur przystających.

Przykład 1

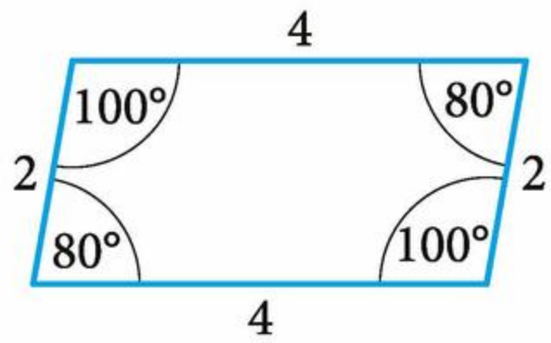
Czy wielokąty na rysunku są przystające?

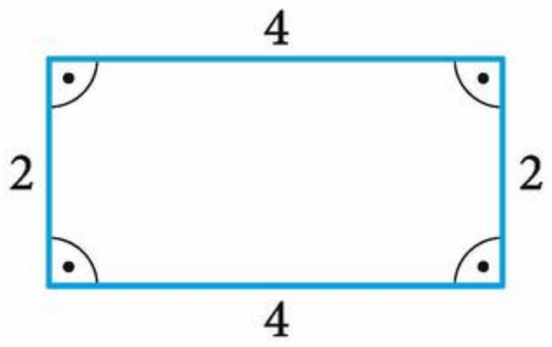
a)



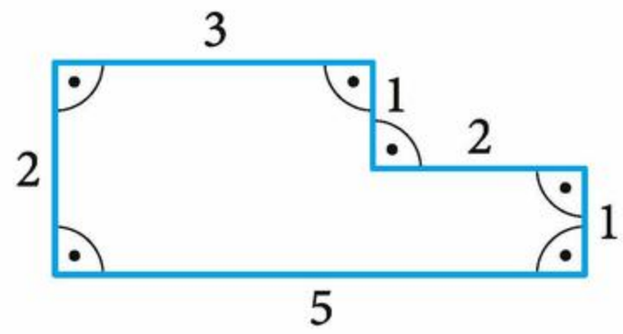


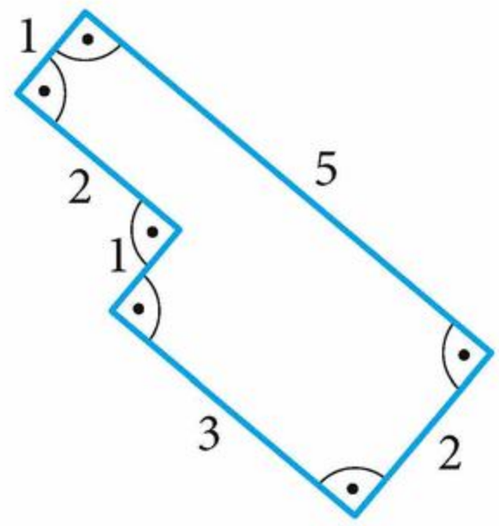
b)





c)





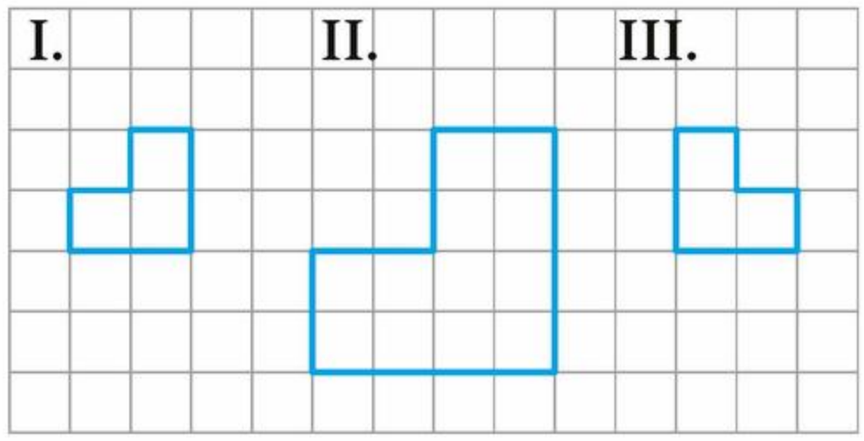
a) Figury mają jednakowy kształt (obie są kwadratami), mają jednak inne wymiary, więc nie są przystające.

b) Figury mają różne kształty (ich kąty mają różne miary), więc nie są przystające.

c) Figury mają jednakowy kształt (sąsiednie boki są prostopadłe) i identyczne wymiary (kolejne boki mają długości: 2, 3, 1, 2, 1, 5), są więc przystające.

Ćwiczenie 1

Czy figury I i II są przystające?
A figury I i III?

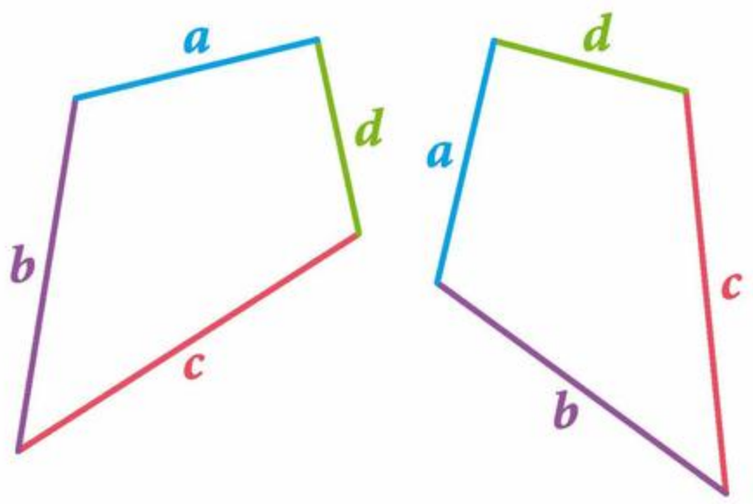


Skoro figury przystające są identyczne pod względem kształtu i wielkości, to mają także równe obwody i pola. Przystające wielokąty mają też równe odpowiednie przekątne, przystające trójkąty mają równe odpowiednie wysokości itd. Gdy chcemy sprawdzić, czy dwa wielokąty są przystające, wystarczy porównać ich boki i kąty.

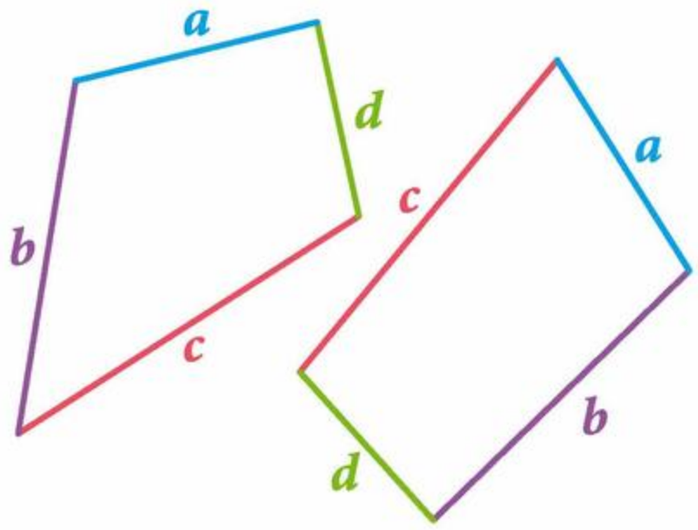
Zapamiętaj

Wielokąty, które mają wszystkie kąty i boki odpowiednio równe, są przystające.

Słowo „odpowiednio” oznacza, że porównujemy w dwóch figurach te boki lub kąty, które się pokryją, gdy jedną z figur nałożymy na drugą.



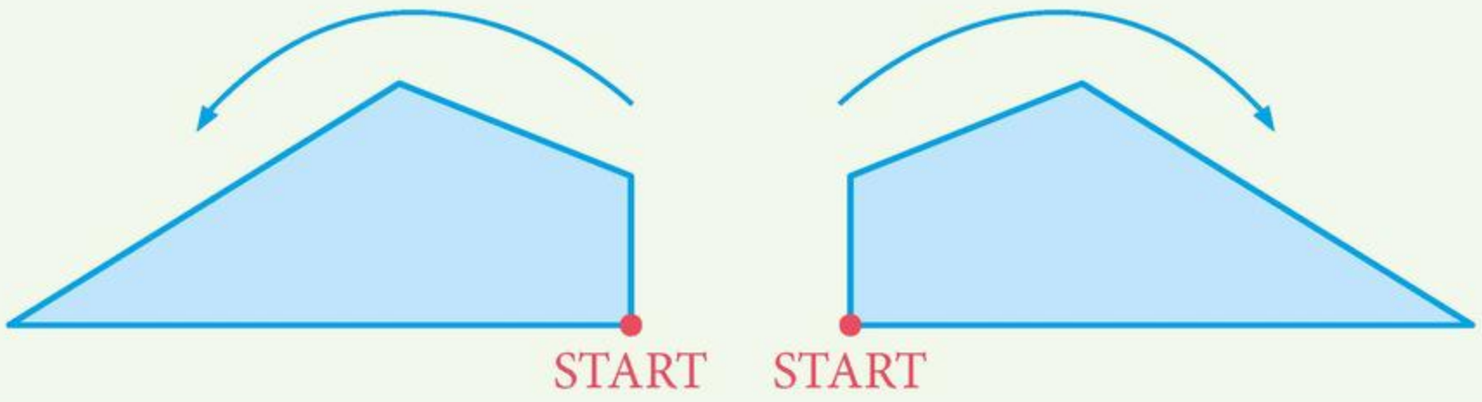
Te czworokąty mają boki **odpowiednio** równe.



Te czworokąty mają boki równe, ale **nie odpowiednio** równe.

Dobra rada

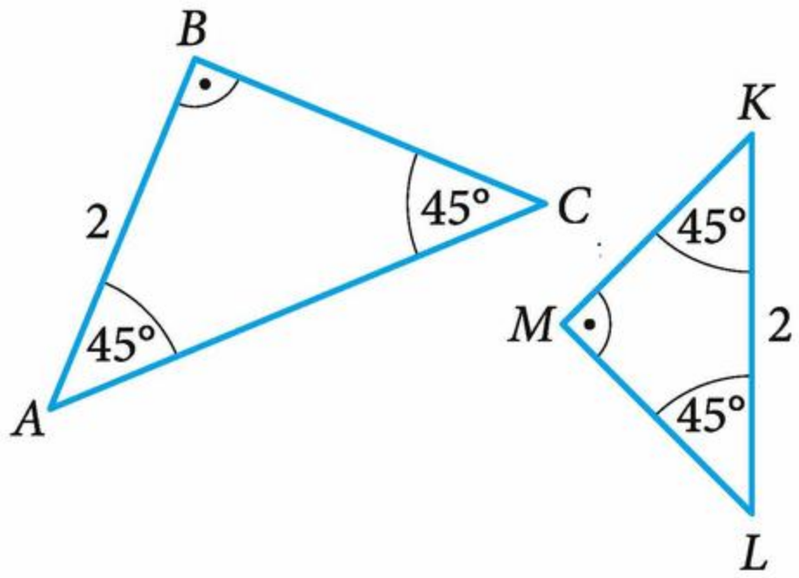
Warto porównywać boki i kąty po kolei, zaczynając od charakterystycznego boku lub kąta (np. najdłuższego boku, kąta prostego).



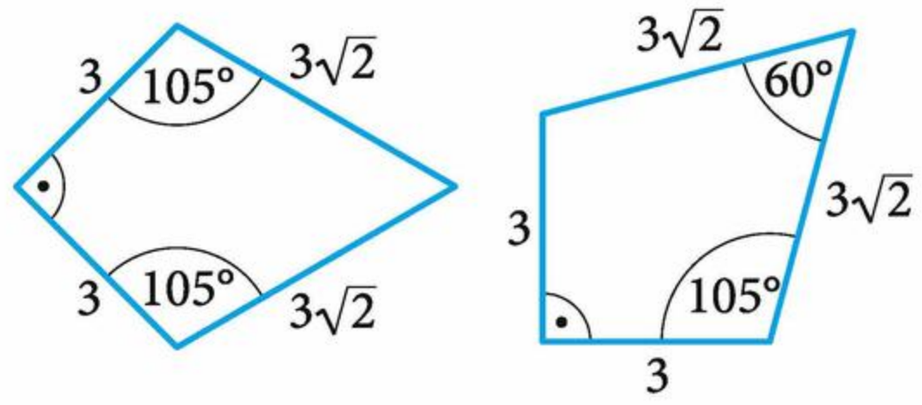
Przykład 2

Czy przedstawione wielokąty są przystające?

a)



b)



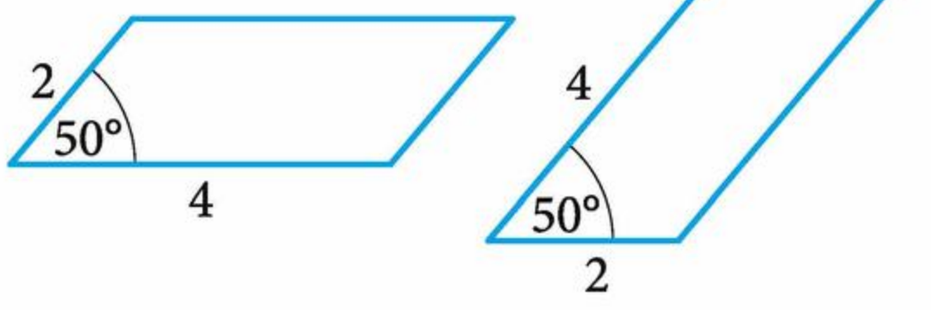
a) Oba trójkąty mają jednakowe kąty.
Każda z figur ma też jeden bok długości 2. W trójkącie ABC jest to przyprostokątna, a w trójkącie KLM – przeciwprostokątna, czyli nie są to **odpowiednie** boki. Przeciwprostokątna trójkąta ABC ma długość większą niż 2 (dokładnie: $2\sqrt{2}$), a więc odpowiednie boki trójkątów nie są równe.
Odp. Te trójkąty nie są przystające.

b) W każdej z figur brakuje miary jednego kąta, możemy ją jednak obliczyć, bo suma kątów czworokąta wynosi 360°. Zobaczymy wtedy, że oba czworokąty mają takie same kąty: kąt prosty, kąt 60° oraz dwa kąty po 105° położone naprzeciw siebie.
Również odpowiednie boki figur są równe.
Odp. Te czworokąty są przystające.

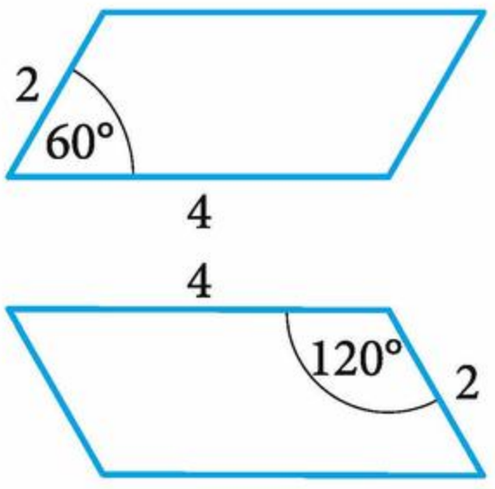
Ćwiczenie 2

Na rysunku przedstawiono dwa równoległoboki. Czy są one przystające?

a)



b)



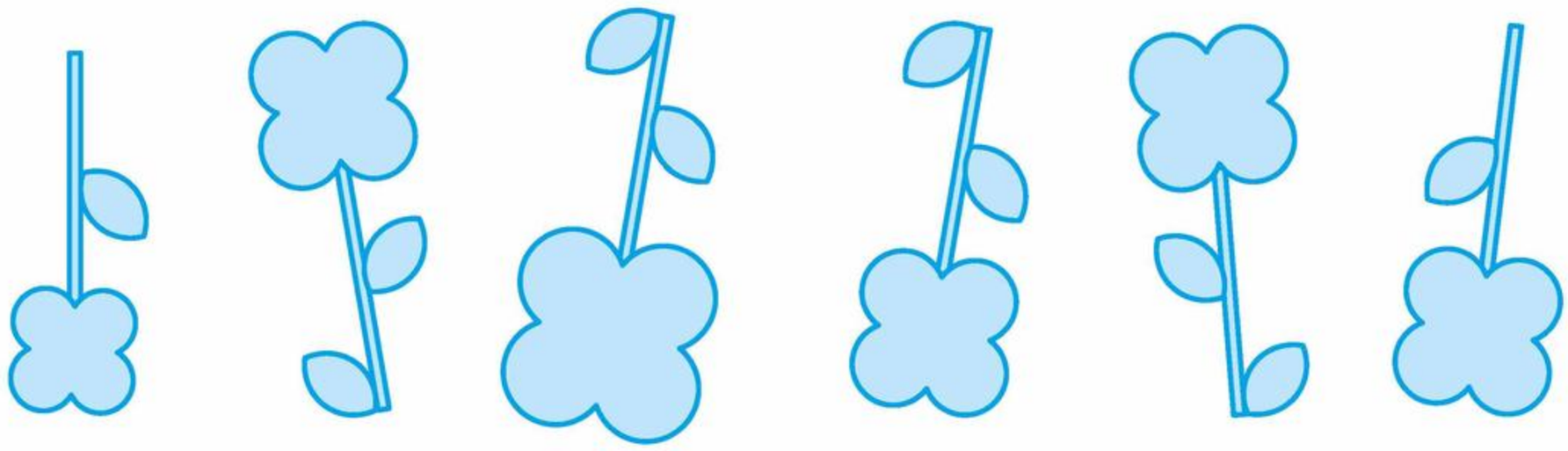
Zadania

1. Czy podane zdania są prawdziwe?
I. Każde dwa koła są przystające.
II. Każde dwa koła o równych promieniach są przystające.

2. Odpowiedz na pytanie. Uzasadnij odpowiedź.

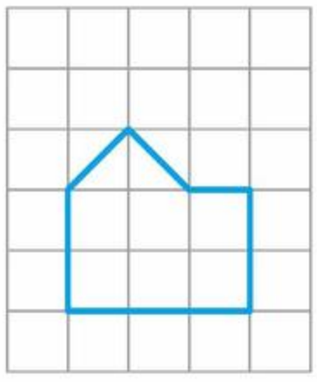
a) Czy każde dwa kwadraty o jednakowym polu są przystające?
b) Czy każde dwa prostokąty o jednakowym polu są przystające?
c) Czy każde dwa prostokąty o odpowiednio równych bokach są przystające?
d) Czy każde dwa równoległoboki o odpowiednio równych bokach są przystające?
e) Czy każde dwa romby o odpowiednio równych bokach są przystające?
f) Czy każde dwa romby o odpowiednio równych bokach i kątach są przystające?
g) Czy każde dwa równoległoboki o odpowiednio równych bokach i kątach są przystające?

3. Na rysunku poniżej są trzy figury przystające. Znajdź je.

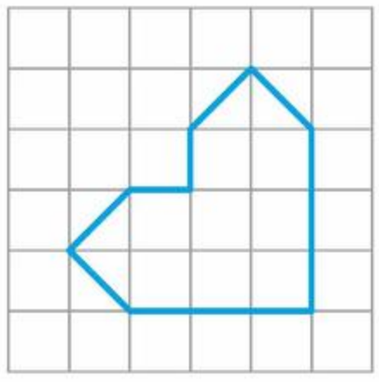


4. Narysuj na kartce w kratkę trzy różnie położone figury przystające do przedstawionej na rysunku.

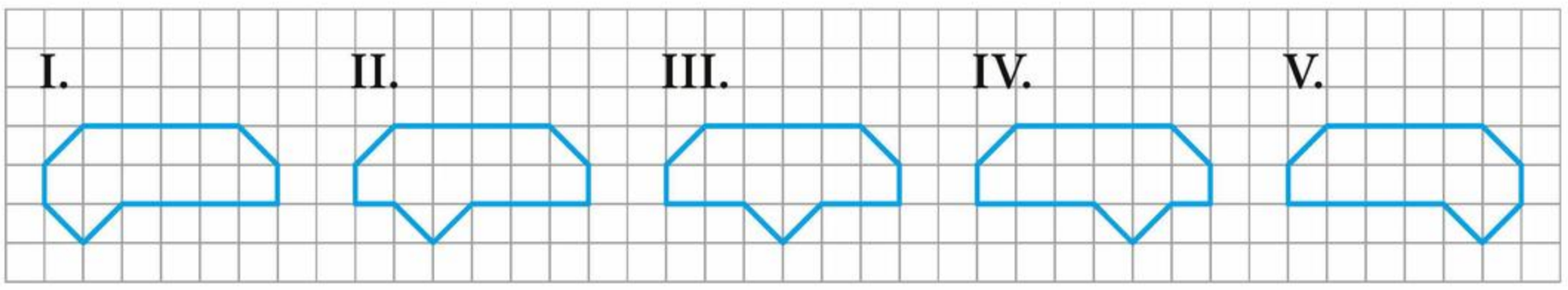
a)



b)



5. Które spośród poniższych figur są przystające? Uzasadnij swoją odpowiedź.

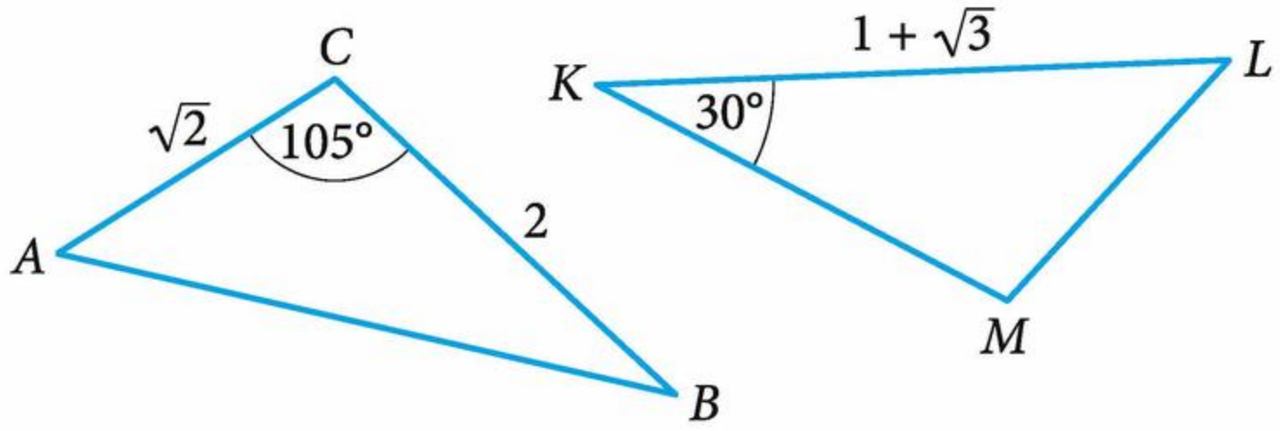


6. Przekątne prostokąta $ABCD$ mają taką samą długość jak przekątne prostokąta $KLMN$. Czy wynika stąd, że te prostokąty są przystające?
Uzasadnij swoją odpowiedź.

7. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań. Zdecyduj, czy w miejsce ? wstawić literę P, oznaczającą zdanie prawdziwe, czy F – oznaczającą zdanie fałszywe.

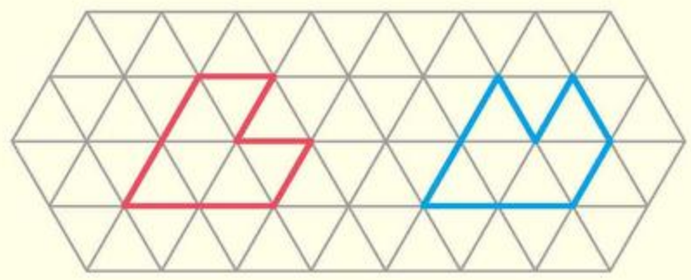
I.	Jeśli figura A jest przystająca do figury B, a figura B jest przystająca do figury C, to także figura A jest przystająca do figury C.	?
II.	Jeśli figura A nie jest przystająca do figury B, a figura B nie jest przystająca do figury C, to także figura A nie jest przystająca do figury C.	?

8. Trójkąty ABC i KLM są przystające. Podaj brakujące długości boków i miary kątów.

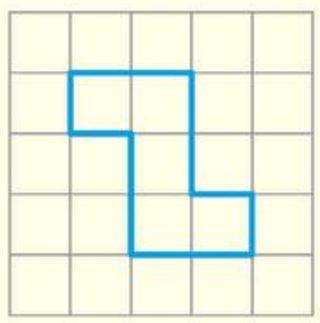


Dla dociekliwych

1. Na rysunku przedstawiono dwie figury. Czy mają one równe kąty? Czy mają równe boki? Czy są przystające?



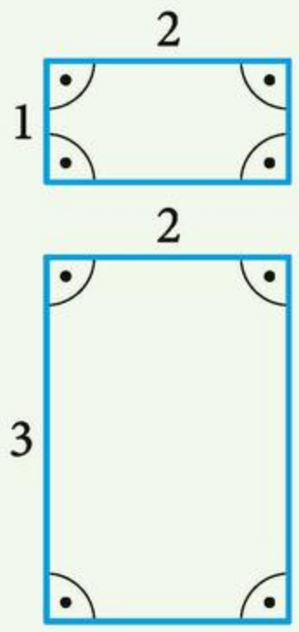
2. Figura na rysunku ma cztery boki o długości 2 kratek i cztery boki o długości 1 kratki, sześć kątów prostych i dwa kąty 270°. Narysuj figurę, która ma takie same boki i takie same kąty jak figura na rysunku, ale jednak nie jest do niej przystająca. Czy umiesz znaleźć więcej takich rozwiązań?



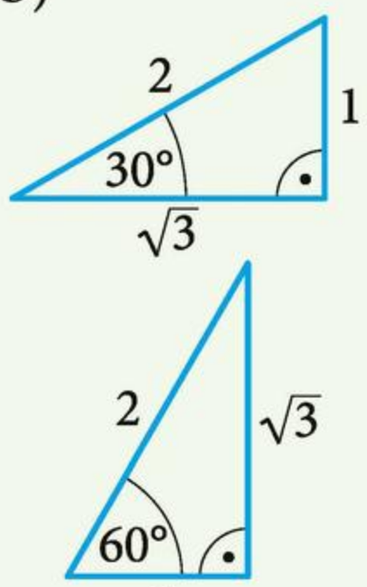
Czy już umiem?

I. Czy figury na rysunku są przystające?

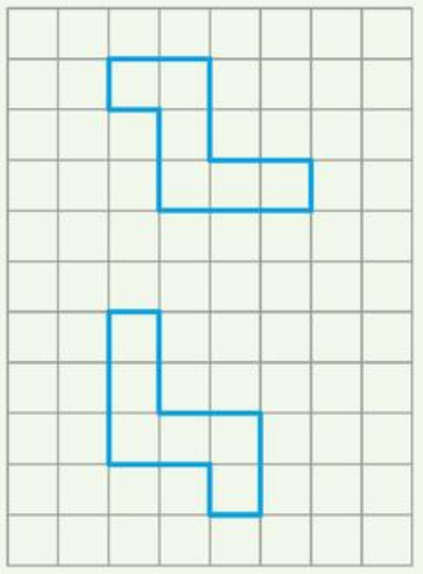
a)



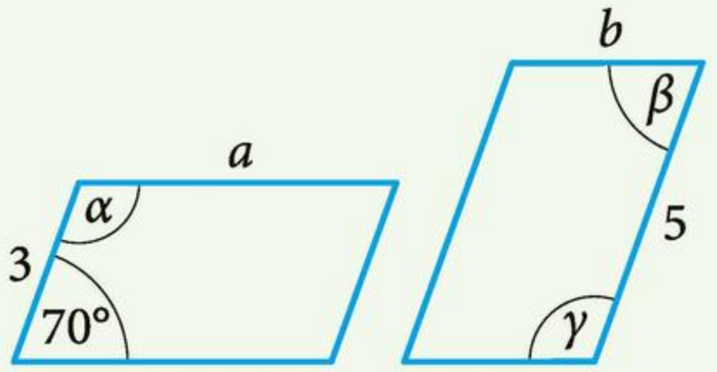
b)



c)



II. Równoległoboki na rysunku obok są przystające. Podaj długości odcinków i miary kątów oznaczonych literami.



III. Ola ma z matematyki następujące oceny: dwie piątki, dwie czwórki i jedną szóstkę. Oblicz średnią tych ocen.

2

Cechy przystawania trójkątów

Na dobry początek ›

Wieża Eiffla [czytaj: ajfla] to jeden z symboli Paryża. Została wzniesiona w 1889 roku przez inżyniera Gustave'a Alexandre'a Eiffela [czytaj: efela] i była wówczas najwyższą budowlą świata, a zarazem pokazem możliwości, jakie niosły konstrukcje żelazne.

Wieża ma wysokość 300 m i jest zbudowana z żelaznych kratownic.





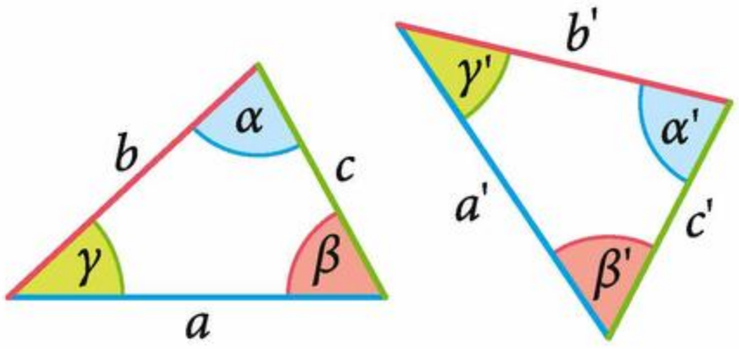
Kształty zbudowane z klocków połączonych śrubami, z zestawu „mały konstruktor”.

Pytania i polecenia

Co wpływa na stabilność tak ażurowej konstrukcji? Aby odpowiedzieć na to pytanie, przyjrzyj się kształtom skręconym z „małego konstruktora”: trójkątowi i dwóm czworokątom. Oto pytania pomocnicze:

- Czy można zmienić kształt trójkąta skręconego z klocków?
- A czy można zmienić kształt któregoś z czworokątów? Czy dodanie przekątnej coś zmienia?

Wiesz już, że przystające trójkąty mają równe odpowiednie boki i kąty. Wobec tego przystawanie dwóch trójkątów oznacza, że zachodzi sześć równości.



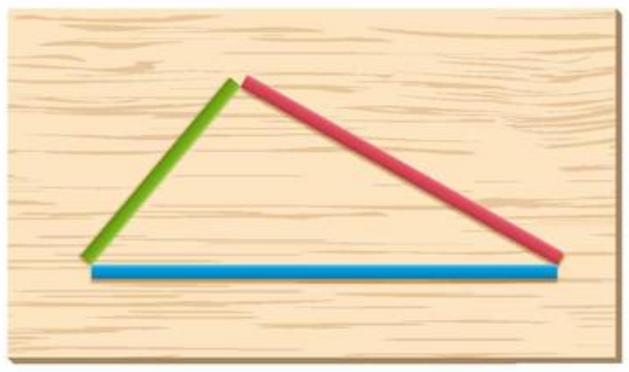
$a = a'$ $\alpha = \alpha'$
$b = b'$ $\beta = \beta'$
$c = c'$ $\gamma = \gamma'$

Trójkąty przystające oznaczamy w ten sposób:

$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

Aby udowodnić, że dwa trójkąty są przystające, powinniśmy sprawdzić wszystkie sześć równości. Okazuje się jednak, że nie jest to konieczne. Wystarczy sprawdzić **właściwie dobrane** trzy równości (ale nie dowolne trzy!), a pozostałe trzy zachodzą automatycznie. Twierdzenia wskazujące te właściwie dobrane równości nazywają się **cechami przystawania trójkątów**.

Cecha bok-bok-bok (bbb)

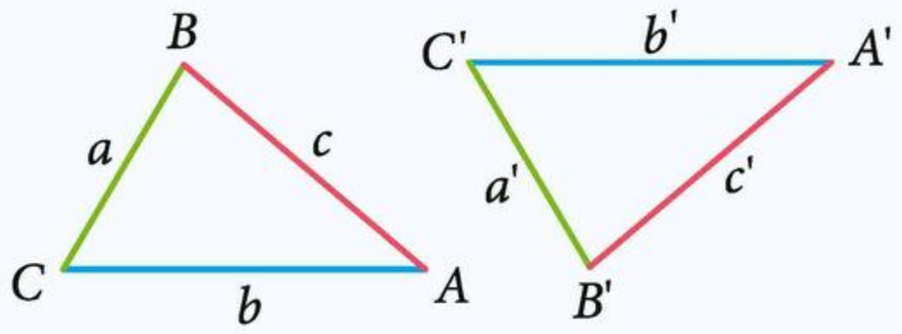


Wyobraź sobie, że bierzemy trzy patyczki i składamy z nich trójkąt. Jeśli jest to możliwe (czyli ich długości spełniają nierówność trójkąta), otrzymamy tylko jeden określony trójkąt. Z drugiego identycznego zestawu patyczków możemy zbudować tylko trójkąt do niego przystający.
Oznacza to, że gdy dwa trójkąty mają odpowiednio równe boki, to są przystające, a więc również ich kąty są odpowiednio równe.

Zapamiętaj

Cecha przystawania trójkątów bbb (bok-bok-bok)

Jeśli boki jednego trójkąta mają taką samą długość jak odpowiadające im boki drugiego trójkąta, to trójkąty te są przystające.



Jeśli $a = a'$, $b = b'$ i $c = c'$,
to $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

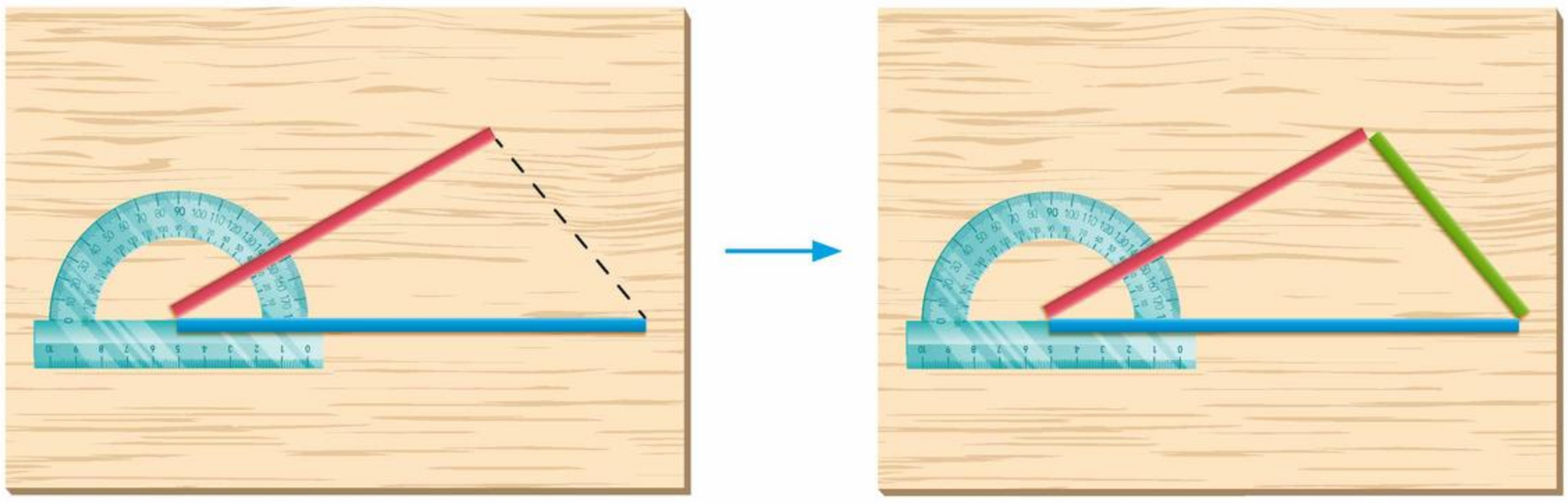
Zwróć uwagę, że dla czworokątów (i wielokątów o większej liczbie boków) podobna zależność nie zachodzi. Na przykład można narysować wiele różnych rombów o boku 2 cm, które mają różne kąty, a więc nie są przystające.

Cechę bbb można rozumieć jako stwierdzenie, że trójkąt o danych bokach jest sztywny: nie da się zmienić jego kątów. Natomiast czworokąt nie jest sztywny: da się zmienić jego kąty, nie zmieniając długości boków.



Cecha bok-kąt-bok (bkb)

Wyobraź sobie teraz, że dwa patyczki, złączone końcami, układamy pod pewnym kątem. Ich wolne końce można połączyć tylko w jeden sposób: pasuje tylko jedna długość patyczka, a gdy go dołożymy, utworzą się ściśle określone kąty, których nie możemy zmienić.

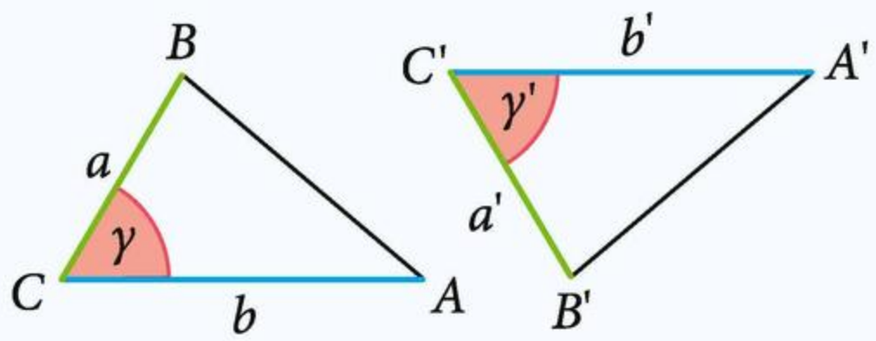


Jeśli znamy długości dwóch boków trójkąta i miarę kąta między nimi, to trzeci bok i dwa pozostałe kąty są jednoznacznie wyznaczone. Pozwala to sformułować następną cechę przystawania trójkątów.

Zapamiętaj

Cecha przystawania trójkątów bkb (bok-kąt-bok)

Jeśli dwa boki i kąt zawarty między nimi w jednym trójkącie są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi zawartemu między nimi w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.

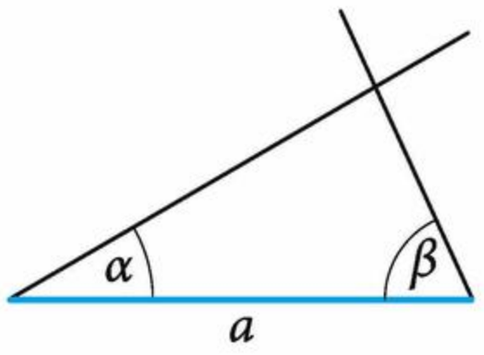


Jeśli $a = a'$, $b = b'$ i $\gamma = \gamma'$,
to $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Cecha kąt-bok-kąt (kbk)

Tym razem zamiast patyczków wyobraź sobie narysowany odcinek a oraz dwa kąty: α i β o wierzchołkach w końcach tego odcinka.

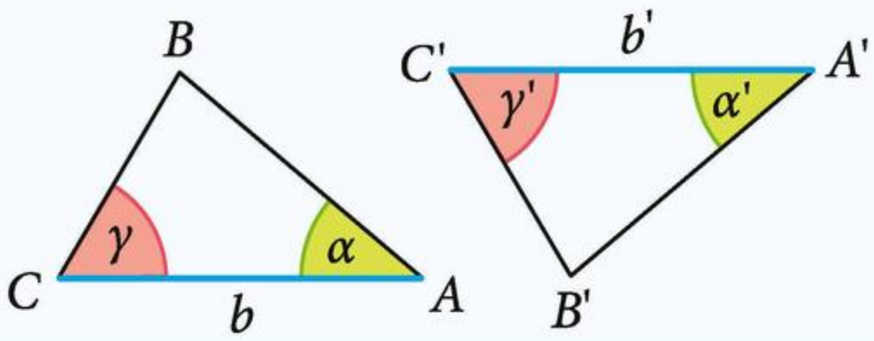
Jeśli suma tych kątów jest mniejsza niż 180°, to ich drugie ramiona przetną się w określonym punkcie, tworząc trójkąt. Dla danego odcinka a i danych miar kątów α i β nie da się dokończyć rysunku trójkąta w inny sposób. Tak więc jeden bok trójkąta i kąty przy tym boku jednoznacznie wyznaczają trójkąt.



Zapamiętaj

Cecha przystawania trójkątów kbk (kąt-bok-kąt)

Jeśli bok i dwa leżące przy nim kąty w jednym trójkącie są odpowiednio równe bokowi i dwóm leżącym przy nim kątom w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.

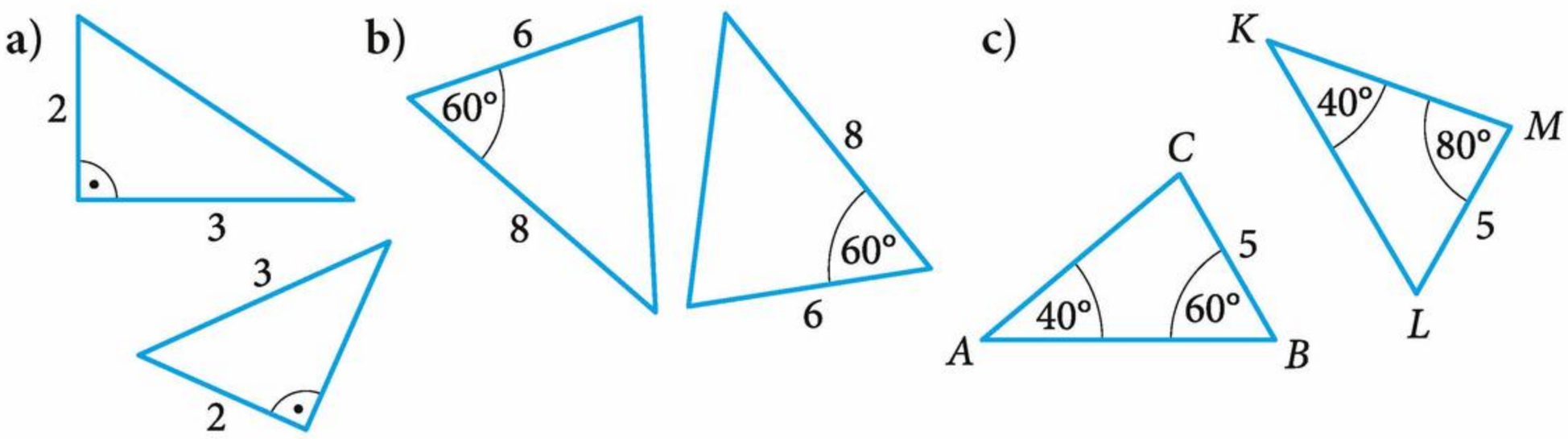


Jeśli $b = b'$, $\alpha = \alpha'$ i $\gamma = \gamma'$,
to $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Jak korzystać z cech przystawania trójkątów?

Przykład 1

Czy narysowane trójkąty są przystające?

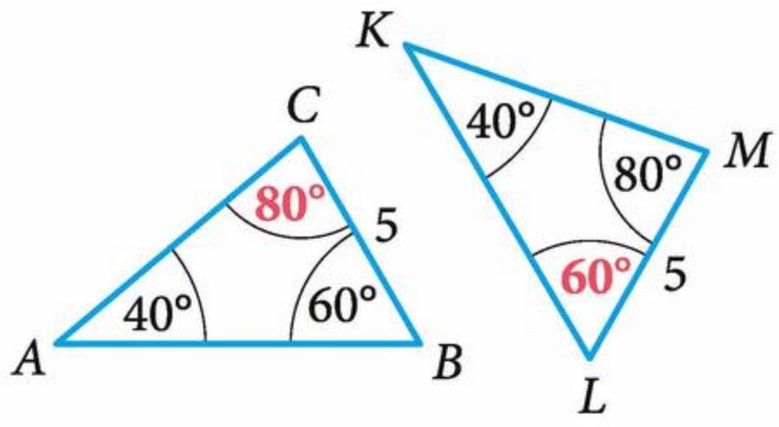


a) Każdy z trójkątów ma boki długości 2 i 3 oraz kąt prosty – ale nie jest to kąt **między odpowiednimi bokami**. Dlatego nie możemy zastosować cechy bkb.

To, że nie możemy skorzystać bezpośrednio z danej cechy przystawania, nie oznacza, że trójkąty nie są przystające.
W naszym przypadku akurat nie są przystające, ponieważ w jednym z nich przeciwprostokątna ma długość 3, a w drugim – większą niż 3.

b) Każdy z trójkątów ma boki długości 6 i 8 oraz kąt 60° między tymi bokami, możemy więc skorzystać z cechy bkb i stwierdzić, że trójkąty są przystające.

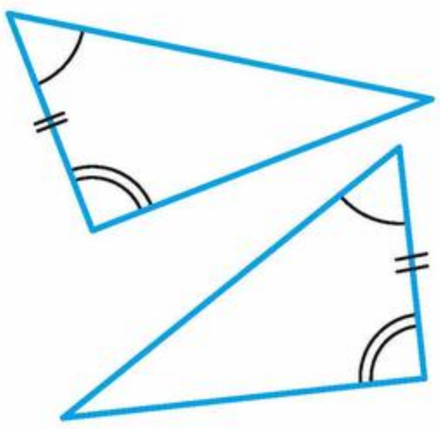
c) W sytuacji przedstawionej na rysunku nie można bezpośrednio skorzystać z żadnej cechy przystawania. Aby rozwiązać zadanie, możemy obliczyć brakujące miary kątów: $\sphericalangle ACB = 80°$, $\sphericalangle KLM = 60°$. Teraz można skorzystać z cechy kbk, bo przy boku długości 5 leżą kąty 60° i 80°. Trójkąty są więc przystające.



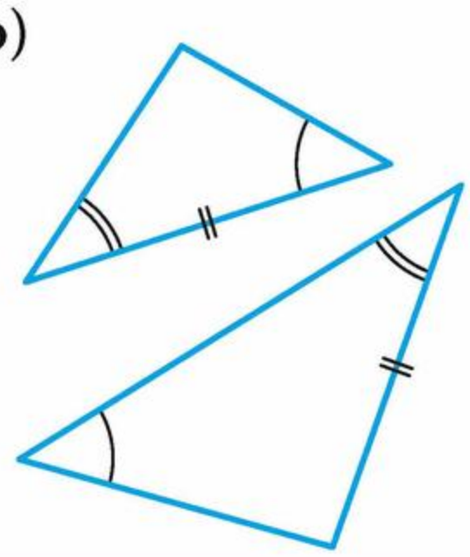
Ćwiczenie 1

Czy na podstawie cech przystawania można stwierdzić, że narysowane trójkąty są przystające? Jeśli tak – z której cechy trzeba skorzystać?

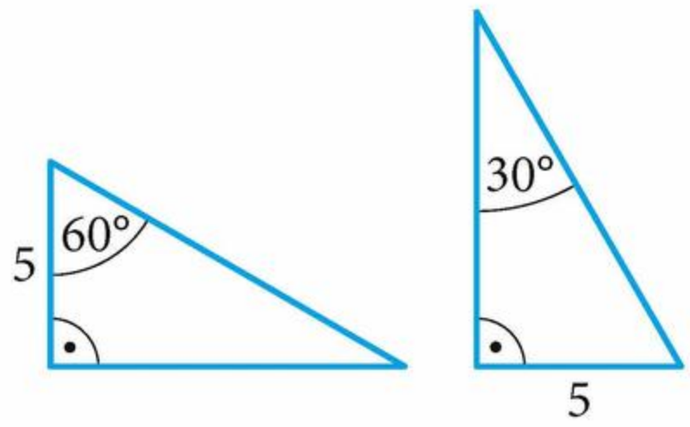
a)



b)

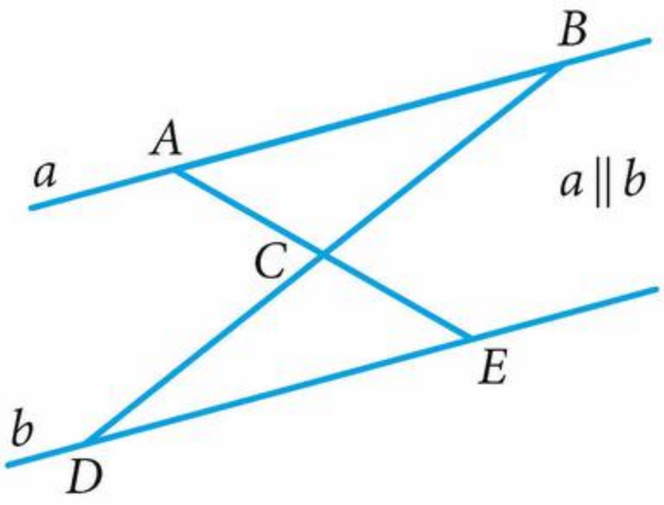


c)



Przykład 2

Proste a i b przedstawione na rysunku są równoległe i $AB = DE$. Udowodnij, że trójkąty ABC i EDC są przystające.



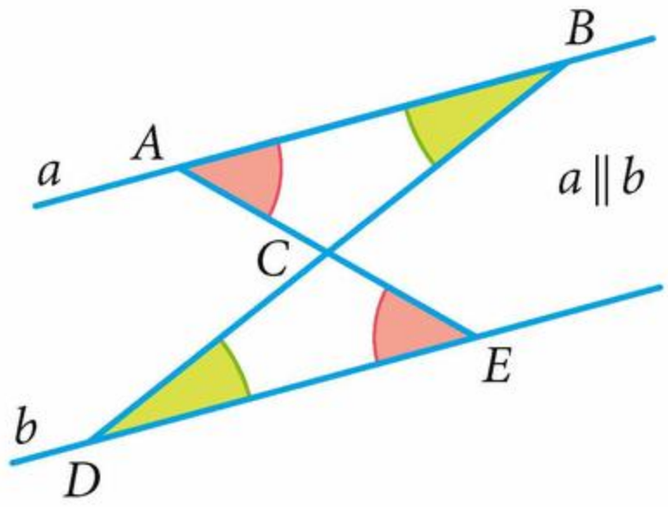
W treści zadania jest mowa o równych bokach. A równe kąty? Proste a i b są równoległe, więc równych kątów jest na rysunku dużo. Wystarczy wybrać te, które są nam potrzebne!

Proste a i b są równoległe, więc:

$\sphericalangle CAB = \sphericalangle CED$ ← kąty naprzemianległe

$\sphericalangle CDE = \sphericalangle CBA$ ← kąty naprzemianległe

Zgodnie z treścią zadania $AB = DE$, więc z cechy kbk wynika, że trójkąty ABC i EDC są przystające, co było do udowodnienia.



Dobra rada

Dowody możesz zapisywać w tabeli. Dzięki temu łatwiej się zorientujesz, czy rozumowanie jest poprawne, czyli czy każdy krok ma uzasadnienie, np.:

Krok	Stwierdzenie	Uzasadnienie
1.	$\sphericalangle CAB = \sphericalangle CED$	są to kąty naprzemianległe, $a \parallel b$
2.	$\sphericalangle CDE = \sphericalangle CBA$	są to kąty naprzemianległe, $a \parallel b$
3.	$AB = DE$	z treści zadania
4.	$\triangle ABC \equiv \triangle EDC$	z 1, 2, 3 oraz cechy kbk

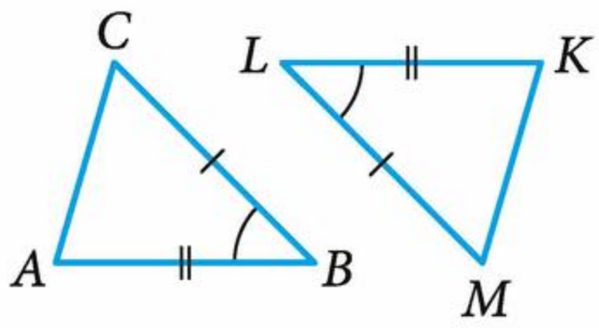
Ćwiczenie 2

Udowodnij, że przekątna dzieli równoległobok na dwa przystające trójkąty.

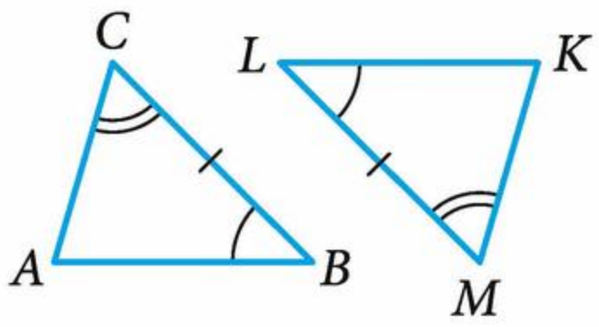
Zadania

E **1.** Podaj cechę przystawania trójkątów, na podstawie której możemy stwierdzić, że trójkąty ABC i KLM są przystające. Na rysunku równe kąty i odcinki równej długości zostały odpowiednio oznaczone.

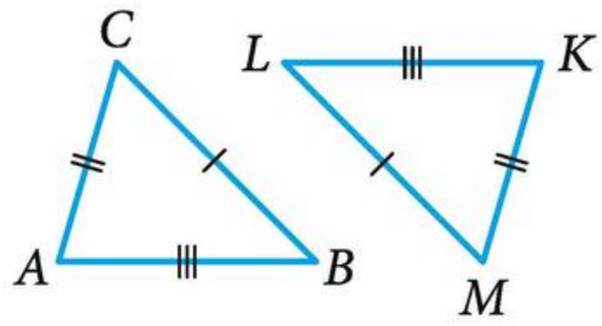
a)



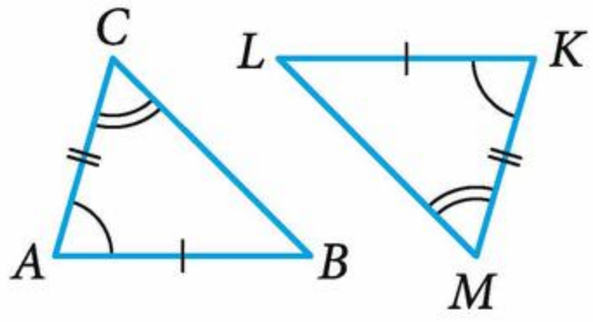
b)



c)

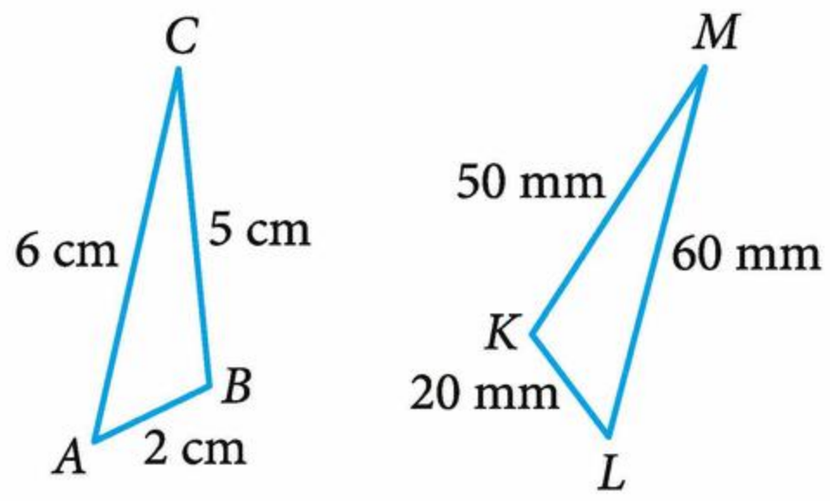


d)

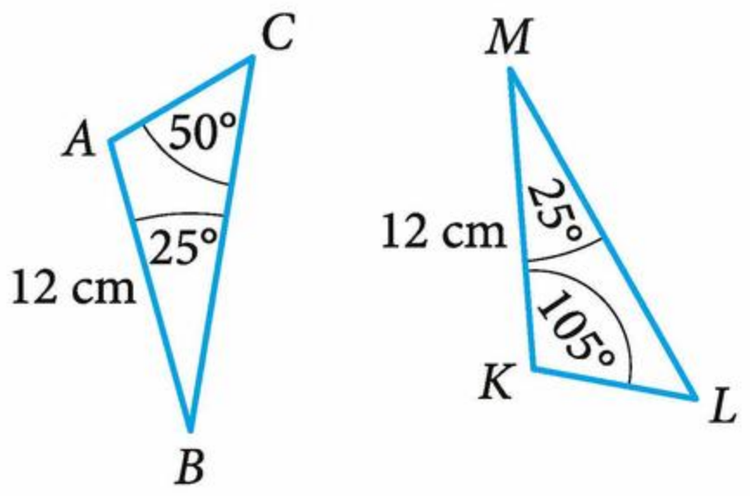


2. Sprawdź, czy dane trójkąty są przystające. Jeśli tak, to podaj cechę przystawania, na której podstawie można to uzasadnić.

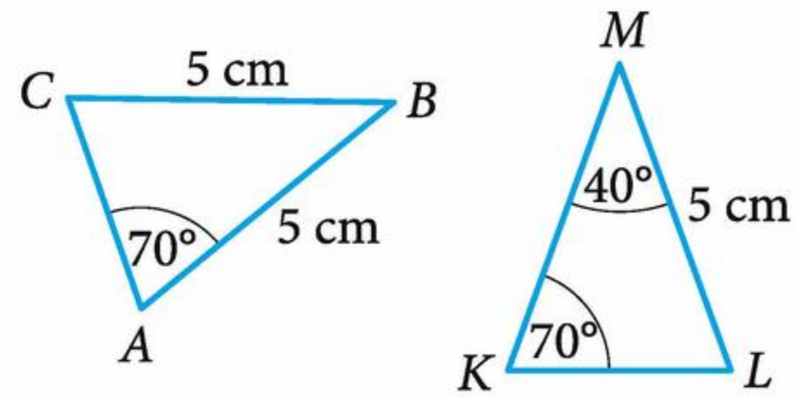
a)



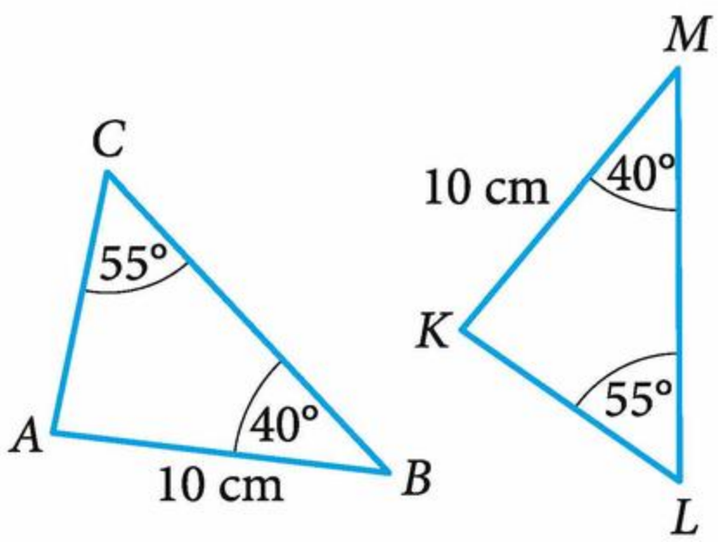
b)



c)



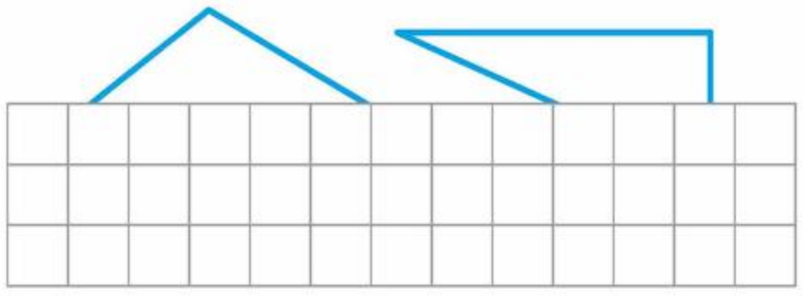
d)



3. Czy każde dwa trójkąty równoboczne są przystające? Uzasadnij odpowiedź.

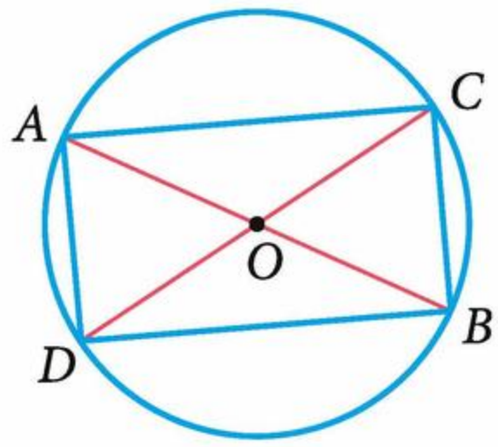
4. Przeciwprostokątne w dwóch trójkątach prostokątnych mają taką samą długość. Jeden z tych trójkątów ma kąt o mierze 25°, a drugi – kąt o mierze 65°. Czy te trójkąty są przystające?

5. Kawałkiem kartki przykryto częściowo dwa trójkąty, jak pokazano na rysunku. Czy te trójkąty mogą być przystające?



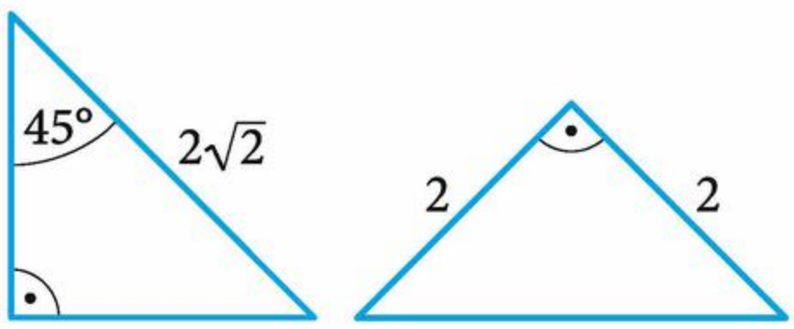
6. W każdym z dwóch danych trójkątów prostokątnych jedna z przyprostokątnych ma długość 4 cm, a jeden z kątów ostrych ma miarę 30°. Czy te trójkąty muszą być przystające?

:D **7.** Odcinki AB i CD są średnicami okręgu o środku O. Wskaż na rysunku dwie pary trójkątów przystających. Uzasadnij, że są one przystające.

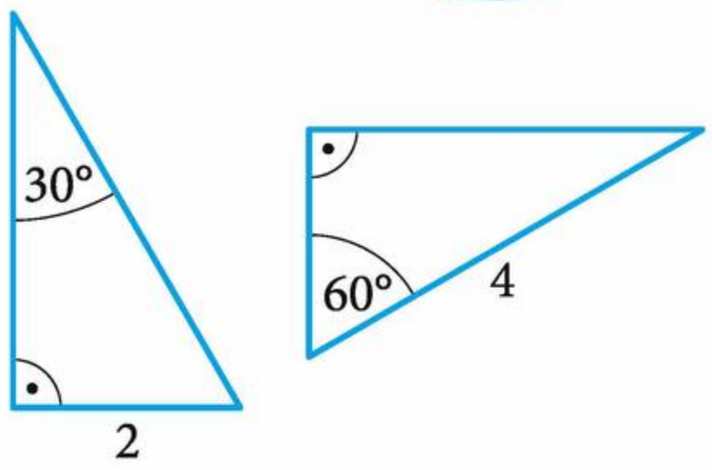


E **8.** Czy trójkąty przedstawione na rysunku są przystające?

a)

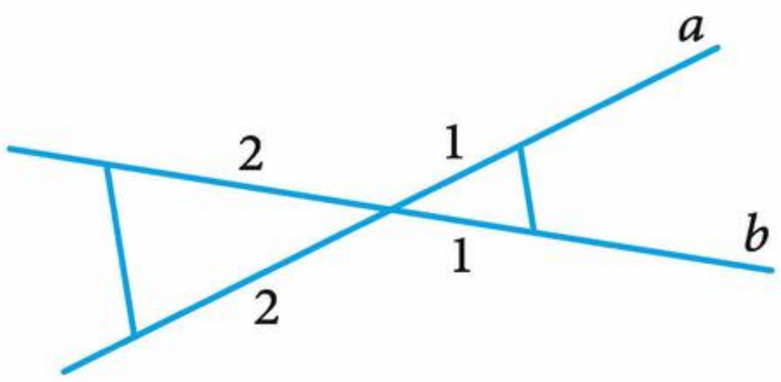


b)

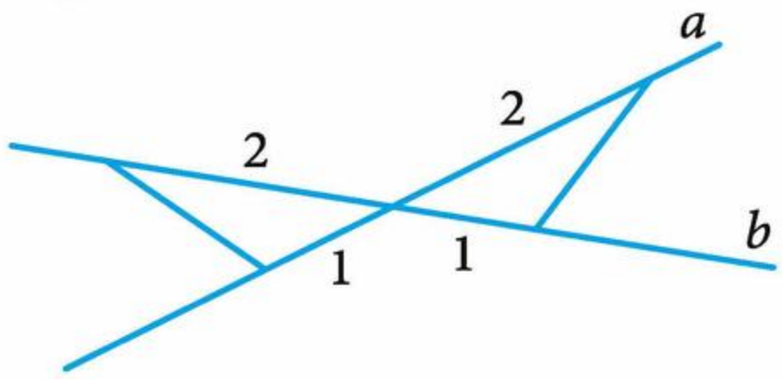


9. Czy trójkąty na rysunku są przystające? Uzasadnij odpowiedź.

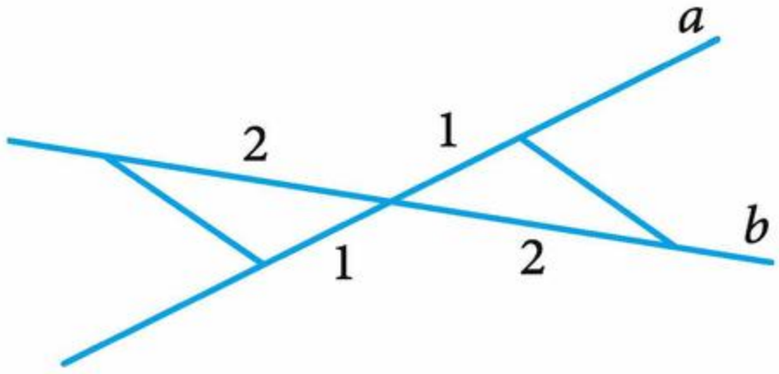
a)



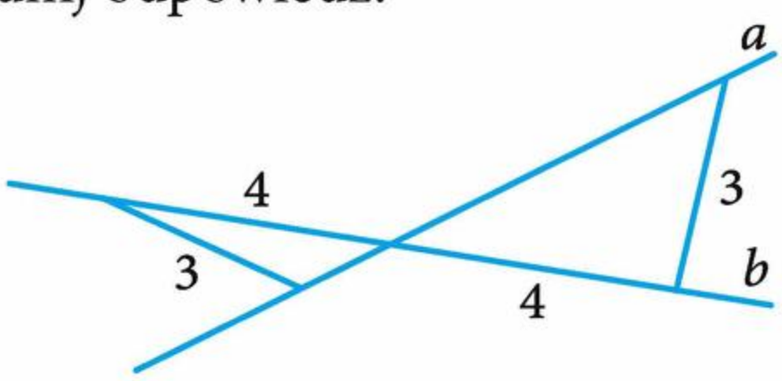
b)



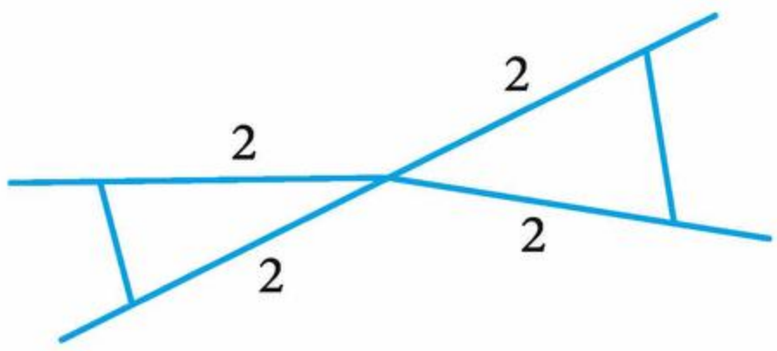
c)



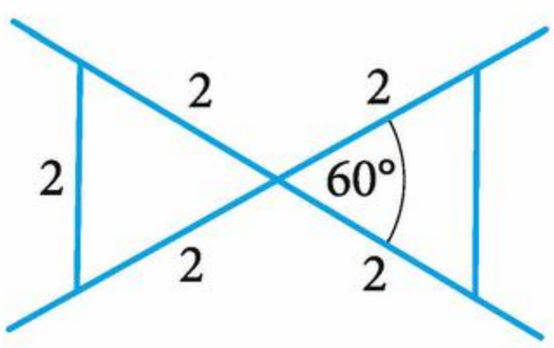
d)



e)



f)

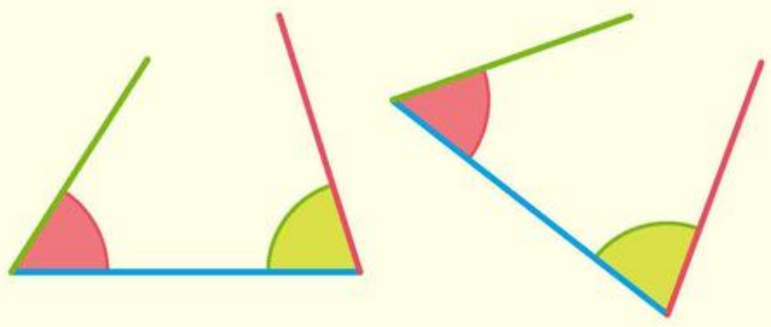


:D **10.** Udowodnij, że każda prosta przechodząca przez punkt przecięcia przekątnych kwadratu dzieli ten kwadrat na dwie części o równych polach.

Wskazówka. Oprócz prostej, o której mowa w zadaniu, narysuj prostą dzielącą kwadrat na dwa przystające prostokąty.

Dla dociekliwych

1. Dwa czworokąty mają po trzy boki odpowiednio równe i kąty między nimi odpowiednio równe. Na podstawie rysunku wyjaśnij, czy oznacza to, że czworokąty te są przystające (inaczej mówiąc: czy jest cechą przystawania czworokątów warunek bkbkb, czyli bok-kąt-bok-kąt-bok).



2. Udowodnij, że warunek bbkbk nie jest cechą przystawania czworokątów. W tym celu narysuj dwa nieprzystające czworokąty, w których zachodzą odpowiednie równości boków i kątów (bok-bok-kąt-bok-kąt).

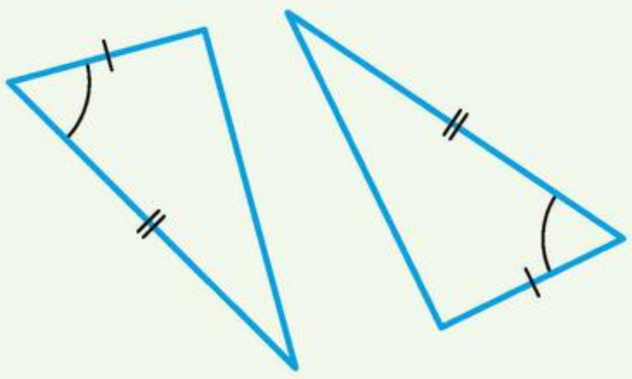
3. Sprawdź, czy podany warunek można uznać za cechę przystawania czworokątów. Uzasadnij odpowiedź.

a) bbbb **b)** kbkbk **c)** bbkbb

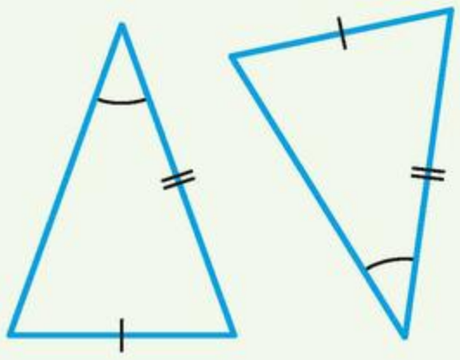
Czy już umiem?

I. Czy na podstawie cech przystawania można stwierdzić, że narysowane trójkąty są przystające? Jeśli tak – z której cechy trzeba skorzystać?

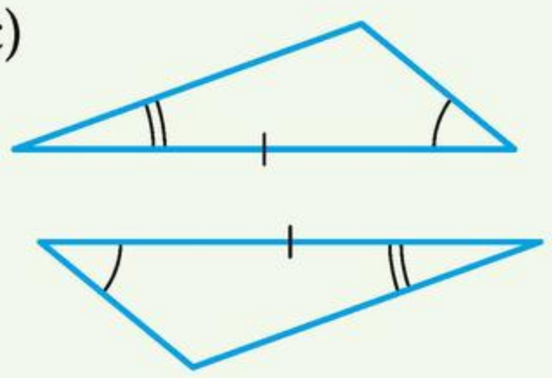
a)



b)

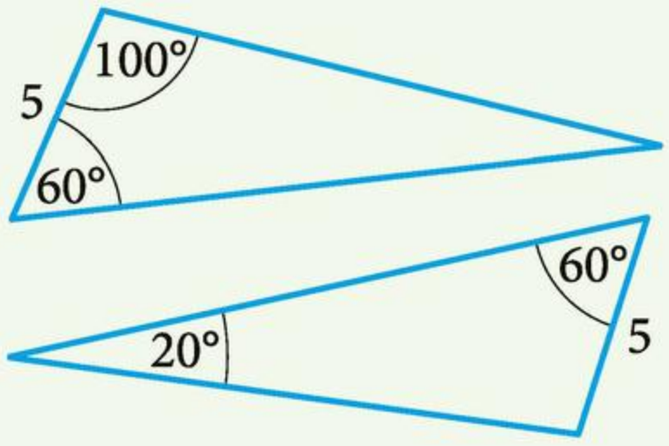


c)

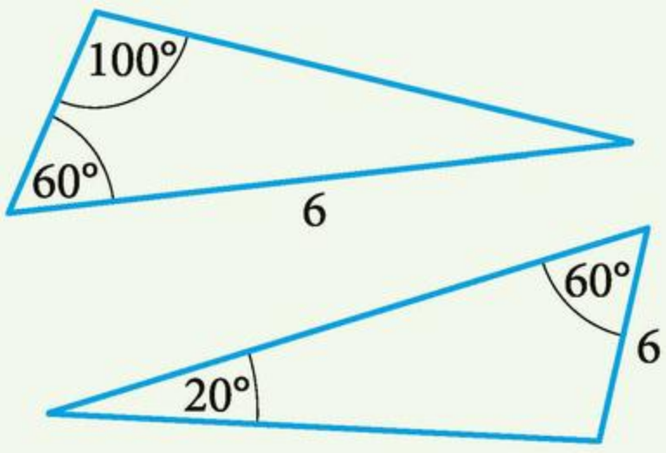


II. Czy trójkąty przedstawione na rysunku są przystające? Uzasadnij odpowiedź.

a)

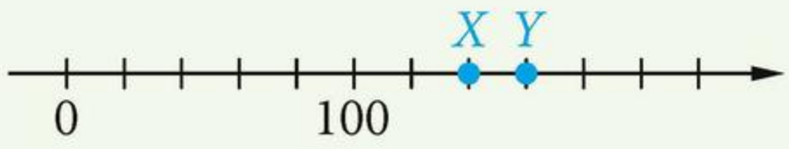


b)

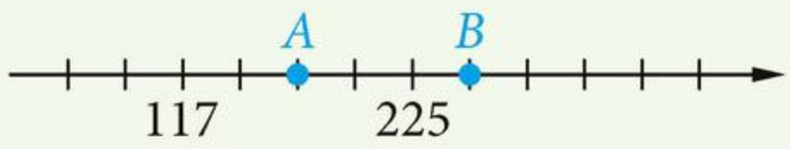


III. Odczytaj współrzędne punktów zaznaczonych na osi liczbowej.

a)



b)



3 Przystawanie trójkątów w dowodach twierdzeń

Na dobry początek

Jak zmierzyć szerokość rzeki, nie przechodząc na drugi brzeg?

1
Wybierz wyróżniający się punkt na przeciwnym brzegu rzeki, np. drzewo (punkt **A**).

A

B

C

D

E

2
Stań naprzeciwko i wbij kij albo tyczkę (punkt **B**).

3
Odmierz 30 kroków prostopadle do prostej **AB**. Wbij drugi kij (punkt **C**).

4
Odmierz wzdłuż tej samej prostej kolejne 30 kroków i wbij trzeci kij (punkt **D**).

5
Idź prostopadle do prostej **BD** tak długo, aż kij wbity w punkcie **C** i drzewo w punkcie **A** będą w jednej linii.

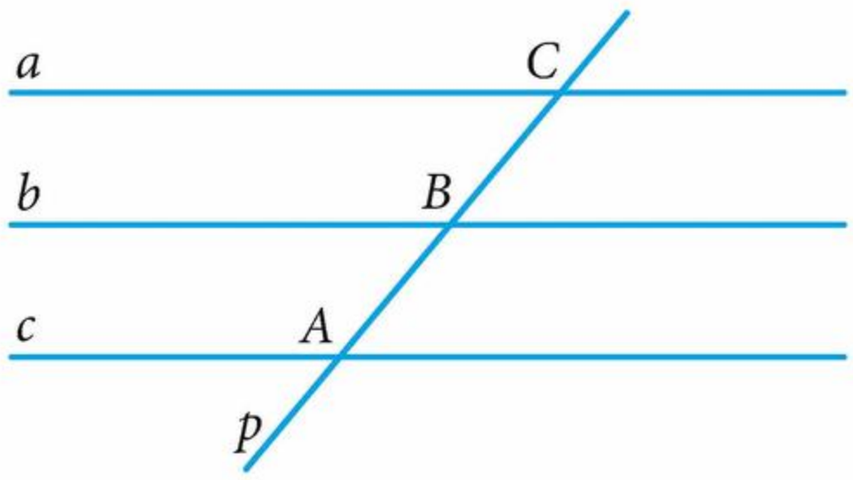
6
Zmierz odległość DE – to szerokość rzeki.

Pytania i polecenia

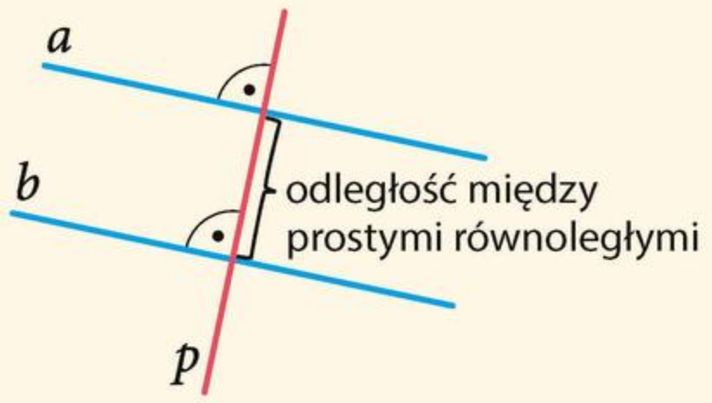
- Dlaczego dzięki metodzie opisanej wyżej można zmierzyć szerokość rzeki?

Przykład 1

Proste a, b, c są równoległe i położone w równych odległościach (jak na rysunku). Przecięto je czwartą prostą p. Udowodnij, że $AB = BC$.



Odległość między prostymi równoległymi mierzymy tak, jak pokazano na rysunku.

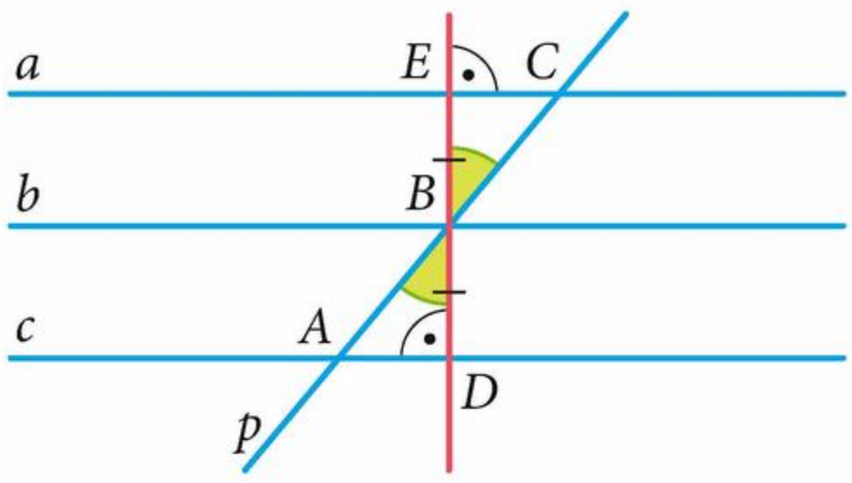


Założenie: proste a, b, c są równoległe i położone w równych odległościach.

Teza: $AB = BC$

Dowód

Przez punkt B prowadzimy prostą prostopadłą do prostych a, b, c. W ten sposób powstają trójkąty BEC i BDA (jak na rysunku).



Spróbujemy skorzystać z cech przystawania trójkątów.
Ale najpierw musimy znaleźć trójkąty!
Wiemy, że odległości między prostymi są równe – rysujemy więc trójkąty, w których pojawią się te odległości.

Dowód możemy zapisać w tabeli (patrz „Dobra rada" na s. 146).

Krok	Stwierdzenie	Uzasadnienie
1.	$\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBE$	są to kąty wierzchołkowe
2.	$\sphericalangle ADB = \sphericalangle CEB$	oba te kąty są proste
3.	$DB = BE$	z założenia o równych odległościach między prostymi
4.	$\triangle ADB \equiv \triangle CEB$	z 1, 2, 3 oraz cechy kbk
5.	$AB = BC$	z 4 (są to odpowiednie boki w przystających trójkątach)

Pokazaliśmy, że $AB = BC$, co kończy dowód.

Ćwiczenie 1

Proste p, q, r są równoległe do prostej s. Odległość między prostymi p i q jest taka sama jak między prostymi r i s. Prosta t przecina kolejno proste p, q, r i s odpowiednio w punktach A, B, C i D. Udowodnij, że $AB = CD$.

Definicja a twierdzenie

W matematyce zawsze odróżniamy definicję od twierdzenia.

Definicja to wyjaśnienie znaczenia jakiegoś pojęcia. Na przykład:
- Trójkąt nazywamy równoramiennym, jeśli ma co najmniej dwa boki równe.
- Równoległobok to czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

Twierdzenie to zdanie, którego prawdziwość można udowodnić. Na przykład:
- Kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego są równe.
- Suma kątów przy jednym boku równoległoboku wynosi 180°.

Definicja trójkąta równoramiennego informuje, co oznacza określenie „trójkąt równoramienny". Nie trzeba tego udowadniać, po prostu **umawiamy się**, że wyrażenie „trójkąt równoramienny" ma takie znaczenie. Natomiast równość kątów przy podstawie trójkąta równoramiennego jest faktem, który trzeba udowodnić.

Własności trójkąta równoramiennego

Przykład 2.1

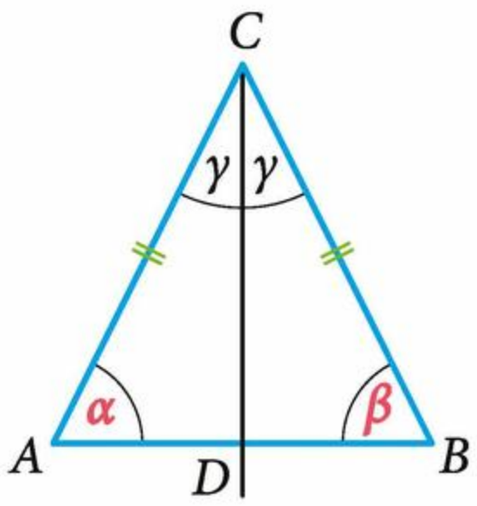
Udowodnij, że w trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie są równe.

Założenie: trójkąt jest równoramienny (czyli ma dwa równe boki).

Teza: kąty przy podstawie są równe.

Dowód

Sporządzamy rysunek pomocniczy i wprowadzamy na nim oznaczenia. Prowadzimy też dwusieczną kąta ACB i oznaczamy literą D punkt jej przecięcia z bokiem AB. Dowód możemy zapisać w tabeli.



Mamy dopiero udowodnić, że kąty α i β są równe, dlatego na razie oznaczyliśmy je różnymi literami.

Dwusieczna dzieli dany trójkąt na dwa mniejsze trójkąty – możemy zbadać, czy są one przystające.

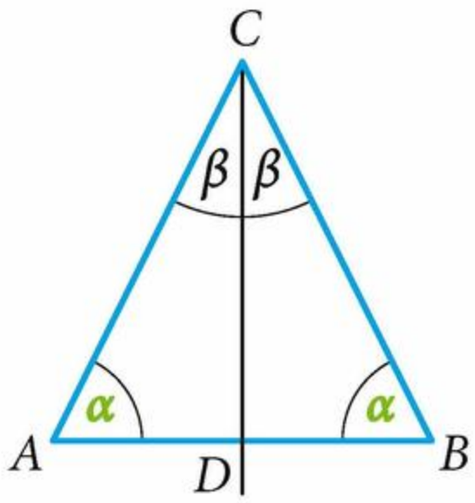
Krok	Stwierdzenie	Uzasadnienie
1.	$\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB$	CD jest dwusieczną kąta ACB
2.	$AC = BC$	z założenia
3.	$CD = CD$	jest wspólnym bokiem trójkątów ACD i BCD
4.	$\triangle ACD \equiv \triangle BCD$	z 1, 2, 3 oraz cechy bkb
5.	$\sphericalangle CAD = \sphericalangle DBC$	z 4 (są to odpowiednie kąty w przystających trójkątach)

Pokazaliśmy, że kąty przy podstawie trójkąta ABC są równe, co kończy dowód.

Równie dobrze znany jest inny fakt dotyczący trójkąta równoramiennego.

Przykład 2.2

Udowodnij, że jeśli dwa kąty trójkąta są równe, to jest on równoramienny.



Założenie: trójkąt ma dwa równe kąty.

Teza: trójkąt jest równoramienny (czyli ma dwa równe boki).

Dowód

Rysujemy trójkąt, który ma dwa kąty równe. Prowadzimy dwusieczną kąta ACB i oznaczamy literą D punkt jej przecięcia z bokiem AB.

Równe kąty oznaczamy jednakowymi literami.

Krok	Stwierdzenie	Uzasadnienie
1.	$\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB$	CD jest dwusieczną kąta ACB
2.	$\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD$	z założenia
3.	$\sphericalangle CDA = \sphericalangle CDB$	z 1 i 2 (trójkąty ACD i BCD mają dwa kąty odpowiednio równe, więc ich trzecie kąty też są równe)
4.	$CD = CD$	jest wspólnym bokiem trójkątów ACD i BCD
5.	$\triangle ACD \equiv \triangle BCD$	z 1, 3, 4 oraz cechy kbk
6.	$AC = BC$	z 5 (AC i BC to odpowiednie boki w przystających trójkątach)

Pokazaliśmy, że trójkąt ma dwa równe boki, co kończy dowód.

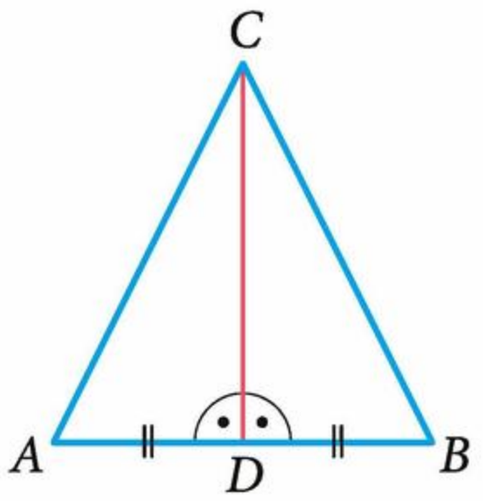
Zauważ, że w twierdzeniach udowodnionych w przykładach 2.1 i 2.2 założenia i tezy zamieniły się miejscami:

- Jeśli **trójkąt jest równoramienny**, to **ma równe kąty przy podstawie**.
- Jeśli **trójkąt ma dwa kąty równe**, to **jest równoramienny**.

Ćwiczenie 2

Udowodnij, że jeśli wysokość trójkąta dzieli podstawę na dwie równe części, to ten trójkąt jest równoramienny.

Wskazówka. Spójrz na rysunek. Z której cechy przystawania trójkątów możesz od razu skorzystać?



Dowód twierdzenia Pitagorasa

Samo twierdzenie znasz już z siódmej klasy, ale dopiero teraz możemy je udowodnić.

Przykład 3

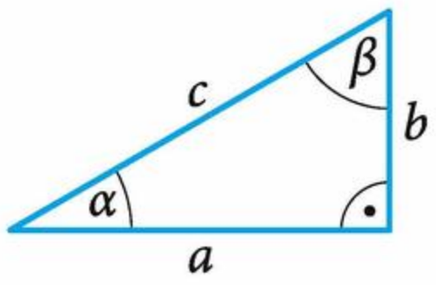
Udowodnij twierdzenie Pitagorasa.

Założenie: trójkąt jest prostokątny.

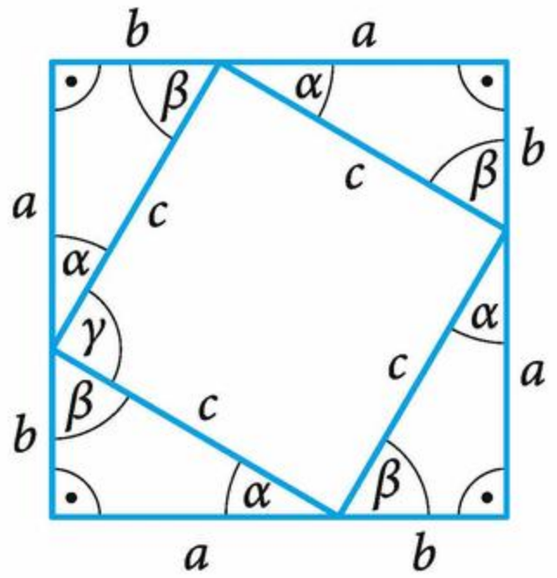
Teza: suma kwadratów przyprostokątnych jest równa kwadratowi przeciwprostokątnej.

Dowód

Oznaczamy boki i kąty trójkąta tak jak na rysunku obok.



Rysujemy kwadrat o boku $a + b$, dzielimy każdy z jego boków na odcinki a i b, a następnie łączymy punkty podziału (patrz rysunek).



W ten sposób podzieliliśmy kwadrat na cztery trójkąty i czworokąt. Zauważmy, że każdy z tych trójkątów jest przystający do danego, bo ma boki a i b i kąt prosty między nimi. Wobec tego każdy z tych trójkątów ma przeciwprostokątną c i kąty ostre α i β.

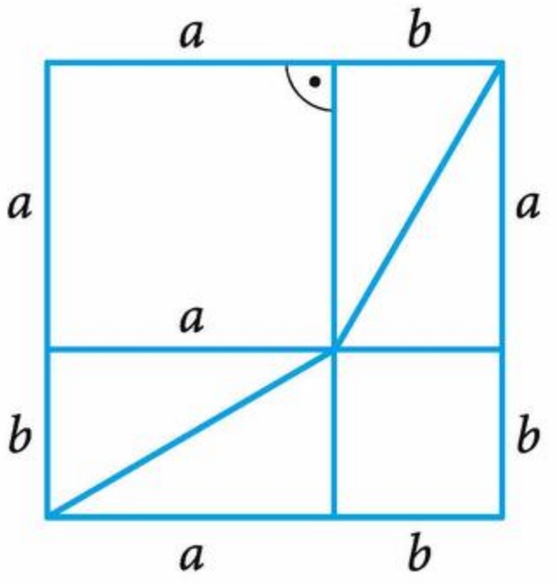
Zatem czworokąt wewnątrz naszego kwadratu ma wszystkie boki długości c. Obliczamy miary kątów tego czworokąta:

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 90° = 90°$ ← $\alpha + \beta = 90°$, bo jest to suma miar kątów ostrych trójkąta prostokątnego

Czworokąt ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty proste, czyli jest kwadratem.

Teraz kwadrat o boku $a + b$ dzielimy w inny sposób.

Podobnie jak poprzednio uzasadniamy, że powstałe trójkąty są przystające do danego.



Pole dużego kwadratu przedstawiamy na dwa sposoby:

$P = 4 \cdot P_{\text{trójkąta}} + c^2$ ← z pierwszego podziału

$P = 4 \cdot P_{\text{trójkąta}} + a^2 + b^2$ ← z drugiego podziału

Wobec tego $a^2 + b^2 = c^2$, co było do udowodnienia.

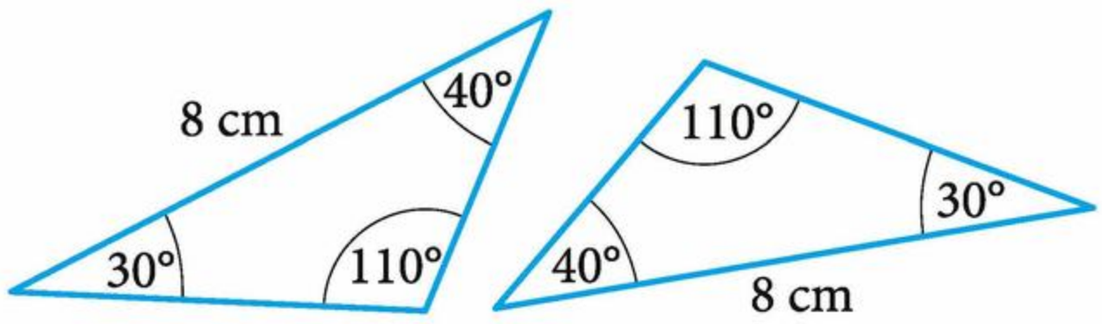
Dobra rada

Schemat tworzenia dowodu z wykorzystaniem przystawania trójkątów

wykonaj rysunek ilustrujący sytuację opisaną w twierdzeniu → **znajdź** trójkąty, które mogą być przystające → **uzasadnij** przystawanie trójkątów na podstawie jednej z cech przystawania → **wybierz** te równości wynikające z przystawania, które są ci potrzebne → **dokończ** dowodzenie twierdzenia

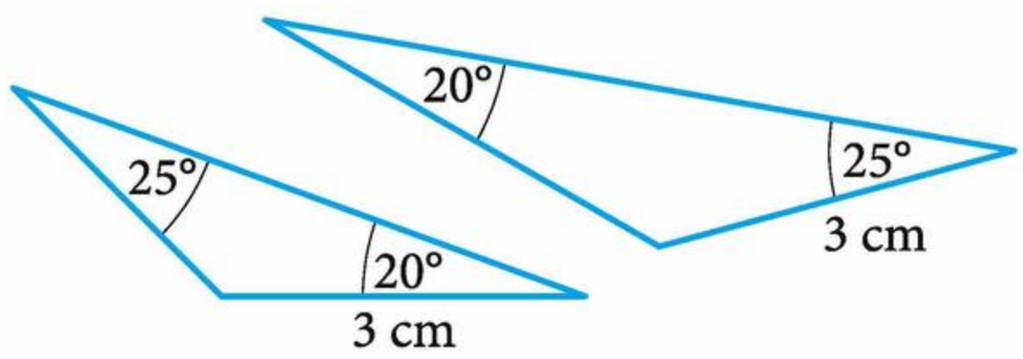
Zadania

E **1.** Czy z informacji podanych na rysunku wynika, że trójkąty są przystające? Wybierz odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie spośród zdań A–C.



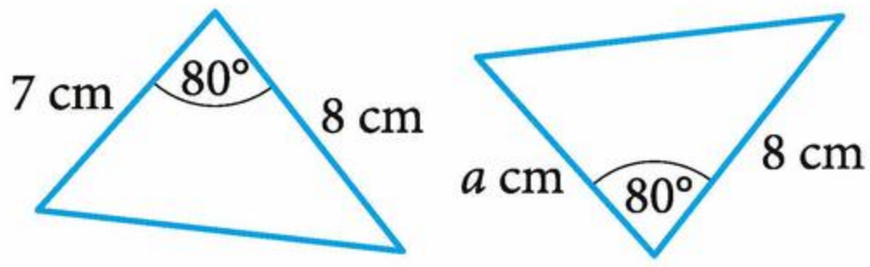
TAK	ponieważ	A.	na rysunku nie podano długości dwóch boków trójkąta.
NIE		B.	trójkąty mają wszystkie kąty odpowiednio równe.
		C.	w obu trójkątach przy boku długości 8 cm są takie same kąty.

E **2.** Czy z informacji podanych na rysunku wynika, że trójkąty są przystające? Wybierz odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie spośród zdań A–C.



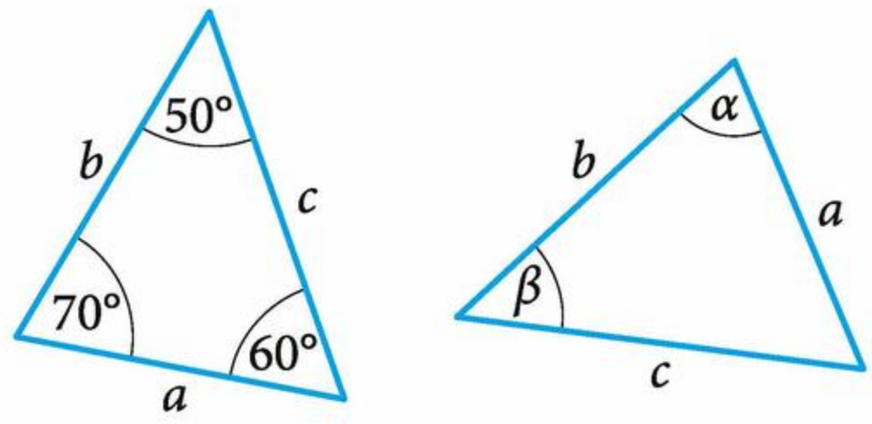
TAK	ponieważ	A.	w obu trójkątach można obliczyć trzeci kąt i w obu jest on taki sam.
NIE		B.	w jednym z trójkątów bok długości 3 cm leży naprzeciwko kąta 20°, a w drugim – naprzeciwko kąta 25°.
		C.	oba trójkąty są rozwartokątne.

E **3.** Czy z informacji podanych na rysunku wynika, że $a = 7$ cm? Wybierz odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie spośród zdań A–C.



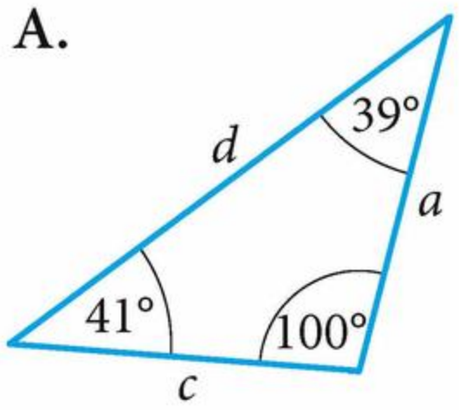
TAK	ponieważ	A.	nie wiadomo, czy trójkąty są przystające.
NIE		B.	trójkąty są przystające (bkb) i bok a odpowiada bokowi 7 cm.
		C.	trójkąty są przystające (bkb), ale bok a nie odpowiada bokowi 7 cm.

4. Który z kątów oznaczonych na rysunku literami ma 50°? Odpowiedź uzasadnij.

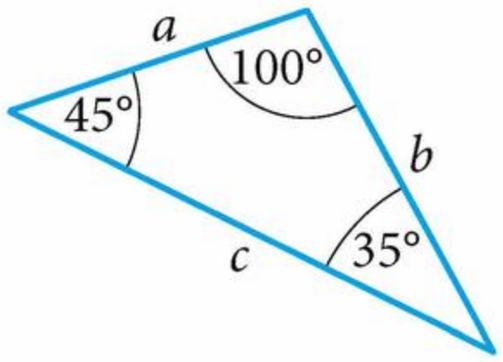


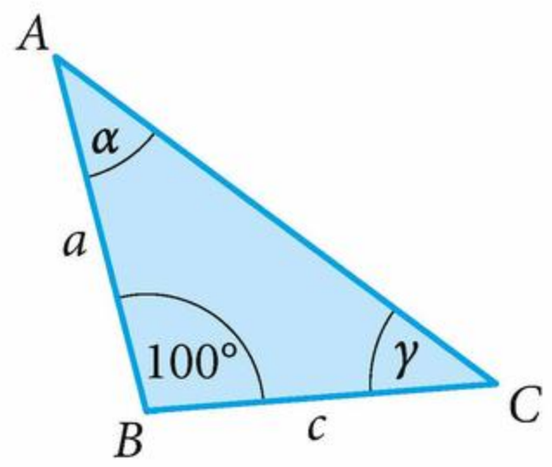
5. Trójkąt ABC i jeden z pozostałych trójkątów są trójkątami przystającymi. Sprawdź, który to trójkąt. Podaj cechę przystawania, z której korzystasz, a następnie odczytaj miary kątów oznaczonych literami.

A.



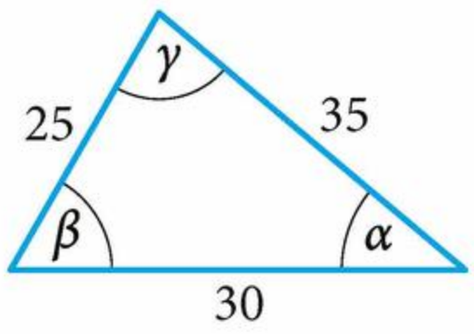
B.



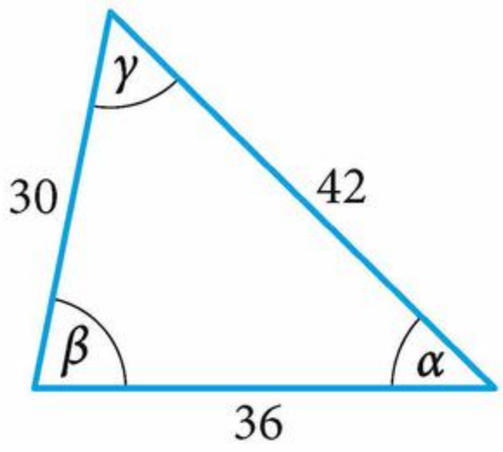


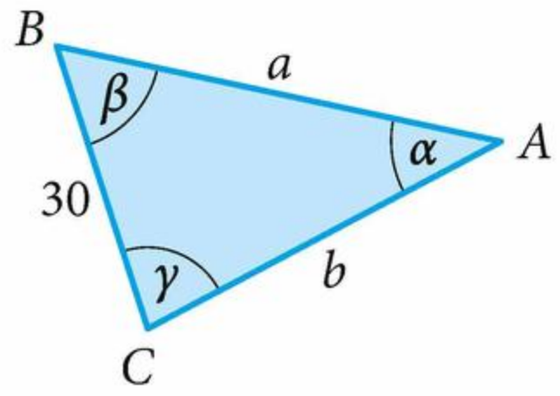
6. Trójkąt ABC i jeden z pozostałych trójkątów są trójkątami przystającymi. Sprawdź, który to trójkąt. Podaj cechę przystawania, z której korzystasz, a następnie odczytaj długości boków oznaczonych literami.

A.



B.





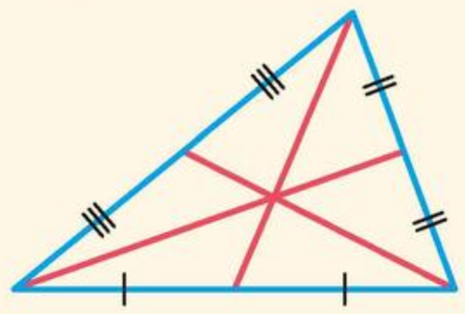
7. Dwusieczna kąta między ramionami trójkąta równoramiennego dzieli ten trójkąt na dwa mniejsze trójkąty. Udowodnij, że są one przystające.

8. Uzasadnij, że w trójkącie równoramiennym ostrokątnym:

a) wysokości opuszczone na ramiona są równej długości,

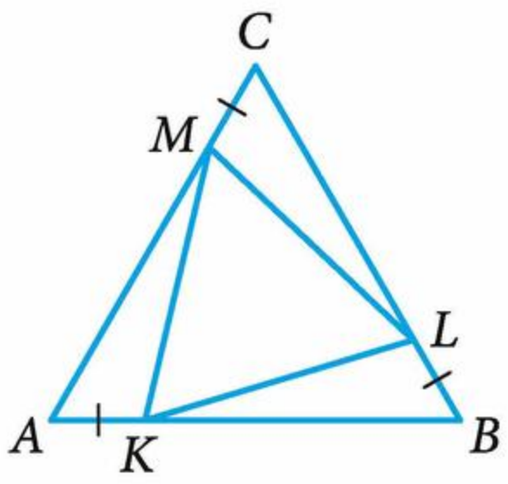
b) środkowe opuszczone na ramiona są równej długości.

Środkowa trójkąta to odcinek łączący wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku.

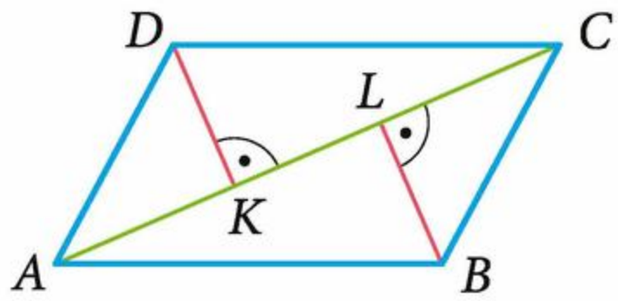


9. Wewnątrz równoległoboku $ABCD$ leży punkt F. Punkt E położony jest tak, że czworokąt $ABEF$ również jest równoległobokiem. Udowodnij, że $DF = CE$.

10. Na bokach trójkąta równobocznego ABC odłożono równe odcinki AK, BL, CM (jak na rysunku). Udowodnij, że trójkąt KLM także jest równoboczny.



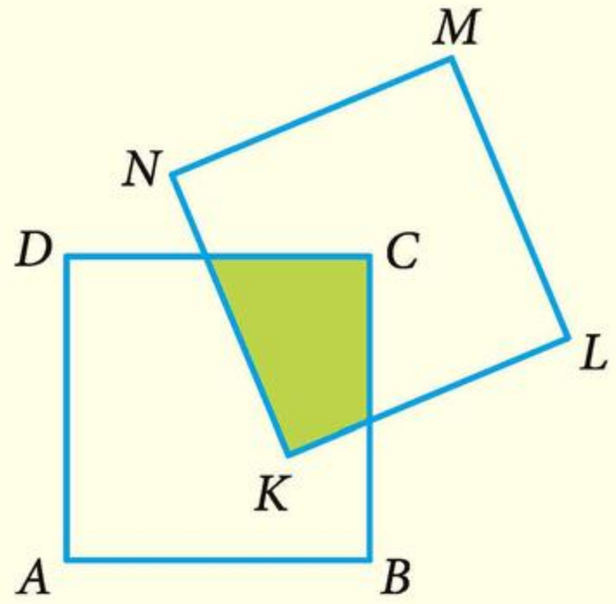
:D **11.** W równoległoboku $ABCD$ zaznaczono dłuższą przekątną AC, a następnie narysowano wysokości powstałych trójkątów jak na rysunku. Wśród trójkątów AKD, DCK, ABL, BCL znajdź dwie pary trójkątów przystających. Udowodnij, że trójkąty w każdej wybranej parze są przystające.



Dla dociekliwych

1. Rysunek przedstawia przystające kwadraty $ABCD$ i $KLMN$. Punkt C jest środkiem kwadratu $KLMN$. Udowodnij, że część wspólna obu figur (zamalowana na zielono) ma pole równe $\frac{1}{4}$ pola kwadratu $ABCD$.

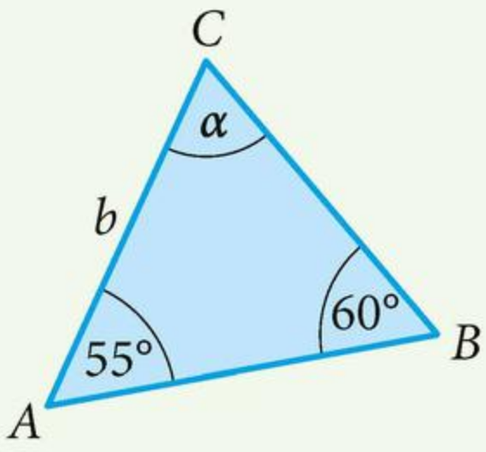
Spróbuj rozwiązać to zadanie, a jeśli ci się nie uda – skorzystaj z poniższej wskazówki.



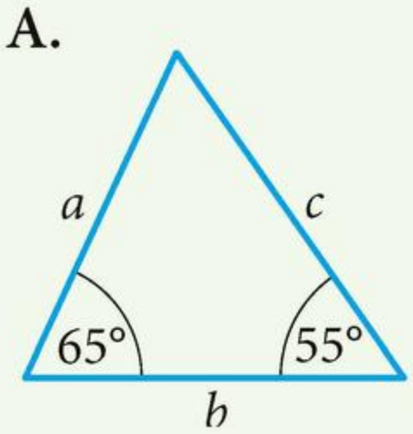
Wskazówka. Połącz punkt C ze środkami boków NK i KL. Zauważ, że zamalowany obszar to ćwiartka kwadratu $KLMN$ bez pewnego trójkąta, ale z dodanym innym trójkątem. Co to za trójkąty?

Czy już umiem?

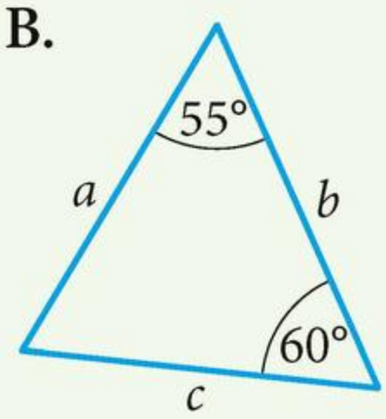
I. Trójkąt ABC i jeden z pozostałych trójkątów są trójkątami przystającymi. Sprawdź, który to trójkąt. Podaj cechę przystawania, z której skorzystasz. Odczytaj długości boków AB i BC oraz miarę kąta ACB.



A.



B.



II. Udowodnij, że w trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta między ramionami jest prostopadła do podstawy (a więc zawiera wysokość trójkąta).

III. W twierdzeniu z zadania II zamień miejscami założenie i tezę. Zapisz tak powstałe twierdzenie i je udowodnij.

IV. Z języka polskiego Kamil ma cztery oceny – ich średnia wynosi 4,25. Czy średnia ta może przekroczyć 4,75, gdy Kamil otrzyma kolejną ocenę?

4 Wielokąty foremne

Na dobry początek

Przyjrzyjmy się plastrowi miodu. Wszystkie komórki ulepione z wosku mają w przekroju jednakowy, regularny kształt sześciokąta foremnego. Dlaczego pszczoły wykorzystują ten właśnie kształt?



Próbę wyjaśnienia tej zagadki przedstawił Jan Brożek, wybitny polski matematyk, astronom, mecenas Akademii Krakowskiej.



Jan Brożek
1585–1652



Wśród wielokątów foremnych jedynie trójkąt, czworokąt i sześciokąt można ułożyć tak, aby wypełniły płaszczyznę. Spośród tych figur największe pole przy zadanym obwodzie ma sześciokąt. Dlatego do wykonania plastra miodu z komórek o takim przekroju potrzeba najmniej materiału.



$Obw._{\triangle} = Obw._{\square} = Obw._{\hexagon}$ $P_{\triangle} < P_{\square} < P_{\hexagon}$

Pytania i polecenia

- Sześciokąt o boku długości 3 mm (czyli takiej wielkości jak komórka w plastrze miodu) ma pole $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ mm^2, czyli około 23,38 mm^2. Uzasadnij, że pole tego sześciokąta jest większe od:

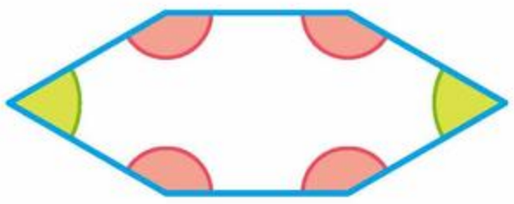
  a) pola kwadratu o takim samym obwodzie,
  b) pola trójkąta równobocznego o takim samym obwodzie.

Zajmiemy się teraz wielokątami, których boki mają taką samą długość, a kąty jednakową miarę.

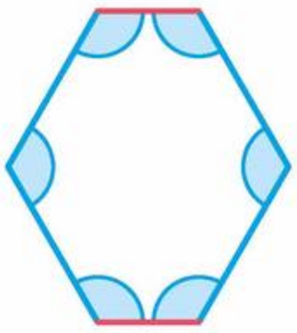
Przykład 1

Naszkicuj sześciokąt, który ma:
a) wszystkie boki tej samej długości,
b) wszystkie kąty tej samej miary,
c) wszystkie boki tej samej długości i kąty tej samej miary.

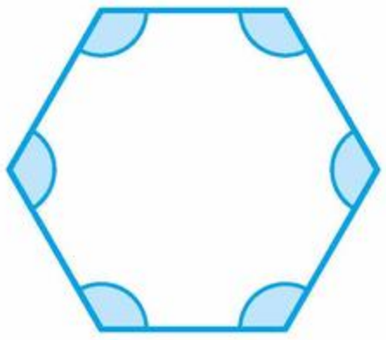
a)



b)



c)



Sześciokąt taki jak na rysunku c) nazywamy **sześciokątem foremnym**.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj czworokąt, w którym:
a) wszystkie boki są równe, ale nie wszystkie kąty mają taką samą miarę,
b) wszystkie kąty są równe, ale nie wszystkie boki mają taką samą długość.

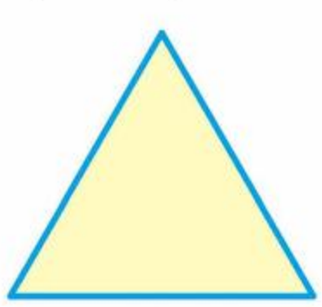
Jaki to czworokąt?

Zapamiętaj

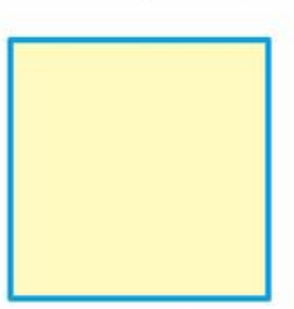
Definicja wielokąta foremnego

Wielokąt foremny to wielokąt, którego wszystkie boki mają jednakową długość i wszystkie kąty mają tę samą miarę.

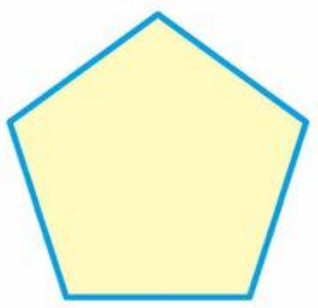
Przykłady wielokątów foremnych przedstawiono poniżej.



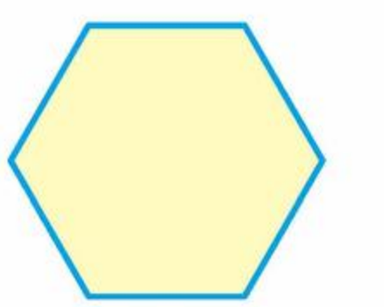
trójkąt foremny
(trójkąt równoboczny)



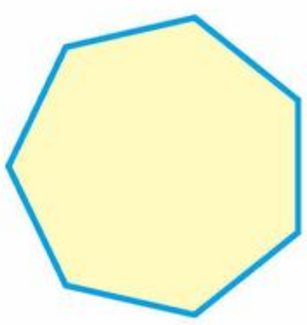
czworokąt foremny
(kwadrat)



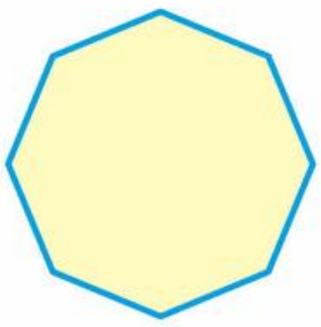
pięciokąt
foremny



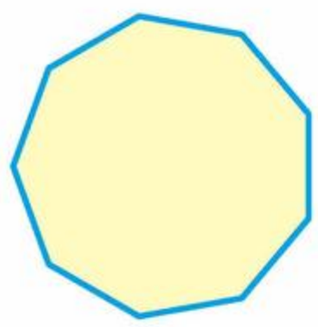
sześciokąt
foremny



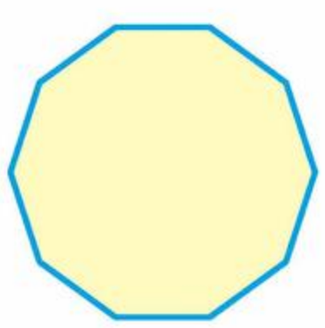
siedmiokąt
foremny



ośmiokąt
foremny



dziewięciokąt
foremny



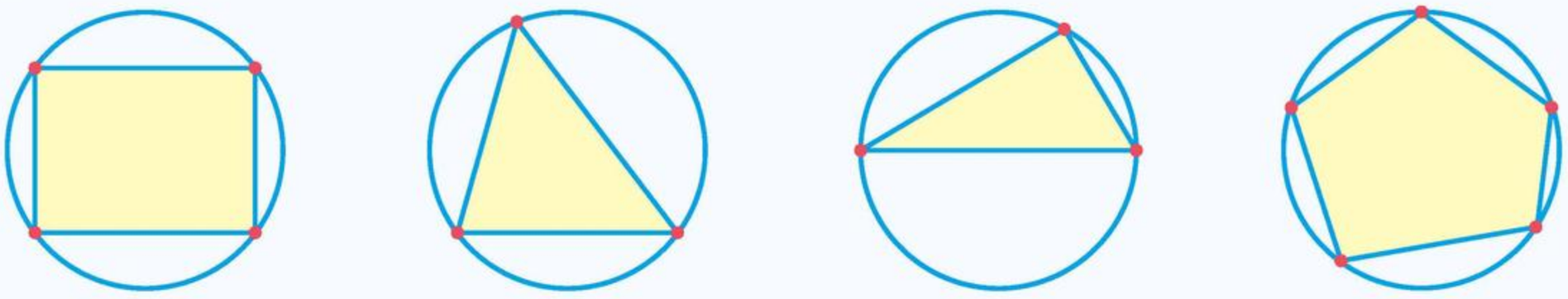
dziesięciokąt
foremny

Gdy mówimy o wielokątach foremnych, a także gdy je rysujemy, często pomocny bywa **okrąg opisany** na takim wielokącie.

Zapamiętaj

Definicja okręgu opisanego na wielokącie

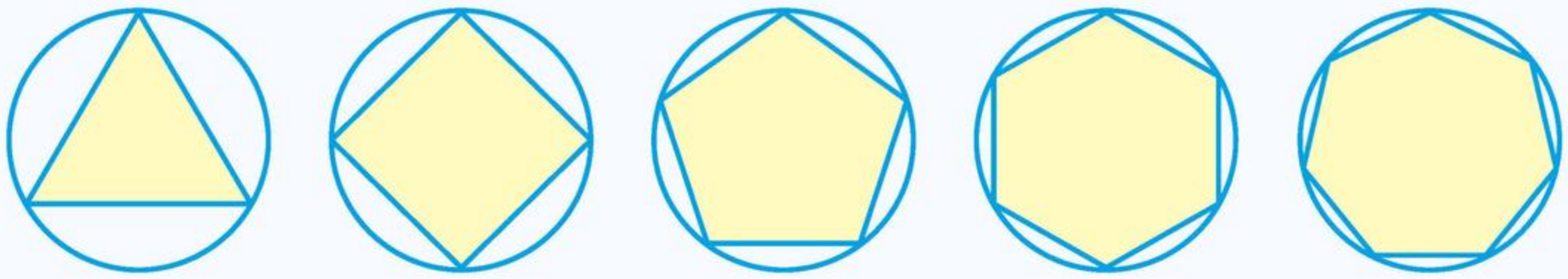
Okrąg opisany na wielokącie to okrąg, na którym leżą wszystkie wierzchołki tego wielokąta.



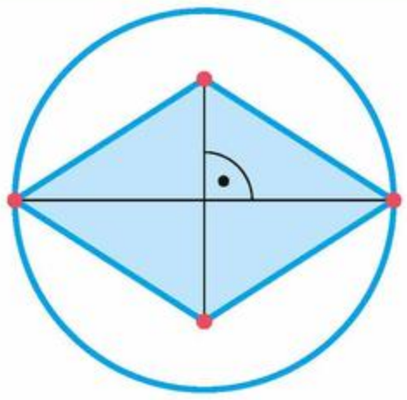
Zapamiętaj

Twierdzenie

Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg.



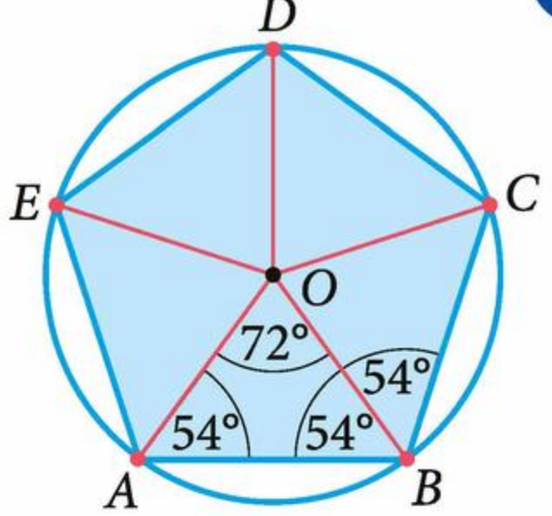
Na wielokątach, które nie są foremne, nie zawsze można opisać okrąg. Na przykład nie da się go opisać na rombie, który nie jest kwadratem.



Przykład 2

E

Oblicz miarę kąta pięciokąta foremnego.



Rozważmy okrąg opisany na pięciokącie foremnym $ABCDE$. Zauważmy, że promienie poprowadzone ze środka okręgu do wierzchołków pięciokąta dzielą go na pięć przystających trójkątów równoramiennych.

Oznacza to, że $\sphericalangle AOB = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

Stąd $\sphericalangle ABO = \frac{1}{2}(180^\circ - 72^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 108^\circ = 54^\circ$. Zatem $\sphericalangle ABC = 2 \cdot 54^\circ = 108^\circ$.

Odp. Kąt pięciokąta foremnego ma miarę 108°.

Ćwiczenie 2

Oblicz miarę kąta:

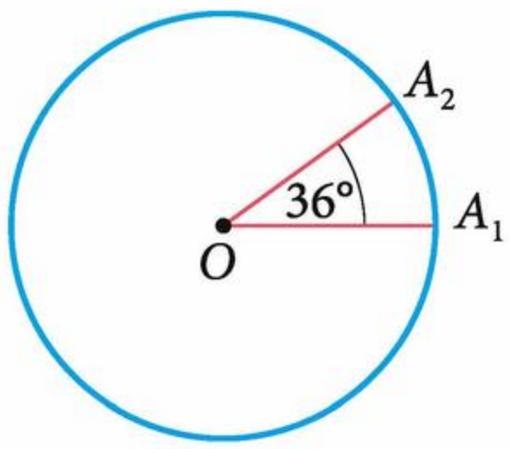
a) sześciokąta foremnego, **b)** siedmiokąta foremnego, **c)** n-kąta foremnego.

Przykład 3

Narysuj dziesięciokąt foremny za pomocą cyrkla i kątomierza.

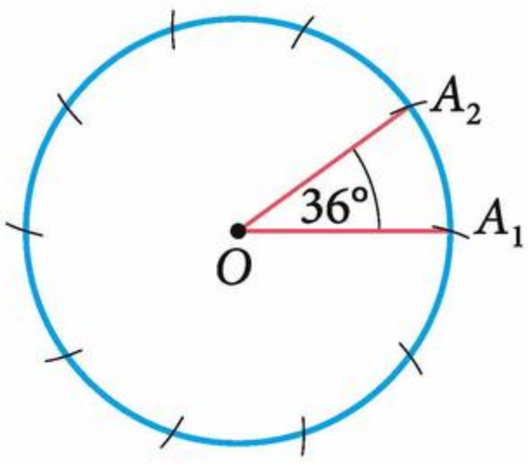
Krok 1.

Kreślimy okrąg o dowolnym promieniu. Posługując się kątomierzem, zaznaczamy kąt A_1OA_2 o wierzchołku w środku okręgu i o mierze $36°$ $(360° : 10 = 36°)$.



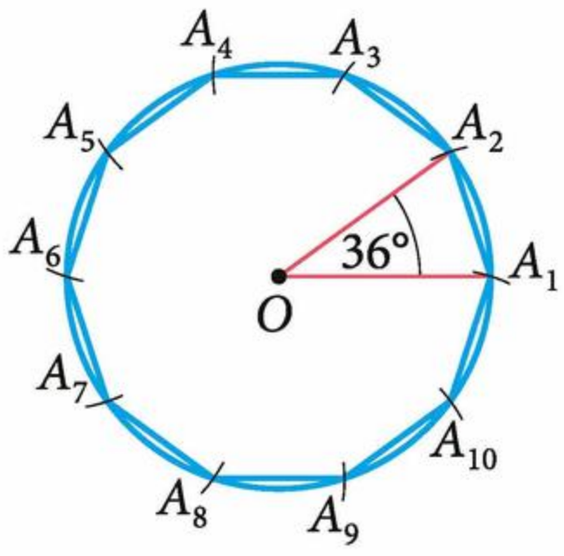
Krok 2.

Ustawiamy rozwartość cyrkla na długość cięciwy A_1A_2 i odkładamy na okręgu kolejne łuki. Otrzymujemy w ten sposób punkty A_3, A_4, …, A_{10}. Zaznaczone punkty dzielą okrąg na dziesięć jednakowych części. Są to wierzchołki szukanego dziesięciokąta.



Krok 3.

Łączymy kolejne punkty odcinkami i otrzymujemy dziesięciokąt foremny.



Ćwiczenie 3

Narysuj pięciokąt foremny za pomocą cyrkla i kątomierza.

Czy wiesz, że…

Nie każda moneta ma kształt koła.
Na zdjęciach widzisz brytyjskie monety o nominałach 20 pensów i 50 pensów.
Jaki mają kształt?





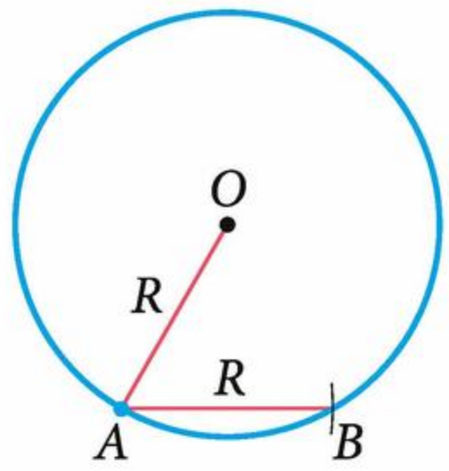
Przykład 4

Narysuj przy użyciu cyrkla i linijki sześciokąt foremny.

Zauważmy, że w okręgu opisanym na sześciokącie foremnym kąt między promieniami poprowadzonymi do sąsiednich wierzchołków ma miarę 60°. Zatem środek okręgu i dwa sąsiednie wierzchołki sześciokąta tworzą trójkąt równoboczny.

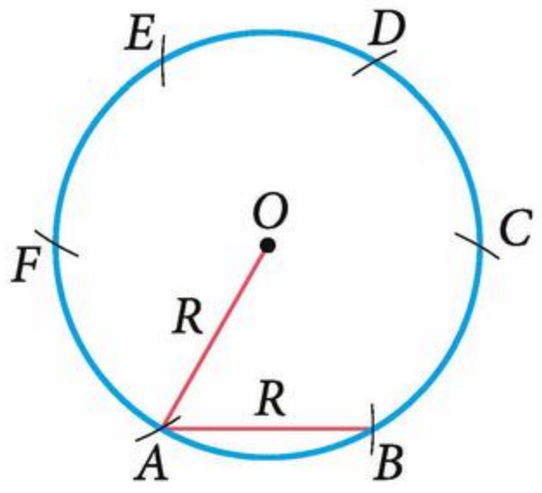
Krok 1.

Kreślimy okrąg o dowolnym promieniu.
Wybieramy na okręgu dowolny punkt A. Rozwartością cyrkla równą promieniowi okręgu kreślimy z punktu A łuk, który przecina okrąg w punkcie B.



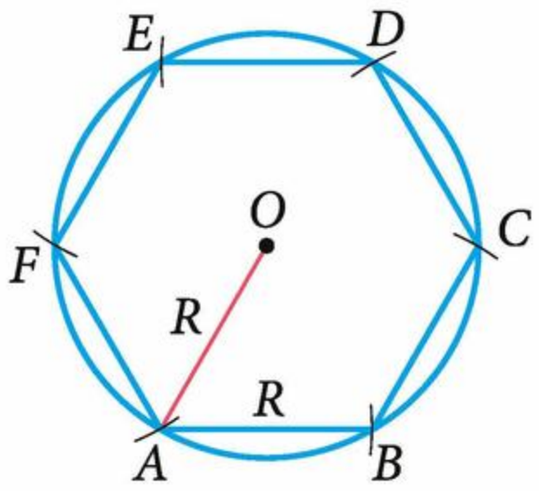
Krok 2.

Tą samą rozwartością cyrkla odkładamy na okręgu kolejne cztery łuki i otrzymujemy punkty C, D, E i F – pozostałe wierzchołki sześciokąta.



Krok 3.

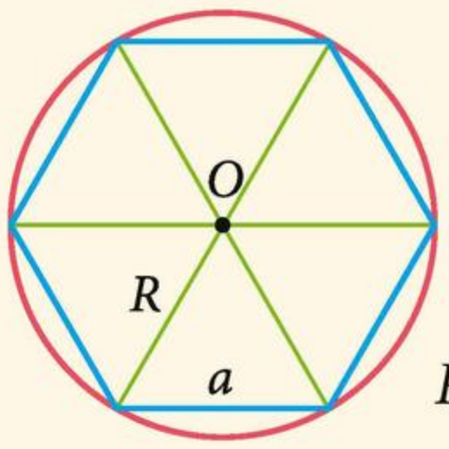
Łączymy kolejno punkty A, B, C, D, E, F i A. Sześciokąt $ABCDEF$ jest sześciokątem foremnym.



Ćwiczenie 4

Za pomocą cyrkla i linijki narysuj sześciokąt foremny o boku 5 cm.

Sześciokąt foremny i opisany na nim okrąg



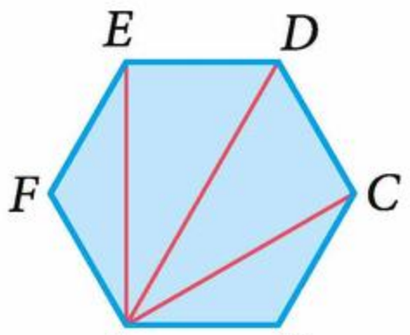
$R = a$

W sześciokącie foremnym:
- długości boków są równe promieniowi okręgu opisanego na tym sześciokącie,
- dłuższe przekątne są średnicami okręgu,
- dłuższe przekątne dzielą go na sześć przystających trójkątów równobocznych o bokach długości promienia okręgu.

Zadania

1. Za pomocą cyrkla, linijki i kątomierza narysuj:
a) dwunastokąt foremny, **b)** dwudziestokąt foremny.

E **2.** Przekątne sześciokąta foremnego $ABCDEF$ poprowadzone z wierzchołka A dzielą ten sześciokąt na cztery trójkąty. Oblicz miary kątów tych trójkątów.

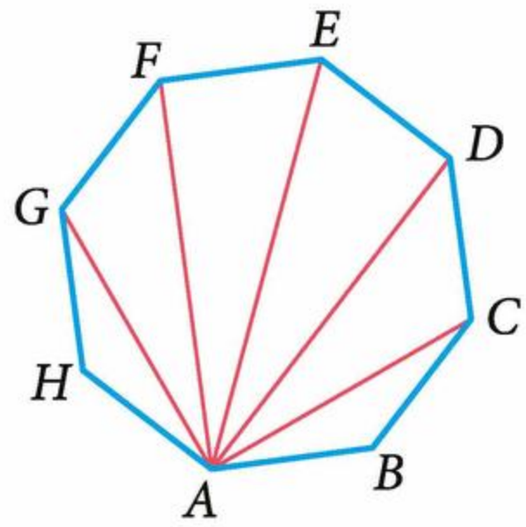


3. Udowodnij, że krótsza przekątna sześciokąta foremnego o boku długości a jest równa $a\sqrt{3}$.

4. Oblicz pole sześciokąta foremnego, którego:
a) dłuższa przekątna ma długość 16 cm, **b)** krótsza przekątna ma długość 6 cm.

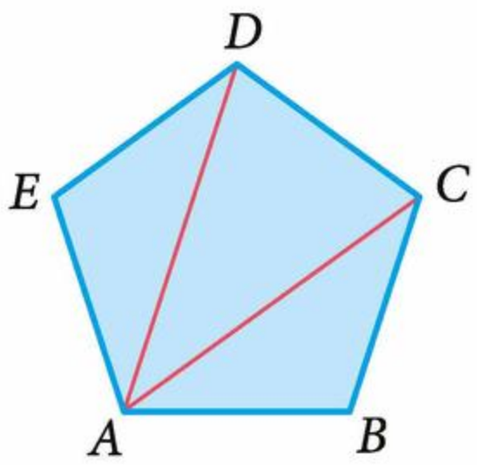
5. Oblicz długości przekątnych sześciokąta foremnego:
a) o obwodzie równym 48 cm, **b)** o polu równym $150\sqrt{3}$ cm^2.

6. W ośmiokącie foremnym $ABCDEFGH$ poprowadzono przekątne wychodzące z wierzchołka A (rysunek obok). Oblicz miary kątów otrzymanych sześciu trójkątów.



7. Oblicz miarę kąta dziesięciokąta foremnego oraz dwunastokąta foremnego.

8. Przekątne pięciokąta foremnego $ABCDE$ poprowadzone z wierzchołka A dzielą ten pięciokąt na trzy trójkąty (patrz rysunek). Oblicz miary kątów tych trójkątów.



9. Poprowadzono wszystkie przekątne pięciokąta foremnego, które podzieliły go na 11 wielokątów. Podaj miary kątów tych wielokątów.

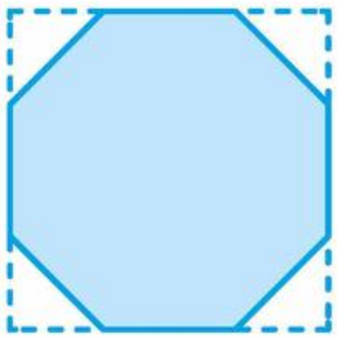
Czy wiesz, że…

Kształt pięciokąta foremnego ma Pentagon, czyli siedziba Departamentu Obrony USA. Nazwa tego budynku pochodzi od greckiego słowa *pentagon*, czyli pięciokąt.



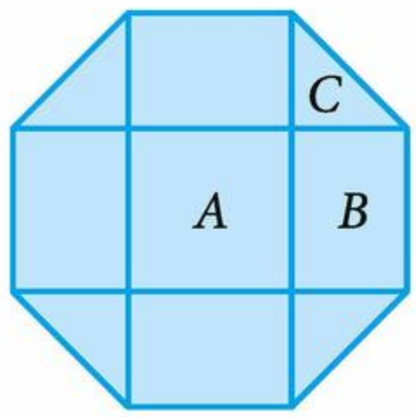
10. W ośmiokącie foremnym poprowadź:
a) dwie przekątne dzielące go na dwa trapezy równoramienne i prostokąt,
b) cztery przekątne dzielące go na cztery trójkąty równoramienne i kwadrat.

11. Uzasadnij, że jeśli po odcięciu naroży kwadratu otrzymamy ośmiokąt foremny o boku długości 3 dm, to bok tego kwadratu ma długość $(3+3\sqrt{2})$ dm.



12. Ośmiokąt foremny o boku długości 4 cm przecięto czterema przekątnymi jak na rysunku. Oblicz:

a) pola wielokątów oznaczonych literami A, B i C,
b) pole ośmiokąta.



13. Uzasadnij, że pole ośmiokąta foremnego o boku a jest równe $a^2(2+2\sqrt{2})$.

Dla dociekliwych

1. Na dwunastokącie foremnym opisany jest okrąg o promieniu R. Oblicz pole i długość boku tego dwunastokąta. Spróbuj to zrobić samodzielnie, a jeśli ci się nie uda, wykonaj kolejne polecenia poniżej.

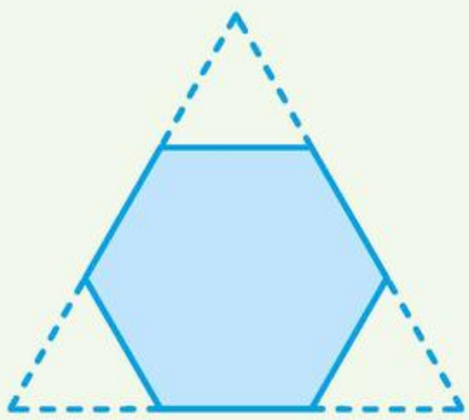
- Naszkicuj dwunastokąt foremny i opisany na nim okrąg oraz trójkąt ABO, gdzie A i B są sąsiednimi wierzchołkami dwunastokąta, a O jest środkiem okręgu. Wpisz na rysunku miary kątów trójkąta ABO.
- Narysuj wysokość AD trójkąta i oblicz długość tego odcinka. Kiedy to zrobisz, łatwo już obliczysz pole trójkąta, a potem – pole całego dwunastokąta.
- Aby obliczyć długość boku AB, najpierw oblicz długość odcinka DB.

Czy już umiem?

I. Jaką miarę ma kąt dziewięciokąta foremnego?

A. 130° **B.** 140° **C.** 150° **D.** 160°

II. Trójkąt równoboczny ma obwód 36 cm. Po obcięciu jego naroży otrzymano sześciokąt foremny. Oblicz promień okręgu opisanego na tym sześciokącie.



III. Za pomocą cyrkla, linijki i kątomierza narysuj piętnastokąt foremny.

IV. Oblicz.

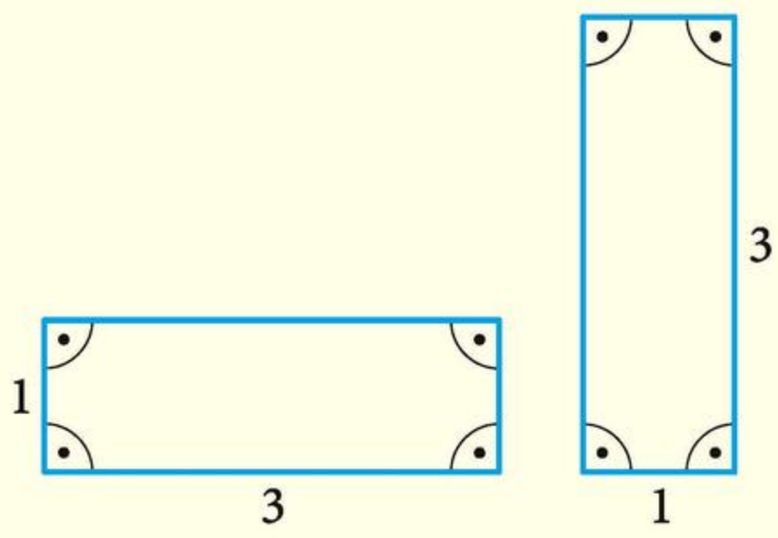
a) $|3-(-2)|$ **b)** $|3|-(-2)$ **c)** $3-|-2|$

Powtórzenie IV

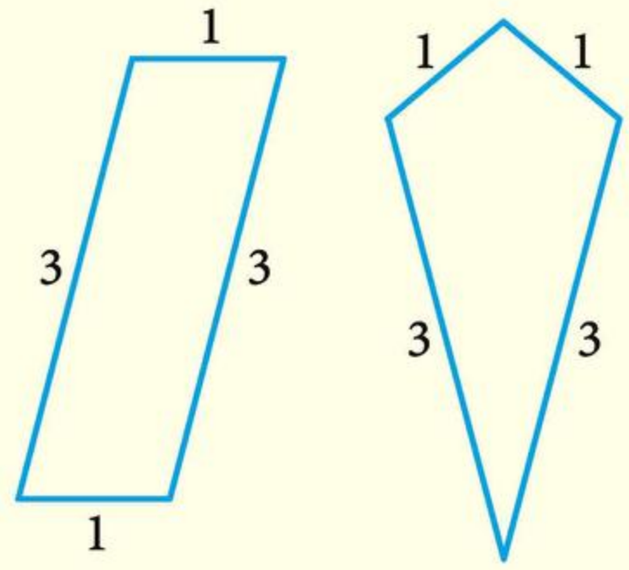
ZESTAW 1

1. Czy figury przedstawione na rysunku są przystające?

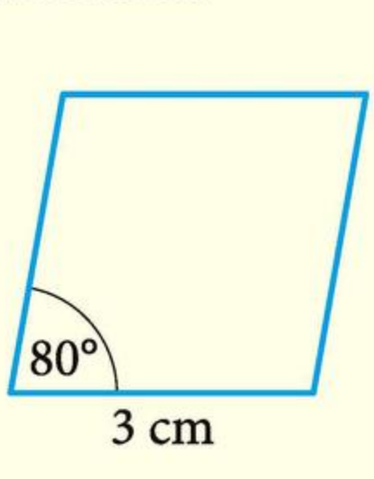
a)

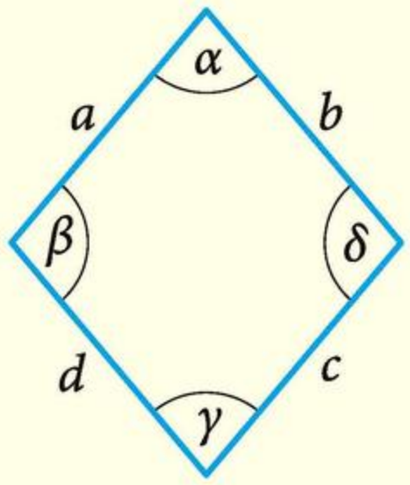


b)



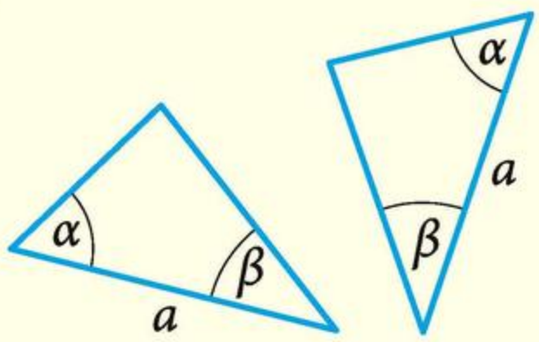
2. Na rysunku przedstawiono przystające romby. Podaj długości odcinków i miary kątów oznaczonych literami.



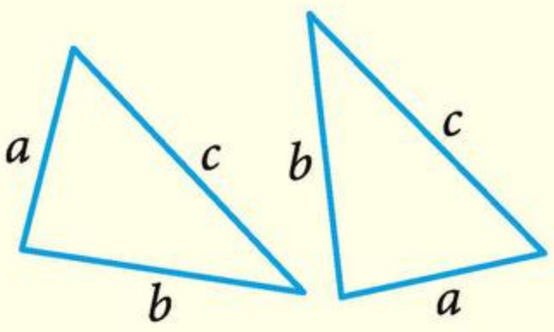


3. Podaj cechę przystawania trójkątów, na której podstawie możemy stwierdzić, że trójkąty są przystające. Jednakowe boki i kąty oznaczono jednakowymi literami.

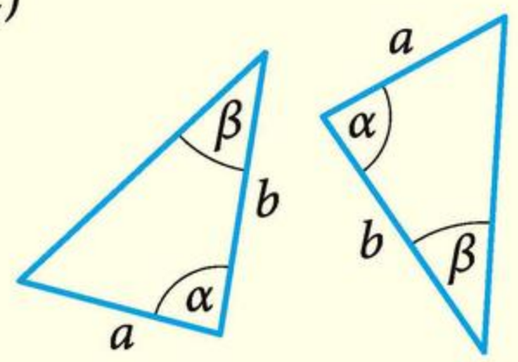
a)



b)

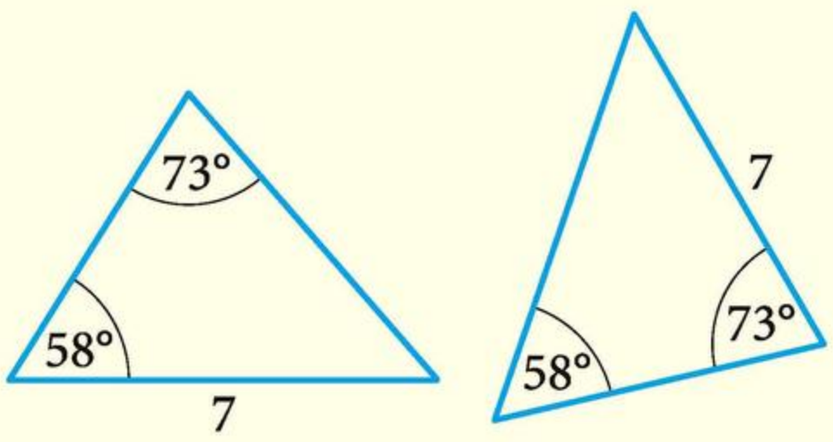


c)

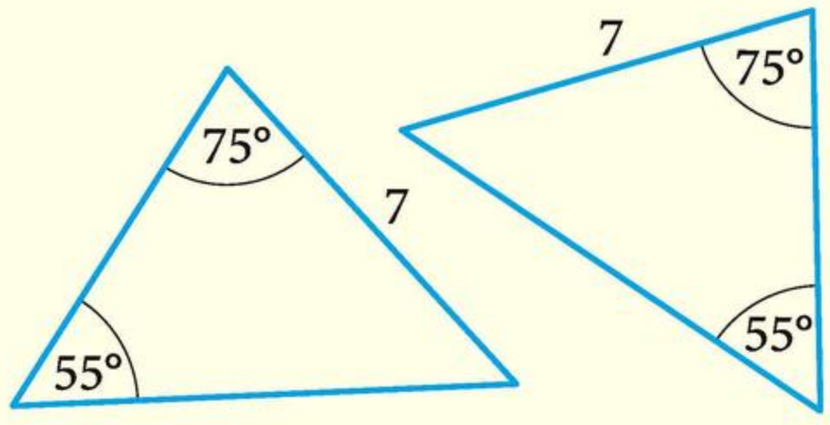


4. Czy trójkąty przedstawione na rysunku są przystające? Uzasadnij odpowiedź.

a)



b)



5. Dane są dwa trójkąty prostokątne równoramienne: trójkąt ABC o przyprostokątnych równych 3 cm oraz trójkąt KLM o przeciwprostokątnej równej $3\sqrt{2}$ cm. Czy te trójkąty są przystające? Uzasadnij odpowiedź.

6. Wskaż parę figur, której nie można otrzymać, dzieląc kwadrat prostą na dwie części.

A. prostokąt i prostokąt
B. trapez i trapez
C. trójkąt i trapez
D. romb i trójkąt

:D **7.** Uzasadnij, że przekątna prostokąta dzieli go na trójkąty przystające.

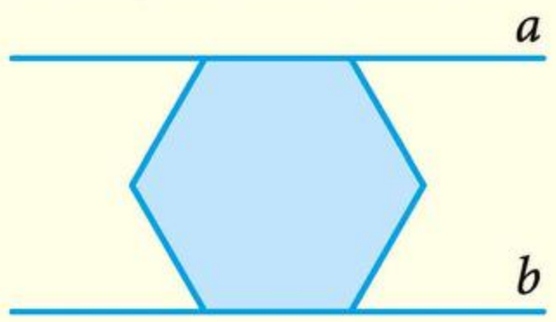
8. Za pomocą cyrkla, linijki i kątomierza narysuj osiemnastokąt foremny.

9. Jaka jest miara kąta piętnastokąta foremnego?

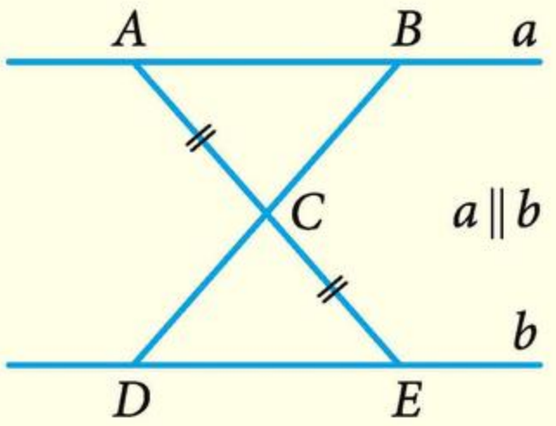
10. Na sześciokącie foremnym opisano okrąg o promieniu 2 cm. Oblicz:

a) długość boku sześciokąta,
b) obwód sześciokąta,
c) pole sześciokąta,
d) długości przekątnych sześciokąta.

11. Na rysunku przedstawiono sześciokąt foremny oraz proste a i b zawierające jego równoległe boki. Odległość między prostymi wynosi 9 cm. Oblicz obwód sześciokąta.



:D **12.** Proste a i b przedstawione na rysunku są równoległe i $AC = CE$. Udowodnij, że trójkąty ABC i EDC są przystające.

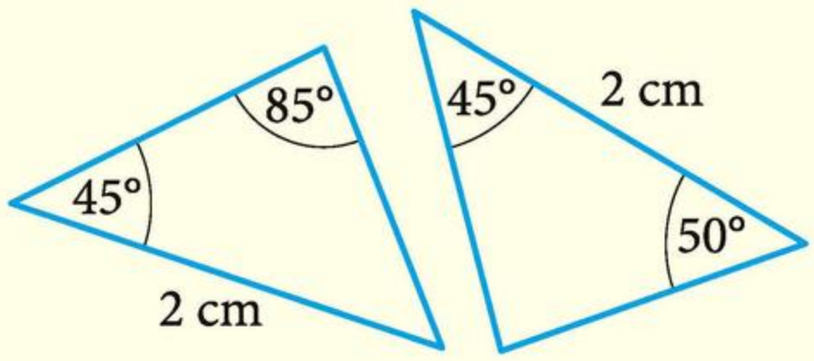


13. Czy każdy romb jest wielokątem foremnym? Wybierz odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie spośród zdań A–C.

TAK	ponieważ	A.	wszystkie boki rombu są równe.
NIE		B.	każdy kwadrat jest rombem.
		C.	nie każdy romb ma równe kąty.

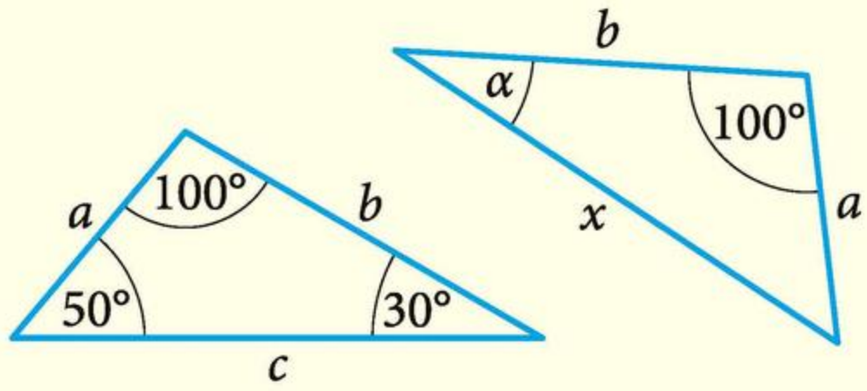
ZESTAW 2

1. Czy z informacji podanych na rysunku wynika, że trójkąty są przystające? Wybierz odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie spośród zdań A–C.



TAK	ponieważ	A.	pierwszy trójkąt ma kąty 45° i 85°, a drugi 45° i 50°.
NIE		B.	w obu trójkątach przy boku 2 cm są takie same kąty.
		C.	znamy tylko jeden bok, a powinny być trzy pary równych boków.

2. Czy z informacji podanych na rysunku wynika, że $\alpha = 50°$? Wybierz odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie spośród zdań A–C.

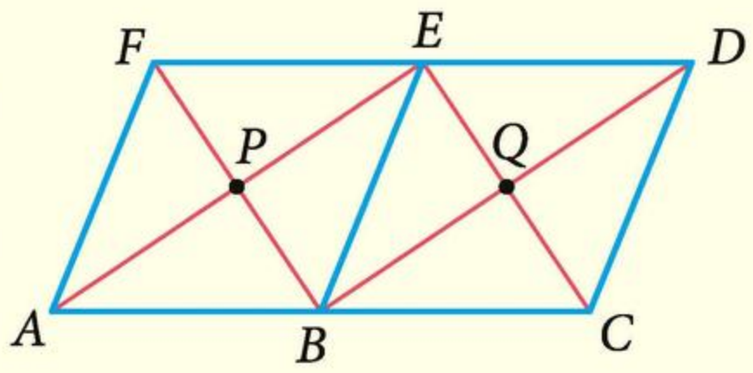


TAK	ponieważ	A.	nie wiadomo, czy trójkąty są przystające.
		B.	trójkąty są przystające (bkb) i kąt α odpowiada kątowi $50°$.
NIE		C.	trójkąty są przystające (bkb), ale kąt α nie odpowiada kątowi $50°$.

3. Czy z informacji podanych na rysunku do poprzedniego zadania wynika, że $x = c$? Wybierz odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie spośród zdań A–C.

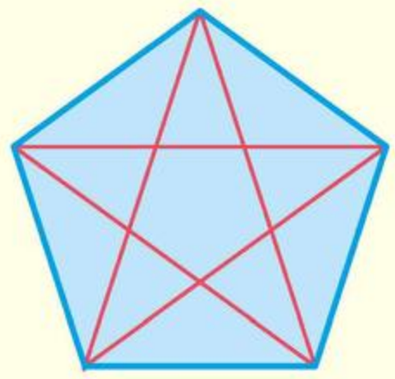
TAK	ponieważ	A.	nie wiadomo, czy trójkąty są przystające.
		B.	trójkąty są przystające (bbb).
NIE		C.	trójkąty są przystające (bkb) i w jednym z nich naprzeciwko kąta $100°$ leży odcinek o długości c, a w drugim – odcinek o długości x.

:D **4.** Dane są dwa romby $ABEF$ i $BCDE$ o wspólnym boku BE takie, że punkty A, B i C oraz F, E i D leżą na jednej prostej. W rombach tych narysowano przekątne. Punkty ich przecięcia oznaczono odpowiednio P i Q (patrz rysunek). Uzasadnij, że czworokąt $BQEP$ jest prostokątem.



:D **5.** Uzasadnij, że wysokość opuszczona na podstawę trójkąta równoramiennego dzieli go na dwa trójkąty przystające.

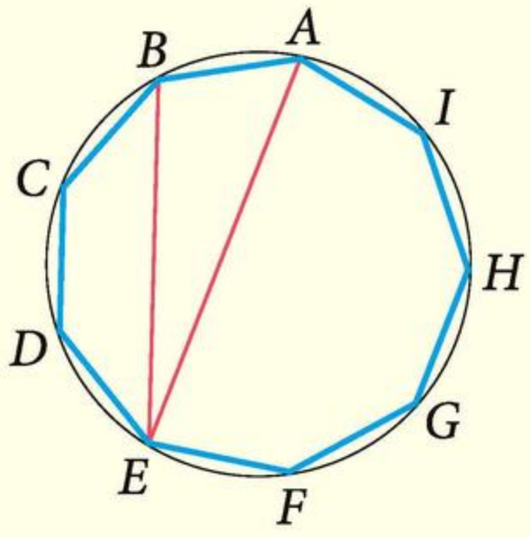
:D **6.** Udowodnij, że wszystkie przekątne pięciokąta foremnego mają tę samą długość.



7. Pole sześciokąta foremnego jest równe $96\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Oblicz długości jego przekątnych.

8. Kąt pewnego wielokąta foremnego ma $144°$. Ile boków ma ten wielokąt?

9. Dziewięciokąt $ABCDEFGHI$ przedstawiony na rysunku jest foremny. Oblicz kąt między przekątnymi EA i EB.



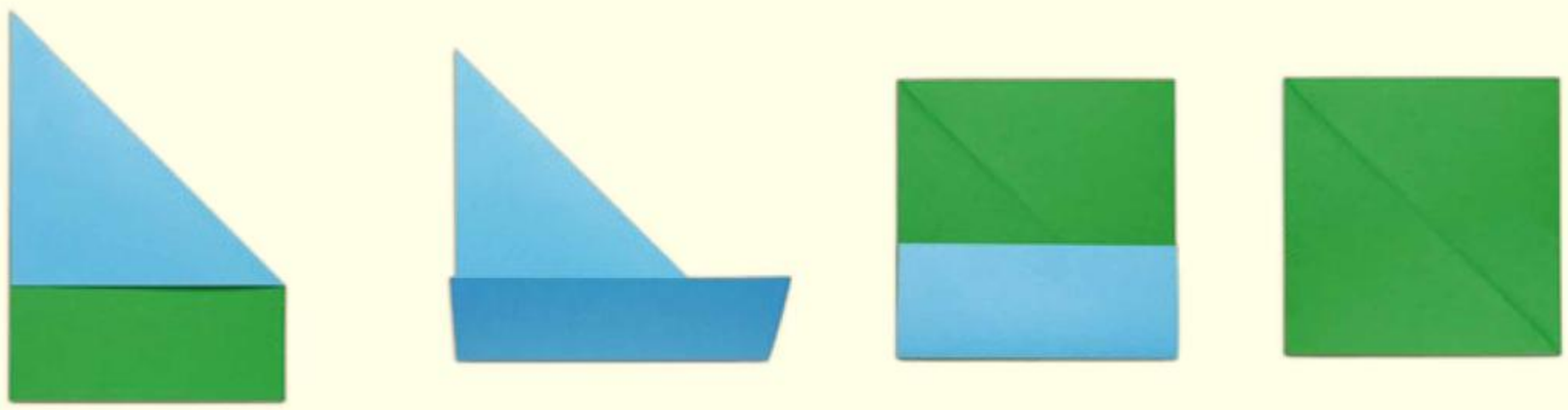
Zadania na temat…

Tajemnice składanej kartki

Origami (jap. 折り紙) to popularna w Japonii sztuka składania papieru. To nie tylko zabawa, lecz także element wychowania dzieci. Origami uczy ładu i harmonii, sztuki skupienia i równowagi. Wielki mistrz origami, Japończyk Akira Yoshizawa, mówił: „Gdy skutecznie używamy własnych rąk, nasze serca najbardziej przepełnione są pokojem". Tym przesłaniem kieruje się również Polskie Centrum Origami (http://www.origami.org.pl/).

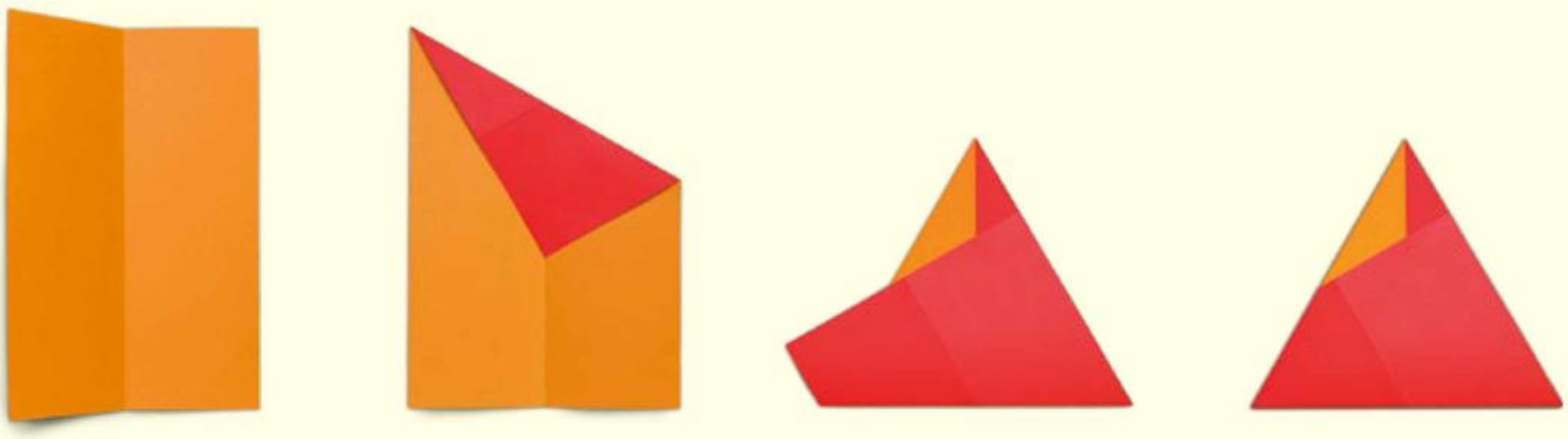
Z kartki papieru można wyczarować przeróżne piękne kształty. Inspiracje i dokładne instrukcje bez trudu znajdziesz w internecie. Składając odpowiednio kartkę, można również uzyskać wielokąty foremne. Na pewno potrafisz otrzymać z prostokątnej kartki kwadrat:

A



Bez trudu można również złożyć kartkę tak, aby powstał trójkąt równoboczny:

B



Składamy kartkę na pół.

Wierzchołek trafia na linię zgięcia.

Węzeł z jednego lub dwóch pasków papieru to pięciokąt foremny (C) lub sześciokąt foremny (D). Aby go otrzymać, należy zawiązać pasek jak na zdjęciu, następnie delikatnie zaciągnąć węzeł, a na koniec odciąć lub pozaginać zbędne części pasków.

C



D



Na koniec jeszcze jeden wielokąt foremny. Ale to tylko początek instrukcji...

E



Składamy kartkę na pół.

Wykonaj figury według instrukcji A–E, a potem zacznij rozwiązywać zadania.

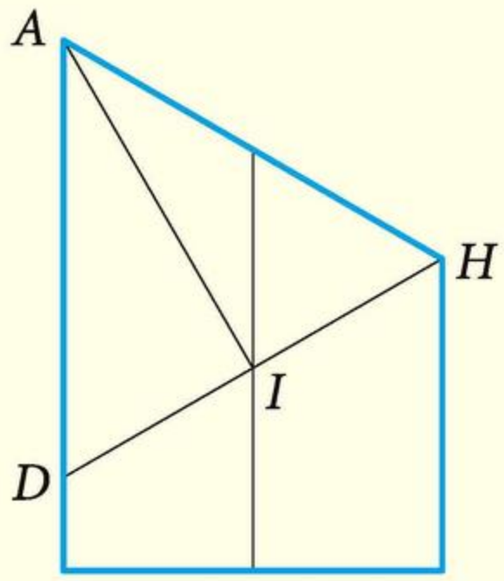
1. Uzasadnij, że składając kartkę zgodnie z instrukcją A, otrzymamy kwadrat.

2. Ile stopni ma kąt sześciokąta foremnego? Zmierz kąty swojego sześciokąta otrzymanego według instrukcji D.

3. Ile stopni ma kąt pięciokąta foremnego? Zmierz kąty swojego pięciokąta otrzymanego według instrukcji C.

4. Na rysunku 1 zilustrowano sytuację z drugiego zdjęcia instrukcji B. Przenieś oznaczenia z rysunku na składaną przez ciebie kartkę. Udowodnij, że trójkąty *ADI* i *AIH* są przystające.

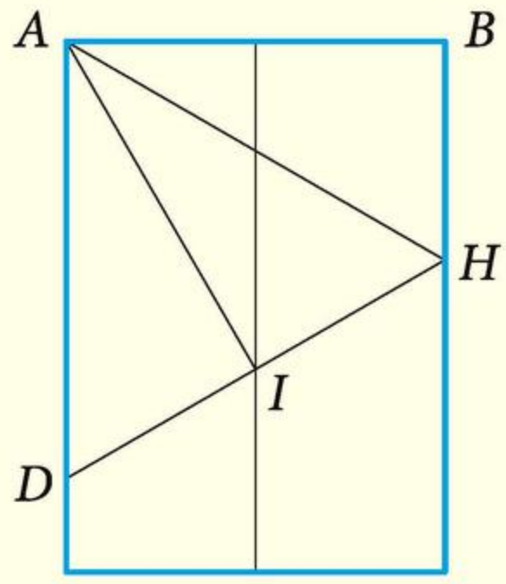
Wskazówka. Skorzystaj z przykładu 1 na s. 151.



Rys. 1

5. Na rysunku 2 przedstawiono tę samą sytuację co na rysunku 1, ale po odgięciu narożnika kartki. Znajdź na rysunku trzy trójkąty przystające. Oblicz kąty trójkąta *AIH*.

6. Udowodnij, wykorzystując wynik z poprzedniego zadania, że trójkąt *ADH* jest równoboczny (czyli że składając kartkę zgodnie z instrukcją B, otrzymujemy trójkąt równoboczny).



Rys. 2

7. Ile stopni ma kąt rozwarty otrzymany podczas wykonywania instrukcji E? Uzasadnij odpowiedź.

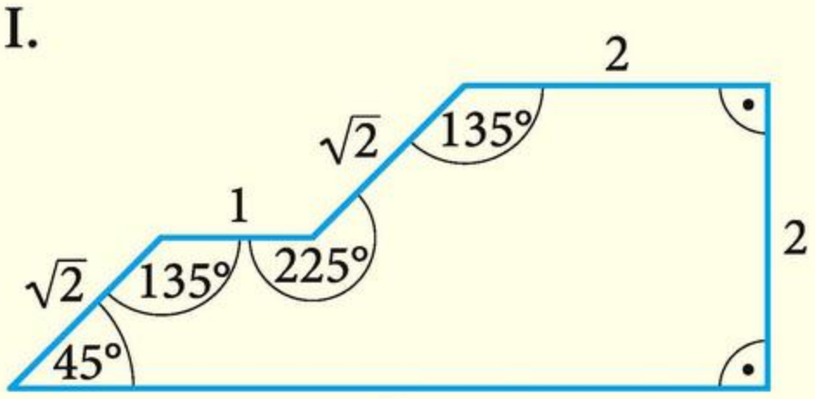
8. Jaki wielokąt foremny można otrzymać, zaczynając składanie według instrukcji E? Wymyśl dalszy sposób składania kartki, który pozwoli otrzymać ten wielokąt.

Zadania na deser

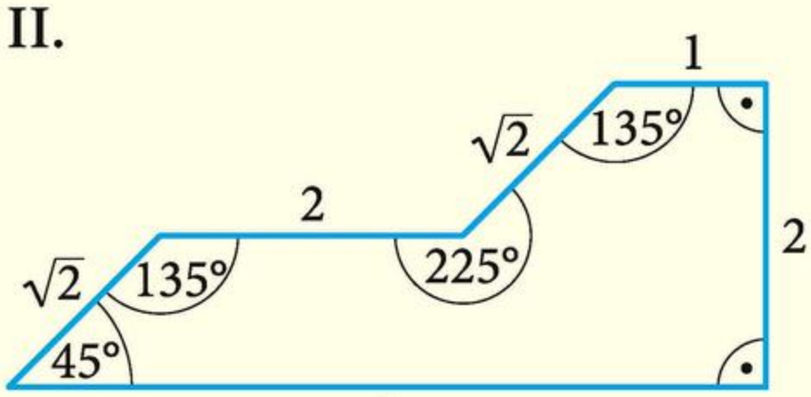
Figury przystające

1. Czy narysowane wielokąty są przystające? Uzasadnij swoją odpowiedź.

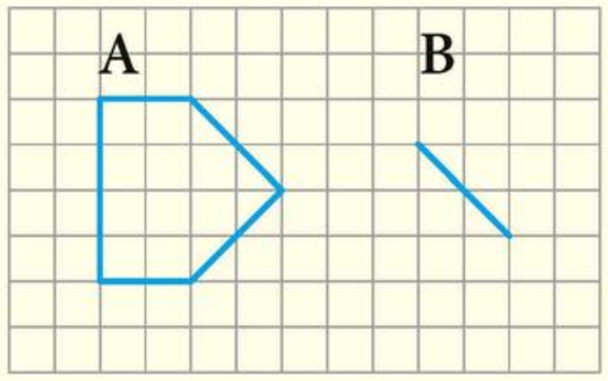
I.



II.



2. Na rysunku B przedstawiono jeden z boków pięciokąta. Na ile sposobów można uzupełnić ten rysunek, aby otrzymany pięciokąt był przystający do pięciokąta z rysunku A? Wykonaj w zeszycie ilustracje przedstawiające wszystkie możliwości.



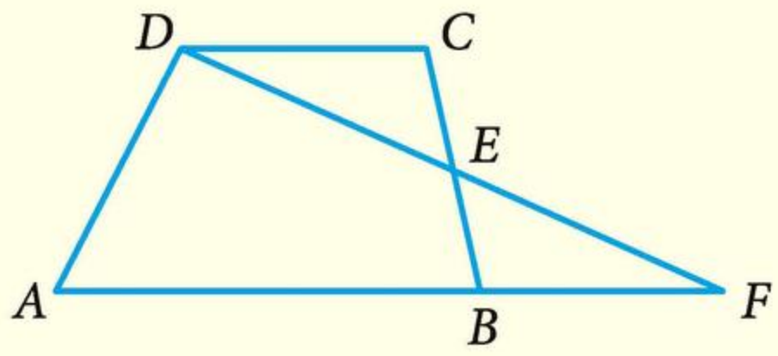
Cechy przystawania trójkątów w dowodach twierdzeń

3. Czy jest prawdą, że jeśli w czworokącie $ABCD$ przekątne AC i BD są prostopadłe, a boki AB i BC są równe, to taki czworokąt jest rombem? Jeśli tak – udowodnij to, jeśli nie – podaj przykład pokazujący fałszywość hipotezy.

4. Podaj przykład czworokąta $ABCD$, w którym przekątne AC i BD są prostopadłe, boki AB i CD są równe, ale czworokąt nie jest rombem.

:D **5.** Udowodnij, że przeciwległe boki równoległoboku są równe.
Wskazówka. Narysuj równoległobok wraz z jedną przekątną.

:D **6.** W trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, poprowadzono odcinek z wierzchołka D przez środek boku BC do przecięcia z prostą AB (jak na rysunku). Udowodnij, że dany trapez oraz trójkąt ADF mają równe pola.



7. Mamy dwie listewki. W środku każdej z nich wiercimy otwór i skręcamy listewki lekko śrubą, tak aby mogły wyznaczać różne kąty. W każdym z możliwych położeń końce listewek leżą w wierzchołkach pewnej figury. Jaka to figura, jeśli listewki nie leżą wzdłuż jednej prostej i mają:

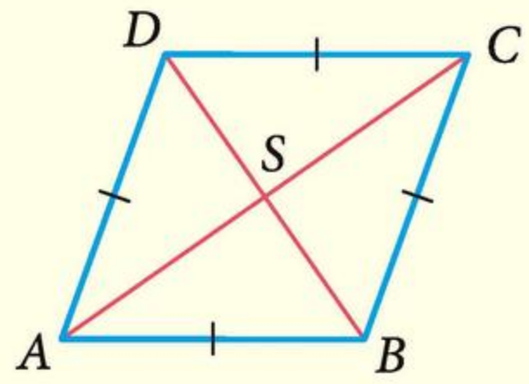
a) jednakową długość, **b)** różne długości?



8. Przekątne prostokąta przecinają się w środku każdej z nich. Czy jest również prawdą, że jeśli przekątne czworokąta przecinają się w środku każdej z nich, to taki czworokąt jest prostokątem? Jeśli tak, uzasadnij. Jeśli nie, podaj przykład pokazujący fałszywość tej hipotezy.

:D **9.** Udowodnij, że przekątne równoległoboku przecinają się w punkcie, który jest środkiem każdej z nich.

:D **10.** **a)** Udowodnij, że przekątne dzielą romb na cztery przystające trójkąty. Skorzystaj z twierdzenia udowodnionego w zadaniu 9.



b) Udowodnij, że każda przekątna rombu dzieli jego odpowiednie kąty na połowy.

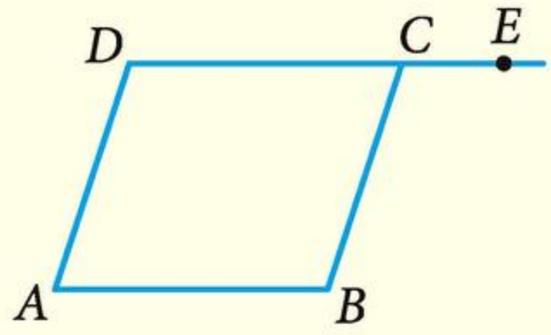
c) Udowodnij, że przekątne rombu są prostopadłe.

Wskazówka. Przerysuj rysunek do zeszytu. Znajdź równe odcinki i oznacz je w jednakowy sposób. Czy widzisz już, które trójkąty są przystające? Oznacz ich równe kąty w jednakowy sposób.

Pola figur w dowodach twierdzeń

W wielu dowodach warto skorzystać ze wzorów na pole.

:D **11.** Punkt E leży na przedłużeniu boku DC równoległoboku $ABCD$ (rysunek obok). Uzasadnij, że pole trójkąta ABE jest równe połowie pola równoległoboku $ABCD$.



:D **12.** Udowodnij, że jeśli trójkąt ma dwie równe wysokości, to jest równoramienny.

Wskazówka. Pole trójkąta jest zawsze takie samo niezależnie od tego, który bok potraktujemy jako podstawę.

:D **13.** Jeden z boków równoległoboku jest dwa razy dłuższy od drugiego. Sformułuj i udowodnij zależność między wysokościami tego równoległoboku.

Zadania różne

14. **a)** Czy czworokąt może mieć dwa kąty wklęsłe, tzn. większe od $180°$?

b) Czy pięciokąt może mieć dwa kąty wklęsłe?

c) Ile najwięcej kątów wklęsłych może mieć n-kąt (wielokąt, który ma n kątów) w zależności od n?

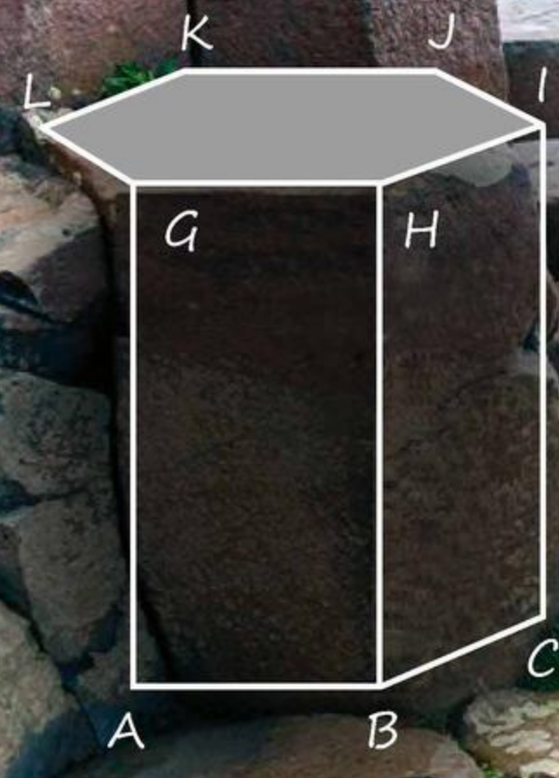
15. Czy jest możliwe, żeby jeden kąt równoległoboku był o $30°$ większy niż suma innych dwóch kątów tego równoległoboku? Jeśli nie – udowodnij, że to niemożliwe. Jeśli tak – podaj miary wszystkich kątów tego równoległoboku i wyjaśnij, czy jest tylko jedna odpowiedź.

1

Graniastosłupy

Na dobry początek

Kolumny bazaltowe są tworem natury. Powstają z rozlanej lawy, która – stygnąc – kurczy się, a przez to pęka. Spękania tworzące sześciokątną sieć najlepiej zmniejszają powstałe napięcie.
W ten sposób powstają regularne graniastosłupy.



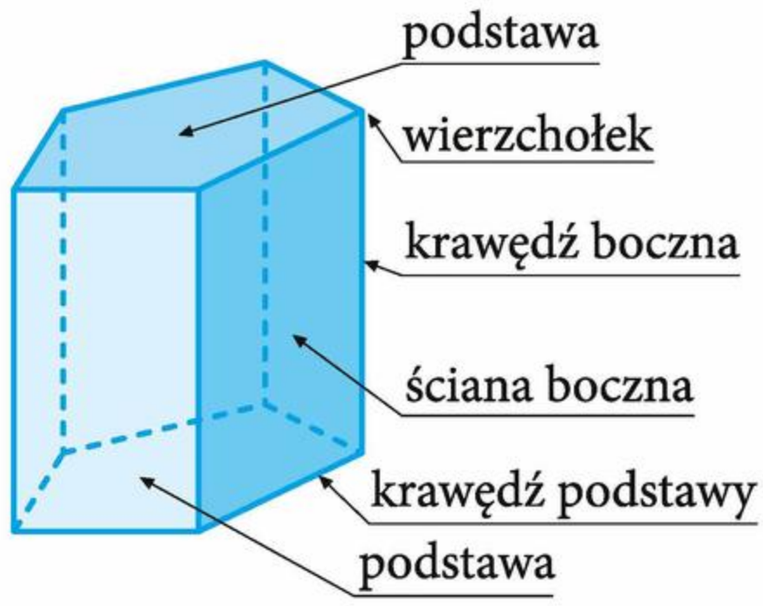
Podstawa kolumny jest tym większa, im wolniej stygnie lawa.

Pytania i polecenia

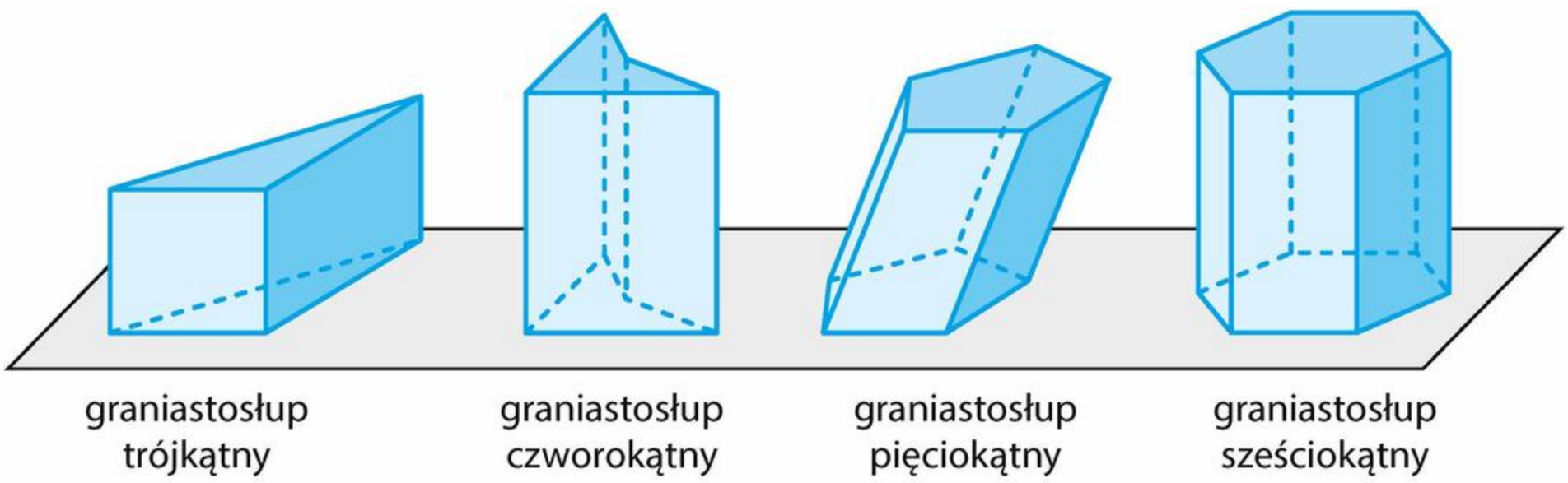
Zaznaczony fragment sześciobocznej kolumny potraktujmy jako model graniastosłupa o podstawie sześciokąta foremnego.

- Jakim czworokątem jest figura *BCIH*?
- Wśród podanych odcinków wskaż równe: *AH*, *GH*, *AG*, *BI*, *CH*, *IC*, *BC*.
- Wśród podanych odcinków wskaż równe: *IL*, *IJ*, *JH*, *KH*, *JG*, *GH*, *LH*.

Graniastosłup to bryła, której podstawy są przystającymi wielokątami zawartymi w płaszczyznach równoległych, a wszystkie krawędzie boczne są równoległe i równej długości.



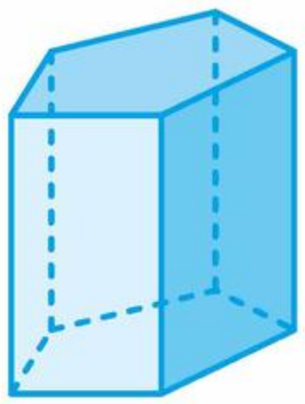
Podstawa graniastosłupa może być dowolnym wielokątem. W skrócie graniastosłup o podstawie trójkątnej nazywamy graniastosłupem trójkątnym, graniastosłup o podstawie czworokątnej – graniastosłupem czworokątnym itd.



Zauważ, że w graniastosłupie z każdego wierzchołka wychodzą trzy krawędzie: krawędź boczna i dwie krawędzie podstawy.

Przykład 1.1

Ile wierzchołków, ścian i krawędzi ma graniastosłup pięciokątny?



Graniastosłup pięciokątny ma:
- 10 wierzchołków,
- 7 ścian, w tym 2 podstawy i 5 ścian bocznych,
- 15 krawędzi, w tym 5 krawędzi bocznych i po 5 krawędzi każdej z podstaw.

Przykład 1.2

Graniastosłup ma 21 krawędzi. Jaki wielokąt jest jego podstawą?

Jeśli podstawą graniastosłupa jest wielokąt o n bokach, to graniastosłup ma $2n$ krawędzi podstaw i n krawędzi bocznych, razem $3n$ krawędzi.

$3n = 21$, więc $n = 7$, czyli podstawa jest siedmiokątem.

Ćwiczenie 1

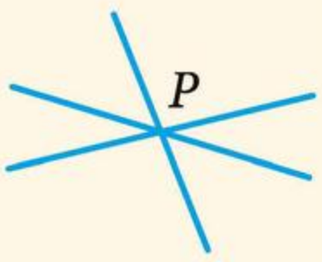
Podaj liczbę wierzchołków, ścian (w tym ścian bocznych) i krawędzi (w tym krawędzi bocznych i krawędzi podstaw) graniastosłupa:

a) trójkątnego, **b)** czworokątnego, **c)** sześciokątnego.

Graniastosłupy proste i pochyłe

Wśród graniastosłupów wyróżniamy **graniastosłupy proste**, czyli takie, których ściany boczne są prostokątami. Wszystkie krawędzie boczne graniastosłupów prostych są prostopadłe do podstaw.

Postaw w punkcie *P* ołówek prostopadle do kartki. Jest on prostopadły do każdej z narysowanych prostych.



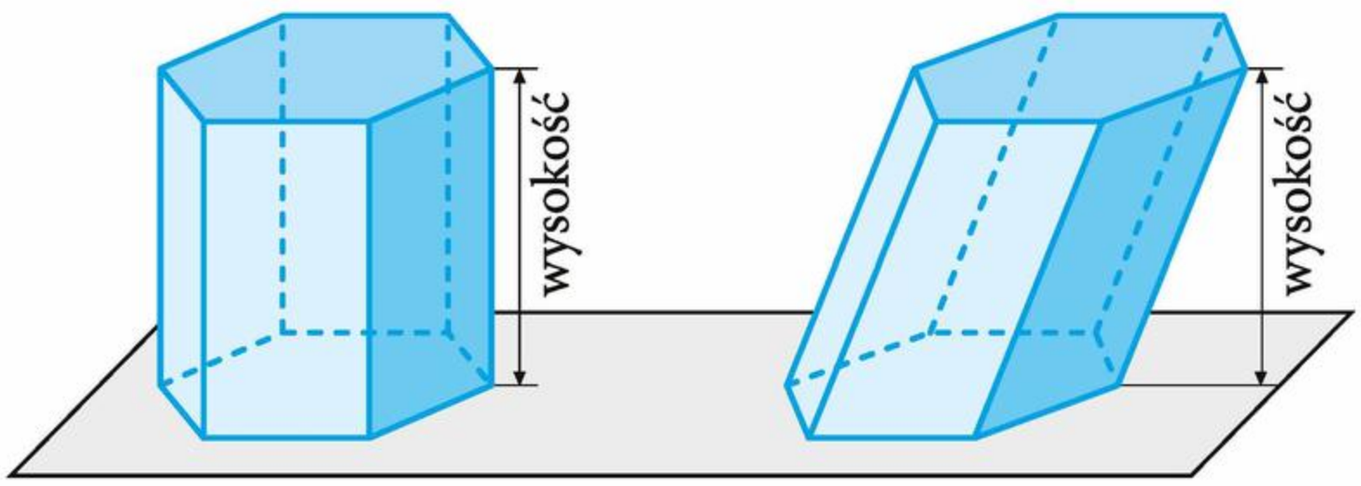


Graniastosłupy, które nie są proste, nazywamy **graniastosłupami pochyłymi**.

Ściany graniastosłupów pochyłych są równoległobokami (mogą się wśród nich zdarzyć również prostokąty).



Dowolny odcinek, który łączy płaszczyzny zawierające podstawy graniastosłupa i jest do nich prostopadły, nazywamy **wysokością graniastosłupa**. Wysokością nazywamy również długość takiego odcinka.



graniastosłup sześciokątny prosty

graniastosłup sześciokątny pochyły

W graniastosłupie prostym każda krawędź boczna jest jego wysokością. Natomiast w graniastosłupie pochyłym krawędź boczna jest dłuższa od jego wysokości.

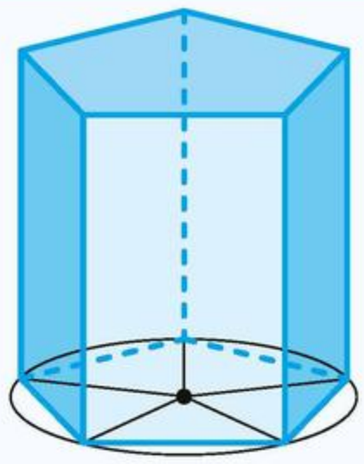
Graniastosłupy prawidłowe

Jeśli podstawą graniastosłupa prostego jest wielokąt foremny, to taki graniastosłup nazywamy **prawidłowym**.



Zapamiętaj

W graniastosłupie prawidłowym:
- podstawy to przystające wielokąty foremne,
- ściany boczne to przystające prostokąty.



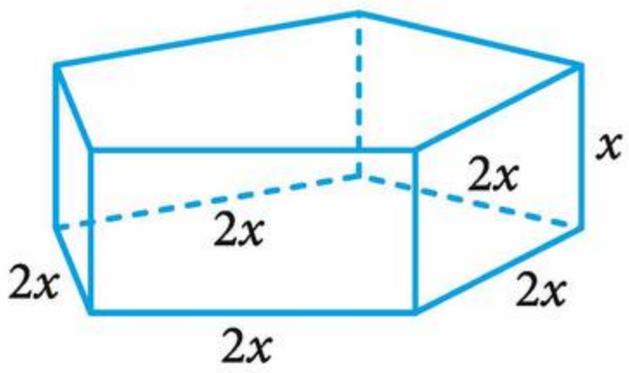
graniastosłup prawidłowy pięciokątny

Przykład 2

E

Szkielet graniastosłupa prawidłowego pięciokątnego, w którym krawędź podstawy jest dwa razy dłuższa od krawędzi bocznej, wykonano z kawałka drutu długości 75 cm. Oblicz długość krawędzi bocznej i długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

Wykonajmy rysunek pomocniczy. Graniastosłup jest prawidłowy, czyli wszystkie krawędzie podstawy są równe. Literą x oznaczmy długość krawędzi bocznej. Wobec tego długość krawędzi podstawy wynosi $2x$.



Zapiszmy równanie: $5 \cdot x + 10 \cdot (2x) = 75$.

liczba krawędzi bocznych — liczba krawędzi podstaw

Zatem $25x = 75$, stąd $x = 3$ [cm].

Odp. W tym graniastosłupie krawędź boczna ma długość 3 cm, a krawędź podstawy 6 cm.

Ćwiczenie 2

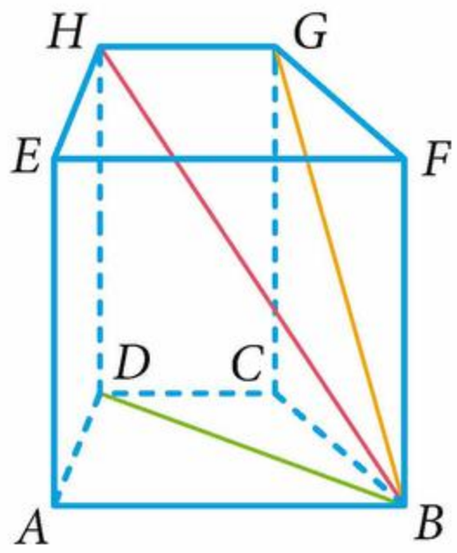
Szkielet graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego krawędź podstawy jest trzy razy dłuższa od krawędzi bocznej, wykonano z kawałka drutu długości 147 cm. Oblicz długość krawędzi bocznej tego graniastosłupa.

Odcinki w graniastosłupach

Dowolny odcinek, który łączy dwa wierzchołki graniastosłupa i nie zawiera się w żadnej z jego ścian, nazywamy **przekątną graniastosłupa** (zauważ, że przekątnymi graniastosłupa **nie są** jego krawędzie, przekątne podstaw ani przekątne ścian bocznych).

Na rysunku pokazany jest graniastosłup prosty, którego podstawą jest pewien czworokąt. Poszczególnymi kolorami oznaczono:

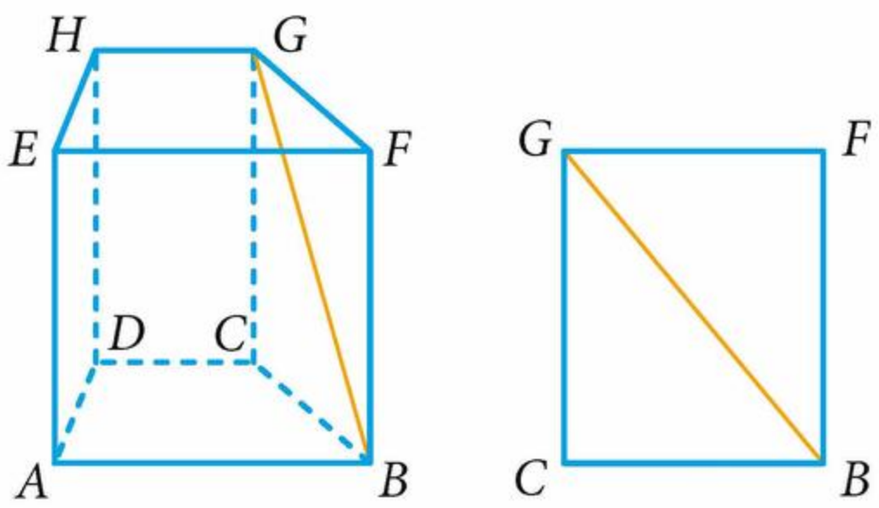
- przekątną graniastosłupa (odcinek BH),
- przekątną podstawy graniastosłupa (odcinek BD),
- przekątną ściany bocznej graniastosłupa (odcinek BG).



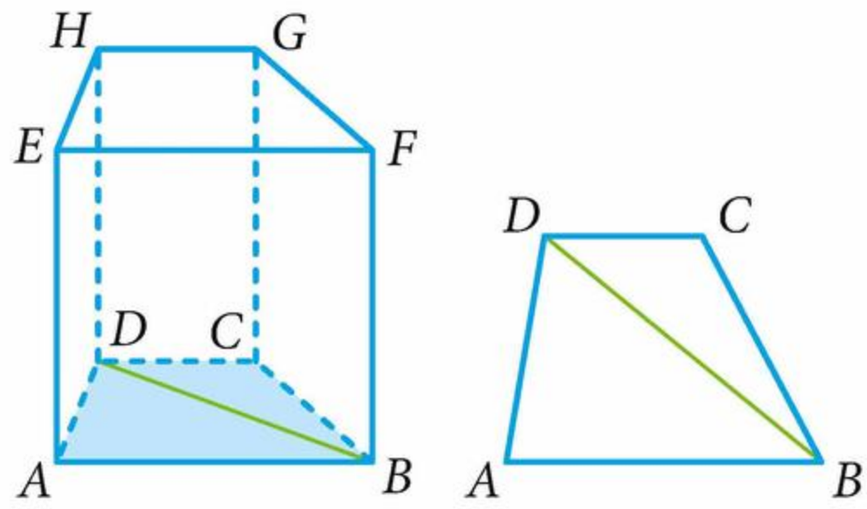
graniastosłup prosty

Zastanówmy się, jak wyglądają te przekątne w rzeczywistości.

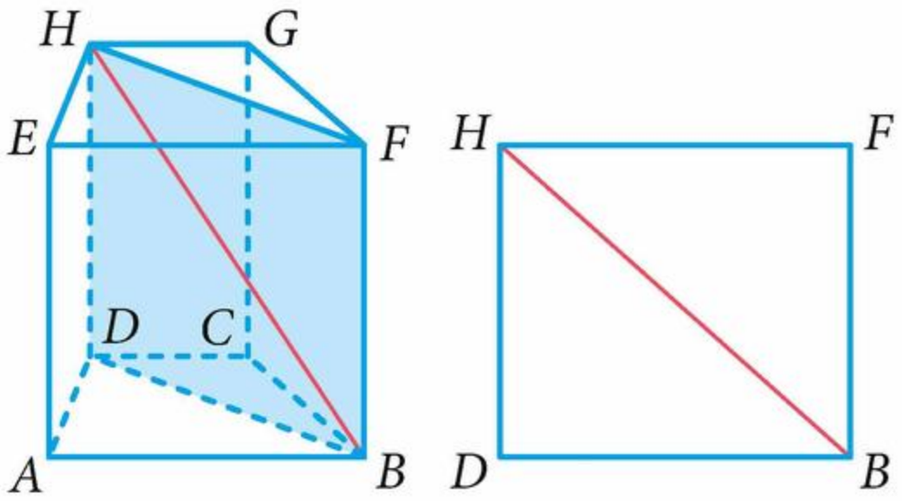
Odcinek BG jest **przekątną ściany bocznej graniastosłupa**, czyli prostokąta $BCGF$.



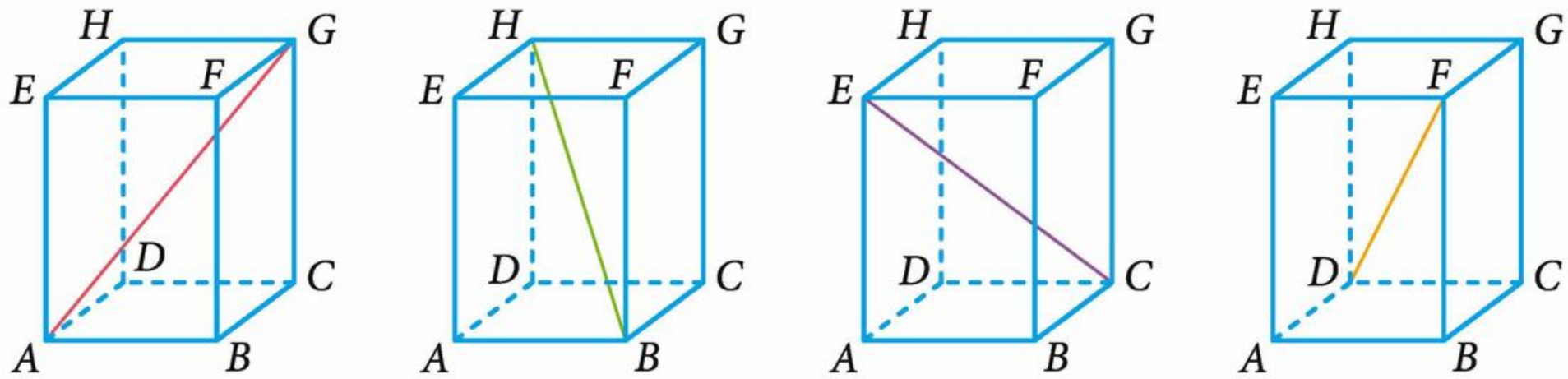
Odcinek BD jest **przekątną podstawy graniastosłupa**, czyli czworokąta $ABCD$.



Odcinek BH jest **przekątną prostokąta** $BDHF$ (zauważ, że nie jest on ścianą graniastosłupa, tylko leży wewnątrz bryły).



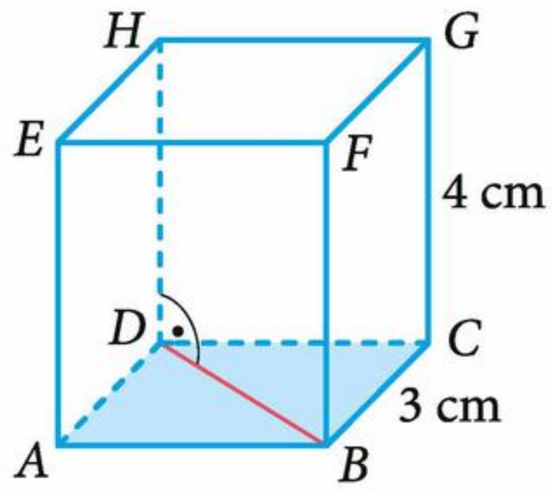
Zwróć uwagę, że graniastosłup czworokątny ma cztery przekątne: z każdego wierzchołka jednej podstawy wychodzi jedna przekątna graniastosłupa. W graniastosłupie poniżej są to odcinki AG, BH, CE i DF.

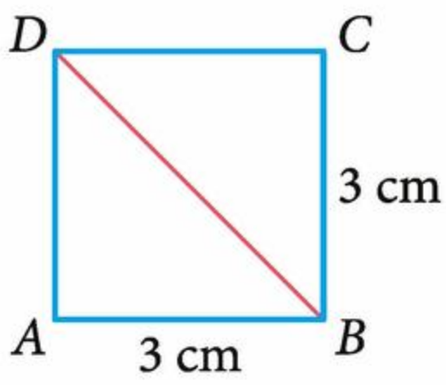


Przykład 3

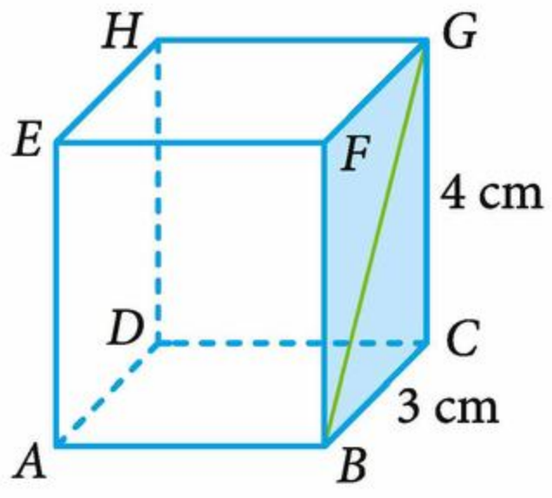
Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 3 cm, a jego krawędź boczna – 4 cm. Oblicz długości: przekątnej podstawy i przekątnej ściany bocznej tego graniastosłupa.

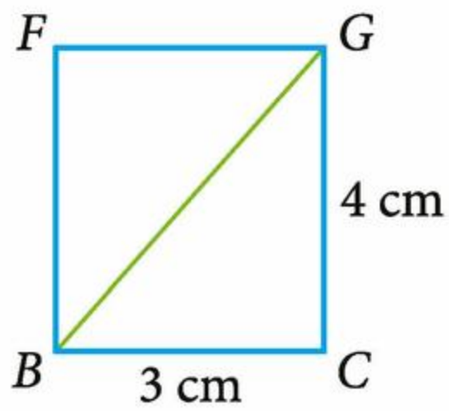
Rysujemy graniastosłup i zaznaczamy szukane przekątne. Następnie rysujemy odpowiednie wielokąty zawierające szukane przekątne.





Przekątna podstawy $ABCD$ to przekątna kwadratu o boku 3 cm, więc $BD = 3\sqrt{2}$ cm.





Przekątna ściany bocznej $BCGF$ to przekątna prostokąta o bokach 3 cm i 4 cm. Jej długość obliczamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego BCG:
$BG^2 = BC^2 + CG^2 = 3^2 + 4^2 = 25$.
Stąd $BG = 5$ cm.

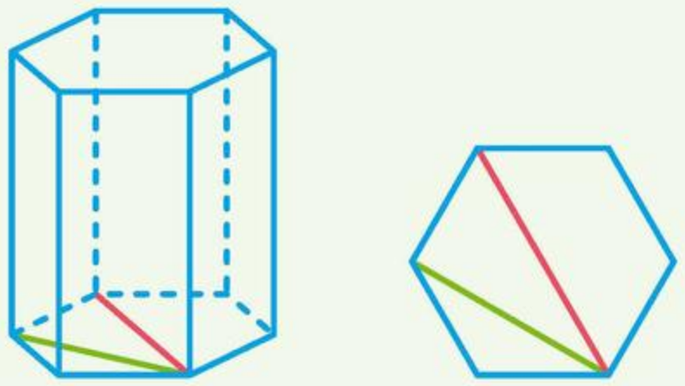
Odp. Długość przekątnej podstawy jest równa $3\sqrt{2}$ cm, a długość przekątnej ściany bocznej wynosi 5 cm.

Ćwiczenie 3

Oblicz długość przekątnej ściany sześcianu o krawędzi 8 cm.

Dobra rada

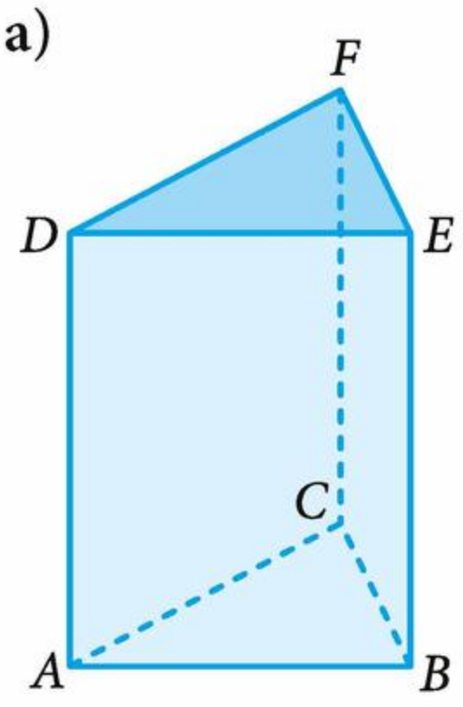
Kiedy rozwiązujesz trudniejsze zadania dotyczące brył, rysuj zarówno całą bryłę, jak i wielokąty zawierające dane i szukane odcinki.



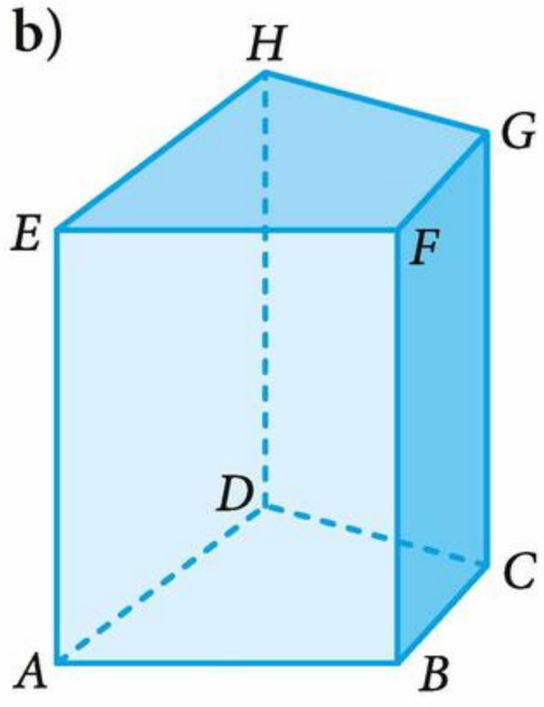
Zadania

1. Na rysunku przedstawiono graniastosłup prosty. Wskaż w tej bryle trzy pary krawędzi równoległych i trzy pary krawędzi prostopadłych.

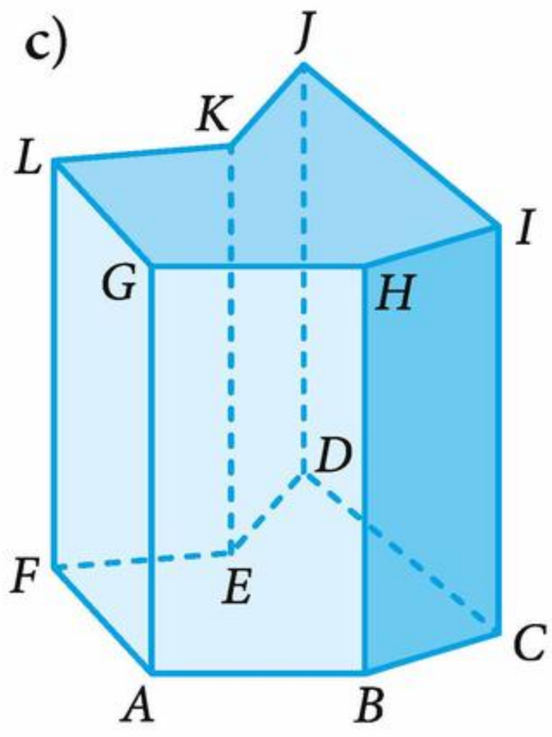
a)



b)



c)



2. Ile wierzchołków, krawędzi i ścian ma graniastosłup:

a) ośmiokątny, **b)** dwudziestokątny?

3. Ile wierzchołków, krawędzi i ścian ma graniastosłup, którego podstawą jest wielokąt o n bokach?

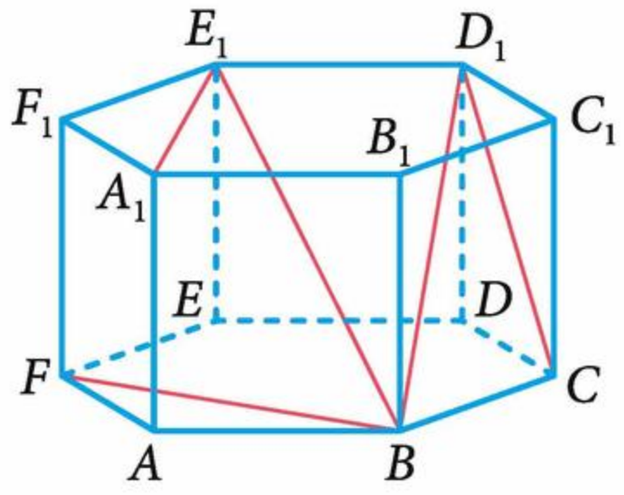
4. Czy w graniastosłupie o wysokości 10 cm krawędź boczna może mieć długość:

a) 9 cm, **b)** 10 cm, **c)** 11 cm?

E **5.** Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 4 cm, a jego krawędź boczna 5 cm. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa.

6. Krawędź boczna graniastosłupa prawidłowego jest dwukrotnie dłuższa od krawędzi jego podstawy. Szkielet tego graniastosłupa wykonano z kawałka drutu długości 192 cm. Oblicz długość krawędzi bocznej tego graniastosłupa, jeśli wiadomo, że ma on osiem ścian bocznych.

7. Wśród zaznaczonych odcinków w graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym wskaż przekątne:
a) ściany bocznej, **b)** podstawy, **c)** graniastosłupa.



8. Naszkicuj graniastosłup pięciokątny. Wybierz jeden jego wierzchołek i narysuj przekątne graniastosłupa wychodzące z tego wierzchołka. Ile przekątnych ma graniastosłup pięciokątny?

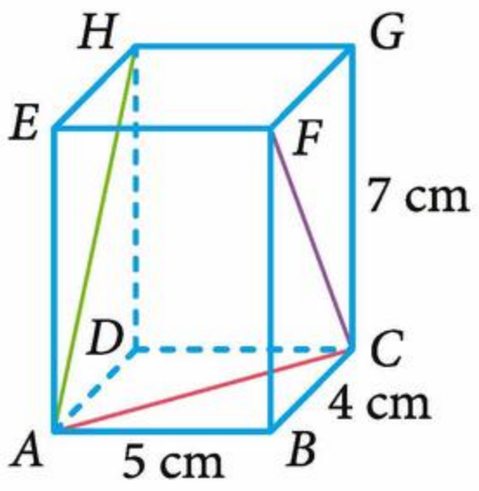
9. W pewnym graniastosłupie wszystkie krawędzie są tej samej długości. W każdym wierzchołku wychodzące z niego krawędzie tworzą parami trzy kąty: dwa kąty proste i kąt $120°$. Nazwij ten graniastosłup.

E **10.** Osiem krawędzi klatki dla ptaków (o kształcie pokazanym na ilustracji) wykonano z aluminiowego niebieskiego kątownika o łącznej długości 5,4 m. Jedna ze ścian bocznych klatki jest kwadratem, a stosunek długości boków drugiej z nich jest równy $2 : 3$. Podaj wymiary klatki.



11. W pewnym graniastosłupie prawidłowym każda krawędź boczna jest równoległa do 11 innych krawędzi. Do ilu innych krawędzi jest równoległa każda krawędź podstawy tego graniastosłupa?

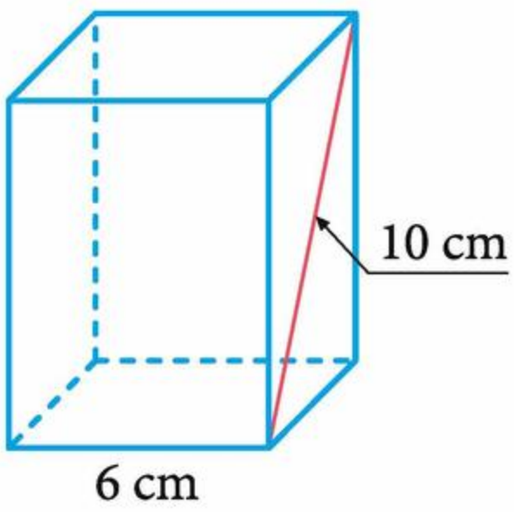
12. Oblicz długości wszystkich odcinków zaznaczonych kolorami w prostopadłościanie narysowanym obok.



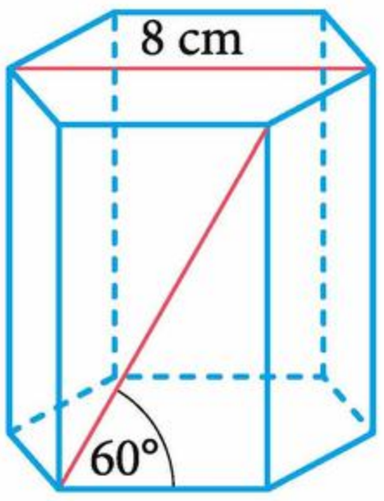
:D **13.** Uzasadnij, że graniastosłup trójkątny nie ma przekątnych.

14. Oblicz wysokość graniastosłupa prawidłowego przedstawionego na rysunku.

a)



b)



15. **a)** Ile wierzchołków ma graniastosłup, w którym liczba ścian jest o 20 mniejsza niż liczba krawędzi?
b) Ile krawędzi ma graniastosłup, w którym liczba ścian jest o 20 mniejsza niż liczba wierzchołków?

16. Wyznacz sumę długości wszystkich krawędzi:

a) graniastosłupa prawidłowego jedenastokątnego, w którym krawędź podstawy ma długość a cm, a krawędź boczna jest od niej dwa razy dłuższa,

b) graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, w którym krawędź podstawy ma długość b cm, a krawędź boczna jest od niej o 2 cm dłuższa.

17. Na rysunku obok zaznaczono trzy przekątne graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego.

a) Ile wszystkich przekątnych ma ten graniastosłup?

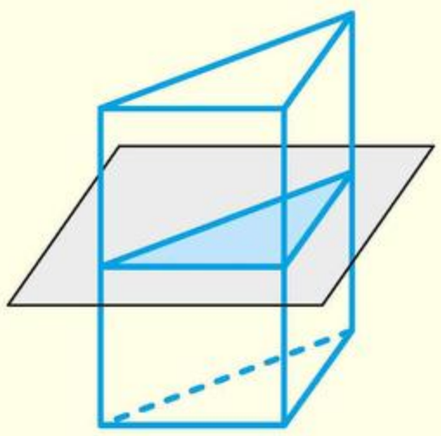
b) Czy wszystkie przekątne tego graniastosłupa mają tę samą długość? Odpowiedź uzasadnij.



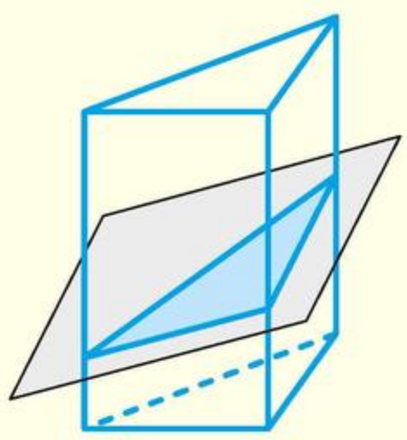
Dla dociekliwych

Wyobraźmy sobie, że bryłę wyciętą np. z pianki montażowej albo z ziemniaka kroimy prostym cięciem noża na dwie części. Zanim te części rozsuniemy, stykają się one ze sobą ścianami, wzdłuż których przesuwał się nóż. Kształt takiej ściany to **przekrój bryły**.

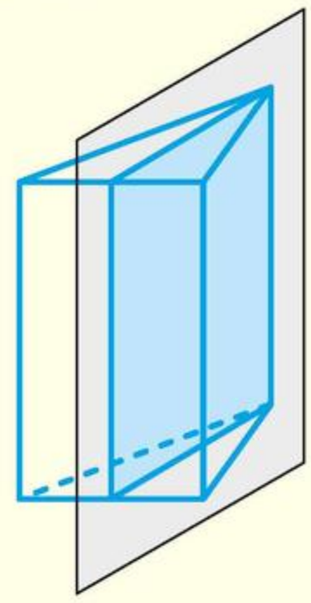
Oto trzy przykładowe przekroje graniastosłupa trójkątnego prawidłowego.



Płaszczyzna przekroju jest równoległa do podstawy.



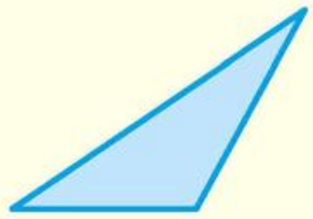
Płaszczyzna przekroju jest położona ukośnie.



Płaszczyzna przekroju jest prostopadła do podstawy.



Przekrój jest trójkątem równobocznym.



Przekrój jest trójkątem różnobocznym.



Przekrój jest prostokątem.

Zastanówmy się, jakie mogą być przekroje sześcianu.

1. Narysuj sześcian i zaznacz na rysunku taki jego przekrój, który jest kwadratem. Jaka jest długość boku tego kwadratu, jeśli krawędź sześcianu to 1?

2. Narysuj sześcian o krawędzi 1 i zaznacz na rysunku taki jego przekrój, który jest:
a) prostokątem o bokach 1 i $\sqrt{2}$,
b) prostokątem innym niż prostokąt z podpunktu a),
c) trapezem równoramiennym o dłuższej podstawie $\sqrt{2}$,
d) trójkątem równobocznym o boku $\sqrt{2}$,
e) trójkątem równobocznym innym niż w podpunkcie d),
f) trójkątem równoramiennym (ale nie równobocznym).

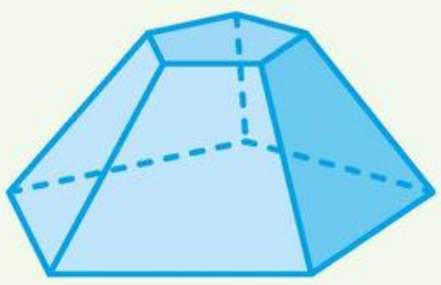
3. Narysuj sześcian. Wybierz dwa przeciwległe wierzchołki (czyli wierzchołki leżące na końcach przekątnej sześcianu). Przekreśl wszystkie krawędzie wychodzące z tych dwóch wierzchołków. Zaznacz środki pozostałych krawędzi. Wyobraź sobie przekrój przechodzący przez zaznaczone punkty. Jaka to figura?

4. Czy przekrój sześcianu może być pięciokątem?

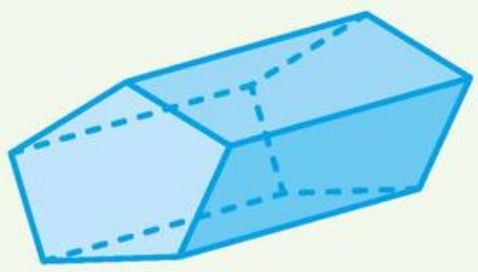
Czy już umiem?

I. Tylko jedna z brył A–D jest graniastosłupem. Która? Jakim wielokątem jest jej podstawa? Podaj liczbę ścian, krawędzi i wierzchołków tego graniastosłupa.

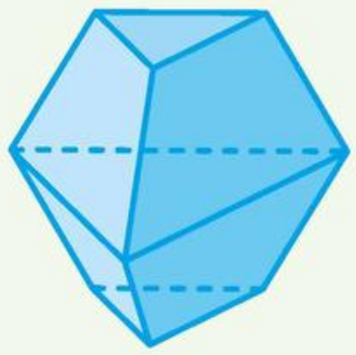
A.



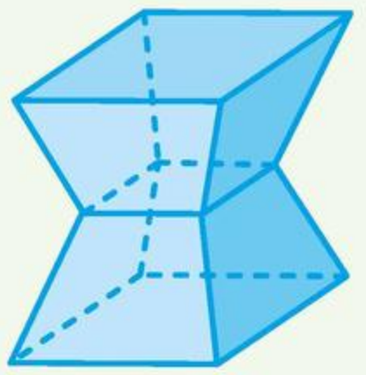
B.



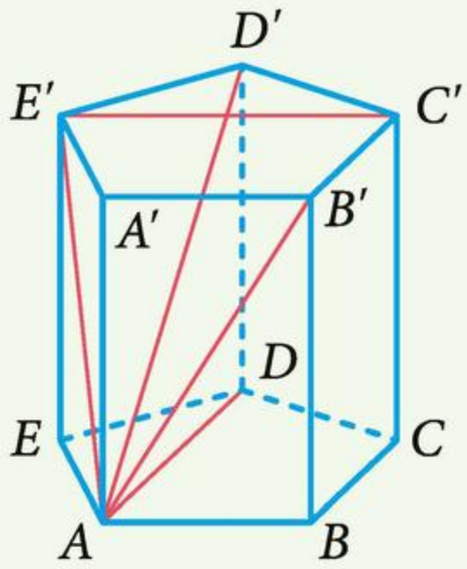
C.



D.



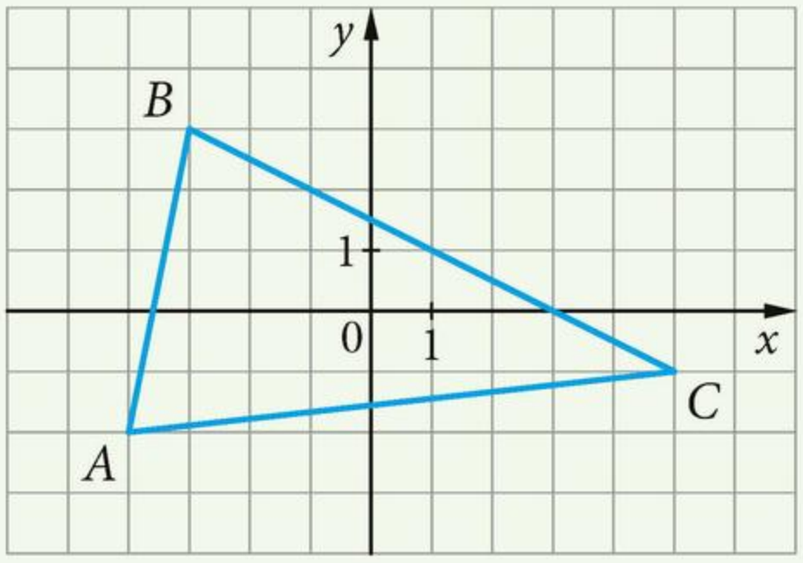
II. Wśród odcinków zaznaczonych na rysunku obok wskaż: przekątne podstaw, przekątne ścian bocznych, przekątne graniastosłupa.



III. Który wielokąt jest podstawą graniastosłupa o 24 krawędziach?

A. sześciokąt
B. ośmiokąt
C. dwunastokąt
D. osiemnastokąt

IV. W układzie współrzędnych narysowano trójkąt ABC.
a) Oblicz długość odcinka AD, w którym punkt D jest środkiem boku BC.
b) Czy punkt o współrzędnych $(-3, 1)$ leży wewnątrz tego trójkąta?



2 Objętość graniastosłupa

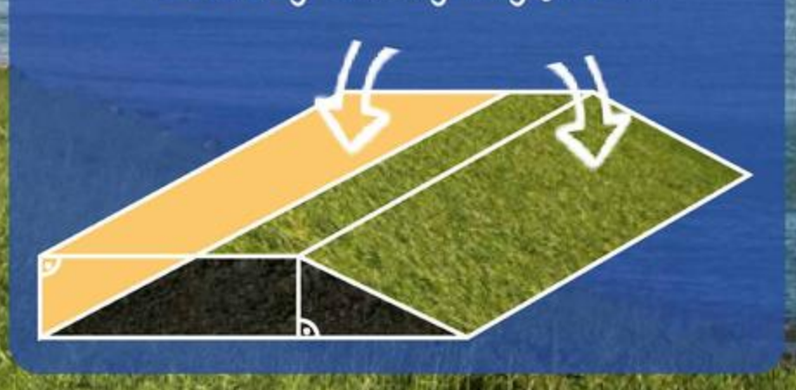
Na dobry początek

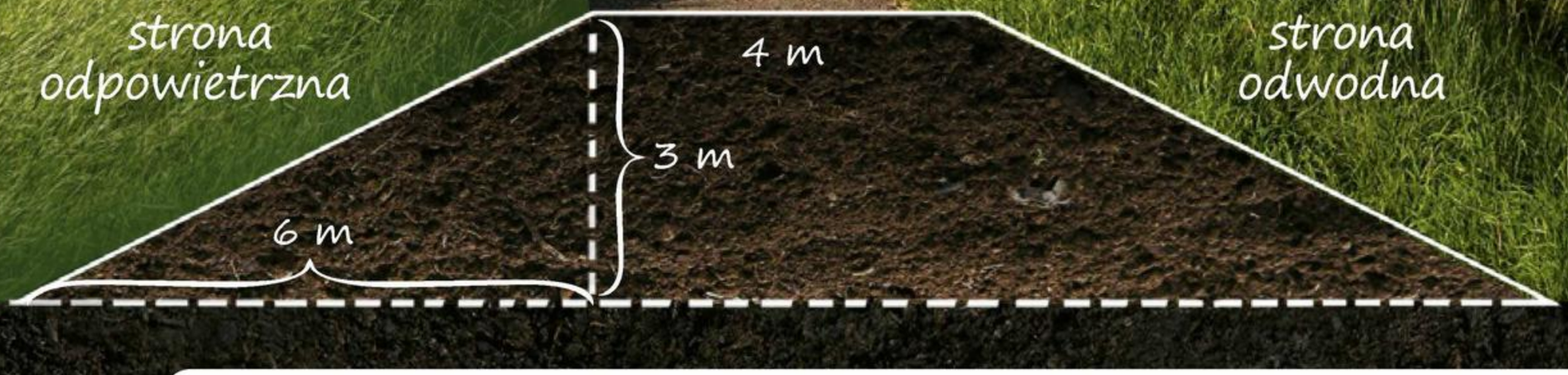
Szkody spowodowane przez powódź mogą być olbrzymie, dlatego tak ważna jest ochrona przeciwpowodziowa. Jednym z jej podstawowych elementów są wały przeciwpowodziowe.



Wał przeciwpowodziowy często ma w przekroju kształt trapezu równoramiennego.

Na poniższym schemacie pokazano, jak z graniastosłupa o podstawie w kształcie trapezu równoramiennego otrzymać prostopadłościan o takiej samej objętości.

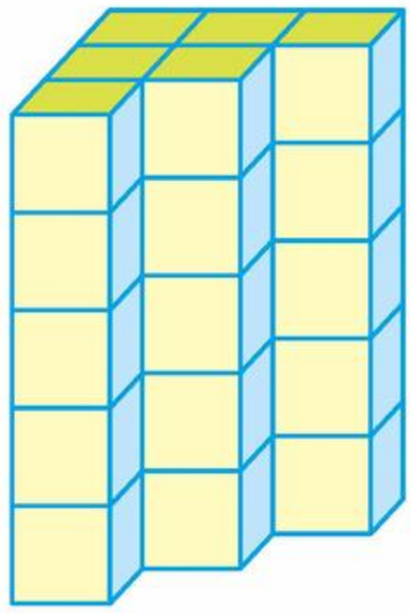




Pytania i polecenia

- Wykorzystaj powyższy schemat i odpowiedz, ile metrów sześciennych piasku potrzeba do usypania 1 km wału, którego przekrojem jest trapez równoramienny o wymiarach podanych na rysunku.
- Ile ciężarówek piasku należy dostarczyć, aby wybudować 1 km tego wału, jeśli jedna ciężarówka zabiera jednorazowo 8 m^3 piasku?
- Jaką długość miałby wał usypany z piasku przywiezionego jedną taką ciężarówką?

Zasadę, która pozwala obliczyć objętość dowolnego graniastosłupa, pokazuje następujący rysunek.



Przedstawiono na nim graniastosłup ułożony z kostek sześciennych o objętości 1 cm^3 każda.

Liczba klocków w warstwie: 6 Pole podstawy: 6 cm^2
Liczba warstw: 5 Wysokość bryły: 5 cm

Objętość tego graniastosłupa (odpowiadająca liczbie kostek tworzących tę bryłę) jest równa:

$V = 6 \cdot 5 = 30\ [cm^3]$.

Objętość graniastosłupa

Aby obliczyć **objętość** V graniastosłupa, należy pomnożyć pole jego podstawy przez jego wysokość.

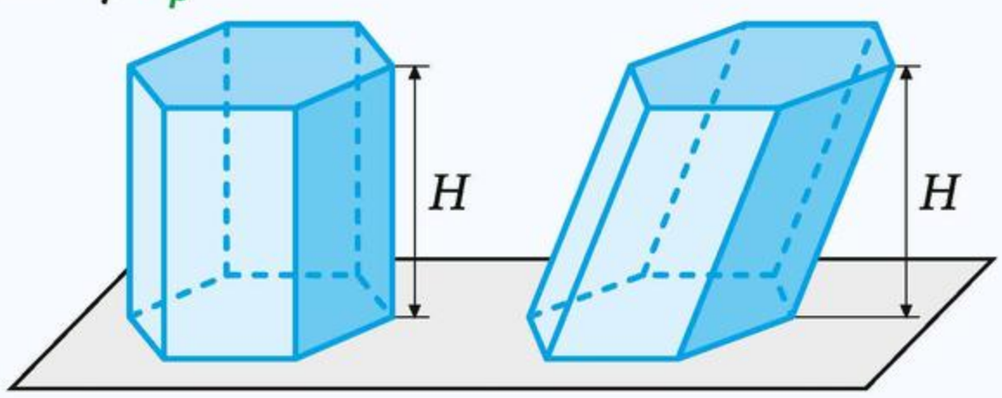
Zapamiętaj

Objętość V graniastosłupa o polu podstawy P_p i wysokości H wyraża się wzorem:

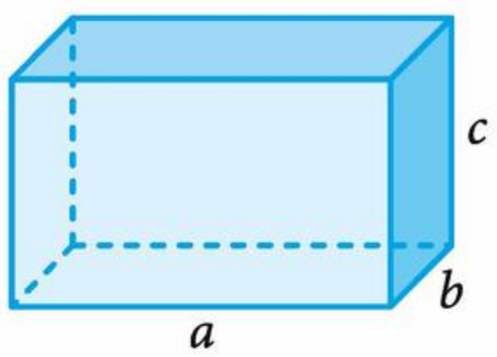
$$V = P_p \cdot H$$

pole podstawy graniastosłupa

wysokość graniastosłupa

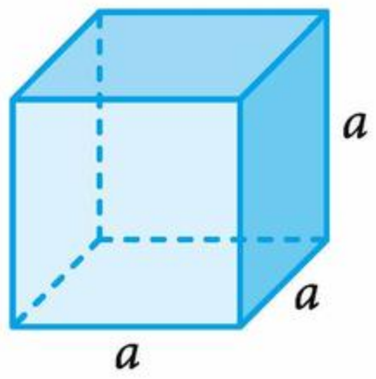


Zauważ, że wzory na objętość prostopadłościanu i sześcianu są szczególnymi przypadkami powyższego wzoru.



$V = a \cdot b \cdot c$

pole podstawy wysokość



$V = a^2 \cdot a = a^3$

pole podstawy wysokość

Zwróć uwagę, że aby obliczyć objętość graniastosłupa, należy wszystkie jego wymiary wyrazić w tych samych jednostkach.

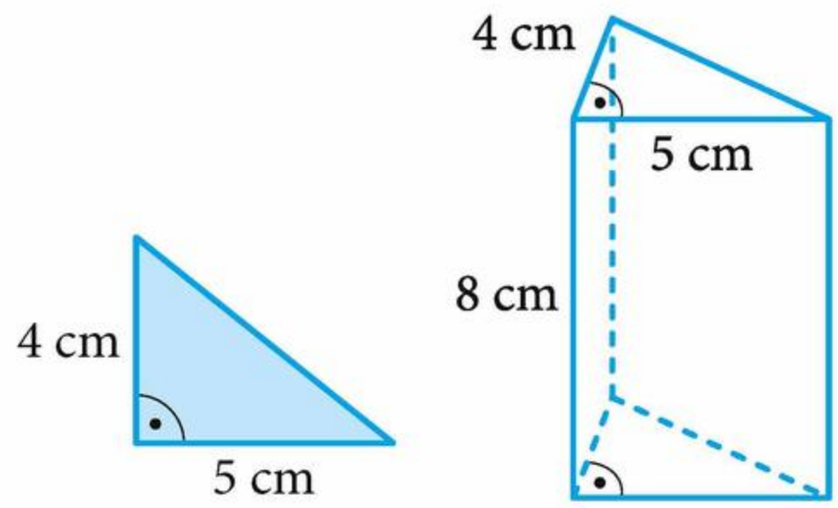
Dobra rada

Jeśli masz wyrazić objętość bryły np. w litrach, czyli w decymetrach sześciennych, to najpierw przelicz wymiary bryły na decymetry, a dopiero potem obliczaj objętość.

Przykład 1

Oblicz objętość graniastosłupa prostego, którego podstawą jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 5 cm i 4 cm, a wysokość H wynosi 8 cm.

Wykonujemy rysunek bryły i jej podstawy.



Obliczamy pole podstawy graniastosłupa:

$P_p = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$ [cm^2].

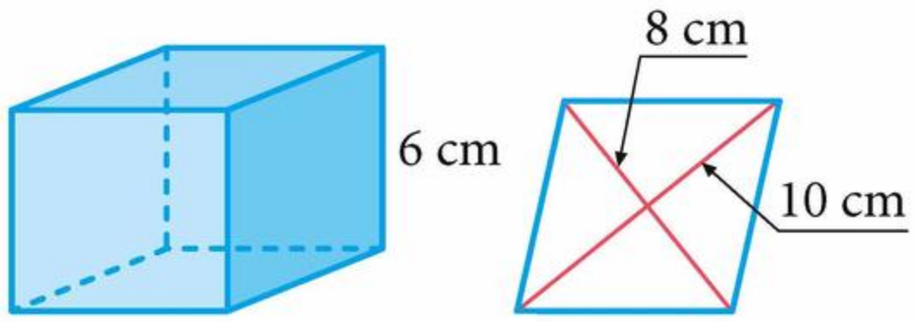
Wysokość H graniastosłupa jest równa 8 cm, jego objętość wynosi więc:

$V = P_p \cdot H = 10 \cdot 8 = 80$ [cm^3].

Odp. Objętość graniastosłupa jest równa 80 cm^3.

Ćwiczenie 1

Oblicz objętość graniastosłupa, którego podstawa jest rombem o przekątnych długości 8 cm i 10 cm, a wysokość H wynosi 6 cm.



Przykład 2

Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy równej 4 cm i wysokości $H = 5$ cm.

Podstawa graniastosłupa jest trójkątem równobocznym o boku 4 cm, więc:

$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$ [cm^2].

Wysokość graniastosłupa: $H = 5$ cm.
Zatem objętość tego graniastosłupa:

$V = P_p \cdot H = 4\sqrt{3} \cdot 5 = 20\sqrt{3}$ [cm^3].

Odp. Objętość graniastosłupa wynosi $20\sqrt{3}$ cm^3.

Pole trójkąta równobocznego o boku a: $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ćwiczenie 2

Dany jest graniastosłup prawidłowy o wszystkich krawędziach równych 6 cm. Oblicz objętość tego graniastosłupa, jeśli jego podstawą jest:

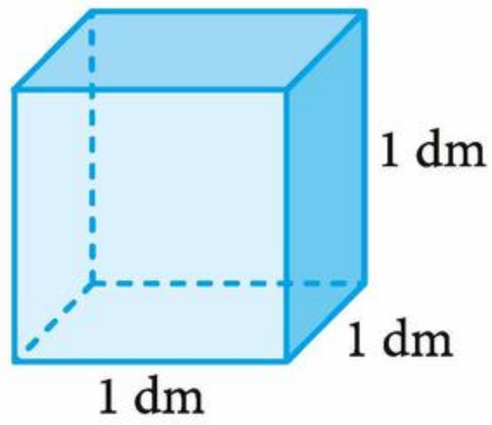
a) czworokąt, **b)** sześciokąt.

Jednostki objętości

Objętość, w zależności od potrzeb, można wyrażać w różnych jednostkach.

Przykład 3.1

Dany jest sześcian o objętości 1 dm^3. Wyraź jego objętość w centymetrach sześciennych.



$1\ dm^3 = 1\ dm \cdot 1\ dm \cdot 1\ dm =$
$= 10\ cm \cdot 10\ cm \cdot 10\ cm = 1000\ cm^3$

Przykład 3.2

Objętość równą 4 dm^3 wyraź w centymetrach sześciennych.

Sposób I

Wyobraźmy sobie prostopadłościan o objętości 4 dm^3, na przykład o wymiarach 4 dm × 1 dm × 1 dm, czyli 40 cm × 10 cm × 10 cm. Jego objętość jest równa:

$4\ dm^3 = 40\ cm \cdot 10\ cm \cdot 10\ cm = 4000\ cm^3$.

Sposób II

Korzystamy z wyniku z przykładu 3.1.

Skoro $1\ dm^3 = 1000\ cm^3$, to $4\ dm^3 = 4 \cdot 1\ dm^3 = 4 \cdot 1000\ cm^3 = 4000\ cm^3$.

W podobny sposób można przeliczać wszystkie jednostki sześcienne.

Ćwiczenie 3.1

Wyraź w centymetrach sześciennych.

a) 1 m^3 **b)** 1 mm^3 **c)** 16 dm^3 **d)** 0,3 m^3

Ćwiczenie 3.2

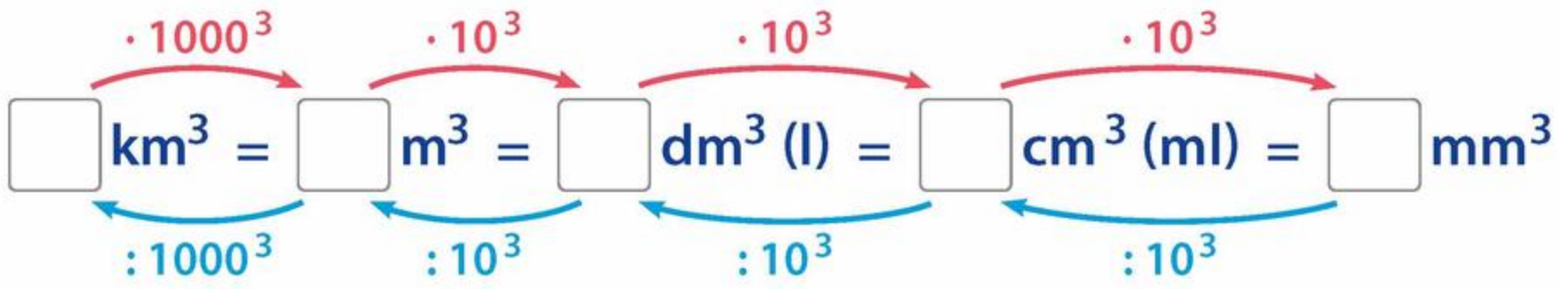
Wyraź w metrach sześciennych.

a) 1 km^3 **b)** 1 dm^3 **c)** 5 cm^3 **d)** 600 mm^3

Objętość płynów i pojemność naczyń często wyrażamy w litrach (l) lub mililitrach (ml).

1 l = 1 dm^3 **1 ml = 1 cm^3** **1 ml = 0,001 l**

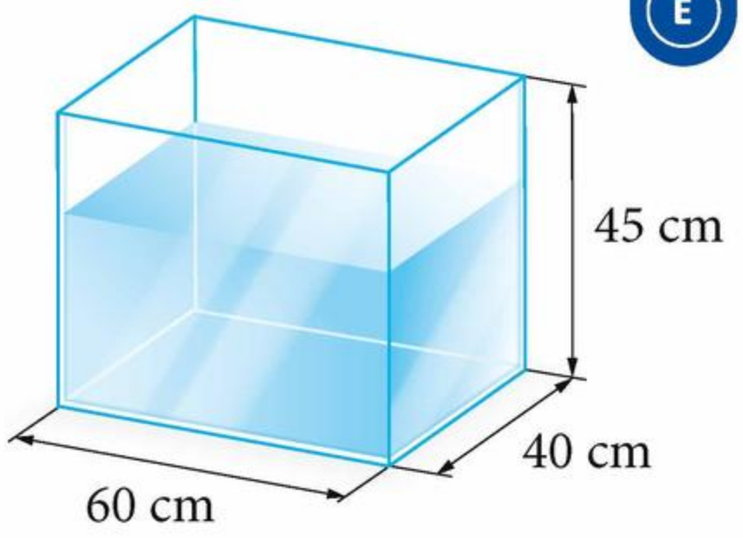
Na schemacie zilustrowano zamianę jednostek objętości.



Przykład 4

E

Prostopadłościenne akwarium ma wymiary 60 cm × 40 cm × 45 cm. Wlano do niego wodę do poziomu $\frac{2}{3}$ wysokości akwarium (rysunek obok). Ile litrów wody wlano?



Najpierw wymiary akwarium wyrażamy w dm, następnie obliczamy objętość wlanej wody w dm^3, czyli w litrach.

Wymiary akwarium to 6 dm × 4 dm × 4,5 dm.

$V = 6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 4{,}5\right) = 72\ [dm^3],\ \ 1\ \text{litr} = 1\ dm^3$

Odp. Do akwarium wlano 72 litry wody.

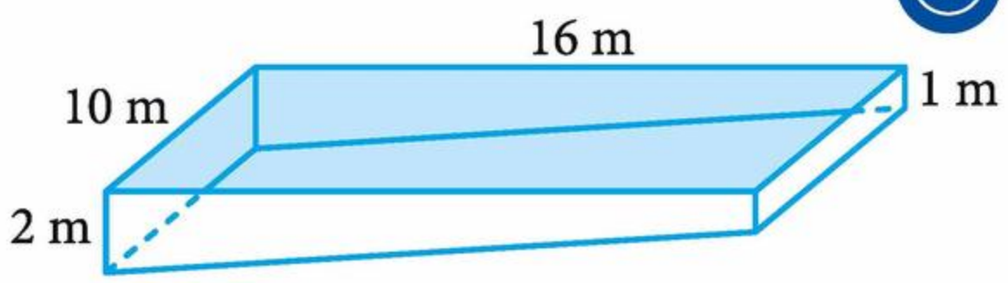
Ćwiczenie 4

Małe prostopadłościenne naczynie o wymiarach 5 cm × 6 cm × 4 cm wypełnione jest wodą. Ile wody mieści się w tym naczyniu? Odpowiedź podaj w mililitrach.

Przykład 5

E

Hotelowy basen o długości 16 m i szerokości 10 m ma płaskie dno nachylone tak, że głębokość basenu zmienia się od 1 metra w najpłytszym do 2 metrów w najgłębszym miejscu, jak pokazano na rysunku. Ile litrów wody potrzeba do napełnienia tego basenu? Ile wyniesie rachunek za wodę potrzebną do napełnienia basenu, jeżeli cena wody brutto (z 8% VAT) to 4,51 zł za $1\ m^3$?





Objętość wody w basenie to objętość graniastosłupa prostego, którego podstawą jest ściana boczna basenu, czyli trapez o podstawach 1 m i 2 m oraz wysokości 16 m.

Pole podstawy tego graniastosłupa: $P_p = \frac{(a+b)\cdot h}{2} = \frac{(1+2)\cdot 16}{2} = 24\ [m^2]$.

Wysokość graniastosłupa: $H = 10$ m.

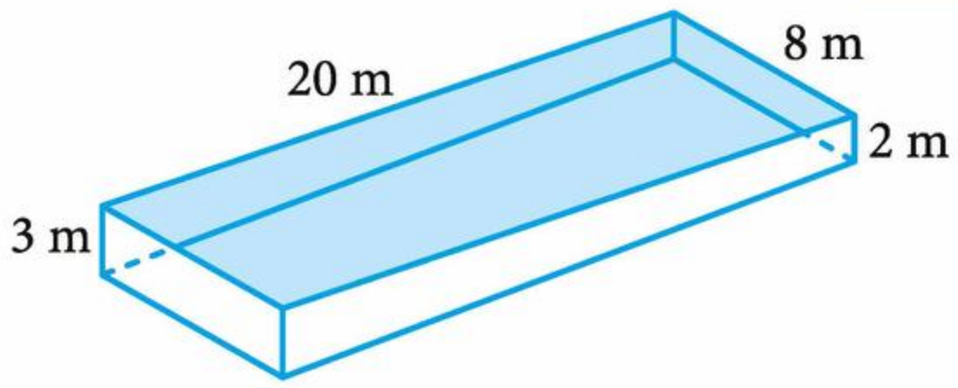
$V = P_p \cdot H = 24 \cdot 10 = 240\ [m^3] = 240\,000\ [l]$

Koszt wody potrzebnej do napełnienia basenu: $240 \cdot 4{,}51 = 1082{,}40$ [zł].

Odp. Do napełnienia basenu potrzeba 240 000 litrów wody, której koszt wynosi 1082,40 zł.

Ćwiczenie 5

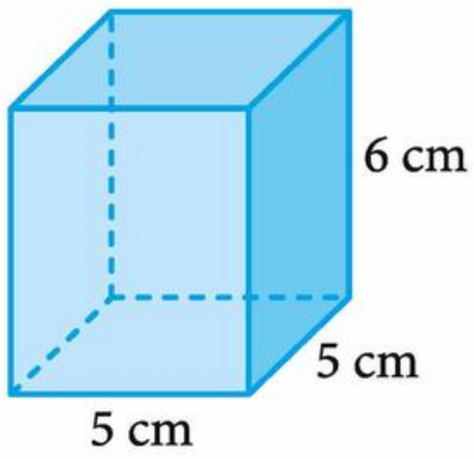
Oblicz, ile litrów wody potrzeba do napełnienia basenu, którego kształt i wymiary przedstawiono na rysunku obok.



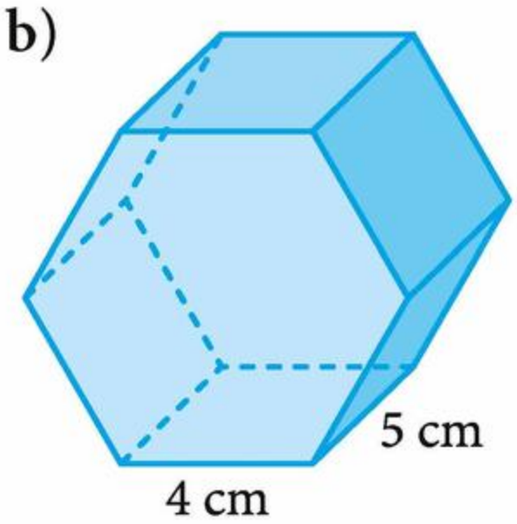
Zadania

1. Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego o wymiarach podanych na rysunku.

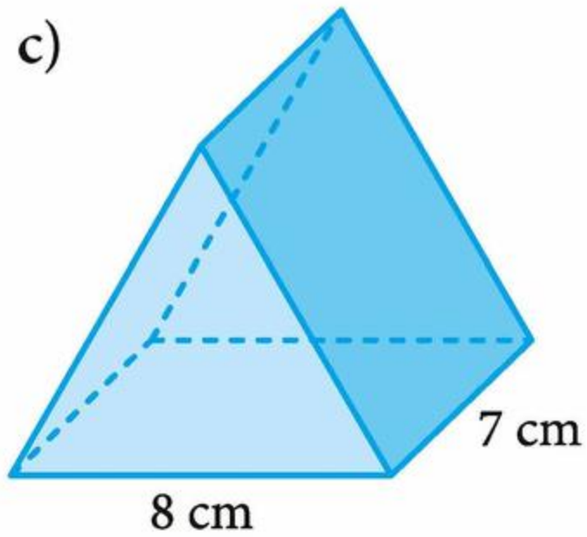
a)



b)



c)



2. Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego każda krawędź ma długość 6 cm.

3. Podstawa prostopadłościennego akwarium ma wymiary 70 cm × 50 cm, a jego wysokość wynosi 60 cm. Do akwarium wlano 140 litrów wody. Na jaką wysokość sięga woda w akwarium?

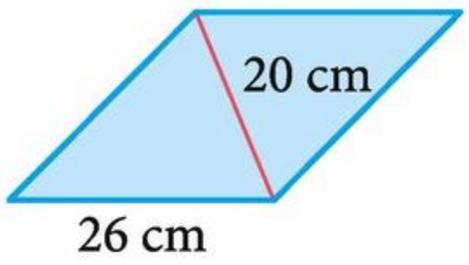
4. Z prostopadłościennego naczynia o wymiarach 4 cm × 5 cm × 6,5 cm w całości wypełnionego wodą wyparowało po pewnym czasie 20% wody. Ile wody zostało w naczyniu? Odpowiedź podaj w mililitrach.

E **5.** W ciągu tygodnia prostopadłościenny zbiornik o podstawie 3 m × 2 m i wysokości 80 cm, przeznaczony do zbierania deszczówki, został napełniony do połowy wysokości. Ile wody znajduje się obecnie w tym zbiorniku? Odpowiedź podaj w litrach.

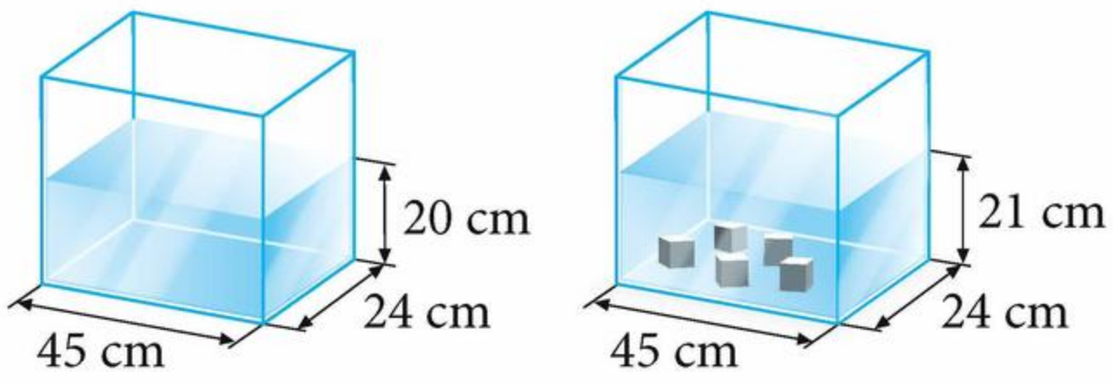
6. Graniastosłup prawidłowy czworokątny, w którym wysokość jest równa przekątnej podstawy, ma objętość $64\sqrt{2}$ cm^3. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

Wskazówka. Ułóż i rozwiąż odpowiednie równanie.

7. Na rysunku przedstawiono romb będący podstawą graniastosłupa pochyłego o wysokości 10 cm. Oblicz objętość tego graniastosłupa. Odpowiedź podaj w centymetrach sześciennych oraz w decymetrach sześciennych.



8. Do częściowo wypełnionego wodą akwarium w kształcie prostopadłościanu (rysunek obok) wrzucono pięć identycznych metalowych kostek sześciennych. Ile wynosi długość krawędzi jednej takiej kostki?



9. W tabeli podano taryfę opłat za wodę i ścieki obowiązującą w Gdańsku w 2020 r.

Taryfa	Cena netto	Cena brutto (z 8% VAT)
Woda [zł/m³]		
Gospodarstwa domowe	4,38 zł	4,73 zł
Ścieki [zł/m³]		
Gospodarstwa domowe	5,80 zł	6,26 zł



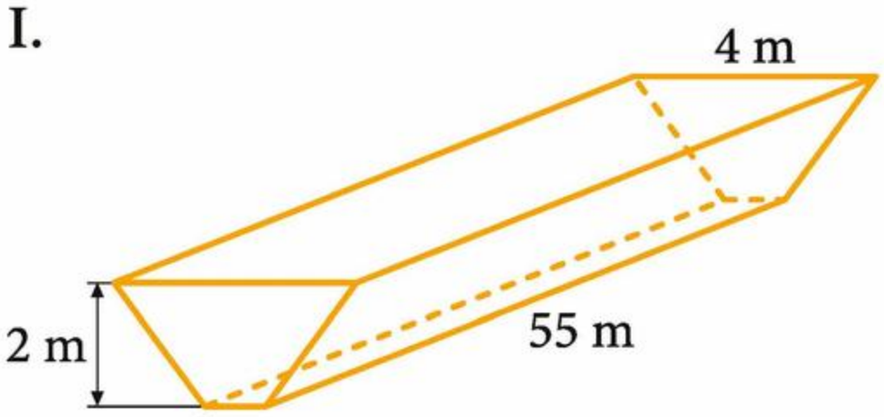
a) Miesięczny rachunek za zużytą wodę (bez opłaty za ścieki) wyniósł w pewnym gospodarstwie domowym 94 zł 60 gr (kwota brutto). Ile wody zużyto? Odpowiedź podaj w litrach.

b) Ile wyniósł rachunek za wodę i ścieki (kwota brutto), jeśli w pewnym miesiącu zużyto 15 tys. litrów wody? *Uwaga*. Przyjmuje się, że ilość odprowadzanych ścieków jest równa ilości zużytej wody.

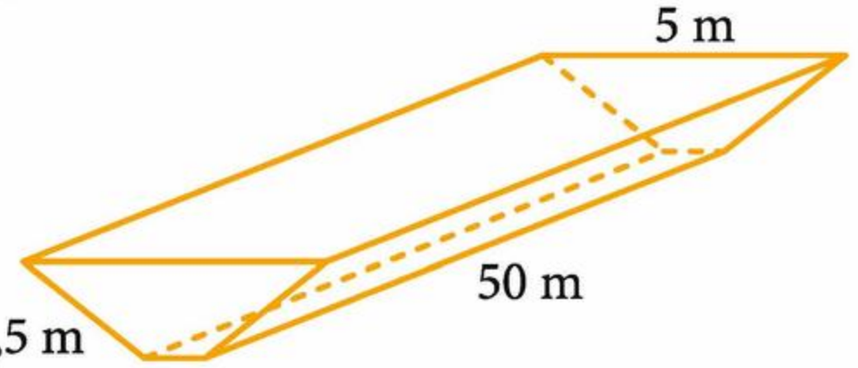
E **10.** Podczas prac melioracyjnych wykopano dwa fragmenty rowu o przekroju będącym trapezem równoramiennym. Wymiary każdego z nich pokazano na rysunku. W którym przypadku usunięto więcej ziemi?



I.



II.



11. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym wysokość jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Objętość tego graniastosłupa wynosi $32\sqrt{3}$ cm³. Oblicz długości jego krawędzi.

12. Oblicz objętość graniastosłupa prostego o wysokości 15 cm, którego podstawą jest trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej równej 12 cm i jednym kącie ostrym dwa razy większym od drugiego.

13. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o boku 6 cm i kącie ostrym 60°. Przekątna ściany bocznej tego graniastosłupa nachylona jest do krawędzi podstawy pod kątem 45°. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Dla dociekliwych

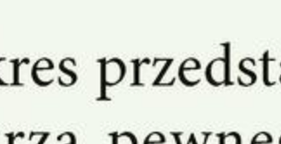
1. Jaki jest stosunek objętości graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego do objętości graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, jeżeli wiadomo, że wszystkie ich krawędzie mają jednakową długość?

2. Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego dłuższa przekątna ma długość $a\sqrt{2}$ i tworzy z dłuższą przekątną podstawy oraz wysokością bryły trójkąt prostokątny równoramienny.

Czy już umiem?

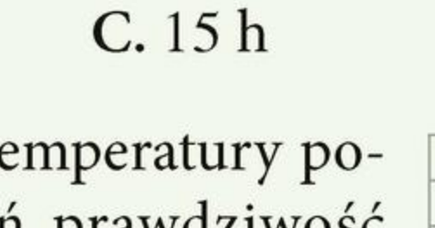
I. Oblicz objętość graniastosłupa prostego o wysokości 12 cm, którego podstawą jest dany wielokąt.

a)



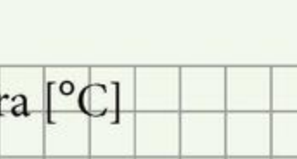
trójkąt równoboczny

b)



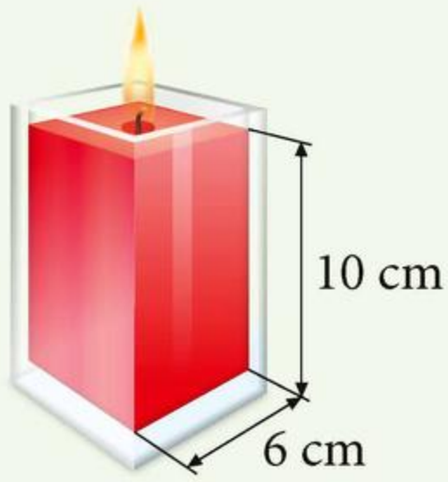
trójkąt równoramienny

c)



sześciokąt foremny

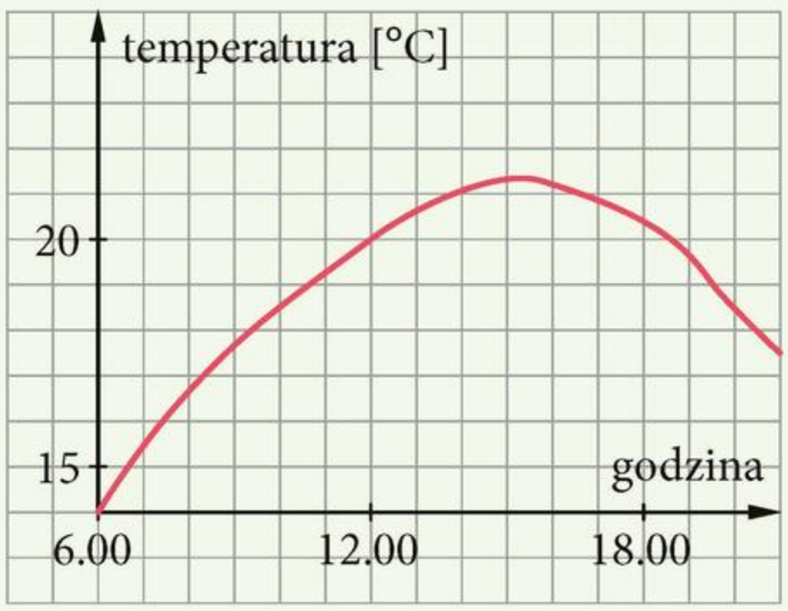
II. Ozdobna świeca w szklanym pojemniku w kształcie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma wysokość 10 cm i krawędź podstawy długości 6 cm. Przyjmij, że 1 cm^3 substancji, z której ta świeca jest wykonana, spala się w czasie 5 minut. Oblicz, ile czasu potrzeba, aby świeca spaliła się do połowy swojej wysokości.



A. 10 h **B.** 12 h **C.** 15 h **D.** 30 h

III. Wykres przedstawia zmiany temperatury powietrza pewnego dnia. Oceń prawdziwość podanych zdań.

1. Temperatura rosła od rana do godziny 17.00.
2. Najwyższa temperatura przekroczyła 21°C.
3. W samo południe temperatura wynosiła 20°C.

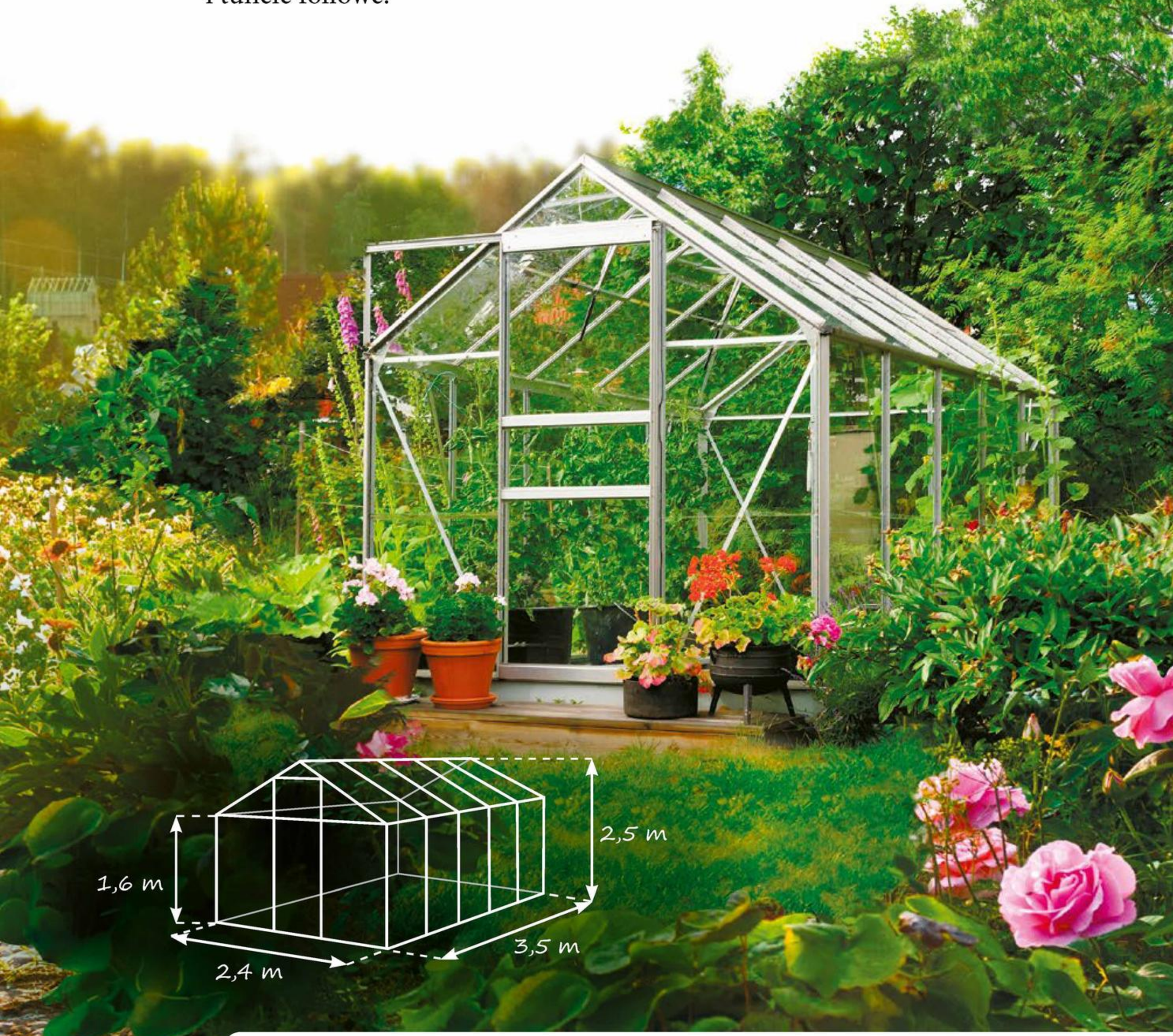


3

Pole powierzchni graniastosłupa

Na dobry początek

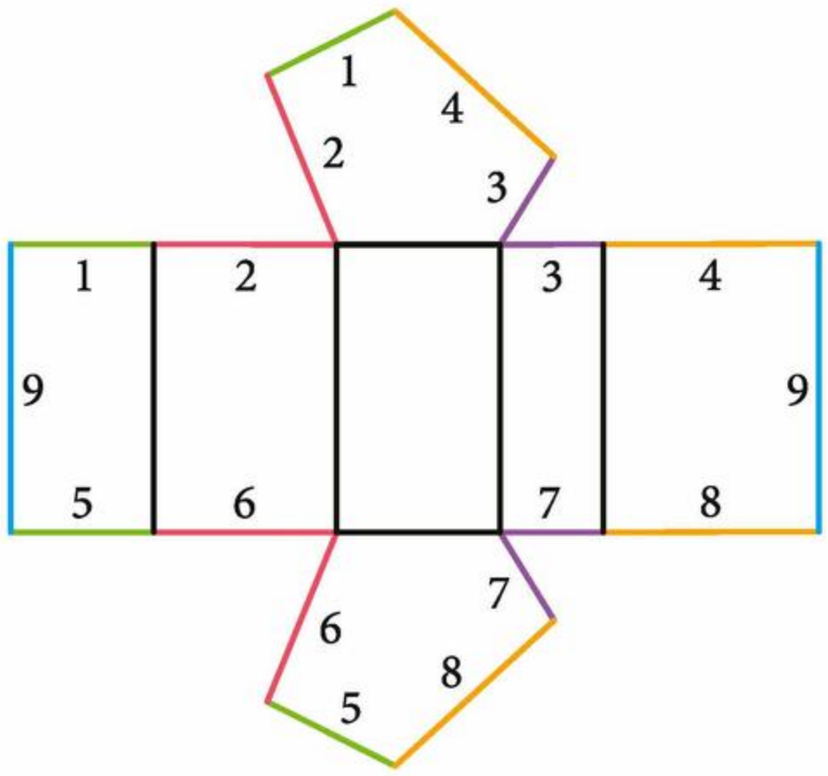
Nasz klimat jest bardzo kapryśny. Dlatego duża część warzyw (np. pomidorów) pochodzi z upraw szklarniowych. Popularnością cieszą się też małe przydomowe szklarnie i tunele foliowe.



Pytania i polecenia

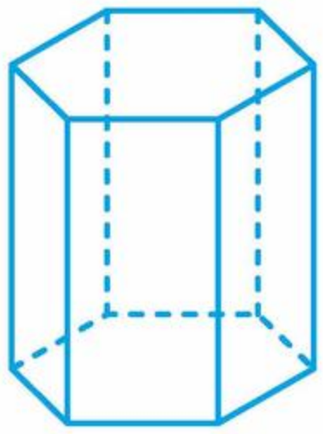
- Kształt jakiej bryły ma szklarnia pokazana na powyższym schemacie?
- Kształty jakich figur mają poszczególne ściany tej szklarni?
- Ile metrów kwadratowych szkła potrzeba na wykonanie dachu tej szklarni?

Do wykonania kartonowego modelu graniastosłupa potrzebna jest siatka tej bryły. Dla każdego graniastosłupa można narysować wiele różnych siatek. Jednym ze sposobów jest narysowanie ścian bocznych (w odpowiedniej kolejności), a następnie dorysowanie do jednej ze ścian bocznych dwóch wielokątów będących podstawami. Na rysunku obok jednakowymi cyframi zaznaczono krawędzie, które się łączą.

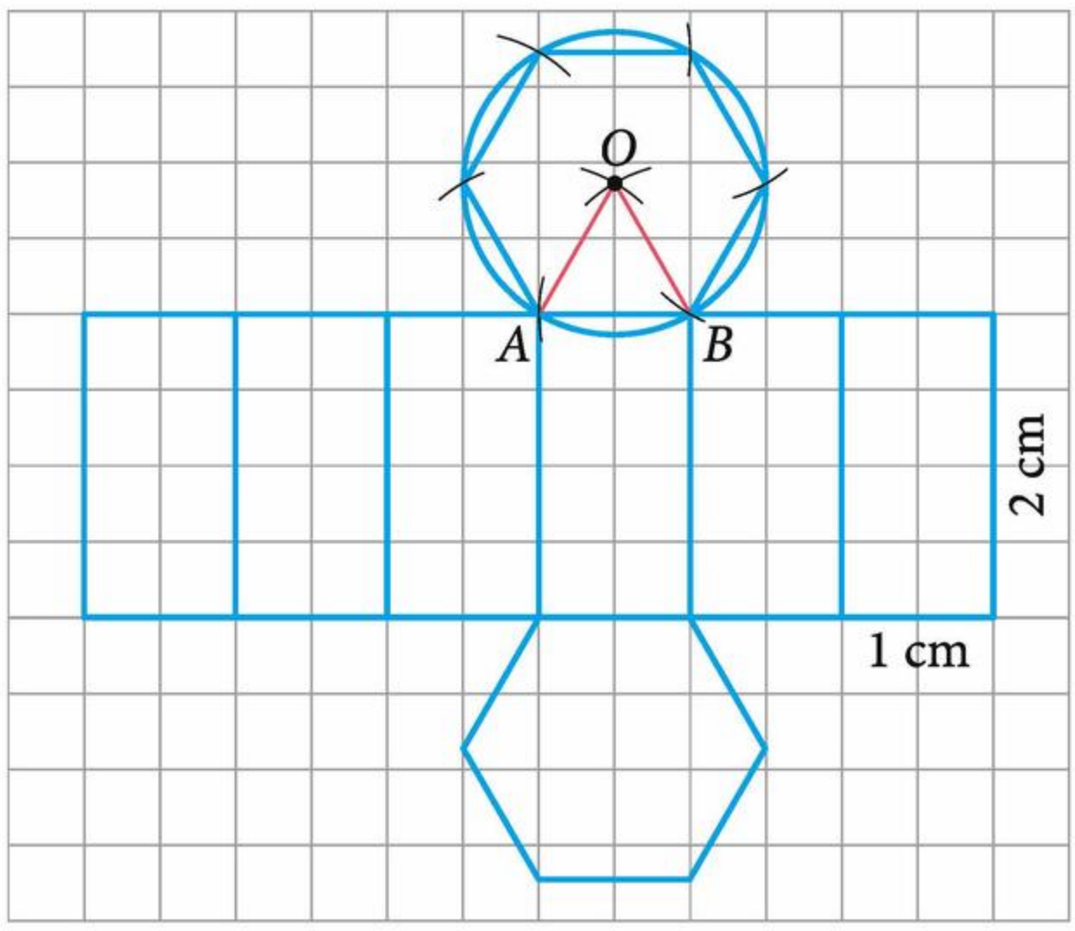


Przykład 1

Narysuj siatkę graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy równej 1 cm oraz krawędzi bocznej (wysokości) równej 2 cm.



Siatka ta składa się z dwóch sześciokątów foremnych odpowiadających podstawom graniastosłupa i sześciu przystających prostokątów stanowiących jego ściany boczne. Jej rysowanie można zacząć od ścian bocznych, do których dorysujemy podstawy. Każda z podstaw jest sześciokątem foremnym. Taki sześciokąt najłatwiej narysować, zaczynając od opisanego na nim okręgu. Aby znaleźć środek tego okręgu, rysujemy trójkąt równoboczny ABO.



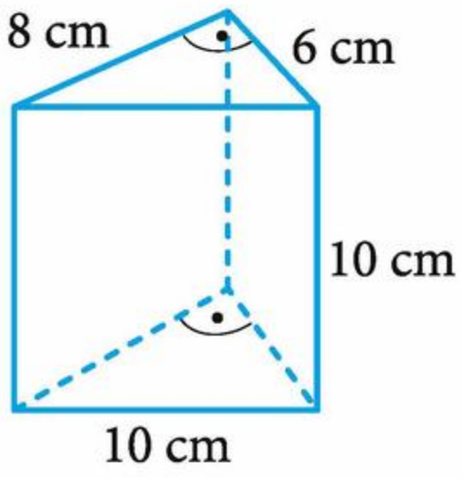
Ćwiczenie 1.1

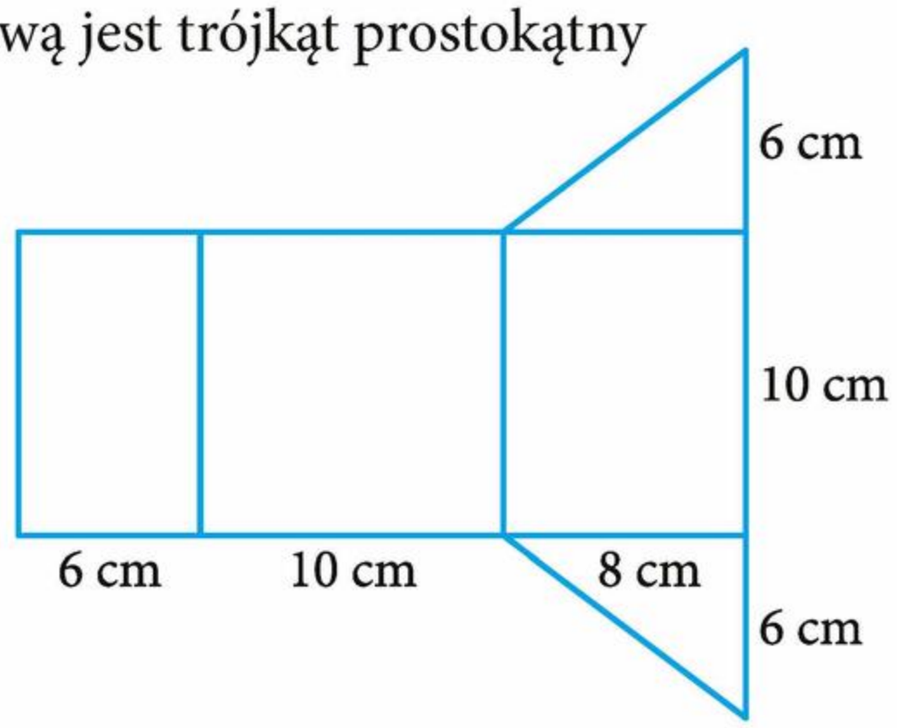
Narysuj siatkę graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy równej 3 cm i krawędzi bocznej równej 2 cm.

Ćwiczenie 1.2

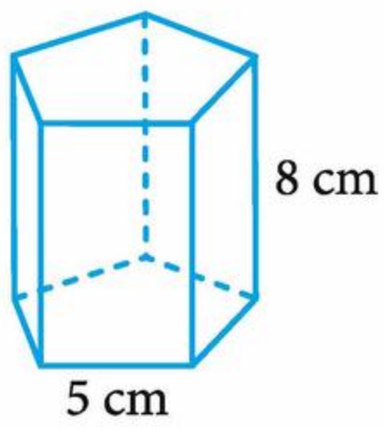
Poniżej przedstawiono rysunek graniastosłupa oraz jego siatkę w pewnej skali. Na kartonie formatu A3 narysuj siatkę tego graniastosłupa o wymiarach rzeczywistych (tam, gdzie to konieczne, wykorzystaj kątomierz). Dorysuj odpowiednie „skrzydełka" przy wybranych ścianach siatki, a następnie wytnij całość i sklej opisany model.

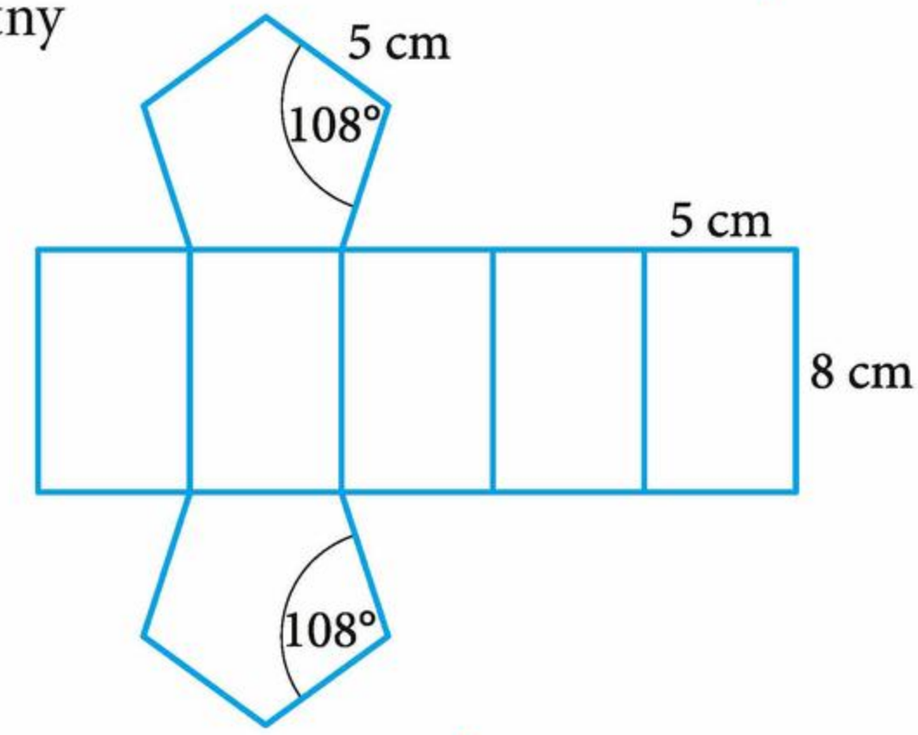
a) graniastosłup prosty, którego podstawą jest trójkąt prostokątny



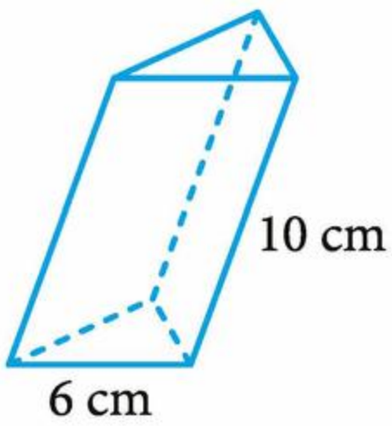


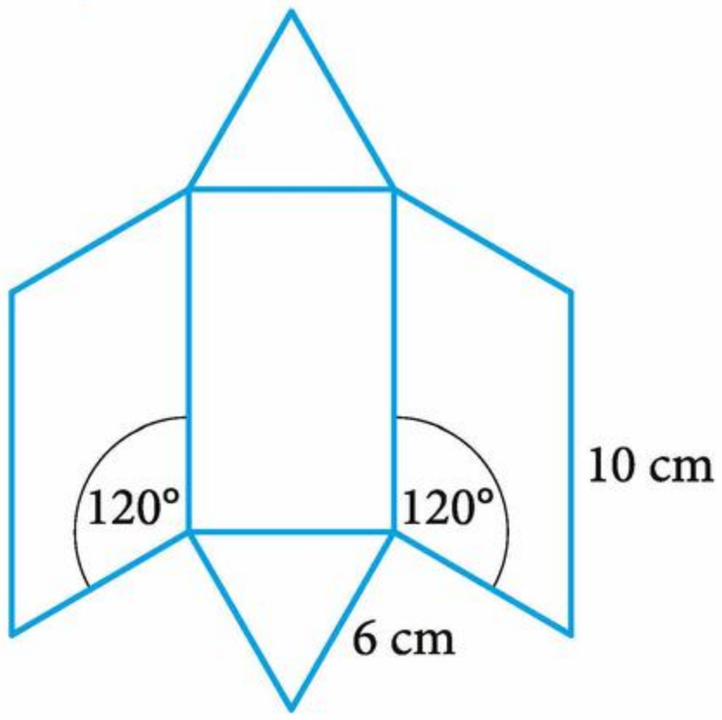
b) graniastosłup prawidłowy pięciokątny





c) graniastosłup pochyły, którego podstawą jest trójkąt równoboczny





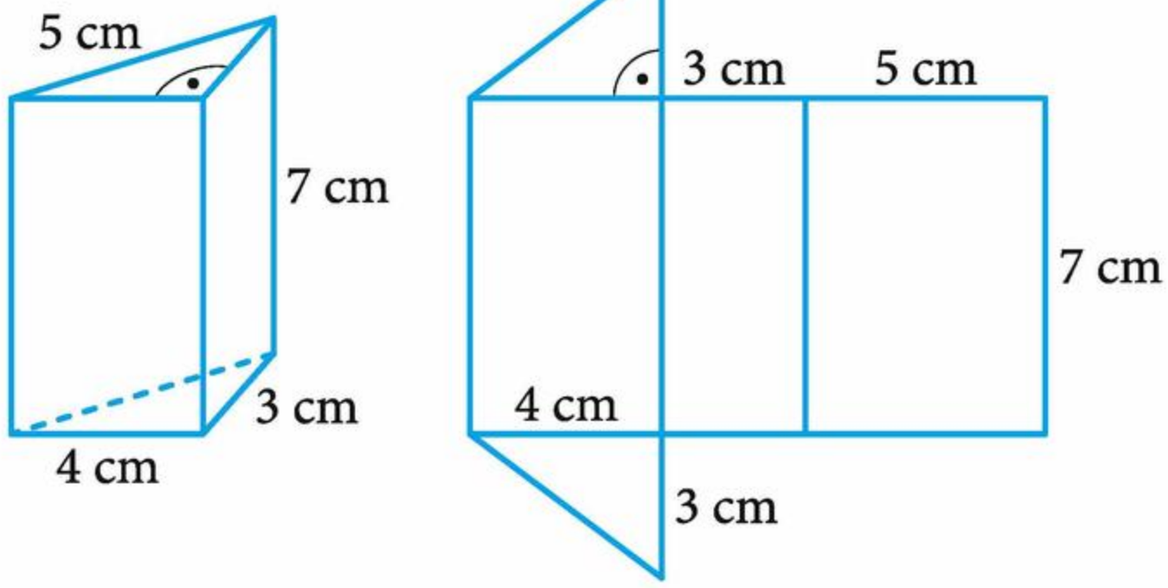
Pole powierzchni graniastosłupa

Powierzchnia całkowita graniastosłupa to łączna powierzchnia obu podstaw oraz wszystkich ścian bocznych; inaczej mówiąc, jest to powierzchnia siatki tego graniastosłupa. Pole powierzchni całkowitej oznaczamy P_c.

Sumę pól ścian bocznych nazywamy **polem powierzchni bocznej** graniastosłupa i oznaczamy P_b.

Przykład 2.1

Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prostego przedstawionego na rysunku.



Pole podstawy:
$P_p = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$ [cm^2].

Pola ścian bocznych:
$4 \cdot 7 = 28$ [cm^2],
$3 \cdot 7 = 21$ [cm^2],
$5 \cdot 7 = 35$ [cm^2].

Suma pól ścian bocznych:
$P_b = 28 + 21 + 35 = 84$ [cm^2].

Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe:

$$P_c = 2 \cdot 6 + 84 = 96 \text{ [cm}^2\text{]}.$$

suma pól podstaw — suma pól ścian bocznych

Uwaga. Pole powierzchni bocznej możemy też obliczyć jako pole prostokąta o bokach 7 cm oraz 5 cm + 3 cm + 4 cm = 12 cm:
$P_b = 7 \cdot 12 = 84$ [cm^2].

Jeśli potrafisz rozwiązać takie zadanie bez rysowania siatki, to nie musisz jej rysować. Wystarczy, że naszkicujesz (albo wyobrazisz sobie) poszczególne ściany bryły.

Odp. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa równa się 96 cm^2.

Przykład 2.2

Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy długości 8 cm i krawędzi bocznej długości 6 cm.

Graniastosłup jest prawidłowy, więc podstawą jest trójkąt równoboczny. Bok tego trójkąta ma długość $a = 8$ cm, więc pole podstawy graniastosłupa wynosi:

$$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = \frac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}.$$

Graniastosłup jest prawidłowy, więc każda ściana boczna jest prostokątem. Boki tego prostokąta mają długości 6 cm i 8 cm.
Pole ściany bocznej wynosi: $6 \cdot 8 = 48$ [cm^2].

Pole powierzchni bocznej jest równe: $P_b = 3 \cdot 48 = 144$ [cm^2].
Zatem pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe:
$P_c = 2P_p + P_b = 2 \cdot 16\sqrt{3} + 144 = (32\sqrt{3} + 144)$ [cm^2].

Odp. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa wynosi $(32\sqrt{3} + 144)$ cm^2.

Zapamiętaj

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe sumie pól dwóch jego podstaw i pola powierzchni bocznej graniastosłupa.

$$P_c = 2P_p + P_b$$

P_c – pole powierzchni całkowitej; P_p – pole podstawy; P_b – pole powierzchni bocznej

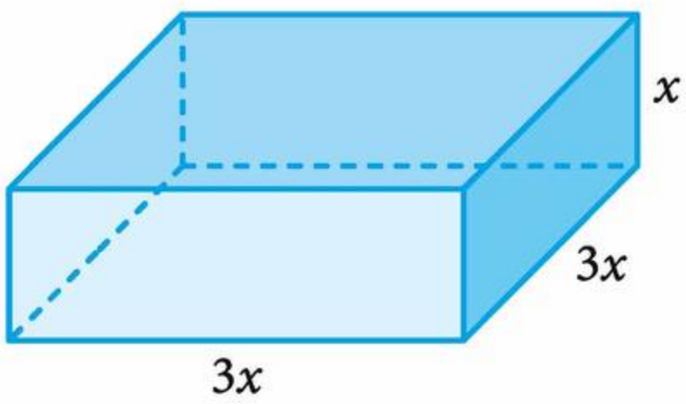
Ćwiczenie 2

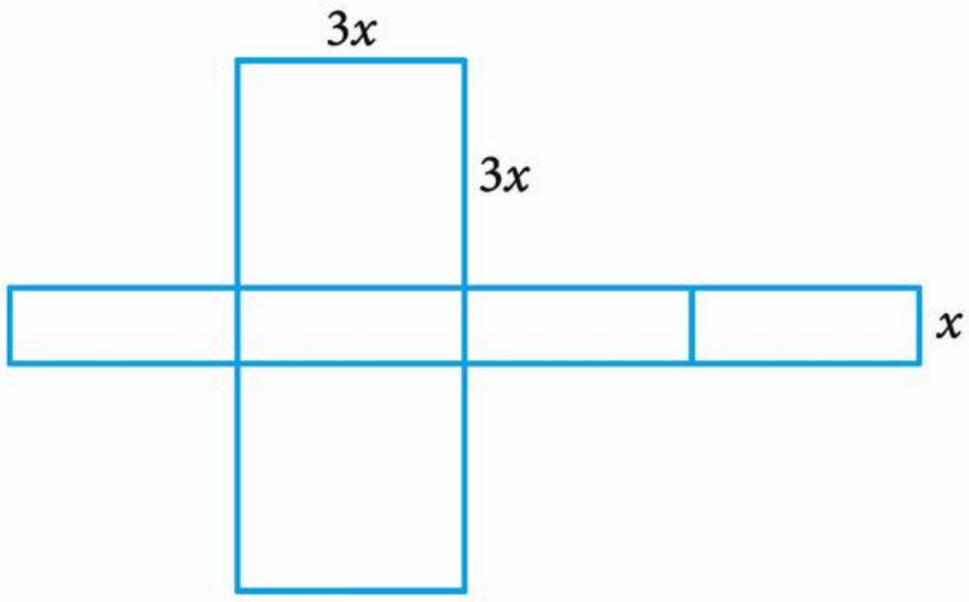
Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa, którego podstawą jest trójkąt prostokątny równoramienny, a dwie ściany boczne są kwadratami o boku długości 2 cm.

Przykład 3

Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest trzykrotnie dłuższa od jego krawędzi bocznej. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa, wiedząc, że jego objętość jest równa 72 cm^3.

Wykonujemy rysunek pomocniczy graniastosłupa i jego siatki.





Pole podstawy tego graniastosłupa wyraża się wzorem:

$P_p = (3x)^2 = 9x^2$.

Objętość tej bryły wyraża się wzorem: $V = P_p \cdot H$.

Stąd $72 = 9x^2 \cdot x$, czyli $72 = 9x^3$.

Zatem $x^3 = 8$, więc $x = 2$ [cm].

Pole podstawy: $P_p = 9x^2 = 36$ [cm^2].

Pole powierzchni bocznej: $P_b = 4 \cdot (2 \cdot 6) = 48$ [cm^2].

Pole powierzchni całkowitej: $P_c = 2 \cdot 36 + 48 = 72 + 48 = 120$ [cm^2].

Odp. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe 120 cm^2.

Żeby obliczyć pole powierzchni, musimy znać wymiary bryły. Aby je obliczyć, skorzystamy z objętości.

Ćwiczenie 3

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym o polu powierzchni całkowitej równym 350 cm^2 krawędź boczna jest trzykrotnie dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Zadania

1. Narysuj siatkę:

a) prostopadłościanu o wymiarach 1 cm × 2 cm × 3 cm,

b) graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego krawędź podstawy ma długość 2 cm, a krawędź boczna długość 3 cm,

c) graniastosłupa prostego, którego podstawą jest romb o boku 2 cm i kącie ostrym 60°, a krawędź boczna ma długość 4 cm.

2. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa prawidłowego o wszystkich krawędziach długości 6, jeśli jego podstawą jest:

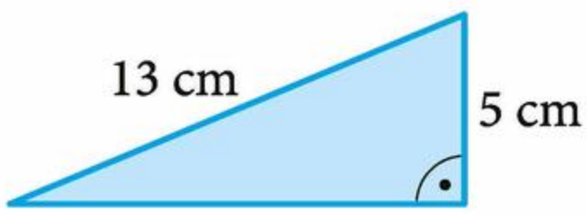
a) czworokąt, **b)** trójkąt, **c)** sześciokąt.

3. Dany jest graniastosłup prawidłowy, w którym krawędź boczna jest trzykrotnie dłuższa od krawędzi podstawy, a suma długości wszystkich krawędzi wynosi 120 cm. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa, jeśli jego podstawą jest:

a) trójkąt, **b)** czworokąt, **c)** sześciokąt.

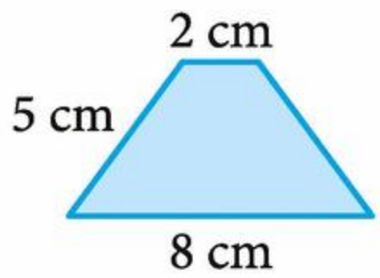
4. Graniastosłup prosty ma wysokość równą 5 cm. Na rysunku przedstawiono jego podstawę. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa.

a)



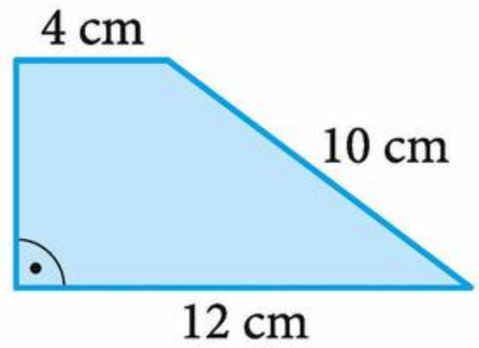
trójkąt prostokątny

b)



trapez równoramienny

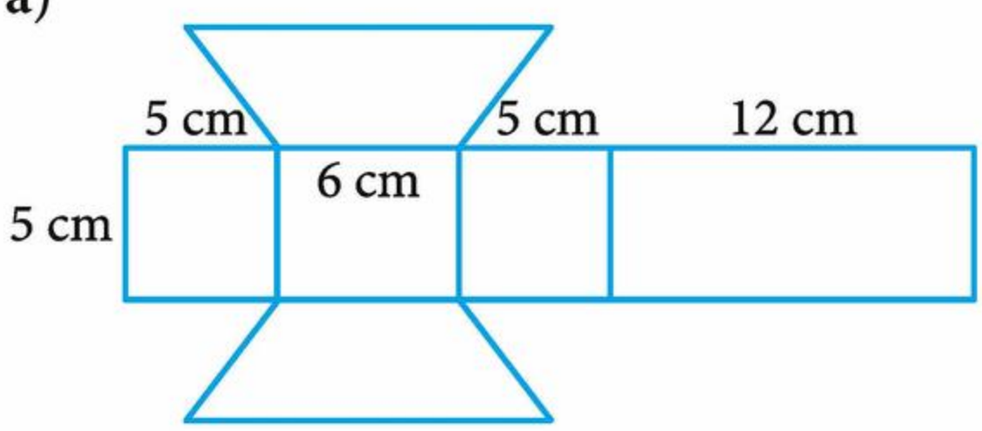
c)



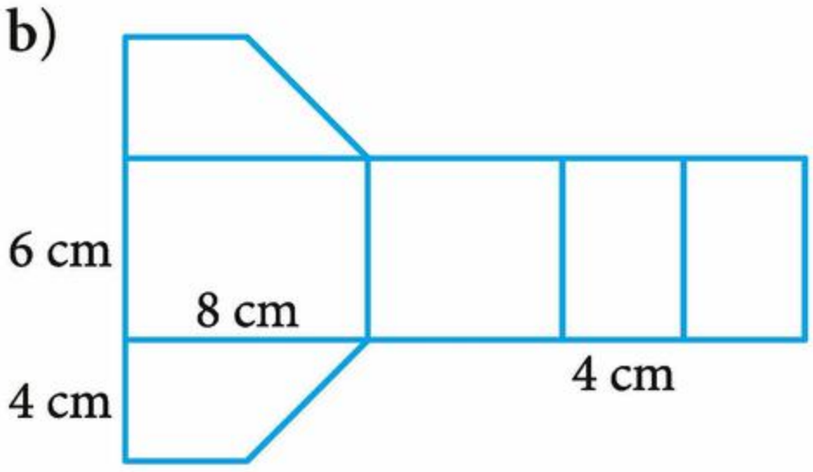
trapez prostokątny

5. Oblicz objętość graniastosłupa prostego, którego siatkę przedstawiono poniżej.

a)

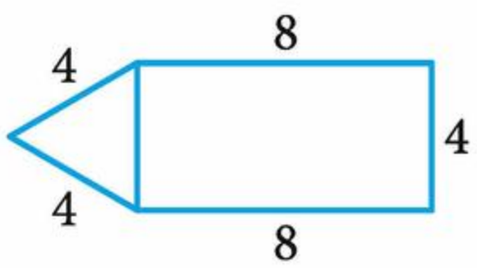


b)

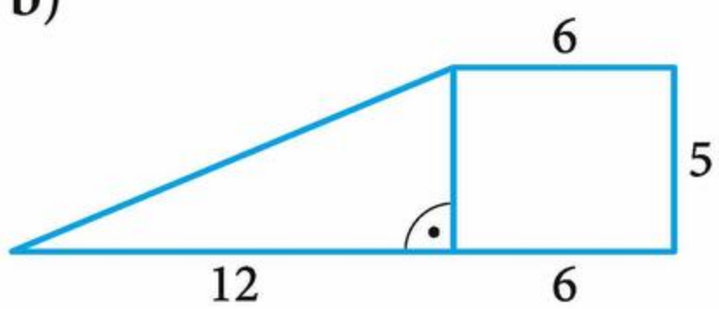


E **6.** Na rysunku przedstawiono fragment siatki graniastosłupa prostego. Przerysuj go do zeszytu i dokończ (tak aby powstała siatka). Jaki to graniastosłup? Oblicz jego pole powierzchni całkowitej. Podaj jego wysokość.

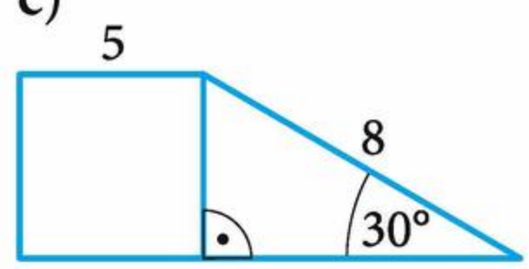
a)



b)



c)



7. Obwód podstawy graniastosłupa prawidłowego siedmiokątnego jest równy 20 cm, a krawędź boczna ma długość 15 cm. Oblicz pole powierzchni bocznej tej bryły. Czy odpowiedź byłaby taka sama, gdyby graniastosłup był prosty, ale nie prawidłowy?

8. Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym:

a) krawędź podstawy jest równa 8 cm, a przekątna ściany bocznej 17 cm,

b) przekątna ściany bocznej ma długość 10 cm, a przekątna podstawy 6 cm,

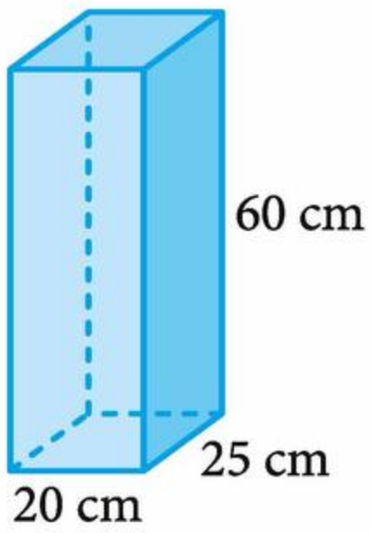
c) przekątna graniastosłupa ma długość 10 cm, a krawędź boczna 8 cm.

9. Oblicz pole powierzchni bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego objętość wynosi 240 cm^3, a krawędź boczna ma długość $5\sqrt{3}$ cm.

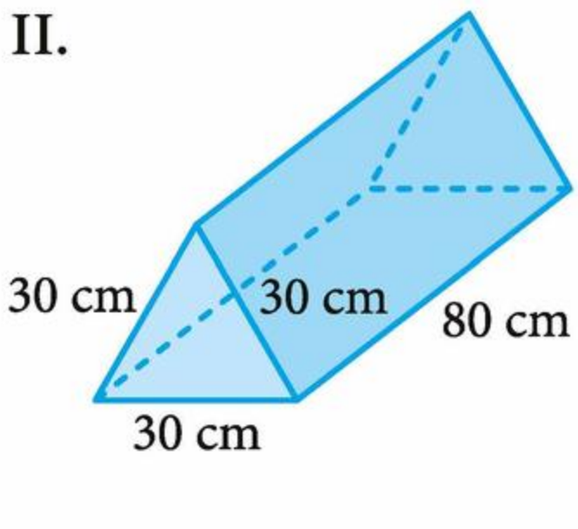
10. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym o polu powierzchni całkowitej równym 160 cm^2 krawędź boczna jest dwukrotnie dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa.

11. Marta, pakując prezenty, zakłada, że powierzchnia ozdobnego papieru do pakowania powinna być o 50% większa niż powierzchnia opakowywanego pudełka. Każde z pudełek przedstawionych na rysunkach ma kształt graniastosłupa prostego. Do opakowania których z nich potrzeba ponad 1 m^2 papieru?

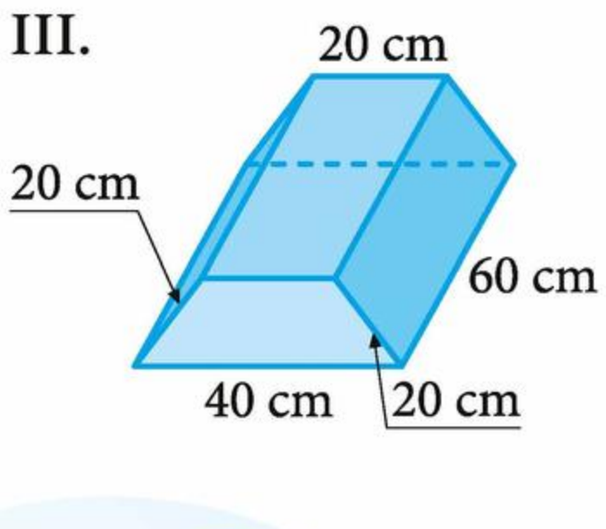
I.



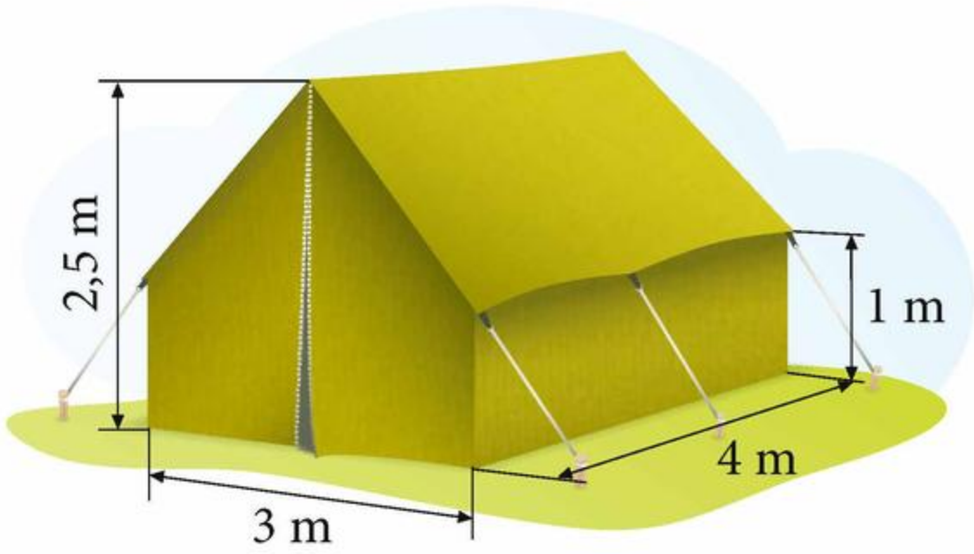
II.



III.



12. Oblicz, ile metrów kwadratowych materiału potrzeba do uszycia namiotu (bez podłogi), którego wymiary podano na ilustracji. Odpowiedź zaokrąglij do całości.



Dla dociekliwych

Dany jest graniastosłup pochyły, którego:
- podstawą jest kwadrat o boku 4 cm,
- wszystkie krawędzie boczne mają po 5 cm,
- dwie ściany boczne są prostokątami,
- wysokość ma 4 cm.

1. Na kartce w kratkę narysuj wszystkie ściany boczne tego graniastosłupa pochyłego.

2. Na kartce w kratkę formatu A4 narysuj siatkę, a następnie zbuduj model tej bryły.

3. Narysuj inną siatkę tego graniastosłupa i sprawdź, czy jest narysowana poprawnie, budując z niej model bryły.

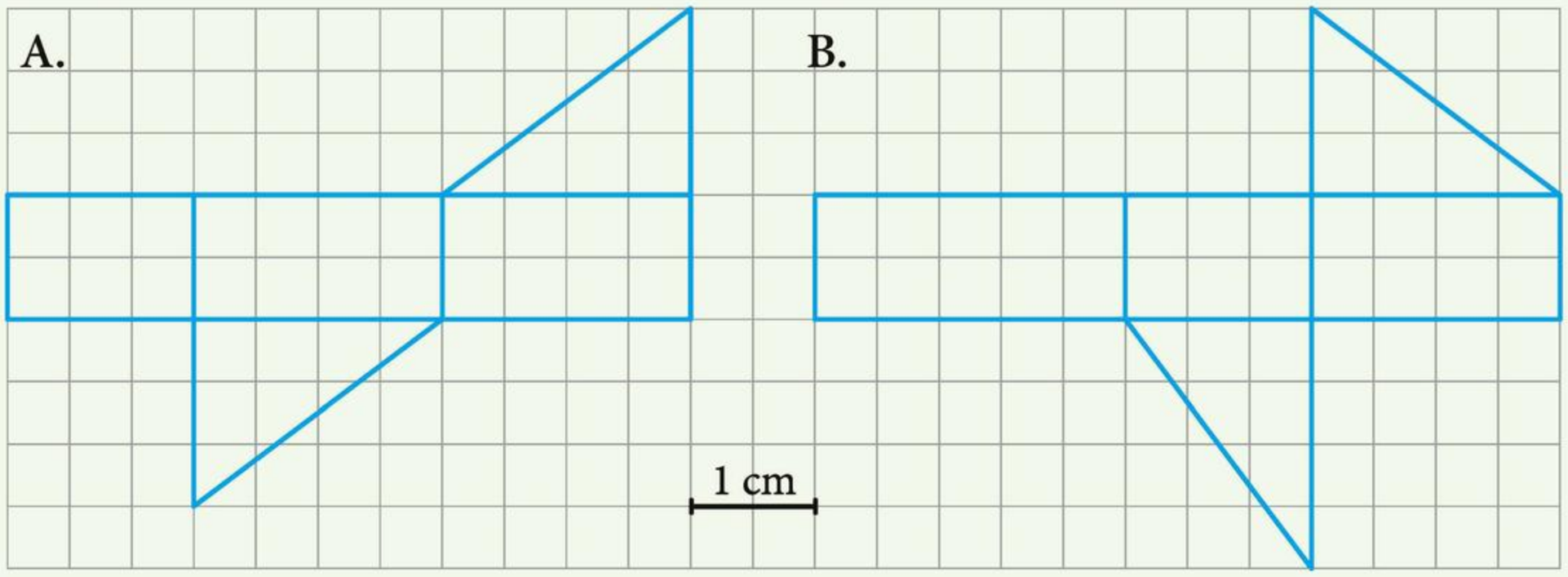
4. Narysuj siatkę graniastosłupa pochyłego, którego wszystkie ściany boczne są przystającymi równoległobokami. Następnie zbuduj z tej siatki model bryły.

Czy już umiem?

I. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez prostokątny o podstawach długości 2 cm i 5 cm oraz wysokości 4 cm. Wysokość bryły wynosi 6 cm. Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe

A. 92 cm^2. **B.** 104 cm^2. **C.** 110 cm^2. **D.** 124 cm^2.

II. Na którym z rysunków – A czy B – przedstawiono siatkę graniastosłupa? Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa.



III. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego wszystkie krawędzie mają długość 4 cm.

IV. Rozwiąż równanie.

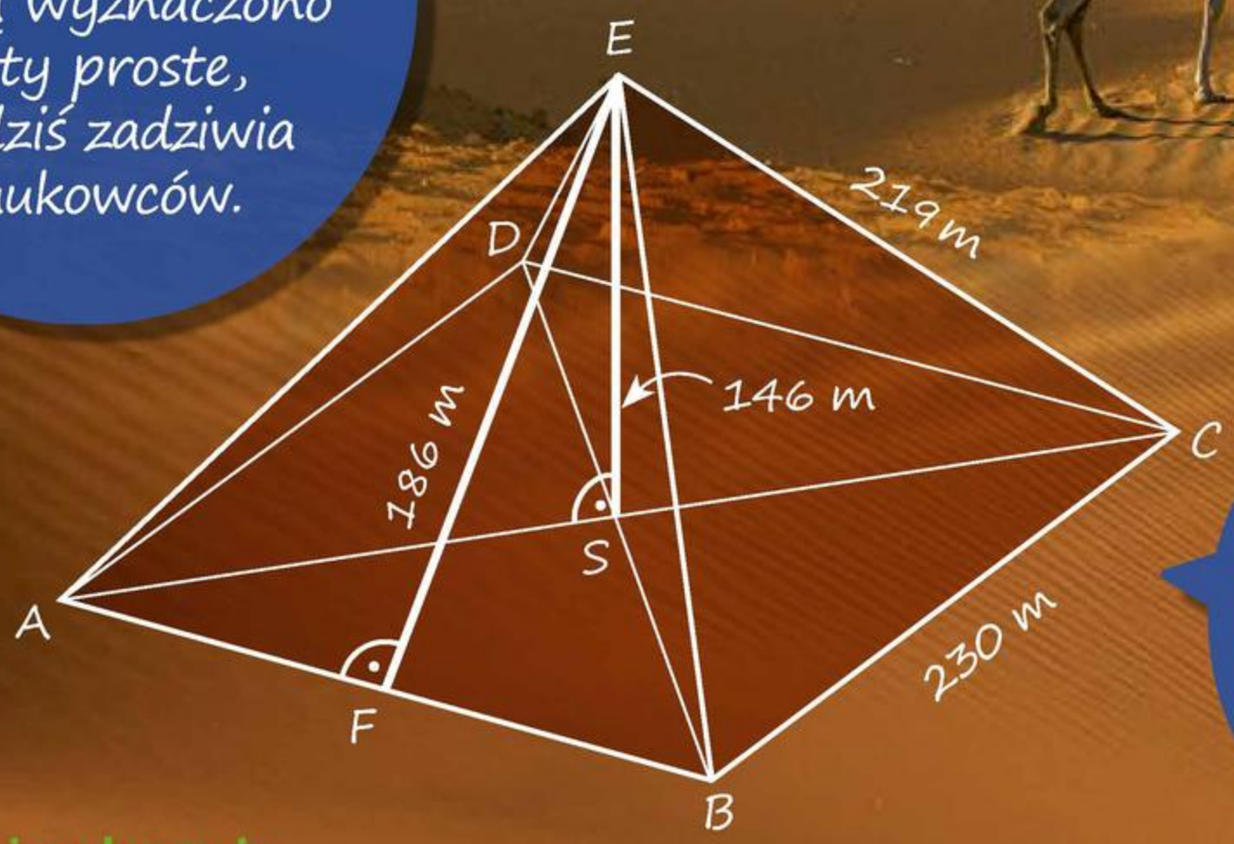
a) $3(x-2)-2(3-x)=3x+3$ **b)** $\frac{3-5x}{2}=1-\frac{x-2}{3}$

4 Ostrosłupy

Na dobry początek

Piramida Cheopsa w Gizie jest jednym z siedmiu cudów starożytnego świata i jedynym, który nadal można podziwiać. Ma ponad cztery i pół tysiąca lat.

Podstawa piramidy jest kwadratowa. Dokładność, z jaką wyznaczono kąty proste, do dziś zadziwia naukowców.



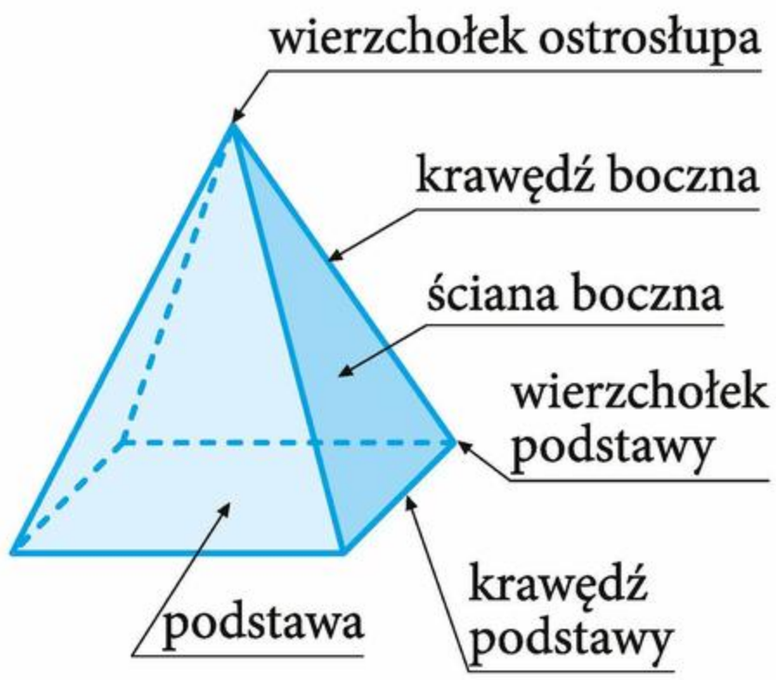
Wymiary piramidy Cheopsa, podane w zaokrągleniu do 1 m.

Pytania i polecenia

Wyobraźmy sobie, że jesteśmy alpinistami, którym pozwolono wspiąć się na piramidę Cheopsa.

- Wspinamy się najkrótszą drogą od krawędzi podstawy piramidy do jej czubka. Jakiej długości drogę pokonamy? Który odcinek na schemacie jej odpowiada?
- Na jaką wysokość się wespniemy?
- A gdybyśmy wspięli się na wierzchołek po krawędzi ściany bocznej, jakiej długości drogę byśmy pokonali? Które odcinki na schemacie odpowiadają tej trasie?

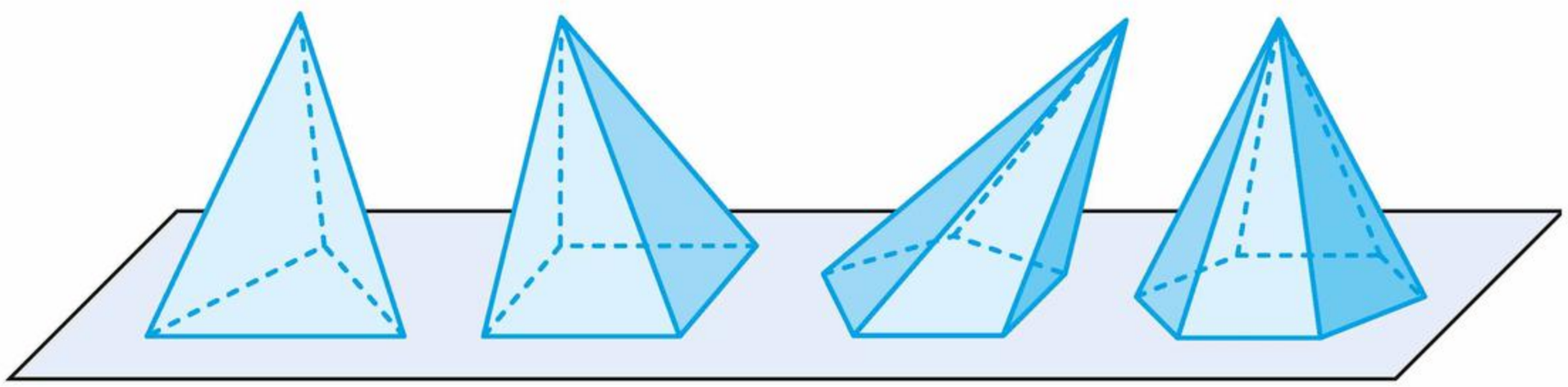
Ostrosłup to bryła, której jedna ściana, nazywana **podstawą**, jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany (ściany boczne) są trójkątami o wspólnym wierzchołku, nazywanym **wierzchołkiem ostrosłupa**.



Jeśli mówimy w liczbie mnogiej o wierzchołkach ostrosłupa, to chodzi nam zarówno o wierzchołki podstawy, jak i o wierzchołek nienależący do podstawy. Na przykład ostrosłup czworokątny ma pięć wierzchołków.

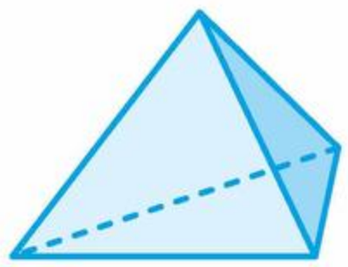
Zauważ, że w ostrosłupie z każdego wierzchołka podstawy wychodzą trzy krawędzie (jedna boczna i dwie krawędzie podstawy), a z wierzchołka ostrosłupa – wszystkie krawędzie boczne.

W zależności od wielokąta tworzącego podstawę ostrosłupa, mówimy o ostrosłupie trójkątnym, czworokątnym, pięciokątnym itd.



ostrosłup trójkątny | ostrosłup czworokątny | ostrosłup pięciokątny | ostrosłup sześciokątny

Ostrosłup trójkątny ma cztery ściany, które są trójkątami: podstawę i trzy ściany boczne. Każda ze ścian takiego ostrosłupa może pełnić funkcję jego podstawy.
Ostrosłup trójkątny nazywamy **czworościanem**.

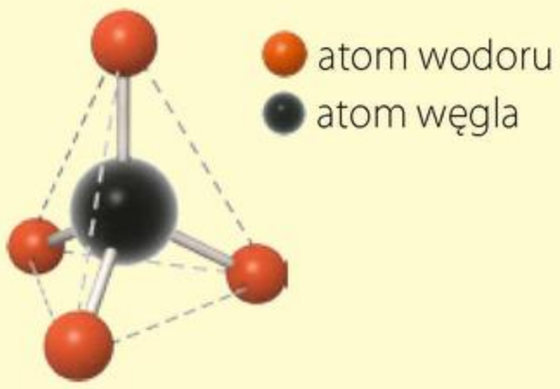


Ostrosłup, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi, nazywamy **czworościanem foremnym**. Kształt czworościanu foremnego mają niektóre kostki do gry.



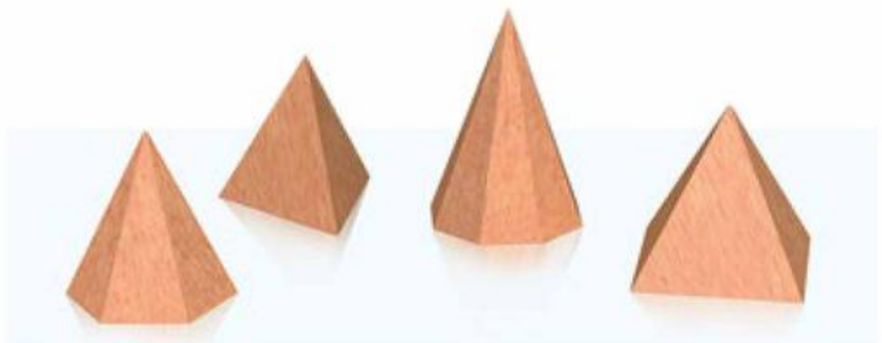
Czy wiesz, że…

Niektóre cząsteczki, np. cząsteczka metanu CH_4, mają strukturę czworościanu foremnego: atom węgla (C) zajmuje miejsce centralne, a atomy wodoru (H) są położone w wierzchołkach czworościanu.

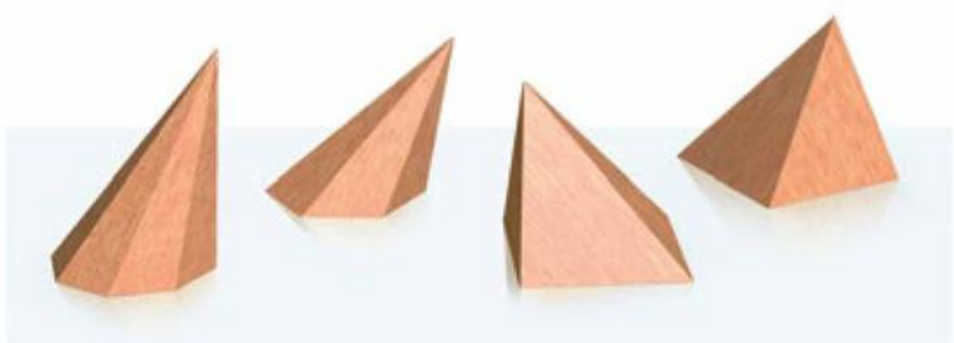


Ostrosłupy proste

Wśród ostrosłupów wyróżniamy **ostrosłupy proste**, czyli takie, których wszystkie krawędzie boczne są równej długości.



Te ostrosłupy są proste.



Te ostrosłupy nie są proste.

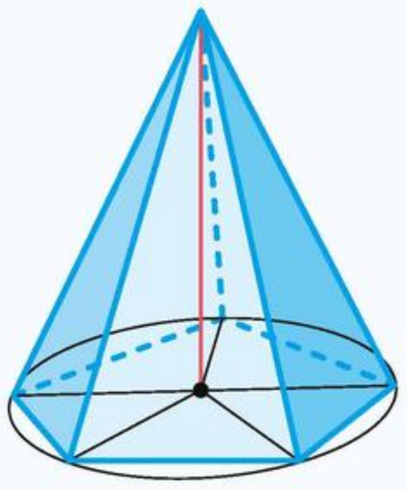
Ostrosłupy prawidłowe

Podobnie jak graniastosłupy, także ostrosłupy mogą być prawidłowe.

Ostrosłup nazywamy **prawidłowym**, jeśli jest ostrosłupem prostym i jego podstawą jest wielokąt foremny.

Zapamiętaj

W ostrosłupie prawidłowym:
- podstawa to wielokąt foremny,
- ściany boczne to przystające trójkąty równoramienne,
- wszystkie krawędzie boczne są równe.



ostrosłup
prawidłowy pięciokątny

Przykład 1

Podaj liczbę ścian, wierzchołków i krawędzi dowolnego czworościanu.

Czworościan (czyli ostrosłup trójkątny) ma:
- cztery ściany (jedną podstawę i trzy ściany boczne),
- cztery wierzchołki (trzy wierzchołki podstawy i wierzchołek ostrosłupa),
- sześć krawędzi (trzy krawędzie podstawy i trzy krawędzie boczne).

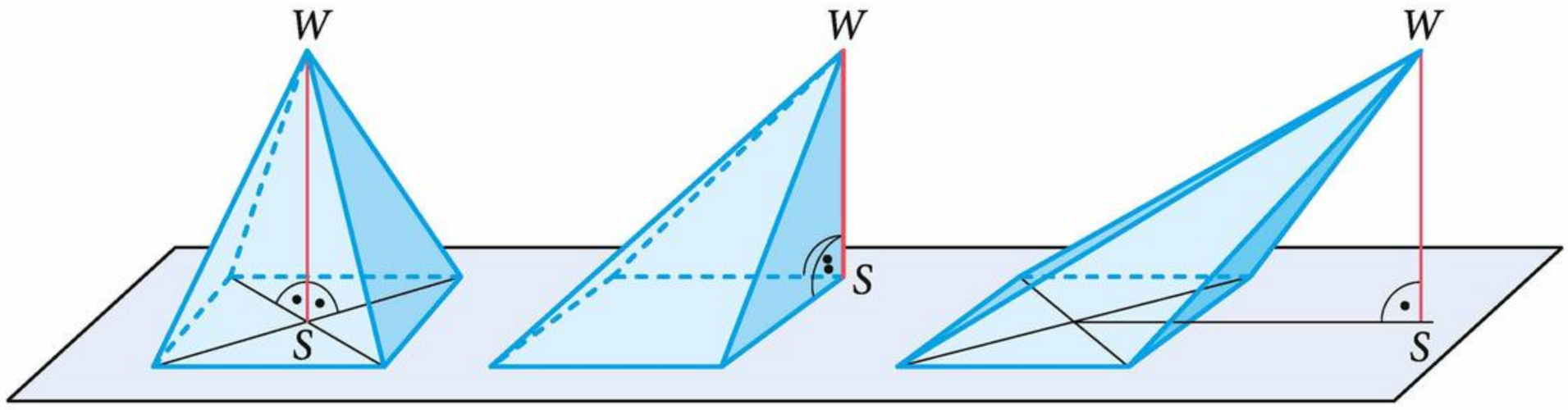
Ćwiczenie 1

Podaj liczbę ścian, wierzchołków i krawędzi ostrosłupa:

a) czworokątnego, **b**) pięciokątnego, **c**) sześciokątnego.

Wysokość ostrosłupa

Odcinek łączący wierzchołek ostrosłupa z płaszczyzną zawierającą jego podstawę i prostopadły do niej nazywamy **wysokością ostrosłupa**. Wysokością nazywamy również długość tego odcinka.

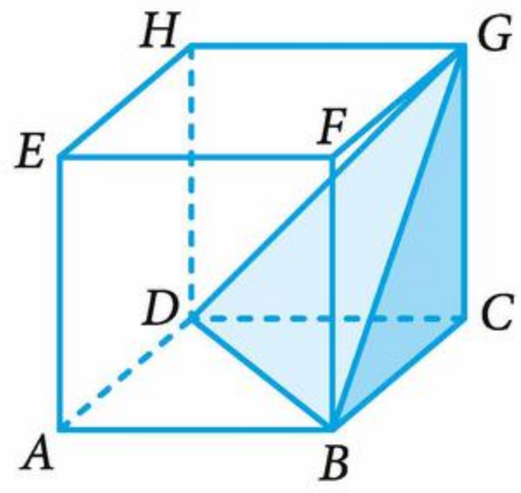


Na każdym z powyższych rysunków odcinek WS jest wysokością ostrosłupa.
Punkt S, który jest końcem wysokości leżącym na płaszczyźnie zawierającej podstawę, nazywamy **spodkiem wysokości**.
Zwróć uwagę, że spodek wysokości ostrosłupa nie musi leżeć na podstawie.

Przykład 2

E

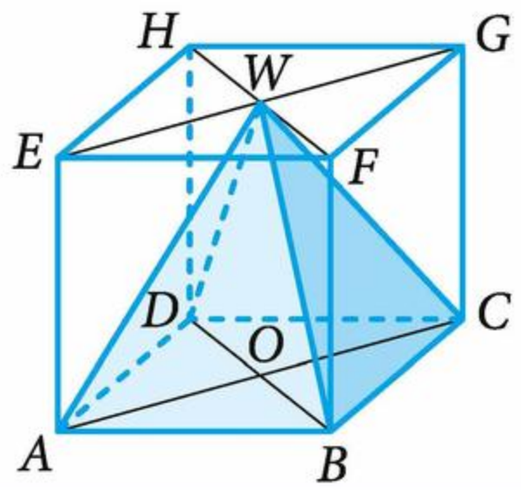
Z sześcianu wycięto ostrosłup $BCDG$ (patrz rysunek). Wskaż wysokość tego ostrosłupa opuszczoną z wierzchołka G oraz spodek tej wysokości.



Krawędź GC łączy wierzchołek ostrosłupa z jego podstawą BCD i jest prostopadła do tej podstawy, więc jest wysokością ostrosłupa. Spodkiem tej wysokości jest punkt C.

Ćwiczenie 2

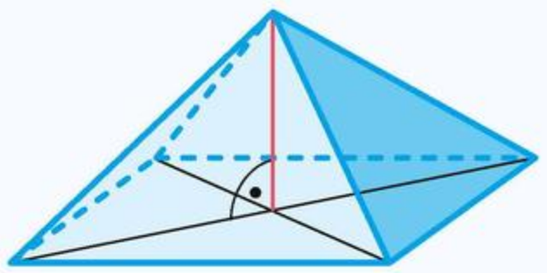
Punkt W jest punktem przecięcia przekątnych górnej podstawy sześcianu $ABCDEFGH$ przedstawionego na rysunku obok. Gdzie jest położony spodek wysokości ostrosłupa $ABCDW$?



Okazuje się, że wszystkie ostrosłupy prawidłowe czworokątne mają tę własność.

Zapamiętaj

Spodkiem wysokości ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest środek jego podstawy, czyli punkt przecięcia jej przekątnych.



Odcinki w ostrosłupach

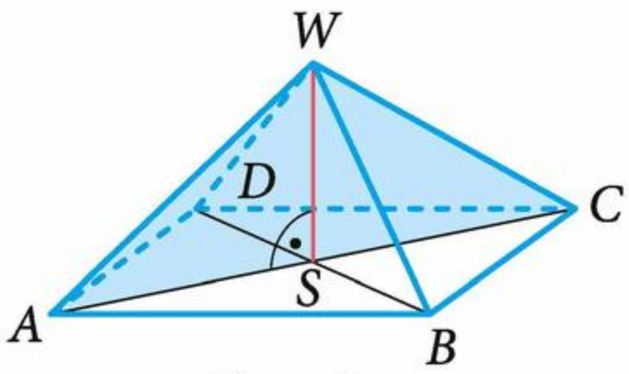
Przykład 3

Na poniższych trzech rysunkach przedstawiono ten sam ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDW$. Narysuj trójkąt, którego bokami są następujące odcinki w tym ostrosłupie:

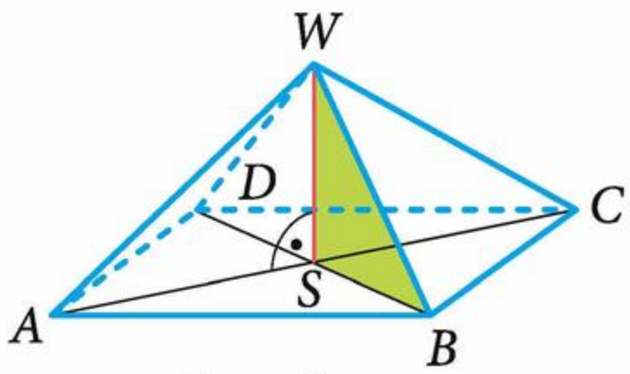
a) krawędzie boczne AW i CW oraz przekątna podstawy AC (rys. 1),

b) wysokość bryły, odcinek BS będący połową przekątnej podstawy i krawędź boczna BW (rys. 2),

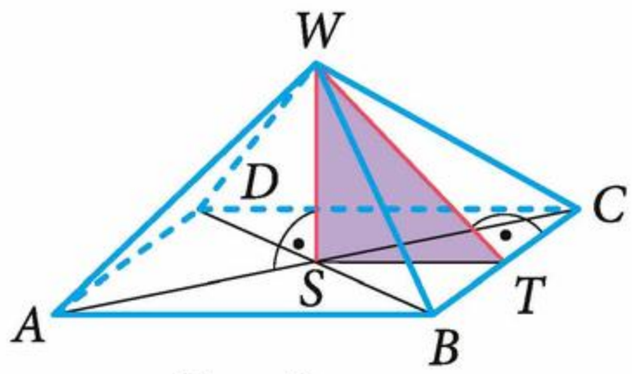
c) wysokość bryły, wysokość WT ściany bocznej i odcinek ST (rys. 3).



Rys. 1

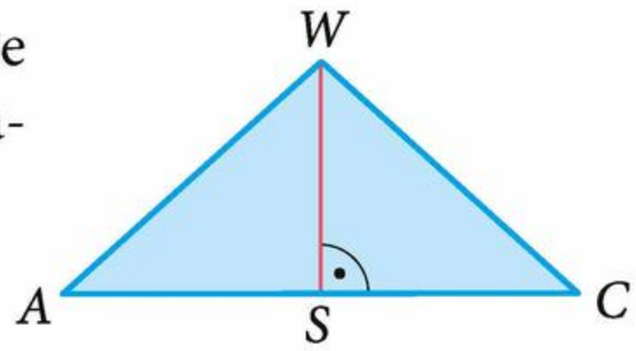


Rys. 2

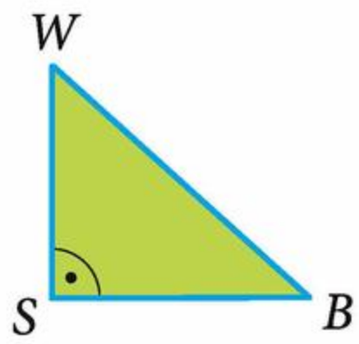


Rys. 3

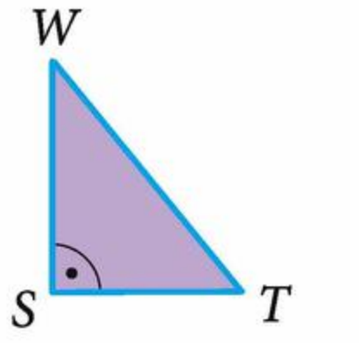
a) Ostrosłup jest prawidłowy, więc dwie przeciwległe krawędzie boczne AW i CW oraz przekątna podstawy AC tworzą trójkąt równoramienny AWC.



b) Wysokość bryły SW, odcinek BS będący połową przekątnej podstawy i krawędź boczna BW tworzą trójkąt prostokątny BWS o przyprostokątnych SW i BS.

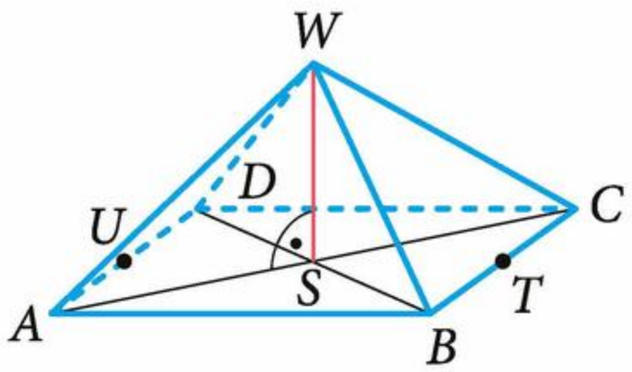


c) Punkt T jest środkiem krawędzi podstawy ostrosłupa, więc odcinek ST jest równy połowie krawędzi podstawy. Wysokość bryły SW, wysokość WT ściany bocznej i odcinek ST tworzą trójkąt prostokątny TWS o przyprostokątnych SW i ST.



Ćwiczenie 3

Dla ostrosłupa z przykładu 3 narysuj trójkąt, którego wierzchołkami są: wierzchołek W ostrosłupa, środek krawędzi BC i środek krawędzi AD.



Zadania

1. Czy każda bryła o czterech ścianach to czworościan? Czy każda bryła o sześciu ścianach to sześcian? Jeżeli tak, to wyjaśnij dlaczego, jeżeli nie, to podaj przykład odpowiedniej bryły.

2. Ile wierzchołków, krawędzi i ścian ma ostrosłup:
a) ośmiokątny, **b)** dwudziestokątny?

3. Ile wierzchołków, krawędzi i ścian ma ostrosłup, którego podstawą jest wielokąt o m bokach?

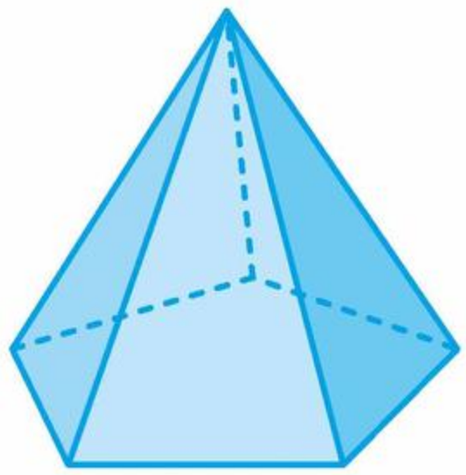
4. Czy jest możliwe, żeby ściany ostrosłupa prawidłowego były trójkątami równobocznymi, jeśli jest to ostrosłup:
a) trójkątny, **b)** czworokątny, **c)** pięciokątny, **d)** sześciokątny?

5. **a)** Pewien graniastosłup ma 30 krawędzi. Ile ma wierzchołków?
b) Pewien ostrosłup ma 30 krawędzi. Ile ma wierzchołków?

6. Graniastosłup i ostrosłup mają takie same podstawy, ale liczba krawędzi graniastosłupa jest o 7 większa niż liczba krawędzi ostrosłupa. Ile ścian ma każda z tych brył?

7. Oceń prawdziwość zdań. Uzasadnij odpowiedź.
I. Każdy ostrosłup prosty jest prawidłowy.
II. Każdy ostrosłup prawidłowy jest prosty.
III. Każdy graniastosłup prosty jest prawidłowy.
IV. Każdy graniastosłup prawidłowy jest prosty.
V. Każda krawędź boczna graniastosłupa jest jego wysokością.
VI. Krawędź boczna ostrosłupa może być jego wysokością.
VII. Każdy ostrosłup prawidłowy trójkątny jest czworościanem foremnym.

8. Czy podane zdanie jest prawdziwe? Czy bryła przedstawiona na rysunku stanowi dowód prawdziwości tego zdania?
a) Nieprawda, że każda bryła o sześciu ścianach jest sześcianem.
b) Sześcian ma sześć ścian.
c) Każdy ostrosłup ma sześć ścian.
d) Istnieje ostrosłup o sześciu ścianach.
e) Każdy ostrosłup ma parzystą liczbę krawędzi.
f) Ostrosłup może mieć 10 krawędzi.



9. Na rysunku obok przedstawiono ostrosłup prawidłowy czworokątny. Narysuj trójkąt, którego bokami są podane odcinki w tym ostrosłupie. Podpisz długości boków trójkąta zgodnie z oznaczeniami z rysunku ostrosłupa.

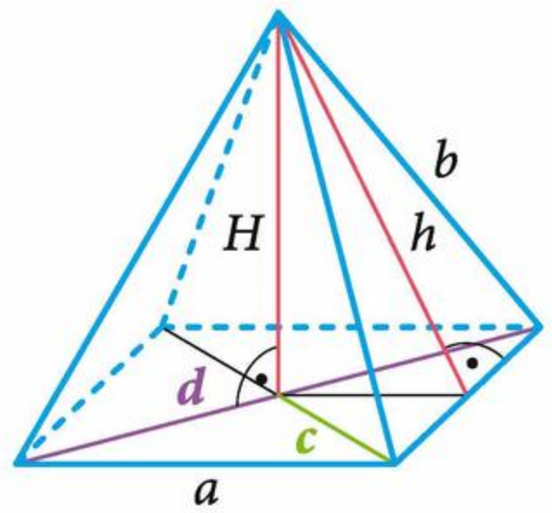
a) dwie krawędzie podstawy i przekątna podstawy

b) połowa krawędzi podstawy, wysokość ściany bocznej i krawędź boczna

c) przekątna podstawy i dwie krawędzie boczne

d) wysokość bryły, krawędź boczna i połowa przekątnej podstawy

e) wysokość bryły, wysokość ściany bocznej i odcinek łączący ich końce

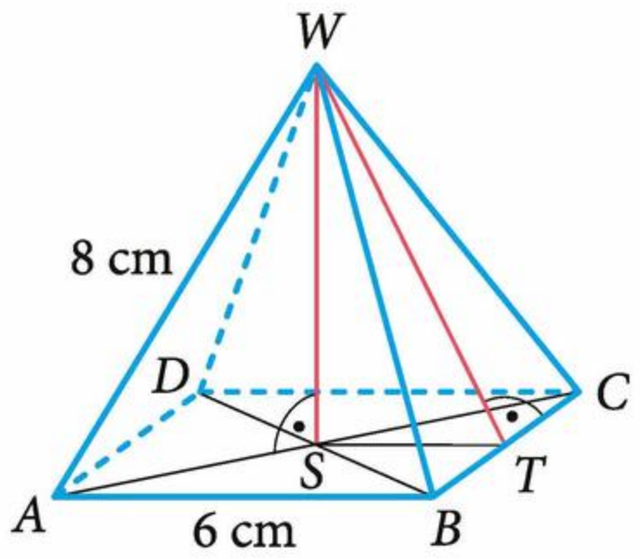


10. Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy długości 6 cm i krawędzi bocznej długości 8 cm. Spośród trójkątów: *BCW*, *ASW*, *WST*, wybierz i narysuj ten, który zawiera:

a) wysokość ściany bocznej ostrosłupa,

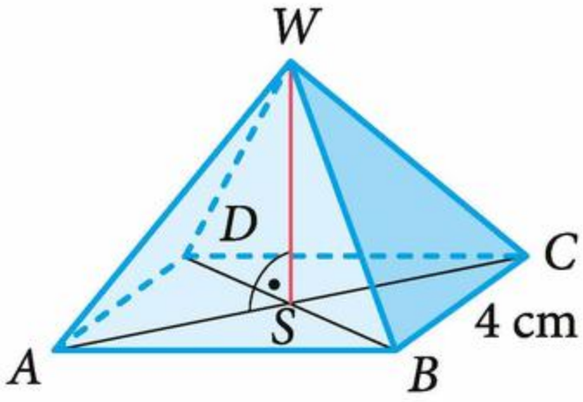
b) wysokość bryły.

Następnie oblicz tę wysokość.



11. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy równej 4 cm (rysunek obok). Punkt *S* jest spodkiem wysokości tego ostrosłupa, a $SW = AS$. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa.

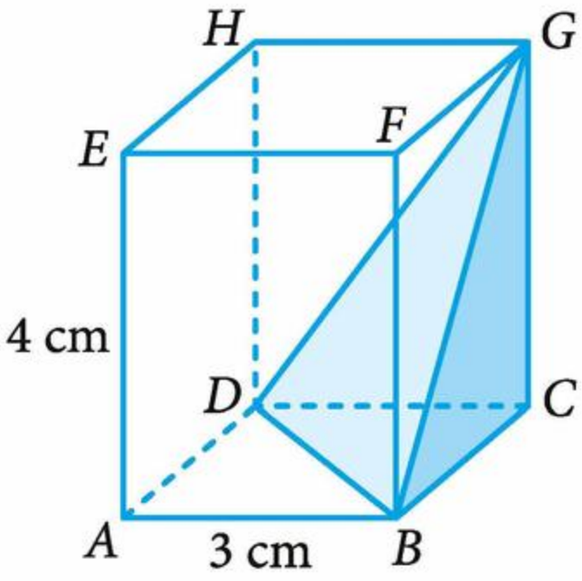
Wskazówka. Oblicz najpierw długość przekątnej *AC* oraz narysuj trójkąt *ASW*.



E **12.** Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 3 cm i wysokości 4 cm przecięto w sposób pokazany na rysunku i otrzymano dwie bryły. Jedną z nich jest czworościan *BCDG*.

a) Oblicz sumę długości krawędzi tego ostrosłupa.

b) Wskaż wysokość ostrosłupa opuszczoną z wierzchołka *D*.



13. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym *ABCDW* kwadrat *ABCD* jest podstawą, a trójkąty *ACW* i *BDW* są trójkątami równobocznymi o boku 8 cm. Oblicz długości krawędzi bocznej i krawędzi podstawy oraz wysokość ostrosłupa.

Wskazówka. Narysuj trzy rysunki: ostrosłup, trójkąt *ACW* i podstawę ostrosłupa.

14. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym każda krawędź ma długość 6 cm. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

Dla dociekliwych

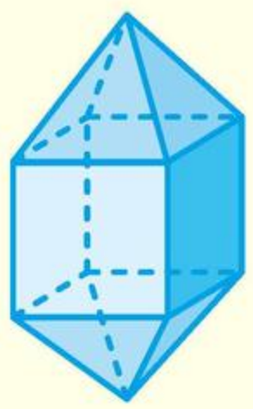
1. Przerysuj do zeszytu tabelę dotyczącą graniastosłupów i ją uzupełnij.

Liczba boków wielokąta w podstawie graniastosłupa	3	4	5	…	n
S – liczba ścian graniastosłupa	5				
K – liczba krawędzi graniastosłupa	9				
W – liczba wierzchołków graniastosłupa	6				

2. Wykonaj analogiczną tabelę dla ostrosłupów.

3. Udowodnij, że dla każdego ostrosłupa i graniastosłupa zachodzi wzór $S + W - K = 2$.

4. Sprawdź, czy wzór podany w zadaniu 3 jest prawdziwy dla bryły narysowanej obok.

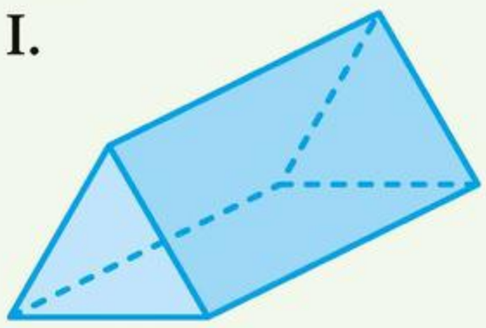


Jeżeli chcesz dowiedzieć się więcej, to przyda ci się informacja, że ten wzór nosi nazwę **wzoru Eulera** [czytaj: ojlera] **dla wielościanów wypukłych**.

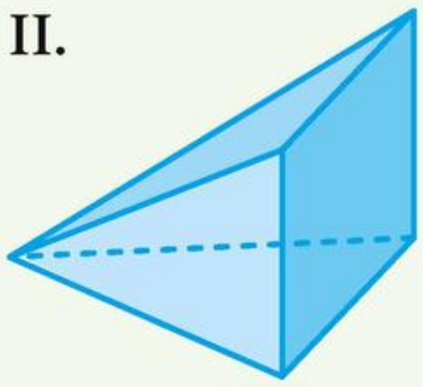
Czy już umiem?

I. Na których rysunkach przedstawiono ostrosłupy? Jakimi figurami są ich podstawy?

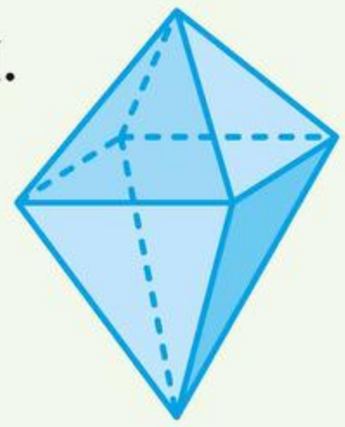
I.



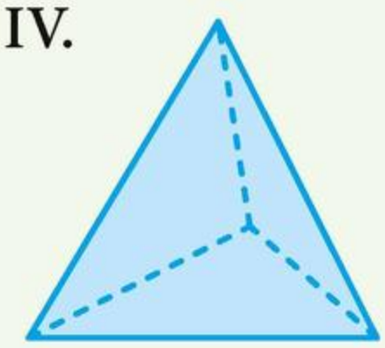
II.



III.



IV.



II. Ile ścian ma ostrosłup, który ma 100 krawędzi?

A. 49 **B.** 50 **C.** 51 **D.** 55

III. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDW$, w którym W jest wierzchołkiem, krawędź podstawy ma długość 4 cm, a krawędź boczna 6 cm. Narysuj ten ostrosłup oraz jego podstawę $ABCD$, ścianę boczną ABW oraz trójkąt ACW. Zapisz znane długości boków na rysunkach.

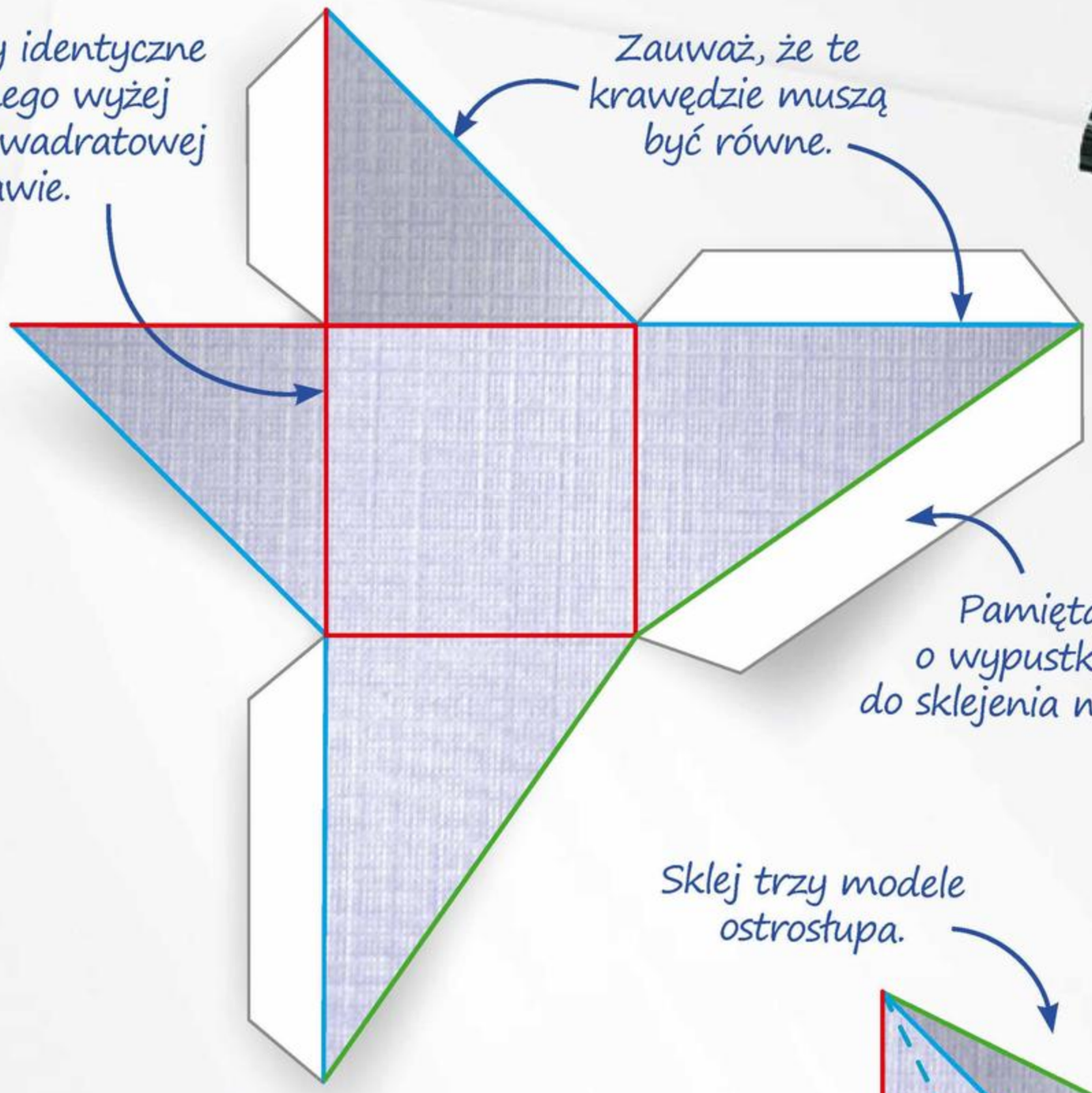
IV. Adam zaplanował trasę wakacyjnej wyprawy. Jej pierwszy etap, czyli $\frac{2}{7}$ dystansu, postanowił przejechać pociągiem, $\frac{3}{11}$ trasy – przejść pieszo, a na ostatnią część – wypożyczyć rower. Ile kilometrów Adam przejedzie na rowerze, jeśli cała trasa ma 69,3 km?

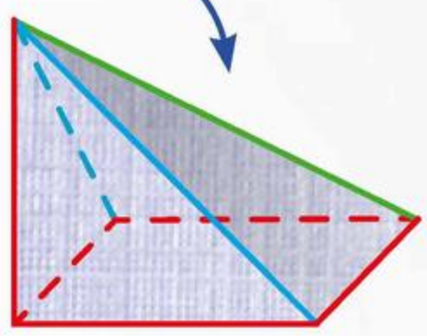
5

Objętość ostrosłupa

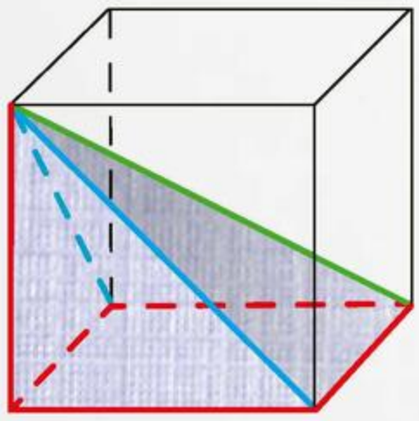
Na dobry początek

Budujemy sześcian. Użyjemy do tego trzech jednakowych ostrosłupów, które w podstawie mają kwadrat (np. o boku 6 cm), a ich ściany boczne są trójkątami prostokątnymi, z których dwa są równoramienne. Kwadratowa podstawa ostrosłupa będzie jednocześnie ścianą budowanego sześcianu.





Sklej trzy modele ostrosłupa.



Spróbuj ze swoich ostrosłupów zbudować sześcian.

Pytania i polecenia

- Zmierz długość krawędzi sześcianu zbudowanego z trzech identycznych ostrosłupów i oblicz jego objętość.
- Ile wynosi objętość każdego z ostrosłupów, z których powstał sześcian?

Objętość dowolnego ostrosłupa jest trzy razy mniejsza niż objętość graniastosłupa o takiej samej podstawie i wysokości.

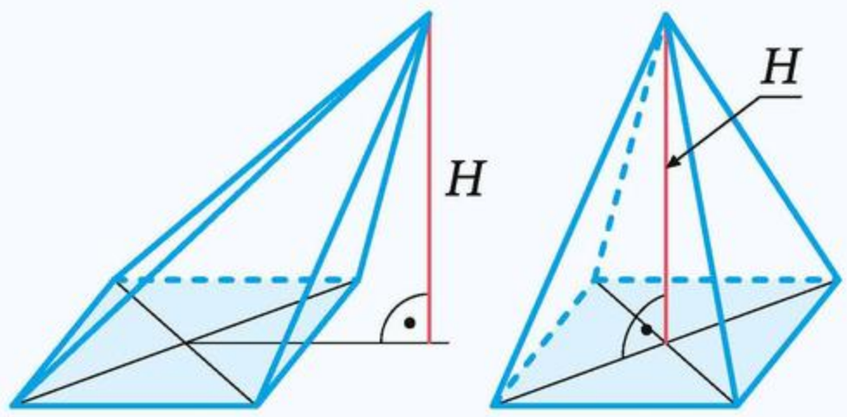
Zapamiętaj

Objętość V ostrosłupa o polu podstawy P_p i wysokości H wyraża się wzorem:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$$

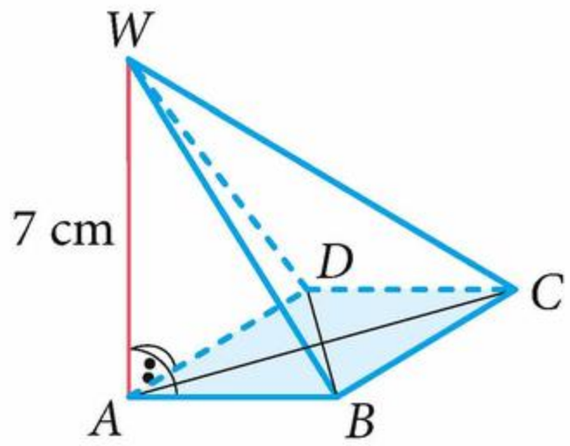
pole podstawy ostrosłupa

wysokość ostrosłupa



Przykład 1

Krawędź WA ostrosłupa przedstawionego na rysunku jest wysokością tego ostrosłupa. Oblicz objętość bryły, wiedząc, że jej podstawa jest rombem o przekątnych $AC = 8$ cm i $BD = 6$ cm.

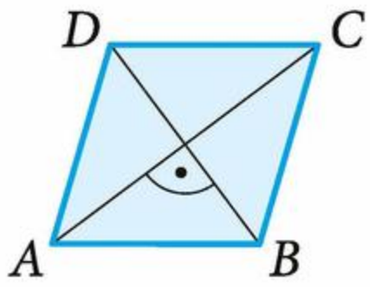


Pole podstawy tego ostrosłupa wynosi:

$P_p = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$ [cm^2].

Objętość bryły jest zatem równa:

$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 7 = 56$ [cm^3].



Ćwiczenie 1

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego o krawędzi podstawy 6 cm i wysokości równej 5 cm, którego podstawą jest:

a) kwadrat, **b)** sześciokąt.

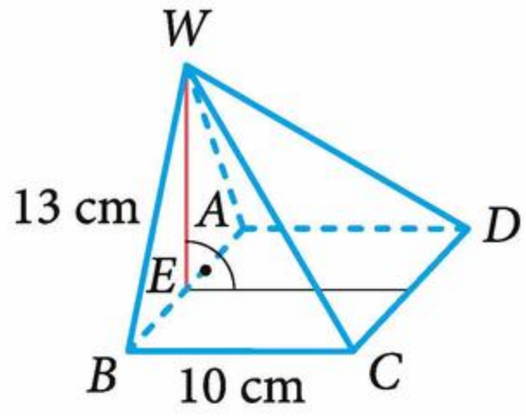
Zadania

1. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego:

a) czworokątnego o krawędzi podstawy 3 cm i wysokości 2 cm,
b) trójkątnego o krawędzi podstawy 5 cm i wysokości 12 cm,
c) sześciokątnego o krawędzi podstawy 2 cm i wysokości 10 cm.

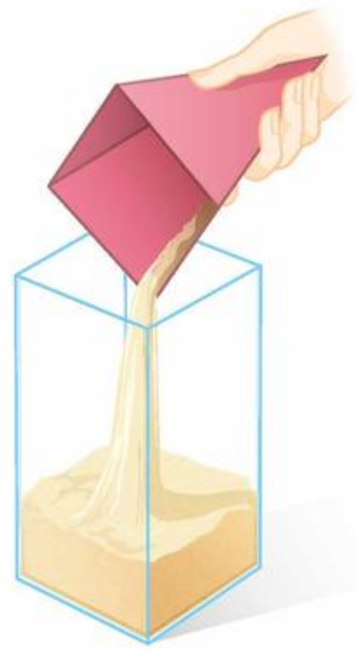
2. Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 5 cm jest równa 50 cm^3. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

3. Oblicz długość krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego wysokość jest trzy razy dłuższa od tej krawędzi, a objętość jest równa $125\ \text{cm}^3$.

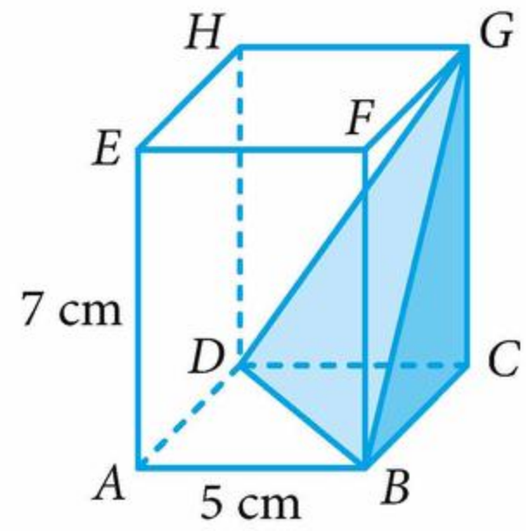


E **4.** W ostrosłupie $ABCDW$ podstawą jest kwadrat $ABCD$, a wysokością – odcinek WE. Punkt E jest środkiem krawędzi AB (patrz rysunek). Oblicz objętość tego ostrosłupa, wiedząc, że $AB = 10$ cm i $AW = BW = 13$ cm.

5. W ramach projektu szkolnego Romek zrobił dwa pojemniki: pierwszy w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $6\ \text{cm} \times 6\ \text{cm} \times 20\ \text{cm}$, a drugi w kształcie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 6 cm i wysokości 12 cm. Romek chce za pomocą ostrosłupa napełnić piaskiem prostopadłościenny pojemnik. Ile razy będzie musiał użyć ostrosłupa, aby większy pojemnik był pełen? Załóż, że za każdym razem pojemnik w kształcie ostrosłupa będzie wypełniony całkowicie.



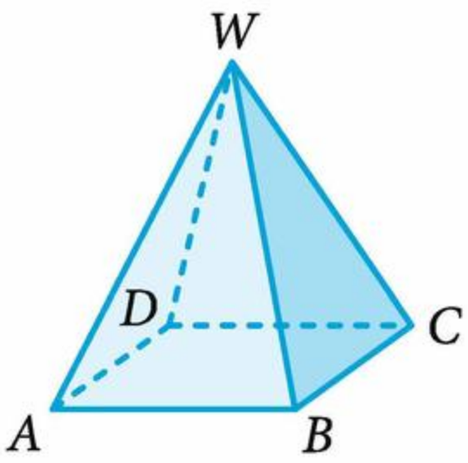
6. Wysokość pewnego ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest $\sqrt{3}$ razy dłuższa od krawędzi podstawy. Objętość ostrosłupa wynosi $16\ \text{cm}^3$. Oblicz pole podstawy tej bryły.



E **7.** Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 5 cm i wysokości 7 cm przecięto w sposób pokazany na rysunku i otrzymano dwie bryły. Jedną z nich jest czworościan $BCDG$. Oblicz objętość czworościanu.

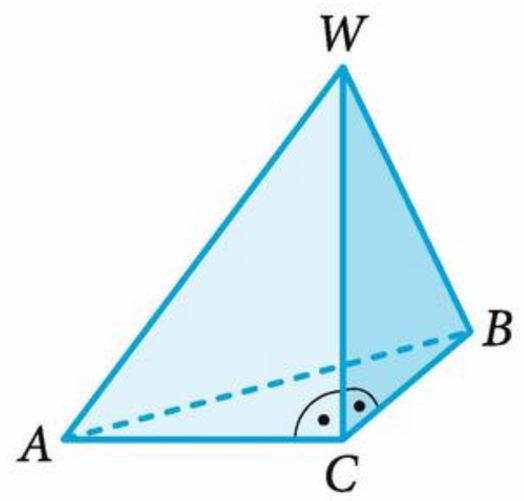
8. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przedstawionym na rysunku trójkąt ACW jest trójkątem równobocznym o boku długości 12 cm. Oblicz:

a) objętość tego ostrosłupa,
b) sumę długości jego krawędzi.



9. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C (rysunek obok). Wysokością tego ostrosłupa jest jego krawędź boczna CW. Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeśli:

a) $AC = CW = 8$ cm i $\sphericalangle ABC = 45°$,
b) $AB = BW = 8$ cm i $\sphericalangle WBC = 30°$.



10. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt. Przekątne podstawy przecinają się w punkcie, który jest spodkiem wysokości ostrosłupa.

:D **a)** Uzasadnij, że wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają taką samą długość, czyli że jest to ostrosłup prosty.

b) Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeśli krawędzie jego podstawy mają długości 6 cm i 8 cm, a suma długości wszystkich krawędzi bryły jest równa 80 cm.

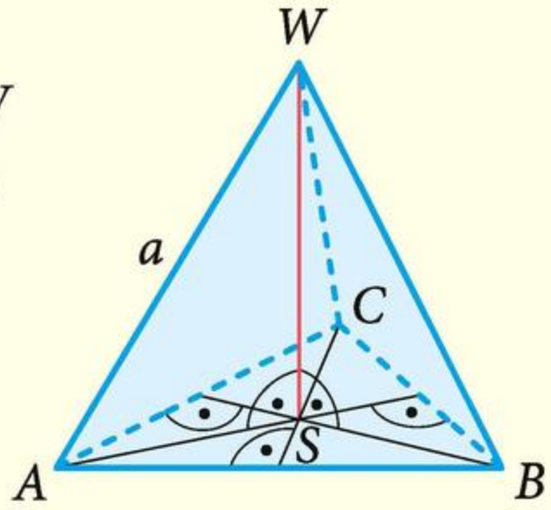
Dla dociekliwych

1. Na rysunku przedstawiono czworościan foremny $ABCW$ o krawędzi a. Narysuj trójkąt ASW i oblicz długości jego boków dla $a = 12$.

2. Oblicz wysokość czworościanu foremnego, którego krawędź ma długość a.

3. Oblicz objętość czworościanu foremnego, którego krawędź ma długość a.

4. Oblicz długość krawędzi czworościanu foremnego o objętości $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ cm^3.



Wysokości trójkąta równobocznego przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą z nich w stosunku 1 : 2.

Czy już umiem?

I. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 5 cm, a jego wysokość jest równa 6 cm. Objętość tego ostrosłupa wynosi

A. 10 cm^3. **B.** 30 cm^3. **C.** 50 cm^3. **D.** 150 cm^3.

II. Na rysunku przedstawiono ostrosłup i graniastosłup prosty. Która z tych brył ma większą objętość? Ile razy większą?

III. Pan Paweł był na wycieczce, która rozpoczęła się 29 kwietnia rano, a skończyła 3 maja wieczorem. Ile zapłacił za wyżywienie, a ile za noclegi?

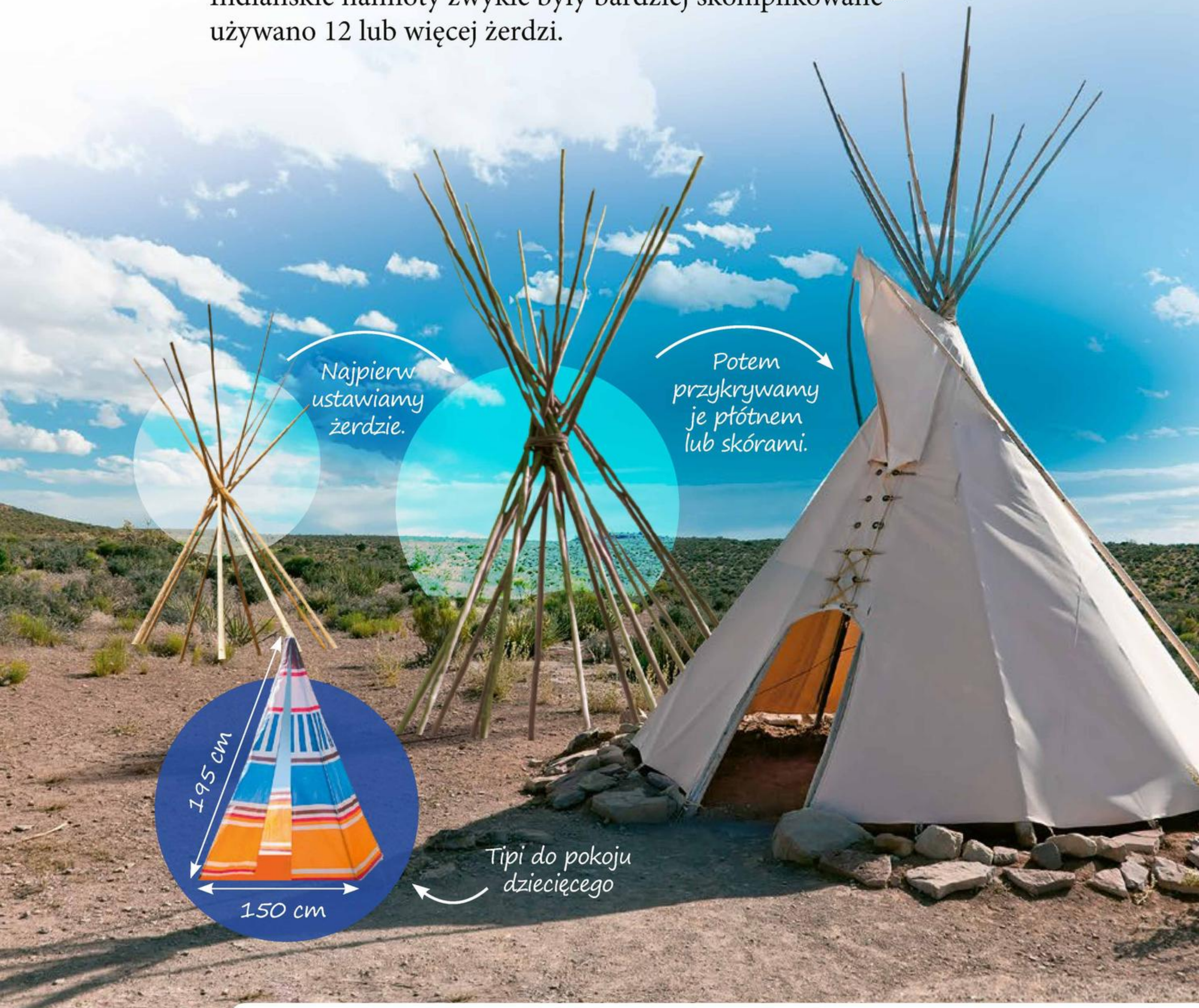
CENNIK	
Całodzienne wyżywienie	40 zł
Noclegi:	
• pierwszy i drugi	50 zł
• trzeci i każdy następny	40 zł

6

Pole powierzchni ostrosłupa

Na dobry początek ›

Tipi to nazwa namiotu Indian Ameryki Północnej.
Jego szkielet tworzą żerdzie oparte o siebie, na nich rozpięte są skóry. Taka konstrukcja przypomina ostrosłup.
Do zbudowania tipi wystarczą już trzy żerdzie.
Indiańskie namioty zwykle były bardziej skomplikowane – używano 12 lub więcej żerdzi.



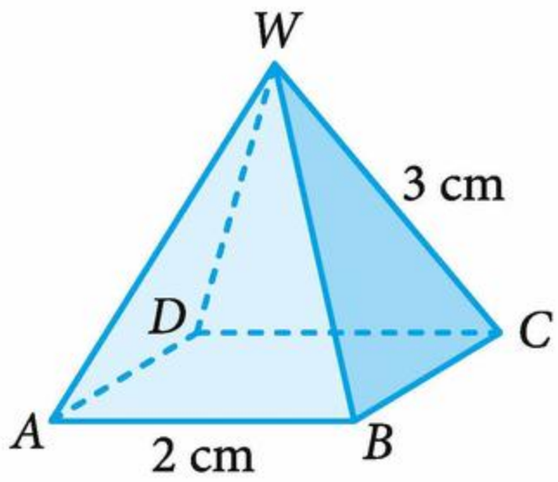
Pytania i polecenia

- Przyjrzyj się tipi z pokoju dziecięcego. Jego podłoga ma kształt kwadratu, a boczne ściany mają kształt przystających trójkątów równoramiennych. Jedna ze ścian jest rozcięta przez środek od podłogi aż do szczytu i tworzy wejście do tipi. Czy suwak o długości 170 cm wystarczy do zamknięcia tego wejścia?

Podobnie jak w przypadku graniastosłupów, do wykonania modelu ostrosłupa potrzebna jest siatka. Dla każdego ostrosłupa można narysować ich wiele. Najprostszym sposobem jest dorysowanie do każdego boku podstawy odpowiedniej trójkątnej ściany.

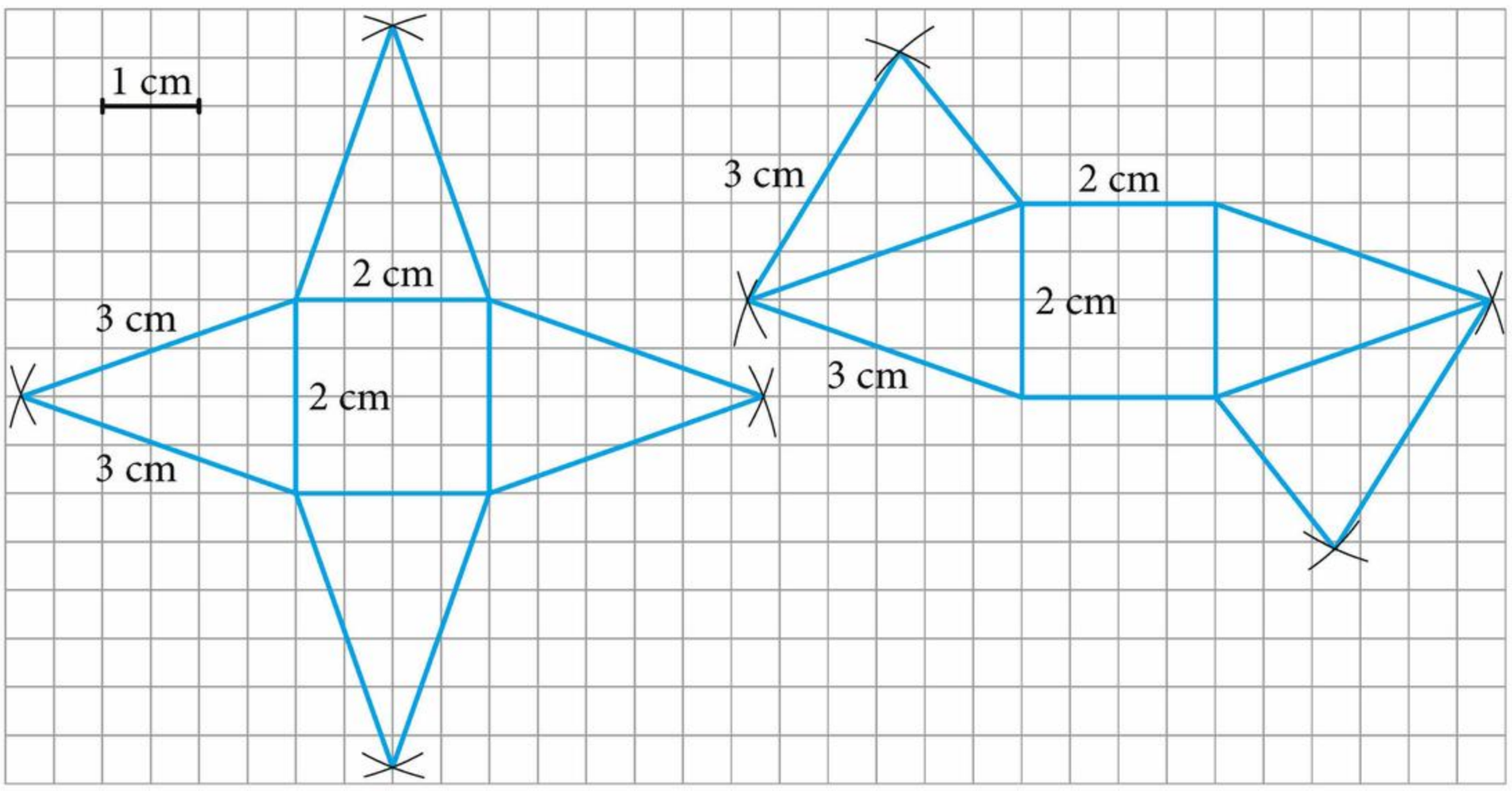
Przykład 1

Naszkicuj dwie różne siatki ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 2 cm, a krawędź boczna – 3 cm (rysunek obok).



Siatka tego ostrosłupa składa się z:
- kwadratu o boku 2 cm (podstawa ostrosłupa),
- czterech trójkątów równoramiennych o bokach: 2 cm, 3 cm, 3 cm (ściany boczne ostrosłupa).

Kwadrat można narysować, wykorzystując kratki. Do narysowania trójkąta o danych bokach należy użyć cyrkla. Ćwiczyliśmy to w szóstej klasie.



Ćwiczenie 1.1

a) Narysuj dwie różne siatki ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy równej 2 cm i krawędzi bocznej równej 3 cm.

b) Czy na rysunkach przedstawiono siatkę czworościanu foremnego?

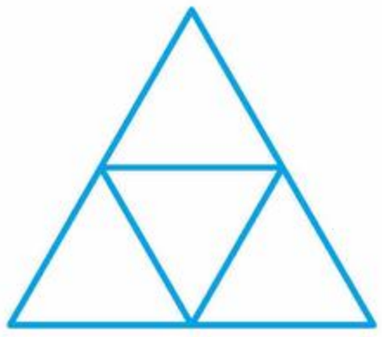
I.



II.



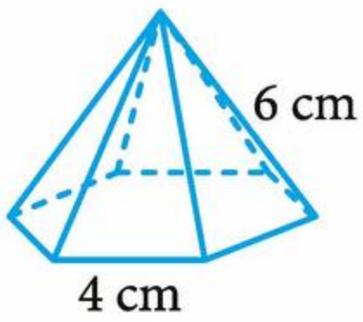
III.

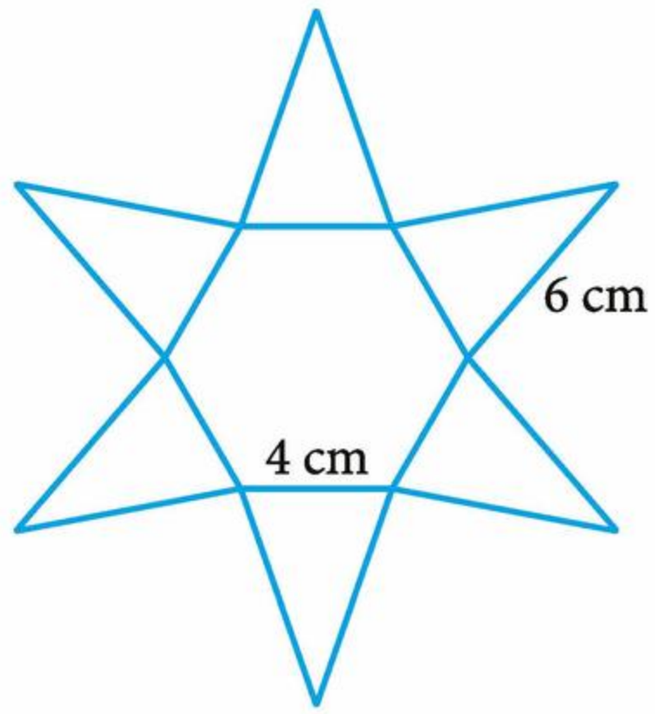


Ćwiczenie 1.2

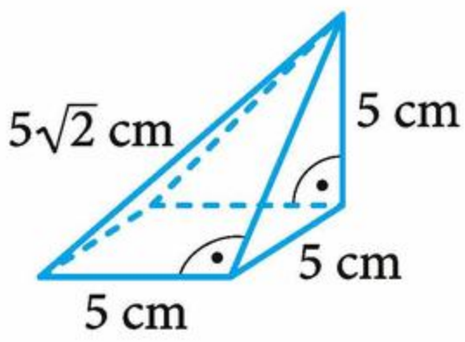
Poniżej przedstawiono rysunek ostrosłupa oraz jego siatkę w pewnej skali. Na odpowiednio dużym kartonie narysuj siatkę tej bryły o wymiarach rzeczywistych. Dorysuj „skrzydełka" przy wybranych ścianach siatki, a następnie wytnij całość i sklej opisany model ostrosłupa.

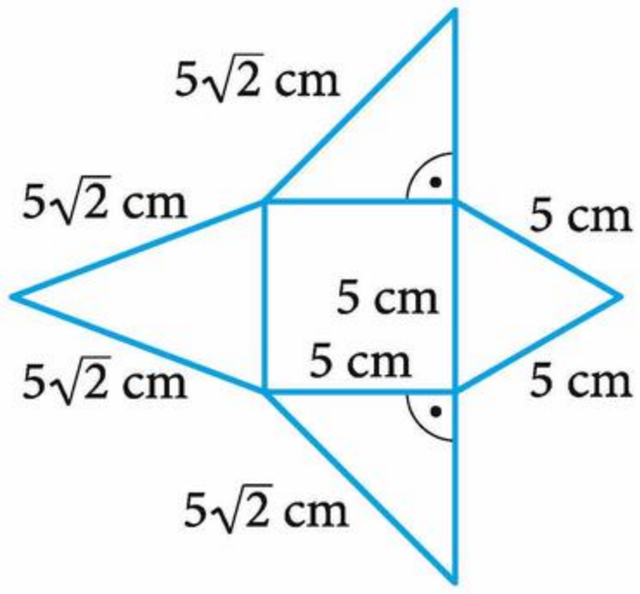
a) ostrosłup prawidłowy sześciokątny



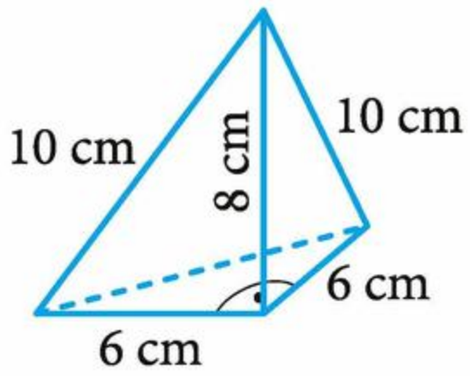


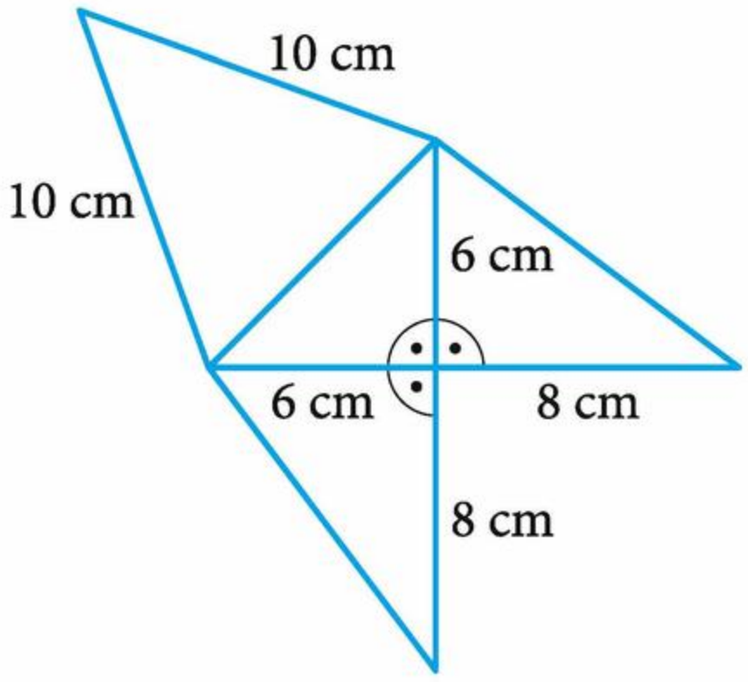
b) ostrosłup czworokątny, w którym podstawą jest kwadrat, trzy ściany są trójkątami równoramiennymi, w tym dwie prostokątnymi, a czwarta ściana jest trójkątem równobocznym





c) ostrosłup trójkątny, w którym podstawą jest trójkąt prostokątny równoramienny, a krawędź boczna wychodząca z wierzchołka kąta prostego podstawy jest wysokością tego ostrosłupa



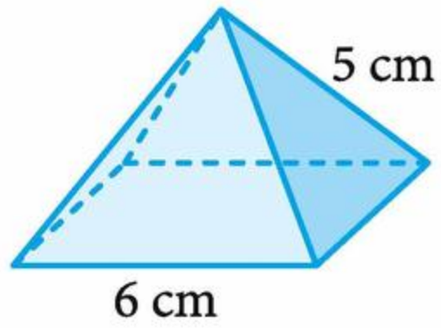


Pole powierzchni ostrosłupa

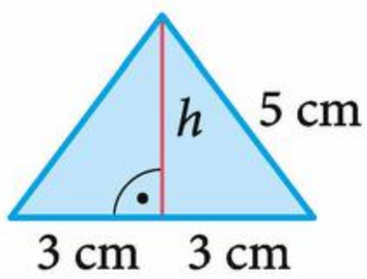
Powierzchnia całkowita ostrosłupa to łączna powierzchnia podstawy i wszystkich ścian bocznych; inaczej mówiąc, jest to powierzchnia siatki ostrosłupa.

Przykład 2

Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego przedstawionego na rysunku.



Ostrosłup jest prawidłowy, więc jego podstawą jest kwadrat o polu równym $P_p = 6 \cdot 6 = 36$ [cm^2].
Każda ze ścian jest trójkątem równoramiennym przedstawionym poniżej. Wysokość tego trójkąta jest równa:
$h = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$ [cm].



Pole jednej ściany bocznej wynosi zatem:
$P_ś = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$ [cm^2].
Pole powierzchni całkowitej P_c tego ostrosłupa wynosi:

$$P_c = 36 + 4 \cdot 12 = 84 \text{ [cm}^2\text{]}.$$

pole podstawy — suma pól ścian bocznych

Odp. Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa równa się 84 cm^2.

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa (P_b) to suma pól ścian bocznych.

Zapamiętaj

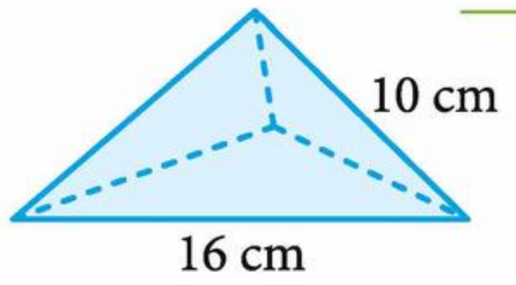
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe sumie pola jego podstawy i pola jego powierzchni bocznej.

$$P_c = P_p + P_b$$

pole powierzchni całkowitej — pole podstawy — pole powierzchni bocznej

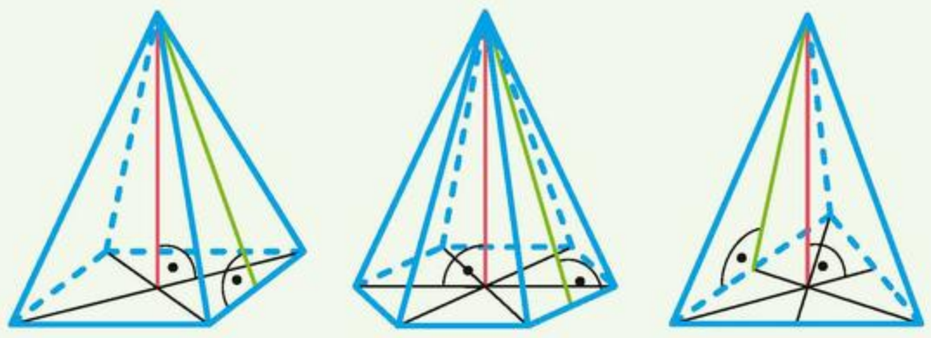
Ćwiczenie 2

Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego o wymiarach podanych na rysunku.



Dobra rada

*Zwracaj uwagę, czy w zadaniu jest mowa o **wysokości ostrosłupa**, czy o **wysokości ściany bocznej**.*

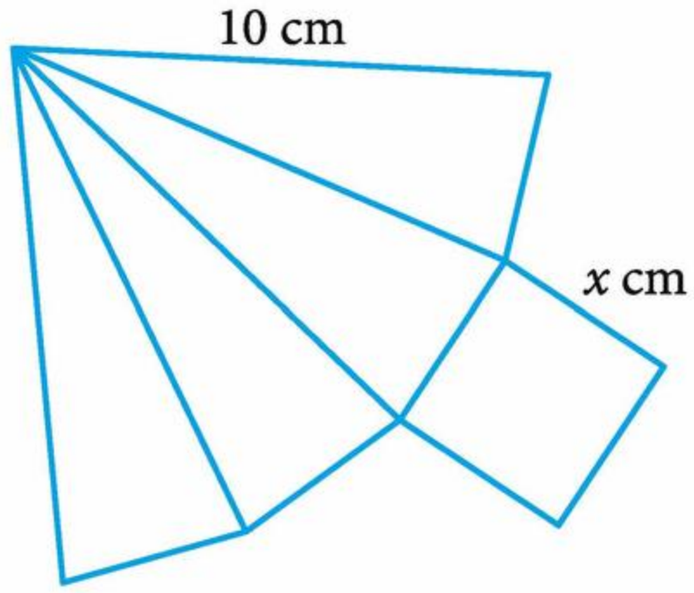


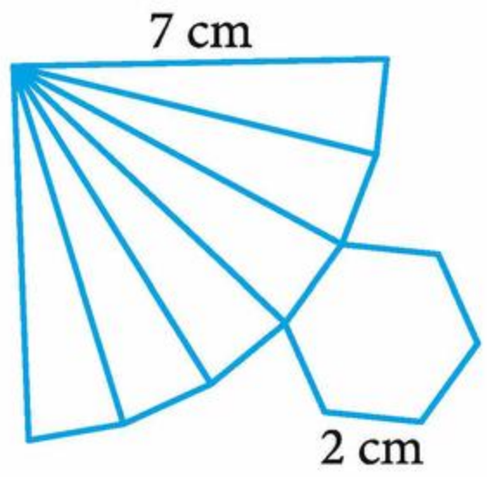
Zadania

1. Narysuj na kartonie siatkę opisanego ostrosłupa i sklej ją tak, aby uzyskać model bryły. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

a) ostrosłup prawidłowy czworokątny o wszystkich krawędziach równych 6 cm
b) czworościan foremny o krawędzi 8 cm

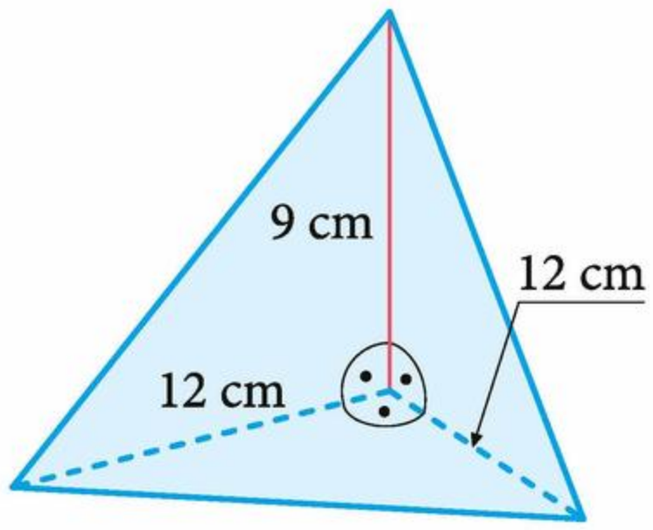
2. Na rysunku przedstawiono siatki dwóch ostrosłupów prawidłowych. Oblicz x, wiedząc, że sumy długości krawędzi w każdym z nich są takie same. Który z tych ostrosłupów ma większe pole podstawy?





3. Obwód ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego wynosi 18 cm, a obwód jego podstawy jest równy 24 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

E **4.** Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa, w którym podstawą jest trójkąt prostokątny równoramienny o przyprostokątnych długości 12 cm, a wysokość, równa 9 cm, jest jego krawędzią boczną (rysunek obok).



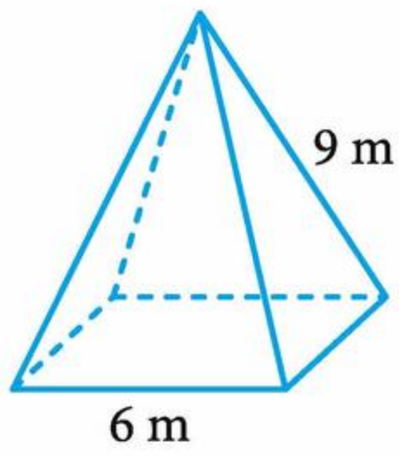
5. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny o boku 4 cm. Wysokość bryły, równa 3 cm, jest jedną z jego krawędzi bocznych. Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość tego ostrosłupa.

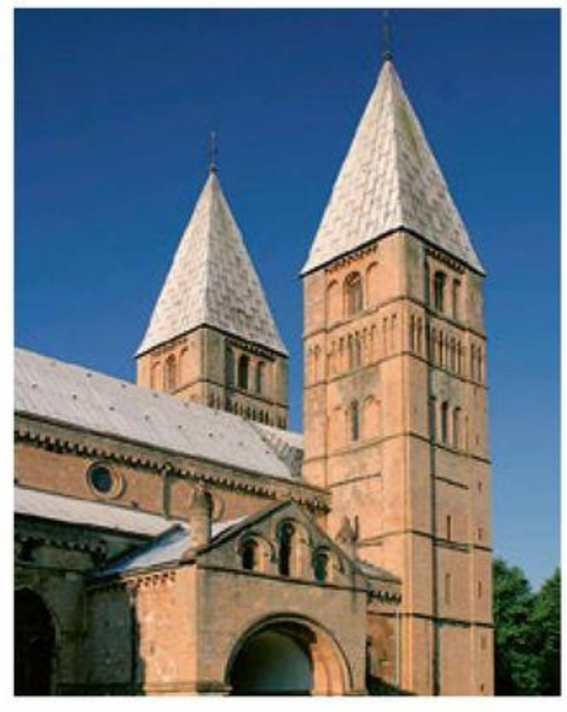
6. Ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego są trójkąty równoboczne. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa wynosi $100\sqrt{3}$. Jaką długość ma krawędź bryły?

7. Szkielet tipi zbudowano z dziesięciu żerdzi, które następnie pokryto materiałem. W ten sposób powstał ostrosłup prawidłowy dziesięciokątny o krawędzi podstawy 1,4 m i krawędzi bocznej 2,5 m. Ile metrów kwadratowych materiału zużyto do budowy tipi?



8. Uzasadnij, że do wykonania dachów dwóch wież, każdego w kształcie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wymiarach podanych na rysunku, potrzeba łącznie ponad 200 m^2 blachy.





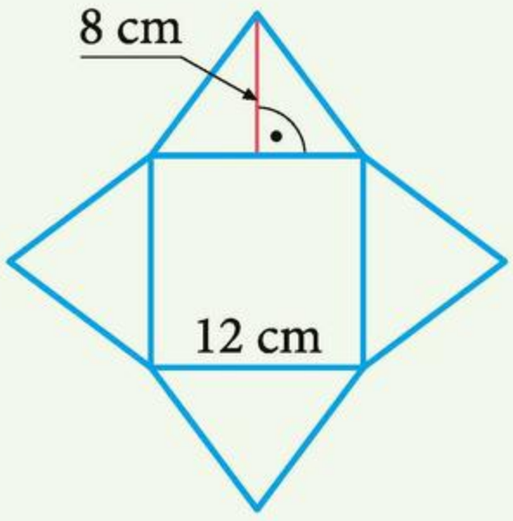
Dla dociekliwych

1. Po rozcięciu papierowego modelu czworościanu okazało się, że jego siatka ma kształt kwadratu. Zaprojektuj tę siatkę i sklej model tego czworościanu.

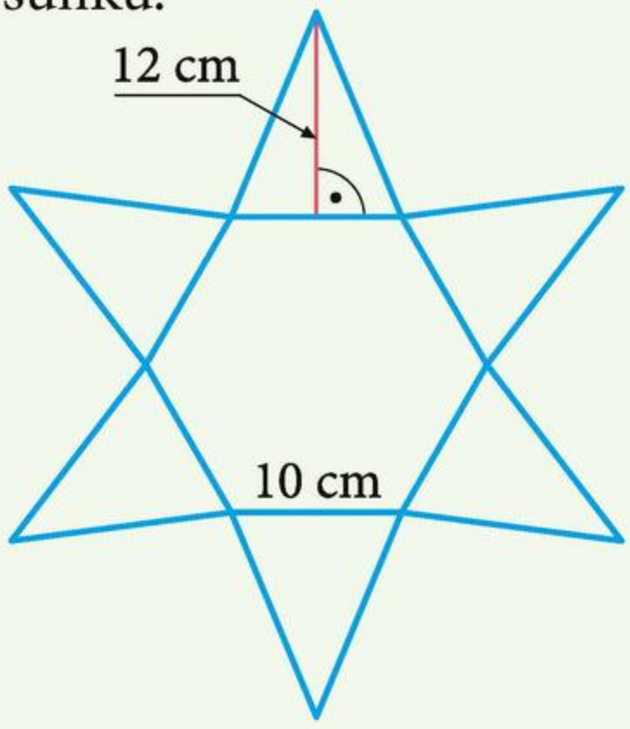
Czy już umiem?

I. Oblicz sumę długości krawędzi oraz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego, którego siatkę przedstawiono na rysunku.

a)



b)



II. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o wszystkich krawędziach długości 4 cm. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań. Zdecyduj, czy w miejsce ? wstawić literę P, oznaczającą zdanie prawdziwe, czy F – oznaczającą zdanie fałszywe.

I.	Pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest dwa razy większe od pola jego podstawy.	?
II.	Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe $(16 + 16\sqrt{3})$ cm^2.	?

III. Oblicz pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego o krawędzi podstawy równej 5 cm.

IV. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci.

a) $2 + 3(x - 1) - 2(x + 2) - 3(2x - 5)$

b) $(x - 2)(3 - x) - 5(x - 1) + 1$

7

Graniastosłupy i ostrosłupy – zadania

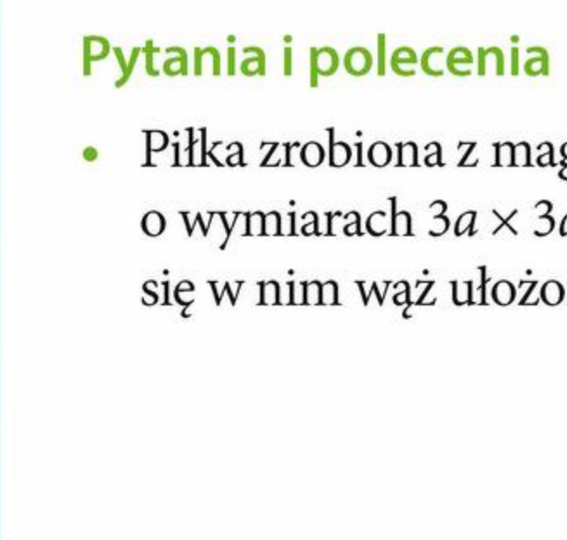
Na dobry początek

Magiczny wąż to układanka logiczna zbudowana z 24 jednakowych elementów o specyficznym kształcie.

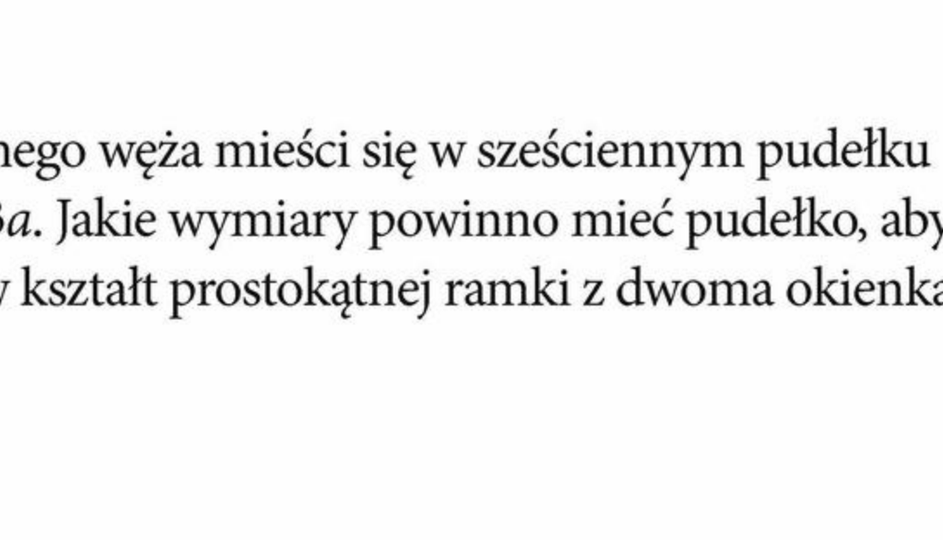
Dowolne dwa sąsiadujące elementy węża są połączone kwadratowymi ściankami tak, że można nimi swobodnie obracać i tworzyć w ten sposób różnorodne kształty.

Pojedynczy element węża ma kształt połowy sześcianu.





Piłka



Ramka z okienkami

Pytania i polecenia

- Piłka zrobiona z magicznego węża mieści się w sześciennym pudełku o wymiarach $3a \times 3a \times 3a$. Jakie wymiary powinno mieć pudełko, aby zmieścił się w nim wąż ułożony w kształt prostokątnej ramki z dwoma okienkami?

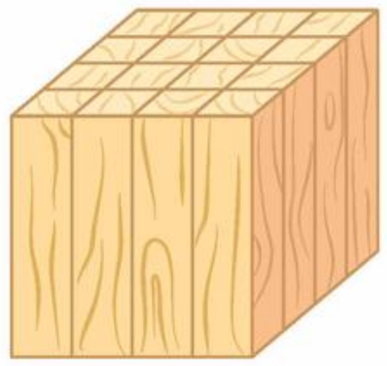
Przykład 1

E

Z drewnianych prostopadłościennych klocków o wymiarach $2\text{ cm} \times 2\text{ cm} \times 8\text{ cm}$ budujemy sześciany. Czy można zbudować sześcian o podanej objętości? Jeśli tak – ile potrzeba takich klocków? Jeśli nie – dlaczego?

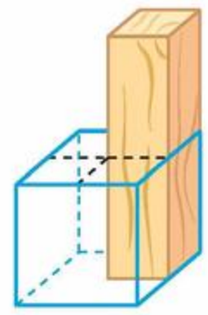
a) 512 cm^3 **b)** 64 cm^3 **c)** 1000 cm^3

a) Sześcian o objętości 512 cm^3 ma krawędź długości $\sqrt[3]{512} = 8\text{ [cm]}$.



Nasz klocek ma taką długość jak krawędź sześcianu, a szerokość klocka mieści się dokładnie cztery razy w krawędzi sześcianu. Aby zbudować taki sześcian, potrzeba 16 klocków.

b) Sześcian o objętości 64 cm^3 ma krawędź długości $\sqrt[3]{64} = 4\text{[cm]}$.



Nie da się zbudować takiego sześcianu, bo nasze klocki są za długie.

c) Jeden klocek ma objętość $2 \cdot 2 \cdot 8 = 32\text{ [cm}^3\text{]}$. Każda budowla wykonana z takich klocków ma objętość będącą wielokrotnością 32 cm^3, a 1000 nie jest wielokrotnością liczby 32. Takiego sześcianu nie da się zbudować.

Uwaga. Zauważ, że ten argument działa tylko wtedy, gdy chcemy uzasadnić, że sześcianu nie da się zbudować. W podpunkcie b) wskazana objętość była wielokrotnością 32 cm^3, a i tak nie dało się takiego sześcianu zbudować, bo trzeba by w tym celu pociąć klocki na mniejsze.

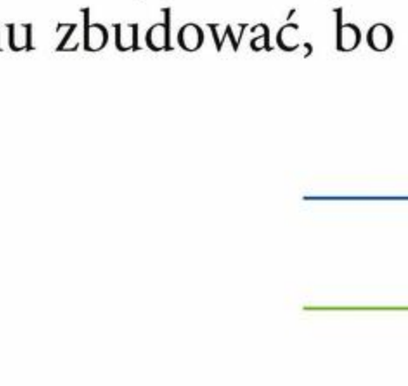
Ćwiczenie 1

Czy z prostopadłościennych klocków o wymiarach $1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 3\text{ cm}$ można zbudować sześcian o podanej objętości? Odpowiedź uzasadnij.

a) 343 cm^3 **b)** $27\,000\text{ cm}^3$

Przykład 2

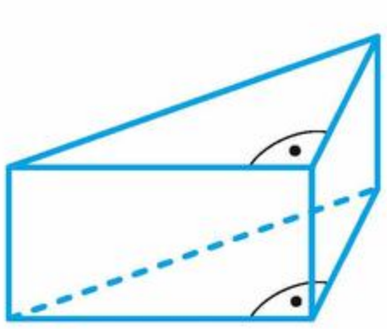
Na rysunku przedstawiono fragment siatki pewnego graniastosłupa prostego. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa.

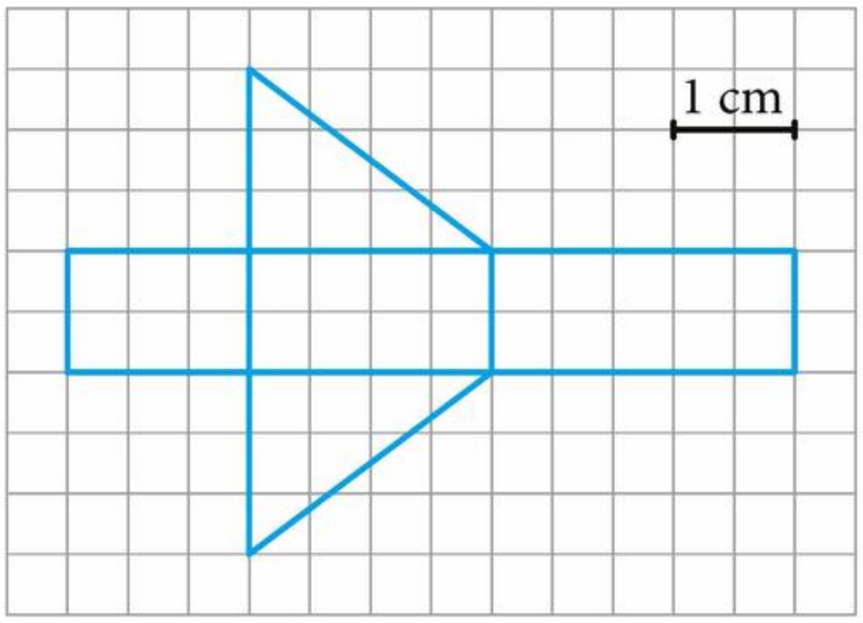


Dany jest tylko fragment siatki, ale na jego podstawie możemy wywnioskować, jak wygląda bryła. Z treści zadania wiemy, że jest to graniastosłup prosty. Oznacza to, że trójkątna ściana jest podstawą tego graniastosłupa. Druga podstawa ma taki sam kształt, a pozostałe ściany są prostokątami (jedna jest narysowana, brakuje jeszcze dwóch).

Z rysunku w treści zadania możemy odczytać długości prawie wszystkich krawędzi. Jedynie długość przeciwprostokątnej podstawy graniastosłupa musimy obliczyć. Z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$x^2 = (1{,}5)^2 + 2^2$$
$$x^2 = 2{,}25 + 4 = 6{,}25$$
$$x = 2{,}5 \text{ [cm]}$$





Teraz możemy obliczyć pole podstawy P_p, pole powierzchni całkowitej P_c oraz objętość V.

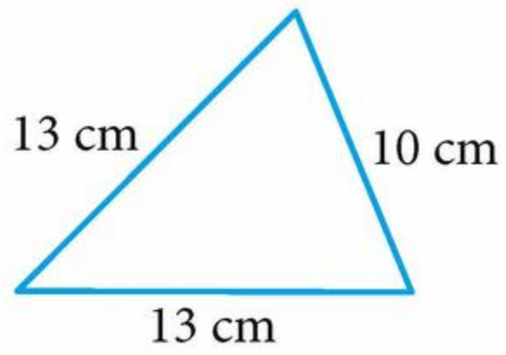
$$P_p = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 2 = 1{,}5 \text{ [cm}^2\text{]}$$
$$P_c = 2 \cdot P_p + P_b = 2 \cdot 1{,}5 + 1 \cdot 6 = 9 \text{ [cm}^2\text{]}$$
$$V = P_p \cdot H = 1{,}5 \cdot 1 = 1{,}5 \text{ [cm}^3\text{]}$$

Jak widać na rysunku siatki, trzy ściany boczne tworzą razem prostokąt 1 cm × 6 cm.

Odp. Pole powierzchni całkowitej jest równe 9 cm^2, a objętość wynosi 1,5 cm^3.

Ćwiczenie 2

Na rysunku przedstawiono jedną ze ścian bocznych ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa oraz sumę długości jego krawędzi.



Zadania

1. **a)** Kostka Rubika 3 × 3 × 3 (patrz zdjęcie) składa się z 26 kolorowych klocków oraz znajdującego się wewnątrz mechanizmu. Ile klocków ma tylko jedną kolorową ścianę, ile – dwie, a ile – trzy?



b) Odpowiedz na pytania z podpunktu a) dla kostki Rubika 5 × 5 × 5.

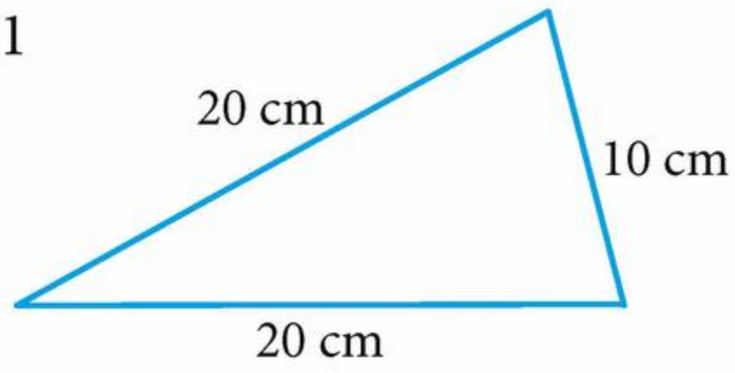
c) Drewniany sześcienny klocek pomalowano na zielono, a następnie rozcięto na 64 jednakowe sześciany. Ile z nich ma pomalowaną jedną ścianę, ile – dwie, a ile – trzy? Ile sześcianów jest niepomalowanych?

d) Odpowiedz na pytania z podpunktu c) dla sześciennego klocka podzielonego na 8000 jednakowych sześcianów.

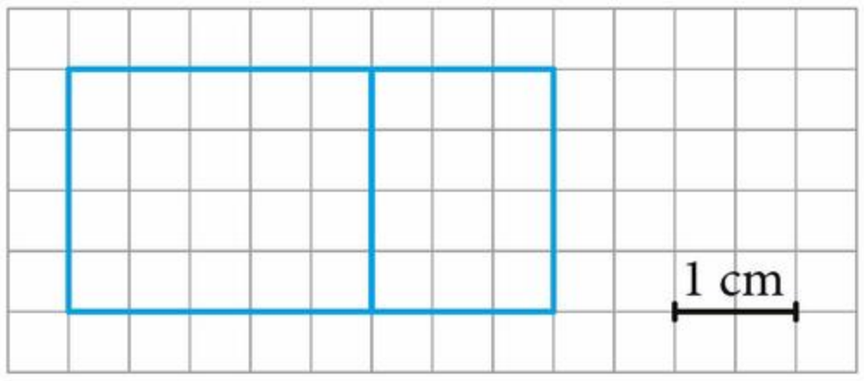
2. Na rysunku 1 przedstawiono ścianę boczną ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego. Ile centymetrów drutu potrzeba, aby wykonać szkielet tego ostrosłupa?

E **3.** Na rysunku 2 przedstawiono fragment siatki prostopadłościanu. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego prostopadłościanu.

Rys. 1



Rys. 2

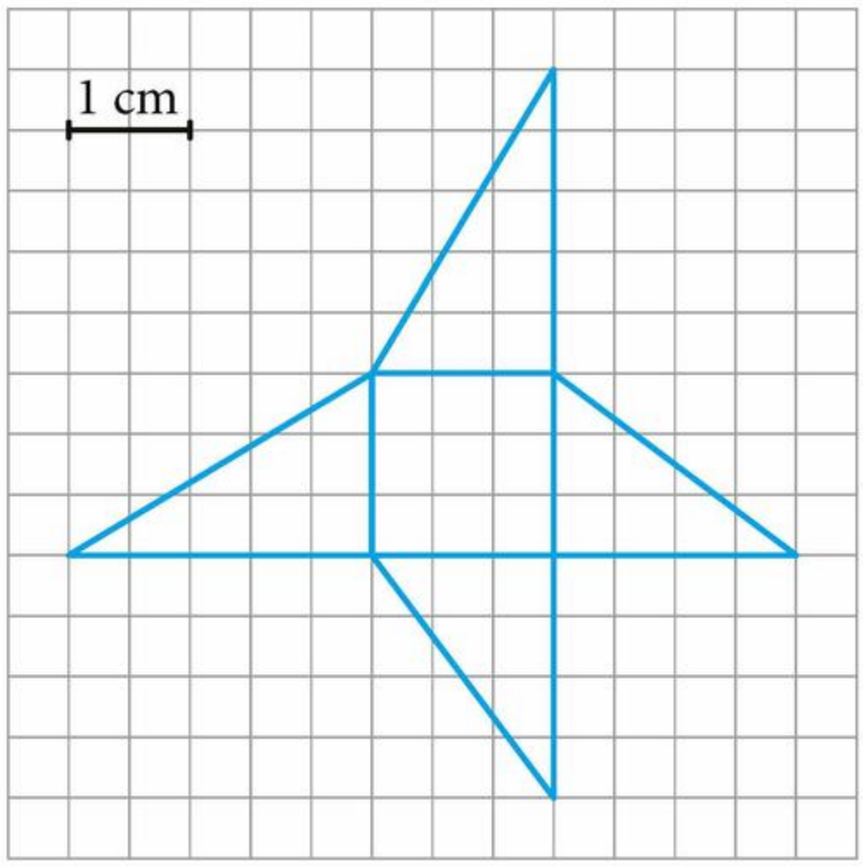


4. Na rysunku obok przedstawiono siatkę ostrosłupa.

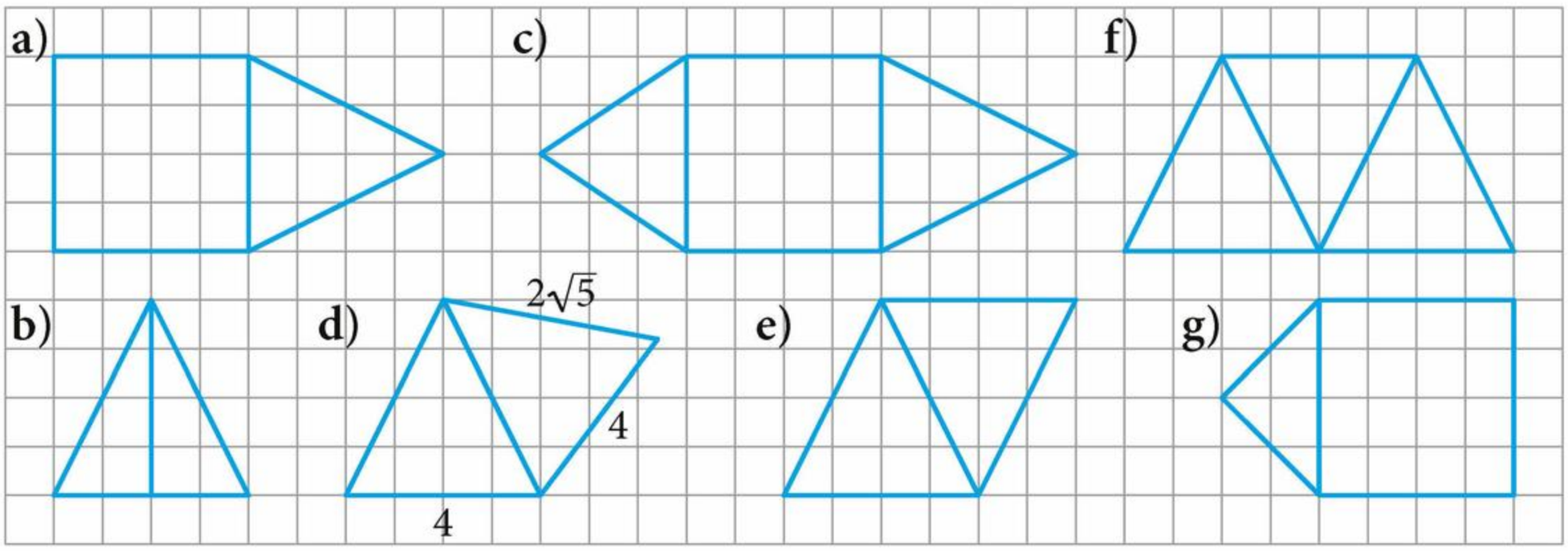
a) Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

b) Oblicz jego objętość.

c) Ile kosztowałby taki ostrosłup wykonany ze złota o gęstości $19\frac{g}{cm^3}$ (taka gęstość oznacza, że 1 cm^3 złota waży 19 g)? Przyjmij, że 1 g złota kosztuje 250 zł.



5. Czy rysunek można uzupełnić tak, aby przedstawiał siatkę ostrosłupa czworokątnego prawidłowego? Jeśli tak – przerysuj rysunek do zeszytu i uzupełnij go. Jeśli nie – wyjaśnij dlaczego.

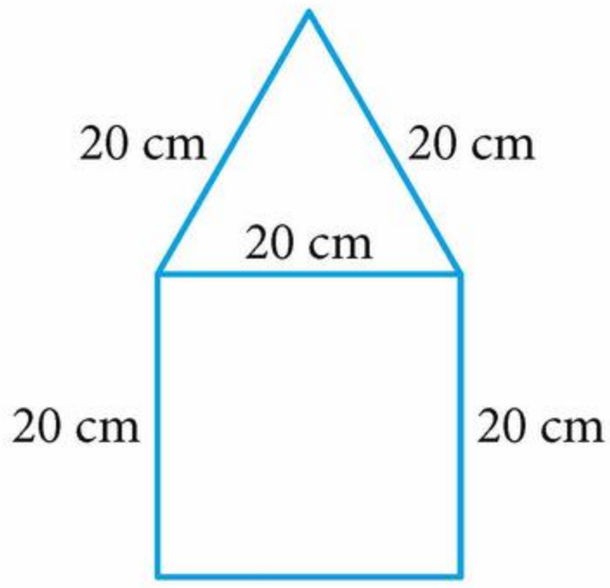


6. Spośród rysunków w zadaniu 5 tylko jeden nie przedstawia fragmentu siatki ostrosłupa czworokątnego. Wskaż ten rysunek i wyjaśnij dlaczego. W pozostałych przypadkach spróbuj sobie wyobrazić, jak mógłby wyglądać taki ostrosłup. Jeśli sprawia ci to trudność, przerysuj dany fragment siatki (najlepiej powiększ go w skali, np. 1 kratka – 1 cm), wytnij, złóż wzdłuż krawędzi i wtedy spróbuj wyobrazić sobie taki ostrosłup.

7. Wykonaj polecenia.

a) Przerysuj rysunek do zeszytu i dokończ tak, aby otrzymać siatkę ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

b) Przerysuj rysunek do zeszytu i dokończ tak, aby otrzymać siatkę graniastosłupa. Jaki to graniastosłup? Oblicz jego pole powierzchni całkowitej i objętość.



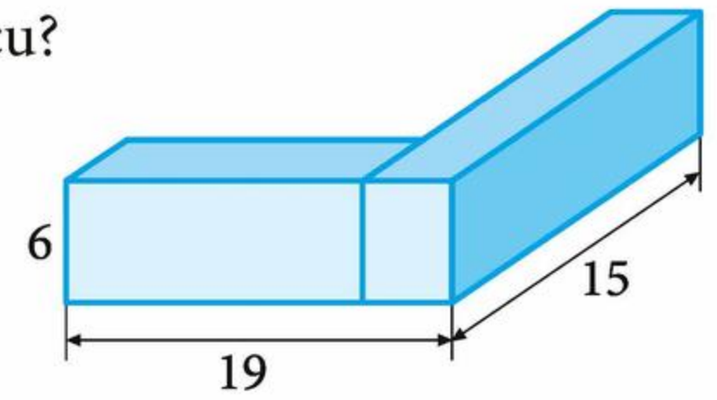
E **8.** Zosia ma 200 sześciennych klocków. Zbudowała z nich największy możliwy sześcian. Z klocków, które pozostały, znów zbudowała największy możliwy sześcian i tak dalej.

a) Ile sześcianów zbudowała?

b) Jakie są ich objętości?

c) Ile pojedynczych klocków zostało Zosi na końcu?

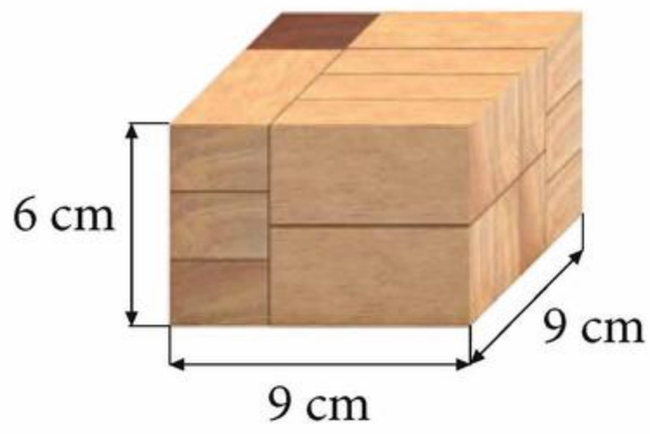
E **9.** Po sklejeniu dwóch jednakowych prostopadłościanów powstała bryła przedstawiona na rysunku. Oblicz pole powierzchni i objętość tej bryły.



10. Z 13 prostopadłościennych klocków zbudowano większy prostopadłościan (jak na rysunku). Wszystkie jasne klocki są jednakowe, a ciemny jest inny.

a) Jakie wymiary ma jasny klocek, a jakie – ciemny?

b) Czy z samych jasnych klocków dałoby się zbudować prostopadłościan o takich samych wymiarach jak ten przedstawiony na rysunku? A z samych ciemnych? Uzasadnij odpowiedź.

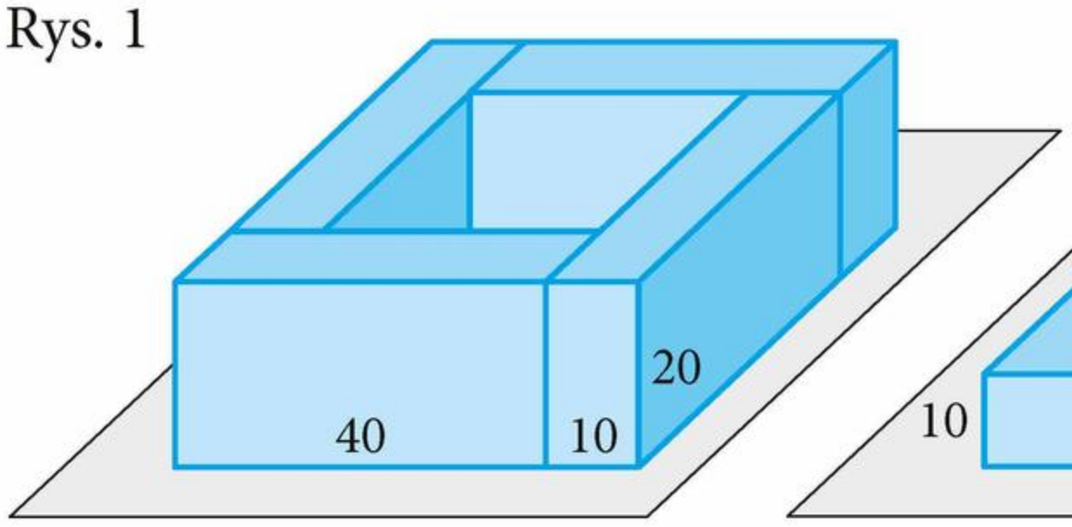


E **11.** Cztery plastikowe klocki o wymiarach 10 cm × 20 cm × 40 cm przyklejono do plastikowej płytki (rys. 1).

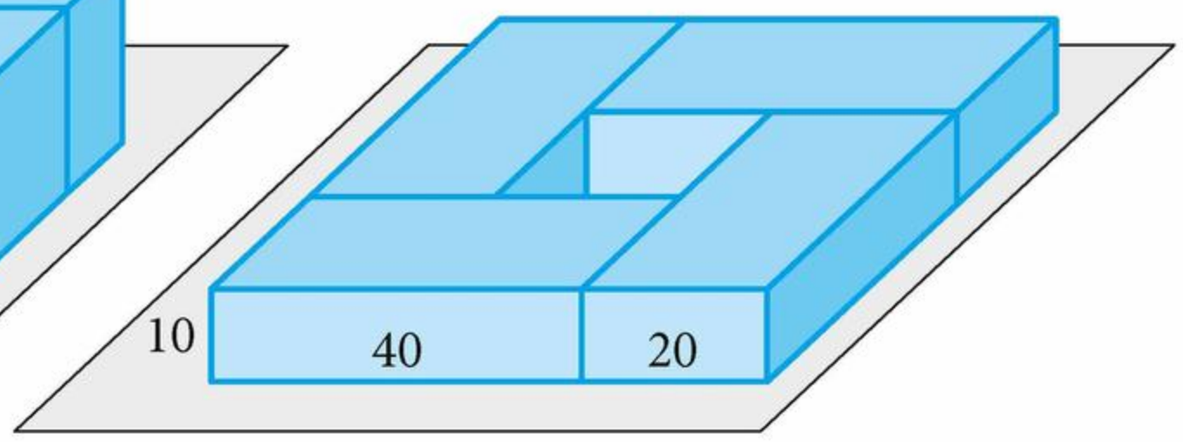
a) Ile litrów wody można nalać do tak utworzonego naczynia?

b) Czy odpowiedź byłaby inna, gdyby klocki były ułożone tak jak na rysunku 2?

Rys. 1



Rys. 2



12. Czy z drewnianych klocków o wymiarach 2 cm × 3 cm × 4 cm da się ułożyć sześcian o podanej objętości? Uzasadnij odpowiedź.

a) 729 cm^3 **b)** 1728 cm^3 **c)** 3375 cm^3

E **13.** Mamy do dyspozycji 30 sześciennych klocków o krawędzi 2 cm. Budujemy z nich największy możliwy sześcian. Ile klocków pozostanie?

A. 1 **B.** 3 **C.** 6 **D.** 22

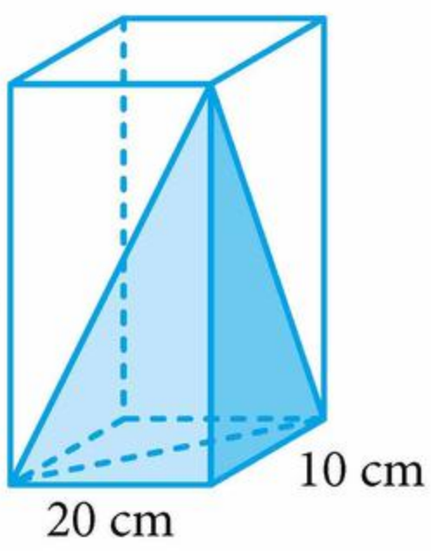
14. Na rysunkach przedstawiono trzy jednakowe prostopadłościany. W każdym z nich połączono w różny sposób wierzchołki lub wierzchołki i środek ściany. Otrzymano w ten sposób trzy różne ostrosłupy.

a) Narysuj podstawę każdego z ostrosłupów w skali 1 : 10. W których przypadkach można wybrać podstawę na wiele sposobów?

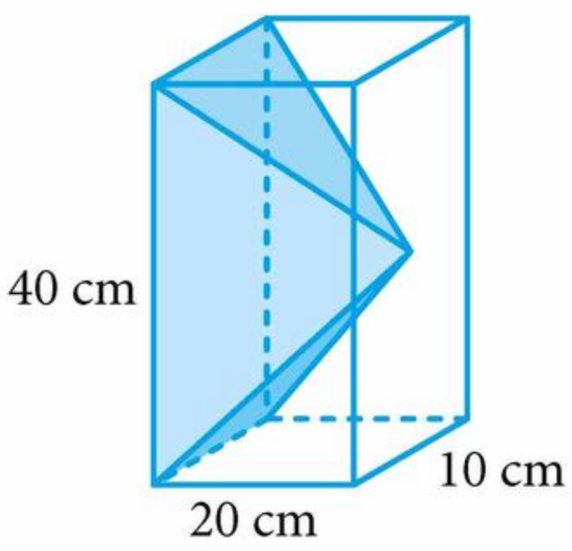
b) Oblicz pole narysowanej przez siebie podstawy każdego z ostrosłupów.

c) Podaj wysokość każdego ostrosłupa poprowadzoną na wybraną przez siebie podstawę.

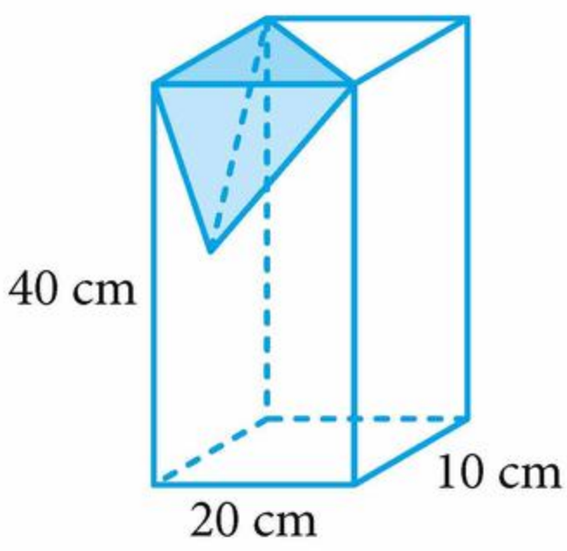
Rys. 1



Rys. 2

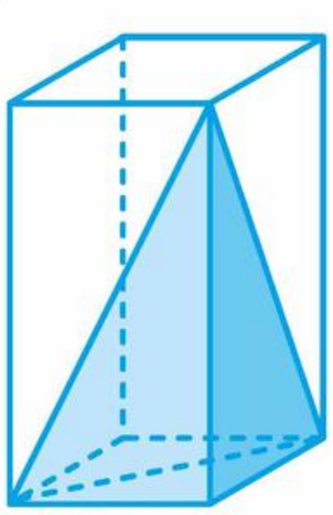


Rys. 3

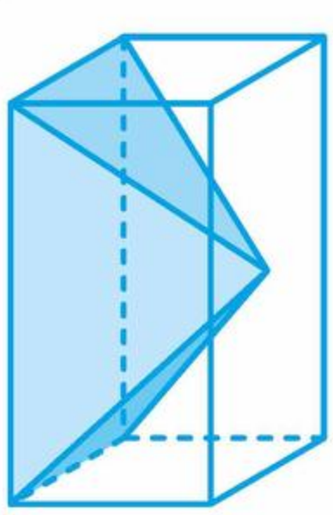


E :D **15.** Na rysunkach przedstawiono trzy jednakowe prostopadłościany. W każdym z nich połączono w różny sposób wierzchołki lub wierzchołki i środek ściany. Otrzymano w ten sposób trzy różne ostrosłupy. Objętość ostrosłupa na rysunku 1 oznaczmy literą V. Udowodnij, że ostrosłup na rysunku 2 ma objętość równą $2V$, a ostrosłup na rysunku 3 ma objętość równą $\frac{1}{2}V$.

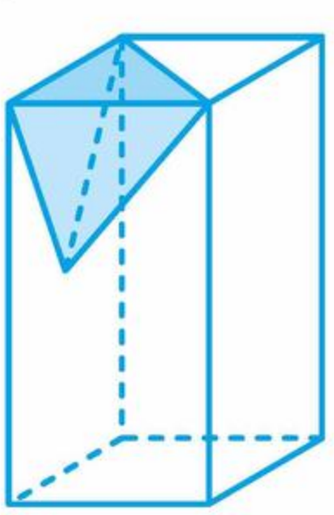
Rys. 1



Rys. 2

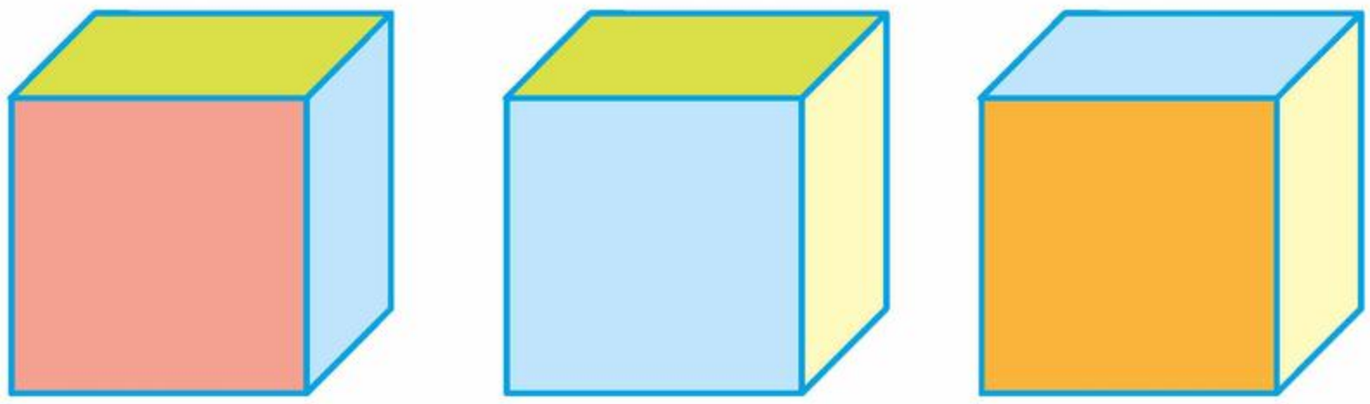


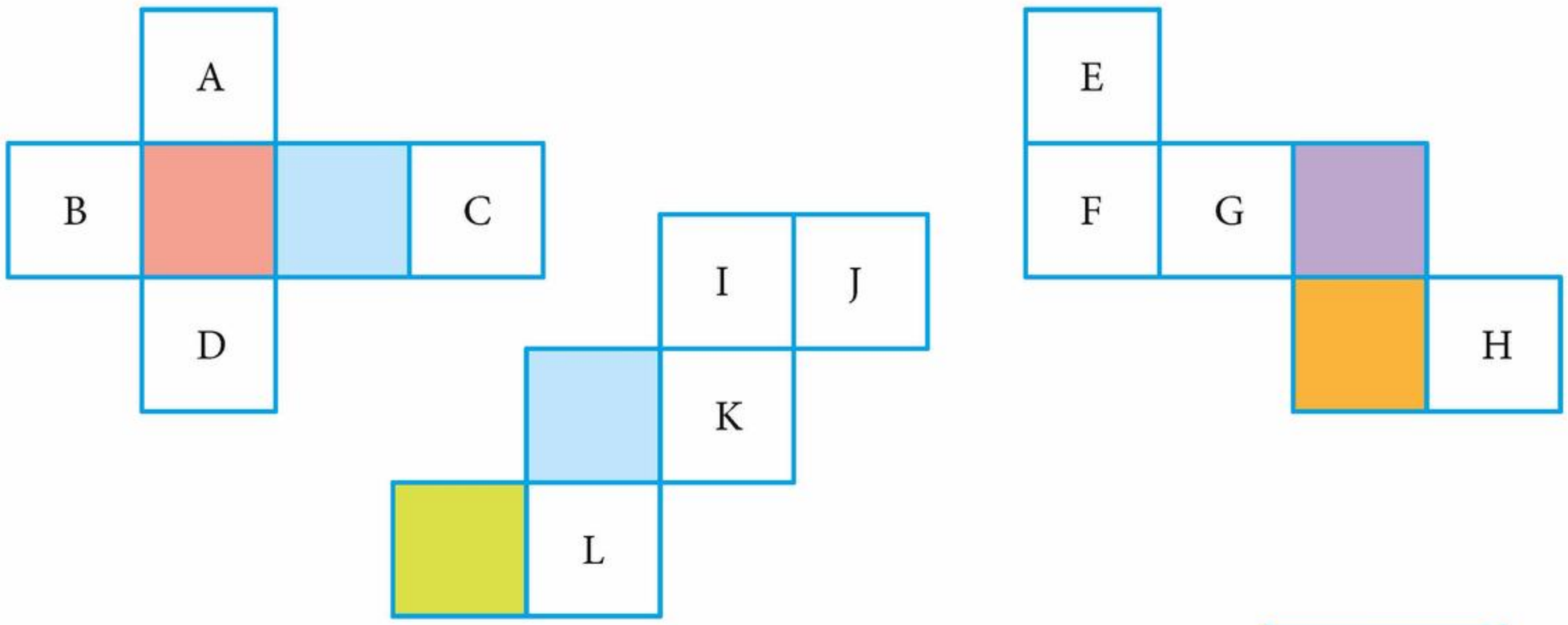
Rys. 3



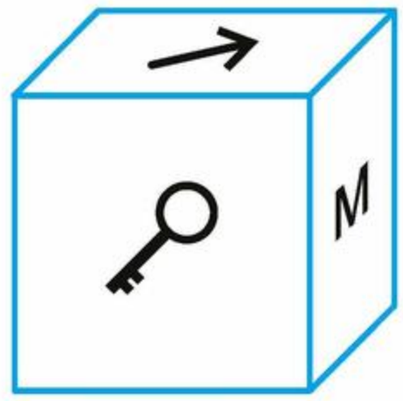
Wskazówka. Zwróć uwagę, że w zadaniu nie są podane wymiary graniastosłupa, nie możesz więc wykonywać działań na liczbach.

E **16.** Na rysunkach przedstawiono ten sam sześcian pomalowany na sześć kolorów: żółty, czerwony, niebieski, zielony, pomarańczowy i fioletowy oraz trzy jego siatki. Określ, jakie kolory powinny mieć ściany oznaczone literami.

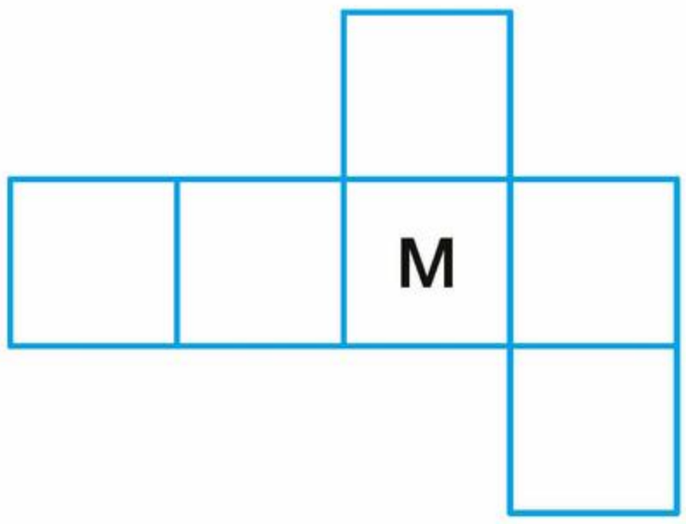




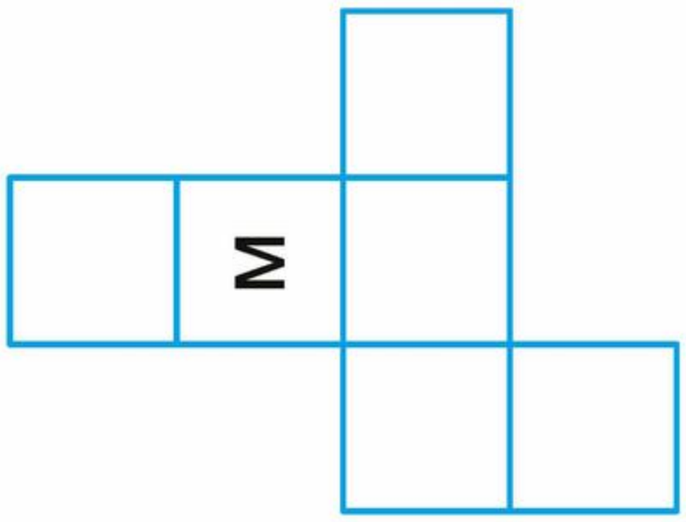
17. Na trzech ścianach sześciennej kostki wykonano rysunki. Pozostałe ściany są białe. Przerysuj do zeszytu narysowaną siatkę tej kostki i dorysuj brakujące rysunki. Zwróć uwagę na właściwe ułożenie rysunków.



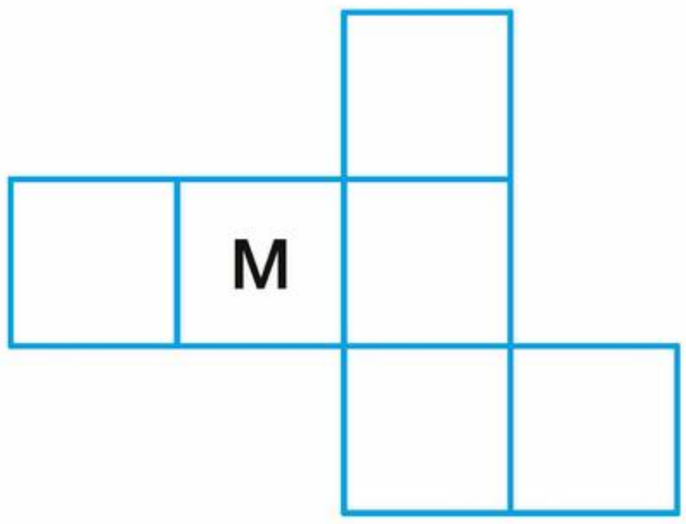
a)



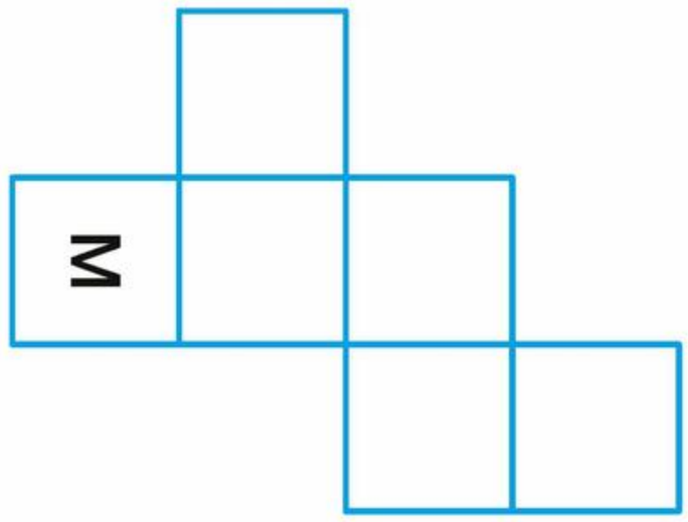
b)



c)



d)



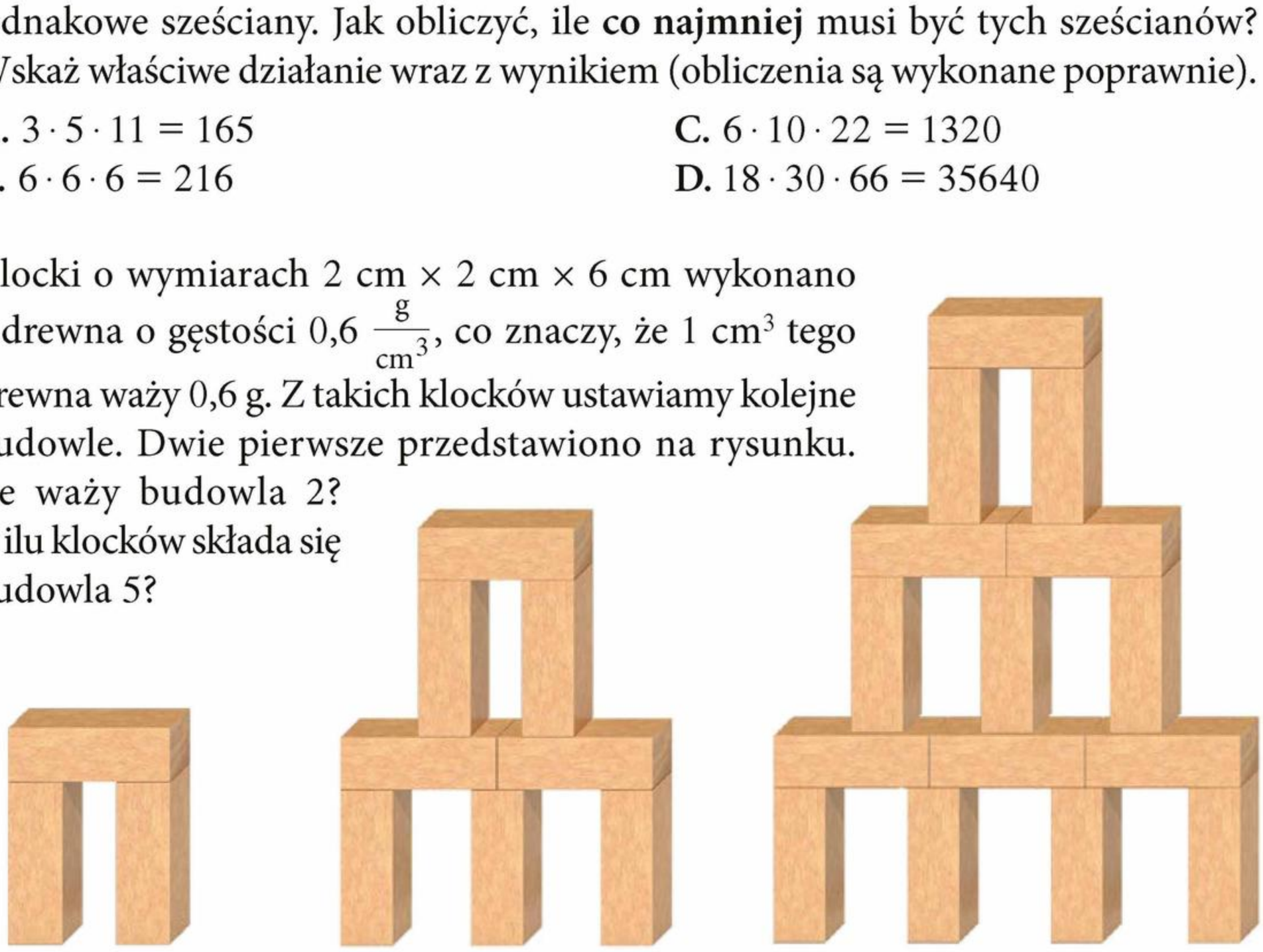
18. Do szklanki o pojemności 220 ml wlano lemoniadę do $\frac{3}{4}$ wysokości. Następnie wrzucono do niej cztery jednakowe sześcienne kostki lodu o krawędzi równej 2 cm. Czy po wrzuceniu kostek lodu lemoniada wylała się ze szklanki? Wybierz odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie spośród zdań A i B.

TAK	ponieważ	A.	łączna objętość czterech kostek lodu jest równa 32 cm^3, a to jest więcej, niż może się zmieścić w szklance.
NIE		B.	w szklance zmieści się dodatkowe 55 ml, a objętość czterech kostek lodu to 32 ml.

19. Prostopadłościan o wymiarach 18 cm × 30 cm × 66 cm chcemy podzielić na jednakowe sześciany. Jak obliczyć, ile **co najmniej** musi być tych sześcianów? Wskaż właściwe działanie wraz z wynikiem (obliczenia są wykonane poprawnie).

A. $3 \cdot 5 \cdot 11 = 165$
B. $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
C. $6 \cdot 10 \cdot 22 = 1320$
D. $18 \cdot 30 \cdot 66 = 35640$

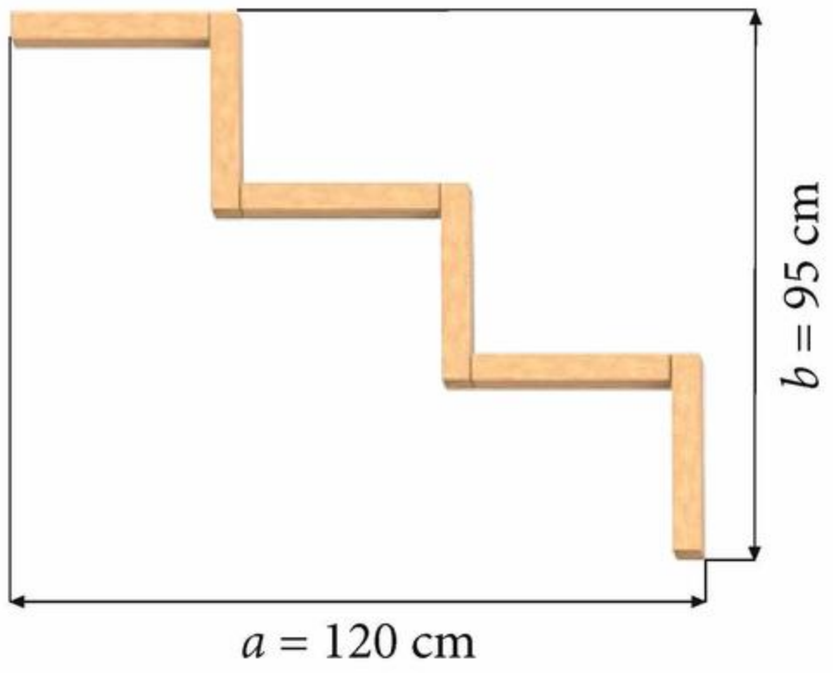
E **20.** Klocki o wymiarach 2 cm × 2 cm × 6 cm wykonano z drewna o gęstości 0,6 $\frac{g}{cm^3}$, co znaczy, że 1 cm^3 tego drewna waży 0,6 g. Z takich klocków ustawiamy kolejne budowle. Dwie pierwsze przedstawiono na rysunku. Ile waży budowla 2? Z ilu klocków składa się budowla 5?



Budowla 1 Budowla 2 Budowla 3

21. Sześć jednakowych prostopadłościennych klocków ustawiono jak na rysunku. Każdy z klocków ma dwa wymiary takie same, a trzeci większy.

a) Oblicz długości krawędzi klocka.
b) Oblicz objętość klocka.
c) Wyobraź sobie, że w analogiczny sposób układamy 100 takich klocków. Ile wynosiłyby wymiary odpowiadające wymiarom *a* i *b* na rysunku?



Dla dociekliwych

Z ośmiu sześciennych klocków o jednakowych wymiarach zbudowano sześcian. Na każdym klocku znajduje się inna litera. Następnie sześcian pomalowano trzema kolorami: na czerwono, zielono i niebiesko, tak że przeciwległe ściany mają ten sam kolor.



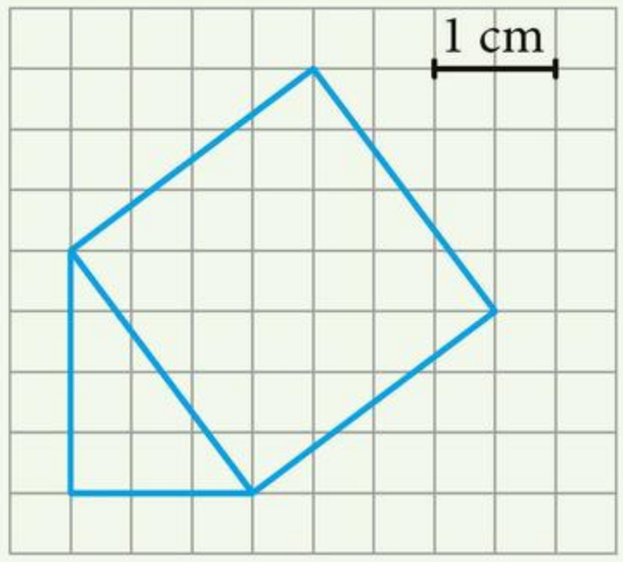
1. Ile ścian czerwonych, zielonych, niebieskich i niepokolorowanych ma pojedynczy klocek? Czy dla każdego klocka odpowiedź jest taka sama?

2. Czy można zamienić miejscami klocki A i B tak, aby kolory pasowały? Jak jest w przypadku klocków A i C, A i D, A i H? Dlaczego?

Wskazówka. Jeśli masz wątpliwości, skorzystaj z modeli sześcianów.

Czy już umiem?

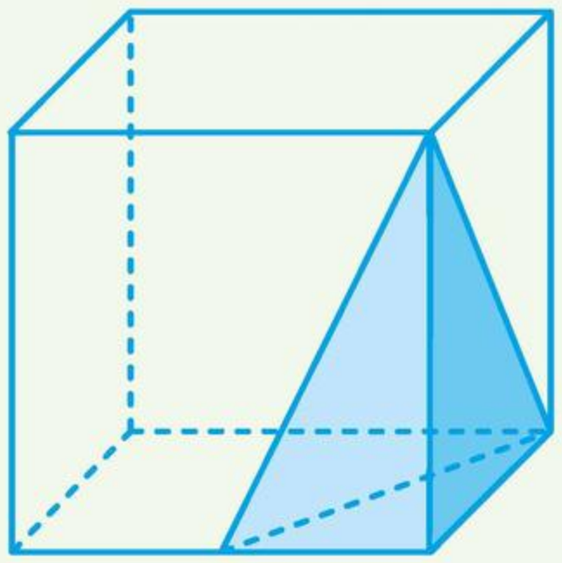
I. Przerysuj rysunek do zeszytu i dokończ tak, aby uzyskać siatkę graniastosłupa. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tej bryły.



II. Mamy 98 sześciennych klocków. Chcemy dołożyć jeszcze trochę klocków, aby ze wszystkich móc zbudować duży sześcian. Ile co najmniej klocków musimy dołożyć?

A. 2 **B.** 17 **C.** 27 **D.** 34

III. W sześcianie o krawędzi 20 cm połączono wierzchołki i środek krawędzi tak, jak pokazano na rysunku. Oblicz objętość powstałego ostrosłupa.



IV. Oblicz.

a) $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}$

b) $24\cdot 2:8\cdot 3$

c) $-3^2+\frac{2^2}{3}$

8

Bryły – zadania

Na dobry początek ›

Kryształy mogą być małe jak drobinki soli albo wielkie jak 15-metrowe kryształy selenitu w kopalni w Meksyku. Wszystkie jednak mają kształt wielościanów. Na przykład kryształki soli kuchennej są sześcianami. Widać to przez lupę.



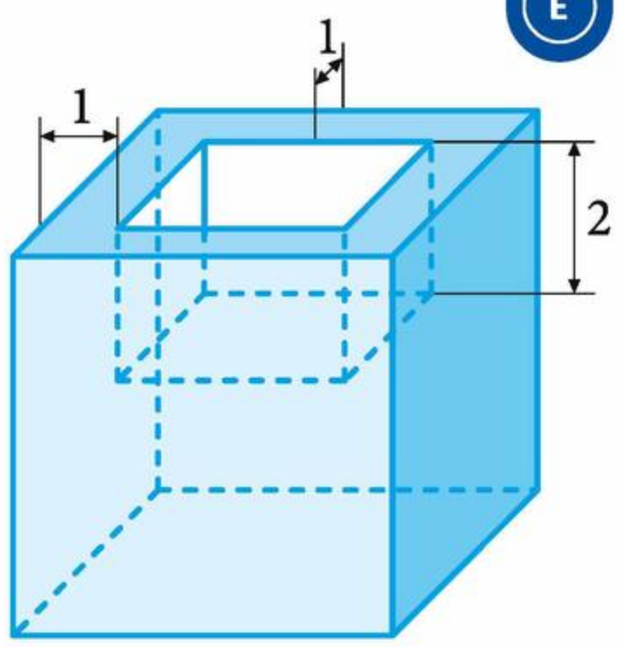
Pytania i polecenia

- Odszukaj na zdjęciach minerały, wiedząc, że ich kryształy mają podany kształt: **piryt** – sześcian o połysku metalicznym; **fluoryt** – prostopadłościan; **akwamaryn** i **wanadynit** – graniastosłupy o podstawie sześciokątnej (w przypadku wanadynitu wysokość bryły jest krótsza od krawędzi podstawy); **kwarc** – graniastosłup zakończony ostrosłupem; **spinel** – dwa ostrosłupy sklejone podstawami.
- Ciemnoczerwone kryształy na zdjęciu 1. to **granaty**. Czy można taką bryłę otrzymać przez sklejenie ostrosłupa i graniastosłupa?

Przykład 1

E

Z sześcianu o krawędzi 5 wycięto prostopadłościan o wymiarach $3 \times 3 \times 2$ (jak na rysunku). Oblicz objętość i pole powierzchni pozostałej bryły.



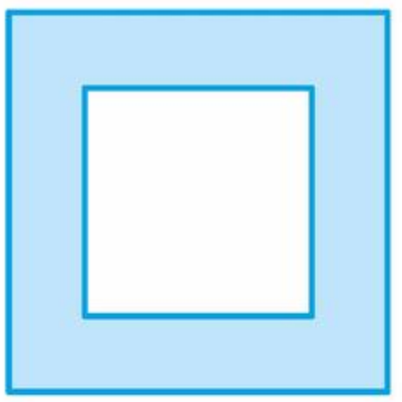
Sześcian przed wycięciem prostopadłościanu miał objętość $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Jego objętość zmniejszyła się o objętość prostopadłościanu, czyli o $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$.

Otrzymana bryła ma objętość: $125 - 18 = 107$.

Rozważmy, jakie ściany ma otrzymana bryła, i obliczmy ich pola. Bryła ma:

- 5 ścian takich jak sześcian na początku, każda o polu $5 \cdot 5 = 25$,
- 1 ścianę o kształcie jak na rysunku obok i polu $5 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 25 - 9 = 16$,
- 1 kwadratową ścianę o boku 3 i polu $3 \cdot 3 = 9$,
- 4 prostokątne ściany o wymiarach 3×2 i polu $3 \cdot 2 = 6$.

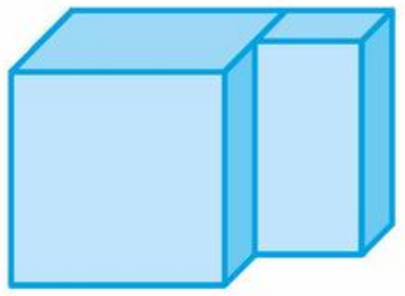


Zatem pole powierzchni otrzymanej bryły jest równe:
$P = 5 \cdot 25 + 16 + 9 + 4 \cdot 6 = 125 + 16 + 9 + 24 = 174$.

Zauważ, że w przeciwieństwie do objętości, która zmniejszyła się po wycięciu prostopadłościanu, pole powierzchni nowej bryły jest większe niż pole powierzchni sześcianu równe $6 \cdot 25 = 150$.

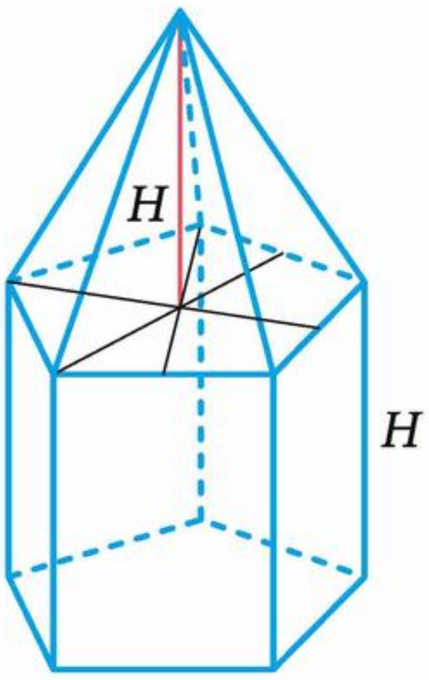
Ćwiczenie 1

Do sześcianu o krawędzi 5 doklejono prostopadłościan o wymiarach $3 \times 3 \times 5$ (jak na rysunku). Oblicz pole powierzchni i objętość otrzymanej bryły.



Przykład 2

Bryła przedstawiona na rysunku obok powstała przez sklejenie ostrosłupa i graniastosłupa prostego. Wysokości obydwu sklejonych brył są równe. Oblicz objętość każdej z brył, wiedząc, że suma ich objętości jest równa $60\ \text{cm}^3$.



Oznaczmy przez V objętość ostrosłupa.
Pola podstawy i wysokości obu brył są równe, więc objętość graniastosłupa wynosi $3V$. Suma objętości obu wielościanów jest równa $60\ \text{cm}^3$, stąd:
$V + 3V = 4V = 60$, czyli $V = 15\ \text{cm}^3$.

Odp. Objętość ostrosłupa wynosi $15\ \text{cm}^3$, a objętość graniastosłupa – $45\ \text{cm}^3$.

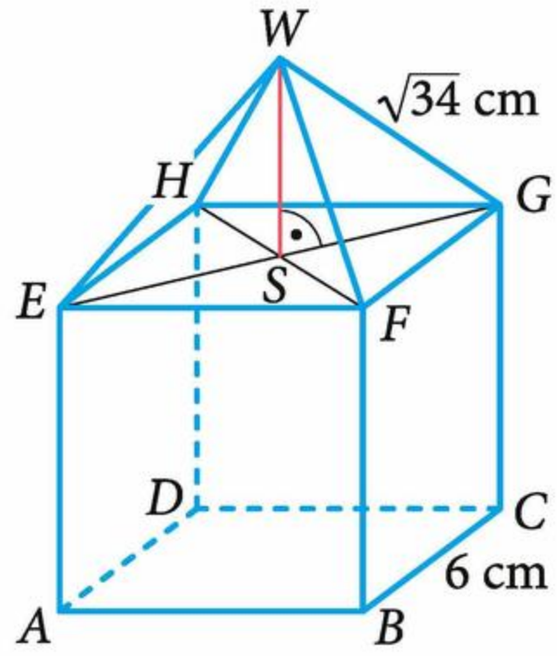
Ćwiczenie 2

Ostrosłup i graniastosłup prosty mają takie same podstawy, ale wysokość graniastosłupa jest dwukrotnie większa niż wysokość ostrosłupa. Objętość ostrosłupa wynosi 25 cm^3. Oblicz objętość graniastosłupa.

Przykład 3

Bryła przedstawiona na rysunku powstała przez sklejenie sześcianu i ostrosłupa prawidłowego czworokątnego – górna podstawa sześcianu jest podstawą ostrosłupa. Oblicz jej:

a) objętość, **b)** pole powierzchni całkowitej.



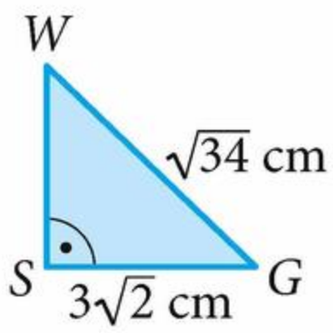
a) Objętość sześcianu wynosi $V_1 = 6^3 = 216$ [cm^3].

Aby obliczyć objętość ostrosłupa, należy wyznaczyć jego wysokość WS. Skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego WSG, w którym $WG = \sqrt{34}$ cm i $SG = 3\sqrt{2}$ cm (połowa przekątnej kwadratu o boku 6 cm).

Zatem:

$WS^2 = (\sqrt{34})^2 - (3\sqrt{2})^2 = 34 - 18 = 16.$

Stąd $WS = 4$ cm.



Objętość ostrosłupa jest równa:

$V_2 = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 = 48$ [cm^3].

Objętość bryły wynosi zatem:

$V = V_1 + V_2 = 216 + 48 = 264$ [cm^3].

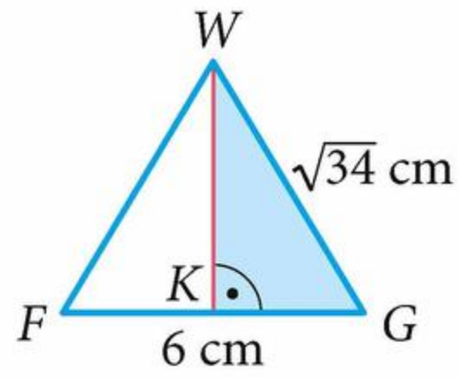
b) Pole powierzchni bryły to suma pól wszystkich jej ścian, czyli w tym przypadku czterech ścian bocznych ostrosłupa i pięciu ścian sześcianu.

Pole powierzchni ściany sześcianu wynosi: $P_s = 6^2 = 36$ [cm^2].

Aby obliczyć pole powierzchni ściany bocznej ostrosłupa, należy obliczyć wysokość trójkąta FGW.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta KGW otrzymujemy:

$KW^2 = (\sqrt{34})^2 - 3^2 = 34 - 9 = 25$. Stąd $KW = 5$ cm.



Pole powierzchni ściany bocznej ostrosłupa jest równe:

$P_o = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15$ [cm^2].

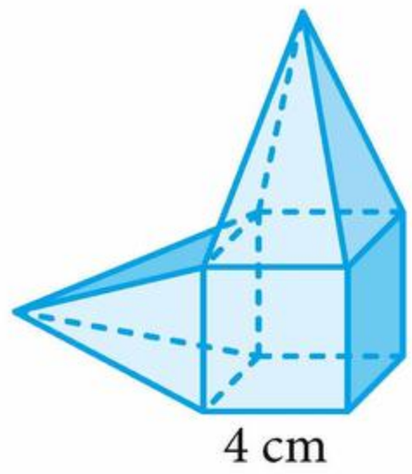
Pole powierzchni całkowitej sklejonej bryły wynosi:

$P_c = 5 \cdot P_s + 4 \cdot P_o = 5 \cdot 36 + 4 \cdot 15 = 180 + 60 = 240$ [cm^2].

Odp. Objętość bryły równa się 264 cm^3, a pole powierzchni całkowitej 240 cm^2.

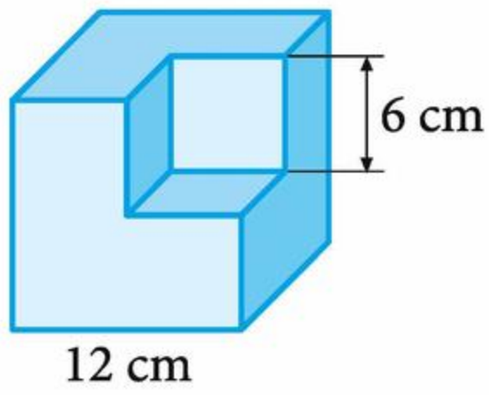
Ćwiczenie 3

Bryła przedstawiona na rysunku powstała przez sklejenie sześcianu i dwóch ostrosłupów prawidłowych czworokątnych – ściany sześcianu są ich podstawami. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tej bryły, jeżeli wiadomo, że wysokość każdego z ostrosłupów jest o 2 cm dłuższa od krawędzi sześcianu.

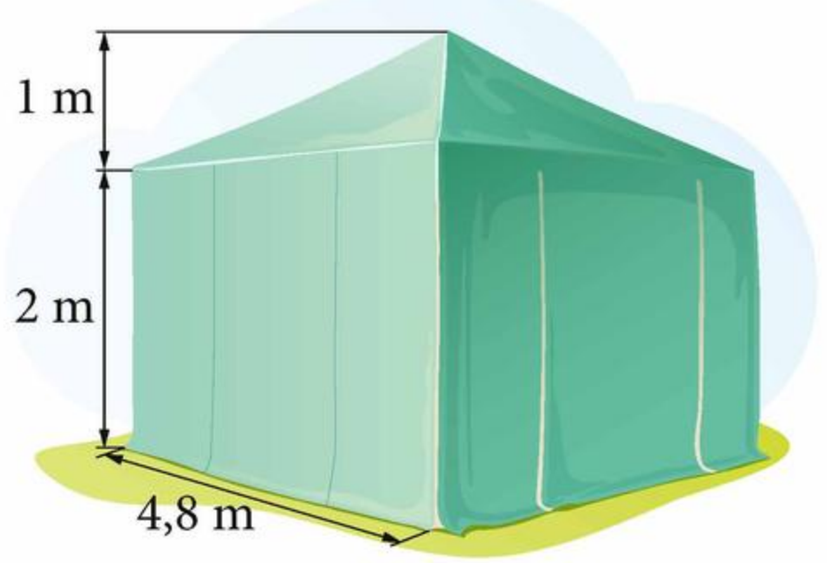


Zadania

1. Z narożnika sześcianu o krawędzi 12 cm wycięto sześcian o krawędzi 6 cm (jak na rysunku). Oblicz pole powierzchni i objętość otrzymanej bryły i porównaj je z polem powierzchni i objętością dużego sześcianu.



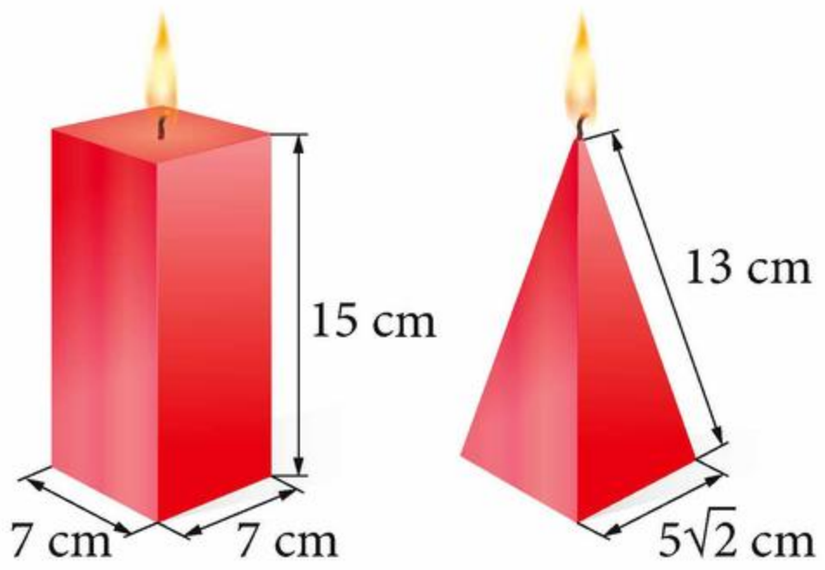
2. Wysokość przedstawionego obok namiotu w najwyższym punkcie wynosi 3 m. Dolna część namiotu ma kształt graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 4,8 m i wysokości 2 m, a górna część – ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Oblicz, ile metrów kwadratowych materiału potrzeba na wykonanie takiego namiotu.



3. W sklepie ze świecami można kupić między innymi świece w kształcie prostopadłościanu i ostrosłupa prawidłowego czworokątnego (rysunek obok).

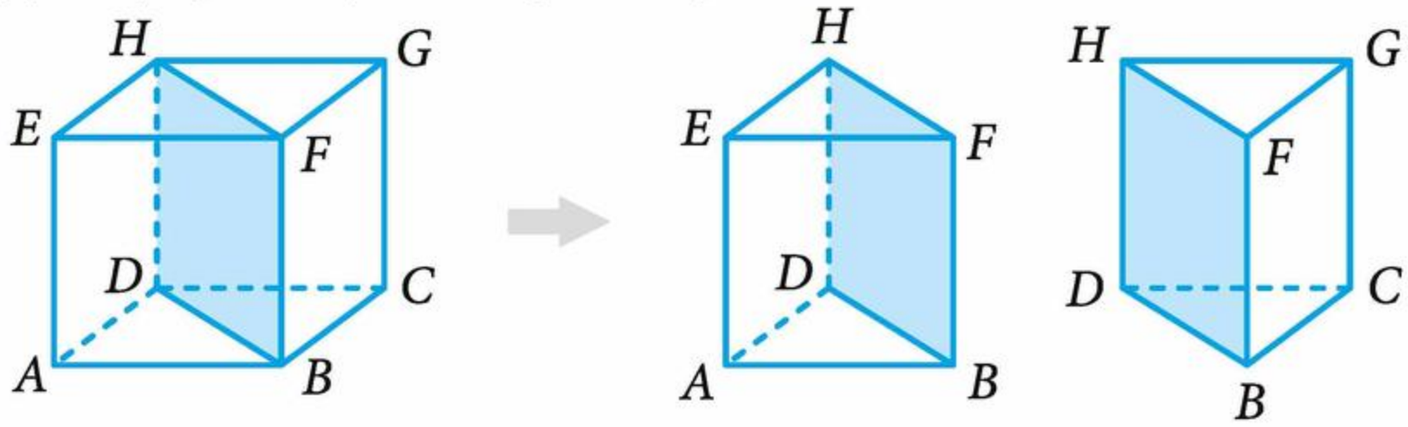
a) Oblicz, ile centymetrów sześciennych wosku potrzeba do wyprodukowania każdej ze świec.

b) Ustal, ile świec w kształcie ostrosłupa można wyprodukować, przetapiając wosk z 50 świec w kształcie graniastosłupa.



4. Ostrosłup prawidłowy czworokątny i prostopadłościan mają w podstawie kwadrat o boku 3 cm, mają także takie same wysokości. Oblicz wysokość brył, wiedząc, że suma ich objętości jest równa 72 cm^3.

E **5.** Sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi 5 cm rozcięto, w wyniku czego powstały dwa graniastosłupy trójkątne (rysunek poniżej).



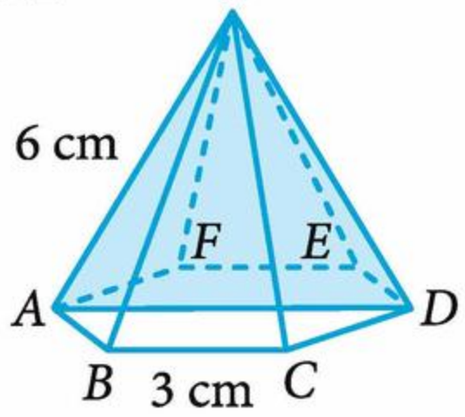
Oblicz pole powierzchni całkowitej jednej z otrzymanych brył.

6. Ostrosłup prawidłowy sześciokątny o wymiarach jak na rysunku 1 poniżej rozcięto płaszczyzną przechodzącą przez punkty A, D i W. Oblicz objętość oraz pole powierzchni całkowitej każdej z otrzymanych brył.

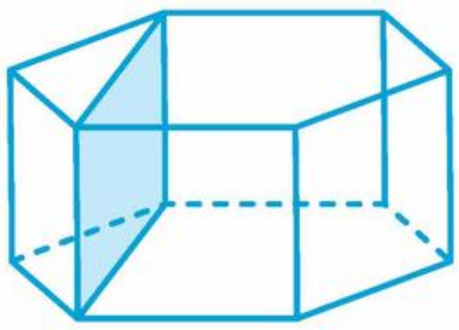
7. Graniastosłup prawidłowy sześciokątny o wszystkich krawędziach długości 8 cm przecięto i otrzymano graniastosłupy trójkątny i pięciokątny (rys. 2). Oblicz stosunek objętości otrzymanych brył.

8. Bryła przedstawiona na rysunku 3 powstała przez doklejenie do górnej i dolnej podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego dwóch przystających ostrosłupów prawidłowych. Oblicz objętość tej bryły.

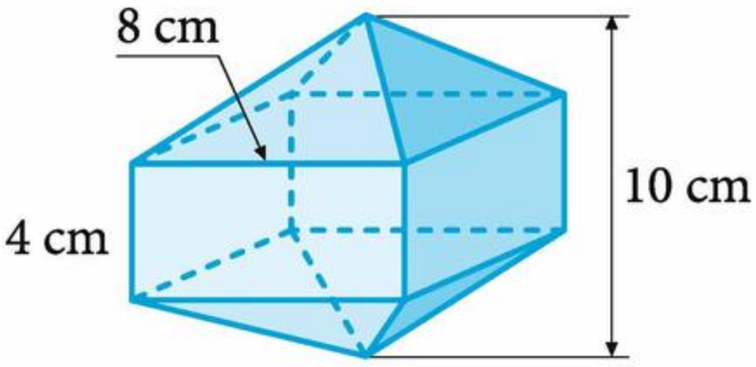
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



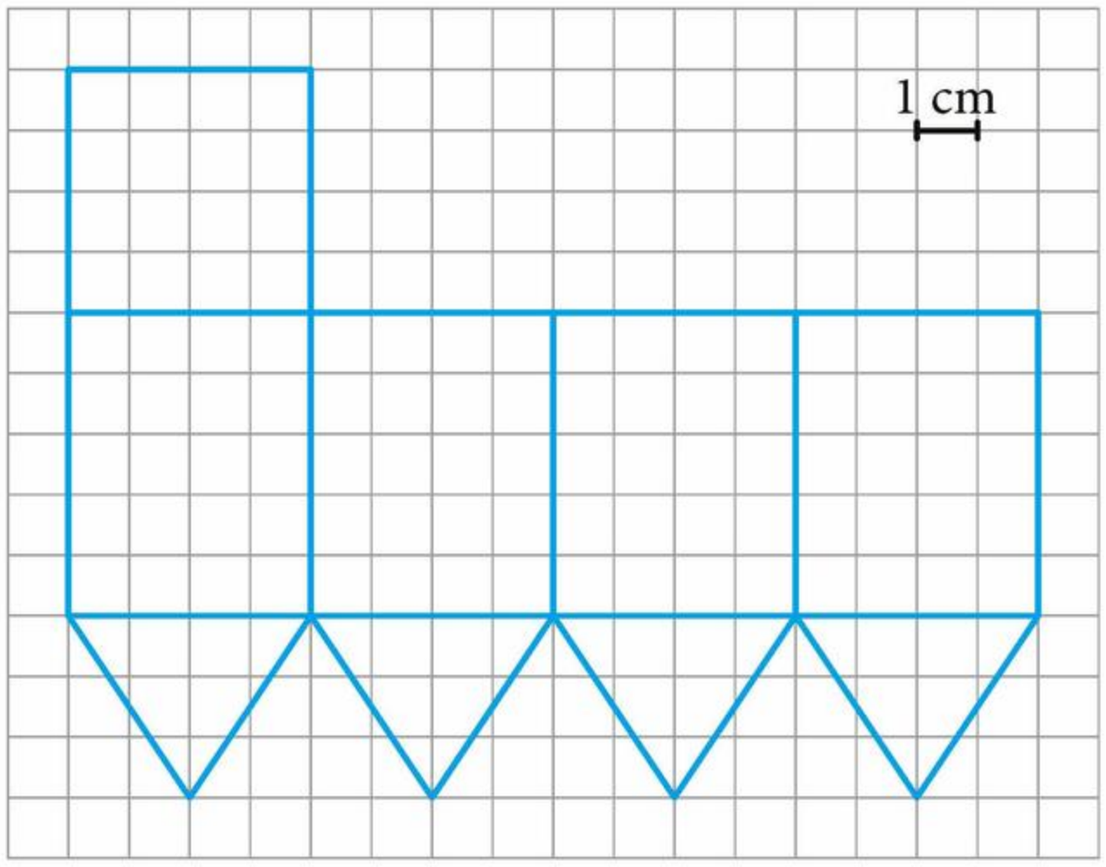
9. Siatkę przedstawioną na rysunku można złożyć na dwa sposoby i otrzymać dwie różne bryły. Jedną z nich jest prostopadłościan z doklejonym ostrosłupem prawidłowym czworokątnym. Objętość tej bryły wynosi $\left(80+\frac{16}{3}\sqrt{5}\right)$ cm^3.

a) Jaką jeszcze bryłę można otrzymać z tej siatki?

b) Jaka jest objętość tej drugiej bryły?

c) Oblicz pole powierzchni całkowitej każdej z brył.

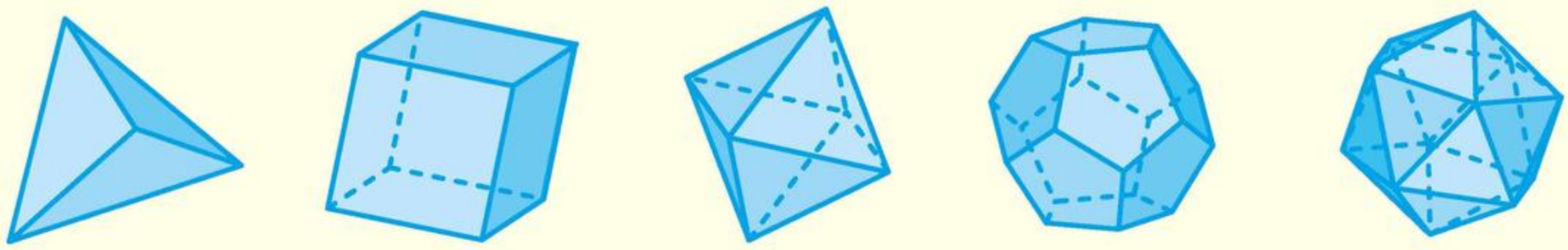
d) Oblicz sumę długości krawędzi każdej z brył.



10. Narysuj siatkę bryły z zadania 8 naturalnej wielkości.

Dla dociekliwych

Przyjrzyj się rysunkom.



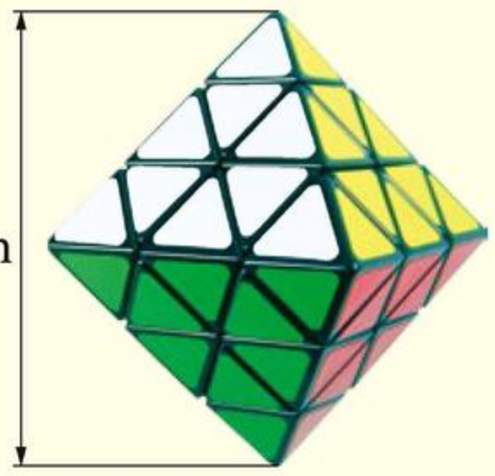
czworościan foremny | sześcian foremny | ośmiościan foremny | dwunastościan foremny | dwudziestościan foremny

Są to **wielościany foremne**, inaczej nazywane **bryłami platońskimi**.
Zauważ, że w każdym wielościanie foremnym:
- w każdym wierzchołku spotyka się tyle samo ścian,
- ściany boczne są przystającymi wielokątami foremnymi.

1. Poszukaj w dostępnych źródłach informacji, skąd wzięła się nazwa „bryły platońskie" i czy istnieją wielościany foremne inne od przedstawionych powyżej.

2. Ile krawędzi i wierzchołków ma dwunastościan, a ile dwudziestościan foremny?

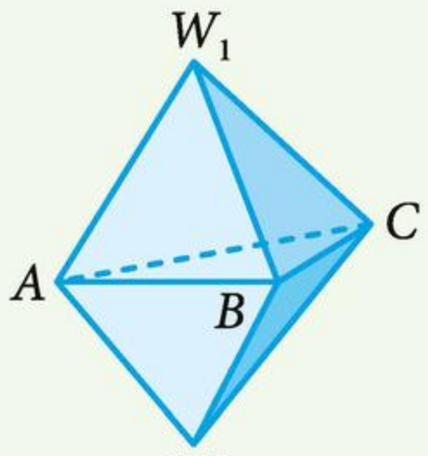
3. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej ośmiościanu foremnego przedstawionego na ilustracji. Podany wymiar jest odległością pomiędzy dwoma wskazanymi wierzchołkami.



Czy już umiem?

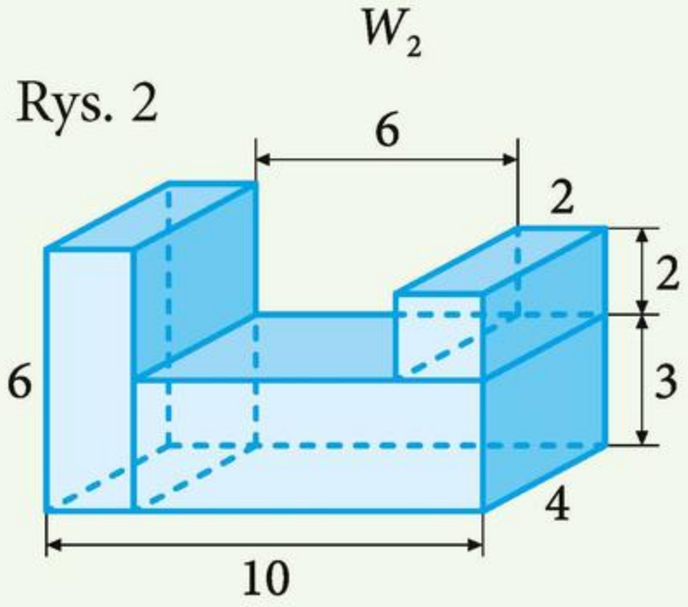
I. Bryła przedstawiona na rysunku 1 powstała przez sklejenie podstawami dwóch przystających czworościanów foremnych. Oblicz pole powierzchni całkowitej bryły, jeśli suma długości wszystkich jej krawędzi wynosi 54 cm.

Rys. 1



II. Na rysunku 2 przedstawiono bryłę sklejoną z trzech prostopadłościanów. Oblicz jej objętość i pole powierzchni całkowitej.

Rys. 2



III. Pociąg odjeżdża z Przemyśla o godzinie 10.43, o godzinie 12.10 dociera do odległego o 87 km Rzeszowa. Oblicz średnią prędkość tego pociągu.

Powtórzenie V

ZESTAW 1

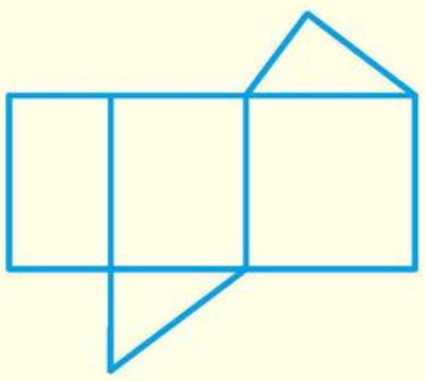
1. Podaj liczbę ścian, wierzchołków i krawędzi graniastosłupa pięciokątnego.

2. Ile ścian ma ostrosłup o 10 wierzchołkach?

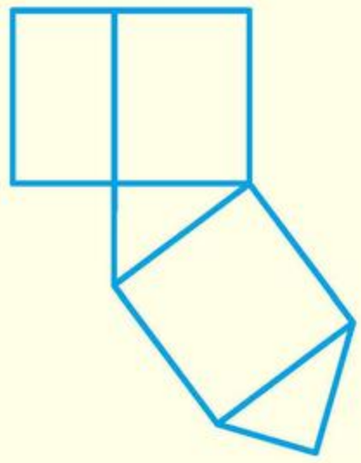
A. 9 **B.** 10 **C.** 11 **D.** 12

3. Wskaż rysunek przedstawiający siatkę graniastosłupa prostego, którego podstawą jest trójkąt prostokątny.

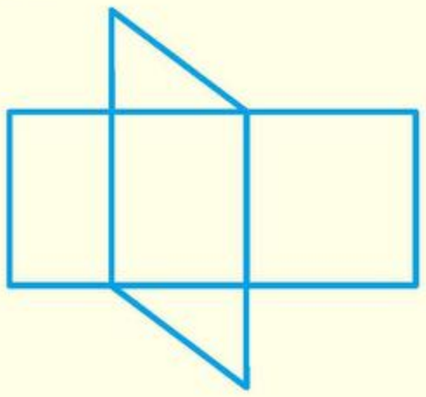
A.



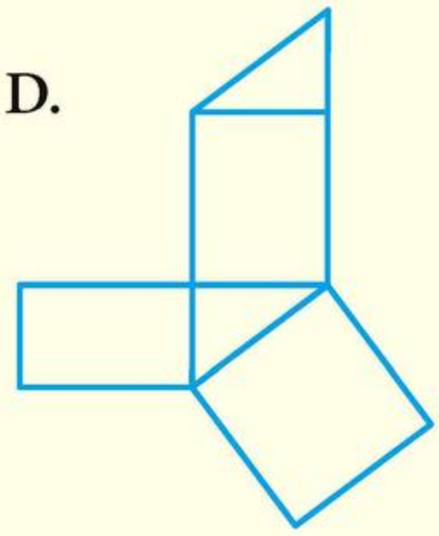
B.



C.

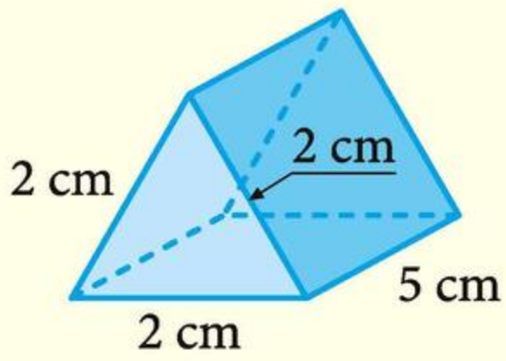


D.

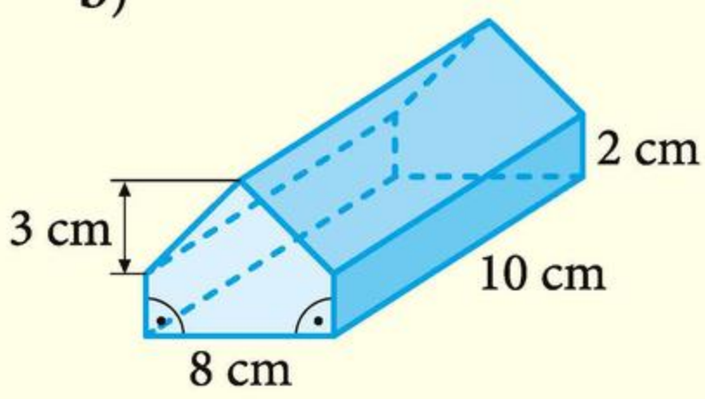


4. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa prostego przedstawionego na rysunku.

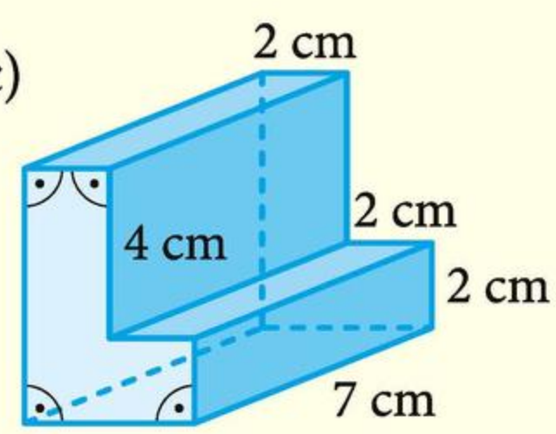
a)



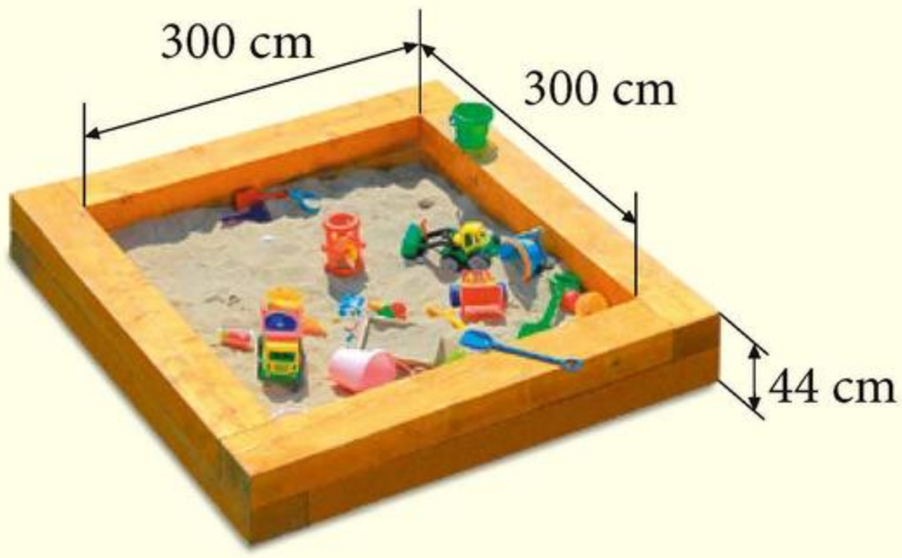
b)



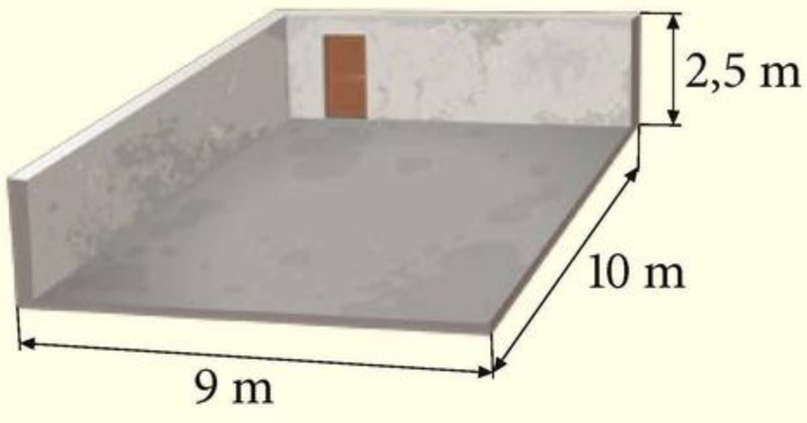
c)



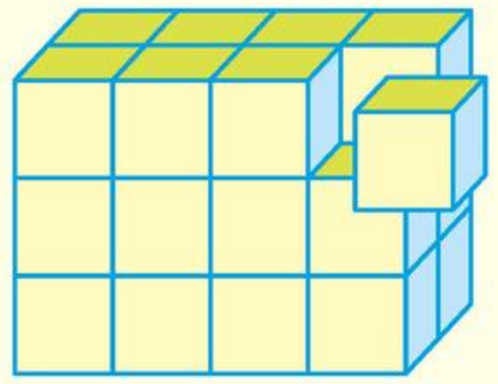
5. Piaskownicę o wymiarach wewnętrznych podanych na zdjęciu wypełniono piaskiem do $\frac{3}{4}$ wysokości. Ile piasku jest w tej piaskownicy? Odpowiedź podaj w metrach sześciennych i centymetrach sześciennych.



6. Adam chce pomalować na biało ściany i sufit piwnicy w kształcie prostopadłościanu o wymiarach podanych na rysunku obok. Zgodnie z informacją na opakowaniu 1 litr farby wystarcza średnio na pomalowanie 10 m^2 powierzchni. Oblicz, ile puszek farby Adam musi kupić, aby dwukrotnie pomalować piwnicę, jeśli farba sprzedawana jest w puszkach pięciolitrowych. Pamiętaj, że drzwi do piwnicy o powierzchni 1,6 m^2 nie będą malowane.



7. Z prostopadłościanu składającego się z sześcianów o krawędzi 5 cm zabrano jeden sześcian (rysunek obok). Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.



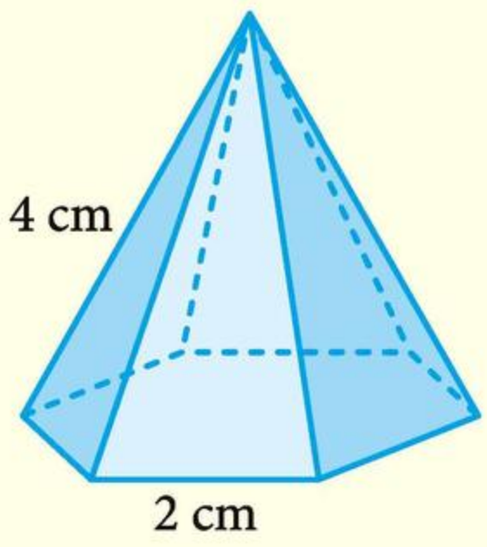
I. Pole powierzchni bryły powstałej po usunięciu jednego sześcianu jest większe od pola powierzchni prostopadłościanu.

II. Pole powierzchni bryły powstałej po usunięciu jednego sześcianu jest mniejsze od pola powierzchni prostopadłościanu.

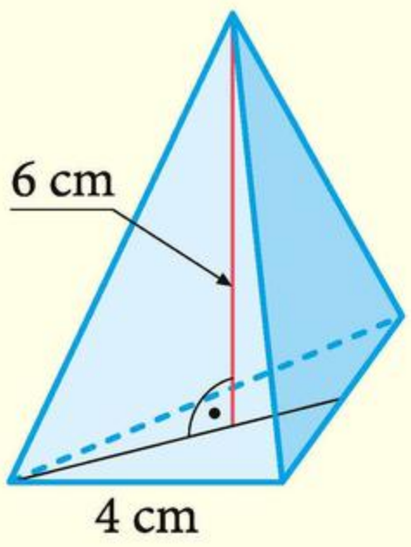
8. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego o wymiarach podanych na rysunku 1.

9. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego o wymiarach podanych na rysunku 2.

Rys. 1



Rys. 2



10. Janek ma 50 sześciennych klocków. Chce zbudować z nich największy możliwy sześcian. Ile klocków wykorzysta?

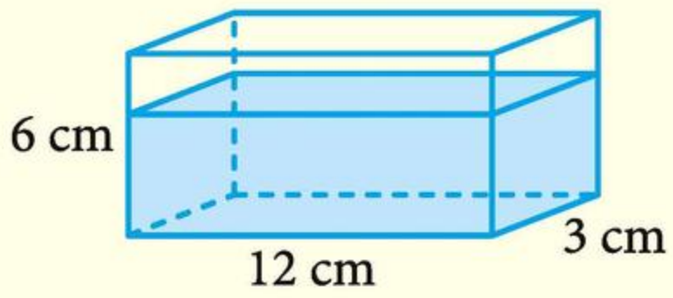
A. 25 **B.** 27 **C.** 49 **D.** wszystkie 50

ZESTAW 2

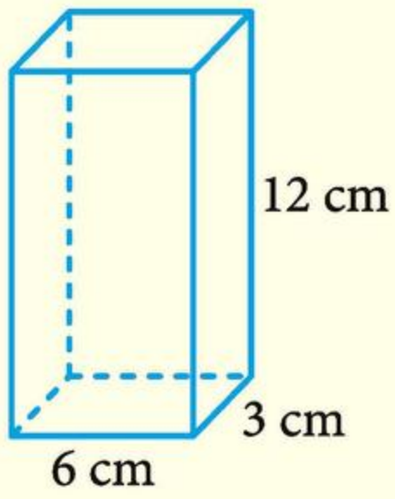
1. Oblicz, ile krawędzi i ścian ma graniastosłup, który ma $2n$ wierzchołków.

2. W prostopadłościennym naczyniu woda sięgała do $\frac{2}{3}$ wysokości (rys. 1). Następnie przelano ją do drugiego prostopadłościennego naczynia (rys. 2). Do jakiej wysokości sięgnęła woda w drugim naczyniu? Odpowiedź podaj w centymetrach.

Rys. 1



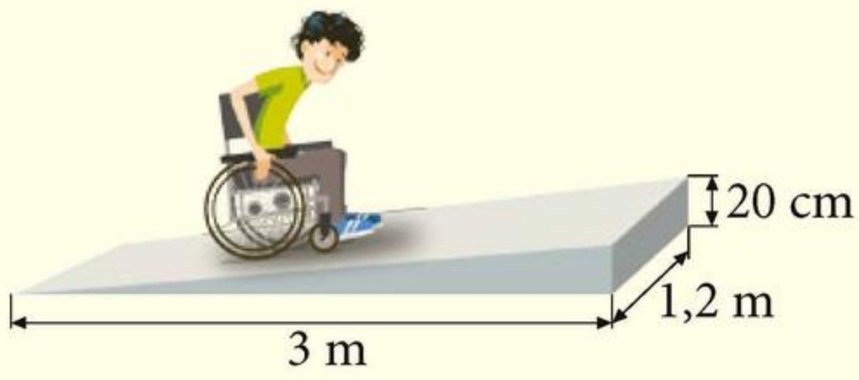
Rys. 2



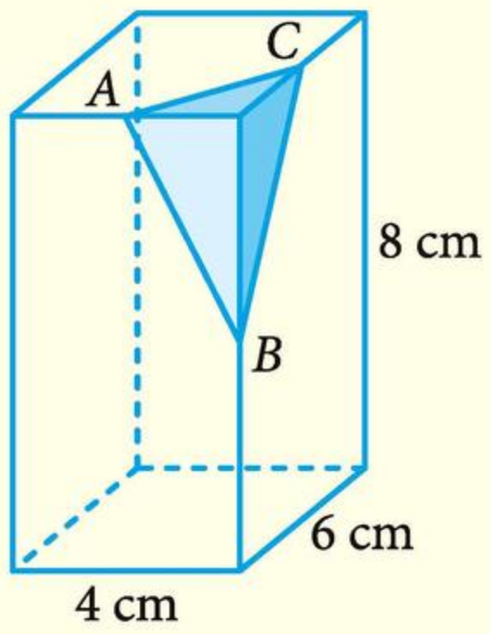
3. Każda krawędź graniastosłupa prawidłowego ma długość 5 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa, jeśli jego podstawą jest:

a) trójkąt, **b)** czworokąt, **c)** sześciokąt.

4. Przed wejściem do przychodni lekarskiej ma powstać podjazd dla osób niepełnosprawnych. Ile metrów sześciennych betonu należy wylać, aby zbudować podjazd o kształcie i wymiarach pokazanych na rysunku obok?

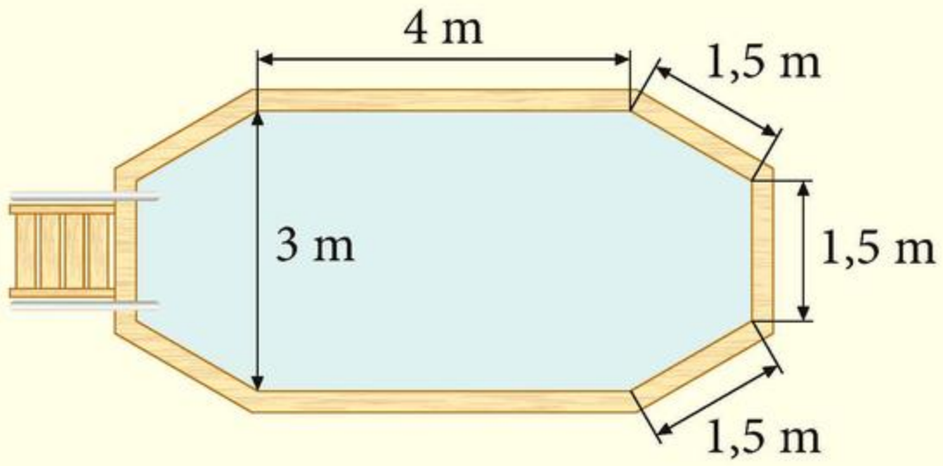


5. Punkty A, B i C są środkami krawędzi prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok. Z bryły odcięto narożnik w kształcie czworościanu. Oblicz objętość otrzymanego ostrosłupa.



6. Przydomowy basen ma kształt graniastosłupa prostego ośmiokątnego o wymiarach podanych na rysunku poniżej. Wysokość basenu jest równa 150 cm.

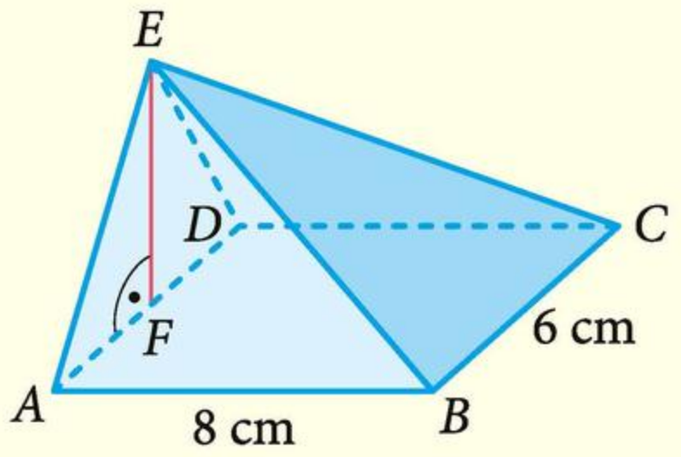




a) Oblicz objętość wody potrzebnej do wypełnienia tego basenu do wysokości 130 cm. Wynik zaokrąglij do 1 m^3.

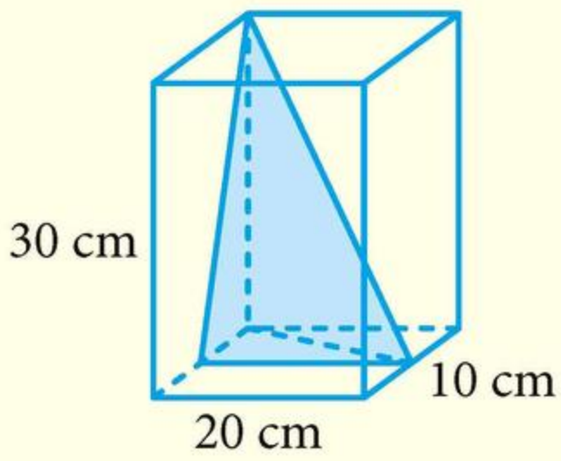
b) Oblicz, ile czasu zajmie napełnienie basenu wodą do wysokości 130 cm, jeśli pompa pracuje z wydajnością 15 litrów na sekundę. Wynik zaokrąglij do 1 min.

7. Podstawą ostrosłupa $ABCDE$ jest prostokąt $ABCD$ o bokach długości 6 cm i 8 cm. Trójkąt ADE jest równoboczny, a odcinek EF jest wysokością ostrosłupa. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



8. Ścianą boczną graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest prostokąt o bokach 10 cm i 20 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tej bryły. Rozważ dwa przypadki.

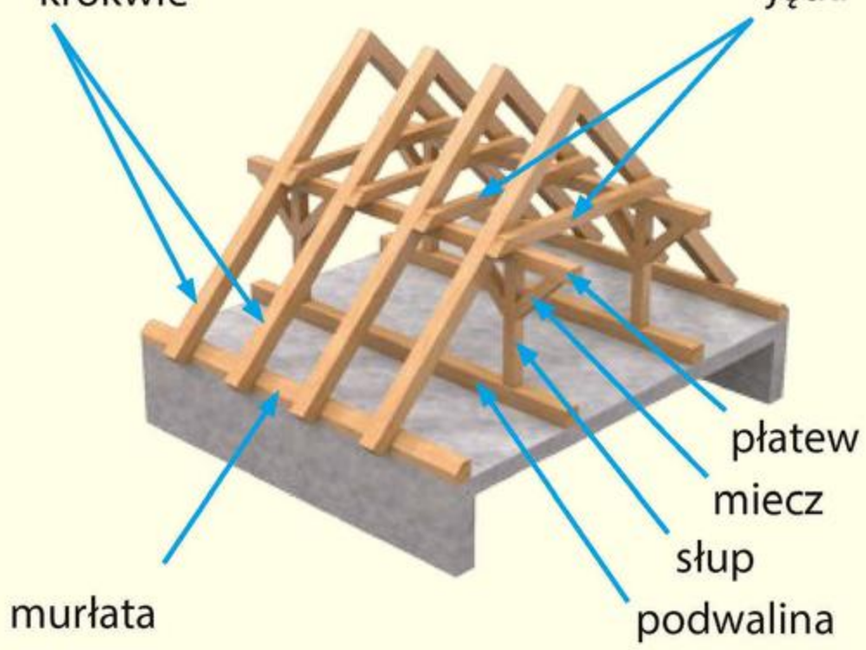
9. W prostopadłościanie połączono dwa wierzchołki oraz środki dwóch krawędzi w sposób przedstawiony na rysunku. Oblicz objętość powstałego ostrosłupa.



Zadania na temat…

Dachy i daszki

Kształty brył omawianych w tym dziale możemy zaobserwować w budownictwie. Przyglądając się konstrukcji dachu, jeszcze niepokrytej przez dekarzy, możemy dostrzec w niej fragmenty odpowiadające odcinkom w graniastosłupach i ostrosłupach.



Cieśla wykonuje konstrukcję drewnianą dachu.
Dekarz zajmuje się pokrywaniem dachów papą, dachówkami lub blachą.

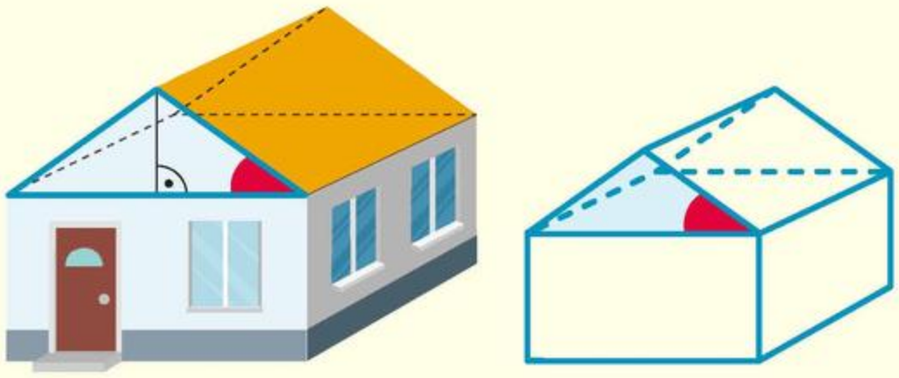
Konstrukcja dachu decyduje o jego kształcie.


dach jednospadowy

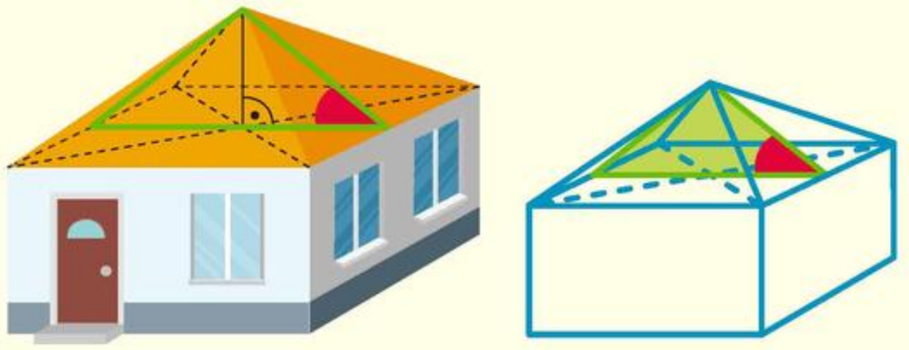

dach dwuspadowy


dach czterospadowy

Ważnym parametrem technicznym dachu jest jego kąt nachylenia. Od tego kąta zależy odprowadzanie wody deszczowej i śniegu, a także wygląd budynku.

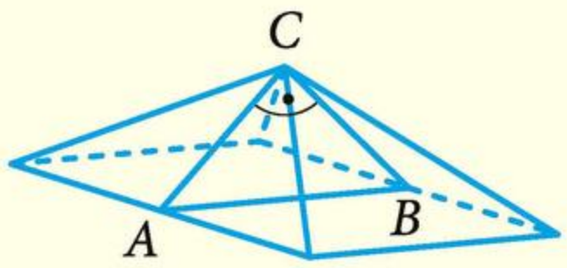


W przypadku dachu dwuspadowego kąt nachylenia dachu (na rysunku zaznaczony na czerwono) jest widoczny z boku budynku.



W przypadku dachu czterospadowego trójkąt zawierający kąt nachylenia ma wierzchołki w środkach przeciwległych krawędzi podstawy oraz wierzchołku ostrosłupa.

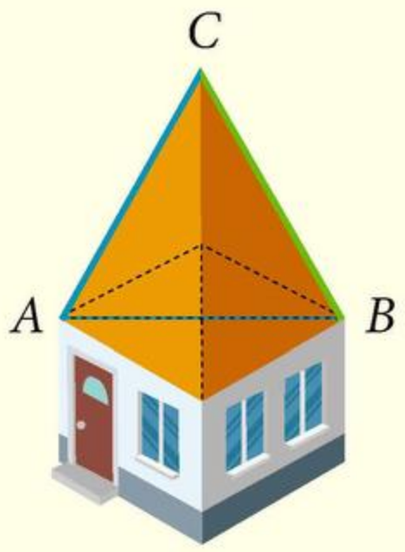
1. Czterospadowy dach budowanego domu będzie miał kształt ostrosłupa prawidłowego o krawędzi podstawy długości 12 m. W projekcie kąt nachylenia dachu wynosi 45°, a krokwie AC i BC są zamocowane w połowie murłaty i tworzą kąt prosty.



a) Oblicz, ile metrów kwadratowych będzie miała cała powierzchnia dachu.

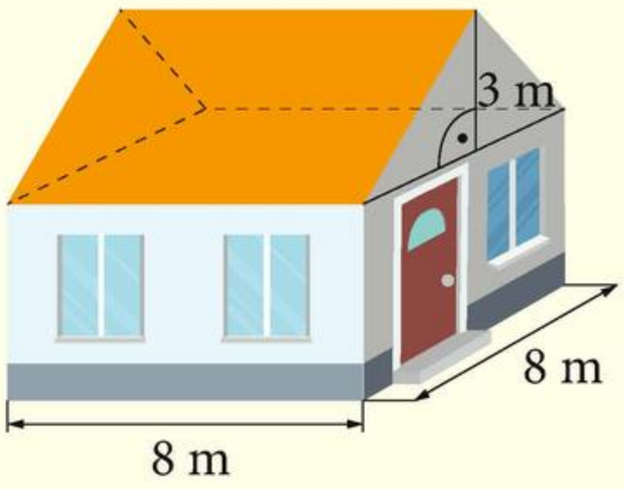
b) Jakie będą koszty zakupu blachy na ten dach, jeżeli zazwyczaj zużywa się o 10% więcej blachy, niż wynosi powierzchnia dachu, oraz wiadomo, że 1 m^2 blachy kosztuje 34 zł?

2. Dom ma dach czterospadowy, a płaszczyzna stropu ma kształt kwadratu o boku a metrów. Dwie przeciwległe krokwie AC i BC wraz z przekątną stropu tworzą trójkąt równoboczny. Jaką powierzchnię ma dach tego domu?

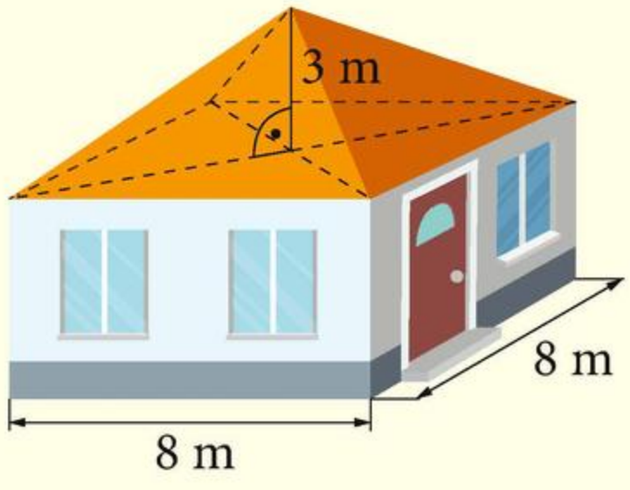


3. Dwaj sąsiedzi postanowili zbudować domy, których projekty przedstawiono na rysunkach.

PROJEKT A



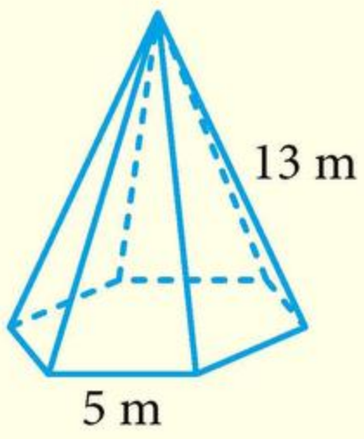
PROJEKT B



a) W którym z projektów strych ma większą kubaturę (objętość)?

b) Uzasadnij, że powierzchnia dachu w obu projektach jest taka sama.

4. Dach zabytkowej wieży kościelnej ma kształt ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy długości 5 m i krawędzi bocznej równej 13 m. Litr farby wystarcza na pomalowanie 12 m^2 powierzchni. Ile farby trzeba kupić, aby dwukrotnie pomalować dach tej wieży?





Zadania na deser

Powiększanie i zmniejszanie

1. Każdą krawędź sześcianu wydłużono o 20%. O ile procent zwiększyła się objętość sześcianu?

A. o 60% **B.** o 72,8% **C.** o 20% **D.** o 84,8%

2. Długość krawędzi czworościanu foremnego zwiększono o 20%. O ile procent zwiększyło się pole powierzchni całkowitej tego czworościanu?

A. o 20% **B.** o 44% **C.** o 40% **D.** o 144%

3. Długości wszystkich krawędzi ostrosłupa zwiększono dwukrotnie. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa zwiększyło się dwukrotnie.
II. Objętość tego ostrosłupa zwiększyła się ośmiokrotnie.

:D **4.** Wykaż, że:

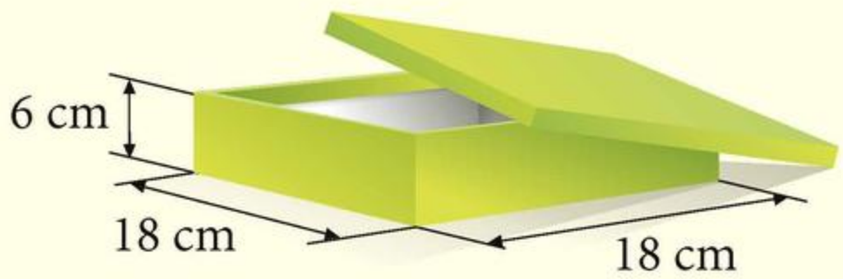
a) jeśli wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego zmniejszymy dwa razy, a długość krawędzi podstawy zwiększymy dwukrotnie, to objętość graniastosłupa zwiększy się dwa razy,
b) jeśli wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego zwiększymy dwukrotnie, a długość krawędzi podstawy zmniejszymy dwukrotnie, to objętość graniastosłupa zmniejszy się dwa razy.

Zadania różne

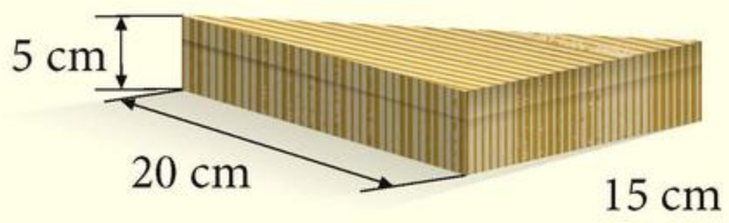
5. Pola ścian prostopadłościanu są równe: $P_1 = 25\ \text{cm}^2$, $P_2 = 20\ \text{cm}^2$, $P_3 = 80\ \text{cm}^2$. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

6. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa 6 cm, a jego pole powierzchni całkowitej wynosi $252\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

7. Beata zużywa zwykle o 50% więcej papieru niż wynosi powierzchnia pudełka, które opakowuje. Ile papieru zużyła na opakowanie dwóch pudełek przedstawionych poniżej?



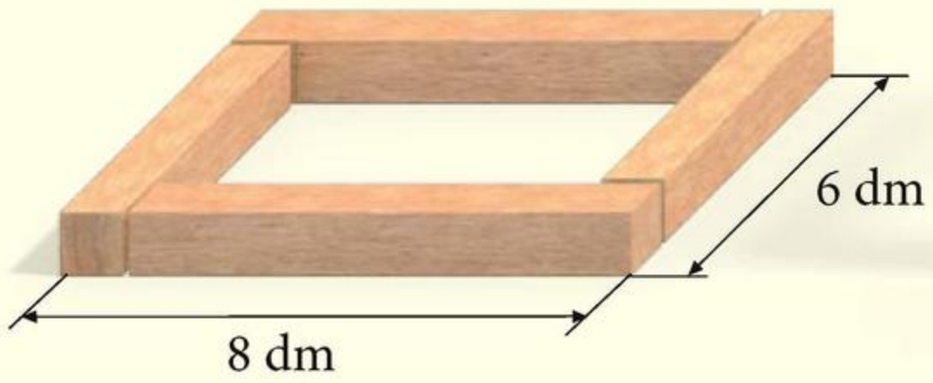
podstawą pudełka jest kwadrat o boku 18 cm, wysokość pudełka to 6 cm



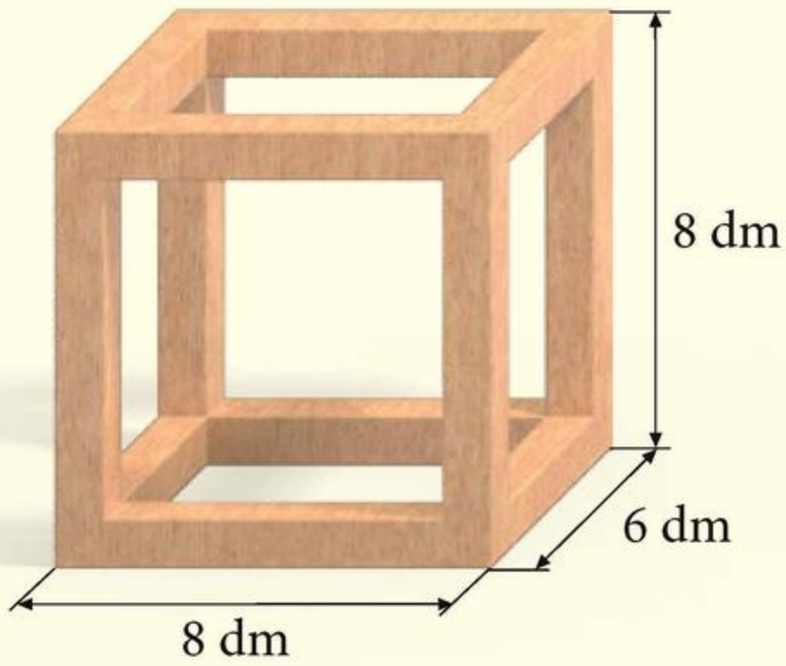
podstawą pudełka jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 15 cm i 20 cm, wysokość pudełka to 5 cm

8. Z belek, których przekrój jest kwadratem o boku 1 dm, powstała pewna konstrukcja. Oblicz objętość drewna, z którego zbudowana jest ta konstrukcja.

a)

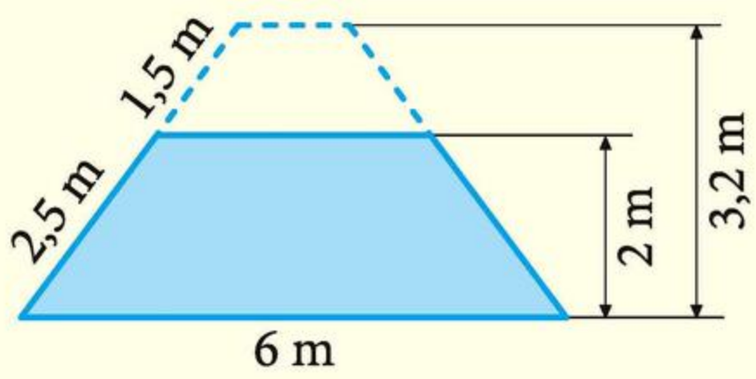


b)



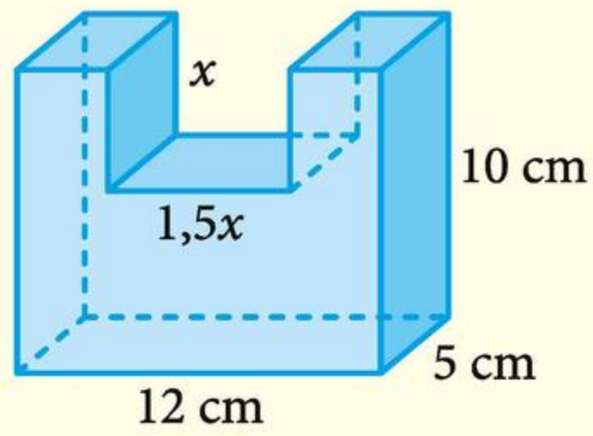
9. Wał przeciwpowodziowy, ciągnący się na długości 1 kilometra, ma przekrój w kształcie trapezu równoramiennego o wysokości 2 m (rysunek obok). Planowane jest podniesienie tego wału tak, aby jego wysokość wzrosła do 3,2 metra. Ile metrów sześciennych ziemi:

a) zużyto do usypania obecnie istniejącego wału,
b) potrzeba do planowanego podniesienia wału?

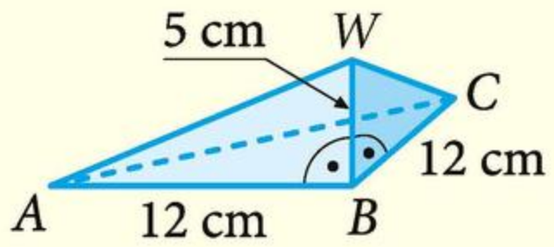


10. Dane są ostrosłup prawidłowy trójkątny i ostrosłup prawidłowy czworokątny, których krawędzie boczne mają długość 10 cm, a wysokości – 8 cm. Uzasadnij, że stosunek objętości tych ostrosłupów jest równy $3\sqrt{3} : 8$.

11. Objętość graniastosłupa prostego przedstawionego obok wynosi 480 cm^3. Oblicz x.

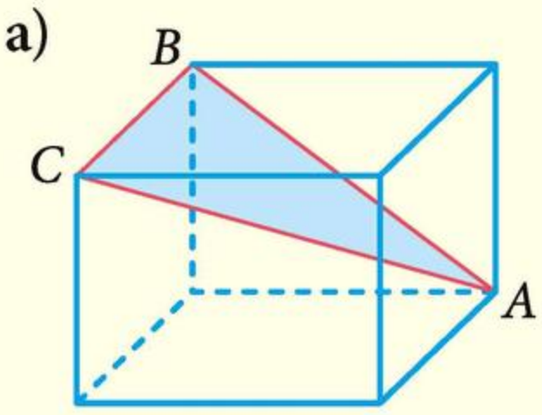


12. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny ABC, w którym kąt ABC ma miarę 120° (rysunek obok). Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

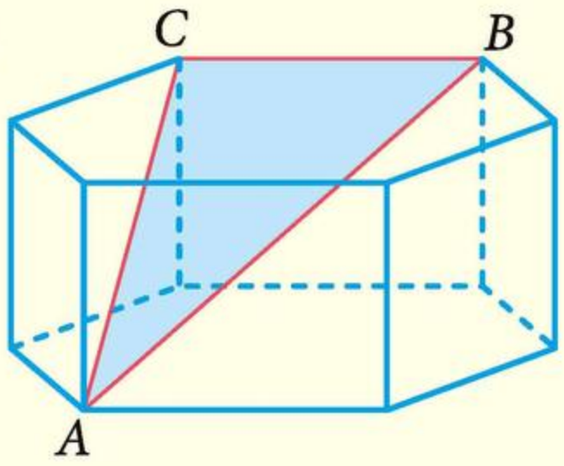


13. Na rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy o krawędzi podstawy długości 8 cm i krawędzi bocznej o długości 6 cm. Oblicz obwód trójkąta ABC.

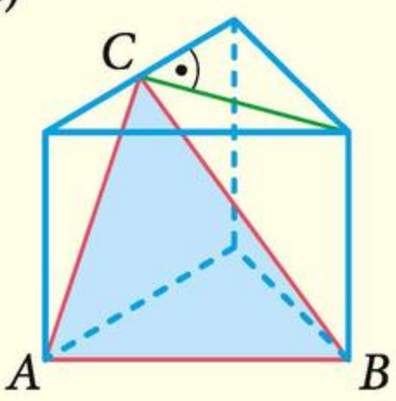
a)



b)

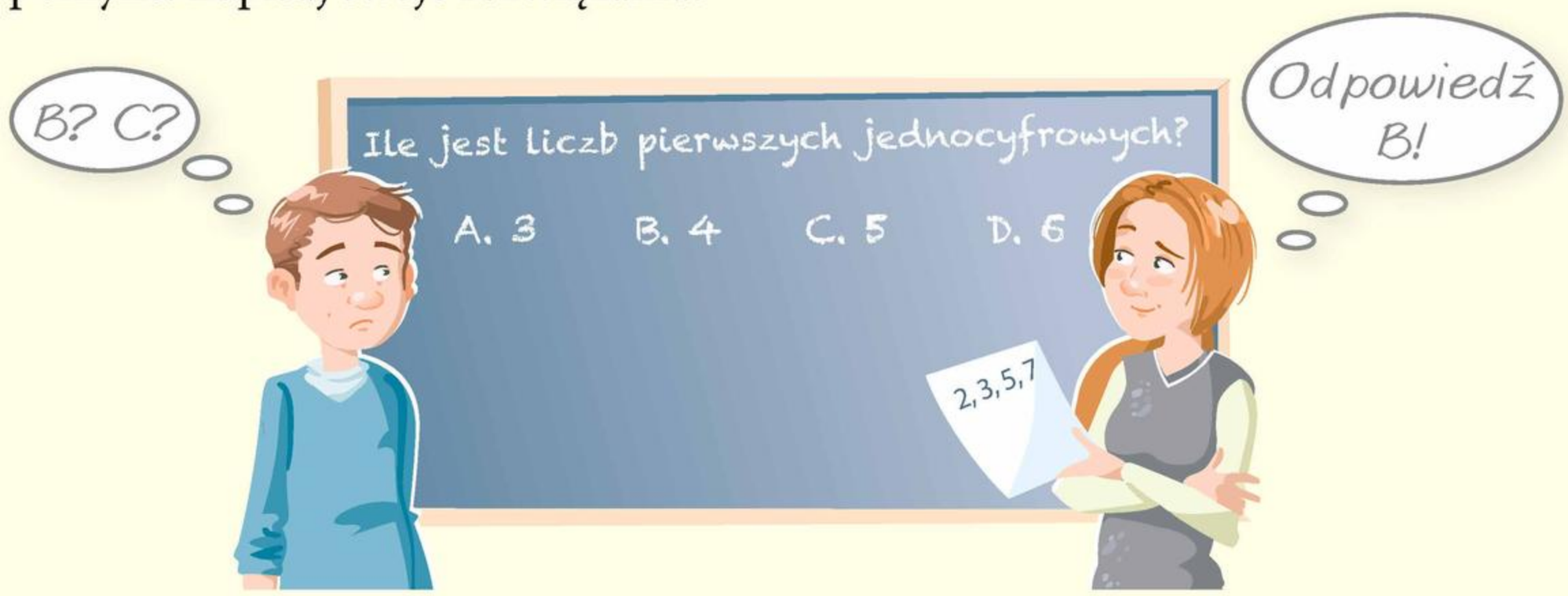


c)



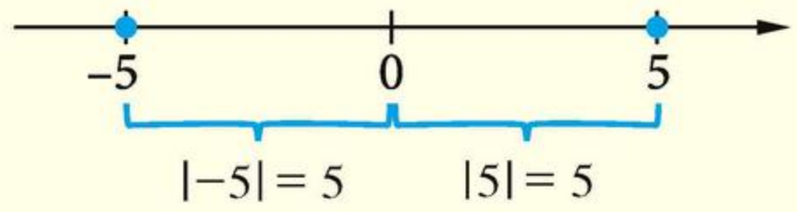
VI. Powtórzenie wiadomości ze szkoły podstawowej

- Nawet zadań testowych nie rozwiązuj w pamięci, ponieważ łatwo się przy tym pomylić. Zapisuj swoje rozwiązania!

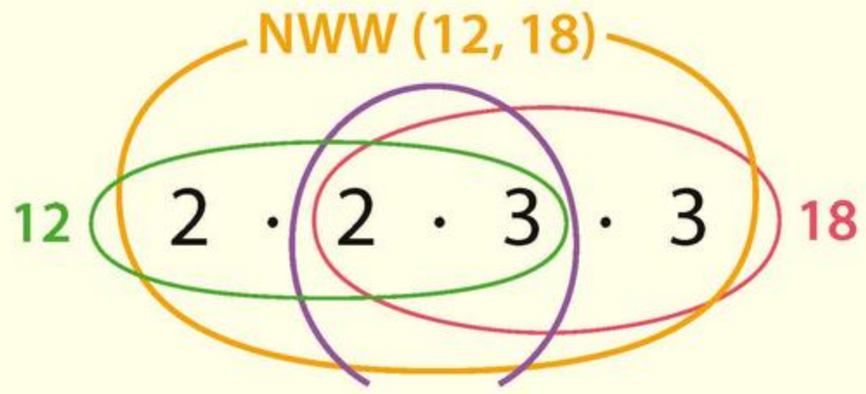


1. Liczby wymierne

- Dwie liczby nazywamy **przeciwnymi**, jeśli ich suma jest równa 0.
  Na przykład $-\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2}$ to liczby przeciwne, bo $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$.
- Dwie liczby różne od zera nazywamy **odwrotnymi**, jeśli ich iloczyn jest równy 1.
  Na przykład $-\frac{1}{2}$ i -2 to liczby odwrotne, bo $-\frac{1}{2}\cdot(-2)=1$.
- Odległość liczby od zera na osi liczbowej nazywamy **wartością bezwzględną liczby**, np.: $|-5|=5$, $|5|=5$.



- **Rozkład liczby na czynniki pierwsze** to przedstawienie liczby w postaci iloczynu liczb pierwszych, np.: $540 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5$.
- **Najmniejsza wspólna wielokrotność** dwóch lub więcej liczb naturalnych większych od zera to najmniejsza liczba naturalna większa od zera, która jest podzielna przez te liczby, np.: NWW(12, 18) = 36.
- **Największy wspólny dzielnik** dwóch lub więcej liczb naturalnych większych od zera to największa liczba naturalna, przez którą są podzielne te liczby, np.: NWD(12, 18) = 6.



- Cyfry rzymskie do zapisu liczb w systemie rzymskim:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Zadania

1. Rozwinięcie dziesiętne liczby $\frac{6}{11}$ jest równe $0,(54)$. Po zaokrągleniu tej liczby do części setnych otrzymamy

A. $0,53$. **B.** $0,54$. **C.** $0,55$. **D.** $0,5$.

2. Rozwinięcie dziesiętne liczby $\frac{8}{185}$ jest równe $0,0(432)$. Na siódmym miejscu po przecinku tego rozwinięcia znajduje się

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

3. Ile liczb całkowitych ujemnych spełnia warunek $x > -3$?

A. 0 **B.** 2 **C.** 3 **D.** nieskończenie wiele

4. W 1999 roku Polska stała się członkiem NATO. Wskaż zapis tego roku w systemie rzymskim.

A. MDCCCCLXXXXIX **C.** MCMXCIX
B. MDCCCCXCIX **D.** MCMCXIX



5. Jedna z podanych liczb zapisanych w systemie rzymskim jest liczbą pierwszą. Wskaż ją.

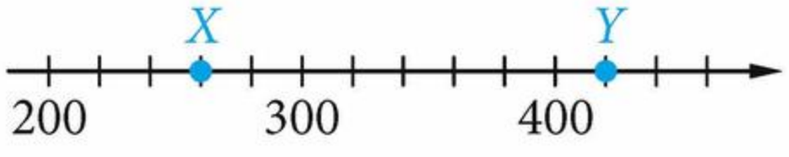
A. LXVII **B.** LXVIII **C.** LXIX **D.** LXX

6. Ile spośród liczb: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{13}{28}$ spełnia warunek $\frac{3}{7} < x < \frac{5}{7}$?

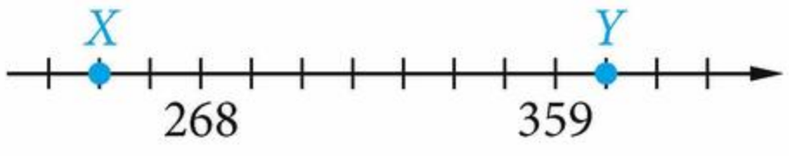
A. jedna **B.** dwie **C.** trzy **D.** cztery

7. Jakie liczby oznaczono na osi literami X i Y?

a)



b)



8. Odległość między liczbami $\left(-3\frac{1}{4}\right)$ i $2\frac{3}{7}$ na osi liczbowej jest równa

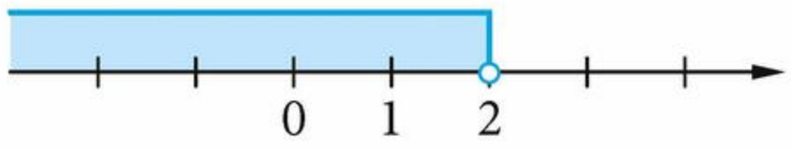
A. $-\frac{23}{28}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $5\frac{4}{11}$. **D.** $5\frac{19}{28}$.

9. Różnica liczby przeciwnej do $2,2$ i odwrotności liczby $-1\frac{1}{4}$ jest równa

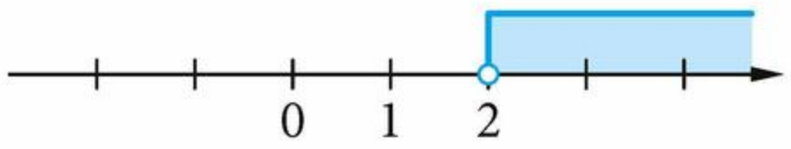
A. $-3,45$. **B.** -3. **C.** $-1,4$. **D.** $-\frac{35}{44}$.

10. Na którym rysunku przedstawiono zbiór liczb spełniających warunek $x \leqslant 2$?

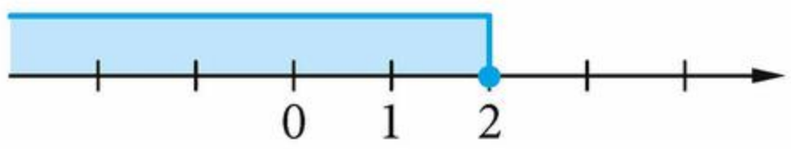
A.



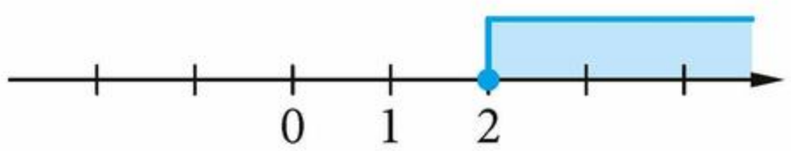
C.



B.



D.



11. Połowa uczniów klasy 8a przyjeżdża do szkoły autobusem, co piąta osoba przychodzi pieszo, a sześciu pozostałych uczniów rodzice przywożą samochodem. Ilu uczniów jest w tej klasie?

A. 15 **B.** 20 **C.** 24 **D.** 36

12. Liczba 5460, której rozkład na czynniki pierwsze to $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$, jest

A. wielokrotnością liczby $6 \cdot 13$.
B. podzielna przez $13 \cdot 2^3$.
C. liczbą pierwszą.
D. podzielna przez $2 + 2 + 3 + 5 + 7 + 13$.

13. Czy liczba 91 jest liczbą pierwszą? Wybierz odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie spośród zdań A–C.

TAK	ponieważ	A.	ma tylko dwa dzielniki.
NIE		B.	jest podzielna przez 7.
		C.	jest podzielna tylko przez 1 i przez samą siebie.

14. Czy liczba 44 523 jest podzielna przez 3? Wybierz odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie spośród zdań A–C.

TAK	ponieważ	A.	kończy się cyfrą 3.
NIE		B.	liczba 23 nie dzieli się przez 3 bez reszty.
		C.	$4 + 4 + 5 + 2 + 3 = 18 = 3 \cdot 6$.

15. Liczba 28 132 909 jest podzielna przez 17. Czy liczba 28 132 926 także jest podzielna przez 17? Wybierz odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie spośród zdań A–C.

TAK	ponieważ	A.	suma cyfr liczby 28 132 926 nie jest podzielna przez 17.
NIE		B.	liczba 28 132 926 jest o 17 większa od 28 132 909.
		C.	liczba złożona z dwóch ostatnich cyfr, czyli 26, nie dzieli się przez 17 bez reszty.

16. Dana jest liczba $0{,}1 \cdot 4\frac{1}{2} - 0{,}5 : \frac{4}{10} + 4$. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. Liczba do niej przeciwna to $3\frac{1}{5}$. **II.** Liczba do niej odwrotna to $\frac{5}{16}$.

17. Które z podanych wyrażeń ma inną wartość niż pozostałe?

$a = 1723 \cdot 4$ $c = 1723 : 0{,}25$ $e = 172300 : 25$

$b = 17{,}23 : 25$ $d = 1723 : \frac{1}{4}$ $f = 172{,}3 \cdot 40$

18. Oblicz.

a) $24 - 16 : 4 + 4$ **b)** $0{,}25 - 1{,}4 \cdot 0{,}3 : 6 + 0{,}2^2$ **c)** $1\frac{4}{7} - 1\frac{1}{14} : 2\frac{1}{2}$

19. Oblicz.

a) $13 - 2{,}56$ **b)** $1{,}0039 \cdot 0{,}208$ **c)** $4{,}5072 : 0{,}36$

20. Oblicz.

a) $-3\frac{1}{3} - \left(-\frac{3}{5}\right)$ **b)** $-\left(-1\frac{5}{6} \cdot (-0{,}6)\right)$ **c)** $-1\frac{5}{8} + 9\frac{3}{4} : (-1{,}3)$

21. Tata pokroił szynkę. Zanim jednak zdążył podać ją na stół, kot zjadł $\frac{2}{5}$ wędliny, a kotka zjadła $\frac{2}{3}$ tego, co zostało. Które ze zwierząt zjadło więcej? Jaka część szynki została?



22. Przeczytaj informacje w ramce, a następnie oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. Samiec harpii waży średnio $7\frac{1}{6}$ kg.
II. Samica harpii na ogół przynosi zdobycz ważącą $\frac{2}{5}$ jej masy.
III. Długość harpii stanowi niecałą połowę jej rozpiętości skrzydeł.

Harpia to nie tylko stworzenie z mitologii greckiej, lecz także najsilniejszy ptak drapieżny na świecie. Żyje w Meksyku oraz Ameryce Południowej i Ameryce Środkowej. Samica waży średnio 7,5 kg, a samiec jest o $\frac{1}{3}$ od niej lżejszy.
Harpia może unieść zdobycz ważącą tyle co ona sama. Na ogół jednak samce przynoszą do gniazda zdobycz ważącą 1,5 kg, a samice – 3 kg.
Rozpiętość skrzydeł tego ptaka osiąga 225 cm, a długość – 1 m.



23. W dodatniej liczbie trzycyfrowej cyfra dziesiątek jest podzielna przez 5, a cyfra setek jest dwa razy mniejsza od cyfry jedności. Ile jest takich liczb? Wypisz je wszystkie.

24. Liczba a jest ujemna, a liczba b jest dodatnia.
Które spośród liczb: $a - b$; $b - a$; $a \cdot b$; $(a - b)^3$ są ujemne?

25. Jaką cyfrę należy wstawić w miejsce x, aby liczba $56862x$ była podzielna przez 3 i przez 4?

26. Ołówki sprzedawane są w opakowaniach po 2 lub 3 sztuki. Ile opakowań każdego rodzaju należy zamówić, aby kupić w sumie 20 ołówków? Podaj wszystkie możliwości.

2. Praktyczna matematyka

- Rok zwykły trwa 365 dni, czyli 52 tygodnie i 1 dzień, a rok przestępny 366 dni, czyli 52 tygodnie i 2 dni. Lata przestępne to np. 2016, 2020, 2024.
- Sprawdź, czy pamiętasz liczbę dni każdego z miesięcy.
- Między ilością danego towaru, jego ceną jednostkową (np. za 1 kilogram lub opakowanie) oraz jego wartością (kwotą, którą należy zapłacić) zachodzi związek:

cena · ilość = wartość

- Między prędkością, drogą i czasem w ruchu jednostajnym zachodzi związek:

prędkość · czas = droga

- **Skalę mapy** można zapisać na różne sposoby. Pomniejszenie rzeczywistych wymiarów 200 000 razy można zapisać w postaci 1 : 200 000 lub 1 cm → 2 km (czyli 200 000 cm). W ramce pokazujemy, jak obliczyć rzeczywistą długość odcinka, który na mapie w skali 1 : 200 000 ma długość 6,5 cm. Zapisujemy skalę mapy w postaci 1 cm → 2 km, a następnie mnożymy 2 km przez 6,5.

1 km = 100 000 cm

1 : 200 000
1 cm → 2 km
· 6,5 · 6,5
6,5 cm → 13 km

- Gdy rozwiązujesz zadania, zwracaj uwagę na jednostki.

Zadania

1. Pani Ania za 18 dag sera żółtego zapłaciła 4,59 zł. Kilogram tego sera kosztuje

A. 3,92 zł. **B.** 25,50 zł. **C.** 39,20 zł. **D.** 82,62 zł.

2. Szynka wędzona kosztuje 48 zł za kilogram. Ile dekagramów tej szynki kupi pani Ania za 17 zł?

A. ok. 3 dag **B.** ok. 8 dag **C.** ok. 35 dag **D.** ok. 81 dag

3. 5 lutego 2016 roku wypadł w piątek. Jaki dzień tygodnia był 5 maja 2016 roku?

A. środa **B.** czwartek **C.** sobota **D.** niedziela

4. 5 lutego 2010 roku wypadł w piątek. Jaki dzień tygodnia był 5 maja 2010 roku?

A. środa **B.** czwartek **C.** sobota **D.** niedziela

5. Ile czasu minęło od godziny 22.55 do następnego dnia rano do godziny wskazanej na zegarze?

A. 11 h 31 min **C.** 12 h 31 min
B. 11 h 39 min **D.** 12 h 39 min



6. O godzinie 7.00 Wojtek ustawił zegar wskazówkowy tak, aby pokazywał właściwy czas. Niestety, zegar spóźnia się o 5 minut na godzinę. Kiedy najwcześniej znowu wskaże właściwą godzinę?

A. po 5 dobach
B. po 6 dobach
C. po 10 dobach
D. po 12 dobach

7. Wybierz uzupełnienia zdania spośród A i B oraz spośród C i D.
Drugi kwartał jest A/B od czwartego kwartału o C/D.

A. dłuższy **B.** krótszy **C.** 1 dzień **D.** 2 dni

8. Drukowanie 300 stron trwało 15 minut. Ile trwało drukowanie jednej strony?

A. 2 sekundy **B.** 3 sekundy **C.** 5 sekund **D.** 20 sekund

9. Odległość ze stacji kolejowej w Miłej do stacji w Dobrej jest równa 195 km. Ze stacji w Miłej pociąg osobowy odjeżdża codziennie o godzinie 14.27 i jedzie do stacji w Dobrej ze średnią prędkością 75 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. O której godzinie pociąg przyjeżdża do stacji w Dobrej?

A. o 16.33 **B.** o 16.57 **C.** o 17.03 **D.** o 17.13

Informacja do zadań 10 i 11
Na ilustracji poniżej przedstawiono fragment schematu trasy Pomorskiej Kolei Metropolitalnej (PKM).





10. Pociąg PKM odjeżdża o godzinie 12.55 ze stacji Gdańsk Port Lotniczy, a przyjeżdża do stacji Gdańsk Strzyża o godzinie 13.11. Z jaką średnią prędkością porusza się pociąg PKM na trasie Gdańsk Port Lotniczy – Gdańsk Strzyża?

A. 17 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ **B.** 42 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ **C.** 45 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ **D.** 75 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$

11. Średnia prędkość pociągu PKM między stacjami Gdańsk Matarnia a Gdańsk Port Lotniczy wynosi 54 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jak długo trwa podróż między tymi stacjami? Wynik zaokrąglij do pełnych sekund.

A. 7 min 9 s **B.** 4 min 6 s **C.** 3 min 20 s **D.** 2 min 47 s

12. Na mapie w skali 1 : 5 000 000 odległość między San Francisco a Nowym Jorkiem jest równa 80,8 cm. Ile wynosi w rzeczywistości?



A. 202 km
B. 2020 km
C. 404 km
D. 4040 km

13. W listopadzie 2020 roku pani Kasia za 30 litrów benzyny zapłaciła 138 zł. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. Gdyby paliwo było tańsze o 10 gr za litr, to za kwotę 138 zł pani Kasia kupiłaby 32 litry benzyny.
II. Gdyby paliwo było droższe o 40 gr za litr, to za kwotę 138 zł pani Kasia kupiłaby 27,6 litrów benzyny.

14. Ania, starsza siostra Majki, zarabia, pracując po lekcjach i w weekendy. W soboty pracuje po 5 godzin, w niedziele nie pracuje, w poniedziałki pracuje po 3 godziny, a w pozostałe dni tygodnia – po 2 godziny. Ile netto zarobiła w październiku, jeśli 1.10 wypadł w niedzielę i nie było w tym miesiącu żadnych świąt, a stawka Ani za godzinę to 22 zł netto?

15. Uzasadnij, że Dzień Matki (26.05) i Święto Niepodległości (11.11) w tym samym roku zawsze przypadają w kolejnych dniach tygodnia, np. jeśli Dzień Matki wypada w czwartek, to Święto Niepodległości – w piątek.



16. Pani Alicja Sójka kupiła na wyjazd do Szwecji korony za 200 zł. Ponieważ jednak nie wyjechała, sprzedała wszystkie korony w tym samym kantorze. Ile złotych straciła na tych operacjach? Zakładamy, że kursy kupna i sprzedaży walut w tym czasie się nie zmieniły.

Kraj	Nazwa	Kod waluty	Kupno	Sprzedaż
USA	Dolar amerykański	1 USD	3,7796	3,8560
EUROPEJSKA UNIA GOSPODARCZA I WALUTOWA	Euro	1 EUR	4,4830	4,5736
WIELKA BRYTANIA	Funt brytyjski	1 GBP	4,9555	5,0557
SZWAJCARIA	Frank szwajcarski	1 CHF	4,1926	4,2774
KANADA	Dolar kanadyjski	1 CAD	2,8929	2,9513
SZWECJA	Korona szwedzka	1 SEK	0,4362	0,4450
CZECHY	Korona czeska	1 CZK	0,1680	0,1714

17. W niedzielę rano Janek jechał na zawody sportowe. O godzinie 8.42 dotarł na przystanek tramwajowy na placu Wolności i spojrzał na rozkład jazdy tramwaju nr 46. Fragment tego rozkładu znajduje się poniżej.

Dni robocze		Soboty		Niedziele i święta	
Godziny	Minuty	Godziny	Minuty	Godziny	Minuty
2	16 40	**2**	-	**2**	-
3	04 28 52	**3**	13 49	**3**	13 49
4	16 40	**4**	09 39	**4**	29
5	04 28 50	**5**	09 39	**5**	09 49
6	16 37	**6**	09 39	**6**	29
7	01 25 49	**7**	09 38	**7**	09 48
8	13 37	**8**	08 38	**8**	28
9	01 25 49	**9**	08 38	**9**	08 48
10	13 37	**10**	08 38	**10**	28
kursują tramwaje niskopodłogowe					



Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań. Zdecyduj, czy w miejsce ? wstawić literę P, oznaczającą zdanie prawdziwe, czy F – oznaczającą zdanie fałszywe.

I.	Najbliższy tramwaj linii 46 Janek będzie miał za 26 minut.	?
II.	Gdyby Janek przyszedł na przystanek 20 minut wcześniej, to już od 6 minut byłby w tramwaju i jechał na zawody.	?

18. Trasę długości 250 km samochód pokonał w 4 godziny. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań. Zdecyduj, czy w miejsce ? wstawić literę P, oznaczającą zdanie prawdziwe, czy F – oznaczającą zdanie fałszywe.

I.	Gdyby samochód pokonał tę trasę ze średnią prędkością większą o 12,5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, to czas przejazdu skróciłby się o 48 minut.	?
II.	Gdyby samochód pokonał tę trasę ze średnią prędkością 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, to czas przejazdu wydłużyłby się o 10 minut.	?

19. Maciek i Tomek zmierzyli czas przejazdu na rowerze odcinka o długości 400 m. Maciek pokonał go w ciągu minuty, a Tomek – w 72 sekundy. Jaka była różnica ich średnich prędkości na tym odcinku?

A. 12 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ **B.** 6 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ **C.** 4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ **D.** 3 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$

20. Mama kupiła 30 dag jagód w cenie 25,50 zł za kilogram oraz 60 dag bananów w cenie 4,80 zł za kilogram. Ile zapłaciła za owoce?

21. Zmieszano 80 dag rodzynek po 12 zł za kilogram, 200 g orzechów laskowych po 45 zł za kilogram, 0,9 kg orzechów ziemnych po 16 zł za kilogram i 60 dag orzechów nerkowca po 35 zł za kilogram. Jaki był koszt przygotowania kilograma tej mieszanki?

3. Procenty

- 1% (**1 procent**) pewnej wielkości to $\frac{1}{100}$ tej wielkości.

Obliczanie procentu danej liczby

Przykład. Ile wynosi 5% liczby 23?

$\frac{5}{100} \cdot 23 = 0{,}05 \cdot 23 = 1{,}15$. Zatem 5% liczby 23 to 1,15.

Znajdowanie liczby, gdy znamy jej procent

Przykład 1. Znajdź liczbę, której 9% jest równe 19,35.

Obliczamy 1% szukanej liczby: $19{,}35 : 9 = 2{,}15$. Skoro 1% wynosi 2,15, to 100% tej liczby jest równe $2{,}15 \cdot 100$, czyli 215.

9% → 19,35
: 9 : 9
1% → 2,15
· 100 · 100
100% → 215

Przykład 2. 5% pewnej liczby wynosi 1,5. Jaka to liczba?

100% szukanej liczby to 20 razy więcej od danych 5%, zatem szukana liczba jest 20 razy większa od 1,5, stąd $1{,}5 \cdot 20 = 30$. Szukana liczba to 30.

5% → 1,5
· 20 · 20
100% → 30

Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba

Aby obliczyć, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba, możemy:
1. ustalić, jaką część pierwszej liczby stanowi druga,
2. wyrazić otrzymany ułamek w procentach.

Przykład. Jakim procentem liczby 40 jest liczba 3?

Zapisujemy, jakim ułamkiem liczby 40 jest liczba 3 i otrzymujemy $\frac{3}{40}$. Następnie ułamek $\frac{3}{40}$ wyrażamy w procentach: $\frac{3}{40} = \frac{7{,}5}{100} = 7{,}5\%$. Liczba 3 to 7,5% liczby 40.

Stężenie procentowe roztworu

Przykład. Jakie jest stężenie roztworu zawierającego 20 g cukru na 80 g wody?

← 80 g wody
← 20 g cukru

$$\frac{20\,\text{g}}{80\,\text{g}+20\,\text{g}} = \frac{20\,\text{g}}{100\,\text{g}} = 0{,}2, \text{ czyli } 20\%$$

← 100 g roztworu 20-procentowego

Powiększanie lub pomniejszanie liczby o pewien procent

Przykład 1.
Wyznacz liczbę o 8% większą od liczby a.

Liczba o 8% większa od liczby a to 108% liczby a.

$\frac{108}{100} \cdot a = 1{,}08 \cdot a$

Zatem szukana liczba to $1{,}08a$.

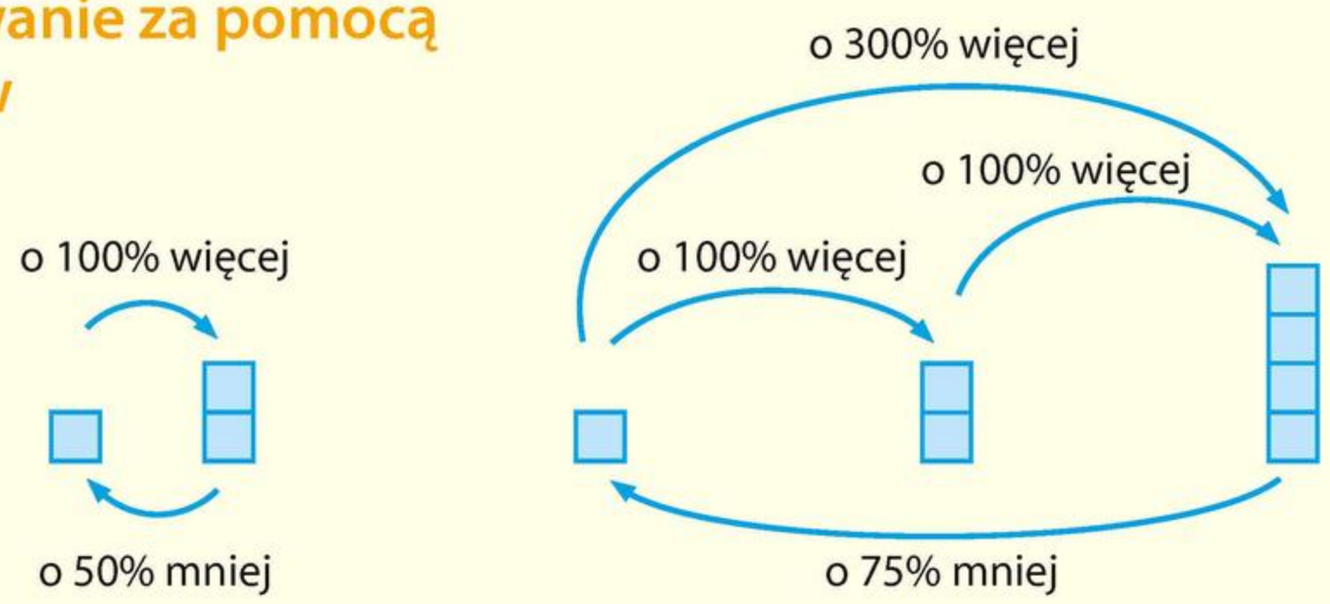
Przykład 2.
Wyznacz liczbę o 8% mniejszą od b.

Liczba o 8% mniejsza od liczby b to 92% liczby b.

$\frac{92}{100} \cdot b = 0{,}92 \cdot b$

Zatem szukana liczba to $0{,}92b$.

Porównywanie za pomocą procentów



Zadania

1. Liczba 42 stanowi 10,5% liczby

A. 4,4. **B.** 4,41. **C.** 400. **D.** 420.

2. Na koncercie grupy hip-hopowej $\frac{1}{6}$ osób miała co najwyżej 20 lat. Jaki procent publiczności stanowiły osoby powyżej dwudziestego roku życia?

A. ok. 17% **B.** ok. 120% **C.** ok. 6% **D.** ok. 83%

3. Zysk ze sprzedaży jednej płyty stanowi 8% ceny tej płyty. Ile co najmniej płyt w cenie 40 zł musi sprzedać sprzedawca, aby zarobić nie mniej niż 1800 zł?

A. 45 **B.** 49 **C.** 562 **D.** 563

4. Liczba a jest o 15% mniejsza od liczby b. Wskaż poprawnie zapisaną zależność.

A. $a = 0{,}15b$ **B.** $a = 0{,}85b$ **C.** $b = 1{,}15a$ **D.** $b = \frac{23}{20}a$

5. Cenę książki zmniejszono z 25 zł do 18 zł. O ile procent obniżono cenę książki?

A. 28% **B.** 38% **C.** 62% **D.** 72%

6. Cena bluzy po obniżce o 30% wynosi 56 zł. Cena początkowa tej bluzy to

A. 16,80 zł. **B.** 72,80 zł. **C.** 80 zł. **D.** 186,67 zł.

7. Cena brutto korali wynosi 24,60 zł. Wiedząc, że stawka podatku VAT to 23%, wskaż ich cenę netto.

A. 5,66 zł **B.** 18,94 zł **C.** 20 zł **D.** 30,26 zł

8. Przed sezonem cenę nart podwyższono o 15%, a po sezonie nową cenę obniżono o 10%. W omawianym okresie cena nart

A. zmalała o 5%. **B.** zmalała o 3,5%. **C.** wzrosła o 5%. **D.** wzrosła o 3,5%.

9. Alkohol etylowy zmieszano z wodą w stosunku 2 : 3. Ile procent alkoholu zawiera tak sporządzony roztwór?

A. 20% **B.** 30% **C.** 40% **D.** 60%

10. W 320-gramowej paczce mieszanki orzechowej znajdują się orzechy laskowe i włoskie zmieszane w stosunku wagowym 3 : 5.

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Do paczki należy dosypać A/B orzechów laskowych, aby stanowiły one 50% wszystkich orzechów w paczce.

A. 80 g **B.** 40 g

Do paczki należy dosypać C/D orzechów włoskich, aby stanowiły one $\frac{3}{4}$ wszystkich orzechów w paczce.

C. 160 g **D.** 40 g



11. Mama przygotowała solną zalewę: 10 g soli rozpuściła w 150 g wody. Ile procent masy tej solanki stanowi masa soli?

A. $6\frac{2}{3}\%$ **B.** $6\frac{1}{4}\%$ **C.** 15% **D.** 16%

12. Antek, Basia, Tomek i Dorota za sprzątnięcie garażu otrzymali w sumie 250 zł. Antek i Dorota otrzymali po 50 zł, Basia dostała 80 zł, a pozostałą kwotę otrzymał Tomek. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. Tomek otrzymał 35% całej kwoty.
II. Basia otrzymała kwotę o 60% większą niż Antek.
III. Tomek otrzymał kwotę o 5% mniejszą niż Basia.
IV. Kwota, jaką otrzymali łącznie Dorota i Antek, stanowi 125% kwoty otrzymanej przez Basię.

13. Kierownik magazynu sklepu meblowego zarabia miesięcznie 5000 zł. Magazynier zarabia o 30% mniej niż kierownik, natomiast portier o 20% mniej niż magazynier. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. Magazynier zarabia o 20% więcej niż portier.
II. Portier zarabia o 44% mniej niż kierownik magazynu.
III. Magazynier zarabia o 1500 zł mniej niż kierownik, ale o 700 zł więcej niż portier.

14. Cenę rakiety tenisowej najpierw podwyższono o 15%, a później obniżono o 15%. Czy to prawda, że końcowa cena rakiety jest równa cenie początkowej? Uzasadnij odpowiedź.

15. Agnieszka dostaje 20 zł kieszonkowego, a Tomek 15 zł.

a) O ile procent kieszonkowe Agnieszki jest większe niż kieszonkowe Tomka?
b) O ile procent kieszonkowe Tomka jest mniejsze od kieszonkowego Agnieszki?

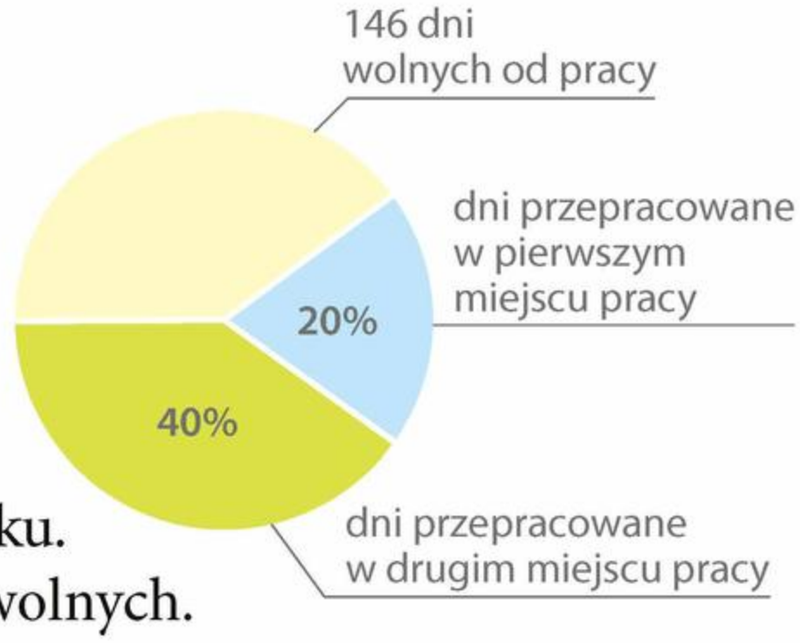
16. Dwadzieścia pięć osób spytano, gdzie planują spędzić wakacje. Wynik sondażu przedstawiono na diagramie.



a) Oblicz, o ile procent więcej osób wybierze się podczas wakacji za granicę, niż zostanie w Polsce.

b) Oblicz, jaki procent osób biorących udział w ankiecie stanowią osoby, które nie mają jeszcze planów.

17. Pan Karol w 2019 roku zmienił miejsce pracy. Na diagramie kołowym przedstawiono, ile procent dni w tym roku Pan Karol miał wolnych od pracy, ile procent dni przepracował w pierwszym miejscu pracy, a ile – w drugim.



Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. Pan Karol łącznie przepracował 219 dni w 2019 roku.

II. Pan Karol miał trzy razy więcej dni pracy niż dni wolnych.

18. Początkowo cena roweru w trzech sklepach była jednakowa. Jednak w wiosennej promocji we wszystkich sklepach cena ta została obniżona.



Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. Po obniżkach cena roweru w sklepie Wielocypedzik jest taka sama jak w sklepie Cyklista.

II. Po obniżkach cena roweru w każdym sklepie jest inna.

III. Najmniejsza obniżka ceny była w sklepie Wielocypedzik.

19. W cukierni Beza ceny wszystkich wypieków z dnia poprzedniego zostały obniżone o taki sam procent. Wiedząc, że cenę kilograma sernika wiedeńskiego obniżono z 25 zł na 18 zł, oblicz, ile kosztuje jabłecznik, jeśli poprzedniego dnia kosztował 20 zł za kilogram.

20. Marysia przeczytała książkę w ciągu trzech dni. Pierwszego dnia przeczytała 40% książki, drugiego $\frac{3}{8}$ książki, a trzeciego 72 strony. Ile stron liczyła ta książka?

A. 365 **B.** 320 **C.** 280 **D.** 276

21. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. 42% liczby 480 to tyle samo co 48% liczby 420.

II. 30% liczby 30 to tyle samo co $\frac{3}{5}$ liczby 15.

4. Potęgi

- **Potęga o wykładniku naturalnym**

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}} = a^n$$

wykładnik potęgi

podstawa potęgi

$$a^0 = 1$$
$$a^1 = a$$

Działania na potęgach

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, gdzie $a \neq 0$, n, m – liczby naturalne

$a^n : a^m = a^{n-m}$, gdzie $a \neq 0$, n, m – liczby naturalne

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, gdzie $a \neq 0$, n, m – liczby naturalne

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, gdzie $a \neq 0$, $b \neq 0$, n, m – liczby naturalne

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, gdzie $a \neq 0$, $b \neq 0$, n, m – liczby naturalne

Notacja wykładnicza

- **Potęga o podstawie 10 i wykładniku całkowitym**

  $10^{-n} = \frac{1}{10^n}$ dla dowolnej liczby naturalnej n.

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2}$$

- Zapis liczby dodatniej w **notacji wykładniczej** to przedstawienie tej liczby w postaci iloczynu

  $a \cdot 10^n$,

  gdzie n jest liczbą całkowitą, a zaś jest liczbą, która spełnia warunek: $1 \leqslant a < 10$.

$$7000 = 7 \cdot 10^3$$
$$0{,}007 = 7 \cdot 10^{-3}$$

Zadania

1. Ile jest równa wartość potęgi $\left(-1\frac{2}{3}\right)^2$?

A. $-2\frac{7}{9}$ **B.** $-1\frac{4}{9}$ **C.** $1\frac{4}{9}$ **D.** $2\frac{7}{9}$

2. Która z podanych liczb leży najbliżej 0 na osi liczbowej?

A. 8^2 **B.** $(-2)^5$ **C.** 10^{-3} **D.** $\left(\frac{1}{3}\right)^3$

3. Wyrażenie $\frac{5^{10}}{5^4 \cdot 5}$ jest równe

A. 5^2. **B.** 5^5. **C.** 5^6. **D.** 5^7.

4. Liczba 25 razy większa niż 125^4 jest równa

A. 5^9. **B.** 5^{10}. **C.** 5^{14}. **D.** 5^{24}.

5. Połowa liczby 4^{88} to

A. 2^{44}. **B.** 2^{88}. **C.** 2^{175}. **D.** 4^{87}.

6. Która z podanych liczb jest największa?

A. 81^{56} **B.** 9^{100} **C.** 27^{72} **D.** 2^{224}

7. Poniżej zapisano trzy wyrażenia.

I. $\frac{125^7}{625^5} - 5^0$ **II.** $\frac{4^3 \cdot 8^2}{2^5 \cdot 2^0} : 2^5$ **III.** $\frac{2^{10} \cdot 5^{10}}{5^2 \cdot 10000^2}$

Które z nich ma wartość równą 4?

A. tylko I **B.** tylko I i II **C.** tylko II i III **D.** I, II i III

8. Którą z liczb przedstawiono w notacji wykładniczej?

A. $0{,}578 \cdot 10^3$ **B.** $5{,}78 \cdot 10^{-4}$ **C.** $57{,}8 \cdot 10^2$ **D.** $578 \cdot 10^{-1}$

9. Wiemy, że $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 10 = 55$ oraz $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 10 = 3\,628\,800$.
Ile wynosi $2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot \ldots \cdot 2^{10}$?

A. 2^{55} **B.** $2 \cdot 55$ **C.** $2 \cdot 3\,628\,800$ **D.** $2^{3\,628\,800}$

10. Średnia odległość Saturna od Słońca to około $1{,}43 \cdot 10^9$ km. Odległość ta, zapisana bez użycia potęgi, jest równa

A. 14 300 000 km.
B. 143 000 000 km.
C. 1 430 000 000 km.
D. 14 300 000 000 km.

11. Oceń, czy podana równość jest prawdziwa.

I. $3^4 - 3^0 = 80$ **II.** $1 - (-3)^2 = 10$ **III.** $4^5 + 4^7 = 4^{12}$

12. Ustaw w kolejności rosnącej liczby: 2^3, $(-2)^3$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$, $(-2)^0$, -2^0, 0^2.

13. Dane są liczby: -3^{12}, $(-3)^{12}$, 3^{12}, -9^{11}, $(-9)^{11}$, -9^6, $(-9)^6$.
Które z nich są równe 27^4?

14. W pewnym eksperymencie przeprowadzanym w warunkach laboratoryjnych bakteria dzieli się na dwie nowe bakterie po 20 minutach. Ile bakterii powstanie z jednej po upływie trzech godzin od rozpoczęcia eksperymentu?

15. Oblicz.

a) $\frac{5^4+5^4+5^4+5^4+5^4}{5^3}$ **b)** $0{,}25^4 \cdot \frac{28^6}{7^6}$ **c)** $\frac{2^6 \cdot 5^{12} \cdot 7^6}{3{,}5^6} : 10^{10}$

16. Średnica najmniejszej poznanej bakterii wynosi około $0{,}2 \cdot 10^{-6}$ m. Ile centymetrów będzie ona miała na zdjęciu z mikroskopu w powiększeniu milion razy?

5. Pierwiastki

- **Pierwiastkiem kwadratowym** (**drugiego stopnia**) z liczby nieujemnej a nazywamy taką liczbę nieujemną b, dla której $b^2 = a$. Piszemy wówczas $b = \sqrt{a}$.
- **Pierwiastkiem sześciennym** (**pierwiastkiem trzeciego stopnia**) z liczby a nazywamy taką liczbę b, dla której $b^3 = a$. Piszemy wówczas $b = \sqrt[3]{a}$.

Własności pierwiastków

- Dla dowolnej nieujemnej liczby a:
  $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a$
  np. $\sqrt{23^2} = 23$, $\sqrt{17} \cdot \sqrt{17} = 17$
- Dla dowolnej liczby a:
  $(\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$
  np. $\sqrt[3]{13 \cdot 13 \cdot 13} = 13$, $\sqrt[3]{29}^3 = 29$
- Pierwiastek z iloczynu
  $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ dla $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$
  $\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ dla dowolnych a i b
- Pierwiastek z ilorazu
  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ dla $a \geqslant 0$ i $b > 0$
  $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ dla dowolnego a i $b \neq 0$
- Własności pierwiastkowania umożliwiają wykonywanie takich operacji jak:
  - **włączanie** czynnika pod pierwiastek, np.: $4\sqrt{5} = \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{4^2 \cdot 5} = \sqrt{80}$
  - **wyłączanie** czynnika spod pierwiastka, np.: $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
  - usuwanie niewymierności z mianownika, np.: $\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Zadania

1. Liczba $\sqrt{4\frac{25}{36}}$ jest równa

A. $\frac{5}{3}$. **B.** $2\frac{5}{6}$. **C.** $2\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{10}{6}$.

2. Zaokrąglenie liczby $\sqrt[3]{2\frac{7}{9}} : \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$ do całości jest równe

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

3. Liczba $4\sqrt{12}$ jest równa

A. $\sqrt{48}$. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $8\sqrt{3}$. **D.** $12\sqrt{2}$.

4. Wskaż poprawną zależność, wiedząc, że $\sqrt{11} \approx 3{,}317$.

A. $\sqrt{44} \approx 4 \cdot 3{,}317$
B. $\sqrt{1100} \approx 100 \cdot 3{,}317$
C. $\sqrt{9 + 11} \approx 3 + 3{,}317$
D. $\sqrt{99} \approx 3 \cdot 3{,}317$

5. Różnica liczb $2\sqrt{50}$ i $2\sqrt{32}$ jest równa

A. $2\sqrt{18}$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $6\sqrt{2}$.

6. Jeśli $x = 5 - 3\sqrt{7}$, $y = 4 + 2\sqrt{7}$, to liczba $x - y$ jest równa

A. $1 - \sqrt{7}$. **B.** $1 - 5\sqrt{7}$. **C.** $9 - \sqrt{7}$. **D.** $1 + 5\sqrt{7}$.

7. Najmniejszą spośród liczb: $5\sqrt{3}$, $4\sqrt{7}$, $8\sqrt{2}$, $3\sqrt{11}$ jest

A. $5\sqrt{3}$. **B.** $4\sqrt{7}$. **C.** $8\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{11}$.

8. Liczba $\sqrt{3^2} - (\sqrt[3]{-7})^3$ jest równa

A. -4. **B.** 10. **C.** $3 - \sqrt[3]{7}$. **D.** $3 + \sqrt[3]{7}$.

9. Liczba $\frac{3\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ nie jest liczbą

A. całkowitą. **B.** niewymierną. **C.** dodatnią. **D.** podzielną przez 6.

10. Wiedząc, że $327^2 = 106\,929$, wskaż wartość liczby $\sqrt{10{,}6929}$.

A. 0,0327 **B.** 0,327 **C.** 3,27 **D.** 32,7

11. Dane są liczby niewymierne: $\sqrt{18}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{24}$, $\sqrt{32}$. Wśród nich można znaleźć dwie liczby, których iloczyn jest wymierny. Ile wynosi ten iloczyn?

A. 12 **B.** 18 **C.** 24 **D.** 32

12. Kwadrat o boku a ma pole równe polu prostokąta o bokach 2 cm i 18 cm. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. Obwód kwadratu jest równy 24 cm.
II. Obwód kwadratu jest równy obwodowi prostokąta.

13. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\sqrt{\frac{36}{49}} \cdot (\sqrt{121} + \sqrt{9})$ **b)** $\sqrt{1{,}44} + \sqrt{0{,}04} - \sqrt[3]{0{,}008}$

14. Ile jest równa wartość wyrażenia $\sqrt{3}(\sqrt{48} - \sqrt{27})$?

A. $\sqrt{63}$ **B.** $6\sqrt{3}$ **C.** 3 **D.** 21

15. Wyznacz dwie kolejne liczby całkowite, między którymi na osi liczbowej znajduje się podana liczba.

a) $4 + \sqrt{35}$ **b)** $17 - \sqrt{17}$ **c)** $2 - \sqrt{24}$ **d)** $3 - \sqrt{17}$

16. Dane są trzy liczby: $x = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, $y = \sqrt[3]{-64}$, $z = \frac{7}{5}$.
Które z nich są większe od $\sqrt{2}$?

A. tylko x i y **B.** tylko z **C.** wszystkie trzy **D.** żadna

6. Wyrażenia algebraiczne

- Aby doprowadzić sumę algebraiczną do **najprostszej postaci**, należy uporządkować wyrazy, a następnie zredukować wyrazy podobne.

  Przykład. $-2x(-3)+5yx^2+4-3xyx = 6x \underline{+5x^2y} + 4 \underline{-3x^2y} = 6x+2x^2y+4$

- **Opuszczanie nawiasów**

$$-(a+b-c) = -a-b+c$$

$$a\cdot(b+c) = ab+ac$$

$$(a+b)\cdot(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

Zadania

1. Wartość wyrażenia $-5xy+4y-2$ dla zmiennych $x=2$ i $y=-3$ wynosi

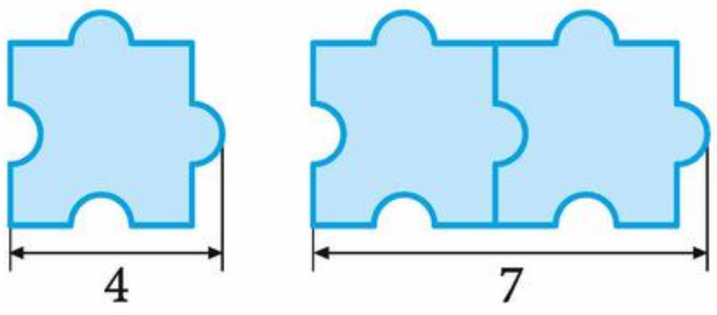
A. -20. **B.** 16. **C.** 40. **D.** 44.

2. Wyrażenie $5x^2-3x(x-2)$ można zapisać w postaci

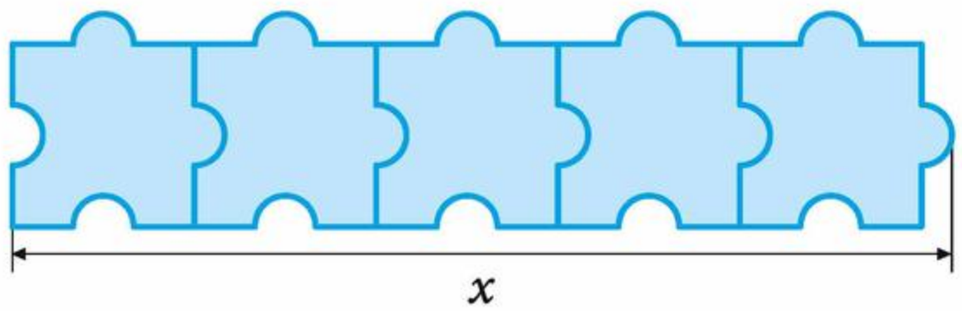
A. $8x^2+6x$. **B.** $8x^2-6x$. **C.** $2x^2+6x$. **D.** $2x^2-6x$.

Informacja do zadań 3 i 4

Na rysunku 1 przedstawiono kształt i ułożenie puzzli oraz niektóre wymiary.



Rys. 1



Rys. 2

3. Ułożono 5 puzzli jak na rysunku 2. Jaką długość ma odcinek x?

A. 16 **B.** 18 **C.** 20 **D.** 22

4. Jaka będzie długość odcinka x, jeśli w taki sam sposób ułożymy n takich puzzli?

A. $4n$ **B.** $4n-2$ **C.** $3n+1$ **D.** $3n-1$

5. Krzyś jest o 5 lat starszy od Wojtka i dwa razy młodszy niż Amelka, która ma x lat. Wiek Wojtka jest równy

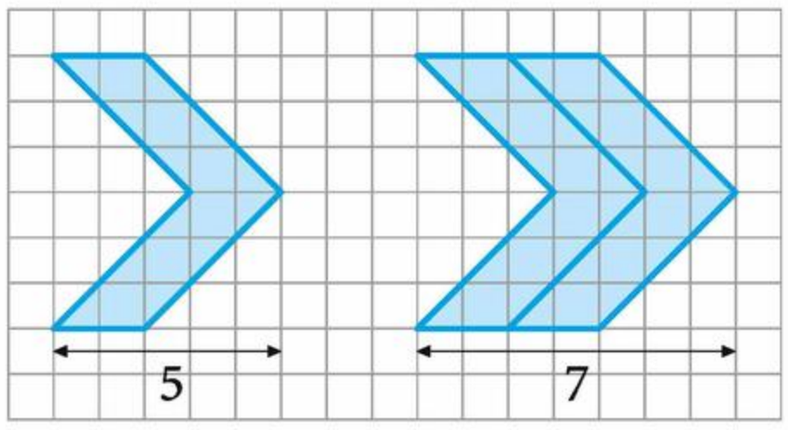
A. $\frac{1}{2}x - 5$. **B.** $\frac{1}{2}x + 5$. **C.** $2x - 5$. **D.** $2x + 5$.

6. Cenę snowboardu (x zł) najpierw obniżono o 10%, a później jeszcze o 15%. Jego cena po zmianach jest równa

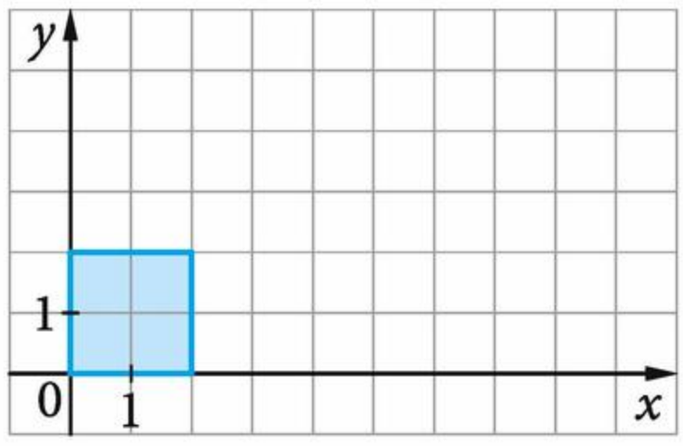
A. $0{,}25x$. **B.** $0{,}75x$. **C.** $0{,}765x$. **D.** $0{,}8x$.

7. Na rysunkach przedstawiono kształt i sposób układania płytek oraz podano niektóre wymiary (w centymetrach). Które wyrażenie algebraiczne opisuje długość odcinka x dla wzoru złożonego z n płytek?

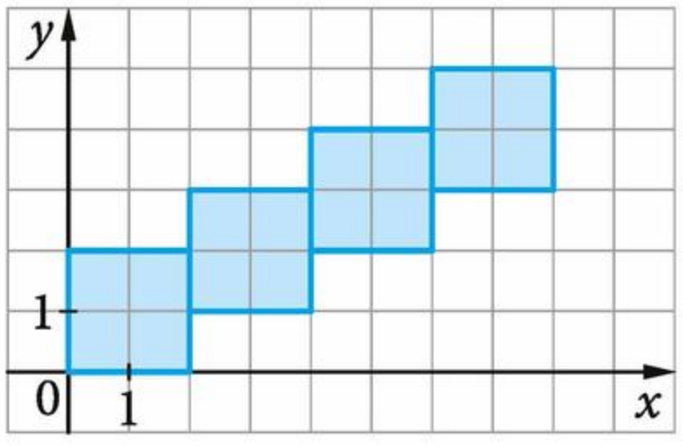
A. $5n$ **B.** $5n - 2$ **C.** $2n + 3$ **D.** $2n - 3$



8. Ania narysowała w układzie współrzędnych kwadrat położony jak na pierwszym rysunku. Kolejne przystające do niego kwadraty rysowała w taki sposób, aby lewy dolny wierzchołek rysowanego kwadratu był środkiem prawego boku poprzedniego kwadratu (rys. 2).



Rys. 1



Rys. 2

Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań. Zdecyduj, czy w miejsce ? wstawić literę P, oznaczającą zdanie prawdziwe, czy F – oznaczającą zdanie fałszywe.

I.	Prawy górny wierzchołek piątego kwadratu, narysowanego w sposób opisany powyżej, ma współrzędne (8, 6).	?
II.	Ania narysowała w taki sam sposób n kwadratów. Współrzędna x prawego górnego wierzchołka ostatniego kwadratu jest równa $2n$.	?
III.	Współrzędne prawego górnego wierzchołka pewnego kwadratu wynoszą (a, b). Współrzędne prawego górnego wierzchołka w następnym kwadracie będą równe $(a + 2, b + 1)$.	?

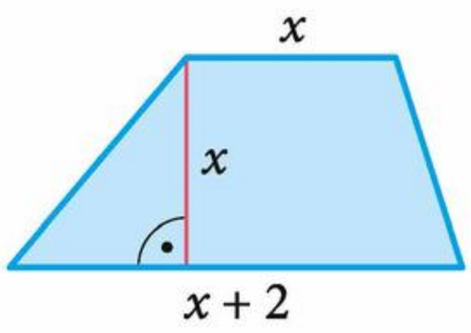
9. Dane są wyrażenia: $P = 2x - 3xy - 2$, $Q = x + y - xy + 1$.
Oceń, czy podane równości są prawdziwe. Zdecyduj, czy w miejsce ? wstawić literę P, oznaczającą równość prawdziwą, czy F – oznaczającą równość fałszywą.

I.	$P + Q = 3x + y - 1$	?
II.	$P - Q = x - 2xy - y - 3$	?

10. Wykonaj mnożenie.

a) $x(3x - 1)$ **b)** $-x^2(2x^2 + x)$ **c)** $-x(-5x^2 - x^3)$

11. Wyznacz różnicę między polem prostokąta o bokach $x + 1$, $x + 2$ a polem trapezu przedstawionego na rysunku obok.



12. Doprowadź wyrażenie $(x - 3)(x + 5) - 3(x - 4)(x + 2)$ do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla $x = \sqrt{2}$.

Informacja do zadań 13 i 14

Wyrażenie $2000 + 45x$ opisuje łączny koszt balu karnawałowego dla x osób.

13. Oblicz koszt balu dla jednego uczestnika, jeśli w balu weźmie udział 50 osób.

14. Oblicz, ile osób wzięło udział w balu, jeśli każda osoba zapłaciła 95 zł.

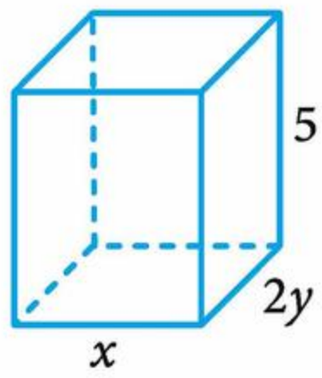
15. W tabeli poniżej zamieszczono cennik wynajmu kajaków i kanadyjek.

	Okres wypożyczenia		
	1 dzień	**2–5 dni**	**Powyżej 5 dni**
Kajak	50 zł	40 zł/dzień	35 zł/dzień
Kanadyjka	60 zł	50 zł/dzień	45 zł/dzień

a) Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego koszt wypożyczenia x kajaków i y kanadyjek na 4 dni. Oblicz wartość zapisanego wyrażenia dla $x = 5$ i $y = 3$.
b) Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego koszt wypożyczenia x kajaków i y kanadyjek na z dni ($z > 5$). Oblicz wartość zapisanego wyrażenia dla $x = 4$, $y = 2$ i $z = 7$.

16. Na rysunku przedstawiono wymiary prostopadłościanu.

a) Zapisz wyrażenie opisujące objętość prostopadłościanu.
b) Zapisz w postaci sumy algebraicznej pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu.



17. Udowodnij, że dla dowolnej liczby x wartość wyrażenia $(3x - 2)(6x + 5) - 3(3x - 1)(2x + 1)$ jest ujemna.

7. Równania, proporcjonalność prosta

- Liczbę spełniającą równanie nazywamy **rozwiązaniem równania** (lub pierwiastkiem równania).

  Rozwiązać równanie to znaczy podać jego wszystkie rozwiązania lub stwierdzić, że rozwiązań nie ma.

- **Rozwiązywanie zadania tekstowego za pomocą równania**

  1. Wprowadzamy niewiadomą i opisujemy, co ona znaczy.
  2. Układamy równanie.
  3. Rozwiązujemy równanie.
  4. Sprawdzamy rozwiązanie z treścią zadania.
  5. Zapisujemy odpowiedź.

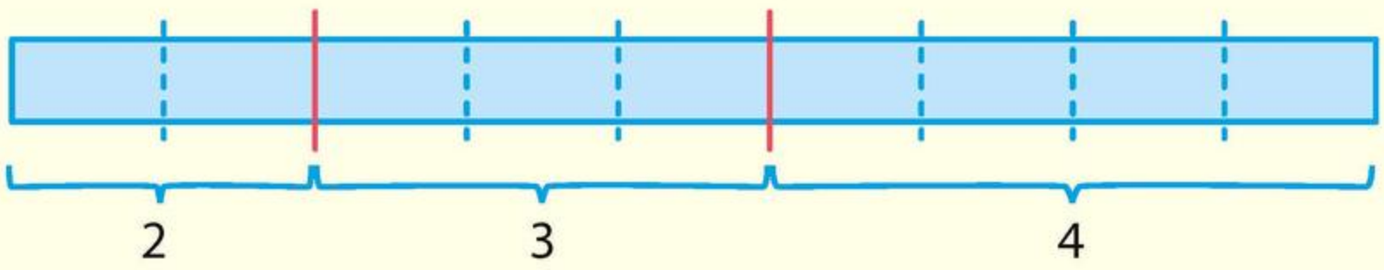
Proporcjonalność

- Dwie dodatnie wielkości są **wprost proporcjonalne**, jeżeli:
  - wraz ze wzrostem jednej wielkości druga rośnie tyle samo razy
    lub
  - wraz ze zmniejszaniem się jednej wielkości druga zmniejsza się tyle samo razy.

- **Podział proporcjonalny**

  Przykład. Jak podzielić 1260 zł na trzy kwoty w stosunku 2 : 3 : 4?

  Podział w stosunku 2 : 3 : 4 zaczynamy od dzielenia na 9 równych części $(2 + 3 + 4 = 9)$, a następnie ustalamy wartości poszczególnych kwot.



  Jedna z dziewięciu części ma wartość: 1260 zł : 9 = 140 zł. Zatem pierwsza kwota to $2 \cdot 140$ zł = 280 zł, druga $3 \cdot 140$ zł = 420 zł, a trzecia $4 \cdot 140$ zł = 560 zł.

Zadania

1. Równanie $4x + 4 = 4(x + 1)$

A. nie jest spełnione przez żadną liczbę.
B. jest spełnione tylko przez liczbę 0.
C. jest spełnione tylko przez liczbę 1.
D. jest spełnione przez każdą liczbę.

2. Ekspedientka wydała Magdzie 4 zł reszty w monetach 20- i 50-groszowych, w sumie 14 monet. Ile 50-groszówek otrzymała Magda?

A. 4 **B.** 6 **C.** 8 **D.** 10

3. Które równanie odpowiada treści zadania, jeśli literą x oznaczymy liczbę uczniów w klasie drugiej?

W trzech klasach jest 76 uczniów. W klasie pierwszej jest o 4 uczniów mniej niż w klasie trzeciej, a w klasie trzeciej jest dwa razy więcej uczniów niż w klasie drugiej. Ilu uczniów jest w każdej klasie?

A. $2x - 4 + x + 2x = 76$ **C.** $2x + x + 2x + 4 = 76$

B. $x - 4 + 2x + x = 76$ **D.** $x + 4 + 2x + x = 76$

4. Wiadomo, że liczby x i y są wprost proporcjonalne. Wówczas a jest równe

x	15	18
y	20	a

A. $13\frac{1}{2}$. **B.** $16\frac{2}{3}$. **C.** 23. **D.** 24.

5. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. Liczba 5 spełnia równanie $3^{x-1} = 81$.

II. Liczba 2 jest pierwiastkiem równania $x^2 - 2x = 4 - x$.

6. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. Jeśli Adam jest o cztery lata starszy od Tomka, to za dwa lata będzie od niego o 6 lat starszy.

II. Jeśli Zosia jest 3 razy starsza od Tosi, to za trzy lata też będzie trzy razy starsza od Tosi.

III. Jeśli Ela i Marek mają razem 50 lat, to za 4 lata będą mieli razem 54 lata.

7. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. Gdy wyznaczymy m ze wzoru $\frac{n}{n-m} = k$, otrzymamy $m = \frac{n-1}{k}$.

II. Gdy wyznaczymy n ze wzoru $k = 2n + m^2$, otrzymamy $n = \frac{1}{2}(k - m^2)$.

8. Rozwiąż równanie.

a) $3(x-5) + x = 2 - x$ **b)** $\frac{x+2}{3} + x = 3 - 2x$ **c)** $4 - \frac{2x-5}{2} = 3 - x$

9. Wyznacz x z podanego wzoru.

a) $xy = k,\ y \neq 0$ **b)** $4x + 2y = 6$ **c)** $\frac{a+b}{x} = 3,\ x \neq 0$

10. Na targu rękodzieła pani Edyta sprzedawała wykonane przez siebie bransoletki i korale. Łącznie sprzedała 24 sztuki biżuterii i otrzymała za nie 696 zł. Oblicz, ile korali i ile bransoletek sprzedała, jeśli korale kosztowały 35 zł, a bransoletka 27 zł.

11. W trójkącie równoramiennym kąt między ramionami jest o 18° mniejszy od kąta przy podstawie. Oblicz, ile wynosi suma miar kątów przy podstawie tego trójkąta.

12. W całorocznym teście z matematyki było 50 zadań. Za każde poprawnie rozwiązane zadanie można było uzyskać 2 punkty, za brak rozwiązania 0 punktów, a za każde błędne rozwiązanie nauczyciel odejmował 1 punkt. Kamila zdobyła łącznie 44 punkty, a liczba błędnie rozwiązanych przez nią zadań była dwa razy mniejsza niż liczba zadań nierozwiązanych. Ile zadań błędnie rozwiązała Kamila?

13. W sklepie sportowym na początku wakacji rower zdrożał o 15%. Pod koniec wakacji cenę tego roweru obniżono o 20% i kosztował wtedy o 276 zł mniej niż podczas wakacji. Jaka była cena roweru przed podwyżką?

14. Ania miała w skarbonce $\frac{2}{7}$ oszczędności, w portfelu 40% oszczędności, a pozostałe 66 zł w kieszeni. O ile złotych więcej miała w portfelu niż w skarbonce?

15. Ze składników wymienionych w przepisie zamieszczonym obok można przygotować 16 gofrów.

a) Oblicz, ile mąki potrzeba do przygotowania 40 gofrów.

b) Oblicz, ile gofrów przygotujemy, jeśli użyjemy 1,5 szklanki oleju roślinnego.

GOFRY (16 sztuk)

- *1,5 szklanki mąki pszennej*
- *2 szklanki mleka*
- *1 łyżeczka proszku do pieczenia*
- *szczypta soli*
- *2 łyżki cukru*
- *1/3 szklanki oleju roślinnego*
- *2 jajka*



16. Stosunek długości boków prostokąta $ABCD$ jest równy 2 : 3. Gdyby długość krótszego boku zwiększyć o 1 cm, a dłuższego o 4 cm, otrzymalibyśmy prostokąt $A'B'C'D'$ o stosunku boków 1 : 2. Oblicz obwód i pole prostokąta $ABCD$.

17. W klasie 8a jest 28 uczniów. Stosunek liczby dziewcząt do liczby chłopców wynosi 3 : 4. Oblicz liczbę chłopców w tej klasie.

18. Na klombach w mieście posadzono żonkile i hiacynty za łączną kwotę 7000 zł. Sadzonka żonkila kosztowała 1,25 zł, a hiacynta – 2,50 zł. Stosunek liczby sadzonek żonkili do liczby sadzonek hiacyntów na tym klombie jest równy 1 : 3. Które równanie opisuje podane zależności, jeśli liczbę sadzonek żonkili posadzonych na tym klombie oznaczymy przez x?

A. $\frac{1{,}25 + 2{,}5}{4} \cdot x = 7000$

B. $1{,}25x + 2{,}5 \cdot 3x = 7000$

C. $4x \cdot (1{,}25 + 2{,}5) = 7000$

D. $1{,}25 \cdot 3x + 2{,}5x = 7000$

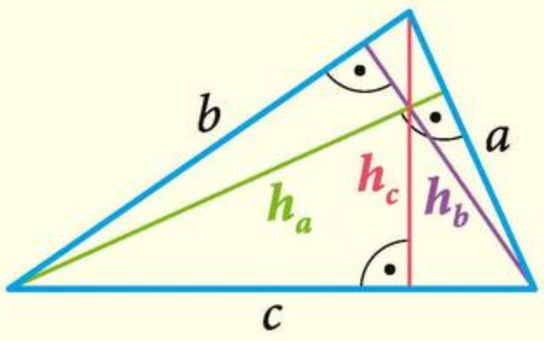
19. Z dwóch litrów śmietany powstało 70 dag masła. Ile takiej śmietany potrzeba do przygotowania kostki masła o masie 200 g?

20. Podczas siatkarskiego obozu sportowego dziewczęta zakwaterowano w pokojach czteroosobowych. Gdyby zostały zakwaterowane w pokojach trzyosobowych, zajęłyby o 5 pokoi więcej. Ile dziewcząt pojechało na obóz?

8. Figury płaskie

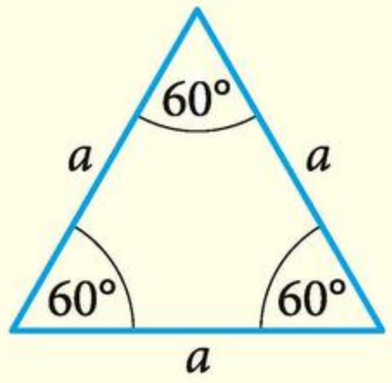
Pola wybranych trójkątów i czworokątów

dowolny trójkąt



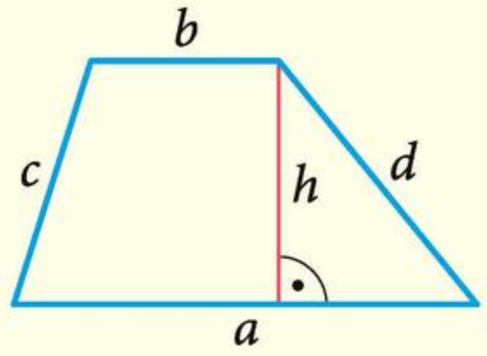
$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

trójkąt równoboczny



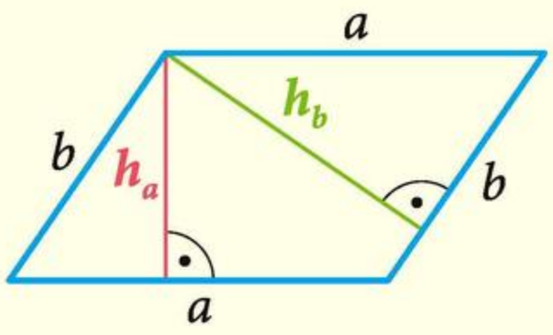
$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

trapez



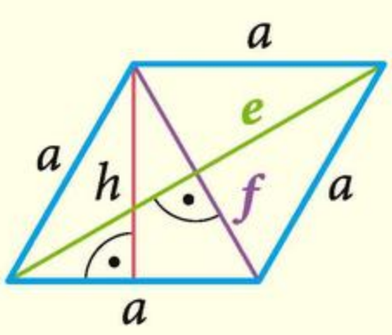
$$P = \frac{(a+b)h}{2}$$

równoległobok



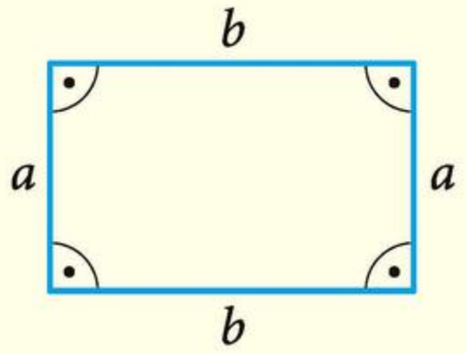
$$P = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

romb



$$P = ah = \frac{ef}{2}$$

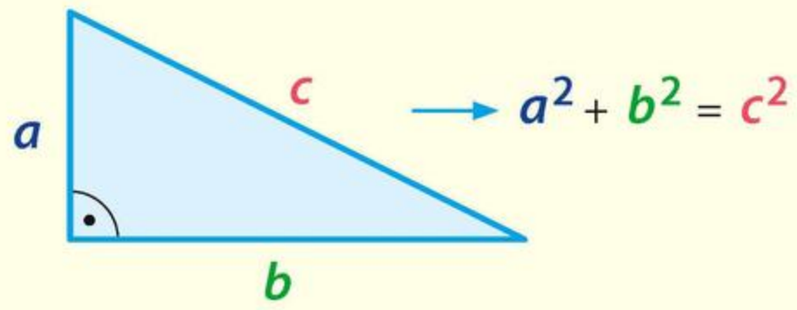
prostokąt



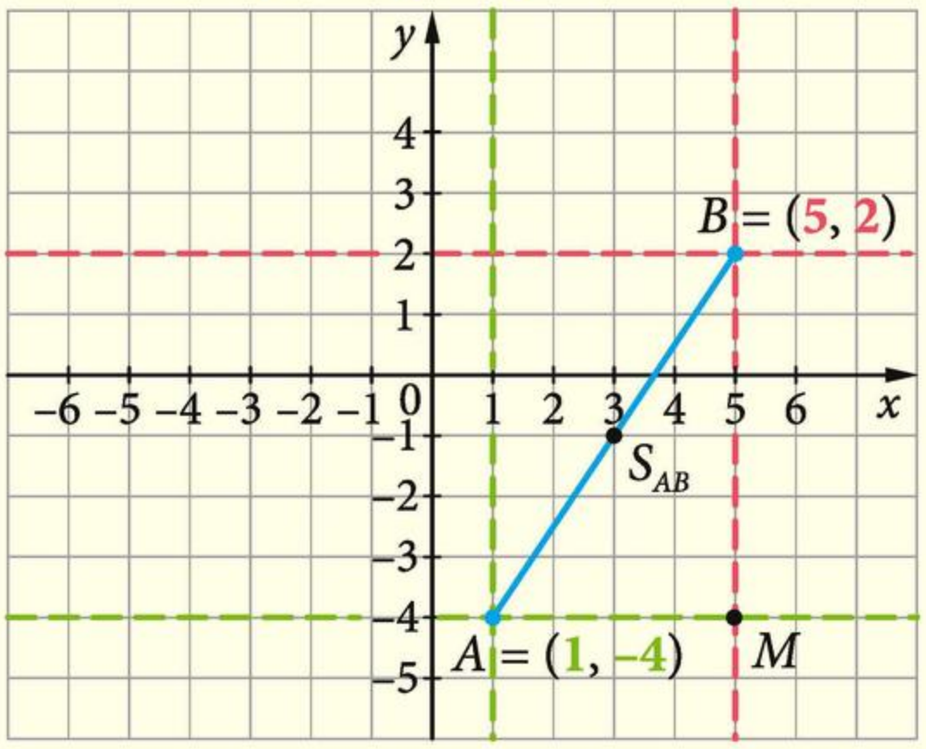
$$P = ab$$

Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.



Układ współrzędnych



- **Współrzędne środka odcinka** to średnie arytmetyczne odpowiednich współrzędnych jego końców.

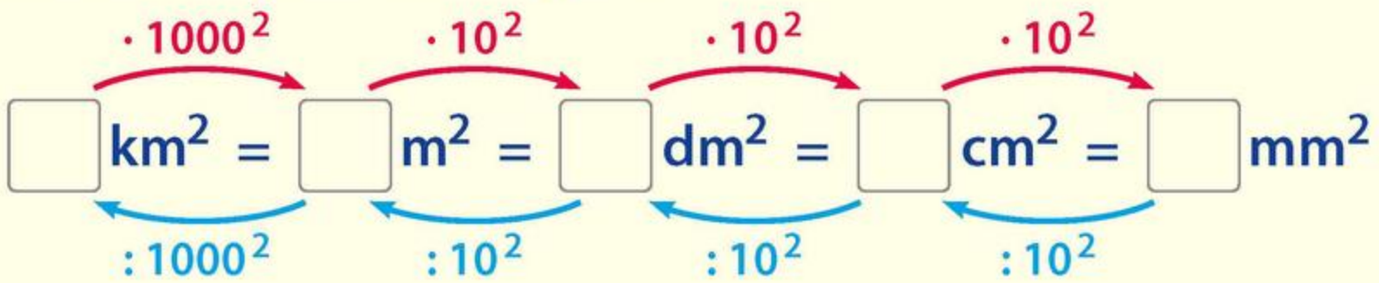
  $A = (1, -4) \quad B = (5, 2)$

  $S_{AB} = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{-4+2}{2}\right), \; S_{AB} = (3, -1)$

- Długości odcinków nieleżących wzdłuż kratek obliczamy z twierdzenia Pitagorasa.

  $AB = \sqrt{AM^2 + MB^2}$

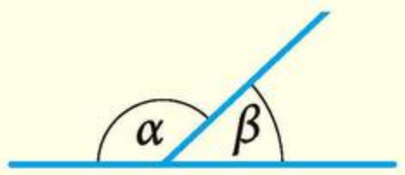
Zamiana jednostek pola



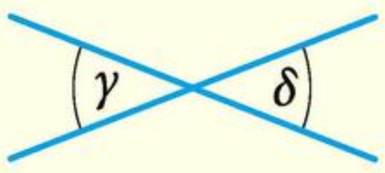
$1\ a = 100\ m^2$
$1\ ha = 100\ a$
$1\ km^2 = 100\ ha$

Kąty

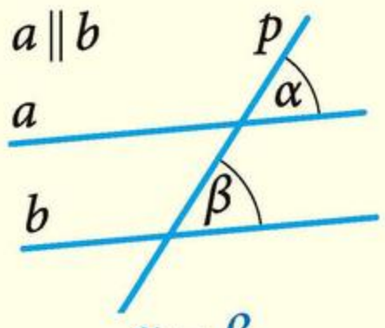
kąty przyległe | kąty wierzchołkowe | kąty odpowiadające | kąty naprzemianległe



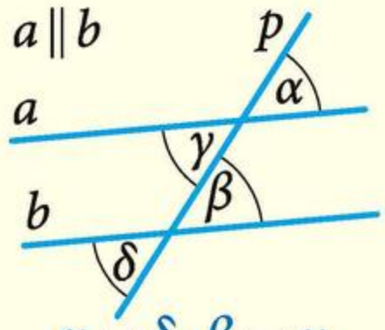
$\alpha + \beta = 180°$



$\gamma = \delta$



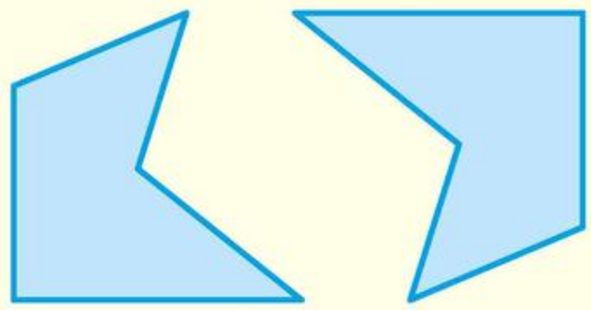
$\alpha = \beta$



$\alpha = \delta, \beta = \gamma$

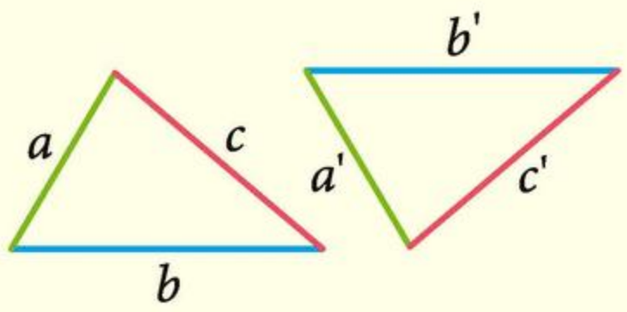
Przystawanie figur

- Figury, które mają jednakowy kształt i jednakowe wymiary, nazywamy **figurami przystającymi**.



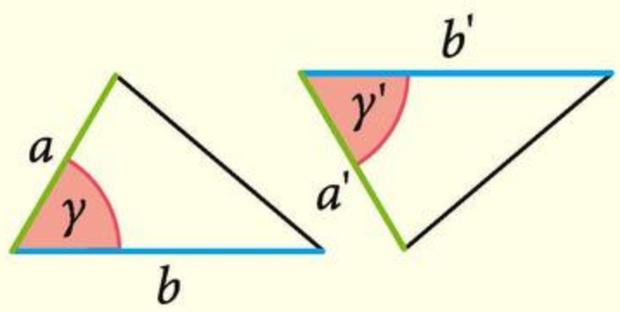
- **Cechy przystawania trójkątów**

bok-bok-bok (bbb)



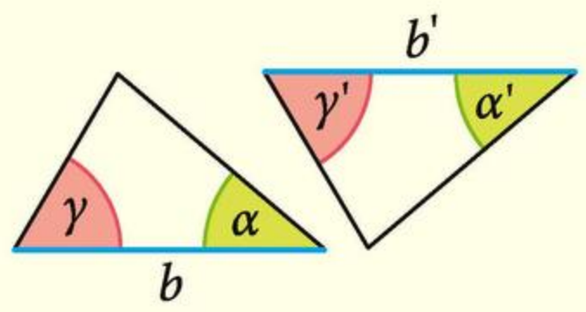
$a = a', b = b', c = c'$

bok-kąt-bok (bkb)



$a = a', \gamma = \gamma', b = b'$

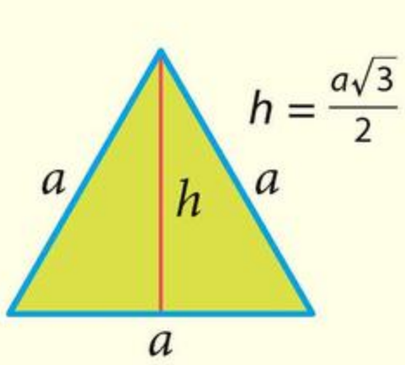
kąt-bok-kąt (kbk)



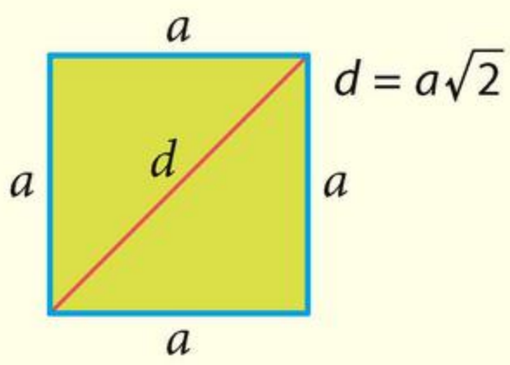
$\gamma = \gamma', b = b', \alpha = \alpha'$

Wielokąty foremne

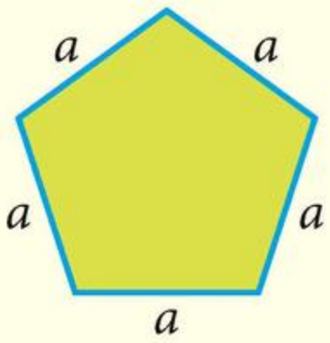
- **Wielokąt foremny** to wielokąt, którego wszystkie boki mają jednakową długość i wszystkie kąty mają tę samą miarę.



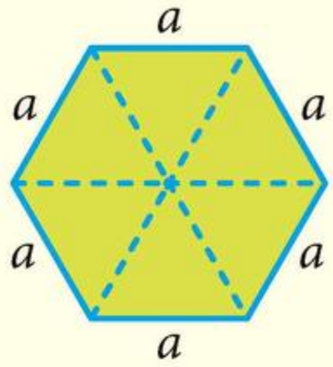
trójkąt foremny
(trójkąt równoboczny)



czworokąt foremny
(kwadrat)



pięciokąt
foremny



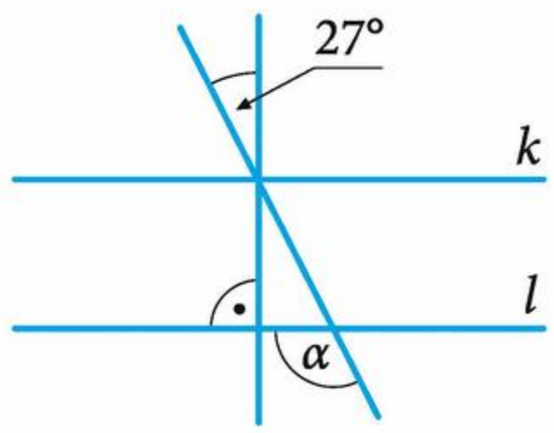
sześciokąt
foremny

Sześciokąt foremny można podzielić na sześć trójkątów równobocznych.

VI. Powtórzenie wiadomości ze szkoły podstawowej

Zadania

1. Proste k i l na rysunku obok są równoległe. Kąt α ma miarę



A. 63°. **B.** 113°. **C.** 153°. **D.** 117°.

2. Oblicz miary kątów przyległych, jeżeli jeden z nich jest:

a) cztery razy większy od drugiego,

b) o 30° mniejszy od drugiego.

3. Jeden z kątów trójkąta ma miarę α, drugi ma miarę o 60° większą, a trzeci – cztery razy większą niż α. Trójkąt ten jest

A. prostokątny. **B.** rozwartokątny. **C.** równoramienny. **D.** równoboczny.

4. Wysokość trapezu prostokątnego dzieli go na kwadrat i trójkąt równoramienny. Dłuższe ramię tego trapezu ma długość 8 cm. Ile wynosi pole trapezu?

A. 192 cm^2
B. 48 cm^2
C. $\left(16\sqrt{2}+6\right)\ \text{cm}^2$
D. Nie da się go obliczyć – jest za mało danych.

5. Ramiona trójkąta równoramiennego mają długość 7 cm, a wysokość opuszczona na podstawę – 3 cm. Trójkąt ten rozcięto na dwie części odcinkiem równoległym do podstawy, przechodzącym przez środek wysokości (rys. 1). Z tych części zbudowano równoległobok (rys. 2). Oblicz jego obwód.

Rys. 1



Rys. 2



6. Ile wynosi pole trójkąta KLM o wierzchołkach $K=(-1, 1)$, $L=(10, 1)$, $M=(-3, 4)$?

A. 11 **B.** 13 **C.** 16,5 **D.** 33

7. W układzie współrzędnych zaznaczono punkty $A = (2, 1)$ oraz $B = (4, -3)$. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. Środkiem odcinka AB jest punkt $(3, -1)$.
II. Punkt $(0, 5)$ leży na prostej AB.
III. Punkt $(5, -4)$ leży na prostej AB.

8. Dane są punkty $A = (-1, 2)$ i $B = (2, 4)$. Znajdź taki punkt C, aby:

a) punkt C był środkiem odcinka AB,
b) punkt A był środkiem odcinka BC,
c) punkt B był środkiem odcinka AC.

9. Dany jest romb o przekątnych długości 12 i 16. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. Obwód tego rombu jest równy 20.
II. Pole tego rombu jest równe 96.
III. Wysokość tego rombu jest równa 9,6.

10. Dany jest trójkąt ABC, gdzie $A = (5, -3)$, $B = (5, 3)$, $C = (0, 0)$. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. Obwód trójkąta ABC jest równy $2\left(3 + \sqrt{34}\right)$.
II. Pole trójkąta ABC jest równe $3\sqrt{34}$.

11. Bartek narysował w układzie współrzędnych odcinek o końcach w punktach kratowych (rys. 1). Kolejne przystające do niego równoległe odcinki rysował w taki sposób, że dolny wierzchołek rysowanego odcinka znajdował się dokładnie o jedną jednostkę niżej niż górny wierzchołek poprzedniego odcinka (rys. 2).

Rys. 1



Rys. 2

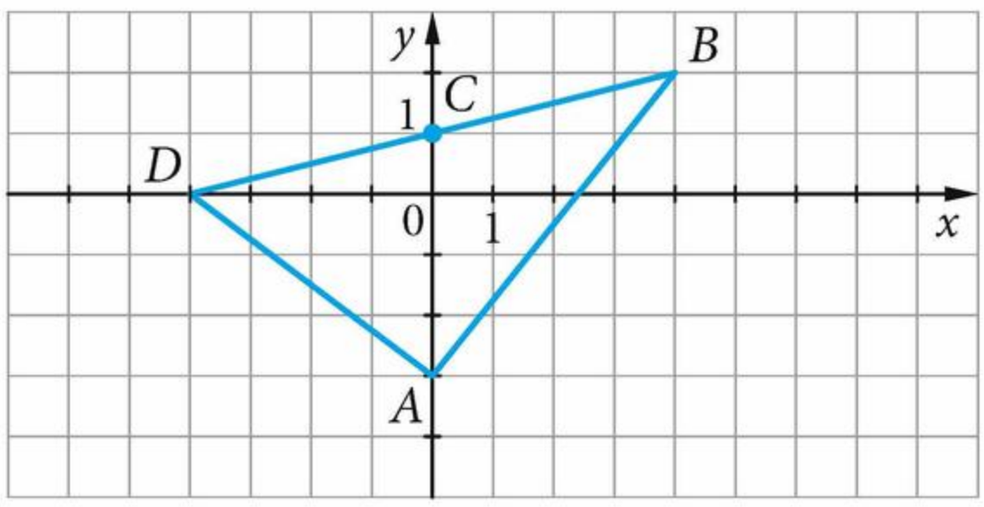


Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. Współrzędna y górnego wierzchołka piątego odcinka narysowanego w sposób opisany powyżej jest równa 5.
II. Bartek narysował w taki sam sposób n odcinków. Współrzędne górnego wierzchołka ostatniego odcinka są równe $(2n, n + 1)$.
III. Długość odcinka łączącego dolny wierzchołek pierwszego odcinka z górnym wierzchołkiem piątego odcinka byłaby równa $2\sqrt{34}$.

12. W układzie współrzędnych przedstawiono trójkąt ABD i punkt C leżący na odcinku BD.

a) Udowodnij, że pola trójkątów ABC i ACD są równe.
b) Oblicz pole trójkąta ABD.
c) Oblicz obwód trójkąta ACD.



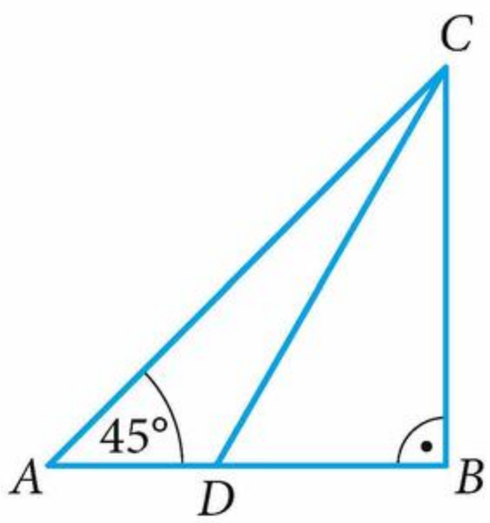
13. Prostokątne pole uprawne ma wymiary $200\text{ m} \times 150\text{ m}$. Oblicz jego powierzchnię i podaj ją w hektarach.

14. Z pięciu jednakowych prostokątów ułożono większy prostokąt w sposób przedstawiony na rysunku. Oblicz pole nowego prostokąta, jeśli wiadomo, że jego obwód wynosi 72 cm.



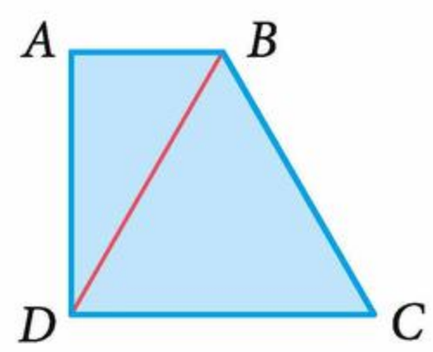
15. Na planie w skali $1 : 2000$ osiedle jest prostokątem o wymiarach $35\text{ cm} \times 50\text{ cm}$. Jaka jest jego rzeczywista powierzchnia? Podaj odpowiedź w hektarach i arach.

16. Oblicz obwód trójkąta ACD przedstawionego na rysunku, jeśli wiadomo, że $BC = 8$, $AD = 3$.



17. Krótsza przekątna trapezu prostokątnego dzieli go na dwa trójkąty. Jeden z nich jest równoboczny i ma bok długości $2\sqrt{3}$. Oblicz pole trapezu.

18. Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ (rysunek obok), w którym trójkąt BCD jest równoboczny i ma bok długości 8. Oblicz wysokość i obwód trapezu $ABCD$.



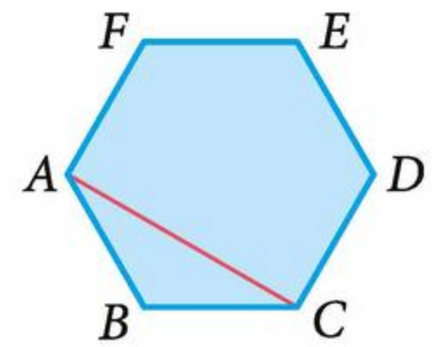
19. Sześciokąt foremny $ABCDEF$ (rysunek obok) ma bok długości 3 cm. Przekątna AC ma długość

A. 3 cm.

B. $3\sqrt{2}$ cm.

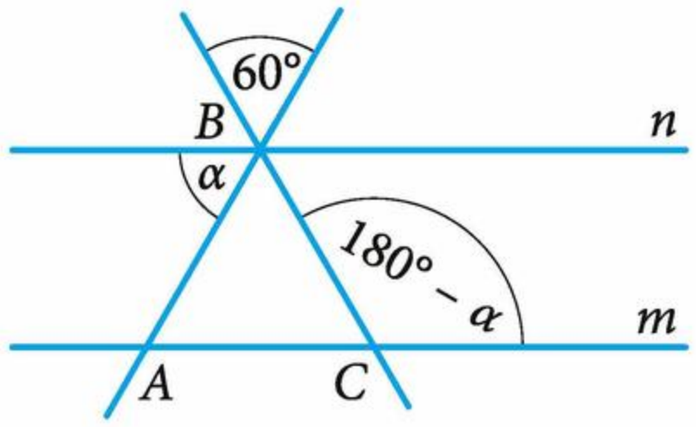
C. $3\sqrt{3}$ cm.

D. 6 cm.

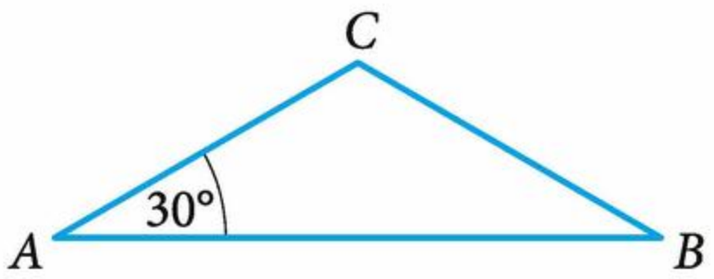


20. Oblicz obwód trójkąta prostokątnego o jednej z przyprostokątnych długości 4 i przeciwprostokątnej długości $4\sqrt{3}$.

21. Proste m i n na rysunku obok są równoległe. Udowodnij, że trójkąt ABC jest równoboczny.



22. Udowodnij, że pole trójkąta równoramiennego ABC (rysunek obok) jest równe polu trójkąta równobocznego o boku BC.

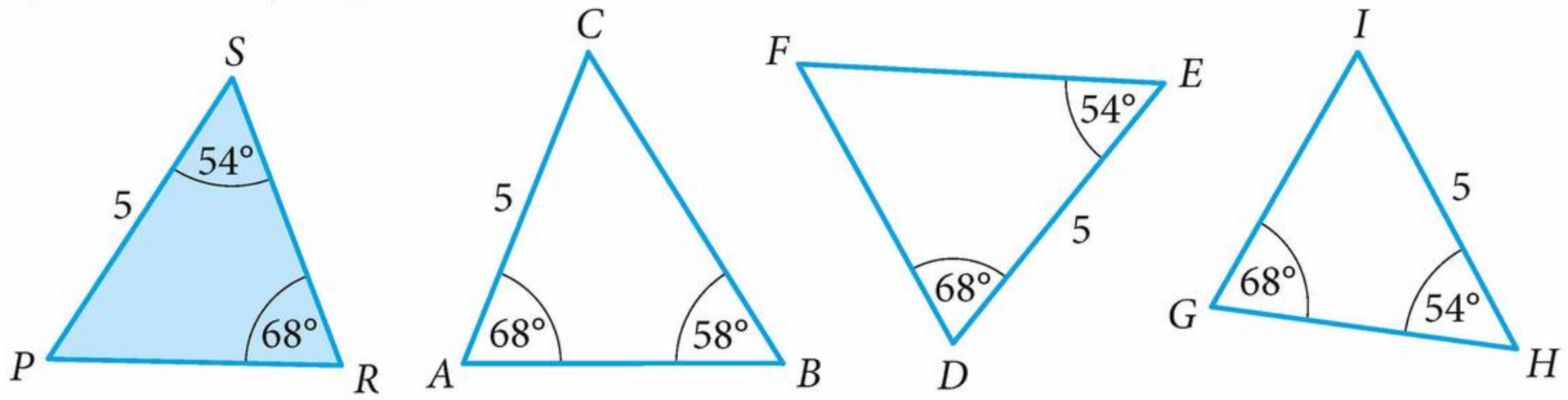


23. Czy trójkąt o bokach długości 1, 2, $\sqrt{3}$ jest prostokątny? Wybierz odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie spośród zdań A–C.

TAK	ponieważ	A.	$1 + 2 = 3$.
NIE		B.	$1^2 + 2^2 \neq \sqrt{3}^2$.
		C.	$1 + 3 = 4$.

24. Punkt S znajdujący się wewnątrz równoległoboku $ABCD$ połączono odcinkami ze wszystkimi wierzchołkami tej figury. W ten sposób równoległobok podzielono na cztery trójkąty. Udowodnij, że suma pól trójkątów ABS i CDS jest taka sama jak suma pól pozostałych dwóch trójkątów.

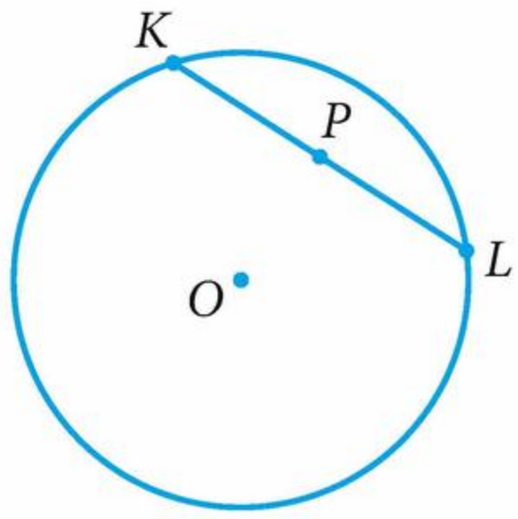
25. Jeden z trójkątów ABC, DEF, GHI jest przystający do trójkąta PRS. Który to trójkąt? Uzasadnij odpowiedź.



26. W okręgu o średnicy 4 cm i środku O poprowadzono dwa prostopadłe promienie OA i OB. Oblicz długość cięciwy AB.

Informacja do zadań 27 i 28

W okręgu o środku O i promieniu 5 cm narysowano cięciwę KL o długości 6 cm i o środku P.



27. Oblicz obwód trójkąta OKL.

28. Czy poniższe zdanie jest prawdziwe? Wybierz odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie spośród zdań A–C.

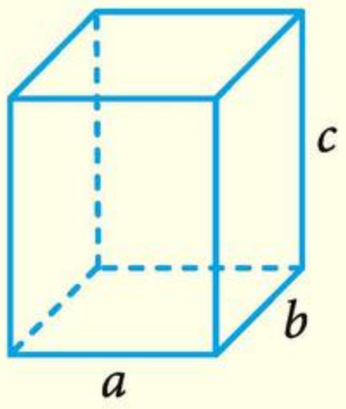
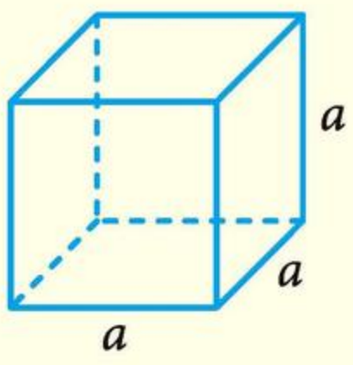
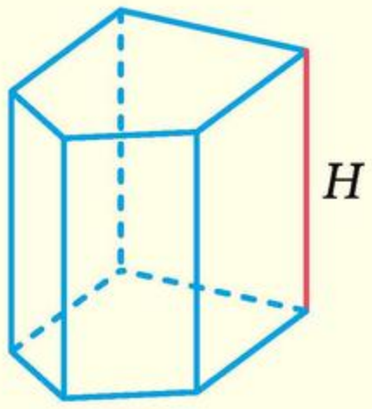
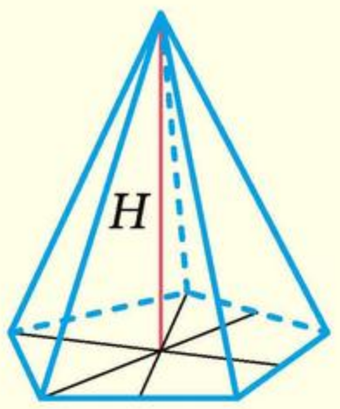
Odległość środka okręgu od cięciwy KL jest równa 4 cm.

TAK	ponieważ	A.	$OP = \frac{1}{2}KL = 3$ cm.
NIE		B.	$3^2 + 4^2 = 5^2$.
		C.	długość odcinka OP nie jest odległością środka okręgu od cięciwy KL.

9. Bryły

Pola powierzchni i objętości graniastosłupów i ostrosłupów

Przyjmijmy oznaczenia: P_c – pole powierzchni całkowitej, P_p – pole podstawy, P_b – pole powierzchni bocznej, V – objętość.

prostopadłościan	**sześcian**	**graniastosłup**	**ostrosłup**
			
$P_c = 2(ab + ac + bc)$	$P_c = 6a^2$	$P_c = 2P_p + P_b$	$P_c = P_p + P_b$
$V = abc$	$V = a^3$	$V = P_p \cdot H$	$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H$

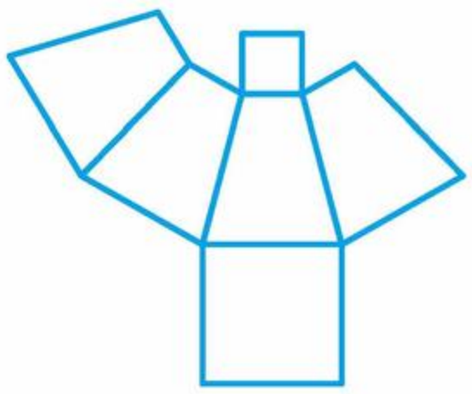
Jednostki objętości

$1\ \text{m}^3 = 1000\ \text{dm}^3$	$1\ \text{m}^3 = 1000\ \text{l}$	
$1\ \text{dm}^3 = 1000\ \text{cm}^3$	$1\ \text{dm}^3 = 1\ \text{l}$	$1\ \text{l} = 1000\ \text{ml}$
$1\ \text{cm}^3 = 1000\ \text{mm}^3$	$1\ \text{cm}^3 = 1\ \text{ml}$	

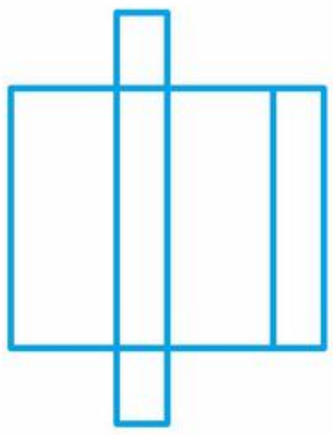
Zadania

1. Na którym z poniższych rysunków przedstawiono siatkę graniastosłupa?

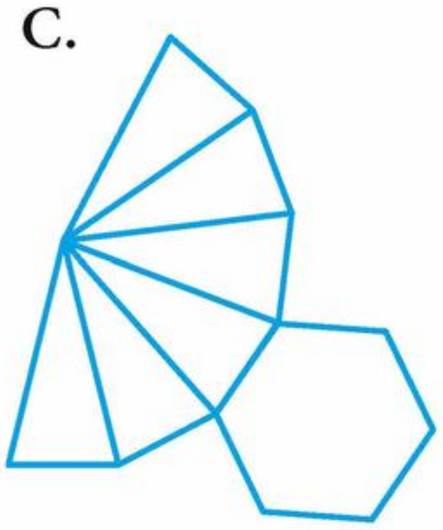
A.



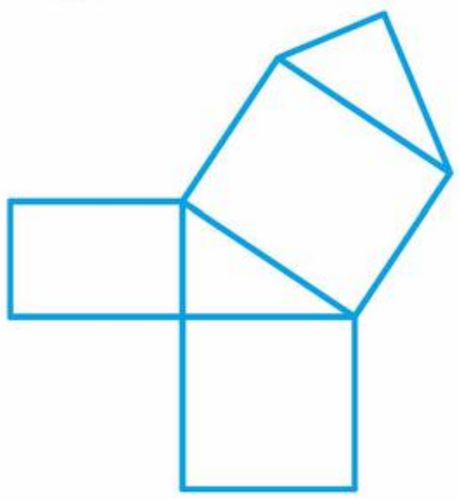
B.



C.



D.



2. Ile ścian ma graniastosłup o 12 krawędziach?

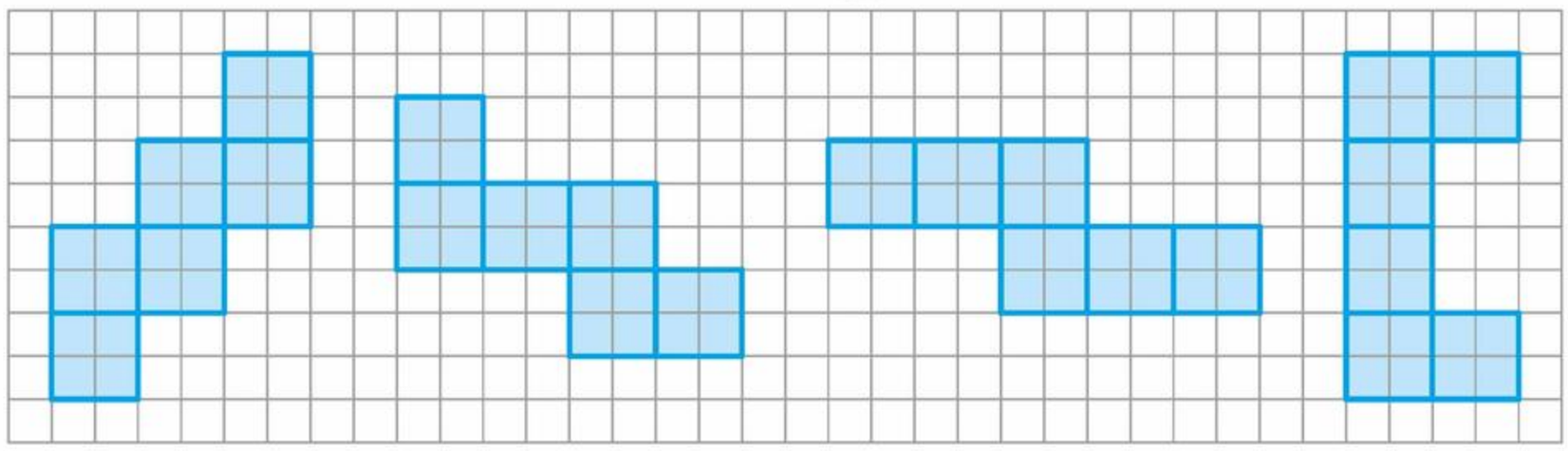
A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

3. Ile wierzchołków ma ostrosłup o 15 ścianach?

A. 14 **B.** 15 **C.** 26 **D.** 28

4. Na którym z poniższych rysunków nie przedstawiono siatki sześcianu?

A. B. C. D.



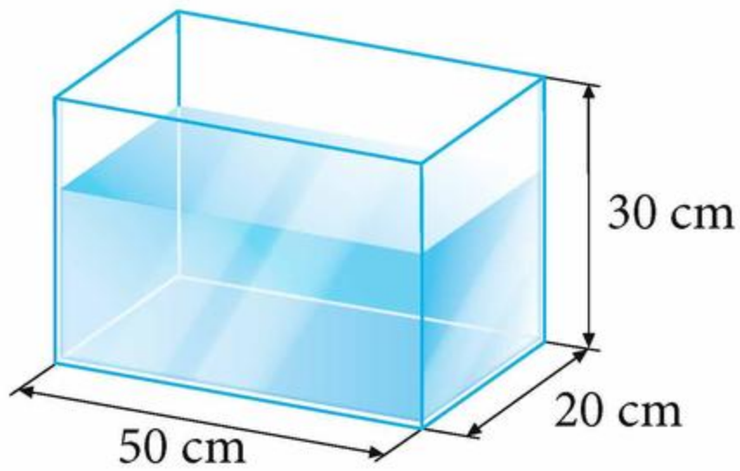
5. Wnętrze szklanki ma kształt graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o polu podstawy 12,5 cm^2 i wysokości 18 cm. Jaka jest pojemność tej szklanki?

A. 0,125 l **B.** 0,18 l **C.** 0,225 l **D.** 0,25 l

6. W prostopadłościennym akwarium o wymiarach podanych na rysunku obok woda sięga do $\frac{3}{5}$ wysokości. Ile litrów wody jest w akwarium?

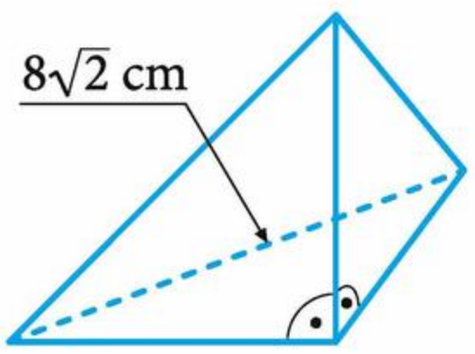
A. 18 l **C.** 30 l

B. 18 000 l **D.** 30 000 l



7. Podstawą ostrosłupa (rysunek obok) jest trójkąt równoramienny, którego najdłuższy bok ma długość $8\sqrt{2}$ cm, a dwa równe kąty mają po 45°. Objętość ostrosłupa wynosi 224 cm^3. Jaką wysokość ma ten ostrosłup?

A. 7 cm **B.** 14 cm **C.** 21 cm **D.** 28 cm



8. Niektóre wierzchołki sześcianu o krawędzi długości 10 cm połączono odcinkami, tworząc ostrosłup. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

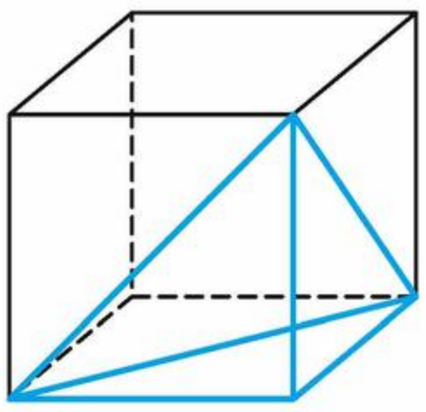
I. Ostrosłup ma objętość 6 razy mniejszą od objętości sześcianu.

II. Jedna ze ścian ostrosłupa jest trójkątem równobocznym.

III. Spośród czterech ścian ostrosłupa trzy są przystające.

IV. Trzy spośród czterech ścian ostrosłupa są trójkątami prostokątnymi równoramiennymi.

V. Suma długości krawędzi ostrosłupa wynosi $30(\sqrt{2}+1)$ cm.



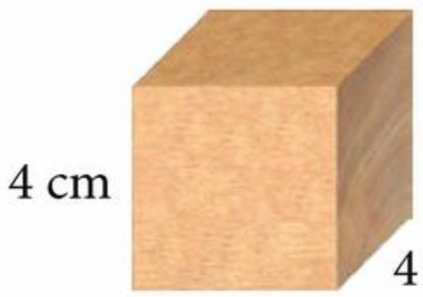
9. Pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego o krawędzi 7 cm jest równe

A. $\frac{49\sqrt{2}}{4}$ cm^2. **B.** $\frac{49\sqrt{3}}{4}$ cm^2. **C.** $49\sqrt{2}$ cm^2. **D.** $49\sqrt{3}$ cm^2.

Informacja do zadań 10–12

Z drewna wycięto prostopadłościenne klocki trzech rodzajów, o wymiarach podanych na rysunku.

I.



II.



III.



10. Objętość klocka I oznaczmy V_I, objętość klocka II oznaczmy V_{II}, a objętość klocka III oznaczmy V_{III}. Wówczas

A. $V_I < V_{II} < V_{III}$.
C. $V_I = V_{II} < V_{III}$.
B. $V_I > V_{II} > V_{III}$.
D. $V_I = V_{II} > V_{III}$.

11. Czy klocki I i II mają takie samo pole powierzchni? Wybierz odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie spośród zdań A–C.

TAK	ponieważ	A.	mają taką samą objętość.
		B.	jedna z krawędzi klocka II jest krótsza, ale za to druga jest dłuższa.
NIE		C.	suma $2 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 8 + 2 \cdot 4 \cdot 8$ jest większa niż 96.

12. Z opisanych klocków możemy budować większe prostopadłościany. Jaką najmniejszą objętość może mieć prostopadłościan, który da się zbudować zarówno z samych klocków II, jak i z samych klocków III?

13. Powierzchnia boczna graniastosłupa prawidłowego trójkątnego po rozłożeniu na płaszczyźnie jest kwadratem o polu 144 cm^2. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. Pole powierzchni bocznej graniastosłupa jest równe 144 cm^2.
II. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe $(8\sqrt{3} + 144)$ cm^2.
III. Objętość tego graniastosłupa jest równa $48\sqrt{3}$ cm^3.

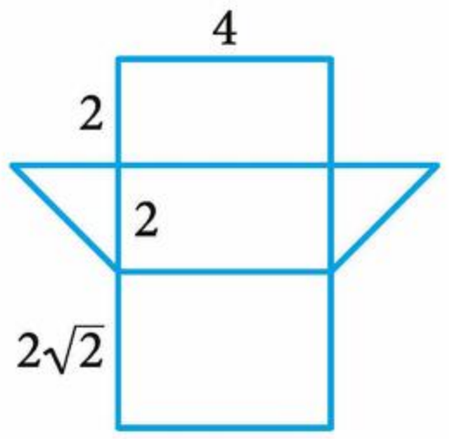
14. Pewien graniastosłup ma łącznie 56 wierzchołków, krawędzi i ścian. Co to za graniastosłup?

15. Dany jest sześcian, którego krawędź ma taką samą długość jak krawędź podstawy i wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Suma objętości tych brył wynosi 288 cm^3. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. Objętość ostrosłupa jest trzy razy mniejsza od objętości sześcianu.
II. Wysokość ostrosłupa jest równa 6 cm.

16. Piaskownicę w kształcie prostopadłościanu o wymiarach wewnętrznych 200 cm × 200 cm × 40 cm wypełniono piaskiem do $\frac{3}{4}$ wysokości. Oblicz, ile ton piasku znajduje się w tej piaskownicy, jeżeli 1 m^3 piasku waży około 1500 kg.

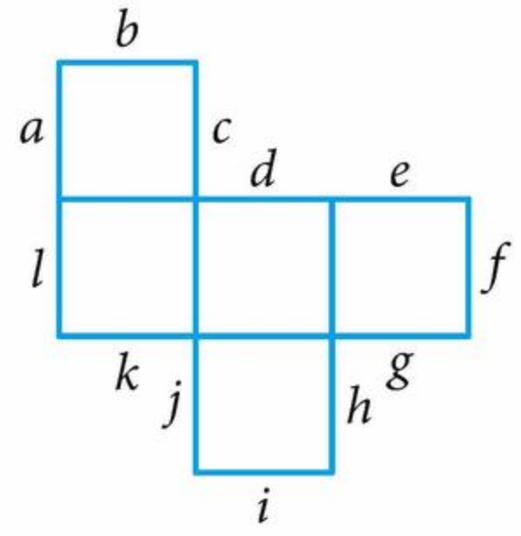
17. Klocek ma kształt graniastosłupa prostego, którego siatkę przedstawiono na rysunku obok. Ilu co najmniej takich klocków potrzeba, aby zbudować z nich sześcian?



18. Rysunek przedstawia siatkę pudełka otwartego od góry.

a) Które krawędzie należy ze sobą skleić, gdy będziemy składać pudełko z tej siatki?

b) Aby z siatki pudełka otrzymać siatkę całego sześcianu, musimy dorysować jeszcze jeden kwadrat. Do której krawędzi powinniśmy go dorysować? Podaj wszystkie możliwości.

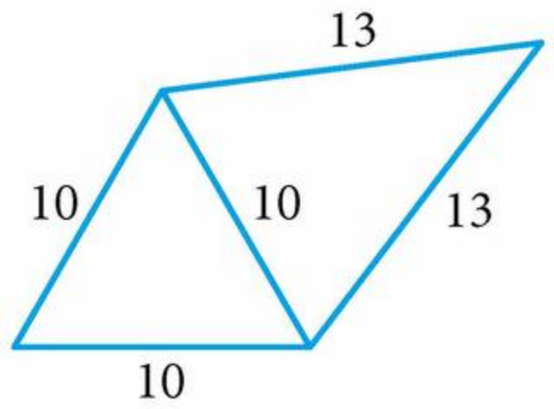


19. Na rysunku pokazano dwie ściany prostopadłościanu. Oblicz pole powierzchni innej ściany tego prostopadłościanu, nieprzystającej do narysowanych.

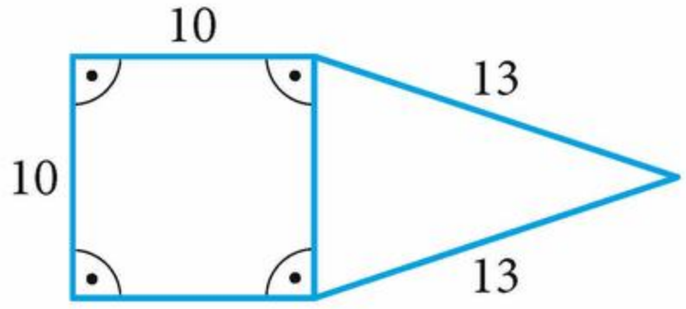


20. Dane są dwa różne graniastosłupy prawidłowe sześciokątne. W każdym z nich ściana boczna jest prostokątem o wymiarach 2 cm × 3 cm. Oblicz różnicę między polami powierzchni całkowitych tych graniastosłupów.

21. Rysunek przedstawia fragment siatki ostrosłupa prawidłowego trójkątnego (wymiary podano w centymetrach). Oblicz sumę długości krawędzi tej bryły oraz jej pole powierzchni całkowitej.



22. Rysunek umieszczony obok (wymiary podano w centymetrach) można uzupełnić tak, aby przedstawiał siatkę graniastosłupa. Oblicz jego objętość, pole powierzchni całkowitej oraz sumę długości jego krawędzi.



23. Rysunek znajdujący się obok zadania 22 (wymiary podano w centymetrach) można uzupełnić tak, aby przedstawiał siatkę ostrosłupa prawidłowego. Oblicz jego pole powierzchni bocznej i sumę długości jego krawędzi.

10. Statystyka i prawdopodobieństwo

- **Średnią arytmetyczną** liczb $x_1, x_2, ..., x_n$ nazywamy liczbę $\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.

$$\text{średnia arytmetyczna} = \frac{\text{suma danych}}{\text{liczba danych}}$$

Nie zawsze trzeba wykonywać obliczenia, aby odpowiedzieć na pytanie związane ze średnią. Na przykład jeśli ktoś ma średnią ocen 4,0 i dostanie jeszcze piątkę, to wiadomo, że średnia jego ocen wzrośnie, a jeśli ma średnią ocen 4,0 i dostanie jeszcze czwórkę, to średnia jego ocen się nie zmieni.

- **Diagram kołowy** to jeden ze sposobów przedstawiania danych.

100% ⟷ 360°

1% ⟷ 3,6°



50% ⟷ 180°

25% ⟷ 90°

- **Prawdopodobieństwo zdarzenia** A oznaczamy p i obliczamy w następujący sposób:

$$p = \frac{\text{liczba interesujących nas wyników}}{\text{liczba wszystkich wyników}}$$

Prawdopodobieństwo określa, jaką część wszystkich wyników doświadczenia stanowią te, które nas interesują.

- Prawdopodobieństwo jest liczbą:

0 – jeśli zdarzenie jest **niemożliwe**,

1 – jeśli zdarzenie jest **pewne**,

pomiędzy 0 a 1 – jeśli zdarzenie nie jest **ani niemożliwe, ani pewne**.

Zadania

1. Ola w drugim semestrze klasy ósmej ma z matematyki cztery piątki, trzy czwórki i po jednej szóstce, trójce i jedynce. Średnia arytmetyczna ocen Oli w tym semestrze jest równa

A. 0,84. **B.** 1,9. **C.** 3,8. **D.** 4,2.

2. Średnia arytmetyczna trzech liczb jest równa 25. Suma dwóch z tych liczb jest równa 60. Trzecią liczbą jest

A. 10. **B.** 15. **C.** 20. **D.** 25.

3. Średnia arytmetyczna liczb 2, 2, 5, 10, 15, x wynosi 7. Liczba x to

A. 1. **B.** 8. **C.** 2. **D.** 10.

4. Miesięczne zarobki pracowników w pewnej firmie przedstawiono w tabeli.

Liczba pracowników	4	2	3	1
Wysokość wynagrodzenia	3500 zł	4000 zł	4500 zł	6000 zł

Ile wynosi średnie miesięczne wynagrodzenie w tej firmie?

A. 4000 zł **B.** 4100 zł **C.** 4150 zł **D.** 4500 zł

5. W pudełku jest 5 kul białych i 15 czarnych. Losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.

6. Na diagramie przedstawiono oceny otrzymane przez uczniów z klasówki z matematyki. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.



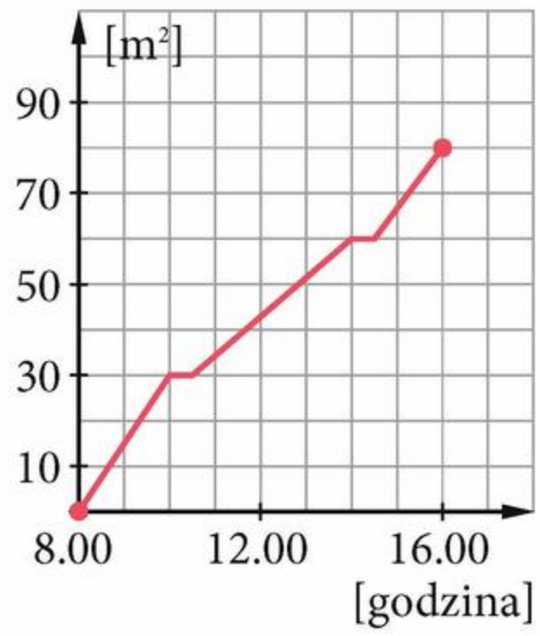
I. Najczęściej powtarzającą się oceną jest 4.
II. Klasówkę pisało 6 osób.
III. Średnia ocen z klasówki jest równa 3,5.

7. Obliczono średnią arytmetyczną zestawu liczb: 4, 4, 6, 8, 9, 12. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. Jeśli z początkowego zestawu usuniemy liczbę 12, to średnia zmaleje.
II. Jeśli do początkowego zestawu liczb dopiszemy 4, to średnia nie ulegnie zmianie.

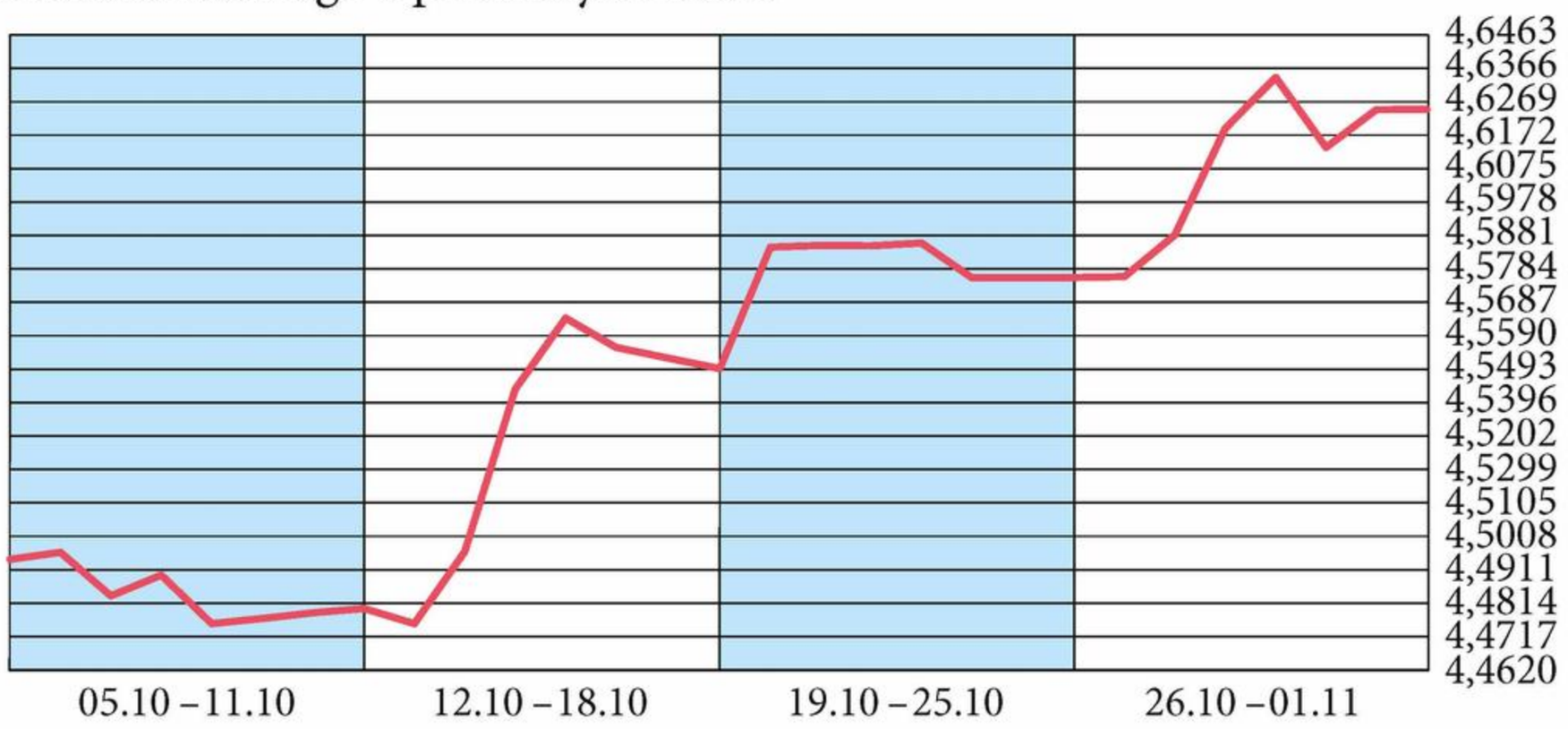
8. W klasie jest 10 chłopców i 15 dziewcząt. Średnia wzrostu dziewcząt to 160 cm, a średnia wzrostu całej klasy wynosi 162 cm. Oblicz średnią wzrostu chłopców.

9. W trakcie ośmiogodzinnego dnia pracy malarz pokojowy pomalował ściany o powierzchni 80 m^2. Wykres przedstawia wielkość pomalowanej przez niego powierzchni w zależności od czasu, który poświęcił na pracę. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.



I. Przez pierwsze trzy godziny malarz pomalował dokładnie 30 m^2 ściany.
II. Od godz. 8.00 do 10.00 malarz pomalował większą powierzchnię niż od godz. 11.00 do 14.00.
III. Przez ostatnie dwie godziny pracy malarz pomalował ściany o łącznej powierzchni 20 m^2.

10. Na poniższym wykresie przedstawiono, jak kształtowała się wartość euro w polskich złotych w okresie od 5 października do 1 listopada 2020 roku. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.



I. Największa wartość euro w tym okresie była większa od 4,60 zł.
II. W tym okresie różnica między najniższą a najwyższą ceną euro była większa niż 20 gr.
III. W ostatnim tygodniu badanego okresu wartość euro malała prawie przez cały czas.
IV. Na końcu przedstawionego okresu kurs euro był ponad pięć razy wyższy niż na początku.

11. Poniżej przedstawiono wyniki sprawdzianu rocznego z matematyki przeprowadzonego w dwóch klasach ósmych.





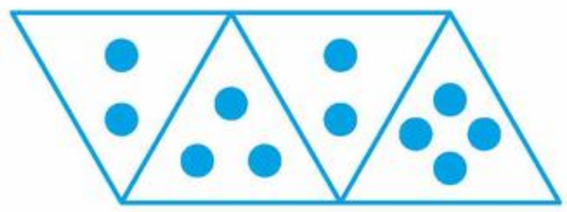
Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

I. Sprawdzian w klasie 8a pisało 20 uczniów.
II. Średnia ocen ze sprawdzianu w klasie 8a była niższa niż w klasie 8b.

12. Z pudełka, w którym znajduje się 50 kul w różnych kolorach, losujemy jedną kulę. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej jest równe $\frac{1}{5}$, a kuli czerwonej jest równe 0,4. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

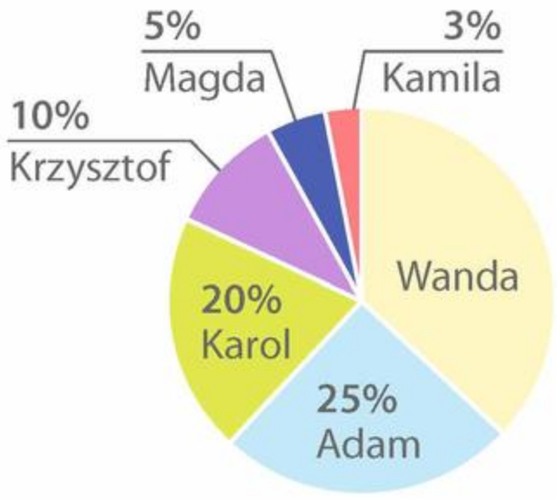
I. Kul czerwonych jest dwa razy więcej niż kul czarnych.
II. W pudełku oprócz kul czarnych i czerwonych nie ma kul innego koloru.

13. Na rysunku przedstawiono siatkę nietypowej czworościennej kostki do gry. Rzucamy raz taką kostką. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań. Zdecyduj, czy w miejsce ? wstawić literę P, oznaczającą zdanie prawdziwe, czy F – oznaczającą zdanie fałszywe.



I.	Prawdopodobieństwo wyrzucenia parzystej liczby oczek jest równe prawdopodobieństwu wyrzucenia nieparzystej liczby oczek.	?
II.	Prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek równej co najwyżej 3 wynosi 0,75.	?

14. Na diagramie przedstawiono wyniki głosowania uczniów szkoły podstawowej na kandydatów do samorządu szkolnego. Na Adama głosowało 50 osób. Ile osób głosowało na Wandę?



15. W tabeli przedstawiono wyniki ankiety, w której grupę 15-latków zapytano, ile filmów obejrzeli w kinie w ciągu poprzedniego miesiąca. Oblicz, ile filmów w kinie obejrzeli średnio nastolatkowie.

Liczba obejrzanych filmów	Liczba osób
0	4
1	15
2	12
3	6
4	2
5	1

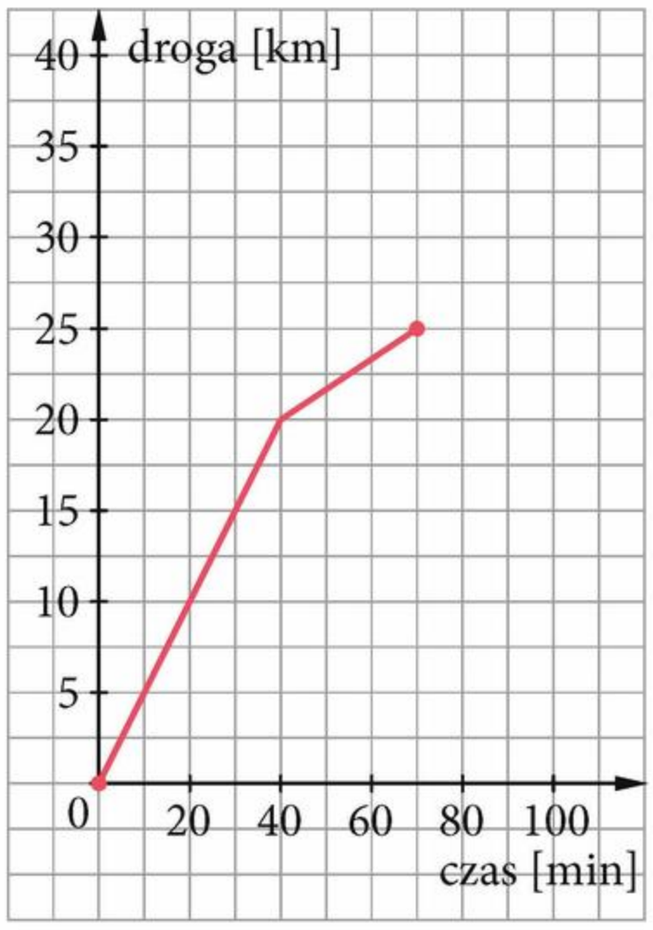
16. Średnia arytmetyczna czterech ocen cząstkowych Hani z matematyki jest równa 4,5. Oblicz, jaką ocenę powinna teraz otrzymać Hania, aby średnia jej ocen wzrosła do 4,6.

17. W sierpniu 2016 roku Joanna wzięła udział w zawodach Sprint Triathlon Gdynia, na które składają się trzy dyscypliny: pływanie, jazda na rowerze i bieg. Uczestnicy rozgrywają te konkurencje jedna za drugą, bez przerwy.
Na wykresie obok przedstawiono zależność drogi przebytej przez Joannę od czasu podczas dwóch ostatnich konkurencji: jazdy na rowerze i biegu.

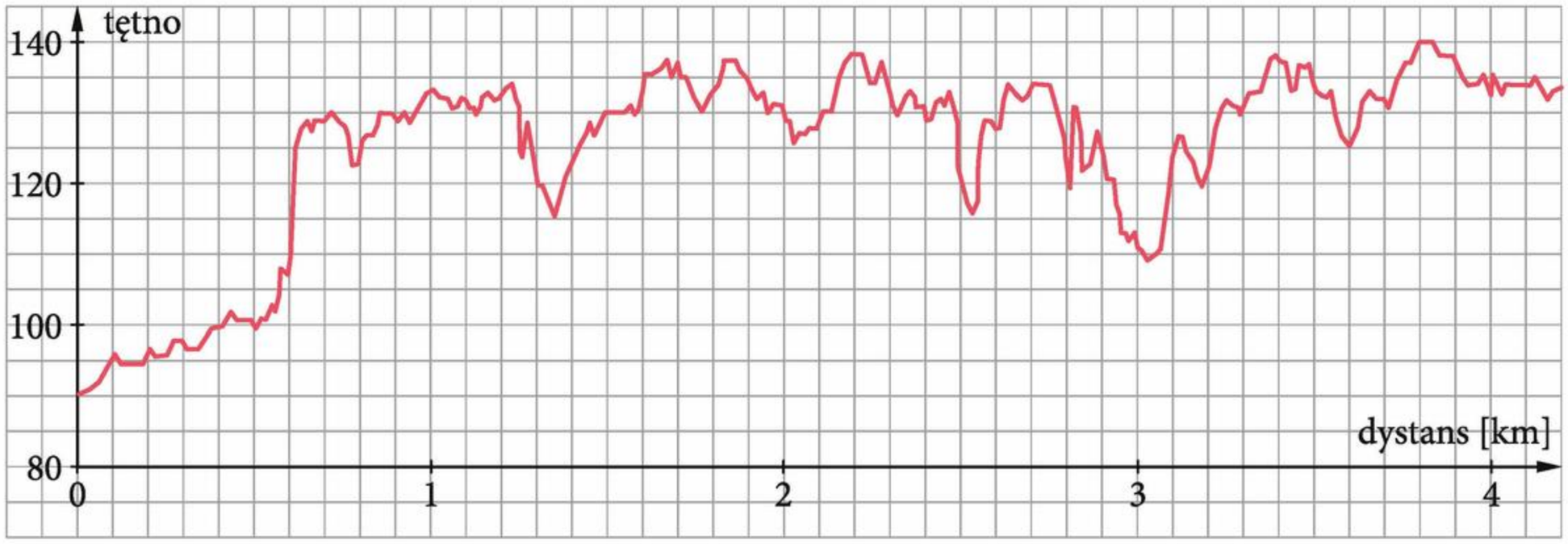
a) Ile kilometrów Joanna przebiegła podczas zawodów?

b) Z jaką średnią prędkością jechała na rowerze?

c) Joanna rozpoczęła triathlon o godzinie 10.00. Pływanie zajęło jej 20 min. O której godzinie ukończyła zawody?



18. Wykres przedstawia, jak zmieniało się tętno biegacza (liczba uderzeń serca na minutę) w miarę pokonywania kolejnych kilometrów. Cały dystans przedstawiony na wykresie biegacz pokonał w czasie 45 minut. Początkowo biegł powoli. Dopiero po pokonaniu pewnej odległości przyspieszył, co można stwierdzić po znacznym zwiększeniu tętna. Trasa treningu przebiegała przez skrzyżowania z sygnalizacją świetlną, więc trzy razy biegacz musiał się zatrzymać na czerwonym świetle.



Na podstawie wykresu odpowiedz na pytania.

a) Po pokonaniu jakiej odległości od startu biegacz znacznie przyspieszył?

b) Po ilu przebiegniętych kilometrach biegacz zatrzymał się na czerwonym świetle po raz pierwszy, drugi i trzeci?

c) Jakie było maksymalne tętno biegacza?

d) W jakim przedziale (80–100, 100–120 czy 120–140) utrzymywało się tętno przez większą część treningu?

e) Jaka była średnia prędkość biegacza w czasie treningu?

19. Agata i Marysia rzucają jednokrotnie sześcienną kostką do gry. Agata chce, żeby wypadła liczba oczek podzielna przez dwa, a Marysia – żeby wypadła liczba oczek równa kwadratowi liczby naturalnej. Oblicz prawdopodobieństwo:

a) że spełni się życzenie Marysi,

b) że spełni się życzenie Agaty,

c) że spełnią się życzenia obu dziewczynek jednocześnie.

20. Janek zebrał w tabeli wyniki ankiety przeprowadzonej w jego szkole na temat sposobu spędzania ferii zimowych.

Forma wypoczynku	Wyjazd z rodzicami	Pobyt u rodziny	Zimowisko	Obóz sportowy	Pobyt w domu
Liczba uczniów	𝍸	𝍸	𝍸𝍸	𝍸	𝍸𝍸

Przedstaw te dane w postaci diagramu słupkowego.

11. Sposoby rozwiązywania zadań

Nawet proste zadanie matematyczne można zwykle rozwiązać kilkoma sposobami. W wypadku zadań bardziej skomplikowanych metod może być kilkanaście. Dlatego:

- Jeśli nie wiesz, jaką metodą rozwiązać zadanie – nie rezygnuj. Próbuj!
- Jeśli wiesz, jak rozwiązać zadanie, pomyśl, czy nie można tego zrobić łatwiej.

Oto przykład zadania i jego kilku różnych rozwiązań.

> Na stole leżała porcja pierogów. Jaś zjadł $\frac{1}{7}$ tej porcji. Małgosia zjadła $\frac{1}{6}$ pozostałych pierogów. Wówczas zostało 30 pierogów. Ile pierogów było na stole na początku?

Sposób 1. Równanie

Uwaga. To przykład rozwiązania, którego w tym wypadku nie warto stosować, bo to najtrudniejszy sposób.

x – liczba pierogów na początku

Jaś zjadł $\frac{1}{7}x$, zostało: $x-\frac{1}{7}x$.

Małgosia zjadła: $\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{7}x\right)$ pierogów, zostało: $\left(x-\frac{1}{7}x\right)-\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{7}x\right)$, czyli 30 pierogów.

Równanie: $\left(x-\frac{1}{7}x\right)-\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{7}x\right)=30$

Teraz należy rozwiązać równanie (otrzymamy $x=42$), a następnie wykonać sprawdzenie.

Sprawdzenie: Jaś zjadł $\frac{1}{7}$ z 42 pierogów, czyli 6 pierogów. Zostało 36. Małgosia zjadła $\frac{1}{6}$ z 36 pierogów, czyli 6, zostało 30 – zgadza się.

Odp. Na początku na stole były 42 pierogi.

Przy takim sposobie rozumowania zarówno ułożenie równania, jak i jego rozwiązanie są trudne, czasochłonne i łatwo o pomyłkę. Warto więc szukać innych metod.

Sposób 2. Metoda prób i błędów

Próbujemy zgadnąć, ile pierogów było na początku, a potem wykonujemy odpowiednie obliczenia i sprawdzamy, czy wynik się zgadza. Rzadko się zdarza, że na właściwą liczbę trafimy za pierwszym razem, dlatego działania zapisujmy w uporządkowany sposób, np. w tabeli.

Ponieważ Jaś zjadł na początku $\frac{1}{7}$ wszystkich pierogów, ich liczba musiała być podzielna przez 7. Może na początku było 70 pierogów? Sprawdźmy, ile wtedy zostałoby na stole.

	PRÓBA I	PRÓBA II	PRÓBA III	PRÓBA IV
Ile było pierogów?	70	63	35	42
Ile zjadł Jaś?	$70 : 7 = 10$	$63 : 7 = 9$	$35 : 7 = 5$	$42 : 7 = 6$
Ile zostało?	60	54	30	36
Ile zjadła Małgosia?	$60 : 6 = 10$	$54 : 6 = 9$	$30 : 6 = 5$	$36 : 6 = 6$
Ile zostało?	50	45	25	30
Czy to dobry wynik?	Za dużo	Za dużo	Za mało	DOBRZE!

Odp. Na początku na stole były 42 pierogi.

Rozwiązując zadanie metodą prób i błędów, często można zauważyć coś, co szybciej doprowadzi nas do rozwiązania. Na przykład we wszystkich naszych próbach okazywało się, że każda osoba jadła tyle samo. Jeśli wykażemy, że jest tak rzeczywiście zawsze, rozwiązanie będzie dużo prostsze. Takie rozumowanie przedstawia kolejny sposób.

Sposób 3. Przez analizę sytuacji

Jaś zjadł $\frac{1}{7}$ wszystkich pierogów. Na stole zostało $\frac{6}{7}$ porcji. Małgosia zjadła $\frac{1}{6}$ pozostałych, czyli $\frac{1}{6} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$ wszystkich pierogów (tyle samo co Jaś), zostało więc $\frac{5}{7}$ porcji. Jeśli $\frac{5}{7}$ porcji to 30 pierogów, to $\frac{1}{7}$ porcji to 6 pierogów, zatem cała porcja to 42 pierogi.

W kolejnym sposobie przedstawimy to samo rozumowanie, ale na rysunku.

Sposób 4. Rysunek i obliczenia

Jaś



Małgosia



$\frac{1}{6}$ pozostałej części to tyle samo co $\frac{1}{7}$ całości

 $= 30$  $= 30 : 5 = 6$  $= 6 \cdot 7 = 42$

Odp. Na początku na stole były 42 pierogi.

Na koniec zobaczmy, że także za pomocą równania można rozwiązać to zadanie dość prosto, jeśli tylko zadbamy o upraszczanie wyrażeń już podczas tworzenia równania.

Sposób 5. Tabela i proste równanie

x – liczba pierogów na początku

	zjadł(a)	zostało
Jaś	$\frac{1}{7}x$	$x-\frac{1}{7}x=\frac{6}{7}x$
Małgosia	$\frac{1}{6}$ z $\frac{6}{7}x=\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{7}x=\frac{1}{7}x$	$\frac{6}{7}x-\frac{1}{7}x=\frac{5}{7}x$

$\frac{5}{7}x=30 \quad |:5, \qquad \frac{1}{7}x=6 \quad |\cdot 7, \qquad x=42$

Odp. Na początku na stole były 42 pierogi.

Dobra rada

Jeśli rozwiązujesz trudne zadanie, opisuj, co obliczasz. Dzięki temu nie pogubisz się we własnym rozwiązaniu.

Zadania

1. Rozwiąż podane zadanie trzema sposobami: metodą prób i błędów, za pomocą równania oraz za pomocą rysunku.

Wisiorek z łańcuszkiem kosztuje 280 zł. Wisiorek jest o 200 zł droższy od łańcuszka. Ile kosztuje wisiorek, a ile łańcuszek?

2. Rozwiąż zadanie. Zapisz dane w tabeli, a następnie na jej podstawie ułóż równanie.

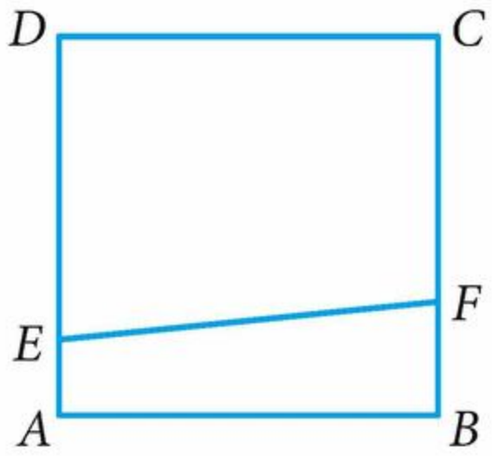
Wiola jest o 2 lata młodsza od każdego ze swoich braci bliźniaków, a mama ma tyle lat co troje dzieci łącznie. Osiem lat temu Wiola była osiem razy młodsza od swojej mamy. Ile lat ma tata, który jest rówieśnikiem mamy?

3. Rozwiąż zadanie trzema sposobami, w tym za pomocą równania i za pomocą rysunku.

W pewnej klasie $\frac{3}{5}$ uczniów stanowią chłopcy i jest ich o 4 więcej niż dziewcząt. Ilu uczniów jest w tej klasie?

4. Piotr miał o 120 pinesek więcej od Pawła. Ile pinesek powinien dać Pawłowi, aby obaj mieli ich po tyle samo?

5. Kwadrat $ABCD$ o boku 10 cm podzielono na trapezy $ABFE$ i $CDEF$, z których pierwszy ma pole trzy razy mniejsze niż drugi. Odcinek AE ma długość 2 cm. Oblicz długość odcinka BF.



Uwaga. Rozwiąż to zadanie na dwa sposoby.

1. Oblicz pole trapezu $ABFE$. Następnie oblicz szukaną długość za pomocą równania.
2. Podziel kwadrat na cztery trapezy przystające do trapezu $ABFE$. Jak będą ułożone te trapezy?

6. Rozwiąż podane zadanie dwoma sposobami.

Na zajęcia SKS zapisało się 75 uczniów. Podzielili się oni na sekcje: judo, piłki ręcznej i koszykówki. Po pewnym czasie dwie osoby przeniosły się z sekcji judo do sekcji piłki ręcznej, a troje piłkarzy ręcznych przeszło do sekcji koszykówki. Gdyby po tych zmianach do koszykarzy dołączyło jeszcze troje judoków i jeden szczypiornista, w każdej sekcji byłoby tyle samo osób. Ile osób wybrało początkowo każdą z sekcji?

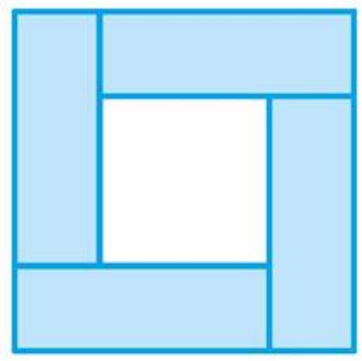
7. Oto cztery liczby zapisane w systemie rzymskim:
MDCLXXXV, MDCLXXXII, MDCLXXIX, MDCLXVIII.
Jedna z nich znajduje się na osi liczbowej w połowie odległości pomiędzy dwiema spośród pozostałych. Wskaż tę liczbę.

A. MDCLXXXV **B.** MDCLXXXII **C.** MDCLXXIX **D.** MDCLXVIII.

8. W konkursie matematycznym biorą udział drużyny złożone z siódmoklasistów i ósmoklasistów, ale ósmoklasistów nie może być w drużynie więcej niż 40%. Oliwia zebrała drużynę, której $\frac{3}{4}$ stanowią ósmoklasiści. O ile procent powinna zwiększyć liczbę młodszych uczniów, jeśli nie chce wykluczać z drużyny nikogo ze starszych?

9. Cena biletu ulgowego do muzeum techniki to 50% ceny biletu normalnego. Dla szkoły nr 212 zakupiono 108 biletów ulgowych i 18 normalnych, a dla szkoły nr 339 – 72 ulgowe i 12 normalnych. Za wszystkie bilety dla szkoły nr 339 zapłacono łącznie 216 zł. O ile więcej kosztowały bilety normalne dla szkoły nr 212 niż dla szkoły nr 339?

10. Z czterech jednakowych prostokątów o bokach, których długości pozostają w proporcji 3 : 1 ułożono ramkę jak na rysunku. Jakie są wymiary tych prostokątów, jeśli pole czworokąta, który powstał wewnątrz ramki, wynosi 64 cm^2?



11. Gdy w pewnej liczbie dwucyfrowej skreślimy ostatnią cyfrę, to otrzymamy liczbę 11 razy mniejszą. Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe o takiej własności.

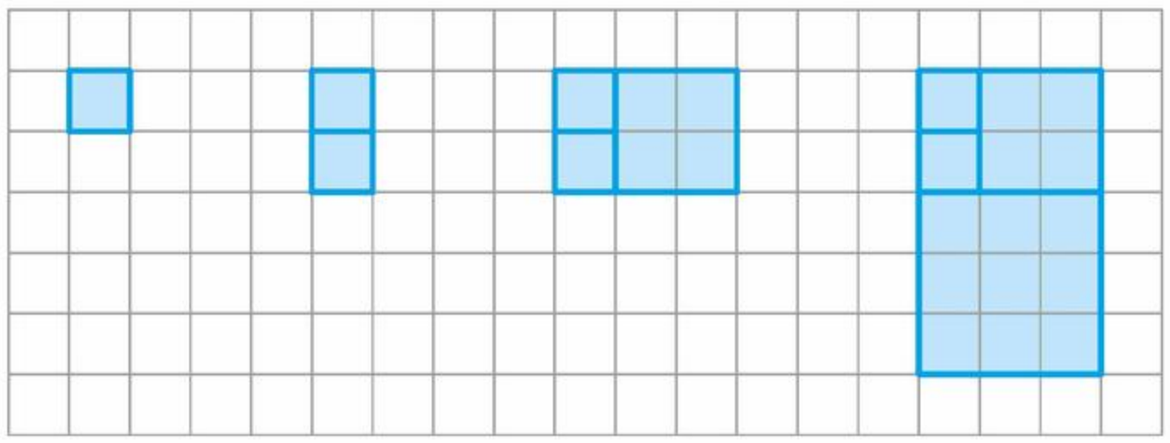
12. Jaką cyfrę należy wpisać w miejsce $*$, aby liczba $172*$ była podzielna przez 6?

13. **a)** Jaką cyfrę należy wpisać w miejsce $*$ w zapisie $7001*$, aby otrzymać liczbę pięciocyfrową podzielną przez 7?
b) Uzasadnij, że gdyby cyfry 7, 0, 0, 1 w podpunkcie a) zamienić na jakiekolwiek inne cztery cyfry, to zadanie miałoby co najmniej jedno rozwiązanie.

14. Maria ćwiczy na siłowni co trzeci dzień, Justyna co czwarty, a Jadwiga co drugi. W poniedziałek 2 października spotkały się tam wszystkie trzy. Kiedy spotkają się ponownie? Wybierz datę spośród odpowiedzi A i B oraz dzień tygodnia spośród odpowiedzi C i D.

A. 14 października **B.** 26 października **C.** czwartek **D.** sobota

Informacja do zadań 15 i 16
Rysunki przedstawiają kolejne prostokąty budowane z kwadratów według pewnej zasady.



Rys. 1 Rys. 2 Rys. 3 Rys. 4

15. Udowodnij, że na każdym rysunku, począwszy od 3, pole nowo dorysowanego kwadratu stanowi ponad 50% pola otrzymanego prostokąta.

16. Jakie wymiary będzie miał prostokąt na rysunku numer 7?

17. Do każdych pięciu zakupionych pączków po 1,50 zł cukiernik dodaje jeden gratis. Z okazji tłustego czwartku samorząd klasowy zamierza kupić dla każdego spośród 21 uczniów oraz pięciorga nauczycieli, z którymi mają tego dnia lekcje, po dwa pączki. Ile samorząd zapłaci za pączki?

18. W małym kinie w jednym rzędzie jest 8 miejsc (o numerach od 1 do 8). Ania i Michał przyszli do kina pierwsi i chcą usiąść w ostatnim rzędzie, obok siebie. Podaj wszystkie możliwości zajęcia miejsc przez Anię i Michała.

19. Rzucono dwa razy sześcienną kostką do gry. Za każdym razem liczba oczek była inna, a iloczyn tych liczb był nieparzysty. Ile oczek otrzymano w pierwszym, a ile w drugim rzucie? Wypisz wszystkie możliwości.

20. Rzucamy trzy razy sześcienną kostką do gry. Czy możemy w sumie otrzymać 17 oczek, jeśli wynik każdego rzutu był inny?

1 Długość okręgu

Na dobry początek ›

Dystans przejechany na rowerze można zmierzyć za pomocą licznika rowerowego. Urządzenie to zlicza obroty wykonane przez koło rowerowe i mnoży tę wielkość przez obwód koła. A ile właściwie jest równy obwód koła?



Typ roweru	Średnica koła [cm]	Obwód koła [cm]
dziecięcy	34	107
miejski	61	192
górski	62	195
szosowy	70	220

Pytania i polecenia

- Zmierzono średnice i obwody czterech kół rowerowych (razem z oponą), a wyniki podano w tabeli z dokładnością do 1 cm. Oblicz za pomocą kalkulatora, ile razy obwód każdego z tych kół jest większy od jego średnicy.

Od dawna umiesz obliczać obwody wielokątów – po prostu dodajesz długości ich boków. A jak wyznaczyć obwód koła, czyli długość okręgu otaczającego to koło? Jeśli zmierzymy tę wielkość np. za pomocą sznurka dla kilku różnych kół, okaże się, że obwód koła jest zawsze około 3,14 razy większy od jego średnicy. Różnice wynikają z niedokładności pomiarów – dla idealnego, geometrycznego koła wynik jest zawsze taki sam. Jest on liczbą niewymierną.

Liczby niewymiernej nie da się zapisać w postaci ułamka o całkowitych liczniku i mianowniku. Jej rozwinięcie dziesiętne jest nieskończone i nieokresowe.

Zapamiętaj

Stosunek długości każdego okręgu do jego średnicy jest taki sam. Oznaczamy go grecką literą π (czytaj: pi).

$$\frac{\text{długość okręgu}}{\text{długość średnicy}} = \pi$$

Liczba π jest liczbą niewymierną.

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419 71693\ldots$$

Czy wiesz, że…

Liczba π jest powszechnie znana i obecna w kulturze. Ma nawet swoich wielbicieli, którzy organizują na przykład Dzień Liczby π. Od lat powstają także wierszyki, które pomagają zapamiętać początek rozwinięcia liczby π. Liczba liter kolejnych słów odpowiada kolejnym cyfrom:

3 1 4 1 5 9
Kuć i orać w dzień zawzięcie,

2 6 5 3 5
bo plonów niema* bez trudu.

Złocisty szczęścia okręcie, kołyszesz.

Kuć.

My nie czekajmy cudu.

Robota to potęga ludu.

(Kazimierz Cwojdziński, 1930)



Ciasto przygotowane z okazji Dnia Liczby π

Poważniejszy wiersz na temat liczby π napisała Wisława Szymborska.

---

* Obecnie piszemy „nie ma” rozdzielnie, jednak w czasie, gdy wierszyk powstał, obowiązywała pisownia łączna.

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419$$

Wzór na długość okręgu

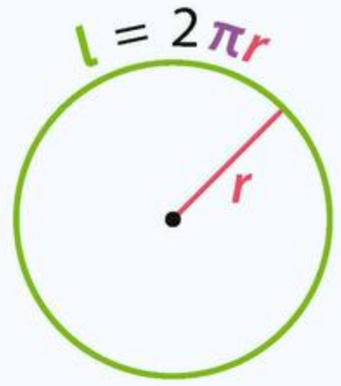
Oznaczmy długość okręgu literą l, a jego promień literą r. Wówczas średnica okręgu ma długość $2r$. Wiemy, że długość okręgu jest π razy większa od jego średnicy, czyli $l = \pi \cdot 2r$, a po uporządkowaniu $l = 2\pi r$.

Zapamiętaj

Długość l okręgu o promieniu r wynosi $2\pi r$.

$$l = 2\pi r$$

długość okręgu — promień okręgu



Jeśli średnicę okręgu oznaczymy literą d, możemy też zapisać wzór $l = \pi d$.

Przykład 1

Oblicz długość okręgu o promieniu równym 5 cm. Podaj jej przybliżoną wartość dla $\pi \approx 3{,}14$.

Do wzoru $l = 2\pi r$ podstawiamy $r = 5$ i otrzymujemy:

$l = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$ [cm].

Długość ta w przybliżeniu jest równa:
$10 \cdot 3{,}14 = 31{,}4$ [cm].

Odp. Długość tego okręgu wynosi 10π cm, czyli w przybliżeniu 31,4 cm.

Przyjmijmy, że polecenie:
- „**Oblicz/Wyznacz/Podaj długość** okręgu" oznacza, że odpowiedź należy podać z liczbą π, np. 10π. O takim wyniku mówimy, że jest dokładny.
- „**Oblicz/Wyznacz/Podaj przybliżoną długość** okręgu" oznacza, że w miejsce π należy podstawić przybliżoną wartość. Jeśli w zadaniu nie ma dodatkowej informacji, jakie przybliżenie liczby π trzeba przyjąć, to przyjmujemy przybliżenie $\pi \approx 3{,}14$.

Ćwiczenie 1

Oblicz długość okręgu o średnicy 4 m. Podaj jego przybliżoną długość dla $\pi \approx 3{,}1$.

Obliczanie promienia i średnicy okręgu

Przykład 2.1

Oblicz promień okręgu o długości 28π cm.

Oznaczmy promień okręgu literą r. Wówczas:

$2\pi r = 28\pi$ | : 2
$\pi r = 14\pi$ | : π
$r = 14$ [cm]

Wolno dzielić przez dowolną liczbę różną od zera, a więc i przez π.

7169399375105820974944592307816406286208998 6

Przykład 2.2

Oblicz promień okręgu o długości 28 cm.

Oznaczmy promień okręgu literą r. Wówczas:

$2\pi r = 28 \quad | : 2$

$\pi r = 14 \quad | : \pi$

$r = \frac{14}{\pi}$ [cm]

W obu przykładach obliczenia przebiegały analogicznie, jednak w przykładzie 2.2 w odpowiedzi liczba π pozostała w mianowniku. W takich przypadkach nie jest możliwe usunięcie niewymierności z mianownika. Gdyby polecenie brzmiało „oblicz przybliżony promień okręgu", musielibyśmy podstawić przybliżenie liczby π i wykonać dzielenie, np. $\frac{14}{\pi} \approx \frac{14}{3{,}14} \approx 4{,}5$ [cm].

Ćwiczenie 2

Oblicz średnicę okręgu o długości:

a) 10π cm, **b)** 10 cm.

Wyrażenia zawierające liczbę π

Przykład 3

Wykonaj działania.

a) $2\pi + 0{,}5\pi$ **b)** $2 \cdot 1{,}5\pi$ **c)** $\pi \cdot 2\pi$ **d)** $\frac{10}{5\pi}$

a) $2\pi + 0{,}5\pi = 2{,}5\pi$

Postępujemy podobnie jak przy redukcji wyrazów podobnych w wyrażeniach algebraicznych.

b) $2 \cdot 1{,}5\pi = (2 \cdot 1{,}5) \cdot \pi = 3\pi$

c) $\pi \cdot 2\pi = 2 \cdot \pi \cdot \pi = 2\pi^2$

d) $\frac{10}{5\pi} = \frac{2}{\pi}$

Skracamy ułamek przez 5.

Ćwiczenie 3.1

Wykonaj działania.

a) $\pi + 4\pi$ **b)** $5\pi - \pi$ **c)** $4\pi \cdot 2{,}5\pi$ **d)** $\frac{15\pi}{3\pi}$

Ćwiczenie 3.2

Z podanego wzoru wyznacz x. Przyjmij, że wielkości x, l i P są dodatnie.

a) $l = \pi x$ **b)** $l = 2\pi x$ **c)** $P = \pi x^2$ **d)** $P = \pi\left(\frac{1}{2}x\right)^2$

2803482534211706798214808651328230664709384 4

Zadania

1. Wykonaj polecenia. ▶ Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

← P1

Oblicz długość okręgu o podanym promieniu r lub średnicy d.

a) $r = 2$ cm **b)** $d = 2$ mm **c)** $r = 8$ **d)** $d = 4$ m **e)** $r = 5$ **f)** $r = 10$ cm **g)** $d = 8$ m **h)** $d = 1$ m

poziom B

← P1

Oblicz przybliżoną długość okręgu o podanym promieniu r lub średnicy d, przyjmując podane przybliżenie liczby π.

a) $r = 5$ cm, $\pi \approx 3{,}14$
b) $r = 12$, $\pi \approx 3$
c) $d = 2$ m, $\pi \approx 3{,}1$
d) $d = 4$ mm, $\pi \approx 3{,}1$
e) $r = 25$ km, $\pi \approx 3{,}14$
f) $d = 4$ cm, $\pi \approx 3$
g) $d = 6$ m, $\pi \approx 3{,}1$
h) $r = 10$ m, $\pi \approx 3{,}1415$

poziom C

← P2.1

Dla okręgu o długości l oblicz wskazaną wielkość: promień r lub średnicę d.

a) $l = 8\pi$ cm, r **b)** $l = 3\pi$ m, r **c)** $l = 5\pi$, d **d)** $l = \pi$ dm, d **e)** $l = 12\pi$ mm, r **f)** $l = 7\pi$, r **g)** $l = 4\pi$, d **h)** $l = 0{,}4\pi$ dm, r

poziom D

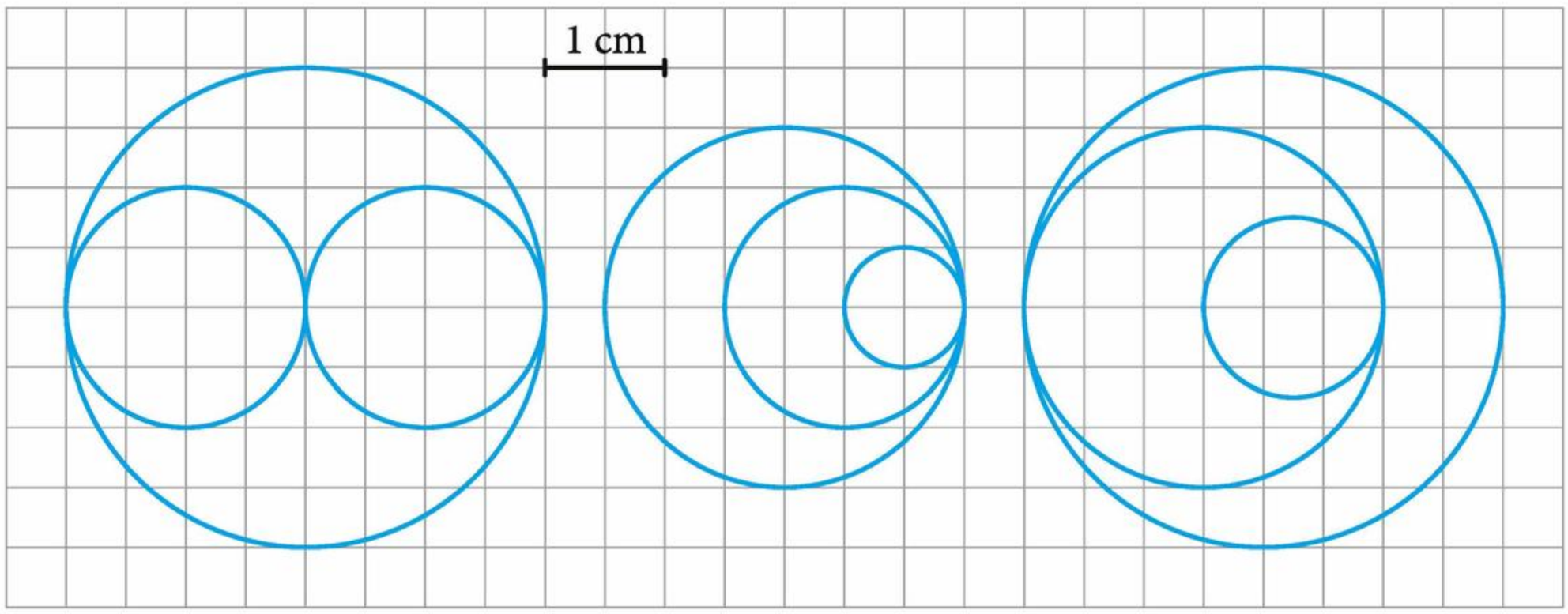
← P2.2

Dla okręgu o długości l oblicz wskazaną wielkość: promień r lub średnicę d.

a) $l = 20$ cm, r **b)** $l = 5$, r **c)** $l = 8$ km, d **d)** $l = 12$ mm, r **e)** $l = 3$ cm, r **f)** $l = 7$ km, d **g)** $l = 3$ dm, r **h)** $l = 80$ mm, r

2. Narysowana linia składa się z trzech okręgów. Oblicz jej przybliżoną długość.

a) **b)** **c)**



3. Oblicz w przybliżeniu promień okręgu o długości l. Do obliczeń przyjmij $\pi \approx 3$.

a) $l = 12$ cm **b)** $l = 60$ cm **c)** $l = 0{,}9$ cm **d)** $l = 4{,}8$ cm

4. Wykonaj działanie.

a) $3\pi + 5\pi$ **b)** $12\pi - 7\pi$ **c)** $\pi \cdot 2\pi^2$ **d)** $\frac{4\pi}{16\pi^2}$

609550582231725359408128481117450284102701 93



5. Obręcz drewnianej beczki wykonujemy z paska stalowej blachy. Oblicz, jak długiego paska potrzebujemy na największą obręcz beczki o maksymalnej średnicy 80 cm. Dolicz 10 cm paska jako zakładkę potrzebną do nitowania. Przyjmij $\pi \approx 3{,}1$.

6. Czy z kawałka drutu o długości 1,2 m można po odpowiednim rozcięciu i wygięciu uzyskać:

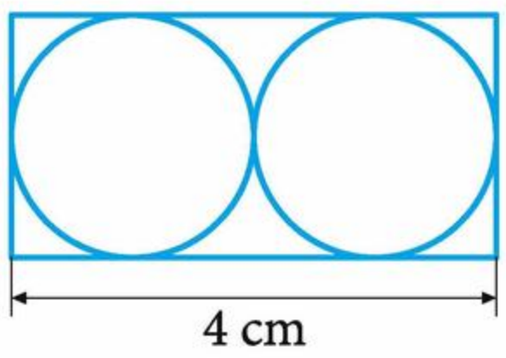
a) dwa okręgi o promieniu 10 cm każdy,
b) trzy okręgi o promieniu 6 cm każdy?
Do obliczeń przyjmij $\pi \approx 3{,}14$.

7. Czy z kwadratowego kawałka tektury o obwodzie 64 cm można wyciąć:

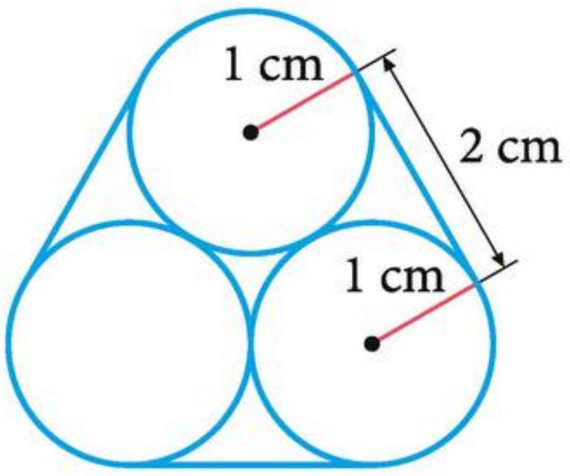
a) koło, którego obwód będzie równy 48 cm,
b) cztery koła o równych promieniach tak, by obwód każdego z kół wynosił 25 cm?
Do obliczeń przyjmij $\pi \approx 3{,}14$.

8. Każda z narysowanych niebieskich linii stanowi element projektu broszki, która ma być wykonana z cienkiego srebrnego drutu. Ile centymetrów takiego drutu potrzeba do wykonania tej ozdoby? Wynik podaj z dokładnością do 1 mm. Do obliczeń przyjmij $\pi \approx 3{,}14$.

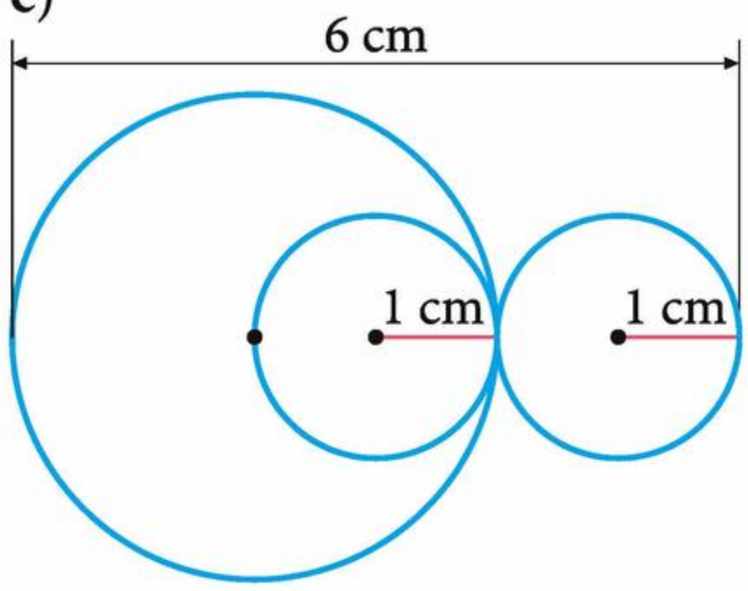
a)



b)



c)



9. Wokół butelki, której dno ma kształt koła o średnicy 12 cm, naklejona była etykieta o wysokości 8 cm. Aby zdjąć tę etykietę, Asia przecięła ją tak, że po rozwinięciu otrzymała prostokąt. Jakie wymiary ma ten prostokąt? Ile jest równe jego pole? Wyniki zaokrąglij do całości.

10. W kwadracie o boku a cm umieszczono okrąg o największym możliwym promieniu. Ile razy obwód kwadratu jest większy od długości tego okręgu? Wynik podaj w zaokrągleniu do części dziesiątych.

11. Uzasadnij, że:

a) suma długości okręgów o promieniach 3 cm i 4 cm równa się długości okręgu o promieniu 7 cm,
b) suma długości okręgów o promieniach r_1 i r_2 równa się długości okręgu o promieniu równym $r_1 + r_2$.

85211055596446229489549038196442881097566 59

Dla dociekliwych

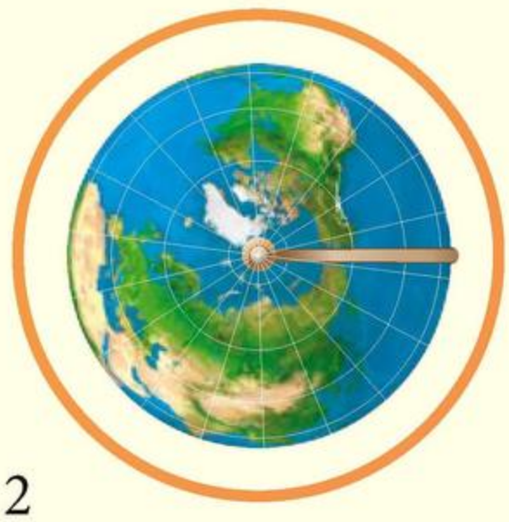
Uwaga. Wszystkie odpowiedzi podawaj w przybliżeniu, przyjmując $\pi \approx 3$.

1. Globus o promieniu 10 cm otaczamy paskiem papieru wzdłuż równika (rys. 1). Jaką długość ma ten pasek?

2. Wyobraźmy sobie, że pasek z zadania 1 przedłużamy o 6 m, a następnie zwijamy w okrąg, tak aby w jego środku znalazł się środek naszego globusa (rys. 2). Jaka będzie odległość od powierzchni globusa do paska?



Rys. 1



Rys. 2

3. Teraz wyobraźmy sobie, że znacznie dłuższym paskiem papieru otaczamy wzdłuż równika nie globus, ale Ziemię. Następnie wydłużamy pasek o 6 m i otaczamy nim Ziemię, tak jak poprzednio globus. Jaki będzie odstęp między jej powierzchnią a paskiem? Czy pod paskiem przecisnąłby się człowiek? A kot? A mrówka? Spróbuj najpierw zgadnąć, a następnie wykonaj odpowiednie obliczenia i sprawdź, czy twoje przypuszczenia się potwierdziły.

Czy już umiem?

I. Długość okręgu o średnicy 24 cm jest równa

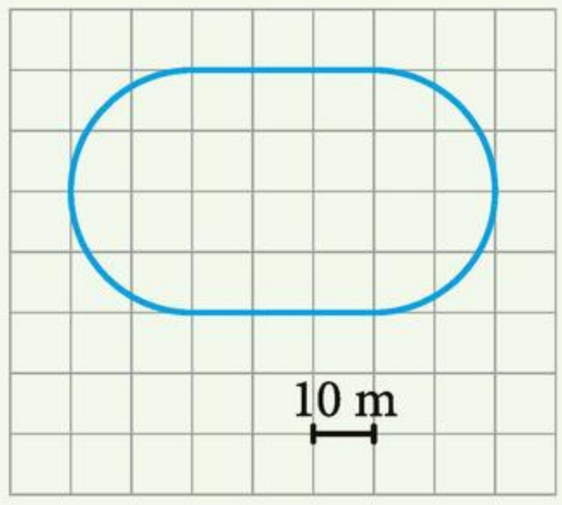
A. 6π cm. **B.** 12π cm. **C.** 24π cm. **D.** 36π cm.

II. Promień okręgu o długości 300 km ma około

A. 50 km. **B.** 100 km. **C.** 900 km. **D.** 1800 km.

III. Okrąg ma promień 100 m. Oblicz dwa razy przybliżoną długość tego okręgu: przyjmij raz $\pi \approx 3{,}14$, a drugi raz $\pi \approx 3{,}1415$. Ile centymetrów wynosi różnica między otrzymanymi wynikami?

IV. Oblicz rzeczywistą długość bieżni przedstawionej na rysunku (składa się ona z dwóch boków prostokąta i dwóch półokręgów). Przyjmij $\pi \approx 3{,}14$.



3344612847564823378678316527120190914564856 6...

2

Pole koła

Na dobry początek >

Pod terenami pustynnymi na powierzchni Ziemi często znajdują się złoża wód podziemnych. Czerpana stamtąd woda umożliwia uprawę roślin na terenach, gdzie spada zaledwie kilka milimetrów deszczu rocznie.



Olbrzymie ramię zraszacza, na którym zamocowane są rury rozprowadzające wodę, obraca się powoli wokół miejsca, w którym jest wykopana studnia. Pełny obrót zajmuje mu 3 dni.



Dzięki tej technice podlewania pola uprawne mają kształt koła.

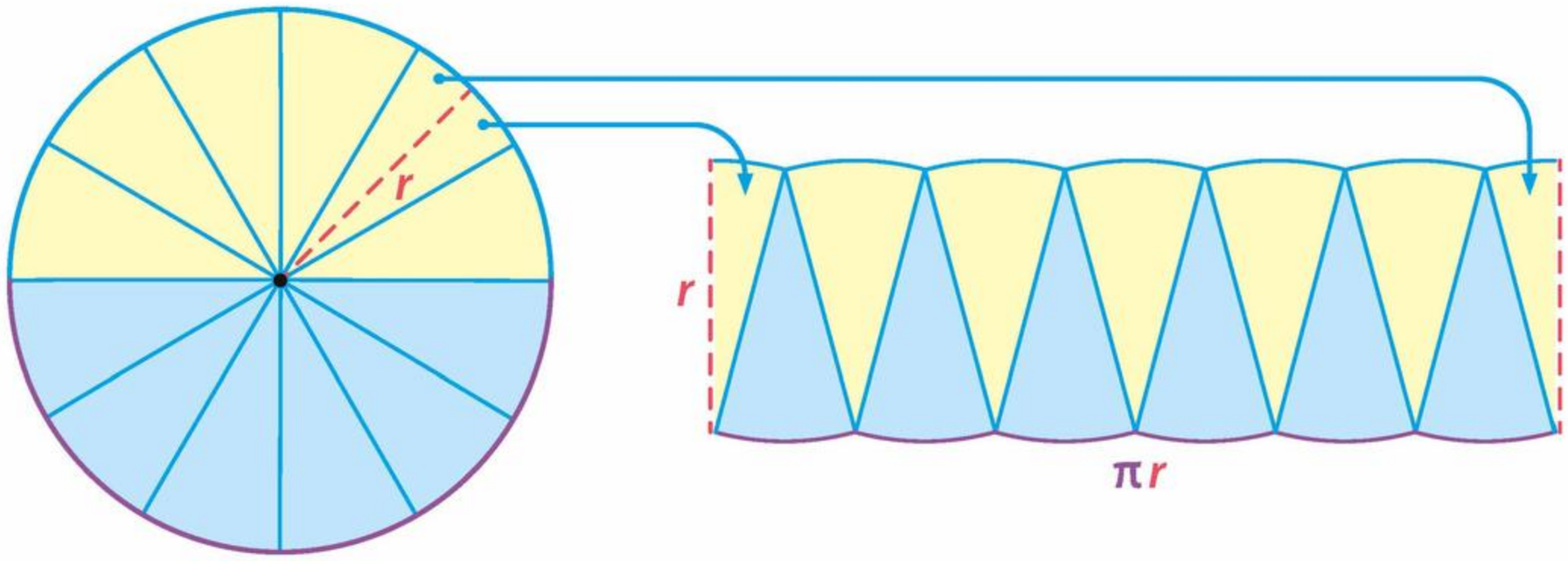


Pytania i polecenia

- Spróbuj oszacować, jaką powierzchnię ma pole uprawne podlewane przez zraszacz o długości 400 m.

Czy pamiętasz, w jaki sposób w piątej klasie uzasadnialiśmy wzory na pola czworokątów? Na przykład równoległobok przecięliśmy na dwie części, z których można złożyć prostokąt. W przypadku koła postąpimy podobnie. Co prawda z części, na które można podzielić koło, nie da się złożyć wielokąta, ale postaramy się znaleźć figurę jak najbardziej do niego zbliżoną.

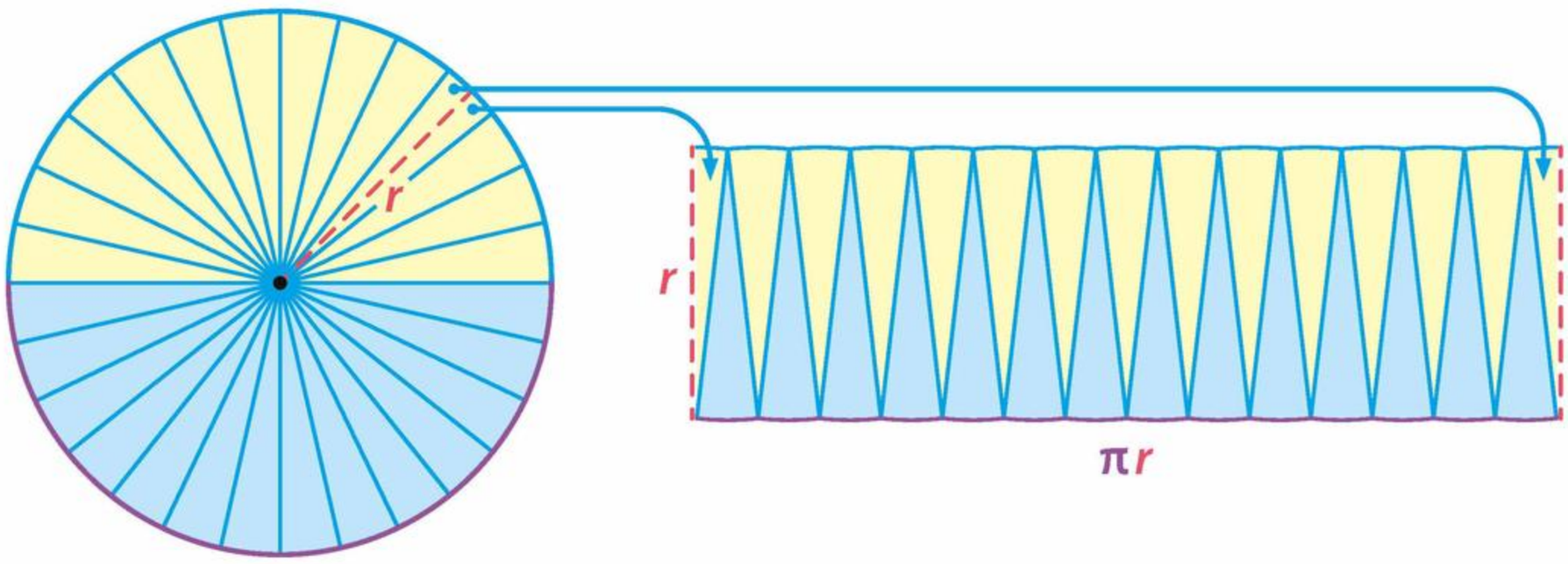
Podzielmy koło na 12 jednakowych wycinków i połowę z nich zamalujmy na żółto. Jeżeli ułożymy wycinki na przemian, tak jak pokazano na rysunku, to otrzymamy figurę o kształcie zbliżonym do prostokąta.



Koło o promieniu r

Linia składająca się z łuków ma długość równą połowie obwodu koła.

Jeśli podzielimy koło na mniejsze wycinki, ułożona z nich figura będzie jeszcze bardziej przypominać prostokąt.



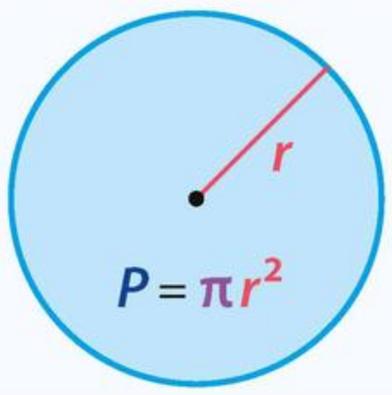
Można więc przyjąć, że pole koła o promieniu r jest równe polu prostokąta o bokach r i πr, czyli $r \cdot \pi r$. Po uporządkowaniu czynników w tym wyrażeniu otrzymujemy wzór na pole koła, czyli $P = \pi r^2$.

Zapamiętaj

Pole P koła o promieniu równym r jest równe πr^2.

$$P = \pi r^2$$

pole koła — promień okręgu



Przykład 1

Oblicz pole koła o promieniu 5 cm. Podaj przybliżoną wartość pola tego koła. Przyjmij $\pi \approx 3{,}14$.

Do wzoru $P = \pi r^2$ podstawiamy $r = 5$.

$P = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$ [cm^2]

Podstawiamy podaną przybliżoną wartość liczby π i otrzymujemy przybliżoną wartość pola koła.

$P \approx 25 \cdot 3{,}14 = 78{,}5$ [cm^2]

Odp. Pole koła jest równe 25π cm^2. Jego przybliżona wartość wynosi 78,5 cm^2.

Przyjmijmy – podobnie jak dla długości okręgu – że polecenie:
- **„Oblicz/Wyznacz/Podaj pole koła"** oznacza, że odpowiedź należy podać z liczbą π, np. 25π.
- **„Oblicz/Wyznacz/Podaj przybliżoną wartość pola koła"** oznacza, że w miejsce π należy podstawić przybliżoną wartość, np. 3,14.

Ćwiczenie 1

Jakie pole ma koło o średnicy 6 cm? Podaj dokładny wynik, a także przybliżony dla $\pi \approx 3{,}1$.

Obliczanie promienia koła

Przykład 2.1

Oblicz promień koła o polu 32π cm^2.

Oznaczmy promień koła literą r. Wówczas:

$\pi r^2 = 32\pi \quad | : \pi$

$r^2 = 32$

$r = \sqrt{32}$

$r = 4\sqrt{2}$ [cm]

Odp. Promień koła wynosi $4\sqrt{2}$ cm.

Skoro r jest promieniem, interesuje nas tylko dodatnie rozwiązanie równania $r^2 = 32$.
A jakie ujemne rozwiązanie ma to równanie?

Przykład 2.2

Oblicz promień koła o polu 10 cm^2. Podaj dokładny wynik, a także przybliżony dla $\pi \approx 3{,}14$.

Oznaczmy promień koła literą r. Wówczas:

$\pi r^2 = 10 \quad | : \pi$

$r^2 = \frac{10}{\pi}$

$r = \sqrt{\frac{10}{\pi}}$ [cm]

$r = \sqrt{\frac{10}{\pi}} \approx \sqrt{\frac{10}{3{,}14}} \approx \sqrt{3{,}18} \approx 1{,}8$ [cm]

Odp. Promień koła wynosi $\sqrt{\frac{10}{\pi}}$ cm, czyli w przybliżeniu 1,8 cm.

Aby podać wynik w przybliżeniu, musimy zarówno przyjąć przybliżoną wartość liczby π, jak i – na końcu – podać przybliżoną wartość otrzymanego pierwiastka.

Ćwiczenie 2

Oblicz promień koła o polu P.

a) $P = 9\pi \text{ cm}^2$ **b)** $P = \frac{4}{25}\pi \text{ cm}^2$ **c)** $P = 17 \text{ cm}^2$

Pole i obwód koła

Przykład 3

Oblicz obwód koła o polu równym 20π.

Najpierw obliczamy promień tego koła.

$\pi r^2 = 20\pi \qquad | : \pi$

$r^2 = 20$

$r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Teraz możemy już obliczyć obwód.

$l = 2\pi \cdot 2\sqrt{5} = 4\pi\sqrt{5}$

Odp. Obwód koła wynosi $4\pi\sqrt{5}$.

Ćwiczenie 3

Oblicz obwód koła o polu równym 25π.

Zadania

1. Wykonaj polecenia. ▶ Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

← P1

Oblicz pole koła o podanym promieniu r lub średnicy d.

a) $r = 8 \text{ dm}$

b) $d = 5 \text{ m}$

c) $r = \sqrt{3}$

d) $r = \sqrt{11} \text{ cm}$

e) $d = 20 \text{ m}$

f) $r = 3 \text{ cm}$

g) $d = 9 \text{ cm}$

h) $r = 4$

poziom B

← P1

Wyznacz przybliżoną wartość pola koła o podanym promieniu r lub średnicy d. Przyjmij podane przybliżenie liczby π.

a) $r = \sqrt{7}$, $\pi \approx 3{,}1$

b) $d = 5 \text{ m}$, $\pi \approx 3$

c) $r = 2 \text{ dm}$, $\pi \approx 3{,}14$

d) $d = 16 \text{ m}$, $\pi \approx 3{,}1$

e) $r = \sqrt{17} \text{ cm}$, $\pi \approx 3{,}1$

f) $r = 3 \text{ cm}$, $\pi \approx 3{,}14$

g) $d = 200 \text{ m}$, $\pi \approx 3$

h) $r = 7$, $\pi \approx 3{,}1$

poziom C

← P2.1

Oblicz promień koła o podanym polu.

a) 36π cm^2 **c)** 100π mm^2 **e)** 4900π km^2 **g)** 4π

b) 3π **d)** 8π m^2 **f)** 7π **h)** 1000π dm^2

poziom D

← P2.2

Oblicz promień koła o podanym polu.

a) 100 cm^2 **c)** 10 m^2 **e)** 2 m^2 **g)** 64 cm^2

b) 5 **d)** 49 mm^2 **f)** 8 **h)** 1000 km^2

poziom E

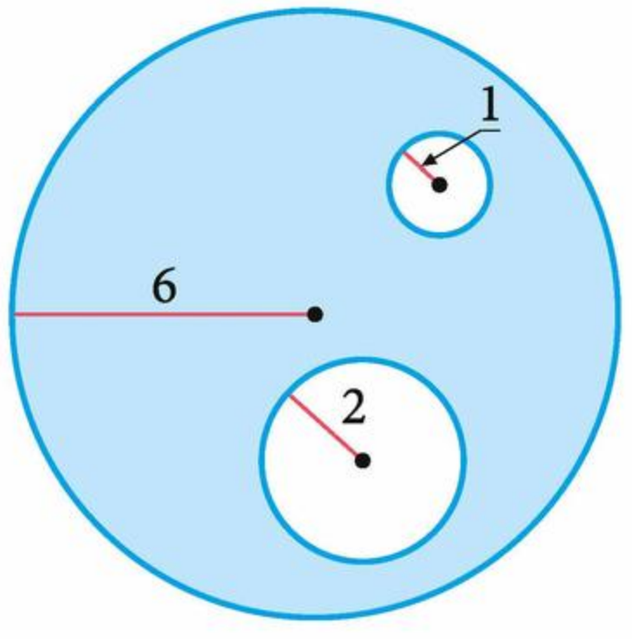
← P3

Jeśli dane jest pole P koła, oblicz jego obwód l, a jeśli podany jest obwód l – oblicz pole P.

a) $l = 3\pi$ cm **c)** $l = 14\pi$ cm **e)** $P = 4\pi$ cm^2 **g)** $l = 12\pi$ cm

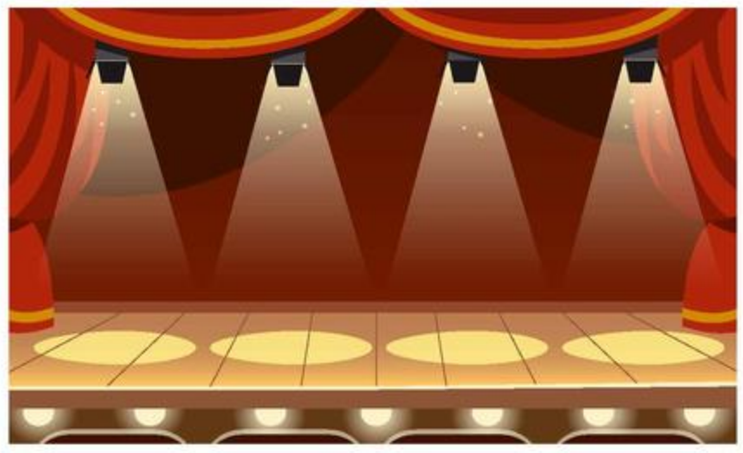
b) $P = 8\pi$ cm^2 **d)** $P = 5\pi$ cm^2 **f)** $l = 5\pi$ cm **h)** $P = 10\pi$ cm^2

2. Z koła o promieniu 6 cm wycięto dwa mniejsze koła o promieniach 1 cm i 2 cm (rysunek obok). Oblicz pole powstałej w ten sposób figury.



3. Jedna paczka nasion trawy wystarcza do obsiania 15 m^2 trawnika. Ile takich paczek należy kupić, aby zasiać trawę na trawniku w kształcie koła o promieniu 4 m?

4. Nad sceną w kształcie prostokąta o wymiarach 8 m i 10 m zainstalowano 4 reflektory, z których każdy skierowany pionowo w dół oświetla obszar w kształcie koła o promieniu 2 m. Czy te reflektory mogą oświetlić ponad połowę powierzchni sceny?



5. Z prostokątnej kartki o wymiarach 12 cm × 20 cm wycięto koło największe z możliwych. Co jest większe – pole tego koła czy pole pozostałej części kartki?

6. Wujek pokroił tort o średnicy 30 cm. Najpierw wyciął środek w kształcie koła o promieniu 3 cm, a następnie pozostałą część podzielił na 12 równych porcji. Który kawałek jest większy: środek czy jeden z pozostałych kawałków? Ile razy większy?

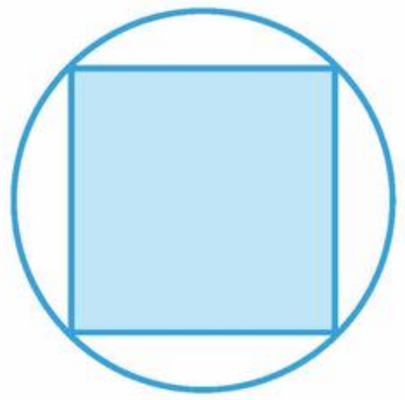
7. Okrągłe okno w ścianie nadbudówki jachtu nazywa się bulaj (od ang. *bull's eye* – oko byka). Jakie wymiary powinno mieć kwadratowe okno, aby wpadało przez nie tyle samo światła co przez bulaj o średnicy 30 cm?



8. Centymetr kwadratowy stalowej blachy o grubości 1 mm waży 0,8 g. Oblicz, ile waży wycięte z tej blachy koło o średnicy 10 cm.

9. Jaki promień ma koło o powierzchni 1 hektara?

10. Na kwadracie opisano okrąg (jak na rysunku obok). Jaki procent pola koła ograniczonego tym okręgiem stanowi pole kwadratu?



11. Oblicz pole koła o podanym obwodzie.

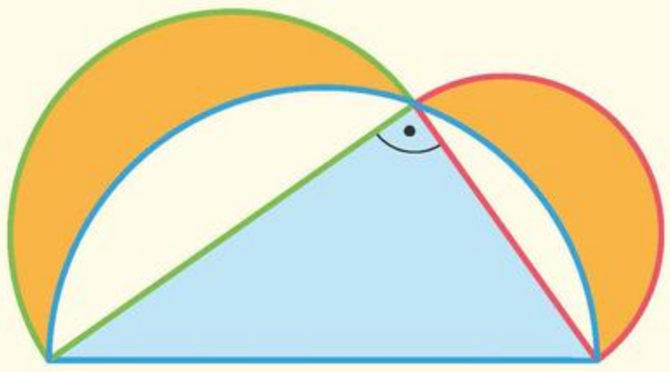
a) 10 cm **b)** $2\sqrt{3}$ cm **c)** $\sqrt{2}$ cm

12. Oblicz obwód koła o podanym polu.

a) 100 cm^2 **b)** $1\frac{9}{16}$ cm^2 **c)** 7 cm^2

Dla dociekliwych

Na rysunku przedstawiono trójkąt prostokątny oraz półokręgi, których średnicami są boki tego trójkąta. Każdy z półokręgów narysowano tym samym kolorem co jego średnicę. Pomarańczowe obszary noszą nazwę księżyców Hipokratesa – na cześć starożytnego greckiego matematyka Hipokratesa z Chios (nie należy go mylić z Hipokratesem z Kos, greckim lekarzem, autorem słynnej przysięgi Hipokratesa).



1. Udowodnij, że łączne pole księżyców Hipokratesa jest równe polu trójkąta.

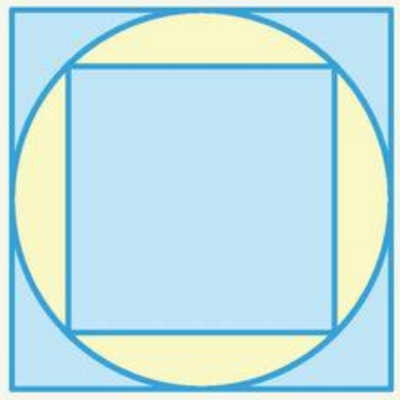
Czy już umiem?

I. Ile wynosi obwód koła o polu 64π m^2?

A. 8π m **B.** 16π m **C.** 32π m **D.** 64π m

II. Jaką powierzchnię ma największa okrągła pizza, jaka zmieści się w pudełku o wymiarach 40 cm × 40 cm?

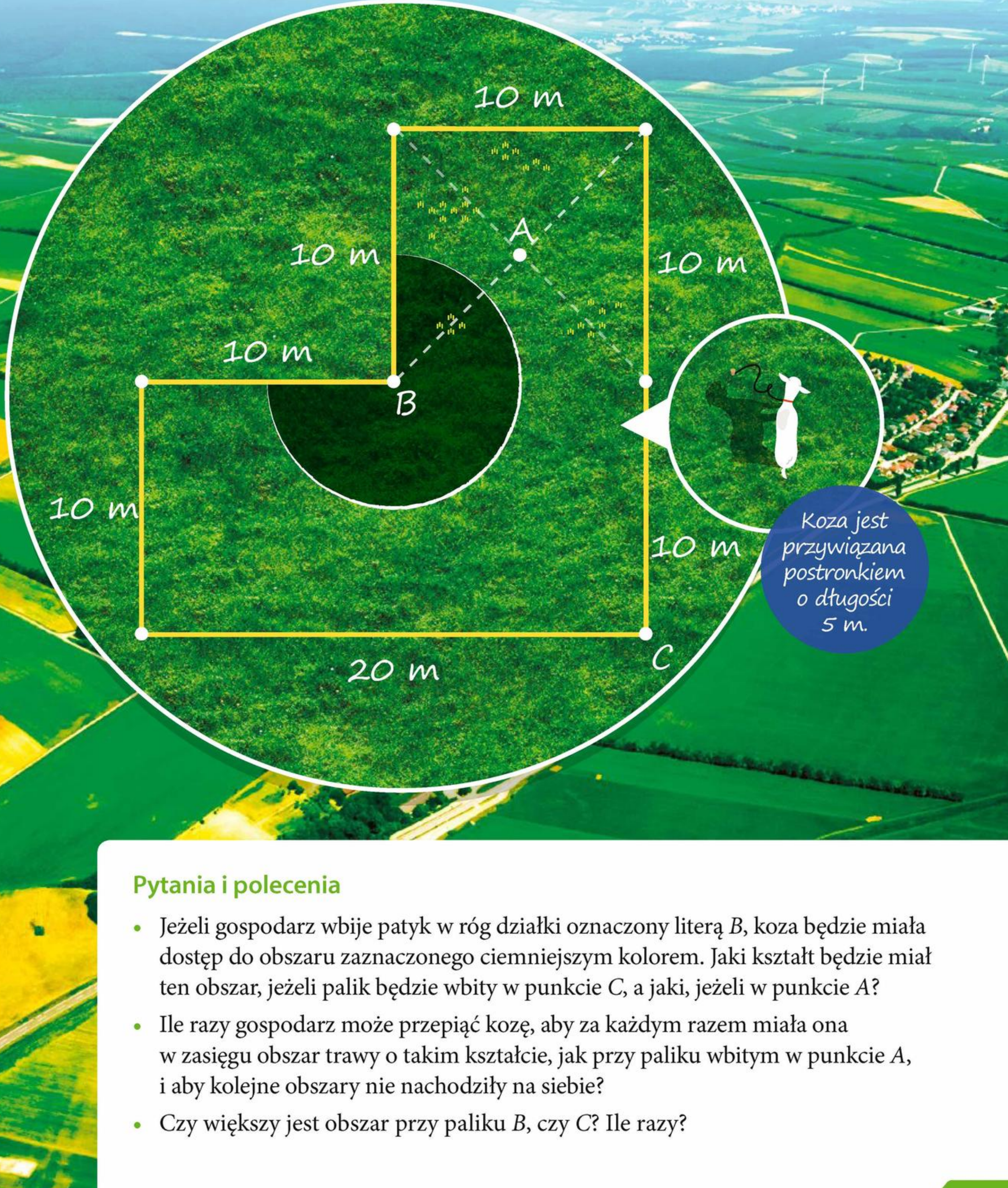
III. Dwa kwadraty i koło są położone jak na rysunku obok. Jaki procent pola większego kwadratu stanowi część koła pokolorowana na żółto?



3 Długość okręgu i pole koła – zadania

Na dobry początek

Gospodarz ma ogrodzoną działkę w kształcie sześciokąta pokazanego na rysunku. Wypasa na niej kozę, którą przywiązuje do palika postronkiem długości 5 m.



Pytania i polecenia

- Jeżeli gospodarz wbije patyk w róg działki oznaczony literą *B*, koza będzie miała dostęp do obszaru zaznaczonego ciemniejszym kolorem. Jaki kształt będzie miał ten obszar, jeżeli palik będzie wbity w punkcie *C*, a jaki, jeżeli w punkcie *A*?
- Ile razy gospodarz może przepiąć kozę, aby za każdym razem miała ona w zasięgu obszar trawy o takim kształcie, jak przy paliku wbitym w punkcie *A*, i aby kolejne obszary nie nachodziły na siebie?
- Czy większy jest obszar przy paliku *B*, czy *C*? Ile razy?

Dokładność odpowiedzi w zadaniach tekstowych

Przykład 1

Klomb w parku ma kształt koła o średnicy 8,45 m. Jaka jest długość otaczającego go krawężnika?

Korzystamy ze wzoru na długość okręgu $l = \pi d$.

$l = \pi d = 8{,}45\pi$ [m]

Ten wynik jest dokładny, ale w praktycznych zastosowaniach – mało pożyteczny. Podstawiamy więc przybliżoną wartość $\pi \approx 3{,}14$.

$l \approx 26{,}533$ [m]

Podawanie wyniku z dokładnością do trzech miejsc po przecinku (czyli z dokładnością do 1 mm) nie miałoby sensu – ani klomb nie jest idealnym kołem, ani krawężnik nie jest idealnym okręgiem. Należy więc zaokrąglić wynik np. do wartości 26,53 m.

Ćwiczenie 1

Sznurek o długości 1 m układamy w kształt okręgu. Jaka jest średnica tego okręgu? Podaj wynik z rozsądną dokładnością.

Koła i ruch

Przykład 2

Ile razy w ciągu sekundy obraca się koło roweru górskiego jadącego z prędkością $20\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$? Średnica koła wynosi 75 cm.

$d = 75$ cm

$l = \pi d = 75\pi \approx 75 \cdot 3{,}14 \approx 236$ [cm]



Podczas jednego obrotu koła rower przebywa drogę równą obwodowi tego koła, czyli 2,36 m.

Jeśli rowerzysta jedzie z prędkością $20\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, to rower w ciągu godziny przejeżdża $20\ \text{km} = 20\,000$ m, czyli w tym czasie koło obraca się $\frac{20\,000}{2{,}36} \approx 8475$ razy, a w ciągu sekundy $\frac{8475}{3600} \approx 2{,}4$ razy.

Ćwiczenie 2

Koło rowerka dziecięcego ma średnicę 40 cm. Z jaką prędkością jedzie dziecko, jeśli koło obraca się 2 razy na sekundę? Odpowiedź podaj w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Jak zmieniają się pole i obwód koła?

Przykład 3

Promień koła powiększono trzykrotnie. Ile razy zwiększyło się pole tego koła? Ile razy zwiększył się jego obwód?

Niech r oznacza początkowy promień koła. Zapiszmy wzory na pole i obwód koła.

$P_1 = \pi r^2,\ l_1 = 2\pi r$

Kiedy promień koła wzrósł do $3r$, pole i obwód powiększonego koła wynoszą:

$P_2 = \pi \cdot (3r)^2 = \pi \cdot 9r^2 = 9 \cdot \pi r^2 = 9P_1,$

$l_2 = 2\pi \cdot 3r = 3 \cdot 2\pi r = 3l_1.$

Odp. Obwód koła wzrósł 3 razy, tak samo jak promień, a pole wzrosło aż 9 razy.

Ćwiczenie 3

Każdy bok kwadratu wydłużono trzykrotnie. Ile razy zwiększyło się pole tego kwadratu? Ile razy zwiększył się jego obwód? Porównaj swoje odpowiedzi z wynikami z przykładu 3.

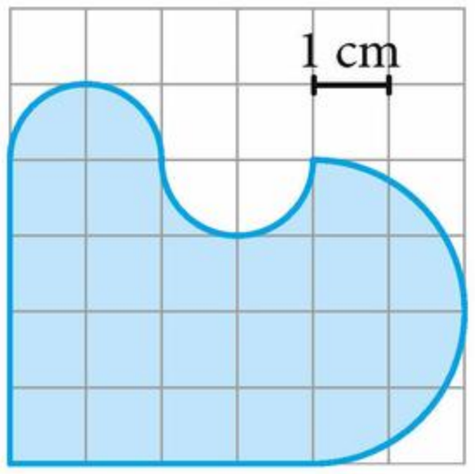
Części kół

Znając wzór na pole koła, możemy obliczać także pola bardziej skomplikowanych figur złożonych z części kół i z wielokątów.

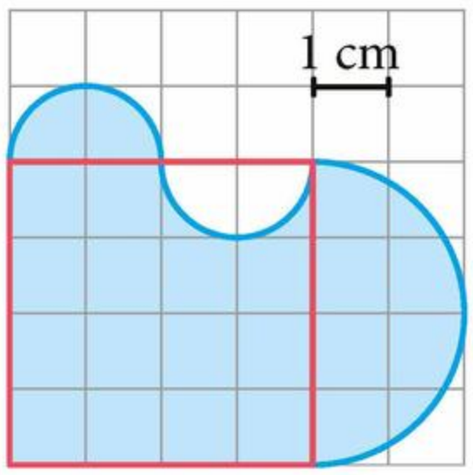
W figurach przedstawionych niżej wszystkie łuki są częściami okręgów.

Przykład 4

Oblicz pole figury przedstawionej na rysunku.



Na figurę możemy patrzeć jak na kwadrat, do którego doklejono jedno duże półkole i jedno małe oraz wycięto jedno małe półkole. Doklejone małe półkole można by odciąć i umieścić w miejscu, z którego wycięto takie samo małe półkole.



Duże półkole ma promień 2 cm, więc jego pole wynosi:

$P_d = \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 4 = 2\pi\ [\text{cm}^2].$

Kwadrat ma pole $P_k = 4^2 = 16\ [\text{cm}^2].$

Wobec tego pole figury jest równe:

$P = P_k + P_d = (16 + 2\pi)\ [\text{cm}^2].$

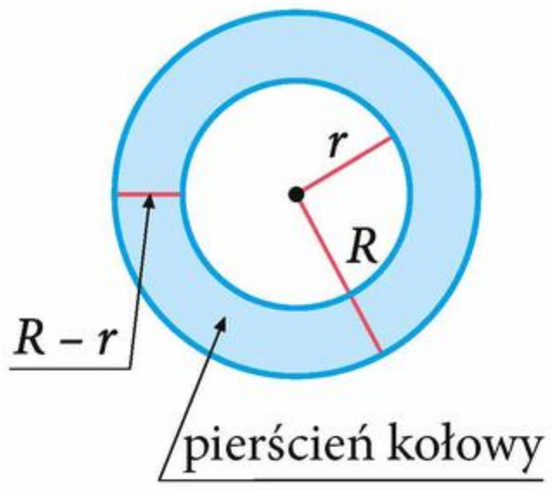
Odp. Pole figury wynosi $(16 + 2\pi)\ \text{cm}^2$.

Ćwiczenie 4

Oblicz obwód figury z przykładu 4.

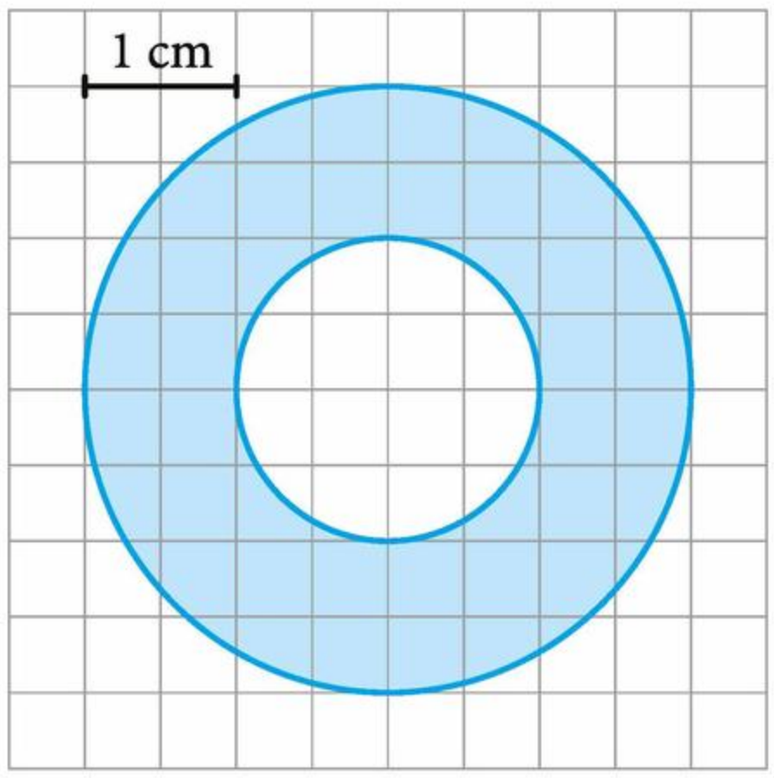
Pierścień kołowy

Na rysunku obok widzisz **pierścień kołowy**, czyli dwa okręgi o tym samym środku oraz obszar zawarty między nimi. Promień większego okręgu (R) nazywamy promieniem zewnętrznym pierścienia, a promień mniejszego okręgu (r) nazywamy promieniem wewnętrznym pierścienia. Różnicę tych promieni ($R - r$) nazywamy szerokością pierścienia.



Przykład 5.1

Oblicz pole pierścienia kołowego ograniczonego okręgami o promieniach 2 cm i 1 cm (rysunek obok).



Pole koła o promieniu $R = 2$ cm jest równe:
$P_1 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$ [cm^2].

Pole koła o promieniu $r = 1$ cm jest równe:
$P_2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$ [cm^2].

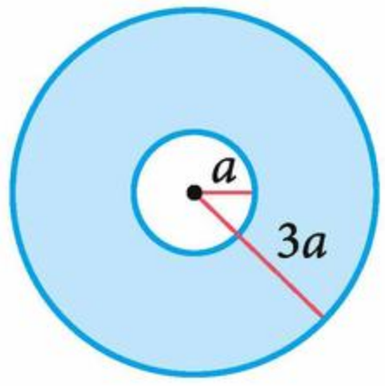
Pole pierścienia kołowego jest równe różnicy pól P_1 i P_2:

$P = P_1 - P_2 = 4\pi - \pi = 3\pi$ [cm^2].

Odp. Pole pierścienia wynosi 3π cm^2.

Przykład 5.2

Wyznacz pole pierścienia kołowego o promieniu wewnętrznym a i promieniu zewnętrznym trzy razy większym od wewnętrznego.



Promień wewnętrzny pierścienia: a
Pole koła o takim promieniu: πa^2
Promień zewnętrzny pierścienia: $3a$
Pole koła o takim promieniu: $\pi(3a)^2 = \pi \cdot 9a^2 = 9\pi a^2$
Pole pierścienia: $P = 9\pi a^2 - \pi a^2 = 8\pi a^2$

Odp. Pole pierścienia wynosi $8\pi a^2$.

Wielkość a jest dana, więc może wystąpić w odpowiedzi.

Ćwiczenie 5

Oblicz pole pierścienia kołowego ograniczonego okręgami o promieniach r_1 i r_2.

a) $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 2$ cm **b)** $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 5$ cm

Zadania

Czy wiesz, że…

Do rejestru pomników przyrody wpisywane są stare drzewa o znacznych rozmiarach. Minimalny obwód pnia, będący podstawą wpisania drzewa do rejestru, podano w tabeli (pomiar obwodu drzewa wykonywany jest zwykle na wysokości 130 cm od ziemi).

Gatunek drzewa	Obwód w centymetrach
brzoza, wiąz	200
sosna	250
buk, dąb, lipa	300



1. Na podstawie „Czy wiesz, że…” odpowiedz na pytania.

a) Czy dąb o średnicy pnia (na wysokości 130 cm od ziemi) równej 100 cm powinien być wpisany do rejestru pomników przyrody?

b) Czy średnica pnia sosny wpisanej do rejestru jest większa niż 70 cm?

2. Ile osób o rozpiętości ramion równej 140 cm potrzeba, aby objąć pień:

a) drzewa o średnicy 1,5 m,

b) dębu Bartek, którego średnica to około 3,1 m?

3. Z jaką prędkością porusza się koniec wskazówki minutowej zegara, jeśli jej długość wynosi 8 cm?

4. Przednie koło roweru poziomego (patrz zdjęcie) jest zwykle mniejsze od koła tylnego. Odpowiedz na pytania, zakładając, że przednie koło takiego roweru ma średnicę 50 cm, a tylne 66 cm. Przyjmij $\pi \approx 3{,}14$.



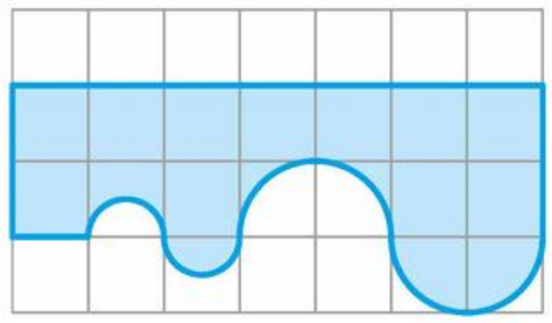
a) Jaką drogę w przybliżeniu przebył rower, jeśli jego tylne koło wykonało 100 obrotów?

b) Ile pełnych obrotów wykonało przednie koło, gdy tylne wykonało 100 obrotów?

c) Ile pełnych obrotów wykona przednie koło, gdy rower przejedzie trasę 1 km?

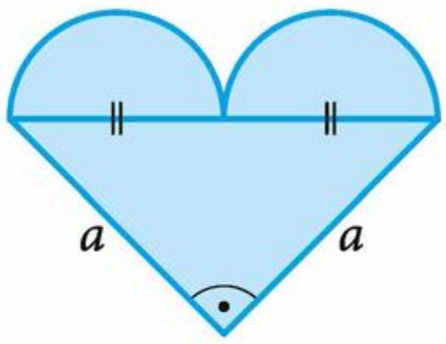
5. Prędkościomierz roweru oblicza prędkość na podstawie liczby obrotów koła w jednostce czasu oraz obwodu tego koła. Poprawną wartość podaje, gdy koło jest właściwie napompowane. Czy kiedy w kole jest zbyt mało powietrza, prędkościomierz wyświetla wartość większą czy mniejszą od prawdziwej prędkości pojazdu?

6. Na kratce 5 mm przedstawiono figurę jak na rysunku obok. Oblicz jej pole i obwód.

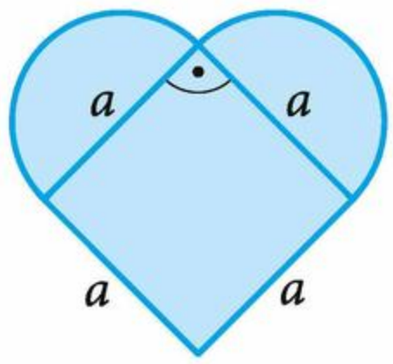


7. Serduszko widoczne na rysunku powstało z połączenia pewnego wielokąta z odpowiednimi półkolami. Oblicz pole i obwód serduszka.

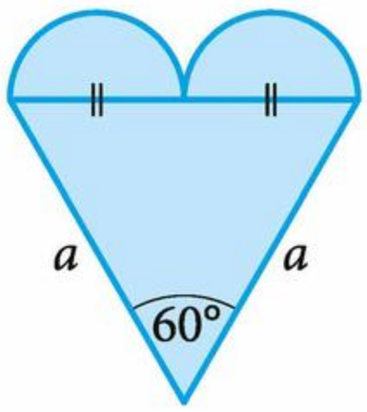
a)



b)



c)



8. Czy ilość pizzy przypadająca na jedną osobę jest w każdym przypadku taka sama? Jeśli nie – w którym przypadku jest większa?



9. Oblicz pole pierścienia kołowego o promieniu wewnętrznym 3 cm i zewnętrznym 5 cm. Oblicz promień koła, którego pole jest równe polu tego pierścienia.

10. Lądowiska dla helikopterów zazwyczaj mają kształt koła z literą H otoczonego żółtym pierścieniem. Oblicz pole tego pierścienia, jeżeli jego szerokość jest równa 1 m, a pole koła z literą H jest równe:

a) 64π m^2, **b)** 81π m^2.

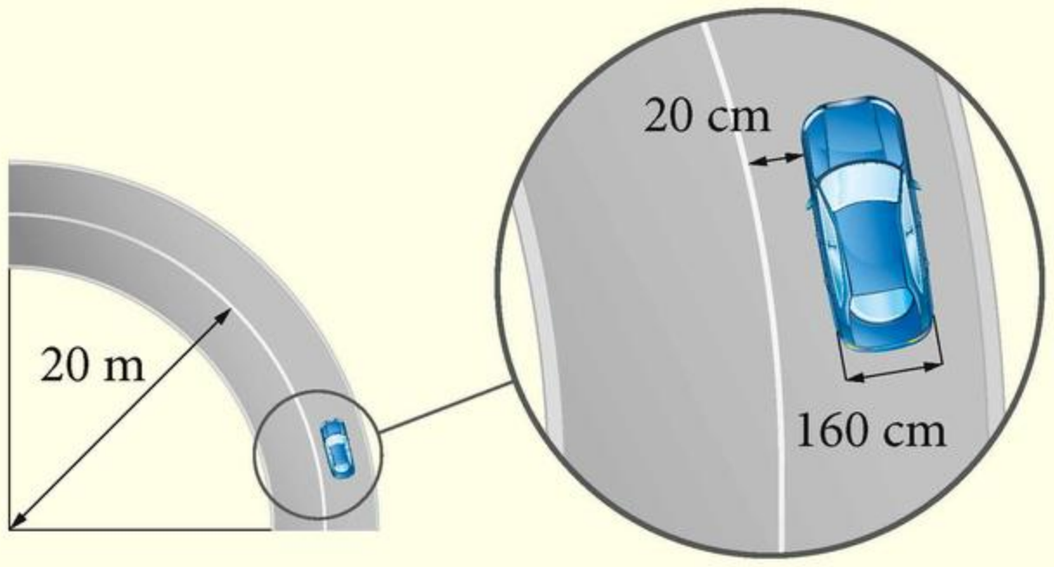


11. Ile razy pole pierścienia kołowego o promieniu wewnętrznym r jest mniejsze od pola pierścienia kołowego o promieniu wewnętrznym $2r$, jeśli oba pierścienie mają taką samą szerokość równą r?

12. Koło o środku S ma promień R. Jaki promień powinien mieć narysowany wewnątrz niego okrąg o środku S, aby powstałe części: mniejsze koło i pierścień, miały równe pola?

Dla dociekliwych

Droga skręcała w lewo o 90° po łuku o promieniu 20 m (liczonym do osi jezdni). Jechał po niej samochód o rozstawie kół 160 cm. Jego lewe koła znajdowały się 20 cm od osi jezdni. Sytuację tę przedstawiono na rysunku obok.

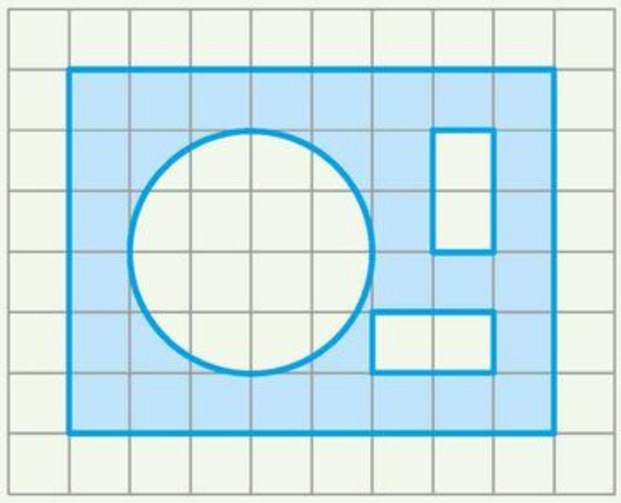


1. Oblicz promień łuku, po którym poruszały się lewe koła, oraz łuku, po którym poruszały się prawe koła.
2. Oblicz, o ile dłuższą drogę przebyły prawe koła.
3. Uzasadnij, że odpowiedź w zadaniu 2 nie zależy od promienia łuku drogi.
4. Wyjaśnij, dlaczego lewe i prawe koło pojazdu nie mogą być zamocowane na sztywno na jednej osi.

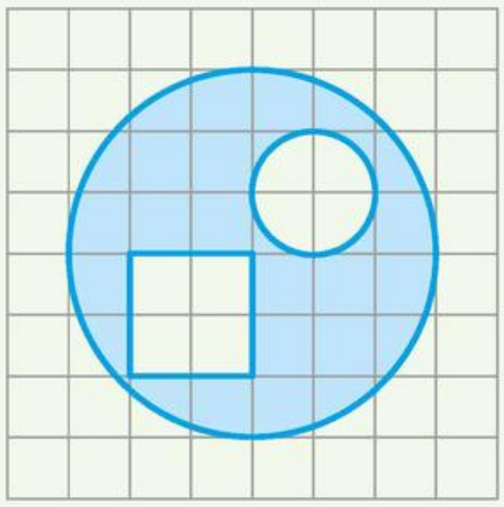
Czy już umiem?

I. Oblicz pole niebieskiej figury. Za jednostkę przyjmij długość boku kratki.

a)



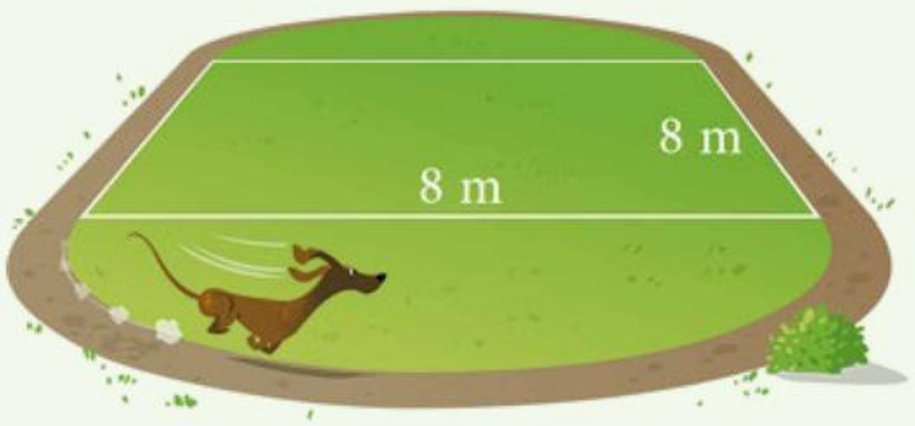
b)



II. Oblicz pole pierścienia ograniczonego przez okręgi o długościach l_1 i l_2.

a) $l_1 = 6\pi$ m, $l_2 = 10\pi$ m **b)** $l_1 = 16\pi$ m, $l_2 = 20\pi$ m

III. Trawnik składający się z kwadratu o boku 8 m i dwóch półkoli (rysunek obok) otoczony jest alejką o szerokości 2 m. Pies, biegając wokół trawnika, pokonał trasę długości 120 m. Ile razy obiegł trawnik, jeśli biegł po wewnętrznej stronie alejki?



IV. Koła roweru Witka mają średnicę o 70 mm większą niż koła roweru jego siostry. O ile dłuższą drogę przebędzie Witek na swoim rowerze, jeśli koła w obu rowerach wykonają po 50 obrotów? Przyjmij $\pi \approx 3{,}14$.

4 Oś symetrii i środek symetrii

Na dobry początek ›

Gotyckie budowle imponują rozmachem. Ich olbrzymie wnętrza rozjaśnia światło wpadające przez okna zajmujące czasami całą ścianę. W oknach widać ażurowe ornamenty, wykonane w kamieniu lub cegle. To maswerki.

Maswerki składają się z elementów geometrycznych. Oto nazwy niektórych z nich:

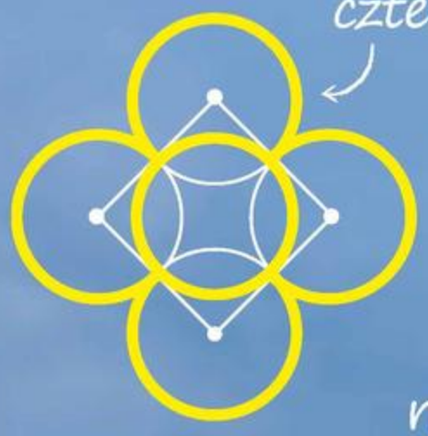


trójliść



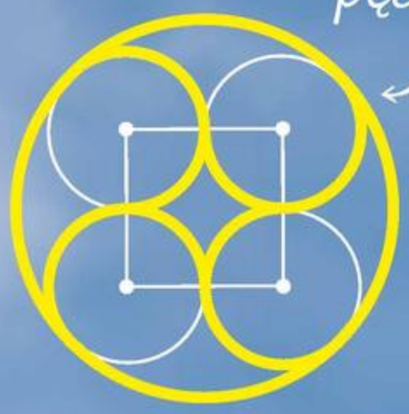


czteroliść





rybie pęcherze



Katedra w Beauvais (czytaj: bo**we**) we Francji



Pytania i polecenia

- Ile osi symetrii mają pokazane na zdjęciach maswerki? Jak są położone te osie?

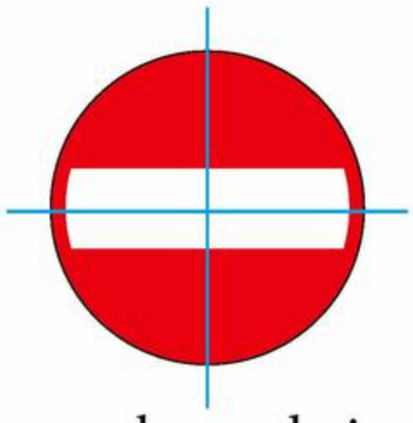
Oś symetrii figury płaskiej

Oś symetrii znasz już z lekcji matematyki i z życia codziennego. Oś symetrii figury narysowanej na kartce to prosta dzieląca tę figurę na dwie przystające części, które można by na siebie nałożyć, składając kartkę wzdłuż tej prostej. Figura może mieć jedną oś symetrii, wiele osi symetrii lub nie mieć ich wcale.

Przyjrzyjmy się znakom drogowym:



Ten znak ma jedną oś symetrii.

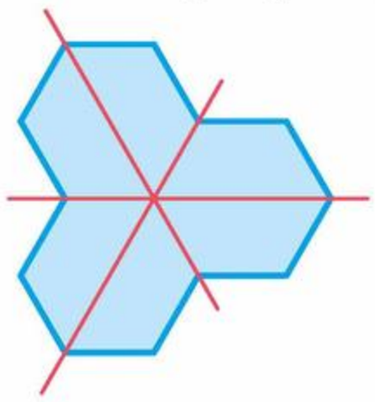


Ten znak ma dwie osie symetrii.

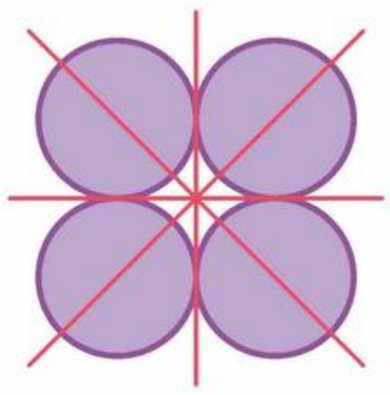


Ten znak nie ma osi symetrii.

A oto inne figury mające osie symetrii.



3 osie symetrii



4 osie symetrii



5 osi symetrii

Figura może mieć także 6, 7, 8, … osi symetrii, a nawet nieskończenie wiele takich osi. Na przykład osią symetrii okręgu jest każda prosta przechodząca przez jego środek, a takich prostych jest nieskończenie wiele.

Figura, która ma co najmniej jedną oś symetrii, to **figura osiowosymetryczna**.

Przykład 1

Ile osi symetrii ma przedstawiona figura?

a)



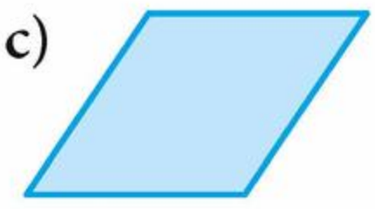
trapez równoramienny

b)



równoległobok

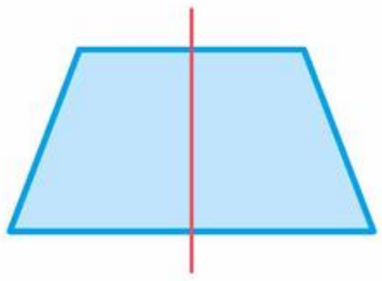
c)



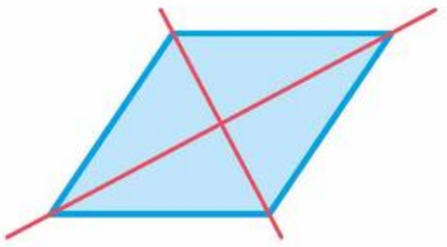
romb

a) Trapez równoramienny ma jedną oś symetrii (rys. 1).
b) Równoległobok (niebędący rombem) nie ma osi symetrii.
c) Romb (niebędący kwadratem) ma dwie osie symetrii (rys. 2).

Rys. 1



Rys. 2



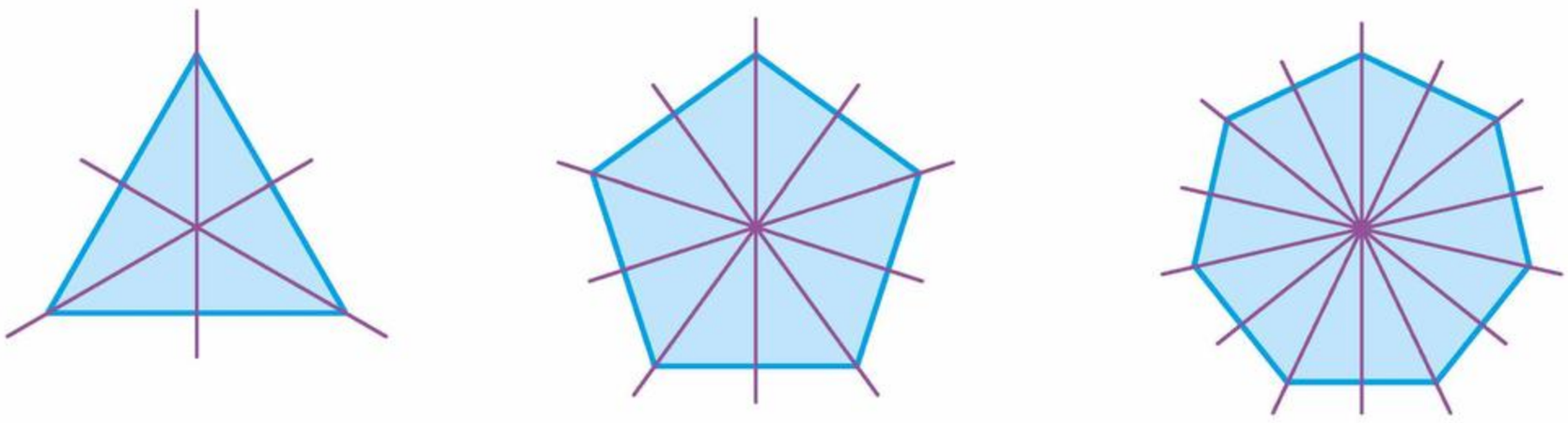
Ćwiczenie 1

Ile osi symetrii ma kwadrat, a ile – prostokąt niebędący kwadratem?

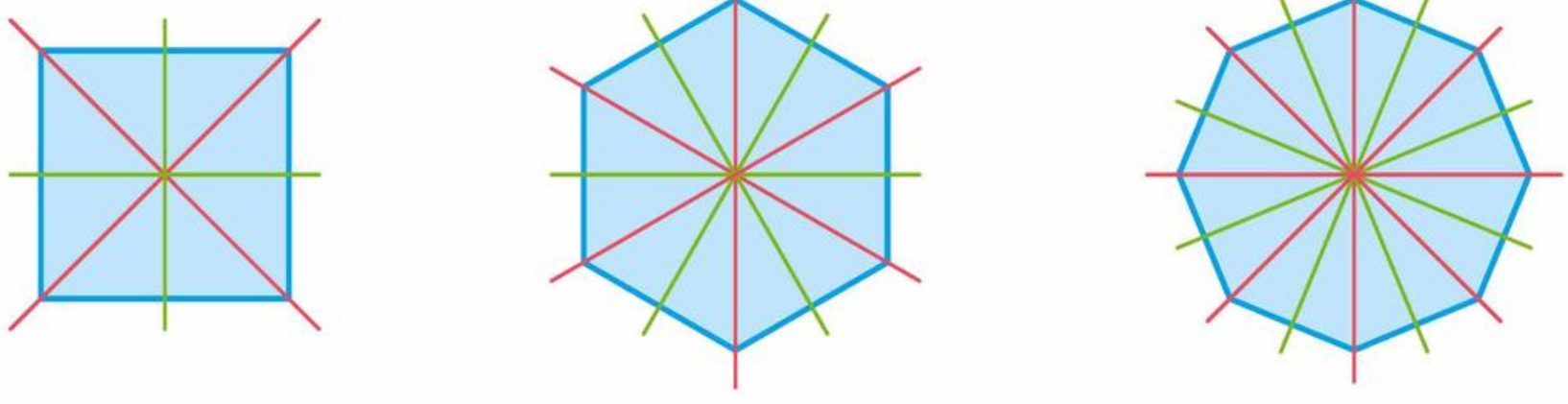
Osie symetrii wielokątów foremnych

Popatrzmy na wielokąty foremne z narysowanymi osiami symetrii.
Każdy wielokąt foremny ma tyle samo osi symetrii, ile boków, ale w zależności od tego, czy liczba boków jest parzysta, czy nieparzysta, osie przebiegają nieco inaczej.

Gdy liczba boków wielokąta foremnego jest nieparzysta, każda z osi symetrii przebiega przez **wierzchołek i środek przeciwległego boku**.

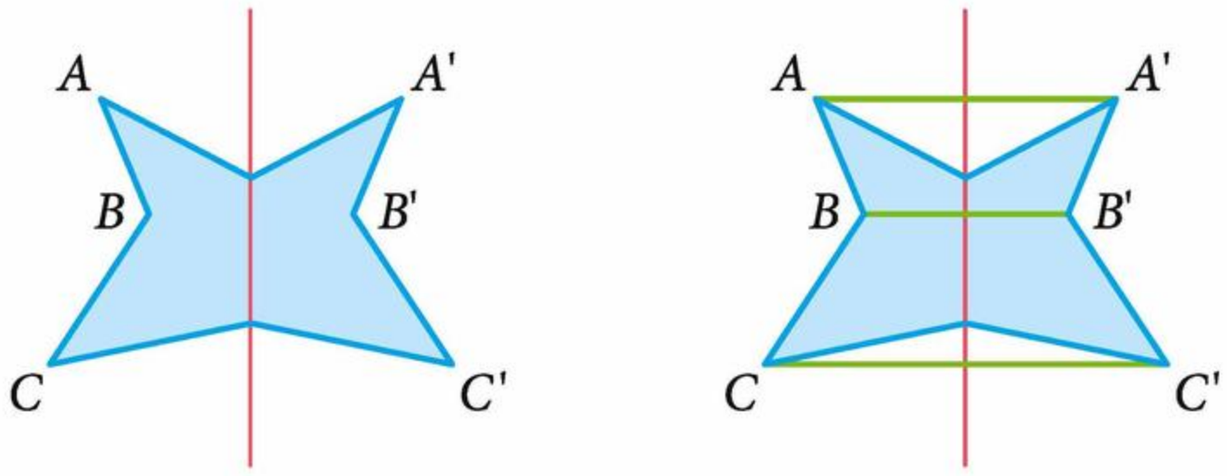


Gdy liczba boków wielokąta foremnego jest parzysta, oś symetrii przebiega albo przez **dwa przeciwległe wierzchołki**, albo przez **środki dwóch przeciwległych boków**.



Definicja osi symetrii

Do tej pory określaliśmy oś symetrii tylko intuicyjnie, tak samo jak w czwartej klasie. Aby podać ścisłą definicję, przeanalizujmy poniższy rysunek. Każdy z punktów A, B i C po jednej stronie osi symetrii został połączony z symetrycznym do niego punktem A', B' lub C' po drugiej stronie osi.

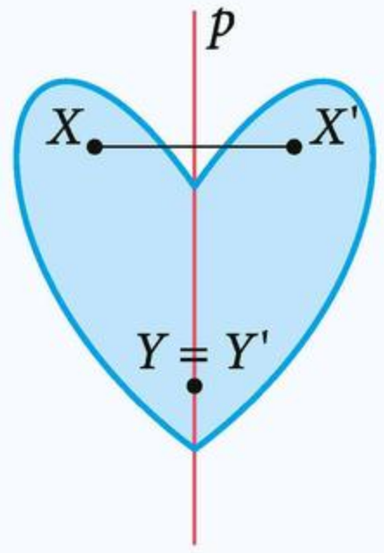


Zauważmy, że odcinki AA', BB' i CC' są prostopadłe do osi symetrii, a ich środki leżą na tej osi.

Zapamiętaj

Definicja punktów symetrycznych względem prostej

Punkty X i X' nazywamy **symetrycznymi względem prostej p**, jeśli odcinek XX' jest prostopadły do prostej p, a jego środek leży na tej prostej. Punkt leżący na prostej p jest symetryczny do samego siebie.



Definicja figury osiowosymetrycznej

Jeśli dla każdego punktu A danej figury także punkt A' symetryczny do A względem prostej p należy do tej figury, to mówimy, że figura jest **osiowosymetryczna** (ma oś symetrii) i prosta p jest jej osią symetrii.

Środek symetrii figury płaskiej

Popatrz na rysunki. Przedstawione na nich figury nie mają osi symetrii, ale zauważamy w nich pewną regularność. Każda z figur obrócona „do góry nogami" (czyli o 180°) wokół swojego środka wygląda tak samo jak przed obróceniem.



karta do gry



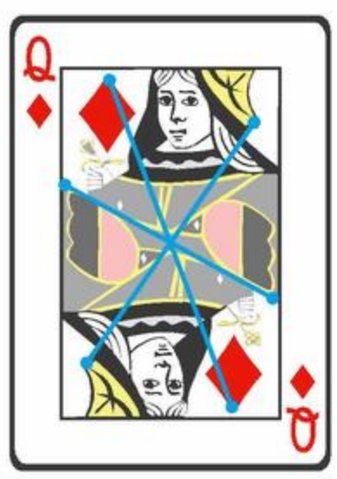
maswerk

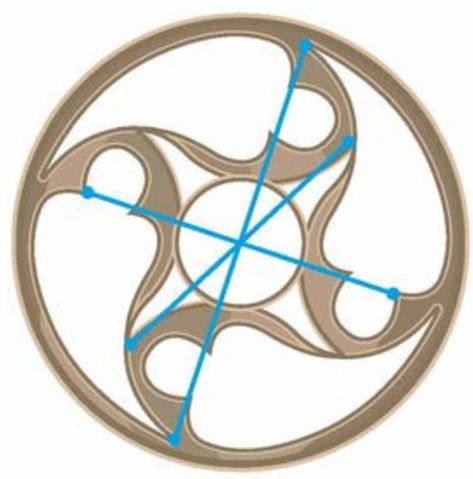


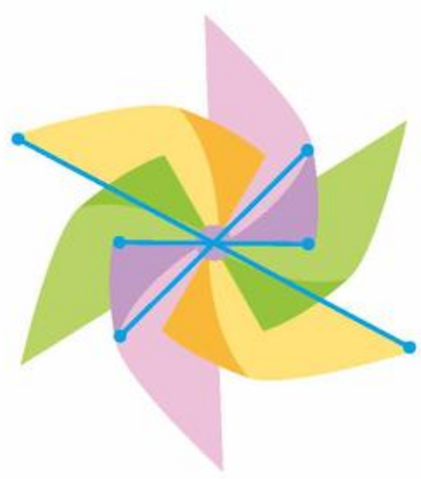
wiatraczek

O takich figurach mówimy, że są **środkowosymetryczne**.

Połączmy punkty, które zamieniają się miejscami podczas takiego obracania figury.





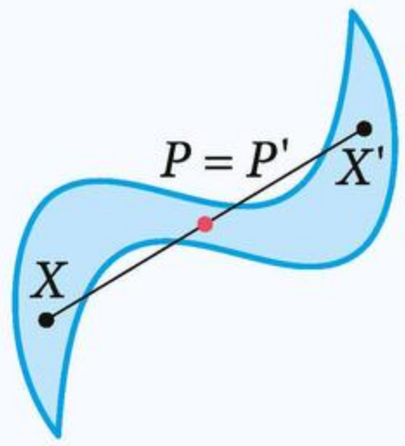


Zauważmy, że w każdej z powyższych figur wszystkie narysowane odcinki przecinają się w jednym punkcie, który w dodatku jest środkiem każdego z odcinków. Ten punkt wspólny narysowanych odcinków to właśnie **środek symetrii** figury.

Zapamiętaj

Definicja punktów symetrycznych względem punktu

Punkty X i X' nazywamy **symetrycznymi względem punktu *P***, jeśli P jest środkiem odcinka XX'. Punkt P jest symetryczny do samego siebie.



Definicja figury środkowosymetrycznej

Jeśli dla każdego punktu A danej figury także punkt A' symetryczny do A względem punktu P należy do tej figury, to mówimy, że figura jest **środkowosymetryczna** (ma środek symetrii) i punkt P jest jej środkiem symetrii.

Przykład 2

Czy przedstawiona figura jest środkowosymetryczna?

a)



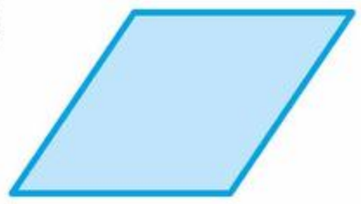
trapez równoramienny

b)



równoległobok

c)



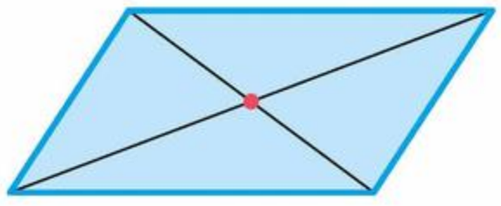
romb

a) Trapez równoramienny nie ma środka symetrii.

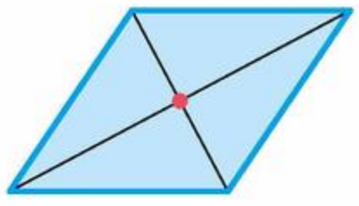
b) Równoległobok ma środek symetrii – jest nim punkt przecięcia przekątnych (rys. 1).

c) Romb jest równoległobokiem, więc ma środek symetrii (rys. 2).

Rys. 1



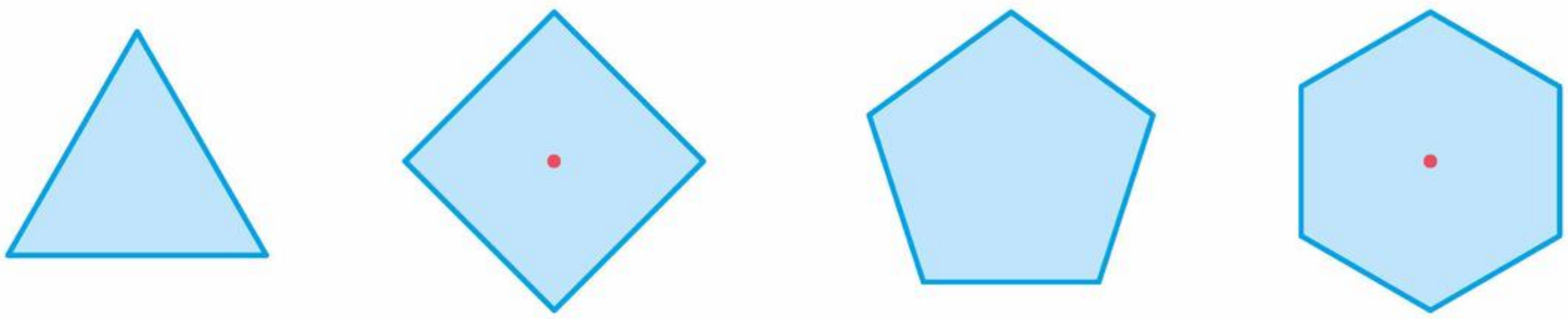
Rys. 2



Ćwiczenie 2

Czy każdy prostokąt ma środek symetrii? A deltoid?

Środek symetrii wielokąta foremnego



Jak widzimy na rysunkach, tylko niektóre wielokąty foremne są środkowosymetryczne: te o parzystej liczbie boków.

Ile środków symetrii może mieć figura?

Wiele figur nie ma środka symetrii lub ma jeden środek symetrii.
Nie istnieje natomiast figura mająca dokładnie dwa (trzy, cztery itd.) środki symetrii. Istnieją jednak figury mające nieskończenie wiele środków symetrii. Oto przykłady.



Prosta – środkiem symetrii jest każdy jej punkt.



Figura składająca się z dwóch prostych równoległych – środkiem symetrii jest każdy punkt jednakowo odległy od obu prostych.

Oś symetrii i środek symetrii – porównanie

Oś symetrii	Środek symetrii
Jest prostą.	Jest punktem.
Odcinek łączący symetryczne punkty jest prostopadły do osi symetrii, a jego środek leży na tej osi.	Odcinek łączący symetryczne punkty przechodzi przez środek symetrii. Środek symetrii jest środkiem tego odcinka.
Ile osi symetrii może mieć figura? 0, 1, 2, 3, …, a także nieskończenie wiele.	Ile środków symetrii może mieć figura? 0, 1 lub nieskończenie wiele (ale nie 2, 3, …).
n-kąt foremny ma n osi symetrii.	n-kąt foremny ma środek symetrii tylko wtedy, gdy n jest liczbą parzystą.

Czy wiesz, że…

Symetrię możemy dostrzec także w utworach muzycznych. Przyjrzyj się fragmentowi partytury utworu „Kunst der Fuge" („Sztuka fugi") Jana Sebastiana Bacha.

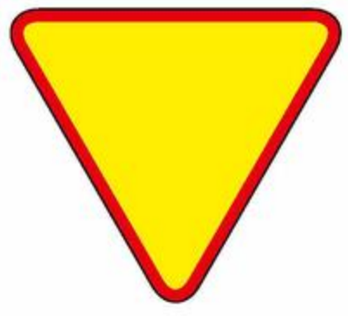


Zadania

1. Ile osi symetrii ma przedstawiony znak drogowy? Czy ma środek symetrii? Czy wiesz, co oznacza ten znak?

a) 

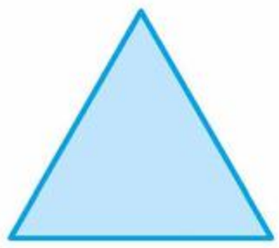
b) 

c) 

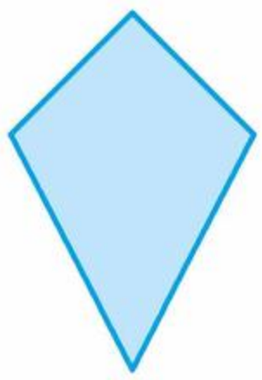
2. Które z przedstawionych figur mają osie symetrii (i ile), a które – środek symetrii?



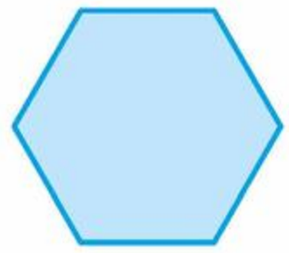
prostokąt



trójkąt równoboczny



deltoid



sześciokąt foremny

3. Ile osi symetrii ma:

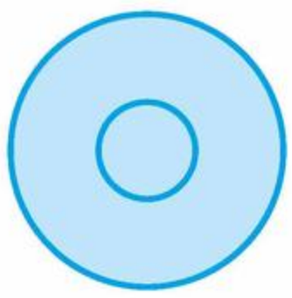
a) odcinek,
b) prosta,
c) półprosta,
d) trójkąt (rozważ różne trójkąty),
e) kwadrat,
f) koło?

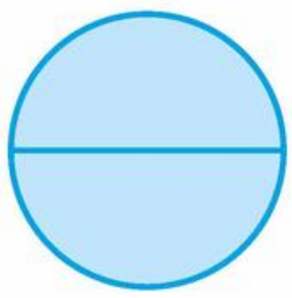
4. Narysuj figurę złożoną z trzech odcinków, tak aby miała n osi symetrii.

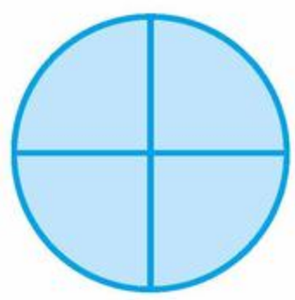
a) $n = 1$ **b)** $n = 2$ **c)** $n = 3$ **d)** $n = 6$

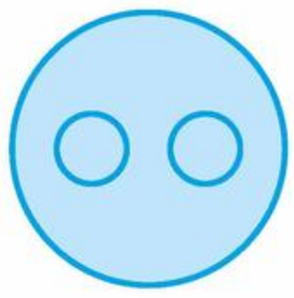
5. Ile środków symetrii może mieć figura złożona z trzech różnych prostych? Narysuj odpowiednie przykłady.

6. Czy rysunek przedstawiony poniżej ma środek symetrii?

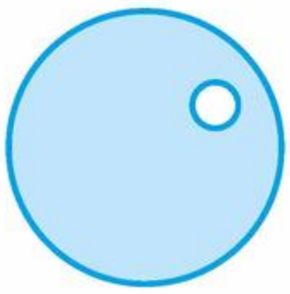
a) 

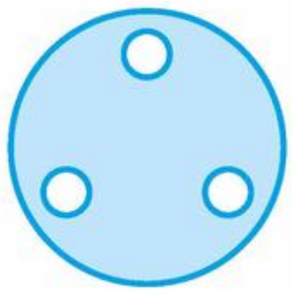
b) 

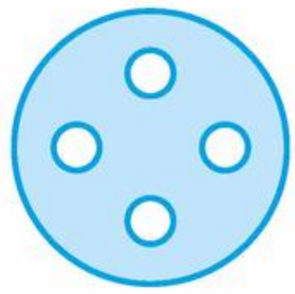
c) 

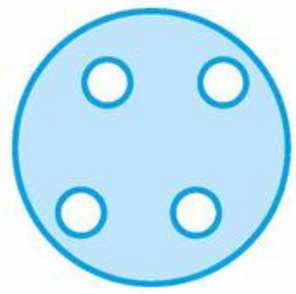
d) 

7. Ile osi symetrii ma przedstawiona figura? Czy ta figura ma środek symetrii?

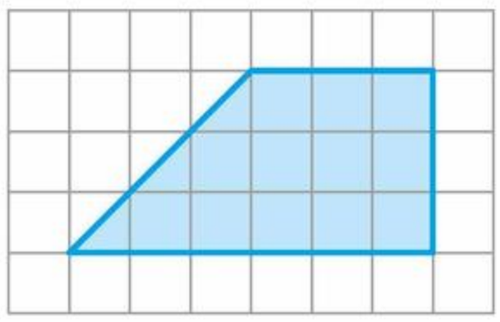
a) 

b) 

c) 

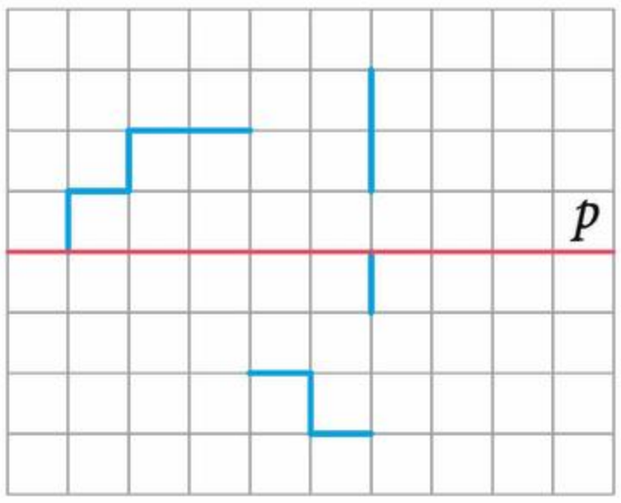
d) 

8. Przerysuj figurę do zeszytu i uzupełnij rysunek tak, aby powstała figura osiowosymetryczna. Narysuj jej oś symetrii. Wykonaj zadanie cztery razy, tak aby za każdym razem otrzymać inną figurę.

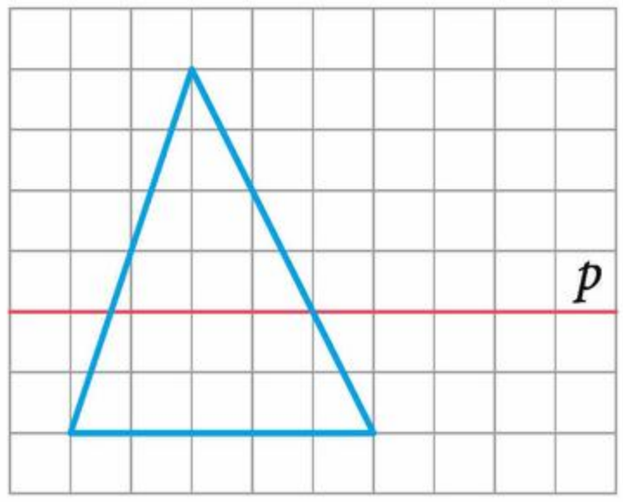


9. Przerysuj rysunek do zeszytu i uzupełnij go tak, aby prosta p była osią symetrii powstałej figury.

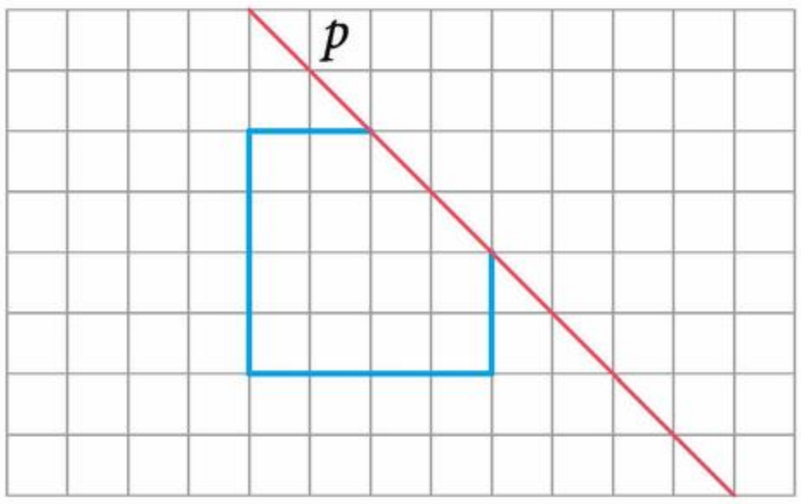
a)



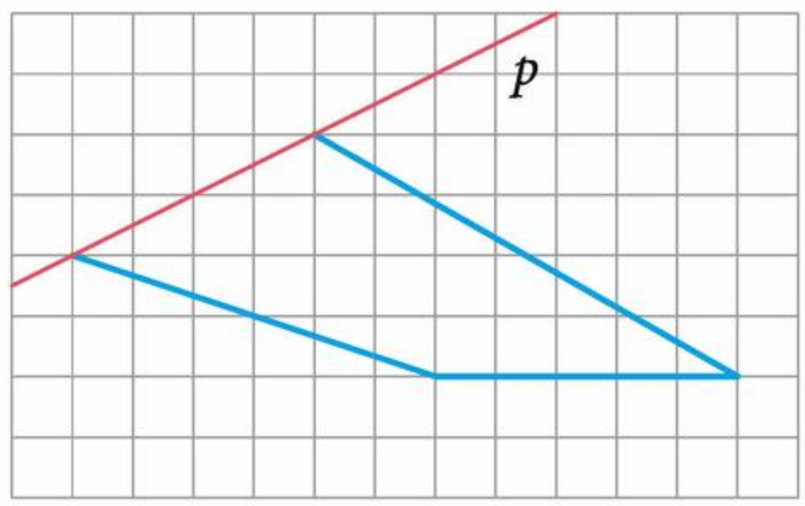
c)



b)

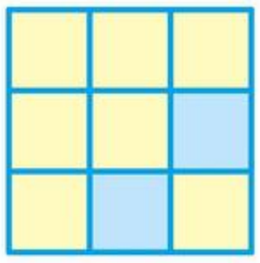


d)

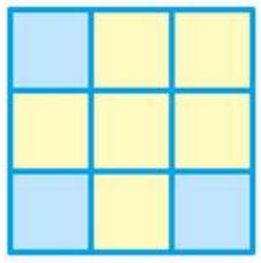


10. Przerysuj rysunek i zmień kolor dwóch kwadracików z żółtego na niebieski, tak aby uzyskać figurę środkowosymetryczną.

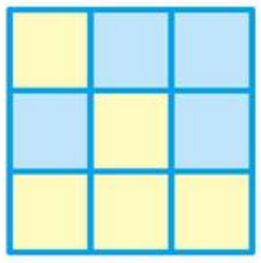
a)



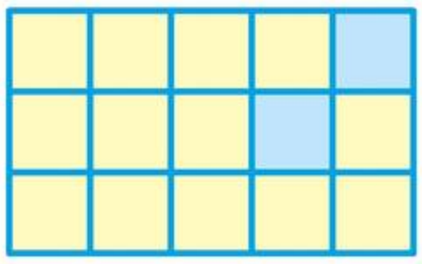
b)



c)



d)

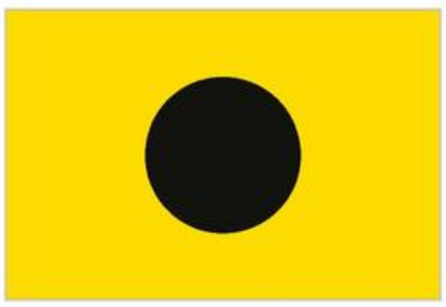


11. Narysuj w zeszycie trójkąt równoboczny ABC, a następnie uzupełnij swój rysunek tak, aby powstała figura środkowosymetryczna, której środkiem symetrii jest:

a) środek odcinka AB, **b)** punkt A, **c)** punkt przecięcia wysokości trójkąta.

12. Na rysunkach przedstawiono cztery flagi z Międzynarodowego Kodu Sygnałowego, stosowanego w żegludze do przekazywania informacji.

(1)



Zmieniam mój kurs w lewo.

(2)



Zatrzymałem mój statek i nie posuwam się po wodzie.

(3)



Trzymajcie się z dala ode mnie, manewruję z trudnością.

(4)



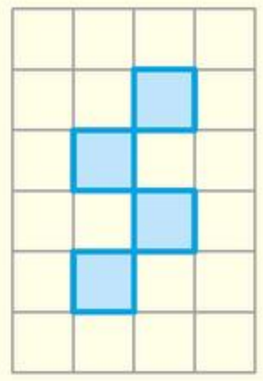
Mam nurka pod wodą; trzymajcie się z dala i idźcie powoli.

Czy podane zdania są prawdziwe?

I. Każda z flag (1) i (2) ma dokładnie dwie osie symetrii i środek symetrii.
II. Flaga (3) ma dokładnie jedną oś symetrii i środek symetrii.
III. Flaga (4) ma oś symetrii, ale nie ma środka symetrii.

Dla dociekliwych

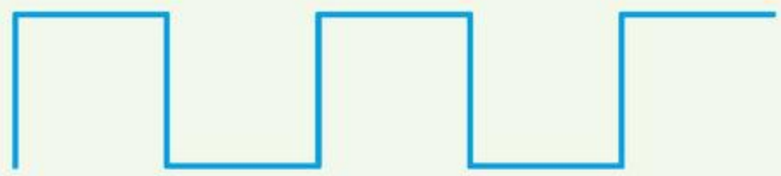
1. Figura składająca się z niebieskich kwadratów przedstawiona na rysunku obok ma środek symetrii, ale nie ma osi symetrii. Przerysuj ją do zeszytu, a następnie ustal, ile co najmniej kwadratów należy jeszcze zamalować, aby tak uzupełniona figura:



a) miała środek symetrii i dwie osie symetrii,
b) miała jedną oś symetrii, ale nie miała środka symetrii,
c) miała środek symetrii i cztery osie symetrii.

Czy już umiem?

I. Z 10 odcinków jednakowej długości zbudowano figurę taką, jak pokazano na rysunku. Który odcinek, licząc od lewej do prawej, należy usunąć, aby otrzymać figurę środkowosymetryczną?



A. pierwszy B. szósty C. siódmy D. dziesiąty

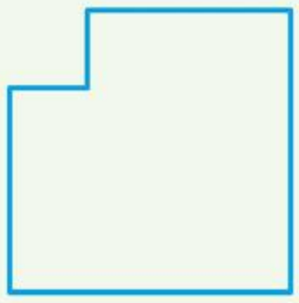
II. Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań. Zdecyduj, czy w miejsce ? wstawić literę P, oznaczającą zdanie prawdziwe, czy F – oznaczającą zdanie fałszywe.

I.	Każda figura, która ma środek symetrii, ma również oś symetrii.	?
II.	Każda figura, która ma oś symetrii, ma również środek symetrii.	?
III.	Każdy wielokąt ma oś symetrii lub środek symetrii.	?
IV.	Istnieje trapez, który ma oś symetrii.	?
V.	Istnieje trójkąt, który ma środek symetrii.	?

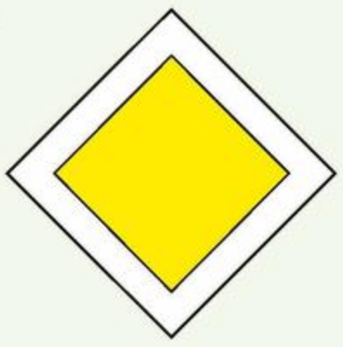
III. Ile osi symetrii ma poniższa figura? Czy ma środek symetrii?

a)

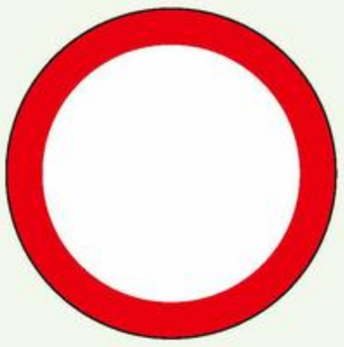

b)


c)


IV. Ile osi symetrii ma przedstawiony znak drogowy? Czy ma on środek symetrii?

a)


b)


c)


5 Symetralna odcinka i dwusieczna kąta

Na dobry początek

Oto fragment mapy Polski. Odszukaj na niej Warszawę i Wrocław.



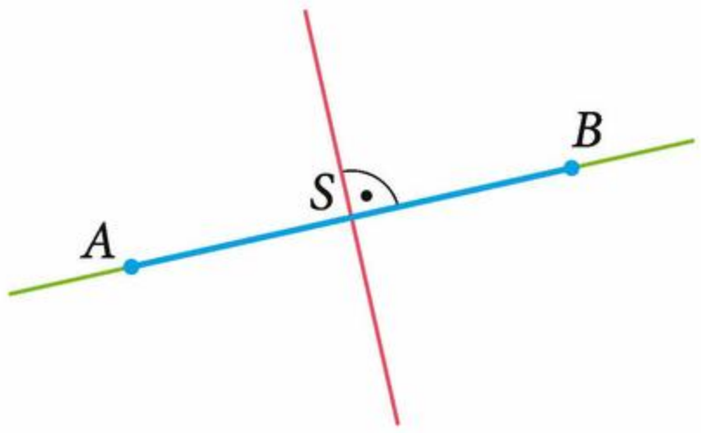


Pytania i polecenia

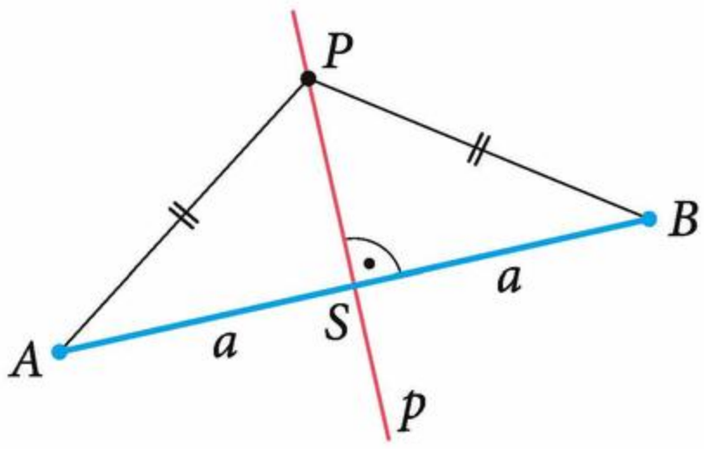
- Znajdź na mapie kilka miast, z których w linii prostej jest tak samo daleko do Warszawy jak do Wrocławia.
- Jak są położone te miasta na mapie? Przyłóż do mapy linijkę i oceń, czy można narysować prostą przechodzącą przez te miasta.
- Jak są położone na mapie miasta, z których do Warszawy jest w linii prostej bliżej niż do Wrocławia, a jak te, z których do Wrocławia jest bliżej niż do Warszawy?

Symetralna odcinka

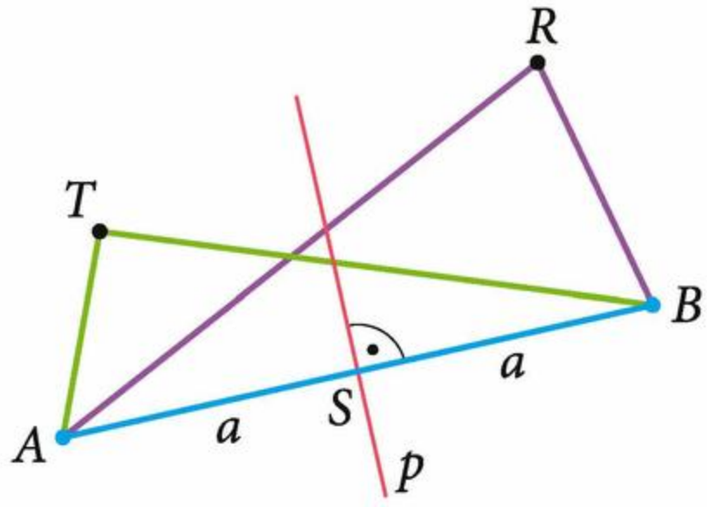
Czy odcinek ma oś symetrii? Tak, nawet dwie. Jedną z nich jest **prosta zawierająca ten odcinek**, a drugą – **prosta prostopadła do odcinka i przechodząca przez jego środek**.



Tę drugą prostą nazywamy **symetralną odcinka**. Ma ona ważne własności: dowolny punkt P symetralnej odcinka AB leży w jednakowej odległości od obu końców tego odcinka: $AP = BP$. Natomiast dla punktów poza symetralną taka równość nie zachodzi.



$AP = BP$



$AT \neq BT, \quad AR \neq BR$

Zapamiętaj

Definicja symetralnej

Symetralna odcinka to prosta prostopadła do tego odcinka i przechodząca przez jego środek.

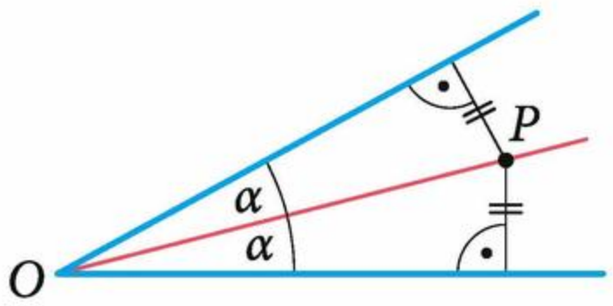
Twierdzenie – własności symetralnej

Jeśli punkt P leży na symetralnej odcinka AB, to jego odległości od punktów A i B są jednakowe ($AP = PB$).
I odwrotnie: jeśli odległości punktu P od punktów A i B są jednakowe, to P leży na symetralnej odcinka AB.

Zauważ, że druga z podanych własności oznacza też, że jeśli punkt P nie leży na symetralnej odcinka, to jego odległości od końców odcinka nie są równe (bo gdyby były równe, to punkt leżałby na symetralnej).

Dwusieczna kąta

Pojęcie dwusiecznej kąta, czyli półprostej dzielącej kąt na dwie równe części, znasz już z poprzednich działów. Warto zauważyć, że ma ona własności podobne do własności symetralnej.



Zapamiętaj

Definicja dwusiecznej

Dwusieczna kąta to półprosta o początku w wierzchołku kąta, dzieląca ten kąt na dwa równe kąty.

Twierdzenie – własności dwusiecznej

Jeżeli punkt P leży na dwusiecznej kąta mniejszego od $180°$, to jest jednakowo oddalony od ramion tego kąta.
I odwrotnie: jeśli punkt P położony wewnątrz kąta mniejszego od $180°$ jest jednakowo odległy od ramion kąta, to punkt P leży na dwusiecznej tego kąta.

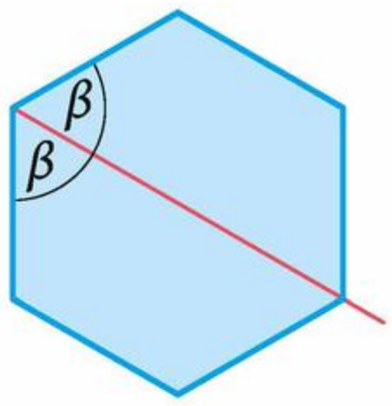
Zauważ, że druga z podanych własności oznacza też, że jeśli punkt P położony wewnątrz kąta nie leży na dwusiecznej kąta, to jego odległości od ramion kąta nie są równe (bo gdyby były równe, to punkt leżałby na dwusiecznej).

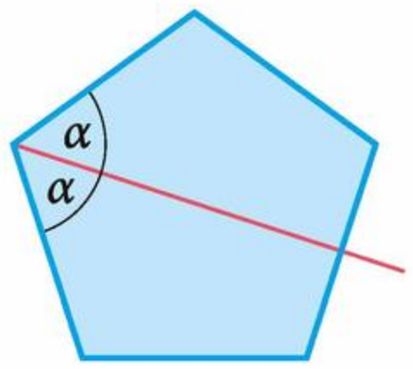
Przykład 1

W pewnym wielokącie foremnym dwusieczna każdego kąta zawiera pewną przekątną tego wielokąta. Co można powiedzieć o liczbie boków wielokąta?

W każdym wielokącie foremnym dwusieczna kąta zawiera się w osi symetrii tego wielokąta (patrz rysunek na s. 302), więc po każdej jej stronie leży tyle samo wierzchołków wielokąta. W sumie więc liczba wierzchołków po dwóch stronach dwusiecznej jest parzysta. Skoro zaś dwusieczna zawiera przekątną, to leżą na niej jeszcze dwa wierzchołki – końce tej przekątnej. Łączna liczba wierzchołków tego wielokąta jest więc parzysta, zatem liczba jego boków też jest parzysta.

I rzeczywiście, w kwadracie, sześciokącie foremnym itd. dwusieczna każdego kąta zawiera dwa wierzchołki, a więc i łączącą je przekątną. Natomiast w pięciokącie, siedmiokącie itd. nie przechodzi ona przez wierzchołek po przeciwnej stronie.





Ćwiczenie 1

W wielokącie foremnym dwusieczna każdego z kątów zawiera się w symetralnej pewnego boku tego wielokąta. Co można powiedzieć o liczbie kątów tego wielokąta?

Zadania

1. Zaznacz w zeszycie punkty A i B – będą one oznaczać oazy na pustyni. Za pomocą linijki i ekierki wyznacz obszar pustyni, z którego bliżej jest do oazy A niż do oazy B.

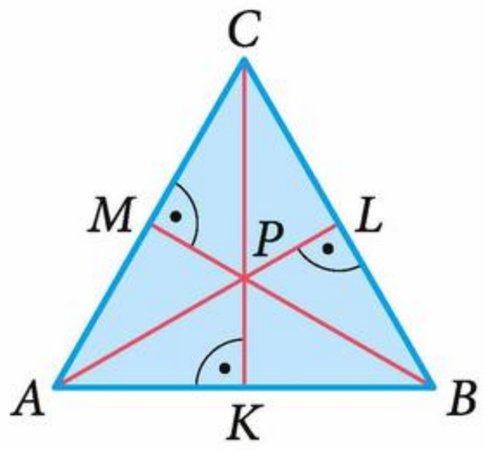
2. Narysuj kąt ostry ułożony w ten sposób, aby wyglądał jak litera V. Wyobraź sobie, że jest to mapa: wewnątrz kąta znajduje się półwysep, a na zewnątrz morze (podobnie jak na zdjęciu). Za pomocą kątomierza i linijki wyznacz tę część półwyspu, z której do wschodniego brzegu jest bliżej niż do zachodniego.



3. Narysuj trójkąt różnoboczny o bokach dłuższych niż 3 cm. Za pomocą linijki i ekierki narysuj symetralne jego boków. Sprawdź, czy przecinają się w jednym punkcie (powinny!).

4. Narysuj trójkąt różnoboczny o bokach dłuższych niż 3 cm. Za pomocą kątomierza i linijki narysuj dwusieczne jego kątów. Sprawdź, czy przecinają się w jednym punkcie (powinny!).

5. Na rysunku przedstawiono trójkąt równoboczny i jego wysokości. Wypisz dziewięć różnych kątów wraz z ich dwusiecznymi (np. dwusieczną kąta wypukłego LPK jest półprosta PB).

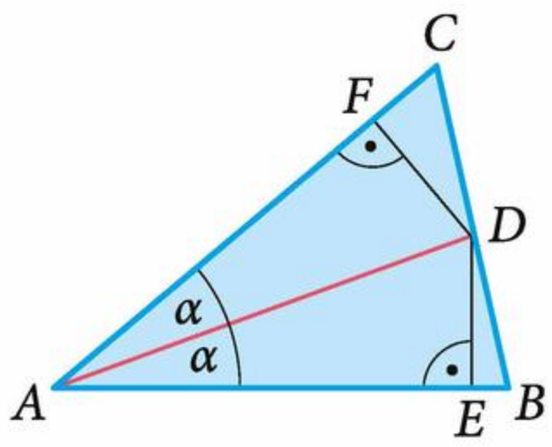


6. Uzasadnij, że <u>nie w każdym</u> trójkącie dwusieczna kąta dzieli przeciwległy bok na połowy.

Wskazówka. Zwróć uwagę, że wystarczy tutaj znaleźć jeden przykład trójkąta, w którym tak nie jest.

7. Czy symetralna boku trójkąta może przechodzić przez wierzchołek trójkąta? Jeśli tak – określ, w jakich trójkątach tak jest. Jeśli nie – uzasadnij dlaczego.

8. Jakim czworokątem jest czworokąt $AEDF$ pokazany na rysunku obok? Uzasadnij swoją odpowiedź, korzystając z informacji podanych na rysunku.

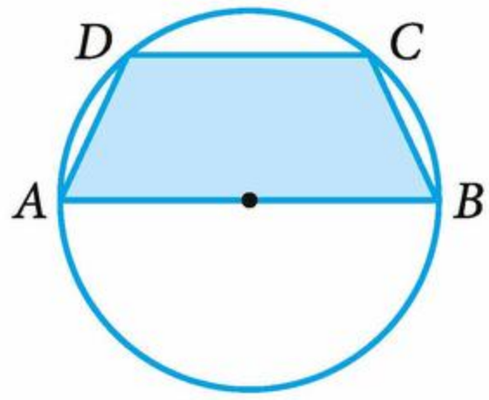


9. Narysuj w zeszycie dwie przecinające się proste. Następnie uzupełnij rysunek tak, aby przedstawiał trójkąt, w którym te proste są symetralnymi boków. Na ile sposobów możesz uzupełnić rysunek?

10. Narysuj przykładowy czworokąt $ABCD$, który nie jest deltoidem, choć jego przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta DAB.

Pamiętaj, że romb także jest deltoidem.

:D **11.** Wszystkie wierzchołki trapezu równoramiennego $ABCD$ leżą na tym samym okręgu (jak na rysunku). Podstawa AB jest średnicą tego okręgu. Udowodnij, że symetralne obu ramion trapezu przechodzą przez środek okręgu.



12. Czworokąt $ABCD$ jest rombem, kąt DAB jest ostry. Symetralne boków AB i BC przecinają się w wierzchołku D. Jakie kąty ma ten romb?

:D **13.** Udowodnij, że jeśli punkt P leży na symetralnej odcinka AB, to jego odległości od punktów A i B są jednakowe ($AP = PB$).

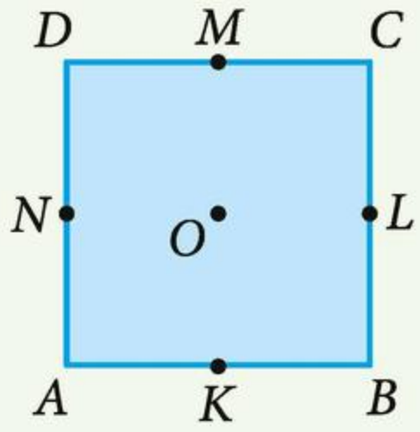
Dla dociekliwych

1. W trójkącie o kątach 30°, 60° i 90° narysowano symetralną przeciwprostokątnej. Podzieliła ona trójkąt na dwie części: trójkąt i czworokąt. Udowodnij, że ten czworokąt jest deltoidem.

Wskazówka. Skorzystaj z zależności między bokami trójkąta o kątach 30°, 60° i 90°.

Czy już umiem?

I. Na rysunku przedstawiono kwadrat $ABCD$, w którym zaznaczono środki boków i punkt przecięcia przekątnych.



a) Podaj nazwę prostej, która jest symetralną odcinka AC.
b) Podaj nazwę półprostej, która jest dwusieczną kąta NOK.
c) Półprosta OK jest dwusieczną pewnego kąta o ramionach przechodzących przez zaznaczone punkty. Co to za kąt? Czy jest tylko jedna poprawna odpowiedź?
d) Prosta DO jest symetralną trzech odcinków o wierzchołkach w zaznaczonych punktach. Jakie to odcinki?

II. Czy symetralne dwóch boków trójkąta mogą być prostopadłe? Jeśli tak – określ, w jakich trójkątach tak jest. Jeśli nie – uzasadnij dlaczego.

III. Czy dwusieczne dwóch kątów trójkąta mogą być prostopadłe? Jeśli tak – określ, w jakich trójkątach tak jest. Jeśli nie – uzasadnij dlaczego.

Powtórzenie VII

ZESTAW 1

1. Ile jest równy obwód koła o średnicy 6?

A. 3π **B.** 6π **C.** 9π **D.** 12π

2. Która z podanych liczb jest przybliżeniem długości okręgu o promieniu równym 6 dla $\pi \approx 3{,}14$?

A. 18,84 **B.** 28,26 **C.** 37,68 **D.** 113,04

3. Pole koła o średnicy 8 cm jest równe

A. 8π cm^2. **B.** 16π cm^2. **C.** 64π cm^2. **D.** 256π cm^2.

4. Promień koła o polu równym $0{,}25\pi$ cm^2 wynosi

A. 0,05 cm. **B.** 0,25 cm. **C.** 0,125 cm. **D.** 0,5 cm.

5. Oblicz promień okręgu o danej długości l.

a) $l = 13\pi$ cm **b)** $l = 0{,}3\pi$ cm

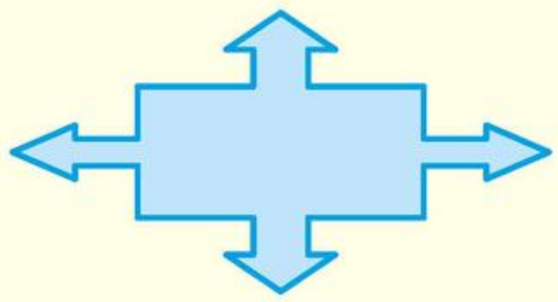
6. Oblicz średnicę koła o danym polu P.

a) $P = 36\pi$ cm^2 **b)** $P = \frac{4}{9}\pi$ cm^2

7. Oblicz pole pierścienia, którego promień wewnętrzny wynosi 4 cm, a zewnętrzny jest 5 razy większy. Podaj wartość dokładną oraz przybliżenie dla $\pi \approx 3{,}14$.

8. Figura przedstawiona obok ma dokładnie

A. 2 osie symetrii i środek symetrii.
B. 2 osie symetrii i nie ma środka symetrii.
C. 4 osie symetrii i środek symetrii.
D. 4 osie symetrii i nie ma środka symetrii.



9. Wskaż flagi, które są:

a) osiowosymetryczne, **b)** środkowosymetryczne.



Gujana



Honduras



Dania



Gruzja



Japonia



Trynidad i Tobago



Izrael



Kanada

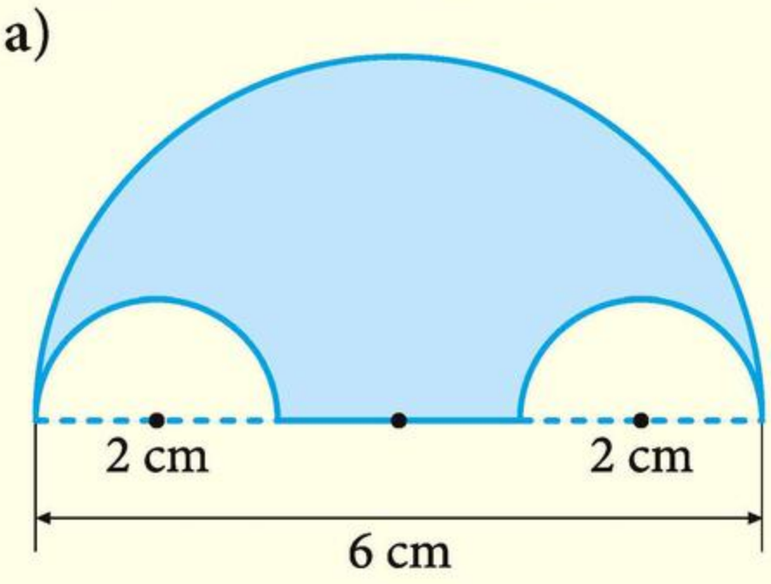
ZESTAW 2

1. Tarcza zegara słonecznego położonego nieopodal pomnika Jana Heweliusza w Gdańsku jest kołem o średnicy 1,5 m. Oblicz w przybliżeniu pole powierzchni tej tarczy. Przyjmij przybliżenie $\pi \approx 3{,}14$.

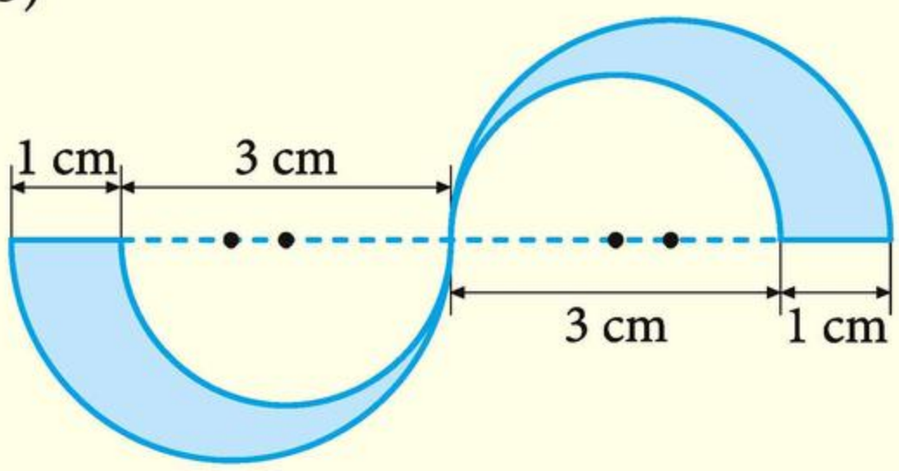


2. Oblicz obwód niebieskiej figury z dokładnością do 1 cm i jej pole z dokładnością do 1 cm^2. Przyjmij $\pi \approx 3{,}14$.

a)



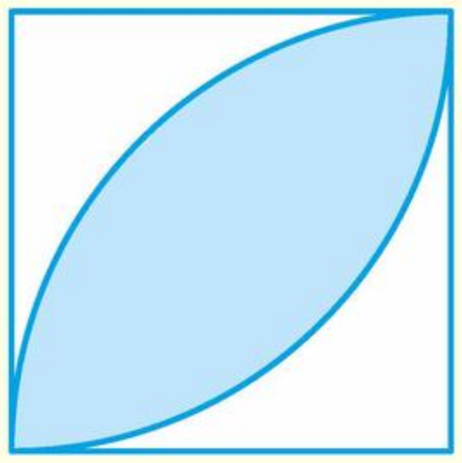
b)



3. **a)** Która z figur z poprzedniego zadania jest osiowosymetryczna? Ile osi symetrii ma ta figura?

b) Która z figur z poprzedniego zadania jest środkowosymetryczna?

4. Bok kwadratu na rysunku ma długość 6. Figura zamalowana na niebiesko jest ograniczona łukami okręgów o środkach w przeciwległych wierzchołkach kwadratu. Ile jest równe pole tej figury?



A. $36 - 18\pi$ **C.** $36 - 9\pi$

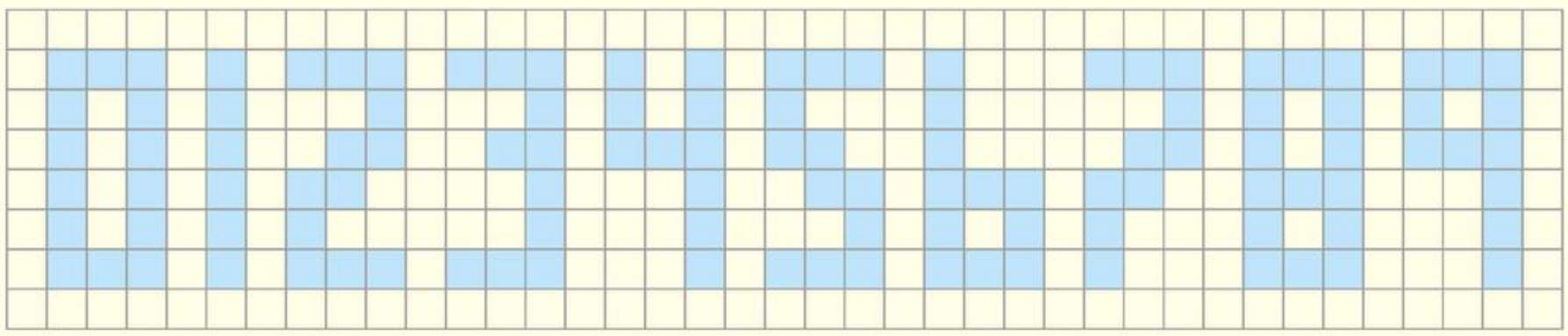
B. $18\pi - 36$ **D.** $18\pi - 72$

5. Na kartce w kratkę narysowano figury w kształcie cyfr jak na rysunku poniżej.

a) Które z tych figur mają środek symetrii?

b) Które z tych figur mają oś symetrii?

c) Podaj wszystkie liczby dwucyfrowe, których zapis za pomocą tych cyfr jest figurą środkowosymetryczną.



Zadania na temat…

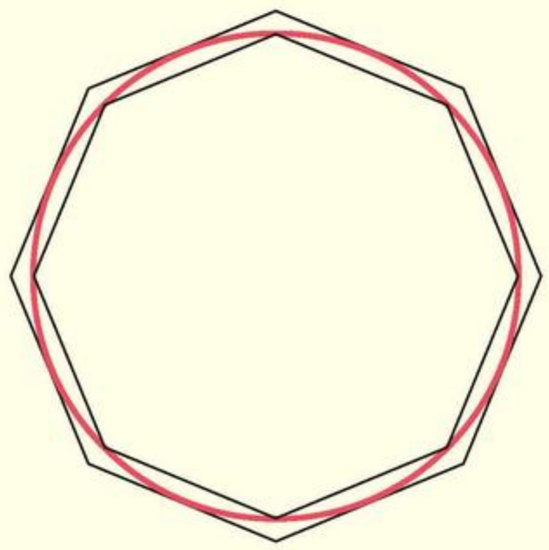
Liczba π

Długością okręgu i polem koła matematycy interesowali się już w starożytności. Na przykład w egipskim papirusie z ok. XVII w. p.n.e., zwanym papirusem Rhinda, czytamy, że pole koła równe jest polu kwadratu o boku równym $\frac{8}{9}$ średnicy tego koła. Z kolei w Biblii (1 Krl 7, 23) w opisie budowy świątyni króla Salomona czytamy:

„Następnie sporządził odlew morza[1] o średnicy dziesięciu łokci, okrągłego, o wysokości pięciu łokci i o obwodzie trzydziestu łokci".

Starożytni Grecy używali zwykle przybliżenia $\frac{22}{7}$, czyli $3\frac{1}{7}$. W III w. p.n.e. Archimedes stwierdził, że wartość π jest mniejsza od tej liczby, ale większa od $3\frac{10}{71}$. W jaki sposób doszedł do tego wniosku?

Popatrzmy na rysunek.



W ośmiokącie foremnym narysowano największy okrąg, jaki się mieści w tym wielokącie. W tym okręgu z kolei umieszczono mniejszy ośmiokąt foremny, którego wszystkie wierzchołki leżą na okręgu. Łatwo zauważyć, że długość okręgu jest większa niż obwód małego ośmiokąta, a mniejsza niż obwód dużego ośmiokąta. Im więcej boków ma wielokąt, tym lepsze przybliżenie otrzymamy. Archimedes wykonał obliczenia dla 96-kątów foremnych.

W 1610 roku holenderski matematyk Ludolf van Ceulen (czytaj: ludolf wan kelen) i jego żona Adriana wyznaczyli – metodą Archimedesa, ale dla wielokątów foremnych o liczbie boków większej niż 96 – przybliżoną wartość liczby π z dokładnością do 35 miejsc po przecinku. Dlatego właśnie liczbę π nazwano *ludolfiną*.

Jak obliczyć π za pomocą komputera?

Dzisiaj za pomocą komputerów możemy znajdować nawet tysiące cyfr po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby π. W jaki sposób są wykonywane te obliczenia? Udowodniono wiele wzorów, które opisują liczbę π. Oto jeden z nich, podany przez Gotfrieda Wilhelma Leibniza (czytaj: gotfrida wilhelma lajbnica) w 1673 roku, a więc wiele lat przed zbudowaniem komputerów:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Wielokropek oznacza, że aby uzyskać dokładną wartość, obliczenia musielibyśmy wykonywać w nieskończoność. Jeśli zatrzymamy się po skończonej liczbie działań, uzyskamy wynik przybliżony.

[1] Morze – wielki zbiornik wody w kształcie koła, umieszczony na dziedzińcu świątyni.

1. Jaką wartość liczby π można wyznaczyć z opisu zawartego w Biblii?

2. Podaj przybliżenie dziesiętne liczby $\frac{22}{7}$ z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. Zapisz obliczenia.

3. Spośród wielu przybliżeń liczby π warto wspomnieć łatwy do zapamiętania ułamek $\frac{355}{113}$. Zamień go na ułamek dziesiętny. Do którego miejsca po przecinku zgadza się on z rozwinięciem liczby π?

4. Podaj ułamki dziesiętne, które są przybliżeniami liczb $3\frac{1}{7}$ i $3\frac{10}{71}$. Narysuj oś liczbową i zaznacz przedział, w którym według Archimedesa znajduje się liczba π. Zaznacz przybliżone miejsce liczby π w tym przedziale.

5. Oblicz metodą opisaną w papirusie Rhinda pole koła o promieniu:

a) 1 cm, **b)** 3 cm, **c)** 12 cm.

Następnie oblicz przybliżoną wartość liczby π wynikającą z metody opisanej w tym papirusie. Przedstaw tę wartość w postaci ułamka dziesiętnego oraz ułamka zwykłego.

6. Trzy kolejne przybliżenia liczby $\frac{\pi}{4}$ według wzoru Leibniza to $1, 1-\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$. Zapisz dwa następne przybliżenia. Oblicz wartość ostatniego z nich. Podaj wynik w postaci ułamka dziesiętnego. Jakie przybliżenie liczby π wynika z tych obliczeń?

7. Utwórz arkusz kalkulacyjny pozwalający obliczać kolejne przybliżenia liczby $\frac{\pi}{4}$ i liczby π według wzoru Leibniza. Może on wyglądać tak jak poniżej. Jakie przybliżenie liczby π uzyskamy w setnym wierszu, a jakie w tysięcznym?

F13 f_x =F12+D13

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	1	1		1		1		4
3	3	−1		−0,33333333		0,66666667		2,66666667
4	5	1		0,2		0,86666667		3,46666667
5	7	−1		−0,14285714		0,72380952		2,8952381
6	9	1		0,11111111		0,83492063		3,33968254
7	11	−1		−0,09090909		0,74401154		2,97604618
8	13	1		0,07692308		0,82093462		3,28373848
9	15	−1		−0,06666667		0,75426795		3,01707182
10	17	1		0,05882353		0,81309148		3,25236593
11	19	−1		−0,05263158		0,7604599		3,04183962
12	21	1		0,04761905		0,80807895		3,23231581
13	23	−1		−0,04347826		0,76460069		3,05840277
14	25	1		0,04		0,80460069		3,21840277
15	27	−1		−0,03703704		0,76756365		3,07025462
16								
17								

kolejne liczby nieparzyste

kolejno: $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}$ itd.

kolejne przybliżenia $\frac{\pi}{4}$

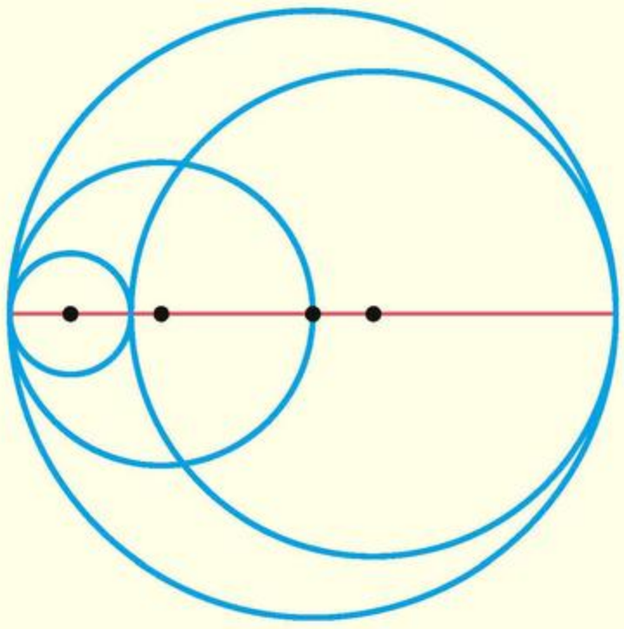
kolejne przybliżenia π

Zadania na deser

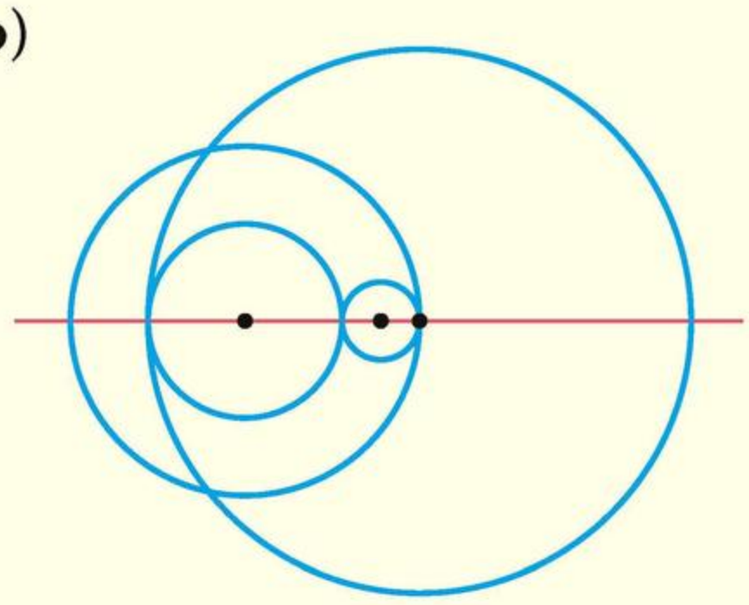
Dziwne figury

1. Najmniejszy okrąg na rysunku ma promień 2 cm, a drugi co do wielkości – promień 5 cm. Środki wszystkich okręgów zaznaczono kropkami. Oblicz promienie dwóch pozostałych okręgów.

a)

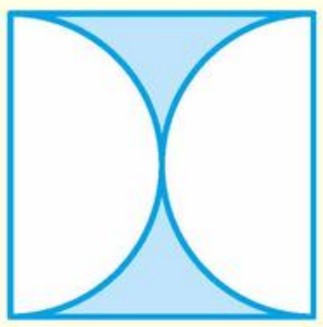


b)



2. W kwadracie o boku długości 4 cm narysowano łuki okręgów o środkach leżących na brzegu kwadratu. Oblicz pole obszaru zaznaczonego na niebiesko.

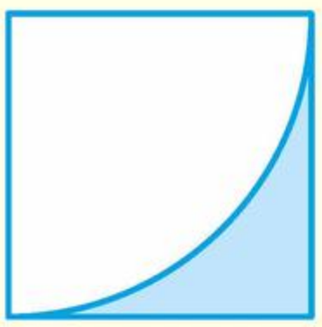
a)



b)



c)

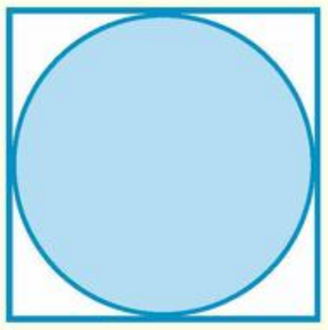


d)

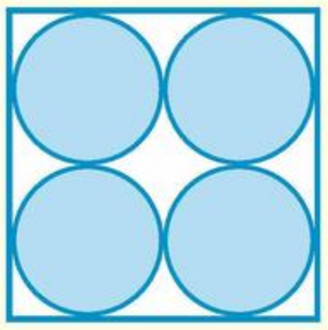


:D **3.** W czterech jednakowych kwadratach umieszczono koła w sposób pokazany na rysunkach. W którym kwadracie koła zajmują największą powierzchnię? Odpowiedź uzasadnij.

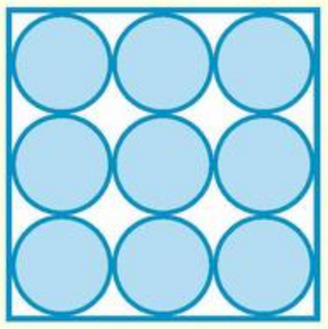
I.



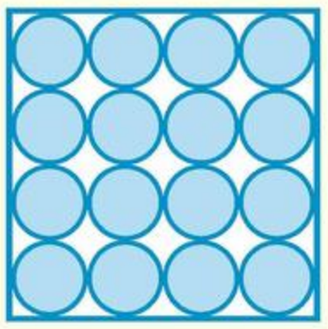
II.



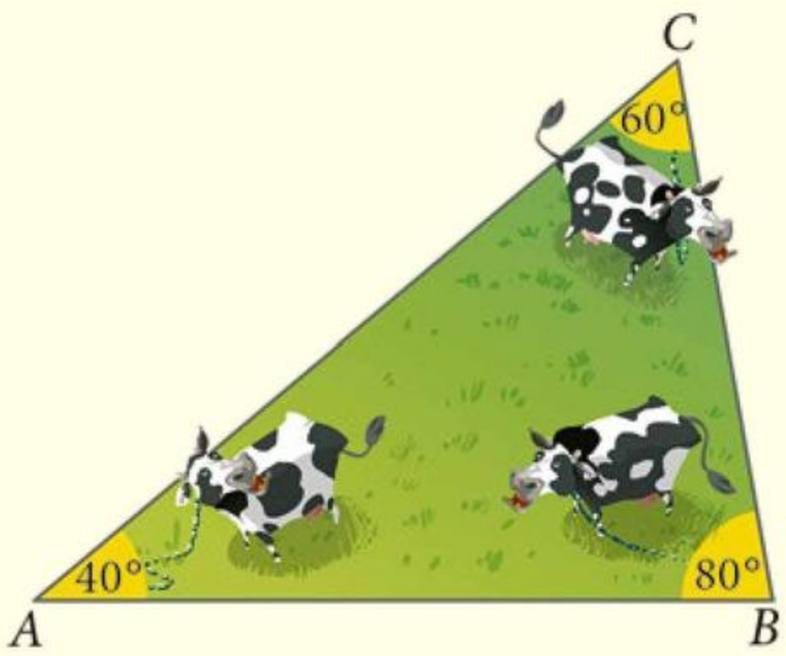
III.



IV.

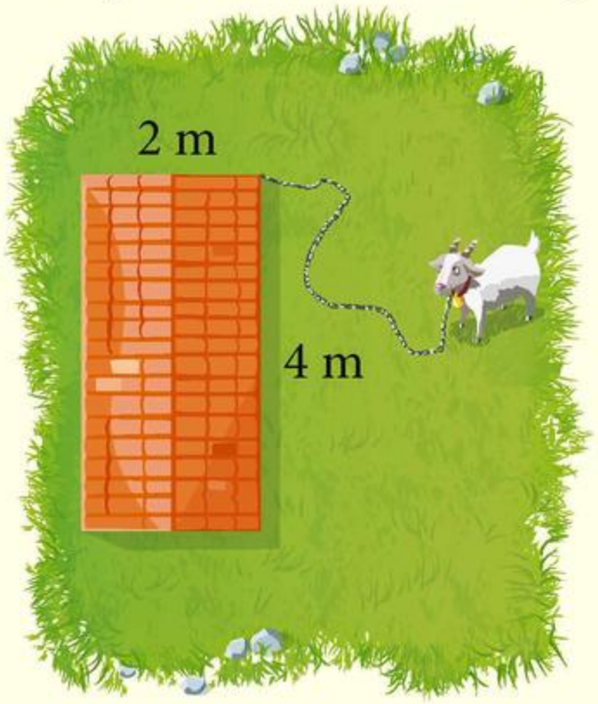


4. Na trójkątnej łące ogrodzonej płotem (jej kształt pokazano na rysunku) pasły się trzy krowy. Każda z nich była uwiązana w innym narożniku na łańcuchu innej długości: krowa w narożniku A miała łańcuch długości 7 m, krowa w narożniku B – łańcuch długości 5 m i krowa w narożniku C – łańcuch długości 6 m. Łąka była na tyle duża, że zwierzęta nie podgryzały sobie trawy. Która z krów mogła paść się na największej części łąki?

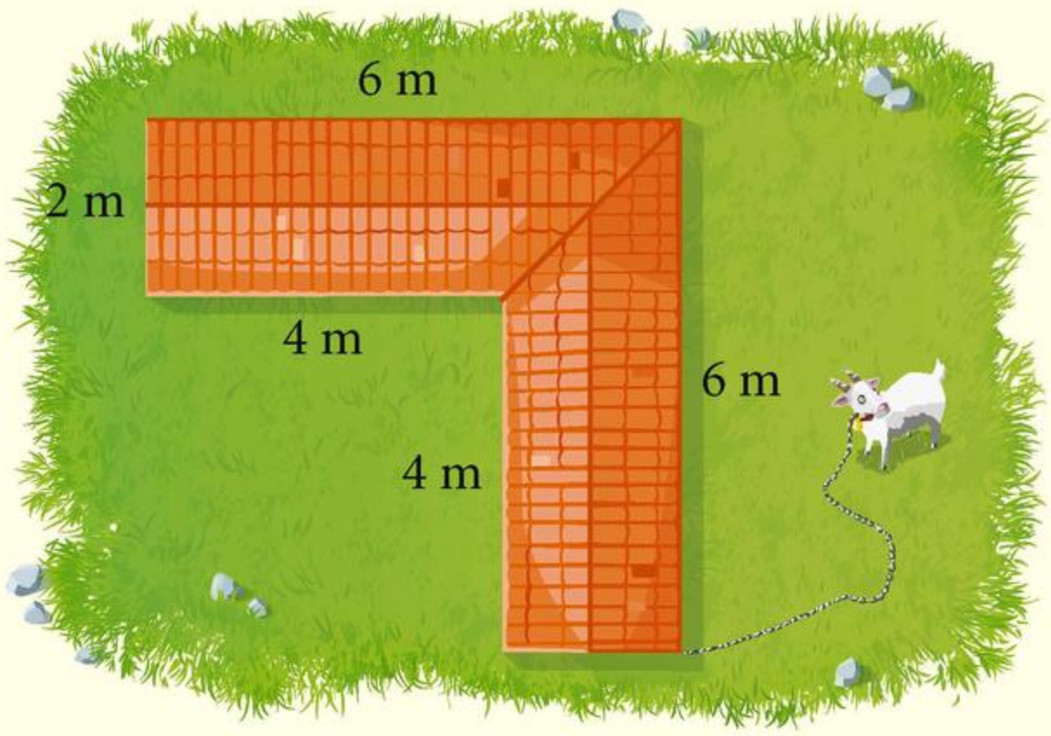


5. Koza pasie się na łące wokół budynku, uwiązana na łańcuchu o długości 6 m. Jaka jest powierzchnia, z której koza może jeść trawę? Oblicz przybliżony wynik dla $\pi \approx 3$. Odpowiedź podaj w arach. *Uwaga*. Na rysunku pokazano tylko fragment łąki – koza ma trawę wszędzie, dokąd sięgnie.

a)



b)



Ziemia i kosmos

Ziemia krąży wokół Słońca po orbicie zbliżonej kształtem do okręgu o promieniu 150 mln km. Pełny obieg Ziemi wokół Słońca trwa rok, czyli około 365 dni.

6. Oblicz prędkość Ziemi na jej orbicie. Odpowiedź podaj w $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ i w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

7. Na mapie rysujemy najmniejsze koła, w których mieszczą się państwa.

Polska
powierzchnia:
312,7 tys. km^2



Portugalia
powierzchnia:
92,2 tys. km^2



skala 1 : 16 000 000

a) Oblicz, jaki procent powierzchni takiego koła stanowi powierzchnia Polski. Następnie wykonaj analogiczne obliczenia dla Portugalii.

b) Znajdź na mapie Europy dwa kraje, dla których ten procent będzie bardzo mały.

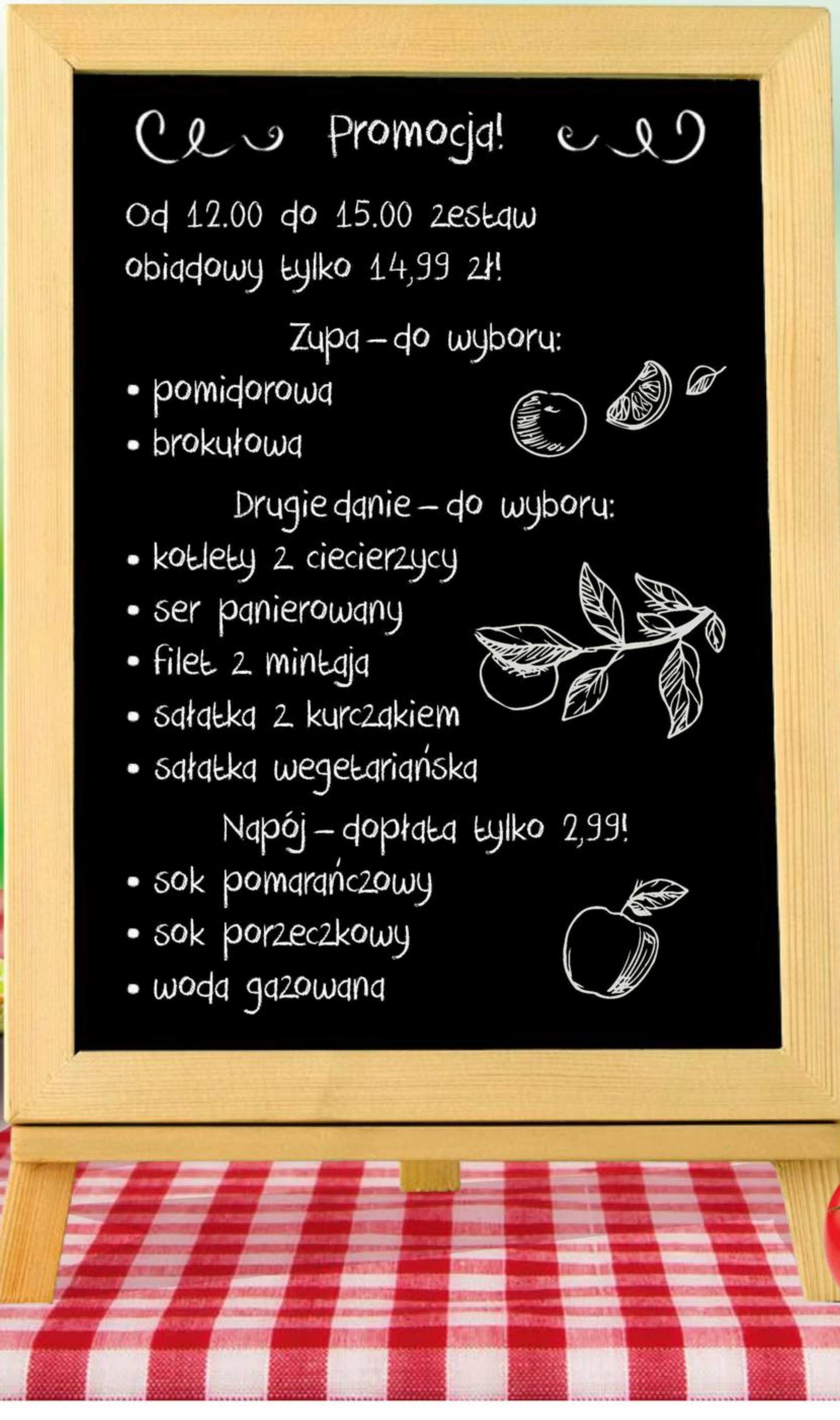
8. Do bardzo dokładnych obliczeń przy budowie statków kosmicznych NASA używa przybliżenia $\pi \approx 3{,}141592653589793$. O ile kilometrów różni się wynik obliczony w ten sposób od wyniku obliczonego za pomocą przybliżenia $\pi \approx 3{,}14$, gdy obliczamy długość orbity kołowej o promieniu 1 mld km? Nie korzystaj z kalkulatora.

1

Reguła mnożenia

Na dobry początek

Oto menu na obiad. Cena zestawu obejmuje zupę i drugie danie, za napój trzeba dodatkowo zapłacić.



Pytania i polecenia

- Na ile sposobów możemy wybrać zestaw złożony z zupy i drugiego dania?
- Ile razy więcej możliwości mamy, jeśli chcemy zamówić także napój?

Co to jest kombinatoryka?

W wielu sytuacjach zastanawiamy się, ile jest różnych możliwości do wyboru, różnych kombinacji, różnych sposobów ustawienia osób lub przedmiotów po kolei itd. Dział matematyki zajmujący się takimi zagadnieniami nazywa się **kombinatoryką**. Oto przykłady problemów, które rozwiązuje kombinatoryka.

Wojtek zapomniał trzycyfrowego kodu do swojej szafki. Pamięta tylko, że każda cyfra była inna. Zastanawia się, ile możliwości ma do wypróbowania.

Numery telefonów komórkowych w Polsce są dziewięciocyfrowe. Numer może zacząć się od cyfr: 45, 50, 51, 53, 57, 60, 66, 69, 72, 73, 78, 79, 88. Urząd Komunikacji Elektronicznej musi wiedzieć, przy jakiej liczbie telefonów zabraknie numerów.

Może się wydawać, że łatwo jest wygrać w dowolnej grze liczbowej – wystarczy skreślić wszystkie możliwe kombinacje liczb. Trzeba się jednak zastanowić, ile jest tych kombinacji i ile by w sumie kosztowały kupony z tymi kombinacjami.







Reguła mnożenia

Przykład 1

W barze możemy wybrać:
• jeden z czterech rodzajów pierogów: ruskie, z mięsem, z kapustą lub z kaszą,
przy czym pierogi mogą być:
• z cebulką, ze skwarkami lub bez dodatków.
Na ile sposobów można zamówić pierogi?

Wszystkich wariantów jest na tyle mało, że można je wypisać. Najlepiej zrobić to w sposób uporządkowany, aby mieć pewność, że nie pominęliśmy żadnej możliwości.

ruskie z cebulką	ruskie ze skwarkami	ruskie bez dodatków
z mięsem z cebulką	z mięsem ze skwarkami	z mięsem bez dodatków
z kapustą z cebulką	z kapustą ze skwarkami	z kapustą bez dodatków
z kaszą z cebulką	z kaszą ze skwarkami	z kaszą bez dodatków

Odp. Wszystkich możliwości jest 12.

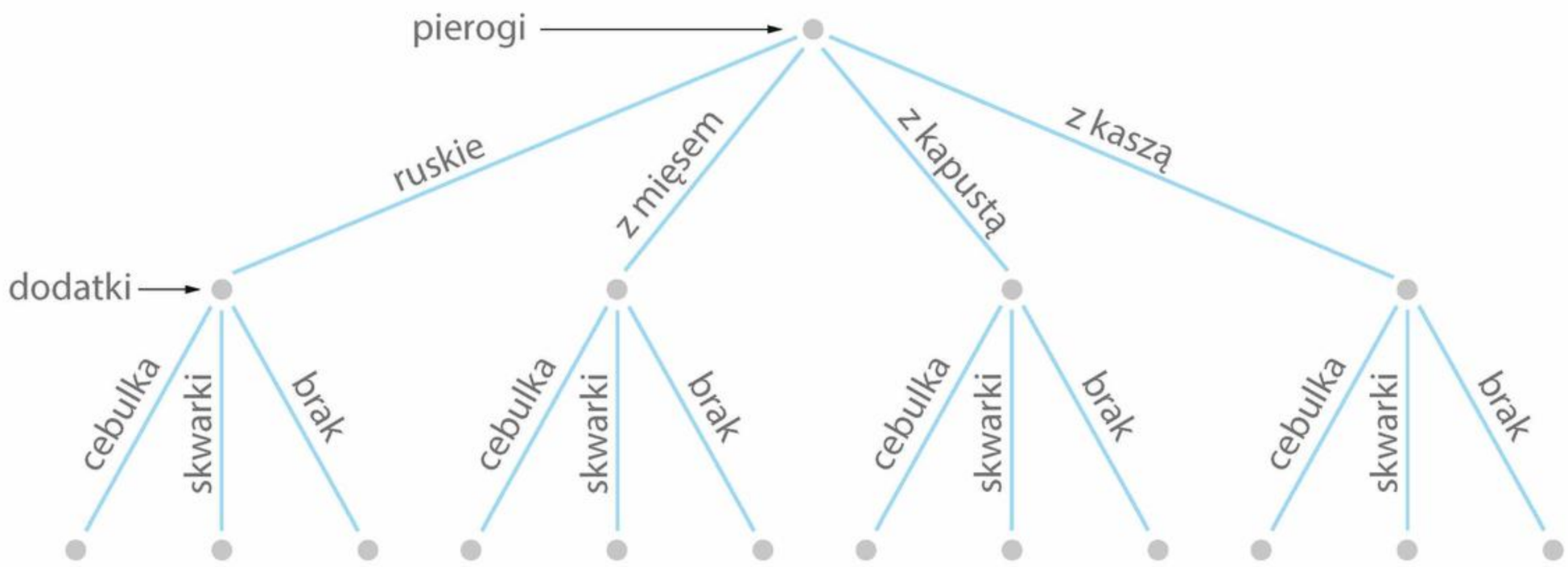
Ćwiczenie 1

Ile byłoby możliwości wyboru, gdyby w barze opisanym w przykładzie 1 był jeszcze jeden rodzaj pierogów: z grzybami?

Do wyniku liczbowego otrzymanego w przykładzie 1 można także dojść bez wypisywania wszystkich możliwości: dla każdego z czterech rodzajów pierogów są trzy możliwości wyboru dodatków, więc wszystkich możliwości jest $4 \cdot 3 = 12$.

Oddaje to także graficzny układ tabeli w przykładzie: są 3 kolumny po 4 wiersze.

Analizowaną sytuację można też przedstawić w postaci „drzewka”:



Zapamiętaj

Reguła mnożenia

Jeśli wybieramy jedną z n możliwości, a następnie jedną z m możliwości, to wszystkich możliwości wyboru jest $n \cdot m$.

Podobnie postępujemy, gdy musimy podjąć więcej decyzji.

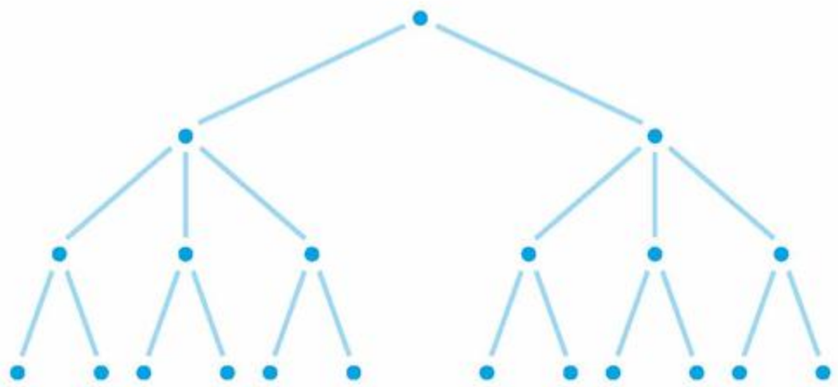
Przykład 2

Janek kupił karnet na maraton filmowy. O godz. 17.00 może obejrzeć jeden z dwóch westernów, o 19.00 – jedną z trzech komedii, a o 21.00 – jeden z dwóch kryminałów. Na ile sposobów może wybrać zestaw filmów?

Wybór westernu: 2 możliwości.

Wybór komedii: 3 możliwości.

Wybór kryminału: 2 możliwości.



$2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ ← tyle jest wszystkich możliwości

Odp. Janek może wybrać zestaw filmów na 12 sposobów.

Ćwiczenie 2

Jaka byłaby liczba możliwości, gdyby Janek miał jeszcze do wyboru 4 filmy fantastyczne o godz. 15.00?

Przykład 3

Kod PIN do karty bankowej składa się z czterech cyfr, które mogą się powtarzać. Na ile sposobów można wybrać taki kod?

Pierwsza cyfra: 10 możliwości.
Druga cyfra: 10 możliwości.
Trzecia cyfra: 10 możliwości.
Czwarta cyfra: 10 możliwości.



Razem:
$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$ możliwości.

Zauważ, że wybór kodu przedstawiliśmy jako wybór jego **kolejnych** cyfr.

Dobra rada

*W zadaniach z kombinatoryki warto wyobrazić sobie, jakich **kolejnych** wyborów trzeba dokonać. Dzięki temu nawet trudny problem rozłożysz na kilka łatwych kroków.*

Ćwiczenie 3

Ile czteroliterowych napisów można ułożyć z liter A, B, C?

Zadania

1. Leon ma w szafie trzy pary spodni i pięć koszulek. Na ile sposobów może się ubrać?

2. Kasia zastanawia się, jak miło spędzić popołudnie. Może wybrać się do kina, do teatru albo na spacer. Może tam pójść sama, z Wojtkiem, z Anią lub z obojgiem przyjaciół. Ile ma możliwości wyboru?

3. W pewnej grze planszowej gracz musi wywnioskować, kto ukrył skarb, jaki skarb i gdzie. Do wyboru jest pięć osób, pięć rodzajów skarbu i pięć miejsc. Ile jest wszystkich możliwości?

4. Walizka jest zamykana na zamek szyfrowy. Każde z pięciu kółek można nastawić na jedną z następujących liter: A, B, C, D, E, F, G, H.



a) Ile jest możliwych ustawień?
b) Ile trwałoby wypróbowanie wszystkich kombinacji, gdyby na każdą poświęcić tylko sekundę?

5. Pewnego dnia w Teatrze Niespodzianym premiera nie mogła się zacząć punktualnie, bo spóźniał się jeden z aktorów. Dyrektor teatru postanowił, że wypełni czas powitaniem gości. Wykorzystał do tego przygotowaną wcześniej tabelę (przedstawioną niżej). Dobierając po jednej frazie z każdej kolumny, mógł zbudować bardzo wiele różnych zdań (np. „Mili Goście, mam zaszczyt powitać Państwa na niezwykłej sztuce w reżyserii Witalisa Niepokulczyckiego").

a) Ile różnych zdań można w ten sposób zbudować?

b) Oszacuj, ile czasu zajęłoby wygłoszenie ich wszystkich. Przyjmij, że dyrektor wypowiada średnio 6 zdań na minutę.

Szanowni	Państwo,	jest mi niezmiernie miło	zapowiedzieć jedno z najciekawszych przedstawień	na deskach naszego teatru.
Drodzy	Goście,	cieszę się, że mogę	powitać Państwa na niezwykłej sztuce	w Teatrze Niespodzianym.
Mili	Widzowie,	mam niewątpliwą przyjemność	oglądać wspólnie z Państwem premierę sztuki	autorstwa Grzymisława Toporowskiego.
		mam zaszczyt	gościć Państwa na spektaklu	w reżyserii Witalisa Niepokulczyckiego.
				pod tytułem „Jasne jak noc".

Czy wiesz, że…

W polskim alfabecie są 32 litery. Sensownych czteroliterowych wyrazów (włączając w to różne formy gramatyczne, jak „grał" albo „parę") jest w języku polskim około 4900. Sensownych wyrazów pięcioliterowych jest około 16 000.

6. Przeczytaj tekst z ramki „Czy wiesz, że..." i odpowiedz na pytanie.

a) Ile jest możliwych czteroliterowych „słów" (niekoniecznie sensownych) złożonych z liter polskiego alfabetu?

b) Ile jest możliwych „słów" pięcioliterowych?

c) Jaki procent wszystkich czteroliterowych „słów" stanowią sensowne wyrazy?

d) A jak jest w przypadku „słów" pięcioliterowych?

7. W internecie są programy wyszukujące wszystkie słowa spełniające zadany warunek, np. Scrabix. Takie programy pomagają grającym w Scrabble i osobom rozwiązującym krzyżówki. Korzystając z programu oraz z kalkulatora, odpowiedz na pytania analogiczne do tych z poprzedniego zadania, ale dla „słów" sześcio-, siedmioliterowych itd. Czy zauważasz jakąś prawidłowość?

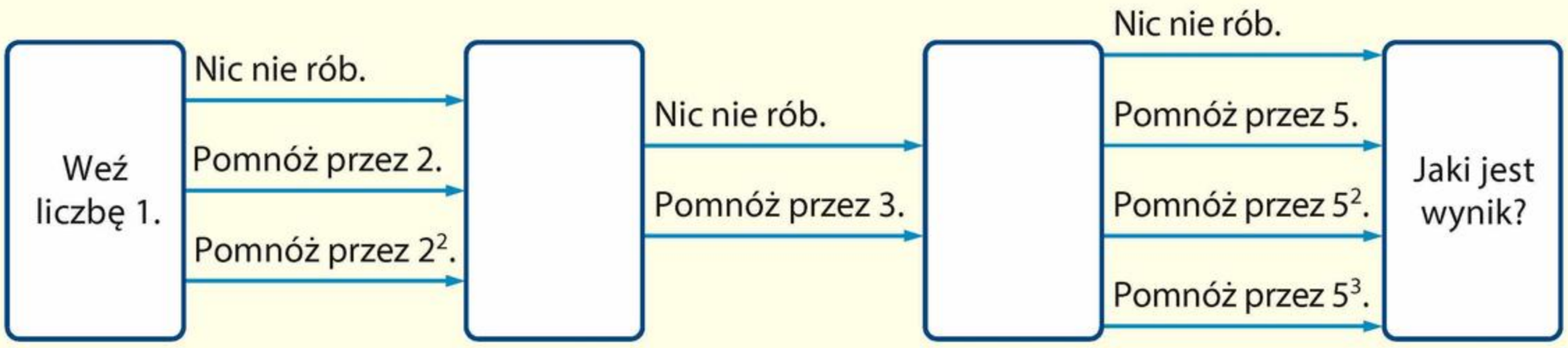
8. Do sali, w której jest 200 miejsc, przyszły tylko cztery osoby. Na ile sposobów mogą usiąść? Ważne jest nie tylko, które miejsca są zajęte, lecz także kto siedzi na którym miejscu.

Dla dociekliwych

1. Cztery wyspy są połączone mostami jak na rysunku. Ile jest możliwych dróg z Wyspy Ananasów na Wyspę Daktyli, jeśli podczas jednej podróży każdą z pozostałych wysp odwiedzamy tylko raz?



2. Jaką największą, a jaką najmniejszą liczbę można otrzymać, korzystając z przedstawionego poniżej diagramu?



3. Uzasadnij, że wybierając odpowiednią drogę w diagramie do zadania 2, możemy otrzymać dowolny dzielnik liczby $2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 = 1500$.

4. Ile dzielników ma liczba 1500? A ile liczba 4900?

5. Ile wspólnych dzielników mają liczby 1500 i 4900?

Czy już umiem?

I. W klasie jest 12 dziewcząt i 10 chłopców. Na uroczystości klasę mają reprezentować jeden chłopiec i jedna dziewczyna. Na ile sposobów można wybrać taką delegację?

II. Deser składa się z kulki lodów (do wyboru: śmietankowych, czekoladowych lub malinowych), bitej śmietany oraz polewy (do wyboru: czekoladowej, owocowej lub toffi). Ile różnych deserów można przygotować?

III. Dyrektor szkoły podstawowej chce pokazać nauczycielom z innej miejscowości jedną lekcję w swojej szkole. Zastanawia się, jaki przedmiot wybrać: język polski, matematykę czy język angielski, oraz którą klasę zaprezentować (na każdym poziomie od 4 do 8 jest pięć klas – od A do E). Ile ma możliwości wyboru?

2 Zastosowania reguły mnożenia

Na dobry początek

Wyjeżdżamy na dwutygodniowy obóz w Góry Świętokrzyskie. Przygotowano dla nas moc atrakcji – w tym tygodniowe zajęcia tematyczne.



Pytania i polecenia

- Na każdy tydzień obozu zapisujemy się do jednej z sześciu grup wymienionych powyżej. Grupa grupie nierówna, więc kolejność zajęć ma dla nas znaczenie – najpierw rowery, potem obserwowanie ptaków, a może odwrotnie. Na ile sposobów możemy się zapisać na zajęcia, jeżeli:
  a) nie możemy przez dwa tygodnie uczestniczyć w tych samych zajęciach,
  b) możemy dwa razy zapisać się na to samo?

Pomnożyć czy dodać?

Przykład 1

W barze jest 7 rodzajów sałatek i 5 napojów. Na ile sposobów możesz wybrać:
a) zestaw złożony z sałatki i napoju, **b)** jeden produkt z oferty baru?

a) Najpierw wybieramy sałatkę – mamy 7 możliwości. Potem wybieramy napój – mamy 5 możliwości. Zgodnie z regułą mnożenia mamy łącznie $7 \cdot 5 = 35$ możliwości.
b) Wszystkich produktów w ofercie jest $7 + 5 = 12$, więc mamy 12 możliwości.

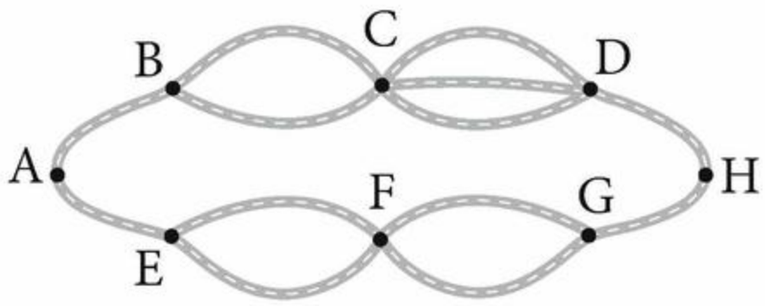
Jak widzisz, regułę mnożenia stosujemy wtedy, gdy musimy dokonać dwóch (lub więcej) **kolejnych** wyborów. Jeśli natomiast wybieramy **albo** z jednego zbioru, **albo** z drugiego, to możliwości po prostu musimy dodać.

Ćwiczenie 1

Maciek planuje kupić prezent dla Wojtka. Zna 7 tytułów książek, które Wojtek chciałby przeczytać, i 5 tytułów płyt, które chciałby mieć. Na ile sposobów Maciek może wybrać prezent, jeśli postanowi kupić:
a) książkę lub płytę, **b)** książkę i płytę?

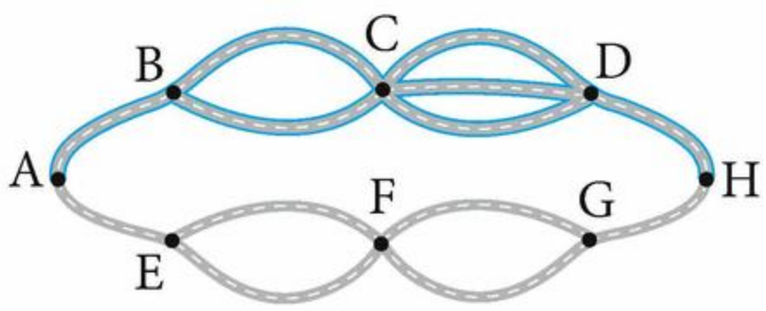
Przykład 2

Na schematycznej mapie przedstawiono różne drogi, którymi można jechać z miejscowości A do miejscowości H. Ile jest możliwych dróg?

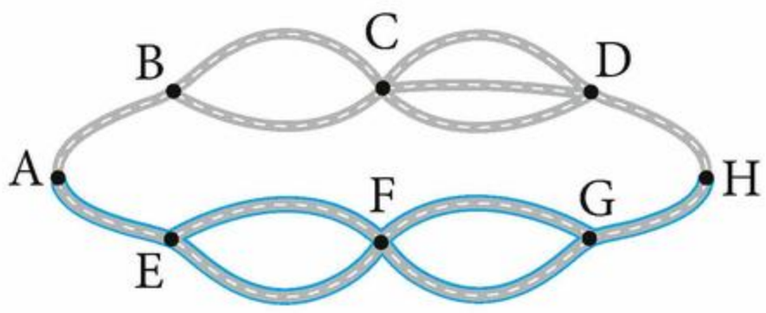


Aby dojechać z A do H, możemy pojechać najpierw do B albo do E. W zależności od tego, którą z tych miejscowości wybierzemy, znajdziemy się w innej sytuacji. Dlatego musimy te możliwości rozpatrywać oddzielnie. Jednak w każdym z tych dwóch przypadków możemy już zastosować regułę mnożenia.

Z A do H przez B jest $2 \cdot 3 = 6$ dróg.



Z A do H przez E są $2 \cdot 2 = 4$ drogi.



Jadąc z A do H, jedziemy **albo** przez B, **albo** przez E, więc w sumie mamy:
$6 + 4 = 10$ możliwych dróg.

Ćwiczenie 2

Hania chce kupić albo owoc i sok, albo sałatkę. Sałatek do wyboru jest 5, owoce są 4, soków jest 6. Ile łącznie możliwości ma Hania?

Ile jest par?

Przykład 3.1

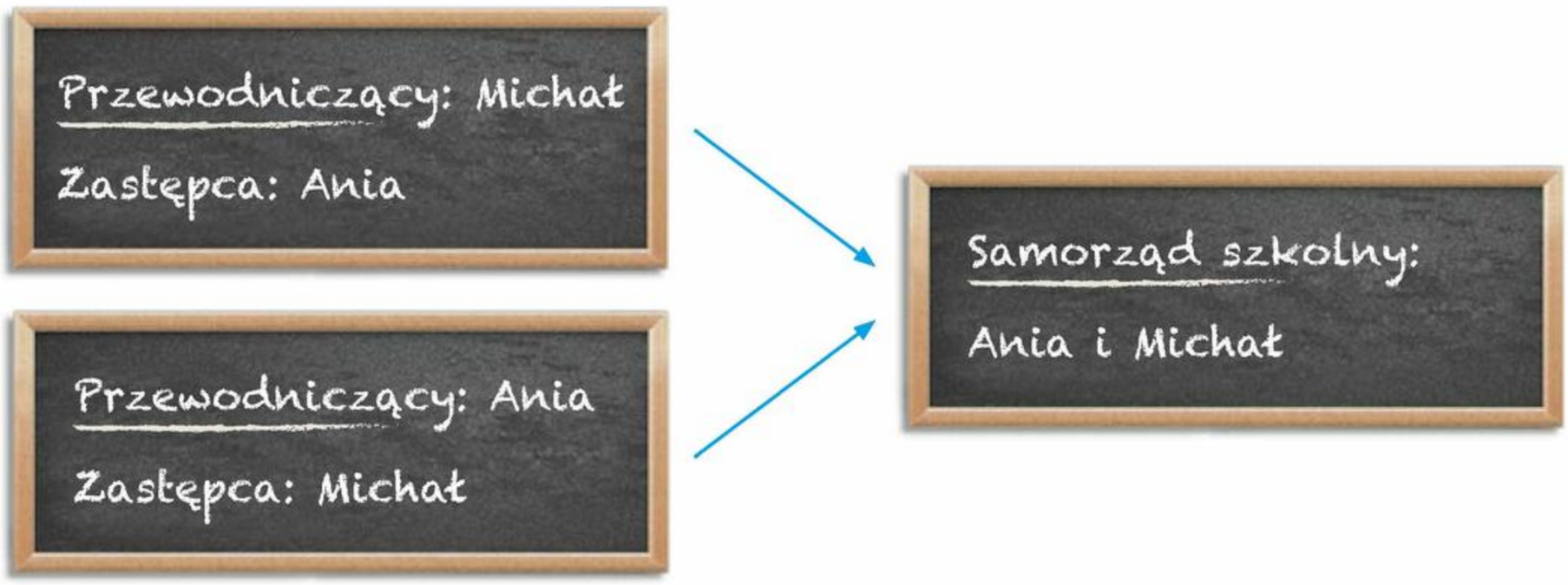
W klasie jest 20 osób. Uczniowie wybierają przewodniczącego samorządu i jego zastępcę. Ile jest możliwych wyników głosowania?

Nawet jeśli wybory na obie funkcje odbywają się równocześnie, to obliczenia będą łatwiejsze, kiedy wyobrazimy sobie, że wybieramy po kolei: najpierw przewodniczącego, potem zastępcę. Jest 20 możliwości wyboru przewodniczącego. Gdy go wybierzemy, pozostało tylko 19 osób, spośród których wybieramy zastępcę. Łącznie jest więc $20 \cdot 19 = 380$ możliwości.

Przykład 3.2

W klasie jest 20 osób. Uczniowie wybierają dwie osoby do samorządu szkolnego. Ile jest możliwych wyników głosowania?

W przykładzie 3.1 również wybieraliśmy 2 osoby z 20, jednak tam było istotne, czy Ania jest przewodniczącą, a Michał zastępcą, czy też na odwrót. Obecnie nie ma znaczenia, czy wybierzemy Anię i Michała, czy Michała i Anię. Oznacza to, że liczba możliwości jest teraz dwukrotnie mniejsza.



Zatem możliwości wyboru jest $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$.

Ćwiczenie 3

Na ile sposobów możemy wybrać dwie kulki lodów o różnych smakach, jeśli wszystkich smaków jest 7?

Ile jest liczb?

Przykład 4

Ile jest trzycyfrowych liczb naturalnych?

Sposób I

Liczby trzycyfrowe to liczby od 100 do 999.

$$\underbrace{1, 2, 3, \ldots, 98, 99}_{99 \text{ liczb}}, \underbrace{100, 101, \ldots, 999}_{999 - 99 = 900 \text{ liczb}}$$

999 liczb

Jeśli spośród **999 liczb** od 1 do 999 usuniemy **99 liczb** od 1 do 99, zostanie nam **900** liczb. A więc liczb trzycyfrowych jest 900.

Sposób II

Wybieramy po kolei cyfry. Pierwszą (cyfrę setek) możemy wybrać na 9 sposobów (0 nie może stać na początku), drugą (cyfrę dziesiątek) na 10 sposobów, trzecią (cyfrę jedności) także na 10 sposobów. Razem jest $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ liczb trzycyfrowych.

Ćwiczenie 4

Ile jest pięciocyfrowych liczb naturalnych?

Przykład 4 można było rozwiązać na dwa sposoby. Jednak w wielu zadaniach skorzystanie z reguły mnożenia jest jedyną prostą metodą.

Przykład 5

Ile jest trzycyfrowych liczb naturalnych o różnych cyfrach?

Pierwsza cyfra: 9 możliwości (wszystkie cyfry bez 0).

Druga cyfra: 9 możliwości (może być 0, ale odrzucamy cyfrę, która wystąpiła jako pierwsza).

Trzecia cyfra: 8 możliwości (odrzucamy dwie cyfry, które wystąpiły wcześniej).

Wszystkich możliwości jest więc $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Czy wiesz, że…

Palindrom to słowo, wyrażenie albo zdanie, które czytane od początku i od końca brzmi tak samo, np. „KAJAK" albo „KOBYŁA MA MAŁY BOK". Analogicznie, liczba palindromiczna to taka liczba, która się nie zmienia, gdy przeczytamy ją od końca, np. 12721 albo 24442.

Ćwiczenie 5

Ile jest trzycyfrowych liczb naturalnych palindromicznych?

Przykład 6

Ile jest trzycyfrowych liczb naturalnych o różnych cyfrach i podzielnych przez 5?

Ostatnią cyfrą takiej liczby jest 0 albo 5. W zależności od tego, czy jest to 0 czy 5, mamy inną liczbę możliwości wyboru pierwszej cyfry. Dlatego nie możemy skorzystać od razu z reguły mnożenia, ale musimy rozważyć dwa przypadki.

Przypadek I. Ostatnią cyfrą jest 0.

Pierwsza cyfra musi być różna od 0: 9 możliwości.

Druga cyfra musi być różna od 0 i pierwszej cyfry: 8 możliwości.

Razem: $9 \cdot 8 = 72$ możliwości.

Przypadek II. Ostatnią cyfrą jest 5.

Pierwsza cyfra musi być różna od 0 i 5: 8 możliwości.

Druga cyfra musi być różna od 5 i pierwszej cyfry: 8 możliwości.

Razem: $8 \cdot 8 = 64$ możliwości.

Łącznie jest więc $72 + 64 = 136$ takich liczb.

Ćwiczenie 6

Ile jest trzycyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 5?

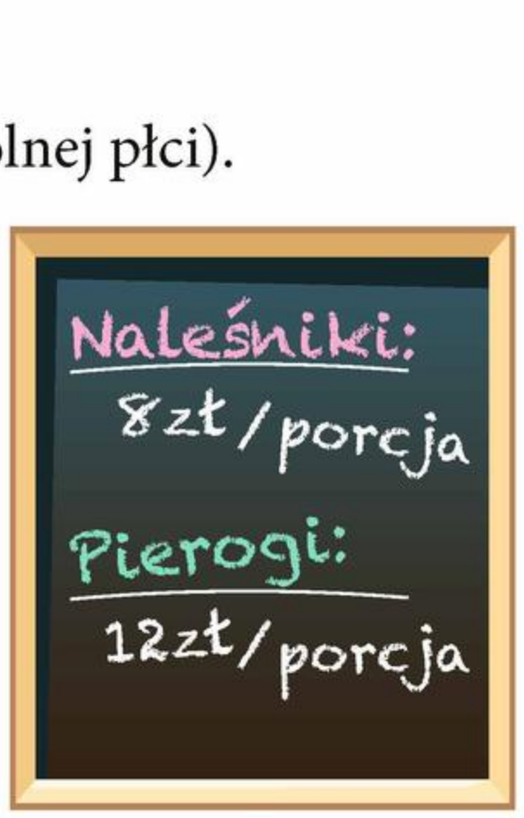
Zadania

1. W drużynie harcerskiej jest 16 chłopców i 14 dziewcząt. Oblicz, na ile sposobów można wybrać spośród tych osób:

a) dwie osoby różnej płci,
b) dwoje dziewcząt,
c) dwóch chłopców,
d) dwie osoby (dowolnej płci).

2. W barze jest pięć rodzajów naleśników i cztery rodzaje pierogów. Chcesz kupić coś do jedzenia. Ile masz możliwości wyboru, jeśli masz 16 zł, ale nie musisz wydać wszystkiego?

a) Możesz także kupować podwójne porcje naleśników.
b) Nie chcesz kupować podwójnych porcji naleśników.



3. Weronika chce być na Festiwalu Nauki między godz. 14.00 a 17.00. Może więc pójść na dwa wykłady albo na jedne warsztaty. Ile ma możliwości wyboru?

Festiwal nauki

Program

14.00–17.00
Warsztaty

- Zimowa zabawa w –200°C
- Matematyk zrobi to lepiej
- Pobaw się z wężem dusicielem
- Czytamy średniowieczne dokumenty

14.30–16.00
Wykłady

- Czego nie wiemy o Wszechświecie?
- Polskie fantasy kolejowe: Stefan Grabiński i jego książki
- Czy można poprawić swoje geny?

16.15–17.00
Wykłady

- Jak śledzi cię twój własny telefon?
- Czternastu polskich noblistów. Ilu z nich nie znasz?
- Protony leczą raka

4. Oblicz, ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych:

a) wszystkich, **c)** palindromicznych,
b) parzystych, **d)** o różnych cyfrach.

5. Oblicz, ile jest liczb sześciocyfrowych o różnych cyfrach:

a) podzielnych przez 10, **b)** podzielnych przez 5, **c)** palindromicznych.

6. W Uczniowskim Klubie Sportowym „Orientuś" jest 18 dziewcząt i 10 chłopców. Na ile sposobów możemy wybrać grupę złożoną z 2 dziewcząt i 2 chłopców?

7. Na ile sposobów można wybrać dwa dodatki do pizzy spośród pięciu, jeśli:

a) dodatki mają być różne, **b)** możemy wziąć ten sam dodatek podwójnie?

8. Ile różnych deserów można przygotować według opisu w karcie, jeśli chcemy, żeby smaki lodów i rodzaje owoców się nie powtarzały?

Deser lodowy

- **dwie gałki lodów** – do wyboru: miętowe, pomarańczowe, bananowe, kiwi, malaga, truskawkowe, śmietankowe, czekoladowe
- **bita śmietana**
- **polewa** czekoladowa lub owocowa
- **dwa rodzaje owoców** – do wyboru: maliny, truskawki, mango, pomarańcze, jagody



9. Na ile sposobów możemy wybrać 3 osoby z 4-osobowej grupy?

10. Na ile sposobów można wybrać 5 przedmiotów spośród 6 różnych? A 4 przedmioty spośród 6 różnych?

Wskazówka. Pomyśl o przedmiotach, których nie wybierasz.

Dla dociekliwych

Wyobraź sobie, że 5 osób ma się ustawić jedna za drugą. Spróbuj zgadnąć, ile mniej więcej jest takich ustawień.

1. Na ile sposobów można wybrać osobę, która stanie jako pierwsza? A osobę, która stanie jako druga? A kolejne osoby?

2. Uzasadnij, że 5 osób można ustawić jedna za drugą na $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ sposobów. Oblicz ten iloczyn.

Iloczyn $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ oznaczamy symbolem 5!, co czytamy „5 silnia". Dla dowolnej liczby n naturalnej dodatniej silnia tej liczby to iloczyn wszystkich liczb naturalnych od 1 do n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

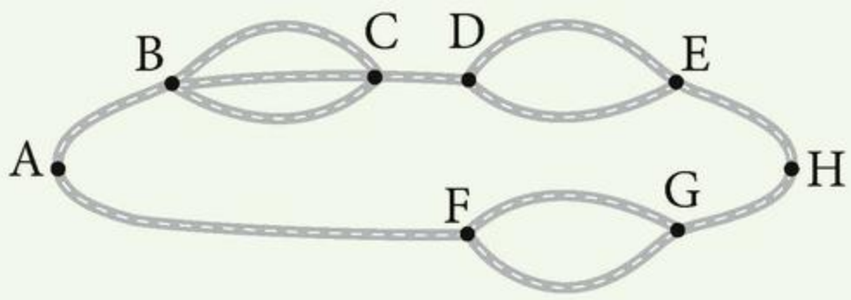
3. Dwadzieścia osób może się ustawić jedna za drugą na 20! różnych sposobów. Spróbuj zgadnąć, ile to może być, a następnie oblicz za pomocą kalkulatora naukowego albo komputera.

4. Na ile sposobów może się ustawić w kolejce grupa złożona z 4 dziewcząt i 3 chłopców, jeśli:

a) najpierw stoją dziewczęta, a za nimi chłopcy,
b) dziewczęta i chłopcy ustawiają się na przemian?

Czy już umiem?

I. Ile jest dróg prowadzących z A do H?



II. W kwiaciarni jest 10 gotowych bukietów. Marcin chce kupić dwa bukiety. Na ile sposobów może dokonać wyboru?

III. Ile jest czterocyfrowych liczb naturalnych parzystych?

3 Obliczanie prawdopodobieństwa

Na dobry początek >

Agnieszka i Piotrek grają w grę planszową, w której rzuca się dwiema kostkami i przesuwa pionek o sumę oczek.

W sumie może wypaść od 2 do 12 oczek, jest więc 11 możliwości ruchu pionkiem.

Ale 12 oczek wypada znacznie rzadziej niż 6. Dlaczego?

Pytania i polecenia

- Przemyśl spostrzeżenia uczniów. Czy potrafisz odpowiedzieć na pytanie, dlaczego 6 oczek wypada zauważalnie częściej niż 12 oczek?
- Niech każdy w klasie rzuci dziesięć razy dwiema kostkami i zapisze sumę oczek w każdym rzucie. Potem zbierzcie wyniki z całej klasy i narysujcie diagram przedstawiający, w ilu rzutach wypadły dwa oczka, w ilu trzy oczka itd.

Prawdopodobieństwo prostych zdarzeń losowych obliczaliśmy już na początku roku szkolnego. Teraz zajmiemy się nieco bardziej skomplikowanymi przykładami.

Kilkukrotne losowanie

Przykład 1

Rzucamy dwukrotnie monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w obu rzutach otrzymamy to samo, czyli że wypadną dwie reszki albo dwa orły?

W tym doświadczeniu losowym mamy 4 możliwe wyniki:



Interesują nas 2 spośród tych 4 wyników, oznaczone powyżej I i IV.

p – prawdopodobieństwo otrzymania dwóch orłów lub dwóch reszek

$$p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Ćwiczenie 1

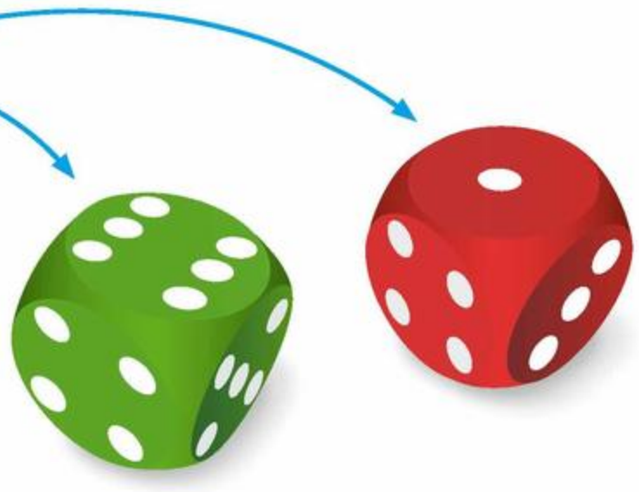
Rzucamy dwukrotnie monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadnie najpierw orzeł, a potem reszka?

Przykład 2

Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry: zieloną i czerwoną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma oczek na obu kostkach będzie równa 8?

W tym doświadczeniu wynikiem jest **para liczb**. Na przykład wynik 2 3 oznacza, że na zielonej kostce wypadły 2 oczka, a na czerwonej – 3 oczka. Wypiszmy wszystkie możliwe wyniki.

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66



Zwróć uwagę, że **6 1** oraz **1 6** to różne wyniki. Jeśli nie chcesz używać kolorów, możesz zapisywać pary w nawiasach, podobnie jak współrzędne punktów: (6, 1) i (1, 6).

Widzimy, że wszystkich możliwych wyników jest 36. Zaznaczamy te, które spełniają podany warunek. Jest ich 5.

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	(62)
13	23	33	43	(53)	63
14	24	34	(44)	54	64
15	25	(35)	45	55	65
16	(26)	36	46	56	66

Prawdopodobieństwo p otrzymania w rzucie dwiema kostkami sumy oczek równej 8 wynosi więc: $p = \frac{5}{36}$.

Zauważ, że gdybyśmy rzucali dwiema kostkami jednakowego koloru albo jedną kostką dwa razy, możliwe wyniki byłyby takie same.

Dobra rada

Aby nie wypisywać wszystkich możliwości, możesz przygotować tabelę i zaznaczyć w niej tylko te pola, które cię interesują.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						×
3					×	
4				×		
5			×			
6		×				

Ćwiczenie 2

Jakie jest prawdopodobieństwo, że w rzucie dwiema kostkami, czerwoną i zieloną, otrzymamy w sumie 10 oczek?

Przykład 3

W szufladzie są trzy skarpetki czerwone i dwie zielone. Wyciągamy po ciemku dwie skarpetki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będą miały ten sam kolor?

Oznaczamy czerwone skarpetki **C1**, **C2** i **C3**, a zielone **Z1** i **Z2**. Wynikiem w tym doświadczeniu jest para skarpetek, np. **C1**, **C2**. Wypisujemy możliwe wyniki (jest ich $5 \cdot 4 = 20$), a wyniki, w których wylosowane skarpetki są jednego koloru, otaczamy pętlami.

–	(C1, C2)	(C1, C3)	C1, Z1	C1, Z2
(C2, C1)	–	(C2, C3)	C2, Z1	C2, Z2
(C3, C1)	(C3, C2)	–	C3, Z1	C3, Z2
Z1, C1	Z1, C2	Z1, C3	–	(Z1, Z2)
Z2, C1	Z2, C2	Z2, C3	(Z2, Z1)	–

Jak widać, dwie skarpetki jednego koloru wylosujemy w 8 spośród 20 możliwych sytuacji. Prawdopodobieństwo p wynosi więc: $p = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

Ćwiczenie 3

W torebce są trzy cukierki pomarańczowe i jeden cytrynowy. Wyciągamy losowo dwa cukierki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że oba będą pomarańczowe?

Zadania

1. Organizator loterii chwali się, że każdy parzysty los wygrywa. To prawda, ale jest tylko 5 losów o numerach parzystych, a 250 o numerach nieparzystych. Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej, gdy kupimy jeden los?

2. Rzucamy trzy razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że orzeł wypadnie dokładnie dwa razy?

3. Rzucamy kostką i monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadnie orzeł i parzysta liczba oczek?

4. Rzucamy dwa razy sześcienną kostką. Co jest bardziej prawdopodobne: że suma liczb oczek wyniesie 5, czy że wyniesie 7? Uzasadnij odpowiedź.

5. Wojtek ma w plecaku cztery zeszyty: do języka polskiego, matematyki, fizyki i języka angielskiego. Oblicz prawdopodobieństwo, że trafi na zeszyt do matematyki, jeśli wyjmuje z plecaka:

a) jeden zeszyt,
b) dwa zeszyty,
c) trzy zeszyty,
d) cztery zeszyty.

6. W worku jest sześć butów: dwie pary i dwa buty bez pary. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybierając losowo dwa buty, trafimy na parę?

Wskazówka. Możesz skorzystać z pokazanej niżej tabeli (nie wypełniaj jej w książce). Buty A1 i A2 tworzą jedną parę, buty B1 i B2 to druga para, a C i D to buty bez pary.

Drugi wylosowany but \ Pierwszy wylosowany but	A1	A2	B1	B2	C	D
A1	–					
A2		–				
B1			–			
B2				–		
C					–	
D						–

7. Rzucamy kostkami: czworościenną i sześcienną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na kostce czworościennej wypadnie większa liczba?

8. Na ścianach sześciennej kostki są liczby: 2, 2, 2, 3, 3, 5. Rzucamy tą kostką dwa razy i mnożymy otrzymane liczby. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania iloczynu równego:

a) 4, **b)** 6, **c)** 9, **d)** 10, **e)** 15, **f)** 25.

9. Zaproponuj sposób losowania jednej osoby spośród 16 z wykorzystaniem rzutów monetą. Każda osoba powinna mieć takie same szanse na wylosowanie.

Dla dociekliwych

Wyobraź sobie grę, w której każdy z dwóch graczy rzuca kostką, a ten, kto wylosował większą liczbę, wygrywa. Jeśli obaj mają jednakowe kostki, gra jest sprawiedliwa. Gdy kostki są różne – niekoniecznie. Na ilustracji widzisz siatki czterech kostek zwanych na cześć swojego wynalazcy kośćmi Efrona.

A

		1	
5	5	1	5
		1	

B

		2	
6	6	2	2
		2	

C

		3	
3	3	3	3
		3	

D

		4	
4	4	0	0
		4	

1. Pierwszy gracz rzuca kostką A, a drugi kostką B. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wygra pierwszy gracz, a jakie, że wygra drugi? Kto ma większe szanse?

2. Uzasadnij, że kostka C jest lepsza od B, to znaczy, że jeśli jeden gracz wybierze kostkę C, a drugi B, to ten pierwszy ma większą szansę wygranej.

3. Uzasadnij, że kostka D jest lepsza od C.

4. Z zadań 1–3 wiemy już, że kostka B jest lepsza od A, C jest lepsza od B, a D jest lepsza od C. Czy kostka D jest najlepsza? Sprawdź, czy kostka D jest lepsza od A.

Czy już umiem?

I. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia trzech orłów w trzykrotnym rzucie monetą.

II. Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami: czerwoną i zieloną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że iloczyn liczb oczek na tych kostkach wyniesie 36?

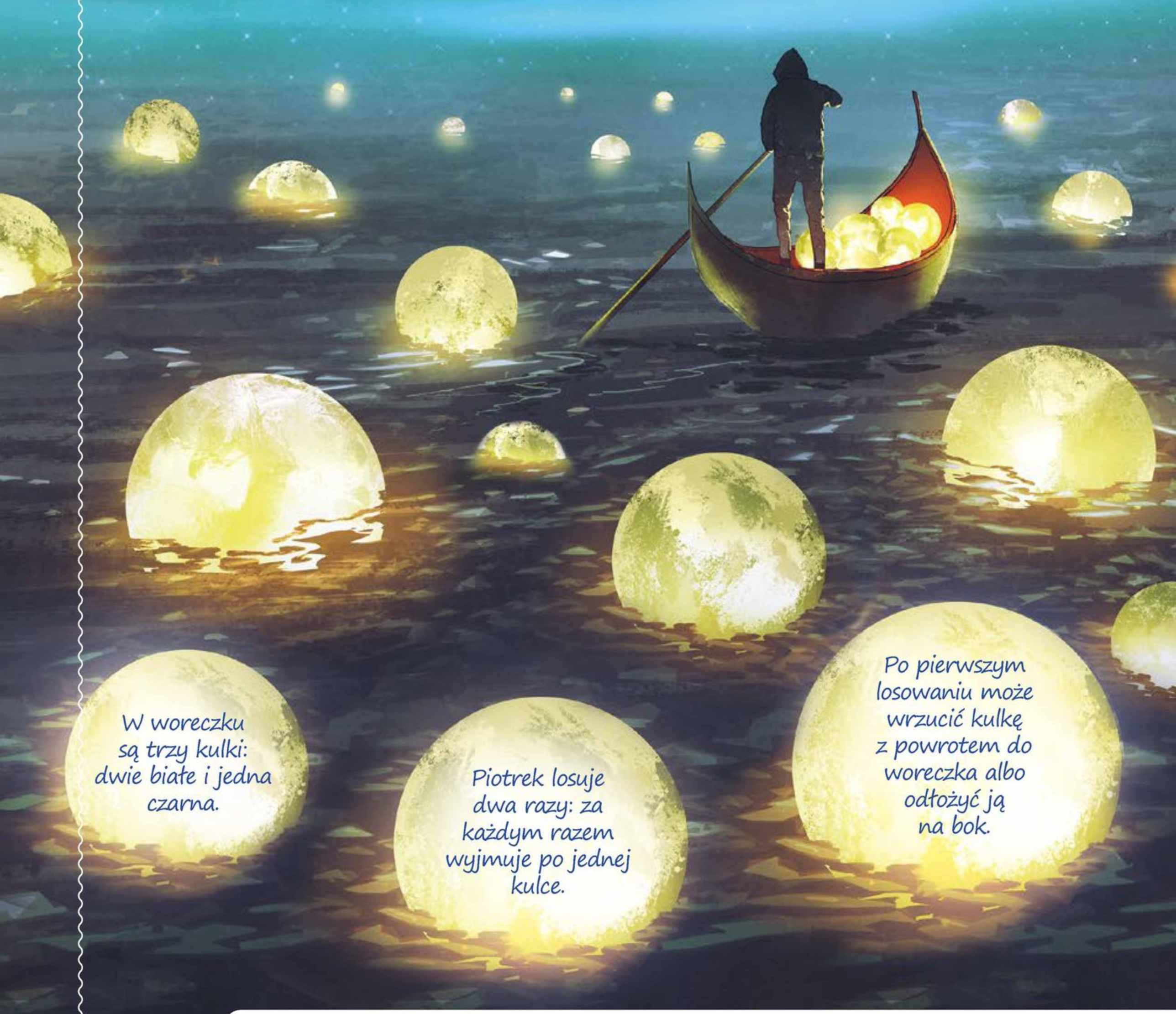
III. Rzucamy jednocześnie monetą i kostką. Oblicz prawdopodobieństwo, że wypadnie orzeł i mniej niż 3 oczka.

4

Kombinatoryka a prawdopodobieństwo

Na dobry początek

Piotrek gra w grę fantasy. W tej rozgrywce wylosował figurkę elfa. W kolejnym ruchu może ułatwić misję swojemu bohaterowi i zdobyć amulet przeciw orkom, jeżeli wylosuje z woreczka dwie białe kulki.



Pytania i polecenia

- Kiedy Piotrek będzie miał większe szanse na wylosowanie dwóch białych kulek: jeśli po pierwszym losowaniu wrzuci kulkę z powrotem do woreczka, czy jeśli odłoży ją na bok?

Obliczenia bez wypisywania wszystkich możliwości

Często wszystkich możliwych wyników losowania jest zbyt dużo, aby je wypisać. Jednak nie musimy tego robić, aby obliczyć prawdopodobieństwo. Wystarczy, że wiemy, **ile** jest możliwych wyników.

Przykład 1

Rzucamy dwiema kostkami dwunastościennymi: czerwoną i zieloną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma otrzymanych liczb będzie równa 10?

Każda kostka ma 12 ścianek, więc zgodnie z regułą mnożenia mamy $12 \cdot 12 = 144$ możliwe wyniki rzutu (czyli pary liczb). Nie musimy ich wypisywać!

Pary liczb o sumie 10 to: (1, 9), (2, 8), (3, 7), ..., (9, 1).
Jest ich więc 9, co łatwo zauważyć, gdy liczbę otrzymaną na czerwonej kostce potraktujemy jako numer pary.

p – prawdopodobieństwo otrzymania sumy liczb równej 10

$$p = \frac{9}{144} = \frac{1}{16}$$

Ćwiczenie 1

Rzucamy dwiema kostkami dwudziestościennymi o różnych kolorach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma otrzymanych liczb będzie równa 4?

Losowanie bez zwracania i losowanie ze zwracaniem

Przykład 2.1

W urnie znajduje się 20 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 20. Losujemy dwie kule: najpierw jedną, potem drugą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że liczba na jednej z kul (którejkolwiek) będzie dwa razy większa niż liczba na drugiej kuli?

Za pierwszym razem losujemy jedną z 20 kul, mamy więc 20 możliwości. Przy drugim losowaniu w urnie jest już tylko 19 kul, mamy więc 19 możliwości. Zgodnie z regułą mnożenia łącznie mamy $20 \cdot 19 = 380$ możliwych wyników.

Liczba na jednej kuli jest 2 razy większa niż liczba na drugiej w następujących przypadkach:
(1, 2), (2, 4), ..., (10, 20) – 10 możliwości
(2, 1), (4, 2), ..., (20, 10) – 10 możliwości

Zastanów się, skąd wiemy, że jest właśnie 10 możliwości.

Razem jest 20 wyników, które nas interesują.

p – prawdopodobieństwo, że liczba na jednej z wylosowanych kul jest 2 razy większa niż na drugiej

$$p = \frac{20}{380} = \frac{1}{19}$$

Przykład 2.2

Jak zmieniłoby się prawdopodobieństwo obliczone w przykładzie 2.1, gdybyśmy po pierwszym losowaniu zapisywali wynik, a kulę wrzucali z powrotem do urny?

W tej sytuacji wszystkich możliwych wyników jest $20 \cdot 20 = 400$.

Natomiast wyników, w których liczba na jednej z wylosowanych kul jest dwa razy większa niż na drugiej, jest nadal tyle samo: 20. Dlatego prawdopodobieństwo p tym razem wynosi:

$p = \frac{20}{400} = \frac{1}{20}$.

Odpowiedzi w przykładach 2.1 i 2.2 różnią się, bo różne były sposoby losowania.

W przykładzie 2.1 pierwsza wylosowana kula nie wracała do urny. Takie losowanie nazywamy losowaniem **bez zwracania**.

Natomiast w przykładzie 2.2 pierwszą wylosowaną kulę zwracaliśmy do urny, więc przeprowadzaliśmy losowanie **ze zwracaniem**.

Ćwiczenie 2

W urnie są kule: 6 białych i 2 czarne. Losujemy kolejno dwie z nich. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy obie czarne kule? Rozważ dwa przypadki: losowanie ze zwracaniem i losowanie bez zwracania.

Zadania

1. Magda rzuciła dwa razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma liczb oczek otrzymanych w pierwszym i drugim rzucie jest równa:

a) 5, **b)** 6, **c)** 7.

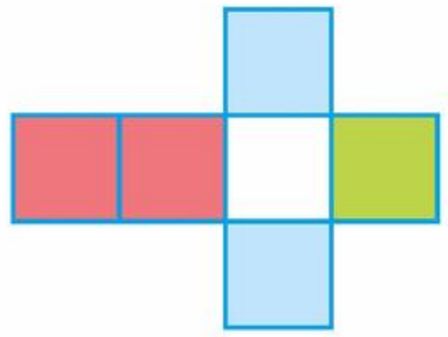
2. Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) w drugim rzucie otrzymamy taki sam wynik jak w pierwszym,
b) w drugim rzucie otrzymamy mniej oczek niż w pierwszym.

3. W urnie jest 10 kul podpisanych liczbami od 1 do 10. Dwukrotnie losujemy po jednej kuli. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że suma liczb na obu kulach jest większa niż 15. Rozważ dwa przypadki:

a) losowanie ze zwracaniem,
b) losowanie bez zwracania.

4. Rzucamy dwa razy kolorową kostką, której siatkę przedstawiono na rysunku. Jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymamy:



a) kolor biały, a następnie czerwony,
b) kolor biały i czerwony w dowolnej kolejności?

5. Z sześciu pasków materiału: dwóch czerwonych, zielonego, żółtego, niebieskiego i białego, losujemy bez zwracania dwa. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z wylosowanych pasków można ułożyć flagę Polski, jeśli:

a) pierwszy z wylosowanych pasków kładziemy na górze, a drugi na dole,
b) paski możemy ułożyć w dowolnej kolejności?

6. Z sześciu pasków materiału takich jak w poprzednim zadaniu losujemy kolejno bez zwracania trzy i układamy je od góry do dołu. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że powstanie flaga:

a) Gabonu,



b) Bułgarii,



c) Austrii.



Dla dociekliwych

Rozwiąż zadanie. Jeśli ci się nie uda, skorzystaj ze wskazówek w ramce.

1. W pełnej talii są 52 karty, w tym 4 asy. Losujemy dwie karty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będą to dwa asy?

Wskazówki.
- Ile jest możliwości wylosowania dwóch kart z 52?
- Na ile sposobów można wybrać dwa asy spośród czterech?

Czy już umiem?

I. Ze 100 kul ponumerowanych liczbami naturalnymi od 1 do 100 losujemy dwie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że iloczyn wylosowanych liczb będzie nie większy niż 4, jeśli losujemy:

a) ze zwracaniem,

b) bez zwracania.

II. Wśród 100 losów na loterii jest 10 wygrywających. Kupujemy dwa losy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że nie wygramy ani razu.

Powtórzenie VIII

ZESTAW 1

1. Kasia ma kupić jeden zeszyt w kratkę i jeden w linie. W sklepie jest 5 rodzajów zeszytów w kratkę i 3 rodzaje w linie. Ile możliwości wyboru ma Kasia?

A. 8 **B.** 15 **C.** 20 **D.** 125

2. Wojtek może kupić albo jeden z trzech różnych długopisów, albo jeden z czterech różnych ołówków. Jeśli kupi ołówek, musi też kupić jedną z dwóch różnych temperówek. Ile ma wszystkich możliwości wyboru?

A. 11 **B.** 14 **C.** 18 **D.** 24

3. Na ile sposobów można wybrać dwuosobową delegację z 20-osobowej klasy? Wskaż działanie, które należy wykonać, aby odpowiedzieć na to pytanie.

A. $20 \cdot 19$ **B.** $20 \cdot 20$ **C.** $\frac{20 \cdot 19}{2}$ **D.** $\frac{20 \cdot 20}{2}$

4. Ile liczb trzycyfrowych możemy ułożyć, używając tylko cyfr od 0 do 5, tak aby cyfry się nie powtarzały?

5. Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami: czerwoną i zieloną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymane liczby oczek będą się różnić o 1?

A. $\frac{5}{36}$ **B.** $\frac{6}{36}$ **C.** $\frac{10}{36}$ **D.** $\frac{12}{36}$

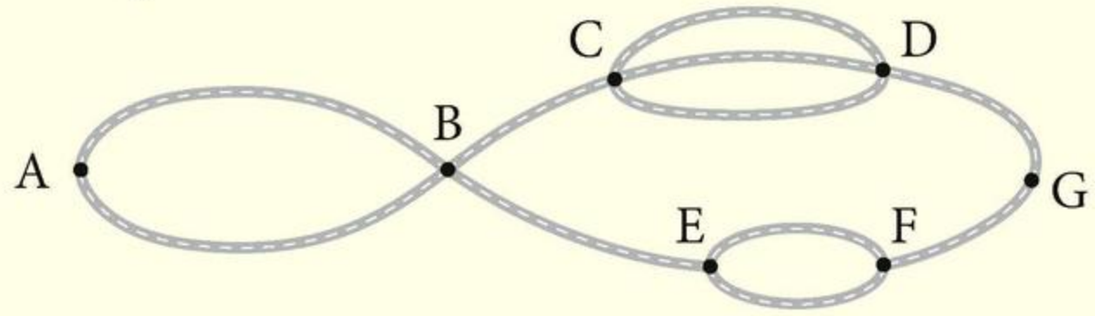
6. Rzucamy kostką sześcienną i monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadnie orzeł i więcej niż 4 oczka?

ZESTAW 2

1. Zestaw w barze „Twoje zdrowie” składa się z sałatki, sosu i soku. Do wyboru jest 10 sałatek, 5 sosów i 9 soków. Na ile sposobów można wybrać zestaw?

A. 24 **B.** 55 **C.** 59 **D.** 450

2. Ile jest różnych dróg z A do G?



3. Ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych podzielnych przez 5?

4. Rzucamy dwiema kostkami sześciennymi o różnych kolorach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że liczba oczek na jednej kostce będzie podzielna przez liczbę oczek na drugiej kostce?

Na zakończenie…

Po co ludziom matematyka?

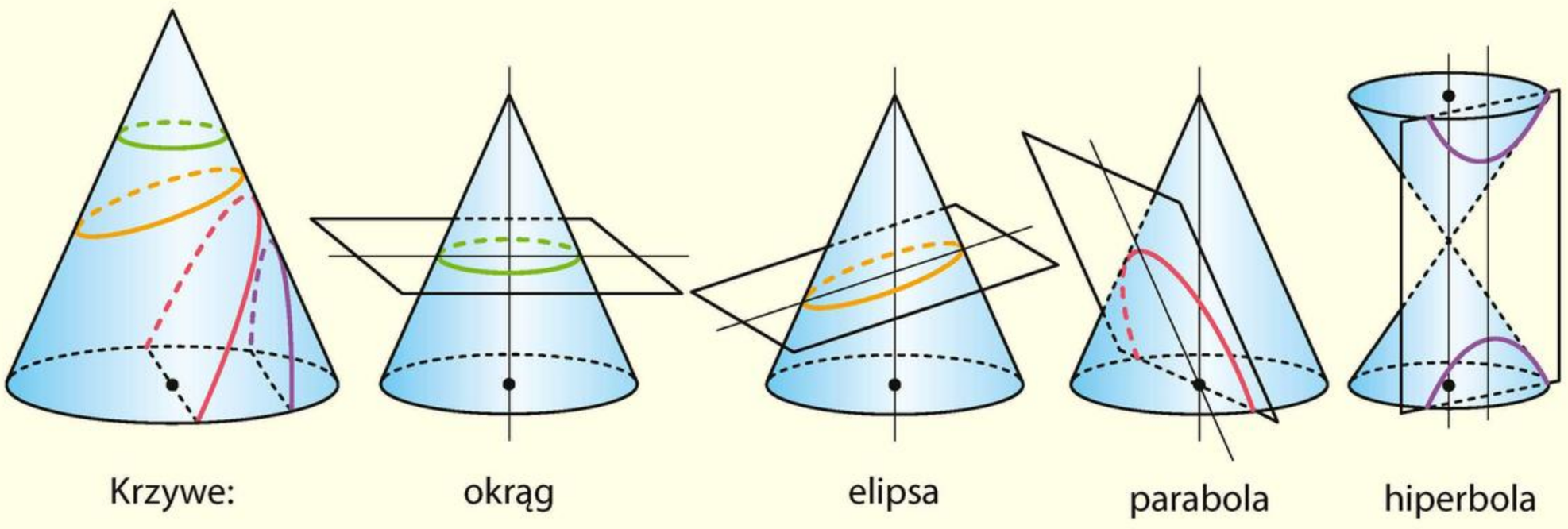
Im dłużej uczymy się matematyki, tym mniej praktyczna może się ona wydawać. Wiadomo, że trzeba umieć obliczyć, ile zapłacimy za zakupy albo jakie odsetki wypłaci nam bank. Ale po co nam przekształcanie wzorów albo wiadomości o liczbach pierwszych?

Od liczb pierwszych do bezpiecznego internetu

Zwłaszcza liczby pierwsze wydają się po prostu łamigłówką dla miłośników arytmetyki i tak też były traktowane przez ostatnie 2300 lat. Niedawno jednak zaczęto je stosować do szyfrowania informacji. Ilekroć używasz bezpiecznego połączenia internetowego, na przykład kupując coś w sieci albo wysyłając e-mail, korzystasz z własności liczb pierwszych. Oczywiście teraz robisz to nieświadomie, ale za kilkanaście lat może właśnie ty będziesz tworzyć programy komputerowe odpowiedzialne za bezpieczeństwo w sieci.

Od stożka do kosmosu

Inne zagadnienie matematyczne, które rekordowo długo czekało na wykorzystanie, to krzywe stożkowe. Otóż około 200 r. p.n.e. grecki uczony **Apoloniusz z Pergi** badał, jaki kształt otrzymamy, przecinając stożek płaszczyzną. W zależności od nachylenia płaszczyzny przekroje są różne i wyznaczają różne krzywe (patrz rysunek).



Krzywe stożkowe uważano za ciekawostkę geometryczną aż do końca XVII w., kiedy to **Izaak Newton** [czytaj: niuton] wykazał, że planety i komety krążą wokół Słońca właśnie po takich krzywych. Orbity planet są elipsami zbliżonymi do okręgów. Spośród komet niektóre krążą po elipsach (i powracają w okolice Słońca co jakiś czas), inne poruszają się po hiperbolach lub parabolach (te komety zbliżają się do Słońca i Ziemi tylko raz, a potem odlatują w inne rejony kosmosu).



Kometa Halleya

Od równań do radia

W latach 60. XIX w. szkocki uczony **James Clerk Maxwell** [czytaj: dżejms klerk maksłel] wymyślił, jak za pomocą czterech równań opisać całą wiedzę na temat zjawisk elektrycznych i magnetycznych, którą ludzie zgromadzili przez kilkadziesiąt lat intensywnych badań. Są to równania znacznie bardziej skomplikowane niż te, o których uczysz się w szkole podstawowej. Ich rozwiązania opisują różne zjawiska, na przykład działanie prądnicy i silnika elektrycznego.

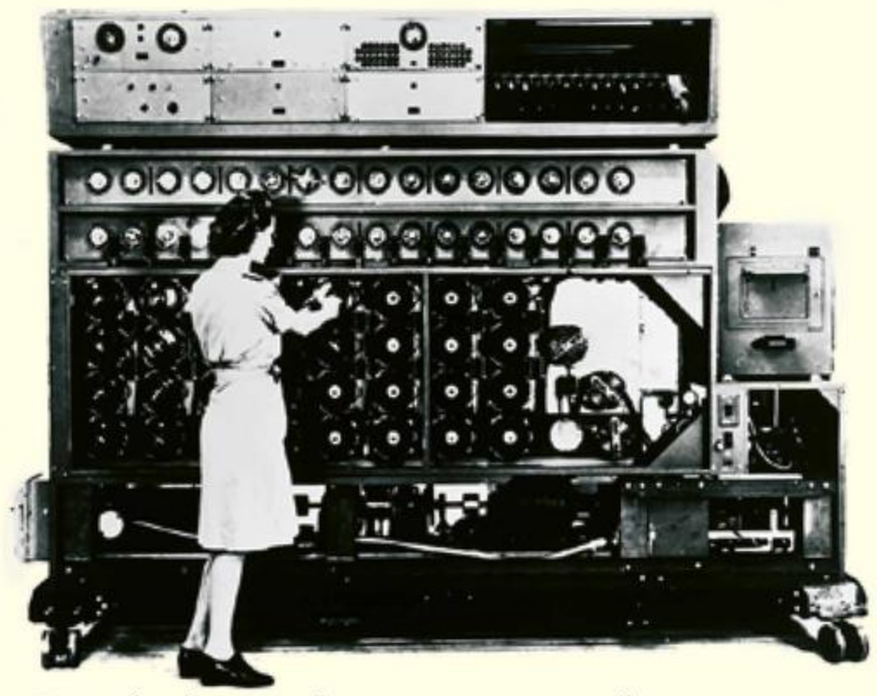


Radio kryształkowe

Okazało się jednak coś więcej: z równań Maxwella wynikało, że powinny istnieć pewne fale, zwane dziś radiowymi. Nie zostały one wcześniej zaobserwowane, bo nikt nie wiedział, czego szukać. Z teorii Maxwella skorzystał **Heinrich Hertz** [czytaj: hajnriś herc], który jako pierwszy na świecie przesłał fale radiowe... z jednego końca swojego pokoju na drugi. Wystarczyło kilkanaście lat, aby zasięg tych fal zwiększono do setek kilometrów. Później powstały stacje radiowe nadające wiadomości i muzykę, jeszcze później – telewizja, telefony komórkowe i bezprzewodowy internet. Wszystkie te wynalazki zawdzięczamy czterem równaniom Maxwella.

1. Przygotuj projekt pokazujący na jednym przykładzie znaczenie matematyki w naszym życiu. Oto kilka pomysłów tematów – nie musisz się jednak do nich ograniczać, najlepiej wymyśl własny! Formę projektu ustal z nauczycielem.

- Komputery otaczają nas ze wszystkich stron – są nimi laptopy, tablety, komputery stacjonarne i smartfony, a nawet programatory pralek automatycznych. Zbudowano je dzięki odkryciom matematyków, m.in. Johna von Neumanna [czytaj: dżona fon nojmana], Alana Turinga [czytaj: tjuringa], Claude'a Shannona [czytaj: kloda szanona], a także wielu innych, z których pracy korzystali wymienieni.
- Przed II wojną światową polscy matematycy: Marian Rejewski, Jerzy Różycki i Henryk Zygalski jako pierwsi złamali kod niemieckiej maszyny szyfrującej Enigma. Ich osiągnięcie pozwoliło na dalsze prace nad dekodowaniem. Możliwość odczytywania meldunków i rozkazów hitlerowskich wojsk przyspieszyła zwycięstwo nad Niemcami w czasie II wojny światowej. Ocaliło to życie milionom ludzi.



Bomba kryptologiczna – urządzenie do dekodowania

- W czasie epidemii cholery w Londynie w 1854 r. lekarz John Snow [czytaj: dżon snoł] zajął się nie tylko pomocą chorym, lecz także statystyczną analizą miejsc, w których wystąpiły zachorowania. Dzięki temu odkrył, że wszyscy chorzy pili wodę z tych samych studni. Gdy studnie zostały zamknięte, epidemia wygasła.

ODPOWIEDZI

I. STATYSTYKA I PRAWDOPODOBIEŃSTWO

s. 8 1. Diagramy i wykresy

Ćwiczenia **1. a)** piłki nożnej, piłki siatkowej, lekkoatletyki, piłki ręcznej i koszykówki; z diagramu słupkowego i tabeli **b)** tak; z tabeli i diagramu kołowego **2.** W południe było ok. 23,5°C i jeszcze przez ponad 4 godziny temperatura rosła. **3. a)** 50 cm **b)** 0,3 s **c)** 20 cm **Zadania** **1. a)** Ocenę celującą otrzymały 2 osoby, bardzo dobrą – 5 osób, dobrą – 9 osób, dostateczną – 5 osób, dopuszczającą – 3 osoby, niedostateczną – 1 osoba. **2. a)** 115 524 **b)** najwięcej w mazowieckim, najmniej w lubuskim **c)** w dolnośląskim, małopolskim, mazowieckim, śląskim i wielkopolskim **d)** 99 023 **3.** mazowieckie: ok. 4,6%, śląskie: ok. 2,5%, wielkopolskie: ok. 3,3%, małopolskie: ok. 4,4%, opolskie: ok. 2,2% **4. a)** wyższy: 18, 19 i 20, niższy: 17 **b)** 20 września **5. a)** 21,4% **b)** 4,1% **7. a)** 8 l/100 km **b)** 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ lub ok. 110 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ **c)** 110 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ **d)** na czwartym biegu 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ **e)** przy 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ **9. a)** 10 do ok. 130 [ng/l] **b)** od ok. 6.30 do 20 **c)** o 2 w nocy **d)** Rośnie od 20 do 2, maleje od 2 do ok. 6.30, pozostaje bez zmian od ok. 6.30 do 20. **e)** od ok. 23 do ok. 4.30 **f)** Mają kłopoty z zasypianiem. **10. a)** o 12.00 **b)** o 14.00, 4 ng/l **c)** Lek zaczął działać ok. 14, a przestał o 18. **11.** I – doustnie, II – dożylnie **12. a)** 10 s **b)** 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ **c)** 40 s **d)** 8 s **e)** $\frac{4}{9}$ km **14. a)** 21°C **b)** 22°C ok. 17.00 **c)** Deszcz miał spaść w środę, niewielkie opady miały być w piątek. **d)** Wieczorem, gdy temperatura spada, i podczas deszczu rośnie wilgotność. Gdy temperatura rośnie i nie pada deszcz, wilgotność maleje. **Dla dociekliwych** **1.** ok. 4200 m **Czy już umiem?** **I. a)** w styczniu **b)** w styczniu, lutym, marcu i grudniu **II.** 1. P, 2. P **III. a)** 6 razy, co ok. 3 godziny **b)** pierwsza: 6 mg/l, druga: 8 mg/l, pozostałe: 9 mg/l **c)** 2 mg/l **d)** nie **IV. a)** $3\frac{1}{6}$ **b)** 0,036 **c)** 0,07

s. 18 2. Średnia arytmetyczna

Ćwiczenia **1.** 4,4 **2.** 4 **3.** średnia ocen z angielskiego: 5; z hiszpańskiego: 4; średnia ocen z obu języków: 4,4; średnia średnich ocen z obu języków: 4,5; średnie są różne **4.** tak **5. a)** 4 **b)** 1,5 **6.** średnia płaca: 4500 zł; mediana: 3000 zł **Zadania** **1. a)** średnia: 4,5; mediana: 4 **b)** średnia: 3; mediana: 3 **c)** średnia: $3\frac{6}{7}$; mediana: 4 **2.** 4,7 **3. a)** 25 **b)** 1,52 **c)** 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4 **d)** 1 **4.** średnia: ok. 57; mediana: 60 **5. a)** 15 **b)** 16,4 **c)** 15,7 **d)** 16 **6.** 8°C **7.** 7°C **8. a)** 4,05 **b)** 3,92 **9.** 177 cm **10.** Wszystkie informacje były rzetelne. **11.** np. 1, 3, 5, 5, 5, 5 **12. a)** 0 **b)** 18 **13. a)** 21 **b)** dowolna liczba większa lub równa 21 **14.** 4 **Dla dociekliwych** **1.** średnia ważona: 4,4; średnia arytmetyczna: 4,25 **2. a)** większa niż 9 **b)** mniejsza niż 8 **3.** tak, jeśli dostanie 6 **Czy już umiem?** **I. a)** 56 km **b)** 58 km **II.** 80 km **III.** 1,38 osoby **IV. a)** $2^4 = 16$ **b)** $10^3 = 1000$

s. 31 3. Zbieranie i porządkowanie danych

Zadania **1. a)** średnia: ok. 37,4; mediana: 33,5 **2.** średnia: ok. 458,3; mediana: 36,5 **3. a)** średnia: 46,05 mm; mediana: 45 mm; oba wyniki nieco mniejsze od zadanej długości **c)** 7 osób **5. a)** nie **b)** w 50% przypadków korzystniej w Kielcach, a odwrotnie w 37,5% przypadków **6.** np. **1)** do 3 godzin tygodniowo, do 10 godzin tygodniowo, więcej niż 10 godzin; **2)** do 10 minut pieszo, dalej niż 10 minut pieszo; **3)** do 6 osób, więcej niż 6 osób; **4)** Ile gatunków ptaków umiesz rozróżnić? 2, 5, więcej niż 5 **7.** Ponieważ ankietowani mogli podać więcej niż jedną odpowiedź. **Dla dociekliwych** **1.** 20 i 10 010 **2.** średnia: ok. 45,2; mediana: 38 **Czy już umiem?** **I.** A **II.** średnia: ok. 4,76; mediana: 4 **IV.** $5\sqrt{17}$ m, ok. 20,62 m

s. 35 **4. Czy statystyka mówi prawdę**

Ćwiczenia **1.** nie **2. a)** Wykres I: cena benzyny stale rosła, wykres II: cena benzyny malała lub nie zmieniała się. **b)** Cena benzyny w ciągu tygodnia wahała się. **3.** nie **Zadania** **1. a)** o 100 tys. zł **b)** 2 razy **2.** I. F, II. P, III. F, IV. P **3. a)** Tak, niektórzy uczniowie uprawiali sport w więcej niż jednym miesiącu. **b)** Nie, ponieważ ankietowani uczniowie mogli wybrać więcej niż jeden miesiąc. **c)** I **d)** III **4. b)** Gdańsk 20%, Toruń 20%, Wrocław 25%, Kraków 35% **5.** I. P, II. F, III. F **7. a)** Dane nie są równomiernie pogrupowane. **8. a)** Między myciem rąk a wypadkami drogowymi nie ma żadnego związku przyczynowo-skutkowego. **b)** Dużo osób je ziemniaki, dlatego łatwo znaleźć takie osoby wśród wygrywających. **c)** Często przyczyną śmierci jest choroba, a osoby chore zażywają więcej lekarstw. **d)** Raczej jest na odwrót. Należałoby zbadać, co jest przyczyną chodzenia pieszo. **e)** Większa liczba interwencji ratowników jest spowodowana większą liczbą osób na plaży, a nie tym, że plażowicze jedzą lody. **Dla dociekliwych** **1. a)** np. najwyższy średni wynik **b)** np. najwyższa mediana **c)** np. największa grupa uczestników olimpiady **Czy już umiem?** I. 1. F, 2. P II. 1. P, 2. F III. B – 1, C – 2, A – 3 IV. **a)** 69 000 000 **b)** 6 **c)** 2

s. 46 **5. Proste doświadczenia losowe**

Ćwiczenia **1.** $\frac{1}{2}$ **2.** $\frac{2}{5}$ **3. a)** 0 **b)** 1 **c)** $\frac{1}{2}$ **4.** 17 **Zadania** **1. a)** $\frac{5}{6}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** 0 **d)** 1 **e)** 1 **f)** $\frac{1}{2}$ **2. a)** $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{7}{12}$ **3.** $\frac{4}{5}$ **4.** ok. 3,2 mln osób **5. a)** $\frac{1}{20}$ **b)** $\frac{1}{20}$ **c)** $\frac{3}{20}$ **d)** $\frac{9}{20}$ **e)** $\frac{1}{10}$ **f)** $\frac{1}{20}$ **g)** $\frac{3}{10}$ **h)** $\frac{19}{20}$ **6. a)** $\frac{1}{2}$ **b)** 64 **7.** 50 **Dla dociekliwych** **1.** I. 50, II. 50 g, III. 50 **Czy już umiem?** I. B II. C III. 20 IV. $x = -1\frac{2}{3}$

s. 51 **Powtórzenie I**

Zestaw 1 **1.** I. F, II. F, III. P **2.** 186,2 cm **3.** Średnia: 7,5 km, mediana: 8 km, średnia jest o 0,5 km mniejsza od mediany. **4. a)** 3% **b)** 23% **c)** 0%, 3%, 7% i 97% **5.** 5,4 **a)** 4,4 **b)** 5,4 **c)** 5,0 **6.** I. P, II. F, III. P, IV. F **7. a)** najwyższa w styczniu, najniższa w listopadzie **b)** od stycznia do kwietnia **c)** najwyższa w styczniu 2017, najniższa w listopadzie 2017 **d)** o 3 punkty procentowe **8.** I. F, II. P, III. F **9.** $\frac{11}{20}$ **10.** I. P, II. F **Zestaw 2** **1. a)** 25 **b)** 2,16 **c)** 2 **2.** 8 **3.** 5 **4. a)** 1 lipca, prawie 17 godzin **b)** od maja do sierpnia **5.** 2007 **6. a)** 45 min **b)** 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ **7.** I. prawda, II. prawda, III. nie da się ocenić na podstawie diagramów, IV. prawda **8.** 10

s. 55 **Zadania na temat...**

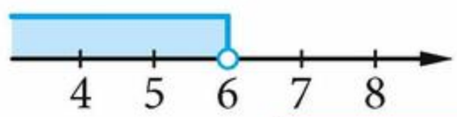
1. a) nie **b)** tak **c)** tak **d)** nie **2. b)** Przepisy Unii Europejskiej stopniowo ograniczają użycie żarówek żarowych.

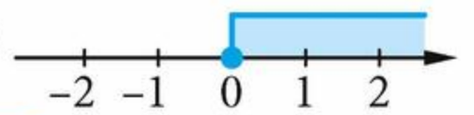
s. 57 **Zadania na deser**

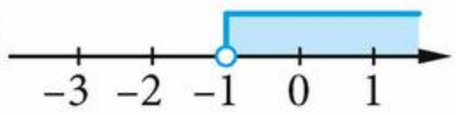
1. a) Większy był procent absolwentów Wydziału Fizyki zarabiających powyżej 4200 zł. **c)** w przedziale powyżej 2300 zł do 4200 zł **2.** I. F, II. F, III. P, IV. P **3.** B **4.** B **5. a)** *G* **b)** *I* **c)** *F* **d)** między *F* i *G* **6.** 28 lat **7.** 5 dzieci **8. a)** 7 min **b)** od 7.30 do 9.06 i od 15.14 do 18.18 **9. a)** 14 **b)** 2 **c)** tak **d)** 9 **e)** średnia: ok. 197 cm, mediana: 197 cm

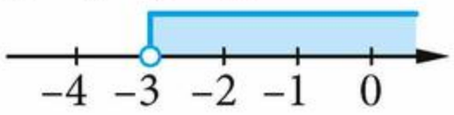
II. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE I RÓWNANIA

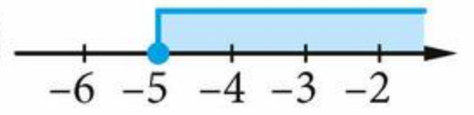
s. 61 **1. Liczby na osi liczbowej**

Ćwiczenia **1.** $A = 1350, B = 1400, C = 1250$ **2. a)** 

b) 

c) 

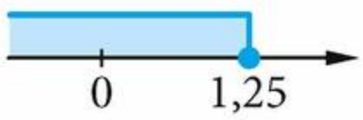
3. a) $x \leqslant -3$ **b)** $x < -1$ **4. a)** 

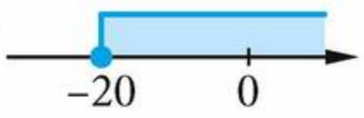
Najmniejsza liczba całkowita spełniająca podany warunek to −2. Istnieją liczby mniejsze. **b)** 

Najmniejsza liczba całkowita spełniająca podany warunek to -5. Nie istnieją liczby mniejsze.

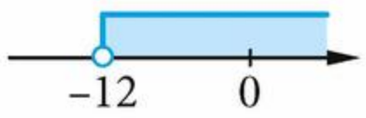
Zadania **1. poziom A** **a)** $A = 65, B = 70$ **b)** $A = 32, B = 36$ **c)** $A = 55, B = 57{,}5$ **d)** $A = 6, B = 7{,}5$ **e)** $A = 400, B = 450$ **f)** $A = 2100, B = 2120$ **g)** $A = 1625, B = 1750$ **h)** $A = 17{,}5, B = 20$ **i)** $A = 14, B = 16$

poziom B **a)** 

b) 

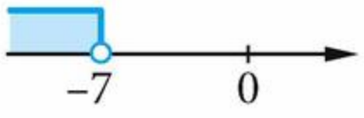
c) 

d) 

e) 

f) 

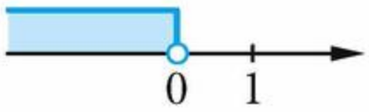
g) 

h) 

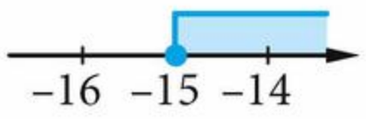
i) 

j) 

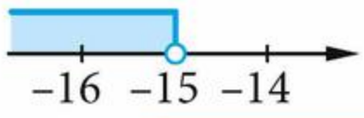
k) 

l) 

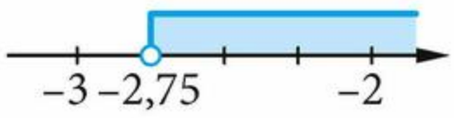
poziom C **a)** $x \geqslant -3$ **b)** $x > 4$ **c)** $x \leqslant 2{,}5$ **d)** $x < 4$ **e)** $x \geqslant 0$ **f)** $x > -2{,}3$ **g)** $x \geqslant 1$ **h)** $x < -1$ **i)** $x \geqslant 0$

poziom D **a)** 

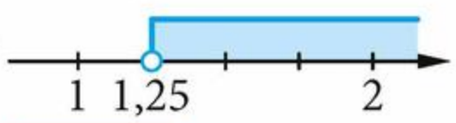
najmniejsza liczba całkowita: -15, największa: nie istnieje

b) 

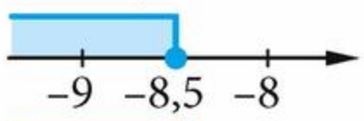
najmniejsza liczba całkowita: nie istnieje, największa: -16

c) 

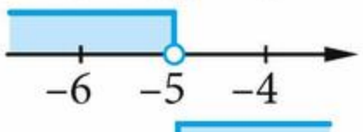
najmniejsza liczba całkowita: -2, największa: nie istnieje

d) 

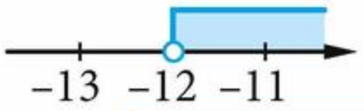
najmniejsza liczba całkowita: 2, największa: nie istnieje

e) 

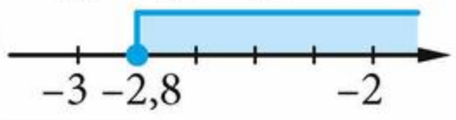
najmniejsza liczba całkowita: nie istnieje, największa: -9

f) 

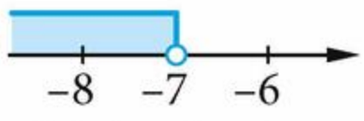
najmniejsza liczba całkowita: nie istnieje, największa: -6

g) 

najmniejsza liczba całkowita: -11, największa: nie istnieje

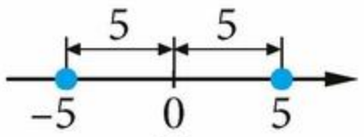
h) 

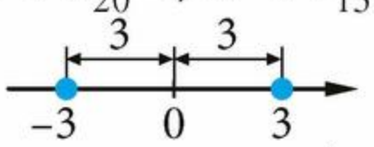
najmniejsza liczba całkowita: -2, największa: nie istnieje

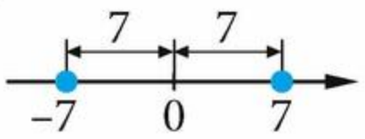
i) 

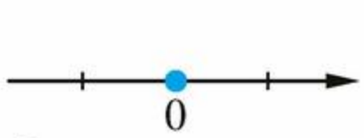
najmniejsza liczba całkowita: nie istnieje, największa: -8

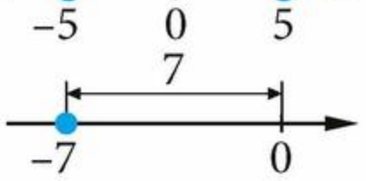
MISTRZ **a)** $x > 149$ **b)** $x \leqslant 3\frac{7}{20}$ **c)** $x < 4\frac{1}{15}$ **d)** $x \geqslant 4{,}2$

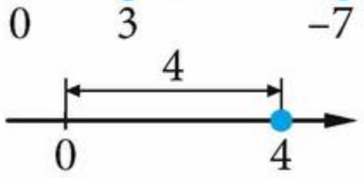
2. a) 

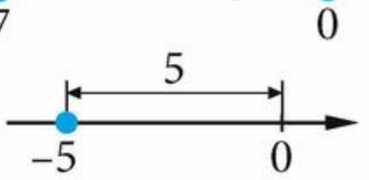
b) 

c) 

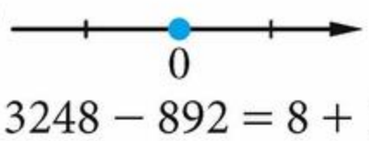
d) 

3. a) 

$|-7| = 7$ **b)** 

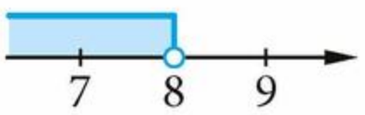
$|4| = 4$ **c)** 

$|-5| = 5$

d) 

$|0| = 0$ **4. a)** $802 - 523 = 77 + 200 + 2 = 279$ **b)** $11\frac{2}{9} - 7\frac{5}{9} = \frac{4}{9} + 3 + \frac{2}{9} = 3\frac{2}{3}$

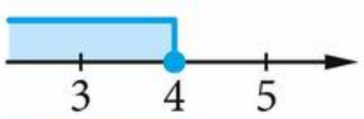
c) $3248 - 892 = 8 + 100 + 2248 = 2356$

5. a) 

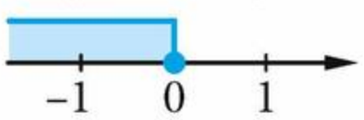
Największa liczba naturalna spełniająca podany warunek to 7.

b) 

Nie istnieje największa liczba naturalna spełniająca podany warunek.

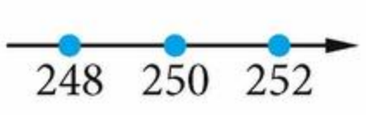
c) 

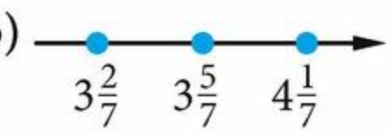
Największa liczba naturalna spełniająca podany warunek to 4.

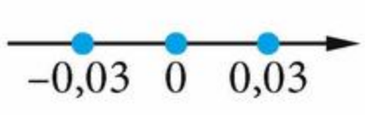
d) 

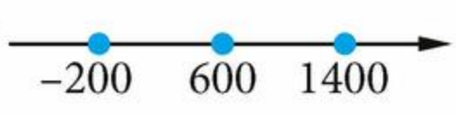
Największa liczba naturalna spełniająca podany warunek to 0.

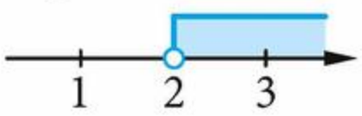
6. a) $x > 17{,}5$ **b)** $x \leqslant 14$ **c)** $x < 250$ **d)** $x \geqslant 260$ **7.** 4, 5, 6 i 7 **8.** 74982

9. a) 

b) 

c) 

d) 

10. $A = 3\sqrt{2}$, $B = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$, $C = 2\sqrt{3} - \sqrt{2}$ **Dla dociekliwych** **1. a)** $x = \sqrt{2}$ **b)** $x = \sqrt{10}$ **c)** $x = \sqrt{6}$ **2. a)** np. 1 i $\sqrt{6}$ **b)** np. 1 i $\sqrt{10}$ **c)** np. 1 i $\sqrt{2}$ **Czy już umiem?** **I. a)** $x > -8$ **b)** $x \leqslant 4$ **II. a)**  Najmniejsza liczba naturalna należąca do tego zbioru to 3.

b)  Najmniejsza liczba naturalna należąca do tego zbioru to 0. **III.** $x \leqslant 375$ **IV. a)** 999 **b)** 1002 **c)** -10

s. 69 2. Wyrażenia algebraiczne

Ćwiczenia **1.1.** 45 **1.2. a)** 30 **b)** -10 **2. a)** $2 + 3x - 6y$ **b)** $4x - 2y + 2z$ **c)** $2x - 2 + y$ **d)** $10 - 2a + 3b$ **3. a)** $-a + 3b - 3$ **b)** $4x + 3y - 3$ **4. a)** $-x^2 - 18x$ **b)** $2x^2 - 2xy + 2y^2$ **Zadania** **1. poziom A a)** 34 **b)** $1\frac{1}{2}$ **c)** 60 **d)** 8 **e)** -2 **f)** 36 **poziom B a)** $-16c + 8d - cd$ **b)** $3c - 3d + cd$ **c)** $4t - 2ps + 3p$ **d)** $5p + 2pr - 2p^2$ **e)** $2b + 2a - 3ab$ **f)** $xy + 3x - 3$ **poziom C a)** $-2x^2y + 2xy^2$ **b)** $5p - 3pr - 4$ **c)** $-a - 2b - 7ab$ **d)** $2s^3t + 11st^3$ **e)** $13c - 13d$ **f)** $12w - 2z + 6$ **poziom D a)** $2a + 14b$ **b)** $8a - 6b$ **c)** $-x + 10y - 3xy$ **d)** $2x^2 + 4y^2$ **e)** $x^2y - 2xy$ **f)** $-x^3y + xy^3$ **2.** $2a$ **a)** 20 **b)** 8 **3. a)** $10x + 4$ **b)** $12{,}5p + 1$ **4. a)** $6x^2 + 3x$ **b)** $3xy + 4y$ **6. a)** o 44% **b)** o 296% **c)** o 2,5% mniej **8. a)** $3x^2 - x$ **b)** $-3x^2 + 5x - 2y$ **c)** $-6x^2 + 3xy$ **9.** $Y = t(a - n)$ **Czy już umiem?** **I.** $13a + 6\frac{1}{2}$ **II. a)** $0{,}7x + y$, 5,3 **b)** $3x^2 - 2y^2$, 25 **c)** 3, 3 **III.** o 52% **IV.** Obw. = 90 cm, $P = 420\ \text{cm}^2$

s. 77 3. Mnożenie sum algebraicznych

Ćwiczenia **1. a)** $p^2 - pq + 6p - 6q$ **b)** $2x^2 + 8x + 6$ **c)** $8a^2 - 10ab + 3b^2$ **2.** $P = a(b - d) + cd$ **3. a)** $-2a^2 + 2a - 6b + 4ab$ **b)** $-x^2 + 5x + 2y^2 - 8y$ **4. a)** $2\sqrt{2} - 1$ **b)** 2 **c)** $7 - 3\sqrt{6}$ **5. a)** $2x^3 + 5x^2 + 9$ **b)** $2x^2 + 5xy - 3y^2 + 6x + 18y$ **Zadania** **1. poziom A a)** $x^2 - 6x + 8$ **b)** $3k^2 - 14k + 8$ **c)** $2m^2 + m - 1$ **d)** $6c^2 - 5c - 1$ **e)** $-2d^2 + 6d + 8$ **f)** $-n^2 + 2n + 15$ **g)** $2x^2 - 5x + 2$ **h)** $5a^2 - 2a - 3$ **i)** $-3y^2 + 13y - 4$ **poziom B a)** $-2b^2 + 3a + 6b - ab$ **b)** $-3bxy + 9xy + bx - 3x$ **c)** $s^2t^2 + 2st - 15$ **d)** $2a^2 + 2b^2 - 5ab$ **e)** $-m^2 - n^2 + 2mn$ **f)** $-6a^2 + 2k^2 - ak$ **g)** $2z^2 + 6xz + 3x + z$ **h)** $2k^2 - 2ky + 8k - 8y$ **i)** $-x + 3y - 3xy + 1$ **poziom C a)** $10x + 12y - 15$ **b)** $2x^2 - 3xy - 5x$ **c)** $-5x^2 - 2y^2$ **d)** $4xy + 4x - 1$ **e)** $4ab + 8a - 2$ **f)** $2a^2 - a - 3b + 2$ **MISTRZ a)** $-3s^2 - 2t^2 + 7st + 2t + 4s$ **b)** $6m^3 - 13m^2 + m + 2$ **c)** $-3a - a^2 + ab + 5b + 5$ **d)** $x^2y - x^3 - 2xy + 3x + x^2y^2 + 2y^3 - 3y^2 + x^2 + 2y - 3$ **2. a)** $-x + 2$, 2,5 **b)** $x^2 - 4x - 12$, $-9{,}75$ **3. a)** $a^2 + 2a$ **b)** 1 **4. a)** $4\sqrt{2} - 5$ **b)** $2\sqrt{3} + 17$ **c)** 4 **d)** $5\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 10$ **6.** $P = bc + 8ac$ **7.** $6a^2 + 14ab - 12b^2$ **8. a)** $-5x - 3x^2 + 6y + 3xy$ **b)** $-6ax + 6x - 6a + 9$ **Dla dociekliwych** **2. a)** $x^2 - 4xy + 4y^2$ **b)** $x^2 + 10x + 25$ **c)** $25 - x^2y^2$ **3. a)** 1 004 004 **b)** 994 009 **c)** 999 984 **4.** 7 **Czy już umiem?** **I. a)** $2x^2 + 3x - 2$ **b)** $2x^2 - 2x + 8$ **II.** $P = 3a^2 - 5a - 2$, Obw. $= 8a - 2$ **IV.** C

s. 83 4. Równania

Ćwiczenia **1. a)** $x = 1$ **b)** $x = -3{,}5$ **2. a)** $x = -1\frac{5}{7}$ **b)** $x = -\frac{3}{20}$ **3.** $x = -0{,}4$ **Zadania** **1. poziom A a)** $x = 1$ **b)** $x = 1$ **c)** Nie ma rozwiązania. **d)** $x = 2$ **e)** $x = 0$ **f)** Każda liczba jest rozwiązaniem. **g)** $x = -2$ **h)** $x = 2$ **poziom B a)** $x = \frac{1}{7}$ **b)** $x = \frac{5}{6}$ **c)** Nie ma rozwiązania. **d)** $x = 0$ **e)** $x = -62$ **f)** Każda liczba jest rozwiązaniem. **g)** $x = 15$ **h)** $x = -\frac{13}{20}$ **poziom C a)** $x = 0{,}6$ **b)** $x = -\frac{3}{8}$ **c)** Każda liczba jest rozwiązaniem. **d)** $x = -10$ **e)** $x = 4$ **f)** $x = \frac{5}{8}$ **g)** $x = -1{,}2$ **h)** $x = -1$ **2.** 20 **3.** pierwszy: 471, drugi: 609 **4.** 10 **5.** 5,50 zł **6.** ok. 92,7 tys. $\text{km}^2 = 9\,270\,000$ ha **7.** ok. 350 tys. **8.** 14 osób **9.** 160 cm i 100 cm **10.** 14 cm **11.** Nic nie można powiedzieć. **12.** I. $x = 4$ lub $x = -4$,

II. $a = 0$, IV. $c = \sqrt{5}$ lub $c = -\sqrt{5}$, III. i V. nie mają rozwiązania. **13. a)** $x = -3$ lub $x = 3$ **b)** Nie ma rozwiązania. **Dla dociekliwych** **1. a)** 3, 4, 5 **b)** 5, 12, 13 **c)** 8, 15, 17 **d)** 7, 24, 25 **Czy już umiem?** **I. a)** $x = 1\frac{1}{3}$ **b)** $x = -25$ **c)** $x = 0$ **d)** Każda liczba jest rozwiązaniem. **II.** prostokąt: 62, równoległobok: 70 **III.** $3528 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2$, $\sqrt{3528} = 42\sqrt{2}$

s. 88 **Powtórzenie II**

Zestaw 1 **1. a)** $a^2 - 2a - 8$ **b)** $a^2 - 8a + 15$ **c)** $4a^2 - 5a - 6$ **2.** $x^2 + 2x - 8$ **3.** I. P, II. F, III. P **4.** II, C **5.** o 1500% **6.** 77 **7.** 102 opakowania rodzynek, 138 opakowań orzeszków **8. a)** $x = -2$ **b)** $x = 4{,}5$ **c)** Nie ma rozwiązania. **d)** $x = -3$ **9. a)** $x = 4$ **b)** $x = -1\frac{1}{18}$ **c)** $x = -6$ **Zestaw 2** **1.** D **3.** I. F, II. P **4.** $x + 6$ **5. a)** $2 + 3\sqrt{2}$ **b)** $-5 + \sqrt{3}$ **c)** $5\sqrt{6} - 10$ **6.** mama: 39 lat, córka: 13 lat **7.** 252 zł **8. a)** $x = -2\frac{1}{5}$ **b)** $x = \frac{7}{11}$ **c)** $x = 1\frac{3}{5}$ **9. a)** $x = 14$ **b)** $x = -2\frac{1}{3}$ **10. a)** $x = -2{,}5$ **b)** $x = 3$ **11.** A **12. a)** -1 **b)** -3

s. 90 **Zadania na temat...**

1. wiersz 7: 1 7 21 35 35 21 7 1, wiersz 8: 1 8 28 56 70 56 28 8 1 **2.** 1, 2, 4, 8, 16, 32 itd. Suma liczb w n-tym wierszu jest równa 2^n. **6.** $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$, w wierszu 4 **7.** 3432

s. 92 **Zadania na deser**

2. Nie zawsze; np. $x = 0{,}5$; liczba musi być liczbą całkowitą. **3. a)** $2n$ **b)** $2n + 1$ **c)** $3n$ **d)** $4n + 3$ **6.** 5 i 2 lub 11 i 10 **8. a)** 7^2 **b)** 50^2 **c)** $(n+1)^2$

III. FIGURY NA PŁASZCZYŹNIE

s. 97 **1. Własności kątów**

Ćwiczenia **1.1.** *Wskazówka.* Znajdź pary kątów naprzemianległych. **2.** Jedno rozwiązanie: 30°, 30°, drugie nie jest możliwe, bo $120° + 120° > 180°$. **Zadania** **1.** $\alpha = 64°$, $\beta = 30°$, $\gamma = 68°$, $\delta = 45°$ **2.** $\delta = 72°$, $\varepsilon = 18°$, $\varphi = 44°$ **3. a)** 330° i 30° **b)** 340° i 20° **c)** 250° i 110° **d)** 180° **4. a)** prostokątny nierównoramienny **b)** rozwartokątny nierównoramienny **c)** ostrokątny równoramienny **5. a)** 137° **b)** 43° **6.** $\sphericalangle CBA = 80°$, $\sphericalangle EBA = 35°$, $\sphericalangle CBD = 45°$ **7. a)** $\alpha = 74°$, $\beta = 74°$ **b)** $\alpha = 52°$, $\beta = 128°$ **c)** $\alpha = 77°$, $\beta = 103°$ **8. a)** $\alpha = 65°$, $\beta = 55°$ **b)** $\alpha = 63°$, $\beta = 118°$ **c)** $\alpha = 63°$, $\beta = 117°$ **9. a)** $\alpha = 157°$, $\beta = 23°$, $\gamma = 157°$, $\delta = 23°$ **b)** $\alpha = 68°$, $\beta = 68°$, $\gamma = 68°$, $\delta = 68°$ **c)** $\beta = 142°$, nie można obliczyć γ i δ **d)** $\alpha = 53°$, $\beta = 53°$, $\gamma = 127°$, nie można obliczyć δ **10.** 20° **11. a)** 74°, 37°, 69° **b)** 22,5°, 45°, 112,5° **12. a)** 20°, 70°, 90°; 20°, 40°, 120°; 50°, 60°, 70° **b)** 20°, 100°, 60°; 30°, 80°, 70°; 30°, 100°, 50°; 40°, 80°, 60°; 40°, 70°, 70°; 20°, 110°, 50°; 1 równoramienny **13.** 15°, 15°, 150° **Dla dociekliwych** 1. 90° **2.** 25° **3. a)** 90° **b)** 90° **c)** 270° **Czy już umiem?** **I.** 1. F, 2. F, 3. F, 4. P **II.** 50°, 60°, 70° **III.** $\alpha = 56°$, $\beta = 31°$, $\gamma = 34°$ **IV.** 76

s. 105 **2. Kąty – zadania**

Ćwiczenia **1.** 66°, 66°, 132°, 96° **2.** $180° - 4\alpha$ **3.1.** 10° **3.2.** $30° - \frac{\alpha}{2}$, $\alpha < 60°$ **Zadania** **1.** $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 20°$ **2.** 5°, 85° **4.** 30°, 80°, 70° **5.** $\alpha = 50°$, $\beta = 130°$, $\gamma = 60°$ **6.** 40°, 100°, 100°, 120° **7. a)** 50°, 130°, 50°, 130° **b)** 35°, 145°, 35°, 145° **8. a)** $\alpha = 115°$, $\beta = 50°$ **b)** $\alpha = 40°$, $\beta = 100°$ **9. a)** o 120° **b)** o 40° **c)** $180° - 2\alpha$ **10. a)** $\sphericalangle CBA = 100°$, $\sphericalangle EBA = 60°$, $\sphericalangle CBD = 40°$ **b)** $\sphericalangle CBA = 180° - 4\delta$, $\sphericalangle EBA = 160° - 5\delta$, $\sphericalangle CBD = 20° + \delta$, $\delta = 20°$ **11.** 60°, np. 20°, 60°, 100° lub 30°, 60°, 90° **12.** 90° **13.** $\alpha = 20°$ **Dla dociekliwych** **1.** 36°, 72°, 72° **Czy już umiem?** **I.** B **II.** $\alpha - 60°$, $60° < \alpha < 120°$ **III.** 80°, 100°, 80°, 100° **IV.** A

s. 114 **3. Twierdzenie matematyczne i jego dowód**

Ćwiczenia **1. a)** Założenie: figura jest rombem. Teza: ma co najmniej dwie osie symetrii. **b)** Założenie: liczba jest podzielna przez 3. Teza: suma jej cyfr jest podzielna przez 3. **2.** *Wskazówka.* Jak przecinają się przekątne rombu? **3. a)** tak **b)** nie **4.1.** 90° **4.2.** *Wskazówka.* Oznacz jeden kąt ostry trójkąta symbolem literowym, wyznacz miarę drugiego kąta, a następnie miarę kąta między dwusiecznymi. **5.** Dwa boki tego trapezu są równe. **Zadania** **1. a)** Założenie: dwie liczby są wymierne. Teza: ich iloczyn jest liczbą wymierną. **b)** Założenie: dwie liczby są nieparzyste. Teza: ich suma jest liczbą parzystą. **c)** Założenie: pies jest zdrowy. Teza: ma cztery nogi. **d)** Założenie: figura jest prostokątem. Teza: jej przekątne są równe. **2. a)** nie **b)** tak **c)** nie **d)** tak **3.** Poprawne jest rozwiązanie Basi. **4. a)** tak **b)** nie **5.** Poprawne są rozwiązania Gabrysi i Edwina. **6.** *Wskazówka.* Możesz oznaczyć boki np. literami a i b oraz zapisać wzory na pole. **7.** Założenie: punkt E leży wewnątrz prostokąta $ABCD$. Teza: suma pól trójkątów ABE i CDE jest równa połowie pola prostokąta $ABCD$. *Wskazówka.* Podziel prostokąt odcinkiem równoległym do boków AB i CD, przechodzącym przez E. **8.** *Wskazówka.* Znajdź pary kątów wierzchołkowych. **9.** *Wskazówka.* Oblicz, ile stopni ma każdy z kątów. **10. a)** nie **b)** tak **c)** nie **11. a)** 65° **15.** *Wskazówka.* Wystarczy, że udowodnisz to dla jednej przekątnej. Dowód dla drugiej jest analogiczny. **16.** *Wskazówka.* Oznacz na rysunku równe kąty jednakowymi literami. **17.** *Wskazówka.* Poszukaj równych kątów i oznacz je jednakowymi literami. Znajdź miarę kąta AEC. **Czy już umiem?** **II. a)** nie **b)** tak **IV.** TAK, A

s. 125 **4. Nierówność trójkąta**

Ćwiczenia **1. a)** tak **b)** nie **2. a)** większa niż 7 cm, mniejsza niż 17 cm **b)** 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 lub 11 [cm] **3.** Punkt A leży na odcinku BC. **4. a)** 2, 9, 9 **b)** 4, 8, 8 lub 6, 6, 8 **Zadania** **1. a)** tak **b)** nie **2.** tak, trzeci bok może mieć np. 1 km **3.** większą niż 2 cm, mniejszą niż 14 cm **4.** mniejszą niż 46 cm **5.** większą niż 11,5 cm **6. a)** większą niż 5, mniejszą niż 10 **b)** mniejszą niż 10 **8.** 27 cm lub 13 cm **9.** dwa sposoby: 3 cm, 4 cm i 5 cm oraz 4 cm, 5 cm i 8 cm **11.** nie większą niż 27 **Czy już umiem?** **I. a)** nie **b)** tak **II.** 1. P, 2. F **III.** większą niż 13 cm, mniejszą niż 73 cm **IV.** B

s. 130 **Powtórzenie III**

Zestaw 1 **1. a)** 120° **b)** 50° **c)** 50° **2. a)** 85° **b)** 27° **c)** 100° **3.** C **4.** 20° i 140° albo 80° i 80° **5.** 70°, 110°, 70°, 110° **6.** 36°, 36° i 108° **7.** TAK, B **8. a)** Założenie: liczba jest podzielna przez 3. Teza: suma cyfr tej liczby jest podzielna przez 3. **b)** Założenie: figura jest rombem. Teza: jej przekątne są prostopadłe. **Zestaw 2** **1.** C **2.** dwa **3.** 20°, 80°, 80° lub 40°, 40°, 100° **4.** NIE, B **5.** $\sphericalangle ACO = 10°$, $\sphericalangle CAO = 40°$ i $\sphericalangle AOC = 130°$ **6.** 90°, 45°, 135°, 90° lub 72°, 36°, 144°, 108° **7. a)** Założenie: trójkąty mają tę samą podstawę AB, a ich wierzchołki C i D leżą na tej samej prostej równoległej do podstawy AB. Teza: te trójkąty mają równe pola. **b)** Założenie: liczby są nieparzyste. Teza: ich iloczyn jest nieparzysty.

s. 132 **Zadania na temat...**

1. $x^2 + y^2 = z^2$; 3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17 to przykłady trójek pitagorejskich. Równanie w tej postaci jest skróconym zapisem tezy twierdzenia Pitagorasa. **2.** np. $x^3 + y^3 = z^3$, $x^5 + y^5 = z^5$, $x^{101} + y^{101} = z^{101}$ **3.** Założenie: $n = 3$. Teza: nie istnieje trójka dodatnich liczb naturalnych x, y, z, która spełniałaby równanie $x^n + y^n = z^n$. **4.** np. $2^3 + 3^3 = \left(\sqrt[3]{2^3 + 3^3}\right)^3$, czyli $2^3 + 3^3 = \left(\sqrt[3]{35}\right)^3$ **5.** Założenie: n jest liczbą naturalną większą od 2. Teza: nie istnieją dodatnie liczby naturalne

x, y, z, które spełniałyby równanie $x^n + y^n = z^n$. **6.** Jeśli n jest liczbą parzystą większą od 2, to można ją przedstawić jako sumę dwóch liczb pierwszych. **7.** $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$ **8.** na dwa sposoby: $20 = 3 + 17 = 7 + 13$

s. 134 **Zadania na deser**

1. $\alpha = 72°$, $\beta = 36°$, $\gamma = 216°$ **3.** *Wskazówka*. Zwróć uwagę na jednostki. Jeśli ta wskazówka nie jest wystarczająca, to przepisz sofizmat, wstawiając zamiast złotych i groszy metry i centymetry. **4.** *Wskazówka*. Skorzystaj ze wskazówki do poprzedniego zadania. **5.** *Wskazówka*. Oblicz pola poszczególnych elementów, wykonaj staranny rysunek w skali 4 : 1. **6.** *Wskazówka*. Podstaw wybrane wartości w miejsce zmiennych. **7.** *Wskazówka*. Skorzystaj ze wskazówki do poprzedniego zadania.

IV. WIELOKĄTY

s. 138 **1. Figury przystające**

Ćwiczenia **1.** figury I i II – nie, figury I i III – tak **2. a)** tak **b)** tak **Zadania** **1.** I. nie, II. tak **2. a)** tak **b)** nie **c)** tak **d)** nie **e)** nie **f)** tak **g)** tak **3.** Przystające są druga, czwarta i piąta figura od lewej. **5.** I i V, II i IV **6.** Nie, np. kwadrat nie jest przystający do prostokąta o tej samej długości przekątnych, które przecinają się pod kątem 30°. **7.** I. P, II. F **8.** $AB = 1 + \sqrt{3}$, $\sphericalangle BAC = 45°$, $\sphericalangle CBA = 30°$, $ML = \sqrt{2}$, $KM = 2$, $\sphericalangle KML = 105°$, $\sphericalangle MLK = 45°$ **Dla dociekliwych** **1.** Figury mają równe kąty i równe boki, ale nie są przystające. **Czy już umiem?** **I. a)** nie **b)** tak **c)** tak **II.** $a = 5$, $b = 3$, $\alpha = 110°$, $\beta = 70°$, $\gamma = 110°$ **III.** 4,8

s. 146 **2. Cechy przystawania trójkątów**

Ćwiczenia **1. a)** tak, kbk **b)** Nie można stwierdzić. **c)** tak, kbk **Zadania** **1. a)** bkb **b)** kbk **c)** bbb **d)** kbk/bkb **2. a)** tak, bbb **b)** tak, kbk **c)** tak, kbk **d)** tak, kbk **3.** nie **4.** tak **5.** nie **6.** nie **7.** np. ABC i BAD, CAO i DBO. *Wskazówka*. Znajdź na rysunku pary kątów wierzchołkowych. **8. a)** tak **b)** tak **9. b)**, **c)**, **f)** – tak, **a)**, **d)**, **e)** – nie **Dla dociekliwych** **1.** Jest prawdziwa. **3. a)** nie **b)** tak **c)** nie. *Wskazówka*. Weź pod uwagę także wielokąt wklęsły. **Czy już umiem?** **I. a)** tak, bkb **b)** nie **c)** tak, kbk **II. a)** tak **b)** nie **III. a)** $X = 140$, $Y = 160$ **b)** $A = 171$, $B = 252$

s. 151 **3. Przystawanie trójkątów w dowodach twierdzeń**

Ćwiczenia **1.** *Wskazówka*. Narysuj dwie proste prostopadłe do prostych p, q, r, s, jedną przechodzącą przez punkt B, drugą przez C. Znajdź kąty odpowiadające i naprzemianległe. **Zadania** **1.** TAK, C **2.** NIE, B **3.** NIE, A **4.** β **5.** A, bkb, $\alpha = 39°$, $\gamma = 41°$ **6.** B, $a = 36$, $b = 42$ **7.** *Wskazówka*. Z której cechy przystawania trójkątów możesz skorzystać? **8.** Trójkąty przystające mogą się na siebie nakładać. **9.** *Wskazówka*. Co możesz powiedzieć o trójkątach ADF i BCE? **10.** *Wskazówka*. Na rysunku w zeszycie możesz zaznaczyć równe odcinki jednakowymi kolorami. W ten sposób łatwiej znajdziesz trójkąty przystające. Równe kąty także zaznacz w jednakowy sposób. **11.** AKD i BCL, DCK i ABL. *Wskazówka*. Skorzystaj na przykład z cechy kbk. **Czy już umiem?** **I.** A, kbk, $AB = c$, $BC = a$, $\sphericalangle ACB = 65°$ **IV.** nie

s. 159 **4. Wielokąty foremne**

Ćwiczenia **1. a)** romb, który nie jest kwadratem **b)** prostokąt, który nie jest kwadratem **2. a)** $120°$ **b)** $128\frac{4}{7}°$ **c)** $180° - \frac{360°}{n}$ **Zadania** **2.** trójkąty ABC i AFE: $30°$, $30°$, $120°$; trójkąty ADE i ACD: $30°$, $60°$, $90°$ **3.** *Wskazówka*. Podziel sześciokąt na trójkąty równoboczne. **4. a)** $96\sqrt{3}$ cm^2 **b)** $18\sqrt{3}$ cm^2 **5. a)** 16 cm, $8\sqrt{3}$ cm **b)** 20 cm, $10\sqrt{3}$ cm **6.** trójkąty ABC i AHG: $22{,}5°$, $22{,}5°$, $135°$,

trójkąty ACD i AGF: 22,5°, 45°, 112,5°, trójkąty ADE i AFE: 22,5°, 67,5°, 90° **7.** 144°, 150° **8.** trójkąty AED i ABC: 36°, 36°, 108°, trójkąt ACD: 36°, 72°, 72° **9.** pięciokąt foremny o kątach 108°, pięć trójkątów o kątach 36°, 72°, 72° i pięć trójkątów o kątach 36°, 36°, 108° **12. a)** Pola wielokątów oznaczonych literami A, B, C są odpowiednio równe 16 cm², $8\sqrt{2}$ cm², 4 cm² **b)** $32(1+\sqrt{2})$ cm² **13.** *Wskazówka*. Rozwiąż podobnie jak zadanie 11. **Dla dociekliwych** **1.** pole dwunastokąta: $3R^2$, bok dwunastokąta: $\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot R$ **Czy już umiem?** **I.** B **II.** 4 cm **IV. a)** 5 **b)** 5 **c)** 1

s. 165 **Powtórzenie IV**

Zestaw 1 **1. a)** tak **b)** nie **2.** $a = b = c = d = 3$ cm, $\alpha = \gamma = 80°$, $\beta = \delta = 100°$ **3. a)** kbk **b)** bbb **c)** kbk/bkb **4. a)** Nie, naprzeciw boku długości 7 są różne kąty. **b)** Tak, przy boku długości 7 są takie same kąty. **5.** tak **6.** D **9.** 156° **10. a)** 2 cm **b)** 12 cm **c)** $6\sqrt{3}$ cm² **d)** 4 cm, $2\sqrt{3}$ cm **11.** $18\sqrt{3}$ cm **13.** NIE, C **Zestaw 2** **1.** TAK, B **2.** NIE, C **3.** TAK, C **7.** 16 cm, $8\sqrt{3}$ cm **8.** 10 **9.** 20°

s. 168 **Zadania na temat...**

1. *Wskazówka*. Z jakich własności przekątnej kwadratu możesz skorzystać? **5.** $\triangle AHB$, $\triangle AIH$, $\triangle ADI$; 30°, 60°, 90° **6.** *Wskazówka*. Na jakie kąty został podzielony kąt DAB po złożeniu kartki? **7.** 120°. *Wskazówka*. Porównaj składanie według instrukcji E i B. **8.** sześciokąt foremny

s. 170 **Zadania na deser**

1. nie **2.** na 4 sposoby **3.** nie **7. a)** prostokąt **b)** równoległobok, który nie jest prostokątem **8.** *Wskazówka*. Oznacz jako 2α jeden z kątów między przekątnymi. Wyznacz kąty czworokąta. **9.** *Wskazówka*. Zwróć uwagę na kąty pomiędzy przekątną a bokami. **13.** Jedna z wysokości jest dwa razy mniejsza od drugiej. **14. a)** nie **b)** tak **c)** $n - 3$ **15.** tak; 50°, 130°, 50°, 130°; jedno rozwiązanie

V. GEOMETRIA PRZESTRZENNA

s. 174 **1. Graniastosłupy**

Ćwiczenia **1. a)** 6 wierzchołków; 5 ścian, w tym 3 ściany boczne; 9 krawędzi, w tym 3 krawędzie boczne i 6 krawędzi podstaw **b)** 8 wierzchołków; 6 ścian, w tym 4 ściany boczne; 12 krawędzi, w tym 4 krawędzie boczne i 8 krawędzi podstaw **c)** 12 wierzchołków; 8 ścian, w tym 6 ścian bocznych; 18 krawędzi, w tym 6 krawędzi bocznych i 12 krawędzi podstaw **2.** 7 cm **3.** $8\sqrt{2}$ cm **Zadania** **1. a)** równoległe: np. DF i AC, DE i AB, BE i AD, prostopadłe: np. AD i AB, AD i AC, BE i DE **b)** równoległe: np. AE i BF, AE i DH, BC i FG, prostopadłe: np. EH i DH, AB i BF, BC i CG **c)** równoległe: np. GH i AB, HI i BC, IC i BH, prostopadłe: np. GH i BH, BC i CI, FL i GL **2. a)** 16 wierzchołków, 24 krawędzie, 10 ścian **b)** 40 wierzchołków, 60 krawędzi, 22 ściany **3.** $2n$ wierzchołków, $3n$ krawędzi, $(n + 2)$ ścian **4. a)** nie **b)** tak **c)** tak **5.** 78 cm **6.** 12 cm **7. a)** CD_1 **b)** BF, A_1E_1 **c)** BD_1, BE_1 **8.** 10 **9.** graniastosłup prawidłowy sześciokątny **10.** 0,6 m × 0,6 m × 0,9 m **11.** do trzech **12.** $\sqrt{41}$ cm, $\sqrt{65}$ cm, $\sqrt{65}$ cm **14. a)** 8 cm **b)** $4\sqrt{3}$ cm **15. a)** 22 **b)** 66 **16. a)** $44a$ cm **b)** $(18b + 12)$ cm **17. a)** 18 **b)** nie **Dla dociekliwych** **1.** 1 **3.** sześciokąt foremny **4.** tak **Czy już umiem?** **I.** B, pięciokąt; 7 ścian, 15 krawędzi, 10 wierzchołków **II.** przekątne podstaw: AD, $E'C'$, przekątne ścian bocznych: AB', AE', przekątna graniastosłupa: AD' **III.** B **IV. a)** $\sqrt{34}$ **b)** tak

s. 184 **2. Objętość graniastosłupa**

Ćwiczenia **1.** 240 cm^3 **2. a)** 216 cm^3 **b)** $324\sqrt{3}$ cm^3 **3.1. a)** 1 000 000 cm^3 **b)** 0,001 cm^3 **c)** 16 000 cm^3 **d)** 300 000 cm^3 **3.2. a)** 1 000 000 000 m^3 **b)** 0,001 m^3 **c)** 0,000005 m^3 **d)** 0,0000006 m^3 **4.** 0,12 l = 120 ml **5.** 400 000 l **Zadania** **1. a)** 150 cm^3 **b)** $120\sqrt{3}$ cm^3 **c)** $112\sqrt{3}$ cm^3 **2.** $54\sqrt{3}$ cm^3 **3.** 40 cm **4.** 104 ml **5.** 2400 l **6.** 4 cm **7.** 4800 $cm^3 = 4{,}8\ dm^3$ **8.** 6 cm **9. a)** 20 m^3 = 20 000 l **b)** 164,85 zł **10.** I **11.** 4 cm, 8 cm **12.** $270\sqrt{3}$ cm^3 **13.** $108\sqrt{3}$ cm^3 **Dla dociekliwych** 1. $\frac{3\sqrt{3}}{2} : 1$ **2.** $\frac{3}{8}a^3\sqrt{3}$ **Czy już umiem?** I. a) $48\sqrt{3}$ cm^3 b) 720 cm^3 c) $648\sqrt{3}$ cm^3 II. C III. 1. F, 2. P, 3. P

s. 191 **3. Pole powierzchni graniastosłupa**

Ćwiczenia **2.** $(12 + 4\sqrt{2})$ cm^2 **3.** 375 cm^3 **Zadania** **2. a)** $P_c = 216$, $V = 216$ **b)** $P_c = 108 + 18\sqrt{3}$, $V = 54\sqrt{3}$ **c)** $P_c = 216 + 108\sqrt{3}$, $V = 324\sqrt{3}$ **3. a)** $V = 384\sqrt{3}$ cm^3, $P_c = (576 + 32\sqrt{3})$ cm^2 **b)** $V = 648$ cm^3, $P_c = 504$ cm^2 **c)** $V = 288\sqrt{3}$ cm^3, $P_c = (288 + 48\sqrt{3})$ cm^2 **4. a)** $P_c = 210$ cm^2, $V = 150$ cm^3 **b)** $P_c = 140$ cm^2, $V = 100$ cm^3 **c)** $P_c = 256$ cm^2, $V = 240$ cm^3 **5. a)** 180 cm^3 **b)** 144 cm^3 **6. a)** wysokość: 8, pole: $96 + 8\sqrt{3}$ **b)** wysokość: 6, pole: 240 **c)** wysokość: 5, pole: $60 + 36\sqrt{3}$ **7.** 300 cm^2, taka sama **8. a)** 608 cm^2 **b)** $(36 + 24\sqrt{41})$ cm^2 **c)** $(36 + 96\sqrt{2})$ cm^2 **9.** $120\sqrt{3}$ cm^2 **10.** 64 cm **11.** II i III **12.** 35 m^2 **Czy już umiem?** **I.** D **II.** B, $P_c = 9$ cm^2, $V = 1{,}5$ cm^3 **III.** $P_c = (96 + 48\sqrt{3})$ cm^2, $V = 96\sqrt{3}$ cm^3 **IV. a)** $x = 7{,}5$ **b)** $x = -\frac{1}{13}$

s. 200 **4. Ostrosłupy**

Ćwiczenia **1. a)** 5 ścian, 5 wierzchołków, 8 krawędzi **b)** 6 ścian, 6 wierzchołków, 10 krawędzi **c)** 7 ścian, 7 wierzchołków, 12 krawędzi **2.** w punkcie przecięcia przekątnych dolnej podstawy **Zadania** **1.** czworościan – tak; sześcian – nie, np. ostrosłup pięciokątny **2. a)** 9 wierzchołków, 16 krawędzi, 9 ścian **b)** 21 wierzchołków, 40 krawędzi, 21 ścian **3.** $(m + 1)$ wierzchołków, $2m$ krawędzi, $(m + 1)$ ścian **4. a)** tak **b)** tak **c)** tak **d)** nie **5. a)** 20 **b)** 16 **6.** graniastosłup: 9, ostrosłup: 8 **7.** I, III, V, VII – fałsz, II, IV, VI – prawda **8. a)** prawda, tak **b)** prawda, nie **c)** fałsz **d)** prawda, tak **e)** prawda **f)** prawda, tak **10. a)** BCW i WST, $\sqrt{55}$ cm **b)** ASW i WST, $\sqrt{46}$ cm **11.** 32 cm **12. a)** $(20 + 3\sqrt{2})$ cm **b)** DC **13.** krawędź boczna: 8 cm, krawędź podstawy: $4\sqrt{2}$ cm, wysokość: $4\sqrt{3}$ cm **14.** $3\sqrt{2}$ cm **Dla dociekliwych** 4. tak **Czy już umiem?** **I.** II – czworokąt, IV – trójkąt **II.** C **IV.** 30,6 km

s. 207 **5. Objętość ostrosłupa**

Ćwiczenia **1. a)** 60 cm^3 **b)** $90\sqrt{3}$ cm^3 **Zadania** **1. a)** 6 cm^3 **b)** $25\sqrt{3}$ cm^3 **c)** $20\sqrt{3}$ cm^3 **2.** 6 cm **3.** 5 cm **4.** 400 cm^3 **5.** 5 razy **6.** $4\sqrt{3}$ cm^2 **7.** $29\frac{1}{6}$ cm^3 **8. a)** $144\sqrt{3}$ cm^3 **b)** $(48 + 24\sqrt{2})$ cm **9. a)** $85\frac{1}{3}$ cm^3 **b)** $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ cm^3 **10. b)** 192 cm^3 **Dla dociekliwych** **1.** $AW = 12$, $AS = 4\sqrt{3}$, $SW = 4\sqrt{6}$ **2.** $\frac{\sqrt{6}}{3}a$ **3.** $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ **4.** 4 cm **Czy już umiem?** I. C II. Graniastosłup ma 3 razy większą objętość. III. wyżywienie: 200 zł, noclegi: 180 zł

s. 211 **6. Pole powierzchni ostrosłupa**

Ćwiczenia **1.1. b)** I, III – tak, II – nie **2.** $(64\sqrt{3} + 144)$ cm^2 **Zadania** **1. a)** $(36 + 36\sqrt{3})$ cm^2 **b)** $64\sqrt{3}$ cm^2 **2.** $x = 3{,}5$, ostrosłup czworokątny **3.** $(24\sqrt{3} + 36\sqrt{5})$ cm^2 **4.** $V = 216$ cm^3, $P_c = (180 + 18\sqrt{34})$ cm^2 **5.** $P_b = (12 + 2\sqrt{21})$ cm^2, $V = 4\sqrt{3}$ cm^3 **6.** 10 **7.** 16,8 m^2 **Czy już umiem?** **I. a)** 88 cm, $P_c = 336$ cm^2 **b)** 138 cm, $P_c = (360 + 150\sqrt{3})$ cm^2 **II.** I. F, II. P **III.** $25\sqrt{3}$ cm^2 **IV. a)** $-5x + 10$ **b)** $-x^2$

s. 217 **7. Graniastosłupy i ostrosłupy – zadania**

Ćwiczenia **1. a)** nie **b)** tak **2.** $P_c = 340$ cm^2, suma długości krawędzi: 92 cm **Zadania** **1. a)** jedna kolorowa ściana: 6 klocków, dwie kolorowe ściany: 12 klocków, trzy kolorowe ściany: 8 klocków **b)** jedna kolorowa ściana: 54 klocki, dwie kolorowe ściany: 36 klocków, trzy kolorowe ściany: 8 klocków **c)** jedna pomalowana ściana: 24 klocki, dwie pomalowane ściany: 24 klocki, trzy pomalowane ściany: 8 klocków, wszystkie niepomalowane ściany: 8 klocków **d)** jedna pomalowana ściana: 1944 klocki, dwie pomalowane ściany: 216 klocków, trzy pomalowane ściany: 8 klocków, wszystkie niepomalowane ściany: 5832 klocki **2.** 180 cm **3.** $P_c = 23{,}5$ cm^2, $V = 7{,}5$ cm^3 **4. a)** 9 cm^2 **b)** 1,5 cm^3 **c)** 7125 zł **5. a)** tak **b)** nie **c)** nie **d)** tak **e)** nie **f)** nie **g)** nie **7. a)** $\left(400+400\sqrt{3}\right)$ cm^2 **b)** $P_c = \left(1200+200\sqrt{3}\right)$ cm^2, $V = 2000\sqrt{3}$ cm^3 **8. a)** trzy **b)** $V_{\mathrm{I}} = 125$, $V_{\mathrm{II}} = 64$, $V_{\mathrm{III}} = 8$ **c)** trzy **9.** $P_c = 648$, $V = 720$ **10. a)** jasny: 2 cm × 3 cm × 6 cm, ciemny: 3 cm × 3 cm × 6 cm **b)** z jasnych – nie, z ciemnych – tak **11. a)** 18 l **b)** tak, 4 l **12. a)** nie **b)** tak, 72 klocki **c)** nie **13.** B **16.** A – zielony, B – fioletowy, C – żółty, D – pomarańczowy, E – zielony, F – niebieski, G – żółty, H – czerwony, I – żółty, J – fioletowy, K – pomarańczowy, L – czerwony **18.** N, B **19.** A **20. a)** 115,2 g **b)** 35 **21. a)** 5 cm × 5 cm × 35 cm **b)** 875 cm^3 **c)** $a = 2000$ cm, $b = 1505$ cm **Dla dociekliwych** **1.** zielona: 1, niebieska: 1, czerwona: 1, niepomalowana: 3 **2.** nie, nie, tak, nie **Czy już umiem?** **I.** $P_c = 18$ cm^2, $V = 3{,}75$ cm^3 **II.** C **III.** $666\frac{2}{3}$ cm^3 **IV. a)** $\frac{11}{12}$ **b)** 18 **c)** $-7\frac{2}{3}$

s. 226 **8. Bryły – zadania**

Ćwiczenia **1.** $P_c = 198$, $V = 170$ **2.** 150 cm^3 **3.** $P_c = \left(64+32\sqrt{10}\right)$ cm^2, $V = 128$ cm^3 **Zadania** **1.** $P_c = 864$ cm^2, $V = 1512$ cm^3 **2.** 63,36 m^2 **3. a)** świeca w kształcie prostopadłościanu: 735 cm^3, świeca w kształcie ostrosłupa: 200 cm^3 **b)** 183 świece **4.** 6 cm **5.** $\left(75+25\sqrt{2}\right)$ cm^2 **6.** Oba wielościany (ostrosłupy) mają takie same objętości i pola powierzchni całkowitej: $20\frac{1}{4}$ cm^3, $\frac{63\sqrt{3}+27\sqrt{15}}{4}$ cm^2. **7.** 1 : 5 **8.** 384 cm^3 **9. a)** prostopadłościan z wyciętym ostrosłupem prawidłowym czworokątnym **b)** $\left(80-\frac{16}{3}\sqrt{5}\right)$ cm^3 **c)** 120 cm^2 **d)** $\left(52+4\sqrt{13}\right)$ cm **Dla dociekliwych** **1.** Bryły te jako pierwszy na przełomie V i IV wieku p.n.e. dokładnie opisał filozof grecki Platon. Nie ma więcej wielościanów foremnych. **2.** dwunastościan: 30 krawędzi, 20 wierzchołków, dwudziestościan: 30 krawędzi, 12 wierzchołków **3.** $72\sqrt{2}$ cm^3, $72\sqrt{3}$ cm^2 **Czy już umiem?** **I.** $54\sqrt{3}$ cm^2 **II.** $V = 160$, $P_c = 224$ **III.** 60 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

s. 231 **Powtórzenie V**

Zestaw 1 **1.** 7 ścian, 10 wierzchołków, 15 krawędzi **2.** B **3.** B **4. a)** $P_c = \left(2\sqrt{3}+30\right)$ cm^2, $V = 5\sqrt{3}$ cm^3 **b)** $P_c = 276$ cm^2, $V = 280$ cm^3 **c)** $P_c = 172$ cm^2, $V = 112$ cm^3 **5.** 2,97 m^3 = 2 970 000 cm^3 **6.** 8 **7.** I. F, II. F **8.** $\left(6\sqrt{3}+6\sqrt{15}\right)$ cm^2 **9.** $8\sqrt{3}$ cm^3 **10.** B **Zestaw 2** **1.** $3n$ krawędzi, $(n+2)$ ścian **2.** 8 cm **3. a)** $P_c = \left(75+\frac{25\sqrt{3}}{2}\right)$ cm^2, $V = \frac{125\sqrt{3}}{4}$ cm^3 **b)** $P_c = 150$ cm^2, $V = 125$ cm^3 **c)** $P_c = \left(150+75\sqrt{3}\right)$ cm^2, $V = \frac{375\sqrt{3}}{2}$ cm^3 **4.** 0,36 m^3 **5.** 4 cm^3 **6. a)** ok. 23 m^3 **b)** ok. 26 min **7.** $48\sqrt{3}$ cm^3 **8.** $P_c = \left(1200+1200\sqrt{3}\right)$ cm^2 i $V = 6000\sqrt{3}$ cm^3 lub $P_c = \left(1200+300\sqrt{3}\right)$ cm^2 i $V = 3000\sqrt{3}$ cm^3 **9.** 500 cm^3

s. 234 **Zadania na temat...**

1. a) $144\sqrt{2}$ m$^2 \approx 204$ m^2 **b)** 7616 zł **2.** $\sqrt{7}a^2$ **3. a)** projekt A **4.** 32 l

s. 236 **Zadania na deser**

1. B **2.** B **3.** I. F, II. P **5.** 200 cm^3 **6.** 648 cm^3 **7.** 2520 cm^2 **8. a)** 24 dm^3 **b)** 72 dm^3 **9. a)** 9000 m^3 **b)** 2520 m^3 **11.** $x = 4$ cm **12.** $V = 60\sqrt{3}$ cm^3, $P_c = \left(60+36\sqrt{3}+6\sqrt{183}\right)$ cm^2 **13. a)** $\left(18+2\sqrt{41}\right)$ cm **b)** $\left(8+2\sqrt{57}+2\sqrt{73}\right)$ cm **c)** $\left(8+2\sqrt{13}+2\sqrt{21}\right)$ cm

VI. POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI ZE SZKOŁY PODSTAWOWEJ

s. 238 **1. Liczby wymierne**

Zadania **1.** C **2.** B **3.** B **4.** C **5.** A **6.** C **7. a)** $X = 260$, $Y = 420$ **b)** $X = 242$, $Y = 372$ **8.** D **9.** C **10.** B **11.** B **12.** A **13.** NIE, B **14.** TAK, C **15.** TAK, B **16.** I. F, II. P **17.** b **18. a)** 24 **b)** 0,22 **c)** $1\frac{1}{7}$ **19. a)** 10,44 **b)** 0,2088112 **c)** 12,52 **20. a)** $-2\frac{11}{15}$ **b)** $-1{,}1$ **c)** $-9\frac{1}{8}$ **21.** Zjadły po równo, została $\frac{1}{5}$ szynki. **22.** I. F, II. P, III. P **23.** 8 liczb: 102, 152, 204, 254, 306, 356, 408, 458 **24.** ujemne: $a - b$; $a \cdot b$; $(a-b)^3$ **25.** cyfrę 0 **26.** 10 opakowań po 2 sztuki; 7 opakowań po 2 sztuki i 2 po 3 sztuki; 4 opakowania po 2 sztuki i 4 po 3 sztuki; 1 opakowanie po 2 sztuki i 6 po 3 sztuki

s. 242 **2. Praktyczna matematyka**

Zadania **1.** B **2.** C **3.** B **4.** A **5.** B **6.** B **7.** B, C **8.** B **9.** C **10.** C **11.** C **12.** D **13.** I. F, II. P **14.** 1518 zł **16.** 3,95 zł **17.** I. P, II. F **18.** I. F, II. P **19.** C **20.** 10,53 zł **21.** 21,60 zł

s. 246 **3. Procenty**

Zadania **1.** C **2.** D **3.** D **4.** B **5.** A **6.** C **7.** C **8.** D **9.** C **10.** A, C **11.** B **12.** I. F, II. P, III. F, IV. P **13.** I. F, II. P, III. P **14.** nie **15. a)** o $33\frac{1}{3}\%$ **b)** o 25% **16. a)** o 140% **b)** 32% **17.** I. P, II. F **18.** I. F, II. F, III. P **19.** 14,40 zł **20.** B **21.** I. P, II. P

s. 250 **4. Potęgi**

Zadania **1.** D **2.** C **3.** B **4.** C **5.** C **6.** A **7.** D **8.** B **9.** A **10.** C **11.** I. P, II. F, III. F **12.** $(-2)^3$, -2^0, $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$, 0^2, $(-2)^0$, 2^3 **13.** $(-3)^{12}$, 3^{12}, $(-9)^6$ **14.** 512 **15. a)** 25 **b)** 16 **c)** 100 **16.** 20 cm

s. 252 **5. Pierwiastki**

Zadania **1.** C **2.** B **3.** C **4.** D **5.** C **6.** B **7.** A **8.** B **9.** B **10.** C **11.** C **12.** I. P, II. F **13. a)** 12 **b)** 1,2 **14.** C **15. a)** 9 i 10 **b)** 12 i 13 **c)** –3 i –2 **d)** –2 i –1 **16.** D

s. 254 **6. Wyrażenia algebraiczne**

Zadania **1.** B **2.** C **3.** A **4.** C **5.** A **6.** C **7.** C **8.** I. F, II. P, III. P **9.** I. F, II. P **10. a)** $3x^2 - x$ **b)** $-2x^4 - x^3$ **c)** $5x^3 + x^4$ **11.** $2x + 2$ **12.** $-2x^2 + 8x + 9$; $5 + 8\sqrt{2}$ **13.** 85 **14.** 40 **15. a)** $(160x + 200y)$ zł, 1400 zł **b)** $(35xz + 45yz)$ zł, 1610 zł **16. a)** $10xy$ **b)** $4xy + 10x + 20y$ **17.** *Wskazówka.* Najpierw wykonaj mnożenie.

s. 257 **7. Równania, proporcjonalność prosta**

Zadania **1.** D **2.** A **3.** A **4.** D **5.** I. P, II. F **6.** I. F, II. F, III. F **7.** I. F, II. P **8. a)** 3,4 **b)** 0,7 **c)** Nie ma rozwiązania. **9. a)** $x = \frac{k}{y}$ **b)** $x = \frac{3-y}{2}$ **c)** $x = \frac{a+b}{3}$ **10.** 6 korali i 18 bransoletek **11.** 132° **12.** 8 **13.** 1200 zł **14.** o 24 zł **15. a)** 3,75 szklanki **b)** 72 **16.** Obw. = 20 cm, $P = 24$ cm^2 **17.** 16 **18.** B **19.** $\frac{4}{7}$ l **20.** 60

s. 260 **8. Figury płaskie**

Zadania **1.** D **2. a)** 36° i 144° **b)** 75° i 105° **3.** C **4.** B **5.** $(8\sqrt{10} + 7)$ cm **6.** C **7.** I. P, II. P, III. F **8. a)** $C = (0{,}5; 3)$ **b)** $C = (-4, 0)$ **c)** $C = (5, 6)$ **9.** I. F, II. P, III. P **10.** I. P, II. F **11.** I. F, II. P, III. P **12. b)** 16 **c)** $9 + \sqrt{17}$ **13.** 3 ha **14.** 320 cm^2 **15.** 70 ha = 7000 a **16.** $3 + 8\sqrt{2} + \sqrt{89}$ **17.** $4{,}5\sqrt{3}$ **18.** $h = 4\sqrt{3}$, Obw. $= 20 + 4\sqrt{3}$ **19.** C **20.** $4 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ **21.** *Wskazówka.* Przerysuj rysunek i zaznacz wszystkie kąty, o których coś wiesz z treści zadania. **22.** *Wskazówka.* Przerysuj ten trójkąt i zaznacz wysokość opuszczoną z wierzchołka C. **23.** TAK, C **24.** *Wskazówka.* Zapisz najpierw wzór przedstawiający sumę pól trójkątów ABS i CDS. **25.** GHI **26.** $2\sqrt{2}$ cm **27.** 16 cm **28.** TAK, B

s. 266 **9. Bryły**

Zadania **1.** D **2.** D **3.** B **4.** D **5.** C **6.** A **7.** C **8.** I. P, II. P, III. P, IV. P, V. P **9.** D **10.** C **11.** NIE, C **12.** 576 cm^3 **13.** I. P, II. P, III. P **14.** graniastosłup dziewięciokątny **15.** I. P, II. P **16.** 1,8 t **17.** 8 **18. a)** *b* i *e*, *c* i *d*, *g* i *h*, *j* i *k* **b)** *a*, *f*, *i*, *l* **19.** 10 cm^2 **20.** $15\sqrt{3}$ cm^2 **21.** 69 cm, $P = (25\sqrt{3} + 180)$ cm^2 **22.** 600 cm^3, 480 cm^2, 102 cm **23.** $P_b = 240$ cm^2, 92 cm

s. 270 **10. Statystyka i prawdopodobieństwo**

Zadania **1.** D **2.** B **3.** B **4.** C **5.** $\frac{1}{4}$ **6.** I. F, II. F, III. F **7.** I. P, II. F **8.** 165 cm **9.** I. F, II. P, III. P **10.** I. P, II. F, III. F, IV. F **11.** I. P, II. F **12.** I. P, II. F **13.** I. F, II. P **14.** 74 **15.** 1,75 **16.** 5 **17. a)** 5 km **b)** 30 $\frac{km}{h}$ **c)** o 11.30 **18. a)** ok. 600 m **b)** ok. 1,4 km, ok. 2,5 km, ok. 3,1 km **c)** ok. 140 uderzeń na minutę **d)** 120–140 **e)** 5,6 $\frac{km}{h}$ **19. a)** $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{1}{6}$

s. 275 **11. Sposoby rozwiązywania zadań**

Zadania **1.** wisiorek: 240 zł, łańcuszek: 40 zł **2.** 40 lat **3.** 20 **4.** 60 **5.** 3 cm **6.** judo: 30, piłka ręczna: 27, koszykówka: 18 **7.** B **8.** o co najmniej 350% **9.** o 27 zł **10.** 4 cm × 12 cm **11.** 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 **12.** 2 lub 8. *Wskazówka*. Liczba podzielna przez 6 jest podzielna przez 2 i przez 3. Ostatnia cyfra musi być parzysta, a suma wszystkich cyfr podzielna przez 3. **13. a)** 4 **14.** A, D **16.** 13 kratek × 21 kratek **17.** 66 zł **18.** 1 i 2, 2 i 3, 3 i 4, 4 i 5, 5 i 6, 6 i 7, 7 i 8 **19.** 1 i 3, 3 i 1, 1 i 5, 5 i 1, 3 i 5, 5 i 3 **20.** nie

VII. KOŁA I OKRĘGI. SYMETRIE

s. 282 **1. Długość okręgu**

Ćwiczenia **1.** 12,4 m **2. a)** 10 cm **b)** $\frac{10}{\pi}$ cm **3.1. a)** 5π **b)** 4π **c)** $10\pi^2$ **d)** 5 **3.2. a)** $x = \frac{l}{\pi}$ **b)** $x = \frac{l}{2\pi}$ **c)** $x = \sqrt{\frac{P}{\pi}}$ **d)** $x = 2\sqrt{\frac{P}{\pi}}$ **Zadania** **1. poziom A** **a)** 4π cm **b)** 2π mm **c)** 16π **d)** 4π m **e)** 10π **f)** 20π cm **g)** 8π m **h)** π m **poziom B** **a)** 31,4 cm **b)** 72 **c)** 6,2 m **d)** 12,4 mm **e)** 157 km **f)** 12 cm **g)** 18,6 m **h)** 62,83 m **poziom C** **a)** $r = 4$ cm **b)** $r = 1{,}5$ m **c)** $d = 5$ **d)** $d = 1$ dm **e)** $r = 6$ mm **f)** $r = 3{,}5$ **g)** $d = 4$ **h)** $r = 0{,}2$ dm **poziom D** **a)** $r = \frac{10}{\pi}$ cm **b)** $r = \frac{2{,}5}{\pi}$ **c)** $d = \frac{8}{\pi}$ km **d)** $r = \frac{6}{\pi}$ mm **e)** $r = \frac{3}{2\pi}$ cm **f)** $d = \frac{7}{\pi}$ km **g)** $r = \frac{3}{2\pi}$ dm **h)** $r = \frac{40}{\pi}$ mm **2. a)** 25,12 cm **b)** 18,84 cm **c)** 26,69 cm **3. a)** 2 cm **b)** 10 cm **c)** 0,15 cm **d)** 0,8 cm **4. a)** 8π **b)** 5π **c)** $2\pi^3$ **d)** $\frac{1}{4\pi}$ **5.** 258 cm **6. a)** nie **b)** tak **7. a)** tak **b)** tak **8. a)** 24,6 cm **b)** 24,8 cm **c)** 25,1 cm **9.** 38 cm × 8 cm, 301 cm^2 **10.** 1,3 **Dla dociekliwych** 1. 60 cm **2.** 1 m **3.** 1 m **Czy już umiem?** I. C II. A III. 30 cm IV. 185,6 m

s. 289 **2. Pole koła**

Ćwiczenia **1.** 9π $cm^2 \approx 27{,}9$ cm^2 **2. a)** 3 cm **b)** $\frac{2}{5}$ cm **c)** $\sqrt{\frac{17}{\pi}}$ cm **3.** 10π **Zadania** **1. poziom A** **a)** 64π dm^2 **b)** $6{,}25\pi$ m^2 **c)** 3π **d)** 11π cm^2 **e)** 100π m^2 **f)** 9π cm^2 **g)** $20{,}25\pi$ cm^2 **h)** 16π **poziom B** **a)** 21,7 **b)** 18,75 m^2 **c)** 12,56 dm^2 **d)** 198,4 m^2 **e)** 52,7 cm^2 **f)** 28,26 cm^2 **g)** 30 000 m^2 **h)** 151,9 **poziom C** **a)** 6 cm **b)** $\sqrt{3}$ **c)** 10 mm **d)** $2\sqrt{2}$ m **e)** 70 km **f)** $\sqrt{7}$ **g)** 2 **h)** $10\sqrt{10}$ dm **poziom D** **a)** $\frac{10}{\sqrt{\pi}}$ cm **b)** $\sqrt{\frac{5}{\pi}}$ **c)** $\sqrt{\frac{10}{\pi}}$ m **d)** $\frac{7}{\sqrt{\pi}}$ mm **e)** $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ m **f)** $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ **g)** $\frac{8}{\sqrt{\pi}}$ cm **h)** $\frac{10\sqrt{10}}{\sqrt{\pi}} = 10\sqrt{\frac{10}{\pi}}$ km **poziom E** **a)** $P = 2{,}25\pi$ cm^2 **b)** $l = 4\sqrt{2}\pi$ cm **c)** $P = 49\pi$ cm^2 **d)** $l = 2\sqrt{5}\pi$ cm **e)** $l = 4\pi$ cm **f)** $P = 6{,}25\pi$ cm^2 **g)** $P = 36\pi$ cm^2 **h)** $l = 2\sqrt{10}\pi$ cm **2.** 31π cm^2 **3.** 4 **4.** tak **5.** pole pozostałej części kartki **6.** każdy z pozostałych kawałków, 2 razy **7.** $15\sqrt{\pi}$ cm $\approx 26{,}6$ cm **8.** ok. 62,8 g **9.** ok. 56,4 m **10.** ok. 63,7% **11. a)** $\frac{25}{\pi}$ cm^2 **b)** $\frac{3}{\pi}$ cm^2 **c)** $\frac{1}{2\pi}$ cm^2 **12. a)** $20\sqrt{\pi}$ cm **b)** $\frac{5\sqrt{\pi}}{2}$ cm **c)** $2\sqrt{7\pi}$ cm **Czy już umiem?** I. B II. 400π $cm^2 \approx 1256$ cm^2 III. ok. 28,5%

s. 294 **3. Długość okręgu i pole koła – zadania**

Ćwiczenia **1.** ok. 32 cm **2.** ok. 9 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ **3.** Pole zwiększyło się 9 razy, a obwód 3 razy. **4.** $(8 + 4\pi)$ cm **5. a)** 5π cm^2 **b)** 75π cm^2 **Zadania** **1. a)** tak **b)** tak **2. a)** 4 **b)** 7 **3.** ok. 50,2 $\frac{\text{cm}}{\text{h}}$ **4. a)** ok. 207 m **b)** 132 **c)** 636 **5.** większą **6.** $P = 3{,}5$ cm^2, $l = (5{,}5 + 2{,}5\pi)$ cm **7. a)** $P = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{8}\pi a^2$, Obw. $= 2a + \frac{\pi a\sqrt{2}}{2}$ **b)** $P = a^2 + \frac{1}{4}\pi a^2$, Obw. $= 2a + \pi a$ **c)** $P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{1}{16}\pi a^2$, Obw. $= 2a + \frac{1}{2}\pi a$ **8.** w pierwszym przypadku jest większa **9.** pole 16π cm^2, promień 4 cm **10. a)** 17π m^2 **b)** 19π m^2 **11.** Pole mniejszego pierścienia stanowi $\frac{3}{5}$ pola większego pierścienia. **12.** Promień małego koła powinien być $\sqrt{2}$ razy mniejszy od promienia dużego koła. **Dla dociekliwych** **1.** lewe koła 20,2 m, prawe koła 21,8 m **2.** o ok. 2,5 m **4.** Koła prawe poruszają się po zakręcie z inną prędkością niż koła lewe. Opony na sztywno zamocowanych kołach szybko by się zdzierały, a pojazd łatwo wpadałby w poślizg. **Czy już umiem?** I. **a)** $44 - 4\pi$ **b)** $8\pi - 4$ II. **a)** 16π m^2 **b)** 36π m^2 III. prawie trzy razy IV. ok. 11 m

s. 302 **4. Oś symetrii i środek symetrii**

Ćwiczenia **1.** kwadrat – 4, prostokąt, który nie jest kwadratem – 2 **2.** każdy prostokąt, nie każdy deltoid **Zadania** **1. a)** jedna oś symetrii, nie ma środka symetrii **b)** cztery osie symetrii, ma środek symetrii **c)** trzy osie symetrii, nie ma środka symetrii **2.** Osie symetrii mają: prostokąt (2), trójkąt równoboczny (3), deltoid (1), sześciokąt foremny (6); środek symetrii mają: prostokąt i sześciokąt foremny. **3. a)** dwie **b)** nieskończenie wiele **c)** jedną **d)** trójkąt równoboczny – trzy; trójkąt równoramienny, który nie jest równoboczny – jedną; trójkąt, który nie jest równoramienny – zero **e)** cztery **f)** nieskończenie wiele **6. a)**, **b)**, **c)**, **d)** tak **7. a)** jedna oś symetrii, nie ma środka symetrii **b)** trzy osie symetrii, nie ma środka symetrii **c)** cztery osie symetrii, ma środek symetrii **d)** dwie osie symetrii, ma środek symetrii **12.** I. tak, II. nie, III. tak **Dla dociekliwych** **1. a)** dwa kwadraty **b)** jeden kwadrat **c)** pięć kwadratów **Czy już umiem?** I. D II. I. F, II. F, III. F, IV. P, V. F III. **a)** jedna oś symetrii, nie ma środka symetrii **b)** nie ma osi symetrii, ma środek symetrii **c)** jedna oś symetrii, nie ma środka symetrii IV. **a)** cztery osie symetrii, ma środek symetrii **b)** jedna oś symetrii, nie ma środka symetrii **c)** nieskończenie wiele osi symetrii, ma środek symetrii

s. 311 **5. Symetralna odcinka i dwusieczna kąta**

Ćwiczenia **1.** Ten wielokąt ma nieparzystą liczbę kątów. **Zadania** **5.** kąt ABC i półprosta BP, kąt KPL i półprosta PB, kąt APC i półprosta PM, kąt BAC i półprosta AP, kąt MPK i półprosta PA, kąt BPC i półprosta PL, kąt ACB i półprosta CP, kąt LPM i półprosta PC, kąt APB i półprosta PK **7.** tak, ale tylko w trójkącie równoramiennym **8.** deltoid **9.** nieskończenie wiele sposobów **12.** 60° i 120° **Czy już umiem?** I. **a)** prosta DB **b)** półprosta OA **c)** $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle DOC$ (wklęsły), $\sphericalangle NOL$ (półpełny) **d)** KL, AC, MN II. tak, w trójkątach prostokątnych III. nie

s. 314 **Powtórzenie VII**

Zestaw 1 1. B 2. C 3. B 4. D **5. a)** 6,5 cm **b)** 0,15 cm **6. a)** 12 cm **b)** $1\frac{1}{3}$ cm **7.** 384π cm$^2 \approx 1205{,}76$ cm^2 **8.** A **9. a)** Gujana, Honduras, Dania, Gruzja, Japonia, Izrael, Kanada **b)** Honduras, Gruzja, Trynidad i Tobago, Japonia, Izrael **Zestaw 2** **1.** 1,77 m^2 **2. a)** Obw. = 18 cm, $P = 11$ cm^2 **b)** Obw. = 24 cm, $P = 5$ cm^2 **3. a)** pierwsza **b)** druga 4. B **5. a)** 0, 1, 2, 5 **b)** 0, 1, 8 **c)** 11, 22, 55, 69, 96

s. 316 **Zadania na temat...**

1. $\pi \approx 3$ **2.** $\pi \approx 3{,}1429$ **3.** do szóstego miejsca po przecinku **4.** 3,142857... i 3,140845... **5. a)** ok. 3,16 cm^2 **b)** ok. 28,44 cm^2 **c)** ok. 455,11 cm^2; $\pi \approx 3{,}16$ **6.** 3,3397; z dokładnością

do jedności **7.** w setnym wierszu do pierwszego miejsca po przecinku, w tysięcznym wierszu do drugiego miejsca po przecinku

s. 318 **Zadania na deser**

1. a) 8 cm i 10 cm **b)** 9 cm i 14 cm **2. a)** $(16 - 4\pi)$ cm^2 **b)** $(16 - 4\pi)$ cm^2 **c)** $(16 - 4\pi)$ cm^2 **d)** $(2\pi - 4)$ cm^2 **3.** we wszystkich kwadratach tyle samo **4.** krowa uwiązana w narożniku C **5. a)** 0,96 a **b)** 0,93 a **6.** ok. 30 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$, czyli ok. 107 534 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ **7. a)** Polska – ok. 61%, Portugalia – ok. 34% **b)** np. Norwegia, Włochy **8.** o ok. 3 185 300 km

VIII. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

s. 321 **1. Reguła mnożenia**

Ćwiczenia **1.** 15 **2.** 48 **3.** 81 **Zadania** **1.** 15 **2.** 12 **3.** 125 **4. a)** 32 768 **b)** 9 h 6 min 8 s **5. a)** 720 **b)** 2 h **6. a)** 1 048 576 **b)** 33 554 432 **c)** ok. 0,47% **d)** ok. 0,048% **7.** 6 liter – 1 073 741 824 „słów", ok. 34 000 słów sensownych, 7 liter – 34 359 738 368 „słów", ok. 65 000 słów sensownych **8.** 1 552 438 800 **Dla dociekliwych** **1.** 24 **2.** 1500, 1 **4.** liczba 1500: 24 dzielniki, liczba 4900: 27 dzielników **5.** 9 **Czy już umiem?** **I.** 120 **II.** 9 **III.** 75

s. 327 **2. Zastosowania reguły mnożenia**

Ćwiczenia **1. a)** 12 **b)** 35 **2.** 29 **3.** 21 **4.** 90 000 **5.** 90 **6.** 180 **Zadania** **1. a)** 224 **b)** 91 **c)** 120 **d)** 435 **2. a)** 24 **b)** 19 **3.** 13 **4. a)** 9 000 000 **b)** 4 500 000 **c)** 9000 **d)** 544 320 **5. a)** 15 120 **b)** 28 560 **c)** 0 **6.** 6885 **7. a)** 10 **b)** 15 **8.** 560 **9.** 4 **10.** 6 sposobów, 15 sposobów **Dla dociekliwych** **1.** 5, 4, 3, 2, 1 **2.** 120 **3.** 2 432 902 008 176 640 000 **4. a)** 144 **b)** 144 **Czy już umiem?** **I.** 8 **II.** 45 **III.** 4500

s. 334 **3. Obliczanie prawdopodobieństwa**

Ćwiczenia **1.** $\frac{1}{4}$ **2.** $\frac{1}{12}$ **3.** $\frac{1}{2}$ **Zadania** **1.** $\frac{1}{51}$ **2.** $\frac{3}{8}$ **3.** $\frac{1}{4}$ **4.** Bardziej prawdopodobne jest, że suma oczek wyniesie 7. **5. a)** $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{3}{4}$ **d)** 1 **6.** $\frac{2}{15}$ **7.** $\frac{1}{4}$ **8. a)** $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{1}{9}$ **d)** $\frac{1}{6}$ **e)** $\frac{1}{9}$ **f)** $\frac{1}{36}$ **9.** np. każdej osobie przypisać inny wynik czterech rzutów monetą **Dla dociekliwych** **1.** pierwszy: $\frac{1}{3}$, drugi: $\frac{2}{3}$. Drugi gracz ma większe szanse. **4.** nie **Czy już umiem?** **I.** $\frac{1}{8}$ **II.** $\frac{1}{36}$ **III.** $\frac{1}{6}$

s. 339 **4. Kombinatoryka a prawdopodobieństwo**

Ćwiczenia **1.** $\frac{3}{400}$ **2.** ze zwracaniem: $\frac{1}{16}$, bez zwracania: $\frac{1}{28}$ **Zadania** **1. a)** $\frac{1}{9}$ **b)** $\frac{5}{36}$ **c)** $\frac{1}{6}$ **2. a)** $\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{5}{12}$ **3. a)** $\frac{3}{20}$ **b)** $\frac{2}{15}$ **4. a)** $\frac{1}{18}$ **b)** $\frac{1}{9}$ **5. a)** $\frac{1}{15}$ **b)** $\frac{2}{15}$ **6. a)** $\frac{1}{120}$ **b)** $\frac{1}{60}$ **c)** $\frac{1}{60}$ **Dla dociekliwych** **1.** $\frac{1}{221}$ **Czy już umiem?** **I. a)** $\frac{1}{1250}$ **b)** $\frac{1}{1650}$ **II.** $\frac{89}{110}$

s. 342 **Powtórzenie VIII**

Zestaw 1 **1.** B **2.** A **3.** C **4.** 100 **5.** C **6.** $\frac{1}{6}$ **Zestaw 2** **1.** D **2.** 10 **3.** 1800 **4.** $\frac{11}{18}$

INDEKS

C

cecha bok-bok-bok (bbb) 143
– bok-kąt-bok (bkb) 144
– kąt-bok-kąt (kbk) 144, 145
czworościan 199
– foremny 199

D

definicja 152
diagram kołowy 270
długość okręgu 282
doświadczenie losowe 45
dowód twierdzenia 113
dwusieczna kąta 98, 311

F

figura osiowosymetryczna 301, 303
– środkowosymetryczna 303, 304
figury przystające 137, 261

G

graniastosłup 173
– prawidłowy 175
graniastosłupy pochyłe 174
– proste 174

H

hipoteza 113

J

jednostki objętości 185, 266
– pola 261

K

kąt pełny 95
– zerowy 95
kąty naprzemianległe 95, 261
– odpowiadające 95, 261
– przy podstawie trójkąta równoramiennego 98
– przyległe 95, 261
– wierzchołkowe 95, 261
– wklęsłe 95
– wypukłe 95
kombinatoryka 321
krawędź boczna graniastosłupa 173
– – ostrosłupa 199
– podstawy graniastosłupa 173
– – ostrosłupa 199
krzywe stożkowe 343
kwadrat różnicy 81
– sumy 81

L

liczba π 281, 316
liczby odwrotne 238
– przeciwne 238
losowanie bez zwracania 340
– ze zwracaniem 340

M

mediana 21

N

najmniejsza wspólna wielokrotność 238
największy wspólny dzielnik 238
notacja wykładnicza 250

O

objętość graniastosłupa 183
– ostrosłupa 207
– prostopadłościanu 183
– sześcianu 183
okrąg opisany na wielokącie 160
ostrosłup 199
– prawidłowy 200
– prosty 200
oś symetrii 301

P

pierścień kołowy 296
pierwiastek kwadratowy 252
– sześcienny 252
podstawa graniastosłupa 173
– ostrosłupa 199
pole koła 288
pole powierzchni bocznej graniastosłupa 193
– – ostrosłupa 213
potęga o wykładniku naturalnym 250
powierzchnia całkowita graniastosłupa 192, 194
– – ostrosłupa 213
prawdopodobieństwo 45, 270
procent 246
promień wewnętrzny 296
– zewnętrzny 296
przekątna graniastosłupa 176
przystawanie trójkątów 143
punkty symetryczne względem prostej 303
– – punktu 304

R

reguła mnożenia 322
różnica kwadratów 81

S

skala mapy 242
spodek wysokości ostrosłupa 201
statystyka 7
suma miar kątów czworokąta 105
– – trójkąta 96
symetralna odcinka 310
szerokość pierścienia 296

Ś

ściana boczna graniastosłupa 173
– ostrosłupa 199
średnia arytmetyczna 18, 270
środek symetrii 303

T

teza 113, 114
trójkąt Pascala 90
twierdzenie 113, 152
– Pitagorasa 260

U

układ współrzędnych 260

W

wartość bezwzględna liczby 238
warunek trójkąta 125
wielokąt foremny 159, 261
wielościany foremne 230
wierzchołek graniastosłupa 173
– ostrosłupa 199
– podstawy ostrosłupa 199
współrzędne środka odcinka 260
wysokość graniastosłupa 174
– ostrosłupa 201
wzór Eulera dla wielościanów wypukłych 205
– skróconego mnożenia 80, 81

Z

założenie 113, 114
zdarzenie niemożliwe 47, 270
– pewne 47, 270

Fotografia na okładce: Getty Images/Score RF/Akihiro Sugimoto.

Fotografie: Archiwum Wydawnictwa s. 81, 158 (Jan Brożek), s. 174, 175, 200, 220, 231 (betonowe ściany), s. 293 (trawa), s. 298 (tablica), s. 305, 328; BE&W: Granger Collection s. 344 (bomba kryptograficzna), Science Source - Jerry Lodriguss s. 343, Spike Walker s. 26 (okrzemki); East News: Agencja SE/PHOTO Artur Barbarowski s. 182 (przerwany wał); Forum: Imago Sport/Insidefoto/ Antonietta Baldassarre/antoniettaxbaldassarre s. 59, National Portrait Gallery s. 132; Getty Images: Getty Images North America/Victor Decolongon s. 17, iStock Editorial/ Getty Images Plus/Popartic s. 218, iStock/Getty Images Plus - Nic_OI s. 241 (kot), Thorsten Spoerlein s. 241 (harpia), Science & Society Picture Library s. 344 (odbiornik kryształkowy), Stone/Manfred Gottschalk s. 287 (okrągłe pola); Indigo: Alamy Stock Photo - Chris Howes/Wild Places Photography s. 182 (wał przeciwpowodziowy), Dave Porter s. 215, Marcin Libera s. 326 (Łysa Góra), Mike P Shepherd s. 104 (mozaika 1), PjrTransport s. 297 (rower), Universal Images Group North America LLC/DeAgostini/DEA/PUBBLI AER FOTO s. 163, Valery Voennyy s. 104 (waza); Panthermedia: Clashcityrocker/Thomas Gebhardt s. 333 (smok); Shutterstock: adehoidar s. 320 (grafika na tablicy), Albert Russ s. 225 (1 granat, 3 kwarc szkieletowy, 4 kwarc, 5 ametyst, 8 marmur), AlenKadr s. 182 (zaorana ziemia 2), AlenKadr s. 75 (zaorana ziemia), Alexander Raths s. 42, Alexander Sobol s. 124 (kredki), Alexey Pevnev s. 142 (Wieża Eiffla – zbliżenie), AlexRoz s. 142 (elementy konstrukcji), s. 143, aragami12345s s. 210 (namiot tipi), Avillfoto s. 245, B Brown s. 287 (nawadnianie pola), BlueSkyImage s. 320 (czarny talerz), Butterflycreationfoto s. 309 (ratusz w Poznaniu), Cabeca de Marmore s. 320 (sałatka), Cagla Acikgoz s. 225 (9 kwarc dymny), Catchlight Lens s. 60 (aligatory), chrupka s. 321 (kupon), Constantine Pankin s. 60 (termometr), DimaSid s. 47 (czerwone kule), DmitrySerbin s. 112, DS_93 s. 300 (rybie pęcherze), DUSAN ZIDAR s. 320 (sałatka z kurczakiem), ESB Professional s. 94 (diabelski młyn – widok), s. 142 (Wieża Eiffla), Fanfo s. 298 (pizza 1), Fasttailwind s. 298 (helikopter), Happy monkey s. 120, Huang Zheng s. 300 (katedra), innakreativ s. 248 (orzechy włoskie), James Steidl s. 333 (diament), javarman s. 104 (mozaika – blat), JoeyPhoto s. 104 (mozaika 2), Jozef Sowa s. 320 (stół), Kaspri s. 6 (słupek), keantian s. 60 (liście bambusa), Khun mix s. 68 (laptop), LiliGraphie s. 68 (złote wstążki), Imeleca (Leonid Meleca) s. 293 (pola z lotu ptaka), lucag_g s. 210 (namiot tipi do pokoju dziecięcego), LuckyBall s. 47 (niebieskie kule), mangpor2004 s. 320 (menu), Matthew Hollinshead s. 225 (szafka), Media Union s. 300 (trójliść), MIA Studio s. 285, Mikhailov Studio s. 75 (marchewki), Minakryn Ruslan s. 225 (7 akwamaryn i turmalin), mnobody s. 55, Morphart Creation s. 90, muharremz s. 300 (czteroliść), Natalia Klenova s. 136 (mąka, jajka), NataliaVo s. 8, Nataly Studio s. 248 (orzechy laskowe), Nick Stubbs s. 186, nicoletta zanella s. 75 (dłoń z rośliną), Nik Merkulov s. 320 (pomidory), Ocskay Bence s. 172, Odua Images s. 124 (linijki, kątomierz, ekierki), Oleksandr Osipov s. 19, Ollyy s. 82 (klown), Palo_ok s. 188 (koparka), paul Prescott s. 312, Pavel L Photo and Video s. 49, Petr Podrouzek s. 214, PHOTO FUN s. 225 (10 wanadynit), PNSJ88 s. 225 (2 piryt), prisma s. 206 (klej), Puripat Lertpunyaroj s. 6 (gejzer), Rattanapol s. 73, Repina Valeriya s. 291, ricochet64 s. 104 (mozaika 3), Ruth Black s. 136 (ciasteczka), sak55 s. 182 (zaorana ziemia 1), Scorpp s. 190 (ogród), Sebastian Janicki s. 225 (6 fluoryt), Shmizla s. 124 (kartka), Simon Kadula s. 321 (smartfon), sirastock s. 206 (przybory biurowe na stole), spacezerocom s. 124 (ołówek), StudioSmart s. 158 (plastry miodu), Syda Productions s. 34, timquo s. 199, Tithi Luadthong s. 338, Unuchko Veronika s. 216 (przybory szkolne), Vadarshop s. 206 (nożyczki), Vectorpocket s. 82 (zasłony), Vitalliy s. 94 (diabelski młyn), vivooo s. 243, Vladyslav Starozhylov s. 150, wasanajai s. 86, Wstockstudio s. 75 (ogródek), Zack Frank s. 210 (namiot tipi - konstrukcja), Zeljko Radojko s. 26 (strumień), Zoom Team s. 68 (balony); Thinkstock/Getty Images: Comstock Images s. 298 (pizza 2), Getty Images/Fuse s. 44, iStockphoto - a40757 s. 190 (działka ze szklarnią), Aleksandr_Gromov s. 333 (kości do gry), AlekZotoff s. 158 (pszczoły), AlexandrBognat s. 326 (kartki papieru), AlexRaths s. 75 (ogródek ziołowy), Ann_Mei s. 82 (scena w cyrku), Artjafara s. 234 (dach czterospadowy), asafta s. 161, bowie15 s. 82 (mężczyzna z wiolonczelą), cenix s. 287 (maszyna do nawadniania), ebobeldijk s. 234 (dach jednospadowy), gamespirit s. 234 (dach dwuspadowy), Gary_Schmid s. 198 (Beduin na pustyni z wielbłądem), garybaldi s. 326 (baner), GlobalP s. 82 (królik), godfather744431 s. 326 (ikony sportowe), lakovKalinin s. 280 (łąki), Ingram Publishing s. 198 (pustynia), jacoblund s. 280 (rowerzystka), k_samurkas s. 235, kontur-vid s. 82 (kapelusz), kostsov s. 179, LightFieldStudios s. 333 (gra w grę planszową), Lindrik s. 198 (piramida Cheopsa), LueratSatichob s. 326 (ikony teatralno-filmowe), lzf s. 75 (uprawa groszku), ninelutsk s. 326 (akcesoria wspinaczkowe), NiseriN s. 309 (zamek w Warszawie), Panacea_Doll s. 326 (ptaki), Philipp83 s. 231 (piaskownica), Samtoon s. 326 (ikony geologiczne), sculpies s. 198 (piramidy w Gizie, Beduin na wielbłądzie), seb_ra s. 309 (mapa, katedra, okulary), simpson33 s. 188 (licznik wody), Sudowoodo s. 326 (ikony rowerów), unclepodger s. 321 (zamek do szafki), Wavebreakmedia Ltd s. 133, Xurzon s. 326 (podłoga); Bogdan Wańkowicz s. 45 (grosze), s. 168, 169, 216 (magiczny wąż), s. 230, 297 (pomiar drzewa), s. 315, 334; Maciej Wróbel s. 45 (kostki do gry), s. 281.

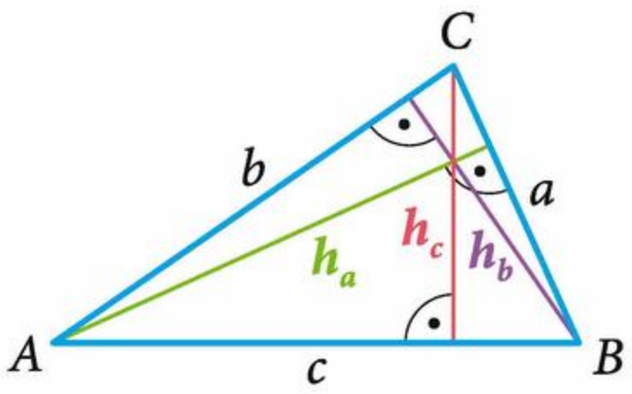
	Imię i nazwisko	Klasa	Rok szkolny	Podpis
1.	.....	.....	.....	.....
2.	.....	.....	.....	.....
3.	.....	.....	.....	.....

Matematyka z kluczem

nowa era | neon

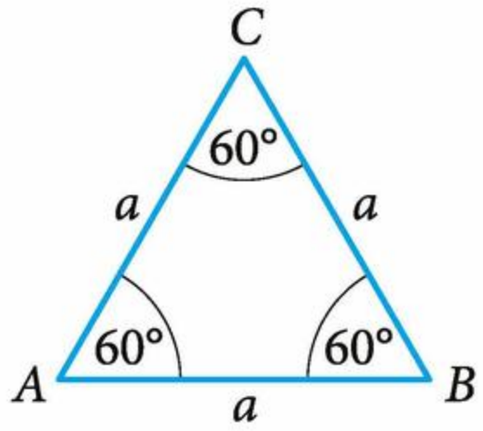
Pola wybranych trójkątów i czworokątów

Dowolny trójkąt



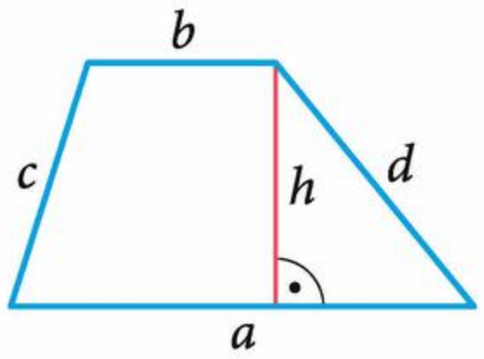
$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

Trójkąt równoboczny



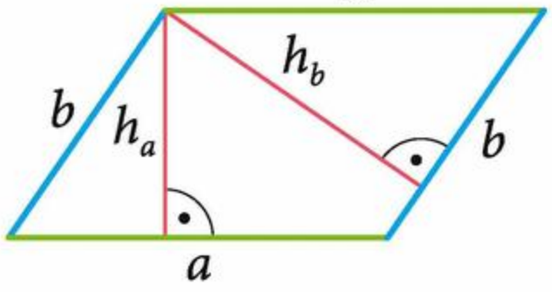
$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Trapez



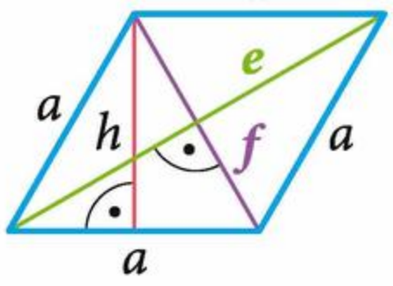
$$P = \frac{(a+b)h}{2}$$

Równoległobok



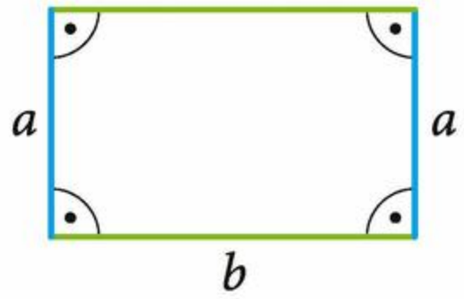
$$P = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

Romb



$$P = ah = \frac{ef}{2}$$

Prostokąt



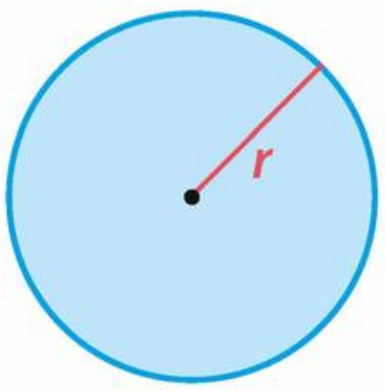
$$P = ab$$

Koło i okrąg

Liczba π

$$\frac{\text{długość okręgu}}{\text{długość średnicy}} = \pi$$

Pole koła



$$P = \pi r^2$$

Długość okręgu



$$l = 2\pi r$$

Nowa Era Sp. z o.o.

www.nowaera.pl nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-4942-1