

NOWOŚĆ
2025

MATEMATYKA W PUNKT



 WSiP

Podręcznik
Szkola podstawowa

6

Drogi WSiP,

Nigdy bym nie publikowała publicznie książek wydawnictw, które działają na uczciwych zasadach.

Wasza firma jednak promuje masowy dodruk, całkowicie niepotrzebnych książek, które mogłyby być zastąpione wersjami elektronicznymi!

Co prawda e-booki są dostępne na waszej stronie, jednak:

- W przeciwieństwie do fizycznej książki, licencja na e-book kończy się po roku. Oznacza to, że jeżeli moja córka chciałaby powtórzyć sobie całą wiedzę do matury, musiałabym jej kupić wszystkie wasze książki od nowa.
- Waszych e-booków nie da się pobrać! Wymagają one dostęp do internetu, co uniemożliwia ich użycie na naszej wsi, gdzie zasięg jest ograniczony.
- Wasze e-booki nie działają na telefonach komórkowych!
- Wasze e-booki sprzedawane są po tej samej (albo wyższej) cenie co regulame książki. Cena e-booka powinna być niższa, gdyż e-booki wymagają elektronicznego czytnika (tabletu)!

Czas rozpocząć nową erę, w której papier nie jest beczelnie marnowany dla pieniędzy. Przedstawiam e-book, który spełnia wszystkie oczekiwania uczniów.

Dbajmy o środowisko, zróbmy to dla młodych pokoleń.

Spis treści

Jak korzystać z podręcznika	5
-----------------------------------	---

Dział I. W świecie liczb całkowitych

1. Liczby naturalne i ich własności	8
2. Działania na liczbach naturalnych	16
3. Liczby całkowite i ich wartość bezwzględna	23
4. Działania na liczbach całkowitych	31
5. Zadania tekstowe	37
Podsumowanie działu I	43

Dział II. W świecie liczb wymiernych

1. Działania na ułamkach zwykłych	54
2. Działania na ułamkach dziesiętnych	64
3. Rozwinięcia dziesiętne ułamków zwykłych	73
4. Działania na liczbach wymiernych	80
5. Zaokrąglenie i szacowanie	88
6. Zadania tekstowe	94
Podsumowanie działu II	100

Dział III. W świecie wyrażeń algebraicznych i równań

1. Zapisywanie wyrażeń algebraicznych	110
2. Obliczanie wartości wyrażeń algebraicznych	116
3. Upraszczanie wyrażeń algebraicznych	122
4. Równania	128
5. Liczba spełniająca równanie	135
6. Rozwiązywanie prostych równań	140
7. Zadania tekstowe	147
Podsumowanie działu III	152

Dział IV. W świecie figur płaskich

1. Proste, odcinki, koła i okręgi	162
2. Kąty	169
3. Trójkąty	175
4. Kąty w trójkątach	182
5. Czworokąty	189
6. Kąty w czworokątach	196
Podsumowanie działu IV	205

Dział V. W świecie pól wielokątów

1. Pola czworokątów	216
2. Pole trójkąta	225
3. Pola wielokątów	232
Podsumowanie działu V	238

Dział VI. W świecie prędkości

1. Prędkość	248
2. Droga	256
3. Czas	262
Podsumowanie działu VI	267

Dział VII. W świecie figur przestrzennych

1. Graniastosłupy	276
2. Ostrosłupy	284
3. Pole powierzchni graniastosłupa	291
4. Objętość. Jednostki objętości	297
5. Objętość graniastosłupa prostego	307
6. Bryły obrotowe	315
Podsumowanie działu VII	321

Dział VIII. W świecie procentów i statystyki

1. Procenty i ułamki	332
2. Obliczanie procentu danej liczby	337
3. Odczytywanie i prezentowanie danych statystycznych	341
Podsumowanie działu VIII	347

Odpowiedzi	354
------------------	-----

Jak korzystać z podręcznika

W trakcie lekcji



Odkrywaj!

Ten moduł wprowadza w temat lekcji.

Tu znajdziesz definicje i ważne treści matematyczne, które przydadzą ci się w dalszej nauce.



Analizuj!

Ten moduł zawiera przykłady zagadnień poruszanych podczas lekcji.

Dobre rady pomogą ci uniknąć błędów podczas rozwiązywania zadań.



Rozwiązuj zadania

1. Różnorodne zadania związane z omawianymi zagadnieniami.
2. Zadania nietypowe i o wyższym stopniu trudności.
3. Zadania zespołowe, wycinanki, gry matematyczne itp.
4. Zadania, które można rozwiązać z użyciem kalkulatora.



W dymkach znajdziesz wskazówki, które pomogą ci ominąć trudności.



A to ciekawe

Informacje w takich ramach poszerzą twoją wiedzę i zachęcą cię do dalszych badań.

Sprawdź, co umiesz!

Krótkie zadania podsumowujące lekcję.

Na koniec działu

Powtórz wiadomości

Najważniejsze zagadnienia.

Poćwicz przed sprawdzianem

Zadania powtórzeniowe.

Wykorzystaj w praktyce

Wiedza matematyczna na co dzień.

Podjęmij wyzwanie

Zadania mające formę zagadki.

Potrenuj – zadania uzupełniające

Zadania uzupełniające do tematów z działu.

Pamiętaj! Rozwiązania zadań zapisuj w zeszycie przedmiotowym.

PODOBÓJ MAKEMAKE

GRACZ 1



Bruno



97



120



GRACZ 2



Ela



50



90



GRACZ 3



Pola



100



98



GRACZ 4



Cezary



99



70



GRACZ 5



Kuba



80



100



GRACZ 6



Zosia



110



99



GRAJ

DZIAŁ

W ŚWIECIE LICZB CAŁKOWITYCH

Liczba na polu,
na którym stoi mój
pionek, jest większa
niż twoja.

Jaką liczbę muszę wyrzucić
na kostce, aby odległości
naszych pionków od 0 były
takie same?



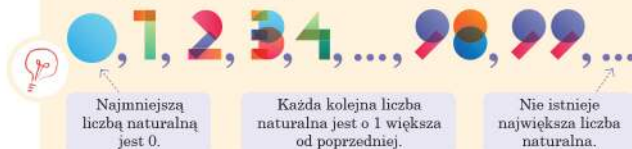
1. Liczby naturalne i ich własności

- ▶ Jakie są cechy podzielności liczb naturalnych przez: 2, 3, 4, 5, 9, 10, 100?
- ▶ Które liczby są pierwsze, a które złożone?
- ▶ Jak wyznaczać największy wspólny dzielnik (NWD) oraz najmniejszą wspólną wielokrotność (NWW) liczb naturalnych?



Analizuj!

Liczby naturalne to liczby:



Liczby naturalne mają pewne cechy, które ułatwiają rozpoznanie, czy jedna liczba dzieli się przez drugą liczbę bez reszty. Jeśli jedna liczba dzieli się przez drugą bez reszty, to oznacza, że jest przez nią podzielna.



Przykład 1.

Sprawdź, przez które z liczb: 2, 3, 4, 5, 9, 10, 100 jest podzielna liczba 3240.

- Liczba **3240** dzieli się bez reszty przez:

2, bo cyfrą jednościami jest 0;

3, bo suma cyfr równa $3 + 2 + 4 + 0 = 9$ jest podzielna przez 3;

4, bo dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę 40, która jest podzielna przez 4;

5, bo cyfrą jednościami jest 0;

9, bo suma cyfr równa $3 + 2 + 4 + 0 = 9$ jest podzielna przez 9;

10, bo cyfrą jednościami jest 0.

- Liczba **3240** nie dzieli się bez reszty przez:

100, bo cyfrą dziesiątek nie jest 0.

Odp. Liczba 3240 jest podzielna przez liczby: 2, 3, 4, 5, 9, 10.

Ćwiczenie 1.

Sprawdź, przez które z liczb: 2, 3, 4, 5, 9, 10, 100 jest podzielna podana liczba.

a) 36

b) 240

c) 3900

d) 2872

Dzielnik danej liczby naturalnej to taka liczba naturalna różna od 0, przez którą dana liczba dzieli się bez reszty. Liczba 1 jest dzielnikiem każdej liczby.

Dzielnikami liczby 12 są liczby: 1, 2, 3, 4, 6 i 12.



Przykład 2.

Wypisz wszystkie dzielniki liczby 20.

Dzielniki liczby 20 to:

• **1**, bo $20 : 1 = 20$;

• **2**, bo $20 : 2 = 10$;

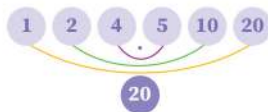
• **4**, bo $20 : 4 = 5$;

• **5**, bo $20 : 5 = 4$;

• **10**, bo $20 : 10 = 2$;

• **20**, bo $20 : 20 = 1$.

Jeżeli zapiszemy wszystkie dzielniki danej liczby rosnąco, to iloczyn pierwszego i ostatniego będzie równy tej liczbie, podobnie iloczyn drugiego i przedostatniego itd.



Ćwiczenie 2.

Wypisz wszystkie dzielniki podanej liczby.

a) 6

b) 27

c) 64

d) 19

Liczby naturalne

**Liczby,
które nie są ani
pierwsze, ani
złożone.**

0, 1

**Liczby
pierwsze**
są większe od 1
i mają dokładnie
dwa różne
dzielniki.

**2, 3, 5, 7, 11,
13, 17, 19, ...**

**Liczby
złożone**
są większe
od 1 i mają więcej
niż dwa różne
dzielniki.

**4, 6, 8, 9, 10,
12, 14, 15, ...**

Przykład 3.

Bruno napisał program, który ustala, czy liczba wpisana przez użytkownika jest pierwsza. Jeśli program wyświetla ✓, to liczba jest pierwsza. W przeciwnym wypadku program wyświetla ✗. Bruno wpisał do programu pięć liczb: 4, 5, 10, 71, 100. Na ilustracji przedstawiono wyniki, które uzyskał. Czy program działa poprawnie? Uzasadnij swoją odpowiedź.



4 nie jest liczbą pierwszą, ponieważ ma więcej niż dwa dzielniki: 1, 2, 4.

5 jest liczbą pierwszą, ponieważ jej jedynymi dzielnikami są 1 oraz 5.

10 nie jest liczbą pierwszą, ponieważ ma więcej niż dwa dzielniki: 1, 2, 5, 10.

71 jest liczbą pierwszą, ponieważ jej jedynymi dzielnikami są 1 oraz 71.

100 nie jest liczbą pierwszą, ponieważ ma więcej niż dwa dzielniki: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.

Odp. Program nie działa poprawnie, ponieważ liczba 100 nie jest liczbą pierwszą.

Aby ustalić, czy liczba jest pierwsza, czy złożona, wystarczy sprawdzić, czy ma trzeci dzielnik. Liczba, która dzieli się bez reszty tylko przez 1 i siebie samą, jest pierwsza. Liczba, która ma trzeci dzielnik, jest złożona. Aby usprawnić szukanie dzielników, warto skorzystać z cech podzielności liczb.

Ćwiczenie 3.

Czy podana liczba jest liczbą pierwszą? Uzasadnij swoją odpowiedź.

a) 9

b) 41

c) 35

d) 63

Wielokrotności liczby naturalnej otrzymujemy, mnożąc tę liczbę przez kolejne liczby naturalne.

- Najmniejszą wielokrotnością każdej liczby naturalnej jest liczba 0.
- Każda liczba naturalna jest wielokrotnością liczby 1.
- Każda liczba ma nieskończenie wiele wielokrotności.

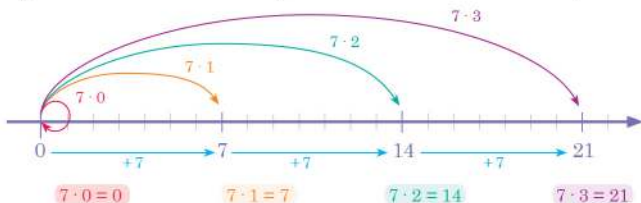


Wielokrotności liczby 8 to: 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, ...

Przykład 4.

Wypisz cztery kolejne wielokrotności liczby 7, z których pierwszą jest liczba 0.

Wyznaczanie wielokrotności liczby można zilustrować na osi liczbowej.



Ćwiczenie 4.

Wypisz pięć kolejnych wielokrotności podanej liczby, z których pierwszą jest liczba 0.

a) 4

b) 6

c) 13

d) 30

Największym wspólnym dzielnikiem (NWD) dwóch lub więcej liczb naturalnych nazywamy największą liczbę naturalną, przez którą są podzielne jednocześnie wszystkie dane liczby.

Najmniejszą wspólną wielokrotnością (NWW) dwóch lub więcej liczb naturalnych nazywamy najmniejszą liczbę naturalną różną od zera, której dzielnikami są dane liczby.

Pomocny przy wyznaczaniu NWD i NWW jest **rozkład liczby na czynniki pierwsze**.

Dzielimy przez liczby pierwsze.

126	2
63	3
21	3
7	7
1	



$$126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

Przykład 5.

Wyznacz NWD oraz NWW liczb 60 i 210.

Sposób Cezarego

Dzielniki liczby 60: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

Dzielniki liczby 210: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210.

Największy wspólny dzielnik liczb 60 i 210 to 30, czyli $\text{NWD}(60, 210) = 30$.

Wielokrotności liczby 60: 0, 60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, 540, ...

Wielokrotności liczby 210: 0, 210, 420, 630, ...

Najmniejsza wspólna wielokrotność (różna od 0) liczb 60 i 210 to 420, czyli $\text{NWW}(60, 210) = 420$.

Sposób Eli

Skorzystamy z rozkładu liczb 60 i 210 na czynniki pierwsze i wyznaczamy ich NWD oraz NWW dwoma sposobami.

Wyróżnimy takie same czynniki w obu rozkładach.

60	2
30	2
15	3
5	5
1	1

210	2
105	3
35	5
7	7
1	1

Iloczyn wyróżnionych czynników

$$\text{NWD}(60, 210) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

$$\text{NWW}(60, 210) = \text{NWD}(60, 210) \cdot 2 \cdot 7 = 30 \cdot 2 \cdot 7 = 420$$

NWD liczb

Niewyróżnione czynniki z rozkładu obu liczb

Pierwsza liczba

Druga liczba

$$\text{NWW}(60, 210) = 60 \cdot 7 = 210 \cdot 2 = 420$$

Niewyróżniony czynnik z rozkładu drugiej liczby

Niewyróżniony czynnik z rozkładu pierwszej liczby

Ćwiczenie 5.

Wyznacz NWD i NWW podanych liczb.

a) 12 i 24

b) 48 i 60

c) 5 i 32

d) 585 i 135

Rozwiąż zadania

1. Spośród podanych liczb wybierz te, które są podzielne przez liczbę:

a) 2, b) 5, c) 10,
d) 3, e) 9, f) 4.

8925	10 207	3213	110
1228	10 892	700	3 330 000
272 736	28 900	333 784	1025

2. Wypisz wszystkie dzielniki podanej liczby.

a) 14 b) 32 c) 43 d) 150

3. Wypisz wszystkie cyfry, którymi można zastąpić ★, tak aby liczba:

a) 12 06 ★ była podzielna przez 5,
b) 20 86 ★ była podzielna przez 4,
c) 1 ★ 27 była podzielna przez 3, ale nie przez 9,
d) 287 ★ była podzielna zarówno przez 3, jak i przez 2.

4. Pola odkryła zasadę podzielności przez liczbę 6. Zapoznaj się z nią.

Wiem, że $6 = 2 \cdot 3$, więc liczba jest podzielna przez 6, kiedy jednocześnie jest podzielna przez 2 i przez 3.

Np. liczba 114 jest podzielna przez 6, ponieważ jest podzielna przez 2 i przez 3, natomiast liczba 206 nie jest podzielna przez 6, ponieważ nie jest podzielna przez 3.



- I. Ustal, która z liczb: 256, 432, 1005 jest podzielna przez 6.
II. Odkryj zasadę podzielności przez podaną liczbę i wypisz po dwa przykłady liczb podzielnych i niepodzielnych przez nią.

a) 15 b) 20 c) 18 d) 12

5. Pani Zofia jest florystką i przygotowuje dekoracje na pewną ważną uroczystość. Część dekoracji będą stanowiły kompozycje kwiatowe. Pani Zofia ma do dyspozycji 912 tulipanów i chce je wszystkie wykorzystać. Czy może przygotować kompozycje, w których będzie:

a) po 10 tulipanów? b) po 15 tulipanów? c) po 12 tulipanów?



6. Wypisz wszystkie dzielniki liczby 64. Następnie uporządkuj je od najmniejszego do największego. Przypisane do nich litery utworzą hasło – imię i nazwisko Polaka będącego głównym naukowcem w OpenAI (amerykańskim laboratorium badawczym specjalizującym się w dziedzinie sztucznej inteligencji).

2	KU	16	CH	1	JA	32	OC
5	Z	31	G	8	PA	64	KI
4	B	61	RE	17	EC	128	A

7. Litery przypisane do liczb pierwszych utworzą nazwę metody pokazywania niewyjaśnionych prawidłowości dotyczących występowania liczb pierwszych.

24	17	73	23	44	47	25	37	27	99
E	S	P	I	U	R	O	A	K	A

43	72	29	21	31	53	84	61	89	41
L	R	A	K	U	L	B	A	M	A

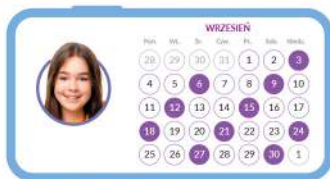
8. Ustal, czy prawidłowo wypisano niektóre wielokrotności liczby:

a) 8: 0, 8, 40, 64;

b) 9: 1, 3, 9;

c) 11: 0, 11, 22, 121.

9. Zosia uczy się gry na pianinie. W kalendarzu zaznaczyła wszystkie dni września, w które będzie ćwiczyła. Jaką własność mają liczby zaznaczone przez Zosię?



10. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Istnieje 10 liczb większych od 100 i mniejszych od 200, które są wielokrotnościami liczby 11.	P	F
Istnieje 15 liczb mniejszych od 200, które są wielokrotnościami liczby 14.	P	F

11. Rozłóż liczbę na czynniki pierwsze.

a) 75

b) 126

c) 220

d) 53

e) 338

12. Wyznacz największy wspólny dzielnik (NWD) oraz najmniejszą wspólną wielokrotność (NWW) podanych liczb.

a) 6 i 8

b) 14 i 77

c) 10 i 40

d) 7 i 45

e) 120 i 360

f) 400 i 600

g) 1 i 800

h) 120 i 125

13. Firma produkuje szklanki, które są pakowane po 4 sztuki lub po 6 sztuk. We wtorek firma wyprodukowała więcej niż 1240, ale mniej niż 1260 szklanek. Wszystkie te szklanki mogły zostać zapakowane do jednego lub drugiego rodzaju tych opakowań. Ile szklanek wyprodukowano w tej firmie we wtorek?



Sprawdź, co umiesz!

1. Spośród podanych w ramce liczb wypisz te, które są podzielne:

a) przez 5, ale nie przez 10,

b) przez 3, ale nie przez 2,

c) przez 4, ale nie przez 6.

1880 • 7685 • 2872 • 2761 • 87 231 • 621 • 225

2. Na wycieczce szkolnej zrobiono 136 zdjęć aparatem natychmiastowym. Każdy uczestnik wycieczki otrzymał tyle samo zdjęć. Ilu było uczestników wycieczki, jeśli ich liczba była większa od 30 i mniejsza od 60?



3. W której grupie liczb znajdują się tylko liczby pierwsze?

A. 0, 7, 8, 9

B. 1, 11, 13, 17

C. 0, 1, 3, 5

D. 2, 7, 11, 23

4. Wypisz wszystkie wielokrotności liczby 8 mniejsze od 73.

5. Znajdź NWD i NWW podanych liczb.

a) 27 i 13

b) 60 i 24

c) 700 i 28

d) 180 i 960

2. Działania na liczbach naturalnych

- ▶ W jaki sposób wykonywać obliczenia w pamięci z wykorzystaniem reguł kolejności wykonywania działań?
- ▶ W jaki sposób wykonywać obliczenia sposobem pisemnym?



Analizuj!

Liczyby naturalne można dodawać, odejmować, mnożyć, dzielić oraz potęgować.

Dodawanie i odejmowanie to działania odwrotne. Poprawność odejmowania można sprawdzić za pomocą dodawania. Odjemna musi być większa niż odjemnik lub równa odjemnikowi.

$$\begin{array}{ll} \text{składnik} + \text{składnik} = \text{suma} & 6 + 2 = 8 \\ \text{odjemna} - \text{odjemnik} = \text{różnica} & 8 - 2 = 6 \end{array}$$

Mnożenie i dzielenie przez liczbę różną od 0 to działania odwrotne. Poprawność dzielenia można sprawdzić za pomocą mnożenia.

$$\begin{array}{ll} \text{czynnik} \cdot \text{czynnik} = \text{iloczyn} & 6 \cdot 2 = 12 \\ \text{dzielna} : \text{dzielnik} = \text{iloraz} & 12 : 2 = 6 \\ \text{dzielna} : \text{dzielnik} = \text{iloraz i reszta} & 13 : 2 = 6 \text{ r } 1 \end{array}$$

Dla dowolnej liczby naturalnej a i liczby naturalnej $n > 1$ możemy określić **potęgę** liczby a o wykładniku n .

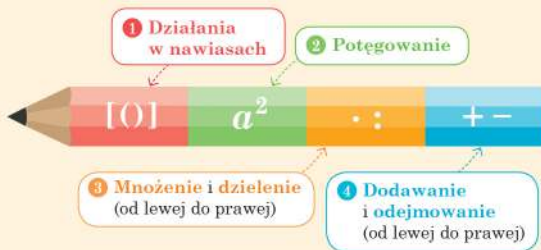
$$\begin{array}{l} \text{wykładnik potęgi} \\ \text{podstawa potęgi} \end{array} \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \quad \begin{array}{l} 6^4 = 6 \cdot 6 = 36 \\ \text{2 czynniki} \end{array}$$

Liczba 1 podniesiona do każdej potęgi jest równa 1, np. $1^1 = 1^{17} = 1$.

Jeśli wykładnik potęgi jest równy 1, to wynikiem potęgowania jest liczba równa podstawie potęgi, np. $320^1 = 320$.

Każda liczba różna od 0 podniesiona do potęgi zerowej jest równa 1, np. $129^0 = 1$.

W przypadku złożonych, wielodziałaniowych obliczeń należy kierować się **regułami kolejności wykonywania działań**.



Przykład 1.

Z okazji urodzin Bruno wraz ze swoimi przyjaciółmi wybrał się do pokoju zagadek. Oto ostatnia łamigłówka, którą musieli rozwiązać Bruno i jego przyjaciele. Rozwiąż tę łamigłówkę.

To już ostatnia cyfra kodu do sejf, którą musicie zdobyć.
Jest nią liczba będąca wartością wyrażenia:

$$50 - [5 \cdot (37 - 29) + (9 + 55) : 2^3].$$

Powodzenia!

$$\begin{aligned}
 50 - [5 \cdot (37 - 29) + (9 + 55) : 2^3] &= \text{Odejmowanie w nawiasie okrągłym} \\
 = 50 - [5 \cdot 8 + (9 + 55) : 2^3] &= \text{Dodawanie w nawiasie okrągłym} \\
 = 50 - [5 \cdot 8 + 64 : 2^3] &= \text{Potęgowanie} \\
 = 50 - [5 \cdot 8 + 64 : 8] &= \text{Mnożenie} \\
 = 50 - [40 + 64 : 8] &= \text{Dzielenie} \\
 = 50 - [40 + 8] &= \text{Dodawanie w nawiasie kwadratowym} \\
 = 50 - 48 &= \text{Odejmowanie} \\
 = 2
 \end{aligned}$$

Odp. Ostatnią cyfrą kodu do sejf jest 2.

Ćwiczenie 1.

Oblicz wartość wyrażenia.

a) $36 : 6 + 14$

b) $15 - 3 \cdot 4$

c) $100 - (4 \cdot 8 + 72 : 9)$

d) $3^2 + (10 \cdot 2^3 - 5 \cdot 12) : 2^2$

Dodawanie pisemne

Zaczynamy od rzędu jednostki.

		1	1	
	3	0	7	9
+		8	2	6
	3	9	0	5

Jeżeli suma składników w kolumnie jest równa 10 lub jest większa, zapisz pod kreską cyfrę jednostki wyniku, a nad kolejną kolumną dopisz **cyfrę dziesiątek**.

Odejmowanie pisemne

Zaczynamy od rzędu jednostki.

		9	9	12	
	3	10	10	10	11
	4	0	0	3	1
-		7	8	3	9
	3	2	1	9	2

Jeżeli masz odjąć od mniejszej liczby większą, „pożycz” dziesiątkę z następnego rzędu.

Mnożenie pisemne

		1	1	
		3	3	
		2	4	5
		•	3	7
	1	7	1	5
+	7	3	5	0
	9	0	6	5

Wyniki mnożenia kolejnych cyfr pierwszego czynnika przez **cyfrę dziesiątek drugiego czynnika** zapisujemy od rzędu dziesiątek. Pod cyfrą jednostki możesz wpisać 0.

Dzielenie pisemne

$$1\ 568\ 600 : 310 = 156\ 860 : 31$$

			5	0	6	0			
	1	5	6	8	6	0	:	3	1
-	1	5	5						
			1	8					
			-	0					
				1	8	6			
			-	1	8	6			
						0			

Jeśli wynikiem ostatniego odejmowania jest 0 i w dzielnej zostały zera, **dopisz je do wyniku**.

Przykład 2.

Podczas zajęć z robotyki Cezary chce zbudować łazik z 796 klocków. Przygotował zestaw złożony z 2500 klocków. Ilu klocków nie wykorzysta? Sprawdź otrzymany wynik.

		14	9	
	1	10	10	10
	2	5	0	0
-		7	9	6
	1	7	0	4

Obliczymy liczbę klocków, których nie wykorzysta Cezary.

		1	1	1
	1	7	0	4
+		7	9	6
	2	5	0	0

Otrzymany wynik sprawdzimy za pomocą dodawania.



Odp. Cezary nie wykorzysta 1704 klocków.

Ćwiczenie 2.

Oblicz sposobem pisemnym.

a) $356 + 243$

b) $2457 + 794$

c) $2893 - 1924$

d) $40\,024 - 8735$

Przykład 3.

Nauczyciel na zajęcia z robotyki przygotował 1548 klocków. Rozdzielił je po równo między 12 uczestników zajęć. Każdy uczestnik zbudował identyczny śmigłowiec. Z ilu klocków był zbudowany śmigłowiec? Sprawdź otrzymany wynik.



		1	2	9		
	1	5	4	8	:	12
-	1	2				
		3	4			
-		2	4			
		1	0	8		
-		1	0	8		
				0		

Obliczymy liczbę klocków, które otrzymał każdy z uczestników zajęć.

			1	
		1	2	9
			1	2
		2	5	8
+	1	2	9	0
	1	5	4	8

Otrzymany wynik sprawdzimy za pomocą mnożenia.

Odp. Każdy z uczestników zajęć otrzymał 129 klocków.

Ćwiczenie 3.

Oblicz sposobem pisemnym.

a) $729 \cdot 15$

b) $56\,300 \cdot 820$

c) $3808 : 17$

d) $16\,304\,700 : 230$

Rozwiąż zadania

1. Oblicz.

a) $29 + 31$

b) $840 + 230$

c) $193 - 98$

d) $580 - 290$

Oto moje sposoby na dodawanie i odejmowanie liczb.

$$79 + 53 = 70 + 9 + 50 + 3 = 120 + 12 = 132$$

$$79 + 53 = 79 + 1 + 52 = 80 + 52 = 132$$

$$121 - 56 = 100 + 21 - 56 = 100 - 56 + 21 = 44 + 21 = 65$$

$$121 - 56 = 121 - 21 - 35 = 100 - 35 = 65$$



2. Oblicz w pamięci.



Oto mój sposób na mnożenie i dzielenie liczb.

$$15 \cdot 8 = 10 \cdot 8 + 5 \cdot 8 = 80 + 40 = 120$$

$$190 : 5 = 100 : 5 + 90 : 5 = 20 + 18 = 38$$

a) $12 \cdot 6$

b) $340 \cdot 8$

c) $87 : 3$

d) $246 : 6$

3. Oblicz kwadrat i sześćcian każdej liczby w ramce.

$$3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$$

4. Oblicz sposobem pisemnym.

a) $261 + 129$

b) $1459 + 783$

c) $2873 - 764$

d) $3001 - 1892$

e) $346 \cdot 7$

f) $2670 : 520$

g) $3332 : 14$

h) $149\,940 : 420$

5. Wyznacz resztę z dzielenia.

a) $32 : 5$

b) $100 : 8$

c) $222 : 3$

d) $1213 : 11$

6. Oblicz. Przypisane do wyników litery czytane z góry na dół utworzą hasło – imię i nazwisko polskiego matematyka.

$$789 + 5097$$

$$39\,875 + 346$$

$$789 + 357 + 1256$$

$$2393 - 785$$

$$10\,089 - 596$$

$$10\,000 - (957 + 327)$$

$$129 \cdot 7$$

$$5354 \cdot 23$$

$$14\,680 : 503$$

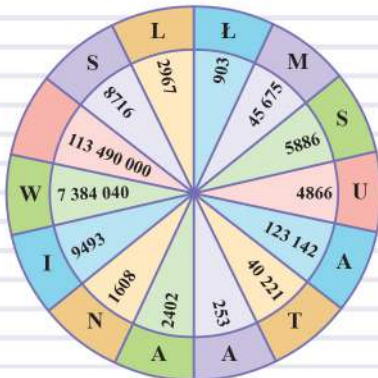
$$87\,300 : 1300$$

$$58\,392 : 12$$

$$80\,109 : 27$$

$$63\,250 : 250$$

$$7\,308\,000 : 160$$



7. Wyznacz liczbę:

- a) o 58 większą od iloczynu liczb 3 i 80;
- b) o 16 mniejszą od ilorazu liczb 450 i 25;
- c) 9 razy większą od różnicy liczb 2981 i 398;
- d) 5 razy mniejszą od sumy liczb 5342 i 698;
- e) 7 razy większą niż reszta z dzielenia kwadratu liczby 11 przez 25.

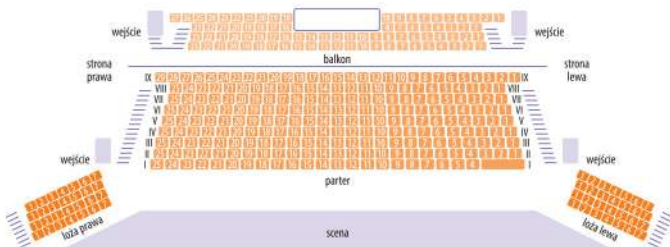
8. Oblicz.

- a) $100 - 6 \cdot 6$
- b) $4 \cdot 5 + 48 : 8$
- c) $13 \cdot (72 - 32) + 560$
- d) $(240 - 155) : 5 \cdot 320$
- e) $[144 : 6 + (4^3 - 8^2)] : 4$
- f) $5050 - (999 + 3^2 - 2^3) - (800 + 220)$

9. Dziadek Karoliny jest matematykiem. Kiedy Karolina zapytała go, ile ma lat, powiedział poniższe zdanie. Ile lat ma dziadek Karoliny?

Liczba moich lat jest równa reszcie z dzielenia wartości wyrażenia $1493 - [3 \cdot (721 - 679) + (1003 - 999) \cdot 5^3]$ przez liczbę 800.

10. W Teatrze Muzycznym im. Danuty Baduszkowej w Gdyni znajdują się trzy sceny: Duża Scena, Scena Kameralna oraz Nowa Scena z łóżami. Duża Scena liczy 1070 miejsc. Scena Kameralna składa się z 3 rzędów po 19 miejsc oraz 6 rzędów po 15 miejsc. Plan Nowej Sceny z łóżami przedstawiono poniżej. Ile łącznie miejsc znajduje się w Teatrze Muzycznym w Gdyni?



11. Oto daty urodzenia i śmierci trzech wybitnych polskich matematyków.

- **Marian Rejewski:** MCMV–MCMLXXX
- **Stefan Banach:** MDCCCXCII–MCMXLV
- **Stanisław Ulam:** MCMIX–MCMLXXXIV

Który z wymienionych matematyków żył najkrócej?

I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000



12. Czterocyfrową liczbę naturalną można zapisać w postaci:
 $1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d$, gdzie a, b, c, d są cyframi i a jest różne od 0.
 Jeśli sumy cyfr a i c oraz b i d są równe, to taka liczba jest podzielna przez 11.
 Sprawdź, czy podane w ramce czterocyfrowe liczby są podzielne przez 11.

$$8437 \cdot 6963 \cdot 5434$$

Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz w pamięci.

- a)** $28 + 42$ **b)** $584 + 366$ **c)** $123 - 49$ **d)** $730 - 260$
e) $21 \cdot 7$ **f)** $630 : 4$ **g)** $484 : 4$ **h)** $175 : 25$

2. Oblicz sposobem pisemnym.

- a)** $261 + 338$ **b)** $734 + 689$ **c)** $9268 - 147$ **d)** $10\,562 - 3975$
e) $319 \cdot 6$ **f)** $970 \cdot 1300$ **g)** $25\,080 : 15$ **h)** $45\,600 : 190$

3. Oblicz.

- a)** $15 \cdot 3 + 66 : 11$ **b)** $5^2 + 6^2 : 3^2$
c) $(3^4 : 9 + 84 : 4) : 5$ **d)** $200 - [3 \cdot (42 - 33) + (104 - 79) : 5^2]$

4. Ela znalazła przepis na batony owsiane z żurawiną. Łączna masa wszystkich potrzebnych składników wynosi 564 g. Jeden taki baton według przepisu waży 47 g i zawiera między innymi 7 g tłuszczów, 17 g węglowodanów oraz 5 g białka. Przyjmujemy, że masa batonów po upieczeniu się nie zmienia.

Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Wszystkie batony z tego przepisu zawierają łącznie 60 g białka.

P

F

Według przepisu wszystkie batony zawierają o 120 g więcej węglowodanów niż tłuszczów.

P

F

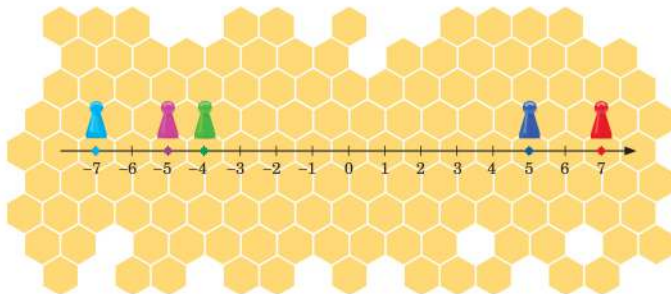
3. Liczby całkowite i ich wartość bezwzględna

- ▶ Czym są liczby całkowite? Jak zaznaczać je na osi liczbowej? Jak porównywać liczby całkowite?
- ▶ Czym jest liczba przeciwna do liczby całkowitej?
- ▶ Czym jest wartość bezwzględna liczby całkowitej? Jaka jest interpretacja wartości bezwzględnej na osi liczbowej?



Odkrywaj!

1. Bruno i Cezary ustawili pionki na planszy. Przyjrzyj się ich ustawieniu i odpowiedz na pytanie.



- a) Który pionek znajduje się bliżej liczby 0: błękitny czy czerwony?
 - b) Który pionek znajduje się bliżej liczby 0: błękitny czy zielony?
 - c) Który pionek znajduje się w odległości równej 7 od liczby 0? Czy możesz wskazać tylko jeden taki pionek?
 - d) Który z pionków na planszy jest ustawiony w takiej samej odległości od liczby 0 jak pionek granatowy? Ile wynosi ta odległość?
2. Ile wynosi odległość liczby -2 od liczby 0 ? Czy istnieje jeszcze inna liczba, której odległość od liczby 0 jest równa tyle samo co odległość liczby -2 od liczby 0 ?



Analizuj!

Liczby naturalne to: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

Liczby całkowite to: ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... Można je przedstawić na osi liczbowej.



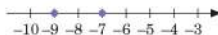
Im dalej **na lewo** od zera znajduje się liczba, tym jest ona **mniejsza**, np. $-5 < -4$.

Im dalej **na prawo** od zera znajduje się liczba, tym jest ona **większa**, np. $5 > 4$.

Przykład 1.

Porównaj liczby -7 i -9 . Wstaw między nie odpowiedni znak: $<$ lub $>$.

Liczba -9 leży dalej na lewo na tej osi liczbowej niż liczba -7 . Zatem $-9 < -7$.



Ćwiczenie 1.

Porównaj liczby. Wstaw między nie odpowiedni znak: $<$ lub $>$.

a) 8 i 10

b) -2 i 6

c) -5 i -3

d) -23 i -42

Liczby, które leżą na osi liczbowej w takiej samej odległości od 0, to **liczby przeciwne**. Ich suma wynosi 0.

Liczbą przeciwną do liczby 0 jest 0.



Liczby 6 oraz -6 to liczby przeciwne, ponieważ $-6 + 6 = 0$.

Przykład 2.

Podaj liczby przeciwne do liczb 15 i -21 .

Liczbą przeciwną do liczby 15 jest liczba -15 , ponieważ $-15 + 15 = 0$.

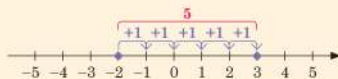
Liczbą przeciwną do liczby -21 jest liczba 21, ponieważ $-21 + 21 = 0$.

Ćwiczenie 2.

Podaj liczbę przeciwną do danej liczby.

- a) 1 b) -16 c) 54 d) -3 e) 0

Odległość na osi liczbowej między liczbami -2 i 3 wynosi 5.

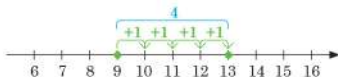


Przykład 3.

Oblicz odległość na osi liczbowej między podanymi liczbami.

- a) 9 i 13

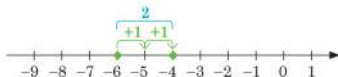
Narysujemy oś liczbową i zaznaczymy na niej liczby 9 i 13.



Odległość na osi liczbowej między liczbami 9 i 13 wynosi 4.

- b) -4 i -6

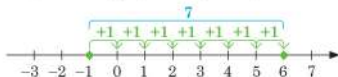
Narysujemy oś liczbową i zaznaczymy na niej liczby -4 i -6.



Odległość na osi liczbowej między liczbami -4 i -6 wynosi 2.

- c) -1 i 6.

Narysujemy oś liczbową i zaznaczymy na niej liczby -1 i 6.



Odległość na osi liczbowej między liczbami -1 i 6 wynosi 7.

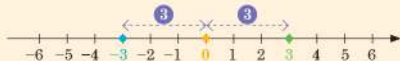
Ćwiczenie 3.

Oblicz odległość na osi liczbowej między podanymi liczbami.

- a) 2 i 10 b) 0 i -6 c) -4 i -9 d) -5 i 8

Wartością bezwzględną liczby nazywamy odległość tej liczby od liczby 0. Wartość bezwzględną liczby a zapisujemy jako $|a|$. Wartość bezwzględna liczby zawsze jest nieujemna.

Liczby **3 i -3** to **liczby przeciwne**. Leżą one na osi liczbowej w jednakowej odległości od **0**. Odległość na osi liczbowej liczby 3 od 0 wynosi 3 oraz odległość liczby -3 od 0 wynosi 3. Możemy zapisać symbolicznie: $|3| = 3$ oraz $|-3| = 3$.



$|-3| = 3$ czytamy: *wartość bezwzględna liczby -3 wynosi 3* lub *odległość liczby -3 od zera wynosi 3*.

Przykład 4.

Oblicz.

- a) $|7|$ b) $|-15|$ c) $|0|$
 a) $|7| = 7$, ponieważ odległość na osi liczbowej liczby 7 od 0 wynosi 7.
 b) $|-15| = 15$, ponieważ odległość na osi liczbowej liczby -15 od 0 wynosi 15.
 c) $|0| = 0$, ponieważ odległość na osi liczbowej liczby 0 od 0 wynosi 0.

Ćwiczenie 4.

Oblicz.

- a) $|12|$ b) $|-42|$ c) $|-1|$ d) $-|10|$

Przykład 5.

Pola i Zosia grają w grę *Wszystkie skarby Makemake*. Celem gry jest zdobycie jak największej liczby diamentów oraz uniknięcie pułapek. Diament jest położony na polu z liczbą 0. Na planszy zaznaczono aktualne pozycje pionków dziewcząt.



- a) O ile pól i w którą stronę musi przesunąć swój pionek każda z dziewcząt, aby dotrzeć do diamentu? Pionki mogą poruszać się w obu kierunkach.

Pola: 4 pola w prawo

Zosia: 4 pola w lewo

b) W jakiej odległości od diamentu znajdują się pionki dziewcząt?

Odległość każdego pionka od diamentu wynosi 4.

c) Na którym polu należałoby postawić pionek Poli, a na którym Zosi, aby odległości ich pionków od diamentu wynosiły 7? Jak zapisać tę informację przy użyciu wartości bezwzględnej?

Rozwiązanie przedstawimy na rysunku.



Zarówno odległość liczby -7 , jak i liczby 7 od diamentu wynosi 7 .

Są to pola z takimi liczbami x , dla których: $|x| = 7$.

Ćwiczenie 5.

Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby x , dla których:

a) $|x| = 5$,

b) $|x| = 0$,

c) $|x| = -6$.

Rozwiąż zadania

1. Wypisz z ramki liczby:

a) naturalne,

b) całkowite,

c) dodatnie,

d) niedodatnie.

$5 \cdot -2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 0 \cdot -12 \cdot 31 \cdot 43 \cdot -7 \cdot 1$

Liczby niedodatnie to liczby ujemne wraz z liczbą 0. Liczby nieujemne to liczby dodatnie wraz z liczbą 0.



2. Porównaj liczby. Wstaw między nie odpowiedni znak: $<$ lub $>$.

a) 13 ? 11

b) -2 ? 3

c) -7 ? -13

d) -101 ? -99

3. Uporządkuj liczby w kolejności:

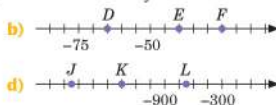
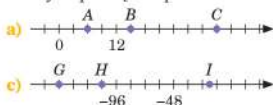
a) od najmniejszej do największej, $-103 \cdot 204 \cdot 20 \cdot -120 \cdot -220$

b) malejącej. $201 \cdot -109 \cdot 99 \cdot -101 \cdot 231$

4. Poniżej przedstawiono temperatury powietrza w dniu 15 marca w wybranych miastach Europy. Zapoznaj się z mapą i odpowiedz na pytanie.
- W którym mieście jest prognozowana najwyższa temperatura tego dnia?
 - W którym mieście temperatura tej nocy ma być najniższa?
 - W których trzech miastach dzień ma być najcieplejszy?
 - W których miastach temperatura w nocy ma być niższa niż -2°C ?
 - W którym mieście prognozowana temperatura w ciągu dnia ma być wyższa – w Sztokholmie czy w Oslo?



5. Podaj współrzędne punktów zaznaczonych na osi liczbowej.



6. Narysuj oś liczbową, a następnie zaznacz na niej podane liczby oraz liczby przeciwne do podanych.

a) 25, -15, -10, 5, 0, 10

b) -24, 6, -12, 30, 12, -18

7. Wypisz wszystkie liczby całkowite:

a) ujemne większe od -7,

b) nieujemne mniejsze od 5.

8. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Istnieje 130 liczb całkowitych dodatnich mniejszych od 130.	P	F
Jest dokładnie 38 liczb całkowitych mniejszych od 17 i większych od -21.	P	F

9. Przerysuj tabelę do zeszytu i uzupełnij ją.

Liczba a	-3			21		
Liczba przeciwna do liczby a		101	-99		0	-17

10. Oblicz odległość na osi liczbowej między podanymi liczbami.

a) 10 i 22

b) -6 i -3

c) -4 i 5

d) -11 i 17

11. Na rysunku przedstawiono schemat fragmentu planu gry terenowej. Gracz przeszedł z placu zabaw do budki z lodami, a następnie do fontanny. Później wrócił na plac zabaw. Odcinkowi jednostkowemu na schemacie odpowiada w rzeczywistości 5 m. Oblicz, jaką odległość pokonał gracz.



12. Oblicz.

a) $|-3|$

b) $|25|$

c) $|-17|$

d) $-|4|$

e) $-|-2|$

13. Odpowiedz na pytanie.

a) Jakie liczby mogą kryć się pod znakami , ,  i ?

$|-5| =$ 

$|\text{flower}| = 3$

$|\text{heart}| = 0$

$-|\text{star}| = -7$

b) Czy istnieje liczba, która może kryć się pod znakiem , gdy $|\text{happy face}| = -1$?



14. Oblicz wartość każdego z poniższych wyrażeń i zapisz przyporządkowaną mu literę. Dzięki temu poznasz hasło – inną nazwę wartości bezwzględnej.

I. $-|-12+2|$

II. $-|11+2+|-5||$

III. $-|-12+|-1+1||$

IV. $||0|-|-12||$

V. $-|-2|+|-5|$

-18 O
-12 D

-13 K
-10 M

12 U
-7 Ł

11 J
8 M

Sprawdź, co umiesz!

1. Porównaj liczby. Wstaw między nie odpowiedni znak: $<$ lub $>$.

a) -9 ? 1

b) 121 ? -102

c) -2 ? -4

d) -11 ? -100

2. Wypisz wszystkie liczby całkowite:

a) większe od -3 i mniejsze od 5 ,

b) niedodatnie większe od -6 .

3. Na osi liczbowej zaznaczono punkty: $A = -8$, $B = -2$, $C = 0$, $D = 11$. Oblicz odległość między podanymi punktami.

a) C i D

b) B i C

c) A i B

d) A i D

4. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Wartość bezwzględna liczby 5 jest większa od wartości bezwzględnej liczby (-5) .	P	F
Istnieją tylko dwie liczby całkowite, których wartości bezwzględne są mniejsze niż 3.	P	F

5. Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

I. Która z liczb jest liczbą przeciwną do liczby 21?

A. $\frac{1}{21}$

B. -21

II. Która z liczb jest liczbą przeciwną do liczby $|-21|$?

C. -21

D. 21

4. Działania na liczbach całkowitych

- ▶ W jaki sposób dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić liczby całkowite?
- ▶ Jak obliczać kwadraty i sześciany liczb całkowitych?



Analizuj!

Przykład 1.

Pani Karolina interesuje się funkcjonowaniem małych przedsiębiorstw. Analizuje zestawienie zysków i strat firmy edukacyjnej. Ustal stan konta po kolejnych opisanych operacjach bankowych.



2 stycznia:	-400 zł	+	(-600 zł)	=	-1000 zł
	STRATA		STRATA		STRATA
3 stycznia:	-1000 zł	+	300 zł	=	-700 zł
	STRATA		ZYSK		STRATA
7 stycznia:	-700 zł	+	900 zł	=	200 zł
	STRATA		ZYSK		ZYSK
10 stycznia:	200 zł	+	(-50 zł)	=	150 zł
	ZYSK		STRATA		ZYSK

Odp. Stan konta po opisanych operacjach bankowych wynosi 150 zł.

Ćwiczenie 1.

Skorzystaj z informacji zawartych w przykładzie 1. Oblicz stan konta firmy edukacyjnej po kolejnych opisanych operacjach bankowych.



11 stycznia:	1300 zł	15 stycznia:	-400 zł
	ZYSK		STRATA
14 stycznia:	-1500 zł	18 stycznia:	900 zł
	STRATA		ZYSK

Jak ustalić znak sumy liczb całkowitych?



$$\begin{array}{lcl}
 + + + = + & \longrightarrow & (+7) + (+3) = +10 \\
 - + - = - & \longrightarrow & (-7) + (-3) = -10 \\
 + + - = 0 & \longrightarrow & (+7) + (-7) = 0 \\
 + + - = + & \longrightarrow & (+7) + (-3) = +4 \\
 + + - = - & \longrightarrow & (+3) + (-7) = -4
 \end{array}$$

Przykład 2.

Oblicz.

a) $-6 + (-15) = -21$

b) $15 + (-6) = 9$

c) $-6 + 15 = 9$

d) $-15 + 6 = -9$

Ćwiczenie 2.

Oblicz.

a) $-14 + 8$

b) $-14 + (-8)$

c) $14 + (-8)$

d) $-8 + 14$



Odejmowanie liczby można zapisać jako dodawanie liczby do niej przeciwnej, np. $5 - 7 = 5 + (-7) = -2$.

Przykład 3.

Oblicz.

a) $9 - 17 = 9 + (-17) = -8$

b) $-9 - 17 = -9 + (-17) = -26$

c) $9 - (-17) = 9 + 17 = 26$

d) $-9 - (-17) = -9 + 17 = 8$

Ćwiczenie 3.

Oblicz.

a) $7 - 13$

b) $-7 - 13$

c) $7 - (-13)$

d) $-7 - (-13)$

Iloczyn i iloraz liczb całkowitych



Iloczyn oraz iloraz dwóch liczb o takich samych znakach jest liczbą dodatnią, np.
 $(-3) \cdot (-5) = 15$, $(-30) : (-15) = 2$.

Iloczyn oraz iloraz dwóch liczb o różnych znakach jest liczbą ujemną, np.
 $(-8) \cdot 3 = -24$, $42 : (-7) = -6$.

Przykład 4.

Oblicz.

a) $(-6) \cdot 4 = -24$

c) $(-36) : (-9) = 4$

b) $(-7) \cdot (-10) = 70$

d) $4500 : (-50) = 450 : (-5) = -90$

Ćwiczenie 4.

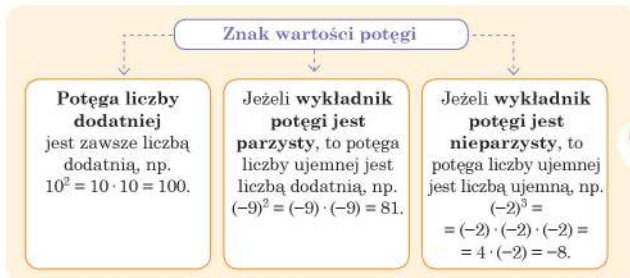
Oblicz.

a) $(-8) \cdot (-7)$

b) $5 \cdot (-11)$

c) $72 : (-8)$

d) $(-180) : (-5)$



Przykład 5.

Oblicz.

a) $12^2 = 12 \cdot 12 = 144$

c) sześcián liczby 6
 $6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

b) $(-6)^3 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = -216$

d) kwadrat liczby (-12)
 $(-12)^2 = (-12) \cdot (-12) = 144$

Ćwiczenie 5.

Oblicz.

a) kwadrat liczby 11

b) $(-8)^2$

c) 4^3

d) sześcián liczby (-5)

Rozwiąż zadania

1. Oblicz w pamięci:

a) $-7 + 9$

b) $-30 + 20$

c) $19 + (-5)$

d) $-27 + 100$

e) $99 + (-212)$

f) $-71 + (-9)$

g) $28 - 46$

h) $-21 - (-37)$

i) $46 - (-67)$

j) $-130 - 90$

k) $123 + (-89)$

l) $-375 + 425$

2. Bartek, Maciek i Oskar grali w grę karcianą. Na koniec rundy zsumowali zdobyte przez siebie punkty.

- a) Ile punktów zdobył w tej rundzie każdy z chłopców?
b) Który z chłopców miał najwięcej punktów i wygrał tę rundę?

Bartek	-7	3	-5	8
Maciek	-5	8	5	-10
Oskar	-1	5	5	-7

3. Ola przez tydzień obserwowała zmiany temperatury powietrza. Wyniki swoich obserwacji zapisywała w tabeli. Na podstawie tej tabeli odpowiedz na pytanie.

poniedziałek	wtorek	środa	czwartek	piątek	sobota	niedziela
-7°C	-3°C	2°C	-2°C	1°C	5°C	-4°C

- a) O ile stopni więcej Ola odnotowała w piątek niż we wtorek?
b) O ile stopni wzrosła temperatura z poniedziałku na wtorek?
c) Ile wynosi różnica między najwyższą a najniższą temperaturą odnotowaną przez Olę?

4. Znajdź liczbę:

- a) o 7 większą od -72 ,
b) o 82 mniejszą od 12,
c) o 37 większą od -6 ,
d) o 76 mniejszą od -17 .

5. Porównaj wartości wyrażeń. Wstaw między nie odpowiedni znak: $<$, $>$ lub $=$.

- a) $28 - 71$? $28 - (-71)$
b) $712 - 12$? $-123 - 12$
c) $291 - (-219)$? $291 - 291$
d) $826 + (-122)$? $-122 + (-826)$

6. Oblicz.

- a) $(-21) + 45 - 12$
b) $(-121) + 300 - 65 + 21$
c) $(-81) + (-21) - (-14) + 6$
d) $-(-108) + 127 - 103 + (-112)$

7. Oblicz.

- a) $-2819 + 281$
b) $2761 + (-1211)$
c) $-1652 + (-2112)$
d) $2871 - 7615$
e) $-2281 - 276$
f) $-7261 - (-9287)$

8. Wiedząc, że $982 - 245 = 737$ oraz $982 + 245 = 1227$, oblicz:

- a) $245 - 982$,
b) $-982 - 245$,
c) $-245 - (-982)$.

9. Poniżej przedstawiono historię konta pani Agaty. Zapoznaj się z tymi informacjami, a następnie odpowiedz na pytanie.



DATA	OPIS OPERACJI	OPERACJA	SALDO PO OPERACJI
9.05	debet	- 300 zł	- 300 zł
10.05	wynagrodzenie	+ 4900 zł	?
10.05	zakupy spożywcze	- 250 zł	?
11.05	naprawa samochodu	- 400 zł	?
13.05	czynsz	- 1800 zł	?

- a) Jaką kwotę miała pani Agata 10 maja po zrobieniu zakupów spożywczych?
 b) Ile zostało pieniędzy na koncie pani Agaty po naprawie samochodu?
 c) Jaka kwota została pani Agacie po opłaceniu czynszu?

10. Oblicz w pamięci.

- a) $9 \cdot (-3)$ b) $(-7) \cdot (-4)$ c) $(-48) : (-6)$ d) $(-49) : 7$
 e) $(-10) \cdot 21$ f) $7 \cdot (-190)$ g) $(-18) \cdot (-30)$ h) $(-15) \cdot 70$
 i) $333 : (-3)$ j) $84 : (-4)$ k) $(-750) : (-5)$ l) $(-92) : 4$

11. Wskaż wynik działania wśród liczb zapisanych w ramce.

- I. $(-5)^2$ II. $(-13)^2$ III. $(-20)^3$ IV. $|20^3|$ V. $-|7^2|$

$-25 \cdot 49 \cdot 169 \cdot -10 \cdot -8000 \cdot -26 \cdot 8000 \cdot -49 \cdot 25$

12. Ustal znak wyniku bez wykonywania obliczeń.

- a) $(-2) \cdot (-23) \cdot 12 \cdot (-2)$ b) $(-210) : (-7) \cdot (-1)^2$

13. Zapisz liczbę (-32) w postaci:

- a) iloczynu trzech liczb, b) ilorazu dwóch liczb.

14. Oblicz. Otrzymane wyniki ułóż w kolejności od najmniejszego do największego. Przypisane do działań litery utworzą hasło – nazwę pierwszego kraju, w którym w VII wieku stosowano liczby ujemne do obliczania wysokości zadłużenia.

$(-63) : (-21) + 7$

D

$(-2)^2 \cdot 5$

E

$(-27) : (-3)$

N

$(-4) \cdot 20 : (-5) + (-4)$

I

$(-2)^2 \cdot 20 - 120$

I

15. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Suma dwóch liczb przeciwnych zawsze jest równa zero.	P	F
Suma dwóch liczb ujemnych zawsze jest większa niż iloczyn tych liczb.	P	F
Różnica dwóch liczb ujemnych może być mniejsza niż ich suma.	P	F

16. Oblicz.

a) $|-25| : 5 \cdot (-1)^3 + |24 - 28|$

b) $76 \cdot (-2) - |-27| \cdot (-1)$

c) $(|46 - 71| - (-51)) \cdot (-2)$

d) $|(-10)^2| - |11^2|$

17. Jakie liczby mogą kryć się pod ♪, ☺ i ♥?

♪ + (-12) = -26

☺ + (-12) = 26

♥ - (-12) = 26

18. Oceń, czy wartość wyrażenia jest dodatnia, czy ujemna.

a) $-(-(-(3 \cdot (-21))))$

b) $(-1)^3 \cdot (-(-(5 - 8) \cdot 2))$

Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz.

a) $(-7) + (-17)$

b) $24 - 31$

c) $(-71) + 55$

d) $84 - (-20)$

e) $(-96) : 8$

f) $(-16) \cdot 21$

g) $(-231) : (-7)$

h) $15 \cdot (-12)$

2. Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

I. Czy iloczyn dwóch liczb ujemnych jest równy iloczynowi liczb do nich przeciwnych?

A. Tak.

B. Nie.

II. Czy wartość wyrażenia $-|(-21) \cdot 3|$ jest liczbą mniejszą od zera?

C. Tak.

D. Nie.

3. Oblicz.

a) $(-6)^2$

b) $(-10)^3$

c) $-(-6^2)$

d) $-(-10^3)$

5. Zadania tekstowe

- ▶ Jak rozwiązywać zadania tekstowe?
- ▶ Jak rozwiązywać zadania tekstowe z nadmiarem oraz niedoborem danych?



Analizuj!

Schemat rozwiązywania zadań tekstowych

1. Uważnie przeczytaj treść zadania.
2. Wypisz dane lub przedstaw je w wybranej postaci, np. na rysunku.
3. Ułóż plan prowadzący do rozwiązania zadania – zapisz działania, które pozwolą odpowiedzieć na postawione w zadaniu pytanie.
4. Rozwiąż zadanie – wykonaj wszystkie działania, sprawdź je.
5. Przeanalizuj rozwiązanie – sprawdź, czy otrzymane wartości mają sens w kontekście praktycznym i matematycznym.
6. Zapisz odpowiedź.



Przykład 1.

Kuba uprawia kolarstwo górskie. Niedawno jego rodzice kupili mu nowy rower, który kosztował 3140 zł. Przy zakupie wpłacili zaliczkę w wysokości 980 zł, a pozostałą kwotę rozłożyli bez dodatkowych opłat na 9 rat równej wielkości. Ile wynosiła jedna rata?

Wypiszemy dane z treści zadania:

3140 zł – cena roweru

980 zł – wysokość zaliczki

9 – liczba rat

Obliczymy, jaka kwota pozostała do spłaty w 9 ratach:

$3140 \text{ zł} - 980 \text{ zł} = 2160 \text{ zł}$.

Obliczymy, ile wynosiła jedna rata:

$2160 \text{ zł} : 9 = 240 \text{ zł}$.

Odp. Jedna rata wynosiła 240 zł.



3140 zł

-->		2	4	0		
		2	1	6	0	: 9
-	1	8				
		3	6			
-	3	6				
		0				

Ćwiczenie 1.

Pani Nowik kupiła samochód na raty. Wpłaciła 27 999 zł zaliczki. Pozostałą kwotę spłaci w 48 równych ratach wynoszących 3500 zł. Ile wyniesie koszt zakupu tego samochodu?



Zdarza się, że w treści zadań tekstowych występuje nadmiar informacji. Dane, które są zbędne, należy pominąć podczas rozwiązywania zadania.

Przykład 2.

W tabeli przedstawiono wyciąg z konta pana Adama zawierający wszystkie operacje bankowe z trzech dni.



DATA	OPERACJA BANKOWA	STAN KONTA
15.09	+ 5736 zł	3790 zł
15.09	+ 1240 zł	5030 zł
16.09	- 10 000 zł	- 4970 zł
16.09	- 120 zł	?
17.09	+ 8000 zł	?

Jaki był stan konta pana Adama na koniec dnia 17 września? Które informacje przedstawione w tabeli nie są potrzebne do rozwiązania tego zadania?

Obliczymy stan konta pana Adama po wypłacie 120 zł dnia 16 września:
 $-4970 \text{ zł} - 120 \text{ zł} = -5090 \text{ zł}$.

Obliczymy stan konta pana Adama po wpłacie 8000 zł dnia 17 września:
 $-5090 \text{ zł} + 8000 \text{ zł} = 2910 \text{ zł}$.

Odp. Stan konta pana Adama na koniec dnia 17 września wynosił 2910 zł. Dane z dnia 15.09 nie były potrzebne do rozwiązania zadania.

Ćwiczenie 2.

Całkowity koszt 4-dniowej wycieczki dla 25-osobowej klasy w Tatry wynosi 30 750 zł. Nocleg w schronisku dla jednej osoby kosztuje 80 zł za dobę, a całodzienne wyżywienie 89 zł. Ile wynosi koszt wycieczki jednego uczestnika? Czy wszystkie informacje tekstowe i graficzne są potrzebne do rozwiązania tego zadania? Jeśli nie, to które z nich można pominąć?

Cel podróży / nazwa obiektu



Tatry

liczba osób



25 osób

liczba dób



3 doby

cena noclegu
od osoby
za dobę: 80 zł



Pokaż na mapie



Zarezerwuj teraz

Zdarza się, że w treści zadań tekstowych nie ma wszystkich informacji potrzebnych do ich rozwiązania. Brakujące dane można znaleźć na rysunku, w tabeli czy na diagramie zamieszczonych przy treści zadania. Czasem informacji trzeba poszukać, np.: na innej stronie podręcznika do matematyki, w podręczniku do biologii czy historii lub w internecie.



Przykład 3.

Najwyższy punkt w Australii to wierzchołek Góry Kościuszki położony 2228 m n.p.m. Oblicz różnicę wysokości między najwyższym punktem Australii a:

- a) najwyższym punktem Ameryki Południowej,
- b) najniższym punktem Afryki.

Potrzebnych informacji poszukaj na zdjęciu, w atlasie geograficznym albo internecie.

Potrzebne informacje można znaleźć w atlasie geograficznym.



ACONCAGUA (6960 n.p.m.) jest najwyższym szczytem Ameryki Południowej i najwyższym szczytem położonym poza Azją.



JEZIORO ASAL (150 m p.p.m.) jest najniżej położonym obszarem w Afryce.



- a) Różnica wysokości: $6960 \text{ m} - 2228 \text{ m} = 4732 \text{ m}$

Odp. Różnica wysokości między Górą Kościuszką a Aconcaguą wynosi 4732 m.

- b) Położenie najniższego punktu Afryki (Jeziora Asal) można zapisać jako 150 m p.p.m. (poniżej poziomu morza).

Różnica wysokości: $2228 \text{ m} - (-150 \text{ m}) = 2228 \text{ m} + 150 \text{ m} = 2378 \text{ m}$

Odp. Różnica wysokości pomiędzy Górą Kościuszką a najniższym punktem Afryki (Jezioro Asal) wynosi 2378 m.

Ćwiczenie 3.

Ile lat upłynęło od podanego wydarzenia historycznego do 2025 roku?

- a) hold pruski b) Konstytucja 3 maja c) powstanie kościuszkowskie

Potrzebnych informacji poszukaj w książkach historycznych albo w internecie.

Rozwiąż zadania

1. Pan Marcin przygotowuje wystrój sali na imprezę urodzinową. Zamówił 7 opakowań balonów oraz 15 sztuk lampionów. Do zawieszenia każdej z dekoracji potrzebuje specjalnej zawieszki. Balony są sprzedawane w opakowaniach po 35 sztuk. Ile takich zawieszek musi przygotować pan Marcin?



2. Zuzia zbiera naklejki ulubionych zespołów muzycznych. Dostała od rodziców album, który może pomieścić 360 naklejek. Na początku umieściła w albumie 120 naklejek, które otrzymała od przyjaciół. Teraz planuje dokupić jeszcze 8 zestawów naklejek, aby wypełnić cały album. W każdym zestawie jest tyle samo naklejek. Ile naklejek znajduje się w jednym zestawie?

3. Ile co najmniej pięter ma centrum handlowe, w którym zamieszczono poniższą informację?



4. Jacek planuje zostać ornitologiem. Pewnego dnia prowadził obserwacje ptaków odlatujących z pobliskiego drzewa i siadających na nim. W tabeli zapisał swoje obserwacje.



10.00	od 10.01 do 10.30	od 10.31 do 11.00	od 11.01 do 11.30	od 11.31 do 12.00	od 12.01 do 12.30	od 12.31 do 13.00
14 ptaków	- 2	+ 3	- 4	- 5	+ 2	- 4

- a) Ile ptaków siedziało na drzewie w samo południe?
b) O której godzinie na drzewie było więcej ptaków: o 11.00 czy o 12.30?
c) Czy o godzinie 12.00 mogłoby odlecieć z drzewa 7 ptaków?

5. Piętnastoletni Kostek pożyczył 10 zł od Tomka i 15 zł od Karola. Kiedy otrzymał swoje kieszonkowe, oddał Tomkowi i Karolowi pożyczone pieniądze. Ile złotych kieszonkowego zostało Kostkowi?

DATA	OPERACJA BANKOWA	TYTUŁ	KWOTA
15.09	przelew przychodzący	kieszonkowe	50 zł

6. Najwyższą w historii temperaturę powietrza w Europie odnotowano w 2021 roku we Włoszech. Termometry wskazywały wtedy 49 °C. Najniższą temperaturę w Polsce odnotowano w 1940 roku w Siedlcach. Była ona o 90 °C niższa niż najwyższa temperatura w historii w Europie. Oblicz tę temperaturę.



7. Na wspólnym koncie państwa Nowaków było 500 zł debetu. Pan Nowak wpłacił na to konto 700 zł, a pani Nowak dokonała wpłaty w wysokości 750 zł. Jaki jest stan konta państwa Nowaków po tych operacjach?

8. Najniższym punktem Morza Bałtyckiego jest Głębia Landsort. Najwyższy szczyt Polski to Rysy. Jaka jest różnica wysokości między tymi punktami? Brakujących informacji poszukaj w atlasie geograficznym albo w internecie.



9. O godzinie 6.00 temperatura powietrza wynosiła -6°C , w południe była o 3°C wyższa, a o godzinie 15.00 była o 4°C wyższa niż o 6.00. Jaka była temperatura o godzinie 15.00? Czy wszystkie podane informacje są potrzebne do rozwiązania tego zadania? Jeśli nie, to które z nich można pominąć?

10. Ułóż zadanie tekstowe, które rozwiążesz przy użyciu podanego działania.

a) $130 - 200$

b) $4 \cdot (-25)$

c) $-1225 - 1800$

Sprawdź, co umiesz!

1. Pan Dariusz na koncie debetowym miał 175 zł. Wydał 230 zł na zakupy spożywcze. Następnie codziennie przez 3 dni wpłacał na to konto po 115 zł. Jaka kwotę ma teraz pan Dariusz na tym koncie?

2. Nina grała w grę VR o tematyce kosmicznej. Na początku misji Nina miała na koncie 58 punktów. W trakcie lotu przez asteroidy straciła 24 punkty. Potem odkryła stację kosmiczną, za co otrzymała bonus w wysokości 17 punktów. Później znalazła rzadki krystaliczny artefakt, który podwoił jej aktualną liczbę punktów. Czy Nina może odblokować następny poziom gry, jeśli należy mieć co najmniej 100 punktów, by to zrobić? Wybierz odpowiedź oraz jej uzasadnienie.



Tak,	ponieważ	$58 - 24 + 17 \cdot 2 < 100$.
Nie,		$(58 - 24 + 17) \cdot 2 > 100$.
		$58 - 24 + 17 + 2 < 100$.

3. Najwyższy szczyt na planecie Wenus to jeden ze szczytów masywu Maxwell Montes (czytaj: makslel montez). Jego wysokość sięga w przybliżeniu 11 000 m. Oblicz, ile metrów różnicy jest między najwyższym szczytem masywu Maxwell Montes a najniższym położonym punktem na Marsie. Potrzebnych informacji poszukaj w internecie.



Wenus



Mars

PODSUMOWANIE DZIAŁU I

W świecie liczb całkowitych

Powtórz wiadomości

Liczby całkowite

liczby ujemne

liczby dodatnie

..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

0 nie jest liczbą dodatnią ani nie jest liczbą ujemną.

Liczby

pierwsze

Mają dokładnie dwa różne dzielniki: 1 i samą siebie.

Przykłady liczb pierwszych:

2, 3, 5, 7, 11, ...

złożone

Mają więcej niż dwa dzielniki.

Przykłady liczb złożonych:

4, 6, 8, 9, 10, ...

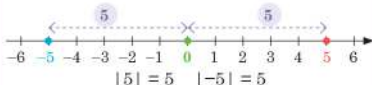
0 i 1 nie są ani liczbami pierwszymi, ani liczbami złożonymi.

Cechy podzielności liczb

Liczba jest podzielna przez:

- 2, gdy jej cyfra jednostki to 0, 2, 4, 6 lub 8;
- 5, gdy jej cyfra jednostki to 0 lub 5;
- 10, gdy jej cyfra jednostki to 0;
- 100, gdy jej cyfra jednostki i cyfra dziesiątek to 0;
- 4, gdy jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4 lub obie są zerami;
- 3, gdy suma cyfr tej liczby jest podzielna przez 3;
- 9, gdy suma cyfr tej liczby jest podzielna przez 9.

Wartość bezwzględna



Wartość bezwzględna liczby a , którą oznaczamy $|a|$, to odległość tej liczby od liczby 0 na osi liczbowej. Wartość bezwzględna liczby zawsze jest nieujemna.

Rozkład na czynniki pierwsze, NWD i NWW

42	2	66	2
21	3	33	3
7	7	11	11
1		1	

$$\text{NWD}(42, 66) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\text{NWW}(42, 66) = 6 \cdot 7 \cdot 11 = 462$$

Kolejność wykonywania działań

1. działania w nawiasach

2. potęgowanie

$$(10 - 7)^3 : 9 + 2 = 3^3 : 9 + 2 = 27 : 9 + 2 = 3 + 2 = 5$$

3. mnożenie i dzielenie

4. dodawanie i odejmowanie

Poćwicz przed sprawdzianem

Ramka do zadań 1. i 2.

910 • 7005 • 111 908 • 432 000 • 66 636

1. Ile liczb z ramki jest jednocześnie podzielnych przez: 2, 3, 4, 5, 9, 10?

- A. 1 liczba. B. 2 liczby. C. 3 liczby. D. 0 liczb.

2. Która liczba zapisana w ramce jest podzielna przez 15 i przez 18?

- A. 7005 B. 66 636 C. 111 908 D. 432 000

3. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Suma wszystkich dzielników liczby 56 wynosi 110.	P	F
Wielokrotności liczby 6 większych od 40 i mniejszych od 120 jest 13.	P	F
Wśród liczb: 0, 1, 2, 13, 15, 17, 24, 31, 34 jest pięć liczb pierwszych.	P	F

4. Oblicz.

- a) $|10|$ b) $|-5|$ c) $-|12|$ d) $-|-25|$

5. Oblicz.

- a) $3280 + 609$ b) $896 + 7329$ c) $5924 - 318$ d) $6001 - 5597$
e) $152 \cdot 21$ f) $2480 \cdot 4370$ g) $1072 : 8$ h) $20\,400 : 120$

6. Oblicz.

- a) 14^2 b) 7^3 c) 240^2 d) $(-6)^2$ e) $(-100)^3$

7. Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

- a) $14 + 3 \cdot (6^2 + 14)$ b) $100 - (3^3 + 5^2) : 4$
c) $9^2 - [168 : 8 - 5 \cdot (170 - 168)^2]$ d) $[(18 + (15 \cdot 3) : 9) - 20]^2$

8. Oblicz.

- a) $-20 + 5$ b) $12 + (-14)$ c) $32 - 41$ d) $95 + (-67)$
e) $(-45) + (-28)$ f) $-65 - 35$ g) $(-46) - (-57)$ h) $13 \cdot (-3)$
i) $(-11) \cdot (-17)$ j) $(-63) : (-9)$ k) $(-125) : 25$ l) $(-360) : (-90)$

9. Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

I. Ile jest liczb całkowitych między liczbami -5 i 10 ?

A. 14

B. 13

II. O ile liczba przeciwna do 17 jest mniejsza od liczby przeciwnej do (-15) ?

C. O 2.

D. O 32.

10. Oblicz.

a) $-25 + (-3) \cdot 9$

b) $(-120) : (-16 + 24)$

c) $-18 : 3 - [(-10)^2 : (-4)]$

11. Dane są liczby: $a = 5$, $b = 75$ i $c = 210$. Oblicz NWD(a , c) oraz NWW(b , c).

12. Stadion Camp Nou (czytaj: kamp nou), który znajduje się w Barcelonie, może pomieścić obecnie 99 354 osoby. Po renowacji, która ma zakończyć się w 2026 roku, stadion będzie dostępny dla prawie 105 000 kibiców. Największym stadionem w Polsce jest Stadion Narodowy im. Kazimierza Górskiego w Warszawie, który posiada 58 500 miejsc.

a) O ile zwiększy się liczba miejsc dostępnych na stadionie Camp Nou po renowacji?

b) Jaka będzie maksymalna kwota ze sprzedaży biletów na jeden mecz Ligi Mistrzów po renowacji, jeśli średnia cena takiego biletu wynosi 139 euro?

13. Bruno jest fanem dwutygodnika o świecie cyfrowym. Egzemplarz kosztuje obecnie 19 zł. Bruno zastanawia się nad zakupem prenumeraty rocznej (26 numerów) za 442 zł. Ile zaoszczędziłby Bruno na jednym egzemplarzu czasopisma, gdyby zdecydował się na tę prenumeratę?

14. Do niedawna najgłębszą kopalnią na świecie była kopalnia złota TauTona, której najniżej położony punkt był na wysokości 2,3 km p.p.m. Obecnie najgłębszą kopalnią jest Mponeng (czytaj: emponeng). Sięga do 2,4 km p.p.m. Kopalnia soli w Wieliczce ma 9 poziomów głębokości, a ostatni sięga do 49 m p.p.m. Ustal różnicę wysokości między najniższym punktem



• 49 m p.p.m.

Kopalnia soli w Wieliczce



• 2,3 km p.p.m.

Kopalnia złota TauTona w RPA



• 2,4 km p.p.m.

Kopalnia złota Mponeng w RPA

a) kopalni TauTona a kopalni Mponeng,

b) kopalni Mponeng a kopalni w Wieliczce.

Podjmij wyzwanie

Drogi Uczniu!

Rozwiąż kolejne zadania, a dowiesz się, jakimi wyrazami uzupełnić poniższy tekst, żeby opisywał przełomowy wynalazek.

Powodzenia!



1 wiek był okresem innowacji i rewolucji. To właśnie w tym czasie upowszechniło się 2, które przyspieszyło opracowywanie nowych rozwiązań technologicznych. 3, w obecnie znanej nam formie, jest efektem ewolucji licznych wcześniejszych konstrukcji. Kluczowym momentem dla rozwoju 4 stała się jednak 5, stworzona w 1817 roku przez 6. Ten prototyp, nazywany również 7, był zbudowany 8 i dwóch kół, które można było poruszać przez odpychanie się nóg od podłoża. Wczesny model miał istotny wpływ na rozwój 9 i umożliwił wielu ludziom poszukiwanie pracy w lokalizacjach dalszych od miejsca ich zamieszkania. Mówiono o nim też 10. Dzięki niemu kobiety stały się bardziej mobilne. To spowodowało rewolucję w ich garderobie – zauważyły potrzebę noszenia bardziej praktycznej odzieży, gdyż gorsety, długie i ciężkie spódnice, charakterystyczne dla okresu 11, ograniczały ruchy w czasie jazdy.

1. Ela trzyma swoje prace w sejfie, do którego dostęp jest zabezpieczony 6-cyfrową liczbą. Ustal, która z nich może być kodem do sejfu, jeśli wiadomo, że ta liczba:

- jest podzielna przez 3 oraz przez 4,
- nie jest podzielna przez 9.



148 572	143 472	144 570
XX	XIX	XVIII

2. Adam napisał program, który przedstawia dowolną liczbę w postaci iloczynu liczb pierwszych. Wydrukował rozkład na czynniki pierwsze liczby 720. Okazało się, że na wydruku brakuje pewnych liczb. Ile wynosi ich suma?

$$720 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^1$$

10	6	7
prawo wynalazcy	korzystanie z książek	prawo patentowe

3. Dwóch sportowców rozpoczęło trening o godzinie 12.12. O której godzinie sportowcy spotkają się na linii startu, jeśli pierwszy z nich pokonuje okrażenie treningowe w czasie 12 minut, a drugi w czasie 18 minut? Przyjmij, że każdy z nich porusza się cały czas z tą samą prędkością.

12.48	12.36	12.18
Rower	Samochód	Motocykl

4. Który wynik jest największy?

$$\heartsuit = 6 \cdot (5^3 - 3^2) - 6 \cdot 10^2 \quad \spadesuit = (45 \cdot 6 - 180 : 3) : 10 \cdot 2$$

$$\diamondsuit = [84 : (11^2 - 10^2) + 9 \cdot (57^0 + 0^{57})] \cdot 10^2$$

$\spadesuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$
jeździectwa	kolarstwa	wyścigów

5. Za 25 zestawów składających się z roweru i kasku zapłacono 51 475 zł. Za uszkodzony kask otrzymano zwrot w wysokości jego ceny, czyli 125 zł. Jaka była wartość jednego roweru w tym zestawie?

2059 zł	2054 zł	1934 zł
bieżnia do chodzenia	maszyna do jeżdżenia	maszyna do biegania

6. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Wartości bezwzględne liczb 18 oraz -18 są takie same.	P	F
Liczba przeciwna do liczby $ 6 $ jest równa liczbie $ -6 $.	P	F
Liczby -15 i 15 są położone na osi liczbowej w tej samej odległości od 0.	P	F

PPP	PFP	FFP
Carla Benza (czytaj: karla benca)	Karla von Draisa (czytaj: karla fon drajsa)	Andreas Flockena (czytaj: flokena)

7. Cezary i Kuba wylosowali po jednej liczbie w generatorze liczb losowych. Oblicz, ile wynosi suma NWD oraz NWW wylosowanych przez nich liczb.

5486	5434	5460
welocypedem	monopedem	bicypedem



8. Pani Karolina na koncie bankowym ma debet w wysokości 4500 zł. Właśnie otrzymała przelew z wynagrodzeniem w wysokości 5780 zł. Jaki jest stan konta pani Karoliny?

10 280 zł	-1280 zł	1280 zł
z plastikowej ramy	z metalowej ramy	z drewnianej ramy

9. Które wartości wyrażeń porównano poprawnie?

- I. $25 - 50 > 50 - (-25)$
 II. $-25 - 50 < -50 - (-25)$
 III. $-25 - (-50) > 50 - 25$

Zadne.	Tylko II.	Tylko II i III.
kolei	osobistego transportu	transportu zbiorowego

10. Ustal, ile spośród poniższych zdań jest fałszywych.

- Iloczyn dwóch różnych liczb, których odległość od 0 jest równa 9, jest zawsze dodatni.
- Wartość wyrażenia $(-5)^3 \cdot (-4)^2 \cdot (-3)^1 \cdot (-2)^0 \cdot 0$ jest dodatnia.
- Iloczyn sześciu liczb ujemnej oraz kwadratu liczby dodatniej jest ujemny.
- Jeśli do liczby (-20) dodamy jej wartość bezwzględna, to otrzymamy liczbę 0.
- Wartość wyrażenia $|-3|^2 - |-2|^3$ jest mniejsza od 0.

dwa	trzy	cztery
„koń mechaniczny”	„maszyna wolności”	„dwukołowiec swobody”

11. 26 marca 2012 roku batyskaf sterowany przez reżysera i oceanologa Jamesa Camerona (czytaj: dżejmsa kamerona) zszedł na głębokość 10 898 m. Natomiast najwyżej wznoszącym się samolotem pasażerskim był samolot marki Concorde (czytaj: konkord), który wzbił się na wysokość ponad 18 000 m. Ile wynosi różnica pomiędzy tymi odczytami wysokości?



Ponad 28 898 m.	Ponad 7102 m.	Ponad 8102 m.
wiktoriańskiego	gregoriańskiego	antyku

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. Pola, Bruno i Cezary grali w grę *Dwie prawdy i jedno kłamstwo*. Kto z nich złamał zasady gry?

Jest 5 liczb całkowitych, których wartość bezwzględna nie jest większa niż 2.
Każda liczba podzielna przez 3 jest podzielna przez 9.
Liczba podzielna przez 15 jest też podzielna przez 3.



Bruno



Cezary

Iloczyn trzech liczb ujemnych jest dodatni.
Każda liczba parzysta jest podzielna przez 2.
Jest 9 liczb większych od 30 i mniejszych od 96,
które są wielokrotnościami liczby 8.



Pola

Liczba 62 001 jest podzielna przez 3.
Liczba przeciwna do liczby (-8) jest liczba 8.
Liczba 29 jest liczbą złożoną.

2. Dane są liczby $a = (15 + 12 \cdot 3 - 4^2 : 8 \cdot 6) : 3$ oraz $b = \frac{1}{2} \cdot 8^2 - 2^3$.

Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Liczba b jest liczbą pierwszą.	P	F
Największy wspólny dzielnik liczb a i b wynosi 12.	P	F
Najmniejsza wspólna wielokrotność liczb a i b wynosi 312.	P	F
Liczby a i b są położone na osi liczbowej w tej samej odległości od 18.	P	F

3. Załóżmy, że obserwujemy niebo w poszukiwaniu dwóch komet: komety A, która pojawia się co 77 lat, oraz komety B pojawiającej się co 4 lata. Obie komety zostały zaobserwowane razem w tym samym roku. Ile lat minie, zanim obie komety pojawią się na niebie równocześnie ponownie?

4. Ustal, jakie cyfry kryją się pod sercami, i podaj wynik działania.

a)

	♥	4	♥	1
+	1	♥	5	♥
	5	2	1	1

$$(\heartsuit - \heartsuit)^\heartsuit + \heartsuit = ?$$

b)

	♥	7	7	♥
-	6	♥	♥	7
	2	2	4	3

$$\heartsuit - (\heartsuit \cdot \heartsuit : \heartsuit) = ?$$

5. Pani Iwona ma konto oszczędnościowe (na takie konto wpłaca się określoną kwotę pieniędzy, a po ustalonym przez bank czasie wpłacona kwota wzrasta o określony ułamek tej kwoty). Pani Iwona po roku będzie mogła wypłacić kwotę o $\frac{1}{20}$ większą niż wpłaciła. Pani Iwona wpłaciła w styczniu 3000 zł. Jaką kwotę będzie mogła wypłacić po roku?

6. Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

I. Ile wynosi liczba przeciwna do liczby przeciwnej do liczby 11?

A. 11 B. -11

II. Ile wynosi wartość wyrażenia $(-|-9|)^2 - |-|-6||$?

C. -87 D. 75

7. Porównaj liczby. Wstaw między nie odpowiedni znak: <, > lub =.

a) 10 ? $-|10|$ b) $-99\,999$? $-99\,998$ c) $(-4)^3$? $-|-8^2|$

8. Rozwiąż krzyżówkę i przyporządkuj literom w kratkach odpowiednie liczby. Następnie uporządkuj liczby w kolejności rosnącej i odczytaj hasło – nazwę najwyższej góry w Układzie Słonecznym, która mierzy około 22 000 m, czyli około trzy razy więcej niż najwyższa góra na Ziemi.

(-8)	$\cdot$	(-12)	$=$	N	$(-2)^2$	$-$	27	$=$	Y
+		+		:			:		-
(-42)		M	+	(-48)	$=$	(-14)		$(-3)^3$	(-68)
$=$		$=$		$=$		-		$=$	$=$
O		22	:	(-2)	$=$	M		U	O
					$=$				
195		(-87)	:	(-3)	$=$	S			
:		+				+			
(-65)	$-$	S	$=$	(-188)		(-65)			
$=$		$=$				$=$			
P		36	:	$(-1)^6$	$=$	L			

9. W poniedziałek rano stan konta debetowego pana Adama wynosił -540 zł. Po południu tego samego dnia na to konto wpłynęła kwota w wysokości 680 zł. We wtorek pan Adam kupił doniczkę, która kosztowała 55 zł, oraz zestaw ogrodowy, który był 14 razy droższy niż doniczka. Nie zanotowano innych operacji na koncie.



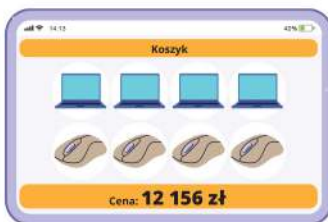
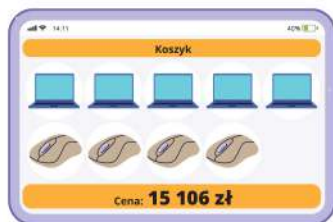
	OPERACJE NA KONCIE	STAN KONTA
PONIEDZIAŁEK		-540 zł
wpłata	680 zł	?
WTOREK		?
doniczka	-55 zł	?
zestaw ogrodowy	?	?

Czy stan konta pana Adama na koniec dnia we wtorek był niższy niż w poniedziałek rano? Wybierz odpowiedź oraz jej uzasadnienie.

Tak,	ponieważ	pan Adam otrzymał wpłatę w wysokości 680 zł.
		liczba (-685) leży dalej na lewo na osi liczbowej niż liczba (-540) .
Nie,		we wtorek pan Adam wydał 825 zł.

10. Ile razy liczba o 164 mniejsza od liczby 4016 jest większa od liczby o 652 większej od liczby (-634) ?

11. Korzystając z informacji przedstawionych na ilustracjach, ustal cenę myszki oraz cenę laptopa. O ile złotych myszka jest tańsza od laptopa? Ułóż własne zadanie do danych z ilustracji.





W życiu codziennym często spotykamy określenie „średnia”. Pojawia się ono m.in. w meteorologii, gdy chcemy podać średnią temperaturę w danym miesiącu, czy w budżetowaniu – np. przy ustalaniu średnich kosztów organizacji przyjęcia, które przypadają na jedną osobę. Średnia arytmetyczna i średnia ważona są używane do analizy danych i prezentacji wyników w sposób przystępny i zrozumiały.

Średnią arytmetyczną danych liczb możemy obliczyć poprzez dodanie tych liczb, a następnie podzielenie tej sumy przez liczbę danych. Jest to prosta metoda obliczania „przeciętnej” wartości w zestawie danych.

$$\text{średnia arytmetyczna} = \frac{a + b + c}{3}$$

suma trzech liczb

↑

liczba danych

Średnia ważona jest używana, kiedy niektóre liczby są ważniejsze niż inne. Obliczamy ją poprzez pomnożenie każdej danej przez odpowiadającą jej wagę, a następnie podzielenie sumy tych iloczynów przez sumę wag.

$$\text{średnia ważona} = \frac{w_1 \cdot a + w_2 \cdot b + w_3 \cdot c}{w_1 + w_2 + w_3}$$

suma iloczynów trzech liczb i odpowiadających im wag

↑

suma wag

1. Ania i Bartek grają w grę planszową. Zdobyte przez nich punkty przedstawiono w tabeli. Na koniec gry Ania i Bartek policzyli swoje średnie arytmetyczne oraz średnie ważne punktów. Różne sprawności zdobyte podczas gry mają następujące wagi:

- szybkość: waga 2,
- spostrzegawczość: waga 3,
- pomysłowość: waga 5.

Oblicz średnie arytmetyczne oraz średnie ważne punktów Ani i punktów Bartka.

	Ania	Bartek
Szybkość	4, 5	5, 3
Spostrzegawczość	5, 5	5, 5
Pomysłowość	4, 4	5, 4

2. Zastanów się, w jakich sytuacjach lepiej jest wyznaczyć średnią ważoną niż średnią arytmetyczną.

DZIAŁ



W ŚWIECIE LICZB WYMIERNYCH



1. Działania na ułamkach zwykłych

- ▶ Jak można zapisywać ułamki zwykłe i liczby mieszane?
- ▶ Jak wykonywać działania na ułamkach zwykłych?
- ▶ Jak obliczać ułamek liczby oraz liczbę, gdy dany jest jej ułamek?



Analizuj!

Ułamek zwykły opisuje fragment całości podzielonej na równe części.

licznik — 3 — tyle części wybrano z całości
kreska ułamkowa — — zastępuje znak dzielenia
mianownik — 4 — na tyle równych części podzielono całość



Ułamek nazywamy:

- **właściwym**, gdy jego licznik jest mniejszy od mianownika, np. $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{11}$;
- **niewłaściwym**, gdy jego licznik jest większy lub równy mianownikowi, np. $\frac{8}{5}$, $\frac{21}{7}$, $\frac{13}{13}$.

Liczba mieszana to liczba złożona z **części całkowitej** (całości) i **części ułamkowej** (ułamka zwykłego), np. $2\frac{1}{3}$, $10\frac{1}{2}$, $1\frac{11}{20}$.

Przykład 1.



Ułamek niewłaściwy można zapisać w postaci liczby mieszanej lub liczby naturalnej, wyłączając całości.

$$16 : 9 = 1 \text{ r } 7$$

$$21 : 7 = 3$$

$$\frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}$$

$$\frac{21}{7} = 3$$

- a) Zapisz ułamki $\frac{8}{3}$ i $\frac{4}{4}$ w postaci liczb mieszanych lub liczb naturalnych.

$$\frac{8}{3} = 8 : 3 = 2 \text{ r } 2, \text{ więc } \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

$$\frac{4}{4} = 4 : 4 = 1, \text{ więc } \frac{4}{4} = 1$$

Każdą liczbę mieszaną oraz liczbę naturalną można zapisać w postaci ułamka niewłaściwego.

$$5\frac{3}{8} = \frac{8 \cdot 5 + 3}{8} = \frac{43}{8}$$

$$9 = \frac{9}{1}$$



- b) Zapisz liczby $70\frac{1}{3}$ i 12 w postaci ułamków niewłaściwych.

$$70\frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 70 + 1}{3} = \frac{210 + 1}{3} = \frac{211}{3}$$

$$12 = \frac{12}{1}$$

Rozszerzanie ułamka zwykłego polega na pomnożeniu licznika i mianownika ułamka przez tę samą liczbę, różną od 0 i różną od 1.

$$\begin{array}{c} \cdot 8 \\ \curvearrowright \\ \frac{7}{9} = \frac{56}{72} \\ \curvearrowleft \\ \cdot 8 \end{array}$$



- c) Rozszerz ułamki $\frac{3}{4}$ i $\frac{11}{10}$ do mianownika 20.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$$

$$\frac{11}{10} = \frac{11 \cdot 2}{10 \cdot 2} = \frac{22}{20}$$

Skracanie ułamka zwykłego polega na podzieleniu licznika i mianownika ułamka przez tę samą liczbę, różną od 0 i różną od 1.

Ułamek nieskracalny to ułamek, którego nie można już skrócić.

$$\begin{array}{c} : 12 \\ \curvearrowright \\ \frac{48}{60} = \frac{24}{30} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \\ \curvearrowleft \\ : 12 \end{array}$$



- d) Zapisz ułamki $\frac{63}{90}$ i $\frac{110}{200}$ w postaci ułamków nieskracalnych.

$$\frac{63}{90} = \frac{63 : 9}{90 : 9} = \frac{7}{10}$$

$$\frac{110}{200} = \frac{110 : 10}{200 : 10} = \frac{11}{20}$$

Ćwiczenie 1.

- a) Zapisz ułamki: $\frac{17}{4}$, $\frac{29}{6}$, $\frac{40}{5}$ w postaci liczb mieszanych lub liczb naturalnych.
 b) Zapisz liczby: $1\frac{7}{8}$, $3\frac{7}{9}$, 14 w postaci ułamków niewłaściwych.
 c) Rozszerz ułamki: $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{20}$ do mianownika 100.
 d) Zapisz ułamki: $\frac{8}{12}$, $\frac{15}{75}$, $\frac{240}{400}$ w postaci ułamków nieskracalnych.

Przykład 2.

Oblicz. Wynik zapisz w najprostszej postaci.

a) $\frac{7}{19} + \frac{5}{19}$

$$\frac{7}{19} + \frac{5}{19} = \frac{7+5}{19} = \frac{12}{19}$$

b) $\frac{5}{6} + \frac{1}{15}$

$6 = 2 \cdot 3$ i $15 = 3 \cdot 5$, więc wspólnym mianownikiem tych ułamków jest np. NWW(6, 15) = $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Po wykonaniu dodawania przedstawimy wynik w postaci ułamka nieskracalnego.

$$\frac{5}{6} + \frac{1}{15} = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2}{15 \cdot 2} = \frac{25}{30} + \frac{2}{30} = \frac{27}{30} = \frac{9}{10}$$

c) $\frac{2}{3} - \frac{2}{27}$

Wspólnym mianownikiem tych ułamków jest NWW(3, 27) = 27.

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{27} = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 9} - \frac{2}{27} = \frac{18}{27} - \frac{2}{27} = \frac{16}{27}$$

d) $\frac{4}{5} \cdot \frac{25}{36}$

Przed wykonaniem mnożenia warto skrócić ułamki.

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{25}{36} = \frac{1 \cdot 5}{1 \cdot 9} = \frac{5}{9}$$

e) $\frac{7}{9} : 14$

$$\frac{7}{9} : 14 = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{14} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$$

Aby **dodać** (lub **odjąć**) dwa ułamki o jednakowych mianownikach, należy **dodać** (lub **odjąć**) ich liczniki oraz przepisać mianownik.



Jeśli ułamki mają różne mianowniki, najpierw należy **sprowadzić je do wspólnego mianownika**, a następnie wykonać dodawanie lub odejmowanie.



Aby **pomnożyć** ułamek przez ułamek, mnożymy licznik przez licznik i mianownik przez mianownik.



Aby **podzielić** ułamek przez ułamek, zastępujemy dzielenie mnożeniem przez liczbę odwrotną do dzielnika.



Dwie liczby stanowią parę **liczb odwrotnych**, jeśli ich iloczyn jest równy 1, np. 5 i $\frac{1}{5}$, bo $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$; $\frac{3}{7}$ i $\frac{7}{3}$, bo $\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{3} = 1$.

Pamiętaj, że nie ma liczby odwrotnej do 0.



Ćwiczenie 2.

Oblicz. Wynik zapisz w najprostszej postaci.

a) $\frac{5}{12} + \frac{1}{12}$

b) $\frac{2}{9} + \frac{11}{12}$

c) $\frac{3}{5} - \frac{1}{100}$

d) $\frac{9}{11} \cdot 44$

e) $\frac{25}{36} : \frac{15}{18}$

Przykład 3.

Oblicz. Wynik zapisz w najprostszej postaci.

a) $\frac{5}{9} + 1\frac{1}{12}$

Przyjmujemy, że wspólnym mianownikiem ułamków jest najmniejsza wspólna wielokrotność liczb, które są mianownikami tych ułamków:

$9 = 3 \cdot 3$, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, zatem $\text{NWW}(9, 12) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$.

$$\frac{5}{9} + 1\frac{1}{12} = \frac{20}{36} + 1\frac{3}{36} = 1\frac{23}{36}$$

b) $8\frac{1}{3} - 3\frac{4}{5}$

Wspólny mianownik: $\text{NWW}(3, 5) = 15$

W tym przypadku odjemną można zapisać w postaci liczby całkowitej i ułamka niewłaściwego.

$$8\frac{1}{3} - 3\frac{4}{5} = 8\frac{5}{15} - 3\frac{12}{15} = 7\frac{20}{15} - 3\frac{12}{15} = 4\frac{8}{15}$$

c) $2\frac{3}{4} \cdot 16$

Zamienimy liczbę mieszaną na ułamek niewłaściwy, a liczbę 16 przedstawimy w postaci ułamka. Przed wykonaniem mnożenia warto skrócić ułamki.

$$2\frac{3}{4} \cdot 16 = \frac{11}{4} \cdot \frac{16^{\cancel{4}}}{1} = 11 \cdot 4 = 44$$

d) $\left(2\frac{3}{4}\right)^2$

Podnoszenie liczby do kwadratu (do drugiej potęgi) to inny zapis mnożenia tej liczby przez samą siebie. Liczby mieszane przed wykonaniem mnożenia należy zamienić na ułamki niewłaściwe.

$$\left(2\frac{3}{4}\right)^2 = 2\frac{3}{4} \cdot 2\frac{3}{4} = \frac{11}{4} \cdot \frac{11}{4} = \frac{121}{16} = 7\frac{9}{16}$$

e) $2\frac{11}{19} : \frac{7}{38}$

Liczby mieszane przed wykonaniem dzielenia należy zamienić na ułamki niewłaściwe. Przed wykonaniem mnożenia warto skrócić ułamki.

$$2\frac{11}{19} : \frac{7}{38} = \frac{49}{19} : \frac{7}{38} = \frac{49}{19} \cdot \frac{38^{\cancel{2}}}{7} = \frac{7}{1} \cdot \frac{2}{1} = 14$$

Ćwiczenie 3.

Oblicz. Wynik zapisz w najprostszej postaci.

a) $8\frac{5}{18} + \frac{7}{18}$

b) $9\frac{1}{6} - 3\frac{7}{8}$

c) $12 \cdot 3\frac{3}{8}$

d) $\left(4\frac{1}{3}\right)^2$

e) $1\frac{1}{8} : 2\frac{17}{32}$



Aby **obliczyć ułamek liczby**, wystarczy tę liczbę pomnożyć przez dany ułamek.

Przykład 4.

Państwo Nowakowie mają na koncie oszczędnościowym 6400 zł. Postanowili przeznaczyć $\frac{3}{8}$ tej kwoty na zakup nowego ekspresu do kawy. Ile kosztuje ten ekspres?

Sposób 1 $\frac{3}{8} \cdot 6400^{\text{800}} = 3 \cdot 800 = 2400$ [zł]

Sposób 2 $6400 \text{ zł} : 8 = 800 \text{ zł} \quad 800 \text{ zł} \cdot 3 = 2400 \text{ zł}$

Odp. Ekspres kosztuje 2400 zł.

Ćwiczenie 4.

Cezary wybrał się na rajd rowerowy. Trasa liczy 120 km. Pierwszego dnia przebył $\frac{7}{20}$ całej trasy. Ile kilometrów pokonał Cezary na rowerze tego dnia?



Aby **obliczyć liczbę, gdy dany jest jej ułamek**, należy liczbę odpowiadającą temu ułmkowi podzielić przez ten ułamek.

Przykład 5.

Naukowcy przypuszczają, że najbardziej znany przedstawiciel dinozaurów, tyranozaur, ważył około 8 t. Z badań paleontologów wynika, że masa tyranozaura stanowiła $\frac{4}{35}$ masy jednego z największych znanych dinozaurów – argentynozaura. Ile ważył argentynozaur?



Sposób 1

$$8 : \frac{4}{35} = 28 \cdot \frac{35}{4} = 2 \cdot \frac{35}{1} = 70 \text{ [t]}$$

Sposób 2

$\frac{4}{35}$ masy argentynozaura to 8 t, więc $\frac{1}{35}$ jego masy to 4 razy mniej, czyli 2 t.

Zatem masa argentynozaura to: $2 \text{ t} \cdot 35 = 70 \text{ t}$.

Odp. Argentynozaur ważył 70 t.

Ćwiczenie 5.

Bruno przeczytał już $\frac{3}{10}$ książki, czyli 156 stron. Ile stron liczy ta książka?

Rozwiąż zadania

1. Porównaj ułamki. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

a) $\frac{7}{9} ? \frac{8}{9}$

b) $2\frac{12}{13} ? 2\frac{12}{14}$

c) $\frac{3}{8} ? \frac{5}{9}$

d) $3\frac{5}{6} ? 3\frac{17}{18}$

Jeśli dwa ułamki mają jednakowe mianowniki, to większy jest ten, który ma większy licznik. Jeśli dwa ułamki mają jednakowe liczniki, to większy jest ten, który ma mniejszy mianownik.



2. Zapisz ułamki niewłaściwe z pierwszej ramki w postaci liczb mieszanych lub liczb naturalnych, a liczby z drugiej ramki – w postaci ułamków niewłaściwych.

$$\frac{15}{4} \cdot \frac{121}{11} \cdot \frac{19}{6} \cdot \frac{28}{7}$$

$$5\frac{3}{4} \cdot 21 \cdot 2\frac{8}{9} \cdot 1$$

3. Rozszerz ułamki podane w pierwszej ramce do mianownika 48. Ułamki podane w drugiej ramce zapisz w postaci nieskracalnej.

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{13}{8}$$

$$\frac{8}{24} \cdot \frac{12}{60} \cdot \frac{140}{210}$$

4. Oblicz. Wynik zapisz w najprostszej postaci.

a) $\frac{5}{7} + \frac{1}{7}$

b) $\frac{2}{3} + \frac{11}{18}$

c) $2\frac{5}{16} + 8\frac{11}{16}$

d) $\frac{5}{8} + 3\frac{1}{12}$

e) $\frac{13}{14} - \frac{5}{14}$

f) $\frac{4}{9} - \frac{2}{63}$

g) $16\frac{1}{5} - 3\frac{3}{5}$

h) $10 - 6\frac{1}{15}$

5. Bruno kupił $2\frac{1}{5}$ kg jabłek, $\frac{1}{4}$ kg winogron oraz $1\frac{7}{20}$ kg bananów.

- a) Ile ważyły jego zakupy?
b) Czy łączna masa zakupów była większa czy mniejsza niż 5 kg? O ile kilogramów?



6. Mama Poli upiekła tartę warzywną. Pola zjadła $\frac{1}{6}$ tarty, a Kuba $\frac{1}{5}$. Następnie tata Poli zjadł tyle tarty, że zostało jej $\frac{3}{10}$. Jaką część tarty zjadł tata Poli?

7. Oblicz, a następnie ustaw wyniki w takiej kolejności, jak zapisano poniżej. Litery, które odpowiadają wynikom, utworzą hasło – nazwę ludu, który jako pierwszy używał ułamków.

$\frac{6}{16} + \frac{9}{16}$	B	$\frac{7}{9} + \frac{16}{27}$	B	$\frac{7}{12} + 1\frac{1}{4}$	C	$2\frac{3}{4} + 3\frac{3}{20}$	L				
$\frac{7}{8} - \frac{1}{4}$	C	$\frac{7}{15} - \frac{4}{45}$	A	$1\frac{2}{17} - \frac{15}{34}$	Y	$6\frac{1}{13} - 2\frac{7}{39}$	N				
$3\frac{1}{3} + \frac{7}{9} + 2$	I	$8 - 2\frac{1}{5} + 1\frac{1}{45}$	Z	$8\frac{1}{6} - (2\frac{3}{8} + \frac{1}{4})$	Y	$(2\frac{1}{3} - \frac{5}{6}) + 3\frac{10}{12}$	O				
$\frac{15}{16}$	$\frac{17}{45}$	$1\frac{10}{27}$	$6\frac{1}{9}$	$5\frac{9}{10}$	$5\frac{1}{3}$	$3\frac{35}{39}$	$1\frac{5}{6}$	$6\frac{37}{45}$	$\frac{23}{34}$	$\frac{5}{8}$	$5\frac{13}{24}$
											

8. Oblicz. Wynik przedstaw w najprostszej postaci.

a) $\frac{7}{36} \cdot 12$ b) $\frac{6}{15} \cdot \frac{1}{3}$ c) $\frac{18}{45} \cdot \frac{60}{90}$ d) $1\frac{2}{7} \cdot \frac{49}{90}$
 e) $\frac{17}{21} \cdot 2\frac{3}{51}$ f) $16 \cdot 3\frac{1}{4}$ g) $3\frac{1}{3} \cdot 2\frac{3}{10} \cdot 15$ h) $\frac{21}{18} \cdot 6\frac{2}{3} \cdot 1\frac{2}{7}$

9. Oblicz. Skracaj sprytnie.

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}$ b) $\frac{7}{8} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{14}$ c) $1\frac{3}{8} \cdot 1\frac{1}{9} \cdot 1\frac{8}{10} \cdot 1\frac{5}{11}$

10. Wykonaj dzielenie. Wynik przedstaw w najprostszej postaci.

a) $\frac{2}{7} : \frac{6}{14}$ b) $\frac{5}{13} : \frac{25}{26}$ c) $\frac{12}{33} : \frac{8}{9}$ d) $\frac{13}{33} : \frac{5}{11}$
 e) $1\frac{5}{16} : 7$ f) $2 : 2\frac{11}{13}$ g) $3\frac{4}{5} : 2\frac{1}{2}$ h) $8\frac{1}{7} : \frac{11}{14}$

11. Porównaj wartości wyrażeń oraz liczby. Wstaw między nie odpowiedni znak: <, > lub =.

a) $\frac{7}{8} \cdot 16$? 15 b) $1\frac{7}{8} : 5\frac{1}{7}$? 1 c) $5 \cdot 1\frac{6}{7}$? 9
 d) $8 : \frac{2}{7}$? 26 e) $1\frac{6}{11} : \frac{6}{11}$? 1 f) $\frac{7}{13} : 3\frac{10}{13}$? 1

12. Tort urodzinowy Cezarego ważył $2\frac{1}{2}$ kg i został podzielony na 20 równych kawałków. Cezary zjadł dwa takie kawałki. Ile kilogramów tortu zjadł Cezary?



13. Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

a) $4\frac{3}{8} - 3\frac{1}{2} : 3$

b) $2\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{3} - \frac{7}{12}$

c) $2\frac{2}{5} : (1\frac{1}{4} + 1\frac{3}{10}) + \frac{1}{2}$

d) $3\frac{1}{2} : (\frac{7}{10} + \frac{1}{5}) + (\frac{1}{2})^2$

e) $1\frac{3}{8} : (\frac{11}{20})^2 + 1\frac{3}{5} \cdot \frac{15}{11}$

f) $\frac{1}{3} \cdot (\frac{3}{4})^2 + (\frac{1}{2})^3 : 3$

14. Zosia miała w środę pięć lekcji. Każda z nich trwała $\frac{3}{4}$ h.

Miedzy nimi były cztery przerwy – dwie trwały po $\frac{1}{12}$ h, jedna $\frac{1}{6}$ h, a najdłuższa $\frac{1}{3}$ h. Ile czasu Zosia spędziła w szkole?



15. Oblicz.

a) $\frac{2}{5}$ liczby 35

b) $\frac{3}{10}$ liczby 210

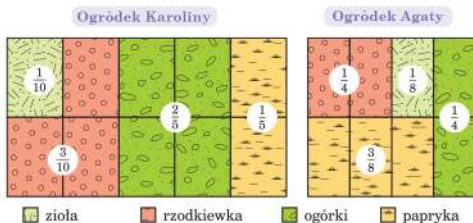
c) $\frac{4}{8}$ liczby $2\frac{2}{15}$

d) $1\frac{1}{3}$ liczby $\frac{5}{8}$

e) $2\frac{1}{5}$ liczby $\frac{7}{11}$

f) $4\frac{1}{3}$ liczby $1\frac{2}{13}$

16. Karolina i Agata mają małe ogródki, w których uprawiają takie same rośliny: ziola, rzodkiewkę, ogórki i żółta paprykę. Ogródek Karoliny ma powierzchnię 9 m^2 , a ogródek Agaty – powierzchnię 6 m^2 . Na rysunku zaznaczono, jaką część powierzchni każdego ogródka zajmują poszczególne uprawy.



- Która z dziewcząt przeznaczyła większą powierzchnię na uprawę papryki?
- W którym ogródku ziola rosną na większej powierzchni? O ile metrów kwadratowych większej?
- O ile metrów kwadratowych większą powierzchnię zajmuje w ogródku Karoliny rzodkiewka niż papryka?

17. Pani Anna kupiła 8 kg gipsu do prowadzonej przez siebie pracowni plastycznej. Na wykonanie modeli przez uczestników najbliższych zajęć przeznaczyła $\frac{3}{4}$ kupionego gipsu. Z $\frac{1}{3}$ tego, co zostało, zrobiła formę w kształcie serca. Ile kilogramów gipsu zużyła na tę formę?



18. Zastąp znak ♥ odpowiednią liczbą.

a) $\frac{3}{10}$ liczby ♥ to 30

b) $\frac{2}{3}$ liczby ♥ to 40

c) $\frac{4}{11}$ liczby ♥ to 44

d) $\frac{8}{15}$ liczby ♥ to 14

e) $\frac{11}{20}$ liczby ♥ to $4\frac{2}{5}$

f) $\frac{7}{9}$ liczby ♥ to $\frac{49}{50}$

19. W klasie Adama $\frac{3}{5}$ wszystkich uczniów to chłopcy. W tej klasie uczy się 10 dziewcząt. Ilu uczniów jest w tej klasie?



20. Jakimi znakami działań należy zastąpić symbole ☺ i ♥, aby otrzymać równość?

a) $1\frac{2}{5} \text{ ☺ } 1\frac{1}{3} \text{ ♥ } 1\frac{2}{5} = 1\frac{1}{3}$

b) $(1\frac{2}{5} \text{ ☺ } 2\frac{3}{4}) \text{ ♥ } \frac{1}{2} = 2\frac{3}{40}$



21. Oblicz.

a) $\frac{7}{8} \div \frac{2}{2}$

b) $\frac{12}{3} \div \frac{4}{4}$

c) $\frac{12}{13} \div \frac{36}{26}$

d) $\frac{2\frac{1}{3}}{3\frac{1}{2}}$

Kreska ułamekowa zastępuje znak dzielenia, np.

$$\frac{\frac{3}{4}}{1\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} : 1\frac{1}{2} = \frac{3}{4} : \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$



A to ciekawe

Tak zapisane liczby nazywamy **ułamkami łańcuchowymi**. Oblicz wartości tych ułamków.

a) $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$

b) $3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3}}$

Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz.

a) $\frac{5}{7} + \frac{4}{7}$

b) $5\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{12} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6}$

d) $7\frac{1}{18} - 2\frac{4}{9}$

e) $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7}$

f) $12 \cdot 3\frac{3}{8}$

g) $\frac{2}{5} : \frac{1}{3}$

h) $5\frac{1}{7} : \frac{18}{29}$

2. Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

a) $2\frac{5}{6} + 2\frac{1}{8} \cdot 1\frac{1}{3}$

b) $8 - (\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3})$

c) $\frac{7}{8} \cdot (\frac{3}{7} + \frac{7}{21})$

d) $8 : (1\frac{1}{2} + \frac{3}{5})$

3. Pies Kuby zjada codziennie $\frac{7}{20}$ kg karmy.

Na ile pełnych dni wystarczy mu pięciokilogramowe opakowanie karmy?



4. Kasia dostała od dziadka 150 zł na wycieczkę. Na pamiątki wydała $\frac{1}{3}$ tej kwoty, a za $\frac{2}{5}$ pozostałej kwoty zrobiła zakupy spożywcze.

Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Kasia wydała 60 zł na zakupy spożywcze.	P	F
Kasia wydała na zakupy spożywcze o $\frac{1}{10}$ więcej pieniędzy niż na pamiątki.	P	F
Po wydaniu pieniędzy na pamiątki i produkty spożywcze Kasi zostało 60 zł.	P	F

5. Klaudia uwielbia układać puzzle. Układając najnowszy obrazek, policzyła, że zużyła już 91 elementów, czyli $\frac{7}{100}$ wszystkich w pudełku. Z ilu elementów składają się puzzle Klaudii?



2. Działania na ułamkach dziesiętnych

- ▶ Jak wykonywać działania arytmetyczne na ułamkach dziesiętnych?
- ▶ Jak zamieniać wyrażenie dwumianowane na ułamek dziesiętny i odwrotnie?
- ▶ Jak porównać ułamek dziesiętny i wyrażenie dwumianowane?



Analizuj!

Ułamek dziesiętny to ułamek zwykły, którego mianownik jest potęgą liczby 10. Taki ułamek można zapisać z przecinkiem zamiast kreski ułamkowej – czyli w postaci dziesiętnej, np. $4\frac{3}{10} = 4,3$; $1\frac{21}{100} = 1,21$;
 $5\frac{13}{1000} = 5,013$.



2024-08-10	008391
PARAGON FISKALNY	
CAPRICIOSA	32,50
OPAKOWANIE NA WYNOS	1,00
SUMA	33,50

Część całkowita

Część ułamkowa

Przykład 1.

Kuba zrobił zakupy w sklepie spożywczym i w sklepie z warzywami.

2024-08-10	001270
PARAGON FISKALNY	
MASŁO	6,50
CHLEB	3,70

2024-08-10	179932
PARAGON FISKALNY	
CZOSNEK MŁODY	5,40
POMIDORY MALINOWE	6,43

- a) Ile złotych zapłacił Kuba w sklepie spożywczym, a ile w sklepie z warzywami?
Ile kosztowały całe zakupy Kubby?

Koszt masła i chleba możemy obliczyć w pamięci:

$$6,50 + 3,70 = 6 + 3 + 0,50 + 0,70 = 9 + 1,20 = 10,20 \text{ [zł]}$$

Podobnie obliczymy koszt kupionych warzyw:

$$5,40 + 6,43 = 5 + 6 + 0,40 + 0,43 = 11 + 0,83 = 11,83 \text{ [zł]}$$

Aby **dodać ułamki dziesiętne**, można dodać oddzielnie ich części całkowite i oddzielnie ich części ułamkowe.



Łączny koszt zakupów Kuby obliczymy pisemnie.

		1		
	1	0,	2	0
+	1	1,	8	3
	2	2,	0	3

- 1 Zapisujemy liczby jedną pod drugą tak, aby przecinki były pod przecinkami.
- 2 Dodajemy rzędami od prawej strony, przenosimy dziesiątki do kolejnych rzędów.
- 3 W wyniku zapisujemy przecinek pod pozostałymi przecinkami.

Odp. W sklepie spożywczym Kuba zapłacił 10,20 zł, a w sklepie z warzywami 11,83 zł. Całe zakupy Kuby kosztowały 22,03 zł.

b) Przed wyjściem po zakupy Kuba miał w portfelu banknot 100 zł. Ile pieniędzy mu zostało?

Aby obliczyć, ile pieniędzy zostało Kubie, od 100 zł odejmiemy koszt jego zakupów, czyli 22,03 zł. Obliczenia wykonamy sposobem pisemnym.

		9	9	9
	0	10	10	10
	1	0	0	0
-	2	2,	0	3
	7	7,	9	7

- 1 Zapisujemy liczby jedną pod drugą tak, aby przecinki były pod przecinkami.
- 2 Odejmujemy rzędami od prawej strony, pożyczamy dziesiątki z kolejnych rzędów.
- 3 W wyniku zapisujemy przecinek pod pozostałymi przecinkami.

Odp. Kubie zostało 77,97 zł.

Dodawanie i odejmowanie pisemne ułamków dziesiętnych wykonujemy tak samo jak liczb naturalnych. Musimy tylko pamiętać, aby zapisując liczby, przecinek był pod przecinkiem.



Ćwiczenie 1.

Oblicz.

a) $17,9 + 5,28$

b) $6,313 + 15$

c) $28,75 - 9,2$

d) $60 - 31,58$

Przykład 2.

Przygotowano zamówienie dla szkolnego sekretariatu: 1000 kopert po 37 gr za sztukę, 12 ryz papieru w cenie 20,99 zł za ryż oraz 4,5 kg masy solnej dla uczniów po 8,50 zł za kilogram. Jaki jest łączny koszt tego zamówienia?

Obliczmy koszt zakupu kopert.

Koszt jednej koperty: 37 gr = 0,37 zł

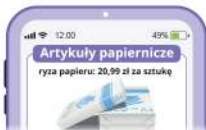
Koszt tysiąca kopert: $1000 \cdot 0,37 \text{ zł} = 370 \text{ zł}$

Przesuwamy przecinek o 3 miejsca w prawo.



Aby **pomnożyć ułamek dziesiętny przez 10, 100, 1000 itd.**, wystarczy przesunąć przecinek w prawo o tyle miejsc, ile zer ma czynnik będący potęgą liczby 10. Zera na początku należy pominąć, a puste miejsca na końcu uzupełnić zerami.

Obliczmy koszt zakupu papieru.



			1	1
	2	0	9	9
			1	2
	4	1	9	8
+	2	0	9	0
	2	5	1	8

- 1 Postępujemy tak jak przy mnożeniu liczb naturalnych.
- 2 Ustalamy miejsce przecinka w wyniku – cyfr po przecinku powinno być tyle, ile jest ich łącznie w obu czynnikach.

Obliczmy koszt zakupu masy solnej.



			2	
			2	
	8	5	0	
		4	5	
	4	2	5	0
+	3	4	0	0
	3	8	2	5

- 2 cyfry po przecinku
- 1 cyfra po przecinku
- 3 cyfry po przecinku

Jeżeli w czynniku znajdują się zera, możesz je uwzględnić dopiero w wyniku.

Łączny koszt zamówienia możemy obliczyć np. za pomocą kalkulatora.

$$370 + 251,88 + 38,25 = 660,13 \text{ [zł]}$$

Odp. Łączny koszt tego zamówienia to 660,13 zł.

Ćwiczenie 2.

Oblicz.

a) $0,78 \cdot 1000$

b) $311,202 \cdot 10$

c) $8,14 \cdot 4$

d) $4,03 \cdot 1,7$

Przykład 3.

Oblicz.

a) $7,14 : 100$

$7,14 : 100 = 0,0714$



Przesuwamy przecinek w lewo o tyle miejsc, ile zer ma dzielnik – czyli o 2 miejsca.

Aby **podzielić ułamek dziesiętny przez 10, 100, 1000 itd.**, wystarczy przesunąć przecinek w lewo o tyle miejsc, ile zer ma dzielnik będący potęgą liczby 10. Zera na końcu należy pominąć, a puste miejsca na początku należy uzupełnić zerami.



b) $72,48 : 12$

Obliczymy pisemnie.

	6	0	4		
7	2	,	4	8	: 12
-	7	2			
			4		
			-	0	
				4	8
			-	4	8
					0

- 1 Postępujemy tak jak przy dzieleniu pisemnym liczb naturalnych.
- 2 W wyniku stawiamy przecinek nad przecinkiem dzielnej.

c) $7,895 : 0,08$

Obliczymy pisemnie.

	9	8	,	6	8	7	5		
7	8	9	,	5	0	0	0	: 8	
-	7	2							
		6	9						
-		6	4						
			5	5					
-			4	8					
				7	0				
-				6	4				
					6	0			
-					5	6			
						4	0		
-						4	0		
							0		

- 1 Jeśli dzielnik jest ułamkiem dziesiętnym, przesuwamy przecinki w dzielnej i dzielniku o tyle miejsc w prawo, żeby dzielnik stał się liczbą naturalną.
 $7,895 : 0,08 = (7,895 \cdot 100) : (0,08 \cdot 100) = 789,5 : 8$
- 2 Następnie postępujemy tak jak przy dzieleniu pisemnym liczb naturalnych.
- 3 Jeśli potrzeba, na końcu dzielnej po przecinku możemy dopisać dowolną liczbę zer.
- 4 W wyniku stawiamy przecinek nad przecinkiem dzielnej.

Ćwiczenie 3.

Oblicz.

a) $15,23 : 1000$

b) $30,45 : 15$

c) $5,706 : 0,04$

d) $7,8 : 0,25$

Aby **zamieniać wyrażenia dwumianowane na ułamki dziesiętne** lub odwrotnie, warto pamiętać podane zależności.

$$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm} \rightarrow 1 \text{ mm} = 0,1 \text{ cm} \quad 1 \text{ dm} = 10 \text{ cm} \rightarrow 1 \text{ cm} = 0,1 \text{ dm}$$

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} \rightarrow 1 \text{ cm} = 0,01 \text{ m} \quad 1 \text{ km} = 1000 \text{ m} \rightarrow 1 \text{ m} = 0,001 \text{ km}$$

$$1 \text{ dag} = 10 \text{ g} \rightarrow 1 \text{ g} = 0,1 \text{ dag} \quad 1 \text{ kg} = 100 \text{ dag} \rightarrow 1 \text{ dag} = 0,01 \text{ kg}$$

$$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g} \rightarrow 1 \text{ g} = 0,001 \text{ kg} \quad 1 \text{ t} = 1000 \text{ kg} \rightarrow 1 \text{ kg} = 0,001 \text{ t}$$

$$1 \text{ zł} = 100 \text{ gr} \rightarrow 1 \text{ gr} = 0,01 \text{ zł} \quad 1 \text{ l} = 1000 \text{ ml} \rightarrow 1 \text{ ml} = 0,001 \text{ l}$$



Przykład 4.

Ustal, czy **wyróżnione zdanie** jest prawdziwe czy fałszywe. Uzasadnij swoją odpowiedź.

- a) Kuba miał w portfelu banknot 100 zł. Kupił książkę za 59 zł 80 gr. **Za resztę pieniędzy może kupić farby olejne w cenie 48,99 zł.**

Wyróżnione zdanie jest fałszywe, ponieważ:

- cena książki: 59 zł 80 gr = 59,80 zł
- cena farb: 48,99 zł
- łączny koszt książki i farb to 59,80 zł + 48,99 zł = 108,79 zł, czyli więcej niż 100 zł.

- b) Ciężarówka pana Franciszka ma ładowność 10,5 t. Załadowano już na nią towar o łącznej masie 9048 kg. **Pan Franciszek dołożył jeszcze jedną paletę o masie 1 t 30 kg i nie przekroczył w ten sposób dopuszczalnej masy załadunku.**

Wyróżnione zdanie jest prawdziwe, ponieważ:

- masa załadowanego już towaru: 9048 kg = 9,048 t
- masa dodatkowej palety:
 $1 \text{ t } 30 \text{ kg} = 1,030 \text{ t} = 1,03 \text{ t}$
- łączna masa ładunku: $9,048 \text{ t} + 1,03 \text{ t} = 10,078 \text{ t}$,
czyli mniej niż ładowność ciężarówki równa 10,5 t = 10,500 t.



Ćwiczenie 4.

Ustal, czy **wyróżnione zdanie** jest prawdziwe czy fałszywe. Uzasadnij swoją odpowiedź.

Na początku stycznia Nina miała 1,45 m wzrostu. Po roku zmierzyła się – okazało się, że przez ostatni rok urosła o 40 mm. **Teraz jej wzrost przekracza 180 cm.**

Rozwiąż zadania

1. Porównaj ułamki. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

a) $0,12$? $0,012$

b) $0,11$? $0,113$

c) $0,01$? $0,001$

2. Oblicz w pamięci.

a) $0,8 + 0,1$

b) $0,7 + 1,25$

c) $2,17 + 0,93$

d) $3,7 + 0,123$

e) $0,75 - 0,6$

f) $8 - 1,2$

g) $3,45 - 0,2$

h) $7,5 - 0,67$

3. Oblicz w pamięci.

a) $7 \cdot 0,3$

b) $0,25 \cdot 5$

c) $0,51 \cdot 0,02$

d) $0,009 : 0,03$

e) $24,16 : 8$

f) $21,3 : 0,3$

g) $4 : 8$

h) $10 : 0,25$

4. Wskaż działania, które mają ten sam wynik.

I. $0,08 \cdot 10$

II. $0,17 \cdot 10$

III. $0,7 \cdot 10\ 000$

IV. $7 : 0,001$

V. $8000 : 10\ 000$

VI. $0,017 : 0,001$

VII. $1,2 : 100$

VIII. $12 \cdot 0,01$

5. Do każdego działania dopasuj wynik.

I. $7 \cdot 1,2$

II. $0,7 \cdot 0,12$

III. $70 \cdot 0,12$

IV. $70 \cdot 1,2$

V. $0,7 \cdot 12$

VI. $0,07 \cdot 12$

A. 840

B. 84

C. 8,4

D. 0,84

E. 0,084

F. 0,0084

6. Ile jest równy iloraz $0,39 : 1,3$? Wybierz odpowiedź oraz jej uzasadnienie.

Jest równy 3,	ponieważ	dzielnik ma jedno miejsce po przecinku.
Jest równy 0,3,		$0,39 : 1,3 = 3,9 : 13$.

7. Wiedząc, że $8888 : 11 = 808$, podaj wynik działania.

a) $8888 : 0,11$

b) $8,888 : 0,11$

c) $88,88 : 1,1$

8. Wykonaj dodawanie lub odejmowanie sposobem pisemnym.

a) $2,31 + 2,59$

b) $9 + 12,981$

c) $8,88 + 0,991$

d) $8,162 - 0,051$

e) $0,61 - 0,555$

f) $12,811 - 0,9$

9. Oblicz sposobem pisemnym.

a) $0,817 \cdot 12$

b) $20,21 \cdot 7,007$

c) $2900 \cdot 0,2$

d) $(0,125)^2$

e) $(0,12)^3$

f) $17 \cdot 0,3 \cdot 0,012$

10. Wykonaj dzielenie sposobem pisemnym.

a) $4,56 : 3$

b) $54,6 : 0,02$

c) $7 : 0,14$

d) $3,24 : 0,162$

e) $10,08 : 2,8$

f) $4,4 : 0,022$



11. Jakie liczby należy wstawić w miejsca liter, by podany kwadrat był magiczny?

a)

A	7,3	6,5
10,1	5,1	B
3,7	C	8,7

b)

4,3	13,2	12,2
G	9,9	2
7,6	F	E

12. Oblicz, pamiętając o właściwej kolejności wykonywania działań. Następnie uporządkuj wyniki w kolejności rosnącej wraz z towarzyszącymi im literami. Otrzymane hasło to angielskie słowo oznaczające „dziesiątyn”.

$7,5 \cdot (0,2 + 0,3) + 1,45$

M

$1,8 \cdot (1,5 : 0,5) + 2$

A

$5^2 \cdot (0,1)^3$

E

$0,5 \cdot 1,2 + (0,3)^2$

C

$\frac{0,2 + 2,8}{2}$

I

$\frac{7 : 3,5}{0,02}$

L

$\frac{0,5 \cdot (0,2)^2}{4}$

D

13. Babcia Brunona zrobiła sok jagodowy w dwóch słojach. Jeden z nich zawiera 10,5 l, a drugi 4,8 l soku. Babcia chce przełożyć cały sok do butelek po 300 ml. Ile butelek musi przygotować?



14. Jaka liczbą należy zastąpić znak $\star$?

a) $2 \text{ mm} = \star \text{ cm}$

c) $255 \text{ cm} = \star \text{ m}$

e) $7 \text{ m} = \star \text{ km}$

g) $1121 \text{ g} = \star \text{ kg}$

i) $180 \text{ ml} = \star \text{ l}$

b) $2 \text{ cm } 7 \text{ mm} = \star \text{ cm}$

d) $25 \text{ cm} = \star \text{ m}$

f) $255 \text{ dag} = \star \text{ kg}$

h) $16 \text{ dag } 8 \text{ g} = \star \text{ dag}$

j) $2175 \text{ ml} = \star \text{ l}$

15. Zamień podaną wielkość na wyrażenie dwumianowane.

a) $2,3 \text{ cm}$

b) $7,12 \text{ m}$

c) $1,11 \text{ km}$

d) $21,071 \text{ km}$

e) $1,7 \text{ dag}$

f) $8,1 \text{ kg}$

g) $21,22 \text{ kg}$

h) $32,064 \text{ kg}$

i) $2,9 \text{ t}$

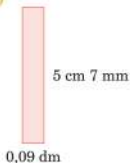
j) $2,17 \text{ l}$

16. Oblicz obwód prostokąta. Wynik podaj w centymetrach.

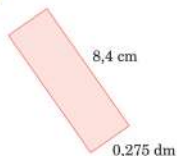
a)



b)

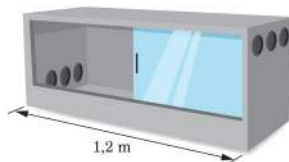


c)



17. Pola zaoszczędziła 540 zł. Na zakup książek fantasy wydała 0,25 swoich oszczędności. Ile kosztowały książki?

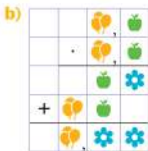
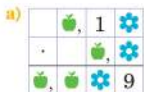
18. Jacek ma jeża pigmejskiego, którego długość ciała stanowi 0,125 długości terrarium. Szerokość terrarium to trzykrotność długości ciała jeża. Czy terrarium zmieści się na komodzie, której blat ma kształt prostokąta o wymiarach $125 \text{ cm} \times 45 \text{ cm}$?



19. W szkole Agaty prowadzone są zajęcia judo, na które uczęszcza 36 osób, czyli 0,15 liczby wszystkich uczniów szkoły. Ilu uczniów liczy ta szkoła?



20. Jakimi cyframi można zastąpić symbole 🍌, 🍏, 🌸? Różne symbole oznaczają różne cyfry.



Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz w pamięci.

a) $0,27 + 1,32$

b) $2,87 - 0,9$

c) $0,93 : 0,003$

d) $2,7 \cdot 0,2$

2. Oblicz.

a) $0,278 + 9,12$

b) $19 - 6,271$

c) $(1,25)^2$

d) $16,48 : 0,04$

3. Na rysunku podano wymiary prostokąta $ABCD$.



Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Obwód tego prostokąta jest równy 12,6 dm.	P	F
Bok CD jest dłuższy od boku BC o 10,2 cm.	P	F

4. Pracownik firmy cateringowej przygotowuje mus owocowy. Kupił jabłka różnych odmian, wśród nich 2,15 kg szarej renety. Okazało się, że masa szarej renety stanowiła 0,25 masy wszystkich kupionych jabłek. Ile kilogramów jabłek kupił ten pracownik?

3. Rozwinięcia dziesiętne ułamków zwykłych

- ▶ Jak zapisać ułamek zwykły w postaci dziesiętnej?
- ▶ Jak zapisać ułamek dziesiętny w postaci ułamka zwykłego?
- ▶ Czym jest rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe ułamka zwykłego i jak je wyznaczyć?



Odkrywaj!

1. Bruno zamienia ułamki zwykłe na dziesiętne, używając kalkulatora.



- Jakie cyfry powtarzają się w dziesiętnym zapisie ułamka $\frac{7}{3}$, a jakie w dziesiętnym zapisie ułamka $\frac{10}{27}$?
- Jakie cyfry znajdują się na drugim, dziesiątym oraz setnym miejscu po przecinku każdej z liczb zapisanych w postaci dziesiętnej?
- Spróbuj zamienić powyższe ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne, sprowadzając je do mianownika, który jest potęgą liczby 10. Czy w którymś przykładzie masz kłopot z taką zamianą? W którym?

2. Użyj kalkulatora i zapisz ułamki w postaci dziesiętnej.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{500} \cdot \frac{5}{36} \cdot \frac{93}{37}$$

Dla każdej z otrzymanych liczb zapisz cyfry, które znajdują się na drugim oraz na dwudziestym miejscu po przecinku.



Analizuj!

Aby zamienić ułamek zwykły na postać dziesiętną, można:



rozszerzyć lub skrócić ten ułamek do mianownika, który jest potęgą liczby 10;

podzielić licznik tego ułamka przez jego mianownik, np. sposobem pisemnym.

Przykład 1.

Zapisz ułamek zwykły w postaci dziesiętnej.

a) $\frac{1}{4}$

Sposób 1

Rozszerzymy mianownik do potęgi liczby 10.

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0,25$$

Sposób 2

Wykonamy dzielenie $1 : 4$ sposobem pisemnym.

b) $\frac{7}{200}$

Sposób 1

Rozszerzymy mianownik do potęgi liczby 10.

$$\frac{7}{200} = \frac{35}{1000} = 0,035$$

Sposób 2

Wykonamy dzielenie $7 : 200$ sposobem pisemnym.

	0	2	5		
-->	1	0	0	:	4
	-	0			
	1	0			
	-	8			
		2	0		
		-	2	0	
			0		

	0	0	3	5				
>	7	0	0	0	:	2	0	0
-	0							
	7	0						
-	0							
	7	0	0					
-	6	0	0					
	1	0	0	0				
-	1	0	0	0				
				0				

Ułamek zwykły ma **rozwińnięcie dziesiętne skończone**, jeśli można go rozszerzyć lub skrócić tak, aby w jego mianowniku była potęga liczby 10, np.

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0,2; \quad \frac{50}{200} = \frac{25}{100} = 0,25; \quad \frac{3}{40} = \frac{75}{1000} = 0,075.$$

Ćwiczenie 1.

Zapisz ułamek zwykły w postaci dziesiętnej.

a) $\frac{3}{50}$

b) $\frac{9}{20}$

c) $\frac{1}{200}$

d) $\frac{7}{8}$

Ułamek zwykły ma **rozwiniecie dziesiętne nieskończone okresowe**, jeśli w jego postaci dziesiętnej od pewnego miejsca po przecinku powtarza się cyfra lub grupa cyfr.

$$\frac{11}{15} = 0,7333... = 0,7(3)$$

rozwiniecie dziesiętne nieskończone okresowe

okres równy 3



Cyfrę tę lub grupę cyfr nazywamy **okresem** i zapisujemy w nawiasie. Ułamek, który ma rozwiniecie dziesiętne nieskończone okresowe, nazywamy **ułamkiem okresowym**.

Ułamek zwykły ma rozwiniecie dziesiętne skończone np. $\frac{1}{2} = 0,5$ albo nieskończone okresowe np. $\frac{1}{3} = 0,(3)$.

Przykład 2.

Zapisz ułamek zwykły w postaci dziesiętnej. Podaj jego okres.

a) $\frac{2}{3}$

Wykonamy dzielenie $2 : 3$ sposobem pisemnym.

Widać, że dzielenie się nie kończy – po przecinku otrzymujemy kolejne cyfry 6. Otrzymaliśmy więc $\frac{2}{3} = 0,6666... = 0,(6)$.

Powtarzającą się cyfrę **6** zapisujemy w nawiasie i nazywamy okresem.

b) $\frac{1}{33} = 1 : 33 = 0,030303... = 0,(03)$, okres: **03**.

c) $5\frac{8}{45}$

Zamienimy liczbę mieszaną na ułamek niewłaściwy: $5\frac{8}{45} = \frac{233}{45}$.

$5\frac{8}{45} = \frac{233}{45} = 5,1777... = 5,1(7)$, okres: **7**.

	0	6	6	...	
	2	0	0	:	3
-	0				
	2	0			
-	1	8			
		2	0		
-	1	8			
			2	0	
-	1	8			
				2	

Ćwiczenie 2.

Zapisz ułamek zwykły w postaci dziesiętnej. Podaj jego okres.

a) $6\frac{1}{3}$

b) $\frac{5}{11}$

c) $5\frac{1}{99}$

d) $2\frac{5}{13}$

Przykład 3.

Porównaj liczby. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

a) $0,8$? $\frac{2}{3}$

Aby porównać te dwa ułamki, zamienimy $0,8$ na ułamek zwykły.

Sposób 1 – wspólny licznik

$$0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

Więc $\frac{4}{5} > \frac{4}{6}$, czyli $0,8 > \frac{2}{3}$.

Sposób 2 – wspólny mianownik

$$0,8 = \frac{8}{10} = \frac{24}{30}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{20}{30}$$

Więc $\frac{24}{30} > \frac{20}{30}$, czyli $0,8 > \frac{2}{3}$.

b) $\frac{3}{5}$? $0,(5)$

Nie potrafimy jeszcze zamienić ułamka $0,(5)$ na ułamek zwykły, więc zamienimy $\frac{3}{5}$ na ułamek dziesiętny.

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0,6 \quad 0,(5) = 0,555555555\dots$$

Część całkowita jest taka sama w obu liczbach (równa 0), zatem porównamy pierwsze cyfry po przecinku: $6 > 5$, czyli $0,6 > 0,555555\dots$

Więc $\frac{3}{5} > 0,(5)$.

c) $4,0(14)$? $4,01(4)$

Zapiszemy kilka początkowych cyfr rozwinięć dziesiętnych obu liczb.

$$4,0(14) = 4,014141414\dots \quad 4,01(4) = 4,014444444\dots$$

Część całkowita oraz trzy pierwsze cyfry po przecinku są identyczne w obu liczbach. Porównamy czwarte cyfry po przecinku:

$$4,0(14) = 4,014\mathbf{1}41414\dots \quad 4,01(4) = 4,014\mathbf{4}444444\dots$$
$$\mathbf{1} < \mathbf{4}$$

Więc $4,0(14) < 4,01(4)$.

Ćwiczenie 3.

Porównaj liczby. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

a) $0,2$? $\frac{1}{3}$

b) $0,0(3)$? $\frac{3}{8}$

c) $9,(89)$? $9,8(89)$

Warto zapamiętać rozwinięcia dziesiętne niektórych ułamków zwykłych.



$$\frac{1}{2} = 0,5$$

$$\frac{1}{4} = 0,25$$

$$\frac{1}{5} = 0,2$$

$$\frac{1}{8} = 0,125$$

$$\frac{1}{10} = 0,1$$

$$\frac{3}{4} = 0,75$$

$$\frac{1}{100} = 0,01$$

$$\frac{1}{3} = 0,(3)$$

$$\frac{2}{3} = 0,(6)$$

$$\frac{1}{6} = 0,1(6)$$

Rozwiąż zadania

1. Zapisz ułamek dziesiętny w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego lub liczby mieszanej.

a) 0,4 b) 0,25 c) 13,200 d) 8,125 e) 0,128

2. Zapisz ułamek zwykły w postaci dziesiętnej.

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{10}$ c) $\frac{17}{20}$ d) $\frac{5}{8}$ e) $\frac{7}{125}$

3. Zapisz ułamek w postaci dziesiętnej.

a) $\frac{24}{30}$ b) $\frac{33}{110}$ c) $\frac{17}{68}$ d) $\frac{56}{64}$

Czasami warto zapisać ułamek zwykły w postaci nieskracalnej przed zamianą na ułamek dziesiętny, np.

$$\frac{30}{75} = \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0,4$$



4. Skorzystaj z kalkulatora i przedstaw ułamek w postaci dziesiętnej. Podaj jego okres.

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{7}{99}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{10}{13}$

5. Przedstaw ułamek w postaci dziesiętnej.

a) $\frac{3}{40}$ b) $\frac{2}{9}$ c) $\frac{8}{30}$ d) $\frac{7}{15}$ e) $\frac{17}{51}$

6. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Postać dziesiętna ułamka $\frac{2}{25}$ jest ułamkiem okresowym.	P	F
Liczbę 2,3444... można zapisać jako 2,(34).	P	F
Dziesiątą cyfrą po przecinku w liczbie 2,(123) jest 1.	P	F
W rozwinięciu dziesiętnym liczby $\frac{1}{6}$ cyfra 1 występuje tylko raz.	P	F

7. Porównaj ułamki. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

a) $\frac{2}{5} ? 0,5$

b) $\frac{7}{15} ? 0,5$

c) $0,38 ? \frac{3}{8}$

d) $\frac{1}{6} ? 0,1(6)$

e) $0,1(3) ? 0,(13)$

f) $1,(1) ? \frac{11}{10}$

8. Jaka cyfra znajduje się na szóstym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanego ułamka?

a) $\frac{5}{9}$

b) $\frac{3}{12}$

c) $\frac{9}{11}$

d) $\frac{8}{15}$

e) $\frac{5}{7}$

9. Zapisz podaną wielkość w postaci wyrażenia dwumianowanego.

a) $2\frac{3}{4}$ m – ile to metrów i centymetrów?

b) $8\frac{3}{20}$ kg – ile to kilogramów i gramów?

c) $4\frac{1}{8}$ km – ile to kilometrów i metrów?

d) $7\frac{17}{50}$ t – ile to ton i kilogramów?

e) $5\frac{1}{3}$ h – ile to godzin i minut?

f) $15\frac{1}{12}$ min – ile to minut i sekund?

10. Srebrna biżuteria jest w rzeczywistości biżuterią wykonaną ze stopu srebra z innymi metalami. Czyste chemicznie srebro jest miękkie, więc biżuteria wykonana z samego srebra bardzo szybko by się zniszczyła. Próba srebra określa zawartość czystego srebra w stopie. Najpopularniejszą próbą jest próba 925 – oznacza ona, że $\frac{925}{1000}$ stopu, z którego wykonano biżuterię, to srebro, a $\frac{75}{1000}$ stopu stanowią inne metale. Podobnie określa się próby złota.



a) Czy w srebrnym pierścieniu o próbie 925 inne metale stanowią mniej czy więcej niż $\frac{9}{400}$ stopu, z którego wykonany jest pierścionek?

b) Czy w złotym łańcuszku o próbie 333 jest więcej czy mniej złota niż $\frac{1}{3}$?

c) Czy w złotym pierścieniu o próbie 585 inne metale stanowią więcej czy mniej niż 0,(41) stopu?

11. Podzielcie się na trzy grupy. Każda grupa powinna wykonać odpowiednie dzielenia pisemne i wyznaczyć rozwinięcia dziesiętne ułamków z jednego z punktów: I, II lub III.

I. $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}$

II. $\frac{1}{99}, \frac{4}{99}, \frac{10}{99}, \frac{25}{99}$

III. $\frac{1}{999}, \frac{4}{999}, \frac{100}{999}, \frac{550}{999}$

Następnie, nie wykonując żadnych obliczeń, ustalcie rozwinięcia dziesiętne ułamków: $\frac{1}{9999}, \frac{80}{9999}, \frac{5678}{9999}$.

Sprawdź, co umiesz!

1. Zapisz ułamek w postaci dziesiętnej.

a) $\frac{3}{25}$

b) $\frac{11}{40}$

c) $\frac{8}{9}$

d) $\frac{7}{11}$

2. Porównaj ułamki. Użyj odpowiedniego znaku: <, > lub =.

a) $2,7$? $2\frac{11}{16}$

b) $3\frac{2}{3}$? $3,6(7)$

c) $7,(101)$? $7,1(01)$

3. Kasia kupiła bilety do teatru dla siebie i swoich czterech przyjaciółek. Zapłaciła 129 zł.

Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.



- I. Ile kosztował jeden bilet?

A. $\frac{129}{5}$ zł

B. $\frac{129}{4}$ zł

- II. Ile łącznie kosztowały bilety przyjaciółek Kasi?

C. 103 zł 20 gr

D. 25 zł 80 gr

4. Jaka cyfra znajduje się na 11. miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby?

a) 0,(12)

b) 7,(182)

c) $\frac{5}{6}$

5. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

$3\frac{2}{5}$ m jest równe 350 cm.	P	F
$6\frac{18}{25}$ kg możemy zapisać jako 6720 g.	P	F

4. Działania na liczbach wymiernych

- ▶ Czym jest liczba wymierna?
- ▶ Jak wykonywać działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych?
- ▶ Jak wykonywać działania na liczbach wymiernych?
- ▶ Jakie liczby nazywamy odwrotnymi, a jakie przeciwnymi?



Odkrywaj!

1. Bruno i Kuba wybrali się do pizzerii i zamówili pizzę hawajską. Kuba zjadł $\frac{1}{2}$ pizzy, a Bruno 0,25 tej pizzy. Jaką część pizzy zjedli łącznie chłopcy? Jakie działanie arytmetyczne zapiszesz, aby odpowiedzieć na pytanie? W jaki sposób przedstawisz liczby występujące w tym działaniu, aby wyznaczyć jego wynik?



2. Zosia i Ela zainteresowały się haftem diamentowym. Wspólnie przygotowują jeden obraz. Zosia wykonała już $\frac{1}{3}$ obrazu, a Ela 0,2 tego samego obrazu. Jaką część obrazu wykonały już dziewczęta? Jakie działanie arytmetyczne zapiszesz, aby odpowiedzieć na pytanie? Czy potrafisz wykonać to działanie, zamieniając wszystkie liczby na ułamki

- a) zwykłe?
- b) dziesiętne?

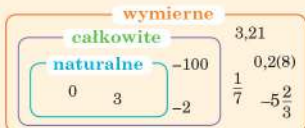




Analizuj!

Liczba **wymierna** to liczba, którą można przedstawić w postaci ułamka $\frac{a}{b}$, gdzie a, b to liczby całkowite oraz $b \neq 0$ (czytaj: b różne od 0).

Przykłady liczb wymiernych: 0; 1; 15; -84; $\frac{5}{9}$; $-3\frac{1}{6}$; 7,2; 0,(15).



Każda liczba:

- **naturalna** jest **całkowita**,
- **całkowita** jest **wymierna**,
- **naturalna** jest **wymierna**.



Przykład 1.

W dzbanku znajdowało się $2\frac{1}{2}$ l mrożonej herbaty. Zosia nalała sobie do szklanki 0,2 l. Ile litrów mrożonej herbaty zostało w dzbanku?

Sposób 1

Obie liczby zapiszemy w postaci ułamków zwykłych.

$$2\frac{1}{2} - 0,2 = 2\frac{1}{2} - \frac{2}{10} = 2\frac{5}{10} - \frac{2}{10} = 2\frac{3}{10} \quad []$$

Sposób 2

Obie liczby zapiszemy w postaci ułamków dziesiętnych.

$$2\frac{1}{2} - 0,2 = 2\frac{5}{10} - 0,2 = 2,5 - 0,2 = 2,3 \quad []$$

Odp. W dzbanku zostało $2\frac{3}{10}$ l = 2,3 l mrożonej herbaty.



Ćwiczenie 1.

Do warzywniaka przywieziono $50\frac{1}{4}$ kg pomidorów. Pierwszy klient kupił 0,45 kg pomidorów. Ile kilogramów pomidorów zostało? Oblicz dwoma sposobami.

Aby **obliczyć wartość wyrażenia**, w którym występują ułamki zwykłe i dziesiętne, należy wszystkie ułamki doprowadzić do tej samej postaci – ułamki zwykłe zamienić na dziesiętne albo ułamki dziesiętne na zwykłe. Następnie należy wykonać odpowiednie działania.



Przykład 2.

Ela przygotowała 25 jednakowych porcji deseru. Użyła do niego $1\frac{3}{4}$ kg truskawek, 0,6 kg jogurtu naturalnego oraz $2\frac{4}{5}$ kg bananów. Ile ważyła jedna porcja?



Sposób 1

$$\left(1\frac{3}{4} + 0,6 + 2\frac{4}{5}\right) : 25 = (1,75 + 0,6 + 2,8) : 25 = 5,15 : 25 = 0,206 \text{ [kg]}$$

Sposób 2

$$\left(1\frac{3}{4} + 0,6 + 2\frac{4}{5}\right) : 25 = \left(1\frac{3}{4} + \frac{3}{5} + 2\frac{4}{5}\right) : 25 = \left(1\frac{15}{20} + \frac{12}{20} + 2\frac{16}{20}\right) : 25 = 3\frac{43}{20} : 25 = \frac{103}{20} \cdot \frac{1}{25} = \frac{103}{500} \text{ [kg]}$$

Odp. Jedna porcja ważyła $0,206 \text{ kg} = \frac{103}{500} \text{ kg}$.

	0	2	0	6	
	5	1	5	:	2
-	0				5
	5	1			
-	5	0			
		1	5		
			0		
		1	5	0	
-		1	5	0	
			0		

Ćwiczenie 2.

Oblicz dwoma sposobami wartość wyrażenia $\left(2\frac{1}{8} + 3,75 - 2\frac{3}{5}\right) \cdot 1\frac{1}{2}$.

Przykład 3.

Pan Adam kupił na spotkanie z przyjaciółmi $1\frac{1}{3}$ tarty wiśniowej oraz $1\frac{1}{6}$ tarty jabłkowej. Cena tarty wiśniowej to 63,30 zł za sztukę, a tarty jabłkowej to 66,60 zł za sztukę. Ile zapłacił pan Adam?



Ułamki zwykłe o mianownikach 3 i 6 zapisane w postaci dziesiętnej są uławkami okresowymi. Nie umiemy wykonywać działań na takich uławkach, dlatego zamienimy wszystkie ułamki na zwykłe.

$$1\frac{1}{3} \cdot 63,30 + 1\frac{1}{6} \cdot 66,60 = \frac{4}{3} \cdot \frac{633}{10} + \frac{7}{6} \cdot \frac{666}{10} = \frac{4 \cdot 211}{10} + \frac{7 \cdot 111}{10} = \frac{844 + 777}{10} = \frac{1621}{10} = 162,10 \text{ [zł]}$$

Odp. Pan Adam zapłacił 162,10 zł.

Ćwiczenie 3.

Oblicz.

a) $3,54 + 2\frac{1}{4}$

b) $2\frac{5}{6} - 0,6$

c) $3,5 \cdot \frac{3}{7}$

d) $4,8 : 2\frac{1}{5}$

Liczby wymierne można przedstawiać na osi liczbowej.



Przykład 4.

Oblicz.

a) $1\frac{3}{4} + 0,25$

$$1\frac{3}{4} + 0,25 = 1\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7+1}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Dodajemy dwie liczby **dodatnie**, więc suma jest **dodatnia**.

Przedstawimy oba składniki w tej samej postaci – jako ułamki zwykłe.

b) $\left(-1\frac{2}{5}\right) - \frac{4}{5}$

$$\left(-1\frac{2}{5}\right) - \frac{4}{5} = \left(-1\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) =$$

$$= -\frac{7}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{7+4}{5} = -\frac{11}{5} = -2\frac{1}{5}$$

Zamienimy odejmowanie na dodawanie liczby przeciwnej.

Dodajemy dwie liczby **ujemne**, więc suma jest **ujemna**.

c) $\frac{2}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right)$

$$\frac{2}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5} - \frac{4}{5} = \frac{2-4}{5} = -\frac{2}{5}$$

Dodajemy liczbę **dodatnią** i liczbę **ujemną**. Otrzymana suma jest **ujemna**.

d) $(-0,4) + 0,8$

$$(-0,4) + 0,8 = 0,8 + (-0,4) = 0,8 - 0,4 = 0,4$$

Możemy zmienić kolejność składników.

Dodajemy liczbę **ujemną** i liczbę **dodatnią**. Otrzymana suma jest **dodatnia**.

e) $\left(-1\frac{4}{5}\right) - (-1,8)$

$$\left(-1\frac{4}{5}\right) - (-1,8) = \left(-1\frac{8}{10}\right) - (-1,8) =$$

$$= (-1,8) + 1,8 = 1,8 + (-1,8) = 1,8 - 1,8 = 0$$

Przedstawimy oba składniki w tej samej postaci – jako ułamki dziesiętne.

Dodajemy liczbę **ujemną** i liczbę **dodatnią**. Otrzymana suma jest równa **0**.

Ćwiczenie 4.

Oblicz.

a) $\frac{1}{7} - \frac{5}{7}$

b) $(-0,15) - 5,25$

c) $\left(-8\frac{3}{4}\right) + 1,5$

d) $(-5,8) - \left(-\frac{3}{20}\right)$

Znak iloczynu i ilorazu



Liczba a	Liczba b	Iloczyn $a \cdot b$	Iloraz $a : b$
+	+	+	+
+	-	-	-
-	+	-	-
-	-	+	+

Przykład 5.

Ustal znak wyniku i wykonaj działanie.

a) $-\frac{4}{9} \cdot 1\frac{7}{8} = -\frac{14}{39} \cdot \frac{15^5}{8_2} = -\frac{5}{6} \leftarrow$ Iloczyn liczby dodatniej i liczby ujemnej jest ujemny.

b) $\left(-\frac{3}{7}\right) \cdot (-0,42) = \left(-\frac{3}{7}\right) \cdot \left(-\frac{42^{20}}{100}\right) = \frac{18}{100} = \frac{9}{50} \leftarrow$ Iloczyn dwóch liczb ujemnych jest dodatni.

c) $1,6 : (-0,8) = 16 : (-8) = -2 \leftarrow$ Iloraz liczby dodatniej i liczby ujemnej jest ujemny.

d) $\left(-5\frac{1}{20}\right) : (-1,01) = (-5,05) : (-1,01) = (-505) : (-101) = 5 \leftarrow$ Iloraz dwóch liczb ujemnych jest dodatni.

Ćwiczenie 5.

Ustal znak wyniku i wykonaj działanie.

a) $\left(-\frac{8}{27}\right) \cdot \frac{3}{5}$

b) $\left(-2\frac{3}{5}\right) \cdot (-1,5)$

c) $5,6 : (-0,7)$

d) $\left(-4\frac{1}{4}\right) : (-0,75)$

Rozwiąż zadania

1. Oblicz dwoma sposobami – raz zamień ułamki zwykłe na dziesiętne, a za drugim razem dziesiętne na zwykłe.

a) $2,2 + 1\frac{1}{10}$

b) $7\frac{2}{5} - 1,35$

c) $8\frac{3}{5} - 1,125$

d) $2\frac{1}{2} \cdot 1,45$

e) $3,2 : 1\frac{3}{5}$

f) $7\frac{1}{2} : 1,25$

2. Oblicz.

a) $2,4 + 3\frac{1}{6}$

b) $7\frac{1}{4} + 3,125$

c) $8\frac{5}{12} - 2,2$

d) $8,2 - \frac{1}{8}$

e) $7\frac{1}{3} \cdot 0,25$

f) $12,5 \cdot 1\frac{1}{2}$

g) $2,5 : \frac{1}{4}$

h) $5\frac{5}{6} : 3,75$

3. Wykonaj działania. Następnie uporządkuj wyniki w kolejności od najmniejszego do największego i zapisz odpowiadające im litery. Utworzą one hasło – nazwę znaku, który jest używany zamiast przecinka w zapisie ułamków dziesiętnych w Wielkiej Brytanii i USA.

$3\frac{1}{4} \cdot 2,5$	P	$5\frac{1}{8} + 2,25$	O	$2,2 + 1\frac{3}{4}$	R
$3,375 : 1\frac{1}{8}$	K	$2,4 \cdot 4\frac{1}{5}$	A	$1\frac{1}{5} \cdot 8,125$	K

4. Gosia znalazła na stronie internetowej z matematycznymi zagadkami przepis na swoje ulubione ciasto – sernik gotowany. Przepis ma zaszyfrowane ilości potrzebnych produktów. Oblicz, ile poszczególnych produktów potrzebuje Gosia, aby upiec taki sernik.

10:30
100%

SERNIK GOTOWANY

masło (kostki)	$1,5 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} : 0,125$
jajka	$5,5 \cdot \frac{1}{11} + 3,5$
herbatniki (gramy)	$0,75 \cdot (0,250 + 399\frac{3}{4})$
budyń waniliowy (torebki)	$(0,7 + \frac{1}{3} \cdot 0,9) : \frac{1}{2}$
mleko (mililitry)	$(0,25 \cdot \frac{1}{8}) \cdot (0,1 : \frac{1}{100})^2$
cukier (gramy)	$0,22 \cdot ((\frac{7}{10})^2 : 0,49) \cdot 10^3$
twaróg mielony (kilogramy)	$(2\frac{1}{2})^2 \cdot 0,16 + (\frac{3}{10})^2 \cdot 10 - 0,9$



Ocenił go: ★★★★★

5. Karolina kupiła $\frac{1}{4}$ kg tropikalnego musli po 15,40 zł za kilogram i $\frac{3}{5}$ kg płatków mango po 45,50 zł za kilogram. Ile zapłaciła?
6. Mama Tomka przygotowała 9,5 l domowego płynu do mycia podłogi. Przez przypadek rozlała $\frac{1}{2}$ l płynu. To, co jej zostało, przelała do butelek o pojemności $\frac{1}{4}$ l. Ile butelek wykorzystала?
7. Tata Kacpra kupił w sklepie internetowym dwa rodzaje sera: 0,6 kg sera gouda po 24,90 zł za kilogram i $\frac{1}{5}$ kg sera cheddar. Jaka jest cena za kilogram sera cheddar, jeśli tata zapłacił za oba sery 22 zł?

8. Spośród liczb podanych w ramce wypisz wszystkie liczby:

- a) naturalne, b) całkowite, c) wymierne.

$$-0,22 \cdot \frac{13}{40} \cdot 0 \cdot 12\frac{1}{5} \cdot 7 \cdot 9, (45) \cdot -89\frac{97}{99} \cdot -1 \cdot -\frac{630}{9}$$

9. Jaką liczbą należy zastąpić znak ♣, aby otrzymać równość?

- a) $\left|\frac{1}{3}\right| = \clubsuit$ b) $|-1,25| = \clubsuit$ c) $\left|-\frac{12}{13}\right| = \clubsuit$ d) $-|4,76| = \clubsuit$

10. Porównaj liczby. Użyj odpowiedniego znaku: <, > lub =.

- a) $-\frac{3}{5} \text{ ? } -0,6$ b) $-4\frac{5}{16} \text{ ? } -4,25$ c) $-1\frac{7}{20} \text{ ? } -1,7$

11. Oblicz.

- | | | |
|--------------------------------------|--------------------|-----------------------------|
| a) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}$ | • $0,4 - 0,8$ | • $0,7 - \frac{3}{4}$ |
| b) $-\frac{4}{5} + \frac{5}{6}$ | • $-0,5 + 0,9$ | • $-\frac{3}{5} + 0,9$ |
| c) $1\frac{2}{3} - (-2\frac{1}{12})$ | • $2,3 - (-7,8)$ | • $2,5 - (-2\frac{7}{12})$ |
| d) $-2\frac{8}{11} - 1\frac{1}{22}$ | • $-8,2 - 10,22$ | • $-3,4 - 2\frac{1}{2}$ |
| e) $-3\frac{4}{5} - (-2\frac{1}{3})$ | • $-8,9 - (-3,15)$ | • $-\frac{18}{8} - (-1,25)$ |

12. Wykonaj mnożenie.

- a) $(-\frac{1}{2}) \cdot \frac{3}{4}$ b) $2,5 \cdot (-0,4)$ c) $-1\frac{7}{8} \cdot (-1\frac{3}{5})$
d) $0,8 \cdot (-\frac{5}{8})$ e) $-2,3 \cdot \frac{1}{23}$ f) $(-\frac{6}{51}) \cdot (-1,7)$

13. Oblicz.

- a) $(\frac{1}{4})^2$ b) $(-\frac{2}{5})^3$ c) $(-1\frac{1}{3})^2$ d) $(1\frac{1}{2})^3$ e) $(-3\frac{1}{4})^2$
f) $(0,01)^2$ g) $(1,2)^2$ h) $(-1,3)^2$ i) $(0,1)^3$ j) $(-0,2)^3$

14. Wykonaj dzielenie.

- a) $(-2,5) : 0,5$ b) $\frac{3}{4} : (-\frac{1}{2})$ c) $8,75 : (-\frac{1}{2})$ d) $-6,2 : \frac{4}{5}$
e) $4,5 : (-\frac{9}{10})$ f) $(-\frac{7}{8}) : (-\frac{1}{4})$ g) $-\frac{8}{9} : (-0,1)$ h) $(-5,5) : (-11)$

15. Oblicz wartości poniższych wyrażeń, a następnie uporządkuj je malejąco. Przyporządkowane im litery utworzą angielskie słowo „wymierny”.

$1 - 2,25 : 0,9$	N	$1,5 + (-1\frac{1}{2})^2$	T	$10 - 0,2 \cdot 20$	R
$\frac{1}{5} \cdot (3\frac{1}{8} + 0,625)$	I	$5,7 - (1,1)^2$	A	$-1,5 + 3 \cdot (-2,5)$	L
$-\frac{3}{4} \cdot (-0,16) + 1\frac{1}{10} \cdot (-0,3)$	O	$\frac{1}{2} \cdot 2,5 - 7\frac{3}{4} : 2$	A		

Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz.

a) $\frac{1}{3} + 0,25$ b) $7,5 - 2\frac{1}{4}$ c) $5\frac{5}{6} \cdot 0,6$ d) $2,7 : 1\frac{1}{5}$

2. Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

a) $7\frac{2}{3} + 0,4 \cdot \frac{1}{8}$ b) $4,125 \cdot \frac{1}{3} + (\frac{1}{2})^2$ c) $\frac{1}{3} \cdot (7,4 - 0,2)$

3. Czy liczba 4 jest wymierna? Wybierz odpowiedź i jej uzasadnienie.

Tak,	ponieważ	liczba 4 jest większa od liczby 0.
Nie,		liczbę 4 można przedstawić w postaci $\frac{4}{1}$.

4. Oblicz.

a) $(-7\frac{1}{2}) + (-2,25)$ b) $-3,4 + \frac{2}{5}$ c) $-5\frac{7}{8} + 6,5$
d) $\frac{8}{17} \cdot (-3,4)$ e) $(-2\frac{1}{3}) \cdot (-1,8)$ f) $(-1,8) : 9$

5. Zuzia przygotowała 5 l naturalnego nawozu do podlewania kwiatów. Do każdej z trzech donic z fikusami wlała po 0,45 l nawozu, a do największej donicy z zamiokulkasem – $\frac{4}{5}$ l nawozu. Ile litrów nawozu zostało?



5. Zaokrąglanie i szacowanie

- ▶ Jak zaokrąglać liczby całkowite oraz ułamki dziesiętne?
- ▶ W jaki sposób szacować wyniki działań?



Odkrywaj!

1. Zapisz w zeszycie informacje o Brunonie, wstawiając w miejsce kolejnych symboli liczby pasujące do autoprezentacji.

Mam około 100 zł w skarbonce.

Ważę mniej więcej 50 kg.

W klaszerze mam prawie 1000 kart z piłkarzami.

Mój czas w biegu na 50 m wynosi około 8 s.

Mam niewiele ponad 160 cm wzrostu.

Mam prawie 13 lat.



Mam na imię Bruno. Za dwa miesiące skończę ♣ lat. Mierzę ✂ cm i ważę 🍀 kg. Ostatnio w biegu na 50 m miałem czas ⌚ s. Zbieram karty z piłkarzami. W klaszerze mam już 🍀 kart. Marzę o zakupie oficjalnej piłki ostatnich mistrzostw Europy w piłce nożnej. W skarbonce mam już odłożone na ten cel 💰 zł.

♣: $12 \cdot 13 \cdot 14$

⌚: $7,1 \cdot 7,9 \cdot 8,9$

✂: $158 \cdot 164 \cdot 153$

🍀: $987 \cdot 1000 \cdot 1008$

🍀: $44 \cdot 48 \cdot 56$

💰: $49,99 \cdot 99,99 \cdot 199,99$

2. Ela dostała od mamy banknot 20 zł oraz listę zakupów.

- Czy otrzymana kwota wystarczy Eli na zakupy, jeśli chleb kosztuje 6,90 zł, a bułka 2,10 zł?
- Jeden rogalik kosztuje 1,50 zł. Czy Ela może kupić dodatkowo dwa takie rogaliki: dla siebie i dla Zosi?
- Czy konieczne są dokładne obliczenia, aby znaleźć odpowiedzi na powyższe pytania?





Analizuj!

Zdarzają się sytuacje, kiedy nie potrafimy podać dokładnej wartości np. wyrażenia arytmetycznego lub dokładna wartość nie jest nam potrzebna. Wtedy podajemy jego przybliżenie – **zaokrąglenie** lub **oszacowanie**.

Liczby **zaokrąglamy** zgodnie z ustalonymi regułami, przedstawionymi poniżej.

982,176

setki

dziesiątki

jedności

części dziesiąte

części setne

części tysięczne

Zaokrąglenie

do dziesiątek

982,176

Znajdujemy **cyfrę w rzędzie**, do którego zaokrąglamy.

do części setnych

982,176

982,176

Patrzymy **na kolejną cyfrę**.

982,176

$2 < 5$

980,000

Jeśli ta cyfra jest **mniejsza od 5**, to cyfrę w rzędzie, do którego zaokrąglamy, pozostawiamy bez zmian, a kolejne cyfry zastępujemy zerami.

Jeśli ta cyfra jest **większa od 5 lub równa 5**, to cyfrę w rzędzie, do którego zaokrąglamy, zwiększamy o 1, a kolejne cyfry zastępujemy zerami.

$6 > 5$

982,180

Znak $\approx$ czytamy:
równa się w przybliżeniu.

982,176 $\approx$ 980

Jeśli zaokrąglenie jest **mniejsze** od liczby, którą zaokrąglamy, to jest to **zaokrąglenie z niedomiarem**.

W ten sposób
wyzaczyliśmy
zaokrąglenie
liczby.

982,176 $\approx$ 982,18

Jeśli zaokrąglenie jest **większe** od liczby, którą zaokrąglamy, to jest to **zaokrąglenie z nadmiarem**.

Zwróć uwagę, że gdy zaokrąglamy np.

- liczbę 3 do dziesiątek – otrzymujemy 0,
- liczbę 49 do setek – otrzymujemy 0,
- liczbę 289 do tysięcy – otrzymujemy 0 itd.

Przykład 1.

Zaokrąglij **wyróżnioną** wielkość użytą w zdaniu do danego rzędu.

a) tysięcy

Kolej Transsyberyjska to najdłuższa linia kolejowa na świecie. Jej długość wynosi **9288,8 km**.

9288,8 km $\approx$ **9000 km**, ponieważ cyfrą setek jest **2**.

b) setek

Szklanka do kawy latte ma pojemność **250 ml**.

250 ml $\approx$ **300 ml**, ponieważ cyfrą dziesiątek jest **5**.

c) dziesiątek

Samica geparda grzywiastego może ważyć **48 kg**.

48 kg $\approx$ **50 kg**, ponieważ cyfrą jednostki jest **8**.

d) jednostki

Koliberek hawański to najmniejszy ptak żyjący na kuli ziemskiej. Waży nie więcej niż **1,9 g**.

1,9 g $\approx$ **2 g**, ponieważ cyfrą części dziesiątych jest **9**.

e) części dziesiątych (jednej cyfry po przecinku)

Największym parkiem narodowym w Polsce jest Biebrzański Park Narodowy. Zajmuje on powierzchnię **592,23 km²**.

592,23 km² $\approx$ **592,2 km²**, ponieważ cyfrą części setnych jest **3**. Cyfrę 3 zastępujemy cyfrą 0 i pomijamy ją w zapisie, ponieważ $592,2 = 592,20$.

f) części setnych (dwóch cyfr po przecinku)

Za 100 euro trzeba zapłacić w kantorze **427,64 zł**. Zatem 1 euro kosztuje $427,64 \text{ zł} : 100 =$ **4,2764 zł**.

4,2764 zł $\approx$ **4,28 zł**, ponieważ cyfrą części tysięcznych jest **6**. Cyfry 6 i 4 zastępujemy cyframi 0 i pomijamy je w zapisie, ponieważ $4,28 = 4,2800$.



Ćwiczenie 1.

Ziemia jest planetą o kształcie zbliżonym do kuli, lekko spłaszczonej na biegunach. Jej promień równikowy jest równy 6378,137 km, a promień biegunowy jest równy 6356,752 km. Zaokrąglij każdą z podanych liczb do:

a) tysięcy,

b) setek,

c) dziesiątek,

d) jednostki,

e) części dziesiątych,

f) części setnych.

W życiu codziennym szacujemy np. koszt zakupów, odległość, masę, ilość benzyny w baku samochodowym. Do szacowania używamy określeń typu: *około, prawie, trochę więcej niż*.

Aby **oszacować** wartość wyrażenia arytmetycznego, często wykonujemy działania na zaokrągleniach liczb, które występują w treści zadania.



Przykład 2.

Kot Poli zjada dziennie około 95 g suchej karmy. Jedno opakowanie karmy dla kotów waży 2 kg i kosztuje 98,50 zł. Oszacuj, na ile dni wystarczy jedno opakowanie karmy oraz jaki jest dzienny koszt tej karmy dla kota Poli.

Szacujemy, na ile dni wystarczy jedno opakowanie karmy.

$2\text{ kg} = 2000\text{ g}$ <---- tyle gramów karmy zawiera jedno opakowanie

$95\text{ g} \approx 100\text{ g}$ <---- tyle w przybliżeniu karmy zjada kot dziennie

$$2000\text{ g} : 95\text{ g} \approx 2000\text{ g} : 100\text{ g} = 20$$

Szacujemy dzienny koszt karmy.

$98,50\text{ zł} \approx 100\text{ zł}$ <---- tyle w przybliżeniu kosztuje jedno opakowanie karmy

$$98,50\text{ zł} : 20 \approx 100\text{ zł} : 20 = 5\text{ zł}$$

Odp. Jedno opakowanie karmy wystarczy na około 20 dni. Dzienny koszt karmy wynosi około 5 zł.

Ćwiczenie 2.

Pan Stefan wybiera się w podróż z Gdańska do Kielc. Odległość między tymi miastami wynosi 471,3 km. Samochód pana Stefana spala 6 l benzyny na 100 km. Litra benzyny kosztuje 6,92 zł. Oszacuj, ile litrów benzyny zużyje ten samochód na trasie Gdańsk–Kielce oraz jaki będzie koszt zakupu potrzebnej benzyny.



Rozwiąż zadania

1. Podane wielkości zaokrąglij do:

- a) dziesiątek: $2527\text{ cm} \cdot 563\text{ cm} \cdot 4\text{ cm}$
- b) setek: $35\,825\text{ km} \cdot 2850\text{ km} \cdot 77\text{ km}$
- c) tysięcy: $10\,036\text{ m} \cdot 9999\text{ m} \cdot 234\text{ m}$

2. Podane wielkości zaokrąglij do:

- a) setek: 108,826 m • 1002,222 km • 9989 zł • 12 871,271 t
 b) jednostki: 281,201 km • 0,8989 t • 271,981 dag • 22,019 cm
 c) części dziesiątych: 837,292 kg • 76,271 cm • 27,8222 ha • 0,9999 ml
 d) części setnych: 8,2761 km² • 9,7789 l • 1000,00001 t • 39,27213 km

3. Oszacuj wyniki podanych działań. Którym spośród znaków <, > należy zastąpić symbol $\clubsuit$?

- a) $899 + 99 \clubsuit 1000$ b) $11 \cdot 1001 \clubsuit 10\,000$ c) $100 : 5,5 \clubsuit 20$
 d) $2,7 + 8,52 \clubsuit 10$ e) $4 \cdot 12,3 \clubsuit 48$ f) $670 : 99 \clubsuit 6,7$
 g) $2\frac{1}{5} - 2\frac{1}{2} \clubsuit 0$ h) $17\frac{1}{4} + 2,8 \clubsuit 20$ i) $10 \cdot \frac{1}{3} \clubsuit 3$

Chcesz zaokrąglić lub oszacować ułamek zwykły? Warto go przedstawić w postaci dziesiętnej, np.

$$2\frac{4}{5} = 2,8 \approx 3 \quad 5\frac{1}{3} = 5,(3) \approx 5,3 \quad 4\frac{2}{3} = 4,(6) \approx 4,67$$



4. Poniżej przedstawiono ceny produktów w pewnym sklepie papierniczym.



długopis czerwony

cena: 2,42 zł



długopis niebieski

cena: 1,53 zł



zakreślacz

cena: 2,21 zł

Wykonaj odpowiednie szacowania. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Kwota 15 zł wystarczy na zakup 10 niebieskich długopisów.	P	F
Kwota 20 zł wystarczy na zakup trzech zakreślaczy i trzech czerwonych długopisów.	P	F

5. Ela i Kuba dekorują salę, w której odbędzie się przyjęcie urodzinowe Cezarego. Kupili 29 kolorowych balonów i ozdobną tasiemkę o długości 15 m. Do każdego balonu zamierzają przywiązać kawałek tasiemki o długości 50 cm. Oszacuj, czy wystarczy im tej tasiemki.

6. Oto tablica kursów walut z pewnego kantoru.

			CENA KUPNA	CENA SPRZEDAŻY
	€	1 EUR	4,31 zł	4,34 zł
	\$	1 USD	3,98 zł	4,03 zł
	£	1 GBP	5,12 zł	5,17 zł

EUR – euro; GBP – funt brytyjski; USD – dolar amerykański

Nie wykonując dokładnych obliczeń, odpowiedz na pytanie.

- Czy możemy kupić w tym kantorze 300 EUR, jeśli mamy 1500 zł?
- Czy za sprzedaż 10 banknotów o nominale 100 USD otrzymamy więcej niż 4000 zł?
- Czy za sprzedaż 3 banknotów o nominale 50 GBP otrzymamy kwotę wyższą lub równą 750 zł?

Sprawdź, co umiesz!

1. Powierzchnia Łodzi wynosi $293,25 \text{ km}^2$. Zaokrąglij tę liczbę do:

- setek,
- dziesiątek,
- jedności,
- części dziesiątych.

2. Średnia odległość Ziemi od Księżyca wynosi 384 400 km. W zaokrągleniu do tysięcy jest to

- A. 300 000 km B. 380 000 km C. 384 000 km D. 400 000 km

3. Jacek i jego dziadek kupują warzywa i pakują je do mającej kółka torby na zakupy, której maksymalne obciążenie wynosi 15 kg. Kupili już 3,8 kg ziemniaków, 2,25 kg marchewki i kapustę ważącą 4800 g. Wybrali jeszcze dynię o masie 2,79 kg. Oszacuj, czy po włożeniu dyni maksymalne obciążenie torby będzie przekroczone.



4. Ela planuje zakup gry wraz z dodatkami. Pakiet podstawowy gry kosztuje 80 zł, a każdy z dodatków 42 zł. Oszacuj, czy 240 zł wystarczy jej na zakup gry podstawowej oraz 4 dodatków.

5. Oszacuj, czy 450 zł wystarczy na zakup biletów do kina dla 30 uczniów, jeśli jeden bilet kosztuje 14,50 zł.

6. Zadania tekstowe

- ▶ Jak rozwiązywać zadania tekstowe zawierające liczby wymierne?
- ▶ Jak rozwiązywać wiązki zadaniowe?



Analizuj!



Wiązka zadaniowa to zestaw kilku zadań dotyczących wspólnego tematu. Informacje związane z tym tematem podane są zwykle w postaci tekstu, tabeli lub grafiki. Uważnie czytaj wszystkie informacje i polecenia zawarte w takich rozbudowanych zadaniach.

Przykład 1.

Informacje do zadań 1. i 2.

W kawiarni można kupić świeżo wyciskane soki owocowe i warzywne. Dzieci i seniorzy mają tutaj specjalne zniżki. Dzieci płacą tylko $\frac{2}{3}$ ceny, a seniorzy 0,75 ceny soku. W niektórych sytuacjach można też otrzymać dodatkowy rabat.

sok jabłkowy	sok pomidorowy	sok pomarańczowy	sok ananasowy	sok gruszkowy
6 zł	4 zł 80 gr	7 zł 20 gr	8 zł 40 gr	3 zł 60 gr

1. Ile zapłaci babcia-seniorka za dwa soki ananasowe – jeden dla siebie, drugi dla pięcioletniej wnuczki?

- Cena soku ananasowego to: $8 \text{ zł } 40 \text{ gr} = 8,40 \text{ zł}$
- Koszt soku dla babci: $0,75 \cdot 8,40 \text{ zł} = 6,30 \text{ zł}$
- Koszt soku dla wnuczki: $\frac{2}{3} \cdot 8,40 = \frac{12}{18} \cdot \frac{84^{25}}{105} = \frac{28}{5} = \frac{56}{10} = 5,60 \text{ [zł]}$

Razem: $6,30 \text{ zł} + 5,60 \text{ zł} = 11,90 \text{ zł}$

Odp. Babcia za dwa soki zapłaci 11,90 zł.

		6	4	
		3	2	
		0	7	5
			8	4
		3	0	0
+	6	0	0	
	6	3	0	0

2. Rodzice z trojgiem dzieci poszli do kawiarni. Poniżej przedstawiono soki, które zamówili. Rodzice wybrali dla siebie ten sam smak soku. Otrzymali dodatkowy rabat w wysokości $\frac{1}{10}$ wartości zamówienia. Czy 20 zł wystarczy na zapłacenie rachunku za to zamówienie?



- Cena soku pomidorowego: $4 \text{ zł } 80 \text{ gr} = 4,80 \text{ zł}$
- Cena soku gruszkowego: $3 \text{ zł } 60 \text{ gr} = 3,60 \text{ zł}$
- Cena soku pomarańczowego: $7 \text{ zł } 20 \text{ gr} = 7,20 \text{ zł}$
- Cena soku jabłkowego: 6 zł
- Koszt soków dla rodziców: $4,80 \text{ zł} \cdot 2 = 9,60 \text{ zł}$
- Koszt soków dla dzieci:

$$\frac{2}{3} \cdot (3,60 + 7,20 + 6) = \frac{2}{3} \cdot 16,80 = \frac{12}{18} \cdot \frac{168^{06}}{105} = \frac{56}{5} = \frac{112}{10} = 11,20 \text{ [zł]}$$

Łączna wartość zamówienia: $9,60 \text{ zł} + 11,20 \text{ zł} = 20,80 \text{ zł}$

Rabat: $\frac{1}{10} \cdot 20,80 \text{ zł} = 0,1 \cdot 20,80 \text{ zł} = 2,08 \text{ zł}$

Kwota do zapłaty: $20,80 \text{ zł} - 2,08 \text{ zł} = 18,72 \text{ zł} < 20 \text{ zł}$

Odp. Na zapłacenie rachunku za to zamówienie wystarczy 20 zł.

Ćwiczenie 1.

Skorzystaj z informacji do zadań 1. i 2. i rozwiąż zadanie.

- Ile zapłaci grupa 5 seniorów, jeśli każdy z nich zamówi inny rodzaj soku?
- Zosia, jej mama i babcia-seniorka zamówiły po soku pomarańczowym i otrzymały dodatkowy rabat w wysokości 3 zł. Czy 15 zł wystarczy na zapłacenie rachunku za to zamówienie?



Przykład 2.

Informacje do zadań 3. i 4.

W internetowym sklepie z żywnością jest dział z różnymi rodzajami orzechów.



3. Cezary kupił w tym sklepie 1 kg orzechów laskowych i 0,5 kg orzechów nerkowca. Ile zapłacił? Wynik zaokrąglij do pełnych złotych.

Cena 1 kg orzechów laskowych: 50,99 zł

Cena 1 kg orzechów nerkowca: 59,80 zł

Koszt zakupu 0,5 kg orzechów nerkowca: $59,80 \text{ zł} : 2 = 29,90 \text{ zł}$

Łączny koszt zakupów Cezarego: $50,99 \text{ zł} + 29,90 \text{ zł} = 80,89 \text{ zł} \approx 81 \text{ zł}$

Odp. Cezary zapłacił około 81 zł.

4. Zosia kupiła w tym sklepie orzechy włoskie. Koszt zakupu wyniósł 27,60 zł. Ile dekagramów orzechów włoskich kupiła Zosia?

Wiemy, że $\text{masa} \cdot \text{cena za 1 kg} = \text{koszt}$.

Zatem $\text{masa} = \text{koszt} : \text{cena za 1 kg}$.

Aby obliczyć masę zakupionych orzechów, podzielimy koszt zakupu przez cenę za 1 kg orzechów włoskich:

$$27,60 : 46 = 27,6 : 46 = 0,6 \text{ [kg]}$$

Zamienimy kilogramy na dekagramy: $0,6 \text{ kg} = 60 \text{ dag}$.

Odp. Zosia kupiła 60 dag orzechów włoskich.

		0, 6			
	2	7, 6	:	4	6
–		0			
	2	7	6		
–	2	7	6		
			0		

Ćwiczenie 2.

Skorzystaj z informacji do zadań 3. i 4. i rozwiąż zadanie.

- Ela kupiła 0,5 kg orzechów włoskich i 1 kg orzechów laskowych. Ile zapłaciła Ela? Wynik zaokrąglij do pełnych złotych.
- Kuba kupił w tym sklepie orzechy nerkowca. Zapłacił za nie 89,70 zł. Ile dekagramów orzechów nerkowca kupił Kuba?



Rozwiąż zadania

Informacje do zadań 1.–3.

W celu zbadania największej głębiny na Ziemi batyskaf Trieste (czytaj: triest) z dwuosobową załogą w 1960 roku dotarł do dna Rowu Mariańskiego, na głębokość 10,912 km. Egipski pływak Ahmed Gabr został w 2014 roku rekordzistą świata w nurkowaniu głębokim z butlą, schodząc na głębokość 332,35 m.

Okazuje się, że niektórzy żółwie nurkują nawet kilkukrotnie głębiej niż ludzie wyposażeni w butle. Dzięki programowi ochrony żółwi skórzastych w marcu 2024 roku zaobserwowano rekordowe zanurzenie pewnego żółwia – na głębokość 1344 m.



1. Zapisz głębokość, na jaką opuścił się batyskaf Trieste, w postaci wyrażenia dwumianowanego.

2. Podaj głębokość osiągniętą przez Ahmeda Gabra w zaokrągleniu do

- a) jednego metra, b) dziesiątek metrów, c) setek metrów.

3. Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

I. Na jaką głębokość zanurzył się żółw rekordzista w porównaniu z batyskafem Trieste?

- A. Na około 10 razy mniejszą. B. Na około 10 razy większą.

II. Ile około razy głębiej zanurkował żółw rekordzista niż Ahmed Gabr?

- C. 3 razy. D. 4 razy.

4. Arbuz to owoc, który w $\frac{23}{25}$ swojej masy składa się z wody.

Dzięki temu jego spożycie doskonale nawadnia organizm. Ile wody zawiera arbuz ważący 5,5 kg?



5. Za 0,25 kg czekoladek kakaowych Kasia zapłaciła 10,65 zł. Natomiast za $\frac{2}{5}$ kg czekoladek karmelowych zapłaciła 15,56 zł. Które czekoladki mają wyższą cenę za kilogram? O ile złotych wyższą?



Informacje do zadań 6. i 7.

Pola postanowiła zrobić szydełkiem maskotkę – lalkę. Znalazła w internecie instrukcję wykonania, a w pasmanterii kupiła potrzebne materiały. Kupiła po jednym motku włóczki każdego koloru oraz 2 opakowania kulek do wypełnienia maskotki. Cena jednego opakowania zawierającego 0,1 kg kulek wynosi 4,99 zł.



waga: 50 g
długość: 165 m
cena: 8,20 zł



waga: 25 g
długość: 82 m
cena: 4,50 zł



waga: 25 g
długość: 82 m
cena: 4,50 zł



waga: 25 g
długość: 82 m
cena: 4,50 zł

6. Ile kosztowały wszystkie zakupione przez Polę produkty?

7. Po wykonaniu maskotki okazało się, że Poli zostało: $\frac{1}{10}$ motka białej włóczki, $\frac{1}{5}$ motka różowej oraz po $\frac{2}{5}$ motka fioletowej i beżowej włóczki. Zużyła również 1,5 opakowania kulek silikonowych.

- a) Ile ważyła włóczka zużyta przez Polę, a ile – kulki silikonowe?
- b) Ile metrów białej włóczki zostało?
- c) Ile metrów włóczki wykorzystała Pola do zrobienia maskotki?

8. Rolko-wrotki kosztowały 209 zł. Jesienią cenę rolko-wrotek obniżono o $\frac{1}{5}$ dotychczasowej ceny. Następnie w grudniu obniżono ich cenę o $\frac{1}{5}$ jesiennej ceny.

- a) Ile kosztowały rolko-wrotki jesienią?
- b) Ile kosztowały rolko-wrotki po drugiej obniżce?



cena: 209 zł

9. Michalina przygotowuje warzywa, które poda z hummusem podczas spotkania ze znajomymi. Pokroiła: $\frac{5}{8}$ kg czerwonej papryki, 60 dag świeżego ogórka, 445 g selera naciowego oraz $\frac{1}{4}$ kg marchewki. Warzywa podzieliła na 12 takich samych porcji. Ile ważyła jedna porcja?



$\frac{5}{8}$ kg



60 dag



445 g



$\frac{1}{4}$ kg

10. Cenę deskorolki najpierw obniżono o $\frac{1}{10}$ ceny, a potem podwyższono o $\frac{1}{10}$ aktualnej ceny. Czy jej końcowa cena jest niższa, wyższa czy taka sama jak cena początkowa?



Sprawdź, co umiesz!

Informacje do zadań 1. i 2.

Jajka, jako źródło cennych składników odżywczych, są istotnym elementem diety wielu ludzi na całym świecie. Jedno kurze jajko waży przeciętnie 60 g. Polska jest jednym z większych producentów jaj w Europie, ale spożycie jajek jest w naszym kraju niezbyt wysokie – wynosi 163 sztuki na osobę rocznie.

Największe spożycie jajek (na osobę rocznie)	
na świecie	w Europie
1. Chiny – 366	1. Holandia – 327
2. Meksyk – 357	2. Ukraina – 288

Źródło: <https://www.ciekawestatystyki.pl/2024/03/ile-jajek-zjadaja-polacy.html>

1. Ile kilogramów jajek zjada rocznie mieszkaniec Polski? Wynik zaokrąglaj do pełnych kilogramów.
2. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Mieszkaniec Chin zjada około 1 jajka dziennie.	P	F
Roczne spożycie jajek na osobę w Ukrainie jest o 39 sztuk mniejsze niż w Chinach.	P	F
Mieszkaniec Meksyku zjada rocznie niecałe 2 razy więcej jajek niż mieszkaniec Polski.	P	F

3. Kilogram mandarynek kosztuje 8,90 zł, a kilogram pomarańczy jest o 1,50 zł tańszy. Ile zapłacimy za 10 kg mandarynek oraz $5\frac{1}{4}$ kg pomarańczy?
4. Normalny bilet kolejowy na trasie Wrocław–Katowice kosztuje 52 zł, a cena studenckiego biletu ulgowego stanowi 0,49 tej kwoty. Ile zapłaci student za przejazd z Wrocławia do Katowic i z powrotem?

PODSUMOWANIE DZIAŁU II

W świecie liczb wymiernych

Powtórz wiadomości

Liczby wymierne

Liczba wymierna to liczba, którą można przedstawić w postaci ułamka $\frac{a}{b}$, gdzie a, b to liczby całkowite oraz $b \neq 0$.

Przykłady liczb wymiernych:

0; 4; -1; $5\frac{2}{3}$; -27,5; $\frac{5}{7}$; $-13\frac{2}{5}$; 0,(12)

Ułamki zwykłe

+	Sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika. $1\frac{1}{6} + \frac{4}{7} = 1\frac{7}{42} + \frac{24}{42} = 1\frac{31}{42}$
-	$2\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = 2\frac{15}{20} - \frac{8}{20} = 2\frac{7}{20}$
·	Zamieniamy liczby mieszane na ułamki niewłaściwe. $2\frac{1}{7} \cdot 2\frac{4}{5} = \frac{15}{7} \cdot \frac{14}{5} = 6$
:	Pierwszy ułamek mnożymy przez odwrotność drugiego ułamka. $3\frac{5}{6} : 3\frac{10}{12} = \frac{13}{6} \cdot \frac{12}{46} = 1$

Rozwinięcia dziesiętne ułamków

Ułamek zwykły może mieć rozwinięcie dziesiętne:

- skończone, np.
 $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{3}{4} = 0,75$; $\frac{1}{8} = 0,125$;
- nieskończone okresowe, np.
 $\frac{1}{9} = 0,111... = 0,(1)$.

Ułamki dziesiętne

+	Zapisujemy jednostki pod jednostkami, dziesiątki pod dziesiątkami itd. $\begin{array}{r} 3,45 \\ + 5,52 \\ \hline 8,97 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2,34 \\ - 2,29 \\ \hline 0,05 \end{array}$
·	W wyniku oddzielamy przecinkiem tyle cyfr końcowych, ile łącznie było cyfr po przecinkach w obu ułamkach dziesiętnych. $2,13 \cdot 0,3 = 0,639$ 2 cyfry 1 cyfra 3 cyfry
:	Przesuwamy przecinki w dzielnej i dzielniku, tak aby dzielnik był liczbą całkowitą. $8,64 : 0,4 = 86,4 : 4 = 21,6$

Zaokrąglanie liczb

1. Znajdujemy **cyfrę w rzędzie, do którego zaokrąglamy**.

2. Patrzymy na kolejną cyfrę.

- Jeśli jest mniejsza od 5, to cyfrę w rzędzie, do którego zaokrąglamy, pozostawiamy bez zmian, a kolejne cyfry zastępujemy zerami.

Zaokrąglenie do części setnych

$86,4732 \text{ kg} \approx 86,47 \text{ kg}$

- Jeśli jest większa od 5 lub równa 5, to cyfrę w rzędzie, do którego zaokrąglamy, zwiększamy o 1, a kolejne cyfry zastępujemy zerami.

Zaokrąglenie do dziesiątek

$86,4732 \text{ kg} \approx 90 \text{ kg}$

Poćwicz przed sprawdzianem

1. Wskaż liczbę, która jest największa.

A. $\frac{9}{17}$

B. $\frac{7}{15}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$

2. Wskaż ułamek, który ma inną wartość niż pozostałe.

A. 0,2

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{15}{40}$

D. $\frac{12}{60}$

3. Który z ułamków jest równy $\frac{1}{6}$?

A. 0,16

B. 0,1(6)

C. 0,(16)

D. 0,(6)

4. Wskaż liczbę, którą nie można zastąpić znaku $\clubsuit$ w podanej równości: $|\clubsuit| = 2,5$.

A. -2,5

B. 2,50

C. 2,(5)

D. $-\frac{5}{2}$

5. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Postać dziesiętna ułamka $\frac{11}{16}$ jest ułamkiem okresowym.	P	F
Liczbą odwrotną do liczby 23,4 jest liczba -23,4.	P	F
7 t 34 kg można zapisać jako 7,034 t.	P	F

6. Oblicz.

a) $\frac{5}{6} + \frac{5}{18}$

b) $7\frac{2}{9} - 3\frac{3}{4}$

c) $-\frac{2}{7} \cdot 2\frac{4}{5}$

d) $-3\frac{2}{11} : \left(-1\frac{13}{22}\right)$

e) $-7\frac{6}{7} + 11$

f) $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8}$

g) $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} : 1\frac{1}{2}$

h) $\left[\frac{7}{18} - \frac{7}{8} : \left(-1\frac{1}{8}\right)\right]^2$

i) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{2}{9} + 1\frac{7}{27}\right]^2$

7. Oblicz.

a) $\frac{1}{5}$ masy 30 kg

b) $4\frac{5}{12}$ masy 36 kg

c) $3\frac{3}{8}$ długości $1\frac{7}{9}$ km

8. Oblicz.

a) $4,8 + 3,24$

b) $5,6 - 1,45$

c) $0,4 \cdot 1,5$

d) $0,36 : 12$

e) $-39,98 + 20,8$

f) $-0,718 - 0,329$

g) $-4,23 \cdot (-0,16)$

h) $2,772 : (-0,12)$

9. Porównaj liczby. Użyj odpowiedniego znaku: <, > lub =.

a) $\frac{2}{5} ? 0,6$

b) $0,(7) ? 0,7$

c) $1\frac{1}{4} ? 1,3$

d) $-\frac{13}{15} ? -\frac{13}{16}$

e) $-0,8 ? -\frac{4}{5}$

f) $-4,(5) ? -4,(56)$

10. Oblicz.

a) $\frac{3}{5} + 0,45$

b) $1\frac{2}{3} - 1,6$

c) $4,8 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$

d) $-5\frac{1}{4} : 1,125$

e) $-3 - 4\frac{1}{5} \cdot 1,25$

f) $\frac{4}{5} \cdot 0,9 + (-2,5) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)$

g) $1 + \left[0,2 \cdot \left(-2\frac{7}{8} - 2,125\right)\right]^3$

11. Przerysuj tabelę do zeszytu i uzupełnij ją odpowiednimi zaokrągleniami.

Wielkość	Zaokrąglenie do					
	jedności	dziesiątek	setek	tysięcy	części dziesiątych	części setnych
1346,058 km						
776,137 t						

12. Do szkoły muzycznej uczęszcza 320 uczniów. Do sekcji dętej należy $\frac{3}{8}$ liczby uczniów, a 0,6 liczby pozostałych uczniów tworzy sekcję rytmiczną. Uczniowie, którzy nie należą ani do sekcji dętej, ani rytmicznej, śpiewają. Jak liczna jest sekcja wokalna w tej szkole?

13. Skorzystaj z informacji przedstawionych poniżej i rozwiąż zadanie.



orzechy
52,60 zł/kg



rodzynek
12,40 zł/kg



śliwki
? zł/kg



morele
44 zł/kg



jogurt
4,50 zł/250 g

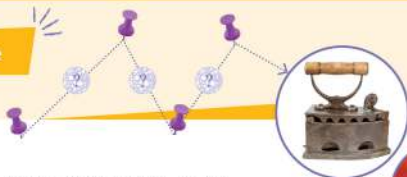
- Ile trzeba łącznie zapłacić za 750 g jogurtu naturalnego, 0,2 kg rodzynek, 35 dag orzechów i $\frac{3}{4}$ kg moreli?
- Czy 70 zł wystarczy na zakup 1,7 kg moreli?
- Pani Ewa kupiła w tym sklepie 250 g jogurtu oraz 0,3 kg śliwek i zapłaciła 12,30 zł. Ile kosztuje kilogram tych śliwek?
- Pani Joanna kupiła 600 g rodzynek, 0,8 kg orzechów oraz 130 dag moreli. Wszystkie bakalie wymieszała i podzieliła na 15 równych porcji. Ile kilogramów waży jedna porcja?
- Oszacuj, czy 89 zł wystarczy, by kupić 2 kg rodzynek i 1,2 kg orzechów.

Podjmij wyzwanie

Drogi Uczniu!

Rozwiąż kolejne zadania, a dowiesz się, jakimi wyrazami uzupełnić poniższy tekst, żeby opisywał jeden z wynalazków XX wieku.

Powodzenia!



1 to przełomowy wynalazek, którego opatentowanie w XX wieku zrewolucjonizowało ówczesny 2. Prototyp został wykonany w 1851 roku przez Eliasa Howe'a (czytaj: eljasa hała). Jego wynalazek różnił się jednak od tego znanego nam dzisiaj, polegał bowiem na łączeniu ze sobą szeregu niewielkich 3. Korzystanie z niego było czasochłonne, a sam Howe porzucił swój pomysł na rzecz projektów 4. Kolejne próby podjęto około 40 lat później. Whitcomb Judson (czytaj: litkom dżadson) opatentował system, który nazwał „5”. Niestety, urządzenie było zawodne – bardzo często się rozpinało. Wynalazca nie zniechęcił się i założył firmę, aby udoskonalać pomysł. Dopiero jego pracownik, inżynier 6 w 1917 roku opatentował produkt, który w niemal tej samej postaci znamy dziś. Początkowo znalazł on zastosowanie w 7 oraz nieco później w 8. Choć na co dzień nie przywiązujemy wagi do tego urządzenia, to docenimy je, gdy spróbujemy sobie wyobrazić codzienne funkcjonowanie bez tego prostego, a zarazem genialnego wynalazku.

1. Oblicz wartość E.

$$1\frac{5}{18} + 1\frac{2}{9} = A$$

$$3\frac{1}{4} - \frac{5}{12} = B$$

$$1\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{4} = C$$

$$2\frac{1}{3} : 1\frac{2}{6} = D$$

$$C - B + A : D = E$$

$1\frac{13}{15}$	$\frac{58}{105}$	$2\frac{41}{210}$
żelazko żeliwne	plecak turystyczny	zamek błyskawiczny

2. Oblicz wartość ☺.

$$4,682 + 3,838 = \heartsuit$$

$$20,13 - 4,75 = \spadesuit$$

$$2,94 \cdot 2,3 = \clubsuit$$

$$21,42 : 1,4 = \heartsuit$$

$$[(\spadesuit - \heartsuit)^2 \cdot 1000] + \heartsuit - \clubsuit = \smiley$$

641,758	8,158	81,758
sposób podróżowania	świat mody	świat nauki

3. Babcia Poli dostała od zaprzyjaźnionej sąsiadki 7 skrzynek czarnych porzeczek. W każdej skrzynce było 5 kg owoców. Babcia przeznaczyła 0,2 wszystkich porzeczek na dżem, z połowy pozostałych zrobiła sok, $\frac{1}{7}$ reszty wykorzystała do drożdżówek, a to, co zostało, zamroziła, aby w przyszłości wykorzystać do owsianki. Ile kilogramów porzeczek zamroziła?



12 kg	2 kg	10 kg
haczyków	guzików	kamyków

4. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Postać dziesiętna ułamka $\frac{3}{15}$ jest ułamkiem okresowym.	P	F
Liczba 4,(123) jest mniejsza od liczby 4,1(23).	P	F
Liczby $\left(-\frac{2}{3}\right)$ oraz 0,(6) mają różne wartości bezwzględne.	P	F
W postaci dziesiętnej ułamka $\frac{5}{7}$ na dziewiątym miejscu po przecinku znajduje się cyfra 4.	P	F
Liczba 2,3(15) ma okres długości 2.	P	F

FPPFF	PFFPP	FPFPP
spadochronów	desek do prasowania	maszyn do szycia

5. Jaką liczbą należy zastąpić znak ♣?

$$\left(\frac{3}{4} + 0,5\right) \cdot \left(\frac{2}{3} - 0,2\right) \cdot \clubsuit = \left(-\frac{1}{2} + 0,25\right) \cdot \left(-0,6 - \frac{3}{4}\right) - \left(-\frac{13}{80}\right)$$

$1\frac{1}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{12}$
haczykowy zamek błyskawiczny	haczykowy zamykacz i otwieracz do butów	zamek ekspresowy do butów

6. Cezary użył podanej przez Narodowy Bank Polski tabeli kursów kupna i sprzedaży walut z dnia 2.05.2024 i stworzył własną tabelę, w której zapisał jeszcze kursy zaokrąglone.

Waluta	Kurs kupna (zł)	Zaokrąglenie Cezarego (zł)	Kurs sprzedaży (zł)	Zaokrąglenie Cezarego (zł)
dolar amerykański	3,9983	4,00	4,0791	4,08
dolar australijski	2,5960	2,60	2,6484	2,64
euro	4,2806	4,29	4,3670	4,36
frank szwajcarski	4,3691	4,40	4,4573	4,46

Ile kursów kupna i sprzedaży walut Cezary poprawnie zaokrąglił do części setnych?

trzy	cztery	pięć
Alfred Nobel	Gideon Sundback	Hubert Booth

7. Uczestnicy biwaku podzielili się na trzyosobowe grupy, w których będą przygotowywać posiłki. Bruno, Cezary i Kuba tworzą jedną z grup.

Kuba przywiózł $\frac{1}{2}$ kg makaronu, Cezary 0,75 kg pomidorów, a Bruno 0,25 kg sera.

Do przygotowania obiadu zużyli $\frac{2}{3}$ całego makaronu, $\frac{5}{6}$ zabranych pomidorów i cały ser.

Ile kilogramów produktów pozostało im łącznie?



$\frac{1}{24}$ kg	$\frac{1}{4}$ kg	$\frac{7}{24}$ kg
branży turystycznej	medycynie	branży lotniczej

8. Pani Marlena kupiła w hurtowni 350 zeszytów A4 w cenie 6,50 zł za sztukę oraz 240 teczek w cenie 2,50 zł za sztukę. W jej sklepie cena zeszytu była wyższa o 0,20 zł od ceny hurtowej, a cena teczek wyższa o 0,40 zł od ceny hurtowej. Tuż przed rozpoczęciem roku szkolnego pani Marlena sprzedała wszystkie zeszyty i teuczki. Ile złotych zarobiła na sprzedaży tych produktów?



166 zł	2875 zł	3041 zł
spodniach	plecakach	torebkach

1. Ułamki łańcuchowe to ułamki zapisane w specjalny sposób, za pomocą innych ułamków, np. ułamek $\frac{5}{3}$, czyli $1\frac{2}{3}$, możemy zapisać jako ułamek łańcuchowy $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$.

Przeanalizuj, w jaki sposób Ela zamieniła ułamek łańcuchowy na ułamek zwykły.

$$2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = 2 + \frac{1}{\frac{3}{3} + \frac{2}{3}} = 2 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = 2 + \frac{3}{5} = 2\frac{3}{5}$$

Zapisz ułamek łańcuchowy w postaci ułamka zwykłego.

a) $2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}$

b) $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}}}}$



2. Odpowiedz na pytanie i uzasadnij swoją odpowiedź.

- a) Czy to możliwe, że w 27-osobowej klasie $\frac{1}{7}$ liczby wszystkich uczniów nosi okulary?
- b) Czy to możliwe, że w 100-osobowej grupie studentów dokładnie $\frac{2}{5}$ liczby wszystkich osób zdało pewien egzamin na ocenę 5, a $\frac{7}{10}$ na ocenę 4?
- c) Czy to możliwe, że uczeń klasy 6 ma 0,0017 km wzrostu?
- d) Czy to możliwe, że chomik waży 0,0065 t?

3. Pan Marek pozbywał się swojej kolekcji kart z piłkarzami. Sprzedał wszystkie karty w ciągu dwóch dni – pierwszego dnia $\frac{19}{24}$ całej kolekcji, a drugiego dnia o 210 kart mniej niż poprzedniego. Ile kart miał pan Marek w swojej kolekcji? Ile kart sprzedał pierwszego, a ile drugiego dnia?



4. Średniej wielkości arbuza waży 0,65 swojej masy i jeszcze 665 g. Ile waży taki arbuza? Wyraż tę masę na cztery sposoby: w gramach, dekagramach, kilogramach i tonach.

5. Ile razy iloczyn liczb $3\frac{3}{4}$ i 1,6 jest większy od iloczynu odwrotności tych liczb?

Na klawiaturze kalkulatora prostego znajdują się przyciski z cyframi i przyciski potrzebne do wykonania podstawowych działań: dodawania (+), odejmowania (-), mnożenia (x) i dzielenia (÷). Jest też guzik (=), który wciskamy, kiedy chcemy zobaczyć wynik działania. Za pomocą guzika (.) oddzielamy w liczbie dziesiętnej część całkowitą od ułamkowej. Są tam też klawisze (C) (czyści wyświetlacz kalkulatora) i (CE) (kasuje ostatnio wprowadzoną liczbę).

Poniżej przedstawiono, które klawisze kolejno wciskamy, aby obliczyć np. sumę $23,71 + 97$.



Co wciskamy	2	3	.	7	1	+	9	7	=
Co się wyświetla	2	23	23.	23.7	23.71	23.71	9	97	120.71

Kalkulator ma wbudowaną „pamięć”, w której może przechowywać liczby. Klawisze umożliwiające korzystanie z tej pamięci to:

M+ pozwala dodać liczbę z wyświetlacza do liczby, która jest już zapisana w pamięci

M- pozwala odjąć liczbę z wyświetlacza od liczby zapisanej w pamięci

MR pozwala wyświetlić na wyświetlaczu liczbę zapisaną w pamięci

MC pozwala skasować liczbę z pamięci (należy go użyć, zanim zaczniemy obliczenia, w których będziemy wykorzystywać pamięć).

1. Skorzystaj z kalkulatora, aby ustalić iloraz i resztę z dzielenia

a) liczby 21 453 przez 24,

b) liczby 362 980 przez 35.

2. Przeanalizuj, w jaki sposób można korzystać z pamięci kalkulatora, aby obliczyć wartość wyrażenia, w którym ważna jest kolejność wykonywania działań.

Wyrażenie	Jak znaleźć wynik?
$15 \cdot 12 - 19 \cdot 8$	MC 15 x 12 = M+ 19 x 8 = M- MR

Oblicz wartość wyrażenia, korzystając z pamięci kalkulatora.

a) $18 \cdot 13 - 9 \cdot 16$

b) $26 \cdot 25 + 252 : 6$

c) $455 : (19 + 16)$

d) $(459 - 357) \cdot (192 + 58)$

e) $250 - 4 \cdot 18 + 252 : 28$

f) $\frac{17 \cdot 6}{182 - 179}$

DZIAŁ



W ŚWIECIE WYRAŻEŃ ALGEBRAICZNYCH I RÓWNAŃ

POLA

$$8 \begin{array}{|c|} \hline \text{Astronaut} \\ \hline \end{array} + 4 \begin{array}{|c|} \hline \text{Alien} \\ \hline \end{array} + 5 \begin{array}{|c|} \hline \text{Astronaut} \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|} \hline \text{Astronaut} \\ \hline \end{array}$$

BRUNO

$$7 \begin{array}{|c|} \hline \text{Rocket} \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|} \hline \text{Alien} \\ \hline \end{array} + 4 \begin{array}{|c|} \hline \text{Rocket} \\ \hline \end{array} + 7 \begin{array}{|c|} \hline \text{Alien} \\ \hline \end{array}$$

Kto ma więcej punktów?

WARTOŚCI KART:



4 PKT



-2 PKT



5 PKT

Aby to ustalić, należy wyznaczyć liczbę kart każdego rodzaju, a następnie obliczyć liczbę zdobytych punktów.

1. Zapisywanie wyrażeń algebraicznych

- ▶ Czym są wyrażenia algebraiczne?
- ▶ Jak odczytywać wyrażenia algebraiczne?
- ▶ W jaki sposób zapisywać wyrażenia algebraiczne?



Odkrywaj!

1. Bruno i Zosia przygotowują naleśniki z musem truskawkowym na podwieczorek. Oto lista składników z przepisu, z którego korzystają.



Ile poszczególnych składników jest potrzebnych do przygotowania naleśników dla podanej liczby osób?

- a) 4 b) 1 c) 10 d) x

2. Oto ceny niektórych produktów potrzebnych do przygotowania naleśników.



1,20 zł/szt.



4 zł/kg



3,50 zł/l



2,50 zł/l

Ile zapłacimy za podane produkty?

- a) 4 jajka b) 2 kg mąki i 3 l wody c) 5 jajek i 2 l mleka
d) j jajek e) m l mleka f) x kg mąki oraz y l wody



Analizuj!

Wyrażenia, w których występują liczby, litery lub liczby i litery połączone znakami działań oraz nawiasami, nazywamy **wyrażeniami algebraicznymi**, np.

$$t \cdot 6 + x \cdot x - y \cdot 4 \cdot a \cdot \frac{s}{t} \cdot a^2 \cdot 2 \cdot (a + b) \cdot 15$$

Literę w wyrażeniu algebraicznym, w której miejsce możemy wstawiać różne liczby, nazywamy **zmienną** lub **niewiadomą**.



Przykład 1.

Odczytaj z ilustracji ceny owoców.



Zapisz wyrażenie opisujące kwotę, jaką trzeba zapłacić za podane zakupy.

- 1 kg jabłek oraz 1 kg gruszek: $j + g$
- 4 kg kiwi: $4 \cdot k$
- Pół kilograma gruszek: $g : 2$ albo $\frac{1}{2} \cdot g$, albo $\frac{g}{2}$, albo $0,5 \cdot g$
- 7 kg jabłek oraz 2 kg kiwi: $7 \cdot j + 2 \cdot k$
- x kg bananów: $x \cdot b$

Podczas zapisywania wyrażeń algebraicznych stosujemy zasady:

- W zapisie wyrażenia $4 \cdot k$ pomijamy znak mnożenia przed zmienną i zapisujemy to wyrażenie w postaci $4k$. Również wyrażenie $k \cdot 4$ zapisujemy w postaci $4k$. Podobnie $x \cdot y = xy$.
- Wyrażenie $1 \cdot k$ zapisujemy jako k (bez użycia liczby 1). Podobnie wyrażenie $-1 \cdot k$ zapisujemy jako $-k$ (bez użycia liczby -1).
- Znak dzielenia i kreska ułamkowa oznaczają to samo, czyli: $a : b$ oraz $\frac{a}{b}$ to różne zapisy tego samego wyrażenia.



Ćwiczenie 1.

Skorzystaj z informacji podanych w przykładzie 1. i zapisz wyrażenie opisujące kwotę, jaką trzeba zapłacić za podane zakupy.

- 1 kg kiwi i 1 kg bananów
- 0,25 kg gruszek
- 10 kg jabłek i 3 kg kiwi
- y kg jabłek

Przykład 2.

Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.

- a) ćwierć liczby g : $\frac{1}{4}g$ albo $0,25g$, albo $\frac{g}{4}$, albo $g : 4$
- b) liczba o 20 większa niż liczba z : $z + 20$
- c) sześciokrotność różnicy liczb a i b : $6(a - b)$
- d) liczba o m mniejsza niż połowa liczby n : $\frac{1}{2}n - m$

Ćwiczenie 2.

Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.

- a) połowa liczby x
- b) liczba o 12 mniejsza niż liczba f
- c) czterokrotność sumy liczb k i l
- d) liczba o s większa niż ćwierć liczby t



Nazwa wyrażenia algebraicznego to nazwa ostatniego działania, które wykonujemy zgodnie z kolejnością wykonywania działań, np. $a + b$ to **suma** liczb a i b ,

$x^2 - y^3$ to **różnica** kwadratu liczby x oraz sześcianu liczby y .

Przykład 3.

Zapisz odpowiedź na pytanie w postaci wyrażenia algebraicznego. Nazwij zapisane wyrażenie.

- a) W komputerze Poli, w folderze PREZENTACJA, jest z plików formatu JPG oraz r plików formatu EPS. Ile plików tych dwóch formatów jest w folderze?

$z + r \longrightarrow$ suma liczb z i r

- b) Pani Magdalena miała w portfelu p zł. Wydała 57 zł. Ile jej zostało?

$p - 57 \longrightarrow$ różnica liczb p i 57

- c) Ile wynosi pole prostokąta o bokach długości m oraz n ?

$m \cdot n \longrightarrow$ iloczyn liczb m i n

- d) Zosia rozlała 10 l soku pomarańczowego po równo do k szklanek. Ile litrów soku jest w jednej szklance?

$10 : k$ lub $\frac{10}{k} \longrightarrow$ iloraz liczb 10 i k

Ćwiczenie 3.

Nazwij zapisane wyrażenie algebraiczne.

- a) $p + q$
- b) $s - t$
- c) $2x \cdot y$
- d) $\frac{5g}{r}$



Rozwiąż zadania

1. Zapisz odpowiedzi w postaci wyrażeń algebraicznych.

- Bukiet składa się z 3 róż i 6 goździków. Z ilu kwiatów składa się bukiet?
Bukiet składa się z p piwonii i 5 tulipanów. Z ilu kwiatów składa się bukiet?
- Książka waży 235 g. Ile gramów waży 5 książek?
Zeszyt waży z gramów. Ile gramów waży 15 zeszytów?
- Wojtek ma 13 lat. Jego siostra jest od niego o 3 lata młodsza. Ile lat ma siostra Wojtka?
Kasia ma k lat. Jej brat jest od niej o 2 lata młodszy. Ile lat ma brat Kasi?
- Zosia ma 9 lat. Jej mama jest od niej 4 razy starsza. Ile lat ma mama Zosi?
Piotrek ma p lat. Jego tata jest od niego 3 razy starszy. Ile lat ma tata Piotrka?

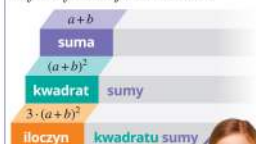
2. Wskaż wyrażenie algebraiczne, które jest odpowiedzią na podane pytanie.

- W pewnej klasie jest x dziewcząt i y chłopców. Ilu uczniów jest w tej klasie?
A. $x + y$ B. $x - y$ C. $x \cdot y$ D. $\frac{x}{y}$
- W pewnym sadzie jest j jabłoni i 6 razy mniej gruszy. Ile gruszy jest w tym sadzie?
A. $j + 6$ B. $j - 6$ C. $6 \cdot j$ D. $j : 6$
- Karol ma 17 lat, a jego siostra Ola jest o p lat starsza. Ile lat ma Ola?
A. $17 + p$ B. $17 - p$ C. $17 \cdot p$ D. $17 : p$
- Pani Zofia kupiła 3 kg jabłek po z zł za kilogram i 2 kg gruszek po y zł za kilogram. Ile zapłaciła?
A. $(3 + 2)$ zł B. $(z + y)$ zł C. $(3 \cdot z + 2 \cdot y)$ zł D. $(3 \cdot y + 2 \cdot z)$ zł

3. Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.

- liczba o 5 większa od liczby w
- różnica liczb y i 8
- liczba 8 razy większa od liczby t
- iloraz liczb 7 i a
- kwadrat liczby r powiększony o 3
- iloczyn liczb x i trzykrotności liczby z
- iloraz liczby c i liczby o 2 większej od c
- sześcian dwukrotności liczby b

Nazwa wyrażenia algebraicznego pochodzi od działania, które jest wykonywane jako ostatnie.



4. Literami m i k oznaczono długości narysowanych elementów. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego długość linii w narysowanej figurze.



5. Zapisz odpowiedź na pytanie w postaci wyrażenia algebraicznego.

- W pewnym parku jest 20 ławek. Na z ławkach ktoś siedzi. Ile jest wolnych ławek?
- Na pewnym placu zabaw jest h huśtawek. Połowa jest świeżo pomalowana. Z ilu huśtawek można teraz korzystać?
- Do zbudowania robota potrzeba k klocków. Ile klocków potrzeba, aby zbudować 5 takich robotów?
- W dystrybutorze mieści się d litrów wody, a w bidonie 30 razy mniej. Ile litrów wody mieści się w bidonie?
- Mateusz wypija dziennie 7 szklanek wody, każda po x ml. Ile mililitrów wody wypija dziennie Mateusz?



6. Nazwij podane wyrażenie.

- | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------|--------------|
| a) $x + 81$ | b) $81 - x$ | c) $c + 2d$ | d) $3t - w$ |
| e) $\frac{u}{10}$ | f) $\frac{1}{2}x$ | g) $8f$ | h) $10r : s$ |
| i) $a^2 + 6$ | j) $(a + 1)^2$ | k) $2y^2$ | l) $(3z)^2$ |

7. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego.

- | | |
|---|--|
| a) x tygodni – ile to dni?
x tygodni i 6 dni – ile to dni? | b) d godzin – ile to minut?
d godzin i 15 minut – ile to minut? |
| c) m złotych – ile to groszy?
m złotych i 50 groszy – ile to groszy? | d) y metrów – ile to centymetrów?
y metrów i 20 centymetrów – ile to centymetrów? |

1 kg to 100 dag

x kg to $x \cdot 100$ dag = $100x$ dag

x kg i 5 dag to $(x \cdot 100 + 5)$ dag = $(100x + 5)$ dag



8. Przyjaciele: Ela, Zosia i Kuba grają w tenisa stołowego. Ustalili, że każdy zagra z każdym.

- Ile było rozgrywek? Ile byłoby rozgrywek, gdyby każda para rozegrała mecz i rewanż?
- Ile byłoby rozgrywek, gdyby w tenisa stołowego grało 5 osób i każdy zagrałby z każdym? Ile byłoby rozgrywek, gdyby każda para rozegrała mecz i rewanż?
- Ile byłoby rozgrywek, gdyby w tenisa stołowego grało n osób i każdy zagrałby z każdym? Ile byłoby rozgrywek, gdyby każda para rozegrała mecz i rewanż?



Sprawdź, co umiesz!

1. Pan Michał hoduje k kotów i p papug. Ile nóg mają łącznie jego zwierzęta? Wskaż odpowiednie wyrażenie algebraiczne.

- A. $k + p$ B. $k \cdot p$ C. $4k + 2p$ D. $6(k + p)$



2. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Książka, która ma n stron, ma $2n$ kartek.	P	F
Za 0,5 kg jabłek po n zł za kilogram oraz 3 kiwi po m zł za sztukę należy zapłacić $\left(\frac{1}{2}n + 3m\right)$ zł.	P	F

3. Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.

- liczba o 3 mniejsza od liczby w
- liczba 15 razy większa niż liczba t
- suma kwadratu liczby x i sześciastu liczby y
- iloraz liczby x i liczby 2 podniesiony do potęgi drugiej

4. Nazwij wyrażenie algebraiczne.

- a) $3 - a$ b) $b^2 + 7$ c) $\frac{x}{17}$ d) $7p^2$

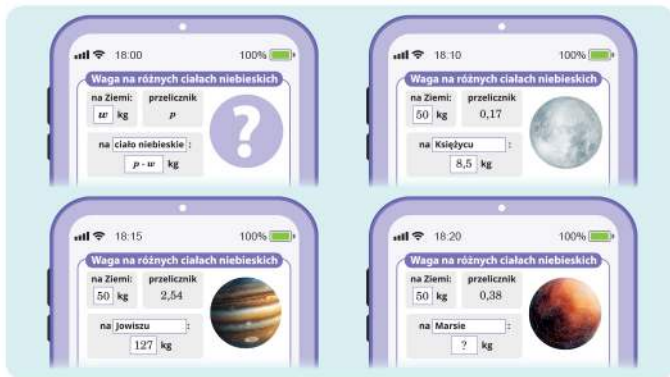
2. Obliczanie wartości wyrażeń algebraicznych

- ▶ Jak obliczyć wartość wyrażenia algebraicznego z jedną zmienną?
- ▶ Jak obliczyć wartość wyrażenia algebraicznego z dwiema zmiennymi lub większą liczbą zmiennych?



Odkrywaj!

1. Bruno znalazł w internecie kalkulator, który oblicza wskazania wagi na różnych ciałach niebieskich. Przyjrzyj się, jak działa kalkulator. Jakie byłoby wskazanie wagi, gdyby Bruno ważył się na Marsie?



2. Odszukaj w internecie kalkulator odległości burzy.

- Skorzystaj z tego kalkulatora i oblicz, jak daleko od domu Eli było miejsce uderzenia pioruna, jeśli Ela usłyszała grzmot po 15 s od błysku.
- Zapisz wyrażenie algebraiczne, które pozwala wyznaczyć odległość od miejsca uderzenia pioruna w zależności od czasu, jaki upłynął od błysku do grzmotu.



Analizuj!

Aby obliczyć **wartość liczbową wyrażenia algebraicznego** z jedną zmienną dla pewnej liczby, należy w miejsce zmiennej wstawić tę liczbę i wykonać wskazane działania.

Wartość wyrażenia $3 \cdot (x - 4) + 15$ dla $x = 6$ obliczamy następująco:

$$3 \cdot (6 - 4) + 15 = 3 \cdot 2 + 15 = 6 + 15 = 21$$

Zastępujemy x liczbą **6**. Wartość wyrażenia dla $x = 6$ wynosi 21.



Przykład 1.

Zosia ma dwa koty, o imionach Alfa i Beta. W internecie znalazła kalkulator, który „przelicza wiek kotów na wiek ludzki”.

Alfa urodziła się 5 lat temu, a Beta 8 lat temu. Ile ludzkich lat ma Alfa, a ile Beta?

Aby obliczyć ludzki wiek Alfę, należy w miejsce k w kalkulatorze wstawić **5**, czyli:

$$24 + 4 \cdot 5 = 24 + 20 = 44$$

Aby obliczyć ludzki wiek Bety, należy w miejsce k w kalkulatorze wstawić **8**, czyli:

$$24 + 4 \cdot 8 = 24 + 32 = 56$$

Odp. Ludzki wiek Alfę to 44 lata, a Bety 56 lat.



Alfa



Beta

Ćwiczenie 1.

Kuba ma siedmioletniego kota. Skorzystaj z informacji podanych w przykładzie 1. i oblicz, ile ludzkich lat ma kot Kuby.

Przykład 2.

Oblicz wartość wyrażenia dla podanej liczby.

a) $3x - 5$ dla $x = 4$

Aby obliczyć wartość wyrażenia dla $x = 4$, należy zastąpić zmienną x liczbą 4.

$$3 \cdot 4 - 5 = 12 - 5 = 7$$

Odp. Wartość tego wyrażenia dla $x = 4$ wynosi 7.

b) $1 - 3a$ dla $a = 0,4$

Zastępujemy zmienną a liczbą 0,4.

$$1 - 3 \cdot 0,4 = 1 - 1,2 = -0,2$$

Odp. Wartość tego wyrażenia dla $a = 0,4$ wynosi $(-0,2)$.

c) $(-h + 1) \cdot 4h^2$ dla $h = -\frac{1}{2}$

Zastępujemy zmienną h liczbą $-\frac{1}{2}$.

$$\left(-\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right) \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + 1\right) \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \cdot 1 = 1\frac{1}{2}$$

Odp. Wartość tego wyrażenia dla $h = -\frac{1}{2}$ wynosi $1\frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 2.

Oblicz wartość wyrażenia dla podanej liczby.

a) $8x + 7$ dla $x = 10$

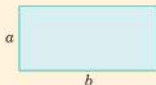
b) $10 - 6a^2$ dla $a = \frac{1}{3}$

c) $(5y - 4) \cdot 2y$ dla $y = -0,25$

Wyrażenie algebraiczne może zawierać kilka zmiennych.

Aby obliczyć wartość takiego wyrażenia algebraicznego dla podanych liczb, należy w miejsce każdej zmiennej wstawić odpowiednią liczbę.

Pole prostokąta o bokach długości a i b można zapisać w postaci wyrażenia ab . Wyrażenie to ma dwie zmienne – zmienną a i zmienną b .



Dla $a = 3$ i $b = 8$ przyjmuje wartość $3 \cdot 8 = 24$.

Rozwiąż zadania

1. Picie odpowiedniej ilości wody jest ważne dla zdrowia. Ilość wody, jakiej potrzebujemy w ciągu dnia, zależy od masy ciała. Na każdy kilogram masy powinno przypaść 35 ml wody. Ile mililitrów wody powinien wypić w ciągu dnia człowiek o podanej masie?

a) 40 kg b) 52 kg c) 85 kg d) x kg

2. Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla podanej wartości zmiennej.

a) $2x - 3$ dla $x = 7$ b) $3a + 7$ dla $a = \frac{1}{3}$
 c) $12z^2 - 3$ dla $z = 0,5$ d) $-2y + 7$ dla $y = -3$

3. Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla podanych wartości zmiennych.

a) $x + y - 2$ dla $x = 4$ i $y = 7$ b) $3(u - w)$ dla $u = -7$ i $w = 0$
 c) $2a - b + 7$ dla $a = \frac{3}{5}$ i $b = 2\frac{1}{5}$ d) $3k - 2l + 1$ dla $k = 4,2$ i $l = 3,1$

4. Tata Kuby jest taksówkarzem. Opłata za przejazd jego taksówką zależy od pory dnia i oblicza się ją zgodnie z cennikiem.

Początek kursu	Opłata za kurs [zł]
Między godziną 8.00 a 15.59	$8 + 4x$
Między godziną 16.00 a 21.59	$8 + 6x$
Między godziną 22.00 a 7.59	$10 + 8x$

x – długość trasy (w kilometrach)



Oblicz, ile zapłaci klient, który przejedzie trasę o podanej długości, rozpoczynając kurs o podanej godzinie.

a) 5 km, o 17.00 b) 20 km, o 8.40
 c) 15,5 km, o 23.00 d) 12,25 km, o 0.00

5. Oblicz pole rombu o podanych długościach przekątnych.

a) $e = 4$ cm, $f = 8$ cm b) $e = 8$ km, $f = 11$ km c) $e = 10,5$ dm, $f = 14$ dm

Pole rombu o przekątnych długości e i f możemy zapisać w postaci wyrażenia $\frac{e \cdot f}{2}$.





A to ciekawe

W XVIII wieku Leonhard Euler (czytaj: leonard ojler) podał wyrażenie pozwalające wyznaczyć wiele liczb pierwszych:

$$n^2 - n + 41.$$

Oblicz wartości tego wyrażenia dla liczb: 1, 5, 10, 25, 41.

Czy wszystkie z otrzymanych wyników to liczby pierwsze?



Sprawdź, co umiesz!

1. Wskaż wyrażenie algebraiczne, którego wartość dla $x = 5$ jest równa 0.

A. $5x - 5$

B. $5x + 5$

C. $5x - 25$

D. $5x + 25$

2. Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla podanej liczby.

a) $3x + 1$ dla $x = 2$

b) $x^2 - 7$ dla $x = 3$

c) $2x - 1$ dla $x = -4$

d) $4x + 5$ dla $x = 1\frac{1}{2}$

3. Podczas szkolnych zawodów sportowych uczniowie klasy 6a zdobyli m medali. Klasa 6b zdobyła o 1 medal mniej niż 6a. W klasyfikacji medalowej zwyciężyła klasa 6c, uzyskując dwa razy więcej medali niż 6a. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, ile medali zdobyli uczniowie poszczególnych klas oraz ile medali zdobyli łącznie. Ile było wszystkich medali, jeśli 6a zdobyła ich 5?

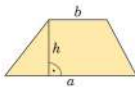


4. Pole trapezu o podstawach długości a i b oraz wysokości h można zapisać w postaci wyrażenia $\frac{(a+b) \cdot h}{2}$. Oblicz pole trapezu o podanych wymiarach.

a) $a = 7$ cm, $b = 13$ cm, $h = 12$ cm

b) $a = 0,5$ cm, $b = 2,5$ cm, $h = 4$ cm

c) $a = 6\frac{1}{2}$ m, $b = 3\frac{1}{4}$ m, $h = 2$ m



3. Upraszczanie wyrażeń algebraicznych

- ▶ W jaki sposób upraszczać wyrażenia algebraiczne?
- ▶ Jak zapisywać odpowiedzi na podane pytania w postaci wyrażeń algebraicznych?



Odkrywaj!

1. Bruno gra z przyjaciółmi w karcianą wersję gry *Podbój Makemake*. Na rysunkach pokazano sześć rozgrywek Brunona i ich wyniki. Jakimi liczbami można zastąpić znaki zapytania?

$$3 \text{ [alien]} + 2 \text{ [alien]} = ? \text{ [alien]}$$

Bruno zdobył 3 karty a następnie 2 karty tego samego rodzaju. Ile kart zdobył?

$$8 \text{ [alien]} - 3 \text{ [alien]} = ? \text{ [alien]}$$

Bruno zdobył 8 kart, a następnie stracił 3 karty tego samego rodzaju. Ile ma kart?

$$10 \text{ [alien]} + \text{[alien]} = ? \text{ [alien]}$$

$$5 \text{ [alien]} - \text{[alien]} = ? \text{ [alien]}$$

$$16 \text{ [alien]} - 10 \text{ [alien]} + 3 \text{ [alien]} = ? \text{ [alien]}$$

$$4 \text{ [alien]} + 7 \text{ [alien]} - 3 \text{ [alien]} - 2 \text{ [alien]} = ? \text{ [alien]} + ? \text{ [alien]}$$



2. Popatrz na wyrażenie algebraiczne po lewej stronie znaku równości. Czy wiesz, czym zastąpić ? po prawej stronie znaku równości?

a) $2x + 8x = ?$

b) $5y + 7y - 20y = ?$

c) $4x + 11y = ?$



Analizuj!

Przykład 1.

Ela i Pola grają w grę *Podbój Makemake*. Podczas wykonywania różnych aktywności zyskują albo tracą diamenty. Każdy srebrny diament ma wartość s punktów, a każdy niebieski – wartość n punktów. Oto sytuacja po ostatniej rozgrywce:

- Ela miała 8 srebrnych diamentów i zdobyła jeszcze 6 takich samych;
- Pola miała 10 niebieskich diamentów, ale straciła 1 z nich.

Ustal, ile punktów ma teraz każda z dziewcząt.



Ela	Diamenty	Punkty
Tyle miała	8	$8s$
Tyle zyskała	6	$6s$
Tyle ma teraz	$8 + 6 = 14$	$8s + 6s = (8 + 6)s = 14s$ $\uparrow$ Dodamy liczby, a literę s przepisujemy.

Należy pamiętać, że $1n = 1 \cdot n = n$.



Pola	Diamenty	Punkty
Tyle miała	10	$10n$
Tyle straciła	1	$1n = n$
Tyle ma teraz	$10 - 1 = 9$	$10n - n = (10 - 1)n = 9n$ $\downarrow$ Odejmujemy liczby, a literę n przepisujemy.

Odp. Ela ma $14s$ punktów, a Pola ma $9n$ punktów.

Ćwiczenie 1.

Wykonaj działania.

a) $6x + 4x$

b) $10y - 3y$

c) $2,7b + 4,1b$

d) $3\frac{3}{4}m - 5,5m$

e) $16w + 4w - 20w$

f) $12z + 1\frac{5}{6}z - 7z$

Przykład 2.

Zapoznaj się z treścią zadania i odpowiedz na pytanie.

- a) Kuba przyniósł do szkoły album z kartami do gry w *Podbój Makemake*. W albumie jest zapelnionych 12 stron, a na każdej stronie jest 4*k* kart. Ile kart ma Kuba w albumie?

$$12 \cdot 4k = (12 \cdot 4)k = 48k$$

Pomnożymy liczby, a literę *k* przepiszemy.

Odp. Kuba ma w albumie 48*k* kart do gry.

- b) Bruno ma w swojej kolekcji 80*p* kart do gry w *Podbój Makemake*. Ile zapelni stron w albumie, jeśli na każdej z nich umieści 8 kart?

$$80p : 8 = \frac{80p}{8} = \frac{80}{8}p = (80 : 8)p = 10p$$

Podzielimy liczby, a literę *p* przepiszemy.

Odp. Bruno zapelni 10*p* stron w albumie.

Ćwiczenie 2.

Wykonaj działania.

a) $8 \cdot 4a$ b) $14 \cdot \frac{1}{7}m$ c) $4k \cdot (-5)$ d) $35t : 7$ e) $20f : (-5)$ f) $9n : \frac{3}{8}$



Jeśli w wyrażeniu występują działania, które możemy wykonać, to dane wyrażenie można **uproszczyć**.

Przykład 3.

Uprość wyrażenie algebraiczne.

a) $3k + r - 5k + 7r$

$$3k + r - 5k + 7r = \dots$$

$$= 3k - 5k + r + 7r = \dots$$

$$= (3 - 5)k + (1 + 7)r = \dots$$

$$= -2k + 8r$$

Podkreślimy tym samym kolorem te składniki, które możemy dodać lub odjąć (wraz ze stojącymi przed nimi znakami).

Składniki podkreślone tym samym kolorem zapiszemy obok siebie (razem ze znakami).

Wykonamy działania.

Ustalimy wynik.

b) $5x + 2 \cdot 4y + 3x - 8y$

$$5x + 2 \cdot 4y + 3x - 8y =$$

$$= 5x + 3x + 2 \cdot 4y - 8y =$$

$$= 5x + 3x + 8y - 8y =$$

$$= 8x + 0 = 8x$$

c) $9a - 3b + a - 7b + 4$

$$9a - 3b + a - 7b + 4 =$$

$$= 9a + a - 3b - 7b + 4 =$$

$$= 10a - 10b + 4$$

Ćwiczenie 3.

Uprość wyrażenie algebraiczne.

a) $25d - 20d + 10$

b) $4a + 6b - 3a + b$

c) $7r - s - 18r + 7s - 1$

d) $-3x + 2,5y + \frac{1}{2} \cdot 4x - y : 2$

Rozwiąż zadania

1. Uprość wyrażenie algebraiczne.

a) $3x + 9x$

b) $10z - z$

c) $7x - \frac{1}{2}x$

d) $2x + 3x - 5x$

e) $-11x + 2,5x - 3x$

f) $8a - 12a - 0,5a$

g) $9a - 12,3a + 0,7a$

h) $\frac{1}{5}w + 7w - 2w$

i) $-2b + 0,5b + 6b$

2. Zapisz wyrażenie algebraiczne w najprostszej postaci.

a) $10x + 2 - 3x$

b) $8b - 1,7b + 2$

c) $-13x - 5x - 2 + 4$

d) $8x - 2z - 1 + 2z$

e) $6x + 1 + (-2x) - 7$

f) $d - 0,4c + 0,2d + 1$

3. Uprość wyrażenia algebraiczne.

a) $8 \cdot 2x$

b) $7 \cdot 0,1a$

c) $2 \cdot \frac{1}{3}u$

d) $14x : 7$

e) $\frac{15c}{3}$

f) $2,5n : 5$

g) $\frac{1}{3}t \cdot 6$

h) $0,8 \cdot 10u$

i) $\frac{21x}{-7}$

4. Każde wyrażenie z niebieskiej ramki dopasuj do jego innego zapisu podanego w pomarańczowej ramce. Przyjmij, że x jest liczbą różną od 0.

I. $3x$

II. $\frac{1}{3}x$

III. $0,3x$

IV. $3\frac{1}{3}x$

V. $\frac{3}{x}$

VI. $x : 30$

A. $\frac{10}{3}x$

B. $3 : x$

C. $\frac{1}{30}x$

D. $\frac{3x}{10}$

E. $x + x + x$

F. $\frac{x}{3}$

5. Zapisz wyrażenie algebraiczne w najprostszej postaci.

a) $2x + 7y - 3 + 3x$

b) $\frac{1}{4}a - 3b + a - 2\frac{1}{4}$

c) $-5u + 2,3w + 2,1u - 1,6w$

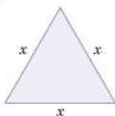
d) $\frac{1}{2}a + 2\frac{1}{3}a - 3b + 5b$

e) $74x - 25y + 1 - x + 34y$

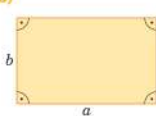
f) $-3x + 7 - 2x \cdot 2 - 13$

6. Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące obwód figury, a następnie je uprość.

a)



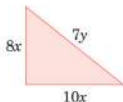
b)



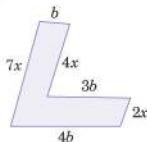
c)



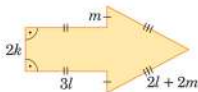
d)



e)



f)



7. Zapisz i uprość wyrażenie algebraiczne opisujące podaną wielkość.

- obwód trójkąta równobocznego o boku długości $3a$
- długość boku trójkąta równobocznego, którego obwód wynosi $33x$
- pole prostokąta o bokach długości $7a$ i $3b$
- pole równoległoboku o podstawie długości $6x$ i wysokości do niej poprowadzonej równej $8y$

8. Ela, Zosia i Kuba grali w karcianą wersję gry *Podbój Makemake*. W tabeli pokazano przebieg gry oraz wartości punktowe poszczególnych kart. Podaj wyniki w najprostszej postaci i przelicz je na punkty. Kto zdobył najwięcej punktów?

 Ela	8  $+4$  -5  -2 
 Zosia	10  $+2$  -4  $+7$ 
 Kuba	4  -3  $+2$  $+1$ 
Wartości kart	 $(+4 \text{ pkt})$  (-2 pkt)  (-5 pkt)

9. Zapisz odpowiedź na podane pytanie w postaci wyrażenia algebraicznego, a następnie uprość to wyrażenie.

- a) Karolina ma z znaczków, a Zosia o 2 znaczki więcej. Ile znaczków mają razem?
- b) W jednym wazonie jest k kwiatów, a w drugim o 5 kwiatów mniej. Ile kwiatów jest w obu wazonach łącznie?
- c) W żółtej misce jest x jabłek, a w niebieskiej trzy razy więcej jabłek. Ile jabłek jest w obu miskach łącznie?
- d) Adam, Bruno i Marcel grali w grę. Adam zdobył $4x$ punktów, Bruno dwa razy mniej niż Adam, a Marcel o 6 punktów więcej niż Adam. Ile punktów zdobyli razem chłopcy?

10. Uprość wyrażenie algebraiczne, a następnie oblicz jego wartość dla podanych wartości zmiennych.

- a) $7x + y - 5 + 2y - 2x + 7$ dla $x = 2, y = 3$
- b) $-10a - 2b + 8a - 21 + 7b$ dla $a = -1, b = 5$
- c) $100w - 10u + 11u + 100 - 110w$ dla $u = -\frac{1}{10}, w = \frac{3}{10}$

Sprawdź, co umiesz!

1. Zapisz wyrażenie algebraiczne w najprostszej postaci.

- a) $7x + 2x$
- b) $8y - 10y$
- c) $-2 \cdot 7c$
- d) $4a : 2$

2. Wskaż wyrażenie algebraiczne, które można zapisać w postaci $7x + 7y$.

- A. $2x + 3y + 2x$
- B. $x + 5y + 7x + 2y$
- C. $2x + y + 6y + 5x$
- D. $7x + y + 7$

3. Uprość wyrażenie algebraiczne, a następnie oblicz jego wartość dla podanych wartości zmiennych.

- a) $2x + 7 + 2 \cdot 3x$ dla $x = 3$
- b) $-3x + 10y + 17x - 20y + 10$ dla $x = 0,2, y = -0,1$

4. Lena zbiera karty. W swojej kolekcji ma: 15 kart z postaciami z bajek, x kart ze zwierzętami, karty z roślinami oraz karty z piłkarzami. Kart z roślinami jest o 6 mniej niż tych ze zwierzętami, a kart z piłkarzami – czterokrotnie więcej niż ze zwierzętami. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, ile łącznie kart ma Lena. Uprość to wyrażenie.



4. Równania

- ▶ Czym jest równanie?
- ▶ Jak opisywać informacje podane w treści zadania za pomocą równań?



Odkrywaj!

1. Bruno, Pola i Kuba spędzają popołudnie w pokoju zagadek. Oto jedna z zagadek, które mają rozwiązać.



Pola ułożyła następującą historyjkę do pierwszego działania:

Mam w portfelu pewną kwotę. Jeśli dołożę 15 zł, będę miała 24 zł. Ile złotych mam w portfelu?



Ułóż podobne historyjki do pozostałych działań w zagadce.

2. Zapisz działania z zadania 1., zastępując okienka literami x , y , z , w . Jaka liczba kryje się pod każdą z liter?



Analizuj!

Dwa wyrażenia algebraiczne, w których występuje przynajmniej jedna litera, połączone znakiem równości nazywamy **równaniem**, np.

$$2x + 6 = 20$$

lewa strona równania: L prawa strona równania: P

Litery występujące w równaniu to **niewiadome**.

Przykłady równań:

$$5x - 1 = 10, \quad 2\frac{1}{8} + y = 2y - 15, \quad m^2 = 64, \quad -27 = z^3.$$



Przykład 1.

Cezary ma 4 jednakowe klocki. Na lewej szalce wagi położył 3 klocki oraz odważnik 5 dag. Na prawej szalce położył czwarty klocek i odważnik 10 dag. Waga była wtedy w równowadze. Jaka jest masa klocka? Ułóż równanie opisujące podaną sytuację.



Sytuację przedstawioną na wadze możemy opisać w postaci równania. Masę klocka (w dekagramach) oznaczamy literą x . Jest to niewiadoma w równaniu.

Waga jest w równowadze, więc wyrażenia opisujące masy przedmiotów na lewej szalce oraz na prawej szalce łączymy znakiem równości.

x – masa klocka w dekagramach

Lewa strona równania: $3x + 5$

Prawa strona równania: $x + 10$

Równanie: $3x + 5 = x + 10$

Na lewej szalce są 3 klocki i odważnik 5 dag.

Na prawej szalce jest klocek i odważnik 10 dag.

Ćwiczenie 1.

Ustal niewiadomą, oznacz ją dowolną literą i ułóż równanie opisujące sytuację na rysunku.

a)



b)



Przykład 2.

Cezary kupił rakietę tenisową oraz 3 piłki do tenisa. Rakieta kosztowała 150 zł. Za zakupy zapłacił 165 zł. Ile kosztowała piłka do tenisa? Ułóż równanie opisujące podaną sytuację.

Najpierw oznaczmy niewiadomą:
 p – cena piłki do tenisa w złotych



$$3p + 150 = 165$$

koszt zakupu trzech piłek do tenisa

łączny koszt zakupów

koszt zakupu rakiety



W równaniach nie musimy zapisywać jednostek długości, masy, czasu, monetarnych itp.

Ćwiczenie 2.

Pani Weronika zapłaciła za zakupy 68 zł. Do zapłaty użyła jednego banknotu 50-złotowego oraz monet o nominale 2 zł. Ilu monet o nominale 2 zł użyła? Ułóż równanie opisujące podaną sytuację.

Przykład 3.

Jeden bok prostokąta jest o 5 cm dłuższy niż drugi. Obwód tego prostokąta wynosi 76 cm. Jaką długość ma krótszy bok tego prostokąta? Ułóż równanie opisujące podaną sytuację.

Oznaczmy niewiadomą:

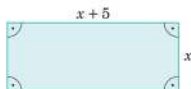
x – długość krótszego boku prostokąta w centymetrach

Zapiszemy pozostałe informacje, które wynikają z treści zadania:

$x + 5$ – długość dłuższego boku prostokąta w centymetrach

76 cm – obwód prostokąta

W zadaniach dotyczących geometrii warto wykonać rysunek pomocniczy, na którym zapisujemy informacje z treści zadania.



Obw. = 76 cm

Ułożymy równanie, korzystając ze wzoru na obwód prostokąta:

$$2 \cdot x + 2 \cdot (x + 5) = 76$$

Ćwiczenie 3.

Jedna z podstaw trapezu równoramiennego jest 3 razy dłuższa od drugiej. Ramię trapezu ma długość 10 cm, a jego obwód wynosi 100 cm. Jaka długość ma krótsza podstawa tego trapezu? Ułóż równanie opisujące podaną sytuację.

Przykład 4.

Ułóż treść zadania do równania $85 - 5x = 40$.

Oto przykładowe treści zadań.

- Ela miała na koncie 85 zł. Kupiła 5 jednakowych opakowań brokatu i teraz stan jej konta wynosi 40 zł. Ile złotych kosztowało jedno opakowanie brokatu?
- Kuba kolekcjonuje karty z piłkarzami. W klaserze miał 85 kart. Przygotował część kart na wymianę ze znajomymi. Spakował dla nich 5 paczek po tyle samo kart w każdej. W klaserze zostało 40 kart. Ile kart było w każdej z paczek?
- Liczbę 85 pomniejszyłem o pięciokrotność liczby, o której pomyślałem. Otrzymałem liczbę 40. O jakiej liczbie pomyślałem?



Ćwiczenie 4.

Ułóż treść zadania do równania $8x + 7 = 47$.

Rozwiąż zadania

1. Wśród równań zapisanych w ramce wskaż te, w których:

- a) lewa strona jest równa $x + 7$,
- b) prawa strona jest liczbą całkowitą,
- c) lewa strona jest ułamkiem,
- d) zmienna x występuje po obu stronach równania.

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{2} &= 7 & \cdot & x + 7 = 2x + 3 \\ \frac{2}{3} &= x + 7 & \cdot & 7x + 8 = 22\end{aligned}$$

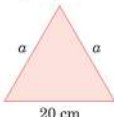
2. Zapisz podaną informację za pomocą równania.

- a) Jeśli liczbę a powiększymy o 21, to otrzymamy 127.
- b) Liczba o 8 mniejsza od x jest równa 77.
- c) Liczba trzy razy mniejsza od x jest równa 99.
- d) Liczba 15 razy większa od z jest równa 165.
- e) Jeśli do liczby 5 razy większej od a dodamy 126, otrzymamy 626.
- f) Jeśli od liczby 3 razy większej od y odejmiemy 152, otrzymamy 726.

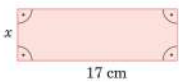
3. Zapisz podaną informację za pomocą równania.

- a) Za 7 opakowań markerów w cenie x zł za opakowanie zapłacono 73,50 zł. Ile kosztowało jedno opakowanie markerów?
- b) Kot waży k kg, a pies jest o 2,5 kg cięższy i waży 8 kg. Ile waży kot?
- c) Pani Katarzyna rozdzieliła x jabłek po równo między 6 członków rodziny. Każdy z nich otrzymał 5 jabłek. Ile jabłek rozdzieliła pani Katarzyna?
- d) Ewelina kupiła prezent urodzinowy dla koleżanki: książkę za k zł i bukiet kwiatów za 45 zł. Wydała na ten prezent 77,50 zł. Ile kosztowała książka?
- e) Pan Maciej zapłacił banknotem o nominale 200 zł za spodnie, które kosztowały a zł, i otrzymał 25 zł reszty. Ile kosztowały spodnie?

4. Skorzystaj z informacji podanych na rysunku i zapisz odpowiednie równanie.

- a) 

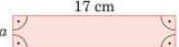
$Obw. = 55 \text{ cm}$

b) 

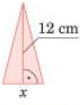
$Obw. = 45 \text{ cm}$

c) 

$Obw. = 76 \text{ cm}$

d) 

$P = 59,5 \text{ cm}^2$

e) 

$P = 36 \text{ cm}^2$

f) 

$P = 64 \text{ cm}^2$

5. Do każdej z sytuacji dobierz pasujące równanie.

- I. Karolina zebrała x kasztanów, a Piotrek o 10 kasztanów więcej. Razem zebrali 80 kasztanów. Ile kasztanów zebrała Karolina?
A. $x + 10x = 80$ B. $x + x + 10 = 80$ C. $x + x + 80 = 10$
- II. Piłka kosztuje x zł, a samochodzik jest o 15 zł tańszy. Razem kosztują 95 zł. Ile kosztuje piłka?
A. $x + x - 15 = 95$ B. $x + 15x = 95$ C. $x + \frac{x}{15} = 95$
- III. Tomek ma x znaczków, a Maciek 3 razy więcej znaczków. Razem mają 124 znaczki. Ile znaczków ma Tomek?
A. $x + x + 3 = 124$ B. $x + x - 3 = 124$ C. $x + 3x = 124$
- IV. Za pięć 5 zeszytów po x zł i 3 zestawy pisaków po 15 zł zapłacono 70 zł. Ile kosztował jeden zeszyt?
A. $x + 15 = 70$ B. $3x + 5 \cdot 15 = 70$ C. $5x + 3 \cdot 15 = 70$

6. Przeanalizuj opisaną sytuację i ułóż do niej równanie. Co oznacza niewiadoma x ?

- a) Kacper trzyma książki na komodzie i na półce. Na półce stoi 8 razy więcej książek niż na komodzie, a wszystkich książek jest 72.

$$x + 8x = 72$$

- b) Cena za 1 kg gruszek jest o 5 zł niższa niż cena za 1 kg truskawek. Pani Zofia kupiła 2 kg truskawek oraz kilogram gruszek. Razem zapłaciła 28 zł.

$$2 \cdot x + x - 5 = 28$$

7. Ułóż pytanie do treści zadania. Oznacz wybraną niewiadomą dowolną literą i zapisz odpowiednie równanie.

- a) Cena za 1 kg cukierków czekoladowych jest o 6 zł wyższa niż cena za 1 kg galaretek. Asia kupiła 2 kg galaretek i kilogram cukierków czekoladowych. Zapłaciła 39 zł.

- b) Klasa 6a wybrała się z dwoma opiekunami do kina. Bilet dla ucznia kosztował 16 zł, a dla osoby dorosłej 24 zł. Za bilety dla wszystkich uczestników zapłacono 400 zł.

- c) W pewnej firmie pracuje 440 pracowników. Kobiet jest trzy razy więcej niż mężczyzn.

- d) Krzesło jest 6 razy tańsze niż stół. Za stół i 4 krzesła zapłacono 4400 zł.



8. Ułóż treść zadania do każdego równania z ramki.

$$x + 5 = 17 \quad \cdot \quad 8x = 24 \quad \cdot \quad 2x - 2 = 10 \quad \cdot \quad 3x + 7 = x + 25$$

9. Wskaż równanie zgodne z treścią zadania.

1. Jeśli liczbę x zwiększymy o 3, otrzymamy liczbę o 1 większą niż dwukrotność liczby x .

A. $x + 3 = 2x + 1$

B. $2x + 3 = x + 1$

C. $x + 3 = 2(x + 1)$

2. Trzykrotność liczby x jest o 7 większa niż jej dwukrotność.

A. $3x + 7 = 2x$

B. $3x = 2(x + 7)$

C. $3x = 2x + 7$

3. Liczba o 7 większa od x jest dwa razy większa niż liczba o 3 mniejsza od x .

A. $2x + 7 = x - 3$

B. $x + 7 = 2(x - 3)$

C. $x + 7 = 2x - 3$



10. Zapisz podaną sytuację w postaci równania.

- a) Kwadrat liczby x jest równy 16.
- b) Jeśli sumę liczb x i 1 podniesiemy do drugiej potęgi, otrzymamy liczbę 49.
- c) Jeśli kwadrat pewnej liczby zwiększymy o 3, otrzymamy liczbę 12.

Sprawdź, co umiesz!

1. Zapisz podaną informację za pomocą równania.

- a) Jeśli liczbę x pomniejszymy o 8, otrzymamy liczbę 17.
- b) Jeśli liczbę x pomnożymy przez 4, otrzymamy -22 .
- c) Jeśli do trzykrotności liczby x dodamy 5, otrzymamy 26.

2. Oceń, czy podane równanie opisuje przedstawioną sytuację. Jeśli nie, zapisz właściwe równanie.

- I. Zosia zebrała g grzybów, a jej mama o 7 więcej, czyli 27.

$$g + 7 = 27$$

- II. Pan Paweł złowił x ryb, a pan Rafał o 7 ryb więcej. Razem złowili 35 ryb.

$$x + 7 = 35$$

- III. Kacper kupił 7 zeszytów po x zł. Zapłacił banknotem o nominale 50 zł i otrzymał 22 zł reszty.

$$7x + 22 = 50$$

3. Wskaż równanie, którym można opisać sytuację z poniższego zadania, jeśli Jagna przeczytała x książek.

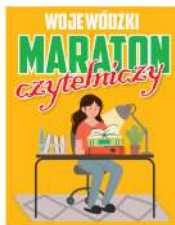
Jaś i Małgosia w maratonie czytelniczym przeczytali taką samą liczbę książek. Okazało się, że Jaś przeczytał dwukrotnie mniej książek niż Jagna, a Małgosia o 20 książek mniej niż Jagna. Ile książek przeczytała Jagna?

A. $2x = x - 20$

B. $\frac{1}{2}x - 20 = x$

C. $\frac{1}{2}x = x - 20$

D. $2x - 20 = x$



4. Ułóż treść zadania do podanego równania.

a) $\frac{1}{4}x - 4 = 0$

b) $20 - 5x = x + 10$

5. Liczba spełniająca równanie

- ▶ W jaki sposób sprawdzić, czy dana liczba spełnia równanie?
- ▶ Ile rozwiązań może mieć równanie?
- ▶ Jak ułożyć równanie, którego rozwiązaniem jest dana liczba?



Odkrywaj!

1. Pudełka na obu szalkach wagi mają taką samą masę. Jak sądzisz, czy pudełko na wadze można zastąpić ciężarkiem 3 kg, aby waga pozostawała w równowadze? A ciężarkiem 5 kg lub 8 kg, lub 10 kg?

a)



b)



c)



2. Kuba oblicza wartości liczbowe wyrażenia tworzącego lewą stronę równania $2x + 4 = -18$ i porównuje je z prawą stroną tego równania. Oto wyniki jego pracy dla podanych wartości zmiennej x .

	$L = 2x + 4$	$P = -18$	Czy $L = P$?
$x = 1$	$L = 2 \cdot 1 + 4 = 2 + 4 = 6$	$P = -18$	$L \neq P$
$x = 0$	$L = 2 \cdot 0 + 4 = 0 + 4 = 4$	$P = -18$	$L \neq P$
$x = -11$	$L = 2 \cdot (-11) + 4 = -22 + 4 = -18$	$P = -18$	$L = P$



- a) Sporządź analogiczną tabelę jak Kuba dla $x = 1$, $x = 0$ oraz $x = -10$.
 b) Czy w miejsce zmiennej x można wstawić liczbę inną niż -11 w taki sposób, aby lewa strona równania była równa jego prawej stronie?



Analizuj!

Liczba spełnia dane równanie, jeśli po wstawieniu jej w miejsce niewiadomej i wykonaniu działań wartość lewej strony równania jest równa wartości prawej strony. Jeśli liczba spełnia dane równanie, to mówimy, że jest **rozwiązaniem** tego równania.

Liczba **2** spełnia równanie $3x + 5 = 11$, czyli jest rozwiązaniem tego równania, bo dla $x = 2$ otrzymujemy $L = 3 \cdot 2 + 5 = 6 + 5 = 11$, $P = 11$, czyli $L = P$.

Przykład 1.

Sprawdź, czy liczba podana obok równania spełnia to równanie.

a) $5x - 3 = 4x + 1$ **4**

$L = 5 \cdot 4 - 3$

$P = 4 \cdot 4 + 1$

$L = 20 - 3$

$P = 16 + 1$

$L = 17$

$P = 17$

$L = P$, więc liczba **4** spełnia podane równanie.

b) $2(3 + 5y) = -4$ **$\frac{3}{4}$**

$L = 2 \cdot \left(3 + 5 \cdot \frac{3}{4}\right)$ $P = -4$

$L = 2 \cdot \left(\frac{12}{4} + \frac{15}{4}\right)$ $P = -4$

$L = 12 \cdot \frac{27}{42}$ $P = -4$

$L = \frac{27}{2}$ $P = -4$

$L \neq P$, więc liczba **$\frac{3}{4}$** nie spełnia podanego równania.

c) $p^2 = \frac{1}{5}p$ **0**

$L = 0^2$ $P = \frac{1}{5} \cdot 0$

$L = 0$ $P = 0$

$L = P$, więc liczba **0** spełnia podane równanie.

Ćwiczenie 1.

Sprawdź, czy liczba podana obok równania spełnia to równanie.

a) $4a - 9 = 3a + 2$ **11**

b) $-3(5 + 2x) = -9$ **$\frac{2}{3}$**

c) $t^3 = -27$ **(-3)**

Przykład 2.

Wskaż liczby, które spełniają podane równanie.

a) $x - 1 = 5$

Wiemy, że liczba o 1 mniejsza od 6 to 5.

Dla $x = 6$ mamy $L = 6 - 1 = 5$ i $P = 5$, czyli $L = P$.

Liczba 6 spełnia to równanie.

b) $x^2 = 9$

Wiemy, że $3^2 = 9$ i $(-3)^2 = 9$.

Każda z liczb: 3 i (-3) spełnia to równanie.

c) $x + x + x + x = 4x$

$4x = 4x$

Wyrażenie po lewej stronie znaku równości ma zawsze (dla każdej wartości zmiennej x) taką samą wartość jak wyrażenie po prawej stronie. Każda liczba spełnia to równanie.

d) $x + 1 = x$

Wyrażenie po lewej stronie znaku równości ma zawsze wartość o 1 większą niż wyrażenie po prawej stronie. Żadna liczba nie spełnia tego równania.



Ćwiczenie 2.

Wskaż liczby, które spełniają podane równanie.

a) $x - 5 = 0$

b) $k^2 = 4$

c) $x + x + x = 3x$

d) $y = y + 5$

Rozwiąż zadania

1. Czy liczba 4 spełnia wszystkie podane równania?

I. $x - 12 = -8$

II. $2x + 3 = 11$

III. $\frac{1}{2}x + 2 = 4$

5. Liczba spełniająca równanie

2. Każda liczba z drugiej ramki jest rozwiązaniem jednego równania z pierwszej ramki. Przyporządkuj do każdego równania jego rozwiązanie.

$$5x + 1 = 11 \quad \cdot \quad 4x + 8 = 0 \quad \cdot \quad 10x - 3 = 7 \quad \cdot \quad 9x + 2 = -7$$

$$-2 \quad \cdot \quad 1 \quad \cdot \quad 2 \quad \cdot \quad -1$$

3. Wskaż równanie, które spełnia liczba 3.

A. $9x - 17 = 11$

B. $\frac{2}{3}x + 8 = 10$

C. $-x + 22 = 18$

D. $2x + 3 = -8$

4. Ułóż równanie, którego rozwiązaniem jest podana liczba.

a) 3

b) -3

c) $\frac{1}{3}$

d) 15,4

5. Sprawdź, czy liczba podana obok równania spełnia to równanie.

a) $m^2 = 16$ -4

b) $22x + 2 = -13$ $\frac{1}{2}$

c) $t^2 - 2 = -11$ -3

d) $8a - 0,5 = 1,5$ 0,25

6. Jakie liczby spełniają równanie?

a) $2x = x + x$

b) $3b = 3b + 1$

c) $4x = 2$

d) $y^2 = 25$

e) $3x + 1 = 1 + x + 2x$

f) $n^2 = n \cdot n$

7. Dane jest równanie $2x + 3y = 15$. Wskaż jego przykładowe rozwiązanie.

A. $x = 5, y = 2$

B. $x = 0, y = 5$

C. $x = 1, y = 10$

D. $x = 10, y = 1$



8. Cezary zapisał następujące równanie: $|x| = x$. Które z liczb zapisanych w ramce spełniają to równanie?

$$0 \quad \cdot \quad 5 \quad \cdot \quad -1 \quad \cdot \quad \frac{3}{4} \quad \cdot \quad -9 \quad \cdot \quad 13 \quad \cdot \quad -40$$



9. Podaj przykładowe rozwiązanie równania, będące parą liczb całkowitych. Czy umiesz podać więcej niż jedno takie rozwiązanie?

a) $x + y = 3$

b) $3x - 2y = 5$

c) $7x + 2y = 11$



A to ciekawe

Równanie może mieć więcej niż jedną niewiadomą. Na przykład zdanie:

Prostokąt o bokach długości a cm i b cm ma pole równe 100 cm^2

możemy zapisać symbolicznie w postaci równania $ab = 100$.

To równanie ma dwie niewiadome: a i b . Jego rozwiązaniami są **pary liczb**, np. $a = 10$ i $b = 10 \rightarrow ab = 10 \cdot 10 = 100$

lub $a = 2000$ i $b = \frac{1}{20} \rightarrow ab = 2000 \cdot \frac{1}{20} = 100$.

Podaj jeszcze co najmniej jedno rozwiązanie tego równania.

Sprawdź, co umiesz!

1. Podane równanie ma tylko jedno rozwiązanie. Sprawdź, która z liczb zapisanych w ramce spełnia to równanie.

$-2 \cdot 10 \cdot 3,5$

a) $3x + 8 = 38$

b) $17 - 2x = 10$

c) $-2x = 4$

2. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Równanie $3a + 2 = 11$ spełnia liczba (-3) .	P	F
Równanie $y^2 = -3$ ma dwa rozwiązania.	P	F
Równanie $3x + 7 = x + x + x + 7$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.	P	F

3. Dane są równania:

I. $7x - 8 = 6$

II. $-7x - 8 = 6$

III. $-7x + 8 = 6$

IV. $7x + 8 = -6$

Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

- I. Które równania spełnia liczba (-2) ?

A. I i II

B. II i IV

- II. Które równanie spełnia liczba 2?

C. I

D. III

4. Podaj przykład równania, którego rozwiązaniem jest liczba (-5) .

6. Rozwiązywanie prostych równań

- ▶ Jak rozwiązywać proste równania?
- ▶ Jak sprawdzać poprawność rozwiązania równania?



Odkrywaj!

1. Nauczyciel położył na wadze klocki o jednakowej masie oraz odważniki o masie 1 kg, jak pokazano na rysunku.



Bruno oznaczył masę klocka w kilogramach literą x i opisał sytuację przedstawioną na wadze w postaci równania: $4x + 1 = 3x + 4$.

Następnie nauczyciel zmieniał układ klocków i odważników w kolejnych krokach, dbając o to, żeby w każdym kroku szalki wagi pozostawały w równowadze.

Krok 1



Krok 2



- a) Zapisz równania opisujące sytuację na wadze w każdym z dwóch kroków.
 - b) Jakie czynności wykonał nauczyciel w kolejnych krokach?
2. Przedstaw równanie $8x + 1 = 7x + 3$, wykorzystując wagę szalkową albo jej wersję rysunkową. Jakie czynności wykonasz w kolejnych krokach, aby na lewej szalce wagi został tylko jeden klocek, a na prawej – tylko odważniki?



Analizuj!

Aby rozwiązać równanie, należy znaleźć wszystkie liczby, które to równanie spełniają, albo ustalić, że takiej liczby nie ma.

Zobacz, jak można rozwiązywać równanie $4x + 10 = 2x + 50$.

Sposób 1 – graficznie



Z każdej szalki można zdjąć



Z każdej szalki można zdjąć



Obiekty na każdej szalce można podzielić na dwie jednakowe grupy.



Sposób 2 – algebraicznie

$$4x + 10 = 2x + 50$$

Od każdej strony równania można odjąć 10.

$$\begin{array}{ccc} -10 & 4x + 10 = 2x + 50 & -10 \\ & \rightarrow 4x = 2x + 40 & \leftarrow \end{array}$$

Od każdej strony równania można odjąć $2x$.

$$\begin{array}{ccc} -2x & 4x = 2x + 40 & -2x \\ & \rightarrow 2x = 40 & \leftarrow \end{array}$$

Każdą stronę równania można podzielić przez 2.

$$\begin{array}{ccc} :2 & 2x = 40 & :2 \\ & \rightarrow x = 20 & \leftarrow \end{array}$$

Sprawdzamy, czy otrzymana liczba **20** jest rozwiązaniem równania – w miejsce niewiadomej x w równaniu $4x + 10 = 2x + 50$ wstawiamy **20**.

$$L = 4 \cdot 20 + 10 \quad P = 2 \cdot 20 + 50$$

$$L = 80 + 10 \quad P = 40 + 50$$

$$L = 90 \quad P = 90$$

$L = P$, więc liczba **20** jest rozwiązaniem równania $4x + 10 = 2x + 50$.

Aby **rozwiązać równanie**, możemy wykonać następujące działania:

- dodać do obu stron równania taką samą liczbę albo takie samo wyrażenie, którego wartość można obliczyć dla dowolnej liczby;
- odjąć od obu stron równania taką samą liczbę albo takie samo wyrażenie, którego wartość można obliczyć dla dowolnej liczby;
- pomnożyć obie strony równania przez tę samą liczbę różną od 0;
- podzielić obie strony równania przez tę samą liczbę różną od 0.

Wykonanie tych działań nie zmienia rozwiązania równania.



Przykład 1.

Rozwiąż równanie. Sprawdź, czy otrzymana liczba jest rozwiązaniem równania.

a) $x - 4 = 6$

$$\begin{aligned}x - 4 &= 6 & | + 4 < \text{-----} \\x - 4 + 4 &= 6 + 4 \\x &= 10\end{aligned}$$

Do obu stron równania dodamy 4. Oznaczmy to działanie, dopisując z prawej strony równania pionową kreskę oraz +4.

Sprawdzenie: $L = 10 - 4 = 6$, $P = 6$, więc $L = P$, czyli liczba **10** jest rozwiązaniem podanego równania.

b) $x + 10 = -17$

$$\begin{aligned}x + 10 &= -17 & | - 10 < \text{-----} \\x + 10 - 10 &= -17 - 10 \\x &= -27\end{aligned}$$

Od obu stron równania odejmiemy 10.

Sprawdzenie: $L = (-27) + 10 = -17$, $P = -17$, więc $L = P$, czyli liczba **(-27)** jest rozwiązaniem podanego równania.



Strony równania można ze sobą zamieniać, np. równanie $8 = x - 12$ możemy zapisać jako $x - 12 = 8$.

c) $50 = 4x$

$$\begin{aligned}4x &= 50 & < \text{-----} \\4x &= 50 & | : 4 < \text{-----} \\4x : 4 &= 50 : 4 \\x &= \frac{50}{4} = 12,5\end{aligned}$$

Zamienimy miejscami strony równania.

Obie strony równania podzielimy przez 4.

Sprawdzenie: $L = 50$, $P = 4 \cdot 12,5 = 50$, więc $L = P$, czyli liczba **12,5** jest rozwiązaniem podanego równania.

$$d) \frac{2}{7}x = -2$$

$$\frac{2}{7}x = -2 \quad | \cdot 7 \quad \leftarrow \text{Obie strony równania pomnożymy przez 7.}$$

$$\frac{2}{7}x \cdot 7^1 = (-2) \cdot 7$$

$$2x = -14 \quad | : 2 \quad \leftarrow \text{Obie strony równania podzielimy przez 2.}$$

$$2x : 2 = -14 : 2$$

$$x = -7$$

Sprawdzenie: $L = \frac{2}{7} \cdot (-7) = -2$, $P = -2$, więc $L = P$, czyli liczba (-7) jest rozwiązaniem podanego równania.

Ćwiczenie 1.

Rozwiąż równanie. Sprawdź, czy otrzymana liczba jest rozwiązaniem równania.

$$a) x - 5 = 1$$

$$b) x + 4 = -10$$

$$c) -4x = 28$$

$$d) 3 = \frac{5}{6}x$$

Przykład 2.

Rozwiąż równanie $5x + 4 = x + 16$. Sprawdź, czy otrzymana liczba jest rozwiązaniem równania.

$$5x + 4 = x + 16 \quad | -4 \quad \leftarrow \text{Od obu stron równania odejmiemy 4.}$$

$$5x = x + 12 \quad | -x \quad \leftarrow \text{Od obu stron równania odejmiemy } x.$$

$$4x = 12 \quad | : 4 \quad \leftarrow \text{Obie strony równania podzielimy przez 4.}$$

$$x = 3$$

$$\text{Sprawdzenie: } L = 5 \cdot 3 + 4$$

$$P = 3 + 16$$

$$L = 15 + 4 = 19$$

$$P = 19$$

$L = P$, więc liczba 3 jest rozwiązaniem podanego równania.

Ćwiczenie 2.

Rozwiąż równanie. Sprawdź, czy otrzymana liczba jest rozwiązaniem równania.

$$a) 3x + 5 = x + 7$$

$$b) 14x - 4 = 2x - 8$$

$$c) 10 + 8x = -4x - 2$$

$$d) 7 - 3x = -9 + 2x$$

Rozwiąż zadania

1. Ile waży niebieski ciężarek?



2. Rozwiąż równanie. Sprawdź, czy otrzymana liczba jest rozwiązaniem równania.

a) $x + 17 = 36$

b) $c - 52 = 100$

c) $81 + a = 99$

d) $201 = 99 + t$

e) $2,5 + a = 8,75$

f) $12 = -4 + x$

g) $y - 0,7 = 2,1$

h) $4\frac{2}{6} = a - 2\frac{1}{6}$

i) $u + 2\frac{2}{3} = 3\frac{1}{7}$

3. Ile waży zielony ciężarek?

a)



b)



c)



4. Rozwiąż równanie. Sprawdź, czy otrzymana liczba jest rozwiązaniem równania.

a) $7y = 21$

b) $8y = 888$

c) $\frac{1}{8}x = 5$

d) $\frac{t}{15} = 3$

e) $1 = 2u$

f) $2\frac{1}{2}a = 5$

g) $2,1 = 7u$

h) $\frac{x}{3} = \frac{4}{5}$

i) $\frac{a}{10} = 1,2$

5. Zapisz równanie opisujące daną sytuację, a następnie je rozwiąż.

a) Pewną liczbę zwiększono o 25 i otrzymano 82. Jaka liczbę zwiększono?

b) Jeśli pewną liczbę pomnożymy przez $\frac{7}{8}$, to otrzymamy 14. O jakiej liczbie mowa?

c) Liczba 64 jest równa czterokrotności pewnej liczby. Jakiej liczby?

d) Liczba trzy razy mniejsza od pewnej liczby to 72. O jakiej liczbie mowa?

e) Po podzieleniu pewnej liczby przez $\frac{2}{3}$ otrzymaliśmy 27. Jaka liczbę dzieliśmy?

6. Ile waży żółty ciężarek?

a)



b)



c)



7. Rozwiąż równanie. Sprawdź, czy otrzymana liczba jest rozwiązaniem równania.

a) $2x + 3 = 9$

b) $4a - 15 = 17$

c) $8 + 15x = 68$

d) $-m + 12 = 0$

e) $-5t + 3 = -2$

f) $-7 - 2y = -3$

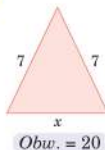
g) $78 = 9x - 3$

h) $-10 = -11t + 100$

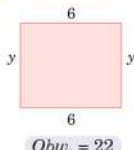
i) $-21 = 2x - 11$

8. Ułóż równanie na podstawie informacji podanych na rysunku, a następnie je rozwiąż.

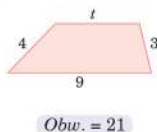
a)



b)

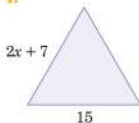


c)

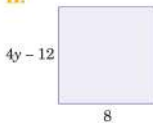


9. Poniżej przedstawiono trzy figury: trójkąt równoboczny, kwadrat oraz prostokąt. Na podstawie informacji podanych na rysunkach oblicz wartości x , y , z oraz t .

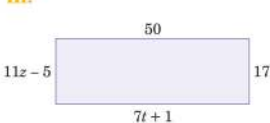
I.



II.



III.



10. Zapisz równanie w najprostszej postaci i je rozwiąż.

a) $3x - 2 + x = 14$

b) $26t - 3 - 17t = 63$

c) $2 \cdot 8x - 12 = 20$

d) $-13 - 5z = 23 + 2 \cdot 2z$

e) $8x - 6 = -2 \cdot 2x + 6$

f) $-15 + 2 \cdot 1\frac{1}{2}a = -9 - 7a$

11. Zapisz równanie w najprostszej postaci i je rozwiąż.

a) $\frac{x+7}{2} = 13$

b) $\frac{2z+8}{7} = -4$

c) $\frac{3y+1+y}{5} = 2$

Pamiętaj, że pomnożenie obu stron równania przez liczbę różną od 0 nie zmienia jego rozwiązania.



12. Zapisz równanie w najprostszej postaci i je rozwiąż.

a) $x + 1 + x = 5x + 7 - 4x$

b) $5y - y + 7 = 5y - 5 - y$

c) $-8y - 2 + 6y = 3 - 10y - 2y$

d) $-6 + 7z + 3z = 4z + 6z - 6$

e) $1,4x - 7 = x + 1 + 0,3x$

f) $\frac{3}{8}t - 2 + \frac{3}{4}t = 1\frac{1}{8}t - 3$

Sprawdź, co umiesz!

1. Rozwiąż równanie. Sprawdź, czy otrzymana liczba jest rozwiązaniem równania.

a) $x + 2 = 65$

b) $73 = 4y - 3$

c) $8z = -96$

d) $-12 = \frac{t}{6}$

2. Rozwiąż równanie. Sprawdź, czy otrzymana liczba jest rozwiązaniem równania.

a) $8 - 4x = 8x - 40$

b) $a + 7 = 3a - 5$

c) $\frac{3t + 6}{3} = 12$

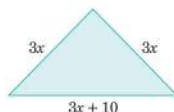
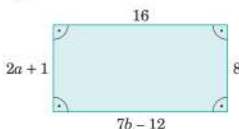
3. Na podstawie podanych informacji zapisz odpowiednie równanie i oblicz wartość x .

a) Trzykrotność liczby x zmniejszono o 1 i otrzymano 101.

b) Liczbę pięć razy większą od x zmniejszono o 100 i otrzymano 25.

c) Liczbę x zmniejszono trzykrotnie, następnie do wyniku dodano 17 i otrzymano 27.

4. Na podstawie informacji podanych na rysunkach ułóż odpowiednie równania i je rozwiąż.



Obw. = 46

Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Różnica $b - a$ wynosi 0,5.	P	F
Najkrótszy bok trójkąta ma długość 4.	P	F
Podstawa trójkąta jest o 14 dłuższa od krótszego boku prostokąta.	P	F

7. Zadania tekstowe

- ▶ W jaki sposób utworzyć plan rozwiązania zadania tekstowego z użyciem równań?
- ▶ Jak rozwiązywać zadania tekstowe z użyciem równań?



Analizuj!

Przykład 1.

Pola jest o 33 lata młodsza od swojego taty. Razem mają 55 lat. Ile lat ma Pola?

Analiza zadania

Oznaczmy niewiadomą i opiszemy dane zawarte w treści zadania.

x – wiek Poli

$x + 33$ – wiek taty Poli, który jest o 33 lata starszy od Poli

55 – tyle lat mają razem Pola i jej tata

Ułożenie i rozwiązanie równania

Ułożymy równanie, wykorzystując dane zapisane w analizie zadania, i je rozwiążemy.

$$x + x + 33 = 55$$

$$2x + 33 = 55 \quad | - 33$$

$$2x + 33 - 33 = 55 - 33$$

$$2x = 22 \quad | : 2$$

$$x = 11 \quad \leftarrow \text{Tyle lat ma Pola.}$$

Sprawdzenie

Pola ma 11 lat, a tata Poli $11 + 33 = 44$ lata. $\leftarrow$

Razem mają $11 + 44 = 55$ lat.

Odp. Pola ma 11 lat.

Sprawdźmy, czy otrzymany wynik spełnia warunki zadania.



Ćwiczenie 1.

Pan Adam za komputer i monitor zapłacił łącznie 5830 zł. Monitor był o 2930 zł tańszy niż komputer. Ile kosztował komputer?

Przykład 2.

Bruno ma w skarbonce wyłącznie monety o nominałach 2 zł oraz 5 zł. Monet o nominale 5 zł ma 3 razy więcej niż dwuzłotówek. Skarbonka Brunona ma wyświetlacz, na którym widnieje 340 – jest to wartość w złotych ukrytych w niej oszczędności. Ile monet każdego rodzaju ma Bruno?



Analiza zadania

Dane można zapisać w tabeli.

Nominal	Liczba monet	Wartość monet [w zł]
2 zł	x	$2 \cdot x = 2x$
5 zł	$3x$	$5 \cdot 3x = 15x$

340 zł – tyle oszczędności ma Bruno w skarbonce

Ułożenie i rozwiązanie równania

$$2x + 15x = 340$$

$$17x = 340 \quad | : 17$$

$$x = 20 \quad \leftarrow \text{Tyle monet dwuzłotowych ma Bruno.}$$

$$3x = 60 \quad \leftarrow \text{Tyle monet pięcizłotowych ma Bruno.}$$

Sprawdzenie

Wartość oszczędności w monetach o nominale 2 zł: $20 \cdot 2 \text{ zł} = 40 \text{ zł}$

Wartość oszczędności w monetach o nominale 5 zł: $60 \cdot 5 \text{ zł} = 300 \text{ zł}$

Wartość wszystkich oszczędności w skarbonce: $40 \text{ zł} + 300 \text{ zł} = 340 \text{ zł}$

Odp. Bruno ma 20 monet o nominale 2 zł oraz 60 monet o nominale 5 zł.

Ćwiczenie 2.

Pola zbiera pieniądze na wyjazd wakacyjny. Udało jej się zebrać 270 zł. Zauważyła, że wszystkie odłożone pieniądze ma w banknotach 10-złotowych i 20-złotowych. Banknotów 20-złotowych jest cztery razy więcej niż banknotów 10-złotowych. Ile banknotów każdego rodzaju ma Pola?

Rozwiąż zadania

1. Zosia jest o 7 lat młodsza od swojego brata Tomka. Razem mają 31 lat. Ile lat ma Zosia, a ile Tomek? Zapisz i rozwiąż równanie, oznaczając

a) literą z wiek Zosi,

b) literą t wiek Tomka.

Dla obu przypadków wykonaj sprawdzenie.

2. Pola rozciąła wstążkę o długości 7,5 m na dwie części. Jedna część była dwa razy dłuższa od drugiej. Zapisz równanie i oblicz długości obu części wstążki, oznaczając

a) literą k długość krótszej części, b) literą d długość dłuższej części.

Dla obu przypadków wykonaj sprawdzenie.

3. Ułóż odpowiednie równanie i rozwiąż zadanie.

- a) Przeciętny mózg człowieka jest 4 razy lżejszy od przeciętnego mózgu słonia. Mózgi człowieka i słonia ważyłyby razem 7,5 kg. Ile waży mózg słonia?
- b) W klasie 6d przeprowadzono ankietę. Okazało się, że uczniowie tej klasy mają łącznie 2 razy więcej kotów niż psów. W sumie mają 27 psów i kotów. Ile jest wśród tych zwierząt kotów, a ile psów?
- c) Bruno zapłacił za bilet do kina i popcorn 27,50 zł. Popcorn był o 2,50 zł tańszy niż bilet. Ile kosztował bilet do kina?



4. Ułóż odpowiednie równanie i rozwiąż zadanie.

- a) Jeden bok prostokąta jest o 15 mm krótszy niż drugi. Obwód tego prostokąta wynosi 11 cm. Oblicz długości boków tego prostokąta.
- b) Podstawa trójkąta równoramiennego jest 4 razy krótsza niż jego ramię. Obwód tego trójkąta wynosi 13,5 m. Jakie są długości boków trójkąta?
- c) W pewnym trójkącie jeden bok jest dwa razy dłuższy od najkrótszego, a drugi – o 8 cm dłuższy od najkrótszego boku. Obwód tego trójkąta wynosi 4,4 dm. Podaj długości boków trójkąta.

5. Pewna restauracja oferuje miejsca dla 52 gości. W sali ustawione są: 4 stoliki 2-osobowe, 4 stoliki 6-osobowe oraz pewna liczba stolików 4-osobowych. Ile stolików 4-osobowych jest w tej restauracji?

6. Jedno opakowanie mieszanki studenckiej waży 0,75 kg. Są w nim orzechy, migdały i rodzynki. Migdały ważą 4 razy mniej niż orzechy, a rodzynki jest o 150 g mniej niż orzechów. Ile ważą poszczególne składniki mieszanki w tym opakowaniu?

7. Pani Zofia kupiła 3 wazon: niebieski był 2 razy droższy niż żółty, a pomarańczowy o 15 złotych tańszy niż niebieski. Zapłaciła banknotem 200-złotowym i otrzymała 35 zł reszty. Oblicz, ile kosztował każdy wazon.

Informacje do zadań 8. i 9.

Koszykówka to popularna dyscyplina sportu, w której każda z dwóch pięcioosobowych drużyn stara się zdobyć jak największą liczbę punktów, wrzucając piłkę do kosza drużyny przeciwnej.



Za jeden celny rzut można zdobyć:

- 1 punkt (rzut wolny),
- 2 punkty (rzut sprzed linii rzutów za 3 punkty),
- 3 punkty (rzut zza linii rzutów za 3 punkty).

8. Karolina gra na pozycji skrzydłowego w drużynie koszykówki. Podczas meczu trafiła do kosza, wykonując 3 rzuty za 3 punkty, 5 rzutów wolnych oraz pewną liczbę rzutów za 2 punkty. Łącznie zdobyła 20 punktów. Ile celnych rzutów za 2 punkty wykonała Karolina?

9. Kuba i Cezary są zawodnikami jednej drużyny koszykówki. W czasie meczu Kuba wykonał celne rzuty: 4 za 2 punkty i kilka wolnych. Cezary dwukrotnie trafił do kosza, rzucając piłkę zza linii rzutów za 3 punkty. Zdobył też dwa razy więcej punktów za rzuty wolne niż Kuba. Łącznie chłopcy zdobyli dla swojej drużyny 23 punkty. Ile celnych rzutów za 1 punkt wykonał Kuba, a ile Cezary?

10. Ułóż treść zadania do podanego równania i je rozwiąż.

a) $x + x + 7 = 15$

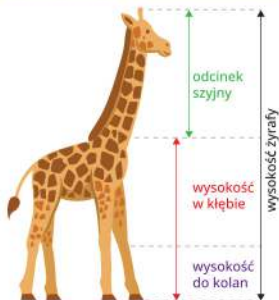
b) $4x + 2 = 16$

c) $x + 2x + x - 7 = 21$



11. Żyrafa sawannowa może osiągnąć wysokość 5,4 m. Wysokość takiej żyrafy w kłębie jest trzykrotnie większa niż długość jej nóg mierzona do kolan oraz o 60 cm większa niż długość jej odcinka szyjnego.

- a) Jak długi jest odcinek szyjny takiej żyrafy?
- b) Ile wynosi wysokość do kolan takiej żyrafy?



12. Natalia zapisywała pomiary temperatury. Następnie wyznaczyła średnią temperaturę powietrza podczas ostatnich trzech dni – wynosiła ona 17°C . Na podstawie notatek Natalii oblicz, jaką temperaturę dziewczynka zanotowała w niedzielę.

piątek: 20°C
sobota: 16°C
niedziela: $\bullet^{\circ}\text{C}$



Średnia arytmetyczna liczb a , b i c to wartość wyrażenia $\frac{a+b+c}{3}$.



Sprawdź, co umiesz!

1. Bilet do teatru *Maska* kosztuje 85 zł. Za dwa bilety do teatru *Maska* i cztery bilety do kina *Projektor* Marek zapłacił 250 zł. Ile złotych kosztował bilet do kina *Projektor*?



Informacje do zadań 2. i 3.

Zosia ma w skarbonce 27 zł oszczędności w monetach o nominałach: 1 zł, 2 zł oraz 5 zł. Monet o nominale 5 zł jest trzy razy mniej niż monet o nominale 2 zł, a złotych jest 5.

2. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P) lub fałszywe (F).

Jeśli liczbę monet o nominale 2 zł oznaczmy jako x , to liczba monet o nominale 5 zł wynosi $3x$.

P

F

Jeśli liczbę monet o nominale 5 zł oznaczmy jako y , to liczba monet o nominale 2 zł wynosi $3y$.

P

F

3. Ile monet o nominale 5 zł Zosia zgromadziła w skarbonce?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

4. Jacek, Michał i ich dziadek pomalowali płot, który składał się z 210 desek. Jacek pomalował o 15 desek więcej niż Michał, a dziadek pomalował tyle samo desek, ile pomalowali obaj chłopcy razem. Ile desek pomalował Jacek, a ile Michał?



PODSUMOWANIE DZIAŁU III

W świecie wyrażeń algebraicznych i równań

Powtórz wiadomości

Wyrażenia algebraiczne

Wyrażenia, w których występują liczby, litery lub liczby i litery połączone znakami działań oraz nawiasami, nazywamy **wyrażeniami algebraicznymi**, np.

Literę w wyrażeniu algebraicznym, w której miejsce możemy wstawiać różne liczby, nazywamy **zmienną** lub **niewiadomą**.

$$3 + b$$

$$m - 2y^3$$

$$1,5 \cdot x$$

$$\frac{n}{p}$$

$$b^4$$

$$11\frac{1}{4}$$

Upraszczanie wyrażeń algebraicznych

$$2a + b + 1,5a - 5b = 2a + 1,5a + b - 5b = 3,5a - 4b$$

Podkreślamy tym samym kolorem składniki, które można dodać lub odjąć, wraz ze znakami. Dla ułatwienia zapisujemy je obok siebie i wykonujemy działania.

Obliczanie wartości wyrażenia

Aby obliczyć wartość liczbową wyrażenia algebraicznego, należy zamiast każdej zmiennej wstawić odpowiednią liczbę i wykonać wskazane działania, np.

$$5x + 6y - 3 \text{ dla } x = -1 \text{ i } y = 3 \rightarrow 5 \cdot (-1) + 6 \cdot 3 - 3 = -5 + 18 - 3 = 10$$

Równania

Dwa wyrażenia algebraiczne, w których występuje przynajmniej jedna litera, połączone znakiem równości nazywamy **równaniem**, np.

lewa strona równania

$$3x - 8 = 12$$

prawa strona równania

Litery występujące w równaniu to **niewiadome**. Liczba **spełnia** równanie, jeśli po wstawieniu jej zamiast niewiadomej i wykonaniu działań wartość lewej strony równania jest równa wartości prawej strony. Jeśli liczba spełnia dane równanie, to mówimy, że jest **rozwiązaniem** tego równania.

Rozwiązywanie równań

$$5x - 4 = 3x + 6 \quad | +4 \leftarrow$$

Do obu stron równania można dodać taką samą liczbę (lub wyrażenie).

$$5x = 3x + 10 \quad | -3x \leftarrow$$

Od obu stron wyrażenia można odjąć takie samo wyrażenie (lub liczbę).

$$2x = 10 \quad | :2 \leftarrow$$

Obie strony równania można podzielić (lub pomnożyć) przez liczbę różną od 0.

$$x = 5$$

Poćwicz przed sprawdzianem

1. Pola kupiła bukiet złożony z 6 czerwonych róż po c zł i 5 niebieskich chabrow po n zł za sztukę. Ile zapłaciła za ten bukiet, jeśli do ceny kwiatów należy doliczyć 10 zł za przybranie?

A. $(6n + 5c + 10)$ zł

B. $(6c + 5n)$ zł

C. $(5 + 6nc + 10)$ zł

D. $(6c + 5n + 10)$ zł

2. Ile wynosi wartość wyrażenia $2x + x - 1$ dla $x = 3$?

A. 14

B. 6

C. 8

D. 7

3. Jak zapisać w najprostszej postaci wyrażenie $16z - 7 + 4y - 7z + y$?

A. $20yz$

B. $5y + 24z - 7$

C. $5y + 9z - 7$

D. $5y - 9z - 7$

4. Wskaż równanie opisujące poniższe zdanie.

Jeśli od liczby 8 razy większej niż p odejmiemy 9, to otrzymamy 31.

A. $9 - 8p = 31$

B. $8p - 9 = 31$

C. $\frac{1}{8}p - 9 = 31$

D. $(p + 8) - 9 = 31$

5. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Wartość wyrażenia $4x + 7$ dla $x = 6$ jest o 21 większa od wartości wyrażenia $4(x + 7)$ dla $x = 6$.	P	F
Zdanie: „Dwukrotność liczby x jest o 4 mniejsza od 15” możemy zapisać w postaci równania $2x + 4 = 15$.	P	F
Liczba 6 spełnia równanie $7x - 15 = -3x + 45$.	P	F
Równanie $2y + 1 = 1 + y + y$ ma tylko jedno rozwiązanie.	P	F

6. Na wystawie nowych technologii znajduje się łącznie 30 modeli robotów. W pierwszej sali jest o 7 robotów mniej niż w drugiej sali, a w trzeciej sali jest o 1 robot mniej niż w pierwszej sali. Wskaż równanie, które opisuje podaną sytuację, jeśli literą y oznaczymy liczbę robotów w drugiej sali.

A. $y - 7 + y + y - 6 = 30$

B. $y + 7 + y + y + 6 = 30$

C. $y - 7 + y + y - 8 = 30$

D. $y + 7 + y + y + 8 = 30$



7. Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.

- a) iloczyn liczb $2x$ i y
- b) trzecia część liczby x
- c) połowa sumy liczb x i y
- d) iloraz liczb x i y
- e) kwadrat liczby x
- f) podwojona suma liczb x i y

8. Zapisz wyrażenie w jak najprostszej postaci.

- a) $6 \cdot 2x + 7,5x$
- b) $25y : 5 - 10y$
- c) $\frac{30x}{10} + 3x + \frac{1}{5} \cdot 5x$
- d) $0,7x \cdot 7 - 0,9x$

9. Mama kupiła x kg truskawek. Na dżem wykorzystała $\frac{3}{4}$ kupionej ilości truskawek, a do ciasta użyła 2 kg tych owoców.

- a) Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego, ile kilogramów truskawek zostało po zrobieniu dżemu i ciasta.
- b) Oblicz, ile truskawek zostało po zrobieniu dżemu i ciasta, jeśli mama kupiła 12 kg truskawek.

10. W chórze jest trzy razy mniej mężczyzn niż kobiet. Łącznie w tym chórze śpiewa 28 osób. Ułóż równanie opisujące tę sytuację, oznaczając literą x

- a) liczbę kobiet,
- b) liczbę mężczyzn.

11. Rozwiąż równanie.

- a) $2x - 9 = 37$
- b) $13x - 7 + 4x = 27$
- c) $4,5x + 3 - 1\frac{1}{2}x - 4 = 8$
- d) $8x - 15 = 13x - 45$

12. Stopa człowieka składa się z x kości, a szkielet ręki zawiera o jedną kość więcej. Łącznie w stopie i ręce są 53 kości. Zapisz odpowiednie równanie i ustal, z ilu kości składa się stopa człowieka.



13. Ela kupiła w promocji książkę za 24 zł, co stanowiło 0,4 ceny przed obniżką. Jaka była cena książki przed obniżką? O ile złotych obniżono tę cenę?

14. W pewnym trapezie równoramiennym o obwodzie 34 cm dolna podstawa ma x cm, górna jest o 4 cm krótsza, a ramię jest 2 razy dłuższe od dolnej podstawy. Jaką długość ma dolna podstawa w tym trapezie?



15. Bruno w grze *Podbój Makemake* ma 6 srebrnych diamentów oraz 2 złote diamenty. Łączna wartość diamentów Brunona wynosi 30 punktów. Złoty diament ma dwa razy większą wartość niż srebrny. Kuba ma 4 srebrne diamenty i 7 złotych diamentów. Ile ma łącznie punktów?

Podbijmy wyzwanie

Drogi Uczniu!

Rozwiąż kolejne zadania, a dowiesz się, jakimi wyrazami uzupełnić poniższy tekst, żeby opisywał pewien przełomowy wynalazek.

Powodzenia!



Słowo ❶ jest skrótowcem od angielskiego wyrazu „❷” – w dosłownym tłumaczeniu na język polski oznaczającym ❸. Jednym z twórców tego wynalazku jest polsko-amerykański inżynier Paul Baran, który w 1962 roku w ❹ opisał koncepcję jego działania. Pomysł ten został urzeczywistniony kilka lat później jako ❺. Pierwszy zestaw danych został wysłany w 1969 roku z uniwersytetu w Los Angeles (czytaj: los andżeles) do oddalonego ❻ ośrodka naukowego w Menlo Park i zawierał wyraz „❼”. Po przesłaniu dwóch liter komputer się zawiesił. Usterka została naprawiona i cały wyraz dotarł dopiero ❽. Pierwsza strona World Wide Web (czytaj: lerd laid leb) powstała w 1990 roku, a początki internetu w Polsce sięgają ❾.

1. Kuba, Bruno i Zosia zapisali wyrażenia algebraiczne: suma liczby 9 oraz iloczynu liczby 6 i liczby x ; kwadrat liczby x powiększony o 4; iloczyn liczby $8x$ i liczby $2y$ pomniejszony o 1. Kto poprawnie zapisał wszystkie wyrażenia?

Kuba
$(9 + 6)x$
$x^2 + 4$
$8x \cdot 2y + 1$

Bruno
$9 + 6x$
$(x + 4)^2$
$8x \cdot 2y - 1$

Zosia
$9 + 6x$
$x^2 + 4$
$16xy - 1$

Kuba	Bruno	Zosia
komputer	tablet	internet

2. Oblicz wartości wyrażeń dla podanych wartości zmiennych.

$$3x - 8 \text{ dla } x = 12 \quad \bullet \quad x^2 - x + 7 \text{ dla } x = 4 \quad \bullet \quad -4x + 26y \text{ dla } x = 2, y = 1$$

Ile jest równy kwadrat różnicy największej i najmniejszej wartości pomniejszony o 2?

119	7	98
smartfon	website	inter-network

3. Zapisz w postaci wyrażeń algebraicznych obwody figur. Oblicz wartość liczbową każdego wyrażenia dla $m = 2$ i $n = 1,5$. Która figura ma dla tych wartości obwód równy 50,5?

Figura I

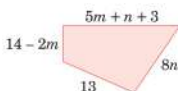


Figura II

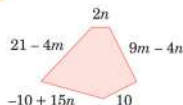


Figura I	Figura II	Żadna z figur
szybkie łącze	między-sieć	szybką transmisją

4. Oceń, czy wyróżnione zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Na półce stoi x książek przyrodniczych i o pięć więcej książek fantasy. Razem na półce znajduje się 19 książek. Tę sytuację możemy opisać za pomocą równania $x + 5 = 19$.	P	F
Bilet ulgowy kosztuje y zł, a normalny jest o 10 zł droższy. Za 3 bilety ulgowe i 7 normalnych zapłacono 170 zł. Tę sytuację możemy opisać za pomocą równania $3y + 7(y + 10) = 170$.	P	F
Mały sok kosztuje z zł, a duży o 1,60 zł więcej. Razem kosztują 4,60 zł. Tę sytuację możemy opisać za pomocą równania $2z = 4,6 - 1,6$.	P	F
Liczba o 9 większa od x jest trzy razy większa niż liczba o 1 mniejsza od x . Tę sytuację możemy opisać za pomocą równania $x + 9 = 3x - 1$.	P	F

PPFP	FPPF	FFPF
12-stronicowym artykule	12-tomowej publikacji	gazecie miejskiej

5. Ile równań podanych w ramce jest spełnionych przez liczbę (-3) ?

$$2x + 13 = 7 \quad * \quad 2(x + 8) + x = 7 \quad * \quad 3x - 1 = 4x + 2 \quad * \quad x^2 + 18 = -9$$

wszystkie	trzy	dwa
SIEĆNET	ARPANET	ROUTER

6. Rozwiąż poniższe równania.

$$6x + 6 = 42 \quad \cdot \quad 3 \cdot 4z + 10 - 5z = 24 \quad \cdot \quad 13 - 2y = 7 \quad \cdot \quad 1,2m + 8 = 2,7m + 6,5$$

Następnie ustal, jaka jest wartość wyrażenia $\frac{2}{3}xy + 2,5z - m$.

dla wyznaczonych wartości x , y , z i m .

25	-8	16
o 10 000 km	o 5 km	o 350 km

7. W pewnej stadninie jest 31 koni. W wyścigu wzięło udział kilka klaczy i dwa razy więcej ogierów z tej stadniny. W stajni pozostało tylko 7 koni. Ile klaczy z tej stadniny wzięło udział w wyścigu?



8	16	24
LOGIN	WITAM	HELLO

8. Pierogarnia ma w swojej ofercie pierogi z serem, z truskawkami i z jagodami. W poniedziałek pierogów z truskawkami ulepiono o 15 mniej niż tych z serem, a pierogów z jagodami przygotowano cztery razy więcej niż tych z truskawkami. Okazało się, że tego dnia zrobiono 825 pierogów. Oblicz, ile pierogów z truskawkami przygotowano w poniedziałek.

150	148	135
po 10 sekundach	po 10 minutach	po godzinie

9. Pensjonat górski oferuje noclegi w pokojach 2-osobowych, 3-osobowych i 4-osobowych. Łącznie jest 40 miejsc noclegowych. Pokoi dwuosobowych jest dwa razy tyle, ile jest czterosobowych, a pokoi trzyosobowych – dwa razy tyle, ile dwuosobowych. Ile miejsc noclegowych jest w pokojach trzyosobowych?



24	15	8
1991 r.	1995 r.	1999 r.

1. Pola i Bruno grali w bingo matematyczne. Szukali na swoich planszach wyrażeń podawanych przez prowadzącego i wykreślali te, które znaleźli. Wykreślenie trzech pól w poziomie, w pionie lub po skosie oznacza BINGO. Obok znajduje się lista podanych już wyrażeń, a poniżej – plansze graczy. Czy Pola lub Bruno mają BINGO?

- połowa sześcianu liczby x
- różnica sześcianu liczby x i kwadratu liczby y
- trzykrotność sumy liczb x i y
- iloczyn liczby x i sumy liczb x i y
- iloraz sumy liczb x i y oraz liczby x
- kwadrat sumy liczby x i sześcianu liczby y

Plansza Poli

BINGO		
$3(x+y)$	$\frac{x^2}{2}$	x^2+x^3
$\frac{x+y}{x}$	x^3-y^2	y^2-x^3
$x+\frac{y}{3}$	$3x+y$	$x+x^3$

Plansza Brunona

BINGO		
$3(x-y)$	$\frac{x+y}{y}$	$(x+x^3)^2$
$x+y$	$3(x^2+y)$	$\frac{x^3}{2}$
$\frac{x^6}{2}$	x^2+y	$x(x+y)$

2. Cezary budował z jednakowych kredek przedstawione obok figury. Przyjrzyj się rysunkom, odkryj regułę powstawania kolejnych figur i odpowiedź na pytanie.



figura 1



figura 2



figura 3

- Z ilu kredek składa się figura 1? A figura 2? A figura 3?
- Ilu kredek potrzebowałby Cezary do zbudowania figury 5? A do zbudowania figury 10?
- Ilu kredek potrzebowałby Cezary do zbudowania figury o numerze n ?

3. Oblicz wartość liczbową wyrażenia algebraicznego dla podanych wartości zmiennych.

- a^2+7a-b dla $a=-2$ i $b=5$
- $-3m^2+n-m$ dla $m=-3$ i $n=-7$
- $4k^2-3k+3,5$ dla $k=\frac{1}{2}$
- p^2-6p+r dla $p=\frac{2}{3}$ i $r=0,5$

4. Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

I. Za pomocą jakiego równania można przedstawić stwierdzenie: „Jeśli liczbę w zwiększymy o 5, wynik będzie o 6 mniejszy od trzykrotności liczby w ”?

A. $w + 5 = 3w + 6$

B. $w + 5 = 3w - 6$

II. Za pomocą jakiego równania można przedstawić stwierdzenie: „Jeśli kwadrat liczby k powiększymy trzykrotnie, otrzymamy liczbę 75”?

C. $3k^2 = 75$

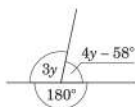
D. $k^2 + 3k = 75$

5. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

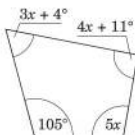
Równanie $6x^2 - 8 = -4x^2 + 18$ spełnia liczba (-1) .	P	F
Równanie $\frac{x-6}{2} = \frac{1}{3} : \left(-\frac{2}{3}\right)$ jest spełnione przez liczbę 5.	P	F
Równanie $x^3 = 8$ jest spełnione przez oba rozwiązania równania $x^2 = 4$.	P	F

6. Ułóż odpowiednie równanie, a następnie je rozwiąż.

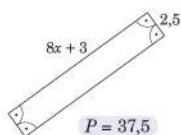
a)



b)



c)



7. Ela i jej koleżanki wybrały się na gofry.

Każda z dziewcząt wybrała inne dodatki. Cena gofra Eli stanowiła $\frac{2}{3}$ ceny gofra Poli, a gofr Zosi był dwa razy droższy niż gofr Poli. Łącznie dziewczęta zapłaciły 33 zł. Ile kosztował każdy z gofrów?



8. Trzy kolejne liczby parzyste możemy zapisać jako: $2n$, $2n + 2$, $2n + 4$. Suma czterech kolejnych liczb parzystych wynosi 76. Wyznacz te liczby.



Wyrażenia algebraiczne używane są np. w arkuszach kalkulacyjnych, czyli programach komputerowych, które ułatwiają pracę z dużą liczbą danych, m.in. wykonując obliczenia zgodnie z podanymi wzorami. Po uruchomieniu arkusza na monitorze komputera widzimy tabelę. W jej pola (komórki) możemy wpisywać nasze dane (czyli liczby) i ich opisy. Możemy też zapisywać w nich formuły – wyrażenia algebraiczne, które automatycznie zaktualizują wyniki, gdy dane w komórkach ulegną zmianie.

1. Uczniowie z klasy Zosi organizują sprzedaż ciastek. Ustalili, że koszt upieczenia jednego ciastka to 2 zł. Będą sprzedawać ciastka po 5 zł za sztukę. Za pomocą arkusza kalkulacyjnego sprawdzali, jaki może być zysk ze sprzedaży w zależności od liczby przygotowanych ciastek.

- Koszt upieczenia ciastek program oblicza, mnożąc koszt upieczenia ciastka, czyli 2 zł, przez liczbę ciastek, czyli wartość komórki B2.
- Przychód ze sprzedaży ciastek otrzymamy, wpisując w pole B4 wyrażenie $=5*B2$.
- Aby program obliczył zysk ze sprzedaży, powinien od przychodu odjąć koszty – w komórce D4 wpisujemy wyrażenie $=B4-B3$. W tak przygotowanym arkuszu można szybko sprawdzić, jaki byłby zysk, gdyby udało się sprzedać inną liczbę ciastek, np. 150.

B3				
	A	B	C	D
1	CIASTKA			
2	Liczba ciastek	100		
3	Koszt ciastek	200		
4	Przychód	500	Zysk	300

D4				
	A	B	C	D
1	CIASTKA			
2	Liczba ciastek	150		
3	Koszt ciastek	300		
4	Przychód	750	Zysk	450

- Oblicz, ile pieniędzy zarobią uczniowie z klasy Zosi, jeśli przygotują 250 ciastek i wszystkie sprzedadzą. Przygotuj odpowiedni arkusz kalkulacyjny i sprawdź w nim swoje rachunki.
- Jak zmieni się zysk ze sprzedaży 250 ciastek w opisanej wyżej akcji, jeśli koszt upieczenia jednego ciastka zmniejszy się o 50 gr, a cena ciastka wzrośnie o 1 zł? Sprawdź swoje rachunki w arkuszu kalkulacyjnym.

2. Skorzystaj z danych w pokazanym obok fragmencie arkusza kalkulacyjnego i ustal, jaka jest wartość wyrażenia.

- $C1+A2$
- $B2*C2$
- $B1-A2$
- $(B2*C1)/B1$

	A	B	C
1	4	15	25
2	13	6	7

DZIAŁ IV

W ŚWIECIE FIGUR PŁASKICH



Jakiej długości będzie
bok najmniejszego
trójkąta w etapie 4?
A jakiej w 5?



1. Proste, odcinki, koła i okręgi

- Kiedy proste (odcinki) są prostopadłe, a kiedy równoległe?
- Jak wyznaczyć odległość punktu od prostej?
- Czym się różni koło od okręgu?



Analizuj!

Proste równoległe nie przecinają się lub pokrywają się.
Dwa odcinki są równoległe, gdy leżą na prostych równoległych.
Proste prostopadłe przecinają się pod kątem prostym.
Dwa odcinki są prostopadłe, gdy leżą na prostych prostopadłych.

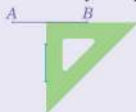
Przykład 1.

Narysuj odcinek AB , następnie odcinek CD prostopadły do odcinka AB oraz odcinek EF równoległy do odcinka CD . Wskaż pary odcinków równoległych oraz prostopadłych.

1 Rysujemy odcinek AB .



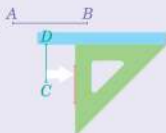
2 Rysujemy odcinek prostopadły do odcinka AB . Używamy ekierki.



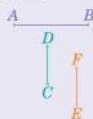
3 Podpisujemy końce odcinka CD .



4 Rysujemy odcinek równoległy do odcinka CD . Przykładamy ekierkę do odcinka CD , do ekierki przykładamy linijkę, a następnie przesuwamy ekierkę wzdłuż linijki.



5 Podpisujemy końce odcinka EF .



Wypisujemy odcinki równoległe i prostopadłe: $CD \parallel EF$, $AB \perp CD$, $AB \perp EF$.

Ćwiczenie 1.

Narysuj odcinek OP , następnie odcinek RS równoległy do odcinka OP oraz odcinek TU prostopadły do odcinka RS . Wskaż pary odcinków równoległych oraz prostopadłych.

Jeśli punkt E nie leży na prostej a , to **odległość punktu E od prostej a** jest równa długości najkrótszego odcinka łączącego punkt E z prostą a .
Jeśli punkt E leży na prostej a , to jego odległość od prostej a jest równa 0.



$|EF|$ to odległość punktu E od prostej a .

Najkrótszy odcinek łączący punkt E z prostą to odcinek prostopadły do tej prostej, którego jednym końcem jest punkt E , a drugi koniec leży na prostej.

Przykład 2.

W pewnej grze strategicznej znajduje się prosta, wzdłuż której przebiega ścieżka. Na niej gracze zdobywają bonusowe punkty. Jeden z graczy wylosował kartę o treści:

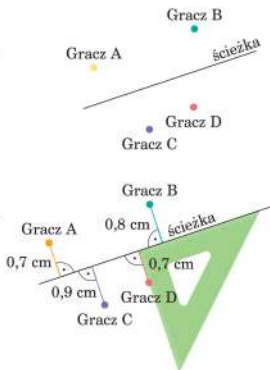
Gracz, który jest najdalej ścieżki, otrzymuje dodatkowe 10 punktów.

Każdy z graczy musi zmierzyć odległość między swoją figurką a ścieżką za pomocą linijki. Ustal, który z graczy otrzyma dodatkowe 10 punktów.

Zmierzmy odległość każdego z punktów od prostej, wzdłuż której przebiega ścieżka.

Użyjemy ekierki. Zapišemy wyniki pomiarów na rysunku. Największa z odległości to 0,9 cm.

Odp. Gracz C otrzyma dodatkowe 10 punktów.

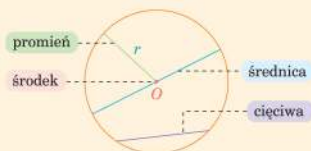


Ćwiczenie 2.

Na planie punkt oznaczający domek letniskowy rodziców Kuby znajduje się w odległości 0,8 cm od prostej, wzdłuż której postawiony jest płot. Którym punktem oznaczony jest ten domek?

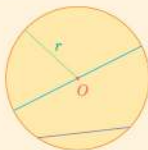


Okrąg o środku O i promieniu r :



Każdy punkt okręgu o promieniu r jest położony w tej samej odległości od środka okręgu. Ta odległość jest równa r .

Koło o środku O i promieniu r :



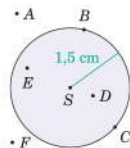
Każdy punkt koła o promieniu r jest oddalony od środka koła o r lub mniej niż r .

Przykład 3.

Które punkty spośród: A, B, C, D, E, F, S znajdują się w odległości od środka S koła

- równej promieniowi?
- mniejszej niż $1,5\text{ cm}$?
- większej niż promień?

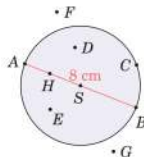
- Są to punkty B oraz C .
- Są to punkty: D, E oraz S .
- Są to punkty A oraz F .



Ćwiczenie 3.

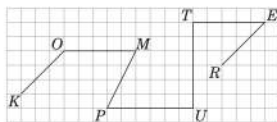
Które punkty spośród: $A, B, C, D, E, F, G, H, S$ znajdują się w odległości od środka S koła

- równej 4 cm ?
- mniejszej niż promień?
- większej niż promień?



Rozwiąż zadania

1. Oto łamana otwarta *KOMPUTER*. Wypisz wszystkie pary odcinków prostopadłych oraz wszystkie pary odcinków równoległych.



2. Proste k i l są równoległe. Prosta m jest prostopadła do prostej k , a prosta n jest równoległa do prostej m . Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

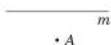
Proste k i n są prostopadłe.	P	F
Proste l i n są równoległe.	P	F
Proste m i l są równoległe.	P	F

3. Na trzech słupach zamontowano kamery (tak jak na ilustracji), a na ścianie domu zamontowano rejestrator (oznaczony na ilustracji czerwonym punktem), który zapisuje nagrania z kamer. Ustal, który słup z kamerą jest w linii prostej najbliższej rejestratora. Oblicz, jaka to odległość, jeśli ilustracja jest wykonana w skali 1 : 600.



4. Zmierz odległość punktu od prostej m .

a)



b)

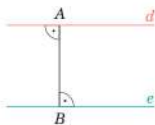


c) C.



5. Proste k , l i m są równoległe. Wiemy, że prosta k jest oddalona od prostej l o 2,5 cm. Proste l i m są oddalone od siebie o 8 mm. Jaka może być odległość między prostymi k i m ? Rozważ dwa przypadki.

Odległość między dwiema prostymi równoległymi to długość najkrótszego odcinka łączącego te proste. Odcinek ten jest prostopadły do każdej z tych prostych. $|AB| = 1,7$ cm, więc odległość między prostymi d i e wynosi 1,7 cm.



6. Narysuj prostą a , prostą k odległą od prostej a o 3 cm oraz prostą l odległą od prostej a o 1,3 cm. Ile wynosi odległość między prostymi k i l ? Podaj wszystkie możliwości.

7. Narysuj prostą c oraz prostą d , która będzie prostopadła do prostej c . Na prostej d zaznacz:

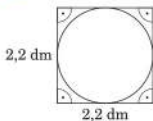
- punkt A , który oddalony jest od prostej c o 2 cm;
- punkt B , który leży o 1,5 cm dalej od prostej c niż punkt A ;
- punkt C , który leży o 0,7 cm bliżej prostej c niż punkt A .

Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

- Ile jest różnych odpowiedzi na pytanie: Jaka jest odległość między punktami A i B ?
A. dwie B. cztery
- Czy punkt B może być oddalony o 4,3 cm od punktu C ?
C. tak D. nie

8. Podaj promień przedstawionego na rysunku okręgu.

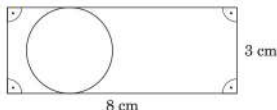
a)



b)



c)



Boki figury oznaczone tą samą liczbą kresek mają te same długości.

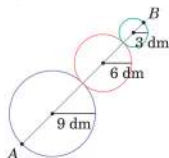


9. Czy okrąg o promieniu 7 cm można narysować wewnątrz prostokąta o wymiarach $21\text{ cm} \times 13\text{ cm}$? Wybierz odpowiedź oraz jej uzasadnienie.

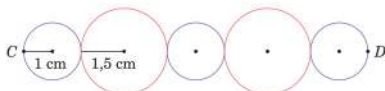
Tak,	ponieważ	promień okręgu jest mniejszy niż długość krótszego boku prostokąta.
Nie,		średnica okręgu jest większa niż długość krótszego boku prostokąta.
		średnica okręgu jest mniejsza niż długość dłuższego boku prostokąta.

10. Ustal, jaka jest odległość między podanymi punktami.

a) A i B



b) C i D



11. Pola upiekła 24 okrągłe ciastka, każde o promieniu równym 4 cm. Czy zmieszczą się w całości, położone jedno obok drugiego w rzędach, na prostokątnej tacy o wymiarach $18\text{ cm} \times 50\text{ cm}$? Uzasadnij swoją odpowiedź.



12. Narysuj:

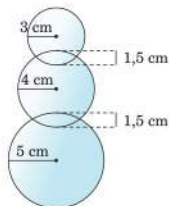
- a) dwa okręgi o promieniach 2 cm i 3 cm mające wspólny środek,
- b) dwa okręgi o promieniach 1 cm i 2,5 cm mające jeden punkt wspólny,
- c) okrąg o promieniu 3,7 cm oraz jego cięciwę oddaloną o 1,2 cm od środka okręgu.

13. Zarząd hotelu planuje odnowienie ogrodu hotelowego. Postanowiono wybudować tam jacuzzi. Na planie w skali $1 : 240$ jacuzzi (czytaj: dzakuzi) jest kołem o promieniu 0,8 cm. Jaka będzie jego rzeczywista średnica?





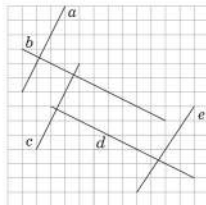
14. Bruno wykonał kartki świąteczne w kształcie bałwana. Do każdej z nich użył trzech nachodzących na siebie kół (tak jak pokazano na rysunku) o promieniach: 3 cm, 4 cm i 5 cm. Miejsca sklejenia zajmowały po 1,5 cm. Jakiej długości jest jedna taka kartka?



Sprawdź, co umiesz!

1. Na rysunku przedstawiono proste: a , b , c , d oraz e . Wypisz wszystkie pary prostych:

- prostopadłych,
- równoległych.



2. Narysuj prostą m , a następnie:

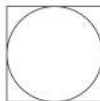
- punkt A odległy od prostej m o 1,5 cm;
- prostą k położoną w odległości 3,2 cm od prostej m .

Czy istnieje tylko jedno rozwiązanie? Uzasadnij swoją odpowiedź.

3. Wiadomo, że prosta k jest położona w odległości 2,7 cm od prostej l , a prosta m jest położona w odległości 1,8 cm od prostej l . W jakiej odległości są położone względem siebie proste k i m ? Czy to zadanie ma tylko jedno rozwiązanie? Uzasadnij swoją odpowiedź.

4. Jaki promień ma okrąg, który jest narysowany w kwadracie o boku długości 9 cm w sposób pokazany na rysunku?

- 9 cm
- 4,5 cm
- 18 cm
- 3 cm



5. Na burcie pewnego statku zostaną zawieszone koła ratunkowe, każde o średnicy 75 cm. Zaplanowano, że koła zostaną rozwieszone na odcinku o długości 8 m. Ile kół uda się umieścić na burcie po jednej stronie statku, jeśli między kołami musi być po 40 cm odstępu?

2. Kąty

- ▶ Jakie są rodzaje kątów?
- ▶ Jakie własności mają kąty przyległe i wierzchołkowe?

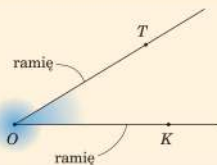


Analizuj!

Kąty to nieodłączny element geometrii. Ich znajomość i zrozumienie są kluczowe w wielu dziedzinach, takich jak inżynieria, nawigacja czy architektura, gdzie odpowiednie wykorzystanie kątów może wpływać na funkcjonalność, estetykę i bezpieczeństwo.

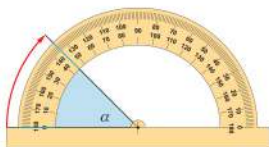


Półproste OK i OT wyznaczają dwa kąty, które można nazwać tak samo (TOK lub KOT). Wspólny początek O tych półprostych to **wierzchołek** kąta, a same półproste to **ramiona** kąta.

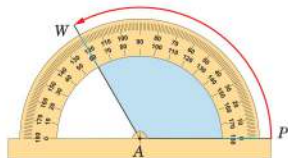


Wielkość (rozwartość) kąta mierzy się w stopniach, korzystając z kątomierza. Należy zwrócić uwagę na właściwe przyłożenie kątomierza. Kąty nazywamy, stosując małe litery alfabetu greckiego lub wielkie litery alfabetu łacińskiego.

α – alfa
 β – beta
 γ – gamma
 δ – delta
 ω – omega



$$\alpha = 45^\circ$$



$$|\angle PAW| = 120^\circ$$

Rodzaje kątów ze względu na miarę

zerowy

$$(\alpha = 0^\circ)$$



ostry

$$(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$$



prosty

$$(\alpha = 90^\circ)$$



rozarty

$$(90^\circ < \alpha < 180^\circ)$$



półpełny

$$(\alpha = 180^\circ)$$



wklęsły

$$(180^\circ < \alpha < 360^\circ)$$



pełny

$$(\alpha = 360^\circ)$$



Kąt jest wypukły, jeśli ma miarę nie mniejszą niż 0° i jednocześnie nie większą niż 180° . Kąt pełny jest zaliczany do kątów wypukłych.

Przykład 1.

Nazwij kąt o podanej mierze.

- a) 20° b) 98° c) 181° d) 354°
- a) Kąt o mierze 20° to kąt ostry i jednocześnie wypukły.
 b) Kąt o mierze 98° to kąt rozwarty i jednocześnie wypukły.
 c) Kąt o mierze 181° to kąt wklęsły.
 d) Kąt o mierze 354° to kąt wklęsły.

Ćwiczenie 1.

Nazwij kąt o podanej mierze.

- a) 163° b) 15° c) 89° d) 300°

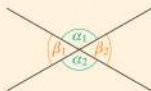
Kąty przyległe to kąty mające wspólne ramie, a ich dwa pozostałe ramiona tworzą prostą.



Kąty α i β są kątami przyległymi.

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Kąty wierzchołkowe to kąty tej samej miary, utworzone przez przecinające się proste.



Kąty α_1 i α_2 oraz kąty β_1 i β_2 są kątami wierzchołkowymi.

$$\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$$

Przykład 2.

Cezary i Pola pojechali na obóz harcerski. Jednym z zadań do wykonania podczas tego obozu było skonstruowanie paśnika dla zwierząt jeleniowatych. Spójrz na rysunek przedstawiający skonstruowany paśnik i ustal miary kątów α i β .

Kąt o mierze 60° oraz kąt α są kątami wierzchołkowymi, więc są tej samej miary. Zatem $\alpha = 60^\circ$.

Kąt o mierze 60° oraz kąt 3β są kątami przyległymi, więc suma ich miar wynosi 180° .

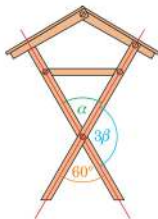
Ułożymy równanie, aby wyznaczyć miarę kąta β .

$$60^\circ + 3\beta = 180^\circ \quad | - 60^\circ$$

$$3\beta = 120^\circ \quad | : 3$$

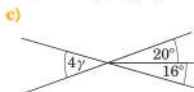
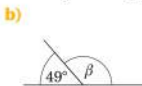
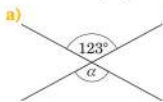
$$\beta = 40^\circ$$

Odp. Miara kąta α wynosi 60° , a miara kąta β jest równa 40° .



Ćwiczenie 2.

Ustal miarę kąta oznaczonego literą grecką. Nie używaj kątomierza.



Rozwiąż zadania

1. Nazwij kąt o podanej mierze.

a) 17°

b) 125°

c) 76°

d) 92°

e) 355°

2. Zmierz narysowany kąt i podaj jego rodzaj ze względu na miarę.



3. Narysuj kąt, którego miara jest:

a) trzy razy mniejsza od miary kąta prostego,

b) o 17° większa od miary kąta półpełnego,

c) o 56° mniejsza od miary kąta pełnego.

4. Na zajęciach kodowania Ela zaprojektowała trasę marszu dla robota. Robot najpierw poszedł prosto, potem wykonał zwrot w prawo o 25° , a następnie wykonał zwrot w lewo o 115° i dalej ruszył do przodu. W którą stronę względem początkowej trasy poruszał się wówczas robot?



5. Podaj miarę kąta, o który obraca się wskazówka godzinowa zegara w ciągu podanego czasu.

a) 12 h b) 2 h c) 30 min d) 5 h

6. Podaj miarę kąta, o który obraca się wskazówka minutowa zegara w ciągu podanego czasu.

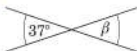
a) 30 min b) 15 min c) 1 min d) 17 min

7. Wyznacz miary kątów oznaczonych literami greckimi.

a)



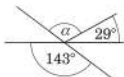
b)



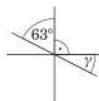
c)



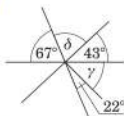
d)



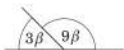
e)



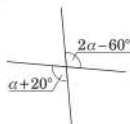
f)



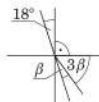
g)



h)



i)



8. Zegar ścienny wiszący w kuchni Karoliny ma dwie wskazówki: godzinową i minutową.



Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Mniejszy z kątów utworzonych przez wskazówki tego zegara o 15.00 jest kątem prostym.	P	F
Kąt wklęsły utworzony przez wskazówki tego zegara o 7.00 ma miarę 210° .	P	F
Kąt rozwarty utworzony przez wskazówki tego zegara o 1.30 ma miarę 135° .	P	F
Kąt ostry utworzony przez wskazówki tego zegara o 14.15 ma miarę mniejszą niż 15° .	P	F

9. Wieża w Ząbkowicach Śląskich to najwyższa krzywa wieża w Polsce. Ma 34 m wysokości i jest nachylona do podłoża pod kątem około 85° . Ile stopni ma kąt rozwarty między wieżą a podłożem?

- A. 85°
B. 5°
C. 105°
D. 95°



10. Wyznacz miary kątów przyległych, jeśli wiadomo, że:

- a) miara jednego z nich jest o 36° mniejsza od miary drugiego,
b) miara jednego z nich jest pięć razy większa od miary drugiego,
c) różnica miar tych kątów wynosi 28° .

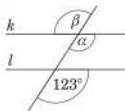
11. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Dwa kąty proste mogą być kątami wierzchołkowymi.	P	F
Dwa kąty rozwarte mogą być przyległe.	P	F
Istnieją kąty, które mają tę samą miarę i są kątami przyległymi.	P	F

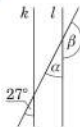


12. Proste k i l są równoległe. Ustal miary kątów oznaczonych literami α i β .

a)



b)



c)



Sprawdź, co umiesz!

1. Dokończ zdanie, tak by było prawdziwe, używając określeń z ramki.

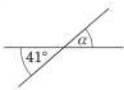
ostry • prosty • rozwarty • wklęsły

Kąt, którego miara jest:

- a) o 170° większa od miary kąta prostego, to kąt .
- b) o 42° mniejsza od miary kąta prostego, to kąt .
- c) dwa razy mniejsza niż miara kąta półpełnego, to kąt .
- d) dwa razy mniejsza niż 230° , to kąt .

2. Podaj miary kątów oznaczonych greckimi literami.

a)



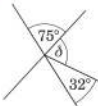
b)



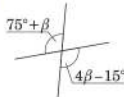
c)



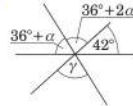
d)



e)



f)



3. Wyznacz miary kątów przyległych, jeśli wiadomo, że miara jednego z nich jest:

- a) jedenaście razy większa niż miara drugiego,
- b) o 18° mniejsza od miary drugiego.

3. Trójkąty

- ▶ Jak podzielić trójkąty ze względu na długości boków?
- ▶ Jak skonstruować trójkąt o bokach danej długości?
- ▶ Czy z każdych trzech odcinków można zbudować trójkąt?



Analizuj!

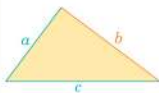
Trójkąty są jednym z najważniejszych elementów konstrukcyjnych w budownictwie i inżynierii. Ze względu na swoją stabilność i sztywność elementy w kształcie trójkątów są stosowane do budowy m.in. mostów, budynków, wież słupów czy masztów oraz w konstrukcji maszyn.



Podział trójkątów ze względu na długości boków

**trójkąt
różnoboczny**

każdy bok
jest innej długości

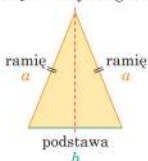


$$\text{Obw.} = a + b + c$$

Trójkąt
różnoboczny nie ma
osi symetrii.

**trójkąt
równoramienny**

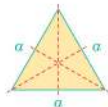
dwa boki (ramiona)
są równej długości



$$\text{Obw.} = a + a + b = 2a + b$$

**trójkąt
równoboczny**

wszystkie boki
są tej samej długości



$$\text{Obw.} = a + a + a = 3a$$

Każdy trójkąt
równoboczny jest
równoramienny.

Przykład 1.

Trójkąt równoramienny o obwodzie równym 5 dm ma podstawę długości 12 cm. Jaka długość ma ramię tego trójkąta?

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

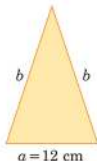
$a = 12$ cm – długość podstawy trójkąta

b – długość ramienia trójkąta (w centymetrach)

$Obw. = 5$ dm – obwód trójkąta

Wyrazimy obwód trójkąta w centymetrach:

$Obw. = 5$ dm = 50 cm.



Obwód trójkąta równoramiennego o podstawie długości a i ramieniu długości b wyraża się wzorem: $Obw. = a + 2b$. Podstawimy do wzoru znane wielkości i wyznaczmy długość b .

$$50 = 12 + 2b \quad | - 12$$

$$50 - 12 = 12 - 12 + 2b$$

$$38 = 2b \quad | : 2$$

$$38 : 2 = 2b : 2$$

$$b = 19 \text{ [cm]}$$

Odp. Ramię tego trójkąta ma długość 19 cm.

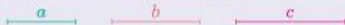
Ćwiczenie 1.

Trójkąt równoramienny o obwodzie równym 6 m ma podstawę długości 16 dm. Jaka długość ma ramię tego trójkąta?

Czasami potrzebujemy dokładnego rysunku trójkąta. Wówczas wykonujemy **konstrukcję geometryczną**. To Platon ustalił zasady wykonywania konstrukcji: należy wykonywać je, używając wyłącznie cyrkla oraz linijki (przy czym linijka nie służy do mierzenia, ale do rysowania odcinków, prostych, półprostych). Konstrukcje geometryczne znane są już od V wieku p.n.e.

Konstrukcja trójkąta o danych bokach

Skonstruujemy trójkąt o bokach długości: a , b , c .



1 Rysujemy prostą i zaznaczamy na niej punkt, który będzie początkiem odcinka o długości a .



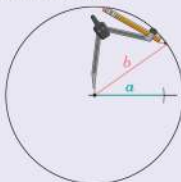
2 Odpowiednio rozkładamy cyrkiel i odmierzamy za pomocą cyrkla długość a . Musimy pamiętać, by nie zmieniać rozwarości cyrkla.



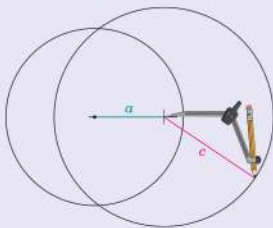
3 Wbijamy nóżkę cyrkla w zaznaczony na prostej punkt i kreślimy łuk. W ten sposób odkładamy na niej odcinek o długości a .



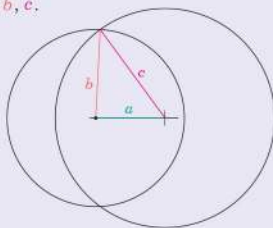
4 Za pomocą cyrkla odmieramy długość b . Rysujemy okrąg o środku w jednym końcu odcinka a i o promieniu b .



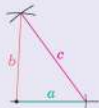
5 Za pomocą cyrkla odmieramy długość c . Rysujemy okrąg o środku w drugim końcu odcinka a i o promieniu c .



6 Wybieramy jeden z punktów przecięcia okręgów i łączymy go odcinkami z końcami odcinka a . Otrzymany trójkąt ma boki długości: a, b, c .

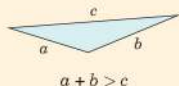


W praktyce nie musimy kreślić całych okręgów o promieniach b i c . Wystarczy łuki.



Ze sposobu konstrukcji trójkąta o danych bokach można wywnioskować, że nie z każdych trzech odcinków uda się zbudować trójkąt – jeśli dwa rysowane okręgi będą miały zbyt małe promienie, to się nie przetną, więc nie otrzymamy trzeciego wierzchołka trójkąta. To spostrzeżenie nazywa się **warunkiem istnienia trójkąta**.

Zgodnie z zasadą nazywaną **warunkiem istnienia trójkąta** z trzech odcinków można zbudować trójkąt, jeśli suma długości dwóch krótszych odcinków jest większa od długości najdłuższego odcinka.



Przykład 2.

Czy z odcinków o podanych długościach można zbudować trójkąt?

- a) 4 cm, 7 cm, 10 cm b) 5 cm, 6 cm, 12 cm

a) Sprawdzimy, czy suma długości dwóch krótszych odcinków: 4 cm i 7 cm jest większa od długości najdłuższego odcinka: 10 cm.

$$4 \text{ cm} + 7 \text{ cm} = 11 \text{ cm} \text{ i } 11 \text{ cm} > 10 \text{ cm}$$

Odp. Z odcinków o długościach 4 cm, 7 cm, 10 cm można zbudować trójkąt.

b) Sprawdzimy, czy suma długości dwóch krótszych odcinków: 5 cm i 6 cm jest większa od długości najdłuższego odcinka: 12 cm.

$$5 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 11 \text{ cm} \text{ i } 11 \text{ cm} < 12 \text{ cm}$$

Odp. Z odcinków o długościach 5 cm, 6 cm, 12 cm nie można zbudować trójkąta.

Ćwiczenie 2.

Czy z odcinków o podanych długościach można zbudować trójkąt?

- a) 13 cm, 17 cm, 31 cm b) 7 cm, 12 cm, 18 cm c) 14 cm, 1,4 dm, 0,28 m

Rozwiąż zadania

1. Oblicz obwód trójkąta, którego:

- a) jeden bok ma długość 8 cm, drugi jest o 4 cm od niego dłuższy, a trzeci – o 2 cm krótszy od pierwszego;
- b) najkrótszy bok ma długość $7\frac{1}{3}$ cm, a każdy kolejny jest o $1\frac{1}{3}$ cm dłuższy od poprzedniego;
- c) jeden z boków ma długość 21 cm, drugi stanowi $\frac{2}{3}$ jego długości, a trzeci jest dwa razy dłuższy niż drugi.

2. Dany jest obwód i długość jednego z boków trójkąta równoramiennego. Oblicz:

- a) długość ramienia tego trójkąta, jeśli obwód jest równy 25 cm, a podstawa ma długość 1 dm;
- b) długość podstawy tego trójkąta, jeśli obwód jest równy 72 dm, a ramię ma długość 2 m.

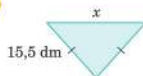
3. Oblicz długość boku oznaczonego literą x .

a)



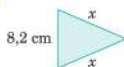
$$\text{Obw.} = 27 \text{ cm}$$

b)



$$\text{Obw.} = 51,7 \text{ dm}$$

c)



$$\text{Obw.} = 29 \text{ cm}$$

d)



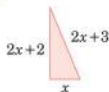
$$\text{Obw.} = 31 \text{ dm}$$

4. Obwód trójkąta jest równy 30. Oblicz długości boków tego trójkąta.

a)



b)



c)



5. Jaką długość ma bok trójkąta równobocznego o obwodzie 39,9 dm?

A. 119,7 dm

B. 13,3 dm

C. 133 dm

D. 79,9 dm

6. Ułóż odpowiednie równanie i oblicz długości boków:

a) trójkąta równoramiennego, którego obwód wynosi 15 cm, a podstawa jest o 3 cm dłuższa od ramienia;

b) trójkąta o obwodzie 39 cm, w którym najdłuższy bok jest dwa razy dłuższy od najkrótszego, a średni jest o 7 cm dłuższy od najkrótszego;

c) trójkąta, którego obwód wynosi 4,8 dm, a każdy kolejny bok jest o 0,3 dm krótszy od poprzedniego.

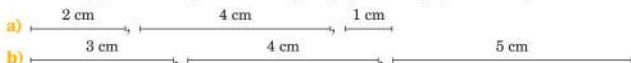
7. Czy z patyczków o długościach 13 cm, 15 cm i 20 cm można zbudować trójkąt? Wybierz odpowiedź oraz jej uzasadnienie.

Tak,	ponieważ	$13 + 15 = 28$.
		$13 + 15 > 20$.
Nie,		$15 - 13 < 20$.

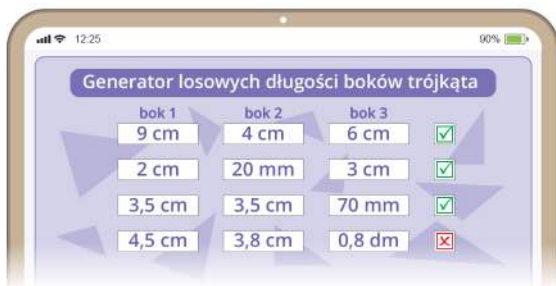


8. Czy można zbudować trójkąt z odcinków, których długości są trzema najmniejszymi dzielnikami liczby 24? Uzasadnij swoją odpowiedź.

9. Czy z narysowanych odcinków można skonstruować trójkąt? Jeśli tak, skonstruuj go i określ, jaki to rodzaj trójkąta ze względu na długości boków.



10. Na zajęciach z programowania uczestnicy testowali generator losowych długości boków trójkąta. Zadaniem generatora jest podanie trzech długości odcinków, a następnie określenie, czy da się z nich skonstruować trójkąt. Jeśli program wyświetla ✓, to z podanych długości odcinków da się skonstruować trójkąt, a jeśli ✗, to się nie da. Czy generator działa poprawnie? Uzasadnij swoją odpowiedź.



11. Skonstruuj trójkąt równoboczny o obwodzie równym 24 cm.
12. Narysuj odcinki o długościach: 3 cm, 5 cm, 7 cm. Wybierz odpowiednie odcinki spośród narysowanych i skonstruuj z nich wszystkie możliwe:
- trójkąty równoramienne, których podstawa jest dłuższa niż ramię;
 - trójkąty równoramienne, których podstawa jest krótsza niż ramię;
 - trójkąty równoboczne.
13. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Trójkąt różnoboczny może mieć jedną oś symetrii.	P	F
Trójkąt równoramienny może mieć trzy osie symetrii.	P	F



A to ciekawe

Sześciokąt foremny to wielokąt, który ma sześć boków równej długości oraz sześć kątów o jednakowych miarach. Możemy go skonstruować za pomocą cyrkla i linijki.

- 1 Narysuj okrąg. Nie zmieniaj rozwartości cyrkla.
- 2 Wybierz na okręgu dowolny punkt. Wbij w niego nóżkę cyrkla i narysuj łuk, który przecina się z okręgiem.
- 3 Krok 2. powtórz jeszcze 5 razy, za każdym razem wbijając nóżkę cyrkla w punkt przecięcia okręgu z ostatnim narysowanym łukiem.
- 4 Połącz odcinkami kolejne punkty przecięcia okręgu z łukami. Otrzymana figura to sześciokąt foremny. Bok sześciokąta ma długość taką jak promień okręgu użytego w konstrukcji.



Skonstruuj sześciokąt foremny o boku długości 4 cm.

Sprawdź, co umiesz!

1. Ramię trójkąta równoramiennego ma długość 3,5 cm, a podstawa jest o 3 mm dłuższa niż ramię. Jaki jest obwód tego trójkąta?
A. 10 cm B. 10,8 cm C. 7,3 cm D. 10,3 cm
2. Oblicz długość ramienia trójkąta równoramiennego o obwodzie równym 13 dm, w którym podstawa jest o 1 dm dłuższa od ramienia.
3. Czy z odcinków o podanych długościach można zbudować trójkąt? Jeśli tak, określ rodzaj tego trójkąta ze względu na długości boków.
a) 12 cm; 10 cm; 3 cm b) 7 mm; 70 cm; 0,7 m c) 1,2 cm; 1,8 cm; 0,31 dm
4. Skonstruuj trójkąt równoramienny o podstawie długości 4,5 cm i ramieniu o 8 mm dłuższym od podstawy. Następnie określ liczbę osi symetrii skonstruowanego trójkąta.

4. Kąty w trójkątach

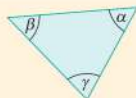
- ▶ Ile wynosi suma miar kątów w trójkącie?
- ▶ Jak podzielić trójkąty ze względu na miary ich kątów?
- ▶ Jakie są własności kątów w trójkątach równoramiennych i równobocznych?



Analizuj!

Suma miar kątów wewnętrznych w każdym trójkącie wynosi 180° .

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$



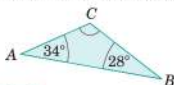
Podział trójkątów

	ostrokątny ma trzy kąty ostre	prostokątny ma jeden kąt prosty i dwa kąty ostre	rozwartokątny ma jeden kąt rozwarty i dwa kąty ostre
różnoboczny $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$			
równoramienny $2\alpha + \beta = 180^\circ$			
równoboczny $3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$		nie istnieje	nie istnieje

Przykład 1.

Oblicz nieznanne miary kątów trójkąta ABC .

a)



Sposób 1

miara nieznanego kąta

znane miary kątów

$$|\angle BCA| = 180^\circ - (34^\circ + 28^\circ) = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$$

suma miar kątów w trójkącie

Sposób 2

Ułożymy równanie i obliczymy $|\angle BCA|$.

miara kąta o wierzchołku A

suma miar kątów w trójkącie

$$|\angle BCA| + 34^\circ + 28^\circ = 180^\circ$$

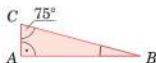
miara nieznanego kąta

miara kąta o wierzchołku B

$$|\angle BCA| + 62^\circ = 180^\circ \quad | - 62^\circ$$

$$|\angle BCA| = 118^\circ$$

b)



Suma miar kątów ostrych w trójkącie prostokątnym wynosi 90° , więc

miara nieznanego kąta

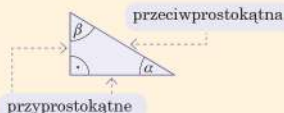
suma miar kątów ostrych

$$|\angle ABC| = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$$

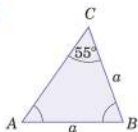
miara kąta o wierzchołku C

Trójkąt prostokątny ma jeden kąt o mierze 90° , więc suma miar dwóch kątów ostrych w tym trójkącie wynosi 90° .

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



c)



W trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie mają takie same miary, więc $|\angle CAB| = 55^\circ$.

Ułożymy równanie i obliczymy $|\angle ABC|$.

$$|\angle ABC| + 2 \cdot 55^\circ = 180^\circ$$

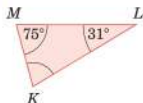
$$|\angle ABC| + 110^\circ = 180^\circ \quad | - 110^\circ$$

$$|\angle ABC| = 70^\circ$$

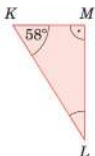
Ćwiczenie 1.

Oblicz nieznanne miary kątów trójkąta KLM .

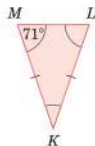
a)



b)



c)



Przykład 2.

Jeden z kątów trójkąta równoramiennego ma miarę 24° . Oblicz miary kątów tego trójkąta. Rozważ dwa przypadki.

Przypadek 1

24° – miara kąta przy podstawie trójkąta



$$\alpha = 24^\circ$$

Ułożymy równanie i obliczymy miarę kąta β .

$$\beta + 2 \cdot 24^\circ = 180^\circ$$

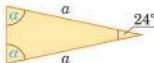
$$\beta + 48^\circ = 180^\circ \quad | - 48^\circ$$

$$\beta = 132^\circ$$

Odp. Kąty tego trójkąta mogą mieć miary: 24° , 24° i 132° albo 78° , 78° i 24° .

Przypadek 2

24° – miara kąta między ramionami trójkąta



Ułożymy równanie i obliczymy miarę kąta α .

$$\alpha + \alpha + 24^\circ = 180^\circ \quad | - 24^\circ$$

$$2\alpha = 156^\circ \quad | : 2$$

$$\alpha = 78^\circ$$

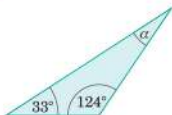
Ćwiczenie 2.

Jeden z kątów trójkąta równoramiennego ma miarę 42° . Oblicz miary kątów tego trójkąta. Rozważ dwa przypadki.

Rozwiąż zadania

1. Oblicz miary kątów oznaczonych literami greckimi. Określ rodzaj trójkąta ze względu na długości jego boków oraz ze względu na miary jego kątów.

a)



b)



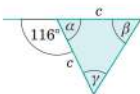
c)



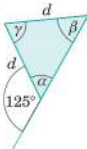
d)



e)



f)



2. Oblicz miary kątów w trójkącie:

- a) równoramiennym, którego kąt przy podstawie ma miarę 76° ,
b) prostokątnym, którego jeden z kątów ostrych ma miarę 27° .

3. Dokończ zdanie wyrazem wybranym z ramki, tak aby było prawdziwe.

prostokątny • ostrokątny • rozwartokątny

- I. Trójkąt, którego dwa kąty mają miary 78° i 22° , to trójkąt .
II. Trójkąt, którego dwa kąty mają miary 55° i 35° , to trójkąt .
III. Trójkąt, którego dwa kąty mają miary 15° i 15° , to trójkąt .
IV. Trójkąt, którego jeden kąt ma miarę 150° , to trójkąt .
V. Trójkąt, którego jeden kąt ma miarę równą $\frac{1}{4}$ miary kąta pełnego, to trójkąt .

4. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

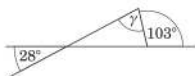
Istnieje trójkąt, w którym dwa kąty są rozwarte.	P	F
Można zbudować trójkąt, w którym dwa boki są równej długości, ale każdy kąt ma inną miarę.	P	F
Istnieje trójkąt, w którym jeden z kątów ma miarę większą niż miara kąta prostego.	P	F
Istnieje trójkąt prostokątny równoramienny.	P	F

5. Oblicz miary kątów oznaczonych literami greckimi.

a)



b)



c)



6. Okno ma kształt trójkąta równoramiennego. Miara kąta przy podstawie wynosi 28° . Jaka miarę ma kąt między ramionami tego trójkąta?



A. 28°

B. 56°

C. 62°

D. 124°

7. Zosia i Kuba rozwiązywali zadanie, które brzmiało: „Jeden z kątów w trójkącie równoramiennym ma miarę 64° . Jakie są miary pozostałych kątów tego trójkąta?”.

Pozostałe kąty mają miary 64° i 52° .



Pozostałe kąty mają miary po 58° .

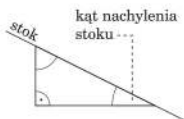
Które z dzieci ma rację? Uzasadnij swoją odpowiedź.

8. Oblicz miary kątów trójkąta, w którym jeden kąt ma miarę:

- dwa razy większą od miary najmniejszego kąta, a miara największego kąta jest trzy razy większa od miary najmniejszego kąta,
- dwa razy większą niż miara najmniejszego kąta, a miara trzeciego kąta jest o 20° większa niż miara najmniejszego kąta.

9. Oblicz miarę kąta FDE trójkąta DEF , w którym $|\angle DEF| = 26^\circ$ oraz $\frac{1}{3}|\angle EFD| = |\angle DEF|$.

10. W Polsce obowiązuje podział tras narciarskich ze względu na miarę kąta nachylenia stoku.



Poziom trudności trasy	Kolor	Średni kąt nachylenia stoku	Maksymalny kąt nachylenia stoku
łatwa	niebieski	do 12°	17°
trudna	czerwony	od 12° do 16°	22°
bardzo trudna	czarny	od 16°	28°

Smartwatch (czytaj: smartłocz) Mateusza zapisuje aktualny kąt zjazdu, oblicza średnią i wyznacza maksymalną miarę kąta zjazdu, a na koniec treningu wyświetla te dane. Mateusz w ciągu dnia zjeżdżał trzema trasami, a zjazdy każdą z nich potraktował jako osobny trening. Jakie kolory miały kolejne trasy, którymi poruszał się Mateusz?



trasa 1



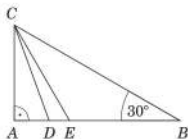
trasa 2



trasa 3



11. Trójkąt ABC jest prostokątny. Kąt ABC ma miarę 30° . Trójkąt EBC jest równoramienny, a miara kąta ADC jest o 40° mniejsza od miary kąta CDE . Jakie są miary kątów w trójkącie DEC ?

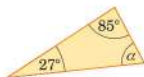


Sprawdź, co umiesz!

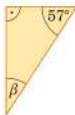
1. Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.
 - I. Jakim trójkątem jest trójkąt, którego dwa kąty mają miary 30° i 60° ?
A. ostrokątnym **B.** prostokątnym
 - II. Jakim trójkątem jest trójkąt, którego dwa kąty mają miary 55° i 70° ?
C. równoramiennym **D.** rozwartokątnym

2. Oblicz miarę kąta oznaczonego literą grecką.

a)



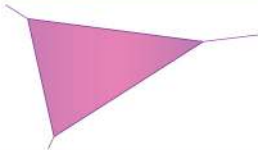
b)



c)



3. Mama Antka kupiła żagiel ogrodowy w kształcie trójkąta ostrokątnego równoramiennego, którego jeden z kątów ma miarę 40° . Ile wynoszą miary pozostałych kątów tego trójkąta?



4. Oblicz miarę kąta CAB trójkąta ABC , w którym $|\angle BCA| = 37^\circ$ oraz $\frac{1}{2}|\angle CAB| = |\angle BCA|$.

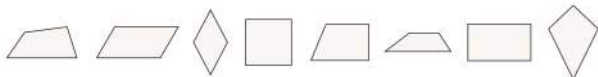
5. Czworokąty

- ▶ Jakie własności mają czworokąty?
- ▶ Jak wyznaczyć długości boków w czworokącie, znając jego własności?
- ▶ W jaki sposób skonstruować równoległobok i romb?



Analizuj!

Czworokąty



Trapezy

co najmniej jedna
para boków
równoległych



Równoległoboki

dwie pary boków
równoległych



Romby

wszystkie boki
jednakowej
długości



Prostokąty

wszystkie
kąty
proste



Kwadraty

wszystkie kąty
proste



wszystkie boki
jednakowej
długości

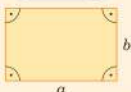
Obwody czworokątów

kwadrat



$$Obw. = 4a$$

prostokąt



$$Obw. = 2a + 2b$$

równoległobok



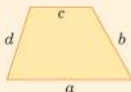
$$Obw. = 2a + 2b$$

romb



$$Obw. = 4a$$

trapez



$$Obw. = a + b + c + d$$

Przykład 1.

Obwód równoległoboku jest równy 120 cm, a jeden z jego boków jest trzykrotnie dłuższy od drugiego. Oblicz długości boków tego równoległoboku.

Wykonamy rysunek pomocniczy oraz wprowadzimy następujące oznaczenia:

a – długość krótszego boku równoległoboku (w centymetrach)

$b = 3a$ – długość dłuższego boku

równoległoboku (w centymetrach)

$Obw. = 120$ cm – obwód równoległoboku

Obwód równoległoboku o bokach długości a i b wyraża się wzorem

$Obw. = 2a + 2b$. Podstawimy do wzoru znane wielkości i wyznaczmy długość a .

$$120 = 2a + 2b$$

$$120 = 2a + 2 \cdot 3a$$

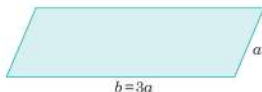
$$120 = 2a + 6a$$

$$120 = 8a \quad | : 8$$

$$a = 15 \text{ [cm]}$$

Zatem długość dłuższego boku równoległoboku wynosi: $3a = 3 \cdot 15 \text{ cm} = 45 \text{ cm}$.

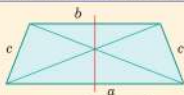
Odp. Długości boków tego równoległoboku wynoszą 15 cm i 45 cm.



Ćwiczenie 1.

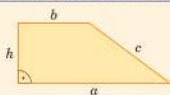
Obwód prostokąta wynosi 66 cm, a jeden z jego boków jest o 3 cm dłuższy niż drugi. Oblicz długości boków tego prostokąta.

Trapez równoramienny



- Ramiona są równej długości.
- Przekątne są równej długości.
- Ma jedną oś symetrii.

Trapez prostokątny



- Przynajmniej jedno ramię jest prostopadłe do podstaw.



Przykład 2.

Pani Lucyna ma działkę w kształcie trapezu równoramiennego o podstawach długości 40 m i 20 m oraz obwodzie 110 m. Działka zostanie ogrodzona siatką wzdłuż trzech najdłuższych boków. Metr bieżący siatki kosztuje 15 zł. Wzdłuż najdłuższego boku tej działki umieszczona będzie brama o szerokości 5 m. Ile pani Lucyna zapłaci za potrzebną do ogrodzenia działki siatkę?

Wykonamy rysunek pomocniczy oraz wprowadzimy następujące oznaczenia:

$a = 40 \text{ m}$ – długość dolnej podstawy trapezu

$b = 20 \text{ m}$ – długość górnej podstawy trapezu

c – długość ramienia trapezu (w metrach)

$Obw. = 110 \text{ m}$ – obwód trapezu

Obwód trapezu równoramiennego o podstawach długości a i b oraz ramieniu długości c wyraża się wzorem: $Obw. = a + b + 2c$. Podstawimy do wzoru znane wielkości i wyznaczmy długość c .

$$110 = 40 + 20 + 2c$$

$$110 = 60 + 2c \quad | -60$$

$$50 = 2c \quad | :2$$

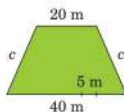
$$c = 25 \text{ [m]}$$

$$40 \text{ m} + 2 \cdot 25 \text{ m} = 40 \text{ m} + 50 \text{ m} = 90 \text{ m} \quad \leftarrow \text{Dodamy długości trzech najdłuższych boków działki.}$$

$$90 \text{ m} - 5 \text{ m} = 85 \text{ m} \quad \leftarrow \text{Odejmujemy szerokość bramy.}$$

$$85 \cdot 15 = 1275 \text{ [zł]} \quad \leftarrow \text{Pomnożymy liczbę metrów przez cenę za metr bieżący.}$$

Odp. Pani Lucyna zapłaci za siatkę 1275 zł.



Ćwiczenie 2.

Działka pana Jerzego ma kształt trapezu prostokątnego o obwodzie 260 m. Krótsza podstawa tego trapezu ma 70 m długości, a krótsze ramię 40 m długości. Druga podstawa trapezu jest dwukrotnie dłuższa niż jego dłuższe ramię. Pan Jerzy chce zamontować bramę o szerokości 4 m oraz ogrodzenie panelowe wzdłuż najdłuższego boku działki. Ile przeszło ogrodzenia panelowego będzie potrzebował, jeśli jedno przeszło ma 2 m długości?

Konstrukcja równoległoboku o danych bokach

Skonstruujemy dowolny równoległobok o bokach długości a i b .



1 Rysujemy prostą i zaznaczamy na niej punkt A .



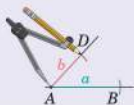
2 Za pomocą cyrkla odmierzymy na prostej odcinek AB o długości a .



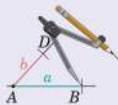
3 Rysujemy półprostą o początku w punkcie A nachyloną do boku AB pod pewnym kątem.



4 Odkładamy na półprostej odcinek AD o długości b .



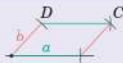
5 Nie zmieniając rozwartości cyrkla, wbijamy jego nóżkę w punkt B i kreślimy łuk.



6 Ustawiamy rozwartość cyrkla na długość odcinka a . Wbijamy jego nóżkę w punkt D i kreślimy łuk.



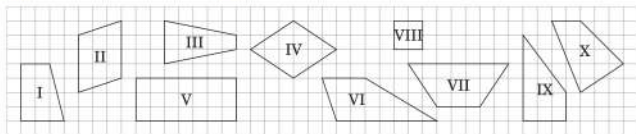
7 Punkt przecięcia łuków oznaczamy literą C . Jest to czwarty wierzchołek równoległoboku o bokach długości a i b .



Rozwiąż zadania

1. Wskaż, które z figur przedstawionych na rysunku to:

- a) romby, b) równoległoboki, c) trapezy,
d) trapezy prostokątne, e) trapezy równoramienne.



2. Oblicz obwód:

- a) rombu, którego bok ma długość $7\frac{1}{2}$ cm;
- b) równoległoboku, którego jeden bok ma długość 1,2 dm, a drugi jest od niego o 4 cm dłuższy;
- c) prostokąta, którego jeden bok ma długość 2,3 cm, a drugi jest od niego dwa razy dłuższy.

3. Oblicz długość:

- a) boku kwadratu o obwodzie 16,8 cm;
- b) krótszego boku prostokąta, jeśli jest on 4 razy krótszy od drugiego boku, a obwód wynosi 125 cm;
- c) drugiego boku równoległoboku, którego jeden bok ma długość 1,4 cm, a obwód wynosi 50 mm.

4. Romb i równoległobok mają równe obwody. Jaka jest długość boku rombu, jeśli jeden z boków równoległoboku ma długość 2 cm 7 mm, a drugi bok jest o 4 cm dłuższy?

5. Narysuj:

- a) romb o przekątnych długości 3 cm i 4 cm;
- b) dowolny równoległobok, który nie jest rombem, o przekątnych długości 7 cm i 4 cm.

6. Skonstruuj dowolny:

- a) równoległobok o wymiarach $4,5\text{ cm} \times 2\text{ cm}$; b) romb o boku długości 3,4 cm.

7. Klaudia wykonała z drewnianej listewki ramkę na zdjęcia w kształcie równoległoboku. Wykorzystała 6 dm listewki. Jeden z boków tej ramki ma długość 18 cm. Jaka długość ma drugi bok? Podczas obliczeń pominij grubość listewki.

8. Pani Jadwiga szyje obrus w kształcie rombu, którego bok ma długość 75 cm. Boki obrusu planuje obszyć ozdobną tasiemką.

- a) Ile co najmniej centymetrów tasiemki musi przygotować?
- b) Ile najmniej będzie kosztowała tasiemka?



4,85 zł/m

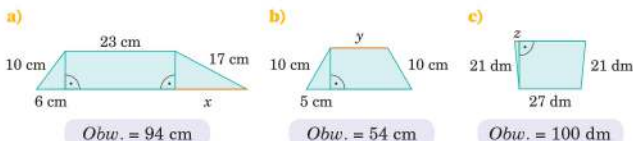
9. Oblicz obwód trapezu, w którym:

- a) suma długości podstaw wynosi 13 cm, a ramiona mają długości 4 cm i 5 cm;
- b) jedna z podstaw ma długość 6,9 cm, długość drugiej stanowi $\frac{1}{3}$ długości pierwszej, jedno ramię ma długość 6 cm, a drugie jest od niego o 2,5 cm krótsze.

10. Krótsza podstawa trapezu równoramiennego ma długość 15 cm, ramię jest od niej o 0,4 dm dłuższe, a obwód wynosi 7,5 dm. Ile centymetrów ma dłuższa podstawa tego trapezu?

- A. 22 cm B. 29,92 cm C. 30,8 cm D. 38 cm

11. Na rysunku przedstawiono trapez. Oblicz długość odcinka oznaczonego literą.



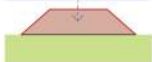
12. Trzy kawałki szkła w kształcie identycznych trójkątów równobocznych sklejono bokami. Bok jednego takiego kawałka ma długość 6 cm. W jakim kształcie jest powstała figura? Ile wynosi jej obwód?



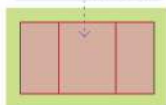
13. Tomek wraz z tatą przygotowuje drewnianą rampę, której boczne ściany to trapezy równoramiennie o podstawach długości 1,2 m i 2,4 m, a ramiona mają długość po 80 cm. Rampa ma 100 cm szerokości. Krawędzie rampy oznaczone czerwonym kolorem zamierzają zabezpieczyć czerwoną listwą.

- a) Ile centymetrów listwy wykorzystają?
- b) Jaki będzie koszt listew, jeśli można je kupić tylko w kawałkach po 1,5 m, a cena takiego kawałka to 60 zł?

widok rampy z boku

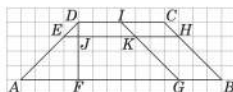


widok rampy z góry



Sprawdź, co umiesz!

1. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).



Czworokąt $FGID$ jest trapezem.	P	F
Czworokąt $GBHK$ jest rombem.	P	F
Na rysunku przedstawiono więcej niż trzy równoległoboki.	P	F
Na rysunku przedstawiono dokładnie cztery trapezy.	P	F

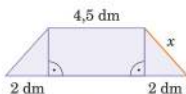
2. Oblicz obwód:

- rombu o boku długości 7,3 cm;
- równoległoboku, którego jeden bok ma długość 7 dm, a drugi jest o 17 cm od niego krótszy;
- trapezu równoramiennego, którego jedna podstawa ma długość 1,5 dm, druga jest od niej o 10 cm dłuższa, a ramiona mają po 13 cm długości.

3. Oblicz długości boków prostokąta o obwodzie 20,4 cm, jeśli wiadomo, że jeden z jego boków jest dwa razy krótszy niż drugi.

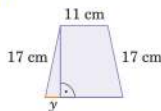
4. Na rysunku przedstawiono trapez. Oblicz długość odcinka oznaczonego literą.

a)



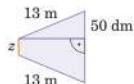
$$\text{Obw.} = 19 \text{ dm}$$

b)



$$\text{Obw.} = 63 \text{ cm}$$

c)



$$\text{Obw.} = 42 \text{ m}$$

5. Skonstruuj dowolny romb o boku długości 6 cm.

6. Kąty w czworokątach

- ▶ Ile wynosi suma miar kątów wewnętrznych czworokąta?
- ▶ Czym różnią się wielokąty wklęsłe od wielokątów wypukłych?
- ▶ Jakie własności mają kąty w równoległoboku i trapezie?



Analizuj!

Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta jest równa 360° .

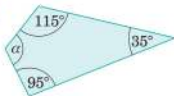


$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

Przykład 1.

Oblicz nieznaną miarę kątów czworokąta.

a)



Suma miar wszystkich kątów wewnętrznych czworokąta wynosi 360° .

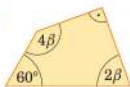
suma miar kątów czworokąta

$$\alpha = 360^\circ - (115^\circ + 35^\circ + 95^\circ) = 360^\circ - 245^\circ = 115^\circ$$

znane miary kątów czworokąta

Odp. Kąt α ma miarę 115° .

b)



Ułożymy równanie i obliczymy β .

miary poszczególnych kątów czworokąta

$$60^\circ + 2\beta + 90^\circ + 4\beta = 360^\circ$$

suma miar kątów w czworokącie

$$\begin{array}{rcl} 6\beta + 150^\circ & = & 360^\circ \\ 6\beta & = & 210^\circ \\ \beta & = & 35^\circ \end{array} \quad \begin{array}{l} - 150^\circ \\ : 6 \end{array}$$

Zatem $2\beta = 2 \cdot 35^\circ = 70^\circ$ oraz $4\beta = 4 \cdot 35^\circ = 140^\circ$.

Odp. Kąt 2β ma miarę 70° , kąt 4β ma miarę 140° .

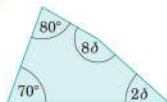
Ćwiczenie 1.

Oblicz nieznane miary kątów czworokąta.

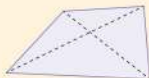
a)



b)



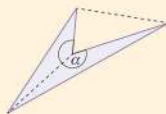
wypukłe



- Wszystkie kąty w tym czworokącie mają miary mniejsze niż 180° .
- Przekątne czworokąta leżą wewnątrz figury.

Czworokąty

wklęsłe



- Jeden z kątów czworokąta jest wklęsły, czyli $180^\circ < \alpha < 360^\circ$.
- Jedna z przekątnych czworokąta leży na zewnątrz figury.



Przykład 2.

Ustal, czy czworokąt o podanych miarach kątów jest wypukły czy wklęsły.

a) 20° , $\alpha - 30^\circ$, 20° , α

Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta wynosi 360° .

Ułożymy równanie i obliczymy α .

$$20^\circ + \alpha - 30^\circ + 20^\circ + \alpha = 360^\circ$$

$$2\alpha + 10^\circ = 360^\circ \quad | -10^\circ$$

$$2\alpha = 350^\circ \quad | :2$$

$$\alpha = 175^\circ$$

$$\text{Zatem } \alpha - 30^\circ = 175^\circ - 30^\circ = 145^\circ.$$

Odp. Kąty w czworokącie mają miary: 20° , 145° , 20° , 175° , więc czworokąt jest wypukły, ponieważ miara każdego jego kąta jest mniejsza niż 180° .

b) 15° , $\frac{1}{3}\beta$, 25° , β

Ułożymy równanie i obliczymy β .

$$15^\circ + \frac{1}{3}\beta + 25^\circ + \beta = 360^\circ$$

$$1\frac{1}{3}\beta + 40^\circ = 360^\circ \quad | -40^\circ$$

$$\frac{4}{3}\beta = 320^\circ \quad | : \frac{4}{3}$$

$$\beta = 320^\circ : \frac{4}{3} = 80^\circ \cdot \frac{3}{4} = 80^\circ \cdot 3 = 240^\circ$$

$$\text{Zatem } \frac{1}{3}\beta = \frac{1}{3} \cdot 240^\circ = 80^\circ.$$

Odp. Kąty w czworokącie mają miary: 15° , 80° , 25° , 240° , więc czworokąt jest wklęsły, ponieważ miara jednego z jego kątów jest większa niż 180° i jednocześnie mniejsza niż 360° .

Ćwiczenie 2.

Ustal, czy czworokąt o podanych miarach kątów jest wypukły czy wklęsły.

a) 78° , $\gamma - 1^\circ$, γ , 113°

b) $\frac{1}{4}\delta$, 30° , δ , 50°

W każdym **równoległoboku**:

- przeciwległe kąty mają taką samą miarę,
- suma miar kątów wewnętrznych jest równa $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$,
- suma miar kątów przy jednym boku jest równa $\alpha + \beta = 180^\circ$.



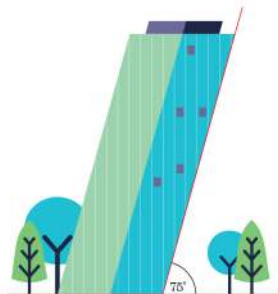
Przykład 3.

Współcześni architekci wykorzystują kształt równoległoboku w swoich projektach. Na rysunku przedstawiono projekt budynku, którego ściana ma kształt równoległoboku. Oblicz kąty tego równoległoboku.

Kąt rozwarty równoległoboku jest kątem przyległym do zaznaczonego kąta o mierze 75° . Ma zatem miarę: $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.

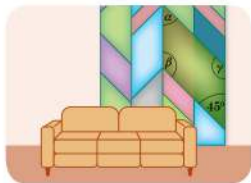
Suma miar kątów przy jednym boku równoległoboku wynosi 180° , więc kąt ostry równoległoboku ma miarę: $180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$.

Odp. Kąty tego równoległoboku mają miary: $75^\circ, 105^\circ, 75^\circ, 105^\circ$.



Ćwiczenie 3.

Architekt wnętrz projektuje pokój Poli. Nad kanapą mają się znaleźć panele. Niektóre z nich są w kształcie równoległoboków. Jakie kąty wewnętrzne mają te równoległoboki?

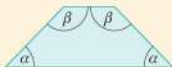


W każdym **trapezie**:

- suma miar kątów wewnętrznych jest równa $\alpha + \beta + \delta + \gamma = 360^\circ$;
- suma miar kątów leżących przy jednym ramieniu jest równa 180° , czyli $\alpha + \delta = 180^\circ$ oraz $\beta + \gamma = 180^\circ$.



Trapez równoramienny ma przy podstawie kąty tej samej miary.



Trapez prostokątny ma przynajmniej dwa kąty proste.



Przykład 4.

Okna na poddaszu często mają nietypowe kształty. Przedstawione obok okno ma kształt trapezu prostokątnego. Jakie kąty ma ten trapez, jeśli miara jego kąta ostrego jest o 90° mniejsza niż miara kąta rozwartego?

Dwa kąty trapezu są proste, czyli mają miary po 90° .

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

α – miara kąta rozwartego trapezu,

$\alpha - 90^\circ$ – miara kąta ostrego trapezu.

Suma miar kątów leżących przy jednym ramieniu trapezu wynosi 180° . Ułożymy równanie i obliczymy α .

$$\alpha + \alpha - 90^\circ = 180^\circ$$

$$2\alpha - 90^\circ = 180^\circ \quad | + 90^\circ$$

$$2\alpha = 270^\circ \quad | : 2$$

$$\alpha = 135^\circ$$

Zatem $\alpha - 90^\circ = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$.

Odp. Ten trapez ma kąty o mierze: 90° , 45° , 90° , 135° .



Ćwiczenie 4.

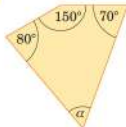
Kuba ogląda przewodniki turystyczne i szuka w nich zabytków o różnych ciekawych kształtach geometrycznych. Na zdjęciu świątyni Tikal z Gwatemali zauważył trapez równoramienny. Jakie miary mają kąty figury dostrzeżonej przez Kubę?



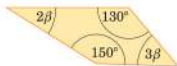
Rozwiąż zadania

1. Oblicz miary kątów wewnętrznych czworokąta.

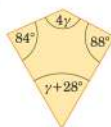
a)



b)



c)



2. Znajdź miarę czwartego kąta czworokąta i oceń, czy jest to czworokąt wklęsły czy wypukły.

a) 25° , 170° , 45°

b) 24° , 56° , 90°

c) 90° , 45° , 90°

3. Czy istnieje czworokąt o miarach kątów: $\alpha + 30^\circ$, 85° , 95° , $150^\circ - \alpha$?

Tak,	ponieważ	$85^\circ + 95^\circ = 180^\circ$.
Nie,		kąt o mierze 85° jest kątem ostrym. suma miar tych kątów wynosi 360° .

4. Oblicz miary wszystkich kątów czworokąta, w którym:

- najmniejszy kąt ma miarę 75° , miara drugiego kąta jest od niego o 15° większa, a miara trzeciego kąta jest o 20° większa od miary najmniejszego kąta w tym czworokącie;
- największy kąt ma 240° , miara kolejnego kąta stanowi 0,25 miary największego kąta, a dwa pozostałe kąty mają równe miary.

5. Na rysunku przedstawiono równoległobok. Oblicz miarę kąta oznaczonego literą grecką.

a)



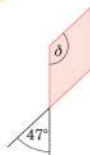
b)



c)



d)



6. Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

- Jeśli kąt ostry rombu ma miarę 55° , to jaką miarę ma jego kąt rozwarty?
A. 125° B. 155°
- Jeśli jeden z kątów równoległoboku ma miarę 129° , to jakie miary mają pozostałe jego kąty?
C. 51° , 129° , 51° D. 129° , 51° , 129°

7. Oblicz miary kątów równoległoboku, w którym miara kąta:

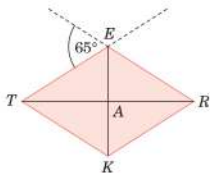
- ostrego jest o 40° mniejsza niż miara kąta rozwartego;
- rozwartego jest pięć razy większa niż miara kąta ostrego;
- ostrego stanowi $\frac{1}{2}$ miary kąta rozwartego;
- rozwartego jest o 20° większa niż trzykrotność miary kąta ostrego.

8. Płytki chodnikowa ma kształt rombu, w którym miara większego kąta jest równa dwukrotności miary mniejszego kąta. Oblicz miary kątów tego rombu.



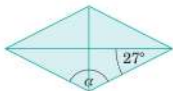
9. Na rysunku obok przedstawiono romb $KRET$. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Miara kąta $\sphericalangle TAK$ wynosi 90° .	P	F
Miara kąta $\sphericalangle RKT$ wynosi 130° .	P	F
Miara kąta $\sphericalangle ETK$ wynosi 50° .	P	F

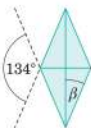


10. Oblicz, jakie miary mają kąty w rombie oznaczone literami greckimi.

a)



b)

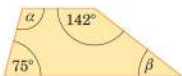


c)



11. Oblicz miary kątów oznaczonych literami greckimi w trapezie.

a)



b)



c)



12. Dokończ zdanie, tak aby było prawdziwe.

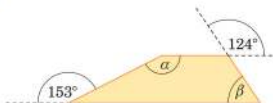
- W trapezie prostokątnym kąt ostry ma miarę 67° . Kąt rozwarty w tym trapezie ma miarę .
- Kąty rozwarte trapezu mają miary 125° i 144° . Kąty ostre w tym trapezie mają miary .
- W trapezie równoramiennym kąt rozwarty ma miarę 142° . Miary pozostałych kątów tego trapezu wynoszą .

13. Oblicz miary kątów czworokąta $ABCD$, w którym $|\sphericalangle ABC| = 2|\sphericalangle DAB|$,
 $|\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle ABC| + 24^\circ$ oraz $|\sphericalangle DAB| = \frac{1}{3}|\sphericalangle BCD|$.

14. Pan Krzysztof zaprojektował torbę, której przód ma kształt trapezu równoramiennego. Miara jednego z kątów tego trapezu stanowi $\frac{1}{6}$ trzykrotności miary drugiego kąta. Oblicz, jakie miary kątów ma ten trapez.

15. Oblicz miary kątów oznaczonych literami α i β w podanym trapezie.

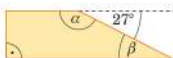
a)



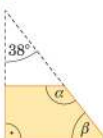
b)



c)



d)



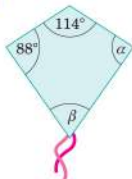
A to ciekawe

Konstruując latawiec, korzystamy z własności **deltoidu**, czyli czworokąta, który ma

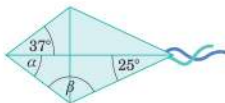
- dwie pary boków równej długości,
- prostopadłe przekątne,
- jedną oś symetrii,
- kąty o równej mierze pomiędzy bokami różnej długości.

Ile wynoszą miary kątów oznaczonych literami greckimi w zaprojektowanym latawcu?

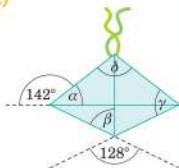
a)



b)



c)



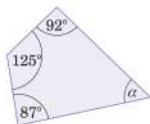
Sprawdź, co umiesz!

1. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

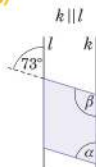
Istnieje czworokąt wypukły, którego kąty mają miary: $78^\circ, 92^\circ, 112^\circ, 101^\circ$.	P	F
Trapez o miarach kątów: $103^\circ, 77^\circ, 77^\circ, 103^\circ$ jest równoramienny.	P	F
Czworokąt, którego kąty mają miary: $81^\circ, 90^\circ, 95^\circ, 94^\circ$, jest trapezem prostokątnym.	P	F
Czworokąt o miarach kolejnych kątów: $46^\circ, 134^\circ, 46^\circ, 134^\circ$ jest równoległobokiem.	P	F

2. Oblicz miary kątów oznaczonych literami greckimi.

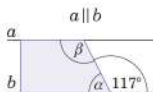
a)



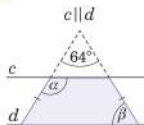
b)



c)



d)



3. Jaka jest miara kąta rozwartego w rombie, jeśli miara kąta ostrego jest osiem razy mniejsza niż miara kąta rozwartego?

4. Samorząd uczniowski przygotowuje plakat reklamujący szkolne zawody sportowe. Jest on w kształcie równoległoboku, którego miara kąta ostrego stanowi $\frac{2}{7}$ miary kąta rozwartego. Jakie miary mają kąty tego równoległoboku?



PODSUMOWANIE DZIAŁU IV

W świecie figur płaskich

Powtórz wiadomości

Rodzaje kątów

zerowy ($\alpha = 0^\circ$) **ostry** ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) **prosty** ($\alpha = 90^\circ$)

wklesły ($180^\circ < \alpha < 360^\circ$) **pełny** ($\alpha = 360^\circ$)

rozwartý ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$) **półpełny** ($\alpha = 180^\circ$)

przyległe $\alpha + \beta = 180^\circ$ **wierzchołkowe** $\alpha_1 = \alpha_2$ $\beta_1 = \beta_2$



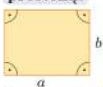
Czworokąty

kwadrat



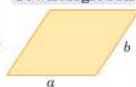
$$\text{Obw.} = 4a$$

prostokąt

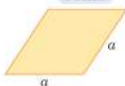


$$\text{Obw.} = 2a + 2b$$

równoległobok

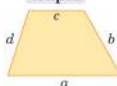


romb



$$\text{Obw.} = 4a$$

trapez



$$\text{Obw.} = a + b + c + d$$

Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta wynosi 360° .

Podział trójkątów

ostrokątny
ma trzy kąty ostre



prostokątny
ma jeden kąt prosty i dwa kąty ostre



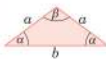
rozwartokątny
ma jeden kąt rozwarty i dwa kąty ostre



różnoboczny

równoramienny

równoboczny

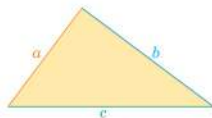


nie istnieje

nie istnieje

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta wynosi 180° .

Trójkąty



$$\text{Obw.} = a + b + c$$

Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt, jeśli:

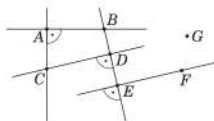
długość najdłuższego boku

$$a + b > c$$

suma długości dwóch krótszych boków

Poćwicz przed sprawdzianem

Informacje do zadań 1. i 2.



1. Wskaż poprawną zależność.

A. $AB \parallel AC$

B. $EF \parallel AB$

C. $AB \perp BD$

D. $BD \perp EF$

2. Ile można narysować różnych prostych, które są odległe od prostej EF o tyle, o ile jest od niej odległy punkt G ?

A. Jedną.

B. Dwie.

C. Trzy.

D. Nieskończenie wiele.

3. W czworokącie jeden z kątów ma miarę 120° . Ile wynosi suma miar pozostałych kątów w tym czworokącie?

A. 60°

B. 120°

C. 240°

D. 360°

4. Dane są odcinki o długościach: a cm, 3 cm i 8 cm. Ile wynosi a , jeśli z tych trzech odcinków można zbudować trójkąt równoramienny?

A. 3

B. 5

C. 8

D. 11

5. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

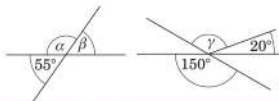
Płyta winylowa o średnicy 30 cm zmieści się w kwadratowej kopercie o boku długości 31 cm.	P	F
Miara kąta o 17° mniejsza od miary kąta pełnego wynosi 163° .	P	F
Kąt rozwarty utworzony przez wskazówki zegara o godz. 10.30 ma miarę 120° .	P	F
Istnieje trójkąt prostokątny, który ma oś symetrii.	P	F
Trójkąt, którego dwa kąty mają miary po 45° , jest trójkątem prostokątnym.	P	F

6. Narysuj okrąg:

- a) o środku S i promieniu $2,2$ cm, a następnie zaznacz na rysunku punkty A , B , C , które należą do tego okręgu;
- b) o środku O i średnicy 5 cm, a następnie zaznacz na rysunku punkty C , D , E , które należą do koła o środku O i średnicy 5 cm, ale nie należą do okręgu o środku O i średnicy 5 cm;
- c) o środku O i najdłuższej cięciwie długości 1 cm w skali $3 : 1$.

7. Wybierz poprawną odpowiedź spośród **A** i **B** oraz **C** i **D**.

- I. Ile wynosi różnica $\alpha - \beta$?
A. 80° **B.** 70°
- II. Ile jest równa miara kąta γ ?
C. 130° **D.** 150°



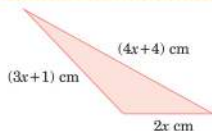
8. Wieża w Suurhusen (Niemcy) jest uznawana za najbardziej przekrzywioną wieżę na świecie. Jest ona nachylona do podłoża pod pewnym kątem. Miara kąta do niego przyległego jest o około 10° większa. Pod jakim kątem wieża jest nachylona do podłoża?



9. Oblicz:

- a) długość ramienia trójkąta równoramiennego o obwodzie 49 cm i podstawie długości $1,5$ dm;
- b) obwód trójkąta równobocznego o boku długości $6\frac{4}{5}$ cm.

10. Trójkąt przedstawiony na rysunku obok ma obwód równy 5 dm. Jakie długości mają jego boki?

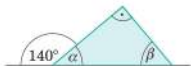


11. W trójkącie równoramiennym jeden z kątów ma 38° . Jakie miary mają pozostałe kąty? Rozważ dwa przypadki.

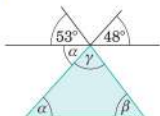
12. Przekątne prostokąta *PIES* przecinają się w punkcie N pod kątem 124° . Oblicz miary kątów trójkąta *NIE*. Rozważ dwa przypadki.

13. Podaj miary kątów oznaczonych literami greckimi.

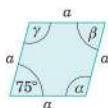
a)



b)



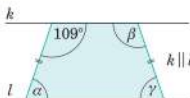
c)



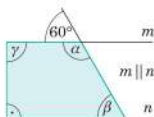
d)



e)



f)



14. Skonstruuj:

- trójkąt o bokach długości: 2,5 cm, 4 cm, 5 cm;
- dowolny równoległobok, którego jeden bok ma 4 cm długości, a drugi jest od niego 1,6 razy krótszy.

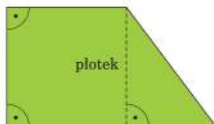
15. Kwadrat o obwodzie 1 m poddano modyfikacjom: dwa równoległe boki zmniejszono dwukrotnie, a dwa pozostałe zwiększono o $\frac{1}{5}$ ich dotychczasowej długości.

- Jaki jest obwód powstałego w ten sposób prostokąta?
- O ile milimetrów różnią się obwody tych figur?

16. W trapezie równoramiennym kąt rozwarty ma miarę 5 razy większą niż kąt ostry. Jakie miary mają kąty w tym trapezie?

17. Pan Kamil ma działkę w kształcie trapezu prostokątnego. Płotek (patrz rysunek) dzieli ją na dwie części:

- pierwszą w kształcie kwadratu o boku długości 80 m;
- drugą w kształcie trójkąta prostokątnego, którego dwa z boków mają długości 60 m i 100 m.



Pan Kamil postawił już płotek, a teraz zamierza ogrodzić działkę siatką, której metr bieżący kosztuje 25 zł. Wzdłuż ogrodzenia będzie znajdowała się brama szerokości 4 m. Ile będzie kosztowało ogrodzenie tej działki siatką?

Podjmij wyzwanie

Drogi Uczniu!

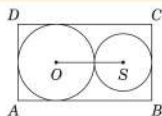
Rozwiąż kolejne zadania, a dowiesz się, jakimi wyrazami uzupełnić poniższy tekst, żeby opisywał przełomowy wynalazek.

Powodzenia!



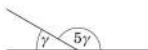
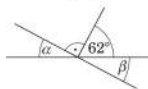
1 wiek to czas **2**. To, o czym kiedyś czytaliśmy w książkach science fiction (czytaj: sa-jens fi-k-szyn), staje się rzeczywistością. Pierwszy **3** to wyjątkowe osiągnięcie w **4**. Oktokopter, czyli pojazd z **5**, który trafił do seryjnej produkcji w Europie, został zaprojektowany przez Polaka Tomasza Patana. Ten **6** pojazd jest przyjazny dla środowiska, bo nie emituje spalin. Może latać z prędkością do **7** przez maksymalnie 20 min na jednym ładowaniu. Nie polecimy więc nim w dalekie trasy, ale według konstruktorów ładowanie baterii trwa zaledwie **8**. Jest wyposażony w zaawansowane systemy bezpieczeństwa, umożliwiające między innymi **9** ładowanie i unikanie kolizji. Choć minie jeszcze trochę czasu, zanim wymienimy nasze samochody na takie pojazdy, łatwo sobie wyobrazić, że ten wynalazek może zrewolucjonizować sposoby podróżowania.

- 1.** Obwód prostokąta $ABCD$ jest równy 44 cm. Bok BC jest o 6 cm krótszy od boku AB . Okręgi o środkach O i S mają jeden punkt wspólny. Jaka długość ma odcinek OS ?



5 cm	6,5 cm	7 cm
XIX	XX	XXI

- 2.** Korzystając z danych przedstawionych na rysunkach, wyznacz i wskaż wartość wyrażenia $2\alpha - \beta + \gamma$.



64°	126°	58°
rozwoju przedsiębiorstw	kreatywności	technologicznych innowacji

3. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Kąt, którego miara jest o 56° mniejsza niż miara kąta półpełnego, jest rozwarty.	P	F
Jeśli odcinek PS jest prostopadły do prostej k , a punkt S leży na tej prostej, to długość odcinka PS jest większa niż odległość punktu P od prostej k .	P	F

FP	PF	PP
samochód automatyczny	dron pasażerski	rower elektryczny

4. Ile zdań zapisanych poniżej zawiera prawdziwe informacje?

- Miara kąta rozwartego utworzonego przez wskazówki zegara o godz. 13:30 jest równa 135° .
- Wskazówka minutowa w ciągu 5 min obraca się o 25° .
- Wskazówka godzinowa w ciągu 2 h obraca się o 60° .
- Z odcinków o długościach: 4,5 cm; 1,2 dm; 70 mm można zbudować trójkąt.
- Każdy trójkąt ma dokładnie trzy osie symetrii.

dokładnie dwa	dokładnie trzy	więcej niż trzy
dziedzinie transportu	dziedzinie turystyki	rozwoju nauki

5. W pewnym trójkącie, którego obwód wynosi 54 cm, jeden z boków jest dwa razy dłuższy od najkrótszego, a drugi jest o 6 cm dłuższy od najkrótszego boku. Jaką długość ma najdłuższy bok?

24 cm	12 cm	16 cm
ośmioma śmigłami	dwoma śmigłami	jednym śmigłem

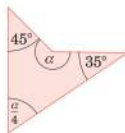
6. Na rysunku przedstawiono czworokąt. Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

I. Ile wynosi miara kąta α ?

- A. 174° B. 224°

II. Jaki to czworokąt?

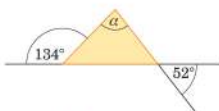
- C. Wypukły. D. Wklęsły.



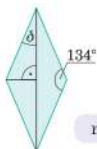
BC	AD	BD
zabawkowy	spalinowy	elektryczny

7. Ustal miary kątów oznaczonych literami greckimi, a następnie wskaż wartość wyrażenia zapisanego poniżej.

$$(\alpha + \delta + \omega) - (\beta - \gamma + \epsilon) = ?$$

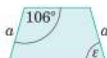


równoległobok



romb

trapez



46°	100°	220°
75 km/h	100 km/h	30 km/h

8. Równoległobok $ABCD$ i trapez równoramienny $EFGH$ mają takie same obwody. W trapezie $EFGH$ jedna podstawa ma długość 6,5 cm, a druga jest od niej trzy razy dłuższa. Ramiona w tym trapezie są o 7 cm krótsze od dłuższej podstawy. Jeden z boków równoległoboku jest dwa razy dłuższy od drugiego. Jaka długość ma krótszy bok równoległoboku $ABCD$?

8,5 cm	10 cm	17 cm
godzinę	5 godzin	jeden dzień

9. Cezary narysował trójkąt równoboczny o boku długości 4 cm, a następnie dorysował do niego równoległobok o bokach długości 4 cm i 2 cm w ten sposób, że powstał trapez. Oblicz miarę największego kąta tego trapezu.

60°	120°	150°
manualne	automatyczne	natychmiastowe



1. Narysuj prostą b oraz punkt A , który nie leży na tej prostej, a następnie skonstruuj prostą prostopadłą do prostej b przechodzącą przez punkt A .

Konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej a przechodzącej przez dany punkt P , który nie leży na prostej a

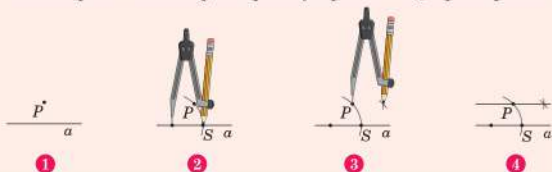
- 1 Narysuj prostą a i punkt P , który nie leży na tej prostej.
- 2 Ustaw rozwartość cyrkla na dowolną szerokość większą niż odległość punktu P od prostej a , następnie z punktu P zakresł dwa łuki, które przetną prostą a .
- 3 Ustaw rozwartość cyrkla na szerokość większą niż połowa powstałego odcinka, a następnie zakresł łuki o tym samym promieniu z obu końców tego odcinka.
- 4 Poprowadź prostą przez punkt przecięcia łuków oraz punkt P . Jest to szukana prosta prostopadła do prostej a , przechodząca przez punkt P .



2. Narysuj prostą b oraz punkt A , który nie leży na tej prostej, a następnie skonstruuj prostą równoległą do prostej b przechodzącą przez punkt A .

Konstrukcja prostej równoległej do danej prostej a przechodzącej przez dany punkt P , który nie leży na prostej a

- 1 Narysuj prostą a i punkt P , który nie leży na tej prostej.
- 2 Poprowadź łuk z dowolnego punktu na prostej a , przechodzący przez punkt P i przecinający prostą a . Punkt przecięcia łuku i prostej a oznacz jako S .
- 3 Nie zmieniając rozwartości cyrkla, zakresł łuki z punktów P i S .
- 4 Poprowadź prostą przez punkt przecięcia łuków oraz punkt P . Jest to szukana prosta równoległa do prostej a przechodząca przez punkt P .



3. Narysuj kąt rozwarty o wierzchołku w punkcie O , a następnie podziel go konstrukcyjnie na cztery równe kąty.

Konstrukcja podziału danego kąta na dwa równe kąty

- 1 Narysuj kąt o wierzchołku w punkcie O .
- 2 Ustaw cyrkiel na dowolną rozwartość i poprowadź łuk z punktu O przecinający ramiona kąta. Punkty przecięcia łuku i ramiona kąta oznacz A i B .
- 3 Nie zmieniając rozwartości cyrkla, zakreśl łuki z punktu A i z punktu B .
- 4 Poprowadź prostą przechodzącą przez punkt przecięcia łuków oraz punkt O . Jest to prosta, która dzieli kąt na dwa kąty o równych miarach.



1



2

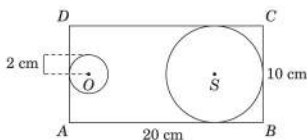


3

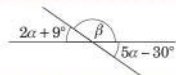


4

4. Na rysunku przedstawiono prostokąt $ABCD$ oraz dwa okręgi, których środkami są punkty O oraz S . Okrąg o środku O ma jeden punkt wspólny z bokiem prostokąta, a okrąg o środku S ma trzy punkty wspólne z bokami prostokąta. Jaka jest długość odcinka OS , jeśli jest on równoległy do boku AB ?



5. Na rysunku przedstawiono dwie proste, które przecinają się w jednym punkcie. Oblicz miary kątów α i β .



6. W pewnym trójkącie miara jednego z kątów jest pięć razy mniejsza od miary drugiego kąta i o 40° mniejsza od miary trzeciego. Podaj miary kątów w tym trójkącie i określ jego rodzaj ze względu na miary kątów.

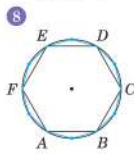
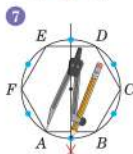
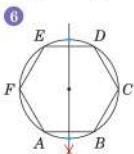
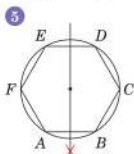
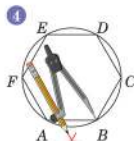
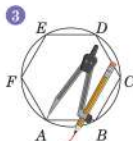
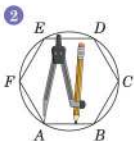
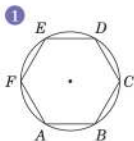
7. Znajdź długość:

- a) boku rombu o obwodzie takim samym jak obwód równoległoboku, w którym jeden bok ma 24 cm, a drugi bok stanowi 0,6 jego długości;
- b) ramienia trapezu równoramiennego o obwodzie 50 cm, w którym ramię jest o 3 cm dłuższe od górnej podstawy, a podstawa dolna jest od niej 2,5 razy dłuższa.

Jedną z form połączenia matematyki i sztuki jest haft matematyczny, czyli technika tworzenia wzorów za pomocą igły i nici, oparta na zasadach matematycznych, zwłaszcza geometrii.



1. Na kartce A4 z bloku technicznego skonstruuj dwunastokąt foremny zgodnie z poniższą instrukcją.
- 1 Konstruujemy sześciokąt foremny zgodnie z instrukcją na stronie 181.
- 2 Wbijamy nóżkę cyrkla w punkt A i ustawiamy rozwartość cyrkla, tak aby była ona większa od połowy długości odcinka AB .
- 3 Z punktu A kreślimy łuk.
- 4 Nie zmieniając rozwartości cyrkla, kreślimy łuk z punktu B .
- 5 Prowadzimy prostą przechodzącą przez punkt przecięcia się łuków oraz środek okręgu.
- 6 Punkty przecięcia prostej i okręgu to dwa przeciwległe wierzchołki dwunastokąta.
- 7 Ustawiamy rozwartość cyrkla na odległość między punktem A i powstałym wierzchołkiem dwunastokąta, a następnie nie zmieniając rozwartości cyrkla, odkładamy ten odcinek z każdego z punktów: B, C, D, E i F .
- 8 Łączymy kolejno wszystkie punkty na okręgu odcinkami. Powstała figura to dwunastokąt foremny.

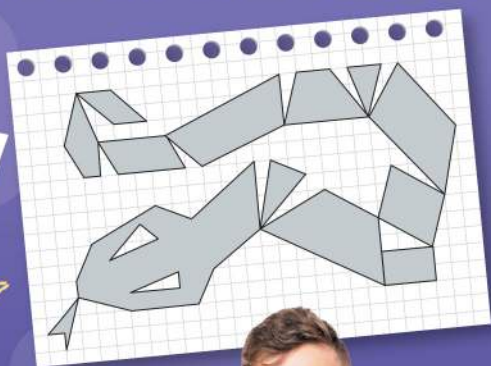


2. Korzystając z pinezki, przekłuj wierzchołki dwunastokąta foremnego. Odwróć kartkę na drugą stronę. Narysuj boki i przekątne tego dwunastokąta. Aby efekt był jeszcze lepszy, możesz użyć nitki i igły.

DZIAŁ **V**

W ŚWIECIE PÓŁ WIEŁOKĄTÓW

Ten rysunek składa się
z samych wielokątów.
Potrafisz obliczyć
jego pole?



Oczywiście! Wystarczy rysunek
podzielić na wielokąty (kwadraty,
trójkąty, równoległoboki lub trapezy),
których pola umiemy obliczyć.

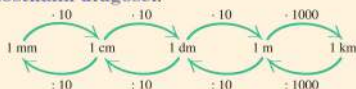
1. Pola czworokątów

- ▶ Jakie są zależności między jednostkami pola?
- ▶ Jak obliczyć pole czworokąta: kwadratu, prostokąta, równoległoboku, rombu, trapezu?
- ▶ W jaki sposób wyznaczyć długości wybranych odcinków w czworokącie, znając jego pole?

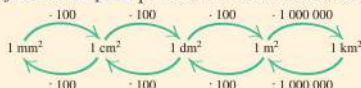


Analizuj!

Aby sprawnie zamieniać jednostki pola, należy pamiętać zależności między **jednostkami długości**.



Podstawowe **jednostki pola** powierzchni oraz zależności między nimi:



Przykład 1.

Pełnowymiarowe boisko do piłki ręcznej ma powierzchnię 800 m², a do piłki nożnej – 7140 m². Oblicz, ile decymetrów kwadratowych ma boisko do piłki ręcznej oraz ile kilometrów kwadratowych ma boisko do piłki nożnej.



boisko do piłki ręcznej 800 m²



boisko do piłki nożnej 7140 m²

Sposób 1

Wiemy, że $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$ oraz $1 \text{ m}^2 = 0,000001 \text{ km}^2$.

Boisko do piłki ręcznej: $800 \text{ m}^2 = 800 \cdot 1 \text{ m}^2 = 800 \cdot 100 \text{ dm}^2 = 80\,000 \text{ dm}^2$

Boisko do piłki nożnej:

$7140 \text{ m}^2 = 7140 \cdot 1 \text{ m}^2 = 7140 \cdot 0,000001 \text{ km}^2 = 0,00714 \text{ km}^2$

Sposób 2

Wiemy, że $1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$ oraz $1 \text{ m} = 0,001 \text{ km}$.

Boisko do piłki ręcznej:

$800 \text{ m}^2 = 800 \cdot 1 \text{ m}^2 = 800 \cdot 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 800 \cdot 10 \text{ dm} \cdot 10 \text{ dm} = 80\,000 \text{ dm}^2$

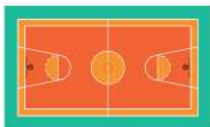
Boisko do piłki nożnej:

$7140 \text{ m}^2 = 7140 \cdot 1 \text{ m}^2 = 7140 \cdot 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 7140 \cdot 0,001 \text{ km} \cdot 0,001 \text{ km} = 0,00714 \text{ km}^2$

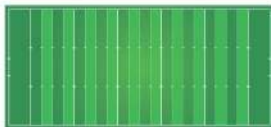
Odp. Pole powierzchni boiska do piłki ręcznej wynosi $80\,000 \text{ dm}^2$, a boiska do piłki nożnej $0,00714 \text{ km}^2$.

Ćwiczenie 1.

Pełnowymiarowe boisko do koszykówki ma powierzchnię 420 m^2 , a do rugby – 6900 m^2 . Oblicz, ile decymetrów kwadratowych ma boisko do koszykówki oraz ile kilometrów kwadratowych ma boisko do rugby.



boisko do koszykówki 420 m^2



boisko do rugby 6900 m^2

Powierzchnie działek, pól uprawnych itp. wyraża się w jednostkach:

ar $\rightarrow 1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2$ oraz hektar $\rightarrow 1 \text{ ha} = 100 \text{ a} = 10\,000 \text{ m}^2$.



Przykład 2.

Powierzchnia działki jest równa $0,72 \text{ ha}$. Wyraz tę wielkość w metrach kwadratowych.

Wiemy, że $1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2$.

Powierzchnia działki:

$0,72 \text{ ha} = 0,72 \cdot 1 \text{ ha} = 0,72 \cdot 10\,000 \text{ m}^2 = 7200 \text{ m}^2$

Odp. Działka ma powierzchnię 7200 m^2 .



Ćwiczenie 2.

Powierzchnia działki jest równa $9,5 \text{ a}$. Wyraz tę wielkość w metrach kwadratowych.

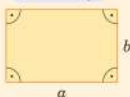
Pola wybranych czworokątów

kwadrat



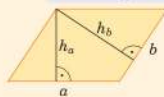
$$P = a \cdot a = a^2$$

prostokąt



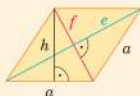
$$P = a \cdot b$$

równoległobok



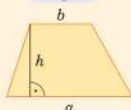
$$P = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

romb



$$P = a \cdot h = \frac{e \cdot f}{2}$$

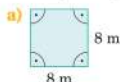
trapez



$$P = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$$

Przykład 3.

Oblicz pole figury przedstawionej na rysunku.



$$P = 8 \text{ m} \cdot 8 \text{ m} = 64 \text{ m}^2$$

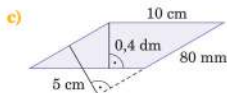


$$0,05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$$

$$P = 13 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 65 \text{ cm}^2$$



Pamiętaj, aby przed wykonaniem obliczeń **ujednolicić jednostki**.

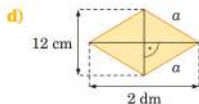


$$0,4 \text{ dm} = 4 \text{ cm}$$

$$80 \text{ mm} = 8 \text{ cm}$$

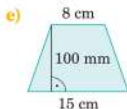
$$P = 10 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 40 \text{ cm}^2$$

$$P = 8 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 40 \text{ cm}^2$$



$$2 \text{ dm} = 20 \text{ cm}$$

$$P = \frac{20 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm}}{2} = 120 \text{ cm}^2$$



$$100 \text{ mm} = 10 \text{ cm}$$

$$P = \frac{(15 \text{ cm} + 8 \text{ cm}) \cdot 10^{\text{cm}}}{2} =$$

$$= 23 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 115 \text{ cm}^2$$

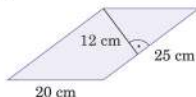
Ćwiczenie 3.

Oblicz pole:

- kwadratu o boku długości 4 cm;
- prostokąta o wymiarach 16 cm i 8 mm;
- równoległoboku, w którym podstawa ma długość 18 cm, a poprowadzona do niej wysokość jest równa 3 dm;
- rombu o przekątnych długości 5 m oraz 5 dm;
- trapezu, w którym podstawy mają długości 42 cm i 24 dm, a jego wysokość wynosi 4 m.

Przykład 4.

Na rysunku przedstawiono równoległobok. Oblicz wysokość tego równoległoboku poprowadzoną do boku o długości 20 cm.



Przyjmujemy następujące oznaczenia:

$a = 20 \text{ cm}$, $b = 25 \text{ cm}$ – długości boków równoległoboku

h_a – wysokość poprowadzona do boku a (w centymetrach)

$h_b = 12 \text{ cm}$ – wysokość poprowadzona do boku b

Pole P równoległoboku o boku długości b i wysokości h_b do niego poprowadzonej wyraża się wzorem: $P = b \cdot h_b$. Obliczymy je, podstawiając odpowiednie wartości.

$$P = 25 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} = 300 \text{ cm}^2$$

Wiemy, że pole P tego równoległoboku można też obliczyć ze wzoru: $P = a \cdot h_a$. Podstawimy do wzoru znane wielkości i wyznaczmy wysokość h_a .

$$300 = 20 \cdot h_a \quad | : 20$$

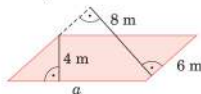
$$300 : 20 = 20 : 20 \cdot h_a$$

$$h_a = 15 \text{ [cm]}$$

Odp. Wysokość poprowadzona do boku o długości 20 cm jest równa 15 cm.

Ćwiczenie 4.

Oblicz długość boku a równoległoboku przedstawionego na rysunku obok.



Przykład 5.

W pokoju Cezarego okno ma kształt trapezu prostokątnego (patrz rysunek) o polu $0,24 \text{ m}^2$. Oblicz długość najkrótszego boku tego trapezu.



Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$a = 50 \text{ cm}$, b – długości podstaw trapezu (w centymetrach)

$h = 80 \text{ cm}$ – wysokość trapezu

$P = 0,24 \text{ m}^2$ – pole trapezu

Aby ujednolicić jednostki, wyrazimy pole trapezu w centymetrach kwadratowych:
 $0,24 \text{ m}^2 = 0,24 \cdot 1 \text{ m}^2 = 0,24 \cdot 10\,000 \text{ cm}^2 = 2400 \text{ cm}^2$.

Pole trapezu o podstawach długości a i b oraz wysokości h wyraża się wzorem:

$P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$. Podstawimy do wzoru znane wielkości i wyznaczymy długość b .

$$2400 = \frac{(50+b) \cdot 80}{2}$$

$$2400 = (50+b) \cdot 40 \quad | : 40$$

$$2400 : 40 = (50+b) \cdot 40 : 40$$

$$60 = 50+b \quad | - 50$$

$$60 - 50 = 50 - 50 + b$$

$$b = 10 \text{ [cm]}$$

Odp. Najkrótszy bok tego trapezu ma długość 10 cm.

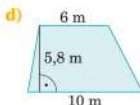
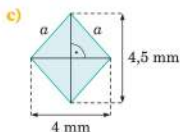
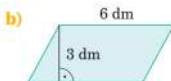
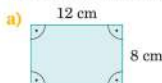
Ćwiczenie 5.

Błat stołu biurowego ma kształt trapezu prostokątnego (patrz rysunek) o polu 54 dm^2 . Oblicz długość dłuższej podstawy tego trapezu.



Rozwiąż zadania

1. Oblicz pole figury.



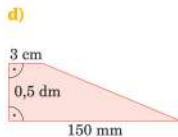
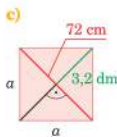
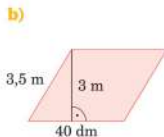
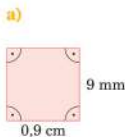
2. Zamień:

- a) na milimetry kwadratowe: $7 \text{ cm}^2 \cdot 1,2 \text{ cm}^2 \cdot 9 \text{ dm}^2 \cdot 0,00019 \text{ m}^2$;
 b) na centymetry kwadratowe: $3 \text{ dm}^2 \cdot 17,21 \text{ dm}^2 \cdot 8 \text{ m}^2 \cdot 0,0056 \text{ m}^2$;
 c) na decymetry kwadratowe: $4 \text{ m}^2 \cdot 3,6 \text{ m}^2 \cdot 1700 \text{ cm}^2 \cdot 28\,000 \text{ mm}^2$;
 d) na metry kwadratowe: $600 \text{ dm}^2 \cdot 18 \text{ dm}^2 \cdot 137\,000 \text{ cm}^2 \cdot 210 \text{ cm}^2$.

3. Zamień:

- a) na ary: $600 \text{ m}^2 \cdot 3 \text{ ha} \cdot 16\,021 \text{ m}^2$,
 b) na hektary: $70\,000 \text{ m}^2 \cdot 9100 \text{ a} \cdot 520 \text{ m}^2$.

4. Oblicz pole figury.



5. Uzupełnij zdanie.

- a) W prostokącie jeden z boków ma długość 7 cm, a długość drugiego stanowi 1,5 długości pierwszego. Pole tego prostokąta wynosi .
 b) Pole prostokąta o bokach długości 12 cm i jest równe 156 cm^2 .
 c) Pole kwadratu o obwodzie 44 cm wynosi .
 d) Obwód kwadratu o polu 49 cm^2 wynosi .

6. Narysuj w zeszycie

a) kwadrat o polu 9 cm^2 ,

b) prostokąt o polu 12 cm^2 .

Czy istnieje więcej niż jedno rozwiązanie tego zadania? Uzasadnij swoją odpowiedź.

7. Przekątne rombu mają długości 6 dm i 8 dm .

a) Oblicz pole tego rombu.

b) Ile decymetrów długości ma bok tego rombu, jeśli jego wysokość wynosi $4,8 \text{ dm}$?

8. Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

I. Ile centymetrów ma wysokość równoległoboku poprowadzona do boku długości 8 cm , jeśli pole tego równoległoboku jest równe 10 cm^2 ?

A. $1\frac{1}{4} \text{ cm}$

B. 2 cm

II. Ile decymetrów długości ma druga przekątna rombu o polu $10,5 \text{ dm}^2$, jeśli jego pierwsza przekątna ma długość $3,5 \text{ dm}$?

C. 6 dm

D. $17,5 \text{ dm}$

9. Narysuj w zeszycie

a) równoległobok o polu 8 cm^2 ,

b) romb o polu 6 cm^2 .

10. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

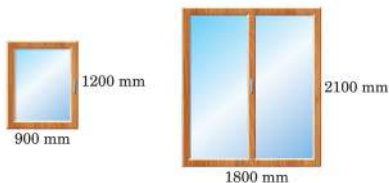
Pole trapezu, którego jedna z podstaw ma długość $1,2 \text{ dm}$, druga jest o 6 cm dłuższa, a wysokość wynosi 1 dm , jest równe 150 cm^2 .	P	F
Pole trapezu prostokątnego o podstawach długości 7 cm i 13 cm oraz ramionach długości 8 cm i 10 cm jest równe 80 cm^2 .	P	F
Jeśli pole trapezu wynosi 48 cm^2 , a suma długości jego podstaw jest równa 16 cm , to wysokość tego trapezu ma długość 3 cm .	P	F

11. Z trzech jednakowych trójkątów równoramiennych o podstawie długości 5 cm i wysokości równej 8 cm poprowadzonej do tej podstawy zbudowano czworokąt. Jaki to czworokąt? Ile jest równe pole tego czworokąta?

12. W szkole Karoliny w ramach Szkolnego Budżetu Obywatelskiego tworzona jest strefa relaksu. Będzie się ona mieścić w pomieszczeniu, którego podłoga jest prostokątem o wymiarach $3 \text{ m} \times 4,5 \text{ m}$.

- a) Ile złotych trzeba przeznaczyć na wykładzinę podłogową do strefy relaksu, jeśli metr kwadratowy wykładziny kosztuje 38 zł?
- b) Jakie wymiary i jaką powierzchnię będzie miała strefa relaksu na planie szkoły w skali 1 : 300?

13. Starszy brat Kasi, Łukasz, postanowił zarobić, myjąc okna. Ofertę przedstawił na plakacie. Pierwszym jego klientem jest ich ciocia, w której mieszkaniu jest 6 jednakowych okien oraz dwuszybowe okno tarasowe (takie jak na rysunku poniżej). Ile złotych otrzyma Łukasz, jeśli umyje wszystkie okna z obu stron?



14. Poniżej przedstawiono ceny trzech działek. Zapoznaj się z nimi. W której ofercie cena za metr kwadratowy jest najwyższa?



A to ciekawe

30 maja 2021 roku dwie chińskie firmy pobiły rekord w stworzeniu największej kolorowanki na świecie. Ma ona kształt prostokąta o wymiarach $4,11 \text{ m} \times 4,1 \text{ m}$.

Uczniowie zsunęli 10 prostokątnych ławek o wymiarach $160 \text{ cm} \times 60 \text{ cm}$ oraz 10 kwadratowych ławek o boku długości 6 dm. Czy na tak stworzonej powierzchni można rozłożyć tę kolorowankę?

1. Oblicz pole:

- kwadratu o boku długości 12 cm;
- prostokąta o wymiarach 3,5 mm $\times$ 9 mm;
- rombu o przekątnych długości 12 cm i 0,36 m;
- równoległoboku o boku długości 250 mm i wysokości poprowadzonej do tego boku równej 7 dm.

2. Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

I. Które wielkości są równe?

A. 200 mm², 2 cm², 20 m²

B. 50 000 cm², 500 dm², 5 m²

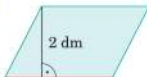
II. Które wielkości są równe?

C. $\frac{1}{4}$ a, 25 m², 2500 cm²

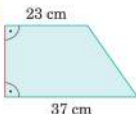
D. 0,04 ha, 4 a, 400 m²

3. Na rysunkach przedstawiono równoległobok oraz dwa trapezy niebędące równoległobokami. Pole każdej z tych figur wynosi 6 dm². Oblicz długość odcinka zaznaczonego czerwonym kolorem.

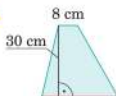
I.



II.



III.



4. Mama Antka remontuje kuchnię. Na jednej z prostokątnych ścian chce położyć mozaikę szklaną. Ściana ta ma szerokość 4,2 m oraz wysokość 240 cm.

- Ile płytek musi kupić mama Antka, jeśli jedna płytka jest kwadratem o boku długości 30 cm?
- Jaki będzie koszt zakupu płytek, jeśli jedna płytka kosztuje 32 zł?



2. Pole trójkąta

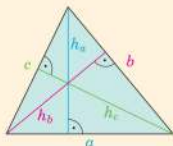
- ▶ Jak obliczyć pole trójkąta?
- ▶ W jaki sposób wyznaczyć długości wybranych odcinków w trójkącie, znając jego pole?



Analizuj!

Wysokość trójkąta to odcinek, który łączy wierzchołek trójkąta z przeciwległym bokiem (lub jego przedłużeniem) i który jest prostopadły do tego boku.

Pole trójkąta to połowa iloczynu długości boku oraz wysokości poprowadzonej do tego boku, czyli:



$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

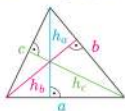
h_a – wysokość poprowadzona do boku a

h_b – wysokość poprowadzona do boku b

h_c – wysokość poprowadzona do boku c

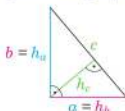
Wysokości w trójkącie

ostrokątnym



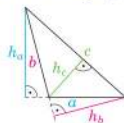
Wszystkie wysokości leżą wewnątrz trójkąta.

prostokątnym



Przyprostokątne są wysokościami.

rozwartokątnym

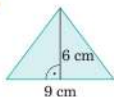


Dwie wysokości są poprowadzone do przedłużenia boków.

Przykład 1.

Oblicz pole trójkąta przedstawionego na rysunku. Pamiętaj o ustaleniu jednakowych jednostek długości podstawy i wysokości trójkąta.

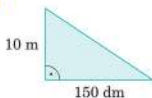
a)



$$P = \frac{9 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm}}{2} =$$

$$= 9 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 27 \text{ cm}^2$$

b)

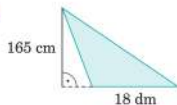


$$150 \text{ dm} = 15 \text{ m}$$

$$P = \frac{15 \text{ m} \cdot 10 \text{ m}}{2} =$$

$$= 15 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 75 \text{ m}^2$$

c)



$$165 \text{ cm} = 16,5 \text{ dm}$$

$$P = \frac{18 \text{ dm} \cdot 16,5 \text{ dm}}{2} =$$

$$= 9 \text{ dm} \cdot 16,5 \text{ dm} =$$

$$= 148,5 \text{ dm}^2$$

Ćwiczenie 1.

Oblicz pole trójkąta:

- równoramiennego o podstawie długości 12 cm i wysokości poprowadzonej do niej równej 7 cm,
- prostokątnego o przyprostokątnych długości 24 dm i 200 cm,
- rozwartokątnego o podstawie długości 34 mm i wysokości poprowadzonej do przedłużenia tej podstawy równej 0,25 cm.

Przykład 2.

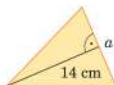
Pole trójkąta przedstawionego na rysunku wynosi 84 cm^2 . Oblicz długość boku a tego trójkąta.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

a – długość boku trójkąta (w centymetrach)

$h_a = 14 \text{ cm}$ – wysokość poprowadzona do boku a

$P = 84 \text{ cm}^2$ – pole trójkąta



Pole trójkąta P o boku długości a i wysokości do niego poprowadzonej h_a wyraża się wzorem: $P = \frac{a \cdot h_a}{2}$. Podstawimy do wzoru znane wielkości i wyznaczymy długość a .

$$84 = \frac{a \cdot 14}{2}$$

$$84 = a \cdot 7 \quad | : 7$$

$$84 : 7 = a \cdot 7 : 7$$

$$a = 12 \text{ [cm]}$$

Odp. Bok a tego trójkąta ma długość 12 cm.

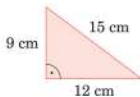
Ćwiczenie 2.

Pole trójkąta przedstawionego na rysunku wynosi 60 cm^2 .
Oblicz długość boku a tego trójkąta.



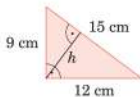
Przykład 3.

Na rysunku przedstawiono trójkąt prostokątny. Jakie długości mają jego wszystkie wysokości?



Dwie z wysokości tego trójkąta są jego przyprostokątnymi, więc ich długości to 9 cm oraz 12 cm.

Wykonamy rysunek pomocniczy, na którym zaznaczymy trzecią szukaną wysokość h poprowadzoną do przeciwprostokątnej trójkąta.



Aby wyznaczyć długość wysokości h , najpierw obliczmy pole trójkąta. Skorzystamy ze wzoru $P = \frac{a \cdot h_a}{2}$, gdzie $a = 12 \text{ cm}$ i $h_a = 9 \text{ cm}$.

$$P = \frac{9 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm}}{2} = 9 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 54 \text{ cm}^2$$

Przeciwprostokątną trójkąta oznaczmy jako $c = 15 \text{ cm}$.

Znając długość przeciwprostokątnej c oraz pole trójkąta, możemy obliczyć wysokość h .

Pole trójkąta P o boku długości c i wysokości do niego poprowadzonej h wyraża się wzorem: $P = \frac{c \cdot h}{2}$. Podstawimy do wzoru znane wielkości i wyznaczmy długość przeciwprostokątnej c .

$$P = \frac{c \cdot h}{2}$$

$$54 = \frac{15 \cdot h}{2}$$

$$54 = 7,5 \cdot h \quad | : 7,5$$

$$54 : 7,5 = 7,5 : 7,5 \cdot h$$

$$h = 540 : 75$$

$$h = 7,2 \text{ [cm]}$$

			7, 2		
	5	4	0	:	7 5
-	5	2	5		
		1	5	0	
-		1	5	0	
			0		

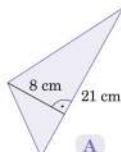
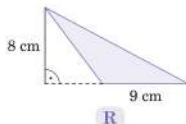
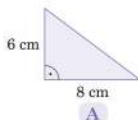
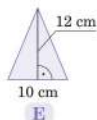
Odp. Wysokości w tym trójkącie prostokątnym są równe: 9 cm, 12 cm oraz 7,2 cm.

Ćwiczenie 3.

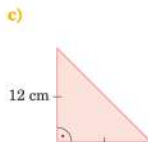
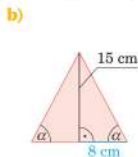
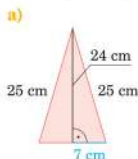
Oblicz długości wszystkich wysokości w trójkącie prostokątnym o bokach długości: 7 cm, 24 cm, 25 cm.

Rozwiąż zadania

1. Oblicz pole każdego z trójkątów. Uporządkuj wyniki w kolejności rosnącej, a otrzymasz hasło – angielską nazwę powierzchni.



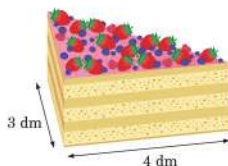
2. Oblicz pole trójkąta przedstawionego na rysunku.



Wysokość trójkąta równoramiennego poprowadzona do podstawy dzieli ją na dwie równe części.



3. Zosia chce przygotować tort urodzinowy dla swojej przyjaciółki. Jego górna i dolna podstawa ma mieć kształt trójkąta prostokątnego (patrz rysunek) o przyprostokątnych długości 3 dm i 4 dm. Zosia planuje pokrycie wierzchu tortu polewą truskawkową. Ile opakowań polewy musi przygotować, jeśli zawartość jednego opakowania wystarcza na pokrycie 150 cm^2 powierzchni ciasta?



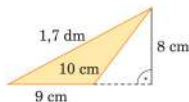
4. Oblicz pole trójkąta prostokątnego o bokach długości:

a) 3 dm, 40 cm, 0,5 m;

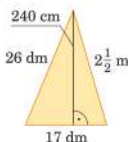
b) 1 m, 6 dm, $\frac{4}{5}$ m.

5. Oblicz pole i obwód trójkąta.

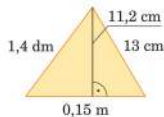
a)



b)

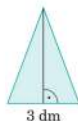


c)



6. Pole narysowanego trójkąta wynosi 6 dm^2 . Korzystając z podanej długości podstawy trójkąta, oblicz, jakiej długości jest jego zaznaczona wysokość.

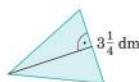
a)



b)

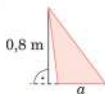


c)



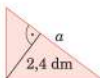
7. Pod rysunkiem trójkąta zapisano jego pole. Oblicz, jaka jest długość boku a trójkąta.

a)



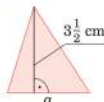
$$P = 20 \text{ dm}^2$$

b)



$$P = 600 \text{ cm}^2$$

c)



$$P = 5,6 \text{ cm}^2$$

8. Jeden z boków trójkąta ma długość 6 cm, a wysokość, która jest poprowadzona do tego boku, ma długość 1,5 dm. Drugi bok tego trójkąta ma długość 18 cm.

Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

I. Ile wynosi pole tego trójkąta?

A. 45 cm^2

B. 90 cm^2

II. Jaką długość ma wysokość trójkąta, która jest poprowadzona do jego drugiego boku?

C. 2,5 cm

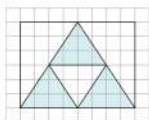
D. 5 cm

9. Na planie miasta wykonanym w skali 1 : 800 przedstawiono skwer w kształcie trójkąta prostokątnego. Jaka powierzchnię w metrach kwadratowych ma ten skwer w rzeczywistości?

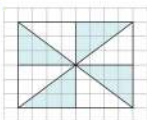


10. Oblicz pole zamalowanej części danej figury. Przyjmij, że jedna kratka ma długość 0,5 cm.

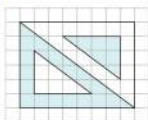
a)



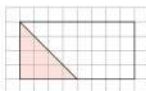
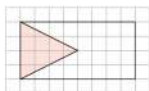
b)



c)



11. Zosia twierdzi, że pola wszystkich niżej narysowanych trójkątów są takie same. Czy ma rację? Uzasadnij swoją odpowiedź.



12. Jak zmieni się pole trójkąta, jeśli:

- długość jego wysokości zwiększymy dwukrotnie?
- długość jego podstawy zmniejszymy dwukrotnie?
- zarówno długość wysokości, jak i długość podstawy zwiększymy dwukrotnie?

Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz pole trójkąta o podstawie długości a i wysokości h poprowadzonej do tej podstawy.

a) $a = 12 \text{ cm}$, $h = 11 \text{ cm}$

b) $a = 2 \text{ m}$, $h = 30 \text{ dm}$

c) $a = 8 \text{ cm}$, $h = 0,5 \text{ dm}$

d) $a = 2\frac{1}{2} \text{ cm}$, $h = 100 \text{ mm}$

2. Ile wynosi pole trójkąta prostokątnego o bokach długości: 9 cm, 40 cm, 41 cm?

A. 180 cm^2

B. $184,5 \text{ cm}^2$

C. 360 cm^2

D. 820 cm^2

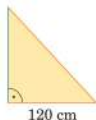
3. Pod rysunkiem trójkąta zapisano jego pole. Oblicz, jaka jest długość niebieskiego boku lub niebieskiej wysokości trójkąta.

a)



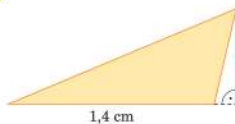
$P = 24 \text{ cm}^2$

b)



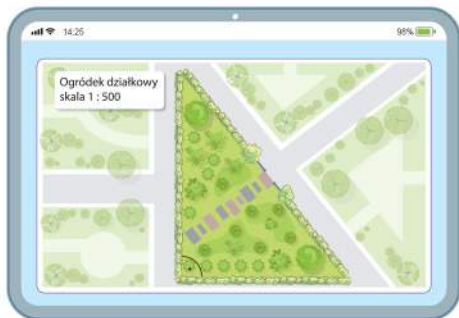
$P = 78 \text{ dm}^2$

c)



$P = 45\frac{1}{2} \text{ mm}^2$

4. Zosia wykonała plan trójkątnego ogródka swojej babci w skali 1 : 500. W rzeczywistości podstawa tego trójkąta ma długość 1800 cm, a wysokość poprowadzona do tej podstawy wynosi 22,5 m. Jaka powierzchnię ma ogródek babci na planie Zosi?



3. Pola wielokątów

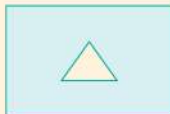
- ▶ Jak obliczyć pola trójkątów i czworokątów?
- ▶ Jak obliczyć pole wielokąta przez uzupełnienie lub przez podział?



Analizuj!



Pole figury przedstawionej na rysunku obok możemy obliczyć, odejmując od pola prostokąta pole trójkąta.



Przykład 1.

Pan Konrad otrzymał od firmy projektującej ogrody plan ogrodu. Jedną z części tego ogrodu – oczko wodne i otaczający go trawnik – została przedstawiona na rysunku. Oblicz powierzchnię, jaką będzie zajmował trawnik otaczający oczko.



Obliczymy powierzchnię tej części ogrodu ze wzoru na pole trójkąta $P = \frac{a \cdot h}{2}$, gdzie $a = 10$ m i $h = 15$ m.

$$P_{\Delta} = \frac{10 \cdot 15}{2} = 5 \cdot 15 = 75 \text{ [m}^2\text{]}$$

Obliczymy powierzchnię oczka ze wzoru na pole prostokąta $P = a \cdot b$, gdzie $a = 5$ m i $b = 4$ m.

$$P_{\square} = 5 \cdot 4 = 20 \text{ [m}^2\text{]}$$

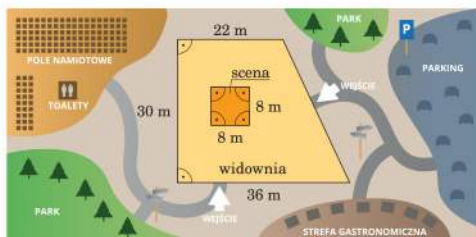
Obliczymy powierzchnię P , jaką będzie zajmował trawnik otaczający oczko.

$$P = P_{\Delta} - P_{\square} = 75 - 20 = 55 \text{ [m}^2\text{]}$$

Odp. Powierzchnia, jaką będzie zajmował trawnik otaczający oczko, wynosi 55 m^2 .

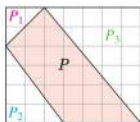
Ćwiczenie 1.

Na rysunku przedstawiono plan terenu, na którym odbywa się festiwal muzyczny. Na planie pokazano, gdzie znajduje się scena. Oblicz powierzchnię widowni, nie wliczając powierzchni, którą zajmuje scena.



Pole wielokąta można obliczyć przez

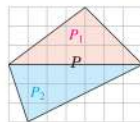
uzupełnienie,
np. do prostokąta



$$P = P_{\square} - P_1 - P_2 - P_3$$

lub

podział,
np. na trójkąty.



$$P = P_1 + P_2$$

Przykład 2.

Oblicz pole figury przedstawionej na rysunku.

Sposób 1

Pole figury przedstawionej na rysunku możemy obliczyć przez uzupełnienie jej do prostokąta.

Dopełnimy figurę **trójkątem** oraz **prostokątem**, tak aby otrzymać prostokąt.

Długości boków otrzymanego prostokąta to $10\text{ cm} + 3\text{ cm} = 13\text{ cm}$ oraz 8 cm .

Obliczymy pole trójkąta P_1 . Skorzystamy ze wzoru:

$$P = \frac{a \cdot h}{2}, \text{ gdzie } a = 3\text{ cm i } h = 8\text{ cm} - 5\text{ cm} = 3\text{ cm}.$$

$$P_1 = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2} [\text{cm}^2]$$

Obliczymy pole prostokąta P_2 . Skorzystamy ze wzoru: $P = a \cdot b$, gdzie $a = 10\text{ cm}$ i $b = 5\text{ cm}$.

$$P_2 = 10 \cdot 5 = 50 [\text{cm}^2]$$

Obliczymy pole prostokąta $P_{\square}$, którego boki mają długości 13 cm i 8 cm .

$$P_{\square} = 13 \cdot 8 = 104 [\text{cm}^2]$$

Obliczymy pole figury P .

$$P = P_{\square} - P_1 - P_2 = 104 - 4\frac{1}{2} - 50 = 99\frac{1}{2} - 50 = 49\frac{1}{2} [\text{cm}^2]$$

Sposób 2

Podzielimy figurę, tak aby otrzymać **równoległobok** oraz **trapez**. Pole P figury jest sumą pól równoległoboku i trapezu: $P = P_1 + P_2$.

Obliczymy pole równoległoboku P_1 .

Skorzystamy ze wzoru: $P = a \cdot h$, gdzie $a = 10\text{ cm}$ i $h = 8\text{ cm} - 5\text{ cm} = 3\text{ cm}$.

$$P_1 = 10 \cdot 3 = 30 [\text{cm}^2]$$

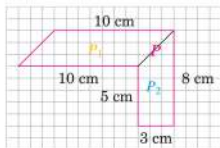
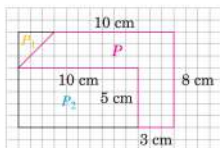
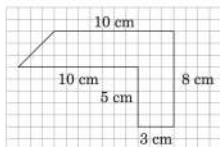
Obliczymy pole trapezu P_2 . Skorzystamy ze wzoru: $P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$, gdzie $a = 8\text{ cm}$, $b = 5\text{ cm}$ i $h = 3\text{ cm}$.

$$P_2 = \frac{(8+5) \cdot 3}{2} = \frac{13 \cdot 3}{2} = \frac{39}{2} = 19\frac{1}{2} [\text{cm}^2]$$

Obliczymy pole figury P .

$$P = P_1 + P_2 = 30 + 19\frac{1}{2} = 49\frac{1}{2} [\text{cm}^2]$$

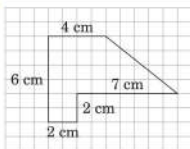
Odp. Pole figury wynosi $49\frac{1}{2}\text{ cm}^2$.



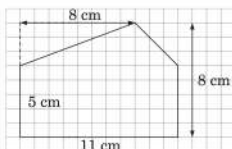
Ćwiczenie 2.

Oblicz pole figury przedstawionej na rysunku dwoma sposobami – przez uzupełnienie oraz przez podział.

a)



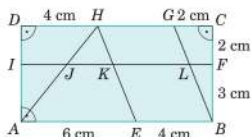
b)



Rozwiąż zadania

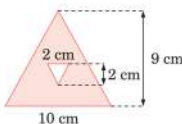
1. Na podstawie rysunku oblicz pole:

- trójkąta AEH ,
- równoległoboku $EBLK$,
- trapezu $AEHD$,
- trójkąta BCG ,
- trapezu $ABGD$,
- równoległoboku $KLGH$.

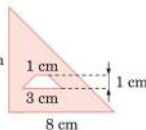


2. Na rysunkach przedstawiono trzy figury.

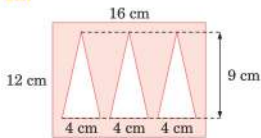
I.



II.



III.



Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

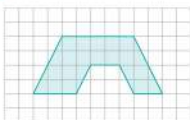
Pole figury I wynosi 43 cm^2 .	P	F
Pole figury II jest równe 30 cm^2 .	P	F
Pole figury III jest o 100 cm^2 większe niż pole figury I.	P	F

3. Oblicz pole figury. Przyjmij, że długość boku jednej kratki to 5 mm.

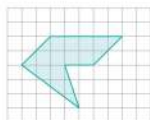
a)



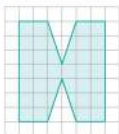
b)



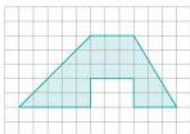
c)



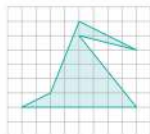
d)



e)

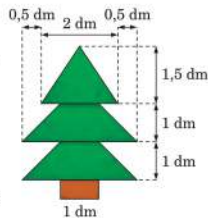


f)



4. Dany jest trapez prostokątny o podstawach długości 6 cm i 5 cm oraz wysokości równej $2\frac{1}{2}$ cm. Do krótszego ramienia tego trapezu dorysowano trójkąt równoramienny w ten sposób, że ramię trapezu jest podstawą trójkąta. Wysokość trójkąta poprowadzona do podstawy wynosi 3 cm. Oblicz pole powstałej figury.

5. Zosia przygotowuje choinki z kartonu. Każda choinka składa się z prostokąta i trzech trójkątów: jednego o wysokości 1,5 dm i podstawie długości 2 dm oraz dwóch o wysokościach 1,5 dm i podstawach długości 3 dm. Zosia najpierw wycina trójkąty z kartonu, skleja je w sposób przedstawiony na rysunku, a następnie okleja obustronnie choinkę zielonym papierem.

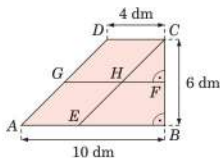


- Ile kartonu potrzebuje, żeby wyciąć jedną choinkę bez pnia?
- Ile zielonego papieru potrzebuje Zosia, żeby okleić jedną choinkę?



6. Wiedząc, że pole równoległoboku $GHCD$ wynosi 12 dm^2 , a trapezu $GFCD$ – $16,5 \text{ dm}^2$, oblicz pole:

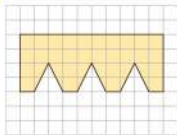
- trójkąta FCH ,
- równoległoboku $AEHG$,
- trapezu $EBFH$.



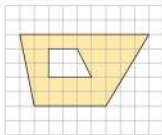
Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz pole zamalowanej figury. Przyjmij, że długość jednej kratki to 5 mm.

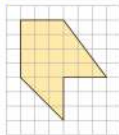
a)



b)



c)



2. Z prostokątnego kartonu o wymiarach $7\text{ cm} \times 14\text{ cm}$ Karol wyciął trapez o podstawach długości 3 cm i 9 cm oraz wysokości 3 cm , trójkąt o podstawie $7,5\text{ cm}$ i wysokości do niej poprowadzonej równej 2 cm oraz kwadrat o boku długości $1,5\text{ cm}$. Jaka powierzchnię ma karton, który pozostał po wycięciu figur?

3. Do prostokąta o bokach długości 10 cm i $1,3\text{ dm}$ dorysowano trójkąt prostokątny równoramienny w ten sposób, że ramię trójkąta pokrywa się z dłuższym bokiem prostokąta. Ile wynosi pole powstałego wielokąta?

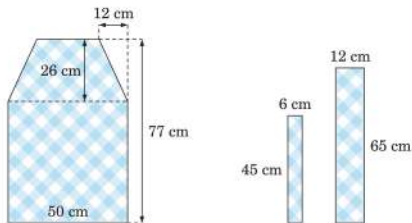
A. 63 cm^2

B. 180 cm^2

C. $214,5\text{ cm}^2$

D. 299 cm^2

4. Na rysunku przedstawiono wykrój fartucha kuchennego.



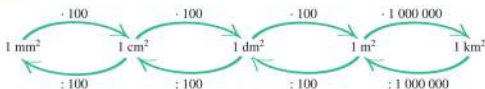
Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Krótsza podstawa trapezu równoramiennego będącego elementem wykroju ma 26 cm długości.	P	F
Aby uszyć taki fartuch, potrzeba więcej niż $0,5\text{ m}^2$ materiału.	P	F

PODSUMOWANIE DZIAŁU V W ŚWIECIE PÓL WIELOKĄTÓW

Powtórz wiadomości

Jednostki pola



$$1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ ha} = 100 \text{ a} = 10\,000 \text{ m}^2$$

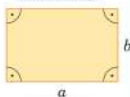
Pola czworokątów

kwadrat



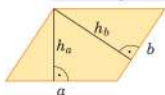
$$P = a \cdot a = a^2$$

prostokąt



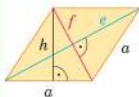
$$P = a \cdot b$$

równoległobok



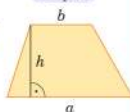
$$P = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

romb



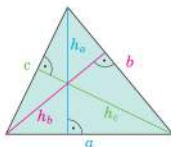
$$P = a \cdot h = \frac{e \cdot f}{2}$$

trapez



$$P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$$

Pole trójkąta



$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

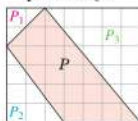
h_a – wysokość poprowadzona do boku a

h_b – wysokość poprowadzona do boku b

h_c – wysokość poprowadzona do boku c

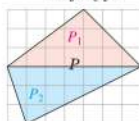
Pole wielokąta można obliczyć przez:

uzupełnienie,
np. do
prostokąta



$$P = P_{\square} - P_1 - P_2 - P_3$$

lub
podział,
np. na
trójkąty.



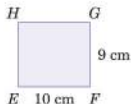
$$P = P_1 + P_2$$

Poćwicz przed sprawdzianem

1. Ile jest równe pole kwadratu, którego obwód wynosi 8 dm?

A. 40 cm^2 B. 2 dm^2 C. $40\,000 \text{ mm}^2$ D. 400 dm^2

2. Obwód prostokąta $ABCD$, którego bok AB ma długość 7 cm, jest o 8 cm mniejszy od obwodu prostokąta $EFGH$ przedstawionego na rysunku.



O ile centymetrów kwadratowych różnią się pola prostokątów $ABCD$ i $EFGH$?

A. O 22 cm^2 . B. O 34 cm^2 . C. O 146 cm^2 . D. O 56 cm^2 .

3. Oceń, czy podany zapis jest prawdziwy (P), czy fałszywy (F).

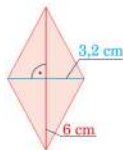
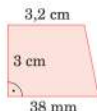
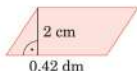
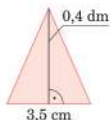
$4 \text{ mm}^2 = 0,04 \text{ cm}^2$	P	F
$0,6 \text{ m}^2 = 60 \text{ dm}^2$	P	F
$1,3 \text{ m}^2 = 13\,000 \text{ cm}^2$	P	F

$6,5 \text{ ha} = 65\,000 \text{ m}^2$	P	F
$520 \text{ a} = 5,2 \text{ m}^2$	P	F
$7 \text{ ha} = 0,7 \text{ a}$	P	F

4. Działka pani Antoniny ma powierzchnię 750 m^2 , pana Bartosza $0,065 \text{ km}^2$, pana Cezarego $0,6 \text{ ha}$, a pani Darii 8 a . Czyja działka jest największa?

A. Pani Antoniny. B. Pana Bartosza.
C. Pana Cezarego. D. Pani Darii.

5. Na rysunkach przedstawiono: trójkąt, równoległobok, trapez oraz romb.



Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

- I. Ile centymetrów kwadratowych wynosi suma pól wszystkich figur?
A. $42,5 \text{ cm}^2$ B. $35,5 \text{ cm}^2$
- II. Od pola której figury pole trapezu jest o 90 mm^2 większe?
C. Rombu. D. Równoległoboku niebędącego rombem.

6. Dane są trójkąt prostokątny o bokach długości: 6 cm, 0,08 m i 1 dm oraz równoległobok, którego podstawa ma długość 90 mm, a wysokość do niej poprowadzona jest od niej o 6,5 cm krótsza. Która figura ma większe pole i o ile centymetrów kwadratowych?

7. Suma długości podstaw trapezu wynosi 18,6 cm. Wysokość trapezu jest o $13\frac{4}{5}$ cm krótsza od tej sumy. Oblicz pole tego trapezu.

8. Narysuj:

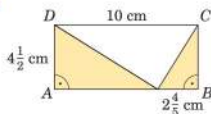
- a) równoległobok o boku długości 4 cm i polu równym 12 cm^2 ;
- b) trójkąt o wysokości 5,5 cm i polu równym 22 cm^2 ;
- c) romb, którego pole wynosi $7,8\text{ cm}^2$, a jedna z przekątnych ma długość 6 cm.

9. Boki pewnego równoległoboku mają długości 7 cm i $2\frac{1}{2}$ cm. Wysokość poprowadzona do dłuższego boku ma 2,1 cm. Jaką długość ma druga wysokość tego równoległoboku?

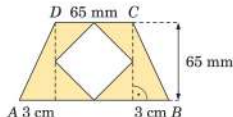
10. Oblicz długość najkrótszej wysokości w trójkącie prostokątnym o bokach długości: 6 cm, 8 cm i 10 cm.

11. Oblicz pole zamalowanej części figury.

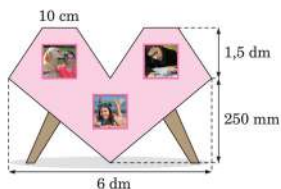
a)



b)



12. Zosia kupiła ramkę do zdjęć w kształcie przypominającym serce. W ramce mieszczą się trzy zdjęcia o wymiarach $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$. Zosia chce okleić przestrzeń między zdjęciami różowym papierem. Cena jednego kwadratowego arkusza papieru o wymiarach $20\text{ cm} \times 20\text{ cm}$ wynosi 7,89 zł. Ile najmniej centymetrów kwadratowych papieru potrzebuje Zosia? Ile zapłaci za ten papier?



Podjmij wyzwanie

Drogi Uczniu!

Rozwiąż kolejne zadania, a dowiesz się, jakimi wyrazami uzupełnić poniższy tekst, żeby opisywał pewien przełomowy wynalazek.

Powodzenia!



Do jednego z przełomowych odkryć w historii, które umożliwiło milionom ludzi poprawę jakości życia, zaliczamy wynalezienie ❶. Ich historia jest bardzo długa i sięga aż ❷. Legendy głoszą, że rzymski cesarz Neron ❸ przez ❹. Również Chińczycy około X wieku używali kryształów, aby obraz był bardziej czytelny. Nieco później w Europie używano kryształu w kształcie przypominającym ❺, który umieszczano na stronie książki. Dzięki temu litery były większe i czytelniejsze. Okulary, podobne do tych obecnie znanych, pojawiły się w Europie w XIV wieku, ich odkrycie przypisuje się ❻. Niestety, były one bardzo niedokładne, ponadto były tylko dla ❼. Do wzrostu ich popularności przyczyniło się ❽. Z biegiem lat je udoskonalano. W połowie XVIII wieku powstały pierwsze okulary z zausznikami. Dużą rolę odegrał też ❾, który wynalazł pierwsze okulary dwuogniskowe, pozwalające na wyraźne widzenie w każdej sytuacji – z bliska i z daleka.

1. Cezary narysował obok siebie cztery jednakowe trójkąty prostokątne równoramienne, tak jak pokazano na rysunku obok, i otrzymał prostokąt o polu równym 72 cm^2 . Kuba narysował obok siebie pięć identycznych kwadratów w taki sposób, że powstał prostokąt o polu równym 320 cm^2 . O ile centymetrów różnią się obwody prostokątów Kuby i Cezarego?



O 124 cm.	O 60 cm.	O 118 cm.
telefonów	okularów	leków

2. Poniżej znajdują się nierówności zapisane w zeszytach Zosi, Eli i Brunona. Kto nie popełnił błędu?

Zosia
 $60 \text{ m}^2 < 0,5 \text{ a}$

Ela
 $0,08 \text{ ha} > 900 \text{ m}^2$

Bruno
 $450 \text{ a} < 0,05 \text{ km}^2$

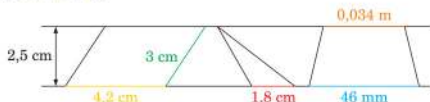
Zosia	Ela	Bruno
prehistorii	średniowiecza	starożytności

3. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Jeśli szerokość prostokąta wynosi 15,5 m, a jego długość jest pięć razy krótsza, to pole tego prostokąta jest równe 48,5 m ² .	P	F
Jeśli podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 0,1 m, wysokość poprowadzona do tej podstawy jest od niej dwa razy dłuższa, to pole tego trójkąta wynosi 1 dm ² .	P	F
Obwód rombu, którego pole wynosi 0,56 dm ² , a wysokość ma długość 70 mm, jest równy 32 cm.	P	F

FPP	FPF	PFP
oglądał walki gladiatorów	czytał listy	studiował prawo rzymskie

Rysunek do zadań 4. i 5.



4. Jeśli pole równoległoboku oznaczmy jako ♥, pole trójkąta jako ♣, a pole trapezu jako ♦, to ile równa się wartość wyrażenia: ♣ + ♥ - ♦?

2,2 cm ²	4 cm ²	2,75 cm ²
okulary korygujące	folię przybliżającą	wyszlifowany szmaragd

5. Jaka długość ma wysokość równoległoboku poprowadzona do boku o długości 3 cm?

3,5 cm	7 cm	31,5 cm
kulę	graniastosłup	ostrosłup

6. Romb ma bok długości 5 m. Przekątne tego rombu są równe 6 m i 8 m. Jaka długość ma wysokość tego rombu?

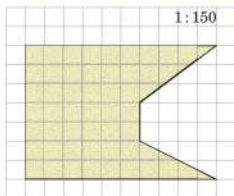
9,6 m	4,8 m	24 m
Aleksandrowi Bellowi	Alessandro della Spina z Pizy	Janowi Gutenbergowi

7. Kuba narysował w zeszycie trapez o polu równym 156 cm^2 , którego górna podstawa ma długość 12 cm, a dolna podstawa jest trzy razy dłuższa od górnej. Ile centymetrów długości ma wysokość tego trapezu?



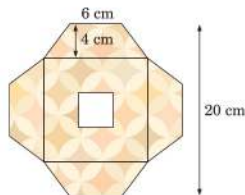
19,5 cm	9 cm	6,5 cm
dorosłych	krótkowidzów	dalekowidzów

8. Na rysunku obok przedstawiono plan placu państwa Nowaków wykonany w skali 1 : 150. Państwo Nowakowie chcą wysypać ten plac żwirem. 1 t żwiru kosztuje 80 zł. 75 kg żwiru wystarcza na 1 m^2 powierzchni. Przyjmij, że długość jednej kratki to 5 mm. Ile zapłacą za tę usługę państwo Nowakowie?



175,50 zł	240 zł	160 zł
wynalezienie druku	wynalezienie etui	czasopismo o modzie

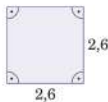
9. Mama Eli kupiła ozdobną serwetę na stolik nocny, który ma kształt kwadratu o przekątnej długości 30 cm. Serweta ma cztery osie symetrii i wycięcie w kształcie kwadratu o polu równym 18 cm^2 . Jaką część całego blatu stolika zakryje serweta? Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego.



$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$
George Washington	Benjamin Franklin	John Adams

Potrenuj – zadania uzupełniające

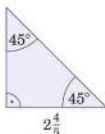
1. Oblicz pole każdej z figur. Litery przyporządkowane rysunkom zapisz w kolejności, jaką wskazują pola figur uporządkowane od największego do najmniejszego. Litery utworzą myśl wypowiedzianą przez Pitagorasa – jednego z najsłynniejszych matematyków w historii.



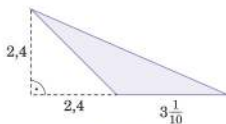
AD



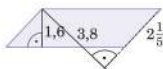
ZA



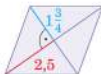
IAT



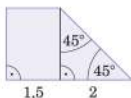
EM



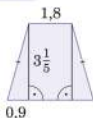
YRZ



LI



ŚW



CZB

2. Szerokość pewnego prostokąta jest pięć razy mniejsza od jego długości. Jego obwód wynosi 54 m. Ile wynosi pole tego prostokąta?
3. Dany jest prostokąt $ABCD$. Jeśli bok AB wydłużymy o 1 cm, a bok BC skrócimy o 3 cm, to otrzymamy kwadrat o polu równym 16 cm^2 . Ile wynosi obwód oraz pole prostokąta $ABCD$?
4. Pani Zofia, pani Krystyna i pan Robert kupili działki. Ustal, ile kosztował 1 m^2 każdej działki.

Zofia



Wielkość: 4,5 a

Cena: 14 850 zł

Krystyna



Wielkość: 1,2 ha

Cena: 276 000 zł

Robert

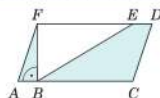


Wielkość: 0,009 km^2

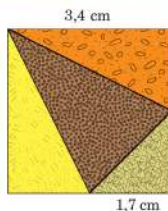
Cena: 225 000 zł

5. W trapezie $PQRS$ podstawa RS , która ma długość 25 m, stanowi $\frac{1}{3}$ długości podstawy PQ . Wysokość tego trapezu stanowi 0,8 sumy długości jego podstaw. Czy pole tego trapezu podane w hektarach wyraża się liczbą całkowitą? Uzasadnij swoją odpowiedź.
6. Powierzchnia działki w kształcie równoległoboku o podstawie długości 50 m jest o 4 a mniejsza niż powierzchnia działki w kształcie rombu o przekątnych długości 0,03 km i 800 dm. Jaka długość ma wysokość tego równoległoboku opuszczona na podaną podstawę?
7. Z dwóch trójkątów równoramiennych o podstawach długości 4,5 dm i wysokościach równych 0,6 m poprowadzonych do tych podstaw utworzono romb.
- a) Jakie pole ma powstały czworokąt? Wynik podaj w metrach kwadratowych.
- b) Jakiej długości są przekątne tego rombu?
8. W trójkącie prostokątnym o polu równym 0,18 ha jedna przyprostokątna ma długość 9000 cm. Jaka długość ma druga przyprostokątna w tym trójkącie?
9. Dane są kwadrat o polu równym 25 cm^2 i trójkąt prostokątny, którego jedna z przyprostokątnych jest dwa razy dłuższa od drugiej. Kwadrat i trójkąt połączono w taki sposób, że powstał trapez prostokątny. Jakie pole ma ten trapez? Rozważ dwie możliwości.

10. Pole równoległoboku $ACDF$ jest równe 288 cm^2 , odcinek AC ma długość 24 cm, a długość odcinka DE to 4 cm. Oblicz pole zamalowanej części równoległoboku $ACDF$.



11. Pan Wiśniewski ma pole uprawne w kształcie kwadratu. Uprawia na nim kukurydzę, pszenicę, dynię oraz ziemniaki. Jaka powierzchnię, wyrażoną w hektarach, zajmują ziemniaki? Jaka część całego pola stanowi pole z ziemniakami?



skala 1 : 5000

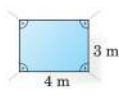
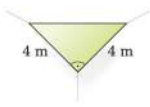
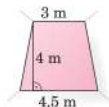
-  kukurydza
-  ziemniaki
-  dynia
-  pszenica



Żagle ogrodowe to bardzo popularny element aranżacji, który dodaje uroku i funkcjonalności ogrodowi czy tarasowi. Najczęściej produkowane są żagle w kształcie trójkątów i czworokątów – zwykle trapezów lub prostokątów. W zależności od materiału, z którego wykonany jest żagiel, oprócz walorów dekoracyjnych może pełnić on funkcję ochrony przed słońcem oraz zabezpieczenia przed deszczem.

Informacje do zadań 1. i 2.

Na ilustracji przedstawiono trzy żagle ogrodowe. Cena za 1 m^2 materiału przeciwsłonecznego to 14,50 zł. Cena za 1 m^2 materiału wodoodpornego stanowi $1\frac{1}{5}$ ceny za 1 m^2 materiału przeciwsłonecznego. Wysyłka całego zamówienia w tym sklepie kosztuje 9,01 zł.



1. Pani Alicja zastanawia się, który żagiel kupić do swojego ogrodu.

- Który żagiel ma największą powierzchnię?
- Ile zapłaci pani Alicja za każdy z żagli, jeśli będą przeciwsłoneczne, nie wliczając kosztu wysyłki?
- Jaki będzie łączny koszt zakupu wodoodpornego żagla w kształcie trapezu oraz wodoodpornego żagla w kształcie prostokąta, wliczając koszt wysyłki?

2. Pani Joanna, pan Dariusz i pan Tadeusz kupili żagle ogrodowe. Pani Joanna wybrała żagiel przeciwsłoneczny trójkątny, którego jeden z boków ma 9 m długości, a wysokość poprowadzona do tego boku stanowi $\frac{2}{3}$ długości tego boku. Żagiel wodoodporny kupiony przez pana Dariusza ma kształt trójkąta prostokątnego o jednej przyprostokątnej długości 6 m i drugiej przyprostokątnej o 3,5 m dłuższej. Pan Tadeusz zdecydował się na zakup żagla przeciwsłonecznego w kształcie trapezu prostokątnego, którego wysokość i górna podstawa mają po 5 m długości, a długość dolnej podstawy stanowi 1,6 jego wysokości. Oblicz, kto z nich zapłacił najwięcej.

3. Czy 250 000 cm^2 materiału wystarczy na uszycie 200 jednakowych żagli ogrodowych w kształcie równoramiennego trójkąta prostokątnego o ramieniu długości 5 m? Uzasadnij swoją odpowiedź.

DZIAŁ VI

W ŚWIECIE PRĘDKOŚCI

Przejechałam na rowerze
3 km w czasie 15 min.



A ja poruszałam się na deskorolce
z prędkością 10 km/h. Która
z nas jechała z większą prędkością?

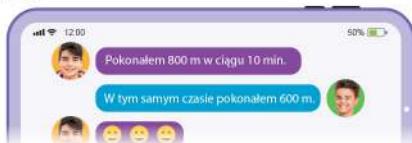
1. Prędkość

- ▶ Czym jest prędkość?
- ▶ Jakie są jednostki prędkości?
- ▶ Jak obliczyć prędkość, znając drogę i czas, w jakim ta droga została pokonana?
- ▶ Jak zamieniać jednostki czasu?



Odkrywaj!

1. Bruno i Cezary porównują swoje prędkości jazdy na deskorolce. Bruno pokonał trasę długości 800 m w ciągu 10 min, a Cezary w tym samym czasie przejechał 600 m.



- a) Ile metrów w ciągu minuty pokonywał Bruno, a ile Cezary?
- b) Który z chłopców poruszał się szybciej?
2. W tabeli podano informacje o czasie jazdy i drodze pokonywanej w tym czasie przez pewien samochód jadący cały czas w tym samym tempie.

Czas jazdy	1 h	2 h	3 h	4 h
Droga przebyta w danym czasie	60 km	120 km	180 km	240 km

Na podstawie danych z tabeli odpowiedz na pytanie.

- a) Jaką drogę pokonywał ten samochód w czasie 1 h?
- b) Ile kilometrów przejechałby ten samochód w czasie 5 h, gdyby jechał cały czas w tym samym tempie?
- c) Jaką drogę przebył ten samochód w czasie $\frac{1}{2}$ h?



Analizuj!

Prędkość informuje nas, jaką **drogę** pokonał obiekt (np. pieszy, rowerzysta, zwierzę) w danej jednostce **czasu**.



Najczęściej spotykanymi jednostkami prędkości są $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ (czytamy: *kilometry na godzinę*) oraz $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (czytamy: *metry na sekundę*).

Prędkość $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ oznacza, że obiekt pokonał 60 km w czasie 1 h.

Prędkość $60 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ oznacza, że obiekt pokonał 60 m w ciągu 1 s.



Przykład 1.

Tata Kuby przejechał samochodem trasę długości 150 km w czasie 2 h. Z jaką prędkością wyrażoną w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ jechał?

Aby określić, z jaką prędkością podaną w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ jechał tata Kuby, obliczymy, ile kilometrów pokonał w czasie 1 h.

$$: 2 \left(\begin{array}{l} 2 \text{ h} \text{ — } 150 \text{ km} \\ 1 \text{ h} \text{ — } 75 \text{ km} \end{array} \right) : 2$$

Tata Kuby w czasie 1 h pokonał drogę 75 km.

Odp. Tata Kuby jechał z prędkością $75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Pojazdy rzadko jadą cały czas z taką samą prędkością. Zatrzymują się na światłach, chwilami jadą trochę szybciej lub wolniej. Podobnie zwierzęta nie są w stanie poruszać się cały czas ze swoją maksymalną prędkością. Dla uproszczenia w tym podręczniku będziemy rozważać sytuacje, w których obiekty poruszają się ze stałą prędkością.



Ćwiczenie 1.

Ela i jej mama przeplłynęły kajakiem trasę długości 7 km w czasie 2 h. Z jaką prędkością wyrażoną w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ płynęły?

Przykład 2.

Poniżej podano informacje o psach dwóch ras, należących do najszybciej biegających. Który z nich biega szybciej?

Chart angielski



Borzoj



Pokonuje 36 km w czasie $\frac{1}{2}$ h.

Pokonuje 8 km w czasie $\frac{1}{8}$ h.

Obliczymy prędkość każdego psa w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Można to zrobić na dwa sposoby.

Chart angielski

Sposób 1

$$: \frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{ h} \text{ — } 36 \text{ km} \\ 1 \text{ h} \text{ — } 72 \text{ km} \end{array} \right) : \frac{1}{2}$$

Sposób 2

$$\cdot 2 \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{ h} \text{ — } 36 \text{ km} \\ 1 \text{ h} \text{ — } 72 \text{ km} \end{array} \right) \cdot 2$$

Prędkość charta angielskiego to $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Borzoj

Sposób 1

$$: \frac{1}{8} \left(\begin{array}{l} \frac{1}{8} \text{ h} \text{ — } 8 \text{ km} \\ 1 \text{ h} \text{ — } 64 \text{ km} \end{array} \right) : \frac{1}{8}$$

Sposób 2

$$\cdot 8 \left(\begin{array}{l} \frac{1}{8} \text{ h} \text{ — } 8 \text{ km} \\ 1 \text{ h} \text{ — } 64 \text{ km} \end{array} \right) \cdot 8$$

Prędkość borzoja to $64 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Porównamy prędkości psów: $72 \frac{\text{km}}{\text{h}} > 64 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, zatem szybszy jest chart angielski.

Odp. Szybciej biega chart angielski.

Ćwiczenie 2.

W tabeli podano czasy poruszania się czworga pieszych i przebytą przez każdego z nich drogę. Uzupełnij tabelę.

	Agata	Bartek	Celina	Darek
Czas	$\frac{1}{2}$ h	$\frac{1}{5}$ h	$\frac{1}{3}$ h	$\frac{1}{2}$ min
Droga	2 km	0,9 km	750 m	10 m
Prędkość	$\frac{\text{km}}{\text{h}}$	$\frac{\text{km}}{\text{h}}$	$\frac{\text{m}}{\text{h}}$	$\frac{\text{m}}{\text{min}}$

Pamiętaj, że:

$$1 \text{ h} = 60 \text{ min}$$

$$1 \text{ min} = \frac{1}{60} \text{ h}$$

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

$$1 \text{ s} = \frac{1}{60} \text{ min}$$

$$1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$$

$$1 \text{ s} = \frac{1}{3600} \text{ h}$$



Przykład 3.

Wyraż podaną wielkość we wskazanej jednostce.

a) 0,25 h w minutach

$$0,25 \text{ h} = \frac{1}{4} \text{ h} = \frac{1}{4} \cdot 1 \text{ h} = \frac{1}{4} \cdot 60 \text{ min} = 15 \text{ min}$$

b) 150 min w godzinach

$$150 \text{ min} = 150 \cdot 1 \text{ min} = 150 \cdot \frac{1}{60} \text{ h} = \frac{5}{2} \text{ h} = 2\frac{1}{2} \text{ h}$$

c) 3,6 min w sekundach

$$3,6 \text{ min} = 3,6 \cdot 1 \text{ min} = 3,6 \cdot 60 \text{ s} = 216 \text{ s}$$

	3		
	3	6	
.		6	0
2	1	6	0

Ćwiczenie 3.

Wyraż:

a) w minutach: $\frac{1}{3} \text{ h}$, $2\frac{3}{4} \text{ h}$;

b) w godzinach: 45 min, 225 min;

c) w sekundach: 3,5 min, 2 h.

Przykład 4.

Zapoznaj się z treścią zadania i je rozwiąż.

a) Delfin przepłynął 27 km w czasie 45 min. Oblicz jego prędkość w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

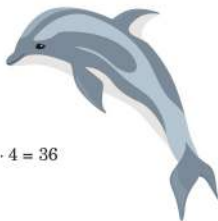
Wyrazimy czas płynięcia delfina w godzinach:

$$45 \text{ min} = 45 \cdot 1 \text{ min} = 45 \cdot \frac{1}{60} \text{ h} = \frac{3}{4} \text{ h}$$

Obliczymy prędkość delfina w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

$$: \frac{3}{4} \left(\begin{array}{l} \frac{3}{4} \text{ h} \text{ — } 27 \text{ km} \\ 1 \text{ h} \text{ — } 36 \text{ km} \end{array} \right) : \frac{3}{4} \quad 27 : \frac{3}{4} = 27 \cdot \frac{4}{3} = 9 \cdot 4 = 36$$

Odp. Delfin płynął z prędkością $36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.



- b) Struś przebiegł 50 m w czasie 3 s. Oblicz jego prędkość w $\frac{\text{m}}{\text{min}}$.

Wyrazimy czas biegu strusia w minutach:

$$3 \text{ s} = 3 \cdot 1 \text{ s} = 3 \cdot \frac{1}{60} \text{ min} = \frac{1}{20} \text{ min}$$

Obliczmy prędkość strusia w $\frac{\text{m}}{\text{min}}$.

$$: \frac{1}{20} \left(\begin{array}{l} \frac{1}{20} \text{ min} \text{ — } 50 \text{ m} \\ 1 \text{ min} \text{ — } 1000 \text{ m} \end{array} \right) : \frac{1}{20} \quad 50 : \frac{1}{20} = 50 \cdot \frac{20}{1} = 1000$$



Odp. Struś biegł z prędkością $1000 \frac{\text{m}}{\text{min}}$.

Ćwiczenie 4.

Ustal prędkość w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, wiedząc, że:

- a) motocyklista pokonał trasę 80 km w czasie 50 min,
- b) myśliwiec wojskowy pokonał 0,51 km w czasie 1,5 s.

Rozwiąż zadania

1. Oblicz prędkość w podanej jednostce, wiedząc, że

- a) samochód osobowy przejechał trasę 180 km w ciągu 3 h,
- b) traktor przejechał 50 km w ciągu 2 h,
- c) Karolina przebiegła 60 m w ciągu 10 s,
- d) narciarz pokonał 600 m w ciągu 3 min.

 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ $\frac{\text{m}}{\text{min}}$

2. Oblicz, z jaką prędkością w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ poruszał się rowerzysta, który w czasie

- a) $\frac{1}{2}$ h przejechał drogę o długości 6,3 km,
- b) $\frac{1}{3}$ h przejechał drogę o długości 4 km,
- c) $\frac{1}{5}$ h przejechał drogę o długości 3,2 km,
- d) $\frac{1}{120}$ h przejechał drogę o długości 0,15 km.



3. Pod zdjęciami pierwszych pojazdów, które można nazwać samochodami, podano drogę, jaką mógł przebyć każdy z nich w danym czasie. Z jaką prędkością w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ mógł jechać każdy z tych samochodów?

Pojazd parowy
Nicolasa Josepha
Cugnota (czytaj:
nikolasa żozefa kinio)
z 1769 roku



droga: 1 km
czas: $\frac{1}{4}$ h

Pierwszy samochód
spalinowy Benz
Patentwagen nr 1
z 1886 roku



droga: 8 km
czas: $\frac{1}{2}$ h

Samochód
Mercedes 35 PS
z 1900 roku



droga: 225 km
czas: 3 h

4. Wyraż

- a) w minutach: $\frac{1}{5}$ h, $2\frac{1}{6}$ h, 0,75 h, 7,1 h, 130 s, 45 s;
b) w godzinach: 15 min, 90 min, 165 min, 1 h 10 min, 132 min;
c) w sekundach: 10 min, 45 min, 2,5 min, 3 h, 0,25 h.

5. Oblicz prędkość w podanej jednostce, wiedząc, że

- a) skaczący kangur pokonał 1200 m w czasie 2 min,

$\frac{\text{m}}{\text{s}}$

- b) ślimak pokonał 30 cm w czasie $\frac{1}{12}$ h,

$\frac{\text{cm}}{\text{min}}$

- c) nietoperz przebył 0,27 km w czasie 90 s.

$\frac{\text{km}}{\text{h}}$

6. Przeczytaj rozmowę chłopców. Który z nich poruszał się szybciej?



7. Droga z domu Ani do szkoły ma długość 1800 m. Ania pokonuje ją zazwyczaj w ciągu 20 min. Dzisiaj jednak zasnęła i pobiegła do szkoły. Zajął jej to 15 min. O ile wzrosła prędkość Ani? Odpowiedź podaj w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

8. Poniżej przedstawiono limity prędkości dla samochodów osobowych dopuszczalne na poszczególnych typach dróg w Polsce.



droga ekspresowa
jednojezdniowa



droga w obszarze
zabudowanym



droga w strefie
zamieszkania

Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

- I. Jaką drogą jechał zgodnie z przepisami samochód, który w kwadrans pokonał 11,4 km?
- A. W obszarze zabudowanym. B. W strefie zamieszkania.
- II. Jaką drogą jechał zgodnie z przepisami samochód, który w 1,5 h pokonał 135 km?
- C. W obszarze zabudowanym. D. Ekspresową jednojezdniową.

9. Kamila i Weronika plotą takie same bransoletki z muliny. W ciągu tygodnia Kamila poświęciła na to zajęcie 12 godzin i przygotowała 6 bransiołek, a Weronika przez 15 godzin zrobiła 10 bransiołek. Która z dziewczynek wykonywała w ciągu godziny większą część bransiołki?

10. Kacper i jego mama jechali do babci. Nawigacja w samochodzie mamy Kacpra pokazuje mapę pokonywanej trasy, a w dolnej części ekranu podaje przewidywaną godzinę dotarcia do celu oraz czas i odległość, które pozostały do końca jazdy. Kacper zrobił zdjęcie ekranu nawigacji. Wskaż, które z podanych zdań jest prawdziwe.

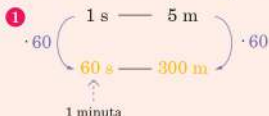


- A. Kacper zrobił zdjęcie o godzinie 19.09.
- B. Kacper zrobił zdjęcie, gdy odległość od domu babci była równa 14 km.
- C. Aby dotrzeć do celu o 18.49, mama Kacpra powinna jechać z prędkością $81 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
- D. Aby dotrzeć do celu za 20 min, mama Kacpra powinna jechać z prędkością $27 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

11. Wyraż prędkości: $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.



Aby zamienić prędkość wyrażoną w $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ na prędkość wyrażoną w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, możemy najpierw zamienić $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ na $\frac{\text{m}}{\text{min}}$, a dopiero później $\frac{\text{m}}{\text{min}}$ na $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Na przykład, zamieniając $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, możemy postępować tak jak poniżej.



prędkość wynosi: $300 \frac{\text{m}}{\text{min}}$

Zatem $5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.



prędkość wynosi: $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Sprawdź, co umiesz!

1. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Samochód, który w czasie 3 h pokonał drogę 150 km, jechał z prędkością $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.	P	F
Rowerzysta, który w ciągu 10 min przejechał drogę 5 km, jechał z prędkością $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.	P	F

2. Z jaką prędkością poruszał się słoń, który w 24 min przeszedł 8 km?

A. $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

B. $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

C. $\frac{1}{3} \frac{\text{km}}{\text{min}}$

D. $\frac{1}{3} \frac{\text{km}}{\text{h}}$

3. Ela przejechała na hulajnodze elektrycznej 5 km w czasie 30 min.

a) Ile kilometrów przejechałaby Ela w ciągu godziny, gdyby jechała cały czas w tym samym tempie?

b) Z jaką prędkością poruszała się Ela? Odpowiedź podaj w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

4. Karol w czasie 12 min przebiegł 2,7 km, a Zosia w czasie 15 min przebiegła 3,4 km. Wyraż prędkości ich biegów w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Które z nich biegło szybciej?

2. Droga

- ▶ Jak obliczyć przebytą drogę, znając prędkość oraz czas?
- ▶ Jak zamieniać jednostki długości?



Analizuj!

Taki znak drogowy oznacza, że maksymalna prędkość, z jaką można jechać, wynosi $140 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. W Polsce z taką prędkością można jechać autostradą. Zatem w czasie 1 h samochód może pokonać co najwyżej trasę długości 140 km, w czasie 2 h – trasę 280 km itd.



Przykład 1.

Najszybszym zwierzęciem na świecie jest gepard. Potrafi biec z prędkością aż $120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, choć w takim tempie porusza się raczej na krótkich dystansach. Ile kilometrów przebiegłby z tą prędkością w podanym czasie?



a) 1 h

Prędkość $120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ oznacza, że w ciągu 1 h gepard pokonałby 120 km.

Odp. W czasie 1 h gepard pokonałby 120 km.

b) $\frac{1}{2}$ h

Skoro w czasie 1 h gepard pokonałby 120 km, to aby obliczyć, ile kilometrów pokona w czasie $\frac{1}{2}$ h, wystarczy 120 km pomnożyć przez $\frac{1}{2}$.

$$\rightarrow \cdot \frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} 1 \text{ h} \text{ — } 120 \text{ km} \\ \frac{1}{2} \text{ h} \text{ — } 60 \text{ km} \end{array} \right) \cdot \frac{1}{2} \leftarrow$$

Mnożenie przez $\frac{1}{2}$ możemy zastąpić dzieleniem przez 2.

Odp. W czasie $\frac{1}{2}$ h gepard pokonałby 60 km.

c) $\frac{3}{4}$ h

$$\cdot \frac{3}{4} \left(\begin{array}{l} 1 \text{ h} \text{ — } 120 \text{ km} \\ 3 \text{ h} \text{ — } 90 \text{ km} \end{array} \right) \cdot \frac{3}{4} \quad 30 \cdot 120 \cdot \frac{3}{4} = 30 \cdot 3 = 90$$

Odp. W czasie $\frac{3}{4}$ h gepard pokonałby 90 km.

d) $1\frac{1}{6}$ h

$$\cdot 1\frac{1}{6} \left(\begin{array}{l} 1 \text{ h} \text{ — } 120 \text{ km} \\ 1\frac{1}{6} \text{ h} \text{ — } 140 \text{ km} \end{array} \right) \cdot 1\frac{1}{6} \quad 120 \cdot 1\frac{1}{6} = 20 \cdot 120 \cdot \frac{7}{6} = 20 \cdot 7 = 140$$

Odp. W czasie $1\frac{1}{6}$ h gepard pokonałby 140 km.

Ćwiczenie 1.

Najwolniejszym ssakiem na świecie jest leniwiec trójpalczasty. Żyje on głównie w koronach drzew, a na ziemię schodzi jedynie po to, by przenieść się na inne drzewo. Porusza się wtedy z prędkością $2 \frac{\text{m}}{\text{min}}$. Ile metrów pokona w podanym czasie?



a) 1 min

b) 5 min

c) 0,5 min

d) $3\frac{3}{4}$ min

Przykład 2.

Wyraż podaną wielkość we wskazanej jednostce.

a) 4,15 km w metrach

$$4,15 \text{ km} = 4,15 \cdot 1 \text{ km} = 4,15 \cdot 1000 \text{ m} = 4150 \text{ m}$$

b) $2\frac{3}{5}$ km w metrach

$$2\frac{3}{5} \text{ km} = 2\frac{6}{10} \cdot 1 \text{ km} = 2\frac{6}{10} \cdot 1000 \text{ m} = 2,6 \cdot 1000 \text{ m} = 2600 \text{ m}$$

c) 138 000 m w kilometrach

$$138 \text{ 000 m} = 138 \text{ 000} \cdot 1 \text{ m} = 138 \text{ 000} \cdot 0,001 \text{ km} = 138 \text{ km}$$

d) 625 m w kilometrach

$$625 \text{ m} = 625 \cdot 1 \text{ m} = 625 \cdot 0,001 \text{ km} = 0,625 \text{ km}$$

Pamiętaj,
że 1 km = 1000 m,
czyli 1 m = 0,001 km.



Ćwiczenie 2.

Wyraż:

a) w metrach: 5,8 km, $7\frac{1}{4}$ km;

b) w kilometrach: 80 350 m, 523 m.

Przykład 3.

Srebrna mrówka saharyjska przemieszcza się z prędkością $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Szop pracz pływa z prędkością $80 \frac{\text{m}}{\text{min}}$. Odpowiedz na pytanie.



a) Ile metrów może pokonać mrówka saharyjska w ciągu 2 h?

$$\cdot 2 \left(\begin{array}{l} 1 \text{ h} \text{ — } 3 \text{ km} \\ 2 \text{ h} \text{ — } 6 \text{ km} \end{array} \right) \cdot 2$$

$6 \text{ km} = 6 \cdot 1 \text{ km} = 6 \cdot 1000 \text{ m} = 6000 \text{ m}$ <--- Zamienimy kilometry na metry.

Odp. W ciągu 2 h mrówka saharyjska może pokonać 6000 m.

b) Ile metrów może pokonać mrówka saharyjska w ciągu 20 min?

$20 \text{ min} = 20 \cdot 1 \text{ min} = 20 \cdot \frac{1}{60} \text{ h} = \frac{1}{3} \text{ h}$ <--- Zamienimy minuty na godziny.

$$\cdot \frac{1}{3} \left(\begin{array}{l} 1 \text{ h} \text{ — } 3 \text{ km} \\ \frac{1}{3} \text{ h} \text{ — } 1 \text{ km} \end{array} \right) \cdot \frac{1}{3} \quad 13 \cdot \frac{1}{34} = 1$$

$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$ <--- Zamienimy kilometry na metry.

Odp. W ciągu 20 min mrówka saharyjska może pokonać 1000 m.

c) Ile kilometrów może przepłynąć szop pracz w ciągu 40 min?

$$\cdot 40 \left(\begin{array}{l} 1 \text{ min} \text{ — } 80 \text{ m} \\ 40 \text{ min} \text{ — } 3200 \text{ m} \end{array} \right) \cdot 40$$

$3200 \text{ m} = 3200 \cdot 1 \text{ m} = 3200 \cdot 0,001 \text{ km} = 3,2 \text{ km}$ <--- Zamienimy metry na kilometry.

Odp. W ciągu 40 min szop pracz może przepłynąć 3,2 km.

d) Ile kilometrów może przepłynąć szop pracz w ciągu 1,5 h?

$1,5 \text{ h} = 1 \frac{5}{10} \text{ h} = 1 \frac{30}{60} \text{ h} = 1 \text{ h } 30 \text{ min} = 90 \text{ min}$

<--- Zamienimy godziny na minuty.

$$\cdot 90 \left(\begin{array}{l} 1 \text{ min} \text{ — } 80 \text{ m} \\ 90 \text{ min} \text{ — } 7200 \text{ m} \end{array} \right) \cdot 90$$

$7200 \text{ m} = 7200 \cdot 1 \text{ m} = 7200 \cdot 0,001 \text{ km} = 7,2 \text{ km}$ <--- Zamienimy metry na kilometry.

Odp. W ciągu 1,5 h szop pracz może przepłynąć 7,2 km.



Ćwiczenie 3.

Skorzystaj z informacji podanych w Przykładzie 3., a następnie odpowiedz na pytanie.

- a) Ile metrów może pokonać mrówka saharyjska w ciągu 5 h, a ile w ciągu 30 min?
b) Ile kilometrów może przepłynąć szop pracz w ciągu 25 min, a ile w ciągu 2 h?

Rozwiąż zadania

1. Pan Emil jedzie samochodem z prędkością $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ile kilometrów może pokonać, jadąc z tą prędkością w podanym czasie?

a) 1 h b) 2 h c) 4 h d) 0,5 h

2. Rowerzysta jechał rowerem z prędkością $12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wyznacz dystans pokonany przez rowerzystę w danym czasie.

Czas jazdy rowerzysty	3 h	$1 \frac{1}{2}$ h	$1 \frac{3}{4}$ h	15 min
Dystans pokonany przez rowerzystę w danym czasie	 km	 km	 km	 km

3. Heloderma arizońska to jadowita jaszczurka, osiągająca długość około 55 cm. Porusza się z prędkością $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ile metrów może pokonać, poruszając się z tą prędkością w podanym czasie?



a) 6 s b) 30 s c) 1 min d) 3 min

4. Wyraż:

a) w metrach: 14 km; 3,76 km; 19,1 km; $8 \frac{1}{4}$ km; $\frac{1}{100}$ km;
b) w kilometrach: 78 000 m; 2761 m; 20,12 m; 3,5 m; $12 \frac{1}{4}$ m.

5. Szympans może się poruszać z prędkością $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ile kilometrów może pokonać, poruszając się z tą prędkością w podanym czasie?

a) $\frac{1}{2}$ h b) $\frac{1}{5}$ h c) kwadrans d) 6 min



6. Średnia prędkość pisanja Karoliny na klawiaturze to 140 znaków na minutę. Karolina w ciągu $\frac{1}{12}$ godziny przepisała wpis na bloga ze swoich notatek. Ile znaków zawierał ten post?

7. Rozgwiezda porusza się z prędkością $15 \frac{\text{cm}}{\text{min}}$.

Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Rozgwiezda przez 7 min może pokonać odległość większą niż 1 m.	P	F
W ciągu 20 s rozgwiezda może przebyć 5 cm.	P	F
Przez pół godziny rozgwiezda może pokonać odległość 5 m.	P	F

8. Samochód ciężarowy jechał z prędkością $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ przez trzy godziny, a samochód osobowy jechał przez 2,5 h z prędkością $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Który z samochodów pokonał dłuższą drogę? O ile dłuższą?

9. Orka oceaniczna porusza się z prędkością $56 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a rekin ostronosy z prędkością $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Wybierz odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

- I. Ile kilometrów przepłynie orka oceaniczna w czasie 1 h 15 min?
A. 70 km B. 64,4 km
- II. O ile kilometrów dłuższy dystans pokona rekin niż orka w czasie 90 min?
C. O 24 km. D. O 18 km.



10. Żółw na lądzie porusza się z prędkością $50 \frac{\text{m}}{\text{min}}$, natomiast w wodzie z prędkością $8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. O ile metrów dłuższy dystans pokona ten żółw w czasie kwadransa w wodzie niż na lądzie?



11. Czerwona motorówka w danym momencie płynęła w odległości 100 m przed niebieską motorówką. Niebieska motorówka płynie z prędkością $15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a czerwona – z prędkością $14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Czy w czasie jednej minuty niebieska motorówka dogoni czerwoną motorówkę? Uzasadnij swoją odpowiedź.





A to ciekawe

Trójmasztowiec Dar Pomorza przez ponad 50 lat pływał w służbie Szkoły Morskiej w Gdyni. Obecnie jest wykorzystywany jako statek-muzeum, cumujący przy gdyńskim Nabrzeżu Pomorskim. Prędkość statku mierzymy w węzłach.



1 węzeł to 1 mila morska na godzinę, a jedna mila morska to 1,85 km. Dar Pomorza pod żaglami osiągał prędkość maksymalnie 17 węzłów. Czy jedna doba wystarczyłaby mu na pokonanie dystansu 800 km?

Sprawdź, co umiesz!

- Andrzej jedzie motocyklem z prędkością $120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jaką drogę pokona w czasie 30 min?
A. 40 km B. 60 km C. 360 km D. 45 km
- Karłowaty konik morski porusza się z prędkością około $2,5 \frac{\text{cm}}{\text{min}}$. Jaką drogę pokona w podanym czasie?
a) 3 min b) $\frac{1}{2}$ min
c) 12 s d) 1 h
- Jaką drogę pokona samochód jadący przez 2 h 20 min z prędkością $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?
- Kino jest oddalone o 8 km od domu Tomka. Czy chłopiec zdąży w czasie pół godziny dojechać z domu do kina, jeśli będzie jechał rowerem z prędkością $15,3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$? Uzasadnij swoją odpowiedź.
- Dawid biegł z prędkością $9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ przez pół godziny, a Klara z prędkością $7 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ przez 45 minut. Które z nich pokonało krótszą trasę? O ile krótszą?



3. Czas

- ▶ Jak obliczyć czas potrzebny na przebycie danej drogi, poruszając się z daną prędkością?
- ▶ Jak dobierać jednostki długości i jednostki czasu do opisanej sytuacji?



Analizuj!

Z Lotniska Chopina w Warszawie można polecieć samolotem bezpośrednio do Nowego Jorku. Trasa ma długość około 7000 km, a prędkość samolotu na tej trasie wynosi około $700 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Oznacza to, że w czasie 1 h samolot pokonuje dystans 700 km. Zatem trasę długości 7000 km pokona w czasie 10 razy dłuższym, czyli w ciągu 10 h.



Przykład 1.

Pacyficzny ślimak bananowy porusza się z prędkością $15 \frac{\text{cm}}{\text{min}}$. Ile czasu zajmie mu pokonanie trasy o podanej długości?

a) 30 cm

Aby dowiedzieć się, ile czasu zajmie mu pokonanie trasy o długości 30 cm, obliczymy, ile razy dłuższa jest ta trasa niż trasa o długości 15 cm.

$30 \text{ cm} : 15 \text{ cm} = 2$ ← Trasa o długości 30 cm jest 2 razy dłuższa od trasy o długości 15 cm.

$$\cdot 2 \left(\begin{array}{l} 15 \text{ cm} \text{ — } 1 \text{ min} \\ 30 \text{ cm} \text{ — } 2 \text{ min} \end{array} \right) \cdot 2$$

Odp. Trasę o długości 30 cm ślimak pokona w 2 min.



b) 7,5 dm

$7,5 \text{ dm} = 75 \text{ cm}$ <---- Zamienimy decymetry na centymetry.

$75 \text{ cm} : 15 \text{ cm} = 5$ <---- Trasa o długości 75 cm jest 5 razy dłuższa od trasy o długości 15 cm.

$$\cdot 5 \left(\begin{array}{l} 15 \text{ cm} \text{ — } 1 \text{ min} \\ 75 \text{ cm} \text{ — } 5 \text{ min} \end{array} \right) \cdot 5$$

Odp. Trasę o długości 7,5 dm ślimak pokona w 5 min.

c) 5 cm

Aby dowiedzieć się, ile czasu zajmie mu pokonanie trasy o długości 5 cm, obliczymy, ile razy krótsza jest ta trasa niż trasa o długości 15 cm.

$15 \text{ cm} : 5 \text{ cm} = 3$ <---- Trasa o długości 5 cm jest 3 razy krótsza od trasy o długości 15 cm.

$$: 3 \left(\begin{array}{l} 15 \text{ cm} \text{ — } 1 \text{ min} \\ 5 \text{ cm} \text{ — } \frac{1}{3} \text{ min} \end{array} \right) : 3$$

$\frac{1}{3} \text{ min} = \frac{1}{3} \cdot 1 \text{ min} = \frac{1}{3} \cdot 60^{20} \text{ s} = 20 \text{ s}$ <---- Warto zamienić minuty na sekundy.

Odp. Trasę o długości 5 cm ślimak pokona w 20 s.

d) 150 m

$150 \text{ m} = 15\,000 \text{ cm}$ <---- Zamienimy metry na centymetry.

$15\,000 \text{ cm} : 15 \text{ cm} = 1000$ <---- Trasa o długości 15 000 cm jest 1000 razy dłuższa od trasy o długości 15 cm.

$$\cdot 1000 \left(\begin{array}{l} 15 \text{ cm} \text{ — } 1 \text{ min} \\ 15\,000 \text{ cm} \text{ — } 1000 \text{ min} \end{array} \right) \cdot 1000$$

$1000 \text{ min} = 1000 \cdot 1 \text{ min} = 1000 \cdot \frac{1}{60} \text{ h} = \frac{1000}{60} \text{ h} = 16\frac{2}{3} \text{ h} = 16\frac{40}{60} \text{ h} = 16 \text{ h } 40 \text{ min}$

↑
Warto zamienić minuty na godziny.

Odp. Trasę o długości 150 m ślimak pokona w 16 h 40 min.

Ćwiczenie 1.

Rozgwiazda porusza się z prędkością $12 \frac{\text{cm}}{\text{min}}$. Ile czasu zajmie jej pokonanie trasy o podanej długości?

a) 36 cm

b) 4,8 dm

c) 3 cm

d) 60 m



Przykład 2.

Adam przeszedł szlak długości 7 km z prędkością $70 \frac{\text{m}}{\text{min}}$. Jacek przejechał na nartach śladowych 10 km z prędkością $8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Czyja wycieczka trwała dłużej? Uzasadnij swoją odpowiedź.



Adam

$7 \text{ km} = 7000 \text{ m}$ <---- Zamienimy kilometry na metry.

Aby dowiedzieć się, ile czasu zajęło mu pokonanie trasy o długości 7000 m, obliczymy, ile razy dłuższa jest ta trasa niż trasa o długości 70 m.

$7000 \text{ m} : 70 \text{ m} = 100$ <---- Trasa o długości 7000 m jest 100 razy dłuższa od trasy o długości 70 m.

$$\cdot 100 \left(\begin{array}{l} 70 \text{ m} \text{ — } 1 \text{ min} \\ 7000 \text{ m} \text{ — } 100 \text{ min} \end{array} \right) \cdot 100$$

Wycieczka Adama zajęła $100 \text{ min} = 1 \text{ h } 40 \text{ min}$.

Jacek

Aby dowiedzieć się, ile czasu zajęło mu pokonanie trasy o długości 10 km, obliczymy, ile czasu zajęło mu pokonanie trasy o długości 1 km, a następnie 10 km.



$$\begin{array}{l} : 8 \left(\begin{array}{l} 8 \text{ km} \text{ — } 1 \text{ h} \\ 1 \text{ km} \text{ — } \frac{1}{8} \text{ h} \end{array} \right) : 8 \\ \cdot 10 \left(\begin{array}{l} 1 \text{ km} \text{ — } \frac{1}{8} \text{ h} \\ 10 \text{ km} \text{ — } \frac{5}{4} \text{ h} \end{array} \right) \cdot 10 \end{array} \quad \frac{1}{8} \cdot 10^5 = \frac{5}{4}$$

Wycieczka Jacka zajęła $\frac{5}{4} \text{ h} = 1 \frac{1}{4} \text{ h} = 1 \frac{15}{60} \text{ h} = 1 \text{ h } 15 \text{ min}$.

Odp. Wycieczka Adama trwała dłużej, bo 1 h 40 min to więcej niż 1 h 15 min.

Ćwiczenie 2.

Ewa przejechała rowerem trasę długości 3,6 km z prędkością $180 \frac{\text{m}}{\text{min}}$, a Kasia przebyła trasę 5 km, jadąc hulajnogą elektryczną z prędkością $12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Która z dziewcząt jechała krócej? Uzasadnij swoją odpowiedź.



Rozwiąż zadania

1. W jakim czasie samochód poruszający się z prędkością $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ pokona podany dystans?

a) 180 km b) 300 km c) 90 km d) 15 km

2. Himalaje – najwyższy łańcuch górski na Ziemi – zaczęły powstawać około 50 mln lat temu w wyniku zderzenia płyt tektonicznych. Płyty te wciąż są w ruchu, więc Himalaje stale „rosną”, np. Mount Everest rośnie z prędkością ok. 0,5 cm na rok. Po jakim czasie Mount Everest będzie wyższy o 1 dm, a o 1 m?



3. Zając wielkouchy porusza się z prędkością około $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ile czasu potrzebuje na pokonanie podanego dystansu?

a) 140 m b) 1,5 km c) 2 km d) $\frac{3}{5}$ km

4. Struś porusza się z prędkością $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a lew z prędkością $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. O ile więcej czasu potrzebuje na przebiegnięcie 12 km lew niż struś? Wynik wyraż w godzinach, a następnie w minutach.

5. Zosia i Pola wybierają się na wakacje. Zosia ma do pokonania 420 km i będzie jechała z rodzicami samochodem z prędkością $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Pola będzie podróżować pociągiem, który jedzie z prędkością $140 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ i ma do przejechania 490 km.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

- I. Ile będzie trwała podróż Zosi?

A. 5 h 25 min B. 5 h 15 min

- II. O ile minut podróż Poli będzie krótsza od podróży Zosi?

C. O 105 min. D. O 45 min.

6. Ela przez 3 min przejechała na rowerze 750 m. Ile czasu zajmie jej przejechanie 20 km, jeśli cały czas będzie jechała z taką samą prędkością?

7. Pani Ewa jeździ do pracy samochodem. Odległość od jej domu do pracy wynosi 12,6 km. Pani Ewa pokonuje ją w czasie 20 min. Dzisiaj na trasie był korek i prędkość, z jaką jechała pani Ewa, była 2 razy mniejsza niż zazwyczaj. Ile czasu pani Ewie zajął dzisiaj dojazd do pracy?

8. Marek, jadąc na rowerze, w kwadrans pokonuje dystans 4 km. Jego młodsza siostra Basia w tym samym czasie pokonuje dystans równy $\frac{3}{4}$ trasy pokonanej przez Marka. W jakim czasie Basia przejedzie 6 km, jeśli będzie jechała cały czas z tą samą prędkością?

9. Ala jedzie hulajnogą z prędkością $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ do koleżanki, która mieszka w odległości 4,5 km od domu Ali. Były umówione na godz. 17.00. Ala wyszła z domu o 16.35. Czy zdąży na umówioną godzinę?



10. Pola i Cezary mają od swojego domu do szkoły taką samą odległość. Pola wyszła z domu o 7.28 i dotarła do szkoły o 7.48. Szła z prędkością $4,8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Cezary po wyjściu z domu szedł z prędkością $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ i dotarł do szkoły o 7.51. O której godzinie Cezary wyszedł z domu?

Sprawdź, co umiesz!

1. Autobus szkolny jedzie z prędkością $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. W jakim czasie pokonuje trasę o długości 10 km?

A. 5 h

B. 5 min

C. 50 min

D. 12 min

2. Prędkość lotu bociana to $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. W jakim czasie pokona on podany dystans?

a) 200 km

b) 10 km

c) 100 km

d) 30 km

3. Ania jechała hulajnogą z prędkością $250 \frac{\text{m}}{\text{min}}$, a Adam z prędkością $12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Ania przejechała 1 km w czasie krótszym niż 5 min.	P	F
Adam na przebycie 2 km potrzebuje więcej niż 10 min.	P	F
W czasie 10 min oboje pokonają ten sam dystans.	P	F

4. Emil idzie z prędkością $4,8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jego droga do szkoły ma długość 1600 m. Czy dotrze do szkoły przed 8.00, jeśli wyjdzie z domu o 7.35?

PODSUMOWANIE DZIAŁU VI

W świecie prędkości

Powtórz wiadomości

Prędkość informuje nas, jaką **drogę** pokonał obiekt w danej jednostce **czasu**.
Najczęściej spotykanymi jednostkami prędkości są $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ (czytamy: *kilometry na godzinę*) oraz $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (czytamy: *metry na sekundę*).

Prędkość

Zebra pokonuje 6 km w 10 min.
Wyraż jej **prędkość** w podanej jednostce.

a) $\frac{\text{km}}{\text{min}}$

$$: 10 \left(\begin{array}{l} 10 \text{ min} \text{ — } 6 \text{ km} \\ 1 \text{ min} \text{ — } 0,6 \text{ km} \end{array} \right) : 10$$

Prędkość zebry to $0,6 \frac{\text{km}}{\text{min}}$.

b) $\frac{\text{km}}{\text{h}}$

$$10 \text{ min} = 10 \cdot 1 \text{ min} = 10 \cdot \frac{1}{60} \text{ h} = \frac{1}{6} \text{ h}$$

$$\cdot 6 \left(\begin{array}{l} \frac{1}{6} \text{ h} \text{ — } 6 \text{ km} \\ 1 \text{ h} \text{ — } 36 \text{ km} \end{array} \right) \cdot 6$$

Prędkość zebry to $36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.



Droga

Jaką **drogę** pokona zebra poruszająca się z prędkością $45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ w czasie 3 h, a jaką w czasie 0,5 h?

$$\cdot 3 \left(\begin{array}{l} 1 \text{ h} \text{ — } 45 \text{ km} \\ 3 \text{ h} \text{ — } 135 \text{ km} \end{array} \right) \cdot 3$$

W czasie 3 h zebra pokona 135 km.

$$\cdot 0,5 \left(\begin{array}{l} 1 \text{ h} \text{ — } 45 \text{ km} \\ 0,5 \text{ h} \text{ — } 22,5 \text{ km} \end{array} \right) \cdot 0,5$$

W czasie 0,5 h zebra pokona 22,5 km.

Czas

W jakim **czasie** zebra poruszająca się z prędkością $45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ pokona 15 km, a w jakim 9 km?

$$\cdot \frac{1}{3} \left(\begin{array}{l} 45 \text{ km} \text{ — } 1 \text{ h} \\ 15 \text{ km} \text{ — } \frac{1}{3} \text{ h} \end{array} \right) \cdot \frac{1}{3}$$

Zebra pokona 15 km w $\frac{1}{3}$ h.

$$\cdot 5 \left(\begin{array}{l} 45 \text{ km} \text{ — } 1 \text{ h} \\ 9 \text{ km} \text{ — } \frac{1}{5} \text{ h} \end{array} \right) : 5$$

Zebra pokona 9 km w $\frac{1}{5}$ h.

Poćwicz przed sprawdzianem

1. Z jaką prędkością poruszał się wielbłąd, który w ciągu 4 h pokonał 180 km?

A. $720 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

B. $180 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

C. $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

D. $45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

2. Robot sprząający porusza się z prędkością $0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Jaka drogę pokona ten robot w ciągu 2 min?

A. 10 m

B. 30 m

C. 60 m

D. 120 m

3. Samochód autonomiczny to taki, który może jechać bez kierowcy. W jakim czasie pokona 5 km, jeśli będzie poruszał się z prędkością $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?

A. 5 min

B. 10 min

C. 105 min

D. 165 min

4. Wskaż, ile wynosi 2,75 h w minutach.

A. 275 min

B. 195 min

C. 165 min

D. 105 min

5. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Śmigłowiec ratunkowy lecący z prędkością $200 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ w ciągu 45 min pokonał 145 km.	P	F
Ciągnik rolniczy, który przejechał 1250 m w 5 min, poruszał się z prędkością $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.	P	F

6. Oblicz prędkość:

a) w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ samochodu strażackiego, który w czasie $\frac{1}{3}$ h przejechał 30 km;

b) w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ szopa pracza, który w czasie $\frac{1}{12}$ h przebiegł 2 km;

c) w $\frac{\text{km}}{\text{min}}$ rowerzysty, który pokonał 0,6 km w 2 min.

7. Skuter wodny płynął z prędkością $45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Jaki dystans pokonał w podanym czasie?

a) 2 h

b) 1,5 h

c) 12 min

d) 100 min



8. Serwal porusza się z prędkością $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a tygrys bengalski z prędkością $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

- I. Ile kilometrów pokona serwal w czasie 1 h 15 min?
A. 90 km B. 100 km
- II. O ile kilometrów krótszy dystans pokona w czasie 135 min tygrys bengalski niż serwal?
C. O 40 km. D. O 45 km.

9. Zastąp ♥ odpowiednimi liczbami.

- a) $\frac{3}{4} \text{ h} = \heartsuit \text{ min}$ b) $3,1 \text{ min} = \heartsuit \text{ s}$ c) $24 \text{ min} = \heartsuit \text{ h}$
d) $96 \text{ s} = \heartsuit \text{ min}$ e) $0,602 \text{ km} = \heartsuit \text{ m}$ f) $1254 \text{ m} = \heartsuit \text{ km}$

10. Żaglówka płynęła z prędkością $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ile czasu zajmie tej żaglówce pokonanie podanego dystansu?

- a) 320 m b) 1,72 km c) 14,4 km d) $43 \frac{1}{5} \text{ km}$

11. Pan Szymon późnym wieczorem przypomniał sobie o zakupie karmy dla swoich kotów. Postanowił wybrać się do sklepu, który znajduje się w odległości 1200 m od jego domu. Wybiegł z domu o godzinie 21.46 i dotarł do sklepu na 6 min przed jego zamknięciem. Droga ze sklepu do domu zajęła mu 12 min. O ile większa była prędkość, z jaką poruszał się pan Szymon w drodze do sklepu niż z powrotem? Wynik wyraż w $\frac{\text{m}}{\text{min}}$.



Godziny otwarcia:
7:00 – 22:00

12. Zosia wzięła udział w biegu na orientację. Wystartowała o godzinie 9.05 i w tym samym czasie włączyła swój smartwatch, który mierzył jej prędkość i czas pomiędzy kolejnymi punktami kontrolnymi. O której godzinie dotarła do ostatniego punktu kontrolnego? Jaką długość miała cała trasa przebyta przez Zosię?



13. Kierowca ciężarówki wiozł towar do magazynu. Jechał z prędkością, która zapewniała przebycie trasy o długości 240 km w ciągu 4 h. Jednak po przejechaniu 60 km zatrzymał się na 30 min. Z jaką prędkością powinien jechać dalej, aby dotrzeć do magazynu o zaplanowanej godzinie?

Podjmij wyzwanie

Drogi Uczniu!

Rozwiąż kolejne zadania, a dowiesz się, jakimi hasłami uzupełnić tekst, aby poznać historię przełomowego wynalazku.

Powodzenia!



1 to wynalazek, który na zawsze zmienił sposób, w jaki ludzie zachowują wspomnienia. W 1826 roku **2** pierwszy raz utrwalił obraz wykonany przy użyciu polerowanej **3**. Wynalazca pokrył ją **4** substancją na bazie **5**, a następnie umieścił w oknie wychodzącym na podwórze. Ekspozycja trwała około **6**, a obraz, znany jako **7**, jest uznawany za najstarsze zachowane zdjęcie. Kilka lat później Louis Daguerre (czytaj: lui dager) opracował metodę zwaną **8**. Wynalazek ten wpłynął na rozwój medycyny i nauki.

- 1.** Bruno i Cezary zmierzili swoje czasy przejazdu po torze o długości 300 m. Bruno jechał na deskorolce i pokonał tę trasę w 100 s, a Cezary poruszający się na rolkach potrzebował tylko 75 s. Ile wynosiła różnica ich prędkości?

$25 \frac{\text{m}}{\text{min}}$	$75 \frac{\text{m}}{\text{min}}$	$60 \frac{\text{m}}{\text{min}}$
Aparat fotograficzny	Film	Fotografia

- 2.** Koala to mały torbacznik, który żyje na drzewach. Schodzi z drzewa tylko wtedy, gdy brakuje mu pożywienia. W takich sytuacjach może osiągnąć prędkość $9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jaką drogę pokona koala, poruszając się z tą prędkością przez 7,5 min?

1050 m	1,125 km	11 km 25 m
Leonardo da Vinci (czytaj: winczy)	Joseph Nicéphore Niépce (czytaj: żozef nisefor nieps)	Louis Le Prince (czytaj: lui le prans)

- 3.** Kurier wyjechał o godzinie 10.25 z sortowni paczek. O godzinie 12.55 dotarł do magazynu odległego o 135 km od sortowni. O której godzinie kurier dotarłby do tego magazynu, gdyby jechał z prędkością mniejszą o $9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?

13.35	13.25	14.05
metalowej kliszy	plytki cynkowej	delikatnej tkaniny

4. Pola w ciągu 2 h przeczytała 60 stron lektury, a Ela w ciągu 70 min przeczytała 42 strony.
Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Ela przeczytała w ciągu godziny 36 stron lektury.	P	F
Pola przeczytała w ciągu godziny o 6 stron mniej niż Ela.	P	F

FP	PF	PP
klejącą	fluorescencyjną	światłoczułą

5. Ile przykładów Kuba rozwiązał niepoprawnie?

$\frac{3}{10}$ h = 18 min	$1\frac{2}{3}$ h = 140 min	0,15 h = 15 min	2 h 12 min = 2,2 h
$4\frac{3}{5}$ km = 4600 m	$1\frac{7}{8}$ km = 1780 m	0,76 km = 760 m	12 340 m = 12,34 km

dwa	trzy	cztery lub więcej
tuszu do drukarek	asfaltu syryjskiego	atramentu

Informacje do zadań 6.–8.

Na rysunku podano odległości pokonywane przez poszczególne zwierzęta w określonym czasie.



40 m w 3 s



$2\frac{3}{4}$ km w 3 min



50 km w 1 h

6. Które zwierzę porusza się z największą prędkością?

kot	ryś	lis
doby	8 godzin	45 minut

7. O ile kilometrów więcej przebiegnie ryś niż lis w ciągu dwóch kwadransów?

O 2,5 km.	O 3,5 km.	O 5 km.
Widok z okna w Le Gras (czytaj: le gra)	Posiadłość w Le Gras (czytaj: le gra)	Wakacje w Le Gras (czytaj: le gra)

8. O ile czasu mniej niż kot potrzebuje lis na przebiegnięcie dystansu 2 km?

O 0,1 s.	O 6 s.	O 10 s.
fototypią	dagerotypią	ekspresową fotografią

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. Pan Marek przejechał samochodem 9 km w czasie 0,15 h. Ile kilometrów przejedzie pan Marek w ciągu kolejnych trzech godzin, jeśli w tym czasie będzie jechał z prędkością większą o $5,3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?



2. Pociąg Maglev (czytaj: maglew) w Japonii osiągnął rekordową prędkość $603 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ile czasu zajęłoby mu przejechanie 1800 km, jeśli mógłby cały czas jechać ze swoją rekordową prędkością? Wynik zaokrąglij do pełnych godzin.

3. Wyraż podane prędkości w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.



$$20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



$$50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



$$2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



$$1,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

4. Wyraż podane prędkości w $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.



$$18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$



$$298,8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$



$$43,2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$



$$48 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$



5. Rekord w biegu na 100 m ustanowiony w 2009 roku w Berlinie przez Usaina Boltę (czytaj: jusejna bolta) wynosi 9,58 s. Jaka była jego prędkość podczas tego biegu, wyrażona w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$? Wynik zaokrąglij do dwóch miejsc po przecinku.

6. Pierwsze samoloty konstruowane przez braci Wright (czytaj: rajt) mogły latać z prędkością $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wiele ptaków porusza się znacznie szybciej. Na przykład fregata – duży ptak żyjący na oceanicznych wyspach – pokonuje 2500 m w ciągu minuty. Ile razy większą prędkość osiąga fregata niż samolot braci Wright?



7. Aplikacje umożliwiające śledzenie lecących samolotów pokazują trasę wybranego samolotu oraz podają różne dane, np. wysokość, na jakiej znajduje się samolot, czy aktualną prędkość lotu. Wysokość podawana jest w stopach (ft), a prędkość – w węzłach (kts). Jedna stopa to około 30 cm, a jeden węzeł to jedna mila morska na godzinę, czyli około $1,85 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Czerwony samolot na ilustracji leci z Frankfurtu do Nowego Jorku.

- a) Na jakiej wysokości znajduje się ten samolot? Odpowiedź podaj w stopach, w metrach i w kilometrach.
- b) Z jaką prędkością leci ten samolot? Odpowiedź podaj w węzłach i w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.



8. Kosmiczny Teleskop Hubble'a (czytaj: habla) okrąża Ziemię z prędkością $450 \frac{\text{km}}{\text{min}}$. Jaką drogę pokonuje ten teleskop w podanym czasie?

- a) 1 h b) 1 doba c) 1 s

9. Pola wyszła z domu uprawiać jogging o 12.44 i biegła ze stałą prędkością $8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kwadrans później jej starszy brat wybrał się na przejażdżkę rowerową. Jechał ze stałą prędkością $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ tą samą trasą, którą biegła Pola. O 13.14 Pola spojrzała na zegarek. Jaka była wtedy odległość między nią a jej bratem?

10. Jedną z konkurencji olimpijskich jest wspinaczka na czas. Zawodnicy wspinają się na ścianie o wysokości 15 m. Rekord świata kobiet, ustanowiony przez Polkę Aleksandrę Mirosław podczas igrzysk olimpijskich w Paryżu w 2024 roku, wynosi 6,06 s. Rekord mężczyzn, ustanowiony też w Paryżu, należy do Sama Watsona (czytaj: lotsona) z USA i wynosi 4,74 s. Ile sekund zajęło Aleksandrze Mirosław, a ile Samowi Watsonowi pokonanie 7,5 m, jeśli przyjmiemy, że cały czas poruszali się ze stałą prędkością?

11. Pociąg wyruszył o 8.00 z miasta A do miasta B. Trasa pociągu między tymi miastami ma długość 520 km. Pociąg pokonał $\frac{3}{4}$ całej trasy z prędkością $120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a pozostałą część z prędkością $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. O której godzinie pociąg dotarł do miasta B?



Kto nie zastanawiał się, dlaczego podczas burzy najpierw widzimy błyskawicę, a grzmot słyszymy dopiero po chwili? Jest to związane z różnicą prędkości światła i dźwięku. Światło porusza się niezwykle szybko – jego prędkość wynosi około $300\,000\,000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Dźwięk przemieszcza się wolniej – w powietrzu jego prędkość to około $340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

W tym dziale nie stosowaliśmy żadnych wzorów. Warto jednak wiedzieć, że istnieje wzór łączący prędkość, drogę i czas. Pozwala on w szybki sposób ustalić np. prędkość, jeśli znamy drogę i czas. Stosowane są następujące oznaczenia: v – prędkość (z ang. *velocity*), s – droga (z łac. *spatium*), t – czas (z ang. *time*).

Wtedy:

$$v = \frac{s}{t}$$

$$s = v \cdot t$$

$$t = \frac{s}{v}$$

Podczas stosowania tych wzorów należy zwracać uwagę na jednostki, w jakich są podane poszczególne wielkości. Na przykład: jeśli znamy drogę w metrach i czas w minutach, łatwo obliczymy prędkość w $\frac{\text{m}}{\text{min}}$. Jeśli jednak interesuje nas ta prędkość w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, musimy wyrazić podaną drogę w kilometrach i czas w godzinach.

1. Wyraż prędkość światła i prędkość dźwięku w $\frac{\text{km}}{\text{min}}$ oraz w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

2. Ustal, ile czasu potrzebuje światło, a ile dźwięk na pokonanie 1 km.

3. Oblicz, ile kilometrów pokona światło, a ile dźwięk w czasie 1 min.

4. Światło odbite od powierzchni Księżyca dociera do Ziemi w około 1,28 s. Oblicz odległość między Ziemią a Księżycem. Podaj odpowiedź w kilometrach.

5. Odległość Ziemi od Słońca wynosi około 150 mln km. Ile czasu potrzebuje światło, aby dotrzeć ze Słońca do Ziemi? Odpowiedź podaj w pełnych minutach.

6. Wyobraź sobie, że jesteś na koncercie rockowym i stoisz w odległości 100 m od sceny. Jak długo musisz czekać, aby usłyszeć dźwięk, od momentu, gdy muzyk uderzy w perkusję? A jak długo będzie czekała osoba, która znajduje się 4 razy dalej od sceny?

DZIAŁ VII

W ŚWIECIE FIGUR PRZESTRZENNYCH

Z ilu klocków
sześciennych
powstało drzewo?



Jakiej bryły
kształt ma wieża?



1. Graniastosłupy

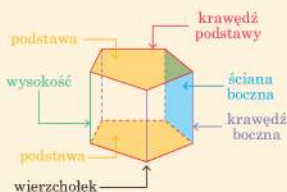
- ▶ Jakie własności mają graniastosłupy proste?
- ▶ Czym jest wysokość graniastosłupa?
- ▶ Czym charakteryzują się prostopadłościany i sześciściany?



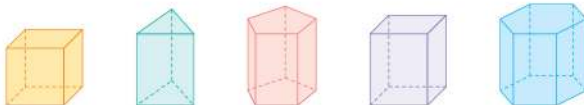
Analizuj!

Graniastosłup prosty to bryła, która ma dwie równoległe podstawy będące identycznymi wielokątami oraz ściany boczne będące prostokątami.

W tym podręczniku będziemy się zajmować tylko graniastosłupami prostymi.



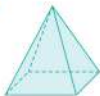
Poniżej przedstawiono modele graniastosłupów prostych.



Przykład 1.

Czy bryła przedstawiona na rysunku jest graniastosłupem? Uzasadnij odpowiedź. Jeśli tak, podaj nazwę graniastosłupa oraz liczby jego: wierzchołków, ścian, krawędzi bocznych i wszystkich krawędzi.

a)



To nie jest graniastosłup, ponieważ ta bryła nie ma dwóch podstaw ani ścian bocznych będących prostokątami.

b)



To jest graniastosłup czworokątny, ponieważ ma dwie podstawy, które są identycznymi czworokątami, oraz ściany boczne w kształcie prostokątów.

Liczba:

- wierzchołków – 8
- ścian – 6
- krawędzi bocznych – 4
- wszystkich krawędzi – 12

Nazwa graniastosłupa zależy od wielokąta w jego podstawie, np. graniastosłup trójkątny ma w podstawie trójkąt, czworokątny – czworokąt.



c)



To nie jest graniastosłup, ponieważ ta bryła nie ma dwóch podstaw, które są wielokątami.

d)



To jest graniastosłup pięciokątny, ponieważ ma dwie podstawy, które są identycznymi pięciokątami, oraz ściany boczne w kształcie prostokątów.

Liczba:

- wierzchołków – 10
- ścian – 7
- krawędzi bocznych – 5
- wszystkich krawędzi – 15

e)



To jest graniastosłup trójkątny, ponieważ ma dwie podstawy, które są identycznymi trójkątami, oraz ściany boczne w kształcie prostokątów.

Liczba:

- wierzchołków – 6
- ścian – 5
- krawędzi bocznych – 3
- wszystkich krawędzi – 9

Ćwiczenie 1.

Czy bryła przedstawiona na rysunku jest graniastosłupem? Uzasadnij odpowiedź. Jeśli tak, podaj nazwę graniastosłupa oraz liczby jego: wierzchołków, ścian, krawędzi bocznych i wszystkich krawędzi.

a)



b)



c)

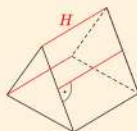


d)



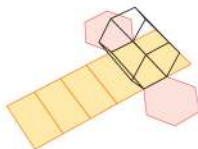
Wysokość graniastosłupa to każdy odcinek łączący podstawy graniastosłupa, prostopadły do tych podstaw. Tą samą nazwą określamy długość takiego odcinka. Wysokość graniastosłupa będziemy oznaczać literą H .

Każda krawędź boczna graniastosłupa prostego jest jego wysokością. Różne odcinki będące wysokością graniastosłupa zaznaczono na rysunkach czerwonym kolorem.

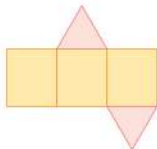


Siatka bryły powstaje przez takie „rozcięcie” niektórych krawędzi tej bryły, żeby ściany można było „rozłożyć” płasko.

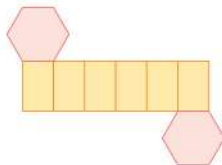
W **siatce graniastosłupa** wyróżniamy dwa jednakowe wielokąty – podstawy graniastosłupa oraz prostokąty będące ścianami bocznymi.



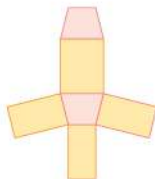
siatka graniastosłupa trójkątnego



siatka graniastosłupa sześciokątnego



siatka graniastosłupa czworokątnego



Prostopadłościan ma:

- 8 wierzchołków,
 - 6 ścian będących prostokątami,
 - 12 krawędzi (po 4 krawędzie tej samej długości).
- Ściany prostopadłościanu
- leżące naprzeciw siebie są identyczne i równoległe,
 - mające wspólną krawędź są prostopadłe.



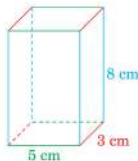
Przykład 2.

Prostopadłościan ma wymiary $5\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 8\text{ cm}$. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu.

Prostopadłościan ma po 4 krawędzie tej samej długości, więc suma długości wszystkich krawędzi wynosi:

$$4 \cdot 5\text{ cm} + 4 \cdot 3\text{ cm} + 4 \cdot 8\text{ cm} = 20\text{ cm} + 12\text{ cm} + 32\text{ cm} = 64\text{ cm}$$

Odp. Suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu wynosi 64 cm.



Ćwiczenie 2.

Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu o wymiarach:

a) $4\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 9\text{ cm}$;

b) $50\text{ cm} \times 5\text{ dm} \times 0,5\text{ m}$.

Sześcian to prostopadłościan, którego wszystkie krawędzie są tej samej długości.



Przykład 3.

Suma długości wszystkich krawędzi sześcianu wynosi 48 m. Jaka długość ma krawędź tego sześcianu?

Sześcian ma 12 krawędzi jednakowej długości. Łącznie mają one długość 48 m.

$$48\text{ m} : 12 = 4\text{ m} \leftarrow \text{Podzielimy sumę długości jego wszystkich krawędzi przez 12.}$$

Odp. Krawędź tego sześcianu ma długość 4 m.

Ćwiczenie 3.

Jaka długość ma krawędź sześcianu o podanej sumie długości krawędzi?

a) 96 dm

b) $3\frac{3}{5}\text{ m}$

c) 14,4 cm

Rozwiąż zadania

1. Czy bryła przedstawiona na rysunku jest graniastosłupem? Uzasadnij odpowiedź. Jeśli tak, podaj nazwę graniastosłupa oraz liczby jego: wierzchołków, ścian, krawędzi bocznych i wszystkich krawędzi.

a)



b)



c)



d)



e)

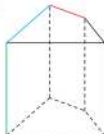


2. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Każdy graniastosłup ma dwie podstawy.	P	F
Podstawą graniastosłupa może być koło.	P	F
Graniastosłup czworokątny ma 8 krawędzi.	P	F
Istnieje graniastosłup o 4 ścianach.	P	F
Graniastosłup trójkątny ma 3 wierzchołki.	P	F
Każdy sześciąt jest prostopadłościąnem.	P	F

3. Na rysunku przedstawiono graniastosłup. Który z kolorowych odcinków jest jego wysokością?

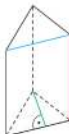
a)



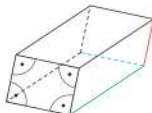
b)



c)

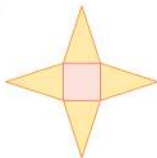


d)

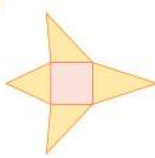


4. Wskaż rysunki, na których przedstawiono siatkę graniastosłupa. Uzasadnij swoją odpowiedź.

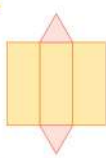
I.



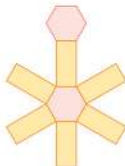
II.



III.



IV.



V.

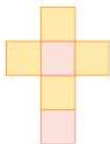


VI.

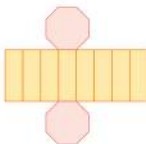


5. Nazwij bryłę, której siatkę przedstawiono na rysunku.

a)



b)



c)



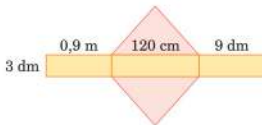
6. Narysuj siatkę:

- prostopadłościanu o wymiarach $3\text{ cm} \times 2\text{ cm} \times 1,5\text{ cm}$;
- graniastosłupa, którego krawędź boczna ma długość 2 cm , a podstawa jest trójkątem równobocznym o boku długości 2 cm ;
- graniastosłupa o wysokości 3 cm oraz podstawie w kształcie trapezu prostokątnego o bokach równoległych długości $2,5\text{ cm}$ i 4 cm oraz krótszym ramieniu długości 2 cm .

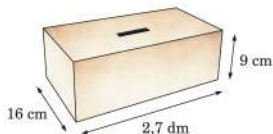
7. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi opisanej bryły.

- Sześcian o krawędzi długości 6 cm .
- Prostopadłościan o wymiarach $2\text{ cm} \times 0,5\text{ cm} \times 3,5\text{ cm}$.
- Graniastosłup o wysokości $7,3\text{ cm}$, którego podstawą jest trójkąt równoboczny o boku długości $1,2\text{ cm}$.

8. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi graniastosłupa, którego siatkę przedstawiono na rysunku.



9. Tomek robi z grubego kartonu skarbonkę w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $2,7\text{ dm} \times 16\text{ cm} \times 9\text{ cm}$. Wszystkie jej krawędzie planuje zabezpieczyć ozdobną taśmą klejącą. Ile co najmniej decymetrów taśmy będzie potrzebował? Ile to metrów?



10. Karolina zapakowała prezent dla koleżanki do pudełka w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $7\text{ cm} \times 13\text{ cm} \times 15\text{ cm}$. Ile centymetrów wstążki powinna przygotować, jeśli zamierza owinać prezent tak, jak pokazano na rysunku, a na ozdobną kokardę potrzebuje dodatkowo 20 cm wstążki?

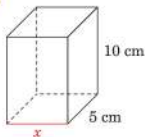


11. Pan Emil kupił 6 różnych gier planszowych i planuje wysłać je swoim wnukom. Opakowanie każdej gry to prostopadłościenne pudełko o wymiarach $15\text{ cm} \times 20\text{ cm} \times 25\text{ cm}$. Czy pan Emil może umieścić wszystkie te pudełka w kartonie o wymiarach $50\text{ cm} \times 45\text{ cm} \times 30\text{ cm}$? Uzasadnij swoją odpowiedź.



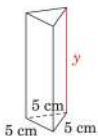
12. Na rysunku przedstawiono graniastosłup. Skorzystaj z informacji podanej pod rysunkiem i oblicz długość krawędzi oznaczonej literą.

a)



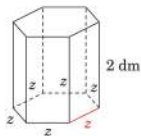
suma długości
krawędzi: 88 cm

b)



suma długości
krawędzi: 69 cm

c)



suma długości
krawędzi: 24 dm

13. Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu wynosi 60 cm . Pierwsza krawędź jest dwa razy dłuższa od drugiej, a trzecia krawędź jest trzy razy dłuższa od drugiej. Oblicz wymiary tego prostopadłościanu.



14. Graniastosłup n -kątny (gdzie n jest liczbą naturalną) to taki graniastosłup, którego podstawą jest wielokąt o n bokach i n kątach. Jeśli $n = 30$, to graniastosłupem 30-kątnym jest graniastosłup, którego podstawą jest trzydziestokąt. Podaj liczby: wierzchołków, ścian, krawędzi bocznych oraz wszystkich krawędzi graniastosłupa:

a) 50-kątnego,

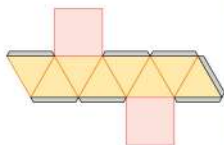
b) 100-kątnego,

c) n -kątnego.



A to ciekawe

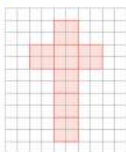
Na rysunku przedstawiono siatkę pewnej bryły, zbudowaną z kwadratów i trójkątów równobocznych. Narysuj na kartonie taką siatkę, wytnij ją i sklej bryłę. Taka bryła nazywa się **antygraniastosłupem** (lub **graniastosłupem skręconym**) **czworokątnym**. Ile wierzchołków ma ta bryła?



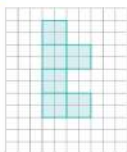
Sprawdź, co umiesz!

1. Na którym rysunku przedstawiono siatkę sześcianu?

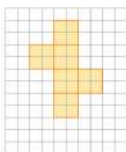
A.



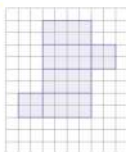
B.



C.



D.



2. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Ścianą boczną graniastosłupa może być trójkąt.	P	F
Każdy graniastosłup ma 3 razy więcej krawędzi niż wierzchołków.	P	F
Liczba wierzchołków graniastosłupa jest zawsze parzysta.	P	F

3. Suma długości wszystkich krawędzi sześcianu wynosi 72 dm. Jaka długość ma krawędź tego sześcianu?

4. Narysuj w zeszycie siatkę graniastosłupa o wysokości 2 cm oraz podstawie w kształcie rombu o przekątnych długości 4 cm i 2 cm.

2. Ostrosłupy

- ▶ Jakie własności mają ostrosłupy proste?
- ▶ Jak narysować siatkę ostrosłupa?



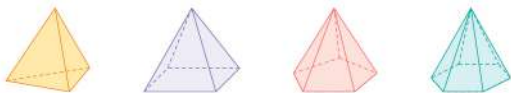
Analizuj!

Ostrosłup prosty to bryła, która ma jedną podstawę będącą wielokątem oraz ściany boczne będące trójkątami równoramiennymi o wspólnym wierzchołku.

W tym podręczniku będziemy się zajmować tylko ostrosłupami prostymi.



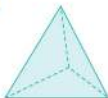
Poniżej przedstawiono modele ostrosłupów prostych.



Przykład 1.

Czy bryła przedstawiona na rysunku jest ostrosłupem? Uzasadnij odpowiedź. Jeśli tak, podaj nazwę ostrosłupa oraz liczby jego: wierzchołków, ścian, krawędzi bocznych i wszystkich krawędzi.

a)



To jest ostrosłup trójkątny (inaczej: czworościan), ponieważ ma jedną podstawę, która jest trójkątem, oraz ściany boczne będące trójkątami o wspólnym wierzchołku.

Liczba:

- wierzchołków – 4
- ścian – 4
- krawędzi bocznych – 3
- wszystkich krawędzi – 6

Nazwa ostrosłupa zależy od wielokąta w jego podstawie, np. ostrosłup trójkątny ma w podstawie trójkąt, czworokątny – czworokąt.



b)



To nie jest ostrosłup, ponieważ podstawa tej bryły nie jest wielokątem.

c)



To jest ostrosłup sześciokątny, ponieważ ma jedną podstawę, która jest sześciokątem, oraz ściany boczne będące trójkątami o wspólnym wierzchołku.

Liczba:

- wierzchołków – 7
- ścian – 7
- krawędzi bocznych – 6
- wszystkich krawędzi – 12

d)



To nie jest ostrosłup, ponieważ ściany boczne tej bryły nie są trójkątami o wspólnym wierzchołku.

e)



To nie jest ostrosłup, ponieważ nie ma podstawy będącej wielokątem oraz ścian bocznych będących trójkątami o wspólnym wierzchołku. Bryła ta powstała w wyniku sklejenia dwóch ostrosłupów o podstawie kwadratu. Nazywana jest ona ośmiościanem.

Ćwiczenie 1.

Czy bryła przedstawiona na rysunku jest ostrosłupem? Uzasadnij odpowiedź. Jeśli tak, podaj nazwę ostrosłupa oraz liczby jego: wierzchołków, ścian, krawędzi bocznych i wszystkich krawędzi.

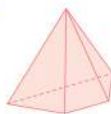
a)



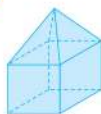
b)



c)



d)



W siatce ostrosłupa można wyróżnić wielokąt, który jest podstawą ostrosłupa, oraz trójkąty równoramienne będące ścianami bocznymi.

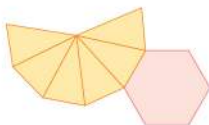
siatka ostrosłupa
czworokątnego



siatka ostrosłupa
pięciokątnego



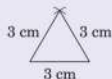
siatka ostrosłupa
sześciokątnego



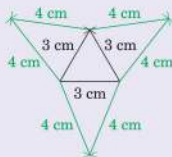
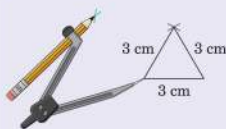
Przykład 2.

Narysuj siatkę ostrosłupa trójkątnego, którego każda krawędź podstawy ma długość 3 cm, a każda krawędź boczna ma długość 4 cm.

- 1 Zaczynamy od skonstruowania podstawy. Rysujemy odcinek o długości 3 cm, następnie konstruujemy trójkąt równoboczny o boku długości równej temu odcinkowi (konstrukcja trójkąta – patrz s. 176).



- 2 Konstruujemy ściany boczne: każdy bok trójkąta równobocznego jest też podstawą trójkąta równoramiennego o ramionach długości 4 cm.



- 3 Jeśli chcielibyśmy skleić model ostrosłupa, musielibyśmy dorysować zakładki.

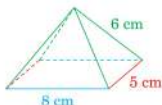
Ćwiczenie 2.

Narysuj siatkę ostrosłupa trójkątnego, którego każda krawędź podstawy ma długość 4 cm, a każda krawędź boczna ma długość 5 cm.

Przykład 3.

Każda krawędź boczna ostrosłupa ma długość 6 cm. Podstawą tego ostrosłupa jest prostokąt o wymiarach 8 cm $\times$ 5 cm. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa.

Wykonamy rysunek pomocniczy i zaznaczymy krawędzie tej samej długości tym samym kolorem.



Ostrosłup ma cztery krawędzie boczne o tej samej długości 6 cm, dwie krawędzie podstawy o tej samej długości 8 cm oraz dwie krawędzie podstawy o tej samej długości 5 cm. Zatem suma długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa wynosi:

$$4 \cdot 6 \text{ cm} + 2 \cdot 8 \text{ cm} + 2 \cdot 5 \text{ cm} = 24 \text{ cm} + 16 \text{ cm} + 10 \text{ cm} = 50 \text{ cm}$$

Odp. Suma długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa wynosi 50 cm.

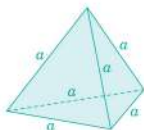
Ćwiczenie 3.

Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi ostrosłupa, którego podstawą jest sześciokąt o bokach jednakowej długości równej 4 cm, a każda krawędź boczna ostrosłupa ma długość 1 dm.

Przykład 4.

Suma długości wszystkich krawędzi czworościanu foremnego wynosi 42 dm. Jaka długość ma krawędź tego czworościanu?

Czworościan foremny to ostrosłup, którego wszystkie ściany są jednakowymi trójkątami równobocznymi. Wykonamy rysunek pomocniczy.



Taki czworościan ma 6 krawędzi jednakowej długości. Suma ich długości to 42 dm, więc jedna krawędź ma długość: $42 \text{ dm} : 6 = 7 \text{ dm}$.

Odp. Krawędź tego czworościanu ma długość 7 dm.

Ćwiczenie 4.

Jaka długość ma krawędź czworościanu foremnego o podanej sumie długości wszystkich krawędzi?

a) 36 m

b) $12\frac{3}{4}$ dm

c) 10,2 cm

Rozwiąż zadania

1. Czy bryła przedstawiona na rysunku jest ostrosłupem? Jeśli tak, podaj nazwę ostrosłupa oraz liczby jego: wierzchołków, ścian, krawędzi bocznych i wszystkich krawędzi.

a)



b)



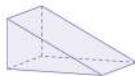
c)



d)



e)



2. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Każdy ostrosłup ma tylko jedną podstawę.	P	F
Istnieje ostrosłup, który ma dokładnie 6 ścian.	P	F
Ostrosłup trójkątny ma 7 krawędzi.	P	F
Ostrosłup sześciokątny ma 7 wierzchołków.	P	F
Istnieje ostrosłup, który ma dokładnie 3 wierzchołki.	P	F
Czworościan foremny ma 4 wierzchołki.	P	F

3. Wskaż rysunki, na których przedstawiono siatkę ostrosłupa. Uzasadnij odpowiedź.

I.



II.



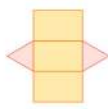
III.



IV.



V.

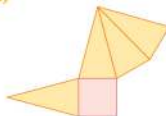


4. Nazwij bryłę, której siatkę przedstawiono na rysunku.

a)



b)



c)



5. Narysuj siatkę ostrosłupa, którego podstawą jest:

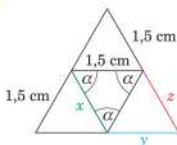
- a) kwadrat o boku długości 1,5 cm, a każda krawędź boczna ostrosłupa ma długość 3 cm;
- b) trójkąt równoboczny o boku długości 2,5 cm, a każda krawędź boczna ostrosłupa ma długość 4 cm.

6. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi:

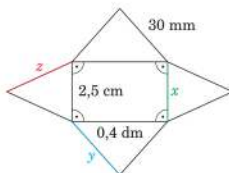
- a) ostrosłupa sześciokątnego, którego każda krawędź boczna ma długość 6 cm, a krawędź podstawy ma 5 cm;
- b) ostrosłupa czworokątnego, w którym każda krawędź boczna ma długość 7 cm, a wszystkie krawędzie podstawy mają po 2,5 cm;
- c) czworościanu foremnego, którego krawędź ma długość 3 dm.

7. Na rysunku przedstawiono siatkę ostrosłupa. Podaj długości krawędzi oznaczonych literami, a następnie oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa.

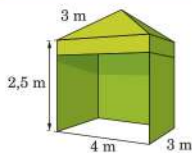
a)



b)



8. Pan Tomasz przygotowuje stoisko na kiermasz książek. Namiot osłaniający stoisko będzie miał kształt bryły, która składa się z prostopadłościanu i ostrosłupa o podstawie takiej, jak górna podstawa prostopadłościanu. Pan Tomasz naszkicował projekt tego namiotu. Na szkicu czarne odcinki odpowiadają aluminiowym rurkom, tworzącym stelaż namiotu.



- a) Ile co najmniej metrów rurki potrzeba do wykonania takiej konstrukcji?
- b) Ile pan Tomasz zapłaci za rurki, jeśli cena za 100 cm rurki wynosi 7,90 zł?

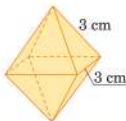
9. W ostrosłupie czworokątnym o podstawie kwadratowej każda krawędź boczna jest dwa razy dłuższa niż krawędź podstawy. Suma długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa wynosi 24 dm. Jakie długości mają krawędzie tego ostrosłupa?



10. Narysuj siatkę:

- ostrosłupa sześciokątnego, w którym każda krawędź podstawy ma długość 2 cm i każda krawędź boczna ma długość 4 cm;
- ośmiościanu foremnego o krawędzi długości 3 cm.

Ośmiościan foremny to bryła, która ma 8 ścian będących identycznymi trójkątami równobocznymi, jak na rysunku.



Sprawdź, co umiesz!

1. Wskaż rysunek, który nie przedstawia siatki ostrosłupa.

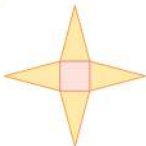
A.



B.



C.



D.



- Karol i jego młodsza siostra planują zrobić namiot dla lalek. Stelaż namiotu będą tworzyć 4 listewki, związane na górze i ustawione jak na ilustracji obok. Czy 2,5 m listewki wystarczy na wykonanie stelaża, jeśli krawędź boczna namiotu ma mieć długość 65 cm, a górny fragment każdej listewki, wystający nad namiotem, ma mieć długość 10 cm? Uzasadnij swoją odpowiedź.



- Ostrosłup ma podstawę w kształcie prostokąta o wymiarach $6\text{ cm} \times 8\text{ cm}$. Każda krawędź boczna tego ostrosłupa ma długość 9,5 cm. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tej bryły.

- Narysuj siatkę ostrosłupa, którego podstawą jest kwadrat o boku długości 2 cm, a ściany boczne są trójkątami równoramiennymi o ramieniu długości 4 cm.

3. Pole powierzchni graniastoslupa

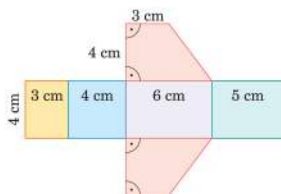
- ▶ Jak obliczyć pole powierzchni całkowitej graniastoslupa?
- ▶ Jak wyznaczyć nieznaną długość krawędzi graniastoslupa, znając jego pole powierzchni całkowitej?



Analizuj!

Przykład 1.

Zosia najchętniej wręcza prezenty zapakowane w samodzielnie wykonane pudełka. Jako prezent urodzinowy dla mamy zrobiła komplet biżuterii z żywicy i zapakowała go do pudełka, którego siatkę przedstawiono na rysunku. Jakiej bryły kształt ma to pudełko? Jakie jest jej pole powierzchni całkowitej?



Pudełko ma kształt graniastoslupa czworokątnego, który w podstawie ma trapez prostokątny.

Pole trapezu prostokątnego wynosi

$$P_{\square} = \frac{(3+6) \cdot 4}{2} = \frac{9 \cdot 4}{2} = 9 \cdot 2 = 18 \text{ [cm}^2\text{]}.$$

Pola ścian bocznych graniastoslupa wynoszą odpowiednio:

$$P_{\square} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_{\square} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_{\square} = 6 \cdot 4 = 24 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_{\square} = 5 \cdot 4 = 20 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa jest równe sumie pól dwóch trapezów oraz czterech prostokątów:

$$P_c = 2 \cdot P_{\square} + P_{\square} + P_{\square} + P_{\square} + P_{\square} = 2 \cdot 18 + 12 + 16 + 24 + 20 = 36 + 72 = 108 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Odp. To pudełko ma kształt graniastoslupa czworokątnego, którego podstawą jest trapez prostokątny. Pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa wynosi 108 cm².

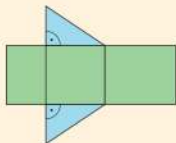
Pole powierzchni całkowitej graniastoslupa to suma pól dwóch podstaw i pól wszystkich ścian bocznych.

$$P_c = 2 \cdot P_p + P_b$$

P_c – pole powierzchni całkowitej graniastoslupa

P_p – pole podstawy graniastoslupa

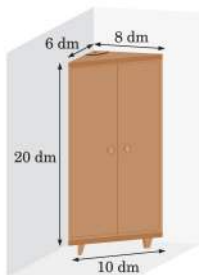
P_b – pole powierzchni bocznej graniastoslupa, czyli suma pól wszystkich ścian bocznych graniastoslupa



Ćwiczenie 1.

Rodzice Kuby kupili na targu staroci szafkę narożną w kształcie graniastoslupa trójkątnego, jak na rysunku obok. Zamierzają ją zaimpregnować. Jednolitowa puszka impregnatu wystarcza na zabezpieczenie 1000 dm^2 powierzchni.

- Oblicz zewnętrzną powierzchnię szafki.
- Czy taka puszka wystarczy, aby zaimpregnować całą zewnętrzną powierzchnię szafki?

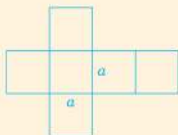


Pole powierzchni całkowitej

sześcianu



$$P_c = 6a^2$$



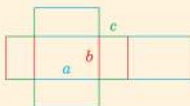
prostopadłościanu



$$P_c = 2ab + 2ac + 2bc$$

lub

$$P_c = 2(ab + ac + bc)$$



Przykład 2.

Jaką długość ma krawędź sześcianu, którego pole powierzchni całkowitej jest równe 96 cm^2 ?

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

a – długość krawędzi sześcianu (w centymetrach)

$P_c = 96 \text{ cm}^2$ – pole powierzchni całkowitej sześcianu

Pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi długości a wyraża się wzorem:

$P_c = 6a^2$. Podstawimy do wzoru znane wielkości i wyznaczmy długość a .

$$96 = 6a^2 \quad | :6$$

$$a^2 = 16 \quad \leftarrow \text{Wyznamy liczbę dodatnią, której kwadrat jest równy 16.}$$

$$a = 4 \text{ [cm]}$$

Odp. Krawędź sześcianu ma długość 4 cm.

Ćwiczenie 2.

Jaką długość ma krawędź sześcianu o podanym polu powierzchni całkowitej?

a) 54 cm^2

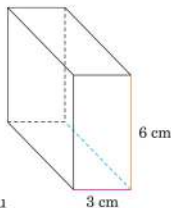
b) 294 m^2

c) $1,5 \text{ cm}^2$

d) $\frac{2}{3} \text{ m}^2$

Przykład 3.

Na rysunku wyróżniono kolorami trzy krawędzie prostopadłościanu wychodzące z jednego wierzchołka. Pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu wynosi 126 cm^2 . Jedna z nich ma długość 3 cm, druga ma długość 6 cm. Jaką długość ma trzecia z wyróżnionych krawędzi?



Przyjmujemy następujące oznaczenia:

$a = 3 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$, c – długości krawędzi prostopadłościanu

$P_c = 126 \text{ cm}^2$ – pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach długości: a , b i c wyraża się wzorem: $P_c = 2ab + 2ac + 2bc$. Podstawimy do wzoru znane wielkości i wyznaczmy długość c .

$$126 = 2 \cdot 3 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot c + 2 \cdot 6 \cdot c$$

$$126 = 36 + 6c + 12c$$

$$126 = 36 + 18c \quad | -36$$

$$90 = 18c \quad | :18$$

$$c = 5 \text{ [cm]}$$

Odp. Trzecia z wyróżnionych krawędzi prostopadłościanu ma długość 5 cm.

Ćwiczenie 3.

Prostopadłościan ma wymiary $a \times b \times c$. Oblicz trzeci wymiar tego prostopadłościanu.

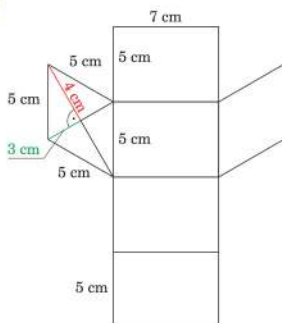
a) $a = 4 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$, $P_c = 78 \text{ cm}^2$

b) $b = 2 \text{ m}$, $c = 10 \text{ m}$, $P_c = 400 \text{ m}^2$

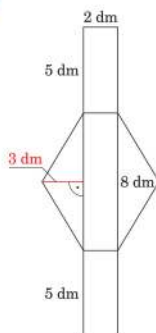
Rozwiąż zadania

1. Na rysunku przedstawiono siatkę graniastoslupa. Oblicz pole podstawy, pole powierzchni bocznej oraz pole powierzchni całkowitej tej bryły.

a)



b)

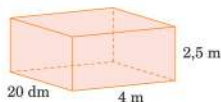


Romb, którego przekątne mają długość e i f , ma pole równe $P = \frac{e \cdot f}{2}$.

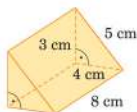


2. Oblicz pole podstawy, pole powierzchni bocznej oraz pole powierzchni całkowitej graniastoslupa przedstawionego na rysunku.

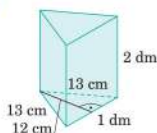
a)



b)



c)

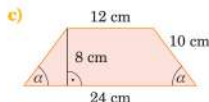
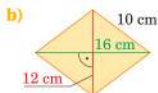
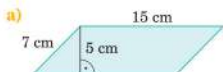


3. Oblicz pole powierzchni całkowitej opisanej bryły.

- Sześcian o krawędzi długości 7 cm.
- Prostopadłościan o wymiarach 8 dm $\times$ 10 dm $\times$ 12 dm.
- Prostopadłościan, który ma w podstawie kwadrat o boku długości 4 cm, a krawędź boczna tego prostopadłościanu ma długość 1,5 dm.
- Prostopadłościan, którego najkrótsza krawędź ma długość 7,5 cm, a każda kolejna jest o 2 cm dłuższa od poprzedniej krawędzi.



4. Oblicz pole podstawy, pole powierzchni bocznej oraz pole powierzchni całkowitej graniastoslupa o podstawie przedstawionej na rysunku oraz wysokości równą 15 cm.



5. Oblicz długość krawędzi sześcianu o podanym polu powierzchni całkowitej.

a) 600 cm^2

b) $2,16 \text{ m}^2$

c) $\frac{6}{25} \text{ m}^2$

6. Pole powierzchni całkowitej graniastoslupa sześciokątnego wynosi 336 cm^2 , a pole podstawy tego graniastoslupa to 24 cm^2 . Ile jest równe jego pole powierzchni bocznej?

7. Pole powierzchni bocznej graniastoslupa trójkątnego wynosi 25 dm^2 , a jego pole powierzchni całkowitej jest równe 42 dm^2 . Jakie pole ma podstawa tego graniastoslupa?

8. Graniastolup o podstawie w kształcie rombu ma pole powierzchni bocznej równe 120 mm^2 . Krawędź boczna tego graniastoslupa ma długość 6 mm. Jaką długość ma krawędź podstawy tego graniastoslupa?

9. Adam postanowił odnowić pamiątkowy kufer w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $7 \text{ dm} \times 0,4 \text{ m} \times 35 \text{ cm}$. Chce dwukrotnie pomalować zewnętrzną powierzchnię całego kufra.

- a) Czy jedna puszka farby wystarczy Adamowi na wykonanie zaplanowanej pracy?
b) Jaki będzie koszt zakupu farby potrzebnej Adamowi?



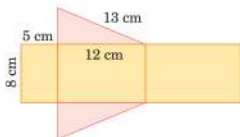
10. Pole podstawy graniastoslupa wynosi 9 dm^2 , a obwód tej podstawy to 12 dm. Długość krawędzi bocznej tego graniastoslupa jest równa 5 dm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa.



11. Podstawa prostopadłościanu jest prostokąt o wymiarach $7 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$. Pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu wynosi 532 cm^2 . Jaka jest wysokość tego prostopadłościanu?



1. Na rysunku przedstawiono siatkę graniastosłupa.



Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

- I. Ile wynosi pole podstawy tego graniastosłupa?
 A. 30 cm^2 B. 60 cm^2
- II. Ile jest równe pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa?
 C. 240 cm^2 D. 300 cm^2

2. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi długości 12 cm wynosi 864 cm^2 .	P	F
Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o wymiarach $13 \text{ cm} \times 2 \text{ dm} \times 0,1 \text{ m}$ wynosi ponad 1000 cm^2 .	P	F

3. Oblicz pole podstawy graniastosłupa pięciokątnego, którego pole powierzchni całkowitej wynosi 85 cm^2 , a pole powierzchni bocznej jest równe 72 cm^2 .
4. Podstawa graniastosłupa jest kwadratem o polu równym 36 cm^2 . Krawędź boczna tego graniastosłupa ma długość 12 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

5. Pudełko na szampon dla psa ma kształt prostopadłościanu o wymiarach $1,5 \text{ dm} \times 0,9 \text{ dm} \times 0,5 \text{ dm}$. Jest zrobione z kartonu, którego cena to 7 gr za 1 dm^2 . Jaki jest koszt kartonu potrzebnego do wykonania takiego pudełka? Przyjmij, że na zakładki potrzebny jest dodatkowy 1 dm^2 kartonu. Wynik zaokrąglij do pełnych groszy.



4. Objętość. Jednostki objętości

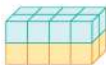
- ▶ Czym jest objętość bryły?
- ▶ W jakich jednostkach wyraża się objętość?
- ▶ Jak obliczyć objętość sześcianu i prostopadłościanu?



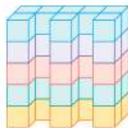
Odkrywaj!

1. W przedstawionych poniżej bryłach Bruno ułożył każdą poziomą warstwę z jednakowych sześciennych klocków w różnych kolorach.

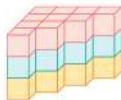
I.



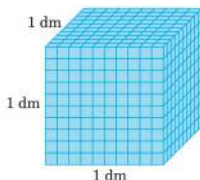
II.



III.



- a) Ile klocków znajduje się w jednej warstwie każdej z brył?
 - b) Z ilu warstw składają się poszczególne bryły?
 - c) Ilu klocków użył Bruno do zbudowania poszczególnych brył?
2. Pudełko w kształcie sześcianu o krawędzi długości 1 dm zostało wypełnione jednakowymi sześciennymi kostkami o krawędzi długości 1 cm.



- a) Ile kostek tworzy jedną warstwę?
- b) Ile jest wszystkich warstw?
- c) Ilu kostek użyto do wypełnienia pudełka?



Analizuj!



Objętość bryły opisuje, ile „miejsca w przestrzeni” zajmuje ta bryła. Objętość będziemy oznaczać literą V .

Przykład 1.

Zosia, Pola i Ela wykorzystaly po jednej kulce modeliny. Zosia zrobila królika, Pola – ślimaka, a Ela – konika morskiego. Kuba użył dwóch kulek i z każdej z nich zrobił ośmiorniczkę, a Cezary z trzech kulek ulepił figurkę psa. Każda kulka modeliny była takiej samej wielkości. Czyja praca ma największą objętość? W obliczeniach pominij objętość oczek doklejonych do zwierzątek.



Każda z dziewcząt wykorzystała tyle samo modeliny, więc ich figurki mają jednakowe objętości, równe objętości jednej kulki modeliny.

Kuba użył dwóch kulek – jego praca ma objętość dwa razy większą niż praca każdej z dziewcząt.

Cezary użył trzech kulek – jego praca ma objętość trzy razy większą niż praca każdej z dziewcząt.

Odp. Największą objętość ma praca Cezarego.

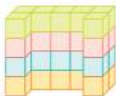
Ćwiczenie 1.

Każda z brył przedstawionych na rysunkach została zbudowana z jednakowych sześciennych kostek w różnych kolorach.

I.



II.



III.



- Ilu kostek użyto do zbudowania każdej z brył?
- Która bryła ma najmniejszą objętość?

Różne wielkości mierzymy przy użyciu odpowiednich jednostek

długość



odecinek jednostkowy

pole



kwadrat jednostkowy

objętość



sześcian jednostkowy

Jednostka objętości	Nazwa	Opis	Przykład
1 mm^3	milimetr sześcienny	objętość sześcianu o krawędzi długości 1 mm	W 1 mm^3 krwi znajduje się około 5 mln czerwonych krwinek. 
1 cm^3	centymetr sześcienny	objętość sześcianu o krawędzi długości 1 cm	Kostka cukru ma objętość 1 cm^3 . 
1 dm^3	decymetr sześcienny	objętość sześcianu o krawędzi długości 1 dm	W bidonie mieści się 1 dm^3 , czyli 1 l wody. 
1 m^3	metr sześcienny	objętość sześcianu o krawędzi długości 1 m	Rodzina Nowaków zużywa miesięcznie 8 m^3 wody. 
1 km^3	kilometr sześcienny	objętość sześcianu o krawędzi długości 1 km	W Morzu Bałtyckim jest około $21\,721 \text{ km}^3$ wody. 

Przykład 2.

Dany jest prostopadłościan o wymiarach $4\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 6\text{ cm}$. Zbudowany jest on z jednakowych sześciątów o krawędzi długości 1 cm .

- a) Z ilu sześciątów o krawędzi długości 1 cm zbudowana jest górna warstwa bryły?

W górnej warstwie bryły widzimy **3 rzędy** sześciątów jednostkowych po **4 sześciąt** w rzędzie, razem $3 \cdot 4 = 12$ sześciątów.

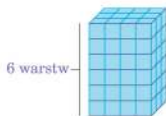
Odp. Górna warstwa bryły jest zbudowana z 12 sześciątów.



- b) Z ilu warstw składa się ten prostopadłościan?

Wyróżnimy **warstwy** tego prostopadłościanu na rysunku. Jest ich 6.

Odp. Ten prostopadłościan składa się z 6 warstw.



- c) Jaką objętość ma ten prostopadłościan?

Objętość prostopadłościanu jest równa sumie objętości wszystkich sześciątów jednostkowych, z których jest on zbudowany. Tych sześciątów jest:

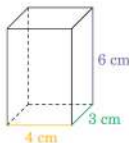
$$3 \cdot 4 \cdot 6 = 12 \cdot 6 = 72$$

liczba sześciątów w warstwie liczba warstw

Każdy sześciąt o krawędzi długości 1 cm ma objętość 1 cm^3 , więc prostopadłościan ma objętość $V = 72\text{ cm}^3$.

Odp. Objętość tego prostopadłościanu wynosi 72 cm^3 .

- d) Jaki jest związek pomiędzy objętością a długościami krawędzi prostopadłościanu?



Krawędzie prostopadłościanu mają długości: **3 cm**, **4 cm** i **6 cm**. Możemy zauważyć, że aby obliczyć objętość, należy pomnożyć długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z jednego wierzchołka.

$$V = 3\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} = 72\text{ cm}^3$$

Odp. Objętość prostopadłościanu jest równa iloczynowi długości jego krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka.

Ćwiczenie 2.

Na rysunku przedstawiono prostopadłościan zbudowany z jednakowych sześciątów o krawędzi długości 1 cm. Podaj wymiary prostopadłościanu i oblicz jego objętość.

a)



b)



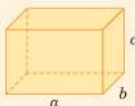
c)



Objętość

prostopadłościanu

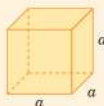
Objętość prostopadłościanu o wymiarach $a \times b \times c$ jest równa iloczynowi abc .



$$V = abc$$

sześcianu

Sześcian jest prostopadłościanem o krawędzi długości a . Jego objętość jest równa $a \cdot a \cdot a = a^3$.



$$V = a^3$$



Przykład 3.

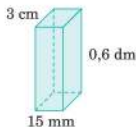
Oblicz objętość prostopadłościanu o wymiarach $0,6 \text{ dm} \times 3 \text{ cm} \times 15 \text{ mm}$.

Najpierw przedstawimy wszystkie wymiary prostopadłościanu w tej samej jednostce, na przykład w centymetrach:

$$a = 0,6 \text{ dm} = 6 \text{ cm},$$

$$b = 3 \text{ cm},$$

$$c = 15 \text{ mm} = 1,5 \text{ cm}.$$



Objętość prostopadłościanu obliczymy, korzystając ze wzoru $V = abc$.

$$V = 6 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} \cdot 1,5 \text{ cm} = 27 \text{ cm}^3$$

Odp. Objętość tego prostopadłościanu wynosi 27 cm^3 .

Pamiętaj, aby przed wykonaniem obliczeń ujednolicić jednostki.



Ćwiczenie 3.

Oblicz objętość prostopadłościanu o wymiarach $8 \text{ m} \times 400 \text{ cm} \times 25 \text{ dm}$.

Przykład 4.

Oblicz objętość prostopadłościanu o wymiarach $0,5 \text{ dm} \times 0,05 \text{ m} \times 50 \text{ mm}$.

Przedstawimy wszystkie wymiary prostopadłościanu w tej samej jednostce:

$$a = 0,5 \text{ dm} = 5 \text{ cm}, \quad b = 0,05 \text{ m} = 5 \text{ cm}, \quad c = 50 \text{ mm} = 5 \text{ cm}$$

Prostopadłościan ma wszystkie krawędzie tej samej długości, więc jest sześcianem o krawędzi długości $a = 5 \text{ cm}$. Objętość sześcianu obliczymy, korzystając ze wzoru $V = a^3$.

$$V = (5 \text{ cm})^3 = 5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 125 \text{ cm}^3$$

Odp. Objętość sześcianu wynosi 125 cm^3 .

Ćwiczenie 4.

Oblicz objętość prostopadłościanu o wymiarach $1,1 \text{ cm} \times 11 \text{ mm} \times 0,11 \text{ dm}$.

Aby sprawnie zamieniać **jednostki objętości**, warto pamiętać zależności między jednostkami długości:

$$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}, \text{ więc}$$

$$1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} = 10 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm} = 1000 \text{ mm}^3$$

$$1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}, \text{ więc}$$

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ dm} \cdot 1 \text{ dm} \cdot 1 \text{ dm} = 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 1000 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm}, \text{ więc}$$

$$1 \text{ m}^3 = 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 10 \text{ dm} \cdot 10 \text{ dm} \cdot 10 \text{ dm} = 1000 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}, \text{ więc}$$

$$1 \text{ m}^3 = 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 100 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm} = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}, \text{ więc}$$

$$1 \text{ km}^3 = 1 \text{ km} \cdot 1 \text{ km} \cdot 1 \text{ km} = 1000 \text{ m} \cdot 1000 \text{ m} \cdot 1000 \text{ m} = 1\,000\,000\,000 \text{ m}^3$$

Przykład 5.

Wyraż objętość w podanej jednostce.

a) 2 cm^3 w mm^3

$$2 \text{ cm}^3 = 2 \cdot 1 \text{ cm}^3 = 2 \cdot 1000 \text{ mm}^3 = 2000 \text{ mm}^3$$

b) 9 m^3 w cm^3

$$9 \text{ m}^3 = 9 \cdot 1 \text{ m}^3 = 9 \cdot 1\,000\,000 \text{ cm}^3 = 9\,000\,000 \text{ cm}^3$$

c) $0,25 \text{ km}^3$ w m^3

$$0,25 \text{ km}^3 = 0,25 \cdot 1 \text{ km}^3 = 0,25 \cdot 1\,000\,000\,000 \text{ m}^3 = 250\,000\,000 \text{ m}^3$$

Ćwiczenie 5.

Wyraż objętość w podanej jednostce.

a) 6 dm^3 w cm^3

b) 13 m^3 w cm^3

c) $0,7 \text{ km}^3$ w m^3

Objętość płynu najczęściej wyraża się w litrach (l) i mililitrach (ml).

$$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 \quad 1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3 \quad 1 \text{ l} = 1000 \text{ ml} \quad 1 \text{ ml} = 0,001 \text{ l}$$

Na przykład:

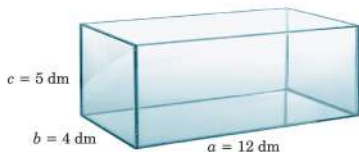
- szklanka może mieć pojemność 250 ml – to oznacza, że do wypełnienia tej szklanki potrzeba płynu (np. herbaty) o objętości 250 ml,
- mleko zwykle sprzedawane jest w kartonach o pojemności 1 l,
- łyżeczka do herbaty ma pojemność 5 ml.



Przykład 6.

Akwarium ma kształt prostopadłościanu o wymiarach wewnętrznych $12 \text{ dm} \times 4 \text{ dm} \times 5 \text{ dm}$. Ile najwięcej litrów wody zmieści się w tym akwarium? Ile to mililitrów?

Na rysunku zaznaczymy informacje zawarte w treści zadania.



Obliczymy pojemność akwarium, czyli objętość prostopadłościanu, korzystając ze wzoru $V = abc$.

$$V = 12 \text{ dm} \cdot 4 \text{ dm} \cdot 5 \text{ dm} = 240 \text{ dm}^3 = 240 \text{ l} \leftarrow \text{Zamienimy decymetry sześcienné na litry.}$$

$$240 \text{ l} = 240 \cdot 1 \text{ l} = 240 \cdot 1000 \text{ ml} = 240\,000 \text{ ml} \leftarrow \text{Zamienimy litry na mililitry.}$$

Odp. W akwarium zmieści się 240 l, czyli 240 000 ml wody.

Ćwiczenie 6.

Basen olimpijski ma kształt prostopadłościanu o wymiarach wewnętrznych $50 \text{ m} \times 250 \text{ dm} \times 300 \text{ cm}$. Ile najwięcej litrów wody zmieści się w tym basenie? Ile to mililitrów?

Rozwiąż zadania

1. Bryła przedstawiona na rysunku zbudowana jest z jednakowych kostek w kształcie sześcianu o krawędzi długości 1 cm. Z ilu kostek składa się ta bryła? Jaka ma objętość?

a)



b)



c)



d)



2. Bryła jest zbudowana z magnetycznych klocek w kształcie jednakowych sześcianów. Ile co najmniej klocek należy dołożyć, żeby bryła stała się prostopadłościannym?

a)



b)



c)



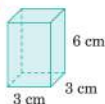
d)



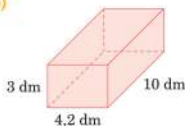
3. Ile co najwyżej sześciennych pudełek o krawędzi długości 6 cm zmieści się do prostopadłościennego kartonu o wymiarach $20\text{ cm} \times 30\text{ cm} \times 30\text{ cm}$?

4. Oblicz objętość prostopadłościannu przedstawionego na rysunku.

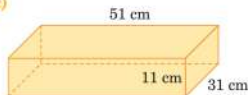
a)



b)



c)



5. Oblicz objętość:

- a) prostopadłościannu o polu podstawy 10 cm^2 i wysokości równej 5,2 cm;
- b) sześcianu o krawędzi długości 3 dm;
- c) prostopadłościannu o wysokości 2,5 dm i podstawie w kształcie kwadratu o boku długości 2 dm.

6. Oblicz objętość prostopadłościannu o podanych wymiarach.

a) $2\text{ cm} \times 45\text{ mm} \times 0,8\text{ dm}$

b) $1,5\text{ dm} \times 150\text{ mm} \times 15\text{ cm}$

7. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Objętość sześcianu o krawędzi długości 0,8 dm wynosi $2,4 \text{ dm}^3$.	P	F
Objętość prostopadłościanu, którego podstawa ma pole $2,5 \text{ dm}^2$ i wysokość jest równa 4 dm, wynosi 10 dm^3 .	P	F
Objętość sześcianu o krawędzi długości 1 dm jest dwa razy mniejsza niż objętość sześcianu o krawędzi długości 2 dm.	P	F

8. Jaka jest objętość i jakie pole powierzchni całkowitej sześcianu, którego suma długości wszystkich krawędzi wynosi 60 dm?

9. Ustal długość krawędzi sześcianu, którego

- a) objętość wynosi 27 dm^3 , b) pole powierzchni całkowitej wynosi 6 m^2 .

10. Wyraż podane wielkości we wskazanej jednostce.

- a) $12 \text{ cm}^3 \cdot 0,12 \text{ dm}^3$ mm³ b) $2,1 \text{ dm}^3 \cdot 7 \text{ m}^3$ cm³
 c) $0,72 \text{ m}^3 \cdot 8 \text{ km}^3$ dm³ d) $0,615 \text{ km}^3 \cdot 28 \text{ km}^3$ m³

11. Jaką liczbę należy wstawić w miejsce $\clubsuit$?

- a) $2 \text{ cm}^3 = \clubsuit \text{ ml}$ b) $8 \text{ l} = \clubsuit \text{ ml}$ c) $5 \text{ dm}^3 = \clubsuit \text{ l}$
 d) $17 \text{ dm}^3 = \clubsuit \text{ ml}$ e) $6000 \text{ ml} = \clubsuit \text{ l}$ f) $150\,000 \text{ cm}^3 = \clubsuit \text{ l}$

12. Dopasuj odpowiednią pojemność podaną w ramce do obiektu przedstawionego na zdjęciu.

1,5 l 1500 m³ 5 ml

I.



II.



III.



13. Oblicz pojemność prostopadłościennego pojemnika o podanych wymiarach wewnętrznych. Wynik podaj w litrach i w mililitrach.

- a) $7 \text{ dm} \times 3 \text{ dm} \times 2 \text{ dm}$ b) $70 \text{ cm} \times 50 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$
 c) $8 \text{ dm} \times 20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ d) $16 \text{ cm} \times 3 \text{ dm} \times 25 \text{ cm}$

14. Na ilustracjach przedstawiono pojazdy wraz z informacją o ich pojemności silnika. Który z tych samochodów ma największą pojemność silnika?



2 l



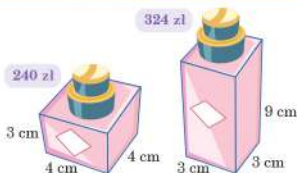
799 cm³



3,1 dm³



15. Perfumy sprzedawane są w dwóch różnych prostopadłościennych szklanych pojemnikach o wymiarach wewnętrznych podanych na rysunkach. Jaka jest cena 1 ml perfum w każdym z tych pojemników?



Sprawdź, co umiesz!

1. Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

- I. Jaką objętość ma prostopadłościan o wymiarach $7\text{ cm} \times 7\text{ cm} \times 10\text{ cm}$?
A. 490 cm^3 B. 378 cm^3
- II. Jaką objętość ma sześcian o krawędzi długości $0,2\text{ m}$?
C. $0,008\text{ m}^3$ D. $0,6\text{ m}^3$

2. Karolina przygotowała prostopadłościenną donicę o wymiarach wewnętrznych $1,5\text{ dm} \times 2\text{ dm} \times 7\text{ dm}$. Ile decymetrów sześciennych ziemi powinna kupić, aby nappełnić tę donicę?

3. Jaką liczbę należy wstawić w miejsce ♥?

- a) $7\text{ dm}^3 = \heartsuit\text{ cm}^3$ b) $6\text{ m}^3 = \heartsuit\text{ dm}^3$ c) $8,9\text{ cm}^3 = \heartsuit\text{ mm}^3$
d) $0,51\text{ dm}^3 = \heartsuit\text{ l}$ e) $8\text{ ml} = \heartsuit\text{ l}$ f) $0,72\text{ l} = \heartsuit\text{ ml}$

4. Cezary przygotował wyciskany sok wieloowocowy, który zajął pół dzbanka o pojemności 3 l. Ile szklanek o pojemności 250 ml może napęlić tym sokiem?

- A. 12 B. 6 C. 24 D. 83

5. Czy w naczyniu o wymiarach wewnętrznych $30\text{ cm} \times 6\text{ dm} \times 0,5\text{ m}$ zmieści się 80 l wody? Uzasadnij swoją odpowiedź.

5. Objętość graniastosłupa prostego

- ▶ Jak obliczać objętość graniastosłupa prostego?
- ▶ W jaki sposób wyznaczać długości pewnych odcinków, znając objętość graniastosłupa prostego?
- ▶ W jaki sposób wyznaczyć pole podstawy graniastosłupa prostego, znając jego objętość i wysokość?



Odkrywaj!

1. Bruno ma 24 klocki w kształcie jednakowych sześcianów o krawędziach długości 1 cm. Chce budować z nich różne prostopadłościany o wysokości 2 cm, za każdym razem wykorzystując wszystkie klocki. Na rysunkach przedstawiono dwa prostopadłościany zbudowane przez Brunona.



- a) Zapisz wymiary podstawy i wysokość, a następnie wyznacz pole podstawy i objętość każdego z prostopadłościanów. Co zauważasz?
- b) Czy Bruno może zbudować jeszcze inny prostopadłościan o wysokości 2 cm, wykorzystując wszystkie klocki? Jeśli tak, to jaki?
2. Na zdjęciu przedstawiono basen olimpijski. Okazuje się, że w jednym takim basenie mieści się 3 125 000 l wody. Bruno uczęszcza na zajęcia na basenie sportowym, którego głębokość wynosi 1,5 m.

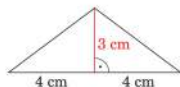


- a) Czy basen olimpijski jest głębszy od basenu, na który chodzi Bruno? Jak można to obliczyć?
- b) Czy można obliczyć, ile litrów wody mieści się w basenie, na który chodzi Bruno? Jeśli tak, oblicz to. Jeśli nie, uzasadnij dlaczego.



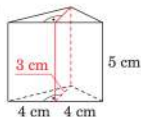
Analizuj!

Z modeliny wykonano model graniastosłupa trójkątnego o wysokości 5 cm. Podstawa tego graniastosłupa jest trójkątem o wymiarach podanych na rysunku obok. Wyznamy objętość tego graniastosłupa.

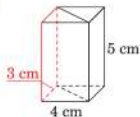


Jeśli przekroimy graniastosłup tak, jak pokazano na rysunku I, to z otrzymanych dwóch części możemy zbudować prostopadłościan taki jak na rysunku II.

I.



II.



Obliczmy objętość prostopadłościanu (V_{II}).

$$V_{II} = \underbrace{4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm}}_{\text{pole podstawy}} \cdot \underbrace{5 \text{ cm}}_{\text{wysokość prostopadłościanu}} = 12 \text{ cm}^2 \cdot 5 \text{ cm} = 60 \text{ cm}^3$$

Aby obliczyć objętość graniastosłupa (V_I) musimy wyznaczyć pole jego podstawy. Podstawą graniastosłupa jest trójkąt, którego pole jest równe:

$$P_p = \frac{1}{2} \cdot (4 \text{ cm} + 4 \text{ cm}) \cdot 3 \text{ cm} = \frac{1}{2} \cdot 8 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2$$

Wysokość graniastosłupa H wynosi 5 cm, zatem jego objętość jest równa:

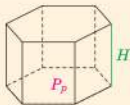
$$V_I = P_p \cdot H = 12 \text{ cm}^2 \cdot 5 \text{ cm} = 60 \text{ cm}^3$$

Objętość graniastosłupa jest równa objętości prostopadłościanu: $V_I = V_{II}$.

Objętość V graniastosłupa wyraża się wzorem:

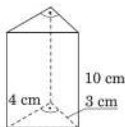
$$V = P_p \cdot H$$

gdzie: P_p – pole podstawy graniastosłupa,
 H – wysokość graniastosłupa.



Przykład 1.

Podstawą graniastosłupa przedstawionego na rysunku obok jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 3 cm i 4 cm. Wysokość graniastosłupa wynosi 10 cm. Oblicz objętość tej bryły.



Podstawa graniastoslupa jest trójkątem prostokątnym takim jak na rysunku obok, więc jej pole jest równe:

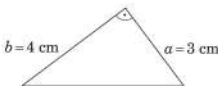
$$P_p = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 3 \cdot 2 = 6 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Wysokość H graniastoslupa jest równa 10 cm.

Obliczymy objętość V graniastoslupa, korzystając ze wzoru: $V = P_p \cdot H$.

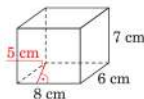
$$V = 6 \text{ cm}^2 \cdot 10 \text{ cm} = 60 \text{ cm}^3$$

Odp. Objętość graniastoslupa wynosi 60 cm^3 .



Ćwiczenie 1.

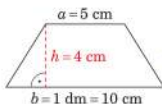
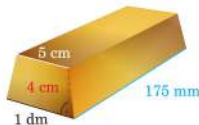
Podstawą graniastoslupa przedstawionego na rysunku obok jest równoległobok o bokach długości 6 cm i 8 cm oraz o wysokości 5 cm poprowadzonej do dłuższego boku. Wysokość graniastoslupa wynosi 7 cm. Oblicz objętość tej bryły.



Przykład 2.

Sztabka złota ma kształt graniastoslupa, którego podstawą jest trapez równoramienny. Wymiary tego graniastoslupa zaznaczono na rysunku. Jaką objętość ma ta sztabka?

Aby obliczyć pole podstawy, wykonamy rysunek pomocniczy.



Wszystkie długości wyrazimy w tej samej jednostce, np. w centymetrach.

Pole trapezu wynosi:

$$P_p = \frac{(a+b) \cdot h}{2} = \frac{(5+10) \cdot 4}{2} = 15 \cdot 2 = 30 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Wysokość graniastoslupa wynosi: $H = 175 \text{ mm} = 17,5 \text{ cm}$.

Obliczymy objętość V graniastoslupa, korzystając ze wzoru: $V = P_p \cdot H$.

$$V = P_p \cdot H = 30 \text{ cm}^2 \cdot 17,5 \text{ cm} = 525 \text{ cm}^3$$

Odp. Objętość sztabki złota wynosi 525 cm^3 .

2	1		
1	7	5	
		3	0
5	2	5	0

Ćwiczenie 2.

Graniastolup o wysokości 3 dm ma w podstawie romb o przekątnych długości 6 cm oraz 80 mm. Oblicz objętość tego graniastoslupa.

Przykład 3.

W prostopadłościennym wazonie mieści się 2,5 l wody. Dno wazonu ma kształt kwadratu o boku długości 10 cm. Jak wysoki jest ten wazon? W obliczeniach pomin grubość szkła.

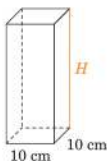
Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$a = 10$ cm – długość krawędzi podstawy prostopadłościanu

H – wysokość prostopadłościanu (w centymetrach)

P_p – pole podstawy prostopadłościanu (w centymetrach kwadratowych)

$V = 2,5$ l – objętość prostopadłościanu



Aby ujednolicić jednostki, wyrazimy objętość prostopadłościanu w centymetrach sześciennych:

$$V = 2,5 \text{ l} = 2,5 \cdot 1 \text{ l} = 2,5 \cdot 1000 \text{ ml} = 2500 \text{ ml} = 2500 \text{ cm}^3.$$

Podstawa prostopadłościanu jest kwadratem o boku długości a , zatem jej pole obliczymy, korzystając ze wzoru: $P_p = a \cdot a$.

$$P_p = a \cdot a = 10 \cdot 10 = 100 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Objętość prostopadłościanu o polu podstawy równym P_p oraz wysokości H wyraża się wzorem: $V = P_p \cdot H$. Podstawimy do wzoru znane wielkości i wyznaczmy wysokość H .

$$2500 = 100 \cdot H \quad | : 100$$

$$H = 25 \text{ [cm]}$$

Odp. Wazon ma wysokość 25 cm.

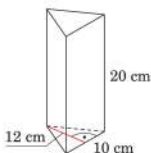
Ćwiczenie 3.

Zosia wypełniła piaskiem prostopadłościenne pudełko o pojemności 20 l. Dno pudełka ma kształt prostokąta o wymiarach 2 dm $\times$ 400 mm. Jaka jest wysokość pudełka? W obliczeniach pomin grubość pudełka.

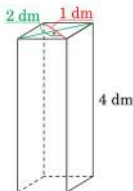
Rozwiąż zadania

1. Oblicz pole podstawy i objętość graniastoslupa przedstawionego na rysunku.

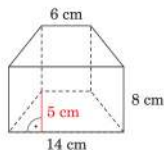
a)



b)

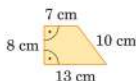
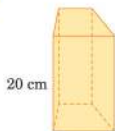


c)

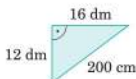
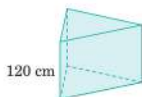


2. Pod rysunkiem graniastosłupa przedstawiona jest jego podstawa. Oblicz pole podstawy i objętość graniastosłupa.

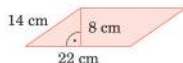
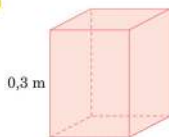
a)



b)



c)

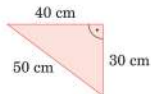


3. Oblicz pole podstawy i objętość graniastosłupa o wysokości 15 cm, którego podstawę przedstawiono na rysunku.

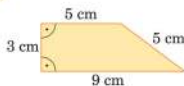
a)



b)



c)



4. Oblicz pole podstawy i objętość:

- a) graniastosłupa o wysokości 1,5 dm, którego podstawą jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 0,6 dm i 8 cm;
 b) graniastosłupa o wysokości $\frac{1}{4}$ m, którego podstawą jest romb o przekątnych długości 24 cm i 3,2 dm.

5. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

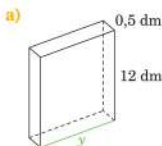
Objętość graniastosłupa o wysokości 3 dm i podstawie w kształcie sześciokąta o polu $3,5 \text{ dm}^2$ jest równa $10,5 \text{ dm}^3$.	P	F
Graniastosłup o wysokości 10 cm, którego podstawą jest trójkąt prostokątny równoramienny o ramieniu długości 10 cm, ma objętość 1000 cm^3 .	P	F
Graniastosłup o objętości 810 dm^3 i podstawie o polu 81 dm^2 ma wysokość równą 10 dm.	P	F

6. Objętość pewnego graniastosłupa wynosi 120 cm^3 . Oblicz wysokość tego graniastosłupa, jeśli jego podstawą jest:

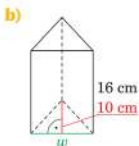
- trójkąt o boku długości 8 cm i wysokości poprowadzonej do tego boku równej 5 cm;
- romb o przekątnych długości 2,5 cm i 12 cm.

7. Objętość graniastosłupa jest równa 375 ml. Jego wysokość wynosi 15 cm. Oblicz pole podstawy tego graniastosłupa.

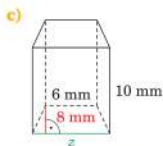
8. Na podstawie danych przedstawionych na rysunku oblicz długość krawędzi oznaczonej literą.



$$V = 72 \text{ dm}^3$$



$$V = 1040 \text{ cm}^3$$

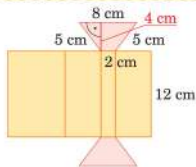


$$V = 600 \text{ mm}^3$$

9. Pole podstawy pewnego graniastosłupa jest równe 72 cm^2 , a jego wysokość wynosi 1 dm. Ile wynosi objętość tego graniastosłupa? Odpowiedź podaj w mililitrach i litrach.

10. Na rysunku przedstawiono siatkę graniastosłupa czworokątnego, którego podstawą jest trapez równoramienny. Oblicz jego

- pole powierzchni całkowitej,
- objętość.

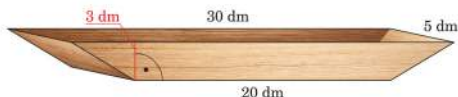


11. Kamila przygotowuje świece sojowe. Planuje zrobienie 12 świec o wysokości 3 cm. Każda z nich będzie w kształcie graniastosłupa o podstawie rombu o przekątnych długości 6 cm i 8 cm. Jedno opakowanie wosku sojowego potrzebnego do przygotowania świec kosztuje 12,30 zł i otrzymuje się z niego 550 ml materiału.

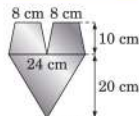
- Ile opakowań wosku musi kupić Kamila?
- Ile zapłaci za wosk potrzebny na wykonanie świec?



12. Bartek przygotował koryto na karmę dla kóz swojego dziadka. Koryto ma kształt graniastosłupa i wymiary wewnętrzne jak w projekcie przedstawionym na rysunku. Czy w korycie zmieści się mniej czy więcej niż 350 dm^3 karmy? Uzasadnij swoją odpowiedź.



13. Ania robi ciasto. Chce je upiec w blaszce, która ma kształt graniastosłupa o wysokości 8 cm i podstawie takiej jak na rysunku obok. Ania przygotowała 3 l masy. Czy masa zmieści się w blaszce wybranej przez Anię? Uzasadnij swoją odpowiedź.

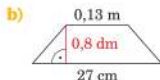
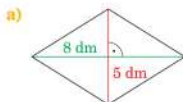


14. Pan Szymon rozstawił w swoim ogródku basen szkieletowy w kształcie prostopadłościanu o wymiarach wewnętrznych $5 \text{ m} \times 25 \text{ dm} \times 120 \text{ cm}$. Planuje go napęlnić wodą do $\frac{3}{4}$ wysokości. Ile czasu zajmie napęlnianie basenu, jeśli z węża ogrodowego, którym zamierza się posłużyć, wypływa 125 l wody w ciągu minuty?

15. Ustal, jak zmieni się objętość graniastosłupa o wysokości H , jeśli jego podstawa pozostanie bez zmian, ale:
- jego wysokość zmniejszymy trzykrotnie;
 - jego wysokość zwiększymy trzykrotnie;
 - jego wysokość zmienimy tak, by wynosiła $k \cdot H$ dla pewnej liczby k większej niż 1.

Sprawdź, co umiesz!

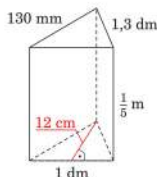
1. Oblicz objętość graniastosłupa, którego wysokość jest równa 3 dm, a podstawą jest figura przedstawiona na rysunku.



2. Oblicz objętość:

- a) graniastosłupa, którego wysokość jest równa 7 cm i podstawą jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 4 cm i 8 cm;
- b) graniastosłupa o wysokości 4 dm, którego podstawą jest romb o przekątnych długości 8 dm i 8 dm.

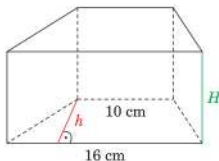
3. Oblicz pole powierzchni całkowitej oraz objętość graniastosłupa przedstawionego na rysunku poniżej.



4. Jakie pole podstawy ma graniastosłup o objętości 80 ml i wysokości 8 cm?

- A. 640 cm^2 B. 10 cm^2 C. 320 cm^2 D. 80 cm^2

5. Graniastosłup przedstawiony na rysunku ma w podstawie trapez równoramienny o polu równym 130 cm^2 . Objętość tego graniastosłupa wynosi 1040 cm^3 .



Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

- I. Jaką wysokość ma trapez będący podstawą graniastosłupa?
A. $h = 10 \text{ cm}$ B. $h = 5 \text{ cm}$
- II. Jaką wysokość ma graniastosłup?
C. $H = 0,4 \text{ dm}$ D. $H = 0,8 \text{ dm}$

6. Bryły obrotowe

- ▶ Jak powstają bryły obrotowe?
- ▶ Jakie własności mają bryły obrotowe?
- ▶ Jaka bryła powstanie w wyniku obrotu danej figury płaskiej wokół jej osi symetrii lub boku?



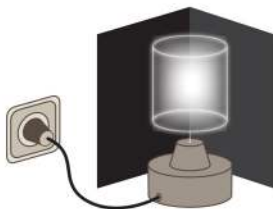
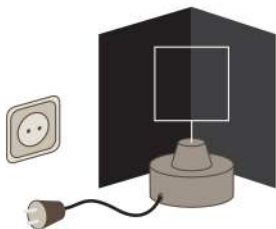
Odkrywaj!

1. Bruno obraca monetę wokół jej osi symetrii i mierzy czas, w jakim moneta jest w ruchu. Przyjrzyj się zdjęciu wykonanemu w trakcie trwania tego eksperymentu.

- a) Jaki kształt ma moneta?
- b) Jaki kształt tworzy wirująca moneta?
- c) Wykonaj podobne doświadczenie. Zmierz czas wirowania monety.



2. W pracowni matematycznej znajduje się maszyna, która jest używana na lekcjach dotyczących brył obrotowych. Można zamontować w niej plastikową ramkę. Uruchomienie maszyny wprowadza ramkę w ruch obrotowy. Nauczycielka włożyła do maszyny ramkę w kształcie koła i uczniowie mogli zaobserwować kształt kuli utworzony przez obracającą się ramkę. Następnie umieściła w maszynie ramkę w kształcie prostokąta. Ela na prośbę nauczycielki wykonała zdjęcie przez rozpoczęciem i w trakcie trwania eksperymentu. Jakiej bryły kształt był widoczny?





Analizuj!

Bryły obrotowe powstają w wyniku obrotu figury płaskiej wokół pewnej prostej, nazywanej osią obrotu.

Przykłady brył obrotowych:



walec



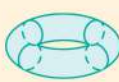
stożek



kula



inne bryły obrotowe



Walec to bryła obrotowa, którą możemy otrzymać w wyniku obrotu prostokąta wokół jednej z jego osi symetrii.

Walec ma dwie jednakowe podstawy w kształcie koła.

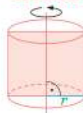
Stożek to bryła obrotowa, którą można otrzymać w wyniku obrotu trójkąta równoramiennego wokół jego osi symetrii.

Stożek ma jedną podstawę w kształcie koła i jeden wierzchołek.

Kula to bryła obrotowa, którą można otrzymać w wyniku obrotu koła wokół prostej zawierającej jego średnicę. Środek obracanego koła jest środkiem kuli, a jego promień jest promieniem kuli.

Kula nie ma podstawy ani wierzchołka.

oś obrotu



oś obrotu

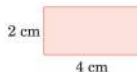


oś obrotu

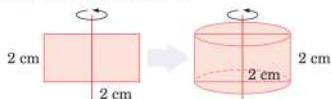


Przykład 1.

Prostokąt przedstawiony na rysunku ma wymiary $2\text{ cm} \times 4\text{ cm}$. Wokół jakiej prostej obracano ten prostokąt, jeśli w wyniku obrotu otrzymano walec o podanym promieniu r i podanej wysokości H ?

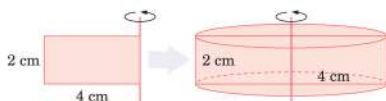


a) $r = 2 \text{ cm}$, $H = 2 \text{ cm}$



Taki walec otrzymano w wyniku obrotu prostokąta wokół jego osi symetrii prostopadłej do dłuższego boku.

b) $r = 4 \text{ cm}$, $H = 2 \text{ cm}$



Taki walec otrzymano w wyniku obrotu prostokąta wokół prostej zawierającej krótszy bok prostokąta.

Ćwiczenie 1.

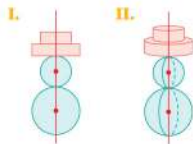
Wokół jakiej prostej obracano prostokąt przedstawiony w przykładzie 1., jeśli w wyniku tego obrotu otrzymano walec o promieniu r i wysokości H ?

a) $r = 1 \text{ cm}$, $H = 4 \text{ cm}$

b) $r = 2 \text{ cm}$, $H = 4 \text{ cm}$

Przykład 2.

Na rysunku I przedstawiono figurę złożoną z dwóch kół i dwóch prostokątów, ustawionych tak, że czerwona prosta jest osią symetrii całej figury. Jaka bryła powstanie w wyniku obrotu tej figury wokół jej osi symetrii?



W wyniku obrotu powstanie bryła w kształcie balwana w kapeluszu, jak na rysunku II – dwie kule i dwa walce, ustawione tak, że mają wspólną oś obrotu.

Ćwiczenie 2.

Na rysunku przedstawiono romb złożony z dwóch trójkątów równobocznych, które mają jeden bok wspólny. Jaka bryła powstanie w wyniku obrotu tej figury wokół zaznaczonej osi symetrii? Wskaż rysunek tej bryły.

A.



B.



C.



D.



Rozwiąż zadania

1. Na stole stoją puszka w kształcie walca i czapeczka urodzinowa w kształcie stożka. Leży też na nim piłka tenisowa w kształcie kuli. Jaką figurę płaską widzi Kuba, gdy patrzy na każdy z tych przedmiotów z góry? A jaką, gdy patrzy z boku?



2. Nazwij każdą z narysowanych brył. Która z nich jest bryłą obrotową?

I.



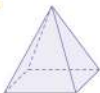
II.



III.



IV.



V.



VI.



VII.

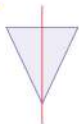


VIII.



3. Jakie bryły powstaną w wyniku obrotu poniższych figur wokół zaznaczonych osi symetrii? Do każdej figury płaskiej dopasuj rysunek odpowiedniej bryły.

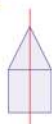
A.



B.



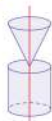
C.



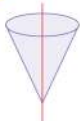
I.



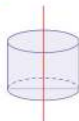
II.



III.



IV.

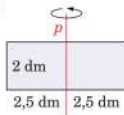


V.

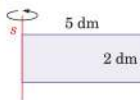


4. W wyniku obrotu tego samego prostokąta o wymiarach $2\text{ dm} \times 5\text{ dm}$ wokół różnych prostych powstały trzy różne bryły. Do każdego rysunku prostokąta i osi obrotu dopasuj promień r i wysokość H otrzymanej bryły.

A.



B.



C.



I. $r = 5\text{ dm}$, $H = 2\text{ dm}$

II. $r = 2\text{ dm}$, $H = 5\text{ dm}$

III. $r = 2,5\text{ dm}$, $H = 2\text{ dm}$

5. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Każda figura obrotowa ma podstawę.	P	F
Stożek ma dwa wierzchołki.	P	F
Walec nie ma żadnego wierzchołka.	P	F

6. Czy piłkę w kształcie kuli przedstawionej na rysunku obok można umieścić w sześciennym pojemniku o krawędzi długości 6 cm ? Wybierz odpowiedź oraz jej uzasadnienie.



Tak,	ponieważ	$6\text{ cm} > 4,5\text{ cm}$.
Nie,		$6\text{ cm} < 9\text{ cm}$.
		sześcian ma wszystkie krawędzie tej samej długości.

7. Oliwa jest sprzedawana w puszkach w kształcie walca o promieniu 7 cm i wysokości 19 cm . Ile maksymalnie takich puszek możemy ustawić w kartonie o wymiarach $70\text{ cm} \times 42\text{ cm} \times 20\text{ cm}$?



Sprawdź, co umiesz!

1. Na ilustracjach przedstawiono różne bryły.

I.



II.



III.



IV.



V.



- Które bryły są bryłami obrotowymi?
- Jaką bryłę przedstawiono na rysunku I?
- Która z narysowanych brył to stożek?
- Która bryła nazywa się tak samo jak bryła na rysunku III?

2. Wskaż bryłę, którą otrzymamy w wyniku obrotu przedstawionego na rysunku trapezu równoramiennego wokół jego osi symetrii.

A.



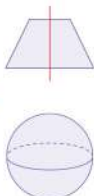
B.



C.



D.



3. Na rysunku przedstawiono bryłę obrotową złożoną z dwóch identycznych stożków sklejoną podstawami. Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

I. Jaką figurę widzimy, patrząc na tę bryłę z góry, czyli od strony wierzchołka?

A. Koło.

B. Romb.

II. Jaką figurę możemy obrócić wokół osi symetrii, aby otrzymać taką bryłę jak na rysunku?

C. Romb.

D. Trójkąt.



4. Kulę umieszczamy w sześcianie o krawędzi długości 8 cm. Jaki największy promień może mieć taka kula? Uzasadnij swoją odpowiedź.



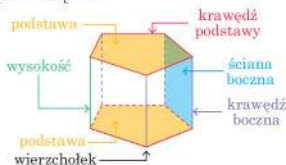
PODSUMOWANIE DZIAŁU VII

W świecie figur przestrzennych

Powtórz wiadomości

Graniastosłup prosty

Graniastosłup prosty to bryła, która ma dwie równoległe podstawy będące identycznymi wielokątami oraz ściany boczne będące prostokątami.



Ostrosłup prosty

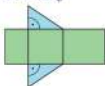
Ostrosłup prosty to bryła, która ma jedną podstawę będącą wielokątem oraz ściany boczne będące trójkątami równoramiennymi o wspólnym wierzchołku.



Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa

$P_c = 2 \cdot P_p + P_b$, gdzie:

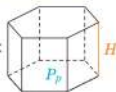
P_p – pole podstawy,
 P_b – pole powierzchni bocznej, czyli suma pól wszystkich ścian bocznych.



Objętość graniastosłupa

$V = P_p \cdot H$, gdzie:

P_p – pole podstawy graniastosłupa,
 H – wysokość graniastosłupa.

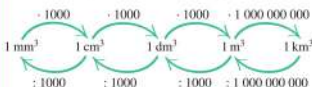


Jednostki objętości

Objętość płynu najczęściej wyraża się w litrach (l) oraz mililitrach (ml).

$1\text{ l} = 1\text{ dm}^3$ $1\text{ ml} = 1\text{ cm}^3$
 $1\text{ l} = 1000\text{ ml}$ $1\text{ ml} = 0,001\text{ l}$

Zamiana jednostek objętości



Przykłady brył obrotowych

walec



stożek



kula



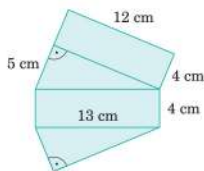
inne bryły obrotowe



Poćwicz przed sprawdzianem

1. Na rysunku przedstawiono siatkę graniastosłupa trójkątnego bez jednej ściany. Jakie wymiary ma ta ściana?

- A. $4 \text{ cm} \times 13 \text{ cm}$
 B. $4 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$
 C. $4 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$
 D. $5 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$



2. Oznaczmy: s – liczba ścian, k – liczba krawędzi, w – liczba wierzchołków graniastosłupa. Ile ścian, krawędzi i wierzchołków ma graniastosłup trójkątny?

- A. $s = 4, k = 8, w = 6$
 B. $s = 5, k = 9, w = 6$
 C. $s = 5, k = 6, w = 3$
 D. $s = 6, k = 9, w = 6$

3. Krawędź sześcianu ma długość 12 cm. Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu jest równa sumie długości wszystkich krawędzi sześcianu. Dwie krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka prostopadłościanu mają długości 9 cm i 11 cm.

Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

- I. Jaką długość ma trzecia krawędź wychodząca z tego samego wierzchołka prostopadłościanu?
 A. 14 cm
 B. 16 cm
- II. O ile centymetrów kwadratowych jest mniejsze pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu od pola powierzchni całkowitej sześcianu?
 C. O 26 cm^2 .
 D. O 36 cm^2 .

4. Które z poniższych siatek przedstawiają siatkę ostrosłupa?

I.



A. I, II

II.



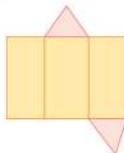
B. III, IV

III.



C. I, III, IV

IV.



D. I, III

5. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

W każdym ostrosłupie liczba krawędzi bocznych jest o 1 większa niż liczba krawędzi podstawy.	P	F
Krawędź boczna ostrosłupa pięciokątnego ma długość 8 cm, a każda krawędź podstawy ma długość 6 cm. Suma długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa wynosi 100 cm.	P	F
Pole powierzchni bocznej graniastosłupa trójkątnego o krawędziach podstawy długości 2 cm, 3 cm i 3 cm oraz krawędzi bocznej długości 10 cm wynosi 80 cm^2 .	P	F
Objętość sześcianu, którego jedna ściana ma pole 16 cm^2 , jest równa 64 cm^3 .	P	F

6. Zastąp odpowiednimi liczbami.

a) $9000 \text{ m}^3 = \text{ } \text{dm}^3$

b) $50 \text{ km}^3 = \text{ } \text{m}^3$

c) $450 \text{ mm}^3 = \text{ } \text{cm}^3$

d) $130 \text{ dm}^3 = \text{ } \text{l}$

e) $600 \text{ ml} = \text{ } \text{l}$

f) $750 \text{ cm}^3 = \text{ } \text{ml}$

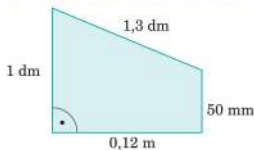
7. Pola musi wyczyścić akwarium z rybkami. Ma ono kształt prostopadłościanu o wymiarach wewnętrznych $50 \text{ cm} \times 30 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$.

- a) Pola kupiła specjalny preparat, który usuwa glony z wewnętrznej powierzchni akwarium. Czy jedno opakowanie tego preparatu wystarczy na wyczyszczenie akwarium?
- b) Ile maksymalnie litrów wody mieści się w tym akwarium?

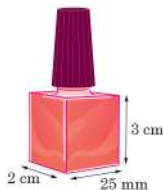


8. Pani Ula przygotowała tort o wysokości $1,5 \text{ dm}$ w kształcie graniastosłupa sześciokątnego, którego każda krawędź podstawy ma długość 1 dm . Postanowiła pokryć boki tortu warstwą lukru. Ile zapłaci za lukier, jeśli jedno opakowanie kosztuje $4,85 \text{ zł}$ i wystarczy na pokrycie 250 cm^2 powierzchni?

9. Wysokość graniastosłupa czworokątnego jest równa 15 cm . Podstawą tego graniastosłupa jest trapez przedstawiony na rysunku. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa.



10. Mały zakład kosmetyczny produkuje 4,5 l lakieru do paznokci każdego dnia. Lakier nalewany jest do buteleczek w kształcie prostopadłościanu o wymiarach wewnętrznych podanych na rysunku obok. Ile buteleczek może zostać naplnionych lakierem wyprodukowanym w ciągu jednego dnia?



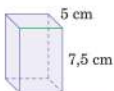
11. Oblicz długość krawędzi graniastoslupa oznaczonej zielonym kolorem.

a)



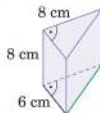
$$P_c = 294 \text{ cm}^2$$

b)



$$P_c = 225 \text{ cm}^2$$

c)



$$P_b = 192 \text{ cm}^2$$

12. Bryła I jest prostopadłościanem, którego podstawa ma wymiary $4 \text{ cm} \times 6,5 \text{ cm}$, a jego objętość wynosi 208 cm^3 . Bryła II to graniastosłup, który w podstawie ma romb o przekątnych długości $12 \text{ cm} \times 2,5 \text{ cm}$. Jego objętość wynosi 90 cm^3 . Która bryła ma dłuższą wysokość? O ile centymetrów?

13. Piłka do koszykówki, którą grają zawodnicy powyżej 12 lat, ma promień równy 12 cm. Stojak na takie piłki ma 5 prostokątnych półek o długości 1,35 m i szerokości 24,2 cm. Ile najwięcej piłek zmieści się na tym stojaku?

14. Jak nazywają się kolejno bryły przedstawione na rysunkach?



- A. graniastosłup, ostrosłup, walec, kula, stożek
 B. graniastosłup, stożek, graniastosłup, kula, ostrosłup
 C. graniastosłup, stożek, walec, kula, ostrosłup
 D. graniastosłup, ostrosłup, walec, kula, graniastosłup

Podjmij wyzwanie

Drogi Uczniu!

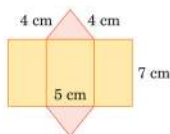
Rozwiąż kolejne zadania, a dowiesz się, jakimi wyrazami uzupełnić poniższy tekst, żeby opisywał pewien przełomowy wynalazek.

Powodzenia!



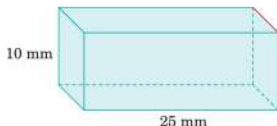
Czy kiedykolwiek ktoś zastanawiał się, skąd pochodzi **1**? Wszystko zaczęło się w 1767 roku, kiedy angielski chemik Joseph Priestley (czytaj: dżouzel przistli) przypadkowo odkrył, że dodanie **2** do wody tworzy musujące bąbelki. Wkrótce potem szwajcarski **3** Johann Jacob Schweppe (czytaj: johan jakob szwepe) udoskonalił ten proces i założył firmę produkującą napoje, które pijemy do dziś. W XIX wieku nowy produkt był uważany za lekarstwo na różne dolegliwości. Pierwsze smakowe wersje pojawiły się w aptekach, gdzie dodawano do niego **4**. Taka woda może wspomagać trawienie, ale spożywana w nadmiarze może powodować wzdęcia. Odkrycia archeologiczne udowodniły, że ludzie pili ją już **5** lat temu, bowiem natura jest w stanie sama wyprodukować taki napój – dwutlenek węgla jest wtłaczany do wody w głębokich warstwach skał wulkanicznych.

- 1.** Pola narysowała szkielec graniastosłupa czworokątnego o wysokości 7 cm, którego podstawą jest równoległobok o bokach długości 3 cm i 4 cm. Ela narysowała siatkę pewnego graniastosłupa (patrz rysunek). Dziewczeta obliczyły sumy długości krawędzi swoich brył. Która z dziewcząt otrzymała większą sumę i o ile centymetrów większą?



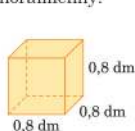
Ela, o 24 cm.	Pola, o 9 cm.	Pola, o 24 cm.
kawa	woda gazowana	herbata

- 2.** Suma długości wszystkich krawędzi pewnego sześcianu wynosi 120 mm. Ten sześcian ma taką samą objętość jak prostopadłościan przedstawiony na rysunku. Jaka długość ma czerwona krawędź tej bryły?

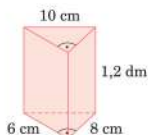


10 mm	4 mm	12 mm
barwnika spożywczego	dwutlenku węgla	cukru strzelającego

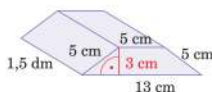
3. Na rysunkach przedstawiono sześcian, graniastosłup o podstawie trójkąta prostokątnego oraz graniastosłup, którego podstawą jest trapez równoramienny.



$$P_c = \heartsuit \text{ cm}^2$$



$$P_c = \heartsuit \text{ cm}^2$$



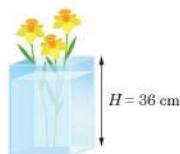
$$P_c = \heartsuit \text{ cm}^2$$

Oblicz pole powierzchni całkowitej każdej z tych brył, a następnie wartość wyrażenia: $(\heartsuit + \heartsuit) - \heartsuit$.

522 cm ²	426 cm ²	246 cm ²
chemik	nauczyciel	zegarmistrz

4. Zosia dostała w prezencie wazon w kształcie graniastosłupa czworokątnego, który w podstawie ma romb o przekątnych długości 12 cm i 10 cm. Aby po włożeniu do niego kwiatów woda się nie wylała, wypełniła go tylko do $\frac{5}{6}$ jego wysokości.

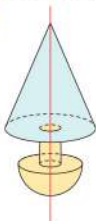
Jak długo Zosia nalewała do wazonu wodę z kranu, jeśli w czasie 1 s z kranu leci 0,2 l wody?



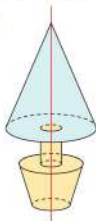
9 s	10 s	12 s
syropy owocowe	zioła	lekarstwa

5. Na rysunku przedstawiono figurę, którą obracamy wokół czerwonej prostej. Wskaż bryłę, która powstanie w wyniku takiego obrotu.

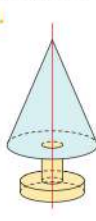
I.



II.



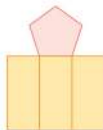
III.



I	II	III
pięćset	tysiąc	trzy tysiące

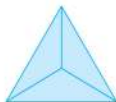
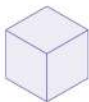
Potrenuj – zadania uzupełniające

1. Na rysunku przedstawiono fragment siatki pewnego graniastoslupa. Na podstawie tego fragmentu ustal liczbę
- wszystkich krawędzi tego graniastoslupa,
 - wszystkich wierzchołków tego graniastoslupa.



2. Wszystkie krawędzie podstawy pewnego graniastoslupa sześciokątnego mają jednakową długość. Krawędź podstawy jest cztery razy krótsza od krawędzi bocznej tego graniastoslupa. Suma długości wszystkich krawędzi w tym graniastoslupie wynosi 108 cm. Jaka wysokość ma ten graniastoslup?

3. Odpowiedz na pytania. Litery przypisane poprawnym odpowiedziom, czytane od góry do dołu, utworzą hasło – imię greckiego filozofa, który badał i opisał pięć wyjątkowych brył: sześciścian, czworościan, ośmiościan, dwunastościan i dwudziestościan.



Ile wierzchołków ma graniastoslup, który ma 16 ścian?

16

R

28

P

32

W

Ile krawędzi ma graniastoslup, który ma 50 ścian bocznych?

75

O

100

K

150

L

Ile ścian ma graniastoslup, który ma 48 krawędzi?

16

S

18

A

24

F

Ile wierzchołków ma ostrosłup, który ma 14 krawędzi bocznych?

15

T

28

R

8

B

Ile krawędzi podstawy ma ostrosłup, który ma 19 ścian?

10

C

17

Z

18

O

Ile razy więcej krawędzi ma graniastoslup dwudziestokątny niż ostrosłup, który ma 11 wierzchołków?

2

G

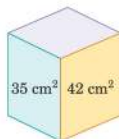
3

N

6

R

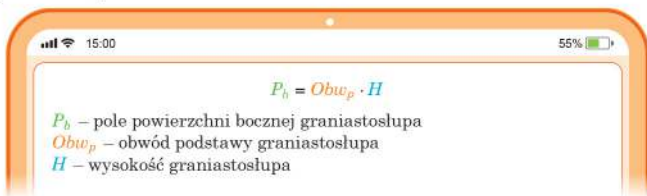
4. Długości krawędzi pewnego prostopadłościanu są wyrażone całkowitymi liczbami centymetrów. Pomalowano dwie sąsiednie ściany tego prostopadłościanu. Ściana w kolorze zielonym ma pole 35 cm^2 , a żółta – 42 cm^2 . Ile wynosi pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu?



5. Który graniastosłup ma większą sumę wszystkich krawędzi – sześcián o polu powierzchni całkowitej równym 216 cm^2 czy prostopadłościan, którego dwie krawędzie mają długości 3 cm i 9 cm i jego pole powierzchni całkowitej wynosi 318 cm^2 ?

Informacje do zadań 6.–8.

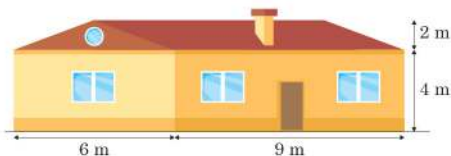
Cezary znalazł w internecie inny sposób na obliczanie pola powierzchni bocznej graniastosłupa.



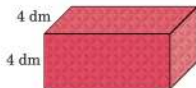
6. Podstawą graniastosłupa czworokątnego jest trapez równoramienny, którego ramię ma długość 5 cm . Suma długości podstaw tego trapezu wynosi 18 cm . Wysokość graniastosłupa jest równa 3 cm . Ile wynosi pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa?
7. W pewnym graniastosłupie, którego wysokość jest równa 10 cm , obwód podstawy wynosi 56 cm , a pole tej podstawy jest równe 195 cm^2 . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.
8. Podstawa graniastosłupa ma obwód równy 24 cm . Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa wynosi 240 cm^2 , a pole podstawy 24 cm^2 . Jaka wysokość ma ten graniastosłup?
9. Równoległobok przedstawiony na rysunku jest podstawą graniastosłupa, którego najmniejsza ściana boczna ma pole $26,25\text{ cm}^2$. Oblicz pole powierzchni całkowitej oraz objętość tego graniastosłupa.



10. Kubatura budynku to ważny parametr techniczny w projekcie domu. Zależą od niej np. koszty ogrzewania. Oblicza się ją jako objętość bryły, której kształt ma budynek, i wyraża w metrach sześciennych.



- a) Oblicz kubaturę domu, którego wymiary podano na rysunku.
b) Ile litrów powietrza mieści się w tym domu? Dla uproszczenia pomijamy ściany i stropy wewnętrzne oraz grubość ścian zewnętrznych.
c) Ile waży powietrze w tym domu? Przyjmij, że 1 l powietrza waży około 1,2 g.
11. Pojemność prostopadłościennego pudełka przedstawionego na rysunku jest równa 144 l. Ile co najmniej papieru ozdobnego potrzeba, aby okleić pudełko?
12. Podczas wymiany wody w akwariu Ela początkowo wlała wodę do $\frac{3}{5}$ jego wysokości. Zorientowała się, że wody jest za mało, i dolała jeszcze trochę. Teraz woda sięgała do $\frac{9}{10}$ wysokości akwariu. Akwariu ma szerokość 100 cm, długość 40 cm i wysokość 0,5 m. Ile litrów wody dolała Ela?
13. Ela i Cezary grali w grę *Dwie prawdy i jedno kłamstwo*. Kto z nich nie przestrzegał reguł gry? Uzasadnij swoją odpowiedź.



Powierzchnia boczna walca po rozłożeniu płasko jest prostokątem.

Stożek może powstać w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego.

Kula nie ma podstawy.

Cezary

Stożek może powstać w wyniku obrotu trójkąta równoramiennego.

Powierzchnia boczna stożka po rozłożeniu płasko jest trójkątem.

Podstawą stożka jest koło.

Ela

Przygotowując torty lub ciasteczka, korzystamy z form w kształcie figur przestrzennych takich jak walce, sześciany czy stożki. Pozwalają one na wykonanie wyjątkowych dzieł sztuki kulinarnej, które zachwycają nie tylko smakiem, ale i wyglądem. Ciasta, które swoją formę czerpią z geometrii, nazywamy geometrycznymi.



1. Zapoznaj się z przepisem na geometryczne desery i spróbuj je przygotować.

Potrzebne będą:

- pucharek (najlepiej plastikowy) w kształcie stożka,
- szklanka w kształcie walca,
- folia spożywcza lub folia aluminiowa,
- miseczek do przygotowania galaretki,
- łyżka,
- gorąca woda,
- galaretka owocowa,
- bita śmietana.

Wykonanie:

- 1 W miseczce przygotuj galaretkę zgodnie z instrukcją na opakowaniu, możesz dodać 100 ml wody mniej niż w przepisie – dzięki temu galaretka szybciej stężeje. Odstaw ją, aby ostygła.
- 2 Zakryj szczelnie do połowy górę pucharka i szklanki folią spożywczą lub folią aluminiową (rys. 1).
- 3 Gdy galaretka ostygnie i nieco stężeje, postaw naczynia, wlej galaretkę do około $\frac{3}{4}$ wysokości pucharka i $\frac{1}{2}$ szklanki, a następnie połóż naczynia (rys. 2).
- 4 Gdy galaretka całkowicie stężeje, postaw naczynia pionowo, usuń zabezpieczenia z folii (rys. 3) i uzupełnij naczynia bitą śmietaną (rys. 4).



rys. 1.



rys. 2.



rys. 3.



rys. 4.

2. Poszukaj w dostępnych źródłach inspiracji na geometryczne desery i ciasta. Jaki najbardziej nietypowy znalazłeś? Co możesz powiedzieć o bryle, której kształt ma ten deser lub to ciasto?

DZIAŁ VIII

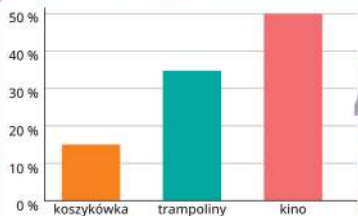
W ŚWIECIE PROCENTÓW I STATYSTYKI

Co robimy w sobotę?



Zrobię szybką ankietę!
Oto jej wyniki.

W ankiecie wzięło
udział 20 osób.
Ile osób chce iść
do kina?



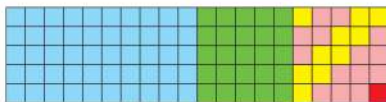
1. Procenty i ułamki

- ▶ Czym jest procent?
- ▶ Ile to jest: 1 %, 10 %, 25 %, 50 %, 100 % pewnej wielkości?
- ▶ W jaki sposób zamieniać ułamki na procenty i procenty na ułamki?



Odkrywaj!

1. Dana jest plansza podzielona na 100 jednakowych kwadratowych pól. Pola planszy są pokolorowane.



- a) Jaką część planszy stanowią pola w poszczególnych kolorach? Uzupełnij tabelę.

Kolor pól	Ułamek			Procent planszy
	o mianowniku 100	nieskracalny	dziesiętny	
czerwony	$\frac{1}{100}$			1 %
żółty		$\frac{1}{10}$		10 %
zielony			0,25	25 %
niebieski				50 %
różowy				14 %

- b) Jaką część planszy stanowią pokolorowane pola? Zapisz wynik w postaci ułamka i procentu.

2. Na podstawie tabeli z zadania 1. określ, jaka jest zależność między ułamkiem a procentem.



Analizuj!

Słowo **procent** pochodzi od łacińskiego wyrażenia „pro centum”, co tłumaczymy „na sto”. Procent oznaczamy symbolem %. W procentach określamy część danej wielkości.

- 1 % to $\frac{1}{100}$ danej wielkości.
- 10 % to $\frac{10}{100}$ danej wielkości, czyli $\frac{1}{10}$.
- 25 % to $\frac{25}{100}$ danej wielkości, czyli $\frac{1}{4}$.
- 50 % to $\frac{50}{100}$ danej wielkości, czyli $\frac{1}{2}$.
- 100 % to $\frac{100}{100}$ danej wielkości, czyli 1.
- p % to $\frac{p}{100}$ danej wielkości.



Przykład 1.

Zapisz w postaci ułamka zwykłego i dziesiętnego, jaka część baterii jest naładowana.



$$20 \% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$20 \% = 0,2$$



$$45 \% = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$$

$$45 \% = 0,45$$



$$8 \% = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$$

$$8 \% = 0,08$$

Ćwiczenie 1.

Zapisz w postaci ułamka zwykłego i dziesiętnego podany procent.

a) 30 %

b) 85 %

c) 4 %

d) 400 %

Gdy podzielimy całość na części i opiszemy każdą z tych części ułamkiem, to ułamki te sumują się do 1.

$$\frac{4}{10} + \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

Gdy podzielimy całość na części i opiszemy każdą z tych części za pomocą procentu, to procenty te sumują się do 100 %.

$$40 \% + 10 \% + 30 \% + 20 \% = 100 \%$$



Przykład 2.

Lądy stanowią około 29 % powierzchni Ziemi.

a) Jaki procent powierzchni Ziemi stanowią wody?

$$100\% - 29\% = 71\%$$

Odp. Wody stanowią około 71 % powierzchni Ziemi.

b) Czy wody stanowią więcej niż $\frac{3}{4}$ powierzchni Ziemi?

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75\% \quad \leftarrow \dots \quad \text{Zamienimy ułamek } \frac{3}{4} \text{ na procent. W tym celu rozszerzymy go do mianownika 100.}$$

$71\% < 75\%$ zatem wody stanowią mniej niż $\frac{3}{4}$ powierzchni Ziemi.

Odp. Wody nie stanowią więcej niż $\frac{3}{4}$ powierzchni Ziemi.



Ćwiczenie 2.

Lasy stanowią około 30 % powierzchni Polski.

a) Jaki procent powierzchni Polski nie jest zalesiony?

b) Czy tereny niezalesione stanowią mniej niż $\frac{4}{5}$ powierzchni Polski?

Przykład 3.

Zapoznaj się z treścią zadania i odpowiedz na pytanie.

a) W 100 g jogurtu naturalnego jest 5 g białka. Jaki procent masy tego jogurtu stanowi masa białka?

$$\frac{5}{100} = 5\% \quad \leftarrow \dots \quad \text{Zapiszemy, jaki ułamek masy jogurtu stanowi masa białka, a następnie zamienimy ten ułamek na procent.}$$

Odp. Masa białka stanowi 5 % masy tego jogurtu.

b) Pewien mężczyzna waży 80 kg. Masa wody stanowi 52 kg jego masy ciała. Jaki procent masy ciała tego mężczyzny stanowi masa wody?

$$\frac{52}{80} = \frac{13}{20} = \frac{65}{100} = 65\% \quad \leftarrow \dots \quad \text{Zapiszemy, jaki ułamek masy ciała mężczyzny stanowi masa wody, a następnie zamienimy ten ułamek na procent.}$$

Odp. Masa wody stanowi 65 % masy ciała tego mężczyzny.

Ćwiczenie 3.

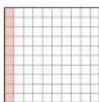
Polacy zdobyli na letnich igrzyskach olimpijskich w Paryżu w 2024 roku 10 medali, w tym 4 srebrne. Jaki procent liczby medali zdobytych na tej olimpiadzie przez Polaków stanowiła liczba srebrnych medali?



Rozwiąż zadania

1. Jaka część figury została zamalowana, a jaka nie? Wynik przedstaw w postaci: ułamka o mianowniku 100, ułamka nieskracalnego, ułamka dziesiętnego i procentu.

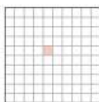
a)



b)



c)



d)



2. Jaka część figury zamalowano? Jaki to procent powierzchni tej figury?

a)



b)



c)



d)



e)



3. Zamień podane liczby na procenty.

a) $\frac{5}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot \frac{100}{100}$

b) $0,06 \cdot 0,25 \cdot 0,9$

c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}$

d) $4 \cdot 6,5 \cdot 10 \frac{3}{20}$

4. Zamień podane procenty na:

a) ułamki zwykłe, $25\% \cdot 70\% \cdot 8\% \cdot 600\%$

b) ułamki dziesiętne. $75\% \cdot 30\% \cdot 2\% \cdot 150\%$

5. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

25 % pewnej odległości to więcej niż $\frac{1}{10}$ tej odległości.	P	F
10 % pewnej liczby to mniej niż $\frac{3}{10}$ tej liczby.	P	F
50 % zawartości pewnego opakowania to mniej niż $\frac{1}{4}$ zawartości tego opakowania.	P	F
80 % pewnej kwoty to więcej niż $\frac{99}{100}$ tej kwoty.	P	F

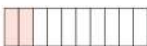
6. Zapoznaj się z treścią zadania i odpowiedz na pytanie.

- a) W 80-gramowej tabliczce czekolady jest 40 g kakao. Jaki procent masy tej tabliczki czekolady stanowi masa kakao?
- b) W szkole uczy się 250 uczniów i wszyscy uczęszczają na zajęcia z języka angielskiego. Jaki procent liczby uczniów tej szkoły stanowi liczba uczniów mających zajęcia z języka angielskiego?
- c) Ze 100 muzyków grających w orkiestrze tylko jeden gra na klarnecie. Jaki procent liczby tych muzyków stanowi muzyk grający na klarnecie?
- d) Gra komputerowa kosztowała 180 zł. Jej cenę obniżono o 36 zł. Jaki procent pierwotnej ceny gry stanowi kwota obniżki?

Sprawdź, co umiesz!

1. Jaką część figury zamalowano? Jaki to procent powierzchni tej figury?

a)



b)



c)



d)



2. Zamień procent na ułamek zwykły nieskracalny i na ułamek dziesiętny.

a) 60 %

b) 5 %

c) 65 %

d) 300 %

3. Szymon przejechał $\frac{1}{4}$ zaplanowanej trasy. Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

I. Jaką część trasy przejechał Szymon?

A. 40 %

B. 25 %

II. Jaki procent trasy został Szymonowi do pokonania?

C. 75 %

D. 60 %

4. Oblicz, jaki procent masy warzywa stanowi masa wody.

Warzywo	Masa warzywa w gramach	Masa wody w gramach
	100	80
	200	192

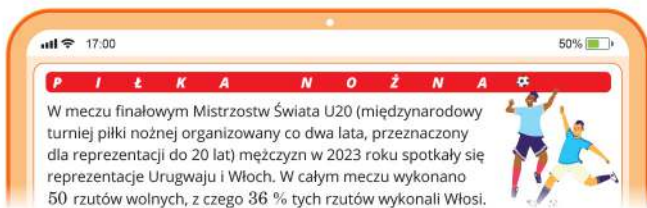
2. Obliczanie procentu danej liczby

- ▶ Jak obliczyć procent danej liczby?
- ▶ W jaki sposób wyznaczyć cenę produktu po obniżce lub podwyżce ceny o dany procent?



Odkrywaj!

1. Przeczytaj fragment artykułu i odpowiedz na pytanie.



- Jaki ułamek liczby wszystkich rzutów wolnych wykonanych w tym meczu stanowi liczba rzutów wolnych wykonanych przez Włochów?
- W jaki sposób, wiedząc, jaki ułamek liczby wszystkich rzutów wolnych wykonali Włosi, można wyznaczyć liczbę tych rzutów?
- W jaki sposób, wiedząc, jaki procent liczby wszystkich rzutów wolnych wykonali Włosi, można wyznaczyć liczbę tych rzutów?
- Jak obliczyć ułamek danej liczby, a jak procent danej liczby?

2. W jaki sposób możemy wyznaczyć cenę kasku uwzględniającą rabat?





Analizuj!

Przykład 1.

Ela przeznaczy 20 % swoich oszczędności na zakup książek. Zosia przeznaczy 20 % swoich oszczędności na zakup rakiety do tenisa. Czy dziewczęta przeznacza tyle samo pieniędzy na swoje zakupy?



Aby wyznaczyć kwotę, którą każda z dziewcząt przeznaczy na zakupy, należy obliczyć 20 % kwoty znajdującej się w każdej skarbonce.

Sposób Eli

Zamienimy procent na ułamek: $20\% = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

$\frac{1}{5} \cdot 450 = 90$ [zł] <--- Obliczymy ułamek kwoty, która znajduje się w skarbonce Eli.

Sposób Zosi

$$\begin{array}{l} : 5 \left(\begin{array}{l} 100\% \text{ oszczędności to } 750 \text{ zł.} \\ 20\% \text{ oszczędności to } 150 \text{ zł.} \end{array} \right) : 5 \end{array}$$

Odp. Dziewczęta nie przeznacza na zakupy tyle samo pieniędzy, ponieważ Ela przeznaczy na zakupy 90 zł, a Zosia 150 zł.

Ćwiczenie 1.

Na zajęcia koła żeglarskiego zapisało się 50 % liczby uczniów klasy 6e liczącej 24 uczniów oraz 60 % liczby uczniów klasy 6f liczącej 20 uczniów. W której klasie więcej uczniów zapisało się do koła żeglarskiego?



Aby obliczyć procent liczby, zamieniamy ten procent na ułamek i obliczamy ułamek z liczby, czyli mnożymy ten ułamek przez daną liczbę.

50 % kwoty 20 zł to $\frac{1}{2}$ kwoty 20 zł, czyli $\frac{1}{2} \cdot 20 \text{ zł} = 10 \text{ zł}$.

Rozwiąż zadania

1. Oblicz.

- a) 10 % liczby 70 b) 25 % liczby 20 c) 20 % liczby 50
d) 1 % liczby 1500 e) 50 % liczby 340 f) 200 % liczby 3

2. Wyznacz:

- a) 1 % liczby 300 oraz 4 % liczby 300, b) 12 % liczby 400,
c) 10 % liczby 20 oraz 30 % liczby 20, d) 70 % liczby 120.

$$\begin{array}{l} : 100 \left(\begin{array}{l} 100 \% \text{ liczby to } 200 \\ 1 \% \text{ liczby to } 2 \\ 5 \% \text{ liczby to } 10 \end{array} \right) : 100 \\ \cdot 5 \left(\begin{array}{l} 100 \% \text{ liczby to } 200 \\ 1 \% \text{ liczby to } 2 \\ 5 \% \text{ liczby to } 10 \end{array} \right) \cdot 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} : 10 \left(\begin{array}{l} 100 \% \text{ liczby to } 50 \\ 10 \% \text{ liczby to } 5 \\ 20 \% \text{ liczby to } 10 \end{array} \right) : 10 \\ \cdot 2 \left(\begin{array}{l} 100 \% \text{ liczby to } 50 \\ 10 \% \text{ liczby to } 5 \\ 20 \% \text{ liczby to } 10 \end{array} \right) \cdot 2 \end{array}$$

3. Wybierz właściwą odpowiedź.

- I. 20 % centymetra – ile to milimetrów?
A. 20 mm B. 2 mm C. 0,2 mm D. 200 mm
- II. 50 % doby – ile to godzin?
A. 12 h B. 4 h C. 50 h D. 30 h
- III. 10 % godziny – ile to minut?
A. 10 min B. 60 min C. 6 min D. 15 min

4. Wśród 15 najpopularniejszych stacji kolejowych w Polsce 40 % znajduje się w Warszawie. Ile najpopularniejszych stacji kolejowych w Polsce jest zlokalizowanych w stolicy?

5. W 2022 roku zebrano w Polsce około 36 mln ton zboża, z czego około 25 % stanowiła kukurydza. Ile milionów ton kukurydzy zebrano w Polsce w 2022 roku?

6. Maliny zawierają około 4 % cukru, a figi cztery razy więcej.

- a) Ile gramów cukru dostarczy organizmowi osoba, która zje szklankę malin, czyli około 120 g?
b) Ile gramów cukru dostarczy organizmowi osoba, która zje 120 g fig?



7. Oblicz, jaka będzie cena kurtki:

- a) po obniżce o 10 %, b) po obniżce o 20 %,
 c) po podwyżce o 25 %, d) po podwyżce o 10 %.



Jeśli cenę towaru podwyższono o 10 %, to nowa cena tego towaru jest sumą dotychczasowej ceny i 10 % tej ceny.



8. Pani Aleksandra po raz pierwszy chce pójść ze swoim psem do groomera (czytaj: grumera). W którym z salonów zapłaci mniej za usługę strzyżenia?



9. Oblicz:

- a) 150 % kwoty 300 zł, b) 225 % objętości 20 l.

Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz:

- a) 10 % liczby 60, b) 1 % liczby 800, c) 25 % liczby 24,
 d) 50 % liczby 450, e) 7 % liczby 1100, f) 500 % liczby 2.

2. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

10 % metra to 1 dm.	P	F
25 % godziny to kwadrans.	P	F
50 % kwoty 330 zł to 165 zł.	P	F

3. Pan Rafał ma w koszyku zakupy o łącznej wartości 270 zł. Ile za nie zapłaci, jeśli skorzysta z kuponu rabatowego?



3. Odczytywanie i prezentowanie danych statystycznych

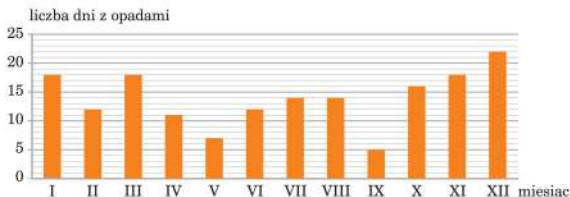
- ▶ Czym jest diagram, a czym wykres?
- ▶ W jaki sposób odczytywać i interpretować dane przedstawione w tabeli, na diagramie i na wykresie?
- ▶ Jak prezentować dane na diagramach słupkowych?



Odkrywaj!

1. W tabeli i na diagramie słupkowym przedstawiono dane dotyczące liczby dni z opadami w poszczególnych miesiącach 2023 roku w Warszawie.

Miesiąc	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Liczba dni z opadami	18	12	18	11	7	12	14	14	5	16	18	22



Źródło: <https://www.weatheronline.pl/>.

Skorzystaj z tabeli oraz diagramu słupkowego i odpowiedz na pytanie.

- Ile dni z opadami było w maju?
- W którym miesiącu było najwięcej dni z opadami?
- W których miesiącach było więcej niż 10 dni z opadami?
- Ile razy więcej dni z opadami było w lipcu niż w maju?
- W których miesiącach było tyle samo dni z opadami co w styczniu?
- Jaki procent liczby dni w czerwcu stanowiła liczba dni z opadami?

2. Jakie dane możemy prezentować na diagramie? Jakie informacje możemy odczytać z diagramu?



Analizuj!

Dane statystyczne można prezentować na różne sposoby, np. w tabelach, na diagramach słupkowych i kołowych oraz na wykresach. Sposób prezentacji danych zależy od ich rodzaju lub celu zestawienia.

Przykład 1.

Grupie osób zadano pytanie: *Które z form dostawy najbardziej zachęcają Cię do zakupów przez internet?* W tabeli podano, jaki procent liczby badanych wskazało poszczególne formy dostawy. Narysuj diagram słupkowy prezentujący dane zebrane w tabeli.

Forma dostawy	Procent liczby badanych
Kurierem	60 %
Pocztą	30 %
Do sklepu	20 %
Na pocztę	10 %

Rysowanie diagramu rozpoczniemy od oznaczenia osi. Ważne jest, aby odpowiednio dobrać jednostkę na osi pionowej – w tym przykładzie wygodnie będzie oznaczać jednostkę co 10 %.

procent
liczby badanych



Na osi pionowej zaznaczymy procent liczby badanych.

Na diagramie narysujemy słupki odpowiedniej wysokości, zgodnie z danymi zawartymi w tabeli.

Na osi poziomej zapiszemy formę dostawy.

Ćwiczenie 1.

Grupie osób zadano pytanie: *Jak często uprawiasz sport?* W tabeli podano, jaki procent liczby badanych wskazało poszczególne odpowiedzi. Narysuj diagram słupkowy prezentujący dane zebrane w tabeli.

Odpowiedź	Procent liczby badanych
Codziennie	10 %
2–3 razy w tygodniu	25 %
Raz w tygodniu	20 %
2–3 razy w miesiącu	10 %
Nie uprawiam sportu	35 %

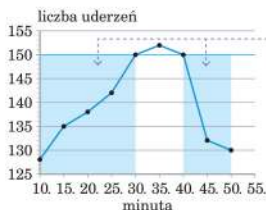
Przykład 2.

Wykres pochodzi z aplikacji i przedstawia, jak zmieniał się tętno Szymona, czyli liczba uderzeń serca na minutę, w trakcie treningu od 10. do 50. minuty. Skorzystaj z przedstawionego wykresu i odpowiedz na pytanie.

- a) W której minucie tętno Szymona było najwyższe, a w której najniższe?

Odp. Tętno Szymona było najwyższe w 35. minucie, a najniższe w 10. minucie.

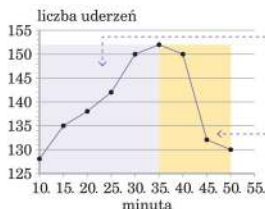
- b) Przez ile minut tętno Szymona było niższe niż 150 uderzeń na minutę?



Tętno Szymona było niższe niż 150 uderzeń na minutę od 10. do 30. minuty i od 40. do 50. minuty.

Odp. Tętno Szymona było niższe niż 150 uderzeń na minutę przez 30 min.

- c) Kiedy tętno Szymona rosło, a kiedy malało?



Tętno Szymona rosło od 10. do 35. minuty.

Tętno Szymona malało przez kolejne 15 minut treningu, od 35. do 50. minuty.

Odp. Tętno Szymona rosło od 10. do 35. minuty, a malało od 35. do 50. minuty.

Ćwiczenie 2.

Skorzystaj z wykresu przedstawionego w przykładzie 2. i odpowiedz na pytanie.

- a) Jakie było tętno Szymona w 15. minucie?
- b) Kiedy pierwszy raz tętno wyniosło 142 uderzenia na minutę?
- c) Czy tętno Szymona rosło między 20. a 25. minutą?
- d) Kiedy tętno Szymona było wyższe niż 150 uderzeń na minutę?

Rozwiąż zadania

1. W tabeli przedstawiono przybliżone wyniki badania dzieci i młodzieży w wieku 10–13 lat. Badani mieli wskazać wszystkie prace wykonywane przez nich codziennie rano w domu.

Praca	Procent liczby badanych
Ścielenie łóżka	60 %
Opieka nad zwierzęciem	40 %
Wyrzucanie śmieci	15 %
Przygotowywanie jedzenia	35 %
Sprzątanie pokoju	25 %
Pomoc domownikom	35 %



Źródło: <https://brpd.gov.pl/wp-content/uploads/2023/04/Dziennik-codzienniej-aktywno%C5%9Bci-dzieci-i-m%C5%82odzie%C5%BCy-raport-z-badania-.pdf>

- Narysuj diagram słupkowy przedstawiający dane zebrane w tabeli.
- Jaką pracę badani wykonywali najczęściej, a jaką najrzadziej?
- Którą pracę wskazało więcej niż 50 % liczby badanych?
- Którą pracę wskazała mniej niż $\frac{1}{4}$ liczby badanych?

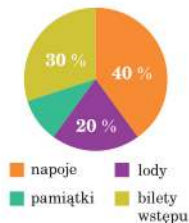
2. Ela odczytywała wskazania termometru co godzinę między godziną 6.00 a 15.00. Odczyty z termometru przedstawiła na wykresie.



Skorzystaj z przedstawionego wykresu i odpowiedz na pytanie.

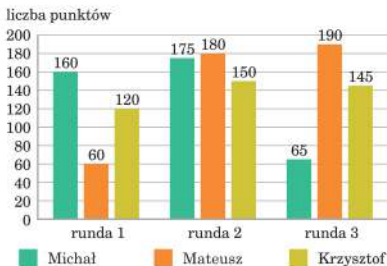
- O której godzinie termometr wskazał najniższą temperaturę?
- Jaką temperaturę wskazał termometr o godzinie 11.00?
- W jakich godzinach termometr wskazywał temperatury ujemne?
- Czy od godziny 8 rano do południa temperatura rosła?
- Jaka jest różnica między najwyższą a najniższą temperaturą?

3. Na procentowym diagramie kołowym przedstawiono, na co Mikołaj przeznaczył swoje kieszonkowe w wysokości 200 zł. Skorzystaj z przedstawionego diagramu i odpowiedz na pytania.



- Na co Mikołaj przeznaczył największą część swojego kieszonkowego?
 - Na pamiątki.
 - Na napoje.
 - Na bilety wstępu.
 - Na lody.
- Jaki procent wydatków Mikołaja stanowiły wydatki na pamiątki?
 - 10 %
 - 20 %
 - 90 %
 - 15 %
- Na co Mikołaj przeznaczył taką samą część swoich oszczędności, jaką przeznaczył na bilety wstępu?
 - Na pamiątki oraz lody.
 - Na pamiątki oraz napoje.
 - Na napoje oraz lody.
 - Na napoje.
- Jaką kwotę Mikołaj wydał na lody?
 - 20 zł
 - 40 zł
 - 80 zł
 - 60 zł

4. Na diagramie słupkowym przedstawiono, ile punktów zdobyło trzech kolegów – Michał, Mateusz i Krzysztof w trzech rundach gry komputerowej. Rundę wygrała osoba, która zdobyła najwięcej punktów.

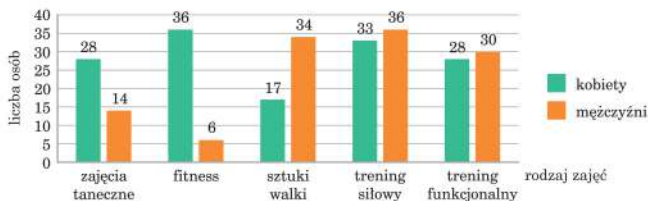


Skorzystaj z przedstawionego diagramu i odpowiedz na pytanie.

- Który z chłopców wygrał pierwszą, który drugą, a który trzecią rundę?
- Ile punktów we wszystkich trzech rundach zdobył Krzysztof?
- Ile punktów Michał zdobył w pierwszej, ile w drugiej, a ile w trzeciej rundzie? W której rundzie zdobył najmniej punktów?
- W których z trzech rund Mateusz zdobył więcej punktów niż jego koledzy?
- O ile punktów mniej zdobył Michał niż Krzysztof w trzeciej rundzie?
- Ile razy więcej punktów zdobył Krzysztof niż Mateusz w pierwszej rundzie?
- Jaki procent liczby wszystkich uzyskanych w trzech rundach punktów Michał zdobył w pierwszej rundzie?

Sprawdź, co umiesz!

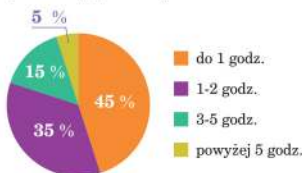
1. Na poniższym diagramie przedstawiono, ile kobiet i ilu mężczyzn wybiera poszczególne zajęcia sportowe na siłowni. Każda osoba uczestniczy tylko w jednym zajęciu.



Skorzystaj z przedstawionego diagramu i odpowiedz na pytanie.

- Które zajęcia najczęściej wybierają kobiety, a które mężczyźni?
- Które zajęcia dwa razy częściej wybierają kobiety niż mężczyźni?
- Które zajęcia dwa razy częściej wybierają mężczyźni niż kobiety?
- W przypadku których zajęć różnica między liczbą kobiet a liczbą mężczyzn jest najmniejsza?
- Jaki procent liczby mężczyzn wybrało trening funkcjonalny?

2. Na procentowym diagramie kołowym przedstawiono przybliżone wyniki badania uczniów w wieku 10–13 lat, którzy mieli określić, jak długo grali wczoraj wieczorem w gry komputerowe. W badaniu wzięło udział 200 osób. Narysuj diagram słupkowy prezentujący dane przedstawione na diagramie kołowym.



Źródło: <https://brpd.gov.pl/wp-content/uploads/2023/04/Dziennik-codziennej-aktywno%C5%9Bci-dzieci-i-m%C5%82odzie%C5%BCy-raport-z-badania.pdf>.

Skorzystaj z przedstawionego diagramu i odpowiedz na pytanie.

- Jaki procent liczby badanych grało w gry komputerowe od 1 godziny do 2 godzin?
- Jaki procent liczby badanych grało w gry komputerowe poniżej 3 godzin?
- Ilu badanych grało w gry komputerowe powyżej 5 godzin?

PODSUMOWANIE DZIAŁU VIII

W świecie procentów i statystyki

Powtórz wiadomości



Procenty

W procentach określamy część danej wielkości.

1 % to $\frac{1}{100}$ danej wielkości.

10 % to $\frac{10}{100}$ danej wielkości, czyli $\frac{1}{10}$.

25 % to $\frac{25}{100}$ danej wielkości, czyli $\frac{1}{4}$.

50 % to $\frac{50}{100}$ danej wielkości, czyli $\frac{1}{2}$.

100 % to $\frac{100}{100}$ danej wielkości, czyli 1.

p % to $\frac{p}{100}$ danej wielkości.

W misce znajduje się 12 orzechów, w tym 3 włoskie i 9 laskowych.

Jaki procent liczby wszystkich orzechów stanowi liczba orzechów włoskich?

$$\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25 \%$$

Jaki procent liczby wszystkich orzechów stanowi liczba orzechów laskowych?

$$100 \% - 25 \% = 75 \%$$

Jak zamienić procent na liczbę?

❶ Zamień 20 % na ułamek zwykły.

$$20 \% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

❷ Zamień 5 % na ułamek dziesiętny.

$$5 \% = \frac{5}{100} = 0,05$$

❸ Zamień 300 % na liczbę.

$$300 \% = 3, \text{ bo } 100 \% = 1.$$

Jak zamienić liczbę na procent?

❶ Zamień ułamek $\frac{1}{4}$ na procent.

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25 \%$$

❷ Zamień ułamek 0,07 na procent.

$$0,07 = \frac{7}{100} = 7 \%$$

❸ Zamień liczbę 4 na procent.

$$4 = \frac{4}{1} = \frac{400}{100} = 400 \%$$

Obliczanie procentu danej liczby

W bibliotece pana Jana jest 80 książek. Biografie stanowią 10 % liczby wszystkich książek. Ile biografii jest w tej bibliotece?

Sposób 1

$$10 \% = \frac{10}{100} \\ \frac{10}{100} \cdot 80 = 8$$

Sposób 2

$$: 10 \left(\begin{array}{cc} 80 & \text{---} & 100 \% \\ 8 & \text{---} & 10 \% \end{array} \right) : 10$$

Odp. W bibliotece jest 8 biografii.

Poćwicz przed sprawdzianem

1. Na którym rysunku zamalowano 50 % figury?



2. Wskaż odpowiedź, w której niepoprawnie zamieniono ułamek na procent.

A. $\frac{12}{40} = 30\%$

B. $\frac{4}{5} = 80\%$

C. $0,75 = 75\%$

D. $5 = 5\%$

3. Pani Maria ma w domu 15 urządzeń elektrycznych. Klasę energetyczną A ma 40 % liczby tych urządzeń. Ile urządzeń elektrycznych pani Marii ma klasę energetyczną A?

A. 4

B. 6

C. 8

D. 14

4. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

1 % kwoty 300 zł to 30 zł.	P	F
70 % trasy o długości 60 km to dokładnie 42 km.	P	F
40 % liczby 170 to więcej niż 80 % liczby 120.	P	F

5. Gra planszowa kosztowała przed obniżką 180 zł. Podczas wyprzedaży jej cenę obniżono o 25 %. Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

I. O ile złotych obniżono cenę tej gry?

A. O 53 zł.

B. O 45 zł.

II. Ile złotych kosztuje ta gra po obniżce?

C. 135 zł

D. 127 zł

6. Przeprowadzono ankietę, w której 25 osobom zadano pytanie: *Jaki jest Twój ulubiony dzień tygodnia?* Dane przedstawiono w tabeli.

Dzień tygodnia	Pon.	Wt.	Śr.	Czw.	Pt.	Sob.	Niedz.
Liczba odpowiedzi	2	1	1	1	5	6	

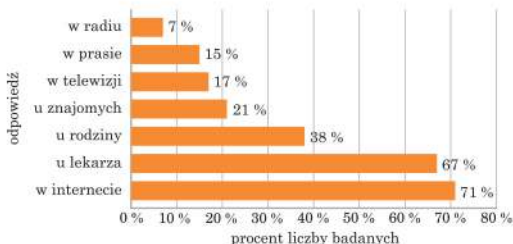
Skorzystaj z danych zawartych w tabeli i rozwiąż zadanie.

a) Który dzień tygodnia wskazała największa liczba osób, a który najmniejsza?

b) Jaki procent liczby ankietowanych wskazało piątek, a jaki niedzielę?

c) Narysuj diagram słupkowy prezentujący dane zawarte w tabeli.

7. Na diagramie przedstawiono część wyników badań, w których ankietowanym zadano pytanie: *Gdzie szuka Pan/Pani odpowiedzi na temat stanu swojego zdrowia?* W badaniu brało udział 800 osób.

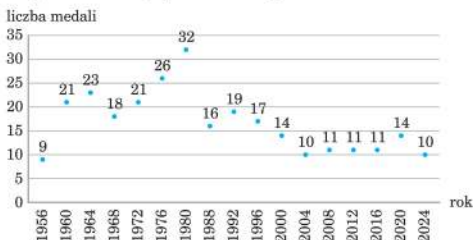


Źródło: <https://healthyandbeauty.pl/diagnoza-od-doktora-google-czyli-gdzie-polacy-szukaja-informacji-o-zdrowiu/>.

Skorzystaj z przedstawionego diagramu i odpowiedz na pytanie.

- Którą odpowiedź ankietowani wskazali trzy razy częściej niż radio?
- Które odpowiedzi wskazało więcej niż $0,1$, ale mniej niż $\frac{1}{5}$ liczby ankietowanych?
- Ile osób wskazało, że informacji o swoim zdrowiu szuka w prasie?

8. Na wykresie przedstawiono liczbę medali zdobytych przez polską reprezentację na letnich igrzyskach olimpijskich w latach 1956–2024.



Źródło: <https://dzieje.pl/rozmaitosci-histeryczne/308-polskich-medali-w-historii-letnich-igrzysk-olimpijskich>.

Skorzystaj z przedstawionego diagramu i odpowiedz na pytanie.

- W którym roku polska reprezentacja zdobyła najwięcej medali?
- W którym roku zdobyto więcej medali: w 1960 czy w 2024? O ile więcej?
- Ile razy więcej medali zdobyto w 1968 roku niż w 1956 roku?
- Czy w 1976 roku zdobyto mniej niż 10 % łącznej liczby wszystkich medali?

Podjmij wyzwanie

Drogi Uczniu!

Rozwiąż kolejne zadania, a dowiesz się, jakimi wyrazami uzupełnić poniższy tekst, żeby opisywał pewien przełomowy wynalazek. Powodzenia!



Wiek ❶ to czas intensywnego rozwoju astronautyki i podejmowania prób zajrzenia w głąb Wszechświata. Przełomowym momentem w tym okresie było ❷. Dzięki temu możliwe stały się obserwacje obiektów, których nie rejestrują teleskopy naziemne ze względu na ziemską atmosferę. Kosmiczny teleskop został wyniesiony na orbitę okołozemską ❸ przez prom kosmiczny Discovery (czytaj: dyskawery) i umieszczony ❹ poza ziemską atmosferą. Urządzenie to zrewolucjonizowało badania kosmosu. Wykonano nim wiele niezwykłych zdjęć. Pomogło także określić ❺.

1. W cukierni można kupić tort sprzedawany w kawałkach o różnych smakach. Którego smaku tortu pozostało na paterze dokładnie 40 %?



truskawkowego	czekoladowego	z bitą śmietaną
XVII	XIX	XX

2. Poniżej przedstawiono etykiety trzech koncentratów pomidorowych. Który z nich zawiera najwięcej pomidorów w 100 gramach?



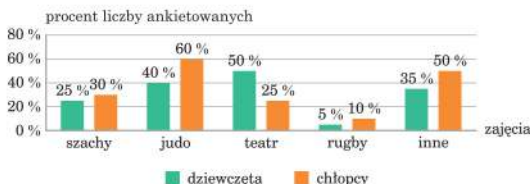
pierwszy	drugi	trzeci
wyniesienie na orbitę teleskopu Hubble'a (czytaj: habla)	zbudowanie lunety przez Galileusza	zbudowanie teleskopu przez Newtona (czytaj: niutona)

3. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Jeśli pewna drużyna piłkarska wygrała 60 % liczby wszystkich rozegranych meczów, których było 35, to zwyciężyła 21 razy.	P	F
Jeśli w klasie 6a jest 24 uczniów, z czego 25 % liczby uczniów to chłopcy i połowa z nich nosi okulary, to 9 chłopców nosi okulary.	P	F

PP	FP	PF
4 stycznia 1643 roku	20 lipca 1969 roku	24 kwietnia 1990 roku

4. Wśród 300 dziewcząt i 300 chłopców przeprowadzono ankietę dotyczącą ich uczestnictwa w dodatkowych zajęciach oferowanych przez szkołę. Każdy uczeń mógł wskazać więcej niż jedną odpowiedź.



Ile ze zdań zapisanych poniżej jest prawdziwych?

- Największą różnicę między wyborem dziewcząt i chłopców można dostrzec w zajęciach teatralnych.
- Zajęcia z rugby wybrało 15 dziewcząt i 25 chłopców.
- Na judo uczęszcza dwa razy więcej chłopców niż na szachy.
- Inne zajęcia wskazało o 15 chłopców więcej niż dziewcząt.

dwa	trzy	cztery
600 km	6000 km	600 m

5. W 2010 roku było w Polsce około 5,5 mln kotów. Liczba kotów od 2010 roku do 2024 roku wzrosła o około 30 %. Ile kotów było w Polsce w 2024 roku?

około 1 650 000	około 7 150 000	około 9 500 000
temperaturę wnętrza Słońca	tempo rozszerzania Wszechświata	prędkość światła



Potrenuj – zadania uzupełniające

1. Zamień ułamki na procenty. Dopasuj litery do odpowiednich procentów i odczytaj hasło – nazwę azjatyckiego kotoniedźwiedzia żyjącego na drzewach.

$$0,6 \quad \text{R}$$

$$\frac{9}{50} \quad \text{I}$$

$$1\frac{4}{16} \quad \text{G}$$

$$\frac{19}{25} \quad \text{O}$$

$$\frac{76}{200} \quad \text{T}$$

$$\frac{18}{40} \quad \text{U}$$

$$0,06 \quad \text{B}$$

$$\frac{18}{75} \quad \text{N}$$



Procent	6 %	18 %	24 %	38 %	45 %	60 %	76 %	24 %	125 %
Litera									

2. Cezary, Pola i Zosia rozwiązują poniższe zagadki. Której zagadki wynik jest największy?



Jaka liczba jest równa 25 % liczby, której 50 % wynosi 40?



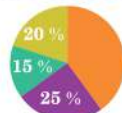
Jaka liczba jest równa 10 % liczby, której 75 % wynosi 90?



Jaka liczba jest równa 60 % liczby, której 200 % wynosi 60?

3. Na opakowaniu napoju widnieje informacja, że w jego 100 ml znajduje się 12 mg witaminy C, co stanowi 15 % RWS (referencyjnych wartości spożycia) dla osoby dorosłej, oraz 1,2 mg witaminy B3, co stanowi 7,5 % RWS. Jakie jest dzienne zapotrzebowanie na witaminę C, a jakie na witaminę B3?

4. W pewnej grupie osób zadano pytanie: *Z jakiego urządzenia korzystasz, aby sprawdzić pocztę elektroniczną?* Komputer stacjonarny wskazało 27 osób. Wynik ankiety przedstawiono na procentowym diagramie kołowym.



a) Jaki procent liczby ankietowanych wskazało laptop?

b) Ile osób wzięło udział w ankiecie?

■ laptop ■ tablet
■ komputer stacjonarny ■ smartfon

5. W poniedziałek kilogram truskawek kosztował 10 zł. We wtorek można było je kupić o 10 % taniej. W środę, ze względu na pogorszenie pogody, cena truskawek była wyższa o 10 % niż we wtorek. Czy w środę cena 1 kg truskawek była taka sama jak w poniedziałek? Uzasadnij swoją odpowiedź.



Badania ankietowe (ankiety) to narzędzie, które pomaga zebrać opinie i informacje od wielu osób, tzw. respondentów, na dany temat. Wyniki takich badań często przedstawia się na diagramach procentowych. W procentach wyrażone są informacje, jakie części liczby respondentów wybrały poszczególne odpowiedzi na ujęte w ankiecie pytania. Diagramy pozwalają zobaczyć te informacje w prosty i przejrzysty sposób. Dzięki temu łatwiej jest dostrzec różnice i podobieństwa oraz wyciągnąć wnioski.

1. Zapoznaj się z poniższą instrukcją i odpowiedz, w jaki sposób można przygotować ankietę oraz zebrać odpowiednie dane.
 - 1 Przygotuj ankietę zawierającą pytania zamknięte, aby łatwo zebrać i przeliczyć dane. Do każdego pytania przygotuj 4 możliwe odpowiedzi, spośród których respondenci będą mogli wybrać odpowiedź najbardziej im odpowiadającą. Anketa powinna zawierać minimum 5 pytań.
 - 2 Przeprowadź ankietę wśród 20 lub 25 osób, co pozwoli łatwo obliczyć, jaki procent liczby respondentów wybrało poszczególne odpowiedzi na pytania.
 - 3 Zebrane dane liczbowe przedstaw w tabelach.

Numer pytania	Ilu respondentów udzieliło tej odpowiedzi?			
	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Numer pytania	Jaki procent liczby respondentów udzieliło tej odpowiedzi?			
	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

- 4 Wyniki procentowe przedstaw na słupkowych diagramach procentowych. Możesz narysować je samodzielnie lub skorzystać z odpowiednich programów komputerowych poznanych na lekcjach informatyki.
- 5 Zapisz kilka wniosków wynikających z badań. Opracowane tabele, diagramy oraz wnioski przedstaw w formie plakatu lub prezentacji multimedialnej.

2. Dobierzcie się w grupy trzyosobowe. Przeprowadźcie ankietę, zawierającą minimum 5 pytań, na jeden z wybranych tematów: sport, muzyka, film, kuchnia. Następnie przedstawcie zebrane dane w postaci tabel i diagramów oraz zapiszcie w kilku zdaniach wnioski z waszej ankiety.

Odpowiedzi

Dział I. W świecie liczb całkowitych

1. Liczby naturalne i ich własności **Ćwiczenia** 1. a) 2, 3, 4, 9 b) 2, 3, 4, 5, 10 c) 2, 3, 4, 5, 10, 100 d) 2, 4 2. a) 1, 2, 3, 6 b) 1, 3, 9, 27 c) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 d) 1, 19 3. a) nie b) tak c) nie d) nie 4. a) 0, 4, 8, 12, 16 b) 0, 6, 12, 18, 24 c) 0, 13, 26, 39, 52 d) 0, 30, 60, 90, 120 5. a) $NWD(12, 24) = 12$, $NWW(12, 24) = 24$ b) $NWD(48, 60) = 12$, $NWW(48, 60) = 240$ c) $NWD(5, 32) = 1$, $NWW(5, 32) = 160$ d) $NWD(585, 135) = 45$, $NWW(585, 135) = 1755$

Rozwiąż zadania 1. a) 110, 1228, 10 892, 700, 3 330 000, 272 736, 28 900, 333 784 b) 8925, 110, 700, 3 330 000, 28 900, 1025 c) 110, 700, 3 330 000, 28 900 d) 8925, 3213, 3 330 000, 272 736 e) 3213, 3 330 000, 272 736 f) 1228, 10 892, 700, 3 330 000, 272 736, 28 900, 333 784

2. a) 1, 2, 7, 14 b) 1, 2, 4, 8, 16, 32 c) 1, 43 d) 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150 3. a) 0, 5 b) 0, 4, 8 c) 2, 5 d) 4 4. I. 432 II. a) podzielna przez 3 i przez 5, np.: 120, 3015; niepodzielne np.: 125, 3012 b) podzielna przez 4 i przez 5, np.: 580, 1720; niepodzielne np.: 435, 5044

c) podzielna przez 9 i przez 2, np.: 270, 15 390; niepodzielne np.: 225, 6124 d) podzielna przez 3 i przez 4, np.: 960, 2172; niepodzielne np.: 363, 5144 5. a) nie b) nie c) tak 6. JAKUB PACHOCKI 7. SPIRALA ULAMA 8. a) tak b) nie c) tak 9. Są to wielokrotności liczby 3 większe od 0 i mniejsze od 31. 10. FP 11. a) $75 = 3 \cdot 5^2$ b) $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ c) $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$ d) 53

e) $338 = 2 \cdot 13^2$ 12. a) $NWD(6, 8) = 2$, $NWW(6, 8) = 24$ b) $NWD(14, 77) = 7$, $NWW(14, 77) = 154$

c) $NWD(10, 40) = 10$, $NWW(10, 40) = 40$ d) $NWD(7, 45) = 1$, $NWW(7, 45) = 315$

e) $NWD(120, 360) = 120$, $NWW(120, 360) = 360$ f) $NWD(400, 600) = 200$, $NWW(400, 600) = 1200$

g) $NWD(1, 800) = 1$, $NWW(1, 800) = 800$ h) $NWD(120, 125) = 5$, $NWW(120, 125) = 3000$ 13. 1248

Sprawdź, co umiesz! 1. a) 7685, 225 b) 87 231, 621, 225 c) 1880, 2872 2. 34 3. D 4. 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72 5. a) $NWD(27, 13) = 1$, $NWW(27, 13) = 351$ b) $NWD(60, 24) = 12$, $NWW(60, 24) = 120$ c) $NWD(700, 28) = 28$, $NWW(700, 28) = 700$ d) $NWD(180, 960) = 60$, $NWW(180, 960) = 2880$

2. Działania na liczbach naturalnych **Ćwiczenia** 1. a) 20 b) 3 c) 60 d) 14 2. a) 599 b) 3251 c) 969 d) 31 289 3. a) 10 935 b) 46 166 000 c) 224 d) 70 890

Rozwiąż zadania 1. a) 60 b) 1070 c) 95 d) 290 2. a) 72 b) 2720 c) 29 d) 41 3. kwadraty: 9, 25, 36, 64, 100, 121, 144; sześciang: 27, 125, 216, 512, 1000, 1331, 1728 4. a) 390 b) 2242 c) 2109 d) 1109 e) 2422 f) 1 388 400 g) 238 h) 357 5. a) 2 b) 4 c) 0 d) 3 6. STANISŁAW ULAM 7. a) 298 b) 2 c) 23 247 d) 1208 e) 147 8. a) 64 b) 26 c) 1080 d) 5440 e) 6 3030 9. 67 10. 1581 11. Stefan Banach 12. tak, tak, tak

Sprawdź, co umiesz! 1. a) 70 b) 950 c) 74 d) 470 e) 147 f) 2520 g) 121 h) 7 2. a) 599 b) 1423 c) 9121 d) 6587 e) 1914 f) 1 261 000 g) 1672 h) 240 3. a) 51 b) 29 c) 6 d) 172 4. PP

3. Liczby całkowite i ich wartość bezwzględna **Ćwiczenia** 1. a) $< b < c < d >$ 2. a) -1 b) 16 c) -54 d) 3 e) 0 3. a) 8 b) 6 c) 5 d) 13 4. a) 12 b) 42 c) 1 d) -10 5. a) -5 i 5 b) 0 c) nie ma takich liczb

Rozwiąż zadania 1. a) 5, 8, 3, 0, 31, 43, 1 b) 5, -2, 8, 3, 0, -12, 31, 43, -7, 1 c) 5, 8, 3, 31, 43, 1 d) -2, 0, -12, -7 2. a) $> b < c > d < 3$. a) $-220 < -120 < -103 < 20 < 204$ b) $231 > 201 > 99 > -101 > -109$ 4. a) Lizbona b) Helsinki c) Lizbona, Rzym, Madryt d) Oslo, Sztokholm, Helsinki, Wilno, Warszawa, Budapeszt, Kijów e) w Oslo 5. a) $A = 6$, $B = 15$, $C = 33$ b) $D = -65$, $E = -40$, $F = -25$ c) $G = -144$, $H = -108$, $I = -18$ d) $J = -1875$, $K = -1350$, $L = -675$ 6. a) liczby przeciwne: -25, 15, 10, -5, 0, -10 b) liczby przeciwne: 24, -6, 12, -30, -12, 18 7. a) -6, -5, -4, -3, -2, -1 b) 0, 1, 2, 3, 4 8. FF 9. 3, -101, 99, -21, 0, 17 10. a) 12 b) 3 c) 9 d) 28 11. 120 m 12. a) 3 b) 25 c) 17 d) -4 e) -2 13. a) 5; 3 lub -3; 0; 7 lub -7 b) nie 14. MODUŁ

Sprawdź, co umiesz! 1. a) $< b > c > d >$ 2. a) -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 b) -5, -4, -3, -2, -1, 0 3. a) 11 b) 2 c) 6 d) 19 4. FF 5. BC

4. Działania na liczbach całkowitych **Ćwiczenia** 1. 450 zł 2. a) -6 b) -22 c) 6 d) 6 3. a) -6 b) -20 c) 20 d) 6 4. a) 56 b) -55 c) -9 d) 36 5. a) 121 b) 64 c) 64 d) -125

Rozwiąż zadania 1. a) 2 b) -10 c) 14 d) 73 e) -113 f) -80 g) -18 h) 16 i) 113 j) -220 k) 34 l) 50 2. a) Bartek: -2, Maciek: -2, Oskar: 2 b) Oskar 3. a) 0 4 °C b) 0 4 °C c) 12 °C

4. a) -65 b) -70 c) 31 d) -93 5. a) $< b > c > d > 6$. a) 12 b) 135 c) -82 d) 20 7. a) -2538
b) 1550 c) -3764 d) -4744 e) -2557 f) 2026 8. a) -737 b) -1227 c) 737 9. a) 4350 z) b) 3950 z)
c) 2150 z) 10. a) -27 b) 28 c) 8 d) -7 e) -210 f) -1330 g) 540 h) -1050 i) -111 j) -21
k) 150 l) -23 11. I. 25 II. 169 III. -8000 IV. 8000 V. -49 12. a) ujemny b) dodatni
13. a) np.: $-32 = -2 \cdot 4 \cdot 4$ b) np.: $-32 = 64 : (-2)$ 14. INDIE 15. PFF 16. a) -1 b) -125 c) -152 d) -21
17. -14; 38; 14 18. a) ujemna b) ujemna

Sprawdź, co umiesz! 1. a) -24 b) -7 c) -16 d) 104 e) -12 f) -336 g) 33 h) -180 2. AC 3. a) 36
b) -1000 c) -36 d) 1000

5. Zadania tekstowe Ćwiczenia 1. 195 999 zł 2. 1230 zł; niepotrzebne dane: cena jednego
noclegu, koszt całonocnego wyżywienia, liczba dni i dób 3. a) 500 b) 234 c) 231

Rozwiąż zadania 1. 260 2. 30 3. 6 4. a) 6 b) o 11.00 c) nie 5. 25 zł 6. -41°C 7. 950 zł
8. 2958 m 9. -2°C ; niepotrzebna dana: temperatura w południe

Sprawdź, co umiesz! 1. 290 zł 2. Tak, ponieważ $(58 - 24 + 17) \cdot 2 > 100$. 3. około 19 208 m

Podsumowanie działu I

Poćwicz przed sprawdzianem 1. A 2. D 3. PFF 4. a) 10 b) 5 c) -12 d) -25 5. a) 3889
b) 8225 c) 5606 d) 404 e) 3192 f) 10 837 600 g) 134 h) 170 6. a) 196 b) 343 c) 57 600 d) 36
e) -1 000 000 7. a) 164 b) 87 c) 80 d) 9 8. a) -15 b) -2 c) -9 d) 28 e) -73 f) -100 g) 11 h) -39 i) 187
j) 7 k) -5 l) 4 9. AD 10. a) -52 b) -15 c) 19 11. NWD(a, c) = 5, NWW(b, c) = 1050 12. a) o 5646
b) 14 595 000 euro 13. 2 zł 14. a) 100 m b) 2351 m

Podejmij wyzwanie 1. 143 472 2. 7 3. 12.48 4. znak karo 5. 1934 zł 6. PFP 7. 5486 8. 1280 zł
9. Tylko II. 10. trzy 11. Ponad 28 898 m.

Potrenuj – zadania uzupełniające 1. Cezary 2. FFPF 3. 308 4. a) 1 b) 8 5. 3150 zł 6. AD
7. a) $> b < c$ = 8. OLYMPUS MONS 9. Tak, ponieważ liczba (-685) leży dalej na lewo na osi
liczbowej niż liczba (-540). 10. 214 razy 11. cena laptopa: 2950 zł, cena myszki: 89 zł; o 2861 zł

Wykorzystaj w praktyce 1. Ania: średnia arytmetyczna 4,5; średnia ważona 4,4; Bartek: średnia
arytmetyczna 4,5; średnia ważona 4,55

Dział II. W świecie liczb wymiernych

1. Działania na ułamkach zwykłych Ćwiczenia 1. a) $4\frac{1}{4}$, $4\frac{5}{6}$, 8 b) $\frac{15}{8}$, $\frac{34}{9}$, $\frac{14}{1}$ c) $\frac{75}{100}$, $\frac{80}{100}$, $\frac{35}{100}$
d) $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$ 2. a) $\frac{1}{2}$ b) $1\frac{5}{36}$ c) $\frac{59}{100}$ d) $36\frac{5}{6}$ 3. a) $8\frac{2}{3}$ b) $5\frac{7}{24}$ c) $40\frac{1}{2}$ d) $18\frac{7}{9}$ e) $\frac{4}{9}$ 4. 42 km 5. 520

Rozwiąż zadania 1. a) $< b > c < d < 2$. pierwsza ramka: $3\frac{3}{4}$, 11, $3\frac{1}{6}$, 4; druga ramka: $\frac{23}{4}$,
 $\frac{21}{1}$, $\frac{26}{9}$, $\frac{2}{3}$ 3. pierwsza ramka: $\frac{4}{48}$, $\frac{40}{48}$, $\frac{78}{48}$, druga ramka: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{3}$ 4. a) $\frac{6}{7}$ b) $1\frac{5}{18}$ c) 11 d) $3\frac{17}{24}$
e) $\frac{4}{7}$ f) $\frac{26}{63}$ g) $12\frac{3}{5}$ h) $3\frac{14}{15}$ 5. a) $3\frac{4}{5}$ kg b) mniejsza o $1\frac{1}{5}$ kg 6. 1 7. BABILONŹCZYCY 8. a) $2\frac{1}{3}$
b) $\frac{2}{15}$ c) $\frac{4}{15}$ d) $\frac{7}{10}$ e) $1\frac{2}{3}$ f) 52 g) 115 h) 10 9. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{16}$ c) 4 10. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{9}{22}$ d) $\frac{13}{15}$ e) $\frac{3}{16}$ f) $\frac{26}{37}$
g) $1\frac{13}{25}$ h) $10\frac{4}{11}$ 11. a) $< b < c > d > e > f < 12$. $\frac{1}{4}$ kg 13. a) $3\frac{5}{24}$ b) $3\frac{1}{12}$ c) $1\frac{15}{34}$ d) $4\frac{5}{36}$ e) $6\frac{8}{11}$
f) $\frac{11}{48}$ 14. $4\frac{5}{12}$ h 15. a) 14 b) 63 c) $1\frac{1}{15}$ d) $\frac{5}{6}$ e) $1\frac{2}{5}$ f) 5 16. a) Agata b) w ogródku Karoliny o $\frac{3}{20}$ m²
c) o $\frac{9}{10}$ m² 17. $\frac{2}{3}$ kg 18. a) 100 b) 60 c) 121 d) $26\frac{1}{4}$ e) 8 f) $1\frac{13}{50}$ 19. 25 20. a) mnożenie; dzielenie
b) dodawanie; mnożenie 21. a) $\frac{7}{16}$ b) 16 c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{2}{3}$

A to ciekawe a) $1\frac{3}{5}$ b) $3\frac{3}{10}$

Sprawdź, co umiesz! 1. a) $1\frac{2}{7}$ b) $4\frac{2}{3}$ c) $1\frac{2}{3}$ d) $4\frac{11}{18}$ e) $\frac{12}{35}$ f) $40\frac{1}{2}$ g) $1\frac{1}{5}$ h) $8\frac{2}{7}$ 2. a) $5\frac{2}{3}$ b) $5\frac{1}{6}$ c) $\frac{2}{3}$
d) $3\frac{17}{21}$ 3. 14 4. FFP 5. 1300

2. Działania na ułamkach dziesiętnych Ćwiczenia 1. a) 23,18 b) 21,313 c) 19,55 d) 28,42
2. a) 780 b) 3112,02 c) 32,56 d) 6,851 3. a) 0,01523 b) 2,03 c) 142,65 d) 31,2 4. fałszywe

Rozwiąż zadania 1. a) $>$ b) $<$ c) $>$ 2. a) 0,9 b) 1,95 c) 3,1 d) 3,823 e) 0,15 f) 6,8 g) 3,25
h) 6,83 3. a) 2,1 b) 1,25 c) 0,0102 d) 0,3 e) 3,02 f) 71 g) 0,5 h) 40 4. I i V, III i IV 5. I-C, II-E, III-C,
IV-B, V-C, VI-D 6. Jest równy 0,3, ponieważ $0,39 : 1,3 = 3,9 : 13$ 7. a) 80 800 b) 80,8 c) 80,8 8. a) 4,9
b) 21,981 c) 9,871 d) 8,111 e) 0,055 f) 11,911 9. a) 9,804 b) 141,61147 c) 580 d) 0,015625 e) 0,001728
f) 0,0612 10. a) 1,52 b) 2730 c) 50 d) 20 e) 3,6 f) 200 11. a) $A = 1,5$; $B = 0,1$; $C = 2,9$ b) $E = 15,5$;
 $F = 6,6$; $G = 17,8$ 12. DECIMAL 13. 51 14. a) 0,2 b) 2,7 c) 2,55 d) 0,25 e) 0,007 f) 2,55 g) 1,121
h) 16,8 i) 0,18 j) 2,075 15. a) 2 cm 3 mm b) 7 m 12 cm c) 1 km 110 m d) 21 km 71 m e) 1 dag 7 g
f) 8 kg 10 dag g) 21 kg 22 dag h) 32 kg 64 g i) 2 t 900 kg j) 2 l 170 ml 16. a) $Obw. = 6,4$ cm
b) $Obw. = 13,2$ cm c) $Obw. = 22,3$ cm 17. 135 zł 18. tak 19. 240 20. a) $\text{🌸} = 3$, $\text{🍏} = 0$ b) $\text{🌸} = 1$, $\text{🍏} = 2$,
 $\text{🌻} = 4$

Sprawdź, co umiesz! 1. a) 1,59 b) 1,97 c) 310 d) 0,54 2. a) 9,398 b) 12,729 c) 1,5625 d) 412
3. FP 4. 8,6 kg

3. Rozwijęcia dziesiętne ułamków zwykłych Ćwiczenia 1. a) 0,06 b) 0,45 c) 0,005 d) 0,875
2. a) 6,(3), okres: 3 b) 0,(45), okres: 45 c) 5,(01), okres: 01 d) 2,(384615), okres: 384615
3. a) $<$ b) $<$ c) $>$

Rozwiąż zadania 1. a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $13\frac{1}{5}$ d) $8\frac{1}{8}$ e) $\frac{16}{125}$ 2. a) 0,75 b) 0,5 c) 0,85 d) 0,625 e) 0,056
3. a) 0,8 b) 0,3 c) 0,25 d) 0,875 4. a) 0,(1), okres: 1 b) 0,(07), okres: 07 c) 0,8(3), okres: 3
d) 0,(769230), okres: 769230 5. a) 0,075 b) 0,(2) c) 0,2(6) d) 0,4(6) e) 0,(3) 6. FFPP 7. a) $<$ b) $<$ c) $>$
d) $=$ e) $>$ f) $>$ 8. a) 5 b) 0 c) 1 d) 3 e) 5 9. a) 2 m 75 cm b) 8 kg 150 g c) 4 km 125 m d) 7 t 340 kg
e) 5 h 20 min f) 15 min 5 s 10. a) więcej b) mniej c) więcej 11. I. 0,(1); 0,(2); 0,(4); 0,(5)
II. 0,(01); 0,(04); 0,(10); 0,(25) III. 0,(001); 0,(004); 0,(100); 0,(550); 0,(0001); 0,(0080); 0,(5678)

Sprawdź, co umiesz! 1. a) 0,12 b) 0,275 c) 0,(8) d) 0,(63) 2. a) $>$ b) $<$ c) $>$ 3. AC 4. a) 1 b) 8 c) 3
5. FP

4. Działania na liczbach wymiernych Ćwiczenia 1. $49\frac{4}{5}$ kg = 49,8 kg 2. $4\frac{73}{80}$ = 4,9125

3. a) 5,79 b) $2\frac{7}{30}$ c) $1\frac{1}{2}$ d) $2\frac{2}{11}$ 4. a) $-\frac{4}{7}$ b) -5,4 c) $-7\frac{1}{4}$ d) -5,65 5. a) $-\frac{8}{45}$ b) 3,9 c) -8 d) $5\frac{2}{3}$

Rozwiąż zadania 1. a) $3,3 = 3\frac{3}{10}$ b) $6,05 = 6\frac{1}{20}$ c) $7,475 = 7\frac{19}{40}$ d) $3,625 = 3\frac{5}{8}$ e) 2 f) 6 2. a) $5\frac{17}{30}$
b) $10\frac{3}{8}$ c) $6\frac{13}{60}$ d) $8\frac{3}{40}$ e) $1\frac{5}{6}$ f) $18\frac{3}{4}$ g) 10 h) $1\frac{5}{9}$ 3. KROPKA 4. masło: 1, jajka: 4, herbatniki: 300 g,
budyń waniliowy: 2, mleko: 200 ml, cukier: 220 g, twaróg: 1 kg 5. 31,15 zł 6. 36 7. 35,30 zł
8. a) 0; 7 b) 0; 7; -1; $-\frac{630}{9}$ c) -0,22; $\frac{13}{40}$; 0; $12\frac{1}{5}$; 7; 9,(45); $-89\frac{97}{99}$; -1; $-\frac{630}{9}$ 9. a) $\frac{1}{3}$ b) 1,25 c) $\frac{12}{13}$
d) -4,76 10. a) $=$ b) $<$ c) $>$ 11. a) $-\frac{1}{6}$; -0,4; -0,05 b) $\frac{1}{30}$; 0,4; 0,3 c) $3\frac{3}{4}$; 10,1; $5\frac{1}{12}$ d) $-3\frac{17}{22}$; -18,42;
-5,9 e) $-1\frac{7}{15}$; -5,75; -1 12. a) $-\frac{3}{8}$ b) -1 c) 3 d) $-\frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{10}$ f) $\frac{1}{5}$ 13. a) $\frac{1}{16}$ b) $-\frac{8}{125}$ c) $1\frac{7}{9}$ d) $3\frac{8}{9}$ e) $10\frac{9}{16}$
f) 0,0001 g) 1,44 h) 1,69 i) 0,001 j) -0,008 14. a) -5 b) $-1\frac{1}{2}$ c) -17,5 d) -7,75 e) -5 f) $3\frac{1}{2}$ g) $8\frac{8}{9}$
h) $\frac{1}{2}$ 15. RATIONAL

Sprawdź, co umiesz! 1. a) $\frac{7}{12}$ b) $5\frac{1}{4}$ c) $3\frac{1}{2}$ d) $2\frac{1}{4}$ 2. a) $7\frac{43}{60}$ b) $1\frac{5}{8}$ c) $2\frac{2}{5}$ 3. Tak, ponieważ liczbę 4
można przedstawić w postaci $\frac{4}{1}$ 4. a) -9,75 b) -3 c) $\frac{5}{8}$ d) $-1\frac{3}{5}$ e) $4\frac{1}{5}$ f) $-\frac{1}{5}$ 5. 2,85 l

5. Zaokrąglanie i szacowanie Ćwiczenia 1. równikowy: a) 6000 km b) 6400 km c) 6380 km
d) 6378 km e) 6378,1 km f) 6378,14 km; biegunowy: a) 6000 km b) 6400 km c) 6360 km d) 6357 km
e) 6356,8 km f) 6356,75 km 2. około 30 l; 210 zł

Rozwiąż zadania 1. a) 2530 cm, 560 cm, 0 cm b) 35 800 km, 2900 km, 100 km c) 10 000 m, 10 000 m, 0 m 2. a) 100 m, 1000 km, 10 000 zł, 12 900 t b) 281 km, 1 t, 272 dag, 22 cm c) 837,3 kg, 76,3 cm, 27,8 ha, 1 ml d) 8,28 km², 9,78 l, 1000 t, 39,27 km 3. a) < b) > c) < d) > e) > f) > g) < h) > i) > 4. FP 5. Tak, wystarczy. 6. a) tak b) nie c) tak

Sprawdź, co umiesz! 1. a) 300 km² b) 290 km² c) 293 km² d) 293,3 km² 2. C 3. nie 4. nie 5. tak

6. Zadania tekstowe Ćwiczenia 1. a) 22,50 zł b) tak 2. a) około 74 zł b) 150 dag

Rozwiąż zadania 1. 10 km 912 m 2. a) 332 m b) 330 m c) 300 m 3. AD 4. 5,06 kg 5. kakaowe o 3,70 zł 6. 31,68 zł 7. a) włóczka 95 g, kulki 15 dag b) 16,5 m c) 312,5 m 8. a) 167,20 zł b) 133,76 zł 9. 16 dag 10. niższa

Sprawdź, co umiesz! 1. 10 kg 2. PFF 3. 127,85 zł 4. 50,96 zł

Podsumowanie działu II

Poćwicz przed sprawdzianem 1. D 2. C 3. B 4. C 5. FFP 6. a) $1\frac{1}{9}$ b) $3\frac{17}{36}$ c) $-\frac{4}{5}$ d) 2 e) $3\frac{1}{7}$ f) $\frac{7}{8}$

g) $\frac{43}{60}$ h) $1\frac{13}{36}$ i) $1\frac{232}{729}$ 7. a) 6 kg b) 159 kg c) 6 km 8. a) 8,04 b) 4,15 c) 0,6 d) 0,03 e) -19,18 f) -1,047 g) 0,6768 h) -23,1 9. a) < b) > c) < d) < e) = f) > 10. a) 1,05 b) $\frac{1}{15}$ c) $-\frac{3}{5}$ d) $-\frac{4}{3}$ e) $-\frac{8}{4}$ f) $\frac{97}{100}$ g) 0 11. wiersz I: 1346 km; 1350 km; 1300 km; 1000 km; 1346,1 km; 1346,06 km; wiersz II: 776 t; 780 t; 800 t; 1000 t; 776,1 t; 776,14 t 12. 80 13. a) 67,39 zł b) nie c) 26 zł d) 0,18 kg e) tak

Podejmij wyzwanie 1. $2\frac{41}{210}$ 2. 8,158 3. 12 kg 4. FPFPP 5. $\frac{6}{7}$ 6. cztery 7. $\frac{7}{24}$ kg 8. 166 zł

Potrenuj – zadania uzupełniające 1. a) $2\frac{9}{13}$ b) $1\frac{8}{13}$ 2. a) nie b) nie c) tak d) nie 3. 360;

pierwszy dzień: 285, drugi dzień: 75 4. 1900 g = 190 dag = 1,9 kg = 0,0019 t 5. 36 6. WYRAK UPIORNY 7. duże 8. piątek: 72,80 zł, sobota: 80,08 zł 9. a) 4, 2, 3, 4 b) 6, 5, 5, 6 c) 7, 3, 1, 7 d) 4, 1, 1, 4 10. o 0,25 km 11. a) 0,63 m $\approx$ 0,64 m b) 0,28 t $\approx$ 0,28 t c) 0,712 km $\approx$ 0,71 km d) 0,791(6) kg $\approx$ 0,79 kg

Wykorzystaj w praktyce 1. a) 893 r 21 b) 10 370 r 30 2. a) 90 b) 692 c) 13 d) 25 500 e) 187 f) 34

Dział III. W świecie wyrażeń algebraicznych i równań

1. Zapisywanie wyrażeń algebraicznych Ćwiczenia 1. a) $k + b$ b) $0,25g$ c) $10j + 3k$ d) xy

2. a) $\frac{1}{2}x$ b) $f - 12$ c) $4(k + l)$ d) $\frac{1}{4}t + s$ 3. a) suma liczb p i q b) różnica liczb s i t

c) iloczyn dwukrotności liczby x i liczby y d) iloraz pięciokrotności liczby g i liczby r

Rozwiąż zadania 1. a) 9; $p + 5$; b) 1175; $15z$; c) 10; $k - 2$; d) 36; $3p$ 2. a) A b) D c) A d) C

3. a) $w + 5$ b) $y - 8$ c) $8t$ d) $\frac{7}{a}$ e) $r^2 + 3f$ f) $x \cdot 3z$ g) $\frac{c}{c+2}$ h) $(2b)^3$ 4. I. $2m + 2k$ II. $4m + 3k$ III. $m + 2k$

IV. $4m + 12k$ 5. a) $20 - z$ b) $\frac{1}{2}h$ c) $5k$ d) $\frac{d}{30}$ l e) $7x$ 6. a) suma liczb x i 81 b) różnica liczb 81 i x

c) suma liczb c i dwukrotności liczby d d) różnica trzykrotności liczby t i liczby w

e) iloraz liczb u i 10 f) połowa liczby x g) iloczyn liczb 8 i f h) iloraz dziesięciokrotności liczb r i liczby s

i) suma kwadratu liczby a i liczby 6 j) kwadrat sumy liczb a i 1 k) iloczyn liczb 2 i kwadratu liczby y

l) kwadrat trzykrotności liczby z 7. a) $7x$, $7x + 6$ b) $60d$, $60d + 15$ c) $100m$, $100m + 50$ d) $100y$,

$100y + 20$ 8. a) 3; 6 b) 10; 20 c) $\frac{n(n-1)}{2}$; $n(n-1)$

Sprawdź, co umiesz! 1. C 2. FP 3. a) $w - 3$ b) $15t$ c) $x^2 + y^3$ d) $\left(\frac{x}{2}\right)^2$ 4. a) różnica liczb 3 i a b) suma kwadratu liczby b i liczby 7 c) iloraz liczb x i 17 d) iloczyn liczb 7 i kwadratu liczby p

2. Obliczanie wartości wyrażeń algebraicznych Ćwiczenia 1. 52 2. a) 87 b) $9\frac{1}{3}$ c) $2\frac{5}{8}$

Rozwiąż zadania 1. a) 1400 ml b) 1820 ml c) 2975 ml d) 35x ml 2. a) 11 b) 8 c) 0 d) 13

3. a) 9 b) -21 c) 6 d) 7,4 4. a) 38 zł b) 88 zł c) 134 zł d) 108 zł 5. a) $P = 16 \text{ cm}^2$ b) $P = 44 \text{ cm}^2$

c) $P = 73,5 \text{ dm}^2$ 6. a) 180° b) 540° c) 1440° d) $17\,640^\circ$ 7. a) 210 b) 1320 c) 9240 8. a) 32°F b) 68°F c) 59°F d) $37,4^\circ\text{F}$ 9. a) $a = 9$, $b = 11$, $c = 10$; pierwszy wiersz: -2, 10, 19, drugi wiersz: 30, 9, -12, trzeci wiersz: -1, 8, 20 b) $a = 7$, $b = 8$, $c = 4$ pierwszy wiersz: -1, 11, 11, drugi wiersz: 19, 7, -5, trzeci wiersz: 3, 3, 15

A to ciekawe 41, 61, 131, 641, 1681; nie

Sprawdź, co umiesz! 1. C 2. a) 7 b) 2 c) -9 d) 11 3. 19 4. a) $P = 120 \text{ cm}^2$ b) $P = 6 \text{ m}^2$ c) $P = 9\frac{3}{4} \text{ m}^2$

3. Upraszczanie wyrażeń algebraicznych Ćwiczenia 1. a) $10x$ b) $7y$ c) $6,8b$ d) $-1\frac{3}{4}m$ e) 0

f) $6\frac{5}{6}z$ 2. a) $32a$ b) $2m$ c) $-20k$ d) $5t$ e) $-4f$ f) $24n$ 3. a) $5d + 10$ b) $a + 7b$ c) $-11r + 6s - 1$ d) $-x + 2y$

Rozwiąż zadania 1. a) $12x$ b) $9x$ c) $6\frac{1}{2}x$ d) 0 e) $-11\frac{1}{2}x$ f) $-4,5a$ g) $-2,6a$ h) $5\frac{1}{6}w$ i) $4,5b$ 2. a) $7x + 2$

b) $6,3b + 2$ c) $-18x + 2$ d) $8x - 1$ e) $4x - 6$ f) $1,2d - 0,4c + 1$ 3. a) $16x$ b) $0,7a$ c) $\frac{2}{3}u$ d) $2x$ e) $5c$ f) $\frac{1}{2}n$

g) $2t$ h) $8u$ i) $-3x$ 4. I - E, II - F, III - D, IV - A, V - B, VI - C 5. a) $5x + 7y - 3$ b) $1\frac{1}{4}a - 3b - 2\frac{1}{4}$

c) $-2,9u + 0,7w$ d) $2\frac{5}{6}a + 2b$ e) $73x + 9y + 1$ f) $-7x - 6$ 6. a) $Obw. = 3x$ b) $Obw. = 2a + 2b$

c) $Obw. = 10p$ d) $Obw. = 18x + 7y$ e) $Obw. = 13x + 8b$ f) $Obw. = 2k + 10l + 6m$ 7. a) $9a$ b) $11x$ c) $21ab$

d) $48xy$ 8. Kuba 9. a) $2z + 2$ b) $2k - 5$ c) $4x$ d) $10x + 6$ 10. a) $5x + 3y + 2$; 21 b) $-2a + 5b - 21$; 6

c) $-10w + u + 100$; $96\frac{9}{10}$

Sprawdź, co umiesz! 1. a) $9x$ b) $-2y$ c) $-14c$ d) $2a$ 2. C 3. a) $8x + 7$; 31 b) $14x - 10y + 10$; 13,8 4. $6x + 9$

4. Równania Ćwiczenia 1. x - masa klocka w dekgaramach a) $3x + 5 = 2x + 10$ b) $3x = 25 + x$

2. x - liczba monet o nominale 2 zł; $50 + 2x = 68$ 3. x - długość krótszej podstawy trapezu; $x + 3x + 2 \cdot 10 = 100$

Rozwiąż zadania 1. a) $x + 7 = 2x + 3$ b) $x + \frac{1}{2} = 7$; $7x + 8 = 22$ c) $\frac{2}{3} = x + 7$ d) $x + 7 = 2x + 3$

2. a) $a + 21 = 127$ b) $x - 8 = 77$ c) $\frac{x}{3} = 99$ d) $15z = 165$ e) $5a + 126 = 626$ f) $3y - 152 = 726$

3. a) $7x = 73,50$ b) $k + 2,5 = 8$ c) $\frac{x}{6} = 5$ d) $k + 45 = 77,50$ e) $a + 25 = 200$ 4. a) $2a + 20 = 55$

b) $2x + 34 = 45$ c) $4x = 76$ d) $a \cdot 17 = 59,5$ e) $\frac{1}{2}x \cdot 12 = 36$ f) $y^2 = 64$ 5. I. B II. A III. C IV. C

6. a) x - liczba książek na komodzie b) x - cena 1 kg truskawek 7. a) x - cena 1 kg galaretek,

$2x + x + 6 = 39$ b) x - liczba uczniów, $16x + 2 \cdot 24 = 400$ c) x - liczba mężczyzn, $x + 3x = 440$

d) k - cena krzesła, $4k + 6k = 4400$ 9. I. A 2. C 3. B 10. a) $x^2 = 16$ b) $(x + 1)^2 = 49$ c) $x^2 + 3 = 12$

Sprawdź, co umiesz! 1. x - szukana liczba a) $x - 8 = 17$ b) $4x = -22$ c) $3x + 5 = 26$

2. I. tak II. nie, $x + x + 7 = 35$ III. tak 3. C

5. Liczba spełniająca równanie Ćwiczenia 1. a) spełnia b) nie spełnia c) spełnia 2. a) 5

b) 2, -2 c) każda liczba d) żadna liczba

Rozwiąż zadania 1. tak 2. $5x + 1 = 11$, 2; $4x + 8 = 0$, $x = -2$; $10x - 3 = 7$, $x = 1$; $9x + 2 = -7$,

$x = -1$ 3. B 5. a) spełnia b) nie spełnia c) nie spełnia d) spełnia 6. a) każda liczba b) żadna liczba c) $\frac{1}{2}$

d) 5, -5 e) każda liczba f) każda liczba 7. B 8. 0, 5, $\frac{3}{4}$, 13 9. a) np.: $x = 1$, $y = 2$ b) np.: $x = 3$, $y = 2$

c) np.: $x = 1$, $y = 2$

A to ciekawe np. $a = 2$ i $b = 50$

Sprawdź, co umiesz! 1. a) 10 b) 3,5 c) -2 2. FFP 3. BC 4. np. $x + 5 = 0$

6. Rozwiązywanie prostych równań **Cwiczenia** 1. a) $x = 6$ b) $x = -14$ c) $x = -7$ d) $x = 3\frac{3}{5}$

2. a) $x = 1$ b) $x = -\frac{1}{3}$ c) $x = -1$ d) $x = 3\frac{1}{5}$

Rozwiąż zadania 1. a) 2 kg b) 3 kg c) 4 kg 2. a) $x = 19$ b) $c = 152$ c) $a = 18$ d) $t = 102$ e) $a = 6,25$

f) $x = 16$ g) $y = 2,8$ h) $a = 6\frac{1}{2}$ i) $u = \frac{10}{21}$ 3. a) 2 kg b) 3 kg c) 3 kg 4. a) $y = 3$ b) $y = 111$ c) $x = 40$

d) $t = 45$ e) $u = \frac{1}{2}$ f) $a = 2$ g) $y = 0,3$ h) $x = 2\frac{2}{5}$ i) $a = 12$ 5. x – szukana liczba a) $x = 57$ b) $x = 16$

c) $x = 16$ d) $x = 216$ e) $x = 40\frac{1}{2}$ 6. a) 2 kg b) 2 kg c) $1\frac{2}{3}$ kg 7. a) $x = 3$ b) $a = 8$ c) $x = 4$ d) $m = 12$

e) $t = 1$ f) $y = -2$ g) $x = 9$ h) $t = 10$ i) $x = -5$ 8. a) $x = 6$ b) $y = 5$ c) $t = 5$ 9. I. $x = 4$ II. $y = 5$

III. $z = 2$, $t = 7$ 10. a) $x = 4$ b) $t = 7\frac{1}{3}$ c) $x = 2$ d) $z = -4$ e) $x = 1$ f) $a = \frac{3}{5}$ 11. a) $x = 19$ b) $z = -18$

c) $y = 2\frac{1}{4}$ 12. a) $x = 6$ b) żadna liczba nie spełnia równania c) $y = \frac{1}{2}$ d) każda liczba spełnia równanie

e) $x = 80$ f) żadna liczba nie spełnia równania

Sprawdź, co umiesz! 1. a) $x = 63$ b) $y = 19$ c) $z = -12$ d) $t = -72$ 2. a) $x = 4$ b) $a = 6$ c) $t = 10$

3. a) $x = 34$ b) $x = 25$ c) $x = 30$ 4. PFP

7. Zadania tekstowe **Cwiczenia** 1. 4380 zł 2. 3 banknoty 10-złotowe, 12 banknotów 20-złotowych

Rozwiąż zadania 1. Zosia: 12 lat, Tomek: 19 lat a) $z + z + 7 = 31$ b) $t + t - 7 = 31$ 2. krótsza część

wstążki: 2,5 m, dłuższa część wstążki: 5 m a) $k + 2k = 7,5$ b) $d + \frac{1}{2}d = 7,5$ 3. a) 6 kg

b) 9 psów i 18 kotów c) 15 zł 4. a) 2 cm; 3,5 cm b) 1,5 cm; 6 cm; 6 cm c) 9 cm; 18 cm; 17 cm

5. 5 6. orzechy 400 g, migdały 100 g, rodzynki 250 g 7. żółty: 36 zł, niebieski: 72 zł, pomarańczowy: 57 zł 8. 3 9. Kuba 3, Cezary 6 11. a) 240 cm b) 100 cm 12. 15 °C

Sprawdź, co umiesz! 1. 20 zł 2. FP 3. B 4. Jacek 60, Michał 45

Podsumowanie działu III

Poćwicz przed sprawdzianem 1. D 2. C 3. C 4. B 5. PPPF 6. C 7. a) $2xy$ b) $\frac{1}{3}x$ c) $\frac{1}{2}(x+y)$ d) $\frac{x}{y}$

e) x^2 f) $2(x+y)$ 8. a) 19,5x b) $-5y$ c) $7x$ d) $4x$ 9. a) $\frac{1}{4}x - 2$ b) 1 kg 10. a) $x + \frac{x}{3} = 28$ b) $x + 3x = 28$

11. a) $x = 23$ b) $x = 2$ c) $x = 3$ d) $x = 6$ 12. 26 13. 60 zł; o 36 zł 14. $6\frac{1}{3}$ cm 15. 54

Podejmij wyzwanie 1. Zosia 2. 98 3. Figura II 4. FPPF 5. trzy 6. 16 7. 8 8. 135 9. 24

Potrenuj – zadania uzupełniające 1. Tak, Bruno ma. 2. a) 3; 5; 7 b) 11; 21 c) $2n + 1$ 3. a) -15

b) -31 c) 3 d) $-3\frac{1}{18}$ 4. BC 5. PFP 6. a) $y = 34^\circ$ b) $x = 20^\circ$ c) $x = 1,5$ 7. gofr Eli: 6 zł, gofr Poli: 9 zł,

gofr Zosi: 18 zł 8. 16, 18, 20, 22

Wykorzystaj w praktyce 1. a) 750 zł b) wzrośnie o 375 zł 2. a) 38 b) 42 c) 2 d) 10

DZIAŁ IV. W świecie figur płaskich

1. Proste, odcinki, koła i okręgi **Cwiczenia** 1. $OP \parallel RS$, $TU \perp RS$, $TU \perp OP$ 2. C 3. a) A, B, C b) D, E, H, S c) F, G

Rozwiąż zadania 1. $TE \perp TU$, $OM \perp TU$, $TU \perp PU$, $OM \parallel PU$, $OM \parallel TE$, $PU \parallel TE$, $KO \parallel RE$

2. PFP 3. 30 m 4. a) 0,6 cm b) 0,6 cm c) 1,5 cm 5. 3,3 cm lub 1,7 cm 6. 4,3 cm lub 1,7 cm 7. AD

8. a) 1,1 dm b) 3,5 cm c) 1,5 cm 9. Nie, ponieważ średnica okręgu jest większa niż długość krótszego boku prostokąta. 10. a) 36 cm b) 12 cm 11. nie 13. 3,84 m 14. 21 cm

Sprawdź, co umiesz! 1. a) $a \perp b$, $a \perp d$, $b \perp c$, $c \perp d$ b) $a \parallel c$, $b \parallel d$ 2. nie 3. 4,5 cm lub 0,9 cm 4. B 5. 7

2. Kąty Ćwiczenia 1. a) rozwarty, wypukły b) ostry, wypukły c) ostry, wypukły d) wklęsły

2. a) $\alpha = 123^\circ$ b) $\beta = 131^\circ$ c) $\gamma = 9^\circ$ d) $\delta = 35^\circ$

Rozwiąż zadania 1. a) ostry, wypukły b) rozwarty, wypukły c) ostry, wypukły d) rozwarty, wypukły e) wklęsły 2. a) 73° , ostry b) 195° , wklęsły c) 225° , wklęsły 4. w lewą stronę 5. a) 360° b) 60° c) 15° d) 150° 6. a) 180° b) 90° c) 6° d) 102° 7. a) $\alpha = 145^\circ$ b) $\beta = 37^\circ$ c) $\gamma = 104^\circ$ d) $\alpha = 114^\circ$ e) $\gamma = 27^\circ$ f) $\delta = 70^\circ$, $\gamma = 45^\circ$ g) $\beta = 15^\circ$ h) $\alpha = 80^\circ$ i) $\beta = 18^\circ$ 8. PPPF 9. D 10. a) 108° , 72° b) 30° , 150° c) 104° , 76° 11. PPF 12. a) $\alpha = 123^\circ$, $\beta = 123^\circ$ b) $\alpha = 27^\circ$, $\beta = 153^\circ$ c) $\alpha = 39^\circ$, $\beta = 141^\circ$

Sprawdź, co umiesz! 1. a) wklęsły b) ostry c) prosty d) rozwarty 2. a) $\alpha = 41^\circ$ b) $\beta = 142^\circ$ c) $\gamma = 34^\circ$ d) $\delta = 73^\circ$ e) $\beta = 30^\circ$ f) $\alpha = 22^\circ$, $\gamma = 80^\circ$ 3. a) 15° , 165° b) 99° , 81°

3. Trójkąty Ćwiczenia 1. 22 dm 2. a) nie b) tak c) nie

Rozwiąż zadania 1. a) 26 cm b) 26 cm c) 63 cm 2. a) 7,5 cm b) 32 dm 3. a) $x = 10$ cm b) $x = 20,7$ cm c) $x = 10,4$ cm d) $x = 10\frac{1}{3}$ dm 4. a) 7, 10, 13 b) 5, 12, 13 c) 8, 11, 11 5. B 6. a) $2x + x + 3 = 15$; 4 cm, 4 cm, 7 cm b) $2x + x + 7 + x = 39$; 16 cm, 15 cm, 8 cm c) $x + x - 0,3 + x - 0,6 = 4,8$; 1,9 dm, 1,6 dm, 1,3 dm 7. Tak, ponieważ $13 + 15 > 20$. 8. nie 9. a) nie można b) można, trójkąt różnoboczny 10. nie 13. FP

Sprawdź, co umiesz! 1. B 2. 4 dm 3. a) tak, różnoboczny b) tak, równoramienny c) nie 4. jedna

4. Kąty w trójkątach Ćwiczenia 1. a) 74° b) 32° c) 38° 2. I. 42° , 42° , 96° II. 42° , 69° , 69°

Rozwiąż zadania 1. a) $\alpha = 23^\circ$, różnoboczny, rozwartokątny b) $\gamma = 25^\circ$, różnoboczny, prostokątny c) $\alpha = 106^\circ$, równoramienny, rozwartokątny d) $\alpha = 28^\circ$, $\beta = 28^\circ$, równoramienny, rozwartokątny e) $\alpha = 64^\circ$, $\beta = 58^\circ$, $\gamma = 58^\circ$, równoramienny, ostrokątny f) $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 55^\circ$, $\gamma = 70^\circ$, równoramienny, ostrokątny 2. a) 76° , 76° , 28° b) 90° , 27° , 63° 3. I. ostrokątny II. prostokątny III. rozwartokątny IV. rozwartokątny V. prostokątny 4. FFPF 5. a) $\alpha = 60^\circ$ b) $\gamma = 75^\circ$ c) $\delta = 73^\circ$ 6. D 7. obydwoje mają rację 8. a) 30° , 90° , 60° b) 80° , 40° , 60° 9. 76° 10. niebieską, czarną, czerwoną 11. 10° , 60° , 110°

Sprawdź, co umiesz! 1. BC 2. a) $\alpha = 68^\circ$ b) $\beta = 33^\circ$ c) $\gamma = 98^\circ$ 3. 40° , 70° , 70° 4. 69°

5. Czworokąty Ćwiczenia 1. 15 cm, 18 cm 2. 48

Rozwiąż zadania 1. a) IV, VIII b) II, IV, V, VIII c) I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX d) I, V, VIII, IX e) III, VII 2. a) 30 cm b) 56 cm c) 13,8 cm 3. a) 4,2 cm b) 12,5 cm c) 1,1 cm 4. 4,7 cm 7. 12 cm 8. a) 300 cm b) 14,55 zł 9. a) 22 cm b) 18,7 cm 10. A 11. a) 15 cm b) 12 cm c) 2 dm 12. trapez równoramienny, 30 cm 13. a) 760 cm b) 360 zł

Sprawdź, co umiesz! 1. PFFF 2. a) 29,2 cm b) 246 cm c) 66 cm 3. 3,4 cm i 6,8 cm 4. a) 3 dm b) 3,5 cm c) 3 m

6. Kąty w czworokątach Ćwiczenia 1. a) 100° b) 42° , 168° 2. a) wypukły b) wklęsły 3. $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 135^\circ$ 4. 64° , 116° , 64° , 116°

Rozwiąż zadania 1. a) 60° , 70° , 80° , 150° b) 150° , 48° , 130° , 32° c) 60° , 88° , 128° , 84° 2. a) 120° , czworokąt wypukły b) 190° , czworokąt wklęsły c) 135° , czworokąt wypukły 3. Tak, ponieważ suma miar tych kątów wynosi 360° . 4. a) 75° , 90° , 95° , 100° b) 30° , 30° , 60° , 240° 5. a) $\alpha = 102^\circ$ b) $\beta = 42^\circ$ c) $\gamma = 53^\circ$ d) $\delta = 133^\circ$ 6. AC 7. a) 70° , 110° , 70° , 110° b) 30° , 150° , 30° , 150° c) 60° , 120° , 60° , 120° d) 40° , 140° , 40° , 140° 8. 60° , 120° , 60° , 120° 9. PFF 10. a) $\alpha = 126^\circ$ b) $\beta = 23^\circ$ c) $\gamma = 13^\circ$, $\delta = 154^\circ$ 11. a) $\alpha = 105^\circ$, $\beta = 38^\circ$ b) $\alpha = 83^\circ$, $\beta = 97^\circ$, $\gamma = 97^\circ$ c) $\beta = 49^\circ$, $\alpha = 90^\circ$ 12. a) 113° b) 55° , 36° c) 38° , 142° , 38° 13. 42° , 84° , 108° , 126° 14. 60° , 120° , 60° , 120° 15. a) $\alpha = 153^\circ$, $\beta = 56^\circ$ b) $\alpha = 108^\circ$, $\beta = 72^\circ$ c) $\alpha = 153^\circ$, $\beta = 27^\circ$ d) $\alpha = 128^\circ$, $\beta = 52^\circ$

A to ciekawe a) $\alpha = 88^\circ$, $\beta = 70^\circ$ b) $\alpha = 37^\circ$, $\beta = 118^\circ$ c) $\alpha = 38^\circ$, $\beta = 64^\circ$, $\gamma = 64^\circ$, $\delta = 104^\circ$

Sprawdź, co umiesz! 1. FFPF 2. a) $\alpha = 56^\circ$ b) $\alpha = 73^\circ$, $\beta = 107^\circ$ c) $\alpha = 63^\circ$, $\beta = 117^\circ$ d) $\alpha = 122^\circ$, $\beta = 58^\circ$ 3. 160° 4. 40° , 140° , 40° , 140°

Podsumowanie działu IV

Poćwicz przed sprawdzianem 1. D 2. B 3. C 4. C 5. PFFFP 7. BC 8. 85° 9. a) 17 cm b) 20,4 cm 10. 10 cm, 16 cm, 24 cm 11. I. 38° , 71° , 71° II. 38° , 38° , 104° 12. I. 56° , 62° , 62° II. 28° , 28° , 124° 13. a) $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 50^\circ$ b) $\alpha = 48^\circ$, $\beta = 53^\circ$, $\gamma = 79^\circ$ c) $\alpha = 105^\circ$, $\beta = 75^\circ$, $\gamma = 105^\circ$ d) $\alpha = 65^\circ$, $\beta = 115^\circ$,

$\gamma = 65^\circ$, $\delta = 115^\circ$ e) $\alpha = 71^\circ$, $\beta = 109^\circ$, $\gamma = 71^\circ$ f) $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 90^\circ$ 15. a) 85 cm b) o 150 mm
16. 30° , 150° , 30° , 150° 17. 9900 zł

Podejmij wyzwanie 1. 7 cm 2. 58° 3. PF 4. dokładnie dwa 5. 24 cm 6. BD 7. 100° 8. 8,5 cm 9. 120°

Potrenuj – zadania uzupełniające 4. 13 cm 5. $\alpha = 13^\circ$, $\beta = 145^\circ$ 6. 20° , 60° , 100° ;
rozwartokątny 7. a) 19,2 cm b) 11 cm

Dział V. W świecie pól wielokątów

1. Pola czworokątów Ćwiczenia 1. 42 000 dm², 0,0069 km² 2. 950 m² 3. a) $P = 16$ cm²
b) $P = 12,8$ cm² c) $P = 540$ cm² d) $P = 125$ dm² e) $P = 564$ dm² 4. 12 m 5. 130 cm

Rozwiąż zadania 1. a) $P = 96$ cm² b) $P = 18$ dm² c) $P = 9$ mm² d) $P = 46,4$ m² 2. a) 700 mm²;
120 mm²; 90 000 mm²; 190 mm² b) 300 cm²; 1721 cm²; 80 000 cm²; 56 cm² c) 400 dm²;
360 dm²; 17 dm²; 2,8 dm² d) 6 m²; 0,18 m²; 13,7 m²; 0,021 m² 3. a) 6 a; 300 a; 160,21 a b) 7 ha;
91 ha; 0,052 ha 4. a) $P = 81$ mm² b) $P = 12$ m² c) $P = 2304$ cm² d) $P = 45$ cm² 5. a) 73,5 cm²
b) 13 cm c) 121 cm² d) 28 cm 6. a) nie b) tak 7. a) $P = 24$ dm² b) 5 dm 8. AC 10. PPF 11. trapez
równoramienny; $P = 60$ cm² 12. a) 513 zł b) $1 \text{ cm} \times 1,5 \text{ cm}$; $P = 1,5$ cm² 13. 61,56 zł 14. II i III

A to ciekawe nie

Sprawdź, co umiesz! 1. a) $P = 144$ cm² b) $P = 31,5$ mm² c) $P = 216$ cm² d) $P = 1750$ cm² 2. BD
3. I. 3 dm II. 2 dm III. 32 cm 4. a) 112 b) 3584 zł

2. Pole trójkąta Ćwiczenia 1. a) $P = 42$ cm² b) $P = 240$ dm² c) $P = 42,5$ mm² 2. 15 cm 3. 7 cm;
24 cm; 6,72 cm

Rozwiąż zadania 1. AREA 2. a) $P = 168$ cm² b) $P = 120$ cm² c) $P = 72$ cm² 3. 4 4. a) $P = 6$ dm²
b) $P = 24$ dm² 5. a) $P = 36$ cm²; $Obw. = 36$ cm b) $P = 204$ dm²; $Obw. = 68$ dm c) $P = 84$ cm²;
 $Obw. = 42$ cm 6. a) 4 dm b) 48 cm c) $3\frac{9}{13}$ dm 7. a) $a = 5$ dm b) $a = 50$ cm c) $a = 3\frac{1}{5}$ cm 8. AD
9. 860,16 m² 10. a) $P = 4,5$ cm² b) $P = 6$ cm² c) $P = 6$ cm² 11. tak 12. a) zwiększy się dwukrotnie
b) zmniejszy się dwukrotnie c) zwiększy się czterokrotnie

Sprawdź, co umiesz! 1. a) $P = 66$ cm² b) $P = 3$ m² c) $P = 20$ cm² d) $P = 12,5$ cm² 2. A 3. a) 6 cm
b) 13 dm c) 6,5 mm 4. 8,1 cm²

3. Pola wielokątów Ćwiczenia 1. 806 m² 2. a) $P = 30$ cm² b) $P = 71,5$ cm²

Rozwiąż zadania 1. a) $P = 15$ cm² b) $P = 12$ cm² c) $P = 25$ cm² d) $P = 5$ cm² e) $P = 45$ cm²
f) $P = 8$ cm² 2. PPF 3. a) $P = 400$ mm² b) $P = 550$ mm² c) $P = 362,5$ mm² d) $P = 900$ mm²
e) $P = 725$ mm² f) $P = 500$ mm² 4. $P = 17\frac{1}{2}$ cm² 5. a) 6 dm² b) 11 dm² 6. a) $P = 4,5$ dm²
b) $P = 12$ dm² c) $P = 13,5$ dm²

Sprawdź, co umiesz! 1. a) $P = 850$ mm² b) $P = 750$ mm² c) $P = 562,5$ mm² 2. 70,25 cm² 3. C 4. PF

Podsumowanie działu V

Poćwicz przed sprawdzianem 1. C 2. B 3. I kolumna: PPP; II kolumna: PFF 4. B 5. BC 6. trójkąt
o 1,5 cm² 7. 44,64 cm² 9. 5,88 cm 10. 4,8 cm 11. a) $P = 22\frac{1}{2}$ cm² b) $P = 40\frac{5}{8}$ cm² 12. 1050 cm²; 23,67 zł

Podejmij wyzwanie 1. O 60 cm. 2. Bruno 3. FPP 4. 2,75 cm² 5. 3,5 cm 6. 4,8 m 7. 6,5 cm
8. 175,50 zł 9. $\frac{3}{5}$

Potrenuj – zadania uzupełniające 1. LICZBY RZĄDZA ŚWIATEM 2. $P = 101,25$ m²
3. $Obw. = 20$ cm; $P = 21$ cm² 4. Zofia: 33 zł; Krystyna: 23 zł; Robert: 25 zł 5. nie 6. 16 m
7. a) $P = 0,27$ m² b) 0,45 m; 1,2 m 8. 40 m 9. $P = 50$ cm² lub $P = 31,25$ cm² 10. $P = 168$ cm²
11. 1,08375 ha; $\frac{3}{8}$

Wykorzystaj w praktyce 1. a) pierwszy b) 217,50 zł; 116 zł; 174 zł c) 478,81 zł 2. Pan Dariusz
3. nie

DZIAŁ VI. W świecie prędkości

1. Prędkość Ćwiczenia 1. a) $3,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ 2. 4; 4,5; 2250; 20 3. a) 20 min, 165 min b) $\frac{3}{4}$ h, $3\frac{3}{4}$ h
c) 210 s, 7200 s 4. a) $96 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ b) $1224 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Rozwiąż zadania 1. a) $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ b) $25 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ c) $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ d) $200 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ 2. a) $12,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ b) $12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ c) $16 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
d) $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ 3. $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $16 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ 4. a) 12 min, 130 min, 45 min, 426 min, $2\frac{1}{6}$ min, $\frac{3}{4}$ min b) $\frac{1}{4}$ h,
 $1\frac{1}{2}$ h, $2\frac{3}{4}$ h, $1\frac{1}{6}$ h, $2\frac{1}{5}$ h c) 600 s, 2700 s, 150 s, 10 800 s, 900 s 5. a) $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ b) $6 \frac{\text{cm}}{\text{min}}$ c) $10,8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
6. Bruno 7. o $1,8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ 8. AD 9. Kamila 10. C 11. $36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $10,8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Sprawdź, co umiesz! 1. PF 2. B 3. a) 10 km b) $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ 4. Karol $13,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, Zosia $13,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$; Zosia biegła szybciej.

2. Droga Ćwiczenia 1. a) 2 m b) 10 m c) 1 m d) 7,5 m 2. a) 5800 m; 7250 m b) 80,35 km; 0,523 km 3. a) 15 000 m; 1500 m b) 2 km; 9,6 km

Rozwiąż zadania 1. a) 60 km b) 120 km c) 240 km d) 30 km 2. 36, 6, 21, 3 3. a) 1 m
b) 5 m c) 10 m d) 30 m 4. a) 14 000 m; 3760 m; 19 100 m; 8250 m; 10 m b) 78 km; 2,761 km;
0,02012 km; 0,0035 m; 0,01225 m 5. a) 20 km b) 8 km c) 10 km d) 4 km 6. 700 7. PPF 8. ciężarowy;
o 20 km 9. AC 10. o 1250 m 11. nie

A to ciekawe nie

Sprawdź, co umiesz! 1. B 2. a) 7,5 cm b) 1,25 cm c) 0,5 cm d) 150 cm 3. 140 km 4. nie 5. Dawid;
o 0,75 km

3. Czas Ćwiczenia 1. a) 3 min b) 4 min c) 15 s d) 8 h 20 min 2. Ewa

Rozwiąż zadania 1. a) 3 h

b) 5 h c) 1,5 h d) 15 min 2. o 1 dm po 20 latach, o 1 m po 200 latach 3. a) 7 s b) 75 s c) 100 s
d) 30 s 4. o $\frac{1}{30}$ h = 2 min 5. BC 6. 1 h 20 min 7. 40 min 8. 30 min 9. tak 10. o 7,27

Sprawdź, co umiesz! 1. D 2. a) 5 h b) 15 min c) 2,5 h d) 45 min 3. PPF 4. tak

Podsumowanie działu VI

Poćwicz przed sprawdzianem 1. D 2. C 3. A 4. C 5. FP 6. a) $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ b) $24 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

c) $0,3 \frac{\text{km}}{\text{min}}$ 7. a) 90 km b) 67,5 km c) 9 km d) 75 km 8. BD 9. a) 45 b) 186 c) 0,4 d) 1,6 e) 602

f) 1,254 10. a) 1 min 20 s b) 7 min 10 s c) 1 h d) 3 h 11. o 50 $\frac{\text{m}}{\text{min}}$ 12. o 10,22; 6 km 13. $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Podejmij wyzwanie 1. $60 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ 2. 1,125 km 3. 13.25 4. PP 5. trzy 6. rys 7. O 2,5 km. 8. O 6 s.

Potrenuj – zadania uzupełniające 1. 195,9 km 2. 3 h 3. $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $180 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $7,2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $5,04 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

4. $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $83 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $13\frac{1}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ 5. około 37,58 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ 6. 2,5 raza 7. a) 36 000 ft = 10 800 m = 10,8 km

b) 449 kts = 830,65 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ 8. a) 27 000 km b) 648 000 km c) 7,5 km 9. 250 m 10. A. Mirosław – 3,03 s,
S. Watson – 2,37 s 11. o 12,33

Wykorzystaj w praktyce 1. prędkość światła – $18\,000\,000 \frac{\text{km}}{\text{min}} = 1\,080\,000\,000 \frac{\text{km}}{\text{h}}$; prędkość

dźwięku – $20,4 \frac{\text{km}}{\text{min}} = 1224 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ 2. światło $\frac{1}{300\,000}$ s; dźwięk – około 3 s 3. światło 18 000 000 km;

dźwięk 20,4 km 4. 384 000 km 5. około 8 min 6. $\frac{5}{17}$ s, $1\frac{3}{17}$ s

Dział VII. W świecie figur przestrzennych

1. Graniastosłupy Ćwiczenia 1. a) graniastosłup pięciokątny, 10 wierzchołków, 7 ścian, 5 krawędzi bocznych, 15 wszystkich krawędzi b) nie c) graniastosłup sześciokątny, 12 wierzchołków, 8 ścian, 6 krawędzi bocznych, 18 wszystkich krawędzi d) graniastosłup 14-kątny, 28 wierzchołków, 16 ścian, 14 krawędzi bocznych, 42 wszystkie krawędzie 2. a) 92 cm b) 60 dm 3. a) 8 dm b) 0,3 m c) 1,2 cm

Rozwiąż zadania 1. a) nie b) graniastosłup trójkątny, 6 wierzchołków, 5 ścian, 3 krawędzie boczne, 9 wszystkich krawędzi c) nie d) graniastosłup sześciokątny, 12 wierzchołków, 8 ścian, 6 krawędzi bocznych, 18 wszystkich krawędzi e) graniastosłup pięciokątny, 10 wierzchołków, 7 ścian, 5 krawędzi bocznych, 15 wszystkich krawędzi 2. PFFFFP 3. a) zielony b) zielony c) czerwony d) każdy 4. III i IV 5. a) sześćcian b) graniastosłup ośmiokątny c) graniastosłup pięciokątny 7. a) 72 cm b) 24 cm c) 29,1 cm 8. 69 dm 9. 20,8 dm = 2,08 m 10. 104 cm 11. tak 12. a) $x = 7$ cm b) $y = 13$ cm c) $z = 1$ dm 13. zielona 2,5 cm, czerwona 5 cm, niebieska 7,5 cm 14. a) 100 wierzchołków, 52 ściany, 50 krawędzi bocznych, 150 wszystkich krawędzi b) 200 wierzchołków, 102 ściany, 100 krawędzi bocznych, 300 wszystkich krawędzi c) $2n$ wierzchołków, $n + 2$ ścian, n krawędzi bocznych, $3n$ wszystkich krawędzi

A to ciekawe 8

Sprawdź, co umiesz! 1. C 2. FFP 3. 6 dm

2. Ostrosłupy Ćwiczenia 1. a) ostrosłup ośmiokątny, 9 wierzchołków, 9 ścian, 8 krawędzi bocznych, 16 wszystkich krawędzi b) nie c) ostrosłup czworokątny, 5 wierzchołków, 5 ścian, 4 krawędzie boczne, 8 wszystkich krawędzi d) nie 3. 84 cm 4. a) 6 m b) $2\frac{1}{8}$ dm c) 1,7 cm

Rozwiąż zadania 1. a) nie b) ostrosłup czworokątny, 5 wierzchołków, 5 ścian, 4 krawędzie boczne, 8 wszystkich krawędzi c) nie d) ostrosłup pięciokątny, 6 wierzchołków, 6 ścian, 5 krawędzi bocznych, 10 wszystkich krawędzi e) nie 2. PFFFPF 3. II, III 4. a) ostrosłup trójkątny b) ostrosłup czworokątny c) ostrosłup sześciokątny 6. a) 66 cm b) 38 cm c) 18 dm 7. a) $x = 1,5$ cm, $y = 1,5$ cm, $z = 1,5$ cm; 9 cm b) $x = 2,5$ cm, $y = 3$ cm, $z = 3$ cm; 25 cm 8. a) 64 m b) 505,60 zł 9. krawędź podstawy: 2 dm, krawędź boczna: 4 dm

Sprawdź, co umiesz! 1. D 2. nie 3. 66 cm

3. Pole powierzchni graniastosłupa Ćwiczenia 1. a) 528 dm² b) tak 2. a) 3 cm b) 7 m c) 0,5 cm d) $\frac{1}{3}$ m 3. a) $c = 1$ cm b) $a = 15$ m

Rozwiąż zadania 1. a) $P_p = 24$ cm², $P_b = 140$ cm², $P_c = 188$ cm² b) $P_p = 12$ dm², $P_b = 36$ dm², $P_c = 60$ dm² 2. a) $P_p = 8$ m², $P_b = 30$ m², $P_c = 46$ m² b) $P_p = 6$ cm², $P_b = 96$ cm², $P_c = 108$ cm² c) $P_p = 60$ cm², $P_b = 720$ cm², $P_c = 840$ cm² 3. a) 294 cm² b) 592 dm² c) 272 cm² d) 533,5 cm² 4. a) $P_p = 75$ cm², $P_b = 660$ cm², $P_c = 810$ cm² b) $P_p = 96$ cm², $P_b = 600$ cm², $P_c = 792$ cm² c) $P_p = 144$ cm², $P_b = 840$ cm², $P_c = 1128$ cm² 5. a) 10 cm b) 0,6 m c) 20 cm 6. 288 cm² 7. 8,5 dm² 8. 5 mm 9. a) nie b) 56,70 zł 10. 78 dm² 11. 14 cm

Sprawdź, co umiesz! 1. AD 2. PP 3. 6,5 cm² 4. 360 cm² 5. 43 gr

4. Objętość. Jednostki objętości Ćwiczenia 1. a) 14, 28, 18 b) I 2. a) $1\text{ cm} \times 2\text{ cm} \times 6\text{ cm}$, $V = 12\text{ cm}^3$ b) $3\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 3\text{ cm}$, $V = 27\text{ cm}^3$ c) $2\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 4\text{ cm}$, $V = 24\text{ cm}^3$ 3. $V = 80\text{ m}^3$ 4. $V = 1,331\text{ cm}^3$ 5. a) 6000 cm³ b) 13 000 000 cm³ c) 700 000 000 m³ 6. 3 750 000 l = 3 750 000 000 ml

Rozwiąż zadania 1. a) z 4 kostek, 4 cm³ b) z 6 kostek, 6 cm³ c) z 12 kostek, 12 cm³ d) z 9 kostek, 9 cm³ 2. a) 4 b) 5 c) 4 d) 9 3. 75 4. a) 54 cm³ b) 126 dm³ c) 17 391 cm³ 5. a) 52 cm³ b) 27 dm³ c) 10 dm³ 6. a) 72 cm³ b) 3375 cm³ 7. FPF 8. $V = 125\text{ dm}^3$, $P_c = 150\text{ dm}^2$ 9. a) 3 dm b) 1 m 10. a) 12 000 mm³, 120 000 mm³ b) 2100 cm³, 7 000 000 cm³ c) 720 dm³, 8 000 000 000 000 dm³ d) 615 000 000 m³, 28 000 000 000 m³ 11. a) 2 b) 8000 c) 5 d) 17 000 e) 6 f) 150

12. I. 5 ml II. 1,5 l III. 1500 m³ 13. a) 42 l = 42 000 ml b) 35 l = 35 000 ml c) 48 l = 48 000 ml
d) 12 l = 12 000 ml 14. pomarańczowy 15. 5 zł, 4 zł

Sprawdź, co umiesz! 1. AC 2. 21 dm³ 3. a) 7000 b) 6000 c) 8900 d) 0,51 e) 0,008 f) 720 4. B 5. tak

5. Objętość graniastosłupa prostego **Ćwiczenia** 1. 280 cm³ 2. 720 cm³ 3. 2,5 dm

Rozwiąż zadania 1. a) $P_p = 60 \text{ cm}^2$, $V = 1200 \text{ cm}^3$ b) $P_p = 1 \text{ dm}^2$, $V = 4 \text{ dm}^3$ c) $P_p = 50 \text{ cm}^2$,
 $V = 400 \text{ cm}^3$ 2. a) $P_p = 80 \text{ cm}^2$, $V = 1600 \text{ cm}^3$ b) $P_p = 96 \text{ dm}^2$, $V = 1152 \text{ dm}^3$ c) $P_p = 176 \text{ cm}^2$,
 $V = 5280 \text{ cm}^3$ 3. a) $P_p = 16 \text{ cm}^2$, $V = 240 \text{ cm}^3$ b) $P_p = 600 \text{ cm}^2$, $V = 9000 \text{ cm}^3$ c) $P_p = 21 \text{ cm}^2$,
 $V = 315 \text{ cm}^3$ 4. a) $P_p = 24 \text{ cm}^2$, $V = 360 \text{ cm}^3$ b) $P_p = 384 \text{ cm}^2$, $V = 9600 \text{ cm}^3$ 5. PFP 6. a) 6 cm
b) 8 cm 7. a) 25 cm² 8. a) $y = 12 \text{ dm}$ b) $w = 13 \text{ cm}$ c) $z = 9 \text{ mm}$ 9. 0,72 l = 720 ml 10. a) $P_c = 280 \text{ cm}^2$
b) $V = 240 \text{ cm}^3$ 11. a) 2 b) 24,60 zł 12. więcej 13. tak 14. 90 min 15. a) zmniejszy się 3 razy
b) zwiększy się 3 razy c) zwiększy się k razy

Sprawdź, co umiesz! 1. a) 60 dm³ b) 4,8 dm³ c) 5,04 dm³ 2. a) 112 cm³ b) 128 dm³ 3. $P_c = 8,4 \text{ dm}^2$,
 $V = 1,2 \text{ dm}^3$ 4. B 5. AD

6. Bryły obrotowe **Ćwiczenia** 1. a) wokół jego osi symetrii prostopadłej do krótszego boku
b) wokół prostej zawierającej dłuższy bok prostokąta 2. C

Rozwiąż zadania 1. puszką: z góry koło, z boku prostokąt; czapeczką: z góry koło, z boku trójkąt;
piłką: z góry koło, z boku: koło 2. I. walec, II. graniastosłup trójkątny, III. kula, IV. ostrosłup
czworokątny, V. ostrosłup pięciokątny, VI. stożek, VII. graniastosłup czworokątny,
VIII. graniastosłup sześciokątny; bryły obrotowe: I, III, VI 3. A – III, B – I, C – V 4. A – III, B – I,
C – II 5. FFP 6. Nie, ponieważ 6 cm < 9 cm. 7. 15

Sprawdź, co umiesz! 1. a) I, III, IV, V b) kulę c) IV d) V 2. A 3. AC 4. 4 cm

Podsumowanie działu VII

Poćwicz przed sprawdzianem 1. C 2. B 3. BC 4. D 5. FFPP 6. a) 9 000 000
b) 50 000 000 000 c) 0,45 d) 130 e) 0,6 f) 750 7. a) tak b) 60 l 8. 19,40 zł 9. $P_c = 780 \text{ cm}^2$,
 $V = 1350 \text{ cm}^3$ 10. 300 11. a) 7 cm b) 6 cm c) 10 cm 12. I, o 2 cm 13. 25 14. C

Podejmij wyzwanie 1. Pola, o 9 cm. 2. 4 mm 3. 246 cm² 4. 9 s 5. III

Potrenuj – zadania uzupełniające 1. a) 15 b) 10 2. 12 cm 3. PLATON 4. 214 cm²
5. prostopadłościan 6. 84 cm² 7. 950 cm² 8. 8 cm 9. $P_c = 202,5 \text{ cm}^2$, $V = 126 \text{ cm}^3$ 10. a) 270 m³
b) 270 000 l c) 324 kg 11. 176 dm² 12. 60 l 13. Cezary

Dział VIII. W świecie procentów i statystyki

1. Procenty i ułamki **Ćwiczenia** 1. a) $\frac{3}{10} = 0,3$ b) $\frac{17}{20} = 0,85$ c) $\frac{1}{25} = 0,04$ d) $\frac{4}{1} = 4$
2. a) około 70 % b) tak 3. 40 %

Rozwiąż zadania 1. a) zamalowana: $\frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0,1 = 10 \%$, niezamalowana: $\frac{90}{100} = \frac{9}{10} = 0,9 = 90 \%$

b) zamalowana: $\frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50 \%$, niezamalowana: $\frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50 \%$ c) zamalowana:

$\frac{1}{100} = \frac{1}{100} = 0,01 = 1 \%$, niezamalowana: $\frac{99}{100} = \frac{99}{100} = 0,99 = 99 \%$ d) zamalowana:

$\frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25 \%$, niezamalowana: $\frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 0,75 = 75 \%$ 2. a) $\frac{1}{2} = 50 \%$ b) 1 = 100 %

c) $\frac{1}{4} = 25 \%$ d) $\frac{6}{10} = 60 \%$ e) $\frac{3}{10} = 30 \%$ 3. a) 5 %, 40 %, 100 % b) 6 %, 25 %, 90 % c) 50 %, 75 %, 40 %

d) 400 %, 650 %, 1015 % 4. a) $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{2}{25}$, $\frac{6}{1}$ b) 0,75; 0,3; 0,02; 1,5 5. PPF 6. a) 50 % b) 100 %
c) 1 % d) 20 %

Sprawdź, co umiesz! 1. a) $\frac{2}{5} = 20 \%$ b) $\frac{1}{2} = 50 \%$ c) $\frac{3}{4} = 75 \%$ d) $\frac{3}{5} = 60 \%$ 2. a) $\frac{3}{5} = 0,6$ b) $\frac{1}{20} = 0,05$
c) $\frac{13}{20} = 0,65$ d) $\frac{3}{1} = 3$ 3. BC 4. marchew: 80 %, ogórek: 96 %

2. Obliczanie procentu danej liczby Ćwiczenia 1. w obu klasach tyle samo

Rozwiąż zadania 1. a) 7 b) 5 c) 10 d) 15 e) 170 f) 6 2. a) 3 i 12 b) 48 c) 2 i 6 d) 84 3. BAC 4. 6

5. 9 mln t 6. a) 4,8 g b) 19,2 g 7. a) 180 zł b) 160 zł c) 250 zł d) 220 zł 8. w salonie u Ani

9. a) 450 zł b) 45 l

Sprawdź, co umiesz! 1. a) 6 b) 8 c) 6 d) 225 e) 77 f) 10 2. PPP 3. 216 zł

3. Odczytywanie i prezentowanie danych statystycznych Ćwiczenia 2. a) 135 uderzeń
b) w 25. minucie c) tak d) między 30. a 40. minutą

Rozwiąż zadania 1. b) najczęściej ścielenie łóżka, a najrzadziej wyrzucanie śmieci c) ścielenie łóżka
d) wyrzucanie śmieci 2. a) o 6.00 i o 8.00 b) 2 °C c) 6.00, 7.00, 8.00, 9.00, 13.00, 15.00 d) tak e) 8 °C
3. BAAB 4. a) pierwszą Michał, drugą i trzecią Mateusz b) 415 c) w pierwszej 160, w drugiej 175,
w trzeciej 65, najmniej w trzeciej d) w drugiej i trzeciej e) o 80 f) 2 razy g) 40 %

Sprawdź, co umiesz! 1. a) kobiety fitness, mężczyźni trening siłowy b) zajęcia taneczne
c) sztuki walki d) trening funkcjonalny e) 25 % 2. a) 35 % b) 80 % c) 10

Podsumowanie działu VIII

Poćwicz przed sprawdzianem 1. D 2. D 3. B 4. PPF 5. BC 6. a) najwięcej niedziela, najmniej
wtorek, środa i czwartek b) piątek 20 %, niedzielę 36 % 7. a) u znajomych b) w prasie, w telewizji
c) 120 8. a) w 1980 roku b) w 1960 roku, o 11 więcej c) 2 razy d) tak

Podejmij wyzwanie 1. z bitą śmietaną 2. pierwszy 3. PF 4. dwa 5. około 7 150 000

Potrenuj – zadania uzupełniające 1. BINTURONG 2. zagadki Cezarego 3. 80 mg witaminy C,
16 mg witaminy B3 4. a) 40 % b) 180 5. nie

Źródła fotografii i ilustracji

Okladka: (Pola) ViDi Studio/Shutterstock.com; (tło) pizla09/Shutterstock.com

Postacie: (Bruno) carballo/Shutterstock.com; (Cezary) VaLiza/Shutterstock.com; (Ela) Roman Samborski/Shutterstock.com; (Kuba) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; (Pola) ViDi Studio/Shutterstock.com; (Zosia) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com

Tekst główny: s. 6 strona otwarcia (ludziki) SpicyTruffel/Shutterstock.com; s. 8 (cyfry) Cath Vectorielle/Shutterstock.com; s. 10 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com; s. 13 (tulipany) Naddya/Shutterstock.com; s. 14 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com; s. 14 (Zosia) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 15 (aparatus) Look_Studio/Shutterstock.com; s. 15 (muzeum dinozaurów) Artisticco/Shutterstock.com; s. 15 (planetarium) Tartila/Shutterstock.com; s. 17 (olówek) Tomasz Korwin-Szymanowski; s. 17 (kawalek kartki) Vector Tradition/Shutterstock.com; s. 18 (dżazik) PlutusART/Shutterstock.com; s. 19 (helikopter) mayaran1/Shutterstock.com; s. 21 (Teatr Muzyczny im. Danuty Baduszkowej w Gdyni) Daria Brzezińska; s. 22 (żurawina) Johnny Dream/Shutterstock.com; s. 23 (pionki) r.kathesi/Shutterstock.com; s. 26 (Zosia) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 26 (Pola) ViDi Studio/Shutterstock.com; s. 27 (Zosia) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 27 (Pola) ViDi Studio/Shutterstock.com; s. 28 (tablet) alexdndz/Shutterstock.com; s. 28 (mapa) pixelliebe/iStock/Getty Images Plus; s. 29 (płacz zabaw) Macrovector/Shutterstock.com; s. 29 (fontanna) Sensvector/Shutterstock.com; s. 29 (wózek z lodami) NikAndr/Shutterstock.com; s. 34 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com; s. 37 (rower) art-sonik/Shutterstock.com; s. 38 (pokój) klyaksun/Shutterstock.com; s. 39 (Aconcagua) MasyuraN/Shutterstock.com; s. 39 (Jeziro Asala) angela Meier/Shutterstock.com; s. 40 (centrum handlowe) GoodStudio/Shutterstock.com; s. 40 (ptaki na gałęzi) bejo/Shutterstock.com; s. 41 (mapa) pixelliebe/iStock/Getty Images Plus; s. 41 (tablet) alexdndz/Shutterstock.com; s. 41 (Rysy) bieszczady_wildlife/Shutterstock.com; s. 42 (dziewczyna w okularach VR) AndryDj/Shutterstock.com; s. 42 (Wenus i Mars) Natallienka.m/Shutterstock.com; s. 45 (wagoniki z surowcami) Sky Designs/Shutterstock.com; s. 46 (pinezki) Alphavector/Shutterstock.com; s. 46 (samochód) zentilia/Shutterstock.com; s. 46 (motocykl) Rawpixel/iStockphoto/Getty Images; s. 46 (rower) Ljupeo Smokovski/Shutterstock.com; s. 46 (sejf) pikepicture/Shutterstock.com; s. 46 (kartka) greenland/Shutterstock.com; s. 47 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com; s. 48 (James Cameron) Kathy Hutchins/Shutterstock.com; s. 49 (Cezary) VaLiza/Sjutterstock.com; s. 49 (Pola) ViDi Studio/Shutterstock.com; s. 49 (Bruno) carballo/Shutterstock.com; s. 51 (tablet) alexdndz/Shutterstock.com; s. 51 (laptop i myszka) my.ordinary/Shutterstock.com; s. 52 (wykresy) Day Of Victory Studio/Shutterstock.com; s. 53 (Bruno) carballo/Shutterstock.com; s. 53 (Pola) ViDi Studio/Shutterstock.com; s. 53 (miasto w tle) Flash Vector/Shutterstock.com; s. 58 (argentyńscy) Elena Duvernay/Stocktrek Images/Getty Images; s. 59 (miska z owocami) Jane Semina/Shutterstock.com; s. 60 (kawałki tortu) tanyabosyk/Shutterstock.com; s. 61 (Zosia) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 63 (pies) Colorfuel Studio/Shutterstock.com; s. 63 (dziewczynka układająca puzzle) MNStudio/Shutterstock.com; s. 66 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com; s. 66 (koperta) tovoan/Shutterstock.com; s. 66 (ryzy papieru) xivar/Shutterstock.com; s. 66 (wiaderko) Design tech art/Shutterstock.com; s. 68 (chłopak) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 68 (ciężarówka z paczkami) Colorfuel Studio/Shutterstock.com; s. 70 (słoiki i butelka) Daria Brzezińska; s. 73 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com; s. 78 (bizuteria) Bidadash/Shutterstock.com; s. 79 (teatr) BRO.vector/Shutterstock.com; s. 80 (pizza) Amanita Silvicora/Shutterstock.com; s. 80 (haft korallkami) Daria Nipot/Shutterstock.com; s. 81 (mrożona herbata) BlueRingMedia/Shutterstock.com; s. 82 (jogurt) Andrii Bezvershenko/Shutterstock.com; s. 82 (truskawki i banany) Inspiring/Shutterstock.com; s. 82 (arty owocowe) StockSmartStart/Shutterstock.com; s. 85 (tablet) alexdndz/Shutterstock.com; s. 85 (sernik) annata78/Shutterstock.com; s. 87 (rośliny doniczkowe) GoodStudio/Shutterstock.com; s. 88 (Bruno) carballo/Shutterstock.com; s. 88 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com; s. 88 (emotikon w telefonie) KVASVECTOR/Shutterstock.com; s. 90 (pociąg Kolei Transsyberyjskiej) Tuul & Bruno Morandi/The Image Bank/Getty Images; s. 90 (gepard) ArtDem/Shutterstock.com; s. 90 (logo Biebrzańskiego Parku Narodowego) Biebrzańskie Park Narodowy; s. 91 (mapa Polski) WSiP; s. 92 (długopisy i zakreślacze) Monica Polito/Shutterstock.com; s. 92 (zawieszka z ceną) minizen/Shutterstock.com; s. 93 (flagi) WSiP; s. 93 (warzywa) Inspiring/Shutterstock.com; s. 94 (wyciskane soki) Sławomir Zelasko/Shutterstock.com; s. 94 (tablica) Hilch/Shutterstock.com; s. 95 (soki owocowe) Sunnydream/Shutterstock.com; s. 95 (sok pomarańczowy) Sunnydream/Shutterstock.com; s. 96 (tablet) alexdndz/Shutterstock.com; s. 96 (orzeczy) Victoria Sergeeva/Shutterstock.com; s. 96 (Ela) Roman Samborski/Shutterstock.com; s. 97 (zółw) Been there YB/Shutterstock.com; s. 97 (arbuz) Vectorbun/Shutterstock.com; s. 97 (czekoladki kakaowe) Vector Tradition/Shutterstock.com; s. 97 (czekoladki karmelowe) Macrovector/Shutterstock.com; s. 98 (klebki wężny) Ulyana Mo/Shutterstock.com; s. 98 (wrotki) Softachka/Shutterstock.com; s. 98 (seler naciowy) 4gladiator.studio44/Shutterstock.com; s. 98 (papryka, ogórek i marchewka) Inspiring/Shutterstock.com; s. 99 (Pola) ViDi Studio/Shutterstock.com; s. 102 (orzeczy) Elen_Art/Shutterstock.com; s. 102 (suszone owoce) Elen_Art/Shutterstock.com; s. 102 (jogurt) NikAndr/Shutterstock.com; s. 103 (pinezki) Alphavector/Shutterstock.com;

s. 103 (zamazki) happiness69/Shutterstock.com; s. 103 (plecak) Olha Solodenko/Shutterstock.com;
s. 103 (bluza) Becky Starsmore/Shutterstock.com; s. 104 (dżem i porzeczki) BeataGFX/Shutterstock.com;
s. 105 (pole namiotowe) Mary Luts/Shutterstock.com; s. 105 (teczka) Seregam/Shutterstock.com;
s. 105 (zeszty) sagir/Shutterstock.com; s. 106 (Ela) Roman Samborskyi/Shutterstock.com; s. 106 (karty z piłkarzami) YummyBuum/Shutterstock.com; s. 107 (wydruk upiorny) Khoroshunova Olga/Shutterstock.com; s. 107 (chipsy jabłkowe) Anastasiia Glushchenko/Shutterstock.com; s. 108 (kalkulator) Grażyna Bryk/WSIP; s. 109 (astronauta) klyaksun/Shutterstock.com; s. 109 (rakietka) klyaksun/Shutterstock.com; s. 109 (kosmita) HappyPictures/Shutterstock.com; s. 109 (Bruno) carballo/Shutterstock.com; s. 109 (Pola) ViDi Studio/Shutterstock.com; s. 110 (tablet) alexdndz/Shutterstock.com; s. 110 (naleśniki) Wirestock Creators/Shutterstock.com; s. 110 (woda) WSIP; s. 110 (mleko, mąka, jajka) Veronika Oliynyk/iStock/Getty Images Plus; s. 111 (owoce) Nadya_Art/Shutterstock.com; s. 112 (ikonka kawiarni) PCH-Vector/iStock/Getty Images Plus; s. 112 (ikonka namiot) Mary Luts/Shutterstock.com; s. 112 (ikonki ryba, ikonka słoń) Aratehortua/Shutterstock.com; s. 114 (huśtawka) klyaksun/Shutterstock.com; s. 115 (Ela) Roman Samborskyi/Shutterstock.com; s. 115 (paletka) Creative Family/Shutterstock.com; s. 115 (piłeczka) Anton Starikov/Shutterstock.com; s. 115 (papuga) Viki Dmitrieva/Shutterstock.com; s. 115 (kot) Viki Dmitrieva/Shutterstock.com; s. 116 (Księżyc) Vector Tradition/Shutterstock.com; s. 116 (Jowisz, Mars) Natallienka.m/Shutterstock.com; s. 116 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com; s. 117 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com; s. 117 (koty) spiharu_u/Shutterstock.com; s. 119 (taksówka) monkylabz/Shutterstock.com; s. 120 (termometry) Alhovich/Shutterstock.com; s. 121 (Leonhard Euler) Natata/Shutterstock.com; s. 121 (medale) Esgoty/Shutterstock.com; s. 122 (astronauta) klyaksun/Shutterstock.com; s. 122 (rakietka) klyaksun/Shutterstock.com; s. 122 (kosmita) HappyPictures/Shutterstock.com; s. 123 (diament) Drk_Smith/Shutterstock.com; s. 123 (Ela) Roman Samborskyi/Shutterstock.com; s. 123 (Pola) ViDi Studio/Shutterstock.com; s. 124 (astronauta) klyaksun/Shutterstock.com; s. 124 (rakietka) klyaksun/Shutterstock.com; s. 124 (kosmita) HappyPictures/Shutterstock.com; s. 126 (astronauta) klyaksun/Shutterstock.com; s. 126 (kubka) Jacek Chabrazewski/Shutterstock.com; s. 126 (kosmita) HappyPictures/Shutterstock.com; s. 126 (Zosia) Jacek Chabrazewski/Shutterstock.com; s. 126 (Ela) Roman Samborskyi/Shutterstock.com; s. 127 (piłkarze) YummyBuum/Shutterstock.com; s. 127 (zwierzęta) Aratehortua/Shutterstock.com; s. 127 (kwiaty) GoodStudio/Shutterstock.com; s. 128 (klódkka) Flipser/Shutterstock.com; s. 128 (kartka papieru) Albert Stephen Julius/Shutterstock.com; s. 128 (szyfr) magr80/Shutterstock.com; s. 130 (rakietka tenisowa i piłki) Wise ant/Shutterstock.com; s. 131 (Ela) Roman Samborskyi/Shutterstock.com; s. 131 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com; s. 133 (bilety) RIMM_Art/Shutterstock.com; s. 133 (tablet) alexdndz/Shutterstock.com; s. 134 (kobieta przy biurku) woocat/Shutterstock.com; s. 135 (Kuba) Jacek Chabrazewski/Shutterstock.com; s. 138 (Cezary) Valiza/Shutterstock.com; s. 147 (tata z córką) ViDi Studio/Shutterstock.com; s. 148 (skarbonka) hakan2534/Shutterstock.com; s. 148 (przyciski) Lars Poyansky/Shutterstock.com; s. 149 (słoń) Aratehortua/Shutterstock.com; s. 150 (kosz do gry) theMonkey/Shutterstock.com; s. 150 (zyrafa) YUCALORA/Shutterstock.com; s. 151 (karteczka) Kanate/Shutterstock.com; s. 151 (bilety) RIMM_Art/Shutterstock.com; s. 151 (puszka farby z pędzlem) Viktorija Reuta/Shutterstock.com; s. 153 (robot) WinWin artlab/Shutterstock.com; s. 154 (stopa) StockSmartStart/Shutterstock.com; s. 155 (piłeczki) Alphavector/Shutterstock.com; s. 155 (ręce na klawiaturze) Suphakant/Shutterstock.com; s. 155 (znak pisarski malpa) Ales Munt/Shutterstock.com; s. 155 (ręka na tablicie) Africa Studio/Shutterstock.com; s. 155 (karteczka) Kanate/Shutterstock.com; s. 157 (koń) Aratehortua/Shutterstock.com; s. 157 (pensjonat górski) Mascha Tace/Shutterstock.com; s. 158 (bingo) Anastasia Samorodova/Shutterstock.com; s. 158 (kredki) WSIP; s. 159 (Ela) Roman Samborskyi/Shutterstock.com; s. 159 (gofry) Rimma Bondarenko/Shutterstock.com; s. 160 (laptop) Isometriq/Shutterstock.com; s. 161 (Ela) Roman Samborskyi/Shutterstock.com; s. 161 (laptop) Iconbunny11/Shutterstock.com; s. 165 (domek z ogórkami) Duda Vasilii/Shutterstock.com; s. 167 (Pola) ViDi Studio/Shutterstock.com; s. 167 (basen, krzesła) Shpadaruk Aleksei/Shutterstock.com; s. 167 (dom, rośliny) Shpadaruk Aleksei/Shutterstock.com; s. 169 (konstrukcja budynku) Myfotoprom/Shutterstock.com; s. 169 (kątomierz) Tomasz Korwin-Szymanowski; s. 172 (Ela) Roman Samborskyi/Shutterstock.com; s. 172 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com; s. 172 (robot) BrickBones/Shutterstock.com; s. 173 (zegar) Dimedrol68/Shutterstock.com; s. 173 (Krzywa Wieża w Żabkowicach Śląskich) Sergey Dzyuba/Shutterstock.com; s. 175 (most) Georgios Tsiachlis/Shutterstock.com; s. 179 (Ela) Roman Samborskyi/Shutterstock.com; s. 180 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com; s. 186 (rama okna) wk1003mike/Shutterstock.com; s. 186 (Zosia i Kuba) Jacek Chabrazewski/Shutterstock.com; s. 193 (tasiemka) M_a_r_i_a/Shutterstock.com; s. 199 (budynki i drzewa) YummyBuum/Shutterstock.com; s. 199 (kanapa) VectorShow/Shutterstock.com; s. 200 (rama okna) wk1003mike/Shutterstock.com; s. 200 (Świątynia Tikal z Gwatemali) Leonid Andronov/Shutterstock.com; s. 202 (płyty chodnikowe) Afonkin_Y/Shutterstock.com; s. 204 (spręż sportowy) Olly Molly/Shutterstock.com; s. 207 (Wieża w Suurhusen w Niemczech) Bernd Zillich/Shutterstock.com; s. 209 (pinetki) Alphavector/Shutterstock.com; s. 209 (samochód autonomiczny) Gorodenkoff/Shutterstock.com; s. 209 (dron) Suwin66/Shutterstock.com; s. 209 (rower) sylv1rob1/Shutterstock.com; s. 211 (Cezary) Valiza/Shutterstock.com; s. 211 (chłopiec z zeszytem) Here/Shutterstock.com;

s. 215 (Pola) CeltStudio/Shutterstock.com; s. 215 (Cezary) VaLiza/Shutterstock.com; s. 215 (kartka) AXL/Shutterstock.com; s. 216 (boiska) ngaga/Shutterstock.com; s. 217 (boiska) ngaga/Shutterstock.com; s. 217 (mapa) Ihor Biliavskiy/Shutterstock.com; s. 220 (rama okna) wk1003mike/Shutterstock.com; s. 220 (tekstura biurka) WSiP; s. 223 (mycie okien) BRO.vector/Shutterstock.com; s. 223 (rama okna) wk1003mike/Shutterstock.com; s. 223 (kredki) WSiP; s. 223 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com; s. 224 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com; s. 228 (tort) Oksana8838/Shutterstock.com; s. 230 (domki z ogródkami) Duda Vasilii/Shutterstock.com; s. 231 (alejki i trawniki) Volha Kratkouskaya/Shutterstock.com; s. 231 (tablety) alexdndz/Shutterstock.com; s. 232 (plan domu i ogrodu) Volha Kratkouskaya/Shutterstock.com; s. 233 (mapa) petrroudnay43/Shutterstock.com; s. 233 (stary papier) Paladin12/Shutterstock.com; s. 240 (rysująca dziewczyna) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 240 (dziewczyna z psami) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 240 (dziewczyna na plaży) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 241 (pinezki) Alphavector/Shutterstock.com; s. 241 (leki) AtlasStudio/Shutterstock.com; s. 241 (telefon) CeltStudio/Shutterstock.com; s. 241 (okulary) Kovalchuk Oksandr/Shutterstock.com; s. 241 (kartka) Kanate/Shutterstock.com; s. 243 (Kuba) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 244 (rolnicy) GreenSkyStudio/Shutterstock.com; s. 244 (rośliny) Golden Sikorka/Shutterstock.com; s. 246 (słońce) Imamyudh/Shutterstock.com; s. 247 (Ela) Roman Samborskiy/Shutterstock.com; s. 247 (Zosia) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 248 (Kuba) carballo/Shutterstock.com; s. 248 (Bruno) VaLiza/Shutterstock.com; s. 248 (emotikony) flower travelin man/Shutterstock.com; s. 248 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com; s. 249 (samochody) Grim_look/Shutterstock.com; s. 250 (borzój) A7880S/Shutterstock.com; s. 250 (chart angielski) A7880S/Shutterstock.com; s. 251 (delfin) A7880S/Shutterstock.com; s. 252 (struś) A7880S/Shutterstock.com; s. 252 (nogi strusia) Elena Istomina/Shutterstock.com; s. 252 (rowerzysta) lemono/Shutterstock.com; s. 253 (Samochód Mercedes 35 PS z 1900 r.) VanoVasao/Shutterstock.com; s. 253 (Samochód parowy Nicolaesa Josepha Cugnota z 1769 r.) Claudio Divizia/Shutterstock.com; s. 253 (Pierwszy samochód spalinowy Benz Patentwagen nr 1 z 1886 r.) Rudiecast/Shutterstock.com; s. 253 (Kuba) carballo/Shutterstock.com; s. 253 (Bruno) VaLiza/Shutterstock.com; s. 253 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com; s. 254 (mapa) Ihor Biliavskiy/Shutterstock.com; s. 254 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com; s. 256 (gepard) WildLens Photograph/Shutterstock.com; s. 257 (leniwiec) M Gustafson Photography/Shutterstock.com; s. 258 (mrówka) Pavel Krasensky/Shutterstock.com; s. 258 (szop prac) Tao Jiang/Shutterstock.com; s. 259 (helodermia arizońska) Milan Zygmunt/Shutterstock.com; s. 259 (szympan) Quang Vinh Tran/Shutterstock.com; s. 260 (orka) Handies Peak/Shutterstock.com; s. 260 (motorówka) ONYXprj/Shutterstock.com; s. 261 (Trójmasztowiec Dar Pomorza) Jarek Fethke/Shutterstock.com; s. 261 (karłowaty konik morski) Kim Briers/Shutterstock.com; s. 262 (mapa) ildigesto/Shutterstock.com; s. 262 (samolot na mapie) SashaShuArt/Shutterstock.com; s. 262 (pacyficzny ślimak bananowy) eacmich/Shutterstock.com; s. 263 (rozgwiazda) Damsea/Shutterstock.com; s. 264 (podróżnik) SunshineVector/Shutterstock.com; s. 264 (narciarz) SunshineVector/Shutterstock.com; s. 264 (kobieta na hulajnodze) SunshineVector/Shutterstock.com; s. 265 (Mount Everest) Binkgo/Shutterstock.com; s. 267 (zebra) SlyBrowney/Shutterstock.com; s. 268 (skuter wodny) Alena Nv/Shutterstock.com; s. 269 (sklep zoologiczny) Vector Tradition/Shutterstock.com; s. 270 (ręka z aparatem) Sergey Mironov/Shutterstock.com; s. 270 (zdjęcie) Maria Bulka/Shutterstock.com; s. 270 (kamera) New Africa/Shutterstock.com; s. 270 (pinezki) Alphavector/Shutterstock.com; s. 271 (kartka) Kanate/Shutterstock.com; s. 271 (kot) A7880S/Shutterstock.com; s. 271 (ryś i lis) YUCALORA/Shutterstock.com; s. 272 (kura) nanameniko/Shutterstock.com; s. 272 (pociąg, biegacz, skuter, samolot, hulajnoga) nanameniko/Shutterstock.com; s. 272 (motyle) DStark/Shutterstock.com; s. 272 (koń) Noch/Shutterstock.com; s. 272 (fregata) Jens Otte/Shutterstock.com; s. 273 (samolot na mapie) SashaShuArt/Shutterstock.com; s. 273 (mapa) ildigesto/Shutterstock.com; s. 274 (chmury burzowe) GinaVector/Shutterstock.com; s. 275 (Zosia) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 275 (Ela) Roman Samborskiy/Shutterstock.com; s. 281 (skarbonka z kartonu) Lukasz Szwarz/Shutterstock.com; s. 282 (prezent) Starlight-Studio/Shutterstock.com; s. 282 (kartonowe pudełko) PodiumStore/Shutterstock.com; s. 282 (gra planszowa) Alaskastockpictures/DigitalVision Vectors/Getty Images; s. 290 (namiot) SurfsUp/Shutterstock.com; s. 295 (farba z pędzlem) Viktorija Reuta/Shutterstock.com; s. 296 (szampon dla psów) Lena Berezkina/Shutterstock.com; s. 299 (krwinki) FlashMovie/Shutterstock.com; s. 299 (kostka cukru) Woodpond/Shutterstock.com; s. 299 (bidon) Maria Francesca Moccia/Shutterstock.com; s. 299 (kran) Chuchawan/Shutterstock.com; s. 299 (mapa) WSiP; s. 303 (akwarium) tanuha2001/Shutterstock.com; s. 305 (łyżka) macpanama/Shutterstock.com; s. 305 (soki) Anton Starikov/Shutterstock.com; s. 305 (basen) Wavebreak Media/Shutterstock.com; s. 306 (samochody) Grim_look/Shutterstock.com; s. 306 (perfumy) Katia_Om/Shutterstock.com; s. 307 (Bruno) carballo/Shutterstock.com; s. 307 (basen) J.D.S/Shutterstock.com; s. 309 (sztabka) krylova_nlp/Shutterstock.com; s. 312 (torba wosku) Tartila/Shutterstock.com; s. 313 (korytko) 1981 Rustic Studio kan/Shutterstock.com; s. 315 (obracająca się moneta) Mike_shots/Shutterstock.com; s. 318 (piłka tenisowa) Korosi Francois-Zoltan/Shutterstock.com; s. 318 (czapeczka na przyjęcie) Boyko Pictures/Shutterstock.com; s. 318 (puszka kukurydzy) Nsit/Shutterstock.com; s. 319 (pudełko) Ketmut/Shutterstock.com; s. 319 (puszki w pudełku) Nsit/Shutterstock.com; s. 323 (pudełko preparatu do czyszczenia) YummyBum/Shutterstock.com; s. 324 (lakier do paznokci)

35lab/Shutterstock.com; s. 325 (szklanka wody) rahmi ayu/Shutterstock.com; s. 325 (filiżanka z kawą) New Africa/Shutterstock.com; s. 325 (filiżanka z herbatą) Anna_Pustynnikova/Shutterstock.com; s. 325 (pinezki) Alphavector/Shutterstock.com; s. 326 (kwiaty) WSiP; s. 328 (tablet) alexdndz/Shutterstock.com; s. 329 (dom) Aleksandr_Lysenko/Shutterstock.com; s. 329 (Cezary) VaLiza/Shutterstock.com; s. 329 (Ela) Roman Samborskyi/Shutterstock.com; s. 330 (różowa foremka do lodu) Top Vector Studio/Shutterstock.com; s. 331 (Ela) Roman Samborskyi/Shutterstock.com; s. 331 (Cezary) VaLiza/Shutterstock.com; s. 331 (wieżowiec w tle) Suriyawut Suriya/Shutterstock.com; s. 334 (kula ziemiska) Kundra/Shutterstock.com; s. 334 (medal olimpijski) Bloomberg/Getty Images; s. 336 (ogórek i marchewka) Victoria Sergeeva/Shutterstock.com; s. 337 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com; s. 337 (piłkarze na telefonie) YummyBuum/Shutterstock.com; s. 337 (cena) minizen/Shutterstock.com; s. 337 (kask) Vectors Bang/Shutterstock.com; s. 338 (Ela) Roman Samborskyi/Shutterstock.com; s. 338 (Zosia) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 339 (maliny) Inspiring/Shutterstock.com; s. 340 (kurtka) OlgaGi/Shutterstock.com; s. 340 (cena na kurtce) minizen/Shutterstock.com; s. 340 (rudy pies) DI YU/Shutterstock.com; s. 340 (pies w łaty) Colorfuel Studio/Shutterstock.com; s. 340 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com; s. 344 (dziewczynka z psem) Roman Samborskyi/Shutterstock.com; s. 347 (orzechy) Elen_Art/Shutterstock.com; s. 347 (miska) NikAndr/Shutterstock.com; s. 348 (kleks) Mrspopman1985/Shutterstock.com; s. 350 (teleskop Hubble'a) MarcelClemens/Shutterstock.com; s. 350 (teleskop Newtona) milosgagic/Shutterstock.com; s. 350 (luneta Galileusza) Science & Society Picture Library/Getty Images; s. 350 (pinezki) Alphavector/Shutterstock.com; s. 350 (tort truskawkowy) Klymenko Mariia/Shutterstock.com; s. 350 (etykiety koncentratów) LUAMOR/Shutterstock.com; s. 351 (kot) spiharu.u/Shutterstock.com; s. 352 (binturog) Lauren Bilboe/Shutterstock.com; s. 352 (Zosia) spiharu.u/Shutterstock.com; s. 352 (Pola) ViDI Studio/Shutterstock.com; s. 352 (Cezary) VaLiza/Shutterstock.com; s. 353 (wykresy) filo/DigitalVision Vectors/Getty Images

Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne oświadczają, że podjęły starania, mające na celu dotarcie do właścicieli i dysponentów praw autorskich wszystkich zamieszczonych utworów. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, przytaczając w celach dydaktycznych utwory lub fragmenty, postępują zgodnie z art. 27¹ ustawy o prawie autorskim. Jednocześnie Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne oświadczają, że są jedynym podmiotem właściwym do kontaktu autorów tych utworów lub innych podmiotów uprawnionych w wypadkach, w których twórcy przysługuje prawo do wynagrodzenia.

Aktualność linków, które występują w tym podręczniku i odsyłają do zewnętrznych stron internetowych została sprawdzona przed ich opublikowaniem (dostęp z dnia 07.01.2025 r.). Wydawnictwo nie ponosi odpowiedzialności za aktualność oraz zawartość tych stron lub stron, do których linki się tam znajdują.

Aktywuj E-book

(cyfrowe odzwierciedlenie
podręcznika) na

 **EDURANGA**

