

NOWOŚĆ
2024

MATEMATYKA W PUNKT



Oznaczono
zmiany
i wykreślenia

E-book
na eduranga.pl

PODSTAWA
2024



Podręcznik
Szkoła podstawowa

8

Drogi WSiP,

Nigdy bym nie publikowała publicznie książek wydawnictw, które działają na uczciwych zasadach.

Wasza firma jednak promuje masowy dodruk, całkowicie niepotrzebnych książek, które mogłyby być zastąpione wersjami elektronicznymi!

Co prawda e-booki są dostępne na waszej stronie, jednak:

- W przeciwieństwie do fizycznej książki, licencja na e-book kończy się po roku. Oznacza to, że jeżeli moja córka chciałaby powtórzyć sobie całą wiedzę do matury, musiałabym jej kupić wszystkie wasze książki od nowa.
- Waszych e-booków nie da się pobrać! Wymagają one dostęp do internetu, co uniemożliwia ich użycie na naszej wsi, gdzie zasięg jest ograniczony.
- Wasze e-booki nie działają na telefonach komórkowych!
- Wasze e-booki sprzedawane są po tej samej (albo wyższej) cenie co regulame książki. Cena e-booka powinna być niższa, gdyż e-booki wymagają elektronicznego czytnika (tabletu)!

Czas rozpocząć nową erę, w której papier nie jest bezczelnie marnowany dla pieniędzy. Przedstawiam e-book, który spełnia wszystkie oczekiwania uczniów.

Dbajmy o środowisko, zróbmy to dla młodych pokoleń.

Spis treści

I. Liczby i działania

1. System rzymski	8
2. Własności liczb naturalnych	12
3. Działania na liczbach wymiernych	18
4. Działania na potęgach i pierwiastkach	23
Podsumowanie działu I	30

II. Układ współrzędnych

1. Zbiory na osi liczbowej	36
2. Punkty kratowe w układzie współrzędnych	41
3. Środek odcinka	47
4. Odległość w układzie współrzędnych	52
5. Figury w układzie współrzędnych	57
Podsumowanie działu II	62

III. Wyrażenia algebraiczne i równania

1. Przekształcanie wyrażeń algebraicznych	68
2. Rozwiązywanie równań	74
3. Zastosowania równań w praktyce	78
4. Procenty w równaniach	83
Podsumowanie działu III	90

IV. Graniastosłupy

1. Graniastosłupy i ich rodzaje	96
2. Siatki graniastosłupów	104
3. Pole powierzchni graniastosłupa	108
4. Objętość graniastosłupa	114
Podsumowanie działu IV	122

V. Ostrosłupy

1. Ostrosłupy i ich rodzaje	128
2. Pole powierzchni ostrosłupa	135
3. Objętość ostrosłupa	141
Podsumowanie działu V	146

VI. Statystyka i wstęp do kombinatoryki

1. Odczytywanie i interpretowanie danych	152
2. Zbieranie i opracowywanie danych	159
3. Średnia arytmetyczna	164
4. Doświadczenia losowe	169
5. Wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa	175
Podsumowanie działu VI	180

VII. Powtórzenie

1. Liczby	186
2. Procenty	195
3. Potęgi	202
4. Pierwiastki	207
5. Wyrażenia algebraiczne	212
6. Równania	217
7. Figury płaskie	222
8. Bryły	233
9. Statystyka i rachunek prawdopodobieństwa	241

VIII. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

1. Reguła mnożenia i dodawania	248
2. Obliczanie prawdopodobieństwa	254
Podsumowanie działu VIII	258

IX. Długość okręgu i pole koła

1. Długość okręgu	264
2. Pole koła	269
3. Pole pierścienia kołowego	274
Podsumowanie działu IX	278

X. Symetrie

1. Symetria osiowa. Figury osiowosymetryczne	284
2. Symetria środkowa. Figury środkowosymetryczne	289
3. Symetralna odcinka i jej własności	294
4. Dwusieczna kąta i jej własności	298
Podsumowanie działu X	302

Odpowiedzi do zadań	307
---------------------------	-----



treści usunięte wg podstawy programowej 2024

Jak korzystać z podręcznika

W trakcie lekcji

- ▶ Pod każdym tematem są umieszczone cele lekcji.

A to ciekawe

Dodatkowe informacje poszerzą twoją wiedzę na dany temat.



Tu znajdziesz najważniejsze wzory, definicje i twierdzenia.



Dobre rady pomogą ci uniknąć błędów podczas rozwiązywania zadań.

Rozwiąż zadania



1. Zadania o podwyższonym stopniu trudności.



2. Zadania, które można rozwiązać z użyciem kalkulatora.



3. Zadania typu egzaminacyjnego.

Sprawdź, co umiesz!

1. Zadania sprawdzające na koniec tematu.
2. Zadania zamknięte i otwarte.

Pamiętaj!

Rozwiązania zadań zapisuj w zeszycie przedmiotowym.

Na koniec działu

Powtórz wiadomości

Krótkie powtórzenie całego działu.

Sprawdź umiejętności

Zadania sprawdzające z całego działu.

Potrenuj – zadania uzupełniające

Zadania uzupełniające do wszystkich tematów z działu.

Z kroniki klasowej



Pola



Próba nowego aparatu

Cezary



Na wycieczce klasowej

Ela



Szkolna strefa relaksu

Zosia



Wolne chwile na rolkach

Bruno



Przed sprawdzianem z równań

Kuba



Wiosenny rajd rowerowy



DZIAŁ



LICZBY I DZIAŁANIA

Liczby
wymierne

499

Liczby
rzymskie

CDXCIX

To ci się przyda!

$2\frac{1}{4}$

$\left(-1\frac{1}{2}\right)^2$

$\sqrt{81}$

2,25

Potęgi
i pierwiastki

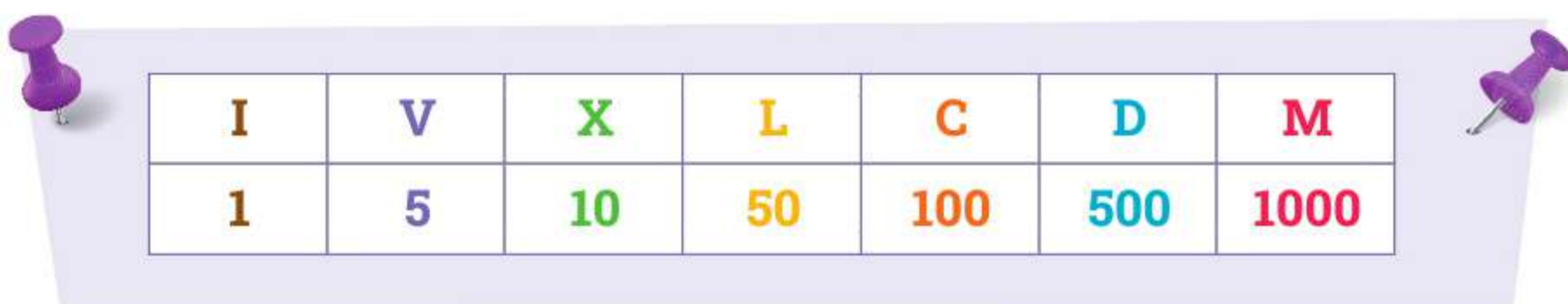
IX

1. System rzymski

- ▶ Odczytywanie liczb zapisanych w systemie rzymskim
- ▶ Przedstawianie w systemie rzymskim liczb zapisanych w systemie dziesiętkowym

Istnieją różne systemy zapisywania liczb. W systemie arabskim (dziesiętkowym) liczby zapisuje się za pomocą 10 cyfr. Znaczenie cyfry w liczbie zależy od pozycji, jaką w tej liczbie zajmuje, dlatego system ten nazywamy pozycyjnym. System rzymski nie jest systemem pozycyjnym. Pozwala tworzyć liczby przy pomocy znaków o zawsze ustalonej wartości.

Do zapisu liczb w systemie rzymskim używamy siedmiu znaków: I, V, X, L, C, D, M.



I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Zapisywanie liczb w systemie rzymskim

- 1 Obok siebie mogą stać nie więcej niż trzy jednakowe znaki: I, X, C lub M.

I	II	III	X	XX	XXX	C	CC	CCC	M	MM	MMM
1	2	3	10	20	30	100	200	300	1000	2000	3000

- 2 Znaki V, L oraz D mogą wystąpić w danej liczbie tylko raz.

$$IV = 4$$

$$LXVII = 67$$

$$DCCI = 701$$

- 3 Bezpośrednio przed znakiem o większej wartości może stać tylko jeden znak o mniejszej wartości.

- Znak I może poprzedzać tylko znaki V i X.
- Znak X może poprzedzać tylko znaki L i C.
- Znak C może poprzedzać tylko znaki D i M.

$$IV = 4 \quad IX = 9$$

$$XL = 40 \quad XC = 90$$

$$CD = 400 \quad CM = 900$$

- 4 Znaki V, L oraz D mogą poprzedzać tylko znak o mniejszej wartości.

$$VI = 6$$

$$LXXI = 71$$

$$DXVIII = 518$$

Odczytywanie liczb zapisanych w systemie rzymskim

Jeżeli znak o większej wartości stoi przed znakiem o mniejszej wartości – dodajemy.	$\text{MDCXXXI} = 1631$
	$1000 + 500 + 100 + 10 + 10 + 10 + 1 = 1631$
Jeżeli znak o mniejszej wartości stoi przed znakiem o większej wartości – odejmujemy.	$\text{MCDXCII} = 1492$
	$1000 + (500 - 100) + (100 - 10) + 1 + 1 = 1492$

Przykład 1.

Liczbę zapisaną w systemie rzymskim przedstaw w systemie dziesiętnym.

a) $\text{MMDCLXXV} = 1000 + 1000 + 500 + 100 + 50 + 10 + 10 + 5 = 2675$
 M M D C L X X V

b) $\text{MCMXLIX} = 1000 + (1000 - 100) + (50 - 10) + (10 - 1) = 1000 + 900 + 40 + 9 = 1949$
 M CM XL IX

Ćwiczenie 1.

Liczbę zapisaną w systemie rzymskim przedstaw w systemie dziesiętnym.

- a) XLII b) LXXXIV c) DCLXI d) CMLVII e) MMDXCIX

Przykład 2.

Liczbę zapisaną w systemie dziesiętnym przedstaw w systemie rzymskim.

a) $1558 = 1000 + 500 + 50 + 5 + 1 + 1 + 1 = \text{MDLVIII}$
 M D L V I I I

b) $993 = 900 + 90 + 3 = (1000 - 100) + (100 - 10) + 1 + 1 + 1 = \text{CMXCIII}$
 CM XC I I I

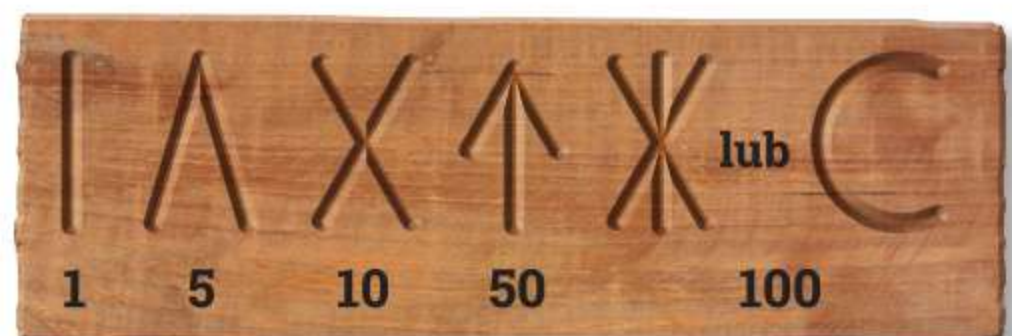
Ćwiczenie 2.

Liczbę zapisaną w systemie dziesiętnym przedstaw w systemie rzymskim.

- a) 45 b) 94 c) 986 d) 1409 e) 2793

A to ciekawe

Gospodarka starożytnego Rzymu rozwijała się bardzo dynamicznie. Konieczne było prowadzenie coraz bardziej skomplikowanych rachunków. Wymagało to wdrożenia systemu liczbowego. Rzymianie opracowali taki system w V w. p.n.e., opierając go na systemie etruskim. Etruskowie oznaczali liczby, wykonując pionowe żłobienia na drewnianych tabliczkach. Rzymianie do pięciu znaków etruskich dodali kolejne dwa.



Rozwiąż zadania

1. Liczby zapisane w systemie rzymskim zapisz w systemie dziesiętkowym.

- a) LXXXV b) LXVIII c) DCCXXIV d) CMXLVI
e) DCLXXXVIII f) DIV g) MDXCIX h) MMCMXCI

2. Liczby zapisane w systemie dziesiętkowym zapisz w systemie rzymskim.

- a) 24 b) 79 c) 876 d) 942
e) 684 f) 1815 g) 2490 h) 1001

3. Porównaj liczby. Użyj odpowiedniego znaku: <, > lub =.

- a) 572 oraz DLXXXII b) 2020 oraz MMXX
c) MCDX oraz 1412 d) 1960 oraz MCMXL

4. Kościół Mariacki w Krakowie jest jednym z najbardziej rozpoznawalnych zabytków w Polsce. Ołtarz główny znajdujący się w tym kościele jest gotyckim dziełem sztuki stworzonym przez Wita Stwosza w latach MCDLXXVII – MCDLXXXIX. Jak długo trwały prace nad głównym ołtarzem w kościele Mariackim w Krakowie?



E Informacje do zadań 5. i 6.

Poniżej podano daty kilku wydarzeń historycznych.

- I. odkrycie Ameryki przez Krzysztofa Kolumba – MCDXCII
II. upadek cesarstwa rzymskiego – CDLXXVI
III. chrzest Polski – CMLXVI
IV. wybuch powstania listopadowego – MDCCCXXX
V. odzyskanie przez Polskę niepodległości – MCMXVIII
VI. bitwa pod Grunwaldem – MCDX

5. W jakiej kolejności, chronologicznie, występowały podane wydarzenia i odkrycia? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. II, III, I, VI, V, IV B. II, III, VI, I, IV, V C. III, II, VI, I, IV, V D. III, II, I, VI, V, IV

6. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Od wybuchu powstania listopadowego do odzyskania przez Polskę niepodległości upłynęło 88 lat.

P

F

Krzysztof Kolumb odkrył Amerykę 1026 lat po upadku cesarstwa rzymskiego.

P

F

7. Zapisz w systemie rzymskim:

- a) liczbę minut w 9 godzinach, b) liczbę godzin w jednym tygodniu,
c) trzykrotność liczby CDXXXIII, d) czwartą część liczby MDCCXCII.

8. Dana jest liczba MCMLXVI. Zamień miejscami dwa znaki rzymskie w podanej liczbie, tak by powstała liczba:

- a) o 2 mniejsza, b) o 20 mniejsza, c) o 200 większa.

9. Znajdź czterocyfrową liczbę, która spełnia wszystkie podane warunki.

- Szukana liczba jest mniejsza od liczby MMCLXVI.
- Cyfra tysięcy szukanej liczby jest większa od cyfry jej setek.
- W zapisie rzymskim szukanej liczby występuje dwa razy znak M.
- Szukana liczba jest podzielna przez 4.

Czy istnieje tylko jedna taka liczba? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Sprawdź, co umiesz!

1. Czy liczba jest zapisana zgodnie z zasadami zapisywania liczb w systemie rzymskim?

- a) XXVI b) LLX c) CCD d) DCII e) LDL
f) MCDVV g) MCXXX h) VIII i) MC j) CM

2. Uporządkuj liczby w kolejności od najmniejszej do największej: XLVII, MII, CMLXXI, CDXLIV, LXXIII.

3. Kuba podczas zwiedzania Zadaru (miasta w Chorwacji) zrobił zdjęcie aparatem natychmiastowym. Na zdjęciu uwiecznił fragment fasady Muzeum Sztuki Antycznej, na której widnieje rok zakończenia jego budowy.

Ile lat upłynęło od zakończenia budowy tego muzeum do 2024 r.?



4. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

W zapisie rzymskim liczby 1624 nie występuje znak **A** **B**.

- A. C B. L

Najmniejszą liczbą zapisaną w systemie rzymskim z użyciem każdego ze znaków rzymskich tylko raz jest **C** **D**.

- C. MCDLXVI D. MCDXLIV

2. Własności liczb naturalnych

- ▶ Pojęcia liczby pierwszej i liczby złożonej
- ▶ Znajdowanie NWD oraz NWW dwóch liczb naturalnych
- ▶ Zastosowanie cech podzielności liczb

Do zbioru liczb naturalnych N należą liczby: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... Wszystkich liczb naturalnych jest nieskończenie wiele.

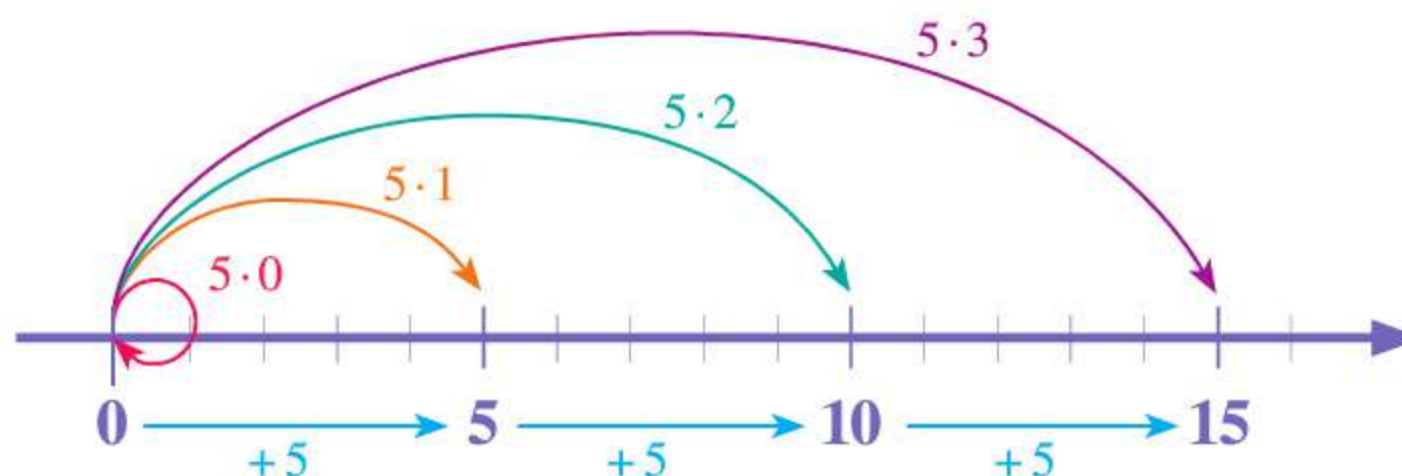


Wielokrotnością liczby naturalnej n nazywamy każdy iloczyn liczby n i dowolnej liczby naturalnej. Najmniejszą wielokrotnością każdej liczby naturalnej jest liczba 0. Każda liczba naturalna różna od 0 ma nieskończenie wiele wielokrotności. Jedyną wielokrotnością liczby 0 jest 0.

Przykład 1.

Wyznacz cztery kolejne wielokrotności liczby 5, z których pierwszą jest liczba 0.

- $5 \cdot 0 = 0$
- $5 \cdot 1 = 5$
- $5 \cdot 2 = 10$
- $5 \cdot 3 = 15$



Każde dwie kolejne wielokrotności liczby naturalnej n różnią się o n .

Ćwiczenie 1.

Wyznacz pięć kolejnych wielokrotności liczby 16, z których pierwszą jest liczba 0.



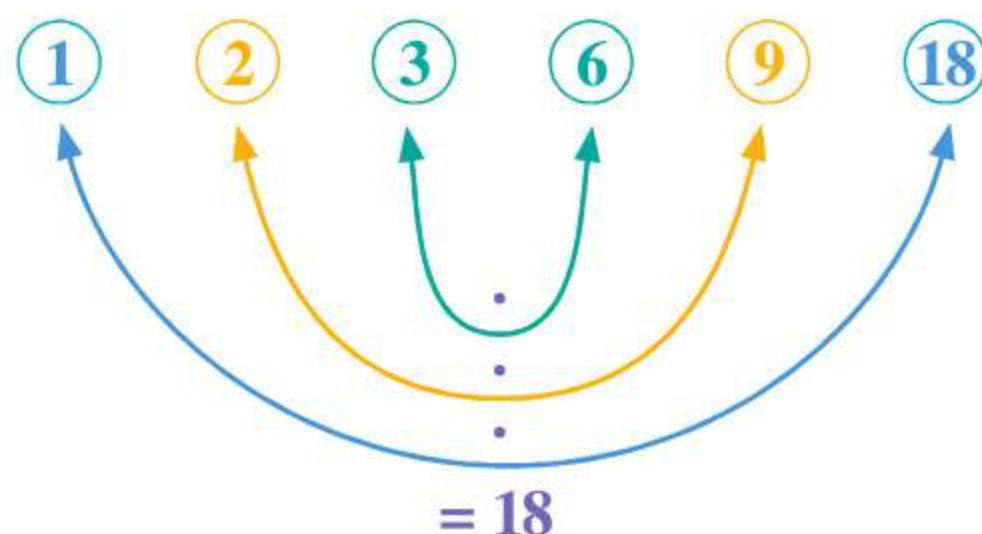
Liczbę naturalną k różną od zera nazywamy **dzielnikiem** liczby naturalnej n , gdy wynik dzielenia liczby n przez liczbę k jest liczbą naturalną, np. 4 jest dzielnikiem liczby 32, ponieważ $32 : 4 = 8$.

Przykład 2.

Podaj wszystkie dzielniki liczby 18.

Liczba 18 ma następujące dzielniki:

- 1, bo $18 : 1 = 18$;
- 2, bo $18 : 2 = 9$;
- 3, bo $18 : 3 = 6$;
- 6, bo $18 : 6 = 3$;
- 9, bo $18 : 9 = 2$;
- 18, bo $18 : 18 = 1$.



Ćwiczenie 2.

Podaj wszystkie dzielniki każdej z liczb 27 i 36.

W przypadku dużych liczb nie zawsze można w łatwy sposób wskazać ich dzielniki. Z pomocą przychodzi nam wtedy znajomość **cech podzielności liczb**.

Cechy podzielności liczb

Podzielność przez	Cecha	Przykład
2	Ostatnią cyfrą danej liczby jest 0, 2, 4, 6 lub 8.	Liczba 538 jest podzielna przez 2, ponieważ jej ostatnia cyfra to 8.
3	Suma cyfr danej liczby jest podzielna przez 3.	Liczba 471 jest podzielna przez 3, ponieważ suma jej cyfr, czyli $4 + 7 + 1 = 12$, jest liczbą podzielną przez 3.
4	Liczba utworzona z dwóch ostatnich cyfr danej liczby jest podzielna przez 4.	Liczba 724 jest podzielna przez 4, ponieważ liczba utworzona z jej dwóch ostatnich cyfr, czyli 24, jest podzielna przez 4.
5	Ostatnią cyfrą danej liczby jest 0 lub 5.	Liczba 1785 jest podzielna przez 5, ponieważ jej ostatnia cyfra to 5.
6	Dana liczba jest podzielna przez 2 oraz przez 3.	Liczba 432 jest podzielna przez 6, ponieważ jej ostatnia cyfra to 2 oraz suma jej cyfr, czyli $4 + 3 + 2 = 9$, jest liczbą podzielną przez 3.
9	Suma cyfr danej liczby jest podzielna przez 9.	Liczba 2718 jest podzielna przez 9, ponieważ suma jej cyfr, czyli $2 + 7 + 1 + 8 = 18$, jest liczbą podzielną przez 9.
10	Ostatnią cyfrą danej liczby jest 0.	Liczba 190 jest podzielna przez 10, ponieważ jej ostatnia cyfra to 0.
100	Dwie ostatnie cyfry danej liczby są zerami.	Liczba 2600 jest podzielna przez 100, ponieważ jej dwie ostatnie cyfry są zerami.

Przykład 3.

Sprawdź, które z liczb: 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 100 są dzielnikami liczby 1320.

Ostatnia cyfra liczby 1320 to 0.



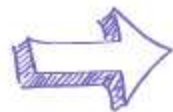
Liczby 2, 5, 10 są dzielnikami liczby 1320.

Suma cyfr liczby 1320 jest równa $1 + 3 + 2 + 0 = 6$.



Liczba 3 jest dzielnikiem liczby 1320, ponieważ liczba 6 jest podzielna przez 3. Liczba 9 nie jest dzielnikiem liczby 1320, ponieważ liczba 6 nie jest podzielna przez 9.

Dwie ostatnie cyfry liczby 1320 tworzą liczbę 20, która jest podzielna przez 4.



Liczba 4 jest dzielnikiem liczby 1320.

Liczba 1320 jest podzielna przez 2 i przez 3.



Liczba 6 jest dzielnikiem liczby 1320.

Jedna z dwóch ostatnich cyfr liczby 1320 nie jest zerem.



Liczba 100 nie jest dzielnikiem liczby 1320.

Ćwiczenie 3.

Sprawdź, które z liczb: 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 100 są dzielnikami podanej liczby.

a) 468

b) 2800

c) 837

d) 15 300



Liczby pierwsze to liczby naturalne większe od 1, które mają dokładnie dwa dzielniki: liczbę 1 i samą siebie. Liczby pierwsze to: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

Liczby złożone to liczby naturalne większe od 1, które mają więcej niż dwa dzielniki. Liczby złożone to: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, ...
Liczby 0 i 1 nie są ani liczbami pierwszymi, ani złożonymi.
Najmniejsza liczba pierwsza to 2. Każdą liczbę złożoną można przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych.

Przykład 4.

Przedstaw liczby 105 i 1188 w postaci iloczynu liczb pierwszych.



Aby przedstawić liczbę 105 w postaci iloczynu liczb pierwszych, rozłożymy ją na czynniki pierwsze.

Suma cyfr liczby 105 jest równa $1 + 0 + 5 = 6$, więc liczba 105 jest podzielna przez 3.

Ostatnią cyfrą liczby 35 jest 5, więc liczba 35 jest podzielna przez 5.

Liczba 7 jest liczbą pierwszą, więc jej jedynym dzielnikiem będącym liczbą pierwszą jest ona sama.

Zatem $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$.



$$\begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Aby przedstawić liczbę 1188 w postaci iloczynu liczb pierwszych, rozłożymy ją na czynniki pierwsze.



1188	2
594	2
297	3
99	3
33	3
11	11
1	

Zatem $1188 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 11$.

Ćwiczenie 4.

Przedstaw podaną liczbę w postaci iloczynu liczb pierwszych.

a) 77

b) 84

c) 129

d) 2160



Rozkład na czynniki pierwsze możemy wykorzystać do wyznaczenia największego wspólnego dzielnika (NWD) oraz najmniejszej wspólnej wielokrotności (NWW) liczb naturalnych.

Największym wspólnym dzielnikiem (NWD) dwóch lub więcej liczb naturalnych nazywamy największą liczbę naturalną, przez którą są podzielne jednocześnie wszystkie dane liczby.

Najmniejszą wspólną wielokrotnością (NWW) dwóch lub więcej liczb naturalnych nazywamy najmniejszą liczbę naturalną różną od zera, której dzielnikami są dane liczby.



Przykład 5.

Wyznacz NWD oraz NWW liczb 504 i 756.

Liczbę 504 i 756 rozłożymy na czynniki pierwsze. Jeżeli czynnik pierwszy w rozkładzie liczby 504 jest również czynnikiem pierwszym w rozkładzie liczby 756, to zaznaczymy go tym samym kolorem.



504	2	756	2
252	2	378	2
126	2	189	3
63	3	63	3
21	3	21	3
7	7	7	7
1		1	

Iloczyn wspólnych czynników z rozkładu liczb 504 i 756 jest ich największym wspólnym dzielnikiem.



$$\text{NWD}(504, 756) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 252$$

Iloczyn największego wspólnego dzielnika liczb 504 i 756 oraz liczb, które występują tylko w rozkładzie na czynniki jednej z tych liczb, jest ich najmniejszą wspólną wielokrotnością.



$$\text{NWW}(504, 756) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 = 252 \cdot 2 \cdot 3 = 1512$$

Ćwiczenie 5.

Wyznacz NWD oraz NWW podanych liczb.

a) 24 i 60

b) 90 i 126

c) 420 i 2310



Rozwiąż zadania

1. Wyznacz wszystkie wielokrotności

a) liczby 7 mniejsze niż 50,

b) liczby 24 nie większe niż 144.

2. Podaj wszystkie dzielniki danej liczby.

a) 20

b) 72

c) 120

d) 139

3. Ela otrzymała pięć liczb w generatorze liczb losowych.

Ustal, które z wyświetlonych liczb są podzielne:

a) przez 2,

b) przez 3,

c) przez 4,

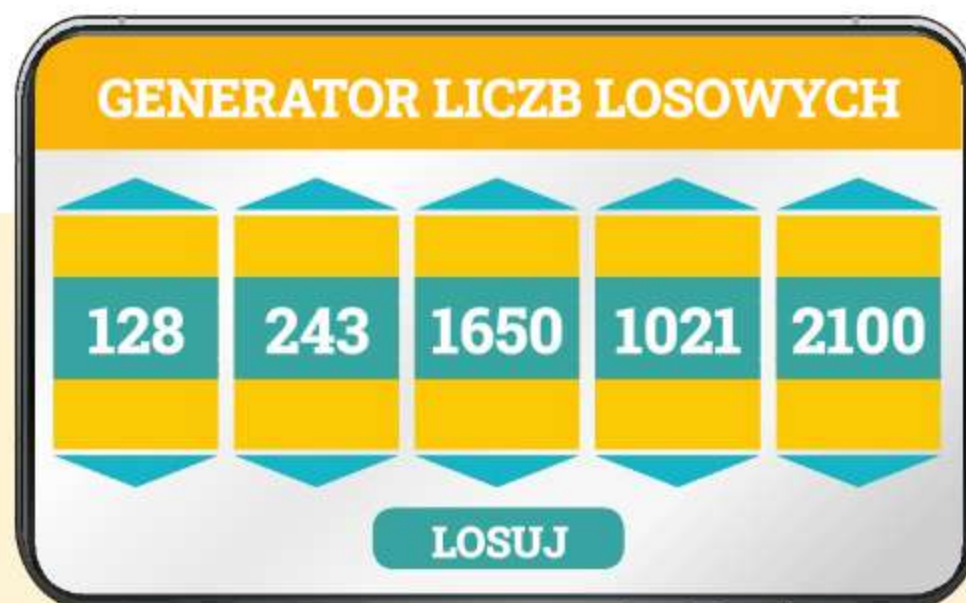
d) przez 5,

e) przez 6,

f) przez 9,

g) przez 10,

h) przez 100.



4. Ustal, jaką cyfrę należy wstawić w miejsce ♣, aby liczba 310 52♣ była podzielna:

a) przez 2,

b) przez 3,

c) przez 4,

d) przez 6.

Rozważ wszystkie przypadki.

5. Podaj wszystkie liczby pierwsze:

a) parzyste,

b) mniejsze od 50,

c) większe od 60 i jednocześnie mniejsze od 100.

6. Przedstaw liczbę w postaci iloczynu liczb pierwszych.

a) 45

b) 92

c) 112

d) 2200



7. Wyznacz NWD oraz NWW podanych liczb.

a) 50 i 210

b) 44 i 165

c) 288 i 576

d) 1 i 1084



8. Przedstaw ułamek w postaci nieskracalnej. Wykorzystaj cechy podzielności liczb lub $\text{NWD}(l, m)$, gdzie l to licznik ułamka, a m – mianownik ułamka.

a) $\frac{180}{252}$

b) $\frac{279}{870}$

c) $\frac{408}{612}$

d) $\frac{11\,880}{23\,580}$

9. Wyznacz $\text{NWD}(a, b)$ i $\text{NWW}(a, b)$ liczb $a = \frac{\sqrt[3]{125} \cdot 2^3}{0,5}$ oraz $b = \frac{\sqrt{7^2} \cdot 2}{0,2}$.

Informacje do zadań 10. i 11.

Miejskie Centrum Kultury organizuje co trzy lata turniej tańca towarzyskiego, a co dwa lata turniej tańca nowoczesnego. Turniej tańca towarzyskiego odbył się w 2020 r., a turniej tańca nowoczesnego w 2021 r.



E

- 10.** Czy oba turnieje odbywają się w tym samym roku co 6 lat?
Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

A.	Tak,	ponieważ	1.	$2 + 3 = 5.$
			2.	$\text{NWD}(2, 3) = 1.$
B.	Nie,		3.	$\text{NWW}(2, 3) = 6.$

- 11.** Ile razy w latach 2024–2030 r. oba turnieje będą odbywać się w tym samym roku? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

- 12.** Uzasadnij, że suma trzech dowolnych liczb będących kolejnymi wielokrotnościami liczby 2 jest liczbą podzielną przez 6.



Sprawdź, co umiesz!

- 1.** Rozkład liczby 10 010 na czynniki pierwsze ma postać $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.
Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych **C** i **D**.

Liczba 10 010 jest podzielna przez liczbę **A** **B**.

A. 28 **B.** 35

Liczba 10 010 jest wielokrotnością liczby **C** **D**.

C. $2 \cdot 13$ **D.** $2 \cdot 3$

- 2.** Wypisz wszystkie dzielniki liczby 163. Określ, czy jest to liczba pierwsza, czy złożona.

- 3.** Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wielokrotnością liczby 54 jest liczba

A. $27 \cdot 11$ **B.** $3^3 \cdot 24$ **C.** $3^2 \cdot 20$ **D.** $18 \cdot 5$

- 4.** Wyznacz $\text{NWD}(a, b)$ i $\text{NWW}(a, b)$ liczb $a = 170$ oraz $b = 204$.

3. Działania na liczbach wymiernych

- ▶ Pojęcie liczby wymiernej
- ▶ Kolejność wykonywania działań

W zbiorze liczb wymiernych możemy wykonywać dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie. Dzielić nie możemy jedynie przez zero.



Liczba wymierna to każda liczba, którą można przedstawić w postaci ułamka zwykłego, czyli $\frac{a}{b}$, gdzie a jest dowolną liczbą całkowitą i b jest liczbą całkowitą różną od zera. Ma ona rozwinięcie dziesiętne skończone lub nieskończone okresowe, np. 0; 3; -8; $-6\frac{1}{5}$; 0,54; 7,(3); $\sqrt{100} = 10$.

Liczba niewymierna to każda liczba, która ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone nieokresowe, np. $\sqrt{2} = 1,4142135\dots$; $4\sqrt{3} = 6,9282032\dots$; $\sqrt[3]{5} = 1,7099759\dots$.

Przykład 1.

Czy podana liczba jest liczbą wymierną? Uzasadnij swoją odpowiedź.

- a) 4 jest liczbą wymierną, ponieważ można ją zapisać w postaci ułamka zwykłego $\frac{4}{1}$.
- b) 3,(23) jest liczbą wymierną, ponieważ ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe.
- c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ nie jest liczbą wymierną, ponieważ $\sqrt{3}$ znajdujący się w liczniku nie jest liczbą całkowitą.
- d) $-3\frac{1}{9}$ jest liczbą wymierną, ponieważ można ją zapisać w postaci ułamka zwykłego $(-\frac{28}{9})$.
- e) $\sqrt[3]{8}$ jest liczbą wymierną, ponieważ $\sqrt[3]{8} = 2 = \frac{2}{1}$.

Ćwiczenie 1.

Czy podana liczba jest liczbą wymierną? Uzasadnij swoją odpowiedź.

- a) 76
- b) -1,1(7)
- c) $\frac{\sqrt{9}}{4}$
- d) $8\frac{6}{11}$
- e) $-\sqrt[3]{12}$

Przykład 2.

Oblicz.

a) $3\frac{3}{4} + (-6)$

Skorzystamy z faktu, że $a + (-b) = a - b$.



$$3\frac{3}{4} + (-6) = 3\frac{3}{4} - 6$$

Liczbę mieszaną zamienimy na ułamek niewłaściwy, a liczbę 6 przedstawimy w postaci $\frac{6}{1}$. Następnie ułamki sprowadzimy do wspólnego mianownika. Wynikiem odejmowania liczby większej od liczby mniejszej jest liczba ujemna.



$$3\frac{3}{4} - 6 = \frac{15}{4} - \frac{6}{1} = \frac{15}{4} - \frac{6 \cdot 4}{1 \cdot 4} = \frac{15}{4} - \frac{24}{4} = -\frac{9}{4} = -2\frac{1}{4}$$

b) $1\frac{7}{12} - 2\frac{1}{9} - (-1\frac{1}{4})$

Zamienimy liczby mieszane na ułamki niewłaściwe i skorzystamy z faktu, że $a - (-b) = a + b$. Następnie sprowadzimy ułamki do wspólnego mianownika.



$$1\frac{7}{12} - 2\frac{1}{9} - (-1\frac{1}{4}) = \frac{19}{12} - \frac{19}{9} + \frac{5}{4} = \frac{19 \cdot 3}{12 \cdot 3} - \frac{19 \cdot 4}{9 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 9}{4 \cdot 9} = \frac{57}{36} - \frac{76}{36} + \frac{45}{36}$$

Wykonamy odejmowanie, a następnie skorzystamy z prawa przemienności dodawania: $a + b = b + a$. Aby przedstawić wynik w najprostszej postaci, skrócimy ułamek.



$$\frac{57}{36} - \frac{76}{36} + \frac{45}{36} = -\frac{19}{36} + \frac{45}{36} = \frac{45}{36} + \left(-\frac{19}{36}\right) = \frac{45}{36} - \frac{19}{36} = \frac{26}{36} \stackrel{13}{18} = \frac{13}{18}$$

c) $1\frac{2}{3} \cdot (-2\frac{3}{10})$

Liczby mieszane zamienimy na ułamki niewłaściwe i wykonamy skracanie.



$$1\frac{2}{3} \cdot (-2\frac{3}{10}) = \frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{23}{10}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{23}{2}\right)$$

Wykonamy mnożenie, pamiętając, że iloczyn liczb o przeciwnych znakach jest liczbą ujemną.



$$\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{23}{2}\right) = -\frac{23}{6} = -3\frac{5}{6}$$

d) $-5 : \left(-1\frac{11}{24}\right) : \left(-1\frac{1}{7}\right)$

Liczby mieszane zamienimy na ułamki niewłaściwe, a następnie pomnożymy liczbę (-5) przez odwrotności ułamków $\left(-\frac{35}{24}\right)$ i $\left(-\frac{8}{7}\right)$. Wykonamy mnożenie, pamiętając, że iloczyn dwóch liczb o tych samych znakach jest liczbą dodatnią.



$$\begin{aligned} -5 : \left(-1\frac{11}{24}\right) : \left(-1\frac{1}{7}\right) &= \\ &= -5 : \left(-\frac{35}{24}\right) : \left(-\frac{8}{7}\right) = \\ &= \frac{5}{1} \cdot \left(-\frac{24}{35}\right) \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) = \\ &= -1 \cdot \left(-\frac{3 \cdot 24}{1 \cdot 7}\right) \cdot \left(-\frac{7^1}{8_1}\right) = \\ &= -1 \cdot (-3) \cdot (-1) = 3 \cdot (-1) = -3 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2.

Oblicz.

a) $12\frac{1}{24} - 3\frac{1}{3}$

b) $\frac{7}{12} - \left(-\frac{5}{9}\right)$

c) $1\frac{9}{28} - 2\frac{5}{14} + (-3)$

d) $-\frac{7}{8} - \frac{10}{11} - \left(-\frac{19}{22}\right)$

e) $\frac{5}{8} \cdot 2\frac{14}{25}$

f) $-\frac{15}{26} : \left(-\frac{9}{52}\right)$

g) $2 : 19 \cdot \left(-3\frac{1}{6}\right)$

h) $2\frac{3}{25} \cdot \left(-1\frac{22}{53}\right) : 1\frac{1}{3}$

Przykład 3.

Oblicz.

a) $17,62 + 9,57$

		1	1		
		1	7	6	2
+			9	5	7
		2	7	1	9

$$17,62 + 9,57 = 27,19$$

b) $32 - 8,43$

		2	11	9	
		3	2	0	0
-			8	4	3
		2	3	5	7

$$32 - 8,43 = 23,57$$

c) $4,21 \cdot 2,3$

			4	2	1
		.		2	3
		1	2	6	3
+		8	4	2	
		9	6	8	3

$$4,21 \cdot 2,3 = 9,683$$

d) $3,26 : 0,4$

Przesuniemy przecinek w obu liczbach o tyle miejsc w prawo, aby dzielnik był liczbą całkowitą.



$$3,26 : 0,4 = 32,6 : 4$$

Wykonamy dzielenie sposobem pisemnym.



			8	1	5
		3	2	6	: 4
-		3	2		
			0	6	
				4	
				2	0
				- 2	0
					0

$$\text{Otrzymaliśmy } 3,26 : 0,4 = 8,15.$$

Ćwiczenie 3.

Oblicz.

a) $2,84 + 7,9$

b) $20,01 - 8,63$

c) $-9,22 \cdot (-8,5)$

d) $52,875 : (-1,25)$

Przykład 4.

Oblicz.

a) $\left(-2\frac{1}{2}\right)^2$

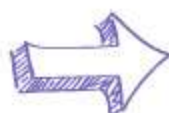
Liczbę mieszaną zamienimy na ułamek niewłaściwy. Wykładnik potęgi jest parzysty, więc wynik potęgowania liczby ujemnej jest dodatni.



$$\left(-2\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$$

b) $\left(-1\frac{1}{4}\right)^3$

Liczbę mieszaną zamienimy na ułamek niewłaściwy. Wykładnik potęgi jest nieparzysty, więc wynik potęgowania liczby ujemnej jest ujemny.



$$\left(-1\frac{1}{4}\right)^3 = \left(-\frac{5}{4}\right)^3 = \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{125}{64} = -1\frac{61}{64}$$

Ćwiczenie 4.

Oblicz.

a) $\left(\frac{3}{13}\right)^2$

b) $\left(2\frac{1}{4}\right)^2$

c) $\left(-3\frac{1}{2}\right)^3$

d) $\left(-4\frac{1}{2}\right)^2$

Kolejność wykonywania działań:

1

działania
w nawiasach

2

potęgowanie
i pierwiastkowanie

3

mnożenie
i dzielenie

4

dodawanie
i odejmowanie

w kolejności występowania

Przykład 5.

Oblicz.

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot \left(2\frac{1}{8} - 1,25\right)^2}{1\frac{17}{32}} - 1 &= \frac{2 \cdot \left(2\frac{1}{8} - 1\frac{25}{100}\right)^2}{1\frac{17}{32}} - 1 = \frac{2 \cdot \left(2\frac{1}{8} - 1\frac{1}{4}\right)^2}{1\frac{17}{32}} - 1 = \frac{2 \cdot \left(2\frac{1}{8} - 1\frac{2}{8}\right)^2}{1\frac{17}{32}} - 1 = \\ &= \frac{2 \cdot \left(1\frac{9}{8} - 1\frac{2}{8}\right)^2}{1\frac{17}{32}} - 1 = \frac{2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^2}{1\frac{17}{32}} - 1 = \frac{1\cancel{2} \cdot \frac{49}{64}}{\frac{49}{32}} - 1 = \frac{49}{32} : \frac{49}{32} - 1 = \frac{1\cancel{49}}{1\cancel{32}} \cdot \frac{32}{49} - 1 = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 5.

Oblicz.

a) $\frac{(\sqrt{4}-3)^2}{\frac{1}{5}}$

b) $\frac{1\frac{1}{4} - (-2,75)}{\sqrt[3]{8}}$

c) $\left(\frac{\frac{3}{10} : 0,5 \cdot (-5)}{2,52 + 3\frac{12}{25}}\right)^2$

d) $\frac{17 + 5\frac{1}{7} : \frac{9}{14}}{\left(-1\frac{2}{3} \cdot 3\right)^3}$

Rozwiąż zadania

1. Czy podana liczba jest liczbą wymierną? Uzasadnij swoją odpowiedź.

a) 1

b) $\sqrt{168}$

c) $\sqrt[3]{-125}$

d) 2,0(9)

2. Oblicz.

a) $2\frac{1}{4} - 1\frac{5}{16}$

b) $6\frac{4}{5} - \left(-2\frac{5}{6}\right)$

c) $-5 - 1\frac{7}{11} + \left(-3\frac{1}{3}\right)$

d) $-1\frac{7}{27} \cdot \left(-3\frac{3}{17}\right)$

e) $-1\frac{7}{13} : 40$

f) $\left(1\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-1\frac{7}{24}\right) : \left(-12\frac{2}{5}\right)$

3. Oblicz.

a) $12,1 + 9,29$

b) $36,71 - 29,15$

c) $-5 + 1,732$

d) $-7,81 - 13,9$

e) $2,5 \cdot 5,2$

f) $-6,3 \cdot 19,2$

g) $-20 : (-0,16)$

h) $47,32 : (-2,8)$

4. Bruno kupił na Festiwalu Czekolady tort. Siostrze dał 0,25 tortu, dla rodziców przeznaczył po $\frac{1}{3}$ tego, co pozostało. Resztę tortu zostawił dla siebie. Ustal, kto otrzymał największy kawałek tortu.

5. Zosia jedzie do szkoły metrem przez $\frac{7}{12}$ h. Zakładając, że Zosia jedzie już metrem od 15 min, uzasadnij, że jej podróż będzie trwała jeszcze $\frac{1}{3}$ h. Przyjmij, że nie wystąpi żadne opóźnienie.

6. Dany jest trapez równoramienny, którego podstawa a ma długość 3,4 cm. Podstawa b jest krótsza o $1\frac{7}{15}$ cm od podstawy a . Wysokość tego trapezu stanowi $\frac{5}{29}$ długości jego krótszej podstawy. Wykaż, że pole tego trapezu wynosi $0,8 \text{ cm}^2$.

7. Porównaj liczby. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

a) $\left(\frac{2}{15}\right)^2$ i $\left(-\frac{2}{15}\right)^2$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ i $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$

c) $\left(1\frac{3}{8}\right)^2$ i $\left(1\frac{1}{4}\right)^2$

8. Oblicz.

a) $-6 \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right)^2 + 4 \cdot (-0,5)^3$

b) $12 : \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 1,6 : (0,2)^3$

c) $\frac{2,4 + 1\frac{4}{15} - \frac{1}{9} \cdot \left(4\frac{1}{2}\right)^2}{5 - 1,6}$

Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz.

a) $-1\frac{1}{6} + 5\frac{3}{4}$

b) $-1\frac{2}{3} - \left(-1\frac{19}{21}\right) + \frac{3}{7}$

c) $6\frac{2}{7} \cdot \left(-1\frac{3}{11}\right)$

d) $\left(-2\frac{7}{10}\right) : \left(-4\frac{1}{20}\right) : \frac{5}{27}$

e) $6 - (-1,92) + (-3,72)$

f) $-353,6 : (-0,52)$

E 2. Pola chce kupić matę do tańczenia. Udało jej się zaoszczędzić 150 zł, ale $\frac{1}{6}$ oszczędności wydała na bilet do kina, a $\frac{1}{5}$ kwoty, która jej pozostała, na butelkę filtrującą. Cena maty do tańczenia wynosi 95 zł.

Czy oszczędności, które pozostały Poli, wystarczą na zakup maty do tańczenia?

Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród 1., 2. albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	$125 \cdot \frac{1}{5} = 25 < 95.$
			2.	$125 - 30 = 95.$
B.	Nie,		3.	$125 \cdot \frac{4}{5} = 100 > 95.$

3. Oblicz wartość wyrażenia: $\frac{\left(8,75 - 4\frac{7}{20}\right) : 0,4}{(-8) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^3}.$

4. Działania na potęgach i pierwiastkach

- ▶ Własności potęg
- ▶ Notacja wykładnicza
- ▶ Własności pierwiastków

Działania na potęgach

Potęga o wykładniku naturalnym

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}} \text{ dla } n \geq 2$$

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1, a \neq 0$$

Iloczyn i iloraz potęg o tych samych wykładnikach

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \text{ dla } a \neq 0, b \neq 0$$

$$10^4 \cdot 3^4 = (10 \cdot 3)^4 = 30^4$$

$$a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n = (a : b)^n \text{ dla } a \neq 0, b \neq 0$$

$$(0,64)^5 : 4^5 = (0,64 : 4)^5 = (0,16)^5$$

Iloczyn i iloraz potęg o jednakowych podstawach

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \text{ dla } a \neq 0$$

$$5 \cdot 5^2 = 5^{1+2} = 5^3$$

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ dla } a \neq 0, m \geq n$$

$$(2,4)^5 : (2,4)^3 = (2,4)^{5-3} = (2,4)^2$$

Potęgowanie potęgi

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \text{ dla } a \neq 0$$

$$(12^2)^4 = 12^{2 \cdot 4} = 12^8$$

m, n – liczby naturalne

Przykład 1.

Zapisz wyrażenie w postaci jednej potęgi.

a) $6^4 \cdot 6^3 = \underbrace{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}_{4 \text{ czynniki}} \cdot \underbrace{6 \cdot 6 \cdot 6}_{3 \text{ czynniki}} = 6^{4+3} = 6^7$

b) $10^3 : 2^3 = (10 \cdot 10 \cdot 10) : (2 \cdot 2 \cdot 2) = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$

c) $(7^4)^2 = 7^4 \cdot 7^4 = 7^{4+4} = 7^8$

Ćwiczenie 1.

Zapisz wyrażenie w postaci jednej potęgi.

a) $8^{10} \cdot 8^5$

b) $12^{20} : 12^4$

c) $5^6 \cdot 4^6$

d) $30^7 : 3^7$

e) $(9^6)^3$

Przykład 2.

Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\frac{3^2 \cdot 3^4}{3^5 : 3^3}$

Przekształcimy licznik ułamka, korzystając ze wzoru: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, oraz mianownik, korzystając ze wzoru: $a^m : a^n = a^{m-n}$.



$$\frac{3^2 \cdot 3^4}{3^5 : 3^3} = \frac{3^{2+4}}{3^{5-3}} = \frac{3^6}{3^2}$$

Skorzystamy ze wzoru: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.



$$\frac{3^6}{3^2} = 3^{6-2} = 3^4 = 81$$

b) $\frac{6^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8}{(2^2)^3 \cdot 4}$

Przekształcimy licznik ułamka, korzystając ze wzoru: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$. Liczbę 4 w mianowniku przedstawimy w postaci potęgi liczby 2.



$$\frac{6^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8}{(2^2)^3 \cdot 4} = \frac{\left(6 \cdot \frac{1}{3}\right)^8}{(2^2)^3 \cdot 2^2} = \frac{2^8}{(2^2)^3 \cdot 2^2}$$

Skorzystamy w mianowniku ze wzoru: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, a następnie ze wzoru: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.



$$\frac{2^8}{(2^2)^3 \cdot 2^2} = \frac{2^8}{2^6 \cdot 2^2} = \frac{2^8}{2^{6+2}} = \frac{2^8}{2^8}$$

Skorzystamy ze wzoru: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.



$$\frac{2^8}{2^8} = 2^{8-8} = 2^0 = 1$$

Ćwiczenie 2.

Oblicz wartość wyrażenia.

a) $(1,2)^2 \cdot (10)^2$

b) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^7 : \left(\frac{2}{3}\right)^6\right]^2$

c) $\frac{(5 \cdot 5^2)^2}{4^6 \cdot \left(-1\frac{1}{4}\right)^6}$

d) $\frac{(7^3 \cdot 7^4 : 7^5)^4}{49^3}$

Notacja wykładnicza

Notacja wykładnicza pozwala nam zapisywać duże i małe liczby w czytelny sposób, umożliwiając łatwe ich porównywanie.

Liczbę dodatnią a można przedstawić w postaci **notacji wykładniczej**, czyli

$$a = k \cdot 10^n$$

gdzie k jest liczbą mniejszą od 10, ale nie mniejszą od 1, natomiast n jest liczbą całkowitą.

Dla dowolnej liczby $a \neq 0$ oraz dla dowolnej liczby naturalnej n prawdziwy jest wzór:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

Przykład 3.

- I. Podane w tekście wielkości przedstaw w notacji wykładniczej.

PRZYRODA



Największym ssakiem na świecie jest płetwal błękitny. Może on osiągnąć masę nawet 190 000 kg. Jego język waży około 2700 kg. Najmniejszym ssakiem świata jest ryjówek etruski. Masa jego ciała to zaledwie około 0,0025 kg.

$$\underbrace{190\ 000}_{5 \text{ cyfr}} \text{ kg} = 1,9 \cdot \underbrace{100\ 000}_{5 \text{ zer}} \text{ kg} = 1,9 \cdot 10^5 \text{ kg}$$

wykładnik równy 5

$$\underbrace{2700}_{3 \text{ cyfry}} \text{ kg} = 2,7 \cdot \underbrace{1000}_{3 \text{ zera}} \text{ kg} = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

wykładnik równy 3

$$\underbrace{0,0025}_{\text{Przesuwamy przecinek o 3 miejsca w prawo.}} \text{ kg} = 2,5 \cdot \underbrace{0,001}_{3 \text{ miejsca po przecinku}} \text{ kg} = 2,5 \cdot \frac{1}{10^3} \text{ kg} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

wykładnik równy -3

- II. Podane w tekście wielkości zapisz bez użycia notacji wykładniczej.

PRZYRODA



Największy osobnik rekina wielorybiego – największej ryby świata – mierzył $1,88 \cdot 10^3$ cm. Masa ciała rekina wielorybiego sięga $1,36 \cdot 10^4$ kg. Z kolei babka filipińska, czyli najmniejsza jadalna ryba na świecie, osiąga do $1,4 \cdot 10^{-2}$ m długości.

$$1,88 \cdot 10^3 \text{ cm} = 1,88 \cdot \underbrace{1000}_{3 \text{ zera}} \text{ cm} = 1880 \text{ cm}$$

$$1,36 \cdot 10^4 \text{ kg} = 1,36 \cdot \underbrace{10\ 000}_{4 \text{ zera}} \text{ kg} = 13\ 600 \text{ kg}$$

$$1,4 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 1,4 \cdot \frac{1}{10^2} \text{ m} = 1,4 \cdot \underbrace{0,01}_{2 \text{ miejsca po przecinku}} \text{ m} = 0,014 \text{ m}$$

Ćwiczenie 3.

- I. Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

a) 8 000 000

b) 327 000

c) 0,00035

d) 0,00101

- II. Zapisz liczbę bez użycia notacji wykładniczej.

a) $1,7 \cdot 10^5$

b) $1,034 \cdot 10^4$

c) $3,8 \cdot 10^{-5}$

d) $9,99 \cdot 10^{-6}$

Działania na pierwiastkach

Pierwiastek kwadratowy

$$\sqrt{a} = b, \text{ gdy } b^2 = a \text{ dla } a \geq 0, b \geq 0.$$

Pierwiastek sześcienny

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ gdy } b^3 = a.$$

Potęgowanie pierwiastka

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a \text{ dla } a \geq 0$$

$$(\sqrt{7})^2 = \sqrt{7^2} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = 7$$

$$(\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a$$

$$(\sqrt[3]{10})^3 = \sqrt[3]{10^3} = \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{10} = 10$$

Mnożenie i dzielenie pierwiastków

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \text{ dla } a \geq 0, b \geq 0$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ dla } a \geq 0, b > 0$$

$$\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$$

$$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \cdot 9} = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \text{ dla } b \neq 0$$

$$\frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{32}{4}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Możemy zredukować tylko te pierwiastki, które są tego samego stopnia i mają tę samą liczbę podpierwiastkową.

$$5\sqrt{2} + \sqrt{2} - 4\sqrt[3]{2} = 6\sqrt{2} - 4\sqrt[3]{2}$$

Przykład 4.

Oblicz wartość wyrażenia.

a) $(\sqrt{10})^2 = \sqrt{10^2} = \sqrt{100} = 10$

c) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{32 \cdot 2} = \sqrt{64} = 8$

e) $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} = \sqrt{\frac{100}{25}} = \sqrt{4} = 2$

b) $(\sqrt[3]{7})^3 = \sqrt[3]{7^3} = \sqrt[3]{343} = 7$

d) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$

f) $\frac{\sqrt[3]{56}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{\frac{56}{7}} = \sqrt[3]{8} = 2$

Ćwiczenie 4.

Oblicz wartość wyrażenia.

a) $(\sqrt{15})^2$

b) $(\sqrt[3]{-7})^3$

c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

d) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$

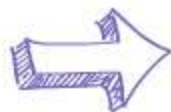
e) $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18}$

f) $\frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}$

Przykład 5.

Sprawdź, czy wartość wyrażenia $\sqrt{144} + \sqrt{25}$ jest równa $\sqrt{144 + 25}$.

Obliczymy $\sqrt{144}$ oraz $\sqrt{25}$.



$$\sqrt{144} = 12, \sqrt{25} = 5$$

Obliczymy $\sqrt{144 + 25}$.



$$\sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

Otrzymaliśmy $\sqrt{144} + \sqrt{25} = 12 + 5 = 17$ oraz $\sqrt{144 + 25} = 13$, więc $\sqrt{144} + \sqrt{25} \neq \sqrt{144 + 25}$.

Ćwiczenie 5.

Uzasadnij, że $\sqrt{25} - \sqrt{16} \neq \sqrt{25 - 16}$.

Przykład 6.

Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{3} - \sqrt{3}}$

Przekształcimy licznik, korzystając ze wzoru: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$. W mianowniku wykonamy odejmowanie, pamiętając, że $2a - a = a$.

Skorzystamy ze wzoru: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.



$$\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{3} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6 \cdot 2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$$



$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$$

b) $\sqrt{3}(\sqrt{27} - 4\sqrt{3})$

Sposób I

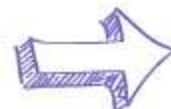
Pomnożymy jednomian $\sqrt{3}$ przez każdy składnik sumy algebraicznej. Następnie skorzystamy ze wzorów: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ oraz $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$.



$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cdot (\sqrt{27} - 4\sqrt{3}) &= \\ &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{27} - \sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = \\ &= \sqrt{3 \cdot 27} - 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \\ &= \sqrt{81} - 4 \cdot (\sqrt{3})^2 = \\ &= 9 - 4 \cdot 3 = 9 - 12 = -3 \end{aligned}$$

Sposób II

Wyłączymy czynnik przed znak pierwiastka.



$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

Wykonamy odejmowanie w nawiasie.



$$\begin{aligned} \sqrt{3}(\sqrt{27} - 4\sqrt{3}) &= \\ &= \sqrt{3}(3\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) = \\ &= \sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Skorzystamy ze wzoru: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$.



$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) &= -\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \\ &= -(\sqrt{3})^2 = -3 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 6.

Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{125}$

b) $\frac{3\sqrt[3]{7} - 2\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7}}$

c) $\frac{-2\sqrt[3]{-16}}{\sqrt[3]{2}}$

d) $-\sqrt{8}(3\sqrt{2} + \sqrt{8})$



Przekształcanie wyrażenia, tak aby w mianowniku nie występował niewymierny pierwiastek, nazywamy **usuwaniami niewymierności z mianownika**.

Przykład 7.

Uzasadnij, że $\frac{12}{7\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$.

Przekształcimy lewą stronę wyrażenia, tak aby w mianowniku nie występowała liczba niewymierna. Pomnożymy licznik i mianownik ułamka przez $\sqrt{3}$.

Zatem wykazaliśmy, że $\frac{12}{7\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$.



$$\begin{aligned}\frac{12}{7\sqrt{3}} &= \frac{12}{7\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{7\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \\ &= \frac{12\sqrt{3}}{7 \cdot 3} = \frac{4\sqrt{3}}{7}\end{aligned}$$

Ćwiczenie 7.

Uzasadnij, że $\frac{20}{3\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$.

Rozwiąż zadania

1. Przedstaw wyrażenie w postaci jednej potęgi.

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8$

b) $(0,2)^7 \cdot (0,2)^4 \cdot 0,2$

c) $\frac{(-8)^6}{(-8)^3}$

d) $(-150)^{10} : 150^0 : 150^5$

e) $\left(\frac{1}{6}\right)^8 \cdot 24^8$

f) $(-169)^{12} : (-13)^{12}$

g) $(-5^3)^{11}$

h) $((-16^2)^4)^3$

2. Oblicz.

a) $\frac{7^{15} : (7^6)^2}{7^{10} : 7^9}$

b) $\frac{(10^6 \cdot 10^0 : 10^2)^2}{100^3}$

c) $\frac{(-2)^5 \cdot (0,5)^5}{64 : (2^2 \cdot 2)^2}$

d) $\frac{\left(2\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3 : \left(-\frac{1}{3}\right)^2}{81 : (9^2 : 3^2)}$

3. Przepisz przykład do zeszytu i wstaw w miejsce ♣ odpowiedni wykładnik.

a) $3,2 \cdot 10^{\clubsuit} = 320\,000$

b) $2,2 \cdot 10^{\clubsuit} = 220\,000\,000$

c) $1,051 \cdot 10^{\clubsuit} = 0,1051$

d) $1,23 \cdot 10^{\clubsuit} = 0,000123$

4. Oblicz.

a) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$

b) $\sqrt{\frac{5}{32}} : \sqrt{2\frac{1}{2}}$

c) $\sqrt[3]{1\frac{1}{2}} : \sqrt[3]{-\frac{4}{9}}$

d) $\sqrt[3]{0,2} \cdot \sqrt[3]{0,32}$

e) $(\sqrt{14})^2$

f) $(\sqrt[3]{11} \cdot \sqrt[3]{11})^3$

g) $\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 16}$

h) $-\sqrt[3]{-4 \cdot 16 : 27}$

5. Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{9}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{225\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$

c) $\frac{6\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}$

d) $\frac{10\sqrt{5}}{3\sqrt{35}}$

6. Dane są liczby: $a = \frac{4}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{3}{2\sqrt{3}}$, $c = \sqrt[3]{(\sqrt{8})^2}$, $d = \frac{2}{3\sqrt{2}}$, $e = \sqrt{0,81}$, $f = \sqrt{(\sqrt{3})^2}$. Uporządkuj liczby: a, b, c, d, e, f od najmniejszej do największej.

7. Oblicz.

a) $\frac{2^{10} + 2^{12}}{2^8 - 2^7}$

b) $\frac{9^4 + 81^2}{3^7 - 27^2}$

c) $\frac{2^6 \cdot (7^2)^2}{49 \cdot (512 - 2^6)}$

d) $\frac{5^{10} \cdot 2^{12}}{5^7 \cdot 2^7 + 10^7}$

Wskazówka: $3^5 + 3^7 = 3^5 \cdot 1 + 3^5 \cdot 3^2 = 3^5 \cdot 1 + 3^5 \cdot 9 = 3^5 \cdot (1 + 9) = 3^5 \cdot 10$.

Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz.

a) $\frac{11^3 \cdot 11^0}{11^2}$

b) $\frac{7^4 : 7 \cdot 7^2}{28^4 \cdot (0,25)^4}$

c) $\frac{(4^2 \cdot 4^5)^3}{4^{27} : 4^8}$

d) $\frac{3^2 \cdot 27^5}{9^3 \cdot (-81)^2}$

2. Czy połowa liczby 4^4 jest równa 2^4 ?

Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród 1., 2. albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.
			2.	$\frac{2^8}{2} = 2^7$.
B.	Nie,		3.	$\left(\frac{4}{2}\right)^4 = 2^4$.

3. Oblicz.

a) $\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{7\sqrt{2}}$

b) $\frac{5\sqrt{27} - \sqrt{3}}{4\sqrt{75}}$

c) $\frac{7\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{250}}$

d) $\frac{7\sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{256}}{2\sqrt[3]{4000}}$

4. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Wyrażenie $\frac{12\sqrt{2}}{5\sqrt{6}}$ można zapisać w postaci $\frac{4\sqrt{3}}{5}$.	P	F
Liczba 0,0000743 zapisana w notacji wykładniczej ma postać $0,743 \cdot 10^4$.	P	F

5. Uzasadnij, że wartość wyrażenia $\frac{3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3 + 10^3}{3}$ jest liczbą czterocyfrową.

PODSUMOWANIE DZIAŁU I

Liczby i działania

Powtórz wiadomości

Potęgi

Dla $a \neq 0$ i $b \neq 0$ prawdziwe są równości:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m \geq n$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Pierwiastki

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a \text{ dla } a \geq 0$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \text{ dla } a \geq 0, b \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ dla } a \geq 0, b > 0$$

$$(\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a$$

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \text{ dla } b \neq 0$$

System rzymski

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

$$\text{MDCXCII} = 1692$$

$$500 + 100$$

$$100 - 10$$

NWD i NWW

Największym wspólnym dzielnikiem (NWD) dwóch lub więcej liczb naturalnych nazywamy największą liczbę naturalną, przez którą są podzielne jednocześnie wszystkie dane liczby.

$$\text{NWD}(30, 42) = 2 \cdot 3 = 6$$

30	2
15	3
5	5
1	
42	2
21	3
7	7
1	

Najmniejszą wspólną wielokrotnością (NWW) dwóch lub więcej liczb naturalnych nazywamy najmniejszą liczbę naturalną, różną od zera, dla której podane liczby są jej dzielnikami.

$$\text{NWW}(30, 42) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$$

Cechy podzielności liczb

Liczba jest podzielna przez

- 2, jeśli jej ostatnią cyfrą jest 0, 2, 4, 6 lub 8;
- 3, jeśli suma jej cyfr jest podzielna przez 3;
- 4, jeśli liczba utworzona z dwóch jej ostatnich cyfr jest podzielna przez 4;

- 5, jeśli jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5;
- 6, jeśli jest podzielna przez 2 i przez 3;
- 9, jeśli suma jej cyfr jest podzielna przez 9;
- 10, jeśli jej ostatnią cyfrą jest 0;
- 100, jeśli jej dwie ostatnie cyfry są zerami.

Kolejność wykonywania działań

I. działania w nawiasach

II. potęgowanie

III. mnożenie i dzielenie w kolejności występowania

$$\frac{10 \cdot (2,8 - 2,4)^2}{1 \frac{3}{5}} + 1 = \frac{10 \cdot (0,4)^2}{1 \frac{3}{5}} + 1 = \frac{10 \cdot \frac{16}{100}}{1 \frac{3}{5}} + 1 = \frac{16}{10} : \frac{8}{5} + 1 = \frac{2 \cdot 16}{2 \cdot 10} \cdot \frac{5^1}{8_1} + 1 = \frac{12}{2_1} + 1 = 1 + 1 = 2$$

IV. dodawanie i odejmowanie w kolejności występowania

Sprawdź umiejętności

1. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

System dziesiętkowy	98		1976		2749
System rzymski		CDXXIV		MDCLXVII	

2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Na osi liczbowej najbliższej liczby 250 znajduje się liczba

- A. CCX B. CXC C. CCLXXVI D. CCXV

3. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Liczba 22 074 jest podzielna przez **A** **B**.

A. 3 B. 4

Liczba **C** **D** jest dzielnikiem liczby 440 178.

C. 6 D. 9

4. Wyznacz NWD oraz NWW podanych liczb.

- a) 15 i 60 b) 72 i 108 c) 140 i 630 d) 204 i 255

5. Oblicz.

a) $5\frac{1}{3} + 2\frac{5}{7}$

b) $20\frac{3}{10} - 6\frac{4}{5}$

c) $3\frac{5}{6} \cdot 1\frac{5}{46}$

d) $3\frac{2}{21} + 1\frac{41}{42} + (-6\frac{1}{6})$

e) $-10 - 4\frac{3}{7} - (-2\frac{1}{14})$

f) $(-10\frac{1}{3}) : (-6\frac{8}{9}) : 2\frac{1}{16}$

g) $-\frac{7}{46} \cdot (-11\frac{1}{2}) : (-14)$

h) $-4,93 + 16,79 - (-3,7)$

i) $-20 \cdot (-0,35) \cdot (-5,6)$

6. Na ilustracji przedstawiono kursy wymiany walut.

- a) Pani Maria postanowiła wynająć na cztery doby pokój w hotelu w Amsterdamie. Doba w wybranym przez nią hotelu kosztuje 52,50 euro. Sprawdź, czy pani Maria zapłaci za wynajęcie pokoju na cztery doby więcej niż 1000 zł.
- b) Pan Roman chce wynająć pokój w hotelu w Nowym Jorku. Doba w wybranym przez niego hotelu kosztuje 83 dolary amerykańskie. Ustal, ile dób może spędzić w tym hotelu pan Roman, jeśli dysponuje kwotą 2000 zł.

K A N T O R		
Waluta		Kurs wymiany
	USD (dolar amerykański)	4,40 zł
	EUR (euro)	4,75 zł
	GBP (funt brytyjski)	5,28 zł
	DKK (korona duńska)	0,63 zł

7. Oblicz.

a) $32 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2,4 : (0,4)^2$

b) $\frac{\left(-1\frac{1}{4}\right)^2 : 1,25 + \frac{3}{8}}{\left(1 - \frac{7}{8}\right)^2}$

8. Przedstaw wyrażenie w postaci jednej potęgi.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^6 : \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2}$

b) $(7^2)^5 : 7^0 \cdot 7^3$

c) $\frac{3^{20} \cdot (0,6)^{20}}{16 : (2^2)^2}$

d) $\frac{\left(2\frac{1}{5}\right)^{12} : \left(-6\frac{3}{5}\right)^{12}}{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^0\right)^5 \cdot \frac{1}{3}}$

9. Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

a) 1 900 000

b) 13 010 000

c) 0,00007

d) 0,0000103

E Informacje do zadań 10. i 11.

Temperatura wrzenia wody wynosi 100°C . W tabeli podano temperaturę wrzenia poszczególnych pierwiastków chemicznych.

Pierwiastek chemiczny	Temperatura wrzenia
Węgiel [C]	3852°C
Złoto [Au]	2700°C
Rtęć [Hg]	$356,7^\circ\text{C}$

10. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Temperatura wrzenia złota zapisana w notacji wykładniczej wynosi **A** **B**.

A. $2,7 \cdot 10^2^\circ\text{C}$

B. $2,7 \cdot 10^3^\circ\text{C}$

Temperatura wrzenia rtęci zapisana w notacji wykładniczej wynosi **C** **D**.

C. $35,67 \cdot 10^\circ\text{C}$

D. $3,567 \cdot 10^2^\circ\text{C}$

11. Ile razy niższa jest temperatura wrzenia wody od temperatury wrzenia węgla? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $385,2 \cdot 10$

B. $3,852 \cdot 10$

C. $38,52 \cdot 10^2$

D. $3,852 \cdot 10^2$

12. Sprawdź, czy liczba $\frac{\sqrt[3]{162}}{\sqrt[3]{2}}$ jest liczbą wymierną.

13. Oblicz.

a) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{8}$

b) $\sqrt{13\frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{3}{8}}$

c) $\sqrt[3]{-5} \cdot \sqrt[3]{0,0128}$

d) $\frac{\sqrt{14^2}(\sqrt{8} - \sqrt{32})}{(\sqrt[3]{2})^3}$

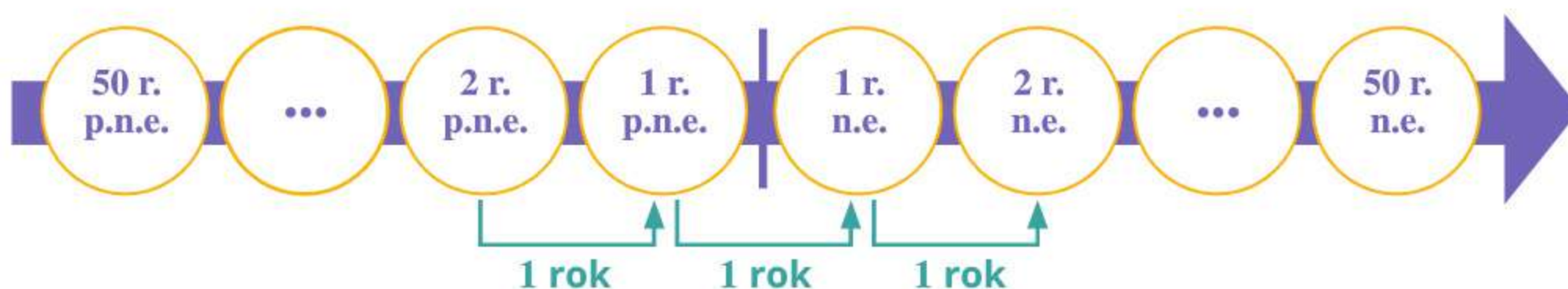
14. Uzasadnij, że wartość wyrażenia

a) $\frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ jest 4 razy większa od $\sqrt{10}$,

b) $\frac{6\sqrt{6}}{5\sqrt{3}}$ jest odwrotnością liczby $\frac{5\sqrt{2}}{12}$.

1. Grecki uczoney Tales z Miletu urodził się w DCXXV r. p.n.e. Mikołaj Kopernik – prawnik, astronom, matematyk – urodził się w MCDLXXIII r. n.e. Oblicz, ile lat później urodził się Mikołaj Kopernik niż Tales z Miletu.

Wskazówka: Po 1 r. p.n.e. nastąpił 1 r. n.e. Ilustruje to poniższa oś czasu.



2. Czy liczba 45 684 jest podzielna przez 12?

Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród 1., 2. albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	suma jej cyfr jest podzielna przez 3.
			2.	84 jest wielokrotnością liczby 4.
B.	Nie,		3.	jest podzielna przez 3 i przez 4.

3. Bruno zapisał za pomocą cyfr: 0, 1 i 2 wszystkie możliwe liczby trzycyfrowe.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Liczb podzielnych przez 5 jest **A** **B** razy mniej niż liczb parzystych.

A. dwa

B. trzy

Wśród wypisanych liczb jest **C** **D** liczb będących wielokrotnościami liczby 4.

C. pięć

D. sześć

4. Dane są liczby: $a = 10^{12} + 2$, $b = 10^5 - 1$, $c = 10^{50} + 4$, $d = 10^{11} + 5$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba, która nie jest podzielna przez 3, to liczba

A. a

B. b

C. c

D. d

5. Dane są liczby $m = 16 \cdot 3 \cdot 11$ oraz $n = 4 \cdot 9 \cdot 22$. Oblicz $\text{NWD}(m, n)$ i $\text{NWW}(m, n)$.

6. Liczby x i y są liczbami naturalnymi różnymi od 0 oraz $x \neq y$. Największy wspólny dzielnik liczb x i y jest równy 1. Uzasadnij, że tylko jedna z tych liczb może być parzysta.

7. Podaj przykład liczby niewymiernej, która jest

a) większa niż $2\sqrt[3]{11}$,

b) większa niż 5, ale mniejsza niż $4\sqrt{2}$.

- E 8.** W trapezie równoramiennym jedna z podstaw ma długość $1\frac{1}{5}$ dm, druga podstawa jest trzy razy krótsza. Wysokość tego trapezu stanowi 200 % długości jego krótszej podstawy. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Pole tego trapezu jest równe 64 cm^2 .	P	F
Ramię tego trapezu ma długość $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ dm.	P	F

- 9.** Uzasadnij, że liczba spełniająca równanie: $\frac{x}{4^2} - (-0,25)^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^3 \cdot x - \frac{6}{2^4}$ ma rozwinięcie dziesiętne skończone.

- 10.** Oblicz.

a) $\frac{(\sqrt{11})^2 \cdot 121 \cdot (1331^2)^3}{(11\sqrt[3]{11})^3 \cdot 121^7}$

b) $\left(\sqrt{\frac{27^2 \cdot 49^3}{21^5}}\right)^4$

c) $\frac{(6^5 + 6^4) \cdot (6^0)^2}{42^3 \cdot \left[-1 - \left(-\frac{6}{7}\right)\right]^2}$

- E 11.** Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Pole powierzchni równe $12,5 \text{ km}^2$ zapisane w metrach kwadratowych w notacji wykładniczej ma postać

A. $1,25 \cdot 10^2 \text{ m}^2$ **B.** $1,25 \cdot 10^4 \text{ m}^2$ **C.** $1,25 \cdot 10^6 \text{ m}^2$ **D.** $1,25 \cdot 10^7 \text{ m}^2$

- 12.** Światło porusza się w próżni z prędkością $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Oblicz, jaką drogę przebędzie światło w przestrzeni kosmicznej w ciągu roku nieprzestępnego. Wynik podaj w metrach i zapisz go w notacji wykładniczej.

- 13.** Uzasadnij, że

- a)** kwadrat wartości wyrażenia $(\sqrt{5} + 1) \cdot (\sqrt{5} - 1)$ jest wielokrotnością liczby 8,
b) wartość wyrażenia $(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}) \cdot (\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})$ jest liczbą pierwszą.

- E 14.** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

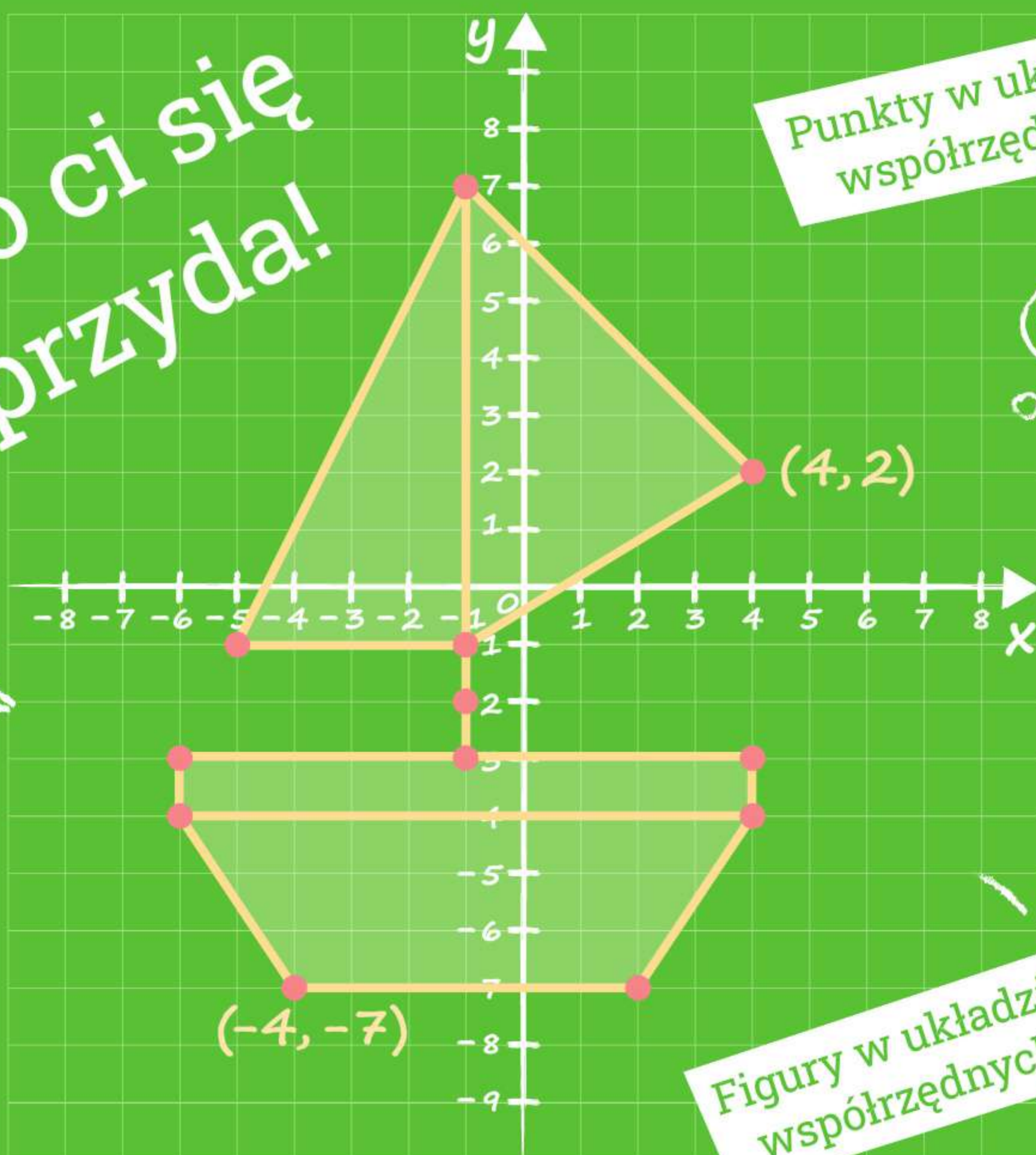
Liczba 294 jest o 50 % większa od liczby $(\sqrt[3]{14})^6$.	P	F
Wartość wyrażenia $\left(\frac{6 + \sqrt{6}}{\sqrt{12}}\right)^2$ jest liczbą większą od liczby 1,5.	P	F

DZIAŁ



UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH

To ci się
przyda!



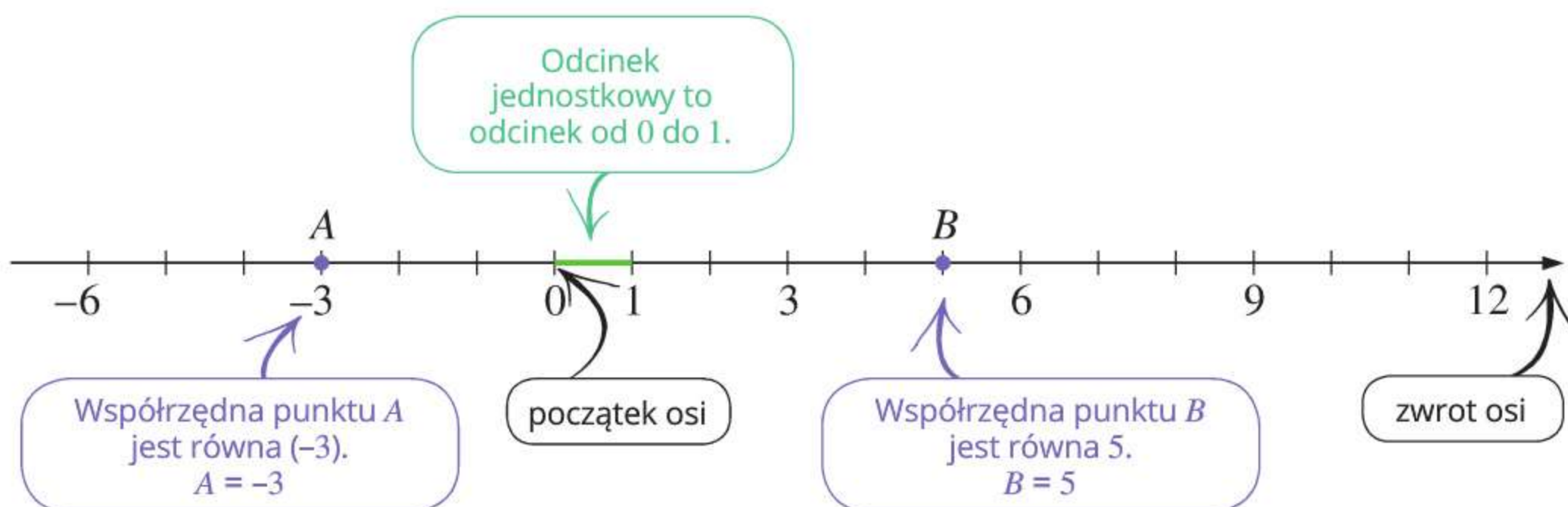
Punkty w układzie
współrzędnych

Figury w układzie
współrzędnych

1. Zbiory na osi liczbowej

- ▶ Obliczanie odległości między punktami zaznaczonymi na osi liczbowej
- ▶ Zaznaczanie na osi liczbowej zbioru liczb spełniających podany warunek
- ▶ Zapisywanie warunku, który spełniają liczby zaznaczone na osi

Każdemu punktowi zaznaczonemu na osi liczbowej odpowiada liczba, którą nazywamy **współrzedną tego punktu**.



Odległość między liczbami a i b na osi liczbowej, gdzie $a \leq b$, jest równa różnicy $b - a$.

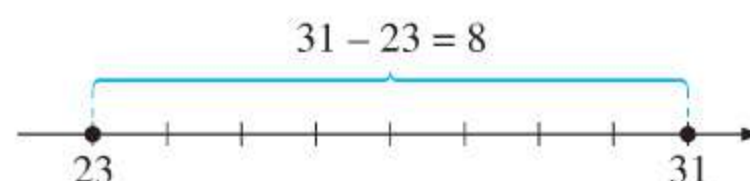
Np. odległość między liczbami (-5) i 3 zaznaczonymi na osi liczbowej jest równa:
 $3 - (-5) = 3 + 5 = 8$.

Przykład 1.

Oblicz odległość na osi liczbowej między podanymi liczbami.

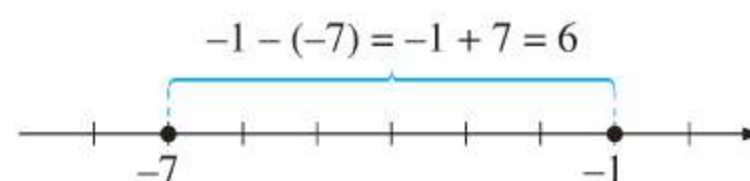
a) 23 i 31

Większa z liczb to 31, zatem od liczby 31 odejmiemy liczbę 23.



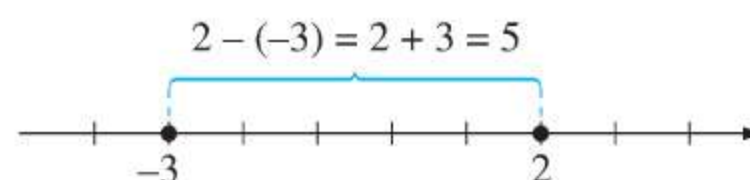
b) -7 i -1

Większa z liczb to (-1), zatem od liczby (-1) odejmiemy liczbę (-7).



c) -3 i 2

Większa z liczb to 2 , zatem od liczby 2 odejmiemy liczbę (-3) .



Ćwiczenie 1.

Oblicz odległość na osi liczbowej między podanymi liczbami.

a) 54 i 37

b) -6 i -21

c) $-2\frac{1}{2}$ i $1\frac{1}{4}$

Przykład 2.

Wyznacz współrzędną punktu zaznaczonego na osi liczbowej.

a)



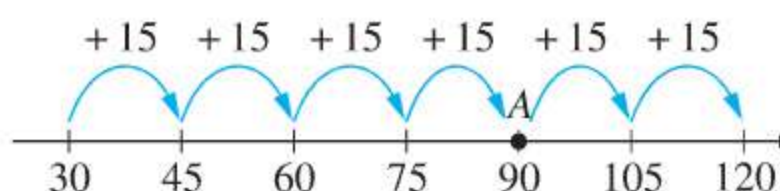
Odcinek o końcach w punktach o współrzędnych 30 i 120 został podzielony na 6 równych części.

Obliczymy, jaką długość ma każda z tych części.



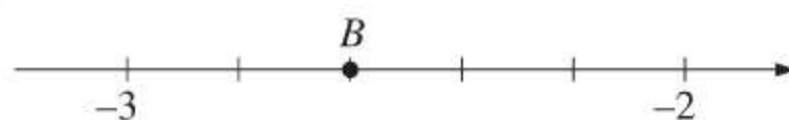
$$\frac{120 - 30}{6} = \frac{90}{6} = 15$$

Zaznaczymy brakujące współrzędne punktów na osi liczbowej.



Zatem $A = 90$.

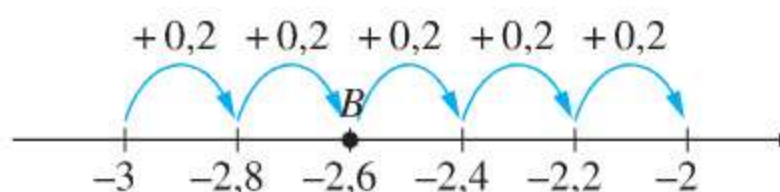
b)



Odcinek o końcach w punktach o współrzędnych (-3) i (-2) został podzielony na 5 równych części.

Każda z tych części ma długość $\frac{-2 - (-3)}{5} = \frac{-2 + 3}{5} = \frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0,2$.

Zaznaczymy brakujące współrzędne punktów na osi liczbowej.



Zatem $B = -2,6$.

Ćwiczenie 2.

Wyznacz współrzędną punktu zaznaczonego na osi liczbowej.

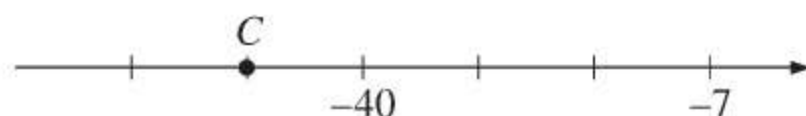
a)



b)



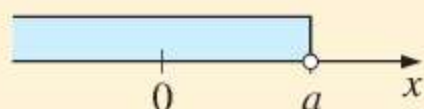
c)



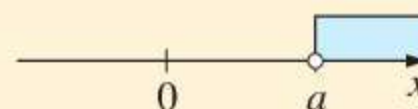
d)



Zbiór liczb spełniających warunek $x < a$, czyli zbiór liczb mniejszych od a .

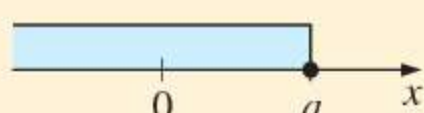


Zbiór liczb spełniających warunek $x > a$, czyli zbiór liczb większych od a .

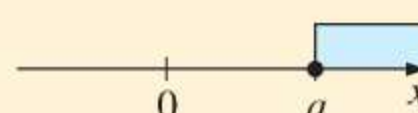


Niezamalowane kółko na osi liczbowej przy liczbie a oznacza, że liczba a nie należy do zbioru (nie spełnia podanego warunku).

Zbiór liczb spełniających warunek $x \leq a$, czyli zbiór liczb nie większych (mniejszych lub równych) od a .



Zbiór liczb spełniających warunek $x \geq a$, czyli zbiór liczb nie mniejszych (większych lub równych) od a .



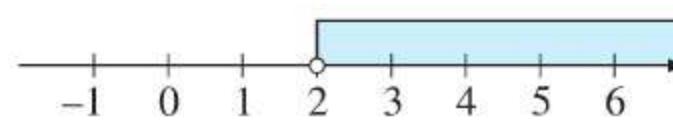
Zamalowane kółko na osi liczbowej przy liczbie a oznacza, że liczba a należy do zbioru (spełnia podany warunek).

Przykład 3.

Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających podany warunek.

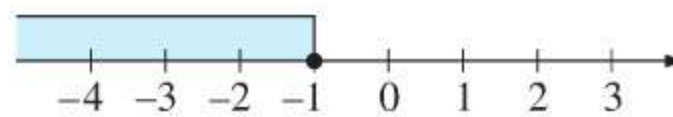
a) $x > 2$

Zaznaczymy na osi liczbowej liczby, które są większe od liczby 2. Liczba 2 nie spełnia podanego warunku, więc kółko przy tej liczbie jest niezamalowane.



b) $x \leq -1$

Zaznaczymy na osi liczbowej liczby, które są mniejsze od liczby (-1) lub równe liczbie (-1) . Liczba (-1) spełnia podany warunek, więc kółko przy tej liczbie jest zamalowane.



Ćwiczenie 3.

Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających podany warunek.

a) $x \geq 7$

b) $x < 0$

c) $x > -4$

d) $x \leq -6$

Przykład 4.

Zapisz warunek, który spełniają liczby zaznaczone na osi liczbowej.

a)



Na osi liczbowej zostały zaznaczone liczby mniejsze od liczby 10. Kółko przy liczbie 10 jest niezamalowane, zatem na osi liczbowej zaznaczono liczby spełniające warunek $x < 10$.

b)



Na osi liczbowej zostały zaznaczone liczby nie mniejsze od liczby (-8) . Kółko przy liczbie (-8) jest zamalowane, zatem na osi liczbowej zaznaczono liczby spełniające warunek $x \geq -8$.

Ćwiczenie 4.

Zapisz warunek, który spełniają liczby zaznaczone na osi liczbowej.

a)



b)



Rozwiąż zadania

1. Oblicz odległość na osi liczbowej między podanymi liczbami.

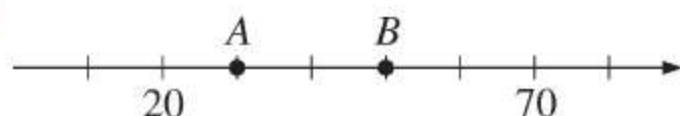
a) 12 i 31

b) -8 i -4,5

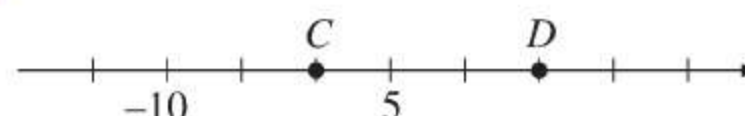
c) $-6\frac{2}{3}$ i $4\frac{5}{6}$

2. Wyznacz współrzędne punktów zaznaczonych na osi liczbowej.

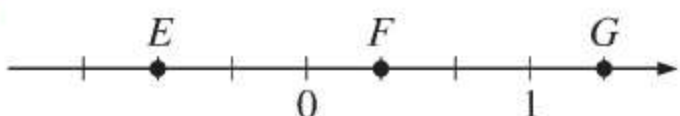
a)



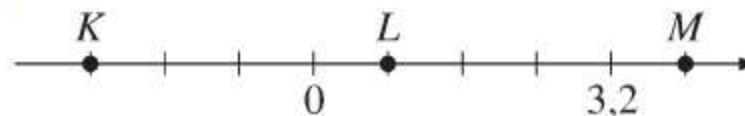
b)



c)



d)



3. Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej punkty o podanych współrzędnych.

a) $A = 35$; $B = -15$; $C = 10$

b) $K = 0,6$; $L = -0,9$; $M = -0,2$

c) $P = 2\frac{2}{3}$; $R = -1\frac{1}{3}$; $S = \frac{2}{3}$

4. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających podany warunek.

a) $x \leq 2$

b) $x > -5$

c) $x \geq 0$

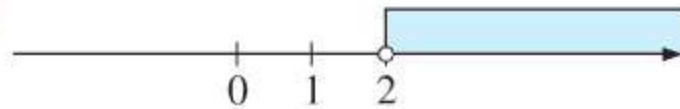
d) $x < \frac{7}{12}$

5. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek $x > 1,6$. Czy liczba przeciwna do liczby $(-1\frac{3}{5})$ należy do tego zbioru?

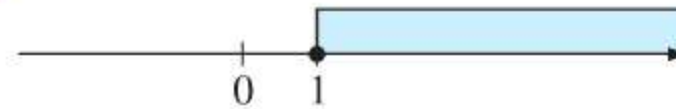
6. Wzdłuż ogrodzenia o długości 56 m postanowiono posadzić drzewa co 160 cm. Jacek zaczął sadzenie z jednego końca ogrodzenia i posadził 13 drzew, a Bruno, zaczynając z drugiego końca, posadził 11 drzew. Ile drzew jeszcze muszą posadzić?

7. Zapisz warunek, który spełniają liczby zaznaczone na osi liczbowej.

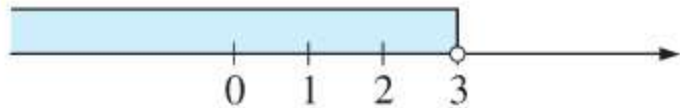
a)



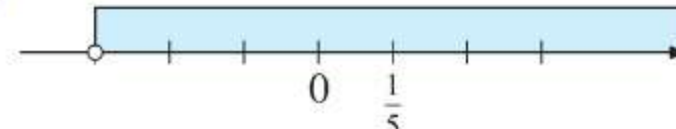
b)



c)



d)





8. Zaznacz na jednej osi liczbowej zbiór liczb spełniających podane warunki. Uzasadnij, że liczba $\sqrt{5}$ nie należy do tego zbioru.

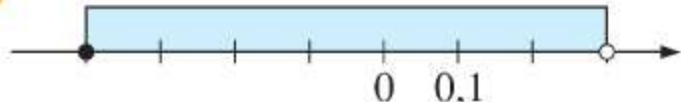
a) $x \geq -3$ i $x < 2$

b) $x > -2\frac{3}{4}$ i $x < 1\frac{1}{2}$

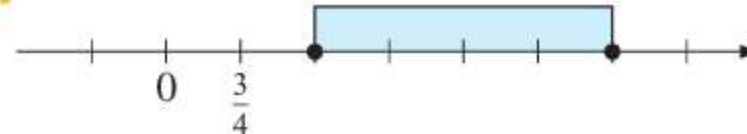


9. Zapisz warunki, które spełniają liczby zaznaczone na osi liczbowej.

a)



b)



Sprawdź, co umiesz!



1. Poniżej przedstawiono fragment osi liczbowej z zaznaczonymi punktami M , N , K i L . Odcinek ML został podzielony na sześć równych części. Współrzędne punktów M i K są odpowiednio równe 112 i 148.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Odległość między punktami N i L jest równa

A. 42

B. 45

C. 36

D. 30

2. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających podany warunek.

a) $x \leq 5$

b) $x < -30$

c) $x \geq -6$

d) $x > \frac{4}{5}$

3. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających podany warunek. Ile liczb całkowitych większych od -4 należy do tego zbioru?

a) $x \leq -2$

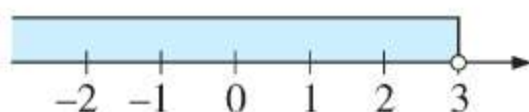
b) $x \leq 4\frac{1}{3}$

c) $x < -1$

d) $x \geq -4$



4. Na osi liczbowej zaznaczono zbiór liczb.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Wszystkie liczby zaznaczone na osi liczbowej spełniają warunek $x \leq 2$.	P	F
Odwrotność liczby $-3\frac{1}{2}$ należy do zbioru liczb zaznaczonego na osi.	P	F

2. Punkty kratowe w układzie współrzędnych

- ▶ Zapisywanie współrzędnych punktów kratowych w układzie współrzędnych na płaszczyźnie
- ▶ Zaznaczanie w układzie współrzędnych punktów kratowych
- ▶ Znajdowanie punktów kratowych należących do prostej przechodzącej przez punkty kratowe

Aby w jednoznaczny sposób określić położenie obiektu na pewnym obszarze, powinniśmy podzielić ten obszar w sposób uporządkowany, np. na wiersze i kolumny. Z takim podziałem spotykamy się na mapach, w grach planszowych, na parkingu, w teatrze czy w kinie.

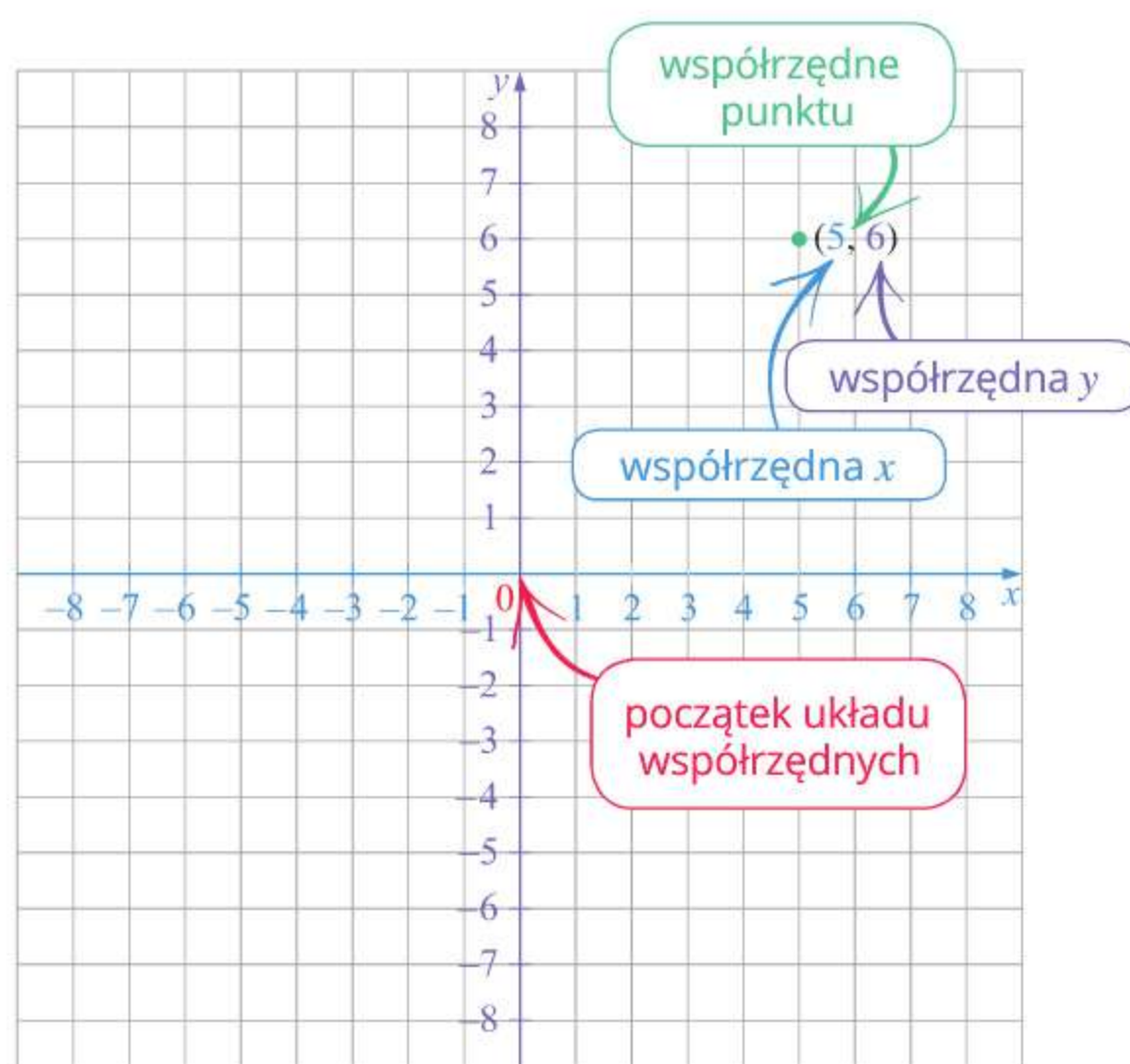
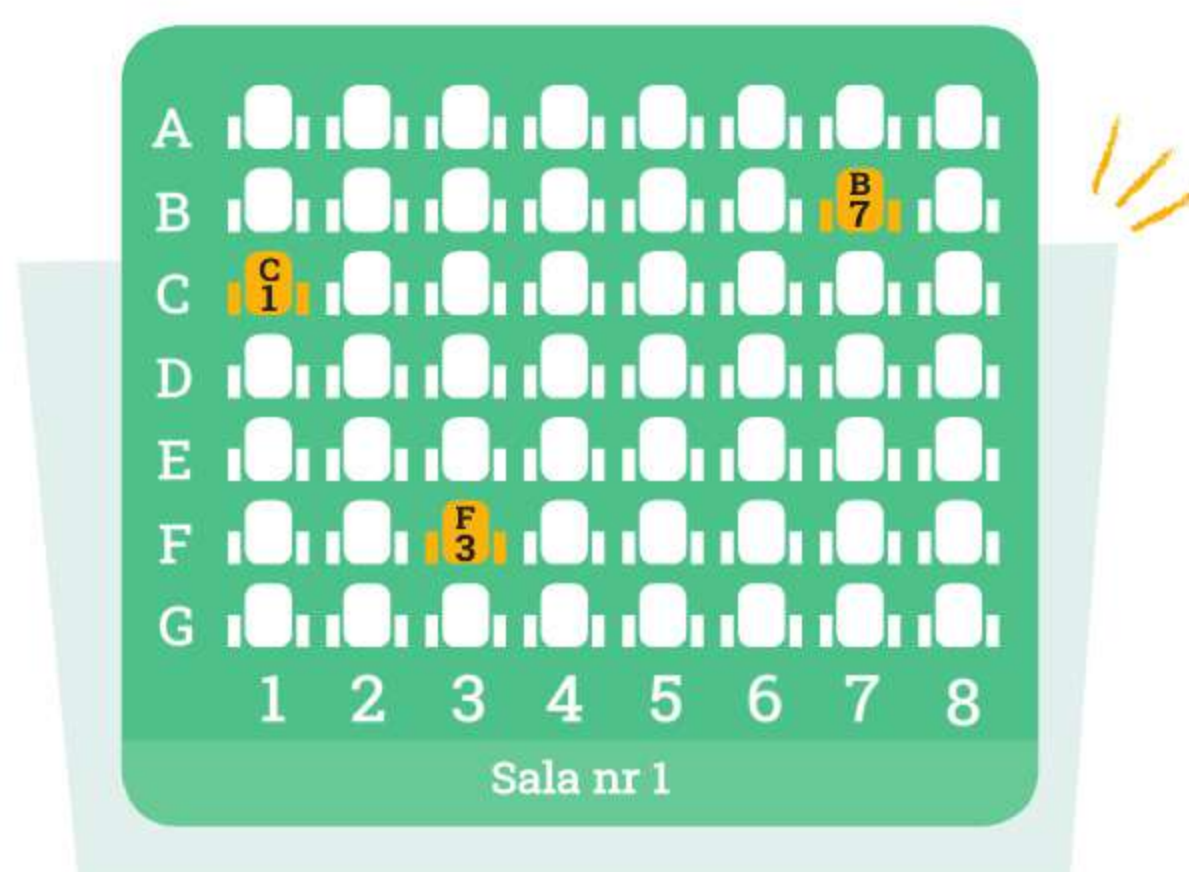
Na ilustracji przedstawiono plan kina. W poziomie odczytujemy numer miejsca, a w pionie oznaczenie literowe rzędu, w którym to miejsce się znajduje.

W matematyce, aby precyzyjnie określić położenie punktu na płaszczyźnie, korzystamy z prostokątnego układu współrzędnych.

Prostokątny układ współrzędnych (kartezjański układ współrzędnych) wyznaczają dwie prostopadłe osie liczbowe, które mają wspólny początek w punkcie O (**początek układu współrzędnych**).

Oś pozioma to oś x , natomiast oś pionowa to oś y . Na każdej osi określamy jednostkę.

Położenie punktu na płaszczyźnie z układem współrzędnych określa para liczb (x, y) , które nazywamy **współrzednymi punktu**. Współrzędna x jest pierwszą współrzedną, a współrzędna y – drugą. Początek układu współrzędnych ma współrzędne $(0, 0)$.

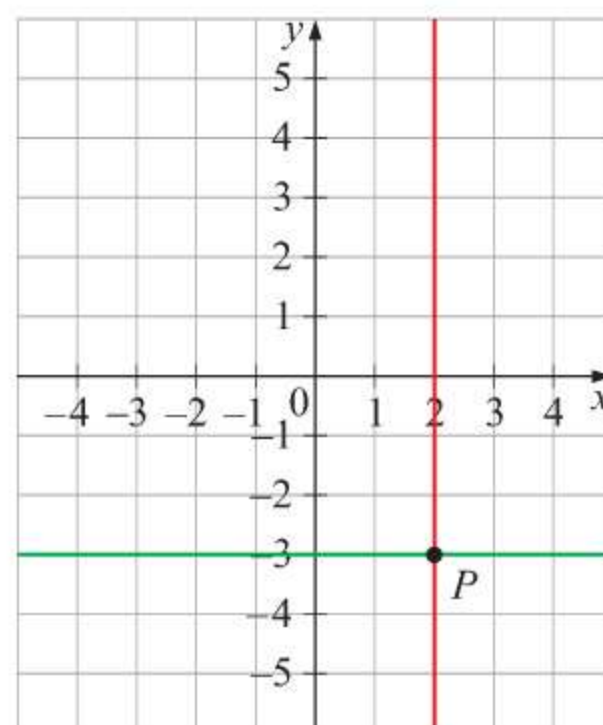


Przykład 1.

Zapisz współrzędne punktu P zaznaczonego w układzie współrzędnych.

Pierwszą współrzędną punktu P jest współrzędna x . Narysujemy w układzie współrzędnych **pionową prostą**, która przechodzi przez punkt P i jest prostopadła do osi x .

Drugą współrzędną punktu P jest współrzędna y . Narysujemy w układzie współrzędnych **poziomą prostą**, która przechodzi przez punkt P i jest prostopadła do osi y .

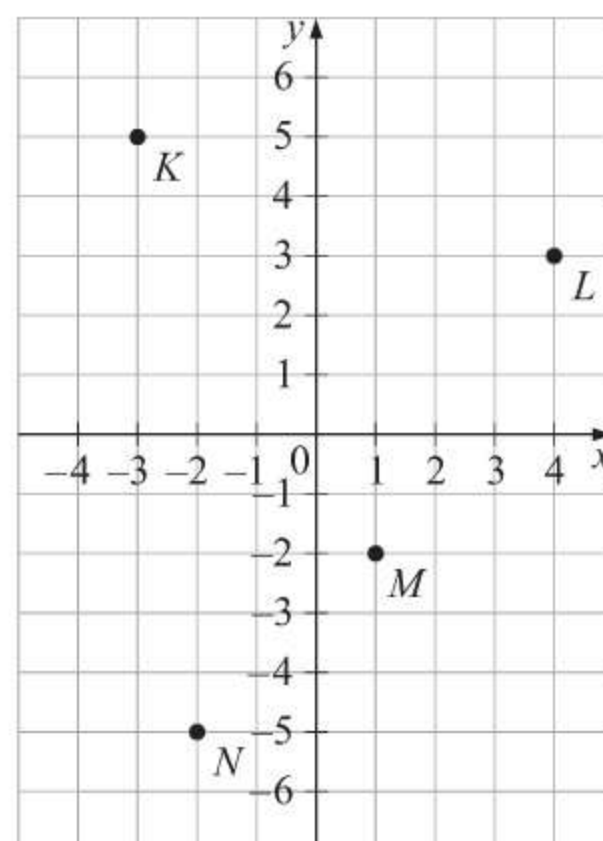


Z rysunku możemy odczytać, że pionowa prosta przecina oś x w punkcie 2, a pozioma prosta przecina oś y w punkcie (-3) . Zatem $P = (2, -3)$, co czytamy: *punkt P ma współrzędne 2 i -3 .*

Ćwiczenie 1.

Odczytaj współrzędne punktów: K , L , M oraz N zaznaczonych w układzie współrzędnych i odpowiedz na pytanie.

- a) Pierwsza współrzędna, którego punktu jest największa?
- b) Druga współrzędna, którego punktu jest najmniejsza?
- c) Pierwsze współrzędne, których punktów są większe od -2 ?
- d) Drugie współrzędne, których punktów są ujemne?
- e) Pierwsze współrzędne, których dwóch punktów różnią się o 3?



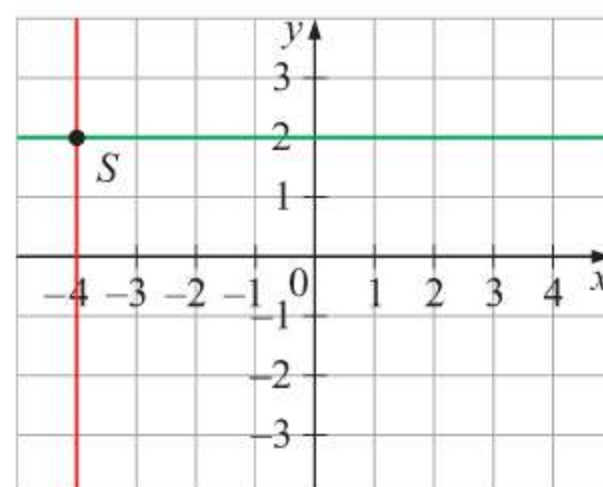
Przykład 2.

Zaznacz w układzie współrzędnych punkt $S = (-4, 2)$.

Narysujemy układ współrzędnych.

Pierwszą współrzędną punktu S jest (-4) . Narysujemy w układzie współrzędnych **pionową prostą**, która jest prostopadła do osi x i przecina ją w punkcie (-4) .

Drugą współrzędną punktu S jest 2. Narysujemy w układzie współrzędnych **poziomą prostą**, która jest prostopadła do osi y i przecina ją w punkcie 2.

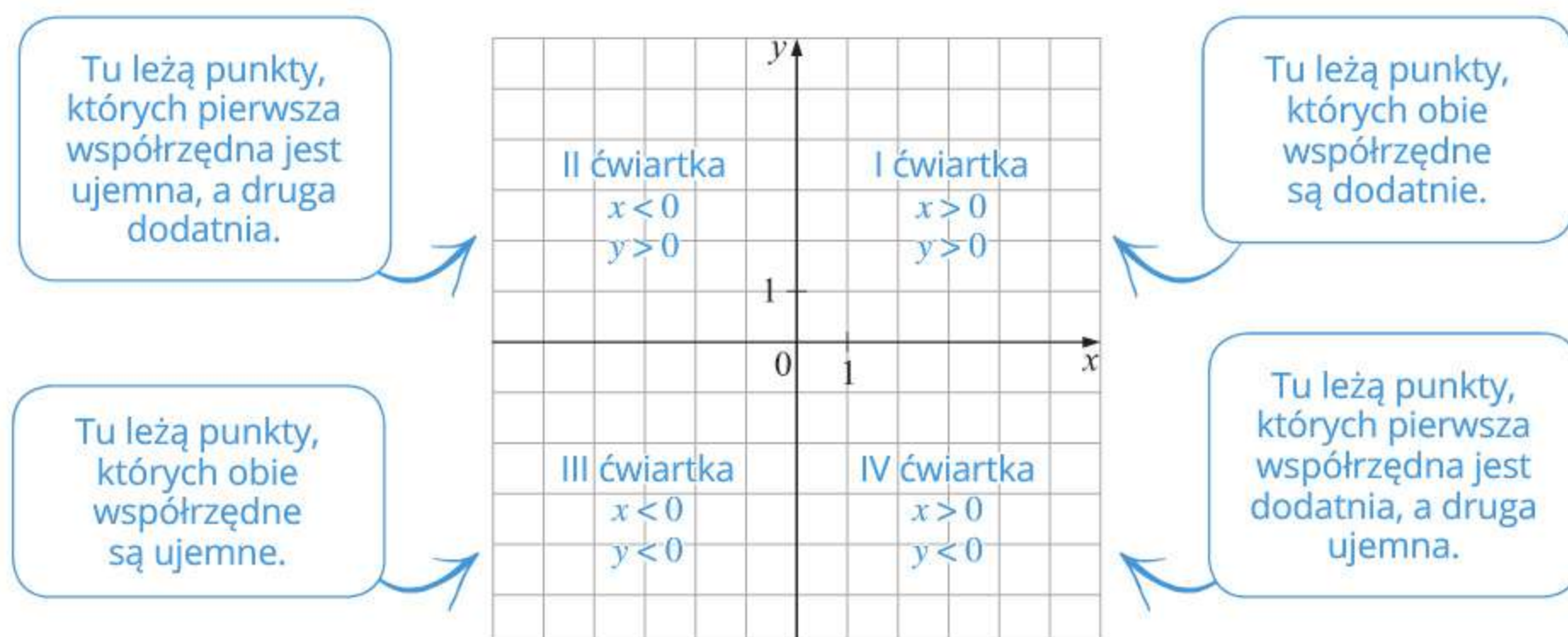


Punkt $S = (-4, 2)$ to punkt przecięcia pionowej prostej oraz poziomej prostej.

Ćwiczenie 2.

Zaznacz w układzie współrzędnych punkty: $A = (1, 5)$, $B = (-2, 0)$, $C = (-4, -3)$, $D = (0, -5)$.

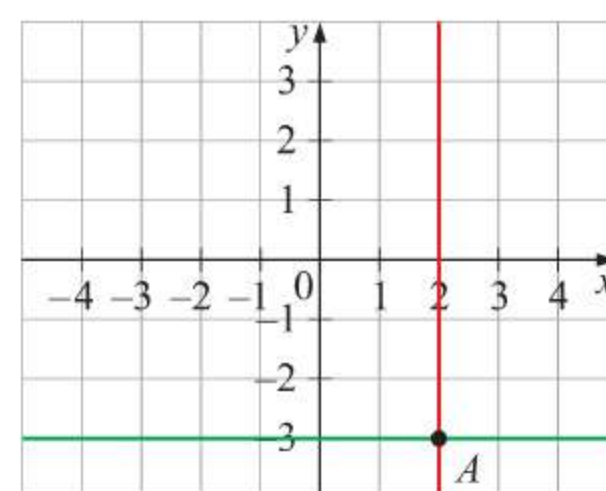
Osie układu współrzędnych dzielą płaszczyznę na cztery części (I, II, III, IV), które nazywamy **ćwiartkami układu współrzędnych**. Punkty leżące na osi x lub osi y nie należą do żadnej ćwiartki.



Przykład 3.

Ustal, w której ćwiartce układu współrzędnych leży punkt $A = (2, -3)$.

Aby ustalić, w której ćwiartce układu współrzędnych leży punkt $A = (2, -3)$, zaznaczmy go w układzie współrzędnych.



Zatem punkt $A = (2, -3)$ leży w IV ćwiartce układu współrzędnych.

Ćwiczenie 3.

Ustal, w której ćwiartce układu współrzędnych leży podany punkt.

a) $P = (-1, 6)$

b) $R = (12, 7)$

c) $S = (10, -11)$

d) $T = (-9, -2)$

A to ciekawe

Kartezjusz, czyli René Descartes (czyt. Rene Dekart), był francuskim filozofem, matematykiem, fizykiem oraz jednym z najwybitniejszych uczonych XVII w. Według legendy Kartezjusz jako dziecko często chorował i musiał leżeć w łóżku. Czas ten wykorzystywał na myślenie i obserwacje. Pewnego dnia obserwował muchę latającą przy szybach okna. Zauważył, że punkty, w których mucha wylądowała, można wykorzystać do określenia jej położenia na płaszczyźnie. Napisany przez Kartezjusza traktat *La géométrie* przedstawiał oryginalny pomysł przypisania każdemu punktowi na płaszczyźnie dwóch liczb – współrzędnych. Stało się to początkiem upowszechnienia układu współrzędnych zwanego od nazwiska jego wynalazcy układem kartezjańskim.



René Descartes



Punkty kratowe to punkty w układzie współrzędnych, których obie współrzędne są liczbami całkowitymi.

Punkty należące do jednej prostej nazywamy **punktami współliniowymi**.

Przykład 4.

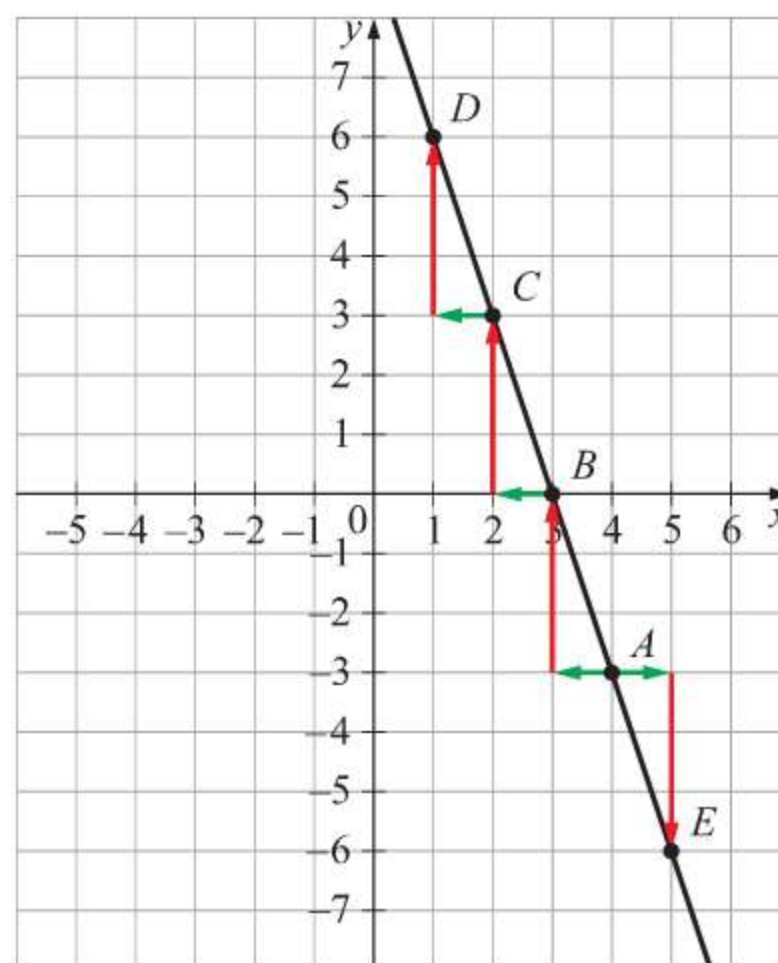
Zaznacz w układzie współrzędnych punkty $A = (4, -3)$ oraz $B = (3, 0)$. Przez punkty A i B poprowadź prostą. Podaj współrzędne trzech innych punktów kratowych, które należą do prostej AB .

Zaznaczymy w układzie współrzędnych punkty $A = (4, -3)$ i $B = (3, 0)$, a następnie przeprowadzimy przez nie prostą.

Aby dotrzeć z punktu A do punktu B , musimy przemieścić się o **1 jednostkę w lewo** i o **3 jednostki w górę**.

Podobnie, aby dotrzeć z punktu B do punktu C , musimy przemieścić się o **1 jednostkę w lewo** i o **3 jednostki w górę**. Postępując analogicznie, możemy wyznaczyć współrzędne punktu D .

Aby dotrzeć z punktu A do punktu E , musimy przemieścić się o **1 jednostkę w prawo** i o **3 jednostki w dół**.



Odp. Przykładowymi punktami kratowymi leżącymi na prostej AB są: $C = (2, 3)$, $D = (1, 6)$ i $E = (5, -6)$.

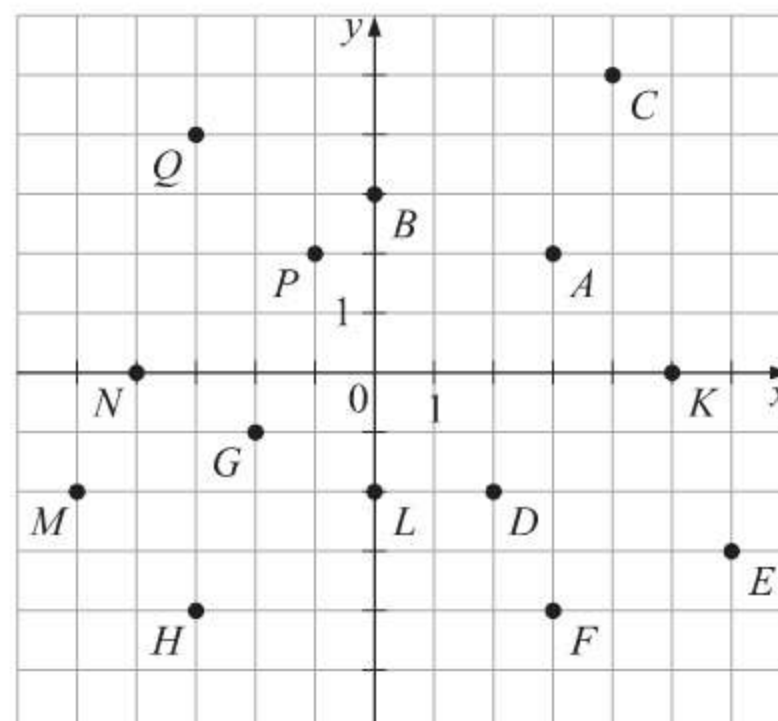
Ćwiczenie 4.

Zaznacz w układzie współrzędnych punkty $F = (-5, 7)$ oraz $G = (-3, 3)$. Przez punkty F i G poprowadź prostą. Podaj współrzędne trzech innych punktów kratowych, które należą do prostej FG .

Rozwiąż zadania

1. Odczytaj współrzędne zaznaczonych punktów i odpowiedz na pytanie.

- Których punktów współrzędne są liczbami o różnych znakach? Do której ćwiartki należą te punkty?
- Których punktów współrzędne są liczbami o tych samych znakach? Do której ćwiartki należą te punkty?



2. Narysuj układ współrzędnych i zaznacz w nim punkty: $A = (3, -2)$, $B = (-2, 0)$, $C = (0, -3)$, $D = (0, 0)$, $E = (-3, -1)$, $F = (2, 2)$, $G = \left(-1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$, $H = \left(0, 1\frac{1}{2}\right)$.

3. Zaznacz w układzie współrzędnych po trzy punkty, których współrzędne spełniają podane warunki.

- a) Obie współrzędne są liczbami nieparzystymi.
- b) Druga współrzędna jest o 2 większa od pierwszej współrzędnej.
- c) Pierwsza współrzędna jest trzy razy większa od drugiej współrzędnej.
- d) Druga współrzędna jest liczbą przeciwną do pierwszej współrzędnej.
- e) Współrzędna x jest liczbą podzielną przez 3, a współrzędna y jest liczbą pierwszą.

4. Punkty $A = (-1, 1)$ i $B = (2, 3)$ są dwoma kolejnymi wierzchołkami czworokąta $ABCD$. Zaznacz w układzie współrzędnych punkty A i B oraz takie punkty C i D , aby czworokąt $ABCD$ był kwadratem. Odczytaj współrzędne punktów C i D . Ile par takich punktów można wskazać? Podaj wszystkie możliwości.

5. Dane są punkty $K = (-3, -2)$ i $L = (1, 4)$. Podaj współrzędne punktu kratowego współliniowego z punktami K i L , który leży

- a) w II ćwiartce układu współrzędnych,
- b) w III ćwiartce układu współrzędnych.

6. Dane są punkty $P = (-1, -2)$, $R = (3, 2)$ i $S = (-3, 2)$.

- a) Podaj współrzędne punktu Q , jeśli czworokąt $PQRS$ jest trapezem prostokątnym.
- b) Uzasadnij, że do odcinka PR należy 5 punktów kratowych.

Informacje do zadań 7. i 8.

Punkty $K = (-1, 2)$, $L = (5, 2)$, $M = (6, 6)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $KLMN$.

7. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Punkt N ma współrzędne

A	B
---	---

.

A. $(6, 0)$

B. $(0, 6)$

Punkt K leży w

C	D
---	---

 ćwiartce układu współrzędnych.

C. pierwszej

D. drugiej

8. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Punktami kratowymi należącymi do prostej LM są punkty o współrzędnych

- A.** $(5, 2)$ i $(7, 9)$. **B.** $\left(5\frac{1}{2}, 4\right)$ i $(3, -6)$. **C.** $(4, -2)$ i $(7, 10)$. **D.** $(6, 6)$ i $\left(4\frac{1}{2}, 0\right)$.

9. Punkty $A = (-4, 1)$ i $B = (2, 1)$ są końcami odcinka, który jest podstawą trójkąta równoramiennego ABC .

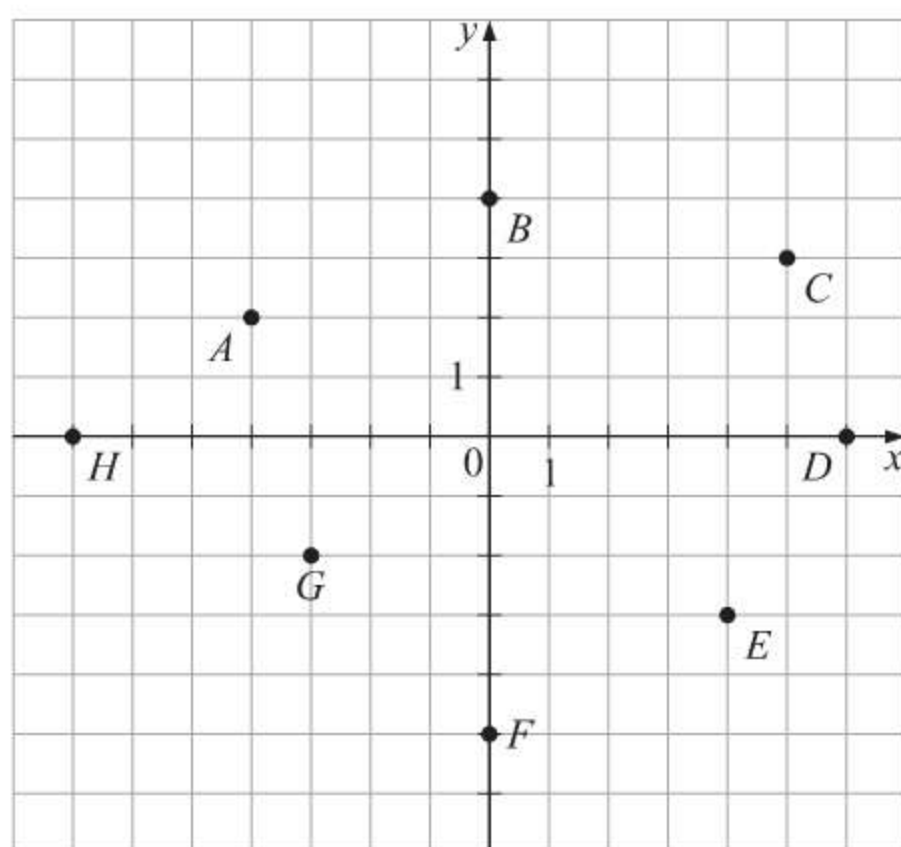


- a) Ile jest równa pierwsza współrzędna punktu C ?
b) Ustal współrzędne punktu C , tak aby trójkąt ABC był trójkątem prostokątnym równoramiennym. Podaj wszystkie możliwości.

Sprawdź, co umiesz!



1. Odczytaj współrzędne zaznaczonych punktów. Wskaż punkt, którego suma obu współrzędnych jest ujemna. Ile jest takich punktów?



2. Zaznacz w każdej ćwiartce układu współrzędnych po dwa punkty, których różnica odpowiednich współrzędnych jest równa 3.

3. Punkty $A = (-4, -2)$, $B = (2, -2)$, $C = (2, 4)$ są kolejnymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$.

- a) Podaj współrzędne wierzchołka D .
b) Zapisz współrzędne wszystkich punktów kratowych należących do przekątnej AC .

E

4. Punkty $P = (5, 1)$ i $R = (-3, 4)$ są przeciwległymi wierzchołkami prostokąta $PQRS$. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. Punkty Q i S mają współrzędne

- A. $Q = (4, 5)$, $S = (-3, 1)$ B. $Q = (5, 4)$, $S = (1, -3)$
C. $Q = (5, 4)$, $S = (-3, 1)$ D. $Q = (4, 5)$, $S = (1, -3)$

3. Środek odcinka

- ▶ Obliczanie współrzędnych środka odcinka
- ▶ Obliczanie współrzędnych drugiego końca odcinka, gdy dany jest jego jeden koniec i środek

Przykład 1.

Na osi liczbowej dane są punkty $A = -3$ i $B = 5$. Wyznacz współrzędną środka S odcinka AB .

Sposób I

Narysujemy oś liczbową i zaznaczymy na niej punkty A i B .

Odległość między punktami A i B wynosi $5 - (-3) = 5 + 3 = 8$. Połowa tej odległości to $8 : 2 = 4$.

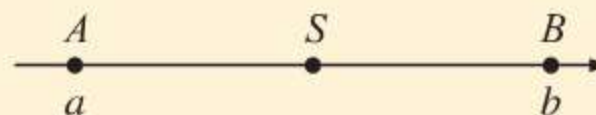
Zatem jeśli z punktu A przesuniemy się w prawo o 4 odcinki jednostkowe, a z punktu B – w lewo o 4 odcinki jednostkowe, to otrzymamy punkt leżący na osi liczbowej dokładnie pośrodku odcinka AB , czyli środek S odcinka AB .



Współrzędna środka odcinka na osi liczbowej jest średnią arytmetyczną współrzędnych końców tego odcinka.

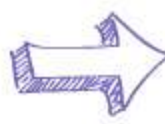
Środek odcinka o końcach w punktach $A = a$ i $B = b$ wyrażony jest wzorem

$$S = \frac{a+b}{2}$$



Sposób II

Aby wyznaczyć współrzędną środka S odcinka AB , obliczymy średnią arytmetyczną współrzędnych jego końców, czyli sumę współrzędnych jego końców podzielimy przez 2.


$$S = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Odp. Środek odcinka AB to punkt $S = 1$.

Ćwiczenie 1.

Na osi liczbowej dane są punkty A i B . Wyznacz współrzędną środka S odcinka AB .

a) $A = -8, B = 16$

b) $A = -20, B = 20$

c) $A = -1\frac{1}{3}, B = 2\frac{1}{2}$

d) $A = 2\sqrt{3}, B = 10\sqrt{3}$

Przykład 2.

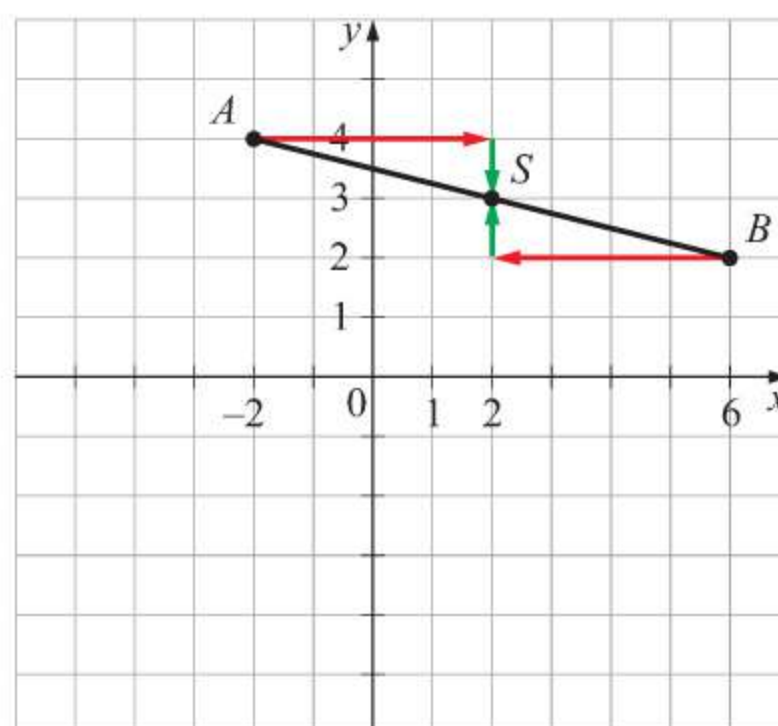
W układzie współrzędnych dane są punkty $A = (-2, 4)$ oraz $B = (6, 2)$. Wyznacz współrzędne środka S odcinka AB .

Sposób I

Narysujemy układ współrzędnych i zaznaczymy w nim punkty A i B .

Odległość między współrzędnymi x punktów A i B wynosi $6 - (-2) = 6 + 2 = 8$. Połowa tej odległości to $8 : 2 = 4$. Zatem jeśli z punktu A przesuniemy się **w prawo o 4 odcinki jednostkowe**, a z punktu B – **w lewo o 4 odcinki jednostkowe**, to otrzymamy współrzędną x środka S .

Odległość między współrzędnymi y punktów A i B wynosi $4 - 2 = 2$. Połowa tej odległości to $2 : 2 = 1$. Zatem jeśli z punktu A przesuniemy się **w dół o 1 odcinek jednostkowy**, a z punktu B – **w górę o 1 odcinek jednostkowy**, to otrzymamy współrzędną y środka S .

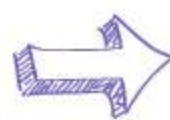


Współrzędne punktu $S = (x_S, y_S)$ będącego **środkiem odcinka AB** , gdzie $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, obliczamy ze wzorów:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Sposób II

Obliczymy współrzędną x środka S , korzystając ze wzoru: $x_S = \frac{x_A + x_B}{2}$, gdzie $x_A = -2$, a $x_B = 6$.



$$x_S = \frac{-2 + 6}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Obliczymy współrzędną y środka S , korzystając ze wzoru: $y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$, gdzie $y_A = 4$, a $y_B = 2$.



$$y_S = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Odp. Środkiem odcinka AB jest punkt $S = (2, 3)$.

Ćwiczenie 2.

W układzie współrzędnych dane są punkty A i B . Wyznacz współrzędne środka S odcinka AB .

a) $A = (10, -4)$, $B = (22, 12)$

b) $A = \left(\frac{1}{2}, -5\right)$, $B = (3, 5)$

c) $A = \left(-1, -4\frac{1}{2}\right)$, $B = \left(-\frac{3}{5}, -2\frac{1}{2}\right)$

Przykład 3.

Punkt $S = (-2, 9)$ jest środkiem odcinka AB . Wyznacz współrzędne punktu B , jeśli $A = (-6, 12)$.

Aby wyznaczyć współrzędne punktu B , skorzystamy z tego, że $x_S = \frac{x_A + x_B}{2}$ oraz $y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Wiemy, że

$$S = (-2, 9) \quad \text{oraz} \quad A = (-6, 12).$$


Aby wyznaczyć współrzędne punktu B , ułożymy i rozwiążemy dwa równania, w których niewiadomymi będą x_B oraz y_B .



$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$-2 = \frac{-6 + x_B}{2} \quad | \cdot 2$$

$$-4 = -6 + x_B$$

$$x_B = -4 + 6 = 2$$

$$y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$9 = \frac{12 + y_B}{2} \quad | \cdot 2$$

$$18 = 12 + y_B$$

$$y_B = 18 - 12 = 6$$

Odp. Drugi koniec odcinka AB to punkt $B = (2, 6)$.

Ćwiczenie 3.

Punkt S jest środkiem odcinka AB . Wyznacz współrzędne punktu B , jeśli:

a) $S = (-24, 16)$, $A = (28, -6)$,

b) $S = \left(7\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$, $A = \left(10, -1\frac{1}{9}\right)$.

Rozwiąż zadania

1. Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej punkty A i B . Wyznacz współrzędną środka odcinka AB .

a) $A = 13$, $B = 25$

b) $A = -1$, $B = 6$

c) $A = 4$, $B = -7$

d) $A = -6$, $B = 6$

e) $A = -11$, $B = -7$

f) $A = -23$, $B = -12$

2. Na osi liczbowej dane są punkty A i S . Znajdź współrzędną punktu B , wiedząc, że punkt S jest środkiem odcinka AB .

a) $A = 3$, $S = 6$

b) $A = -5$, $S = 1$

c) $A = -4$, $S = -2$

d) $A = \frac{1}{6}$, $S = \frac{2}{3}$

3. Oblicz współrzędne punktu S , który jest środkiem odcinka AB .

a) $A = (13, 5)$, $B = (17, 31)$

b) $A = (-4, -7)$, $B = (-3, -1)$

c) $A = (2, -5)$, $B = (-6, 1)$

d) $A = \left(1\frac{1}{2}, 5\right)$, $B = \left(2, 3\frac{1}{2}\right)$

4. Środek odcinka o końcach w punktach $A = (a, a)$ i $B = (3a, 3a)$ ma współrzędne $(8, 8)$. Oblicz wartość a .

- 5.** Zosia gra z Polą w grę Środek odcinka. Każda z dziewcząt oznaczyła pinezkami w swoim układzie współrzędnych 4 punkty. Zadaniem pierwszej osoby jest podanie wskazówki drugiej osobie, tak aby mogła ona odgadnąć, jaki punkt kryje się pod daną pinezką. Wygrywa ta osoba, która poprawnie określi współrzędne większej liczby punktów. Na rysunku przedstawiono przykładową rozgrywkę.

ŚRODEK ODCINKA

GRACZZOSIA



Jaki kolor pinezki wybierasz?

Niebieski.

Ten punkt to środek odcinka o końcach w punktach $(0, -2)$ i $(4, 2)$.

Ten punkt ma współrzędne $(2, 0)$.

Świetnie!

ŚRODEK ODCINKA

GRACZPOLA



- a)** Pola opisała Zosi jeden z punktów w następujący sposób: Ten punkt to środek odcinka, którego początkiem jest początek układu współrzędnych, a końcem – punkt $(6, 0)$. Wyznacz współrzędne tego punktu, korzystając ze wzoru na środek odcinka.
- b)** W jaki sposób Zosia mogła opisać Poli punkt oznaczony czerwoną pinezką, a jak zieloną?

- 6.** Punkt S jest środkiem odcinka KL . Znając współrzędne jednego z końców odcinka, oblicz współrzędne drugiego końca tego odcinka.

a) $S = (-4, 12)$, $L = (8, -4)$

b) $S = (-100, 230)$, $K = (140, -300)$

c) $S = \left(-2\frac{1}{2}, 12\right)$, $K = \left(3\frac{1}{2}, 27\right)$

d) $S = \left(-1\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, $L = \left(-1\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)$

- 7.** Punkty $A = (-2, 6)$ i $C = (4, -4)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Oblicz współrzędne punktu S , który jest punktem przecięcia przekątnych tego kwadratu.

- 8.** Punkt $P = (4, -5)$ jest punktem przecięcia przekątnych rombu $KLMN$. Wiedząc, że punkt K ma współrzędne $(-1, -7)$, oblicz współrzędne wierzchołka przeciwległego do wierzchołka K .

- 9.** Dane są punkty: A, B, C, D, E . Punkt C jest środkiem odcinka AB , a punkt E środkiem odcinka CD . Wiemy, że: $A = (-6, -2)$, $C = (-2, 1)$, $D = (10, 10)$. Oblicz współrzędne punktów B i E .

- 10.** Punkty $A = (0, 0)$ i $B = (3, 2)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Przekątne tego równoległoboku przecinają się w punkcie $S = (2, -2)$. Uzasadnij, że $C = (4, -4)$ i $D = (1, -6)$.

- 11.** Dane są punkty: $S = (-3, 1)$, $P = \left(2a + 1, \frac{-b-2}{3}\right)$ i $Q = (-4, 1)$. Sprawdź, dla jakich wartości a i b punkt S jest środkiem odcinka PQ .

- 12.** Odcinek AC , gdzie $A = (-3, -2)$, $C = (-3, 8)$, jest przekątną rombu $ABCD$. Podaj współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu, które są punktami kratowymi. Czy punkt o współrzędnych $(-3, 3)$ może być wierzchołkiem tego rombu? Ile rozwiązań ma to zadanie? Jakie warunki muszą spełniać współrzędne wierzchołków B i D ?

Sprawdź, co umiesz!

- 1.** Narysuj w układzie współrzędnych trójkąt o wierzchołkach $A = (-3, 1)$, $B = (2, 4)$ i $C = (0, -4)$. Oblicz współrzędne środków boków tego trójkąta.

- 2.** Punkt S jest środkiem odcinka CD . Oblicz nieznane współrzędne jednego z punktów.

a) $C = (1, -3)$, $D = (-3, -2)$ **b)** $S = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, $C = (3, -5)$ **c)** $S = \left(\frac{2}{3}, -1\right)$, $D = (-3, 2)$

- 3.** Odcinek AB jest podstawą trójkąta równoramiennego ABC , a odcinek CD jest jego wysokością. Wiadomo, że $A = (5, -2)$ i $B = (-7, 4)$.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Punkt C nie może znajdować się w ćwiartce. **A.** drugiej **B.** czwartej

Pierwsza współrzędna punktu D jest równa . **C.** 1 **D.** -1

- 4.** Punkty $K = (-3, 0)$ i $L = (0, 1)$ są kolejnymi wierzchołkami rombu $KLMN$. Przekątne rombu przecinają się w punkcie $S = (-1, 2)$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Druga współrzędna wierzchołka M jest równa 1.	P	F
Środek boku LM to punkt $\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$.	P	F

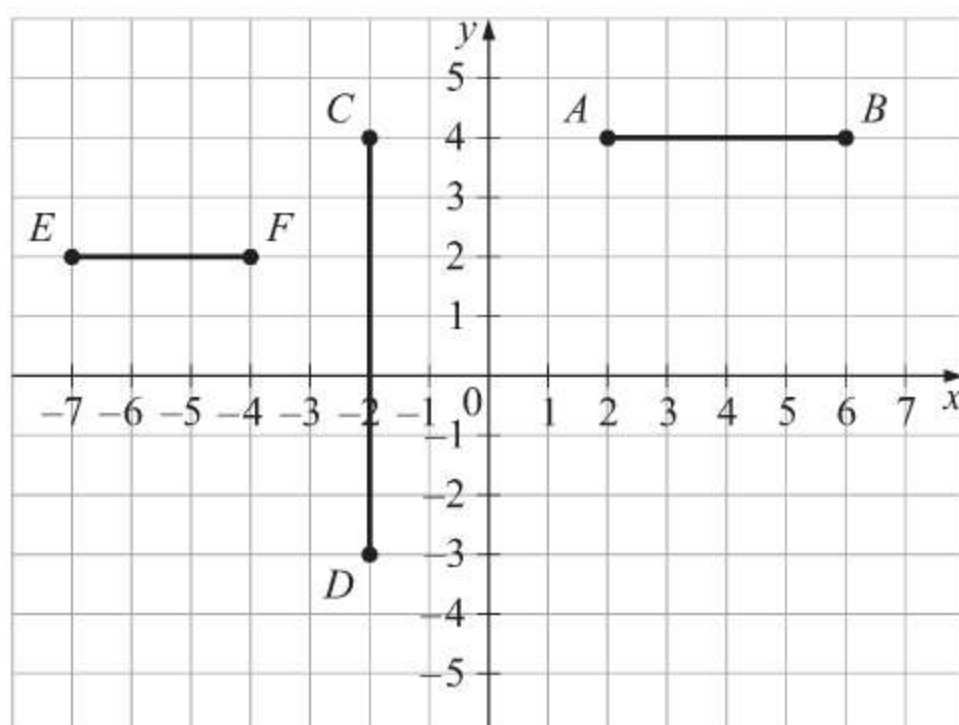
4. Odległość w układzie współrzędnych

- ▶ Obliczanie długości odcinka, którego końcami są punkty kratowe w układzie współrzędnych

W życiu codziennym, gdy spytamy o odległość między dwoma miastami, jedna osoba poda tę odległość w linii prostej, a inna – długość drogi łączącej te miasta. W matematyce odległość między dwoma punktami na płaszczyźnie to **długość odcinka**, którego końcami są te punkty.

Przykład 1.

Oblicz długości odcinków: AB , CD i EF .



Odcinek AB ma współrzędne $A = (2, 4)$ i $B = (6, 4)$.

Odcinek AB jest równoległy do osi x . Aby obliczyć jego długość, od współrzędnej x punktu B odejmiemy współrzędną x punktu A , ponieważ zawsze od większej współrzędnej odejmujemy mniejszą.



$$|AB| = 6 - 2 = 4$$

Analogicznie możemy obliczyć długość odcinka EF , gdzie $E = (-7, 2)$ i $F = (-4, 2)$.



$$|EF| = -4 - (-7) = -4 + 7 = 3$$

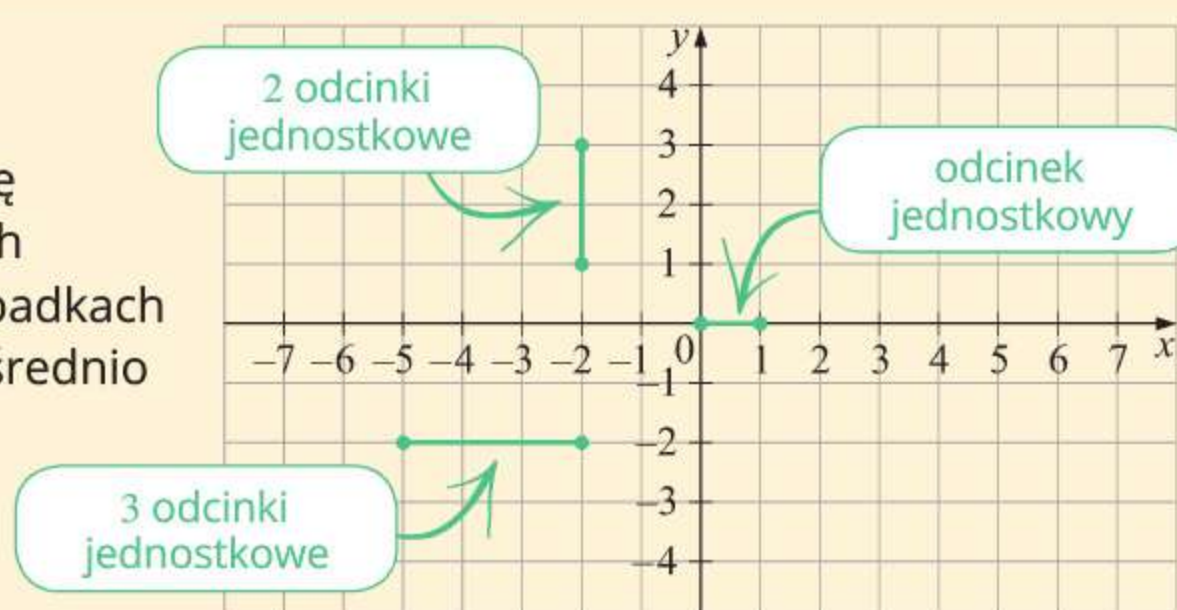
Końce odcinka CD mają współrzędne $C = (-2, 4)$ i $D = (-2, -3)$.

Odcinek CD jest równoległy do osi y . Aby obliczyć jego długość, od współrzędnej y punktu C odejmiemy współrzędną y punktu D , ponieważ zawsze od większej współrzędnej odejmujemy mniejszą.



$$|CD| = 4 - (-3) = 4 + 3 = 7$$

Długość odcinka wyraża się w jednostkach zaznaczonych na osiach. W prostych przypadkach możemy ją odczytać bezpośrednio z układu współrzędnych.



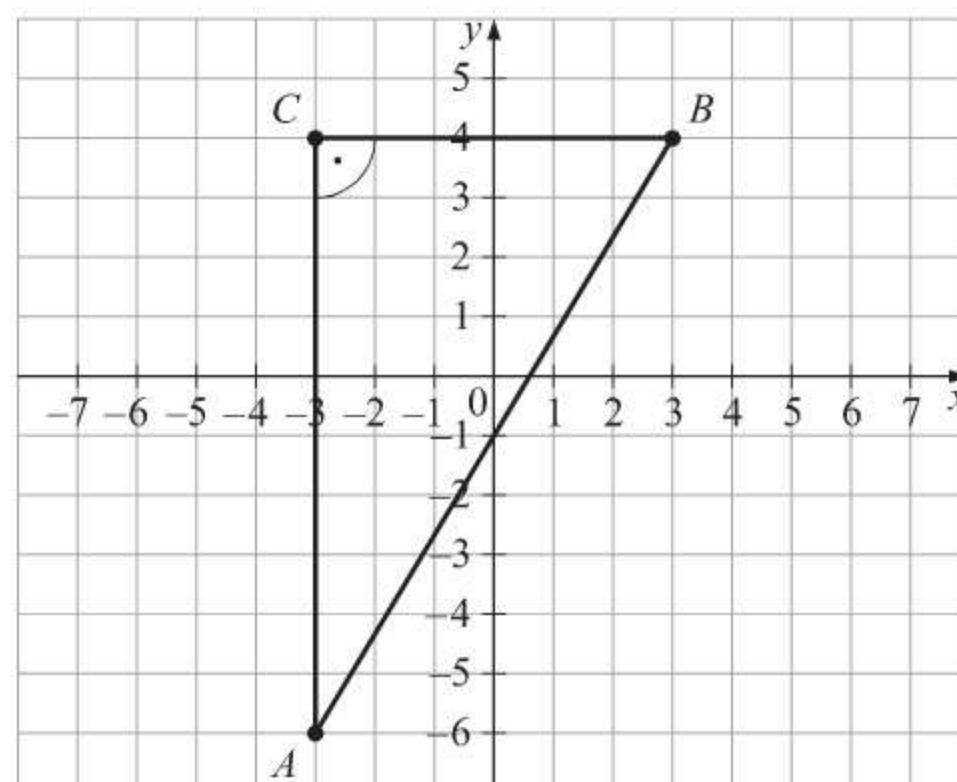
Ćwiczenie 1.

Narysuj układ współrzędnych i zaznacz w nim punkty: $A = (-1, 1)$, $B = (2, 1)$, $C = (0, -3)$, $D = (0, -1)$, $E = (-3, 0)$ oraz $F = (-2, 0)$. Oblicz długości odcinków: AB , CD i EF .

Przykład 2.

Uzasadnij, że długość odcinka AB wynosi $2\sqrt{34}$.

Możemy zauważyć, że odcinek AC jest równoległy do osi y , a odcinek BC – do osi x , więc odcinki AC i BC są prostopadłe. Zatem trójkąt ABC jest prostokątny. Odcinki AC i BC są jego przyprostokątnymi, a odcinek AB jest jego przeciwprostokątną. Aby obliczyć długość odcinka AB , skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa.



Odczytamy współrzędne punktów:

$A = (-3, -6)$, $B = (3, 4)$, $C = (-3, 4)$. Obliczymy długości odcinków AC i BC .



$$|AC| = 4 - (-6) = 4 + 6 = 10$$

$$|BC| = 3 - (-3) = 3 + 3 = 6$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczymy długość odcinka AB . Ponieważ $|AB|$ jest długością odcinka, to musi wyrażać się za pomocą liczby dodatniej.



$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$$

$$10^2 + 6^2 = |AB|^2$$

$$100 + 36 = |AB|^2$$

$$|AB|^2 = 136$$

$$|AB| = \sqrt{136} = \sqrt{4 \cdot 34}$$

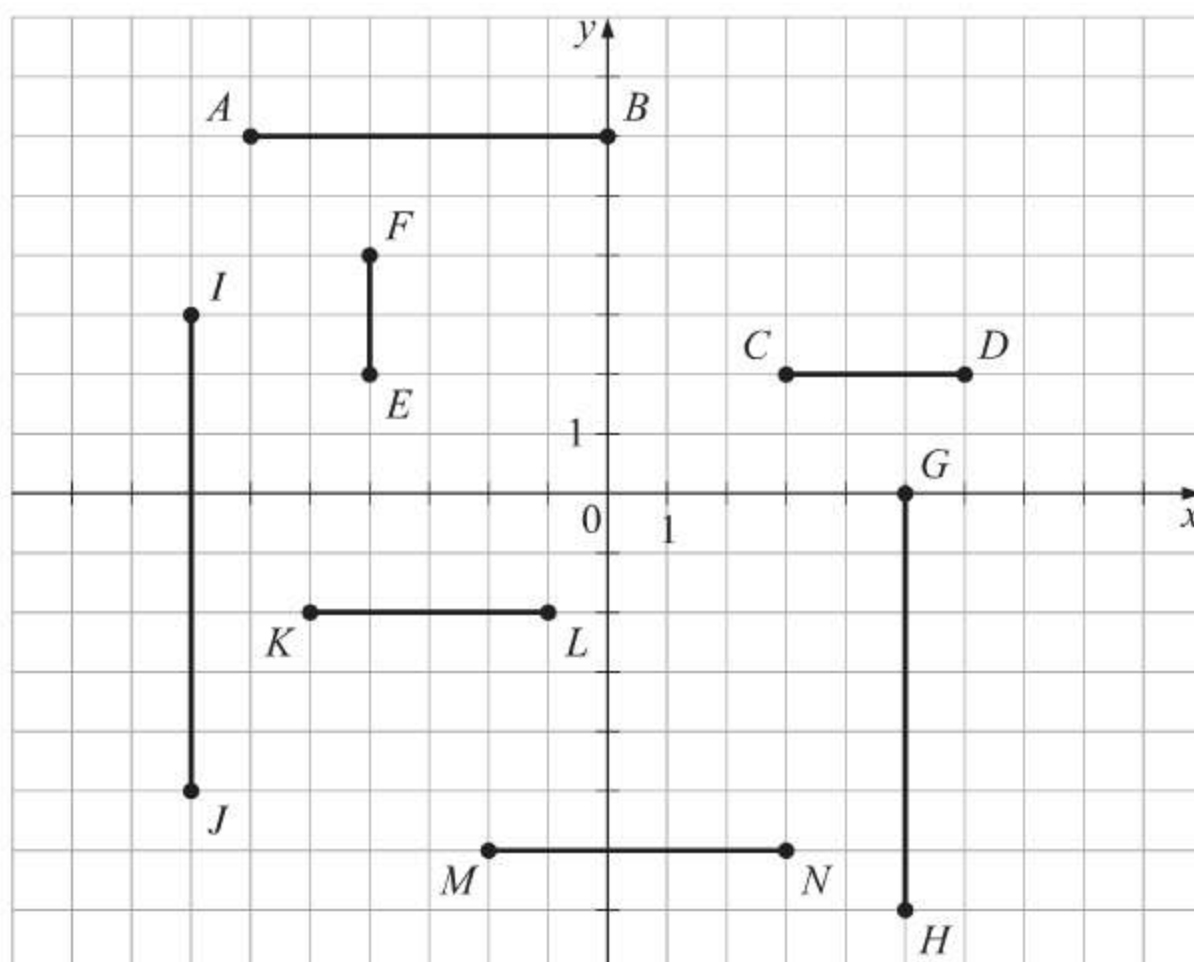
$$|AB| = 2\sqrt{34}$$

Zatem uzasadniliśmy, że długość odcinka AB wynosi $2\sqrt{34}$.

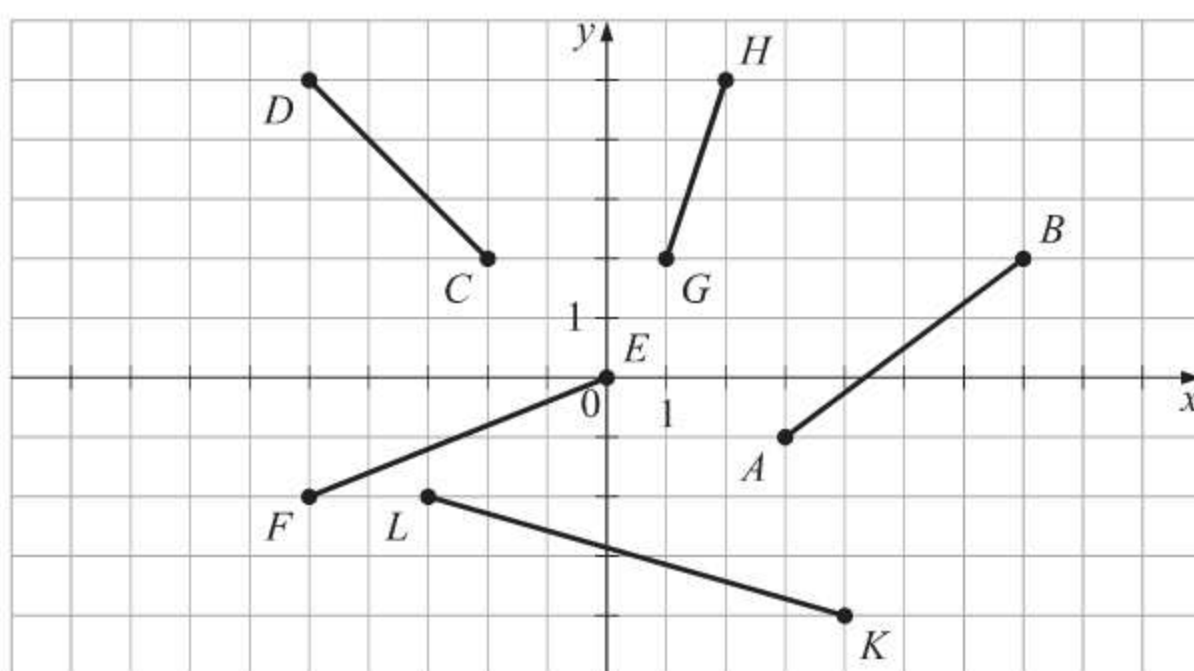
Ćwiczenie 2.

Narysuj układ współrzędnych i zaznacz w nim punkty $K = (-2, 3)$ i $L = (5, -1)$. Uzasadnij, że długość odcinka KL wynosi $\sqrt{65}$.

1. Podaj długości odcinków narysowanych w układzie współrzędnych.



2. Oblicz długości odcinków narysowanych w układzie współrzędnych.



3. Zaznacz w układzie współrzędnych punkty: $K = (-4, 3)$, $L = (1, 7)$, $M = (5, 3)$, $N = (2, -4)$, $P = (-4, -4)$. Oblicz długości odcinków: KM , PN , MN , PL .

4. Punkty B i C są kolejnymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Oblicz długość przekątnej tego kwadratu, jeśli

a) $B = (-4, 5)$ i $C = (1, -7)$,

b) $B = (-1, -2)$ i $C = (3, 2)$.

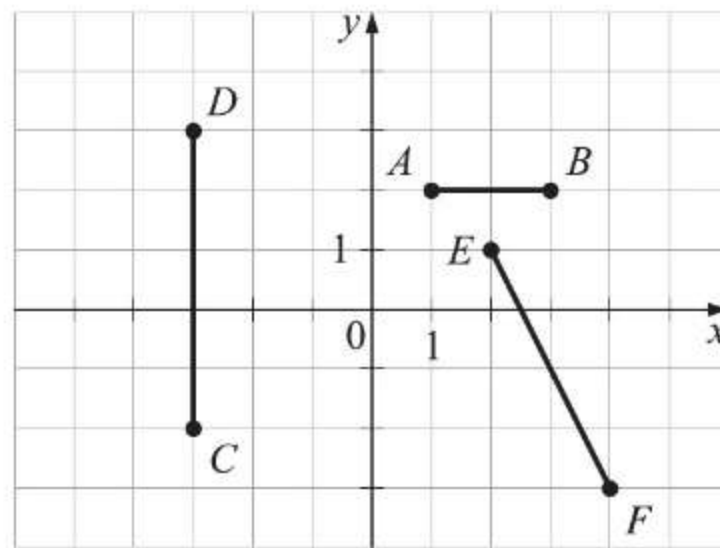
5. Dwa wierzchołki trójkąta równobocznego KLM mają współrzędne $K = (3, -2)$ i $L = (7, 4)$. Oblicz

a) długość boku trójkąta KLM ,

b) wysokość trójkąta KLM .

Informacje do zadań 6. i 7.

W układzie współrzędnych narysowano odcinki AB , CD i EF .



6. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość odcinka EF jest równa

A. 6

B. $2\sqrt{3}$

C. 4

D. $2\sqrt{5}$

7. Czy z narysowanych odcinków można zbudować trójkąt?

Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

A.	Tak,	ponieważ	1.	$4 < \sqrt{20} < 5.$
			2.	$2\sqrt{5} + 2 > 5.$
B.	Nie,		3.	$\sqrt{5} < 3.$

8. Na planie przedstawiono fragment osiedla Zielony zakątek, którego centralną część stanowi park. Teren parku ma kształt trójkąta prostokątnego. Oblicz, ile metrów ogrodzenia należy kupić, aby ogrodzić park, jeśli plan został wykonany w skali 1 : 3000.

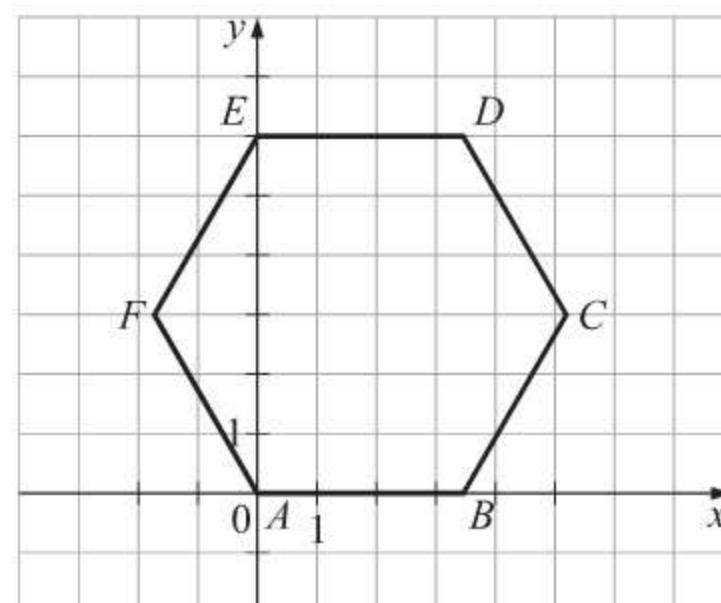
PLAN OSIEDLA: ZIELONY ZAKĄTEK



9. W układzie współrzędnych dane są dwa odcinki: AB i CD , gdzie: $A = (0, 3)$, $B = (3, 0)$, $C = (-\sqrt{2}, 0)$, $D = (0, -\sqrt{6})$. Ustal, który odcinek jest dłuższy i o ile procent.



10. W układzie współrzędnych dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$. Wiedząc, że wierzchołek E ma współrzędne $(0, 6)$, oblicz długość boku tego sześciokąta oraz długość jego dłuższej przekątnej.

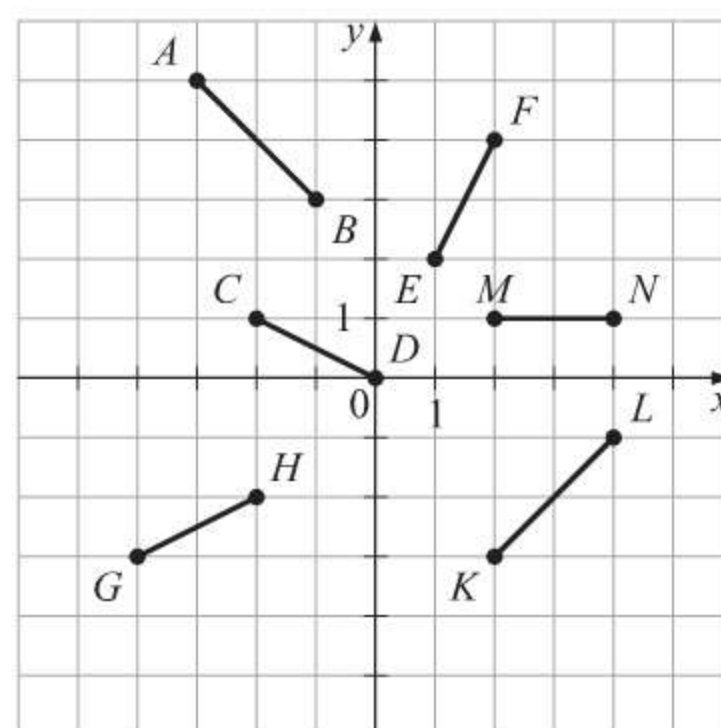


Sprawdź, co umiesz!



1. W układzie współrzędnych narysowano 6 odcinków. Ile spośród narysowanych odcinków ma długość $\sqrt{5}$? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 2 B. 3
C. 4 D. 5



2. Zaznacz w układzie współrzędnych punkty: $P = (-5, 8)$, $Q = (-4, 5)$ oraz $R = (-2, -1)$. Ile razy długość odcinka PR jest większa od długości odcinka PQ ?

3. Punkty: $K = (-7, -1)$, $L = (-4, -4)$, $M = (2, 2)$ są kolejnymi wierzchołkami prostokąta $KLMN$. Oblicz

- a) obwód prostokąta $KLMN$, b) długość przekątnej prostokąta $KLMN$.

4. Dane są w układzie współrzędnych punkty: $A = (1, 2)$, $B = (2, 5)$, $C = (0, 0)$, $D = (\sqrt{6}, 0)$, $E = (0, 6)$, $F = (0, 2)$. Uzasadnij, że z odcinków AB , CD , EF można zbudować trójkąt prostokątny.

5. Figury w układzie współrzędnych

- ▶ Obliczanie długości odcinków w układzie współrzędnych
- ▶ Obliczanie obwodów i pól figur w układzie współrzędnych

Przy obliczaniu obwodów i pól wielokątów położonych w układzie współrzędnych wykorzystujemy umiejętność wyznaczania długości odcinków.

Przykład 1.

Punkty: $A = (-2, -2)$, $B = (4, -2)$, $C = (4, 3)$ oraz $D = (-2, 3)$ są wierzchołkami prostokąta $ABCD$. Oblicz jego obwód.

Zaznaczymy w układzie współrzędnych punkty A , B , C oraz D , a następnie narysujemy prostokąt $ABCD$.

Obliczymy długości boków AB i BC prostokąta.

Obliczymy obwód prostokąta $ABCD$. Skorzystamy ze wzoru na obwód prostokąta o bokach długości a i b : $Obw. = 2a + 2b$.

Odp. Obwód prostokąta $ABCD$ wynosi 22.

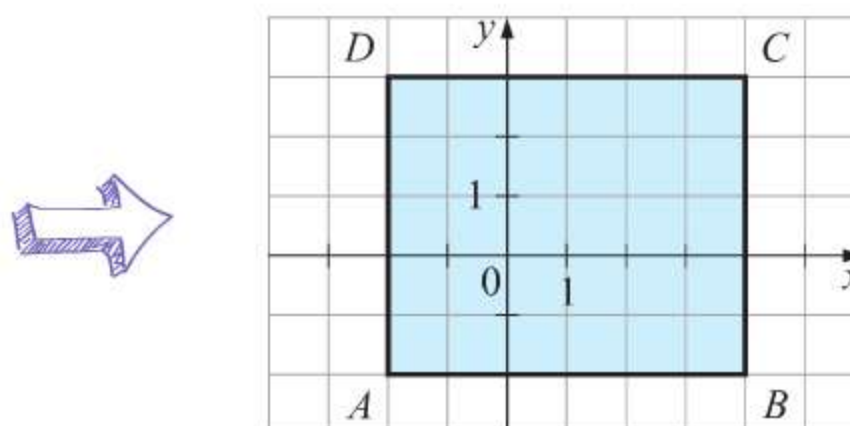
Ćwiczenie 1.

Punkty: $K = (-4, -3)$, $L = (5, -3)$, $M = (5, 10)$ oraz $N = (-4, 10)$ są wierzchołkami prostokąta $KLMN$. Oblicz jego obwód.

Przykład 2.

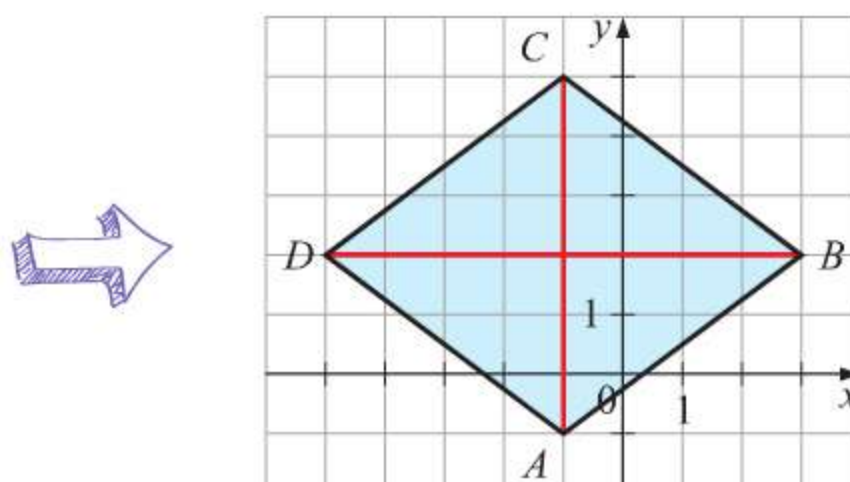
Punkty: $A = (-1, -1)$, $B = (3, 2)$, $C = (-1, 5)$ oraz $D = (-5, 2)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$. Oblicz jego pole.

Zaznaczymy w układzie współrzędnych punkty A , B , C oraz D , a następnie narysujemy romb $ABCD$. Odcinki AC i BD są przekątnymi tego rombu.



$$\begin{aligned} |AB| &= 4 - (-2) = 4 + 2 = 6 \\ |BC| &= 3 - (-2) = 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Obw. &= 2|AB| + 2|BC| \\ Obw. &= 2 \cdot 6 + 2 \cdot 5 = 12 + 10 = 22 \end{aligned}$$



Obliczymy długości przekątnych AC i BD .



$$|AC| = 5 - (-1) = 5 + 1 = 6$$

$$|BD| = 3 - (-5) = 3 + 5 = 8$$

Obliczymy pole rombu $ABCD$. Skorzystamy ze wzoru na pole rombu o przekątnych długości e i f : $P = \frac{e \cdot f}{2}$.



$$P = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2}$$

$$P = \frac{6 \cdot 8}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

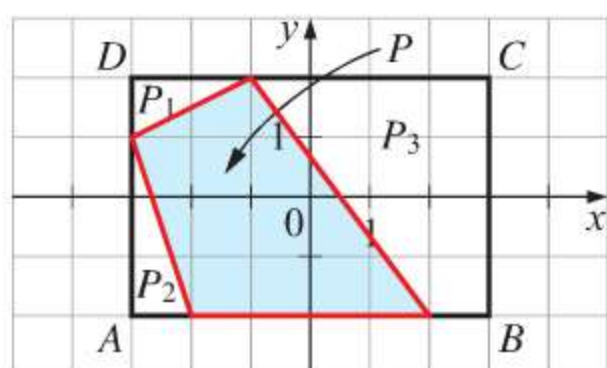
Odp. Pole rombu $ABCD$ wynosi 24.

Ćwiczenie 2.

Punkty: $K = (3, -1)$, $L = (6, 1)$, $M = (3, 3)$ oraz $N = (0, 1)$ są wierzchołkami rombu $KLMN$. Oblicz jego pole.

Pole wielokąta możemy obliczyć przez

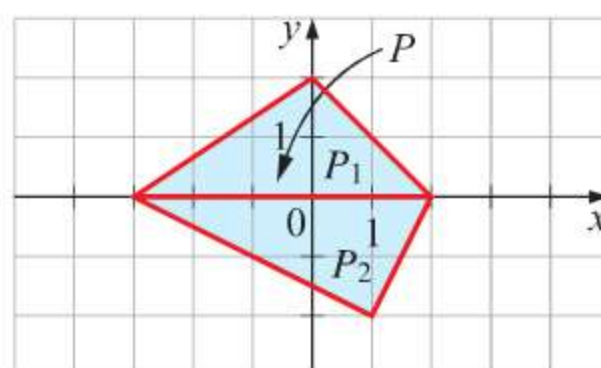
uzupełnienie,
np. do prostokąta.



$$P = P_{ABCD} - P_1 - P_2 - P_3$$

lub

podział,
np. na trójkąty



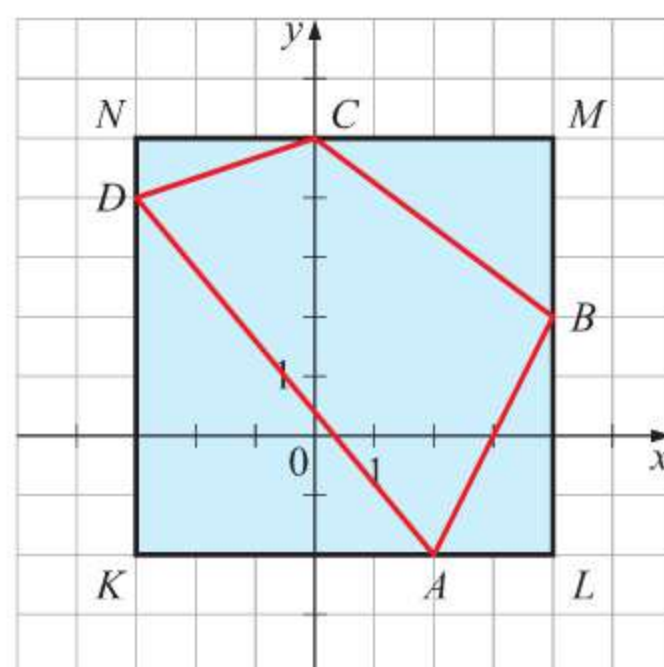
$$P = P_1 + P_2$$

Przykład 3.

Uzasadnij, że pole czworokąta o wierzchołkach: $A = (2, -2)$, $B = (4, 2)$, $C = (0, 5)$ oraz $D = (-3, 4)$ jest równe $22\frac{1}{2}$.

Zaznaczymy w układzie współrzędnych punkty A , B , C oraz D i narysujemy czworokąt $ABCD$. Uzupełnimy ten czworokąt do kwadratu $KLMN$. Aby obliczyć pole czworokąta $ABCD$, odejmiemy od pola kwadratu $KLMN$ pola trójkątów: ADK , ALB , BMC oraz CND .

Obliczymy długość boku kwadratu $KLMN$. Następnie obliczymy jego pole, korzystając z tego, że wzór na pole kwadratu o boku długości a ma postać: $P = a^2$.

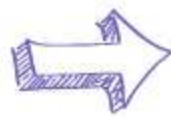


$$|KL| = 4 - (-3) = 4 + 3 = 7$$

$$P_{KLMN} = |KL|^2$$

$$P_{KLMN} = 7^2 = 49$$

Obliczymy pola trójkątów: ADK , ALB , BMC oraz CND .



$$P_{\Delta ADK} = \frac{1}{2} \cdot |DK| \cdot |AK| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 3 \cdot 5 = 15$$

$$P_{\Delta ALB} = \frac{1}{2} \cdot |AL| \cdot |BL| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4$$

$$P_{\Delta BMC} = \frac{1}{2} \cdot |CM| \cdot |BM| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6$$

$$P_{\Delta CND} = \frac{1}{2} \cdot |CN| \cdot |DN| = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Pole czworokąta $ABCD$ wynosi:

$$P_{KLMN} - P_{\Delta ADK} - P_{\Delta ALB} - P_{\Delta BMC} - P_{\Delta CND} = 49 - 15 - 4 - 6 - 1\frac{1}{2} = 22\frac{1}{2}.$$

Ćwiczenie 3.

Uzasadnij, że pole czworokąta $KLMN$, którego wierzchołkami są punkty: $K = (1, -4)$, $L = (0, 5)$, $M = (2, 6)$ oraz $N = (-4, 5)$ jest równe 20.

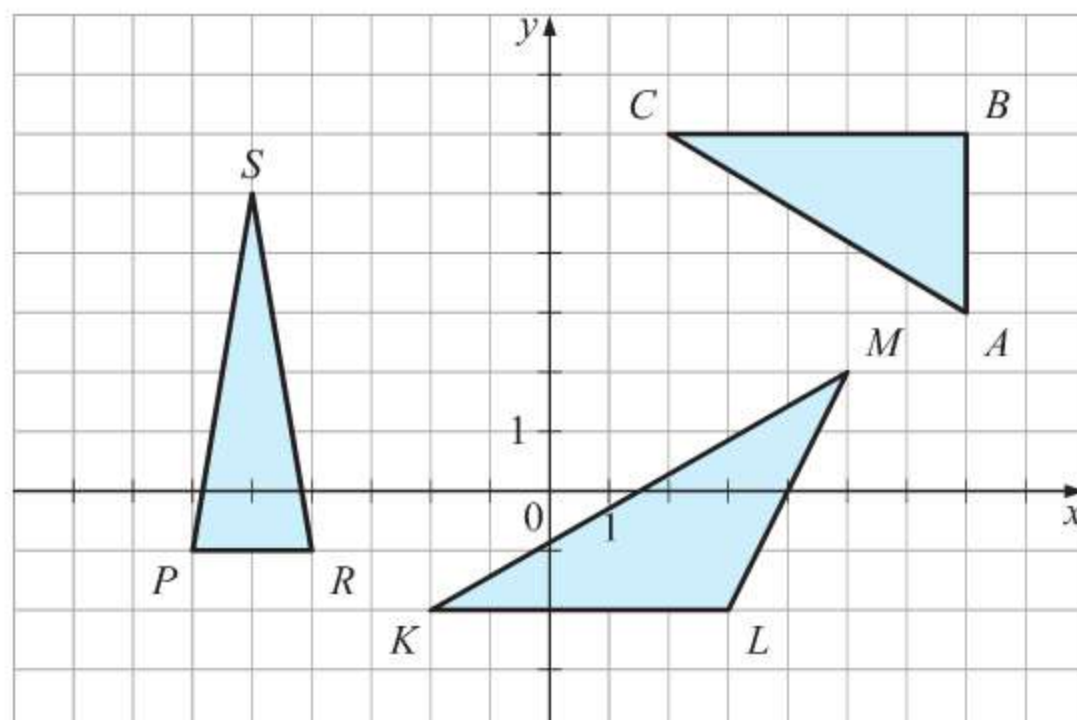
Rozwiąż zadania

1. Oblicz pole i obwód prostokąta o podanych wierzchołkach.

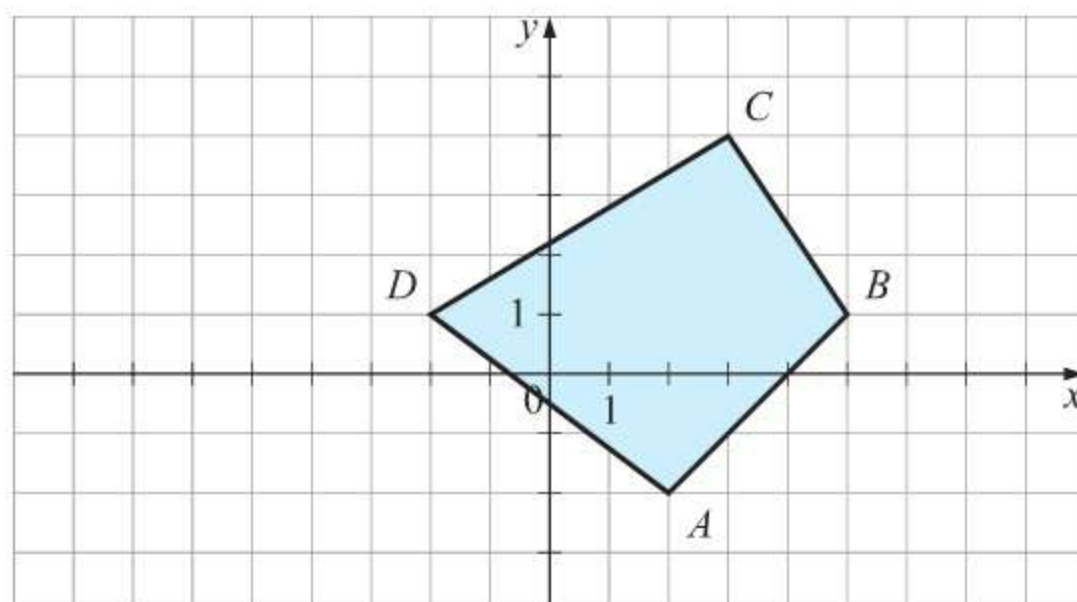
a) $A = (1, 3)$, $B = (5, 3)$, $C = (5, 7)$, $D = (1, 7)$

b) $K = (-3, -4)$, $L = (4, -4)$, $M = (4, 2)$, $N = (-3, 2)$

2. Oblicz pola trójkątów narysowanych w układzie współrzędnych.



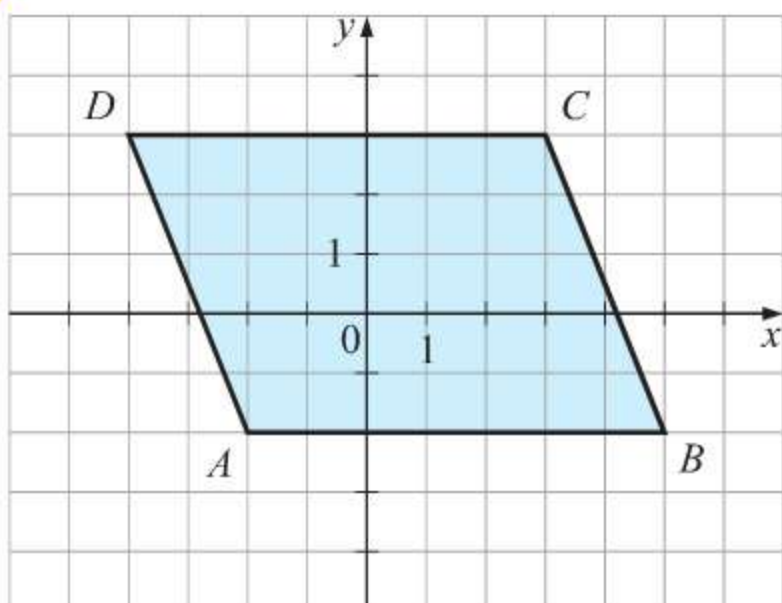
3. Oblicz pole czworokąta $ABCD$ narysowanego w układzie współrzędnych.



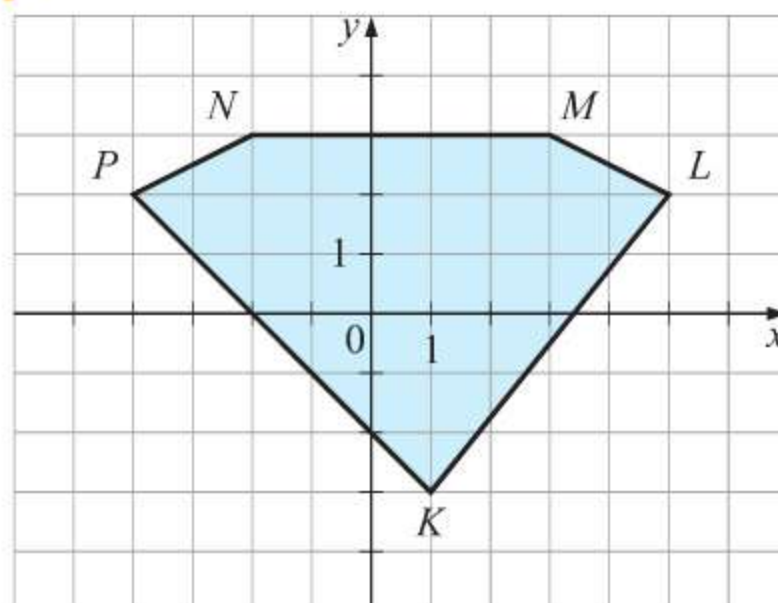
4. Wierzchołki trójkąta ABC mają współrzędne $A = (-5, -3)$, $B = (1, -2)$ oraz $C = (-3, 2)$. Narysuj trójkąt ABC w układzie współrzędnych i oblicz jego pole.

5. Oblicz pole narysowanego wielokąta.

a)



b)



6. Punkty: $K = (2, -3)$, $L = (2, 4)$, $M = (-6, 4)$ i $N = (-6, 1)$ są kolejnymi wierzchołkami trapezu prostokątnego $KLMN$. Oblicz

a) długość przekątnej KM ,

b) pole i obwód trapezu $KLMN$.

7. Punkty $A = (-2, 2)$ i $B = (-4, -4)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC . Oblicz pole tego trójkąta.

Wskazówka: pole trójkąta równobocznego o boku długości a wyraża się wzorem $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

E Informacje do zadań 8. i 9.

Punkty $K = (-4, -3)$ i $M = (-4, 5)$ są przeciwległymi wierzchołkami rombu $KLMN$ o polu 16.

8. Uzupełnij zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wierzchołek L może mieć współrzędne

A. $(-2, 1)$

B. $(-4, 1)$

C. $(0, 1)$

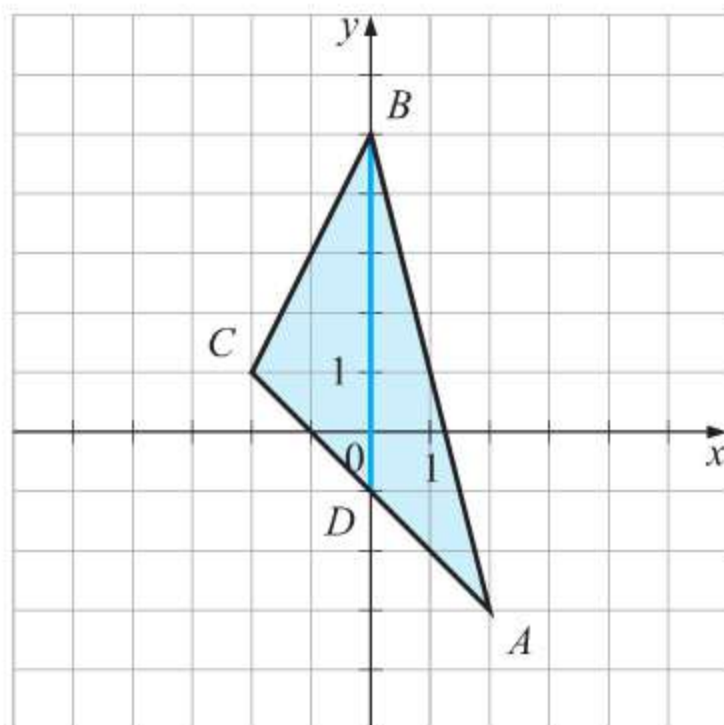
D. $(2, 1)$

9. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Punkt przecięcia przekątnych rombu $KLMN$ ma współrzędne $(-4, 1)$.	P	F
Obwód rombu $KLMN$ jest równy $8\sqrt{5}$.	P	F

10. Uzasadnij, że czworokąt $KLMN$ o wierzchołkach: $K = (-7, 2)$, $L = (-4, -3)$, $M = (-1, 2)$ i $N = (-4, 7)$ jest rombem.

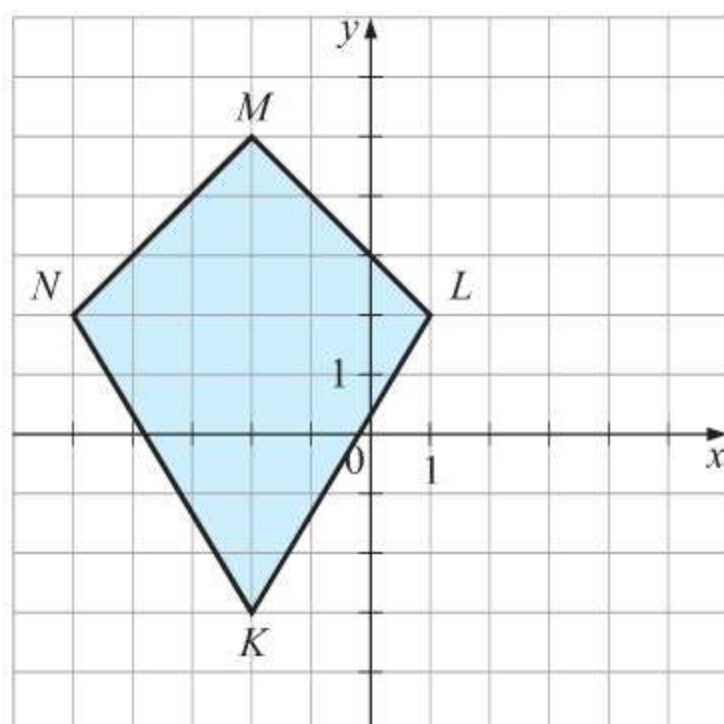
- 11.** Uzasadnij, że pole trójkąta ABC jest dwa razy większe od pola trójkąta DAB .



Sprawdź, co umiesz!

- 1.** W prostokątnym układzie współrzędnych narysowano czworokąt $KLMN$.

E



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole czworokąta $KLMN$ jest równe

- A.** 24 **B.** 18 **C.** 30 **D.** 48

- 2.** Oblicz obwód trójkąta PRS , jeżeli $P = (-3, -4)$, $R = (-1, -6)$ i $S = (2, 1)$.

- 3.** Punkt $B = (4, -1)$ jest jednym z wierzchołków kwadratu $ABCD$, a punkt $S = (3, 2)$ jest punktem przecięcia przekątnych tego kwadratu.

E

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Przekątna kwadratu ma długość **A** **B**.

A. $\sqrt{10}$

B. $2\sqrt{10}$

Pole kwadratu jest równe **C** **D**.

C. 20

D. 40

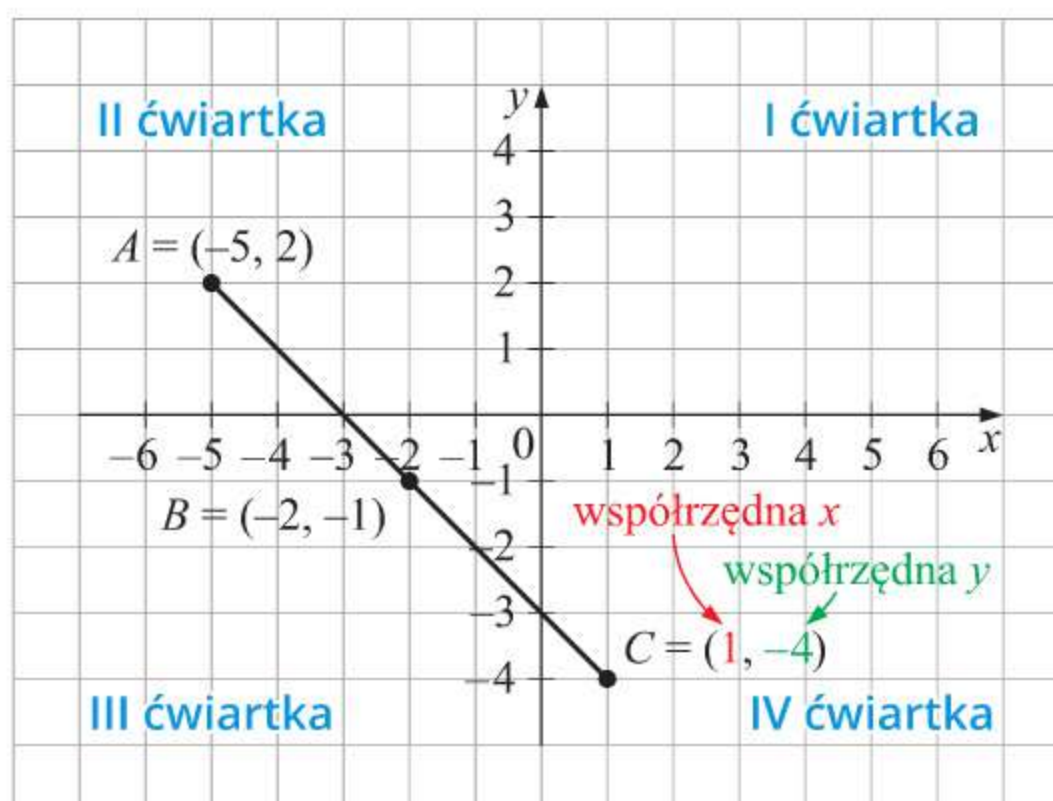
PODSUMOWANIE DZIAŁU II

Układ współrzędnych

Powtórz wiadomości

Prostokątny układ współrzędnych

Prostokątnym (kartezjańskim) układem współrzędnych nazywamy dwie prostopadłe osie liczbowe, które mają wspólny początek O (początek układu współrzędnych). Punkty A , B oraz C są **punktami kratowymi**, ponieważ obie współrzędne każdego z tych punktów są liczbami całkowitymi. Punkty A , B oraz C są **punktami współliniowymi**, ponieważ należą do jednej prostej.



Środek odcinka

Współrzędne punktu $S = (x_S, y_S)$ będącego środkiem odcinka AB , gdzie $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, obliczamy ze wzorów:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Środek odcinka o końcach $A = (-8, 6)$ oraz $B = (4, 10)$ ma współrzędne równe:

$$S = \left(\frac{-8+4}{2}, \frac{6+10}{2} \right) = \left(\frac{-4}{2}, \frac{16}{2} \right) = (-2, 8)$$

Odległość w układzie współrzędnych

Aby obliczyć długość odcinka AB w układzie współrzędnych, możemy skorzystać z twierdzenia Pitagorasa.

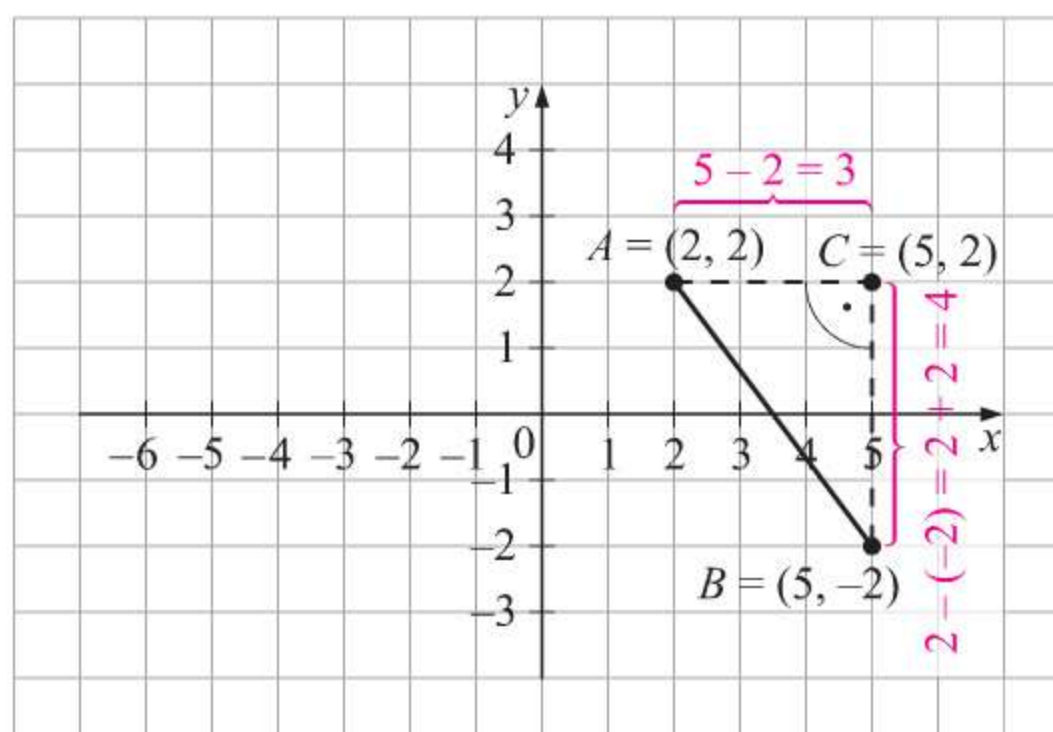
$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$$

$$3^2 + 4^2 = |AB|^2$$

$$9 + 16 = |AB|^2$$

$$|AB|^2 = 25$$

$$|AB| = 5$$



Sprawdź umiejętności



1. Na osi liczbowej zaznaczono punkty: W, S, L, T .

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.



Współrzędne punktów L i T różnią się o 10.	P	F
Współrzędne punktów L i W różnią się o 30.	P	F
Punkt W ma współrzędną równą 189.	P	F

2. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających podany warunek.

a) $x \leq 0$

b) $x \geq -2,5$

c) $x > -3$

d) $x < -1\frac{3}{5}$

3. W układzie współrzędnych zaznaczono odcinek RT , gdzie $R = (3, 4)$ i $T = (-1, -2)$. Zapisz współrzędne wszystkich punktów kratowych należących do odcinka RT .

4. Dane są punkty o współrzędnych $A = (2, 0)$ i $B = (-3, 2)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wierzchołek C trójkąta prostokątnego ABC może mieć współrzędne równe

A. $(0, 3)$

B. $(-3, 0)$

C. $(4, 6)$

D. $(2, 5)$

5. Wyznacz współrzędną środka S odcinka AB .

a) $A = 15; B = 35$

b) $A = -6; B = 2$

c) $A = 6,4; B = -3,2$

d) $A = -7\frac{2}{5}; B = -4\frac{3}{5}$

6. Na osi liczbowej dane są trzy punkty: K, M, N . Punkt K jest środkiem odcinka MN . Wyznacz nieznaną współrzędną punktu.

a) $K = 10, M = 24$

b) $M = -2,6, K = -4,8$

c) $N = -\frac{2}{3}, K = 1\frac{3}{4}$

7. Dane są punkty $D = (2, 5)$ i $F = (-6, 1)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość odcinka DF jest równa

A. 9

B. $4\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{10}$

D. $4\sqrt{5}$

8. Dane są punkty: $A = (-3, 0)$, $B = (-1, -3)$, $C = (5, 1)$ oraz $D = (3, 4)$, które są wierzchołkami prostokąta. Uzasadnij, że obwód prostokąta $ABCD$ jest wyrażony liczbą niewymierną.

- E** 9. Dane są wierzchołki trapezu: $A = (-2, -2)$, $B = (3, -2)$, $C = (3, 6)$, $D = (-2, 3)$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Trapez $ABCD$ jest trapezem prostokątnym.	P	F
Pole trapezu $ABCD$ jest wyrażone liczbą całkowitą.	P	F

- E** 10. Dane są punkty: $A = (-2, -1)$, $B = (1, 1)$ oraz $C = (1, 5)$.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Odcinek AB jest od odcinka BC .

A. dłuższy **B.** krótszy

Środek odcinka AC leży w ćwiartce układu współrzędnych.

C. drugiej **D.** czwartej

11. Punkty $K = (-3, -1)$ i $N = (-3, 5)$ są końcami przekątnej pewnego kwadratu. Podaj współrzędne pozostałych wierzchołków tego kwadratu oraz oblicz jego pole i obwód.

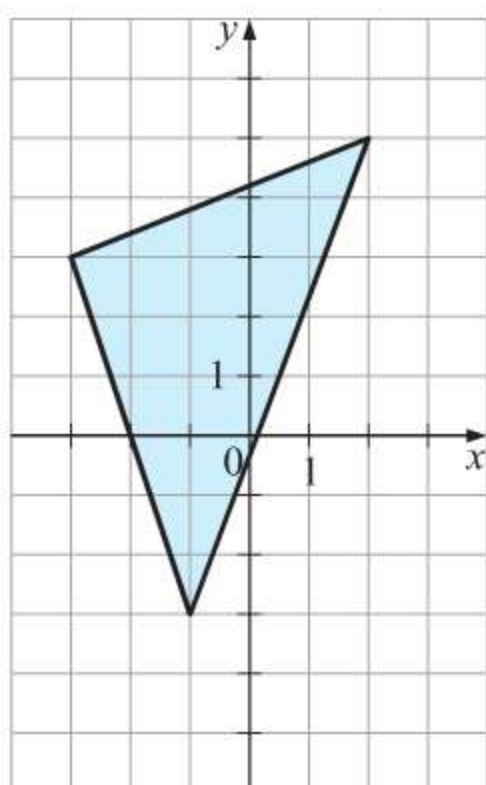
12. Punkty K i L podzieliły odcinek AB na 3 równe części tak, że $|AK| = |KL| = |LB|$. Wiedząc, że $A = (1, -7)$ i $K = (-1, -2)$, wyznacz

a) współrzędne punktu B ,

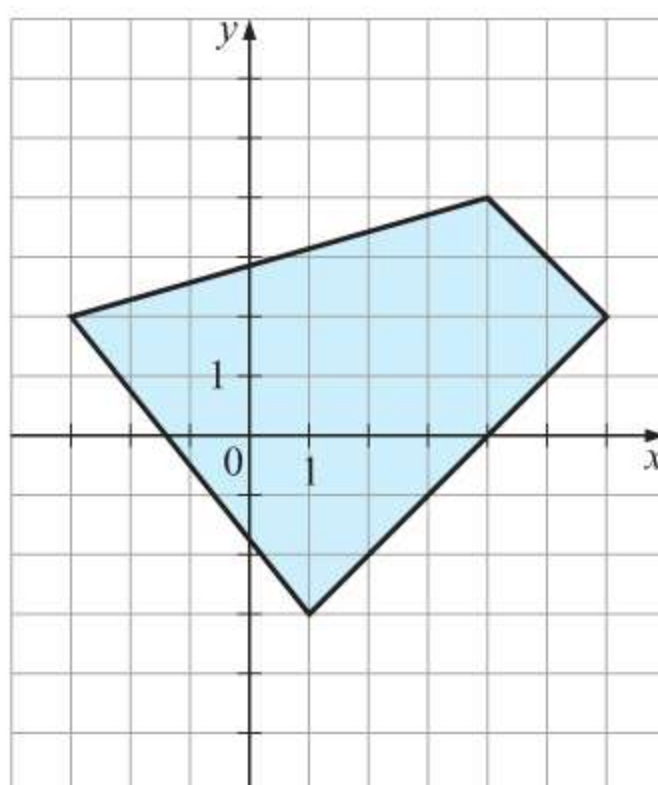
b) długość odcinka AL .

13. Oblicz pole figury przedstawionej w układzie współrzędnych.

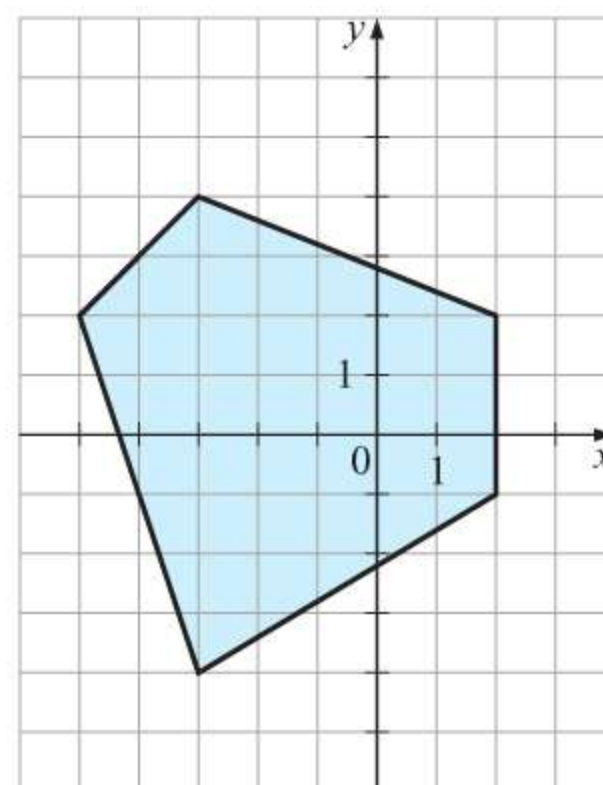
a)



b)



c)



Potrenuj – zadania uzupełniające

1. Na osi liczbowej dane są punkty o współrzędnych: $A = -3\frac{1}{3}$, $B = 1\frac{3}{4}$, $C = -5$, $D = \sqrt{72}$, $E = -3\sqrt{2}$. Oblicz długości odcinków: AB , AC , BC , DE .

2. Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej zbiór liczb spełniających podany warunek.

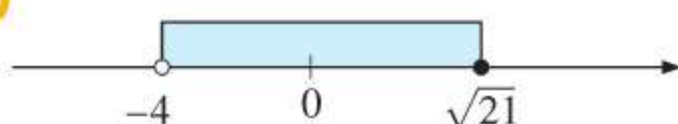
a) $-1 \leq x \leq 3$

b) $-3,5 < x < -2\frac{2}{5}$

c) $1\frac{2}{3} \leq x < 5\frac{1}{3}$

3. Podaj warunek, który spełniają liczby zaznaczone na osi liczbowej. Jakie liczby całkowite należą do zaznaczonego zbioru?

a)



b)



4. Dane są punkty $P = (-60, 90)$ i $R = (-30, -30)$. Które z podanych poniżej punktów leżą na prostej PR ?

$A = (-20, -70)$, $B = (-50, 60)$, $C = (15, -210)$, $D = (-5, -120)$, $E = (0, -150)$, $F = (32, -278)$

5. Dane są punkty A , B , C . Uzasadnij, że punkty A , B , C są współliniowe.

a) $A = (-1; 2)$, $B = (2; -1)$, $C = (0; 1)$

b) $A = (2; \frac{1}{2})$, $B = (-2; -2,5)$, $C = (1; -\frac{1}{4})$

6. Punkty $A = (-1, 2)$, $B = (3, 4)$, $C = (0, -3)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Zaznacz je w układzie współrzędnych i podaj współrzędne punktu D . Rozważ wszystkie możliwe przypadki.

7. Punkt $K = (a, b)$ leży w III ćwiartce układu współrzędnych, a punkt $L = (2a + 8, b + 5)$ leży na osi y . Rozstrzygnij, w której ćwiartce leży punkt:

a) $A = (-a, b)$,

b) $B = (a - 3, -10b)$,

c) $C = (2b, -0,5a)$.

8. Na osi liczbowej zaznaczono punkty A i B .



Ile wynosi współrzędna środka odcinka AB ? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $-\sqrt{3}$

B. $4\sqrt{3}$

C. $4\sqrt{3} - 1$

D. $-\sqrt{3} - 1$

9. Oblicz współrzędne punktu S będącego środkiem odcinka AB .

a) $A = (2\sqrt{2}, -5)$, $B = (-6\sqrt{2}, 1)$

b) $A = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{5})$, $B = (-2\sqrt{3}, -3\sqrt{45})$

- E 10.** Punkty $A = (-3\sqrt{11}, -4)$, $B = (5\sqrt{11}, -4)$ są dwoma wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC o podstawie AB i wysokości 7.

Czy wierzchołek C może mieć współrzędne równe $(0, 3)$?

Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

A.	Tak,	ponieważ	1.	$-4 + 7 = 3.$
			2.	$-4 - 7 = -11.$
B.	Nie,		3.	$\frac{-3\sqrt{11} + 5\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11}.$

- 11.** Punkt S jest środkiem odcinka KL . Znając współrzędne jednego z końców odcinka, oblicz współrzędne drugiego końca tego odcinka.

a) $S = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{2}\right)$, $L = \left(-\frac{\sqrt{75}}{5}, \frac{5}{8}\right)$ **b)** $S = \left(-\frac{\sqrt{8}}{2}, \sqrt{12}\right)$, $K = \left(\frac{\sqrt{32}}{2}, \sqrt{27}\right)$

- 12.** Oblicz długość odcinka KL , jeśli $K = \left(3\frac{5}{6}; 7\frac{3}{5}\right)$, $L = \left(5\frac{1}{3}; 9,1\right)$.

- 13.** Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $A = (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $B = (8\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Ile mogą być równe współrzędne punktów C i D , jeśli $|AB| = 2|BC|$? Rozpatrz wszystkie możliwości.

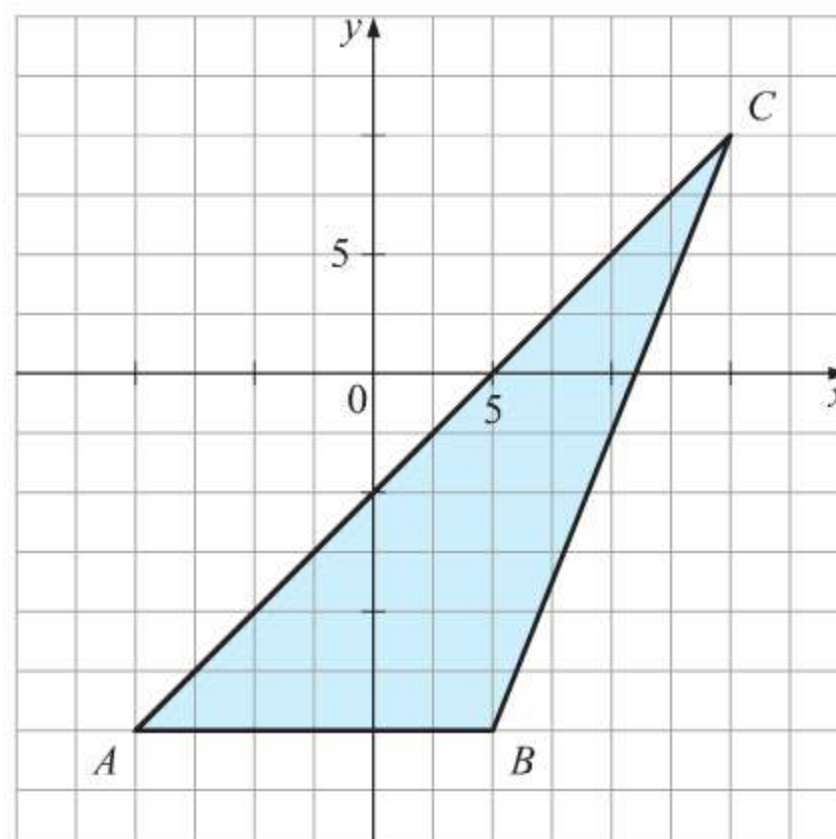
- 14.** Dany jest trójkąt ABC , gdzie $A = (-1, 1)$, $B = (5, 0)$, $C = (3, 5)$. Czy trójkąt ABC jest równoramienny? Który kąt tego trójkąta ma największą miarę? Uzasadnij swoją odpowiedź.

- 15.** Znajdź wszystkie punkty w układzie współrzędnych, których odległość od początku układu współrzędnych jest równa $5\sqrt{2}$, a jego współrzędne są liczbami całkowitymi o równych wartościach bezwzględnych.

- E 16.** W układzie współrzędnych przedstawiono trójkąt ABC .

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Pole trójkąta ABC jest równe 375.	P	F
Bok AC ma długość $25\sqrt{2}$.	P	F



DZIAŁ



WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE I RÓWNIANIA

Rozwiązywanie
równań

 $+$  $+$  $= 18$

 $\cdot \left(\begin{array}{c} \text{green USB drive icon} \\ + \\ \text{green USB drive icon} \end{array} \right) = 24$

 $+$  $\cdot$  $= 16$

Zmienne

To ci się przyda!

1. Przekształcanie wyrażeń algebraicznych

- ▶ Wykonywanie działań na jednomianach i sumach algebraicznych
- ▶ Redukcja wyrazów podobnych

Wyrażenia, w których występują liczby, litery lub liczby i litery połączone znakami działań oraz nawiasami, nazywamy **wyrażeniami algebraicznymi**.



Jednomianem nazywamy wyrażenie algebraiczne, które jest liczbą, literą lub iloczynem liczb i liter, np. $\frac{1}{5}$, b , $-2a^2$, $7x^3y^4$.

Jednomian jest **uporządkowany**, jeżeli jego pierwszym czynnikiem jest liczba, a następnymi litery w kolejności alfabetycznej.

Przykład 1.

Przedstaw jednomian w postaci uporządkowanej.

a) $3x^2 \cdot (-2x^5)$

Wykonamy mnożenie liczb i wynik zapiszemy na początku jednomianu. Następnie iloczyny takich samych czynników przedstawimy w postaci potęgi.



$$\begin{aligned} 3x^2 \cdot (-2x^5) &= \\ &= 3 \cdot (-2) \cdot x^2 \cdot x^5 = -6x^7 \end{aligned}$$

b) $c^4 \cdot (-2a^3) \cdot \left(-\frac{1}{10}b^2\right) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot c^4 = \frac{1}{5}a^3b^2c^4$

Ćwiczenie 1.

Przedstaw jednomian w postaci uporządkowanej.

a) $4f \cdot 7f^6$

b) $9h^3 \cdot g^2 \cdot (-5j^3)$

c) $9t^5 \cdot (-r^4) \cdot \left(-1\frac{1}{3}s^5\right)$



Wyrażenie algebraiczne, które powstaje przez dodanie jednomianów, nazywamy **sumą algebraiczną**, np. $2x + 3$, $3a^2 - b^2 + 1$.

Jednomiany nazywamy **podobnymi**, jeśli zawierają te same czynniki literowe i są one w takiej samej potęgzie. Tylko takie jednomiany możemy dodawać i odejmować. Taką operację nazywamy **redukcją wyrazów podobnych**.

Przykład 2.

Uprość sumę algebraiczną, a następnie oblicz jej wartość liczbową dla podanych wartości zmiennych.

a) $4xy - 3x^2 + 5x^2 - 5yx + 2$ dla $x = 3$ i $y = -2$

Zaznaczymy jednomiany podobne, a następnie wykonamy redukcję wyrazów podobnych.



$$\begin{aligned} 4xy - 3x^2 + 5x^2 - 5yx + 2 &= \\ &= 2x^2 - xy + 2 \end{aligned}$$

W miejsce zmiennej x wstawimy liczbę 3 ,
w miejsce zmiennej y – liczbę (-2) ,
a następnie obliczymy wartość wyrażenia.



$$2 \cdot 3^2 - 3 \cdot (-2) + 2 = 2 \cdot 9 + 6 + 2 = \\ = 18 + 6 + 2 = 26$$

b) $-a^2b - 3ab^3 + 2b^2 - 4ba^2 + 5a^2b - ab^3$ dla $a = -\sqrt{2}$ i $b = -1$

Najpierw wykonamy redukcję wyrazów podobnych.



$$\underline{-a^2b} - \underline{3ab^3} + 2b^2 - \underline{4ba^2} + \underline{5a^2b} - \underline{ab^3} = \\ = -4ab^3 + 2b^2$$

W miejsce zmiennej a wstawimy liczbę $(-\sqrt{2})$, natomiast w miejsce zmiennej b – liczbę (-1) .



$$-4 \cdot (-\sqrt{2}) \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 = \\ = 4\sqrt{2} \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = \\ = -4\sqrt{2} + 2 = 2 - 4\sqrt{2}$$

Ćwiczenie 2.

Uprość sumę algebraiczną, a następnie oblicz jej wartość liczbową dla podanych wartości zmiennych.

a) $3x^2 - 2y + 4x^2 + 3y$ dla $x = 1$ i $y = 5$

b) $-5x^2y - 2xy^3 + 4x^2y - 5y^3x + 2y$ dla $x = 2$ i $y = -4$

Przykład 3.

Opuść nawias i zredukuj wyrazy podobne.

a) $-5z^2 + (6z - 4z^2 + 3)$

Opuścimy nawias i nie zmienimy znaków przed poszczególnymi jednomianami, a następnie wykonamy redukcję wyrazów podobnych.



$$-5z^2 + (6z - 4z^2 + 3) = \\ = \underline{-5z^2} + 6z - \underline{4z^2} + 3 = -9z^2 + 6z + 3$$

Jeśli przed nawiasem występuje znak dodawania, to opuszczamy nawias i nie zmieniamy znaków przed poszczególnymi jednomianami.



b) $6t^2 - (-2t + 5t^2 - 9)$

Opuścimy nawias i zmienimy znak na przeciwny przed każdym jednomianem, który jest w nawiasie. Wykonamy redukcję wyrazów podobnych.



$$6t^2 - (-2t + 5t^2 - 9) = \\ = \underline{6t^2} + 2t - \underline{5t^2} + 9 = t^2 + 2t + 9$$

Jeśli przed nawiasem występuje znak odejmowania, to opuszczamy nawias i zmieniamy znak każdego jednomianu, który jest w nawiasie, na przeciwny.



Ćwiczenie 3.

Opuść nawiasy i zredukuj wyrazy podobne.

a) $3f + (4f - 5f^3 + 9)$

b) $2g^2 - (3g^2 + 4g + 8)$

c) $-(a + 2b) - (-3a - 9b)$

Aby pomnożyć jednomian przez sumę algebraiczną, należy pomnożyć go przez każdy składnik tej sumy, a otrzymane iloczyny dodać.



$$a(b + c) = ab + ac \quad a(b - c) = ab - ac$$

Aby podzielić sumę algebraiczną przez liczbę różną od 0, każdy jej wyraz należy podzielić przez tę liczbę, a otrzymane ilorazy dodać.

$$(b + c) : a = b : a + c : a \quad (b - c) : a = b : a - c : a \quad a \neq 0$$

Przykład 4.

Zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.

$$\text{a)} \quad -3z(2z - 4z^2 + 7) = (-3z) \cdot 2z - 3z \cdot (-4z^2) - 3z \cdot 7 = -6z^2 + 12z^3 - 21z = 12z^3 - 6z^2 - 21z$$

$$\text{b)} \quad (-2x^3 - 8x^2 + x) : 4 = (-2x^3) : 4 - 8x^2 : 4 + x : 4 = -\frac{2}{4}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{4}x = -\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{4}x$$

$$\text{c)} \quad \frac{32a^3 - 16a^2 + 3}{8} = \frac{32a^3}{8} - \frac{16a^2}{8} + \frac{3}{8} = 4a^3 - 2a^2 + \frac{3}{8}$$

Ćwiczenie 4.

Zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.

$$\text{a)} \quad 2y(y^3 + 6y - 9)$$

$$\text{b)} \quad \left(\frac{1}{2}b^3 - \frac{1}{6}b^2 + 4\right) \cdot (-6b^3)$$

$$\text{c)} \quad (14y^5 + 21y^2 - 5y) : (-7)$$

$$\text{d)} \quad \frac{25yz^2 - 7y^2z + 10z}{5}$$



Aby pomnożyć dwie sumy algebraiczne, należy każdy składnik jednej sumy pomnożyć przez każdy składnik drugiej sumy.

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Przykład 5.

Przedstaw wyrażenie $(3x^2 - 6x)(2x - 1)$ w postaci sumy i przeprowadź redukcję wyrazów podobnych.

$$(3x^2 - 6x)(2x - 1) = 3x^2 \cdot 2x + 3x^2 \cdot (-1) - 6x \cdot 2x - 6x \cdot (-1) = 6x^3 - 3x^2 - 12x^2 + 6x = 6x^3 - 15x^2 + 6x$$

Ćwiczenie 5.

Przedstaw wyrażenie w postaci sumy i przeprowadź redukcję wyrazów podobnych.

$$\text{a)} \quad (x + 2)(2x + 4)$$

$$\text{b)} \quad (4w + 2w^3)(-3w^2 + 2)$$

$$\text{c)} \quad -2(a + b^2)(3a - b^2)$$

Rozwiąż zadania

1. Przedstaw jednomian w postaci uporządkowanej.

a) $4x^2y^4 \cdot 12x^3y^2$

b) $cd^5 \cdot (-6cd^4)$

c) $-3\frac{1}{5}ac^2 \cdot \frac{5}{16}ab^2c$

d) $xy^3z^2 \cdot 0,7xy^2z^4 \cdot (-xyz) \cdot (-10x^2y^2z)$

2. Uprość sumę algebraiczną, a następnie oblicz jej wartość liczbową dla podanych wartości zmiennych.

a) $-3a^2 + 4a + 8a^2$

dla $a = -1$

b) $c^2d^2 + 7cd^2 - 3c^2d^2 - cd^2$

dla $c = 2, d = -3$

c) $-5k^3l + 2l^2k + 4k^2l + 5lk^3 - 5kl^2$

dla $k = 1\frac{1}{2}, l = -1\frac{2}{3}$

d) $-z^2t^2 - zt^2 + 2z^2t^2 - 3zt^2 + 2t^2z$

dla $z = 2\sqrt{2}, t = -\sqrt{3}$

3. Opuść nawiasy i zredukuj wyrazy podobne.

a) $2a - 3b + (6a - 3b)$

b) $2c - 15 - (-5c + 30)$

c) $-(1,5x^2 + 3,3x - 4) + (6 - 2,7x - 4,5y)$

d) $-(-g^3 - 2g) + (-g^3 + 7g) + 10g$

4. Przedstaw podane wyrażenie w postaci sumy algebraicznej. Pamiętaj o redukcji wyrazów podobnych.

a) $3b - 4(-3b + 10)$

b) $6(-2f^2 + f) + (5f^2 - 8f) \cdot 3$

c) $-\frac{2}{3}(6x^5 - 18x^3 + 15x) + \frac{4}{5}(-20x^3 + 10x^5 - 45x)$

d) $-2p(p - s) + 3s(2p - 3s)$

e) $3a(b^2 - b) - 2b(a^2 - a)$

f) $(-2m + 3) \cdot m - 4m(m - m^2 + 1)$

5. Uprość wyrażenie.

a) $(4x - 12y + 8) : 2$

b) $(-18c + 36) : (-6)$

c) $(-m + 4n - 9) : (-4)$

d) $\frac{9t - 12z + 15}{-3}$

6. Cezary był na wycieczce rowerowej. W piątek przejechał x km. Przeczytaj treść rozmowy Cezarego i Zosi. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego długość drogi, jaką Cezary pokonał w czasie wycieczki. Zredukuj wyrazy podobne.



Ile kilometrów przejechałeś w sobotę?

Dwa razy więcej niż w piątek.

A w niedzielę?

O 20 km mniej niż w poprzednie dwa dni razem.

E Informacje do zadań 7. i 8.

Pola postanowiła zaoszczędzić ze swojego kieszonkowego na prezent urodzinowy dla swojej siostry. W pierwszym tygodniu odłożyła x zł, a przez trzy kolejne tygodnie odkładała po $(x+6)$ zł. Prezent, który chciała kupić siostrze, kosztował 64 zł. Po czterech tygodniach odkładania posiadała już kwotę wyższą niż cena prezentu.



7. Czy kwota odłożona w pierwszym tygodniu mogła być równa 10 zł?

Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

A.	Tak,	ponieważ	1.	$4 \cdot 16 = 64.$
B.	Nie,		2.	$10 + 3 \cdot 16 < 64.$
			3.	$10 + 4 \cdot 16 > 64.$

8. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyrażenie opisujące kwotę, która pozostała Poli po zakupie prezentu, ma postać

A. $(3x - 46)$ zł. **B.** $(3x - 58)$ zł. **C.** $(4x - 58)$ zł. **D.** $(4x - 46)$ zł.

9. Zapisz podane wyrażenie w postaci sumy algebraicznej. Pamiętaj o redukcji wyrazów podobnych.

a) $(7a + 4)(5a + 8)$

b) $(2x - 1)(-3x + 2)$

c) $(-3a + b)(2a - 4b) + 3(-2a^2 + 6b^2)$

d) $(-c + 3d)(-2c + 5d) - (3cd - 5)$

e) $-(m - n)(3m + 2n) - 6n(2n - m)$

f) $(2s - 1)^2 - s(-6s + t)$

10. Długości sąsiednich boków prostokąta opisują wyrażenia $(3a - 6)$ i $(5a + 8)$, gdzie $a > 2$. Kwadrat ma obwód równy obwodowi prostokąta. Uzasadnij, że pole kwadratu wynosi $16a^2 + 8a + 1$.

11. Zapisz w postaci wyrażen algebraicznych:

a) cztery kolejne liczby całkowite poprzedzające liczbę k ;

b) cztery kolejne wielokrotności liczby 7, z których pierwsza jest równa $7k$;

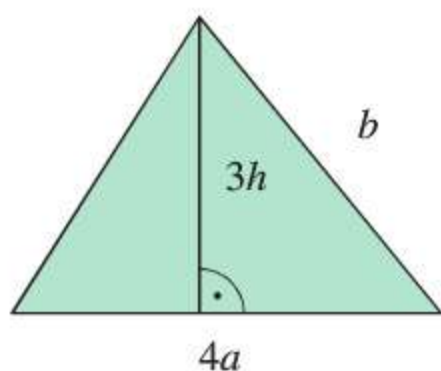
c) pięć kolejnych liczb parzystych, jeśli ostatnia ma postać $2n + 18$;

d) pięć kolejnych liczb nieparzystych, z których środkowa jest równa $2n - 3$;

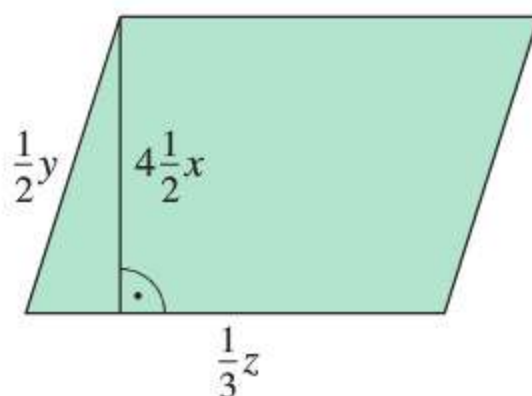
e) liczbę trzycyfrową, której cyfra setek jest równa s , cyfra dziesiątek d i cyfra jedności 4.

- 12.** Na rysunkach przedstawiono: trójkąt równoramienny, równoległobok oraz sześciokąt foremny. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego obwody oraz pola tych figur.

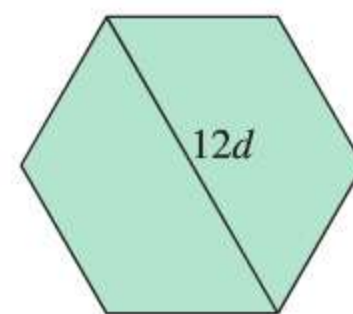
I.



II.



III.



- 13.** Zapisz dwie kolejne liczby naturalne podzielne przez 3. Uzasadnij, że suma kwadratów tych liczb jest liczbą podzielną przez 9.



Sprawdź, co umiesz!

- 1.** Przedstaw jednomian w postaci uporządkowanej.

a) $7xy^2 \cdot 6y^3x^2$

b) $-\frac{2}{3}ab^2 \cdot \left(-2\frac{2}{5}ca^2b^3\right) \cdot (-bca)$

- 2.** Przedstaw wyrażenie $3x^2 - (2x + x^2 - 8)$ w postaci sumy algebraicznej i podaj jego wartość dla $x = (-2)$.

- 3.** Zapisz podane wyrażenie w postaci sumy algebraicznej. Pamiętaj o redukcji wyrazów podobnych.

a) $3a(-2a + 3)$

b) $2b(5a - b) - 3a(-4b + 2)$

c) $(-2a + 3b)(5a + b)$

d) $(-2a + 3b)(-2a - b) - 3(ab - 1)$

- 4.** Zapisz w postaci sumy algebraicznej pole równoległoboku, którego długość jednego boku jest równa $3a + 3$, a wysokość opuszczona na ten bok jest równa $4a + 5$, gdzie a jest liczbą dodatnią.

- 5.** Dane jest wyrażenie $3(x - 2)(x^2 + 3x) - 3x^2 + 15x - 1$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Dane wyrażenie można zapisać w postaci $3x^3 - 3x - 1$.	P	F
Wartość danego wyrażenia dla $x = -2$ jest równa 19.	P	F

E

2. Rozwiązywanie równań

- ▶ Liczby spełniające równanie
- ▶ Równania sprzeczne i tożsamościowe
- ▶ Rozwiązywanie równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą

Za pomocą równań możemy opisać i rozwiązać wiele problemów i zagadnień z matematyki, fizyki, chemii i innych dziedzin nauki.

Dwa wyrażenia algebraiczne, w których występuje przynajmniej jedna litera, połączone znakiem równości nazywamy **równaniem**, np.



$$2x + 3 = 7$$

lewa strona równania: L prawa strona równania: P

Liczba spełnia dane równanie, jeżeli po podstawieniu tej liczby w miejsce niewiadomej lewa strona równania jest równa prawej stronie tego równania.

Przykład 1.

Sprawdź, czy liczba (-1) spełnia równanie $(x - 1)(x + 2) = x(3 + x)$.

Obliczymy wartość lewej strony równania dla $x = -1$ oraz wartość prawej strony równania dla $x = -1$.



$$L = (-1 - 1)(-1 + 2) = -2 \cdot 1 = -2$$

$$P = (-1) \cdot [3 + (-1)] = -1 \cdot (3 - 1) = \\ = -1 \cdot 2 = -2$$

Ponieważ $-2 = -2$, więc $L = P$. Zatem liczba (-1) jest rozwiązaniem (pierwiastkiem) tego równania, czyli spełnia to równanie.

Ćwiczenie 1.

Sprawdź, czy liczba 3 spełnia równanie $6(x - 4) - 2(1 + x) = 4x$.



Aby otrzymać równanie równoważne do danego równania, możemy:

- do obu stron równania dodać tę samą liczbę lub to samo wyrażenie, którego wartość można obliczyć dla dowolnej liczby,
- od obu stron równania odjąć tę samą liczbę lub to samo wyrażenie, którego wartość można obliczyć dla dowolnej liczby,
- obie strony równania pomnożyć przez tę samą liczbę różną od zera,
- obie strony równania podzielić przez tę samą liczbę różną od zera.

Rozwiązanie równania polega na znalezieniu wszystkich liczb, które spełniają to równanie, lub stwierdzeniu, że takie liczby nie istnieją.

Przykład 2.

Rozwiąż równanie $2x - 3(4 - x) = 6x - 5$.

Uprościmy lewą stronę równania.



$$\begin{aligned}2x - 3(4 - x) &= 6x - 5 \\2x - 12 + 3x &= 6x - 5 \\5x - 12 &= 6x - 5\end{aligned}$$

Do obu stron równania dodamy 12, a następnie odejmiemy $6x$.



$$\begin{aligned}5x - 12 &= 6x - 5 \quad | + 12 \\5x - 12 + 12 &= 6x - 5 + 12 \\5x &= 6x + 7 \quad | - 6x \\5x - 6x &= 6x + 7 - 6x \\-x &= 7\end{aligned}$$

Obie strony równania pomnożymy przez liczbę (-1) .



$$\begin{aligned}-x &= 7 \quad | \cdot (-1) \\x &= -7\end{aligned}$$

Ćwiczenie 2.

Rozwiąż równanie.

a) $2x + 3 = 11 - 5x$

b) $4x - 10 = 2 - 5(3 + x)$

c) $12x - 3(5 - 2x) = 0,5(38x + 4)$

Równanie, którego nie spełnia żadna liczba, nazywamy **równaniem sprzecznym**.

Równanie, które spełniają wszystkie liczby, nazywamy **równaniem tożsamościowym**.



Przykład 3.

Rozwiąż równanie.

a) $(x + 1)(x - 3) = x^2 - 2(x - 1)$

$$\begin{aligned}x^2 - 3x + x - 3 &= x^2 - 2x + 2 \\x^2 - 2x - 3 &= x^2 - 2x + 2 \quad | - x^2 \\-2x - 3 &= -2x + 2 \quad | + 2x \\-3 &= 2\end{aligned}$$

Liczba (-3) nie jest równa liczbie 2. Otrzymaliśmy sprzeczność. Oznacza to, że równanie jest sprzeczne, czyli nie ma rozwiązania (żadna liczba nie spełnia tego równania).

b) $6\left(2\frac{1}{6}x - 2\right) = -2(6 - 6,5x)$

$$\begin{aligned}6\left(\frac{13}{6}x - 2\right) &= -12 + 13x \\13x - 12 &= -12 + 13x \quad | - 13x \\-12 &= -12\end{aligned}$$

Liczba (-12) jest równa liczbie (-12) . Otrzymaliśmy tożsamość. Oznacza to, że równanie jest tożsamościowe, czyli ma nieskończenie wiele rozwiązań (każda liczba spełnia to równanie).

Ćwiczenie 3.

Rozwiąż równanie.

a) $6x + 8 = 2(3x - 4)$

b) $7(x - 1) = \frac{1}{2}(16 + 14x)$

c) $x^2 - \frac{1}{4}(6x + 4x^2) = -1,5x$

Przykład 4.

Rozwiąż równanie $\frac{-x-3}{5} = \frac{x+6}{4} + 2x$.

Obie strony równania pomnożymy przez liczbę 20, czyli przez wspólny mianownik ułamków znajdujących się po lewej i po prawej stronie równania. Następnie uprościmy obie strony równania.

Do obu stron równania dodamy 12, a następnie odejmiemy $45x$. W kolejnym kroku uprościmy obie strony równania.

Obie strony równania podzielimy przez liczbę (-49) .



$$\begin{aligned}\frac{-x-3}{5} &= \frac{x+6}{4} + 2x & | \cdot 20 \\ 4 \cdot \frac{-x-3}{5} &= 5 \cdot \frac{x+6}{4} + 20 \cdot 2x \\ 4(-x-3) &= 5(x+6) + 40x \\ -4x-12 &= 5x+30+40x \\ -4x-12 &= 45x+30 \\ -4x-12 &= 45x+30 & | +12 \\ -4x-12+12 &= 45x+30+12 \\ -4x &= 45x+42 & | -45x \\ -4x-45x &= 45x+42-45x \\ -49x &= 42 \\ -49x &= 42 & | : (-49) \\ x &= -\frac{42}{49} \\ x &= -\frac{6}{7}\end{aligned}$$

Ćwiczenie 4.

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x+5}{3} = \frac{x-1}{2}$

b) $\frac{-2x-1}{4} = \frac{9-4x}{8}$

c) $3x + \frac{10-x}{2} = \frac{-x-5}{7}$

Rozwiąż zadania

1. Sprawdź, czy podana liczba spełnia równanie.

a) $2x-5=9$, $x=7$

b) $2x-(11-x)=x-3$, $x=-4$

c) $4b+\frac{3}{5}(10b-5)=2(4-b)$, $b=-1$

d) $(y-5)(2-3y)=y(-2y+6)-y^2+1$, $y=1$

e) $\frac{-a^2+7a}{6} = \frac{6-3a^2}{7}$, $a=3$

2. Rozwiąż równanie.

a) $3x+6=2x-5$

c) $5\left(\frac{3}{5}x-3\right)=-7+2x$

e) $-(x-2)+0,1(8x+3)=0,6$

b) $2x-(10-x)=-4x-6$

d) $6\left(-\frac{5}{6}x-1\right)=\frac{3}{4}(-4x+8)-7x$

f) $1,5(x-3)+0,5x=2,5(x-4)-10$

3. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

c) $0 = \frac{1}{3}x + \frac{x+3}{6} - 4$

e) $\frac{3-x}{8} = -\frac{x-1}{4}$

b) $1\frac{3}{4} - \frac{5}{8}x = -2\frac{3}{8}x$

d) $\frac{3-2x}{2} = \frac{-3x+2}{4}$

f) $\frac{-x+3}{3} - \frac{x+6}{4} = \frac{1}{2}x$

4. Sprawdź, które równania są tożsamościowe, a które sprzeczne. Uzasadnij swoją odpowiedź.

I. $4x - (7 - 2x) = 8 - x$

II. $14 - 2\left(\frac{1}{4}x + 5\right) = 4 - \frac{1}{2}x$

III. $-2(x+1) = 5x - 7(x+3)$

IV. $\frac{6-2b}{4} - \frac{5+b}{2} = 2-b$

V. $\frac{3y+9}{2} = 3y - (1,5y - 4,5)$

VI. $(y-3)(y+1) - y^2 = 4$

5. Rozwiąż równanie.

a) $3x(2x-3) - 5 = 6x(x-1) + 10$

b) $-x(x-2) = -2x(x+4) + x^2 - 5$

c) $8(x^2-3) - 5x(2+x) = 3x^2 - 10x$

d) $-4x(x+2) + 6x = 2x(2x-1) - 8x^2$

6. Uzasadnij, że:

a) żadna liczba nie spełnia równania $\frac{3x+12}{6} = -\frac{2x+36}{4} + x$,

b) równanie $3(-x^2+2x-4) + (x-3)(x-1) = -2(x-1)^2 - 2x - 7$ jest spełnione przez nieskończenie wiele liczb.

Sprawdź, co umiesz!

1. Sprawdź, które z liczb: -1, 0, 2 są rozwiązaniami równania.

a) $14x - 22 = 6$

b) $4x(1+x) - 5x = 3x^2 + x$

2. Rozwiąż równanie.

a) $11x - 2 = 12 + 10x$

b) $4y - (6+y) = 5y - 12$

c) $10\left(\frac{1}{5}x - \frac{3}{10}\right) = 10 + 2x$

d) $13(1-y) + 8y + 9 = -5(y-4) + 2$

e) $\frac{6-2x}{4} = \frac{13-7x}{6}$

f) $\frac{-2x-5}{5} = -2x-1$

g) $\frac{4x-7}{8} - \frac{5+3x}{12} = \frac{7}{8}x + 2\frac{1}{4}$

h) $x(x-2) + 6 = \frac{2x^2-10x}{2}$

3. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Rozwiązaniem równania $5\left(-\frac{1}{5}x - 3\right) = -1\frac{2}{3}(3x-6) - 1$ jest liczba

A. -6

B. 2

C. 6

D. -1

3. Zastosowanie równań w praktyce

- Rozwiązywanie zadań tekstowych za pomocą równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą

Przykład 1.

Długość prostokątnego czytnika e-booków Cezarego jest o 9 cm większa niż szerokość. Obwód tego czytnika ma 46 cm. Oblicz wymiary czytnika Cezarego.

Analiza zadania

a – szerokość czytnika Cezarego

$a + 9$ – długość czytnika Cezarego

Obwód czytnika Cezarego wynosi 46 cm.

Ułożenie i rozwiązanie równania

Wiedząc, że obwód to suma długości boków, ułożymy odpowiednie równanie.



$$2a + 2(a + 9) = 46$$

Rozwiążemy równanie i obliczymy szerokość czytnika Cezarego.



$$2a + 2a + 18 = 46$$

$$4a + 18 = 46 \quad | -18$$

$$4a = 28 \quad | :4$$

$$a = 7 \text{ [cm]}$$

Wyznamy długość czytnika Cezarego.

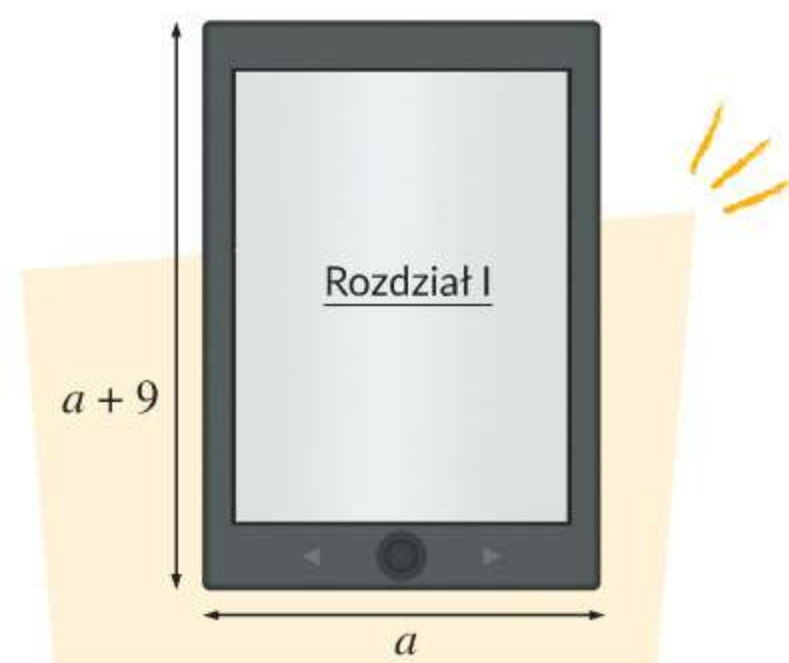


$$a + 9 = 7 + 9 = 16 \text{ [cm]}$$

Sprawdzenie

Czytnik Cezarego ma 7 cm szerokości i 16 cm długości. Zatem obwód czytnika ma $2 \cdot 7 \text{ cm} + 2 \cdot 16 \text{ cm} = 14 \text{ cm} + 32 \text{ cm} = 46 \text{ cm}$.

Odp. Czytnik Cezarego ma 7 cm szerokości i 16 cm długości.



Ćwiczenie 1.

Szerokość prostokątnego tabletu Eli jest o 7 cm mniejsza niż długość. Obwód tego tabletu ma 62 cm. Oblicz wymiary tabletu Eli.

Przykład 2.

Suma wynagrodzeń netto trzech pracowników wynosi 13 400 zł. Pensja drugiego pracownika stanowi 1,1 pensji pierwszego pracownika. Wynagrodzenie trzeciego pracownika jest o 1000 zł większe od wynagrodzenia pierwszego pracownika. Oblicz, jakie wynagrodzenia netto otrzymują pracownicy.

Analiza zadania

x – wysokość wynagrodzenia pierwszego pracownika

$1,1x$ – wysokość wynagrodzenia drugiego pracownika

$x + 1000$ – wysokość wynagrodzenia trzeciego pracownika

Suma wynagrodzeń trzech pracowników wynosi 13 400 zł.

Ułożenie i rozwiązanie równania

Wiemy, że suma wynagrodzeń trzech pracowników wynosi 13 400 zł. Ułożymy odpowiednie równanie i je rozwiążemy. Otrzymamy wysokość wynagrodzenia pierwszego pracownika.

Obliczymy wysokości pensji drugiego i trzeciego pracownika.



$$\begin{aligned}x + 1,1x + x + 1000 &= 13\,400 \\3,1x + 1000 &= 13\,400 \quad | - 1000 \\3,1x &= 12\,400 \quad | : 3,1 \\x &= 4000 \text{ [zł]}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}1,1x &= 1,1 \cdot 4000 = 4400 \text{ [zł]} \\x + 1000 &= 4000 + 1000 = 5000 \text{ [zł]}\end{aligned}$$

Sprawdzenie

Wynagrodzenie pierwszego pracownika wynosi 4000 zł, drugiego – 4400 zł, a trzeciego – 5000 zł. Wówczas $4000 \text{ zł} + 4400 \text{ zł} + 5000 \text{ zł} = 13\,400 \text{ zł}$.

Odp. Wynagrodzenia netto pracowników wynoszą odpowiednio: 4000 zł, 4400 zł i 5000 zł.

Ćwiczenie 2.

W galerii handlowej znajdują się trzy sale kinowe. Łącznie w tych salach jest 1420 miejsc. W drugiej sali znajduje się 3 razy więcej miejsc niż w pierwszej. W trzeciej sali jest o 180 miejsc mniej niż łącznie w pierwszej i drugiej sali. Oblicz, ile miejsc jest w każdej z sal.

Przykład 3.

Bilet normalny do kina kosztuje 36 zł, a bilet ulgowy – 18 zł. We wtorek kino odwiedziło 128 osób. Do kasy ze sprzedaży biletów wpłynęło 3834 zł. Ile tego dnia sprzedano biletów ulgowych?

Analiza zadania

We wtorek sprzedano łącznie 128 biletów.

x – liczba sprzedanych biletów normalnych

$128 - x$ – liczba sprzedanych biletów ulgowych

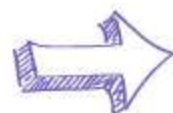
Do kasy ze sprzedaży biletów normalnych i biletów ulgowych wpłynęło 3834 zł.

Kwota, jaka wpłynęła ze sprzedaży biletów normalnych: $36x$

Kwota, jaka wpłynęła ze sprzedaży biletów ulgowych: $18(128 - x)$

Ułożenie i rozwiązanie równania

Ułożymy odpowiednie równanie, a następnie je rozwiążemy. Otrzymamy liczbę sprzedanych biletów normalnych. Kwota, która wpłynęła ze sprzedaży biletów normalnych i biletów ulgowych, wynosiła 3834 zł.



$$\begin{aligned}36x + 18(128 - x) &= 3834 \\36x + 2304 - 18x &= 3834 \quad | - 2304 \\18x &= 1530 \quad | : 18 \\x &= 85\end{aligned}$$

Obliczymy liczbę sprzedanych biletów ulgowych.



$$128 - x = 128 - 85 = 43$$

Sprawdzenie

$$36 \text{ zł} \cdot 85 + 18 \text{ zł} \cdot 43 = 3060 \text{ zł} + 774 \text{ zł} = 3834 \text{ zł}$$

Odp. Tego dnia sprzedano 43 bilety ulgowe.



Ćwiczenie 3.

Bilet ulgowy na koncert kosztuje 85 zł, a bilet normalny – 120 zł. W dniu ogłoszenia koncertu sprzedano 78 biletów za łączną kwotę 7890 zł. Oblicz, ile tego dnia sprzedano biletów normalnych.

Przykład 4.

Wychowawczyni organizuje wycieczkę dla swojej klasy. Ustaliła, że jeśli każdy z uczestników wpłaci 95 zł, to na pokrycie wszystkich kosztów związanych z wyjazdem zabraknie 52 zł. Natomiast jeśli każdy z uczestników wpłaci 100 zł, to zostanie 78 zł. Oblicz, ilu uczniów zadeklarowało udział w wycieczce.

Analiza zadania

x – liczba uczestników wycieczki

Jeśli każdy z uczestników wpłaci 95 zł, to kwota potrzebna na pokrycie kosztów wycieczki wyniesie $(95x + 52)$ zł.

Jeśli każdy z uczestników wpłaci 100 zł, to kwota potrzebna na pokrycie kosztów wycieczki wyniesie $(100x - 78)$ zł.

Ułożenie i rozwiązanie równania

Ułożymy odpowiednie równanie, a następnie je rozwiążemy. Otrzymamy liczbę uczestników wycieczki.



$$\begin{aligned} 95x + 52 &= 100x - 78 & | - 100x \\ 95x + 52 - 100x &= 100x - 78 - 100x \\ -5x + 52 &= -78 & | - 52 \\ -5x + 52 - 52 &= -78 - 52 \\ -5x &= -130 & | : (-5) \\ x &= 26 \end{aligned}$$

Sprawdzenie

$$(95 \cdot 26 + 52) \text{ zł} = 2470 \text{ zł} + 52 \text{ zł} = 2522 \text{ zł}$$

$$(100 \cdot 26 - 78) \text{ zł} = 2600 \text{ zł} - 78 \text{ zł} = 2522 \text{ zł}$$

Odp. Udział w wycieczce zadeklarowało 26 uczniów.

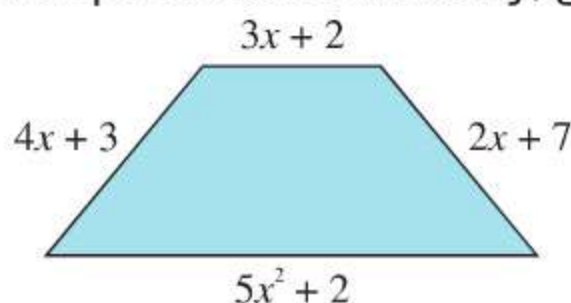
Ćwiczenie 4.

Organizatorzy balu ósmoklasisty ustalili, że jeśli każdy z uczestników balu wpłaci 180 zł, to na pokrycie wszystkich kosztów związanych z balem zabraknie 324 zł. Natomiast jeśli każdy z uczestników wpłaci 190 zł, to zostanie 216 zł. Oblicz, ilu uczniów zadeklarowało udział w balu.

Rozwiąż zadania

1. Pola zabrała na wycieczkę o 25 zł więcej niż jej siostra. Razem miały 115 zł. Oblicz, ile pieniędzy zabrała siostra Poli na wycieczkę.
2. Obwód prostokątnej działki jest równy 240 m. Jeden z boków działki jest 3 razy krótszy od drugiego boku. Oblicz wymiary tej działki.
3. W trójkącie równoramiennym miara kąta przy podstawie jest 2,5 razy większa od miary kąta między ramionami. Oblicz miary kątów tego trójkąta.
4. Cezary jest o 5 lat starszy od swojego kuzyna Marka, a Marek 2 razy młodszy od swojej siostry Kasi. Razem mają 41 lat. Oblicz wiek każdego z nich.
5. Tosia jest o trzy lata młodsza od Michasi. Razem mają 21 lat. Ile lat temu Michasia była dwa razy starsza od Tosi?

6. Na rysunku przedstawiony jest trapez równoramienny, gdzie $x > 0$.



Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Wartość x jest równa **A** **B**.

A. 2

B. 4

Obwód trapezu jest równy **C** **D**.

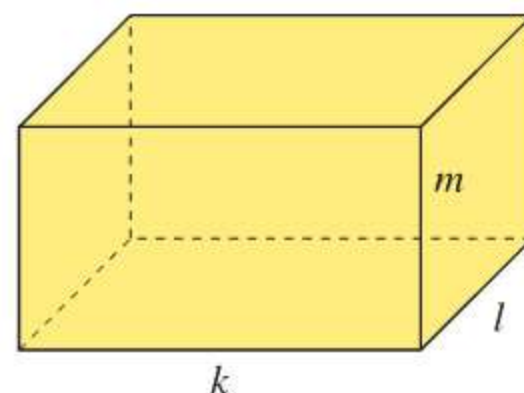
C. 42

D. 52

7. Przedstaw liczbę 110 w postaci sumy dwóch składników, tak aby jeden składnik był o 20 większy od podwojonej wartości drugiego składnika.

Informacje do zadań 8. i 9.

Objętość prostopadłościanu jest równa iloczynowi długości krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka. Suma długości trzech krawędzi prostopadłościanu poprowadzonych z jednego wierzchołka jest równa 37 cm. Krawędź l jest o 9 cm krótsza od krawędzi k , a długość krawędzi m stanowi $\frac{5}{9}$ długości krawędzi k .



8. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Krawędź m ma długość **A** **B** cm.

A. 10

B. 18

Suma długości wszystkich krawędzi jest równa **C** **D** cm.

C. 148

D. 296

9. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Objętość prostopadłościanu jest równa

A. 360 cm^3

B. 810 cm^3

C. 1620 cm^3

D. 3420 cm^3

10. Bruno postanowił kupić za zaoszczędzone pieniądze deskorolkę elektryczną. Miał już 400 zł oszczędności, ale ta kwota nie wystarczyła na zakup deskorolki. Postanowił, że będzie odkładał na ten cel co miesiąc 30 zł. Okazało się, że gdyby odkładał co miesiąc 50 zł, to mógłby kupić wymarzoną deskorolkę o sześć miesięcy wcześniej. Cena deskorolki przez cały okres oszczędzania była taka sama. Jaka była cena deskorolki, którą chciał kupić Bruno?

11. Ela kupiła na przyjęcie z okazji swoich czternastych urodzin 1,8 kg słodyczy. Cena za 1 kg pralinek była o 16 zł wyższa od ceny za 1 kg galaretek owocowych. Za mieszankę słodyczy zapłaciła 48,60 zł. Jaka była cena za kilogram każdego rodzaju słodyczy, jeżeli Ela kupiła trzy razy mniej pralinek niż galaretek owocowych?



- 12.** Czy istnieje sześć kolejnych liczb parzystych, których suma jest równa 2520? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Wskazówka: kolejne liczby naturalne parzyste możemy zapisać w postaci $2k, 2k+2, \dots$, gdzie k jest liczbą naturalną.

- 13.** Dana jest liczba dwucyfrowa, w której cyfra jedności jest o 2 mniejsza od cyfry dziesiątek. Jeżeli do tej liczby dwucyfrowej dodamy cyfrę jej dziesiątek, to otrzymamy liczbę 82. Znajdź tę liczbę.



- 14.** W liczbie naturalnej dwucyfrowej cyfra dziesiątek jest o 3 większa od cyfry jedności. Różnica danej liczby i liczby dwucyfrowej otrzymanej po przestawieniu cyfr tej liczby jest równa 27. Znajdź wszystkie liczby o tej własności.

Sprawdź, co umiesz!



- 1.** Babcia Zosi przygotowała na zimę 61 słoików z konfiturami: malinową, porzeczkową i truskawkową. Słoików z konfiturą malinową było 4 razy więcej niż słoików z konfiturą truskawkową, a słoików z konfiturą porzeczkową o 7 więcej niż z truskawkową. Oblicz, ile słoików konfitury porzeczkowej przygotowała babcia Zosi.

- E 2.** Na rysunku przedstawiony jest trójkąt równoramienny, gdzie $x > 0$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

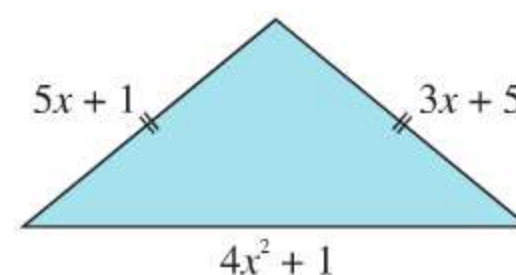
Obwód trójkąta wynosi

A. 21

B. 31

C. 39

D. 69



- E 3.** Agnieszka rozmieniła 5 zł na monety 50-groszowe i 20-groszowe. Monet 20-groszowych było o 4 więcej niż monet 50-groszowych.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Jeśli przez x oznaczymy liczbę monet 20-groszowych, to sytuację opisuje równanie $x \cdot 0,5 + (x - 4) \cdot 0,2 = 5$.

P

F

Agnieszka rozmieniła 5 zł na 10 monet 20-groszowych i 6 monet 50-groszowych.

P

F

- 4.** Na wystawę modeli starych samochodów można kupić bilet normalny w cenie 18 zł, bilet ulgowy za 14 zł oraz bilet rodzinny, który jest dwa razy droższy od biletu normalnego. Pewnego dnia sprzedano 142 bilety, w tym 62 bilety rodzinne. Ile sprzedano biletów ulgowych i ile normalnych, jeżeli tego dnia przychód ze sprzedaży biletów wyniósł 3472 zł?

4. Procenty w równaniach

- ▶ Rozwiązywanie za pomocą równań zadań tekstowych, w których występują dane wyrażone w procentach

Umiejętność wykonywania obliczeń procentowych przydaje się między innymi podczas wyznaczania cen produktów po obniżkach lub podwyżkach, obliczania oprocentowania kredytów, czy wysokości odsetek od wpłaconego kapitału na lokatę bankową. Aby ułatwić obliczenia w zadaniach dotyczących lokat, nie będziemy uwzględniać pobierania przez bank podatku od odsetek, który w Polsce wynosi 19 %.

Przykład 1.

Zosia podczas trzydniowych przygotowań do sprawdzianu z matematyki rozwiązała 50 zadań. Liczba zadań rozwiązanych przez Zosię drugiego dnia stanowiła 325 % liczby zadań rozwiązanych przez nią pierwszego dnia. Trzeciego dnia Zosia rozwiązała o 100 % więcej zadań niż pierwszego dnia. Ustal, ile zadań rozwiązała Zosia w poszczególnych dniach.

Analiza zadania



Ułożenie i rozwiązanie równania

Ułożymy odpowiednie równanie i je rozwiążemy. Otrzymamy liczbę zadań rozwiązanych pierwszego dnia.



$$\begin{aligned}x + 3,25x + 2x &= 50 \\6,25x &= 50 \quad | : 6,25 \\x &= \frac{50}{6,25} = \frac{5000}{625} = 8\end{aligned}$$

Obliczymy, ile zadań Zosia rozwiązała drugiego dnia, a ile – trzeciego.



$$\begin{aligned}\text{dzień II: } 3,25x &= 3,25 \cdot 8 = 26 \\ \text{dzień III: } 2x &= 2 \cdot 8 = 16\end{aligned}$$

Sprawdzenie

$$8 + 26 + 16 = 50$$

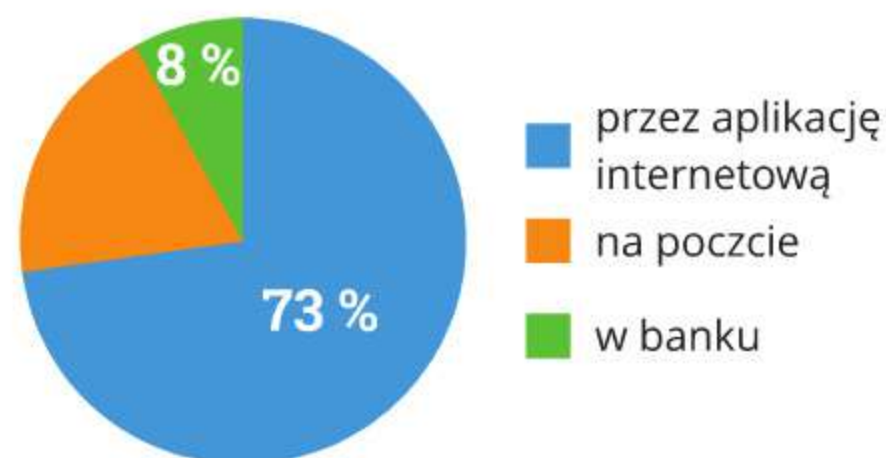
Odp. Zosia pierwszego dnia rozwiązała 8 zadań, drugiego – 26 zadań, a trzeciego – 16 zadań.

Ćwiczenie 1.

Kuba co miesiąc odkłada zaoszczędzone pieniądze. Od września do grudnia udało mu się odłożyć 156 zł. We wrześniu i w październiku zaoszczędził taką samą kwotę. Pieniądze odłożone przez Kubę w listopadzie stanowią 50 % kwoty, którą odłożył we wrześniu. W grudniu zaoszczędził o 25 % mniej pieniędzy niż w październiku. Ustal, jakie kwoty odłożył Kuba w poszczególnych miesiącach.

Przykład 2.

Ankietowanym zadano pytanie: *W jaki sposób opłacasz rachunki?* Każdy z ankietowanych mógł wskazać tylko jeden sposób. Wyniki ankiety przedstawiono na procentowym diagramie kołowym. Odpowiedzi, że opłaca rachunki na pocztce, udzieliło 57 ankietowanych. Uzasadnij, że w ankiecie wzięło udział 300 osób.



Analiza zadania

x – liczba ankietowanych

57 ankietowanych opłaca rachunki na pocztce. Stanowią oni $100 \% - 73 \% - 8 \% = 19 \%$ wszystkich ankietowanych, czyli $0,19x$.

Ułożenie i rozwiązanie równania

Ułożymy odpowiednie równanie i je rozwiążemy.



$$0,19x = 57 \quad | : 0,19$$

$$x = \frac{57}{0,19} = \frac{5700}{19} = 300$$

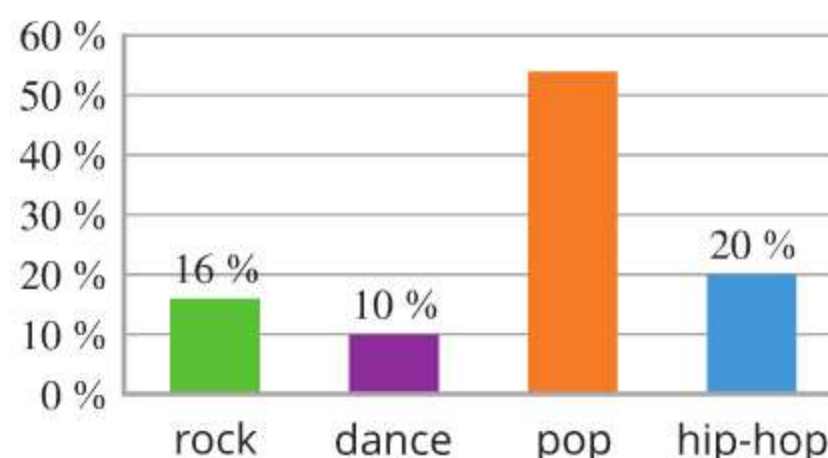
Zatem uzasadniliśmy, że w ankiecie wzięło udział 300 osób.

Sprawdzenie

$$0,19x = 0,19 \cdot 300 = 57$$

Ćwiczenie 2.

Ankietowanym zadano pytanie: *Jaki jest twój ulubiony gatunek muzyki?* Każdy z ankietowanych mógł wskazać tylko jeden gatunek. Wyniki przedstawiono na procentowym diagramie słupkowym. Rock jako ulubiony gatunek muzyki wskazało 40 osób. Uzasadnij, że 135 ankietowanych wybrało pop.



Przykład 3.

W szkole, do której uczęszcza Kuba, chłopcy stanowią 45 % liczby wszystkich uczniów. Dziewcząt jest o 52 więcej niż chłopców. Ilu uczniów uczęszcza do tej szkoły?

Analiza zadania

x – liczba uczniów w szkole, do której uczęszcza Kuba

Chłopcy stanowią 45 % liczby uczniów w tej szkole, czyli $0,45x$.

Dziewczęta stanowią $100 \% - 45 \% = 55 \%$ liczby wszystkich uczniów w tej szkole, czyli $0,55x$.

Dziewcząt jest o 52 więcej niż chłopców.

Ułożenie i rozwiązanie równania

Jeśli liczbę chłopców zwiększymy o 52, to będzie ona równa liczbie dziewcząt. Ułożymy odpowiednie równanie i je rozwiążemy.



$$0,45x + 52 = 0,55x \quad | - 0,45x$$

$$0,45x + 52 - 0,45x = 0,55x - 0,45x$$

$$52 = 0,1x \quad | : 0,1$$

$$x = \frac{52}{0,1} = \frac{520}{1} = 520$$

Sprawdzenie

Dziewczęta: $0,55x = 0,55 \cdot 520 = 286$

Chłopcy: $0,45x = 0,45 \cdot 520 = 234$

$286 - 234 = 52$

Odp. Do tej szkoły uczęszcza 520 uczniów.

Ćwiczenie 3.

W chórze, do którego należy Ela, dziewczęta stanowią 75 % wszystkich jego wokalistów. Chłopców jest o 18 mniej niż dziewcząt. Ile osób należy do chóru?

Przykład 4.

Cenę piłki obniżono o 20 %, a po pewnym czasie podwyższono o 10 %. Po tych zmianach cena piłki wynosi 176 zł. Oblicz cenę początkową piłki.

Sposób I

Oznaczmy przez x cenę początkową piłki, a przez y cenę piłki po obniżce.

Jeśli cenę y piłki podwyższono o 10 %, to 176 zł stanowi 110 % = 1,1 ceny y .

Obliczymy cenę piłki po obniżce.



$$1,1y = 176 \quad | : 1,1$$

$$y = \frac{176}{1,1} = \frac{1760}{11} = 160 \text{ [zł]}$$

Jeśli cenę x piłki obniżono o 20 %, to 160 zł stanowi 80 % = 0,8 ceny x .

Obliczymy cenę początkową piłki.



$$0,8x = 160 \quad | : 0,8$$

$$x = \frac{160}{0,8} = \frac{1600}{8} = 200 \text{ [zł]}$$

Sposób II

Oznaczmy przez x cenę początkową piłki. Cena piłki po obniżce wynosi $0,8x$.

Cena piłki po podwyżce stanowi 110 % = 1,1 ceny po obniżce.



$$1,1 \cdot 0,8x = 0,88x$$

Obliczymy cenę początkową piłki.



$$0,88x = 176 \quad | : 0,88$$

$$x = \frac{176}{0,88} = \frac{17\,600}{88} = 200 \text{ [zł]}$$

Sprawdzenie

Cena po obniżce: $200 \text{ zł} \cdot 0,8 = 160 \text{ zł}$

Cena po podwyżce: $160 \text{ zł} \cdot 1,1 = 176 \text{ zł}$

Odp. Cena początkowa piłki wynosiła 200 zł.

Ćwiczenie 4.

Cena drona po dwóch obniżkach, za każdym razem o 15 %, jest równa 578 zł. Oblicz cenę początkową drona.



Przykład 5.

Pan Kwiatkowski wpłacił 10 000 zł na roczną lokatę bankową. Po roku stan lokaty wynosił 10 780 zł. Jakie było oprocentowanie w skali roku tej lokaty?

Oznaczmy przez x oprocentowanie lokaty w skali roku wyrażone w procentach.

Po roku do kwoty 10 000 zł bank doliczył odsetki w wysokości $x\% \cdot 10\,000$ zł.

Zapiszemy odpowiednie równanie.



$$10\,000 + x\% \cdot 10\,000 = 10\,780$$

Zamienimy procent na ułamek i wyznaczmy oprocentowanie lokaty.



$$10\,000 + \frac{x}{100} \cdot 10\,000 = 10\,780$$

$$10\,000 + 100x = 10\,780 \quad | - 10\,000$$

$$100x = 780 \quad | : 100$$

$$x = 7,8 [\%]$$

Odp. Oprocentowanie lokaty wynosiło 7,8 %.

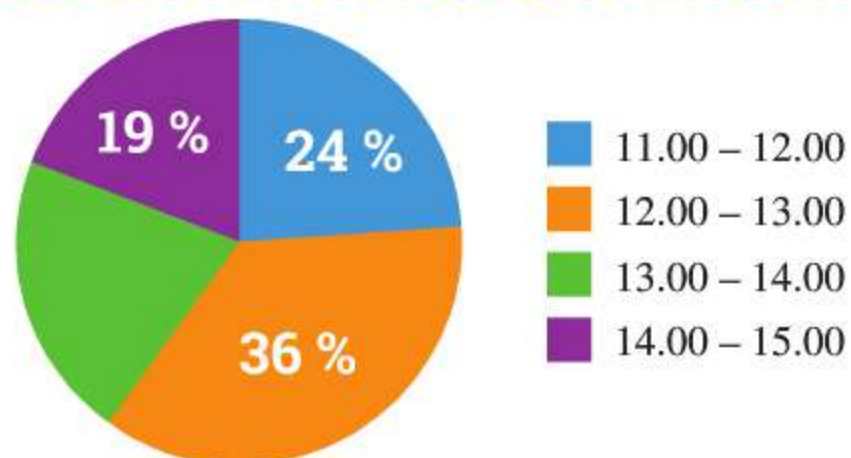
Ćwiczenie 5.

Pani Nowak zaciągnęła w banku kredyt w wysokości 5000 zł. Po roku zwróciła do banku kapitał wraz z odsetkami, które wynosiły 450 zł. Jakie było oprocentowanie w skali roku tego kredytu?

Rozwiąż zadania

1. 35 % pewnej liczby x jest równe 22,4. Oblicz liczbę x .

2. Przez 4 godziny obserwowano natężenie ruchu na przejściu dla pieszych. Wyniki obserwacji przedstawiono na procentowym diagramie kołowym. Między godziną 13.00 a 14.00 z przejścia dla pieszych skorzystały 63 osoby. Ile osób skorzystało z tego przejścia dla pieszych w czasie 4 godzin obserwacji?



3. Cenę hulajnogi obniżono o 12 %, dzięki czemu Cezary zapłacił za nią o 72 zł mniej, niż gdyby kupił ją przed obniżką. Ile kosztowała hulajnoga przed obniżką?

4. Pani Anna chciała wybrać się na wycieczkę do Wiednia. Znalazła odpowiednią ofertę, ale podczas rezerwacji okazało się, że cena wycieczki została podwyższona o 16 %. Po podwyżce pani Anna musiałaby za wycieczkę zapłacić 928 zł. Jaka była początkowa cena wycieczki?



5. 62 uczniów z klas 8a, 8b oraz 8c wzięło udział w konkursie wiedzy o Unii Europejskiej. Liczba uczniów z klasy 8b była o 15 % większa od liczby uczniów z klasy 8a, a z klasy 8c o 4 mniejsza od liczby uczniów z klasy 8b. Ilu uczniów z każdej klasy brało udział w konkursie?

6. Cenę nart obniżono o 5 %, a następnie o 10 %. Obecnie narty kosztują 1710 zł. Jaka była początkowa cena nart?

Informacje do zadań 7. i 8.

Cenę laptopa obniżono o 15 %, a później jeszcze o 10 %. Po obu obniżkach laptop kosztuje 3519 zł.

7. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Laptop przed obniżkami kosztował zł.

A. 4692 **B.** 4600

Pierwsza obniżka była wyższa od drugiej o zł.

C. 230 **D.** 299

8. Ile procent ceny początkowej laptopa stanowi cena końcowa? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 23,5 %

B. 75 %

C. 76,5 %

D. 25 %



E

9. Pan Kowalski wziął kredyt gotówkowy, którego oprocentowanie roczne wynosi 9,6 %. Po roku spłacił kredyt (wraz z odsetkami) w kwocie 27 400 zł. Ile złotych kredytu wziął pan Kowalski?

10. Pani Zofia wpłaciła 8000 zł na roczną lokatę bankową. Po roku bank doliczył odsetki w wysokości 680 zł. Jakie było oprocentowanie roczne tej lokaty?

11. W naczyniu znajduje się 800 g roztworu wodnego soli o stężeniu 15 %. Ile gramów wody należy odparować, aby otrzymać roztwór o stężeniu 16 %?

12. W 15 g stopu srebro stanowi 5 %. Ile gramów innych metali trzeba dodać do tego stopu, aby w nowym stopie srebro stanowiło 4 %?

13. Ela hoduje rybki akwariowe. Mieczyki stanowią 40 % liczby wszystkich rybek, liczba molinezji to 20 % liczby mieczyków, a pozostałe 13 rybek to gupiki. Ile rybek ma Ela?

14. Zosia, Pola i Ela zbierają widokówki. Zosia ma o 40 % widokówek więcej niż Pola, a Ela ma o 20 % widokówek mniej niż Zosia. Razem mają 528 widokówek. Ile widokówek ma każda z dziewcząt?

15. Ola na zakup książek wydała 45 % swoich oszczędności, a na biżuterię 20 % tego, co zostało jej po kupieniu książek. Oblicz, ile Ola miała oszczędności, jeśli po tych zakupach zostało jej 110 zł.

16. Jedna liczba jest o 50 większa od drugiej. Suma 24 % liczby mniejszej i 42 % liczby większej jest równa 87. Wyznacz te liczby.

- E 17.** Różnica dwóch liczb jest równa 12, a suma podwojonej większej z nich i 50 % mniejszej liczby jest równa 14.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Jeżeli przez x oznaczmy większą z liczb, to warunki zadania opisuje równanie **A B**.

A. $2x + 0,5(x + 12) = 14$ **B.** $2x + 0,5(x - 12) = 14$

Liczby, o których mowa w zadaniu, to **C D**.

C. -4 i 8 **D.** $3,2$ i $15,2$

- 18.** Na dwóch regałach było ustawionych łącznie 117 książek. Gdy z pierwszego regału przedstawiono 35 % książek na drugi regał, to na pierwszym było 2 razy mniej książek niż na drugim. Ile książek stało początkowo na każdym regale?

- E 19.** W sklepie z bakaliami cena za 1 kg migdałów jest o 38 % wyższa od ceny za 1 kg rodzynek. Za 30 dag migdałów i 1,5 raza więcej rodzynek zapłacono 21,60 zł.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

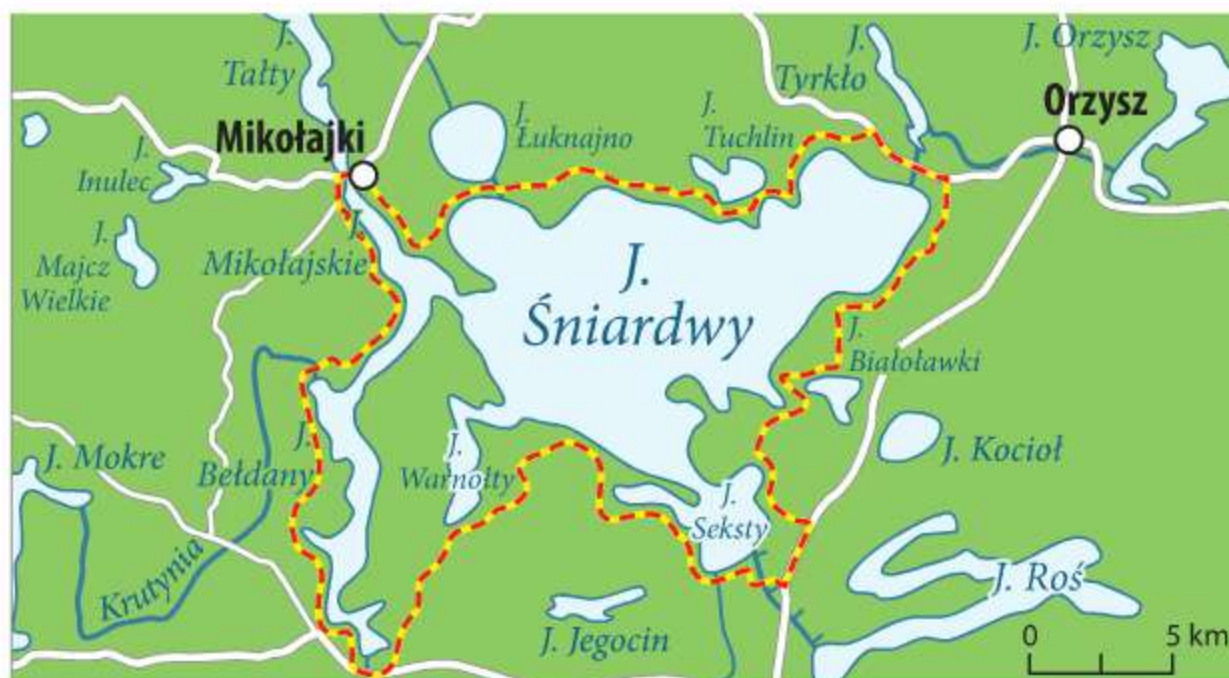
Cena za 1 kg rodzynek jest o 9,50 zł niższa od ceny za 1 kg migdałów.	P	F
20 dag migdałów i 0,5 kg rodzynek kosztuje 19,40 zł.	P	F

- ☆ 20.** W liczbie dwucyfrowej cyfra dziesiątek jest o 50 % mniejsza od cyfry jedności. Jeżeli między cyfry tej liczby wstawimy cyfrę 7, to otrzymamy liczbę o 340 większą od liczby początkowej. Wyznacz liczbę dwucyfrową.

Sprawdź, co umiesz!

- 1.** 68 % pewnej liczby x jest równe 102. Oblicz liczbę x .

- 2.** Pola w ciągu trzech dni przejechała trasę wokół Jeziora Śniardwy o długości 110 km. W drugim dniu pokonała dystans o 20 % dłuższy niż pierwszego. Trzeciego dnia przejechała 25 % łącznej liczby kilometrów pokonanych pierwszego i drugiego dnia. Ile kilometrów pokonała Pola każdego dnia?



3. Na diagramie przedstawiono, ile procent dziewcząt i chłopców klasy 8a uczy się języka hiszpańskiego i niemieckiego. W klasie jest o dwóch chłopców mniej niż dziewcząt. Języka niemieckiego w tej klasie uczy się tyle samo dziewcząt co chłopców. Ilu uczniów jest w klasie 8a?



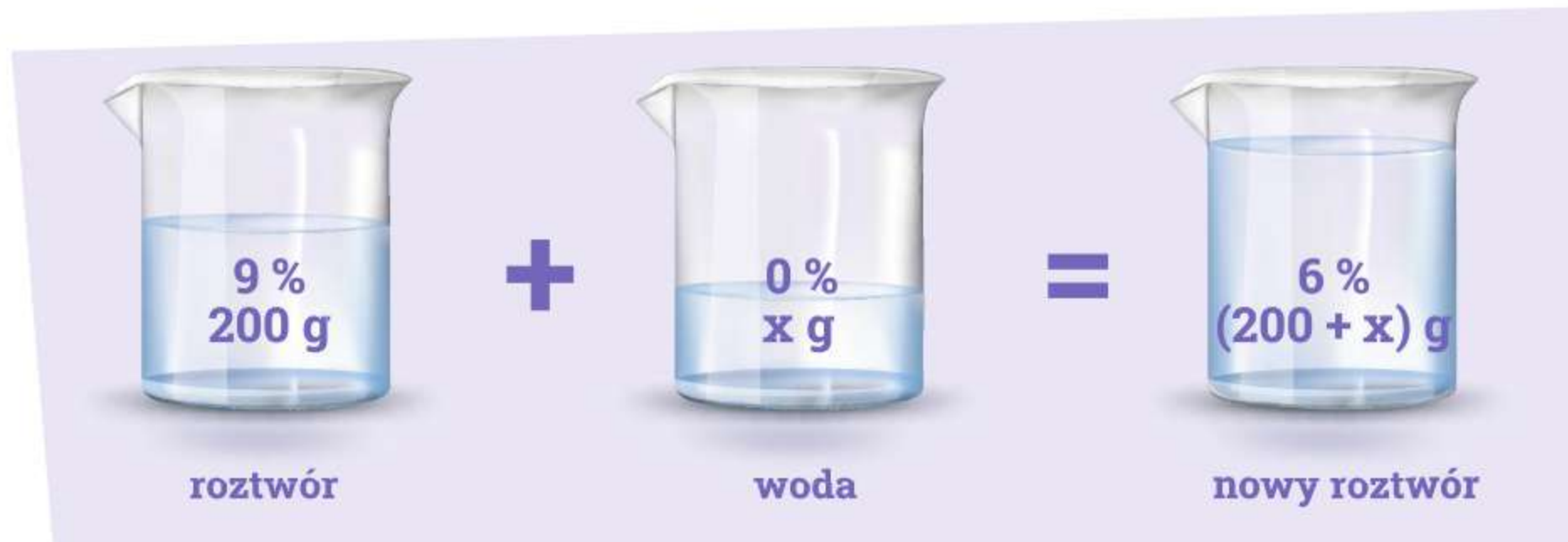
4. Działka pana Romana ma kształt kwadratu o boku długości x . Działka pana Henryka ma kształt prostokąta, którego długość jest o 16 % większa, a szerokość o 16 % mniejsza od długości boku działki pana Romana.

Czy powierzchnie tych działek są jednakowe?

Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród 1., 2. albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	$2(0,84x + 1,16x) = 4x.$
			2.	$0,84x \cdot 1,16x < x^2.$
B.	Nie,		3.	$(x + 16)(x - 16) \neq x^2.$

5. Do 200 g solanki o stężeniu 9 % dolano taką ilość wody, że stężenie soli w solance zmalało do 6 %.



Ile gramów wody dolano do tej solanki? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A.** 60 **B.** 100 **C.** 180 **D.** 300

PODSUMOWANIE DZIAŁU III

Wyrażenia algebraiczne i równania

Powtórz wiadomości

Mnożenie jednomianu przez sumę algebraiczną

Aby pomnożyć jednomian przez sumę algebraiczną, należy pomnożyć go przez każdy wyraz tej sumy.

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$a(b-c) = ab - ac$$

$$6x(3x+5-y) = 6x \cdot 3x + 6x \cdot 5 - 6x \cdot y = 18x^2 + 30x - 6xy$$

Mnożenie sum algebraicznych

Aby pomnożyć sumy algebraiczne, mnożymy każdy składnik pierwszej sumy przez każdy składnik drugiej sumy.

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(3x^2 - 2x)(4x + 5) = 3x^2 \cdot 4x + 3x^2 \cdot 5 - 2x \cdot 4x - 2x \cdot 5 = 12x^3 + 15x^2 - 8x^2 - 10x = 12x^3 + 7x^2 - 10x$$

Liczba rozwiązań równania

Równanie może mieć jedno rozwiązanie.

$$2x + 5 = 11$$
$$x = 3$$

Równanie może mieć nieskończenie wiele rozwiązań (równanie tożsamościowe).

$$12x + 6 = 6(2x + 1)$$
$$0 = 0$$

Równanie może nie mieć rozwiązań (równanie sprzeczne).

$$7x + 10 = 7x - 2$$
$$10 = -2$$

Zastosowanie równań

Kuba kupił kilka cienkopisów. Zosia kupiła o 60 % więcej cienkopisów niż Kuba. Kuba i Zosia razem kupili 13 cienkopisów. Oblicz, ile cienkopisów kupił Kuba.

1. Analiza zadania

x – liczba cienkopisów kupionych przez Kubę
 $x + 60\% \cdot x = x + 0,6x = 1,6x$ – liczba cienkopisów kupionych przez Zosię
Razem kupili 13 cienkopisów.

2. Ułożenie i rozwiązanie równania

$$x + 1,6x = 13$$
$$2,6x = 13 \quad | : 2,6$$
$$x = \frac{13}{2,6} = \frac{130}{26} = 5$$

3. Sprawdzenie

$$1,6 \cdot 5 = 8$$
$$5 + 8 = 13$$

4. Odpowiedź

Kuba kupił 5 cienkopisów.

Sprawdź umiejętności



1. Dane są wyrażenia: $2x - 2$, $x - 2$, $\frac{1}{2}x + 3$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Dla $x = 1$ dwa z podanych wyrażen przyjmują wartość dodatnią.	P	F
Jedno z podanych wyrażen przyjmuje wartość 7 dla $x = 8$.	P	F

2. Dane jest wyrażenie $(7x + 1)(y - 3)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyrażenie to przyjmuje wartość ujemną dla

- A.** $x = -5$ i $y = -2$. **B.** $x = -\frac{1}{5}$ i $y = 2$. **C.** $x = 0,5$ i $y = 4$. **D.** $x = 0$ i $y = -1$.

3. Obwód równoległoboku wynosi $10a + 4b$. Jego dłuższy bok ma długość $2a + b$. Oblicz długość krótszego boku tego równoległoboku.

4. Zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej. Pamiętaj o redukcji wyrazów podobnych.

a) $(7a + 15b) + (9b + 23a)$

b) $(6b - 5) + 7(4 - b)$

c) $(4ab - 11a + 9b) - (a + 13ab - 8b)$

d) $(12x^2 + 3x - 14) - 0,9(10x^2 - 4x - 25)$

e) $\left(1\frac{2}{5}y + 15\right)\left(\frac{1}{7} - 0,2y\right)$

f) $(9x + 4)(2 - 6x) - (3x - 5)(7x + 1)$

5. Sprawdź, czy liczba (-3) spełnia równanie $\frac{2}{5}(3x - 4) = 2x$.

6. Rozwiąż równanie.

a) $3x - 5 = 4x + 0,8$

b) $8(2x - 7) = 3x - (1 - 13x)$

c) $5x - 4 - 2(x + 5) = -14$

d) $\frac{2x - 6}{4} = \frac{x - 3}{2}$

e) $7 - \frac{x + 2}{3} = 4x$

f) $(x - 3)(2x + 3) = 2x^2$

7. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Rozwiązaniem równania $\frac{x - 4}{2} = 5 - 2x$ jest liczba **A** **B**.

A. 2,4

B. 2,8

Równanie $\frac{2x}{3} - \frac{x}{2} = \frac{x}{6}$ jest **C** **D**.

C. sprzeczne

D. tożsamościowe

8. Obwód prostokąta jest równy 42 cm. Długość jednego boku jest o 5 cm większa od długości drugiego boku. Oblicz wymiary tego prostokąta.

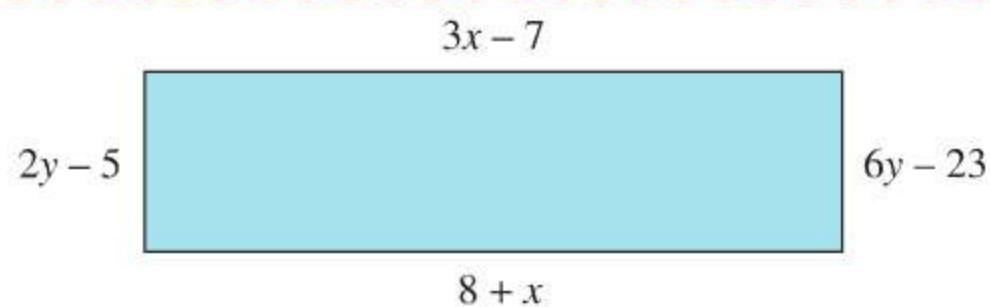
9. Pola jest 3 razy młodsza od swojej mamy, a tata jest o 2 lata starszy od mamy. Pola i jej rodzice mają razem 100 lat. Oblicz wiek Poli i jej rodziców.

- 10.** W czworokącie $KLMN$ miara kąta przy wierzchołku L jest 5 razy mniejsza od miary kąta przy wierzchołku K i o 27° mniejsza od miary kąta przy wierzchołku M . Kąt przy wierzchołku N ma miarę 39° . Wyznacz miary kątów czworokąta $KLMN$.

- 11.** Oblicz pole prostokąta przedstawionego na rysunku. Odpowiedz na pytanie.

a) Czy pole prostokąta jest wyrażone liczbą wymierną?

b) Jaką długość miałby bok kwadratu o takim samym polu jak pole prostokąta?

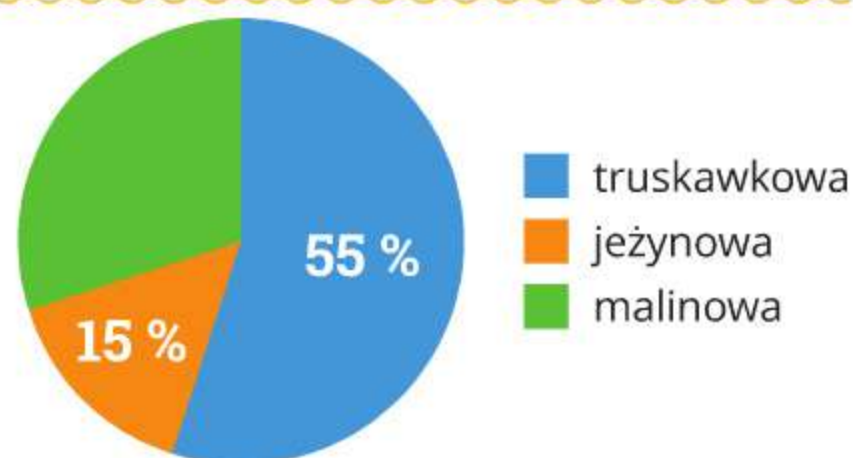


- 12.** Mała czekolada jest o 1,20 zł tańsza od dużej czekolady. Zosia kupiła dwie duże czekolady i trzy małe. Płacąc za zakupy banknotem pięćdziesięciozłotowym, otrzymała 29,60 zł reszty. Ile kosztowała mała czekolada?

- 13.** We wrześniu liczba uczniów, którzy zapisali się do koła geograficznego, stanowiła $\frac{4}{5}$ liczby uczniów zapisanych do koła historycznego. W październiku 5 osób przeszło z koła geograficznego do historycznego. Po tej zmianie do koła historycznego należy 2 razy więcej uczniów niż do koła geograficznego. Ilu uczniów zapisało się we wrześniu do koła geograficznego?

- 14.** Po obniżce o 12 % sweter kosztuje 132 zł. Oblicz cenę tego swetra przed obniżką.

- 15.** Na diagramie przedstawiono procentowy skład mieszanki herbat owocowych. Herbaty malinowej w tej mieszance jest o 60 g mniej niż herbaty truskawkowej. Oblicz masę tej mieszanki herbat.



- 16.** Pani Ewa wzięła w banku kredyt na rok, którego oprocentowanie roczne wynosi 9 %. Po roku oddała do banku 16 350 zł. Ile złotych kredytu zaciągnęła pani Ewa?

- 17.** Wszyscy uczniowie z klas ósmych pojechali na wycieczkę do Krakowa. Uczniów, którzy byli już raz w tym mieście, było 20 %. Uczniów, którzy byli w Krakowie więcej niż jeden raz, było o 4 mniej niż tych, którzy byli jeden raz. Dla 65 % wszystkich uczniów był to pierwszy wyjazd do Krakowa. Ilu uczestników wycieczki pojechało po raz pierwszy do Krakowa?



- 18.** W ciągu minionego roku kalendarzowego pani Kasia dwukrotnie otrzymała podwyżkę miesięcznego wynagrodzenia. Za każdym razem jej wynagrodzenie wzrastało o 15 %. Obecnie pani Kasia zarabia 5819 zł. Oblicz miesięczną pensję pani Kasi przed podwyżkami.

- 19.** Roztwór soli o masie 150 g oraz stężeniu 5 % zmieszano z 8-procentowym roztworem soli i otrzymano roztwór o stężeniu 6 %. Oblicz masę roztworu 8-procentowego.

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. Dla której z liczb: $-2, -1, 0, 2$ wyrażenie $a^4 - 2a^3 + a - 3$ przyjmuje największą wartość? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. -2

B. -1

C. 0

D. 2

E

2. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla podanych wartości zmiennych.

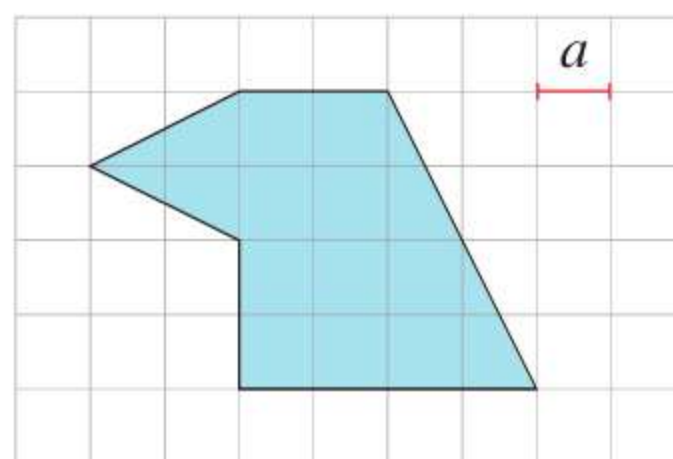
a) $(3x - y)^2 - \left(\frac{1}{3}x - 1\right)\left(\frac{1}{3}x + 1\right) - (9x^2 + y^2)$ dla $x = -0,3$ i $y = 0,5$

b) $(\sqrt{3} + \sqrt{5}a)(\sqrt{3} - \sqrt{5}a)(3 + 5a^2)$ dla $a = \frac{\sqrt{6}}{2}$

3. Dana jest figura o wymiarach jak na rysunku.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Obwód tej figury jest równy $8a + 4\sqrt{5}a$.	P	F
Pole tej figury jest równe $14a^2$.	P	F



E

4. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x - \frac{2-x}{4}}{3} = \frac{x + \frac{x-4}{3}}{4}$

b) $(x - 3\sqrt{5})(x + 3\sqrt{5}) = (x - \sqrt{7})^2$

5. Rozwiązaniem równania $2x - b = x + 2b$ z niewiadomą x jest liczba 2. Oblicz wartość liczby b .

6. Dane jest równanie $\frac{kx-2}{2} + \frac{x-k}{3} = \frac{2-kx}{4} - \frac{-x-k}{3} + 2x$. Wyznacz wartość k , wiedząc, że $x = -1$ jest rozwiązaniem tego równania.

7. Wyznacz cztery kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 7 dają resztę 3, i których suma jest równa 502.

8. Cyfra jedności liczby dwucyfrowej jest o 5 większa niż cyfra dziesiątek. Jeżeli między cyfry tej liczby wstawimy liczbę 26, to otrzymamy liczbę 86 razy większą od danej liczby dwucyfrowej. Znajdź tę liczbę dwucyfrową.

9. Różnica długości ramion trapezu jest równa 2 cm, jedna z podstaw jest trzy razy dłuższa od drugiej i o 8 cm dłuższa od krótszego z ramion. Obwód trapezu jest równy 56 cm. Oblicz długości boków tego trapezu.

- 10.** Jeśli grupę uczniów ustawimy w rzędach po 7 osób w każdym, to w ostatnim rzędzie brakować będzie 2 osób. Tę samą grupę można ustawić w pełnych rzędach po 9 osób i wtedy rzędów będzie o 4 mniej. Ile osób liczy ta grupa uczniów?

- E 11.** Miasta A i B są oddalone od siebie o 240 km. O godzinie 12.00 z miasta A wyjechał pan Jan w kierunku miasta B, a 20 min później z miasta B wyjechał pan Marek w kierunku miasta A. Obaj jechali tą samą drogą. Pan Marek jechał z prędkością o 12 km/h większą niż pan Jan. O godzinie 14.00 ich samochody się minęły. Z jaką prędkością poruszali się samochodami obaj panowie?

- E 12.** Bilety ulgowe do muzeum kosztują o 40 % mniej niż bilety normalne. Mama Kasi kupiła 2 bilety normalne i 3 bilety ulgowe i zapłaciła 95 zł. Mama Basi kupiła 1 bilet normalny i 4 bilety ulgowe, a mama Iwony 3 bilety normalne i 2 bilety ulgowe.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Mama Basi za bilety zapłaciła

A	B
----------	----------

.

A. 66 zł **B.** 85 zł

Mama Iwony za bilety zapłaciła o około

C	D
----------	----------

 więcej niż mama Basi.

C. 24 % **D.** 19 %

- 13.** W dwóch zbiornikach znajduje się woda. W pierwszym zbiorniku jest o 15 % 1 wody więcej niż w drugim. Jeśli z pierwszego zbiornika przelejemy 9 l wody do drugiego, to w drugim będzie 4 razy więcej wody niż w pierwszym. Oblicz, ile litrów wody było na początku w każdym ze zbiorników.

- 14.** Na parkingu stoją samochody osobowe i ciężarowe. Samochodów osobowych jest 5 razy więcej niż ciężarowych. Na parking wjechało 8 samochodów ciężarowych i wyjechało 11 osobowych. W konsekwencji na parkingu jest o 37,5 % mniej samochodów ciężarowych niż osobowych. Ile po zmianach jest samochodów osobowych na tym parkingu?

- 15.** Cenę nart dwukrotnie obniżono o 20 %. O ile procent należy podnieść obecną cenę nart, aby kosztowały tyle, ile przed dwoma obniżkami?

-  **16.** Pani Malinowska zainwestowała 20 000 zł w akcje dwóch firm: A i B. Po roku ceny akcji obu firm wzrosły odpowiednio: firmy A o 4 %, a firmy B o 6 %. Teraz wartość akcji posiadanych przez panią Malinowską jest równa 21 040 zł. Ile złotych zainwestowała Pani Malinowska w akcje każdej z firm?

-  **17.** Pan Kowalski kupił akcje firmy Y w cenie 60 zł za akcję. W pierwszym miesiącu cena akcji spadła o x %, a w kolejnym wzrosła o x %. O ile procent zmieniała się cena akcji firmy Y, jeśli po dwóch miesiącach jej wartość była równa 54,60 zł?

DZIAŁ IV

GRANIASTOSŁUPY

To ci się
przyda!

Rodzaje
graniastosłupów

Pole powierzchni
graniastosłupa

Objętość
graniastosłupa



1. Graniastosłupy i ich rodzaje

- ▶ Znajomość własności graniastosłupa
- ▶ Rozpoznawanie graniastosłupów prostych, pochyłych i prawidłowych
- ▶ Pojęcie przekątnej graniastosłupa

Nazwa „graniastosłup” pochodzi od słowa graniasty. Zgodnie z *Wielkim słownikiem języka polskiego PAN* graniasty to taki, którego boki tworzą wyraźne i ostre krawędzie.

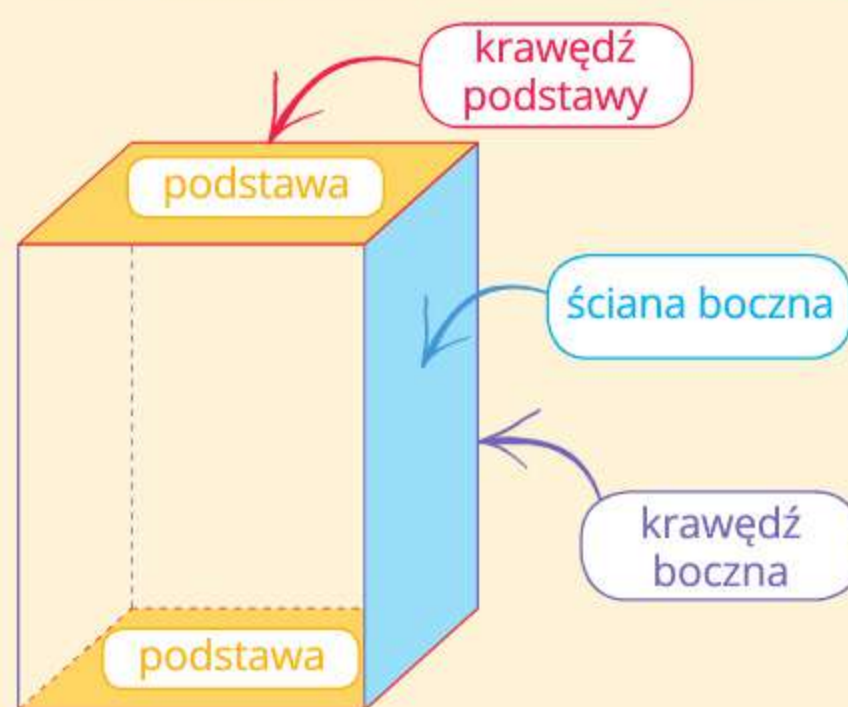
Graniastosłup jest bryłą, która ma:

- dwie przystające (takie same), równoległe podstawy będące wielokątami,
- wszystkie krawędzie boczne równoległe względem siebie i równej długości.



Graniastosłup n -kątny, czyli o podstawie n -kąta, ma:

- $2n$ wierzchołków,
- $(n + 2)$ ścian,
- n krawędzi bocznych,
- $3n$ krawędzi.



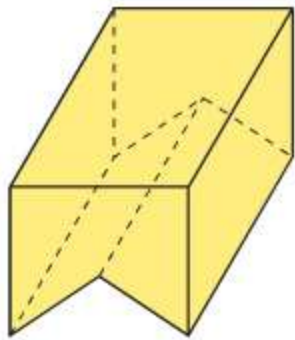
W poniższej tabeli przedstawiono przykłady graniastosłupów wraz z liczbą ich wierzchołków, ścian, krawędzi i krawędzi bocznych.

Wielokąt w podstawie	Nazwa graniastosłupa	Rysunek	Liczba wierzchołków	Liczba ścian	Liczba krawędzi bocznych	Liczba krawędzi
trójkąt	graniastosłup trójkątny		6	5	3	9
czworokąt	graniastosłup czworokątny		8	6	4	12
sześciokąt	graniastosłup sześciokątny		12	8	6	18

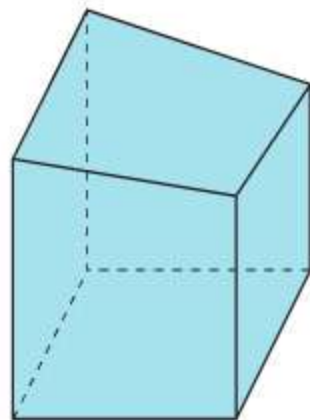
Przykład 1.

Wskaż, które z przedstawionych brył są graniastosłupami. Uzasadnij swoją odpowiedź.

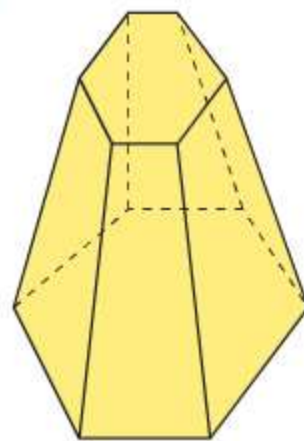
I.



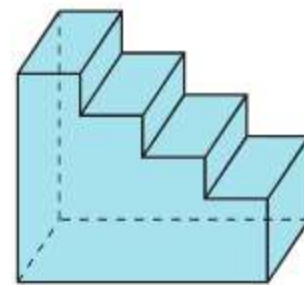
II.



III.



IV.



- I. Podstawy bryły są przystającymi pięciokątami, a krawędzie boczne są równoległe względem siebie i mają tę samą długość, zatem bryła jest graniastosłupem.
- II. W tej bryle nie ma dwóch równoległych, przystających podstaw, zatem bryła nie jest graniastosłupem.
- III. Podstawy bryły nie są przystającymi wielokątami i krawędzie boczne nie są równoległe względem siebie, zatem bryła nie jest graniastosłupem.
- IV. Podstawy bryły są przystającymi dziesięciokątami, a krawędzie boczne są równoległe względem siebie i mają tę samą długość, zatem bryła jest graniastosłupem.

Ćwiczenie 1.

Dla każdego graniastosłupa z Przykładu 1. oblicz, ile ma:

- a) wierzchołków, b) ścian, c) krawędzi, d) krawędzi bocznych.

Graniastosłup

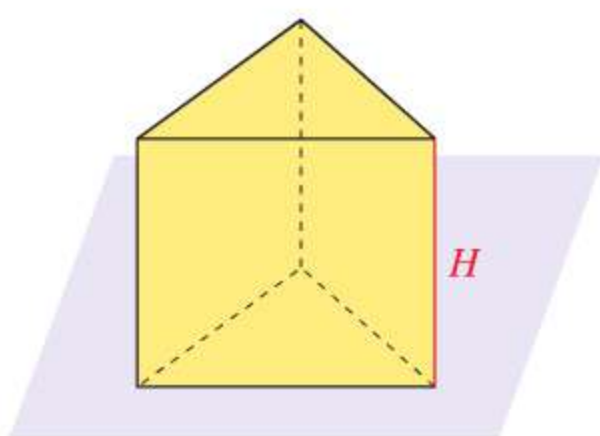
prosty

Ściany boczne są prostokątami (krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw).

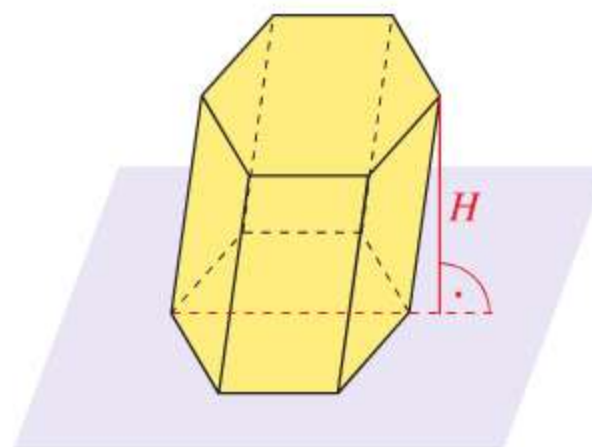
pochyły

Ściany boczne są równoległobokami (krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstaw).

Wysokość graniastosłupa to odcinek prostopadły do jego podstaw, końce tego odcinka zawierają się w płaszczyznach, na których leżą te podstawy.



Każda krawędź boczna jest wysokością.



Krawędź boczna jest dłuższa od wysokości.



Graniastosłupem prawidłowym nazywamy graniastosłup prosty, który w podstawie ma wielokąt foremny (wszystkie boki tego wielokąta są tej samej długości, a jego kąty mają takie same miary).

Na przykład, jeśli podstawą graniastosłupa jest

- trójkąt równoboczny, to nazywamy go graniastosłupem prawidłowym trójkątnym;
- kwadrat, to nazywamy go graniastosłupem prawidłowym czworokątnym;
- pięciokąt foremny, to nazywamy go graniastosłupem prawidłowym pięciokątnym.

Przykład 2.

Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest trzy razy krótsza od jego krawędzi bocznej. Krawędź boczna graniastosłupa prawidłowego pięciokątnego jest o 8 cm dłuższa od krawędzi jego podstawy. Suma długości wszystkich krawędzi w każdym graniastosłupie wynosi 100 cm. Uzasadnij, że krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest dłuższa od krawędzi podstawy graniastosłupa prawidłowego pięciokątnego.

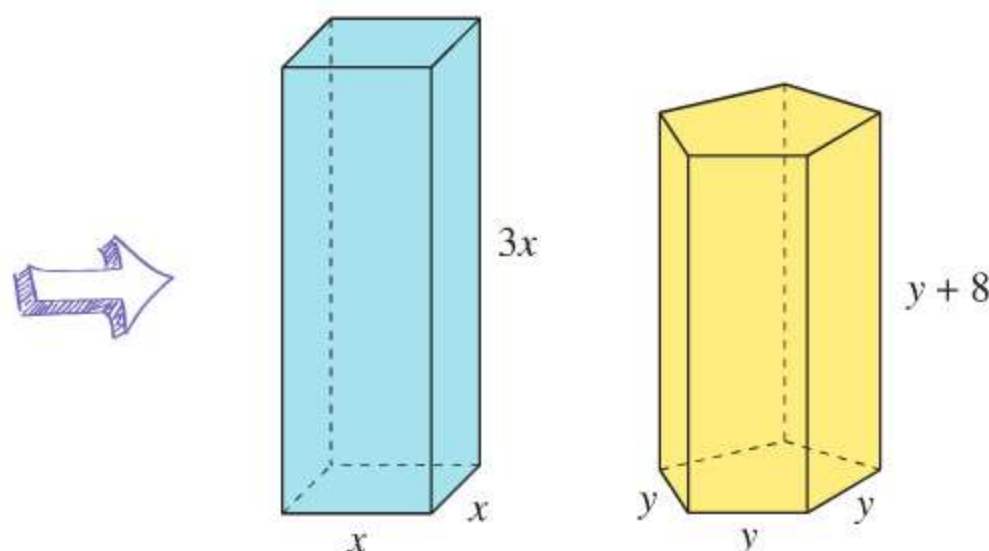
Wykonamy rysunki pomocnicze.

Długość krawędzi podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego oznaczmy jako x . Wówczas jego krawędź boczna będzie miała długość $3x$.

Długość krawędzi podstawy graniastosłupa prawidłowego pięciokątnego oznaczmy jako y . Wówczas jego krawędź boczna będzie miała długość $(y + 8)$.

Liczba krawędzi w graniastosłupie czworokątnym wynosi 12 (8 krawędzi podstawy i 4 krawędzie boczne). Ułożymy równanie i wyznaczmy x .

Liczba krawędzi w graniastosłupie pięciokątnym wynosi 15 (10 krawędzi podstawy i 5 krawędzi bocznych). Ułożymy równanie i wyznaczmy y .



$$\begin{aligned} 8x + 4 \cdot 3x &= 100 \\ 8x + 12x &= 100 \\ 20x &= 100 \quad | : 20 \\ x &= 5 \text{ [cm]} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 10y + 5(y + 8) &= 100 \\ 10y + 5y + 40 &= 100 \quad | - 40 \\ 15y &= 60 \quad | : 15 \\ y &= 4 \text{ [cm]} \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy $x > y$, więc uzasadniliśmy, że krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest dłuższa od krawędzi podstawy graniastosłupa prawidłowego pięciokątnego.

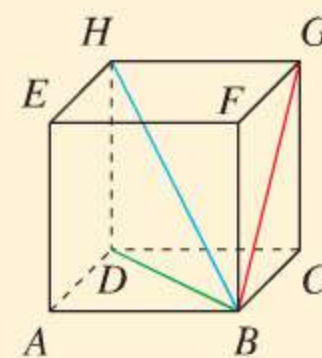
Ćwiczenie 2.

Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 8 cm. Suma długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa wynosi 104 cm. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego pięciokątnego ma długość 4 cm, a suma długości jego wszystkich krawędzi to 102 cm. Uzasadnij, że wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest krótsza od wysokości graniastosłupa prawidłowego pięciokątnego.

Przekątną graniastostupa nazywamy odcinek, który łączy dwa wierzchołki graniastostupa i nie zawiera się w żadnej z jego ścian. Z wierzchołka B graniastostupa czworokątnego $ABCDEFGH$ poprowadzono trzy przekątne:

- BD – przekątna podstawy $ABCD$ graniastostupa,
- BG – przekątna ściany bocznej $BCGF$ graniastostupa,
- BH – przekątna graniastostupa.

Ten graniastostup ma 4 przekątne: AG , BH , CE oraz DF .

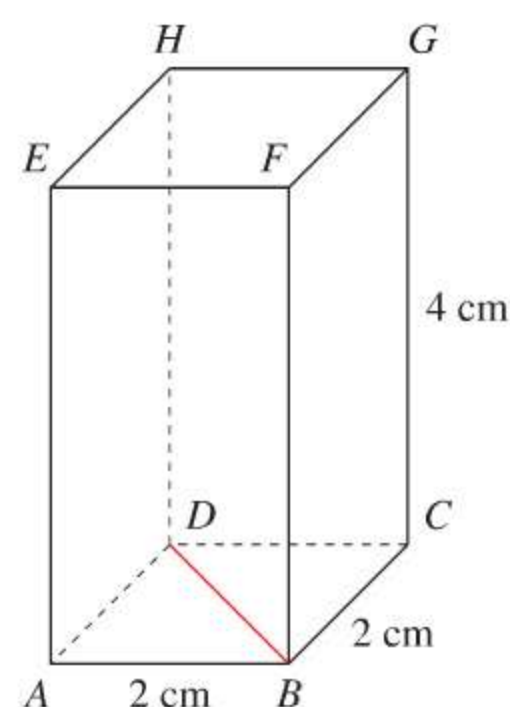


Przykład 3.

W graniastostupie prawidłowym czworokątnym długość krawędzi podstawy wynosi 2 cm. Krawędź boczna tego graniastostupa ma długość 4 cm. Oblicz długości podanych odcinków.

a) przekątna podstawy graniastostupa

Wykonamy rysunek pomocniczy. Graniastostup prawidłowy czworokątny ma w podstawie kwadrat. Obie przekątne kwadratu mają taką samą długość. Zaznaczymy na rysunku jedną z przekątnych.

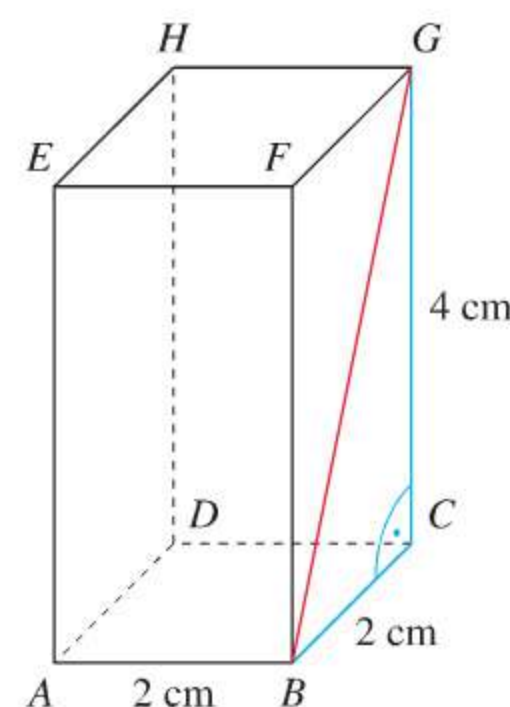


Długość przekątnej kwadratu o boku długości a wynosi $a\sqrt{2}$. Bok podstawy graniastostupa ma długość 2 cm, więc długość przekątnej podstawy jest równa $2\sqrt{2}$ cm.

Odp. Przekątna podstawy tego graniastostupa ma długość $2\sqrt{2}$ cm.

b) przekątna ściany bocznej graniastostupa

Wykonamy rysunek pomocniczy. Wszystkie ściany boczne graniastostupa prawidłowego czworokątnego są przystającymi prostokątami, więc przekątne tych ścian są takiej samej długości. Zaznaczymy przekątną jednej ze ścian bocznych.



Przekątna ściany bocznej $BCGF$ to przekątna prostokąta o bokach długości 2 cm i 4 cm. Aby obliczyć jej długość, skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

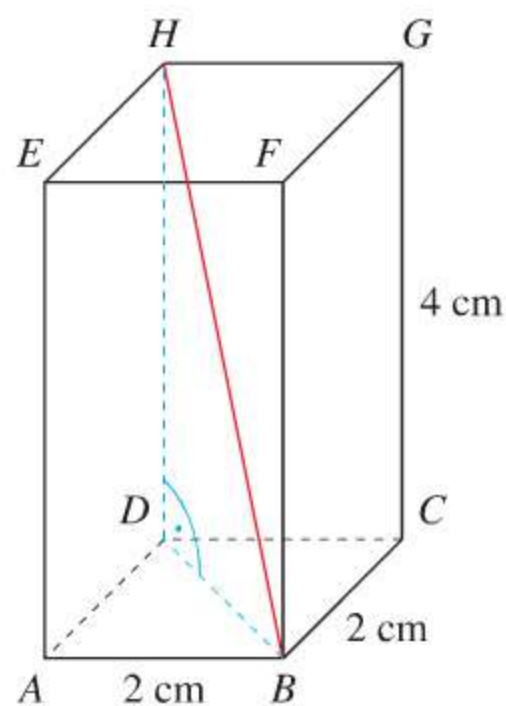
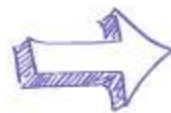


$$\begin{aligned} 2^2 + 4^2 &= |BG|^2 \\ 4 + 16 &= |BG|^2 \\ 20 &= |BG|^2 \\ |BG| &= \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5} \text{ [cm]} \end{aligned}$$

Odp. Przekątna ściany bocznej tego graniastostupa ma długość $2\sqrt{5}$ cm.

c) przekątna graniastosłupa

Wykonamy rysunek pomocniczy.
Wszystkie przekątne graniastosłupa prawidłowego czworokątnego są tej samej długości. Zaznaczymy jedną z przekątnych tego graniastosłupa.



Trójkąt BDH jest trójkątem prostokątnym. Przekątna BD kwadratu $ABCD$ ma długość $2\sqrt{2}$ cm. Aby obliczyć długość przekątnej BH , zastosujemy twierdzenie Pitagorasa.



$$\begin{aligned} |BD|^2 + |DH|^2 &= |BH|^2 \\ (2\sqrt{2})^2 + 4^2 &= |BH|^2 \\ 8 + 16 &= |BH|^2 \\ 24 &= |BH|^2 \\ |BH| &= \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6} \text{ [cm]} \end{aligned}$$

Odp. Przekątna tego graniastosłupa ma długość $2\sqrt{6}$ cm.

Ćwiczenie 3.

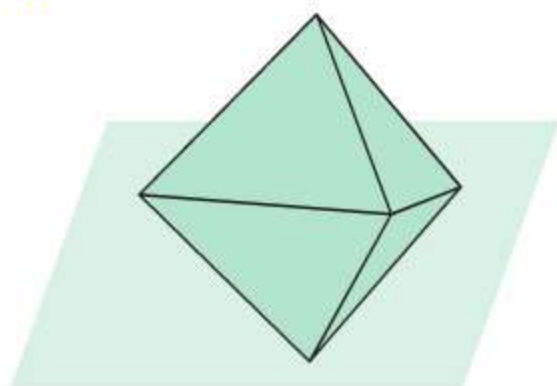
W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym długość krawędzi podstawy wynosi 4 cm. Krawędź boczna tego graniastosłupa ma długość 6 cm. Oblicz długość przekątnej:

- a) podstawy graniastosłupa,
- b) ściany bocznej graniastosłupa,
- c) graniastosłupa.

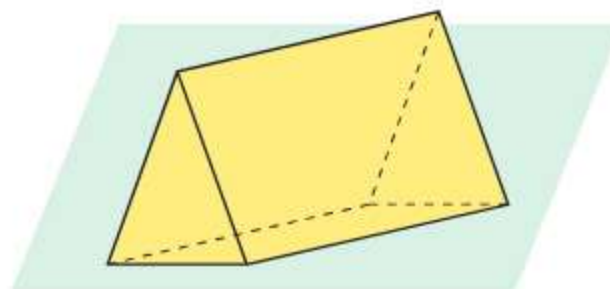
Rozwiąż zadania

1. Na rysunku poniżej przedstawiono różne figury przestrzenne. Wskaż, które z nich są graniastosłupami. Uzasadnij swoją odpowiedź.

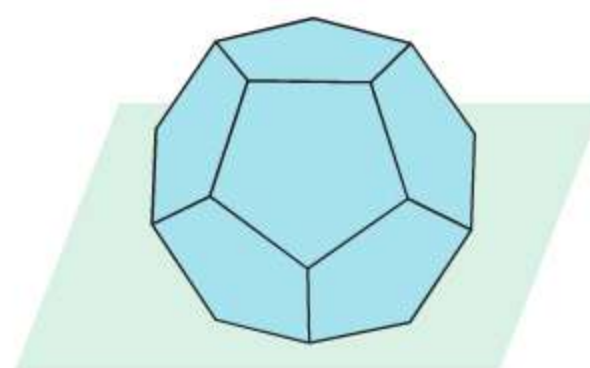
I.



II.



III.



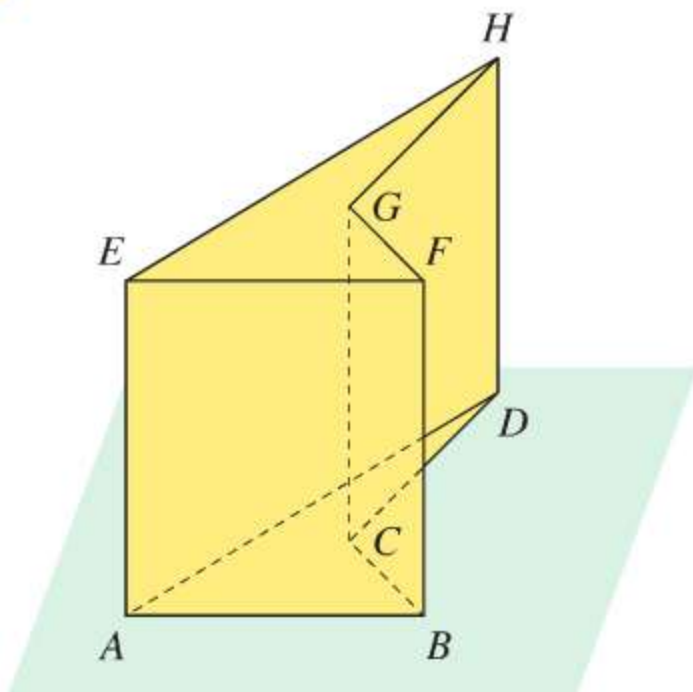
2. Określ, ile wierzchołków, ścian, krawędzi bocznych oraz krawędzi ma graniastosłup:

- a) jedenastokątny,
- b) siedemnastokątny,
- c) dwudziestokątny.

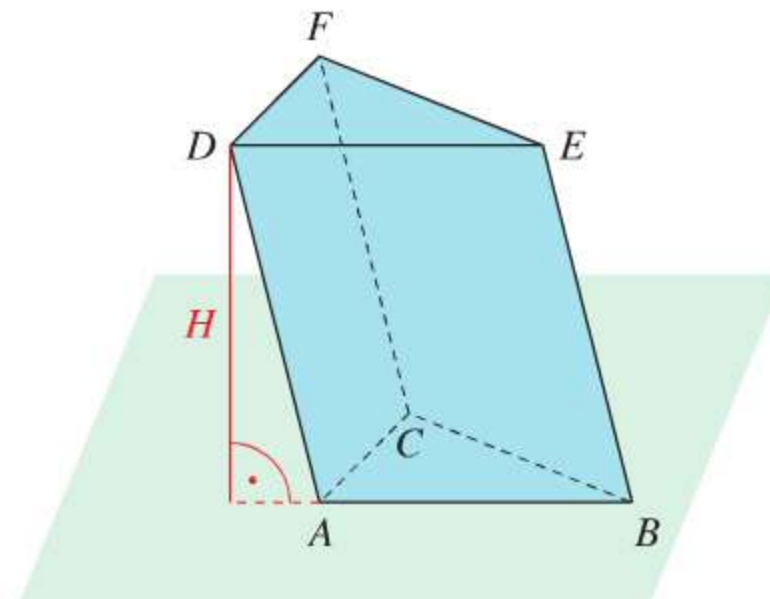
Informacje do zadań 3. i 4.

Na rysunkach przedstawiono cztery graniastosłupy, których podstawami są odpowiednio: czworokąt wklęsły, trójkąt, czworokąt wypukły i pięciokąt foremny.

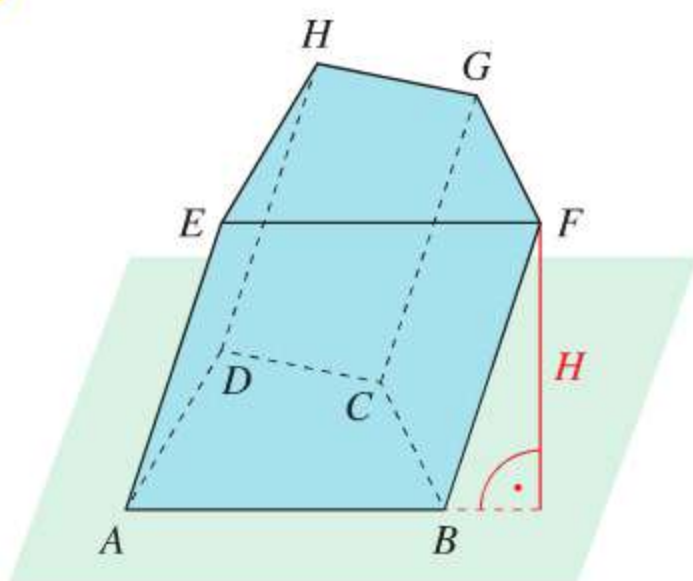
I.



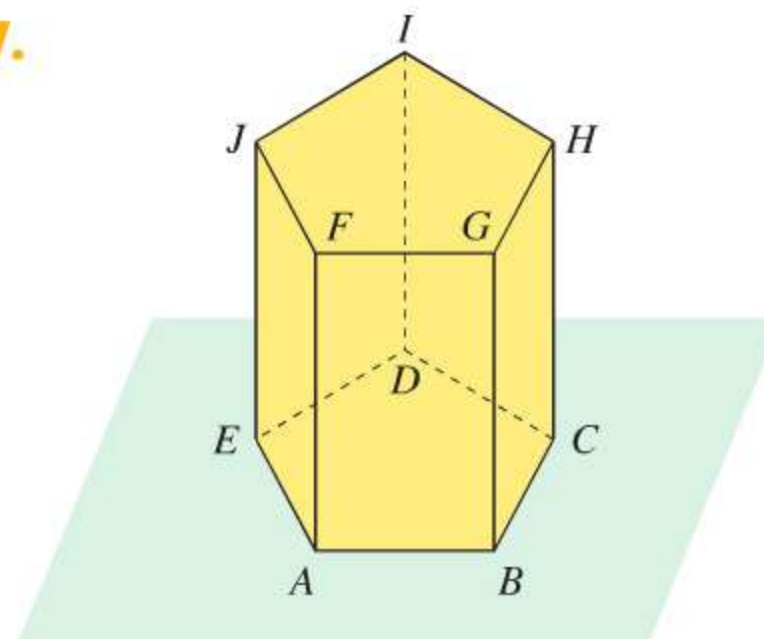
II.



III.



IV.



3. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Graniastosłupami prostymi są bryły

- A.** I i II. **B.** I i III. **C.** I i IV. **D.** II i IV. **E.** III i IV.

4. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

W graniastosłupie I krawędź AB jest prostopadła do krawędzi DC .	P	F
Wysokość graniastosłupa III jest krótsza od długości jego krawędzi bocznej.	P	F
Wszystkie przekątne graniastosłupa IV mają jednakowe długości.	P	F

5. Liczba wszystkich krawędzi graniastosłupa jest o trzy większa od liczby jego wierzchołków.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Graniastosłup ten ma w podstawie

- A.** czworokąt. **B.** pięciokąt. **C.** sześciokąt. **D.** trójkąt.

6. Wskaż zdania, które nie są prawdziwe. Jeśli zdanie jest fałszywe, podaj uzasadnienie albo przykład graniastopu, który potwierdza jego nieprawdziwość.
- A. Każdy graniastop prawidłowy jest graniastopem prostym.
 - B. Liczba wierzchołków graniastopu jest równa liczbie jego krawędzi bocznych.
 - C. Ściany boczne graniastopu prawidłowego są przystającymi prostokątami.
 - D. Każdy graniastop prosty jest graniastopem prawidłowym.
 - E. Graniastop, który ma dziewięć krawędzi, nie ma przekątnej.
 - F. Wszystkie przekątne graniastopu prawidłowego sześciokątnego są równej długości.

7. Suma liczby wszystkich ścian, wierzchołków i krawędzi graniastopu jest równa 38. Jaki wielokąt jest podstawą tego graniastopu?

8. Graniastop prawidłowy sześciokątny oraz graniastop prawidłowy pięciokątny mają takie same długości krawędzi podstawy oraz taką samą sumę długości wszystkich krawędzi, równą 84 cm. Wysokość graniastopu prawidłowego sześciokątnego jest równa 8 cm. Ustal, jaką wysokość ma graniastop prawidłowy pięciokątny.

9. W graniastopie prawidłowym czworokątnym pole podstawy jest równe $0,49 \text{ dm}^2$, a krawędź boczna ma długość 7 cm.
- a) Uzasadnij, że ten graniastop jest sześcianem.
 - b) Oblicz długość przekątnej tego graniastopu.

10. Krawędź podstawy graniastopu prawidłowego trójkątnego ma długość 8 cm. Wysokość tego graniastopu jest o 30 % większa od długości krawędzi podstawy. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego graniastopu.

11. Podstawą graniastopu prostego jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 5 cm i 12 cm. Wysokość graniastopu jest równa 13 cm. Oblicz długość przekątnej ściany bocznej o największym polu.

- E** 12. Dany jest graniastop prawidłowy sześciokątny, którego pole podstawy jest równe $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$, a wysokość jest równa 4 cm. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**. Suma długości wszystkich krawędzi tego graniastopu jest równa **A** **B** cm.

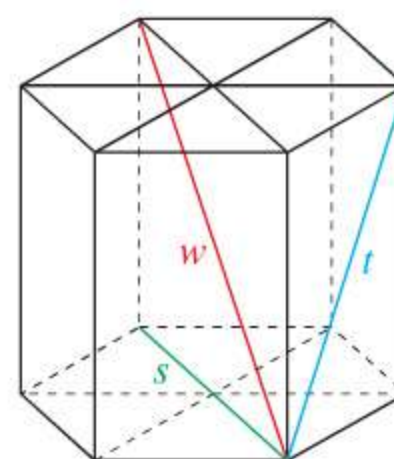
A. $24 + 24\sqrt{3}$

B. $24 + 24\sqrt{2}$

Długość przekątnej w tego graniastopu jest równa **C** **D** cm.

C. $4\sqrt{3}$

D. $2\sqrt{6}$



13. Podstawą graniastopu prostego jest romb o przekątnych długości 12 cm i 16 cm. Wysokość tego graniastopu jest równa 24 cm. Oblicz:
- a) sumę długości wszystkich krawędzi tego graniastopu,
 - b) długości przekątnych tego graniastopu.

- 14.** Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny, którego pole podstawy jest równe 54 cm^2 , a przekątna ściany bocznej ma długość $6\sqrt{3} \text{ cm}$. Uzasadnij, że ten graniastosłup jest sześcianem.

Sprawdź, co umiesz!

- 1.** Graniastosłup ma 14 wierzchołków.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Liczba krawędzi graniastosłupa jest równa 14.	P	F
Graniastosłup ma 9 ścian.	P	F

- 2.** Wskaż zdania, które nie są prawdziwe.

- A.** W każdym graniastosłupie krawędź podstawy jest prostopadła do krawędzi bocznej.
- B.** Graniastosłup ma dwa razy więcej wierzchołków niż krawędzi bocznych.
- C.** Podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego są przystającymi kwadratami.
- D.** Graniastosłup pochyły, którego podstawą jest trójkąt równoboczny, jest graniastosłupem prawidłowym.
- E.** Graniastosłup może mieć 11 wierzchołków.

- 3.** Liczba wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego jest o 8 większa od liczby wszystkich jego ścian. Ściana boczna jest kwadratem o polu równym 50.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Podstawą tego graniastosłupa jest **A** **B**.

A. pięciokąt **B.** czworokąt

Suma długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa jest równa **C** **D**.

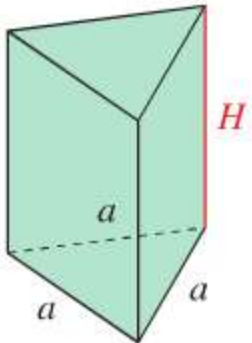
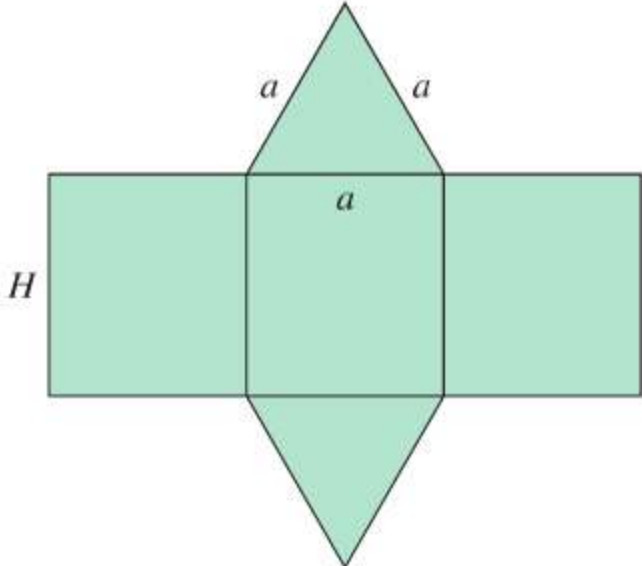
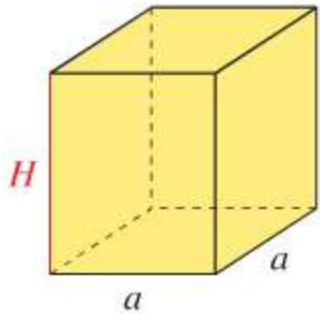
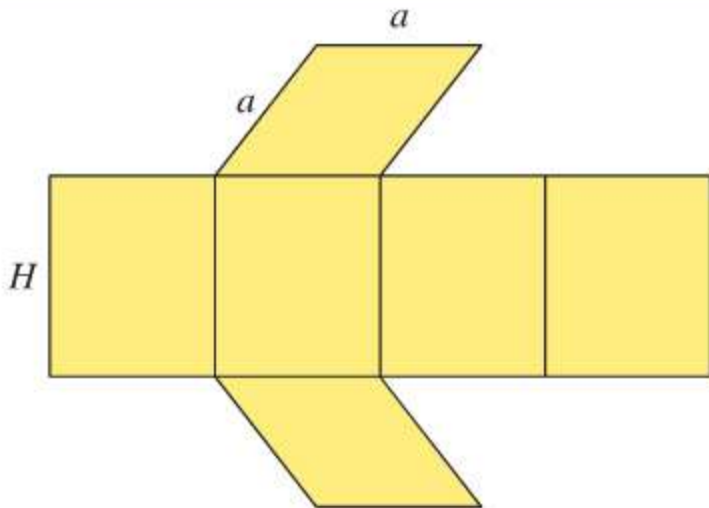
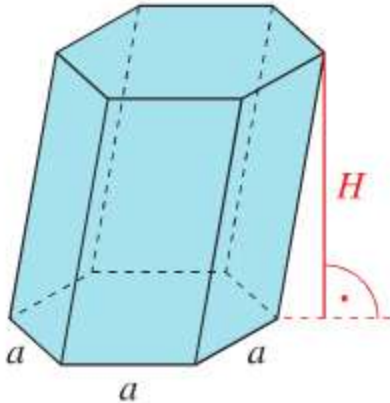
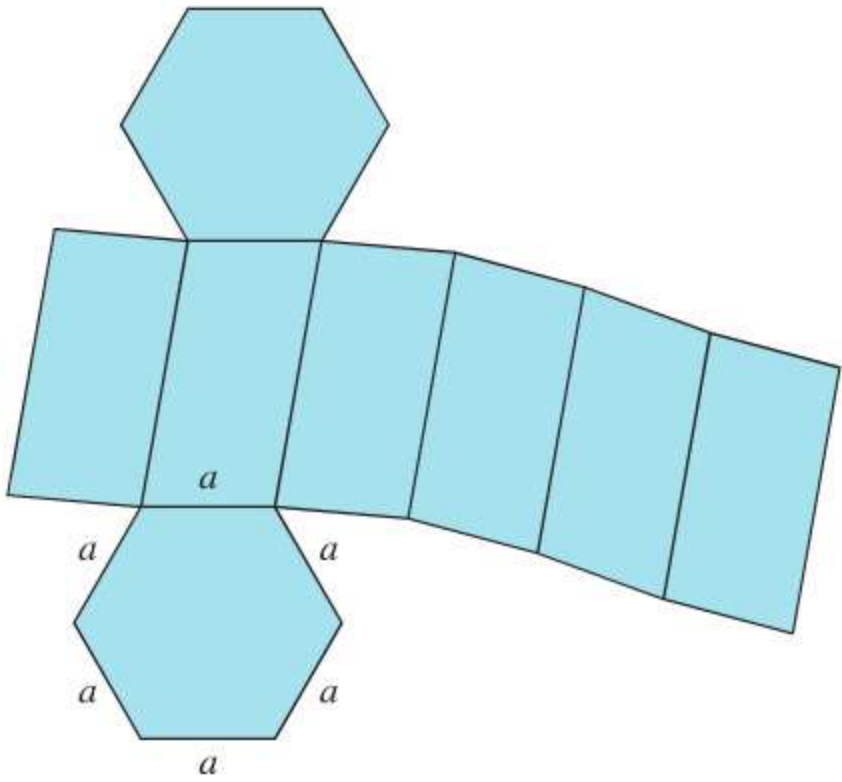
C. $50\sqrt{2}$ **D.** $75\sqrt{2}$

- 4.** Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez równoramienny o podstawach długości 7 cm i 19 cm oraz wysokości równej 8 cm. Wysokość tego graniastosłupa jest równa 5 cm. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa.

2. Siatki graniastosłupów

- ▶ Rysowanie siatek graniastosłupów
- ▶ Obliczanie długości krawędzi graniastosłupów

Siatka bryły powstaje poprzez „rozciecie” jej wzdłuż niektórych jej krawędzi (tak, aby żadna ze ścian „nie odpadła”) i „rozłożenie” jej płasko. Rysowanie siatki bryły warto rozpocząć od narysowania ścian bocznych. Następnie pozostaje już tylko dorysowanie podstaw.

Przykłady graniastosłupów		
graniastosłup	rysunek graniastosłupa	siatka graniastosłupa
prawyłowy trójkątny		
prosty, którego podstawą jest romb		
pochyły, którego podstawą jest sześciokąt foremny		

Przykład 1.

Narysuj siatkę graniastoslupa prostego, którego wysokość wynosi 2, a jego podstawa jest trójkątem prostokątnym o przyprostokątnych długości 3 i 4.

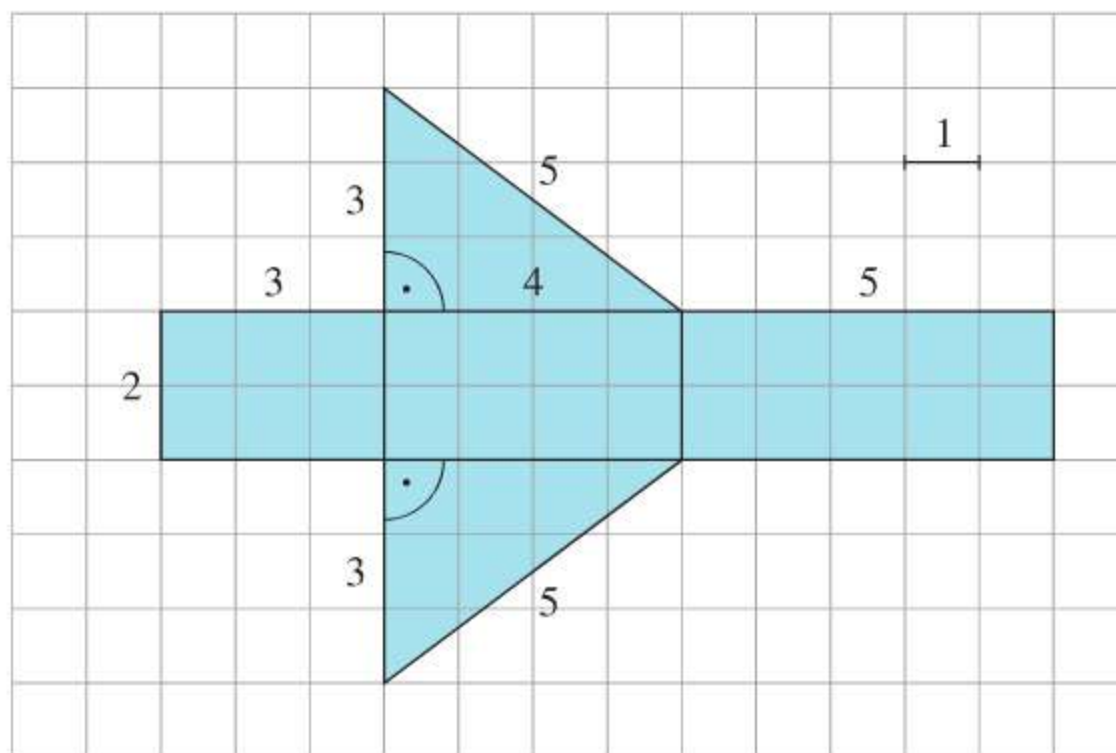
Siatka takiego graniastoslupa składa się z dwóch trójkątów prostokątnych o przyprostokątnych długości 3 i 4 oraz trzech prostokątów będących jego ścianami bocznymi.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczymy długość przeciwprostokątnej c podstawy graniastoslupa.



$$\begin{aligned}3^2 + 4^2 &= c^2 \\9 + 16 &= c^2 \\25 &= c^2 \\c &= 5\end{aligned}$$

Rysowanie siatki rozpoczniemy od narysowania trzech prostokątów, które są ścianami bocznymi graniastoslupa, a następnie dorysujemy do nich dwie podstawy.



Ćwiczenie 1.

Narysuj siatkę graniastoslupa prostego, którego wysokość wynosi 3 cm, a jego podstawa jest:

- a) prostokątem o bokach długości 2,5 cm i 3,5 cm,
- b) równoległobokiem o bokach długości 4 cm i 6 cm i kącie ostrym o mierze 45° .

Przykład 2.

Na rysunku przedstawiono fragment siatki graniastoslupa prawidłowego ośmiokątnego. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego graniastoslupa.

Z fragmentu siatki graniastoslupa odczytamy, że długość jego krawędzi podstawy wynosi 3 cm, a krawędź boczna ma długość 7 cm. Graniastosłup prawidłowy ośmiokątny ma 16 krawędzi podstawy oraz 8 krawędzi bocznych.

Obliczymy sumę długości wszystkich krawędzi tego graniastoslupa.

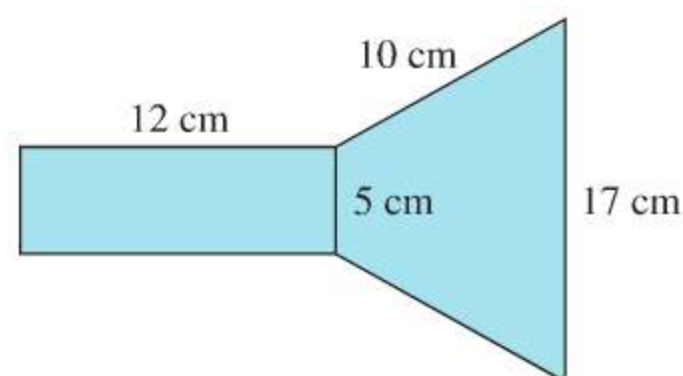


$$16 \cdot 3 + 8 \cdot 7 = 48 + 56 = 104 \text{ [cm]}$$

Odp. Suma długości wszystkich krawędzi tego graniastoslupa wynosi 104 cm.

Ćwiczenie 2.

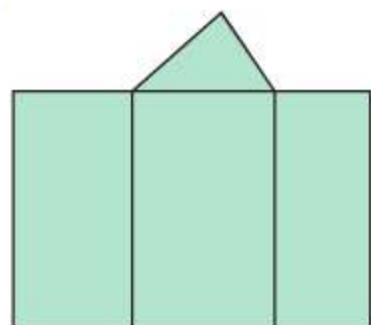
Na rysunku przedstawiono fragment siatki graniastoslupa prostego, który w podstawie ma trapez równoramienny. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego graniastoslupa.



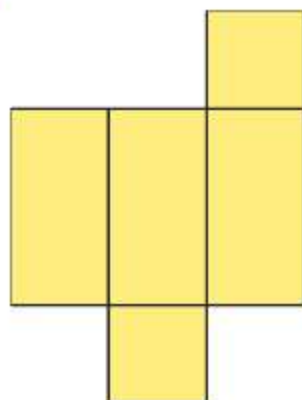
Rozwiąż zadania

1. Na rysunku przedstawiono fragment siatki graniastosłupa prostego. Podaj liczbę ścian i wierzchołków tego graniastosłupa.

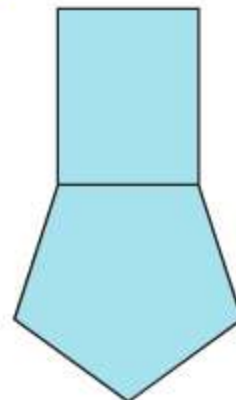
a)



b)

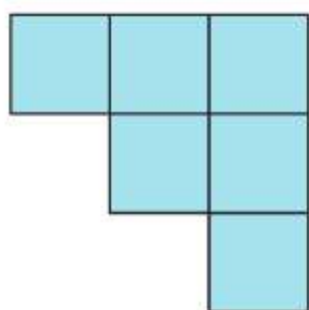


c)

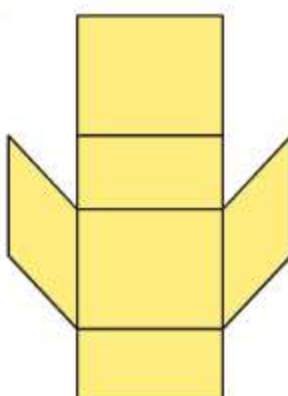


2. Które rysunki nie przedstawiają siatki graniastosłupa?

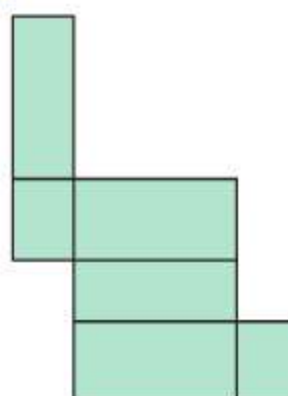
I.



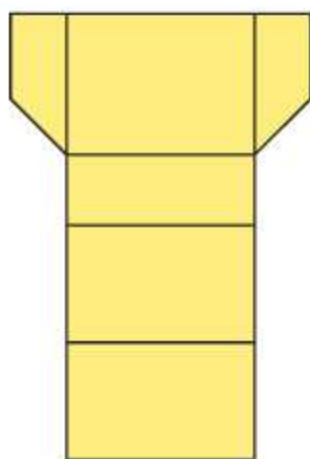
II.



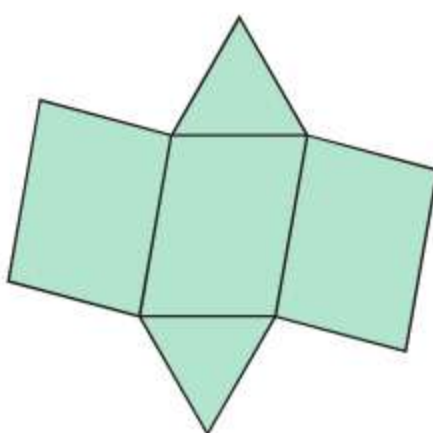
III.



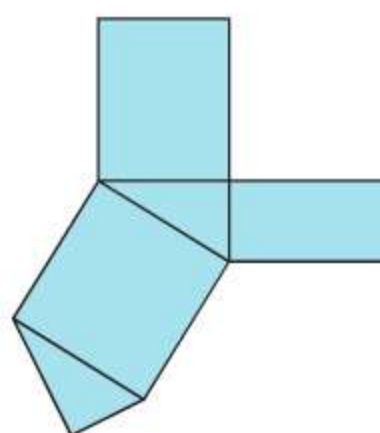
IV.



V.



VI.



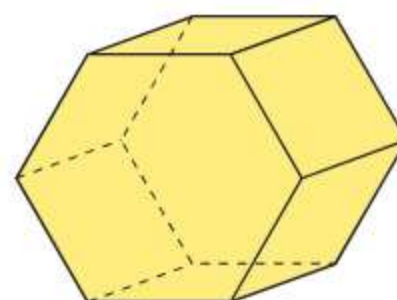
3. Krawędzie prostopadłościanu mają długości: 0,3 dm, 4 cm, 70 mm. Narysuj siatkę tego prostopadłościanu.

4. Narysuj siatkę sześcianu, jeżeli:

- a) obwód jego jednej ściany jest równy 10 cm,
- b) suma długości wszystkich jego krawędzi jest równa 42 cm,
- c) przekątna jego ściany ma długość $\sqrt{8}$ cm,
- d) długość jego przekątnej jest równa $\sqrt{27}$ cm.

5. Długości krawędzi poprowadzonych z jednego wierzchołka prostopadłościanu są w stosunku 1 : 2 : 3. Suma długości wszystkich jego krawędzi jest równa 36 cm. Narysuj siatkę tego prostopadłościanu.

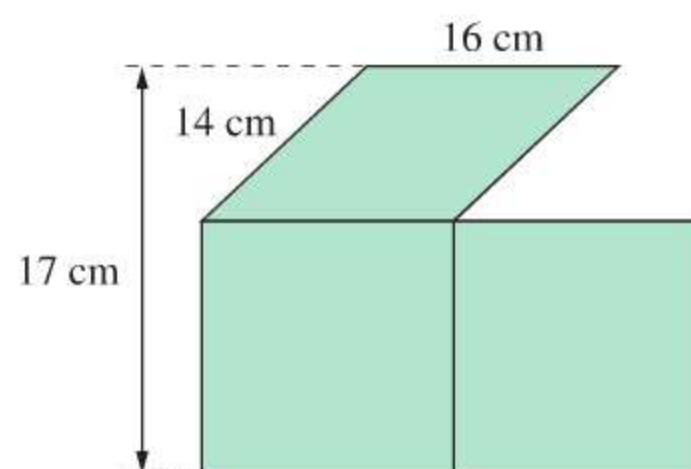
6. Na rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy sześciokątny, którego krawędź podstawy ma długość 2,5 cm, a wysokość stanowi 40 % obwodu jego podstawy. Narysuj siatkę tego graniastosłupa.



7. Narysuj w skali 1 : 20 siatkę graniastosłupa prostego, którego podstawą jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 8 dm i 15 dm. Wysokość graniastosłupa jest równa 5 dm.

8. Na rysunku przedstawiono fragment siatki graniastosłupa prostego o podstawie równoległoboku oraz zapisano długości niektórych odcinków. Kąt ostry tego równoległoboku ma miarę 30° . Oblicz:

- sumę długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa,
- długości przekątnych ścian bocznych tego graniastosłupa.



9. Dany jest graniastosłup pochyły o podstawie prostokąta. Krawędzie podstawy mają długości 4 cm i 5 cm, a długość krawędzi bocznej jest równa 3 cm. Narysuj siatkę tego graniastosłupa. Czy istnieje tylko jedna taka siatka?

Sprawdź, co umiesz!

- Narysuj siatkę graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego krawędź podstawy ma długość 0,3 dm, a krawędź boczna jest o 2,5 cm dłuższa od krawędzi podstawy.
- Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez prostokątny. Wysokość trapezu wynosi 9 cm i jest równa długości jego krótszej podstawy. Dłuższa podstawa trapezu ma długość 21 cm. Wysokość graniastosłupa jest równa 6 cm. Narysuj w skali 1 : 3 siatkę tego graniastosłupa.

3. Na rysunku przedstawiono fragment siatki graniastosłupa prawidłowego czworokątnego.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Wysokość tego graniastosłupa jest równa **A** **B** cm.

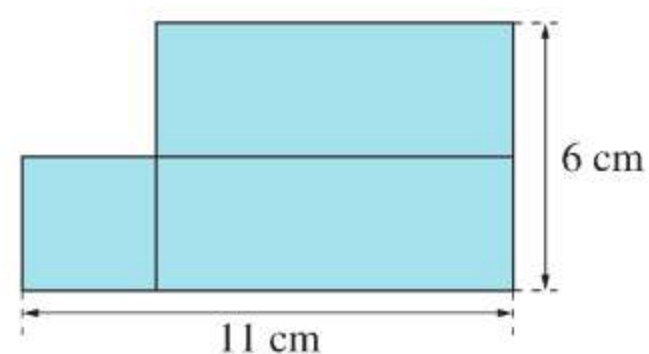
A. 6

B. 8

Suma długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa jest równa **C** **D** cm.

C. 44

D. 56



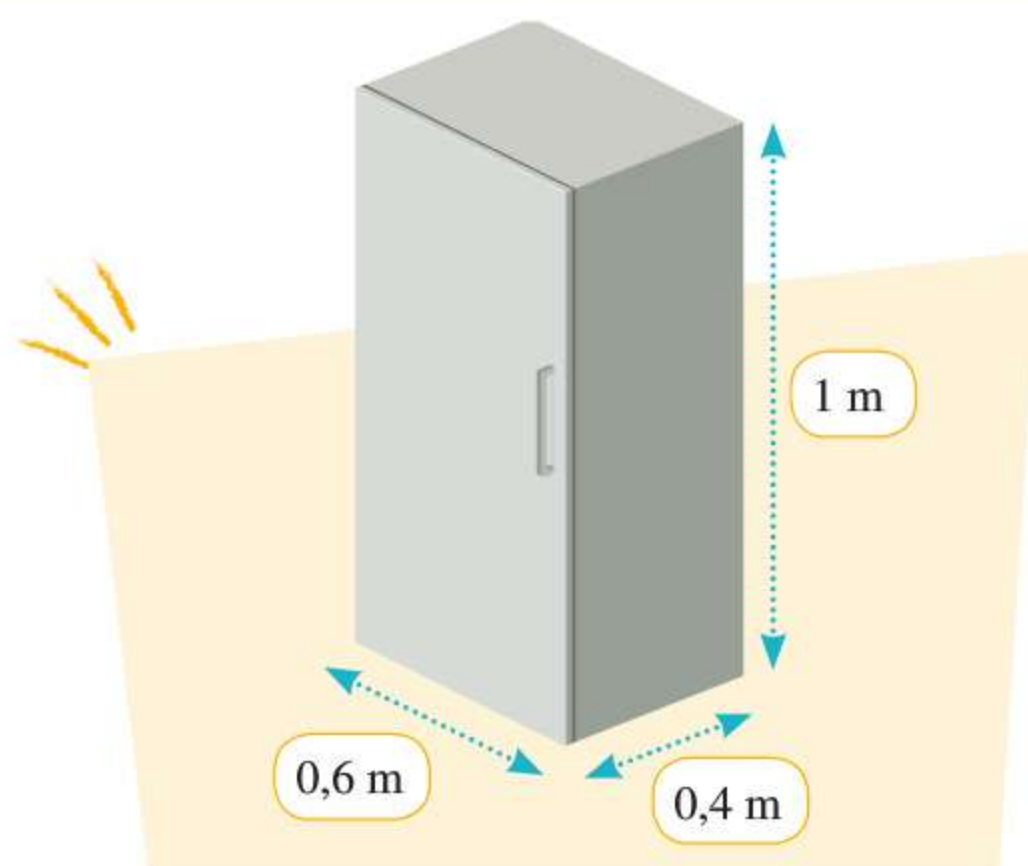
E

3. Pole powierzchni graniastopu

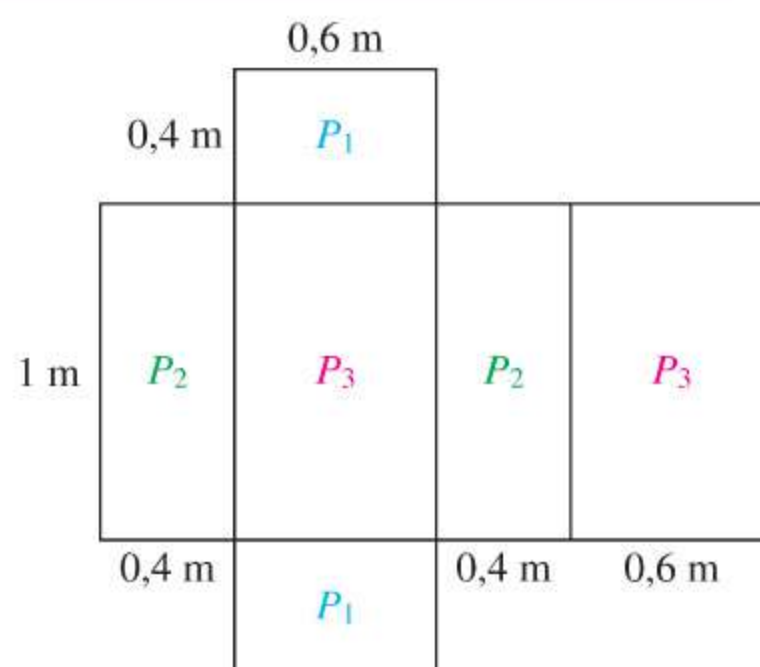
- ▶ Obliczanie pól powierzchni bocznej i całkowitej graniastopu
- ▶ Znajomość wzorów na pole powierzchni całkowitej prostopadocianu i szeocianu

Przyklad 1.

Pola postanowiła pomalowaó szafk, która ma kształt prostopadocianu o wymiarach podanych na ilustracji. Puszka wybranej przez Polę farby do pomalowania szafki wystarcza na pokrycie 5 m^2 powierzchni. Pola pomalowała szafk dwukrotnie. Czy jedna puszka farby wystarczyła Poli na pomalowanie szafki?



Szafka ma kształt prostopadocianu. Narysujemy jego siatk. Składa się ona z 6 prostokątów, które tworzą 3 pary figur przystających. Pola prostokątów oznaczymy P_1 , P_2 oraz P_3 .



Obliczymy pola: P_1 , P_2 oraz P_3 .



$$P_1 = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$P_2 = 0,4 \cdot 1 = 0,4 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$P_3 = 0,6 \cdot 1 = 0,6 \text{ [m}^2\text{]}$$

Obliczymy powierzchnię szafki.



$$\begin{aligned} P &= 2P_1 + 2P_2 + 2P_3 = \\ &= 2 \cdot 0,24 + 2 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,6 = \\ &= 0,48 + 0,8 + 1,2 = 2,48 \text{ [m}^2\text{]} \end{aligned}$$

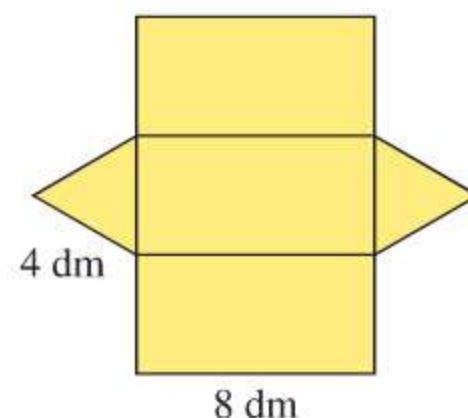
Szafka została pomalowana dwukrotnie, zatem Pola pomalowała powierzchnię o mierze $2 \cdot 2,48 \text{ m}^2 = 4,96 \text{ m}^2$.

Ponieważ $4,96 \text{ m}^2 < 5 \text{ m}^2$, więc jedna puszka farby wystarczyła na dwukrotne pomalowanie szafki.

Odp. Jedna puszka farby wystarczyła Poli na dwukrotne pomalowanie szafki.

Ćwiczenie 1.

Na rysunku przedstawiono siatkę graniastosłupa prawidłowego trójkątnego. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.



Pole powierzchni graniastosłupa można obliczyć bez rysowania jego siatki. Wystarczy, że naszkicujemy graniastosłup lub wyobrazimy sobie kształt jego poszczególnych ścian.

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa możemy obliczyć, korzystając ze wzoru:

$$P_c = 2P_p + P_b,$$

gdzie: P_c – pole powierzchni całkowitej graniastosłupa,

P_p – pole podstawy graniastosłupa,

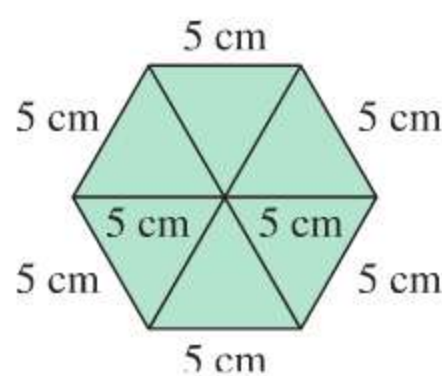
P_b – pole powierzchni bocznej graniastosłupa, czyli suma pól wszystkich jego ścian bocznych.



Przykład 2.

Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 5 cm, a jego wysokość wynosi 12 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Graniastosłup prawidłowy sześciokątny ma w podstawie sześciokąt foremny, który można podzielić na 6 trójkątów równobocznych. Zatem, aby obliczyć pole sześciokąta foremnego, wystarczy obliczyć pole trójkąta równobocznego o tym samym boku i pomnożyć je przez 6.



$$P_p = 6 \cdot \frac{5^2 \sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{25\sqrt{3}}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{2} \text{ [cm}^2\text{]}$$

Pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa sześciokątnego prawidłowego jest równe sumie pól sześciu przystających prostokątów o wymiarach 5 cm $\times$ 12 cm.



$$P_b = 6 \cdot 5 \cdot 12 = 360 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Obliczymy pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa, korzystając ze wzoru: $P_c = 2P_p + P_b$.



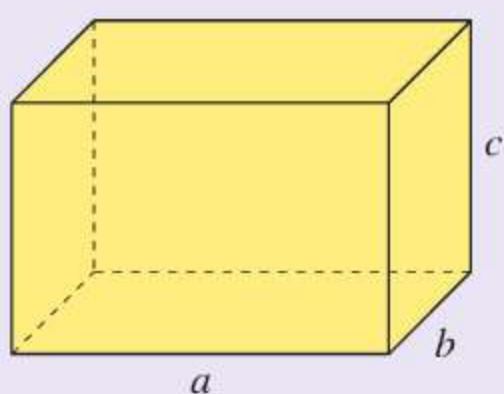
$$P_c = 2 \cdot \frac{75\sqrt{3}}{2} + 360 = (75\sqrt{3} + 360) \text{ [cm}^2\text{]}$$

Odp. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa wynosi $(75\sqrt{3} + 360) \text{ cm}^2$.

Ćwiczenie 2.

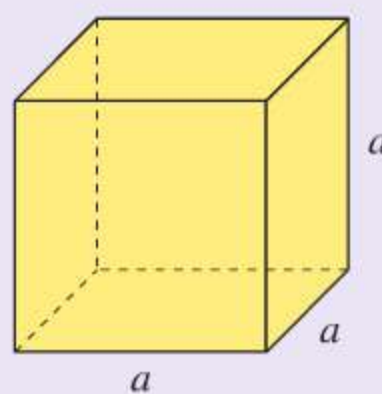
Podstawą graniastosłupa prostego czworokątnego jest romb o przekątnych długości 10 cm i 14 cm. Wysokość graniastosłupa wynosi 6 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Prostopadłościan



$$P_c = 2(ab + bc + ac)$$

Sześcian



$$P_c = 6a^2$$

Przykład 3.

Oblicz pole powierzchni całkowitej:

a) prostopadłościanu o wymiarach $2,5 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$,

$$a = 2,5 \text{ cm} \quad b = 4 \text{ cm} \quad c = 7 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} P_c &= 2 \cdot (2,5 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 2,5 \cdot 7) = \\ &= 2 \cdot (10 + 28 + 17,5) = 2 \cdot 55,5 = 111 \text{ [cm}^2\text{]} \end{aligned}$$

b) sześcianu o krawędzi długości $3\frac{1}{2} \text{ cm}$.

$$a = 3\frac{1}{2} \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} P_c &= 6 \cdot \left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \\ &= 6 \cdot \frac{49}{4} = 3 \cdot \frac{49}{2} = \frac{147}{2} = 73\frac{1}{2} \text{ [cm}^2\text{]} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3.

Oblicz pole powierzchni całkowitej:

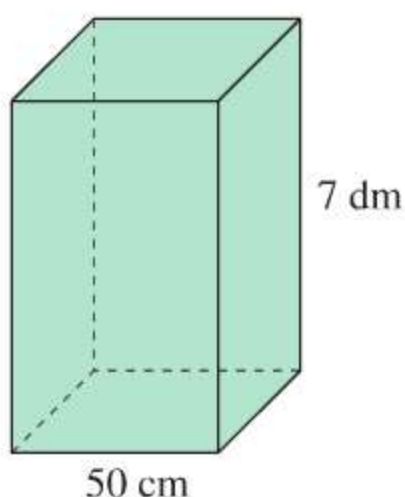
a) prostopadłościanu o wymiarach $3 \text{ cm} \times 2\frac{1}{3} \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$,

b) sześcianu o krawędzi długości $1,25 \text{ cm}$.

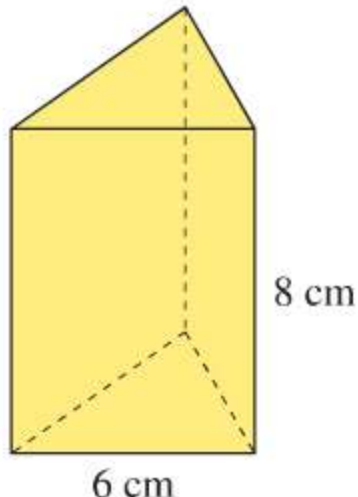
Rozwiąż zadania

1. Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastoslupa prawidłowego.

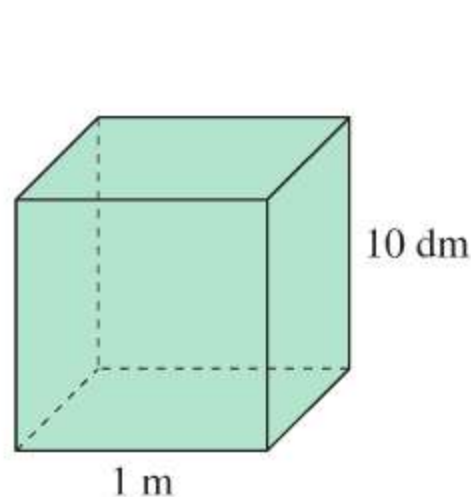
a)



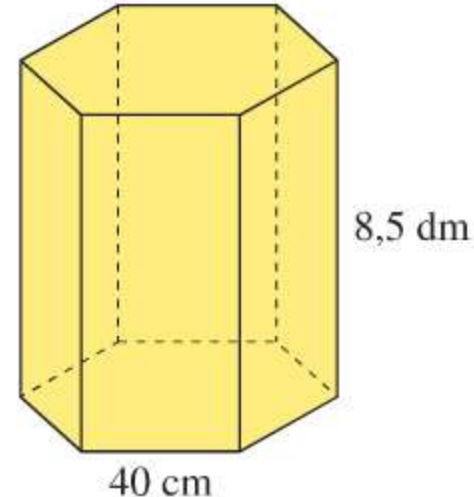
b)



c)



d)

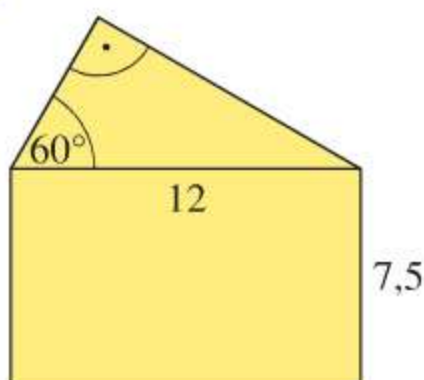


2. Ela na warsztatach kreatywnych wykonała kartonowe pudełko w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $45 \text{ cm} \times 0,6 \text{ m} \times 5,4 \text{ dm}$. Okleiła je błyszczącą folią. Czy 165 dm^2 folii wystarczyło na oklejenie tego pudełka?

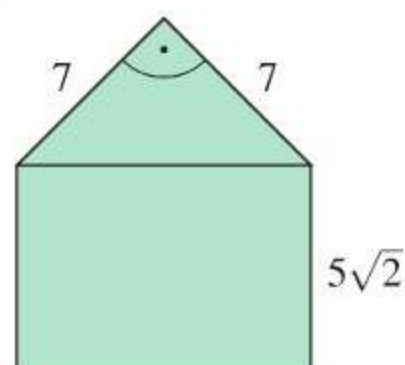
3. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy jest trzy razy krótsza od krawędzi bocznej. Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa jest równa 120 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

4. Na rysunku przedstawiono fragment siatki graniastosłupa prostego. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

a)



b)



5. Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 22 cm i jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.

6. Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu, jeżeli przekątna:

a) jego ściany ma długość $7\sqrt{2}$ cm,

b) sześcianu ma długość $5\sqrt{3}$ m,

c) jego ściany ma długość 8 dm,

d) sześcianu ma długość 6 cm.

7. Podstawą prostopadłościanu prostego jest kwadrat, którego przekątna ma długość $2\sqrt{50}$ m. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu, jeśli długość krawędzi bocznej stanowi 125 % długości krawędzi podstawy.

8. Oblicz pole powierzchni bocznej graniastosłupa prostego, którego podstawą jest trójkąt równoramienny o obwodzie 18 cm, a dwie ściany boczne są kwadratami o polu 49 cm^2 każda.

9. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez prostokątny. Dłuższe ramię trapezu ma długość 17 dm, a długości podstaw są równe 9 dm i 24 dm. Ściana boczna o najmniejszym polu jest kwadratem. Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa.

10. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość 12, a pole powierzchni bocznej jest równe polu jego podstawy. Oblicz wysokość tego graniastosłupa.

11. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 6 m, a pole jednej ściany bocznej jest trzy razy mniejsze od pola podstawy. Oblicz:

a) wysokość tego graniastosłupa,

b) pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

E Informacje do zadań 12. i 13.

Podstawą graniastopu prostego jest romb. Długość jednej przekątnej tego rombu stanowi 75 % długości drugiej przekątnej. Wszystkie krawędzie graniastopu są tej samej długości, a pole podstawy jest równe 96 dm^2 .

- 12.** Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Wysokość graniastopu jest równa dm.

A. 10

B. 20

Suma długości wszystkich krawędzi graniastopu wynosi dm.

C. 40

D. 120

- 13.** Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole powierzchni całkowitej tego graniastopu jest równe

A. 384 dm^2

B. 400 dm^2

C. 576 dm^2

D. 592 dm^2



- 14.** Zosia zaplanowała dwukrotne pomalowanie z każdej strony sześciu półek, które mają kształt graniastopu prostego o podstawie pięciokąta przedstawionego na rysunku. Grubość każdej półki jest równa 2,5 cm. Jedna puszka farby wybranej do pomalowania półek wystarcza na jednokrotne pomalowanie 3 m^2 powierzchni. Ile puszek farby powinna kupić Zosia, żeby zrealizować swój plan?



- 15.** Stosunek długości dwóch krawędzi prostopadłościanu wychodzących z jednego wierzchołka jest równy 3 : 4, a trzecia krawędź wychodząca z tego wierzchołka ma długość 12. Przekątna prostopadłościanu ma długość $2\sqrt{61}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu.

- 16.** Krawędź boczna graniastopu prawidłowego czworokątnego jest 4 razy dłuższa od krawędzi podstawy. Uzasadnij, że stosunek pola powierzchni całkowitej do pola powierzchni bocznej graniastopu jest równy 9 : 8.



- 17.** Różnica długości krawędzi dwóch sześcianów jest równa 1 cm, a różnica ich pól powierzchni całkowitych jest równa 30 cm^2 . Oblicz długości krawędzi obu tych sześcianów.

Sprawdź, co umiesz!

1. Ela poprosiła tatę o nowe akwarium. Tata wykonał akwarium ze szkła akrylowego o wymiarach podanych na ilustracji. Ile zapłacił za szyby potrzebne do wykonania tego akwarium, jeśli 1 m^2 szkła akrylowego kosztuje 240 zł? Przy obliczeniach pominij grubość szkła.



2. Na rysunku przedstawiono siatkę graniastosłupa prawidłowego.

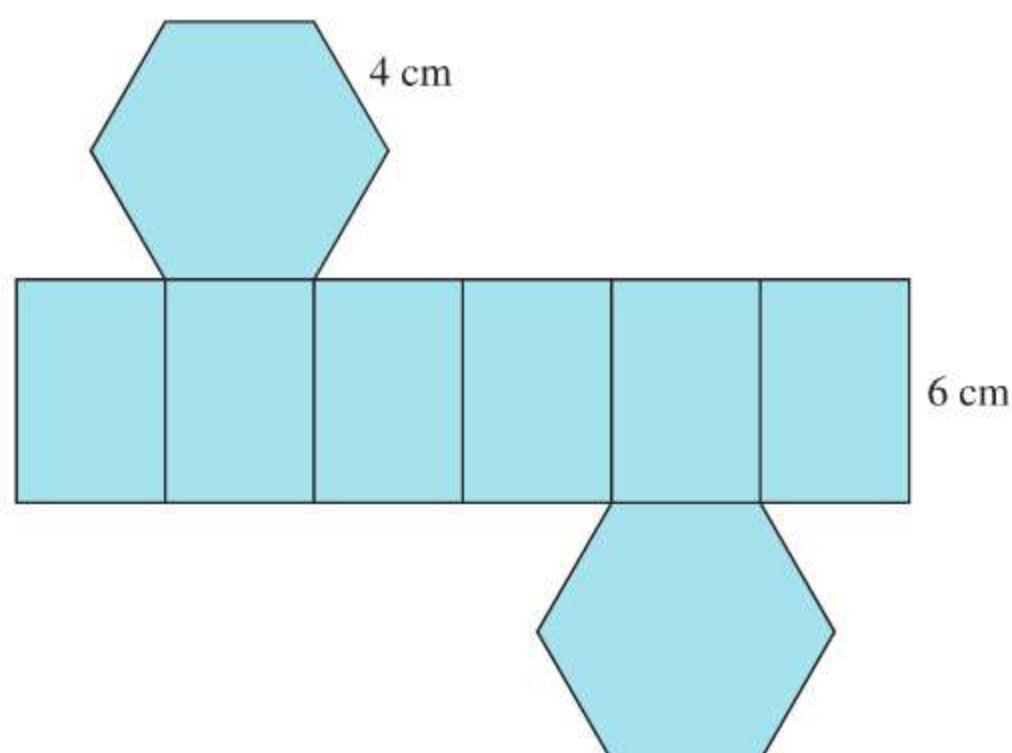
Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Suma pól powierzchni obu podstaw jest równa **A** **B** cm^2 .

A. $24\sqrt{3}$ **B.** $48\sqrt{3}$

Suma pól powierzchni obu podstaw jest o **C** **D** cm^2 mniejsza od pola powierzchni całkowitej.

C. 96 **D.** 144



3. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez równoramienny o podstawach długości 0,7 dm i 1,3 dm oraz wysokości 0,4 dm. Wysokość graniastosłupa jest równa 9 cm.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole powierzchni bocznej graniastosłupa jest równe

A. $1,2 \text{ dm}^2$ **B.** $2,7 \text{ dm}^2$ **C.** $3,1 \text{ dm}^2$ **D.** $3,5 \text{ dm}^2$

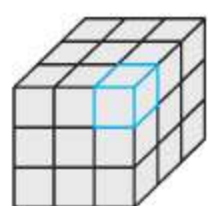
4. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość 7, a pole powierzchni bocznej jest równe sumie pól jego podstaw. Oblicz wysokość tego graniastosłupa.

4. Objętość graniastosłupa

- ▶ Obliczanie objętości graniastosłupa
- ▶ Obliczanie długości odcinków w graniastosłupie, gdy dana jest jego objętość
- ▶ Zamiana jednostek objętości

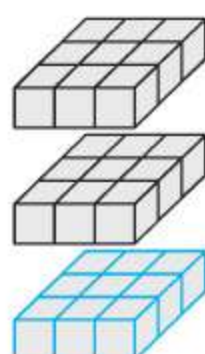
Metodę, za pomocą której możemy obliczyć objętość dowolnego graniastosłupa, zilustrujemy na przykładzie graniastosłupa przedstawionego na rysunku.

Graniastosłup jest ułożony z kostek w kształcie sześcianu o krawędziach długości 1 cm.



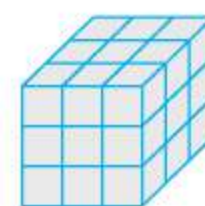
To sześcian jednostkowy. Jego objętość wynosi 1 cm^3 .

„Rozetnijmy” nasz graniastosłup na 3 warstwy. W każdej warstwie znajduje się: $3 \cdot 3 = 9$ sześcianów jednostkowych.



Objętość jednej warstwy jest równa $1 \cdot 3 \cdot 3 = 9 [\text{cm}^3]$.

W skład przedstawionego sześcianu wchodzi 3 warstwy, czyli $3 \cdot 9 = 27$ sześcianów jednostkowych.



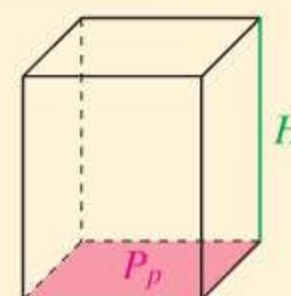
Objętość graniastosłupa wynosi $V = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 [\text{cm}^3]$.



Objętość V graniastosłupa wyraża się wzorem:

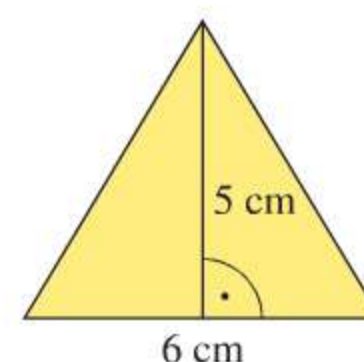
$$V = P_p \cdot H,$$

gdzie: P_p – pole podstawy graniastosłupa,
 H – wysokość graniastosłupa.



Przykład 1.

Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt przedstawiony na rysunku. Wysokość graniastosłupa wynosi 10 cm. Oblicz jego objętość.



Obliczymy pole podstawy graniastosłupa, korzystając ze wzoru na pole trójkąta o boku długości a i wysokości h : $P_p = \frac{a \cdot h}{2}$.



$$P_p = \frac{6 \cdot 5}{2} = 3 \cdot 5 = 15 [\text{cm}^2]$$

Obliczymy objętość graniastosłupa, korzystając ze wzoru: $V = P_p \cdot H$, gdzie $H = 10 \text{ cm}$.

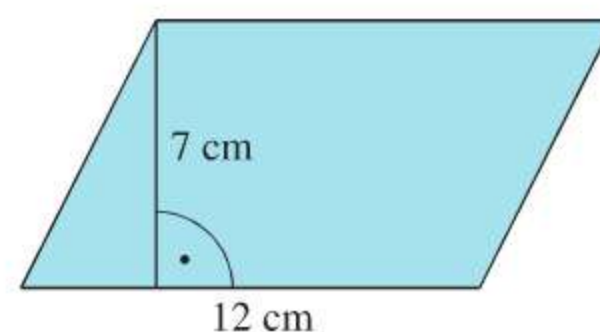


$$V = 15 \cdot 10 = 150 [\text{cm}^3]$$

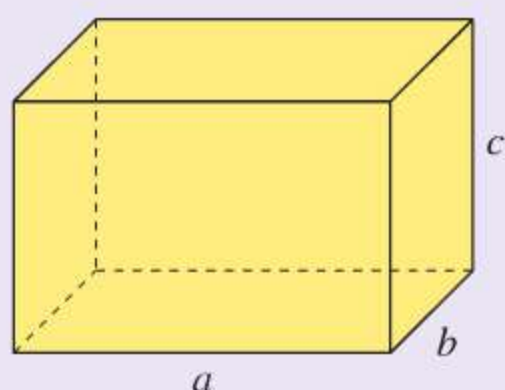
Odp. Objętość tego graniastosłupa wynosi 150 cm^3 .

Ćwiczenie 1.

Podstawą graniastostupa prostego jest równoległobok przedstawiony na rysunku. Wysokość graniastostupa wynosi 14 cm. Oblicz jego objętość.

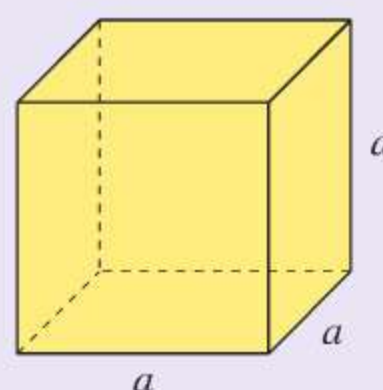


Prostopadłościan



$$V = abc$$

Sześcian



$$V = a^3$$

Przykład 2.

Oblicz objętość:

a) prostopadłościanu o wymiarach

$$1\frac{1}{3} \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 8 \text{ cm},$$

$$a = 1\frac{1}{3} \text{ cm} \quad b = 6 \text{ cm} \quad c = 8 \text{ cm}$$

$$V = 1\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 8 = \frac{4}{3} \cdot 6^2 \cdot 8 =$$

$$= 8 \cdot 8 = 64 \text{ [cm}^3\text{]}$$

b) sześcianu o krawędzi długości 0,25 cm.

$$a = 0,25 \text{ cm}$$

$$V = (0,25)^3 = \left(\frac{25}{100}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \text{ [cm}^3\text{]}$$

Ćwiczenie 2.

Oblicz objętość:

a) prostopadłościanu o wymiarach $2\frac{1}{4} \text{ cm} \times 12 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$,

b) sześcianu o krawędzi długości 0,4 cm.

Przykład 3.

Oblicz długość krawędzi sześcianu, którego objętość wynosi 64 cm^3 .

Obliczymy długość krawędzi sześcianu, korzystając ze wzoru na objętość sześcianu o boku a .



$$V = a^3$$

$$64 = a^3$$

$$a = \sqrt[3]{64} = 4 \text{ [cm]}$$

Odp. Długość krawędzi tego sześcianu wynosi 4 cm.

Ćwiczenie 3.

Oblicz długość krawędzi sześcianu, którego objętość wynosi 729 cm^3 .

Przykład 4.

Oblicz wysokość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego krawędź podstawy ma długość 3 cm, a jego objętość wynosi $45\sqrt{3} \text{ cm}^3$.

Obliczymy pole podstawy graniastosłupa, korzystając ze wzoru na pole trójkąta równobocznego o boku długości a :

$$P_p = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Aby obliczyć wysokość H graniastosłupa, skorzystamy ze wzoru na objętość graniastosłupa.



$$P_p = \frac{3^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4} [\text{cm}^2]$$



$$V = P_p \cdot H$$

$$45\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot H \quad | \cdot 4$$

$$180\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \cdot H \quad | : 9\sqrt{3}$$

$$H = 20 [\text{cm}]$$

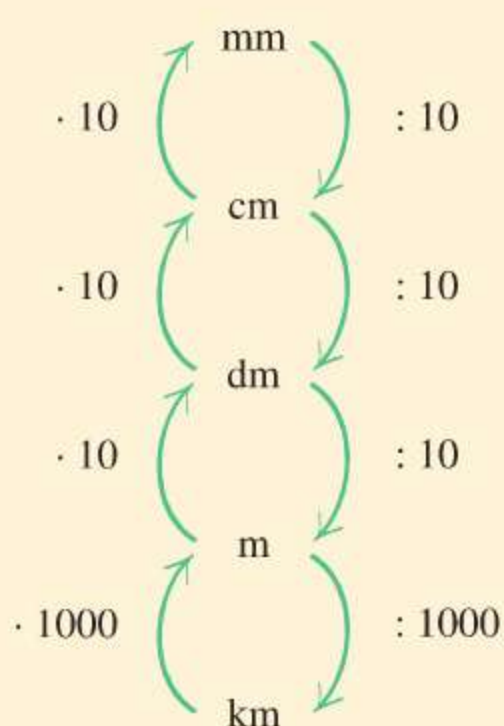
Odp. Wysokość tego graniastosłupa jest równa 20 cm.

Ćwiczenie 4.

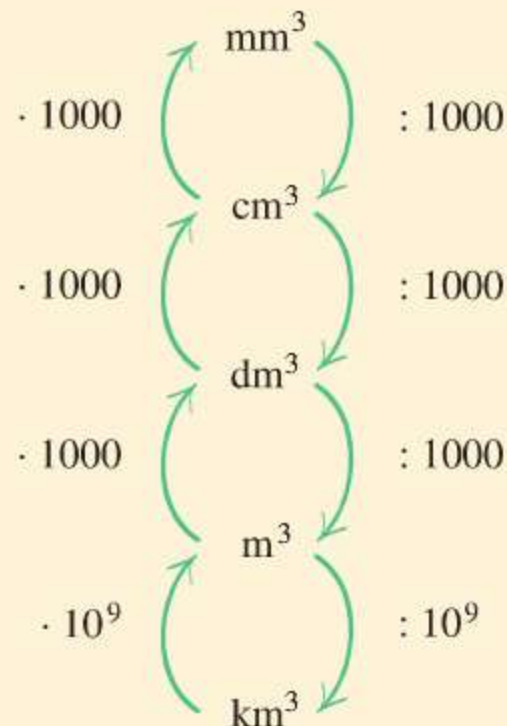
Oblicz wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość $2\sqrt{3} \text{ cm}$, a jego objętość wynosi 96 cm^3 .

Aby sprawnie zamieniać jednostki objętości, należy znać zasady zamiany jednostek długości.

Zamiana jednostek długości



Zamiana jednostek objętości

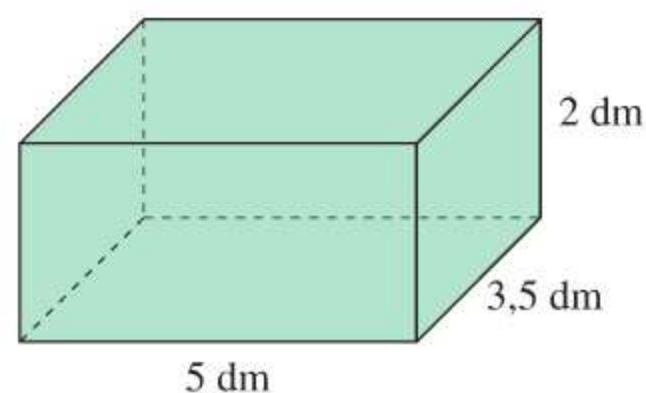


Przykład 5.

Na rysunku przedstawiono prostopadłościan. Zapisz jego objętość w podanych jednostkach.

a) cm^3

b) m^3



a) Zapiszemy objętość prostopadłościanu w centymetrach sześciennych.

Skorzystamy z zależności: $2 \text{ dm} = 20 \text{ cm}$, $3,5 \text{ dm} = 35 \text{ cm}$ oraz $5 \text{ dm} = 50 \text{ cm}$ i obliczymy objętość prostopadłościanu.



$$V = 2 \text{ dm} \cdot 3,5 \text{ dm} \cdot 5 \text{ dm} = \\ = 20 \text{ cm} \cdot 35 \text{ cm} \cdot 50 \text{ cm} = 35\,000 \text{ cm}^3$$

Odp. Objętość prostopadłościanu wynosi $35\,000 \text{ cm}^3$.

b) Zapiszemy objętość prostopadłościanu w metrach sześciennych.

Skorzystamy z zależności: $2 \text{ dm} = 0,2 \text{ m}$,
 $3,5 \text{ dm} = 0,35 \text{ m}$ oraz $5 \text{ dm} = 0,5 \text{ m}$
 i obliczymy objętość prostopadłościanu.



$$V = 2 \text{ dm} \cdot 3,5 \text{ dm} \cdot 5 \text{ dm} = \\ = 0,2 \text{ m} \cdot 0,35 \text{ m} \cdot 0,5 \text{ m} = 0,035 \text{ m}^3$$

Odp. Objętość prostopadłościanu wynosi $0,035 \text{ m}^3$.

Ćwiczenie 5.

Dany jest prostopadłościan o wymiarach $6,5 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. Zapisz jego objętość w podanych jednostkach.

a) mm^3

b) dm^3

c) m^3

Objętość płynów najczęściej wyraża się w litrach (l) lub w mililitrach (ml).

$$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$$

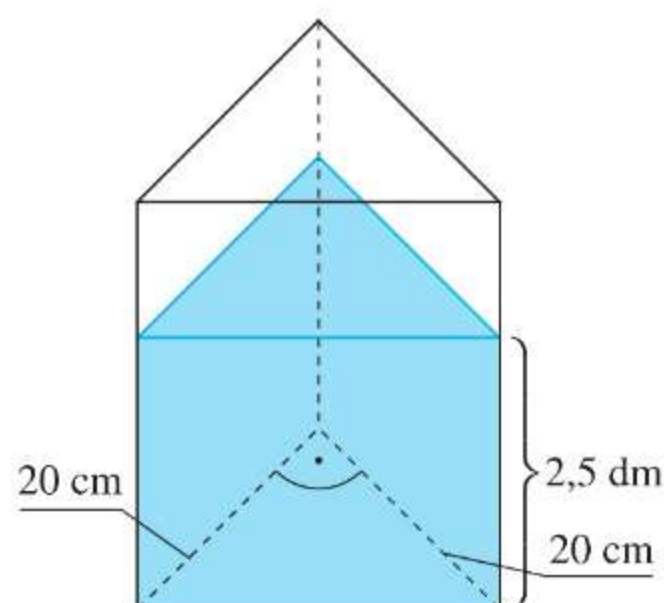
$$1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ ml} = 0,001 \text{ l}$$

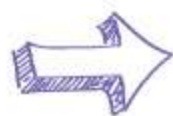


Przykład 6.

Ela kupiła wazon w kształcie graniastosłupa prostego przedstawionego na rysunku. Wlała do wazonu wodę, która sięga do $\frac{5}{8}$ wysokości wazonu. Uzasadnij, że do tego wazonu można wlać co najwyżej 8 l wody.



Podstawą graniastosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 20 cm. Obliczymy pole podstawy graniastosłupa.



$$P_p = \frac{10 \cdot 20 \cdot 20}{2_1} = 10 \cdot 20 = 200 [\text{cm}^2]$$

Przez H oznaczymy wysokość wazonu. Wlana przez Elę woda sięga do $\frac{5}{8}$ wysokości wazonu, czyli do 2,5 dm = 25 cm.



$$\frac{5}{8}H = 25 \quad | \cdot \frac{8}{5} \\ H = 25 \cdot \frac{8}{5} = 5 \cdot 8 = 40 [\text{cm}]$$

Obliczymy objętość wazonu.

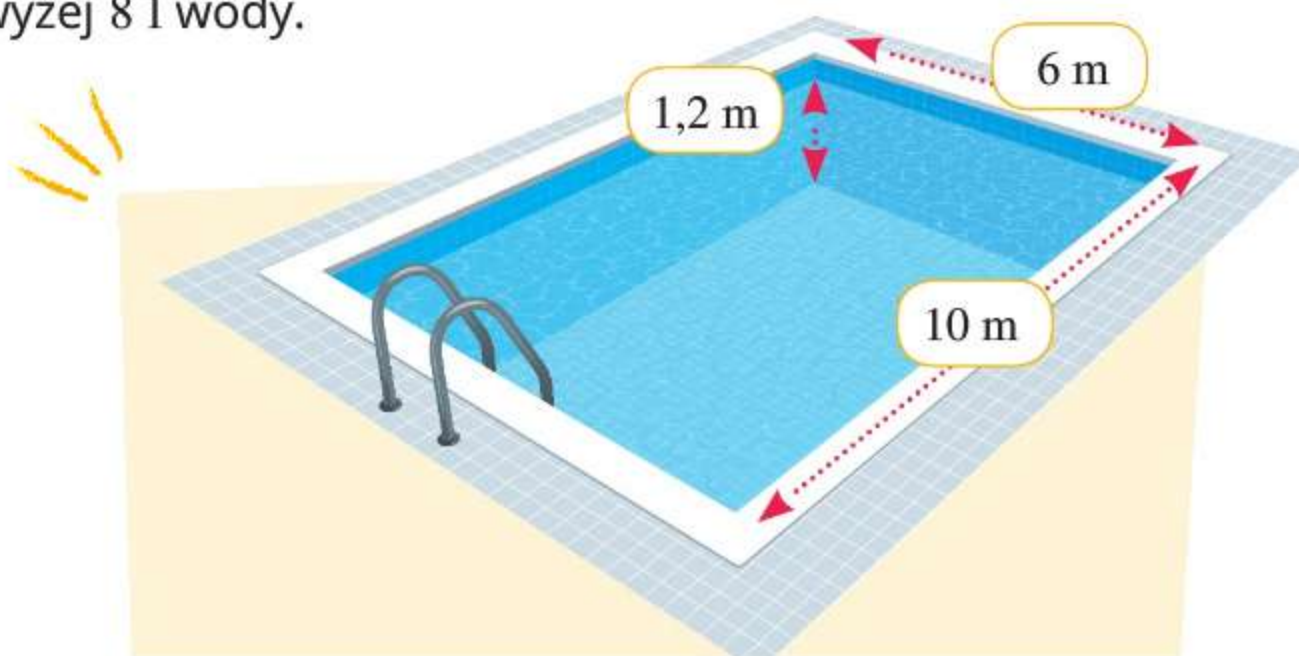


$$V = 200 \cdot 40 = 8000 [\text{cm}^3]$$

$8000 \text{ cm}^3 = 8 \cdot 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 8 \cdot 1 \text{ dm} \cdot 1 \text{ dm} \cdot 1 \text{ dm} = 8 \text{ dm}^3 = 8 \text{ l}$, więc uzasadniliśmy, że do tego wazonu można wlać co najwyżej 8 l wody.

Ćwiczenie 6.

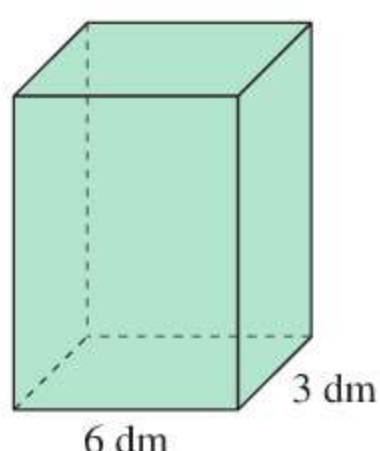
Basen w kształcie prostopadłościanu przedstawionego na ilustracji wypełniono wodą, która sięga do $\frac{4}{5}$ jego wysokości. Uzasadnij, że do tego basenu można wlać co najwyżej 90 000 l wody.



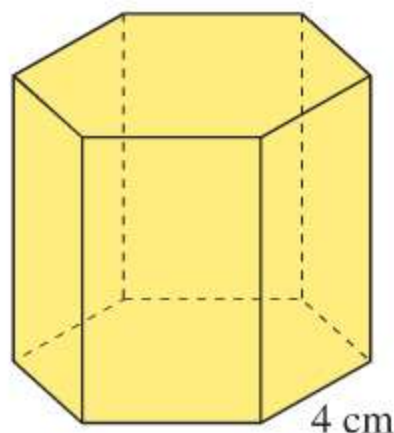
Rozwiąż zadania

1. Na rysunku zapisano wymiary podstaw graniastosłupów prostych o podstawach odpowiednio: prostokąta, sześciokąta foremego, trójkąta równoramiennego i trapezu równoramiennego. Wysokość każdego graniastosłupa jest równa 15 cm. Oblicz objętości tych graniastosłupów.

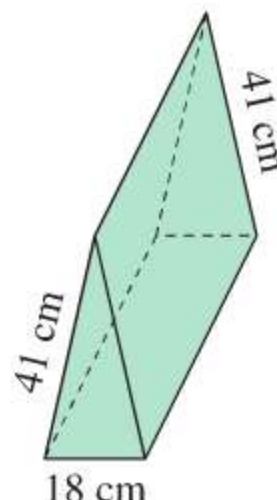
I.



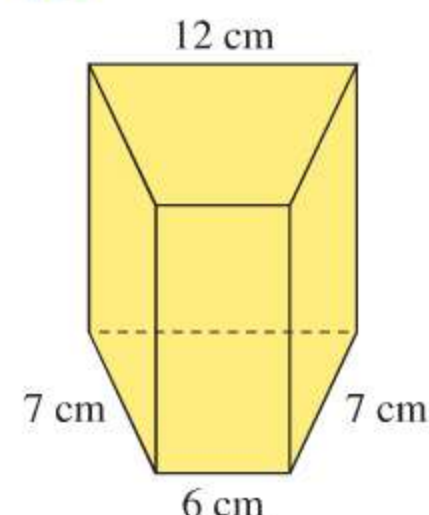
II.



III.

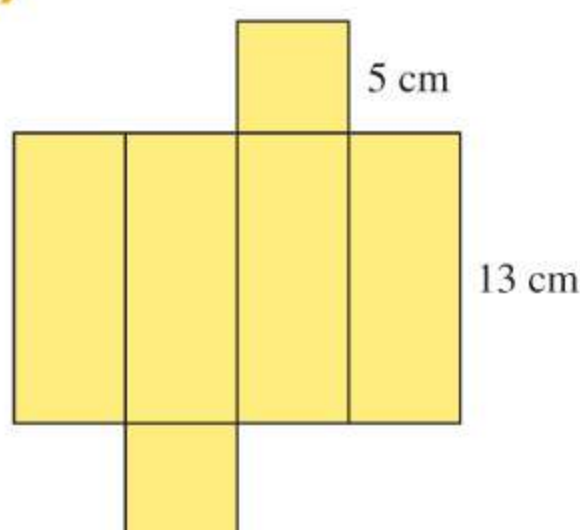


IV.

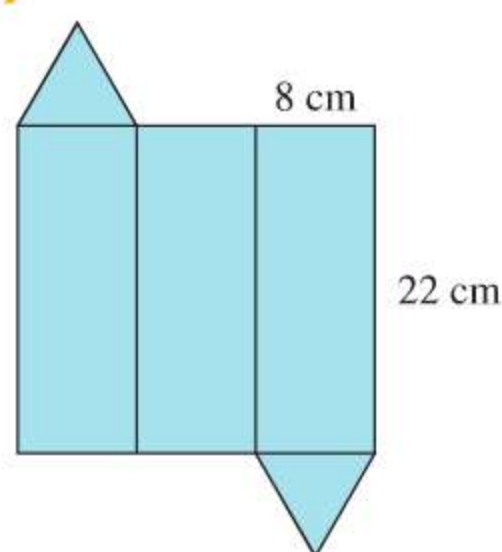


2. Na rysunku przedstawiono siatkę graniastosłupa prawidłowego i zapisano długości niektórych jego krawędzi. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

a)



b)



3. Wyraż podane wielkości we wskazanej jednostce.

a) 6 cm^3 oraz $1,7 \text{ cm}^3$ w mm^3

b) 28 m^3 oraz $0,73 \text{ m}^3$ w dm^3

c) 13 m^3 oraz $0,37 \text{ m}^3$ w cm^3

d) 2 km^3 oraz $0,0125 \text{ km}^3$ w m^3

e) 248 dm^3 oraz $98,23 \text{ dm}^3$ w l

f) 9 dm^3 oraz $3,2 \text{ dm}^3$ w ml

4. Wyraż podane wielkości we wskazanej jednostce.

a) 4000 mm^3 oraz $2,17 \text{ mm}^3$ w cm^3

b) 6200 dm^3 oraz $58,1 \text{ dm}^3$ w m^3

c) $31\,000 \text{ cm}^3$ oraz $60,8 \text{ cm}^3$ w m^3

d) $53\,000 \text{ m}^3$ oraz $7,45 \text{ m}^3$ w km^3

e) 43 l oraz 8,93 l w dm^3

f) 80 ml oraz 192,6 ml w dm^3

5. Naczynie wykonane z cienkiego szkła ma kształt prostopadłościanu. Dno naczynia ma wymiary $18 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$, a wysokość naczynia jest równa 24 cm. Sprawdź, czy do naczynia zmieści się 6 l wody.

Informacje do zadań 6. i 7.

Na ilustracji przedstawiono akwarium wraz z jego wymiarami wewnętrznymi. Bruno nalał wody do $\frac{5}{6}$ wysokości akwarium, a następnie włożył do akwarium dwa jednakowe zamki – kryjówki dla rybek. Po wstawieniu zamków poziom wody w akwarium podniósł się o 1 cm.



6. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Bruno wlał do akwarium **A** **B** l wody.

A. 250

B. 25

Pojemność akwarium jest równa **C** **D** m³.

C. 3

D. 0,3

7. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

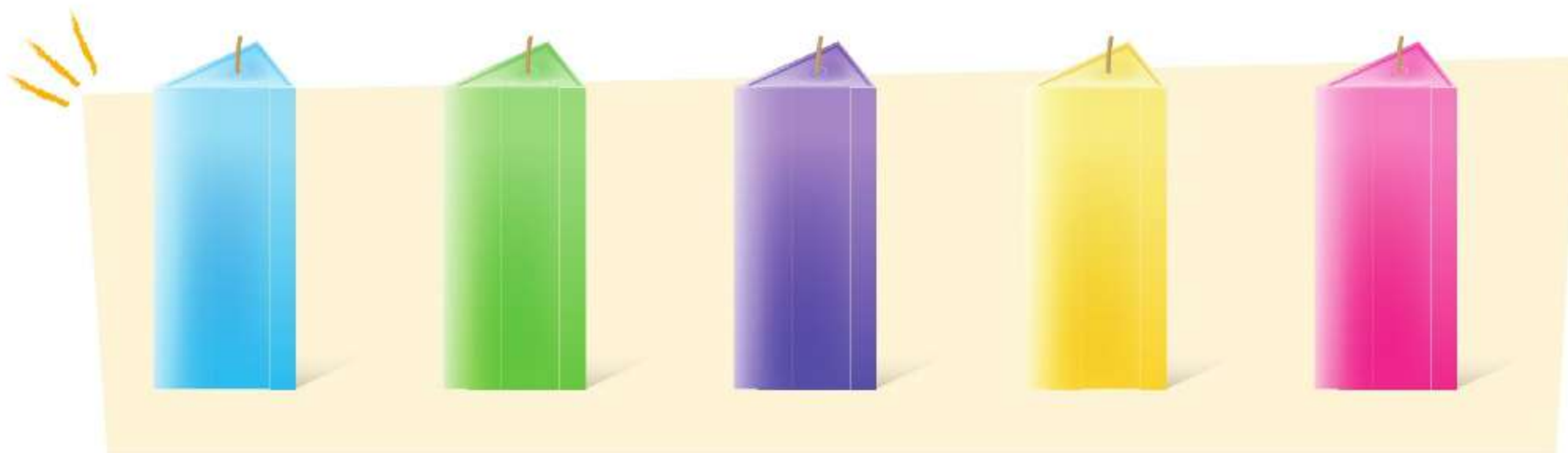
Po wstawieniu zamków odległość górnej krawędzi akwarium od lustra wody jest równa 0,9 dm.	P	F
Objętość jednej kryjówki dla rybek jest równa 0,5 dm ³ .	P	F

8. Słój ma pojemność równą objętości sześcianu o krawędzi długości 20 cm. Ela przełała do tego słoja sok z dwunastu butelek. W każdej butelce było 450 ml soku. Ile procent pojemności tego słoja zajmuje sok?





- 9.** Każda z pięciu świec ma kształt graniastoslupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy długości 4 cm i wysokości 10 cm. Świece wykonano z wosku, którego 1 cm^3 waży 0,96 g. Oblicz łączną masę tych świec. Przyjmij, że $\sqrt{3} \approx 1,7$.



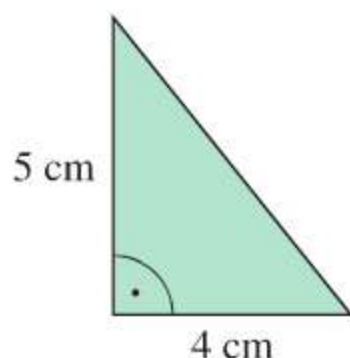
- 10.** Podstawą prostopadłościanu o objętości 416 m^3 jest kwadrat o boku długości 8 m. Oblicz wysokość tego prostopadłościanu.
- 11.** Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe $7,5 \text{ dm}^2$. Oblicz objętość tego sześcianu. Wynik podaj w centymetrach sześciennych.
- 12.** Objętość graniastoslupa prostego jest równa $0,15 \text{ dm}^3$. Oblicz wysokość i pole powierzchni bocznej graniastoslupa, jeśli jego podstawa jest:
- a) kwadratem o polu równym 75 cm^2 ;
 - b) trójkątem prostokątnym o przeciwprostokątnej długości 13 cm i jednej z przyprostokątnych długości 5 cm;
 - c) prostokątem o obwodzie 34 cm, którego jeden bok jest o 7 cm dłuższy od drugiego;
 - d) rombem o obwodzie 16 cm i wysokości 0,3 dm.
- 13.** Objętość graniastoslupa prawidłowego sześciokątnego wynosi $432\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa, jeśli jego wysokość jest równa 8 cm.
- 14.** Podstawy dwóch graniastoslupów prostych są przystającymi wielokątami o polach $6\sqrt{7} \text{ dm}^2$. Krawędź boczna pierwszego graniastoslupa ma długość 15 cm. Objętość drugiego graniastoslupa jest o 40 % większa od objętości pierwszego. Oblicz wysokość drugiego graniastoslupa.
- 15.** Podstawą prostopadłościennego pojemnika jest kwadrat o boku długości 14 cm. Wysokość tego pojemnika jest wyrażona całkowitą liczbą centymetrów. Jaka musi być najmniejsza wysokość tego pojemnika, aby zmieściło się w nim 5 l wody?
- 16.** Dwie ściany prostopadłościanu są kwadratami, a pozostałe jego ściany są prostokątami, w których jeden bok jest dwa razy dłuższy od drugiego. Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu jest równa 80 cm. Oblicz objętość tego prostopadłościanu. Rozważ dwa przypadki.



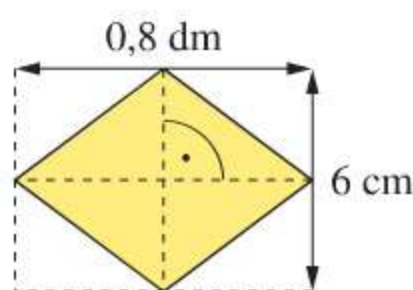
Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz objętość graniastosłupa prostego, którego podstawą jest wielokąt przedstawiony na rysunku. Wysokość graniastosłupa jest równa 9 dm.

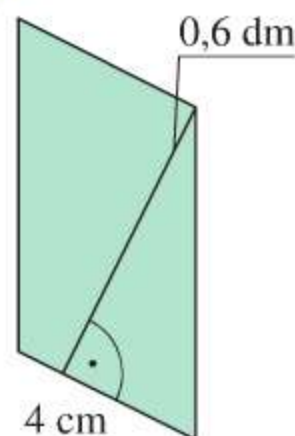
a)



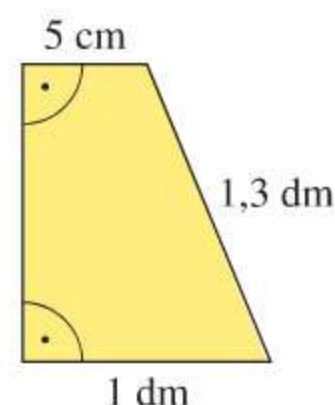
b)



c)



d)



2. Wyraż podane wielkości we wskazanej jednostce.

a) 8 cm^3 oraz $0,4 \text{ cm}^3$ w mm^3

b) 27 m^3 oraz $5,16 \text{ m}^3$ w cm^3

c) 3 km^3 oraz $0,375 \text{ km}^3$ w m^3

d) 1500 dm^3 oraz $8,1 \text{ dm}^3$ w m^3

e) $693\,000 \text{ cm}^3$ oraz $0,8 \text{ cm}^3$ w l

f) 1810 ml oraz $9,26 \text{ ml}$ w dm^3

3. Objętość prostopadłościanu jest równa 210, a długości dwóch jego krawędzi są równe 6 i 14. Czy trzecia krawędź tego prostopadłościanu jest jego najkrótszą krawędzią? Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród 1., 2. albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	$210 - 2 \cdot (6 \cdot 14) = 42.$
			2.	$210 : (6 \cdot 14) = 2,5.$
B.	Nie,		3.	$210 : (2 \cdot 14 + 2 \cdot 6) = 5,25.$

4. Długość krawędzi bocznej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego stanowi $\frac{7}{4}$ długości jego krawędzi podstawy. Pole powierzchni bocznej graniastosłupa jest równe 448 dm^2 . Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Krawędź boczna tego graniastosłupa ma długość **A** **B** dm.

A. 8 **B.** 14

Objętość tego graniastosłupa wynosi **C** **D** dm^3 .

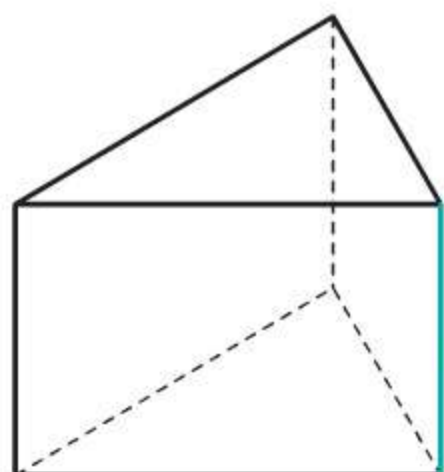
C. 896 **D.** 576

PODSUMOWANIE DZIAŁU IV

Graniastosłupy

Powtórz wiadomości

Graniastosłup prosty i pochyły

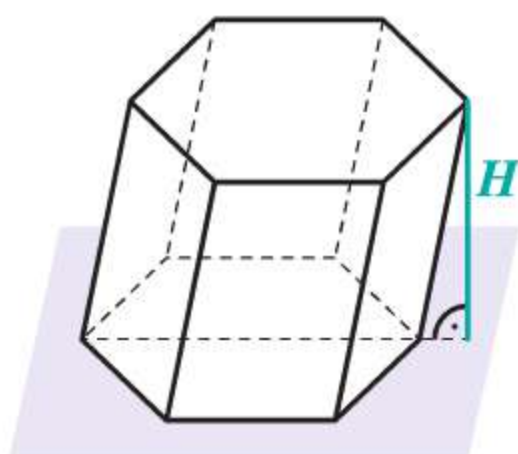


Graniastosłup prosty

- Ściany boczne są prostokątami (krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw).

Graniastosłup pochyły

- Ściany boczne są równoległobokami (krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstaw).

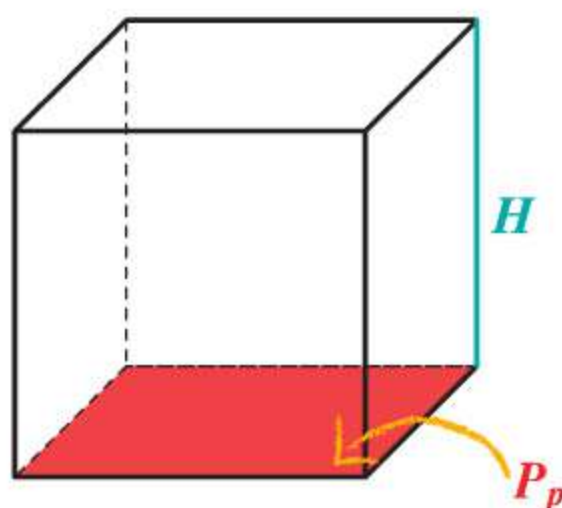


Objętość graniastosłupa

Objętość V graniastosłupa wyraża się wzorem:

$$V = P_p \cdot H,$$

gdzie: P_p – pole podstawy,
 H – wysokość graniastosłupa.



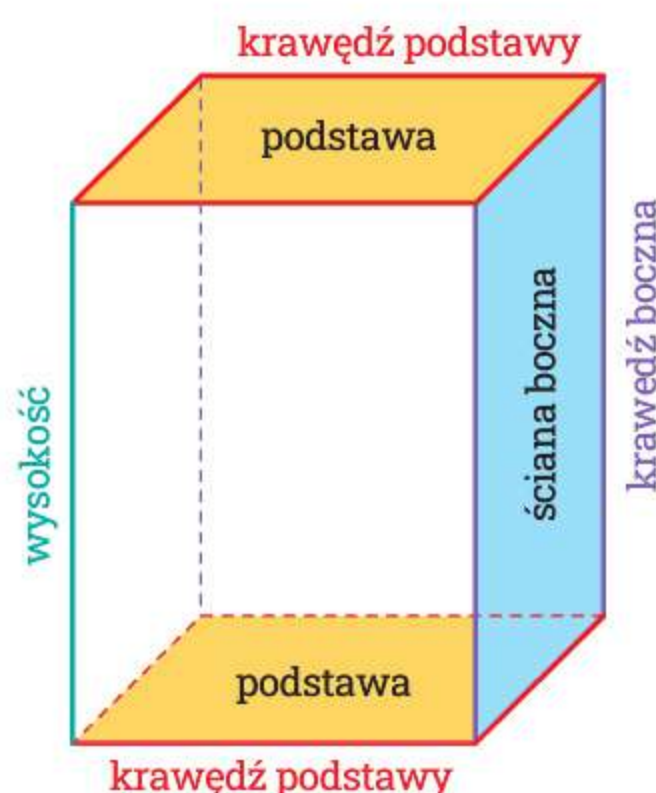
Graniastosłup

Graniastosłup jest bryłą, która ma:

- dwie przystające (takie same) podstawy,
- wszystkie krawędzie boczne równoległe względem siebie i równej długości.

Graniastosłup n -kątny ma:

- $2n$ wierzchołków,
- $(n + 2)$ ścian,
- n krawędzi bocznych,
- $3n$ krawędzi.



Graniastosłupem prawidłowym

nazywamy graniastosłup prosty, który w podstawie ma wielokąt foremny (wszystkie boki tego wielokąta są tej samej długości, a jego kąty mają takie same miary).

Pole powierzchni całkowitej

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa możemy obliczyć, korzystając ze wzoru:

$$P_c = 2P_p + P_b,$$

gdzie: P_c – pole powierzchni całkowitej graniastosłupa,
 P_p – pole podstawy graniastosłupa,
 P_b – pole powierzchni bocznej graniastosłupa, czyli suma pól wszystkich jego ścian bocznych.

Sprawdź umiejętności



1. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Graniastosłup czworokątny ma 12 krawędzi.	P	F
Podstawą graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest trójkąt prostokątny równoramienny.	P	F
W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie ściany zawsze są kwadratami.	P	F

2. Podaj nazwę graniastosłupa, który ma:

- a)** osiemnaście wierzchołków, **b)** osiem ścian bocznych,
c) dwanaście ścian, **d)** dwadzieścia jeden krawędzi.

3. Kwadrat o boku 4 cm i prostokąt o wymiarach 4 cm × 5 cm są ścianami tego samego prostopadłościanu.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma długości krawędzi tego prostopadłościanu jest równa

- A.** 20 cm **B.** 36 cm **C.** 52 cm **D.** 56 cm

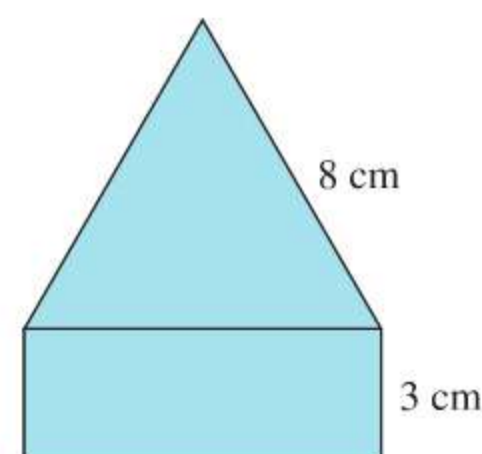
4. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny. Długość jednej z przyprostokątnych jest równa 6 cm, a długość przeciwprostokątnej wynosi 10 cm. Najmniejsza ściana boczna graniastosłupa ma pole równe 72 cm². Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa.

5. Ściana boczna graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest prostokątem o przekątnej długości $18\sqrt{2}$ cm. Krawędź podstawy graniastosłupa ma długość 20 cm. Oblicz wysokość tego graniastosłupa.

6. Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny, którego krawędź podstawy ma długość 5 cm, a wysokość jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

7. Na rysunku przedstawiono fragment siatki graniastosłupa prawidłowego trójkątnego. Oblicz:

- a)** sumę długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa,
b) długość przekątnej ściany bocznej tego graniastosłupa,
c) pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.



8. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość sześcianu o krawędzi długości $3\sqrt{2}$ cm.

E **9.** Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prostopadłościan o wymiarach $2 \text{ mm} \times 3 \text{ cm} \times 12 \text{ dm}$ ma objętość równą

- A.** 720 mm^3 **B.** 72 cm^3 **C.** $7,2 \text{ dm}^3$ **D.** 720 cm^3

10. Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 12 m, a wysokość jest równa 90 cm.

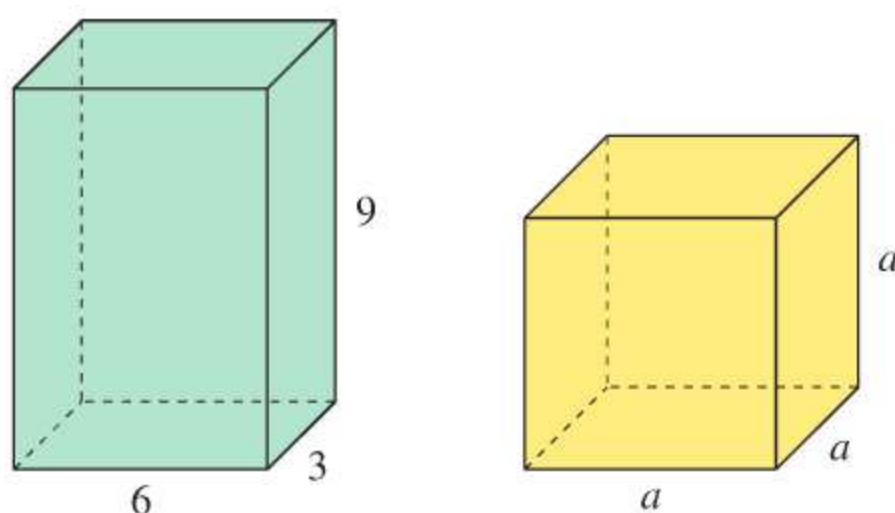
E **11.** Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 4, a wysokość tego graniastosłupa jest równa 5.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Objętość tego graniastosłupa jest równa

- A.** 80 **B.** $20\sqrt{3}$ **C.** $12\sqrt{3}$ **D.** $120\sqrt{3}$

12. Na rysunku przedstawiono dwa prostopadłościany oraz zapisano długości ich krawędzi. Pola powierzchni całkowitej obu brył są równe.



Który prostopadłościan ma większą objętość? Uzasadnij swoją odpowiedź.

E **13.** Podstawą szklanego naczynia w kształcie graniastosłupa prostego jest prostokąt o wymiarach $50 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$. Wysokość tego naczynia jest równa 40 cm. Na dnie naczynia umieszczono rośliny i kamienie, które zajmują 10 % objętości całego naczynia.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Aby napełnić naczynie, potrzeba **A** **B** l wody.

A. 36 **B.** 40

Po wlaniu **C** **D** l wody naczynie będzie napełnione do połowy jego wysokości.

C. 16 **D.** 20

14. Marmurowy blat kuchenny w kształcie prostopadłościanu ma wymiary $60 \text{ cm} \times 40 \text{ cm} \times 35 \text{ mm}$. Oblicz, ile waży ten blat, jeśli 1 dm^3 marmuru, z którego jest wykonany, waży 2,8 kg.

15. Objętość graniastosłupa prostego o podstawie rombu jest równa 504 dm^3 . Przekątne podstawy tego graniastosłupa mają długości 8 dm i 14 dm. Oblicz wysokość tego graniastosłupa.

Potrenuj – zadania uzupełniające

- 1.** Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu jest równa $30 + 20\sqrt{2}$. Krawędzie prostopadłościanu mają długości: $x, x + 1, x + 2$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

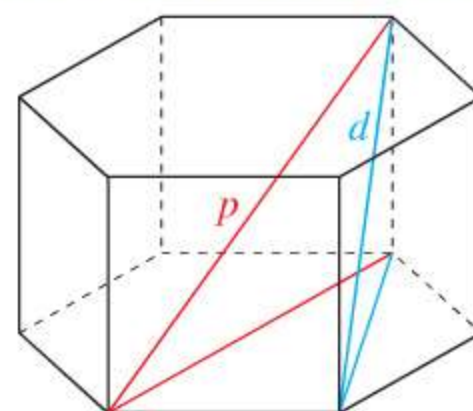
Wartość x jest równa

- A. $\frac{20\sqrt{2}}{3} + 9$ B. $\frac{25\sqrt{2}}{6} - 1$ C. $\frac{9 + 10\sqrt{2}}{6}$ D. $\frac{19\sqrt{2}}{6}$

- 2.** Krawędź sześcianu ma długość k . Uzasadnij, że długość przekątnej tego sześcianu wyraża się wzorem $k\sqrt{3}$.

- 3.** Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny, w którym wszystkie krawędzie są tej samej długości, a przekątna p ma długość 15 dm. Oblicz:

- a) sumę długości krawędzi tego graniastosłupa,
b) długość przekątnej d tego graniastosłupa.

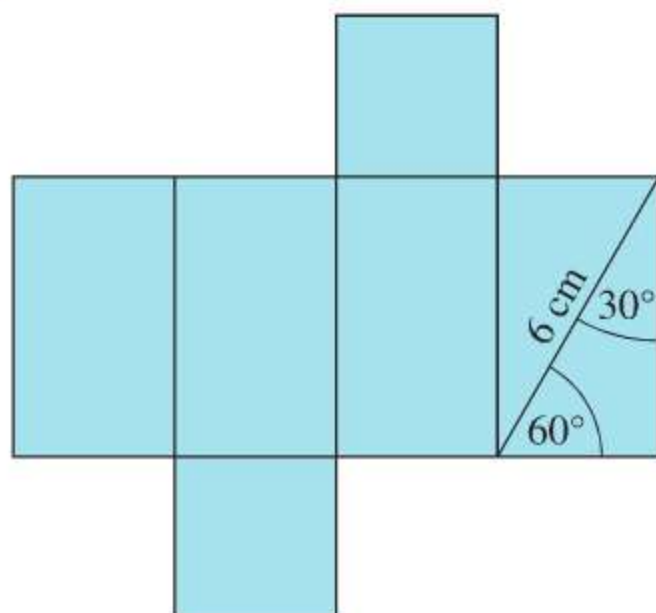


- 4.** Pokój ma kształt prostopadłościanu o wymiarach $4 \text{ m} \times 3 \text{ m} \times 2,5 \text{ m}$, gdzie najmniejszy wymiar to wysokość pokoju. Puszka farby wystarcza na jednokrotne pomalowanie 18 m^2 powierzchni. Ile puszek farby potrzeba na dwukrotne pomalowanie ścian tego pokoju, jeśli na drzwi i okna trzeba odliczyć 8 % powierzchni ścian?

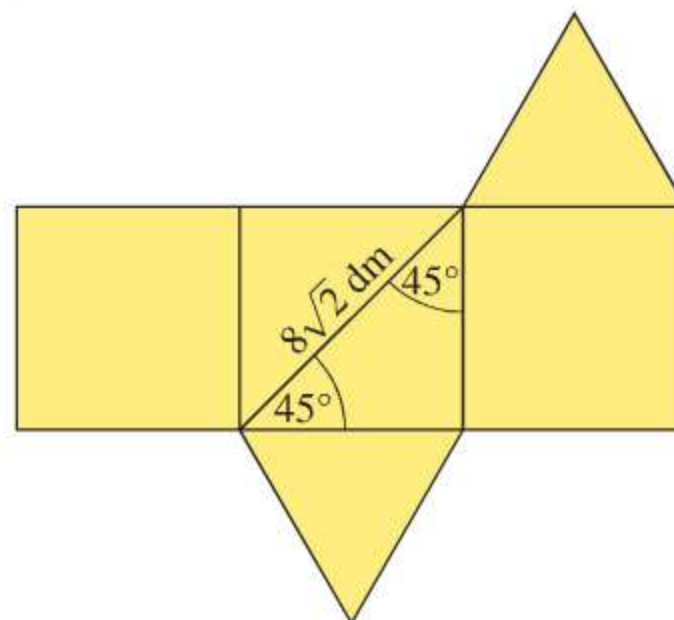
- 5.** Jeżeli długość krawędzi podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego zwiększymy o 1 cm, a wysokość pozostawimy bez zmian, to jego pole powierzchni całkowitej zwiększy się o 16 cm^2 . Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi bocznych i wszystkich krawędzi jednej podstawy tego graniastosłupa.

- 6.** Na rysunku przedstawiono siatkę graniastosłupa prawidłowego i zapisano długość przekątnej jednej z jego ścian bocznych. Podano również miary wybranych kątów. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

a)



b)



7. Podstawą graniastopu prostego jest trapez równoramienny, którego trzy boki mają taką samą długość równą 41 cm, a wysokość trapezu jest równa 40 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastopu, jeśli jego wysokość jest równa 2 dm.

8. Podstawą graniastopu prostego jest romb o przekątnych długości 30 cm i 20 cm. Dłuższa przekątna graniastopu ma długość $30\sqrt{2}$ cm. Oblicz:

- a) pole powierzchni całkowitej tego graniastopu,
- b) długość krótszej przekątnej tego graniastopu.

9. Z ośmiu jednakowych kostek sześciennych o objętości 1 dm^3 budowano prostopadłościany. Podaj wymiary wszystkich prostopadłościanów, które można zbudować z tych kostek. Wskaż ten prostopadłościan, którego pole powierzchni jest najmniejsze.

E 10. Objętość graniastopu prawidłowego trójkątnego jest równa 120 cm^3 , a krawędź podstawy ma długość 4 cm.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wysokość tego graniastopu jest równa

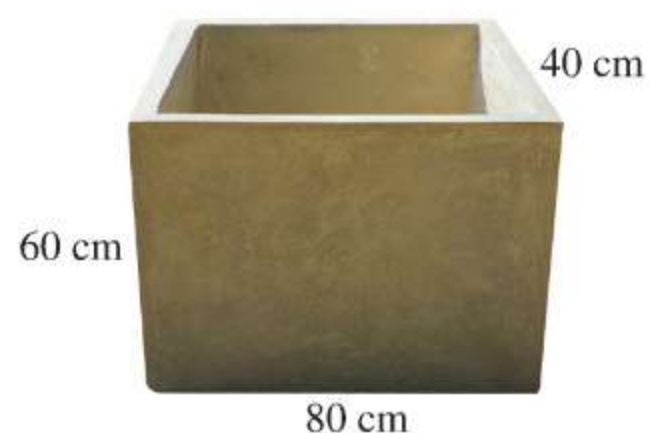
- A.** $5\sqrt{3}$ cm **B.** $10\sqrt{3}$ cm **C.** 15 cm **D.** 30 cm

11. Jacek ma 287 jednakowych sześciątów, z których chce zbudować sześciąt o możliwie największej objętości. Ile sześciątów mu zostanie?

12. Krawędź podstawy graniastopu prawidłowego sześciokątnego jest dwa razy krótsza od jego wysokości. Przekątna ściany bocznej ma długość $2\sqrt{5}$ cm. Oblicz objętość tego graniastopu.

13. Betonowa donica ma kształt prostopadłościanu. Ze-wnętrzne wymiary donicy podano na rysunku. Ściany i dno donicy mają grubość 5 cm.

- a) Ile litrów ziemi zmieści się w jednej takiej donicy?
- b) Czy $0,5 \text{ m}^3$ betonu wystarczy na wykonanie 6 takich donic? Uzasadnij swoją odpowiedź.



14. Dane są dwa sześciąty. Objętość pierwszego sześciątu jest dwa razy większa od objętości drugiego sześciątu. Ile razy długość krawędzi pierwszego sześciątu jest dłuższa od krawędzi drugiego sześciątu?

15. Dane są dwa sześciąty, których długości krawędzi pozostają w stosunku 2 : 5. Oblicz stosunek pól powierzchni całkowitych tych sześciątów.

16. Dany jest graniastopu prawidłowy czworokątny, w którym stosunek długości krawędzi podstawy do wysokości jest równy 1 : 3, oraz sześciąt, którego długość krawędzi jest równa długości krawędzi podstawy graniastopu. Oblicz stosunek objętości tych brył.

DZIAŁ

V

OSTROSŁUPY

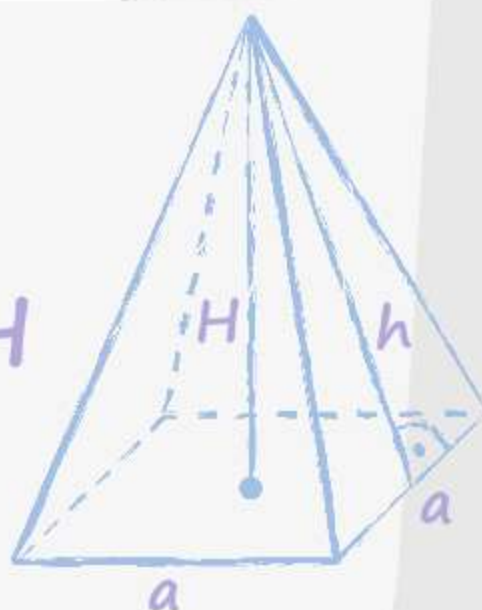
Rodzaje
ostrosłupów

To ci się
przyda!

Pole powierzchni
ostrosłupa

Objętość
ostrosłupa

$$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot H$$



$$P_c = a^2 + 2ah$$

1. Ostrosłupy i ich rodzaje

- ▶ Znajomość własności ostrosłupów
- ▶ Rozpoznawanie ostrosłupów prostych, pochyłych i prawidłowych
- ▶ Rysowanie siatek ostrosłupów

Wśród brył możemy wymienić trzy najważniejsze ich rodzaje: graniastosłupy, ostrosłupy, bryły obrotowe (np. kula, walec, stożek). Pozostałe bryły możemy określić mianem „inne”.

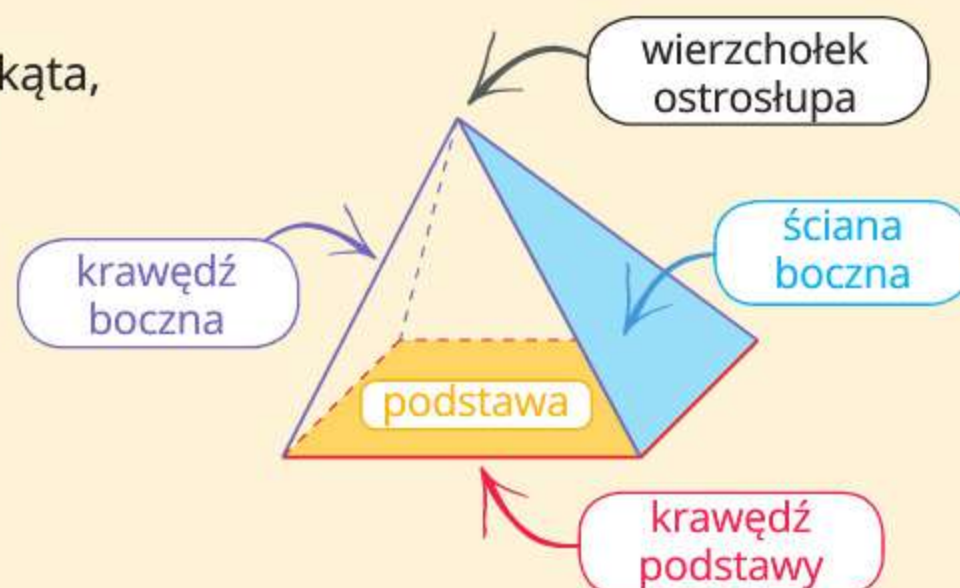
Ostrosłupy w przeciwieństwie do graniastosłupów mają tylko jedną postawę, a ich ściany boczne nie są równoległobokami tylko trójkątami. W wielu językach „ostrosłup” jest synonimem rzeczownika „piramida”, np. w języku angielskim czy francuskim pyramid (czyt. piramid) oznacza i piramidę, i ostrosłup. Nietrudno się domyślić, że zawdzięczamy to egipskim piramidom.

Ostrosłup jest bryłą, która ma:

- jedną podstawę w kształcie wielokąta,
- ściany boczne będące trójkątami o wspólnym wierzchołku.

Ostrosłup n -kątny, czyli o podstawie n -kąta, ma:

- $(n + 1)$ wierzchołków,
- $(n + 1)$ ścian,
- n krawędzi bocznych,
- $2n$ krawędzi.



W poniższej tabeli przedstawiono przykłady ostrosłupów wraz z liczbą ich wierzchołków, ścian, krawędzi i krawędzi bocznych.

Wielokąt w podstawie	Nazwa ostrosłupa	Rysunek	Liczba wierzchołków	Liczba ścian	Liczba krawędzi bocznych	Liczba krawędzi
trójkąt	ostrosłup trójkątny		4	4	3	6
czworokąt	ostrosłup czworokątny		5	5	4	8
sześciokąt	ostrosłup sześciokątny		7	7	6	12

A to ciekawe

Zależność między liczbą wierzchołków, krawędzi i ścian wielościanów sformułował szwajcarski matematyk, fizyk i astronom Leonhard Euler (czyt. Leonard Ojler) w postaci wzoru:

$$W + S - K = 2,$$

gdzie W jest liczbą wierzchołków, S – liczbą ścian, a K liczbą krawędzi.



Leonhard Euler

Przykład 1.

Ile wierzchołków, ścian oraz krawędzi ma ostrosłup ośmiokątny?

Podstawa tego ostrosłupa jest ośmiokątem. Zatem ten ostrosłup ma osiem wierzchołków podstawy oraz jeden wierzchołek ostrosłupa, czyli ostrosłup ośmiokątny ma 9 wierzchołków.

Ostrosłup ośmiokątny ma osiem ścian bocznych oraz jedną podstawę. Zatem łącznie ma 9 ścian.

Ostrosłup ośmiokątny ma osiem krawędzi podstawy oraz osiem krawędzi bocznych. Zatem łącznie ma 16 krawędzi.

Odp. Ostrosłup ośmiokątny ma 9 wierzchołków, 9 ścian oraz 16 krawędzi.

Ćwiczenie 1.

Określ, ile wierzchołków, ścian oraz krawędzi ma ostrosłup:

a) pięciokątny,

b) siedmiokątny,

c) dziesięciokątny.

Ostrosłup

prosty

Krawędzie boczne są równej długości.

pochyły

Krawędzie boczne nie są równej długości.

Wysokością ostrosłupa nazywamy odcinek, który łączy wierzchołek ostrosłupa z płaszczyzną zawierającą jego podstawę i jest do niej prostopadły. Koniec tego odcinka, leżący na płaszczyźnie zawierającej podstawę ostrosłupa, nazywamy **spodkiem wysokości**.

wysokość ostrosłupa

spodek wysokości

Spodek wysokości leży zawsze na jego podstawie.

wysokość ostrosłupa

spodek wysokości

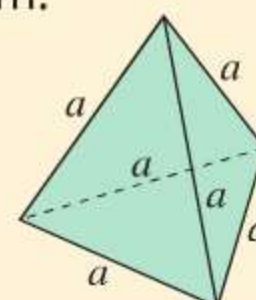
Spodek wysokości nie musi leżeć na jego podstawie.

Ostrosłupem prawidłowym nazywamy ostrosłup prosty, który w podstawie ma wielokąt foremny (wszystkie boki tego wielokąta są tej samej długości, a jego kąty mają takie same miary).

Na przykład jeśli podstawą ostrosłupa jest

- trójkąt równoboczny, to nazywamy go ostrosłupem prawidłowym trójkątnym;
- kwadrat, to nazywamy go ostrosłupem prawidłowym czworokątnym.

Ostrosłup, którego wszystkie ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi, nazywamy **czworościanem foremnym**.

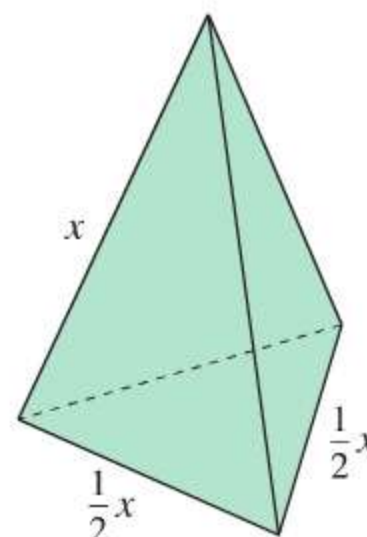


Przykład 2.

Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest o 50 % krótsza od jego krawędzi bocznej. Suma długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa wynosi 63 cm. Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa.

Jeśli krawędź podstawy ostrosłupa jest o 50 % krótsza od jego krawędzi bocznej, to stanowi $100\% - 50\% = 50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ jej długości.

Wykonamy rysunek pomocniczy. Jeśli długość krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego oznaczmy jako x , to długość jego krawędzi podstawy będzie wynosiła $\frac{1}{2}x$.



Liczba wszystkich krawędzi w ostrosłupie trójkątnym to 6 (3 krawędzie podstawy i 3 krawędzie boczne). Ułożymy równanie i wyznaczymy x .



$$3 \cdot \frac{1}{2}x + 3 \cdot x = 63$$

$$\frac{3}{2}x + \frac{6}{2}x = 63$$

$$\frac{9}{2}x = 63 \quad | : \frac{9}{2}$$

$$x = 63 : \frac{9}{2}$$

$$x = 63 \cdot \frac{2}{9}$$

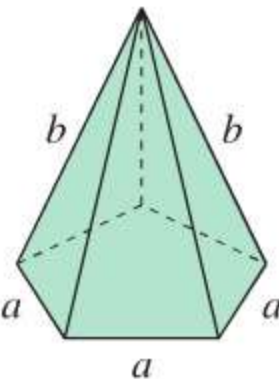
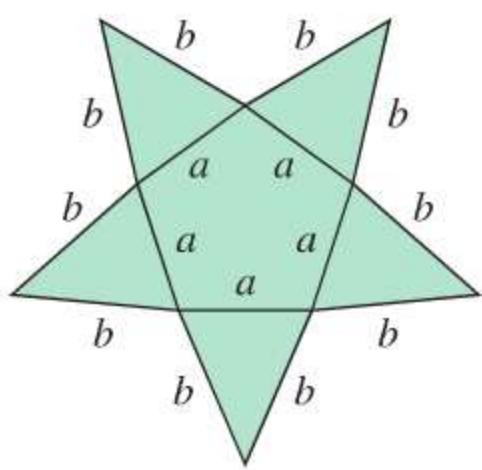
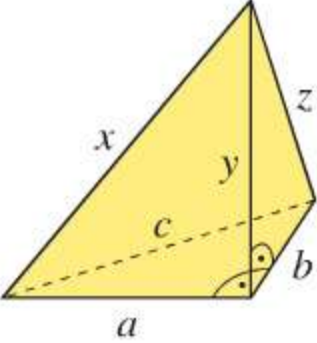
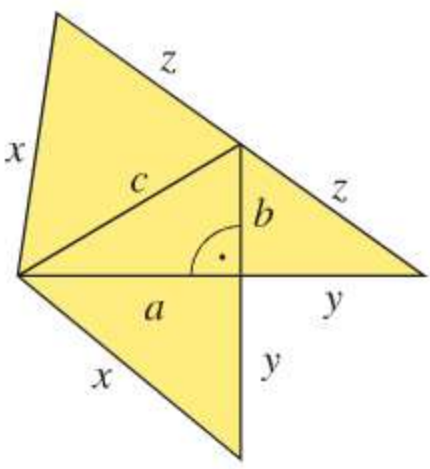
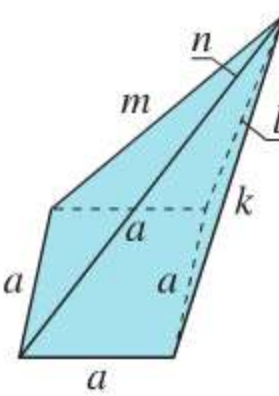
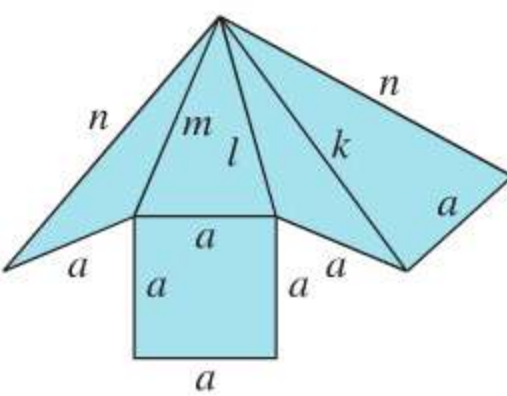
$$x = 7 \cdot 2$$

$$x = 14 \text{ [cm]}$$

Odp. Długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa wynosi 14 cm.

Ćwiczenie 2.

Długość krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego stanowi 75 % długości jego krawędzi podstawy. Suma długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa wynosi 140 cm. Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa.

Przykłady ostrosłupów i ich siatek		
ostrosłup	rysunek ostrosłupa	siatka ostrosłupa
prawidłowy pięciokątny		
pochyły, którego podstawą jest trójkąt prostokątny		
pochyły, którego podstawą jest czworokąt foremny		

Przykład 3.

Na rysunku przedstawiono fragment siatki ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa.

Z fragmentu siatki ostrosłupa odczytamy, że długość jego krawędzi podstawy wynosi 12 cm, a krawędź boczna ma długość 10 cm. Ostrosłup czworokątny ma 4 krawędzie podstawy i 4 krawędzie boczne.

Obliczymy sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa.

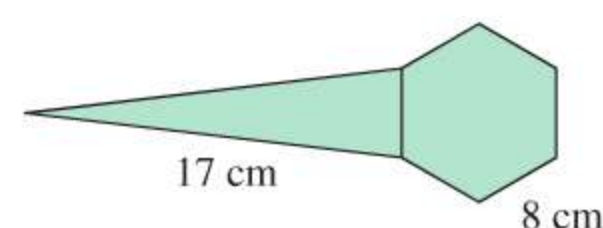


$$4 \cdot 12 + 4 \cdot 10 = 48 + 40 = 88 \text{ [cm]}$$

Odp. Suma długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa wynosi 88 cm.

Ćwiczenie 3.

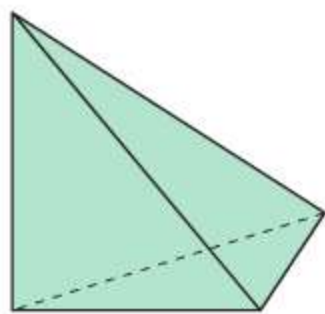
Na rysunku przedstawiono fragment siatki ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa.



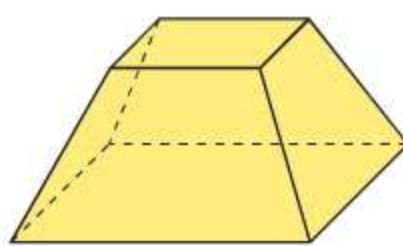
Rozwiąż zadania

- 1.** Na rysunku poniżej przedstawiono różne figury przestrzenne. Wskaż, które z nich są ostrosłupami. Uzasadnij swoją odpowiedź.

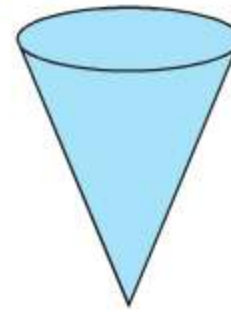
I.



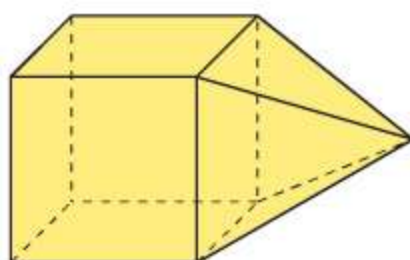
II.



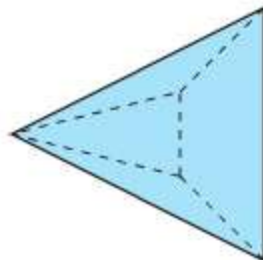
III.



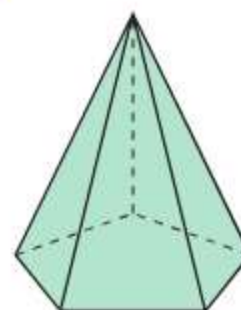
IV.



V.



VI.



- 2.** Określ, ile wierzchołków, ścian, krawędzi bocznych oraz krawędzi ma ostrosłup:
a) jedenastokątny, **b)** dwudziestokątny, **c)** siedemnastokątny.

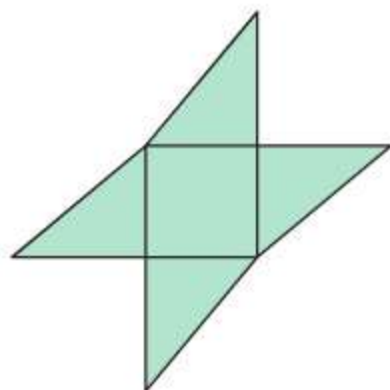
- 3.** Ostrosłup ma 112 krawędzi. Ile wierzchołków ma podstawa tego ostrosłupa?

- 4.** Ostrosłup ma 39 wierzchołków. Ile ścian bocznych ma ten ostrosłup?

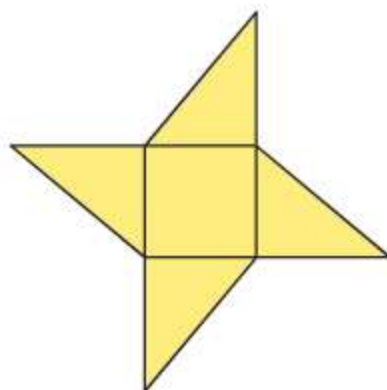
- 5.** Suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego wynosi 2,4 dm. Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa, jeśli jego podstawą jest
a) trójkąt o obwodzie 6 cm, **b)** kwadrat o polu równym 9 cm^2 .

- 6.** Które z narysowanych figur przedstawiają siatki ostrosłupów? Podaj nazwy tych ostrosłupów.

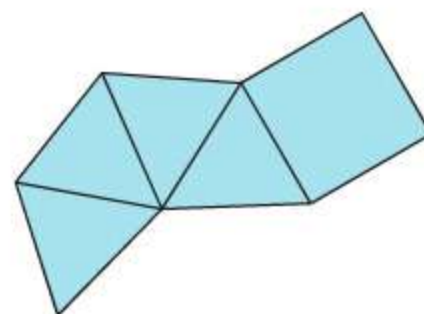
I.



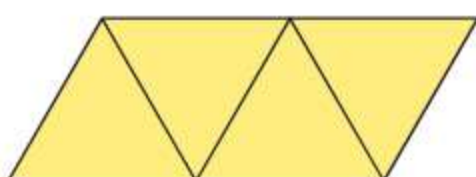
II.



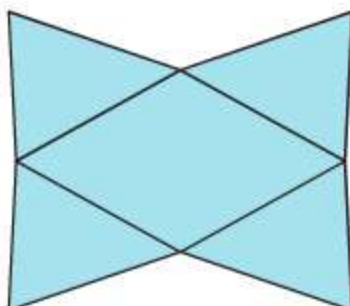
III.



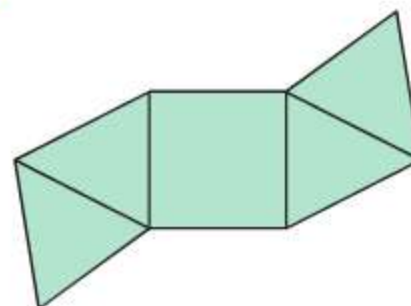
IV.



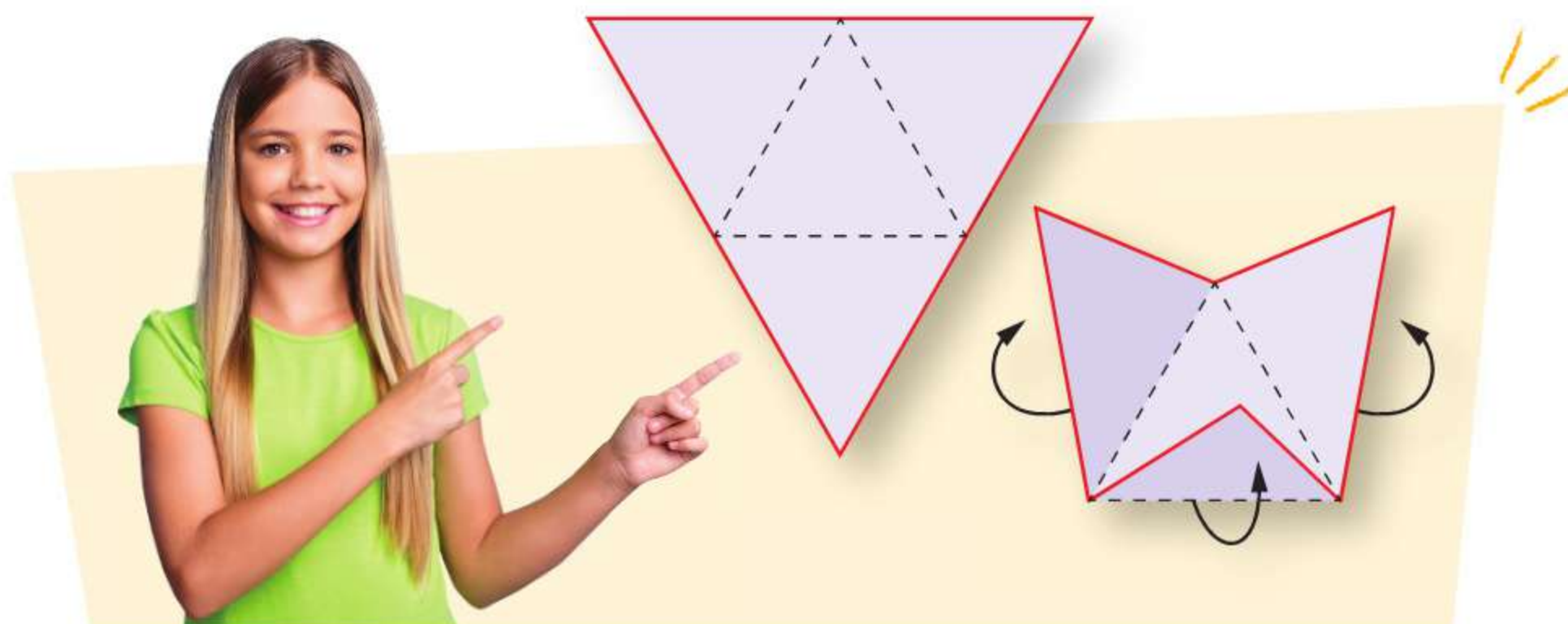
V.



VI.



- 7.** Ela narysowała na kartce papieru trójkąt równoboczny o boku długości 1,2 dm. Wycięła ten trójkąt, zaznaczyła środki jego boków i zagięła kartkę wzdłuż odcinków łączących zaznaczone punkty. Czy udało jej się otrzymać model ostrosłupa? Jeśli tak, nazwij ten ostrosłup.



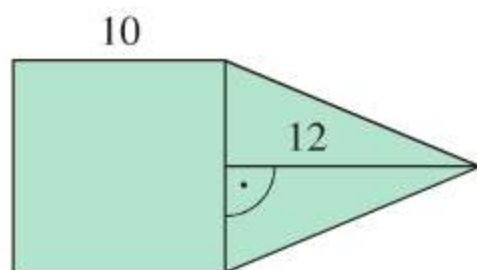
- 8.** Narysuj siatkę ostrosłupa prawidłowego o krawędzi podstawy długości 5 cm, w którym wysokość ściany bocznej poprowadzona do krawędzi podstawy jest równa 4 cm, jeśli jego podstawa jest

- a)** trójkątem, **b)** czworokątem.

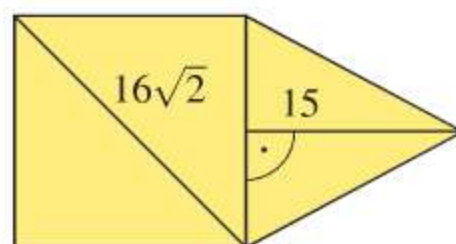
- 9.** Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest o 20 % dłuższa od jego krawędzi podstawy. Suma długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa wynosi 132 cm. Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa.

- 10.** Na rysunku przedstawiono fragment siatki ostrosłupa. Oblicz sumę długości wszystkich jego krawędzi.

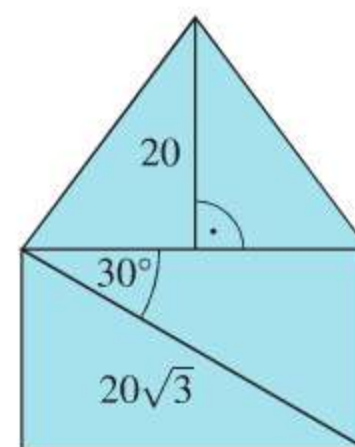
- a)** ostrosłup prawidłowy czworokątny



- b)** ostrosłup prawidłowy czworokątny



- c)** ostrosłup prosty o podstawie prostokąta



- 11.** Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego i pole kwadratowej ściany prostopadłościanu są równe 32. Krawędź boczna ostrosłupa ma długość $8\sqrt{2}$. Suma długości krawędzi prostopadłościanu jest równa sumie długości krawędzi ostrosłupa. Oblicz wysokość tego prostopadłościanu.

Sprawdź, co umiesz!

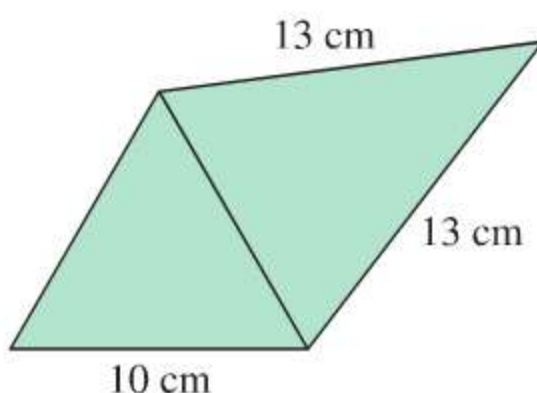


- E** 1. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Liczba krawędzi bocznych ostrosłupa jest równa liczbie krawędzi podstawy.	P	F
W ostrosłupie liczba wierzchołków jest równa liczbie ścian.	P	F
Istnieje ostrosłup, który ma 17 krawędzi.	P	F

2. Ostrosłup i graniastosłup mają taką samą liczbę wierzchołków, równą 36. Oblicz różnicę liczb krawędzi tych brył.

3. Na rysunku przedstawiono fragment siatki ostrosłupa prawidłowego trójkątnego. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa.



- E** 4. Długość krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego ośmiokątnego stanowi 175 % długości jego krawędzi podstawy. Suma długości krawędzi tego ostrosłupa jest równa 88.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Suma długości krawędzi podstawy tego ostrosłupa jest o 24 **A B** od sumy długości jego krawędzi bocznych.

A. mniejsza **B.** większa

Krawędź boczna tego ostrosłupa ma długość **C D**.

C. 4 **D.** 7

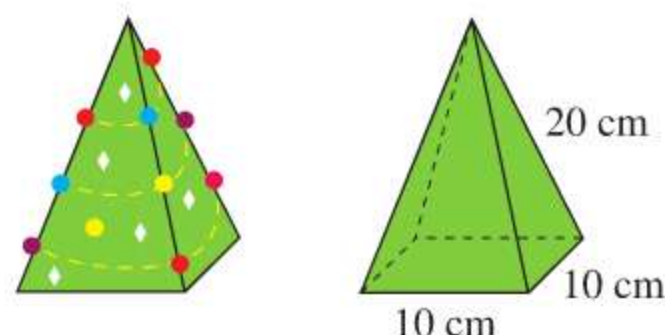
5. Suma długości wszystkich krawędzi czworościanu foremnego jest równa 24 cm. Oblicz wysokość ściany tego czworościanu poprowadzoną do krawędzi podstawy.

2. Pole powierzchni ostrosłupa

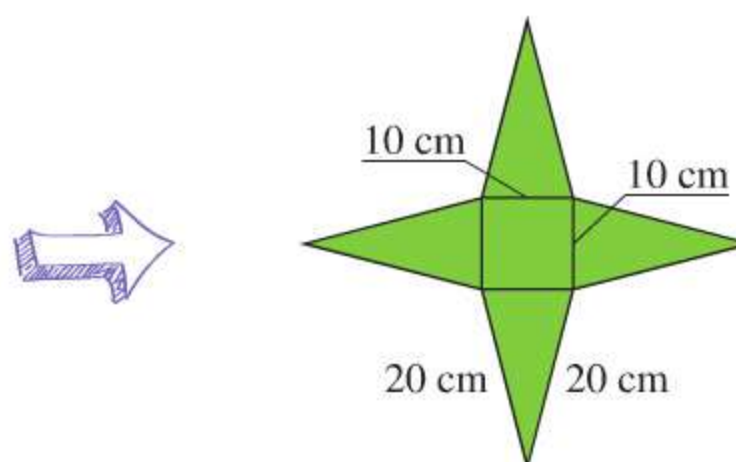
► Obliczanie pól powierzchni bocznej i całkowitej ostrosłupa

Przykład 1.

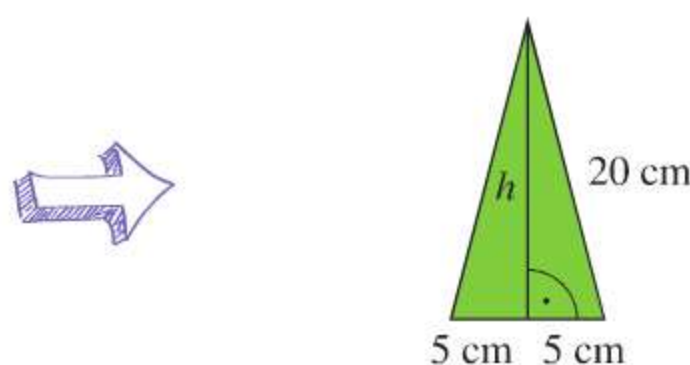
Ela postanowiła na lekcję plastyki przygotować z papieru choinkę w kształcie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wymiarach przedstawionych na rysunku. Oblicz, jaka będzie powierzchnia papieru potrzebnego do wykonania tej choinki.



Narysujemy siatkę ostrosłupa o wymiarach choinki. Składa się ona z kwadratowej podstawy oraz czterech takich samych ścian bocznych będących trójkątami równoramiennymi. Obliczymy pole podstawy ostrosłupa:
 $P_p = 10^2 = 100 \text{ [cm}^2\text{]}.$



Wysokość h ściany bocznej ostrosłupa poprowadzona do krawędzi podstawy dzieli krawędź podstawy na połowy.



Obliczymy wysokość h ściany bocznej przedstawionego ostrosłupa.



$$\begin{aligned} h^2 + 5^2 &= 20^2 \\ h^2 + 25 &= 400 \\ h^2 &= 400 - 25 = 375 \\ h &= \sqrt{375} = \sqrt{25 \cdot 15} = 5\sqrt{15} \text{ [cm]} \end{aligned}$$

Obliczymy pole powierzchni bocznej ostrosłupa.



$$\begin{aligned} P_b &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5\sqrt{15} = 2 \cdot 10 \cdot 5\sqrt{15} = \\ &= 100\sqrt{15} \text{ [cm}^2\text{]} \end{aligned}$$

Obliczymy pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

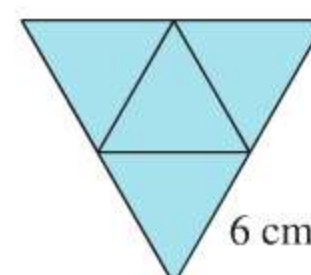


$$P_c = (100 + 100\sqrt{15}) \text{ [cm}^2\text{]}$$

Odp. Powierzchnia papieru potrzebnego do wykonania tej choinki wynosi $(100 + 100\sqrt{15}) \text{ cm}^2$.

Ćwiczenie 1.

Na rysunku przedstawiono siatkę czworościanu foremnego. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego czworościanu.



Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa wyraża się wzorem:

$$P_c = P_p + P_b,$$



gdzie: P_p – pole podstawy ostrosłupa,
 P_b – pole powierzchni bocznej ostrosłupa, czyli suma pól jego wszystkich ścian bocznych.

Przykład 2.

Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCD$ S, którego krawędź podstawy ma długość 4 cm, a wysokość jest równa 5 cm.

Wykonamy rysunek pomocniczy.

Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma w podstawie kwadrat. Spodek wysokości tego ostrosłupa (punkt O) jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu.

Obliczymy pole podstawy ostrosłupa.

Możemy zauważyć, że trójkąt SOE to trójkąt prostokątny. Jego przyprostokątne to:

- odcinek SO o długości 5 cm;
- odcinek OE , którego długość stanowi połowę długości krawędzi podstawy, czyli $|OE| = 4 \text{ cm} : 2 = 2 \text{ cm}$.

Przeciwprostokątną trójkąta SOE jest odcinek SE , który jest wysokością h ściany bocznej tego ostrosłupa.

Obliczymy wysokość h ściany bocznej ostrosłupa.

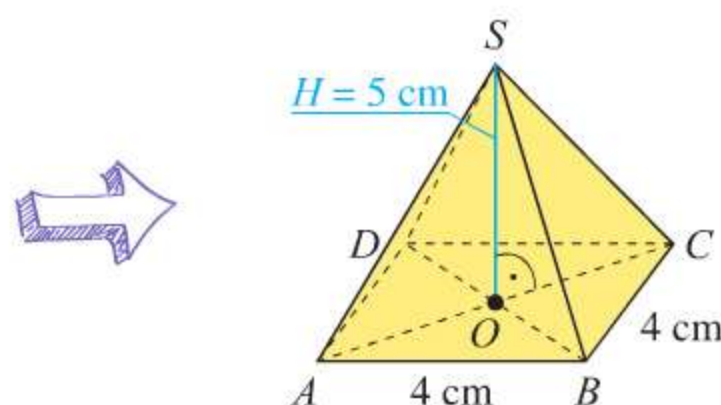
Obliczymy pole powierzchni bocznej przedstawionego ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Wszystkie cztery ściany są przystającymi trójkątami. Każdy z tych trójkątów ma podstawę długości 4 cm oraz wysokość równą $\sqrt{29}$ cm.

Obliczymy pole powierzchni całkowitej ostrosłupa, korzystając ze wzoru: $P_c = P_p + P_b$.

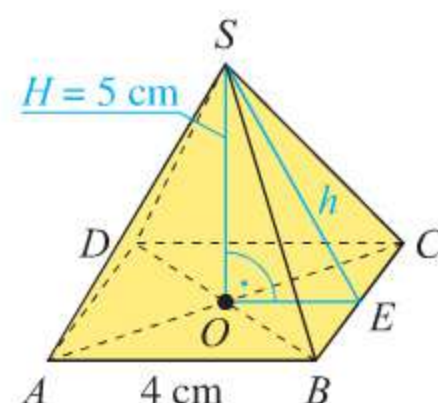
Odp. Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa wynosi $(16 + 8\sqrt{29}) \text{ cm}^2$.

Ćwiczenie 2.

Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 16 cm, a wysokość jest równa 15 cm.



$$P_p = 4^2 = 16 \text{ [cm}^2\text{]}$$



$$5^2 + 2^2 = h^2$$

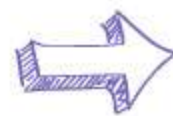
$$25 + 4 = h^2$$

$$h^2 = 29$$

$$h = \sqrt{29} \text{ [cm]}$$



$$\begin{aligned} P_b &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{29} = \\ &= 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{29} = \\ &= 8\sqrt{29} \text{ [cm}^2\text{]} \end{aligned}$$



$$P_c = (16 + 8\sqrt{29}) \text{ [cm}^2\text{]}$$

Przykład 3.

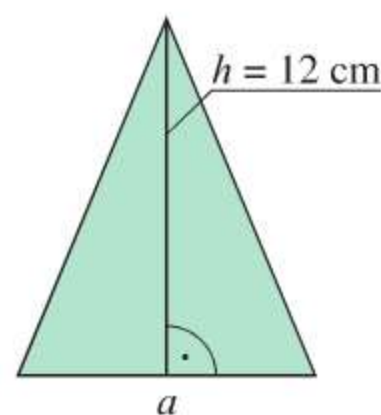
Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego wynosi 360 cm^2 . Wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa poprowadzona do krawędzi podstawy jest równa 12 cm . Oblicz pole podstawy tego ostrosłupa.

Ostrosłup jest prawidłowy, więc wszystkie jego ściany boczne są przystające (takie same). Obliczymy pole powierzchni jednej ściany.



$$360 \text{ cm}^2 : 6 = 60 \text{ cm}^2$$

Wykonamy rysunek pomocniczy ściany bocznej ostrosłupa. Podstawa a ściany bocznej jest jednocześnie krawędzią podstawy ostrosłupa, czyli bokiem sześciokąta foremnego.



Korzystając ze wzoru na pole trójkąta o boku długości a i wysokości h poprowadzonej do tego boku, obliczymy długość krawędzi podstawy.



$$P = \frac{a \cdot h}{2}$$

$$60 = \frac{a \cdot 12}{2}$$

$$60 = 6a \quad | : 6$$

$$a = 10 \text{ [cm]}$$

Obliczymy pole podstawy ostrosłupa, wiedząc, że sześciokąt foremny można podzielić na 6 trójkątów równobocznych.



$$P_p = 6 \cdot \frac{10^2 \sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{100 \sqrt{3}}{2} = 3 \cdot 50 \sqrt{3} = 150 \sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

Odp. Pole podstawy tego ostrosłupa wynosi $150 \sqrt{3} \text{ cm}^2$.

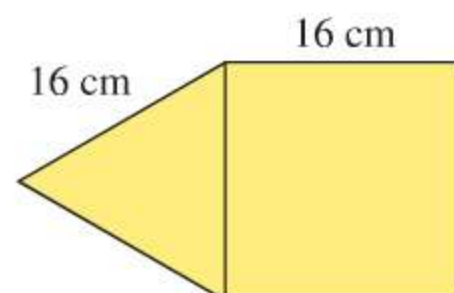
Ćwiczenie 3.

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 36 cm^2 , a jego pole powierzchni całkowitej jest równe 84 cm^2 . Oblicz wysokość ściany bocznej, która jest poprowadzona do krawędzi podstawy ostrosłupa.

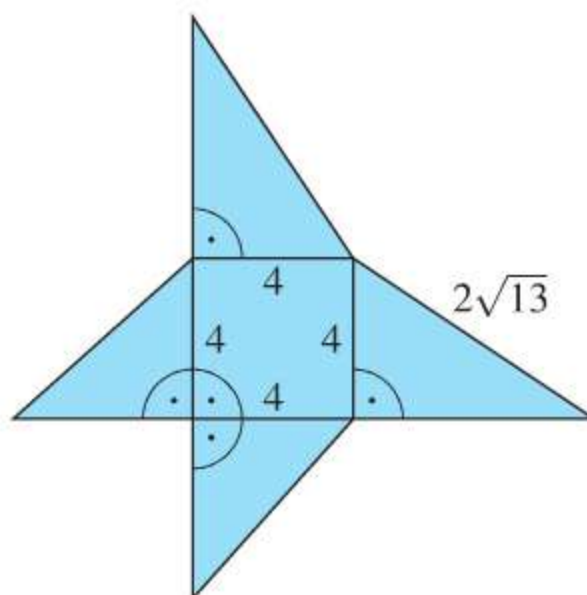
Rozwiąż zadania

1. Dany jest ostrosłup prawidłowy, którego krawędź podstawy ma 6 cm . Wysokość ściany bocznej, która jest poprowadzona do krawędzi podstawy tego ostrosłupa, jest równa 9 cm . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa, jeśli jego podstawą jest:
- a) trójkąt, b) kwadrat, c) sześciokąt.

2. Na rysunku przedstawiono fragment siatki ostrosłupa prawidłowego. Oblicz wysokość ściany bocznej poprowadzoną do krawędzi podstawy oraz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.



3. Na rysunku przedstawiono siatkę ostrosłupa. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.



4. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe 120 cm^2 , a wysokość ściany bocznej poprowadzona do krawędzi podstawy ma długość 10 cm . Oblicz pole podstawy tego ostrosłupa.

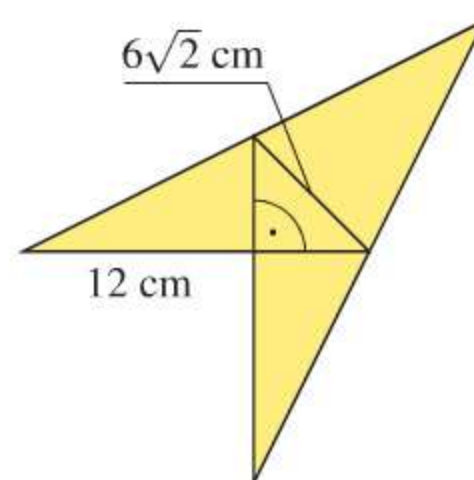
- E** 5. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat. Ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami równobocznymi o polu $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$ każda.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Krawędź podstawy tego ostrosłupa ma długość

- A.** 12 cm **B.** 6 cm **C.** 3 cm **D.** 9 cm

6. Na rysunku przedstawiono siatkę ostrosłupa, którego podstawą jest trójkąt prostokątny równoramienny, oraz zapisano długości niektórych jego krawędzi. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.



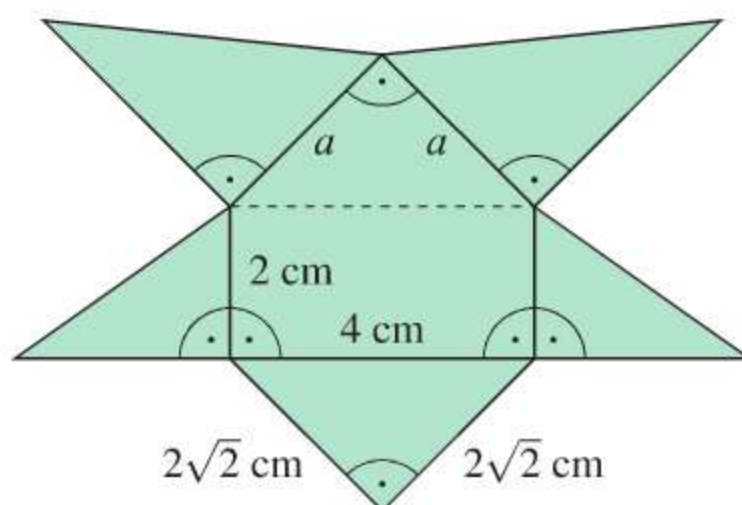
7. Przekątna podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $2\sqrt{2} \text{ dm}$. Krawędź boczna ostrosłupa jest cztery razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

8. Przekątna podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $7\sqrt{2} \text{ cm}$. Pole podstawy ostrosłupa jest sześć razy mniejsze od pola powierzchni bocznej. Oblicz wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa, która jest poprowadzona do krawędzi podstawy.

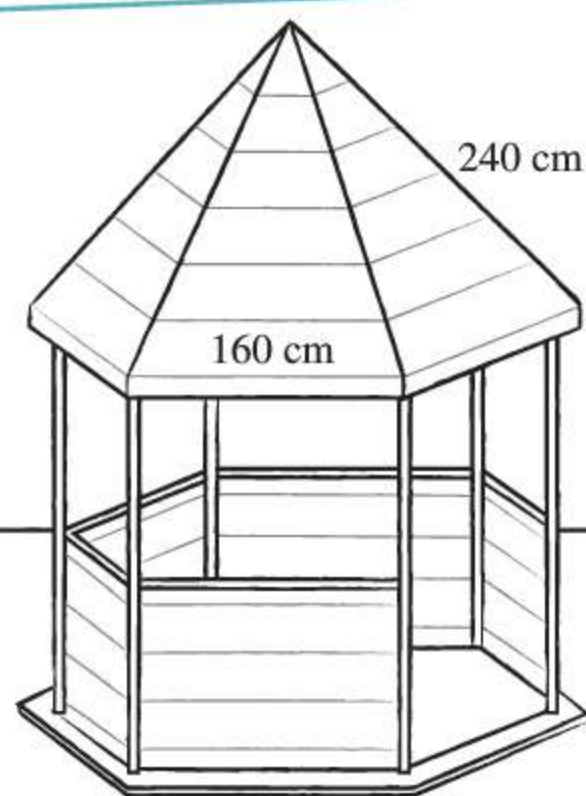
9. Wysokość podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $6\sqrt{3} \text{ cm}$. Krawędź boczna ostrosłupa ma długość 10 cm . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

10. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt, którego pole jest równe 96 cm^2 . Stosunek długości boków prostokąta wynosi $2 : 3$. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają długość 10 cm . Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

- 11.** Na rysunku przedstawiono siatkę ostrosłupa pięciokątnego. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.



- 12.** Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równe $90\sqrt{3}$, a jego pole podstawy wynosi $54\sqrt{3}$. Oblicz wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa, która jest poprowadzona do krawędzi podstawy.
- 13.** Podstawą ostrosłupa jest romb o przekątnych długości 30 cm i 40 cm. Spodek wysokości ostrosłupa jest punktem przecięcia przekątnych podstawy. Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe 1950 cm^2 . Oblicz wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa poprowadzoną do krawędzi podstawy.
- 14.** Ela wykonała dwa papierowe modele: ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wszystkich krawędziach długości 10 cm oraz czworościanu foremnego o krawędzi długości 10 cm. Następnie skleila te modele trójkątnymi ścianami tak, że wierzchołki obu ścian się pokryły. Oblicz pole powierzchni całkowitej powstałej bryły.
- 15.** Bruno wspólnie z tatą zbudowali altanę ogrodową. Jej dach ma kształt ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego. Krawędź podstawy tego ostrosłupa ma długość 160 cm, a jego krawędź boczna – 240 cm. Dach chcą pokryć farbą odporną na działanie deszczu i promieni UV. Czy 5 l farby wystarczy na dwukrotne pomalowanie dachu altany, jeśli 1 l tej farby wystarcza na jednokrotne pomalowanie 4 m^2 powierzchni? Uzasadnij swoją odpowiedź. Przyjmij, że $\sqrt{2} \approx 1,4$.





- 16.** Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 10 i jest trzy razy krótsza od wysokości ściany bocznej tego ostrosłupa poprowadzonej do krawędzi podstawy. Wyznacz stosunek pola powierzchni bocznej tego ostrosłupa do pola jego podstawy.

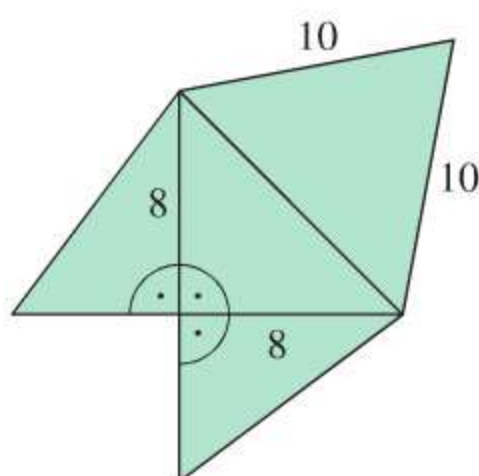
Sprawdź, co umiesz!



- 1.** Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego ma długość 9 cm. Wysokość ściany bocznej poprowadzona do krawędzi podstawy jest równa 16 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa, jeśli jego podstawą jest

a) trójkąt, **b)** czworokąt.

- 2.** Na rysunku przedstawiono siatkę ostrosłupa. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.



- E 3.** Wszystkie krawędzie ostrosłupa prawidłowego trójkątnego mają długość 8. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe

A. 256 **B.** $64\sqrt{3}$ **C.** $128\sqrt{3}$ **D.** 128

- E 4.** Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 4 cm. Pole powierzchni całkowitej jest równe 56 cm^2 .

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Pole powierzchni jednej ściany bocznej tego ostrosłupa jest równe

A	B
----------	----------

 cm^2 .

A. 40 **B.** 10

Wysokość każdej ściany bocznej tego ostrosłupa poprowadzona do krawędzi podstawy jest równa

C	D
----------	----------

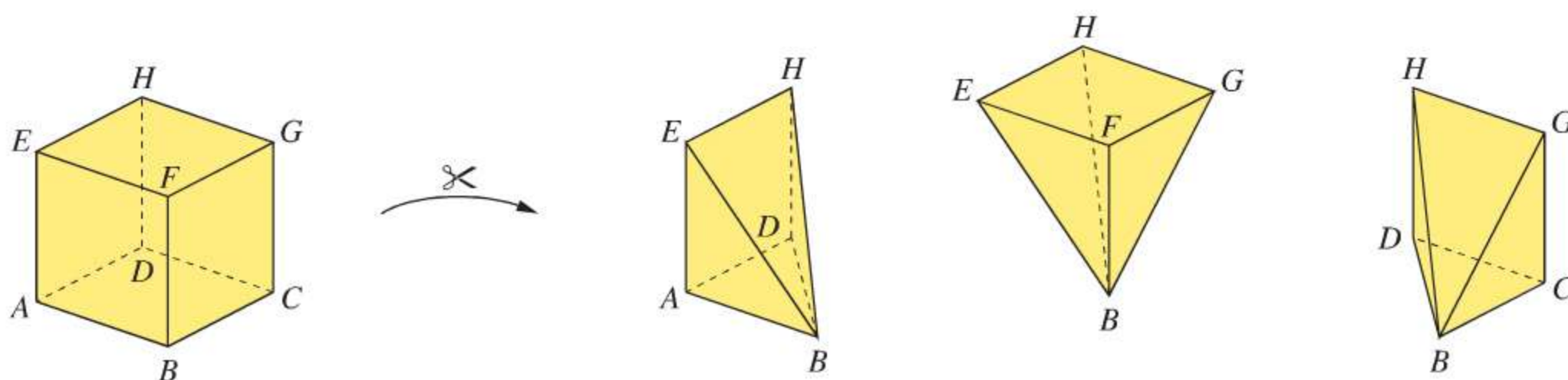
 cm.

C. 2,5 **D.** 5

3. Objętość ostrosłupa

- ▶ Obliczanie objętości ostrosłupa
- ▶ Obliczanie długości odcinków w ostrosłupie, gdy dana jest jego objętość

Wiesz już, że objętość graniastosłupa obliczamy, korzystając ze wzoru: $V = P_p \cdot H$, gdzie P_p – pole podstawy graniastosłupa, H – wysokość graniastosłupa. Na rysunku przedstawiono sześcian. Zauważ, że możemy „rozciąć” go w taki sposób, aby otrzymać trzy takie same ostrosłupy. W każdym z tych ostrosłupów podstawą jest jedna ze ścian sześcianu, a wysokością jedna z krawędzi sześcianu. Możemy zatem stwierdzić, że objętość ostrosłupa jest trzy razy mniejsza niż objętość graniastosłupa o takiej samej podstawie i wysokości, jakie ma ostrosłup.



Objętość V ostrosłupa wyraża się wzorem:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H,$$

gdzie: P_p – pole podstawy ostrosłupa, H – wysokość ostrosłupa.



Przykład 1.

Podstawą ostrosłupa jest romb o przekątnych długości 4 cm i 6 cm. Jego wysokość wynosi 14 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Obliczymy pole podstawy ostrosłupa, korzystając ze wzoru na pole rombu o przekątnych długości e i f : $P = \frac{e \cdot f}{2}$.



$$P_p = \frac{4 \cdot 6}{2} = 2 \cdot 6 = 12 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Obliczymy objętość ostrosłupa, korzystając ze wzoru: $V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$, gdzie $H = 14$ cm.



$$V = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 14 = 4 \cdot 14 = 56 \text{ [cm}^3\text{]}$$

Odp. Objętość tego ostrosłupa wynosi 56 cm³.

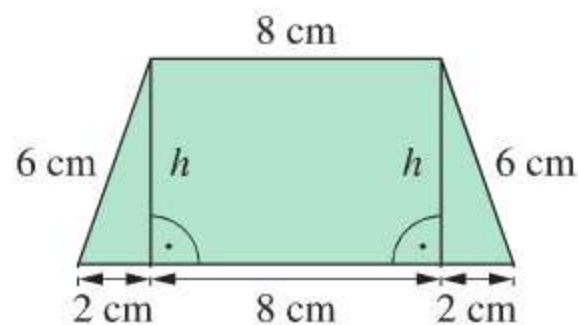
Ćwiczenie 1.

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości $2\sqrt{5}$ cm i $3\sqrt{5}$ cm. Jego wysokość wynosi 7 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Przykład 2.

Ostrosłup ma w podstawie trapez równoramienny o podstawach długości 8 cm i 12 cm. Ramiona tego trapezu mają długość 6 cm. Objętość ostrosłupa wynosi $240\sqrt{2} \text{ cm}^3$. Oblicz jego wysokość.

Wykonamy rysunek pomocniczy podstawy ostrosłupa.



Aby obliczyć wysokość h trapezu, który jest podstawą ostrosłupa, skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa.



$$\begin{aligned}h^2 + 2^2 &= 6^2 \\h^2 + 4 &= 36 \\h^2 &= 36 - 4 \\h &= \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2} \text{ [cm]}\end{aligned}$$

Obliczymy pole podstawy ostrosłupa, korzystając ze wzoru na pole trapezu:

$P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$, gdzie $a = 8 \text{ cm}$, $b = 12 \text{ cm}$ i $h = 4\sqrt{2} \text{ cm}$.



$$\begin{aligned}P &= \frac{(8+12) \cdot 4\sqrt{2}}{2} = \frac{10 \cdot 20 \cdot 4\sqrt{2}}{2} = \\&= 10 \cdot 4\sqrt{2} = 40\sqrt{2} \text{ [cm}^2\text{]}\end{aligned}$$

Aby obliczyć wysokość H ostrosłupa, skorzystamy ze wzoru na objętość ostrosłupa.



$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} P_p \cdot H \\240\sqrt{2} &= \frac{1}{3} \cdot 40\sqrt{2} \cdot H \quad | : 40\sqrt{2} \\6 &= \frac{1}{3} H \quad | \cdot 3 \\H &= 18 \text{ [cm]}\end{aligned}$$

Odp. Wysokość tego ostrosłupa jest równa 18 cm.

Ćwiczenie 2.

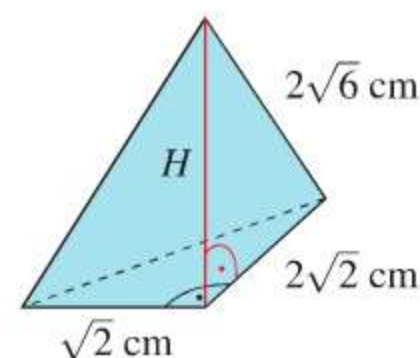
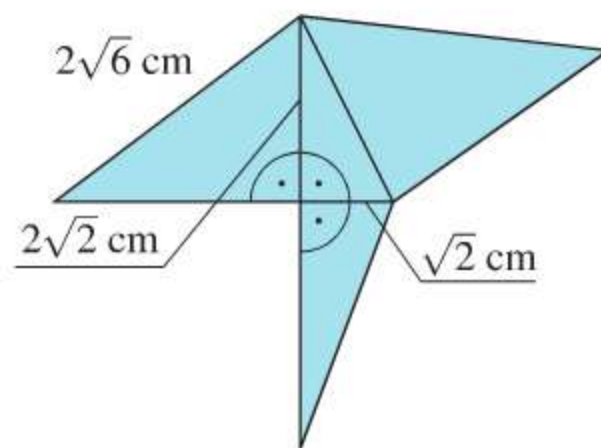
Ostrosłup ma w podstawie sześciokąt foremny o boku długości 2 cm. Objętość bryły wynosi $10\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

Przykład 3.

Na rysunku przedstawiono siatkę ostrosłupa trójkątnego. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości $\sqrt{2} \text{ cm}$ i $2\sqrt{2} \text{ cm}$. Zatem pole podstawy tego ostrosłupa wynosi $P_p = \frac{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \text{ [cm}^2\text{]}$.

Jeśli podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości $\sqrt{2} \text{ cm}$ i $2\sqrt{2} \text{ cm}$, to wysokością H ostrosłupa będzie odcinek zaznaczony kolorem czerwonym.



Aby obliczyć wysokość ostrosłupa, skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa.



$$(2\sqrt{2})^2 + H^2 = (2\sqrt{6})^2$$

$$8 + H^2 = 24$$

$$H^2 = 24 - 8$$

$$H^2 = 16$$

$$H = 4 \text{ [cm]}$$

Obliczymy objętość ostrosłupa.

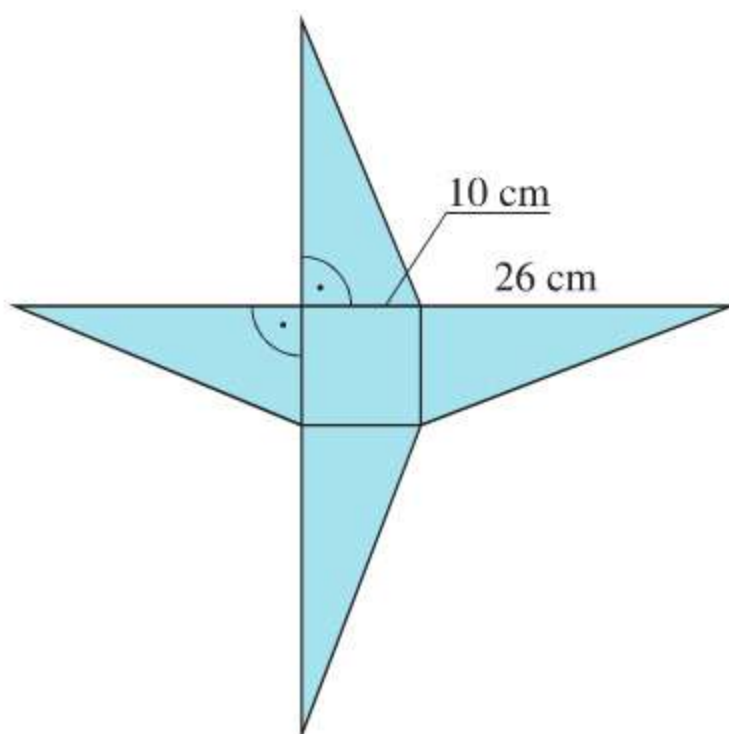


$$V = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 4 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$

Odp. Objętość tego ostrosłupa wynosi $2\frac{2}{3} \text{ cm}^3$.

Ćwiczenie 3.

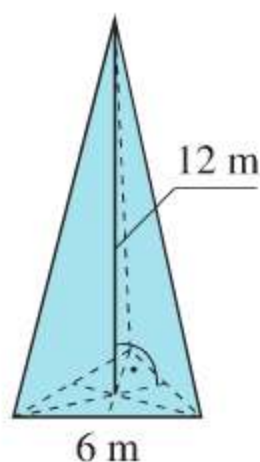
Na rysunku przedstawiono siatkę ostrosłupa, którego podstawą jest kwadrat. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



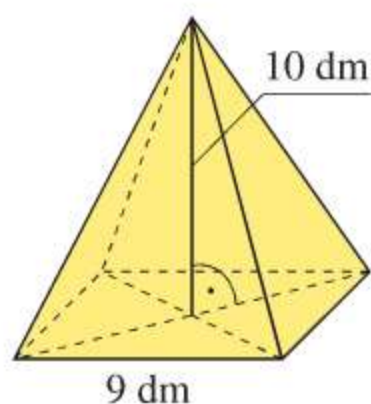
Rozwiąż zadania

1. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego.

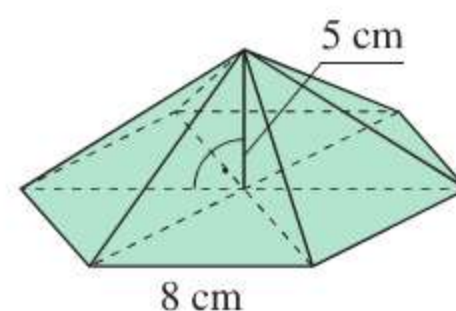
a)



b)



c)



2. Oblicz objętość ostrosłupa, którego wysokość jest równa 0,9 dm, a podstawą jest:

a) prostokąt o bokach długości 8 cm i 12 cm;

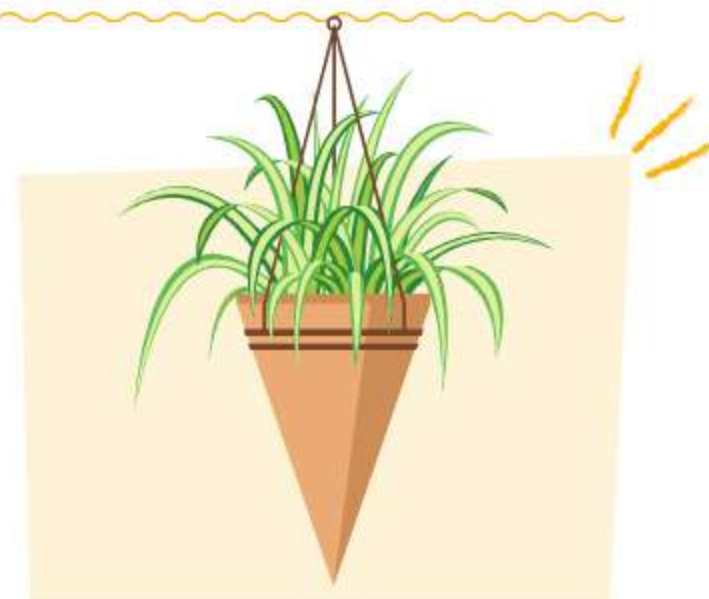
b) trójkąt równoramienny o podstawie długości 10 cm i ramionach długości 13 cm;

c) równoległobok o obwodzie równym 1,8 dm, w którym jeden bok jest dwa razy dłuższy od drugiego, a wysokość poprowadzona do krótszego boku jest równa 4 cm.

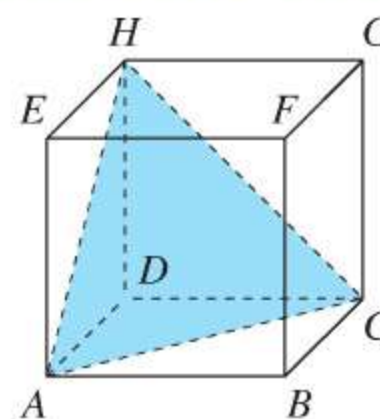
3. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt prostokątny ABC , którego jedna przyprostokątna ma długość 6 dm, a przeciwprostokątna długość $2\sqrt{34}$ dm. Krawędź boczna poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość 24 cm i jest wysokością ostrosłupa. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

4. Zakład rzemieślniczy produkuje przyciski do papieru o różnych kształtach. Są wśród nich przyciski w kształcie ostrosłupów prawidłowych czworokątnych. Wysokość przycisku wynosi 10 cm, a krawędź jego podstawy ma długość 6 cm. Ile litrów płynnego szkła potrzeba na wyprodukowanie dwudziestu takich przycisków?

5. Doniczka ma kształt ostrosłupa prawidłowego trójkątnego. Krawędź podstawy ma długość 10 cm, a wysokość jest równa 25 cm. Czy 1 l ziemi wystarczy do napełnienia trzech takich doniczek, jeśli w każdej z nich ziemia będzie zajmować $\frac{4}{5}$ jej pojemności? Uzasadnij swoją odpowiedź.



6. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości $\sqrt{6}$ cm. Punkty: A, C, D, H są wierzchołkami ostrosłupa. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



7. Objętość ostrosłupa jest równa 56 cm^3 , a pole jego podstawy wynosi 24 cm^2 . Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

8. Objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa $480\sqrt{3}$, a krawędź podstawy ma długość 8. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

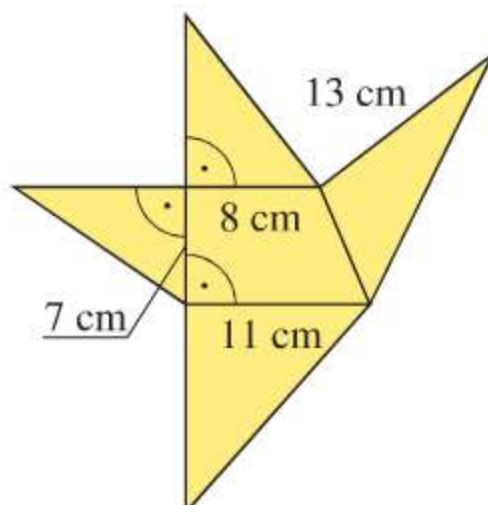
9. Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ jest równa $16\sqrt{3} \text{ cm}^3$, a jego wysokość jest trzy razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa.

10. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt, którego jeden bok ma długość 6 cm, a przekątna ma długość 10 cm. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają taką samą długość – 10 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

11. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny ABC , w którym jeden z kątów ostrych ma miarę 60° , a przeciwprostokątna ma długość 8 cm. Wysokość ostrosłupa będąca jedną z jego krawędzi bocznych jest trzy razy dłuższa od dłuższej przyprostokątnej jego podstawy. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

- 12.** Wysokość ostrosłupa jest równa 10. Podstawa ostrosłupa jest trapezem równoramiennym o podstawach długości 10 i 30. Obwód podstawy jest równy 70. Uzasadnij, że objętość tego ostrosłupa jest mniejsza niż 1000.

- 13.** Na rysunku przedstawiono siatkę ostrosłupa czworokątnego. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



- 14.** Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa $36\sqrt{2} \text{ dm}^3$. Wysokość ostrosłupa jest dwa razy krótsza od przekątnej podstawy. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Sprawdź, co umiesz!

- 1.** Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o bokach długości 7 m i 9 m, a jego wysokość wynosi 11 m. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

- 2.** Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy długości 4 oraz wysokości równej $2\sqrt{3}$ wynosi

A. $8\sqrt{3}$

B. 8

C. 24

D. $24\sqrt{3}$

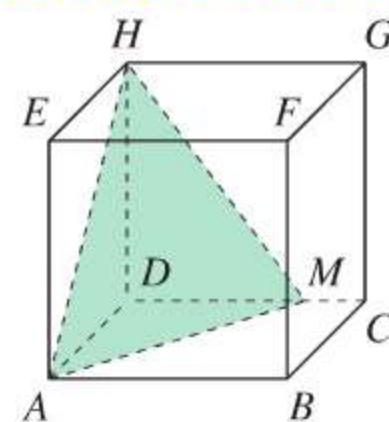
- 3.** Oblicz wysokość ostrosłupa o objętości 36 cm^3 , jeżeli jego podstawą jest:

a) romb o przekątnych długości 6,4 cm i 7,5 cm,

b) sześciokąt foremny o boku długości 0,02 m.

- 4.** Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 9 cm. Punkt M dzieli bok CD na dwa odcinki, takie że stosunek $|DM| : |MC|$ jest równy 2 : 1.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.



Objętość ostrosłupa $AMDH$ jest równa 81 cm^3 .	P	F
Długość krawędzi MH jest równa $3\sqrt{13} \text{ cm}$.	P	F

PODSUMOWANIE DZIAŁU V

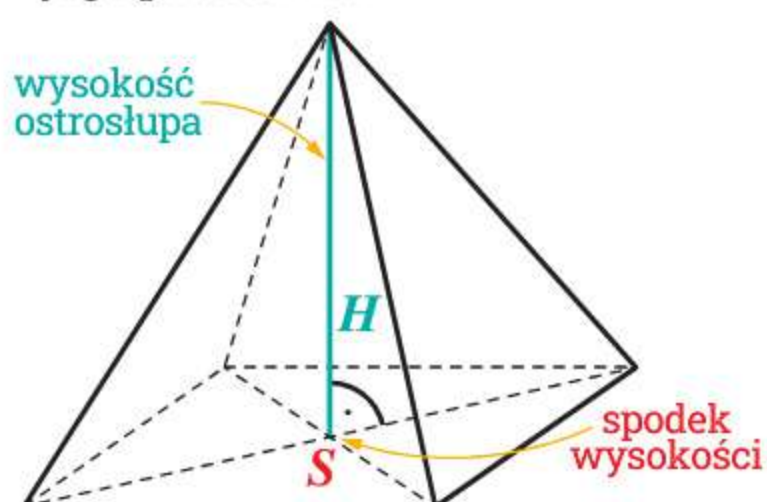
Ostrosłupy

Powtórz wiadomości

Ostrosłup prosty i pochyły

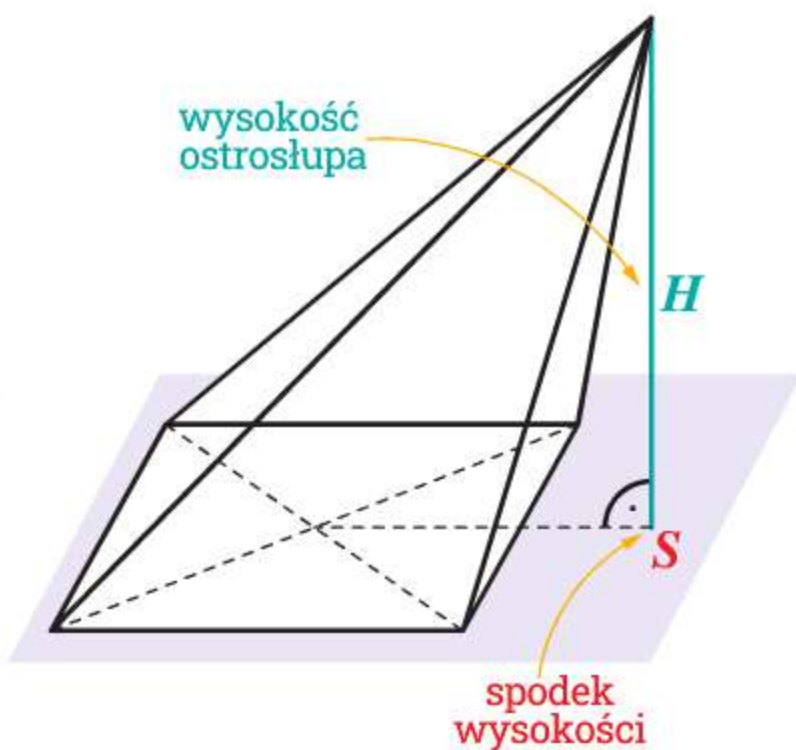
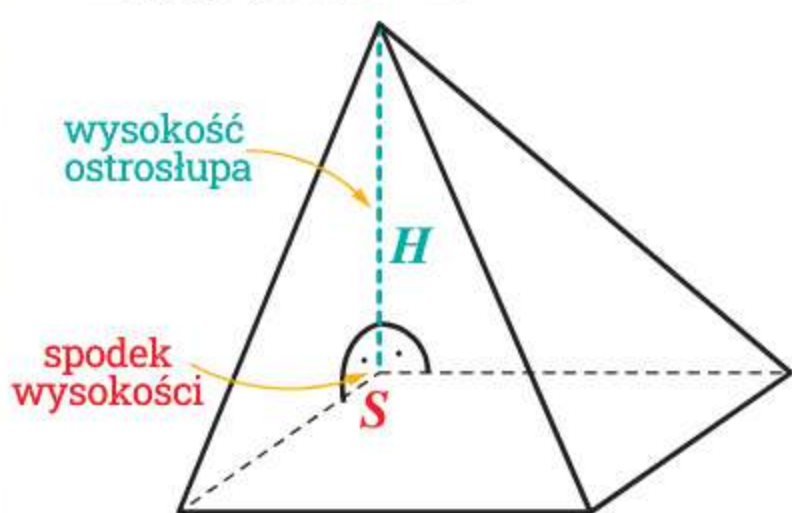
Ostrosłup prosty

- Wszystkie krawędzie boczne są równej długości.
- Spodek wysokości leży zawsze na jego podstawie.



Ostrosłup pochyły

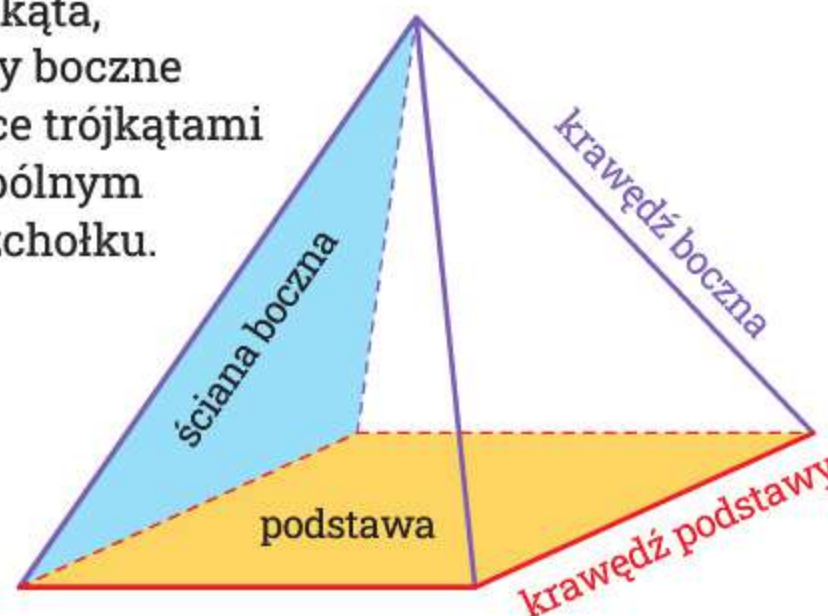
- Krawędzie boczne nie są równej długości.
- Spodek wysokości nie musi leżeć na jego podstawie.



Ostrosłup

Ostrosłup jest bryłą, która ma:

- jedną podstawę w kształcie wielokąta,
- ściany boczne będące trójkątami o wspólnym wierzchołku.



Ostrosłup n -kątny ma:

- $(n + 1)$ wierzchołków,
- $(n + 1)$ ścian,
- n krawędzi bocznych,
- $2n$ krawędzi.

Ostrosłupem prawidłowym nazywamy ostrosłup prosty, który w podstawie ma wielokąt foremny (wszystkie boki tego wielokąta są tej samej długości, a jego kąty mają takie same miary).

Pole powierzchni całkowitej

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa to suma pól wszystkich ścian tego ostrosłupa. Zatem

$$P_c = P_p + P_b,$$

gdzie: P_p – pole podstawy ostrosłupa,
 P_b – pole powierzchni bocznej ostrosłupa, czyli suma pól jego wszystkich ścian bocznych.

Objętość

Objętość V ostrosłupa wyraża się wzorem:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H,$$

gdzie: P_p – pole podstawy ostrosłupa,
 H – wysokość ostrosłupa.

Sprawdź umiejętności

1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Ostrosłup o podstawie ośmiokąta ma

- A. 8 krawędzi, 10 ścian i 16 wierzchołków. B. 16 krawędzi, 8 ścian i 16 wierzchołków.
C. 16 krawędzi, 9 ścian i 9 wierzchołków. D. 8 krawędzi, 9 ścian i 9 wierzchołków.

2. Podaj nazwę ostrosłupa, który ma:

- a) 12 ścian, b) 18 krawędzi, c) 19 wierzchołków.

3. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Trójkąt prostokątny równoramienny może być podstawą ostrosłupa prawidłowego trójkątnego.	P	F
Długości wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego są zawsze równe.	P	F

4. Suma długości wszystkich krawędzi czworościanu foremnego jest równa $(48 + 60\sqrt{2})$. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość jednej krawędzi tego czworościanu jest równa

- A. $12 + 15\sqrt{2}$ B. $18\sqrt{2}$ C. $8 + 10\sqrt{2}$ D. $27\sqrt{2}$

5. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy długości 4 cm i wysokości ściany bocznej poprowadzonej do krawędzi podstawy równej 5 cm.

6. Oblicz pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego o krawędzi długości 6 dm.

7. Dany jest ostrosłup prawidłowy sześciokątny, którego krawędź podstawy ma długość $4\sqrt{6}$, a wysokość wynosi 5. Oblicz:

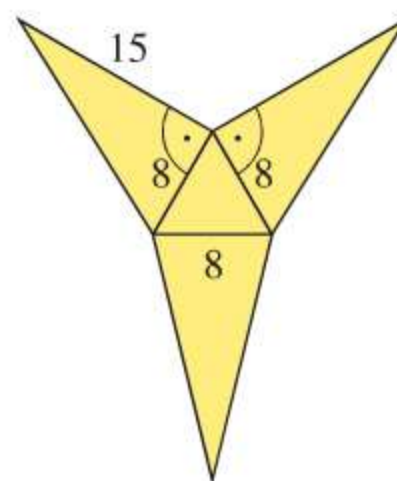
- a) objętość tego ostrosłupa,
b) sumę długości krawędzi tego ostrosłupa,
c) pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

8. Model piramidy wykonanej z granitu ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy długości 10 cm i wysokości 6 cm. Ile kilogramów waży model piramidy, jeśli 1 cm^3 tego granitu waży 2,8 g?



- 9.** Ania wykonała model ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 20 cm, a krawędź boczna jest od niej o 30 % dłuższa. Postanowiła okleić go samoprzylepną folią w kolorze srebrnym. Czy arkusz folii o wymiarach $0,3 \text{ m} \times 0,4 \text{ m}$ wystarczy na oklejenie tego modelu? Uzasadnij swoją odpowiedź.

- E 10.** Na rysunku przedstawiono siatkę ostrosłupa trójkątnego. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.
Suma długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa jest równa **A B**.
A. 73 **B.** 22
Objętość tego ostrosłupa jest równa **C D**.
C. $240\sqrt{3}$ **D.** $80\sqrt{3}$



- E 11.** Dane są ostrosłup prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy długości 4 cm oraz ostrosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy długości 12 cm. Obie bryły mają taką samą wysokość równą 10 cm.
Czy objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest 1,5 raza mniejsza od objętości ostrosłupa prawidłowego trójkątnego?
Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

A.	Tak,	ponieważ	1.	długość krawędzi podstawy ostrosłupa sześciokątnego jest mniejsza od długości krawędzi podstawy ostrosłupa trójkątnego.
			2.	pole podstawy ostrosłupa sześciokątnego jest 1,5 raza mniejsze od pola podstawy ostrosłupa trójkątnego.
B.	Nie,		3.	podstawa ostrosłupa sześciokątnego składa się z 6 trójkątów równobocznych.

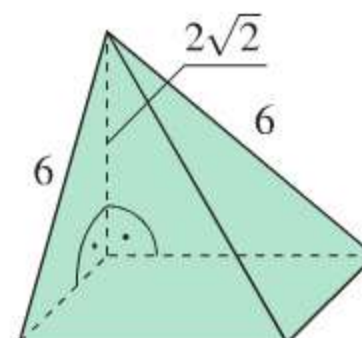
- 12.** Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi $108\sqrt{3}$. Wysokość ostrosłupa jest równa 6. Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa.
- 13.** Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 128 cm^2 , a pole podstawy jest równe 64 cm^2 . Oblicz objętość tego ostrosłupa.
- 14.** Dane są ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego krawędź boczna ma długość $3\sqrt{10} \text{ cm}$, oraz graniastosłup prawidłowy czworokątny, którego przekątna ma długość $6\sqrt{10} \text{ cm}$. Obie bryły mają krawędzie podstawy równe 6 cm. Ostrosłup i graniastosłup sklejono ze sobą podstawami. Oblicz wysokość powstałej bryły.

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. Wyznacz liczbę ścian ostrosłupa, w którym liczba krawędzi jest o 12 większa od liczby jego wierzchołków. Podaj nazwę tego ostrosłupa.

2. Uzasadnij, że trójkąt równoramienny o bokach długości: 20 cm, 12 cm i 12 cm nie może być ścianą boczną ostrosłupa prawidłowego czworokątnego.

3. Na rysunku przedstawiono ostrosłup, który w podstawie ma czworokąt foremny. Krawędź boczna o długości $2\sqrt{2}$ jest wysokością tego ostrosłupa. Dwie krawędzie boczne mają długość 6 każda. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa.

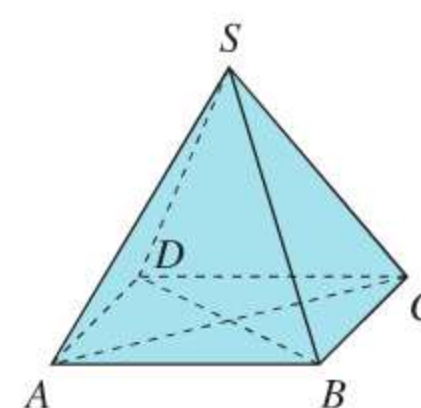


4. Dany jest ostrosłup prawidłowy sześciokątny. Najdłuższa przekątna jego podstawy ma długość 4 cm. Wysokość tego ostrosłupa jest równa 6 cm. Ile wynosi suma długości jego krawędzi?

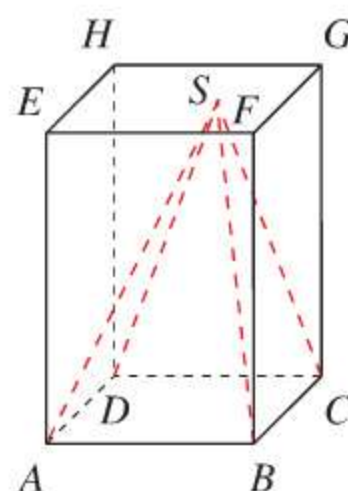
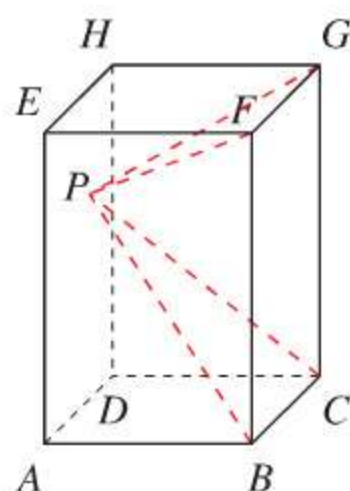
5. Wszystkie krawędzie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego są tej samej długości. Oblicz stosunek wysokości ściany bocznej poprowadzonej do krawędzi podstawy do wysokości tego ostrosłupa.

6. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Przekątna podstawy oraz dwie krawędzie boczne tworzą trójkąt równoboczny o boku długości 16. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

7. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCD S$, w którym trójkąt ACS jest prostokątny o przyprostokątnej długości 9. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.



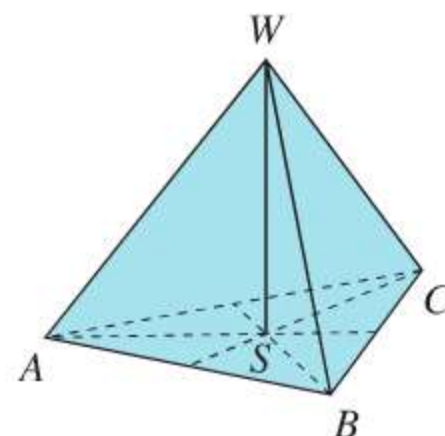
8. W prostopadłościanie $ABCDEFGH$ na ścianie $ADHE$ zaznaczono punkt P , a na ścianie $EFGH$ punkt S . Punkty: B, C, G, F, P oraz A, B, C, D, S są wierzchołkami dwóch ostrosłupów. Uzasadnij, że ostrosłupy te mają jednakowe objętości.





- 9.** Wieża zabytkowej bramy jest zakończona dachem w kształcie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego każda krawędź ma długość 10 m. Ile metrów kwadratowych dachówki trzeba zamówić na nowe pokrycie dachu wieży? W zamówieniu należy uwzględnić możliwe ubytki dachówek wynoszące 5 % powierzchni dachu. Przyjmij, że $\sqrt{3} \approx 1,7$. Wynik podaj z dokładnością do 1 m².

- 10.** Wysokości trójkąta równobocznego przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą z nich w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka trójkąta. Punkt S , będący punktem przecięcia wysokości trójkąta równobocznego, jest spodkiem wysokości czworościanu foremego $ABCW$. Oblicz objętość tego czworościanu, jeśli jego krawędź ma długość 18 cm.



- 11.** Uzasadnij, że nie istnieje ostrosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy długości 4,2 dm i krawędzi bocznej długości 23 cm.

- 12.** Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o bokach długości $6\sqrt{2}$ cm i $8\sqrt{2}$ cm. Objętość ostrosłupa wynosi 640 cm³. Punkt przecięcia przekątnych prostokąta jest spodkiem wysokości tego ostrosłupa. Oblicz długość krawędzi bocznej ostrosłupa.



- 13.** Ela kupiła na wystawie minerałów kryształ górski w kształcie ośmiościanu foremnego o krawędzi długości 4 cm. Gęstość kryształu górskiego jest równa 2,65 g/cm³. Oblicz, ile waży ten kryształ. Przyjmij, że $\sqrt{2} \approx 1,4$. Wynik zaokrąglij do pełnych gramów.



Informacje do zadań 14. i 15.

Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy sześciokątny oraz niektóre jego wymiary.

- 14.** Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**. Objętość tego ostrosłupa jest równa **A** **B** cm³.

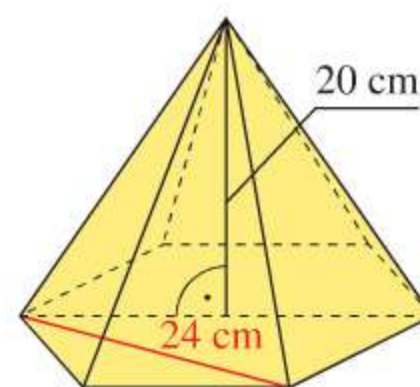
A. $1440\sqrt{3}$ **B.** $1920\sqrt{3}$

Wysokość każdej ściany bocznej tego ostrosłupa poprowadzona do krawędzi podstawy jest równa **C** **D** cm.

C. $4\sqrt{34}$ **D.** $4\sqrt{37}$

- 15.** Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe

A. $288\sqrt{3}$ cm² **B.** $(288\sqrt{3} + 96\sqrt{102})$ cm² **C.** $312\sqrt{3}$ cm² **D.** $(312\sqrt{3} + 96\sqrt{102})$ cm²



- 16.** Wysokość ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego poprowadzona do krawędzi podstawy jest równa 6 cm. Stosunek pola jednej ściany bocznej do pola podstawy jest równy 1 : 2. Oblicz

a) objętość tego ostrosłupa, **b)** sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa.

DZIAŁ VI

STATYSTYKA I WSTĘP DO KOMBINATORYKI

Diagramy
i wykresy



To ci się
przyda!



Prawdopodobieństwo

Średnia
arytmetyczna

$$\frac{4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{4 + 1 + 2 + 3 + 4 + 2} = \frac{56}{16} = 3,5$$

1. Odczytywanie i interpretowanie danych

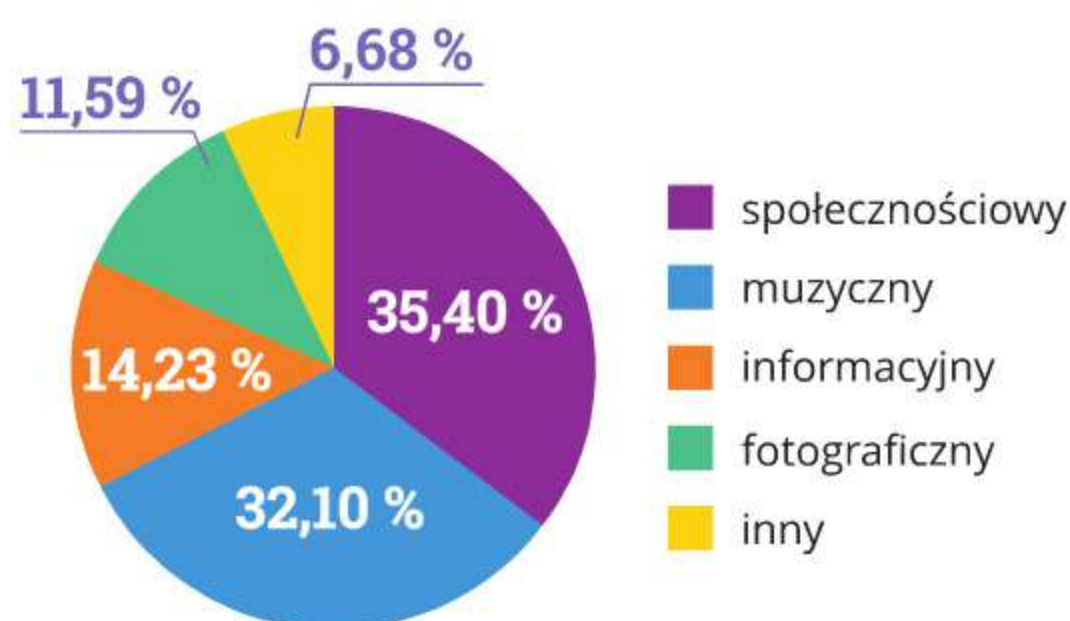
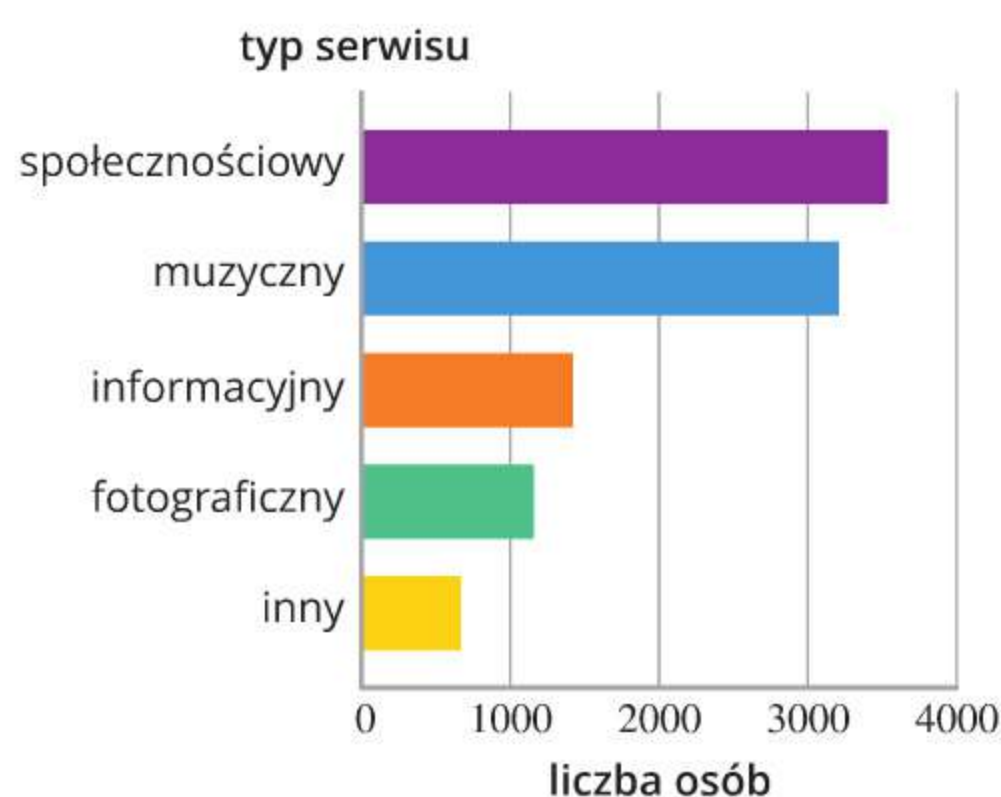
- ▶ Odczytywanie danych przedstawionych za pomocą tabel, diagramów słupkowych i kołowych oraz wykresów
- ▶ Interpretowanie danych statystycznych

Statystyka jest nauką, która zajmuje się zbieraniem danych, ich opracowywaniem i interpretowaniem. W platformach streamingowych (czyt. strimingowych) muzyki i filmów wykorzystywane są metody statystyczne. Na podstawie analizy dotychczasowych wyborów użytkownika przewidywane są inne treści, które mogą go zainteresować.

Przykład 1.

Wśród 10 000 osób przeprowadzono ankietę. Ankietowanym zadano pytanie: *Z jakiego typu serwisu internetowego korzystasz najczęściej?* Każdy z ankietowanych mógł wskazać tylko jedną odpowiedź. Liczbę osób, które wskazały poszczególne typy serwisów, przedstawiono w tabeli, na diagramie słupkowym oraz procentowym diagramie kołowym.

Typ serwisu internetowego	Liczba osób
społecznościowy	3540
muzyczny	3210
informacyjny	1423
fotograficzny	1159
inny	668



Skorzystaj z diagramów słupkowego, procentowego kołowego oraz tabeli i odpowiedz na pytanie.

a) O ile mniej osób wskazało serwis fotograficzny niż serwis informacyjny?

W tym przypadku najlepiej skorzystać z tabeli, w której podano dokładne liczby odpowiedzi ankietowanych. Serwis fotograficzny wskazało 1159 ankietowanych, a serwis informacyjny 1423 ankietowanych.

Obliczymy różnicę między liczbą osób, które wskazały serwis informacyjny, a liczbą osób, które wskazały serwis fotograficzny.



$$1423 - 1159 = 264$$

Odp. Serwis fotograficzny wskazało o 264 osoby mniej niż serwis informacyjny.

b) O ile punktów procentowych więcej osób wskazało serwis społecznościowy niż serwis muzyczny?

Tym razem skorzystamy z procentowego diagramu kołowego. Możemy z niego odczytać, że z serwisu społecznościowego najczęściej korzysta 35,4 % ankietowanych, a z serwisu muzycznego 32,1 % ankietowanych.

Obliczymy, o ile punktów procentowych więcej osób wskazało serwis społecznościowy niż serwis muzyczny.



$$35,4 - 32,1 = 3,3$$

Odp. Ankietowanych, którzy wybrali serwis społecznościowy, jest o 3,3 punktu procentowego więcej niż tych, którzy wskazali serwis muzyczny.

Aby obliczyć, o ile procent

liczba a jest większa od liczby b ,
wykonujemy następujące działanie:

$$\frac{a - b}{b} \cdot 100 \%.$$

liczba a jest mniejsza od liczby b ,
wykonujemy następujące działanie:

$$\frac{b - a}{b} \cdot 100 \%.$$



c) O ile procent więcej osób wskazało serwis społecznościowy niż serwis muzyczny? Wynik zaokrąglaj do 1 %.

Aby obliczyć, o ile procent liczba a jest większa od liczby b , skorzystamy

ze wzoru: $\frac{a - b}{b} \cdot 100 \%$, gdzie $a > b$.

Zgodnie z danymi zawartymi w tabeli $a = 3540$ i $b = 3210$.



$$\begin{aligned} \frac{3540 - 3210}{3210} \cdot 100 \% &= \frac{330}{3210} \cdot 100 \% = \\ &= \frac{33}{321} \cdot 100 \% = \frac{11}{107} \cdot 100 \% = \\ &= \frac{1100}{107} \% = 10 \frac{30}{107} \% \approx 10 \% \end{aligned}$$

Odp. Ankietowanych, którzy wybrali serwis społecznościowy, jest o około 10 % więcej niż tych, którzy wskazali serwis muzyczny.

Ćwiczenie 1.

Skorzystaj z tabeli, diagramu słupkowego i diagramu kołowego przedstawionych w Przykładzie 1. i odpowiedz na pytanie.

a) O ile więcej osób wskazało serwis muzyczny niż serwis fotograficzny?

b) O ile punktów procentowych mniej osób wskazało serwis fotograficzny niż serwis muzyczny?

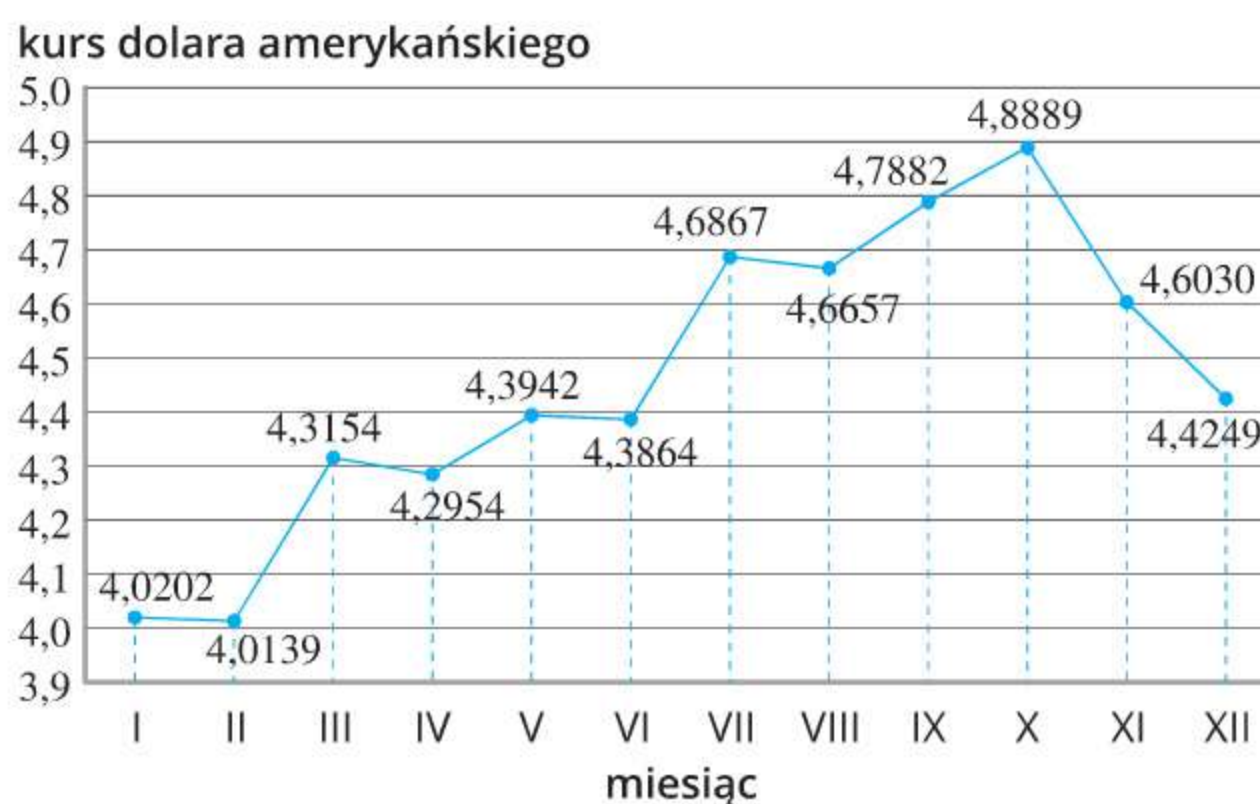
c) O ile procent mniej osób wskazało serwis fotograficzny niż serwis muzyczny? Wynik zaokrąglaj do 1 %.



Wykres liniowy wykorzystywany jest zazwyczaj w celu przedstawienia danych zebranych w pewnym czasie. Pomaga szybko i sprawnie przeanalizować zebrane dane, zauważyć występujące zmiany i pojawiające się trendy. Na wykresie liniowym każde dwa kolejne punkty są połączone linią. Możemy prezentować na nim dane takie, jak np. temperatura powietrza, kursy walut, zależność drogi od czasu, w którym została pokonana.

Przykład 2.

Na poniższym wykresie liniowym przedstawiono średni kurs dolara amerykańskiego w kolejnych miesiącach 2022 r.



Źródło: <https://usd-pln.pl/2022/>.

Na podstawie danych przedstawionych na wykresie odpowiedz na pytanie.

a) Ile wynosiła różnica między najwyższym a najniższym średnim kursem dolara amerykańskiego w kolejnych miesiącach 2022 r.? Wynik zaokrąglij do 1 gr.

Z wykresu możemy odczytać, że najwyższy średni kurs dolara w podanym okresie wynosił 4,8889 zł, a najniższy 4,0139 zł.

Obliczymy różnicę między najwyższym a najniższym średnim kursem dolara amerykańskiego. Wynik zaokrąglimy do 1 gr.



$$4,8889 - 4,0139 = 0,875 \approx 0,88 \text{ [zł]}$$

Odp. Różnica między najwyższym a najniższym średnim kursem dolara amerykańskiego w kolejnych miesiącach 2022 r. wyniosła około 0,88 zł.

b) W jakich okresach w 2022 r. średni kurs dolara amerykańskiego wzrastał?

Z wykresu możemy odczytać, że średni kurs dolara amerykańskiego wzrastał od lutego do marca, następnie od kwietnia do maja, później od czerwca do lipca oraz od sierpnia do października.

c) Czy w lipcu 2022 r. średni kurs dolara amerykańskiego był wyższy niż 4,50 zł?

Z wykresu możemy odczytać, że w lipcu 2022 r. średni kurs dolara amerykańskiego był wyższy niż 4,50 zł.

Ćwiczenie 2.

Skorzystaj z wykresu przedstawionego w Przykładzie 2. i odpowiedz na pytanie: w jakich okresach w 2022 r. średni kurs dolara amerykańskiego

a) malał?

b) miał wartość mniejszą niż 4 zł?

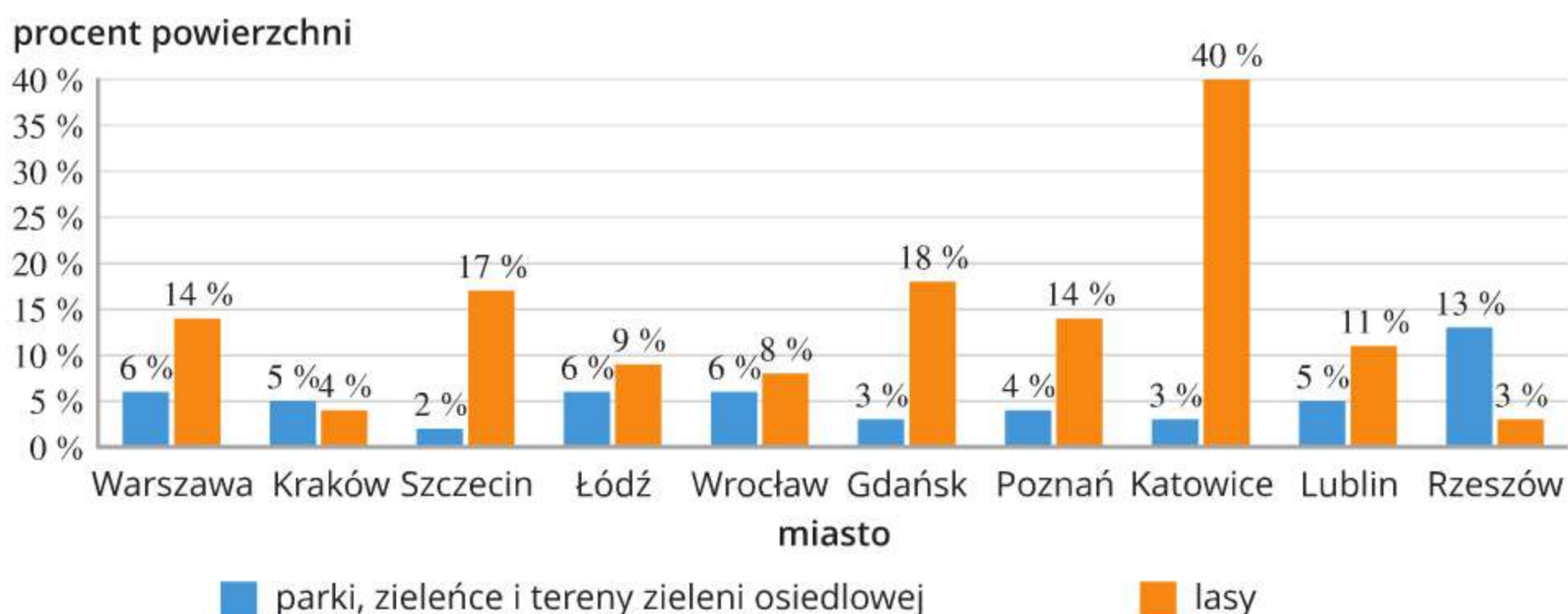
Rozwiąż zadania

1. Uczniowie klas 8 na zakończenie szkoły otrzymali propozycję wyjazdu na wspólną wycieczkę. Ósmoklasiści mieli do wyboru cztery miasta: Toruń, Gdańsk, Wrocław lub Łańcut. W celu ustalenia miejsca docelowego wycieczki przeprowadzono głosowanie wśród wszystkich uczniów klas 8 tej szkoły. Każdy głosujący wybrał tylko jedno miasto. Wycieczka odbyła się do tego miasta, które uzyskało największą liczbę głosów. W tabeli przedstawiono wyniki głosowania.

Miasto	Liczba głosów
Toruń	16
Gdańsk	18
Wrocław	26
Łańcut	20

- Dokąd pojechali uczniowie klas 8 na wycieczkę?
- Ilu uczniów klas 8 wzięło udział w głosowaniu?
- Jaki procent wszystkich uczniów klas 8 stanowili uczniowie, którzy wybrali Toruń?
- O ile procent więcej uczniów chciało jechać do Wrocławia niż do Łańcuta?

2. Coraz częściej w dużych miastach tworzy się nowe tereny zielone, w tym parki, zieleńce i tereny zieleni osiedlowej. Na diagramie słupkowym przedstawiono przybliżony udział procentowy lasów i innych terenów zielonych w ogólnej powierzchni 10 wybranych miast w Polsce w 2019 r.

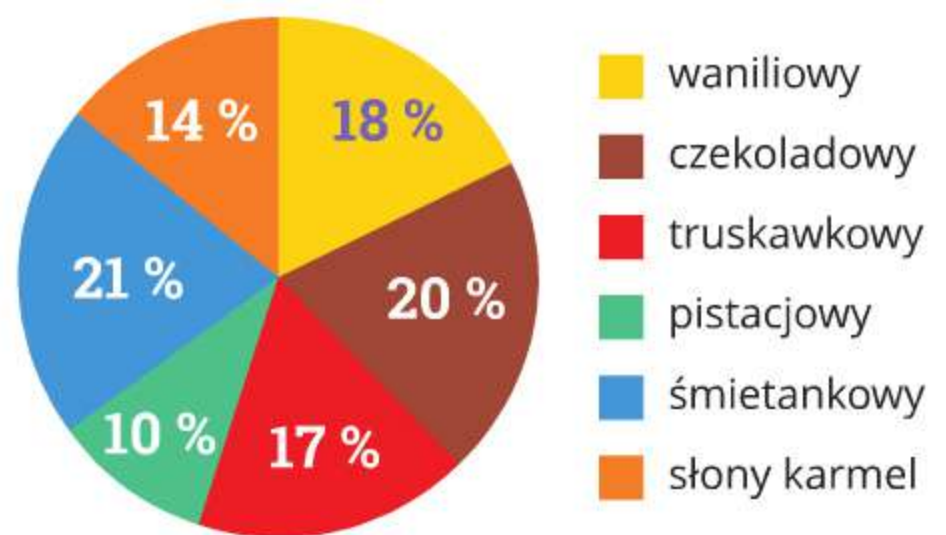


Źródło: <https://rynekpierwotny.pl/wiadomosci-mieszkaniowe/ktore-z-naszch-miast-jest-najbardziej-zielone/7869>.

Odpowiedz na pytanie.

- W których miastach lasy zajmują ponad 15 % ich powierzchni?
- W ilu miastach udział parków, zieleńców i terenów zieleni osiedlowej jest mniejszy niż 5 %?
- Wypisz trzy miasta z największym łącznym procentowym udziałem lasów i innych terenów zieleni osiedlowej w ich powierzchni.
- Oblicz, jakim procentem powierzchni wszystkich terenów zielonych w Warszawie są lasy.

3. Wśród 200 osób przebywających na wakacjach przeprowadzono sondaż na temat ich ulubionego smaku lodów. Każdy pytany podał tylko jeden smak. Na procentowym diagramie kołowym przedstawiono wyniki sondażu.

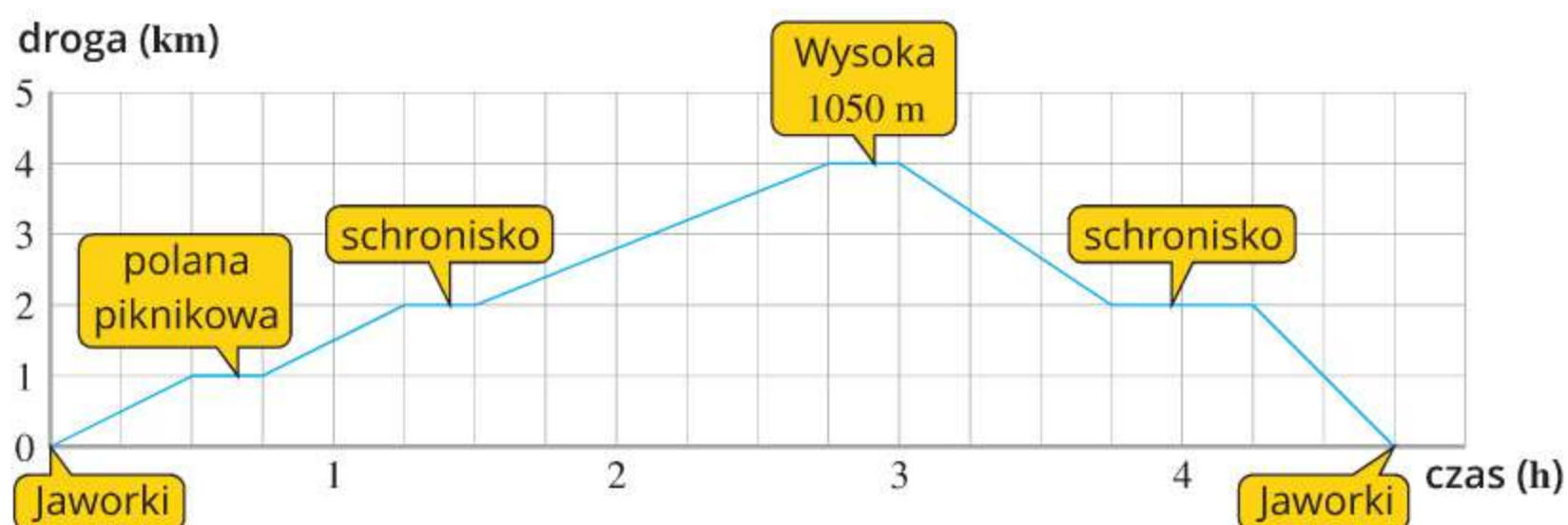


Odpowiedz na pytanie.

- Który smak lodów wskazała największa liczba osób?
- Czy łączna liczba osób wybierających smak śmietankowy albo truskawkowy jest taka sama jak łączna liczba osób wybierających smak czekoladowy albo waniliowy?
- Ile razy częściej ankietowani wybierali smak śmietankowy niż słony karmel?
- O ile punktów procentowych mniej osób woli lody o smaku pistacjowym niż śmietankowym?
- O ile procent więcej osób woli smak waniliowy od smaku pistacjowego?

E Informacje do zadań 4. i 5.

Cezary i jego rodzice spędzili weekend w Szczawnicy. W sobotę wyszli na szlak w Małe Pieniny. Celem było zdobycie Wysokiej (1050 m n.p.m.). Wędrówkę rozpoczęli z parkingu w Jaworkach. Po zdobyciu szczytu wrócili tą samą trasą na parking w Jaworkach. Na wykresie liniowym przedstawiono zależność drogi, którą Cezary wraz z rodzicami przebyli podczas wycieczki, od czasu.



4. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Jeśli Cezary i jego rodzice wyruszyli na szlak z parkingu o godzinie 9.00, to wrócili na parking o godzinie **A** **B**.

A. 13.45 **B.** 14.00

Długość trasy ze schroniska na szczyt Wysokiej wynosi **C** **D**.

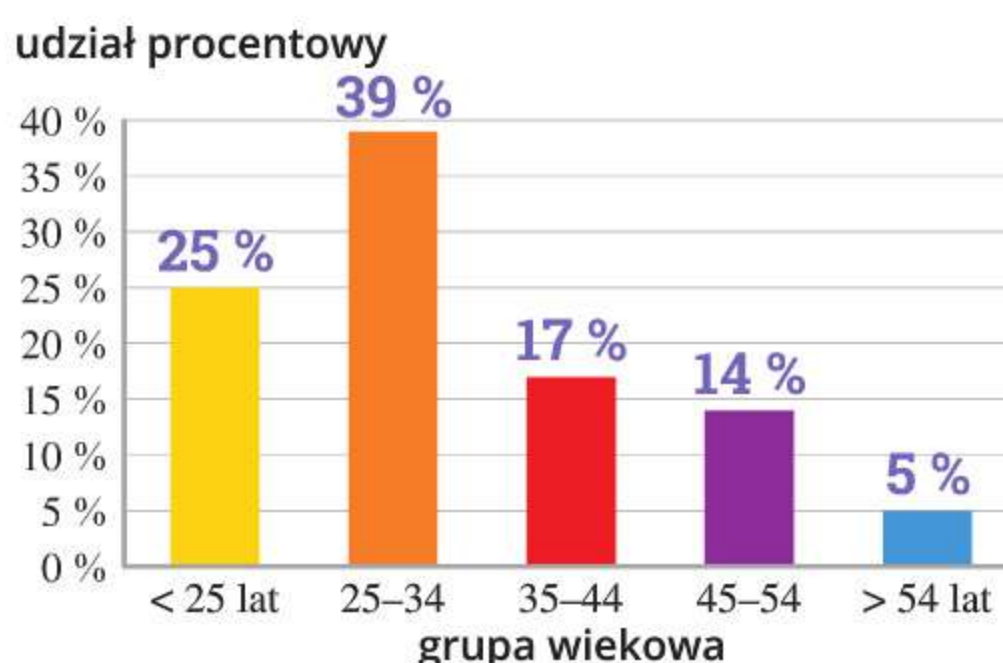
C. 1,5 km **D.** 2 km

5. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Łączny czas postojów podczas wycieczki wyniósł 1 h.	P	F
Odcinek trasy z Jaworek do polany piknikowej Cezary wraz z rodzicami pokonał z prędkością 2 km/h.	P	F

6. Na diagramie słupkowym przedstawiono procentowy udział poszczególnych grup wiekowych w zamawianiu online jedzenia.

E



Źródło: <https://38pr.prowly.com/88032-polacy-coraz-chetniej-zamawiaja-online-wyniki-najnowszego-raportu-pizzaportal.pl>.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Liczba osób zamawiających online jedzenia w wieku od 45 lat stanowi liczby osób z grupy wiekowej 25–34 lat.

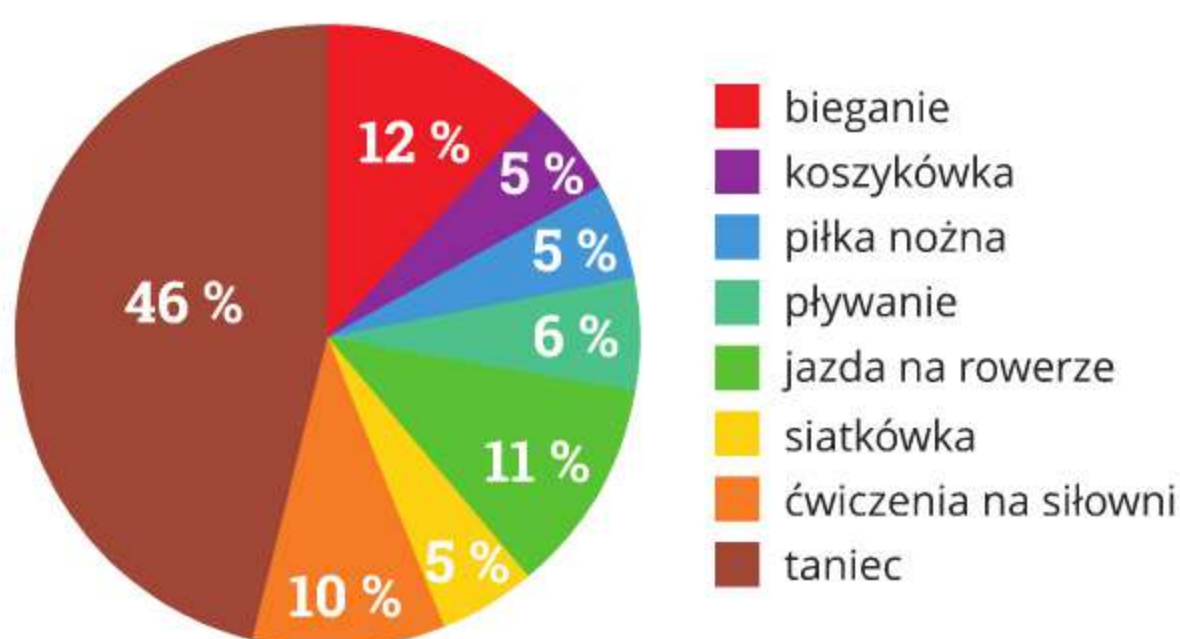
A. mniej niż 50 % **B.** więcej niż 50 %

Osób zamawiających online jedzenie z grupy wiekowej powyżej 54 lat jest o mniej od liczby osób z grupy wiekowej poniżej 25 lat.

C. 20 % **D.** 80 %

Sprawdź, co umiesz!

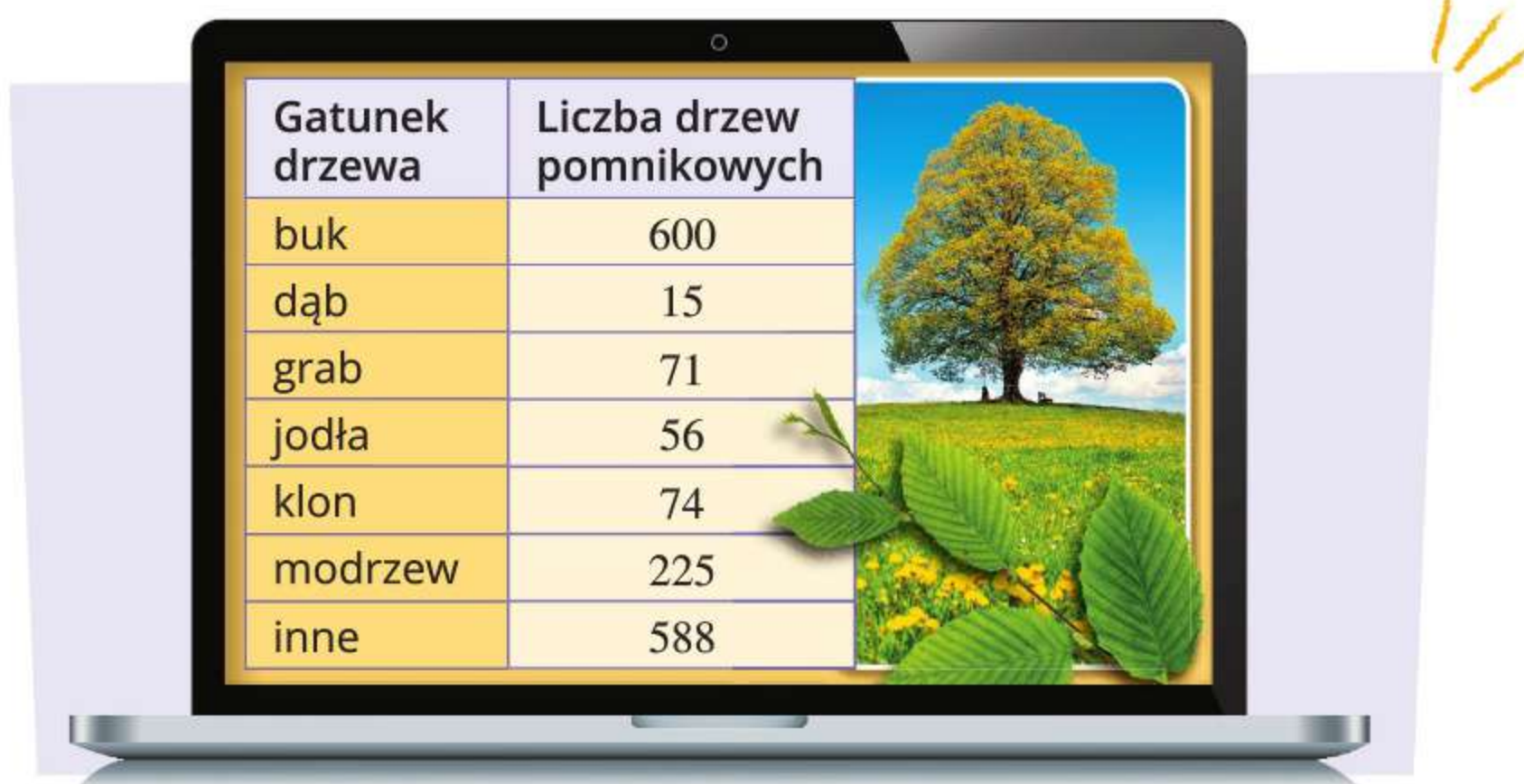
1. Użytkowników najpopularniejszych mediów społecznościowych poproszono, aby wskazali swój jeden ulubiony sport lub aktywność fizyczną. Na procentowym diagramie kołowym przedstawiono wyniki ankiety. Odpowiedz na pytanie.



- a) Które sporty cieszą się taką samą popularnością?
b) Ile razy częściej wybrano bieganie niż pływanie?
c) O ile punktów procentowych więcej osób wskazało w głosowaniu bieganie niż siatkówkę?
d) O ile procent więcej osób woli jazdę na rowerze od ćwiczeń na siłowni?

E Informacje do zadań 2.–4.

W latach 2012–2013 na terenie Świętokrzyskiego Parku Narodowego przeprowadzono inwentaryzację drzew pomnikowych. W tabeli przedstawiono liczbę drzew pomnikowych poszczególnych gatunków.



Gatunek drzewa	Liczba drzew pomnikowych
buk	600
dąb	15
grab	71
jodła	56
klon	74
modrzew	225
inne	588

Źródło: https://www.swietokrzyskipn.org.pl/przyroda/rosliny/drzewa_pomnikowe/.

2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wśród drzew pomnikowych najwięcej jest

- A.** modrzewi. **B.** dębów. **C.** buków. **D.** grabów.

3. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Liczba dębów jest około 5 razy mniejsza od liczby klonów.	P	F
Liczba modrzewi pomnikowych jest o 62,5 % mniejsza niż liczba buków pomnikowych.	P	F

4. Jaki procent liczby wszystkich drzew pomnikowych stanowi liczba modrzewi? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A.** Około 13 %. **B.** Około 14 %. **C.** Około 21 %. **D.** Około 22 %.

2. Zbieranie i opracowywanie danych

- ▶ Przedstawianie danych na diagramach słupkowych oraz kołowych
- ▶ Rysowanie wykresów liniowych

Zbieraniem i opracowywaniem danych zajmują się zarówno instytucje prywatne, jak i publiczne. Gromadzą i analizują dane charakteryzujące różne dziedziny naszego życia społecznego i gospodarczego. W Polsce od 1918 r. zadania te realizuje Główny Urząd Statystyczny (GUS). Wyniki badań przeprowadzanych przez te instytucje prezentowane są w formie tabel, a także na wykresach i różnego rodzaju diagramach. Graficzne prezentowanie danych jest o wiele bardziej czytelne dla odbiorców.



Przykład 1.

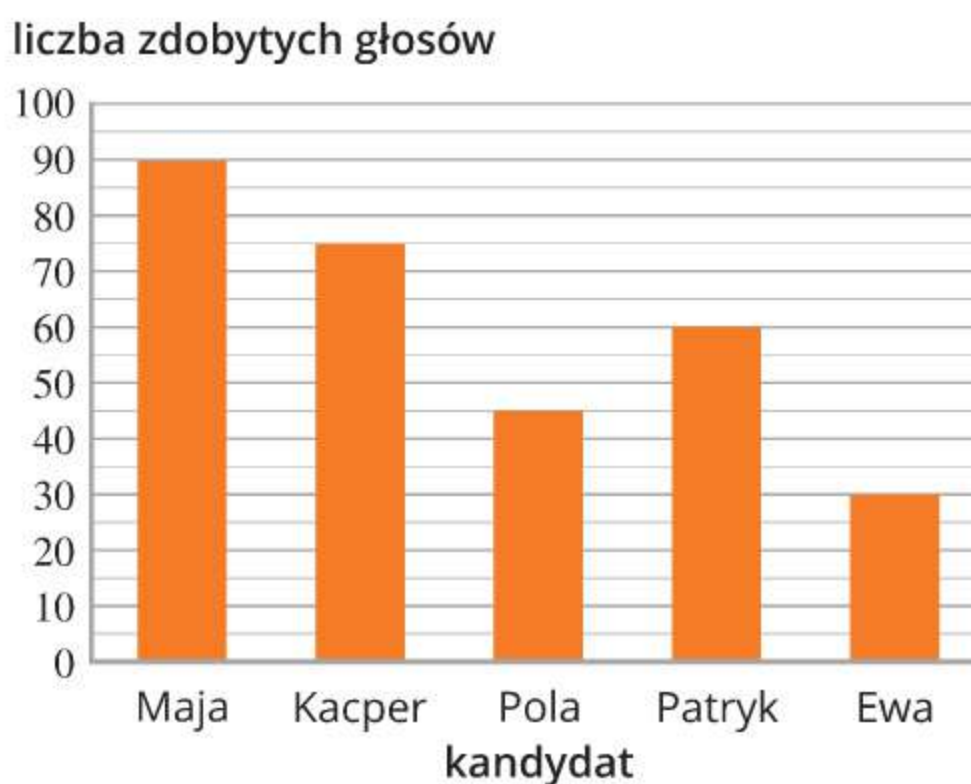
W tabeli przedstawiono wyniki głosowania na przewodniczącego samorządu szkolnego.

Kandydat na przewodniczącego	Maja	Kacper	Pola	Patryk	Ewa
Liczba zdobytych głosów	90	75	45	60	30

Na podstawie danych przedstawionych w tabeli sporządź diagram słupkowy i procentowy diagram kołowy.

Diagram słupkowy

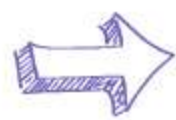
Aby przedstawić wyniki głosowania na diagramie słupkowym, narysujemy dwie osie: poziomą i pionową. Na osi poziomej zaznaczymy imiona kandydatów na przewodniczącego szkoły, a na osi pionowej – liczbę głosów, jaką każdy z nich zdobył. Dla każdego z kandydatów narysujemy słupek, którego wysokość odpowiada liczbie głosów zdobytych podczas głosowania.



Procentowy diagram kołowy

Aby przedstawić wyniki głosowania na procentowym diagramie kołowym, najpierw obliczymy, ile procent wszystkich oddanych głosów stanowią głosy oddane na poszczególnych kandydatów.

Obliczymy sumę wszystkich oddanych głosów.



$$90 + 75 + 45 + 60 + 30 = 300$$

Aby obliczyć, jaki procent wszystkich oddanych głosów stanowiły głosy oddane na danego kandydata, liczbę uzyskanych przez niego głosów podzielimy przez liczbę wszystkich oddanych głosów, a następnie pomnożymy przez 100 %.



$$\text{Maja: } \frac{90}{300} \cdot 100 \% = \frac{90}{3} \% = 30 \%$$

$$\text{Kacper: } \frac{75}{300} \cdot 100 \% = \frac{75}{3} \% = 25 \%$$

$$\text{Pola: } \frac{45}{300} \cdot 100 \% = \frac{45}{3} \% = 15 \%$$

$$\text{Patryk: } \frac{60}{300} \cdot 100 \% = \frac{60}{3} \% = 20 \%$$

$$\text{Ewa: } \frac{30}{300} \cdot 100 \% = \frac{30}{3} \% = 10 \%$$

Obliczymy miary kątów odpowiadających poszczególnym wynikom wyrażonym w procentach. Wiemy, że kąt pełny ma miarę 360° .

- Maja: 30 % z 360° to $\frac{30}{100} \cdot 360^\circ = \frac{3}{10} \cdot 360^\circ = 3 \cdot 36^\circ = 108^\circ$.
- Kacper: 25 % z 360° to $\frac{25}{100} \cdot 360^\circ = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ = 1 \cdot 90^\circ = 90^\circ$.
- Pola: 15 % z 360° to $\frac{15}{100} \cdot 360^\circ = \frac{3}{20} \cdot 360^\circ = 3 \cdot 18^\circ = 54^\circ$.
- Patryk: 20 % z 360° to $\frac{20}{100} \cdot 360^\circ = \frac{2}{10} \cdot 360^\circ = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$.
- Ewa: 10 % z 360° to $\frac{10}{100} \cdot 360^\circ = \frac{1}{10} \cdot 360^\circ = 1 \cdot 36^\circ = 36^\circ$.

Narysujemy koło i zaznaczymy w nim kąty środkowe o odpowiednich miarach.



Ćwiczenie 1.

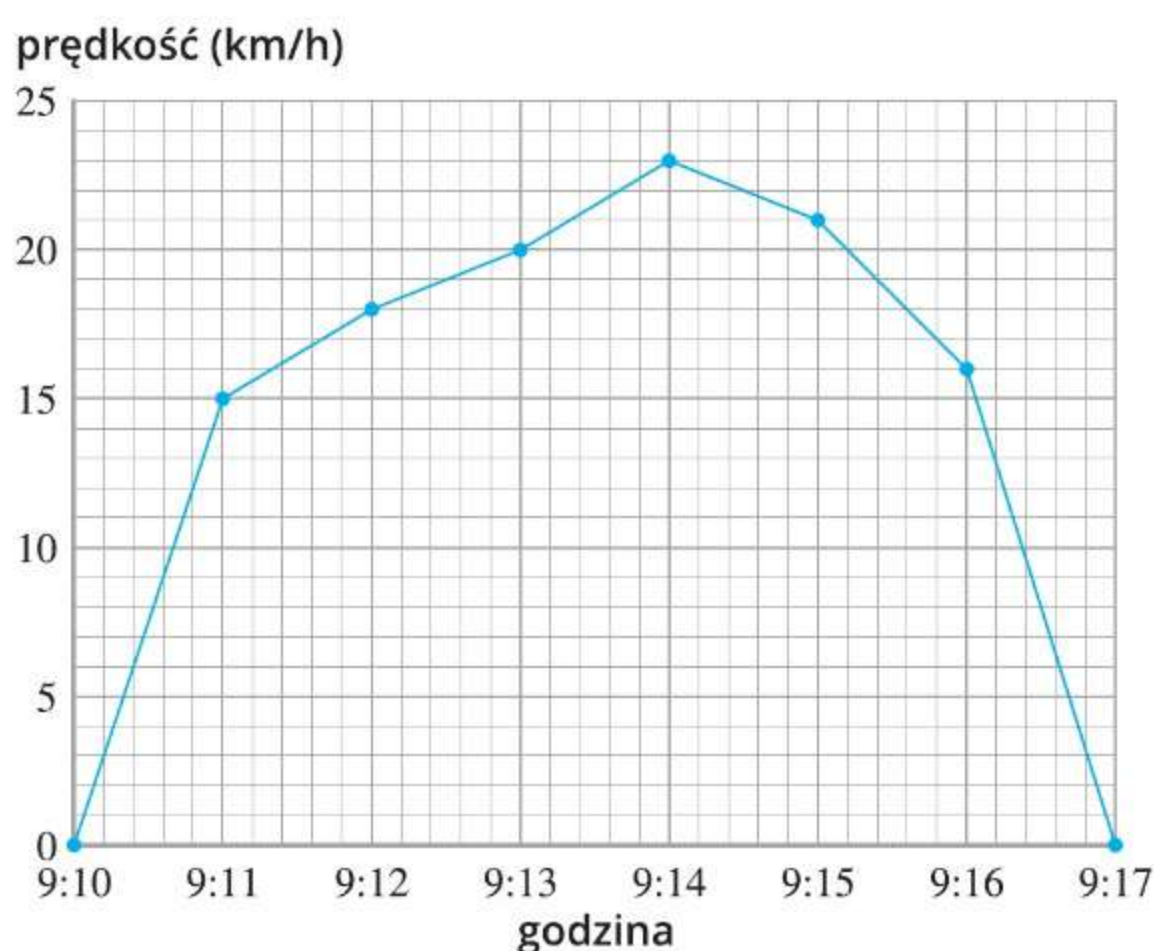
W grupie 600 osób przeprowadzono ankietę, dotyczącą ulubionej miejscowości nadmorskiej w Polsce. Każda z osób wybrała jedną miejscowość. Gdańsk wskazało 270 osób, Gdynię – 15, Sopot – 135, Kołobrzeg – 90, a Łebę – 60. Pozostali wybrali odpowiedź „inna miejscowość”. Przedstaw podane informacje w postaci: tabeli, diagramu słupkowego i procentowego diagramu kołowego.

Wykres liniowy

Przykład 2.

Zosia podczas pobytu w górach korzystała z aplikacji, która rejestruje prędkość jazdy na nartach. Dane w aplikacji aktualizują się co minutę. Skorzystaj z danych przedstawionych na ilustracji i sporządź na ich podstawie wykres liniowy. Co możesz z niego odczytać?

Na osi poziomej zaznaczymy godzinę pomiaru, a na osi pionowej – prędkość, jaka została osiągnięta w danej godzinie. Następnie zaznaczymy punkty, które odpowiadają poszczególnym prędkościom. Aby lepiej pokazać zmiany prędkości jazdy na nartach, sąsiednie punkty połączymy odcinkami.



Z wykresu możemy odczytać, że prędkość Zosi w pierwszych 4 min jazdy wzrastała, a następnie zmalała do 0. Zjazd Zosi trwał 7 min. Największa prędkość, jaką osiągnęła Zosia podczas zjazdu, wynosiła 23 km/h.

Ćwiczenie 2.

Cezary zbierał dane do projektu z geografii. Każdego dnia od 12 do 21 listopada o godzinie 12.00 zapisywał, jaka jest temperatura powietrza. Otrzymane dane przedstawił w tabeli.

Data	12.11	13.11	14.11	15.11	16.11	17.11	18.11	19.11	20.11	21.11
Temperatura	8 °C	4 °C	2 °C	–1 °C	–3 °C	–4 °C	0 °C	–1 °C	3 °C	5 °C

Skorzystaj z danych przedstawionych w tabeli i sporządź na ich podstawie wykres liniowy. Co możesz z niego odczytać?

Godzina	Prędkość (w km/h)
9.10	0
9.11	15
9.12	18
9.13	20
9.14	23
9.15	21
9.16	16
9.17	0

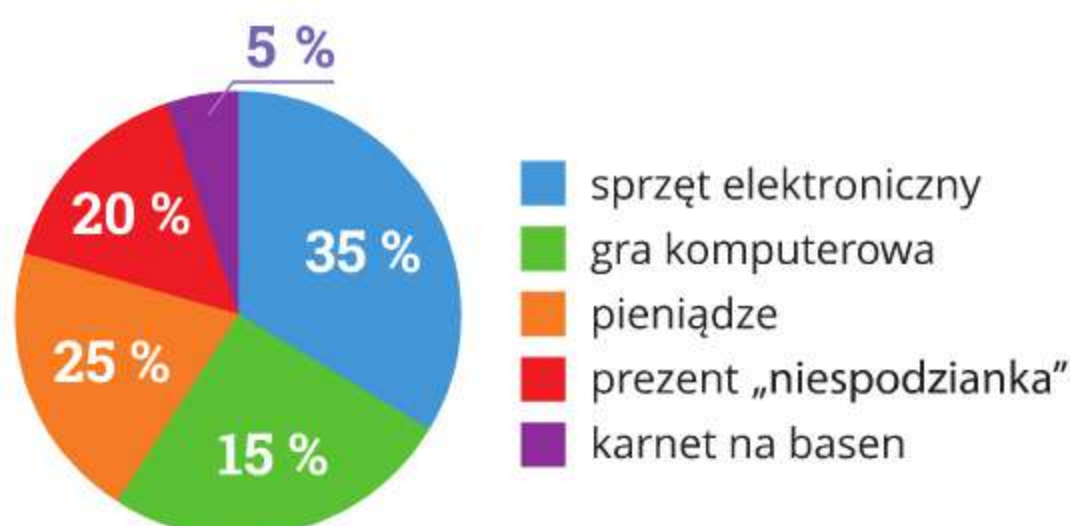
Rozwiąż zadania

1. Przed przyjęciem Ela zapytała swoje koleżanki i kolegów, które z proponowanych napojów lubią najbardziej. Każdy mógł wskazać tylko jeden napój. Na kartce zanotowała ich odpowiedzi.

- Przedstaw zebrane informacje na diagramie słupkowym.
- Ela przygotowała cztery napoje, które wybrało najwięcej osób. Ustal, które to napoje.
- O ile procent więcej osób wybrało sok jabłkowy niż napój owocowy?

Sok pomarańczowy |||||
 Sok jabłkowy |||||
 Napój owocowy ||
 Woda mineralna |
 Kompot domowy |||

2. Wśród nastolatków przeprowadzono ankietę. Zadano im pytanie: *Który prezent spośród zaproponowanych sprawiłby Ci największą radość?* Na diagramie kołowym przedstawiono procentowy rozkład odpowiedzi. Każdy nastolatek mógł wybrać jedną propozycję. Prezent „niespodziankę” wybrały 24 osoby.



- Oblicz, ilu nastolatków brało udział w ankiecie.
- Ilu nastolatków wybrało sprzęt elektroniczny, a ilu grę komputerową?
- Przerysuj tabelę do zeszytu, uzupełnij ją i na jej podstawie narysuj diagram słupkowy.

Rodzaj prezentu	sprzęt elektroniczny	gra komputerowa	pieniądze	prezent „niespodzianka”	karnet na basen
Liczba osób					

3. Ela przez 5 kolejnych dni dwa razy dziennie odczytywała temperaturę powietrza na zewnętrznym termometrze. Wyniki swoich pomiarów przedstawiła w tabeli.

Dzień	25.11.2022	26.11.2022	27.11.2022	28.11.2022	29.11.2022
Pora dnia					
Rano	6 °C	4 °C	3 °C	4 °C	3 °C
Wieczór	-1 °C	0 °C	-2 °C	-2 °C	-3 °C

- Przedstaw wyniki pomiarów przeprowadzonych przez Elę na jednym wykresie liniowym.
- W którym dniu różnica temperatur była największa? Ile wynosiła ta różnica?

- 4.** Wśród uczniów klas 8, w ramach zajęć z doradztwa zawodowego, przeprowadzono ankietę dotyczącą wyboru szkoły ponadpodstawowej. Każdy uczeń mógł wybrać tylko jeden typ szkoły. Wyniki ankiety przedstawiono w tabeli.

Odpowiedź	Liczba dziewcząt	Liczba chłopców
Liceum ogólnokształcące	24	12
Technikum	9	11
Szkoła branżowa	6	6
Jeszcze nie wiem	8	4

- a)** Przedstaw na jednym diagramie słupkowym dane dotyczące wyboru szkoły przez dziewczęta i dane dotyczące odpowiedzi chłopców.
- b)** Na procentowym diagramie kołowym przedstaw dane dotyczące wyboru szkoły przez uczniów klas 8, wśród których przeprowadzono ankietę.

- 5.** Bruno postanowił uzupełnić wodę w basenie ogrodowym o pojemności 9 m^3 , który był już w 60 % wypełniony wodą. Odkręcił kran, z którego do basenu wpływało 20 l wody w ciągu jednej minuty. Po dwóch godzinach napełniania basenu nastąpiła przerwa w dostawie wody. Awaria została usunięta po jednej godzinie i basen był napełniany dalej. Z powodu mniejszego ciśnienia wody w ciągu minuty wpływało o 5 l wody mniej niż przed awarią. Kran został zakręcony, gdy w basenie było 9 m^3 wody.

- a)** Ile minut trwało wlewanie wody do basenu po usunięciu awarii?
- b)** Przedstaw na wykresie liniowym, jak zmieniała się objętość wody w basenie w czasie jego uzupełniania.

Sprawdź, co umiesz!

- 1.** Pola postanowiła przeprowadzić obserwację kiełkowania nasion fasoli. Po trzech dniach od założenia hodowli pojawiły się korzonki oraz pierwsze pędy i liście. Pola mierzyła codziennie długość jednej wybranej łodygi. Tabela przedstawia wyniki pomiarów Poli w kolejnych dniach obserwacji.

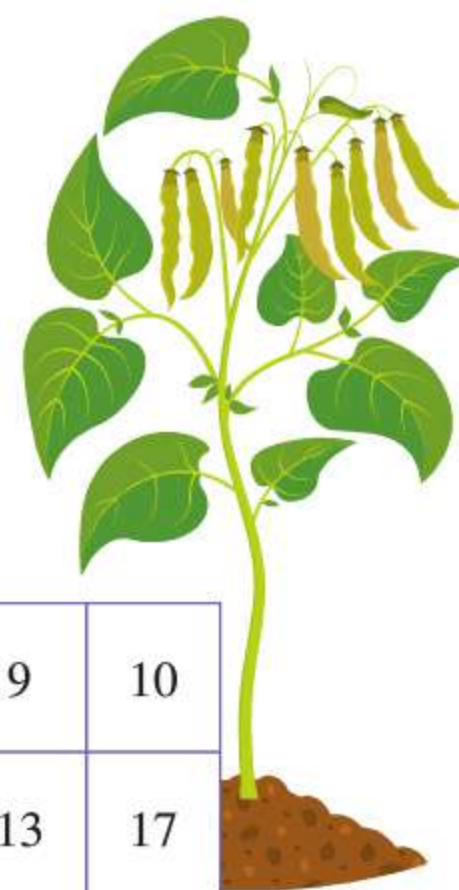
Dzień obserwacji	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Długość łodygi (w centymetrach)	0	0	0,5	1,5	3,5	5	7,5	10	13	17

- a)** Przedstaw wyniki pomiarów przeprowadzonych przez Polę na wykresie liniowym. Ułóż 3 pytania, na które można odpowiedzieć, analizując sporządzony wykres.
- b)** Od którego dnia obserwacji przyrost dzienny łodygi był większy niż 2 cm?

- 2.** Na zimowisko wyjechało 120 osób, w tym na:

- obóz narciarski – 54 osoby;
- obóz snowboardowy – 24 osoby;
- obóz rekreacyjny – 42 osoby.

- a)** Oblicz, ile procent uczestników zimowiska wybrało poszczególne formy wypoczynku.
- b)** Przedstaw podane informacje na procentowym diagramie kołowym.



3. Średnia arytmetyczna

- ▶ Obliczanie średniej arytmetycznej
- ▶ Wykorzystywanie średniej arytmetycznej do rozwiązywania zadań

Średnia arytmetyczna jest najpopularniejszą miarą wykorzystywaną w statystyce. Stosuje się ją w życiu codziennym, np. do obliczania średniej: ocen na świadectwie, wieku osób w danej grupie, wysokości wynagrodzenia w danym kraju.



Średnią arytmetyczną zestawu liczb nazywamy sumę tych liczb podzieloną przez ich liczbę.

Przykład 1.

Oblicz średnią arytmetyczną liczb: 3, 5, 6, 9, 12.

Dodamy podane liczby, a otrzymaną sumę podzielimy przez ich liczbę, czyli 5.



$$\frac{3+5+6+9+12}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

Odp. Średnia arytmetyczna liczb: 3, 5, 6, 9, 12 jest równa 7.

Ćwiczenie 1.

Oblicz średnią arytmetyczną podanych liczb.

a) 4; 6; 2; 67; 3; 14

b) 8; 13; 21; 39

c) 7; -2; -19; 10

d) $\frac{2}{3}$; $2\frac{5}{6}$; 0,25

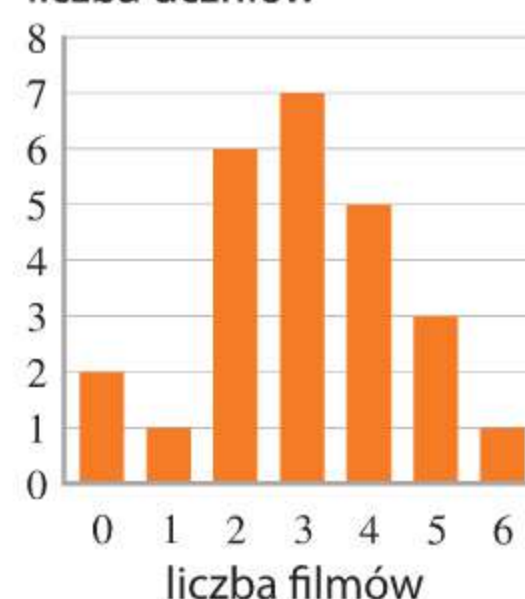
Przykład 2.

Na diagramie słupkowym przedstawiono, ile filmów uczniowie z klasy 8a obejrzeli w kinie w ostatnim roku. Oblicz średnią liczbę filmów obejrzanych przez ucznia z klasy 8a w kinie w ostatnim roku.

Odczytamy z diagramu, ile filmów uczniowie z klasy 8a obejrzeli w kinie w ostatnim roku.

- 2 uczniów – 0 filmów
- 1 uczeń – 1 film
- 6 uczniów – 2 filmy
- 7 uczniów – 3 filmy
- 5 uczniów – 4 filmy
- 3 uczniów – 5 filmów
- 1 uczeń – 6 filmów

liczba uczniów



Wyznamy liczbę wszystkich filmów obejrzanych przez uczniów z klasy 8a w kinie w ostatnim roku:

$$2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6 = 0 + 1 + 12 + 21 + 20 + 15 + 6 = 75$$

Wyznaczymy liczbę uczniów klasy 8a.



$$2 + 1 + 6 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25$$

Obliczymy średnią arytmetyczną liczby obejrzanych filmów przez ucznia klasy 8a w kinie w ostatnim roku.



$$\frac{75}{25} = 3$$

Odp. Średnia liczba obejrzanych filmów przez ucznia klasy 8a w kinie w ostatnim roku wynosi 3.

Ćwiczenie 2.

W tabeli przedstawiono, ilu uczniów z klasy 8b otrzymało poszczególne stopnie ze sprawdzianu z matematyki. Oblicz średnią arytmetyczną tych stopni.

Stopień	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów	2	6	7	9	5	1

Przykład 3.

W klasie 8c jest 10 dziewcząt i 14 chłopców. Średnia liczba punktów uzyskanych przez dziewczęta z testu sprawnościowego wynosi 25, a przez chłopców 22 punkty. Uzasadnij, że średnia arytmetyczna liczby punktów uzyskanych przez uczniów z tej klasy z testu sprawnościowego wynosi $23\frac{1}{4}$.

Liczba uczniów w tej klasie wynosi $10 + 14 = 24$.

Wiemy, że

$$\text{średnia liczba punktów uzyskanych przez dziewczęta} = \frac{\text{łączna liczba punktów uzyskanych przez dziewczęta}}{\text{liczba dziewcząt}}$$

czyli

$$\text{średnia liczba punktów uzyskanych przez dziewczęta} \cdot \text{liczba dziewcząt} = \text{łączna liczba punktów uzyskanych przez dziewczęta}$$

Analogicznie możemy policzyć, ile punktów zdobyli chłopcy.

Obliczymy, ile punktów uzyskały dziewczęta, a ile chłopcy.



$$\begin{aligned} \text{Dziewczęta: } 25 \cdot 10 &= 250 \\ \text{Chłopcy: } 22 \cdot 14 &= 308 \end{aligned}$$

Łączną liczbę punktów uzyskanych przez dziewczęta i chłopców podzielimy przez liczbę uczniów w klasie.



$$\frac{250 + 308}{24} = \frac{558}{24} = \frac{93}{4} = 23\frac{1}{4}$$

Zatem uzasadniliśmy, że średnia arytmetyczna liczby punktów uzyskanych przez uczniów z klasy 8c z testu sprawnościowego wynosi $23\frac{1}{4}$.

Ćwiczenie 3.

W grze terenowej brało udział 15 osób. Uczestnicy zostali podzieleni na dwie grupy: grupa I składała się z 7 osób, grupa II – z 8. Każda osoba z grupy I za wykonanie wszystkich zadań zdobyła średnio 50 punktów, a każda osoba z grupy II – średnio 53 punkty. Uzasadnij, że średnia arytmetyczna liczby punktów zdobytych przez wszystkich uczestników gry terenowej nie jest liczbą całkowitą.

Przykład 4.

W szkolnej drużynie siatkówki jest osiem zawodniczek. Ich średnia wieku wynosi 14 lat. Jeśli uwzględnimy również wiek trenerki drużyny, to średnia wieku wzrośnie do 16 lat. Ile lat ma trenerka?

Jako x oznaczmy wiek trenerki.

Zawodniczki mają łącznie $8 \cdot 14 = 112$ lat.

Suma wieku zawodniczek i trenerki podzielona przez 9 (8 zawodniczek i 1 trenerka) jest równa 16. Ułożymy równanie i je rozwiążemy.



$$\begin{aligned}\frac{112+x}{9} &= 16 & | \cdot 9 \\ 112+x &= 144 & | - 112 \\ x &= 32\end{aligned}$$

Odp. Trenerka drużyny ma 32 lata.

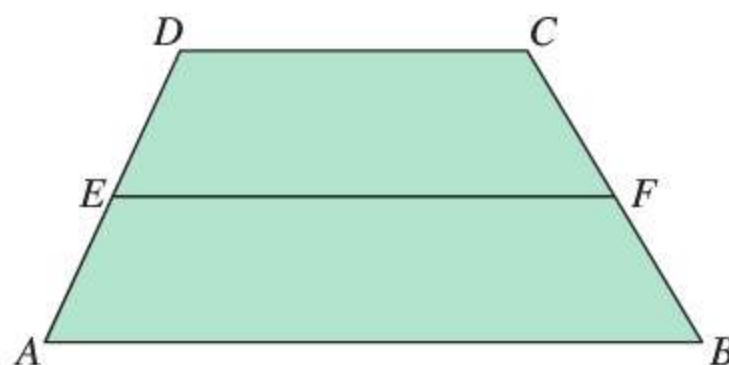
Ćwiczenie 4.

Średnia masa 21 dalmatyńczyków w pewnej hodowli jest równa 28 kg. Powiększono hodowlę o jednego dalmatyńczyka. Jeśli uwzględnimy jego masę, to średnia masa psów wzrośnie do 28,1 kg. Ile waży ten dalmatyńczyk?

A to ciekawe

W dowolnym trapezie odcinek łączący środki ramion jest równoległy do podstaw trapezu i jego długość jest równa średniej arytmetycznej długości podstaw.

$$|EF| = \frac{|AB| + |CD|}{2}$$



Rozwiąż zadania

1. Oblicz średnią arytmetyczną podanych liczb.

a) 13; 7; 12; 66; 6; 22

b) -8; -12; 0; 13; 17; -11; 25

c) 3,2; 3,22; 3,4; 3,44

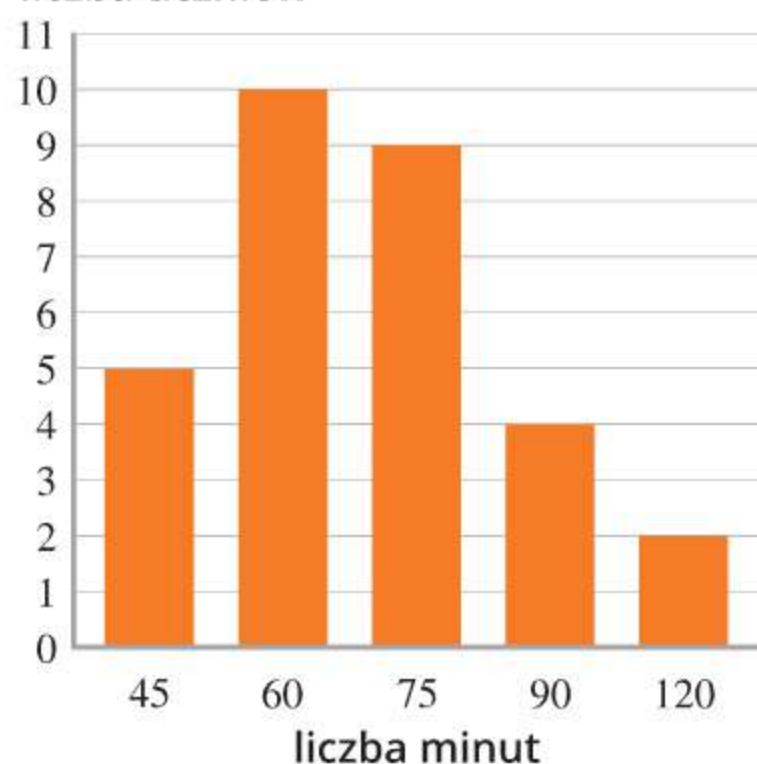
d) $1\frac{1}{2}$; 3; $-\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$

2. Na diagramie słupkowym przedstawiono, ilu uczniów klasy 8c korzysta z komputera dziennie przez określony czas.

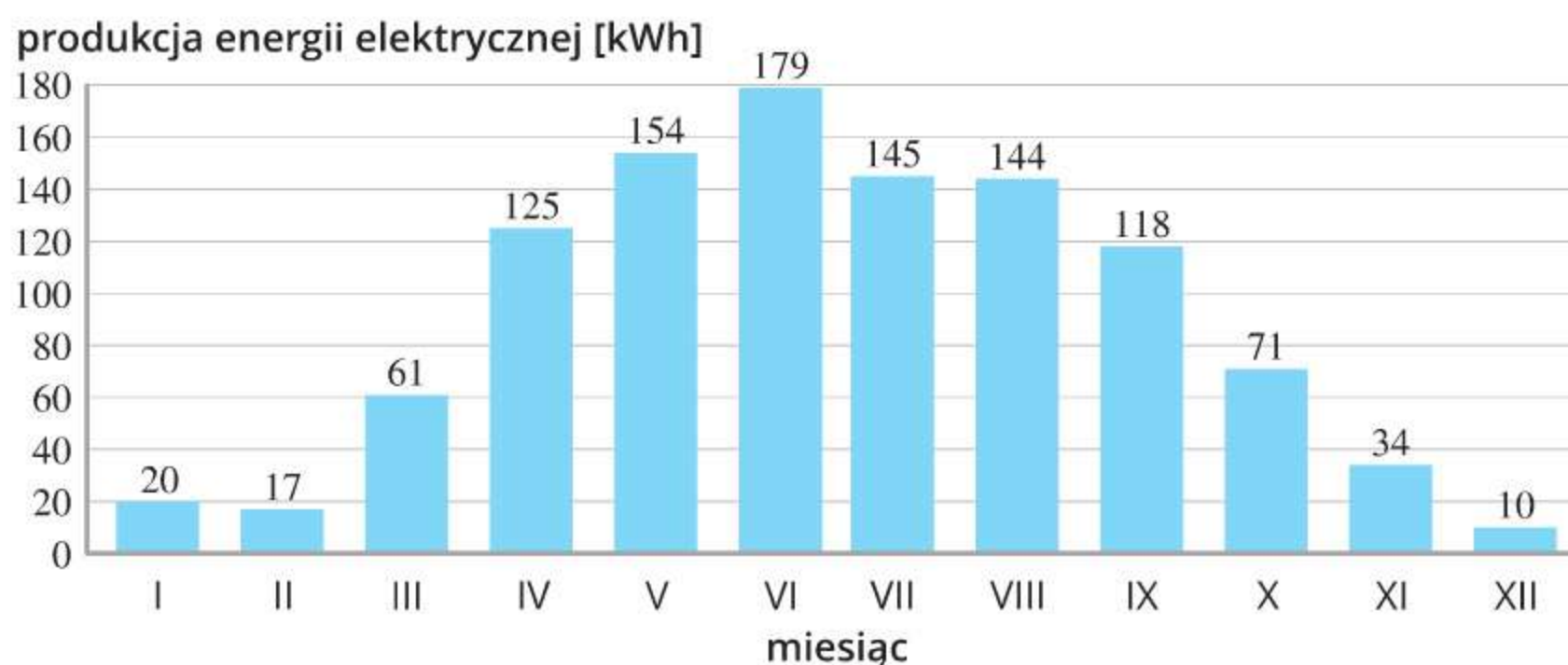
a) Oblicz średni dzienny czas korzystania z komputera przez ucznia z klasy 8c.

b) Oblicz średni dzienny czas korzystania z komputera przez ucznia klasy 8c spędzającego przy komputerze więcej niż godzinę dziennie.

liczba uczniów



3. Coraz bardziej popularnym źródłem energii elektrycznej są panele fotowoltaiczne. Na diagramie poniżej przedstawiono, ile kWh (kilowatogodzin) energii w kolejnych miesiącach jednego roku wyprodukowało źródło fotowoltaiczne o mocy 1 kW (kilowata).

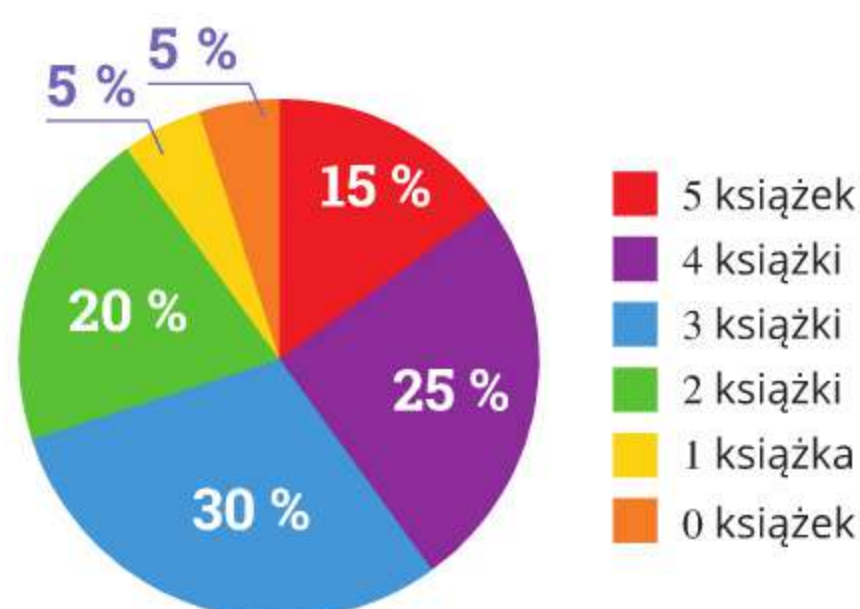


Źródło: <https://www.brasit.pl/elektrownie-fotowoltaiczne/slonce-w-polsce/>.

Odpowiedz na pytanie.

- a) Ile razy łączna ilość energii elektrycznej wyprodukowanej w miesiącach letnich (VI, VII, VIII) jest większa od łącznej ilości energii elektrycznej wyprodukowanej w miesiącach zimowych (I, II, XII) przez to źródło fotowoltaiczne? Wynik podaj z dokładnością do całości.
- b) Ile kilowatogodzin jest równa średnia miesięczna produkcja energii elektrycznej przez to źródło fotowoltaiczne w ciągu drugiego półrocza?

4. Na diagramie przedstawiono procentowy rozkład liczby uczniów klas 8 w zależności od liczby wypożyczonych książek ze szkolnej biblioteki w ciągu trzech pierwszych miesięcy nauki. W klasach 8 uczy się 80 uczniów.



- a) Oblicz, ilu ośmioklasistów wypożyczyło 3 książki.
- b) Ile wynosi średnia liczba wypożyczonych książek przypadająca na jednego ucznia?
- c) Uzasadnij, że uczniów, którzy wypożyczyli 5 książek, było o 40 % mniej niż tych, którzy wypożyczyli 4 książki.

5. Oblicz wartość x , jeżeli średnia arytmetyczna liczb: $x - 2$, $2x$, $4x - 1$, $-6x$ jest równa 8.

6. Zestawy liczb: 5, -4, 6, -1, 8 oraz liczb: 5, -4, 6, -1, 8, k mają taką samą średnią arytmetyczną. Oblicz k .

7. Kuba wraz z rodzicami, siostrą i ciocią utworzyli drużynę, która weźmie udział w rodzinnych zawodach sportowych. Średnia wieku zawodników tej drużyny jest równa 26 lat. Z powodu kontuzji Kuby w zawodach zastąpił go wujek. Wskutek tej zamiany średnia wieku drużyny zwiększyła się o 3 lata. Wiek wszystkich zawodników mieści się w przedziale 10–45 lat.

- a) O ile lat wujek jest starszy od Kuby?
b) Czy wujek może być 3 razy starszy od Kuby? Uzasadnij swoją odpowiedź.



8. Pan Adam jechał autem. Pokonał 30 km ze średnią prędkością równą 60 km/h. Następne 30 km pokonał z prędkością 120 km/h. Uzasadnij, że średnia prędkość przejazdu całej trasy nie jest równa średniej arytmetycznej prędkości na poszczególnych jej odcinkach.

Sprawdź, co umiesz!



1. Ela wykonała dziesięć rzutów sześcienną kostką do gry. Wyniki kolejnych rzutów zapisała w tabeli.

Numer rzutu	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Liczba oczek	6	4	4	5	3	2	5	5	3	3

Oblicz średnią liczbę oczek uzyskanych podczas tych dziesięciu rzutów.

2. Średnia arytmetyczna sześciu liczb jest równa 12, a średnia arytmetyczna pięciu spośród tych sześciu liczb jest równa 16. Oblicz szóstą liczbę.



3. Średnia arytmetyczna ośmiu liczb: 1, 2, x , 2, 3, 4, 1, 1 jest równa 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. Liczba x jest równa

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. Średni wiek Zosi, jej siostry i rodziców wynosi 23 lata. Jeżeli doliczymy wiek dziadka, to średnia wieku wzrośnie o 8 lat. Ile lat ma dziadek?

4. Doświadczenia losowe

- ▶ Pojęcie doświadczenia losowego
- ▶ Wyznaczanie i zliczanie wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego

Rzut monetą jest jednym z przykładów doświadczenia, w którym o przebiegu decyduje wyłącznie przypadek, przewidzenie wyniku jest niemożliwe, a czynność tę można wielokrotnie powtarzać. Doświadczenia mające takie własności nazywamy **doświadczeniami losowymi**.

Doświadczenie losowe	Zbiór wszystkich możliwych wyników
Rzut monetą	
Rzut sześcienną kostką do gry	
Rzut ośmiościenną kostką do gry	
Losowanie kuli z zestawu kul ponumerowanych od 1 do 10	

Zarówno w życiu codziennym, jak i w różnych dziedzinach nauki często zachodzi konieczność wyznaczenia zbioru wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego. Działem matematyki, który zajmuje się zliczaniem liczby wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego, jest **kombinatoryka**.

Wśród wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego czasami w sposób szczególny interesują nas takie, które **spełniają określony warunek**, np. w doświadczeniu losowym polegającym na rzucie sześcienną kostką do gry interesuje nas wyrzucenie parzystej liczby oczek.

Doświadczenie losowe	Warunek	Wyniki spełniające warunek
Rzut sześcienną kostką do gry	wyrzucenie jednocyfrowej liczby oczek	
	wyrzucenie parzystej liczby oczek	
	wyrzucenie liczby oczek mniejszej niż 3	
	wyrzucenie liczby oczek większej niż 6	brak

Przykład 1.

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie monetą.

a) Jakie są wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia losowego?

Podczas rzutu monetą możemy otrzymać dwa wyniki:

- wypadnie orzeł (wynik oznaczmy literą O),
- wypadnie reszka (wynik oznaczmy literą R).



Jeśli w I rzucie wypadnie orzeł (O), to w II rzucie może wypaść orzeł (O) lub reszka (R).

Jeśli w I rzucie wypadnie reszka (R), to w II rzucie może wypaść orzeł (O) lub reszka (R).



I rzut	II rzut
O	O
O	R
R	O
R	R

Odp. Wszystkie możliwe wyniki tych rzutów to: (O, O), (O, R), (R, O) oraz (R, R).

b) Wypisz wyniki doświadczenia losowego spełniające warunek: reszka wypadła co najmniej raz. Jeśli reszka wypadła co najmniej raz, to oznacza, że wypadła dokładnie jeden raz (w I lub w II rzucie) lub dwa razy (w I i w II rzucie).

Wyniki, w których reszka wypadła dokładnie jeden raz.



(O, R) i (R, O)

Wyniki, w których reszka wypadła dwa razy.



(R, R)

Odp. Wyniki doświadczenia losowego spełniające warunek: reszka wypadła co najmniej raz to (O, R), (R, O) oraz (R, R).

Ćwiczenie 1.

Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie monetą.

a) Jakie są wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia losowego?

b) Wypisz wyniki doświadczenia losowego spełniające warunek: orzeł wypadł dokładnie dwa razy.

Przykład 2.

Uzasadnij, że podczas 33 rzutów sześcienną kostką to gry nie można otrzymać sumy liczby oczek równej 200.

Na ścianie sześciennej kostki do gry jest: 1 oczko, 2 oczka, 3 oczka, 4 oczka, 5 oczek lub 6 oczek.

Założymy, że w każdym z 33 rzutów wypadło 6 oczek, i obliczymy sumę oczek ze wszystkich rzutów.



$$6 \cdot 33 = 198$$

Zatem przy założeniu, że podczas 33 rzutów sześcienną kostką do gry wyrzucimy za każdym razem maksymalną liczbę oczek czyli 6, to suma liczby oczek nie może być równa 200, ponieważ największa suma wynosi 198, a $198 < 200$.

Ćwiczenie 2.

Uzasadnij, że podczas 1000 rzutów sześcienną kostką do gry nie można otrzymać sumy liczby oczek równej 999.

Przykład 3.

Podczas szkolnej wycieczki w czwartek uczniowie na obiad dostawali zupę, drugie danie i deser.

Zupa	Drugie danie	Deser
rosół	pierogi z mięsem	szarlotka
krem dyniowy	pierogi ze szpinakiem	lody

a) Na ile sposobów każdy z uczniów mógł skomponować swój obiad w czwartek?

Każdy z uczniów mógł wybrać: jedną z dwóch zup, jedno z dwóch drugich dań oraz jeden z dwóch deserów.

Aby nie pominąć żadnej z możliwości, sporządzimy odpowiedni rysunek (drzewko).



Wszystkie możliwości:

- 1 rosół, pierogi z mięsem, szarlotka
- 2 rosół, pierogi z mięsem, lody
- 3 rosół, pierogi ze szpinakiem, szarlotka
- 4 rosół, pierogi ze szpinakiem, lody
- 5 krem dyniowy, pierogi z mięsem, szarlotka
- 6 krem dyniowy, pierogi z mięsem, lody
- 7 krem dyniowy, pierogi ze szpinakiem, szarlotka
- 8 krem dyniowy, pierogi ze szpinakiem, lody

Odp. Każdy z uczniów mógł skomponować swój obiad w czwartek na 8 sposobów.

b) Na ile sposobów uczniowie mogli skomponować obiad, tak aby na drugie danie zjeść pierogi ze szpinakiem?

Skorzystamy z podpunktu a) i wypiszemy wszystkie możliwości: 3, 4, 7, 8.

Odp. Aby na drugie danie zjeść pierogi ze szpinakiem, uczniowie mogli skomponować swój obiad na 4 sposoby.

Ćwiczenie 3.

Pola chce się zapisać do jednego koła naukowego i na jedno zajęcia sportowe. Spośród kół naukowych ma do wyboru: koło matematyczne, koło z języka polskiego, koło z języka angielskiego oraz koło geograficzne. Zajęcia sportowe, które może wybrać, to: siatkówka, pływanie oraz fitness. Na ile sposobów Pola może wybrać

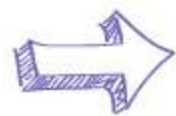
a) jedno koło naukowe i jedno zajęcia sportowe?

b) zajęcia sportowe, jeśli zapisze się do koła matematycznego?

Przykład 4.

Oblicz, ile trzycyfrowych liczb o różnych cyfrach można otrzymać z cyfr: 2, 4, 9. Ile z tych liczb trzycyfrowych jest podzielnych przez 2?

Liczy, których pierwszą cyfrą jest 2, to



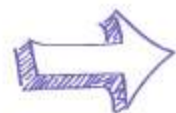
249 i 294.

Liczy, których pierwszą cyfrą jest 4, to



429 i 492.

Liczy, których pierwszą cyfrą jest 9, to



924 i 942.

Liczba jest podzielna przez 2, gdy ostatnią jej cyfrą jest 0, 2, 4, 6 lub 8.

Spośród otrzymanych liczb: 249, 294, 429, 492, 924, 942 liczby: 294, 492, 924 i 942 są podzielne przez 2.

Odp. Z cyfr: 2, 4, 9 można otrzymać 6 liczb o różnych cyfrach. Cztery z nich są podzielne przez 2.

Ćwiczenie 4.

Oblicz, ile czterocyfrowych liczb o różnych cyfrach można otrzymać z cyfr: 1, 4, 5, 7. Ile z tych liczb czterocyfrowych jest podzielnych przez 5?

Rozwiąż zadania

1. Doświadczenie polega na rzucie monetą oraz sześcienną kostką, której każda ściana jest w innym kolorze: zielonym (Z), białym (B), niebieskim (N), czerwonym (C), fioletowym (F) lub pomarańczowym (P). Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij. Wpisz wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia zgodnie ze wzorem.

 		Wynik rzutu sześcienną kostką					
		Z	B	N	C	F	P
Wynik rzutu monetą	O	(O, Z)					
	R						

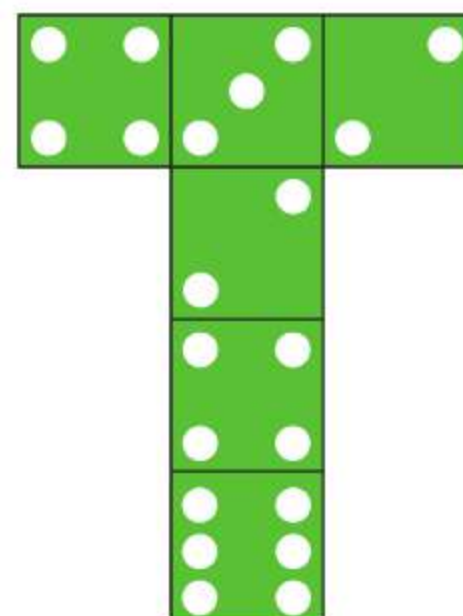
2. Kuba i Ela zapisują liczby trzycyfrowe, w których cyfry się nie powtarzają. Ela ułożyła wszystkie możliwe liczby z cyfr: 2, 0 oraz 4, a Kuba – wszystkie możliwe liczby z cyfr: 2, 3 oraz 4.
- Czy Ela ułożyła tyle samo liczb co Kuba?
 - Ile liczb parzystych zapisała Ela?
 - Czy Ela i Kuba otrzymali tyle samo liczb podzielnych przez 3?
 - Ile liczb podzielnych przez 5 zapisała Ela, a ile Kuba?

3. Pola, Zosia, Maja i Lena wybrały się na finał turnieju tańca nowoczesnego. Kupiły bilety na cztery sąsiednie miejsca: 6, 7, 8 i 9 w jednym rzędzie. Na ile sposobów mogą zająć te miejsca, jeśli Maja chce siedzieć obok Leny, a Pola obok Zosi?

4. Przeprowadzono doświadczenie losowe polegające na dwukrotnym rzucie kostką, której siatka jest przedstawiona na rysunku.

a) Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

		Wynik drugiego rzutu			
		2	3	4	6
Wynik pierwszego rzutu	2				
	3				
	4				
	6				



- b) Sprawdź, ile jest wyników, w których liczba oczek otrzymanych w drugim rzucie jest nieparzysta.
c) Uzasadnij, że jest 6 wyników, w których liczba oczek wyrzuconych za pierwszym razem jest większa od liczby oczek wyrzuconych za drugim razem.

5. Zastęp pięciu harcerzek i drużna zastępową wybrali się na rajd pieszy. Gdy harcerki weszły na wąską ścieżkę, musiały iść gęsiego, czyli jedna za drugą. Grupę prowadziła drużna zastępową, a jako ostatnia szła harcerka Marta. Na ile sposobów pozostałe harcerki mogły się ustawić, aby iść gęsiego?

6. Zosia ma trzy czapki: białą, różową i niebieską oraz dwa szaliki: różowy i niebieski. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zosia może wybrać czapkę i szalik na

- A. 5 sposobów. B. 6 sposobów. C. 3 sposoby. D. 2 sposoby.

7. Talia kart zawiera 52 karty czterech kolorów: piki ♠, kiery ♥, trefle ♣, kara ♦ po 13 kart w jednym kolorze. Wśród kart każdego koloru są 4 figury: as, król, dama, walet oraz 9 kart oznaczonych liczbami od 2 do 10. Ile jest różnych możliwości wybrania karty:

- a) w kolorze kier? b) z liczbą 8? c) z królem lub karty z damą?





1. Bruno wykonuje dwa rzuty sześcienną kostką do gry i tworzy liczby dwucyfrowe. Liczba oczek wyrzuconych w pierwszym rzucie jest cyfrą dziesiątek, a liczba oczek wyrzuconych w drugim rzucie – cyfrą jedności. Przerysuj tabelę do zeszytu i uzupełnij ją wszystkimi możliwymi wynikami tego doświadczenia losowego.

		Liczba oczek wyrzuconych w drugim rzucie					
		1	2	3	4	5	6
Liczba oczek wyrzuconych w pierwszym rzucie	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

- a) Ile otrzymanych liczb jest nie mniejszych od 44?
 b) Podaj, ile spośród otrzymanych liczb jest podzielnych przez 9.
 c) Ile jest liczb, których iloczyn cyfr jest wielokrotnością liczby 4?

E

2. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Jest dziewięć liczb dwucyfrowych, które są jednocześnie podzielne przez 2 i przez 5.	P	F
Wśród wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest jedenaście liczb, które przy dzieleniu przez 8 dają resztę 3.	P	F

3. Bartek ma 5 różnych książek. Chce postawić po jednej z tych książek na każdą z pięciu półek. Dwie z książek, które chce postawić, są przygodowe. Na ile sposobów Bartek może postawić te książki, jeśli książki przygodowe postawił na dwóch górnych półkach?

5. Wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa

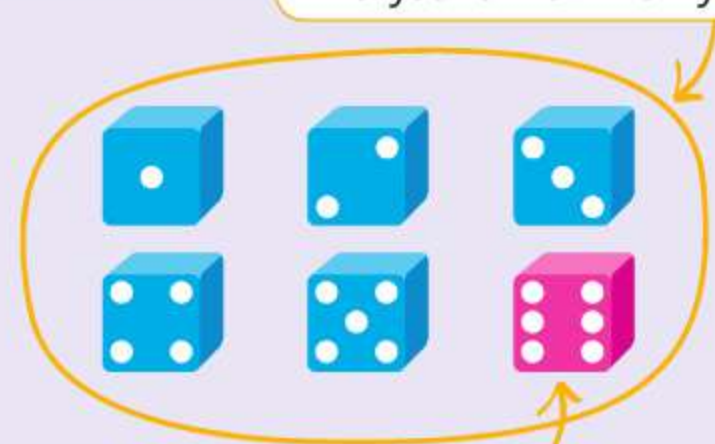
- ▶ Obliczanie prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach losowych

W życiu codziennym zdarzają się sytuacje, w których chcemy ocenić, jakie jest prawdopodobieństwo: wystąpienia opadów czy też wyrzucenia 6 oczek na sześcienną kostce do gry. Dla każdej z tych sytuacji jesteśmy w stanie obliczyć, jaka jest szansa, że się wydarzy. W przypadku prognozowania opadów obliczenia te będą wymagały wiedzy specjalistycznej, natomiast prawdopodobieństwo wyrzucenia 6 oczek na sześcienną kostce możemy obliczyć, korzystając ze zdobytych już umiejętności.

Aby obliczyć prawdopodobieństwo, musimy ustalić, ile jest wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego oraz ile z tych wyników spełnia podany w zadaniu warunek.

Ile wynosi prawdopodobieństwo wyrzucenia 6 oczek na sześcienną kostce?

wszystkie możliwe wyniki



wynik spełniający warunek

Prawdopodobieństwo p otrzymania wyniku spełniającego podany warunek obliczamy, korzystając ze wzoru

$$p = \frac{\text{liczba wyników spełniających podany warunek}}{\text{liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego}}$$



Przykład 1.

Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek podzielnej przez 3?

p – prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek podzielnej przez 3

Wszystkie możliwe wyniki. Jest ich 6.



Wyniki podzielne przez 3. Są 2 takie wyniki.

Aby obliczyć prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek podzielnej przez 3, liczbę wyników, które spełniają podany warunek, podzielimy przez liczbę wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego.



$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Odp. Prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek podzielnej przez 3 jest równe $\frac{1}{3}$.

b) Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia dwucyfrowej liczby oczek?

p – prawdopodobieństwo wyrzucenia dwucyfrowej liczby oczek

Wszystkie możliwe wyniki to: 1, 2, 3, 4, 5 lub 6 oczek. Jest ich 6. Żaden z możliwych wyników nie jest liczbą dwucyfrową, więc jest 0 wyników spełniających podany w zadaniu warunek.

Obliczymy prawdopodobieństwo wyrzucenia dwucyfrowej liczby oczek.



$$p = \frac{0}{6} = 0$$

Odp. Prawdopodobieństwo wyrzucenia dwucyfrowej liczby oczek jest równe 0.

c) Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek mniejszej niż 7?

p – prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek mniejszej niż 7

Wszystkie możliwe wyniki to: 1, 2, 3, 4, 5 lub 6 oczek. Jest ich 6. Wszystkie z możliwych wyników są mniejsze niż 7, więc jest 6 wyników spełniających podany w zadaniu warunek.

Obliczymy prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek mniejszej niż 7.



$$p = \frac{6}{6} = 1$$

Odp. Prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek mniejszej niż 7 jest równe 1.

Prawdopodobieństwo jest liczbą większą lub równą 0 i jednocześnie mniejszą lub równą 1.



- Jeśli prawdopodobieństwo jest równe 0, to oznacza, że dane zdarzenie nigdy się nie wydarzy – jest **zdarzeniem niemożliwym**.
- Jeśli prawdopodobieństwo jest równe 1, to oznacza, że dane zdarzenie na pewno się wydarzy – jest **zdarzeniem pewnym**.

Ćwiczenie 1.

Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia

- a)** parzystej liczby oczek?
- b)** liczby oczek będącej wielokrotnością liczby 1?
- c)** liczby oczek podzielnej przez 10?

Przykład 2.

Pola i Zosia nie mogły zdecydować się, gdzie pojechać na wycieczkę rowerową. Ustaliły więc, że o kierunku wycieczki zdecyduje losowanie. Spośród przedstawionych na ilustracji kul wylosują jedną kulę.



Jeśli wylosowana kula będzie czerwona lub niebieska, to dziewczęta pojadą na wycieczkę do parku. Natomiast jeśli kula będzie zielona lub biała, to wybiorą się nad jezioro. Uzasadnij, że prawdopodobieństwo pojechania do parku jest mniejsze od prawdopodobieństwa pojechania nad jezioro.

p_1 – prawdopodobieństwo pojechania do parku

p_2 – prawdopodobieństwo pojechania nad jezioro

Wśród kul są: 3 kule czerwone, 2 – zielone, 4 – białe i 2 – niebieskie.
Łącznie jest $3 + 2 + 4 + 2 = 11$ kul.

Pola i Zosia pojadą do parku, jeśli wylosowana kula będzie czerwona lub niebieska. Obliczymy liczbę tych kul. Następnie obliczymy p_1 .



$$3 + 2 = 5$$

$$p_1 = \frac{5}{11}$$

Pola i Zosia pojadą nad jezioro, jeśli wylosowana kula będzie zielona lub biała. Obliczymy liczbę tych kul. Następnie obliczymy p_2 .



$$2 + 4 = 6$$

$$p_2 = \frac{6}{11}$$

Zatem prawdopodobieństwo pojechania do parku jest mniejsze niż prawdopodobieństwo pojechania nad jezioro, ponieważ $\frac{5}{11} < \frac{6}{11}$.

Ćwiczenie 2.

Cezary i Maja chcą zagrać w szachy. Aby ustalić, które z nich rozpocznie grę, postanowili rzucić ośmiościenną kostką do gry. Jeśli na kostce wypadnie liczba podzielna przez 4, to grę rozpocznie Cezary. W przeciwnym przypadku grę rozpocznie Maja. Czy Cezary i Maja mają równe szanse na rozpoczęcie gry? Uzasadnij swoją odpowiedź.



Przykład 3.

W pudełku było 6 kul niebieskich i 7 kul czerwonych. Do pudełka dołożono pewną liczbę kul czerwonych. Losujemy jedną kulę. Teraz prawdopodobieństwo wylosowania kuli niebieskiej jest równe $\frac{1}{3}$. Oblicz, ile kul czerwonych dołożono do pudełka.

x – liczba kul czerwonych, które dołożono do pudełka

W pudełku jest 6 kul niebieskich i $(7 + x)$ kul czerwonych. Teraz prawdopodobieństwo wylosowania kuli niebieskiej jest równe $\frac{6}{6+7+x} = \frac{6}{13+x} = \frac{1}{3}$.

Aby obliczyć liczbę kul czerwonych, które dołożono do pudełka, rozwiążemy równanie. Iloczyn wyrazów skrajnych przyrównamy do iloczynu wyrazów środkowych.



$$\frac{6}{13+x} = \frac{1}{3}$$

$$6 \cdot 3 = 1 \cdot (13 + x)$$

$$18 = 13 + x \quad | -13$$

$$x = 5$$

Odp. Do pudełka dołożono 5 kul czerwonych.

Ćwiczenie 3.

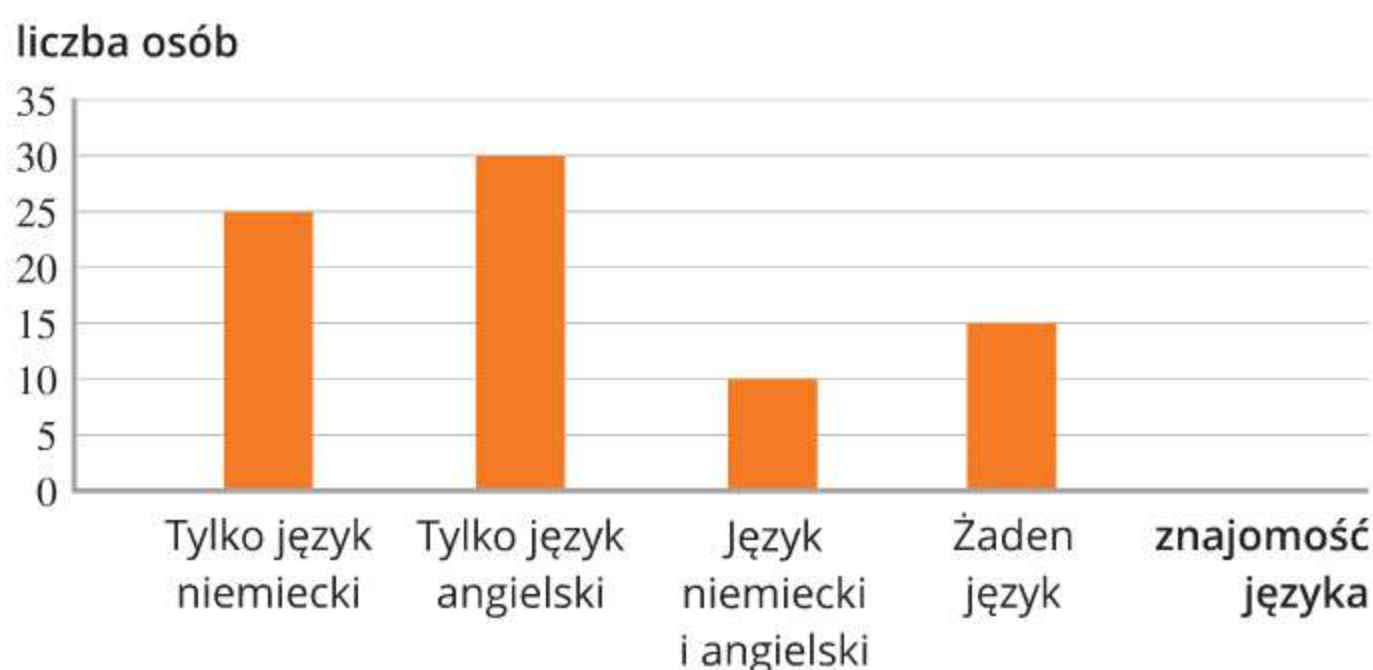
W pudełku było 9 kul zielonych i 6 kul żółtych. Z pudełka zabrano pewną liczbę kul żółtych. Teraz prawdopodobieństwo wylosowania kuli zielonej jest równe $\frac{3}{4}$. Oblicz, ile kul żółtych zabrano z pudełka.

1. W wazonie stoi bukiet, w którym są: 3 róże żółte, 3 – czerwone i 5 – różowych. Zosia wyjęła losowo z wazonu jedną różę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowana róża:

a) jest czerwona, b) nie jest żółta, c) jest żółta lub różowa.

2. W dwóch pojemnikach są kule w trzech kolorach. W pierwszym pojemniku są 3 kule czarne, 5 kul białych i 8 zielonych. W drugim pojemniku są 2 kule niebieskie, 6 kul czerwonych i 4 kule białe. Z każdego pojemnika losujemy po jednej kuli. Uzasadnij, że wylosowanie kuli białej z pierwszego pojemnika jest mniej prawdopodobne niż wylosowanie kuli białej z drugiego pojemnika.

3. Wśród pracowników pewnej firmy przeprowadzono ankietę na temat znajomości języka angielskiego i niemieckiego. Na poniższym diagramie słupkowym przedstawiono wyniki tej ankiety.



Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrana losowo z grupy ankietowanych pracowników osoba zna język niemiecki?

4. Spośród liczb naturalnych: 1, 2, 3, ..., 30 wylosowano jedną liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wylosowana liczba jest

a) sześcianiem liczby naturalnej?
b) liczbą przeciwną do liczby $\sqrt[3]{(-1)^2 - 3^2}$?

5. W klasie Poli stosunek liczby dziewcząt do liczby chłopców jest równy 4 : 3. Wybrano losowo z tej klasy jedną osobę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wybrano chłopca.

6. W koszyku są 3 piłki czerwone i 5 piłek niebieskich. Losujemy jedną piłkę. Ile trzeba dołożyć piłek czerwonych, aby:

a) prawdopodobieństwa wylosowania piłki niebieskiej oraz wylosowania piłki czerwonej były równe?
b) prawdopodobieństwo wylosowania piłki czerwonej było mniejsze od prawdopodobieństwa wylosowania piłki niebieskiej?
c) prawdopodobieństwo wylosowania piłki czerwonej było większe od prawdopodobieństwa wylosowania piłki niebieskiej?

- 7.** Doświadczenie polega na losowaniu jednej liczby spośród wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania
- a) liczby podzielnej przez 9,
 - b) liczby podzielnej przez 10 lub podzielnej przez 15.



- 8.** W pudełku znajduje się 5 kartoników oznaczonych liczbami: -2 , 0 , 3 , -1 , 4 . Losujemy jeden kartonik, zapisujemy na kartce zamieszczonej na nim liczbę i wrzucamy z powrotem kartonik do pudełka. Ponownie losujemy kartonik i zapisujemy umieszczoną na nim liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb, których iloczyn jest liczbą ujemną.



Sprawdź, co umiesz!



- 1.** Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie jedną monetą. Wypisz wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia losowego. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, w którym liczba wyrzuconych orłów jest większa od liczby wyrzuconych reszek.

- 2.** Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że kwadrat liczby wyrzuconych oczek jest liczbą podzielną przez 9.

- 3.** Na loterię przygotowano losy, wśród których jest 14 losów wygrywających i 10 losów pustych. Czy prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu wygrywającego zmieni się, jeśli dołożymy 4 losy puste i 4 losy wygrywające?

E

Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

A.	Tak,	ponieważ	1.	dołożono tyle samo losów wygrywających co pustych.
			2.	zwiększy się łączna liczba losów wygrywających i pustych.
B.	Nie,		3.	zmieni się stosunek liczby losów wygrywających do liczby wszystkich losów.

- 4.** Doświadczenie losowe polega na rzucie sześcienną kostką do gry, a następnie rzucie monetą.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia jest **A** **B**.

A. 8

B. 12

Prawdopodobieństwo wyrzucenia parzystej liczby oczek i orła jest równe **C** **D**.

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{3}{8}$



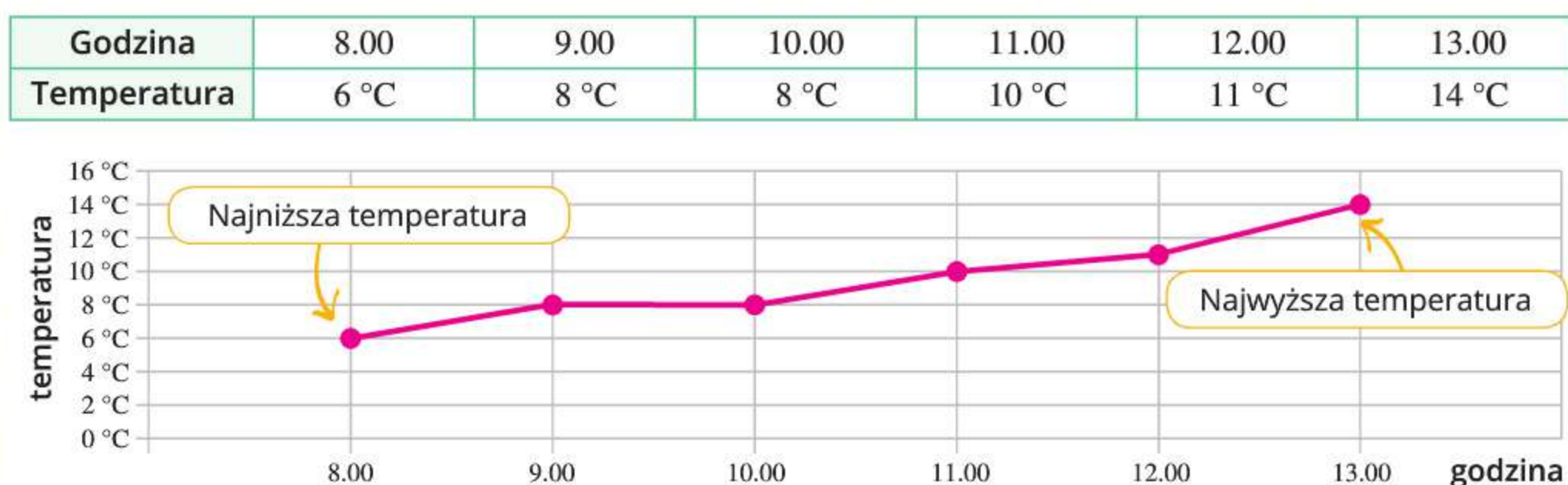
E

PODSUMOWANIE DZIAŁU VI

Statystyka i wstęp do kombinatoryki

Powtórz wiadomości

Wykres liniowy



Średnia arytmetyczna

Średnią arytmetyczną zestawu liczb nazywamy sumę tych liczb podzieloną przez ich liczbę.

Średnia arytmetyczna liczb: 2, 7, 8, 14 i 19 jest równa

$$\frac{2+7+8+14+19}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

Doświadczenie losowe

Doświadczenie, w którym o przebiegu decyduje wyłącznie przypadek, przewidzenie wyniku jest niemożliwe, a czynność tę można wielokrotnie powtarzać, nazywamy **doświadczeniem losowym**.

Doświadczenie losowe	Warunek	Wyniki spełniające warunek
Dwukrotny rzut monetą	wyrzucenie jednego orła	(O, R) (R, O)
	wyrzucenie trzech orłów	brak

Rachunek prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwo p zdarzenia spełniającego podany warunek obliczamy, korzystając ze wzoru

$$p = \frac{\text{liczba wyników spełniających podany warunek}}{\text{liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego}}$$

Podczas losowania jednego losu spośród 5 losów wygrywających i 15 losów przegrywających prawdopodobieństwo otrzymania losu wygrywającego wynosi

$$\frac{5}{5+15} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Prawdopodobieństwo jest liczbą większą lub równą 0 i jednocześnie mniejszą lub równą 1.

- Jeśli $p = 0$, to dane zdarzenie jest **zdarzeniem niemożliwym**.
- Jeśli $p = 1$, to dane zdarzenie jest **zdarzeniem pewnym**.

Sprawdź umiejętności

1. W tabeli przedstawiono wyniki ankiety przeprowadzonej wśród uczniów klas 8. Uczniowie odpowiedzieli na pytanie: *Jaki sport uprawiasz najchętniej?* Każdy z ankietowanych wskazał tylko jeden sport.

Sport	Dziewczęta	Chłopcy
piłka nożna	27	36
siatkówka	23	24
bieganie	21	22
koszykówka	12	12
jazda na rowerze	13	10

- Który sport cieszył się największą popularnością wśród wszystkich ankietowanych?
- Który sport wybrało więcej niż $\frac{1}{4}$ liczby wszystkich ankietowanych uczniów klas 8?
- Które sporty wybrało więcej niż 20 % liczby ankietowanych dziewcząt?
- Uzasadnij, że liczba dziewcząt, które wskazały koszykówkę, stanowi 12,5 % liczby wszystkich dziewcząt.

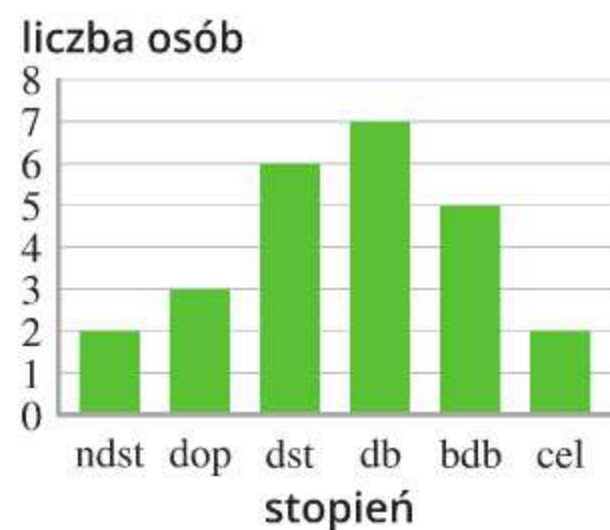
2. Bruno przez 10 dni o tej samej godzinie mierzył termometrem elektronicznym temperaturę powietrza. Pierwszego dnia odnotował temperaturę 2,3 °C. Przez kolejne trzy dni temperatura była o 0,6 °C niższa niż poprzedniego dnia. W piątym i szóstym dniu temperatura była taka sama jak w czwartym dniu. Przez ostatnie dni pomiaru temperatura rosła każdego dnia o taką samą wartość. Ostatniego dnia pomiaru Bruno zanotował 3,7 °C.
- Przedstaw wyniki pomiarów przeprowadzonych przez Brunona na wykresie liniowym.
 - W których dniach pomiaru temperatura była niższa od 1,5 °C?
 - W ciągu ilu dni pomiaru temperatura przekroczyła średnią temperaturę z 10 dni pomiaru?

Informacje do zadań 3. i 4.

Na diagramie słupkowym przedstawiono wyniki sprawdzianu z matematyki 25 uczniów klasy 8a.

3. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Średnia stopni z tego sprawdzianu jest równa 4,56.	P	F
Liczba stopni dostatecznych stanowi 30 % liczby wszystkich stopni z tego sprawdzianu.	P	F



4. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Ponad połowa uczniów klasy 8a uzyskała z tego sprawdzianu stopień **A** **B**.

A. co najwyżej dostateczny

B. nie niższy niż dobry

Stopień dobry ze sprawdzianu otrzymało o **C** **D** uczniów więcej niż stopień bardzo dobry.

C. 40 %

D. 8 %

5. Ola miała cztery stopnie z geografii, których średnia była równa 4,5. Z odpowiedzi otrzymała kolejny stopień i teraz średnia jej stopni jest wyższa o 0,1. Jaki stopień otrzymała Ola z odpowiedzi?

6. Z cyfr: 0, 1, 2, 3, 4 utworzono wszystkie liczby dwucyfrowe, w których cyfry się nie powtarzają. Ustal, ile spośród utworzonych liczb jest podzielnych przez:

- a) 2, b) 3, c) 5, d) 10, e) 13.

7. Doświadczenie losowe polega na rzucie ośmiościenną kostką do gry i rzucie monetą. Najpierw rzuca się kostką, a następnie monetą.

- a) Ustal, ile jest wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia losowego.
b) Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek nie większej niż 3 oraz orła?

E 8. W paczce znajdują się jednakowe koperty na listy. Jest w niej 8 kopert czerwonych, 5 – żółtych, 3 koperty różowe i 10 kopert niebieskich. Z paczki losujemy jedną kopertę.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo wylosowania koperty niebieskiej jest równe

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{5}{13}$ D. $\frac{3}{4}$

E 9. Kasia losuje z pudełka jedną z ponumerowanych od 1 do 4 kul. Jacek rzuca sześcienną kostką do gry.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Wyrzucenie parzystej liczby oczek przez Jacka jest bardziej prawdopodobne niż wylosowanie kuli o numerze będącym liczbą parzystą przez Kasię.	P	F
Wylosowanie przez Kasię kuli o numerze będącym liczbą podzielną przez 3 jest tak samo prawdopodobne, jak wyrzucenie przez Jacka liczby oczek podzielnej przez 3.	P	F

10. Do klasy 8a uczęszcza 10 dziewcząt i 11 chłopców, do klasy 8b – 9 dziewcząt i 10 chłopców, a do klasy 8c – 8 dziewcząt i 12 chłopców. Spośród wszystkich uczniów tych klas wybrano losowo jedną osobę.

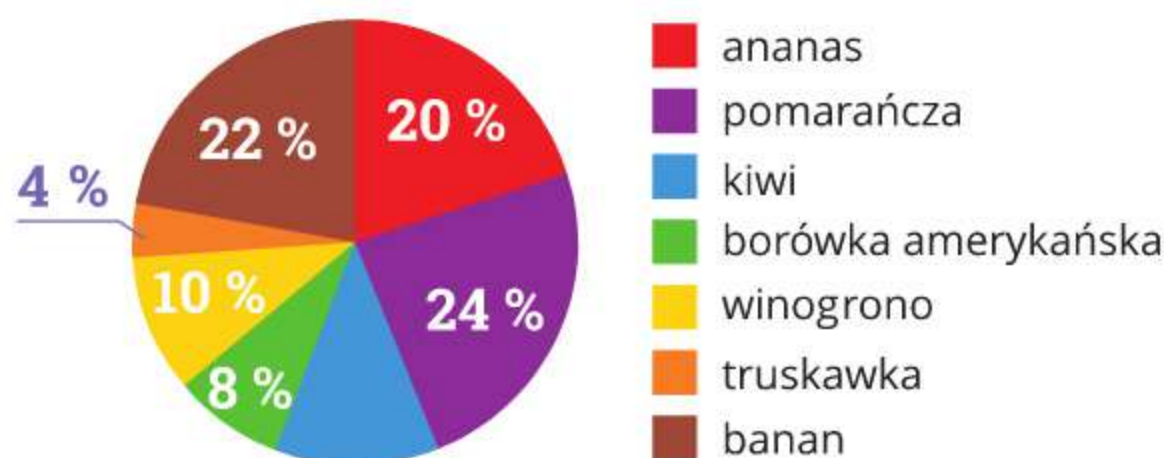
- a) Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania dziewczyny z klasy 8b?
b) O ile większe jest prawdopodobieństwo wylosowania chłopca z klasy 8c od prawdopodobieństwa wylosowania dziewczyny z klasy 8a?

11. W koszu jest 8 kul białych, 9 – zielonych i 13 – czarnych.

- a) Ile trzeba dołożyć kul białych, aby podczas losowania jednej kuli, prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej było równe $\frac{1}{3}$?
b) Ile trzeba dołożyć kul czarnych, aby podczas losowania jednej kuli, prawdopodobieństwo wylosowania kuli zielonej było równe $\frac{3}{13}$?

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. Na procentowym diagramie kołowym przedstawiono udział poszczególnych składników w sałatce owocowej. Do zrobienia sałatki użyto 100 g borówek amerykańskich.



- Ile gramów kiwi użyto do zrobienia sałatki?
- Ile razy więcej zużyto pomarańczy niż truskawek?
- O ile gramów jest mniej winogron od bananów w tej sałatce?

2. Ania wybrała się do znajomych. Wyszła z domu o godzinie 9.00. Na przystanek tramwajowy, który jest oddalony o 500 m od jej domu, szła 10 min. Na przystanku czekała 5 min na przyjazd tramwaju. Przejazd tramwajem odcinka trasy o długości 3,5 km trwał dwa razy dłużej niż droga Ani na przystanek. Ostatni etap podróży, który był o 100 % dłuższy od odcinka drogi z domu na przystanek, przeszła pieszo, co trwało kwadrans.

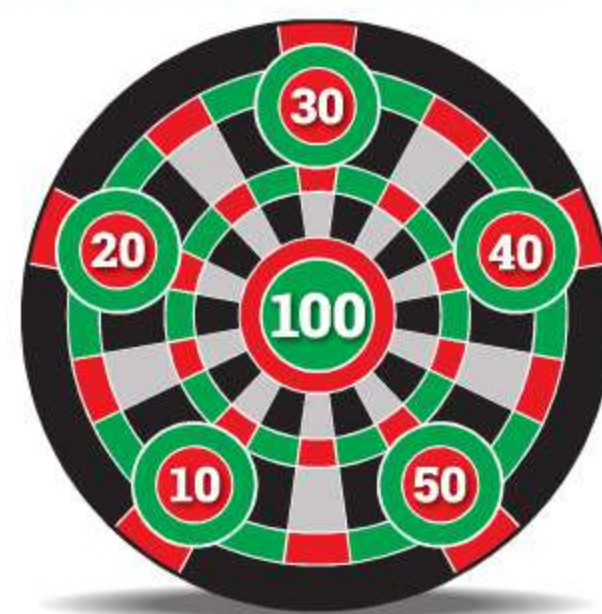
- Przedstaw na wykresie liniowym zależność drogi przebytej przez Anię od czasu.
- Ile kilometrów pokonała Ania?
- O której godzinie zakończyła podróż?

3. Kasia i Tomek rzucają rzutkami do tarczy cyfrowej przedstawionej na ilustracji. Oboje wykonali po dziesięć rzutów do tarczy i uzyskali następujące wyniki:

Kasia: 20, 30, 40, 50, 30, 50, 100, 40, 30, 50 punktów;

Tomek: 30, 40, 50, 50, 20, 100, 30, 100, 30, 20 punktów.

- Przedstaw na jednym diagramie słupkowym wyniki rzutów Kasi i Tomka.
- Oblicz średnią liczbę punktów uzyskanych łącznie przez Kasię i Tomka.
- Na procentowym diagramie kołowym przedstaw dane dotyczące łącznej liczby trafień Kasi i Tomka w poszczególne strefy.



4. W sklepie zatrudnionych jest czterech sprzedawców i kierownik. Każdy sprzedawca otrzymuje takie samo wynagrodzenie. Miesięczna średnia zarobków wszystkich pracowników sklepu wynosi 4800 zł. Jeśli podczas obliczania średniej nie uwzględnimy miesięcznych zarobków kierownika, to średnia zarobków zmaleje o 600 zł. O ile procent miesięczne zarobki kierownika są większe od miesięcznych zarobków sprzedawcy? Wynik podaj z dokładnością do 1 %.

- E 5.** Po sprawdzianie z biologii okazało się, że 25 % uczniów otrzymało stopień bardzo dobry, 30 % – dobry, 20 % – dostateczny, a dwóch uczniów – stopień dopuszczający. Pozostali uczniowie otrzymali stopień niedostateczny. Średnia wszystkich stopni z tego sprawdzianu wyniosła 3,4. Ile uczniów otrzymało stopień niedostateczny? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
- A.** 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

- 6.** Ile różnych liczb czterocyfrowych nieparzystych można zapisać, zmieniając kolejność cyfr w zapisie dziesiętnym liczby 1223?

- 7.** Kłódka jest zamykana i otwierana za pomocą kodu, który składa się z jednej litery spośród: A, B, C, D oraz dwóch cyfr spośród: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Cyfry w kodzie mogą się powtarzać. Ile wszystkich takich kodów można utworzyć?



- 8.** Spośród wszystkich liczb dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby

a) podzielnej przez 6 i 8,

b) podzielnej przez 6 lub 8.

- E 9.** Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
W czterokrotnym rzucie monetą prawdopodobieństwo wyrzucenia co najmniej dwa razy orła wynosi

A. $\frac{5}{8}$

B. $\frac{5}{16}$

C. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{11}{16}$

- 10.** W pojemniku jest 40 kul, w tym 5 kul zielonych. Do pojemnika dołożono pewną liczbę kul, wśród których jedna jest zielona. W przypadku losowania z pojemnika jednej kuli przed dołożeniem oraz po dołożeniu kul prawdopodobieństwo wylosowania kuli zielonej się nie zmieniło. Ile kul w kolorze innym niż zielony dołożono do pojemnika?

- 11.** Sześcian, którego wszystkie ściany pomalowano na niebiesko, rozcięto na 27 jednakowych małych sześciątów i włożono do koszyka. Losujemy jeden mały sześcian. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowany sześcian ma

a) dokładnie jedną ścianę pomalowaną na niebiesko,

b) dwie ściany pomalowane na niebiesko.

- E 12.** Losujemy jedną liczbę spośród liczb naturalnych dwucyfrowych, które są większe od 55 i mniejsze od 91.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 7 jest równe

A. $\frac{4}{35}$

B. $\frac{1}{7}$

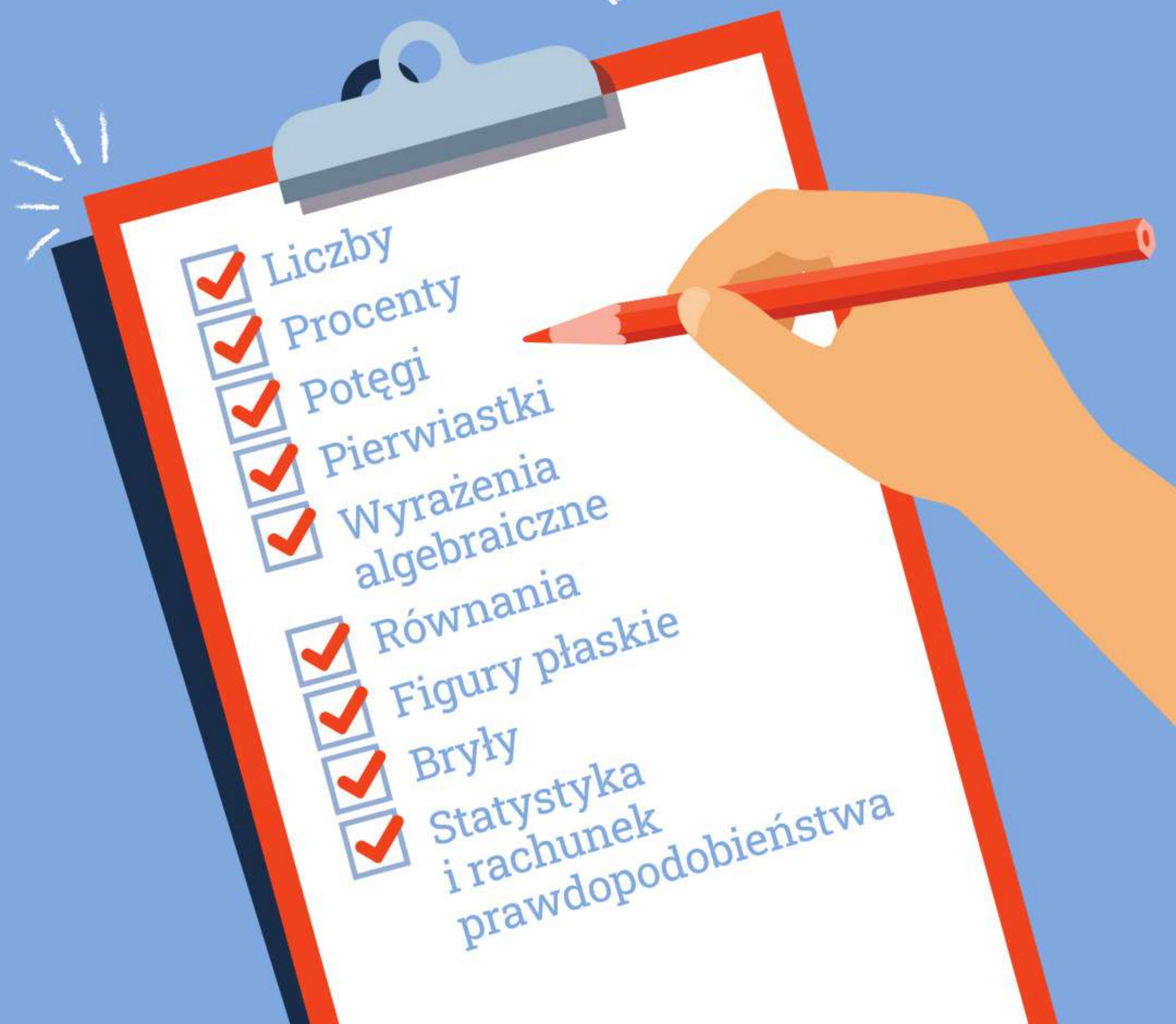
C. $\frac{6}{35}$

D. $\frac{5}{34}$

DZIAŁ VII

POWTÓRZENIE

To ci się
przyda!



1. Liczby

Powtórz wiadomości

Liczby

Liczby naturalne to: 0, 1, 2, 3, 4, ...

Liczby całkowite to: ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

Liczba wymierna to każda liczba, którą można przedstawić w postaci ułamka zwykłego, czyli $\frac{a}{b}$, gdzie a jest dowolną liczbą całkowitą i b jest liczbą całkowitą różną od zera.

Ma ona rozwinięcie dziesiętne skończone lub nieskończone okresowe, np. 0; 4; -7;
 $-2\frac{1}{4} = -2,25$; 0,97; 3,(1); $\sqrt{4} = 2$.

Liczby rzeczywiste

Liczby wymierne

-2,(3) $\frac{9}{8}$ 4,15

Liczby całkowite

-1303 -5
 -12

Liczby naturalne

3 0
 101

Liczby niewymierne

$\sqrt{2}$

π

$-\sqrt[3]{7}$

Liczba niewymierna to każda liczba, która ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone nieokresowe, np. $\sqrt{3} = 1,7320508...$; $5\sqrt{6} = 12,247448...$; $\sqrt[3]{10} = 2,1544346...$

Liczbą przeciwną do liczby a jest liczba $-a$.

Liczba	Liczba przeciwna
-4	4
$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$

Odwrotnością liczby a jest liczba $\frac{1}{a}$, gdzie a jest liczbą całkowitą różną od zera. Mówimy również, że **liczbą odwrotną** do liczby a jest liczba $\frac{1}{a}$.

Odwrotnością ułamka $\frac{a}{b}$ jest ułamek $\frac{b}{a}$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi różnymi od zera.

Liczba	Odwrotność liczby
$8 = \frac{8}{1}$	$\frac{1}{8}$
$0,3 = \frac{3}{10}$	$\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$
$-8\frac{1}{2} = -\frac{17}{2}$	$-\frac{2}{17}$

Wartość bezwzględna

Odległość liczby a od liczby 0 na osi liczbowej nazywamy **wartością bezwzględną** liczby a .

Wartość bezwzględną liczby a oznaczamy $|a|$, np. $|7| = 7$, $|-1\frac{1}{4}| = 1\frac{1}{4}$.

Wielokrotności i dzielniki liczb naturalnych

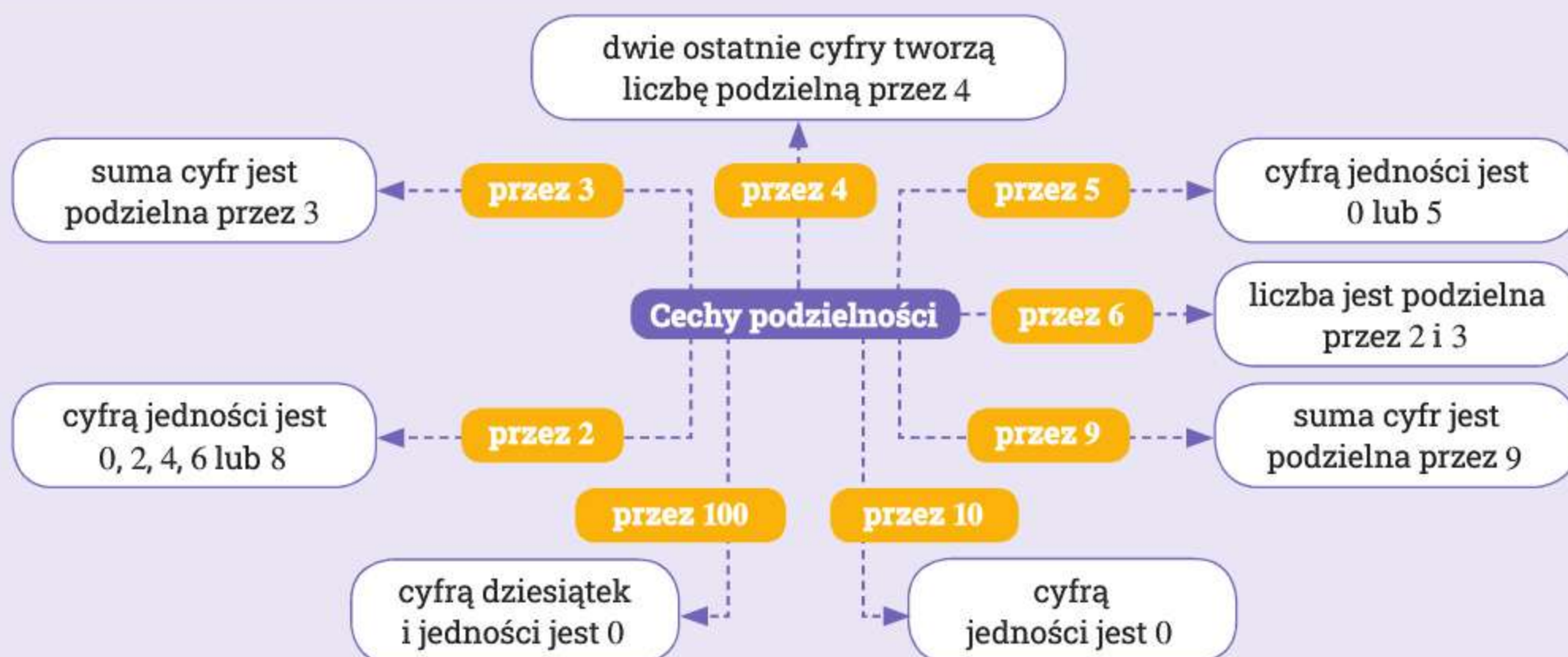
Wielokrotnością liczby naturalnej n nazywamy każdy iloczyn liczby n i dowolnej liczby naturalnej. Najmniejszą wielokrotnością każdej liczby naturalnej jest 0. Każda liczba naturalna różna od 0 ma nieskończenie wiele wielokrotności.

Wielokrotności liczby 20 to: 0, 20, 40, 60, 80, ...

Liczbę naturalną k nazywamy **dzielnikiem** liczby naturalnej n , gdy wynik dzielenia liczby n przez liczbę k jest liczbą naturalną.

Dzielniki liczby 20 to: 1, 2, 4, 5, 10, 20.

Cechy podzielności liczb naturalnych



Przykład 1.

Sprawdź, które z liczb: 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 100 są dzielnikami liczby 1080.

Ostatnia cyfra liczby 1080 to 0.



Liczby 2, 5, 10 są dzielnikami liczby 1080.

Suma cyfr liczby 1080 jest równa $1 + 0 + 8 + 0 = 9$.



Liczby 3 i 9 są dzielnikami liczby 1080, ponieważ suma jej cyfr dzieli się przez 3 i przez 9.

Dwie ostatnie cyfry liczby 1080 tworzą liczbę 80, która jest podzielna przez 4.



Liczba 4 jest dzielnikiem liczby 1080.

Liczba 1080 jest podzielna przez 2 i przez 3.



Liczba 6 jest dzielnikiem liczby 1080.

Dwie ostatnie cyfry liczby 1080 nie są zerami.



Liczba 100 nie jest dzielnikiem liczby 1080.

Odp. Liczby 2, 3, 4, 5, 6, 9 oraz 10 są dzielnikami liczby 1080.

Liczby pierwsze i złożone

Liczby pierwsze to liczby naturalne większe od 1, które mają dokładnie dwa różne dzielniki: liczbę 1 i samą siebie. Liczby pierwsze to np. 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

Liczby złożone to liczby naturalne większe od 1, które mają więcej niż dwa dzielniki. Liczby złożone to np. 4, 6, 8, 9, 10, 12, ...

Liczby 0 i 1 nie są ani liczbami pierwszymi, ani złożonymi.



Rozkład liczby na czynniki pierwsze

Rozkład liczby na czynniki pierwsze polega na przedstawieniu jej w postaci iloczynu liczb pierwszych, np. $420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Przykład 2.

Przedstaw liczbę 360 w postaci iloczynu liczb pierwszych.
 $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

Największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność

Największym wspólnym dzielnikiem (NWD) dwóch lub więcej liczb naturalnych nazywamy największą liczbę naturalną, przez którą są podzielne jednocześnie wszystkie dane liczby.

Najmniejszą wspólną wielokrotnością (NWW) dwóch lub więcej liczb naturalnych nazywamy najmniejszą liczbę naturalną, różną od zera, której dzielnikami są dane liczby.

Przykład 3.

Wyznacz NWD i NWW liczb 24 i 36.

Liczby 24 i 36 rozłożymy na czynniki pierwsze. Jeżeli czynnik w rozkładzie liczby 24 jest również czynnikiem w rozkładzie liczby 36, to zaznaczymy go tym samym kolorem.

Iloczyn wspólnych czynników z rozkładu liczb 24 i 36 jest ich największym wspólnym dzielnikiem.

Iloczyn największego wspólnego dzielnika liczb 24 i 36 oraz liczb, które występują tylko w rozkładzie na czynniki jednej z tych liczb, jest ich najmniejszą wspólną wielokrotnością.

24	2	36	2
12	2	18	2
6	2	9	3
3	3	3	3
1		1	

$\Rightarrow$ $\text{NWD}(24, 36) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

$\Rightarrow$ $\text{NWW}(24, 36) =$
 $= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 72$

Zaokrąglanie liczb

- 1 Znajdujemy cyfrę w rzędzie, do którego zaokrąglamy.
- 2 Patrzymy na kolejną cyfrę.
 - Jeśli jest mniejsza od 5, to cyfrę w rzędzie, do którego zaokrąglamy, pozostawiamy bez zmian, a kolejne cyfry zastępujemy zerami. Takie zaokrąglanie nazywamy zaokrągleniem z niedomiarem, np. zaokrąglenie do setek: $7321,97 \approx 7300$.
 - Jeśli jest większa od 5 lub równa 5, to cyfrę w rzędzie, do którego zaokrąglamy, zwiększamy o 1, a kolejne cyfry zastępujemy zerami. Takie zaokrąglenie nazywamy zaokrągleniem z nadmiarem, np. zaokrąglenie do części dziesiątych: $36,792 \approx 36,8$.

Liczba	Rząd zaokrąglania	Zaokrąglona liczba	Zaokrąglenie
23 945,1	tysiące	24 000	z nadmiarem
436,29	jedności	436	z niedomiarem
15,999	części setne	16,00 = 16	z nadmiarem

System rzymski

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

- 1 Obok siebie mogą stać nie więcej niż trzy jednakowe znaki: I, X, C lub M.
 - 2 Znaki V, L oraz D mogą występować w danej liczbie tylko raz.
 - 3 Bezpośrednio przed znakiem o większej wartości może stać znak o mniejszej wartości.
 - 4 Znaki V, L oraz D mogą poprzedzać tylko znak o mniejszej wartości.
- Jeśli przed znakiem większej liczby znajduje się znak mniejszej liczby, to od liczby większej odejmujemy liczbę mniejszą:

$$XL = 50 - 10 = 40$$

- Jeśli po znaku większej liczby znajduje się znak mniejszej liczby, to liczby te dodajemy:

$$DC = 500 + 100 = 600$$

$$MMCDLXXI = 1000 + 1000 + (500 - 100) + 50 + 10 + 10 + 1 = 2471$$

Kolejność wykonywania działań

I. działania w nawiasach

II. potęgowanie

III. mnożenie i dzielenie w kolejności występowania

$$\begin{aligned}
 & \frac{8 \cdot (3,1 - 2,6)^2}{1\frac{1}{5}} - \frac{2}{3} = \frac{8 \cdot (0,5)^2}{\frac{6}{5}} - \frac{2}{3} = \frac{8 \cdot 0,25}{\frac{6}{5}} - \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{6}{5}} - \frac{2}{3} = 2 : \frac{6}{5} - \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 1 \\
 & \text{IV. dodawanie i odejmowanie w kolejności występowania}
 \end{aligned}$$

Rozwiąż zadania

1. Oblicz różnicę między największą liczbą czterocyfrową i najmniejszą liczbą trzycyfrową.

2. Zapisz wszystkie liczby trzycyfrowe, których suma cyfr jest równa 3.

E 3. Czy iloczyn dwóch różnych liczb pierwszych może być liczbą parzystą? Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

A.	Tak,	ponieważ	1.	iloczyn dwóch liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą.
			2.	iloczyn dwóch liczb naturalnych jest liczbą parzystą, gdy np. obie liczby są parzyste.
B.	Nie,		3.	iloczyn liczby 2 i dowolnej liczby naturalnej jest liczbą parzystą.

4. Dana jest liczba $a = 54 - 9 \cdot 2 + 1$. Sprawdź, czy liczba a jest liczbą pierwszą.

E 5. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Rozwinięcie dziesiętne liczby $\frac{3}{11}$ jest równe $0,(72)$.	P	F
Liczba $0,6(45)$ jest większa od liczby $0,(645)$.	P	F
Setną cyfrą po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $12,2(21)$ jest cyfra 2.	P	F

6. Pola z mamą zamierzają pojechać pociągiem z Warszawy do Krakowa. Mama poprosiła córkę o znalezienie w internecie połączenia kolejowego na tej trasie między godziną 8.00 a 9.00. Pola znalazła dwa połączenia, które spełniają ten warunek. Oblicz, ile czasu mogą zaoszczędzić, wybierając połączenie, przy którym podróż trwa krócej.

STACJA	CZAS	ŚRODEK TRANSPORTU	
Warszawa Centralna Kraków Główny	odj. 08:43 przyj. 11:32		KUP BILET
Warszawa Centralna Kraków Główny	odj. 08:48 przyj. 11:06		KUP BILET

Informacje do zadań 7. i 8.

Na rysunku przedstawiono kartkę z kalendarza. Zosia, Kasia i Basia są siostrami. Zosia obchodzi urodziny 10 czerwca, Kasia 2 lipca, a Basia 1 grudnia.



- 7.** Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Urodziny Kasi w 2022 roku wypadły

- A.** w niedzielę. **B.** w czwartek. **C.** w piątek. **D.** w sobotę.

- 8.** Po ilu dniach od urodzin Zosi wypadają urodziny Basi? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A.** 172 **B.** 173 **C.** 174 **D.** 175

- 9.** Dane są liczby: $x = -1,5$, $y = 4\frac{1}{2} : 3$, $z = 3 : 4\frac{1}{2}$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Liczby x i y są liczbami przeciwnymi.	P	F
Liczba x jest odwrotnością liczby z .	P	F
Liczba y jest odwrotnością liczby z .	P	F

- 10.** Odpowiedz na pytanie.

- a)** Baton kosztuje 3,80 zł. Ile najwięcej takich batonów można kupić za 20 zł?
- b)** Do podlania jednej rabaty kwiatowej potrzeba 2,75 l wody. Woda do podlewania gromadzona jest w pojemnikach o pojemności 12 l każdy. Ile najmniej takich pojemników trzeba przygotować, aby podlać 18 rabat kwiatowych?



- 11.** Dane są dwie liczby: $a = -1\frac{2}{3}$ i $b = 3\frac{3}{4}$.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Odwrotnością sumy liczb a i b jest liczba **A** **B**.

- A.** $\frac{12}{25}$ **B.** $-\frac{25}{12}$

Iloczyn liczby a oraz liczby przeciwnej do b jest równy **C** **D**.

- C.** $\frac{4}{9}$ **D.** $\frac{25}{4}$

E 12. Dane są liczby $x = 3,84$ i $y = 1,5$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Iloczyn liczb x i y jest równy 5,34.	P	F
Wartość wyrażenia $\frac{x}{y}$ jest równa 2,56.	P	F

E 13. Dane są liczby $p = \frac{11}{5}$ i $r = -0,8$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Różnica $ p - r $ jest równa 3.	P	F
Prawdziwa jest zależność $p < r $.	P	F

14. Zaokrąglaj liczby z podaną obok dokładnością.

- a) 359; 1342; 2697 z dokładnością do setek.
- b) 4,37; 13,758; 6,943 z dokładnością do części dziesiątych.
- c) 9,187; 0,6538; $\frac{7}{9}$ z dokładnością do części setnych.

15. Wykonaj dzielenie. Wynik podaj ze wskazaną obok dokładnością.

- a) $359 : 5$; $1342 : 9$; $2697 : 13$ z dokładnością do dziesiątek.
- b) $8,59 : 7$; $13,758 : 11$; $6,973 : 2,5$ z dokładnością do części dziesiątych.
- c) $2,187 : 8$; $0,568 : 3,4$; $9 : 13$ z dokładnością do części setnych.

E 16. Dane są dwie liczby: $a = 10,534$ i $b = 11,276$.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Zaokrąglenie liczby a do jedności jest równe **A B**.

A. 10 **B.** 11

Różnica zaokrągleń do części dziesiątych liczb b oraz a jest równa **C D**.

C. 0,8 **D.** 0,7

17. Wyznacz wszystkie dzielniki podanej liczby.

- a) 21 b) 36 c) 90 d) 125 e) 163

18. Zapisz wszystkie liczby, które są wielokrotnościami

a) liczby 16 mniejszymi od 100,

b) liczby 43 nie większymi od 215.

19. Spośród liczb: 1002, 9809, 750, 4536, 555, 3172, 702 wybierz wszystkie podzielne przez:

a) 5,

b) 9,

c) 4,

d) 2 i przez 3.

20. W rozkładzie na czynniki pierwsze pewnej liczby występują tylko dwie trójki i trzy piątki. Jaka to liczba?

21. Wyznacz NWD i NWW liczb 48 i 30.

22. Dane są liczby $a = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^4$ i $b = 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

$\text{NWD}(a, b) = 5 \cdot 7^2.$	P	F
$\text{NWW}(a, b) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^4.$	P	F

23. Pan Jan postanowił wymienić ogrodzenie działki wzdłuż boku o długości 36 m. Obecnie słupki są rozmieszczone co 2,4 m, a nowe słupki będą rozmieszczane co 1,8 m. Ile dodatkowych dołków musi wykopać pan Jan przy wymianie ogrodzenia?

24. Ile jest dodatnich ułamków właściwych o mianowniku równym 50? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

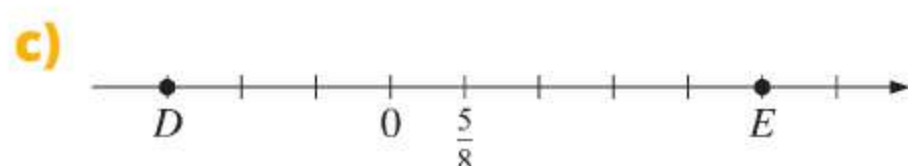
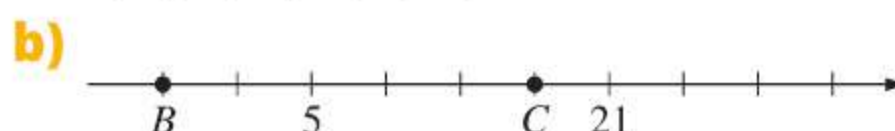
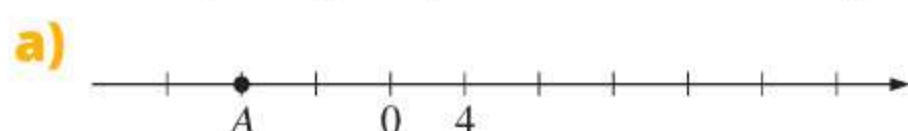
A. 49

B. 50

C. 51

D. nieskończenie wiele.

25. Ustal współrzędne punktów oznaczonych literami: A, B, C, D, E, F, G, H .



26. Oblicz.

a) $(110 - 5 \cdot 7) : 5^2$

b) $7 + 6 \cdot (-2)$

c) $6 \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-3)^2$

27. Oblicz.

a) $3\frac{4}{7} \cdot (5 - 4\frac{2}{15})$

b) $8\frac{7}{12} - 2\frac{3}{4} : \frac{3}{8}$

c) $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} \cdot (-\frac{2}{5})$

28. Oblicz.

a) $6,48 : 0,8 \cdot (-2,25)$ **b)** $\frac{2}{9} \cdot 8,1 - 5,1 : 3\frac{2}{5}$ **c)** $(1\frac{3}{8} - 2,5)^2$ **d)** $(3\frac{2}{3} - 5)^2 \cdot (1,5)^3$

29. Na działce o powierzchni 1,8 a rosną truskawki, maliny i poziomki. Truskawki zajmują 0,5 a, maliny o 0,2 a więcej niż truskawki. Pozostałą powierzchnię zajmują poziomki. Jaką część powierzchni działki zajmują poziomki? Odpowiedź podaj w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

30. Pola kupiła 35 dag sera w cenie 56 zł za kilogram oraz 1,6 kg jabłek w cenie 4,90 zł za kilogram. Za zakupy zapłaciła banknotem 50-złotowym. Ile reszty otrzymała Pola?



31. Sok zajmował $\frac{3}{5}$ objętości butelki o pojemności $2\frac{1}{2}$ l. Połowę soku z butelki przelano do dzbanka o pojemności $\frac{9}{10}$ l. Jaką część pojemności dzbanka zajmuje wlany sok?

E 32. Mama Kasi kupiła trzy słoiki dżemu. W pierwszym słoiku było 0,2 l dżemu, w drugim 350 ml, a w trzecim $\frac{3}{5}$ l.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P** – jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Łącznie w pierwszym i drugim słoiku było więcej dżemu niż w trzecim.	P	F
W trzecim słoiku jest trzy razy więcej dżemu niż w pierwszym.	P	F

33. Liczby zapisane w systemie rzymskim przedstaw w systemie dziesiętkowym.

a) DCCCXI **b)** MCMLXXVI **c)** MMDLIX **d)** CDXLIV

E 34. Dokończ zadanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba 2694 zapisana w systemie rzymskim ma postać

A. MMCDXCIV **B.** MMDCXCIV **C.** MMDCCXIV **D.** MMCDXCIV

E 35. O ile liczba MMCM jest większa od liczby MDCXL? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. MCCCXL **B.** MCCLX **C.** MCCXL **D.** MCDLX

2. Procenty

Powtórz wiadomości

Proporcje

Dwie dodatnie wielkości są **wprost proporcjonalne**, gdy wraz ze **wzrostem** jednej wielkości druga **rośnie tyle samo razy**, a wraz ze **zmniejszeniem** jednej wielkości druga **maleje tyle samo razy**.

Iloraz wielkości wprost proporcjonalnych jest stały, np. w ruchu ze stałą prędkością (v) długość przebytej drogi (s) jest wprost proporcjonalna do czasu jazdy (t), tzn. $v = \frac{s}{t}$.

Proporcja to równość dwóch ilorazów:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

gdzie $b \neq 0$, $d \neq 0$. W proporcji iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych: $a \cdot d = b \cdot c$.

Przykład 1.

Ela i Kuba wybrali się na targ. Kuba kupił 5,5 kg wiśni i zapłacił za nie 33 zł. Ela kupiła 3,5 kg takich samych wiśni. Oblicz, ile Ela zapłaciła za wiśnie.

Oznaczmy przez x kwotę w złotych, za którą Ela kupiła wiśnie.

Liczba kilogramów zakupionych wiśni jest wprost proporcjonalna do kwoty, jaką musimy wydać za ich zakup. Ułożymy proporcję.

$$\Rightarrow \frac{33}{5,5} = \frac{x}{3,5}$$

Iloczyn wyrazów skrajnych przyrównamy do iloczynu wyrazów środkowych.

$$\Rightarrow \begin{aligned} 33 \cdot 3,5 &= 5,5x \\ 5,5x &= 115,5 \end{aligned}$$

Aby obliczyć x , należy podzielić 115,125 przez 5,5.

$$\Rightarrow \begin{aligned} 5,5x &= 115,5 \quad | : 5,5 \\ x &= \frac{115,5}{5,5} = \frac{1155}{55} = 21 \text{ [zł]} \end{aligned}$$

Odp. Ela zapłaciła za wiśnie 21 zł.

Procenty

Jeden procent (1 %) pewnej wielkości to **jedna setna** tej wielkości.

Sto procent (100 %) pewnej wielkości to **jedna całość**.

p % pewnej wielkości to $\frac{p}{100}$ tej wielkości.

Np. $3\% = \frac{3}{100}$, $52\% = \frac{52}{100} = \frac{13}{25}$, $120\% = \frac{120}{100} = 1\frac{20}{100} = 1\frac{1}{5}$.

Zamiana procentu na liczbę i odwrotnie

Zamiana procentu	
na ułamek zwykły lub liczbę mieszaną	na ułamek dziesiętny
$85 \% = \frac{85}{100} = \frac{17}{20}$	$40 \% = \frac{40}{100} = 0,4$
$2\frac{1}{3} \% = \frac{2\frac{1}{3}}{100} = \frac{\frac{7}{3}}{100} = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{100} = \frac{7}{300}$	$33,5 \% = \frac{33,5}{100} = \frac{335}{1000} = 0,335$

Zamiana ułamka zwykłego lub liczby mieszanej	Zamiana ułamka dziesiętnego
na procent	
$\frac{4}{20} = \frac{20}{100} = 20 \%$	$0,52 = \frac{52}{100} = 52 \%$
$6\frac{7}{25} = 6\frac{28}{100} = \frac{628}{100} = 628 \%$	$0,003 = \frac{3}{1000} = \frac{0,3}{100} = 0,3 \%$
$1\frac{1}{7} = \frac{8}{7} \cdot 100 \% = \frac{800}{7} \% = 114\frac{2}{7} \%$	$18 = \frac{18}{1} = \frac{1800}{100} = 1800 \%$

Obliczanie procentu danej liczby

Aby obliczyć **procent danej liczby**, należy zamienić procent na ułamek zwykły lub dziesiętny i pomnożyć go przez tę liczbę.

$$p \% \text{ liczby } a \text{ jest równe } \frac{p}{100} \cdot a.$$

Np. $24 \% \text{ liczby } 80 \text{ wynosi } 0,24 \cdot 80 = \frac{24}{100} \cdot 80 = \frac{24}{5} \cdot 4 = \frac{96}{5} = 19\frac{1}{5}.$

Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba

Aby obliczyć, **jakim procentem jednej liczby jest druga liczba**, należy kolejno:

- 1 ustalić, jakim ułamkiem pierwszej liczby jest druga liczba;
- 2 wyrazić otrzymany wynik w procentach.

Przykład 2.

Cenę rocznego karnetu na basen obniżono z 1200 zł na 960 zł. Oblicz, jakim procentem ceny początkowej karnetu jest jego cena po obniżce.

Podzielimy cenę końcową przez cenę początkową, a otrzymany wynik pomnożymy przez 100 %.



$$\frac{960}{1200} \cdot 100 \% = \frac{960}{12} \% = 80 \%$$

Odp. Cena karnetu po obniżce stanowi 80 % jego ceny początkowej.

Obliczanie liczby, gdy dany jest jej procent

Aby wyznaczyć liczbę x , której p % jest równe a :

- 1 obliczamy wartość 1 % liczby x , dzieląc a przez p ,
- 2 mnożymy otrzymaną wartość przez 100.

Przykład 3.

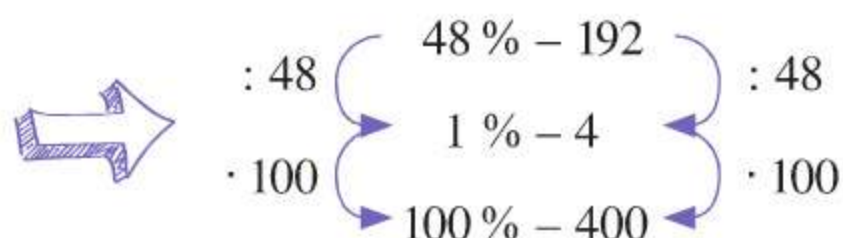
Wyznacz liczbę, której 48 % jest równe 192.

Sposób I

48 % szukanej liczby to 192.

1 % szukanej liczby to 4.

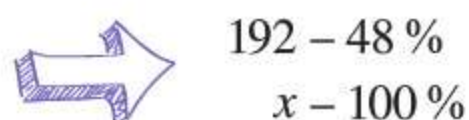
100 % szukanej liczby to 400.


$$\begin{array}{l} : 48 \quad \left(\begin{array}{l} 48 \% - 192 \\ 1 \% - 4 \end{array} \right) : 48 \\ \cdot 100 \quad \left(\begin{array}{l} \\ 100 \% - 400 \end{array} \right) \cdot 100 \end{array}$$

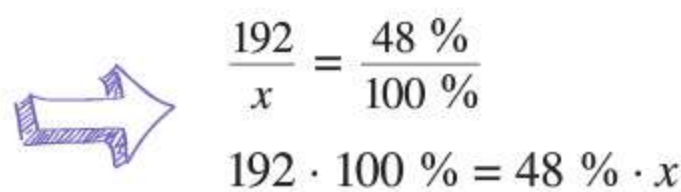
Sposób II

Oznaczmy przez x szukaną liczbę.

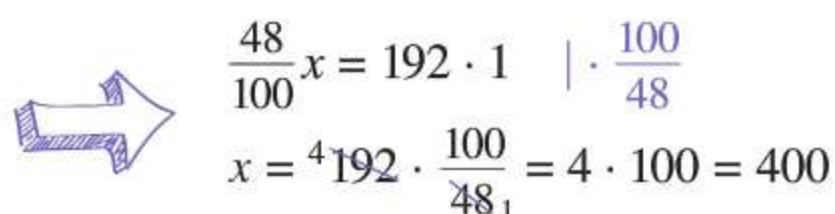
Zastosujemy metodę proporcji. Zapiszemy w jednej kolumnie liczby, a w drugiej kolumnie procenty, które im odpowiadają.


$$\begin{array}{l} 192 - 48 \% \\ x - 100 \% \end{array}$$

Ułożymy proporcję, a następnie iloczyn wyrazów skrajnych przyrównamy do iloczynu wyrazów środkowych.


$$\begin{array}{l} \frac{192}{x} = \frac{48 \%}{100 \%} \\ 192 \cdot 100 \% = 48 \% \cdot x \end{array}$$

Zamienimy 48 % oraz 100 % na liczby. Następnie obliczymy wartość x .


$$\begin{array}{l} \frac{48}{100} x = 192 \cdot 1 \quad | \cdot \frac{100}{48} \\ x = {}^4_1 192 \cdot \frac{100}{48_1} = 4 \cdot 100 = 400 \end{array}$$

O ile procent więcej, o ile procent mniej

Aby obliczyć, o ile procent:

- liczba a jest większa od liczby b , wykonujemy następujące działanie:

$$\frac{a-b}{b} \cdot 100 \%.$$

Np. O ile procent liczba 200 jest większa od liczby 40?

$$\frac{200-40}{40} \cdot 100 \% = \frac{{}_4 160}{{}_1 40} \cdot 100 \% = 4 \cdot 100 \% = 400 \%$$

- liczba a jest mniejsza od liczby b , wykonujemy następujące działanie:

$$\frac{b-a}{b} \cdot 100 \%.$$

Np. O ile procent liczba 40 jest mniejsza od liczby 200?

$$\frac{200-40}{200} \cdot 100 \% = \frac{160}{{}_2 200} \cdot 100^1 \% = \frac{160}{2} \% = 80 \%$$

Rozwiąż zadania

- E** 1. Za 3,8 kg sera zapłacono 95 zł.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Za 4,2 kg tego sera zapłacono 110 zł.	P	F
Kilogram tego sera kosztuje 25 zł.	P	F

2. Pan Jan przejechał samochodem osobowym trasę o długości 72 km z prędkością 60 km/h. O której godzinie dotarł do celu, jeśli wyjechał o 8.35?

3. Samochód jedzie ze stałą prędkością 84 km/h.

- a) Ile kilometrów przejedzie ten samochód w ciągu 20 min, a ile w ciągu 75 min?
b) W jakim czasie, jadąc z taką samą prędkością, samochód przejedzie 126 km?



4. Na mapie wykonanej w skali 1 : 50 000 odległość od dworca autobusowego do leśniczówki jest równa 1,5 cm. Oblicz rzeczywistą odległość od dworca do leśniczówki. Wynik podaj w kilometrach.

5. W mieszance bakaliowej znajdują się orzechy laskowe i rodzynki w stosunku wagowym 3 : 7. Ile gramów bakalii każdego rodzaju znajduje się w 0,5 kg tej mieszanki?

- E** 6. Cezary, Bruno i Kuba postanowili kupić wspólnie grę komputerową. Kwoty przeznaczone na ten zakup odpowiednio przez Cezarego, Brunona i Kubę są w stosunku 7 : 4 : 9.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Kwota przeznaczona przez Kubę na zakup gry stanowi **A** **B** ceny gry.

- A.** 35 % **B.** 45 %

Cezary i Kuba łącznie na zakup gry przeznaczyli kwotę **C** **D** razy większą niż przeznaczył Bruno.

- C.** 4 **D.** 3

7. Zamień procent na liczbę.

- a) 20 %; 9 %; 150 % b) 35 %; 2 %; 8,3 % c) $12\frac{1}{2}$ %; $3\frac{1}{3}$ %; $22\frac{2}{9}$ %

8. Zamień liczbę na procent.

a) 0,26; 0,09; 2,32

b) 0,3; 1,8; 0,007

c) $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, $1\frac{1}{6}$

9. Zosia przeznaczyła połowę oszczędności na prezent urodzinowy dla swojej siostry Michasi. Za 20 % pozostałych oszczędności kupiła zabawkę dla pieska.

a) Ile procent oszczędności Zosia przeznaczyła na zabawkę dla pieska?

b) Ile procent oszczędności pozostało Zosi?



10. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

0,3 % liczby 800 jest równe $\frac{4}{5}$ liczby 3.	P	F
160 % liczby $1\frac{3}{8}$ jest większe niż 80 % liczby 2,75.	P	F

11. Dane są dwa prostokąty: F_1 i F_2 . Długości boków prostokąta F_1 są równe 20 cm i 80 cm. W prostokącie F_2 szerokość jest o 15 % większa od długości krótszego boku prostokąta F_1 , a długość jest o 15 % mniejsza od długości dłuższego boku prostokąta F_1 .

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Długość dłuższego boku prostokąta F_2 jest równa **A** **B** cm.

A. 65

B. 68

Obwód prostokąta F_2 jest **C** **D** prostokąta F_1 .

C. równy obwodowi

D. mniejszy od obwodu

12. Cenę marynarki, równą 200 zł, obniżono o 20 %, a następnie jeszcze o 10 %.

Czy cena marynarki po dwóch obniżkach była równa 140 zł? Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

A.	Tak,	ponieważ	1.	$0,7 \cdot 200 \text{ zł} = 140 \text{ zł}.$
			2.	$200 \text{ zł} - 30 \text{ zł} = 170 \text{ zł}.$
B.	Nie,		3.	$0,9 \cdot 0,8 \cdot 200 \text{ zł} = 144 \text{ zł}.$

13. W piątek na lekcji matematyki w klasie 8a było obecnych 80 % uczniów. Pięcioro uczniów było nieobecnych. Ilu uczniów liczy klasa 8a?

- 14.** Smartband to rodzaj opaski sportowej przeznaczonej do mierzenia np. przebytego dystansu czy spalonych kalorii. Producenci wprowadzają ciągle innowacje w swoich produktach. Bruno chce kupić nową opaskę sportową. Na jej zakup postanowił przeznaczyć 150 zł ze swoich oszczędności, a brakującą kwotę, czyli 40 % wartości opaski, obiecała dołożyć babcia. Ile kosztuje opaska, którą wybrał Bruno?



- 15.** Pani Katarzyna zmieniła operatora sieci komórkowej i jej rachunek za telefon zmniejszył się o 20 %. Obecnie miesięczny rachunek pani Katarzyny za telefon wynosi 62,80 zł. Ile złotych miesięcznie zaoszczędziła pani Katarzyna, zmieniając operatora?

- 16.** Pola ułożyła kolorowy bukiet z kwiatów rosnących w ogrodzie. W bukiecie znalazło się 15 kwiatów różowych, 6 kwiatów fioletowych i kilka białych. Białe kwiaty stanowią 30 % wszystkich kwiatów w bukiecie. Ile białych kwiatów jest w bukiecie?

- 17.** Oblicz, jakim procentem liczby a jest liczba b .

a) $a = 120; b = 42$

b) $a = 60; b = 210$

c) $a = 17,5; b = 3,5$

- 18.** Pan Adam wpłacił 18 000 zł na konto oprocentowane 4 % w skali roku. Oblicz kwotę odsetek, którą po roku doliczy bank panu Adamowi.

- 19.** Mama Jacka wpłaciła pewną kwotę pieniędzy na lokatę, której oprocentowanie w skali roku wynosi 4,5 %. Po roku bank doliczył odsetki w wysokości 540 zł. Oblicz kwotę, którą wpłaciła mama Jacka na lokatę.

- 20.** Pan Michał zaciągnął w banku kredyt w wysokości 35 000 zł na okres jednego roku. Obliczona wraz odsetkami łączna kwota do spłaty była równa 37 100 zł. Ile wynosiło roczne oprocentowanie tego kredytu?

- E 21.** Pan Adam wpłacił 5000 zł do banku na lokatę, której oprocentowanie roczne wynosi 3 %. Po roku oszczędzania od naliczonych odsetek pobrano podatek w wysokości 19 %.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Maksymalna kwota, jaką pan Adam będzie mógł wypłacić z tej lokaty po upływie roku, jest równa wartości wyrażenia

A. $\left[5000 \cdot \left(1 - \frac{19}{100} \cdot \frac{3}{100} \right) \right]$ zł

B. $\left[5000 \cdot \left(1 + \frac{19}{100} \cdot \frac{3}{100} \right) \right]$ zł

C. $\left[5000 \cdot \left(1 + \frac{81}{100} \cdot \frac{3}{100} \right) \right]$ zł

D. $\left[5000 \cdot \left(1 - \frac{81}{100} \cdot \frac{3}{100} \right) \right]$ zł

- 22.** Do 160 g wody dosypano 40 g soli. Oblicz stężenie procentowe tego roztworu.

- 23.** Do 400 g wodnego roztworu cukru o stężeniu 15 % dolano 500 g wody. Jakie stężenie ma powstały roztwór? Wynik podaj z dokładnością do 1 %.



- 24.** Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczba 56 jest większa od liczby 35

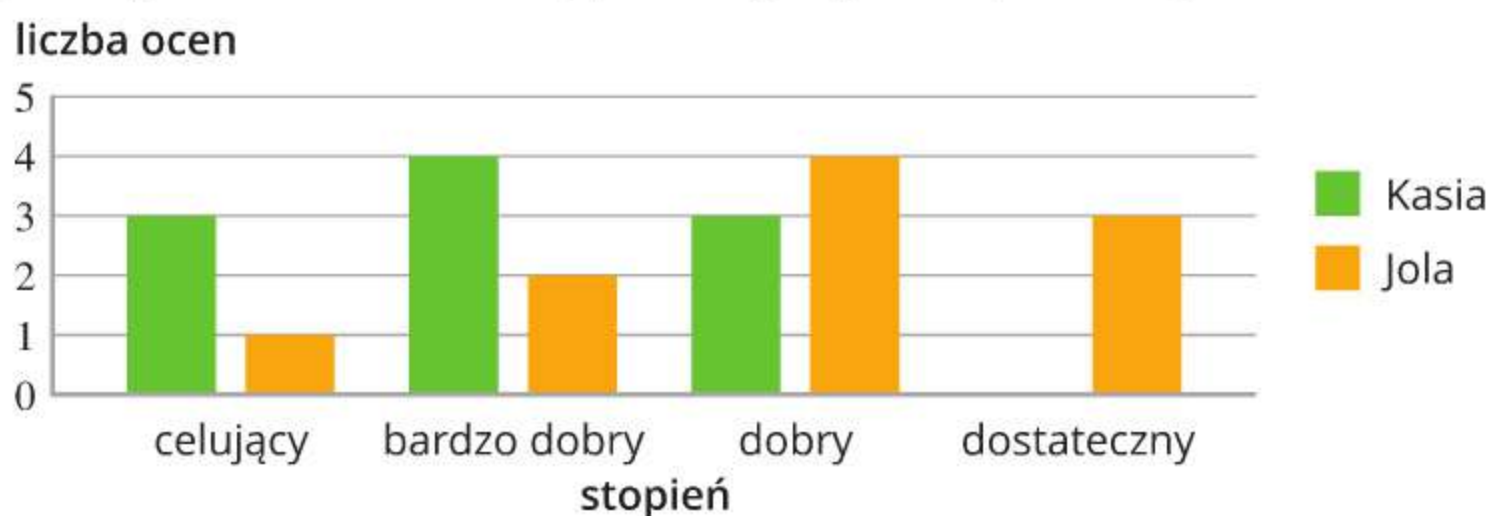
E

A. o 21 %. **B.** o 37,5 %. **C.** o 60 %. **D.** o 62,5 %.

- 25.** Cezary kupił w promocji buty sportowe za 168 zł. Buty przed promocją kosztowały 240 zł. Oblicz, o ile procent obniżono cenę butów.



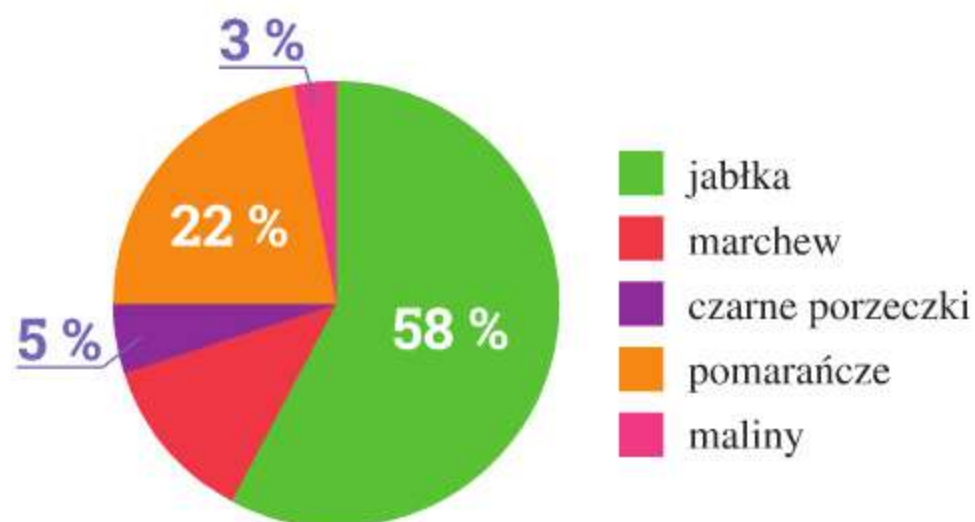
- 26.** Na diagramie przedstawiono liczbę poszczególnych stopni Kasi i Joli na koniec roku szkolnego.



- a)** Ile procent liczby wszystkich stopni Joli stanowi liczba jej stopni dostatecznych?
b) O ile procent więcej stopni bardzo dobrych na koniec roku szkolnego ma Kasia niż Jola?

- 27.** Na procentowym diagramie kołowym przedstawiono skład soku. W jednej butelce soku znajduje się 45 ml soku z marchwi.

- a)** Ile mililitrów soku mieści się w jednej butelce?
b) O ile procent mniej w tym soku jest soku malinowego niż soku z czarnych porzeczek?
c) Czy łącznie w 12 takich samych butelkach soku jest litr soku pomarańczowego? Uzasadnij swoją odpowiedź.



- 28.** Rodzice przeznaczają tygodniowo kwotę 75 zł na kieszonkowe dla swoich córek: starszej Michasi i młodszej Zosi, dzieląc pieniądze odpowiednio w stosunku 3 : 2.

- a)** O ile procent kieszonkowe Michasi jest większe od kieszonkowego Zosi?
b) O ile procent kieszonkowe Zosi jest mniejsze od kieszonkowego Michasi?

3. Potęgi

Powtórz wiadomości

Potęga o wykładniku naturalnym

Potęga liczby a o wykładniku naturalnym n , gdzie $n > 1$, nazywamy iloczyn n czynników, z których każdy jest równy a .

wykładnik potęgi

podstawa potęgi

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

n czynników

Np. $6^5 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$.

Dla każdej liczby a przyjmujemy, że $a^1 = a$.

Dla każdej liczby $a \neq 0$ przyjmujemy, że $a^0 = 1$.

Liczba 1^n , gdzie n jest liczbą naturalną, zawsze jest równa 1.

Znak wartości potęgi

- Potęga liczby dodatniej jest zawsze liczbą dodatnią.

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

- Jeżeli wykładnik potęgi jest nieparzysty, to potęga liczby ujemnej jest ujemna.

$$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$$

- Jeżeli wykładnik potęgi jest parzysty, to potęga liczby ujemnej jest dodatnia.

$$\left(-1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

Iloczyn i iloraz potęg o jednakowych podstawach

- Aby pomnożyć potęgi, które mają taką samą podstawę, należy podstawę pozostawić bez zmian i dodać ich wykładniki.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

gdzie $a \neq 0$ oraz m, n są liczbami naturalnymi.

$$\text{Np. } 5^3 \cdot 5 = 5^{3+1} = 5^4 = 625.$$

- Aby podzielić potęgi, które mają taką samą podstawę, należy podstawę pozostawić bez zmian i odjąć ich wykładniki.

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

gdzie $a \neq 0$, m, n są liczbami naturalnymi oraz $m \geq n$.

$$\text{Np. } 3^{11} : 3^6 = 3^{11-6} = 3^5 = 243.$$

Potęgowanie iloczynu i ilorazu

- Aby pomnożyć potęgi o takich samych wykładnikach, należy pomnożyć podstawy, a wykładnik przepisać.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n,$$

gdzie $a \neq 0$, $b \neq 0$ oraz n jest liczbą naturalną.

$$\text{Np. } 21^4 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^4 = \left(21 \cdot \frac{1}{7}\right)^4 = 3^4 = 81.$$

- Aby podzielić potęgi o takich samych wykładnikach, należy podzielić podstawy, a wykładnik przepisać.

$$a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n = (a : b)^n,$$

gdzie $a \neq 0$, $b \neq 0$ oraz n jest liczbą naturalną.

$$\text{Np. } 64^6 : 32^6 = (64 : 32)^6 = 2^6 = 64.$$

Przykład 1.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{9^6 \cdot 9^2 : 9^5}{3^3}$.

$$\frac{9^6 \cdot 9^2 : 9^5}{3^3} = \frac{9^{6+2} : 9^5}{3^3} = \frac{9^8 : 9^5}{3^3} = \frac{9^{8-5}}{3^3} = \frac{9^3}{3^3} = \left(\frac{9}{3}\right)^3 = 3^3 = 27$$

Potęgowanie potęgi

Aby podnieść potęgę do potęgi, należy pomnożyć wykładniki, a podstawę pozostawić bez zmian.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n},$$

gdzie $a \neq 0$ oraz m, n są liczbami naturalnymi.

$$\text{Np. } \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot 3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}.$$

Notacja wykładnicza

Dla dowolnej liczby $a \neq 0$ oraz dla dowolnej liczby naturalnej n prawdziwy jest wzór:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}.$$

$$\text{Np. } \frac{1}{8^3} = 8^{-3}.$$

Liczbę dodatnią a można przedstawić w postaci **notacji wykładniczej**, czyli

$$a = k \cdot 10^n.$$

gdzie k jest liczbą mniejszą od 10, ale nie mniejszą od 1, natomiast n jest liczbą całkowitą.

Przykład 2.

Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

$$\text{a) } 38\,000\,000 = 3,8 \cdot 10\,000\,000 = 3,8 \cdot 10^7 \quad \text{b) } 0,000000003 = 3 \cdot 0,000000001 = 3 \cdot 10^{-9}$$

Rozwiąż zadania

1. Oblicz.

a) 2^6

b) 10^7

c) $(-4)^4$

d) $(-3)^5$

e) -2^4

f) $\left(-\frac{1}{7}\right)^2$

g) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^4$

h) $(0,1)^1$

i) $(-1,2)^3$

j) $-(0,5)^2$

k) $\frac{5^2}{4}$

l) $(-11,3 + 95,2)^0$

E 2. Dane są liczby: $x = (-4)^{17}$, $y = 4^{15}$, $z = (-4)^{16}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Podane liczby uporządkowane w kolejności od największej do najmniejszej to

A. x, y, z

B. x, z, y

C. z, x, y

D. z, y, x

3. Przedstaw wyrażenie w postaci jednej potęgi.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7$

b) $(0,3)^5 \cdot 0,3 \cdot (0,3)^9$

c) $\frac{(-12)^8}{(-12)^5}$

d) $-111^5 : 111^0 : 111$

e) $9^9 \cdot 4^9 \cdot (-1)^9$

f) $\left(-\frac{2}{5}\right)^6 \cdot (-25)^6$

g) $\left(-9\frac{3}{8}\right)^{11} \cdot \left(1\frac{1}{15}\right)^{11}$

h) $\left(3\frac{3}{22}\right)^7 : \left(2\frac{1}{11}\right)^7$

i) $(1,25)^{12} : (0,05)^{12}$

j) $\left(6\frac{1}{8}\right)^{13} \cdot (-1,6)^{13} : \left(\frac{1}{4}\right)^{13}$

k) $(-8^5)^3$

l) $\left((-9^2)^6\right)^5$

E 4. Dane są liczby $x = 2^3$ i $y = 3^3$.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Suma liczb x i y jest równa A B.

A. 35

B. 125

Iloczyn liczb x i y wynosi C D.

C. 125

D. 216

E 5. Dane są liczby: $a = \frac{5^{20} \cdot 5^{31}}{5}$, $b = 5^{15} \cdot \frac{5^{37}}{25}$, $c = (5^3)^{14} : 5^{17}$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Liczby a i b są równe.	P	F
Liczba c jest dwa razy mniejsza od liczby a .	P	F

6. Wyrażenie:

a) $\frac{2^{10} \cdot 4^7 \cdot 16^3}{64^2 \cdot 4}$ zapisz w postaci potęgi liczby 4,

b) $\frac{27^2 : 3^2 \cdot 9^3}{3 : 3^0}$ zapisz w postaci potęgi liczby naturalnej a mniejszej od 10.

7. Czy trzecia część liczby 9^5 jest równa 3^5 ?

Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

A.	Tak,	ponieważ	1.	$\left(\frac{9}{3}\right)^5 = 3^5.$
			2.	$\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}.$
B.	Nie,		3.	$\frac{3^{10}}{3} = 3^9.$

8. Oblicz, korzystając z własności działań na potęgach.

a) $\frac{6^2 \cdot 6^0}{\left(5\frac{3}{7}\right)^3 : \left(5\frac{3}{7}\right)^3}$

b) $\frac{3^7 : 3 \cdot 3^2}{4^4 \cdot (0,75)^4}$

c) $\frac{(5^2 \cdot 5^3)^4}{5^{20} : 25^2}$

d) $\frac{2^5 \cdot 32^3}{-4^3 \cdot (-16)^2}$

e) $\frac{(9^6 \cdot 9^0 : 9^3)^3}{27^5}$

f) $\frac{\left(1\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^8 : \left(-\frac{1}{4}\right)^4}{64 : (2^{11} : 4^5)}$

9. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $(-2)^{16}$ nie jest równa

A. 4^8

B. $4^2 \cdot 8^4$

C. 2^{16}

D. $4^3 \cdot 16$

10. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $\frac{12^6}{3^3}$ jest równa

A. 4^3

B. $3^2 \cdot 4^6$

C. 4^2

D. $3^3 \cdot 4^6$

11. Zapisz wyrażenie w postaci jednej potęgi.

a) $2^7 + 2^7$

b) $3^{10} + 3^{10} + 3^{10}$

c) $11^8 + 11^8 + 9 \cdot 11^8$

12. Uzasadnij, że wartość wyrażenia:

a) $\frac{5 \cdot 7^4 + 2 \cdot 7^4 + 7^4}{4}$ jest wielokrotnością liczby 14,

b) $\frac{10 \cdot 4^6 - 6 \cdot 4^6 - 4^6}{3}$ jest równa 2^{12} ,

c) $\frac{13 \cdot 2^7 + 26 \cdot 2^6 + 52 \cdot 2^5}{2^7}$ jest podzielna przez 13.

E 13. Dana jest liczba $a = \frac{8^{10} + 2^{30}}{4^8 \cdot 2^{12}}$.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Odwrotnością liczby a jest **A B**.

A. -8

B. $\frac{1}{8}$

Kwadrat liczby przeciwnej do liczby a jest równy **C D**.

C. 2^6

D. -2^6

14. Podaj liczbę, którą można wstawić w miejsce $\clubsuit$, tak aby zachodziła równość.

a) $0,007 = 7 \cdot 10^{\clubsuit}$

b) $0,013 = 1,3 \cdot 10^{\clubsuit}$

c) $1\,200\,000 = 1,2 \cdot 10^{\clubsuit}$

d) $530\,000 = 5,3 \cdot 10^{\clubsuit}$

e) $1,5 \cdot 10^{\clubsuit} = 15\,000$

f) $7,9 \cdot 10^{\clubsuit} = 7\,900\,000\,000$

g) $3,026 \cdot 10^{\clubsuit} = 0,003026$

h) $4,98 \cdot 10^{\clubsuit} = 4,98$

E 15. Dane są liczby $k = 2,8 \cdot 10^{36}$ oraz $m = 0,04 \cdot 10^9$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Iloraz $\frac{k}{m}$ jest równy

A. $7 \cdot 10^{27}$

B. $7 \cdot 10^4$

C. $7 \cdot 10^{28}$

D. $7 \cdot 10^{45}$

16. Długości boków prostokąta są równe $2,4 \cdot 10^9$ i $7,5 \cdot 10^{11}$. Oblicz pole prostokąta. Wynik zapisz w notacji wykładniczej.

17. Do najmniejszych zwierząt świata zaliczany jest rykonos malutki, nietoperz zamieszkujący Tajlandię, który waży 2 g. Wśród największych zwierząt jest płetwal błękitny, ssak morski, którego średnia waga to około 130 t. Ile razy płetwal błękitny jest cięższy od rykonosa malutkiego? Wynik zapisz w notacji wykładniczej.



18. Wyraż wielkość w podanej jednostce. Wynik zapisz w notacji wykładniczej.

a) $96\text{ km} = \dots \text{ dm}$

b) $56\text{ t} = \dots \text{ dag}$

c) $74\text{ mm} = \dots \text{ m}$

d) $12\text{ cm} = \dots \text{ km}$

e) $64\text{ g} = \dots \text{ kg}$

f) $35\text{ h} = \dots \text{ s}$

g) $32\text{ doby} = \dots \text{ min}$

h) $9\text{ s} = \dots \text{ h}$

i) $864\text{ s} = \dots \text{ doby}$

j) $12\,000\text{ gr} = \dots \text{ zł}$

4. Pierwiastki

Powtórz wiadomości

Pierwiastek kwadratowy i pierwiastek sześcienny

Pierwiastek kwadratowy (stopnia drugiego) z liczby nieujemnej a jest równy nieujemnej liczbie b , której kwadrat jest równy a .

$$\sqrt{a} = b, \text{ gdy } b^2 = a.$$

Pierwiastek sześcienny (stopnia trzeciego) z liczby a jest równy liczbie b , której sześcian jest równy a .

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ gdy } b^3 = a.$$

Np. $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$, bo $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$, $\sqrt[3]{0,216} = \sqrt[3]{\frac{216}{1000}} = \frac{6}{10} = 0,6$, bo $(0,6)^3 = 0,216$.

Mnożenie, dzielenie i potęgowanie pierwiastków

Pierwiastek kwadratowy	$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, a \geq 0, b \geq 0$	$\sqrt{25 \cdot 36} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{36} = 5 \cdot 6 = 30$
	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, a \geq 0, b > 0$	$\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$
	$\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a, a \geq 0$	$\sqrt{10^2} = (\sqrt{10})^2 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 10$
Pierwiastek sześcienny	$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{125 \cdot (-8)} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{(-8)} = 5 \cdot (-2) = -10$
	$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}, b \neq 0$	$\sqrt[3]{\frac{125}{-8}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{-8}} = \frac{5}{-2} = -2\frac{1}{2}$
	$\sqrt[3]{a^3} = (\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a$	$\sqrt[3]{12^3} = (\sqrt[3]{12})^3 = \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{12} = 12$

Wylaczanie czynnika przed znak pierwiastka

Podczas **wylaczania liczby przed znak pierwiastka** powinniśmy zadbać o to, aby pod pierwiastkiem została najmniejsza możliwa liczba naturalna.

$$\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}, \text{ gdzie } a \text{ i } b \text{ są liczbami nieujemnymi}$$

$$\sqrt[3]{a^3 \cdot b} = a\sqrt[3]{b}$$

Np. $\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = 10\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{27 \cdot 5} = 3\sqrt[3]{5}$.

Włączanie czynnika pod znak pierwiastka

Aby **włączyć czynnik pod znak pierwiastka**, należy skorzystać z równości:

$$a = \sqrt{a^2}, \text{ gdzie } a \text{ jest liczbą nieujemną}$$

$$a = \sqrt[3]{a^3}$$

Np. $5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{50}$, $2\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 7} = \sqrt[3]{8 \cdot 7} = \sqrt[3]{56}$.

Dodawanie i odejmowanie pierwiastków

Możemy dodawać lub odejmować tylko te pierwiastki, które są **tego samego stopnia** i mają **tę samą liczbę podpierwiastkową**.

Przykład 1.

Oblicz wartość wyrażenia $\sqrt{128} + \sqrt[3]{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt[3]{375}$.

Wylączymy czynniki przed znak pierwiastka w liczbach $\sqrt{128}$ oraz $\sqrt[3]{375}$.



$$\sqrt{128} = \sqrt{64 \cdot 2} = 8\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{375} = \sqrt[3]{125 \cdot 3} = 5\sqrt[3]{3}$$

Dodamy pierwiastki drugiego stopnia o tej samej liczbie podpierwiastkowej oraz pierwiastki trzeciego stopnia o tej samej liczbie podpierwiastkowej.



$$\sqrt{128} + \sqrt[3]{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt[3]{375} =$$

$$= 8\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + 3\sqrt{2} - 5\sqrt[3]{3} =$$

$$= 11\sqrt{2} - 4\sqrt[3]{3}$$

Usuwanie niewymierności z mianownika

Przekształcanie wyrażenia, tak aby w mianowniku nie występował niewymierny pierwiastek, nazywamy **usuwaniem niewymierności z mianownika ułamka**.

$$\text{Np. } \frac{2}{\sqrt{11}} = \frac{2}{\sqrt{11}} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{11}}{11}, \quad \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{3}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Szacowanie pierwiastków

Pierwiastek kwadratowy (sześcienny) jest liczbą niewymierną, jeśli nie jest możliwe wskazanie takiej liczby wymiernej, której kwadrat (sześcian) jest równy liczbie podpierwiastkowej, np. $\sqrt{7} = 2,6457513\dots$, $\sqrt[3]{7} = 1,9129311\dots$

$$\sqrt{2} \approx 1,41$$

$$\sqrt{3} \approx 1,73$$

$$\sqrt{5} \approx 2,24$$

Przykład 2.

Określ, między jakimi kolejnymi liczbami naturalnymi na osi liczbowej znajduje się liczba $\sqrt{11}$.

Podniesiemy liczbę $\sqrt{11}$ do potęgi drugiej.



$$(\sqrt{11})^2 = 11$$

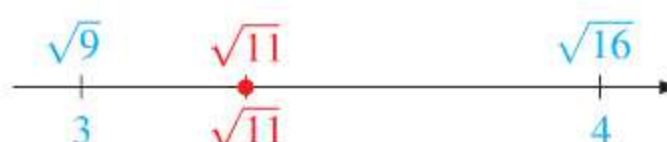
Znajdziemy kwadraty dwóch kolejnych liczb naturalnych takich, że pierwszy z nich jest mniejszy niż 11, a drugi – większy niż 11.



$$3^2 = 9 \text{ i } 9 < 11, \text{ więc } \sqrt{9} < \sqrt{11}$$

$$4^2 = 16 \text{ i } 16 > 11, \text{ więc } \sqrt{16} > \sqrt{11}$$

Zatem $\sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16}$, więc $3 < \sqrt{11} < 4$.



Rozwiąż zadania

1. Oblicz.

a) $\sqrt{49}$

b) $\sqrt{121}$

c) $\sqrt[3]{27}$

d) $\sqrt[3]{216}$

2. Oblicz.

a) $\sqrt{1600}$

b) $\sqrt{0,64}$

c) $\sqrt{5\frac{19}{25}}$

d) $\sqrt[3]{343}$

e) $\sqrt[3]{0,027}$

f) $\sqrt[3]{4\frac{12}{125}}$

3. Oblicz.

a) $\sqrt{1\frac{7}{9}} + \sqrt{2\frac{1}{4}}$

b) $\sqrt{2\frac{14}{25}} - \sqrt{3\frac{13}{36}}$

c) $-\sqrt{5\frac{1}{16}} + 3 \cdot \sqrt{2\frac{7}{81}}$

d) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} + \sqrt[3]{1\frac{91}{125}}$

e) $\sqrt[3]{1\frac{271}{729}} - \sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$

f) $\sqrt[3]{-2\frac{314}{343}} : \sqrt{2\frac{2}{49}}$

4. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$

b) $\sqrt{3 \cdot 3 \cdot 49}$

c) $(\sqrt{26})^2$

d) $\sqrt{14\frac{2}{5}} : \sqrt{2\frac{2}{5}}$

e) $\sqrt[3]{-1\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[3]{\frac{49}{36}}$

f) $(\sqrt[3]{15} \cdot \sqrt[3]{7})^3$

g) $\sqrt[3]{0,75} : \sqrt[3]{6}$

h) $\sqrt[3]{-3 \cdot (-9) : (-125)}$

5. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Równość $\sqrt{x} = 100$ zachodzi dla x równego **A** **B**

A. 100

B. 10 000

Równość $\frac{\sqrt{x}}{2} = 0,25$ zachodzi dla x równego **C** **D**

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{8}$

6. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt{252}$

b) $\sqrt{1728}$

c) $\sqrt[3]{3000}$

d) $\sqrt[3]{1080}$

7. Włącz czynnik pod znak pierwiastka.

a) $7\sqrt{5}$

b) $0,3\sqrt{15}$

c) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{12}$

d) $10\sqrt[3]{0,07}$

8. Oblicz przybliżoną wartość pierwiastka. Przyjmij, że $\sqrt{6} \approx 2,45$.

a) $\sqrt{24}$

b) $\sqrt{600}$

c) $\sqrt{1,5}$

9. Dane są liczby $a = \sqrt{3} + 1$ i $b = 2\sqrt{3} - 1$. Czy iloczyn tych liczb jest liczbą naturalną? Uzasadnij swoją odpowiedź.

10. Wyrażenie zapisz w postaci $a\sqrt{b}$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi.

a) $8\sqrt{2} + 2\sqrt{32} - 7\sqrt{72}$

b) $\sqrt{216} - 5\sqrt{6} + 2\sqrt{600}$

c) $-2\sqrt{99} - 6\sqrt{11} + 3\sqrt{275}$

11. Sprawdź, czy wartość wyrażenia jest liczbą wymierną.

a) $(\sqrt{500} + \sqrt{80}) : \sqrt{5}$

b) $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{0,27} + \sqrt{12})$

c) $\frac{5\sqrt{176} - \sqrt{4400}}{4\sqrt{44}}$

E 12. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $(-3\sqrt{2} + 5\sqrt{18} - 2\sqrt{128}) : \sqrt{2}$ jest równa

A. 4

B. $4\sqrt{2}$

C. -4

D. $-4\sqrt{2}$

E 13. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Wartość wyrażenia $(3\sqrt{5})^2$ jest równa **A B**.

A. 15

B. 45

Wartość wyrażenia $\sqrt{25 + 144}$ jest równa **C D**.

C. 13

D. 17

14. Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{8}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{77\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$

c) $\frac{3\sqrt{125}}{\sqrt{3}}$

d) $\frac{5\sqrt{3}}{3\sqrt{21}}$

e) $\frac{8\sqrt{5}}{5\sqrt{10}}$

E 15. Dane są liczby: $x = \frac{2\sqrt{50} - \sqrt{98}}{5\sqrt{2}}$, $y = \frac{2\sqrt[3]{81}}{5\sqrt[3]{3}}$, $z = \frac{1}{\sqrt[3]{(\sqrt{125})^2}}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Podane liczby uporządkowane w kolejności od najmniejszej do największej to

A. y, z, x

B. z, x, y

C. y, x, z

D. z, y, x

E 16. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Wartość wyrażenia $-2\sqrt{6^2} + 3\sqrt[3]{5^3}$ jest równa **A B**.

A. 3

B. -3

Wartość wyrażenia $\frac{3\sqrt[3]{448}}{-2\sqrt[3]{-7}}$ jest liczbą **C D**.

C. wymierną

D. niewymierną

17. Uzasadnij, że wartość wyrażenia $\frac{\sqrt{108} - \sqrt{12}}{2\sqrt{75}}$ jest mniejsza od $\frac{1}{2}$.

18. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Liczba $\frac{15\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ jest równa 45.	P	F
Liczba $2\sqrt{72}$ jest mniejsza od połowy liczby $\sqrt{512}$.	P	F

19. Dane są liczby $x = 2\sqrt{125}$ i $y = \sqrt[3]{135}$.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Liczba x znajduje się na osi liczbowej między liczbami **A** **B**.

A. 22 i 23 **B.** 23 i 24

Liczba y jest **C** **D** od liczby 5.

C. mniejsza **D.** większa

20. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Liczba $3\sqrt{7} - 8$ jest liczbą dodatnią.	P	F
Liczba $\sqrt[3]{190} + 3$ jest mniejsza od 9.	P	F

21. Pole kwadratu wynosi 162 cm^2 . Jeden z boków prostokąta ma długość równą długości boku kwadratu, a drugi jest od niego dwa razy dłuższy.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Bok kwadratu ma długość **A** **B** cm.

A. $9\sqrt{2}$ **B.** 40,5

Pole prostokąta wynosi **C** **D** cm^2 .

C. $162\sqrt{2}$ **D.** 324

22. Sześcian i prostopadłościan mają taką samą objętość. Suma długości trzech różnych krawędzi prostopadłościanu jest równa 18, a ich długości pozostają w stosunku 2 : 3 : 4.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość krawędzi tego sześcianu jest równa

A. $8\sqrt[3]{3}$ **B.** $3\sqrt[3]{4}$ **C.** $4\sqrt[3]{3}$ **D.** $4\sqrt[3]{2}$

5. Wyrażenia algebraiczne

Powtórz wiadomości

Jednomiany

Wyrażenia, w których występują liczby i litery połączone znakami działań oraz nawiasami, nazywamy **wyrażeniami algebraicznymi**. Litery w takich wyrażeniach są nazywane **zmiennymi**.

Np. $3x + 9$, $3t - 4(w^2 - 7)$.

Jednomianem nazywamy wyrażenie algebraiczne, które jest liczbą, literą lub iloczynem liczb i liter.

Np. 4 , y , $\frac{2}{5}x^2y$, $-4t^3w^2$.

Jednomian jest **uporządkowany**, jeżeli jego pierwszym czynnikiem jest liczba, a następnymi litery w kolejności alfabetycznej. Liczbę, która występuje na początku uporządkowanego jednomianu, nazywamy **współczynnikiem liczbowym** tego jednomianu.

Przykład 1.

Przedstaw jednomian $\frac{2}{5}x^2 \cdot 25y^5 \cdot (-6x)$ w postaci uporządkowanej i podaj jego współczynnik liczbowy.

$$\frac{2}{5}x^2 \cdot 25y^5 \cdot (-6x) = \frac{2}{15} \cdot 25^5 \cdot (-6) \cdot x^2 \cdot x \cdot y^5 = 2 \cdot 5 \cdot (-6) \cdot x^3 \cdot y^5 = -60x^3y^5$$

Współczynnik liczbowy tego jednomianu jest równy (-60) .

Sumy algebraiczne

Wyrażenie algebraiczne, które powstaje poprzez dodanie jednomianów, nazywamy **sumą algebraiczną**.

Np. $-7a + 3b$, $-3x^5 + (-4y^3)$.

Jednomiany podobne

Jednomiany nazywamy **podobnymi**, jeżeli zawierają te same czynniki literowe i są one w takiej samej potędze. **Jednomiany podobne** mogą się różnić tylko współczynnikiem liczbowym lub kolejnością czynników.

Tylko jednomiany podobne możemy dodawać i odejmować. Taką operację nazywamy **redukcją wyrazów podobnych**.

Przykład 2.

Zredukuj wyrazy podobne.

a) $\underline{4t^2} - \underline{8t} + \underline{9t^2} + \underline{12t} - 20 = 13t^2 + 4t - 20$

b) $\underline{6a^2b} - \underline{4ab^2} + \underline{7} - \underline{9ba^2} - \underline{13ab^2} - \underline{7} = -3a^2b - 17ab^2$

Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych

Składniki w dodawaniu możemy dodawać w dowolnej kolejności.

Nawias opuszczamy bez jakichkolwiek zmian, jeśli przed nawiasem:

- występuje znak dodawania, np. $3x^2 + (2x - 1) = 3x^2 + 2x - 1$;
- nie występuje żaden znak, np. $(6x - y) + 5 = 6x - y + 5$.

Jeśli przed nawiasem występuje znak odejmowania, to opuszczamy nawias i zmieniamy znak każdego wyrazu znajdującego się w nawiasie na przeciwny, np. $-(4x^2 + 5x - 1) = -4x^2 - 5x + 1$.

Przykład 3.

Opuść nawiasy i zredukuj wyrazy podobne.

a) $-5x + (12x - 6y + 8)$

Opuścimy nawias bez zmiany znaków przed poszczególnymi jednomianami i wykonamy redukcję wyrazów podobnych.


$$\begin{aligned} -5x + (12x - 6y + 8) &= \\ &= \underline{-5x} + \underline{12x} - 6y + 8 = \\ &= 7x - 6y + 8 \end{aligned}$$

b) $-(13y^2 + 2y - x) + 13y^2 - 2y + 3x^2$

Opuścimy nawias i zmienimy znak na przeciwny przed każdym jednomianem, który był w nawiasie. Wykonamy redukcję wyrazów podobnych.


$$\begin{aligned} -(13y^2 + 2y - x) + 13y^2 - 2y + 3x^2 &= \\ &= \underline{-13y^2} - \underline{2y} + \underline{x} + \underline{13y^2} - 2y + 3x^2 = \\ &= -4y + x + 3x^2 \end{aligned}$$

Mnożenie jednomianów przez sumy algebraiczne

- Aby **pomnożyć jednomian przez sumę algebraiczną**, należy pomnożyć go przez każdy składnik tej sumy, a otrzymane iloczyny dodać.

$$a(b + c) = \underline{ab} + \underline{ac} \qquad a(b - c) = \underline{ab} - \underline{ac}$$

Np. $5x^2 \cdot (3a + 4c) = 5x^2 \cdot 3a + 5x^2 \cdot 4c = 15ax^2 + 20cx^2$

- Aby **podzielić sumę algebraiczną przez liczbę** różną od 0, każdy jej wyraz należy podzielić przez tę liczbę, a otrzymane ilorazy dodać.

$$(b + c) : a = \underline{b : a} + \underline{c : a} \qquad (b - c) : a = \underline{b : a} - \underline{c : a} \qquad \text{dla } a \neq 0$$

Np. $(35abc - 60b^2) : 5 = 35abc : 5 - 60b^2 : 5 = 7abc - 12b^2$

- Jeśli w każdym z wyrazów sumy algebraicznej występuje taki sam czynnik, to można ten **wspólny czynnik wyłączyć przed nawias**. Gdy wyłączamy wspólny czynnik przed nawias, zamieniamy sumę na iloczyn.

Np. $9s^2t + 12st^3 = 3st \cdot 3s + 3st \cdot 4t^2 = 3st(3s + 4t^2)$

Mnożenie sum algebraicznych

Aby **pomnożyć sumy algebraiczne**, należy każdy składnik jednej sumy pomnożyć przez każdy składnik drugiej sumy.


$$(a + b)(c + d) = \underline{a(c + d)} + \underline{b(c + d)} = \underline{ac + ad} + \underline{bc + bd}$$

Np. $(3p - q)(2q + p) = 3p \cdot 2q + 3p \cdot p - q \cdot 2q - q \cdot p = \underline{6pq} + \underline{3p^2} - \underline{2q^2} - \underline{pq} = 3p^2 - 2q^2 + 5pq$

Rozwiąż zadania

- E 1.** Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Pole prostokąta o bokach długości $2b$ i $3\frac{1}{2}b$ jest równe **A B**.

A. $7b^2$

B. $7b$

Pole trójkąta o podstawie długości $3c$ i wysokości równej $4c$ poprowadzonej do tej podstawy wynosi **C D**.

C. $12c^2$

D. $6c^2$

- 2.** Zredukuj wyrazy podobne.

a) $12a - 3a + 10b - 21b - 5$

b) $-12ab - 12b + 6ba - 10b$

c) $-4,5ef^2 + 6,6e^2f - 12,5ef^2 - 16,6e^2f$

d) $22x^2 + 1,25x - 12 - 1,75x$

e) $0,75xy + 0,125x - 2,5yx - \frac{5}{8}x$

f) $1\frac{2}{5} - 1\frac{2}{5}t^2u + 7\frac{1}{3}u - 3\frac{1}{5}tu^2 - \frac{7}{9}u$

- 3.** Dane są jednomiany $0,6x^2y$ i $1\frac{2}{3}yx^2$. Uzasadnij, że współczynniki liczbowe tych jednomianów są liczbami odwrotnymi.

- E 4.** Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jednomianami podobnymi są

A. $-a^2bc$ i a^2b^2c .

B. $4a^2b^2c$ i $-5a^2bc$.

C. a^2b^2c i $-2b^2a^2c$.

D. $0,5a^2b^2c$ i $0,5a^2c^2b$.

- 5.** Zapisz wyrażenie algebraiczne.

a) iloczyn liczby -28 i kwadratu liczby x

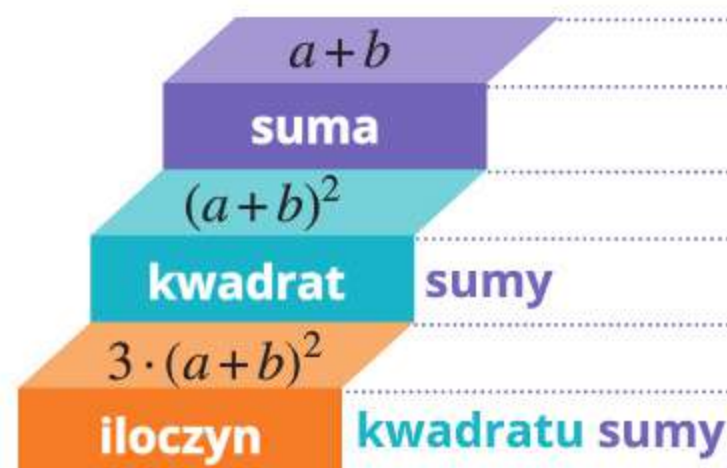
b) iloraz liczby 14 i sześciannu liczby c

c) suma liczby -8 i podwojonego kwadratu liczby z

d) różnica połowy liczby y i trzykrotności liczby a

e) kwadrat sumy liczby g i liczby z

f) suma kwadratów liczby x i połowy liczby y



- E 6.** Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma algebraiczna $-2x^2y + 1,5 - 4,1xy^2 + 12x^2y - 2,25 + 1,1xy^2$ po przeprowadzeniu redukcji wyrazów podobnych ma postać

A. $10x^2y - 3xy^2 + 3,75$

B. $10x^2y - 5,2xy^2 + 0,75$

C. $10x^2y - 5,2xy^2 + 3,75$

D. $10x^2y - 3xy^2 - 0,75$

- 7.** Zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej. Pamiętaj o redukcji wyrazów podobnych.

a) $(-z + 10) + (4z - 6)$

b) $(3d^2 - 5d) - (4d - 5)$

c) $(9z - 4) + (-z + 3) - (7 + 4z)$

8. Zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej. Pamiętaj o redukcji wyrazów podobnych.

a) $3(x + y)$

b) $-4g(3g - 5)$

c) $5b(8a - 9b)$

d) $(3 - x) \cdot 2x$

e) $-2x + 3(2x + 1)$

f) $2y - 10(-1 - 2y)$

9. Zosia ma x lat, jej siostra Michasia jest od niej o 4 lata młodsza, a mama jest 3 razy starsza od Michasi.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Łączny wiek mamy i dziewczynek za 5 lat można opisać za pomocą wyrażenia

A. $(5x - 8)$ lat.

B. $(3x + 4)$ lat.

C. $(5x - 1)$ lat.

D. $(5x - 4)$ lat.

10. Zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.

a) $(20x - 4y - 12) : 2$

b) $(-16k - 32l + 12) : (-4)$

c) $\frac{-3x - 18y - 15}{3} + 6y + 12$

11. Zapisz w najprostszej postaci wyrażenie, a następnie oblicz jego wartość liczbową dla podanych wartości zmiennych.

a) $3x(-x + 3) + 2(5x^2 + 5)$ dla $x = 2$

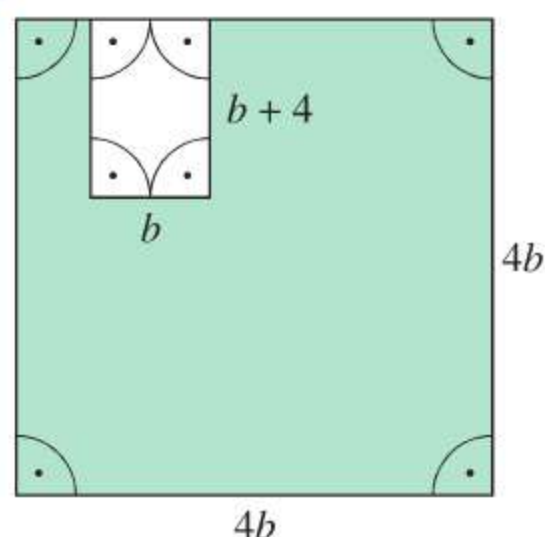
b) $6xy(2x - 2) - 3y(-2x^2 + 3y)$ dla $x = -1$ i $y = \frac{1}{2}$

c) $y(-5x + y) - (-8xy - 1)$ dla $x = 1\frac{2}{3}$ i $y = -0,2$

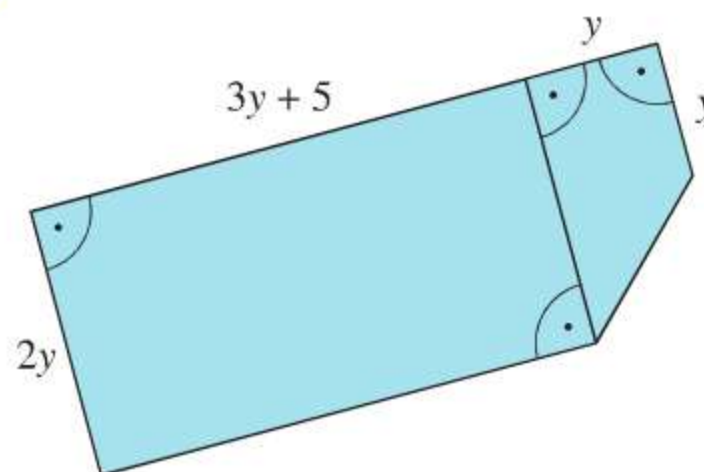
d) $x^3 - x(x^2 - 2y) + 2y(-5x^2 - x)$ dla $x = \sqrt{11}$ i $y = -0,3$

12. Przedstaw w postaci sum algebraicznych pola zacieniowanych figur. Przeprowadź redukcję wyrazów podobnych. Oblicz pola zacieniowanych figur dla $b = 0,4$ dm i $y = \frac{1}{5}$ m.

I.



II.



13. Wykonaj działania. Pamiętaj o redukcji wyrazów podobnych.

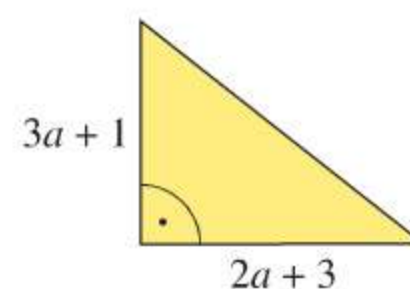
a) $(x - 6y)(4y - x)$

b) $(3b - 2a)(-6a + 2b)$

c) $8\left(s^2 - \frac{3}{4}\right)(4s^2 + 3)$

d) $(4 - 2y)^2$

14. Zapisz w postaci sumy algebraicznej pole trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości $3a + 1$ i $2a + 3$. Pamiętaj o redukcji wyrazów podobnych. Oblicz pole tego trójkąta dla $a = 6$ cm.



- E 15.** Krawędzie prostopadłościanu poprowadzone z jednego wierzchołka mają długości: $2a$, $7a+1$ i $3a+2$, gdzie $a > 0$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu wynosi $48a+12$.	P	F
Pole największej ściany bocznej tego prostopadłościanu można zapisać za pomocą wyrażenia $21a^2+2$.	P	F

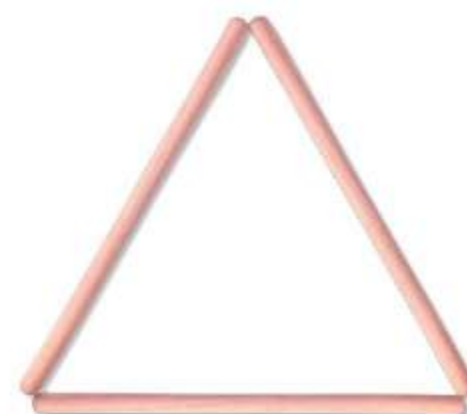
- E 16.** Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyrażenie $(-3x+2)^2 - 9(x+2)(x-2)$ można przedstawić w postaci

- A.** $-6x^2 - 6x + 40$ **B.** $-12x - 32$ **C.** $-6x^2 - 6x - 32$ **D.** $-4(3x - 10)$

- E** **Informacje do zadań 17. i 18.**

Bruno zbudował trójkąt równoboczny o boku długości 2, a następnie budował trójkąty równoramienne, których podstawa miała długość 2, a ramię każdego kolejnego trójkąta było o 1 dłuższe od ramienia poprzedniego trójkąta. Pierwszy trójkąt nazwał T_1 , drugi T_2 itd.



- 17.** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

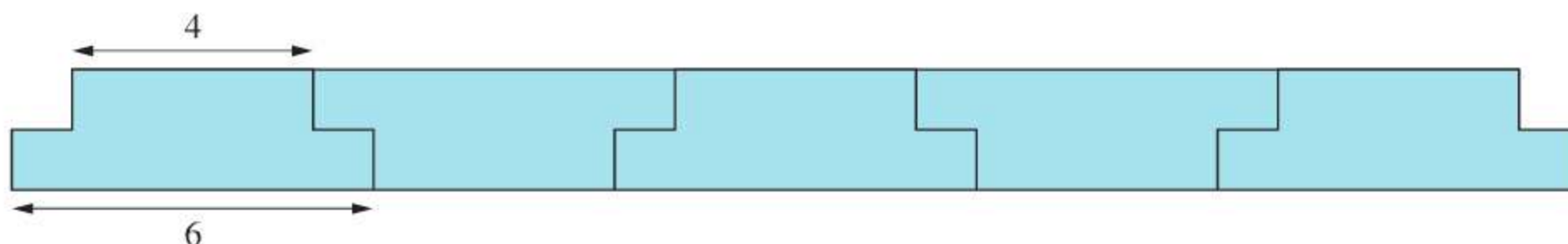
Trójkąt T_4 ma wysokość równą $2\sqrt{6}$.	P	F
Pole trójkąta T_6 jest 4 razy większe niż pole trójkąta T_1 .	P	F

- 18.** Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyrażenie algebraiczne opisujące obwód trójkąta T_n ma postać

- A.** $2n$ **B.** $2n-4$ **C.** $2n+4$ **D.** $2n+2$

- 19.** Z jednakowych płytek w kształcie ośmiokątów, w których sąsiednie boki są prostopadłe, układano wzory w sposób pokazany na rysunku.



- a)** Oblicz długość wzoru składającego się z pięciu płytek.
b) Oblicz długość wzoru składającego się z 8 płytek.
c) Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące długość wzoru składającego się z n płytek.

6. Równania

Powtórz wiadomości

Równania

Dwa wyrażenia algebraiczne, w których występuje przynajmniej jedna litera, połączone znakiem równości nazywamy **równaniem**, np.

lewa strona równania: L

$$4x - 5 = 9$$

prawa strona równania: P

Litery występujące w równaniu to **niewiadome**.

Równanie z jedną niewiadomą to równanie, w którym występuje tylko jedna niewiadoma, np. $8 - 4x = 0$, $x^3 = 64$.

Jeśli w równaniu występuje jedyna niewiadoma tylko w pierwszej potęgze, to jest to **równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą**, np. $2x - 7 = 3x + 8$.

Liczba spełnia dane równanie, jeżeli po podstawieniu tej liczby w miejsce niewiadomej lewa strona równania jest równa prawej stronie tego równania.

Każdą liczbę spełniającą dane równanie nazywamy **rozwiązaniem równania (pierwiastkiem równania)**.

Zbiorem rozwiązań równania nazywamy zbiór wszystkich liczb spełniających dane równanie.

Rozwiązywanie równań

Rozwiązanie równania polega na znalezieniu wszystkich liczb, które spełniają to równanie, lub stwierdzeniu, że takie liczby nie istnieją.

Aby otrzymać **równanie równoważne do danego równania**, możemy:

do obu stron równania **dodać** tę samą liczbę lub to samo wyrażenie,

od obu stron równania **odjąć** tę samą liczbę lub to samo wyrażenie,

obie strony równania **pomnożyć** przez tę samą liczbę różną od zera,

obie strony równania **podzielić** przez tę samą liczbę różną od zera.

Przykład 1.

Rozwiąż równanie $\frac{1}{2}x + 8 = 5$ i sprawdź otrzymane rozwiązanie.

Od obu stron równania odejmiemy liczbę 8. Następnie obie strony równania pomnożymy przez liczbę 2.



$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x + 8 &= 5 & | -8 \\ \frac{1}{2}x &= -3 & | \cdot 2 \\ x &= -6\end{aligned}$$

Sprawdzenie

$$L = \frac{1}{2} \cdot (-6) + 8 = -3 + 8 = 5, P = 5, \text{ zatem } L = P.$$

Równania sprzeczne i tożsamościowe

Równanie, którego nie spełnia żadna liczba, nazywamy **równaniem sprzecznym**.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(8 + 2x) &= 2\left(\frac{1}{2}x - 6\right) \\ 4 + x &= x - 12 \quad | -x \\ 4 &= -12\end{aligned}$$

Liczba 4 nie jest równa liczbie -12, więc otrzymaliśmy równanie sprzeczne. Oznacza to, że **równanie nie ma rozwiązania** (żadna liczba nie spełnia tego równania).

Równanie, które spełniają wszystkie liczby, nazywamy **równaniem tożsamościowym**.

$$\begin{aligned}2(3x - 4) &= 5 - (13 - 6x) \\ 6x - 8 &= 5 - 13 + 6x \\ 6x - 8 &= -8 + 6x \quad | +8 \\ 6x &= 6x \quad | -6x \\ 0 &= 0\end{aligned}$$

Liczba 0 jest równa liczbie 0, więc otrzymaliśmy równanie tożsamościowe. Oznacza to, że **równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań** (każda liczba spełnia to równanie).

Zadania tekstowe z wykorzystaniem równań

Przykład 2.

Sześć lat temu Karol był cztery razy młodszy od mamy. Obecnie mają razem 52 lata. Oblicz, ile lat miał Karol sześć lat temu.

1. Analiza zadania

osoba	wiek 6 lat temu	wiek obecnie
Karol	x lat	$(x + 6)$ lat
mama	$4x$ lat	$(4x + 6)$ lat

2. Ułożenie i rozwiązanie równania

$$\begin{aligned}x + 6 + 4x + 6 &= 52 \\ 5x + 12 &= 52 \quad | -12 \\ 5x &= 40 \quad | :5 \\ x &= 8\end{aligned}$$

3. Sprawdzenie

Sześć lat temu Karol miał 8 lat, więc teraz ma $8 + 6 = 14$ lat.

Sześć lat temu mama Karola miała $4 \cdot 8 = 32$ lata, więc teraz ma $32 + 6 = 38$ lat.

Karol i jego mama mają razem $14 + 38 = 52$ lata.

4. Odpowiedź

Odp. Sześć lat temu Karol miał 8 lat.

Przekształcanie wzorów

Przekształcanie wzoru polega na przedstawieniu jednej niewiadomej za pomocą pozostałych.

Przykład 3.

Z podanego wzoru wyznacz niewiadomą b .

$$\begin{aligned}c &= \frac{2a + 3b}{4} \quad | \cdot 4 \\ 4c &= 2a + 3b \quad | -2a \\ 4c - 2a &= 3b \quad | :3 \\ b &= \frac{4c - 2a}{3}\end{aligned}$$

Rozwiąż zadania

1. Sprawdź, czy podane liczby spełniają równanie.

a) $11x - (-x + 2) = 10$ $x = 1, x = -1$ b) $x^2 = -6x - 9$ $x = -2, x = -3$

2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba 1 jest rozwiązaniem równania

A. $-12x - 10 = 2$ B. $-3(x - 1) + 2 = 4x$ C. $2(x + 1) + 2 = 10$ D. $2x^3 - 2x^2 = 1 - x$

3. Która z liczb nie spełnia równania $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 1 B. -1 C. 2 D. -3

4. Rozwiąż równanie.

a) $5x - 10 = 35$

c) $5 + (2x + 4) = 8 - 5(x - 3)$

e) $2\frac{3}{4} - \frac{2}{3}x = -2\frac{2}{3} - x$

g) $\frac{-3+x}{2} = \frac{2x-6}{4}$

b) $2(x + 1) = 3x - 3$

d) $8(-x + 2) + 9 = -(-2x + 2) - 8$

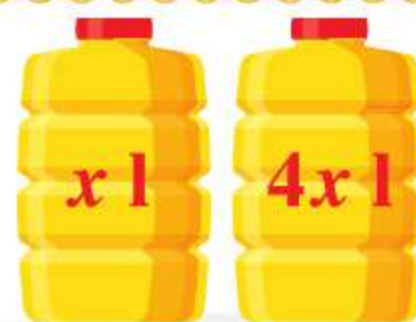
f) $5\left(\frac{2}{5}x + 3\right) = 21 + 5x$

h) $\frac{5-3x}{3} - \frac{x+4}{2} = 3 - 1,5x$

5. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Żadna liczba nie spełnia równania $(x - 1)(x + 1) - 2x = x(x - 2) - 12$.	P	F
Równanie $2x(x + 4) - 8x = -2x(x + 1) + 4x^2$ jest równaniem tożsamościowym.	P	F

6. W dwóch pojemnikach znajduje się woda. W pierwszym pojemniku jest 4 razy mniej litrów wody niż w drugim. Jeśli z drugiego pojemnika przelejemy 9 l wody do pierwszego pojemnika, to w obu będzie tyle samo litrów wody. Ile litrów wody jest w każdym z pojemników?



7. Na początku roku została ustalona stała opłata miesięczna za mieszkanie pana Jana (czynsz). W czwartym kwartale miesięczny czynsz za mieszkanie pana Jana był wyższy o 44 zł niż w pierwszych trzech kwartałach. Łączne wydatki pana Jana na czynsz w ciągu całego roku wyniosły 5268 zł. Ile złotych czynszu zapłacił pan Jan w grudniu?

8. Zosia postanowiła w ciągu trzech dni przeczytać książkę, którą poleciła jej Ela. Pierwszego dnia przeczytała 24 strony, drugiego dnia $\frac{2}{3}$ pozostałej liczby stron, a trzeciego ostatnie 32 strony. Ile stron liczy ta książka?

9. Ania jest o trzy lata młodsza od swojej siostry Kasi. Mama dziewczynek jest pięć razy starsza od Ani. Za dwa lata mama z córkami będą miały razem 58 lat. Ile lat ma obecnie mama?

10. Bartek mieszka w odległości 1,2 km od szkoły i do szkoły chodzi pieszo. Zazwyczaj pokonuje tę trasę z prędkością 4,8 km/h. Ile minut zazwyczaj zajmuje Bartkowi przejście z domu do szkoły?

11. Pani Maria pojechała na rowerze z domu do parku oddalonego o 9 km. Drogę do parku pokonała w czasie 40 min, a tę samą drogę, wracając do domu, pokonała z prędkością 15 km/h.

a) Oblicz, z jaką prędkością pani Maria pokonała drogę z domu do parku.

b) O ile minut czas powrotu był krótszy od czasu jazdy z domu do parku?



12. Podstawa trójkąta równoramiennego jest o 3,7 cm krótsza od jego ramienia. Obwód trójkąta jest równy 50,9 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

13. Każdy kolejny kąt wewnętrzny czworokąta ma miarę o 22° większą od poprzedniego. Oblicz miarę największego kąta wewnętrznego tego czworokąta.

14. Długości boków czworokąta są kolejnymi liczbami parzystymi. Obwód czworokąta jest równy 108 cm. Oblicz długość najdłuższego boku tego czworokąta.

15. Dzienny karnet ulgowy na stok narciarski jest o 10 % tańszy od karnetu normalnego. Grupa znajomych za 4 karnety normalne i 3 ulgowe zapłaciła 804 zł. Ile kosztuje karnet ulgowy, a ile normalny?

16. Dane są dwie liczby, których różnica jest równa 19. Suma trzykrotności liczby większej i siedmiokrotności mniejszej z nich jest równa 507. Znajdź te liczby.

17. Suma trzech liczb jest równa 168. Znajdź te liczby, jeśli druga liczba stanowi $\frac{7}{8}$ pierwszej, a trzecia jest o 8 mniejsza od drugiej liczby.

18. Cena stołu jest o 120 zł wyższa niż cena krzesła. W czasie wyprzedaży obniżono cenę stołu o 20 % i cenę krzesła o 15 %. Pan Kowalski za stół i 4 krzesła kupione na wyprzedaży zapłacił 348 zł. Ile kosztował stół podczas wyprzedaży?

19. Na planie wykonanym w skali 1 : 200 boki prostokątnego ogrodu są równe 5 cm i 8 cm. Jakie są wymiary tego ogrodu na planie wykonanym w skali 1 : 300?

20. Patryk wziął udział w szkolnym konkursie matematycznym, podczas którego miał do rozwiązania test. Za każdą poprawną odpowiedź uczeń otrzymywał 3 punkty, za błędną – 0 punktów, a za brak odpowiedzi uczeń tracił 1 punkt. Patryk do połowy zadań podał poprawną odpowiedź, do 30 % zadań odpowiedź błędną, a do pozostałych nie podał żadnej odpowiedzi. Ile zadań było w teście, jeśli Patryk zdobył łącznie 39 punktów?

21. Na półmisku były pierogi. Jacek zjadł czwartą część wszystkich pierogów i jeszcze dwa pierogi, Kuba zjadł połowę pozostałych pierogów i wtedy okazało się, że na półmisku zostało 5 pierogów. Ile pierogów było początkowo na półmisku?

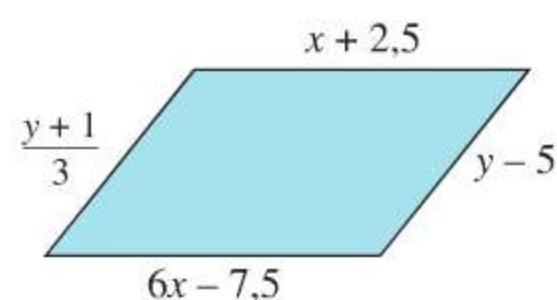
22. Ela po zakupach powiedziała, że za bułki i jedno opakowanie mleka zapłaciła 12,40 zł. Każda bułka kosztowała 1,20 zł, a opakowanie mleka było 4 razy droższe od jednej bułki. Uzasadnij, że Ela pomyliła się, podając informacje dotyczące zakupów.

23. Karol ma 1210 zł w banknotach 20-złotowych i 50-złotowych. Banknotów 50-złotowych ma o 13 więcej niż 20-złotowych. Ile banknotów każdego rodzaju ma Karol?

24. Suma długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z jednego wierzchołka jest równa 136 cm. Jedna z tych krawędzi jest o 4 cm dłuższa od drugiej i 5 razy krótsza od trzeciej. Oblicz wymiary tego prostopadłościanu.

25. Dane są kwadrat i prostokąt o równych polach. Jeden z boków prostokąta jest o 7 cm krótszy, a drugi o 12 cm dłuższy od boku kwadratu. Oblicz wymiary tego prostokąta.

26. Długości boków równoległoboku opisano za pomocą wyrażeń algebraicznych. Oblicz długości boków tego równoległoboku.



27. Stosunek długości boków prostokąta jest równy 2 : 3. Pole tego prostokąta wynosi 150 cm^2 . Oblicz obwód tego prostokąta.

28. Do 3 kg solanki o stężeniu 18 % dolano 2 kg wody. Ile procent soli zawiera nowa solanka?

29. Ile kilogramów soli należy dosypać do 4 kg solanki 6-procentowej, aby uzyskać solankę o stężeniu 20 %?

30. Z podanych wzorów wyznacz wskazaną zmienną. Wartości wszystkich zmiennych są liczbami dodatnimi.

a) $\frac{b}{c} = a, \quad b$

b) $\frac{k-l}{2} = m, \quad k$

c) $\frac{3ab}{c} = c, \quad a$

d) $(u+5) \cdot w = 4, \quad u$

e) $3b^2c = a + c, \quad b$

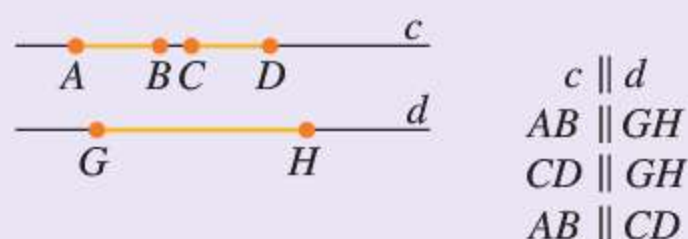
f) $\frac{z+c}{t-c} = 4w, \quad z, \quad t \neq c$

7. Figury płaskie

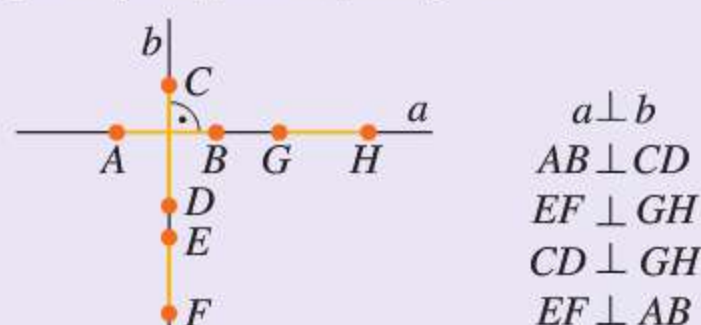
Powtórz wiadomości

Odcinki równoległe i odcinki prostopadłe

Dwa **odcinki są równoległe**, gdy zawierają się w prostych równoległych lub zawierają się w tej samej prostej.



Dwa **odcinki są prostopadłe**, gdy zawierają się w prostych prostopadłych.



Rodzaje kątów

Klasyfikacja kątów ze względu na ich miarę

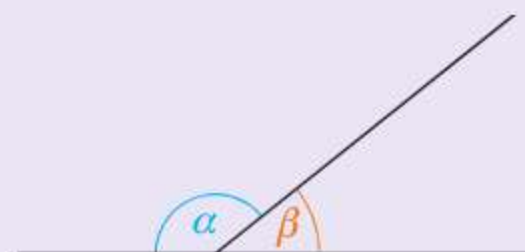
kąt zerowy	kąt ostry	kąt prosty	kąt rozwarty	kąt półpełny	kąt wklęsły	kąt pełny
$\alpha = 0^\circ$	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$\alpha = 90^\circ$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	$\alpha = 180^\circ$	$180^\circ < \alpha < 360^\circ$	$\alpha = 360^\circ$

Kąt jest wypukły, jeśli ma miarę nie mniejszą niż 0° i jednocześnie nie większą niż 180° . Kąt pełny również jest zaliczany do kątów wypukłych.

- Dwa kąty nazywamy **kątami przyległymi**, jeśli mają wspólne ramie, a ich dwa pozostałe ramiona tworzą prostą.

Kąty α i β są kątami przyległymi.

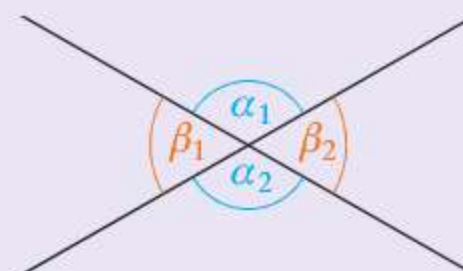
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$



- Kąty wierzchołkowe** to kąty tej samej miary, utworzone przez przecinające się proste.

Kąty α_1 i α_2 oraz kąty β_1 i β_2 są kątami wierzchołkowymi.

$$\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$$

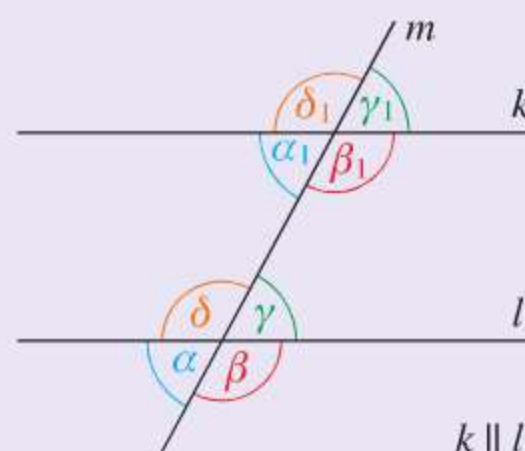


- Dwie proste równoległe: k i l przecięto prostą m . Powstały **kąty odpowiadające** i **naprzemianległe**.

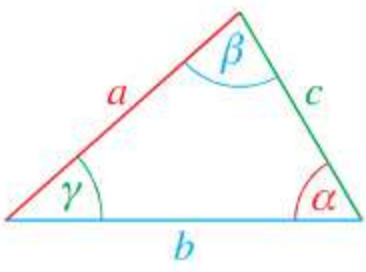
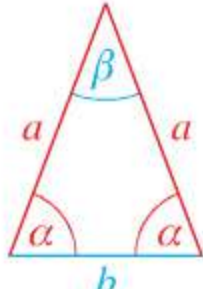
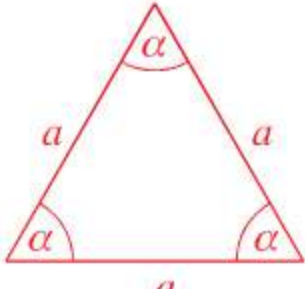
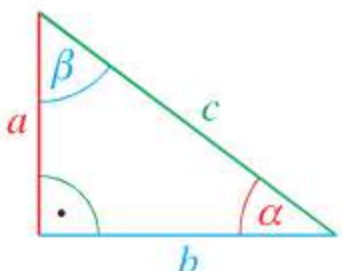
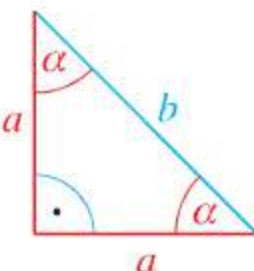
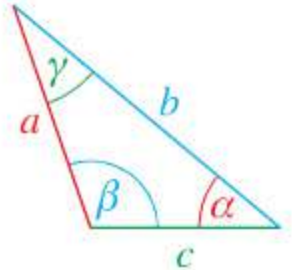
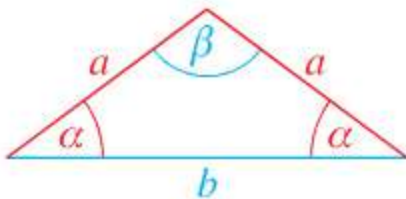
Kąty odpowiadające: α i α_1 , β i β_1 , γ i γ_1 , δ i δ_1 .

Kąty naprzemianległe: α i γ_1 , β i δ_1 , γ i α_1 , δ i β_1 .

W każdej parze **kąty odpowiadające** i **kąty naprzemianległe** mają jednakowe miary.



Klasyfikacja trójkątów

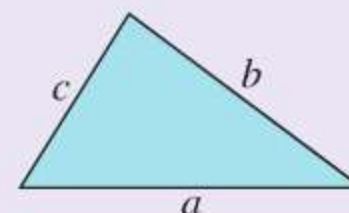
		Podział trójkątów ze względu na boki		
		różnoboczny	równoramienny	równoboczny
Podział trójkątów ze względu na kąty	ostrokątny			
	prostokątny			nie istnieje
	rozwartokątny			nie istnieje

Warunek istnienia trójkąta

Długość każdego boku trójkąta jest mniejsza od sumy długości dwóch pozostałych boków.

$$a < b + c \quad b < a + c \quad c < a + b$$

Jeśli znamy długości wszystkich trzech odcinków, to aby ustalić, czy da się z nich zbudować trójkąt, wystarczy sprawdzić, czy suma długości dwóch krótszych odcinków jest większa od długości najdłuższego odcinka.



Suma miar kątów w trójkącie

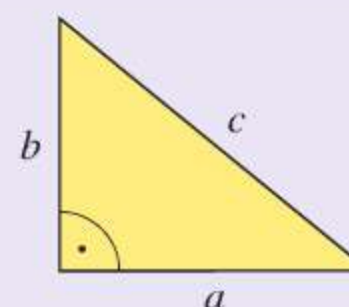
W każdym trójkącie suma miar kątów wewnętrznych wynosi 180° .



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

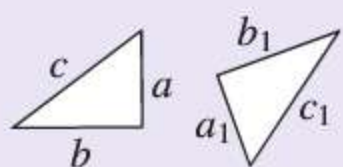
Twierdzenie Pitagorasa

W każdym trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

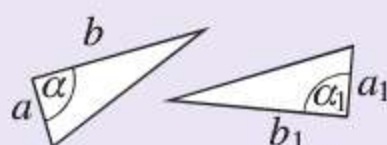


$$a^2 + b^2 = c^2$$

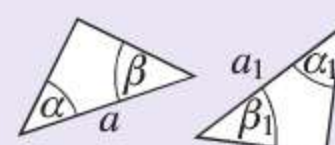
Cechy przystawiania trójkątów



bok-bok-bok (bbb)
 $a = a_1, b = b_1, c = c_1$



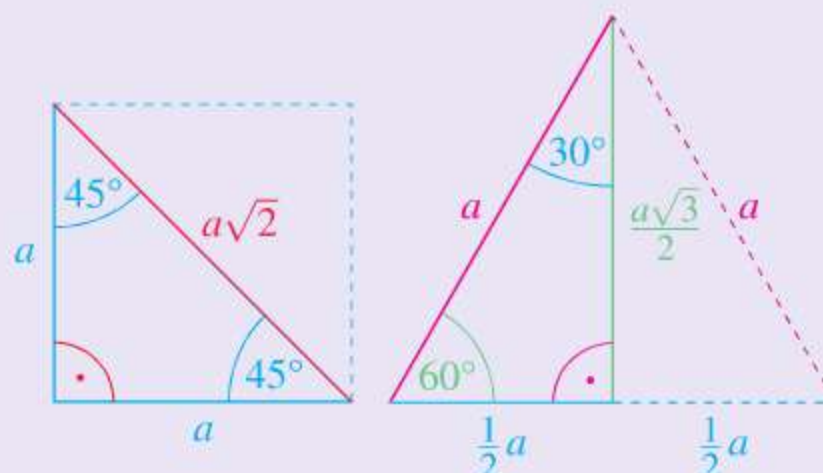
bok-kąt-bok (bkb)
 $a = a_1, \alpha = \alpha_1, b = b_1$



kąt-bok-kąt (kbk)
 $\alpha = \alpha_1, a = a_1, \beta = \beta_1$

Trójkąty charakterystyczne

Najbardziej charakterystycznymi trójkątami prostokątnymi są trójkąty, których kąty mają miary: $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ oraz $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Pierwszy z nich jest połową kwadratu, a drugi połową trójkąta równobocznego.

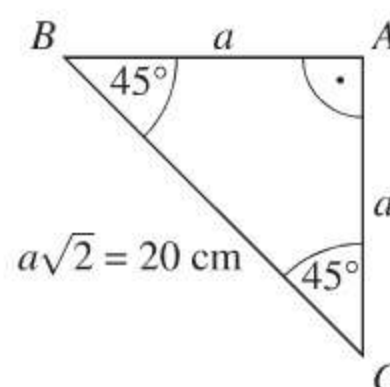


Przykład 1.

Oblicz nieznaną długość boków trójkąta prostokątnego.

a) trójkąt równoramienny o przeciwprostokątnej długości 20 cm

Trójkąt jest prostokątny równoramienny, więc $|AB| = |AC| = a$.



Skorzystamy z własności trójkąta o kątach: $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$. Odcinek BC to przeciwprostokątna trójkąta ABC o przyprostokątnych długości a , więc $|BC| = a\sqrt{2}$.

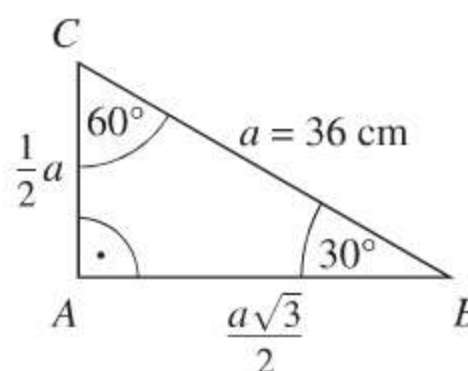


$$\begin{aligned} |BC| &= 20 \\ a\sqrt{2} &= 20 \quad | : \sqrt{2} \\ a &= \frac{20}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \text{ [cm]} \end{aligned}$$

Odp. Boki AB i AC mają długość po $10\sqrt{2}$ cm.

b) trójkąt o przeciwprostokątnej długości 36 cm, którego kąty mają miary: $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

Trójkąt ma kąty o mierze: $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, więc możemy przyjąć, że $|BC| = a, |AC| = \frac{1}{2}a, |AB| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



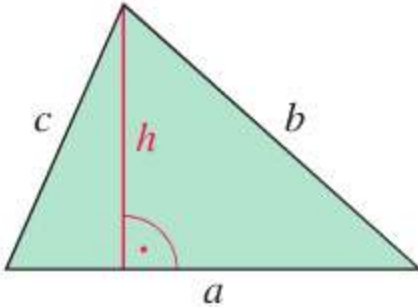
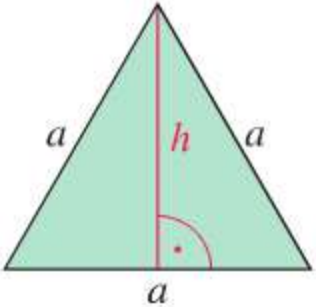
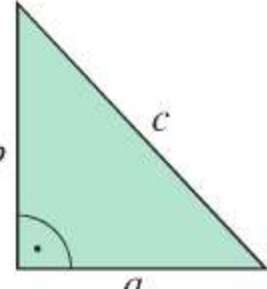
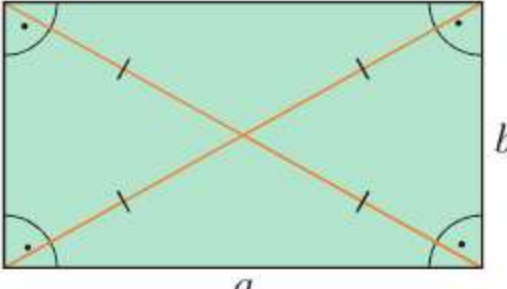
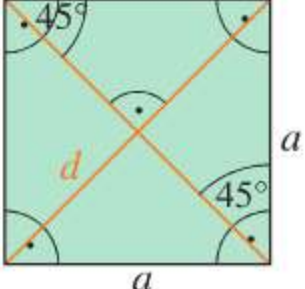
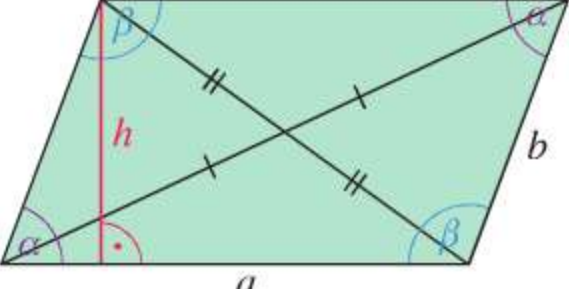
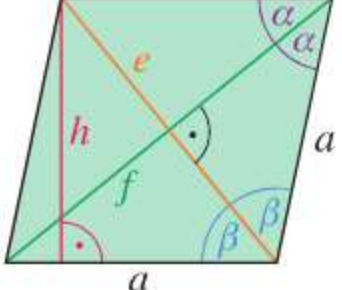
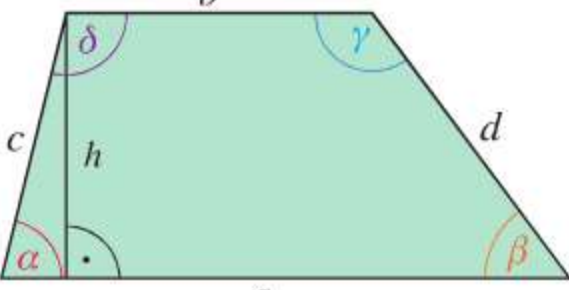
Skorzystamy z własności trójkąta o kątach: $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Bok BC leży naprzeciw kąta 90° , więc $a = 36$ cm. Najpierw obliczymy długość boku AC , a następnie długość boku AB .



$$\begin{aligned} a &= 36 \quad | : 2 \\ \frac{1}{2}a &= 18 \text{ [cm]} \\ \frac{a\sqrt{3}}{2} &= \frac{36\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3} \text{ [cm]} \end{aligned}$$

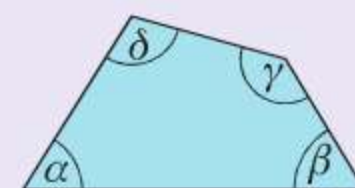
Odp. Bok AC ma długość 18 cm, a długość boku AB jest równa $18\sqrt{3}$ cm.

Obwody i pola figur płaskich

Trójkąt  $Obw. = a + b + c$ $P = \frac{a \cdot h}{2}$	Trójkąt równoboczny  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $Obw. = 3a$ $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
Trójkąt prostokątny  $Obw. = a + b + c$ $P = \frac{a \cdot b}{2}$	Prostokąt  $Obw. = 2a + 2b$ $P = a \cdot b$
Kwadrat  $d = a\sqrt{2}$ $Obw. = 4a$ $P = a \cdot a = a^2$ $P = \frac{1}{2}d^2$	Równoległobok  $Obw. = 2a + 2b$ $P = a \cdot h$
Romb  $Obw. = 4a$ $P = a \cdot h$ $P = \frac{e \cdot f}{2}$	Trapez  $Obw. = a + b + c + d$ $P = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$ $\alpha + \delta = \beta + \gamma = 180^\circ$

Suma miar kątów w czworokącie

W każdym czworokącie suma miar kątów wewnętrznych wynosi 360° .



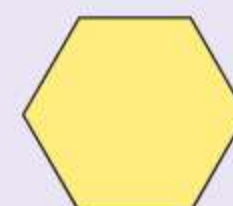
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

Wielokąt foremny

Wielokąt, którego wszystkie boki są tej samej długości, a kąty mają takie same miary, nazywamy **wielokątem foremnym**.

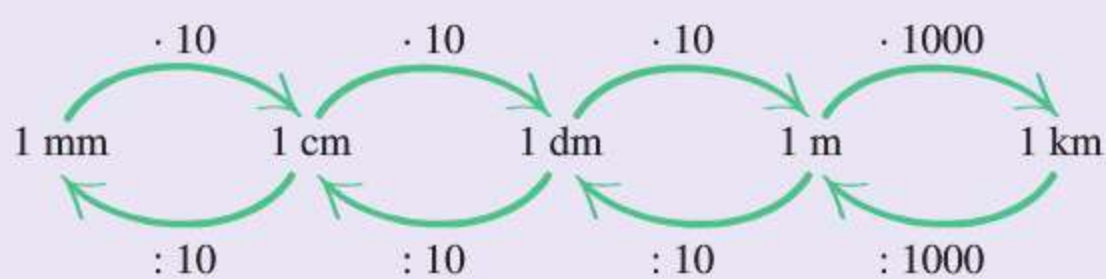
Wzór na **pole sześciokąta foremnego** o boku długości a ma postać:

$$P = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



sześciokąt
foremny

Jednostki długości i jednostki pola



- 1 ar (1 a) to pole kwadratu o boku długości 10 m.

$$1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2$$

- 1 hektar (1 ha) to pole kwadratu o boku długości 100 m.

$$1 \text{ ha} = 100 \text{ a} = 10\,000 \text{ m}^2$$

Przykład 2.

Oblicz, ile arów ma działka o długości 20 m i szerokości 300 dm.

Zamienimy decymetry na metry.



$$300 \text{ dm} = 30 \text{ m}$$

Obliczymy pole działki i przedstawimy je w arach, wiedząc, że $1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2$.



$$P = 20 \text{ m} \cdot 30 \text{ m} = 600 \text{ m}^2 = 6 \text{ a}$$

Odp. Powierzchnia tej działki wynosi 6 a.

Układ współrzędnych

Prostokątny układ współrzędnych (kartezjański układ współrzędnych) wyznaczają dwie prostopadłe osie liczbowe, które mają wspólny początek O (**początek układu współrzędnych**). Początek układu współrzędnych ma współrzędne $(0, 0)$.

Punkty kratowe to punkty w układzie współrzędnych, których obie współrzędne są liczbami całkowitymi.

Współrzędne punktu $S = (x_S, y_S)$ będącego **środkiem odcinka** AB , gdzie $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, obliczamy ze wzorów:

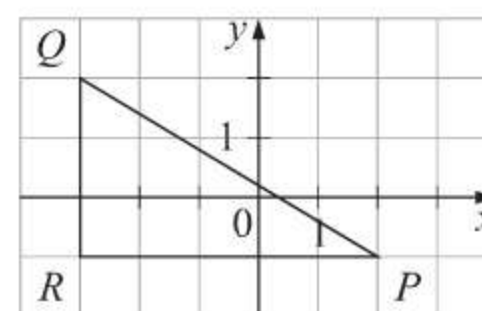
$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2}, y_S = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Przykład 3.

Oblicz długość odcinka PQ .

Z rysunku odczytamy, że $P = (2, -1)$, $Q = (-3, 2)$ i $R = (-3, -1)$. Wiemy, że $|PR| = 2 - (-3) = 2 + 3 = 5$ oraz $|QR| = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczymy długość odcinka PQ . Ponieważ PQ jest długością odcinka, to musi wyrażać się za pomocą liczby dodatniej.



$$|PR|^2 + |QR|^2 = |PQ|^2$$

$$5^2 + 3^2 = |PQ|^2$$

$$25 + 9 = |PQ|^2$$

$$|PQ|^2 = 34$$

$$|PQ| = \sqrt{34}$$

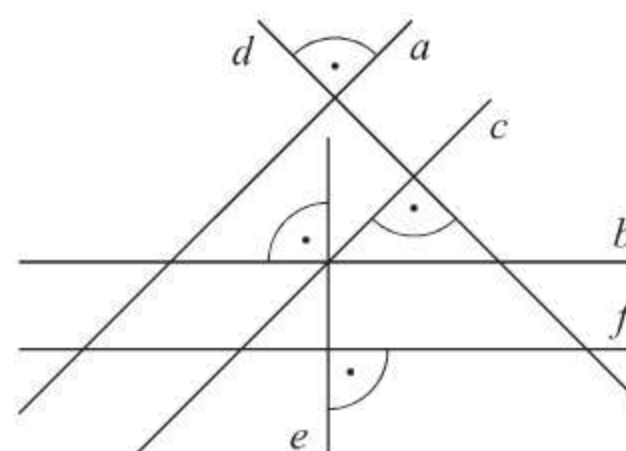
Odp. Długość odcinka PQ wynosi $\sqrt{34}$.

Rozwiąż zadania

1. Na rysunku przedstawiono proste: a, b, c, d, e, f .

Wskaż wszystkie pary prostych

- a) równoległych,
b) prostopadłych.



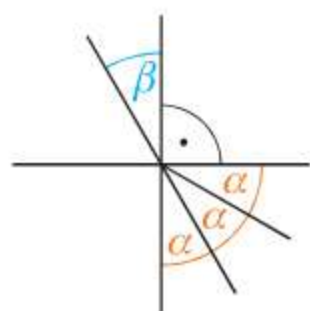
2. Punkt S dzieli odcinek PQ o długości 21 cm na dwa odcinki: PS i SQ , których stosunek długości jest równy $2 : 5$. Oblicz długości odcinków PS i SQ .

3. Jeden z kątów przyległych ma miarę cztery razy większą od miary drugiego kąta. Wyznacz miarę każdego z tych kątów.

4. Różnica miar dwóch kątów przyległych jest równa 40° . Oblicz miary tych kątów.

5. Oblicz miary kątów oznaczonych literami greckimi.

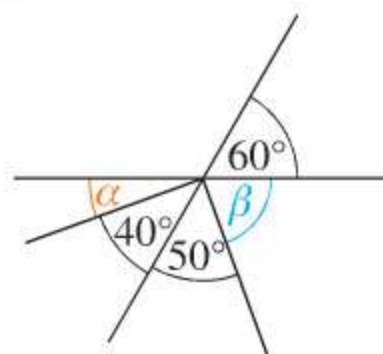
a)



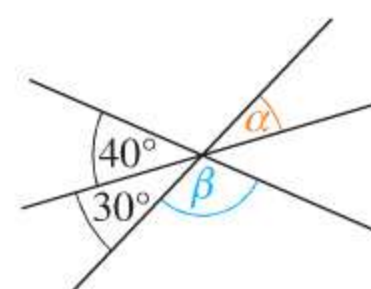
b)



c)



d)



6. Proste a i b są równoległe.

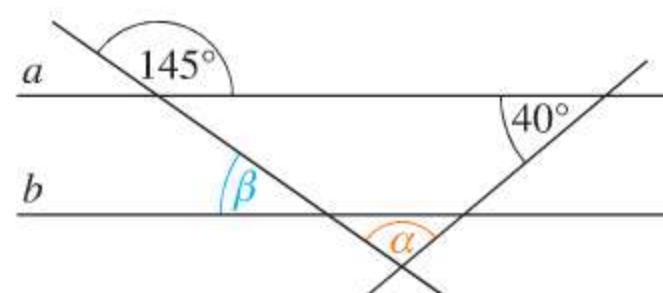
Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Miara kąta α jest równa **A** **B**.

A. 115° **B.** 105°

Stosunek miary kąta α do miary kąta β jest równy **C** **D**.

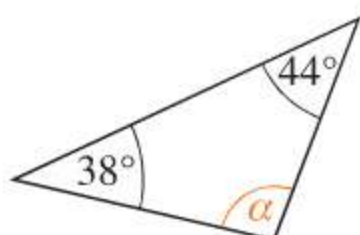
C. $2 : 1$ **D.** $3 : 1$



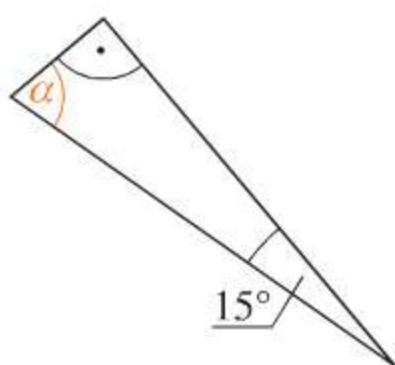
E

7. Oblicz miarę kąta α .

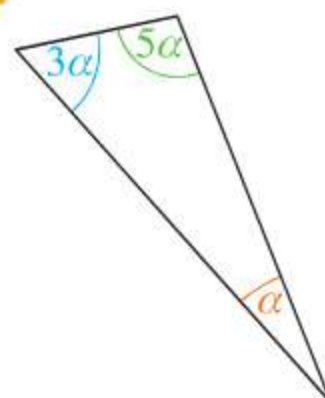
a)



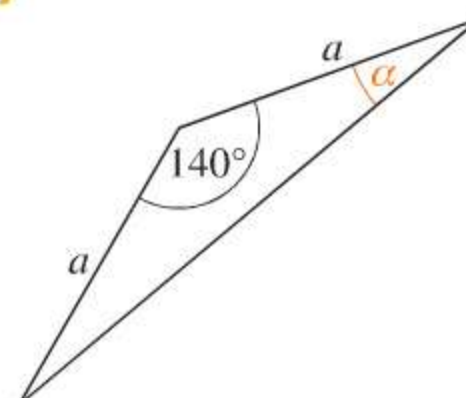
b)



c)



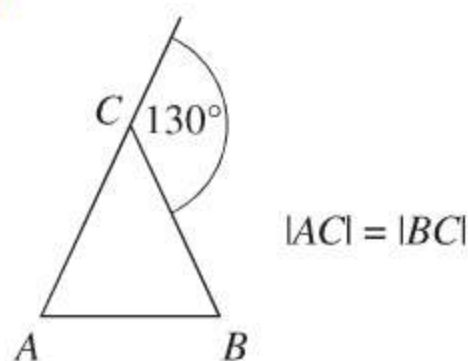
d)



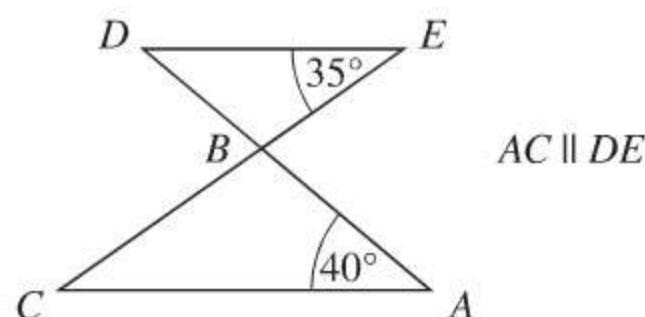
- 8.** Wyznacz miary kątów trójkąta równoramiennego, jeżeli miara kąta przy podstawie jest trzy razy mniejsza od miary kąta między ramionami.

- 9.** Oblicz miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC .

a)



b)



- 10.** W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie ma miarę 50° . Z wierzchołków przy podstawie poprowadzono dwie jego wysokości. Wyznacz miarę kąta ostrego między tymi wysokościami.

- E 11.** Jeden z kątów wewnętrznych trójkąta ma miarę 45° , a różnica miar dwóch pozostałych kątów jest równa 15° .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

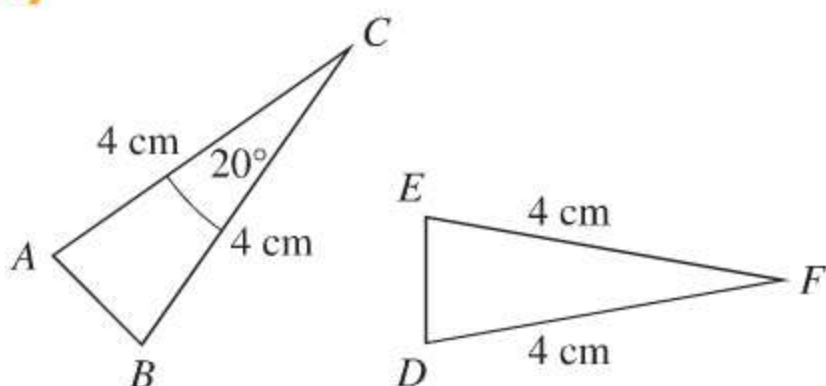
Największy z kątów wewnętrznych tego trójkąta ma miarę

- A.** 60° **B.** 45° **C.** 75° **D.** 120°

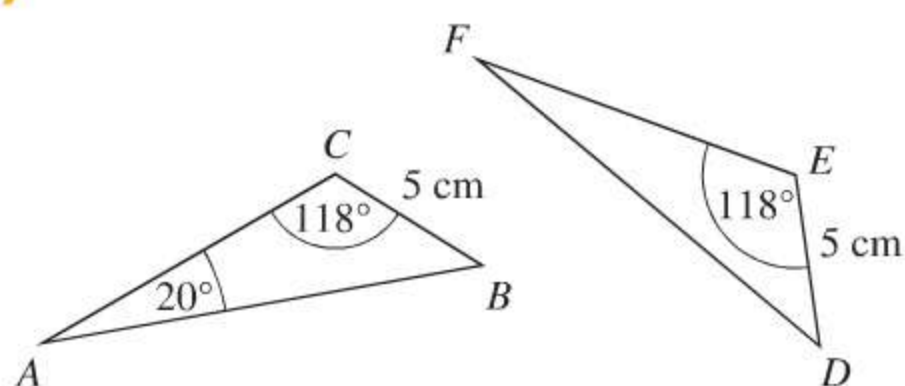
- 12.** Miara jednego z kątów trójkąta jest o 60° większa od miary jego najmniejszego kąta. Miara trzeciego kąta jest cztery razy większa od miary najmniejszego kąta. Uzasadnij, że ten trójkąt jest równoramienny.

- 13.** Trójkąty ABC i DEF są przystające. Wyznacz miarę kąta przy wierzchołku D .

a)

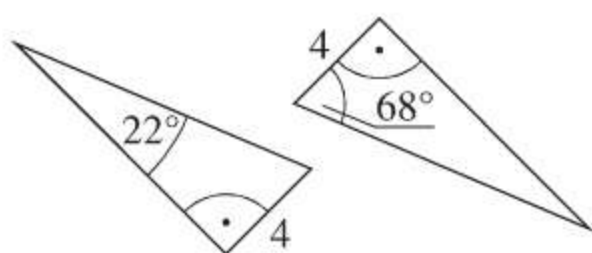


b)

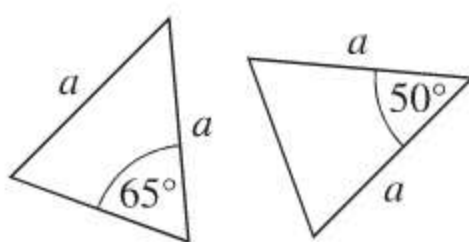


- E 14.** Dane są trzy pary trójkątów.

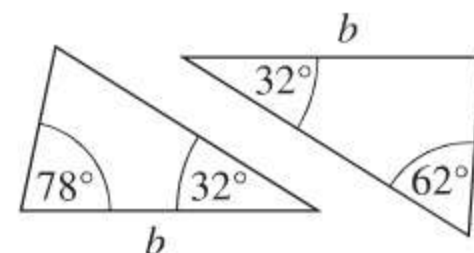
I.



II.



III.



W których parach trójkąty są przystające? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A.** W I i II. **B.** W I i III. **C.** W II i III. **D.** W I, II i III.

15. Sprawdź, czy można zbudować trójkąt z odcinków o podanych długościach.

a) 3, 3, 5

b) 5, 6, $\sqrt{121}$

c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

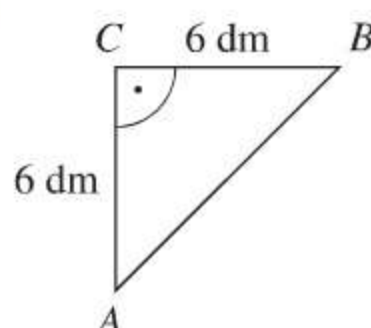
d) 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$

16. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

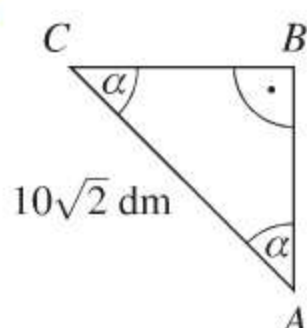
Ramię trójkąta równoramiennego o dwóch bokach długości 2 cm i 5 cm może mieć długość 2 cm.	P	F
Istnieje trójkąt, którego długości boków pozostają w stosunku 3 : 4 : 7.	P	F

17. Wyznacz nieznaną długość boków trójkąta prostokątnego.

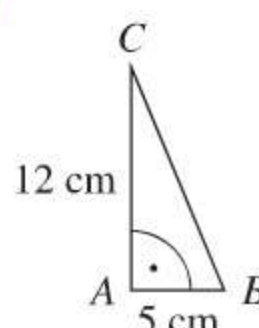
a)



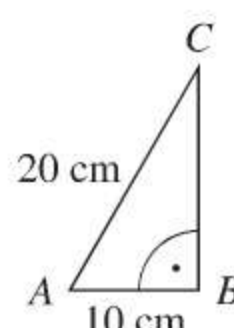
b)



c)

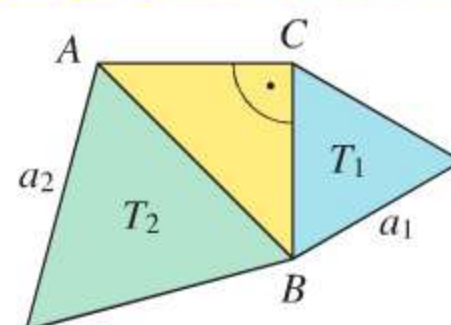


d)



18. Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC . Na przyprostokątnej CB zbudowano trójkąt równoboczny T_1 , a na przeciwprostokątnej AB zbudowano trójkąt równoboczny T_2 .

Czy pole trójkąta T_2 jest dwa razy większe od pola trójkąta T_1 ? Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**



A.	Tak,	ponieważ	1.	trójkąty T_1 i T_2 są równoboczne.
			2.	pole trójkąta T_2 jest równe $\frac{a_2^2 \sqrt{3}}{2}$.
B.	Nie,		3.	$\frac{a_2}{a_1} = \sqrt{2}$.

19. Oblicz obwód kwadratu, jeśli jego przekątna ma długość:

a) $9\sqrt{2}$,

b) $5\sqrt{6}$,

c) 16.

20. Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest dwa razy dłuższa od drugiej przyprostokątnej. Przeciwprostokątna ma długość 10 cm. Oblicz obwód tego trójkąta.

21. Na planie w skali 1 : 100 ogródek jest prostokątem o wymiarach 12 cm i 24 cm.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Rzeczywista długość ścieżki wytyczonej wzdłuż przekątnej tego ogródka jest

A. większa niż 25 m i mniejsza niż 26 m.

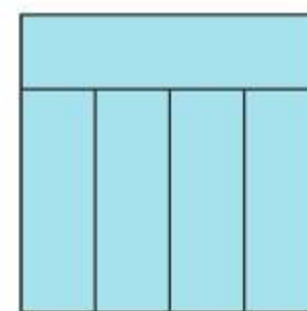
B. równa 26 m.

C. większa niż 26 m i mniejsza niż 27 m.

D. równa 27 m.

- 22.** Zosia przygotowuje plan zagospodarowania działki, która ma kształt prostokąta o wymiarach 120 m i 90 m. Swój pomysł postanowiła przedstawić na kartce o wymiarach 40 cm i 30 cm. Jaką skalę powinna zastosować Zosia, aby otrzymany plan zmieścił się na tej kartce i był możliwie najdokładniejszy?

- E 23.** Kasia ma układankę z dwoma rodzajami elementów. Wśród nich jest 70 prostokątów o wymiarach $1\text{ cm} \times 3\text{ cm}$ i 30 prostokątów o wymiarach $1\text{ cm} \times 4\text{ cm}$. Kasia z tych elementów układa kwadraty takie, jak pokazano na rysunku.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Po ułożeniu 12 kwadratów Kasi zostaną 22 mniejsze prostokąty.	P	F
Z tego zestawu Kasia może ułożyć maksymalnie 18 kwadratów.	P	F

- 24.** Oblicz wysokość trójkąta równobocznego o boku długości:

a) 12, b) $6\sqrt{3}$, c) $7\sqrt{15}$.

- E 25.** Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Pole trójkąta równobocznego o boku długości 6 cm jest równe **A B**.

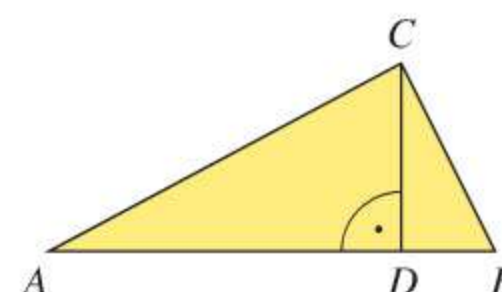
A. $18\sqrt{3}\text{ cm}^2$ **B.** $9\sqrt{3}\text{ cm}^2$

Długość boku trójkąta równobocznego o wysokości równej $2\sqrt{6}\text{ cm}$ wynosi **C D**.

C. $4\sqrt{6}\text{ cm}$ **D.** $4\sqrt{2}\text{ cm}$

- 26.** W trójkącie ABC bok AC ma długość 17 cm, a wysokość CD dzieli bok AB na dwa odcinki o długościach $|AD| = 15\text{ cm}$ i $|BD| = 4\text{ cm}$. Oblicz:

a) pole trójkąta ABC , b) długość odcinka BC .



- E 27.** Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 10 cm, a wysokość h poprowadzona do tej podstawy jest od niej o 20 % dłuższa.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Wysokość h trójkąta jest równa **A B** cm.

A. 6 **B.** 12

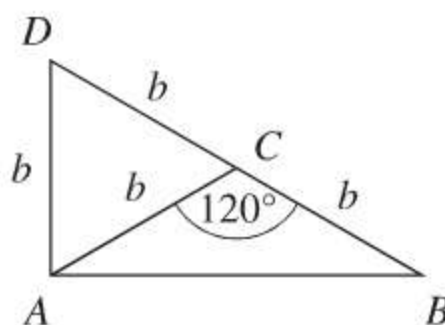
Obwód trójkąta wynosi **C D** cm.

C. 31 **D.** 36

- 28.** W trójkącie równoramiennym prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest równa 9 cm. Oblicz:

a) długości boków tego trójkąta, b) pole tego trójkąta.

- 29.** Uzasadnij, że pola trójkątów ABC i ACD są równe.



- 30.** W równoległoboku $KLMN$ z wierzchołka L kąta rozwartego poprowadzono wysokość LP . Miara jednego z kątów równoległoboku jest równa 112° .

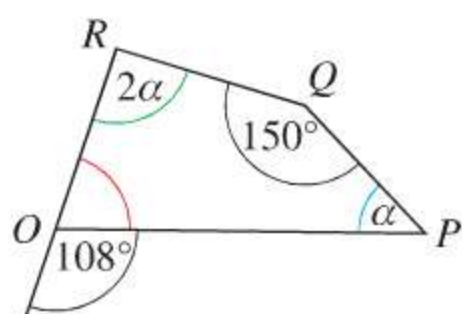
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta MLP jest równa

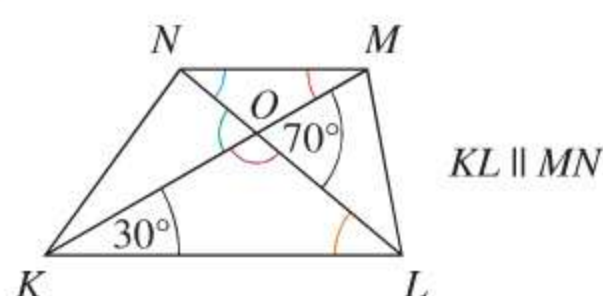
- A.** 12° **B.** 22° **C.** 45° **D.** 68°

- 31.** Oblicz miary zaznaczonych kolorowymi łukami kątów.

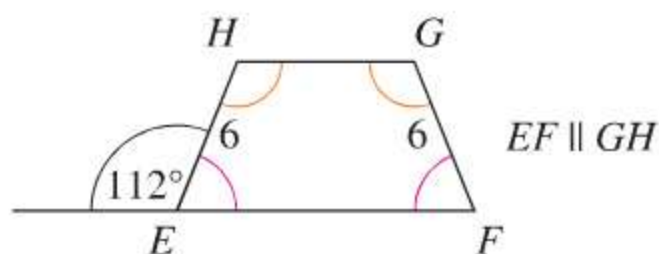
a)



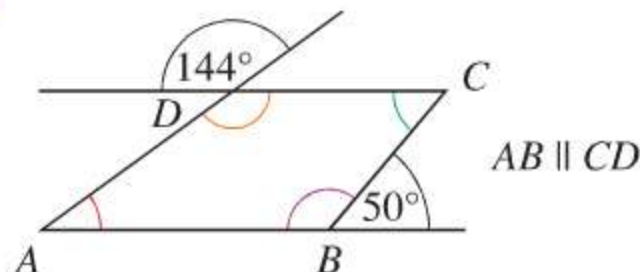
b)



c)



d)



- 32.** Boki równoległoboku mają długości 1,5 dm i 9 cm, a wysokość poprowadzona do dłuższego boku jest równa 6 cm.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Druga wysokość tego równoległoboku jest równa

- A.** 3,6 cm **B.** 7,2 cm **C.** 10 cm **D.** 5 cm

- 33.** Krótsza przekątna rombu ma długość 16 cm, a bok tego rombu jest o 9 cm dłuższy od połowy tej przekątnej. Oblicz:

- a)** pole tego rombu, **b)** wysokość tego rombu.

- 34.** Pole rolnika ma kształt równoległoboku o bokach długości 300 m i 60 m. Odległość między dłuższymi jego bokami jest równa 45 m. Rolnik chce na tym polu zasiać rzepak. Dla uzyskania optymalnych plonów planuje wysiać 3 kg ziarna na jeden hektar.

- a)** Ile kilogramów rzepaku zużyje rolnik na obsianie tego pola?
b) Rolnik z jednego hektara może uzyskać 3,2 t rzepaku. Zapylenie kwiatów rzepaku przez pszczoły może zwiększyć plony o 30 %. Ile kilogramów rzepaku uzyska ten rolnik, jeśli kwiaty rzepaku na jego polu zostaną zapyłone przez pszczoły?



- E 35.** Kąt rozwarty rombu ma miarę 135° , a długość jego boku wynosi $8\sqrt{2}$.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Iloczyn długości przekątnych tego rombu wynosi

A. 64 **B.** 128 **C.** $64\sqrt{2}$ **D.** $128\sqrt{2}$

- 36.** Zbudowano trapez z prostokąta o bokach długości 12 cm i 30 cm oraz trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości 5 cm i 12 cm. Oblicz:

a) obwód i pole tego trapezu, **b)** długość dłuższej przekątnej tego trapezu.

- E 37.** Kąt rozwarty trapezu równoramiennego ma miarę 120° . Każde z ramion ma długość 14 cm, a krótsza podstawa ma długość 10 cm.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Obwód trapezu jest równy **A** **B** cm. **A.** 52 **B.** 62

Pole trapezu jest równe **C** **D** cm^2 . **C.** $119\sqrt{3}$ **D.** $238\sqrt{3}$

- E 38.** Krótsza przekątna sześciokąta foremnego ma długość $12\sqrt{3}$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Dłuższa przekątna tego sześciokąta ma długość 24.	P	F
Pole tego sześciokąta jest równe $6^3 \cdot \sqrt{3}$.	P	F

- 39.** Czy suma miar kątów wewnętrznych dwunastokąta foremnego wynosi 1800° ? Uzasadnij swoją odpowiedź.

- 40.** Dane są punkty $A = (-4, 6)$ i $B = (-6, -10)$. Wyznacz współrzędne punktu S , tak aby:

a) punkt S był środkiem odcinka AB , **b)** punkt A był środkiem odcinka BS .

- E 41.** Dany jest trójkąt o wierzchołkach: $K(-8, 1)$, $L(0, 1)$, $M(-4, 5)$.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Do boków trójkąta KLM należy **A** **B** punktów kratowych. **A.** 16 **B.** 18

Pole trójkąta KLM jest równe **C** **D**. **C.** 20 **D.** 16

- 42.** W prostokątnym układzie współrzędnych dany jest czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach: $A = (-1, 1)$, $B = (2, -2)$, $C = (2, 1)$, $D = (0, 3)$. Oblicz pole i obwód czworokąta $ABCD$.

Graniastosłupy

Graniastosłup jest bryłą, która ma:

- dwie przystające (takie same), równoległe podstawy w kształcie wielokąta,
- wszystkie krawędzie boczne równoległe względem siebie i równej długości.

Graniastosłup nazywamy **prostym**, jeśli jego wszystkie krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw. W przeciwnym wypadku graniastosłup nazywamy **pochyłym**. Wszystkie ściany boczne graniastosłupa prostego są prostokątami.

Graniastosłupem prawidłowym nazywamy graniastosłup prosty, który w podstawie ma wielokąt foremny.

Przekątną graniastosłupa nazywamy dowolny odcinek, który łączy dwa wierzchołki graniastosłupa i nie zawiera się w żadnej z jego ścian.

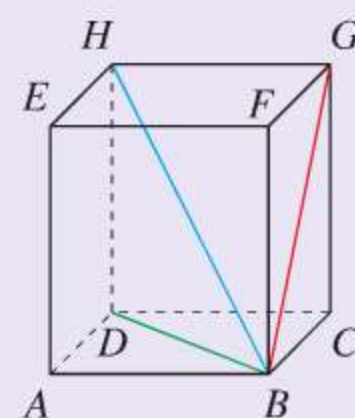
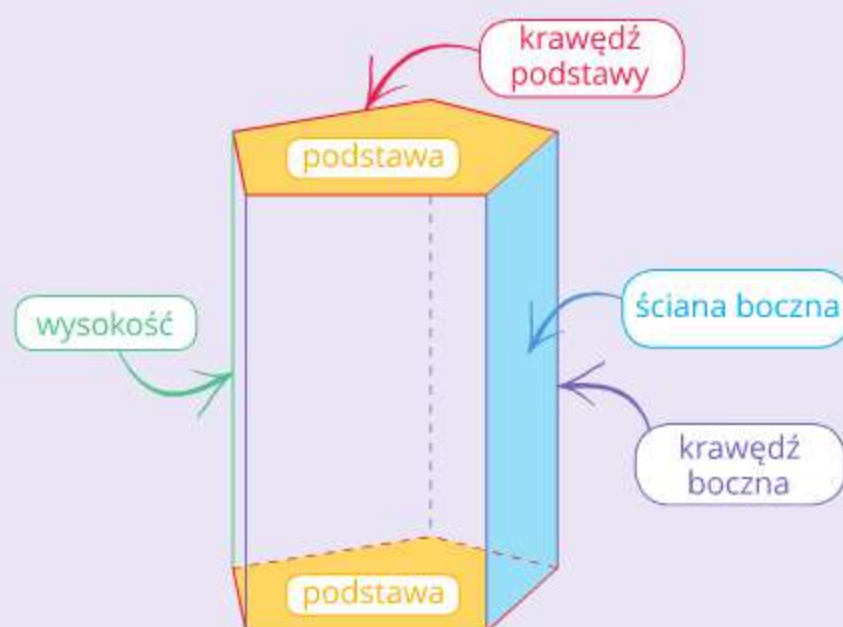
Z wierzchołka B graniastosłupa czworokątnego $ABCDEFGH$ poprowadzono trzy przekątne:

- BD – przekątna podstawy $ABCD$ graniastosłupa,
- BG – przekątna ściany bocznej $BCGF$ graniastosłupa,
- BH – przekątna graniastosłupa.

Graniastosłup czworokątny $ABCDEFGH$ ma 4 przekątne: AG , BH , CE oraz DF .

Długość przekątnej sześcianu o krawędzi długości a wyraża się wzorem:

$$d = a\sqrt{3}.$$



Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa P_c możemy obliczyć, korzystając ze wzoru:

$$P_c = 2P_p + P_b,$$

gdzie: P_p – pole podstawy graniastosłupa,

P_b – pole powierzchni bocznej graniastosłupa, czyli suma pól wszystkich jego ścian bocznych.

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach długości: a , b i c wyraża się wzorem:

$$P_c = 2(ab + bc + ac).$$

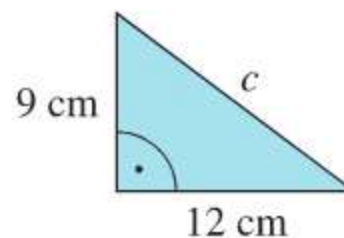
Pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi długości a wyraża się wzorem:

$$P_c = 6a^2.$$

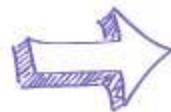
Przykład 1.

Dany jest graniastosłup prosty, który w podstawie ma trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 9 cm i 12 cm. Pole największej ściany bocznej tego graniastosłupa wynosi 165 cm^2 . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Jednym z boków największej ściany bocznej danego graniastosłupa jest przeciwprostokątna jego podstawy. Wykonamy rysunek podstawy graniastosłupa. Przeciwprostokątną oznaczmy literą c .

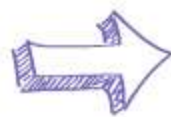


Aby obliczyć długość przeciwprostokątnej c skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa.



$$\begin{aligned}9^2 + 12^2 &= c^2 \\81 + 144 &= c^2 \\225 &= c^2 \\c &= 15 \text{ [cm]}\end{aligned}$$

Pole największej ściany bocznej wynosi 165 cm^2 . Jeden z jej boków ma długość 15 cm, a drugi to wysokość graniastosłupa, którą oznaczmy literą H . Ułożymy odpowiednie równanie i wyznaczmy H .



$$\begin{aligned}165 &= 15 \cdot H \quad | : 15 \\H &= 11 \text{ [cm]}\end{aligned}$$

Obliczymy pole podstawy oraz pole powierzchni bocznej graniastosłupa.



$$\begin{aligned}P_p &= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 6 \cdot 9 = 54 \text{ [cm}^2\text{]} \\P_b &= 165 + 9 \cdot 11 + 12 \cdot 11 = \\&= 165 + 99 + 132 = 396 \text{ [cm}^2\text{]}\end{aligned}$$

Obliczymy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa korzystając ze wzoru:
 $P_c = 2P_p + P_b$.



$$\begin{aligned}P_c &= 2 \cdot 54 + 396 = \\&= 108 + 396 = 504 \text{ [cm}^2\text{]}\end{aligned}$$

Odp. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa wynosi 504 cm^2 .

Objętość graniastosłupa

Objętość graniastosłupa V wyraża się wzorem:

$$V = P_p \cdot H,$$

gdzie: P_p – pole podstawy graniastosłupa, H – wysokość graniastosłupa.

Objętość prostopadłościanu o krawędziach długości: a, b, c wyraża się wzorem:

$$V = abc.$$

Objętość sześcianu o krawędzi długości a wyraża się wzorem:

$$V = a^3.$$

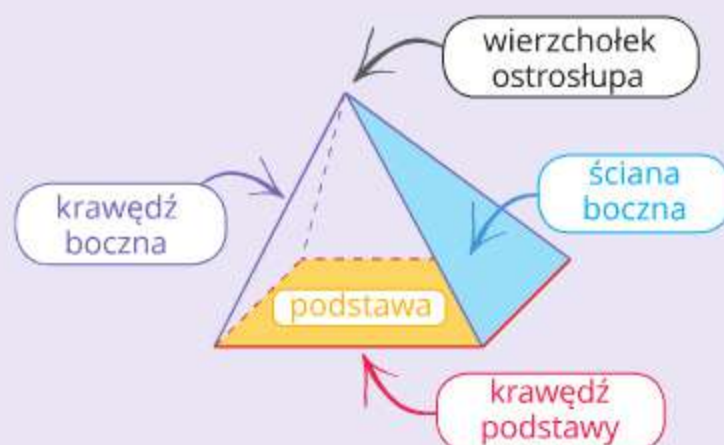
Ostrosłupy

Ostrosłup jest bryłą, która ma:

- jedną podstawę w kształcie wielokąta,
- ściany boczne będące trójkątami o wspólnym wierzchołku.

Ostrosłup nazywamy **prostym**, jeśli jego wszystkie krawędzie mają jednakową długość. W przeciwnym wypadku ostrosłup nazywamy **pochyłym**.

Ostrosłupem prawidłowym nazywamy ostrosłup prosty, który w podstawie ma wielokąt foremny.



Pole powierzchni całkowitej i objętość ostrosłupa

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa P_c to suma pól wszystkich ścian tego ostrosłupa. Zatem

$$P_c = P_p + P_b,$$

gdzie: P_p – pole podstawy ostrosłupa,

P_b – pole powierzchni bocznej ostrosłupa, czyli suma pól wszystkich jego ścian bocznych.

Objętość ostrosłupa V wyraża się wzorem:

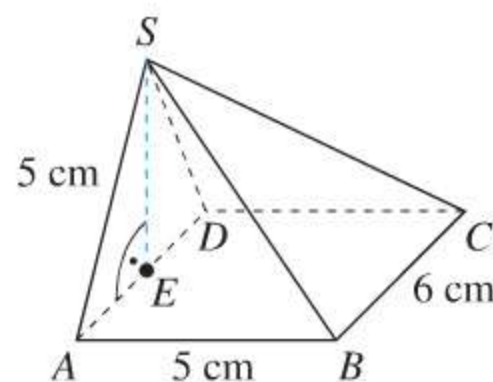
$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H,$$

gdzie: P_p – pole podstawy ostrosłupa, H – wysokość ostrosłupa.

Przykład 2.

Na rysunku przedstawiono ostrosłup $ABCD S$. Prostokąt $ABCD$ jest podstawą tego ostrosłupa. Punkt E jest środkiem krawędzi AD , a odcinek ES jest wysokością ostrosłupa. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Pole podstawy ostrosłupa wynosi $P_p = 5 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 30 \text{ cm}^2$. Krawędź AD ma taką samą długość jak krawędź BC , więc $|AD| = 6 \text{ cm}$. Punkt E jest środkiem krawędzi AD , więc $|AE| = 6 \text{ cm} : 2 = 3 \text{ cm}$.



Skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa, aby obliczyć długość odcinka ES , który jest wysokością ostrosłupa $ABCD S$.



$$|AE|^2 + |ES|^2 = |AS|^2$$

$$3^2 + |ES|^2 = 5^2$$

$$9 + |ES|^2 = 25$$

$$|ES|^2 = 25 - 9 = 16$$

$$|ES| = 4 \text{ [cm]}$$

Obliczymy objętość ostrosłupa, korzystając ze wzoru: $V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$, gdzie $H = |ES|$.



$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot |ES|$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot 4 = 10 \cdot 4 = 40 \text{ [cm}^3\text{]}$$

Odp. Objętość tego ostrosłupa wynosi 40 cm^3 .

Rozwiąż zadania

- E 1.** Kasia dodała liczby wszystkich krawędzi, wierzchołków i ścian pewnego graniastopuła i otrzymała liczbę 50.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Podstawą tego graniastopuła jest **A B**.

A. ośmiokąt **B.** dziesięciokąt

Liczba wierzchołków tego graniastopuła jest o **C D** większa od liczby jego ścian.

C. 6 **D.** 8

- 2.** Sześcián o krawędzi 6 cm rozcięto na 8 jednakowych sześciánów. Ile razy pole powierzchni całkowitej mniejszego sześciánu jest mniejsze od pola powierzchni całkowitej większego sześciánu?

- E 3.** W pudełku znajduje się 200 jednakowych sześciennych klocków. Kuba postanowił ułożyć z nich możliwie największy sześcián.

Ile klocków zostało niewykorzystanych? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

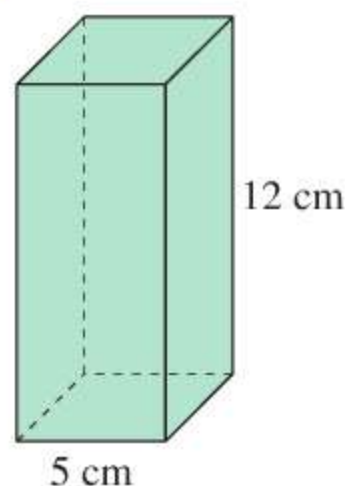
A. 16 **B.** 0 **C.** 75 **D.** 4

- E 4.** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

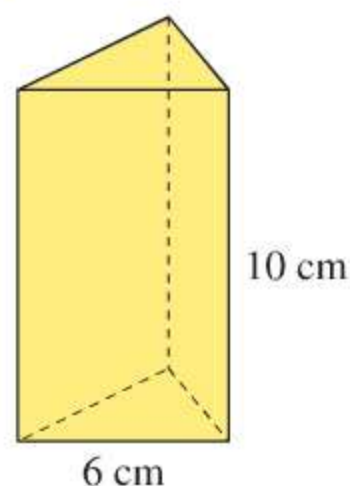
Jeśli pole powierzchni całkowitej sześciánu jest równe 96 cm^2 , to jego objętość wynosi 64 cm^3 .	P	F
Jeśli objętość sześciánu wynosi 125 dm^3 , to jego pole powierzchni całkowitej jest równe 150 dm^2 .	P	F

- 5.** Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej graniastopuła prawidłowego.

a)



b)

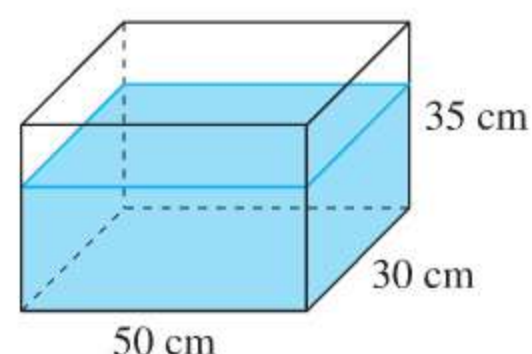


- 6.** Długości krawędzi podstawy prostopadłościanu są równe 6 cm i 11 cm. Oblicz wysokość tego prostopadłościanu, jeżeli jego

a) objętość jest równa $0,792 \text{ dm}^3$,

b) pole powierzchni całkowitej wynosi 370 cm^2 .

7. Do akwarium o wymiarach $50\text{ cm} \times 30\text{ cm} \times 35\text{ cm}$ częściowo wypełnionego wodą wrzucono trzy takie same sześciennie kostki, które zatonęły. Poziom wody w akwarium podniósł się o 2 cm . Oblicz długość krawędzi jednej z wrzuconych sześciennych kostek.



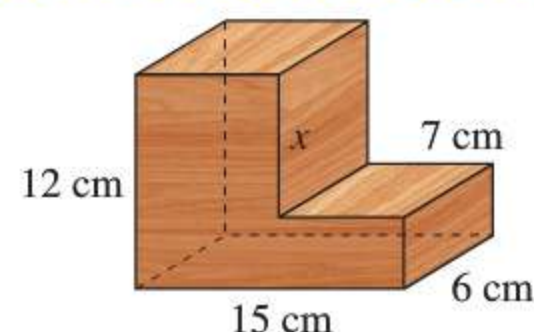
8. Przekątna graniastostupa prawidłowego czworokątnego ma długość $6\sqrt{3}$, a jego wysokość jest równa 10. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastostupa.

9. Doniczka ma kształt graniastostupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy długości 20 cm i wysokości 32 cm . Ela chce wypełnić ziemią do $\frac{7}{8}$ wysokości 5 takich doniczek. Ziemia sprzedawana jest w workach po 20 l . Ile najmniej worków ziemi musi kupić Ela?

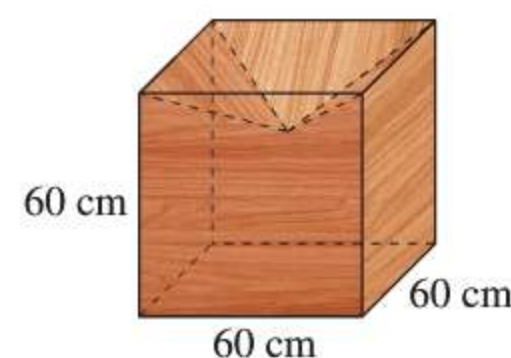
10. Na rysunku przedstawiono drewniany klocek. Jego objętość jest równa 744 cm^3 .

a) Oblicz długość odcinka x .

b) Oblicz masę klocka, jeśli gęstość drewna wynosi $0,6\text{ g/cm}^3$.



11. W sześciennym kawałku drewna o krawędzi długości 60 cm rzeźbiarz wydrążył zagłębienie w kształcie ostrosłupa, którego podstawą jest jedna ze ścian sześciangu, a wysokość stanowi $\frac{1}{3}$ długości krawędzi sześciangu. Oblicz objętość pozostałej części kawałka drewna.



12. Podstawa graniastostupa prostego jest trójkątem prostokątnym o przyprostokątnych długości 10 cm i 24 cm . Suma długości wszystkich krawędzi graniastostupa jest równa 162 cm . Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastostupa.

13. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach długości: 6 cm , 7 cm , 8 cm jest o 2 cm^2 mniejsze od pola powierzchni całkowitej sześciangu. Która z tych brył ma większą objętość i o ile?

14. Podstawą graniastostupa prostego jest romb o przekątnych długości 12 cm i 16 cm . Wysokość graniastostupa jest równa 8 cm .

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Objętość graniastostupa jest równa **A** **B** dm^3 .

A. 7,68

B. 0,768

Długość krawędzi podstawy jest równa **C** **D** cm .

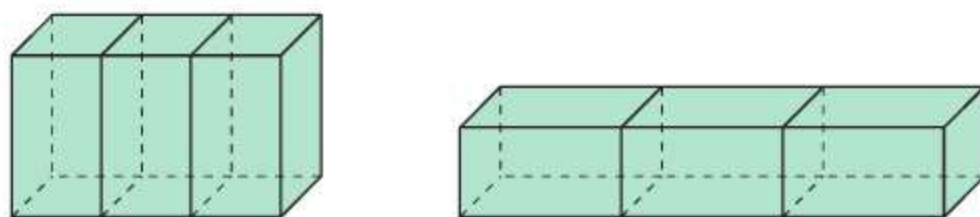
C. 10

D. 14

15. Bruno narysował siatkę sześciangu wraz z zakładkami potrzebnymi do sklejenia modelu. Powierzchnia siatki z zakładkami jest równa $403,2\text{ cm}^2$, a zakładki stanowią 5% pola powierzchni całkowitej sześciangu. Oblicz objętość bryły, której model skleiono z tej siatki.

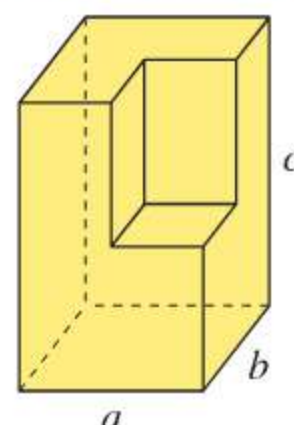
E

- 16.** Zosia z sześciu jednakowych graniastosłupów prawidłowych czworokątnych o krawędzi podstawy 5 cm i wysokości 9 cm zbudowała dwa prostopadłościany w sposób pokazany na rysunku. Oblicz pole powierzchni całkowitej każdego z prostopadłościanów.



- E 17.** Z prostopadłościanu o krawędziach długości: a , b i c wycięto prostopadłościan o krawędziach długości: $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$ i $\frac{1}{2}c$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.



Pole powierzchni całkowitej powstałej bryły jest mniejsze od pola powierzchni prostopadłościanu.

P

F

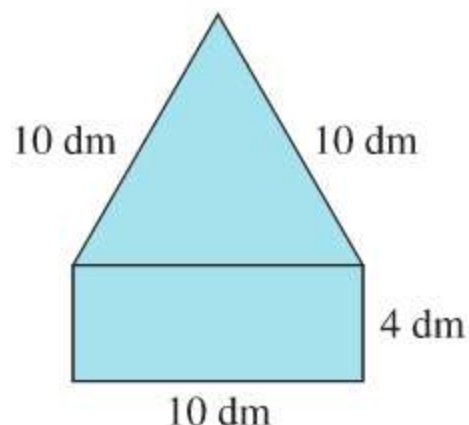
Objętość powstałej bryły stanowi 87,5 % objętości prostopadłościanu.

P

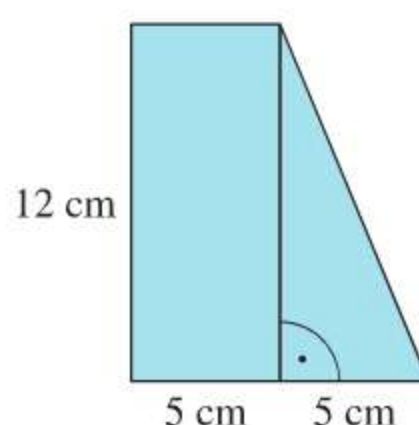
F

- 18.** Na rysunku przedstawiono fragment siatki graniastosłupa prostego oraz podano długości niektórych jego krawędzi. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa.

a)



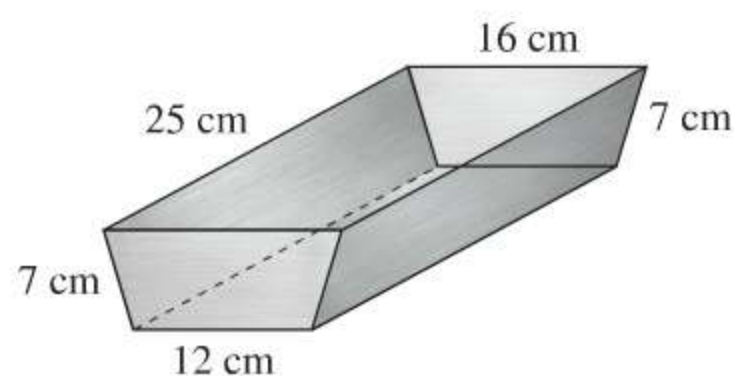
b)



- 19.** Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie długości $10\sqrt{3}$ i kącie między ramionami o mierze 120° . Trójkąt ten jest podstawą graniastosłupa prostego o wysokości 10. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa.

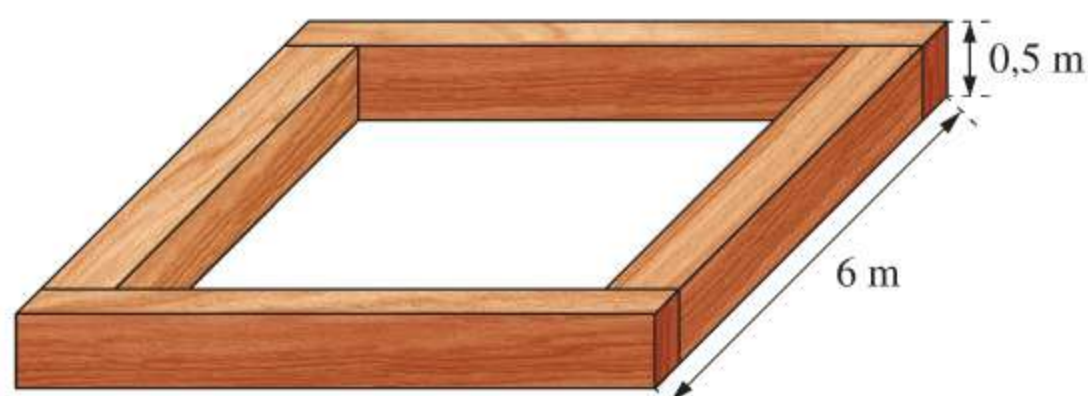


- 20.** Forma do pieczenia ciasta ma kształt graniastosłupa prostego, którego dwie najmniejsze ściany mają kształt trapezu równoramiennego. Wymiary formy podano na rysunku. Ciasto wlane do formy zajmuje 80 % jej pojemności. Oblicz, ile centymetrów sześciennych ciasta wlane do tej formy. Przyjmij, że $\sqrt{5} \approx 2,2$.

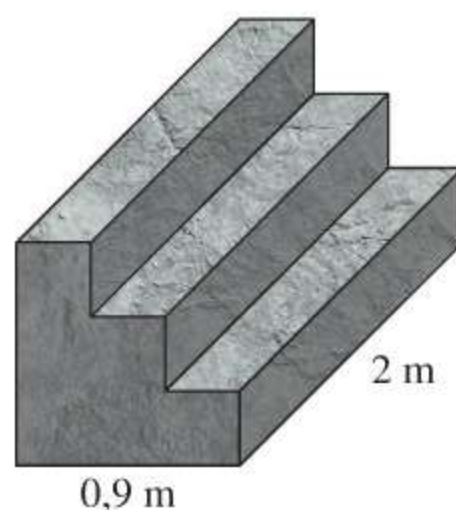


- 21.** Z 12 jednakowych sześciątów o krawędzi długości 1 budowano prostopadłościany. Ile różnych prostopadłościanów o objętości 12 można zbudować z tych sześciątów? Podaj wymiary tego prostopadłościanu, który ma największe pole powierzchni całkowitej.

- 22.** Z czterech jednakowych prostokątnych belek, w których dwie ściany są kwadratami, zbudowano na płaskiej powierzchni piaskownicę. Kształt i niektóre wymiary piaskownicy podano na rysunku. Do piaskownicy wsypano piasek, który zajmuje $\frac{3}{4}$ jej pojemności. Oblicz, ile metrów sześciennych piasku jest w tej piaskownicy.



- 23.** Schody prowadzące do domu mają kształt i wymiary pokazane na rysunku. Każdy stopień ma taką samą głębokość i wysokość. Wysokość i głębokość każdego stopnia są równe. Schody wykonano z betonu. Ile metrów sześciennych betonu zużyto na wykonanie tych schodów?

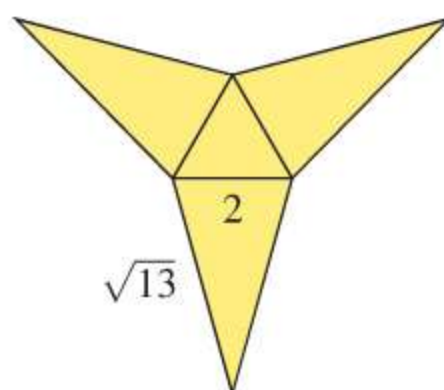


- 24.** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Ostrosłup może mieć 14 wierzchołków.	P	F
Ostrosłup może mieć 51 krawędzi.	P	F

- 25.** Podstawy graniastosłupa i ostrosłupa są przystającymi wielokątami. Łączna liczba krawędzi tych brył jest równa 60. O ile więcej wierzchołków ma graniastosłup niż ostrosłup?

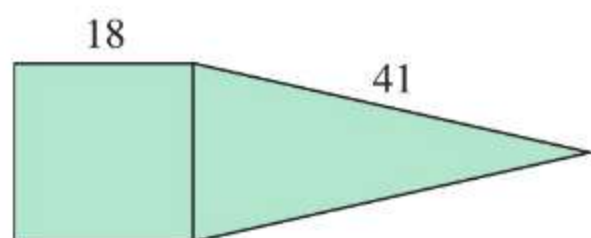
- 26.** Na rysunku przedstawiono siatkę ostrosłupa prawidłowego trójkątnego. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.



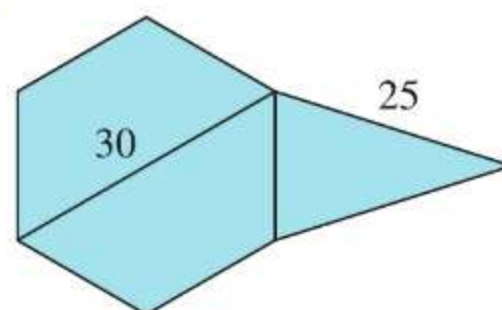
- 27.** Suma długości wszystkich krawędzi czworościanu foremnego jest równa 84. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego czworościanu.

- 28.** Na rysunku przedstawiono fragment siatki ostrosłupa prawidłowego. Oblicz jego pole powierzchni całkowitej.

a)



b)



- E 29.** Podstawą ostrosłupa prostego jest prostokąt, w którym przekątna długości 18 cm tworzy z bokiem kąt o mierze 30° . Długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa jest równa długości przekątnej jego podstawy.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Suma długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa wynosi **A** **B** cm.

A. $108\sqrt{3}$ **B.** $90 + 18\sqrt{3}$

Objętość tego ostrosłupa jest równa **C** **D** cm^3 .

C. 729 **D.** $729\sqrt{3}$

- 30.** Objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa $405\sqrt{3}$. Długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa jest równa 9. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

- E 31.** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 6 cm i jest dwa razy krótsza od krawędzi bocznej.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Objętość tego ostrosłupa wynosi

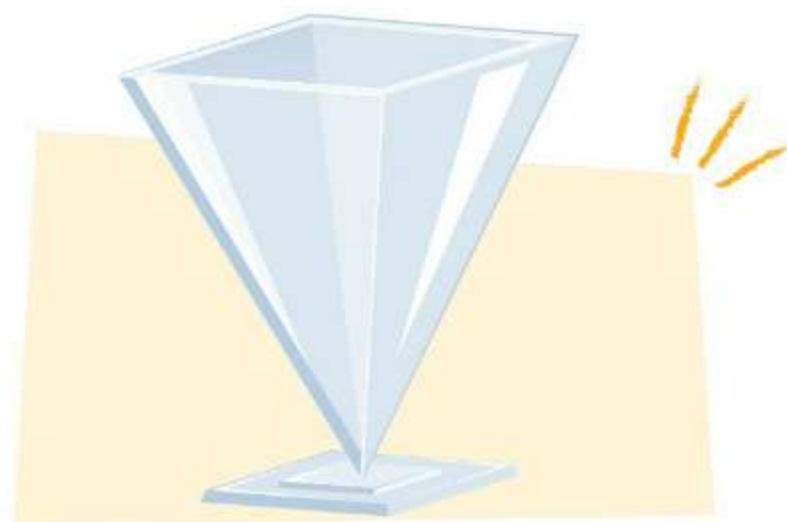
A. $108\sqrt{14} \text{ cm}^3$

B. $36\sqrt{14} \text{ cm}^3$

C. $108\sqrt{15} \text{ cm}^3$

D. $36\sqrt{15} \text{ cm}^3$

- 32.** Pola dla siebie i siedmiu swoich koleżanek chce przygotować na deser galaretki owocowe. Na galaretki przygotowała pojemniki w kształcie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy długości 6 cm i wysokości 10 cm. Z jednego opakowania galaretki można przygotować 0,5 l płynu. Czy dwa opakowania galaretki wystarczą na napełnienie przygotowanych pojemników?



- E 33.** Przycisk do papieru ma kształt ostrosłupa prawidłowego pięciokątnego, którego pole podstawy jest równe 60 cm^2 , a wysokość 11 cm. Ile waży przycisk do papieru, jeśli został zrobiony z materiału, którego 1 dm^3 ma masę 70 dag?

9. Statystyka i rachunek prawdopodobieństwa

Powtórz wiadomości

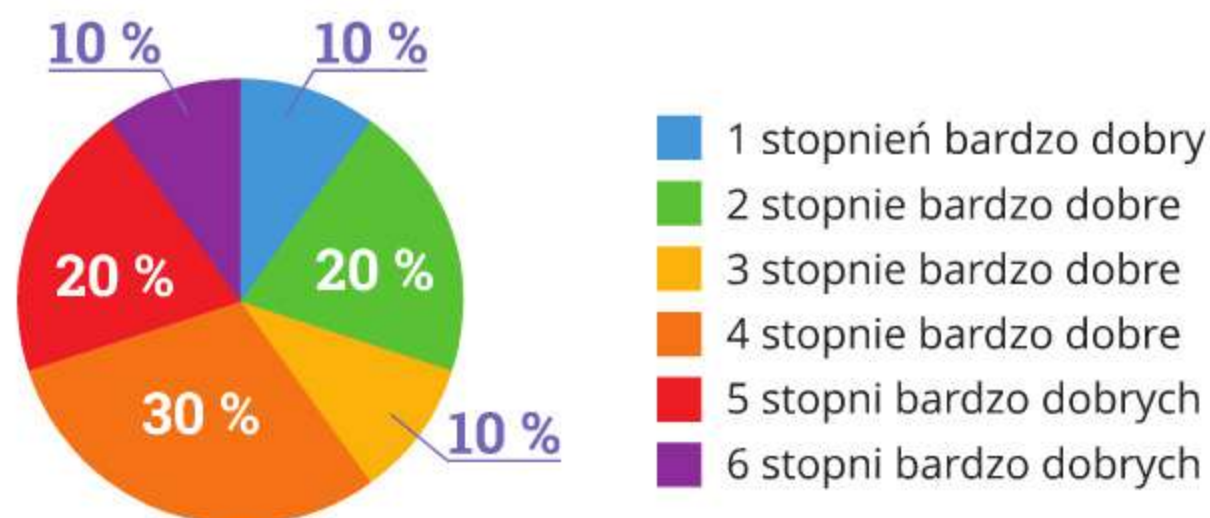
Średnia arytmetyczna

Średnią arytmetyczną zestawu liczb nazywamy sumę tych liczb podzieloną przez ich liczbę.

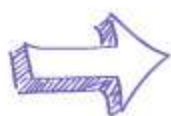
Np. średnia arytmetyczna liczb: 6, 11, 13, 8, 2 wynosi $\frac{6+11+13+8+2}{5} = \frac{40}{5} = 8$.

Przykład 1.

Na diagramie przedstawiono procentowy rozkład liczby uczniów klasy 8c, którzy na świadectwie mieli stopnie bardzo dobre. Do klasy 8c uczęszcza 30 osób. Oblicz średnią arytmetyczną liczby otrzymanych na koniec roku stopni bardzo dobrych w klasie 8c.



Obliczymy, ilu uczniów na koniec roku otrzymało daną liczbę stopni bardzo dobrych.



$$10 \% \text{ liczby } 30 \text{ to } \frac{10^1}{100} \cdot 30 = \frac{1}{10} \cdot 30 = 3.$$

$$20 \% \text{ liczby } 30 \text{ to } \frac{20^1}{100} \cdot 30 = \frac{1}{5} \cdot 30 = 6.$$

$$30 \% \text{ liczby } 30 \text{ to } \frac{30^3}{100} \cdot 30 = \frac{3}{10} \cdot 30^3 = 3 \cdot 3 = 9.$$

Zatem

- 3 uczniów otrzymało 1 stopień bardzo dobry,
- 6 uczniów otrzymało 2 stopnie bardzo dobre,
- 3 uczniów otrzymało 3 stopnie bardzo dobre,
- 9 uczniów otrzymało 4 stopnie bardzo dobre,
- 6 uczniów otrzymało 5 stopni bardzo dobrych,
- 3 uczniów otrzymało 6 stopni bardzo dobrych.

Obliczymy średnią arytmetyczną liczby otrzymanych na koniec roku stopni bardzo dobrych w klasie 8c.



$$\begin{aligned} & \frac{3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{30} = \\ & = \frac{3 + 12 + 9 + 36 + 30 + 18}{30} = \frac{108}{30} = \frac{36}{10} = 3 \frac{6}{10} = 3,6 \end{aligned}$$

Odp. Średnia arytmetyczna liczby otrzymanych na koniec roku stopni bardzo dobrych w klasie 8c wynosi 3,6.

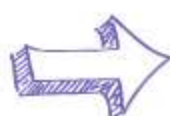
Doświadczenie losowe

Doświadczenie losowe to doświadczenie, w którym o przebiegu decyduje wyłącznie przypadek, przewidzenie wyniku jest niemożliwe, a czynność tę można wielokrotnie powtarzać.

Przykład 2.

Doświadczenie losowe polega na wylosowaniu liczby trzycyfrowej zbudowanej z cyfr: 3, 4, 7, w której cyfry nie mogą się powtarzać. Na ile sposobów można wylosować liczbę parzystą?

Wypiszemy wszystkie możliwe wyniki doświadczenia losowego.



347, 374,

437, 473,

734, 743

Tylko dwa z wypisanych wyników są liczbami parzystymi: 374 i 734.

Odp. Liczbę parzystą można wylosować na dwa sposoby.

Prawdopodobieństwo

Prawdopodobieństwo p otrzymania wyniku spełniającego podany warunek obliczamy, korzystając ze wzoru

$$p = \frac{\text{liczba wyników spełniających podany warunek}}{\text{liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego}}$$

Przykład 3.

Doświadczenie polega na jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek nie większej niż 5?

Wszystkie możliwe wyniki to: 1, 2, 3, 4, 5 lub 6 oczek. Jest ich 6.

Wyniki, które spełniają podany warunek, to: 1, 2, 3, 4, 5. Jest ich 5.

Obliczymy prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek nie większej niż 5.



$$p = \frac{5}{6}$$

Odp. Prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek nie większej niż 5 wynosi $\frac{5}{6}$.

Zdarzenie niemożliwe i zdarzenie pewne

Prawdopodobieństwo jest liczbą większą lub równą 0 i jednocześnie mniejszą lub równą 1.

- Jeśli prawdopodobieństwo jest równe 0, to oznacza, że dane zdarzenie nigdy się nie wydarzy – jest **zdarzeniem niemożliwym**, np. wyrzucenie dwucyfrowej liczby oczek na sześcienną kostkę do gry.
- Jeśli prawdopodobieństwo jest równe 1, to oznacza, że dane zdarzenie na pewno się wydarzy – jest **zdarzeniem pewnym**, np. wyrzucenie jednocyfrowej liczby oczek na sześcienną kostkę do gry.

1. Oblicz średnią arytmetyczną liczb: 9, 15, 20, 13, 25, 8.

2. Średnia wieku sześciuosobowej załogi jachtu jest równa 23 lata. W najbliższym porcie, do którego wpłynął jacht, na ląd wysiadł 33-letni kapitan. Ile jest równy średni wiek członków załogi, którzy pozostali na pokładzie?

3. Każdy uczeń klasy 8c odpowiedział na pytanie: *Ile czasu dziennie spędzasz na świeżym powietrzu?* W tabeli przedstawiono odpowiedzi ankietowanych.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Uczeń klasy 8c spędza na świeżym powietrzu średnio **A** **B** dziennie.

A. 1,75 h

B. 1,45 h

Co najwyżej jedną godzinę dziennie na świeżym powietrzu spędza **C** **D** uczniów klasy 8c.

C. 10 %

D. 40 %

Liczba uczniów	Liczba godzin
12	2
9	1
6	3
3	0,5

4. Średnia arytmetyczna pięciu kolejnych liczb naturalnych jest równa 108 % najmniejszej z nich. Oblicz największą z tych liczb.

5. Tata jest 3 razy starszy od Brunona i o 31 lat młodszy od dziadka. Średnia wieku dziadka, taty i Brunona jest równa 43 lata. Ile lat ma Bruno?

6. W 12-osobowym zespole jest osiem kobiet i czterech mężczyzn. Średnia wieku w tym zespole jest równa 38 lat, a średnia wieku kobiet jest równa 36 lat. Ile jest równa średnia wieku mężczyzn w tym zespole?

7. Na diagramie przedstawiono podział domów znajdujących się przy jednej ulicy ze względu na liczbę osób w nich zamieszkujących.

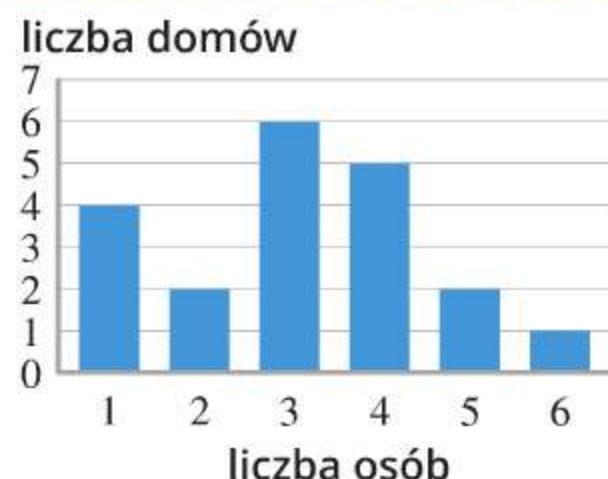
a) Ile razy mniej jest domów zamieszkałych przez 5 osób niż domów zamieszkałych przez 1 osobę?

b) Ile procent wszystkich domów stanowią te, w których mieszkają nie więcej niż cztery osoby?

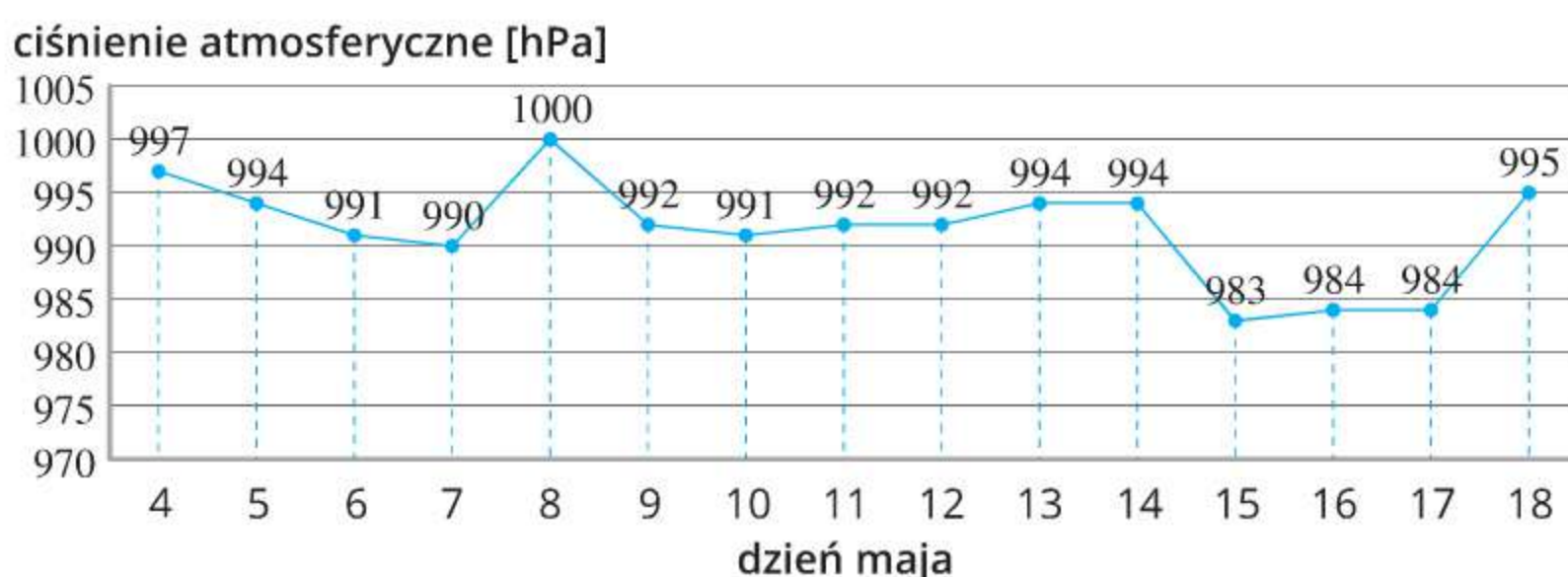
c) Czy średnia liczba osób zamieszkujących te domy jest większa od 3?

d) O ile procent więcej jest domów zamieszkałych przez nieparzystą liczbę osób niż domów zamieszkałych przez parzystą liczbę osób?

e) O ile punktów procentowych więcej jest domów zamieszkałych przez 4 osoby niż domów zamieszkałych przez 5 osób?



8. Poniżej przedstawiono wykres zmiany ciśnienia atmosferycznego w Krakowie od 4 maja do 18 maja 2023 r. wyrażonego w hPa (hektopaskalach).



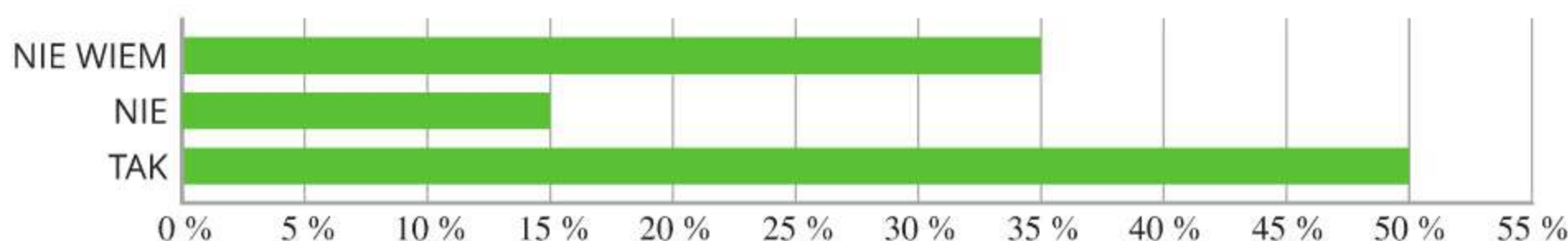
Źródło: <http://meteo.ftj.agh.edu.pl/archivalCharts>.

Odpowiedz na pytanie.

- Ile wynosiła największa różnica ciśnień atmosferycznych w wybranym okresie?
- Podaj dzień, w którym zanotowano największy spadek ciśnienia w stosunku do dnia poprzedniego.
- O ile procent niższe było ciśnienie atmosferyczne 18 maja od ciśnienia atmosferycznego 8 maja?

E

9. Kobiety w wieku 25–40 lat zapytano, czy prowadzą zdrowy tryb życia. Na diagramie procentowym słupkowym przedstawiono wyniki sondażu. Odpowiedź NIE wybrało 36 kobiet.

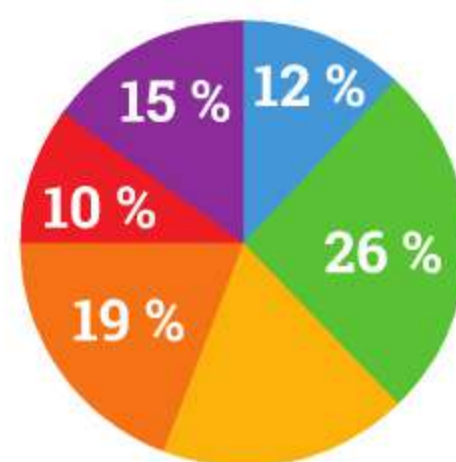


Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

W sondażu odpowiedzi udzieliło 250 kobiet.	P	F
Odpowiedź TAK wybrało o 15 % kobiet więcej niż odpowiedź NIE WIEM.	P	F

10. Na diagramie przedstawiono procentowy udział wydatków składających się na miesięczną opłatę za mieszkanie. Miesięczny koszt zużycia zimnej wody to 144 zł.

- Ile procent miesięcznej opłaty za mieszkanie stanowi kwota za zużycie zimnej wody?
- Ile wynosi miesięczna opłata za mieszkanie?
- Oblicz miesięczną stawkę na fundusz remontowy.
- O ile złotych miesięcznie mniej kosztuje centralne ogrzewanie od łącznego kosztu zużycia wody?
- O ile procent miesięczny koszt utrzymania nieruchomości jest większy od kosztu zagospodarowania odpadów?



- utrzymanie nieruchomości
- centralne ogrzewanie
- zużycie zimnej wody
- zużycie ciepłej wody
- zagospodarowanie odpadów
- fundusz remontowy

- 11.** Reprezentacje klas: 8a, 8b i 8c wzięły udział w eliminacjach do międzyszkolnego konkursu wiedzy ogólnej. Eliminacje składały się z czterech rund. W każdej rundzie można było zdobyć maksymalnie 20 punktów. Na diagramie przedstawiono liczby punktów zdobytych przez poszczególne reprezentacje w czterech rundach. Do etapu międzyszkolnego zostają zakwalifikowane te reprezentacje, które zdobyły co najmniej 80 % wszystkich punktów możliwych do uzyskania w czterech rundach łącznie i w każdej z rund zdobyły nie mniej niż 60 % maksymalnej liczby punktów.



- a) Ile wynosi średnia liczba punktów przypadająca na jedną reprezentację w czwartej rundzie?
- b) Czy średnie punktów uzyskanych w czterech rundach przez klasy 8b i 8c są równe?
- c) Sprawdź, która reprezentacja została zakwalifikowana do etapu międzyszkolnego konkursu.

- 12.** Ile jest liczb trzycyfrowych nieparzystych, które są wielokrotnościami liczby 25?

- 13.** Z cyfr: 0, 2, 7, 8 tworzymy liczby dwucyfrowe, w których cyfry mogą się powtarzać.

- a) Ile takich liczb można utworzyć?
- b) Ile liczb podzielnych przez 3 można utworzyć?
- c) Ile liczb podzielnych przez 4 można utworzyć?

- 14.** Spośród 4 dziewcząt i 3 chłopców trzeba wybrać delegację składającą się z 1 dziewczyny i 1 chłopca. Na ile sposobów można wybrać taką delegację?

- 15.** Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, których suma cyfr jest równa 4? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A.** Jedenaście. **B.** Dziesięć. **C.** Sześć. **D.** Trzy.

- 16.** Na loterię fantową przygotowano losy ponumerowane od 1 do 35. Każdy los, którego numer jest liczbą podzielną przez 6, jest wygrający. Pozostałe losy są puste. Kupujemy jeden los. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że kupimy los wygrający.

- 17.** Pola rzuciła trzy razy symetrycznym krążkiem, który na jednej stronie ma zapisaną cyfrę 2, a na drugiej cyfrę 5. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że w wyniku przeprowadzonego doświadczenia Pola otrzyma liczbę trzycyfrową, której suma cyfr jest równa 12.



- E 18.** W pudełku znajdują się tylko kule żółte, czerwone i niebieskie. Kul żółtych jest dwa razy więcej niż niebieskich, a niebieskich cztery razy więcej niż czerwonych. Z pudełka losujemy jedną kulę.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że nie wylosujemy kuli żółtej, jest równe

- A.** $\frac{8}{13}$ **B.** $\frac{5}{13}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{1}{3}$

- E 19.** W pudełku jest 45 kul, w tym 5 białych, a pozostałe to kule czarne. Losujemy jedną kulę. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Po dołożeniu czterech kul białych prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej będzie równe **A B**.

- A.** $\frac{9}{45}$ **B.** $\frac{9}{49}$

Jeśli do pudełka dołożymy 5 kul czarnych i 5 kul białych, to prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej **C D** w stosunku do sytuacji początkowej.

- C.** zmniejszy się **D.** nie zmieni się

- 20.** Rzucono trzykrotnie symetryczną monetą jednozłotową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia.

- a)** Na wszystkich monetach wypadł orzeł lub na wszystkich monetach wypadła reszka.
b) Wypadło więcej reszek niż orłów.
c) Wypadło tyle samo orłów co reszek.



- 21.** W klasie jest 15 dziewcząt i 12 chłopców. Tenisem ziemnym interesuje się 20 % dziewcząt i 25 % chłopców. Wybieramy losowo jedną osobę z tej klasy.

- a)** Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrana osoba z tej klasy interesuje się tenisem ziemnym.
b) Ile będzie wynosić prawdopodobieństwo wylosowania osoby interesującej się tenisem ziemnym, jeśli do klasy dojdą dwie uczennice interesujące się tym sportem?

- 22.** Ola wykonuje dwukrotny rzut symetryczną kostką do gry.

- a)** Uzasadnij, że wyrzucenie przez Olę liczby oczek, których różnica jest równa co najwyżej 5, jest zdarzeniem pewnym.
b) Uzasadnij, że wyrzucenie liczby oczek, których iloczyn jest większy od 36, jest zdarzeniem niemożliwym.



DZIAŁ VIII

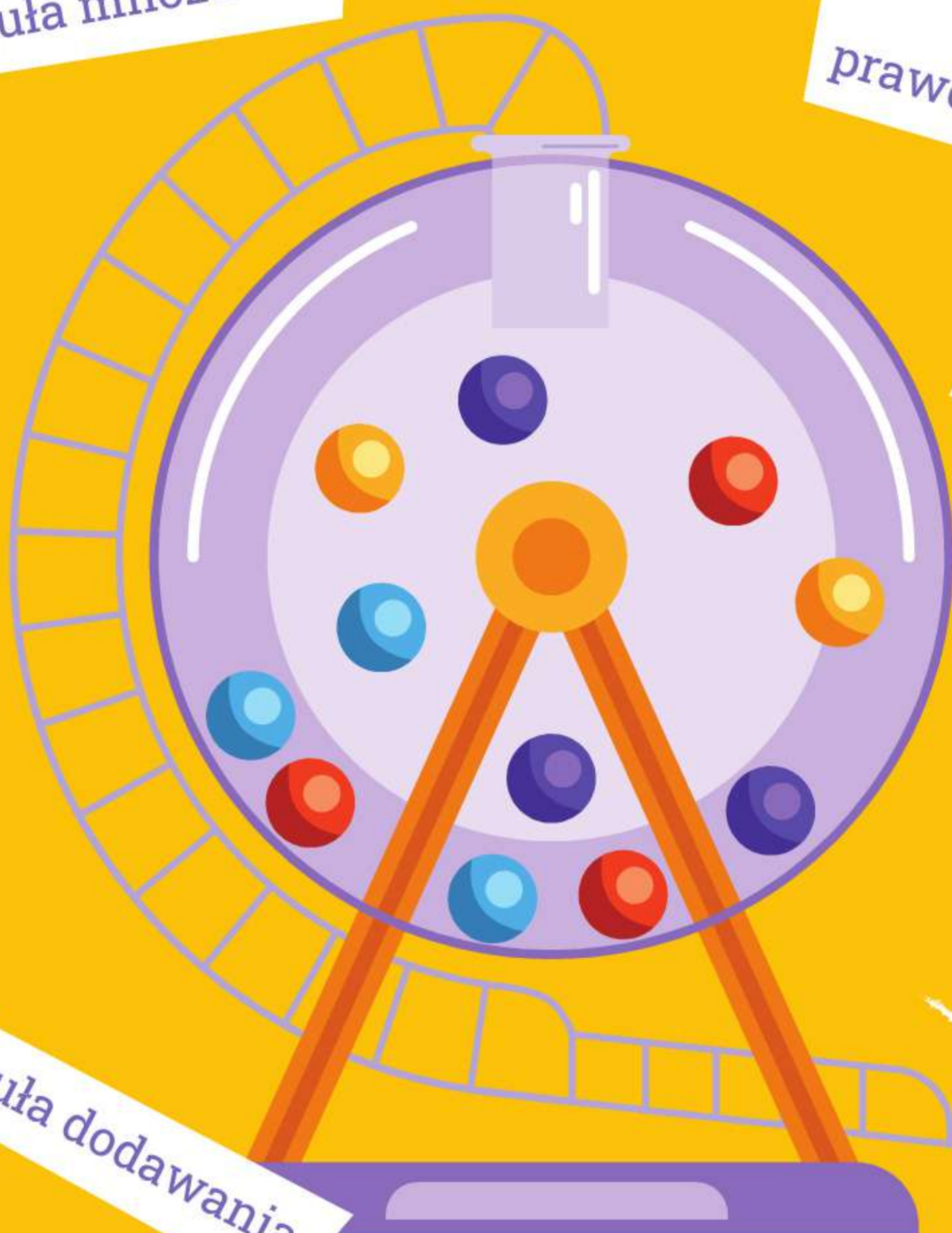
KOMBINATORYKA I RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

Reguła mnożenia

Obliczanie
prawdopodobieństwa

To ci się
przyda!

Reguła dodawania



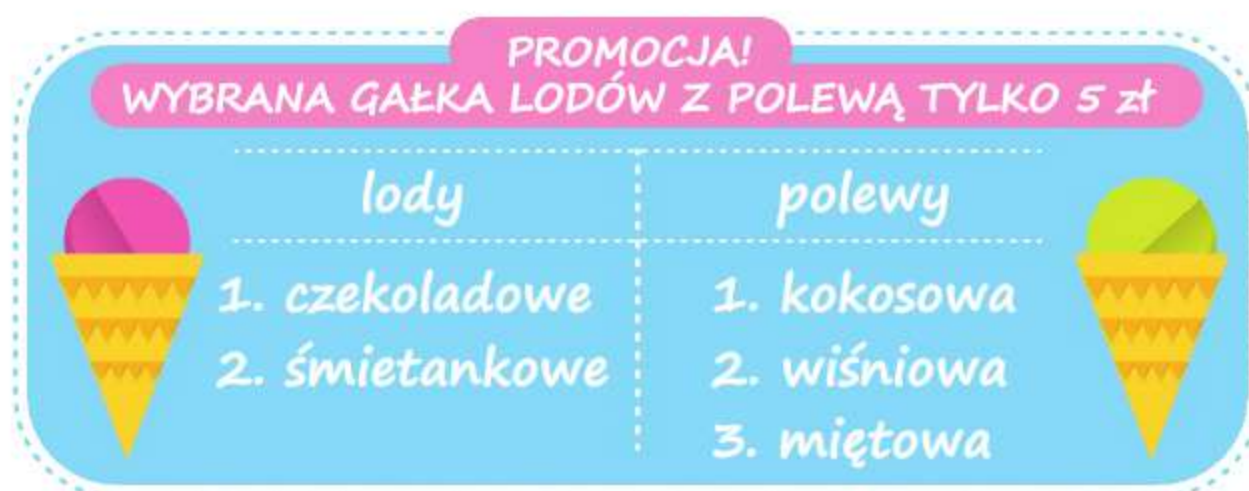
1. Reguła mnożenia i dodawania

- ▶ Stosowanie reguły mnożenia
- ▶ Stosowanie reguły dodawania

Już wiesz, że kombinatoryka jest działem matematyki, który zajmuje się zliczaniem liczby wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego. Istnieją zaawansowane metody zliczania, dzięki którym nie trzeba wypisywać wszystkich wyników, aby poznać ich liczbę. Metody te to tzw. **reguła mnożenia** oraz **reguła dodawania**.

Przykład 1.

Ela postanowiła skorzystać z promocji w lodziarni. Na ile sposobów Ela może wybrać deser składający się z gałki lodów i polewy?



Ela może wybrać jeden smak lodów i jeden smak polewy. Aby nie pominąć żadnej z możliwości, sporządzimy odpowiedni rysunek zwany „drzewkiem”.



Wszystkie możliwości:

- 1 lody czekoladowe, polewa kokosowa
- 2 lody czekoladowe, polewa wiśniowa
- 3 lody czekoladowe, polewa miętowa
- 4 lody śmietankowe, polewa kokosowa
- 5 lody śmietankowe, polewa wiśniowa
- 6 lody śmietankowe, polewa miętowa

Otrzymaliśmy $2 \cdot 3 = 6$ możliwości.

2 smaki lodów 3 smaki polewy

Odp. Ela może wybrać deser składający się z gałki lodów i polewy na 6 sposobów.

Ela miała 2 możliwości wyboru smaku lodów i 3 możliwości wyboru smaku polewy. Liczbę wszystkich możliwości wyznaczyliśmy, mnożąc $2 \cdot 3$. Gdy dokonujemy kilku kolejnych wyborów, do zliczenia wszystkich możliwości wyboru możemy zastosować tzw. **regułę mnożenia**.

Reguła mnożenia: Jeśli dokonujemy wyboru jednej z n możliwości, a następnie jednej z k możliwości, to wszystkich możliwych wyborów jest $n \cdot k$.



Ćwiczenie 1.

Pola wybrała się do cukierni, w której serwowane jest 5 rodzajów herbaty oraz 7 rodzajów ciasta. Na ile sposobów Pola może wybrać zestaw składający się z herbaty oraz ciasta?

Przykład 2.

Kod do telefonu składa się z czterech cyfr.

a) Na ile sposobów można utworzyć taki kod, jeśli jego cyfry mogą się powtarzać?

Istnieje 10 cyfr: 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 oraz 9. Kod tworzymy poprzez wybór jego kolejnych cyfr. Zatem każdą cyfrę kodu można wybrać na 10 możliwości.

I cyfra	•	II cyfra	•	III cyfra	•	IV cyfra	=	
10		10		10		10		10 000
możliwości		możliwości		możliwości		możliwości		możliwości

Odp. Taki kod można utworzyć na 10 000 sposobów.

b) Na ile sposobów można utworzyć taki kod, jeśli jego cyfry nie mogą się powtarzać?

Cyfry kodu nie mogą się powtarzać. Zatem, wybierając kolejne cyfry kodu, mamy za każdym razem o 1 możliwość mniej.

I cyfra	•	II cyfra	•	III cyfra	•	IV cyfra	=	
10		9		8		7		5040
możliwości		możliwości		możliwości		możliwości		możliwości

Odp. Taki kod można utworzyć na 5040 sposobów.

Ćwiczenie 2.

Kod do sejfów składa się z pięciu cyfr. Podaj, na ile sposobów można utworzyć taki kod, jeśli cyfry

a) mogą się powtarzać,

b) nie mogą się powtarzać.

A to ciekawe

Stosując regułę mnożenia, często obliczamy iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n .

W 1808 r. francuski matematyk Christian Kramp wprowadził dla takiego iloczynu oznaczenie $n!$ (czyt. n silnia), zatem silnia liczby naturalnej n wyraża się wzorem:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Symbol silni pozwala w krótki sposób zapisywać długie iloczyny kolejnych liczb naturalnych, np.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5! = 120.$$



Przykład 3.

Uzasadnij, że istnieje dokładnie 450 trzycyfrowych liczb, które są parzyste.

W trzycyfrowej liczbie parzystej:

- cyfrą setek nie może być 0, więc mamy 9 możliwości jej wyboru;
- cyfra dziesiątek jest dowolna, więc mamy 10 możliwości jej wyboru;
- cyfra jedności musi być podzielna przez 2, więc mamy 5 możliwości (0, 2, 4, 6 lub 8) jej wyboru.

$$\begin{array}{ccccc} \text{cyfra setek} & & \text{cyfra dziesiątek} & & \text{cyfra jedności} \\ 9 & \cdot & 10 & \cdot & 5 = 450 \\ \text{możliwości} & & \text{możliwości} & & \text{możliwości} \end{array}$$

Zatem uzasadniliśmy, że istnieje dokładnie 450 trzycyfrowych liczb, które są parzyste.

Ćwiczenie 3.

Uzasadnij, że istnieje dokładnie 180 trzycyfrowych liczb, które są podzielne przez 5.

Przykład 4.

Na obozie jest 19 dziewcząt i 32 chłopców. Każdego dnia jedna osoba przygotowuje śniadanie. Na ile sposobów można wybrać osobę, która przygotowuje śniadanie?

Wszystkich osób na obozie jest $19 + 32 = 51$, więc mamy 51 możliwości wyboru.

Odp. Osobę do przygotowania śniadania można wybrać na 51 sposobów.

Wyboru osoby, która przygotowuje śniadanie, dokonywaliśmy z dwóch różnych grup osób – dziewcząt i chłopców. Liczbę wszystkich możliwości wyboru wyznaczyliśmy, dodając $19 + 32$. Gdy wybieramy element z jednego lub drugiego zbioru i zbiory te nie mają wspólnych elementów, do zliczenia wszystkich możliwości wyboru, możemy zastosować tzw. **regułę dodawania**.



Reguła dodawania: Jeśli mamy wybrać jeden element spośród elementów dwóch zbiorów, z których pierwszy ma n elementów, a drugi k elementów, i zbiory te nie mają żadnych wspólnych elementów, to wszystkich możliwych wyborów jest

$$(n + k).$$

Ćwiczenie 4.

Kuba chce kupić jedną płytę w sklepie muzycznym. Interesuje go: 12 płyt z muzyką rockową, 8 płyt z muzyką jazzową oraz 11 płyt z muzyką klasyczną.

- Na ile sposobów Kuba może wybrać płytę, którą kupi?
- Kuba chce kupić płytę z muzyką rockową lub jazzową. Na ile sposobów może to zrobić?



Przykład 5.

W parku rozrywki jest 9 kolejek górskich oraz 7 atrakcji wodnych. Ustal, na ile sposobów można wybrać

- a)** jedną kolejkę górską i jedną atrakcję wodną, **b)** jedną kolejkę górską lub jedną atrakcję wodną.

Wybieramy 1 z 9 kolejek górskich, a następnie 1 z 7 atrakcji wodnych. Zatem mamy $9 \cdot 7 = 63$ możliwości.

Wybieramy 1 z 9 kolejek górskich lub 1 z 7 atrakcji wodnych. Zatem mamy $9 + 7 = 16$ możliwości.

Reguła mnożenia

Stosujemy, gdy dokonujemy dwóch (lub więcej) kolejnych wyborów.

Reguła dodawania

Stosujemy, gdy wybieramy z jednego lub z drugiego zbioru. Zbiory nie mogą mieć wspólnych elementów.



Ćwiczenie 5.

Bruno ma w swojej bibliotece: 6 książek przyrodniczych, 10 książek młodzieżowych oraz 4 książki przygodowe. Ustal, na ile sposobów Bruno może dokonać wyboru, jeśli chce zabrać na wyjazd

- a)** po jednej książce z każdego gatunku, **b)** jedną książkę.

Rozwiąż zadania

- 1.** Zosia ma 5 różnych koszulek oraz 3 różne pary spodenek sportowych. Na ile sposobów może skompletować strój na lekcję wychowania fizycznego?



- 2.** W klasie 8a jest 14 dziewcząt i 12 chłopców. Na ile sposobów można wybrać dwuosobową delegację, w której będzie jeden chłopiec i jedna dziewczyna?
- 3.** Na szczyt góry prowadzą 4 różne szlaki. Kuba z Cezarym chcą zaplanować wycieczkę na szczyt i z powrotem. Ile jest możliwości wyboru trasy, jeśli z powrotem będą szli innym szlakiem niż na szczyt?
- 4.** Spośród siedmiu kandydatów do prowadzenia zebrania należy wybrać przewodniczącego, zastępcę i protokolanta. Jedna osoba może pełnić tylko jedną funkcję. Na ile sposobów można to zrobić?
- 5.** Uzasadnij, że pięć osób może ustawić się w jednym rzędzie na 120 sposobów.

- 6.** Cztery harcerki i pięciu harcerzy ustawiają się w pojedynczym szeregu. Oblicz, na ile sposobów mogą się ustawić, jeśli na początku szeregu ustawiają się harcerki.
- 7.** Centrala telefoniczna w pewnej firmie obsługuje czterocyfrowe numery wewnętrzne, w których nie występuje cyfra 0. Ile numerów może obsłużyć ta centrala, jeśli cyfry w numerach mogą się powtarzać?
- 8.** Pięcicyfrowe numery biletów na koncert są generowane przez komputer. Zaprogramowano, że pierwszą cyfrą każdego numeru jest 9 i cyfry w numerze się nie powtarzają. Uzasadnij, że liczba wygenerowanych numerów jest większa od 3000.
- 9.** Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry.
- Ile jest wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia?
 - Ile jest takich wyników tego doświadczenia, że liczba oczek w obu rzutach jest inna?
 - Ile jest takich wyników tego doświadczenia, że za pierwszym razem liczba oczek jest parzysta?
 - Ile jest takich wyników tego doświadczenia, że za pierwszym razem wypadnie nieparzysta liczba oczek, a za drugim razem – parzysta?
- 10.** Ze zbioru liczb: 1, 2, 3, 4, 5 Ela losuje jedną liczbę. Następnie z pozostałych liczb losuje drugą liczbę. Ile jest wszystkich możliwości wylosowania dwóch liczb, których iloczyn jest liczbą nieparzystą?
- 11.** Ze zbioru liczb: 0, 2, 3, 4, 6, 7 losujemy kolejno dwie liczby bez zwracania i tworzymy liczby dwucyfrowe w ten sposób, że pierwsza wylosowana cyfra jest cyfrą dziesiątek, a druga to cyfra jedności. Oblicz, ile można utworzyć:
- wszystkich takich liczb,
 - liczb parzystych,
 - liczb nieparzystych.
- 12.** W koszyku jest 5 piłek zielonych, 2 piłki żółte i 4 piłki niebieskie. Wszystkie piłki są ponumerowane. Na ile sposobów można wybrać jedną piłkę, która jest
- żółta lub niebieska?
 - zielona lub niebieska?
- 13.** W pudełku jest 10 kul białych, 10 czerwonych i 5 zielonych. Ile najmniej kul musi wyciągnąć z tego pudełka Pola, aby mieć pewność, że będą wśród nich kule we wszystkich trzech kolorach?
- 14.** Talia kart zawiera 52 karty czterech kolorów: piki ♠, kiery ♥, trefle ♣, kara ♦ po 13 kart w jednym kolorze. Wśród kart każdego koloru są 4 figury: as, król, dama, walet oraz 9 kart oznaczonych liczbami od 2 do 10. Na ile sposobów można wybrać
- po jednej karcie z każdego koloru?
 - jedną kartę w kolorze kier lub trefl?



- 15.** Państwo Kowalscy chcą kupić komplet mebli ogrodowych: stół kawowy i kanapę. Do wyboru mają meble drewniane lub meble z rattanu. W ofercie sklepu są 3 modele stolików rattanowych, 2 modele stolików drewnianych oraz 4 modele kanap rattanowych i 3 modele kanap drewnianych. Na ile sposobów państwo Kowalscy mogą wybrać komplet mebli ogrodowych, jeśli obydwa meble mają być wykonane z tego samego materiału?

- 16.** Ile liczb trzycyfrowych większych od 620 można ułożyć z cyfr: 1, 2, 3, 6, 8, 9, jeśli
- a)** cyfry mogą się powtarzać? **b)** cyfry nie mogą się powtarzać?

Sprawdź, co umiesz!

- 1.** Cezary wykonuje rzut dwiema kostkami do gry. Najpierw rzuca kostką sześcienną, a następnie kostką czworościenną. Ile wszystkich możliwych wyników może otrzymać Cezary w tym doświadczeniu?



- 2.** Talia kart zawiera 52 karty czterech kolorów: piki ♠, kiery ♥, trefle ♣, kara ♦ po 13 kart w jednym kolorze. Wśród kart każdego koloru są 4 figury: as, król, dama, walet oraz 9 kart oznaczonych liczbami od 2 do 10. Na ile sposobów można wybrać

a) króla i damę?

b) króla lub damę?

- 3.** Ile liczb dwucyfrowych można ułożyć z cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, jeśli:

a) cyfry mogą się powtarzać?

b) cyfry nie mogą się powtarzać?

c) muszą to być cyfry parzyste?

d) suma cyfr musi być nieparzysta?

Informacje do zadań 4. i 5.

Rzucamy trzy razy czworościenną kostką do gry. Wynik pierwszego rzutu to cyfra setek liczby trzycyfrowej, drugiego – cyfra jej dziesiątek, a trzeciego – cyfra jej jedności.

- 4.** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

W ten sposób można utworzyć dokładnie 24 różne liczby.	P	F
Wśród wszystkich liczb utworzonych w ten sposób jest 16 podzielnych przez 4.	P	F

- 5.** Ile jest liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach utworzonych w ten sposób? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 64

B. 24

C. 12

D. 9

2. Obliczanie prawdopodobieństwa

- ▶ Obliczanie prawdopodobieństwa w doświadczeniach polegających na losowaniu dwóch elementów bez zwracania i ze zwracaniem
- ▶ Obliczanie prawdopodobieństwa z wykorzystaniem reguły mnożenia i reguły dodawania

Przykład 1.

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma liczby oczek będzie mniejsza niż 5?

p – prawdopodobieństwo, że w obu rzutach suma liczby oczek będzie mniejsza niż 5

Zapiszemy wszystkie możliwe wyniki, czyli pary liczb, które możemy otrzymać w wyniku dwukrotnego rzutu kostką. Wynik np. (1, 4) oznacza, że w pierwszym rzucie wypadnie 1 oczko, a w drugim wypadną 4 oczka.



(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Zatem wszystkich możliwych wyników jest 36.

Pary liczb, których suma jest mniejsza niż 5, to: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1).

Takich par jest 6.

Obliczymy prawdopodobieństwo, że suma liczby oczek będzie mniejsza niż 5.



$$p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Odp. Prawdopodobieństwo, że suma liczby oczek będzie mniejsza niż 5, wynosi $\frac{1}{6}$.

Ćwiczenie 1.

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że iloczyn liczby oczek będzie podzielny przez 3?

Przykład 2.

Dany jest zbiór siedmiu liczb naturalnych: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb mniejszych niż 4, jeśli losujemy

a) ze zwracaniem,

b) bez zwracania.

p – prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb mniejszych niż 4

a) Jeśli losujemy liczby ze zwracaniem, to zarówno podczas pierwszego, jak i drugiego losowania mamy 7 możliwości. Zatem wszystkich możliwości jest $7 \cdot 7 = 49$.

Zapiszemy pary, w których obie liczby są mniejsze niż 4.
Możemy zauważyć, że skoro losujemy ze zwracaniem,
to w danej parze liczby mogą się powtarzać.



(1, 1), (1, 2), (1, 3),
(2, 1), (2, 2), (2, 3),
(3, 1), (3, 2), (3, 3)

Takich par jest 9. Zatem prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb mniejszych niż 4 wynosi
 $p = \frac{9}{49}$.

b) Jeśli losujemy liczby bez zwracania, to podczas pierwszego losowania mamy 7 możliwości,
a podczas drugiego – 6 możliwości. Zatem wszystkich możliwości jest $7 \cdot 6 = 42$.

Zapiszemy pary, w których obie liczby są mniejsze niż 4.
Możemy zauważyć, że skoro losujemy bez zwracania,
to w danej parze liczby nie mogą się powtarzać.



(1, 2), (1, 3), (2, 1),
(2, 3), (3, 1), (3, 2)

Takich par jest 6. Zatem prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb mniejszych niż 4 wynosi
 $p = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$.

Ćwiczenie 2.

Dany jest zbiór dziewięciu liczb naturalnych: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Oblicz prawdopodobieństwo
wylosowania dwóch liczb większych niż 5, jeśli losujemy

a) ze zwracaniem,

b) bez zwracania.

Przykład 3.

Zosia losuje z pudełka jedną kulę, odkłada ją do pudełka, a następnie losuje z niego drugą kulę. Oblicz
prawdopodobieństwo wylosowania przez Zosię
dwóch kul białych lub dwóch kul czarnych.



p – prawdopodobieństwo wylosowania przez Zosię dwóch kul białych lub dwóch kul czarnych

W pudełku znajduje się $6 + 8 = 14$ kul. Zosia po wylosowaniu
pierwszej kuli odkłada ją do pudełka, więc jest to losowanie
ze zwracaniem. Wyznamy liczbę wszystkich możliwych
wyników tego losowania, stosując regułę mnożenia.



$$14 \cdot 14 = 196$$

Korzystając z reguły mnożenia, wyznaczmy, na ile sposobów
Zosia może wylosować dwie kule białe oraz na ile sposobów
może wylosować dwie kule czarne.



$$6 \cdot 6 = 36$$

$$8 \cdot 8 = 64$$

Aby obliczyć, na ile sposobów Zosia może wylosować dwie kule
białe lub dwie kule czarne, skorzystamy z reguły dodawania.



$$36 + 64 = 100$$

Zatem prawdopodobieństwo wylosowania przez Zosię dwóch kul białych lub dwóch kul czarnych
wynosi $p = \frac{100}{196} = \frac{25}{49}$.

Ćwiczenie 3.

W pudełku znajduje się 5 kul zielonych oznaczonych numerami od 1 do 5 oraz 9 kul żółtych ozna-
czonych numerami od 1 do 9. Cezary losuje z tego pudełka jedną kulę, odkłada ją do pudełka,
a następnie losuje z niego drugą kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania przez Cezarego
dwóch kul zielonych lub dwóch kul żółtych.



1. Kuba rzuca dwukrotnie sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia przez Kubę liczby oczek o dwa większej w pierwszym rzucie niż w drugim.

2. W szklanym pojemniku znajdują się kartki z zapisanymi kolejnymi liczbami dwucyfrowymi od 20 do 35. Pola losuje z tego pojemnika jedną kartkę. Odkłada ją. Następnie losuje z pojemnika drugą kartkę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kartek, takich że:

- a) zapisane na nich liczby są podzielne przez 4,
- b) zapisane na nich liczby są nieparzyste,
- c) iloczyn zapisanych na nich liczb jest liczbą pierwszą.

3. W pewnej szkole podstawowej są dwie klasy ósme: 8a i 8b. W klasie 8a jest 12 dziewcząt i 16 chłopców, a klasie 8b jest 18 dziewcząt i 10 chłopców. Do samorządu szkolnego należy wybrać dwóch uczniów, z każdej klasy jedną osobę. Oblicz prawdopodobieństwo wybrania:

- a) dwojga dziewcząt, b) dziewczyny i chłopca.

4. Ela i Cezary rzucają kostkami do gry, każde z nich rzuca jeden raz. Pierwsza rzuca Ela sześcienną kostką, a następnie Cezary czworościenną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma liczb wyrzuconych oczek na obu kostkach będzie:

- a) podzielna przez 5, b) liczbą złożoną.

5. Na loterii jest 10 losów pustych i 2 losy wygrywające. Każdy los ma inny kolor. Losujemy bez zwracania jeden los, a następnie drugi. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy co najmniej jeden los wygrywający.



6. Dany jest zbiór dziewięciu liczb całkowitych: $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb mniejszych niż (-1) , jeśli losujemy

- a) ze zwracaniem, b) bez zwracania.

7. Ze zbioru liczb: $0, 2, 4, 6, 8$ losujemy kolejno dwie liczby bez zwracania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że większa z wylosowanych liczb jest równa 6?

8. W pierwszym koszyku znajduje się 5 piłek żółtych i 4 piłki zielone, a w drugim są 3 piłki żółte i 3 piłki zielone. Jakie będzie prawdopodobieństwo wylosowania piłki żółtej z drugiego koszyka, jeśli przełożymy do niego dwie piłki zielone z pierwszego koszyka? Czy zmieni się prawdopodobieństwo wylosowania piłki żółtej z pierwszego koszyka? Uzasadnij swoją odpowiedź.

9. Talia kart zawiera 52 karty czterech kolorów: piki ♠, kiery ♥, trefle ♣, kara ♦ po 13 kart w jednym kolorze. Wśród kart każdego koloru są 4 figury: as, król, dama, walet oraz 9 kart oznaczonych liczbami od 2 do 10. Kasia losuje z talii jedną kartę, zatrzymuje ją i z pozostałych kart losuje kolejną. Oblicz prawdopodobieństwo, że Kasia wylosuje:

- a) dwie karty w kolorze pik,
- b) dwie karty w różnych kolorach,
- c) dwie karty, które nie są w kolorze trefl.

10. Z cyfr: 3, 4, 5, 7, 9 utworzono wszystkie liczby trzycyfrowe, których cyfry mogą się powtarzać. Spośród zapisanych liczb losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby mniejszej od 550.

Sprawdź, co umiesz!

1. W pudełku znajdują się losy: 5 wygrywających i 10 przegrywających. Każdy los ma swój numer. Leszek losuje kolejno, bez zwracania, dwa razy po jednym losie. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania przez Leszka:

- a) dwóch losów przegrywających,
- b) co najmniej jednego losu wygrywającego.

2. Dany jest zbiór liczb naturalnych od 0 do 14. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb pierwszych, jeśli losujemy

- a) ze zwracaniem,
- b) bez zwracania.

3. Ola ma sześcienną symetryczną kostkę, na której ściankach zapisane są cyfry: 2, 3, 4, 5, 7, 8. Wykonuje tą kostką dwa rzuty i tworzy liczby dwucyfrowe, których cyfrę dziesiątek stanowi wynik pierwszego rzutu, a cyfrę jedności – wynik drugiego rzutu.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Prawdopodobieństwo utworzenia liczby parzystej jest równe $\frac{1}{2}$.	P	F
Prawdopodobieństwo utworzenia liczby, której suma cyfr jest mniejsza od 8, wynosi $\frac{1}{9}$.	P	F

4. Na dwóch półkach znajdują się książki przyrodnicze i historyczne. Na pierwszej półce jest 8 książek przyrodniczych i 4 historyczne, a na drugiej 4 książki przyrodnicze i 6 historycznych. Ala wybiera losowo jedną książkę z pierwszej półki i jedną z drugiej.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo wybrania przez Alę książki przyrodniczej i historycznej jest równe

- A. $\frac{4}{11}$
- B. $\frac{8}{15}$
- C. $\frac{7}{11}$
- D. $\frac{2}{15}$

PODSUMOWANIE DZIAŁU VIII

Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

Powtórz wiadomości

Reguła mnożenia

Jeśli dokonujemy wyboru jednej z n możliwości, a następnie jednej z k możliwości, to wszystkich możliwych wyborów jest $n \cdot k$.

Np. doświadczenie losowe polega na rzucie monetą oraz sześcienną kostką do gry. Ile jest wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia?

$$2 \cdot 6 = 12$$

$n = 2$ możliwości w rzucie monetą $k = 6$ możliwości w rzucie sześcienną kostką do gry

Reguła dodawania

Jeśli mamy wybrać pewien element spośród elementów dwóch zbiorów, z których pierwszy ma n elementów, a drugi k elementów, i zbiory te nie mają żadnych wspólnych elementów, to wyboru takiego możemy dokonać na $(n + k)$ sposobów.

Np. Kuba ma 8 koszulek gładkich w różnych kolorach i 5 koszulek z różnymi nadrukami. Na ile sposobów Kuba może wybrać jedną koszulkę?

$$8 + 5 = 13$$

$n = 8$ różnych koszulek gładkich $k = 5$ różnych koszulek z nadrukami

Reguła mnożenia a reguła dodawania

Regułę mnożenia stosujemy, gdy dokonujemy dwóch (lub więcej) kolejnych wyborów.

Regułę dodawania stosujemy, gdy wybieramy z jednego lub z drugiego zbioru. Zbiory nie mogą mieć wspólnych elementów.

Prawdopodobieństwo

Prawdopodobieństwo p otrzymania wyniku spełniającego podany warunek obliczamy, korzystając ze wzoru:

$$p = \frac{\text{liczba wyników spełniających podany warunek}}{\text{liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego}}$$



1. Maja ma do dyspozycji owoce: pomarańcze, banany, kiwi i mango oraz warzywa: marchewkę, jarmuż i buraki. Na ile sposobów może przygotować koktajl składający się z jednego rodzaju owoców i jednego rodzaju warzyw?
2. W jednej szufladzie znajdują się 2 czapki: biała i zielona, a w drugiej szufladzie 4 szaliki: zielony, fioletowy, niebieski i czarny. Ola losowo wybiera z szuflad jedną czapkę i jeden szalik.
 - a) Na ile sposobów Ola może wybrać komplet czapka i szalik?
 - b) Na ile sposobów Ola może wybrać komplet czapka i szalik w różnych kolorach?
3. Ile liczb trzycyfrowych parzystych można ułożyć z cyfr: 0, 1, 2, 3, 6, 8, 9, jeśli
 - a) cyfry mogą się powtarzać?
 - b) cyfry nie mogą się powtarzać?
4. Ile jest liczb trzycyfrowych zbudowanych z cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5 oraz
 - a) podzielnych przez 5?
 - b) większych niż 300?
 - c) których suma cyfr jest większa od 15?
 - d) których suma cyfr jest równa 2?
5. Trzej uczniowie losują kolejno jeden z czterech różnych tematów referatu zaproponowanych przez nauczyciela matematyki. Na ile sposobów mogą dokonać wyboru, jeśli tematy nie mogą się powtarzać?
6. W dwóch skrzynkach są baterie. W pierwszej jest 15 baterii, w tym 6 wyczerpanych, a w drugiej 12 baterii, w tym 4 wyczerpane. Wszystkie baterie są rozróżnialne. Losujemy jedną baterię z pierwszej skrzynki, a drugą z drugiej. Ile jest wszystkich możliwości wylosowania jednej baterii wyczerpanej i jednej naładowanej?
7. Z 4 asów i 4 królów losujemy jedną kartę, odkładamy na stół i losujemy drugą. Starszeństwo kart w talii w porządku malejącym to: as, król, dama, walet, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2.
 - a) Ile jest wszystkich możliwości wylosowania dwóch asów?
 - b) Ile jest wszystkich możliwości wylosowania asa i króla?
 - c) Ile jest wszystkich możliwości wylosowania kart w kolejności starszeństwa w porządku malejącym?
8. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia dwa razy parzystej liczby oczek przy dwukrotnym rzucie sześcienną kostką.
9. Kod do schowka składa się z jednej litery oraz dwóch cyfr i jest tworzony losowo. Do kodowania używane są litery A, B i C oraz wszystkie cyfry różne od 0.
 - a) Ile najwięcej kodów można w ten sposób utworzyć?
 - b) Oblicz prawdopodobieństwo utworzenia kodu o jednakowych cyfrach.

- E 10.** Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie monetą, a następnie jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry.
- Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Są 24 możliwe wyniki takiego doświadczenia.	P	F
Prawdopodobieństwo, że wypadnie orzeł i liczba oczek większa od 3, jest równe $\frac{1}{2}$.	P	F

- 11.** Losujemy kolejno bez zwracania dwie cyfry spośród cyfr: 1, 2, 3, 4, 5. Pierwsza wylosowana cyfra jest cyfrą dziesiątek, a druga cyfrą jedności pewnej liczby dwucyfrowej. Oblicz prawdopodobieństwo, że utworzona liczba dwucyfrowa jest
- a)** podzielna przez 5, **b)** nieparzysta.

- E 12.** Z tali 52 kart losujemy jedną kartę. Zapisujemy, jaka to była karta, odkładamy ją do talii i znów losujemy jedną kartę.



Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowane karty będą kierami? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A.** $\frac{1}{169}$ **B.** $\frac{1}{16}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{7}{16}$

- E 13.** Ze zbioru liczb: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22 losujemy kolejno dwie liczby bez zwracania.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo wylosowania pary liczb, w których zapisie nie występuje cyfra 2, jest równe

- A.** $\frac{4}{9}$ **B.** $\frac{14}{33}$ **C.** $\frac{15}{22}$ **D.** $\frac{5}{44}$

- 14.** Karol zna odpowiedź na 60 % spośród 10 różnych pytań. Losuje kolejno dwa pytania. Oblicz prawdopodobieństwo, że Karol
- a)** umie odpowiedzieć na obydwa pytania,
b) nie zna odpowiedzi na żadne pytanie.

- E 15.** W urnie jest 5 kul białych i 25 czarnych.
- Ile kul czarnych trzeba odłożyć, żeby prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej wynosiło 0,8? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A.** 1 **B.** 5 **C.** 10 **D.** 8



1. W talii są 52 karty. Na ile sposobów można z tej talii wybrać:
 - a) asa kier?
 - b) dwie karty, z których jedna jest pikiem?
 - c) trzy karty, z których każda jest wyższa niż dama, pierwsza to pik, druga – karo, a trzecia – kier?
2. Z cyfr: 0, 3, 5, 6, 8 tworzymy liczby czterocyfrowe, w których cyfry mogą się powtarzać. Ile można utworzyć liczb
 - a) podzielnych przez 4?
 - b) większych od 5000?
 - c) mniejszych od 6500?
 - d) podzielnych przez 3?
3. Sześcienna kostka ma 3 ściany pomalowane na żółto, 2 na zielono i 1 ścianę – na białą. Rzucamy dwa razy kostką i notujemy kolory otrzymane w kolejnych rzutach. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że w dwóch rzutach wypadnie ten sam kolor, jest równe
 - A. $\frac{1}{3}$
 - B. $\frac{19}{36}$
 - C. $\frac{1}{9}$
 - D. $\frac{7}{18}$
4. W koszyku i na paterze są brzoskwinie i pomarańcze. Pola policzyła, że stosunek liczby brzoskwiń do liczby pomarańczy w koszyku jest równy 3 : 2, a na paterze ten stosunek jest równy 5 : 4. Pola wybrała losowo jeden owoc z koszyka, a potem jeden z pater. Oblicz prawdopodobieństwo danego zdarzenia.
 - a) Wybranymi owocami są dwie pomarańcze.
 - b) Pola wybrała różne owoce.
5. Na zakończenie kursu dla uczestników przygotowano 44 nagrody, które umieszczono w dwóch pudełkach. W pierwszym jest 12 książek i 10 zestawów długopisów, a w drugim 8 książek i 14 zestawów długopisów. Wszystkie nagrody danego rodzaju są rozróżnialne. Każdy uczestnik losuje jedną nagrodę z pierwszego pudełka oraz drugą – z drugiego pudełka. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Prawdopodobieństwo wylosowania przez pierwszego uczestnika dwóch zestawów długopisów jest równe **A** **B**.

 - A. $\frac{35}{121}$
 - B. $\frac{6}{11}$

Prawdopodobieństwo wylosowania przez pierwszego uczestnika książki i zestawu długopisów wynosi **C** **D**.

 - C. $\frac{42}{121}$
 - D. $\frac{62}{121}$
6. Na ile sposobów można posadzić dwie osoby na 8 ponumerowanych miejscach? Jakie jest prawdopodobieństwo, że nie będą siedzieć obok siebie?

7. W pierwszym pojemniku znajduje się 12 kul białych i 10 kul czerwonych, a w drugim 25 kul czerwonych i 6 białych. Ile kul czerwonych należy przełożyć z drugiego pojemnika do pierwszego, aby prawdopodobieństwo wylosowania z pierwszego pojemnika kuli czerwonej było równe $\frac{2}{3}$? Ile będzie wynosiło wówczas prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z drugiego pojemnika?

- E** 8. Trzy koleżanki wybierają się w tym samym czasie do jednego z pięciu kin w mieście. Każda z dziewcząt wybiera kolejno losowo jedno z pięciu kin.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

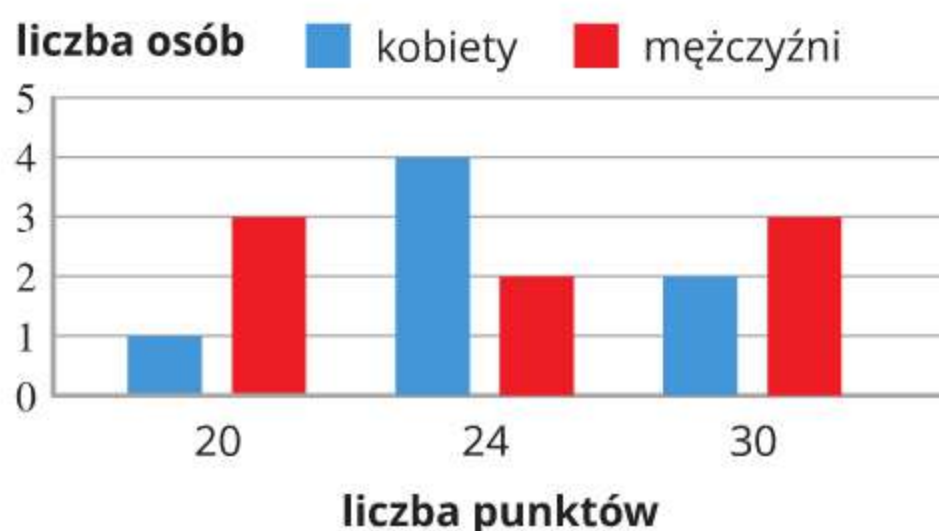
Prawdopodobieństwo, że dwie z nich wybiorą to samo kino, jest równe

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{25}$ D. $\frac{12}{25}$

9. W pierwszym koszyku znajduje się 9 piłek czerwonych i 4 piłki zielone, a w drugim jest 7 piłek czerwonych i 7 piłek zielonych. Wszystkie piłki w danym kolorze są rozróżnialne. Zosia losuje z każdego koszyka dwie piłki. Uzasadnij, że wylosowanie dwóch piłek w tym samym kolorze z drugiego koszyka jest tak samo prawdopodobne jak wylosowanie dwóch piłek czerwonych z pierwszego koszyka.

10. Cezary przygotowuje się do udziału w teleturnieju. Warunkiem udziału jest poprawna odpowiedź na przynajmniej jedno z dwóch pytań. Pierwsze pytanie Cezary losuje z zestawu A, drugie z zestawu B. W zestawie A jest 20 pytań, a w zestawie B – 15 pytań. Cezary zna odpowiedzi na 80 % pytań z zestawu A i na 60 % z zestawu B. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że Cezary zakwalifikuje się do udziału w tym turnieju.

11. Na diagramie przedstawiono wyniki uzyskane przez finalistów konkursu historycznego.

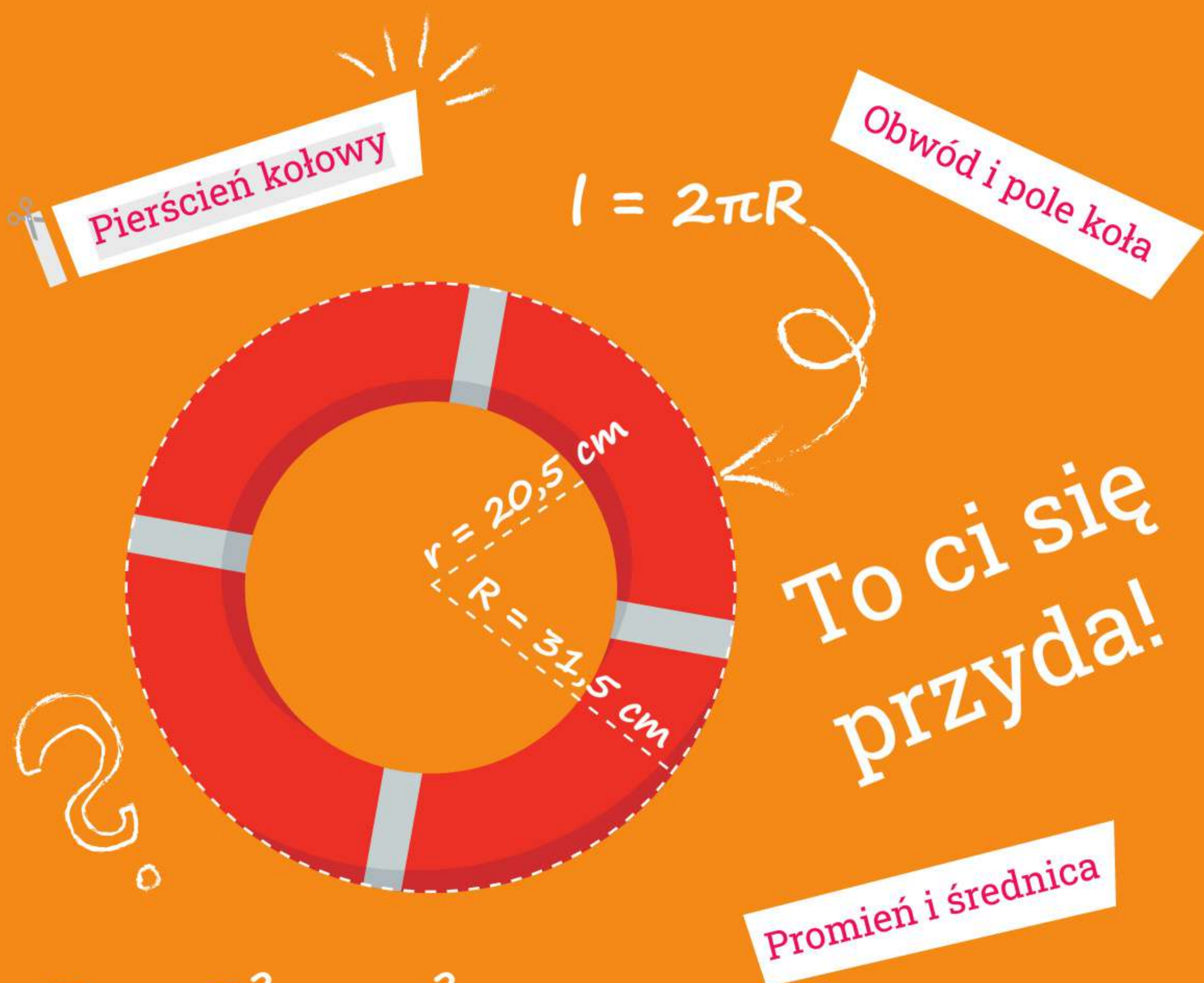


Z grupy finalistów wybrano losowo jedną kobietę i jednego mężczyznę, aby wręczyli kwiaty komisji konkursowej. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

- a) obydwie uzyskali po 20 punktów,
- b) łączna liczba punktów uzyskanych przez wybraną parę jest większa od 50,
- c) liczba punktów uzyskanych przez kobietę jest większa od liczby punktów uzyskanych przez mężczyznę,
- d) obydwie uzyskali liczbę punktów większą od średniej arytmetycznej przypadającej na jednego finalistę.

DZIAŁ IX

DŁUGOŚĆ OKRĘGU I POLE KOŁA



$$P = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$P = \pi \cdot (31,5)^2 - \pi \cdot (20,5)^2 = 572\pi$$

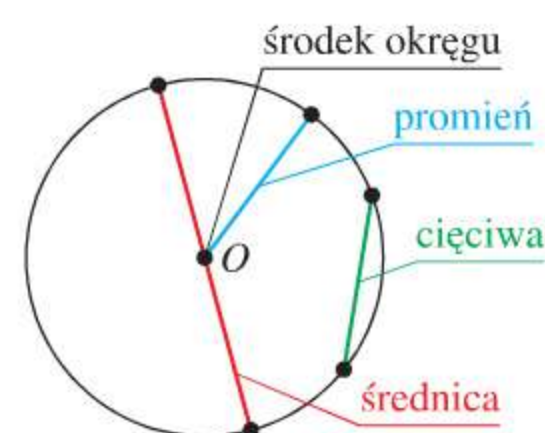
1. Długość okręgu

- ▶ Obliczanie długości okręgu o danym promieniu lub danej średnicy
- ▶ Obliczanie promienia lub średnicy okręgu, gdy dana jest długość okręgu

Okręgiem nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny jednakowo oddalonych od punktu O – środka okręgu.

Okrąg i wszystkie punkty wewnątrz tego okręgu tworzą **koło**, zatem wzór na długość okręgu będzie równocześnie wzorem na obwód koła.

Jeśli „rozetniemy” okrąg i go „wyprostujemy”, to otrzymamy odcinek, którego długość jest równa **długości okręgu**.



W tabeli przedstawiono przedmioty, którym zmierzono obwody i średnice. Dla każdego z przedmiotów wyznaczono stosunek obwodu do długości średnicy. Można zauważyć, że w każdym z przypadków stosunek ten jest w przybliżeniu równy 3,14.

Przedmiot			
Obwód (l)	94,3 cm	17 cm	6,29 m
Długość średnicy (d)	30 cm	5,4 cm	2 m
Stosunek obwodu do długości średnicy ($\frac{l}{d}$)	$\frac{94,3 \text{ cm}}{30 \text{ cm}} = 3,14(3)$	$\frac{17 \text{ cm}}{5,4 \text{ cm}} = 3,(148)$	$\frac{6,29 \text{ m}}{2 \text{ m}} = 3,145$



Stosunek długości okręgu do długości jego średnicy jest dla wszystkich okręgów równy tej samej liczbie. Liczbę tę oznaczamy grecką literą π (czyt. pi). Liczba π jest liczbą niewymierną. Jej rozwinięcie dziesiętne jest nieskończone i nieokresowe.

$$\pi = 3,14159265358979\dots$$

A to ciekawe

Inżynierowie firmy Google 8 czerwca 2022 r. ogłosili, że przy pomocy komputerów uzyskali rozwinięcie liczby π do stu bilionów, czyli 10^{14} miejsc po przecinku. Liczba π zwana jest również ludolfiną. Nazwę tę zawdzięcza Ludolfowi van Ceulenowi (czyt. Ludolfowi wan Zulenowi) – holenderskiemu matematykowi, który w 1596 roku podał wartość liczby π z dokładnością do 20 miejsc po przecinku.



3,141592 653589 793238 462643
383279 502884 197169 399375
105820 974640 507 816406
286208 998678 04825 342117
067982 148986 13282 306647
093844 609550 582231 725359
408128 481117 450284 102701

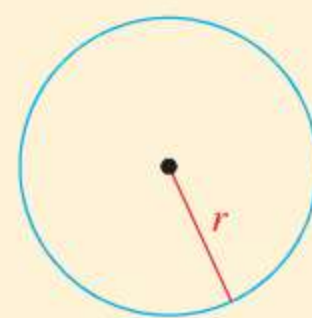
Przyjmijmy, że l jest długością okręgu. Jeśli promień okręgu oznaczmy literą r , to jego **średnicę** d wyrazimy jako

$$d = 2r.$$

Wówczas po przekształceniu wzoru na liczbę π : otrzymamy wzór na **długość okręgu**.

$$l = 2\pi r$$

Aby obliczyć przybliżoną długość okręgu, przyjmujemy przybliżenie liczby π . Najczęściej stosujemy przybliżenie: $\pi \approx 3,14$.



Przykład 1.

Oblicz długość okręgu o promieniu równym 4,5 cm.

Zastosujemy wzór na długość okręgu: $l = 2\pi r$.



$$l = 2\pi \cdot 4,5 = 9\pi \text{ [cm]}$$

Odp. Długość tego okręgu wynosi 9π cm.

Ćwiczenie 1.

Oblicz długość okręgu o promieniu równym:

a) 8 cm,

b) $3\frac{1}{2}$ dm,

c) 0,4 m.

Przykład 2.

Oblicz przybliżoną długość okręgu o średnicy równej 12 cm. Przyjmij, że $\pi \approx 3,14$.

Aby obliczyć promień r okręgu, podzielimy długość jego średnicy przez 2.



$$r = 12 : 2 = 6 \text{ [cm]}$$

Obliczymy długość okręgu, przyjmując, że $\pi \approx 3,14$.



$$l = 2\pi \cdot 6 = 12\pi \approx 12 \cdot 3,14 = 37,68 \text{ [cm]}$$

Odp. Długość tego okręgu wynosi 12π cm, czyli około 37,68 cm.

Ćwiczenie 2.

Oblicz przybliżoną długość okręgu o podanej średnicy d . Przyjmij, że $\pi \approx 3,14$.

a) $d = 20$ cm,

b) $d = 5,6$ m,

c) $d = \frac{1}{8}$ dm.

Przykład 3.

Oblicz promień okręgu, którego długość jest równa l .

a) $l = 14\pi$ cm

Skorzystamy ze wzoru na długość okręgu i obliczymy promień okręgu.



$$l = 2\pi r$$

$$14\pi = 2\pi r \quad | : 2\pi$$

$$r = \frac{14\pi}{2\pi} = 7 \text{ [cm]}$$

Odp. Promień tego okręgu wynosi 7 cm.

b) $l = 32$ dm

Skorzystamy ze wzoru na długość okręgu i obliczymy promień okręgu.



$$l = 2\pi r$$

$$32 = 2\pi r \quad | : 2\pi$$

$$r = \frac{32}{2\pi} = \frac{16}{\pi} \text{ [dm]}$$

Odp. Promień tego okręgu wynosi $\frac{16}{\pi}$ dm.

Ćwiczenie 3.

Oblicz promień okręgu, którego długość jest równa l .

a) $l = 24\pi$ cm

b) $l = 16\sqrt{3}\pi$ m

c) $l = 100$ dm

d) $l = 1\frac{1}{4}$ km

Rozwiąż zadania

1. Oblicz długość okręgu o promieniu równym:

a) $r = 3$ cm,

b) $r = \frac{7}{8}$ dm,

c) $r = 1,2$ dm,

d) $r = 2\sqrt{2}$ m.

2. Oblicz przybliżoną długość okręgu o promieniu r , dla podanych przybliżeń liczby π .

a) $r = 6$ cm, $\pi \approx 3$

b) $r = 15$ mm, $\pi \approx 3,1$

c) $r = 0,8$ dm, $\pi \approx 3,14$

3. Oblicz długość okręgu o średnicy równej:

a) $d = 4$ cm,

b) $d = 3,4$ m,

c) $d = 3\frac{1}{3}$ mm,

d) $d = 6\sqrt{3}$ dm.

4. Oblicz przybliżoną długość okręgu o średnicy d , dla podanych przybliżeń liczby π .

a) $d = 8$ km, $\pi \approx 3,14$

b) $d = 1,4$ m, $\pi \approx \frac{22}{7}$

c) $d = 42$ mm, $\pi \approx 3\frac{1}{7}$

5. Oblicz promień okręgu, którego długość jest równa l .

a) $l = 10\pi$ mm

b) $l = 17\pi$ m

c) $l = 6\sqrt{5}\pi$ cm

d) $l = 40$ dm

6. Oblicz długość średnicy koła, którego obwód jest równy l .

a) $l = 4\pi$ cm

b) $l = 0,7\pi$ dm

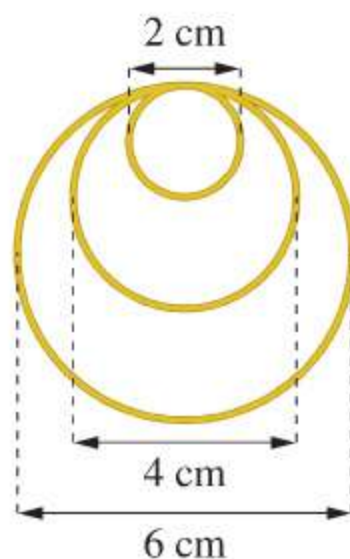
c) $l = 4\sqrt{7}\pi$ km

d) $l = 50$ m

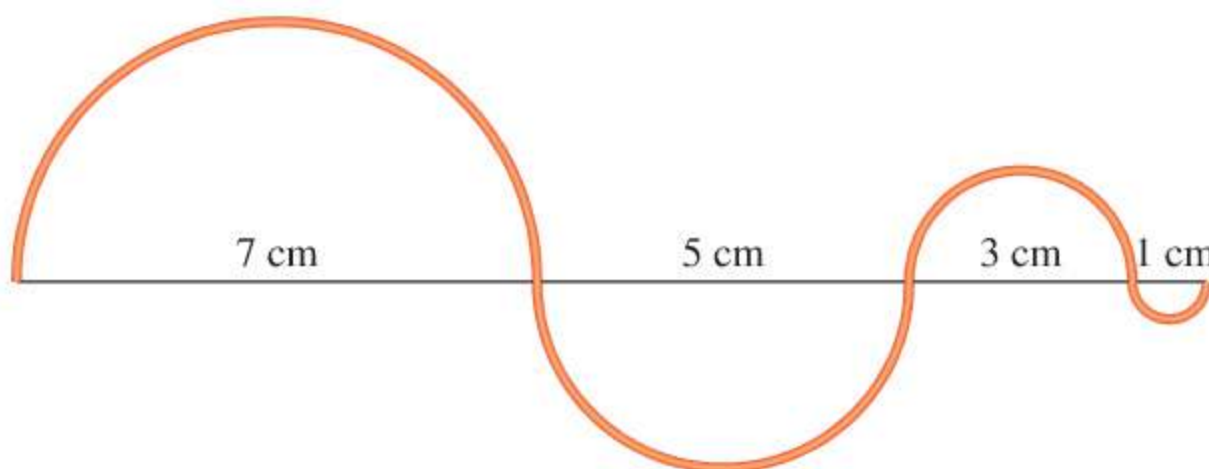
7. Koniec dużej wskazówki zegara w ciągu dwóch godzin przebył drogę o długości 100,48 cm. Oblicz przybliżoną długość tej wskazówki. Przyjmij, że $\pi \approx 3,14$.



8. Zosia zaprojektowała dla swojej siostry zawieszkę. Ma do dyspozycji 0,5 m cienkiego drutu. Czy ten kawałek drutu wystarczy Zosi na wykonanie tak zaprojektowanej zawieszki? Przyjmij, że $\pi \approx 3,14$.



9. Oblicz długość linii utworzonej przez 4 półokręgi przedstawione na rysunku.



10. Łańcuch składa się ze 120 jednakowych ogniw wykonanych z drutu. Każde ogniwo ma kształt okręgu o średnicy 2 cm. Oblicz, ile drutu zużyto na wykonanie tego łańcucha. Przyjmij, że $\pi \approx 3,1$.

11. Dany jest okrąg o średnicy 12 cm.

a) O ile zwiększy się długość okręgu, jeśli jego promień zwiększymy o 4 cm?

b) Ile razy zwiększy się długość okręgu, jeśli jego średnicę zwiększymy dwa razy?

12. Średnica koła hulajnogi jest równa 120 mm. Odpowiedz na pytanie. Przyjmij, że $\pi \approx 3$.

a) Jaki dystans pokona koło hulajnogi po wykonaniu 20 pełnych obrotów? Wynik podaj w metrach.

b) Ile pełnych obrotów wykona koło na drodze długości 180 m?

- 13.** Bruno z młodszym bratem wybrał się na przejażdżkę rowerową. Średnica koła roweru Brunona jest równa 70 cm, a roweru jego brata 50 cm. Koło roweru Brunona wykonało w czasie przejażdżki 600 pełnych obrotów. Ile pełnych obrotów wykonało podczas tej przejażdżki koło roweru jego brata?



- 14.** O ile decymetrów należy zmniejszyć promień okręgu równy 10 dm, aby długość tego okręgu zmalała cztery razy?



- 15.** Obwód koła jest równy 4π , a jego promień stanowi $\frac{1}{3}$ wysokości pewnego trójkąta równobocznego. Oblicz pole tego trójkąta.

Sprawdź, co umiesz!

- 1.** Przerysuj tabele do zeszytu i uzupełnij brakujące dane.

Promień okręgu	Średnica okręgu	Długość okręgu	Promień okręgu	Średnica okręgu	Długość okręgu
1,2					24π
$4\sqrt{3}$				$1\frac{3}{5}$	
	45				0,6



- 2.** Dany jest okrąg o średnicy 1,2 dm.

Dokończ zadanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

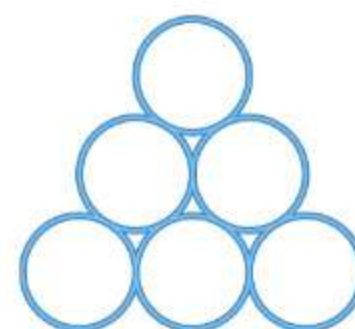
Długość okręgu zwiększy się dwukrotnie, jeśli jego średnicę zwiększymy

- A.** o 2 dm. **B.** o 1,2 dm. **C.** o 0,6 dm. **D.** o 2,4 dm.

- 3.** Ela kupiła mamie na urodziny szklany wazon w kształcie walca, którego podstawą jest okrąg o średnicy 15 cm. Chce przybrać wazon wstążką, tak jak pokazano na ilustracji. Jak długa musi być wstążka, jeśli na węzeł i kokardę potrzeba 30 cm? Przyjmij, że $\pi \approx 3,14$.



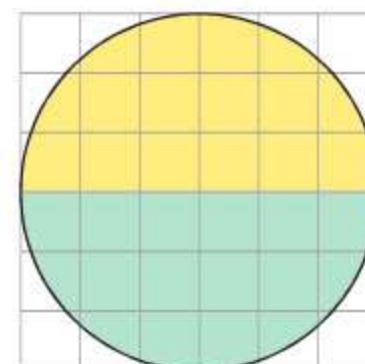
- 4.** Pola narysowała projekt wieszaka na krawaty, który wykona z drutu. Każdy element wieszaka jest takim samym okręgiem o średnicy 8 cm. Ile co najmniej centymetrów drutu musi przygotować Pola na wykonanie tego wieszaka? Przyjmij, że $\pi \approx 3,14$.



2. Pole koła

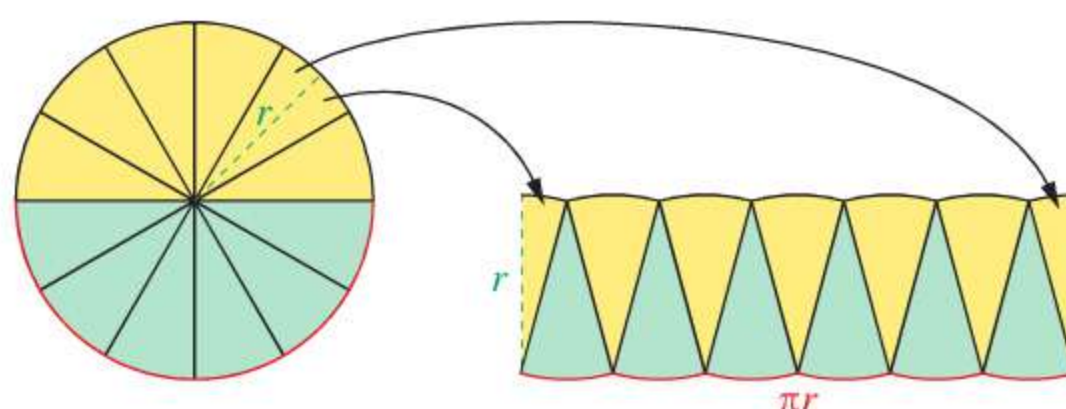
- ▶ Obliczanie pola koła o danym promieniu lub danej średnicy
- ▶ Obliczanie promienia lub średnicy koła o danym polu

Jak obliczyć pole koła? Jeśli umieścimy koło na siatce, zobaczymy, że nie jest łatwo policzyć, ile kwadratów jednostkowych, mieści się całkowicie w kole. Nie możemy zatem wyznaczyć pola koła zliczając kwadraty jednostkowe.



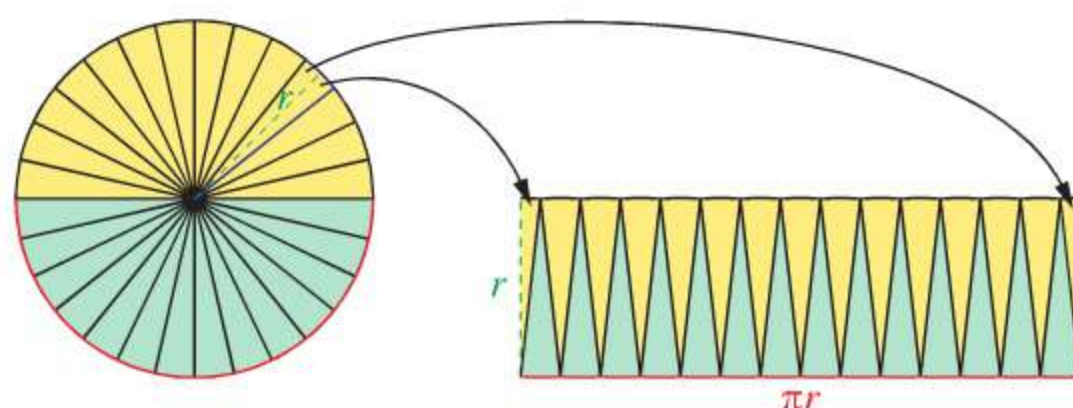
Z pomocą przychodzi nam podział koła na części.

Podzielimy koło na 12 jednakowych części.



Figura, którą otrzymaliśmy, przypomina prostokąt.

Podzielimy koło na więcej jednakowych części.

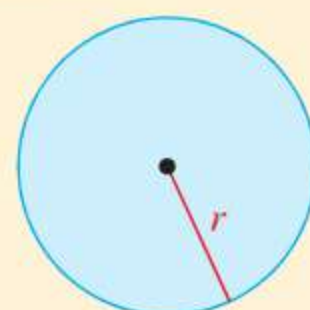


Widzimy, że otrzymana figura jeszcze bardziej przypomina prostokąt.

Możemy więc przyjąć, że pole koła o promieniu r jest równe polu prostokąta o bokach długości r oraz πr . Zatem, korzystając ze wzoru na pole prostokąta, otrzymamy wzór na pole koła:
 $P = r \cdot \pi r = \pi r^2$.

Pole koła o promieniu r wyraża się wzorem:

$$P = \pi r^2.$$



Przykład 1.

Oblicz pole koła o promieniu równym 6 cm.

Zastosujemy wzór na pole koła: $P = \pi r^2$.



$$P = \pi \cdot 6^2 = 36\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

Odp. Pole tego koła wynosi $36\pi \text{ cm}^2$.

Ćwiczenie 1.

Oblicz pole koła o promieniu równym:

a) 10 cm,

b) $2\frac{1}{2}$ dm,

c) 0,5 m.

Przykład 2.

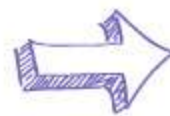
Oblicz pole koła o średnicy równej 0,2 dm. Wyznacz jego przybliżoną wartość. Przyjmij, że $\pi \approx 3,14$.

Aby obliczyć promień r koła, podzielimy długość jego średnicy przez 2.



$$r = 0,2 : 2 = 0,1 \text{ [dm]}$$

Obliczymy pole koła, przyjmując, że $\pi \approx 3,14$.



$$P = \pi \cdot (0,1)^2 = 0,01\pi \approx \\ \approx 0,01 \cdot 3,14 = 0,0314 \text{ [dm}^2\text{]}$$

Odp. Pole tego koła wynosi $0,01\pi \text{ dm}^2$, czyli około $0,0314 \text{ dm}^2$.

Ćwiczenie 2.

Oblicz pole koła o podanej średnicy d . Wyznacz jego przybliżoną wartość. Przyjmij, że $\pi \approx 3,14$.

a) $d = 6 \text{ cm}$,

b) $d = 9 \text{ dm}$,

c) $d = 0,8 \text{ m}$.

Przykład 3.

Oblicz promień koła o podanym polu P .

a) $P = 49\pi \text{ cm}^2$

Skorzystamy ze wzoru na pole koła i obliczymy promień koła. Ponieważ r jest promieniem, to musi wyrażać się za pomocą liczby dodatniej.

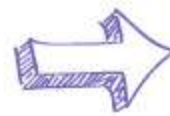


$$P = \pi r^2 \\ 49\pi = \pi r^2 \quad | : \pi \\ r^2 = \frac{49\pi^1}{\pi} \\ r^2 = 49 \\ r = 7 \text{ [cm]}$$

Odp. Promień tego koła wynosi 7 cm.

b) $P = 121 \text{ cm}^2$

Skorzystamy ze wzoru na pole koła i obliczymy promień koła. Ponieważ r jest promieniem, to musi wyrażać się za pomocą liczby dodatniej.



$$P = \pi r^2 \\ 121 = \pi r^2 \quad | : \pi \\ r^2 = \frac{121}{\pi} \\ r = \frac{11}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = \frac{11\sqrt{\pi}}{\pi} \text{ [cm]}$$

Odp. Promień tego koła wynosi $\frac{11\sqrt{\pi}}{\pi} \text{ cm}$.

Ćwiczenie 3.

Oblicz promień koła o polu równym:

- a) $25\pi \text{ cm}^2$, b) $\frac{1}{9}\pi \text{ cm}^2$, c) 225 m^2 , d) $0,81 \text{ m}^2$.

Przykład 4.

Oblicz obwód koła o polu równym $64\pi \text{ cm}^2$.

Obliczymy promień koła, korzystając ze wzoru na pole koła. Ponieważ r jest promieniem, to musi wyrażać się za pomocą liczby dodatniej.



$$P = \pi r^2$$

$$64\pi = \pi r^2 \quad | : \pi$$

$$r^2 = 64$$

$$r = 8 \text{ [cm]}$$

Obliczymy obwód koła, korzystając ze wzoru: $l = 2\pi r$.



$$l = 2\pi \cdot 8 = 16\pi \text{ [cm]}$$

Odp. Obwód tego koła wynosi $16\pi \text{ cm}$.

Ćwiczenie 4.

Oblicz obwód koła o polu równym $196\pi \text{ cm}^2$.

Rozwiąż zadania

1. Oblicz pole koła o podanym promieniu r , a następnie wyznacz jego przybliżoną wartość, przyjmując podaną obok wartość π .

a) $r = 7 \text{ dm}$, $\pi \approx 3,14$

b) $r = \frac{1}{4} \text{ m}$, $\pi \approx 3\frac{1}{7}$

c) $r = 2\sqrt{2} \text{ km}$, $\pi \approx 3$

2. Oblicz pole koła o podanej średnicy d , a następnie wyznacz jego przybliżoną wartość, przyjmując podaną obok wartość π .

a) $d = 4 \text{ cm}$, $\pi \approx 3,14$

b) $d = 3,2 \text{ dm}$, $\pi \approx 3,1$

c) $d = 8\sqrt{5} \text{ dm}$, $\pi \approx 3$

3. Oblicz pole koła o podanym obwodzie l .

a) $l = 64\pi \text{ cm}$

b) $l = 16,4\pi \text{ m}$

c) $l = 2\sqrt{3}\pi \text{ dm}$

d) $l = 1\frac{1}{5} \text{ km}$

4. Oblicz promień koła o podanym polu P .

a) $P = 64\pi \text{ cm}^2$

b) $P = \frac{36}{81}\pi \text{ mm}^2$

c) $P = 100 \text{ cm}^2$

d) $P = 1,96 \text{ m}^2$

5. Oblicz obwód koła o podanym polu P .

a) $P = 225\pi \text{ cm}^2$

b) $P = 1\frac{24}{25}\pi \text{ mm}^2$

c) $P = 1,21\pi \text{ dm}^2$

d) $P = 8\pi \text{ dm}^2$

6. Ćwierć koła ma pole równe 81π . Oblicz średnicę tego koła.

- 7.** Na przygotowanie polewy na górną powierzchnię tortu w kształcie koła o średnicy 28 cm potrzeba 300 g czekolady. Czy taka ilość czekolady wystarczy na przygotowanie polewy na górną powierzchnię tortu w kształcie prostokąta o wymiarach 24 cm i 25 cm, jeśli założymy, że w obu przypadkach grubość polewy jest taka sama? Przyjmij, że $\pi \approx 3,14$.



- 8.** Rodzice Kuby kupili basen ogrodowy, którego dno ma kształt koła o średnicy 457 cm. Postanowili, że kupią jeszcze folię solarną, aby obniżyć efekt utraty ciepła z wody nagrzanej przez słońce. Jaką powierzchnię musi mieć folia w kształcie koła, aby przykryła powierzchnię wody, unosząc się na niej? Przyjmij, że $\pi \approx 3,14$. Wynik podaj z dokładnością do $0,5 \text{ m}^2$.

- 9.** Dane jest koło K_1 o polu równym 2π oraz koło K_2 , którego pole jest cztery razy większe od pola koła K_1 . Oblicz stosunek promienia koła K_1 do promienia koła K_2 .



- 10.** Ania na swojej działce ma klomb w kształcie koła o średnicy 10 m. Chce posadzić na nim róże. Na jeden krzew róży zaplanowała $0,5 \text{ m}^2$ powierzchni. Jeden krzew róży kosztuje 12,40 zł. Przyjmij, że $\pi \approx 3,14$.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Ania potrzebuje **A** **B** krzewów róż.

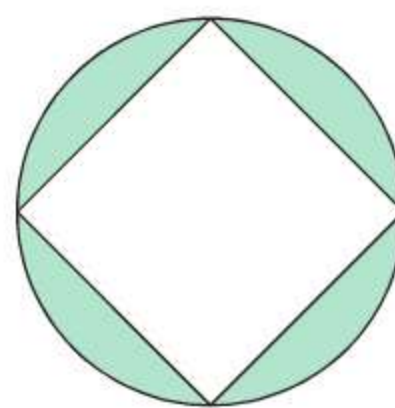
A. 157 **B.** 126

Ania zapłaci za krzewy **C** **D** zł.

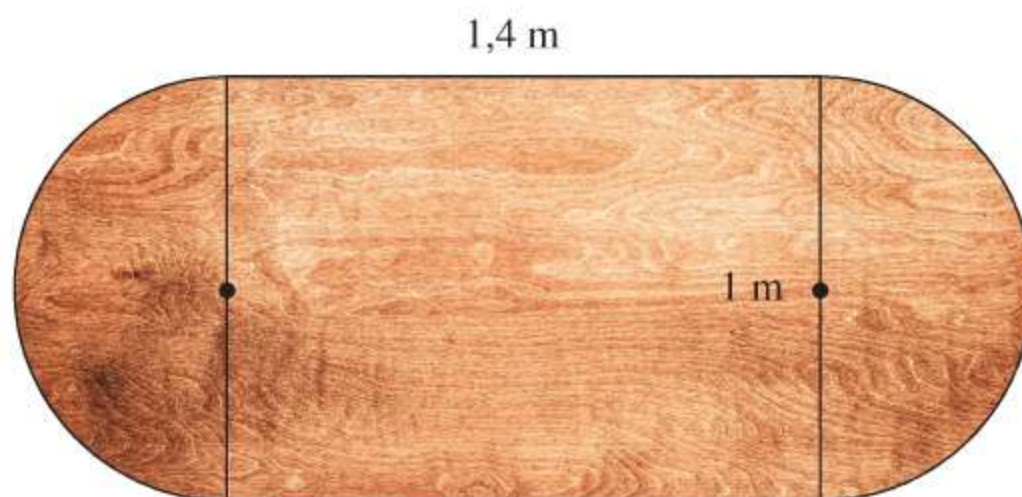
C. 1946,80 **D.** 1562,40

- 11.** Z koła wycięto kwadrat o polu 196 cm^2 , którego wierzchołki leżą na okręgu tego koła.

- a)** Oblicz obwód tego koła.
b) Oblicz pole zacieniowanej figury.

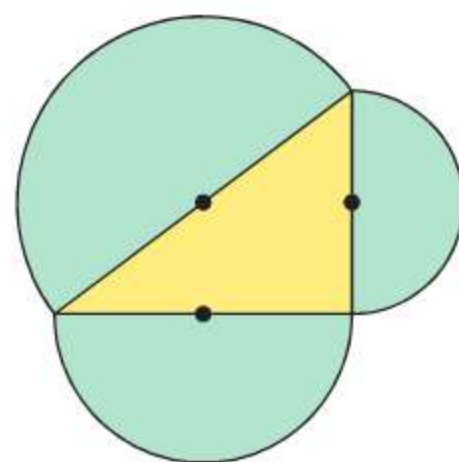


- 12.** Prostokątny stół o bokach długości 1 m i 1,4 m powiększono, dołączając do krótszych boków blaty w kształcie półkoli. Przyjmij, że $\pi \approx 3,14$.



- a)** O ile zwiększył się obwód tego stołu?
b) O ile zwiększyła się powierzchnia tego stołu?

- 13.** Na bokach trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 6 cm i 8 cm zbudowano półkola. Uzasadnij, że pole półkola zbudowanego na przeciwprostokątnej jest równe sumie pól dwóch pozostałych półkoli.



- 14.** Promień koła o polu równym 40 wynosi r , a promień koła o obwodzie równym 40 wynosi R . Oblicz $\frac{R^2}{r^2}$.



- 15.** Stosunek obwodu kwadratu do obwodu koła jest równy $2 : \sqrt{\pi}$. Uzasadnij, że kwadrat i koło mają równe pola.



Sprawdź, co umiesz!

- 1.** Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Pole koła o promieniu 1,4 dm jest równe

A. $1,4\pi \text{ dm}^2$ **B.** $7,84\pi \text{ dm}^2$ **C.** $1,96\pi \text{ dm}^2$ **D.** $3,92\pi \text{ dm}^2$



- 2.** Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Obwód koła o polu $250\pi \text{ cm}^2$ jest równy

A. $5\sqrt{10} \text{ cm}$ **B.** $5\sqrt{10}\pi \text{ cm}$ **C.** $10\sqrt{10}\pi \text{ cm}$ **D.** $20\sqrt{10}\pi \text{ cm}$



- 3.** Pizzę w kształcie koła podzielono na 6 równych kawałków, każdy o polu $54\pi \text{ cm}^2$. Wysokość pizzy to 2 cm.

- a)** Oblicz promień tej pizzy.
b) Czy pizzę można spakować do pudełka w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $35 \text{ cm} \times 35 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$? Uzasadnij swoją odpowiedź.



- 4.** Z kwadratu o boku długości 6 cm wycięto ćwierć koła, którego środkiem jest wierzchołek kwadratu, a promień jest równy długości boku kwadratu.

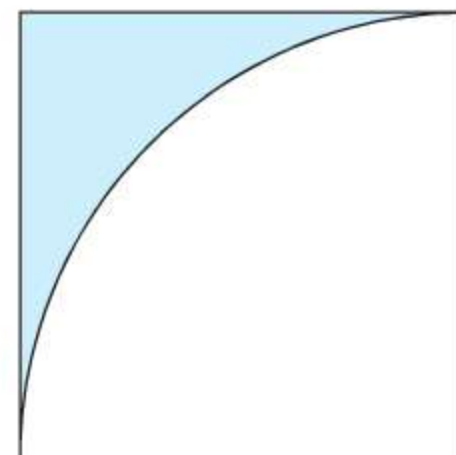
Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Pole zacieniowanej figury jest równe **A** **B**.

A. $27\pi \text{ cm}^2$ **B.** $(36 - 9\pi) \text{ cm}^2$

Obwód zacieniowanej figury jest równy **C** **D**.

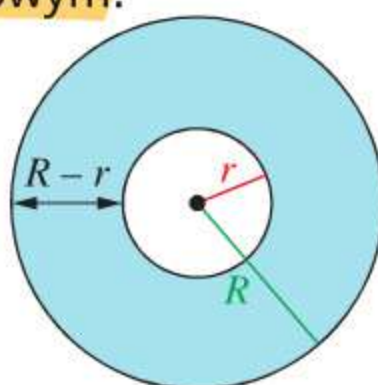
C. $15\pi \text{ cm}$ **D.** $(12 + 3\pi) \text{ cm}$



3. Pole pierścienia kołowego

- Obliczanie pola pierścienia kołowego o danych promieniach lub średnicach obu okręgów tworzących pierścień

Obszar między dwoma okręgami o różnych promieniach, które mają ten sam środek, wraz z tymi okręgami nazywamy **pierścieniem kołowym**.

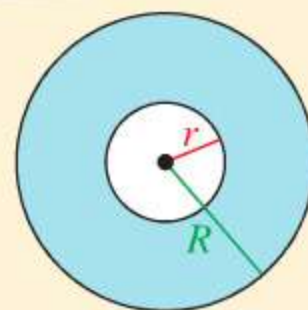


Promień r mniejszego okręgu nazywamy **promieniem wewnętrznym pierścienia**, a promień R większego okręgu – **promieniem zewnętrznym pierścienia**. Szerokością pierścienia kołowego nazywamy różnicę tych promieni: $R - r$.



Pole pierścienia kołowego jest równe różnicy pól większego koła i mniejszego:

$$P = \pi R^2 - \pi r^2.$$



Przykład 1.

Oblicz pole pierścienia kołowego, który ograniczony jest okręgiem o promieniu równym 10 cm oraz okręgiem o średnicy równej 14 cm.

Obliczymy promień r okręgu, którego średnica wynosi 14 cm.

$$\Rightarrow r = 14 : 2 = 7 \text{ [cm]}$$

Obliczymy pole P_1 koła o promieniu równym 7 cm, korzystając ze wzoru na pole koła: $P = \pi r^2$.

$$\Rightarrow P_1 = \pi \cdot 7^2 = 49\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

Obliczymy pole P_2 koła o promieniu równym 10 cm, korzystając ze wzoru na pole koła: $P = \pi r^2$.

$$\Rightarrow P_2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

Pole pierścienia kołowego jest równe różnicy pól P_2 oraz P_1 , czyli większego i mniejszego koła. Zatem $P = P_2 - P_1 = 100\pi - 49\pi = 51\pi \text{ [cm}^2\text{]}$.

Odp. Pole tego pierścienia kołowego wynosi $51\pi \text{ cm}^2$.

Ćwiczenie 1.

Oblicz pole pierścienia kołowego, który jest ograniczony okręgiem o promieniu równym 12 cm oraz okręgiem o średnicy równej 30 cm.

Przykład 2.

Moneta dwuzłotowa jest dwukolorowa. Rdzeń tej monety wykonany jest z miedzioniklu, natomiast pierścień – z brązu. Oblicz przybliżoną powierzchnię pierścienia tej monety. Przyjmij, że $\pi \approx 3,14$. Wynik podaj w zaokrągleniu do całości.

Aby obliczyć powierzchnię pierścienia, należy obliczyć powierzchnię awersu monety oraz powierzchnię rdzenia tej monety.

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

R – promień monety, r – promień rdzenia monety,

D – średnica monety, d – średnica rdzenia monety,

P_1 – powierzchnia monety, P_2 – powierzchnia rdzenia monety.

Z ilustracji możemy odczytać, że $D = 2$ cm oraz $d = 1,2$ cm.

Obliczymy promień R monety oraz promień r rdzenia monety, korzystając z faktu, że promień jest połową średnicy.



$$\begin{aligned} D &= 2R \\ 2 &= 2R \quad | :2 \\ R &= 1 \text{ [cm]} \end{aligned}$$

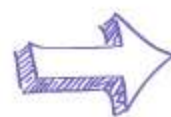
$$\begin{aligned} d &= 2r \\ 1,2 &= 2r \quad | :2 \\ r &= 0,6 \text{ [cm]} \end{aligned}$$

Obliczymy powierzchnię monety (P_1) oraz powierzchnię rdzenia monety (P_2).



$$\begin{aligned} P_1 &= \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi \text{ [cm}^2\text{]} \\ P_2 &= \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (0,6)^2 = 0,36\pi \text{ [cm}^2\text{]} \end{aligned}$$

Obliczymy powierzchnię pierścienia.



$$\begin{aligned} P &= P_1 - P_2 \\ P &= \pi - 0,36\pi = 0,64\pi \approx 0,64 \cdot 3,14 \approx 2 \text{ [cm}^2\text{]} \end{aligned}$$

Odp. Powierzchnia pierścienia tej monety jest równa około 2 cm^2 .



Ćwiczenie 2.

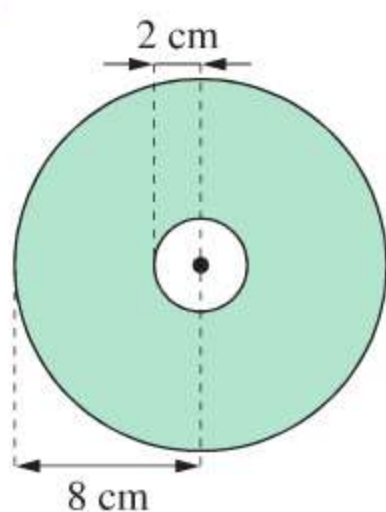
Moneta pięcizłotowa jest dwukolorowa. Rdzeń tej monety jest wykonany z brązu, natomiast pierścień – z miedzioniklu. Oblicz przybliżoną powierzchnię pierścienia tej monety. Przyjmij, że $\pi \approx 3,14$. Wynik podaj w zaokrągleniu do całości.



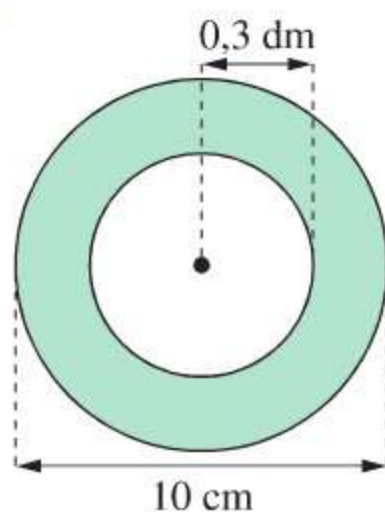
Rozwiąż zadania

1. Oblicz pole pierścienia kołowego przedstawionego na rysunku

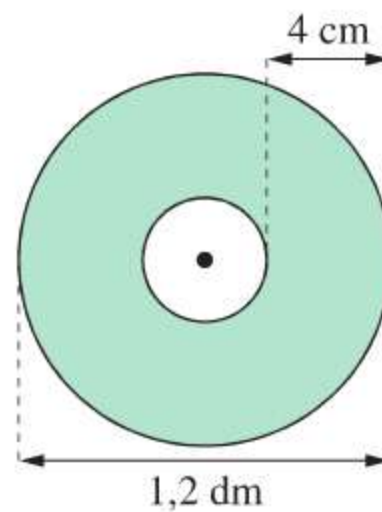
a)



b)



c)

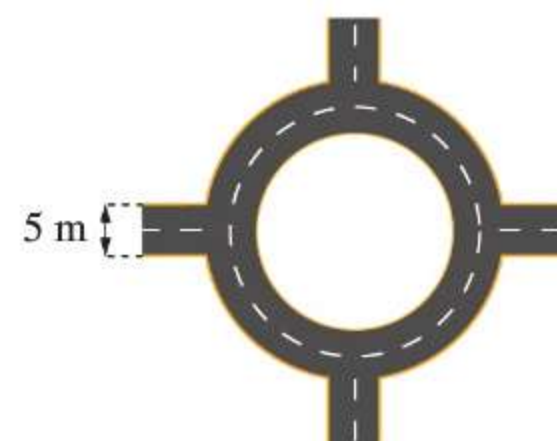


3. Pole pierścienia kołowego

2. Wyznacz pole pierścienia kołowego ograniczonego okręgami. Jeden z okręgów ma promień równy 7, a promień drugiego okręgu jest cztery razy większy.

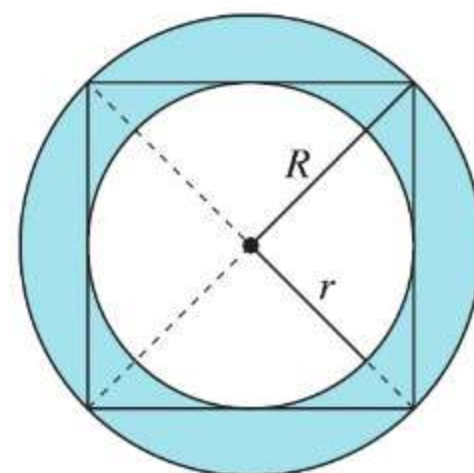
3. Oblicz pole pierścienia kołowego, którego obwód zewnętrzny jest równy 20π , a obwód wewnętrzny wynosi 12π .

4. W celu zwiększenia bezpieczeństwa ruchu postanowiono wybudować rondo przy skrzyżowaniu dwóch ruchliwych ulic w mieście. Średnica zewnętrzna planowanego ronda jest równa 19 m, a szerokość pasa ruchu 5 m. Oblicz pole wyspy środkowej oraz pole pasa ruchu na tym rondzie. Przyjmij, że $\pi \approx 3,1$.

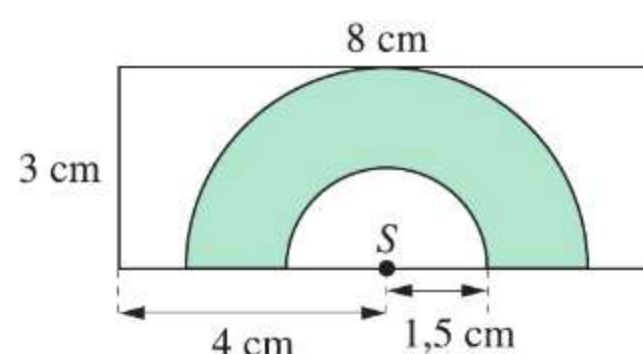


5. Dokoła okrągłej piaskownicy o średnicy 10 m wytyczono ścieżkę o szerokości 1 m. Oblicz powierzchnię ścieżki. Przyjmij, że $\pi \approx 3,14$.

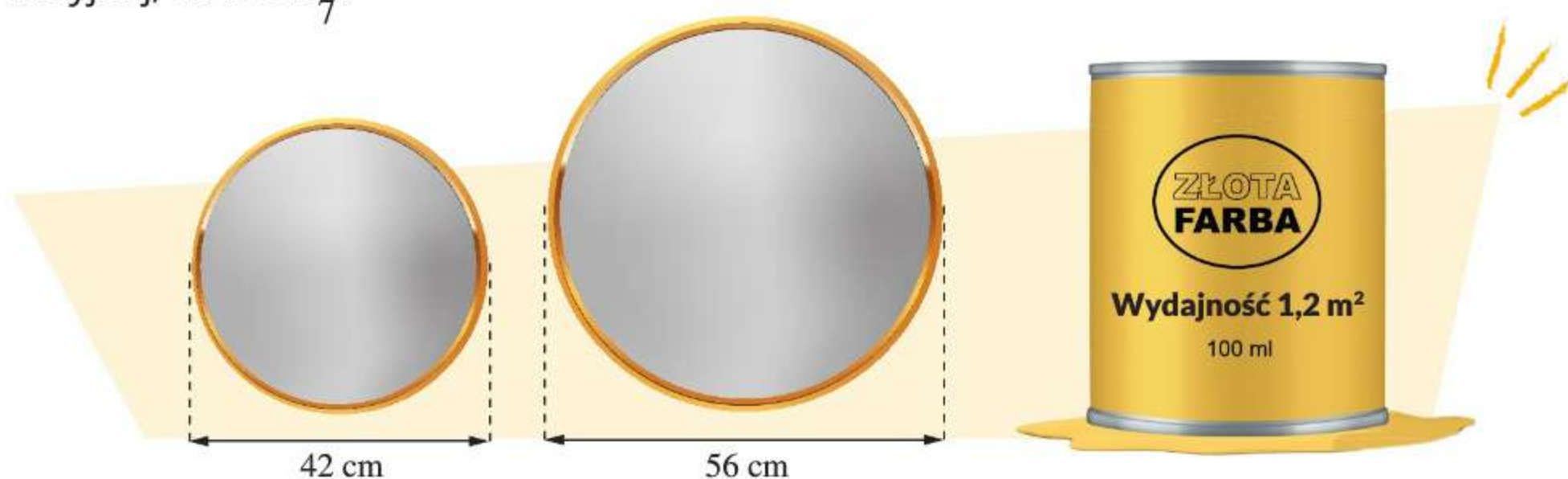
6. Czworokąt przedstawiony na rysunku jest kwadratem o boku długości 6 cm. Wierzchołki kwadratu leżą na większym okręgu. Mniejszy okrąg ma po jednym wspólnym punkcie z każdym bokiem kwadratu. Oblicz pole przedstawionego pierścienia kołowego.



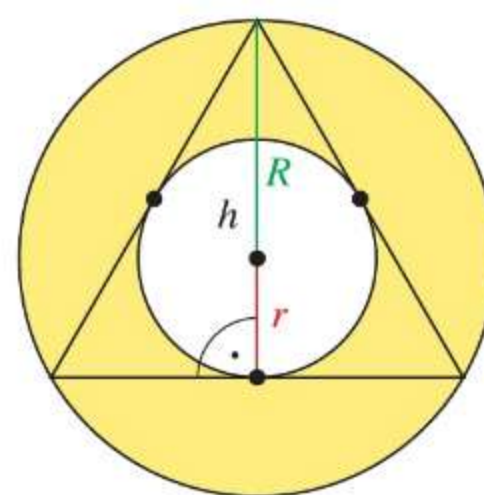
7. Z prostokąta o bokach długości 8 cm i 3 cm wycięto figurę wyznaczoną przez dwa półokręgi w sposób pokazany na rysunku. Punkt S jest środkiem obu półokręgów. Oblicz pole tej figury.



8. Okrągłe tace o średnicach 42 cm i 56 cm postanowiono ozdobić, malując na brzegu każdej z nich złoty pasek o szerokości 2 cm. Do wykonania dekoracji użyto złotej farby, której opakowanie o pojemności 100 ml wystarcza na pomalowanie powierzchni $1,2 \text{ m}^2$. Czy jedno opakowanie tej farby wystarczy na zrobienie dekoracji na 21 mniejszych i 14 większych tacach? Przyjmij, że $\pi \approx 3\frac{1}{7}$.



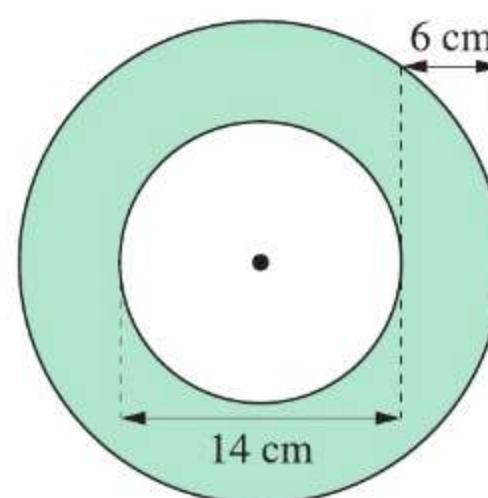
9. Długość boku trójkąta równobocznego jest równa $4\sqrt{3}$. Wierzchołki trójkąta leżą na większym okręgu. Mniejszy okrąg ma po jednym punkcie wspólnym z każdym bokiem trójkąta. Stosunek długości promienia większego koła do promienia mniejszego koła jest równy 2 : 1. Uzasadnij, że pole zaznaczonego pierścienia kołowego jest równe 12π .



Sprawdź, co umiesz!

1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. Pole pierścienia kołowego przedstawionego na rysunku jest równe

- A. $169\pi \text{ cm}^2$ B. $160\pi \text{ cm}^2$
C. $120\pi \text{ cm}^2$ D. $132\pi \text{ cm}^2$



2. Z koła o promieniu 9 cm wycięto koło o promieniu trzy razy krótszym. Oba koła mają wspólny środek.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Wycięte koło i powstały pierścień kołowy mają równe pola.	P	F
Różnica obwodów kół, które utworzyły pierścień kołowy, jest równa 12π .	P	F

3. Na rysunku przedstawiono tarczę do rzutek. Szerokość każdego pierścienia tarczy jest taka sama i wynosi 6 cm. Średnica koła z liczbą 100 jest także równa 6 cm. Oblicz powierzchnię jaką łącznie zajmują niebieskie pola.



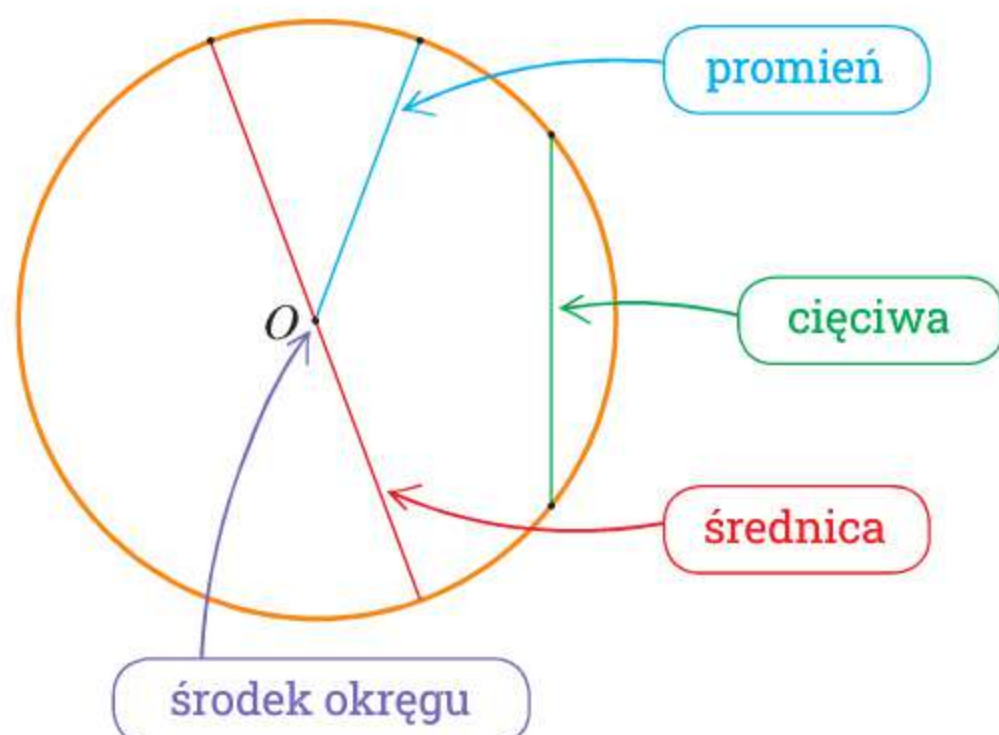
PODSUMOWANIE DZIAŁU IX

Długość okręgu i pole koła

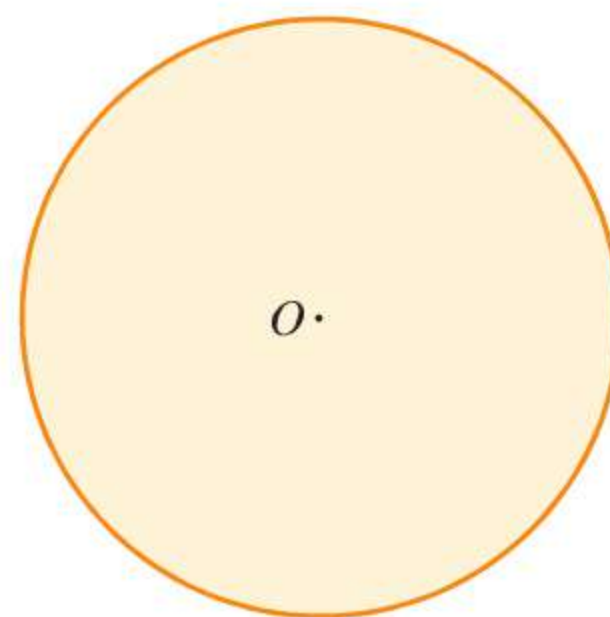
Powtórz wiadomości

Okrąg i koło

Okręgiem nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny jednakowo oddalonych od punktu O – środka okręgu.



Okrąg i wszystkie punkty wewnątrz okręgu tworzą **koło**.



Długość okręgu

Przyjmijmy, że l jest **długością okręgu**. Jeśli promień okręgu oznaczmy literą r , to jego średnicę d wyrazimy wzorem:

$$d = 2r.$$

Po przekształceniu wyrażenia

$$\pi = \frac{\text{długość okręgu}}{\text{długość średnicy}} = \frac{l}{2r}$$

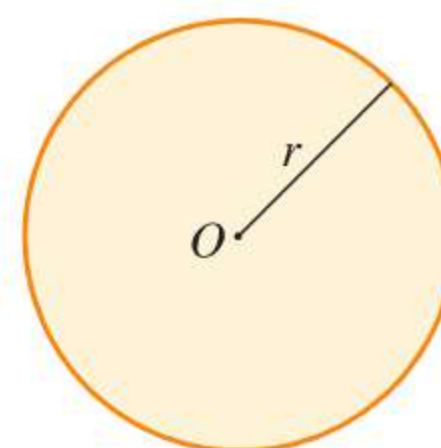
otrzymamy wzór na długość okręgu:

$$l = 2\pi r.$$

Pole koła

Pole koła o promieniu r wyraża się wzorem:

$$P = \pi r^2.$$



Pierścień kołowy

Obszar między dwoma okręgami o różnych promieniach, które mają ten sam środek, wraz z tymi okręgami nazywamy **pierścieniem kołowym**.

Pole pierścienia kołowego jest równe różnicy pól większego koła (o promieniu R) i mniejszego (o promieniu r):

$$P = \pi R^2 - \pi r^2.$$

Sprawdź umiejętności



1. Oblicz długość okręgu o promieniu równym:

a) 13 cm,

b) $\frac{9}{22}$ m,

c) 6,8 mm,

d) $2\sqrt{2}$ dm.

2. Oblicz długość okręgu o podanej średnicy d , a następnie wyznacz jego przybliżoną wartość, przyjmując podaną obok wartość π .

a) $d = 24$ cm, $\pi \approx 3$

b) $d = 8,2$ m, $\pi \approx 3,1$

c) $d = 15$ dm, $\pi \approx 3,14$

3. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Długość okręgu o promieniu 12 jest cztery razy większa od długości okręgu o promieniu 3.	P	F
Długość okręgu jest równa dwukrotności jego średnicy.	P	F

4. W trakcie dnia sportu odbywały się dwa rodzaje biegów. Pierwszy to bieg wokół okrągłego placu o promieniu 18 m, a drugi to bieg na 400 m. Pola startowała tylko w pierwszym biegu, okrążając plac czterokrotnie, a Ela tylko w drugim. Która z dziewcząt pokonała dłuższy dystans? Przyjmij, że $\pi \approx 3,14$.

5. Obwód okrągłego stołu jest równy 372 cm. Czy można przykryć całkowicie ten stół kwadratowym obrusem o boku podanej długości? Przyjmij, że $\pi \approx 3,14$.

a) 130 cm

b) 110 cm

6. Oblicz pole koła o promieniu równym:

a) 12 mm

b) 2,6 m

c) $\frac{2}{5}$ dm

d) $3\sqrt{5}$ dm

7. Oblicz pole koła o średnicy d , a następnie wyznacz jego przybliżoną wartość, przyjmując podaną obok wartość π .

a) $d = 18$ mm, $\pi \approx 3,1$

b) $d = 4\sqrt{3}$ m, $\pi \approx 3,14$

c) $d = 1\frac{3}{11}$ dm, $\pi \approx 3\frac{1}{7}$

8. Oblicz pole koła o podanym obwodzie l .

a) $l = 28\pi$ cm

b) $l = 0,8\pi$ m

c) $l = 8\sqrt{3}\pi$ mm

d) $l = 10$ dm

9. Dane jest półkoło o promieniu równym 3 cm.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Pole połowy tego półkoła jest równe

A. 3π cm²

B. 9π cm²

C. π cm²

D. $2,25\pi$ cm²

E Informacje do zadań 10. i 11.

Na okrągłym stole o powierzchni $0,36\pi \text{ m}^2$ położono okrągłą serwetkę o średnicy 24 cm.

- 10.** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Średnica tego stołu jest równa 60 cm.	P	F
Obwód tego stołu jest 5 razy większy od obwodu tej serwetki.	P	F

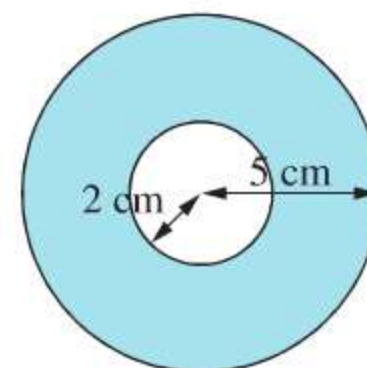
- 11.** Ile procent powierzchni tego stołu zajmuje powierzchnia tej serwetki? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 15 % **B.** 4 % **C.** 8 % **D.** 12 %

E 12. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole zamalowanej figury jest równe

A. $3\pi \text{ cm}^2$ **B.** $21\pi \text{ cm}^2$
C. $9\pi \text{ cm}^2$ **D.** $20\pi \text{ cm}^2$



- 13.** Pole pierścienia kołowego wynosi 51π , a jego promień wewnętrzny jest równy 7. Oblicz szerokość tego pierścienia.

- 14.** Tasiemka ozdabiająca kapelusz umieszczona nad jego rondem ma długość 57 cm. Zewnętrzny obwód ronda kapelusza jest równy 93 cm. Oblicz szerokość ronda tego kapelusza. Przyjmij, że $\pi \approx 3$.

- 15.** W oceanarium znajduje się basen dla delfinów, którego dno ma kształt koła o polu równym około 432 m^2 . Oblicz obwód dna tego basenu. Przyjmij, że $\pi \approx 3$.

- 16.** Z kwadratu o boku długości 5 cm wycięto cztery ćwiartki kół o promieniu 2 cm każda i środka w wierzchołkach kwadratu, tworząc figurę I. Figura II powstała po wycięciu z trójkąta prostokątnego równoramiennego o przyprostokątnej długości $4\sqrt{2} \text{ cm}$ ćwiartki koła o promieniu 2 cm i środka w wierzchołku kąta prostego. Przyjmij, że $\pi \approx 3,14$.

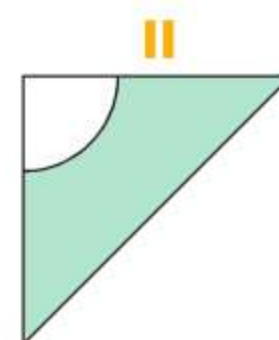
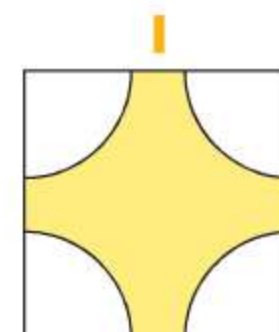
Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Pole figury I jest równa **A** **B** cm^2 .

A. $25 - 4\pi$ **B.** $20 - 4\pi$

Większe pole ma figura **C** **D**.

C. I **D.** II



Potrenuj – zadania uzupełniające

1. Bieg z przeszkodami odbywa się trasą, która składa się z trzech półokręgów i dwóch odcinków. Każdy z odcinków ma długość 50 m, a średnica każdego okręgu jest równa 60 m. Oblicz długość trasy. Przyjmij, że $\pi \approx 3,14$. Wynik podaj z dokładnością do 1 m.



2. Płyta winylowa ma kształt koła o obwodzie 94,2 cm. Czy ta płyta zmieści się w kwadratowej kopercie o boku długości 29 cm? Uzasadnij swoją odpowiedź. Przyjmij, że $\pi \approx 3,14$.

3. Wskazówka godzinowa zegara na wieży Big Ben ma długość 2,7 m, a minutowa 4,2 m. Ile razy długość drogi, którą pokona koniec wskazówki minutowej, jest większa od długości drogi pokonanej przez koniec wskazówki godzinowej w ciągu jednej doby? Wynik zaokrąglij do całości.



4. Na beczce umieszczone są trzy obręcze w kształcie okręgu każda: dwie jednakowe, przy dnie i w górnej części, oraz trzecia w najszerszym miejscu. Większa obręcz jest o 20 % dłuższa od mniejszej. Łącznie obręcze mają długość 352 cm. Oblicz średnicę beczki w jej najszerszym miejscu. Przyjmij, że $\pi \approx 3\frac{1}{7}$.

5. Oblicz pole koła, którego średnica jest równa:

a) 6π ,

b) $\sqrt{11}k$,

c) $\frac{2}{\pi}$.

6. Podaj, o ile procent zwiększy się pole koła, jeśli jego promień

a) zwiększymy dwukrotnie,

b) zwiększymy o 20 %.

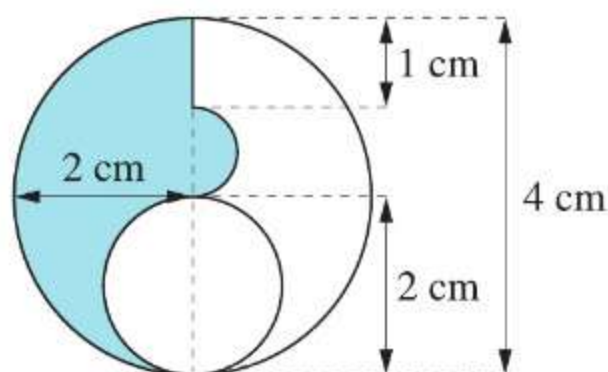
7. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Jeśli obwód koła jest równy 10, to pole koła jest równe 100.	P	F
Jeśli pole koła jest równe 36, to jego obwód jest równy 6.	P	F

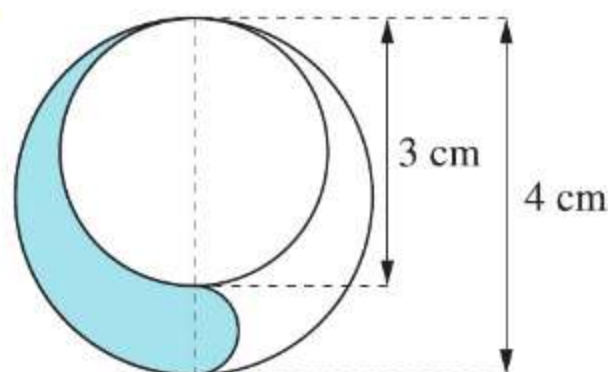
8. Z koła K_1 o promieniu 4 wycięto koło K_2 , którego pole jest dwa razy mniejsze od pola koła K_1 . Oblicz szerokość powstałego w ten sposób pierścienia kołowego.

9. Oblicz pole zamalowanej figury.

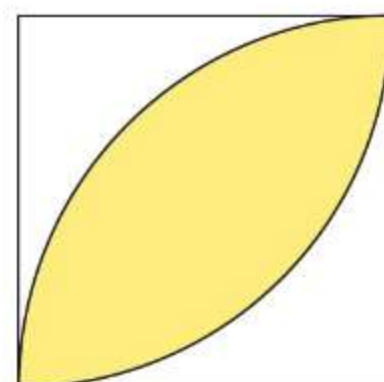
a)



b)



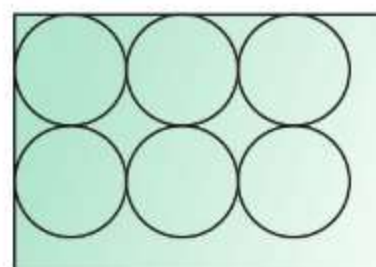
10. W kwadracie o boku długości 8 cm narysowano dwie ćwiartki koła, których promienie mają długość 8 cm, a środkami są przeciwległe wierzchołki kwadratu. Częścią wspólną narysowanych ćwiartek koła jest figura pokazana na rysunku. Oblicz pole tej figury.



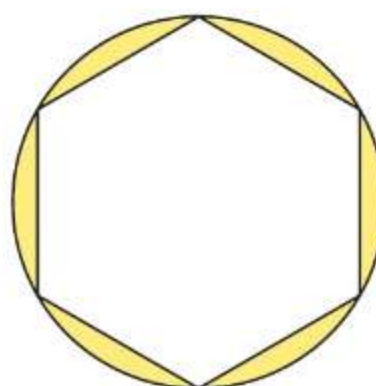
11. Bruno chce uzupełnić liczbę żetonów do gry w bingo. Postanowił wyciąć z grubej folii koła o średnicy 14 mm. Ma do dyspozycji 2 prostokątne kawałki folii o wymiarach 30 cm i 15 cm.

a) Ile żetonów wytnie, jeśli będzie wycinał koła z obydwu kawałków folii w sposób pokazany na rysunku obok?

b) Ile procent łącznej powierzchni obu kawałków folii nie zostanie wykorzystanej? Przyjmij, że $\pi \approx 3\frac{1}{7}$.

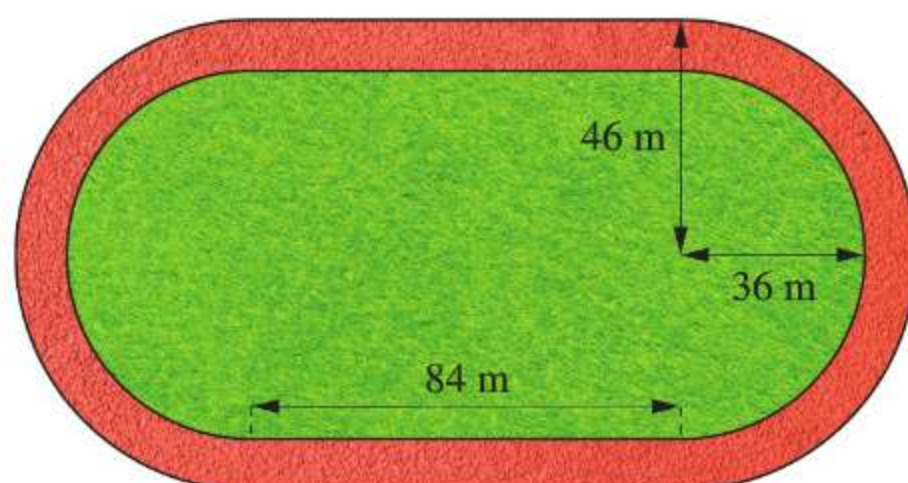


12. Z koła o średnicy 28 cm wycięto sześciokąt foremny, którego wierzchołki leżą na okręgu tego koła. Oblicz pole zamalowanej figury. Przyjmij, że $\pi \approx 3\frac{1}{7}$ oraz $\sqrt{3} \approx 1,73$.



13. Pole pierścienia kołowego jest równe 48π , a jeden z jego promieni jest równy 7. Oblicz jego drugi promień. Rozpatrz dwa przypadki.

14. Bieżnia wokół stadionu sportowego ma kształt i wymiary przedstawione na ilustracji. Bieżnię postanowiono wysypać mączką ceglana. Na 1 m^2 powierzchni potrzeba 12 kg takiej mączki. Ile ton mączki trzeba kupić? Przyjmij, że $\pi \approx 3,1$. Wynik podaj z dokładnością do 1 t.



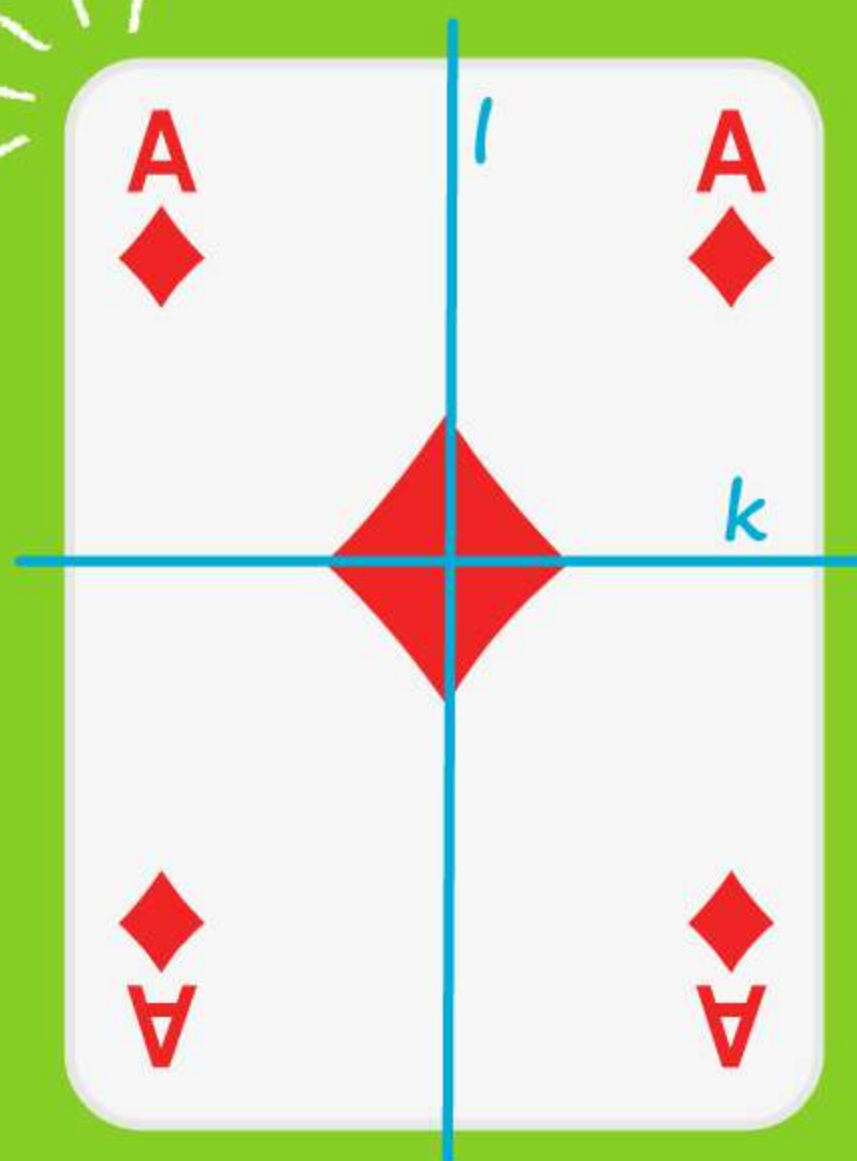
DZIAŁ **X**

SYMETRIE

Dwusieczna kąta

Symetralna odcinka

To ci się
przyda!



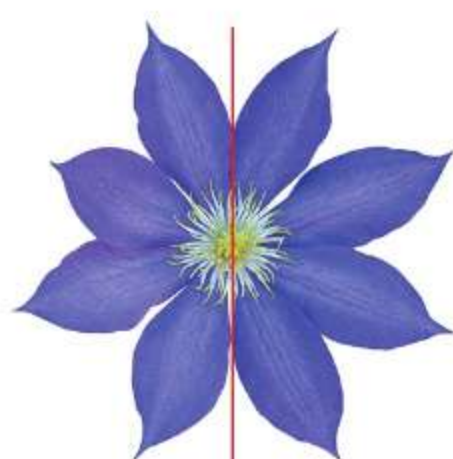
Symetria osiowa
i środkowa



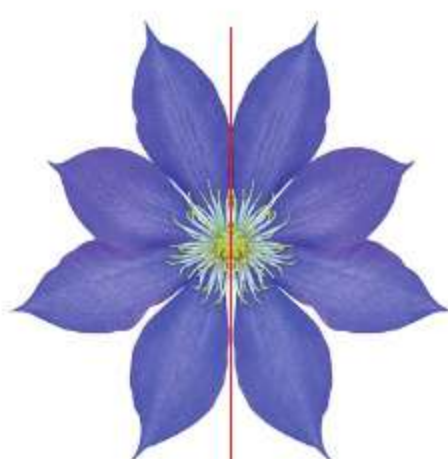
1. Symetria osiowa. Figury osiowosymetryczne

- ▶ Rozpoznawanie figur osiowosymetrycznych i wskazywanie ich osi symetrii
- ▶ Uzupełnianie figury do figury osiowosymetrycznej

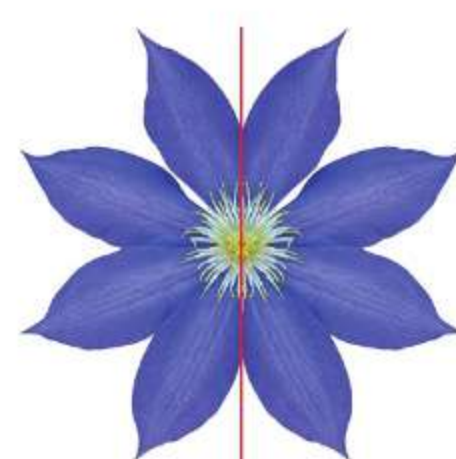
Ludzie, tworząc symetryczne budowle, przedmioty codziennego użytku czy też dzieła sztuki, inspirowali się naturą. Żaden obiekt naturalny nie jest jednak idealnie symetryczny – jest zatem asymetryczny. Jak widać na poniższym rysunku, lewa połowa kwiatu różni się od jego prawej połowy. Kwiaty uzyskane przez odbicia symetryczne połówek nie są identyczne.



lewa
połowa prawa
połowa

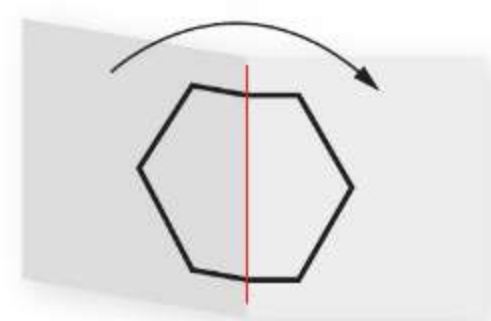


lewa
połowa symetryczne
odbicie lewej
połowy



symetryczne
odbicie prawej
połowy prawa
połowa

Na kartce narysowano prostą, która podzieliła figurę na dwie przystające części. Po złożeniu kartki wzdłuż narysowanej prostej wyznaczone przez nią części nałożą się na siebie i pokryją. Prosta o tej własności to **oś symetrii figury**.

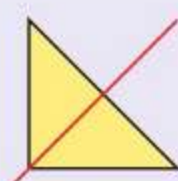


Oś symetrii figury to prosta, która dzieli figurę na dwie przystające części będące swoim lustrzanym odbiciem. Figurę, która ma co najmniej jedną oś symetrii, nazywamy **figurą osiowosymetryczną**.

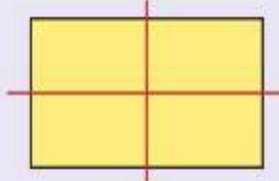
Ile osi symetrii może mieć figura?



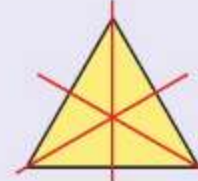
0 osi



1 oś



2 osie



3 osie

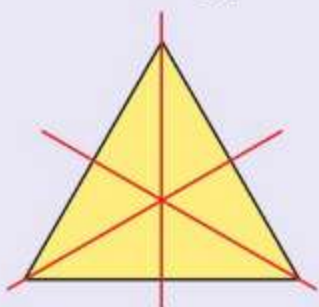


nieskończenie
wiele osi

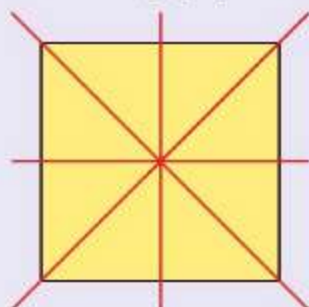


Ile osi symetrii mają wielokąty foremne?

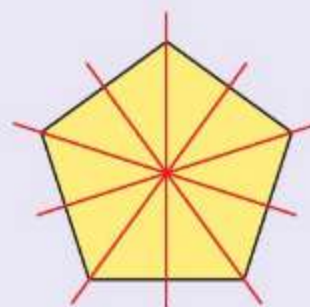
Wielokąty foremne zawsze mają tyle osi symetrii, ile boków.



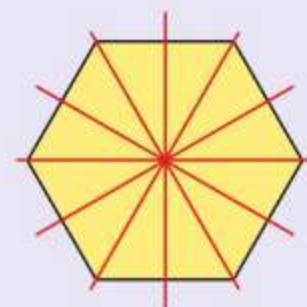
3 osie



4 osie



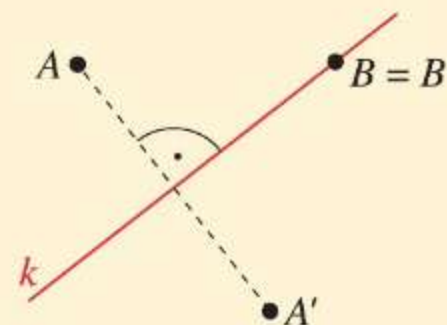
5 osi



6 osi

Punkty A i A' , nieleżące na prostej k , nazywamy **symetrycznymi względem prostej k** , jeśli odcinek AA' jest prostopadły do prostej k , a jego środek leży na tej prostej.

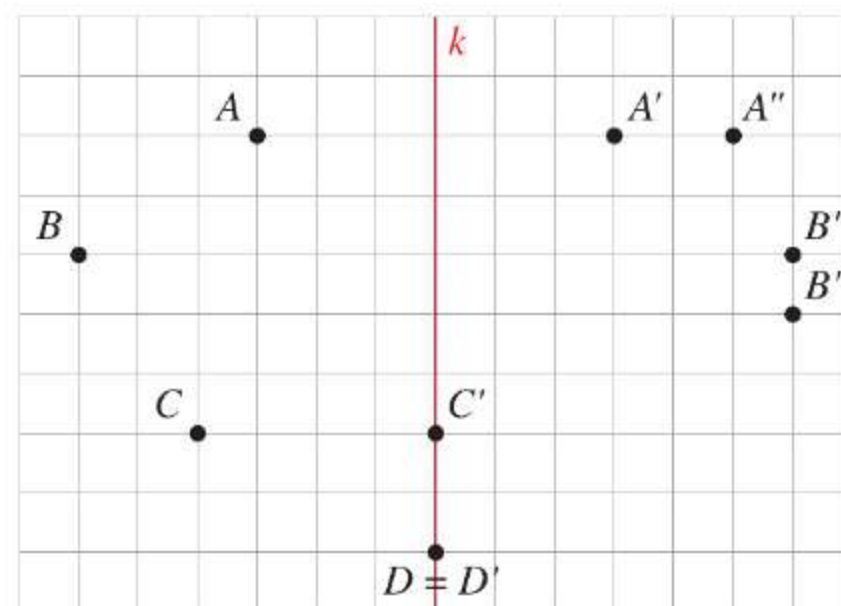
Punkt B leżący na prostej k jest sam do siebie symetryczny.



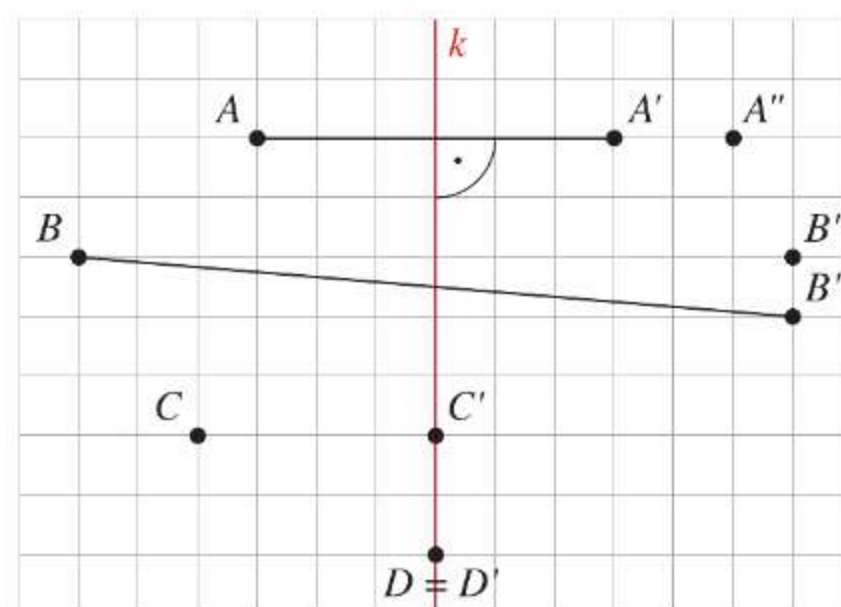
Przykład 1.

Uzasadnij, dlaczego punkty:

- a) A i A' są symetryczne względem prostej k ,
- b) B i B'' nie są symetryczne względem prostej k ,
- c) D i D' są symetryczne względem prostej k .



- a) Odcinek AA' jest prostopadły do prostej k , a jego środek leży na prostej k . Zatem punkty A i A' są symetryczne względem prostej k .
- b) Odcinek BB'' nie jest prostopadły do prostej k . Zatem punkty B i B'' nie są symetryczne względem prostej k .
- c) Punkt D leży na prostej k oraz pokrywa się z punktem D' . Zatem punkty D i D' są symetryczne względem prostej k .



Ćwiczenie 1.

Skorzystaj z rysunku z Przykładu 1. Uzasadnij, dlaczego punkty:

- a) A i A'' nie są symetryczne względem prostej k ,
- b) B i B' są symetryczne względem prostej k ,
- c) C i C' nie są symetryczne względem prostej k .

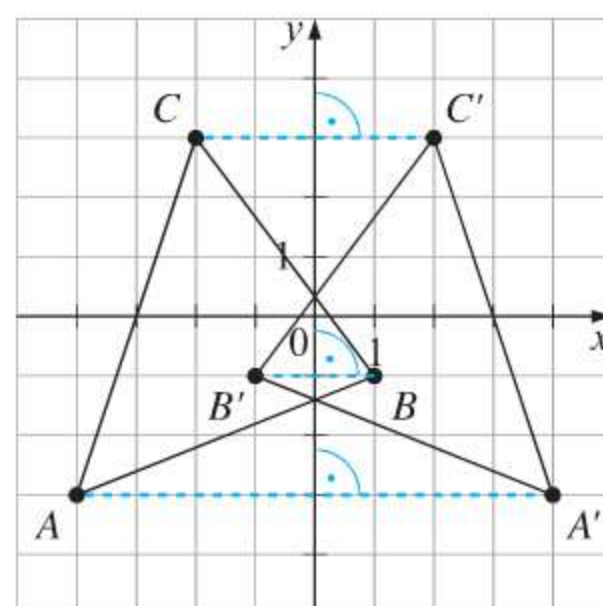
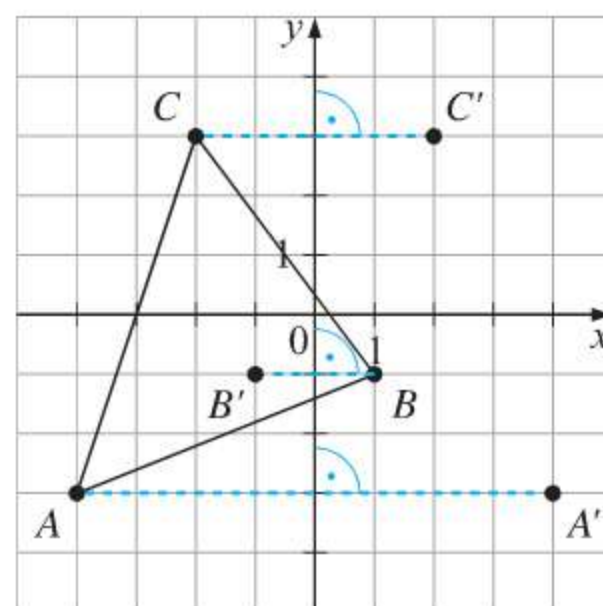
Przykład 2.

Wierzchołkami trójkąta są punkty: $A = (-4, -3)$, $B = (1, -1)$, $C = (-2, 3)$. Znajdź współrzędne wierzchołków trójkąta symetrycznego do trójkąta ABC względem osi y .

Narysujemy trójkąt ABC w układzie współrzędnych, a następnie zaznaczymy w układzie współrzędnych punkty symetryczne do wierzchołków trójkąta ABC względem osi y i oznaczmy je literami: A' , B' i C' .

$$A' = (4, -3) \qquad B' = (-1, -1) \qquad C' = (2, 3)$$

Po połączeniu zaznaczonych punktów otrzymamy trójkąt $A'B'C'$, który jest symetryczny do trójkąta ABC względem osi y .



Punkt A' symetryczny do punktu $A = (x_a, y_a)$ **względem osi x** ma współrzędne $(x_a, -y_a)$.

Punkt B' symetryczny do punktu $B = (x_b, y_b)$ **względem osi y** ma współrzędne $(-x_b, y_b)$.

Ćwiczenie 2.

Wierzchołkami kwadratu są punkty: $A = (-5, -2)$, $B = (-1, -2)$, $C = (-1, 2)$, $D = (-5, 2)$. Znajdź współrzędne wierzchołków kwadratu symetrycznego do kwadratu $ABCD$ względem

a) osi x ,

b) osi y .

Rozwiąż zadania

1. Na ilustracji przedstawiono flagi: Chorwacji, Czech, Francji oraz flagę Unii Europejskiej. Wskaż flagi osiowo-symetryczne. Ile osi symetrii mają te flagi?



Chorwacja



Czechy

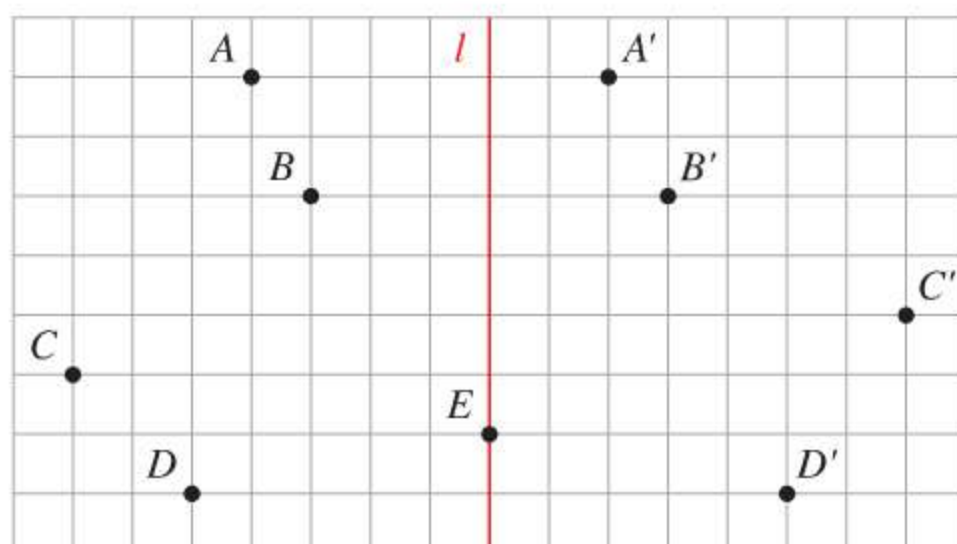


Francja



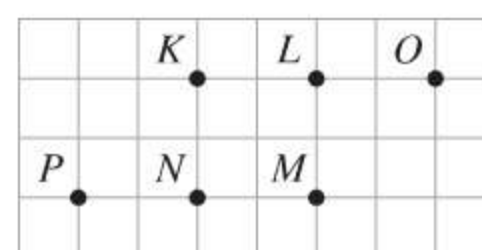
UE

2. Wskaż pary punktów symetrycznych względem prostej l . Uzasadnij swój wybór.



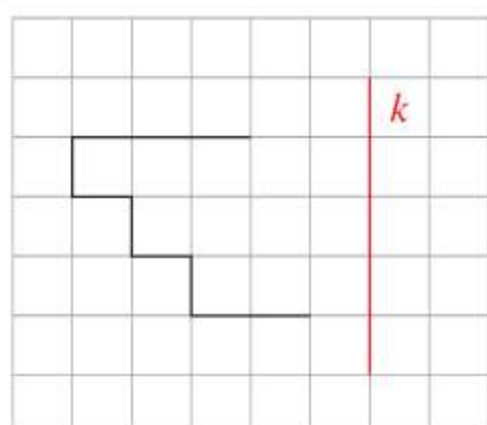
3. Na podstawie rysunku uzupełnij zdanie, tak aby było prawdziwe.

- a) Punkt M jest symetryczny do punktu  względem prostej KN .
 b) Punkt N jest symetryczny do punktu L względem prostej .
 c) Punkt  jest symetryczny do punktu O względem prostej LM .

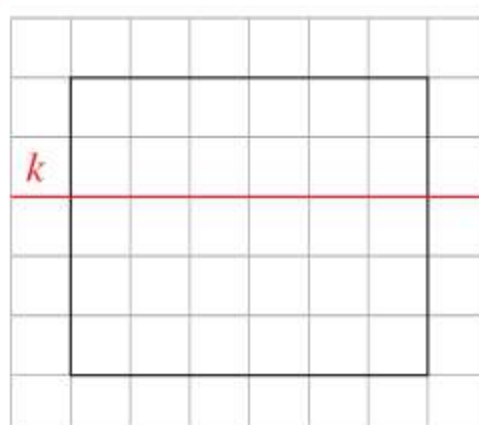


4. Przerysuj rysunek do zeszytu i dorysuj figurę symetryczną do danej względem prostej k .

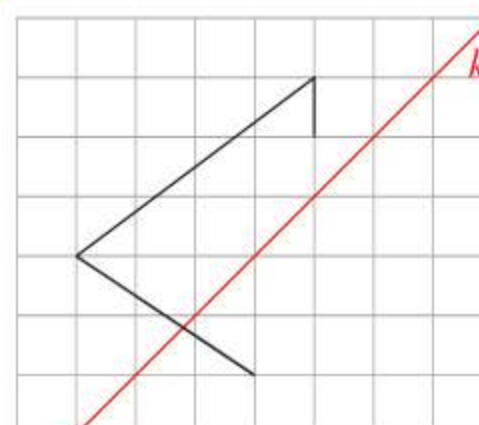
a)



b)



c)



5. Spośród narysowanych liter wskaż te, które:

- a) nie mają osi symetrii,
 b) mają jedną oś symetrii,
 c) mają dwie osie symetrii.

A B C D E F G H I J
 K L M N O P Q R S
 T U V W X Y Z

6. Wśród poniższych figur wskaż figury osiowosymetryczne. Jeżeli figura jest osiowosymetryczna, narysuj jej wszystkie osie symetrii.

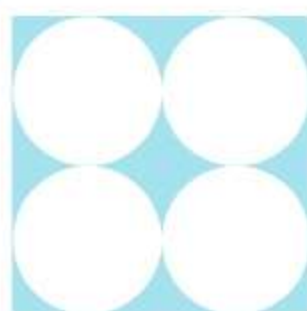
- I. trójkąt równoramienny II. romb (niebędący kwadratem)
 III. równoległobok IV. trapez równoramienny (niebędący równoległobokiem)

7. Ile osi symetrii ma figura przedstawiona na rysunku, jeśli wszystkie widoczne koła mają taki sam promień?

a)



b)

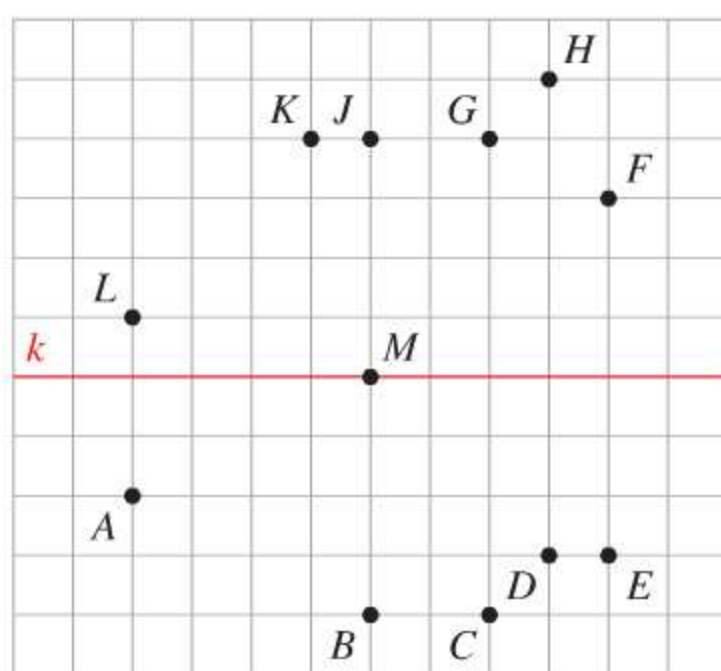


8. Narysuj figurę, która składa się z:
- dwóch prostych i ma dokładnie 4 osie symetrii,
 - prostej i okręgu i ma dokładnie 2 osie symetrii.

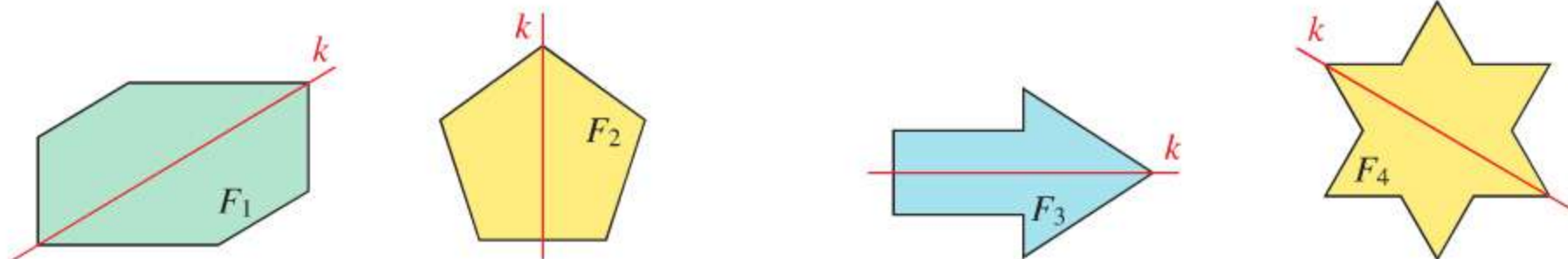
9. Punkty: $A = (0, -2)$, $B = (3, -2)$, $C = (3, 4)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Narysuj
- trójkąt DEF symetryczny do trójkąta ABC względem osi x . Podaj współrzędne jego wierzchołków.
 - trójkąt KLM symetryczny do trójkąta ABC względem osi y . Podaj współrzędne jego wierzchołków.

Sprawdź, co umiesz!

1. Wskaż pary punktów symetrycznych względem prostej k . Uzasadnij swój wybór.



- E 2. Na rysunku przedstawiono figury: F_1 , F_2 , F_3 i F_4 .



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Prosta k nie jest osią symetrii figury

- A. F_1 B. F_2 C. F_3 D. F_4

- E 3. Odcinek $A'B'$ jest symetryczny względem osi y do odcinka AB , gdzie $A = (-2, 1)$, $B = (3, 6)$. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Współrzędne punktu A' są równe $(2, -1)$.	P	F
Odcinki AB i $A'B'$ się nie przecinają.	P	F

2. Symetria środkowa. Figury środkowosymetryczne

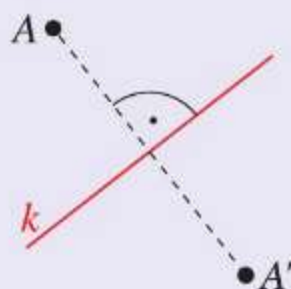
- ▶ Rozpoznawanie figur środkowosymetrycznych
- ▶ Wskazywanie środków symetrii figur środkowosymetrycznych

Wśród przekształceń geometrycznych możemy wymienić nie tylko symetrię osiową, lecz także symetrię środkową. Na poniższym schemacie przedstawiono, czym różnią się te rodzaje symetrii.

Symetria

względem prostej (symetria osiowa)

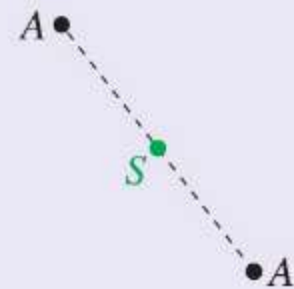
Dwa punkty nazywamy **symetrycznymi względem prostej**, jeśli leżą na odcinku prostopadłym do tej prostej i są od niej równo oddalone.



Punkty A i A' są symetryczne względem prostej k . Prosta k jest osią symetrii.

względem punktu (symetria środkowa)

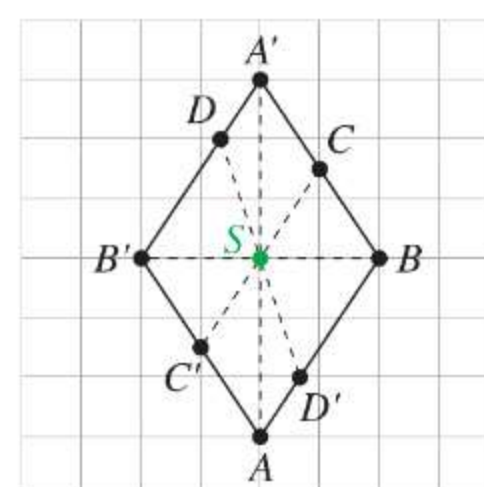
Dwa punkty nazywamy **symetrycznymi względem punktu**, jeśli leżą wraz z nim na jednej prostej i są od niego równo oddalone.



Punkty A i A' są symetryczne względem punktu S . Punkt S jest środkiem symetrii.

Na rysunku przedstawiono figurę, która jest **środkowosymetryczna**. Figura jest środkowosymetryczna, ponieważ istnieje punkt S taki, że obraz każdego punktu figury w symetrii względem punktu S też należy do tej figury. Punkt S to **środek symetrii figury**. Obrazem punktu A jest punkt A' , obrazem punktu B jest punkt B' itd.

Punkt S jest sam do siebie symetryczny względem punktu S .



Możemy zauważyć, że po obroceniu figury środkowosymetrycznej o 180° wokół środka symetrii pokryje się ona ze sobą.

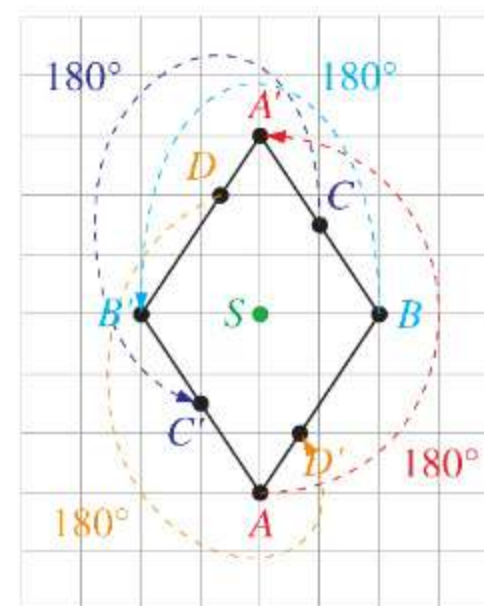
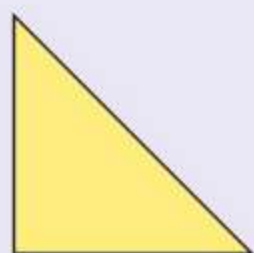


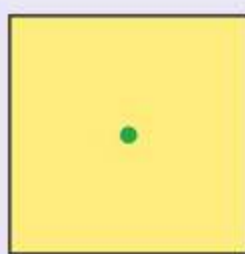


Figura środkowosymetryczna to figura, która jest symetryczna sama do siebie względem pewnego punktu. Ten punkt nazywamy **środkiem symetrii**. Po obroceniu figury środkowosymetrycznej o 180° wokół środka symetrii pokryje się ona ze sobą.

Ile środków symetrii może mieć figura?



0 środków



1 środek

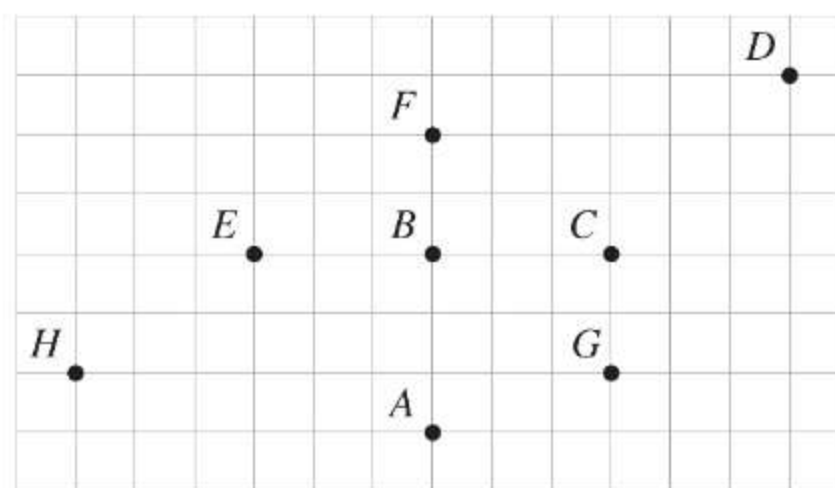


nieskończenie wiele środków

Nie istnieje figura, która ma dwa, trzy, cztery itd. środki symetrii.
Wielokąty foremne o nieparzystej liczbie boków nie mają środka symetrii.

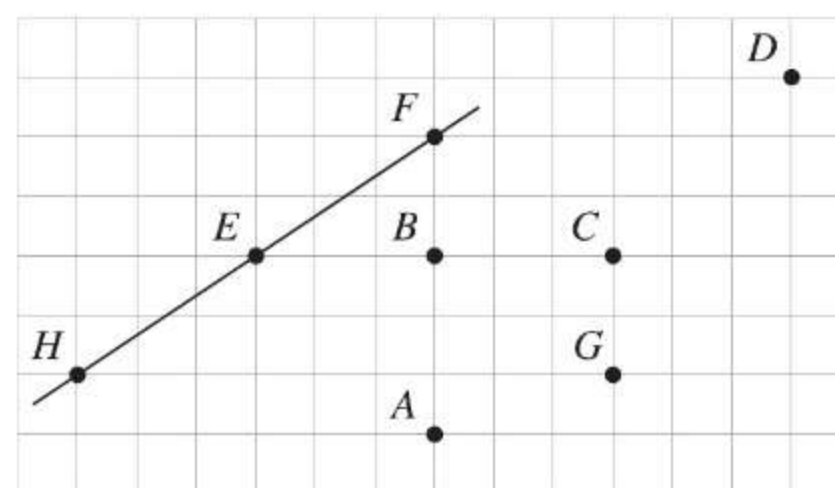
Przykład 1.

Na rysunku zaznaczono punkty: A, B, C, D, E, F, G, H .
Wskaż punkty zgodne z opisem.



a) Punkt symetryczny do punktu H względem punktu E .

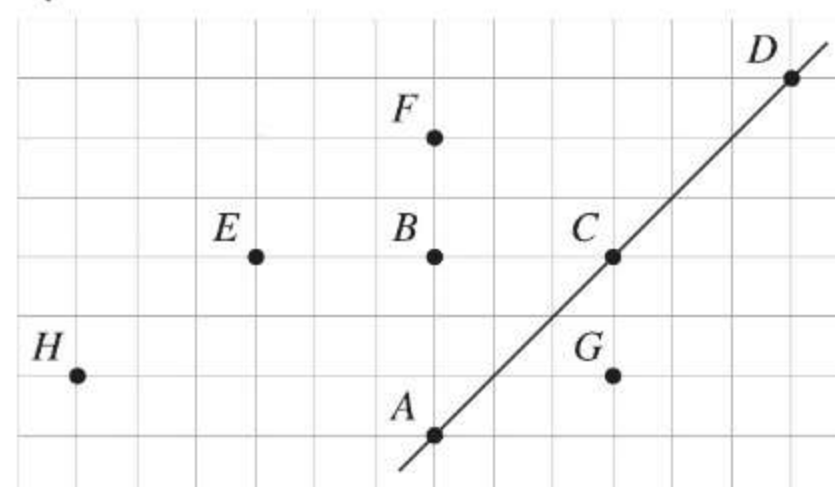
Poprowadzimy prostą przechodzącą przez punkty H i E . Punkt symetryczny do punktu H względem punktu E musi być oddalony od punktu E o tyle samo, ile punkt H od punktu E . Taką własność ma punkt F .



Odp. Punkt symetryczny do punktu H względem punktu E to punkt F .

b) Punkt, względem którego punkt A jest symetryczny do punktu D .

Punkt, względem którego punkt A jest symetryczny do punktu D , to środek odcinka AD , czyli punkt C .



Odp. Punkt A jest symetryczny do punktu D względem punktu C .

c) Punkt, względem którego punkt B jest symetryczny do samego siebie.

Odp. Punkt B jest symetryczny do samego siebie względem samego siebie.

Ćwiczenie 1.

Skorzystaj z rysunku z Przykładu 1. i wskaż punkty zgodne z opisem.

a) Punkt symetryczny do punktu E względem punktu B .

b) Punkt, względem którego punkt A jest symetryczny do samego siebie.

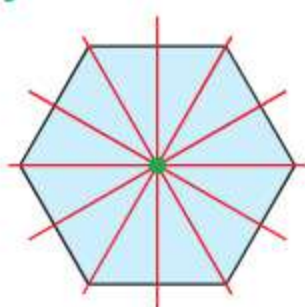
c) Punkt, względem którego punkt H jest symetryczny do punktu D .

Przykład 2.

Określ, która z przedstawionych figur ma oś symetrii i ile, a która ma środek symetrii.

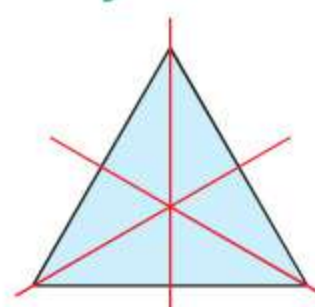
a) sześciokąt foremny

Sześciokąt foremny ma **6 osi symetrii** i ma **środek symetrii**.



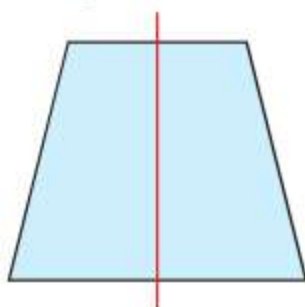
b) trójkąt równoboczny

Trójkąt równoboczny ma **3 osie symetrii** i **nie ma środka symetrii**.



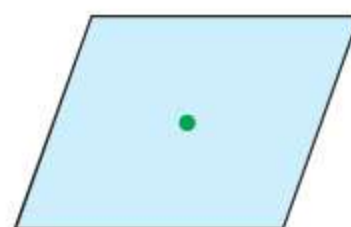
c) trapez równoramienny

Trapez równoramienny ma **1 oś symetrii** i **nie ma środka symetrii**.



d) równoległobok

Równoległobok **nie ma osi symetrii** i **ma środek symetrii**.



Ćwiczenie 2.

Podaj przykład figury, która ma:

a) dwie osie symetrii i środek symetrii,

b) więcej niż jeden środek symetrii,

c) cztery osie symetrii i ma środek symetrii,

d) pięć osi symetrii i nie ma środka symetrii.

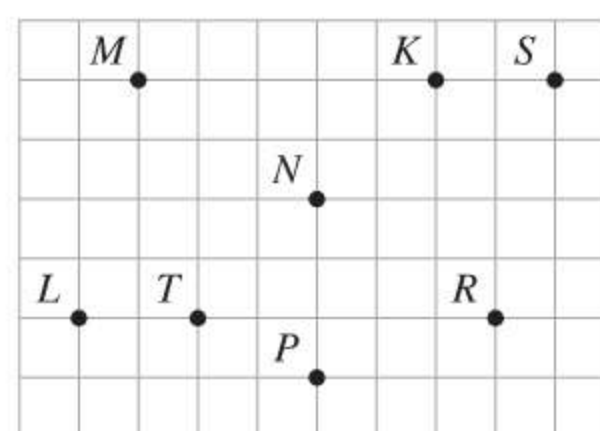
Rozwiąż zadania

1. Skorzystaj z rysunku i wskaż punkt zgodny z opisem.

a) Punkt symetryczny do punktu L względem punktu N .

b) Punkt, względem którego punkt M jest symetryczny do punktu R .

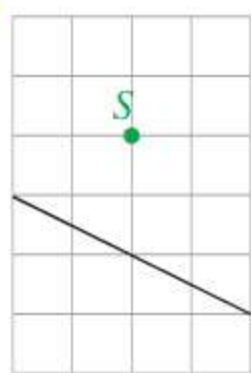
c) Punkt, względem którego punkt K jest symetryczny do punktu L .



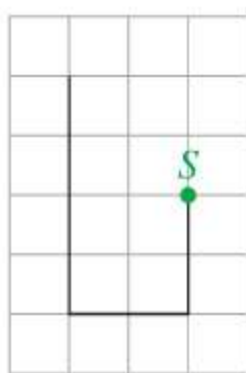
2. Symetria środkowa. Figury środkowosymetryczne

2. Przerysuj rysunek do zeszytu, a następnie narysuj figurę symetryczną do danej figury względem punktu S .

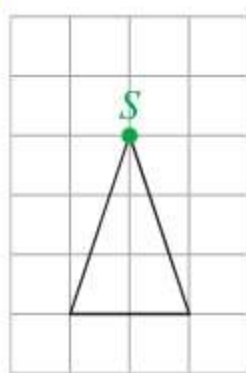
a)



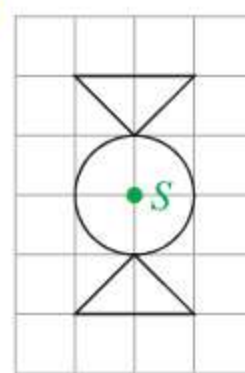
b)



c)



d)



- E 3. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Figurami środkowosymetrycznymi są

- A. okrąg i trójkąt równoramienny. B. półprosta i równoległobok.
C. prostokąt i odcinek. D. pięciokąt foremny i kwadrat.

4. Narysuj figurę, która ma środek symetrii i składa się

- a) z dwóch odcinków, b) z dwóch okręgów.

5. Punkty: $A = (1, 1)$, $B = (3, -1)$, $C = (5, 1)$, $D = (3, 3)$ są wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Narysuj kwadrat $EFGH$ symetryczny do kwadratu $ABCD$ względem początku układu współrzędnych. Podaj współrzędne wierzchołków kwadratu $EFGH$.

6. Wyznacz współrzędne środka symetrii odcinka AB , gdzie $A = (-7, -2)$, $B = (9, -6)$.

7. Wśród zapisanych liczb w systemie rzymskim wskaż te, które mają środek symetrii i oś symetrii.

I II III IV X XIX CC XXII LIX MCM

8. Punkt K jest symetryczny do punktu $L = (-5, -7)$ względem punktu $S = (-1, -4)$. Wyznacz współrzędne punktu K .

9. Narysuj figurę, która składa się z trzech odcinków oraz posiada

- a) środek symetrii i co najmniej jedną oś symetrii,
b) środek symetrii i nie ma osi symetrii.

- E 10. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Istnieje figura, która ma dokładnie dwa środki symetrii.	P	F
Nie istnieje figura, która ma nieskończenie wiele środków symetrii.	P	F

- 11.** W układzie współrzędnych dane są punkty: $A = (-6, -2)$, $B = (0, -4)$, $C = (4, 0)$, $D = (6, 2)$, $E = (2, 6)$, $F = (0, 4)$, $G = (-2, 6)$, $H = (-6, 2)$. Wskaż pary punktów, które są symetryczne względem:

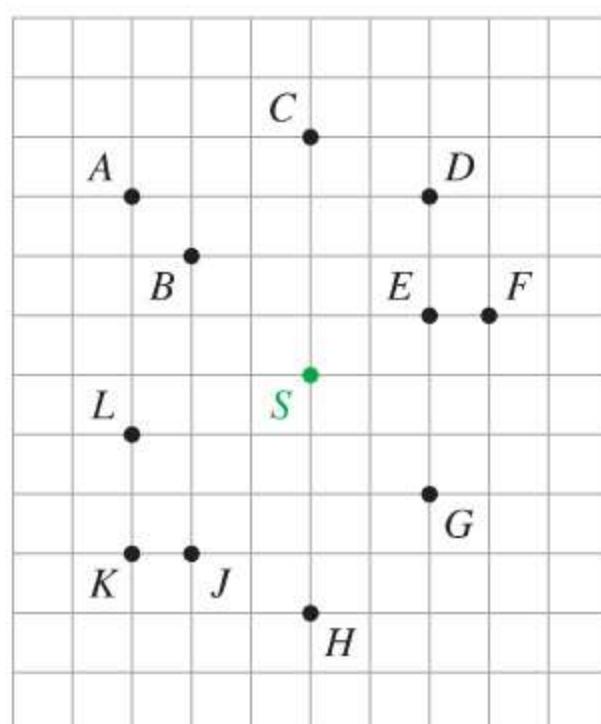
a) osi x ,

b) osi y ,

c) początku układu współrzędnych.

Sprawdź, co umiesz!

- 1.** Wskaż pary punktów symetrycznych względem punktu S . Uzasadnij swój wybór.



- 2.** Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź spośród podanych.

Środek symetrii ma

A. trójkąt równoboczny.

B. półprosta.

C. półkole.

D. ośmiokąt foremny.

- 3.** Punkt B jest symetryczny do punktu $A = (-4, 3)$ względem punktu $S = (-3, 0)$. Wyznacz współrzędne punktu B .

- 4.** Danych jest sześć napisów.

OCO OWO OXO ONO MAM LOT

Wskaż napisy, które są

a) środkowosymetryczne,

b) osiowosymetryczne.

E

3. Symetralna odcinka i jej własności

- ▶ Pojęcie symetralnej odcinka
- ▶ Stosowanie w zadaniach własności symetralnej odcinka

Umiejętność wyznaczania punktu równo oddalonego od danych dwóch punktów jest umiejętnością wykorzystywaną podczas rozwiązywania problemów geometrycznych.

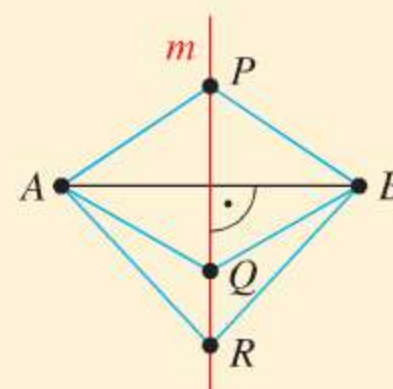


Symetralna odcinka to prosta prostopadła do tego odcinka przechodząca przez jego środek.

Prosta m jest symetralną odcinka AB .

Każdy z punktów leżący na symetralnej odcinka jest równo oddalony od obu końców tego odcinka, np.

$$|AP| = |BP|, |AQ| = |BQ|, |AR| = |BR|.$$

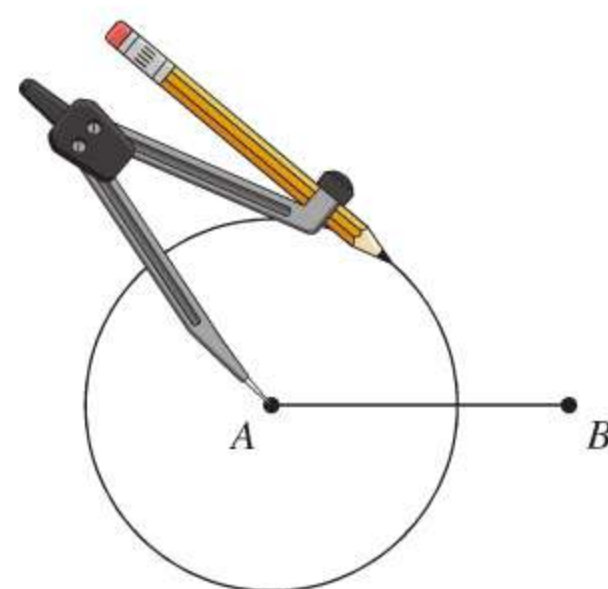


Przykład 1.

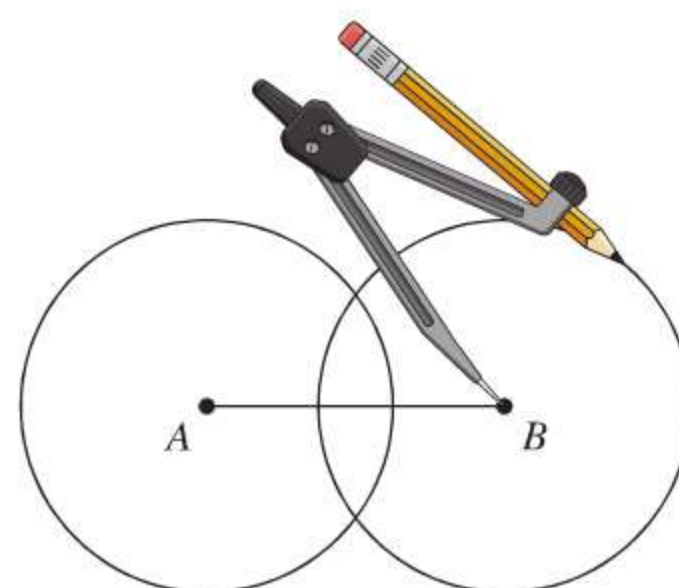
Narysuj dowolny odcinek AB . Korzystając z cyrkla i linijki, skonstruuj jego symetralną.

Aby skonstruować symetralną odcinka AB , wystarczy znaleźć dwa różne punkty, przez które ta symetralna przechodzi. Każdy z tych punktów musi być równo oddalony od końców odcinka AB . Aby znaleźć punkty spełniające podane warunki, narysujemy dwa przecinające się okręgi o tych samych promieniach, dłuższych niż połowa odcinka AB i środkach będących końcami tego odcinka.

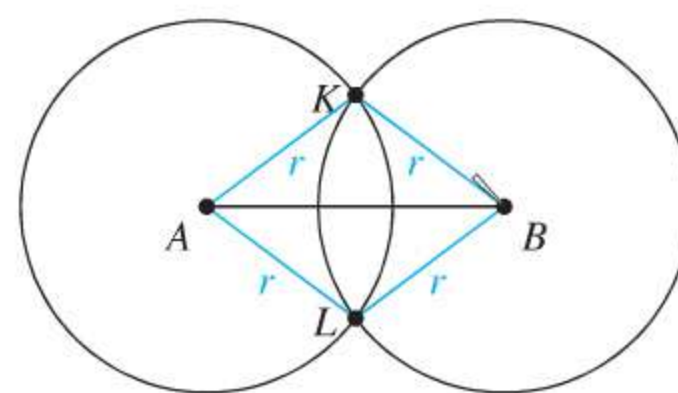
Narysujemy okrąg o środku w punkcie A . Jego promień jest dłuższy niż połowa długości odcinka AB .



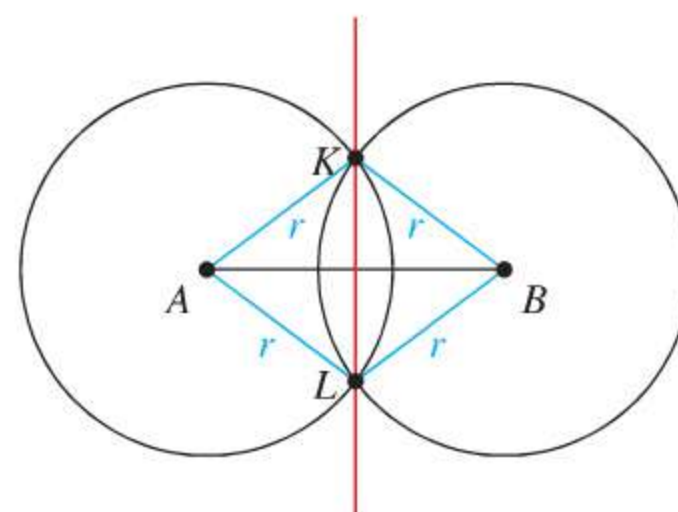
Dorysujemy okrąg o środku w punkcie B o takim samym promieniu jak okrąg o środku w punkcie A .



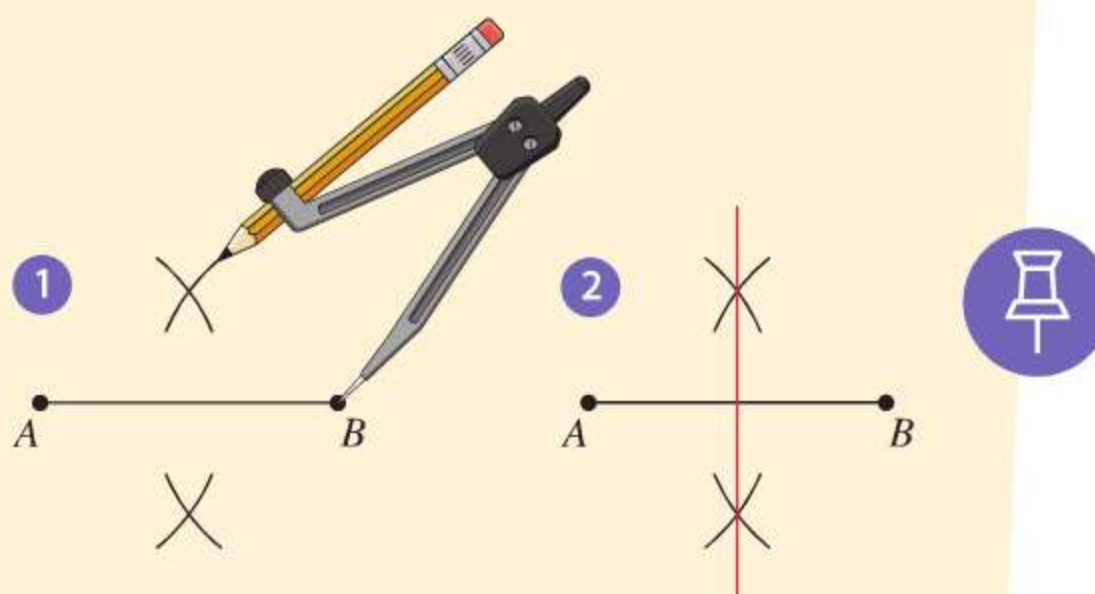
Oznaczmy punkty przecięcia okręgów jako K i L . Można zauważyć, że $|AK| = |BK| = |AL| = |BL| = r$, gdzie r to promień okręgów. Punkty K i L należą zatem do symetralnej odcinka AB , ponieważ są równo oddalone od punktów A i B .



Narysujemy prostą KL – symetralną odcinka AB .



Aby narysować symetralną, nie musimy rysować całych okręgów – wystarczą łuki.



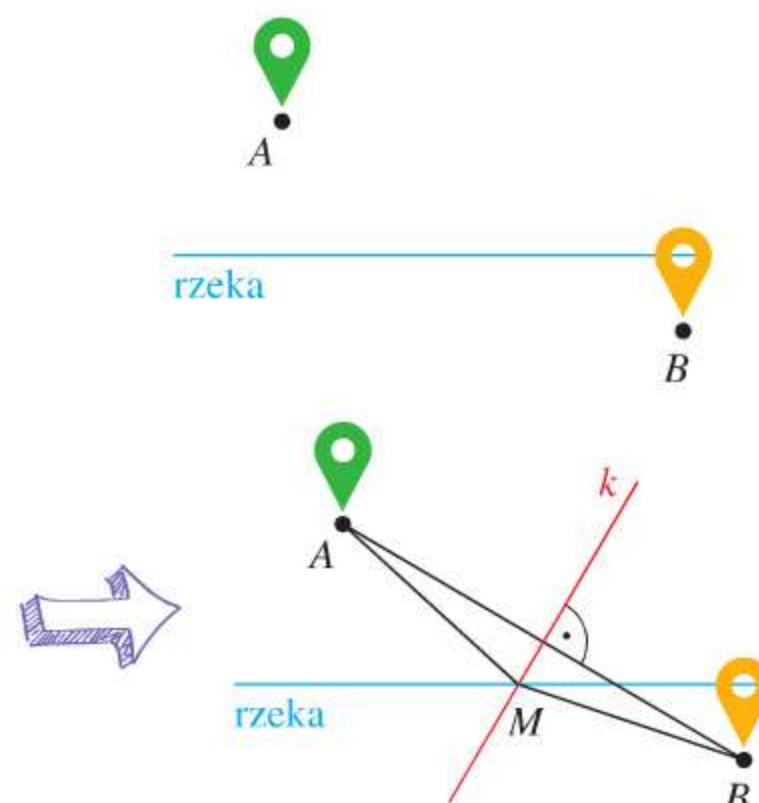
Ćwiczenie 1.

Narysuj dowolny trójkąt ABC . Korzystając z cyrkla i linijki, skonstruuj symetralne jego boków. Sprawdź, czy przecinają się one w jednym punkcie.

Przykład 2.

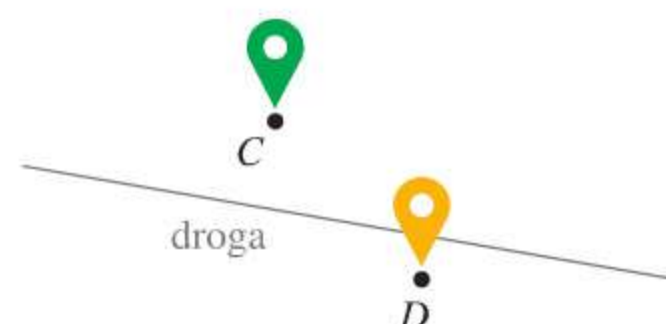
Miejscowości A i B rozdziela rzeka. Należy zbudować na rzece most, tak aby obie miejscowości leżały w tej samej odległości od mostu. W którym miejscu należy wybudować most na tej rzece?

Narysujemy symetralną odcinka AB i oznaczmy ją literą k . Punkt przecięcia symetralnej i rzeki oznaczmy literą M . Ponieważ leży on na symetralnej odcinka AB , to punkt ten jest równo oddalony od punktu A i punktu B , czyli $|AM| = |BM|$. Punkt M wyznacza zatem miejsce, w którym należy wybudować most.



Ćwiczenie 2.

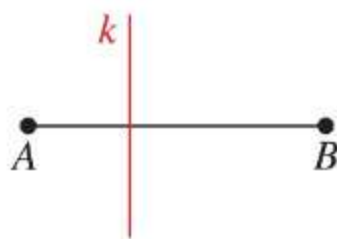
W pobliżu dwóch miejscowości: C i D planowana jest budowa drogi szybkiego ruchu. Droga będzie rozdzielała te miejscowości. W którym miejscu należy wybudować wiadukt nad tą drogą, aby był jednakowo oddalony od każdej z tych miejscowości?



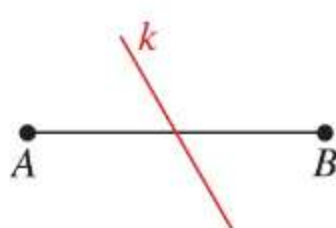
Rozwiąż zadania

1. Na którym rysunku prosta k jest symetralną odcinka AB ?

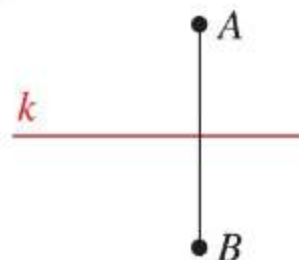
I.



II.



III.



2. Narysuj odcinek o długości 7,3 cm i skonstruuj jego symetralną.

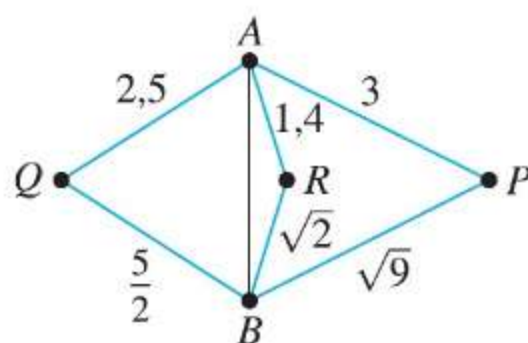
3. Narysuj dowolny odcinek AB , a następnie korzystając z cyrkla i linijki, podziel go:
a) na dwie równe części, **b)** na cztery równe części, **c)** w stosunku 3 : 5.

4. Dwie grupy harcerzy chcą wyznaczyć na skraju polany miejsce spotkania. Jedna grupa jest w miejscu oznaczonym literą A , a druga w miejscu oznaczonym literą B . Opisz, w jaki sposób można wyznaczyć na skraju polany miejsce spotkania, tak aby droga pokonana przez każdą grupę harcerzy była taka sama i możliwie najkrótsza.



5. Proste k i l przecinają się w punkcie P pod kątem 20° . Punkt Q leży na prostej k . Oblicz miarę kąta ostrego między symetralną odcinka PQ i prostą l .

6. Sprawdź, które z punktów: P , Q , R należą do symetralnej odcinka AB .



7. Długość boku AB trójkąta ABC jest równa 10 cm. Wierzchołek C trójkąta leży na symetralnej odcinka AB w odległości 13 cm od wierzchołków A oraz B . Oblicz pole trójkąta ABC .

8. Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym $|AB| = 15$ cm, a $|BC| = 12$ cm. Wierzchołek D równoległoboku należy do symetralnej boku BC . Wyznacz długość przekątnej BD tego równoległoboku.

- 9.** Punkty $A = (4, 3)$ i $B = (4, 7)$ są końcami odcinka AB .
- a)** Wyznacz współrzędne punktu wspólnego odcinka AB i jego symetralnej.
- b)** Sprawdź, czy punkty $C = (-2, 5)$ i $D = (5, 4)$ należą do symetralnej odcinka AB .

- 10.** Czworokąt $ABCD$ jest trapezem prostokątnym o podstawach AB i CD oraz wysokości AD . Symetralna boku BC przechodzi przez wierzchołek A i przecina bok BC w punkcie E . Wiedząc, że $|AB| = 10$ cm i $|BC| = 8$ cm, oblicz długość odcinka AE .

- 11.** Symetralne dwóch ramion trójkąta równoramiennego przecięły się pod kątem 90° w punkcie, który jest środkiem jego podstawy. Wyznacz miary kątów tego trójkąta.



Sprawdź, co umiesz!



- 1.** Narysuj trójkąt ostrokątny różnoboczny i skonstruuj symetralne wszystkich jego boków.

- 2.** Odcinek AB podzielono punktami: A_1, A_2, A_3 na cztery równe części. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Punkt A_3 podzielił odcinek AB w stosunku **A** **B**.

A. 3 : 1

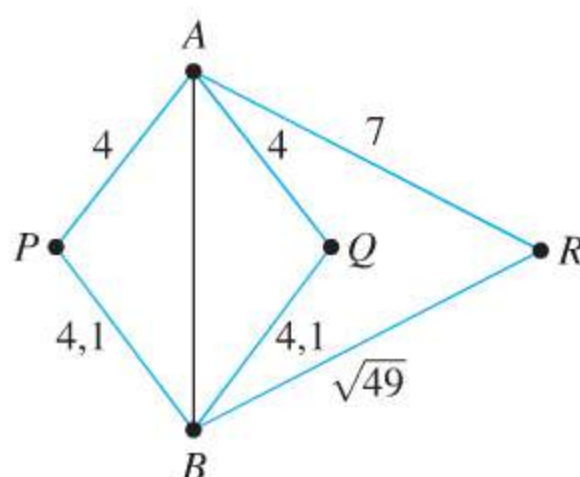
B. 3 : 4

Symetralna odcinka A_1B **C** **D** przez punkt A_2 .

C. przechodzi

D. nie przechodzi

- 3.** Na rysunku przedstawiono trójkąty: APB , ABQ i ABR .



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Punkty P i Q należą do symetralnej odcinka AB .	P	F
Punkt R nie należy do symetralnej odcinka AB .	P	F

4. Dwusieczna kąta i jej własności

- ▶ Pojęcie dwusiecznej kąta
- ▶ Stosowanie w zadaniach własności dwusiecznej kąta

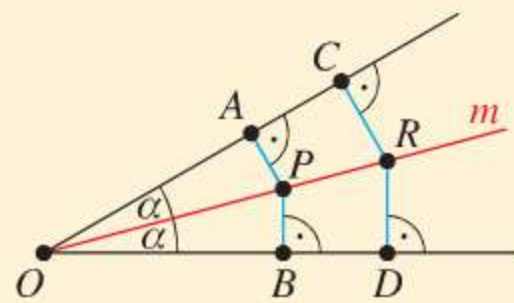
Dotychczas, chcąc podzielić kąt na dwa kąty o tej samej mierze, musieliśmy posłużyć się kątomierzem. Okazuje się, że można dokonać takiego podziału również bez użycia kątomierza – konstrukcyjnie z wykorzystaniem cyrkla.



Dwusieczną kąta nazywamy półprostą o początku w wierzchołku tego kąta, która dzieli ten kąt na dwa kąty o jednakowych miarach.

Prosta m jest dwusieczną kąta AOB , czyli $|\angle AOP| = |\angle BOP| = \frac{1}{2}|\angle AOB| = \alpha$.

Każdy z punktów leżących na dwusiecznej kąta jest równo oddalony od obu ramion tego kąta, np. $|AP| = |BP|$, $|CR| = |DR|$.

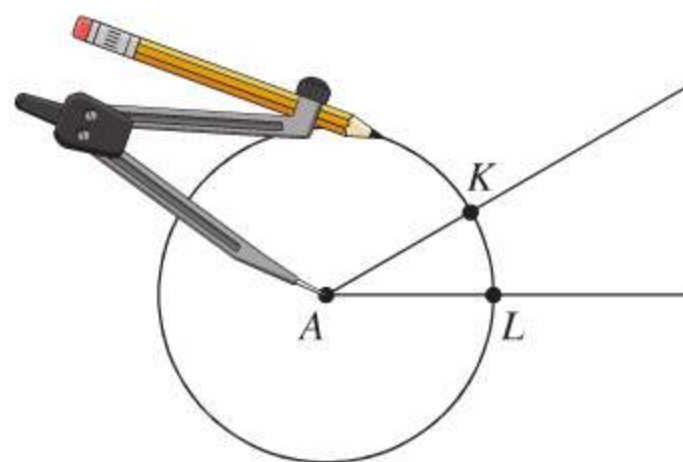


Przykład 1.

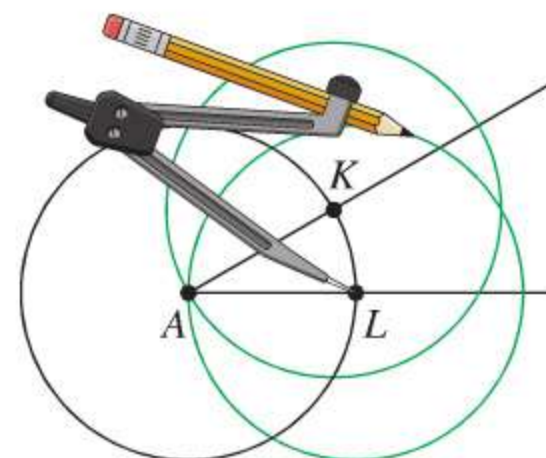
Narysuj dowolny kąt ostry KAL . Korzystając z cyrkla i linijki, skonstruuj jego dwusieczną.

Aby skonstruować dwusieczną kąta, wystarczy znaleźć dwa różne punkty, przez które ta dwusieczna przechodzi. Jednym z tych punktów jest wierzchołek kąta. Drugi punkt musi być równo oddalony od ramion kąta.

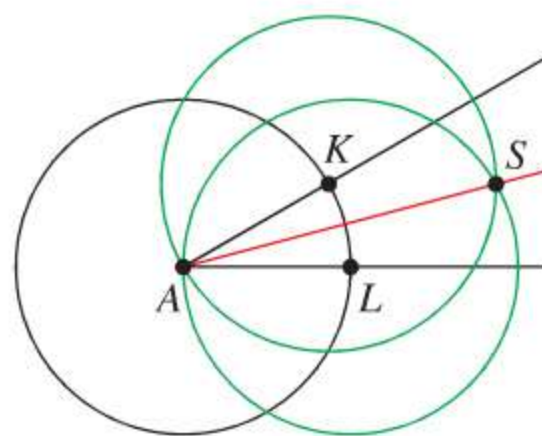
Narysujemy okrąg o dowolnym promieniu i środku w wierzchołku kąta, czyli punkcie A . Oznaczmy punkty przecięcia okręgu z ramionami kąta literami K i L .



Narysujemy okrąg o środku w punkcie K i promieniu AK , a następnie okrąg o środku w punkcie L i takim samym promieniu.

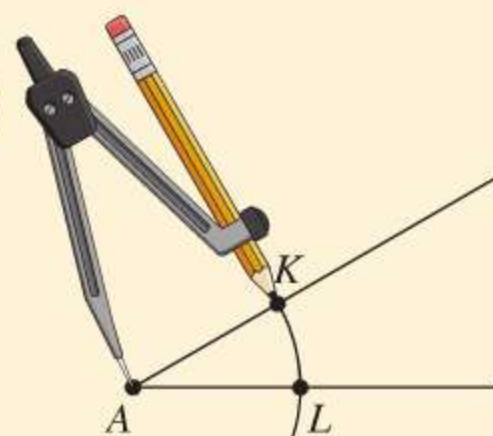


Oznaczmy punkt przecięcia nowo narysowanych okręgów jako S . Narysujemy prostą AS – dwusieczną kąta ostrego KAL .

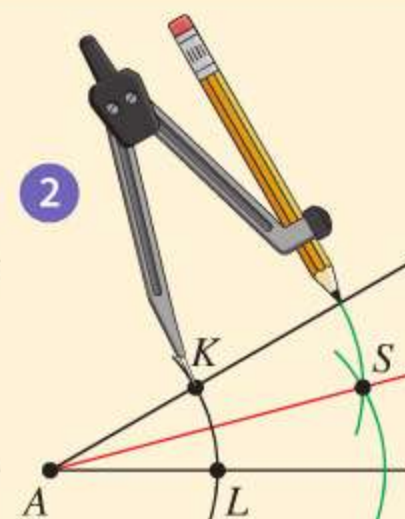


Aby narysować dwusieczną kąta, nie musimy rysować całych okręgów – wystarczą łuki.

1



2



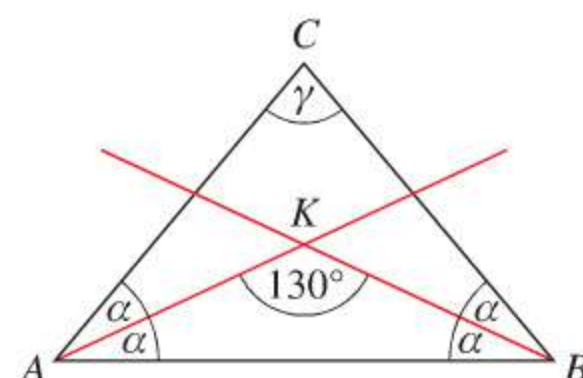
Ćwiczenie 1.

Narysuj dowolny trójkąt, a następnie skonstruuj dwusieczne jego kątów. Sprawdź, czy przecinają się one w jednym punkcie.

Przykład 2.

W trójkącie równoramiennym ABC dwusieczne kątów przy podstawie przecinają się w punkcie K pod kątem o mierze 130° . Wyznacz miary kątów trójkąta ABC .

Wykonamy rysunek pomocniczy. Narysujemy trójkąt równoramienny ABC oraz dwusieczne jego kątów przy podstawie.



Wiemy, że suma miar kątów w dowolnym trójkącie jest równa 180° . Zapiszemy sumę miar kątów trójkąta ABK i wyznaczmy miarę kąta α .



$$\begin{aligned} 130^\circ + 2\alpha &= 180^\circ & | - 130^\circ \\ 2\alpha &= 50^\circ & | : 2 \\ \alpha &= 25^\circ \end{aligned}$$

Aby obliczyć miarę kąta γ , zapiszemy sumę miar kątów trójkąta ABC .



$$\begin{aligned} 4\alpha + \gamma &= 180^\circ \\ 4 \cdot 25^\circ + \gamma &= 180^\circ \\ 100^\circ + \gamma &= 180^\circ & | - 100^\circ \\ \gamma &= 80^\circ \end{aligned}$$

Zatem $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CBA| = 2 \cdot \alpha = 2 \cdot 25^\circ = 50^\circ$, $|\sphericalangle ACB| = \gamma = 80^\circ$.

Odp. Miary kątów tego trójkąta są równe: 50° , 50° , 80° .

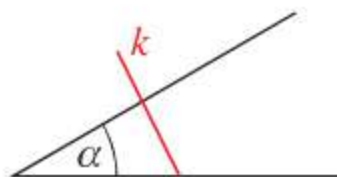
Ćwiczenie 2.

W trójkącie równoramiennym KLM dwusieczne kątów przy podstawie przecinają się w punkcie P pod kątem o mierze 150° . Wyznacz miary kątów trójkąta KLM .

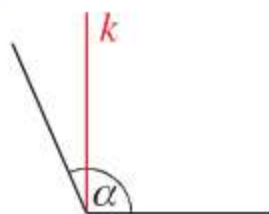
Rozwiąż zadania

1. Który rysunek przedstawia dwusieczną kąta α ?

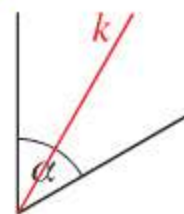
I.



II.



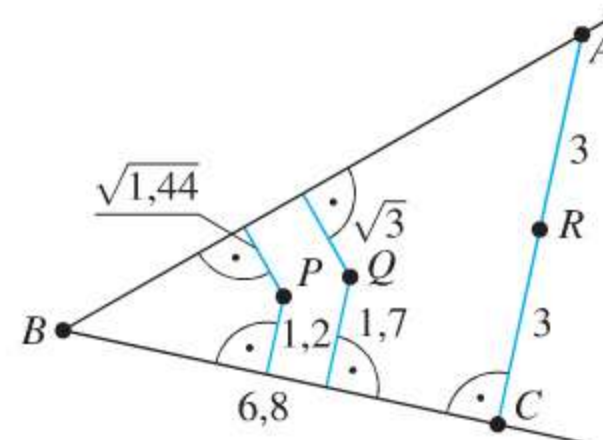
III.



2. Narysuj kąt o mierze 70° . Skonstruuj jego dwusieczną.

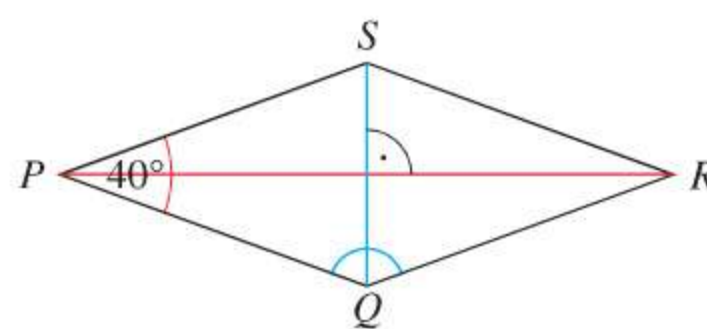
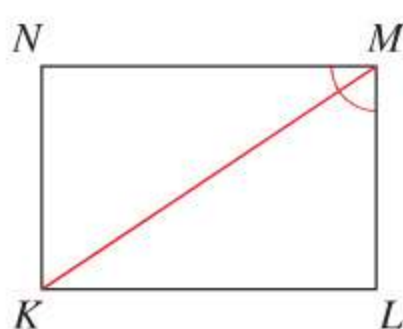
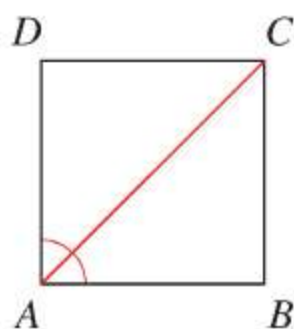
3. Narysuj trapez prostokątny. Skonstruuj dwusieczną kąta ostrego i dwusieczną kąta rozwartego tego trapezu.

4. Na podstawie informacji podanych na rysunku sprawdź, który z punktów: P , Q , R należy do dwusiecznej kąta ABC . Uzasadnij swoją odpowiedź.



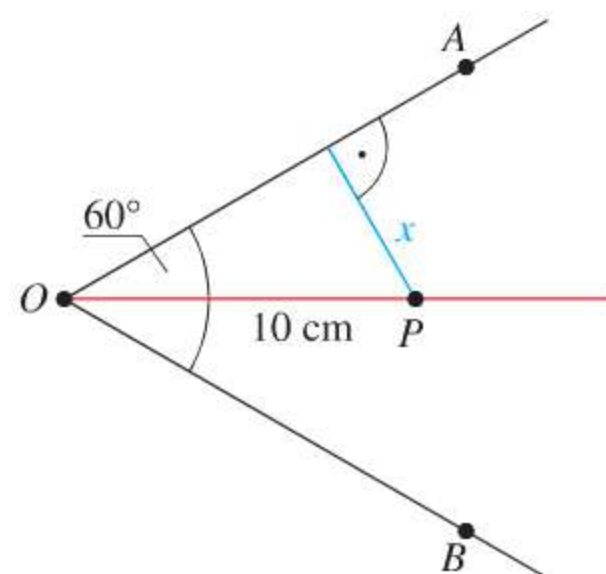
5. Na rysunkach dane są: kwadrat $ABCD$, prostokąt $KLMN$ i romb $PQRS$.

Wskaż, który z zaznaczonych odcinków w narysowanych wielokątach zawiera się w dwusiecznej zaznaczonego kąta. Uzasadnij swoją odpowiedź.

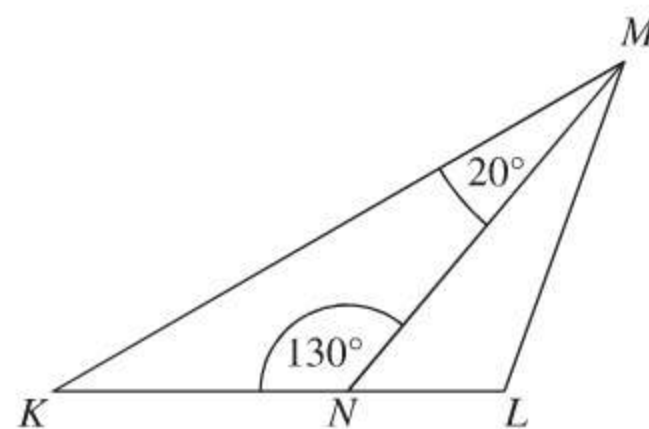


6. Oblicz miarę kąta rozwartego, pod jakim przecinają się dwusieczne dwóch kątów wewnętrznych w trójkącie równobocznym.

7. Punkt P należy do dwusiecznej kąta AOB , którego miara jest równa 60° . Odległość punktu P od wierzchołka kąta AOB jest równa 10 cm. Oblicz długość odcinka x .

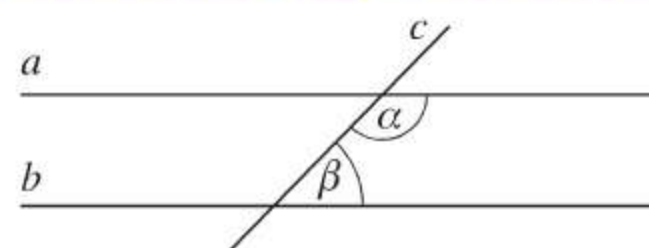


8. Dwusieczna kąta o wierzchołku M trójkąta KML przecina bok KL tego trójkąta w punkcie N . Oblicz miary kątów wewnętrznych trójkąta KML .



9. Stosunek miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równy $2 : 6 : 1$. Oblicz miarę kąta rozwartego, jaki tworzą dwusieczne
- kątów wewnętrznych o największej i najmniejszej mierze,
 - kątów ostrych tego trójkąta.

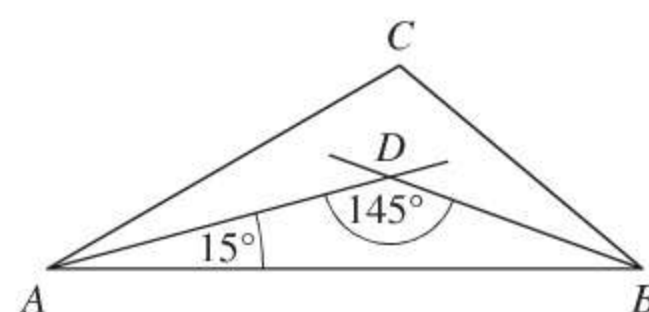
10. Proste a i b są równoległe. Prosta c tworzy z prostymi a i b odpowiednio kąty α i β . Uzasadnij, że dwusieczne kątów α i β są prostopadłe.



Sprawdź, co umiesz!

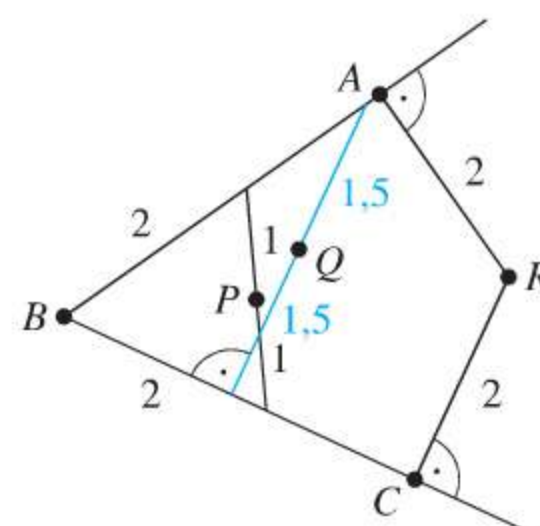
1. Narysuj kąt prosty, na jego podstawie skonstruuj kąt o mierze 45° .

2. W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów przy podstawie AB , które przecięły się w punkcie D . Oblicz miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC .



3. Na rysunku przedstawiono kąt ABC . Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Punkty P i R należą do dwusiecznej kąta ABC .	P	F
Punkt Q nie należy do dwusiecznej kąta ABC .	P	F



4. Dwusieczne kątów DAB i ABC równoległoboku $ABCD$, który nie jest prostokątem, przecięły się w punkcie S .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Trójkąt ABS jest

- A.** równoboczny. **B.** równoramienny. **C.** prostokątny. **D.** rozwartokątny.

PODSUMOWANIE DZIAŁU X

Symetrie

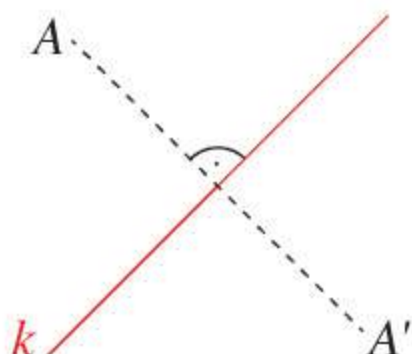
Powtórz wiadomości

Rodzaje symetrii

Symetria względem prostej (symetria osiowa)

Dwa punkty nazywamy symetrycznymi względem prostej, jeśli leżą na odcinku prostopadłym do tej prostej i są od niej równo oddalone.

Punkty A i A' są symetryczne względem prostej k . Prosta k to **oś symetrii**.



Symetria względem punktu (symetria środkowa)

Dwa punkty nazywamy symetrycznymi względem punktu, jeśli leżą wraz z nim na jednej prostej i są od niego równo oddalone.

Punkty A i A' są symetryczne względem punktu S . Punkt S to **środek symetrii**.

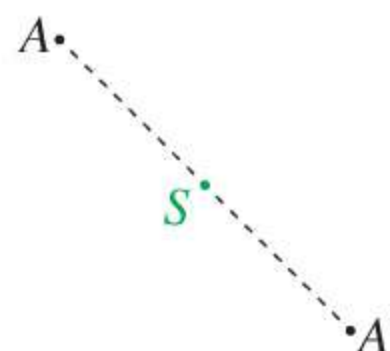
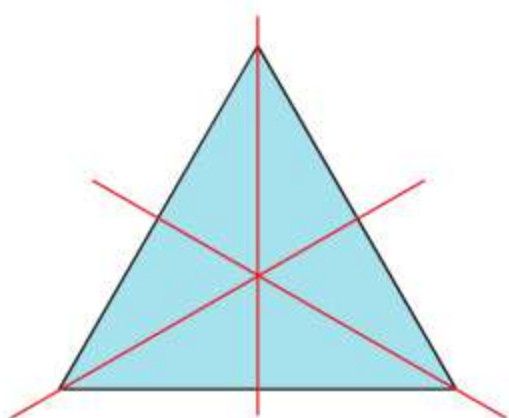


Figura osiowosymetryczna

Oś symetrii figury to prosta, która dzieli figurę na dwie przystające części będące swoim lustrzanym odbiciem. Figurę, która ma co najmniej jedną oś symetrii, nazywamy **figurą osiowosymetryczną**.



Trójkąt równoboczny ma **3 osie symetrii**.

Figura środkowosymetryczna

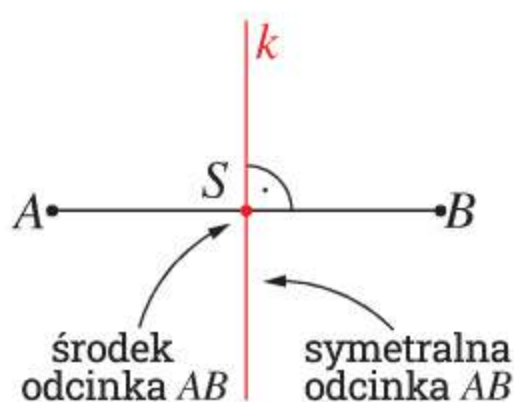
Figura środkowosymetryczna to taka, która jest symetryczna sama do siebie względem pewnego punktu. Ten punkt nazywamy **środkiem symetrii**.



Kwadrat ma **środek symetrii**.

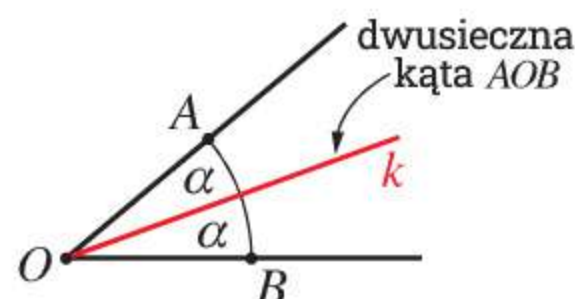
Symetralna odcinka

Symetralna odcinka to prosta prostopadła do tego odcinka przechodząca przez jego środek.



Dwusieczna kąta

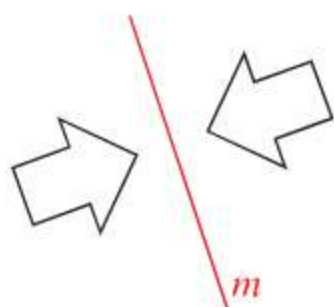
Dwusieczną kąta nazywamy półprostą o początku w wierzchołku tego kąta, która dzieli ten kąt na dwa kąty o jednakowych miarach.



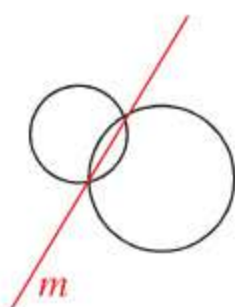
Sprawdź umiejętności

1. Na których rysunkach pary figur są symetryczne względem prostej m ?

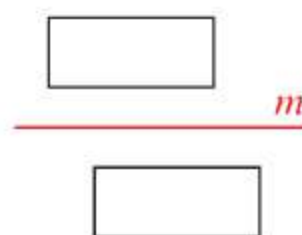
I.



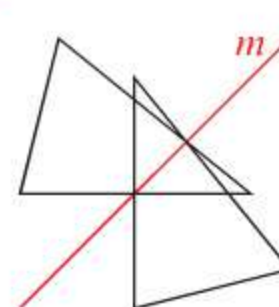
II.



III.



IV.



2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Figurą osiowosymetryczną nie jest

A. kwadrat.

B. półkole.

C. odcinek.

D. równoległobok.

3. Narysuj trójkąt różnoboczny, a następnie narysuj trójkąt symetryczny do niego względem dowolnego punktu leżącego na boku tego trójkąta, różnego od jego wierzchołka.

Informacje do zadań 4. i 5.

W układzie współrzędnych dane są punkty $P = (-2, -1)$ oraz $R = (-5, 3)$. Punkty P' i R' są symetryczne odpowiednio do punktów P i R względem osi y .

4. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współrzędne punktów P' i R' są równe

A. $P' = (-2, 1)$, $R' = (5, 3)$

B. $P' = (-2, 1)$, $R' = (-5, -3)$

C. $P' = (2, -1)$, $R' = (5, 3)$

D. $P' = (2, -1)$, $R' = (5, -3)$

5. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Pole czworokąta $PP'R'R$ jest równe 28.	P	F
Długość przekątnej czworokąta $PP'R'R$ jest równa 5.	P	F

6. W układzie współrzędnych dane są punkty: $A = (-3, -3)$, $B = (4, -1)$, $C = (3, 4)$, $D = (-4, 1)$.

Czy czworokąt $ABCD$ jest figurą środkowosymetryczną?

Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród 1., 2. albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	środek odcinka BD ma współrzędne $(0, 0)$.
			2.	środki odcinków AC i BD mają różne współrzędne.
B.	Nie,		3.	środek odcinka AC ma współrzędne $(0, \frac{1}{2})$.

7. Narysuj figurę złożoną z dwóch okręgów, która ma oś symetrii i nie ma środka symetrii.

8. Na ilustracji przedstawiono cztery karty do gry. Które z kart mają oś symetrii, a które środek symetrii? Uzasadnij swoją odpowiedź.

I.



II.



III.



IV.



E 9. Na którym rysunku prosta k jest symetralną odcinka AB ? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

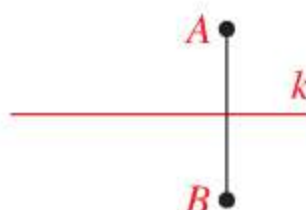
A.



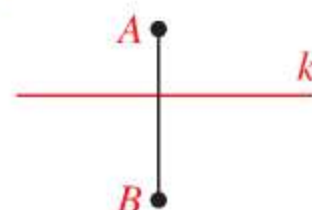
B.



C.



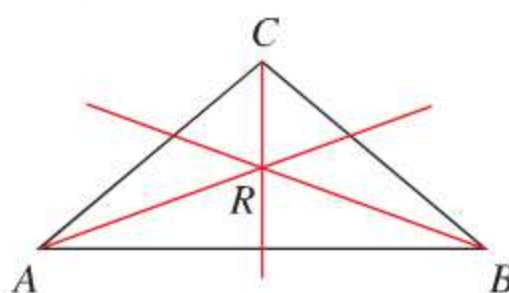
D.



10. Narysuj odcinek o długości 12 cm, a następnie, korzystając z cyrkla i linijki, podziel go konstrukcyjnie w stosunku 1 : 3.

11. Narysuj kąt o mierze 140° , a następnie, korzystając z cyrkla i linijki, skonstruuj na jego podstawie kąt o mierze 105° .

E 12. W trójkącie równoramiennym ABC kąt między ramionami ma miarę 100° . W trójkącie tym poprowadzono dwusieczne jego kątów wewnętrznych, które przecinają się w punkcie R .



Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Miara kąta RAB jest równa **A** **B** .

A. 40°

B. 20°

Kąt BRC ma miarę równą **C** **D** .

C. 110°

D. 120°

13. W trójkącie ABC miara kąta przy wierzchołku A jest równa 80° . Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D . Długości odcinków AB i AD są równe. Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta ABC .

14. Uzasadnij, że dwusieczne kątów przyległych przecinają się pod kątem prostym.



- 1.** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Każde dwa odcinki są symetryczne względem pewnej prostej.	P	F
Dowolne dwa okręgi są symetryczne względem pewnej prostej.	P	F
Każde dwa punkty są symetryczne względem pewnej prostej.	P	F

- 2.** Ile osi symetrii może mieć figura złożona z dwóch różnych prostych i okręgu? Rozważ wszystkie możliwości.

- 3.** Jacek spojrzał w lustro po południu i zobaczył odbicie lustrzane zegara. Która godzina była na zegarze w czasie, kiedy Jacek spojrzał w lustro?



- 4.** Przekształć trójkąt równoboczny KLM o boku długości 4 cm w symetrii względem prostych zawierających dwa jego boki. Rozważ wielokąt utworzony przez trójkąt KLM i powstałe dwa trójkąty do niego symetryczne. Oblicz obwód i pole powstałego wielokąta. Czy ten wielokąt ma oś symetrii? Uzasadnij swoją odpowiedź.

- 5.** Narysuj prostokąt $ABCD$ o bokach długości 4 cm i 5 cm, a następnie prostą, tak aby pole figury złożonej z prostokąta $ABCD$ i jego odbicia symetrycznego $A'B'C'D'$ względem tej prostej było równe 30 cm^2 .

- 6.** W układzie współrzędnych dane są punkty: $A = (-2, 4)$, $B = (8, 4)$, $C = (0, 8)$. Trójkąt ABC przekształcono w symetrii względem prostej zawierającej wysokość tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka C . Oblicz pole figury, która jest częścią wspólną trójkąta ABC i jego odbicia symetrycznego.

- 7.** Narysuj dwa równoległe odcinki: AB i CD o równej długości. Wyznacz taki punkt S , względem którego odcinek AB jest symetryczny do odcinka CD .

8. W układzie współrzędnych dane są punkty: $K = (3, 1)$, $L = (0, 3)$, $M = (-5, 0)$, $N = (2, -9)$. Punkty: K' , L' , M' , N' są punktami symetrycznymi do odpowiednio punktów: K , L , M , N względem początku układu współrzędnych. Oblicz pole figury $KM'N'L$.

- E** 9. Punkty $A = (-3, -2)$ oraz $B = (5, -3)$ są dwoma kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, a punkt $S = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$ jest jego środkiem symetrii.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Współrzędne punktu C są równe $(6, 4)$.	P	F
Punkt S należy do symetralnej odcinka AD .	P	F

10. Dane są punkty A i B oraz prosta k . Narysuj analogiczny rysunek w zeszycie. Wyznacz konstrukcyjnie na prostej k punkt P , którego odległość od punktów A i B jest taka sama.

a)



b)

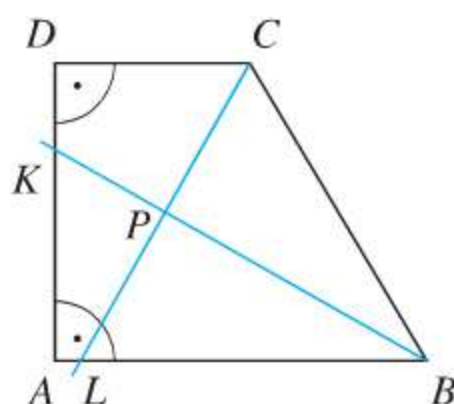


- E** 11. Dane są punkty: A , B , C , D , które nie są współliniowe, takie że $|AB| = 2\frac{1}{4}$ cm, $|BC| = 2,4$ cm, $|CD| = \frac{12}{5}$ cm, $|AD| = 2,25$ cm.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Punkt C należy do symetralnej odcinka BD .	P	F
Punkt B należy do symetralnej odcinka AC .	P	F

12. W trapezie prostokątnym $ABCD$ dwusieczne kątów ABC i BCD przecinają się w punkcie P . Punkty K i L są punktami przecięcia tych dwusiecznych odpowiednio z bokami AD i AB . Uzasadnij, że kąt KPC ma miarę 90° .



Odpowiedzi

DZIAŁ I. LICZBY I DZIAŁANIA

1. System rzymski

Ćwiczenia 1. a) 42 b) 84 c) 661 d) 957 e) 2599 2. a) XLV b) XCIV c) CMLXXXVI d) MCDIX e) MMDCCXCIII

Rozwiąż zadania 1. a) 85 b) 68 c) 724 d) 946 e) 688 f) 504 g) 1599 h) 2991 2. a) XXIV b) LXXIX c) DCCCLXXVI d) CMXLII e) DCLXXXIV f) MDCCCXV g) MMCDXC h) MI 3. a) < b) = c) < d) > 4. 12 lat 5. B 6. PF 7. a) DXL b) CLXVIII c) MCCXCIX d) CDXLVIII 8. a) MCMLXIV b) MCMXLVI c) MMCLXVI 9. np. 2000; 2100

Sprawdź, co umiesz! 1. a) tak b) nie c) nie d) tak e) nie f) nie g) tak h) nie i) tak j) tak 2. XLVII < LXXIII < CDXLIV < CMLXXI < MII 3. 147 lat 4. BD

2. Własności liczb naturalnych

Ćwiczenia 1. 0, 16, 32, 48, 64 2. dzielniki liczby 27: 1, 3, 9, 27; dzielniki liczby 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 3. a) 2, 3, 4, 6, 9 b) 2, 4, 5, 10, 100 c) 3, 9 d) 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 100 4. a) $77 = 7 \cdot 11$ b) $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ c) $129 = 3 \cdot 43$ d) $2160 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ 5. a) $NWD(24, 60) = 12$, $NWW(24, 60) = 120$ b) $NWD(90, 126) = 18$, $NWW(90, 126) = 630$ c) $NWD(420, 2310) = 210$, $NWW(420, 2310) = 4620$

Rozwiąż zadania 1. a) 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49 b) 0, 24, 48, 72, 96, 120, 144 2. a) 1, 2, 4, 5, 10, 20 b) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72 c) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120 d) 1, 139 3. a) 128, 1650, 2100 b) 243, 1650, 2100 c) 128, 2100 d) 1650, 2100 e) 1650, 2100 f) 243 g) 1650, 2100 h) 2100 4. a) 0, 2, 4, 6, 8 b) 1, 4, 7 c) 0, 4, 8 d) 4 5. a) 2 b) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 c) 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 6. a) $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$ b) $92 = 2 \cdot 2 \cdot 23$ c) $112 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$ d) $2200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11$ 7. a) $NWD(50, 210) = 10$, $NWW(50, 210) = 1050$ b) $NWD(44, 165) = 11$, $NWW(44, 165) = 660$ c) $NWD(288, 576) = 288$, $NWW(288, 576) = 576$ d) $NWD(1, 1084) = 1$, $NWW(1, 1084) = 1084$ 8. a) $\frac{5}{7}$ b) $\frac{93}{290}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{66}{131}$ 9. $NWD(80, 70) = 10$, $NWW(80, 70) = 560$ 10. A3 11. B 12. Wskazówka: trzy kolejne wielokrotności liczby 2 można zapisać w postaci: $2k$, $2k+2$, $2k+4$, gdzie k jest liczbą naturalną.

Sprawdź, co umiesz! 1. BC 2. 1, 163; Jest liczbą pierwszą. 3. B 4. $NWD(170, 204) = 34$, $NWW(170, 204) = 1020$

3. Działania na liczbach wymiernych

Ćwiczenia 1. a) tak; $\frac{76}{1}$ b) tak; 1,1(7) to rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe c) tak; $\frac{3}{4}$ d) tak; $\frac{94}{11}$ e) nie; $-\sqrt[3]{12}$ nie jest liczbą całkowitą 2. a) $8\frac{17}{24}$ b) $1\frac{5}{36}$ c) $-4\frac{1}{28}$ d) $-\frac{81}{88}$ e) $1\frac{3}{5}$ f) $3\frac{1}{3}$ g) $-\frac{1}{3}$ h) $-2\frac{1}{4}$ 3. a) 10,74 b) 11,38 c) 78,37 d) -42,3 4. a) $\frac{9}{169}$ b) $5\frac{1}{16}$ c) $-42\frac{7}{8}$ d) $20\frac{1}{4}$ 5. a) 5 b) 2 c) $\frac{1}{4}$ d) $-\frac{1}{5}$

Rozwiąż zadania 1. a) tak; $1 = \frac{1}{1}$ b) nie; $\sqrt{168}$ nie jest liczbą całkowitą c) tak; $\sqrt[3]{-125} = -\frac{5}{1}$ d) tak; 2,0(9) to rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe 2. a) $\frac{15}{16}$ b) $9\frac{19}{30}$ c) $-9\frac{32}{33}$ d) 4 e) $-\frac{1}{26}$ f) $\frac{1}{6}$ 3. a) 21,39 b) 7,56 c) -3,268 d) -21,71 e) 13 f) -120,96 g) 125 h) -16,9 4. Wszyscy otrzymali taką samą część, czyli po $\frac{1}{4}$ tortu. 5. Wskazówka: należy zauważyć, że 15 min to $\frac{1}{4}$ h. 6. Wskazówka: pole trapezu o podstawach długości a i b oraz wysokości równej h wyraża się wzorem: $P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$. 7. a) = b) > c) > 8. a) $-11\frac{1}{6}$ b) -173 c) $\frac{5}{12}$

Sprawdź, co umiesz! 1. a) $4\frac{7}{12}$ b) $\frac{2}{3}$ c) -8 d) $3\frac{3}{5}$ e) 4,2 f) 680 2. A3 3. 88

4. Działania na potęgach i pierwiastkach

Ćwiczenia 1. a) 8^{15} b) 12^{16} c) 20^6 d) 10^7 e) 9^{18} 2. a) 144 b) $\frac{4}{9}$ c) 1 d) 49 3. I. a) $8 \cdot 10^6$ b) $3,27 \cdot 10^5$ c) $3,5 \cdot 10^{-4}$ d) $1,01 \cdot 10^{-3}$, II. a) 170 000 b) 10 340 c) 0,000038 d) 0,00000999 4. a) 15 b) -7 c) 9 d) 4 e) 6 f) 5 5. Wskazówka: należy obliczyć oddzielnie wartości wyrażeń $\sqrt{25} - \sqrt{16}$ oraz $\sqrt{25 - 16}$. 6. a) 25 b) 1 c) 4 d) -20 7. Wskazówka: należy usunąć niewymierność z mianownika ułamka $\frac{20}{3\sqrt{5}}$.

Rozwiąż zadania 1. a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{13}$ b) $(0,2)^{12}$ c) $(-8)^3$ d) 150^5 e) 4^8 f) 13^{12} g) $(-5)^{33}$ h) 16^{24} 2. a) 49 b) 100 c) -1 d) $\frac{1}{27}$ 3. a) 5 b) 8 c) -1 d) -4 4. a) 6 b) $\frac{1}{4}$ c) $-1\frac{1}{2}$ d) 0,4 e) 14 f) 121 g) 8 h) $1\frac{1}{3}$ 5. a) $3\sqrt{3}$ b) $15\sqrt{30}$ c) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ d) $\frac{10\sqrt{7}}{21}$ 6. $d < b < e < f < c < a$ 7. a) 40 b) 9 c) 7 d) 2000

Sprawdź, co umiesz! 1. a) 11 b) 7 c) 16 d) 27 2. B2 3. a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{7}{10}$ c) 5 d) $\frac{1}{2}$ 4. PF 5. Wskazówka: w liczniku należy wyłączyć przed nawias 10^3 .

Sprawdź umiejętności

1. XCVIII, 424, MCMLXXVI, 1667, MMDCCXLIX 2. C 3. AC 4. a) NWD (15, 60) = 15, NWW (15, 60) = 60 b) NWD (72, 108) = 36, NWW (72, 108) = 216 c) NWD (140, 630) = 70, NWW (140, 630) = 1260 d) NWD (204, 255) = 51, NWW (204, 255) = 1020 5. a) $8\frac{1}{21}$ b) $13\frac{1}{2}$ c) $4\frac{1}{4}$ d) $-1\frac{2}{21}$ e) $-12\frac{5}{14}$ f) $\frac{8}{11}$ g) $-\frac{1}{8}$ h) 15,56 i) -39,2 6. a) Nie, ponieważ $997,50 \text{ zł} < 1000 \text{ zł}$. b) 5 7. a) -19 b) 104 8. a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ b) 7^{13} c) $(1,8)^{20}$ d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{11}$ 9. a) $1,9 \cdot 10^6$ b) $1,301 \cdot 10^7$ c) $7 \cdot 10^{-5}$ d) $1,03 \cdot 10^{-5}$ 10. BD 11. B 12. Nie jest. 13. a) 16 b) 6 c) -0,4 d) $-14\sqrt{2}$ 14. a) Wskazówka: należy usunąć niewymierność z mianownika ułamka $\frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$. b) Wskazówka: należy usunąć niewymierność z mianownika ułamka $\frac{6\sqrt{6}}{5\sqrt{3}}$.

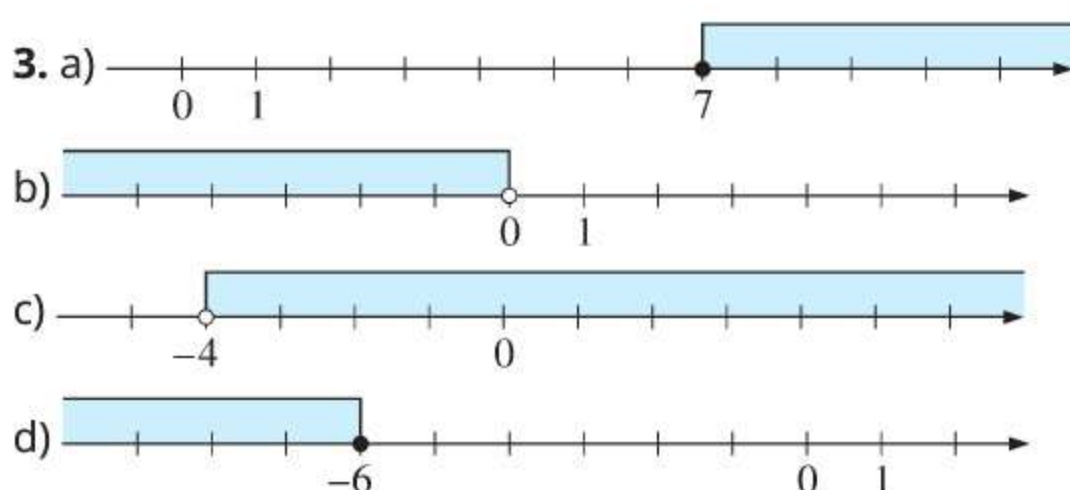
Potrenuj – zadania uzupełniające

1. 2097 2. A3 3. AD 4. C 5. NWD(528, 792) = 264, NWW(528, 792) = 1584 6. Wskazówka: należy pamiętać o tym, że dzielnikiem każdej liczby parzystej jest liczba 2. 7. a) np. $2\sqrt[3]{12}$ b) np. $\sqrt{26}$ 8. PF 9. Wskazówka: należy rozwiązać równanie i uzasadnić, że liczba będąca rozwiązaniem równania ma rozwinięcie dziesiętne skończone. 10. a) 1331 b) 441 c) 6 11. D 12. $9,4608 \cdot 10^{15} \text{ m}$ 13. a) Wskazówka: należy każdy składnik jednej sumy pomnożyć przez każdy składnik drugiej sumy. b) Wskazówka: należy każdy składnik jednej sumy pomnożyć przez każdy składnik drugiej sumy. 14. PP

DZIAŁ II. UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH

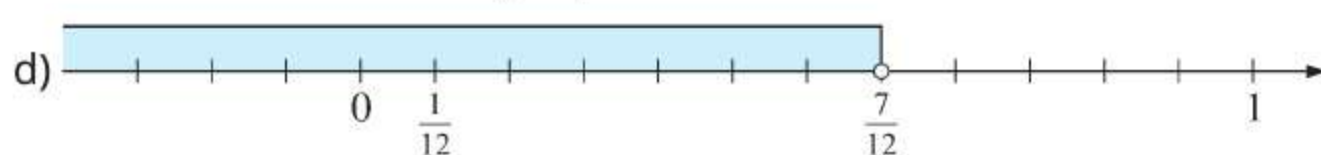
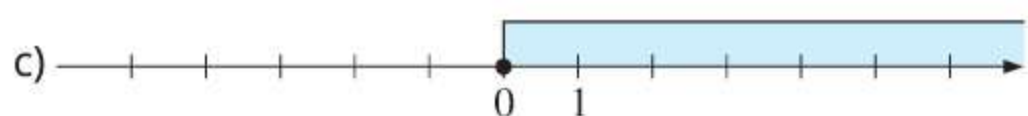
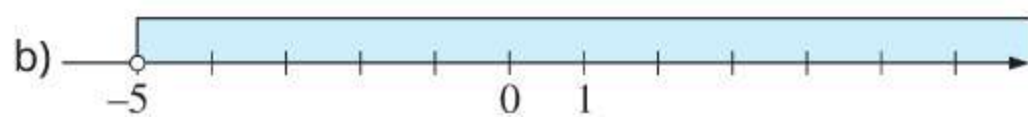
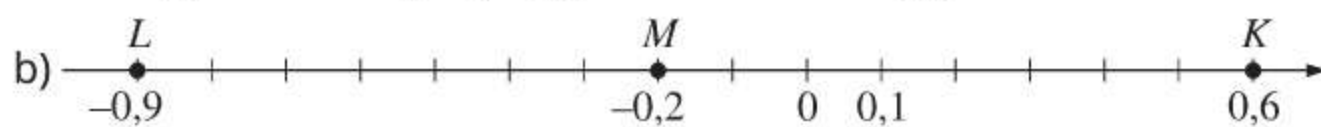
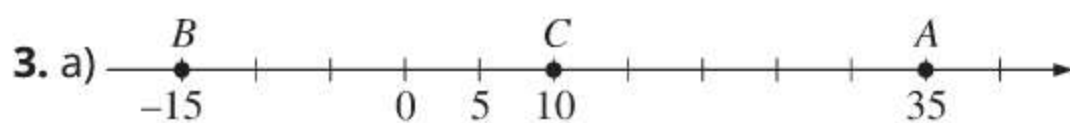
1. Zbiory na osi liczbowej

Ćwiczenia 1. a) 17 b) 15 c) $3\frac{3}{4}$ 2. a) $A = 2$ b) $B = 6\frac{4}{5}$ c) $C = -51$ d) $D = 53\frac{1}{3}$

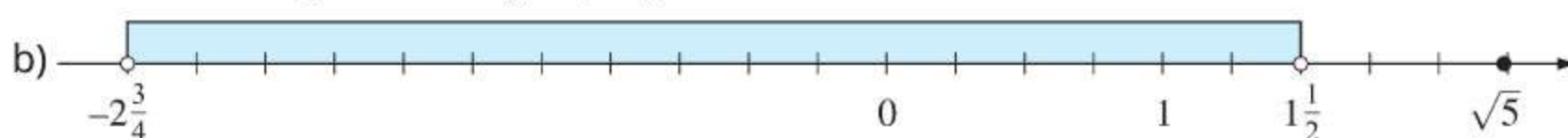
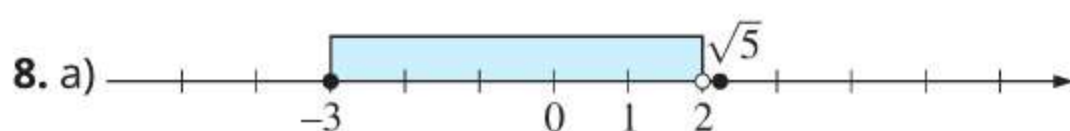


4. a) $x > 15$ b) $x \leq -3,5$

Rozwiąż zadania 1. a) 19 b) 3,5 c) $11\frac{1}{2}$ 2. a) $A = 30$; $B = 50$ b) $C = 0$; $D = 15$ c) $E = -\frac{2}{3}$; $F = \frac{1}{3}$; $G = 1\frac{1}{3}$ d) $K = -2,4$; $L = 0,8$; $M = 4$

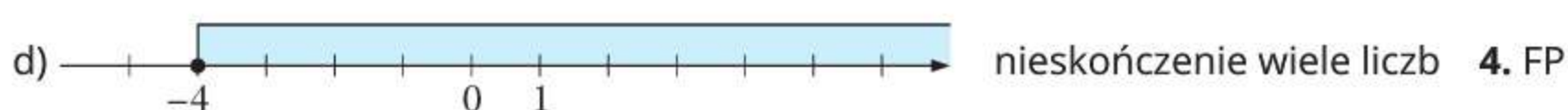
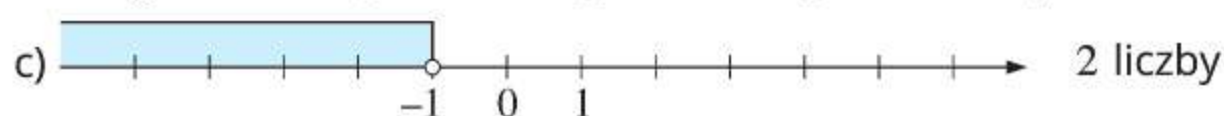
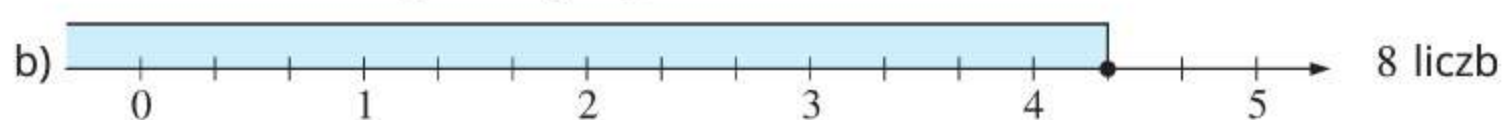
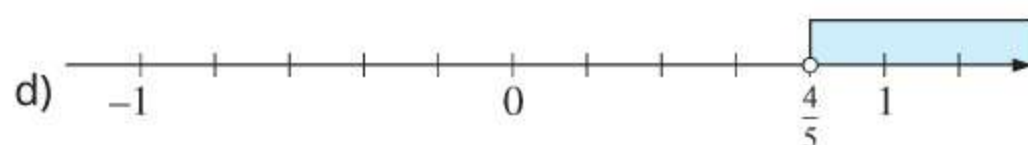
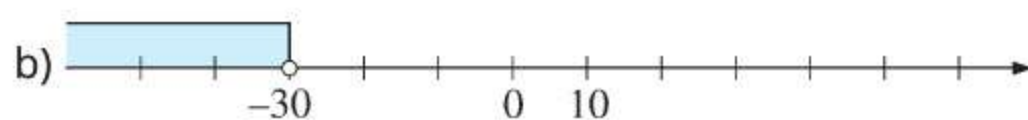
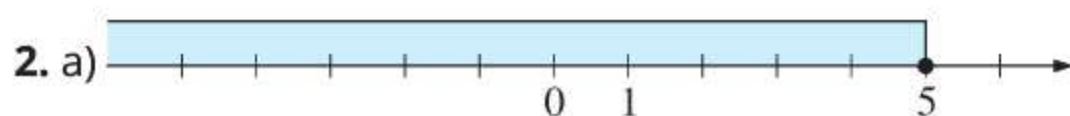


5. nie 6. 12 7. a) $x > 2$ b) $x \geq 1$ c) $x < 3$ d) $x > -\frac{3}{5}$



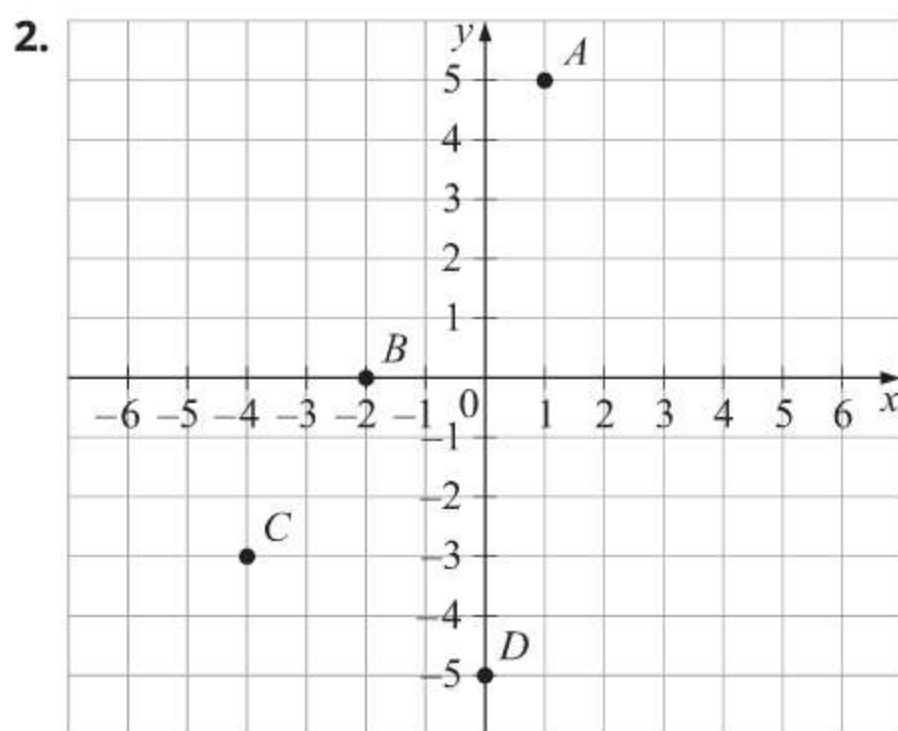
9. a) $x \geq -0,4$ i $x < 0,3$ b) $x \geq 1,5$ i $x \leq 4,5$

Sprawdź, co umiesz! 1. B



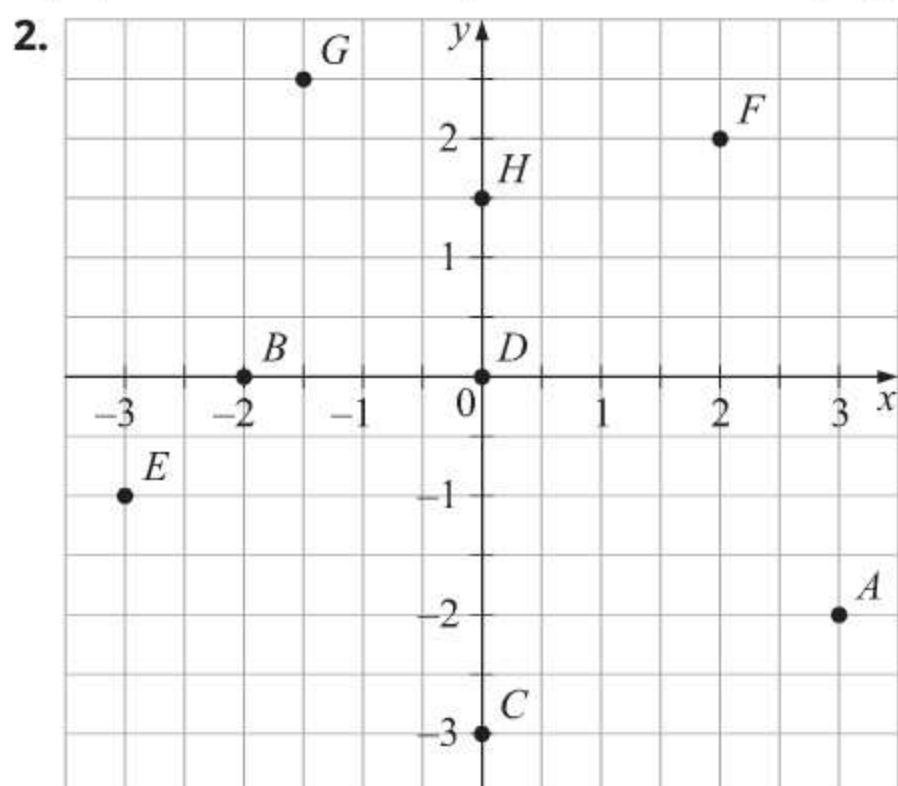
2. Punkty kratowe w układzie

Ćwiczenia 1. $K = (-3, 5)$, $L = (4, 3)$, $M = (1, -2)$, $N = (-2, -5)$ a) L b) N c) L i M d) M i N e) L i M oraz M i N



3. a) II b) I c) IV d) III 4. np.: $H = (0, -3)$, $I = (1, -5)$, $J = (-1, -1)$

Rozwiąż zadania 1. $A = (3, 2)$, $B = (0, 3)$, $C = (4, 5)$, $D = (2, -2)$, $E = (6, -3)$, $F = (3, -4)$, $G = (-2, -1)$, $H = (-3, -4)$, $K = (5, 0)$, $L = (0, -2)$, $M = (-5, -2)$, $N = (-4, 0)$, $P = (-1, 2)$, $Q = (-3, 4)$ a) P i Q – II ćwiartka; D , E , F – IV ćwiartka b) A i C – I ćwiartka; G , H , M – III ćwiartka



3. a) np.: $A = (1, 3)$, $B = (1, 1)$, $C = (3, 5)$ b) np.: $A = (1, 3)$, $B = (-2, 0)$, $C = (-3, -1)$ c) np.: $A = (3, 1)$, $B = \left(1, \frac{1}{3}\right)$, $C = (-1, -3)$ d) np.: $A = (2, -2)$, $B = (1, -1)$, $C = (-1, 1)$ e) $A = (3, 3)$, $B = (6, 2)$, $C = (6, 7)$
 4. 2 pary: $C = (4, 0)$ i $D = (1, -2)$ oraz $C = (0, 6)$ i $D = (-3, 4)$ 5. a) $(-1, 1)$ b) np. $(-5, -5)$ 6. a) $Q = (3, -2)$
 b) Wskazówka: należy zaznaczyć w układzie współrzędnych punkty P i R , a następnie zauważyć, że do odcinka PR należą punkty, których pierwsza współrzędna jest o 1 mniejsza od drugiej współrzędnej; $P = (-1, -2)$, $R = (3, 2)$, $A = (0, -1)$, $B = (1, 0)$, $C = (2, 1)$. 7. BD 8. C 9. a) -1 b) $C = (-1, 4)$ lub $C = (-1, -2)$

Sprawdź, co umiesz! 1. $A = (-4, 2)$, $B = (0, 4)$, $C = (5, 3)$, $D = (6, 0)$, $E = (4, -3)$, $F = (0, -5)$, $G = (-3, -2)$, $H = (-7, 0)$; są 4 takie punkty: A , F , G , H 2. I ćwiartka, np.: $(6, 3)$, $(1, 4)$; II ćwiartka, np.: $(-1, 2)$, $(-2, 1)$; III ćwiartka, np.: $(-4, -1)$, $(-2, -5)$; IV ćwiartka, np.: $(-4, -1)$, $(-6, -3)$ 3. a) $D = (-4, 4)$ b) $(-4, -2)$, $(-3, -1)$, $(-2, 0)$, $(-1, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 4)$ 4. C

3. Środek odcinka

Ćwiczenia 1. a) $S = 4$ b) $S = 0$ c) $S = \frac{7}{12}$ d) $S = 6\sqrt{3}$ 2. a) $S = (16, 4)$ b) $S = \left(1\frac{3}{4}, 0\right)$ c) $S = \left(-\frac{4}{5}, -3\frac{1}{2}\right)$
 3. a) $B = (-76, 38)$ b) $B = \left(5, \frac{4}{9}\right)$

Rozwiąż zadania 1. a) 19 b) $2\frac{1}{2}$ c) $-1\frac{1}{2}$ d) 0 e) -9 f) $-17\frac{1}{2}$ 2. a) $B = 9$ b) $B = 7$ c) $B = 0$ d) $B = 1\frac{1}{6}$

3. a) $S = (15, 18)$ b) $S = (-3, 5; -4)$ c) $S = (-2, -2)$ d) $S = \left(1\frac{3}{4}, 4\frac{1}{4}\right)$ 4. $a = 4$ 5. a) $(3, 0)$ b) np.: czerwona pinezka – Ten punkt to środek odcinka, którego początkiem jest punkt $(3, 1)$, a końcem – punkt $(3, -5)$; zielona pinezka – Ten punkt to środek odcinka, którego początkiem jest punkt $(1, -3)$, a końcem –

punkt $(-5, 7)$. 6. a) $K = (-16, 28)$ b) $L = (-340, 760)$ c) $L = \left(-8\frac{1}{2}, -3\right)$ d) $K = \left(-1\frac{3}{4}, -\frac{7}{8}\right)$ 7. $S = (1, 1)$

8. $(9, -3)$ 9. $B = (2, 4), E = (4, 5, 5)$ 10. Wskazówka: należy dwukrotnie skorzystać ze wzoru na środek odcinka. 11. $a = -1\frac{1}{2}, b = -5$ 12. np.: $B = (1, 3), D = (-4, 3)$; nie; nieskończenie wiele; $y_B = y_D = 3$

Sprawdź, co umiesz! 1. $\left(-\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right), \left(-1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}\right), (1, 0)$ 2. a) $S = \left(-1, -2\frac{1}{2}\right)$ b) $D = (-4, 7)$ c) $C = \left(4\frac{1}{3}, -4\right)$ 3. BD 4. FP

4. Odległość w układzie współrzędnych

Ćwiczenia 1. $|AB| = 3, |CD| = 2, |EF| = 1$ 2. Wskazówka: należy skorzystać z twierdzenia Pitagorasa.

Rozwiąż zadania 1. $|AB| = 6, |CD| = 3, |EF| = 2, |GH| = 7, |IJ| = 8, |KL| = 4, |MN| = 5$ 2. $|AB| = 5, |CD| = 3\sqrt{2}, |EF| = \sqrt{29}, |GH| = \sqrt{10}, |KL| = \sqrt{53}$ 3. $|KM| = 9, |PN| = 6, |MN| = \sqrt{58}, |PL| = \sqrt{146}$ 4. a) $13\sqrt{2}$ b) 8 5. a) $2\sqrt{13}$ b) $\sqrt{39}$ 6. D 7. A2 8. 720 m 9. AB o 50 % od odcinka CD 10. $2\sqrt{3}, 4\sqrt{3}$

Sprawdź, co umiesz! 1. B 2. 3 razy 3. a) $Obw. = 18\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{10}$ 4. Wskazówka: należy obliczyć długości poszczególnych odcinków, a następnie sprawdzić, czy kwadrat długości najdłuższego z nich jest równy sumie kwadratów długości pozostałych odcinków.

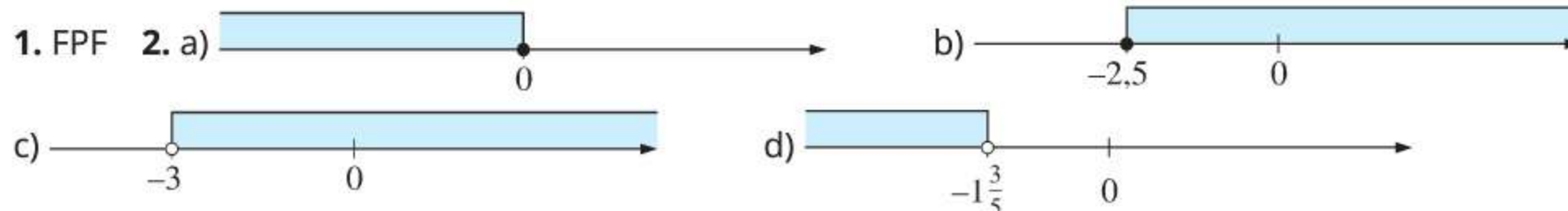
5. Figury w układzie współrzędnych

Ćwiczenia 1. $Obw. = 44$ 2. $P = 12$ 3. Wskazówka: należy obliczyć pole czworokąta KLMN przez podział na trójkąty.

Rozwiąż zadania 1. a) $P = 16, Obw. = 16$ b) $P = 42, Obw. = 26$ 3. $P = 21$ 4. $P = 14$ 5. a) $P = 35$ b) $P = 29,5$ 6. a) $|KM| = \sqrt{113}$ b) $P = 40, Obw. = 18 + 4\sqrt{5}$ 7. $P = 10\sqrt{3}$ 8. C 9. PF 10. Wskazówka: należy obliczyć długości boków czworokąta KLMN. 11. Wskazówka: można obliczyć pole trójkątów ABC oraz DAB przez uzupełnienie do wielokąta lub podział na trójkąty.

Sprawdź, co umiesz! 1. A 2. $Obw. = 7\sqrt{2} + \sqrt{58}$ 3. BC

Sprawdź umiejętności



3. $(-1, -2), (1, 1), (3, 4)$ 4. B 5. a) $S = 25$ b) $S = -2$ c) $S = 1,6$ d) $S = -6$ 6. a) $N = -4$ b) $N = -7$ c) $M = 4\frac{1}{6}$ 7. D 8. Wskazówka: należy obliczyć długości boków prostokąta ABCD,

korzystając z twierdzenia Pitagorasa. 9. PF 10. BC 11. $(0, 2)$ i $(-6, 2), P = 18, Obw. = 12\sqrt{2}$ 12. a) $B = (-5, 8)$ b) $|AL| = 2\sqrt{29}$ 13. a) $P = 17$ b) $P = 31\frac{1}{2}$ c) $P = 35\frac{1}{2}$

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. $|AB| = 5\frac{1}{12}, |AC| = 1\frac{2}{3}, |BC| = 6\frac{3}{4}, |DE| = 9\sqrt{2}$



3. a) $-4 < x \leq \sqrt{21}; -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ b) $-4\sqrt{7} \leq x \leq \sqrt{7}; -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$

4. A, C, E, F 5. a) Wskazówka: należy odczytać, o ile krętek przesuwamy się w pionie i poziomie, idąc z punktu A do punktu C. b) Wskazówka: należy odczytać, o jakie części krętek przesuwamy się w pionie i poziomie, idąc z punktu A do punktu C. 6. $D = (-4, -5)$ lub $D = (4, -1)$ lub $D = (2, 9)$ 7. a) IV b) II c) II

8. B 9. a) $S = (-2\sqrt{2}, -2)$ b) $S = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}, -4\sqrt{5}\right)$ 10. B3 11. a) $K = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -1\frac{5}{8}\right)$ b) $L = (-4\sqrt{2}, \sqrt{3})$

12. $|KL| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 13. $C = (8\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ i $D = (-2\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ lub $C = (8\sqrt{2}, -6\sqrt{2})$ i $D = (-2\sqrt{2}, -6\sqrt{2})$
 14. nie; $\angle ACB$ 15. $(5, 5), (5, -5), (-5, 5), (-5, -5)$ 16. FP

DZIAŁ III. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE I RÓWNANIA

1. Przekształcanie wyrażeń algebraicznych

- Ćwiczenia** 1. a) $28f^7$ b) $-45g^2h^3j^3$ c) $12r^4s^5t^5$ 2. a) $7x^2 + y$; 12 b) $-x^2y - 7xy^3 + 2y$; 904
 3. a) $-5f^3 + 7f + 9$ b) $-g^2 - 4g - 8$ c) $2a + 7b$ 4. a) $2y^4 + 12y^2 - 18y$ b) $-3b^6 + b^5 - 24b^3$ c) $-2y^5 - 3y^2 + \frac{5}{7}y$
 d) $5yz^2 - 1\frac{2}{5}y^2z + 2z$ 5. a) $2x^2 + 8x + 8$ b) $-6w^5 - 8w^3 + 8w$ c) $-6a^2 - 4ab^2 + 2b^4$

- Rozwiąż zadania** 1. a) $48x^5y^6$ b) $-6c^2d^9$ c) $-a^2b^2c^3$ d) $7x^5y^8z^8$ 2. a) $5a^2 + 4a$; 1 b) $-2c^2d^2 + 6cd^2$; 36
 c) $4k^2l - 3kl^2$; -27,5 d) $t^2z^2 - 2t^2z$; $24 - 12\sqrt{2}$ 3. a) $8a - 6b$ b) $7c - 45$ c) $-1,5x^2 - 6x - 4,5y + 10$ d) $19g$
 4. a) $15b - 40$ b) $3f^2 - 18f$ c) $4x^5 - 4x^3 - 46x$ d) $-2p^2 + 8ps - 9s^2$ e) $-2a^2b - ab + 3ab^2$ f) $4m^3 - 6m^2 - m$
 5. a) $2x - 6y + 4$ b) $3c - 6$ c) $\frac{1}{4}m - n + 2\frac{1}{4}$ d) $-3t + 4z - 5$ 6. $(6x - 20)$ km 7. B2 8. D
 9. a) $35a^2 + 76a + 32$ b) $-6x^2 + 7x - 2$ c) $-12a^2 + 14ab + 14b^2$ d) $2c^2 - 14cd + 15d^2 + 5$ e) $-3m^2 + 7mn - 10n^2$
 f) $10s^2 - 4s - st + 1$ 10. Wskazówka: należy na początku skorzystać ze wzoru na obwód prostokąta o bokach długości a i b : $Obw. = 2(a + b)$. 11. a) $k - 4, k - 3, k - 2, k - 1$ b) $7k, 7k + 7, 7k + 14, 7k + 21$ c) $2n + 10, 2n + 12, 2n + 14, 2n + 16, 2n + 18$ d) $2n - 7, 2n - 5, 2n - 3, 2n - 1, 2n + 1$ e) $100s + 10d + 4$ 12. I. $Obw. = 4a + 2b$; $P = 6ah$, II. $Obw. = y + \frac{2}{3}z$; $P = 1\frac{1}{2}xz$, III. $Obw. = 36d$; $P = 54\sqrt{3}d^2$ 13. Wskazówka: należy pamiętać, że dwie kolejne liczby naturalne podzielne przez 3 można zapisać w postaci $3a, 3a + 3$, gdzie a jest liczbą naturalną.

- Sprawdź, co umiesz!** 1. a) $42x^3y^5$ b) $-1\frac{3}{5}a^4b^6c^2$ 2. $2x^2 - 2x + 8$; 20 3. a) $-6a^2 + 9a$ b) $-2b^2 + 22ab - 6a$
 c) $-10a^2 + 13ab + 3b^2$ d) $4a^2 - 7ab - 3b^2 + 3$ 4. $12a^2 + 27a + 15$ 5. PF

2. Rozwiązywanie równań

- Ćwiczenia** 1. nie spełnia 2. a) $x = 1\frac{1}{7}$ b) $x = -\frac{1}{3}$ c) $x = -17$ 3. a) żadna liczba nie spełnia równania
 b) żadna liczba nie spełnia równania c) każda liczba spełnia równanie 4. a) $x = 13$ b) żadna liczba nie spełnia równania c) $x = -2\frac{6}{37}$

- Rozwiąż zadania** 1. a) spełnia b) nie spełnia c) nie spełnia d) spełnia e) nie spełnia 2. a) $x = -11$
 b) $x = \frac{4}{7}$ c) $x = 8$ d) $x = 2\frac{2}{5}$ e) $x = 8\frac{1}{2}$ f) $x = 31$ 3. a) $x = 1\frac{2}{3}$ b) $x = -1$ c) $x = 7$ d) $x = 4$ e) $x = -1$
 f) $x = -\frac{6}{13}$ 4. tożsamościowe - II i V; sprzeczne - III i IV 5. a) $x = -5$ b) $x = -\frac{1}{2}$ c) żadna liczba nie spełnia
 równania d) każda liczba spełnia równanie 6. Wskazówka: należy rozwiązać równanie i określić, ile liczb je spełnia.

- Sprawdź, co umiesz!** 1. a) 2 b) 0 i 2 2. a) $x = 14$ b) $y = 3$ c) żadna liczba nie spełnia równania
 d) każda liczba spełnia równanie e) $x = 1$ f) $x = 0$ g) $x = -5\frac{2}{3}$ h) -2 3. C

3. Zastosowanie równań w praktyce

- Ćwiczenia** 1. $12 \text{ cm} \times 19 \text{ cm}$ 2. pierwsza sala - 200, druga sala - 600, trzecia sala - 620 3. 36 4. 54

- Rozwiąż zadania** 1. 45 zł 2. $30 \text{ m} \times 90 \text{ m}$ 3. $30^\circ, 75^\circ, 75^\circ$ 4. Marek - 9 lat, Cezary - 14 lat, Kasia - 18 lat 5. 6 lat temu 6. AD 7. $110 = 80 + 30$ 8. AC 9. C 10. 850 zł 11. galaretki - 23 zł, pralinki - 39 zł 12. Nie istnieje. 13. 75 14. 41, 52, 63, 74, 85, 96

- Sprawdź, co umiesz!** 1. 16 2. C 3. FP 4. 30 normalnych, 50 ulgowych

4. Procenty w równaniach

Ćwiczenia 1. wrzesień i październik – po 48 zł, listopad – 24 zł, grudzień – 36 zł 2. Wskazówka: należy obliczyć, jaki procent ankietowanych wskazał pop jako ulubiony gatunek muzyki. 3. 36 4. 800 zł 5. 9 %

Rozwiąż zadania 1. $x = 64$ 2. 300 3. 600 zł 4. 800 zł 5. $8a - 20$ uczniów, $8b - 23$ uczniów, $8c - 19$ uczniów 6. 2000 zł 7. BD 8. C 9. 25 000 zł 10. 8,5 % 11. 50 g 12. 3,75 g 13. 25 14. Pola – 150, Zosia – 210, Ela – 168 15. 250 zł 16. 100 i 150 17. BC 18. pierwszy regał – 60, drugi regał – 57 19. PP 20. 36

Sprawdź, co umiesz! 1. $x = 150$ 2. pierwszy dzień – 40 km, drugi dzień – 48 km, trzeci dzień – 22 km 3. 22 4. B2 5. B

Sprawdź umiejętności

1. FP 2. D 3. $3a + b$ 4. a) $30a + 24b$ b) $-b + 23$ c) $-12a - 9ab + 17b$ d) $3x^2 + 6,6x + 8,5$
e) $-\frac{7}{25}y^2 - 2\frac{4}{5}y + 2\frac{1}{7}$ f) $-75x^2 + 26x + 13$ 5. nie spełnia 6. a) $x = -5,8$ b) żadna liczba nie spełnia równania c) $x = 0$ d) każda liczba spełnia równanie e) $x = 1\frac{6}{13}$ f) $x = -3$ 7. BD 8. $8 \text{ cm} \times 13 \text{ cm}$
9. Pola – 14 lat, mama – 42 lata, tata – 44 lata 10. $|\sphericalangle MNK| = 39^\circ$, $|\sphericalangle LMN| = 69^\circ$, $|\sphericalangle LKN| = 210^\circ$,
 $|\sphericalangle MLK| = 42^\circ$ 11. $P = 62$; a) tak b) $\sqrt{62}$ 12. 3,60 zł 13. 20 14. 150 zł 15. 240 g 16. 15 000 zł
17. 52 18. 4400 zł 19. 75 g

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. A 2. a) $-\frac{1}{9}x^2 - 6xy + 1$; $1\frac{89}{100}$ b) $9 - 25a^4$; $-47\frac{1}{4}$ 3. PP 4. a) $x = -2$ b) $x = \frac{26\sqrt{7}}{7}$ 5. $b = \frac{2}{3}$ 6. $k = \frac{6}{17}$
7. 115, 122, 129, 136 8. 38 9. 7 cm, 13 cm, 15 cm, 21 cm 10. 117 11. pan Jan – 60 km/h, pan Marek – 72 km/h 12. BC 13. w pierwszym zbiorniku – 14,375 l, w drugim zbiorniku – 12,5 l 14. 24
15. o 56,25 % 16. firma A – 8 000 zł, firma B – 12 000 zł 17. o 30 %

DZIAŁ IV. GRANIASTOSŁUPY

1. Graniastosłupy i ich rodzaje

Ćwiczenia 1. a) I. 10; IV. 20 b) I.; 7 IV. 12 c) I. 15; IV. 30 d) I. 5; IV. 10 2. Wskazówka: należy ułożyć równania, z których można wyznaczyć wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego oraz wysokość graniastosłupa prawidłowego pięciokątnego. 3. a) $4\sqrt{2} \text{ cm}$ b) $2\sqrt{13} \text{ cm}$ c) $2\sqrt{17} \text{ cm}$

Rozwiąż zadania 1. II. 2. a) liczba wierzchołków – 22, liczba ścian – 13, liczba krawędzi bocznych – 11, liczba krawędzi – 33 b) liczba wierzchołków – 34, liczba ścian – 19, liczba krawędzi bocznych – 17, liczba krawędzi – 51 c) liczba wierzchołków – 40, liczba ścian – 22, liczba krawędzi bocznych – 20, liczba krawędzi – 60 3. C 4. FPP 5. D 6. B., ponieważ liczba wierzchołków graniastosłupa jest dwa razy większa niż liczba krawędzi bocznych; D., ponieważ podstawą graniastosłupa czworokątnego prostego może być np. prostokąt; F., ponieważ przekątne graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego mają dwie różne długości 7. sześciokąt 8. 10,8 cm 9. a) Wskazówka: należy obliczyć długość krawędzi podstawy graniastosłupa, korzystając ze wzoru na pole kwadratu. b) $7\sqrt{3} \text{ cm}$ 10. 79,2 cm 11. $13\sqrt{2} \text{ cm}$
12. BC 13. a) 176 cm b) $12\sqrt{5} \text{ cm}$; $8\sqrt{13} \text{ cm}$ 14. Wskazówka: należy obliczyć długość krawędzi podstawy graniastosłupa, korzystając ze wzoru na pole kwadratu, a następnie obliczyć wysokość graniastosłupa, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

Sprawdź, co umiesz! 1. FP 2. A, D, E 3. AD 4. 112 cm

2. Siatki graniastosłupów

Ćwiczenia 2. 132 cm

Rozwiąż zadania 1. a) liczba ścian – 5, liczba wierzchołków – 6 b) liczba ścian – 6, liczba wierzchołków – 8 c) liczba ścian – 7, liczba wierzchołków – 10 2. I, II, IV 4. a) *Wskazówka*: długość krawędzi tego sześcianu wynosi 2,5 cm. b) *Wskazówka*: długość krawędzi tego sześcianu wynosi 3,5 cm. c) *Wskazówka*: długość krawędzi tego sześcianu wynosi 2 cm. d) *Wskazówka*: długość krawędzi tego sześcianu wynosi 3 cm. 5. *Wskazówka*: wymiary tego prostopadłościanu to 1,5 cm $\times$ 3 cm $\times$ 4,5 cm. 6. *Wskazówka*: wysokość tego graniastopuła wynosi 6 cm. 7. *Wskazówka*: w podanej skali krawędzie podstawy tego graniastopuła mają długości: 4 cm, 7,5 cm, 8,5 cm, a wysokość tego graniastopuła to 2,5 cm. 8. a) 160 cm b) $2\sqrt{89}$ cm; $2\sqrt{74}$ cm 9. nie

Sprawdź, co umiesz! 1. *Wskazówka*: krawędź boczna tego graniastopuła ma długość 5,5 cm. 2. *Wskazówka*: w podanej skali w tym graniastopu podstavą jest trapez prostokątny, którego podstawy mają długości 3 cm i 7 cm, ramiona mają długości 3 cm i 5 cm, a wysokość graniastopuła wynosi 2 cm. 3. BD

3. Pole powierzchni graniastopuła

Ćwiczenia 1. $P_c = (96 + 8\sqrt{3}) \text{ dm}^2$ 2. $P_c = (140 + 24\sqrt{74}) \text{ cm}^2$ 3. a) $P_c = 88\frac{2}{3} \text{ cm}^2$ b) $P_c = 9\frac{3}{8} \text{ cm}^2$

Rozwiąż zadania 1. a) $P_c = 190 \text{ dm}^2$ b) $P_c = (144 + 18\sqrt{3}) \text{ cm}^2$ c) $P_c = 6 \text{ m}^2$ d) $P_c = (204 + 48\sqrt{3}) \text{ dm}^2$ 2. Nie wystarczyło. 3. $P_c = (576 + 32\sqrt{3}) \text{ cm}^2$ 4. a) $P_c = 135 + 81\sqrt{3}$ b) $P_c = 119 + 70\sqrt{2}$ 5. $P_b = 484\sqrt{3} \text{ cm}^2$ 6. a) $P_c = 294 \text{ cm}^2$ b) $P_c = 150 \text{ m}^2$ c) $P_c = 192 \text{ dm}^2$ d) $P_c = 72 \text{ cm}^2$ 7. $P_c = 700 \text{ m}^2$ 8. $P_b = 126 \text{ cm}^2$ 9. $P_c = 728 \text{ dm}^2$ 10. $H = \sqrt{3}$ 11. a) $H = 3\sqrt{3} \text{ m}$ b) $P_c = 216\sqrt{3} \text{ m}^2$ 12. AD 13. D 14. 3 15. $P_c = 432$ 16. *Wskazówka*: należy zapisać iloraz wyrażenia opisującego pole powierzchni całkowitej danego graniastopuła przez wyrażenie opisujące jego pole boczne. 17. 2 cm, 3 cm

Sprawdź, co umiesz! 1. 511,20 zł 2. BD 3. B 4. $H = \frac{7\sqrt{3}}{6}$

4. Objętość graniastopuła

Ćwiczenia 1. $V = 1176 \text{ cm}^3$ 2. a) $V = 135 \text{ cm}^3$ b) $V = 0,064 \text{ cm}^3$ 3. 9 cm 4. $H = 8 \text{ cm}$ 5. a) 260 000 mm³ b) 0,26 dm³ c) 0,00026 m³ 6. *Wskazówka*: należy ułożyć równanie, z którego można wyznaczyć wysokość basenu.

Rozwiąż zadania 1. I. $V = 27\,000 \text{ cm}^3$ II. $V = 360\sqrt{3} \text{ cm}^3$ III. $V = 5400 \text{ cm}^3$ IV. $V = 270\sqrt{10} \text{ cm}^3$ 2. a) $V = 325 \text{ cm}^3$ b) $V = 352\sqrt{3} \text{ cm}^3$ 3. a) 6000 mm³; 1700 mm³ b) 28 000 dm³; 730 dm³ c) 13 000 000 cm³; 370 000 cm³ d) 2 000 000 000 m³; 12 500 000 m³ e) 248 l; 98,23 l f) 9000 ml; 3200 ml 4. a) 4 cm³; 0,00217 cm³ b) 6,2 m³; 0,0581 m³ c) 0,031 m³; 0,0000608 m³ d) 0,000053 km³; 0,00000000745 km³ e) 43 dm³; 8,93 dm³ f) 0,08 dm³; 0,1926 dm³ 5. Nie zmieści się. 6. AD 7. PF 8. 67,5 % 9. 326,4 g 10. $H = 6,5 \text{ m}$ 11. $V = 625\sqrt{5} \text{ cm}^3$ 12. a) $H = 2 \text{ cm}$, $P_b = 40\sqrt{3} \text{ cm}^2$ b) $H = 5 \text{ cm}$, $P_b = 150 \text{ cm}^2$ c) $H = 2\frac{1}{2} \text{ cm}$, $P_b = 85 \text{ cm}^2$ d) $H = 12,5 \text{ cm}$, $P_b = 200 \text{ cm}^2$ 13. $P_c = (108\sqrt{3} + 288) \text{ cm}^2$ 14. $H = 2,1 \text{ dm}$ 15. 26 cm 16. $V = 250 \text{ cm}^3$ lub $V = 256 \text{ cm}^3$

Sprawdź, co umiesz! 1. a) $V = 900 \text{ cm}^3$ b) $V = 2160 \text{ cm}^3$ c) $V = 2160 \text{ cm}^3$ d) $V = 8100 \text{ cm}^3$ 2. a) 8000 mm³; 400 mm³ b) 27 000 000 cm³; 5 160 000 cm³ c) 3 000 000 000 m³; 375 000 000 m³ d) 1,5 m³; 0,0081 m³ e) 693 l; 0,0008 l f) 1,81 dm³; 0,00926 dm³ 3. A2 4. BC

Sprawdź umiejętności

1. PFF 2. a) graniastopuł dziewięciokątny b) graniastopuł ośmiokątny c) graniastopuł dziesięciokątny d) graniastopuł siedmiokątny 3. C 4. 84 cm 5. $H = 2\sqrt{62} \text{ cm}$ 6. $P_c = 250 \text{ cm}^2$ 7. a) 57 cm b) $\sqrt{73} \text{ cm}$ c) $P_c = (72 + 32\sqrt{3}) \text{ cm}^2$ 8. $P_c = 108 \text{ cm}^2$, $V = 54\sqrt{2} \text{ cm}^3$ 9. B 10. $P_b = 4320 \text{ dm}^2$, $V = 129\,600 \text{ dm}^3$ 11. D 12. sześcián 13. AC 14. 23,52 kg 15. $H = 9 \text{ dm}$

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. C 2. Wskazówka: należy zastosować twierdzenie Pitagorasa. 3. a) $54\sqrt{5}$ dm b) $d = 6\sqrt{5}$ dm
4. 4 5. 14 cm 6. a) $P_c = (18 + 36\sqrt{3})$ cm² b) $P_c = (32\sqrt{3} + 192)$ dm² 7. $P_c = 7640$ cm²
8. a) $P_c = (600 + 600\sqrt{13})$ cm² b) $10\sqrt{13}$ cm 9. 1 dm × 1 dm × 8 dm; 1 dm × 2 dm × 4 dm;
2 dm × 2 dm × 2 dm – najmniejsze pole 10. B 11. 71 12. $V = 24\sqrt{3}$ cm³ 13. a) 115,5 l
a) tak, wystarczy 14. $\sqrt[3]{2}$ razy 15. $\frac{4}{25}$ 16. 3

DZIAŁ V. OSTROŚŁUPY

1. Ostrosłupy i ich rodzaje

- Ćwiczenia** 1. a) liczba wierzchołków 6; liczba ścian 6; liczba krawędzi 10 b) liczba wierzchołków 8; liczba ścian 8; liczba krawędzi 14 c) liczba wierzchołków 11; liczba ścian 11; liczba krawędzi 20 2. 20 cm
3. 150 cm

- Rozwiąż zadania** 1. I, V, VI 2. a) liczba wierzchołków 12; liczba ścian 12; liczba krawędzi bocznych 11; liczba krawędzi 22 b) liczba wierzchołków 21; liczba ścian 21; liczba krawędzi bocznych 20; liczba krawędzi 40
c) liczba wierzchołków 18; liczba ścian 18; liczba krawędzi bocznych 17; liczba krawędzi 34 3. 56 4. 38
5. a) 6 cm b) 3 cm 6. III i VI – ostrosłup prawidłowy czworokątny, IV – ostrosłup trójkątny, czworościan foremny 7. tak; czworościan foremny 9. 15 cm 10. a) 92 b) 132 c) $160 + 20\sqrt{3}$ 11. $H = 4\sqrt{2}$

- Sprawdź, co umiesz!** 1. PPF 2. 16 3. 69 cm 4. AD 5. $h = 2\sqrt{3}$ cm

2. Pole powierzchni ostrosłupa

- Ćwiczenia** 1. $P_c = 36\sqrt{3}$ cm² 2. $P_c = 800$ cm² 3. $h = 4$ cm

- Rozwiąż zadania** 1. a) $P_c = (9\sqrt{3} + 81)$ cm² b) $P_c = 144$ cm² c) $P_c = (54\sqrt{3} + 162)$ cm² 2. $h = 8\sqrt{3}$ cm,
 $P_c = (256 + 256\sqrt{3})$ cm² 3. $P_c = (8\sqrt{5} + 40)$ 4. $P_p = 16\sqrt{3}$ cm² 5. B 6. $P_c = 144$ cm² 7. $P_b = 12\sqrt{7}$ dm²
8. $h = 21$ cm 9. $P_c = (36\sqrt{3} + 144)$ cm² 10. $P_b = (16\sqrt{21} + 96)$ cm² 11. $P_c = (16 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{6})$ cm²
12. $h = 5\sqrt{3}$ 13. $h = 27$ cm 14. $P_c = (150\sqrt{3} + 100)$ cm² 15. nie wystarczy 16. $2\sqrt{3}$

- Sprawdź, co umiesz!** 1. a) $P_c = \left(\frac{81\sqrt{3}}{4} + 216\right)$ cm² b) $P_c = 369$ cm² 2. $P_c = (8\sqrt{34} + 80)$ 3. B 4. BD

3. Objętość ostrosłupa

- Ćwiczenia** 1. $V = 35$ cm³ 2. $H = 5$ cm 3. $V = 800$ cm³

- Rozwiąż zadania** 1. a) $V = 36\sqrt{3}$ m³ b) $V = 270$ dm³ c) $V = 160\sqrt{3}$ cm³ 2. a) $V = 288$ cm³ b) $V = 180$ cm³
c) $V = 36$ cm³ 3. $V = 24$ dm³ 4. 2,4 l 5. tak, wystarczy 6. $V = \sqrt{6}$ cm³ 7. $H = 7$ cm 8. $H = 15$ 9. 4 cm
10. $V = 80\sqrt{3}$ cm³ 11. $V = 96$ cm³ 12. Wskazówka: należy wyznaczyć wysokość trapezu, a następnie przyjąć, że $\sqrt{5} < 3$. 13. $V = \frac{133\sqrt{105}}{6}$ cm³ 14. $P_c = (36 + 36\sqrt{3})$ dm²

- Sprawdź, co umiesz!** 1. $V = 231$ m³ 2. B 3. a) $H = 4,5$ cm b) $H = 6\sqrt{3}$ cm 4. PP

Sprawdź umiejętności

1. C 2. a) ostrosłup jedenastokątny b) ostrosłup dziewięciokątny c) ostrosłup osiemnastokątny 3. FF
4. C 5. $P_c = 56$ cm² 6. $P_c = 36\sqrt{3}$ dm² 7. a) $V = 240\sqrt{3}$ b) $24\sqrt{6} + 66$ c) $P_b = 12\sqrt{582}$ 8. 0,56 kg
9. nie wystarczy 10. AD 11. A2 12. $6\sqrt{6}$ 13. $V = \frac{256\sqrt{3}}{3}$ cm³ 14. $H = 18\sqrt{2}$ cm

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. 14; ostrosłup trzynastokątny 2. *Wskazówka:* należy przyjąć założenie, że dany trójkąt może być ścianą boczną takiego ostrosłupa, a następnie obliczyć wysokość danego ostrosłupa. 3. $8\sqrt{7} + 2\sqrt{2} + 20$
4. $(12 + 12\sqrt{10})$ cm 5. $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ 6. $P_c = 128 + 128\sqrt{7}$ 7. $P_c = 81 + 81\sqrt{3}$ 8. *Wskazówka:* należy oznaczyć długości krawędzi prostopadłościanów literami: a, b, c , a następnie zapisać wyrażenia algebraiczne opisujące objętości obu ostrosłupów. 9. 179 m^2 10. $V = 486\sqrt{2} \text{ cm}^3$ 11. *Wskazówka:* należy pamiętać o tym, że wysokości trójkąta równobocznego przecinają się w punkcie, który dzieli każdą z nich w stosunku 2 : 1. 12. $15\sqrt{2} \text{ cm}$ 13. 79 g 14. BC 15. B 16. a) $V = 36\sqrt{3} \text{ cm}^3$ b) $(12\sqrt{5} + 24) \text{ cm}$

DZIAŁ VI. STATYSTYKA I WSTĘP DO KOMBINATORYKI

1. Odczytywanie i interpretowanie danych

Ćwiczenia 1. a) o 2051 b) o 20,51 p. p. c) o 64 % 2. a) od stycznia do lutego, od marca do kwietnia, od maja do czerwca, od lipca do sierpnia, od października do grudnia b) nigdy

Rozwiąż zadania 1. a) do Wrocławia b) 80 c) 20 % d) o 30 % 2. a) Szczecin, Gdańsk, Katowice b) w 4 c) Katowice, Gdańsk, Warszawa d) 70 % 3. a) śmietankowy b) tak c) 1,5 raza d) o 11 p. p. e) o 80 %
4. AD 5. FP 6. AD

Sprawdź, co umiesz! 1. a) koszykówka, piłka nożna, siatkówka b) 2 razy c) o 7 p. p. d) o 10 % 2. C
3. PP 4. B

2. Zbieranie i opracowywanie danych

Ćwiczenia 1. Gdańsk 45 %, Gdynia 2,5 %, Sopot 22,5 %, Kołobrzeg 15 %, Łeba 10 %, „inna miejscowość” 5 % 2. Z wykresu można odczytać np.: najwyższą i najniższą temperaturę w danym okresie; okres, w którym temperatura rosła oraz malała; o ile stopni temperatura wzrosła lub zmalała w danym okresie.

Rozwiąż zadania 1. b) sok pomarańczowy, sok jabłkowy, kompot domowy i napój owocowy c) o 100 %
2. a) 120 b) sprzęt elektroniczny – 42, gra komputerowa – 18 c) 42, 18, 30, 24, 6 3. b) 25.11.2022 r.; 7°C
4. b) liceum ogólnokształcące – 45 %, technikum – 25 %, szkoła branżowa – 15 %; „jeszcze nie wiem” – 15 %
5. a) 80 min

Sprawdź, co umiesz! 1. a) Np.: Ile dni Pola prowadziła obserwację? Jaki był największy przyrost długości łodygi podczas prowadzonej obserwacji? Ile wynosił przyrost łodygi między czwartym a piątym dniem?
b) po szóstym dniu 2. a) 45 %, 20 %, 35 %

3. Średnia arytmetyczna

Ćwiczenia 1. a) 16 b) $20\frac{1}{4}$ c) -1 d) $1\frac{1}{4}$ 2. 3,4 3. *Wskazówka:* należy obliczyć łączną liczbę punktów grupy I i grupy II. 4. 30,2 kg

Rozwiąż zadania 1. a) 21 b) $3\frac{3}{7}$ c) 3,315 d) $1\frac{1}{6}$ 2. a) 70 min b) 85 min 3. a) 10 b) 87 kWh 4. a) 24
b) 3,1 c) *Wskazówka:* należy skorzystać z tego, że jeśli chcemy obliczyć, o ile procent liczba a jest mniejsza od liczby b , to wykonujemy działanie: $\frac{b-a}{b} \cdot 100 \%$. 5. $x = 35$ 6. $k = 2,8$ 7. a) o 15 b) nie 8. *Wskazówka:* należy obliczyć czas przejazdu na obu odcinkach trasy.

Sprawdź, co umiesz! 1. 4 2. -8 3. B 4. 63 lata

4. Doświadczenia losowe

Ćwiczenia 1. a) (O, O, O), (O, O, R), (O, R, O), (O, R, R), (R, O, O), (R, O, R), (R, R, O), (R, R, R) b) (O, O, R), (O, R, O), (R, O, O) 2. *Wskazówka:* należy obliczyć minimalną liczbę sumy wyrzuconych oczek podczas 1000 rzutów. 3. a) 12 b) 3 4. 24; 6

Rozwiąż zadania 1. kolejno wierszami: (O, B), (O, N), (O, C), (O, F), (O, P); (R, Z), (R, B), (R, N), (R, C), (R, F), (R, P)
 2. a) nie b) 4 c) nie d) Ela – 2, Kuba – 0 3. 8 4. a) kolejno wierszami: (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 6), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 6), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 6) b) 4 c) *Wskazówka*: należy wypisać wszystkie wyniki, w których liczba oczek wyrzuconych za pierwszym razem jest większa od liczby oczek wyrzuconych za drugim razem. 5. 24 6. B 7. a) 13 b) 4 c) 8

Sprawdź, co umiesz! 1. (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) a) 15 b) 4 c) 15 2. PF 3. 12

5. Wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa

Ćwiczenia 1. a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 0 2. nie 3. 3

Rozwiąż zadania 1. a) $\frac{3}{11}$ b) $\frac{8}{11}$ c) $\frac{8}{11}$ 2. *Wskazówka*: należy obliczyć prawdopodobieństwo

wylosowania kuli białej z pierwszego pojemnika oraz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z drugiego pojemnika. 3. $\frac{7}{16}$ 4. a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{30}$ 5. $\frac{3}{7}$ 6. a) 2 b) 0 lub 1 c) co najmniej 3 7. a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{2}{15}$ 8. $\frac{8}{25}$

Sprawdź, co umiesz! 1. (O, O, O), (O, O, R), (O, R, O), (R, O, O), (O, R, R), (R, O, R), (R, R, O), (R, R, R); $\frac{1}{2}$
 2. $\frac{1}{3}$ 3. A3 4. BC

Sprawdź umiejętności

1. a) piłka nożna b) piłkę nożną c) piłka nożna, siatkówka i bieganie d) *Wskazówka*: należy zamienić ułamek $\frac{12}{96}$ na procent. 2. b) w trzecim, w czwartym, w piątym, w szóstym i w siódmym dniu c) pięciu
 3. FF 4. BC 5. 5 6. a) 10 b) 5 c) 4 d) 4 e) 1 7. a) 16 b) $\frac{3}{16}$ 8. C 9. FF 10. a) $\frac{3}{20}$ b) o $\frac{1}{30}$
 11. a) 3 b) 9

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. a) 150 g b) 6 razy więcej c) o 150 g 2. b) 5 km c) o 9.50 3. b) 45,5 c) 20 punktów – 15 %, 30 punktów – 30 %, 40 punktów – 15 %, 50 punktów – 25 %, 100 punktów – 15 % 4. o 71% 5. C 6. 5 7. 324
 8. a) $\frac{2}{45}$ b) $\frac{11}{45}$ 9. D 10. 7 11. a) $\frac{6}{27}$ b) $\frac{12}{27} = \frac{4}{9}$ 12. B

Powtórzenie

1. Liczby

Rozwiąż zadania 1. 9899 2. 300, 201, 210, 102, 120, 111 3. A3 4. Tak, jest. 5. FFP 6. 31 min 7. D
 8. C 9. PFP 10. a) 5 b) 5 11. AD 12. FP 13. FF 14. a) 400; 1300; 2700 b) 4,4; 13,8; 6,9 c) 9,19; 0,65; 0,78 15. a) 70; 150; 210 b) 1,2; 1,3; 2,8 c) 0,27; 0,17; 0,69 16. BC 17. a) 1, 3, 7, 21 b) 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 c) 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90 d) 1, 5, 25, 125 e) 1, 163 18. a) 0, 16, 32, 48, 64, 80, 96 b) 0, 43, 86, 129, 172, 215 19. a) 750, 555 b) 4536, 702 c) 4536, 3172 d) 1002, 750, 4536, 702 20. 1125
 21. $NWD(30, 48) = 6$, $NWW(30, 48) = 240$ 22. PP 23. 15 24. A 25. a) $A = -8$ b) $B = -3$; $C = 17$
 c) $D = -1\frac{7}{8}$; $E = 3\frac{1}{8}$ d) $F = -3,5$; $G = -2$; $H = -1$ 26. a) 3 b) -5 c) -84 27. a) $3\frac{2}{21}$ b) $1\frac{1}{4}$ c) $\frac{11}{15}$
 28. a) -18,225 b) 0,3 c) $1\frac{17}{64}$ d) 6 29. $\frac{1}{3}$ 30. 22,56 zł 31. $\frac{5}{6}$ 32. FP 33. a) 811 b) 1976 c) 2559 d) 444
 34. B 35. B

2. Procenty

Rozwiąż zadania 1. FP 2. o 9.47 3. a) 28 km; 105 km b) 1h 30 min 4. 0,75 km 5. orzechy – 150 g, rodzynki – 350 g 6. BC 7. a) 0,2; 0,09; 1,5 b) 0,35; 0,02; 0,083 c) 0,125; $\frac{1}{30}$; $\frac{2}{9}$ 8. a) 26 %; 9 %; 232 % b) 30 %; 180 %; 0,7 % c) $66\frac{2}{3}$ %; $44\frac{4}{9}$ %; $116\frac{2}{3}$ % 9. a) 10 % b) 40 % 10. PF 11. BD 12. B3 13. 25 14. 250 zł 15. 15,70 zł 16. 9 17. a) 35 % b) 350 % c) 20 % 18. 720 zł 19. 12 000 zł 20. 6 % 21. C 22. 20 % 23. 7 % 24. C 25. o 30 % 26. a) 30 % b) o 100 % 27. a) 375 ml b) o 40 % c) nie; Wskazówka: należy obliczyć, ile mililitrów soku pomarańczowego jest w jednej takiej butelce. 28. a) o 50 % b) o $33\frac{1}{3}$ %

3. Potęgi

Rozwiąż zadania

1. a) 64 b) 10 000 000 c) 256 d) -243 e) -16 f) $\frac{1}{49}$ g) $5\frac{1}{16}$ h) 0,1 i) -1,728 j) -0,25 k) $6\frac{1}{4}$ l) 1 2. D 3. a) $(\frac{1}{2})^{10}$ b) $(0,3)^{15}$ c) $(-12)^3$ d) -111^4 e) $(-36)^9$ f) 10^6 g) $(-10)^{11}$ h) $(1\frac{1}{2})^7$ i) 25^{12} j) $(-39,2)^{13}$ k) -8^{15} l) 9^{60} 4. AD 5. PF 6. a) 4^{11} b) 3^9 7. B3 8. a) 36 b) 81 c) 625 d) -64 e) 27 f) 8 9. D 10. D 11. a) 2^8 b) 3^{11} c) 11^9 12. a) Wskazówka: należy wyłączyć wspólny czynnik przed nawias (7^4). b) Wskazówka: należy wyłączyć wspólny czynnik przed nawias (4^6). c) Wskazówka: należy wyłączyć wspólny czynnik przed nawias (2^5). 13. BC 14. a) -3 b) -2 c) 6 d) 5 e) 4 f) 9 g) -3 h) 0 15. C 16. $1,8 \cdot 10^{21}$ 17. $6,5 \cdot 10^7$ razy 18. a) $9,6 \cdot 10^5$ b) $5,6 \cdot 10^6$ c) $7,4 \cdot 10^{-2}$ d) $1,2 \cdot 10^{-4}$ e) $6,4 \cdot 10^{-2}$ f) $1,26 \cdot 10^5$ g) $4,608 \cdot 10^4$ h) $2,5 \cdot 10^{-3}$ i) $1 \cdot 10^{-2}$ j) $1,2 \cdot 10^2$

4. Pierwiastki

Rozwiąż zadania 1. a) 7 b) 11 c) 3 d) 6 2. a) 40 b) 0,8 c) $2\frac{2}{5}$ d) 7 e) 0,3 f) $1\frac{3}{5}$ 3. a) $2\frac{5}{6}$ b) $-\frac{7}{30}$ c) $2\frac{1}{12}$ d) 2,7 e) $-\frac{2}{9}$ f) -1 4. a) 5 b) 21 c) 26 d) $\sqrt{6}$ e) $-1\frac{1}{6}$ f) 105 g) 0,5 h) -0,6 5. BC 6. a) $6\sqrt{7}$ b) $24\sqrt{3}$ c) $10\sqrt[3]{3}$ d) $6\sqrt[3]{5}$ 7. a) $\sqrt{245}$ b) $\sqrt{1,35}$ c) $\sqrt[3]{1,5}$ d) $\sqrt[3]{70}$ 8. a) 4,9 b) 24,5 c) 1,225 9. nie 10. a) $-26\sqrt{2}$ b) $21\sqrt{6}$ c) $3\sqrt{11}$ 11. a) jest b) jest c) jest 12. C 13. BC 14. a) $4\sqrt{2}$ b) $7\sqrt{22}$ c) $5\sqrt{15}$ d) $\frac{5\sqrt{7}}{21}$ e) $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ 15. B 16. AC 17. Wskazówka: należy wyłączyć czynniki przed znaki pierwiastków. 18. PF 19. AD 20. FP 21. AD 22. C

5. Wyrażenia algebraiczne

Rozwiąż zadania 1. AD 2. a) $9a - 11b - 5$ b) $-6ab - 22b$ c) $-17ef^2 - 10e^2f$ d) $22x^2 - 0,5x - 12$ e) $-1,75xy - 0,5x$ f) $1\frac{2}{5}t^2u + 6\frac{5}{9}u - 3\frac{1}{5}tu^2 + 1\frac{2}{5}$ 3. Wskazówka: należy liczbę 0,6 przedstawić w postaci ułamka zwykłego, a liczbę $1\frac{2}{3}$ zamienić na ułamek niewłaściwy. 4. C 5. a) $-28x^2$ b) $\frac{14}{c^3}$ c) $-8 + 2z^2$ d) $\frac{1}{2}y - 3a$ e) $(g+z)^2$ f) $x^2 + (\frac{1}{2}y)^2$ 6. D 7. a) $3z + 4$ b) $3d^2 - 9d + 5$ c) $4z - 8$ 8. a) $3x + 3y$ b) $-12g^2 + 20g$ c) $40ab - 45b^2$ d) $6x - 2x^2$ e) $4x + 3$ f) $22y + 10$ 9. C 10. a) $10x - 2y - 6$ b) $4k + 8l - 3$ c) $-x + 7$ 11. a) $7x^2 + 9x + 10$; 56 b) $18x^2y - 12xy - 9y^2$; 12,75 c) $3xy + y^2 + 1$; $\frac{1}{25}$ d) $-10x^2y$; 33 12. l. $P = 15b^2 - 4b$; $P = 0,8 \text{ dm}^2$, ll. $P = 7,5y^2 + 10y$; $P = 2,3 \text{ m}^2$ 13. a) $-x^2 + 10xy - 24y^2$ b) $12a^2 - 22ab + 6b^2$ c) $32s^4 - 18$ d) $4y^2 - 16y + 16$ 14. $P = 3a^2 + 5,5a + 1,5$; $P = 142,5 \text{ cm}^2$ 15. PF 16. D 17. PP 18. C 19. a) 26 b) 41 c) $5n + 1$

6. Równania

Rozwiąż zadania 1. a) 1 spełnia, -1 nie spełnia b) -2 nie spełnia, -3 spełnia 2. D 3. D 4. a) $x = 9$ b) $x = 5$ c) $x = 2$ d) $x = 3,5$ e) $x = -16\frac{1}{4}$ f) $x = -2$ g) każda liczba spełnia równanie h) żadna liczba nie

spełnia równania 5. PF 6. I pojemnik – 6 l, II pojemnik – 24 l 7. 472 zł 8. 120 9. 35 10. 15 min
 11. a) $13,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ b) o 4 min 12. 18,2 cm; 18,2 cm; 14,5 cm 13. 123° 14. 30 cm 15. ulgowy: 108 zł,
 normalny: 120 zł 16. 45 i 64 17. I liczba – 64, II liczba – 56, III liczba – 48 18. 144 zł 19. $3\frac{1}{3} \text{ cm} \times 5\frac{1}{3} \text{ cm}$
 20. 30 21. 16 22. Wskazówka: należy ułożyć odpowiednie równanie, rozwiązać je, a następnie uzasadnić,
 że liczba bułek musi być wyrażona liczbą naturalną. 23. liczba banknotów 20-złotowych: 8,
 liczba banknotów 50-złotowych: 21 24. $16 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$ 25. $9,8 \text{ cm} \times 28,8 \text{ cm}$ 26. 3 i 4,5
 27. $Obw. = 50 \text{ cm}$ 28. 10,8 % 29. 0,7 kg 30. a) $b = a \cdot c$ b) $k = 2m + l$ c) $a = \frac{c^2}{3b}$ d) $u = \frac{4}{w} - 5$
 e) $b = \sqrt{\frac{a+c}{3c}}$ f) $z = 4w(t-c) - c$

7. Figury płaskie

Rozwiąż zadania 1. a) $b \parallel f$; $a \parallel c$ b) $a \perp d$; $d \perp c$; $b \perp e$; $e \perp f$ 2. $|PS| = 6 \text{ cm}$, $|SQ| = 15 \text{ cm}$ 3. 36° , 144°
 4. 70° , 110° 5. a) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 30^\circ$ b) $\alpha = 50^\circ$ c) $\alpha = 20^\circ$, $\beta = 70^\circ$ c) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 110^\circ$ 6. BD 7. a) $\alpha = 98^\circ$
 b) $\alpha = 75^\circ$ c) $\alpha = 20^\circ$ d) $\alpha = 20^\circ$ 8. 36° , 36° , 108° 9. a) 50° , 65° , 65° b) 35° , 40° , 105° 10. 80° 11. C
 12. Wskazówka: suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180° . 13. a) 80° b) 42° 14. A
 15. a) tak b) nie c) tak d) nie 16. FF 17. a) $|AB| = 6\sqrt{2} \text{ dm}$ b) $|AB| = |BC| = 10 \text{ dm}$ c) $|BC| = 13 \text{ cm}$
 d) $|BC| = 10\sqrt{3} \text{ cm}$ 18. A2 19. a) $Obw. = 36$ b) $Obw. = 20\sqrt{3}$ c) $Obw. = 32\sqrt{2}$ 20. $Obw. = (10 + 6\sqrt{5}) \text{ cm}$
 21. C 22. 1 : 300 23. PF 24. a) $h = 6\sqrt{3}$ b) $h = 9$ c) $h = \frac{21\sqrt{5}}{2}$ 25. BD 26. a) $P = 76 \text{ cm}^2$
 b) $|BC| = 4\sqrt{5} \text{ cm}$ 27. BD 28. a) $9\sqrt{2} \text{ cm}$, $9\sqrt{2} \text{ cm}$, 18 cm b) $P = 81 \text{ cm}^2$ 29. Wskazówka: należy zauważyć,
 że trójkąt ABC jest trójkątem równoramiennym o wysokości $\frac{1}{2}b$ poprowadzonej do boku AB, a trójkąt ACD
 jest trójkątem równobocznym o boku b . 30. B 31. a) $|\angle ROP| = 72^\circ$, $|\angle OPQ| = 46^\circ$, $|\angle QRO| = 92^\circ$
 b) $|\angle NOK| = 70^\circ$, $|\angle KOL| = 110^\circ$, $|\angle LNM| = |\angle NLK| = 40^\circ$, $|\angle NMK| = |\angle MKL| = 30^\circ$ c) $|\angle HEF| = |\angle EFG| = 68^\circ$,
 $|\angle EHG| = |\angle HGF| = 112^\circ$ d) $|\angle DAB| = 36^\circ$, $|\angle DCB| = 50^\circ$, $|\angle ABC| = 130^\circ$, $|\angle ADC| = 144^\circ$ 32. C
 33. a) $P = 240 \text{ cm}^2$ b) $h = 14\frac{2}{17} \text{ cm}$ 34. a) 4,05 kg b) 5616 kg 35. D 36. a) $Obw. = 90 \text{ cm}$,
 $P = 390 \text{ cm}^2$ b) 37 cm 37. BC 38. PP 39. tak 40. a) $S = (-5, -2)$ b) $S = (-2, 22)$ 41. AD 42. $P = 7\frac{1}{2}$,
 $Obw. = 3 + 5\sqrt{2} + \sqrt{5}$

8. Bryły

Rozwiąż zadania 1. AC 2. 4 razy 3. C 4. PP 5. a) $V = 300 \text{ cm}^3$; $P_b = 240 \text{ dm}^2$ b) $V = 90\sqrt{3} \text{ dm}^3$,
 $P_b = 180 \text{ cm}^2$ 6. a) $H = 12 \text{ cm}$ b) $H = 7 \text{ cm}$ 7. 10 cm 8. $V = 40 \text{ cm}^3$, $P_c = 88 \text{ cm}^2$ 9. 3 10. a) $x = 8 \text{ cm}$
 b) 446,4 g 11. $V = 192 \text{ dm}^3$ 12. $P_c = 1080 \text{ cm}^2$, $V = 1680 \text{ cm}^3$ 13. sześcián; o 7 cm^3 14. BC
 15. $V = 512 \text{ cm}^3$ 16. $P_c = 510 \text{ cm}^2$, $P_c = 590 \text{ cm}^2$ 17. FP 18. a) $P_c = (50\sqrt{3} + 120) \text{ cm}^2$, $V = 100\sqrt{3} \text{ cm}^3$
 b) $P_c = 210 \text{ cm}^2$, $V = 150 \text{ cm}^3$ 19. $P_c = 150\sqrt{3} + 200$, $V = 250\sqrt{3}$ 20. 1848 cm^3 21. cztery, $1 \times 1 \times 12$
 22. $7,5 \text{ m}^3$ 23. $1,08 \text{ m}^3$ 24. PF 25. o 11 26. $P_c = 7\sqrt{3}$ 27. $P_c = 196\sqrt{3}$ 28. a) $P_c = 1764$
 b) $P_c = \frac{675\sqrt{3} + 225\sqrt{91}}{2}$ 29. BC 30. $H = 10$ 31. B 32. tak 33. 15,4 dag

9. Statystyka i rachunek prawdopodobieństwa

Rozwiąż zadania 1. 15 2. 21 lat 3. AD 4. 29 5. 14 6. 42 7. a) 2 razy b) 85 % c) tak d) o 50 %
 e) o 15 p. p. 8. a) 17 hPa b) 15 maja 2023 r. c) o 0,5 % 9. FF 10. a) 18 % b) 800 zł c) 120 zł d) o 88 zł
 e) o 20 % 11. a) 14 b) tak c) 8a 12. 18 13. a) 12 b) 4 c) 5 14. 12 15. B 16. $\frac{1}{7}$ 17. $\frac{3}{8}$ 18. B
 19. BC 20. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 0 21. a) $\frac{6}{27}$ b) $\frac{8}{29}$ 22. a) Wskazówka: należy wyznaczyć wszystkie możliwe
 różnice wynoszące co najwyżej 5. b) Wskazówka: należy sprawdzić, jaki jest największy iloczyn liczby oczek,
 który możemy otrzymać w dwóch rzutach kostką do gry.

DZIAŁ VIII. KOMBINATORYKA I RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

1. Reguła mnożenia i dodawania.

Ćwiczenia 1. 35 2. a) 100 000 b) 30 240 3. *Wskazówka:* należy pamiętać, że ostatnia cyfra liczby podzielnej przez 5 to 0 lub 5. 4. a) 31 b) 20 5. a) 240 b) 20

Rozwiąż zadania 1. 15 2. 168 3. 12 4. 210 5. *Wskazówka:* należy pamiętać, że osoby w jednym rzędzie nie mogą się powtarzać. 6. 2880 7. 6561 8. *Wskazówka:* należy pamiętać, że pierwsza cyfra jest stała oraz należy zastosować regułę mnożenia. 9. a) 36 b) 30 c) 18 d) 9 10. 6 11. a) 25 b) 17 c) 8 12. a) 6 b) 9 13. 21 14. a) 28 561 b) 26 15. 18 16. a) 102 b) 56

Sprawdź, co umiesz! 1. 24 2. a) 16 b) 8 3. a) 30 b) 25 c) 6 d) 15 4. FP 5. B

2. Obliczanie prawdopodobieństwa

Ćwiczenia 1. $\frac{5}{9}$ 2. a) $\frac{16}{81}$ b) $\frac{1}{6}$ 3. $\frac{53}{98}$

Rozwiąż zadania 1. $\frac{1}{9}$ 2. a) $\frac{1}{20}$ b) $\frac{7}{30}$ c) $\frac{0}{240}$ 3. a) $\frac{27}{98}$ b) $\frac{51}{98}$ 4. a) $\frac{5}{24}$ b) $\frac{13}{24}$ 5. $\frac{7}{22}$ 6. a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{12}$ 7. $\frac{3}{10}$ 8. $\frac{3}{8}$; Tak, zmieni się. 9. a) $\frac{3}{51}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{19}{34}$ 10. $\frac{12}{25}$

Sprawdź, co umiesz! 1. a) $\frac{3}{7}$ b) $\frac{4}{7}$ 2. a) $\frac{4}{25}$ b) $\frac{1}{7}$ 3. PF 4. B

Sprawdź umiejętności

1. 12 2. a) 8 b) 7 3. a) 168 b) 105 4. a) 60 b) 107 c) 0 d) 3 5. 24 6. 84 7. a) 12 b) 32 c) 16 8. $\frac{1}{4}$ 9. a) 729 b) $\frac{1}{9}$ 10. FF 11. a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ 12. B 13. B 14. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{15}$ 15. B

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. a) 1 b) 507 c) 8 2. a) 100 b) 374 c) 300 d) 54 3. D 4. a) $\frac{8}{45}$ b) $\frac{22}{45}$ 5. AD 6. 56, $\frac{7}{8}$ 7. 14, $\frac{6}{17}$ 8. C 9. *Wskazówka:* należy ustalić i porównać prawdopodobieństwa obu zdarzeń. 10. $\frac{23}{25}$ 11. a) $\frac{3}{56}$ b) $\frac{15}{28}$ c) $\frac{4}{7}$ d) $\frac{3}{28}$

DZIAŁ IX. DŁUGOŚĆ OKRĘGU I POLE KOŁA

1. Długość okręgu

Ćwiczenia 1. a) 16π cm b) 7π dm c) $0,8\pi$ m 2. a) 20π cm $\approx 62,8$ cm b) $5,6\pi$ m $\approx 17,584$ m c) $\frac{1}{8}\pi$ dm $\approx 0,3925$ dm 3. a) 12 cm b) $8\sqrt{3}$ m c) $\frac{50}{\pi}$ dm d) $\frac{5}{8\pi}$ km

Rozwiąż zadania 1. a) 16π cm b) $1\frac{3}{4}\pi$ dm c) $2,4\pi$ dm d) $4\sqrt{2}\pi$ m 2. a) $12\pi \approx 36$ cm b) $30\pi \approx 93$ mm c) $1,6\pi \approx 5,024$ dm 3. a) 4π cm b) $3,4\pi$ m c) $3\frac{1}{3}\pi$ mm d) $6\sqrt{3}\pi$ dm 4. a) 8π km $\approx 25,12$ km b) $1,4\pi$ m $\approx 4,4$ m c) 42π mm ≈ 132 mm 5. a) 5 mm b) 8,5 m c) $3\sqrt{5}$ cm d) $\frac{20}{\pi}$ dm 6. a) 4 cm b) 0,7 dm c) $4\sqrt{7}$ km d) $\frac{50}{\pi}$ m 7. 8 cm 8. tak 9. 8π 10. 744 cm 11. a) o 8π cm b) 2 razy 12. a) 7,2 m b) 500 13. 840 14. 7,5 dm 15. $12\sqrt{3}$

Sprawdź, co umiesz! 1. kolejno wierszami: 2,4; $2,4\pi$; $8\sqrt{3}$; $8\sqrt{3}\pi$; 22,5; 45π ; 12; 24; 0,8; $1,6\pi$; $\frac{0,3}{\pi}$; $\frac{0,6}{\pi}$ 2. B 3. 77,1 cm 4. 150,72 cm

2. Pole koła

Ćwiczenia 1. a) $P = 100\pi \text{ cm}^2$ b) $P = 6\frac{1}{4}\pi \text{ dm}^2$ c) $P = 0,25\pi \text{ m}^2$ 2. a) $P = 9\pi \text{ cm}^2 \approx 28,26 \text{ cm}^2$

b) $P = 20,25\pi \text{ dm}^2 \approx 63,585 \text{ dm}^2$ c) $P = 0,16\pi \text{ m}^2 \approx 0,5024 \text{ m}^2$ 3. a) 5 cm b) $\frac{1}{3}\text{ cm}$ c) $\frac{15\sqrt{\pi}}{\pi} \text{ m}$ d) $\frac{0,9\sqrt{\pi}}{\pi} \text{ m}$
4. $28\pi \text{ cm}$

Rozwiąż zadania 1. a) $P = 49\pi \text{ dm}^2 \approx 153,86 \text{ dm}^2$ b) $P = \frac{1}{16}\pi \text{ m}^2 \approx \frac{11}{56} \text{ m}^2$ c) $P = 8\pi \text{ km}^2 \approx 24 \text{ km}^2$

2. a) $P = 4\pi \text{ cm}^2 \approx 12,56 \text{ cm}^2$ b) $P = 2,56\pi \text{ dm}^2 \approx 7,936 \text{ dm}^2$ c) $P = 80\pi \text{ dm}^2 \approx 240 \text{ dm}^2$

3. a) $P = 1024\pi \text{ cm}^2$ b) $P = 67,24\pi \text{ m}^2$ c) $P = 3\pi \text{ dm}^2$ d) $P = \frac{9}{25\pi} \text{ km}^2$ 4. a) 8 cm b) $\frac{2}{3} \text{ mm}$ c) $\frac{10\sqrt{\pi}}{\pi} \text{ cm}$

d) $\frac{1,4\sqrt{\pi}}{\pi} \text{ m}$ 5. a) $30\pi \text{ cm}$ b) $2\frac{4}{5} \text{ mm}$ c) $2,2\pi \text{ dm}$ d) $4\sqrt{2}\pi \text{ dm}$ 6. 36 7. tak 8. $16,5 \text{ m}^2$ 9. 1 : 2

10. AC 11. a) $14\sqrt{2}\pi \text{ cm}$ b) $P = (98\pi - 196) \text{ cm}^2$ 12. o 1,14 m b) o $0,785 \text{ m}^2$ 13. Wskazówka: należy

skorzystać z twierdzenia Pitagorasa, a następnie obliczyć pola każdego półkola. 14. $\frac{10}{\pi}$ 15. Wskazówka:

należy wyznaczyć długość boku kwadratu, a następnie obliczyć pole tego kwadratu.

Sprawdź, co umiesz! 1. C 2. C 3. a) 18 cm b) nie można 4. BD

3. Pole pierścienia kołowego

Ćwiczenia 1. $P = 81\pi \text{ cm}^2$ 2. $P = 3 \text{ cm}^2$

Rozwiąż zadania 1. a) $P = 60\pi \text{ cm}^2$ b) $P = 16\pi \text{ cm}^2$ c) $P = 32\pi \text{ cm}^2$ 2. $P = 735\pi$ 3. $P = 64\pi$ 4. wyspa
środkowa - $P = 62,775 \text{ m}^2$; pas ruchu - $P = 217 \text{ m}^2$ 5. $P = 34,54 \text{ m}^2$ 6. $P = 9\pi$ 7. $P = 3,375\pi \text{ cm}^2$ 8. tak
9. Wskazówka: należy wyznaczyć długości promieni każdego z okręgów.

Sprawdź, co umiesz! 1. C 2. FP 3. $P = 108\pi \text{ cm}^2$

Sprawdź umiejętności

1. a) $26\pi \text{ cm}$ b) $\frac{9}{11}\pi \text{ m}$ c) $13,6\pi \text{ mm}$ d) $4\sqrt{2}\pi \text{ dm}$ 2. a) $24\pi \text{ cm}$, 72 cm b) 8,2π m, 25,42 m c) $15\pi \text{ dm}$,

47,1 dm 3. PF 4. Pola 5. a) tak b) nie. 6. a) $P = 144\pi \text{ mm}^2$ b) $P = 6,76\pi \text{ m}^2$ c) $P = \frac{4}{25}\pi \text{ dm}^2$

d) $P = 45\pi \text{ dm}^2$ 7. a) $P = 81\pi \text{ mm}^2 \approx 251,1 \text{ mm}^2$ b) $P = 12\pi \text{ m}^2 \approx 37,68 \text{ m}^2$ c) $P = \frac{49}{121}\pi \text{ dm}^2 \approx 1\frac{3}{11} \text{ dm}^2$

8. a) $P = 196\pi \text{ cm}^2$ b) $P = 0,16\pi \text{ m}^2$ c) $P = 48\pi \text{ mm}^2$ d) $P = \frac{25}{\pi} \text{ dm}^2$ 9. D 10. FP 11. B 12. B 13. 3

14. 6 cm 15. 72 m 16. AD

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. 383 m 2. nie 3. 19 razy 4. 42 m 5. a) $P = 9\pi^3$ b) $P = \frac{11k^2}{4}\pi$ c) $P = \frac{1}{\pi}$ 6. a) o 300 % b) o 44 %

7. FF 8. $4 - 2\sqrt{2}$ 9. a) $P = 1\frac{5}{8}\pi \text{ cm}^2$ b) $P = \pi \text{ cm}^2$ 10. $P = (32\pi - 64) \text{ cm}^2$ 11. a) 420 b) około 28 %

12. $P = 107,38 \text{ cm}^2$ 13. 1 lub $\sqrt{97}$ 14. 51 t

DZIAŁ X. SYMETRIE

1. Symetria osiowa. Figury osiowosymetryczne

Ćwiczenia 2. a) $A' = (-5, 2)$, $B' = (-1, 2)$, $C' = (-1, -2)$, $D' = (-5, -2)$ b) $A'' = (5, -2)$, $B'' = (1, -2)$, $C'' = (1, 2)$,
 $D'' = (5, 2)$

Rozwiąż zadania 1. flaga Francji – 2 osie symetrii, flaga Unii Europejskiej – 2 osie symetrii 2. B i B', D i D',
E i E 3. a) P b) KM c) K 5. a) F, G, J, L, N, P, Q, R, S, Z b) A, B, C, D, E, K, M, T, U, V, W, Y c) H, I, O, X

6. I, II, IV 7. a) 2 b) 4 9. a) $D = (0, 2)$, $E = (3, 2)$, $F = (3, -4)$ b) $K = (0, -2)$, $L = (-3, -2)$, $M = (-3, 4)$

Sprawdź, co umiesz! 1. $B \text{ i } J, M \text{ i } M, G \text{ i } C, F \text{ i } E$ 2. A 3. FF

2. Symetria środkowa. Figury środkowosymetryczne.

Ćwiczenia 1. a) C b) A c) Punkt spełniający warunek nie został zaznaczony. 2. a) prostokąt b) prosta c) kwadrat d) pięciokąt foremny

Rozwiąż zadania 1. a) S b) N c) Punkt spełniający warunek nie został zaznaczony. 3. C 5. $E = (-1, -1)$, $F = (-3, 1)$, $G = (-5, -1)$, $H = (-3, -3)$ 6. $S = (1, -4)$ 7. I, II, III, X, XIX 8. $K = (3, -1)$ 10. FF 11. a) A i H, B i F b) G i E; H i D c) B i F; A i D

Sprawdź, co umiesz! 1. $B \text{ i } G, D \text{ i } J, H \text{ i } C, F \text{ i } L$ 2. D 3. $B = (-2, -3)$ 4. a) OXO, ONO b) OCO, OWO, OXO, MAM

3. Symetralna odcinka i jej własności

Ćwiczenia 1. Tak, przecinają się w jednym punkcie. 2. W miejscu przecięcia symetralnej odcinka CD oraz drogi.

Rozwiąż zadania 1. III 4. W miejscu przecięcia symetralnej AB i skraju polany. Są dwa takie miejsca. 5. 70° 6. P i Q 7. $P = 60 \text{ cm}^2$ 8. $|BD| = 15 \text{ cm}$ 9. a) (4,5) b) C – tak, D – nie 10. $|AE| = 2\sqrt{21} \text{ cm}$ 11. $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$

Sprawdź, co umiesz! 2. AD 3. FF

4. Dwusieczna kąta i jej własności

Ćwiczenia 1. Tak, przecinają się w jednym punkcie. 2. $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$

Rozwiąż zadania 1. III 4. P 5. AC w kwadracie ABCD; PR i SQ w rombie PQRS 6. 120° 7. 5 cm 8. $|\sphericalangle MKL| = 30^\circ$, $|\sphericalangle KML| = 40^\circ$, $|\sphericalangle KLM| = 110^\circ$ 9. a) 110° b) 150° 10. Wskazówka: należy wykorzystać własności kątów naprzemianległych oraz kątów przyległych, a następnie wykorzystać własność dwusiecznej kąta.

Sprawdź, co umiesz! 2. $|\sphericalangle BAC| = 30^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 40^\circ$, $|\sphericalangle ACB| = 110^\circ$ 3. PP 4. C

Sprawdź umiejętności

1. I i IV 2. D 4. B 5. PF 6. B2 8. oś symetrii – II; środek symetrii – III 9. C 12. BC 13. $|\sphericalangle ABC| = 70^\circ$, $|\sphericalangle BCA| = 30^\circ$, $|\sphericalangle CAB| = 80^\circ$ 14. Wskazówka: należy wykorzystać własność kątów przyległych oraz własność dwusiecznej kąta.

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. FPP 2. 0 lub 1 lub 2 lub 4 3. 15.05 4. $Obw. = 20 \text{ cm}$, $P = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$; tak 6. $P = 8$ 8. $P = 12,5$ 9. PF 11. PF 12. Wskazówka: należy wykorzystać własność, że suma kątów przy jednym boku trapezu wynosi 180° oraz rozważyć sumę kątów wewnętrznych, np. trójkąta PBC i obliczyć kąt BPC.

Indeks

A

ar / 226

C

cecha przystawiania trójkątów bbb / 224

cecha przystawiania trójkątów bkb / 224

cecha przystawiania trójkątów kbk / 224

cechy podzielności liczb / 13, 30, 187

cięciwa / 264, 278

czworościan foremny / 130

Ć

ćwiartki układu współrzędnych / 43, 62

D

diagram słupkowy / 152, 159

długość odcinka / 52, 53, 62, 226

długość okręgu / 264, 265, 278

dodawanie pierwiastków / 26, 208

dodawanie sum algebraicznych / 69, 213

doświadczenie losowe / 169, 180, 242

dwusieczna kąta / 298, 302

dzielenie pierwiastków / 26, 30, 207

dzielenie sumy algebraicznej przez
liczbę / 70, 213

dzielnik liczby / 12, 187

F

figura osiowosymetryczna / 284, 302

figura środkowosymetryczna / 289, 290, 302

G

graniastosłup / 96, 122, 233

graniastosłup pochyły / 97, 122, 233

graniastosłup prawidłowy / 98, 122, 233

graniastosłup prosty / 97, 122, 233

H

hektar / 226

I

iloczyn potęg o jednakowych podstawach / 23,
30, 202

iloczyn potęg o tych samych wykładnikach / 23,
30, 203

iloraz potęg o jednakowych podstawach / 23,
30, 202

iloraz potęg o tych samych wykładnikach / 23,
30, 203

iloraz wielkości wprost proporcjonalnych / 195

J

jednomian / 68, 212

jednomian uporządkowany / 68, 212

jednomiany podobne / 68, 212

jednostki długości / 226

jednostki objętości / 216

jednostka osi liczbowej / 36

jednostki pola / 226

K

kartezjański układ współrzędnych / 41, 62, 226

kąt ostry / 222

kąt pełny / 222

kąt półpełny / 222

kąt prosty / 222

kąt rozwarty / 222

kąt wklęsły / 222

kąt wypukły / 222

kąt zerowy / 222

kąty naprzemianległe / 222

kąty odpowiadające / 222

kąty przyległe / 222

kąty wierzchołkowe / 222

kolejność wykonywania działań / 21, 30, 189

koło / 264, 278

kombinatoryka / 169, 248

krawędź boczna graniastosłupa / 96, 122, 233

krawędź boczna ostrosłupa / 128, 146, 235

krawędź podstawy graniastosłupa / 96, 122, 233

krawędź podstawy ostrosłupa / 128, 146, 235

kwadrat / 225

L

lewa strona równania / 74, 217

liczba całkowita / 186

liczba krawędzi bocznych
graniastosłupa / 96, 122

liczba krawędzi bocznych ostrosłupa / 128, 146

liczba krawędzi graniastosłupa / 96, 122

liczba krawędzi ostrosłupa / 128, 146
liczba naturalna / 12, 186
liczba niewymierna / 186
liczba odwrotna / 186
liczba pierwsza / 14, 188
liczba przeciwna / 186
liczba spełniająca równanie / 74, 217
liczba ścian graniastostupa / 96, 122
liczba ścian ostrosłupa / 128, 146
liczba wierzchołków graniastostupa / 96, 122
liczba wierzchołków ostrosłupa / 128, 146
liczba wymierna / 18, 186
liczba złożona / 14, 188
liczba / 264
litr / 117

M

mililitr / 117
mnożenie jednomianu przez sumę
algebraiczną / 70, 90, 213
mnożenie pierwiastków / 26, 30, 207
mnożenie sum algebraicznych / 70, 90, 213

N

najmniejsza wspólna wielokrotność (NWW) / 15, 30, 188
największy wspólny dzielnik (NWD) / 15, 30, 188
niewiadoma / 217
notacja wykładnicza / 24, 203

O

o ile procent mniej / 153, 197
o ile procent więcej / 153, 197
objętość graniastostupa / 114, 122, 234
objętość ostrosłupa / 141, 146, 235
objętość prostopadłościanu / 115, 234
objętość sześcianu / 115, 234
obliczanie liczby, gdy dany jest
jej procent / 197
obliczanie procentu danej liczby / 196
obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest
druga liczba / 196
odcinek jednostkowy / 36
odcinki prostopadłe / 222
odcinki równoległe / 222
odczytywanie liczb zapisanych w systemie
rzymskim / 9, 30, 189
odejmowanie pierwiastków / 26, 208

odejmowanie sum algebraicznych / 69, 213
odległość między liczbami na osi liczbowej / 36
odwrotność liczby / 186
odwrotność ułamka / 186
okrąg / 264
ostrosłup / 128, 146, 235
ostrosłup pochyły / 129, 146, 235
ostrosłup prawidłowy / 130, 146, 235
ostrosłup prosty / 129, 146, 235
oś liczbowa / 36
oś symetrii figury / 284, 302

P

pierścień kołowy / 274, 278
pierwiastek kwadratowy / 26, 207
pierwiastek równania / 217
pierwiastek sześcienny / 26, 207
początek osi / 36
początek układu współrzędnych / 41, 62, 226
podatek od odsetek / 83
podstawa graniastostupa / 96, 122, 233
podstawa ostrosłupa / 128, 146, 235
podstawa potęgi / 202
podział trójkątów ze względu na boki / 223
podział trójkątów ze względu na kąty / 223
pole koła / 269, 278
pole pierścienia kołowego / 274, 278
pole podstawy graniastostupa / 109, 122, 233
pole podstawy ostrosłupa / 136, 146, 235
pole powierzchni bocznej graniastostupa / 109, 122, 233
pole powierzchni bocznej ostrosłupa / 136, 146, 235
pole powierzchni całkowitej
graniastostupa / 109, 122, 233
pole powierzchni całkowitej ostrosłupa / 136, 146, 235
pole powierzchni całkowitej
prostopadłościanu / 110, 233
pole powierzchni całkowitej sześcianu / 110, 233
pole wielokąta liczone przez podział np. na
trójkąty / 58
pole wielokąta liczone przez uzupełnienie
do np. prostokąta / 58
potęga o wykładniku naturalnym / 23, 30, 202
potęgowanie pierwiastka / 26, 30, 207
potęgowanie potęgi / 23, 30, 203
prawa strona równania / 74, 217

prawdopodobieństwo / 175, 180, 242, 258
 procent / 195
 procentowy diagram kołowy / 152, 160
 promień okręgu / 264, 278
 promień wewnętrzny pierścienia / 274
 promień zewnętrzny pierścienia / 274
 proporcja / 195
 prostokąt / 225
 prostokątny układ współrzędnych / 41, 62, 226
 przekątna graniastosłupa / 99, 233
 przekątna podstawy graniastosłupa / 99, 233
 przekątna sześcianu / 233
 przekątna ściany bocznej
 graniastosłupa / 99, 233
 przekształcanie wzorów / 218
 punkt kratowy / 44, 62, 226
 punkty symetryczne względem osi / 286
 punkty symetryczne względem osi / 286
 punkty symetryczne względem prostej / 285,
 289, 302
 punkty symetryczne względem punktu / 289
 punkty współliniowe / 44, 62

R

redukcja wyrazów podobnych / 68, 212
 reguła dodawania / 248, 250, 251, 258
 reguła mnożenia / 248, 249, 251, 258
 romb / 225
 rozkład liczby na czynniki pierwsze / 14,
 30, 188
 rozwiązanie równania / 217
 rozwinięcie dziesiętne nieskończone
 okresowe / 18, 186
 rozwinięcie dziesiętne skończone / 18, 186
 równanie / 74, 217
 równanie pierwszego stopnia z jedną
 niewiadomą / 217
 równanie równoważne / 74, 217
 równanie sprzeczne / 75, 90, 218
 równanie tożsamościowe / 75, 90, 218
 równanie z jedną niewiadomą / 217
 równoległobok / 225

S

siatka graniastosłupa / 104
 siatka ostrosłupa / 131
 spodek wysokości ostrosłupa / 129, 146
 statystyka / 152

suma algebraiczna / 68, 212
 suma miar kątów w czworokącie / 225
 suma miar kątów w trójkącie / 223
 symetralna odcinka / 294, 302
 symetria względem prostej / 289, 302
 symetria względem punktu / 289, 302
 system rzymski / 8, 30, 189
 szacowanie pierwiastków / 208

Ś

ściana boczna graniastosłupa / 96, 122, 233
 ściana boczna ostrosłupa / 128, 146, 235
 średnia arytmetyczna / 164, 180, 241
 średnica okręgu / 264, 265, 278
 środek odcinka / 48, 62, 226
 środek okręgu / 264, 278
 środek symetrii figury / 289, 290, 302

T

trapez / 225
 trójkąt / 225
 trójkąt o kątach 45° , 45° , 90° / 224
 trójkąt o kątach 30° , 60° , 90° / 224
 trójkąt prostokątny / 225
 trójkąt równoboczny / 225
 twierdzenie Pitagorasa / 223

U

układ współrzędnych / 41, 62, 226
 usuwanie niewymierności
 z mianownika / 28, 208

W

wartość bezwzględna / 186
 warunek istnienia trójkąta / 223
 wielkości wprost proporcjonalne / 195
 wielokąt foremny / 98, 130, 225
 wielokrotność liczby naturalnej / 12, 187
 wierzchołek ostrosłupa / 128, 235
 włączanie czynnika pod znak pierwiastka / 207
 współczynnik liczbowy jednomianu / 212
 współrzędna punktu na osi liczbowej / 36
 współrzędna środka odcinka na osi
 liczbowej / 47
 współrzędna / 41, 62
 współrzędna / 41, 62
 wykładnik potęgi / 202
 wykres liniowy / 154, 161, 180

wyłączanie czynnika przed znak
 pierwiastka / 207
wyłączanie wspólnego czynnika
 przed nawias / 213
wynik doświadczenia losowego / 169, 180
wyraz skrajny / 195
wyraz środkowy / 195
wyrażenie algebraiczne / 68, 212
wysokość graniastosłupa / 97, 122, 233
wysokość ostrosłupa / 129, 146

Z

zamiana jednostek długości / 116, 226
zamiana jednostek objętości / 116
zamiana liczby na procent / 196
zamiana procentu na liczbę / 196
zaokrąglanie liczb / 189
zaokrąglenie z nadmiarem / 189
zaokrąglenie z niedomiarem / 189
zapisywanie liczb w systemie rzymskim / 8
zbiór liczb spełniających dany warunek / 38
zbiór rozwiązań równania / 217
zdarzenie niemożliwe / 176, 180, 242
zdarzenie pewne / 176, 180, 242
zmienna / 212
znak wartości potęgi / 20, 202
zwrot osi / 36

Źródła ilustracji i zdjęć:

Okładka: (dziewczyna) Master1305/Shutterstock.com; (abstrakcja) Mars0hod/Shutterstock.com.

Tekst główny: s. 6 (Zosia) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 6 (Bruno) carballo/Shutterstock.com; s. 6 (Cezary) VaLiza/Shutterstock.com; s. 6 (Kuba) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 6 (Ela) Roman Samborskyi/Shutterstock.com; s. 8 (pinezka) Alphavector/Shutterstock.com; s. 10 (Kościół Mariacki w Krakowie) Mikhail Markovskiy/Shutterstock.com; s. 11 (Muzeum Sztuki Antycznego) Amilat/Shutterstock.com; s. 16 (telefon) Zinetron/Shutterstock.com; s. 17 (taniec towarzyski) Roman Samborskyi/Shutterstock.com; s. 17 (taniec nowoczesny) maxbelchenko/Shutterstock.com; s. 21 (pinezka) Alphavector/Shutterstock.com; s. 23 (pinezka) Alphavector/Shutterstock.com; s. 26 (pinezka) Alphavector/Shutterstock.com; s. 25 (płetwal błękitny) Puspok/Shutterstock.com; s. 25 (rekin wielorybi) LuckyStep/Shutterstock.com; s. 31 (flaga USA) charnsitr/Shutterstock.com; s. 31 (flaga Unii Europejskiej) Ing. Andrej Kaprinay/Shutterstock.com; s. 31 (flaga Wielkiej Brytanii) OnlyFlags/Shutterstock.com; s. 31 (flaga Danii) Sakchai.K/Shutterstock.com; s. 39 (Bruno) carballo/Shutterstock.com; s. 39 (drzewa) denisik11/Shutterstock.com; s. 43 (René Descartes) Naci Yavuz/Shutterstock.com; s. 50 (Zosia) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 50 (Pola) ViDI Studio/Shutterstock.com; s. 55 (drzewa) Alexzel/Shutterstock.com; s. 55 (fontanna) Macrovector/Shutterstock.com; s. 55 (budynki, latarnie, światła, ławki, samochody, ulice, klomby) Alexzel/Shutterstock.com; s. 67 (mysz) my.ordinary/Shutterstock.com; s. 67 (pendrive) my.ordinary/Shutterstock.com; s. 67 (słuchawki) my.ordinary/Shutterstock.com; s. 71 (trasy rowerowe) Kostenyukova Nataliya/Shutterstock.com; s. 71 (Cezary) VaLiza/Shutterstock.com; s. 71 (Zosia) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 72 (Pola) ViDI Studio/Shutterstock.com; s. 78 (czytnik) Anatolir/Shutterstock.com; s. 81 (pralinki) Nataly Studio/Shutterstock.com; s. 81 (galaretki) Hong Vo/Shutterstock.com; s. 83 (Zosia) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 83 (karteczki) UnderhilStudio/Shutterstock.com; s. 85 (dron) PROFFIPhoto/Shutterstock.com; s. 85 (cena) minizen/Shutterstock.com; s. 86 (pałac Hofburg w Wiedniu) Sina Ettmer Photography/Shutterstock.com; s. 86 (Wiedeń z lotu ptaka) Nok Lek Travel Lifestyle/Shutterstock.com; s. 86 (pomnik w Wiedniu) Mistervlad/Shutterstock.com; s. 87 (laptop) Velishchuk Yevhen/Shutterstock.com; s. 87 (cena) minizen/Shutterstock.com; s. 87 (górski widok) biletskiyevgeniy.com/Shutterstock.com; s. 89 (naczynie) Wojciech Wójtowicz/WSiP; s. 108 (szafka) Viktorija Reuta/Shutterstock.com; s. 112 (Zosia) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 112 (farba) pics five/Shutterstock.com; s. 112 (deska) 1981 Rustic Studio kan/Shutterstock.com; s. 113 (akwarium) Yulia_Ogneva/Shutterstock.com; s. 117 (basen) doomu/Shutterstock.com; s. 119 (Bruno) carballo/Shutterstock.com; s. 119 (akwarium) Africa Studio/Shutterstock.com; s. 119 (Ela) Roman Samborskyi/Shutterstock.com; s. 119 (sok) Irina_Anashkevich/Shutterstock.com; s. 119 (słój) OLEG525/Shutterstock.com; s. 119 (butelka) OLEG525/Shutterstock.com; s. 126 (donica) Sukpaiboonwat/Shutterstock.com; s. 127 (kubek, ręka) agung saputra/Shutterstock.com; s. 127 (torebka herbaty) AIWD/Shutterstock.com; s. 129 (Leonhard Euler) Natata/Shutterstock.com; s. 133 (Ela) Roman Samborskyi/Shutterstock.com; s. 139 (Bruno) carballo/Shutterstock.com; s. 144 (doniczka) Elena Istomina/Shutterstock.com; s. 147 (model piramidy) Albert999/Shutterstock.com; s. 147 (tekstura granitu) Aliaksei Charapanau/Shutterstock.com; s. 150 (kryształ górski) Myriam B/Shutterstock.com; s. 151 (laptop) Pavlo Plakhotia/Shutterstock.com; s. 158 (drzewo) Wolfilser/Shutterstock.com; s. 158 (gałązka) Reinhold Leitner/Shutterstock.com; s. 158 (laptop) Visual Generation/Shutterstock.com; s. 159 (logo GUS) Główny Urząd Statystyczny; s. 161 (telefon) Zinetron/Shutterstock.com; s. 163 (fasola) Yuliya_vector/Shutterstock.com; s. 168 (Kuba) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 169 (moneta 5 zł) kavalenkava/Shutterstock.com; s. 170 (moneta 5 zł) kavalenkava/Shutterstock.com; s. 171 (zielona tablica) Rocco Herrmann/Shutterstock.com; s. 172 (moneta 5 zł) kavalenkava/Shutterstock.com; s. 173 (talia kart) Francesco Abrignani/Shutterstock.com; s. 177 (ośmiościenna kostka) Undorik/Shutterstock.com; s. 179 (moneta 5 zł) kavalenkava/Shutterstock.com; s. 179 (sześcienna kostka) GeniusKp/Shutterstock.com; s. 184 (kłódka) pikepicture/Shutterstock.com; s. 185 (dłoń) Forgem/Shutterstock.com; s. 185 (ołówki i notatnik) Dmitry Kovalchuk/Shutterstock.com; s. 191 (kartka z kalendarza) 32 pixels/Shutterstock.com; s. 191 (banknot 20 zł) reprodukcja; s. 191 (cena) minizen/Shutterstock.com; s. 194 (cena) minizen/Shutterstock.com; s. 194 (ser) Tanya Sid/Shutterstock.com; s. 194 (jabłko) GSDesign/Shutterstock.com; s. 0 (prędkościomierz) Brovko Serhii/Shutterstock.com; s. 199 (Zosia) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 199 (piłka) Richard Peterson/Shutterstock.com; s. 200 (opaska sportowa) Denis Faraktinov/Shutterstock.com; s. 201 (cena) minizen/Shutterstock.com; s. 201 (buty sportowe) wertinio/Shutterstock.com; s. 206 (telefon) Chaowat/iStock/Getty Images Plus; s. 206 (ryjkonos malutki) MerlinTuttle.org/East News; s. 216 (trójkąt z patyczków) SKT Studio/Shutterstock.com; s. 219 (pojemniki na wodę) Multigon/Shutterstock.com; s. 220 (domek) Ivengo/Shutterstock.com; s. 220 (park) Macrovector/Shutterstock.com; s. 220 (rowerzystka) Vec.Stock/Shutterstock.com; s. 231 (pszczoła) Daniel Prudek/Shutterstock.com; s. 237 (drewniana tekstura) wk1003mike/Shutterstock.com; s. 239 (drewniana tekstura) wk1003mike/Shutterstock.com; s. 239 (schody) amppopo/Shutterstock.com; s. 246 (Pola) Cookie Studio/Shutterstock.com; s. 246 (żeton) malinka_bond/Shutterstock.com; s. 246 (sześcienna kostka) Tomislav Forgo/Shutterstock.com; s. 246 (moneta 1 zł rewers) Małgorzata Kozioł/WSiP; s. 246 (moneta 1 zł awers) Małgorzata Kozioł/WSiP; s. 247

(maszyna losująca) Incomible/Shutterstock.com; s. 250 (ikony instrumentów) thanosquest/Shutterstock.com; s. 250 (telefon) Zinetron/Shutterstock.com; s. 253 (kostki do gry) Mine Eyes Design/Shutterstock.com; s. 253 (Cezary) VaLiza/Shutterstock.com; s. 260 (karty) Francesco Abrignani/Shutterstock.com; s. 264 (płyta winylo-
wa) Paperkites/iStock/Getty Images Plus; s. 264 (złota bransoletka) DskAlex/Shutterstock.com; s. 264 (dywan) fzelenok/Shutterstock.com; s. 265 (laptop) Chuenmanuse/Shutterstock.com; s. 268 (koło duże) bergamont/Shutterstock.com; s. 268 (koło małe) ilyarexi/iStock/Getty Images Plus; s. 268 (wazon) ANNA ZASIMOVA/Shutterstock.com; s. 268 (wstążka) ANNA ZASIMOVA/Shutterstock.com; s. 272 (tort) alexanderon/Shutterstock.com; s. 272 (polewa czekoladowa) alex_gor/Shutterstock.com; s. 272 (stół) primopiano/Shutterstock.com; s. 273 (pizza) AlexLab/Shutterstock.com; s. 275 (moneta 2 zł) Małgorzata Koziół/WSiP; s. 275 (moneta 5 zł) Małgorzata Koziół/WSiP; s. 276 (puszka farby) Irina Shats/Shutterstock.com; s. 276 (rozlana farba) Ravitaliy/iStock/Getty Images Plus; s. 276 (tace) backUp/Shutterstock.com; s. 281 (Big Ben) pxl.store/Shutterstock.com; s. 282 (bieżnia) jamongcreator/Shutterstock.com; s. 282 (trawnik) MR. BUDDEE WIANGNGORN/Shutterstock.com; s. 283 (król kier) Uglegorets/Shutterstock.com; s. 283 (as karo) KwangChanakarn/Shutterstock.com; s. 284 (kwiat) Quang Ho/Shutterstock.com; s. 284 (pinezka) Alphavector/Shutterstock.com; s. 285 (pinezka) Alphavector/Shutterstock.com; s. 286 (flagi Chorwacji, Czech i Francji) Olha Insight/Shutterstock.com; s. 286 (flaga UE) Ing. Andrej Kaprinay/Shutterstock.com; s. 289 (pinezka) Alphavector/Shutterstock.com; s. 289 (Bruno) carballo/Shutterstock.com; s. 290 (pinezka) Alphavector/Shutterstock.com; s. 296 (las) Alexzel/Shutterstock.com; s. 304 (karty) Francesco Abrignani/Shutterstock.com; s. 305 (zegar) Dimedrol68/Shutterstock.com.

Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne oświadczają, że podjęły starania mające na celu dotarcie do właścicieli i dysponentów praw autorskich wszystkich zamieszczonych utworów. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, przytaczając w celach dydaktycznych utwory lub fragmenty, postępują zgodnie z art. 27¹ ustawy o prawie autorskim. Jednocześnie Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne oświadczają, że jedynym podmiotem właściwym do kontaktu autorów tych utworów lub innych podmiotów uprawnionych w wypadkach, w których twórcy przysługuje prawo do wynagrodzenia.

Aktualność linków, które występują w tym podręczniku i odsyłają do zewnętrznych stron internetowych, została sprawdzona przed ich opublikowaniem (dostęp z dnia 09.02.2024 r.). Wydawnictwo nie ponosi odpowiedzialności za aktualność oraz zawartość tych stron lub stron, do których linki się tam znajdują.



**WYDAWNICTWA
SZKOLNE
i PEDAGOGICZNE**

wsip.pl

sklep.wsip.pl

infolinia: 801 220 555