

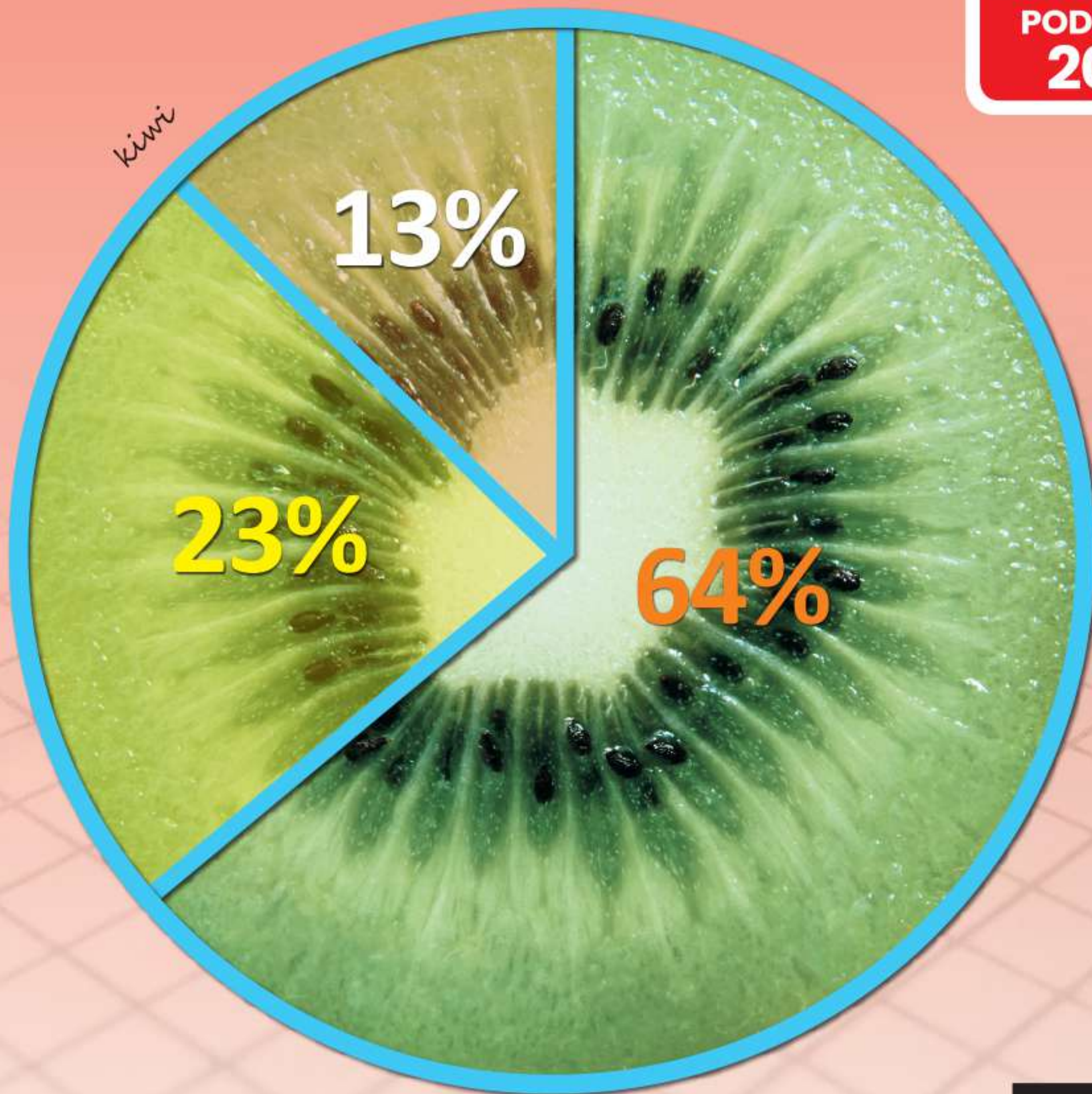
Matematyka *wokół nas*

podręcznik do szkoły podstawowej

Oznaczono
zmiany
i wykreślenia

E-book
na eduranga.pl

**PODSTAWA
2024**



Drogi WSiP,

Nigdy bym nie publikowała publicznie książek wydawnictw, które działają na uczciwych zasadach.

Wasza firma jednak promuje masowy dodruk, całkowicie niepotrzebnych książek, które mogłyby być zastąpione wersjami elektronicznymi!

Co prawda e-booki są dostępne na waszej stronie, jednak:

- W przeciwieństwie do fizycznej książki, licencja na e-book kończy się po roku. Oznacza to, że jeżeli moja córka chciałaby powtórzyć sobie całą wiedzę do matury, musiałabym jej kupić wszystkie wasze książki od nowa.
- Waszych e-booków nie da się pobrać! Wymagają one dostęp do internetu, co uniemożliwia ich użycie na naszej wsi, gdzie zasięg jest ograniczony.
- Wasze e-booki nie działają na telefonach komórkowych!
- Wasze e-booki sprzedawane są po tej samej (albo wyższej) cenie co regulame książki. Cena e-booka powinna być niższa, gdyż e-booki wymagają elektronicznego czytnika (tabletu)!

Czas rozpocząć nową erę, w której papier nie jest bezczelnie marnowany dla pieniędzy. Przedstawiam e-book, który spełnia wszystkie oczekiwania uczniów.

Dbajmy o środowisko, zróbmy to dla młodych pokoleń.

SPIS TREŚCI

Jak korzystać z podręcznika	6
-----------------------------------	---

I. Ułamki zwykłe i dziesiętne

1. Działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych.....	7
2. Kolejność wykonywania działań.....	12
3. Rozwinięcia dziesiętne ułamków.....	16
4. Przybliżenia dziesiętne	20
Zadania utrwalające	25
Zadania sprawdzające	28
Sport i ułamki dziesiętne – infografika	30

II. Procenty

1. Pojęcie procentu	32
2. Obliczanie procentu danej liczby	37
3. Obliczanie liczby, gdy dany jest jej procent	42
4. Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba	45
5. Obliczenia procentowe w praktyce.....	49
Zadania utrwalające	54
Zadania sprawdzające	56
Procenty w banku – infografika	58

III. Figury płaskie

1. Wzajemne położenie prostych i odcinków	60
2. Kąty i ich rodzaje.....	64
3. Kąty przyległe i wierzchołkowe	68
4. Dwie proste równoległe przecięte trzecią prostą	73
5. Trójkąty, część 1.....	78
6. Trójkąty, część 2.....	84
7. Przystawianie trójkątów	87
8. Pole figury, jednostki pola	94
9. Pole trójkąta	97
10. Czworokąty, część 1	101
11. Czworokąty, część 2.....	106
12. Pola czworokątów	110
13. Inne wielokąty	118
Zadania utrwalające	123
Zadania sprawdzające	128
Pole powierzchni a projekt pokoju – infografika	130

IV. Liczby wymierne

1. Oś liczbowa, pojęcie liczby wymiernej	132
2. Porównywanie liczb wymiernych	135
3. Dodawanie i odejmowanie liczb wymiernych.....	139

4. Mnożenie i dzielenie liczb wymiernych	145
5. Działania na liczbach wymiernych	150
6. Potęga o wykładniku naturalnym	152
7. Pierwiastki	156
Zadania utrwalające	161
Zadania sprawdzające	162

V. Rachunek algebraiczny

1. Wyrażenia algebraiczne.....	164
2. Wartość liczbową wyrażenia algebraicznego.....	169
3. Suma algebraiczna	172
4. Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych	176
5. Mnożenie sumy algebraicznej przez liczbę	179
6. Wyłączanie wspólnego czynnika liczbowego przed nawias	182
Zadania utrwalające	184
Zadania sprawdzające	186

VI. Równania

1. Równania z jedną niewiadomą.....	188
2. Rozwiązywanie równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.....	191
3. Równania – zadania tekstowe	195
4. Wielkości wprost proporcjonalne	198
5. Proporcja	202
6. Podział proporcjonalny	205
7. Przekształcanie wzorów.....	209
Zadania utrwalające	212
Zadania sprawdzające	214
Proporcje w przepisach kulinarnych – infografika	216

VII. Twierdzenie Pitagorasa

1. Prostokątny układ współrzędnych na płaszczyźnie.....	218
2. Twierdzenie, założenie, teza, dowód.....	226
3. Twierdzenie Pitagorasa.....	231
4. Długość odcinka w układzie współrzędnych.....	236
5. Praktyczne zastosowania twierdzenia Pitagorasa	240
Zadania utrwalające	246
Zadania sprawdzające	249
Twierdzenie Pitagorasa a parkowanie samochodu – infografika	252

VIII. Graniastosłupy

1. Graniastosłupy i ich rodzaje	254
2. Pole powierzchni graniastosłupa prostego	259
3. Objętość bryły, jednostki objętości.....	265
4. Objętość graniastosłupa prostego.....	268
Zadania utrwalające	271
Zadania sprawdzające	273

IX. Elementy statystyki opisowej

1. Odczytywanie i przedstawianie danych statystycznych za pomocą tabel i diagramów	276
2. Odczytywanie i przedstawianie danych statystycznych za pomocą wykresów	285
3. Średnia arytmetyczna	290
Zadania utrwalające	295
Zadania sprawdzające	299
Pojęcia i reguły	302
Indeks	305
Odpowiedzi	308



treści usunięte wg podstawy programowej 2024

JAK KORZYSTAĆ Z PODRĘCZNIKA

Przypomnij, przeczytaj, zrozum, zapamiętaj

Przypomnij sobie

- jak obliczyć ułamek danej liczby,
- jak obliczyć cenę towaru po obniżce o 20%,
- jak obliczyć cenę towaru po podwyżce o 10%.

odwołania do poznanych treści

$p\%$ dowolnej wielkości a jest równe $\frac{p}{100} \cdot a$.



ważne definicje, wnioski, wzory

Ćwicz i rozwiązuj zadania

Przykład 1.

Działka budowlana ma powierzchnię 900 m^2 . Dom ma zająć 35% powierzchni tej działki. Ile metrów kwadratowych działki przeznaczono na wybudowanie domu?

Obliczamy 35% z 900 m^2 .

Sposób I

900 m^2 to 100% powierzchni działki,

Sprawdź się!

1. Znajdź wielkość, której:
a) 35% to 105 m, b) 55% to 110 m, c) 15% to 300 m.
2. Ile kilogramów buraków cukrowych trzeba zużyć na wyprodukowanie 51 kg cukru, jeżeli cukier stanowi 17% masy buraków?

wzorcowo rozwiązane zadania

różnego typu zadania na zakończenie każdego tematu

Utrwal i sprawdź swoje umiejętności

Zadania utrwalające

1. Rozwiąż równanie.

- | | |
|--------------------------------------|--|
| a) $2(5a - 3) - a - 4(3a - 2) = 0$ | b) $2b - (1 - b) = 11 - b$ |
| c) $\frac{2}{5}(x - 2) = x + 4$ | d) $3y - 2(y - 1) = -6$ |
| e) $3(3 - 5y^2) = 90 - 5(3y^2 - 2y)$ | f) $\frac{1}{4}z + (z - 6) = \frac{2}{3}(z - 2)$ |

Zadania sprawdzające



Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

W zadaniach 1.-3. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

1. Który rysunek nie przedstawia graniastosłupa?

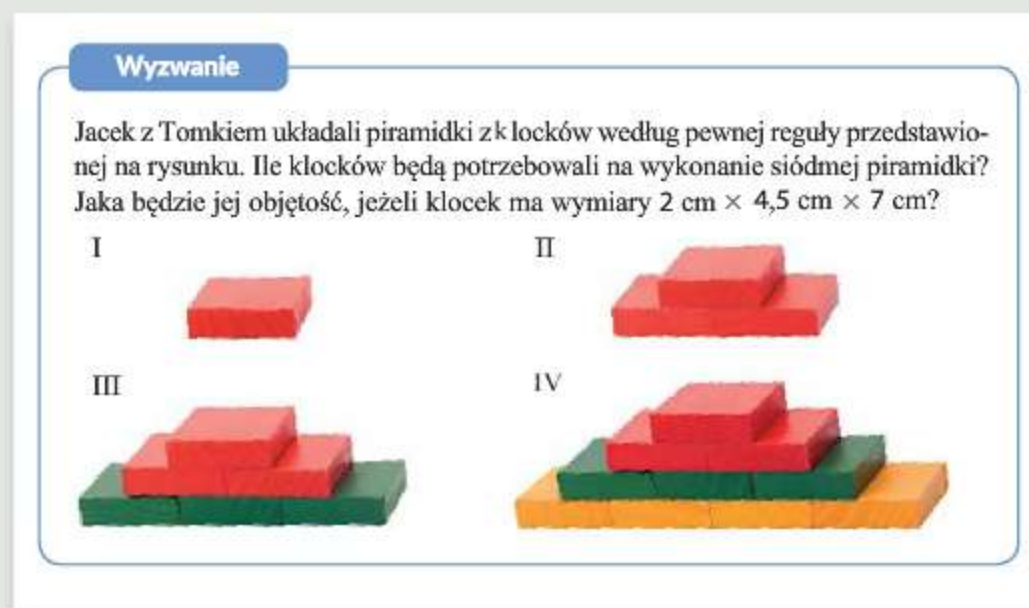
powtórzenie przed sprawdzianem

sprawdzenie opanowania materiału

Zwróć uwagę na infografiki i Wyzwania



przykładowe zastosowania matematyki



nietypowe zadania

Zwróć uwagę na piktogramy



Schody przed blokiem mają 8 stopni po 15 cm wysokości i 26 cm głębokości każdy. Na tych schodach zbudowano podjazd dla wózków. Jaką długość ma ten podjazd? Wynik zaokrąglaj do 0,1 m. Odpowiedź uzasadnij.

Zadania problemowe i trudne oraz zadania, które można rozwiązywać z kalkulatorem, zostały oznaczone piktogramami.

Pamiętaj: Odpowiedzi do wszystkich zadań zamieszczonych w podręczniku zapisuj w zeszycie przedmiotowym.

1. Działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych

Przypomnij sobie

- jak poznać, czy ułamek zwykły da się zamienić na ułamek dziesiętny,
- co to są liczby pierwsze i jak rozłożyć liczbę naturalną na czynniki pierwsze,
- jak obliczamy ułamek danej liczby.

Aby wykonać działania, w których występują ułamki zwykłe i dziesiętne, należy najpierw te ułamki przedstawić w tej samej postaci, tzn. ułamki zwykłe zamienić na dziesiętne lub ułamki dziesiętne na zwykłe, i wtedy wykonać działania.

Przykład 1.

Zamieńmy $\frac{2}{5}$ na ułamek dziesiętny.

Sposób I

Rozszerzamy ułamek tak, aby otrzymać w mianowniku 10 lub 100, 1000, ...

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} = 0,4$$

Sposób II

Dzielimy licznik przez mianownik tego ułamka.

	0,4	
	2 : 5	
–	0	
	2 0	
–	2 0	
	0	

- 1 Zamień ułamki $\frac{3}{4}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{17}{25}$, $\frac{9}{50}$ na ułamki dziesiętne sposobem I z przykładu 1.
- 2 Zamień ułamki $\frac{5}{16}$, $\frac{23}{40}$, $\frac{23}{25}$, $\frac{99}{125}$ na ułamki dziesiętne sposobem II z przykładu 1.
Możesz skorzystać z kalkulatora.
- 3 Zapisz liczby w postaci dziesiętnej.
a) $2\frac{21}{50}$, $3\frac{6}{25}$, $5\frac{3}{8}$, $2\frac{11}{20}$, $4\frac{13}{40}$ b) $7\frac{3}{16}$, $1\frac{11}{32}$, $4\frac{9}{80}$, $2\frac{15}{64}$, $8\frac{31}{125}$

**Przykład 2.**

Zamieńmy $\frac{2}{3}$ na ułamek dziesiętny.

Nie ma liczby naturalnej, która pomnożona przez 3 da 10 lub 100, lub 1000, ..., więc nie możemy skorzystać ze sposobu I przedstawionego w przykładzie 1.

Wobec tego skorzystamy ze sposobu II z przykładu 1 oraz z kalkulatora.

$$\frac{2}{3} = 2 : 3 = 0,666\dots$$

Widzimy, że ułamka $\frac{2}{3}$ nie można zamienić na ułamek dziesiętny.



Nie każdy ułamek zwykły można zamienić na ułamek dziesiętny.

Przykład 3.

Sprawdźmy, które ułamki spośród $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{18}{50}$, $\frac{5}{12}$ dadzą się zamienić na ułamki dziesiętne, a które nie.

Sprawdzamy, czy ułamek można skrócić (jeżeli tak, to skracamy), a następnie rozkładamy mianownik na czynniki pierwsze. Jeżeli czynnikami są wyłącznie liczby 2 lub 5 albo 2 i 5, to ułamek zwykły da się zamienić na ułamek dziesiętny.

Na ułamki dziesiętne dadzą się zamienić na przykład ułamki:

$$\frac{5}{8} = \frac{5}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 0,625 \quad \frac{7}{20} = \frac{7}{2 \cdot 2 \cdot 5} = 0,35 \quad \frac{18}{50} = \frac{9}{25} = \frac{9}{5 \cdot 5} = 0,36$$

Ułamka $\frac{5}{12}$ nie da się zamienić na ułamek dziesiętny, gdyż $\frac{5}{12} = \frac{5}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 0,41666\dots$

- 4 Sprawdź, które ułamki spośród $\frac{3}{6}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{66}{24}$, $\frac{144}{27}$ dadzą się zamienić na ułamki dziesiętne. Wykonaj to:

a) sposobem opisanym w przykładzie 3, b) za pomocą kalkulatora.

Przykład 4.

Zamieńmy 0,08 na ułamek zwykły.

$$0,08 = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$$

Aby zamienić ułamek dziesiętny na zwykły, wystarczy zapisać go w postaci ułamka zwykłego. Jeżeli to możliwe, ułamek należy skrócić.



Każdy ułamek dziesiętny można zapisać w postaci ułamka zwykłego.

- 5 Liczby 0,26; 1,205; 11,08; 0,0002 zapisz w postaci ułamków zwykłych nieskracalnych.
- 6 Piłka futbolowa ma masę 0,45 kg, a piłka do koszykówki $\frac{13}{25}$ kg. Która piłka ma większą masę?



Przykład 5.

Wykonajmy działania.

- a) $2\frac{2}{3} + 1,5 = 2\frac{2}{3} + 1\frac{1}{2} = 2\frac{4}{6} + 1\frac{3}{6} = 3\frac{7}{6} = 4\frac{1}{6}$
- b) $6\frac{1}{4} - 2,6 = 6,25 - 2,6 = 3,65$
- c) $4\frac{1}{6} \cdot 1,2 = 4\frac{1}{6} \cdot \frac{12}{10} = \frac{5\cancel{2}5}{1\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6}^1}{\cancel{5}_1} = 5$
- d) $4,08 : 3\frac{2}{5} = 4,08 : 3,4 = 40,8 : 34 = 1,2$

Liczby $2\frac{2}{3}$ nie można zapisać w postaci ułamka dziesiętnego i dlatego działania wykonujemy na ułamkach zwykłych.

Liczby $4\frac{1}{6}$ nie można zapisać w postaci ułamka dziesiętnego i dlatego działania wykonujemy na ułamkach zwykłych.

- 7 Wykonaj działania.

- a) $2,75 + 5\frac{1}{2}$ $3\frac{6}{10} + 6,5$ $2\frac{1}{8} + 1,125$ $0,2 + 3\frac{4}{24}$ $\frac{7}{100} + 10,3$
- b) $4,2 - \frac{4}{10}$ $5\frac{3}{5} - 1,25$ $0,9 - \frac{3}{8}$ $0,125 - \frac{3}{24}$ $6\frac{1}{7} - 2\frac{2}{6}$

- 8 Deskę, której długość wynosi 1,8 m, rozcięto na 2 części. Jedna część jest o 20 cm krótsza od drugiej. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Długość krótszej części deski wynosi A / B.

A. 80 cm B. 0,70 m

Długość dłuższej części deski stanowi C / D długości tej deski.

C. $\frac{5}{9}$ D. $\frac{2}{3}$

- 9 Przeciętnie w 100 kg mleka krowiego jest 88,7 kg wody, $\frac{7}{10}$ kg soli mineralnych, $3\frac{1}{5}$ kg tłuszczu, 3,1 kg białka, a reszta to cukier. Uzasadnij, że w 100 kg tego mleka znajduje się 4,3 kg cukru.

- 10 Wykonaj działania.

- a) $\frac{1}{4} \cdot 1,6$ $3,6 \cdot \frac{1}{3}$ $\frac{1}{6} \cdot 0,12$ $2\frac{1}{5} \cdot 1,5$ $0,4 \cdot 3\frac{3}{4}$
- b) $\frac{4}{7} : 3,2$ $1,8 : \frac{2}{5}$ $2,4 : \frac{1}{2}$ $5,5 : 2\frac{3}{4}$ $2\frac{1}{4} : 0,75$

Przykład 6.

Przeciętny Duńczyk wytwarza rocznie aż 780 kg śmieci, a odpady produkowane przez przeciętnego Polaka stanowią około $\frac{5}{12}$ tej masy. Obliczmy, ile kilogramów śmieci rocznie wytwarza statystyczny Polak.

$$\frac{5}{12} \cdot 780 = 5 \cdot 65 = 325$$

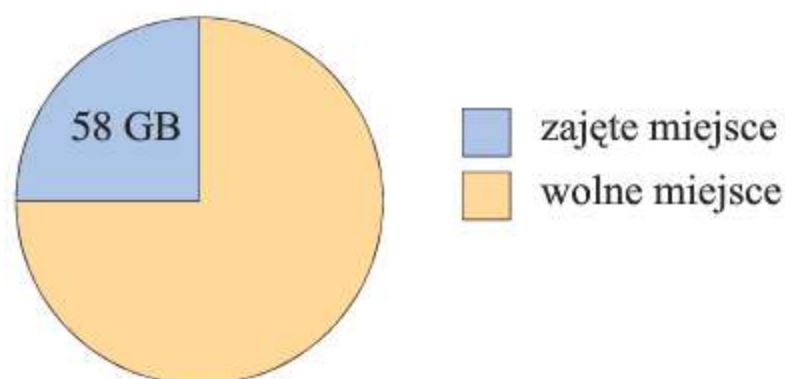
ODPOWIEDŹ: Statystyczny Polak wytwarza rocznie około 325 kg śmieci.



Aby obliczyć ułamek danej liczby, należy pomnożyć ułamek przez tę liczbę.

- 11** Pizza kosztuje 23,50 zł. W promocji jest o $\frac{1}{5}$ ceny tańsza. Ile kosztuje pizza w promocji?

- 12** Oblicz, ile wolnego miejsca jest na dysku laptopa, jeśli dane zajmują 58 GB, co stanowi 0,25 pojemności dysku.



- 13** Kierowca wyjeżdżający samochodem z Warszawy miał w baku 36 l benzyny. Na przejechanie 180 km zużył 12,6 l benzyny. Jeśli samochód dalej będzie zużywał tyle samo benzyny, to czy jej reszta wystarczy na przejechanie 340 km? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	zużyje mniej benzyny niż dotychczas.
			2.	zużyje dwa razy tyle benzyny co dotychczas.
B.	Nie,		3.	średnie zużycie benzyny wynosi 7 l na 100 km.

- 14** Tomek miał 360 zł oszczędności, które postanowił przeznaczyć na akcesoria rowerowe. Na bagażnik wydał 0,2 swoich oszczędności, na licznik rowerowy 0,25 tego, co zostało, a na pokrowiec $\frac{5}{6}$ pozostałej kwoty. Ile kosztowały poszczególne akcesoria? Ile oszczędności zostało Tomkowi?

- 15** Karolina wzięła do szkoły drugie śniadanie składające się z jednej kajzerki (50 g) posmarowanej masłem (5 g) oraz 20 g szynki z indyka i pomidora średniej wielkości (130 g). Na podstawie tabeli oblicz wartość energetyczną śniadania Karoliny. Ile kilokalorii więcej dostarczyłaby ona swojemu organizmowi, gdyby zamiast szynki wzięła żółty ser o tej samej masie?

Wartość energetyczna w 100 g	
kajzerka	300 kcal
masło	720 kcal
szynka z indyka	85 kcal
ser żółty	395 kcal
pomidor	20 kcal

- 16** Uzasadnij, że jeśli mianownikiem nieskracalnego ułamka zwykłego jest liczba 400, to ten ułamek można zamienić na ułamek dziesiętny, a jeśli w mianowniku jest liczba 600, to tego ułamka nie da się zamienić na ułamek dziesiętny.

- 17** Znajdź ułamek, który jest:

a) większy od $\frac{5}{8}$ i mniejszy od $\frac{5}{7}$,

b) mniejszy od $\frac{1}{2}$ i większy od $\frac{1}{3}$.

Wyzwanie

Gdy skreślimy w liczniku i mianowniku ułamka $\frac{19}{95}$ cyfrę 9, to otrzymamy ułamek $\frac{1}{5}$. Czy ułamki $\frac{1}{5}$ i $\frac{19}{95}$ są równe? Czy potrafisz znaleźć inny ułamek mający podobną własność?

Sprawdź się!

- 1** Zamień ułamki
 - a) $1\frac{7}{10}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{10}{16}$ na ułamki dziesiętne;
 - b) 0,25; 3,4; 7,8 na ułamki zwykłe i skróć je, jeśli to możliwe.
- 2** Wykonaj działania.
 - a) $4\frac{2}{5} + 0,15$
 - b) $12\frac{4}{7} - 2,75$
 - c) $3,8 \cdot \frac{3}{19}$
 - d) $1\frac{1}{15} : 2,4$
- 3** Agnieszka kupiła 5 kg owoców: 2,5 kg jabłek, $\frac{4}{5}$ kg gruszek, 20 dag moreli oraz śliwki. Ile kilogramów ważyły zakupione śliwki?
- 4** W trójkącie pierwszy bok ma długość 11,5 cm, drugi jest o 5 cm dłuższy od pierwszego, a trzeci jest równy $\frac{3}{5}$ sumy długości pierwszego i drugiego boku. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Obwód tego trójkąta jest równy 44,8 cm.	P	F
Najdłuższy bok trójkąta ma długość 16,8 cm.	P	F
- 5** W sklepie z owocami było 160 kg jabłek. Sprzedano $\frac{5}{8}$ wszystkich jabłek. Ile pieniędzy wpłynęło z ich sprzedaży, jeżeli 1 kg jabłek kosztuje 2,40 zł? Uzasadnij, że jeśli cena detaliczna w sklepie jest o 80 gr wyższa od ceny hurtowej, to zysk sklepu ze sprzedaży jabłek wyniósł 80 zł.

2. Kolejność wykonywania działań

Przypomnij sobie

- w jakiej kolejności wykonujemy działania, jeśli nie występują nawiasy;
- w jakiej kolejności wykonujemy działania, jeśli występują nawiasy.

Przykład 1.

Określmy kolejność działań, a następnie obliczmy wartość wyrażenia.

a) $3\frac{1}{2} - \frac{5}{6} \cdot 3 + 4\frac{1}{3}$

b) $14 : 3,5 + 7 \cdot 1,5$

c) $\left(2\frac{2}{3} - 1\frac{3}{4}\right) : \left(\frac{5}{6} + \frac{2}{6}\right)$

d) $4 \cdot \left[3\frac{2}{5} + \left(3,1 - 2\frac{1}{5}\right)\right]$

Kolejność wykonywania działań podamy za pomocą numerów.

a) $3\frac{1}{2} - \frac{5}{6} \cdot 3 + 4\frac{1}{3} = 3\frac{1}{2} - \frac{5}{\cancel{6}^2} \cdot \frac{\cancel{3}^1}{1} + 4\frac{1}{3} = 3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} + 4\frac{1}{3} = 1 + 4\frac{1}{3} = 5\frac{1}{3}$

b) $14 : 3,5 + 7 \cdot 1,5 = 140 : 35 + 10,5 = 4 + 10,5 = 14,5$

c) $\left(2\frac{2}{3} - 1\frac{3}{4}\right) : \left(\frac{5}{6} + \frac{2}{6}\right) = \left(2\frac{8}{12} - 1\frac{9}{12}\right) : \frac{7}{6} = \frac{11}{12} : \frac{7}{6} = \frac{11}{\cancel{12}^2} \cdot \frac{\cancel{6}^1}{7} = \frac{11}{14}$

d) $4 \cdot \left[3\frac{2}{5} + \left(3,1 - 2\frac{1}{5}\right)\right] = 4 \cdot \left[3\frac{2}{5} + \left(3,1 - 2,2\right)\right] = 4 \cdot [3,4 + 0,9] = 4 \cdot 4,3 = 17,2$



Kolejność wykonywania działań jest następująca:

- 1) działania w nawiasach, najpierw w tym nawiasie, który nie zawiera w sobie innych nawiasów,
- 2) mnożenie lub dzielenie w kolejności ich występowania,
- 3) dodawanie lub odejmowanie w kolejności ich występowania.

1 Określ kolejność wykonywania działań, a następnie je wykonaj.

a) $\frac{2}{5} + 0,3 + 0,8 - \frac{1}{2}$

b) $0,9 : \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{3}{5}$

c) $1 : 0,3 - 2\frac{1}{3} - \frac{5}{6}$

- 2** Określ kolejność wykonywania działań, a następnie je wykonaj.

a) $2\frac{1}{7} \cdot 1,6 \cdot 2\frac{1}{3}$

b) $2\frac{6}{11} : \frac{7}{11} : 3,4$

c) $6\frac{2}{3} \cdot 0,25 + \frac{1}{5}$

d) $1\frac{5}{9} : 1\frac{1}{3} \cdot 0,75$

e) $3\frac{4}{9} - 1\frac{2}{3} \cdot 1,8$

f) $4,5 \cdot 5\frac{5}{9} + 6,4 \cdot \frac{3}{8}$

- 3** Określ kolejność wykonywania działań, a następnie je wykonaj.

a) $\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right) : \left(2\frac{2}{3} - 1,75\right)$

b) $1\frac{1}{2} : \left(1\frac{1}{4} : 1\frac{2}{3} : 1\frac{1}{5}\right)$

c) $(2 + 0,6) : 0,1 : \left(\frac{1}{12} + 3\frac{1}{6}\right)$

d) $2,1 \cdot \left[\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + 3,6 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right)\right]$

Przykład 2.

Obliczmy wartość wyrażenia.

a) $\frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9} - 0,6 : 1,8}$

b) $\frac{(1,5 - 0,25) : 0,5}{4\frac{1}{6}}$

Kreskę ułamkową możemy zastąpić znakiem dzielenia. Należy przy tym pamiętać o zapisaniu licznika i mianownika w nawiasie, o ile jest to potrzebne.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9} - 0,6 : 1,8} &= \frac{4}{9} : \left(\frac{5}{9} - 0,6 : 1,8\right) = \frac{4}{9} : \left(\frac{5}{9} - 6 : 18\right) = \frac{4}{9} : \left(\frac{5}{9} - \frac{6}{18}\right) = \\ &= \frac{4}{9} : \left(\frac{10}{18} - \frac{6}{18}\right) = \frac{4}{9} : \frac{4}{18} = \frac{4^1}{9_1} \cdot \frac{18^2}{4_1} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{(1,5 - 0,25) : 0,5}{4\frac{1}{6}} &= [(1,5 - 0,25) : 0,5] : 4\frac{1}{6} = (1,25 : 0,5) : 4\frac{1}{6} = \\ &= (12,5 : 5) : 4\frac{1}{6} = 2,5 : \frac{25}{6} = \frac{25^1}{10_5} \cdot \frac{6^3}{25_1} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Kreskę ułamkową można zastąpić znakiem dzielenia.



- 4** Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\frac{\frac{17}{40} - 0,2}{1\frac{3}{5}}$

b) $\frac{\left(3\frac{3}{5} - 2\right) \cdot 5}{0,04}$

c) $\frac{4\frac{3}{8}}{1\frac{5}{8} - 0,75}$

d) $\frac{\frac{3}{7} \cdot 3,5}{4,5 : (2,75 - 0,25)}$

Przykład 3.

Zapiszmy treść zadania za pomocą wyrażenia arytmetycznego i znajdziemy jego wartość: *Do różnicy liczb 40,02 i 6,9 dodaj ich iloraz.*

$$(40,02 - 6,9) + (40,02 : 6,9) = 33,12 + 5,8 = 38,92$$

5 Treść zadania zapisz za pomocą wyrażenia arytmetycznego i znajdź jego wartość.

a) Do liczby 182,34 dodaj różnicę liczb 11,1 i 0,99.

b) Od sumy liczb $16\frac{1}{3}$ i $2\frac{5}{8}$ odejmij różnicę liczb $6\frac{1}{8}$ i $4\frac{2}{3}$.

6 Uzasadnij, że jeśli od ilorazu liczb 7,8 i $\frac{3}{4}$ odejmiemy iloczyn tych liczb, to otrzymamy 4,55.

7 Klient chciał kupić 2 kg śliwek, 0,5 kg winogron oraz 75 dag jabłek. Oferty sprzedaży w dwóch sklepach są następujące:

SKLEP PESTKA	
(Ceny za 1 kg)	
Jabłka	2 zł 40 gr
Winogrona	10 zł 40 gr
Śliwki	3 zł 80 gr
Gruszki	3 zł 60 gr

SKLEP GRONO	
(Ceny za 1 kg)	
Jabłka	3 zł 20 gr
Winogrona	11 zł
Śliwki	3 zł
Gruszki	4 zł 40 gr

Zapisz wyrażenie, które pozwoli obliczyć koszt zakupów w sklepie Pestka oraz w sklepie Grono. W którym sklepie klient zapłaci mniej? O ile mniej?

8 Dane są liczby: $a = \frac{3\frac{1}{8}}{2\frac{3}{8} - 1,75}$, $b = 8\frac{4}{7} \cdot (0,75 - \frac{2}{5})$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Liczba a jest o 2 mniejsza od liczby b .	P	F
Liczba b stanowi 0,6 liczby a .	P	F

9 Właściciel sklepu owocowo-warzywnego zakupił na giełdzie 24 kg pomidorów po 7,65 zł za 1 kg, 80 kg cytryn po 3,40 zł za 1 kg, 12 kg śliwek po 4,55 zł za 1 kg. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Za towar właściciel zapłacił A / B.

A. 520,70 zł B. 510,20 zł

Za cytryny właściciel zapłacił prawie C / D co za śliwki.

C. 5 razy tyle D. 3 razy tyle

10 Znajdź liczbę, której $\frac{1}{8}$ jest wartością wyrażenia $2\frac{4}{5} : 1,2 \cdot \frac{3}{8}$.

11 Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)$

b) $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right)$

Wyzwanie

Przepisz wyrażenie i wstaw nawiasy tak, aby zachodziła równość.

a) $5\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{21} + \frac{1}{7} + 3 = 4$

b) $0,5 + 1,75 \cdot 2 - 1\frac{5}{9} = 1$

Sprawdź się!

1 Określ kolejność wykonywania działań, a następnie oblicz wartość wyrażenia $7,4 - \left(2,4 \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{8} : 1,5\right)$.

2 Oblicz wartość wyrażenia $\frac{1\frac{7}{9} - 1\frac{1}{3}}{\frac{5}{9} - 0,6 : 1\frac{4}{5}}$.

3 Które wyrażenie to iloraz liczby $3\frac{5}{6}$ i sumy liczb $0,76$ i $1\frac{2}{7}$?
Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $\left(0,76 + 1\frac{2}{7}\right) : 3\frac{5}{6}$

B. $3\frac{5}{6} \cdot \left(0,76 + 1\frac{2}{7}\right)$

C. $\left(0,76 - 1\frac{2}{7}\right) + 3\frac{5}{6}$

D. $3\frac{5}{6} : \left(0,76 + 1\frac{2}{7}\right)$



4 Kasia z Małgosią przygotowały 135 jednakowych truflí czekoladowych. Wykonały je z $0,5$ kg czekolady mlecznej, $\frac{1}{2}$ kg czekolady gorzkiej, $1,35$ kg śmietanki, 375 g cukru brązowego, $\frac{2}{5}$ kg masła i $\frac{1}{4}$ kg orzechów nerkowca. Ile gramów ważyła jedna trufla?

5 W wyrażeniu $5\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0,15 + 0,85$ wstaw nawiasy tak, aby wartość wyrażenia była równa 5 .

3. Rozwinięcia dziesiętne ułamków

Przypomnij sobie

- co to jest rozwinięcie dziesiętne ułamka,
- jakie mogą być rozwinięcia dziesiętne ułamków.

Przykład 1.

Ułamki $\frac{9}{20}$ i $\frac{7}{8}$ zamieńmy na ułamki dziesiętne.

Ułamki zwykłe zamieniamy na dziesiętne albo przez odpowiednie ich rozszerzenie, albo przez podzielenie licznika przez mianownik (patrz: strona 7, przykład 1).

$$\frac{9}{20} = \frac{9 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{45}{100} = 0,45 \qquad \frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{875}{1000} = 0,875$$

Ułamki $\frac{9}{20}$ i $\frac{7}{8}$ mają rozwinięcia dziesiętne skończone.

1 Znajdź rozwinięcia dziesiętne ułamków.

a) $\frac{2}{5}, \frac{9}{10}, \frac{3}{20}, \frac{13}{50}, \frac{3}{4}, \frac{15}{8}, \frac{121}{20}$

b) $\frac{1}{2}, \frac{8}{5}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{9}{4}, \frac{132}{20}, \frac{512}{40}$

c) $\frac{3}{50}, \frac{17}{100}, \frac{51}{200}, \frac{9}{500}, \frac{11}{1000}, \frac{1200}{250}$

Przykład 2.

Ułamków $\frac{1}{6}, \frac{5}{66}, \frac{4}{35}$ nie można zamienić na ułamki dziesiętne.

Po podzieleniu licznika przez mianownik każdego z ułamków otrzymujemy:

$$\frac{1}{6} = 0,1666... \qquad \frac{5}{66} = 0,07575... \qquad \frac{4}{35} = 0,1142857142857...$$

Zauważmy, że w tych rozwinięciach powtarza się od pewnego miejsca cyfra lub grupa cyfr. Tę cyfrę lub grupę cyfr nazywamy okresem rozwinięcia dziesiętnego nieskończonego.

O takich ułamkach mówimy, że mają rozwinięcia dziesiętne nieskończone okresowe.

Okresem rozwinięcia $0,1666\dots$ jest cyfra 6. Okres możemy zapisać krócej. Wystarczy wziąć cyfrę 6 w nawias: (6) , a zatem $0,1666\dots = 0,1(6)$.

Okresem rozwinięcia $0,07575\dots$ jest grupa dwóch cyfr 75, zatem $0,07575\dots = 0,0(75)$.

Okresem rozwinięcia $0,1142857142857\dots$ jest grupa sześciu cyfr 142857, zatem $0,1142857142857\dots = 0,1(142857)$.

Liczby: $0,1666\dots$, $0,07575\dots$, $0,1142857142857\dots$ nazywamy **ułamkami dziesiętnymi okresowymi**.



- 2 Skorzystaj z kalkulatora i zapisz rozwinięcia dziesiętne liczb:

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{15}, \frac{8}{27}, \frac{7}{303}, 3\frac{4}{11}, 1\frac{7}{33}, 3\frac{13}{45}.$$

- 3 Ustal, jaki okres ma podane rozwinięcie dziesiętne. Zapisz je krócej – zaznacz okres w nawiasie.

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| a) $0,666\dots$ | b) $6,405405405\dots$ |
| c) $32,0838383\dots$ | d) $0,25525252\dots$ |
| e) $5,454454454\dots$ | f) $16,0010101\dots$ |

Przykład 3.

Zapiszmy mianowniki ułamków opisanych w przykładach 1 i 2 w postaci iloczynu liczb pierwszych.

$$\frac{9}{20} = \frac{9}{2 \cdot 2 \cdot 5}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{7}{2 \cdot 2 \cdot 2}$$

Te ułamki mają rozwinięcie dziesiętne skończone.

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3}$$

$$\frac{5}{66} = \frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 11}$$

$$\frac{4}{35} = \frac{4}{5 \cdot 7}$$

Te ułamki mają rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe.

Ułamek nieskracalny ma rozwinięcie dziesiętne:

- skończone, jeśli jego mianownik można przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych, w którym występują tylko liczby 2 lub 5 albo 2 i 5;
- nieskończone okresowe, jeśli jego mianownik można przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych, w którym występują również liczby inne niż 2 i 5.



- 4 Spośród podanych ułamków wypisz te, które mają rozwinięcia dziesiętne nieskończone okresowe. Czy musisz wykonywać obliczenia?

$$\frac{4}{5}, \frac{2}{15}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{2}{11}, \frac{7}{25}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}$$

- 5 Dane są ułamki $\frac{6}{7}$, $\frac{5}{37}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{71}{110}$. Czy wszystkie mają rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe?

Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	mianowniki niektórych ułamków są liczbami pierwszymi.
			2.	w rozkładzie na czynniki pierwsze mianowników wszystkich ułamków występują liczby inne niż 2 i 5.
B.	Nie,		3.	mianownik jednego z tych ułamków jest liczbą parzystą.



- 6 Znajdź rozwinięcia dziesiętne ułamków: $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{9}$. Czy dostrzegasz pewną prawidłowość? Podaj bez wykonywania dzielenia rozwinięcia dziesiętne ułamków $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{9}$.

- 7 W tabeli podano wysokości wybranych budynków w Polsce.

Nazwa budynku	Miasto	Wysokość [m]
hotel Marriott	Warszawa	170
apartamentowiec Sea Towers	Gdynia	142
biurowiec Altus	Katowice	125
biurowiec Organika Trade	Gdańsk	98

- a) Które liczby wskazujące, ile razy hotel Marriott w Warszawie jest wyższy od pozostałych budynków, mają rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe?
b) Oblicz, jaki ułamek wysokości hotelu Marriott stanowi twój wzrost. Czy ten ułamek ma rozwinięcie dziesiętne skończone?

- 8 Porównaj liczby. Użyj odpowiedniego znaku: $<$ lub $>$.

- a) 0,3 i 0,(3) b) 0,2(3) i 0,(23) c) $1\frac{1}{3}$ i 1,0(30)
d) 2,(6) i 2,1(6) e) 4,06 i $4\frac{1}{6}$ f) 0,1(54) i 0,(154)

- 9 Dane są liczby: 0,2(1); 0,(2); 0,(221); 0,22; 0,0(2); 0,2222. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Największą spośród podanych liczb jest A / B. A. 0,2222 B. 0,(2)
Najmniejszą spośród podanych liczb jest C / D. C. 0,2(1) D. 0,0(2)

- 10 Wykaż, że dwudziestą cyfrą po przecinku liczby 6,23(8475) jest 4.

11 Znajdź 135. cyfrę po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym ułamka.

a) $\frac{2}{7}$

b) $\frac{11}{13}$

c) $\frac{3}{26}$

12 W mianownikach ułamków $\frac{27}{72}$ i $\frac{13}{65}$, zapisanych w postaci iloczynu liczb pierwszych, występują również inne czynniki niż 2 lub 5, a mimo to te ułamki mają rozwinięcia dziesiętne skończone. Dlaczego?

Wyzwanie

Napisz kilka nieskracalnych ułamków właściwych o mianownikach: 11, 111, a następnie znajdź ich rozwinięcia dziesiętne.

- Od czego zależy długość okresu tych rozwinięć?
- Jaki jest związek między licznikiem ułamka a okresem jego rozwinięcia dziesiętnego?
- Zapisz, bez wykonywania obliczeń, rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{103}{111}$.

Sprawdź się!

- 1** Dane są ułamki: $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{8}$. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Rozwinięcie dziesiętne skończone mają ułamki: $\frac{2}{15}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{1}{9}$.	P	F
Rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe mają ułamki: $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{1}{8}$.	P	F

- Porównaj liczby 0,1(54) i 0,(154). Użyj odpowiedniego znaku: < lub >.
- Ustal, jaki okres ma podane rozwinięcie dziesiętne liczby. Zapisz je krócej – zaznacz okres w nawiasie.
a) 31,301301301... b) 56,345567567567...
- Znajdź trzynastą cyfrę po przecinku liczby 0,03(68).
- Przez 10 minut 45-minutowej lekcji uczniowie grali w grę edukacyjną. Jaką część lekcji zajęło granie? Uzasadnij, że otrzymany ułamek ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe.

4. Przybliżenia dziesiętne

Przypomnij sobie

- kiedy mówimy o przybliżeniu liczby z niedomiarem, a kiedy z nadmiarem,
- na czym polega zasada zaokrąglania liczb,
- na czym polega szacowanie pewnych wielkości.

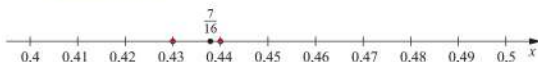
Przykład 1.

Jak ustalić położenie ułamka $\frac{7}{16}$ na osi liczbowej?

$$\frac{7}{16} = 0,4375$$

Możemy stwierdzić, że: $0,43 < \frac{7}{16} < 0,44$.

Położenie wielu liczb na osi liczbowej możemy określić tylko z pewną dokładnością, czyli w przybliżeniu.



Liczba 0,43 jest przybliżeniem liczby $\frac{7}{16}$ z niedmiarem.

Liczba 0,44 jest przybliżeniem liczby $\frac{7}{16}$ z nadmiarem.

W obu przypadkach różnica między liczbą $\frac{7}{16}$ a jej przybliżeniem jest mniejsza od 0,01. Mówimy, że jest to przybliżenie z dokładnością do 0,01.

1 Ustal z dokładnością do 0,01, między jakimi liczbami na osi liczbowej są położone ułamki: $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{125}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{3}$.

2 Określ, czy podane przybliżenie jest z niedmiarem czy z nadmiarem.

a) $41,35 \approx 41,4$

b) $5,93 \approx 5,9$

c) $6,857 \approx 6,85$

d) $0,697 \approx 0,7$



e) $0,0916 \approx 0,091$

f) $0,0998 \approx 0,1$

W praktyce, aby podać przybliżenie dziesiętne liczby z określoną dokładnością, stosujemy **zasadę zaokrąglania**.

Aby zaokrąglić liczbę do danego rzędu, należy odrzucić wszystkie cyfry znajdujące się na prawo od cyfry danego rzędu i jeśli pierwsza z odrzuconych cyfr jest równa:

- 0, 1, 2, 3 lub 4, to ostatnią zachowaną cyfrę trzeba zostawić bez zmiany; Jest to **zaokrąglenie z niedomiarem**.
- 5, 6, 7, 8 lub 9, to ostatnią zachowaną cyfrę trzeba zwiększyć o 1. Jest to **zaokrąglenie z nadmiarem**.

Jeśli odrzucone cyfry były położone przed przecinkiem (w rzędach: jedności, dziesiątek, setek itd.), należy na ich pozycjach wpisać zera.

Przykład 2.

Zaokrąglimy liczbę 289,1473:

a) tak, by po zaokrągleniu miała dwie cyfry po przecinku

$289,14\overline{7}3 \approx 289,15$ Pierwsza odrzucona cyfra to 7, czyli poprzednią cyfrę zwiększamy o 1 (zaokrąglenie z nadmiarem).

b) do 0,001

$289,147\overline{3} \approx 289,147$ Pierwsza odrzucona cyfra to 3, czyli poprzednią cyfrę zostawiamy bez zmian (zaokrąglenie z niedomiarem).

c) do setek

$2\overline{8}9,1473 \approx 300$ Pierwsza odrzucona cyfra to 8, czyli poprzednią cyfrę zwiększamy o 1 (zaokrąglenie z nadmiarem). Ponieważ cyfry 8 i 9 były przed przecinkiem, w ich miejsca wpisujemy zera.

3 Liczby: 0,253; 11,245; 0,8567; 6,799 zaokrąglaj do:

- a) części setnych,
- b) jedności.

Oceń, czy zaokrąglenie jest z nadmiarem czy z niedomiarem.

4 Zaokrąglaj tak, aby po zaokrągleniu liczby:

- a) 1,95; 5,42; 6,36; 3,01; 2,85; 0,09; 9,99 miały jedną cyfrę po przecinku;
- b) 1,653; 2,058; 4,455; 0,998; 7,403; 9,009 miały dwie cyfry po przecinku;
- c) 1,6537; 9,1014; 0,0028; 7,2594; 0,9999; 4,1111; 0,0005; 2,00988; 7,2304 miały trzy cyfry po przecinku.



Przykład 3.



Podajmy przybliżenia rozwinięcia dziesiętnego ułamka $\frac{5}{13}$ z dokładnością do 0,1 i 0,0001 z zastosowaniem zasady zaokrąglania. Określmy, czy jest to przybliżenie z nadmiarem czy z niedomiarem.

$$\frac{5}{13} = 0,3\overline{8461} \dots \approx 0,4$$

Przybliżenie z dokładnością do 0,1 – z nadmiarem.



$$\frac{5}{13} = 0,3846\overline{1} \dots \approx 0,3846$$

Przybliżenie z dokładnością do 0,0001 – z niedomiarem.



- 5 Zastosuj zasadę zaokrąglania i podaj przybliżenia rozwinięcia dziesiętnego ułamka z dokładnością do 0,1 i 0,0001. Określ, czy jest to przybliżenie z nadmiarem czy z niedomiarem.

a) $\frac{5}{6}$

b) $\frac{9}{11}$

c) $\frac{6}{13}$

d) $\frac{7}{9}$



- 6 Samolot pasażerski pokonał 1500 km w ciągu 1 godziny 50 minut. Uzasadnij, że prędkość średnia tego samolotu po zaokrągleniu do jednego kilometra na godzinę wynosi 818 km/h.



- 7 Zaokrąglij rozwinięcia dziesiętne ułamków zwykłych:

a) $\frac{7}{18}$, $\frac{4}{9}$ z dokładnością do 0,1,

b) $\frac{4}{13}$, $\frac{6}{17}$ z dokładnością do 0,01,



c) $\frac{91}{24}$, $\frac{81}{35}$ z dokładnością do 0,001.



$1 \text{ cal} = 2,54 \text{ cm}$

- 8 Długość przekątnej ekranu monitora, podana w calach, określa jego wielkość. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Długość przekątnej monitora 15-calowego po zaokrągleniu do 1 cm wynosi A / B.

A. 38 cm B. 39 cm

Długość przekątnej monitora 32-calowego po zaokrągleniu do 1 cm jest większa od długości przekątnej monitora 15-calowego po zaokrągleniu do 1 cm o C / D.

C. 43 cm D. 37 cm

Przykład 4.

Podajmy przybliżenie danej liczby taką liczbą całkowitą, aby dana liczba i jej przybliżenie różniły się o mniej niż 0,5.

a) $24\frac{4}{5}$ b) $\frac{610}{25}$

a) $24\frac{4}{5} = 24,8 \approx 25$

Liczba 25 jest szukany przybliżeniem, ponieważ $25 - 24,8 < 0,5$ (przybliżenie z nadmiarem).

b) $\frac{610}{25} = 24,4 \approx 24$

Liczba 24 jest szukany przybliżeniem, ponieważ $24,4 - 24 < 0,5$ (przybliżenie z niedomiarem).

- 9 Podaj przybliżenie ułamka taką liczbą całkowitą, aby ułamek i jego przybliżenie różniły się o mniej niż 0,5.

a) $\frac{89}{4}$ b) $\frac{204}{15}$

Szacowanie to określanie wartości różnych wielkości, np. długości, powierzchni, kosztów zakupów, w sposób uproszczony.

Gdy szacujemy wielkości, dane lub wyniki działań, podajemy ich przybliżone wartości.

Przykład 5.

Oszacujmy z dokładnością do 1 zł, ile złotych zapłacimy za mieszankę cukierków, jeśli kupimy 0,3 kg cukierków po 19 zł za 1 kg i 0,2 kg cukierków po 21 zł za 1 kg.

Aby oszacować ten wynik, zaokrąglamy ceny cukierków do pełnych dziesiątek:

$$0,3 \cdot 20 + 0,2 \cdot 20 = 6 + 4 = 10$$

Dokładny koszt zakupu mieszanki otrzymamy, obliczając:

$$0,3 \cdot 19 + 0,2 \cdot 21 = 9,9$$

a więc za tę mieszankę zapłacimy 9,90 zł.



Jak widzimy, liczba otrzymana z oszacowania bardzo dobrze określa koszt mieszanki cukierków. Różnica między oszacowaniem a rzeczywistym kosztem wynosi zaledwie 10 gr.

- 10 W baku samochodu jest 21,6 l paliwa, a średnie zużycie tego paliwa na 100 km wynosi 7,1 litra. Oszacuj, czy wystarczy paliwa na pokonanie odległości 330 km.

- 11 Oszacuj wynik działania i porównaj go z podaną liczbą. Użyj odpowiedniego znaku: < lub >.

a) $1234 + 445$ i 1800

b) $3543 - 512$ i 2900

c) $12 \cdot 2,089$ i 24

d) $2,9813 : 3$ i 1

- 12 Oszacuj wartość wyrażenia przez zaokrąglenie liczb do jedności, a następnie oblicz dokładną wartość wyrażenia i porównaj, który z otrzymanych wyników – oszacowany czy dokładny – jest większy.

a) $(2,2 - 1\frac{1}{3}) \cdot 10$

b) $(4\frac{2}{3} + 3,5) \cdot (1,5 + 4\frac{1}{14})$

c) $6\frac{1}{3} + 4,5 \cdot 10$

d) $(3,2 + 7\frac{1}{3} + 4\frac{1}{6}) : 2$

e) $(5\frac{5}{6} + 4,5 \cdot 1\frac{2}{3}) : 4\frac{4}{15}$

f) $10,4 - 5\frac{5}{7} : 2$

g) $(1,9 + \frac{1}{9}) \cdot 10$

h) $(4,6 - 2\frac{1}{2}) : (4\frac{3}{5} + 2,5)$

Wyzwanie

Oblicz sumę ułamków: $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ oraz sumę ich rozwinięć dziesiętnych zaokrąglonych do 0,1. Co zauważasz?

Sprawdź się!

- 1 Liczby 2,954; 6,437; 5,229 zaokrąglij do:

a) części setnych,

b) jedności.

Oceń, czy zaokrąglenie jest z nadmiarem czy z niedomiarem.

- 2 Zaokrąglij rozwinięcia dziesiętne ułamków zwykłych:



a) $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}$ z dokładnością do 0,1;

b) $\frac{5}{8}, \frac{3}{16}$ z dokładnością do 0,01;



c) $\frac{50}{17}, \frac{80}{33}$ z dokładnością do 0,001.

- 3 Zosia wstukała na kalkulatorze liczbę 17, a następnie nacisnęła klawisz  i otrzymała taki wynik: 4,123105625617661. Zapisz takie zaokrąglenie tej liczby, aby miało 5 cyfr po przecinku.

- 4 Masz 20 zł. Zamierzasz kupić cztery zeszyty po 2,12 zł za sztukę oraz długopis za 8,98 zł. Oszacuj, czy ta kwota wystarczy ci na zakupy.

- 5 Bartek miał podać przybliżenie ułamka $\frac{79}{8}$ taką liczbą całkowitą, aby ten ułamek i jego przybliżenie różniły się o mniej niż 0,2. Czy tym przybliżeniem jest 10? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 lub 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	różnica między wartością ułamka a jego przybliżeniem wynosi 0,125.
B.	Nie,		2.	liczba 0,875 jest większa od 0,2.
			3.	tym przybliżeniem jest 9.

Zadania utrwalające

1 Oblicz.

a) $10,6 - 4\frac{2}{3} + 16\frac{1}{15}$

b) $6\frac{1}{2} + \left(3\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) : 2\frac{5}{6} - 1\frac{3}{4}$

c) $\frac{7,13}{2,75 - 1\frac{3}{5}}$

d) $\frac{6,5 + 3\frac{1}{3} - 0,5}{2\frac{1}{3}}$

2 O ile wartość wyrażenia $1\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{3} + 0,5 : 3\right)$ jest większa od wartości wyrażenia

$$\frac{0,6}{\left(2,5 - 1\frac{2}{3}\right) \cdot 6} ?$$

3 Znajdź niewiadomy składnik.

a) $\frac{3}{4} + \frac{2}{9} + x + 1\frac{1}{4} = 4$

b) $0,87 + y + 2,13 + \frac{5}{7} = 8$

4 Krawiec zapłacił 587,70 zł za materiały dwóch gatunków: po 21,60 zł i po 12,50 zł za 1 metr bieżący materiału. Ile metrów bieżących droższego materiału kupił krawiec, jeśli miał 9 metrów bieżących tańszego?

5 Z pierwszego sprawdzianu z matematyki $\frac{1}{6}$ liczby uczniów klasy VII otrzymała ocenę bardzo dobrą, 0,25 – dobrą, $\frac{3}{8}$ – dopuszczającą lub niedostateczną, a 5 uczniów otrzymało ocenę dostateczną. Skorzystaj z tych danych i odpowiedz na pytania.

a) Ile uczniów jest w tej klasie?

b) Ile uczniów tej klasy otrzymało ocenę bardzo dobrą?

c) Jaką część klasy stanowią uczniowie, którzy otrzymali co najmniej ocenę dostateczną?

d) Ile uczniów tej klasy otrzymało ocenę dopuszczającą lub niedostateczną?

6 Marysia w ciągu 1,4 godziny przeszła 6,3 km, a Krysia w ciągu 20 minut przeszła 1,6 km. Uzasadnij, że Krysia szła szybciej niż Marysia.

7 Trzeba zapakować 630 kg orzechów laskowych w torebki – po 25 dag do każdej. Zapakowano już $\frac{2}{3}$ wszystkich orzechów. Ile torebek zostało do zapakowania?

8 Kucharz zużył do smażenia powidel 1,5 kg cukru, co stanowiło $\frac{3}{5}$ całego zapasu cukru. Ile kilogramów cukru miał kucharz przed smażeniem powidel?

9 Piotr z domu do szkoły ma $1\frac{4}{5}$ km. Przeszedł już 150 m. Uzasadnij, że Piotrowi zostało do przebycia jeszcze $\frac{11}{12}$ drogi.



- 10 Klient kupił: 6 jaj po 80 gr za sztukę, 3 kostki masła po 4,59 zł za kostkę, 35 dag polędwicy po 33,40 zł za 1 kg oraz 0,6 kg żółtego sera po 23,90 zł za 1 kg. Ile reszty otrzymał z 50 zł?
- 11 Grecja zajmuje powierzchnię $131\,990\text{ km}^2$, a Chorwacja $56\,610\text{ km}^2$. Oszacuj, ile razy powierzchnia Grecji jest większa od powierzchni Chorwacji.
- 12 Łądołód na Antarktydzie to największa pokrywa lodowa świata, zajmująca $12,2$ miliona km^2 . Oszacuj, ile razy ten obszar jest większy od powierzchni Polski. Przyjmij, że powierzchnia Polski wynosi $312\,000\text{ km}^2$.
- 13 Masz 15 zł i chcesz kupić mleko za 2,35 zł, wodę mineralną za 1,95 zł oraz 5 jogurtów po 1,80 zł za sztukę. Oszacuj, czy ta kwota wystarczy ci na zakupy.
- 14 1 kg kakao zawiera: $\frac{1}{25}$ kg wody, $\frac{9}{49}$ kg tłuszczu, 0,21 kg białka, 0,31 kg cukru oraz inne składniki. Oszacuj masę innych składników w 500 g kakao.
- 15 Które spośród ułamków $\frac{3}{20}$, $\frac{4}{21}$, $\frac{11}{88}$, $\frac{15}{45}$, $\frac{7}{28}$ mają rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe? Odpowiedź uzasadnij.
- 16 Dane są ułamki: $\frac{15}{12}$, $\frac{121}{44}$, $\frac{150}{27}$, $\frac{10}{28}$, $\frac{6}{81}$, $\frac{627}{150}$. Skróć je i wybierz z nich te, które mają rozwinięcia dziesiętne skończone. Każdy z wybranych ułamków przybliż taką liczbą całkowitą, aby obie liczby (ułamek i jego przybliżenie) różniły się o mniej niż 0,5.
- 17 Które z podanych rozwinięć dziesiętnych nie są rozwinięciami okresowymi?
 I. 0,37777... II. 2,152(52) III. 0,252525
 IV. 1,111... V. 0,(6) VI. 5,12
 VII. 3,33333333 VIII. 7,3434... IX. 0,123456789123
- 18 W tabeli podano średnie odległości planet Układu Słonecznego od Słońca.



Merkury	57 909 170 km	Jowisz	778 412 027 km
Wenus	108 208 926 km	Saturn	1 426 725 413 km
Ziemia	149 597 887 km	Uran	8 870 972 220 km
Mars	227 936 637 km	Neptun	4 498 252 900 km

Źródło: pl.wikipedia.org/wiki/Układ_Słoneczny

Skorzystaj z tych informacji i odpowiedz na pytania.

- a) Jaka jest odległość Ziemi i Neptuna od Słońca w zaokrągleniu do miliona kilometrów?
 b) W jakiej odległości od Słońca, w zaokrągleniu do tysiąca kilometrów, znajduje się Mars?
 c) O ile milionów kilometrów bliżej Słońca znajduje się Wenus niż Jowisz?

19 Z 7 kg mąki cukiernik wypieka około 160 pączków. Ile pączków, w zaokrągleniu do pełnych dziesiątek, wypieczę cukiernik z 3 kg mąki?

20 Podaj czwartą, dwunastą i dwudziestą drugą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby.

- a) 0,(8) b) 3,3(28) c) 6,10(291)

 **21** Największa z piramid egipskich, piramida Cheopsa, ma wysokość 139 m, a wieża Eiffla ma 300 m. Uzasadnij, że wysokość piramidy stanowi w zaokrągleniu 0,46 wysokości wieży.

22 Śnieżnicki Park Krajobrazowy zajmuje obszar 28,8 tys. ha. Na terenie parku znajduje się pięć rezerwatów:

- Puszcza Śnieżnej Białki – 124,68 ha,
- Nowa Morawa – 22,16 ha,
- Jaskinia Niedźwiedzia – 89,05 ha,
- Śnieżnik Kłodzki – 181,24 ha,
- Wodospad Wilczki – 2,75 ha.

Jaką część obszaru parku krajobrazowego stanowi powierzchnia pięciu rezerwatów?
 Wynik zaokrąglaj do 0,01 ha.



23 Wstaw nawiasy tak, aby otrzymać równość.

- a) $10 \cdot 21,1 + 8,9 \cdot 3,5 + 1\frac{1}{2} = 1500$
 b) $96\frac{1}{8} - 6,125 : 4\frac{1}{3} + 1\frac{2}{3} = 15$

24 Ułamki: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ nazywa się uławkami egipskimi. Każdy ułamek można przedstawić jako sumę różnych uławków egipskich, np. $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ lub $\frac{13}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

- a) Przedstaw $\frac{9}{20}$ za pomocą sumy uławków egipskich.
 b) Podaj przykłady 3 uławków zwykłych w postaci sumy różnych uławków egipskich.

Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszytocie.

W zadaniach 1.–7. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 1 Suma liczb $2\frac{1}{3}$ i $3,75$ jest równa
 A. $5\frac{1}{12}$ B. $5\frac{4}{12}$ C. $6\frac{1}{12}$ D. $5\frac{4}{7}$
- 2 Różnicą liczb $7\frac{1}{6}$ i $2,75$ jest liczba
 A. $5\frac{7}{12}$ B. $4\frac{5}{12}$ C. $5\frac{1}{4}$ D. $4\frac{1}{6}$
- 3 Tata ma $1,94$ m wzrostu, a jego syn $1,45$ m. Tata jest wyższy od syna
 A. o $0,49$ m B. o $0,39$ m C. o $0,59$ m D. o $0,51$ m
- 4 Jeden kilogram sera kosztuje 26 zł. Marek kupił $0,75$ kg tego sera, więc zapłacił
 A. $19,50$ zł B. 22 zł C. $17,50$ zł D. $15,50$ zł
- 5 Iloczynem liczb $2\frac{1}{7}$ i $4,8$ jest
 A. $9\frac{1}{2}$ B. $10\frac{2}{7}$ C. $9\frac{1}{7}$ D. $9\frac{4}{5}$
- 6 Ilorazem liczby $8\frac{2}{5}$ i liczby $0,8$ jest
 A. $10,5$ B. $6\frac{18}{25}$ C. $10,05$ D. 10
- 7 Liczba całkowita, która jest takim przybliżeniem ułamka $\frac{49}{5}$, że obie liczby (ułamek i jego przybliżenie) różnią się o mniej niż $0,5$, to
 A. $9,8$ B. 10 C. 8 D. 9

W zadaniach 8.–9. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 8 Która liczba jest przybliżeniem z nadmiarem ułamka okresowego $0,(18)$?
 A. $0,18181$ B. $0,18180$ C. $0,1818$ D. $0,18182$
- 9 Sznurek długości $2,7$ m podzielono na dwie części, z których jedna jest o 30 cm dłuższa od drugiej. Jaką częścią dłuższego kawałka sznurka jest krótszy kawałek?
 A. $0,8$ B. $1,25$ C. $0,25$ D. $\frac{2}{3}$

- 10 Dane jest wyrażenie $1\frac{1}{5} \cdot 2,5 - 3,5 : 1,4$. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Aby obliczyć wartość tego wyrażenia, należy najpierw wykonać mnożenie, następnie dzielenie, a na końcu odejmowanie.	P	F
Wartość tego wyrażenia wynosi 0,5.	P	F

- 11 Kierowca przejechał 190 km w ciągu 3,5 godziny. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Prędkość średnia na tej trasie w zaokrągleniu do 0,01 to A / B.

A. 54,29 km/h B. 54,3 km/h

Gdyby prędkość średnia wynosiła 60 km/h, to kierowca pokonałby tę drogę w około C / D.

C. 3,2 h D. 3,1 h

- 12 Jola kupiła: 1,4 kg cytryn w cenie 4,50 zł za 1 kg, 1,3 kg jabłek po 2,80 zł za 1 kg oraz 1,5 kg bananów po 5,40 zł za 1 kg. Zapłaciła banknotem dwudziestozłotowym. Czy Jola otrzymała mniej niż 4 zł reszty?

Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	zakupy kosztowały więcej niż 20 zł.
B.	Nie,		2.	cytryny kosztowały ponad 6 zł, jabłka niewiele mniej niż 4 zł, a banany ponad 8 zł.
			3.	zakupy kosztowały nie więcej niż 15 zł.

- 13 Pan Robert segregował zebrane grzyby. Trzecią ich część stanowiły podgrzybki, czwartą część – borowiki, szóstą część koźlaki, a pozostałe – kurki ważyły 2,4 kg. Ile kilogramów grzybów zebrał pan Robert?

- 14 W poniedziałek pani Iza zapłaciła na bazarze 2,85 zł za półtora kilograma jabłek. W piątek jabłka były dwukrotnie droższe niż w poniedziałek, a w sobotę potaniały o 85 gr na kilogramie. Ile kilogramów jabłek może kupić pani Iza w sobotę za 9 zł?

- 15 Bus pokonał drogę 120 km w czasie 90 minut. Prędkość średnia samochodu osobowego na tej samej trasie wyniosła 96 km/h. Który samochód jechał krócej i o ile minut? Zapisz obliczenia.



Sport i ułamki dziesiętne

Do pomiaru wyników osiąganych przez sportowców używa się przyrządów, które pozwalają na podawanie ich z coraz większą dokładnością. **Wyniki te zapisywane są za pomocą ułamków dziesiętnych.** Często wyniki uzyskiwane przez zawodników różnią się o ułamki sekund (np. w biegach) czy też części setne metrów (np. w skoku o tyczce albo rzucie młotem). Tabele rekordów świata i rekordów poszczególnych krajów to zbiory liczb, w których dominują ułamki dziesiętne.



Dwain Chambers
(czyt. dlejń czejmbez)
Wielka Brytania
czas: **10,00s**

Marc Burns
(czyt. mark berns)
Trynidad i Tobago
czas: **10,00s**

REKORD ŚWIATA (2016) REKORD POLSKI (2016)

Anita Włodarczyk
rzut młotem: **82,98m**
sierpień 2016, Memoriał
Kamili Skolimowskiej,
Warszawa



REKORDZIŚCI POLSKI

Anna Rogowska

skok o tyczce: **4,85m**

marzec 2011, Halowe
Mistrzostwa Europy, Paryż

Marek Plawgo

bieg na 400 m

przez płotki: **48,12s**

sierpień 2007,
Mistrzostwa Świata,
Osaka



REKORD ŚWIATA

Usain Bolt

(czyt. jusejn bolt)

Jamajka

czas: **9,58s**

Daniel Bailey

(czyt. denjel bejli)

Antigua

czas: **9,93s**

Asafa Powell

(czyt. asafa pałel)

Jamajka

czas: **9,84s**

Tyson Gay

(czyt. tajsn gej)

Stany Zjednoczone

czas: **9,71s**

Richard Thompson

(czyt. riczart tomsn)

Trynidad i Tobago

czas: **9,93s**

Wyniki finału biegu
na 100 metrów mężczyzn

MISTRZOSTWA ŚWIATA

sierpień 2009, Berlin

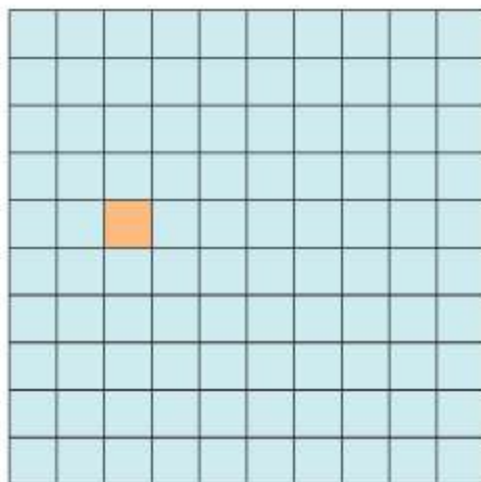
1. Pojęcie procentu

Przypomnij sobie

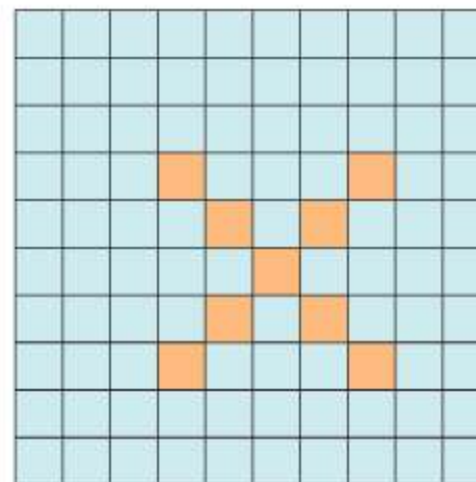
- jak zamienić ułamek zwykły na ułamek o mianowniku 100,
- jak można wyjaśnić pojęcie jednego procentu pewnej wielkości,
- co oznacza 25%, 50%, 200% pewnej wielkości.

Procentów używamy do określania podwyżek i obniżek cen, zawartości poszczególnych składników w produktach spożywczych, oprocentowania lokat bankowych itp. Termin „procent” pochodzi od łacińskich słów *pro centum*, co w tłumaczeniu oznacza „według stu”.

Jeden procent (1%) danej wielkości to jedna setna $\left(\frac{1}{100}\right)$ tej wielkości. Procent oznaczamy symbolem %. $1\% = \frac{1}{100}$ lub $1\% = 0,01$



Zamalowano na pomarańczowo jeden ze stu kwadracików jednostkowych, czyli $\frac{1}{100}$ pola kwadratu. Zamalowany kwadracik jednostkowy stanowi 1% pola kwadratu.



Zamalowano na pomarańczowo 9 kwadracików jednostkowych, czyli $\frac{9}{100}$ pola kwadratu. Zamalowane kwadraciki jednostkowe stanowią 9% pola kwadratu.

Przykład 1.

Na parkingu stały samochody osobowe i ciężarowe. Samochody ciężarowe stanowiły 25% wszystkich samochodów. Obliczmy, ile procent samochodów stojących na tym parkingu stanowiły samochody osobowe.

Liczba wszystkich samochodów na parkingu to 100% liczby samochodów.

Liczba samochodów ciężarowych to 25% liczby samochodów.

Liczba samochodów osobowych to $100\% - 25\% = 75\%$ liczby samochodów.

ODPOWIEDŹ: Samochody osobowe stanowiły 75% wszystkich samochodów.

- 1 Zosia przeczytała pierwszego dnia 20% liczby stron książki, drugiego dnia – 15%, a trzeciego – aż 30%. Ile procent liczby stron książki zostało Zosi do przeczytania?
- 2 Robotnik miał wykonać pewną pracę w 4 dni. Pierwszego dnia wykonał 18% pracy, drugiego dnia – dwa razy więcej niż pierwszego, a trzeciego dnia – trzy razy mniej niż drugiego dnia. Ile procent pracy pozostało mu do wykonania czwartego dnia?

$p\%$ danej wielkości to $\frac{p}{100}$ tej wielkości. Zgodnie z tą regułą procenty można zamieniać na ułamki.



Przykład 2.

Zamieńmy procent na liczbę.

- a) 30% b) 400% c) 0,6%

$$\text{a) } 30\% = \frac{30}{100} = 0,3$$

$$\text{b) } 400\% = \frac{400}{100} = 4$$

$$\text{c) } 0,6\% = \frac{0,6}{100} = \frac{6}{1000} = 0,006$$

$$100\% = 1$$



$$75\% = \frac{3}{4}$$



$$50\% = \frac{1}{2}$$



$$25\% = \frac{1}{4}$$



$$10\% = \frac{1}{10}$$



$$1\% = \frac{1}{100}$$



Aby zamienić procent na liczbę, należy liczbę procentów podzielić przez 100.



- 3 Zamień procenty na liczby.
 - a) 10%, 35%, 67%, 130%, 245%, 500%
 - b) 0,8%, 0,45%, 5,8%, 12,5%, 167,2%

Przykład 3.

Zamieńmy procent na ułamek zwykły nieskracalny.

$$\text{a) } \frac{5}{6}\%$$

$$\text{b) } 2\frac{1}{3}\%$$

$$\text{a) } \frac{5}{6}\% = \frac{5}{6} : 100 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{100} = \frac{5}{600} = \frac{1}{120}$$

$$\text{b) } 2\frac{1}{3}\% = \frac{7}{3} : 100 = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{100} = \frac{7}{300}$$

- 4 Zamień procenty na ułamki zwykłe nieskracalne.

$$\text{a) } \frac{1}{2}\%, \frac{1}{3}\%, \frac{3}{4}\%, \frac{17}{20}\%, \frac{25}{33}\%$$

$$\text{b) } 1\frac{1}{5}\%, 11\frac{1}{9}\%, 66\frac{2}{3}\%, 5\frac{2}{7}\%$$

Przykład 4.

Zamieńmy liczbę na procent.

a) $\frac{3}{100}$ b) 0,4 c) 2,3

Przypomnijmy: $\frac{1}{100} = 1\%$, $1 = 100\%$

a) $\frac{3}{100} = 3 \cdot \frac{1}{100} = 3 \cdot 1\% = 3\%$

Taki sam wynik otrzymamy, gdy wykonamy działanie:

$$\frac{3}{100} \cdot 1 = \frac{3}{100} \cdot 100\% = \frac{300}{100}\% = 3\%$$

b) $0,4 = 0,4 \cdot 100\% = 40\%$

c) $2,3 = 2,3 \cdot 100\% = 230\%$



Aby zamienić liczbę na procent, należy tę liczbę pomnożyć przez 100%.

5 Zamień liczby na procenty.

a) 5, 20, 4,7, 3,25, 0,128, 0,007 b) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{6}{25}$, $\frac{3}{50}$, $\frac{27}{200}$

Przykład 5.

Zamieńmy liczbę na procent.

a) $\frac{1}{3}$ b) $1\frac{2}{5}$

a) $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 100\% = \frac{100}{3}\% = 33\frac{1}{3}\%$

b) $1\frac{2}{5} = \frac{7}{5} \cdot 100\% = 140\%$

6 Zamień liczby na procenty.

a) $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{8}{9}$ b) $2\frac{5}{8}$, $1\frac{2}{3}$, $4\frac{1}{11}$

7 Na poniższym rysunku przedstawiono flagi niektórych państw europejskich.



Niemcy



Francja



Włochy



Belgia



Holandia



Luksemburg



Dania



Irlandia



Austria



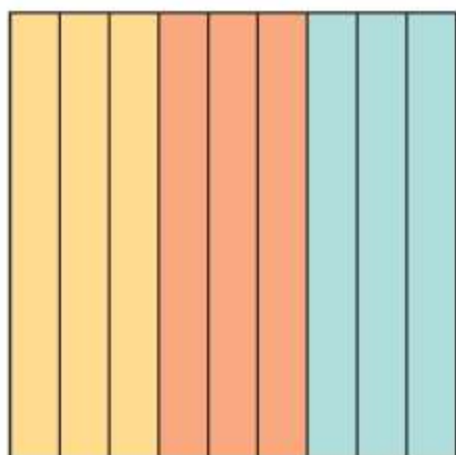
Grecja

W których flagach:

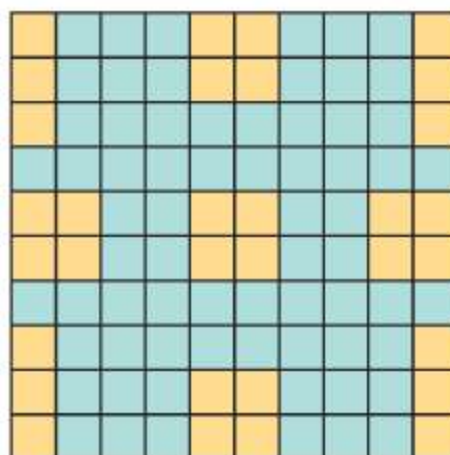
- kolor czerwony zajmuje $33\frac{1}{3}\%$ powierzchni flagi,
- kolor biały zajmuje tyle samo procent powierzchni flagi co kolor niebieski,
- jeden z kolorów zajmuje więcej niż 50% powierzchni flagi?

8 Jaką część figury zamalowano na żółto? Jaki to procent pola całej figury?

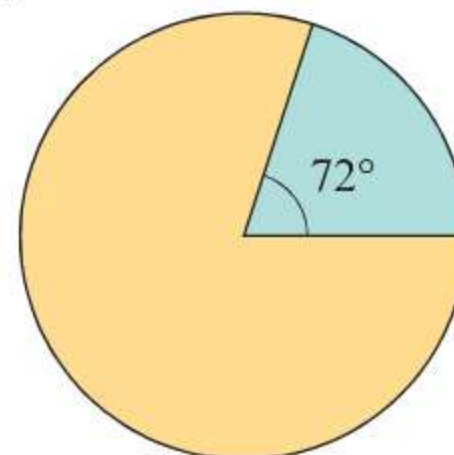
a)



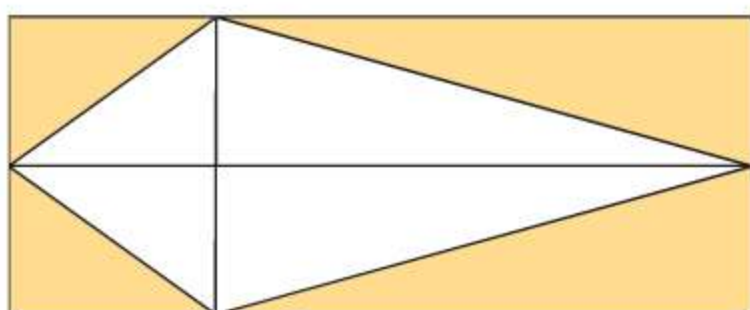
b)



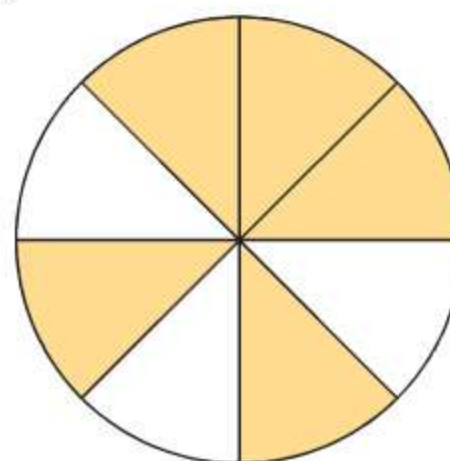
c)



d)

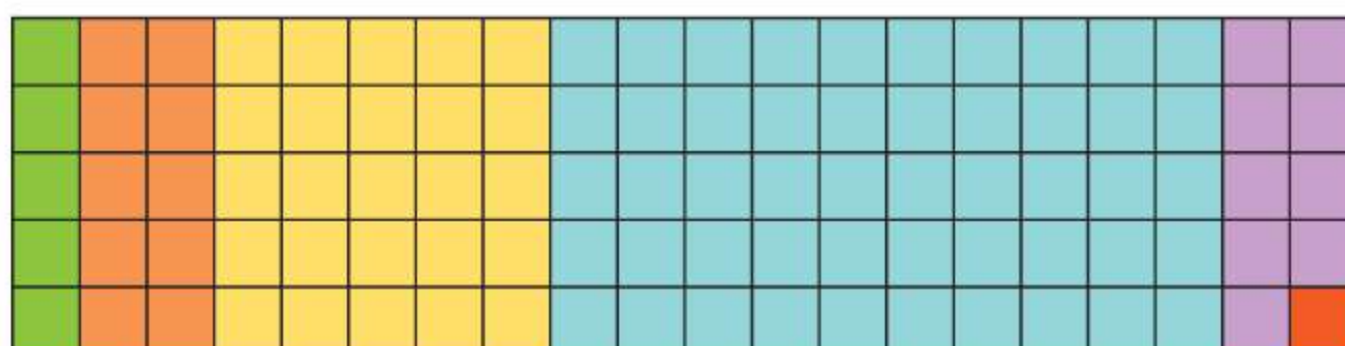


e)



9 Narysuj dowolne koło. Pokoloruj 12,5% jego pola.

10 Na prostokątnym diagramie procentowym przedstawiono zestawienie ocen z geografii na koniec roku szkolnego w klasach 5–8. Jeden kwadracik oznacza 1%.



- celujący
- bardzo dobry
- dobry
- dostateczny
- dopuszczający
- niedostateczny

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

50% uczniów otrzymało z geografii ocenę dostateczną.	P	F
Promocję z geografii uzyskało 99% uczniów.	P	F
Ponad połowa uczniów otrzymała z geografii oceny różne od dostatecznej.	P	F
Więcej niż $\frac{1}{3}$ uczniów otrzymała z geografii oceny dobre, bardzo dobre i celujące.	P	F
Uczniów z dobrymi i bardzo dobrymi ocenami z geografii jest dwa razy mniej niż uczniów z ocenami dostatecznymi i dopuszczającymi.	P	F

- 11 Agnieszka zbiera książki z różnych dziedzin. 26% jej kolekcji stanowią książki przyrodnicze, $\frac{3}{8}$ stanowią książki o tematyce fantastycznej, a resztę – sensacyjne. Jaki procent kolekcji Agnieszki stanowią książki sensacyjne?

Wyzwanie

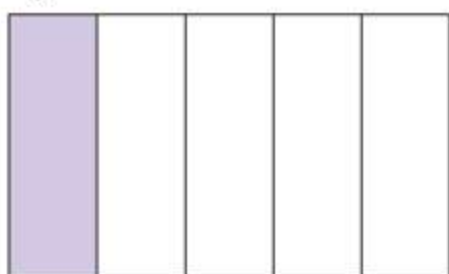
W pewnej klasie 60% uczniów gra w koszykówkę, 30% – w tenisa, a 10% uprawia obie dyscypliny sportu. Jaki procent uczniów tej klasy nie gra ani w tenisa, ani w koszykówkę?

Sprawdź się!

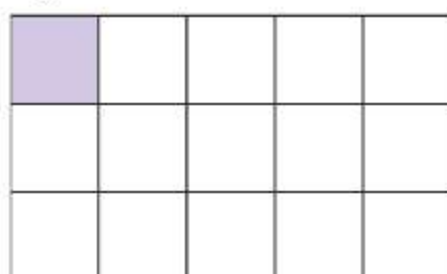
- 1 Mleko zawiera: 5% węglowodanów, 3% białka, 4% tłuszczu, 87% wody oraz inne składniki. Ile procent mleka stanowią inne składniki?
- 2 Zamień procent na liczbę.
a) 60% b) 210% c) 0,5% d) $\frac{5}{9}\%$

- 3 Jaki procent pola prostokąta został zamalowany?

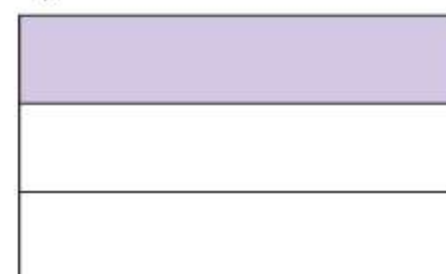
a)



b)



c)



- 4 Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

$\frac{2}{3}$ pewnej kwoty to A / B niż 66% tej kwoty. A. więcej B. mniej

$10\frac{2}{3}\%$ pewnej liczby jest równe C / D tej liczby. C. $\frac{2}{30}$ D. $\frac{8}{75}$

- 5 Asia i Ola upiekły ciasteczka na spotkanie klasowe. Asia twierdzi, że upiekła $\frac{3}{7}$ wszystkich ciasteczek, a Ola, że upiekła dokładnie 60% ciasteczek. Wykaż, że jest niemożliwe, aby obie dziewczynki mówiły prawdę.



2. Obliczanie procentu danej liczby

Przypomnij sobie

- jak obliczyć ułamek danej liczby,
- jak obliczyć cenę towaru po obniżce o 20%,
- jak obliczyć cenę towaru po podwyżce o 10%.

Ta sama liczba procentów różnych wielkości może oznaczać co innego, choćby:
50% masy pana Adama, równej 76 kg, to 38 kg,
ale 50% masy jego dziecka, równej 30 kg, to 15 kg,
natomiast 50% ceny książki, która kosztuje 86 zł, wynosi 43 zł.

Przykład 1.

Działka budowlana ma powierzchnię 900 m^2 . Dom ma zająć 35% powierzchni tej działki. Ile metrów kwadratowych działki przeznaczono na wybudowanie domu?

Obliczamy 35% z 900 m^2 .

Sposób I

900 m^2 to 100% powierzchni działki,

9 m^2 to 1% powierzchni działki,

zatem 35% powierzchni działki to $35 \cdot 9 = 315 [\text{m}^2]$.

Sposób II

Zamieniamy procent na ułamek: $35\% = 0,35$

Obliczamy ułamek danej liczby, w tym przypadku ułamek powierzchni działki:

$$0,35 \cdot 900 = 315 [\text{m}^2]$$

ODPOWIEDZ: Na wybudowanie domu przeznaczono 315 m^2 działki.

$$p \% \text{ dowolnej wielkości } a \text{ jest równe } \frac{p}{100} \cdot a.$$



1

Oblicz w pamięci.

a) 10% liczby 100

d) 40% liczby 40

g) 70% liczby 1

j) 100% liczby 0,0081

b) 20% liczby 50

e) 50% liczby 500

h) 80% liczby 80

k) 110% liczby 100

c) 30% liczby 200

f) 60% liczby 10

i) 90% liczby 900

l) 200% liczby 33

- 2 Oblicz sposobem I z przykładu 1.
- a) 24% liczby 600 b) 15% liczby 4000 c) 21% liczby 30 000
d) 7% liczby 50 e) 12% liczby 150 f) 45% liczby 220
- 3 Oblicz sposobem II z przykładu 1.
- a) 48% liczby 150 b) 55% liczby 560 c) 112% liczby 25
d) 8% liczby 450 e) 250% liczby 12 f) 302% liczby 50
- 4 Oblicz.
- a) 22% kwoty 200 zł b) 4% masy 80 dag c) 25% doby
d) 20% z 450 m e) 70% kwoty 75 zł f) 12% z 20 litrów
- 5 W siódmej klasie jest 25 uczniów. Pewnego dnia 20% uczniów tej klasy było nieobecnych. Ilu uczniów nie przyszło wówczas do szkoły?
- 6 Na biwak pojechało 87,5% uczniów klasy liczącej 32 osoby. Wśród uczniów biorących udział w biwaku chłopcy stanowili 75%. Ile dziewcząt pojechało na biwak?

Przykład 2.

Towar kosztował 50 zł. Jego cenę podwyższono o 20%. Jaka jest nowa cena tego towaru?

Sposób I

50 zł to cena towaru przed podwyżką. Nowa cena to $100\% + 20\% = 120\%$ ceny przed podwyżką, czyli 120% liczby 50.

120% liczby 50 to $120\% \cdot 50 = 1,20 \cdot 50 = 60$ [zł]

Sposób II

Podwyżka wynosi 20% ceny towaru, a 20% liczby 50 to $0,2 \cdot 50 = 10$ [zł].

Nowa cena towaru to: $50 + 10 = 60$ [zł].

ODPOWIEDŹ: Nowa cena towaru to 60 zł.

- 7 Rower kosztuje 790 zł. Gdy kupuje się go na raty, trzeba zapłacić łącznie o 18% więcej. Ile kosztuje ten rower kupiony na raty?
- 8 Oblicz ceny produktów spożywczych podanych w tabeli po podwyżce.

Produkt	Cena przed podwyżką	Podwyżka
ser żółty	24 zł	5%
chleb	6,80 zł	20%
jogurt	2,40 zł	10%

Przykład 3.

Cenę sukienki obniżono o 15%. Jaka jest jej nowa cena, jeżeli przed obniżką sukienka kosztowała 200 zł?

Sposób I

200 zł to cena sukienki przed obniżką. Nowa cena to $100\% - 15\% = 85\%$ ceny przed obniżką, czyli 85% liczby 200.

85% liczby 200 to $85\% \cdot 200 = 0,85 \cdot 200 = 170$ [zł]

Sposób II

Obniżka wynosi 15% ceny sukienki, a 15% liczby 200 to $0,15 \cdot 200 = 30$ [zł].

Nowa cena sukienki to: $200 - 30 = 170$ [zł].

ODPOWIEDŹ: Nowa cena sukienki jest równa 170 zł.

- 9 Ceny produktów podanych w tabeli zostały obniżone o wskazany procent. Oblicz ceny po obniżce.

Produkt	Cena przed obniżką	Obniżka
rower	600 zł	8%
deskorolka	250 zł	12%
dres	260 zł	15%

Przykład 4.

Zgodnie z umową za wykonanie zlecenia przysługuje panu Markowi wynagrodzenie 2050 zł brutto, a panu Janowi – 2250 zł brutto. Przy wypłacie otrzymali mniej, ponieważ każdemu z nich potrącono po 20% podatku. Ile złotych netto zarobił pan Marek, a ile – pan Jan?

**Wynagrodzenie
BRUTTO**

=

**Wynagrodzenie
NETTO**

+

**Podatek od
wynagrodzenia
BRUTTO**

Obliczmy, jaki podatek zapłacili:

pan Marek: 20% liczby 2050 to $0,2 \cdot 2050 = 410$ [zł],

pan Jan: 20% liczby 2250 to $0,2 \cdot 2250 = 450$ [zł].

Obliczmy kwoty netto, które zostały wypłacone:

panu Markowi: $2050 - 410 = 1640$ [zł],

panu Janowi: $2250 - 450 = 1800$ [zł].

ODPOWIEDŹ: Pan Marek zarobił 1640 zł netto, a pan Jan 1800 zł netto.



- 10 Pan Piotr wystawił rachunek za naprawę urządzeń hydraulicznych w wysokości 120 zł. Ile pieniędzy otrzymał za wykonanie tej pracy, jeśli potrącono podatek w wysokości 20%?

Przykład 5.

W hurtowni cena netto 1 kg mięsa wołowego wynosi 25 zł. Ile należy zapłacić za 1 kg tego mięsa z uwzględnieniem 5% VAT?

VAT wynosi 5% liczby 25, czyli
 $0,05 \cdot 25 = 1,25$ [zł].

Cena 1 kg mięsa z uwzględnieniem VAT to
 $25 + 1,25 = 26,25$ [zł].

ODPOWIEDZ: Za 1 kg mięsa wołowego należy zapłacić 26,25 zł.

VAT to obowiązkowy podatek na rzecz państwa. W zależności od towarów i usług obowiązują różne stawki VAT-u:

- podstawowa 23%,
- obniżone 8% i 5%.

Podatek ten oblicza się od ceny netto.

- 11 Miesięczna opłata netto za połączenia telefoniczne wyniosła 76,26 zł, a podatek VAT od usług telekomunikacyjnych jest równy 23%. Ile trzeba zapłacić za połączenia telefoniczne wraz z VAT-em?

- 12 Wykonaj obliczenia.

- a) 38 zwiększ o 20% tej liczby. b) 215 zwiększ o 16% tej liczby.
 c) 36,8 zmniejsz o 40% tej liczby. d) 402 zmniejsz o $33\frac{1}{3}\%$ tej liczby.

- 13 W pewnej hurtowni bluzka kosztuje 28 zł. Przy zakupie co najmniej 100 sztuk kupujący dostaje rabat w wysokości 20% ceny. Oblicz, ile zapłaci kupujący za 110 sztuk bluzek, a ile za 90 sztuk.

- 14 Jeden szampon kosztuje 8,60 zł. Za każdy kolejny szampon zapłacisz 50% ceny pierwszego szamponu. Ile maksymalnie szampoonów możesz kupić za 35 zł?

- 15 Ania, Kasia i Ewa zbierają pieniądze na wakacje. Ania ma 280 zł, a Kasia o 20% więcej niż Ania, ale o 224 zł mniej niż Ewa. O ile więcej pieniędzy ma Ewa od Ani?

- 16 Która wielkość jest większa:

- a) 15% liczby równej 25% liczby 400 czy 30% liczby równej 20% liczby 300,
 b) 20% trzeciej części tabliczki czekolady czy 25% czwartej części takiej samej tabliczki czekolady?



- 17 Początkowa cena towaru wynosiła 200 zł. O ile złotych się zmieniła, jeśli:
 a) obniżono ją o 10%, a potem podwyższono o 10%,
 b) podwyższono ją o 20%, a potem obniżono o 20%,
 c) obniżono ją o 15%, a potem podwyższono o 20%,
 d) podwyższono ją o 20%, a potem obniżono o 15%? Co zauważasz?
- 18 Przetwórnia owoców sprzedaje soki w litrowych opakowaniach kartonowych w cenie 2,40 zł za karton. W akcji promocyjnej zwiększono pojemność opakowania o 20% i jednocześnie jego cenę o 10%. Czy litr soku w promocji kosztuje mniej niż 2,20 zł? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	litr soku w promocji kosztuje 2,30 zł.
			2.	litr soku w promocji kosztuje 2,20 zł.
B.	Nie,		3.	pojemność opakowania zwiększyła się o 20%, a cena tylko o 10%, więc $90\% \cdot 2,40 = 2,16$ [zł].

Wyzwanie

O ile procent powiększy się pole kwadratu, jeśli każdy jego bok wydłużymy o 20%?

Sprawdź się!

- Oblicz.
 a) 30% liczby 800 b) 45% liczby 160 c) 16% liczby 50
- Obszar o powierzchni 5 ha zalesiono w 52% sosnami, w 35% olchami, a pozostałą część brzozaami. Ile hektarów zajęły sosny, a ile – brzozy?
- Cenę telewizora równą 2400 zł obniżono o 12%. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.
 Cenę telewizora obniżono o A/B. A. 288 zł B. 248 zł
 Telewizor po obniżce kosztuje C/D. C. 2152 zł D. 2112 zł
- Liczbę 420 zwiększ o jej $1\frac{1}{6}\%$. Podaj liczbę, którą otrzymasz.
- Chleb waży o 36% więcej niż mąka użyta do jego wypieku. Ile kilogramów chleba można upiec z 50 kg mąki?



3. Obliczanie liczby, gdy dany jest jej procent

Przykład 1.

W pewnej szkole 432 chłopców stanowi 48% liczby wszystkich uczniów szkoły. Obliczmy, ilu uczniów jest w tej szkole.

Obliczamy liczbę, której 48% to 432.

Sposób I

48% liczby wszystkich uczniów – 432 chłopców

1% liczby wszystkich uczniów – $432 : 48 = 9$ uczniów

100% liczby wszystkich uczniów – $9 \cdot 100 = 900$ uczniów

Sposób II

x – liczba wszystkich uczniów

48% liczby x – liczba chłopców

Zamieniamy 48% na ułamek i otrzymujemy: $0,48 \cdot x = 432$, a więc $x = 432 : 0,48$, stąd $x = 900$.

SPRAWDZENIE: 48% liczby 900 to $0,48 \cdot 900 = 48 \cdot 9 = 432$

ODPOWIEDŹ: W tej szkole jest 900 uczniów.



- 1 Za pomocą sposobu I z przykładu 1. znajdź liczbę, której:

a) 12% to 72,	b) 35% to 420,	c) 240% to 1680,
d) 6% to 7,5,	e) 450% to 2700,	f) 770% to 15,4.
- 2 Za pomocą sposobu II z przykładu 1. znajdź liczbę, której:

a) 5% to 63,	b) 470% to 1645,	c) 1350% to 810,
d) 15% to 6,	e) 72% to 18,	f) 355% to 1420.
- 3 Znajdź wielkość, której:

a) 40% to 88 dag,	60% to 150 dag,	80% to 80 dag,
b) 3% to 2,4 kg,	7% to 63 kg,	8% to 72 kg,
c) 150% to 450 km,	220% to 66 km,	110% to 99 km.
- 4 Znajdź wielkość, której:

a) 13% to 18,2 kg,	b) $66\frac{2}{3}\%$ to 24 cm,	c) 43% to 107,5 km,
d) 125% to 2 h 30 min,	e) 175% to 3 m 50 cm,	f) 1500% to 2 kg 75 dag.
- 5 W bibliotece szkolnej lektury stanowią 65% liczby wszystkich książek. Ile książek jest w bibliotece, jeśli do dyspozycji uczniów jest 12 584 egzemplarzy lektur?

- 6 Na zieloną szkołę pojechało 480 uczniów, co stanowi 80% liczby uczniów pewnej szkoły. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.
- Szkoła liczy **A / B** uczniów. A. 384 B. 600
- Na zieloną szkołę nie pojechało **C / D** uczniów. C. 120 D. 96

Przykład 2.

Cenę towaru obniżono o 30%. Jaka była cena przed obniżką, jeżeli obecnie towar kosztuje 140 zł?

x – cena towaru przed obniżką

$$100\% - 30\% = 70\%$$

70% liczby x – cena towaru po obniżce

Zamieniamy 70% na ułamek i otrzymujemy: $0,7 \cdot x = 140$, a więc

$$x = 140 : 0,7, \text{ stąd } x = 200 \text{ [zł]}.$$

SPRAWDZENIE: 30% liczby 200 to $0,3 \cdot 200 = 30 \cdot 2 = 60$ [zł] i $200 - 60 = 140$ [zł]

ODPOWIEDŹ: Towar przed obniżką kosztował 200 zł.

- 7 Po obniżce ceny o 20% spodnie kosztują 96 zł. Jaka była cena spodni przed obniżką? O ile złotych obniżono cenę?
- 8 Po podwyżce ceny o 15% samochód kosztuje 40 250 zł. Jaka była cena samochodu przed podwyżką? O ile złotych wzrosła cena?
- 9 Znajdź liczbę, której 25% jest równe wartości podanego wyrażenia.
- a) $5\frac{5}{25} + 1,72$ b) $\left(4\frac{2}{3} - 3,25\right) : \left(3\frac{1}{3} - 2,5\right)$ c) $0,7 + 4,2 : 0,1$
- d) $2\frac{1}{4} : 0,3 - 1,2$ e) $1\frac{1}{5} + 5,8 \cdot 1\frac{1}{4}$ f) $6,49 - \frac{6}{25} \cdot 4\frac{5}{8}$
- 10 Na dwóch stronach klasera kolekcjoner ułożył 21 znaczków, w tym 7 przedstawiających znanych Polaków. Znaczkę z tych stron stanowią 3% wszystkich znaczków w klaserze, a 7 znaczków przedstawiających znanych Polaków stanowi 25% wszystkich znaczków o tej tematyce w klaserze. Ile znaczków ma kolekcjoner w całym klaserze? Ile z nich przedstawia znanych Polaków?
- 11 Wybierz potrzebne informacje spośród podanych i odpowiedz na pytanie: ile kilogramów mleka potrzeba na zrobienie jednej kostki masła? Wynik zaokrąglij do 0,1 kg.
- 1) Masło to tłuszcz jadalny w postaci stałej, który otrzymuje się z mleka.
 - 2) 3,5% masy mleka to masa tłuszczu.
 - 3) Jedna kostka masła ma masę 0,2 kg.
 - 4) Masło składa się z mniej więcej 82% tłuszczu i 16% wody.
 - 5) Naturalnym kolorem masła jest kolor kremowy.



- 12** Chiny w połowie 2018 r. miały ok. 1 428 000 000 mieszkańców na powierzchni $9\,573\,000\text{ km}^2$. Chiny produkują rocznie ok. 214 400 000 ton ryżu, co stanowi 27,8% produkcji światowej. Jaką wielkość obliczysz, gdy wykonasz poniższe działanie?
- $214\,400\,000 : 0,278$
 - $214\,400\,000 : 1\,428\,000\,000$
 - $9\,573\,000 : 1\,428\,000\,000$
- 13** Jeden bok prostokąta wydłużono o 20%, a drugi skrócono o 20%. Powstał kwadrat o boku 6 cm. Jaka jest różnica pól prostokąta i kwadratu?
- 14** Przed sezonem narty sprzedawano w cenie promocyjnej. W sezonie ich cenę podwyższano dwukrotnie, najpierw o 5%, a następnie o 10%. Cena nart po dwóch podwyżkach wyniosła 924 zł. Oblicz cenę nart przed sezonem.
- 15** Po sezonie zimowym cena butów narciarskich spadła najpierw o 4%, a potem jeszcze o 15%. Po dwóch obniżkach buty kosztowały 408 zł. Oblicz cenę butów narciarskich w sezonie zimowym.
- 16** Jeden bok prostokąta wydłużono o 10%, a drugi skrócono o 10%. Powstał nowy prostokąt, którego pole jest o 15 m^2 mniejsze od pola poprzedniego prostokąta. Oblicz pola obydwu prostokątów.

Wyzwanie

Adam i Janek zbierają znaczki. Adam ma o 20% mniej znaczków niż Janek. O ile procent więcej znaczków ma Janek od Adama?

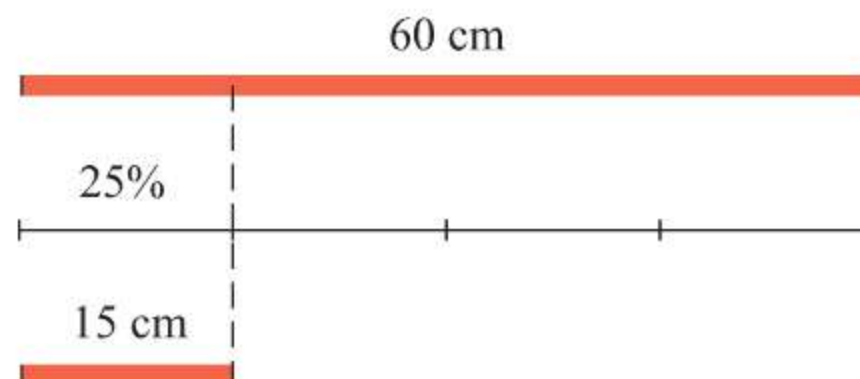
Sprawdź się!

- Znajdź wielkość, której:
 - 35% to 105 m,
 - 55% to 110 m,
 - 15% to 300 m.
- Ile kilogramów buraków cukrowych trzeba zużyć na wyprodukowanie 51 kg cukru, jeżeli cukier stanowi 17% masy buraków?
- Dokończ poniższe zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. Liczba, której 29% jest równe wartości wyrażenia $1,8 + 3,2 : \frac{4}{5}$, wynosi
 A. $6\frac{1}{4}$ B. 21 C. 20 D. 5,8
- Po podwyżce o 15% pensja pana Andrzeja wynosi 3680 zł. Ile złotych wynosiła podwyżka?
- Cenę telewizora obniżono o 10% i jeszcze o 100 zł. Jaka była jego cena początkowa, jeżeli obecnie telewizor kosztuje 2060 zł?

4. Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba

Przykład 1.

Z tasiemki o długości 60 cm odcięto 15-centymetrowy kawałek. Jaki procent tasiemki stanowi jej odcięta część?



Z 60 cm odcięto 15 cm tasiemki, to jest $\frac{15}{60}$, czyli $\frac{1}{4}$ całej tasiemki.

Ułamek $\frac{1}{4}$ zamieniamy na procent: $\frac{1}{4} \cdot 100\% = 25\%$.

ODPOWIEDŹ: Odcięta część stanowi 25% tasiemki.

Przykład 2.

W klasie liczącej 32 osoby jest 10 dziewczynek. Jaki procent liczby wszystkich osób w tej klasie stanowią dziewczynki?

Dziewczynki stanowią $\frac{10}{32}$, czyli $\frac{5}{16}$ klasy.

$$\frac{5}{16} \cdot 100\% = \frac{125}{4}\% = 31\frac{1}{4}\%$$

ODPOWIEDŹ: Dziewczynki stanowią $31\frac{1}{4}\%$ liczby wszystkich osób w klasie.

Przykład 3.

Obliczmy, jakim procentem 1 godziny jest:

a) 20 min, b) 1 s.

a) 1 h = 60 min

$$20 \text{ min stanowi } \frac{20}{60} \text{ godziny. } \frac{20}{60} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 100\% = 33\frac{1}{3}\%$$

ODPOWIEDŹ: 20 minut to $33\frac{1}{3}\%$ godziny.

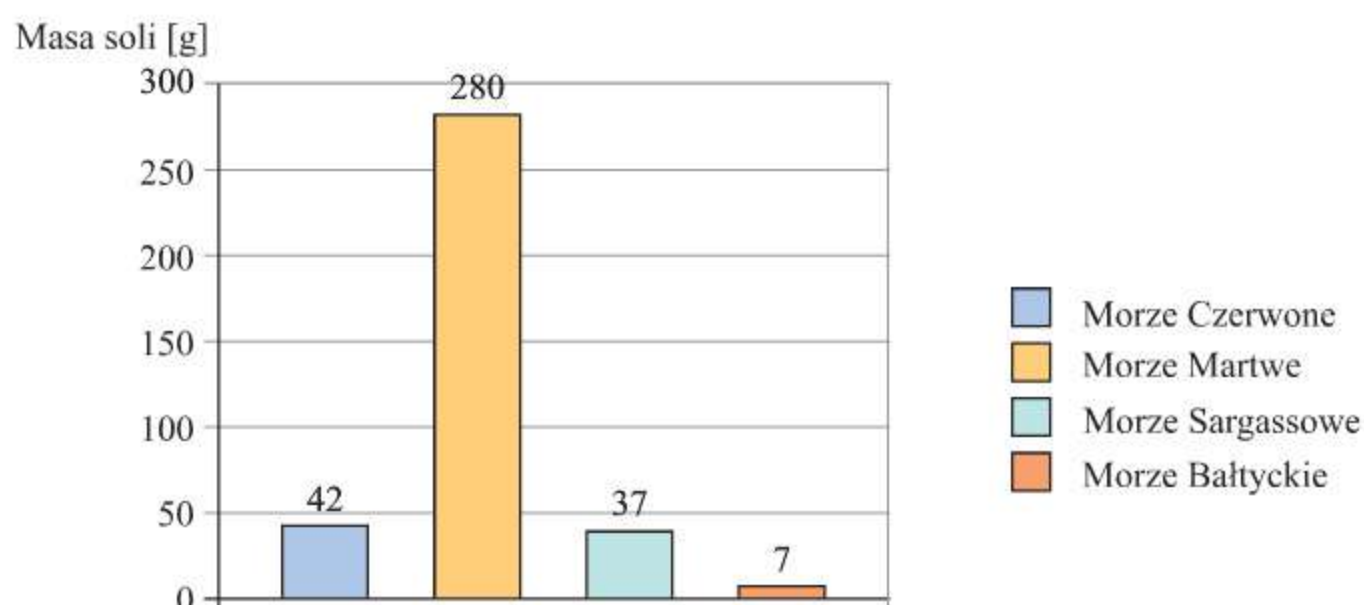
b) 1 h = 3600 s

$$1 \text{ s stanowi } \frac{1}{3600} \text{ godziny. } \frac{1}{3600} = \frac{1}{3600} \cdot 100\% = \frac{1}{36}\% \approx 0,03\%$$

ODPOWIEDŹ: 1 sekunda to około 0,03% godziny.



- 1 Oblicz, jakim procentem:
 - a) liczby 72 jest liczba: 9, 4, 18, 27, 36, 72, 108, 144;
 - b) 1 metra jest: 1 cm, 15 cm, 90 cm, 25 cm, 50 cm, 1 mm;
 - c) 1 kilometra jest: 1 m, 350 m, 1000 m, 840 m, 100 m, 1 cm, 50 cm.
- 2 Jakim procentem:
 - a) 100 zł jest 1 zł 60 gr,
 - b) 1 godziny są 2 min 42 s,
 - c) 1 tony jest 25 kg 25 dag,
 - d) 50 kg są 2 kg 30 dag?
- 3 Podstawowym składnikiem ciała ludzkiego jest woda. Ciało człowieka o masie 52 kg zawiera około 33,8 kg wody. Jaki procent masy ciała ludzkiego stanowi woda?
- 4 Cenę telewizora równą 5200 zł obniżono o 195 zł. Ile procent wynosi obniżka?
- 5 Książkę przeceniono z 22,50 zł na 19,80 zł. O ile procent obniżono cenę książki?
- 6 Na diagramie przedstawiono ilość soli, jaką otrzymano w wyniku odparowania po 1 kg wody morskiej pobranej z różnych zbiorników wodnych. Jakie jest procentowe zasolenie tych zbiorników wodnych, wyliczone na podstawie doświadczenia?



- 7 Gorzka czekolada o masie 100 g zawiera 5,4 g białka, 6,12 dag węglowodanów, inne składniki (beztłuszczowe) o masie 3,8 g oraz tłuszcz. Ile procent tłuszczu jest w tej czekoladzie?
- 8 W jogurcie naturalnym o masie 150 g białko waży 7,05 g, tyle samo jest węglowodanów, tłuszczu jest 4,5 g, a resztę stanowią woda i inne składniki. Jaka jest masa wody i innych składników zawartych w 100 g takiego jogurtu? Jaki procent masy jogurtu stanowią woda i inne składniki?
- 9 Skorzystaj z tabeli i oblicz, jaki procent powierzchni mieszkania zajmują poszczególne pomieszczenia.

Nazwa pomieszczenia	kuchnia	pokój I	pokój II	łazienka	przedpokój
Powierzchnia [m ²]	12	15	18	6	9

- 10** Na wycieczkę autokarową pojechało 12 mężczyzn, 15 kobiet, 9 dziewcząt i 14 chłopców. Czy osoby dorosłe stanowiły więcej niż 55% wszystkich uczestników wycieczki?

Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	osoby dorosłe stanowiły 52% wszystkich uczestników wycieczki.
			2.	$(9 + 14) : (12 + 15) \cdot 100\% > 55\%$
B.	Nie,		3.	osoby dorosłe stanowiły 54% wszystkich uczestników wycieczki.

- 11** W styczniu pensja pana Macieja wynosiła 3500 zł, a rok później 3780 zł. O ile procent wzrosła pensja pana Macieja?

- 12** Przed wysuszeniem świeże grzyby ważyły 15 kg, po wysuszeniu tylko 1,8 kg. Jaki procent masy świeżych grzybów stanowiła woda?

- 13** Na podstawie tabeli odpowiedz na pytania.

- a) Ile procent białka zawiera czekolada z orzechami laskowymi, a ile – czekolada z migdałami?
 b) Która czekolada zawiera mniej procent tłuszczu?
 c) Która czekolada zawiera więcej procent węglowodanów?



Wartość odżywcza w 100 g		
	czekolada z orzechami laskowymi	czekolada z migdałami
wartość energetyczna	515 kcal	510 kcal
białko	6,1 g	7,8 g
węglowodany	51,0 g	48,5 g
tłuszcz	32,0 g	31,5 g
inne	10,9 g	12,2 g

- 14** Do grudnia pan Grzegorz płaci za wynajem mieszkania 1200 zł miesięcznie. Od stycznia kolejnego roku opłata ma wynosić 1350 zł. O ile procent wzrośnie koszt wynajmu mieszkania?
- 15** Jeden litr benzyny w kwietniu kosztował 6 zł, a w maju 5,70 zł. O ile procent zmalała cena benzyny?
- 16** Podręcznik do matematyki ma 300 stron, a zbiór zadań – 240.
 a) O ile procent więcej stron ma podręcznik niż zbiór zadań?
 b) O ile procent mniej stron ma zbiór zadań niż podręcznik?

17 Wykorzystaj informacje podane w tabeli i odpowiedz na pytania.

- Z iloma krajami graniczy Polska?
- Jaka jest długość granicy morskiej naszego kraju?
- Z którym państwem Polska ma najdłuższą granicę lądową i jaki to procent łącznej długości granic Polski? Wynik zaokrąglaj do 0,1%.
- Jaki procent ludności Polski mieszka poza miastami?
- O jaki procent musiałaby się zwiększyć liczba mężczyzn w Polsce, aby była równa liczbie kobiet?

Łączna długość granic Polski [km]		3511
Długość granicy lądowej [km]	z Rosją	210
	z Litwą	104
	z Białorusią	418
	z Ukrainą	535
	ze Słowacją	541
	z Czechami	796
	z Niemcami	467
Liczba ludności Polski [tys.]		38 427
Liczba mężczyzn [tys.]		18 599
Procent ludności mieszkającej w miastach		60,5

Źródło: GUS, 2016

Wyzwanie

Marek ma o 50% więcej pieniędzy od Jarka. Czy Jarek ma o 50% mniej pieniędzy od Marka? Odpowiedź uzasadnij.

Sprawdź się!

- 48 minut – jaki to procent godziny?
- Pewnego dnia w klasie, w której jest 25 uczniów, jeden uczeń był nieobecny. Jaki procent liczby wszystkich uczniów stanowi ten nieobecny uczeń?
- W sklepie było 120 kg jabłek. Sprzedano 117 kg. Ilu procent kilogramów jabłek nie sprzedano?
- Wszystkim pracownikom firmy, w której pracują pan Jan i pan Adam, podwyższono pensje o tyle samo procent. Pan Jan, który do tej pory miał wynagrodzenie równe 3600 zł, teraz będzie zarabiał 3960 zł. Ile będzie wynosiło wynagrodzenie pana Adama, który do tej pory zarabiał 4000 zł?
- Cenę towaru podwyższono o 4,50 zł, co stanowiło 15% ceny początkowej, a następnie podwyższono ją jeszcze o 1,50 zł. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.
 Nowa cena towaru jest równa A / B. A. 30 zł B. 36 zł
 Cenę towaru podwyższono łącznie o C / D. C. 20% D. 25%

5. Obliczenia procentowe w praktyce

Coraz częściej korzystamy z usług banków, które udzielają pożyczek i kredytów oraz przyjmują wpłaty pieniężne na określonych warunkach. Za pożyczenie nam pieniędzy na umówiony czas w postaci kredytu lub pożyczki bank pobiera od nas pewną kwotę, zwaną **odsetkami**.

Gdy wpłacimy swoje pieniądze na lokatę do banku, oddajemy je do dyspozycji banku. Bank korzysta z nich w określonym czasie i dolicza do naszych pieniędzy pewną kwotę, zwaną również odsetkami. **Oprocentowanie lokaty** oznacza, jaki procent pieniędzy wpłaconych na lokatę stanowią odsetki.

Przykład 1.

Pani Elżbieta otrzymała w banku kredyt na 1 rok w wysokości 15 000 zł. Oprocentowanie kredytu wynosi 9%. Ile odsetek zapłaci po roku?

$$0,09 \cdot 15\,000 = 1350 \text{ [zł]}$$

ODPOWIEDŹ: Pani Elżbieta zapłaci po roku 1350 zł odsetek.

- 1 Oblicz odsetki od rocznego kredytu w wysokości:
 - a) 10 000 zł przy oprocentowaniu 8% w skali roku,
 - b) 25 000 zł przy oprocentowaniu 9% w skali roku.
- 2 Klient wziął w dwóch bankach kredyty na jeden rok: w pierwszym banku kredyt w wysokości 14 000 zł, o oprocentowaniu 8% w skali roku, a w drugim banku kredyt w wysokości 8000 zł, o oprocentowaniu 9% w skali roku. Ile łącznie odsetek musi zapłacić po upływie jednego roku?

Przykład 2.

Obliczmy, jaki będzie zysk klienta po upływie jednego roku z lokaty w wysokości 16 000 zł, o oprocentowaniu 1,4% w skali roku, gdy uwzględnimy 20-procentowy podatek od odsetek.

$$1,4\% \text{ liczby } 16\,000 \text{ to } 0,014 \cdot 16\,000 = 224 \text{ [zł]}$$

Od kwoty 224 zł należy odliczyć 20% podatku, czyli ostateczny zysk wyniesie:

$$224 - 0,2 \cdot 224 = 224 - 44,80 = 179,20 \text{ [zł]}$$

ODPOWIEDŹ: Po roku klient zyska 179,20 zł.

Od 2002 roku pobierany jest od klientów banków podatek od odsetek, w wysokości 19% należnych odsetek. Banki wypłacają klientowi odsetki od lokat pomniejszone o należny podatek. Aby ułatwić obliczenia w zadaniach, zaokrąglamy ten podatek do dziesiątek (20%).

- 3 Pani Ania wpłaciła do banku 20 000 zł na lokatę o oprocentowaniu 1,1%. Podatek od zysku z oszczędności wynosi 20%. Ile złotych zyska pani Ania na tej lokacie po upływie roku?
- 4 Uwzględnij 20-procentowy podatek i oblicz odsetki od rocznej lokaty w wysokości:
 - a) 19 000 zł przy oprocentowaniu 0,8%,
 - b) 24 000 zł przy oprocentowaniu 1,2%.
- 5 Przedsiębiorca pożyczył w banku 30 000 zł na rok. Oprocentowanie tego kredytu wynosi 9%. Jaką kwotę wraz z odsetkami przedsiębiorca będzie musiał zwrócić do banku po roku?
- 6 Kwotę 3000 dolarów amerykańskich wpłacono do banku na lokatę o oprocentowaniu 0,25% w skali roku. Ile wyniosą odsetki po upływie jednego roku? Uwzględnij 20-procentowy podatek.
- 7 Pani Ewelina wzięła w banku kredyt na rok w wysokości 6000 euro. Teraz pani Ewelina co miesiąc wpłaca równą ratę kapitału w wysokości 500 euro, a na koniec roku ma wpłacić jedną ratę odsetkową w wysokości 8% od całej kwoty kredytu. Oblicz, jaką łącznie kwotę wpłaci do banku pani Ewelina.
- 8 Pan Marek założył dwie lokaty roczne w dwóch bankach: w pierwszym banku lokatę w wysokości 8000 zł o oprocentowaniu 2,5% w skali roku, a drugim banku lokatę w wysokości 12 000 zł o oprocentowaniu 1,9% w skali roku. Który bank wypłaci panu Markowi po roku wyższe odsetki?
- 9 Pani Agnieszka wpłaciła 25 000 zł na lokatę o oprocentowaniu 1,5% w skali roku. O ile większa byłaby po roku kwota odsetek, gdyby oprocentowanie lokaty wynosiło 2,1%? Uwzględnij 20-procentowy podatek od odsetek.
- 10 Bliźniacy, Jaś i Staś, otrzymali w prezencie urodzinowym takie same kwoty pieniędzy. Po pierwszym miesiącu Jaś dołożył do swoich pieniędzy 20% kwoty, którą dostał, a Staś wydał 20% tej kwoty. Po drugim miesiącu było odwrotnie: Jaś wydał 20% ze swych oszczędności, a Staś dołożył 20% kwoty, którą miał po pierwszym miesiącu. Czy w dalszym ciągu chłopcy mają tyle samo pieniędzy?



Wyzwanie

Ile euro wpłacono do banku na lokatę z oprocentowaniem 0,7%, jeśli wiadomo, że po roku odsetki zmniejszone o 20% podatku są równe 42 euro?

Przykład 3.

W 630 g wody rozpuszczono 90 g soli. Obliczmy stężenie procentowe otrzymanego roztworu.

Sposób I

Zauważmy, że masa roztworu to $630 + 90 = 720$ [g].

Stężenie procentowe roztworu to:

$$\frac{\text{masa soli}}{\text{masa roztworu}} \cdot 100\%,$$

$$\text{stad } \frac{90^1}{720_8} \cdot 100\% = 0,125 \cdot 100\% = 12,5\%.$$

Roztwór jest mieszaniną dwóch lub więcej związków chemicznych. Ich skład określa się procentowo. Przykładowo, roztwór wodny soli kuchennej o stężeniu 10% to roztwór, w którym sól stanowi 10% masy roztworu, a woda 90%.

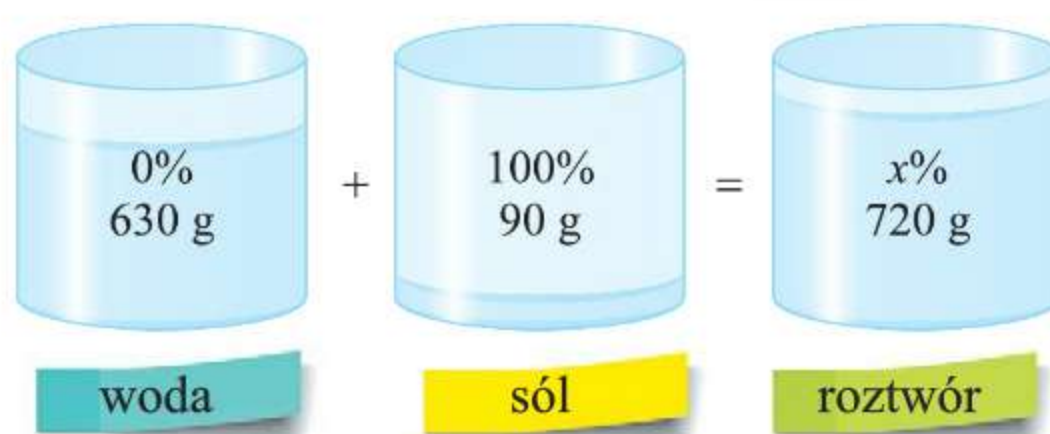
Sposób II

$$0 \cdot 630 + 100 \cdot 90 = x \cdot 720$$

$$720 \cdot x = 9000$$

$$x = 9000 : 720$$

$$x = 12,5$$



ODPOWIEDŹ: Roztwór ma stężenie 12,5%.

- 11** Do 600 g wody wsypano 20 dag cukru. Jakie jest stężenie procentowe otrzymanego roztworu?

Przykład 4.

Zmieszano 1000 g mleka o zawartości 3,2% tłuszczu i 2000 g mleka o zawartości 0,5% tłuszczu. Obliczmy, ile procent tłuszczu jest w tej mieszaninie.

Sposób I

$$0,032 \cdot 1000 = 32 \text{ [g]}$$

$$0,005 \cdot 2000 = 10 \text{ [g]}$$

$$32 + 10 = 42 \text{ [g]}$$

$$1000 + 2000 = 3000 \text{ [g]}$$

$$\frac{42}{3000} \cdot 100\% = 0,014 \cdot 100\% = 1,4\%$$

– masa tłuszczu w 1000 g mleka 3,2-procentowego, czyli 3,2% liczby 1000

– masa tłuszczu w 2000 g mleka 0,5-procentowego, czyli 0,5% liczby 2000

– masa tłuszczu w mieszaninie

– masa mieszaniny

Sposób II

$$3,2 \cdot 1000 + 0,5 \cdot 2000 = x \cdot 3000$$

$$3000 \cdot x = 4200$$

$$x = 4200 : 3000$$

$$x = 1,4$$



ODPOWIEDŹ: W mieszaninie jest 1,4% tłuszczu.

- 12 Zmieszano 300 ml śmietany o zawartości 18% tłuszczu z 200 ml śmietany o zawartości 22% tłuszczu. Ile procent tłuszczu zawiera śmietana po zmieszaniu?
- 13 Roztwór wodny soli o masie 3,5 kg zawiera 21 dag soli. Oblicz stężenie procentowe tego roztworu.
- 14 Babcia potrzebuje do kiszenia ogórków 5 kg roztworu soli z wodą. Ile dekagramów soli musi przygotować, aby otrzymać roztwór 5-procentowy?
- 15 Beata ma w filiżance 150 g herbaty. Rozpuściła w niej dwie kostki cukru o masie 5 g każda. Jurek do kubka z 285 g herbaty wrzucił trzy takie same kostki cukru. Kto ma słodsza herbatę? Odpowiedź uzasadnij.
- 16 Do 5 kg 4-procentowego roztworu soli wsypano 15 łyżeczek soli, każdą o masie 6 g. Jakie stężenie procentowe ma otrzymany roztwór? Wynik zaokrąglij do 0,1%.
- 17 Z 4 litrów 12-procentowego roztworu cukru odparowano 2,5 l wody. Wykaż, że stężenie procentowe otrzymanego roztworu jest równe 32%.



Przykład 5.

Stop miedzi, cynku i ołowiu zawiera 15% cynku i 20% ołowiu. Obliczmy, ile kilogramów miedzi, cynku i ołowiu potrzeba do wyprodukowania tony tego stopu.

$$0,15 \cdot 1000 = 150 \text{ [kg]}$$

– masa cynku w stopie

$$0,20 \cdot 1000 = 200 \text{ [kg]}$$

– masa ołowiu w stopie

$$1000 - (150 + 200) = 650 \text{ [kg]}$$

– masa miedzi w stopie

ODPOWIEDŹ: Do wyprodukowania tony stopu potrzeba 150 kg cynku, 200 kg ołowiu i 650 kg miedzi.

Stopem nazywamy mieszaninę metali, np. mosiądz to stop miedzi i cynku.

- 18 Stop miedzi i cynku ma masę 24 kg. Miedzi jest trzy razy więcej niż cynku. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Masa cynku w stopie wynosi A / B.

A. 8 kg

B. 6 kg

Masa miedzi stanowi C / D masy stopu.

C. 75%

D. $66\frac{2}{3}\%$

- 19 Symbolem ‰ oznaczamy promil danej wielkości, czyli $\frac{1}{1000}$ część tej wielkości. Średnie zasolenie Morza Martwego jest równe 28%, a Morza Bałtyckiego 7‰. O ile więcej kilogramów soli zawiera tona wody z Morza Martwego od tony wody z Morza Bałtyckiego?

- 20** Do wyprodukowania $\frac{3}{4}$ tony brązu glinowego, czyli stopu miedzi z glinem, użyto 15 kg glinu. Ile procent stanowi w tym stopie miedź, a ile – glin?
- 21** Stop miedzi z cyną waży 12 kg i zawiera 45% miedzi. Z tego stopu oraz z 1,5 kg czystej cyny zrobiono nowy stop. Czy w otrzymanym stopie cyna stanowi więcej niż 58%? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	masa cyny stanowi $(12 \cdot 0,45 + 1,5) : 12 \cdot 100\% = 57,5\%$ masy nowego stopu.
B.	Nie,		2.	masa cyny stanowi 60% masy całego stopu.
			3.	w stopie jest $(12 \cdot 0,55 + 1,5) : 12 \cdot 100\% = 67,5\%$ cyny.

- 22** Ile soli trzeba dosypać do 4,5 kg roztworu solnego o stężeniu 5%, aby otrzymać roztwór o stężeniu 10%?
- 23** Ile trzeba wziąć octu 10-procentowego, a ile wody, aby otrzymać 4 litry zalewy octowej o stężeniu 5%?



Sprawdź się!

- Klient pożyczył w banku 60 000 zł na rok. Oprocentowanie pożyczki jest równe 12%. Ile odsetek zapłaci klient po roku?
- W wodzie rozpuszczono cukier i otrzymano 1200 g roztworu 30-procentowego. Ile dekagramów waży woda w tym roztworze?
- Klient wziął w banku roczny kredyt w wysokości 12 000 zł. Oprocentowanie kredytu w skali roku wynosi 9,5%. Ile pieniędzy musi zwrócić do banku po upływie roku?
- W 200 g wody rozpuszczono 50 g soli.
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Woda stanowi 75% masy całego roztworu.

P

F

Stężenie procentowe otrzymanego roztworu wynosi 25%.

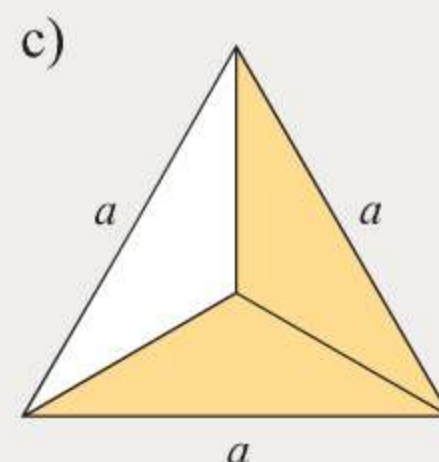
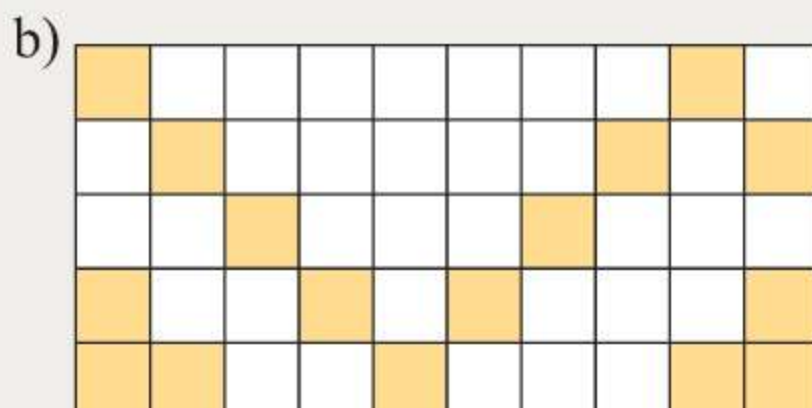
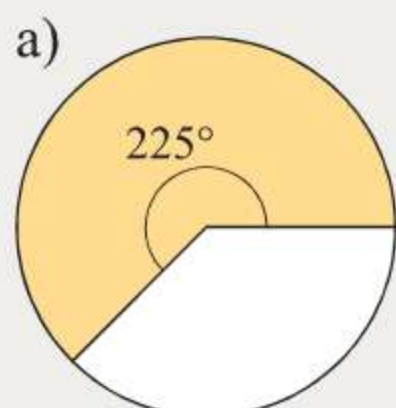
P

F

- Zmieszano 500 ml śmietanki 30-procentowej z 500 ml śmietanki 12-procentowej. Iluprocentową śmietankę otrzymano?

Zadania utrwalające

- 1 Jaki procent figury zamalowano na żółto?



- 2 Bombonierka wraz z opakowaniem waży 0,75 kg. Opakowanie stanowi 4% masy brutto. Jaka jest masa netto bombonierki?
- 3 Adam wysłał pocztą do serwisu komputer o masie 4,5 kg. Opakowanie komputera stanowiło 8% masy komputera. Za paczkę, której masa jest większa niż 5 kg, poczta pobiera dodatkową opłatę. Czy koszt przesyłki będzie wyższy o dodatkową opłatę?
- 4 Winogrona zakupione w hurtowni w cenie 5,80 zł za 1 kg sprzedawca sprzedał z zyskiem. Oblicz zysk ze sprzedaży 120 kg winogron, jeżeli 40 kg winogron sprzedał z 25-procentowym zyskiem, a pozostałą ilość z 50-procentowym zyskiem.
- 5 Cenę książki wynoszącą 40 zł obniżono o 5%, a następnie tę obniżoną cenę podwyższono o 5%. Wykaż, że cena po podwyżce jest niższa od ceny początkowej.
- 6 Właściciel sklepu planuje podwyżkę ceny pewnego towaru. W którym wariancie ostateczna cena towaru będzie niższa?

Wariant I

Podwyżka ceny
o 30%.

Wariant II

Podwyżka ceny najpierw
o 20%, a potem o 10%.

- 7 W Polsce żyje około 1200 par bielików. Młode bieliki po wykluciu ważą około 100 g, co stanowi 1,7% masy dorosłego bielika. Ile waży dorosły bielik? Wynik zaokrąglaj do 1 kg.
- 8 Sukienka kosztowała 120 zł. Podczas promocji jej cenę obniżono o 24 zł. Ile procent wynosiła obniżka?
- 9 Tygodniowy pobyt w dwuosobowym pokoju w hotelu nad morzem kosztuje przed sezonem letnim 840 zł, a w sezonie letnim 966 zł. O ile procent jest droższy pobyt w sezonie letnim od pobytu przed sezonem?
- 10 Po obniżce o 10% cena 1 m² terakoty wynosiła 36 zł. Ile złotych zaoszczędzono, jeżeli kupiono 12 m² tej terakoty?

- 11 Michalina i Gabrysia zbierają pieniądze na wspólny wyjazd. Michalina zebrała już 900 zł, a Gabrysia 1200 zł. O ile procent więcej pieniędzy zebrała Gabrysia niż Michalina? O ile procent mniej pieniędzy zebrała Michalina niż Gabrysia?
- 12 Oblicz, jakim procentem wartości wyrażenia a jest wartość wyrażenia b , jeśli:
 $a = 1\frac{7}{20} : 2,7 + 2,7 : 1,35$, $b = 2\frac{1}{2} : 10 + 10 : 2\frac{1}{2}$.
- 13 Cenę deski snowboardowej z wiązaniami równą 1200 zł podwyższono o 20%, a następnie tę podwyższoną cenę obniżono o 20%. Wykaż, że cena po obniżce jest niższa od ceny początkowej.
- 14 W baku samochodu mieści się 35 litrów benzyny. Samochód ten spala przeciętnie 16% pojemności baku na 100 km. Ile benzyny pozostanie w baku po przejechaniu 200 km, jeżeli samochód zatankowano do pełna?
- 15 Za dwa różne podręczniki zapłacono 45 zł. Ile kosztuje każdy podręcznik, jeżeli jeden jest o 25% droższy od drugiego?
- 16 Przez 19 godzin Basia przeczytała 589 stron lektury, co stanowi 95% wszystkich stron tej książki. Ile stron liczy książka? Ile minut potrzebuje Basia, aby przeczytać ją do końca, jeżeli będzie czytać w tym samym tempie?
- 17 Właściciel sklepu obuwniczego sprowadził towar za 3600 zł. $\frac{3}{4}$ ilości towaru sprzedał z 30-procentowym zyskiem, a resztę z 2-procentową stratą. Jaki procent zysku stanowi strata? Wynik zaokrąglaj do 1%.
- 18 Klient wziął w banku kredyt w wysokości 4800 zł. Po roku musiał zapłacić 360 zł odsetek. Jakie było oprocentowanie kredytu w skali roku?
- 19 Klient założył w banku roczną lokatę, o oprocentowaniu 1,4% w stosunku rocznym. Po roku, po uwzględnieniu podatku w wysokości 20%, klient dostał 224 zł odsetek. Jaką kwotę wpłacił do banku?
- 20 Ile gramów miedzi należy stopić z 35 g złota, aby otrzymać stop, w którym złoto stanowi 87,5% całej masy?
- 21 Z 2 kg 12-procentowego roztworu cukru odparowano 290 g wody, a następnie dosypano 250 g cukru. Jakie stężenie procentowe ma otrzymany w ten sposób roztwór?
- 22 Początkową cenę towaru najpierw obniżono o 20%, a następnie podniesiono o $33\frac{1}{3}\%$. Czy cena początkowa uległa zmianie? Odpowiedź uzasadnij.



Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

W zadaniach 1.–2. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

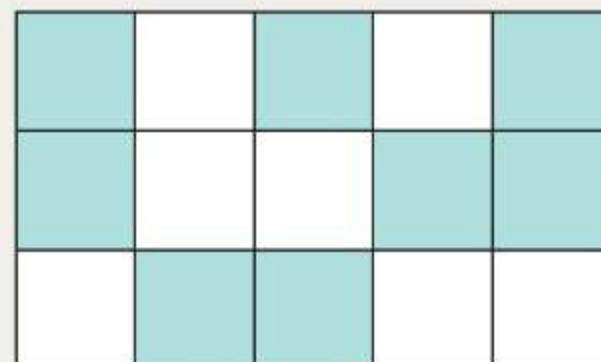
1 Jaką część figury zamalowano na zielono?

A. $\frac{8}{7}$

B. $53\frac{1}{3}\%$

C. $\frac{7}{15}$

D. $47\frac{2}{3}\%$



2 Klient wziął w banku na rok pożyczkę w wysokości 3000 zł, o oprocentowaniu 16% w skali roku. Ile pieniędzy musi zwrócić do banku po upływie jednego roku?

A. 480 zł

B. 3160 zł

C. 3480 zł

D. 4800 zł

W zadaniach 3.–6. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

3 W 60 dag mieszanki cukierków cukierki owocowe stanowią 35%. Cukierki owocowe ważą

A. 20 dag

B. 22 dag

C. 21 dag

D. 23 dag

4 Narty poza sezonem kosztują 850 zł. Ich cena w sezonie jest o 20% wyższa. Wówczas narty kosztują

A. 870 zł

B. 1020 zł

C. 680 zł

D. 170 zł

5 Normalny bilet do teatru kosztuje 45 zł, a ulgowy jest o $33\frac{1}{3}\%$ tańszy. Cena biletu ulgowego wynosi

A. 15 zł

B. 30 zł

C. 42 zł

D. 40 zł

6 Ewa przeczytała 40% książki, czyli 84 strony. Książka ma

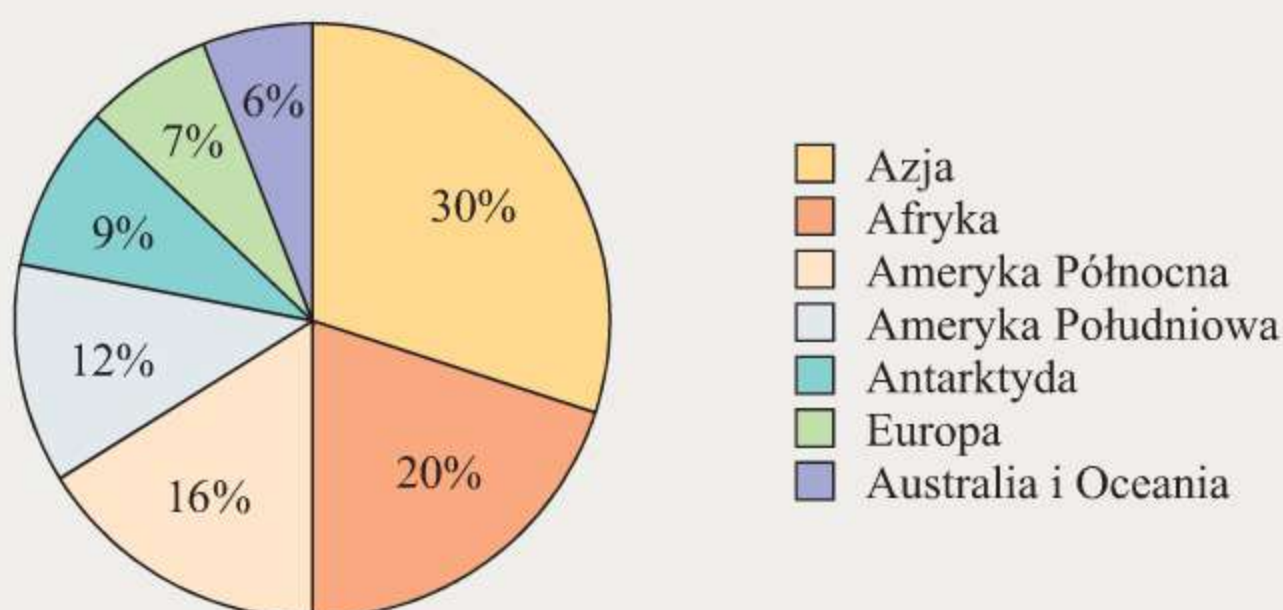
A. 336 stron.

B. 126 stron.

C. 140 stron.

D. 210 stron.

7 Skorzystaj z diagramu przedstawiającego procentowy udział powierzchni poszczególnych kontynentów w powierzchni wszystkich lądów Ziemi i wybierz zdanie prawdziwe.



- A. Afryka ma większą powierzchnię niż obie Ameryki razem wzięte.
 B. Europa jest kontynentem zajmującym najmniejszą powierzchnię.
 C. Antarktyda jest o połowę większa od Australii i Oceanii.
 D. Azja i Afryka zajmują więcej niż połowę powierzchni wszystkich lądów Ziemi.

- 8 Sukienka kosztowała 250 zł. Jej cenę obniżono najpierw o 10%, a następnie o 20%. Czy obecna cena sukienki jest większa niż 200 zł? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	cenę sukienki obniżono łącznie o 30%, czyli obecnie jej cena wynosi 175 zł.
			2.	$250 - 30 = 220$ [zł]
B.	Nie,		3.	obecna cena sukienki wynosi 72% ceny początkowej, czyli 180 zł.

- 9 Za dwa podręczniki zapłacono 54 zł. Jeden z nich jest o 20% tańszy od drugiego. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Tańszy podręcznik kosztuje 24 zł.	P	F
Różnica cen podręczników wynosi 10,80 zł.	P	F

- 10 Pan Jan zarabia brutto 3400 zł, ale na jego konto co miesiąc wpływa kwota 2754 zł. Ile procent jego wynagrodzenia brutto stanowi podatek? Przyjmij, że wynagrodzenie brutto jest równe sumie wynagrodzenia netto i podatku. Zapisz obliczenia.
- 11 Zmieszano 3 litry octu 6-procentowego z 7 litrami octu 10-procentowego. Czy stężenie procentowe tej mieszaniny jest większe niż 8%? Odpowiedź uzasadnij.
- 12 Po obniżce o 30% kurtka kosztuje 210 zł. Oblicz cenę kurtki przed obniżką. Zapisz obliczenia.

Procenty w banku

Jeśli zaciągamy kredyt w banku, po pewnym czasie musimy oddać pożyczone pieniądze wraz z odsetkami.

Bierzemy kredyt w banku



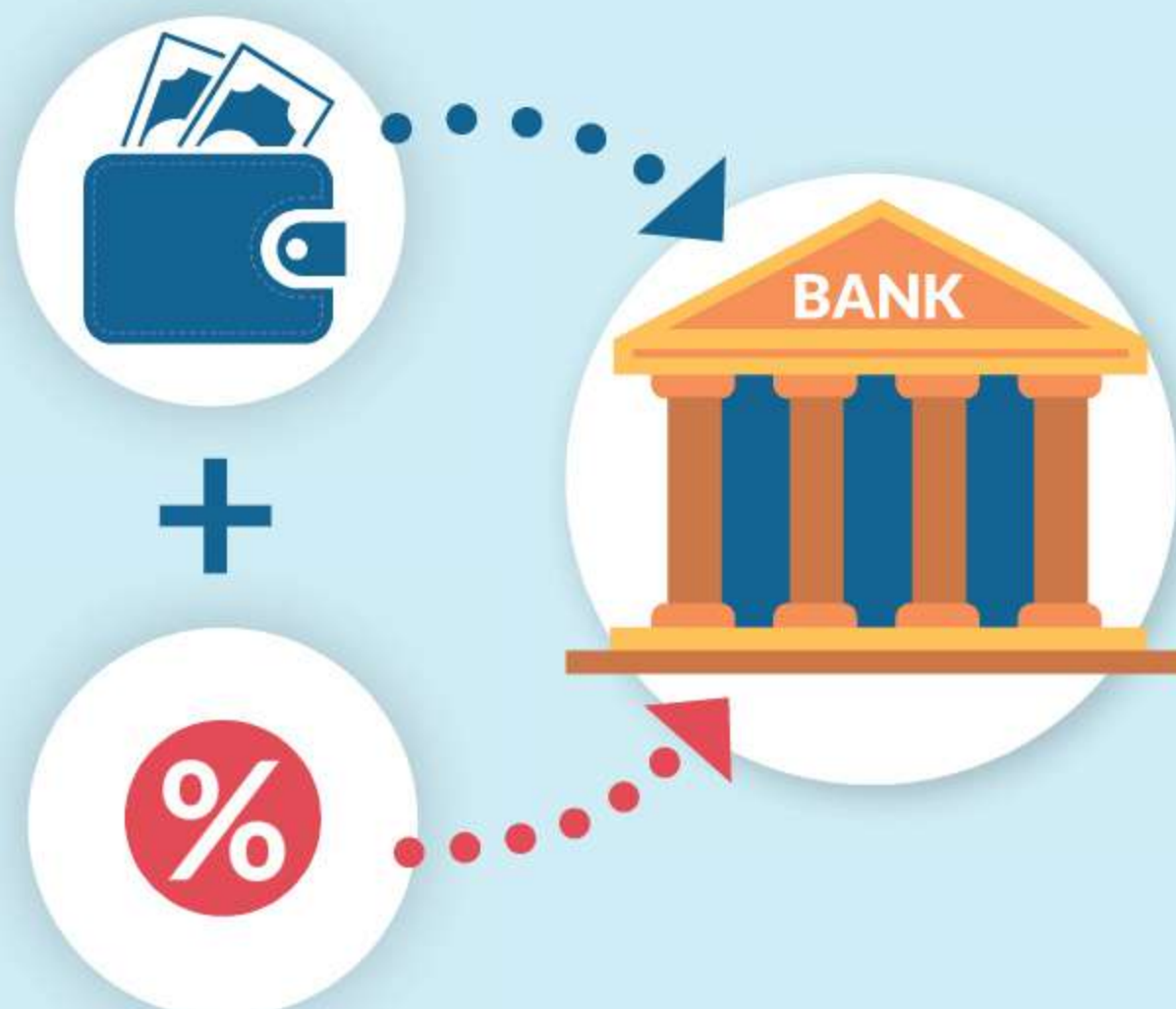
Mija rok



- Spłaty kredytu możemy dokonać jednorazowo lub w ratach.
- Oprocentowanie kredytu może być zmienne.

Zwracamy
pożyczony
kapitał
10 000 zł

oraz **odsetki**
w wysokości
900 zł.



Jeśli chcemy oszczędzać, zakładamy lokatę w banku. Po jej zakończeniu bank zwraca nam zainwestowany kapitał wraz z odsetkami.

Zakładamy lokatę w banku



Bank oferuje nam różne możliwości oszczędzania. Jedną z nich są lokaty.



Wpłacamy do banku **6000 zł** na lokatę roczną.

Oprocentowanie w skali roku wynosi **2,5%**.

Mija rok



Bank zwraca nasz **kapitał** w wysokości **6000 zł**

oraz **odsetki** (pomniejszone o podatek w wysokości 19%), które wynoszą **121,50 zł**.



+



- Doliczenie odsetek może następować częściej niż raz w roku, na przykład co miesiąc.
- Lokaty mogą być odnawialne.

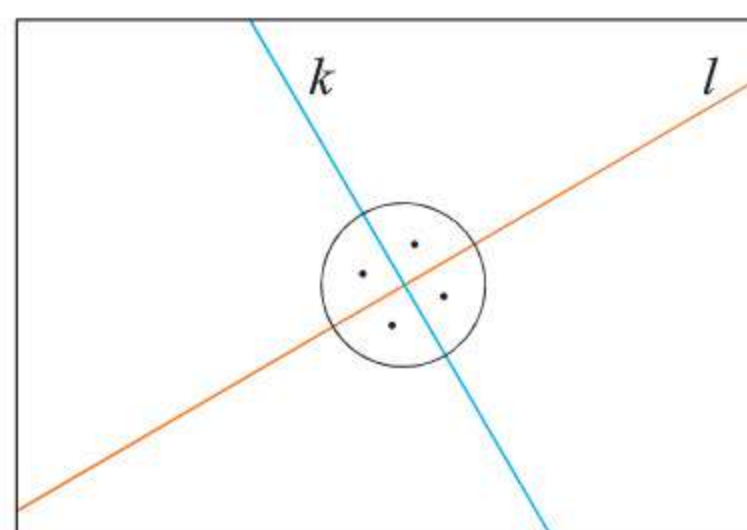
1. Wzajemne położenie prostych i odcinków

Przypomnij sobie

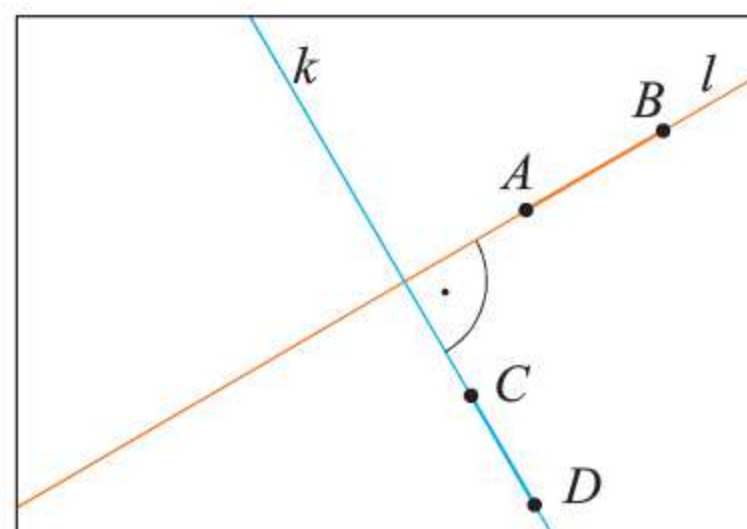
- kiedy dwie proste (dwa odcinki) są prostopadłe, a kiedy są równoległe,
- jak wyznaczamy odległość punktu od prostej,
- co to jest łamana.

Kartkę papieru złożmy tak, aby otrzymać kąt prosty, a następnie ją rozłóżmy. Linie zgięć oznaczmy k i l .

Proste k i l przecinają się i tym samym dzielą płaszczyznę na cztery kąty proste. Takie proste nazywamy **prostymi prostopadłymi** i zapisujemy $k \perp l$ lub $l \perp k$.



Odcinki AB i CD są prostopadłe, ponieważ zawierają się w prostych prostopadłych. Zapisujemy to następująco: $AB \perp CD$.



Dwa odcinki są prostopadłe, jeśli zawierają się w prostych prostopadłych.

- 1 Wskaż w swoim otoczeniu przykłady ilustrujące proste i odcinki prostopadłe.
- 2 Narysuj trzy proste k, l, m tak, aby $l \perp k$ i $m \perp l$.

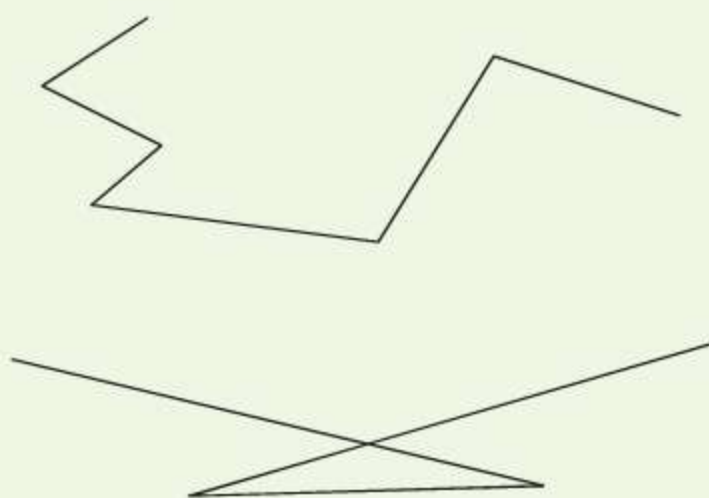
W tabeli przedstawiono figury, które są zbudowane z odcinków w taki sposób, że:

- każde dwa kolejne odcinki mają wspólny koniec,
- żadne dwa kolejne odcinki nie leżą na jednej prostej.

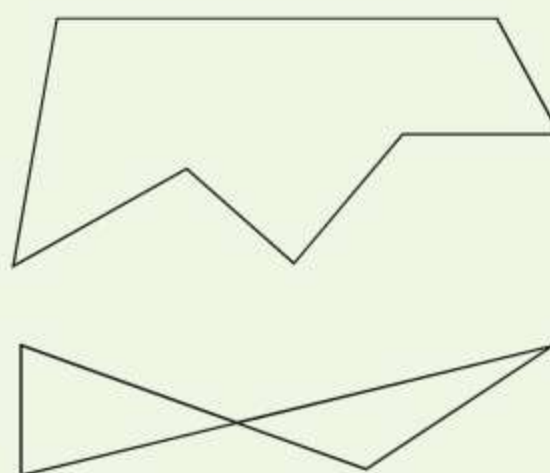
Taką figurę nazywamy **łamaną**.

Rodzaje łamanych

łamana otwarta



łamana zamknięta

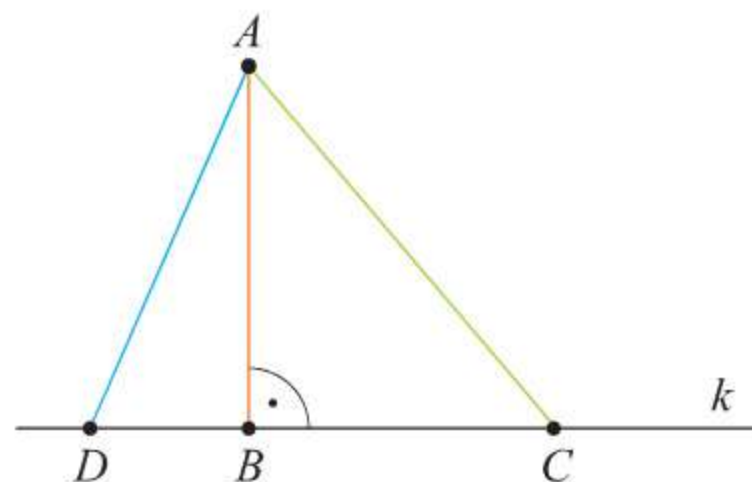
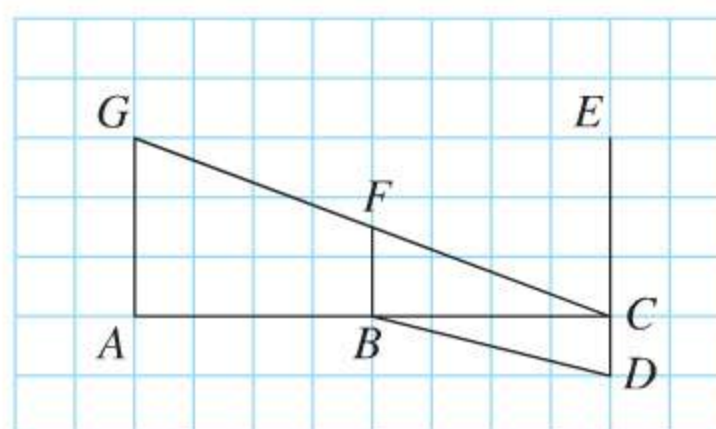


- 3 Sprawdź, czy figura przedstawiona na rysunku jest łamaną. Wypisz 5 par odcinków prostopadłych.

Na rysunku punkt A połączono z punktami D, B, C , leżącymi na prostej k .

Długości odcinków AB, AC i AD są odległościami punktu A od punktów (odpowiednio) B, C i D . Najkrótszy z nich – odcinek AB – jest prostopadły do prostej k .

Odległość punktu A od prostej k jest równa długości odcinka AB prostopadłego do prostej k . Jest to najkrótszy odcinek łączący punkt A z punktem na prostej k .

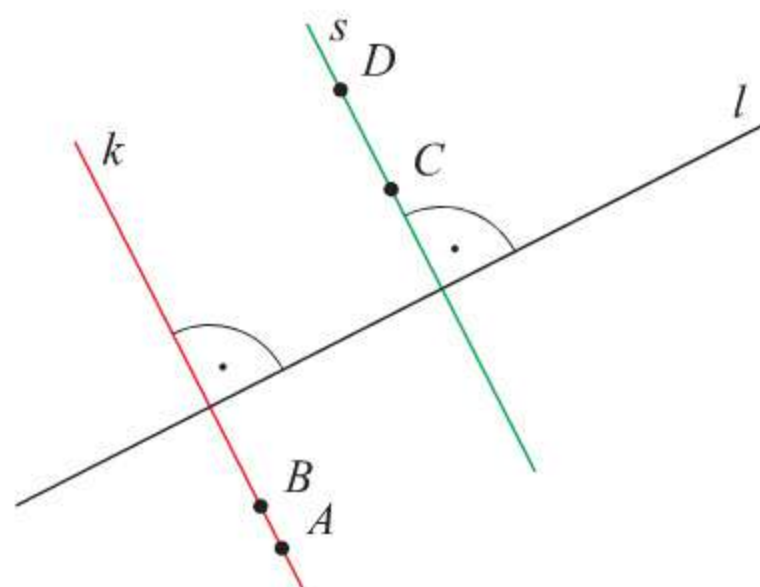


- 4 Narysuj prostą i punkt leżący poza tą prostą. Zmierz odległość punktu od tej prostej.

Na rysunku proste k i s są prostopadłe do prostej l .

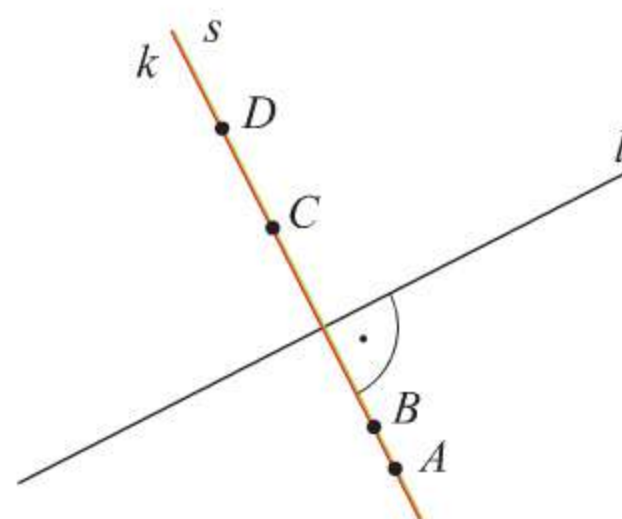
Proste k i s nazywamy prostymi równoległymi i zapisujemy $k \parallel s$ lub $s \parallel k$. Odcinki AB i CD są równoległe, ponieważ zawierają się w prostych równoległych.

Zapisujemy to następująco: $AB \parallel CD$.



Dwa odcinki są równoległe, jeśli zawierają się w prostych równoległych.

Może się zdarzyć, że prosta k , prostopadła do prostej l i przechodząca przez punkt A , oraz prosta s , prostopadła do prostej l i przechodząca przez punkt D , pokrywają się. Takie proste k i s też są prostymi równoległymi.



Dwie różne proste równoległe nie mają punktów wspólnych.

- 5 Wskaż w swoim otoczeniu przykłady ilustrujące proste i odcinki równoległe (należące do jednej płaszczyzny).

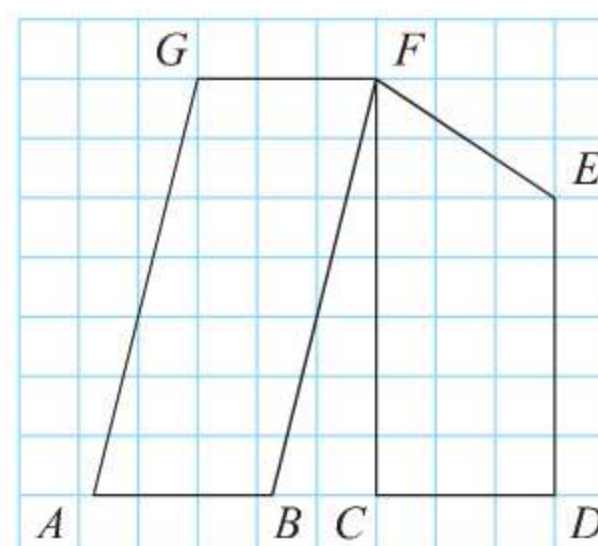
- 6 Skorzystaj z rysunku i uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Prostopadłe są odcinki A / B.

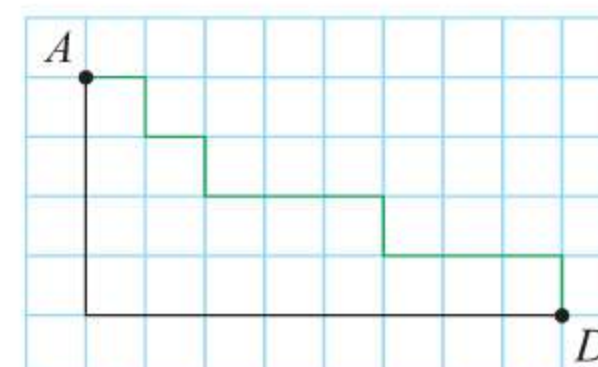
A. AB i FE B. GF i ED

Równoległe są odcinki C / D.

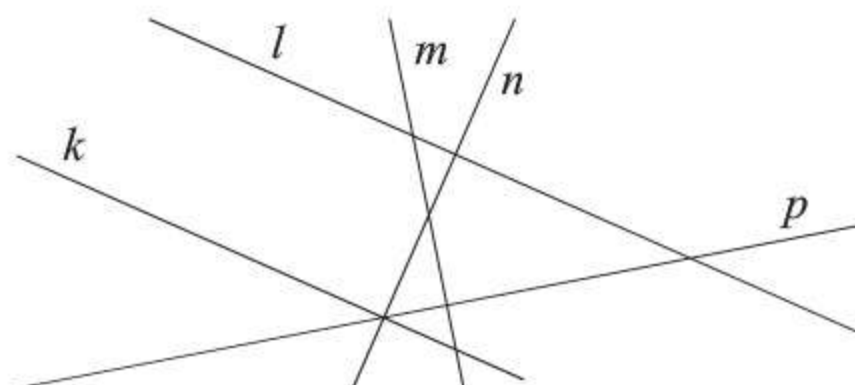
C. CD i GF D. DE i AG



- 7 Która z dwóch dróg od punktu A do punktu D przedstawionych na rysunku obok jest krótsza? Odpowiedź uzasadnij.



- 8 Skorzystaj z rysunku i oceń prawdziwość podanych zdań.



Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

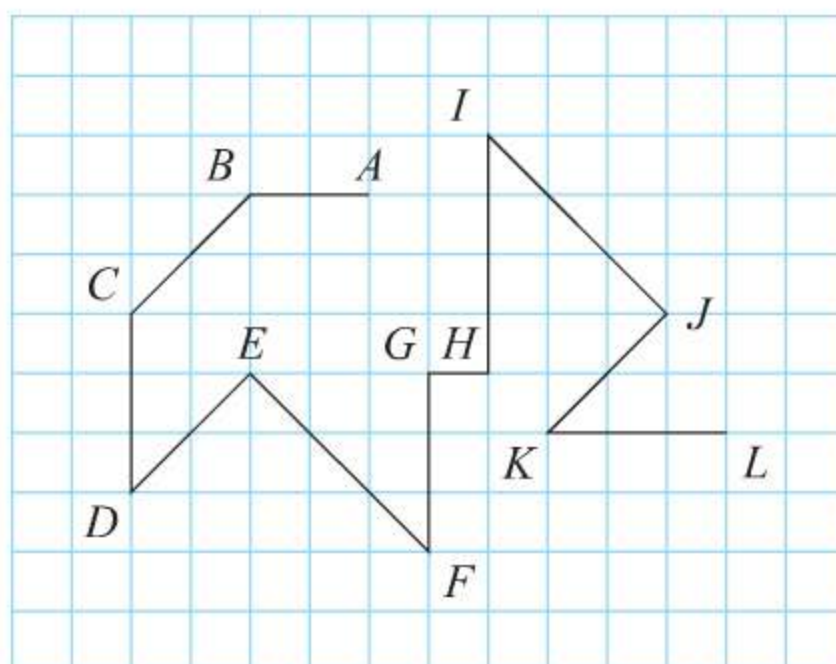
Proste k i l są równoległe.	P	F
Prostymi przecinającymi się i nieprostopadłymi są proste: k i p , m i n , l i p , m i k , m i l oraz n i p .	P	F

Wyzwanie

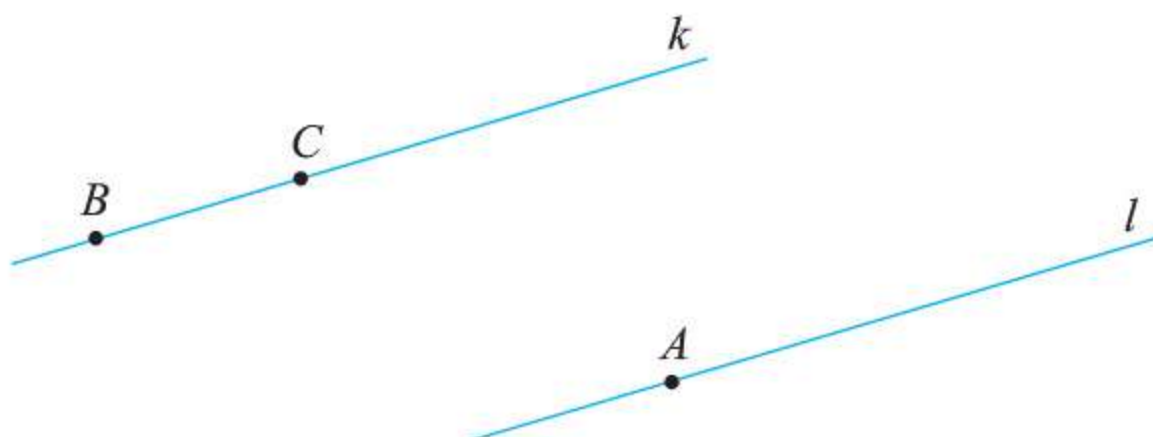
Dana jest prosta p . Narysuj prostą s tak, by była odległa o 3 cm od prostej p , oraz prostą r odległą o 4 cm od prostej s . Ile rozwiązań ma to zadanie?

Sprawdź się!

- 1 Narysuj:
a) dwie proste prostopadłe, b) dwie proste równoległe.
- 2 Narysuj dwie proste prostopadłe k i l . Następnie narysuj prostą m prostopadłą do prostej l i prostą n równoległą do prostej l .
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Równoległe są
A. tylko proste k i m . B. tylko proste n i k .
C. proste k i m oraz l i n . D. proste k i n oraz l i m .
- 3 Wypisz po 4 pary odcinków prostopadłych oraz równoległych zawartych w poniższej łamanej.



- 4 Na rysunku proste k i l są równoległe. Punkt A jest odległy od prostej k o 2 cm. Jakie są odległości punktów B i C od prostej l ? Uzasadnij odpowiedź.



- 5 Zaprojektuj i narysuj łamaną, która będzie się składała tylko z odcinków równoległych i prostopadłych.

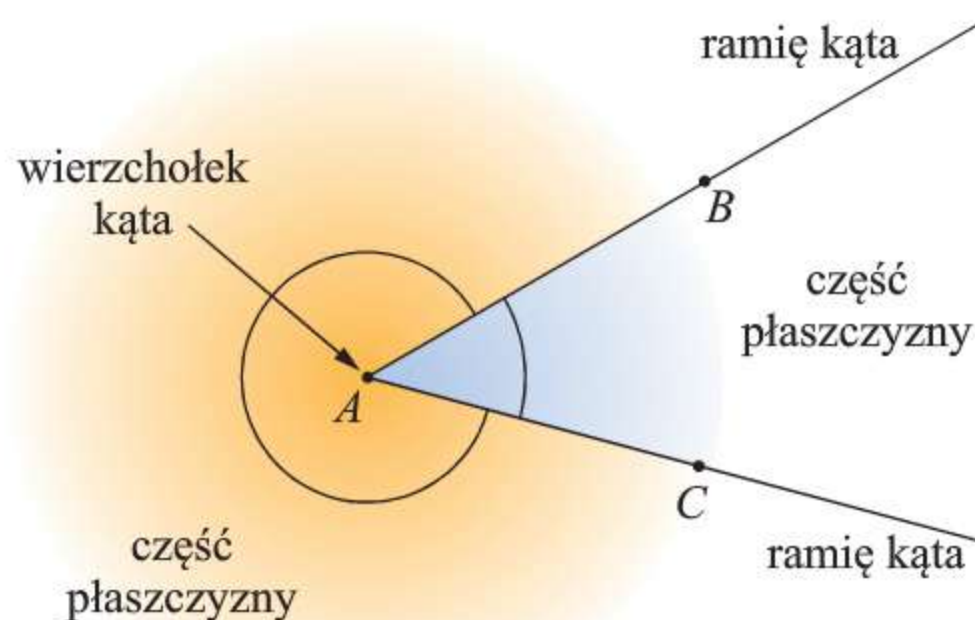
2. Kąty i ich rodzaje

Przypomnij sobie

- co to jest kąt,
- jak oznaczamy kąty,
- jakie są rodzaje kątów.

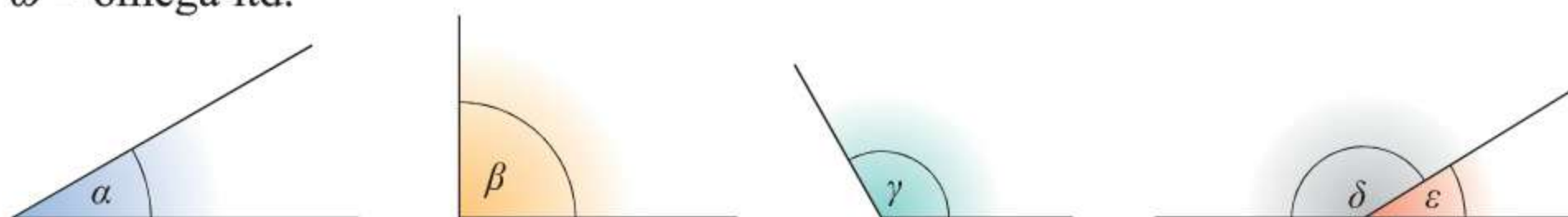
Dwie półproste o wspólnym początku dzielą płaszczyznę na dwie części. Każdą z tych części płaszczyzny wraz z półprostymi nazywamy **kątem**.

Półproste AB i AC wyznaczają dwa kąty, które oznaczamy symbolem $\sphericalangle BAC$ lub $\sphericalangle CAB$. Nazwa wierzchołka jest środkową literą w nazwie kąta. Aby ustalić, o który kąt chodzi, zaznaczamy go na rysunku łukiem.



- 1** Narysuj dwie różne półproste o wspólnym początku L . Na półprostych zaznacz punkty K i M . Zaznacz łukami powstałe kąty.

Do oznaczania kątów, jak również ich **miar**, używamy małych liter alfabetu greckiego: α – alfa, β – beta, γ – gamma, δ – delta, ε – epsilon, λ – lambda, φ – fi, ω – omega itd.

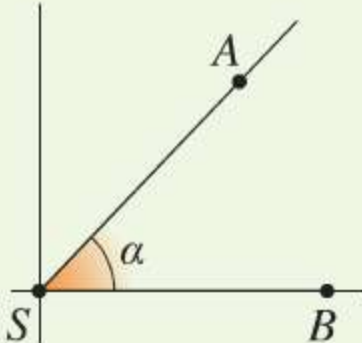
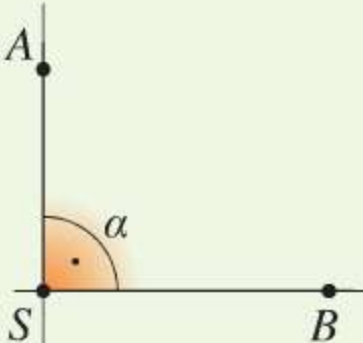
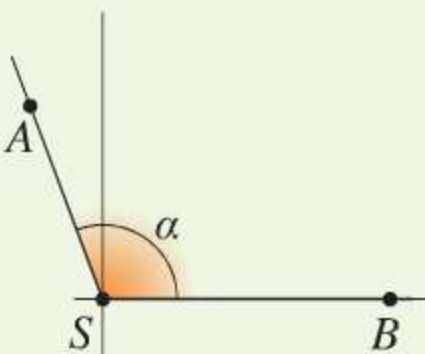
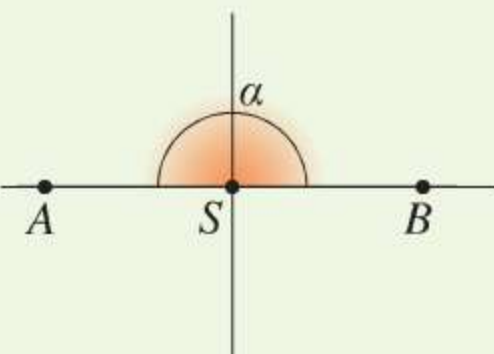
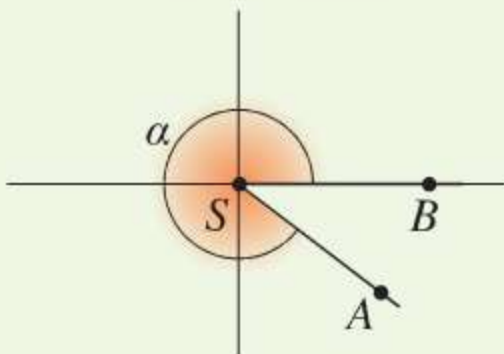
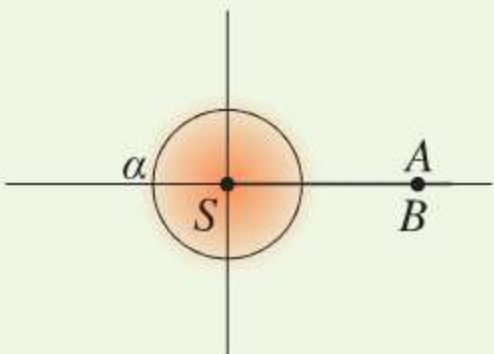


Aby określić wielkość kąta, należy podać jego miarę. Do mierzenia kątów służy kątomierz. Podstawową jednostką na skali kątomierza jest jeden stopień (1°). Miarę kąta podajemy w stopniach i zapisujemy na przykład tak:

$$\alpha = 30^\circ, |\sphericalangle BAC| = 45^\circ.$$



- 2 Narysuj trzy dowolne kąty i oznacz je: $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle DEF$, $\sphericalangle GKL$. Zmierz miary tych kątów i uporządkuj je od najmniejszej do największej.

Podział kątów ze względu na ich miarę		
kąt zerowy  $\sphericalangle ASB = 0^\circ$	kąt ostry  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$	kąt prosty  $\alpha = 90^\circ$
kąt rozwarty  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$	kąt półpełny  $\alpha = 180^\circ$	
kąt wklęsły  $180^\circ < \alpha < 360^\circ$	kąt pełny  $\alpha = 360^\circ$	

Kąty, których miary są nie mniejsze niż 0° i jednocześnie nie większe niż 180° , to **kąty wypukłe**.

Kąty, których miary są większe od 180° , ale mniejsze od 360° , to **kąty wklęsłe**. Kąt pełny jest zaliczany do kątów wypukłych.

- 3 Narysuj kąty: ostry, prosty i rozwarty. Zapisz ich miary.
- 4 Narysuj kąt wklęsły i podaj jego miarę.

- 5 Dane są kąty i ich miary.

α (alfa)	β (beta)	γ (gamma)	δ (delta)	ε (epsilon)	λ (lambda)	φ (fi)	ω (omega)
92°	113°	200°	195°	87°	350°	38°	179°

Które z nich są:

- a) wypukłe, b) wklęsłe, c) ostre, d) rozwarte?

- 6 Jaką miarę ma kąt, który stanowi:

- a) $\frac{2}{3}$ kąta półpełnego, b) $\frac{1}{3}$ kąta prostego, c) $\frac{5}{6}$ kąta pełnego?

Zapisz obliczenia.

- 7 Kąt α jest mniejszy o $\frac{2}{9}$ kąta prostego od kąta półpełnego. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Miara kąta α wynosi 160° .	P	F
Kąt α jest kątem rozwartym.	P	F

- 8 Suma miar dwóch kątów wynosi 160° . Jeden z nich jest siedem razy większy od drugiego. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

- Większy kąt ma miarę A / B. A. 120° B. 140°
Mniejszy kąt jest kątem C / D. C. wklęsłym D. ostrym

- 9 Oblicz miarę kąta, który zakreśla minutowa wskazówka zegara w ciągu:

- a) 1 minuty, b) $\frac{1}{2}$ godziny, c) 36 minut.

- 10 Oblicz, w ciągu jakiego czasu godzinowa wskazówka zegara zakreśla kąt:

- a) 270° , b) 210° , c) 330° .

- 11 Jakie kąty tworzą wskazówki zegara o danej godzinie?

- a) 9.00 b) 6.30 c) 5.10

- 12 Koło podzielono promieniami na równe części.

Na ile części je podzielono, jeśli kąt między dwoma kolejnymi promieniami ma podaną miarę?

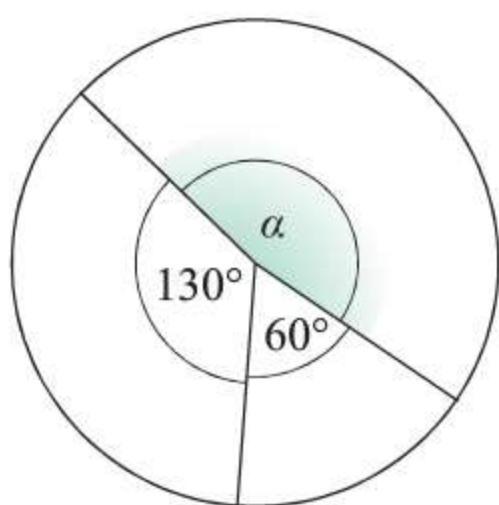
- a) 90° b) 120° c) 45° d) 180° e) 72° f) 60°

- 13 Narysuj kąt wklęsły i zaznacz takie dwa punkty A i B, które leżą we wnętrzu tego kąta, a odcinek AB nie znajduje się w całości w jego wnętrzu. Czy taka sytuacja jest możliwa dla kąta wypukłego?

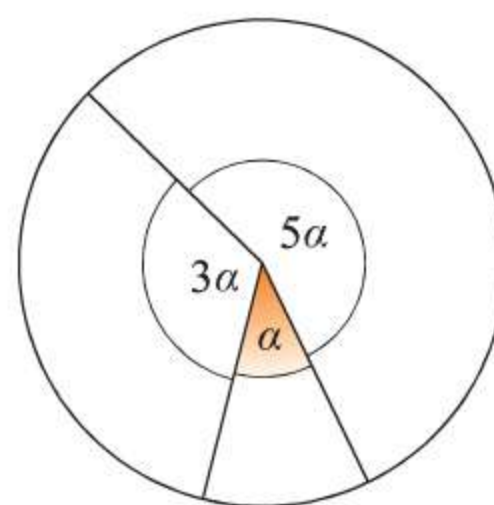


14 Oblicz miarę kąta α .

a)



b)



15 Dane są trzy kąty, których suma miar wynosi 180° . Największy z nich jest o 60° większy od najmniejszego, a średni jest o 30° większy od najmniejszego. Czy wśród tych kątów jest kąt prosty? Odpowiedź uzasadnij.

Wyzwanie

Sprawdź, czy ramiona AB i BD kątów ABC i DBC tworzą prostą, jeżeli miara kąta ABC to $0,7$ miary kąta prostego, a miara kąta DBC stanowi $\frac{7}{5}$ miary kąta ABC . Odpowiedź uzasadnij.

Sprawdź się!

- Oblicz miarę kąta, który zakreśla minutowa wskazówka zegara w ciągu 19 minut.
- Oblicz miary kątów, jakie tworzą wskazówki zegara o godzinie 17.00.
- Uzasadnij, że w ciągu pięciu i pół godziny godzinowa wskazówka zegara zakreśla kąt o mierze 165° .
- Suma miar dwóch kątów wynosi 156° . Jeden jest o 24° większy od drugiego. Oblicz miary tych kątów.
- Z punktu C leżącego na odcinku AB poprowadzono półprostą CD tak, że kąt ACD jest trzy razy większy od kąta BCD . Czy mniejszy z tych kątów ma miarę równą 65° ? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

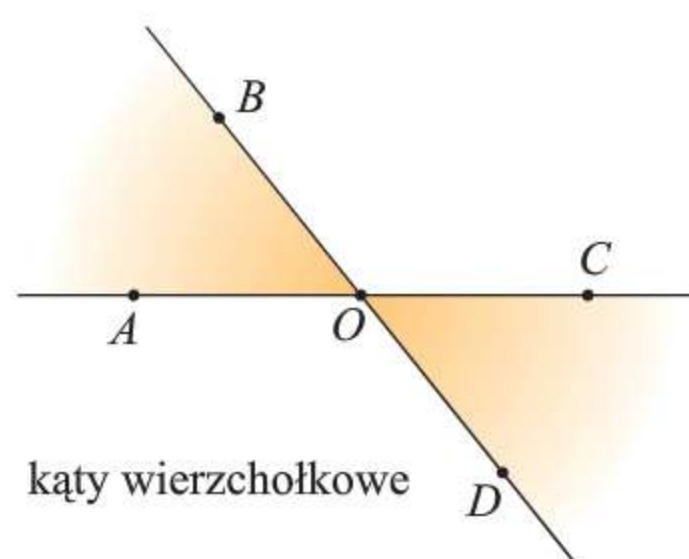
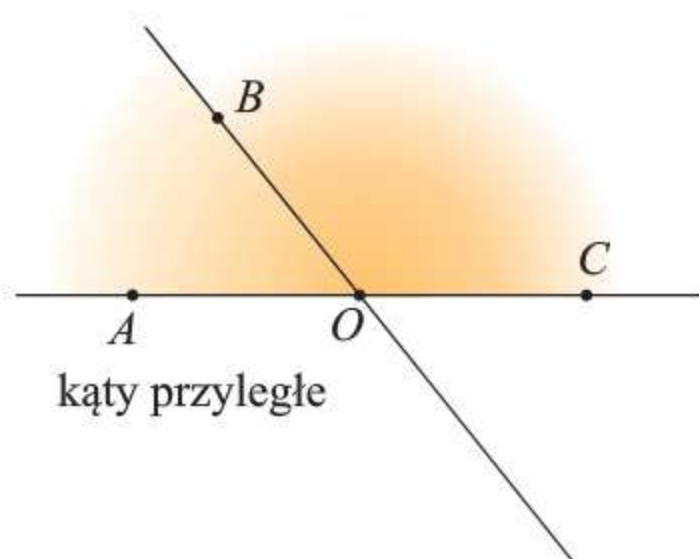
A.	Tak,	ponieważ	1.	mniejszy kąt ma 30° .
B.	Nie,		2.	większy kąt stanowi 75% kąta półpełnego.
			3.	większy kąt ma 120° .

3. Kąty przyległe i wierzchołkowe

Przypomnij sobie

- jakie kąty nazywamy przyległymi,
- jakie kąty nazywamy wierzchołkowymi,
- jakie własności mają kąty przyległe i wierzchołkowe.

Dwie przecinające się proste tworzą kąty przyległe i wierzchołkowe. Dwa kąty sąsiadujące to kąty przyległe, natomiast kąty niesąsiadujące to kąty wierzchołkowe.



Kąty: AOB i BOC mają wspólne ramię OB , a ich dwa pozostałe ramiona OA i OC tworzą prostą. Takie kąty nazywamy **kątami przyległymi**.

Kątami przyległymi są również kąty: BOC i COD , COD i AOD oraz AOD i AOB .

$$|\sphericalangle AOB| + |\sphericalangle BOC| = 180^\circ$$

$$|\sphericalangle BOC| + |\sphericalangle COD| = 180^\circ$$

$$|\sphericalangle COD| + |\sphericalangle AOD| = 180^\circ$$

$$|\sphericalangle AOD| + |\sphericalangle AOB| = 180^\circ$$



Dwa kąty przyległe tworzą kąt półpełny.

1 Wyznacz miarę kąta przyległego do kąta o podanej mierze.

a) 35°

b) 165°

c) 68°

d) 102°

Kąty AOB i COD nazywamy **kątami wierzchołkowymi**. Takimi kątami są również kąty BOC i AOD .

$$|\sphericalangle BOC| = |\sphericalangle AOD|$$

$$|\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle COD|$$



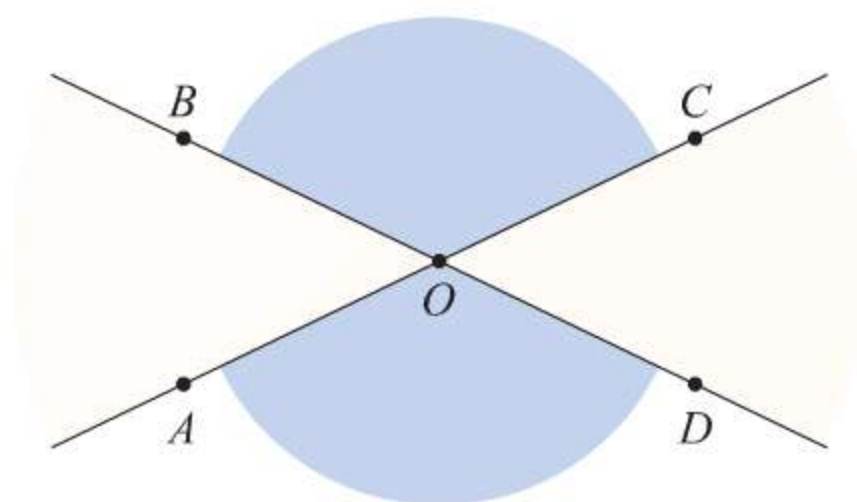
Kąty wierzchołkowe mają równe miary.

- 2 Kąty α i β są kątami wierzchołkowymi. Znajdź miarę kąta β , jeśli kąt α ma podaną miarę.

a) 135° b) 65° c) 168° d) 22°

Przykład 1.

Uzasadnijmy, że rozwarte kąty wierzchołkowe przedstawione na rysunku mają równe miary.



$$|\sphericalangle BOC| + |\sphericalangle BOA| = 180^\circ$$

– bo kąty BOC i BOA są przyległe

$$|\sphericalangle AOD| + |\sphericalangle BOA| = 180^\circ$$

– bo kąty AOD i BOA są przyległe

Wynika z tego, że:

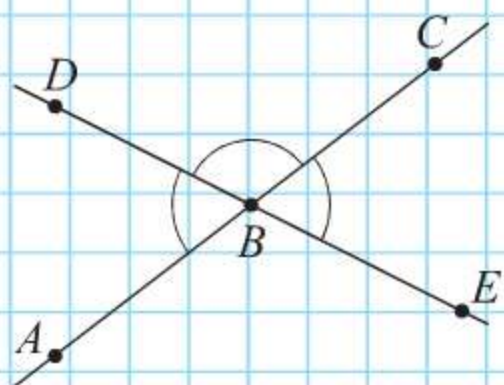
$$|\sphericalangle BOC| = 180^\circ - |\sphericalangle BOA|,$$

$$|\sphericalangle AOD| = 180^\circ - |\sphericalangle BOA|,$$

$$\text{Stąd } |\sphericalangle BOC| = |\sphericalangle AOD|.$$

- 3 Jacek i Tomek mieli uzasadnić, że ostre kąty wierzchołkowe są równe. Który z chłopców poprawnie przeprowadził rozumowanie?

Rozwiązanie Jacka



$\sphericalangle CBE$ i $\sphericalangle CBD$ – kąty przyległe

$$|\sphericalangle CBE| + |\sphericalangle CBD| = 180^\circ$$

$\sphericalangle DBA$ i $\sphericalangle CBD$ – kąty przyległe

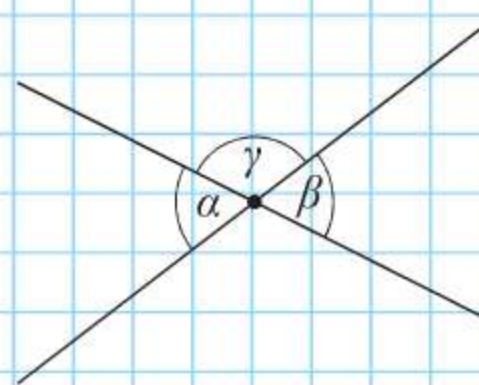
$$|\sphericalangle DBA| + |\sphericalangle CBD| = 180^\circ$$

$$|\sphericalangle CBE| = 180^\circ - |\sphericalangle CBD|$$

$$|\sphericalangle DBA| = 180^\circ - |\sphericalangle CBD|$$

$$|\sphericalangle CBE| = |\sphericalangle DBA|$$

Rozwiązanie Tomka



$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$

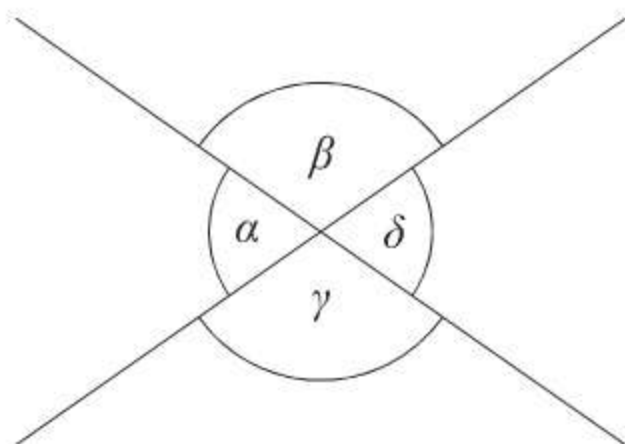
$$\beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

$$\alpha = \beta$$

Przykład 2.

Wyznaczmy miary kątów α , β i γ przedstawionych na rysunku poniżej, jeśli wiadomo, że $\delta = 70^\circ$.

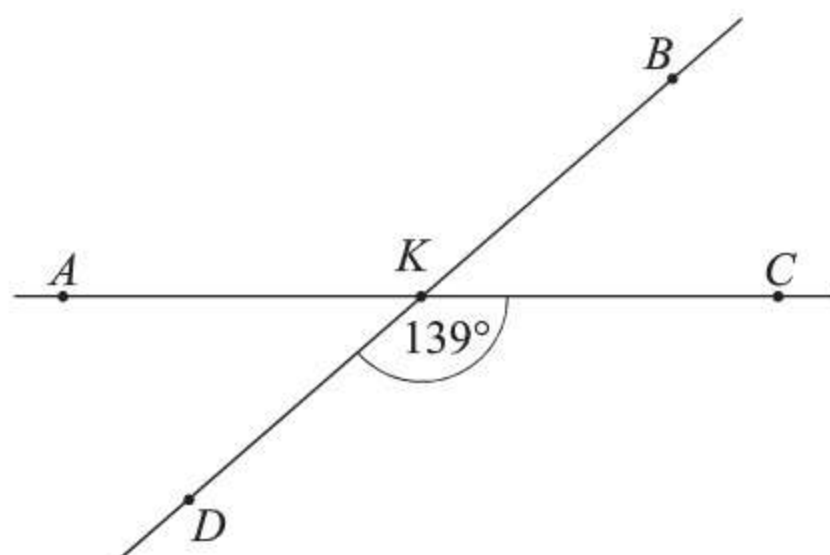


$\alpha = 70^\circ$ Kąt α i kąt δ są kątami wierzchołkowymi, czyli mają równe miary: po 70° .

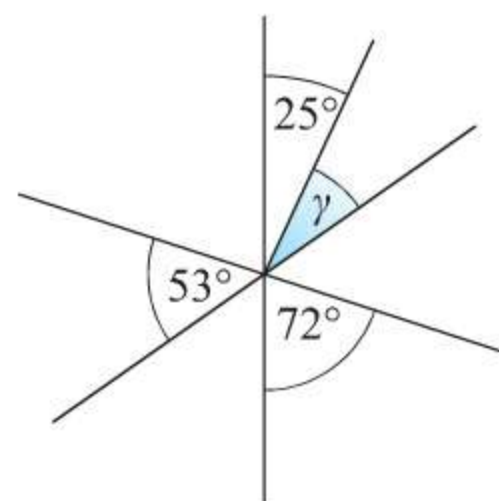
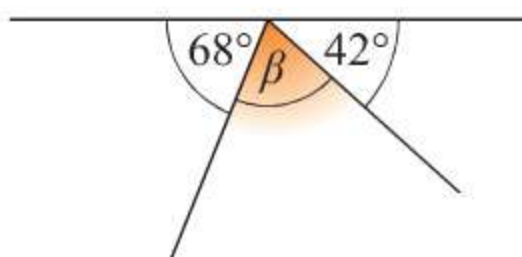
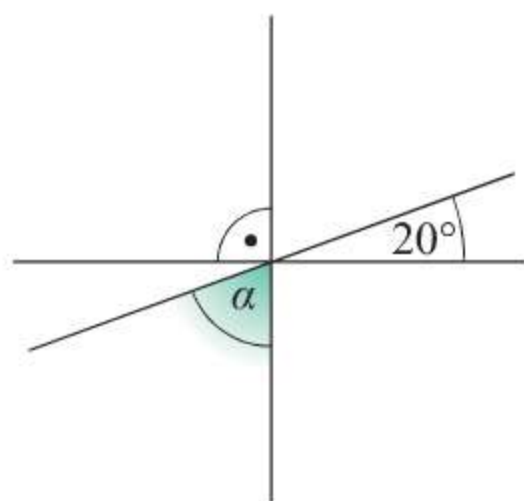
$\beta = 110^\circ$ Kąt β i kąt δ są kątami przyległymi, a więc $\beta = 180^\circ - \delta = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

$\gamma = 110^\circ$ Kąt γ i kąt β są kątami wierzchołkowymi, więc mają równe miary: po 110° .

4 Znajdź miary kątów AKB , AKD , BKC .

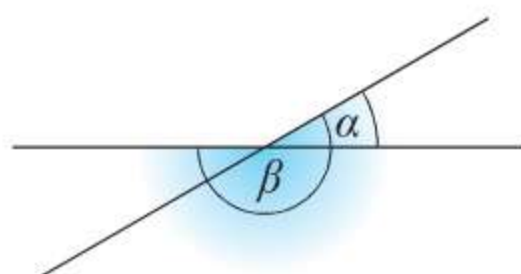


5 Oblicz miary kątów α , β , γ .

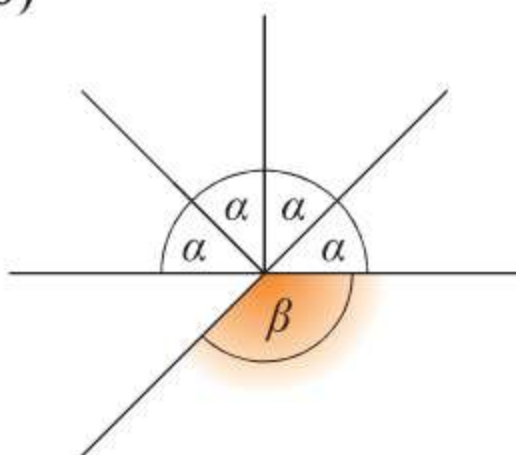


6 O ile stopni miara kąta β jest większa od miary kąta α ?

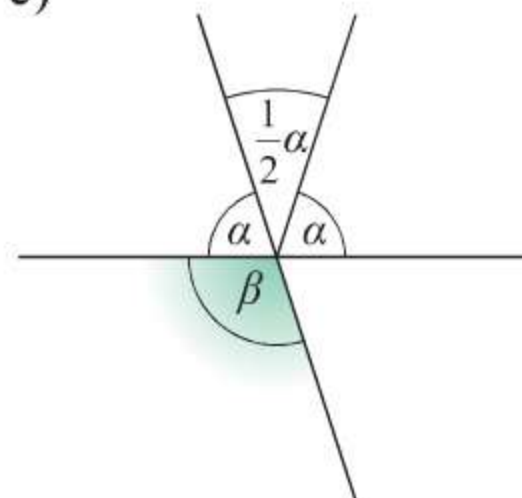
a)



b)



c)





- 7** Które z poniższych zdań opisują własności kątów przyległych?
 Jeżeli kąty α i β są przyległe, to
- I. mają wspólny wierzchołek.
 - II. mają jedno wspólne ramię.
 - III. ich miary są zawsze równe.
 - IV. suma miar tych kątów jest zawsze równa 180° .
 - V. suma miar tych kątów jest zawsze równa 90° .
 - VI. każdy z nich może być kątem prostym.
- 8** Które z poniższych zdań opisują własności kątów wierzchołkowych?
 Jeżeli kąty α i β są kątami wierzchołkowymi, to
- I. mają jedno wspólne ramię.
 - II. suma miar tych kątów jest zawsze równa 180° .
 - III. mają wspólny wierzchołek.
 - IV. ich miary są zawsze równe.
 - V. suma miar tych kątów jest zawsze większa od 180° .
- 9** Oblicz miarę kąta przyległego do kąta o mierze:
- a) 150° , b) 75° , c) α , d) $90^\circ + \alpha$.
- 10** Z dwóch kątów przyległych miara jednego jest o 28° większa od miary drugiego. Oblicz miary tych kątów.
- 11** Oblicz miarę kąta, który stanowi $\frac{1}{5}$ kąta do niego przyległego.
- 12** Czy zawsze kąty AOB i BOC są przyległe, jeżeli jeden z nich stanowi $\frac{2}{3}$ kąta prostego, a drugi jest dwa razy większy? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	suma miar tych kątów jest równa 180° .
B.	Nie,		2.	jeden kąt może zawierać drugi.
			3.	te kąty mają wspólne ramię.

- 13** Różnica miar dwóch kątów przyległych stanowi 40% miary kąta prostego. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Miara większego kąta wynosi A / B.

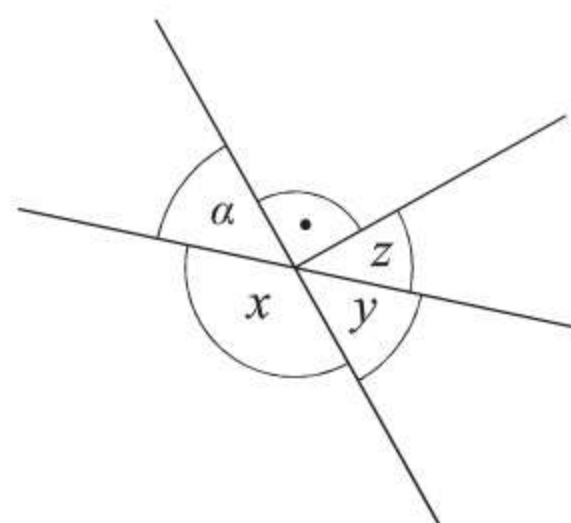
A. 108° B. 118°

Miara mniejszego kąta stanowi C / D miary kąta prostego.

C. 0,8 D. $\frac{2}{3}$

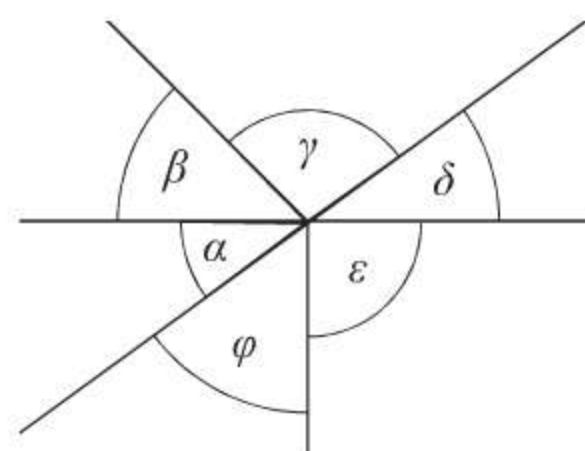
Wyzwanie

Skorzystaj z rysunku i wyraż miary kątów x , y , z za pomocą miary kąta α .



Sprawdź się!

- 1 Które kąty spośród przedstawionych na rysunku są kątami wierzchołkowymi?
- 2 Z dwóch kątów przyległych jeden jest dwa razy większy od drugiego. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



Większy kąt stanowi $\frac{1}{3}$ kąta pełnego.

P

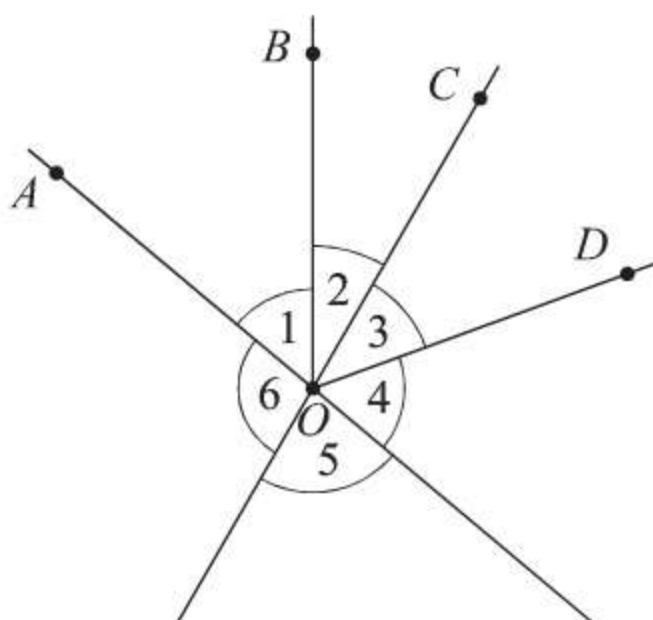
F

Jeden z tych kątów jest o 60° mniejszy od drugiego.

P

F

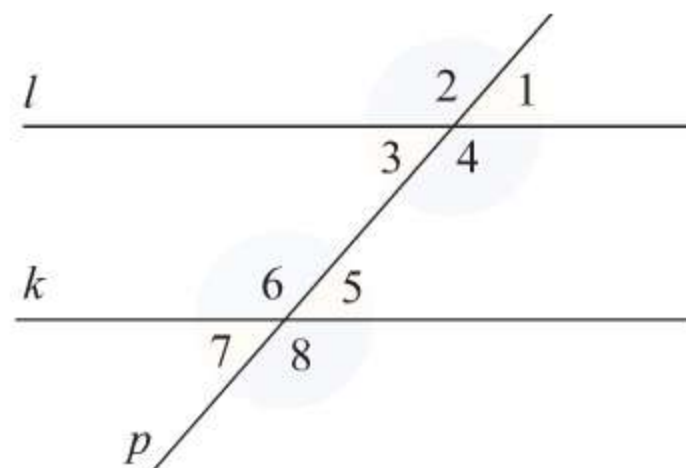
- 3 Jakim kątem (ostрым czy rozwartym) jest kąt przyległy do kąta:
a) ostrego, b) rozwartego?
Odpowiedź uzasadnij.
- 4 Różnica miar dwóch kątów przyległych jest równa 30° . Oblicz miary tych kątów.
- 5 Skorzystaj z rysunku i wyznacz miary kątów: 1, 2, 3, 4, 5, 6, jeśli wiesz, że: $|\angle AOD| = 120^\circ$, $|\angle AOC| = 80^\circ$, $|\angle BOD| = 70^\circ$.



4. Dwie proste równoległe przecięte trzecią prostą

Na rysunku proste k i l są równoległe, przecina je prosta p .

Kąt 1 jest tak położony względem prostych l i p , jak kąt 5 względem prostych k i p . Taką parę kątów nazywamy **kątami odpowiadającymi**. Są nimi również kąty: 2 i 6, 3 i 7, 4 i 8.



Kąty 3 i 5 oraz 2 i 8 leżą z różnych stron prostej p .

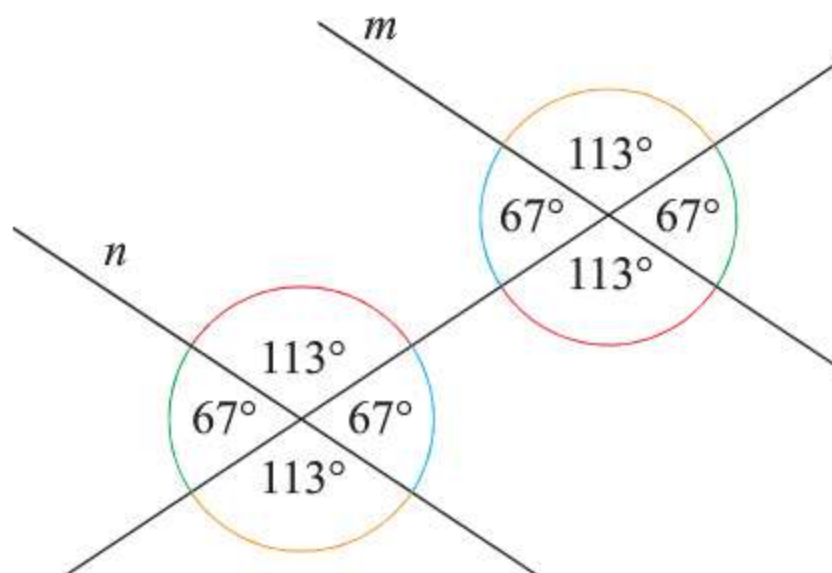
Takie pary kątów nazywamy **kątami naprzemianległymi**. Są nimi również pary kątów: 4 i 6, 1 i 7.

Jeżeli dwie proste równoległe przetniemy trzecią prostą, to utworzone kąty:

- odpowiadające mają równe miary,
- naprzemianległe mają równe miary.

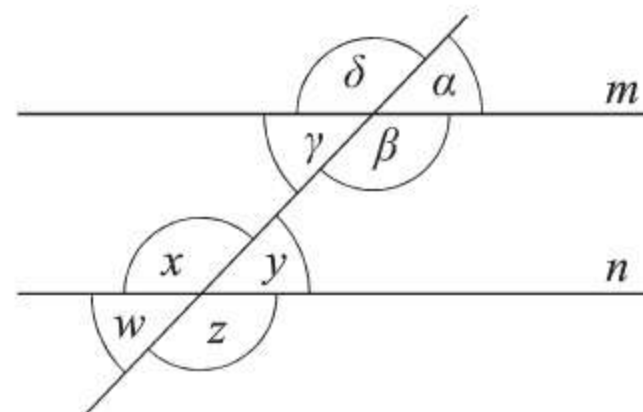


Prawdą jest również, że jeżeli dwie proste przetniemy trzecią prostą, a utworzone kąty odpowiadające i naprzemianległe są równe, to te dwie proste są równoległe. Na przykład:



Miary kątów odpowiadających i naprzemianległych są równe, stąd wynika, że $m \parallel n$.

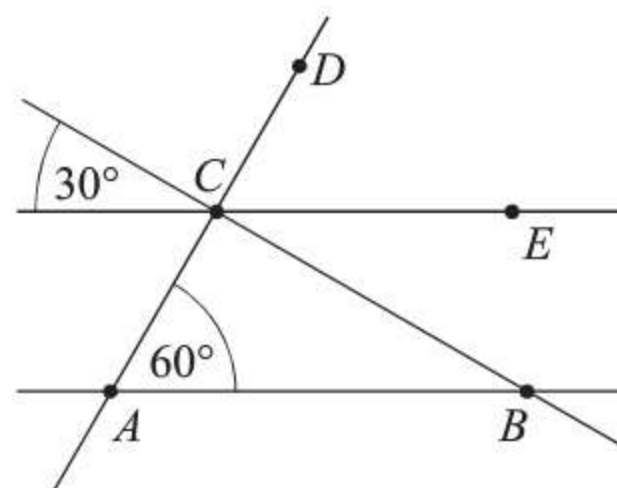
- 1** Na rysunku proste n i m są równoległe. Wypisz dwie pary kątów:
- ostrych i odpowiadających,
 - rozwartych i naprzemianległych.



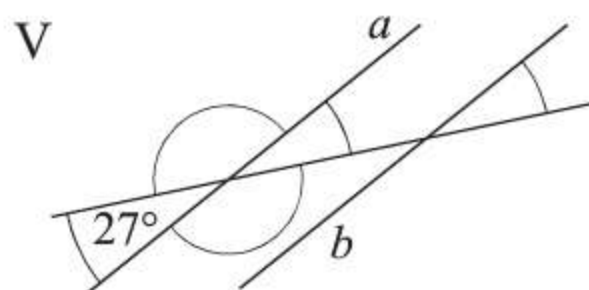
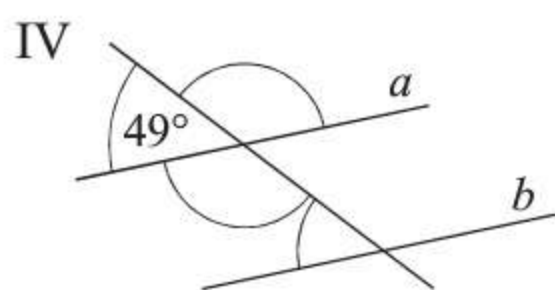
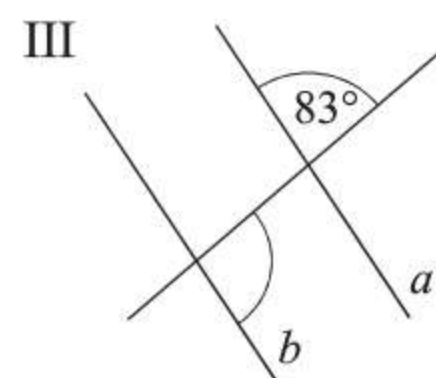
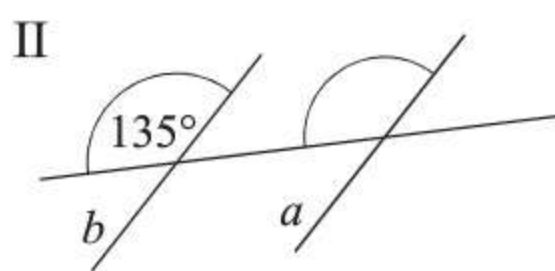
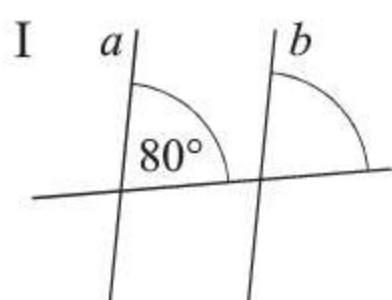
- 2 Na rysunku proste CE i AB są równoległe. Dokończ poniższe zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt, którego miara wynosi 30° , to kąt

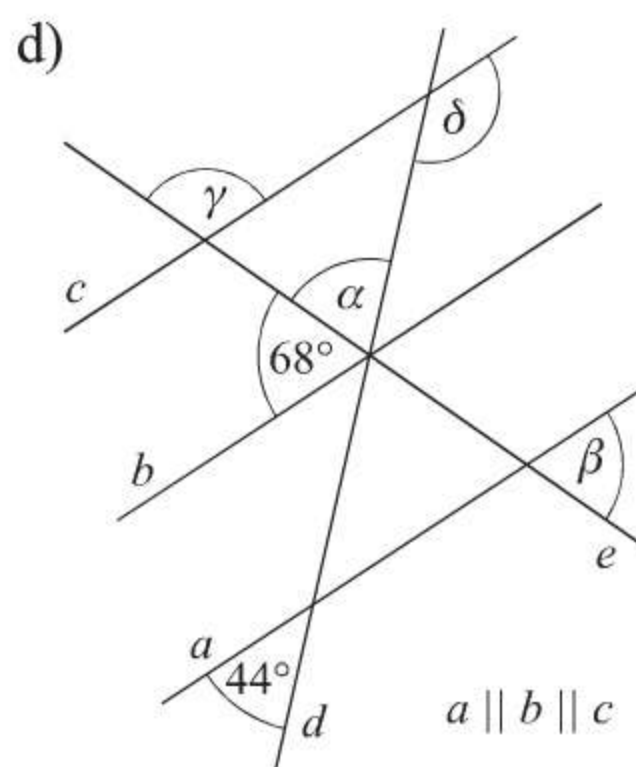
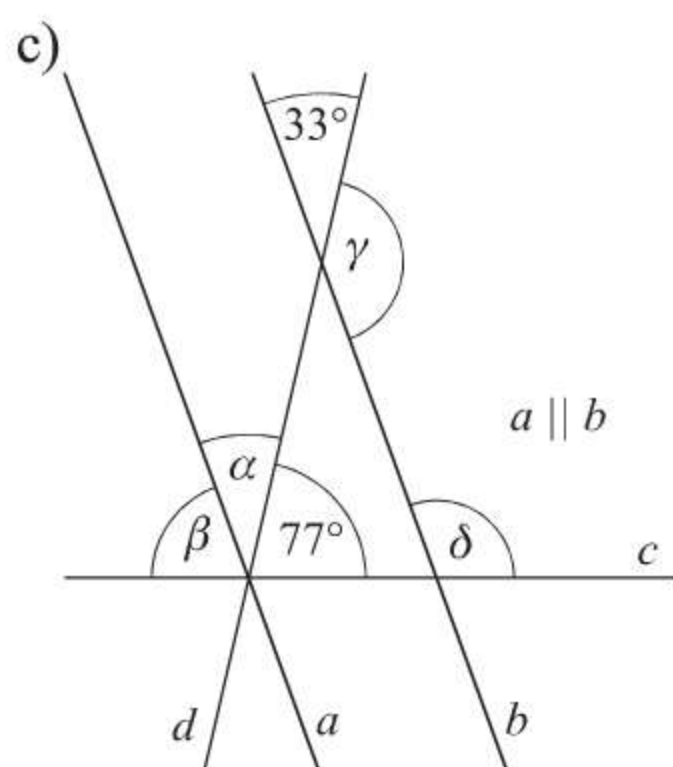
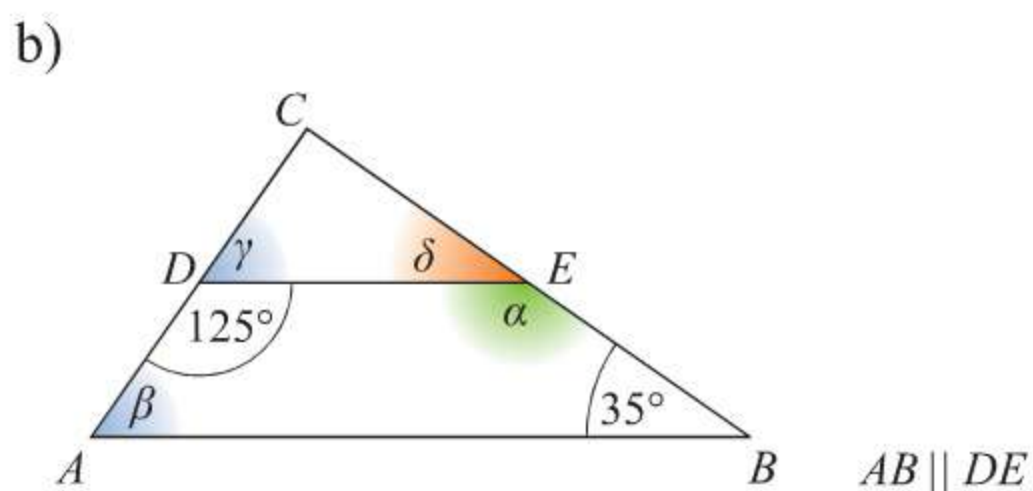
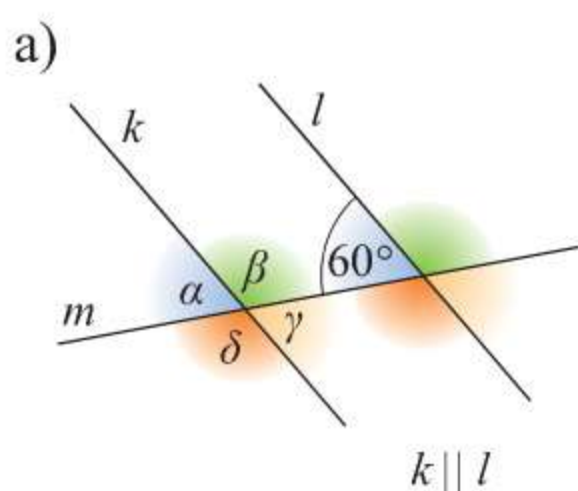
- A. DCE B. ACB
C. CBA D. DCB



- 3 Na rysunku proste a i b są równoległe. Znajdź miary kątów zaznaczonych łukami.

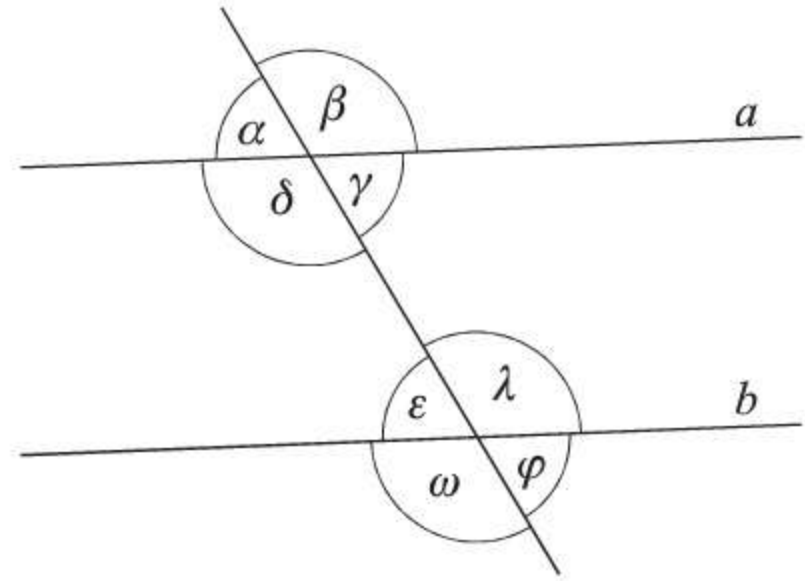


- 4 Skorzystaj z danych przedstawionych na rysunku i oblicz miary kątów $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.



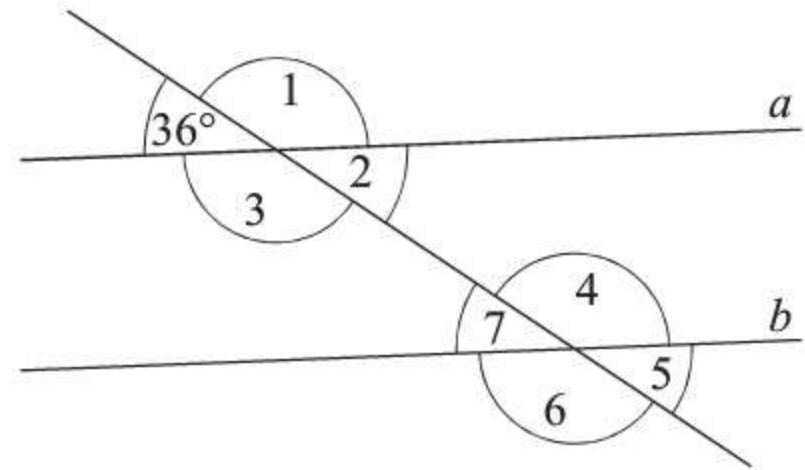


- 5** Proste a i b są równoległe. Znajdź miary kątów $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda, \varphi, \omega$, jeśli:
- miara kąta α jest o 60° mniejsza od miary kąta λ ,
 - $\beta + \omega = 220^\circ$,
 - $\omega - \varepsilon = 12^\circ$,
 - $\varphi = 0,75\delta$.



- 6** Proste a i b są równoległe. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

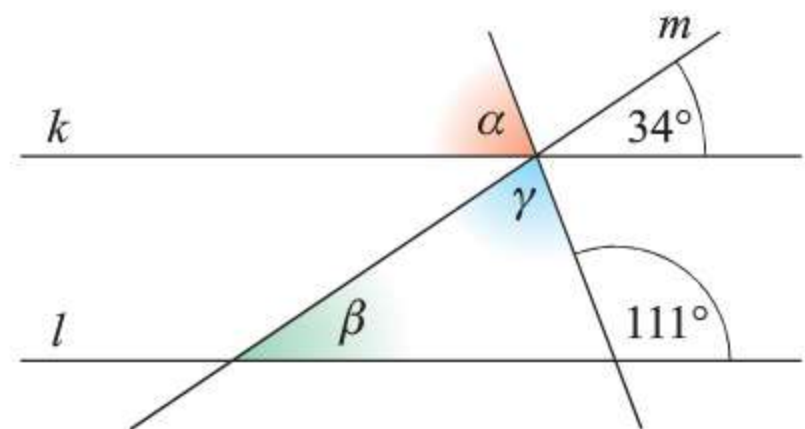
Miara kąta 4 jest czterokrotnie większa od miary kąta 2.	P	F
Różnica miar kąta rozwartego i ostrego wynosi 108° .	P	F



- 7** Dwie proste równoległe przecięto trzecią prostą i otrzymano osiem kątów. Oblicz miary tych kątów, jeśli jeden z nich ma miarę:
- 37° ,
 - 110° .

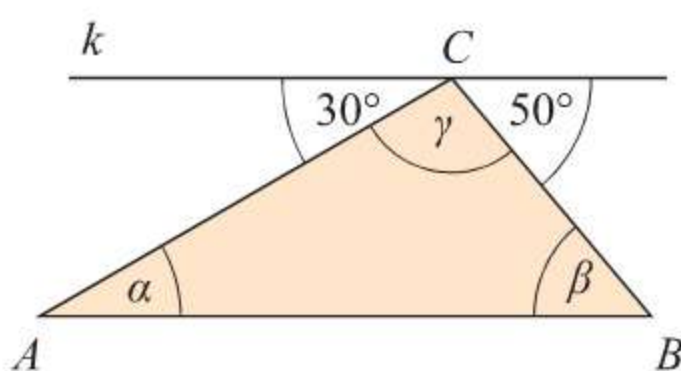
- 8** Na rysunku proste k i l są równoległe. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Największy spośród kątów α, β, γ ma miarę 69° .	P	F
Miara kąta α jest o 55° większa od miary kąta β .	P	F

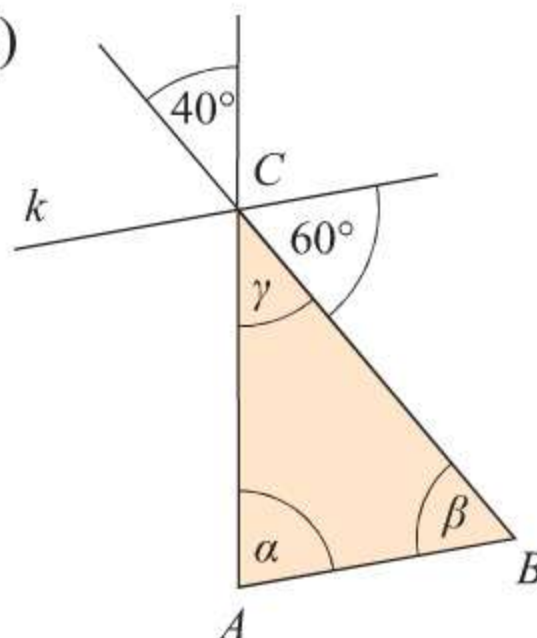


- 9** Prosta k jest równoległa do boku AB trójkąta ABC . Oblicz miary kątów α, β, γ trójkąta ABC .

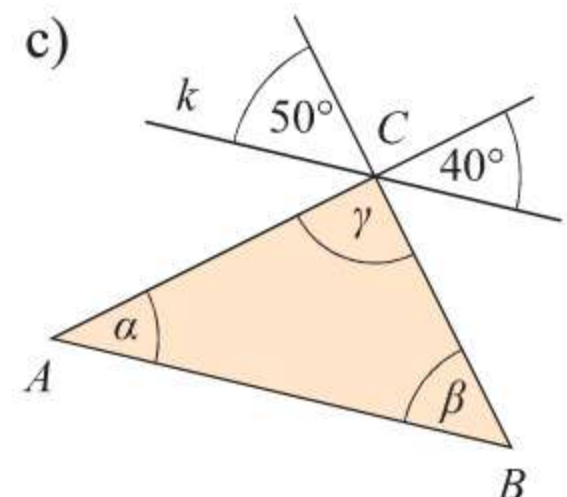
a)



b)

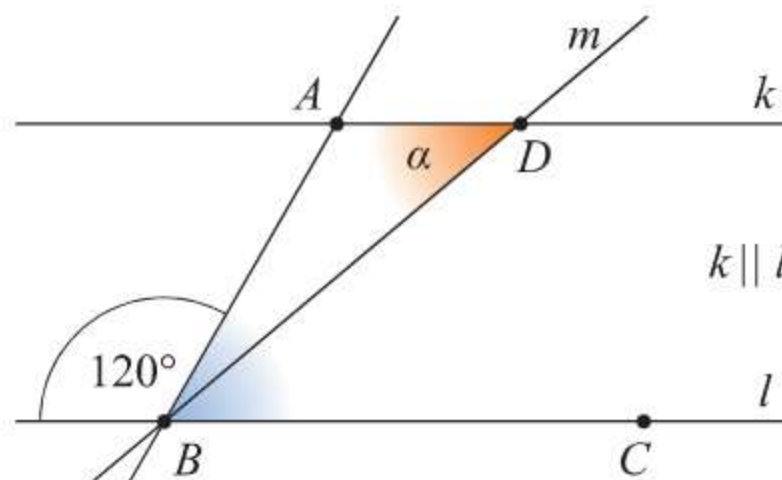


c)

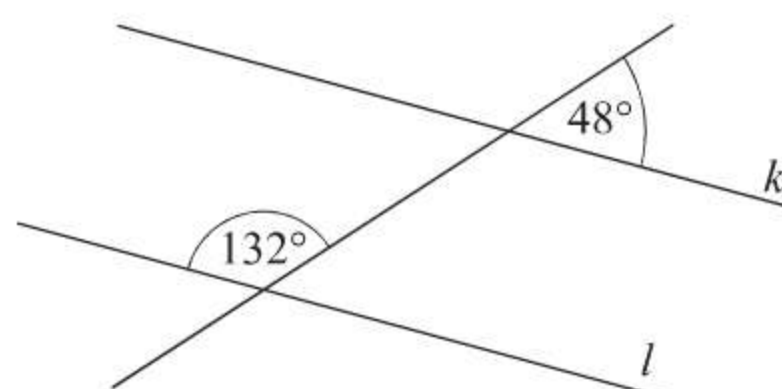


- 10** Narysuj trójkąt ABC . Przez każdy jego wierzchołek poprowadź prostą równoległą do przeciwległego boku. Punkty przecięcia tych prostych oznacz K, L, M . W trójkącie KLM znajdź kąt, którego miara jest równa:
 a) mierze kąta BAC trójkąta ABC , b) mierze kąta ACB trójkąta ABC .

- 11** Prosta m dzieli kąt ABC na dwie części, z których jedna jest dwa razy większa od drugiej. Oblicz miarę kąta α . Ile rozwiązań ma to zadanie?



- 12** Proste k i l zostały przecięte trzecią prostą. Miary utworzonych kątów zaznaczono na rysunku. Uzasadnij, że proste k i l są równoległe.



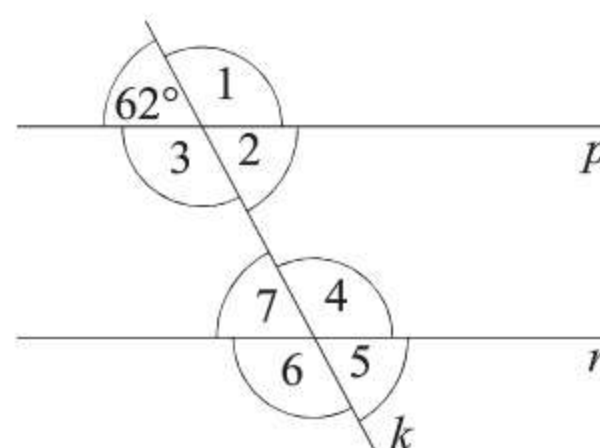
Wyzwanie

Uzasadnij, że:

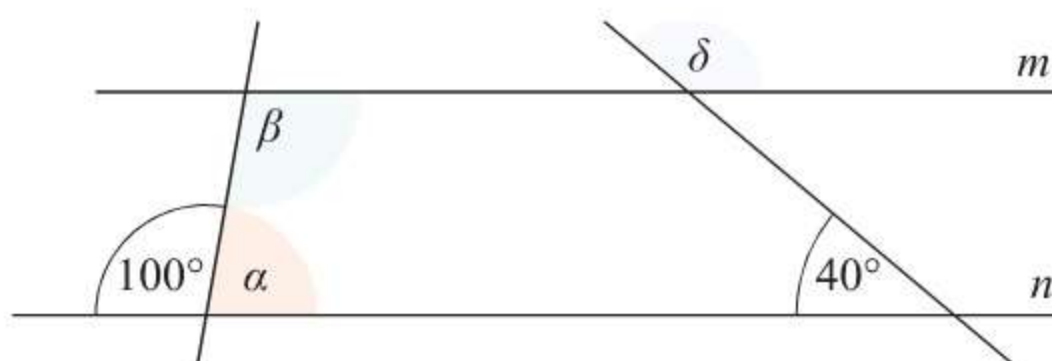
- a) dwie proste równoległe do trzeciej prostej są równoległe,
 b) dwie proste prostopadłe do tej samej prostej są równoległe.

Sprawdź się!

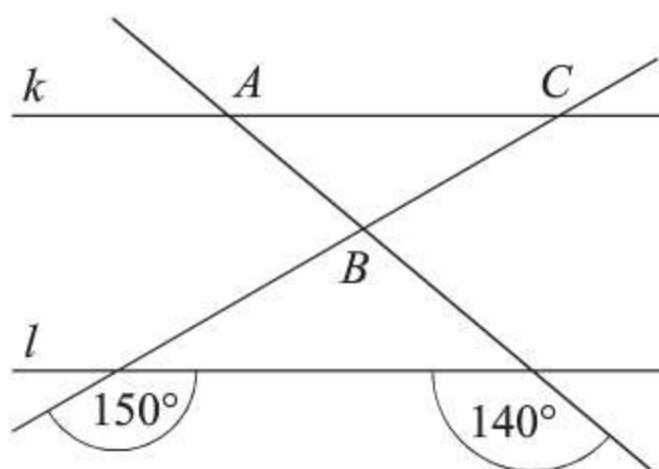
- 1** Na rysunku prosta k przecina proste równoległe p i r . Podaj miary kątów 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.



- 2** Oblicz, ile stopni ma każdy z kątów α, β, δ , jeżeli $m \parallel n$.



- 3 Na rysunku proste AB i BC przecinają proste równoległe k i l .



Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

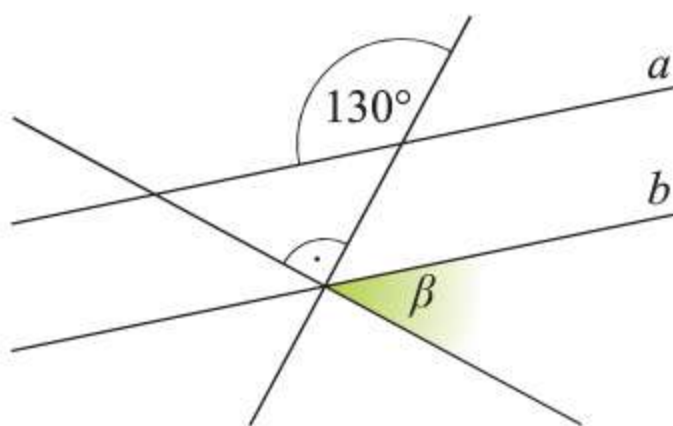
Miara kąta BAC jest równa A / B.

A. 40° B. 30°

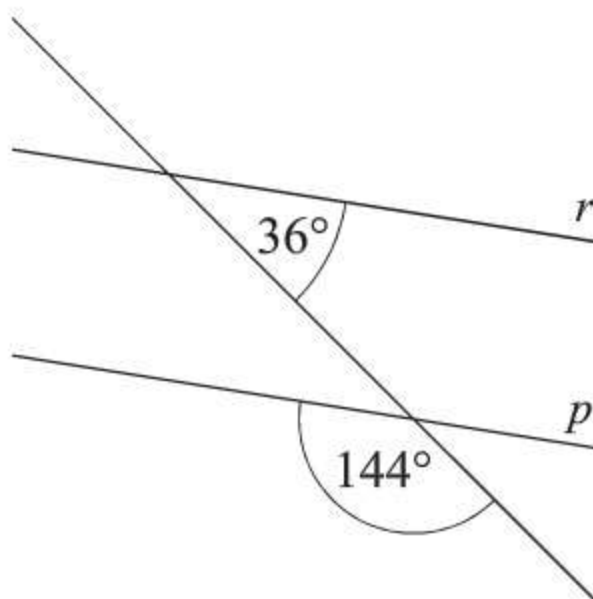
Miara kąta ACB stanowi C / D miary kąta prostego.

C. 30% D. $\frac{1}{3}$

- 4 Oblicz miarę kąta β , jeśli proste a i b są równoległe.



- 5 Uzasadnij, że proste p i r są równoległe.



5. Trójkąty, część 1

Przypomnij sobie

- kiedy można z trzech odcinków zbudować trójkąt,
- ile wynosi suma miar kątów wewnętrznych trójkąta,
- jakie są rodzaje trójkątów.

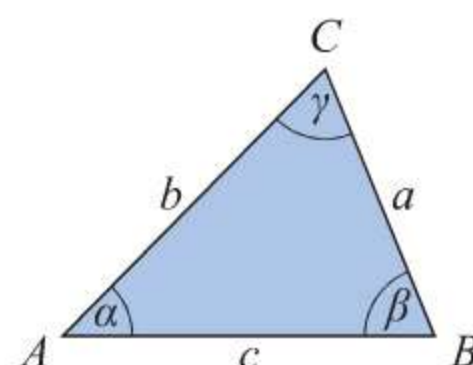
Na rysunku przedstawiono trójkąt ABC . Punkty A , B , C są jego wierzchołkami, a odcinki AB , BC i AC – bokami.

Długości boków tego trójkąta zapisujemy:

$$|AB| = c, |BC| = a, |AC| = b.$$

Obwód L trójkąta jest równy $a + b + c$.

$$L = a + b + c$$



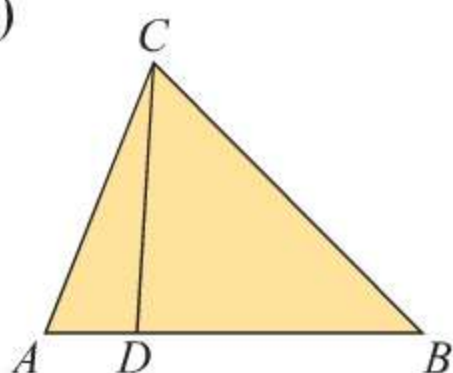
W trójkącie ABC : $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BAC$ to kąty wewnętrzne trójkąta przyległe do boku AB .

$\sphericalangle ACB$ to kąt wewnętrzny trójkąta przeciwległy do boku AB .

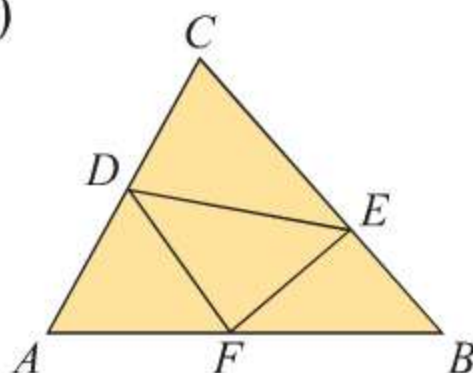
Kąty wewnętrzne trójkąta (lub ich miary) oznaczać będziemy również pojedynczymi literami greckimi zgodnie z regułą: kąt przy wierzchołku A to α , kąt przy wierzchołku B to β , kąt przy wierzchołku C to γ . Czasami zamiast wyrażenia „trójkąt ABC ” używać będziemy symbolu $\triangle ABC$.

1 Wypisz nazwy wszystkich trójkątów.

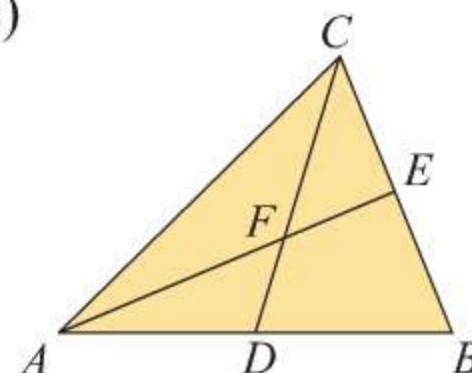
a)



b)

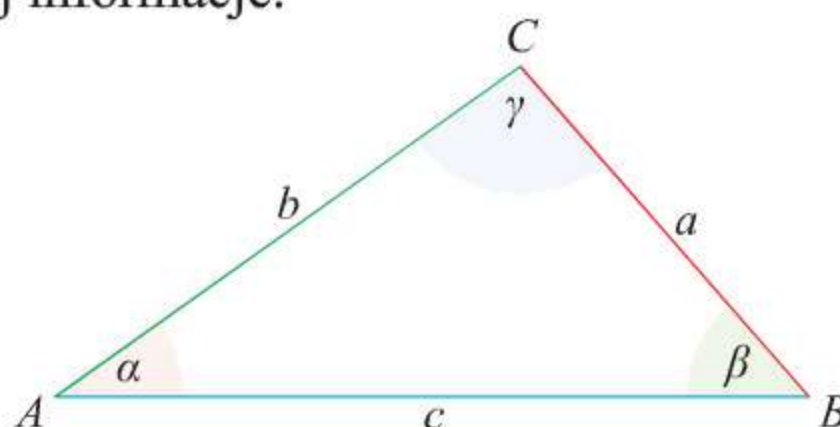


c)



2 Wykonaj rysunek i przepisuj zdania – uzupełnij informacje.

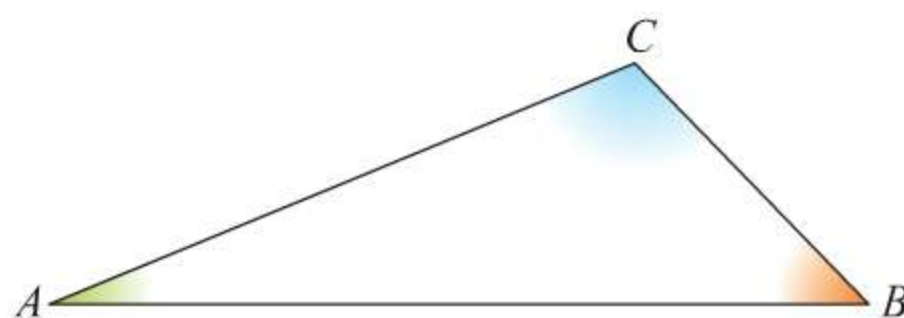
- Bok a leży naprzeciw kąta α .
- Bok b leży naprzeciw kąta β .
- Bok c leży naprzeciw kąta γ .
- Kąt γ leży między bokami a i b .
- Kąt α leży między bokami b i c .
- Kąt β leży między bokami a i c .



Przykład 1.

Przyjrzyjmy się zależnościom między bokami i kątami trójkąta.

W trójkącie ABC bok AB jest najdłuższy, a bok BC najkrótszy. Kąt ACB jest największy, a kąt BAC najmniejszy. Łatwo zauważyć, że naprzeciw najdłuższego boku leży największy kąt, a naprzeciw najkrótszego boku – najmniejszy kąt.



W każdym trójkącie naprzeciw najdłuższego boku leży największy kąt, a naprzeciw najkrótszego boku – najmniejszy kąt.



- 3** Dane są długości boków trójkąta ABC . Który jego kąt jest największy, a który najmniejszy? Oblicz obwód trójkąta ABC i podaj go w centymetrach.

a) $|AB| = 5,2 \text{ cm}$ $|BC| = 34 \text{ mm}$ $|CA| = 0,07 \text{ m}$

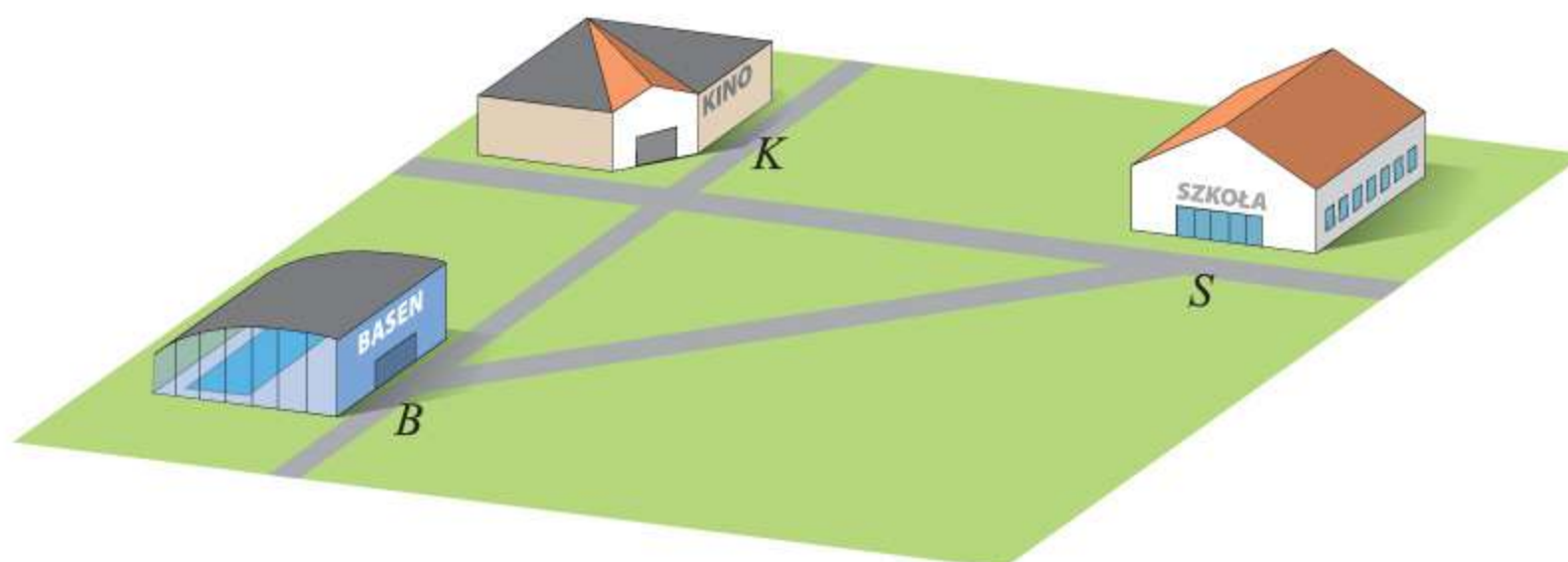
b) $|AB| = 2 \text{ dm}$ $|BC| = 50\frac{1}{4} \text{ cm}$ $|CA| = 350 \text{ mm}$

c) $|AB| = 98,5 \text{ cm}$ $|BC| = 5,6 \text{ dm}$ $|CA| = 0,52 \text{ m}$

Przykład 2.

Przyjrzyjmy się rysunkowi i odpowiedzmy na pytania.

- a) Ile jest dróg z basenu do szkoły? Która droga jest krótsza?
b) Ile jest dróg ze szkoły do kina? Która droga jest dłuższa?



Przyjmijmy, że poszczególne budynki są wierzchołkami trójkąta BKS . Wówczas:

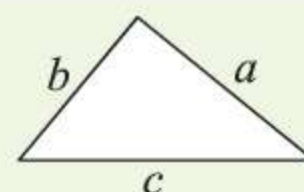
- a) są dwie drogi: $B-S$ i $B-K-S$, krótsza jest droga $B-S$,
b) są dwie drogi: $S-K$ i $S-B-K$, dłuższa jest droga $S-B-K$.

Długość każdego boku trójkąta jest mniejsza od sumy długości dwóch pozostałych boków.

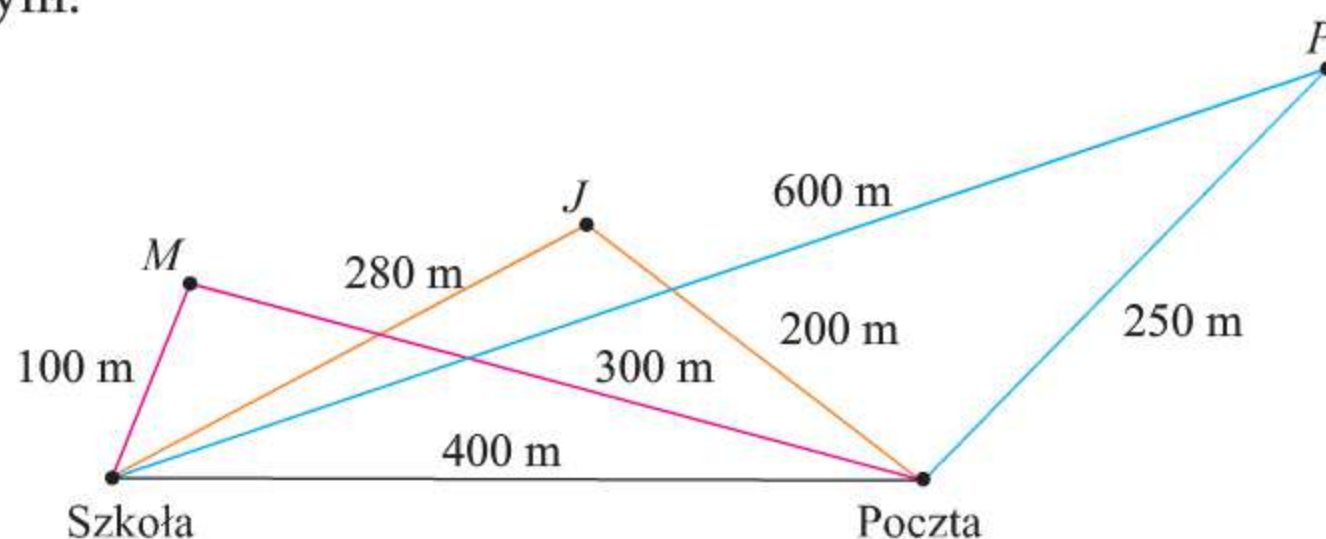
$$a < b + c$$

$$b < a + c$$

$$c < a + b$$



- 4 Maciek, Jacek i Piotrek przedstawili odległości ze swojego domu do szkoły i na pocztę. Szkoła oddalona jest od poczty o 400 m. Sprawdź, czy któryś z chłopców się nie pomylił.



Przykład 3.

Sprawdźmy, czy z odcinków o podanych długościach można zbudować trójkąt.

- a) 3,6 cm, 6 cm, $4\frac{3}{4}$ cm
 b) $5\frac{2}{3}$ cm, 7,6 cm, 14,2 cm
 c) 4,3 cm, 9,7 cm, 5,4 cm

Wystarczy sprawdzić, czy suma długości dwóch krótszych odcinków jest większa od długości najdłuższego odcinka.

a) $3,6 + 4\frac{3}{4} = 3,6 + 4,75 = 8,35 > 6$

Z tych odcinków można zbudować trójkąt.

b) $5\frac{2}{3} + 7,6 = 5\frac{2}{3} + 7\frac{3}{5} = 12\frac{10+9}{15} = 13\frac{4}{15} < 14,2$

Z tych odcinków nie można zbudować trójkąta.

c) $4,3 + 5,4 = 9,7$

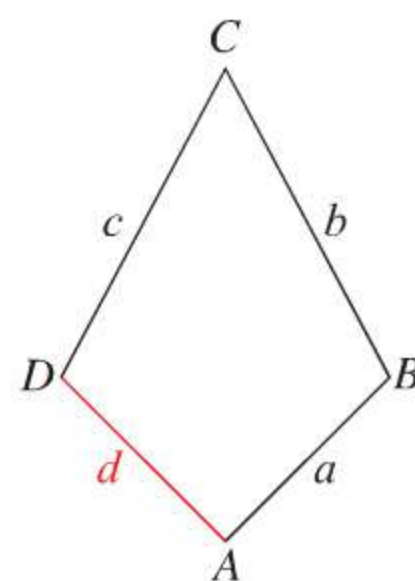
Z tych odcinków nie można zbudować trójkąta. Z dwóch krótszych odcinków można zbudować najdłuższy.

- 5 Dane są odcinki o długościach a , b , c . Czy można z nich zbudować trójkąt? Odpowiedź uzasadnij.

- a) $a = 8$ cm $b = 1,2$ dm $c = 1$ dm
 b) $a = 4\frac{3}{4}$ cm $b = 10,5$ cm $c = 15,2$ cm
 c) $a = 0,75$ m $b = 6,2$ dm $c = 4,5$ cm

- 6 Odcinek o długości 5 cm podzielono na trzy części tak, że długość każdej części jest liczbą naturalną. Z otrzymanych odcinków zbudowano trójkąt. Oblicz długości boków tego trójkąta.

- 7 Uzasadnij, że długość łamanej $ABCD$ jest większa od d , czyli od długości odcinka łączącego końce tej łamanej.



Przykład 4.

Obliczmy sumę miar kątów wewnętrznych α , β i γ dowolnego trójkąta.

Narysujmy prostą l równoległą do odcinka AB i zaznaczmy na niej punkty D i E .

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ECB| \quad \text{jako kąty naprzemianległe}$$

$$|\sphericalangle ECB| = \beta$$

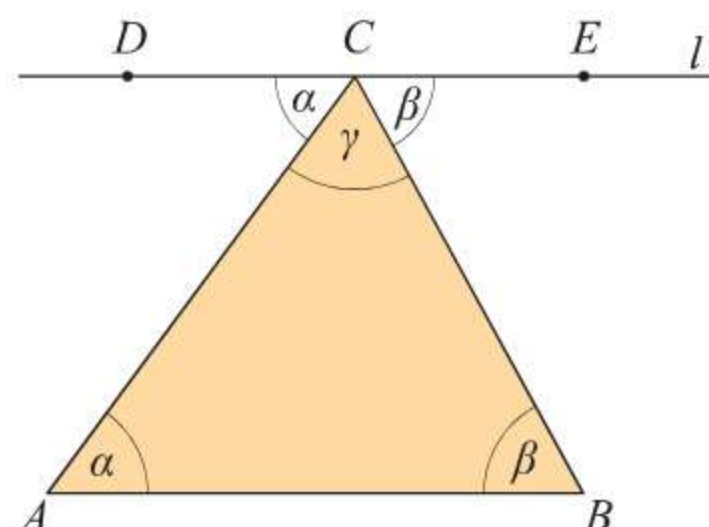
$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle DCA| \quad \text{jako kąty naprzemianległe}$$

$$|\sphericalangle DCA| = \alpha$$

$$|\sphericalangle ECD| = 180^\circ \quad \text{jako kąt półpełny}$$

$$|\sphericalangle ECD| = |\sphericalangle ECB| + |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle DCA| = \beta + \gamma + \alpha$$

$$\text{stad } 180^\circ = \alpha + \beta + \gamma$$



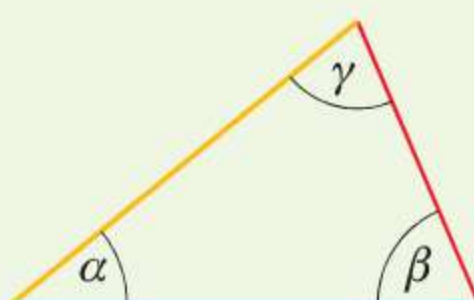
Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180° .



- 8** Każdy kolejny kąt wewnętrzny trójkąta jest o 20° mniejszy od poprzedniego. Jakie miary mają kąty wewnętrzne tego trójkąta? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
- A. $35^\circ, 55^\circ, 75^\circ$ B. $20^\circ, 40^\circ, 80^\circ$ C. $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$ D. $50^\circ, 70^\circ, 90^\circ$
- 9** Dane są miary dwóch kątów trójkąta KLM . Który bok tego trójkąta jest najdłuższy, a który – najkrótszy?
- a) $|\sphericalangle KLM| = 60^\circ$, $|\sphericalangle LMK| = 20^\circ$
 b) $|\sphericalangle LMK| = 98^\circ$, $|\sphericalangle MKL| = 74^\circ$
 c) $|\sphericalangle LKM| = 77^\circ$, $|\sphericalangle KML| = 46^\circ$

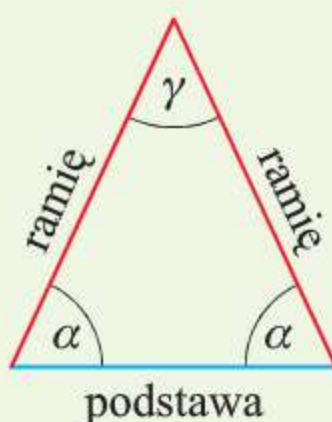
Rodzaje trójkątów ze względu na długości boków

trójkąt różnoboczny



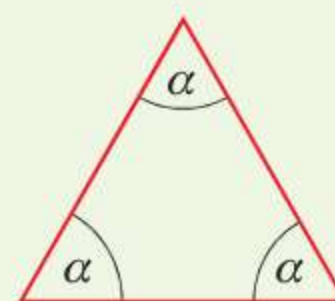
- Każdy bok ma inną długość.
- Każdy kąt ma inną miarę.

trójkąt równoramienny



- Ramiona są równej długości.
- Kąty przy podstawie mają równe miary.

trójkąt równoboczny



- Wszystkie boki są równej długości.
- Wszystkie kąty mają równe miary.





Każdy trójkąt równoboczny jest też trójkątem równoramiennym.

- 10** W trójkącie długości boków są równe a , b , c . Podaj nazwę tego trójkąta i oblicz jego obwód, jeśli:
- a) $a = 15$ cm, $b = 15$ cm, $c = 15$ cm;
 b) $a = 7,2$ cm, $b = 11$ cm, $c = 7,2$ cm;
 c) $a = 4\frac{1}{2}$ cm, $b = 3,7$ cm, $c = 5,4$ cm.
- 11** Trójkąt równoboczny ma taki sam obwód jak trójkąt równoramienny, którego podstawa długości 1,5 dm jest o 3 cm dłuższa od jego ramienia. Oblicz długość boku trójkąta równobocznego.
- 12** W trójkącie równoramiennym jeden bok ma długość 15 cm, a drugi 37 cm. Który z nich jest ramieniem, a który podstawą? Oblicz obwód tego trójkąta.

Rodzaje trójkątów ze względu na miary kątów

trójkąt ostrokątny	trójkąt prostokątny	trójkąt rozwartokątny
Każdy kąt wewnętrzny jest ostry.	Jeden kąt wewnętrzny jest prosty, a pozostałe są ostre.	Jeden kąt wewnętrzny jest rozwarty, a pozostałe są ostre.

- 13** Jeden z kątów trójkąta jest równy 128° . Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Ten trójkąt może być prostokątny.	P	F
Suma miar pozostałych kątów tego trójkąta wynosi 52° .	P	F

- 14** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Każdy trójkąt ma co najmniej dwa kąty ostre.	P	F
W trójkącie prostokątnym jeden kąt jest prosty, jeden ostry i jeden rozwarty.	P	F
Każdy kąt wewnętrzny trójkąta równobocznego ma miarę 60° .	P	F
Trójkąt rozwartokątny nie może być równoramienny.	P	F

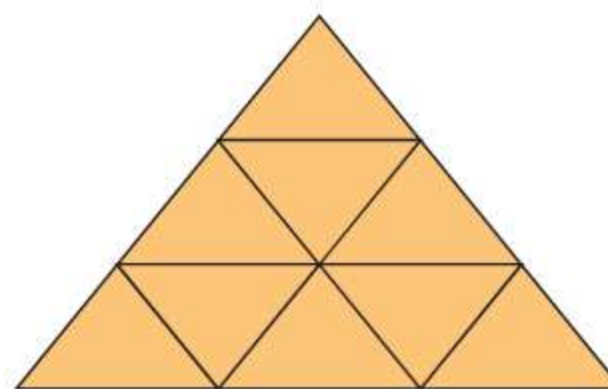
- 15** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Istnieje trójkąt równoboczny prostokątny.	P	F
Istnieje trójkąt rozwartokątny prostokątny.	P	F
Istnieje trójkąt równoboczny o kątach wewnętrznych równych 45° .	P	F
Istnieje trójkąt różnoboczny prostokątny.	P	F

- 16** Trzy trójkąty równoramienne mają jednakowe podstawy. Pierwszy trójkąt jest ostrokątny, drugi prostokątny, trzeci rozwartokątny. Który z tych trójkątów ma najdłuższe, a który najkrótsze ramię?

Wyzwanie

Ile trójkątów jest na rysunku obok?

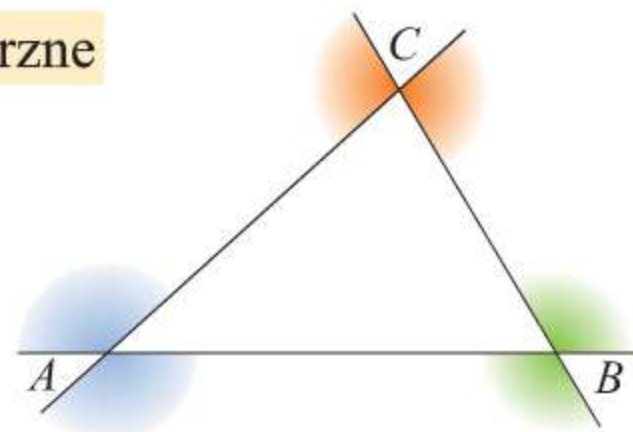


Sprawdź się!

- Długości boków trójkąta ABC wynoszą: $|AB| = 11$ cm, $|BC| = 8,8$ cm, $|CA| = 4,7$ cm. Który kąt tego trójkąta jest największy, a który – najmniejszy? Oblicz obwód trójkąta ABC .
- Dane są odcinki o długościach: 16, 37 i 20. Czy można z nich zbudować trójkąt? Odpowiedź uzasadnij.
- Obwód trójkąta równoramiennego jest równy 42 cm, a ramię ma długość 12 cm.
Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.
Najdłuższy bok tego trójkąta jest równy A / B.
A. 18 cm B. 15 cm
Największy kąt w tym trójkącie jest zawarty między C / D.
C. jego ramionami D. podstawą a ramieniem
- Miara jednego z kątów ostrych w trójkącie prostokątnym jest równa 60° . Jaką miarę ma drugi kąt ostry?
- W trójkącie równoramiennej jeden z kątów ma miarę 40° . Oblicz miary pozostałych kątów. Podaj wszystkie możliwości.

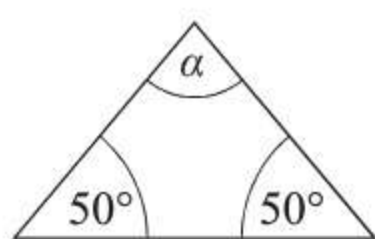
6. Trójkąty, część 2

Kąty zaznaczone na rysunku kolorami to kąty zewnętrzne trójkąta ABC .

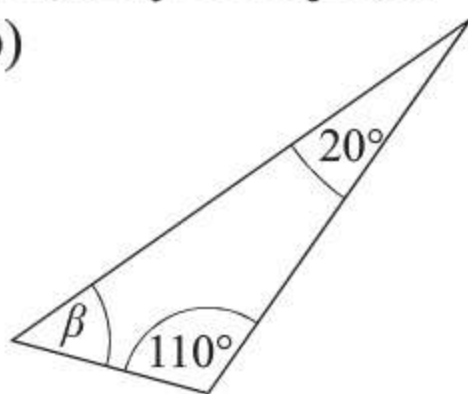


1 Oblicz miary kątów zewnętrznych trójkąta.

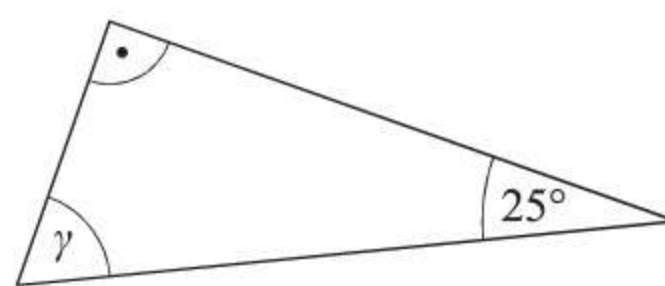
a)



b)

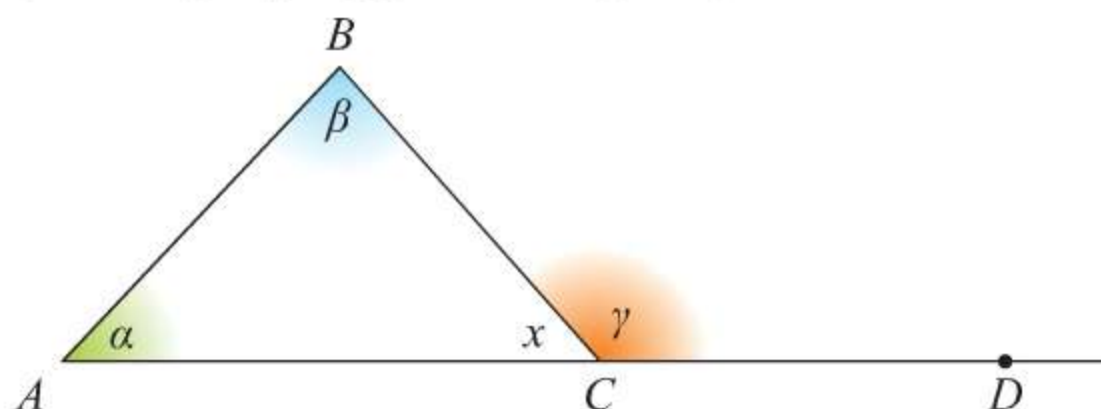


c)



Przykład 1.

Uzasadnijmy, że w trójkącie miara kąta zewnętrznego jest równa sumie miar kątów wewnętrznych nieprzyległych do tego kąta.



$$x + \gamma = 180^\circ$$

– bo kąty x i γ są kątami przyległymi.

$$x + \alpha + \beta = 180^\circ$$

– bo suma miar kątów w trójkącie wynosi 180° .

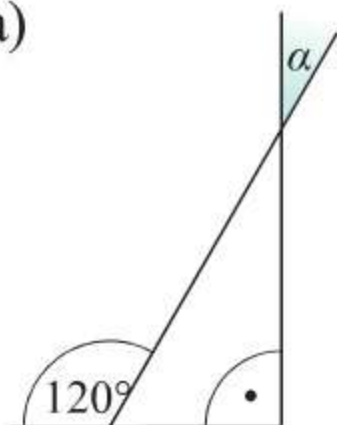
Wobec tego $x + \gamma = x + \alpha + \beta$, więc $\gamma = \alpha + \beta$.



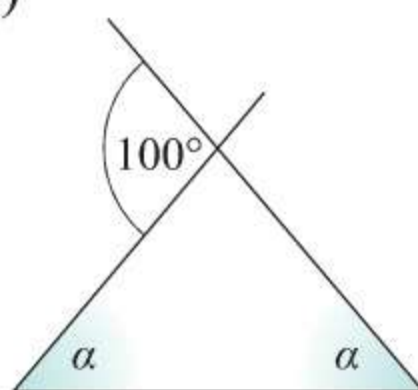
W każdym trójkącie miara kąta zewnętrznego jest równa sumie miar kątów wewnętrznych nieprzyległych do tego kąta.

2 Oblicz miarę kąta α .

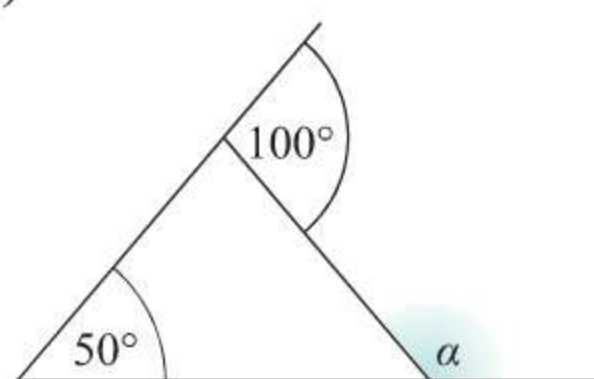
a)



b)



c)

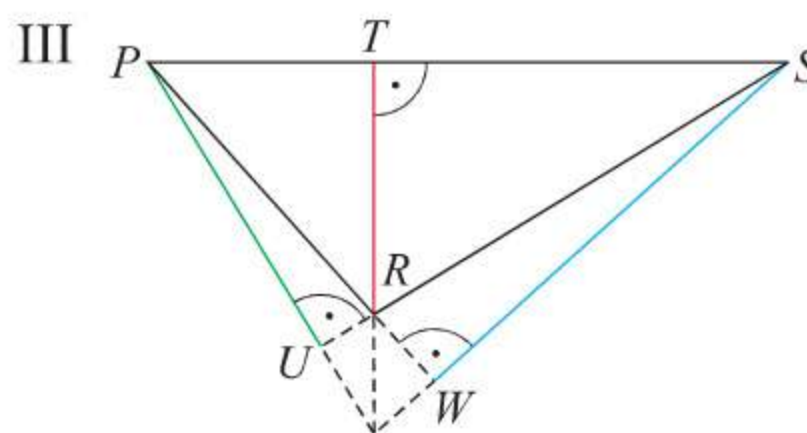
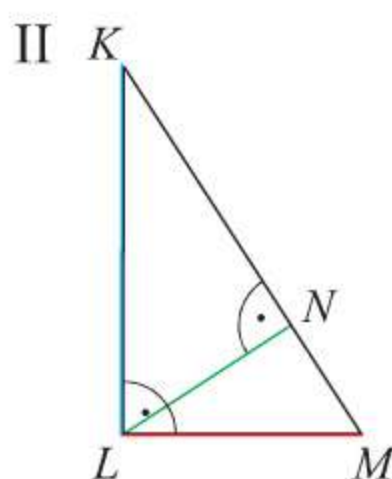
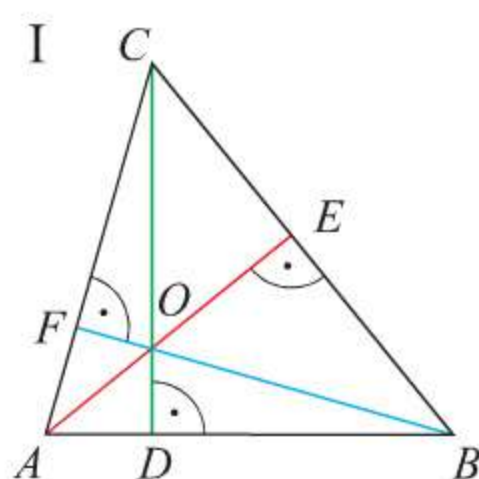




- 3 Czy kąt zewnętrzny trójkąta jest zawsze większy od kąta wewnętrznego do niego nieprzyległego? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	może być kątem rozwartym.
			2.	może być kątem prostym.
B.	Nie,		3.	jest sumą kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych.

Podstawą trójkąta może być każdy jego bok, zatem aby wyznaczyć wysokość trójkąta, trzeba z jego wierzchołka narysować odcinek prostopadły do przeciwległego boku lub jego przedłużenia. Każdy trójkąt ma trzy wierzchołki, a więc można narysować trzy wysokości.



W trójkącie ostrokątnym wysokości leżą wewnątrz trójkąta (rysunek I). W trójkącie prostokątnym dwie wysokości pokrywają się z przyprostokątnymi (rysunek II). W trójkącie rozwartokątnym dwie wysokości leżą na zewnątrz trójkąta (rysunek III).

W każdym trójkącie wysokości lub ich przedłużenia przecinają się w jednym punkcie.



- 4 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wysokość trójkąta to najkrótszy odcinek łączący wierzchołek trójkąta z prostą zawierającą przeciwległy bok trójkąta.	P	F
Wysokość trójkąta jest prostopadła do boku trójkąta lub jego przedłużenia.	P	F
Nie każdy trójkąt ma 3 wysokości.	P	F
W trójkącie, w którym dwa kąty mają po 50° , wysokości przecinają się wewnątrz trójkąta.	P	F

- 5 W trójkącie ABC bok AB ma długość 12 cm, a wysokość CD jest równa 5 cm. Punkt D dzieli bok AB na połowy. Który kąt jest większy: DAC czy ACD ?

- 6 W trójkącie równoramiennym ABC wysokość poprowadzona do podstawy AB ma długość 16 cm, a kąt przy podstawie trójkąta ma miarę 45° .
Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.
Ten trójkąt jest A / B.
A. prostokątny B. rozwartokątny
Długość podstawy AB jest C / D.
C. równa 36 cm D. dwa razy większa od długości poprowadzonej wysokości
- 7 Narysuj trójkąt, w którym kąty zewnętrzne przy podstawie mają miary 160° i 60° , a następnie poprowadź wysokość do boku:
a) najdłuższego, b) najkrótszego.
- 8 Wysokość CD w trójkącie ABC , o długości 9 cm, podzieliła podstawę AB na odcinki $|AD| = 4$ cm i $|DB| = 8$ cm. Czy bok BC ma więcej niż 17 cm długości? Odpowiedź uzasadnij.
- 9 W trójkącie ABC kąt ABC ma 30° . Oblicz miarę kąta, który wysokość CD tworzy z przedłużeniem boku BC trójkąta ABC .
- 10 Narysuj trójkąty: ostrokątny, prostokątny i rozwartokątny, o takiej samej wysokości.

Wyzwanie

Wykaż, że w dowolnym trójkącie suma miar kątów zewnętrznych wynosi 720° .

Sprawdź się!

- 1 Znajdź miary kątów zewnętrznych x i y trójkąta na rysunku obok.
- 2 Kąt zewnętrzny, przyległy do kąta przy podstawie trójkąta równoramiennego, ma miarę 140° . Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Największy z kątów tego trójkąta ma miarę
A. 90° B. 100° C. 110° D. 130°
- 3 Oblicz miary kątów, jakie tworzą dwie wysokości trójkąta równobocznego.
- 4 Wysokość CD w trójkącie ABC , o długości 9 cm, podzieliła podstawę AB na odcinki $|AD| = 4$ cm i $|DB| = 8$ cm. Czy bok AC ma mniej niż 13 cm długości? Odpowiedź uzasadnij.
- 5 W trójkącie KLM dane są: $|\sphericalangle LKM| = 90^\circ$, $|\sphericalangle KML| = 72^\circ$. W tym trójkącie poprowadzono wysokość KN . Oblicz miarę kąta LKN .



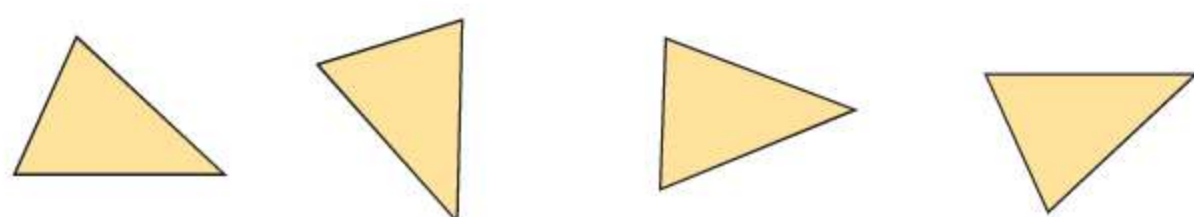
7. Przystawanie trójkątów

Krawcowa przygotowująca materiał na ubranie przykładła formy do materiału i wycina kawałki materiału o takich kształtach jak formy. Jeśli przyłoży formy do materiału złożonego w kilka warstw, może wykroić od razu kilka jednakowych sztuk.

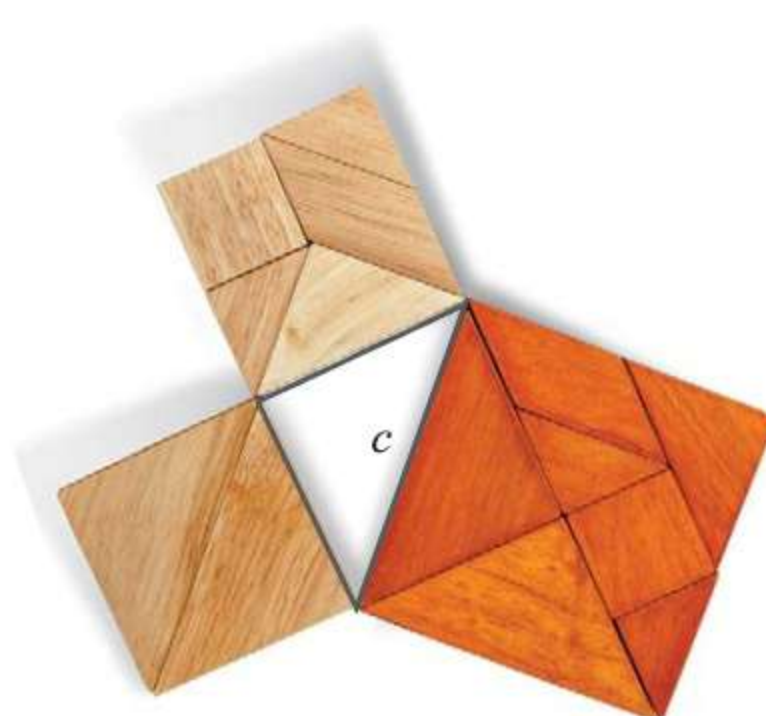
Podobnie możemy postąpić z kartką papieru – ze złożonej na czworo możemy wyciąć na przykład trójkąt.



Otrzymamy cztery trójkąty, jak na rysunku poniżej.



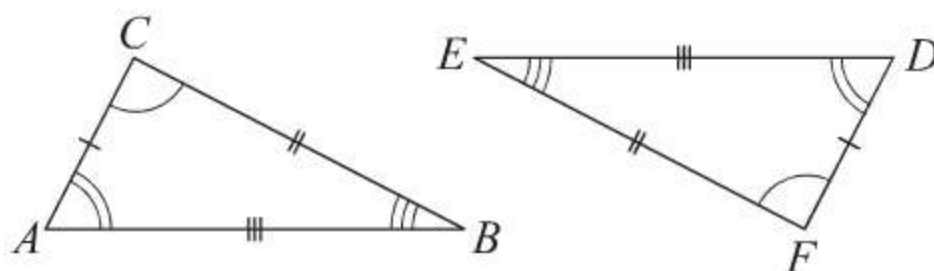
Te trójkąty po nałożeniu na siebie wzajemnie się pokrywają. W analogiczny sposób możemy otrzymać inne figury pokrywające się. O takich figurach mówimy, że są to **figury przystające**.



- 1 Ile przystających trójkątów prostokątnych o przeciwprostokątnej c jest na ilustracji?
- 2 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Każde dwie proste są przystające.	P	F
Każde dwa odcinki są przystające.	P	F
Dwa prostokąty o jednakowych obwodach są przystające.	P	F
Każde dwa kąty proste są przystające.	P	F
Kąty wierzchołkowe są przystające.	P	F
Kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego są przystające.	P	F

Możemy powiedzieć, że dwa trójkąty są przystające, jeśli odpowiadające boki i kąty tych trójkątów są równe. Na poniższych rysunkach tak samo zaznaczono odpowiadające boki i kąty trójkątów przystających.

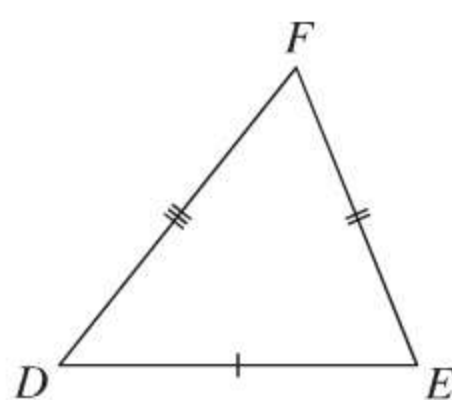
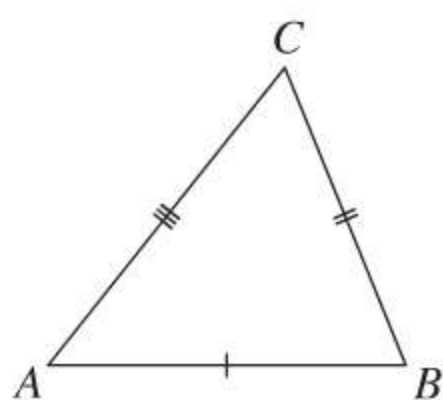


Zamiast pisać: trójkąt ABC jest przystający do trójkąta DEF , możemy napisać krótko: $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Aby wykazać, że dwa trójkąty są przystające, wystarczy pokazać, że jest spełniony jeden z trzech warunków, które nazywamy **cechami przystawiania trójkątów**.

Pierwsza cecha przystawiania trójkątów

Dwa trójkąty są przystające, jeśli ich odpowiadające boki są równe.



$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$,
gdyż:

$$\begin{aligned} |AB| &= |DE|, \\ |BC| &= |EF|, \\ |AC| &= |DF|. \end{aligned}$$

Cechę tę nazywamy (bok, bok, bok), a w skrócie bbb.

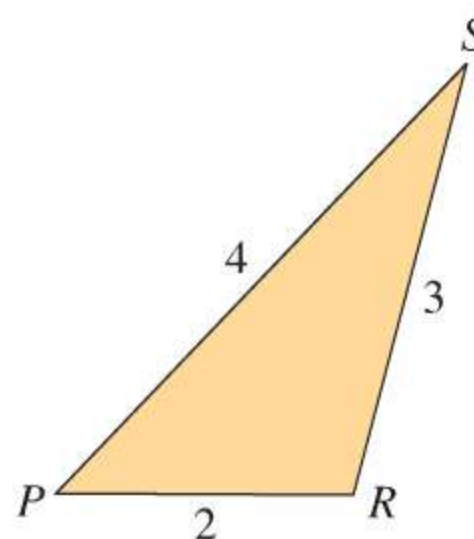
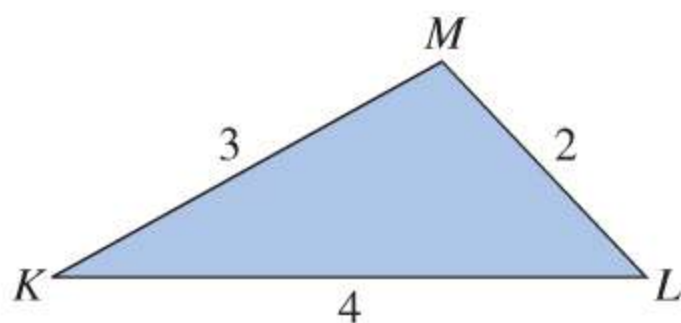


Cecha bbb

Jeżeli dwa trójkąty mają odpowiednie boki równej długości, to te trójkąty są przystające.

Przykład 1.

Uzasadnijmy, że $\triangle KLM \equiv \triangle PRS$.



$$|KL| = |PS| = 4, |KM| = |SR| = 3, |ML| = |PR| = 2$$

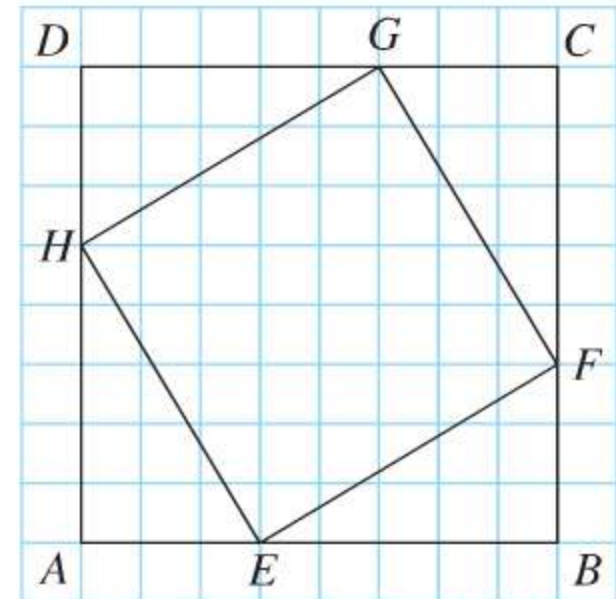
Odpowiadające boki tych trójkątów mają równe długości, więc zgodnie z cechą bbb trójkąty KLM i PRS są przystające.

- 3 Dane są długości boków dwóch trójkątów. Czy są one przystające? Odpowiedź uzasadnij.

a) 1,2 dm, 7 cm, 90 mm i 0,7 dm, 0,12 m, 9 cm

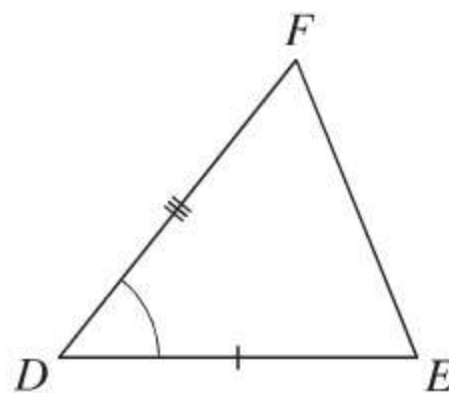
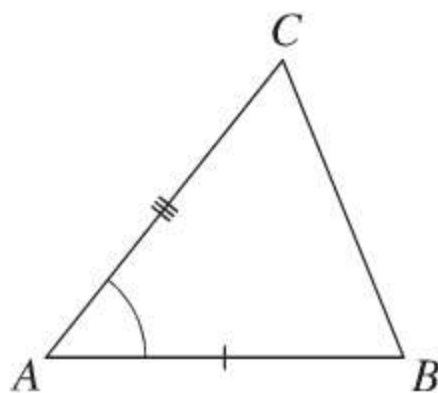
b) 6 cm, 0,6 dm, 0,06 m i 6 dm, 0,6 m, 60 cm

- 4 Na bokach kwadratu $ABCD$ tak zaznaczono punkty E , F , G , H , że czworokąt $EFGH$ też jest kwadratem. Uzasadnij, że trójkąty widoczne na rysunku są przystające.



Druga cecha przystawania trójkątów

Dwa trójkąty są przystające, jeśli dwa boki jednego trójkąta są równe odpowiadającym bokom drugiego trójkąta oraz kąty zawarte między tymi bokami są równe.



$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF,$$

gdyż:

$$|AB| = |DE|,$$

$$|AC| = |DF|,$$

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|.$$

Cechę tę nazywamy (bok, kąt, bok), a w skrócie bkb.

Cecha bkb

Jeżeli długości dwóch boków i miara kąta zawartego między tymi bokami w jednym trójkącie są równe długościom odpowiednich boków i mierze odpowiedniego kąta w drugim trójkącie, to te trójkąty są przystające.



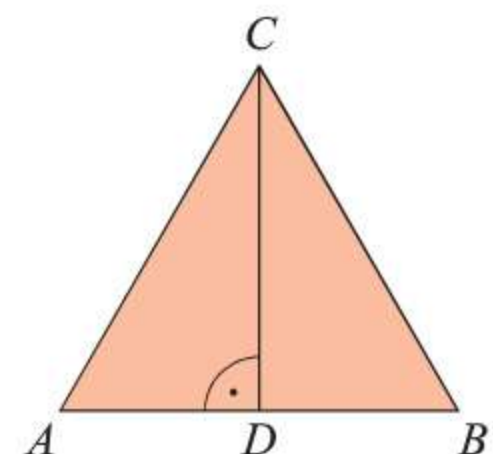
Przykład 2.

W trójkącie ABC wysokość CD dzieli bok AB na połowy. Wykażmy, że trójkąty ADC i BDC są przystające.

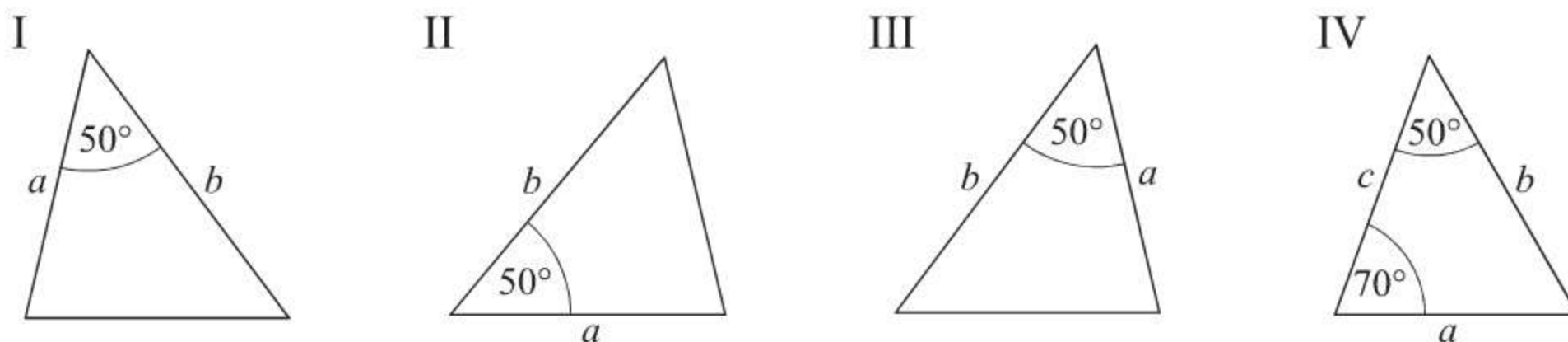
Trójkąty ADC i BDC są prostokątne, więc

$$|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle BDC| = 90^\circ.$$

Ponieważ punkt D jest środkiem odcinka AB , to $|AD| = |DB|$. Bok DC jest wspólny dla obu tych trójkątów, zatem na podstawie cechy bkb trójkąty ADC i BDC są przystające.



- 5 Które spośród trójkątów na rysunku są przystające? Odpowiedź uzasadnij.

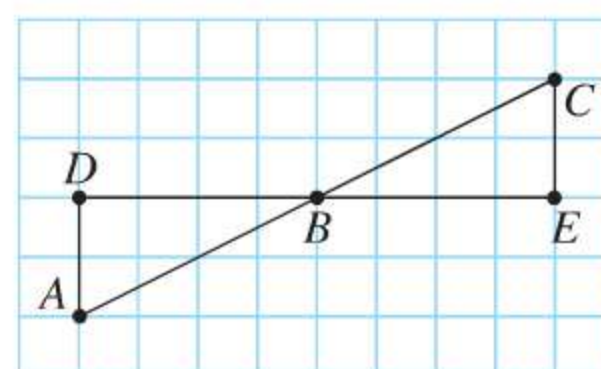


Przykład 3.

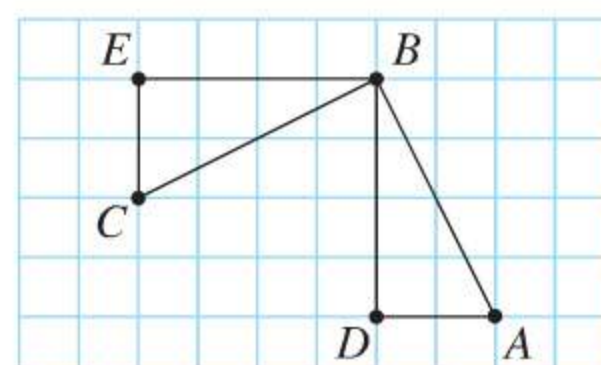
Wykażmy, że trójkąty ABD i BEC są przystające.

Boki BD i BE mają po cztery kratki, a boki AD i CE mają po dwie kratki, natomiast kąty ADB i BEC są proste, więc $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle BEC|$.

Zatem $\triangle ABD \equiv \triangle BEC$ (cecha bkb).

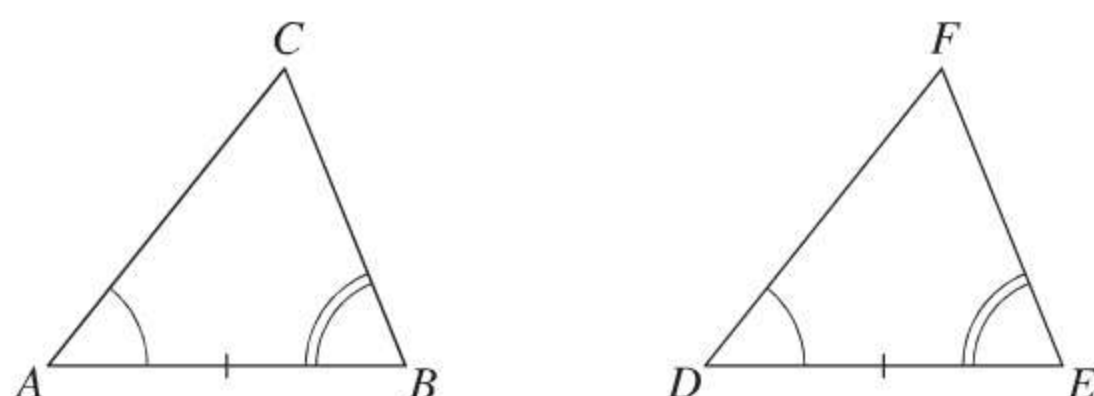


- 6 Uzasadnij, że przedstawiony na rysunku obok kąt ABC jest prosty.



Trzecia cecha przystawania trójkątów

Dwa trójkąty są przystające, jeśli bok jednego trójkąta jest równy odpowiadającemu mu bokowi drugiego trójkąta oraz gdy oba kąty pierwszego trójkąta przyległe do tego boku są równe odpowiadającym im kątom drugiego trójkąta.



$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$,
gdyż:

$$\begin{aligned} |AB| &= |DE|, \\ |\sphericalangle BAC| &= |\sphericalangle EDF|, \\ |\sphericalangle ABC| &= |\sphericalangle DEF|. \end{aligned}$$

Cechę tę nazywamy (kąt, bok, kąt), a w skrócie kbk.

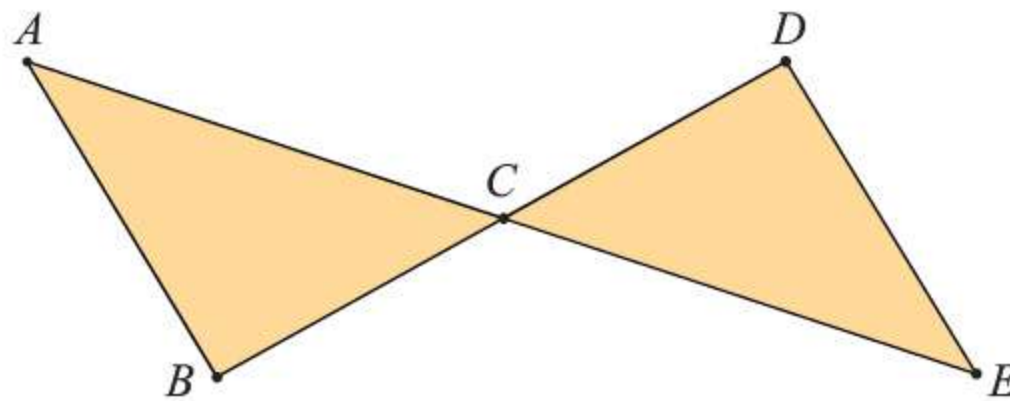


Cecha kbk

Jeżeli długość boku i miary dwóch przyległych do niego kątów w jednym trójkącie są równe długości odpowiedniego boku i miarom dwóch odpowiednich kątów drugiego trójkąta, to te trójkąty są przystające.

Przykład 4.

Na rysunku punkt C jest środkiem odcinka BD . Odcinki AB i DE są równoległe. Wykażmy, że trójkąty ABC i CDE są przystające.



Punkt C jest środkiem odcinka BD , czyli $|BC| = |CD|$. Kąty ACB i DCE to kąty wierzchołkowe, więc ich miary są równe: $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DCE|$. Odcinki AB i DE są równoległe, więc kąty naprzemianległe ABC i CDE mają równe miary: $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CDE|$. Wobec tego na podstawie cechy kbk trójkąty ABC i CDE są przystające.

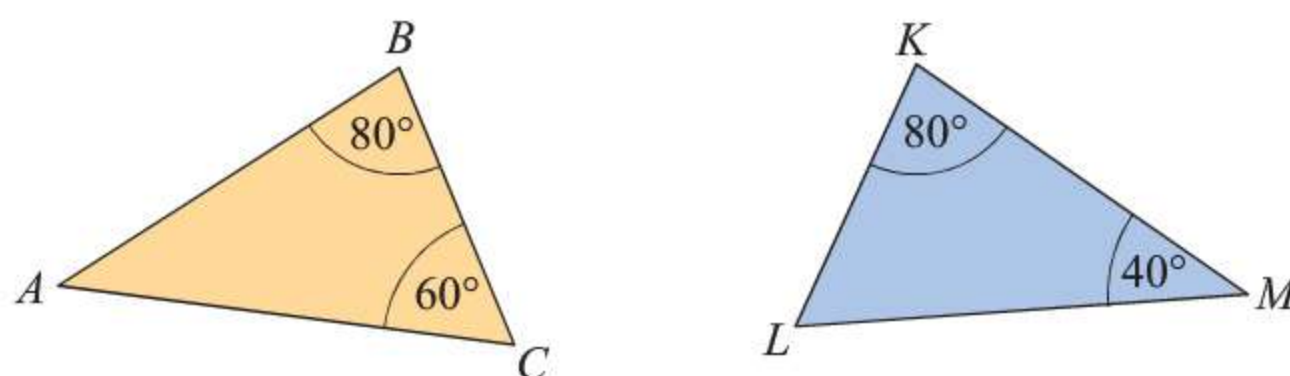
- 7** W trójkątach równoramiennych ABC i DEF podstawy AB i DE mają tę samą długość równą 16 cm, a miary kątów wynoszą odpowiednio $|\sphericalangle CAB| = 35^\circ$ i $|\sphericalangle DFE| = 110^\circ$. Czy trójkąty ABC i DEF są przystające? Odpowiedź uzasadnij.
- 8** Dany jest prostokąt o bokach a i b . Narysuj trójkąt przystający do jednego z trójkątów, na które przekątna podzieliła ten prostokąt.
- 9** Narysuj dowolny czworokąt $ABCD$. Podziel go na dwa trójkąty. Zbuduj czworokąt przystający do czworokąta $ABCD$. Jaka cechę przystawiania trójkątów wykorzystasz podczas rysowania tego czworokąta?
- 10** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Trójkąt, w którym jeden z boków ma 5 cm, a miary dwóch kątów wewnętrznych to 25° i 45° , jest przystający do trójkąta, w którym jeden z boków ma 0,05 m, a miary dwóch kątów wewnętrznych wynoszą 25° i 100° .	P	F
Trójkąt, w którym boki mają 2,5 dm, $\frac{1}{5}$ m, 300 mm, jest przystający do trójkąta o bokach 30 cm, 2 dm, $\frac{1}{4}$ m.	P	F
Trójkąt równoramienny, w którym kąt między ramionami ma miarę 30° , jest zawsze przystający do trójkąta równoramiennego, w którym kąt przy podstawie jest równy 75° .	P	F
Trójkąt równoboczny o boku $\frac{2}{5}$ dm jest przystający do trójkąta równobocznego o boku 0,00004 km.	P	F

- 11** Dwa trójkąty prostokątne są przystające. W jednym trójkącie kąt ostry ma miarę 37° . Czy w drugim trójkącie jeden z kątów ostrych ma miarę równą 53° ? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	$90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$.
			2.	$180^\circ - 53^\circ \neq 90^\circ$.
B.	Nie,		3.	$360^\circ - 53^\circ - 37^\circ \neq 90^\circ$.

- 12** Skorzystaj z rysunku i uzupełnij poniższe zdania.



Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Trójkąty przedstawione na rysunku są A / B.

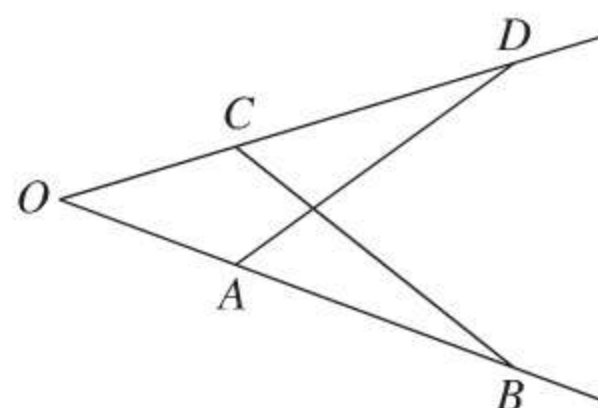
A. ostrokątne B. równoramienne

Aby trójkąty ABC i KLM były przystające, musi być spełniony warunek C / D.

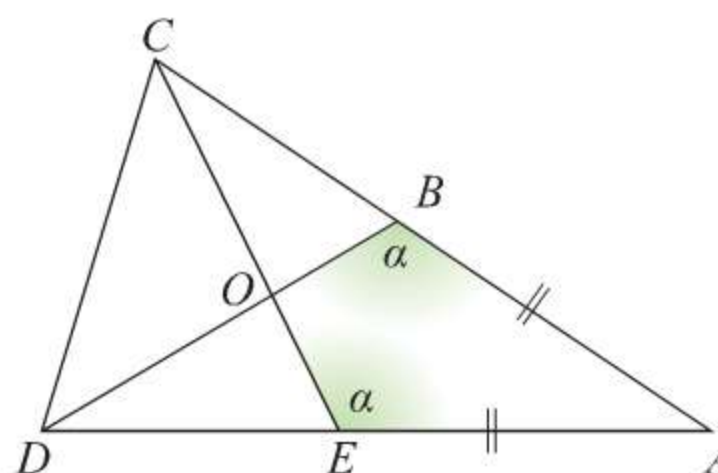
C. $|BC| = |KM|$ D. $|AB| = |KM|$

- 13** W trójkącie ABC łączymy wierzchołek A ze środkiem D boku BC i na przedłużeniu odcinka AD odkładamy odcinek DE tak, że $|DE| = |AD|$. Uzasadnij, że $|AC| = |BE|$.

- 14** Na jednym z ramion dowolnego kąta o wierzchołku O zaznaczono punkty A i B , a na drugim ramieniu punkty C i D tak, aby $|OA| = |OC|$, $|OB| = |OD|$. Uzasadnij, że trójkąty OAD i OCB są przystające.



- 15** Wskaż pary trójkątów przystających, przedstawionych na rysunku. Powołaj się na odpowiednie cechy przystawiania trójkątów.



Wyzwanie

W trójkącie równobocznym o boku a połączono środki boków. Uzasadnij, że wszystkie powstałe trójkąty są przystającymi trójkątami równobocznymi.

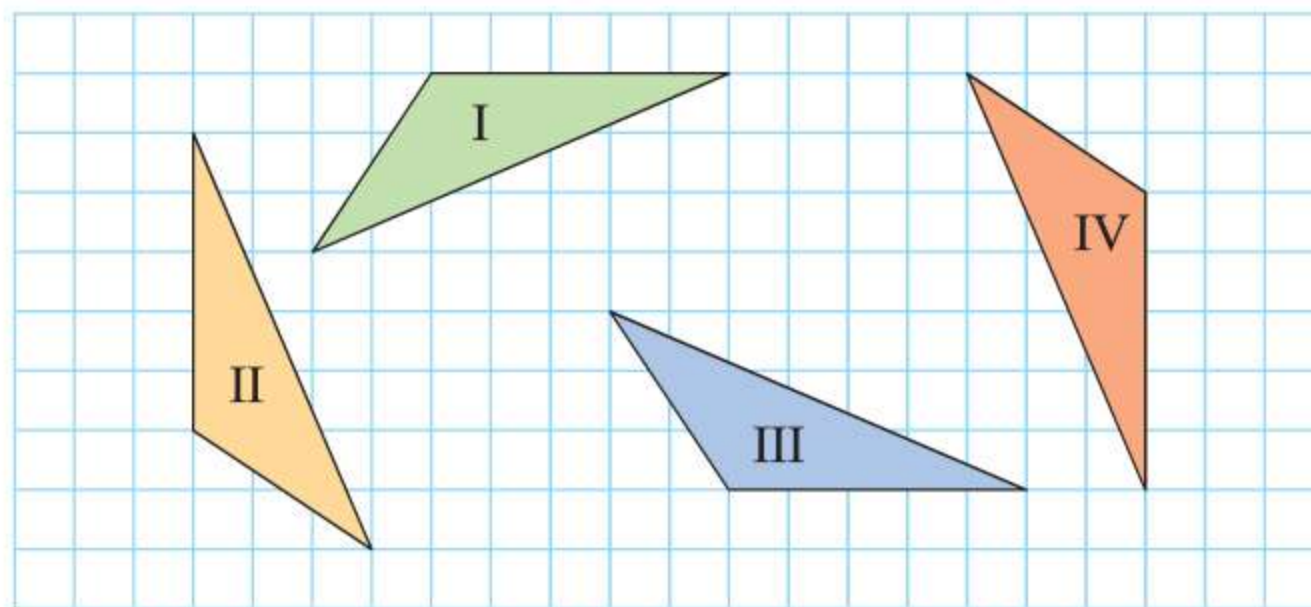
Sprawdź się!

- 1 Trójkąt ABC ma dwa boki o długościach: 11 cm, 19 cm, a kąt między nimi zawarty ma 46° . Dwa boki trójkąta KLM przystającego do trójkąta ABC są równe 19 cm i 11 cm. Dokończ zdanie. Wybierz poprawną odpowiedź spośród podanych.

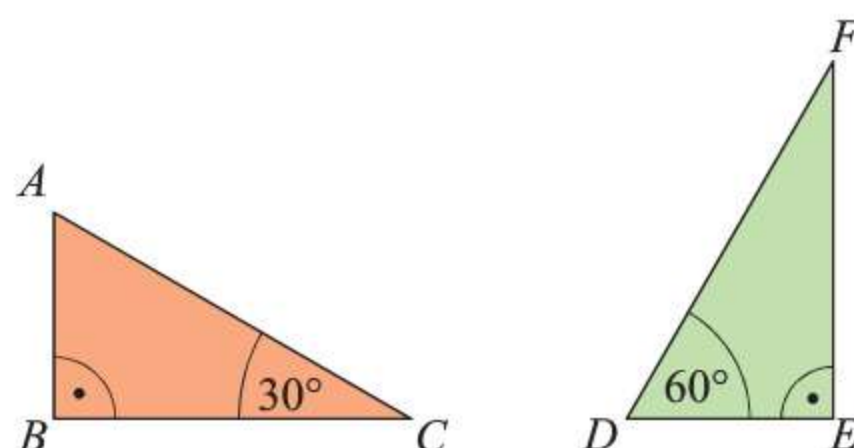
Kąt zawarty między danymi bokami trójkąta KLM

A. jest prosty. B. ma 46° . C. ma 44° . D. jest rozwarty.

- 2 Które spośród trójkątów na rysunku są przystające? Odpowiedź uzasadnij.



- 3 Uzasadnij, że trójkąty: jeden o bokach długości 0,3 dm, 5 cm, 0,04 m, a drugi o długości 0,5 dm, 0,03 m, 4 cm są przystające.
- 4 Jaki warunek musi być spełniony, aby trójkąty przedstawione na rysunku były przystające?



- 5 Dwa boki trójkąta AB mają długości 9 cm i 16 cm. Dwa boki trójkąta KLM mają długości 9 cm i 7 cm. Uzasadnij, że te trójkąty nie są przystające.

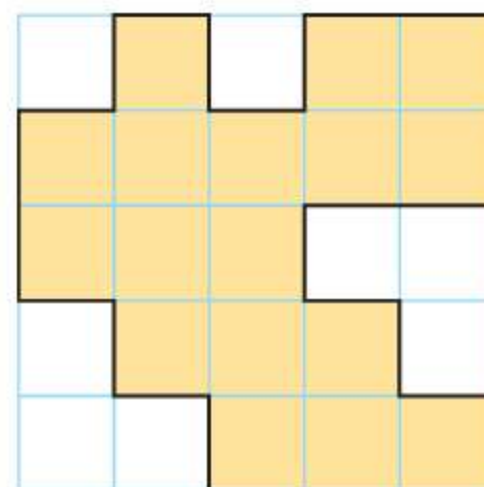
8. Pole figury, jednostki pola

Przypomnij sobie

- co to jest pole figury,
- jakie są jednostki pola,
- jakie są zależności między jednostkami pola.

Pole figury oznacza liczbę kwadratów jednostkowych, które mieszczą się w danej figurze.

Figura przedstawiona na rysunku ma pole równe 17 kwadratom jednostkowym – składa się z 17 kwadratów jednostkowych.



Jednostkami pola są kwadraty.

Do najczęściej używanych na co dzień jednostek pola należą kwadraty o wymiarach $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ [1 m^2] oraz $1\text{ km} \times 1\text{ km}$ [1 km^2]. W zadaniach korzystamy także z kwadratów o wymiarach $1\text{ mm} \times 1\text{ mm}$ [1 mm^2], $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$ [1 cm^2], $1\text{ dm} \times 1\text{ dm}$ [1 dm^2].

Pola powierzchni gruntów ornych, lasów, ogrodów, działek budowlanych itp. wyrażamy w arach [a], hektarach [ha] lub m^2 i km^2 .

1 a to pole kwadratu o wymiarach $10\text{ m} \times 10\text{ m}$.

1 ha to pole kwadratu o wymiarach $100\text{ m} \times 100\text{ m}$.



$$1\text{ cm}^2 = 100\text{ mm}^2$$



$$1\text{ dm}^2 = 100\text{ cm}^2$$

$$1\text{ m}^2 = 100\text{ dm}^2$$

$$1\text{ a} = 100\text{ m}^2$$

$$1\text{ ha} = 100\text{ a}$$

$$1\text{ km}^2 = 100\text{ ha}$$

$$1\text{ mm}^2 = 0,01\text{ cm}^2$$



$$1\text{ cm}^2 = 0,01\text{ dm}^2$$

$$1\text{ dm}^2 = 0,01\text{ m}^2$$

$$1\text{ m}^2 = 0,01\text{ a}$$

$$1\text{ a} = 0,01\text{ ha}$$

$$1\text{ ha} = 0,01\text{ km}^2$$

Przykład 1.

Wyrażmy:

a) 8 dm^2 w cm^2 , b) 1300 dm^2 w m^2 .

$$\text{a) } 8\text{ dm}^2 = 8 \cdot 1\text{ dm}^2 = 8 \cdot 100\text{ cm}^2 = 800\text{ cm}^2$$

$$\text{b) } 1300\text{ dm}^2 = 1300 \cdot 1\text{ dm}^2 = 1300 \cdot 0,01\text{ m}^2 = 13\text{ m}^2$$



1 Jakie liczby należy wpisać w miejsca oznaczone $\square$?

a) $1 \text{ dm}^2 = \square \text{ mm}^2$

$2 \text{ m}^2 = \square \text{ cm}^2$

$4 \text{ a} = \square \text{ dm}^2$

$25 \text{ ha} = \square \text{ m}^2$

$50 \text{ a} = \square \text{ m}^2$

$2 \text{ km}^2 = \square \text{ a}$

b) $0,3 \text{ dm}^2 = \square \text{ mm}^2$

$42 \text{ m}^2 = \square \text{ km}^2$

$5,1 \text{ cm}^2 = \square \text{ mm}^2$

$4891 \text{ km}^2 = \square \text{ ha}$

$3 \text{ a} = \square \text{ ha}$

$25 \text{ mm}^2 = \square \text{ m}^2$

2 Poletko doświadczalne ma powierzchnię równą 2500 m^2 . Ile arów ma to poletko?

3 Ile co najmniej metrów kwadratowych ma powierzchnia owczarni dla stada 350 owiec, jeżeli dla 5 owiec trzeba przeznaczyć minimum 5 m^2 powierzchni?

4 Powierzchnia Madrytu wynosi 607 km^2 , Warszawy $51\,724 \text{ ha}$, a Londynu 1572 mln m^2 . Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Powierzchnia Warszawy jest najmniejsza, a powierzchnia Londynu – największa.	P	F
Powierzchnia Madrytu po zaokrągleniu do 100 km^2 stanowi około 38% powierzchni Londynu.	P	F

5 Przygotowywano ofertę sprzedaży gruntów. Uporządkuj listę ofert według wielkości gruntów, od powierzchni najmniejszej do największej.

1,24 ha 0,45 km^2 13,5 ha 535 a 0,58 km^2 900 m^2

6 Na działce o powierzchni 12 arów 80% obszaru zajmuje ogród, $\frac{1}{40}$ – chodnik, a resztę – dom. Ile metrów kwadratowych zajmuje dom?

7 Pan Stanisław prowadzi gospodarstwo agroturystyczne, na które składają się siedlisko, las i łąki. Siedlisko zajmuje powierzchnię 15 a, las 11 ha, a łąki $80\,000 \text{ m}^2$. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Łąki zajmują o A / B więcej niż siedlisko.

A. 785 a

B. 815 a

Łączna powierzchnia gospodarstwa wynosi C / D.

C. 19,15 ha

D. 1985 a



8 Ile centymetrów kwadratowych ma działka budowlana o wymiarach $300 \text{ m} \times 60 \text{ m}$ na planie w skali 1 : 10 000?

9 Ile arów ma działka, jeżeli na planie w skali 1 : 1000 jej wymiary to $4 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$?

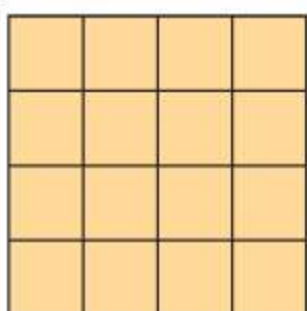
Wyzwanie

Ile kilometrów kwadratowych ma dorzecze rzeki, jeśli na mapie w skali $1 : 5\,000\,000$ jego powierzchnia wynosi $4,8\text{ cm}^2$?

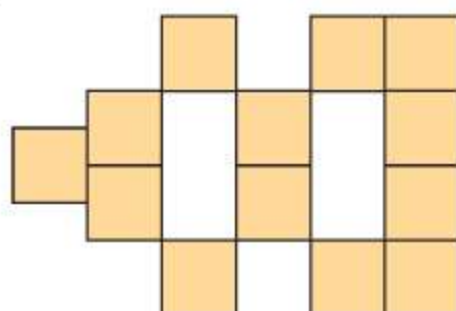
Sprawdź się!

- 1 Która figura ma największe pole?

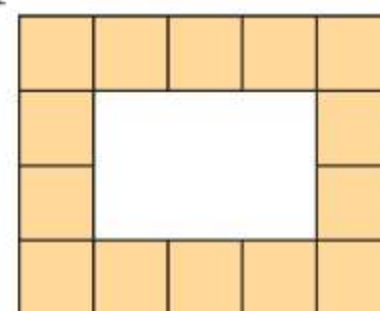
I



II



III



- 2 Jakie liczby należy wpisać w miejsce oznaczone  ?

a)  $\text{m}^2 = 800\text{ dm}^2$

b) $4,3\text{ dm}^2 =$  cm^2

c)  $\text{ha} = 1200\text{ a}$

d) $6,4\text{ km}^2 =$  ha

- 3 Który ze znaków: $=$ czy $\neq$ należy wpisać w miejsce oznaczone  ?

a) 543 dm^2  $0,543\text{ m}^2$

b) 7 a  $0,07\text{ ha}$

c) 65 cm^2  $0,0065\text{ a}$

d) 1111 dm^2  $0,01111\text{ ha}$

- 4 W województwie mazowieckim średnia wielkość powierzchni gruntów rolnych w gospodarstwie rolnym w 2019 roku wynosiła około $8,8\text{ ha}$. Ile działek o powierzchni 1000 m^2 można by wydzielić ze średniego gospodarstwa rolnego w tym województwie?

- 5 Podłogę łazienki o powierzchni $5,5\text{ m}^2$ wyłożono kwadratowymi płytkami o powierzchni 225 cm^2 . Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Na wyłożenie tej podłogi potrzeba

- A. 245 płytek.
B. 240 płytek.
C. 235 płytek.
D. 205 płytek.



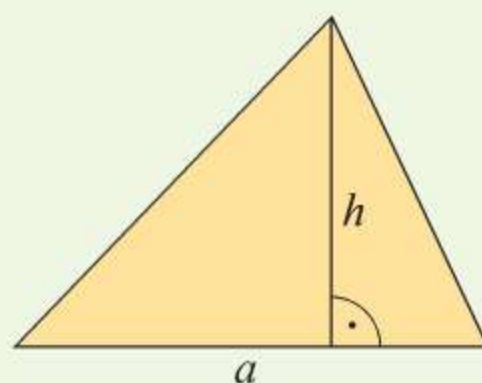
9. Pole trójkąta

Przypomnij sobie

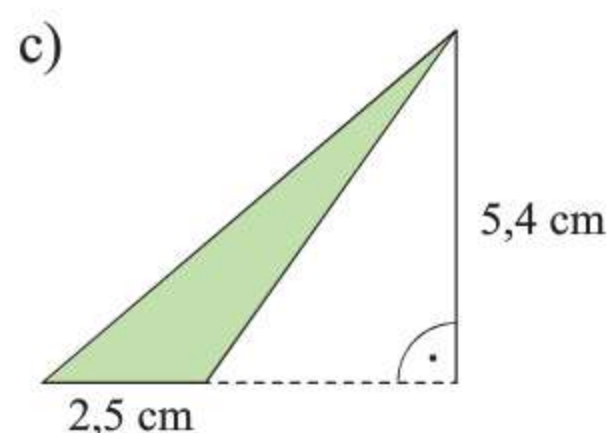
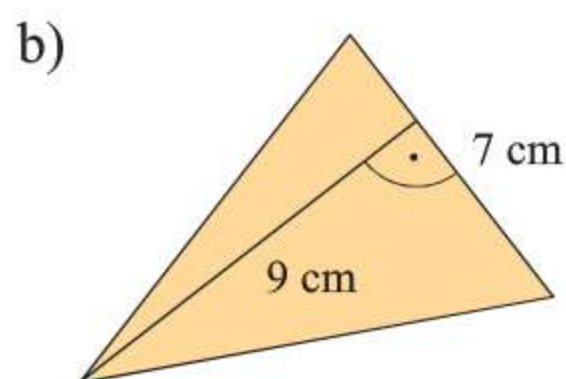
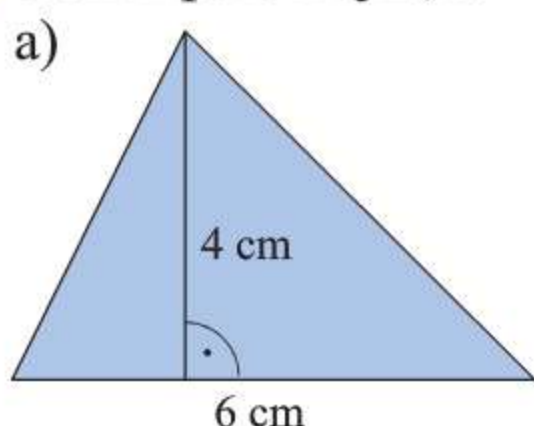
- jak obliczamy pole trójkąta.

Aby obliczyć pole trójkąta, musimy znać długość a jednego boku tego trójkąta oraz wysokość h opuszczoną na ten bok.

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$



1 Oblicz pole trójkąta.



Przykład 1.

W trójkącie równoramiennym ABC podstawa ma długość 6 cm, a ramię 5 cm. Wysokość CD jest równa 4 cm. Obliczmy pole i pozostałe wysokości tego trójkąta.

Dane: $|AB| = 6 \text{ cm}$
 $|AC| = |CB| = 5 \text{ cm}$
 $|CD| = 4 \text{ cm}$

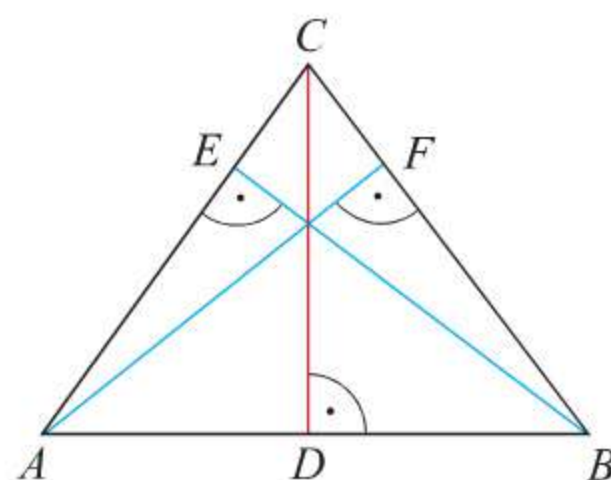
Szukane: $P_{\Delta ABC}$, $|AF|$ i $|BE|$

Znamy długość boku AB i wysokości CD na niego opuszczonej, możemy więc obliczyć pole trójkąta.

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD|$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12 [\text{cm}^2]$$

Znamy pole trójkąta i długość ramienia CB , możemy więc obliczyć wysokość AF opuszczoną na to ramię.



$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |CB| \cdot |AF|, \text{ stąd } 12 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot |AF|, 24 = 5 \cdot |AF|, |AF| = \frac{24}{5} = 4,8 \text{ [cm]}$$

$$|AF| = |BE|, \text{ zatem } |BE| = 4,8 \text{ [cm]}$$

ODPOWIEDŹ: Pole trójkąta wynosi 12 cm^2 , a pozostałe wysokości są równe $4,8 \text{ cm}$.

- 2** Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 12 cm , a ramię trójkąta jest równe 10 cm . Wysokość opuszczona na podstawę tego trójkąta jest równa 8 cm . Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Pole tego trójkąta wynosi 48 cm^2 .	P	F
Wysokość prostopadła do ramienia trójkąta ma długość $9,6 \text{ cm}$.	P	F

Przykład 2.

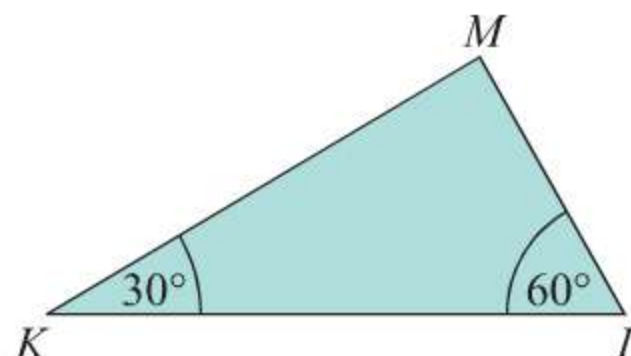
W trójkącie KLM kąty ostre mają miary 30° i 60° , a długości boków KM i ML , z dokładnością do 1 mm , wynoszą odpowiednio $10,7 \text{ cm}$ oraz $6,2 \text{ cm}$. Obliczmy pole trójkąta KLM .

Dane: $|KM| \approx 10,7 \text{ cm}$

$$|ML| \approx 6,2 \text{ cm}$$

$$|\sphericalangle LKM| = 30^\circ$$

$$|\sphericalangle MLK| = 60^\circ$$



Szukane: $P_{\triangle KLM}$

Trójkąt KLM jest prostokątny, gdyż:

$$|\sphericalangle KML| = 180^\circ - (|\sphericalangle LKM| + |\sphericalangle MLK|) = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ$$

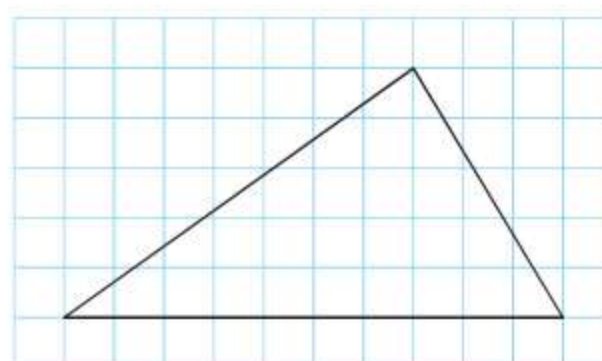
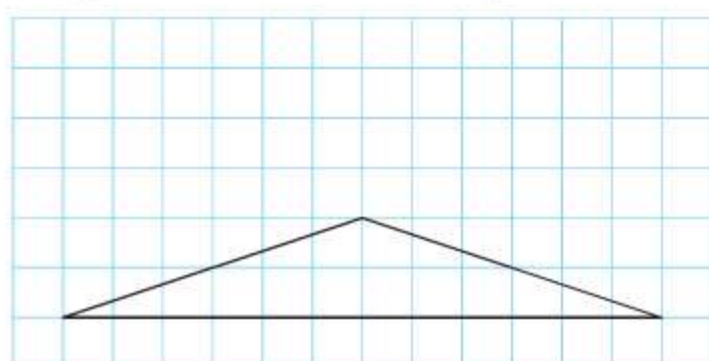
$$P_{\triangle KLM} = \frac{|KM| \cdot |ML|}{2} \approx \frac{10,7 \cdot 6,2}{2} = 33,17 \text{ [cm}^2\text{]}$$

ODPOWIEDŹ: Pole trójkąta KLM jest w przybliżeniu równe $33,17 \text{ cm}^2$.

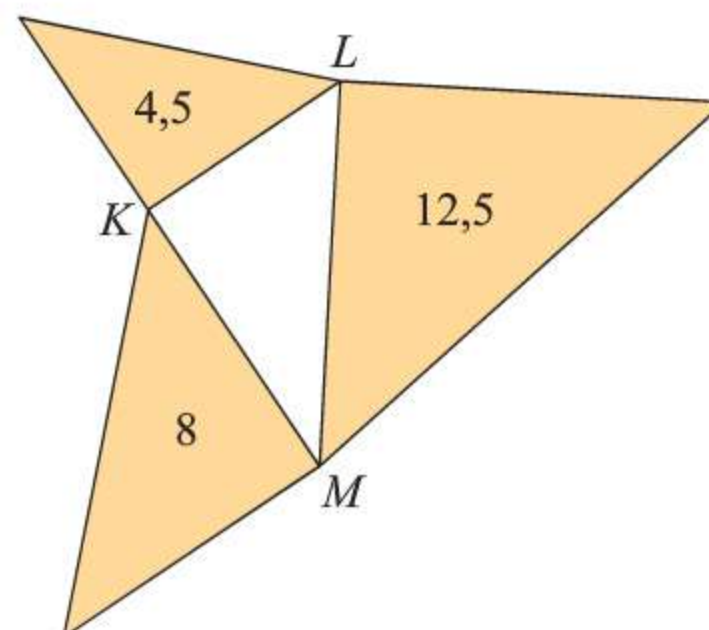
Zauważ, że gdy w przykładzie 2. bok KM przyjmiemy za podstawę trójkąta KLM , to bok ML jest wysokością tego trójkąta – i odwrotnie.

Pole trójkąta prostokątnego jest równe połowie iloczynu długości jego przyprostokątnych.

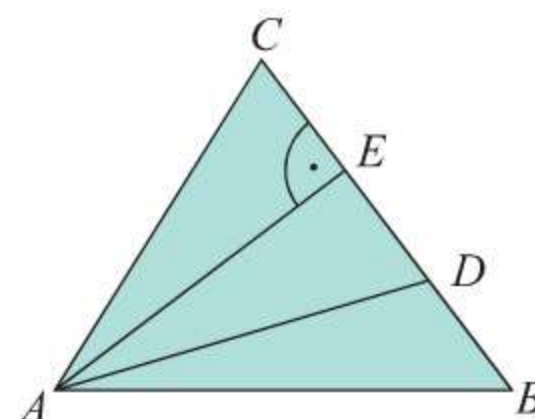
- 3 Trójkąt prostokątny ma boki długości: 5 cm, 12 cm i 13 cm. Oblicz jego pole.
- 4 Narysuj dowolny trójkąt rozwartokątny oraz jego trzy wysokości. Zmierz odpowiednie odcinki i oblicz pole tego trójkąta trzema sposobami. Czy twoje pomiary były dokładne?
- 5 Jaką częścią pola trójkąta ostrokątnego jest pole trójkąta rozwartokątnego? Odpowiedź uzasadnij.



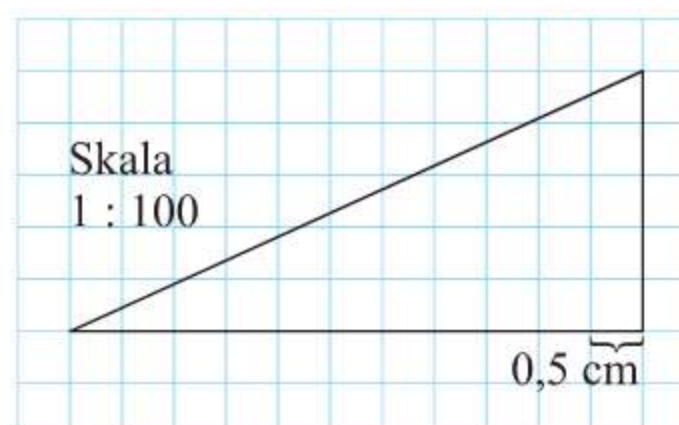
- 6 W trójkącie wysokość równa 24 cm stanowi $\frac{3}{4}$ długości boku, na który jest opuszczona. Oblicz pole tego trójkąta. Wynik podaj w dm^2 .
- 7 Dwa trójkąty: prostokątny o przyprostokątnych 7 cm i 8 cm oraz ostrokątny o boku długości 0,4 dm mają równe pola. Oblicz wysokość trójkąta ostrokątnego opuszczoną na dany bok.
- 8 Na bokach trójkąta prostokątnego KLM zbudowano trójkąty prostokątne równoramienne tak, jak na rysunku obok. We wnętrza tych trójkątów wpisano ich pola. Oblicz obwód i pole trójkąta KLM .
- 9 Trawnik na działce ma kształt trójkąta prostokątnego. Jeden bok trawnika ma długość 36 m, a bok do niego prostopadły jest o 40% dłuższy. Oblicz, ile arów zajmuje trawnik. Wynik podaj z dokładnością do 1 a.



- 10 Jeden bok trójkąta prostokątnego ma długość 30 cm, długość drugiego boku stanowi $\frac{3}{4}$ długości pierwszego, a trzeci bok jest $1\frac{1}{4}$ razy dłuższy niż pierwszy. Oblicz obwód i pole tego trójkąta.
- 11 Punkty D i E dzielą bok BC trójkąta ABC na trzy równe części. Porównaj pola trójkątów ABD , ADE i AEC . Uzasadnij swoją odpowiedź.



- 12 Wojtek wykonał rysunek żagla typu grot do swojej łódki. Oszacuj, ile metrów kwadratowych materiału potrzeba na uszycie tego żagla.



Wyzwanie

Czy potrafisz przeciąć dwoma cięciami dowolny trójkąt na trzy takie części, aby można było ułożyć z nich prostokąt?

Sprawdź się!

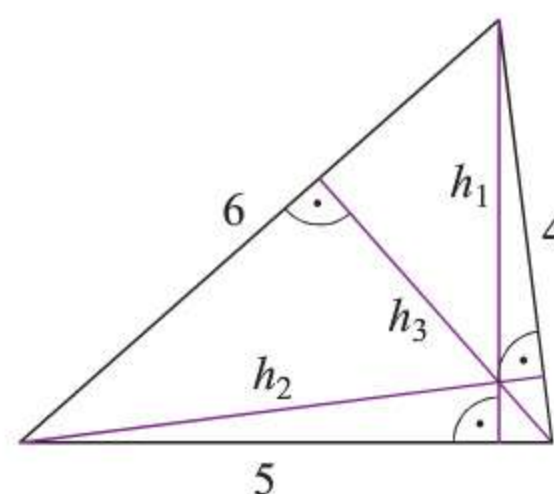
- 1 Za pomocą którego wzoru **nie można** obliczyć pola trójkąta przedstawionego na rysunku? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $P = \frac{4 \cdot h_2}{2}$

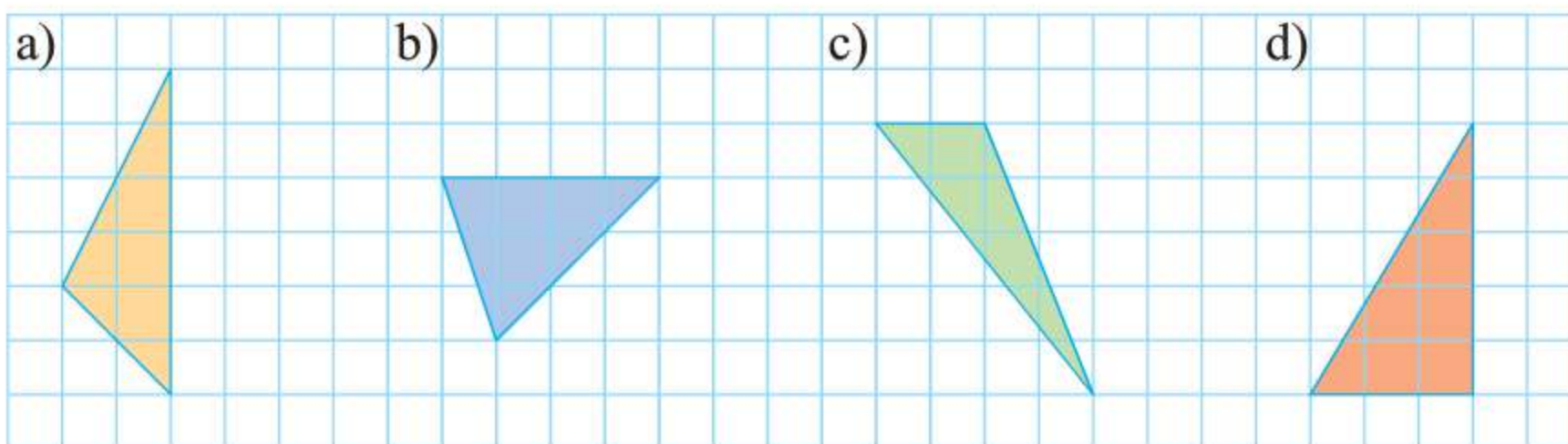
B. $P = \frac{6 \cdot h_3}{2}$

C. $P = \frac{5 \cdot h_1}{2}$

D. $P = \frac{4 \cdot h_3}{2}$



- 2 Oblicz pole trójkąta. Przyjmij, że długość boku kratki wynosi 1.



- 3 Kuba i Bartek przygotowali po jednym trójkącie prostokątnym na lekcję geometrii. Prostopadłe boki trójkąta Kuby mają długości 8 cm i 10,5 cm, a Bartka – 9 cm i 9,5 cm. Który chłopiec ma trójkąt o większym polu? Odpowiedź uzasadnij.
- 4 Obwód trójkąta równoramiennego wynosi 36 cm. Ramię ma długość 1,3 dm, a wysokość opuszczona na krótszy bok jest równa 12 cm. Czy pole tego trójkąta jest równe 60 cm^2 ? Odpowiedź uzasadnij.
- 5 Ściana fasadowa domku ma kształt trójkąta równoramiennego. Na dwukrotne pomalowanie tej ściany zużyto 1,6 l farby o wydajności $10 \text{ m}^2/\text{l}$. Podstawa tej ściany ma długość 4 m. Oblicz wysokość ściany.

10. Czworokąty, część 1

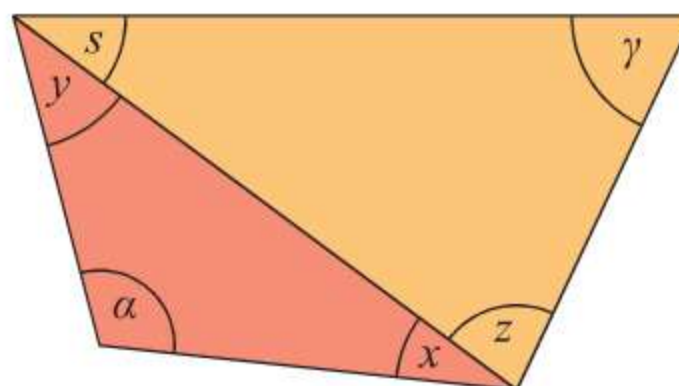
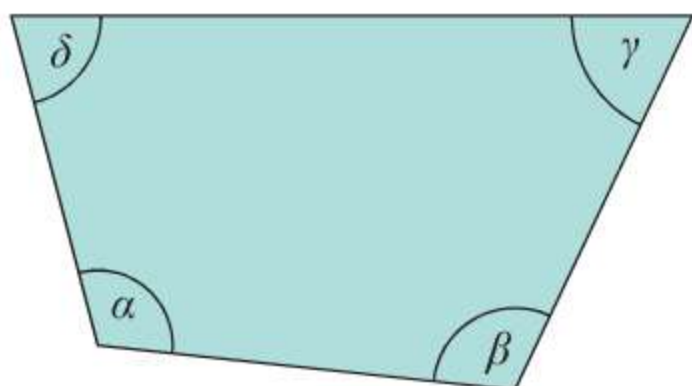
Przypomnij sobie

- jakie są rodzaje czworokątów,
- jakie własności mają: kwadrat, prostokąt, równoległobok i romb,
- jak oblicza się obwód wielokąta.

Przykład 1.

Wykażmy, że suma miar kątów wewnętrznych czworokąta jest równa 360° .

Każdy czworokąt można podzielić na dwa trójkąty.



Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180° , a więc suma miar kątów wewnętrznych czworokąta wynosi:

$$\begin{array}{r} \alpha + x + y = 180^\circ \\ + \quad \gamma + z + s = 180^\circ \\ \hline \alpha + \gamma + \underbrace{x + z}_{\beta} + \underbrace{y + s}_{\delta} = 360^\circ \\ \alpha + \gamma + \beta + \delta = 360^\circ \end{array}$$

Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta jest równa 360° .

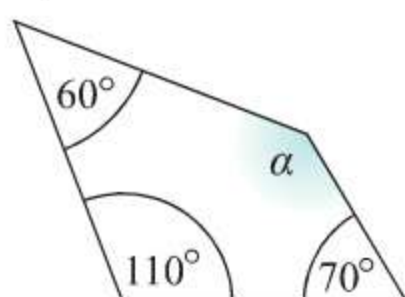


1 Czy istnieje czworokąt, którego kąty wewnętrzne mają podane miary?

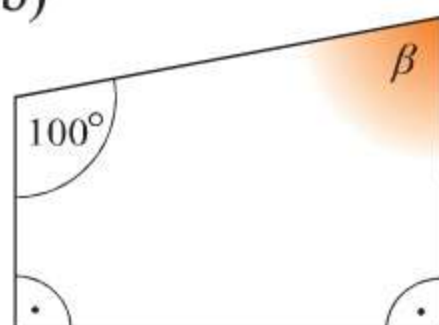
- a) $120^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 60^\circ$
- b) $90^\circ, 70^\circ, 105^\circ, 75^\circ$
- c) $144^\circ, 48^\circ, 126^\circ, 42^\circ$

2 Znajdź miarę nieznanego kąta czworokąta.

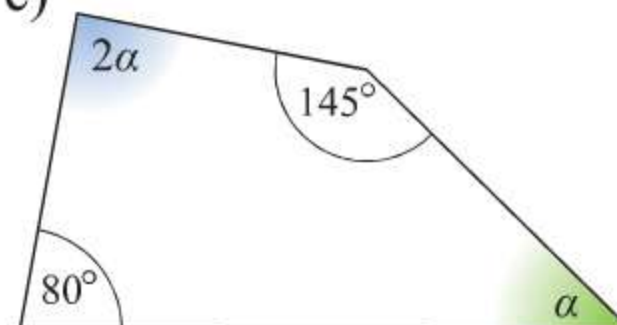
a)



b)



c)



- 3 W czworokącie dane są miary trzech kątów. Podaj miarę najmniejszego kąta w tym czworokącie.

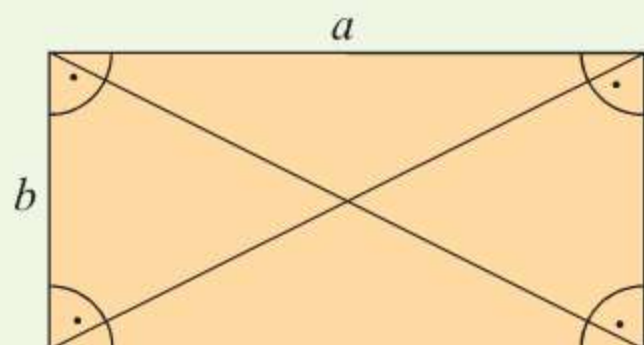
a) $118^\circ, 36^\circ, 124^\circ$

b) $74^\circ, 215^\circ, 58^\circ$

c) $90^\circ, 196^\circ, 42^\circ$

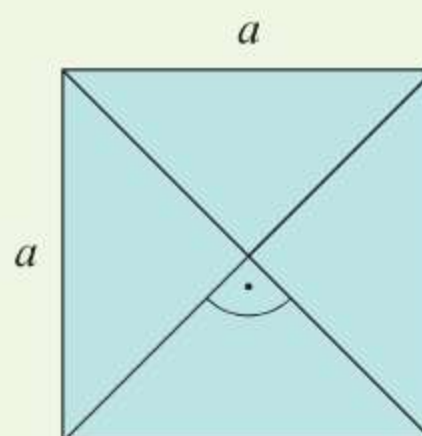


Prostokąt



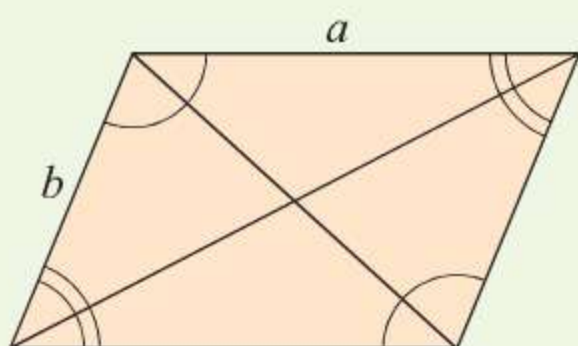
- Boki przeciwległe są równoległe i równej długości.
- Wszystkie kąty wewnętrzne są proste.
- Przekątne są równej długości i dzielą się na połowy.
- $L = 2 \cdot a + 2 \cdot b$, gdzie L oznacza obwód.

Kwadrat



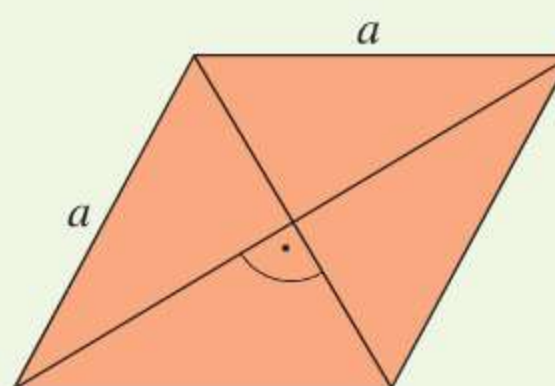
- Jest to prostokąt, którego boki są równej długości.
- Przekątne są prostopadłe.
- Przekątne dzielą kąty wewnętrzne na połowy.
- $L = 4 \cdot a$

Równoległobok



- Boki przeciwległe są równoległe i równej długości.
- Kąty przeciwległe mają równe miary.
- Suma miar dwóch kolejnych kątów jest równa 180° .
- Przekątne dzielą się na połowy.
- $L = 2 \cdot a + 2 \cdot b$

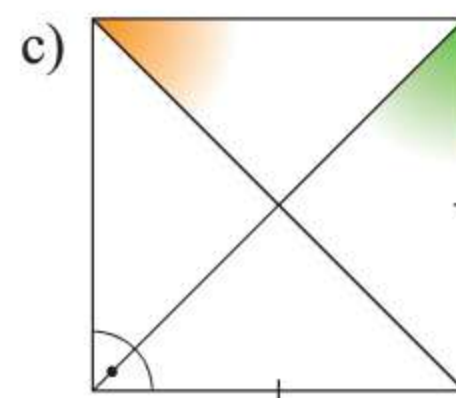
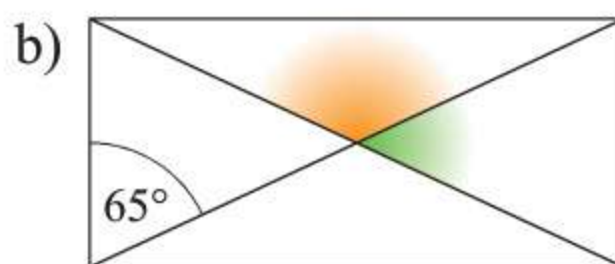
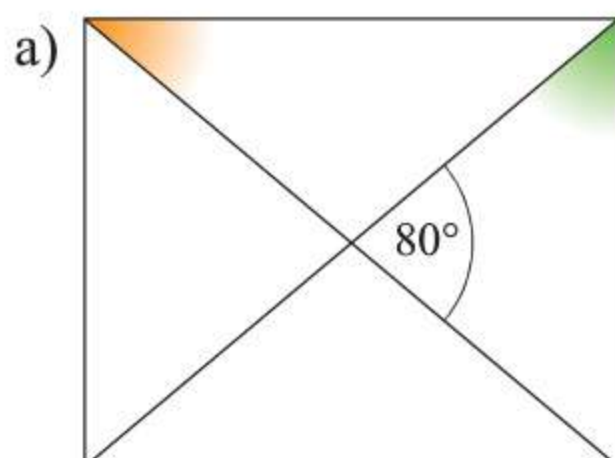
Romb



- Jest to równoległobok, którego boki są równej długości.
- Przekątne są prostopadłe.
- Przekątne dzielą się na połowy.
- Przekątne dzielą kąty wewnętrzne na połowy.
- $L = 4 \cdot a$



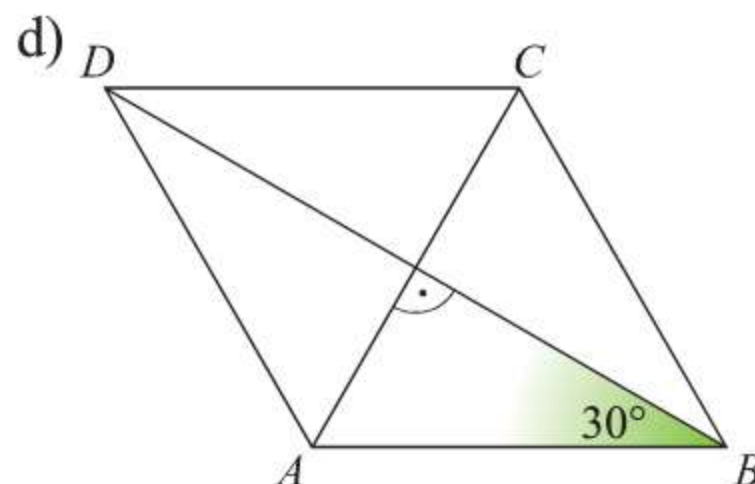
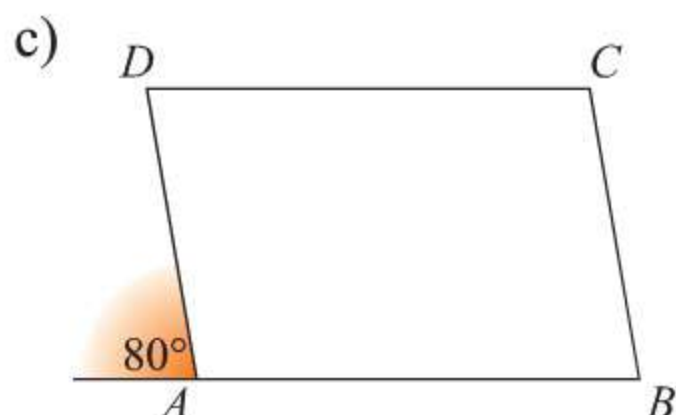
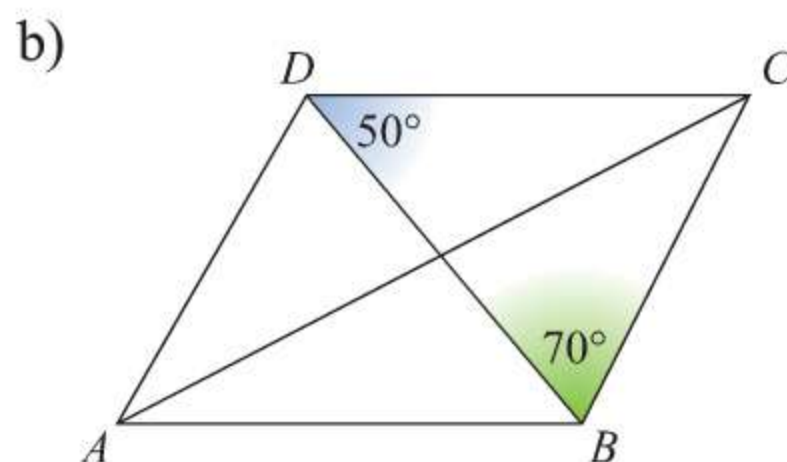
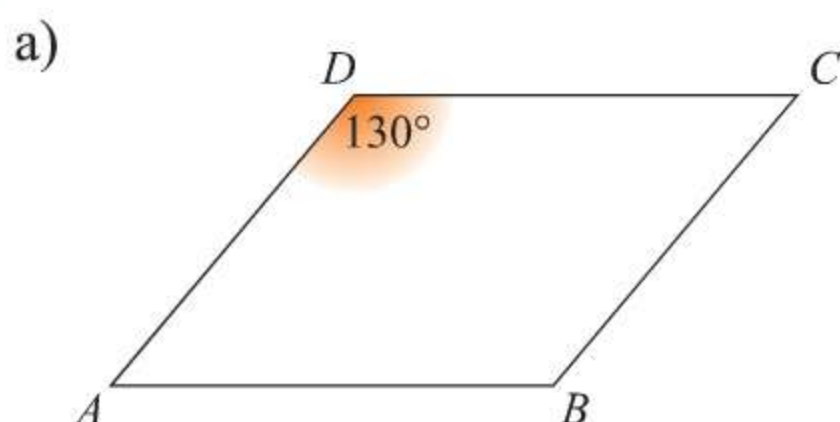
- 4 Znajdź miarę kątów zaznaczonych na rysunku.



- 5 Dywan w kształcie prostokąta ma jeden bok długości 1,7 m, a drugi o 50 cm krótszy. Ozdobne wykończenie 1 m brzegu dywanu kosztuje 8 zł. Ile złotych należy zapłacić za obszycie wszystkich brzegów dywanu?

- 6 Tomek wykonał szkielet latawca z dwóch jednakowych listewek. Połączył je prostopadle w połowach ich długości. Szkielet okleił papierem. Jaki kształt ma ten latawiec? Odpowiedź uzasadnij.

- 7 Oblicz miary kątów wewnętrznych równoległoboku $ABCD$.



- 8 Obwód rombu jest równy 10 cm, a jeden z jego kątów ma 40° . Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Długość boku rombu wynosi 2,5 cm.	P	F
Pozostałe kąty rombu mają miary: 140° , 40° , 140° .	P	F

- 9 Bok równoległoboku o długości 16 cm stanowi $\frac{2}{7}$ obwodu tego równoległoboku. Oblicz sumę długości dwóch kolejnych boków tego równoległoboku.

- 10 Przekątna rombu, której długość jest równa 16 cm, dzieli go na dwa trójkąty przystające. Suma ich obwodów wynosi 7,2 dm. Oblicz długość boku tego rombu.

11 W pewnym czworokącie kąty przeciwległe są parami równe, a kąty przyległe do boku spełniają zależność: jeden jest dwa razy mniejszy od drugiego. Oblicz miary kątów wewnętrznych tego czworokąta.

12 Kąt ostry rombu jest pięć razy mniejszy od kąta rozwartego tego rombu. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Miara kąta ostrego rombu wynosi A / B.

A. 30° B. 50°

Miara kąta ostrego jest o C / D mniejsza od miary kąta rozwartego tego rombu.

C. 130° D. 120°

13 Uzasadnij, że:

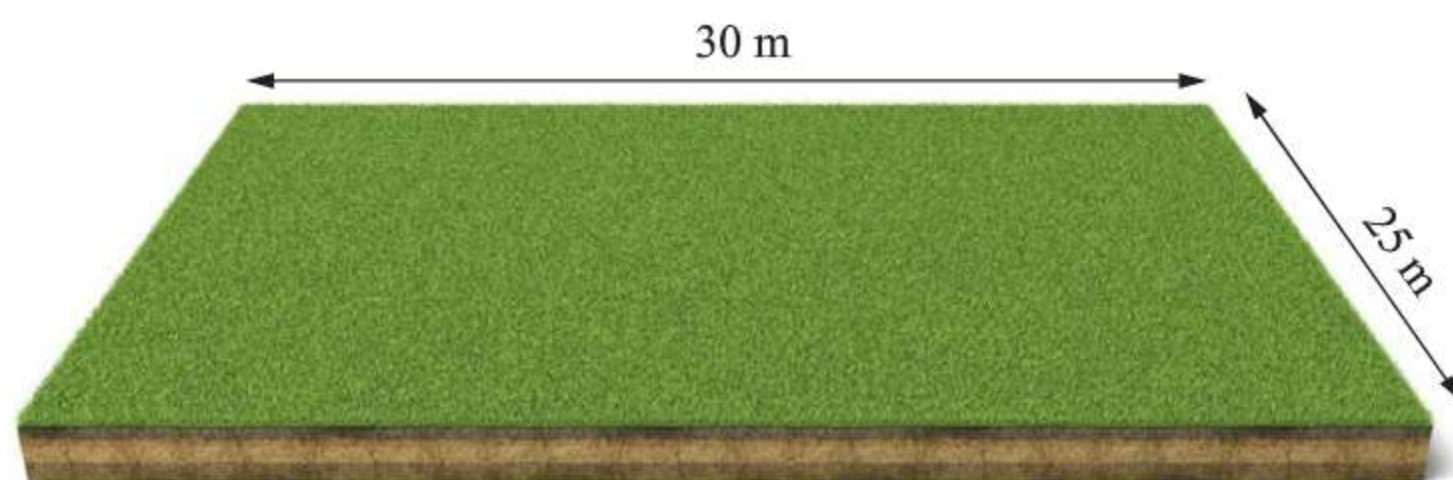
- przekątne prostokąta są równe,
- przekątne równoległoboku dzielą się na połowy.

Wyzwanie

Ile prostokątów o obwodzie 16 cm można narysować, jeśli wiadomo, że długości ich boków są wyrażone liczbami naturalnymi? Ile jest kwadratów wśród tych prostokątów?

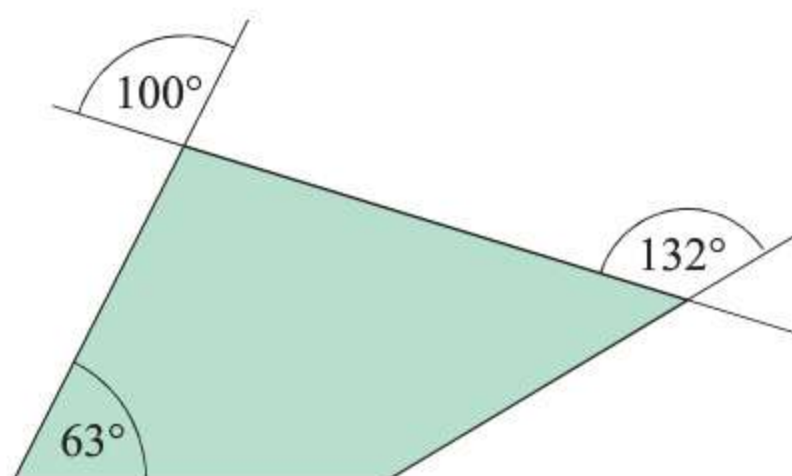
Sprawdź się!

- Ile metrów siatki potrzeba na ogrodzenie działki w kształcie prostokąta, jeżeli szerokość furtki jest równa 90 cm?

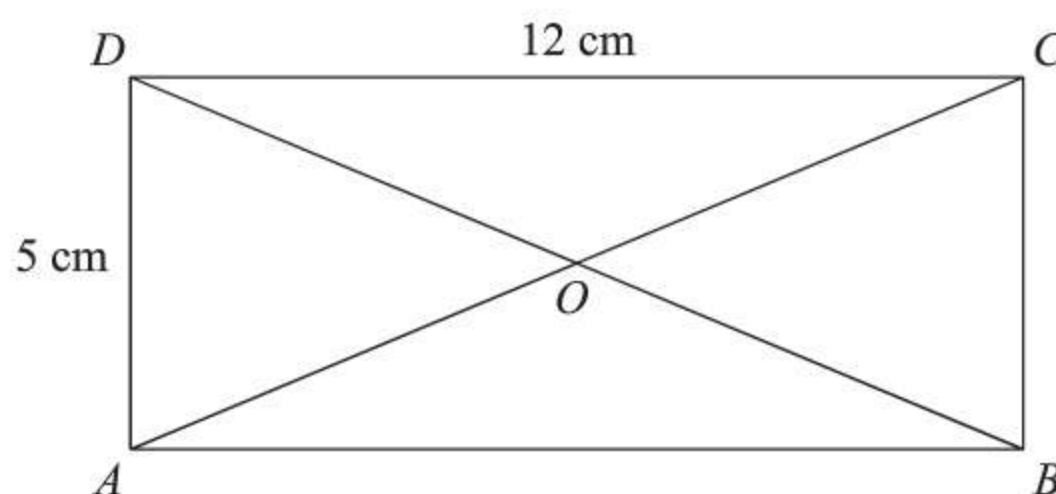


- Romb o boku 12 cm i równoległobok mają równe obwody. Jeden z boków równoległoboku jest o 40 mm dłuższy od drugiego. Oblicz długości boków tego równoległoboku.

- 3 Oblicz miarę największego kąta wewnętrznego czworokąta przedstawionego na rysunku.



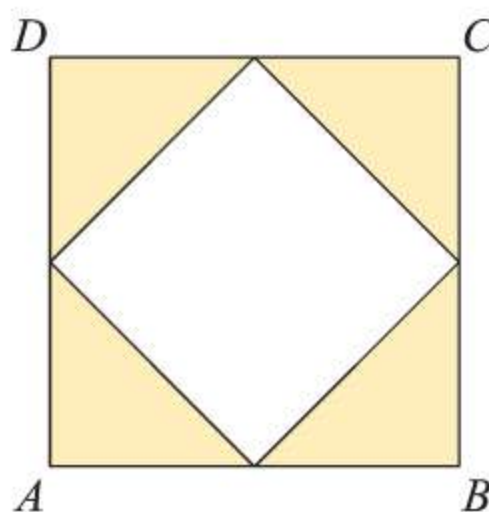
- 4 W prostokącie na rysunku poniżej przekątna BD ma 13 cm długości.



Czy obwód trójkąta DOC jest o 7 cm większy od obwodu trójkąta BOC ? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	przekątne prostokąta są równe.
			2.	przekątne prostokąta są równe i dzielą się na połowy.
B.	Nie,		3.	przekątne prostokąta dzielą się na połowy.

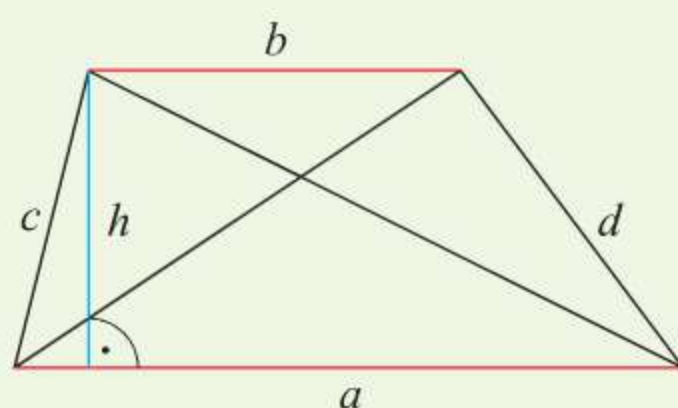
- 5 Połączono środki boków kwadratu $ABCD$, tak jak na rysunku. Uzasadnij, że powstały czworokąt jest kwadratem.



11. Czworokąty, część 2

Przypomnij sobie

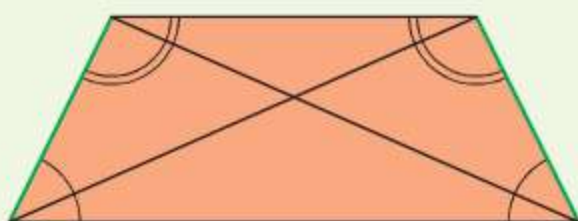
- jaki czworokąt nazywamy trapezem,
- jakie są rodzaje trapezów,
- co to jest wysokość trapezu.



Trapez

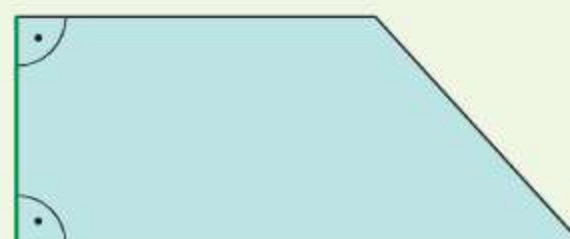
- Czworokąt, w którym co najmniej jedna para boków jest równoległa.
- Boki równoległe to podstawy, pozostałe boki to ramiona.
- Odległość podstaw to wysokość trapezu.
- $L = a + b + c + d$

Trapez równoramienny



- Ramiona są równej długości.
- Kąty przy tej samej podstawie mają równe miary.
- Przekątne są równej długości.

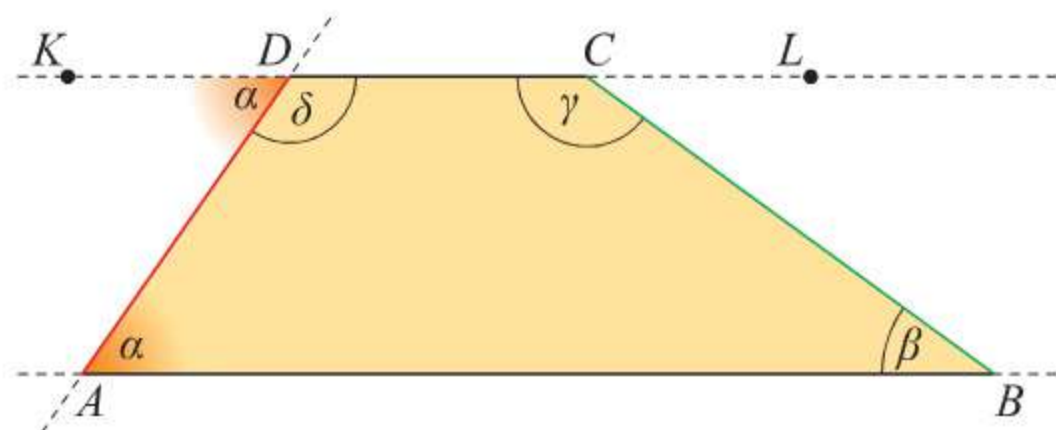
Trapez prostokątny



- Jedno ramię jest prostopadłe do podstaw.

Przykład 1.

Obliczmy sumę miar kątów leżących przy tym samym ramieniu trapezu.



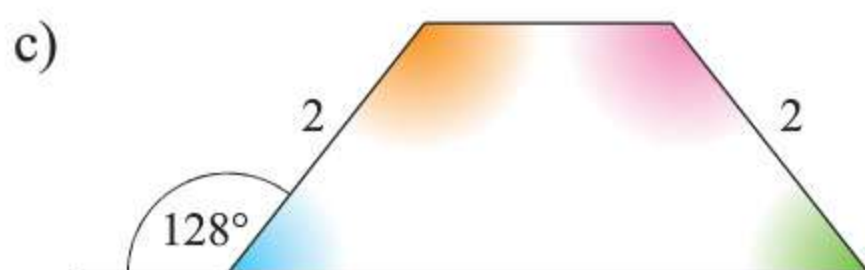
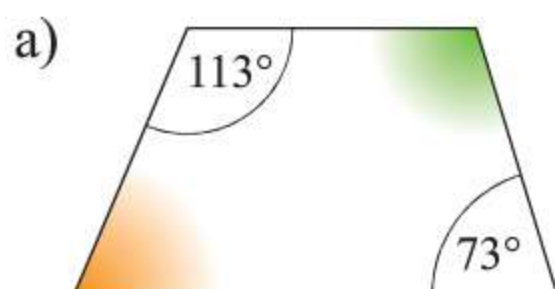
W tym celu narysujmy proste AB , CD i AD . Proste AB i CD są równoległe, więc jeśli przyjmiemy oznaczenia jak na rysunku, możemy zapisać:

$|\angle BAD| = |\angle KDA| = \alpha$ – gdyż są to kąty naprzemianległe. Kąty α i δ to kąty przyległe, więc ich suma wynosi 180° . Podobnie można wykazać, że $\beta + \gamma = 180^\circ$.

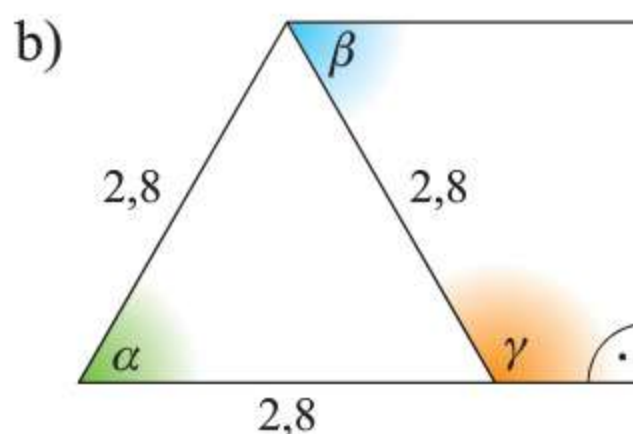
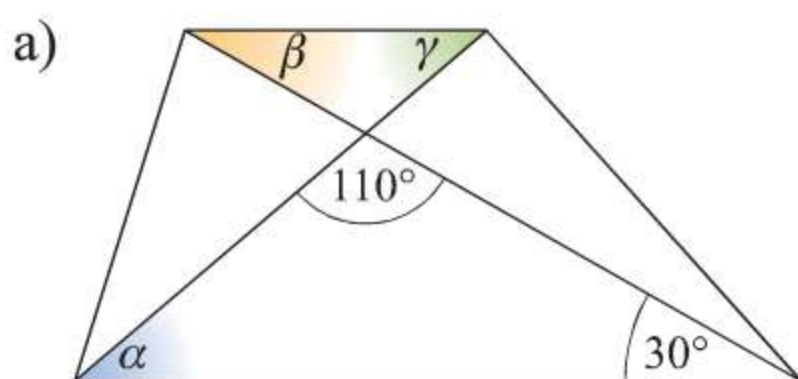
Suma miar kątów leżących przy tym samym ramieniu trapezu jest równa 180° .



1 Oblicz nieznane miary kątów trapezu.



2 Oblicz miary kątów α , β , γ w trapezie.

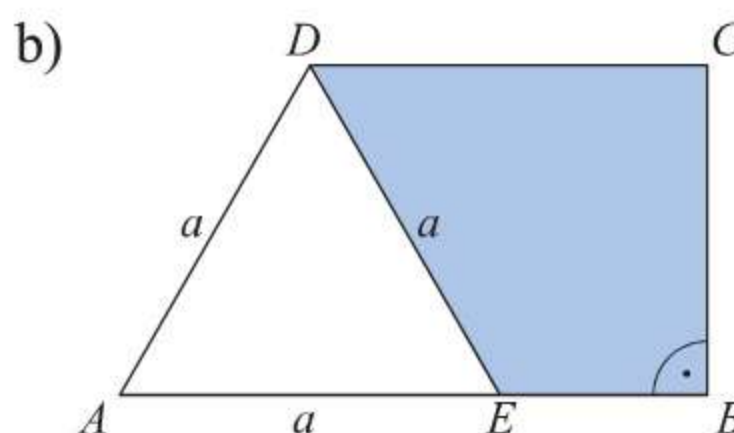
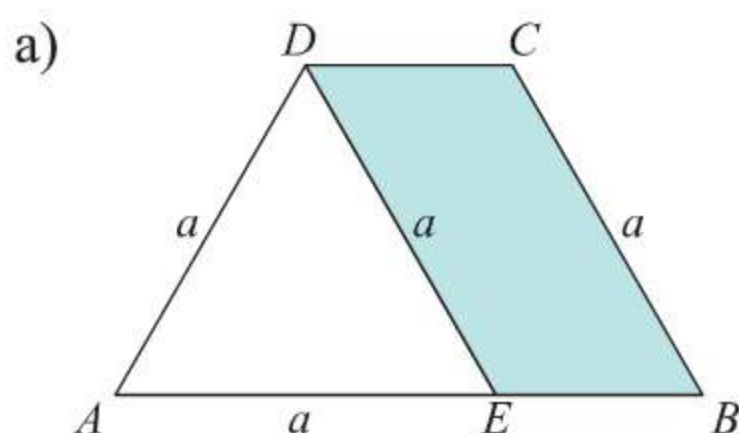


3 W trapezie równoramiennym kąt ostry jest równy 60° . Oblicz miary pozostałych kątów.

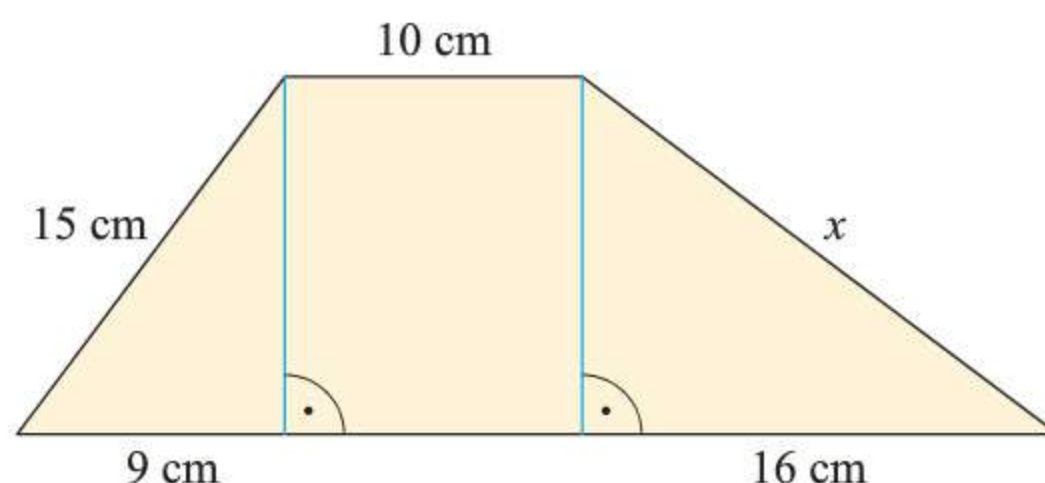
4 W trapezie prostokątnym kąt rozwarty jest dwa razy większy od kąta ostrego. Oblicz miary kątów tego trapezu.

5 W trapezie równoramiennym kąt ostry jest o 20° mniejszy od kąta rozwartego. Oblicz miary kątów tego trapezu.

6 Oblicz miary kątów trapezu $EBCD$.



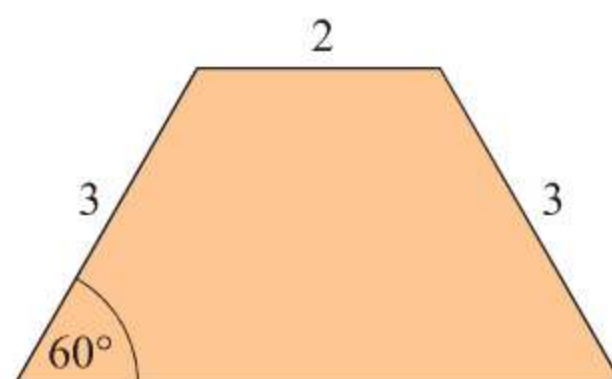
- 7 Obwód trapezu przedstawionego poniżej wynosi 80 cm. Znajdź długość x ramienia.



- 8 W trapezie równoramiennym o obwodzie 23,4 cm krótsza podstawa o długości 3 cm stanowi 25% długości dłuższej podstawy. Czy ramię trapezu jest równe 8,4 cm? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	suma długości podstaw jest równa 15 cm.
			2.	dłuższa podstawa ma 9 cm.
B.	Nie,		3.	$(23,4 - 15) : 2 = 4,2$.

- 9 Okno w domku letniskowym ma kształt trapezu prostokątnego. Narysuj to okno w skali 1 : 20, jeśli wiesz, że górna krawędź okna ma długość 70 cm, wysokość okna jest od niej o 30 cm dłuższa, a dolna krawędź okna stanowi 200% jego wysokości.
- 10 Wymiary trapezu przedstawionego na rysunku są podane w decymetrach. Uzasadnij, że obwód tego trapezu jest równy 13 dm.



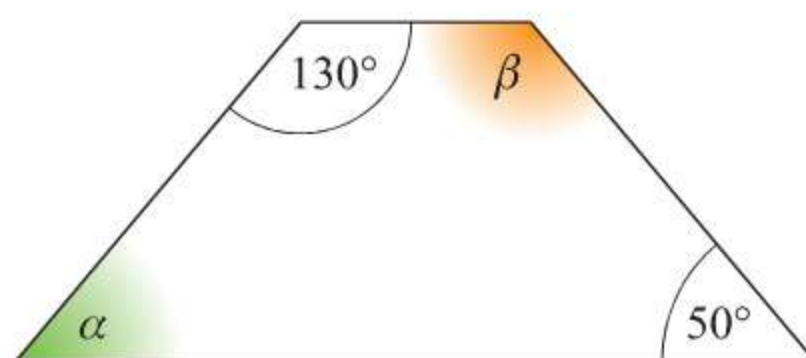
- 11 Taras przylegający do domku letniskowego ma kształt trapezu prostokątnego o podstawach 6 m i 4,2 m. Dłuższe ramię tego trapezu stanowi $\frac{5}{7}$ krótszej podstawy, a obwód trapezu jest równy 15,6 m. Wzdłuż ramion tarasu właściciele chcą zrobić barierki. Jaką długość będzie miała krótsza barierka?
- 12 W trapezie prostokątnym ramię prostopadłe do podstaw ma długość 4 cm i jest równe górnej podstawie. Dolna podstawa jest o 3 cm dłuższa od górnej podstawy i o 2 cm dłuższa od drugiego ramienia trapezu. Oblicz obwód trapezu.
- 13 Uzasadnij, że przekątne trapezu równoramiennego są równe.

Wyzwanie

W trapezie prostokątnym, w którym kąt ostry ma miarę 45° , krótsza podstawa oraz wysokość są równe. Podziel ten trapez na cztery przystające trapezy.

Sprawdź się!

- 1 Trapez przedstawiony na rysunku jest równoramienny.



Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

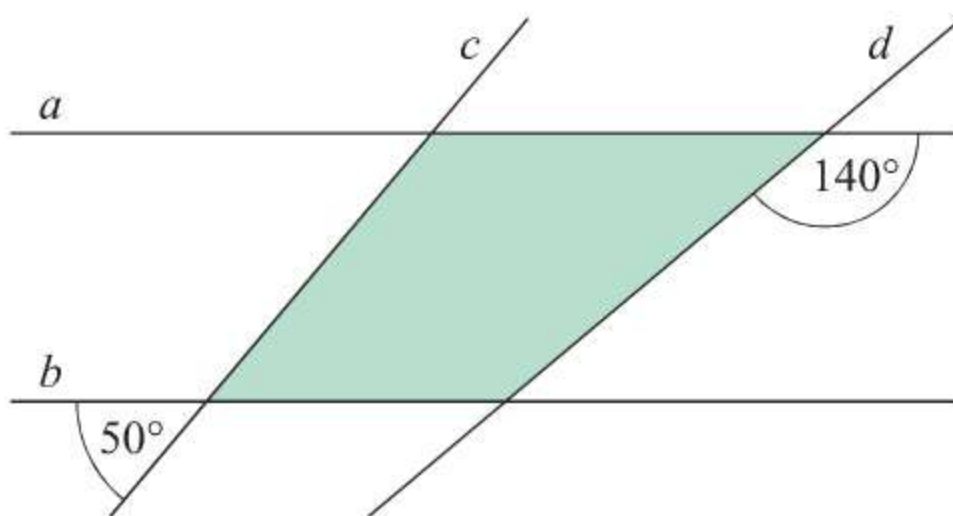
Miara kąta α wynosi A / B.

A. 30° B. 50°

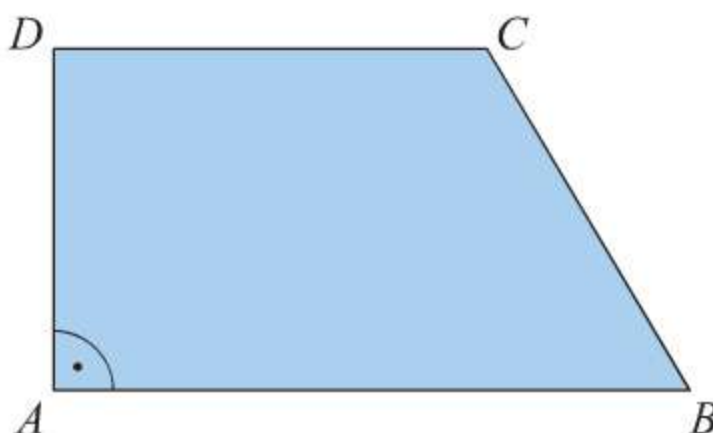
Miara kąta β jest o C / D większa od miary kąta α .

C. 80° D. 100°

- 2 Obwód trapezu równoramiennego wynosi 320 cm. Ramię ma długość 8 dm, a jedna podstawa jest równa 6 dm. Jaką długość ma druga podstawa tego trapezu?
- 3 Trapez zbudowany jest z kwadratu o boku 4 cm i trójkąta prostokątnego, którego dwa boki mają długości 3 cm i 5 cm. Oblicz obwód tego trapezu.
- 4 Przecinające się proste a , b , c , d utworzyły trapez. Oblicz miary kątów wewnętrznych tego trapezu.



- 5 W trapezie $ABCD$ długość ramienia BC jest dwa razy większa od różnicy długości podstaw trapezu. Jaką miarę ma kąt ostry tego trapezu?



12. Pola czworokątów

Przypomnij sobie

- jak obliczamy pola kwadratu i prostokąta,
- jak obliczamy pola równoległoboku i rombu,
- jak obliczamy pole trapezu.

W tabeli przedstawiono wzory na obliczanie pól czworokątów.

Prostokąt

$$P = a \cdot b$$

Kwadrat

$$P = a^2$$

$$P = \frac{1}{2}d^2$$

Równoległobok

$$P = a \cdot h_1$$

$$P = b \cdot h_2$$

Romb

$$P = a \cdot h$$

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

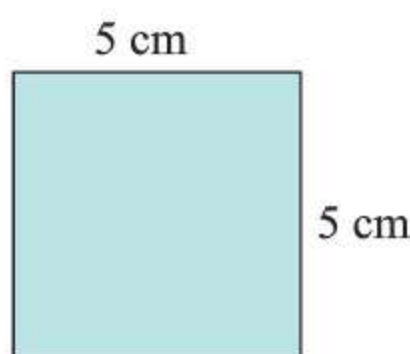
Trapez

$$P = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$$

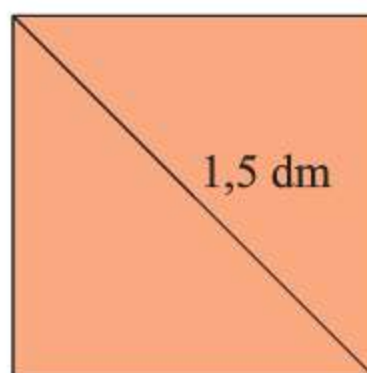


- 1 Oblicz pole kwadratu. Wyraż je w centymetrach kwadratowych.

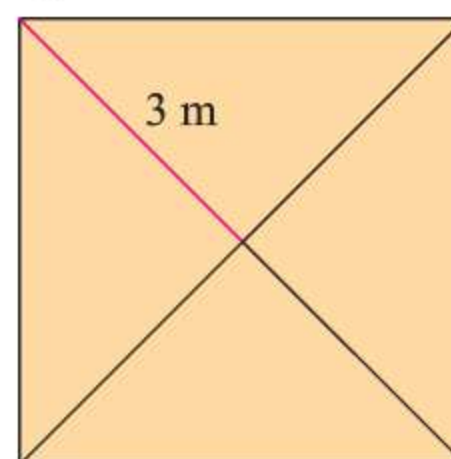
a)



b)

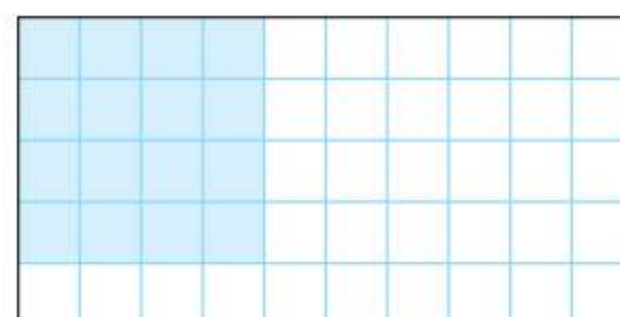


c)



- 2 Obwód prostokąta jest równy 38 cm. Jeden bok jest o 5 cm dłuższy od drugiego. Oblicz pole tego prostokąta.

- 3 Jaki procent pola prostokąta stanowi pole kwadratu?



- 4 Jakie wymiary może mieć prostokąt o podanym polu? W każdym wypadku podaj po trzy przykłady i oblicz obwody tych prostokątów.

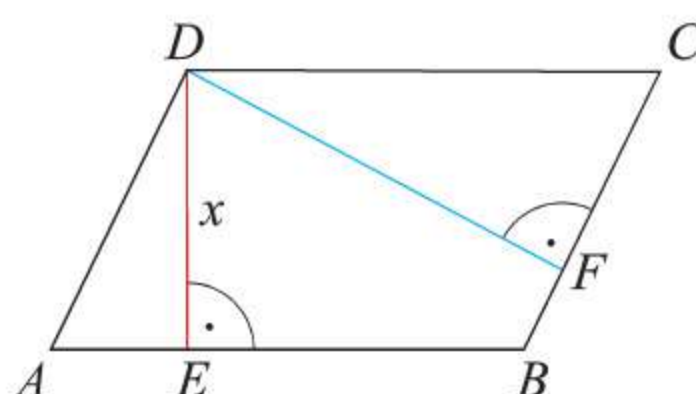
a) 24 cm^2 b) 36 cm^2 c) $2,25 \text{ cm}^2$

- 5 Prostokątna działka o polu 7 a i długości 28 m ma krótszy bok wspólny z działką kwadratową. Właściciele obu działek zlecili wykonanie ogrodzenia w cenie 120 zł za metr bieżący. Ile każdy z nich zapłaci za ogrodzenie, jeżeli kosztami wspólnej części ogrodzenia podzielą się po równo?

- 6 Bok kwadratu $ABCD$ ma długość 16 cm. Punkty E i F są środkami boków AB i BC . Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

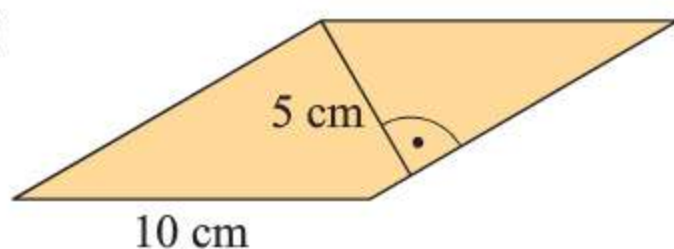
Pole trójkąta DEF jest równe 96 cm^2 .	P	F
Pole trójkąta DEF stanowi $\frac{3}{7}$ pola kwadratu $ABCD$.	P	F

- 7 Skorzystaj z rysunku równoległoboku $ABCD$ i oblicz wysokość x z dokładnością do 0,1, jeśli: $|BC| = 8$, $|AB| = 12$, $|DF| = 10$.

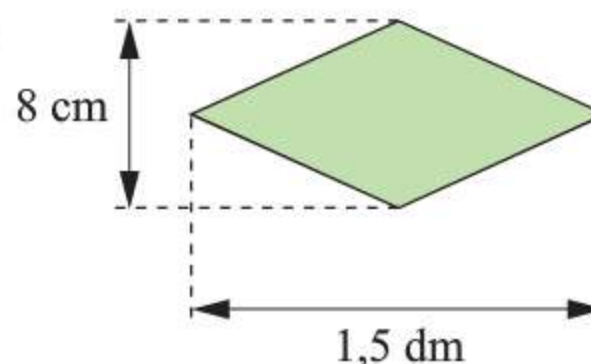


8 Oblicz pole rombu.

a)

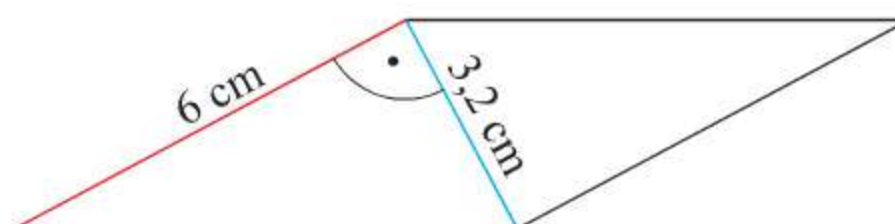


b)



Przykład 1.

Obliczmy pole równoległoboku, w którym krótsza przekątna równa 3,2 cm jest prostopadła do krótszego boku długości 6 cm.



Krótsza przekątna jest wysokością tego równoległoboku.

$$P = 6 \cdot 3,2 = 19,2 \text{ [cm}^2\text{]}$$

ODPOWIEDŹ: Pole równoległoboku jest równe 19,2 cm².

9 Przerysuj tabelę i ją uzupełnij.

Długość boku równoległoboku	12 cm	12 m	7,5 dm		16 m
Wysokość opuszczona na ten bok	25 cm	7 m	60 cm	0,4 m	
Pole równoległoboku				120 dm ²	690 000 cm ²

Przykład 2.

Pole rombu jest równe 12,3 cm², a jego dłuższa przekątna ma 8,3 cm długości. Obliczmy długość krótszej przekątnej. Wynik zaokrąglijmy do 0,1 cm.

Oznaczmy: d_1 – długość krótszej przekątnej, d_2 – długość dłuższej przekątnej.

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}, \quad \text{czyli} \quad 12,3 = \frac{d_1 \cdot 8,3}{2},$$

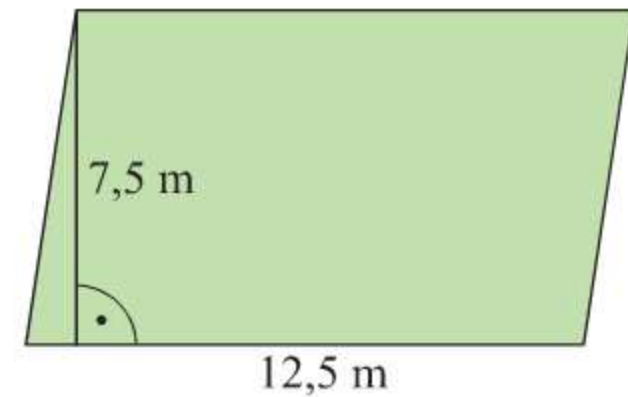
$$24,6 = d_1 \cdot 8,3 \quad \text{stąd} \quad d_1 = 2,96... \approx 3,0 \text{ [cm]}$$

ODPOWIEDŹ: Krótsza przekątna ma około 3,0 cm długości.

- 10 Plac ma kształt rombu. Ścieżka biegnąca wzdłuż jednej przekątnej ma długość 45 m. Ile metrów ma ścieżka biegnąca wzdłuż drugiej przekątnej, jeżeli powierzchnia placu to 9 arów?

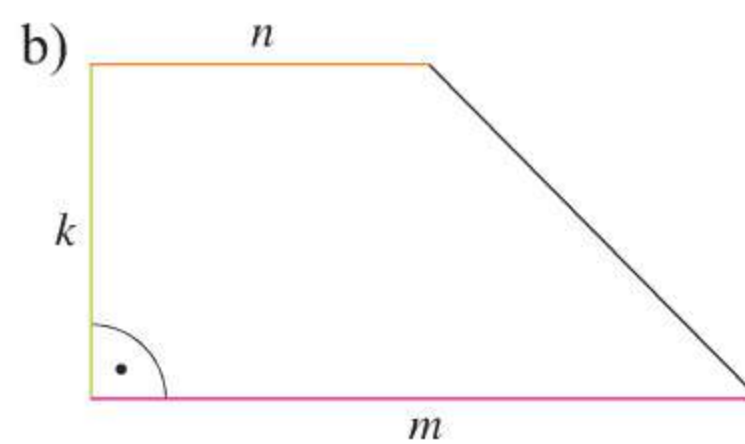
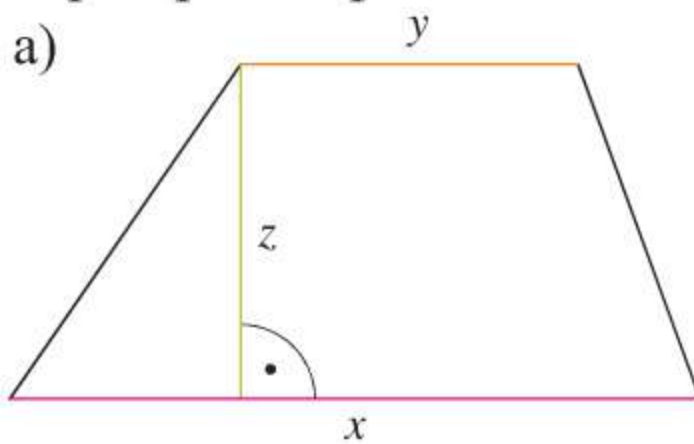
- 11** W rombie o obwodzie 52 cm jedna z przekątnych jest o 3 cm krótsza od boku rombu, a druga o 11 cm dłuższa od boku rombu. Oblicz pole tej figury.

- 12** Trawnik ma kształt równoległoboku o wymiarach podanych na rysunku. Jedna paczka nasion trawy wystarcza na obsianie 5 m^2 powierzchni. Ile co najmniej takich paczek należy kupić, aby obsiać trawą cały trawnik?

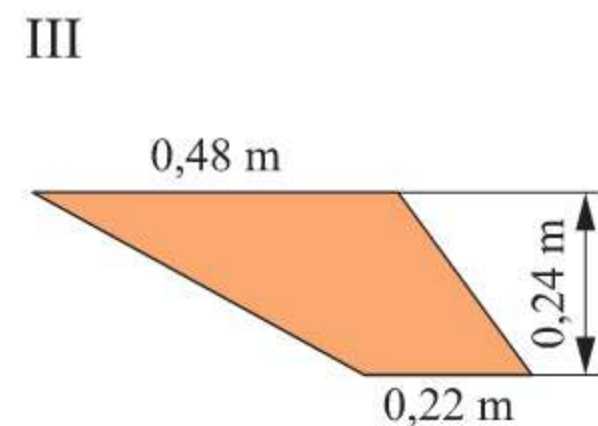
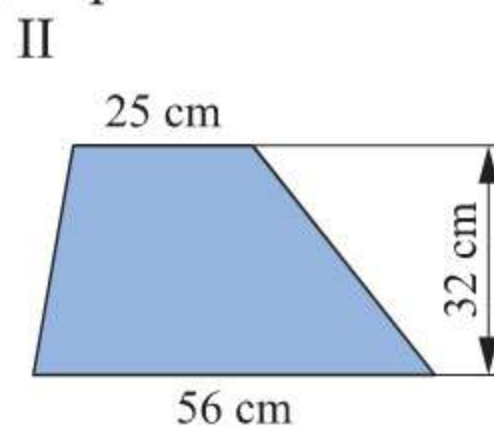
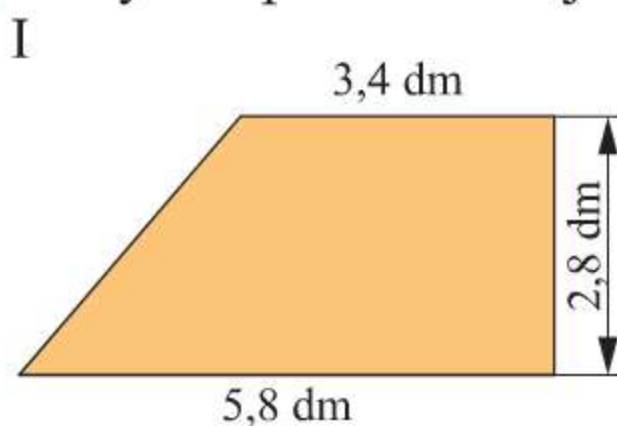


- 13** Długości przekątnych rombu są równe 8 cm i 1,5 dm, a jego wysokość wynosi $7\frac{1}{17}$ cm. Oblicz obwód tego rombu.

- 14** Zapisz pole trapezu.



- 15** Który z trapezów ma najmniejsze pole?



Przykład 3.

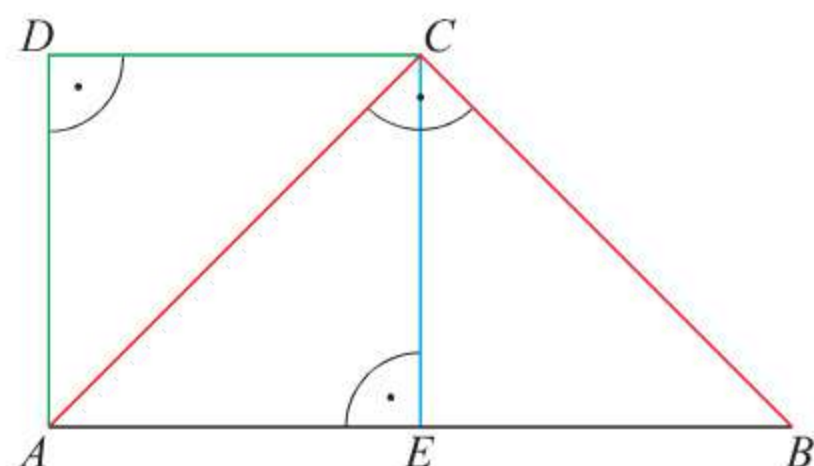
Wysokość trapezu prostokątnego $ABCD$ jest równa 8,3 cm. Jego krótsza przekątna dzieli go na dwa trójkąty równoramienne prostokątne. Obliczmy pole tego trapezu. Wynik zaokrąglimy do 1 cm^2 .

$$|AD| = |DC| = 8,3 \text{ cm}$$

$$|AE| = |EB| = 8,3 \text{ cm}$$

$$|AB| = 16,6 \text{ cm}$$

$$P = \frac{(8,3 + 16,6) \cdot 8,3}{2} = 103,335 \approx 103 [\text{cm}^2]$$

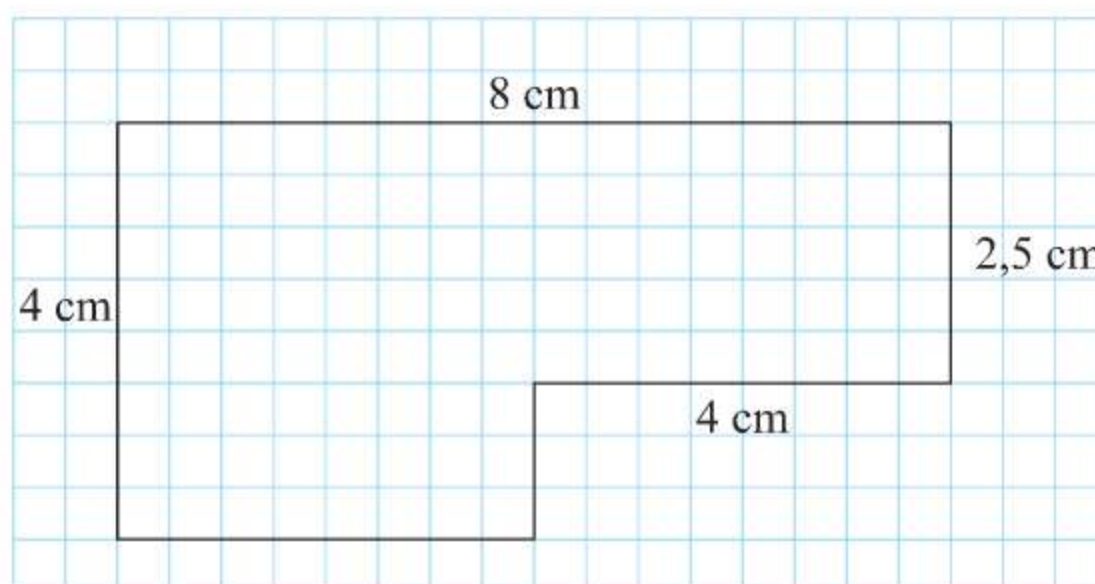


ODPOWIEDŹ: Pole tego trapezu jest w przybliżeniu równe 103 cm^2 .

- 16** W trapezie wysokość jest o 5 cm krótsza od sumy długości podstaw, która jest równa 1,2 dm. Czy pole tego trapezu jest równe 40 cm^2 ? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	najdłuższy bok trapezu ma długość 12 cm.
			2.	wysokość ma 7 cm.
B.	Nie,		3.	długość krótszej podstawy trapezu jest równa połowie długości dłuższej podstawy.

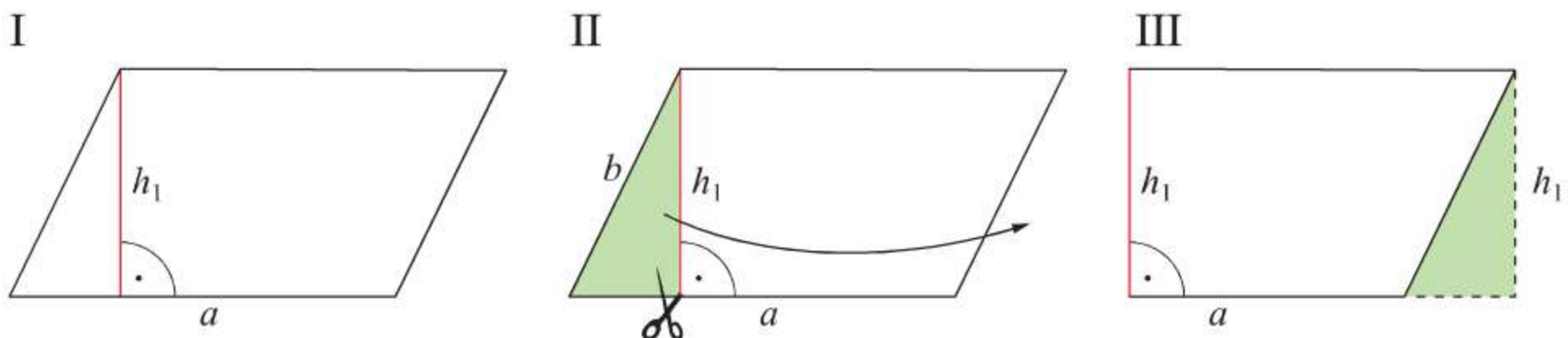
- 17** Oblicz pole trapezu równoramienne, w którym dłuższa podstawa ma długość 11 cm, krótsza 7 cm, a kąt ostry ma miarę 45° .
- 18** Obwód trapezu równoramienne wynosi 52 cm, a jego pole 156 cm^2 . Oblicz wysokość tego trapezu, jeżeli ramię ma 13 cm długości.
- 19** Oblicz długość boku kwadratu, którego pole jest równe polu prostokąta o podanych wymiarach.
 a) 4 cm i 9 cm b) 6 cm i 24 cm c) 25 cm i 9 cm
- 20** Obwód prostokąta jest równy 44 cm. Szerokość prostokąta stanowi $\frac{4}{7}$ jego długości. Oblicz pole tego prostokąta.
- 21** Podłoga w kuchni ma kształt prostokąta. Jego obwód wynosi 14 m, a długość to 4 m. Ile metrów kwadratowych terakoty potrzeba na wyłożenie tej podłogi? W obliczeniach należy uwzględnić 10% terakoty więcej (część płytek trzeba przecinać i nie są w pełni wykorzystane). Jaki jest koszt zakupu terakoty, jeżeli cena 1 m^2 wynosi 65 zł?
- 22** Firma pana Marka dostała zlecenie wyprania wykładziny w pomieszczeniu biurowca. Plan podłogi w tym pomieszczeniu przedstawiono na rysunku w skali 1 : 400. Ile zarobi firma pana Marka na tym zleceniu, jeśli pranie wykładziny do 150 m^2 wycenia na 6 zł za m^2 , a przy powierzchni większej niż 150 m^2 udziela rabatu w wysokości 15%? Wynik zaokrąglij do 100 zł.



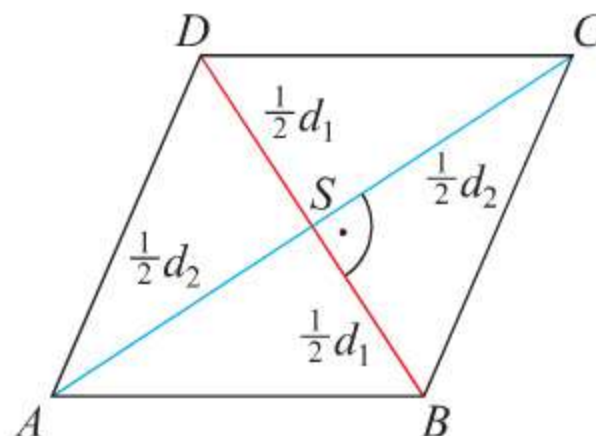
- 23 Oblicz w cm^2 pole zielonej figury przedstawionej na rysunku w skali 1 : 2.



- 24 Bok równoległoboku ma 15 cm, a poprowadzona na ten bok wysokość stanowi $\frac{2}{3}$ jego długości. Oblicz pole równoległoboku.
- 25 Wysokości równoległoboku są równe 4 cm i 3 cm, a jego pole wynosi 36 cm^2 . Oblicz obwód tego równoległoboku.
- 26 Skorzystaj z rysunków i uzasadnij wzór na pole równoległoboku.



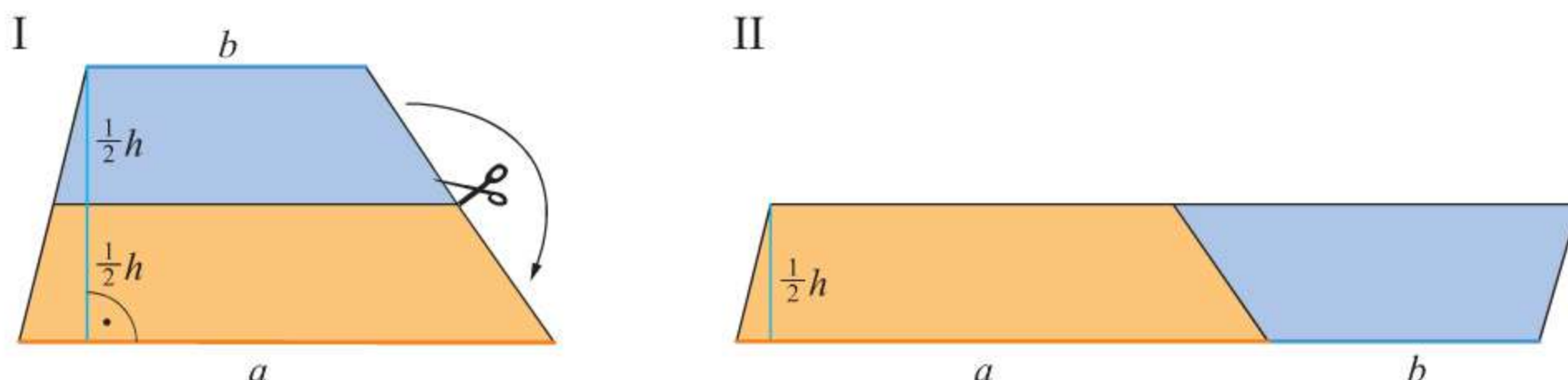
- 27 Skorzystaj z rysunku i uzasadnij wzór na pole rombu.



- 28 Dolna podstawa AB trapezu $ABCD$ ma długość 12 cm, górna CD – 8 cm, a wysokość trapezu jest o 5 cm krótsza od dłuższej podstawy. W trapezie poprowadzono odcinek CE równoległy do AD . Oblicz pola figur, na jakie został podzielony ten trapez.
- 29 Działka rolnicza ma kształt trapezu prostokątnego, którego wysokość jest równa 80 m, a podstawy mają długości 95 m i 85 m. Jeden ar tej działki kosztuje 500 zł. Ile złotych zapłacono za tę działkę?
- 30 W trapezie równoramiennym ramiona mają po 8 cm, a wysokość jest równa 6 cm. Pole trapezu wynosi 54 cm^2 . Oblicz obwód tego trapezu.
- 31 Górna podstawa trapezu prostokątnego ma długość 7 cm, a wysokość stanowi $1\frac{1}{7}$ górnej podstawy. Pole tego trapezu wynosi 64 cm^2 . Oblicz długość drugiej podstawy tego trapezu.

- 32** Pan Jan chce wyłożyć terakotą taras o wymiarach $4,5 \text{ m} \times 2,5 \text{ m}$. W hurtowni w cenie promocyjnej można kupić 350 kwadratowych płytek terakoty o boku 20 cm lub 510 kwadratowych płytek terakoty o boku 1,5 dm. Która oferta jest korzystniejsza, jeśli jedna płytka w obu ofertach kosztuje tyle samo i nie ma możliwości kupienia mniejszej liczby płytek niż podana?

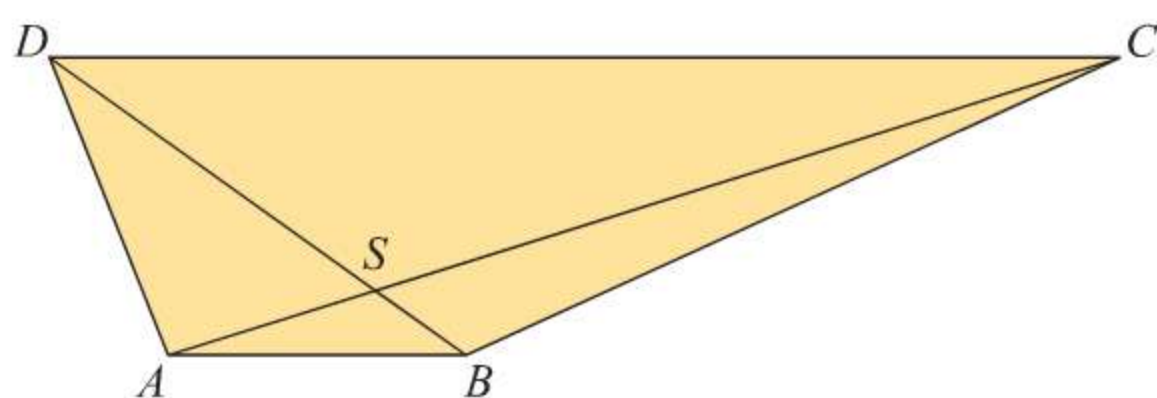
- 33** Skorzystaj z rysunków i uzasadnij wzór na pole trapezu.



- 34** Pole równoległoboku jest równe $0,18 \text{ dm}^2$. Krótszy bok ma długość 6 cm. Wysokość opuszczona na dłuższy bok stanowi $33\frac{1}{3}\%$ długości krótszego boku. Uzasadnij, że obwód tego równoległoboku jest równy 30 cm.
- 35** Obwód prostokąta jest równy 18 i jego pole jest równe 18. Oblicz długości boków tego prostokąta, jeśli są one liczbami naturalnymi.
- 36** W prostokącie długość jednego boku zmniejszono o 10%, a długość drugiego boku zwiększono o 20%. Oblicz, ile procent pola prostokąta przed zmianą stanowi pole prostokąta po zmianie.

Wyzwanie

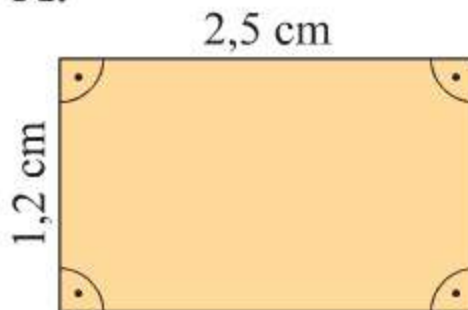
Rabatek kwiatowy w kształcie trapezu podzielono wzdłuż jego przekątnych na cztery części. Na dwóch z nich ogrodnik posadził taką samą liczbę róż, twierdząc, że mają równe pola. Wykaż, że ogrodnik miał rację. Które to części?



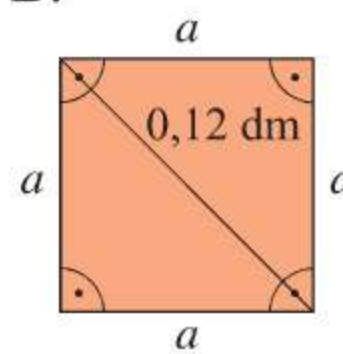
Sprawdź się!

- 1 Do każdej figury dobierz jej pole.

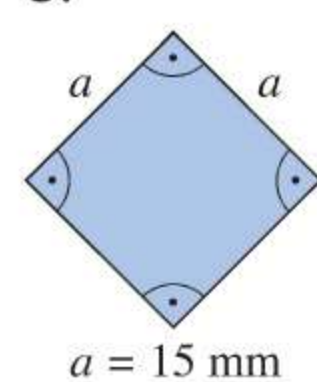
A.



B.

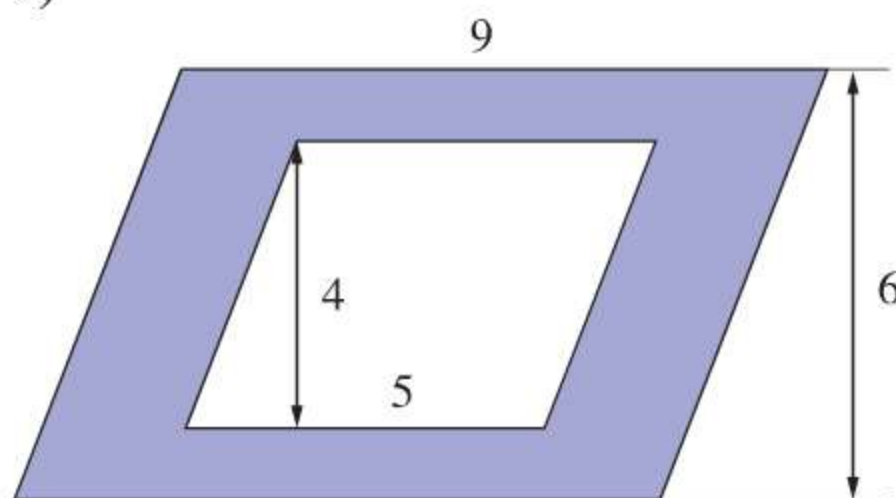


C.

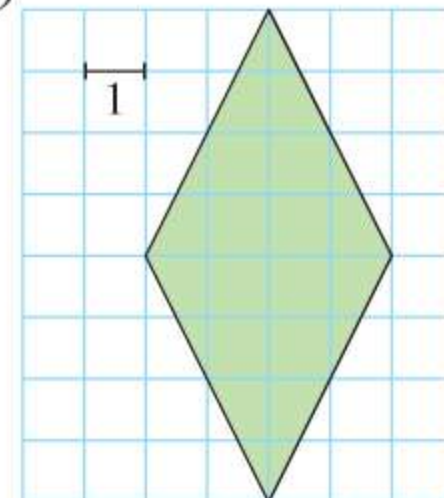
I. $0,72 \text{ cm}^2$ II. $2,25 \text{ cm}^2$ III. 3 cm^2

- 2 Oblicz pole zamalowanej figury.

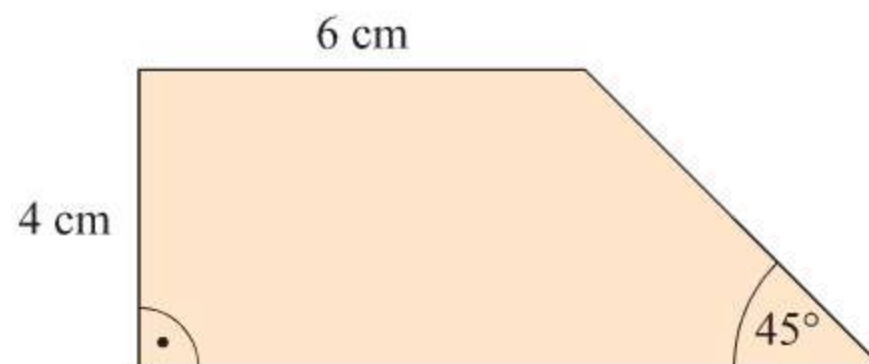
a)



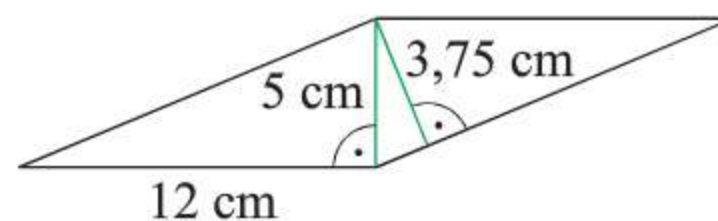
b)



- 3 Oblicz pole trapezu przedstawionego na rysunku.



- 4 Na rysunku podane są niektóre wymiary równoległoboku. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.



Pole tego równoległoboku wynosi A / B.

A. 30 cm^2 B. 60 cm^2

Dłuższy bok równoległoboku ma C / D długości.

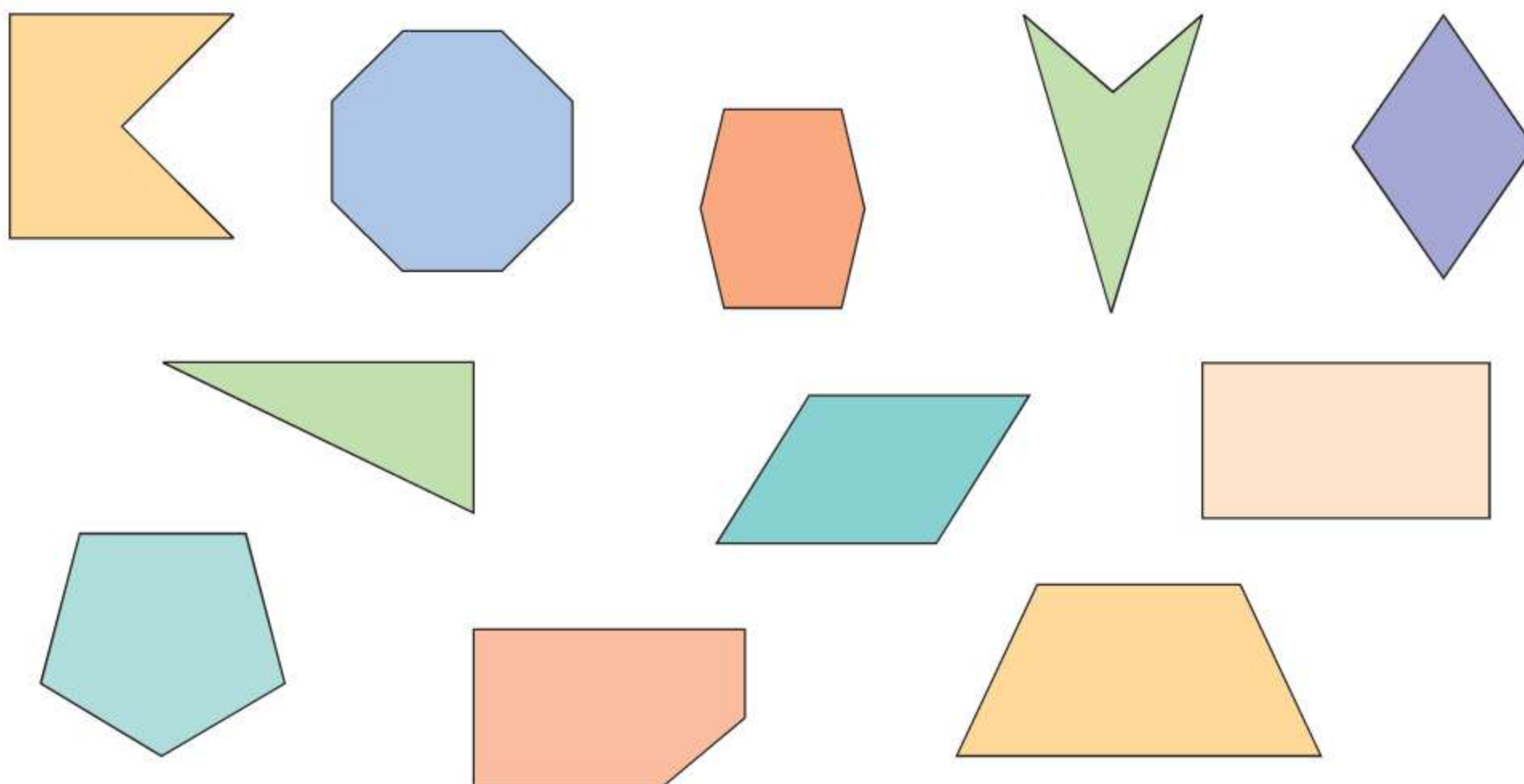
C. 14 cm

D. 16 cm

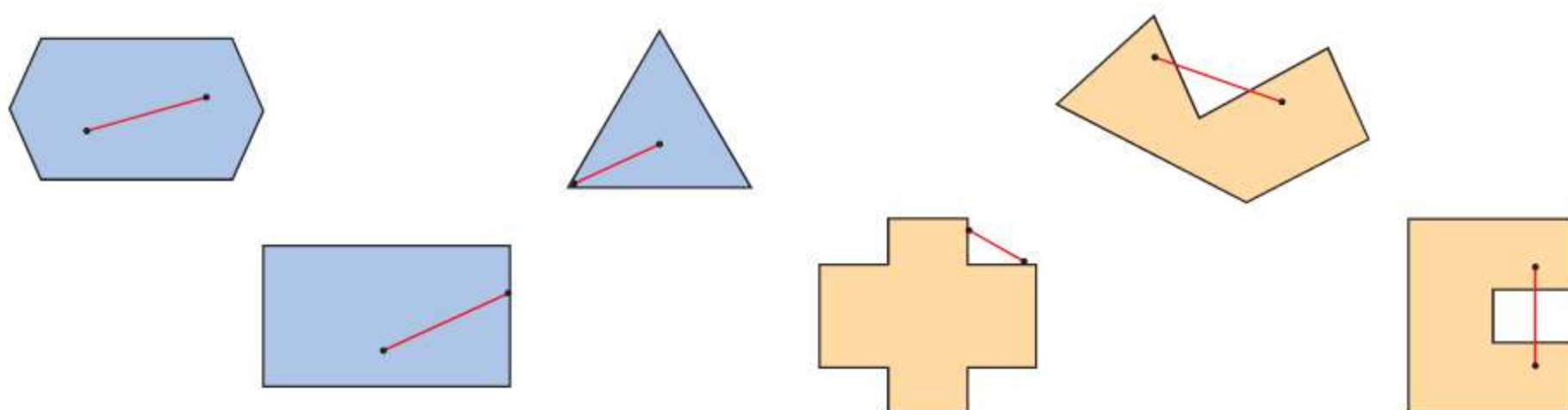
- 5 Obwód trapezu prostokątnego jest równy 40 dm. Jego górna podstawa ma taką samą długość jak krótsze ramię trapezu. Dolna podstawa jest o 60 cm dłuższa od górnej. Dłuższe ramię trapezu jest o 40 cm krótsze od dolnej podstawy. Oblicz pole tego trapezu.

13. Inne wielokąty

Figury przedstawione na rysunku to różne wielokąty.



Wśród tych wielokątów są wielokąty wypukłe i wklęsłe.



Na fioletowo pomalowano wielokąty wypukłe, a na żółto – wielokąty wklęsłe.



Wielokąt jest wypukły, jeśli każdy odcinek łączący dwa dowolne jego punkty zawiera się w tym wielokącie.

Wielokąt jest wklęsły, jeśli istnieje odcinek łączący dwa jego punkty, który nie zawiera się w tym wielokącie.

- 1 Który z wielokątów nie może być wielokątem wklęsłym: trójkąt, czworokąt, pięciokąt, sześciokąt, ośmiokąt, dwunastokąt?
- 2 Narysuj wypukły i wklęsły:
 - a) pięciokąt,
 - b) siedmiokąt.

- 3 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

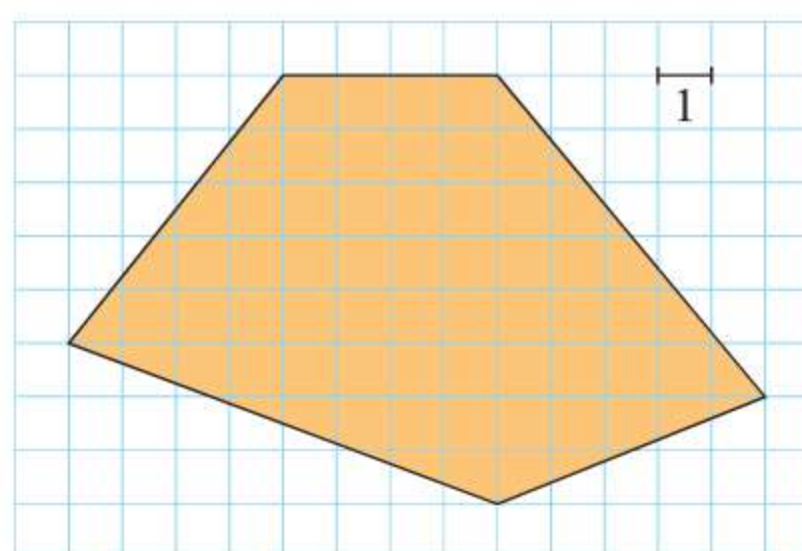
Każdy wielokąt o parzystej liczbie boków jest wypukły.	P	F
Każdy wielokąt, który ma nieparzystą liczbę boków, może być wklęsły.	P	F
Aby wielokąt był wklęsły, musi mieć co najmniej 5 boków.	P	F
Istnieje wielokąt wklęsły, który nie ma osi symetrii.	P	F

Przykład 1.

Obliczmy pole pięciokąta przedstawionego na rysunku.

W tym celu podzielimy go na figury, których pole potrafimy obliczyć.

P – pole pięciokąta



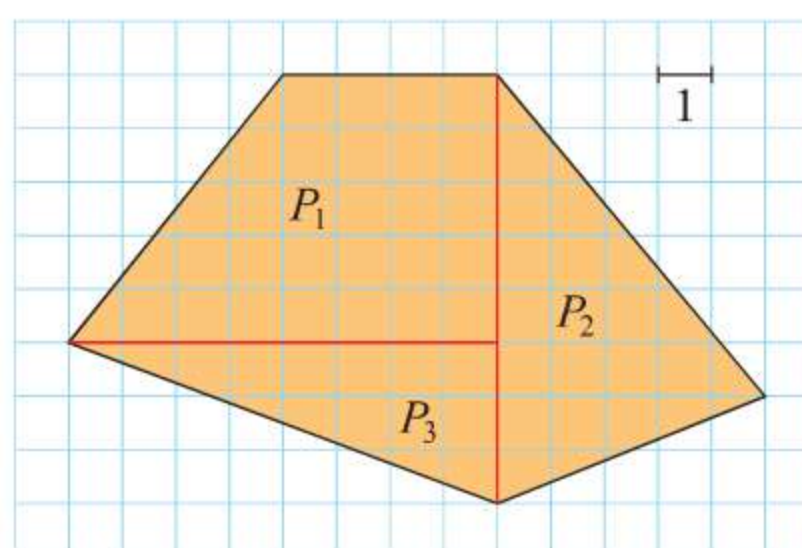
$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

$$P_1 = \frac{(8+4) \cdot 5}{2} = 30$$

$$P_2 = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20$$

$$P_3 = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12$$

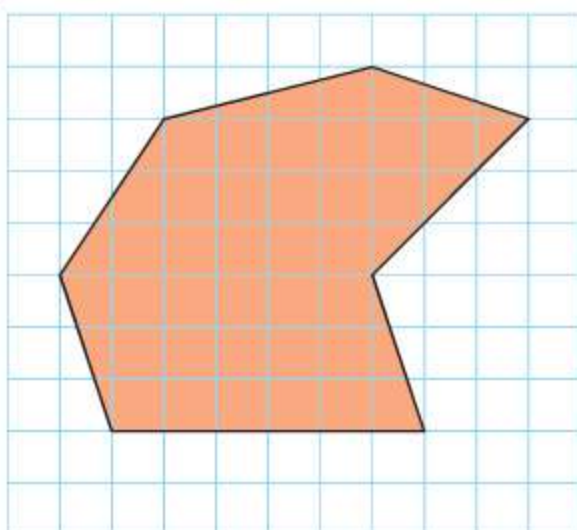
$$P = 30 + 20 + 12 = 62$$



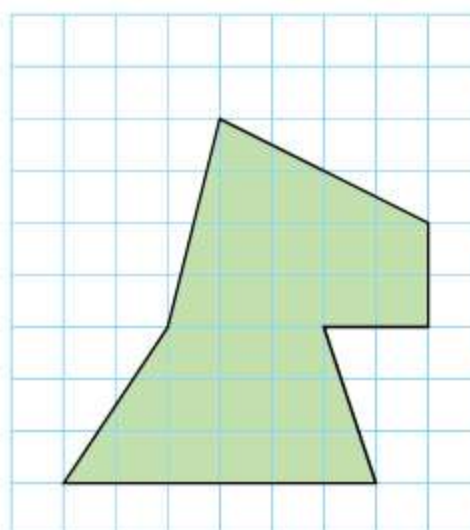
ODPOWIEDŹ: Pole wielokąta jest równe 62 j^2 .

- 4 Oblicz pole figury. Przyjmij, że kratka ma bok długości 1.

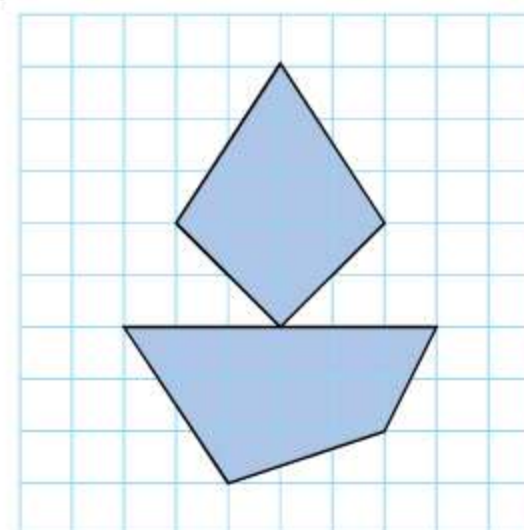
a)



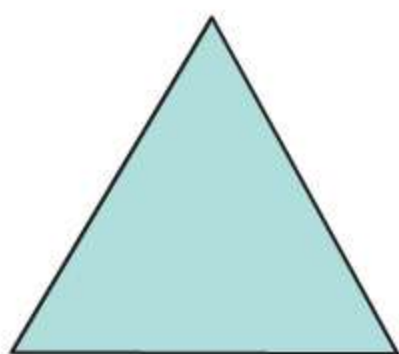
b)



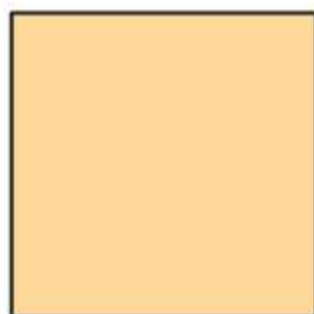
c)



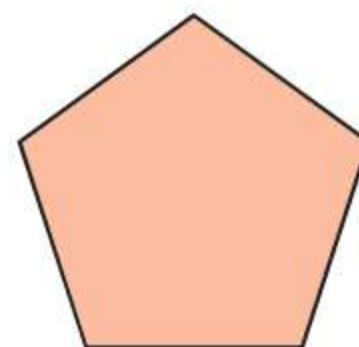
Wielokąty, których wszystkie boki są równej długości, a kąty jednakowej miary, nazywamy **wielokątami foremnymi**.



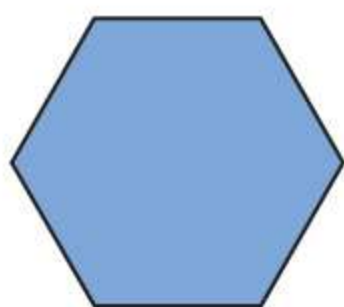
trójkąt równoboczny
(trójkąt foremny)



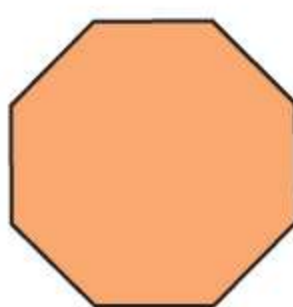
kwadrat
(czworokąt foremny)



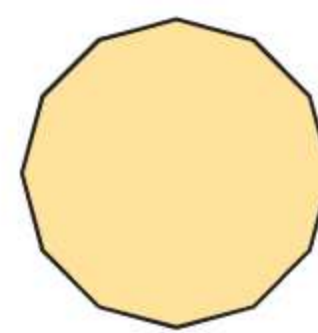
pięciokąt foremny



sześciokąt foremny

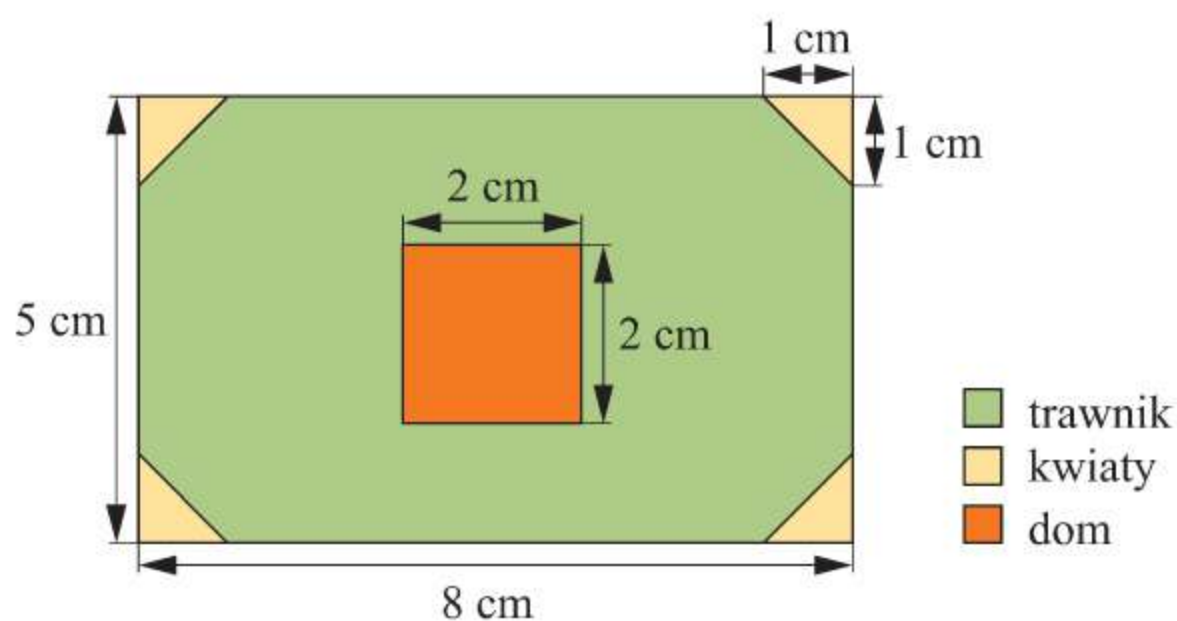


ośmiokąt foremny

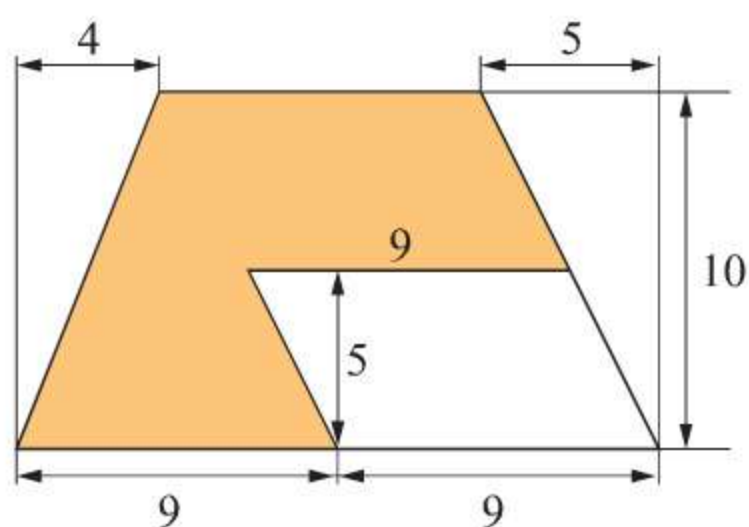


dwunastokąt foremny

- 5 Uzasadnij, że dana figura jest wielokątem foremnym.
 - a) trójkąt równoboczny
 - b) kwadrat
- 6 Podziel na wielokąty foremne:
 - a) kwadrat,
 - b) sześciokąt foremny.
- 7 Plan działki wykonano w skali 1 : 600. Oblicz, ile arów zajmuje trawnik.



- 8 Oblicz pole zamalowanej figury.





- 9** W pewnym sześciokącie każde dwa kolejne boki są prostopadłe. Długości kolejnych boków wynoszą: 2, 3, 6, 7, 8, 10.

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Ten wielokąt jest A / B.

A. wypukły

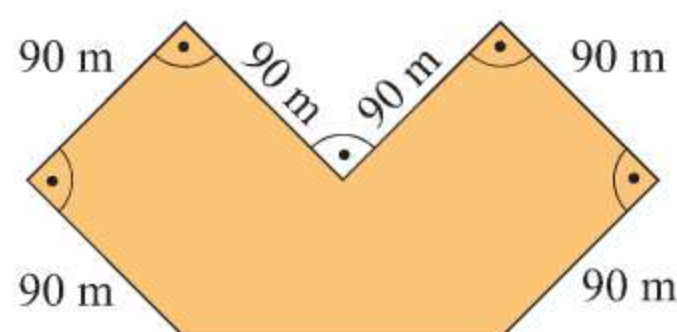
B. wklęsły

Pole sześciokąta jest równe C / D.

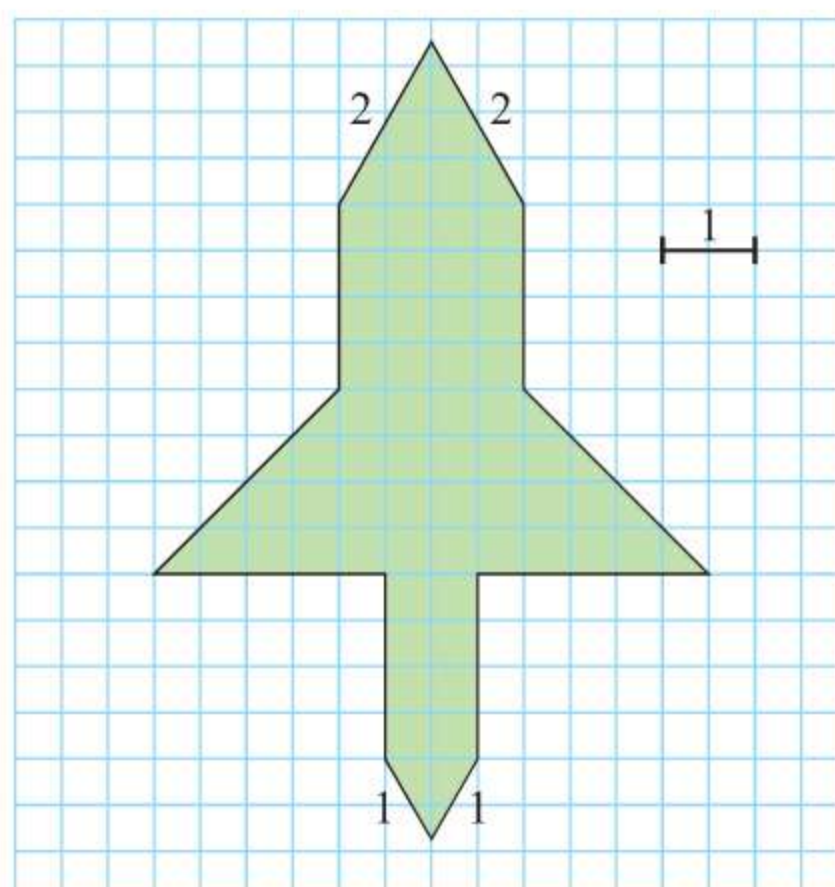
C. 36

D. 62

- 10** Na rysunku przedstawiono plan placu, na którym powstanie ośrodek rekreacyjny. Czy na podstawie tego planu potrafisz obliczyć, jaką powierzchnię będzie miał ośrodek? Ile to hektarów?

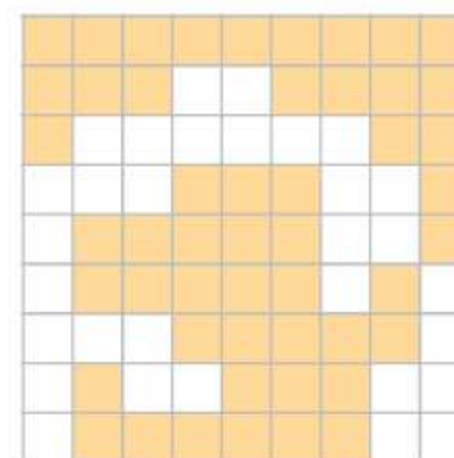


- 11** Oblicz sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta przedstawionego na rysunku poniżej.



Wyzwanie

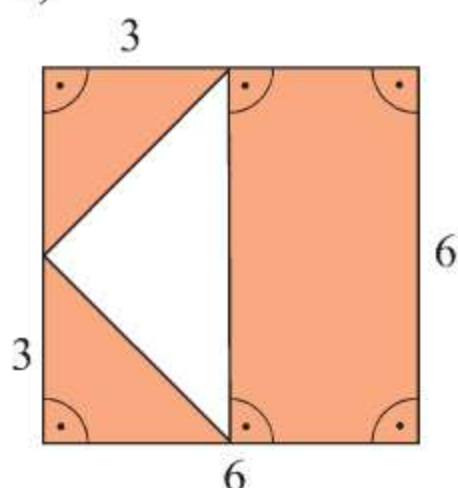
Wybierz na rysunku obok wzór biały lub żółty, a następnie zaprojektuj wzór o takim samym polu i jednej osi symetrii.



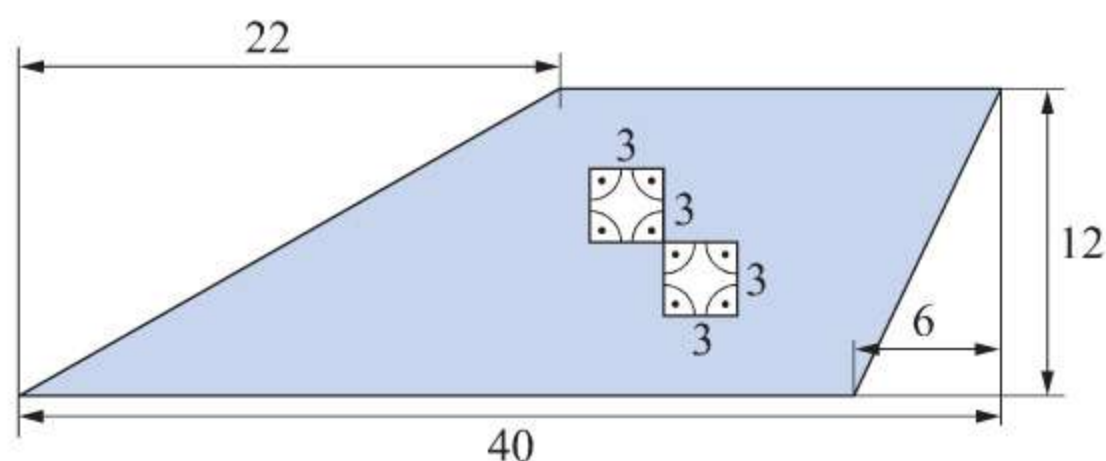
Sprawdź się!

- 1 Oblicz pole zamalowanej figury.

a)

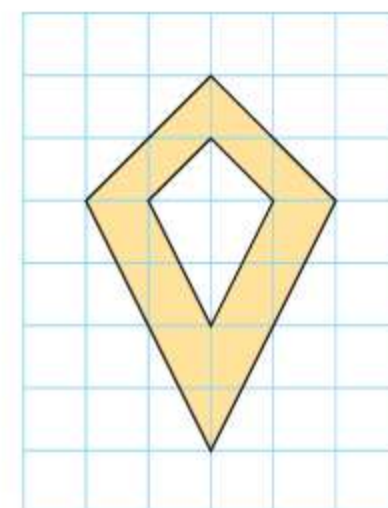


b)

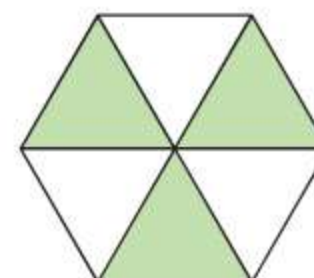


- 2 Wyznacz pole zamalowanej figury na rysunku obok. Przyjmij, że kratka ma bok długości jednej jednostki.

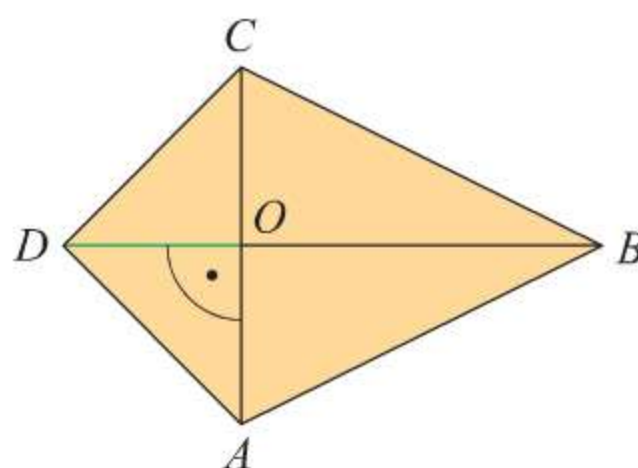
- 3 W prostokącie $ABCD$ o wymiarach $8 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ punkty E i F są odpowiednio środkami boków CB i CD . Jaką częścią pola prostokąta jest pole czworokąta $AECF$?



- 4 Obwód sześciokąta foremnego przedstawionego na rysunku wynosi 42 cm, a odległość między równoległymi bokami to około 12 cm. Wyznacz obwód i przybliżone pole zamalowanej figury.



- 5 W czworokącie $ABCD$ przedstawionym na rysunku $|AD| = |DC|$ oraz $|AB| = |BC|$. Czy pole tego czworokąta jest równe połowie iloczynu długości jego przekątnych, równych 12 cm i 8 cm?

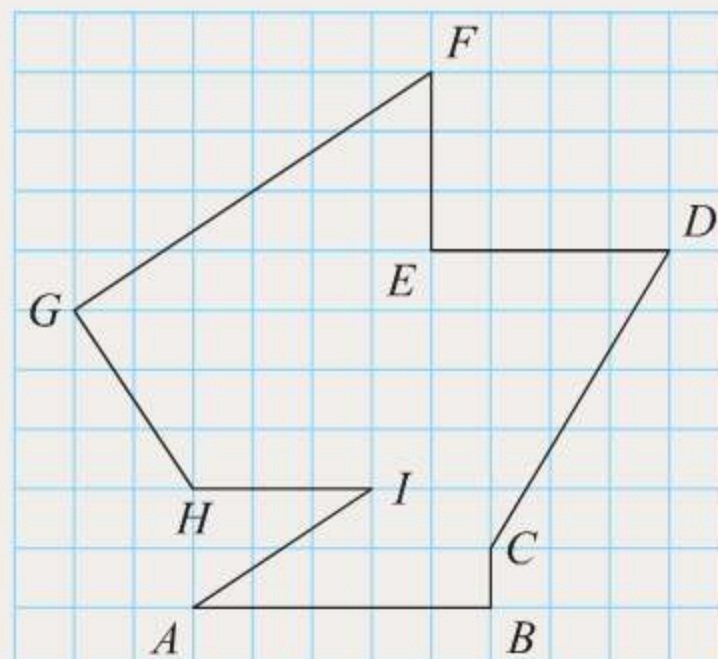


Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

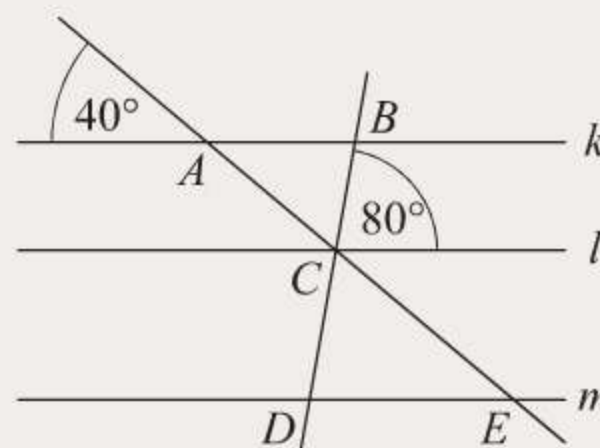
A.	Tak,	ponieważ	1.	czworokąt $ABCD$ nie jest rombem.
			2.	pola trójkątów DCB i DAB są równe.
B.	Nie,		3.	czworokąt $ABCD$ nie jest kwadratem.

Zadania utrwalające

- 1 Wypisz pary odcinków prostopadłych i równoległych w łamanej $ABCDEFGHIA$.

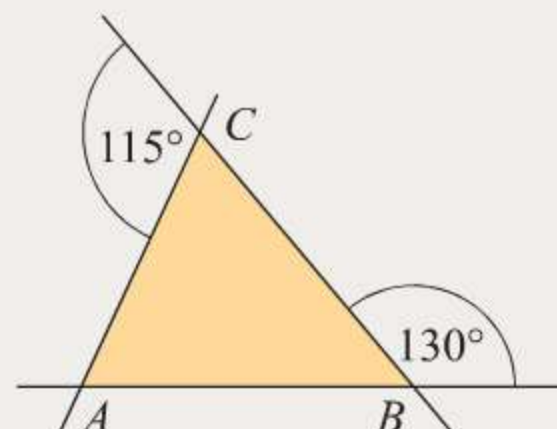


- 2 Wyznacz miarę kąta, który jest mniejszy o $\frac{2}{9}$ kąta prostego od kąta półpełnego. Podaj rodzaj tego kąta ze względu na miarę.
- 3 Różnica miar kątów przyległych jest równa 30° . Oblicz miary tych kątów.
- 4 Oblicz miary kątów wewnętrznych trójkątów ABC i DEC , przedstawionych na rysunku. Proste k, l, m są równoległe.

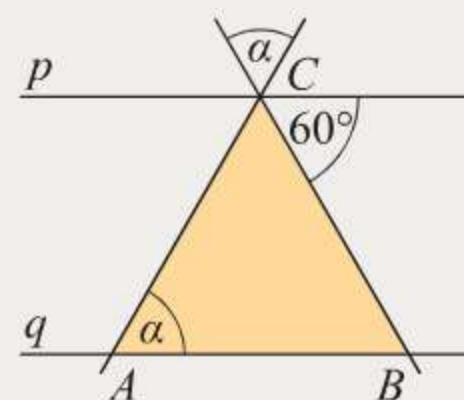


- 5 Jeden bok trójkąta ma długość 10 cm, a drugi 7 cm. Czy trzeci bok trójkąta może mieć podaną długość?
a) 19 cm b) 2,5 cm c) 8 cm
- 6 Dane są trzy odcinki. Jeden z nich jest równy 3,6 cm. Jego długość jest o 20% większa od długości drugiego odcinka oraz stanowi $\frac{3}{7}$ długości trzeciego. Czy z tych odcinków można zbudować trójkąt? Odpowiedź uzasadnij.
- 7 Obwód trójkąta ABC wynosi 19 m. Bok AB jest najkrótszy. Najdłuższy bok AC jest o 50% dłuższy od boku BC , a bok BC jest o połowę dłuższy od boku AB .
a) Oblicz długości boków trójkąta ABC .
b) Który kąt trójkąta ABC jest największy, a który najmniejszy?

- 8 Oblicz miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC przedstawionego na rysunku i określ, jaki to trójkąt ze względu na boki i kąty.



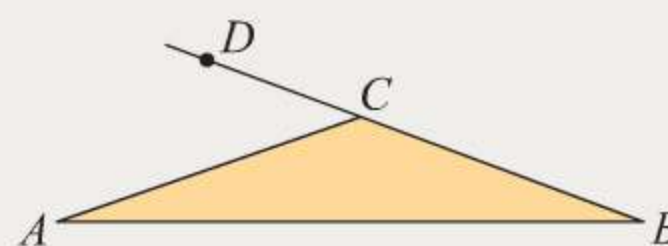
- 9 Proste p i q są równoległe. Skorzystaj z danych na rysunku i uzasadnij, że trójkąt ABC jest równoboczny.



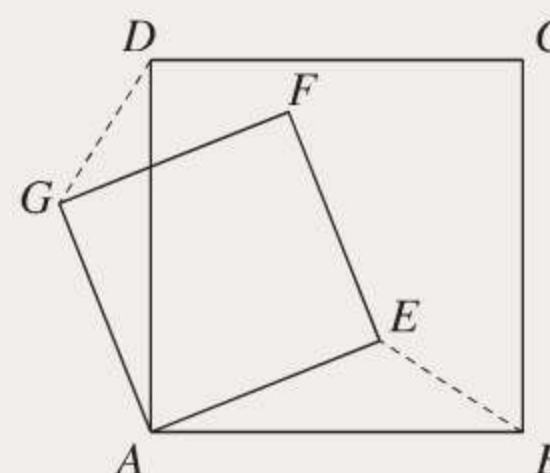
- 10 W trójkącie równobocznym ABC poprowadzono przez wierzchołek A prostą prostopadłą do boku BC , a przez wierzchołek B prostą prostopadłą do boku AC . Oblicz miarę kąta ostrego między tymi prostymi.

- 11 Kąt zewnętrzny przy podstawie trójkąta równoramiennego jest większy o 30° od kąta zewnętrznego przy wierzchołku trójkąta. Oblicz miary kątów tego trójkąta.

- 12 Skorzystaj z rysunku i uzasadnij, że jeśli kąt ACD jest dwa razy większy od kąta CBA , to trójkąt ABC jest równoramienny.



- 13 Czworokąty $ABCD$ i $AEFG$ są kwadratami. Uzasadnij, że odcinek BE jest równy odcinkowi DG .



- 14 W czworokącie $ABCD$ boki AB i CD oraz boki AD i BC są równoległe. Uzasadnij, że:
- kąty przeciwległe są równe,
 - boki przeciwległe są równe.

- 15 Narysuj trójkąt, trapez i równoległobok tak, aby każdy wielokąt miał taką samą wysokość.

- 16 W prostokącie przekątne przecinają się pod kątem 120° . Jakie miary mają kąty między przekątnymi a bokami tego prostokąta? Odpowiedź uzasadnij.

- 17 W rombie $ABCD$ z wierzchołka kąta ADC o mierze 142° poprowadzono wysokości rombu. Oblicz miarę kąta ostrego, który tworzą te wysokości.

- 18 Wysokości trapezu o obwodzie 92 cm podzieliły go na dwa trójkąty i prostokąt. Suma obwodów tych trzech figur jest równa 132 cm. Oblicz wysokość tego trapezu.

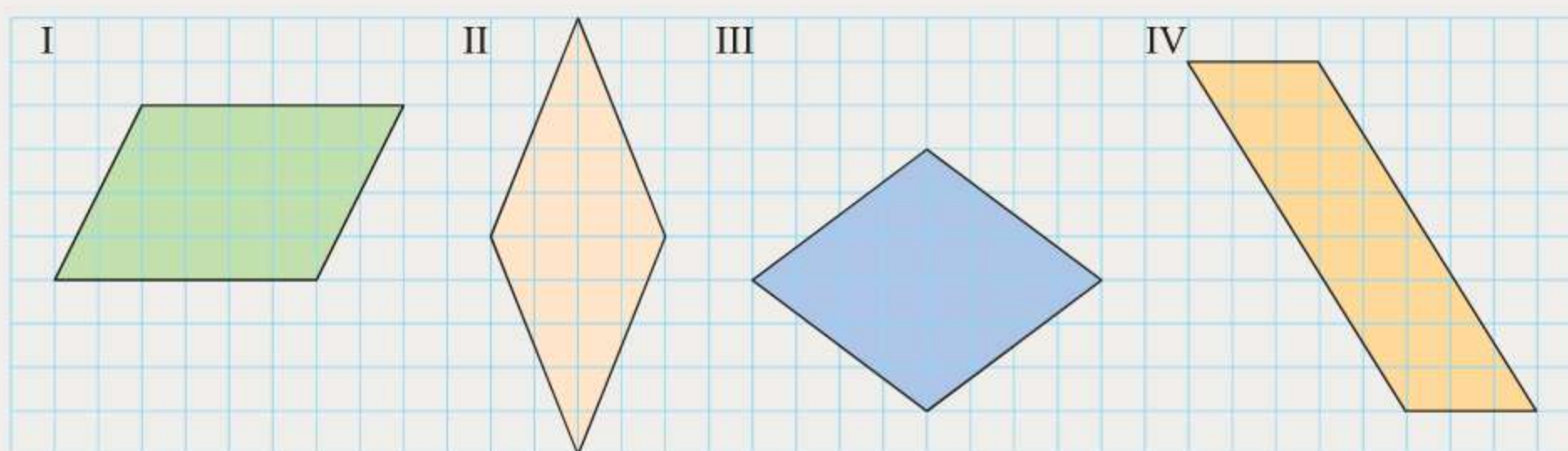
- 19 Na środku prostokątnej działki wykopano studnię. Odległość środka studni od jednego boku działki wynosi 35 m, a od drugiego boku 65 m. Narysuj plan tej działki w skali 1 : 1000. Oblicz powierzchnię tej działki i podaj ją w arach.



- 20** Narysuj trójkąty: prostokątny, rozwartokątny, ostrokątny tak, aby ich pola były równe.
- 21** Pole trójkąta stanowi trzecią część pola kwadratu o boku 1,5 dm. Jeden z boków trójkąta ma długość 90 mm. Ile centymetrów ma wysokość opuszczona na ten bok?
- 22** W kwadracie, którego bok ma długość 16 cm, odcięto cztery naroża. Każde z nich jest trójkątem prostokątnym równoramiennym, którego przyprostokątna ma długość 2,5 cm. Jaki procent pola kwadratu stanowią odcięte naroża? Wynik zaokrąglaj do 1%.
- 23** Wyraż w hektarach obszar:
- Polski o powierzchni $312\,696\text{ km}^2$,
 - Bałtyku o powierzchni $415\,266\text{ km}^2$,
 - jeziora Śniardwy o powierzchni 114 km^2 .
- $$1\text{ km}^2 = 1\,000\,000\text{ m}^2$$

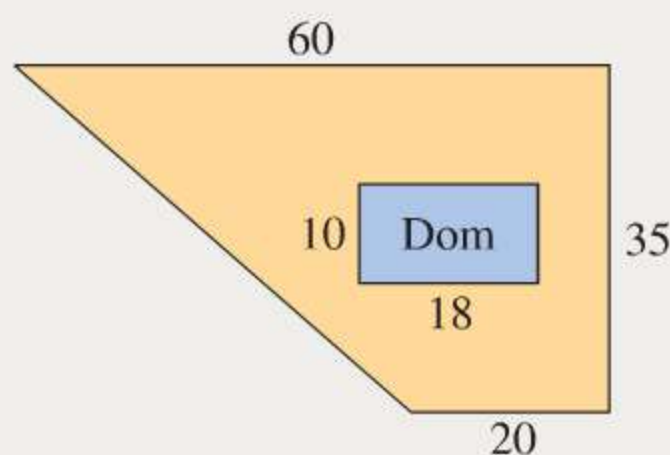
$$1\text{ ha} = 10\,000\text{ m}^2$$

$$1\text{ km}^2 = 100\text{ ha}$$
- 24** Pokój Tomka ma 6 m długości i 5 m szerokości. Pokój Jacka ma długość o 1 m większą, a szerokość o 1 m mniejszą niż pokój Tomka. Który pokój jest większy i o ile metrów kwadratowych?
- 25** Zmierz wymiary swojego podręcznika do matematyki. Oszacuj, ile metrów kwadratowych papieru potrzeba na wykonanie takiej książki.
- 26** Hodowca owiec ma 180 m ruchomego ogrodzenia. Ogrodzenie może być ustawiane w różny sposób. Oblicz, jakie będzie pole zagrody, jeśli ma ona kształt:
- kwadratu,
 - prostokąta, w którym szerokość stanowi $\frac{4}{5}$ długości.
- 27** Panowie Kazimierz i Wacław mają sady na prostokątnych działkach. Na ich ogrodzenie potrzeba tyle samo metrów siatki. Czy powierzchnie ich sadów muszą być jednakowe? Odpowiedź uzasadnij.
- 28** Przekątna kwadratu ma długość 1,6 m. Oblicz pole tego kwadratu.
- 29** Na rysunku przedstawiono cztery równoległoboki.



- Który równoległobok ma największe pole?
 - Które równoległoboki mają równe pola?
- Odpowiedź uzasadnij.

- 30** Działka ma kształt trapezu prostokątnego, którego wymiary w metrach podano na rysunku obok. Na działce stoi dom, a resztę zajmuje ogród. Uzasadnij, że powierzchnia ogrodu to 1220 m^2 .

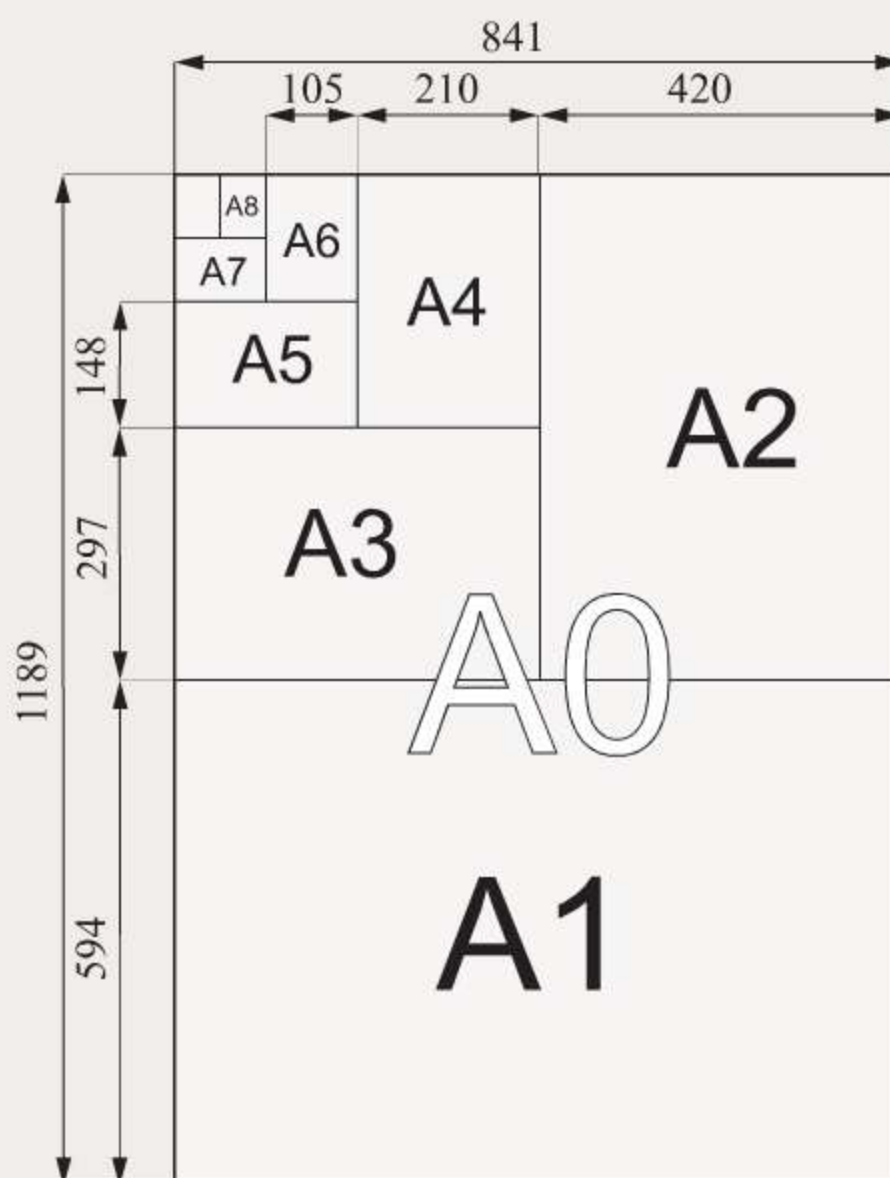


- 31** Pokój Ani ma wymiary $270 \text{ cm} \times 320 \text{ cm}$. Oblicz:
- pole powierzchni podłogi w tym pokoju w m^2 ,
 - długość listew podłogowych w metrach (listwy oznaczono na planie pokoju brązowymi liniami),
 - szerokość regału, jeżeli wiesz, że stanowi ona $46\frac{2}{3}\%$ szerokości pokoju,
 - wymiary blatu biurka, jeżeli jego długość jest o $\frac{1}{3}$ dłuższa od szerokości szafy, a szerokość blatu stanowi 120% głębokości szafy.



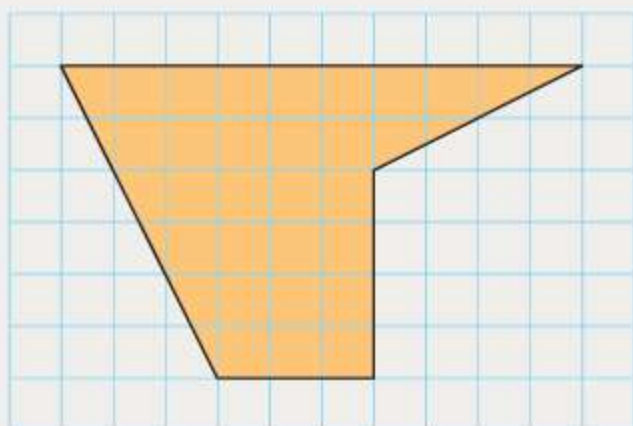
- 32** Na terenie szkolnym o powierzchni 54 arów znajduje się budynek zajmujący 892 m^2 , boisko o powierzchni 2475 m^2 , a pozostały obszar to ogród. Ile centymetrów kwadratowych zajmie ogród na planie tego terenu w skali 1 : 1000?

- 33**
- Wyjaśnij zasadę powstawania kolejnych formatów arkuszy papieru: A0, A1, A2, A3, A4, A5. Wykorzystaj dane przedstawione na rysunku, na którym wymiary podano w milimetrach. Podaj wymiary tych arkuszy.
 - Jakie wymiary ma arkusz A8?
 - Ile arkuszy A8 można wyciąć z pięciu arkuszy A0?

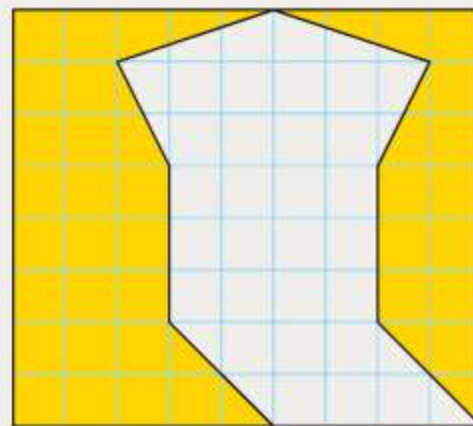


- 34** Oblicz pole zamalowanej figury. Przyjmij, że bok kratki wynosi 1.

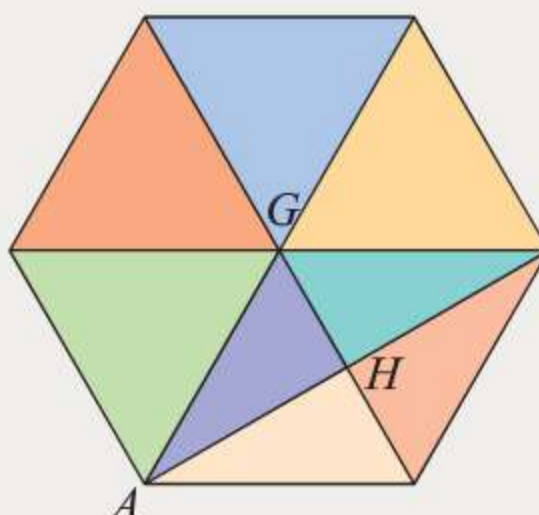
a)



b)

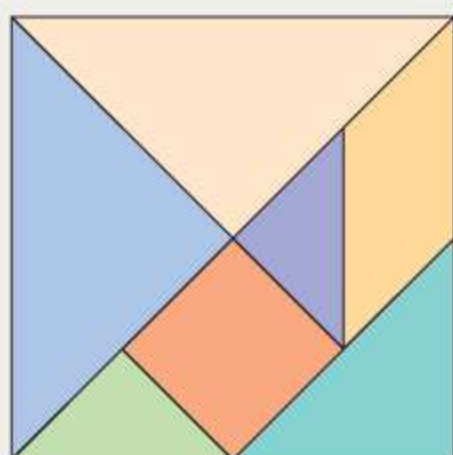


- 35** Na rysunku przedstawiono sześciokąt foremny. Jaki procent jego pola stanowi pole trójkąta AGH ? Wynik podaj z dokładnością do 1%.

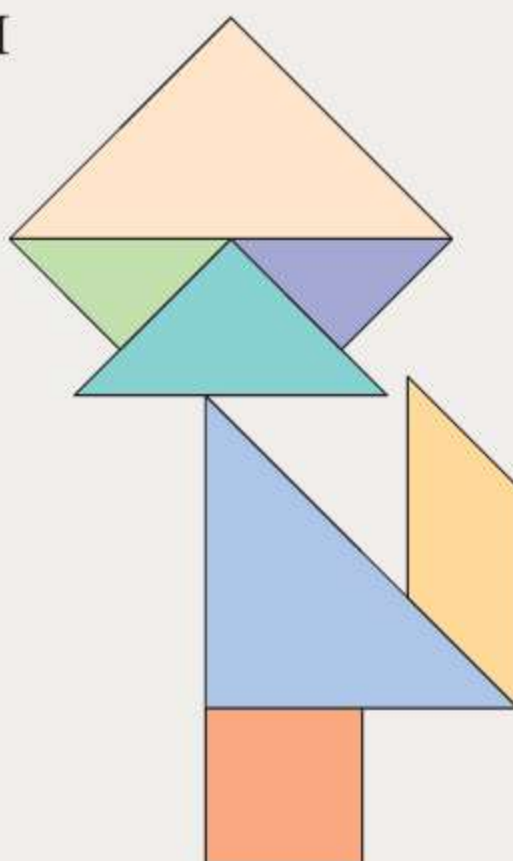


- 36** Wykonaj tangram chiński, składający się z siedmiu figur zwanych tanami, które powstają po odpowiednim rozcięciu kwadratu (rysunek I), a następnie:
- podaj nazwy figur geometrycznych, którymi są poszczególne tany;
 - wśród tych figur geometrycznych wskaż figury, które są przystające;
 - wymień nazwę tej figury, która jest wielokątem foremnym;
 - zmierz potrzebne długości odcinków poszczególnych tanów i oblicz ich przybliżone obwody,
 - ułóż z elementów tangramu figury przedstawione na rysunkach II i III;
 - oblicz pola ułożonych figur;
 - zaprojektuj własne kształty, które mogą powstać z siedmiu tanów.

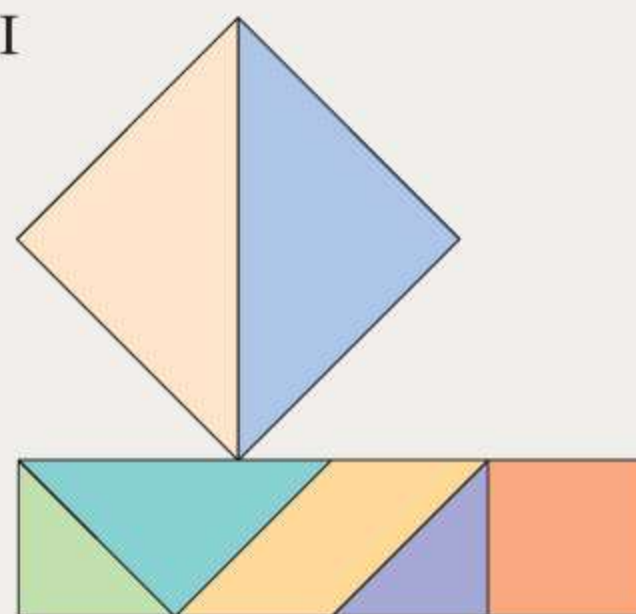
I



II



III



Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

W zadaniach 1.–3. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 1 Przystające są każde dwa trójkąty
 A. równoramienne prostokątne. B. foremne.
 C. o kątach o mierze 35° , 65° , 80° . D. o bokach długości 3,5 cm, 4,9 cm, 7,8 cm.
- 2 Jeżeli kąt rozwarty równoległoboku ma miarę 134° , to kąt ostry ma
 A. 74° B. 54° C. 46° D. 36°
- 3 Działka pani Joli ma powierzchnię 986 m^2 , czyli około
 A. 1 ha B. 10 a
 C. 100 a D. $10\,000 \text{ dm}^2$

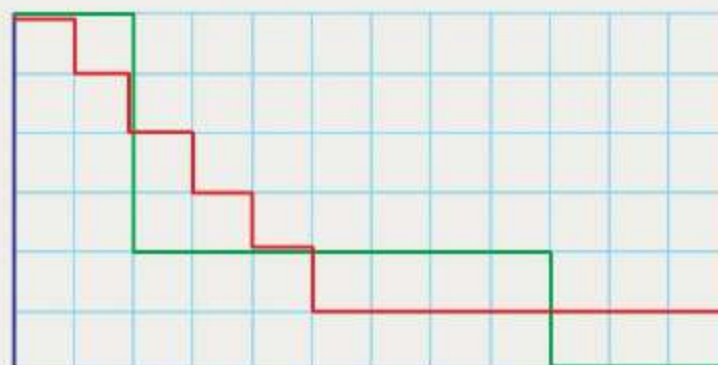
$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$$

$$1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ ha} = 100 \text{ a}$$

W zadaniach 4.–5. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

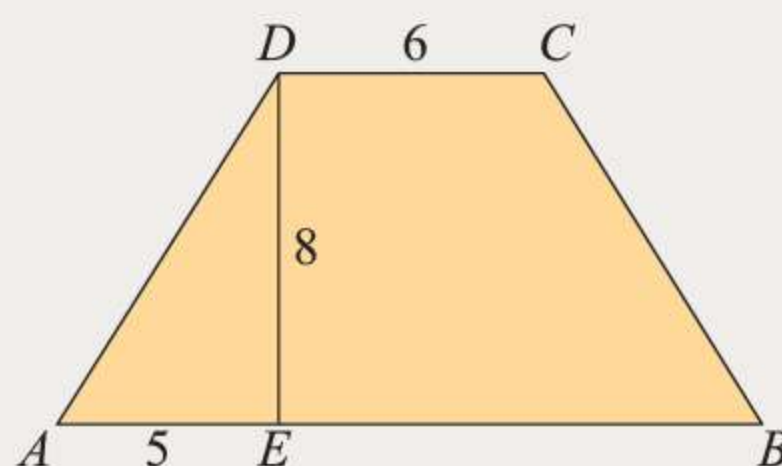
- 4 W którym wielokącie wszystkie kąty, jakie tworzą przekątne z bokami, są równe?
 A. W rombie. B. W trapezie równoramiennym.
 C. W kwadracie. D. W prostokącie.
- 5 Z siedmiu jednakowych kwadratów zbudowano prostokąt. Obwód kwadratu wynosi 12 cm. Ile centymetrów kwadratowych ma pole tego prostokąta?
 A. 27 cm^2 B. 63 cm^2 C. 84 cm^2 D. 480 cm^2
- 6 Na rysunku są trzy łamane: fioletowa, czerwona i zielona.
 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



Łamana zielona jest krótsza od czerwonej, ale dłuższa od niebieskiej.	P	F
Wszystkie łamane są tej samej długości.	P	F

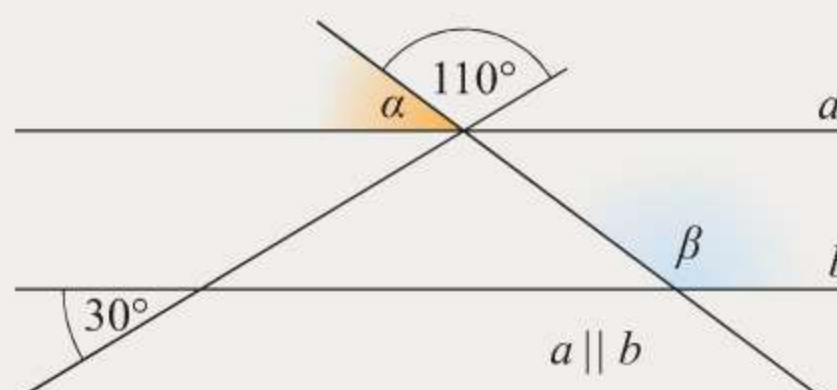
- 7 Trapez $ABCD$ przedstawiony na rysunku jest równoramienny.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



Pole trójkąta AED jest równe 20.	P	F
Pole trapezu prostokątnego $EBCD$ jest równe 88.	P	F

- 8 Na rysunku proste a i b są równoległe. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.



Miara kąta α jest równa A / B.

A. 40° B. 30°

Miara kąta β jest o C / D większa od miary kąta α .

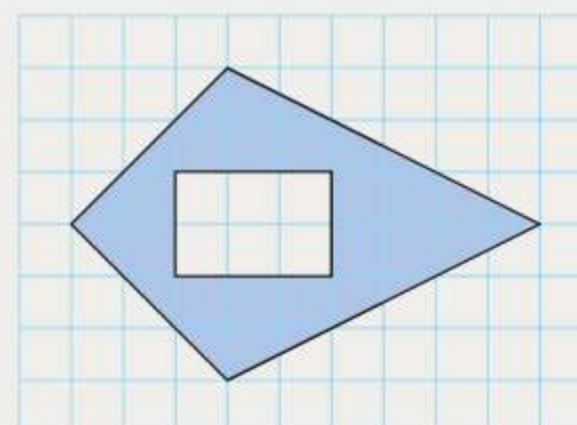
C. 100° D. 90°

- 9 Pole trójkąta wynosi $13,23 \text{ cm}^2$, a jeden jego bok ma długość $4,2 \text{ cm}$. Czy wysokość trójkąta opuszczona na ten bok jest równa $6,3 \text{ cm}$? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	$13,23 : 4,2 \neq 6,3.$
			2.	$26,46 : 4,2 = 6,3.$
B.	Nie,		3.	$\frac{26,46 : 4,2}{2} \neq 6,3.$

- 10 W trójkącie rozwartokątnym równoramiennym jeden z kątów zewnętrznych ma 60° . Wykaż, że kąty wewnętrzne tego trójkąta mają miary 30° , 30° , 120° .

- 11 Bok kwadratowej kostki chodnikowej ma 12 cm . Jakie jest pole niebieskiego fragmentu chodnika po zaokrągleniu do 1 dm^2 ? Odpowiedź uzasadnij.



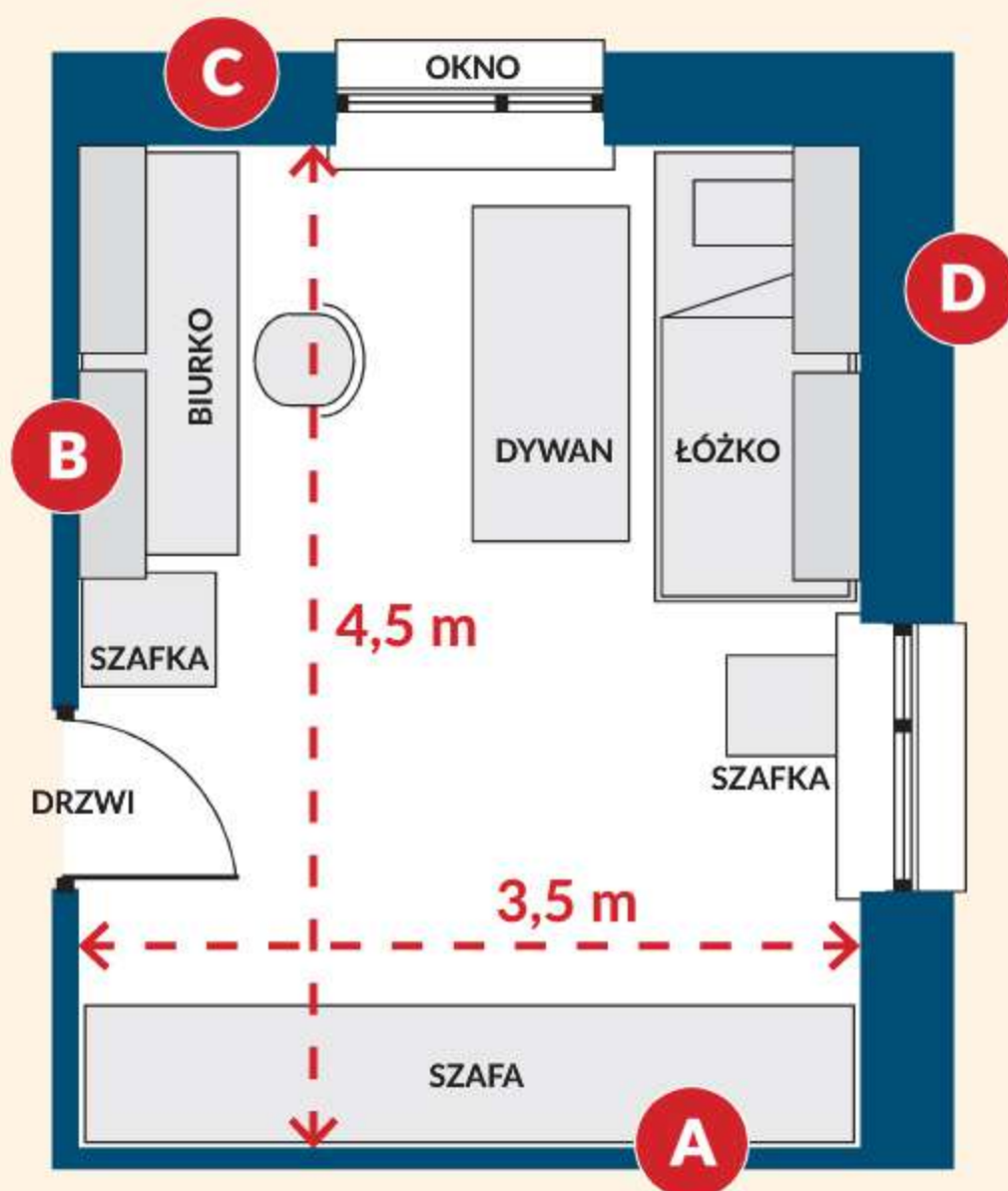
- 12 Suma długości przekątnych rombu wynosi $16,8 \text{ cm}$, a jedna z nich jest o 4 cm krótsza od drugiej. Ile centymetrów kwadratowych ma pole tego rombu? Odpowiedź uzasadnij.

Pole powierzchni a projekt pokoju

Matematyka przydaje się w wielu sytuacjach. Jedną z nich jest **urządzanie mieszkania czy pokoju**. Poza zmysłem estetycznym ważna jest sprawność rachunkowa oraz wiedza dotycząca figur geometrycznych.

PROJEKT POKOJU TOMKA

Oszacujmy koszt zakupu materiałów na wykonanie podłogi i pomalowanie ścian.*



Opakowanie zawiera:

2 m² paneli

Cena: **56,98 zł/m²**

PANELE

Powierzchnia podłogi

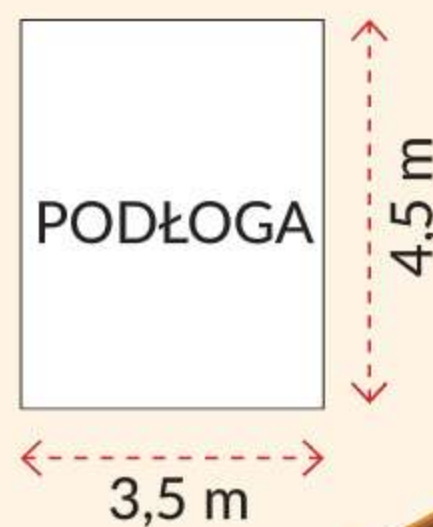
$$P = 3,5 \text{ m} \cdot 4,5 \text{ m} = \mathbf{15,75 \text{ m}^2}$$

Ile paczek paneli jest potrzebnych?

$$15,75 \text{ m}^2 : 2 \text{ m}^2 \approx \mathbf{8}$$

Ile kosztują panele?

$$8 \cdot 2 \cdot 56,98 \text{ zł} = \mathbf{911,68 \text{ zł}}$$



Listwa przypodłogowa:

Długość listwy: **2 m**

Cena za sztukę: **32,98 zł**

LISTWY

Obwód podłogi

$$L = 4,5 \text{ m} + 3,5 \text{ m} + 4,5 \text{ m} + 3,5 \text{ m} = \mathbf{16 \text{ m}}$$

Ile listew przypodłogowych jest potrzebnych?

$$16 \text{ m} : 2 \text{ m} = \mathbf{8}$$

Ile kosztują listwy?

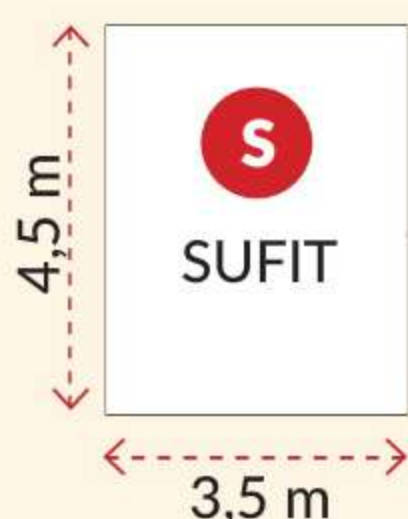
$$8 \cdot 32,98 \text{ zł} = \mathbf{263,84 \text{ zł}}$$

* W obliczeniach nie uwzględniono otworów na drzwi i okna.

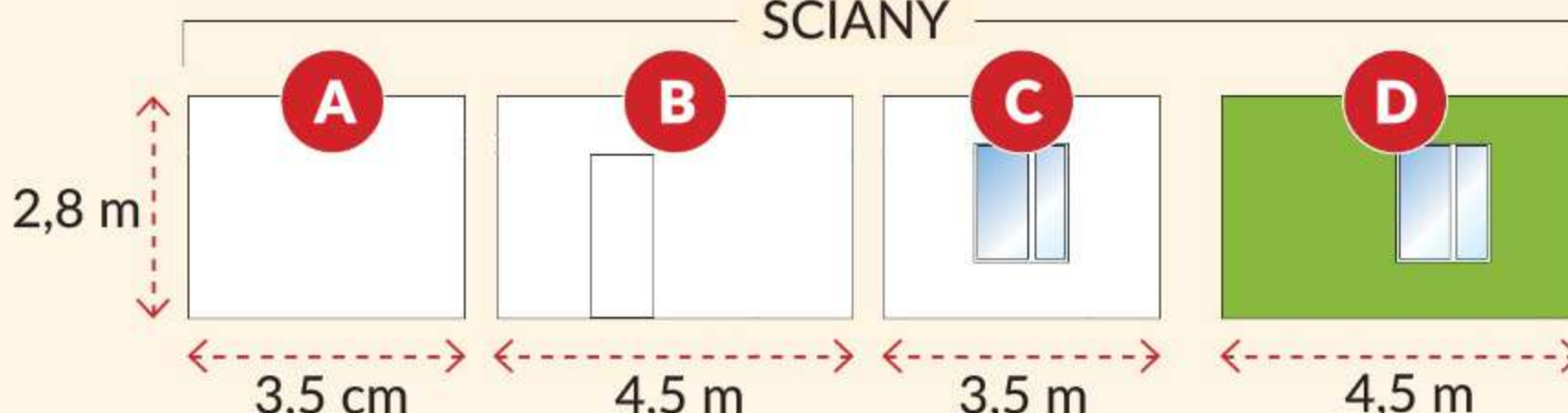


FARBA

ŚCIANY



$$P_S = 15,75 \text{ m}^2$$



$$P_A = P_C = 9,8 \text{ m}^2$$

$$P_B = P_D = 12,6 \text{ m}^2$$



Do pomalowania

na biało jest:

$$15,75 \text{ m}^2 + 2 \cdot 9,8 \text{ m}^2 + 12,6 \text{ m}^2 = 47,95 \text{ m}^2$$

Na ile m^2 wystarczy farby z puszki?
 $12 \text{ m}^2 / \text{l} \cdot 2 \text{ l} = 24 \text{ m}^2$

Wydajność:
 $12 \text{ m}^2 / \text{l}$

Cena:
59,99 zł

Ile puszek farby jest potrzebnych?
 $47,95 \text{ m}^2 : 24 \text{ m}^2 \approx 2$

Ile kosztuje farba?
 $2 \cdot 59,99 \text{ zł} = 119,98 \text{ zł}$



Do pomalowania

na zielono jest:

$$12,6 \text{ m}^2$$

Na ile m^2 wystarczy farby z puszki?
 7 m^2

Wydajność:
 $7 \text{ m}^2 / \text{l}$

Cena:
42,99 zł

Ile puszek farby jest potrzebnych?
 $12,6 \text{ m}^2 : 7 \text{ m}^2 \approx 2$

Ile kosztuje farba?
 $2 \cdot 42,99 \text{ zł} = 85,98 \text{ zł}$

1. Oś liczbowa, pojęcie liczby wymiernej

Przypomnij sobie

- jakie liczby nazywamy liczbami naturalnymi, a jakie liczbami całkowitymi,
- co to są liczby mieszane.

Przykład 1.

Zaznaczmy na osi liczbowej punkty odpowiadające następującym liczbom:
 4 , -3 , $2\frac{1}{2}$, 0 , $-\frac{9}{2}$, $-\frac{5}{3}$, $1\frac{1}{2}$.



Liczby znajdujące się na osi liczbowej na lewo od liczby 0 nazywamy **liczbami ujemnymi**, np. $-\frac{9}{2}$, -3 , $-\frac{5}{3}$.

Liczby znajdujące się na osi liczbowej na prawo od liczby 0 nazywamy **liczbami dodatnimi**, np. $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, 4 .

Liczba 0 nie jest ani liczbą dodatnią, ani ujemną.



Liczby naturalne, liczby całkowite oraz dodatnie i ujemne: ułamki i liczby mieszane nazywamy **liczbami wymiernymi**.

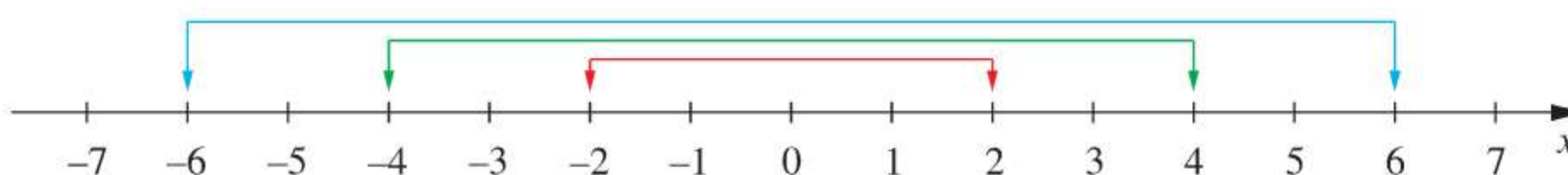
1 Na osi liczbowej zaznacz punkty odpowiadające podanym liczbom.

a) 1 ; $-2,5$; -4 ; $3,5$; -2 ; 3 ; $-4\frac{1}{2}$; $5\frac{3}{4}$; -5

b) -1 ; $2,5$; 4 ; $-3,5$; 2 ; -3 ; $-6\frac{1}{4}$; $5,5$; $-2\frac{1}{4}$

Przykład 2.

Zaznaczmy na osi liczbowej punkty odpowiadające liczbom: 2 i -2 , 4 i -4 , 6 i -6 .



Zauważmy, że punkty odpowiadające liczbom 2 i -2 leżą w jednakowej odległości od zera. To samo można powiedzieć o parach punktów odpowiadających liczbom 4 i -4 , 6 i -6 i wielu innych, np. $-\frac{3}{4}$ i $\frac{3}{4}$, $-1\frac{5}{8}$ i $1\frac{5}{8}$. Liczby takie nazywamy **liczbami przeciwnymi**.

Odległość liczby x od zera na osi liczbowej to **wartość bezwzględna liczby x** , którą oznaczamy symbolem $|x|$. Wartości bezwzględne liczb przeciwnych są równe, np. $|2| = |-2| = 2$.

Odwrotnością liczby a , gdzie $a \neq 0$, jest liczba $\frac{1}{a}$. Na przykład odwrotnością liczby 4 jest liczba $\frac{1}{4}$, a odwrotnością liczby $-\frac{3}{4}$ jest liczba $-\frac{4}{3}$, czyli $-1\frac{1}{3}$.

- 2 Do każdej z poniższych liczb podaj liczbę przeciwną.
 $-7\frac{4}{5}$; 2,8; 0,23; $-5\frac{1}{3}$; 1839; 0; -1993
- 3 Zaznacz na osi liczbowej punkty odpowiadające danym liczbom oraz liczbom do nich przeciwnym.
 a) 2,5; $4\frac{1}{2}$; $1\frac{2}{4}$ b) $-\frac{9}{3}$; $2\frac{3}{4}$; $-3\frac{1}{2}$
- 4 Zaznacz na osi liczbowej podane liczby i ich odwrotności.
 2 ; $\frac{2}{5}$; $-2\frac{1}{2}$; $-1\frac{1}{2}$; 0,8
- 5 Spośród liczb: $-9,6$; $-3\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $-\frac{3}{2}$; $\frac{48}{5}$; 3,5; $-\frac{6}{3}$; 1,5; $-\frac{27}{9}$; $\frac{4}{2}$; 6,7; $\frac{0}{5}$; -1 wybierz liczby:
 a) naturalne, b) całkowite, c) dodatnie,
 d) ujemne, e) wymierne, f) parami przeciwnne.
- 6 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Każda liczba całkowita jest liczbą wymierną.	P	F
Każda liczba wymierna jest liczbą całkowitą.	P	F
Liczba, która ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe, jest liczbą wymierną.	P	F

- 7 Która z poniższych wielkości jest wyrażana liczbą naturalną, która – liczbą dodatnią, a która – liczbą ujemną?
 I. Temperatura wrzenia wody.
 II. Liczba centymetrów kwadratowych pola kwadratu o boku 1,2 dm.
 III. Temperatura powietrza na szczycie najwyższej góry świata Mount Everest.
 IV. Liczba centymetrów wyrażająca obwód pięciokąta foremnego o boku 13 mm.

Ułamki postaci $\frac{1}{n}$ pojawiły się na dwa wieki przed ułamkiem $\frac{3}{4}$, a zapisane zostały na egipskim papiirusie. Ułamek $\frac{3}{4}$ pojawił się dziesięć wieków przed ułamkiem o dowolnym liczniku i mianowniku. Ułamek o dowolnym liczniku i mianowniku pojawił się w starożytnej Grecji w V w. p.n.e. Kreskę ułamkową wprowadzili w XII w. matematycy arabscy. Dziewięć wieków przed pojawieniem się kreski ułamkowej wprowadzono w Chinach pierwsze ułamki dziesiętne. Przecinek w zapisie ułamka dziesiętnego zastosował w 1617 r. uczony szkocki John Napier.

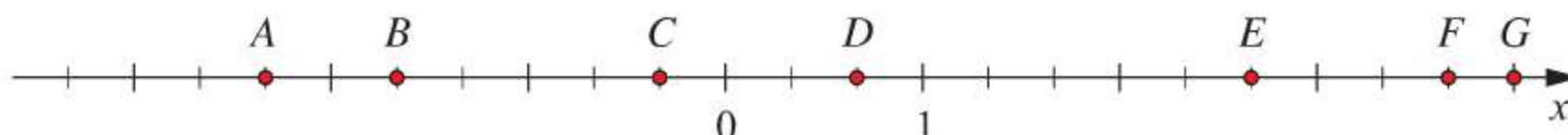
- 8 Wykorzystaj informacje z ramki i odpowiedz na pytania.
- Ile wieków upłynęło od pojawienia się pierwszych ułamków zapisanych na egipskim papiirusie do wprowadzenia kreski ułamkowej?
 - W którym wieku wprowadzono ułamki dziesiętne?

Wyzwanie

Pewna liczba wymierna ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe $0,(xyz)$. Cyfra znajdująca się na 17 miejscu po przecinku tego rozwinięcia jest równa 5, cyfra na 31 miejscu to 3, a cyfra na 54 miejscu to 7. Znajdź okres tego rozwinięcia dziesiętnego.

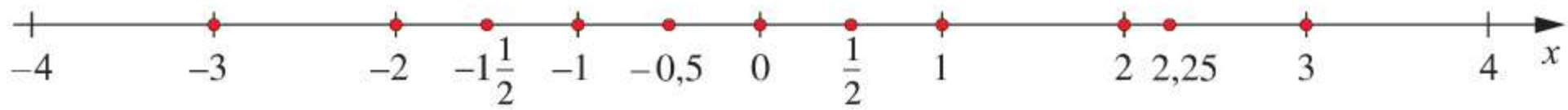
Sprawdź się!

- Na osi liczbowej zaznacz punkty odpowiadające liczbom:
 $-1,5$; $2\frac{1}{4}$; -4 ; $0,5$.
- Dana jest liczba $-1,2$. Podaj odwrotność tej liczby.
- Zapisz liczbę przeciwną do wartości wyrażenia $3\frac{1}{2} - \frac{1}{2} : \frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{3}$.
- Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.
Odwrotność liczby naturalnej różnej od zera jest liczbą A / B.
A. naturalną B. wymierną
Iloczyn danej liczby różnej od zera i jej odwrotności jest równy C / D.
C. 1 D. 0
- Jakie liczby odpowiadają punktom A, B, C, D, E, F, G?



2. Porównywanie liczb wymiernych

Na osi liczbowej zaznaczyliśmy przykładowe liczby wymierne.



Zaznaczone liczby można uporządkować od najmniejszej do największej, czyli

rosnąco: $-3 < -2 < -1\frac{1}{2} < -1 < -0,5 < 0 < \frac{1}{2} < 1 < 2 < 2,25 < 3$,

lub od największej do najmniejszej, czyli malejąco:

$3 > 2,25 > 2 > 1 > \frac{1}{2} > 0 > -0,5 > -1 > -1\frac{1}{2} > -2 > -3$.

Każda liczba ujemna jest mniejsza od każdej liczby dodatniej oraz od zera.



- 1 Na podstawie danych umieszczonych na mapie wykonaj polecenia.

- Odszukaj stolicę, w której było najchłodniej.
- Wypisz nazwy stolic, w których było chłodniej niż w Warszawie.
- Wypisz wskazane na mapie temperatury w kolejności od najniższej do najwyższej.

- 2 Zaznacz na osi liczbowej następujące liczby: -2 , 3 , -6 , 0 , 2 , 8 , -3 , -8 i zapisz je w kolejności od najmniejszej do największej.



- 3 Która z poniższych liczb jest największa, a która – najmniejsza?

-2 ; $2\frac{3}{4}$; -112 ; 20 ; $-\frac{2}{5}$; 7 ; $11,4$; $-6\frac{5}{9}$; $-0,101$

- 4 Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej.

$-1,6$; $-\frac{1}{2}$; $-0,7$; $-1\frac{1}{2}$; $-3,5$; $2\frac{1}{2}$; 0 ; $-4,8$

- 5 Uporządkuj liczby malejąco.

$-0,2$; $-\frac{1}{4}$; $-1,9$; $-0,1$; $\frac{1}{2}$; $-2,4$; $-\frac{5}{4}$; $-1,8$

- 6 Napisz trzy liczby całkowite dodatnie i trzy liczby całkowite ujemne, które są:
- większe od $-4,5$,
 - mniejsze od 5 ,
 - mniejsze od $8,5$ i jednocześnie większe od -4 .

Przykład 1.

Zaznaczmy na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek:

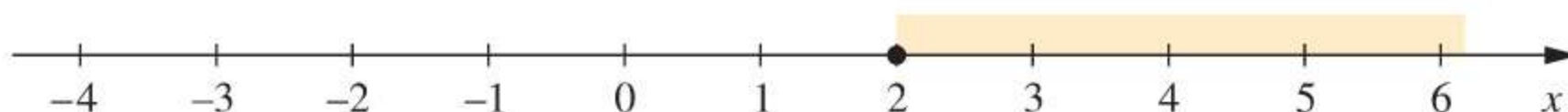
- a) $x > 2$ b) $x \geq 2$ c) $x < 4$

- a) $x > 2$ Czytamy: liczba x jest większa od 2.



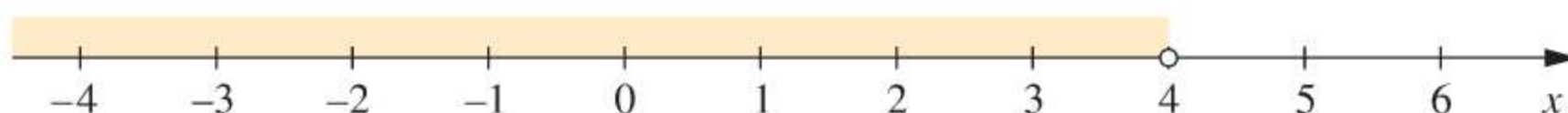
Warunek $x > 2$ spełnia każda liczba większa od 2, np. $2,5$; 3; 100. Liczba 2 nie spełnia tego warunku i dlatego zaznaczono ją na osi niezamalowanym kółkiem.

- b) $x \geq 2$ Czytamy: liczba x jest większa lub równa 2.



Warunek $x \geq 2$ spełnia każda liczba większa od 2 lub równa 2, np. 2; $2,5$; 5; 10. Liczba 2 spełnia podany warunek i dlatego zaznaczono ją na osi zamalowanym kółkiem.

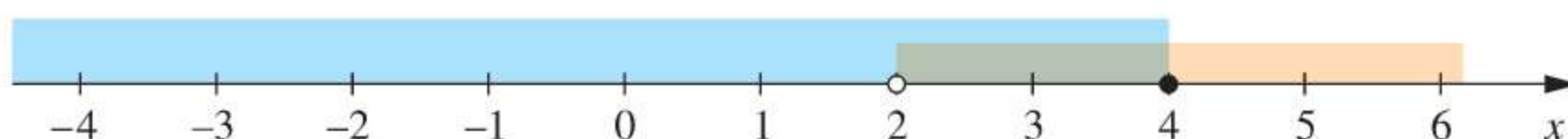
- c) $x < 4$ Czytamy: liczba x jest mniejsza od 4.



Warunek $x < 4$ spełnia każda liczba mniejsza od 4, np. 3, 0, -5 . Liczba 4 nie spełnia tego warunku.

Przykład 2.

Zaznaczmy na osi liczbowej zbiór liczb, które spełniają jednocześnie warunki: $x > 2$ i $x \leq 4$.



Obydwa warunki są spełnione przez liczby większe od 2 i jednocześnie mniejsze od 4 oraz przez liczbę 4, np. $2\frac{1}{2}$; 3; $3\frac{3}{4}$; 4.

- 7 Do każdego warunku dobierz wszystkie zestawy liczb, które go spełniają.

I. $x \geq 3$	A. $-3; -2; -\frac{1}{2}; 0; 3,9$
II. $x < 4$	B. $5; 7; 8\frac{1}{2}$
III. $x \leq 0$	C. $-4; -3; -2; -0,75; 0$
IV. $x > -5$	D. $-8; -\frac{1}{3}; -0,012$

- 8 Które spośród wymienionych liczb spełniają podane warunki?

a) $x > 1$	$10; -2; 8; 2; 6; 2,1; 1$
b) $x \geq -5$	$-4; 15; -8; -5; -6; -5,3; 0$
c) $x \geq -6$ i $x \leq 6$	$6; -5; -7; 7; 6,5; -6,5; 0$
d) $x > -2$ i $x \leq 4\frac{2}{3}$	$-2\frac{1}{2}; 0; -3; 4,6; -2; 4\frac{3}{4}; 4,67$

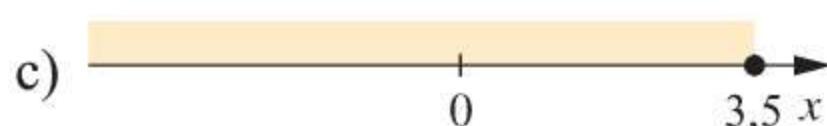
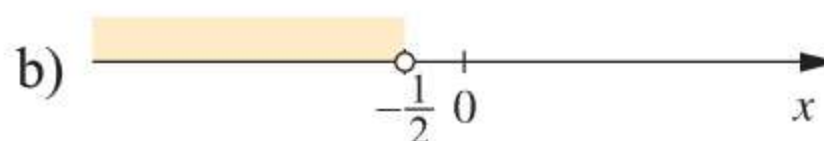
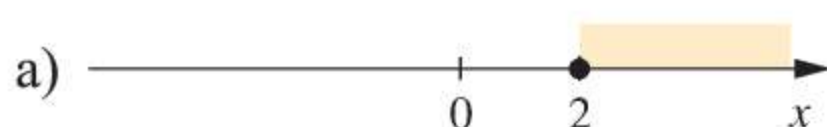
- 9 Zaznacz na osi liczbowej liczby spełniające warunek.

a) $x \leq \frac{1}{2}$	b) $x > -5$	c) $x \geq -2$
-------------------------	-------------	----------------

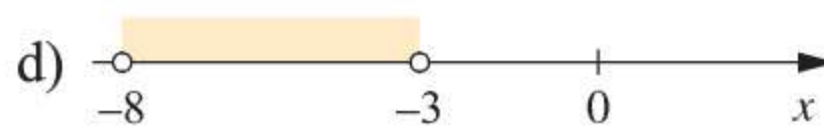
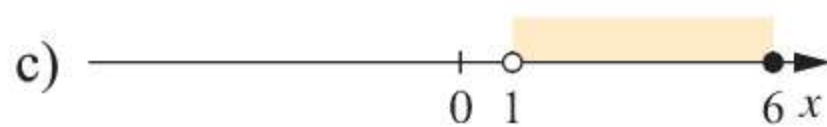
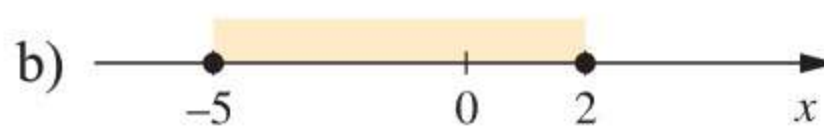
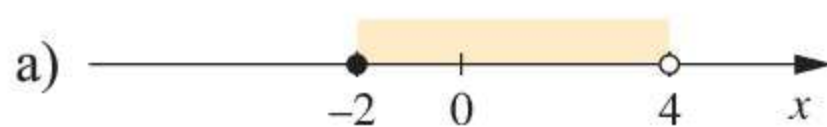
- 10 Zaznacz na osi liczbowej liczby spełniające jednocześnie oba warunki.

a) $x \geq -3$ i $x \leq 6$	b) $x \geq -4$ i $x < 0$
c) $x > -1$ i $x < 4$	d) $x > 3$ i $x \leq 7$

- 11 Zapisz warunek opisujący zbiór liczb zaznaczony na osi liczbowej.



- 12 Zapisz warunki opisujące zbiór liczb zaznaczony na osi liczbowej.



- 13 Porównaj liczby. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

a) $\frac{1}{3}$ i $0,3$	b) $-2,375$ i $2\frac{3}{8}$	c) $5,(61)$ i $5,602$
d) $-1,(2)$ i $-1,21$	e) $0,0014$ i -58	f) $-3,4$ i $-3,(41)$
g) $-\frac{3}{4}$ i $-\frac{5}{6}$	h) $\frac{7}{8}$ i $\frac{8}{9}$	i) $-\frac{2}{3}$ i $-0,(6)$

- 14 Które spośród podanych liczb a , b , c , d mają jednakowe wartości bezwzględne?

a) $a = -\frac{54}{25}$, $b = -2,16$, $c = 2\frac{4}{25}$, $d = -\frac{43}{20}$
b) $a = -0,35$, $b = 0,35$, $c = \frac{7}{20}$, $d = -\frac{21}{60}$
c) $a = -4\frac{2}{3}$, $b = -4,6$, $c = 4\frac{2}{3}$, $d = -\frac{14}{3}$

- 15 W tabeli podano temperatury panujące na planetach Układu Słonecznego.

Planeta	Merkury	Wenus	Ziemia	Mars	Jowisz	Saturn	Uran	Neptun
Temp. [°C]	od -180 do 430	465	od -88 do 58	od -130 do 25	-150	-180	-210	-220

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Największa różnica temperatur jest na Merkurym.	P	F
Najmniejsza różnica temperatur występuje na Ziemi.	P	F

Wyzwanie

Podaj liczbę, która:

- jest większa od 4,2, ale mniejsza od 4,3;
- jest większa od -2,13, ale mniejsza od -2,12;
- jest większa od -6,725, ale mniejsza od -6,724.

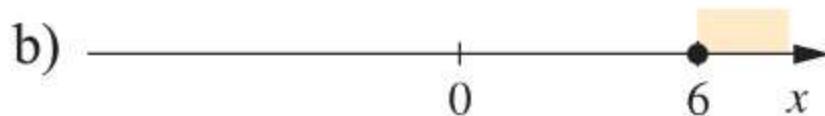
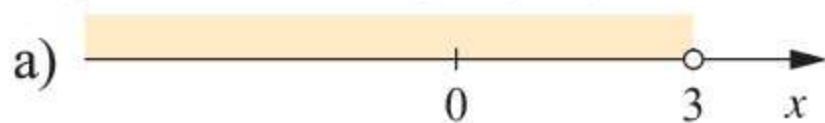
Ile takich liczb można podać?

Sprawdź się!

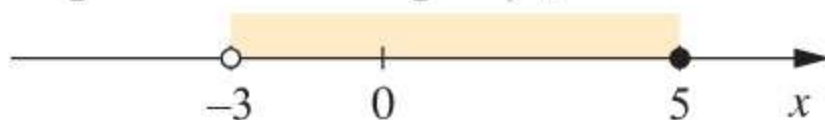
- 1 Które liczby całkowite są większe od liczby $-3\frac{1}{3}$? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
A. -3 i -4 B. -4 i -5 C. -2 i -3 D. -5 i -6

- 2 Które spośród liczb: -1; 2; 7; -3; 4; -2; 0; -2,5 spełniają jednocześnie warunki: $x > -2$ i $x \leq 4$?

- 3 Zapisz warunek opisujący zbiór liczb zaznaczony na osi liczbowej.



- 4 Zapisz warunki opisujące zbiór liczb zaznaczony na osi liczbowej.



- 5 Porównaj liczby. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

a) $-1,3125$ i $-1\frac{5}{16}$

b) $-4,(234)$ i $-4,(1234)$

3. Dodawanie i odejmowanie liczb wymiernych

Przypomnij sobie

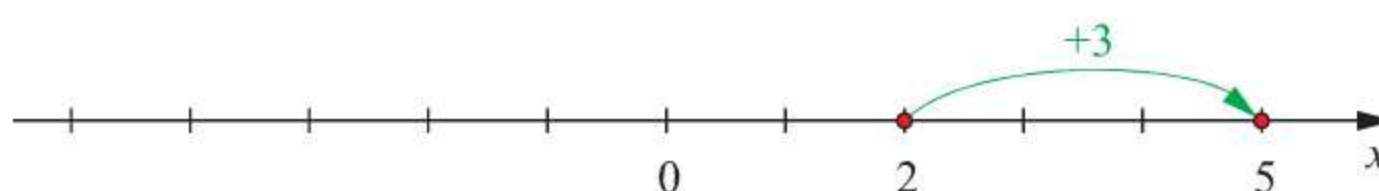
- jak wykonujemy dodawanie i odejmowanie liczb całkowitych.

Przykład 1.

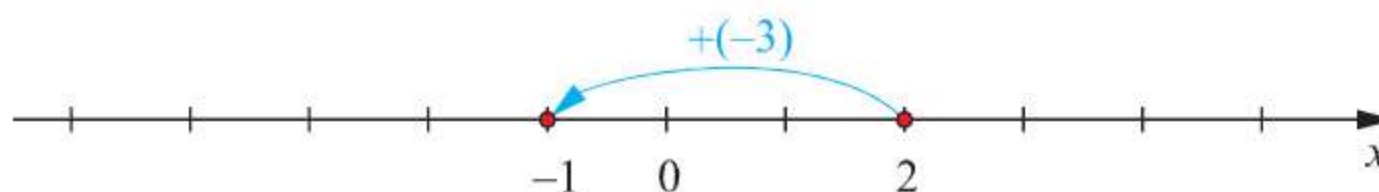
Wykonajmy dodawanie. Zilustrujmy je na osi liczbowej.

- a) $2 + 3$ b) $2 + (-3)$ c) $-2 + 3$ d) $-2 + (-3)$

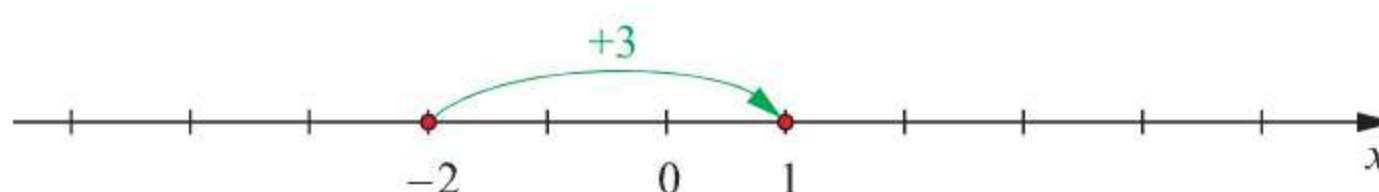
a) $2 + 3 = 5$



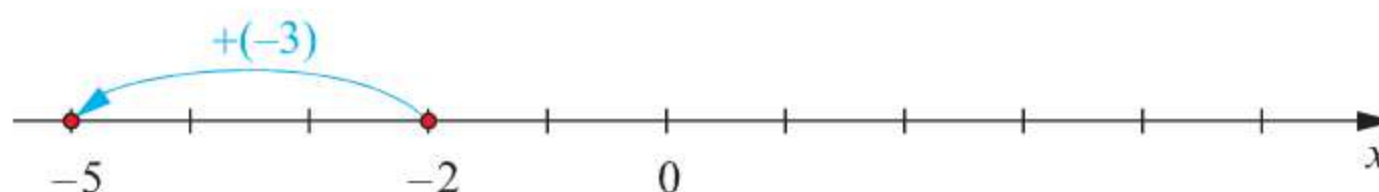
b) $2 + (-3) = -1$



c) $-2 + 3 = 1$



d) $-2 + (-3) = -5$



Jeżeli do danej liczby dodajemy liczbę dodatnią, to punkt odpowiadający danej liczbie na osi liczbowej przesuwamy w prawo o odpowiednią liczbę jednostek.

Jeżeli do danej liczby dodajemy liczbę ujemną, to punkt odpowiadający danej liczbie na osi liczbowej przesuwamy odpowiednio w lewo.

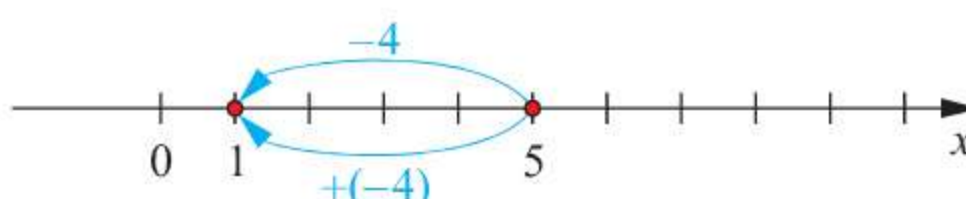


Przykład 2.

Wykonajmy odejmowanie. Zilustrujmy je na osi liczbowej.

- a) $5 - 4$ b) $5 - (-4)$ c) $-5 - 4$ d) $-5 - (-4)$

a) $5 - 4 = 1$
 $5 + (-4) = 1$





Odejmowanie dwóch liczb można zastąpić dodawaniem liczby przeciwnej do odjemnika.

A zatem:

b) $5 - (-4) = 5 + 4 = 9$

c) $-5 - 4 = -5 + (-4) = -9$

d) $-5 - (-4) = -5 + 4 = -1$

Przykład 3.

Wykonajmy działanie.

a) $5 + (-6)$

b) $3 - (-18)$

c) $-4 - (-10)$

d) $5 + (-5)$

a) $5 + (-6) = 5 - 6 = -1$

b) $3 - (-18) = 3 + 18 = 21$

c) $-4 - (-10) = -4 + 10 = 6$

d) $5 + (-5) = 5 - 5 = 0$



Przy dodawaniu i odejmowaniu liczby ujętej w nawiasy możemy pisać ją bez nawiasów, ale:

- jeżeli przed nawiasem jest znak minus, to po opuszczeniu nawiasu znak liczby w nawiasie zmieniamy na przeciwny.
- jeżeli przed nawiasem jest znak plus, to po opuszczeniu nawiasu znak liczby w nawiasie pozostaje taki sam.

Zwróćmy uwagę na to, że liczby 5 i -5 to liczby przeciwne, a ich suma jest równa zero.



Suma liczb przeciwnych jest równa zero.

1 Zapisz odejmowanie w postaci dodawania i zinterpretuj je na osi liczbowej.

a) $4 - 10$

b) $17 - (-20)$

c) $-8 - (-12)$

d) $-15 - 42$

e) $-10 - 7$

f) $-25 - (-13)$

2 Zapisz bez nawiasów poniższą liczbę.

a) $-(-6)$

b) $-(-(-9))$

c) $-(-(-(-\frac{1}{2})))$

3 Zapisz wyrażenie bez nawiasów i oblicz jego wartość.

- a) $(-15) + (-3)$ b) $-(-\frac{3}{4}) + (-\frac{1}{4})$ c) $-(-0,5) - (-\frac{1}{2})$
 d) $(-21) - (-15)$ e) $-1,2 - (-0,8)$ f) $24 - (-15) + (-32)$

Przykład 4.

Ustalmy, czy wynik działania będzie liczbą dodatnią czy ujemną, a następnie obliczmy wartość wyrażenia.

- a) $3 - (-7)$ b) $3 + (-7,8)$ c) $-3\frac{1}{2} + (-\frac{2}{3})$ d) $-2,3 - (-4,7)$

a) $3 - (-7) = 3 + 7$
 $3 + 7 = 10$

Dodajemy liczby dodatnie, a więc wynik będzie liczbą dodatnią.

b) $3 + (-7,8) = 3 - 7,8$
 $3 - 7,8 = 3 + (-7,8) = -7,8 + 3 = -(7,8 - 3) = -4,8$

Od mniejszej liczby odejmujemy większą liczbę, a więc wynik będzie liczbą ujemną.

c) $-3\frac{1}{2} + (-\frac{2}{3}) = -3\frac{1}{2} - \frac{2}{3}$
 $-3\frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -(3\frac{1}{2} + \frac{2}{3}) = -(3\frac{3}{6} + \frac{4}{6}) = -4\frac{1}{6}$

Dodajemy liczby ujemne, a więc wynik będzie liczbą ujemną.

d) $-2,3 - (-4,7) = -2,3 + 4,7 = 4,7 - 2,3$
 $4,7 - 2,3 = 2,4$

Od większej liczby odejmujemy mniejszą liczbę, a więc wynik będzie liczbą dodatnią.

4 Opuść nawiasy i oblicz wartość wyrażenia.

- a) $-12 + (-18)$ b) $-4 + (-7)$ c) $-8 - (-3)$
 d) $(-3) + (-5)$ e) $(-2) - (-14)$ f) $5\frac{3}{5} + (-7,4)$
 g) $-12\frac{2}{3} + (-5\frac{1}{2})$ h) $-4,3 - (-6\frac{1}{5})$ i) $(\frac{1}{6}) - (-\frac{1}{3})$

5 Oblicz.

- a) $(-5) - (-1\frac{3}{4})$ b) $(-2,2) + (-10\frac{1}{5})$ c) $(-1\frac{1}{3}) + (-15)$
 d) $(-9) - (-4\frac{1}{4})$ e) $(-3\frac{2}{5}) - 4,8$ f) $2\frac{1}{3} + (-5\frac{3}{5})$

6 Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Do liczby A / B należy dodać $2\frac{4}{15}$, żeby otrzymać $-\frac{4}{15}$.

A. -2

B. $-2\frac{8}{15}$

Od liczby C / D trzeba odjąć $-3\frac{5}{6}$, żeby otrzymać $3\frac{5}{6}$.

C. 0

D. $7\frac{4}{6}$

- 7 Suma dwóch liczb wynosi $-0,23$. Znajdź drugą liczbę, jeżeli pierwszą jest:
 a) -15 , b) 32 , c) $0,23$, d) 0 .
- 8 Główny składnik powietrza, azot, topnieje w temperaturze -210°C , a wrze w temperaturze $-195,8^{\circ}\text{C}$. Oblicz w stopniach Celsjusza różnicę między temperaturą wrzenia i topnienia azotu.
- 9 Przerysuj tabelę i ją uzupełnij.

Lp.	Temp. w dzień	Temp. w nocy	Różnica temp. między dniem i nocą
1	31°C	27°C	
2	18°C		11°C
3		-3°C	3°C
4	-7°C	-12°C	
5		-25°C	15°C
6	2°C		5°C

Lp.	Odjemna	Odjemnik	Różnica
1	-15	-4	
2		-1	-2
3	0		-8
4	10	17	
5	16		-5
6		35	-15

Przykład 5.

Obliczmy wartość wyrażenia.

a) $15 + (-21) + (-32) + 11 + (-13)$

b) $1,25 + 3\frac{1}{3} + (-1,25) + \left(-\frac{1}{3}\right)$

a) **Sposób I**

$$15 + (-21) + (-32) + 11 + (-13) = 15 - 21 - 32 + 11 - 13 = \\ = -6 - 32 + 11 - 13 = -38 + 11 - 13 = -27 - 13 = -40$$

Sposób II

$$15 + (-21) + (-32) + 11 + (-13) = (15 + 11) + [(-21) + (-32) + (-13)] = \\ = 26 + (-66) = 26 - 66 = -40$$

b) $1,25 + 3\frac{1}{3} + (-1,25) + \left(-\frac{1}{3}\right) = [1,25 + (-1,25)] + \left[3\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)\right] = \\ = (1,25 - 1,25) + \left(3\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0 + 3 = 3$

Stosowanie przemienności i łączności dodawania często ułatwia obliczenia.



Dodawanie liczb jest przemienne i łączne.

10 Oblicz.

a) $11 + (-12) + 39 + 9 - 8$

c) $-4\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\frac{1}{3}$

e) $\frac{4}{7} + \left(-\frac{3}{14}\right) + \frac{1}{14}$

g) $5\frac{2}{3} + \left(-3\frac{4}{5}\right) + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{5}\right)$

b) $45 + (-9) + (-91) + 5$

d) $6,25 + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) + 0,75$

f) $\frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{5}{8}\right)$

h) $16\frac{4}{5} + (-4,8) + 3\frac{1}{5} + \left(-4\frac{1}{5}\right)$

11 Oblicz.

a) $2,2 + \frac{12}{7} + (-1,2) + \left(-1\frac{5}{7}\right)$

c) $-3,9 + \frac{5}{8} + (-0,1) + 0,375$

e) $-15 + (-4 - (-7)) - (-8) + (-11)$

b) $6\frac{1}{2} + (-3,25) + \left(-1\frac{3}{4}\right) + 1$

d) $-(-3 + (-2)) + (-3)$

f) $28 - 39 + (-14) - (-12) - 81$

12 Od sumy liczb -63 i 28 odejmij sumę liczb -16 i -13 .**13** Do różnicy liczb $-0,64$ i $-2,8$ dodaj różnicę liczb $-8,6$ i $0,4$.**14** Najwyższym szczytem w Polsce jest jeden z wierzchołków Rysów, znajdujący się na wysokości 2499 m nad poziomem morza, a najniżej położone Żuławy Wiślane znajdują się około $1,8$ m poniżej poziomu morza. Oblicz różnicę wysokości najwyższego i najniższego miejsca w Polsce.

Na podstawie poniższych informacji rozwiąż zadanie 15.

Temperatura topnienia rtęci wynosi $-38,83^{\circ}\text{C}$, a temperatura jej wrzenia to $356,73^{\circ}\text{C}$. W warunkach normalnych rtęć ma postać ciekłą, dlatego była kiedyś wykorzystywana w termometrach. Ponieważ jej pary są bardzo toksyczne, zrezygnowano z tego zastosowania rtęci.

Wodór natomiast jest najpowszechniej występującym pierwiastkiem we Wszechświecie. Jego temperatura topnienia to $-259,32^{\circ}\text{C}$, a wrzenia to $-252,88^{\circ}\text{C}$.

15 Odpowiedz na pytania.a) O ile $^{\circ}\text{C}$ niższa jest temperatura topnienia rtęci od jej temperatury wrzenia?b) O ile $^{\circ}\text{C}$ wyższa jest temperatura topnienia rtęci od temperatury topnienia wodoru?

c) Jaka jest różnica między temperaturą wrzenia rtęci a temperaturą wrzenia wodoru?

d) Czy termometrem rtęciowym można zmierzyć temperaturę -40°C ? Odpowiedź uzasadnij.

- 16** Oblicz różnice wysokości między podanymi szczytami a depresjami.

Depresja	Wysokość [m p.p.m.]	Kontynent
Morze Martwe	417	Azja
jezioro Assal	153	Afryka
Laguna del Carbón (czyt. laguna del karbon)	105	Ameryka Południowa
Dolina Śmierci	86	Ameryka Północna
Morze Kaspijskie	28	Azja
Żuławy Wiślane	1,8	Europa

Szczyt	Wysokość [m n.p.m.]	Góry	Kraj
Mount Everest	8848	Himalaje	Nepal, Chiny
K2	8611	Karakorum	Chiny, Pakistan, Indie

- 17** Temperatura powierzchni Marsa waha się od -120°C do 25°C . Temperatura powierzchni Urana wynosi -210°C . Oblicz różnicę między najwyższą i najniższą temperaturą występującą na Marsie oraz różnicę między minimalną temperaturą na Marsie i temperaturą na Uranie.

Wyzwanie

Znajdź takie dwie liczby wymierne, aby ich:

- suma była mniejsza od jednego ze składników,
- suma była mniejsza od każdego składnika,
- różnica była większa od odjemnej.

Ile jest takich par liczb?

Sprawdź się!

- Zapisz odejmowanie $-3 - (-7)$ w postaci dodawania i zilustruj je na osi liczbowej.
- Zapisz wyrażenie bez nawiasów i oblicz jego wartość.
 - $7 + (-2)$
 - $(-0,8) - (-0,8)$
 - $7 - (-2)$
- Temperatura topnienia powietrza wynosi -213°C , a wrzenia -193°C . Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. Różnica między temperaturą wrzenia wody (100°C) a temperaturą wrzenia powietrza jest równa
 A. -293°C B. 313°C C. 293°C D. -313°C
- Do liczby -18 dodaj różnicę liczb -11 i $-9,5$.
- Oblicz: $48 - (-25) - (-(-(34 + (-7)) - 8)) + 20$.

4. Mnożenie i dzielenie liczb wymiernych

Przypomnij sobie

- jak wykonujemy mnożenie i dzielenie liczb całkowitych.

Przykład 1.

Obliczmy iloczyny w wyrażeniu: $8 \cdot 3 + (-8) \cdot 3$ i przyjrzyjmy się ich znakom.

Po zastosowaniu prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania otrzymujemy: $8 \cdot 3 + (-8) \cdot 3 = 3 \cdot [8 + (-8)] = 3 \cdot 0 = 0$

Wiemy, że jeżeli suma dwóch liczb jest równa zero, to te liczby są przeciwne, zatem iloczyny $8 \cdot 3$ i $(-8) \cdot 3$ są liczbami przeciwnymi, ponieważ $8 \cdot 3 = 24$, $(-8) \cdot 3 = -24$.

Liczby -8 oraz 3 to liczby różnych znaków, ich iloczyn jest liczbą ujemną.

Iloczyn dwóch liczb o różnych znakach jest liczbą ujemną.



Przykład 2.

Obliczmy iloczyny w wyrażeniu: $(-6) \cdot 3 + (-6) \cdot (-3)$ i przyjrzyjmy się ich znakom.

Postępujemy analogicznie jak w przykładzie 1 i otrzymujemy:

$$(-6) \cdot 3 + (-6) \cdot (-3) = (-6) \cdot [3 + (-3)] = (-6) \cdot 0 = 0$$

Ponieważ $(-6) \cdot 3 = -18$, $(-6) \cdot (-3) = 18$.

Liczby -6 i -3 to liczby tego samego znaku, ich iloczyn jest liczbą dodatnią.

Iloczyn dwóch liczb tego samego znaku jest liczbą dodatnią.



1 Oblicz.

a) $\left(-\frac{5}{8}\right) \cdot 1,6$

b) $(-3,2) \cdot (-100)$

c) $1\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$

Przykład 3.

Wykonajmy mnożenie: $5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot (-6)$.

Sposób I

$$5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot (-6) = \frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot (-6) = -\frac{1}{3} \cdot (-6) = 2$$

Sposób II

$$5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot (-6) = \left[5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)\right] \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (-6)\right] = -1 \cdot (-2) = 2$$

Stosowanie przemienności i łączności mnożenia często ułatwia wykonywanie obliczeń.



Mnożenie liczb jest przemienne i łączne.

2 Wykonaj działania – zastosuj przemienność i łączność mnożenia.

a) $(-1,2) \cdot 2,5 \cdot (-10) \cdot 4 \cdot (-2)$

b) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{5}{8} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{8}{15}\right) \cdot 0,3$

c) $0,007 \cdot 1,3 \cdot (-1000) \cdot (-20)$

d) $\left(-\frac{5}{6}\right) \cdot (-2,5) \cdot 2\frac{2}{5} \cdot 2 \cdot (-1)$

Przykład 4.

Sprawdźmy, czy iloczyn jest liczbą dodatnią czy ujemną.

a) $1 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot 1$

b) $2 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot 1$

c) $(-1) \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-2)$

d) $(-5) \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot 0$

a) $[1 \cdot (-2)] \cdot [(-2) \cdot 1] = (-2) \cdot (-2) = 4$

Dwa czynniki są ujemne, zatem iloczyn jest liczbą dodatnią.

b) $[2 \cdot (-1)] \cdot [(-1) \cdot (-2)] \cdot 1 =$
 $= -2 \cdot 2 \cdot 1 = -4$

Trzy czynniki są ujemne, zatem iloczyn jest liczbą ujemną.

c) $[(-1) \cdot 2] \cdot [(-1) \cdot (-1)] \cdot (-2) =$
 $= -2 \cdot 1 \cdot (-2) = 4$

Cztery czynniki są ujemne, zatem iloczyn jest liczbą dodatnią.

d) $[(-5) \cdot 2] \cdot [2 \cdot (-3)] \cdot (4 \cdot 0) =$
 $= -10 \cdot (-6) \cdot 0 = 0$

Jeden z czynników jest zerem, zatem iloczyn jest zerem.

Iloczyn jest liczbą dodatnią, jeżeli liczba czynników ujemnych jest parzysta i żaden z czynników nie jest zerem.
Iloczyn jest liczbą ujemną, jeżeli liczba czynników ujemnych jest nieparzysta i żaden z czynników nie jest zerem.



3 Bez obliczania ustal znak wartości wyrażenia i użyj odpowiedniego znaku: =, <, >.

a) $10 \cdot (-3) \cdot 6,5$ 0

b) $-1 \cdot 0,125 \cdot (-10)$ 0

c) $(-4) \cdot (-5)$ 0

d) $-700 \cdot 0$ 0

e) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$ 0

f) $-1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot 4 \cdot (-5)$ 0

Przykład 5.

Wykonajmy dzielenie.

a) $-4 : 1\frac{1}{3} = -4 : \frac{4}{3} = -4 \cdot \frac{3}{4} = -3$

Dzielna i dzielnik mają różne znaki, zatem iloraz jest liczbą ujemną.

b) $-7 : (-1,4) = (-7) : \left(-\frac{14}{10}\right) = \left(-\frac{7}{1}\right) \cdot \left(-\frac{10}{14}\right) = 5$

Dzielna i dzielnik są liczbami ujemnymi, zatem iloraz jest liczbą dodatnią.

c) $4,2 : (-2) = \frac{42}{10} : \left(-\frac{2}{1}\right) = \frac{21}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2,1$

Dzielna i dzielnik mają różne znaki, zatem iloraz jest liczbą ujemną.

Iloraz dwóch liczb o jednakowych znakach jest liczbą dodatnią.
Iloraz dwóch liczb o różnych znakach jest liczbą ujemną.



4 Wykonaj dzielenie.

a) $36 : (-4)$

b) $(-42) : (-7)$

c) $(-72) : 9$

d) $(-2,1) : 0,7$

e) $6,5 : (-1,3)$

f) $(-7,7) : 0,1$

g) $(-4,8) : (-12)$

h) $(-9,1) : (-13)$

i) $8,46 : (-6)$

5 Znajdź odwrotność każdej z liczb.

$\frac{2}{3}$; 8; $-\frac{3}{4}$; -5; -0,6; $1\frac{1}{2}$; $-2\frac{1}{3}$; 1,2; -3,4

6 Wykonaj dzielenie.

a) $\left(-5\frac{2}{3}\right) : \left(-2\frac{5}{6}\right)$

b) $0 : \left(-1\frac{1}{2}\right)$

c) $(-0,8) : 0,5$

d) $(-1,2) : (-0,03)$

e) $3,6 : (-0,9)$

f) $(-1) : 2\frac{1}{2}$

g) $3\frac{1}{3} : \left(-2\frac{2}{9}\right)$

h) $\left(-5\frac{1}{3}\right) : \left(-\frac{8}{11}\right)$

i) $\left(-\frac{7}{2}\right) : (-3,5)$

- 7 Jaką liczbą powinno być x , by iloraz był liczbą dodatnią?

a) $\frac{-4}{x}$

b) $\frac{-x}{6}$

c) $\frac{-x}{-2}$

d) $\frac{-(-(-(-x)))}{-3}$

- 8 Wykonaj obliczenia. Odszukaj wyniki w poniższej tabeli. Przyporządkuj im odpowiednie litery. Poznasz nazwisko słynnego filozofa greckiego, żyjącego w V i IV w. p.n.e.

I. $-18 : \left(-\frac{1}{3}\right)$ **N**

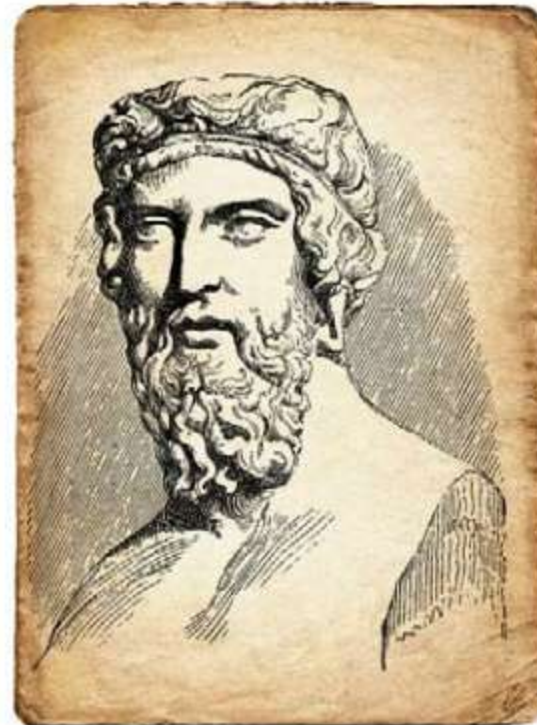
II. $7,5 \cdot (-1)$ **P**

III. $-2,5 \cdot 2\frac{1}{2}$ **L**

IV. $0 : (-6,8)$ **A**

V. $-3\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)$ **O**

VI. $-3\frac{1}{9} : \left(-4\frac{2}{3}\right)$ **T**



-7,5	-6,25	0	$\frac{2}{3}$	3	54
------	-------	---	---------------	---	----

- 9 Iloraz liczby $2\frac{2}{3}$ i liczby $-4,8$ zwiększ o $\frac{5}{9}$.

- 10 Do iloczynu liczb $1,2$ i $-2\frac{1}{3}$ dodaj iloczyn liczb $\frac{6}{7}$ i $-1\frac{1}{6}$.

- 11 Liczba a jest równa iloczynowi liczby $-16\frac{4}{5}$ oraz odwrotności liczby $10,5$, a liczba b jest równa ilorazowi liczby $-20,4$ i liczby o 34 od niej większej. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Różnica liczb a i b wynosi 0,1.	P	F
Suma liczb a i b jest mniejsza od -3 .	P	F

- 12 Dane są dwie liczby:

$$a = -1\frac{2}{3} \cdot (-0,6) \cdot 2\frac{2}{5} \cdot (-0,75) \quad \text{i} \quad b = -4,5 : \left(-3\frac{3}{5}\right).$$

Co jest mniejsze: iloraz a i b czy iloczyn a i b ?

- 13 Dane są trzy liczby:

$$x = -2\frac{5}{8} : 1,75, \quad y = -\frac{2}{3} \cdot (-1,4) \cdot \left(-\frac{6}{7}\right), \quad z = 1\frac{4}{5} : (-18).$$

Co jest większe: $x - y$ czy $y - z$?

Wyzwanie

Znajdź takie dwie liczby wymierne, których:

- a) iloczyn jest:
- mniejszy od każdej z tych liczb,
 - równy zero,
 - równy -1 ,
 - równy liczbie przeciwnej do jednej z tych liczb;
- b) iloraz jest:
- większy od każdej z tych liczb,
 - większy od dzielnej,
 - równy zero,
 - większy od dzielnika.

Ile jest takich par liczb?

Sprawdź się!

1 Oblicz.

a) $(-7) \cdot (-8)$

b) $4 \cdot \left(-10\frac{1}{4}\right)$

c) $0,4 \cdot (-0,9)$

2 Dane są dwie liczby:

$a = -\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot (-45)$ oraz $b = 3,2 : \left(-1\frac{1}{5}\right)$.

Która z nich jest większa i o ile?

3 Jaką liczbą powinno być x , by iloraz był liczbą dodatnią?

a) $\frac{x}{5}$

b) $\frac{-5}{x}$

c) $\frac{-1}{-x}$

d) $\frac{-x}{-(-8)}$

4 Czy iloraz liczby $-1,2$ i jej odwrotności jest większy od iloczynu liczby $1\frac{2}{3}$ i liczby do niej przeciwnej? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	iloraz liczby $-1,2$ i jej odwrotności wynosi 1, a iloczyn liczby $1\frac{2}{3}$ i liczby do niej przeciwnej wynosi -1 .
B.	Nie,		2.	iloraz liczby ujemnej i jej odwrotności jest liczbą dodatnią, a iloczyn liczb przeciwnych jest liczbą ujemną.

5 Iloczyn liczb: $2\frac{1}{5}$, $0,3$ i -5 pomniejsz o 6.

5. Działania na liczbach wymiernych

Przypomnij sobie

- w jakiej kolejności wykonujemy działania,
- które działania są przemienne i łączne.

Przykład 1.

Ustalmy kolejność wykonywania działań i obliczmy wartość wyrażenia.

$$\text{a) } -3 - 2 \cdot (-7) + (-132) : (-12) - (-3) \cdot 4 \qquad \text{b) } (-3 + 5) : \frac{1}{2} \cdot (8 - 15)$$

Działania na liczbach wymiernych wykonuje się według tych samych zasad co działania na ułamkach (patrz: rozdział I. *Ułamki zwykłe i dziesiętne*). Na początku numerujemy działania w takiej kolejności, w jakiej powinny zostać wykonane.

$$\begin{array}{cccccc} \textcircled{4} & \textcircled{1} & \textcircled{5} & \textcircled{2} & \textcircled{6} & \textcircled{3} \\ \text{a) } -3 - 2 \cdot (-7) + (-132) : (-12) - (-3) \cdot 4 = -3 - (-14) + 11 - (-12) = \\ = -3 + 14 + 11 + 12 = 34 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \textcircled{1} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{2} \\ \text{b) } (-3 + 5) : \frac{1}{2} \cdot (8 - 15) = 2 : \frac{1}{2} \cdot (8 - 15) = 2 \cdot 2 \cdot (-7) = 4 \cdot (-7) = -28 \end{array}$$

1 Oblicz najprostszym sposobem.

- | | |
|---|------------------------------------|
| a) $37 \cdot 62 + (-36) \cdot 62$ | b) $12 \cdot (-3) - (-4) \cdot 12$ |
| c) $48 \cdot (-36) + (-36) \cdot (-42)$ | d) $24 \cdot (-3) - 4 \cdot (-3)$ |
| e) $14 : (-3) - (-8) : 3$ | f) $(-19) : (-2) + (-21) : 2$ |

2 Wskaż pary wyrażeń, które mają tę samą wartość.

- | | |
|---|--|
| I. $\frac{1}{5} + (-0,8) \cdot 1\frac{1}{4} - 0,2$ | II. $-0,5 \cdot 3 : \left(-\frac{1}{2}\right) : (-0,1) : (-60)$ |
| III. $-4,75 : 2\frac{1}{9} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)$ | IV. $\left[-2,5 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right] : (-1,5)$ |
| V. $-0,81 : \frac{9}{10} + 5 \cdot 0,48$ | VI. $144 : \left[10 + \left(-\frac{1}{4} - 3,75\right) : 2\right] : (-3 - 15)$ |

3 Bez wykonania obliczeń wskaż wyrażenia, których wartość jest liczbą dodatnią.

- | | |
|---|---|
| I. $(-300) : (18 + (-13))$ | II. $((-12) + (-12)) \cdot 40 : (-20)$ |
| III. $(-18 + 30) \cdot (-72 - 36) : (-2)$ | IV. $-(-4 + 7) + (-12 - 4 \cdot 2) : 8$ |

4 Oblicz: $[-(-17 + 10) + 8] : [-4 + 3 \cdot (-5) \cdot (-2) : 10 - 2] + (-7)$.

5 Oblicz.

a) $\left(4 - 1\frac{1}{4} : 1\frac{9}{16}\right) \cdot \left(-15\frac{5}{8}\right)$

b) $\frac{4}{5} - \left(1,2 \cdot \frac{5}{12} - 0,8\right) : \left(-\frac{1}{8}\right)$

c) $\frac{2\frac{2}{3} - 25 : 12,5}{\left(9 - 6 \cdot 1\frac{1}{6}\right) \cdot (-2)}$

d) $\frac{4,5 \cdot 1\frac{2}{3} - 3,75}{\frac{5}{9} - \frac{10}{27} : \left(-\frac{5}{6}\right)}$

6 Od liczby 13,5 odejmij iloczyn liczb $-3,6$ i $-1,7$.7 Sumę liczb $1\frac{3}{5}$ i $1\frac{2}{3}$ podziel przez różnicę liczb -4 oraz $-1\frac{2}{3}$.8 Do ilorazu liczb $-4,8$ i -2 dodaj iloczyn liczb $-\frac{1}{2}$ i $\frac{4}{5}$.9 Wykaż, że wartość poniższego wyrażenia jest równa -50 .
 $-99 + 97 - 95 + 93 - 91 + 89 - 87 + 85 - \dots - 7 + 5 - 3 + 1$ 10 Wyznacz brakującą liczbę a .

a) $0,8 + (-8,4) : a = -2,2$

b) $\frac{1}{2} - \left(1,2 \cdot \frac{5}{12} - a\right) : \frac{1}{8} = 1,3$

Wyzwanie

Marek wybrał pewną liczbę i pomnożył ją przez $-\frac{3}{4}$. Wynik podzielił przez 3, po czym otrzymaną liczbę jeszcze raz podzielił przez $-0,75$ i otrzymał $-1\frac{1}{3}$. Jaką liczbę wybrał na początku?

Sprawdź się!

1 Oblicz najprostszym sposobem.

a) $(-16) : 4 + (-24) : 4$

b) $(-36) : (-7) + 15 : (-7)$

2 Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia: $(-4 + 7) : \frac{1}{3} \cdot (5 - 11)$ jest równa

A. 234

B. $-1,5$ C. -6 D. -54 3 Oblicz: $-4 \cdot [8 - (-5) \cdot (-2) + (-4) \cdot 7] : [-(-4) + 11]$.4 Wykaż bez wykonywania obliczeń, że wartość wyrażenia $(-7 + 19) : (-3 - 4) \cdot (-5) : (20 - (-1))$ jest liczbą dodatnią.5 Do liczby -8 dodaj iloraz liczb $-\frac{3}{4}$ i 2.

6. Potęga o wykładniku naturalnym

Przypomnij sobie

- co oznaczają zapisy 6^2 , 4^3 ,
- ile wynosi kwadrat liczby 7,
- ile wynosi sześcian liczby 2.

Iloczyn jednakowych czynników można przedstawić w postaci potęgi, np.

$$\underbrace{3 \cdot 3}_{2 \text{ czynniki}} = 3^2$$

Czytamy: 3 do potęgi drugiej lub druga potęga liczby 3.

$$\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3 \text{ czynniki}} = 5^3$$

Czytamy: 5 do potęgi trzeciej lub trzecia potęga liczby 5.

$$\underbrace{(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)}_{4 \text{ czynniki}} = (-1)^4$$

Czytamy: -1 do potęgi czwartej lub czwarta potęga liczby -1 .

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}} = a^n$$

Czytamy: a do potęgi n lub n -ta potęga liczby a .



n -tą potęgą liczby a nazywamy iloczyn n czynników a .

$$\begin{array}{c} \text{wykładnik potęgi} \\ \nearrow \\ a^n \\ \uparrow \\ \text{podstawa potęgi} \end{array} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

Dla każdej liczby a mamy $a^1 = a$.

Dla każdej liczby $a \neq 0$ mamy $a^0 = 1$.

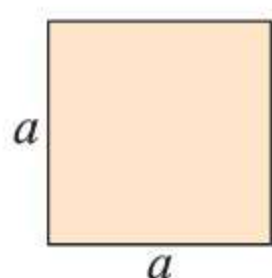
Przyjmujemy, że działanie 0^0 – gdy wykładnik i podstawa potęgi są jednocześnie równe zero – nie jest wykonalne. W pozostałych przypadkach korzystamy z definicji potęgi.

$$\begin{array}{lll} 5^0 = 1 & (-8)^0 = 1 & \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1 \\ 0^1 = 0 & 0^2 = 0 & 0^3 = 0 \\ 3^1 = 3 & (-12)^1 = -12 & 5,4^1 = 5,4 \end{array}$$

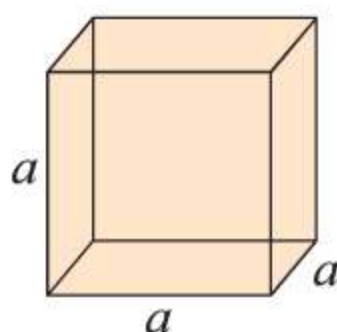
Drugą potęgę liczby a nazywamy także **kwadratem liczby a** i zapisujemy a^2 .

Trzecią potęgę liczby a nazywamy także **sześcianem liczby a** i zapisujemy a^3 .

Terminy *kwadrat* i *sześcian* nawiązują do geometrii.



a^2 – pole
kwadratu
o boku a



a^3 – objętość
sześcianu
o krawędzi a

1 Oblicz drugie potęgi liczb: 0, 1, 5, -2, $\frac{1}{2}$.

2 Oblicz sześciany liczb: 0, 3, -1, $\frac{1}{3}$, 4.

Wiemy, że iloczyn liczb wymiernych różnych od zera jest dodatni, jeżeli liczba czynników ujemnych jest parzysta, oraz że iloczyn jest ujemny, gdy liczba czynników ujemnych jest nieparzysta, np.

$$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) > 0, \text{ stąd } (-2)^4 > 0$$

$$(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) < 0, \text{ stąd } (-3)^3 < 0$$

Potęga liczby ujemnej jest liczbą dodatnią, jeśli wykładnik potęgi jest liczbą parzystą.

Potęga liczby ujemnej jest liczbą ujemną, jeśli wykładnik potęgi jest liczbą nieparzystą.



3 Zapisz iloczyn w postaci potęgi i określ, czy jest on dodatni czy ujemny.

a) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$

b) $(-2,8) \cdot (-2,8) \cdot (-2,8) \cdot (-2,8)$

4 Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 10.

a) 10

b) 100

c) 1000

d) 10 000

e) 1 000 000 000

5 Oblicz.

a) 2^5 , $(-4)^3$

b) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$, $\left(-3\frac{1}{3}\right)^5$

c) $0,01^3$, $(-1,3)^2$

6 Znajdź liczbę, której:

a) kwadrat jest równy: 49, 121, 169, 225, 625, 10 000;

b) sześcian jest równy: 64, 125, 512, 729, 1000, 8000.

7 Zapisz liczby:

a) 6, 216, 1296, 1 w postaci potęgi o podstawie 6;

b) 9, -27, 81, -243, 1 w postaci potęgi o podstawie -3;

c) $-\frac{1}{7}$, $\frac{1}{49}$, $-\frac{1}{343}$, 1 w postaci potęgi o podstawie $-\frac{1}{7}$.

Przykład 1.

Obliczmy wartość wyrażenia.

$$\begin{aligned} -3^2 : (2^2 - 1^4) + (-4)^2 \cdot 2 &= -(3 \cdot 3) : (2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1) + (-4) \cdot (-4) \cdot 2 = \\ &= (-9) : (4 - 1) + 16 \cdot 2 = (-9) : 3 + 32 = -3 + 32 = 29 \end{aligned}$$



Jeśli w wyrażeniu potęgowanie występuje z innymi działaniami (z mnożeniem, dzieleniem, dodawaniem i odejmowaniem), to potęgowanie wykonujemy w pierwszej kolejności.

8 Oblicz.

a) $(-4)^2 + 2^3$

b) $3^2 - 5^2$

c) $(-4)^3 - 6^2$

d) $8^2 - (-4)^3$

e) $-4^2 + (-3)^4$

f) $(-1)^7 - (-2)^6$

9 Oblicz wartość wyrażenia.

a) $4 \cdot (-0,5)^2 + 6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-0,8) : \left(-\frac{4}{5}\right)$ c) $\left(4 \cdot \frac{3}{2^2} - \frac{2^2}{5}\right) : 2,2$

10 Oblicz pole kwadratu o boku 6 cm i pole kwadratu o boku dwa razy krótszym. Ile razy pole większego kwadratu jest większe od pola mniejszego? Narysuj te kwadraty.

11 Ile sześciąt o krawędzi 2 cm można zmieścić wewnątrz sześcianu, którego krawędź jest cztery razy dłuższa?

12 Jaka cyfra może wystąpić w rzędzie jedności liczby, która jest:

a) kwadratem liczby naturalnej,

b) potrojonym kwadratem liczby naturalnej?

13 Wykaż, że wartość wyrażenia: $(-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{20}$ jest równa 1.

Przykład 2.

Wyznamy ostatnią cyfrę liczby 3^{67} .

Zapiszmy kolejne potęgi liczby 3.

$3^1 = 3$

$3^2 = 9$

$3^3 = 27$

$3^4 = 81$

$3^5 = 243$

$3^6 = 729$

$3^7 = 2187$

itd.

Można zauważyć, że co czwarta tak utworzona liczba ma na końcu taką samą cyfrę. Musimy wobec tego ustalić, czy potęga o wykładniku 67 będzie miała taką liczbę jedności jak jedna z potęg: 3^1 , 3^2 , 3^3 , 3^4 .

Po podzieleniu kolejnych liczb naturalnych przez 4 otrzymujemy:

$1 : 4 = 0$ reszta 1

$2 : 4 = 0$ reszta 2

$3 : 4 = 0$ reszta 3

$4 : 4 = 1$ reszta 0

$5 : 4 = 1$ reszta 1

$6 : 4 = 1$ reszta 2

$7 : 4 = 1$ reszta 3

itd.

Reszty z dzielenia przez 4 to liczby: 1, 2, 3, 0. Z powyższego zapisu wynika, że:

- reszta 1 jest dla każdej dzielnej spośród: 1, 5, 9, 13, ...
- reszta 2 jest dla każdej dzielnej spośród: 2, 6, 10, 14, ...
- reszta 3 jest dla każdej dzielnej spośród: 3, 7, 11, 15, ...
- podzielne przez 4 są liczby: 4, 8, 12, 16, ...

Wykładnikiem potęgi jest liczba 67, a $67 : 4 = 16$ reszta 3. Reszta 3 jest również dla dzielnej 3, co oznacza, że ostatnia cyfra liczby 3^{67} i liczby 3^3 jest taka sama, czyli jest równa 7.

ODPOWIEDŹ: Ostatnią cyfrą liczby 3^{67} jest 7.

- 14** Jaka jest ostatnia cyfra podanej liczby?
 a) 2^{84} b) 4^{128} c) 7^{31}
- 15** Przedstaw za pomocą sześciangu liczby naturalnej:
 a) sumę drugiej i trzeciej nieparzystej liczby naturalnej,
 b) sumę czterech kolejnych liczb nieparzystych większych od 12 i mniejszych od 20.
- 16** Jaka jest ostatnia cyfra liczby, która jest wynikiem poniższych działań?
 a) $10^{111} + 2^{41} - 1^{72}$ b) $3^{74} - 4^{17} + 7^{25}$ c) $5^{27} - 3^{25} \cdot 8$ d) $6^{11} - 5 \cdot 2^{34}$

Wyzwanie

Ile szóstek należy dodać do siebie, aby otrzymać liczby: 6^4 , 6^{11} , 6^{95} ?

Sprawdź się!

- 1** Zapisz iloczyn w postaci potęgi i określ, czy jest on dodatni czy ujemny.
 a) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$ b) $\left(-1\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right)$
- 2** Oblicz.
 a) $(-0,001)^2$ b) $\left(1\frac{2}{3}\right)^3$
- 3** Czy liczba a jest większa od liczby b , jeśli: $a = (-4)^3$, $b = -3^4$? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	liczba a jest ujemna, a liczba b dodatnia.
			2.	te liczby są równe: $-4 \cdot 3 = -3 \cdot 4$.
B.	Nie,		3.	$-64 > -81$.

- 4** Jaka jest ostatnia cyfra liczby 3^{125} ?
- 5** Jaka cyfra może wystąpić w rzędzie jedności liczby, która jest podwojonym kwadratem liczby naturalnej?

7. Pierwiastki

Przykład 1.

Znajdźmy taką nieujemną liczbę x , której kwadrat jest równy: a) 25 b) $2\frac{1}{4}$

Informacje podane w zadaniu możemy zapisać:

a) $x^2 = 25$, czyli $x \cdot x = 25$ Tą nieujemną liczbą jest 5, bo $5^2 = 25$.

b) $x^2 = 2\frac{1}{4}$, czyli $x \cdot x = \frac{9}{4}$ Tą nieujemną liczbą jest $\frac{3}{2}$, bo $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

$\sqrt{25}$ jest symbolem takiej liczby nieujemnej, której kwadrat jest równy 25.

$\sqrt{25} = 5$, bo $5^2 = 25$.

$\sqrt{25}$ czytamy: pierwiastek kwadratowy z dwudziestu pięciu lub pierwiastek drugiego stopnia z dwudziestu pięciu.

Liczbę pod znakiem pierwiastka nazywamy **liczbą podpierwiastkową**.

W zapisie $\sqrt{25}$ liczba 25 jest liczbą podpierwiastkową.



Pierwiastkiem kwadratowym lub pierwiastkiem drugiego stopnia z danej liczby nieujemnej a nazywamy taką liczbę nieujemną b , która podniesiona do kwadratu jest równa liczbie podpierwiastkowej.

$$\sqrt{a} = b, \text{ gdy } b^2 = a, \text{ gdzie } a \geq 0, b \geq 0$$

1 Jaką liczbą nieujemną jest liczba x ?

a) $x^2 = 100$

b) $x^2 = 81$

c) $x^2 = 6\frac{1}{4}$

d) $x^2 = 0$

e) $x^2 = \frac{9}{49}$

f) $x^2 = 0,01$

g) $x^2 = 121$

h) $x^2 = 225$

2 Oblicz wartości pierwiastków.

a) $\sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{25}, \sqrt{9}, \sqrt{100}, \sqrt{400}, \sqrt{121}$

b) $\sqrt{\frac{1}{4}}, \sqrt{1\frac{11}{25}}, \sqrt{\frac{16}{49}}, \sqrt{\frac{81}{196}}, \sqrt{0,0001}, \sqrt{6,25}$

Przykład 2.

Znajdźmy taką liczbę x , której sześćcian jest równy: a) 64 b) $-3\frac{3}{8}$

Treść tego zadania możemy zapisać:

a) $x^3 = 64$, czyli $x \cdot x \cdot x = 64$

Tą liczbą jest 4, bo $4^3 = 64$.

b) $x^3 = -3\frac{3}{8}$, czyli $x \cdot x \cdot x = -\frac{27}{8}$

Tą liczbą jest $-\frac{3}{2}$, bo $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}$.

$\sqrt[3]{27}$ jest symbolem takiej liczby, której sześćcian jest równy 27.

$\sqrt[3]{27} = 3$, bo $3^3 = 27$.

$\sqrt[3]{27}$ czytamy: pierwiastek sześcienny z dwudziestu siedmiu lub pierwiastek trzeciego stopnia z dwudziestu siedmiu.

Pierwiastkiem sześciennym lub pierwiastkiem trzeciego stopnia z danej liczby a nazywamy taką liczbę b , która podniesiona do sześćcianu (trzeciej potęgi) daje liczbę podpierwiastkową a .

$$\sqrt[3]{a} = b, \quad \text{gdy} \quad b^3 = a$$

3 Jaką liczbą jest x ?

- a) $x^3 = 8$ b) $x^3 = -1$ c) $x^3 = 0,001$ d) $x^3 = 1000$
 e) $x^3 = 0$ f) $x^3 = \frac{8}{27}$ g) $x^3 = 125$ h) $x^3 = -0,027$

4 Oblicz wartości pierwiastków.

- a) $\sqrt[3]{0}$, $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{1000}$
 b) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$, $\sqrt[3]{-\frac{1}{125}}$, $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$, $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$, $\sqrt[3]{4\frac{17}{27}}$, $\sqrt[3]{0,008}$, $\sqrt[3]{0,125}$

5 Oblicz i uporządkuj rosnąco wartości pierwiastków. Z liter odczytaj hasło.

$\sqrt[3]{64}$	$\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$	$\sqrt{2,25}$	$\sqrt{1\frac{9}{16}}$	$\sqrt{1,21}$	$\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$	$\sqrt{6,25}$
T	W	R	D	A	K	A

Przykład 3.

Obliczmy: $(\sqrt{9})^2$, $\left(\sqrt{\frac{4}{25}}\right)^2$, $(\sqrt[3]{1000})^3$, $(\sqrt[3]{-0,008})^3$.

$$(\sqrt{9})^2 = 3^2 = 9, \text{ czyli } (\sqrt{9})^2 = 9$$

$$\left(\sqrt{\frac{4}{25}}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}, \text{ czyli } \left(\sqrt{\frac{4}{25}}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

$$(\sqrt[3]{1000})^3 = 10^3 = 1000, \text{ czyli } (\sqrt[3]{1000})^3 = 1000$$

$$(\sqrt[3]{-0,008})^3 = (-0,2)^3 = -0,008, \text{ czyli } (\sqrt[3]{-0,008})^3 = -0,008$$

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad a \geq 0$$

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a$$

6 Oblicz.

a) $(\sqrt{17})^2 - (\sqrt{24})^2$

b) $(-2) \cdot (\sqrt{5})^2 + \sqrt{1}$

c) $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{25}}$

d) $-(\sqrt[3]{7})^3 + (\sqrt[3]{23})^3$

e) $(\sqrt[3]{4})^3 + \sqrt[3]{125} : (-5)$

f) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}} - \left(\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\right)^3$

7 Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\sqrt{7 - \sqrt{9}}$

b) $\sqrt[3]{10^2 + 25}$

c) $(\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{0,027}) : 1,1$

d) $\sqrt{\sqrt{16} + \sqrt{64} : 3 + 2\frac{1}{3}}$

e) $\sqrt{30 - 5} + \sqrt[3]{10^2 + 25}$

f) $\sqrt{144} - \sqrt[3]{64} : [(-3)^2 + (-1)^3]$

8 Porównaj wyrażenia. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $=$ lub $>$.

a) $\sqrt{256} : 16$ i $\sqrt{256} : \sqrt{16}$

b) $\sqrt{16 \cdot 25}$ i $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25}$

c) $\sqrt{289} - \sqrt{64}$ i $\sqrt{289 - 64}$

d) $\sqrt{400} + \sqrt{225}$ i $\sqrt{400 + 225}$

9 Jaką długość ma bok kwadratu o podanym polu?

a) 36 cm^2

b) 81 dm^2

c) $\frac{49}{121} \text{ cm}^2$

d) $5\frac{19}{25} \text{ m}^2$

e) $0,16 \text{ cm}^2$

f) $1,44 \text{ m}^2$

10 Wykaż, że serweta o wymiarach $1,5 \text{ m} \times 1,2 \text{ m}$ nie zakryje blatu stołu w kształcie kwadratu o polu $1,69 \text{ m}^2$.

11 Ile metrów bieżących siatki potrzeba na ogrodzenie działki w kształcie kwadratu o podanej powierzchni?

a) 1600 m^2

b) 4 a

c) $1,21 \text{ ha}$

12 Jaką długość ma krawędź sześcianu o podanej objętości?

a) 512 m^3

b) $\frac{27}{1000} \text{ m}^3$

c) $3,375 \text{ m}^3$

13 Pole siatki sześcianu jest równe 864 cm^2 . Jaka jest objętość pięciu sześcianów wykonanych z takich siatek?14 Oblicz sumę objętości sześcianów, których krawędzie są odpowiednio równe $\sqrt[3]{5} \text{ cm}$ i $\sqrt[3]{12} \text{ dm}$.15 Jaką liczbę należy wpisać w miejsce oznaczone $\blacksquare$?

a) $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{\blacksquare}$

b) $\sqrt{144} = -\sqrt[3]{125} + \sqrt{\blacksquare} + \sqrt{16}$

c) $\sqrt[3]{512} = -8 \cdot \sqrt[3]{0,064} + 40 \cdot \sqrt{\blacksquare} - 1\frac{1}{3} \cdot \sqrt{0,36}$



**Przykład 4.**

Skorzystajmy z kalkulatora i poszukajmy przybliżeń liczby $\sqrt{2}$ z niedomiarem i nadmiarem.

$$1 < \sqrt{2} < 2 \quad \text{bo} \quad 1^2 = 1 \quad (\sqrt{2})^2 = 2 \quad 2^2 = 4$$

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5 \quad \text{bo} \quad 1,4^2 = 1,96 \quad (\sqrt{2})^2 = 2 \quad 1,5^2 = 2,25$$

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \quad \text{bo} \quad 1,41^2 = 1,9881 \quad (\sqrt{2})^2 = 2 \quad 1,42^2 = 2,0164$$

...

$$1,414213 < \sqrt{2} < 1,414214$$

...

Jeśli będziemy postępować tak dalej, otrzymamy coraz więcej kolejnych cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{2}$, nigdy jednak nie otrzymamy jej dokładnej wartości.

Zapamiętaj!

$$\sqrt{2} \approx 1,41 \quad \sqrt{3} \approx 1,73$$

Rozwinięcie dziesiętne liczby $\sqrt{2}$ jest nieskończone i nieokresowe.

Liczby, które mają rozwinięcia dziesiętne nieskończone i nieokresowe, nazywamy liczbami niewymiernymi.

Liczby takie jak: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ też są liczbami niewymiernymi.

W praktyce korzystamy z przybliżonych wartości liczb niewymiernych.



- 16** Skorzystaj z kalkulatora i podaj przybliżenia liczb w zaokrągleniu do 0,1.
 $\sqrt{20}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt[3]{24}$, $\sqrt[3]{20}$, $\sqrt{65}$



- 17** Skorzystaj z kalkulatora i podaj przybliżenia liczb w zaokrągleniu do 0,01.
 $\sqrt{80}$, $\sqrt[3]{100}$, $\sqrt{120}$, $\sqrt[3]{10\,000}$, $\sqrt[3]{25}$, $\sqrt{10}$

- 18** Trzy spośród podanych liczb są liczbami niewymiernymi. Wskaż te liczby.

I. $\sqrt{25 + \sqrt{25}}$

II. $\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{10}$

III. $\sqrt{81 - \sqrt{0}}$

IV. $\sqrt{36 \cdot \sqrt{6}}$

V. $-\sqrt{8} + \sqrt{8}$

VI. $\frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt{64}}$

- 19** Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Pole trapezu o podstawach 4 cm i 6 dm oraz wysokości $\sqrt{30}$ cm jest wyrażone liczbą niewymierną.	P	F
Pole kwadratu o przekątnej długości $\sqrt{12}$ cm jest wyrażone liczbą niewymierną.	P	F
Objętość sześcianu o krawędzi $\sqrt{7}$ m jest wyrażona liczbą wymierną.	P	F
Pole równoległoboku o boku $\sqrt{11}$ cm i takiej samej wysokości jest wyrażone liczbą wymierną.	P	F

20 Porównaj liczby. Użyj odpowiedniego znaku: < lub >.

a) $\sqrt{5}$ i $\sqrt{6}$

b) $\sqrt[3]{7}$ i $-\sqrt{7}$

c) $-\sqrt[3]{5}$ i $-\sqrt[3]{3}$

d) $-\sqrt{11}$ i $-\sqrt{13}$

e) $-\sqrt[3]{5}$ i $\sqrt{5}$

f) $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{17}$

Wyzwanie

Odpowiedz na pytanie i uzasadnij swoją odpowiedź.

- Czy suma dwóch liczb wymiernych może być liczbą niewymierną?
- Czy iloczyn dwóch liczb wymiernych może być liczbą niewymierną?
- Czy iloczyn liczby wymiernej i niewymiernej może być liczbą wymierną?
- Czy suma dwóch liczb niewymiernych może być liczbą wymierną?

Sprawdź się!

1 Oblicz wartości pierwiastków.

a) $\sqrt{16}$, $\sqrt{2\frac{14}{25}}$, $\sqrt{0,04}$

b) $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{-\frac{1}{125}}$, $\sqrt[3]{0,008}$

2 Porównaj wyrażenia. Użyj odpowiedniego znaku: <, = lub >.

a) $\sqrt{36 \cdot 4}$ i $\sqrt{36} \cdot \sqrt{4}$

b) $\sqrt{144 + 81}$ i $\sqrt{144} + \sqrt{81}$

3 Oblicz różnicę pól kwadratów, których boki mają odpowiednio $\sqrt{10}$ dm i $\sqrt{7}$ cm.

4 Jaką długość ma krawędź sześcianu o podanej objętości?

a) 216 cm^3

b) $15\frac{5}{8} \text{ dm}^3$

c) $0,008 \text{ cm}^3$

5 Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Wartość wyrażenia $\sqrt{9 + 4 \cdot \sqrt[3]{64}}$ jest liczbą A / B.

A. wymierną

B. niewymierną

Wyrażenie $(3 \cdot \sqrt{36} - 4\sqrt[3]{125}) : \left[(\sqrt[3]{8})^3 - \sqrt{4} \right]$ ma wartość C / D.

C. większą od -1

D. mniejszą od -1

Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

W zadaniach 1.–2. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 1 Która liczba spośród wymienionych jest największa?
 A. -2 B. $-4\frac{1}{3}$ C. $-\frac{13}{2}$ D. $-4\frac{2}{3}$
- 2 Która liczba spośród podanych nie jest wymierna?
 A. $\frac{-3 \cdot \sqrt{25}}{\sqrt[3]{64}}$ B. $-\sqrt{5} + \sqrt{5}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $2\frac{1}{2}$

W zadaniach 3.–10. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 3 Suma liczb $-4\frac{1}{2}$ i $3,8$ jest równa
 A. $-8,3$ B. $-1,3$ C. $-0,7$ D. $-0,4$
- 4 Odwrotnością liczby będącej wartością wyrażenia $3,2 : 1\frac{1}{15} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)$ jest liczba
 A. $\frac{5}{2}$ B. $-\frac{8}{5}$ C. $\frac{5}{8}$ D. $-\frac{2}{5}$
- 5 Wynikiem działania $\sqrt{1\frac{9}{16}} \cdot \sqrt[3]{8}$ jest
 A. 5 B. $12,5$ C. $6\frac{1}{4}$ D. $2\frac{1}{2}$
- 6 Ostatnią cyfrą liczby $10^{58} - 134$ jest
 A. 8 B. 6 C. 4 D. 0
- 7 Wartość wyrażenia $\left(-2^4 : 1\frac{3}{5} + \sqrt{2\frac{1}{4}} + 1\right) \cdot \sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$ jest równa
 A. $-3\frac{1}{3}$ B. -20 C. $-16\frac{2}{3}$ D. -10
- 8 Wartość wyrażenia $-[7 - 4 \cdot (-2) : \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 2 - (-55)] \cdot (-3)$ jest równa
 A. 138 B. -6 C. -66 D. -336

- 9 Różnicę $-2,7 - 8$ można przedstawić w postaci
 A. $-2,7 + 8$ B. $-(-2,7 + 8)$ C. $-[2,7 - (-8)]$ D. $-(2,7 - 8)$
- 10 Chlor w warunkach normalnych ma postać gazową o barwie żółtozielonej i drażniącej woni. Jest trujący, powoduje zahamowanie czynności oddechowych. Stosuje się go między innymi do dezynfekcji wody. Ciekły chlor wrze w temperaturze $-34,04^{\circ}\text{C}$, a krzepnie po schłodzeniu do -101°C . Różnica między temperaturą wrzenia a temperaturą krzepnięcia chloru wynosi
 A. $135,04^{\circ}\text{C}$ B. $-135,04^{\circ}\text{C}$ C. $-66,96^{\circ}\text{C}$ D. $66,96^{\circ}\text{C}$
- 11 Dane są liczby: $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$, $-3,4$, $-1\frac{1}{3}$.
 Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.
- | | | |
|---|---|---|
| Parę liczb przeciwnych tworzą liczby $-3,4$ i $\frac{3}{4}$. | P | F |
| Odwrotnością liczby $\frac{4}{3}$ jest liczba $-1\frac{1}{3}$. | P | F |
- 12 Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.
 Liczbą naturalną najbliższą liczbie $\sqrt{19}$ jest liczba A / B.
 A. 5 B. 4
 Liczbą niewymierną jest liczba C / D.
 C. $\sqrt{23 + \sqrt[3]{8}}$ D. $\sqrt{36 - 9}$
- 13 Która z liczb, a czy b , jest większa, jeśli $a = -2\frac{7}{16}$ i $b = -2,437$? Odpowiedź uzasadnij.
- 14 Jaką liczbą jest x , jeśli: $\left(6,3 - 6\frac{4}{5}\right)^3 + 2x - \sqrt{1\frac{57}{64}} = 3,5$? Zapisz obliczenia.
- 15 Uzasadnij, że liczba $10^{25} + 14$ jest podzielna przez 6.

1. Wyrażenia algebraiczne

Przypomnij sobie

- co to jest wyrażenie algebraiczne,
- co to jest jednomian.

Gdy uczymy się matematyki, spotykamy takie zapisy:

$$\text{I. } \frac{(a+b) \cdot h}{2} \quad \text{II. } (-2) : 4,5 \quad \text{III. } (-3) \cdot x \cdot y^3 \quad \text{IV. } 2 \cdot x - 3 \quad \text{V. } \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

To **wyrażenia algebraiczne**. Wśród nich są takie, które nie zawierają liter, np. II, V. Nazywamy je **wyrażeniami arytmetycznymi**.

Pojedyncze liczby lub litery oraz ich iloczyny nazywamy **jednomianami**, np.

$$2 \quad -4 \quad \sqrt{36} \quad b \quad 2 \cdot x \quad -6 \cdot a \cdot b \cdot c \quad \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot c \quad a \cdot b \quad x \cdot y \cdot z$$

Znak mnożenia, który występuje w jednomianie, można czasami pominąć, np. $3 \cdot x = 3x$, $a \cdot b = ab$. Zostawiamy go jednak, jeśli przed liczbą występuje litera, np. $x \cdot 5$, $z \cdot (-4)$.

Jednomian jest uporządkowany, jeśli jego pierwszym czynnikiem jest liczba, a następnymi czynnikiem są litery uporządkowane w kolejności alfabetycznej, np. $3aby$, $-4a^2b^2$.

Czynnik liczbowy występujący na początku uporządkowanego jednomianu nazywamy **współczynnikiem liczbowym jednomianu**.

Współczynnikiem liczbowym jednomianu:

$$\begin{array}{ll} abc \text{ jest liczba } 1, & -xy \text{ jest liczba } -1, \\ 7x^2y \text{ jest liczba } 7, & 2 \text{ jest liczba } 2. \end{array}$$

Przykład 1.

Odczytajmy wyrażenie.

$$\text{a) } 3 + x \quad \text{b) } 4 \cdot a \quad \text{c) } x - y \quad \text{d) } \frac{x}{7} \quad \text{e) } (c + d)^2 \quad \text{f) } x^2 - y^2$$

$$\text{a) } 3 + x \quad - \text{suma liczby } 3 \text{ i liczby } x$$

$$\text{b) } 4 \cdot a \quad - \text{iloczyn liczby } 4 \text{ i liczby } a$$

$$\text{c) } x - y \quad - \text{różnica liczby } x \text{ i liczby } y$$

$$\text{d) } \frac{x}{7} \quad - \text{iloraz liczby } x \text{ i liczby } 7$$

$$\text{e) } (c + d)^2 \quad - \text{kwadrat sumy liczby } c \text{ i liczby } d$$

$$\text{f) } x^2 - y^2 \quad - \text{różnica kwadratu liczby } x \text{ i kwadratu liczby } y$$

Wyrażenie algebraiczne przyjmuje nazwę od ostatniego działania, które należy wykonać zgodnie z regułą kolejności wykonywania działań.



- 1 Spośród wyrażeń algebraicznych wybierz wyrażenia arytmetyczne.

I. $-5 + 2x$

II. $2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 - 8,3\right)$

III. $(-4)^2$

IV. $\sqrt{25a}$

V. $(2 - x)^2$

VI. $5^2 + 11^2$

- 2 Podaj nazwy wyrażeń algebraicznych.

ab , $\frac{1}{2}d^2$, abh , $\frac{1}{3}abh$, $a + b$, $(c - d)^2$, $a^2 + b^2$, $\frac{a - b}{4}$

- 3 Napisz wyrażenie algebraiczne.

a) Suma liczb a i -3 .

b) Różnica liczb n i -7 .

c) Iloczyn liczb x i y .

d) Iloraz liczb -5 i m .

e) Suma liczby b oraz iloczynu liczb 2 i a .

f) Kwadrat różnicy liczby 20 oraz ilorazu liczb x i y .

g) Iloczyn sumy liczb a i b oraz różnicy liczb a i b .

- 4 Uzasadnij, że 20% sumy liczb x i y jest równe $0,2x + 0,2y$.

Przykład 2.

Uporządkujmy jednomian i określmy jego współczynnik liczbowy.

a) $(-x) \cdot (-5) \cdot y$ b) $5 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot 5$ c) $(-6) \cdot a \cdot (-2) \cdot b \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$

a) $(-x) \cdot (-5) \cdot y = (-5) \cdot (-x) \cdot y = 5xy$ – współczynnikiem jest 5.

b) $5 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot 5 = 5 \cdot 5 \cdot a \cdot a \cdot a = 25a^3$ – współczynnikiem jest 25.

c) $(-6) \cdot a \cdot (-2) \cdot b \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) =$
 $= (-6) \cdot (-2) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot a \cdot b = -8ab$ – współczynnikiem jest -8 .

Jeżeli w jednomianie liczba czynników ze znakiem minus jest parzysta, to po jego uporządkowaniu wszystkie minusy można pominąć. Jeżeli liczba czynników ze znakiem minus jest nieparzysta, to w uporządkowanym jednomianie stawiamy znak minus na początku jednomianu, a pozostałe minusy pomijamy.



5 Uporządkuj jednomian.

a) $(-4) \cdot 2 \cdot \left(-3\frac{1}{8}\right) \cdot \frac{1}{5}$

b) $(-0,1) \cdot x \cdot 10xy^2$

c) $(-a) \cdot 6x^2y \cdot (-5y) \cdot (-0,4)$

d) $\frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot x \cdot (-2y) \cdot (-y) \cdot (-y)$

e) $\frac{1}{2}ababab \cdot (-2)$

f) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot xyxy \cdot (-1)$

g) $(-3)^2 \cdot (-3) \cdot a^2bb \cdot (-3)$

h) $6mn^2 \cdot \frac{1}{3}m^3 \cdot (-2) \cdot n$

6 Odczytaj współczynniki jednomianów.

$4y^3$ $-\frac{1}{2}a^2bc$ $0,8mx$ x^2 $-a$ ab -22

7 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

$2ab - \frac{a}{b}$ jest wyrażeniem algebraicznym.	P	F
$2 + 5$ jest wyrażeniem algebraicznym, ale nie jest wyrażeniem arytmetycznym.	P	F
-4 jest wyrażeniem arytmetycznym i algebraicznym.	P	F
Każde wyrażenie arytmetyczne jest wyrażeniem algebraicznym.	P	F
Każde wyrażenie algebraiczne jest wyrażeniem arytmetycznym.	P	F
W wyrażeniu $3x^2 + xy$ występują 4 litery.	P	F

8 Zapisz w postaci jednomianu odpowiedź do zadania.

- Adam kupił m czekolad po 4 zł. Ile zapłacił za te czekolady?
- Jola ma x cukierków, a Kasia 8 razy więcej. Ile cukierków ma Kasia?
- Długość boku kwadratu jest równa a . Ile wynosi pole kwadratu?
- Długość odcinka jest równa x . Ile wynosi długość odcinka n razy dłuższego?
- W ciągu roku człowiek traci około k włosów. Ile mniej więcej ich straci w ciągu x lat?

Przykład 3.

Zmieszano 4 kg cukierków po x zł za 1 kg i 5 kg cukierków w cenie y zł za 1 kg. Jaka jest cena 1 kg mieszanki? Zapiszmy odpowiednie wyrażenie algebraiczne.

Układamy wyrażenia:

- $4x$ – koszt 4 kg cukierków po x zł za 1 kg
 $5y$ – koszt 5 kg cukierków po y zł za 1 kg
 $4x + 5y$ – koszt mieszanki
 $4 + 5 = 9$ – masa cukierków w kg
 $(4x + 5y) : 9$ – cena w zł 1 kg mieszanki



ODPOWIEDŹ: Cena 1 kilograma mieszanki cukierków wynosi $(4x + 5y) : 9$ złotych.

- 9 Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego rozwiązanie zadania.
- Zmieszano 10 kg cukierków I rodzaju i 20 kg II rodzaju. Cena 1 kg cukierków I rodzaju równa jest m zł, a cena 1 kg cukierków II rodzaju jest o 2 zł niższa. Oblicz cenę 1 kg mieszanki.
 - Marek ma x lat. Adam jest od niego 2 razy starszy. Beata jest o 4 lata młodsza od Adama. Ile lat ma Beata?
 - Telefon kosztował 300 zł. Oblicz cenę tego telefonu po podwyżce o $x\%$.
- 10 Ewa otrzymała x punktów ze sprawdzianu. Punkty zdobyte przez Ewę stanowią 75% punktów możliwych do uzyskania z tego sprawdzianu. Jaka była maksymalna liczba punktów możliwych do uzyskania? Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.
- 11 Cena pewnego towaru przed obniżką wynosiła x zł, a po obniżce y zł. O ile procent obniżono cenę? Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.
- 12 Zapisz w postaci odpowiedniego wyrażenia algebraicznego liczbę trzycyfrową, której cyfrą setek jest a , cyfrą dziesiątek b , cyfrą jedności c .
- 13 Oznacz dowolną liczbę naturalną jako n i zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego:
- liczbę naturalną parzystą,
 - liczbę naturalną nieparzystą,
 - liczbę naturalną podzielną przez 3,
 - trzy kolejne liczby naturalne podzielne przez 4.

Przykład 4.

Staś kupił n cienkopisów i 5 wkładów do pióra i zapłacił 65 zł. Cienkopis jest o złotówkę droższy od wkładu. Ile kosztuje cienkopis, a ile wkład do pióra?

Informacje podane w zadaniu możemy przedstawić w taki sposób: Gdyby Staś kupił $n + 5$ wkładów i ani jednego cienkopisu, zapłaciłby o n złotych mniej, czyli $65 - n$ złotych.

A zatem wkład do pióra kosztuje $\frac{65 - n}{n + 5}$ złotych, a cienkopis $\frac{65 - n}{n + 5} + 1$ złotych.

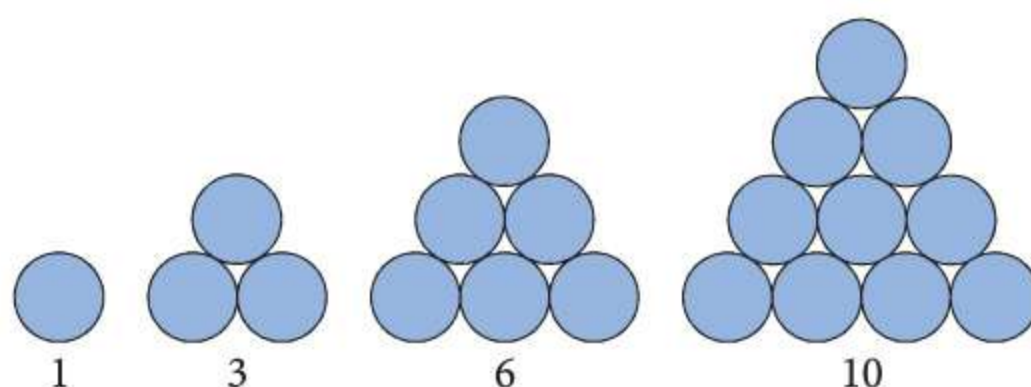
- 14 Ewelina kupiła 5 róż i 8 goździków za 70 zł. Róża jest o złotówkę droższa od goździka. Ile kosztuje róża?
- 15 Maciek kupił n owoców granatu i 7 sztuk kiwi za 32 zł. Owoc granatu jest o złotówkę droższy od kiwi. Ile kosztuje każdy z owoców? Zapisz odpowiednie wyrażenia algebraiczne.



- 16** Patryk kupił x bagietek i 4 bułki maślane za 8 zł. Bagietka jest droższa o złotówkę od bułki. Ile kosztuje bagietka? Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.
- 17** Basia kupiła x kg mandarynek i 3 kg bananów za 24 zł. 1 kg mandarynek był o 2 zł droższy od 1 kg bananów. Ile kosztował 1 kg bananów, a ile 1 kg mandarynek? Zapisz odpowiednie wyrażenia algebraiczne.
- 18** Michalina kupiła m bombek na choinkę i 5 szklanych aniołków za 154 zł. Bombka była o 3 zł droższa od aniołka. Ile kosztuje bombka na choinkę, a ile aniołek? Zapisz odpowiednie wyrażenia algebraiczne.

Wyzwanie

Wyobraź sobie, że układasz koła według wzoru przedstawionego poniżej.



Tak układane koła ilustrują liczby: 1, 3, 6, 10, zwane liczbami trójkątnymi. Ułóż kilka kolejnych liczb trójkątnych i wykonaj polecenia:

- wypisz 10 kolejnych liczb trójkątnych;
- zapisz wzór na liczbę trójkątną o numerze n , przy założeniu, że n jest liczbą naturalną większą od 0;
- oblicz, jaka liczba jest setną liczbą trójkątną;
- sprawdź, czy liczba 231 jest dwudziestą pierwszą liczbą trójkątną.

Sprawdź się!

- Ile minut ma $2a$ godzin? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
A. $200a$ B. $120a$ C. $60a$ D. $100a$
- Przyprostokątne trójkąta są równe a cm i b dm. Ile centymetrów kwadratowych ma pole tego trójkąta? Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.
- Na parkingu zaparkowano m samochodów i n motorów. Ile kół mają zaparkowane pojazdy? Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.
- Cena 1 metra materiału jest równa 28 zł. Oblicz cenę 1 metra materiału po podwyżce o $y\%$. Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.
- Zapisz za pomocą odpowiedniego wyrażenia algebraicznego liczbę dwucyfrową, której cyfrą dziesiątek jest x , a cyfrą jedności y .

2. Wartość liczbową wyrażenia algebraicznego

Przypomnij sobie

- jak obliczyć wartość liczbową wyrażenia algebraicznego,
- w jakiej kolejności wykonujemy działania.

Wyrażeniami algebraicznymi są między innymi wzory na obliczanie pól wielokątów, np.

$a \cdot b$ – wzór na pole prostokąta, gdzie a i b oznaczają długości jego boków;

$\frac{(a+b) \cdot h}{2}$ – wzór na pole trapezu, gdzie a i b oznaczają długości podstaw, h oznacza wysokość trapezu.

Wartość liczbową wyrażenia algebraicznego obliczymy, gdy w miejsce liter wstawimy liczby i wykonamy działania.



Przykład 1.

Obliczmy wartość liczbową wyrażenia:

- a) $x^2 - y$ dla $x = 2, y = -1$;
 b) $2a - 3b^3 + 4c$ dla $a = 5, b = -2, c = -3$.

Po podstawieniu w miejsce liter odpowiednich liczb otrzymujemy:

- a) $2^2 - (-1) = 4 + 1 = 5$
 b) $2 \cdot 5 - 3 \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-3) = 10 - 3 \cdot (-8) + (-12) = 10 + 24 - 12 = 22$

1 Oblicz wartość liczbową wyrażenia.

- a) $a^2 + b$ dla $a = 8, b = -8$
 b) $a : b$ dla $a = 3\frac{1}{9}, b = 4\frac{2}{3}$
 c) $a^3 - b$ dla $a = -0,1, b = 1$

2 Oblicz wartość liczbową jednomianu.

- a) $6x^3yz$ dla $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{3}{4}, z = -\frac{2}{3}$
 b) pr^2s dla $p = -2\frac{1}{3}, r = 1\frac{1}{2}, s = -3,2$
 c) $2x^4yz^5$ dla $x = -2, y = -\frac{1}{8}, z = -1$

- 3 Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Wartość liczbową wyrażenia $5x^2y$ dla $x = -0,5$, $y = -2$ jest równa A / B.

A. 2,5

B. -2,5

Wartość liczbową wyrażenia $-2x + 10y$ dla $x = -3$, $y = 1$ pomniejszona o -2 jest równa C / D.

C. 14

D. 18

- 4 Oblicz wartość liczbową wyrażenia.

a) $(-0,6a^2b)^2$ dla $a = -0,5$, $b = 3\frac{1}{3}$

b) $\left(-\frac{1}{x} + x^3\right)^2 \cdot \frac{8}{25}$ dla $x = -\frac{1}{2}$

- 5 Rodzina państwa Nowaków planowała zagraniczny wyjazd i zakupiła m euro. Po rezygnacji z wyjazdu wymieniła euro z powrotem na złotówki. Na podstawie średniego kursu euro z 14.11.2019 r., podanego w tabeli, zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, ile pieniędzy Nowakowie stracili podczas tej wymiany, a następnie oblicz jego wartość dla $m = 1500$.



KANTOR „WALUTA”

euro

SKUP

4,27 zł

SPRZEDAŻ

4,30 zł

- 6 Jakimi liczbami mogą być a i b , aby wartość jednomianu $\frac{1}{3}ab^2$ była równa:

a) $\frac{1}{3}$,

b) 1,

c) 0?

- 7 BMI (ang. *Body Mass Index*) jest to wskaźnik masy ciała, dzięki któremu możemy ocenić, czy nasza masa utrzymuje się w normie.

$$\text{BMI} = \frac{w}{h^2}$$

w – oznacza masę ciała w kilogramach,

h – oznacza wzrost w metrach.

- a) Oblicz wartość BMI osoby o wzroście 170 cm i masie 70 kg, a następnie oceń jej masę w porównaniu z danymi zamieszczonymi w tabeli.
b) Oblicz wartość swojego BMI i oceń swoją masę.

BMI	Masa
$\text{BMI} < 18,5$	niedowaga
$18,5 \leq \text{BMI} < 25,0$	norma
$25,0 \leq \text{BMI} < 30,0$	nadwaga
$30,0 \leq \text{BMI} < 35,0$	1 st. otyłości
$35,0 \leq \text{BMI} < 40,0$	2 st. otyłości
$40,0 \leq \text{BMI}$	3 st. otyłości

Przykład 2.

Obliczmy średnią arytmetyczną liczb a) 4, 8, 6 b) 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4.

a) $\frac{4+8+6}{3} = \frac{18}{3} = 6$ Sumę tych liczb dzielimy przez 3, bo są trzy liczby.

b) $\frac{2+2+2+2+3+3+3+4+4}{4+3+2} = \frac{4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{4+3+2} = \frac{8+9+8}{9} = \frac{25}{9} \approx 2,8$

Średnia arytmetyczna n liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest określona wzorem

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$



8 Oblicz średnią arytmetyczną podanych liczb.

a) 6 i 8

b) -4, -7 i 19

9 Wyrażenie algebraiczne $\frac{nx + my + kz}{n + m + k}$ jest wzorem na obliczenie średniej arytmetycznej liczb x, y, z , gdzie współczynniki n, m, k są krotnościami odpowiednio liczb x, y, z . Oblicz według tego wzoru średnią arytmetyczną:

a) ocen cząstkowych z matematyki: 3, 3, 4, 5, 5, 5, 4, 5, 3, 4;

b) temperatur powietrza zanotowanych w kolejnych dniach tygodnia: 4°C, 5°C, 3°C, 0°C, -2°C, 1°C, 3°C.

Wyzwanie

Średnia arytmetyczna liczb a, b, c, d jest równa 120. Oblicz średnią arytmetyczną liczb $a + 3, b - 5, c - 2, d + 12$.

Sprawdź się!

- 1** Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wartość liczbową wyrażenia $a - b^2$ dla $a = 6$ i $b = -2\frac{2}{3}$ jest równa
A. $15\frac{1}{3}$ B. $-1\frac{1}{9}$ C. $27\frac{1}{3}$ D. $39\frac{1}{9}$
- 2** Oblicz średnią arytmetyczną pięciu liczb, z których pierwszą jest 2, a każda kolejna jest 2 razy większa od poprzedniej.
- 3** Oblicz wartość liczbową wyrażenia $a^2 + b^2$ dla $a = -0,5$ i $b = 0,2$.
- 4** Oblicz wartość liczbową wyrażenia $\sqrt{-4x^3 + 12y - 5z}$ dla $x = -1$, $y = \frac{1}{6}$ i $z = -6$.
- 5** Podaj, jakimi liczbami mogą być a i b , jeśli wartość jednomianu $\frac{1}{3}ab^2$ jest równa $-\frac{1}{3}$.

3. Suma algebraiczna

Przykład 1.

Utwórzmy sumę następujących jednomianów:

a) $2a, 3b, 8$; b) $x, -2y, 4z, -0,5$.

a) $2a + 3b + 8$ b) $x + (-2y) + 4z + (-0,5) = x - 2y + 4z - 0,5$

Sumę jednomianów nazywamy **sumą algebraiczną**, a składniki tej sumy nazywamy **wyrazami**.

Nazwę „suma algebraiczna” stosuje się zarówno w dodawaniu, jak i w odejmowaniu jednomianów, ponieważ odejmowanie można zastąpić dodawaniem.

Na przykład:

$$10 - 6 = 10 + (-6) \qquad -5x - 2y - 3z^2 = -5x + (-2y) + (-3z^2)$$

Wyrazami sumy:

$$10 - 6 \text{ są } 10 \text{ i } -6 \qquad -5x - 2y - 3z^2 \text{ są } -5x, -2y \text{ i } -3z^2$$

1 Utwórz sumę danych jednomianów.

a) $-2x^3, 5y, -3z^3$ b) $0,5y, y^2, -xy$ c) $6a^4, b^2, -4c, 12$

2 Odejmowanie zastąp dodawaniem.

a) $15x - 5$ b) $-4,5 - 0,5y$ c) $2\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y$
 d) $-3,1x^2 - 3y$ e) $5a - \frac{1}{2}y^3$ f) $xyz - abc$

3 Wypisz wyrazy sumy.

a) $-\frac{1}{2}x + 2y - z$ b) $x^2 - xy - 6$ c) $x + y - 1$
 d) $4mn - 0,8m + p$ e) $a^5 + b^4 - c^3 - d^2$ f) $-3x^2 + 1,5a$

Wyrazy sumy algebraicznej, które różnią się najwyżej współczynnikami liczbowymi, nazywamy **wyrazami podobnymi**.

Oto przykłady wyrazów podobnych:

$$a, \quad 2a, \quad -3a, \quad -5a, \quad 6a, \qquad 1,5b^2, \quad -3,2b^2, \quad 4,5b^2, \quad -0,8b^2$$

Wyrazy podobne możemy dodawać:

$$a + 2a - 3a - 5a + 6a = \cancel{3a} - \cancel{3a} - 5a + 6a = a$$

$$1,5b^2 - 3,2b^2 + 4,5b^2 - 0,8b^2 = 1,5b^2 + 4,5b^2 - 3,2b^2 - 0,8b^2 = 6b^2 - 4b^2 = 2b^2$$

Przekształcenie sumy algebraicznej polegające na zastąpieniu kilku wyrazów podobnych jednym wyrazem nazywamy **redukcją wyrazów podobnych**.

Przykład 2.

Zredukujmy wyrazy podobne.

a) $-2x + 3x + 2x - 3x$

b) $2a^2 - 4a - 5 + 2a - 3a^2 + 10 + a^2$

a) $-2x + 3x + 2x - 3x = -2x - 3x + 3x + 2x = -5x + 5x = 0$

Jeżeli w sumie jest kilka rodzajów wyrazów podobnych, to w celu ułatwienia redukcji można je podkreślić w różny sposób i połączyć w grupy dzięki zastosowaniu prawa przemienności dodawania.

b) $\underline{2a^2} - \underline{4a} - 5 + \underline{2a} - \underline{3a^2} + 10 + \underline{a^2} = \underline{2a^2} - \underline{3a^2} + \underline{a^2} - \underline{4a} + \underline{2a} - 5 + 10 =$
 $= \underline{3a^2} - \underline{3a^2} - 2a + 5 = -2a + 5$

Aby dodać dwa wyrazy podobne, wystarczy dodać ich współczynniki liczbowe.

Suma dwóch wyrazów podobnych, których współczynniki są liczbami przeciwnymi, jest równa zero.



4 Wykonaj redukcję wyrazów podobnych.

a) $3x + 5x - 3x$

b) $-2y - 5y + 2y$

c) $z + z + z - z - z$

d) $\frac{1}{2}m - 0,5m + \frac{1}{8}m - 0,25m$

e) $5b - \frac{1}{5}b - \frac{4}{5}b + b$

f) $-a + a + a - a$

5 Wykonaj redukcję wyrazów podobnych.

a) $-2a + b - a - 2b + 3a$

b) $-ab + b^2 + 3ab - 2ab$

c) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + 2\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y$

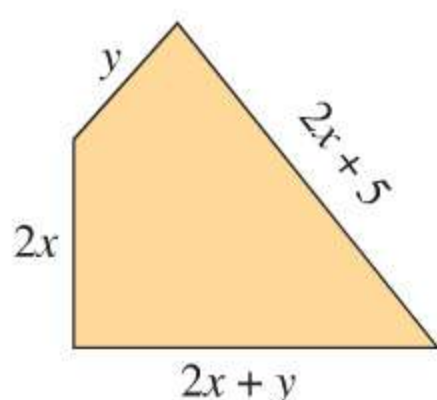
d) $15xy - 4x + 8y - 6xy + 5x - xy$

e) $0,2x^2 - 2y + 1,8x^2 + 4,3y - x$

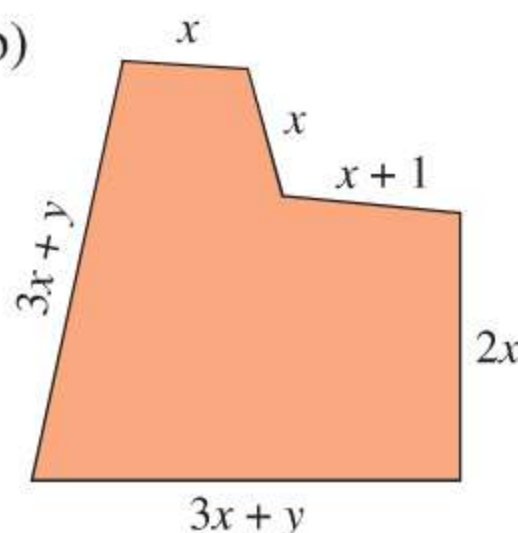
f) $-\frac{1}{4}m + \frac{1}{8}n - \frac{1}{8}m + 0,375m$

6 Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego obwód figury i oblicz jego wartość liczbową dla $x = 2$, $y = 3$.

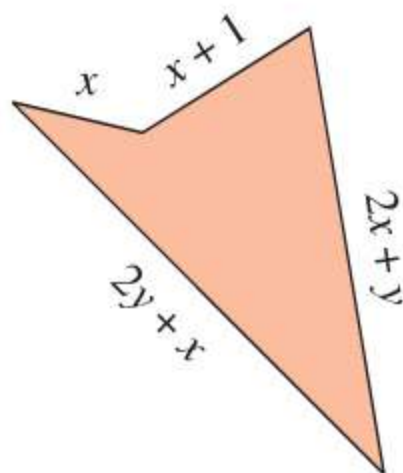
a)



b)



- 7 Na rysunku poniżej jest przedstawiony czworokąt.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Obwód tej figury jest równy $6x + 3y + 1$.	P	F
Obwód figury dla $x = 2$ i $y = 3$ jest równy 20.	P	F

- 8 Basia ma x zł kieszonkowego, Ewelina ma o 20 zł więcej. Zosia ma cztery razy mniej kieszonkowego niż Basia, a Ola o 10 zł mniej od Eweliny. Ile złotych kieszonkowego mają razem? Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne w najprostszej postaci.
- 9 Wzdłuż płotu posadzono d drzew w równej odległości y metrów między sąsiednimi drzewami. Skrajne drzewa posadzone są na końcach płotu. Jaka jest długość tego płotu? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
- A. dy m B. $(dy + y)$ m C. $(dy - y)$ m D. $(dy + 2)$ m
- 10 Za pomocą wyrażeń algebraicznych zapisz liczbę trzycyfrową oraz liczbę utworzoną z tych samych cyfr, ale zapisanych w odwrotnej kolejności. Oblicz sumę tych liczb i zapisz ją w najprostszej postaci.
- 11 Za pomocą wyrażeń algebraicznych zapisz liczbę dwucyfrową, której cyfra dziesiątek jest dwa razy większa od cyfry jedności równej x oraz liczbę utworzoną z tych samych cyfr, ale zapisanych w odwrotnej kolejności. Oblicz różnicę pierwszej i drugiej liczby i zapisz ją w najprostszej postaci.
- 12 Zmieszano dwa rodzaje cukierków: 3 kg po x zł za kilogram i 4 kg w cenie 1,5 raza wyższej od x zł. Ile kosztuje jeden kilogram mieszanki? Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.
- 13 Liczbę naturalną p , która przy dzieleniu przez 5 daje resztę 4, można zapisać w postaci wyrażenia algebraicznego $5n + 4$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną. Zapisz za pomocą odpowiedniego wyrażenia algebraicznego liczbę naturalną, która przy dzieleniu przez:
- 3 daje resztę 2,
 - 4 daje resztę 1,
 - x daje resztę y ($x > y$).

- 14 Przyjmij, że rower kosztuje x zł. Oceń, co się bardziej opłaca właścicielowi sklepu: sprzedać 10 rowerów z 15-procentowym zyskiem czy 30 rowerów z 5-procentowym zyskiem.

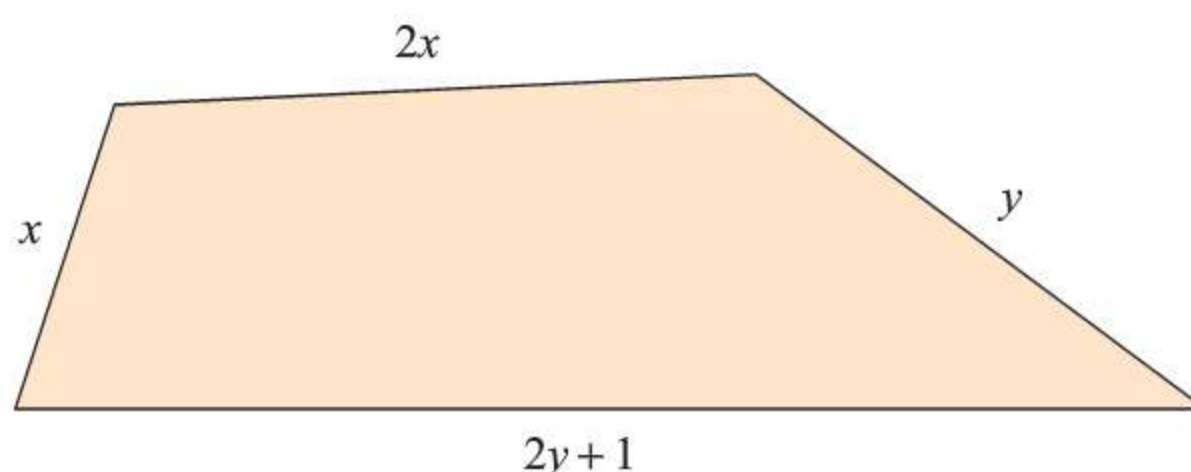


Wyzwanie

Zapisz dwa wyrażenia algebraiczne, których suma jest równa x , a różnica jest równa y .

Sprawdź się!

- 1 Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Po przekształceniu sumy algebraicznej $\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y + 0,25x - 0,25y$ otrzymamy
A. $5xy$ B. $0,5xy$ C. $0,5x + 0,5y$ D. $0,25x + 0,75y$
- 2 Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego obwód figury i oblicz jego wartość liczbową dla $x = 4$, $y = 5$.



- 3 Właściciel firmy zakupił x komputerów po 2800 zł za sztukę i o połowę mniej drukarek dziesięciokrotnie tańszych od komputerów. Ile złotych zapłacił? Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.
- 4 Grzegorz kupił a kg orzechów laskowych po x zł za kilogram i a kg orzechów nerkowca po $2x$ zł za kilogram. Jaka była cena 1 kg tej mieszanki? Zapisz w najprostszej postaci odpowiednie wyrażenie algebraiczne.
- 5 Zapisz za pomocą odpowiedniego wyrażenia algebraicznego liczbę naturalną, która przy dzieleniu przez 10 daje resztę 6.



4. Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych

Przykład 1.

Wykonajmy dodawanie.

a) $(4a + 5b) + (5a - 7b + 1)$

b) $4x + xy^2 + 2x^2y + (3x^2y - 4xy^2)$

Opuszczamy nawiasy i redukujemy wyrazy podobne.

a) $(4a + 5b) + (5a - 7b + 1) = \underline{4a} + \underline{5b} + \underline{5a} - \underline{7b} + 1 = 9a - 2b + 1$

b) $4x + xy^2 + 2x^2y + (3x^2y - 4xy^2) = 4x + \underline{xy^2} + \underline{2x^2y} + \underline{3x^2y} - \underline{4xy^2} = 4x - 3xy^2 + 5x^2y$

1 Wykonaj dodawanie.

a) $(4x - 2) + (5x + 3)$

b) $(y^2 + 5y - 6) + (2y^2 - y + 8)$

c) $(10a^3 - 2b^4 + c) + (-3a^3 - 6b^4 - c)$

d) $(2x^2 + 4x - 3) + (-x^2 - 2x + 4)$

2 Usuń nawiasy i wykonaj redukcję wyrazów podobnych.

a) $\left(\frac{3}{5}m^2 + \frac{2}{3}n^2 + 6\right) + \left(-\frac{1}{3}m^2 - \frac{2}{3}n^2 - 2\frac{3}{5}\right)$

b) $(0,5xy^2 - 1,2y^2 + 5) + (-0,8y^2 - 2,5xy^2 - 2\frac{1}{8})$

Przykład 2.

Wykonajmy odejmowanie.

a) $(4x + 5y) - (3x - 0,5y)$

b) $(3x^2 + 2y^3 - 1) - (x^2 + 4 - y^3)$

Opuszczamy nawiasy. Jeśli nawias poprzedzony jest znakiem minus, to zmieniamy znak każdego z wyrazów w nawiasie na przeciwny.

a) $(4x + 5y) - (3x - 0,5y) = \underline{4x} + \underline{5y} - \underline{3x} + \underline{0,5y} = x + 5,5y$

b) $(3x^2 + 2y^3 - 1) - (x^2 + 4 - y^3) = \underline{3x^2} + \underline{2y^3} - 1 - \underline{x^2} - 4 + \underline{y^3} = 2x^2 + 3y^3 - 5$

3 Wykonaj odejmowanie.

a) $(6a^2 + 2a + 1) - (-3a^2 - 2a + 5)$

b) $\left(12\frac{1}{2}m^2 - 1\frac{1}{4}n^2 - 1,6\right) - \left(2\frac{1}{4}m^2 + 3\frac{3}{4}n^2 + 2,4\right)$

c) $\left(1,5x^2y - \frac{3}{4}x^2 - 15\right) - \left(\frac{2}{5}x^2y - 2\frac{2}{3} - \frac{1}{8}x^2\right)$

4 Usuń nawiasy i zredukuj wyrazy podobne.

a) $5x + (2x - 7) - 9x - (-3x + 8) + 20 - 8x$

b) $-5x + (-2y + 4x) - (7x - 8y) - x + (2 - 6y)$

c) $-9z - (4 - 3z) - 8y - (-7z + 8y) + (-2y - 7)$

- 5** Wykonaj redukcję wyrazów podobnych i oblicz wartość liczbową wyrażenia.
- a) $-(-48a^2 + 10a) - (-4a - a^2)$ dla $a = -\frac{1}{7}$
 b) $-(12\sqrt{c} - c) + (-8c + 13\sqrt{c})$ dla $c = 4$
- 6** Zredukuj wyrazy podobne i oblicz wartość liczbową wyrażenia.
- a) $-y + 8x - z - 2x$ dla $x = -2, y = 6, z = -3$
 b) $-8y - 4z + x - y - 2z + 1$ dla $x = -0,5, y = -1, z = 2$
 c) $9y - (7y + x) + (6x - 7y)$ dla $x = -2, y = 3$
 d) $(6a - 8b - 0,7) - (6,9 + a - 5b) + 1,8$ dla $a = 0,2, b = 0,1$
- 7** Uzasadnij, że wartość liczbową wyrażenia $\frac{1}{2}abc - (4ab + 2abc) + (-bc + 5ab)$ dla $a = -2, b = \frac{1}{2}, c = -4$ jest liczbą ujemną.
- 8** Które wyrażenie po redukcji wyrazów podobnych jest równe $a + b$, a które $a - b$?
- I. $a - 1 - (b - 1)$ II. $a - (1 - b) + 1$
 III. $a - (-b - 1) - 1$ IV. $-(1 - a) - b + 1$
- 9** Wskaż wśród podanych dwa wyrażenia, które można zapisać w tej samej postaci.
- I. $(x - y) - (z - v)$ II. $-(x + y) - (-z - v)$
 III. $-(x - y) + (z - v)$ IV. $-(-x + y) - (z - v)$
- 10** Dane są wyrażenia A, B i C takie, że: $A = k - l, B = m - l, C = k - m$. Oblicz:
- a) $A - B - C,$ b) $A + B - C,$ c) $-A + B + C.$
- 11** Dane są wyrażenia $K = 16 - 5y + x$ i $L = 2x + 3y - 18$. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.
- Wyrażenie $K + L$ po redukcji wyrazów podobnych ma postać A / B.
 A. $x - 2y - 2$ B. $3x - 2y - 2$
- Wartość liczbową wyrażenia $K + L$ dla $x = \frac{1}{3}, y = -\frac{1}{2}$ jest równa C / D.
 C. 0 D. 3
- 12** Od wyrażenia $6p - 4q + 3r$ odejmij wyrażenie $-4r - 5q + 2p$, a następnie oblicz wartość liczbową otrzymanej różnicy dla $p = 0,25, q = -\sqrt{49}, r = -1$.
- 13** Wykonaj działania.
- a) $5x - [5x - (6x - 2)] + (x - 8)$ b) $(a^2 - 3b^2) + [-(a^2 - 2ab - b^2) - 2ab]$

- 14** Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego sumę pięciu kolejnych liczb naturalnych podzielnych przez 3.
- 15** Pani Marysia zapłaciła $50x$ zł podatku, a pani Ewa o $(3x + 20)$ zł więcej. Pani Kasia zapłaciła o $(x - 40)$ zł mniej od pani Ewy. Ile podatku łącznie zapłaciły? Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.
- 16** Suma trzech liczb jest równa $30a$. Druga liczba wynosi $3a + b$. Pierwsza liczba jest o $6b$ mniejsza od drugiej. Wyznacz trzecią liczbę.
- 17** Połowa obwodu równoległoboku jest równa $(3x + 4y)$ dm. Jeden jego bok ma długość $20x$ cm. Jaką długość w decymetrach ma drugi bok tego równoległoboku?
- 18** Basia kupiła w księgarni trzy książki. Jedna kosztowała $(3p + q)$ zł, druga o 5,50 zł mniej, trzecia o $2q$ zł więcej niż druga. Po zapłaceniu za książki Basi zostało 10,50 zł. Ile złotych miała przed kupnem książek?

Wyzwanie

Znajdź 9 różnych cyfr: $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, jeśli $d = 3$, $e = 5$ oraz spełniona jest poniższa zależność.

		a	b	c	d	d
+		b	c	e	f	d
		f	e	g	h	i
						b

Sprawdź się!

- 1** Dane są wyrażenia $A = 3x + y$ i $B = 10y - x$. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Suma wyrażen A i B jest równa $A + B = 2x + 11y$.	P	F
Różnica wyrażen B i A jest równa $B - A = 9y - 4x$.	P	F

- 2** Wykonaj działania.
a) $a - (-b + 1) + 1$ b) $(a - 1) - (b - 1)$
- 3** Oblicz wartość liczbową wyrażenia $8(y - 4) - 2(x + 1)$ dla $x = 4$, $y = 2$.
- 4** Dane są wyrażenia: $E = -(-x + y) + (-z + v)$ i $F = -(-x + y) - (-z + v)$. Oblicz $E + F$.
- 5** Obwód trójkąta jest równy $5x$. Jeden z boków ma długość $x + y$, drugi jest od niego krótszy o $2x$. Wyznacz długość trzeciego boku tego trójkąta.

5. Mnożenie sumy algebraicznej przez liczbę

Przykład 1.

Wykonajmy mnożenie $2 \cdot (5 + 3)$.

$$2 \cdot (5 + 3) = 2 \cdot 8 = 16 \text{ lub } 2 \cdot (5 + 3) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 10 + 6 = 16$$

W drugim obliczeniu zastosowaliśmy prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania.

Dla dowolnych liczb a, b, c zachodzi $a(b + c) = ab + ac$.



Powyższe prawo stosujemy, gdy mnożymy sumę algebraiczną przez liczbę, np.

$$2(y + z) = 2y + 2z \quad (2a - b) \cdot (-4) = 2a \cdot (-4) + (-b) \cdot (-4) = -8a + 4b$$

Aby pomnożyć sumę algebraiczną przez liczbę, mnożymy każdy składnik sumy przez tę liczbę, a otrzymane iloczyny dodajemy.



1 Wykonaj działania.

a) $4(x + 3)$	$5(-2a + b)$	$-4(5y - z)$
b) $(-0,5y + 9) \cdot 0,8$	$(-2a + 4b) \cdot (-1,5)$	$0,2(10x - y) \cdot 0,4$
c) $\frac{1}{3}(3y - 2,7)$	$-\frac{2}{3}(3,6a - 1,5b)$	$\frac{1}{5}(10x + 2,5) - 0,4$

2 Zapisz iloczyny w postaci sumy.

a) $3(x - 3)$	$5(y + z)$	$4(3x - y)$	$-2(7 - 4n)$
b) $\frac{1}{2}(4z + 2)$	$-\frac{1}{3}(6b - 3)$	$0,2(x - 5y)$	$3\left(\frac{1}{3}a + 1\right)$

3 Usuń nawiasy i wykonaj redukcję wyrazów podobnych.

a) $-6c - (3c + 2)$	b) $7x - 8 - (5x + 6)$
c) $9y - (8 - 3y) + 16$	d) $5x - (2 - 4x) + 8x - 7$
e) $6 - (-5c - 8) - 10c$	f) $-4(3x - 6) - 3(2 + 7x)$
g) $5(3z - 7) - 9(-8z - 6)$	h) $7x - 3(5x + 2) - 6(7 + 2x)$

- 4 Dana jest suma $-3(5x - 4) + 8(-3x + 2)$. Które wyrażenie otrzymasz po usunięciu nawiasów i wykonaniu redukcji wyrazów podobnych? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $-39x - 2$ B. $9x + 4$ C. $-9x + 14$ D. $-39x + 28$

- 5 Udowodnij, że suma $-5(3y - 7) - 2(6 + 4y) + 3y$ jest równa $-20y + 23$.

- 6 Wykonaj mnożenie i redukcję wyrazów podobnych.

a) $5a + 4(a - 1)$

b) $5a + 3(a - 2) + 5b$

c) $4\left(2b + \frac{1}{2}\right) - 6b$

d) $2a + 0,5(a - 2) + 5b$

e) $3x - 0,2(1 - 2x)$

f) $-\frac{1}{3}(a + 3b) - 2a$

- 7 Przekształć wyrażenie na sumę i wykonaj redukcję wyrazów podobnych.

a) $3(5x - 8z - 2)$

b) $-8(7n + 9p + t)$

c) $3(b - 5a) - 2(3b + a)$

d) $5(2x + 3y) - (x - 2y)$

e) $4\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{4}\right) - 5\left(\frac{3x}{5} - \frac{7y}{5}\right)$

f) $-6\left(\frac{3x}{6} - \frac{2y}{6}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{3x}{2} - 6y\right)$

- 8 Uprość wyrażenie.

a) $7(b + c) - 3(b + 2c)$

b) $5(a + 3) + 2b - 3(a + b)$

c) $6(3 + z) - 4(2z + 4) + 2(8 + z)$

d) $-4(2x - 7 - 3y) - 12(-y - x)$

- 9 Student w czasie wakacji pracował w Irlandii. W ciągu dwóch pierwszych tygodni pracował x godzin tygodniowo i otrzymywał wynagrodzenie w wysokości 10,5 € za godzinę. Następnie stawka za godzinę wzrosła o 1,5 €, a tygodniowy wymiar pracy wzrósł o sześć godzin. Na tych warunkach student pracował przez cztery tygodnie. Ile euro zarobił w ciągu sześciu tygodni? Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne i je uprość.



- 10 Wykonaj działania i oblicz wartość liczbową wyrażenia.

a) $2(y + 6) - 4(y - 6)$ dla $y = \frac{1}{2}$

b) $4(x - y) - (-x + y)$ dla $x = \frac{3}{2}, y = -1$

- 11 Wykaż, że wartość liczbową wyrażenia $3(a - 8) - (5 - 2a)$ dla $a = -0,5$ jest liczbą ujemną.

- 12** Wykonaj działania i oblicz wartość liczbową wyrażenia.
- a) $9(x - 7y) - (5y - 2x) + 20y$ dla $x = 0,5$, $y = 0,3$
- b) $(5x + 7y) - 8(y + 1) + 3(x - y)$ dla $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$
- 13** Pierwszy odcinek ma długość $(x + 3)$ cm, a drugi jest cztery razy dłuższy. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego różnicę długości drugiego odcinka i połowy pierwszego odcinka. Wykonaj obliczenia dla $x = 1,4$.

Wyzwanie

Cenę a zeszytu obniżono o $b\%$. Zapisz różnicę kosztów 12 zeszytów po obniżce i 10 zeszytów przed obniżką. Wykonaj obliczenia dla $a = 0,80$ zł i $b = 15$.



Sprawdź się!

- 1** Zamień iloczyn $3(4a - c)$ na sumę.
- 2** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wyrażenie $(4x - 7y - 7) \cdot (-2)$ po uproszczeniu ma postać $4x - 7y - 9$.	P	F
Wyrażenie $-2(3a + 1) + (4a - 5)$ po uproszczeniu ma postać $-2a - 7$.	P	F

- 3** Wykonaj działania i oblicz wartość liczbową wyrażenia $4(y - 3) - 3(x + 1)$ dla $x = 4$, $y = 2$.
- 4** Szkoła zakupiła pięć rzutników i siedem telewizorów. Jeden rzutnik kosztował x zł, a telewizor był o 500 zł tańszy od rzutnika. Ile zapłacono za ten sprzęt? Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne i je uprość.
- 5** W baku samochodu pani Barbary mieści się a litrów benzyny, a w baku samochodu pana Patryka o 15 l mniej. Jeden litr benzyny ma masę 0,7 kg. Ile waży benzyna w obu bakach? Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne i je uprość.



6. Wyłączanie wspólnego czynnika liczbowego przed nawias

Przykład 1.

Zamieńmy sumę na iloczyn.

a) $5a + 5$ b) $35a - 42b$

a) Liczba 5 jest wspólnym dzielnikiem jednomianów $5a$ i 5 .

$$5a + 5 = 5 \cdot a + 5 \cdot 1 = 5 \cdot (a + 1)$$

b) Liczba 7 jest wspólnym dzielnikiem jednomianów $35a$ i $42b$.

$$35a - 42b = 7 \cdot 5 \cdot a - 7 \cdot 6 \cdot b = 7 \cdot (5a - 6b)$$

Taki sposób zamiany sumy na iloczyn nazywamy **wyłączaniem wspólnego czynnika przed nawias**.

1 Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $4a + 4$ $25a - 5$ $0,6a + 0,6$

b) $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}a$ $2\frac{2}{5}a + 2\frac{2}{5}$ $1,5a - 1,5$

2 Zamień sumę na iloczyn.

a) $20b + 6c$ $14a - 7$ $9b + 12$ $12a^2 - 8b$

b) $1,6a - 2,4c$ $2,5a + 0,5b$ $2,1a^2 - 2,8c^2$ $2,4x^2 - 1,6y$

3 Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $4x - 8y - 4z$ $6a - 9b + 12y$ b) $63m + 54n - 9$ $\frac{3a^2}{5} + \frac{6b}{5} - \frac{9}{5}$

4 Dane jest wyrażenie $3,5a + 0,7b - 14$. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po wyłączeniu wspólnego czynnika przed nawias otrzymasz iloczyn

A. $3,5(a + 2b - 4)$ B. $7(0,5a + 0,1b - 2)$

C. $0,7(5a + 0,1b - 20)$ D. $0,35(10a - 0,2b - 40)$

5 Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $\frac{3}{4}x + 0,75y^2 - \frac{1}{4}z^3$ b) $\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b^2 + 1\frac{1}{3}c^3$ c) $0,125c - \frac{1}{8}bz^2 + 0,25a^3$

6 Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

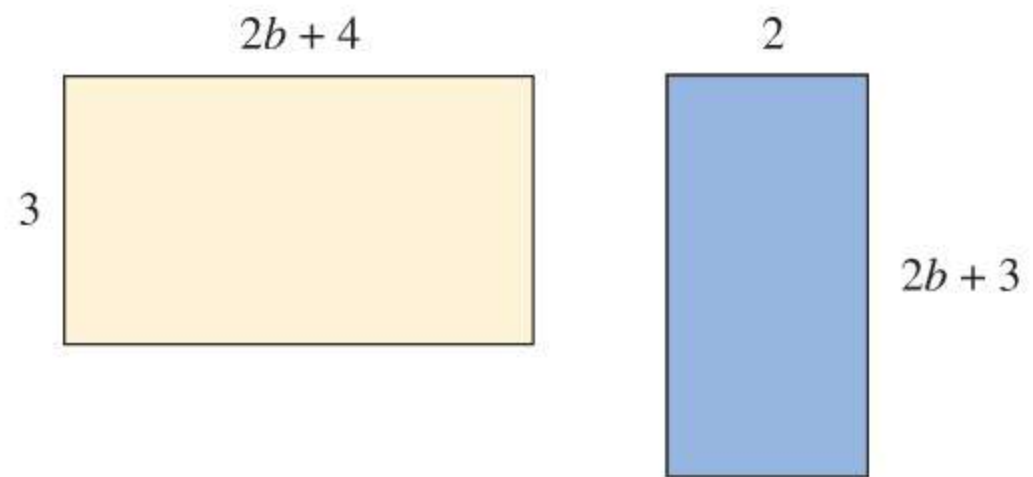
a) $-\sqrt{3} + 4\sqrt{3}y$ b) $-4\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{3}a^2$

7 Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

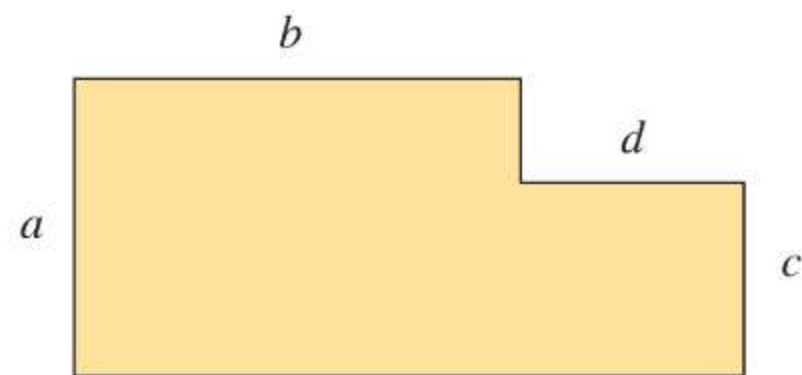
a) $14xy - 21x^2 + 7xy^2$ b) $-36y^2 + 12x - 24y$

c) $\sqrt[3]{2}xy + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}z$ d) $9\sqrt[3]{7}a - 27\sqrt[3]{7}b - 36\sqrt[3]{7}$

- 8 Różnicę pól dwóch prostokątów przedstawionych na rysunku wyraż za pomocą wyrażenia algebraicznego i zapisz je w postaci iloczynu.



- 9 Z dwóch prostokątów utworzono figurę jak na rysunku. Ile razy zwiększy się pole figury, jeżeli boki długości a i d zwiększymy trzykrotnie, a boki długości b i c zwiększymy dwukrotnie?



- 10 Udowodnij, że różnica wyrażeń: $-2(a + 2b^2) - 4ab^2$ i $-7(a - b^2) + 2(2b^2 - 7ab^2)$ jest podzielna przez 5, jeżeli a i b są liczbami całkowitymi.

Wyzwanie

Czy różnica liczby czterocyfrowej, której cyfrą dziesiątek jest zero, i liczby zapisanej za pomocą tych samych cyfr, ale w odwrotnej kolejności, jest podzielna przez 9?

Sprawdź się!

- Zamień sumę na iloczyn.
a) $6m - 6a$ b) $10n - 15m$
- Dane jest wyrażenie $12a^2 + 8m - 10$. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Po zamianie sumy na iloczyn otrzymasz
A. $4(3a^2 + 2m) - 6$ B. $3(4a^2 + 8m - 10)$
C. $2(6a^2 + 8m - 5)$ D. $2(6a^2 + 4m - 5)$
- Wyłącz wspólny czynnik przed nawias w wyrażeniu $\frac{3}{5}a - 0,2b^2 + \frac{2}{5}z$.
- Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.
a) $2\sqrt{5}x + \sqrt{5}$ b) $3\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{5}x^2$
- Sprawdź, czy suma wyrażeń $2x + 3x^2y - 12xy$ i $-5x - 12x^2y + 24xy$ jest podzielna przez 3, jeżeli x i y są liczbami całkowitymi.

Zadania utrwalające

1 Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego:

- różnicę liczby a oraz sumy liczb $-b$ i c ;
- sumę trzech liczb, z których pierwsza jest równa x , a każda następna jest o 5 mniejsza od poprzedniej;
- podwojoną różnicę kwadratów liczb a i b ;
- iloczyn sumy liczb x i 6 oraz ich różnicy;
- sześcian różnicy liczb a i b ;
- iloraz różnicy liczb -3 i m przez ich sumę;
- sumę trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych.

2 Oblicz wartość liczbową wyrażenia.

- $\left(\frac{1}{2}mnz\right)^4$ dla $m = 2, n = -5, z = 0,2$
- $(10cd)^3$ dla $c = 0,01, d = -0,1$
- $5m^2n^3 + 4(m - n)$ dla $m = -\frac{1}{2}, n = -1$
- $4b^2 - 2a^2$ dla $a = -4, b = 3$

3 Wykonaj działania.

- $(2x - 3) - (x + 5) + (x + 4)$
- $(3a - 2) - (a + 4) + (a - 3)$
- $4(2y - 7y^2) - 3(y^2 - 3y)$
- $-5(2b + 3z) + 2(2b - 4z)$

4 Wykonaj działania.

- $3(x - 2) + 4(x - 2)$
- $8(x + 4) - 5(x + 4)$
- $3(x^2 - 7) + 8(x^2 - 7)$
- $7(x - 3) - (x - 3)$
- $4(x + 5) + 20(x + 5)$
- $0,2(-10 + x) - (x - 10)$

5 Które wyrażenia są równe?

- | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| A. $-(4 - x - 3)$ | B. $-(1 + x + 5)$ | C. $-(x - 1 - 6)$ | D. $-(5 + x - 2)$ |
| I. $-x + 7$ | II. $-x - 6$ | III. $x - 1$ | IV. $-x - 3$ |

6 Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

- $-8x + 6y - 2$
- $6a - 12b + 18c$
- $21x^2 + 14y^3 - 7$
- $-1,6a - 0,8b - 4,8c$
- $\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{1}{5}$
- $3\frac{3}{4}a + 6\frac{1}{4}b - 1\frac{1}{4}$

7 Pani Zosia w czterech kolejnych miesiącach otrzymała pensję równą: 3200 zł, 4000 zł, 3500 zł, 5100 zł. Oblicz jej średnią miesięczną pensję w tym okresie.

- 8 Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego liczbę trzycyfrową, w której liczba dziesiątek jest o 2 mniejsza od cyfry jednościan równej x , a cyfra setek jest trzy razy większa od cyfry dziesiątek.
- 9 Cenę pralki równą y zł obniżono o 20%. Ile kosztuje pralka po obniżce? Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.
- 10 Staś dostał na zakupy 30 zł. W sklepie otrzymał resztę: x pięciozłotówek i y złotych. Ile złotych Staś zapłacił za zakupy? Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.
- 11 Antoś ma obecnie x lat, Zosia jest o rok młodsza. Ile lat mieli razem dwa lata temu? Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne. Przyjmij, że $x > 2$.
- 12 Właściciel kwiaciarni zakupił n bukietów róż po 25 kwiatów oraz o 5 bukietów tulipanów więcej niż bukietów róż, po 50 kwiatów w każdym bukiecie. Ile kwiatów kupił? Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.
- 13 Ile centymetrów kwadratowych ma pole trapezu, którego wysokość wynosi 4 dm, jedna z podstaw ma $2x$ cm, a druga jest dwa razy dłuższa? Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.
- 14 Działka w kształcie prostokąta ma a metrów szerokości, a jej długość jest o b m większa od szerokości. Ile metrów bieżących siatki potrzeba na ogrodzenie dwóch takich działek? Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.
- 15 Przyprostokątna trójkąta prostokątnego równoramiennego ma długość a . Zapisz wyrażenie algebraiczne, za pomocą którego obliczysz pole tego trójkąta.
- 16 Adam ma x lat. Jego siostry są od niego młodsze: Ania o 3 lata, a Beata o 5 lat. Tata jest starszy od Adama o 30 lat, a mama o 28 lat. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego różnicę sumy lat rodziców i sumy lat dzieci. Jaką największą liczbą może być ta różnica lat?
- 17 Dla jakiej liczby a wyrażenie: $2a^5 + a^3 + 2a^2 + 1$ ma wartość zero?



Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

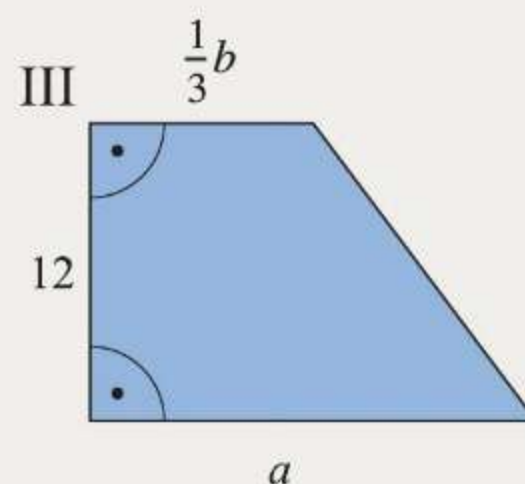
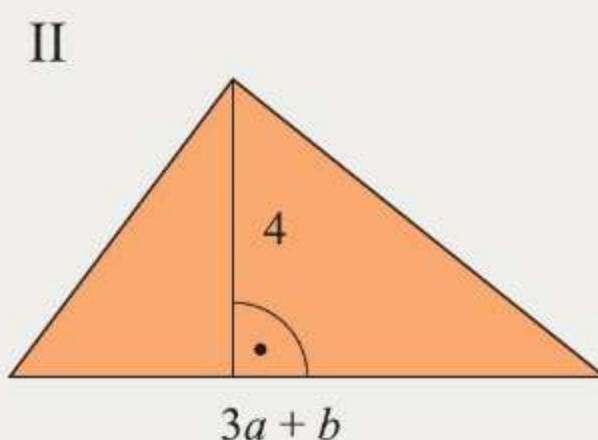
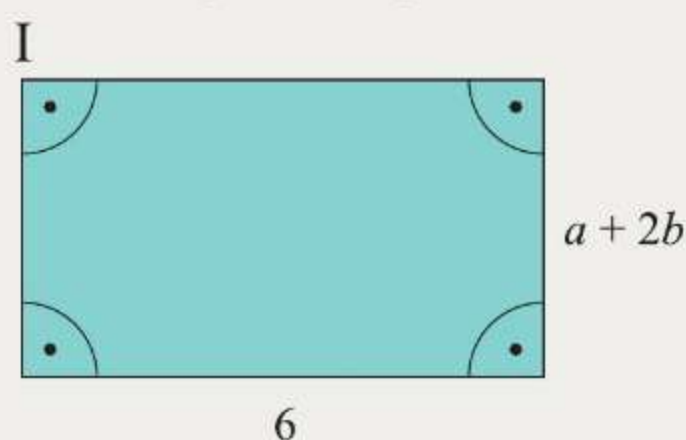
W zadaniach 1.–3. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 1 Suma liczby 8 i iloczynu liczb 5 i a jest równa
 A. $13 + a$ B. $8 + 5a$ C. $8 + 5 : a$ D. $40a$
- 2 Przed podwyżką cena ołówka była równa x zł, a gumki y zł. Za 3 ołówki droższe o 9% i 4 gumki droższe o 15% trzeba zapłacić
 A. $(3,27x + 4,6y)$ zł B. $(1,09x + 1,15y)$ zł
 C. $(1,8x + 1,15y)$ zł D. $(2,7x + 0,6y)$ zł
- 3 Różnica sum algebraicznych $-20a + 7b$ i $-22a - 7b + 7$ jest równa
 A. $-42a + 14b - 7$ B. $-42a + 7$
 C. $2a + 7$ D. $2a + 14b - 7$

W zadaniach 4.–5. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 4 Który zapis jest prawdziwy dla każdej liczby x ?
 A. $2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2x - \frac{1}{4}$ B. $2\left(-x + \frac{1}{2}\right) = 2x + 1$
 C. $2\left(-x - \frac{1}{2}\right) = -2x - 1$ D. $-2\left(x - \frac{1}{2}\right) = -2x - 1$

- 5 Która figura ma pole równe $6a + 2b$?



- A. Tylko I. B. Wszystkie. C. II i III. D. I i III.

- 6 Dane są dwa wyrażenia $E = 2x + y$ i $K = -3x + 2y$. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Wyrażenie $-5E + 2K$ po redukcji wyrazów podobnych jest równe A / B.

- A. $-16x + 9y$ B. $-16x - y$

Najprostszą postacią wyrażenia $K - 2E$ jest C / D.

- C. $-7x$ D. $-7x - 4y$

- 7 W cukierni zatrudnionych jest ośmiu pracowników. Czwarta część z nich zarabia po 5000 zł, a pozostali po 4000 zł miesięcznie. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Średnia arytmetyczna miesięcznych zarobków pracowników tej cukierni jest równa 4250 zł.	P	F
Gdy zostaną zatrudnione jeszcze cztery osoby, z których dwie będą zarabiać po 3800 zł, a dwie po 5000 zł, to średnia arytmetyczna miesięcznych zarobków zwiększy się o więcej niż 50 zł.	P	F

- 8 W trapezie jedna z podstaw ma długość a cm, druga jest od niej o 40% krótsza, a wysokość jest dwa razy dłuższa od krótszej podstawy. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wysokość trapezu jest równa $2a$ cm.	P	F
Pole trapezu jest równe $0,96a^2$ cm ² .	P	F

- 9 Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Wartość liczbową wyrażenia $-4x(2 - y)$ dla $x = 0,5$ i $y = -3$ jest A / B.

A. mniejsza niż -10 B. równa -10

Wartość liczbową wyrażenia $0,25x(-4 - x)$ dla $x = -8$ jest liczbą C / D.

C. dodatnią D. ujemną

- 10 Dane jest wyrażenie: $-2x^2 + 2(-4 - x^2) + 4(x^2 - 1)$. Czy wartość tego wyrażenia jest ujemna dla dowolnej liczby x ? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	dla $x = -2$ wartość tego wyrażenia jest nieujemna.
B.	Nie,		2.	wartość wyrażenia jest równa -12 .

- 11 Dana jest liczba dwucyfrowa, której cyfrą dziesiątek jest x , a cyfrą jedności y . Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego różnicę danej liczby dwucyfrowej i liczby złożonej z tych samych cyfr, ale zapisanych w odwrotnej kolejności. Podaj trzy różne przykłady takich par liczb, których różnica jest równa 45.

- 12 Komputer przed podwyżką kosztował 8000 zł, a po podwyżce x zł. O ile procent podwyższono cenę komputera?

- 13 Udowodnij, że suma czterech liczb całkowitych, z których pierwsza jest równa $4n$, a każda następna jest o 2 mniejsza od poprzedniej, dzieli się przez 4.



1. Równania z jedną niewiadomą

Przypomnij sobie

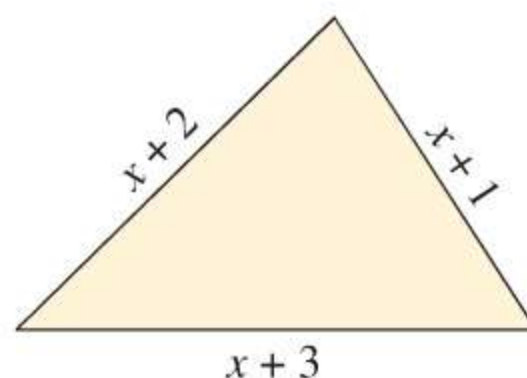
- co to jest równanie i co to znaczy je rozwiązać,
- jak obliczamy wartość liczbową wyrażenia algebraicznego,
- jak sprawdzamy, czy dana liczba spełnia równanie.

Przykład 1.

Obwód trójkąta przedstawionego na rysunku jest równy 18 cm. Obliczmy długości boków tego trójkąta.

Obwód trójkąta można zapisać w postaci wyrażenia algebraicznego:

$$x + 1 + x + 2 + x + 3 = 3x + 6, \text{ a więc } 3x + 6 = 18.$$



Przez połączenie symbolem „=” dwóch wyrażen algebraicznych otrzymaliśmy **równanie**. Równanie $3x + 6 = 18$ jest **równaniem z jedną niewiadomą**. Tą niewiadomą jest x .

Jeżeli zamiast x podstawimy liczbę 4, to otrzymamy równość $3 \cdot 4 + 6 = 18$. Obie strony tego równania, lewa $L = 3 \cdot 4 + 6 = 18$ oraz prawa $P = 18$, są równe.

Mówimy wtedy, że liczba 4 spełnia równanie $3x + 6 = 18$.

Wiemy, że $x = 4$, możemy więc obliczyć długości boków trójkąta:

$$4 + 1 = 5 \text{ [cm]} \quad 4 + 2 = 6 \text{ [cm]} \quad 4 + 3 = 7 \text{ [cm]}$$

ODPOWIEDŹ: Długości boków trójkąta wynoszą 5 cm, 6 cm, 7 cm.

Mówimy, że **liczba spełnia równanie**, jeśli po podstawieniu jej zamiast niewiadomej otrzymamy równość. Liczbę spełniającą równanie nazywamy **rozwiązaniem równania** lub **pierwiastkiem równania**.

Zbiór wszystkich liczb spełniających równanie nazywamy **zbiorem rozwiązań** tego równania.

Równaniami z jedną niewiadomą są np.

$$2x - 5 = 8 \quad y^3 = 8 \quad \sqrt{x^2 + 7} = 4 \quad x^2 + 3x + 5 = 2x \quad a^3 - a^2 + a = 0$$

Równaniami pierwszego stopnia z jedną niewiadomą są np.

$$10 - 2x = 7 + x \quad 3m - 2 = 2m \quad a - 10 = 12$$

W równaniach pierwszego stopnia niewiadoma występuje w pierwszej potęgze.

Przykład 2.

Sprawdźmy, która z liczb 0, 1 spełnia równanie: $2(x+2) = 7-x$.

Dla $x = 0$: $L = 2(0+2) = 2 \cdot 2 = 4$ $P = 7 - 0 = 7$ $L \neq P$

Dla $x = 1$: $L = 2(1+2) = 2 \cdot 3 = 6$ $P = 7 - 1 = 6$ $L = P$

ODPOWIEDZ: Liczba 1 spełnia równanie $2(x+2) = 7-x$, czyli jest jego rozwiązaniem.

- 1** Sprawdź, czy liczba -5 spełnia równanie.
 - a) $4a + 15 = -5$
 - b) $m + 5 = -10$
 - c) $2x - 7 = 4x + 3$
- 2** Podaj przykład równania, którego rozwiązaniem jest podana liczba.
 - a) 2
 - b) 0
 - c) -1
 - d) 10
- 3** Określ, czy dane równanie jest równaniem pierwszego stopnia z jedną niewiadomą. Odpowiedź uzasadnij.
 - a) $\frac{1}{2} - x = 4$
 - b) $\frac{m}{2} = -7$
 - c) $\frac{a^2}{4} - 2 = 4$
 - d) $-8 = x^2 + 7$
 - e) $2y - 3 = 10 + 5x$
 - f) $3(x - 1) = 2y + z$
- 4** Sprawdź, czy podana liczba spełnia równanie.
 - a) $2x - x^2 = 0$ 2
 - b) $4x^2 + 12x = -9$ $\frac{3}{2}$
- 5** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Liczba -1 jest rozwiązaniem równania $x^3 - 12x^2 = -13$.	P	F
Liczba -2 jest rozwiązaniem równania $2x^4 - 12x^2 - 5x = -6$.	P	F
Liczba $\sqrt{2}$ jest rozwiązaniem równania $x^2 - 2x = \sqrt{2}$.	P	F

- 6** Sprawdź, które liczby całkowite dodatnie mniejsze od 4 spełniają równanie.
 - a) $x^2 - 5x = -6$
 - b) $2x^2 - 8x = 4x - 16$
 - c) $\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = \frac{5}{6}$
- 7** Sprawdź, które liczby całkowite niedodatnie większe od -5 spełniają równanie.
 - a) $x^2 + 6x = -8$
 - b) $\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{3} = \frac{1}{6}$
 - c) $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} = 0$
- 8** Sprawdź, które liczby całkowite nie większe od 1 i większe od -4 spełniają równanie.
 - a) $x^3 - 2x = -1$
 - b) $x^4 + 3x^3 = 0$
 - c) $\frac{x^5}{4} + \frac{x^2}{4} = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

- 9 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Rozwiązaniem równania $3x^2 - 4x + 1 = 0$ jest liczba przeciwna do -1 .	P	F
Rozwiązaniem równania $-4x + 5 = -3$ jest odwrotność liczby 2.	P	F
Rozwiązaniem równania $3(x - 4) = 9$ jest kwadrat liczby $\sqrt{7}$.	P	F
Rozwiązaniem równania $\frac{x^3}{4} - 2 = 0$ jest $ -2 $.	P	F

- 10 Sprawdź, czy podana liczba i liczba do niej przeciwna spełniają równanie.

a) $5x^2 = 125$ 5 b) $-x^3 - 27 = 0$ -3
 c) $-x^5 - 1 = 0$ -1 d) $x^6 - x^4 = 0$ 1

- 11 Dobierz w pary równanie i liczbę, która je spełnia.

A. $4(2x - 3) = 12$ B. $-x^3 + 8 = 0$ C. $x^2 - (x^2 - 4x) = -1$ D. $\frac{x^5}{6} - x^3 = \frac{5}{6}$
 I. 2 II. 3 III. -1 IV. $-\frac{1}{4}$

Wyzwanie

Napisz trzy równania, które spełnia ta sama liczba.

Sprawdź się!

- Które równanie spełnia liczba -8 ? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
 A. $2x + 3 = 4$ B. $-a + 10 = 2$
 C. $3c - 4 = 4c + 4$ D. $x : 4 = 8$
- Czy dane równanie jest równaniem pierwszego stopnia z jedną niewiadomą? Odpowiedź uzasadnij.
 a) $y = 2x + 5$ b) $n : 5 = 20$
 c) $a + b = c + d$ d) $18 - 2x^2 = 3x + 1$
- Sprawdź, która z liczb $-1, 0, 1$ spełnia równanie $x^2 + 5 = 6x$.
- Sprawdź, która z liczb naturalnych mniejszych od 3 jest rozwiązaniem równania $x^3 - 2x = -1$.
- Sprawdź, które liczby całkowite niedodatnie większe od -4 spełniają równanie $x^2 + 3x = 0$.

2. Rozwiązywanie równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą

Przypomnij sobie

- jak redukujemy wyrazy podobne.

Przykład 1.

Sprawdźmy, czy liczba -3 spełnia równanie.

a) $2x - 5 = 3x - 2$

b) $\frac{x}{2} + 1 = \frac{1}{2} + \frac{x}{3}$

a) $L = 2 \cdot (-3) - 5 = -6 - 5 = -11$

$P = 3 \cdot (-3) - 2 = -9 - 2 = -11$

$L = P$

b) $L = \frac{-3}{2} + 1 = -1\frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$

$P = \frac{1}{2} + \frac{-3}{3} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

$L = P$

ODPOWIEDŹ: Liczba -3 spełnia oba równania.

Równaniami równoważnymi nazywamy równania, które mają ten sam zbiór rozwiązań.

Przykład 2.

Rozwiążmy równanie.

a) $x + 7 = 2$

b) $-2x = 4$

c) $3(x - 1) = x - 4$

a) **Sposób I**

$$\begin{aligned} x + 7 &= 2 \quad | +(-7) \\ x + \cancel{7} + (-\cancel{7}) &= 2 + (-7) \\ x &= 2 - 7 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Do obu stron równania dodajemy liczbę -7 , przeciwną do liczby 7 .

Sposób II

$$\begin{aligned} x + 7 &= 2 \\ x &= 2 - 7 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Przenosimy liczbę 7 na drugą stronę równania z przeciwnym znakiem.

SPRAWDZENIE: $L = -5 + 7 = 2$, $P = 2$, a zatem $L = P$.

ODPOWIEDŹ: Rozwiązaniem równania jest liczba -5 .

Równanie $x + 7 = 2$ jest równoważne kolejnym równaniom:

$$x - 7 + (-7) = 2 + (-7)$$

$$x = 2 - 7$$

$$x = -5$$



Dodanie do każdej strony równania liczby przeciwnej do danej można zastąpić przeniesieniem danej liczby na drugą stronę równania ze znakiem zmienionym na przeciwny.

b) $-2x = 4 \quad | : (-2)$ Obie strony równania dzielimy przez -2 .

$$\frac{-2x}{-2} = \frac{4}{-2}$$

$$x = -2$$

SPRAWDZENIE: $L = -2 \cdot (-2) = 4$, $P = 4$, zatem $L = P$.

ODPOWIEDŹ: Rozwiązaniem równania jest liczba -2 .

Równanie $-2x = 4$ jest równoważne równaniu $x = -2$.

c) $3(x - 1) = x - 4$ Opuszczamy nawias, korzystając z prawa rozdzielności mnożenia względem odejmowania.

$$3x - 3 = x - 4 \quad | +3$$

Do obu stron równania dodajemy 3.

$$3x - \cancel{3} + \cancel{3} = x - 4 + 3$$

$$3x = x - 1 \quad | -x$$

Od obu stron równania odejmujemy x .

$$3x - x = \cancel{x} - 1 - \cancel{x}$$

$$2x = -1 \quad | \cdot \frac{1}{2}$$

Obie strony równania mnożymy przez $\frac{1}{2}$.

$$2x \cdot \frac{1}{2} = -1 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

SPRAWDZENIE: $L = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2} - 1\right) = 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -4\frac{1}{2}$, $P = -\frac{1}{2} - 4 = -4\frac{1}{2}$, więc $L = P$.

ODPOWIEDŹ: Rozwiązaniem równania jest liczba $-\frac{1}{2}$.

Równanie $3(x - 1) = x - 4$ jest równoważne równaniu $x = -\frac{1}{2}$.



Aby otrzymać równanie równoważne danemu, możemy:

- do obu stron równania dodać tę samą liczbę lub to samo wyrażenie,
- od obu stron równania odjąć tę samą liczbę lub to samo wyrażenie,
- obie strony równania pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę różną od zera.

- 1** Ułóż trzy równania równoważne danemu.
 a) $2x = 6$ b) $a + 3 = 5$ c) $1 - m = 10$
- 2** Które równanie nie jest równoważne pozostałym równaniom?
 I. $6x = 3$ II. $3x - 1,5 = 0$ III. $3x = 1,5$
 IV. $3x + 1 = 2,5$ V. $3x + 2 = 1,5$ VI. $-30x = -15$

Rozwiązać równanie to znaczy znaleźć liczbę, która je spełnia.



- 3** Rozwiąż równanie.
 a) $9 + x = 1\frac{7}{8}$ b) $-8y = 5$ c) $x - \frac{4}{5} = 0,8$
 d) $6\frac{1}{8}y = 1$ e) $-\frac{1}{3}y = 10$ f) $-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}l = 2,25$
- 4** Wykaż, że rozwiązaniem równania jest podana obok liczba.
 a) $8a + 4 = 36$ $a = 4$
 b) $0,4m - 2 = -6$ $m = -10$
- 5** Rozwiąż równanie.
 a) $2\left(x - \frac{1}{2}\right) - x + 3 = 3$ b) $0 = x - 1 - (3x - 5)$
 c) $-\frac{1}{2}x + 1 + \frac{3x}{2} = 3$ d) $3(1 - x) - (1 - 2x) = 9$
- 6** Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.
 Rozwiązaniem równania $0,5(2 - 4x) = 3 - x$ jest liczba A / B.
 A. $-\frac{1}{3}$ B. -2
 Wartość wyrażenia $2x + 1$ jest równa 3 dla C / D.
 C. $x = -2$ D. $x = 1$
- 7** Rozwiąż równanie.
 a) $12y - (y + 5) = 10y - 1$ b) $2(u - 5) + 15 = 3(u - 4) + 10$
 c) $-3\left(\frac{y}{3} + 1\right) - 2 = 4(1 - y)$ d) $2(3a - 2) - 6 = 4,5(2a - 1) + \frac{1}{2}$
- 8** Wśród poniższych równań znajdź równania równoważne.
 I. $5x - 3 = 7x + 1$ II. $10 + 4(1 - x) = 2x - 6$
 III. $-3x + 1 = -2(x - 3) - 3$ IV. $-2x + \frac{1}{2} = -3x + 2\frac{1}{2}$

- 9 Które równanie spełnia liczba ujemna, a które – liczba naturalna?

I. $-9(2 + y) - 3y + 8 = -2(4y + 5)$

II. $3[2(x + 2)] - 12x = 3(8 - 4x)$

III. $\frac{7(1 + 3x)}{2} + 1 = 3(-3 + 2x)$

IV. $\frac{2 - x}{6} + \frac{x - 4}{2} = \frac{3x + 5}{3}$

- 10 Rozwiąż równanie. Czy spełnia je liczba całkowita?

a) $4 + x^2 = 0,5(4 + 2x^2) + x$

b) $2(x^2 - 4) = 2x^2 - 4x + 10$

c) $3x^3 - 1 + x = 2(x^3 - 1) + x^3$

d) $x^3 - (2 - x^3) = 4(0,5x^3 + x)$

- 11 Rozwiąż równanie.

a) $2x - \frac{1}{2}(3x - 2) = \frac{7}{4} - x$

b) $3\frac{1}{3}x + 8 = 4\frac{2}{5}x - 8$

- 12 Rozwiąż równanie.

a) $x\sqrt{9} - 2^2 = x\sqrt{25} + \sqrt{4}$

b) $\sqrt{4}(x + 4^0) = -\sqrt{16} - x$

c) $\frac{x}{\sqrt{36}} + (\sqrt{2})^2 = \frac{x + 3^0}{\sqrt{9}} - x$

d) $\frac{x + 6^0}{3} - \frac{2(-9^0 + x)}{\sqrt{81}} = \frac{3^0}{\sqrt{9}} - \frac{x}{3^2}$

Wyzwanie

Jaką liczbę należy wstawić zamiast n , aby rozwiązaniem równania $4x - 3(2 - x) = 5n - 4(2x - 1)$ była liczba naturalna?

Sprawdź się!

- 1 Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Rozwiązaniem równania $\frac{8}{9}k + \frac{1}{3} = 3$ jest liczba

A. -1

B. 3

C. $\frac{8}{9}$

D. 0

- 2 Czy rozwiązaniem równania $3(x - 4) = \frac{1}{3}(x + 9)$ jest liczba całkowita?

- 3 Rozwiąż równanie $6 + 10(x^2 - 1) = 5(x + 2x^2)$.

- 4 Czy podane równania są równoważne?

$\frac{x - 2}{4} = 2$

$\frac{1}{5}x - 2 = \frac{1}{2}x - 5$

- 5 Rozwiąż równanie $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = x - 1$.

3. Równania – zadania tekstowe

Przykład 1.

Suma dwóch liczb jest równa 120, a 20% jednej liczby jest równe $\frac{4}{5}$ drugiej liczby. Znajdźmy te liczby.

Analiza zadania

x	– pierwsza liczba
$120 - x$	– druga liczba
$0,2x$	– 20% pierwszej liczby
$\frac{4}{5}(120 - x)$	– $\frac{4}{5}$ drugiej liczby

Równanie i jego rozwiązanie

$$0,2x = \frac{4}{5}(120 - x)$$

$$0,2x = 96 - \frac{4}{5}x$$

$$\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}x = 96$$

$$x = 96$$

Sprawdzenie, czy rozwiązanie spełnia warunki zadania

96	– pierwsza liczba
$120 - 96 = 24$	– druga liczba
$0,2 \cdot 96 = 19,2$	– 20% pierwszej liczby
$\frac{4}{5} \cdot (120 - 96) = \frac{4}{5} \cdot 24 = 19,2$	– $\frac{4}{5}$ drugiej liczby

ODPOWIEDŹ: Szukane liczby to 96 i 24.

- 1 Za trzy jednakowe zeszyty i długopis Jacek zapłacił 18 złotych. Długopis jest dwa razy droższy od zeszytu. Ile kosztował długopis?
- 2 Suma dwóch liczb jest równa 473, a mniejsza liczba stanowi 72% większej. Znajdź większą z liczb.
- 3 Dorośli za bilet wstępu do ZOO płacą po 11 zł. Cena biletu dla dziecka stanowi połowę ceny biletu dla dorosłego. W niedzielę ZOO odwiedziło 1200 osób. Wydały one na bilety 9350 zł. Ile dzieci było w ZOO tego dnia?
- 4 Obwód prostokąta jest równy 40 cm. Jeżeli krótszy bok zwiększymy o 4 cm, a dłuższy skrócimy o 5 cm, to otrzymamy kwadrat. Oblicz długości boków tego prostokąta.



- 5 Dwa prostokątne ogródki działkowe mają taką samą powierzchnię. Szerokość pierwszego ogródka jest równa 12 m, a drugiego 15 m. Długość pierwszego ogródka jest o 5 m większa od długości drugiego. Uzasadnij, że łącznie na ogrodzenie dwóch ogródków trzeba kupić 144 m bieżącej siatki.
- 6 Różnica dwóch liczb jest równa 16,8. Znajdź te liczby, jeśli wiesz, że jedna z nich jest o 35% większa od drugiej.
- 7 Suma dwóch liczb jest równa 310 i jedna z nich jest o 45% mniejsza od drugiej. Uzasadnij, że te liczby to: 200 i 110.
- 8 Kasjerka ma monety jednozłotowe, dwuzłotowe i pięciozłotowe – razem jest ich 76. Dwuzłotówek ma o 25% więcej niż jednozłotówek, a pięciozłotówek o 24% więcej niż dwuzłotówek. Ile monet jednozłotowych ma kasjerka?
- 9 Jakiej wysokości kredyt wzięła z banku pani Ula, jeśli po roku zapłaci odsetki w wysokości 2750 zł? Roczne oprocentowanie tego kredytu jest równe 11%.
- 10 Klient otrzymał z banku kredyt w wysokości 20 000 zł. Po roku zwrócił bankowi kwotę 22 200 zł. Jakie było oprocentowanie tego kredytu? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
A. 10% B. 0% C. 2% D. 11%
- 11 Ile pieniędzy wpłaciła pani Ewa do banku na roczną lokatę z oprocentowaniem 2% w stosunku rocznym, jeśli po roku otrzymała 480 zł odsetek (po uwzględnieniu 20% podatku od odsetek)?
- 12 Na początku lekcji nieobecni stanowili $\frac{1}{8}$ liczby wszystkich uczniów klasy. Po kilku minutach przyszedł jeden spóźniony uczeń i wtedy nieobecni stanowili $\frac{1}{12}$ uczniów tej klasy. Ilu uczniów liczy ta klasa?
- 13 Hutnik miał złom żelaza zawierający 4% krzemu oraz złom żelaza zawierający 6% krzemu. Ile musi wziąć złomu żelaza każdego rodzaju, aby otrzymać 100 kg stopu zawierającego 5% krzemu?
- 14 Przed dwoma laty mama była 4 razy starsza od syna. Za 10 lat będą mieli razem 74 lata. Ile lat ma obecnie każde z nich?
- 15 Wnuczek pyta dziadka: *Dziadku, ile masz lat?*
Dziadek odpowiada: *Mam mniej niż 100 lat, a cyfra jedności liczby określającej mój wiek jest o 4 mniejsza od cyfry dziesiątek. Jeżeli przestawisz cyfry w tej liczbie, to otrzymasz wiek twojego taty, który stanowi $\frac{4}{7}$ tego, o co pytałeś.* W jakim wieku jest dziadek?
- 16 Cyfra dziesiątek liczby dwucyfrowej jest trzy razy większa od cyfry jedności. Jeśli przestawimy cyfry, to otrzymamy liczbę o 36 mniejszą. Znajdź tę liczbę.

- 17** W liczbie trzycyfrowej cyfra setek, cyfra dziesiątek i cyfra jedności są trzema kolejnymi liczbami naturalnymi. Kwadrat sumy cyfr liczby trzycyfrowej wynosi 144. Znajdź tę liczbę.
- 18** Z dwóch miast oddalonych o 350 km wyruszyło równocześnie naprzeciw siebie dwóch kierowców, pierwszy ze średnią prędkością 90 km/h, a drugi ze średnią prędkością 50 km/h. Po jakim czasie się spotkają i jaką drogę pokona każdy z nich do momentu spotkania?
- 19** Ocieplenie budynku mogło wykonać 9 robotników w ciągu 6 dni. Po dwóch dniach zatrudniono jeszcze trzech robotników. O ile dni skróci się czas wykonywanej pracy, jeżeli wszyscy robotnicy pracują tak samo wydajnie?

Wyzwanie

Rowerzysta obliczył, że gdy będzie jechał ze średnią prędkością 20 km/h, to dotrze do miasta w wyznaczonym czasie. Po przebyciu $\frac{1}{3}$ drogi 6 minut zajęła mu drobna naprawa i aby zdążyć na czas do miasta, musiał zwiększyć prędkość do 24 km/h. Jaką drogę przebył rowerzysta?

Sprawdź się!

- W dwóch naczyniach jest razem 6,8 l wody. Ile litrów wody jest w każdym naczyniu, jeśli w jednym jest o 2,2 l więcej niż w drugim?
- Zosia i Tosia razem zapłaciły 200 zł za swoje zakupy. Tosia wydała o 100 zł mniej niż Zosia. Ile pieniędzy wydała każda z nich?
- Za dwa jednakowe zeszyty w kratkę i ołówek Antek zapłacił 20 zł. Zeszyt jest o złotówkę droższy od ołówka. Ile kosztował zeszyt?
- Z pola zebrano razem 1800 kg warzyw: ziemniaków, buraków i kapusty. Ziemniaków było 5 razy więcej niż buraków, a kapusty o 120 kg więcej niż buraków. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Zebrano 340 kg buraków.	P	F
Zebrano 360 kg kapusty i 1200 kg ziemniaków.	P	F

- Mama jest dwa i pół razy starsza od córki, a różnica ich lat jest równa 30. Ile lat ma córka?



4. Wielkości wprost proporcjonalne

Przykład 1.

Jeden litr benzyny w grudniu 2019 r. kosztował 5,20 zł. Obliczmy, ile trzeba było zapłacić za 10 l, 20 l, 30 l, 40 l benzyny.

Oznaczmy liczbę litrów benzyny jako x , a kwotę, którą trzeba za nią zapłacić, jako y . Wyniki przedstawmy w tabeli.



Liczba litrów – x	1	10	20	30	40
Kwota [zł] – y	5,20	52	104	156	208

Widzimy, że im więcej benzyny kupujemy, tym więcej musimy za nią zapłacić. Gdy zwiększamy liczbę litrów 10, 20, 30, 40 razy, to kwota do zapłaty zwiększa się również 10, 20, 30, 40 razy, czyli tyle samo razy. Podobnie jest, gdy zmniejszymy jedną z tych dwóch wielkości ileś razy.

Wielkości x , y , które zmieniają się w ten sposób, nazywamy **wielkościami wprost proporcjonalnymi**.

Podzielmy kwotę zapłaconą za benzynę przez liczbę litrów:

$$\frac{5,2}{1} = 5,2 \quad \frac{52}{10} = 5,2 \quad \frac{104}{20} = 5,2 \quad \frac{156}{30} = 5,2 \quad \frac{208}{40} = 5,2$$

Ilorazy tych wielkości są równe. Po podzieleniu kwoty przez liczbę litrów otrzymujemy iloraz, który nazywamy **współczynnikiem proporcjonalności**.

W tym wypadku współczynnik proporcjonalności wynosi 5,2 i odpowiada cenie jednego litra benzyny.

Jeśli oznaczmy współczynnik proporcjonalności jako a , otrzymamy zależność:

$$\frac{y}{x} = a \quad \text{lub} \quad y = a \cdot x$$



Wielkości dodatnie x i y są wprost proporcjonalne, jeśli zachodzi zależność $y = a \cdot x$, gdzie a jest stałą liczbą. Stała a jest współczynnikiem proporcjonalności.

- 1** Przerysuj tabelę i ją uzupełnij. Czy wielkości x i y są wprost proporcjonalne? Jeśli tak, podaj współczynnik proporcjonalności.

Wiadomo, że jedna akcja pewnej firmy kosztuje 12,60 zł.

x – liczba akcji, y – wartość w zł

x		40			200
y	126		630	1260	

- 2** Podane w tabeli wielkości x i y są wprost proporcjonalne. Oblicz współczynnik proporcjonalności i zapisz zależność wielkości y od wielkości x w postaci wzoru.

x	0,4	1,1	$2\frac{2}{3}$
y	3,2	8,8	$21\frac{1}{3}$

Przykład 2.

Na wykonanie 120 zeszytów potrzeba 10,8 kg papieru. Obliczmy, ile kilogramów papieru zostanie zużytych na 150 takich zeszytów.

Przedstawmy te informacje w postaci tabeli.

Liczba zeszytów	120	150
Liczba kilogramów papieru	10,8	y

Szukaną wielkością jest y .

Sposób I

Liczba zeszytów x i liczba kilogramów papieru y są wielkościami wprost proporcjonalnymi, a więc $y = a \cdot x$, czyli $y = a \cdot 150$.

$$a = \frac{10,8}{120} = 0,09$$

Na 1 zeszyt potrzeba 0,09 kg papieru.

Wobec tego $y = 0,09 \cdot 150 = 13,5$ [kg].

Sposób II

Zależność między liczbą zeszytów i liczbą kilogramów papieru można zapisać tak:

$$\frac{10,8}{120} = \frac{y}{150}$$

Równość takich dwóch ilorazów nazywamy **proporcją**.

Rozwiązujemy powyższe równanie z niewiadomą y .

$$\frac{10,8}{120} = \frac{y}{150} \quad | \cdot 150 \quad \text{Obie strony równania mnożymy przez 150.}$$

$$150 \cdot \frac{10,8}{120} = y \quad y = 13,5 \text{ [kg]}$$

ODPOWIEDŹ: Na wykonanie 150 zeszytów potrzeba 13,5 kg papieru.



- 3 Głos w ciągu 5 s przenosi się w powietrzu na odległość 1650 m. Ile czasu potrzeba, aby przebył 660 m?
- 4 Na okno o szerokości 2,5 m potrzeba 4 m firanki. Uzasadnij, że na okno o szerokości 4 m potrzeba 6,4 m firanki.
- 5 Światło w ciągu czterech sekund pokonuje drogę $12 \cdot 10^5$ km. W jakim czasie pokona drogę $15 \cdot 10^5$ km? Oblicz prędkość światła.
- 6 Aby upiec ciasto w dużej foremce, potrzeba: $1\frac{1}{2}$ szklanki mąki, $2\frac{1}{4}$ szklanki cukru oraz 6 jaj. Do upieczenia tego ciasta w małej foremce potrzeba 1 szklanki mąki. Ile pozostałych składników należy przygotować?
- 7 Dwanaście litrów benzyny wystarczy na przejechanie samochodem 200 km. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.
- Na przejechanie samochodem 150 km wystarczy A / B benzyny.
- A. mniej niż 10 litrów B. 10 litrów
- Do dwunastu litrów benzyny należy dokupić 9,6 litra, żeby wystarczyło jej na przejechanie samochodem C / D.
- C. 360 km D. 20 km
- 8 Plan miasta jest wykonany w skali 1 : 25 000. Jaka jest w rzeczywistości odległość między ratuszem a najbliższą szkołą w kilometrach, jeśli na planie w linii prostej wynosi ona 2,8 cm?
- 9 Wykonaj poniższe zadania.
- a) Sześć balonów kosztuje 14 zł i 40 gr. Ile należy zapłacić za dziesięć takich balonów?
- b) Za jedenaście babeczek zapłacono 35 zł i 20 gr. Ile najwięcej takich babeczek można kupić za 25 zł i 60 gr?
- 10 Na planie miasta długość ulicy wynosi 5 cm, a w rzeczywistości 2 km. W jakiej skali wykonano ten plan? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
- A. 1 : 4000 B. 1 : 40 000 C. 1 : 400 D. 1 : 400 000
- 11 Jeden kilogram mandarynek kosztuje 4,30 zł. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Za 3,5 kg mandarynek zapłacono 15,05 zł.	P	F
Za kwotę 25,80 zł można kupić 6 kg mandarynek.	P	F



- 12** Samochód osobowy zużywa 6,5 l benzyny na 100 km. Ile litrów paliwa zużyje ten samochód na trasie 40 km, przy założeniu, że średnie zużycie benzyny nie ulegnie zmianie?
- 13** Rowerzysta pokonał odległość 42 km w ciągu 1 h 45 min. Ile kilometrów pokona w ciągu 25 minut, jeśli będzie jechał z tą samą prędkością?
- 14** Za pewną kwotę pieniędzy można kupić 12 zakreślaczy po 2,50 zł za jeden zakreślacz. Ile zakreślaczy o 20% droższych można kupić za tę samą kwotę pieniędzy?



Wyzwanie

Ile hektarów ma działka, która na planie w skali 1 : 20 000 jest kwadratem o polu 16 cm^2 ?

Sprawdź się!

- 1** Przerysuj tabelę i ją uzupełnij. Czy wielkości x i y są wprost proporcjonalne? Jeśli tak, podaj współczynnik proporcjonalności.

Wiadomo, że 1 kg cukru kosztuje 2,50 zł.

x – liczba kg, y – wartość w zł

x	1			4	
y		5	7,5		15



- 2** Staś kupił 6 kg jabłek i zapłacił za nie 21 zł. Ile kilogramów jabłek mógłby kupić za 17,50 zł?
- 3** Za pięć ryz papieru ksero (1 ryza to 500 sztuk) zapłacono 62,50 zł. Ile ryz tego papieru można kupić za 187,50 zł? Ile złotych kosztuje 20 ryz tego papieru?
- 4** Statek przepłynął 18 km między dwiema przystaniami w ciągu 2 h 15 min. Ile kilometrów przeplynie w tych samych warunkach w ciągu 1,5 h?
- 5** Mapę sporządzono w skali 1 : 2 500 000. Odległość między dwoma miastami na tej mapie jest równa 5 cm. Oblicz odległość między tymi miastami w terenie. Podaj ją w kilometrach.

5. Proporcja

Porównajmy ilorazy liczb: $\frac{15}{3}$ i $\frac{35}{7}$.

$\frac{15}{3} = 5$ i $\frac{35}{7} = 5$, czyli ilorazy te są równe, zatem $\frac{15}{3} = \frac{35}{7}$.

Równość dwóch ilorazów nazywamy **proporcją**. Jeśli $b \neq 0$, $d \neq 0$ i ilorazy $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ są równe, to zapisy $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ lub $a : b = c : d$ oznaczają proporcję.

Proporcja ma 4 wyrazy: dwa **wyrazy skrajne** i dwa **wyrazy środkowe**.

$$\begin{array}{c} \text{wyrazy środkowe} \\ a : b = c : d \\ \text{wyrazy skrajne} \end{array} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Przekształćmy proporcję $\frac{15}{3} = \frac{35}{7}$ w następujący sposób: obie strony równości pomnóżmy przez iloczyn mianowników, czyli $3 \cdot 7$.

$$\frac{15}{\cancel{3}_1} \cdot \cancel{3}^1 \cdot 7 = \frac{35}{\cancel{7}_1} \cdot 3 \cdot \cancel{7}^1$$

$$15 \cdot 7 = 35 \cdot 3$$

$$105 = 105$$

Liczby 15 i 7 to wyrazy skrajne proporcji. Liczby 35 i 3 to wyrazy środkowe.



W proporcji iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad a : b = c : d \quad ad = bc$$

Przykład 1.

Wiadomo, że $25 \cdot 4 = 50 \cdot 2$. Zapiszmy tę równość w postaci różnych proporcji.

$$\frac{25}{50} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{25}{2} = \frac{50}{4}$$

$$\frac{4}{2} = \frac{50}{25}$$

$$\frac{4}{50} = \frac{2}{25}$$



W proporcji można przestawiać wyrazy skrajne lub środkowe:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

gdy $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ i $d \neq 0$.

Przykład 2.

Rozwiążmy równanie.

a) $x : 4 = 5 : 8$

b) $\frac{x-3}{2} = \frac{x-8}{5}$

Korzystamy z własności proporcji.

a) $x : 4 = 5 : 8$

$$\frac{x}{4} = \frac{5}{8}$$

$$x \cdot 8 = 4 \cdot 5$$

$$8x = 20 \quad | : 8$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

b) $\frac{x-3}{2} = \frac{x-8}{5}$

$$5(x-3) = 2(x-8)$$

$$5x - 15 = 2x - 16$$

$$5x - 2x = -16 + 15$$

$$3x = -1$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

- 1** Utwórz cztery różne proporcje z liczb: 4, 16, 2, 8.
- 2** Porównaj wyrażenia. Użyj odpowiedniego znaku: = lub $\neq$. Wskaż proporcje.
 - a) $48 : 5$ i $12 : 0,8$
 - b) $2\frac{1}{3} : \frac{1}{3}$ i $7 : 1$
 - c) $6 : 15$ i $0,3 : 0,75$
 - d) $\frac{3,6}{0,2}$ i $\frac{72}{4}$
- 3** Wyznacz nieznan wyraz proporcji.
 - a) $4\frac{1}{6} : x = 6\frac{2}{3} : 4$
 - b) $x : 1,5 = 14 : 4\frac{1}{5}$
 - c) $5,4 : 7\frac{1}{2} = x : 0,5$
 - d) $2\frac{2}{3} : 3\frac{3}{7} = 7 : x$
- 4** Rozwiąż równanie.
 - a) $\frac{4}{x} = \frac{5}{9}$
 - b) $\frac{x}{1,2} = \frac{1,2}{4}$
 - c) $\frac{3,2}{2,8} = \frac{x}{3,5}$
 - d) $\frac{9,36}{7,2} = \frac{1,3}{x}$
 - e) $\frac{0,6}{x} = \frac{0,8}{6}$
 - f) $\frac{x}{0,6} = \frac{6}{0,8}$
 - g) $\frac{x-5}{7} = \frac{3}{5}$
 - h) $\frac{x}{3} = \frac{x+5}{2}$
 - i) $\frac{4}{x+6} = \frac{5}{7+x}$
 - j) $\frac{x-4}{2} = \frac{x-2}{3}$
- 5** Wykaż, że rozwiązaniem równania jest podana obok niego liczba.
 - a) $\frac{5}{3} = \frac{a}{2}$ $a = 3\frac{1}{3}$
 - b) $\frac{3}{10} = \frac{x}{4}$ $x = 1,2$
 - c) $\frac{3}{x} = \frac{7}{x+5}$ $x = 3,75$
 - d) $\frac{a+3}{5} = \frac{7}{5}$ $a = 4$

Przykład 3.

Na uszycie dwóch takich samych sukienek potrzeba 4,8 m bieżących materiału. Ile sukienek można uszyć z 16,8 m bieżącego materiału?

Analiza zadania

2 sukienki – 4,8 m

x sukienek – 16,8 m

Proporcja i jej rozwiązanie

$$\frac{2}{x} = \frac{4,8}{16,8} \qquad x \cdot 4,8 = 2 \cdot 16,8 \qquad x \cdot 4,8 = 33,6 \quad | : 4,8 \qquad x = 7$$

Sprawdzenie

Na jedną sukienkę potrzeba $4,8 \text{ m} : 2 = 2,4 \text{ m}$ materiału.

Na 7 sukienek potrzeba $7 \cdot 2,4 \text{ m} = 16,8 \text{ m}$ materiału.

ODPOWIEDŹ: Z 16,8 m bieżącego materiału można uszyć 7 sukienek.

- 6 Na pomalowanie powierzchni 2 m^2 zużywa się 0,5 litra farby. Jaką powierzchnię można pomalować 3 litrami farby?
- 7 Z 0,5 kg mielonego mięsa zrobiono 12 klopsików. Udowodnij, że na 30 klopsików zużyje się 1,25 kg mięsa.
- 8 8 cm stalowej belki ma masę 3 kg. Jaką masę ma belka o długości 108 cm?
- 9 100 g jogurtu zawiera 3,8 g białka. Ile białka jest w 340 g jogurtu?

Wyzwanie

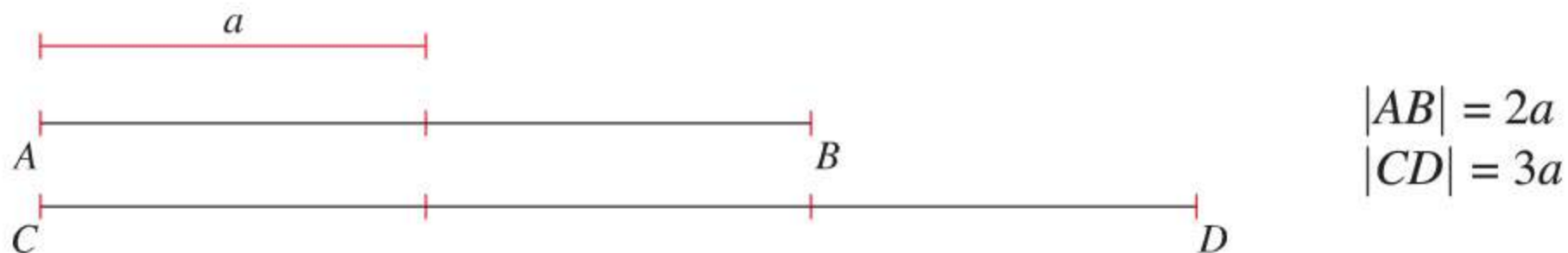
Oblicz $\frac{y}{x+y}$, jeśli wiesz, że $\frac{x}{x+y} = \frac{3}{\sqrt{16}}$.

Sprawdź się!

- 1 Który zapis nie jest proporcją? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
 A. $36 : 9 = 4 : 5$ B. $6 : 4 = 9 : 6$
 C. $18 : 3 = 36 : 6$ D. $5 : 20 = 3 : 12$
- 2 Rozwiąż równanie $\frac{7}{14} = \frac{m}{21}$.
- 3 Rozwiąż równanie $\frac{x-2}{3} = \frac{2x+7}{5}$.
- 4 Na uszycie trzech takich samych obrusów potrzeba 5,4 m bieżącego materiału. Ile takich obrusów można uszyć z 12,6 m bieżącego materiału?
- 5 Odległość między dwoma miastami wynosi 195 km. Jaka jest odległość między tymi miastami na mapie sporządzonej w skali 1 : 1 500 000?

6. Podział proporcjonalny

Odcinek a mieści się w odcinku AB dwa razy, a w odcinku CD trzy razy i jest wspólną jednostką długości tych odcinków.



Mówimy wtedy, że długości odcinków AB i CD są w stosunku 2 do 3, co zapisujemy: $|AB| : |CD| = 2 : 3$ lub $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{2}{3}$, a czytamy: $|AB|$ ma się do $|CD|$ jak 2 do 3. Iloraz $\frac{|AB|}{|CD|}$ lub $|AB| : |CD|$ nazywamy **stosunkiem długości odcinków AB i CD** .

Przykład 1.

Dwaj studenci, Kamil i Alek, umyli okna w domu jednorodzinnym i otrzymali za tę pracę wynagrodzenie w wysokości 140 zł. Obaj pracowali z jednakową wydajnością, ale Kamil pracował 4 godziny, a Alek 3 godziny, ponieważ się spóźnił. W związku z tym chłopcy postanowili podzielić się pieniędzmi proporcjonalnie do czasu pracy. Obliczmy, po ile złotych zarobił każdy z nich.



Chłopcy postanowili podzielić się pieniędzmi proporcjonalnie do czasu pracy, więc ten podział powinien być w stosunku 4 : 3. Całą kwotę należy podzielić na $4 + 3$, czyli 7 równych części, i 4 takie części dać Kamilowi, a 3 – Alkowi.

$$140 \text{ zł} : 7 = 20 \text{ zł}, \quad \text{Kamil: } 4 \cdot 20 \text{ zł} = 80 \text{ zł}, \quad \text{Alek: } 3 \cdot 20 \text{ zł} = 60 \text{ zł}$$

ODPOWIEDŹ: Kamil zarobił 80 zł, a Alek 60 zł.

Zadania na podział proporcjonalny można rozwiązywać także za pomocą równań. Wybór sposobu rozwiązania nie ma znaczenia.

- 1 Złoto w wyrobach jubilerskich nie jest czyste, ale z domieszką, na przykład miedzi. Ile gramów czystego złota i ile gramów miedzi jest w pierścionku, który waży 8 gramów, jeśli stosunek masy miedzi do masy złota jest równy 1 : 3?
- 2 Jeden kierowca przejechał trasę 440 km w ciągu 5,5 godziny, a drugi – w 5 godzin. Jaki jest stosunek średnich prędkości jazdy pierwszego kierowcy do drugiego?

Przykład 2.

Pręt o długości 50 cm należy rozciąć na dwie części w stosunku 2 : 3. Po ile centymetrów długości będzie miała każda część?

Analiza zadania

Przyjmijmy, że odcinek o długości x to wspólna jednostka długości obu części pręta.

$2 \cdot x$ – długość jednej części $3 \cdot x$ – długość drugiej części

Równanie i jego rozwiązanie

$$2x + 3x = 50 \qquad 5x = 50 \quad | : 5 \qquad x = 10 \text{ [cm]}$$

Sprawdzenie

$$2 \cdot 10 = 20 \text{ [cm]} \text{ – długość jednej części} \qquad 3 \cdot 10 = 30 \text{ [cm]} \text{ – długość drugiej części}$$

$$20 + 30 = 50 \text{ [cm]} \text{ – długość pręta} \qquad \frac{20}{30} = \frac{2}{3} = 2 : 3 \text{ – stosunek długości obu części}$$

ODPOWIEDŹ: Części będą miały długości 20 cm i 30 cm.

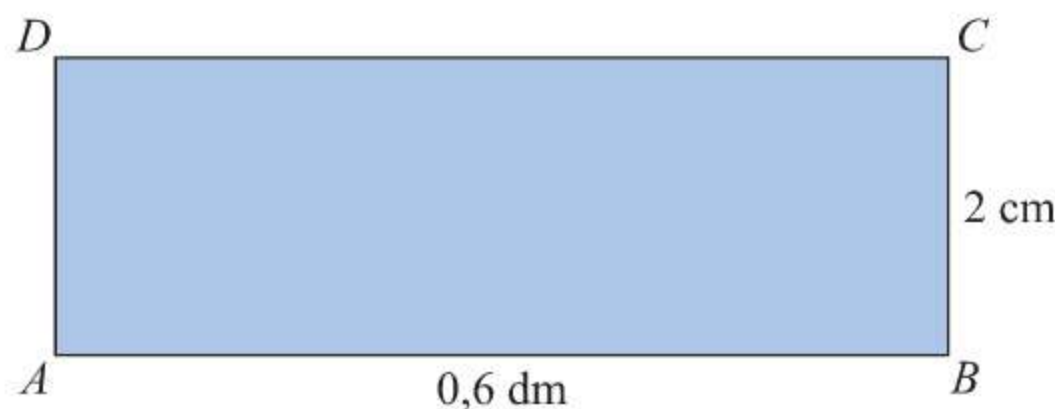
- 3** Dane są odcinki AB , BC i AC . Wypisz wszystkie możliwe stosunki długości tych odcinków.



- 4** Stosunek długości odcinków AB i CD wynosi 5 : 7. Odcinek AB jest równy 25 cm. Ile centymetrów ma odcinek CD ?
- 5** Dwa bochenki chleba ważą 1,5 kg, a stosunek ich mas jest równy $\frac{8}{7}$. Uzasadnij, że masy tych bochenków są równe 0,8 kg i 0,7 kg.
- 6** Stosunek długości dwóch odcinków jest równy 11 : 3. Oblicz długość każdego z nich, jeżeli wiadomo, że różnica ich długości wynosi 210 cm.

Przykład 3.

Dany jest prostokąt $ABCD$. Wyznamy stosunek długości boków prostokąta.



Długości boków musimy przedstawić w tych samych jednostkach.

$$|AB| = 0,6 \text{ dm} = 6 \text{ cm}$$

$$|BC| = 2 \text{ cm}$$

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{6}{2} = \frac{3}{1} = 3 : 1$$

$$\frac{|BC|}{|AB|} = 1 : 3$$

- 7 Wyznacz stosunek podanych wielkości.
a) 4 kg i 80 dag b) 1 h i 20 min c) 50 cm i 0,3 m
- 8 Stosunek dwóch liczb dodatnich, z których jedna jest o 25 większa od drugiej, wynosi 5 : 3. Znajdź te liczby.
- 9 Stosunek masy piłki pingpongowej do masy piłki tenisowej jest równy 1 : 21. Suma mas tych piłek wynosi 0,0594 kg. Wyraż masy piłek w gramach.
- 10 Zbyszek wydał na zakupy pewną kwotę pieniędzy i zostało mu o 20 zł mniej, niż wydał. Stosunek ilości pieniędzy wydanych do pozostałych jest równy 5 : 3. Ile pieniędzy miał Zbyszek początkowo?
- 11 Różnica dwóch liczb jest równa $3\frac{3}{4}$, a ich suma $6\frac{1}{4}$. Znajdź stosunek większej liczby do mniejszej.



Przykład 4.

Obwód trójkąta ABC jest równy 22,5 cm, a długości boków są w stosunku 4 : 5 : 6. Jaka jest długość każdego boku?

x – wspólna jednostka długości boków

$4x$ – długość pierwszego boku

$5x$ – długość drugiego boku

$6x$ – długość trzeciego boku

$$4x + 5x + 6x = 22,5$$

$$15x = 22,5 \quad | : 15$$

$$x = 1,5$$

Wspólna jednostka długości x wynosi 1,5 cm.

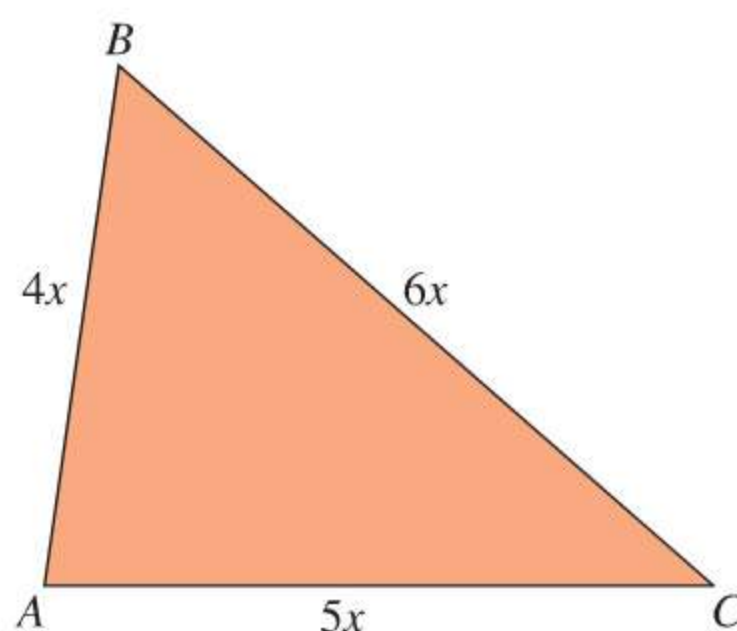
$$4x = 4 \cdot 1,5 = 6 \text{ [cm]}$$

$$5x = 5 \cdot 1,5 = 7,5 \text{ [cm]}$$

$$6x = 6 \cdot 1,5 = 9 \text{ [cm]}$$

SPRAWDZENIE: $6 + 7,5 + 9 = 22,5$

ODPOWIEDŹ: Długości boków tego trójkąta wynoszą 6 cm, 7,5 cm i 9 cm.



- 12 Tłuszcz składa się z węgla, wodoru i tlenu w stosunku 19 : 3 : 3. Wykaż, że w kilogramie tłuszczu węgla jest o 64 dag więcej niż tlenu.
- 13 Stosunek powierzchni czterech działek jest równy 2 : 3 : 4 : 6. Najmniejsza działka ma 240 m². Oblicz powierzchnię największej działki.

- 14** Aby upiec ciasto, należy najpierw zmieszać składniki: mąkę, tłuszcz i cukier w stosunku $10 : 5 : 4$. Mamy do dyspozycji $\frac{1}{2}$ kg mąki. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Tłuszczu należy wziąć o 0,05 kg więcej niż cukru.	P	F
Łączna masa wszystkich podanych składników jest mniejsza niż 1 kg.	P	F

Wyzwanie

W hurtowni było 6 beczek kwaszonej kapusty. Każda z nich zawierała inną liczbę kilogramów kapusty, tak jak podano na rysunku.



Jeden klient kupił 2 beczki kapusty, drugi 3 beczki, przy czym jeden z nich kupił dwa razy więcej kilogramów kapusty niż drugi. Która beczka została w hurtowni?

Sprawdź się!

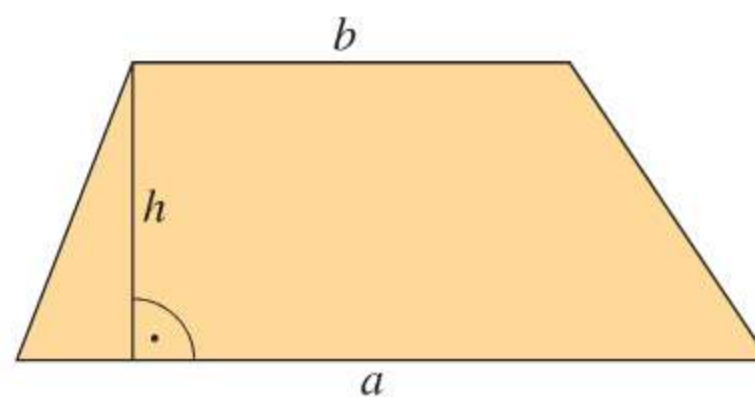
- Odcinek długości 40 cm podzielono na dwie części w stosunku $3 : 5$. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. Otrzymane odcinki mają
 A. 10 cm i 30 cm. B. 15 cm i 25 cm.
 C. 18 cm i 22 cm. D. 12 cm i 28 cm.
- Obwód prostokąta jest równy 16 cm, a stosunek długości jego boków $7 : 9$. Oblicz długości boków tego prostokąta.
- Stosunek wzrostu dwóch osób, z których jedna jest o 20 cm niższa od drugiej, wynosi $9 : 8$. Jaki wzrost ma niższa osoba?
- Liczbę 1683 rozłóż na trzy składniki w stosunku $1 : 3 : 5$.
- Stosunek cen trzech samochodów osobowych jest równy $5 : 9 : 13$. Różnica cen najdroższego i najtańszego samochodu wynosi 40 000 zł. Ile w sumie kosztują wszystkie samochody?

7. Przekształcanie wzorów

Równania mają zastosowanie w rozwiązywaniu zadań z różnych dziedzin. Może w nich występować więcej niż jedna niewiadoma. Przykładami takich równań są wzory matematyczne, fizyczne, chemiczne. Przekształcanie wzorów polega na wyrażeniu jednej niewiadomej za pomocą pozostałych.

Przykład 1.

Pole trapezu przedstawionego na rysunku wynosi $P \text{ cm}^2$. Wyznaczmy niewiadomą a .



$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Zapisujemy wzór na pole trapezu.

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h \quad | \cdot 2$$

Obie strony równania mnożymy przez 2.

$$2P = (a+b) \cdot h \quad | : h$$

Obie strony równania dzielimy przez h .

$$\frac{2P}{h} = a+b \quad | - b$$

Od obu stron równania odejmujemy b (czyli przenosimy b na lewą stronę równania ze zmienionym znakiem).

$$\frac{2P}{h} - b = a + b - b$$

$$\frac{2P}{h} - b = a$$

Zamieniamy wyrażenia stronami.

$$a = \frac{2P}{h} - b$$

Wyzaczyliśmy niewiadomą a .

- 1 Z podanego równania wyznacz wskazaną niewiadomą.
 - a) $6x - 12 = 3x + 3a$ x
 - b) $5y - (-8c + y) = 12ab$ y
 - c) $-13z + 2(5z - 2a) = -20a + 5z + 40$ z
- 2 Z podanego wzoru wyznacz niewiadomą y . Przyjmij, że wszystkie niewiadome są liczbami dodatnimi.
 - a) $b = -ay + dv$
 - b) $ay - c = 4ay - d$
- 3 Wykaż, że niewiadoma a wyznaczona ze wzoru $3by - z - a = 2by$ jest równa $a = by - z$.

- 4 Z podanego wzoru wyznacz niewiadomą z . Załóż, że wszystkie niewiadome są liczbami dodatnimi.

a) $\frac{z}{a} = \frac{t}{c}$

b) $\frac{z}{a} = \frac{b}{3x}$

c) $\frac{z+1}{c} = \frac{b}{3}$

- 5 Wykaż, że niewiadoma x wyznaczona ze wzoru $\frac{b}{z} = \frac{4x}{d}$ jest równa $x = \frac{bd}{4z}$.

- 6 Z podanego wzoru wyznacz wskazane niewiadome. Załóż, że wszystkie pozostałe niewiadome występujące we wzorze są liczbami dodatnimi.

a) $E_k = \frac{mv^2}{2}$ m

b) $s = vt$ v, t

c) $a = \omega^2 r$ r

d) $F = ma$ m, a

e) $s = \frac{at^2}{2}$ a

f) $\frac{T_1}{v_1} = \frac{T_2}{v_2}$ T_2, v_2

- 7 Z podanego wzoru wyznacz z . Załóż, że wszystkie pozostałe niewiadome są liczbami dodatnimi.

a) $y = \frac{c}{2a+z}$

b) $\frac{1}{z} + ab = c$

c) $a - z^2b = c$

- 8 Podstawy trapezu mają długości x i y , a jego wysokość jest równa m . Pole tego trapezu wynosi $3n$. Wyznacz x w zależności od pozostałych wielkości.

- 9 Obwód prostokąta, którego długości boków wynoszą a i b , jest równy $8c$. Wyznacz wzór na długość boku b tego prostokąta.

- 10 W rombie o boku długości $4n$ i wysokości $3x$ jedna z przekątnych ma długość c . Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, a F – jeśli jest fałszywe.

Pole tego rombu jest równe $6nx$.	P	F
Długość d drugiej przekątnej tego rombu jest równa $\frac{24nx}{c}$.	P	F

- 11 Pole trójkąta prostokątnego, w którym długości przyprostokątnych wynoszą c i d , jest równe $4a$. Wyznacz wzór na długość przyprostokątnej c .

- 12 Obwód pięciokąta, którego boki mają długości $2c, a, c, a, c$, jest równy b . Wyznacz długość boku c w zależności od pozostałych wielkości.

- 13 Obwód czworokąta, którego boki mają długości $6a, 3b, 3a$ i $3b$, jest równy $12c$. Wyznacz a w zależności od pozostałych wielkości.

- 14 Obwód rombu jest równy $20a$, a jego wysokość wynosi h . Zapisz wzór na pole P rombu. Wyznacz a w zależności od pozostałych wielkości.

- 15** Staś, Zosia i Antoś oszczędzają na prezent dla babci. Staś ma s zł, czyli o 10 zł więcej od Zosi. Zosia ma z zł, a Antoś a zł, czyli tyle, ile wynosi średnia arytmetyczna oszczędności Zosi i Stasia. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.



Oszczędności Zosi wyznaczone w zależności od oszczędności Stasia są równe A / B zł.

A. $z = s + 10$ B. $z = s - 10$

Oszczędności Zosi wyznaczone w zależności od oszczędności Antosia są równe C / D zł.

C. $z = a - 5$ D. $z = a - 10$

Wyzwanie

Przekształć równanie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ do postaci $\frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d}$. Załóż, że $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ i $c - d \neq 0$.

Sprawdź się!

- Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. Niewiadoma y wyznaczona ze wzoru $2y - ab = c$ jest równa
 A. $y = c + ab - 2$ B. $y = c - ab + 2$
 C. $y = \frac{c+ab}{2}$ D. $y = \frac{2c+ab}{2}$
- Ze wzoru $x = \frac{a+b}{z}$ wyznacz niewiadomą z . Załóż, że wszystkie niewiadome są liczbami dodatnimi.
- Z podanego wzoru wyznacz wskazane niewiadome. Załóż, że wszystkie pozostałe niewiadome występujące we wzorze są liczbami dodatnimi.
 a) $P = a^2$ a b) $P = \frac{1}{2}a \cdot h$ h
- Obwód równoległoboku, w którym boki mają długości x i y , jest równy $10a$. Podaj wzór, za pomocą którego wyznaczysz długość boku x tego równoległoboku.
- Pole powierzchni sześcianu, którego długość krawędzi wynosi n , jest równe $102x$. Wyznacz n w zależności od x .

Zadania utrwalające

1 Rozwiąż równanie.

a) $2(5a - 3) - a - 4(3a - 2) = 0$

b) $2b - (1 - b) = 11 - b$

c) $\frac{2}{5}(x - 2) = x + 4$

d) $3y - 2(y - 1) = -6$

e) $3(3 - 5y^2) = 90 - 5(3y^2 - 2y)$

f) $\frac{1}{4}z + (z - 6) = \frac{2}{3}(z - 2)$

g) $5(2 - 3x^2) = 3(2 - 5x^2) + x$

h) $0,6(1 - x) = 0,3(8 - x)$

2 W dwóch pojemnikach jest 18,5 l wody. Po ile litrów wody jest w każdym pojemniku, jeżeli w jednym jest o 2,5 l mniej niż w drugim?

3 Rozdziel 253 zł pomiędzy trzy osoby tak, aby pierwsza miała dwa razy więcej pieniędzy niż druga, a trzecia 80% tego, co pierwsza.

4 W klasach 7a i 7b uczy się 67 uczniów. W zawodach sportowych wzięło udział 60% uczniów klasy 7a i $\frac{3}{4}$ uczniów klasy 7b. Ilu uczniów liczy każda klasa, jeśli w zawodach wzięło udział 45 uczniów?



5 W 2020 roku tata Tomka miał 33 lata, a Tomek 6 lat. W którym roku tata miał 10 razy więcej lat niż syn?

6 Suma długości dwóch boków równoległoboku jest równa 12,5 cm, a stosunek długości tych boków wynosi 2 : 3. Oblicz długości boków tej figury.

7 Czterech pracowników budowlanych zarobiło łącznie 6300 zł. Kwotę tę rozdzielili pomiędzy siebie proporcjonalnie do liczby dni pracy. Pierwszy pracował 4 dni, drugi – 9 dni, trzeci – 5 dni, a czwarty – 7 dni. Jakie wynagrodzenie otrzymał każdy z nich?

8 Stosunek cen trzech telewizorów jest równy 2 : 3 : 6. Suma cen najtańszego i najdroższego wynosi 3200 zł. Oblicz różnicę cen najdroższego i najtańszego telewizora.

9 Wyznacz niewiadomą z proporcji.

a) $\frac{1,6}{3} = \frac{2}{x}$

b) $0,6 : 0,4 = 4,5 : 3y$

c) $\frac{2z - 4}{6} = \frac{2z + 7}{5}$

10 W 100 g czterdziestoprocentowej śmietany jest 2,6 g węglowodanów. Ile węglowodanów zawiera 380 g takiej śmietany?

-  **11** Objętość budynku lub pomieszczenia nazywamy kubaturą. W pokoju o kubaturze 60 m^3 znajduje się $12,6 \text{ m}^3$ tlenu. Ile metrów sześciennych tlenu jest w klasie, której kubatura jest równa $153,6 \text{ m}^3$? Oblicz za pomocą odpowiedniej proporcji.
- 12** Jedna pszczoła ma masę 100 mg . Ile pszczół zrównoważy odważnik jednokilogramowy?
- 13** Na ułożenie podłogi potrzeba 620 płytek o wymiarach $30 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$. Z ilu płytek o wymiarach $20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ można ułożyć tę podłogę?
- 14** W czasie 5 sekund kolarz przejechał 55 metrów. Ile kilometrów przejedzie z tą samą prędkością w ciągu 1 godziny?
- 15** Na planie miasta wykonanym w skali $1 : 50\,000$ odległość między dwoma budynkami jest równa $2,6 \text{ cm}$. W jakiej odległości od siebie znajdują się te budynki w rzeczywistości? Odpowiedź podaj w kilometrach.
- 16** Pani Ula założyła w banku roczną lokatę oprocentowaną $1,5\%$ w stosunku rocznym. Po roku, po uwzględnieniu 20% podatku, otrzymała 240 zł odsetek. Jaką kwotę wpłaciła do banku?
- 17** Kwotę $130\,000 \text{ zł}$ podzielono na dwie części i wpłacono na dwie roczne lokaty, w różnych bankach. Oprocentowanie w jednym banku wynosiło $2,2\%$, w drugim zaś $2,5\%$. Po naliczeniu odsetek, z uwzględnieniem 20% podatku, okazało się, że otrzymano o 88 zł więcej, niż gdyby wpłacono całą kwotę w trzecim banku na lokatę oprocentowaną $2,3\%$. Jakie kwoty wpłacono na te lokaty?
- 18** W 52 kg pszenicy znajduje się 5% zanieczyszczeń. Ile kilogramów zanieczyszczeń należy usunąć, aby zanieczyszczenie zmniejszyło się z 5% do $1,2\%$?
- 19** Stosunek ilości cukru do wody w roztworze znajdującym się w pierwszym pojemniku wynosi $3 : 7$, a w drugim pojemniku $2 : 3$. Ile litrów roztworu należy wziąć z każdego pojemnika, aby otrzymać 16 litrów roztworu, w którym stosunek ilości cukru do ilości wody będzie równy $3 : 5$?



Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

W zadaniach 1.–5. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 1 Równanie $5(x - 6) - 25 = 10$ spełnia liczba
A. 1 B. 13 C. 3 D. 11
- 2 Liczba 2,5 jest rozwiązaniem równania
A. $x - 7,5 = 7,5$ B. $3x + 6 = 18$ C. $5x - 6 = 8$ D. $6x - 3 = 12$
- 3 Rozwiązaniem równania $\frac{x+2}{10} = \frac{0,6}{4}$ jest
A. $x = 1$ B. $x = -0,5$ C. $x = -3,5$ D. $x = 0,5$
- 4 Największą liczbą całkowitą niedodatnią spełniającą równanie $2x^2 - 11 = -3$ jest
A. 0 B. -1 C. -2 D. 2
- 5 Po wyznaczeniu b ze wzoru $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$ otrzymamy
A. $b = \frac{a+P}{2} \cdot h$ B. $b = \frac{P}{2h} - a$ C. $b = \frac{P}{h} - a$ D. $b = \frac{2P}{h} - a$

W zadaniach 6.–9. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 6 W ciągu 2,5 h pociąg przejechał 300 km. Ile kilometrów przejedzie z tą samą prędkością w czasie 1,5 h?
A. 125 km B. 180 km
C. 150 km D. 195 km
- 7 Klient wpłacił do banku 20 000 zł na roczną lokatę o oprocentowaniu 1,5%. Ile odsetek naliczy mu bank po uwzględnieniu 20% podatku?
A. 60 zł B. 240 zł
C. 300 zł D. 400 zł
- 8 Jaka liczba jest sumą dwóch dodatnich składników takich, że 62,5% jednego z nich jest równe 75% drugiego i jeden składnik jest większy od drugiego o 24?
A. 162 B. 120 C. 264 D. 144



- 9 W poniedziałek Tomek przeczytał o 50 stron powieści więcej niż Ada, a we wtorek każde z nich przeczytało po 40 stron. Okazało się wówczas, że Tomek przeczytał w ciągu tych dwóch dni dwa razy większą liczbę stron niż Ada. Przyjmij, że x oznacza liczbę stron przeczytanych przez Adę w poniedziałek. Które równanie umożliwi obliczenie x ?



- A. $2(x + 50 + 40) = x + 40$ B. $x + 90 = 2x + 40$
C. $x + 90 = 2(x + 40)$ D. $2x + 50 + 40 = x + 40$

- 10 Kwotę 360 zł podzielono na trzy części w stosunku 5 : 6 : 7. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Najmniejsza część tej kwoty jest równa 100 zł.	P	F
Suma największej i środkowej części tej kwoty jest równa 220 zł.	P	F

- 11 Cenę rakiety tenisowej wynoszącą x zł podwyższono o 20%, a następnie tę podwyższoną cenę zmniejszono o 20%. Czy ostateczna cena rakiety różni się od ceny początkowej? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	ostateczna cena rakiety wynosi $x + 0,2x - 0,2x = x$.
B.	Nie,		2.	ostateczna cena rakiety stanowi 96% ceny początkowej, czyli wynosi $0,96x$.

- 12 W dzbanku jest 500 cm^3 wody. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Do dzbanka trzeba wlać A / B soku, aby powstała mieszanina zawierała $\frac{1}{5}$ soku.

A. 100 cm^3 B. 125 cm^3

Do dzbanka należy wlać C / D soku, aby woda stanowiła $\frac{1}{4}$ tej mieszaniny.

C. 1500 cm^3 D. 2000 cm^3

- 13 Za pewną kwotę pieniędzy można kupić 8 rolek papieru śniadaniowego po 2,5 zł za rolkę. O ile procent należy obniżyć cenę jednej rolki, aby za tę samą kwotę pieniędzy można było zakupić 10 rolek papieru śniadaniowego?

- 14 W liczbie dwucyfrowej cyfra jedności jest trzy razy większa od cyfry dziesiątek. Różnica tej liczby i liczby utworzonej z tych samych cyfr zapisanych w odwrotnej kolejności jest równa -18 . Co to za liczby?

- 15 Wykaż, że rozwiązaniem równania $4(x^2 + 1) - 2(x + 2x^2) = 0$ nie jest liczba $-|-2|$.

Proporcje

w przepisach kulinarnych

Przepis na pizzę dla dwóch osób



CIASTO

- 20 g drożdży spożywczych



- 300 g mąki pszennej



- $\frac{1}{2}$ łyżeczki cukru



- $\frac{1}{4}$ łyżeczki soli



- 4 łyżki oliwy z oliwek



Ciasto rośnie ok. 30 min



SOS POMIDOROWY

- 1 przecier pomidorowy



- 1 łyżka oliwy



- 1 ząbek czosnku



- 1 łyżeczka suszonego oregano



DODATKI

- $\frac{1}{4}$ kg pieczarek



- 30 dag sera



- 20 dag szynki



Rozgrzej piekarnik do 225°C.
Piec pizzę ok. 18 min.



Adam: Wojtek, ile minut trzeba piec tę pizzę?

Wojtek: 18

Adam: A jak robię 3?

Wojtek: To trzy razy dłużej.

Ania: Wojtek... przecież się spali. Jasne, że 18.



MENU: Pizza Lemoniada



Pizza dla sześciu osób



- $3 \cdot 20 \text{ g} = 60 \text{ g}$ świeżych drożdży
- $3 \cdot 300 \text{ g} = 900 \text{ g}$ mąki pszennej
- $3 \cdot \frac{1}{2} = 1 \frac{1}{2}$ łyżeczki cukru
- $3 \cdot 4 = 12$ łyżek oliwy
- $3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ łyżeczki soli

- 3 pudełka przecieru pomidorowego
- 3 łyżki oliwy
- 3 ząbki czosnku
- 3 łyżeczki suszonego oregano

- $3 \cdot \frac{1}{4} \text{ kg} = \frac{3}{4} \text{ kg}$ pieczarek
- $3 \cdot 30 \text{ dag} = 90 \text{ dag}$ sera
- $3 \cdot 20 \text{ dag} = 60 \text{ dag}$ szynki



Przepis na lemoniadę dla dwóch osób



SKŁADNIKI:

- 3 duże cytryny
- 2 duże pomarańcze
- 4 łyżki cukru
- 4 gałązki mięty
- 1,5 l wody niegazowanej



WYKONANIE

- 1 Polej cytrusy wrzątkiem.



- 2 Pokrój w plastry cytrynę i pomarańczę.



- 3 Wyciśnij sok z dwóch cytryn i jednej pomarańczy.

Wlej sok i wodę do 2-litrowego dzbanka, wrzuć cytrusy i miętę.

- Zastanów się, ile poszczególnych składników będzie potrzebnych, aby przygotować lemoniadę dla sześciu osób?
- Ile litrów lemoniady powstanie?



1. Prostokątny układ współrzędnych na płaszczyźnie

Przykład 1.

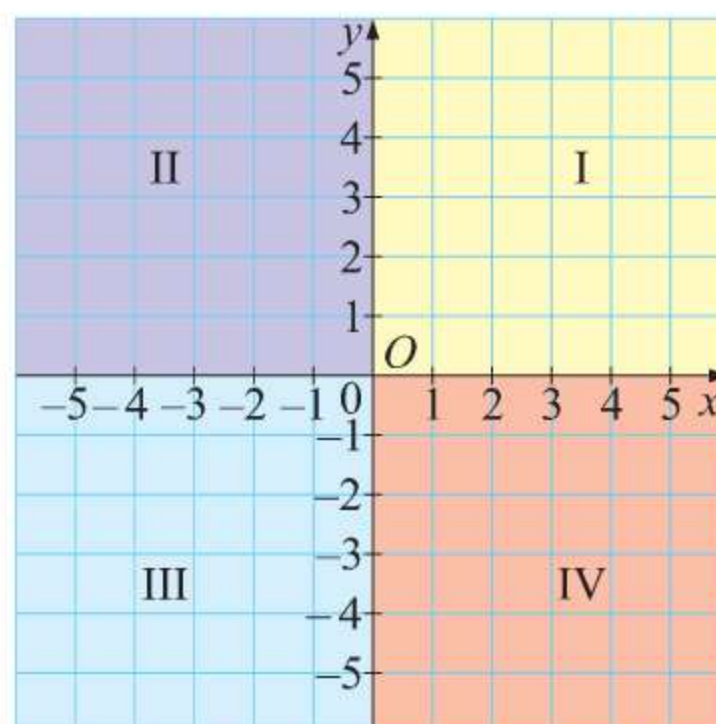
Narysujmy na płaszczyźnie dwie osie liczbowe wzajemnie prostopadłe, przecinające się w punkcie O , który na obu osiach odpowiada liczbie 0.

Taki układ osi liczbowych nazywamy prostokątnym układem współrzędnych na płaszczyźnie.

Wspólny punkt O przecięcia osi nazywamy początkiem układu współrzędnych.

Poziomą oś liczbową x nazywamy osią odciętych. Pionową oś liczbową y nazywamy osią rzędnych.

Układ współrzędnych dzieli płaszczyznę na cztery części, które nazywamy ćwiartkami i oznaczamy I, II, III, IV – jak na rysunku.



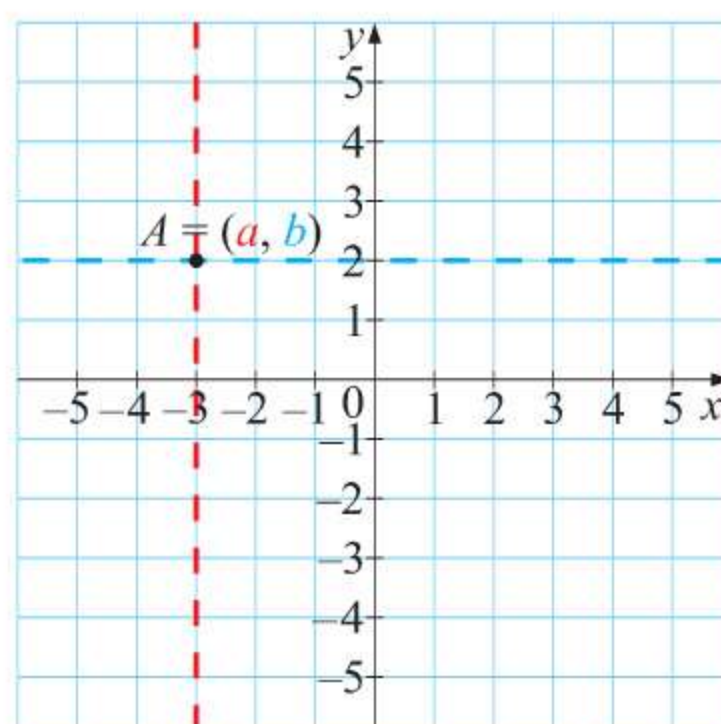
- 1 Narysuj układ współrzędnych i zaznacz w nim punkt:
- A leżący w II ćwiartce,
 - B leżący na osi odciętych,
 - C leżący na osi rzędnych.

Każdemu punktowi w układzie współrzędnych odpowiada uporządkowana para liczb (a, b) zwanych współrzędnymi punktu. Liczbę a nazywamy pierwszą współrzędną lub odciętą, liczbę b nazywamy drugą współrzędną lub rzędną.

Przykład 2.

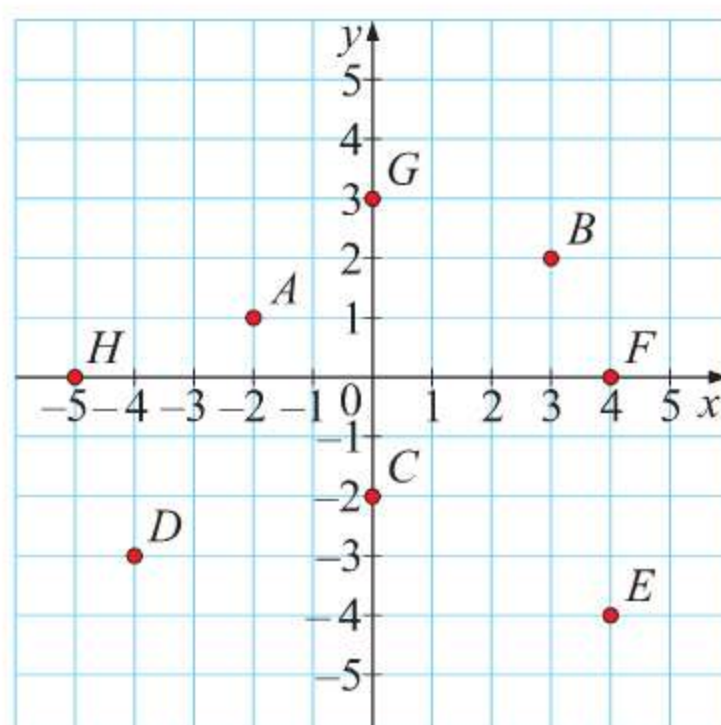
Znajdźmy współrzędne punktu $A = (a, b)$.

- Pierwszej współrzędnej a szukamy na osi x .
W tym celu prowadzimy przez punkt A prostą prostopadłą do osi x (czerwona linia przerywana).
- Otrzymujemy $a = -3$.
- Drugiej współrzędnej b szukamy na osi y .
W tym celu prowadzimy przez punkt A prostą prostopadłą do osi y (niebieska linia przerywana).
- Otrzymujemy $b = 2$.
- Współrzędne punktu A to para liczb $(-3, 2)$.





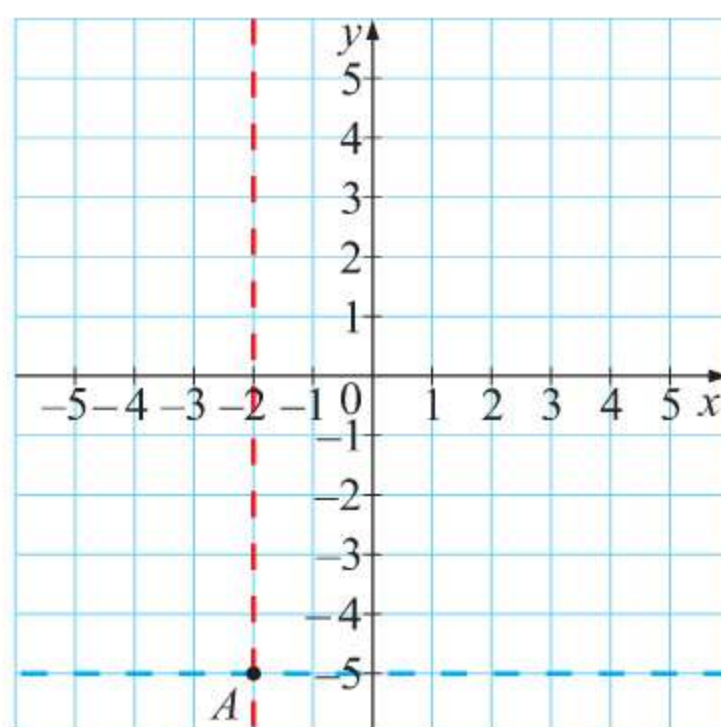
- 2 Odczytaj współrzędne punktów:
 A, B, C, D, E, F, G, H .



Przykład 3.

Wskażmy w układzie współrzędnych punkt $A = (-2, -5)$.

1. Na osi x odnajdujemy pierwszą współrzędną -2 i prowadzimy przez nią prostą prostopadłą do osi x .
2. Na osi y odnajdujemy drugą współrzędną -5 i prowadzimy przez nią prostą prostopadłą do osi y .
3. Punkt przecięcia prostych prostopadłych jest szukanim punktem $A = (-2, -5)$.



W układzie współrzędnych każdej parze liczb odpowiada dokładnie jeden punkt.



Układ współrzędnych na płaszczyźnie nazywa się też układem kartezjańskim – od francuskiego matematyka, fizyka i filozofa René Descartes'a (czyt. rene dekarta) zwanego Kartezjuszem, który wymyślił sposób opisu punktów na płaszczyźnie za pomocą liczb.

- 3 Narysuj układ współrzędnych i zaznacz punkty o współrzędnych:

$A = (-3, 5)$	$B = (-4, -2)$	$C = (4, 6)$	$D = (-3, -3)$
$E = (-5, 1)$	$F = (0, 0)$	$G = (5, -5)$	$H = (5, 0)$
$I = (1, 3)$	$J = (5, 3)$	$K = (3, -6)$	$L = (0, -6)$

Wypisz punkty, które leżą:

- | | | |
|-------------------|-------------------|--------------------|
| a) w I ćwiartce, | b) w II ćwiartce, | c) w III ćwiartce, |
| d) w IV ćwiartce, | e) na osi x , | f) na osi y . |

- 4 Narysuj układ współrzędnych i zaznacz podane punkty. Dobierz taką jednostkę, aby rysunek był czytelny.

$$A = \left(0, 1\frac{1}{4}\right) \quad B = \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) \quad C = \left(-2, -\frac{1}{4}\right) \quad D = \left(2\frac{1}{2}, 0\right)$$

- 5 Narysuj układ współrzędnych i zaznacz pięć dowolnych punktów, które mają:
 a) dodatnie odcięte, b) dodatnie rzędne,
 c) ujemne odcięte, d) ujemne rzędne.

W życiu codziennym również określamy położenie różnych obiektów za pomocą uporządkowanej pary. Przeanalizujmy przykłady.



Na mapie położenie Krakowa określa szerokość i długość geograficzna w postaci pary $(50^\circ\text{N}, 20^\circ\text{E})$.



Na planie miasta położenie kina określa para $(C, 2)$.

SCENA														
I	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
II	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
III	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
IV	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
V	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
VI	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
VII	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
VIII	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
IX	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
X	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
XI	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
XII	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
XIII	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
XIV	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
XV	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

W kinie zaznaczone miejsce określa para $(VII, 8)$.

- 6 Na podstawie powyższej mapy Polski zapisz położenie zaznaczonych miast z dokładnością do 1° .

- 7 Kuba z Bartkiem grali w szachy. Kuba grał białymi figurami, a Bartek – czarnymi. W pewnej chwili musieli przerwać grę, więc zapisali pozycje swoich figur na szachownicy, aby móc kontynuować tę partię w innym czasie. Odtwórz zapisy chłopców, jeśli zapis Kuby zaczynał się tak: Kg1, g2, h2, Sd3, e3...

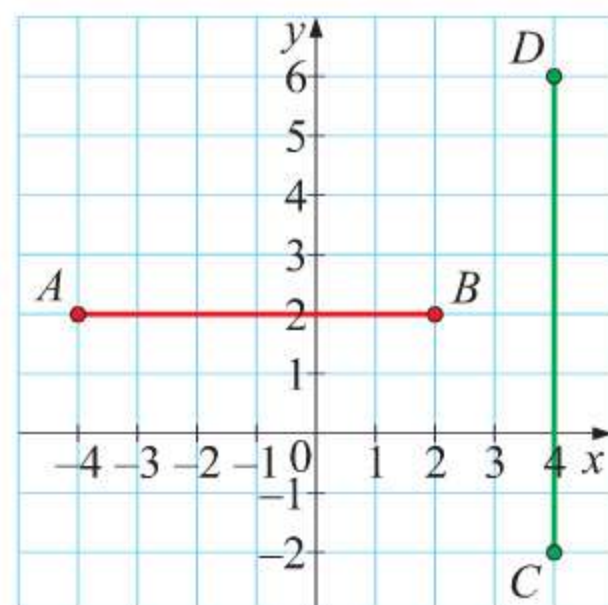


Król Goniec
 Hetman Wieża
 Skoczek Pionek

Przykład 4.

Znajdźmy długość odcinka AB o końcach: $A = (-4, 2)$, $B = (2, 2)$ oraz długość odcinka CD o końcach: $C = (4, -2)$, $D = (4, 6)$.

Rysujemy te odcinki w układzie współrzędnych, a następnie liczymy kratki między punktami A i B oraz C i D . Odcinek AB ma długość równą 6 jednostek, co zapisujemy $|AB| = 6$, natomiast $|CD| = 8$.

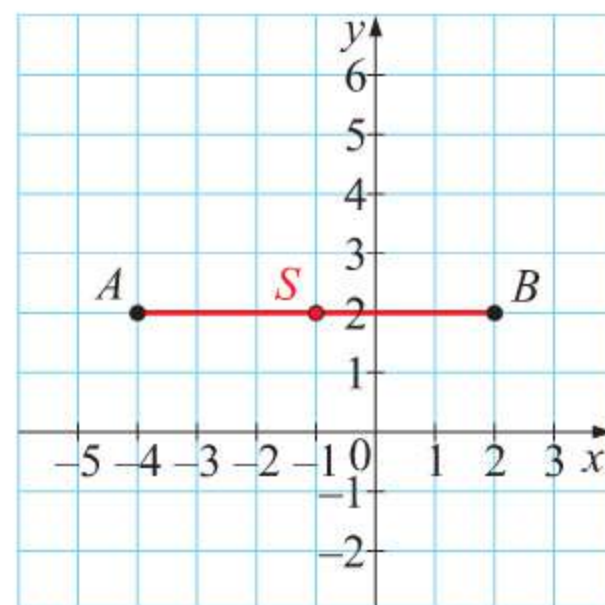


- 8 Zaznacz w układzie współrzędnych punkty o współrzędnych: $A = (-4, 3)$, $B = (-4, 7)$, $C = (1, 7)$, $D = (1, 3)$, $E = (4, 3)$, $F = (4, 10)$, $G = (6, 10)$, $H = (6, -4)$, $I = (3, -4)$, $J = (3, -1)$, $K = (-1, -1)$, a następnie oblicz długość łamanej $ABCDEFGHIJK$.

Przykład 5.

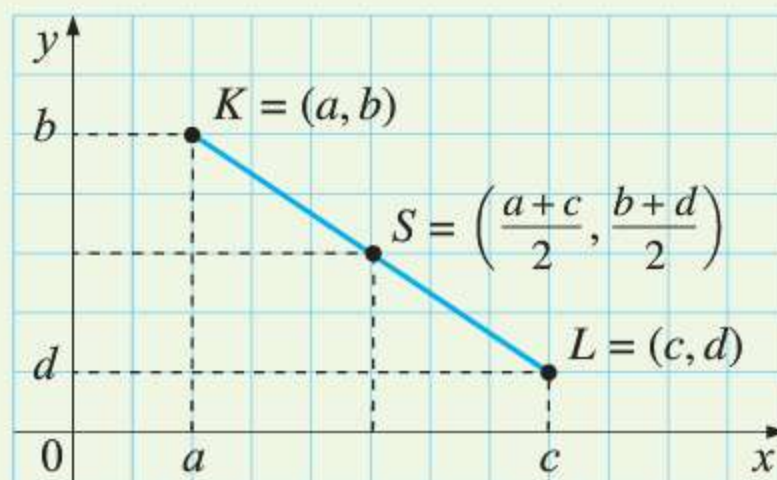
Sprawdźmy, czy istnieje zależność między współrzędnymi środka odcinka a współrzędnymi jego końców.

Na rysunku punkt $S = (-1, 2)$ jest środkiem odcinka AB o końcach $A = (-4, 2)$, $B = (2, 2)$. Zwróćmy uwagę, że pierwsza współrzędna punktu S jest równa $-1 = \frac{-4+2}{2}$, czyli jest średnią arytmetyczną pierwszych współrzędnych końców odcinka AB , natomiast druga współrzędna punktu S równa $2 = \frac{2+2}{2}$ jest średnią arytmetyczną drugich współrzędnych końców odcinka AB .



Okazuje się, że ta zależność zachodzi dla każdego odcinka w układzie współrzędnych.

Współrzędne środka odcinka w układzie współrzędnych są równe średnim arytmetycznym odpowiednich współrzędnych końców tego odcinka.



- 9 Oblicz współrzędne środka S odcinka AB .
- a) $A = (0, -3)$, $B = (6, 3)$ b) $A = (-2, 4)$, $B = (-3, -5)$

Przykład 6.

Punkt P jest środkiem odcinka KL . Wyznaczmy współrzędne końca L odcinka KL , jeśli $P = (-5, 3)$, a $K = (9, -3)$.

Oznaczmy współrzędne końca L odcinka KL przez (x, y) , wówczas

$$-5 = \frac{9+x}{2} \text{ oraz } 3 = \frac{-3+y}{2},$$

$$\text{stąd } 9+x = -10 \text{ oraz } -3+y = 6,$$

$$\text{a zatem } x = -19 \text{ oraz } y = 9, \text{ czyli } L = (-19, 9).$$

- 10** Punkt S jest środkiem odcinka AB . Znajdź współrzędne końca B odcinka AB .

a) $A = (-2, 4)$, $S = (1, -2)$

c) $A = (-2, -4)$, $S = (-3, -2)$

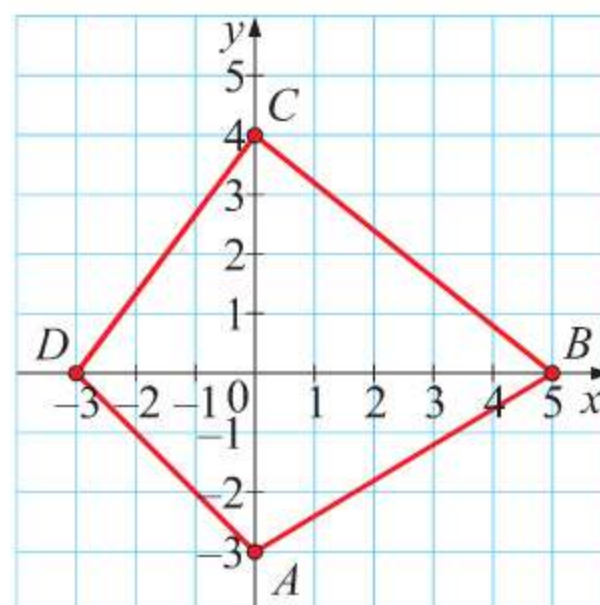
Przykład 7.

Obliczmy pole czworokąta $ABCD$ – jako jednostkę przyjmijmy pole jednej kratki.

Pole czworokąta $ABCD$ jest równe sumie pól trójkątów, np. ADC i ABC , których długości podstaw i wysokości łatwo odczytać z rysunku. Wobec tego

$$P_{ABCD} = \frac{7 \cdot 3}{2} + \frac{7 \cdot 5}{2} = 10,5 + 17,5 = 28$$

ODPOWIEDŹ: Pole czworokąta jest równe 28.



- 11** Narysuj układ współrzędnych i zaznacz punkty $A = (-3, 3)$, $B = (1, -2)$, $C = (6, 3)$, $D = (1, 6)$. Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

Przykład 8.

Obliczmy pole czworokąta $EFGH$ – jako jednostkę przyjmijmy pole jednej kratki.

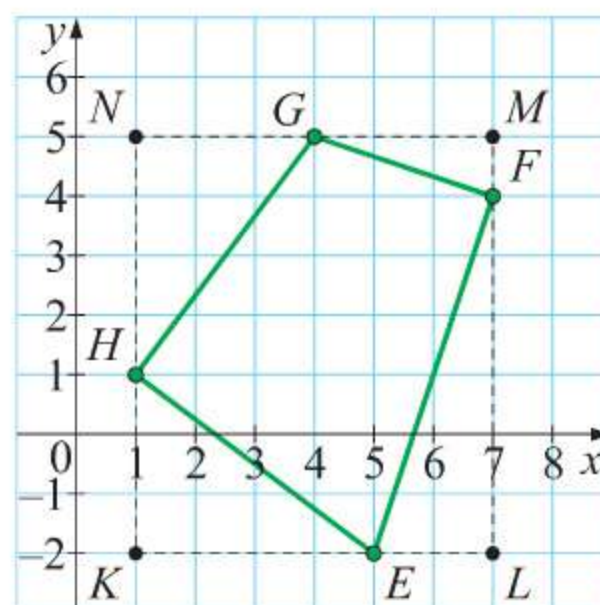
Aby obliczyć pole czworokąta $EFGH$, umieścimy go w prostokącie $KLMN$, jak na rysunku.

Pole czworokąta $EFGH$ jest równe polu prostokąta $KLMN$ pomniejszonemu o sumę pól trójkątów HNG , GMF , FLE i EKH . Wobec tego

$$P_{EFGH} = 6 \cdot 7 - \left(\frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 1}{2} + \frac{6 \cdot 2}{2} + \frac{4 \cdot 3}{2} \right) =$$

$$= 42 - (6 + 1,5 + 6 + 6) = 42 - 19,5 = 22,5$$

ODPOWIEDŹ: Pole czworokąta jest równe 22,5.

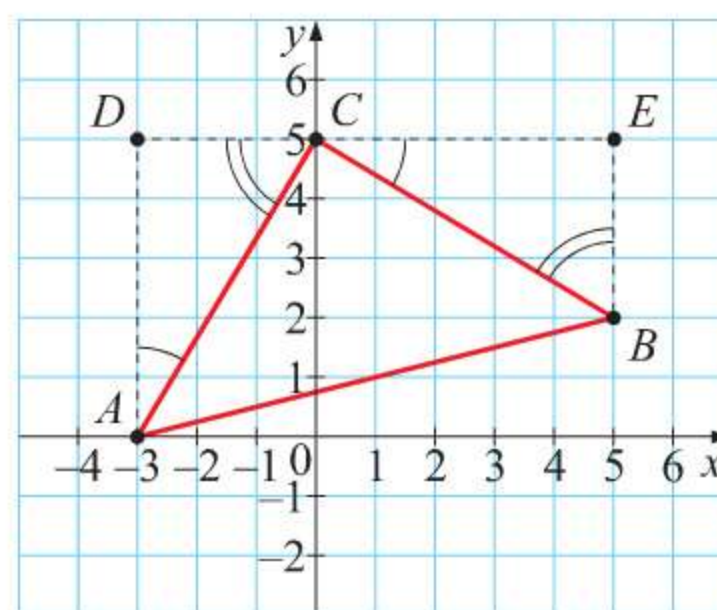
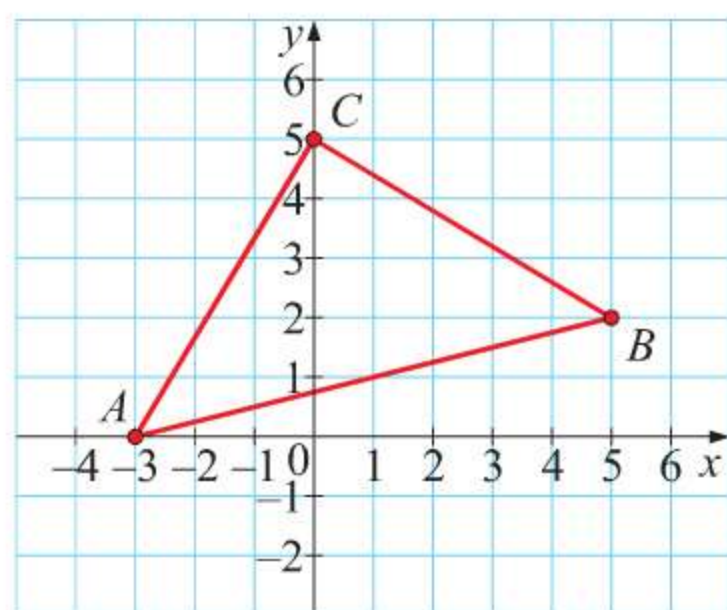


- 12** Narysuj w układzie współrzędnych wielokąt $ABCD$ o danych wierzchołkach. Oblicz jego pole.

- a) $A = (9, -3)$, $B = (7, 1)$, $C = (2, 1)$, $D = (0, -3)$
 b) $A = (-4, 1)$, $B = (0, 4)$, $C = (4, -4)$, $D = (0, -7)$

Przykład 9.

Uzasadnijmy, że trójkąt ABC przedstawiony na rysunku po lewej stronie jest prostokątny i równoramienny.



Na rysunku po prawej stronie widać, że trójkąty ADC i BEC są przystające, gdyż $|AD| = |EC|$, $|DC| = |BE|$ oraz $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle BEC| = 90^\circ$ (cecha bkb), a zatem $|AC| = |BC|$.

Z przystawania trójkątów ADC i BEC wynika, że $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle CBE|$ i $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle BCE|$.

Ponieważ $|\sphericalangle ACD| + |\sphericalangle BCE| = 90^\circ$ (suma kątów ostrych trójkąta prostokątnego), to $|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$. A zatem trójkąt ABC jest prostokątny i równoramienny.

- 13** Uzasadnij, że czworokąt, którego wierzchołki mają współrzędne $(0, 3)$, $(-4, 1)$, $(-2, -3)$, $(2, -1)$, jest rombem.
- 14** W układzie współrzędnych zaznacz punkty $A = (0, -6)$, $B = (2, 0)$, $C = (0, 6)$, $D = (-2, 0)$. Czy pole czworokąta $ABCD$ jest równe 24? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	podstawa czworokąta $ABCD$ ma długość 12, a jego wysokość 2.
			2.	przekątne czworokąta $ABCD$ mają długości 12 i 4.
B.	Nie,		3.	boki czworokąta $ABCD$ mają długości 6 i 4.

- 15** Skorzystaj z rysunku i oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

SCENA														
I	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
II	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
III	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
IV	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
V	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
VI	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
VII	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
VIII	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
IX	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
X	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
XI	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
XII	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
XIII	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
XIV	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
XV	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Jeśli miejsce Krzysztofa w kinie określa para (XIII, 6), a Anna siedzi bezpośrednio po jego prawej stronie, to jej miejsce określa para (XIII, 5).

P

F

Miejsce, którego obie współrzędne są największe, określa para (XV, 14).

P

F

- 16** Znajdź współrzędne końców odcinka CD na podstawie informacji, że punkt C leży na osi x , punkt D na osi y , a środek odcinka $S = (3, -2)$.
- 17** Odcinek BD jest przekątną prostokąta $ABCD$, którego boki są równoległe do osi układu współrzędnych. Narysuj ten prostokąt i znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków prostokąta, jeżeli $B = (3, -4)$, a punkt S , który jest środkiem odcinka BD , ma współrzędne $S = (-1, -1)$. Oblicz obwód tego prostokąta.
- 18** Dane są dwa czworokąty:
- $ABCD$ o wierzchołkach $A = (3, -4)$, $B = (0, -2)$, $C = (-3, -4)$, $D = (0, -6)$.
 - $KLMN$ o wierzchołkach $K = (1, -1)$, $L = (1, 5)$, $M = (-2, 5)$, $N = (-2, -1)$.
- Który z czworokątów ma większe pole i o ile procent?
- 19** Jaką figurę wyznaczają takie punkty w układzie współrzędnych, których:
- obie współrzędne są jednakowe;
 - współrzędne są liczbami przeciwnymi;
 - pierwsza współrzędna jest dowolna, a druga równa -5 ;
 - pierwsza współrzędna jest równa 4 , a druga dowolna?
- 20** Jaką figurę wyznaczają takie punkty w układzie współrzędnych, których:
- odcięta jest liczbą nieujemną, a rzędna jest dowolną liczbą;
 - odcięta jest dowolną liczbą, a rzędna jest liczbą niedodatnią;
 - obie współrzędne są nieujemne?

Wyzwanie

Ustal na podstawie podanych informacji, w której ćwiartce leży każdy z punktów A , B , C , D .

- Druga współrzędna punktu D jest liczbą przeciwną do drugiej współrzędnej punktu C , a pierwsza współrzędna punktu D jest 2 razy większa od drugiej współrzędnej punktu B .
- Pierwsza współrzędna punktu A jest równa sumie pierwszych współrzędnych punktów C i B , a druga współrzędna punktu A jest taka sama jak pierwsza.
- Pierwsza współrzędna punktu C jest najmniejszą liczbą pierwszą, a druga jest jej odwrotnością.
- Druga współrzędna punktu B jest sumą współrzędnych punktu C , a pierwsza współrzędna punktu B jest od drugiej mniejsza o 5.

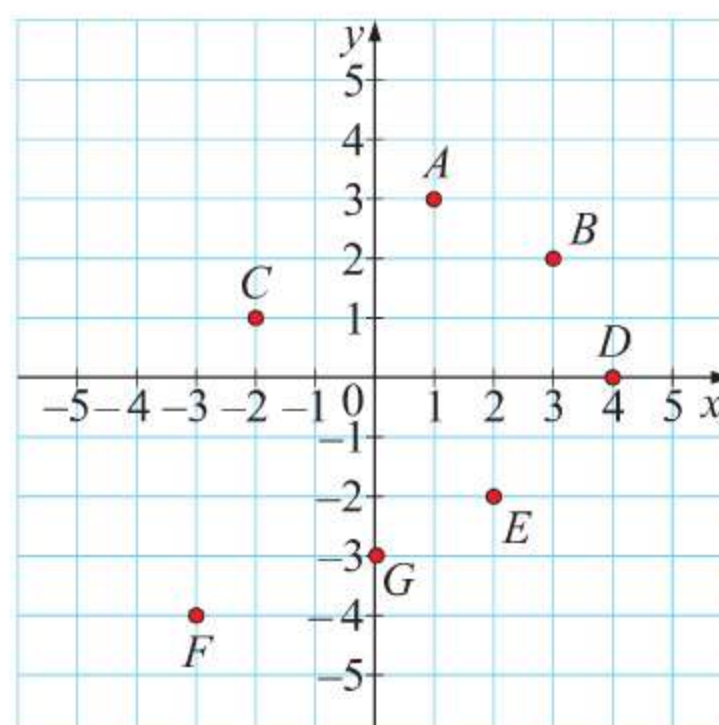
Sprawdź się!

- 1 Odczytaj współrzędne punktów zaznaczonych na rysunku.

- 2 Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeśli $K = (1, -7)$, $L = (-4, -2)$, to współrzędne środka S odcinka KL wynoszą

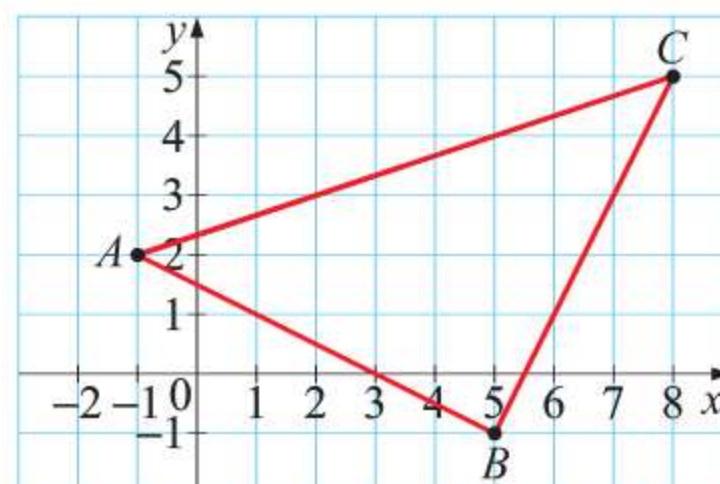
- A. $(-1, -5)$
 B. $(-4,5; -1,5)$
 C. $(-1,5; -4,5)$
 D. $(5, -1)$



- 3 Punkt S jest środkiem odcinka AB . Znajdź współrzędne końca B odcinka AB , jeśli $A = (3, -5)$, $S = (0, -1)$.

- 4 Narysuj w układzie współrzędnych wielokąt $ABCD$ o wierzchołkach: $A = (5, -5)$, $B = (8, 0)$, $C = (5, 6)$, $D = (2, 0)$.

- 5 Oblicz pole trójkąta przedstawionego na rysunku.



2. Twierdzenie, założenie, teza, dowód

W trakcie nauki matematyki poznajemy nowe pojęcia, które określamy za pomocą pojęć już znanych. Na przykład za pomocą pojęć prostej i punktu możemy określić półprostą lub odcinek.

Półprostą nazywamy każdą z części prostej, na które punkt dzieli prostą, wraz z tym punktem.

Odcinek to część prostej zawarta między dwoma jej punktami z tymi punktami włącznie.

Za pomocą pojęć: liczba naturalna, dzielnik, iloczyn można wprowadzić pojęcia liczby pierwszej i wielokrotności liczby.

Liczba pierwsza to liczba naturalna większa od 1, która ma dokładnie dwa dzielniki: 1 i samą siebie.

Wielokrotnością liczby a nazywamy liczbę b , która jest iloczynem liczby a i dowolnej liczby naturalnej.

Wprowadzenie nowego pojęcia za pomocą pojęć już znanych to **definiowanie** tego pojęcia (od łac. *definio* – określam), taki opis pojęcia to **definicja**.

W nauce geometrii nie poprzestajemy na samym tylko wprowadzeniu nowych pojęć. Na przykład gdy uczymy się o wielokątach, poznajemy ich własności:

W równoległoboku przekątne dzielą się na połowy.

W rombie przekątne są prostopadłe.

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180° .

Te zdania nazywamy **twierdzeniami**.

W arytmetyce też są twierdzenia, np. o podzielności liczb naturalnych.

Jeżeli ostatnia cyfra liczby n jest parzysta, to liczba n dzieli się przez 2.

Jeżeli dwie ostatnie cyfry liczby n są zerami lub tworzą liczbę podzielną przez 4, to liczba n jest podzielna przez 4.

Jeżeli ostatnia cyfra liczby n jest równa 0 lub 5, to liczba n dzieli się przez 5.

Sformułowane tu twierdzenia o liczbach naturalnych są zdaniami warunkowymi, zbudowanymi według schematu: *Jeżeli..., to....*



Każde twierdzenie składa się z dwóch części:

- pierwsza część zawiera warunki, przy których jest spełnione twierdzenie; tę część nazywamy **założeniem**;
- druga część określa to, co należy udowodnić, z wykorzystaniem założeń, i tę część twierdzenia nazywamy **tezą**.

Przykład 1.

Wyróżnijmy założenie i tezę w twierdzeniu:

Jeżeli czworokąt $ABCD$ jest prostokątem, to przekątne czworokąta $ABCD$ są równe.

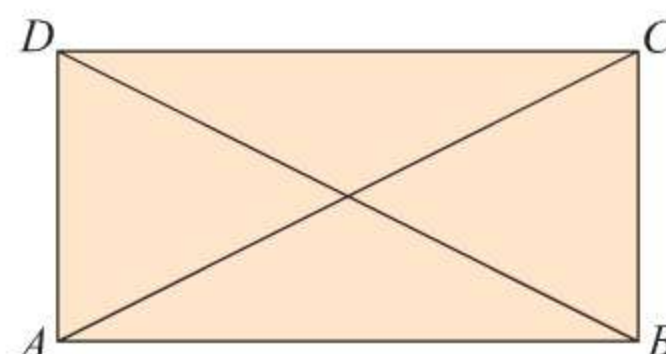
Założenie (Z) to część zdania występująca między słowami *Jeżeli* oraz *to*:
czworokąt $ABCD$ jest prostokątem.

Teza (T) to część zdania występująca po słowie *to*:
przekątne czworokąta $ABCD$ są równe.

Treść założenia i tezy można przedstawić w następujący sposób:

Z: Czworokąt $ABCD$ jest prostokątem.

T: $|AC| = |BD|$



- 1 W podanym twierdzeniu wskaż założenie i tezę.
 - a) Jeżeli kąty są wierzchołkowe, to ich miary są równe.
 - b) Jeżeli trójkąt jest równoramienny, to kąty przy podstawie tego trójkąta są równe.
 - c) Jeżeli liczba naturalna jest podzielna przez 3 i 5, to jest podzielna przez 15.
 - d) Jeżeli liczba naturalna jest podzielna przez 6, to jest podzielna przez 3 i 2.
- 2 Do dwóch pierwszych twierdzeń z zadania 1. zapisz symbolicznie założenie i tezę (tak jak w przykładzie 1.).
- 3 Podane twierdzenie zapisz w formie zdania warunkowego *Jeżeli...*, *to...* oraz wskaż założenie i tezę.
 - a) W trójkącie równobocznym miary kątów wewnętrznych są równe.
 - b) W trójkącie prostokątnym suma miar kątów ostrych jest równa 90° .
 - c) W równoległoboku kąty przeciwległe mają równe miary.
 - d) Liczba naturalna podzielna przez 9 jest podzielna przez 3.
 - e) Liczba naturalna, której dwie ostatnie cyfry są zerami, dzieli się przez 4.

W matematyce twierdzeniem nazywamy zdanie, którego prawdziwość potrafimy uzasadnić. Uzasadnić, czyli podać **dowód** twierdzenia.

Nie każde zdanie warunkowe jest twierdzeniem matematycznym. Dopóki nie jesteśmy przekonani o prawdziwości takiego zdania, to nazywamy je **hipotezą** (przypuszczeniem).

Aby udowodnić, że hipoteza nie jest prawdziwa, wystarczy podać tylko jeden **kontrprzykład**, czyli przykład pokazujący, że przypuszczenie jest fałszywe.

Przykład 2.

Zastanówmy się, czy następująca hipoteza jest prawdziwa.

Jeżeli cyfrą jedności pewnej liczby n jest 3 lub 9, to liczba n dzieli się przez 3.

Ta hipoteza jest fałszywa, bo np. liczby 13 lub 29 nie dzielą się przez 3.

- 4 Podaj kontrprzykład dla podanej hipotezy.
- Jeżeli wielokąt ma trzy kąty proste, to jest prostokątem.
 - Jeżeli jedna liczba jest podzielna przez 2, a druga jest podzielna przez 3, to ich suma jest podzielna przez 5.

Przykład 3.

Spróbujmy uzasadnić prawdziwość hipotezy:

Jeśli w trójkącie ABC zachodzi równość $|AC| = |BC|$, to $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC|$.

Zapiszmy założenie i tezę oraz wykonajmy rysunek trójkąta ABC .

Z: $|AC| = |BC|$

T: $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC|$

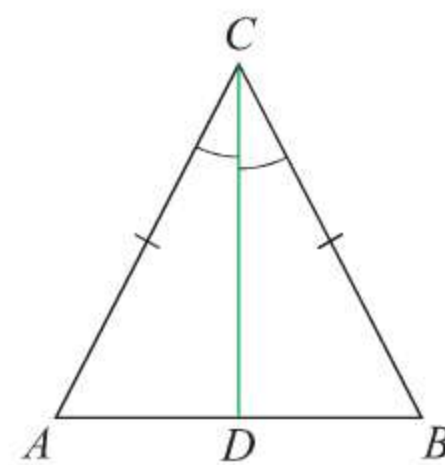
Dowód

Poprowadźmy prostą CD , która dzieli kąt ACB na połowy, i oznaczmy literą D punkt, w którym ta prosta przecina bok AB .

$\triangle ACD \equiv \triangle BCD$, bo $|AC| = |BC|$, bok CD jest wspólny oraz $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle DCB|$ – cecha bkb.

Wobec tego $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC|$.

Ponieważ takie rozumowanie możemy przeprowadzić dla dowolnie wybranego trójkąta, to postawiona hipoteza jest twierdzeniem prawdziwym.



- 5 Skorzystaj z przykładu 3. i udowodnij twierdzenie:

Jeśli w trójkącie ABC zachodzi równość $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC|$, to $|AC| = |BC|$.

Przykład 4.

Uzasadnijmy twierdzenie: *Jeżeli liczba trzycyfrowa jest podzielna przez 3, to suma jej cyfr jest podzielna przez 3.*

Weźmy dowolną liczbę trzycyfrową o kolejnych cyfrach a, b, c . Liczbę tę możemy zapisać:

$$100 \cdot a + 10 \cdot b + c = 99a + 9b + a + b + c = (99a + 9b) + (a + b + c) =$$

$$= 3(33a + 3b) + (a + b + c)$$

Widać, że pierwszy składnik: $3(33a + 3b)$ jest podzielny przez 3, więc drugi składnik: $(a + b + c)$ też musi być podzielny przez 3. Drugi składnik jest sumą cyfr tej liczby. A zatem, jeżeli liczba trzycyfrowa jest podzielna przez 3, to suma jej cyfr też jest podzielna przez 3.

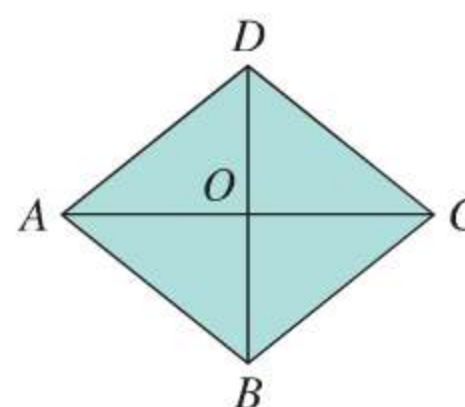
Podobnie można uzasadnić to twierdzenie dla liczb dwu-, cztero-, pięcio-, ..., n -cyfrowych.



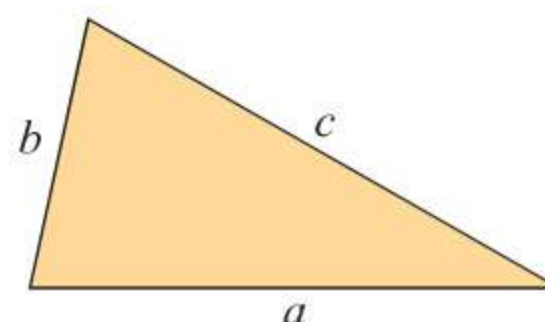
- 6 Uzasadnij cechę podzielności przez 9 dla dowolnej liczby naturalnej dwucyfrowej.
- 7 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Jeżeli w czworokącie przekątne są prostopadłe, to ten czworokąt jest rombem.	P	F
Jeżeli czworokąt ma dwa kąty proste, to jest kwadratem.	P	F
Jeżeli równoległobok ma wszystkie kąty proste, to jest rombem.	P	F
Jeżeli liczba naturalna dzieli się przez 15, to dzieli się również przez 3 i 5.	P	F
Jeżeli liczba naturalna dzieli się przez 4, to jest liczbą pierwszą.	P	F
Jeżeli jedna liczba jest podzielna przez 2, a druga jest podzielna przez 4, to ich iloczyn jest podzielny przez 8.	P	F
Jeżeli liczba naturalna dzieli się przez 3 i 6, to jest wielokrotnością liczby 9.	P	F

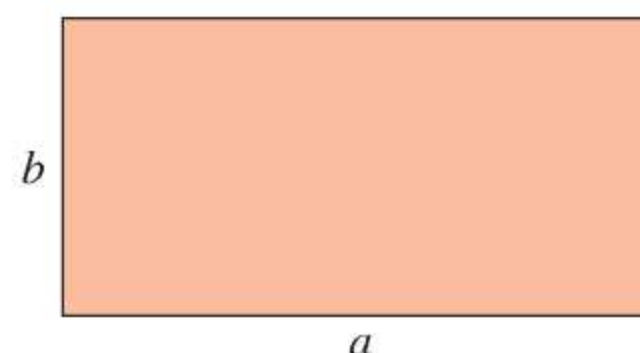
- 8 Zapisz założenie i tezę twierdzenia – skorzystaj z oznaczeń umieszczonych na rysunku.
- a) Przekątne rombu są prostopadłe.



- b) Suma długości każdych dwóch boków trójkąta jest większa od długości trzeciego boku.



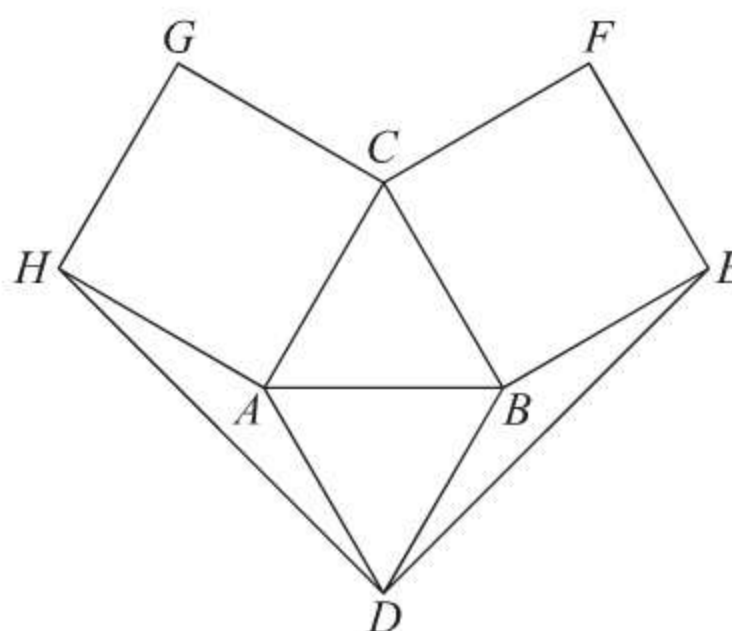
- c) Pole prostokąta jest równe iloczynowi długości jego dwóch sąsiednich boków.



- 9 Udowodnij poniższe stwierdzenie.
Odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty o równych polach.
- 10 Liczby 32 i 23, 51 i 15, 64 i 46 to liczby lustrzane. Udowodnij, że:
- różnica dowolnych dwucyfrowych liczb lustrzanych jest podzielna przez 9,
 - suma dowolnych dwucyfrowych liczb lustrzanych jest podzielna przez 11.
- 11 Udowodnij, że jeżeli n jest dowolną liczbą naturalną, to liczby a , b , c takie, że $a = 10^n + 2$, $b = 10^{2n} + 10^n + 7$, $c = 10^{3n} + 10^{2n} + 10^n$, są podzielne przez 3.

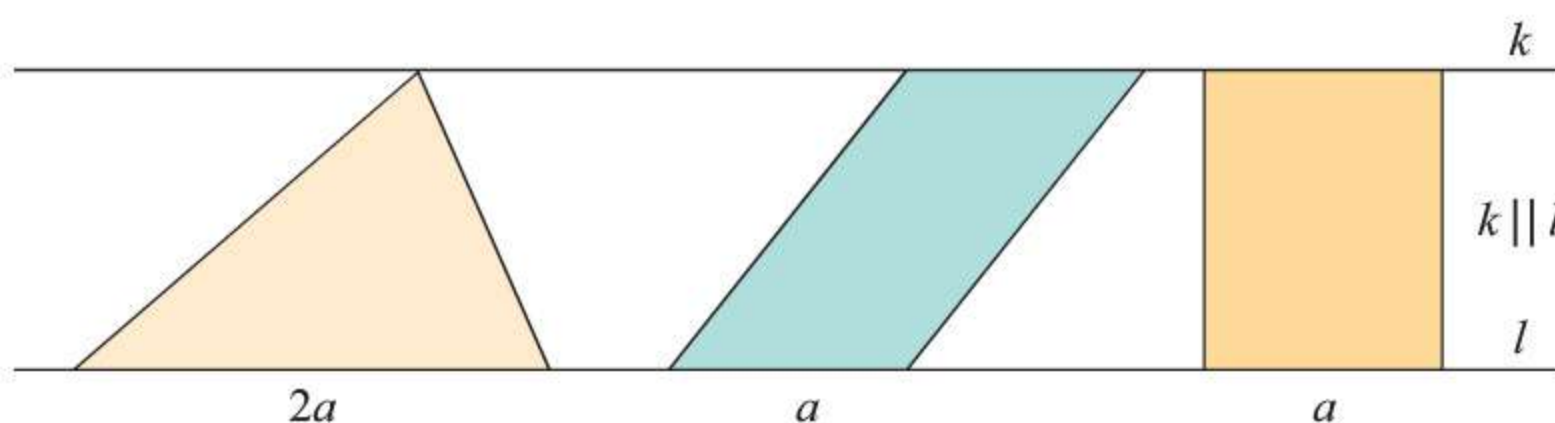
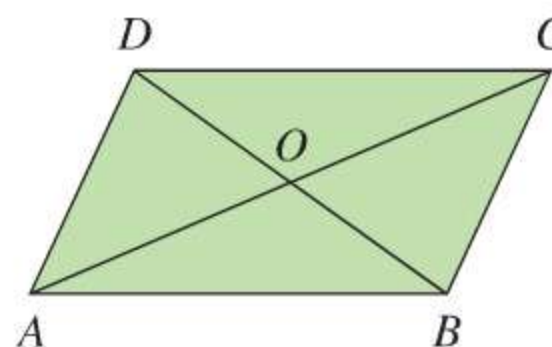
Wyzwanie

Na bokach trójkąta równobocznego ABC , na zewnątrz trójkąta, zbudowano dwa kwadraty $BEFC$ i $ACGH$ oraz trójkąt równoboczny ABD – tak jak na rysunku obok. Udowodnij, że kąt HDE jest prosty.



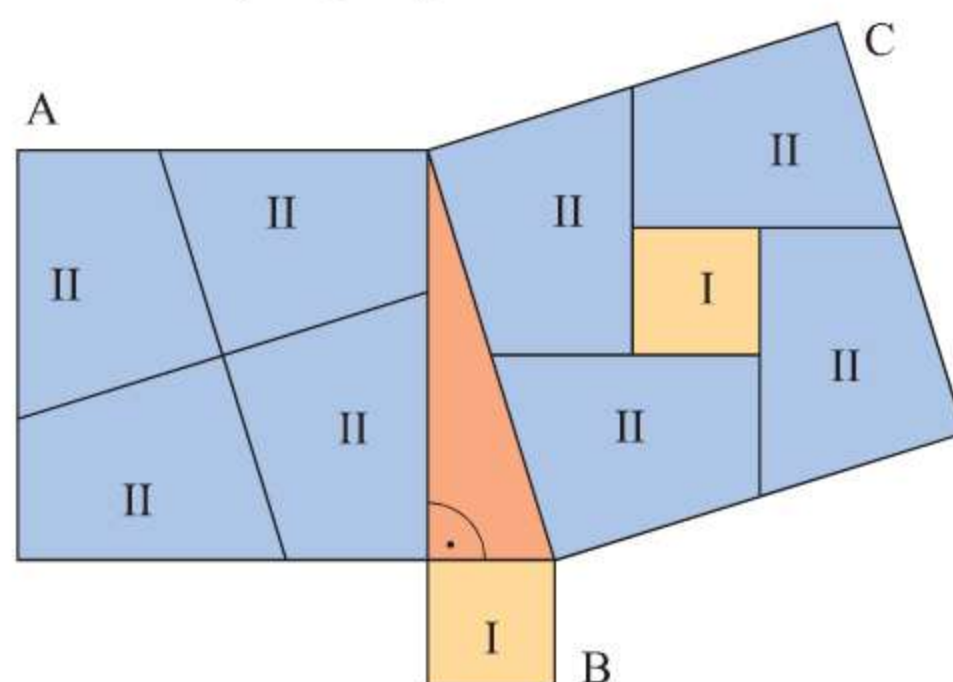
Sprawdź się!

- 1 W podanym twierdzeniu wskaż założenie i tezę.
 - a) Jeżeli wielokąt jest trójkątem, to suma miar jego kątów wewnętrznych jest równa 180° .
 - b) Jeżeli liczba naturalna jest podzielna przez 4, to ta liczba jest również podzielna przez 2.
- 2 Podane twierdzenie zapisz w formie zdania warunkowego *Jeżeli..., to...*
 - a) W rombie przekątne są prostopadłe.
 - b) Liczba naturalna podzielna przez 21 jest podzielna przez 3 i przez 7.
- 3 Zapisz założenie i tezę twierdzenia – skorzystaj z oznaczeń umieszczonych na rysunku.
Przekątne równoległoboku dzielą się na połowy.
- 4 Jacek przedstawił taką hipotezę: *Każda liczba parzysta jest podzielna przez 4.* Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. Kontrprzykładem dla podanej hipotezy jest liczba
 A. 36 B. 444 C. 2500 D. 2222
- 5 Uzasadnij prawdziwość podanego zdania.
Pola figur przedstawionych na rysunku są równe.



3. Twierdzenie Pitagorasa

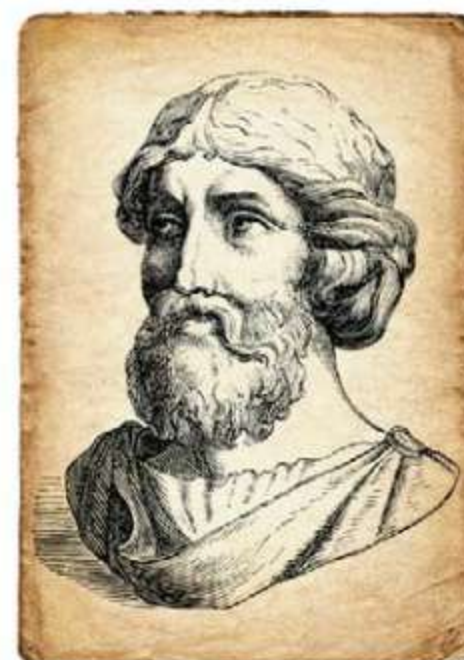
Przyjrzyj się dokładnie rysunkowi. Na bokach trójkąta prostokątnego zbudowane są kwadraty A, B, C. Z dwóch mniejszych kwadratów A i B (po odpowiednim rozcięciu) da się zbudować największy kwadrat C.



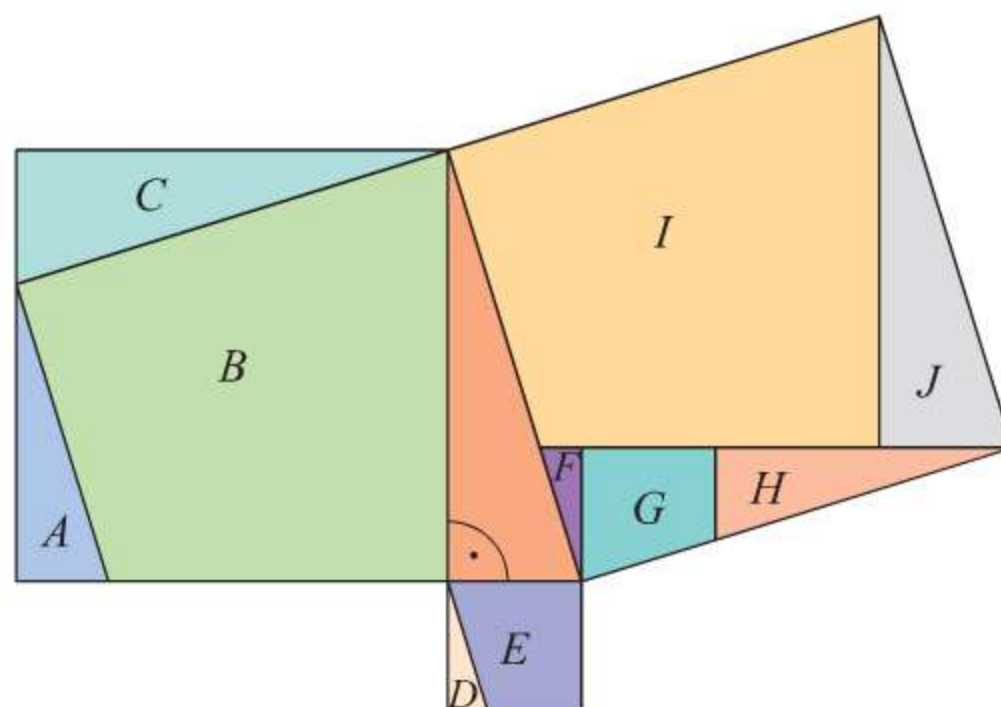
Suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej tego trójkąta.



Prawidłowość tę udowodnił grecki matematyk Pitagoras, żyjący w latach ok. 572–497 p.n.e., i dlatego nazywamy ją **twierdzeniem Pitagorasa**. Na rysunku powyżej przedstawiono geometryczny dowód twierdzenia Pitagorasa.



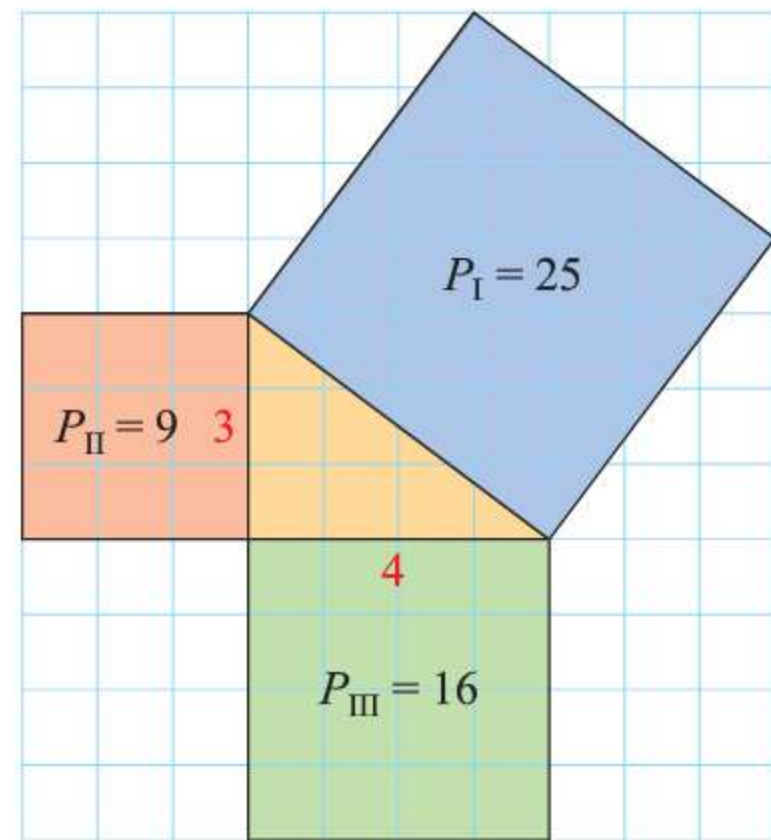
- 1** Na rysunku jest pięć par figur przystających. Uzasadnij, że pole największego kwadratu jest sumą pól dwóch mniejszych kwadratów.



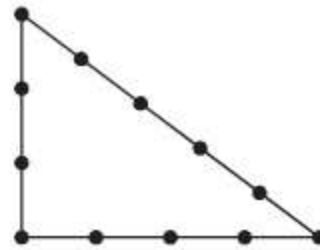
Przyjrzyjmy się rysunkowi obok.

Widzimy, że długości przyprostokątnych trójkąta wynoszą 3 i 4, zatem pola kwadratów zbudowanych na tych przyprostokątnych są odpowiednio równe $3^2 = 9$ i $4^2 = 16$.

Z tego wynika, że pole kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej tego trójkąta jest równe $9 + 16 = 25$, a więc bok tego kwadratu (czyli przeciwprostokątna trójkąta) ma długość $\sqrt{25}$, czyli 5.

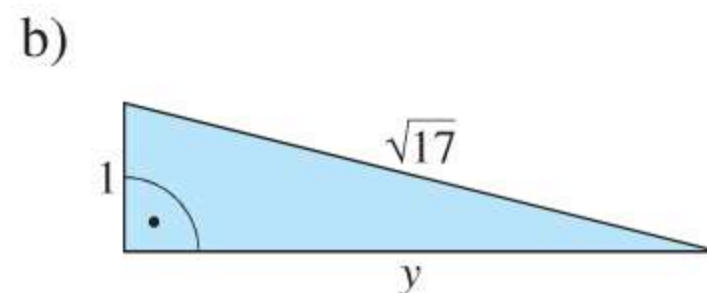
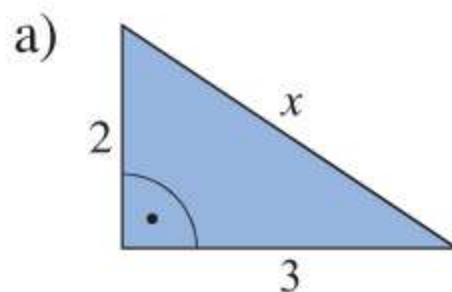


Trójkąt o bokach 3, 4, 5 nazywa się **trójkątem egipskim**, gdyż Egipcjanie wykorzystywali go do wytyczania kąta prostego w terenie. Taki trójkąt można zrobić ze sznurka, na którym są zawiązane węzły w równych odległościach.



Przykład 1.

Obliczmy nieznaną długość boku trójkąta prostokątnego.



a) Narysujmy kwadraty na bokach trójkąta. Zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa możemy zapisać zależność między polami kwadratów zbudowanych na bokach trójkąta prostokątnego.

$$2^2 + 3^2 = x^2$$

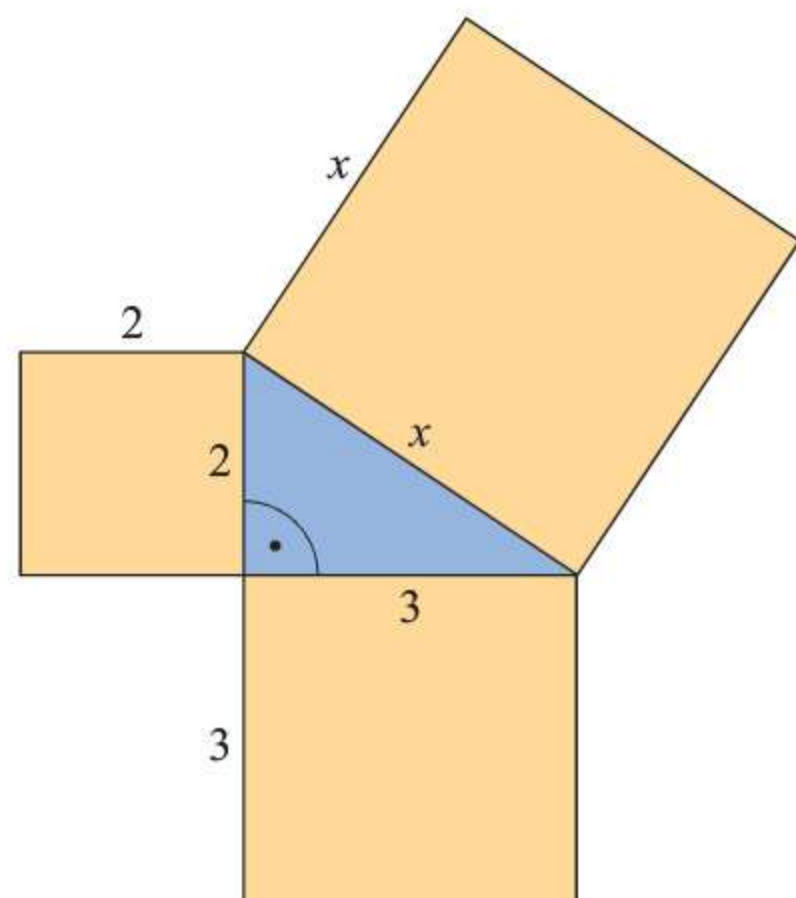
$$4 + 9 = x^2$$

$$13 = x^2$$

$$x = \sqrt{13}$$

Zauważmy, że długość odcinka może być wyrażona liczbą niewymierną.

Liczba $\sqrt{13} = 3,6055512754\dots$ nie ma rozwinięcia dziesiętnego skończonego ani okresowego, a więc jest liczbą niewymierną.





b) Na podstawie twierdzenia Pitagorasa możemy zapisać zależność:

$$1^2 + y^2 = (\sqrt{17})^2$$

$$1 + y^2 = 17$$

$$y^2 = 17 - 1$$

$$y^2 = 16$$

$$y = 4.$$

Widzimy, że jeśli znamy długości dwóch boków trójkąta prostokątnego, możemy obliczyć długość trzeciego boku.

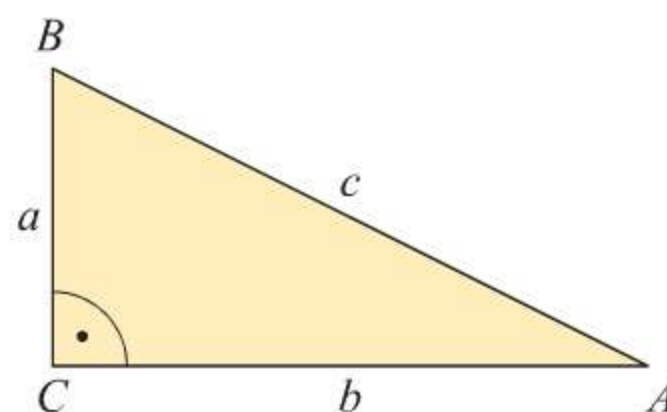
Twierdzenie Pitagorasa

Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

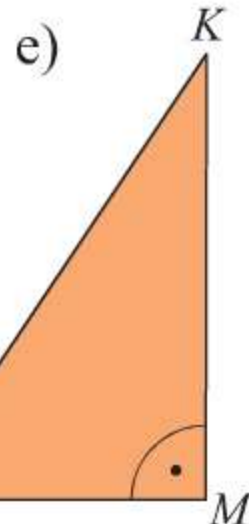
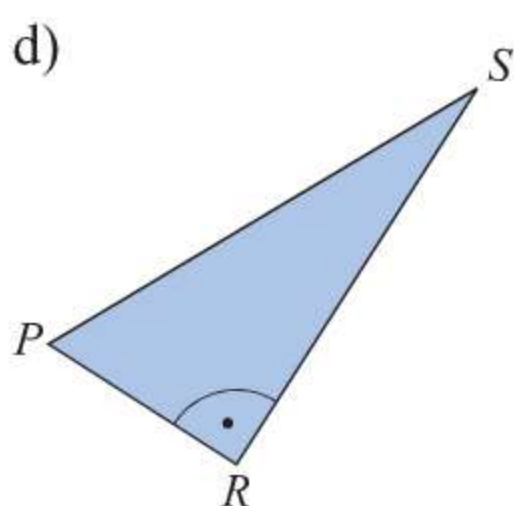
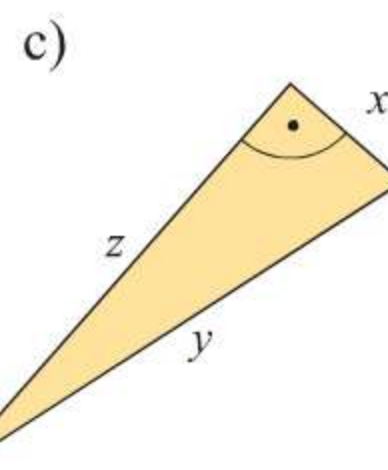
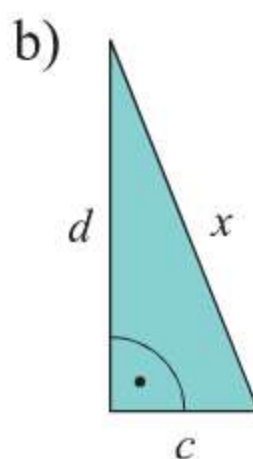
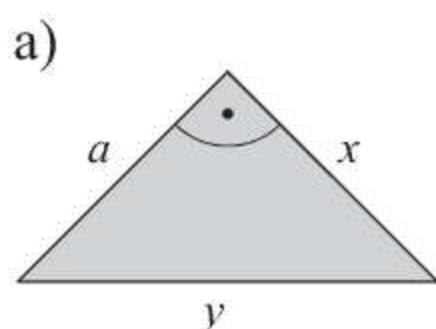


Po przyjęciu takich oznaczeń jak na rysunku możemy też twierdzenia Pitagorasa zapisać symbolicznie:

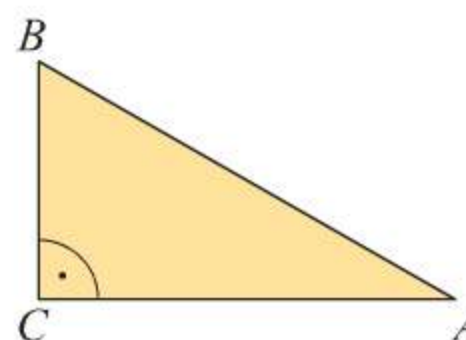
$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ lub } |BC|^2 + |AC|^2 = |AB|^2.$$



- 2 W twierdzeniu Pitagorasa wskaż założenie i tezę. Przyjmij oznaczenia boków jak na rysunku powyżej.
- 3 Zapisz symbolicznie tezę twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego.

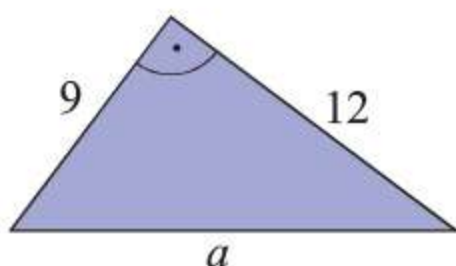


- 4 Przyjmij oznaczenia jak na rysunku i oblicz:
 - a) $|AB|$, jeśli $|BC| = 7 \text{ cm}$, $|AC| = 24 \text{ cm}$,
 - b) $|AC|$, jeśli $|BC| = 2 \text{ cm}$, $|AB| = 5 \text{ cm}$,
 - c) $|BC|$, jeśli $|AC| = \sqrt{2} \text{ cm}$, $|AB| = \sqrt{3} \text{ cm}$.

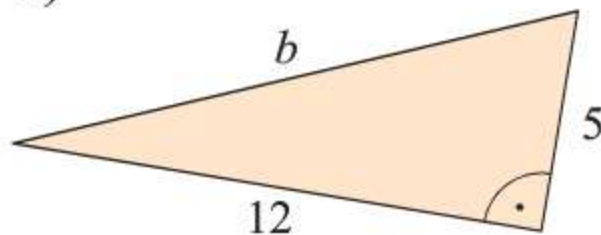


5 Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.

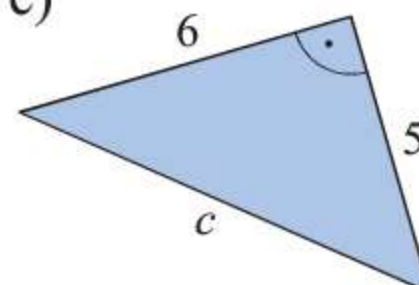
a)



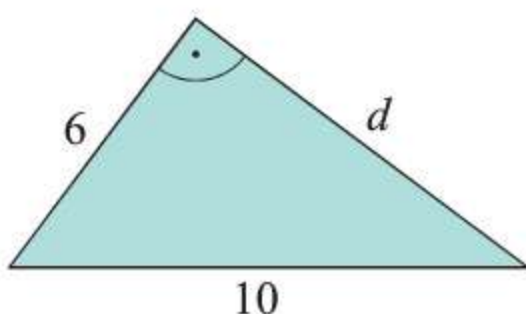
b)



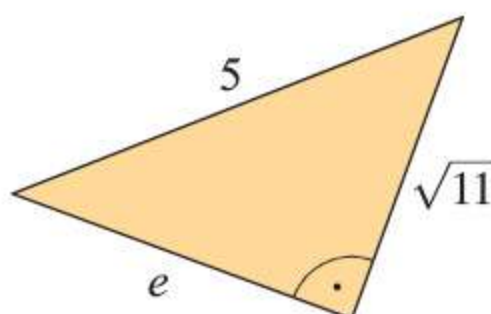
c)



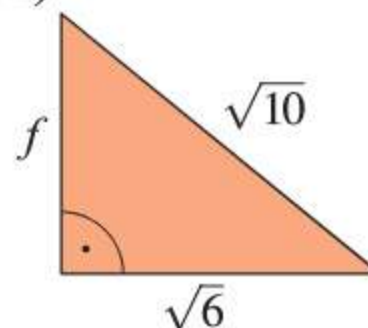
d)



e)



f)



Przykład 2.

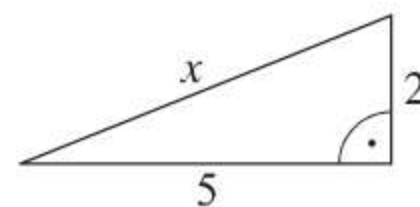
Obliczmy, jaką długość ma trzeci bok trójkąta prostokątnego, jeżeli długość jednego boku wynosi 5 cm, a drugiego 2 cm.

To zadanie ma dwa rozwiązania, ponieważ bok długości 5 cm może być przyprostokątną lub przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego.

Rozwiązanie I

Jeżeli bok długości 5 cm jest przyprostokątną, to:
 $5^2 + 2^2 = x^2$, $25 + 4 = x^2$, $x^2 = 29$, $x = \sqrt{29}$.

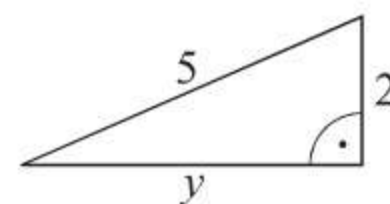
ODPOWIEDŹ: Przeciwprostokątna trójkąta ma długość $\sqrt{29}$ cm.



Rozwiązanie II

Jeżeli bok długości 5 cm jest przeciwprostokątną, to:
 $y^2 + 2^2 = 5^2$, $y^2 + 4 = 25$, $y^2 = 25 - 4$, $y^2 = 21$, $y = \sqrt{21}$.

ODPOWIEDŹ: Druga przyprostokątna trójkąta ma długość $\sqrt{21}$ cm.



6 Oblicz długość trzeciego boku trójkąta prostokątnego, jeżeli dwa pozostałe boki mają podane długości.

a) 8 cm i 17 cm

b) 0,3 dm i 5 cm

c) 14 cm i 0,5 m

7 Oblicz długość przekątnej:

a) prostokąta o wymiarach 3 cm i 6 cm,

b) kwadratu, którego bok ma długość $\sqrt{19}$ cm.

8 Długość boku trójkąta równobocznego wynosi 10. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Wysokość trójkąta z dokładnością do jedności jest równa A / B. A. 9 B. 5

Pole tego trójkąta jest liczbą C / D. C. niewymierną D. wymierną



- 9 Wykaż, że obwód rombu, którego przekątne mają długości 16 cm i 12 cm, jest równy 40 cm.
- 10 W równoległoboku kąt ostry ma 45° , a długości boków wynoszą 6 cm i 10 cm. Czy pole tego równoległoboku wynosi $\sqrt{1800} \text{ cm}^2$?
Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	wysokość h można obliczyć z równania $h^2 + 6^2 = 10^2$.
			2.	wysokość h można obliczyć z równania $h^2 + h^2 = 6^2$ lub $h^2 + h^2 = 10^2$.
B.	Nie,		3.	wysokość h można obliczyć z równania $h^2 + 10^2 = 6^2$.

- 11 Oblicz pole trójkąta równobocznego, którego wysokość jest równa $\sqrt{3} \text{ cm}$.

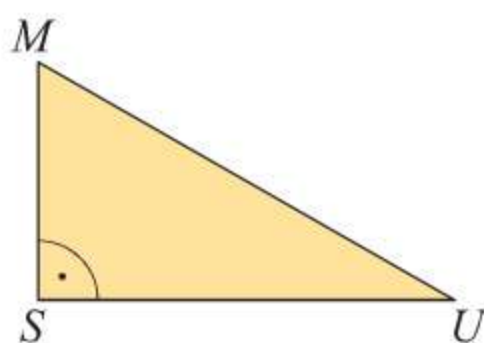
Wyzwanie

Podaj przykład trójkąta prostokątnego, w którym:

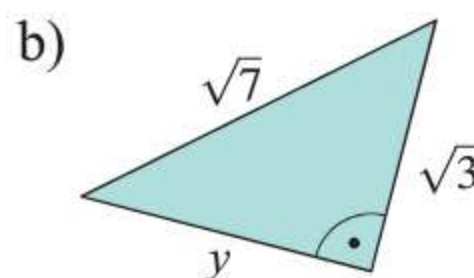
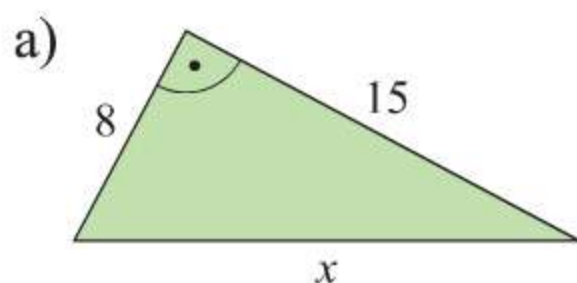
- długości wszystkich boków są liczbami niewymiernymi,
- długości dwóch boków są liczbami niewymiernymi.

Sprawdź się!

- 1 Zapisz tezę twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta SUM .



- 2 Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.



- 3 Uzasadnij, że obwód kwadratu, którego przekątna jest równa $\sqrt{2}$, wynosi 4.
- 4 W trójkącie prostokątnym dwa dłuższe boki mają długości $\sqrt{5}$ i 3. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Obwód tego trójkąta jest równy
A. $\sqrt{15}$ B. $5 + \sqrt{5}$ C. $\sqrt{5} + 3$ D. $5\sqrt{5}$
- 5 Oblicz z dokładnością do jedności pole trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AB| = 8$ i $|AC| = 10$. Rozpatrz dwa przypadki.



4. Długość odcinka w układzie współrzędnych

Przykład 1.

Obliczmy odległości punktów: $A = (4, 2)$, $B = (-3, 3)$, $C = (-2, -4)$, $D = (4, -3)$ od początku układu współrzędnych.

W każdym przypadku odległość tych punktów od początku układu współrzędnych jest równa długości przeciwprostokątnej odpowiedniego trójkąta prostokątnego.

Dla punktu A jest to długość przeciwprostokątnej trójkąta o przyprostokątnych 4 i 2, a więc na podstawie twierdzenia Pitagorasa obliczamy:

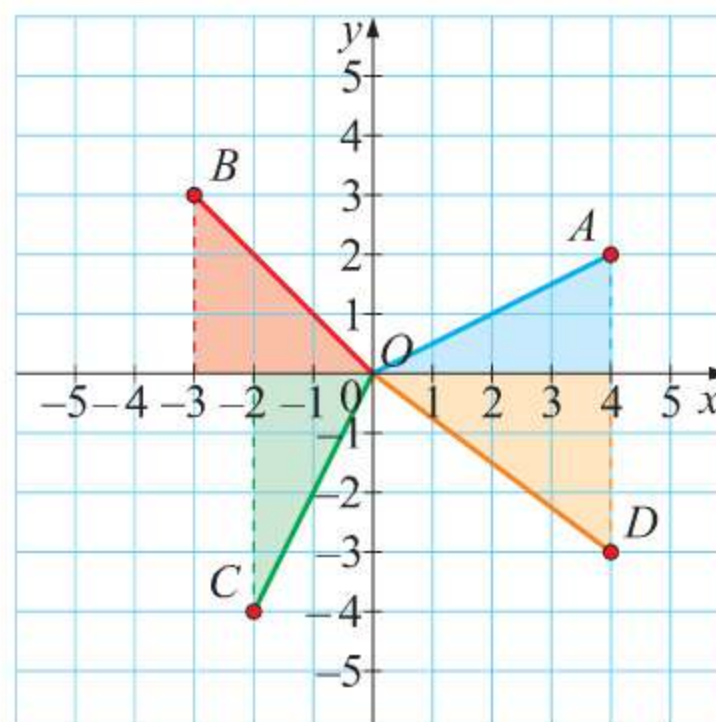
$$|AO|^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20, \text{ stąd } |AO| = \sqrt{20}.$$

$$|BO| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$$

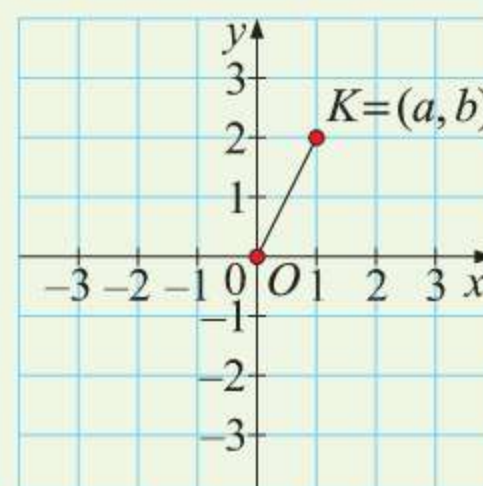
$$|CO| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

$$|DO| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

Zwróćmy uwagę, że odległość dowolnego punktu od początku układu współrzędnych jest równa pierwiastkowi kwadratowemu z sumy kwadratów współrzędnych tego punktu.



Odległość dowolnego punktu K o współrzędnych (a, b) od początku O układu współrzędnych jest równa $|KO| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



- 1** Oblicz odległość od początku układu współrzędnych punktów o danych współrzędnych.

a) $A = (-3, 5)$, $B = (2, 7)$, $C = (-5, -4)$, $D = (6, -8)$

b) $A = \left(2\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}\right)$, $B = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $C = (-3, 6; -1, 5)$

Przykład 2.

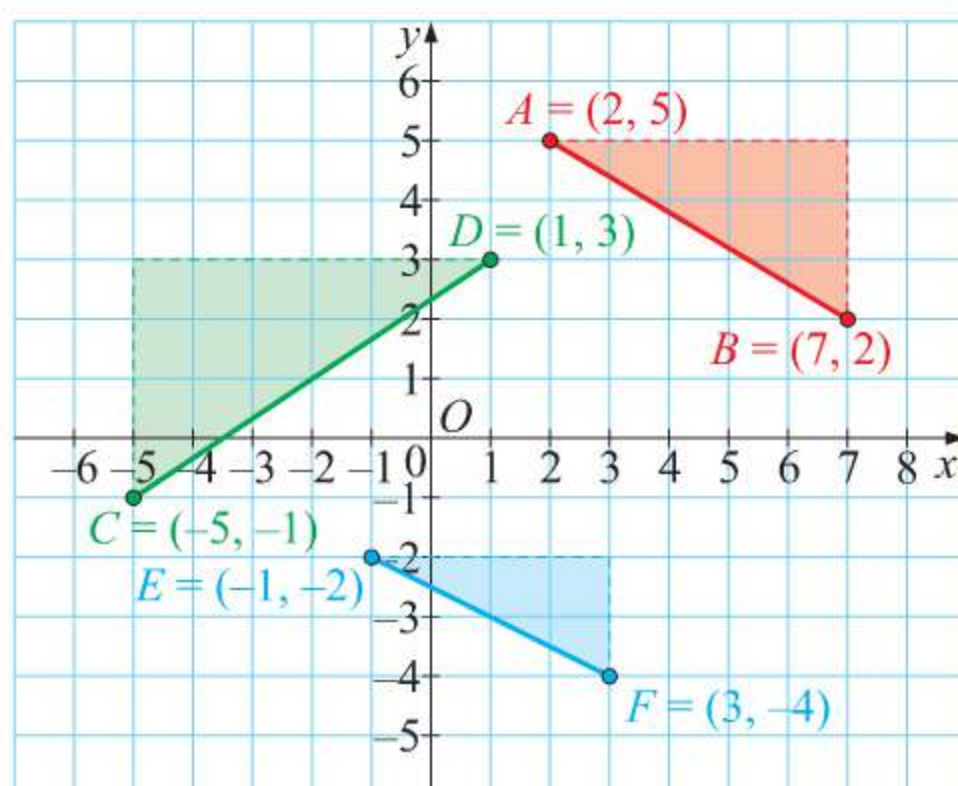
Obliczmy długości odcinków umieszczonych w układzie współrzędnych.

Każdy z odcinków AB , CD , EF jest przeciwprostokątną odpowiedniego trójkąta prostokątnego. Na podstawie twierdzenia Pitagorasa możemy obliczyć długości tych odcinków.

$$|AB| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

$$|CD| = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$$

$$|EF| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$



Zwróćmy uwagę, że:

$$|AB| = \sqrt{(7-2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

$$|CD| = \sqrt{(1-(-5))^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

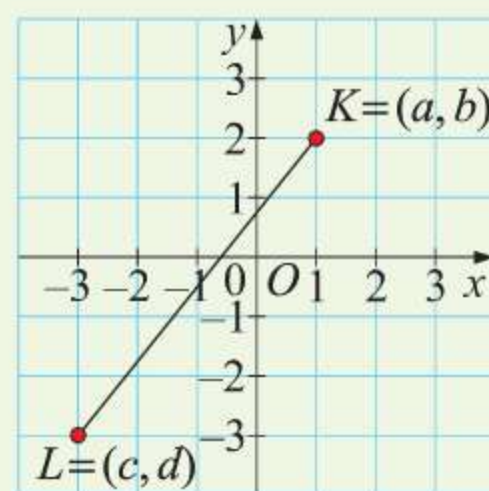
$$|EF| = \sqrt{(3-(-1))^2 + (-4-(-2))^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}.$$

Zauważmy, że współrzędne końców odcinków zapisano takimi kolorami jak na rysunku i w obliczeniach wyznaczamy różnice odpowiednich współrzędnych.

Długość odcinka KL , gdzie $K = (a, b)$ oraz $L = (c, d)$, można obliczyć ze wzoru

$$|KL| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

lub $|KL| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}.$



2 Oblicz długości odcinków AB , BC i AC , jeśli:

- $A = (2, 8)$, $B = (-2, 5)$, $C = (6, -1)$,
- $A = (-3, 4)$, $B = (5, -1)$, $C = (5, 9)$,
- $A = (-2, 1)$, $B = (0, 6)$, $C = (6, 2)$.

3 Wierzchołki trójkąta ABC mają współrzędne $A = (3, 0)$, $B = (0, 7)$, $C = (-3, 0)$.

- Uzasadnij, że ten trójkąt jest równoramienny.
- Oblicz obwód tego trójkąta.

Przykład 3.

Sprawdźmy, czy czworokąt $KLMN$ o wierzchołkach $K = (2, -3)$, $L = (4, 1)$, $M = (0, 3)$, $N = (-2, -1)$ jest kwadratem.

Najpierw sprawdzimy, czy boki KL , LM , MN i NK są równej długości.

$$|KL| = \sqrt{(4-2)^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$|LM| = \sqrt{(0-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

$$|MN| = \sqrt{(-2-0)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$|NK| = \sqrt{(2-(-2))^2 + (-3-(-1))^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

Należy jeszcze sprawdzić, czy przekątne KM i LN są równej długości.

$$|KM| = \sqrt{(0-2)^2 + (3-(-3))^2} = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$$

$$|LN| = \sqrt{(-2-4)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$$

ODPOWIEDŹ: Czworokąt $KLMN$ jest kwadratem.

- 4 Sprawdź, czy czworokąt o wierzchołkach $A = (-3, -1)$, $B = (1, -2)$, $C = (2, 2)$, $D = (-2, 3)$ jest kwadratem.
- 5 Czy trójkąt ABC jest równoramienny, jeśli $A = (3, 3)$, $B = (-3, 6)$ i $C = (5, 6)$? Odpowiedź uzasadnij.
- 6 Uzasadnij, że odległość punktu $K = (8, -6)$ od osi x jest o 4 jednostki mniejsza niż odległość tego punktu od początku układu współrzędnych.
- 7 Wierzchołki trapezu $ABCD$ znajdują się w punktach $A = (-3, 2)$, $B = (4, 2)$, $C = (1, 6)$, $D = (-2, 6)$. Czy ten trapez jest równoramienny? Odpowiedź uzasadnij.
- 8 Punkty $A = (-4, -4)$, $B = (-1, -1)$, $C = (3, -5)$ są wierzchołkami prostokąta $ABCD$.
 - a) Oblicz długość przekątnej tego prostokąta.
 - b) Wyznacz współrzędne wierzchołka D .
- 9 Wierzchołki czworokąta $ABCD$ mają współrzędne $A = (4, 0)$, $B = (0, 4)$, $C = (-4, 0)$, $D = (0, -4)$. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Obwód tego czworokąta jest równy A / B.

A. $4\sqrt{32}$ B. 64

Pole czworokąta $ABCD$ wynosi C / D.

C. 32 D. 64



- 10** Dany jest odcinek AB o końcach $A = (-46, 55)$ i $B = (38, -49)$. Czy odległość środka tego odcinka od początku układu współrzędnych wynosi 5? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	współrzędne środka tego odcinka wynoszą $(-8, 6)$.
			2.	współrzędne środka tego odcinka wynoszą $(-42, -52)$.
B.	Nie,		3.	współrzędne środka tego odcinka wynoszą $(-4, 3)$.

- 11** Zaznacz w układzie współrzędnych punkty $K = (0, -4)$, $L = (5, 1)$, $M = (1, 4)$, $N = (-3, -1)$, a następnie narysuj wszystkie odcinki, których końcami są te punkty. Oblicz długości powstałych odcinków.

Wyzwanie

Znajdź pierwszą współrzędną punktu S , jeśli odległość punktu S od początku układu współrzędnych jest równa $\sqrt{32}$, a druga współrzędna to -4 . Czy jest tylko jedno rozwiązanie?

Sprawdź się!

- 1** Dane są punkty $A = (-3, 4)$ i $B = (5, -12)$. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Odległość punktu B od początku układu współrzędnych jest o 8 jednostek większa niż odległość punktu A od początku układu współrzędnych.	P	F
Długość odcinka AB jest równa $\sqrt{320}$.	P	F

- 2** Który odcinek jest dłuższy: AB czy CD , jeśli $A = (-5, -4)$, $B = (1, 4)$, $C = (9, 5)$, $D = (9, -4)$? Odpowiedź uzasadnij.
- 3** Uzasadnij, że trójkąt o wierzchołkach $K = (-2, -1)$, $L = (3, -1)$, $M = (1, 3)$ jest równoramienny.
- 4** Sprawdź, czy czworokąt o wierzchołkach $A = (-7, -1)$, $B = (-1, -5)$, $C = (3, 1)$, $D = (-3, 5)$ jest kwadratem.
- 5** Oblicz odległość środka odcinka AB od początku układu współrzędnych, jeśli $A = (13, -15)$ i $B = (-29, 27)$.

5. Praktyczne zastosowania twierdzenia Pitagorasa



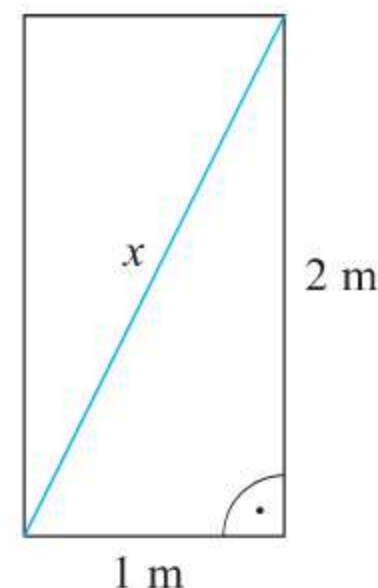
Przykład 1.

Pani Ola zamówiła do przedpokoju kwadratowe lustro, które razem z ramą ma mieć $2,3 \text{ m} \times 2,3 \text{ m}$. Czy da się je wnieść do mieszkania, jeśli drzwi wejściowe mają wymiary $1 \text{ m} \times 2 \text{ m}$?

Gdy porównamy wymiary lustra i drzwi, od razu widzimy, że lustro mogłoby przejść tylko po przekątnej drzwi. Obliczmy zatem długość tej przekątnej.

$$1^2 + 2^2 = x^2 \quad 1 + 4 = x^2 \quad x^2 = 5 \quad x = \sqrt{5}$$

Na kalkulatorze obliczymy, że $\sqrt{5}$ to $2,2360679\dots$, czyli więcej niż $2,3$. To znaczy, że lustro nie przejdzie przez drzwi. Trzeba dokonać korekty zamówienia.



Trójkąty prostokątne, których długości boków są wyrażone liczbami naturalnymi a, b, c , nazywa się **trójkątami pitagorejskimi**, a liczby a, b, c – trójkami pitagorejskimi. Nazwa jest związana z Pitagorasem. Znalazł on wzory: $a = 2n + 1$, $b = 2n(n + 1)$, $c = 2n^2 + 2n + 1$, gdzie n oznacza dowolną liczbę naturalną różną od zera, pozwalające wyznaczyć liczby naturalne a, b, c , które spełniają warunek $a^2 + b^2 = c^2$.



Przykład 2.

Wyznamy za pomocą podanych wyżej wzorów dwie różne trójki pitagorejskie.

Jeśli przyjmiemy, że $n = 1$, to:

$$a = 2 \cdot 1 + 1 = 3, \quad b = 2 \cdot 1 \cdot (1 + 1) = 4, \quad c = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 5$$

Boki o długościach 3, 4, 5 ma znany już nam trójkąt egipski.

Jeśli przyjmiemy, że $n = 6$, to:

$$a = 2 \cdot 6 + 1 = 13, \quad b = 2 \cdot 6 \cdot (6 + 1) = 84, \quad c = 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 + 1 = 85$$

Możemy sprawdzić, że $13^2 + 84^2 = 169 + 7056 = 7225$ oraz $85^2 = 7225$.

- 1** Przerysuj tabelę do zeszytu i uzupełnij miejsca oznaczone , a otrzymasz trójki pitagorejskie. Sprawdź, czy otrzymane trójki liczb spełniają warunek $a^2 + b^2 = c^2$.

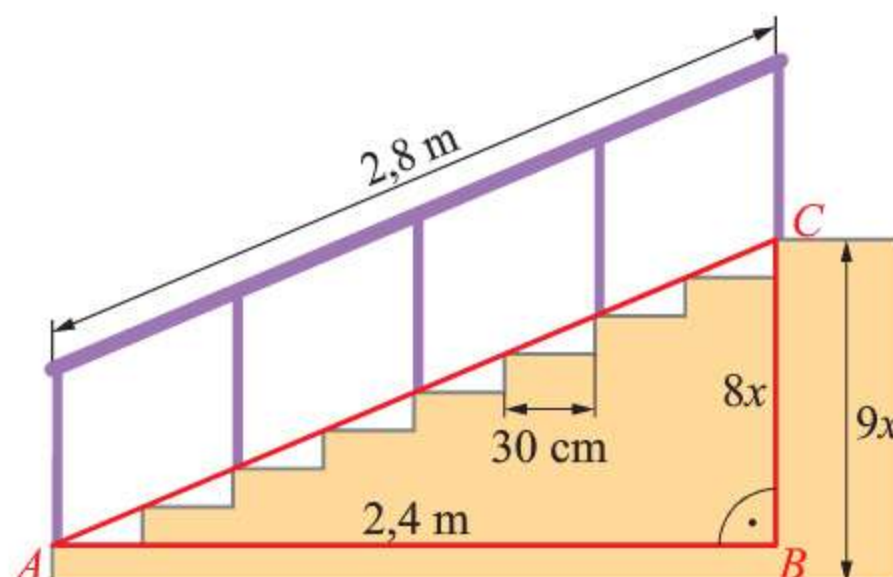
n	$a = 2n + 1$	$b = 2n(n + 1)$	$c = 2n^2 + 2n + 1$
2			
3			
4			
5			

- 2 Czy obraz o wymiarach $3 \text{ m} \times 2,20 \text{ m}$ można przenieść przez drzwi o wymiarach $0,90 \text{ m} \times 2,16 \text{ m}$? Odpowiedź uzasadnij.



Przykład 3.

Schody prowadzące na półpiętro w bloku na klatce schodowej mają 9 stopni. Każdy stopień ma 30 cm głębokości, a barierka wzdłuż tych schodów ma 2,8 m. Obliczmy z dokładnością do 10 cm wysokość piętra w tym bloku.



Rysunek przedstawiający opisaną sytuację uzupełnimy trójkątem prostokątnym ABC . Na rysunku widać, że wysokość półpiętra jest równa $9x$, jeśli jako x oznaczmy wysokość stopnia. W trójkącie prostokątnym ABC :

$$8x = \sqrt{2,8^2 - 2,4^2} = \sqrt{7,84 - 5,76} = \sqrt{2,08} \approx 1,44$$

$$x \approx 0,18 \text{ m}$$

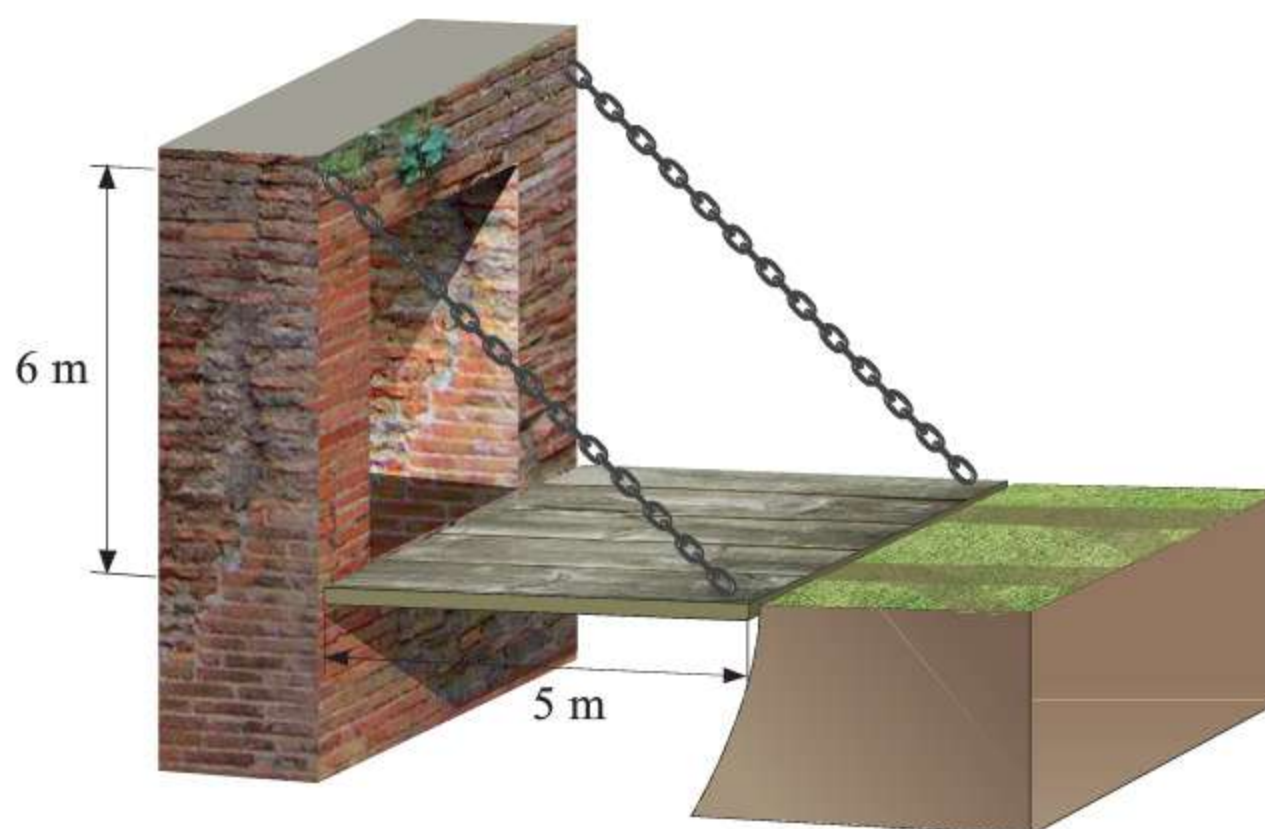
Wysokość piętra to $18x$, a zatem $18x \approx 3,24 \text{ m} \approx 3,2 \text{ m}$.

ODPOWIEDŹ: Wysokość piętra w tym bloku wynosi 3,2 m.

- 3 Schody składają się z 20 stopni, każdy ma 48 cm głębokości i wysokość równą 14 cm. Jaką długość ma poręcz znajdująca się przy schodach?
- 4 Grecki matematyk Diofantos, żyjący w III w n.e., odkrył podobno następującą metodę wyznaczania trójek pitagorejskich: *Jeśli n i k są dodatnimi liczbami naturalnymi i $n > k$, to liczby $a = n^2 - k^2$, $b = 2nk$, $c = n^2 + k^2$ spełniają zależność $a^2 + b^2 = c^2$. Poniższa tabela jest ułożona w myśl tej reguły. Przerysuj ją do zeszytu i uzupełnij.*

n	k	$a = n^2 - k^2$	$b = 2nk$	$c = n^2 + k^2$
2	1			
3	1			
3	2			
4	1			
4	2			

- 5 Zerwały się łańcuchy służące do podnoszenia mostu zwodzonego, którego długość wynosi 5 m. Końce tych łańcuchów były przymocowane do muru obronnego na wysokości 6 m, tak jak przedstawiono na rysunku. Uzasadnij, że dwa nowe łańcuchy o długościach 7,8 m nie wystarczą na wymianę.



- 6 Weronika idzie ze szkoły do przystanku tramwajowego wzdłuż ulic, a Mateusz ścieżką. Na rysunku przedstawiono szkic terenu w skali 1 : 10 000. Na planie jedna kratka ma bok równy 0,5 cm.

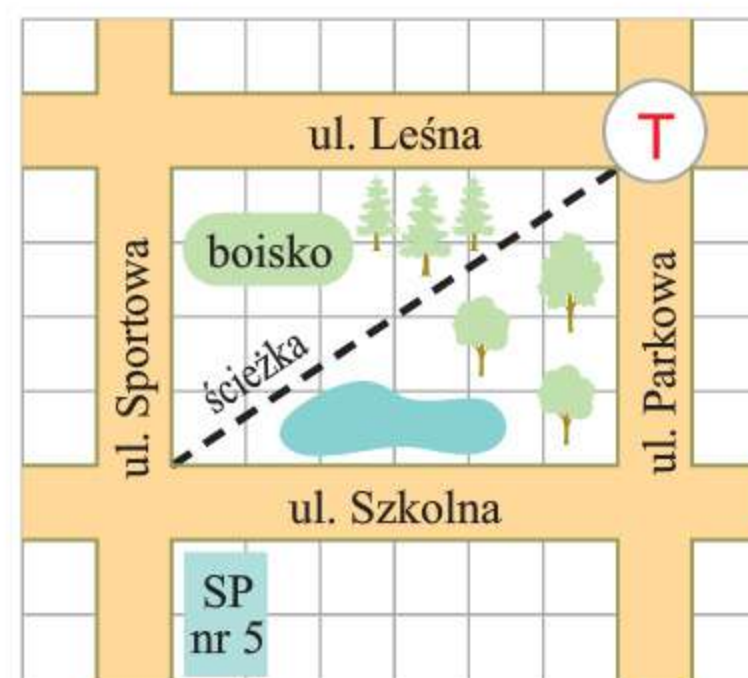
Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Weronika pokonuje drogę równą A / B.

A. 0,5 km B. 1000 m

Mateusz skraca sobie drogę mniej więcej o C / D.

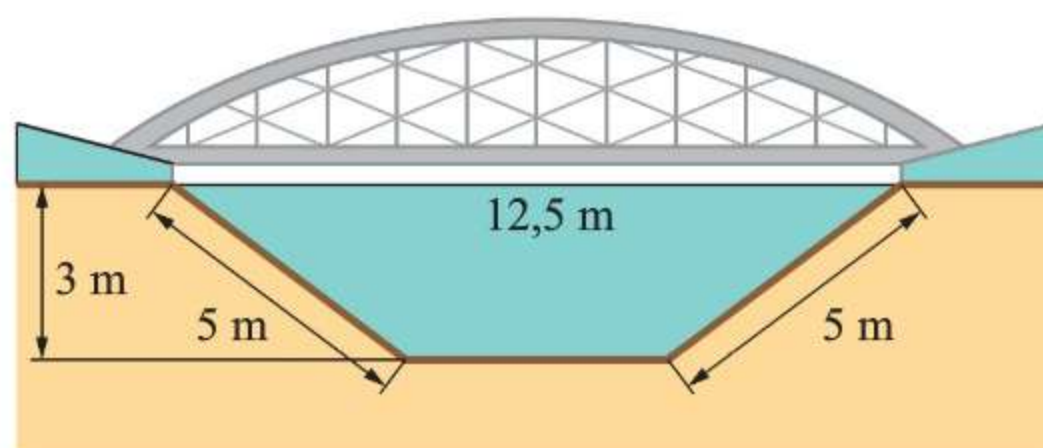
C. 140 m D. 300 m



- 7 Jacek kupił monitor, w którym prostokątny ekran ma wymiary $43 \text{ cm} \times 27 \text{ cm}$. W załączonej ulotce liczba określająca wielkość ekranu była nieczytelna. Wielkość ekranu to długość jego przekątnej wyrażona w calach. Skorzystaj z kalkulatora i oblicz wielkość ekranu. Przyjmij, że $1 \text{ cal} = 2,5 \text{ cm}$, a wynik zaokrąglij do jednośc.
- 8 Z lotniska we Frankfurtie wystartowały jednocześnie dwa samoloty: jeden leciał na południe ze średnią prędkością 800 km/h , a drugi na zachód ze średnią prędkością 700 km/h . W jakiej odległości od siebie będą te samoloty po upływie 2 godzin od startu? Wynik podaj w zaokrągleniu do 100 km.

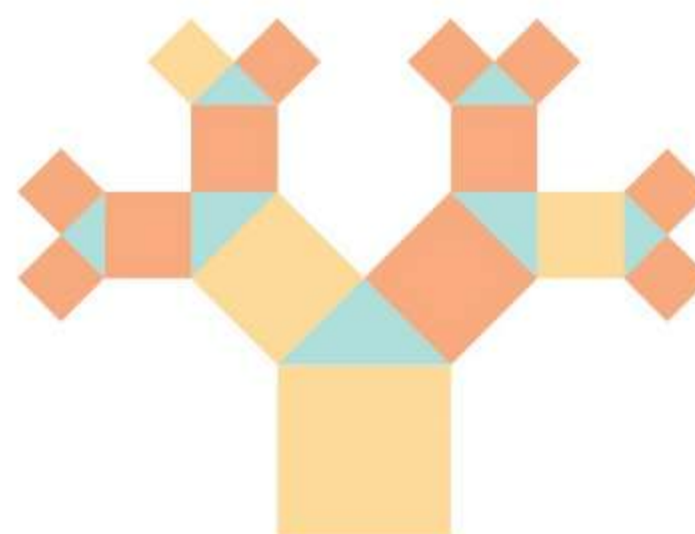


- 9 Skorzystaj z informacji na rysunku i oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

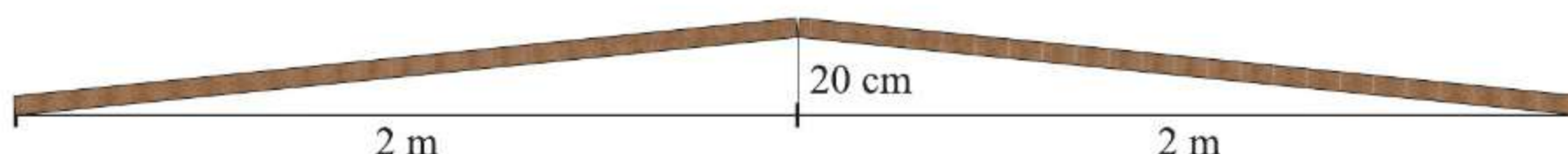


Dno kanału ma 4,5 m szerokości.	P	F
Pole przekroju kanału jest równe 29 m^2 .	P	F

- 10 Figura, taka jak na rysunku obok, nazywa się fraktalem. Jej charakterystyczną cechą jest to, że kolejno powstające części są podobne do poprzednich. Na rysunku niebieskie trójkąty są prostokątne i równoramienne, a długość boku najmniejszego kwadratu wynosi 2. Oblicz sumę pól żółtych kwadratów.



- 11 Na kwadratowy obrus o boku 1,5 m naszyto wzdłuż przekątnych ozdobną koronkę. Oszacuj, ile centymetrów koronki użyto.
- 12 Dwa drzewa o wysokości 15 m i 20 m rosną w odległości 10 m od siebie. Jaka jest odległość między wierzchołkami tych drzew? Odpowiedź podaj w zaokrągleniu do 1 m.
- 13 W salonie o szerokości 4 m posadzkarz układa podłogę z desek. Deski okazały się zbyt długie, jak to pokazano na rysunku. Oblicz, o ile centymetrów trzeba skrócić każdą z desek, aby obie się stykały, przylegały do podłogi i były równej długości.



- 14 Obwód grządki warzywnej w kształcie trapezu równoramiennego wynosi 44 m. Stosunek długości jego podstaw wynosi 1 : 2, a ramię ma 10 m długości. Właściciel chce zmienić kształt grządki na kwadratowy, lecz o tym samym polu co trapez. Czy długość boku nowej grządki będzie mniejsza niż 10 m? Odpowiedź uzasadnij.

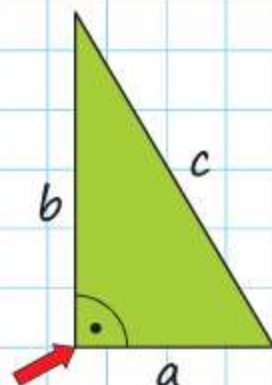
- 15** Grześ przeglądał zeszyt do matematyki swojej siostry Ali, która chodzi do liceum, i zwrócił uwagę na pewien fragment.

Twierdzenie

Jeżeli

$$a^2 + b^2 = c^2$$

to



Jeżeli suma kwadratów dwóch krótszych boków trójkąta jest równa kwadratowi najdłuższego boku, to ten trójkąt jest prostokątny.

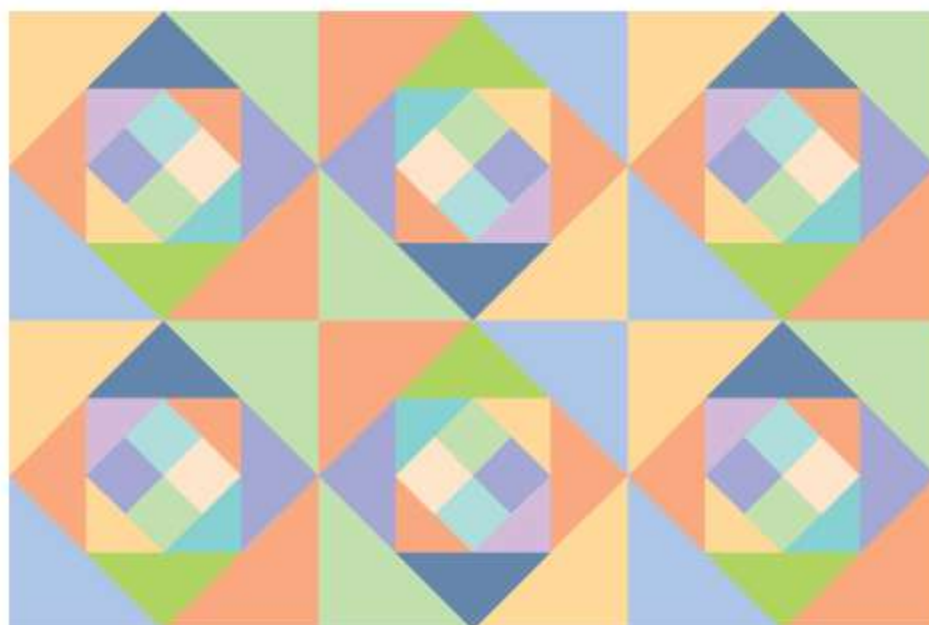
Praca domowa

Sprawdź, czy trójkąt o danych długościach boków jest prostokątny.

- a) 6 cm, 8 cm, 10 cm
- b) $\sqrt{24}$ cm, $\sqrt{3}$ cm, $\sqrt{21}$ cm
- c) $1\frac{1}{2}$ cm, 3 cm, $2\frac{1}{2}$ cm
- d) 3,5 dm, 12 dm, 12,5 dm

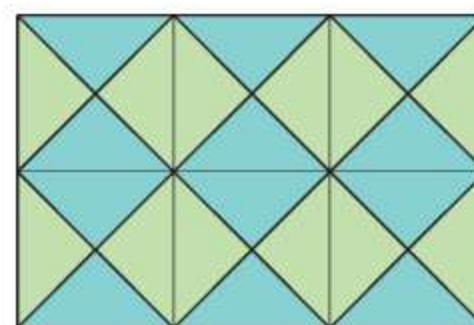
Grześ postanowił rozwiązać zadanie domowe siostry. Otrzymał takie wyniki: a – tak, b – tak, c – nie, d – tak. Sprawdź, czy Grześ dobrze rozwiązał to zadanie.

- 16** Prostokątną powierzchnię pokryto trójkątnymi i kwadratowymi płytkami tak jak na rysunku. Ile metrów kwadratowych powierzchni pokryto tymi płytkami, jeśli długość boku kwadratowej płytki wynosi 50 cm?



Wyzwanie

Przerysuj do zeszytu wzór posadzki i wykonaj na nim rysunek, który będzie geometrycznym dowodem twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego równoramiennego.



Sprawdź się!

- 1 Ile metrów bieżących siatki potrzeba na ogrodzenie działki w kształcie trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa ma 20 m, ramię 15 m, a wysokość jest równa 12 m? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

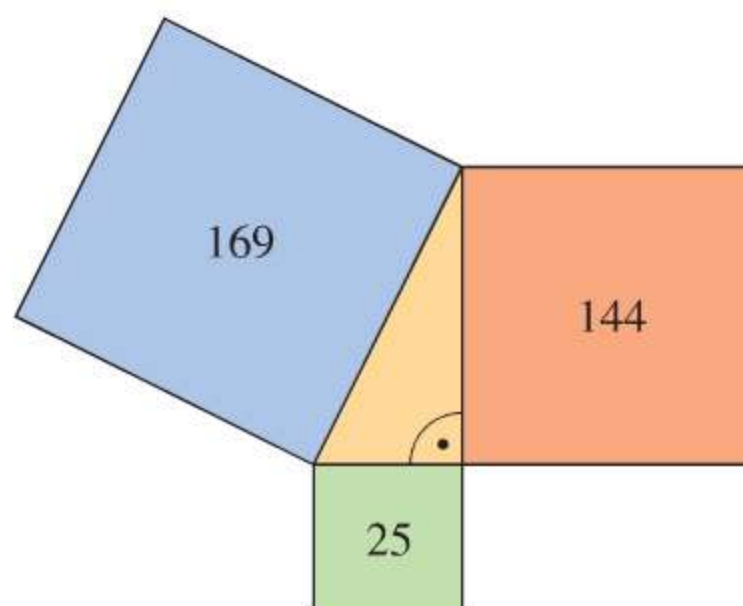
A. 82

B. 88

C. 47

D. 62

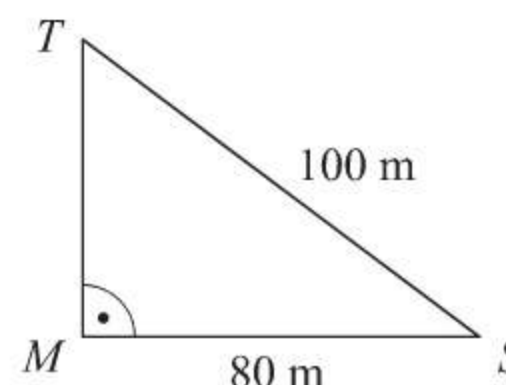
- 2 Na bokach trójkąta prostokątnego zbudowano kwadraty, jak na rysunku. Podane liczby oznaczają pola tych kwadratów. Jeśli najkrótszy bok trójkąta ma długość k , to czy długości dłuższych boków tego trójkąta są wartościami wyrażen $l = \frac{k^2 - 1}{2}$, $m = \frac{k^2 + 1}{2}$, gdzie $k > 1$? Odpowiedź uzasadnij.



- 3  Nóżki stolika mają po 1,3 m długości, a ich rozstaw wynosi 50 cm. Wykaż, że dziecko o wzroście 110 cm stojące tuż przy tym stoliku nie zobaczy, co się na nim znajduje.



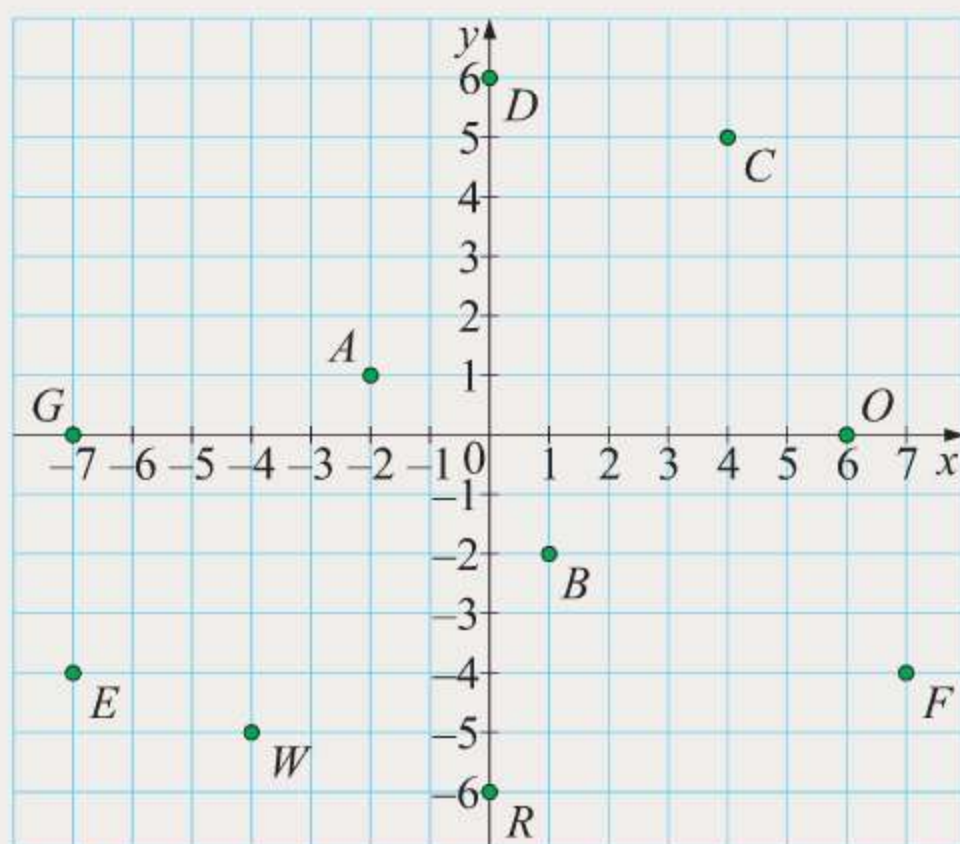
- 4 Na rysunku zaznaczono dom Tomka (T), dom Marty (M) i szkołę (S). Oblicz, o ile metrów wydłuży się droga Tomka ze szkoły, jeśli odprowadzi Martę do domu.



- 5 Z przystani na jeziorze wypływają jednocześnie dwaj kajakarze. Pierwszy płynie na wschód z prędkością 9 km/h, drugi na północ z prędkością 12 km/h. W jakiej odległości od siebie znajdą się kajakarze po upływie 20 minut?

Zadania utrwalające

- 1 Odczytaj litery oznaczające punkty: $(-2, 1)$, $(1, -2)$, $(0, -6)$, $(6, 0)$, $(-4, -5)$ i ułóż z tych liter hasło, w którym środkowa litera jest pierwszą literą alfabetu.



- 2 Oblicz pole wielokąta o podanych wierzchołkach.

- | | | | |
|---------------|-----------|-----------|------------|
| a) $(5, -2)$ | $(6, -2)$ | $(6, 2)$ | $(5, -1)$ |
| b) $(0, 1)$ | $(-1, 2)$ | $(-2, 1)$ | $(-1, 0)$ |
| c) $(1, 0)$ | $(2, 0)$ | $(3, -2)$ | |
| d) $(-1, -2)$ | $(1, -2)$ | $(0, -1)$ | $(-2, -1)$ |

- 3 Podaj współrzędne trzech dowolnych punktów mających współrzędne całkowite, różnych od punktów $A = (0, 3)$ oraz $B = (1, 4)$ i leżących na prostej AB .

- 4 Zapisz twierdzenie w formie zdania warunkowego *Jeżeli..., to...* oraz wskaż założenie i tezę.

- W trójkątach przystających boki są równej długości.
- Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta jest równa 360° .
- Gdy zwiększymy jeden czynnik dwa razy, iloczyn zwiększy się dwa razy.

- 5 Udowodnij twierdzenie: *Jeżeli wielokąt jest czworokątem, to suma miar jego kątów wewnętrznych wynosi 360° .*

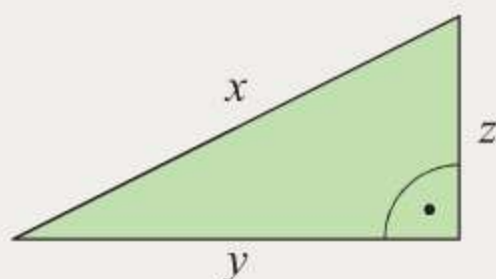
- 6 Uzasadnij, dlaczego podana hipoteza nie jest twierdzeniem matematycznym.

- Jeżeli dwa równoległoboki mają równe pola, to są przystające.
- Jeżeli liczba przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3, to jest liczbą pierwszą.
- Jeżeli iloczyn liczb jest liczbą dodatnią, to jego czynniki też są liczbami dodatnimi.

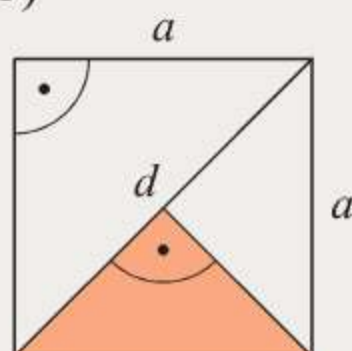


- 7 Zapisz symbolicznie tezę twierdzenia Pitagorasa dla zaznaczonego trójkąta.

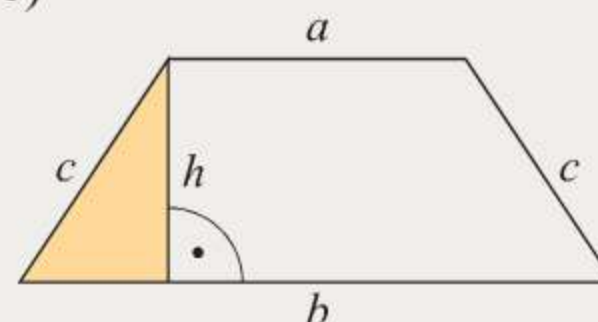
a)



b)

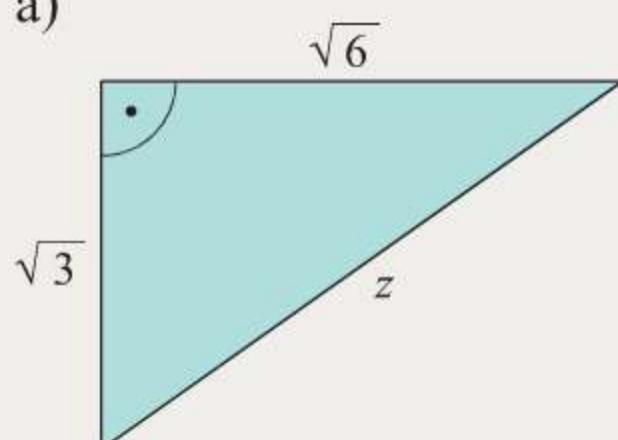


c)

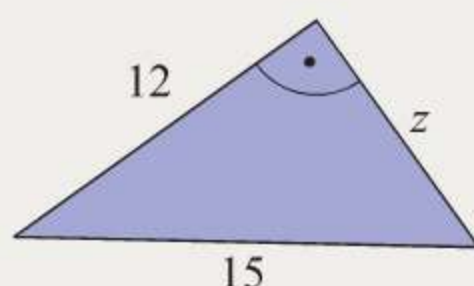


- 8 Oblicz długość boku z .

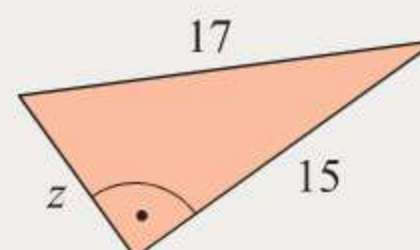
a)



b)

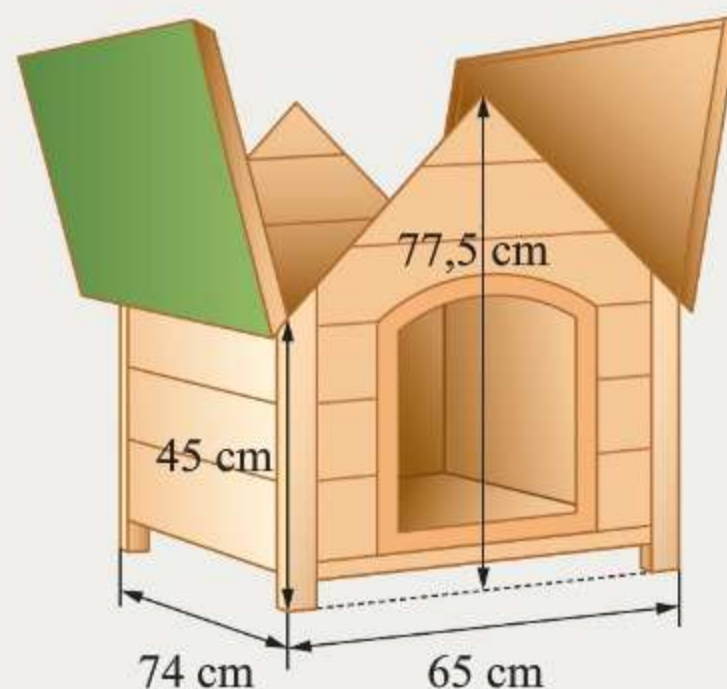


c)



- 9 Oblicz długość boku kwadratu, którego przekątna jest równa $\sqrt{512}$ cm.
- 10 Oblicz pole trójkąta równobocznego, którego bok ma 4 cm długości.
- 11 Wykaż, że obwód trójkąta równoramiennego, którego ramię ma 15 cm długości, a wysokość stanowi $\frac{2}{3}$ długości podstawy, jest równy 48 cm.
- 12 W trapezie prostokątnym $ABCD$ poprowadzono wysokość z wierzchołka kąta rozwartego C . Podzieliła ona podstawę AB trapezu na odcinki o długościach $|AE| = 20$ cm i $|EB| = 8$ cm. Dłuższe ramię trapezu jest o 11 cm krótsze od dłuższej podstawy. Oblicz obwód i pole trapezu.
- 13 Dane są punkty $A = (-3, 3)$, $B = (2, -3)$, $C = (2, 3)$. Wykonaj rysunek trójkąta ABC w układzie współrzędnych i odczytaj długości przyprostokątnych. Oblicz:
- długość przeciwprostokątnej,
 - obwód trójkąta,
 - pole trójkąta.
- 14 Spośród podanych liczb wybierz trzy, które są długościami boków trójkąta prostokątnego.
- 10, 13, 6, 21, 5, 18, 12
 - $\sqrt{12}$, $\sqrt{5}$, 3, 4, $\sqrt{20}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{15}$

- 15** Dwuspadowy dach budy dla psa tworzący kąt prosty ma być oklejony zieloną wykładziną mrozoodporną, którą sprzedaje się w rolkach. Jedna rolka to 1 m^2 wykładziny. Czy jedna rolka wystarczy na pokrycie dachu budy przedstawionej na rysunku? Ile wykładziny zostanie lub ile zabraknie? Odpowiedzi uzasadnij.



- 16** Żagiel jachtu jest trójkątem prostokątnym. Jego powierzchnia wynosi 6 m^2 i jest rozpostarta na maszcie o wysokości 6 m. Brzeg żagla, tzw. lik, został wzmocniony specjalną linką. Ile metrów linki trzeba kupić na lik tego żagla? Podaj wynik przybliżony z dokładnością do 1 m. Oznaczenia na rysunku: I – lik dolny, II – lik przedni, III – lik wolny.



- 17** Schody przed blokiem mają 8 stopni po 15 cm wysokości i 26 cm głębokości każdy. Na tych schodach zbudowano podjazd dla wózków. Jaką długość ma ten podjazd? Wynik zaokrąglaj do 0,1 m. Odpowiedź uzasadnij.

- 18** Dane są odcinki o długościach $\sqrt{12}$, $\sqrt{32}$. Jaką długość musi mieć trzeci odcinek, aby z tych trzech odcinków można było zbudować trójkąt prostokątny? Odpowiedź uzasadnij. Ile rozwiązań ma to zadanie?

- 19** W trapezie równoramiennym przekątne są prostopadłe i dzielą się w stosunku 2 : 4. Wysokość trapezu jest równa 30 cm. Oblicz obwód tego trapezu.
Wskazówka: Przekątne wyznaczają w trapezie cztery trójkąty prostokątne, z których dwa są równoramienne.

- 20** Witrażowe okno jest wykonane m.in. z elementu w kształcie rombu składającego się z czterech przystających rombów, tak jak na rysunku. Kąt ostry każdego rombu ma 60° . Na wykonanie takiego elementu potrzeba 1,2 m taśmy ołowianej. Ile metrów kwadratowych szkła potrzeba na wykonanie 200 takich elementów? Wynik podaj z dokładnością do 1 m^2 .



Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

W zadaniach 1.–3. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

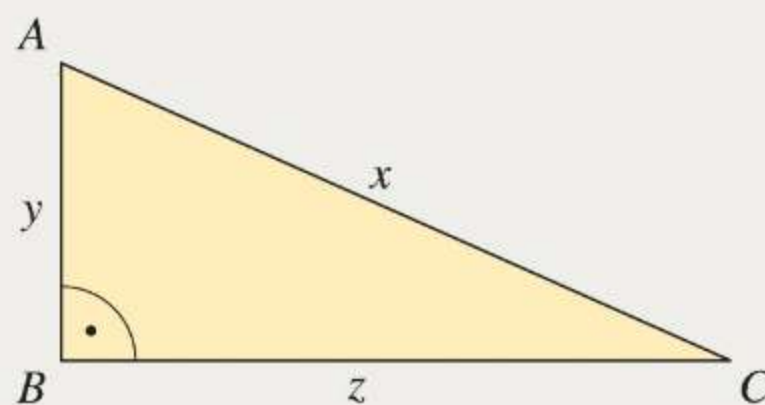
- 1 Przekątna kwadratu o boku 3 cm ma długość
A. $\sqrt{12}$ cm B. $\sqrt{2}$ cm C. $\sqrt{18}$ cm D. $\sqrt{24}$ cm
- 2 Odległość punktu $A = (15, -8)$ od początku układu współrzędnych jest równa
A. 17 B. 7 C. $\sqrt{23}$ D. 23
- 3 Pan Krzysztof chce poprowadzić przewód elektryczny od najbliższego słupa energetycznego, który stoi w odległości 24 m od jego domu i ma 14 m wysokości. Przewód ma być zamocowany do elewacji domu na wysokości 4 m. Długość tego przewodu musi wynosić
A. co najmniej 26 m. B. maksymalnie 25 m.
C. co najmniej 30 m. D. 19 m.

W zadaniach 4.–8. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 4 Które spośród następujących zdań jest twierdzeniem?
A. Trójkąt ostrokątny to taki, w którym wszystkie kąty są ostre.
B. Kwadratem nazywamy taki prostokąt, który ma wszystkie boki równe.
C. Liczby naturalne to 0, 1, 2, 3, ...
D. Jeżeli kąty α i β są kątami wierzchołkowymi, to ich miary są równe.

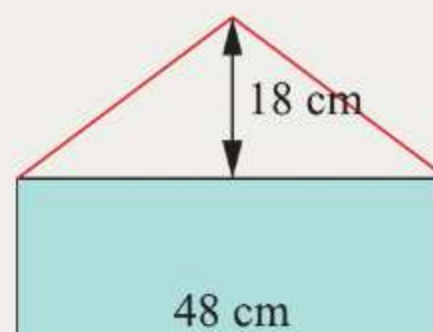
- 5 Który zapis dotyczący rysunku obok jest tezą twierdzenia Pitagorasa?

- A. $z^2 + x^2 = y^2$
B. $|AB|^2 + |AC|^2 = |CB|^2$
C. $y^2 + z^2 = x^2$
D. $y^2 + x^2 = z^2$



- 6 Obrazek powieszono na taśmie tak jak na rysunku. Jaką długość ma taśma?

- A. 30 cm B. 4 dm
C. 6 dm D. 45 cm



- 7 Grę w szachy rozpoczyna się od ustawienia bierek na szachownicy tak, jak przedstawiono to na rysunku poniżej. Jaka jest pozycja początkowa białego gońca?



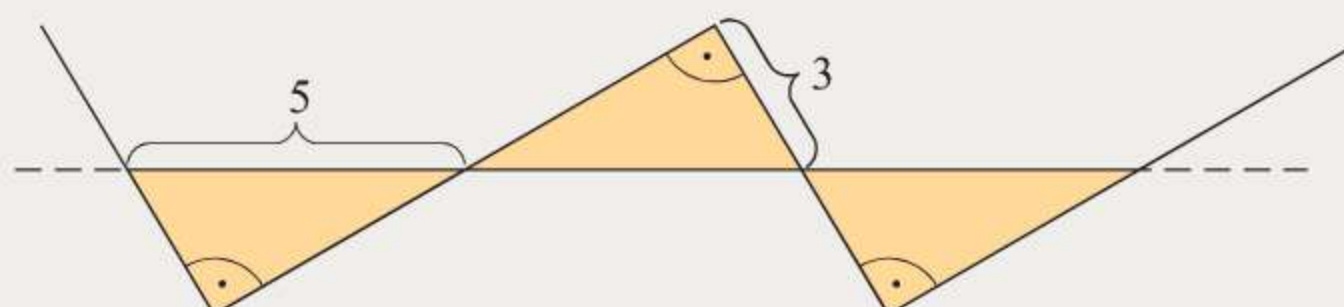
Bierka	Król	Hetman	Wieża	Goniec	Skoczek	Pionek
Liczba	1	1	2	2	2	8
Symbole	 	 	 	 	 	 

- A. Tylko (c, 1). B. (f, 1) i (f, 8). C. Tylko (c, 8). D. (f, 1) i (c, 1).

- 8 Na jaką wysokość będzie sięgać trzynastometrowa drabina, jeśli jej stopa musi być ustawiona w odległości 5 m od ściany?

- A. 12 m B. 11 m C. 10 m D. 9,5 m

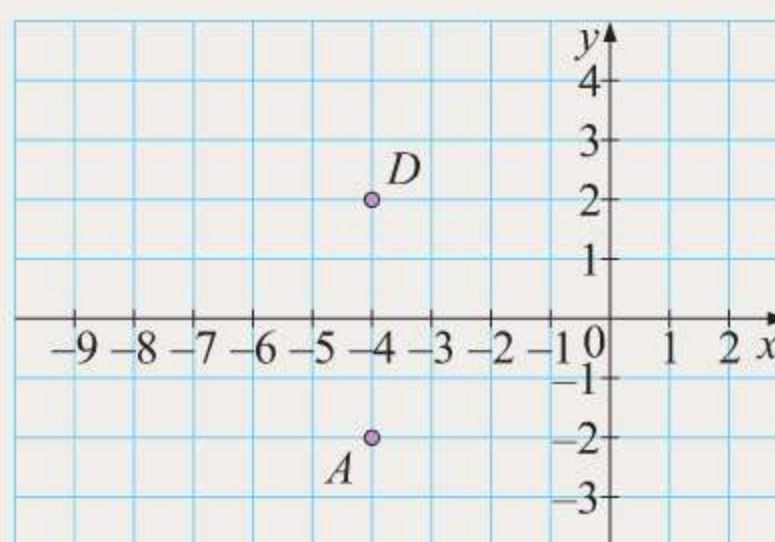
- 9 Trójkąty prostokątne przedstawione na rysunku są przystające.



Czy długość łamanej, której bokami są przyprostokątne trójkątów, jest równa 24? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	obwód jednego trójkąta jest równy $8 + \sqrt{34}$.
B.	Nie,		2.	długość trzeciego boku trójkąta jest równa 4.
			3.	długość tej łamanej jest równa $3 \cdot 5 + 3$.

- 10 Punkty A i D są wierzchołkami prostokąta ABCD, którego pole jest równe 20.





Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Współzrędnymi wierzchołków B i C tego prostokąta mogą być tylko $B = (1, -2)$, $C = (1, 2)$.	P	F
Długość przekątnej tego prostokąta wynosi $\sqrt{41}$.	P	F

- 11** Krótszy bok prostokąta ma 3 dm. Przekątna tego prostokąta tworzy z dłuższym bokiem kąt 30° . Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Obwód prostokąta z dokładnością do 1 dm wynosi A / B.

A. 16 dm B. 18 dm

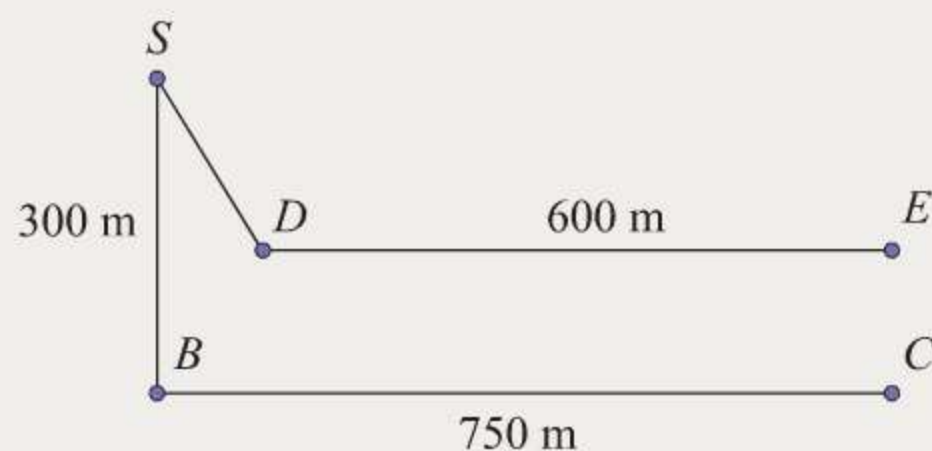
Pole prostokąta jest C / D niż 15 dm^2 .

C. większe D. mniejsze

- 12** Pole kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego wynosi 5 cm^2 , a pole kwadratu zbudowanego na jednej z przyprostokątnych tego trójkąta jest równe 4 cm^2 . Jaką długość ma druga przyprostokątna?

- 13** Kij o długości 2,5 m jest oparty o ścianę. Odległość drugiego końca od ściany wynosi 30 cm. Czy wysokość, do jakiej sięga ten kij, jest większa niż 2,45 m? Odpowiedź uzasadnij.

- 14** Odległość między domami Ewy (E) i Czarka (C) wynosi 100 m. Codziennie rano Ewa idąca do szkoły (S) wstępuje do dziadka (D), a Czarek – do babci (B). Skorzystaj z rysunku i podaj, które z nich w drodze do szkoły przebywa dłuższą trasę i o ile metrów.



Twierdzenie Pitagorasa

a parkowanie samochodu

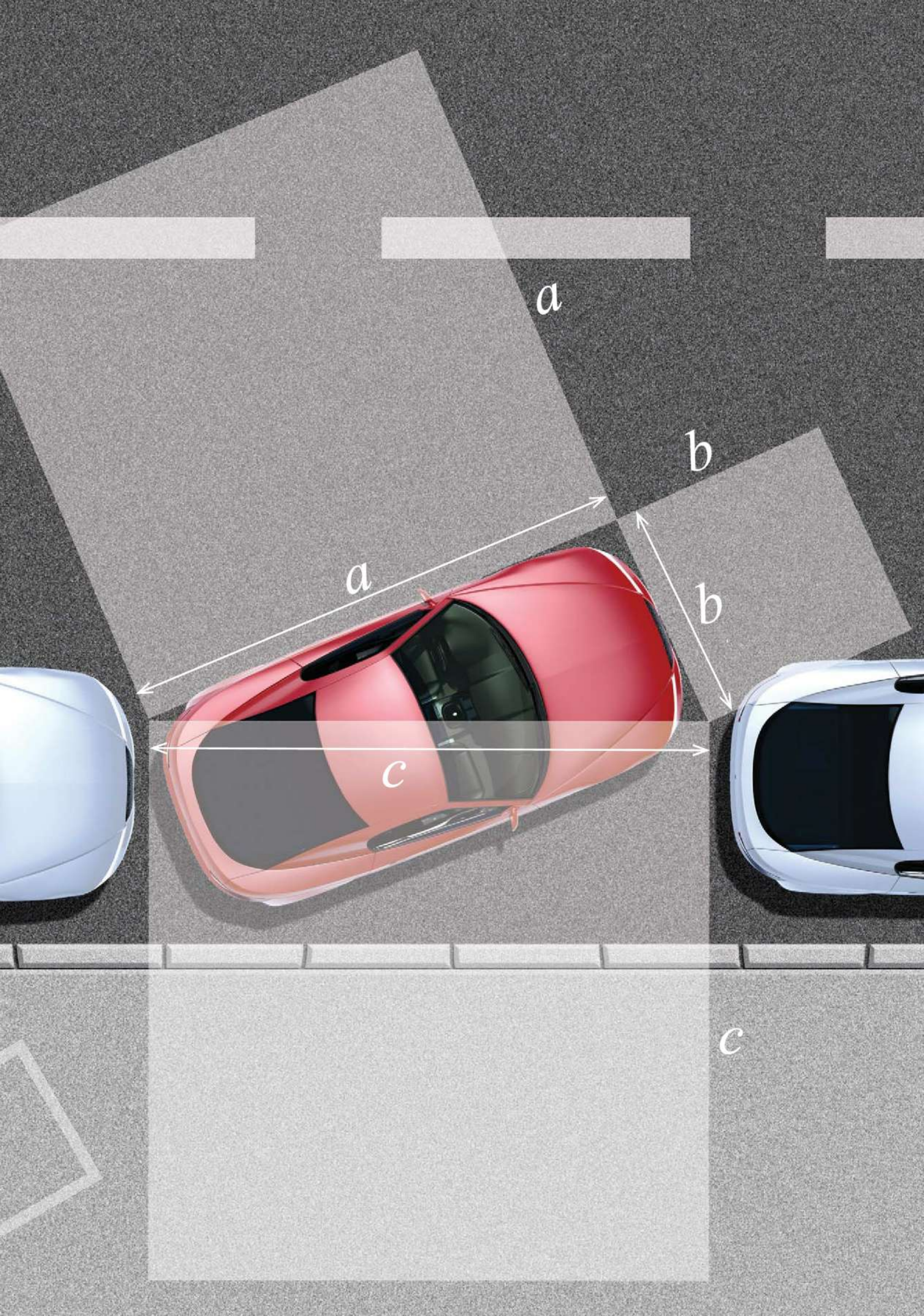
Z roku na rok na naszych drogach przybywa samochodów. Niestety nie oznacza to, że wraz ze wzrostem ich liczby przybywa również parkingów, na których można pozostawić auta. Często znalezienie miejsca parkingowego, zwłaszcza w centrum miasta, jest bardzo trudne. Parkingi planuje się tak, aby zmieścić na nich coraz większą liczbę pojazdów. Jak teoretycznie sprawdzić, czy nasz samochód można zaparkować równolegle między dwoma zaparkowanymi już pojazdami? **Okazuje się, że pomocne jest tutaj twierdzenie Pitagorasa.**



Z twierdzenia Pitagorasa:

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Wobec tego odległość między dwoma pojazdami, między którymi chcemy zaparkować nasz samochód, musi być większa od długości przekątnej samochodu.

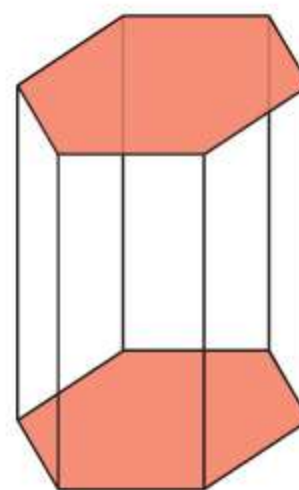
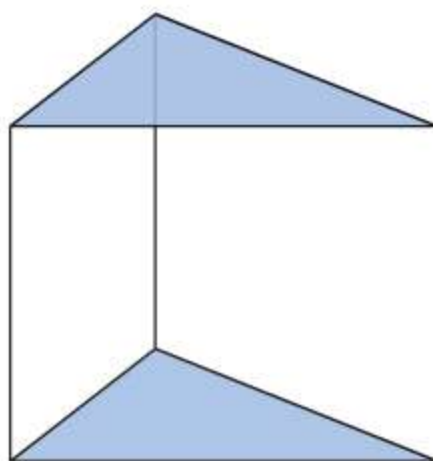
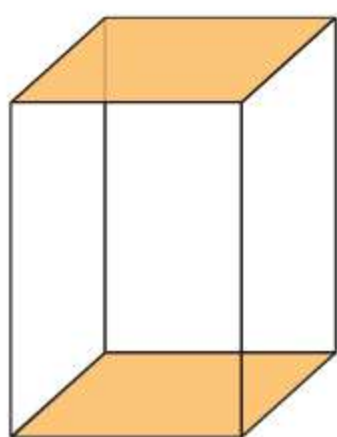


1. Graniastopy i ich rodzaje

Przypomnij sobie

- co to jest sześcián, prostopadłościan,
- jaka figura jest podstawą prostopadłościanu,
- ile krawędzi i ile wierzchołków ma prostopadłościan.

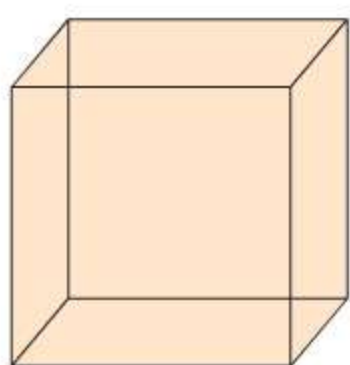
Graniastóp jest figurą przestrzenną należącą do wielościanów. Wśród graniastópów wyróżniamy graniastopy proste.



Podstawy graniastópa prostego są dowolnymi przystającymi wielokątami, leżącymi w płaszczyznach równoległych. Wszystkie krawędzie boczne są równej długości i równoległe oraz prostopadłe do podstaw – górnej i dolnej.



W graniastopie prostym wszystkie ściany boczne są prostokątami.



Graniastóp prosty, którego podstawą jest prostokąt, nazywamy prostopadłościanem. Wszystkie ściany prostopadłościanu są prostokątami.

Prostopadłościan, którego wszystkie krawędzie są równe, nazywamy sześciánem. Każda ściana sześcianu jest kwadratem.

- 1 Podaj przykłady przedmiotów o kształcie prostopadłościanu. Czy każdy sześcián jest prostopadłościanem? Czy każdy prostopadłościan jest sześciánem? Odpowiedzi uzasadnij.
- 2 Przerysuj tabelkę i ją uzupełnij.

Liczba	Wierzchołki	Krawędzie	Ściany
Graniastóp			
prostopadłościan			
sześcián			

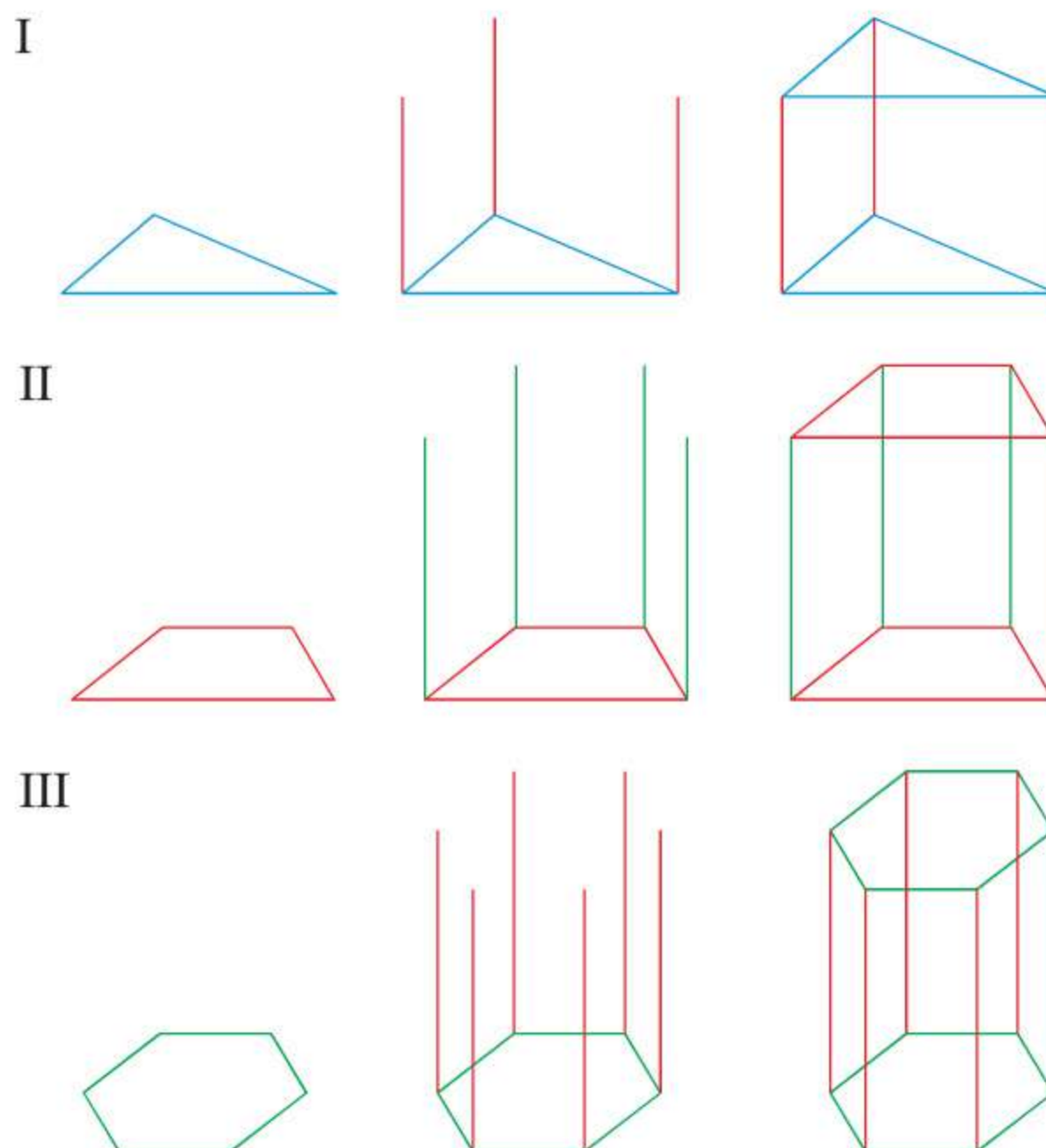


- 3** Przepisz zdanie i je uzupełnij.
W prostopadłościanie krawędzie równoległe są , ściany  są przystające, a ściany prostopadłe mają  krawędź.
- 4** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

W prostopadłościanie każde dwie przeciwległe ściany mogą być podstawami.	P	F
W sześcianie wszystkie krawędzie są równej długości.	P	F
W prostopadłościanie każde dwie krawędzie są do siebie prostopadłe.	P	F
Prostopadłościan ma osiem wierzchołków.	P	F

- 5** Czy z drutu o długości 4 m można wykonać model szkieletowy prostopadłościanu o wymiarach $2\text{ dm} \times 6\text{ dm} \times 3\text{ dm}$?
- 6** Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu o wymiarach $2a\text{ cm}$, $2b\text{ cm}$ oraz $(a + b)\text{ cm}$.

Poniżej przedstawiono sposób rysowania graniastopów prostych.



Graniastóp przyjmuje nazwę w zależności od wielokąta występującego w podstawie. Graniastóp narysowany:

- w punkcie I to graniastóp trójkątny,
- w punkcie II to graniastóp czworokątny,
- w punkcie III to graniastóp sześciokątny.

Graniastosłup prosty nazywamy **graniastosłupem prawidłowym**, jeśli w podstawie ma wielokąt foremny, czyli taki, którego wszystkie boki są tej samej długości, a kąty mają równe miary. Na przykład graniastosłup prawidłowy czworokątny ma w podstawie kwadrat.

- 7 Wskaż w swoim otoczeniu przedmioty mające kształt graniastosłupów, ale niebędące prostopadłościanami.

- 8 Przerysuj tabelę i ją uzupełnij.

Podstawa graniastosłupa	Nazwa graniastosłupa	Liczba ścian	Liczba krawędzi	Liczba wierzchołków
trójkąt		5	9	6
czworokąt				
				10
			18	
		11		

- 9 Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Jeśli wszystkie ściany graniastosłupa są A / B, to graniastosłup jest graniastosłupem prawidłowym.

A. kwadratami B. prostokątami

Jeśli graniastosłup prosty ma w podstawie kwadrat, to zawsze jest C / D.

C. sześcianiem D. graniastosłupem prawidłowym

- 10 Narysuj graniastosłup trójkątny, czworokątny, pięciokątny.

- 11 Jakim wielokątem jest podstawa graniastosłupa, który ma:

a) 16 wierzchołków, b) 36 krawędzi, c) 9 ścian?

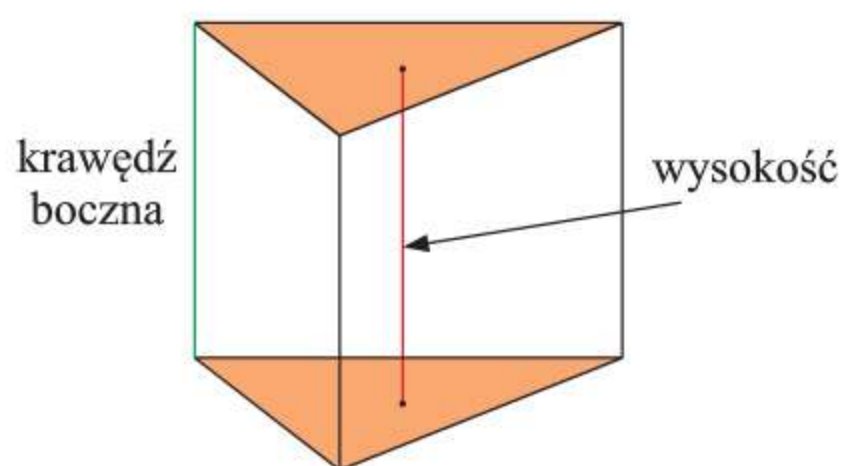
- 12 Czy to możliwe, żeby:

a) graniastosłup miał 117 wierzchołków,
b) dwie ściany prostopadłościanu były nieprzystającymi kwadratami?
Odpowiedź uzasadnij.

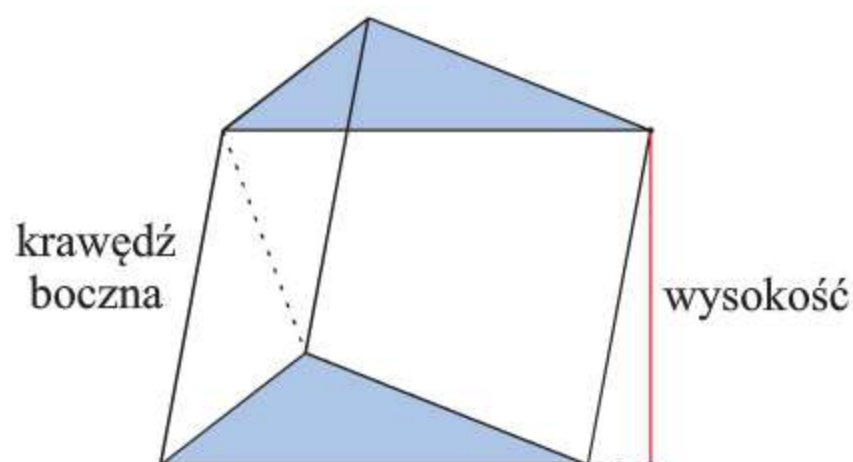
- 13 Rozstrzygnij, jaki to graniastosłup, jeśli ma:

a) dwa razy tyle ścian bocznych co podstaw,
b) o jedną więcej ścian bocznych niż podstaw,
c) dwa razy mniej ścian bocznych niż wierzchołków.

Wysokość graniastopy prostego to odcinek prostopadły do podstaw, którego końce leżą na tych podstawach, a jego długość jest równa długości krawędzi bocznej.



Istnieją również inne graniastopy, w których wysokości nie są równe długościom krawędzi bocznych. Takie graniastopy nazywamy graniastopami pochyłymi.



Ściany boczne graniastopy pochyłego są równoległobokami.



W Polsce znajdują się dwie krzywe wieże: w Ząbkowicach Śląskich i w Toruniu. Ich kształty są przykładami graniastopów pochyłych.



Toruń



Ząbkowice Śląskie

- 14** Czy z drutu o długości 1,14 m można wykonać model szkieletowy:
- graniastopy prostego trójkątnego o wysokości 3 dm i krawędziach podstawy 3 cm, 4 cm, 5 cm,
 - graniastopy prawidłowego sześciokątnego o wysokości 12 cm i krawędzi podstawy 7 cm?
- 15** Oblicz sumę długości krawędzi graniastopy prawidłowego trójkątnego o wysokości $10n$ cm i krawędzi podstawy pięć razy krótszej.
- 16** Podstawą graniastopy prostego jest pięciokąt foremny o boku długości $(x + 4)$ cm. Wysokość graniastopy jest równa $(x + 1)$ dm. Wyraż w centymetrach, za pomocą wyrażenia algebraicznego, sumę długości wszystkich krawędzi tej bryły.

- 17** Kasia zapakowała do pudełek prezenty gwiazdkowe dla rodziców. Pudełko z prezentem dla taty jest w kształcie sześcianu, a pudełko dla mamy jest w kształcie graniastopy prawidłowego czworokątnego. Kasia chce wiedzieć, ile co najmniej metrów wstążki musi kupić, aby zapakować te prezenty tak jak na rysunku.

Na kokardę potrzebuje 0,5 m wstążki. Krawędź pudełka sześciennego dla taty jest równa 1 dm. Pudełko dla mamy jest o 5 cm wyższe od pudełka dla taty, a krawędź jego podstawy ma 12 cm. Kasia uważa, że 3 m wstążki wystarczą. Wykaż, że ma rację.



Wyzwanie

Suma długości krawędzi bocznych graniastopy pochyłego sześciokątnego jest równa 36 cm. Czy wysokość takiego graniastopy może mieć:

- a) 5 cm, b) 6 cm, c) 7 cm?

Odpowiedź uzasadnij.

Sprawdź się!

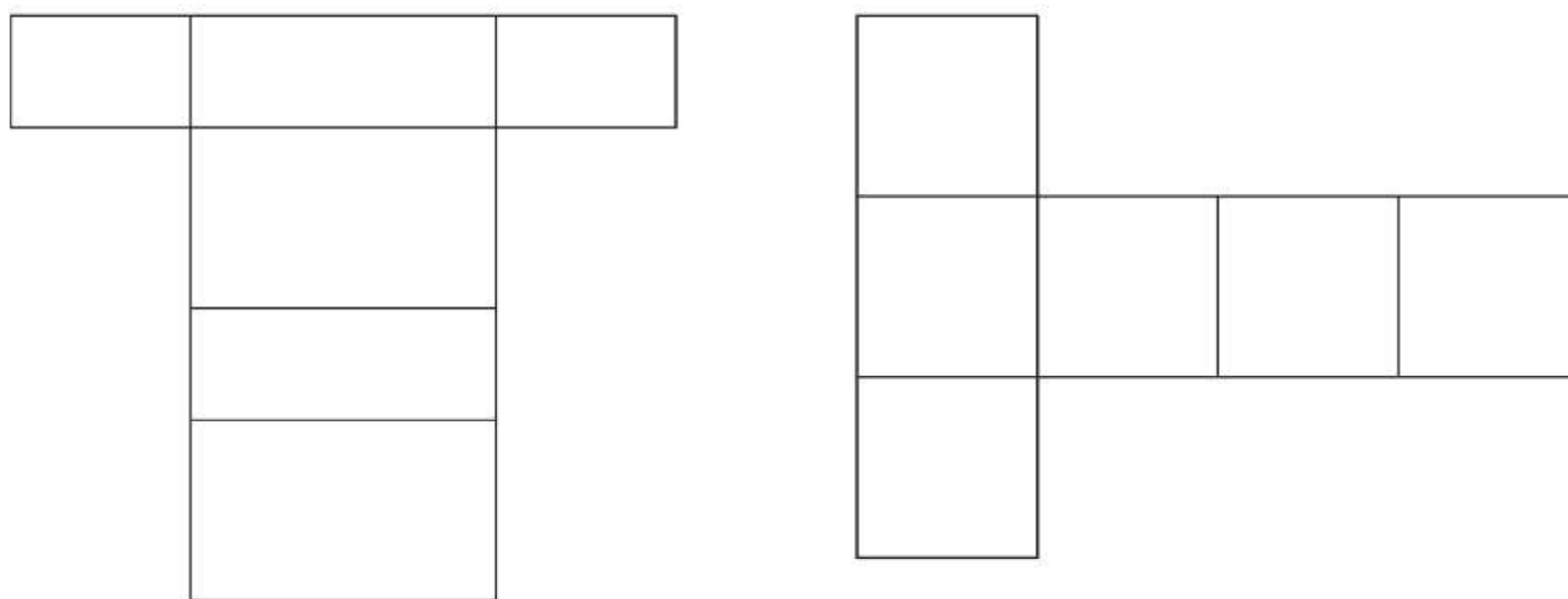
- 1** Czy z drutu o długości 4 m można wykonać model szkieletowy sześcianu o krawędzi 3 dm?
- 2** Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.
 Podstawą graniastopy może być **A / B**.
 A. tylko czworokąt B. dowolny wielokąt
 Graniastop prawidłowy trójkątny w podstawie ma **C / D**.
 C. trójkąt równoboczny D. trójkąt prostokątny
- 3** Ile ścian ma graniastop o 18 wierzchołkach?
- 4** Graniastop prosty o wysokości $12a$ cm ma w podstawie równoległobok o bokach $2a$ cm i $4b$ cm. Oblicz sumę długości krawędzi tego graniastopy.
- 5** Czy to możliwe, żeby:
 - a) graniastop miał 4 ściany,
 - b) dokładnie dwie ściany prostopadłościanu były kwadratami?
 Odpowiedź uzasadnij.

2. Pole powierzchni graniastostupa prostego

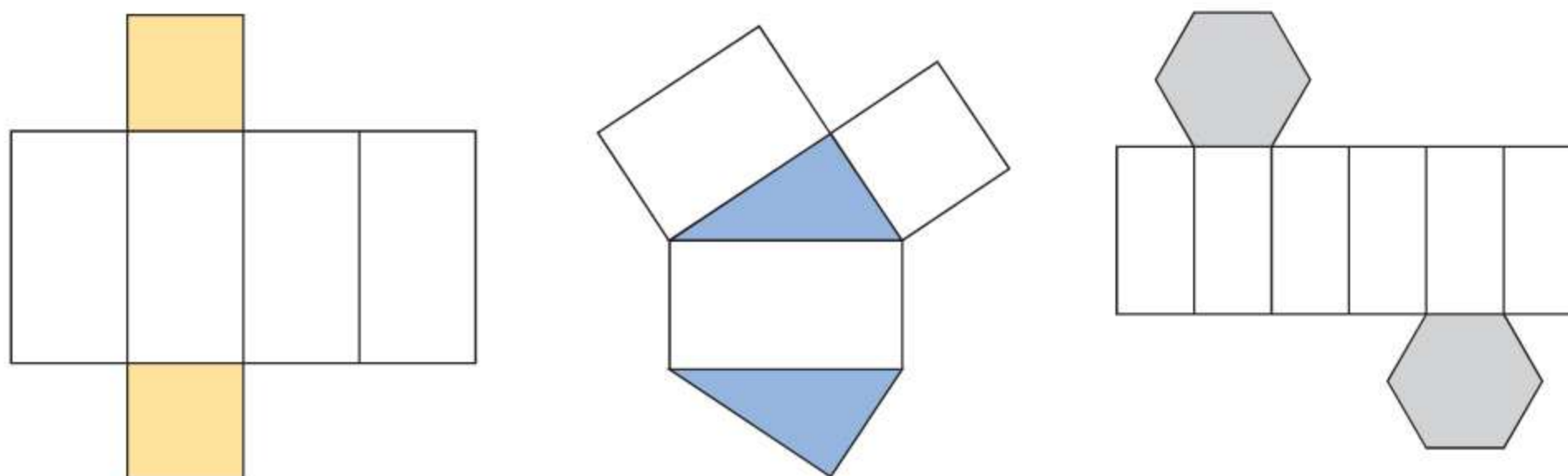
Przypomnij sobie

- jak obliczamy pola: kwadratu, prostokąta, trójkąta, równoległoboku, rombu, trapezu.

Model prostopadłościanu można rozciąć wzdłuż jego krawędzi tak, aby otrzymać figurę płaską składającą się z sześciu prostokątów. Tak otrzymaną figurę nazywamy **siatką prostopadłościanu**. Na rysunku są pokazane siatki prostopadłościanu i sześcianu.



Na rysunku poniżej przedstawiono siatki niektórych graniastostupów prostych.



Pole powierzchni całkowitej graniastostupa jest sumą pól wszystkich jego ścian.



Przykład 1.

Obliczmy pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu przedstawionego niżej.

W prostopadłościanie wszystkie ściany są prostokątami.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

P_p – pole podstawy

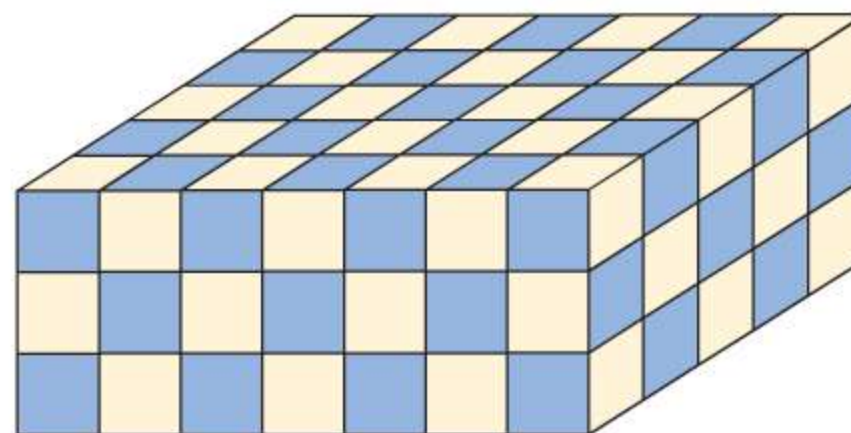
P_b – pole powierzchni bocznej

P_c – pole powierzchni całkowitej

$$P_p = 5 \cdot 7 = 35$$

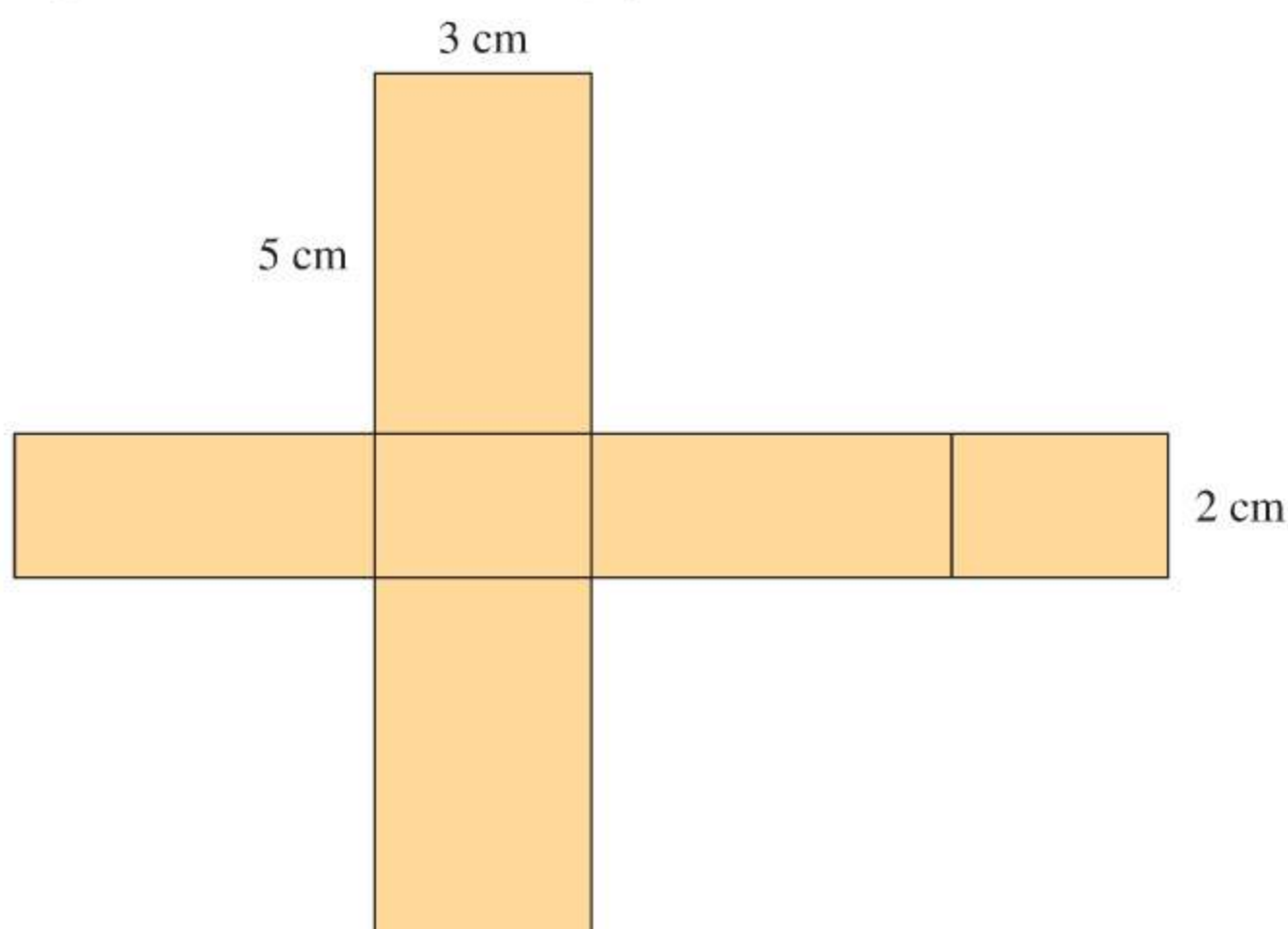
$$P_b = 2 \cdot 3 \cdot 7 + 2 \cdot 3 \cdot 5 = 42 + 30 = 72$$

$$P_c = 2 \cdot P_p + P_b = 70 + 72 = 142$$



ODPOWIEDŹ: Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu wynosi 142.

- 1 Narysuj siatkę i oblicz pole powierzchni całkowitej:
 - a) prostopadłościanu o wymiarach $1,5 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$,
 - b) sześcianu o krawędzi 2 cm .
- 2 Prostopadłościan ma wymiary podstawy $2,5 \text{ mm} \times 1,5 \text{ mm}$ oraz wysokość 4 mm . Oblicz jego pole powierzchni całkowitej. Wykonaj model tego prostopadłościanu w skali $30 : 1$.
- 3 Na rysunku przedstawiono siatkę bryły.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Rysunek przedstawia siatkę graniastopu prawidłowego czworokątnego.	P	F
Suma długości krawędzi bryły otrzymanej po złożeniu siatki wynosi 44 cm .	P	F
Pole powierzchni całkowitej graniastopu jest równe 62 cm^2 .	P	F



- 4 Z prostokątnej kartki o wymiarach 21 cm i 14 cm wycięto w każdym rogu kwadrat o boku 3 cm i sklejono pudełko (bez wieczka). Oblicz powierzchnię dna pudełka.



- 5 Pole powierzchni bocznej prostopadłościanu o podstawie kwadratu wynosi 448 cm^2 , a jego wysokość jest równa 28 cm. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Krawędź podstawy prostopadłościanu jest równa A / B.

A. 16 cm B. 4 cm

Pole podstawy prostopadłościanu jest C / D razy mniejsze od pola jego powierzchni całkowitej.

C. 30 D. 15

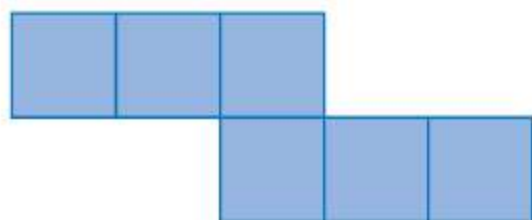
- 6 Oblicz długość krawędzi kostki sześciennej, której pole powierzchni jest równe polu powierzchni prostopadłościennego pudełka o wymiarach 1,5 cm, 3 cm, 5 cm.
- 7 Czy arkusz A2 kolorowego papieru o wymiarach $420 \text{ mm} \times 594 \text{ mm}$ wystarczy na oklejenie dziewięciu modeli sześcianów o krawędzi 4,5 cm?
- 8 Oblicz, ile co najmniej rolek tapety należy kupić do wytapetowania ścian pokoju, którego podłoga jest kwadratem o boku 4,2 m, a wysokość wynosi 2,6 m. W pokoju znajduje się okno o wymiarach $1,5 \text{ m} \times 1,6 \text{ m}$, drzwi balkonowe dwuskrzydłowe o wymiarach $2,2 \text{ m} \times 1,6 \text{ m}$ oraz drzwi o wymiarach $0,9 \text{ m} \times 2 \text{ m}$. Jedna rolka zawiera 11 m^2 tapety.

- 9 W kostce sześciennej na każdej ścianie jest jedno oczko lub są dwa oczka. Oczka są tak rozmieszczone, że w każdym położeniu kostki na dwóch spośród trzech mających wspólny wierzchołek ściankach znajdują się dwa oczka, a na trzeciej jedno oczko. Czy wiesz, po ile oczek jest na trzech niewidocznych ściankach kostki?

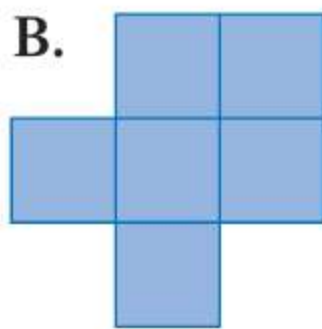


- 10** Która figura z przedstawionych na rysunku jest siatką sześcianu? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A.



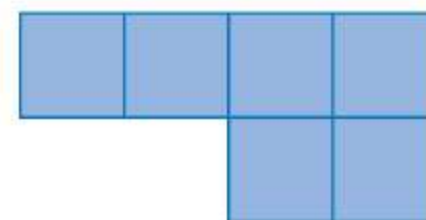
B.



C.

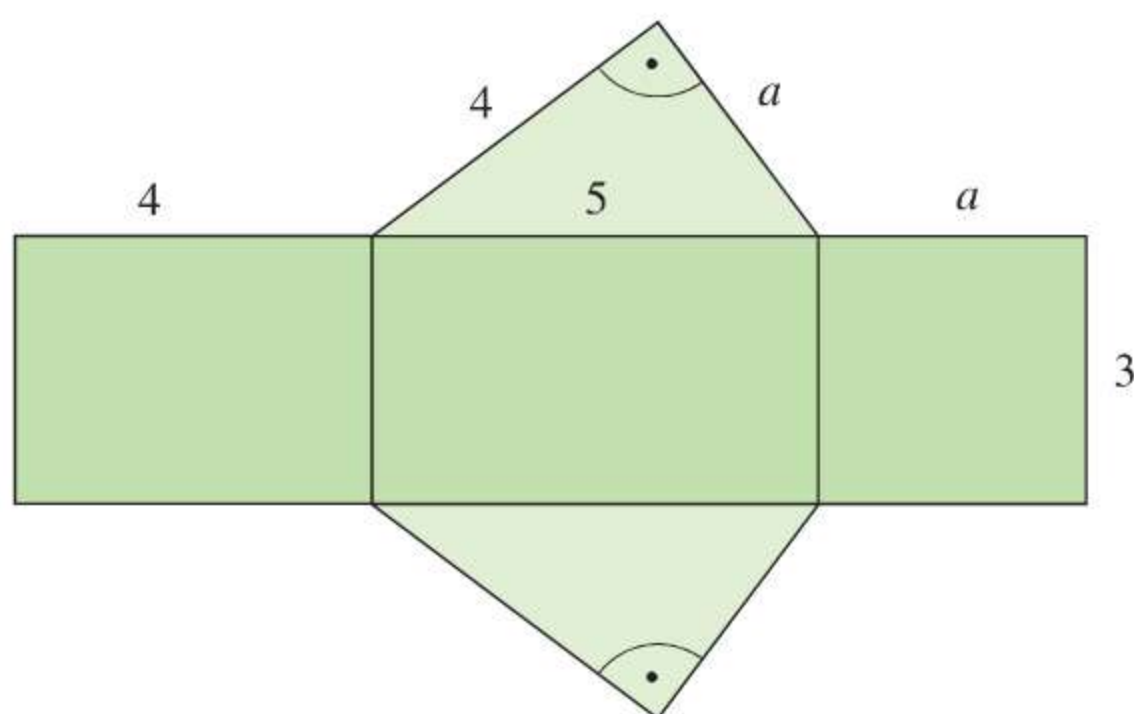


D.



Przykład 2.

Obliczmy pole powierzchni całkowitej graniastopy, którego siatkę przedstawiono poniżej.



Podstawą tego graniastopy jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnej 4 i przeciwprostokątnej 5, wysokość graniastopy wynosi 3.

Aby obliczyć pole podstawy, trzeba obliczyć długość drugiej przyprostokątnej trójkąta.

$$a^2 + 4^2 = 5^2$$

$$a^2 = 25 - 16$$

$$a^2 = 9$$

$$a = 3 \text{ [j]}$$

$$P_p = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ [j}^2\text{]}$$

$$P_b = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 12 + 15 + 9 = 36 \text{ [j}^2\text{]}$$

$$P_c = 2 \cdot P_p + P_b = 2 \cdot 6 + 36 = 12 + 36 = 48 \text{ [j}^2\text{]}$$

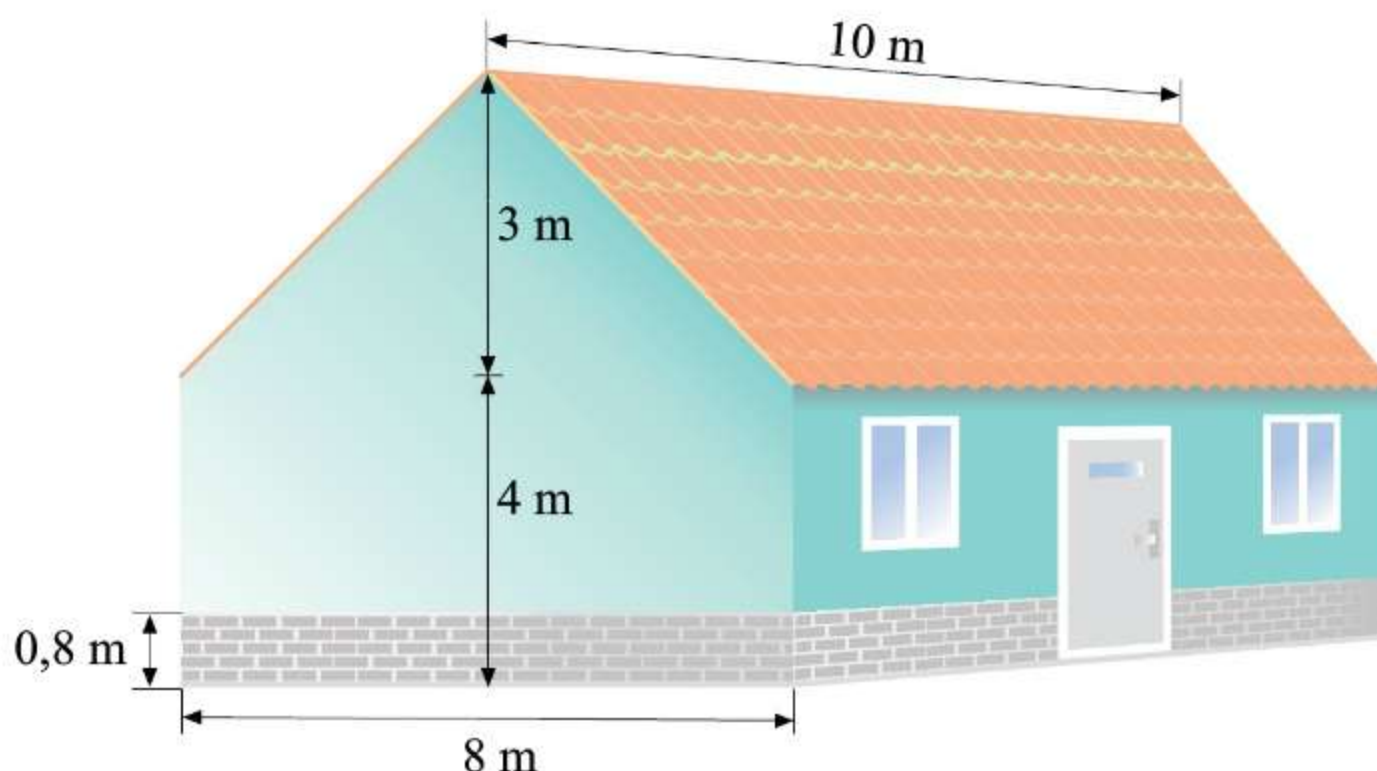
ODPOWIEDŹ: Pole powierzchni całkowitej tego graniastopy jest równe 48 j^2 .

- 11** Wykonaj model graniastopy prawidłowego czworokątnego, w którym krawędź podstawy ma 5 cm, a wysokość jest równa 9 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastopy.



- 12** Narysuj siatkę graniastopy prostego o podstawie rombu, w którym bok ma 1 cm, a kąt ostry miarę 60° , natomiast wysokość graniastopy wynosi 2 cm. Jakie pole powierzchni całkowitej będzie miał model tego graniastopy wykonany w skali 3 : 1? Wynik zaokrąglij do 1 cm^2 .

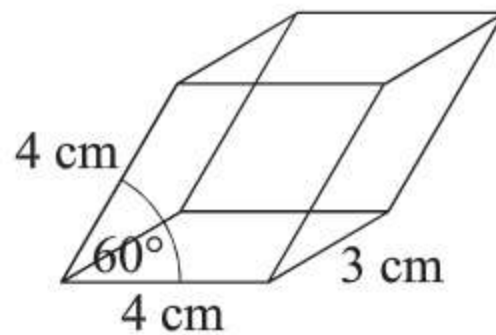
-  **13** Narysuj siatkę graniastopu prostego o podstawie trapezu równoramiennego, w którym dłuższa podstawa ma długość 6 cm, a ramiona tworzą z nią kąt o mierze 45° . Wysokość trapezu jest równa 2 cm, a wysokość graniastopu ma 6 cm. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastopu w zaokrągleniu do 1 cm^2 .
- 14** Suma długości krawędzi graniastopu prawidłowego czworokątnego jest równa 96 cm. Krawędź podstawy jest o 50% krótsza od jego wysokości. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastopu.
- 15** Wojtek zużył 1248 cm^2 kartonu na wykonanie modelu graniastopu prawidłowego czworokątnego (pominął zapas na zakładki do sklejenia). Krawędź podstawy ma 12 cm. Ile centymetrów ma wysokość tego graniastopu?
-  **16** Ściany zewnętrzne budynku przedstawionego na rysunku wyłożono płytkami klinkierowymi do wysokości 0,8 m. Dach pokryto dachówką. Oblicz, ile co najmniej metrów kwadratowych płytek klinkierowych należało zakupić na wyłożenie ścian, jeśli wiesz, że drzwi wejściowe do domu są szerokości 1 m. Ile metrów kwadratowych dachówki trzeba było kupić na pokrycie dachu?



- 17** Graniastop prosty ma w podstawie równoległobok, którego krótszy bok jest równy 8 cm. Przekątna ściany bocznej zawierającej krótszą krawędź podstawy ma długość 17 cm. Drugi bok równoległoboku jest od tej przekątnej dwa razy dłuższy. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastopu.
-  **18** Ściana boczna graniastopu prawidłowego trójkątnego jest prostokątem, którego bok jest równy 6 cm, a przekątna ma długość 1 dm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastopu w zaokrągleniu do 1 cm^2 . Ile rozwiązań ma to zadanie?

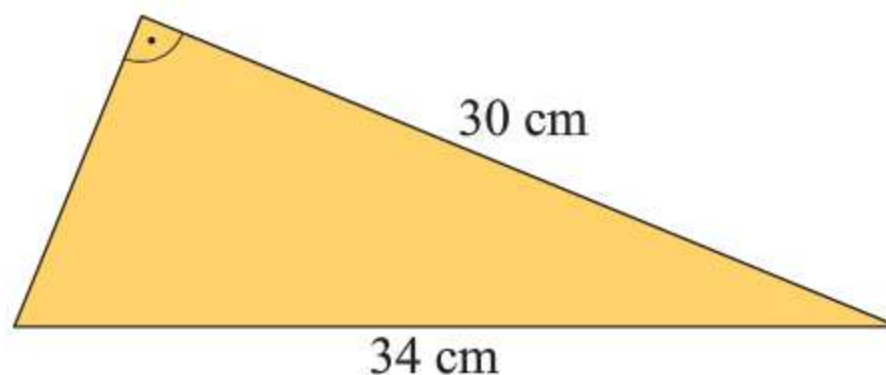
Wyzwanie

Na rysunku przedstawiono graniastosłup pochyły. Jego podstawą jest prostokąt o wymiarach $4\text{ cm} \times 3\text{ cm}$. Narysuj siatkę tego graniastosłupa.



Sprawdź się!

- 1 Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu, którego wymiary wynoszą $3\text{ cm} \times 4\text{ cm} \times 1\text{ dm}$, jest równe
A. 12 cm^2 B. 164 cm^2 C. 38 cm^2 D. 120 cm^2
- 2 Narysuj siatkę graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego wszystkie krawędzie są równe $2,5\text{ cm}$.
- 3 Oblicz pole powierzchni kostki sześciennej, w której przekątna ściany jest równa $\sqrt{50}\text{ cm}$.
- 4 Oblicz pole powierzchni bocznej graniastosłupa prawidłowego ośmiokątnego, którego krawędź boczna jest o 18% dłuższa od krawędzi podstawy równej 5 cm .
- 5 Ile decymetrów kwadratowych wynosi pole powierzchni bocznej graniastosłupa trójkątnego, którego podstawę przedstawiono na rysunku, a wysokość jest równa 2 dm ?



3. Objętość bryły, jednostki objętości

Na rysunku przedstawiono bryły ułożone z kostek, pudełek od zapalek i klocków.



Objętość bryły ułożonej z kostek jest równa sumie objętości 64 kostek, bryły ułożonej z pudełek od zapalek – sumie objętości 6 pudełek, a bryły ułożonej z klocków – sumie objętości 15 klocków.

Do wyznaczenia objętości tych brył używaliśmy nietypowych jednostek: kostka, pudełko od zapalek, klocek. Z użyciem tych jednostek łatwo można było podać objętość każdej bryły. Jak jednak moglibyśmy porównać te objętości? Konieczne jest użycie wspólnej jednostki.

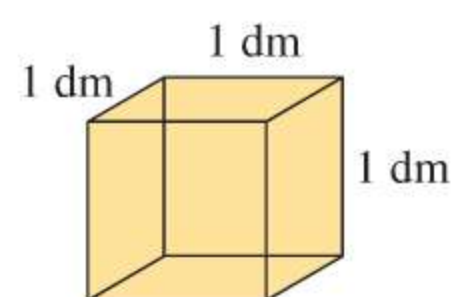
Powszechnie używa się następujących jednostek objętości:
sześcian o krawędzi 1 mm – to milimetr sześcienny [mm^3],
sześcian o krawędzi 1 cm – to centymetr sześcienny [cm^3],
sześcian o krawędzi 1 dm – to decymetr sześcienny [dm^3],
sześcian o krawędzi 1 m – to metr sześcienny [m^3],
sześcian o krawędzi 1 km – to kilometr sześcienny [km^3].

W życiu codziennym objętość nazywamy pojemnością i w związku z tym jednostkami objętości są również:

litr 1 l = 1 dm^3 ,
hektolitr 1 hl = 100 l,
mililitr 1 ml = 0,001 l.



=



$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ l}$$

$$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ mm}^3$$

Przykład 1.

Przedstawmy podane objętości w decymetrach sześciennych.

a) $4,2 \text{ m}^3$

b) 120 cm^3

a) $1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$

b) $1 \text{ cm} = 0,1 \text{ dm}$

$1 \text{ m}^2 = 10^2 \text{ dm}^2 = 100 \text{ dm}^2$

$1 \text{ cm}^2 = 0,1^2 \text{ dm}^2 = 0,01 \text{ dm}^2$

$1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ dm}^3$

$1 \text{ cm}^3 = 0,1^3 \text{ dm}^3 = 0,001 \text{ dm}^3$

$4,2 \text{ m}^3 = 4,2 \cdot 1000 \text{ dm}^3 = 4200 \text{ dm}^3$

$120 \text{ cm}^3 = 120 \cdot 0,001 \text{ dm}^3 = 0,12 \text{ dm}^3$

1 Oblicz, ile to centymetrów sześciennych.

a) 1 m^3

b) $3,2 \text{ dm}^3$

c) 1200 mm^3

d) $0,025 \text{ dm}^3$

2 Oblicz, ile to metrów sześciennych.

a) $382\,000\,000 \text{ mm}^3$

b) 5324 cm^3

c) $25\,000 \text{ dm}^3$

d) $0,000008 \text{ km}^3$

3 Oblicz, ile to litrów.

a) 4530 cm^3

b) 15 dm^3

c) 500 ml

d) $\frac{3}{8} \text{ hl}$

4 Kwaterka to nieużywana dziś jednostka objętości, równa jednej czwartej litra. Ile centymetrów sześciennych zawierają trzy kwaterki?

5 Rozlano 1,2 hektolitra syropu do butelek, z których każda ma pojemność 300 cm^3 . Do ilu butelek rozlano syrop? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. Do 40.

B. Do 4000.

C. Do 4.

D. Do 400.

6 Tubka pasty do zębów ma pojemność 75 ml. Ile tubek można napełnić 3 litrami pasty do zębów?



7 Porównaj wielkości.

a) 243 mm^3 i $0,243 \text{ cm}^3$

b) 15 dm^3 i 1500 cm^3

c) $6\frac{1}{2} \text{ l}$ i 65 dm^3

d) $0,08 \text{ dm}^3$ i $80\,000 \text{ mm}^3$

e) 358 ml i $148,5 \text{ cm}^3$

f) 12 m^3 i 1300 l

8 Do trzech naczyń A, B, C wiano wodę. W naczyniu A znajduje się 550 ml wody, w naczyniu B – $0,68 \text{ dm}^3$, a w naczyniu C – 420 cm^3 . Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Najwięcej wody jest w naczyniu A.	P	F
W naczyniu A jest o 0,013 litra wody więcej niż w naczyniu C.	P	F
W naczyniu A jest dwa razy mniej wody niż w naczyniach B i C razem.	P	F

- 9 Trzech sąsiadów kupiło 24 litry farby emulsyjnej w jednym pojemniku. Jak rozdzielić po równo pomiędzy nich tę farbę, jeżeli do dyspozycji są tylko trzy pojemniki: 5-litrowy, 11-litrowy i 13-litrowy?



Wyzwanie

Z białych sześciennych klocków o krawędzi 1 cm zbudowano sześcian o krawędzi 1 dm. Pomalowano całą powierzchnię dużego sześcianu na czerwono. Ile klocków ma 1 ściankę czerwoną, 2 ścianki czerwone, 3 ścianki czerwone? Ile klocków pozostało niepomalowanych? Odpowiedź uzasadnij.

Sprawdź się!

- Oblicz, ile to decymetrów sześciennych.
a) 1500 cm^3 b) $0,3 \text{ m}^3$
- Oblicz, ile to mililitrów.
a) $1\frac{1}{4}$ litra b) 0,2 hektolitra
- Jaką masę ma 1 dm^3 powietrza, jeżeli jeden metr sześcienny powietrza ma masę 1,24 kg?
- Porównaj wielkości.
a) 1285 ml i 1,3 l b) $\frac{3}{4} \text{ m}^3$ i 75 dm^3
- W zakładzie spożywczym wyprodukowano 160 litrów octu winnego. Czy można nim napełnić 350 butelek o pojemności 250 ml oraz 140 butelek o pojemności 500 ml? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	zabraknie 5 butelek o pojemności 500 ml.
			2.	zabraknie octu do napełnienia 10 butelek o pojemności 250 ml.
B.	Nie,		3.	łączna pojemność butelek wynosi 160 litrów.

4. Objętość graniastopy prostego

Przykład 1.

Obliczmy objętość graniastopy prostego przedstawionego na rysunku.

Graniastop składa się z 4 warstw. Każda z nich składa się z 3 sześciątów o krawędzi długości 1 cm. Objętość warstwy jest równa $3 \cdot 1 \text{ cm}^3 = 3 \text{ cm}^3$.

Objętość graniastopy V jest równa $4 \cdot 3 \text{ cm}^3 = 12 \text{ cm}^3$.

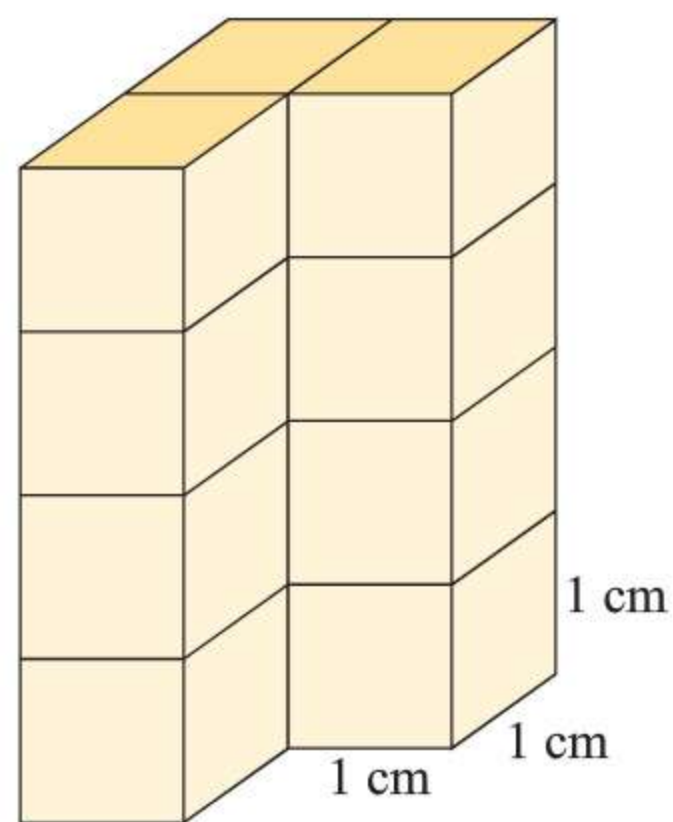
Możemy też obliczyć to inaczej.

Podstawę graniastopy tworzą 3 kwadraty o bokach równych 1 cm.

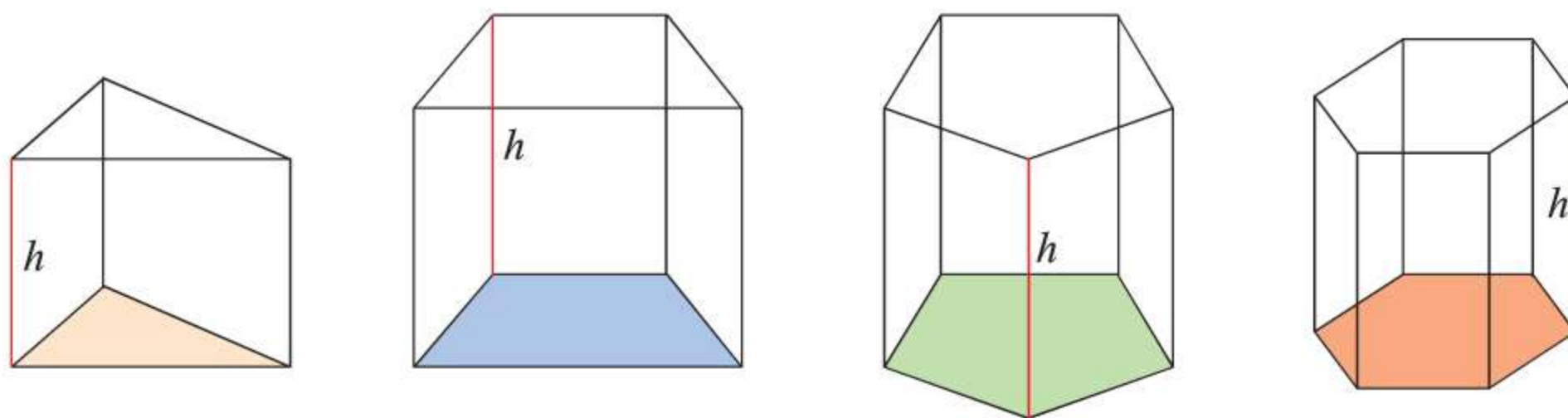
3 cm^2 to pole podstawy graniastopy, 4 cm to wysokość graniastopy wyznaczona przez cztery warstwy sześciątów.

Wobec tego $V = 3 \cdot 4 = 12 [\text{cm}^3]$.

ODPOWIEDŹ: Objętość graniastopy wynosi 12 cm^3 .

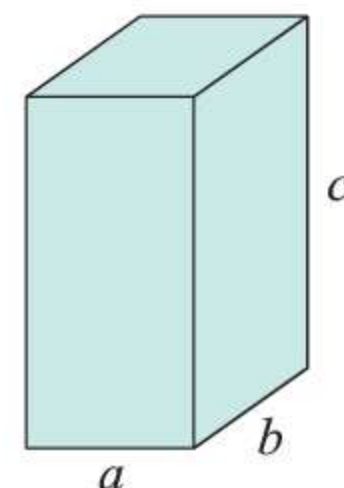


Objętość V graniastopy jest równa iloczynowi pola podstawy i wysokości tego graniastopy: $V = P_p \cdot h$.



Prostopadłościan o wymiarach a , b , c jest graniastopem, którego pole podstawy P_p wynosi $a \cdot b$, a wysokość $h = c$.

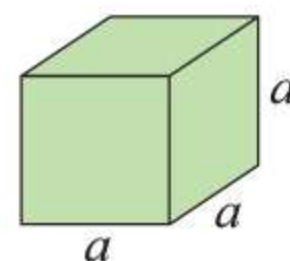
Wobec tego objętość V prostopadłościanu jest iloczynem długości krawędzi podstawy oraz wysokości prostopadłościanu: $V = a \cdot b \cdot c$.



Sześcian o krawędzi a to graniastosłup, którego pole podstawy $P_p = a \cdot a$, natomiast wysokość $h = a$.

Wobec tego objętość sześcianu jest równa trzeciej potęgze długości jego krawędzi:

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3.$$



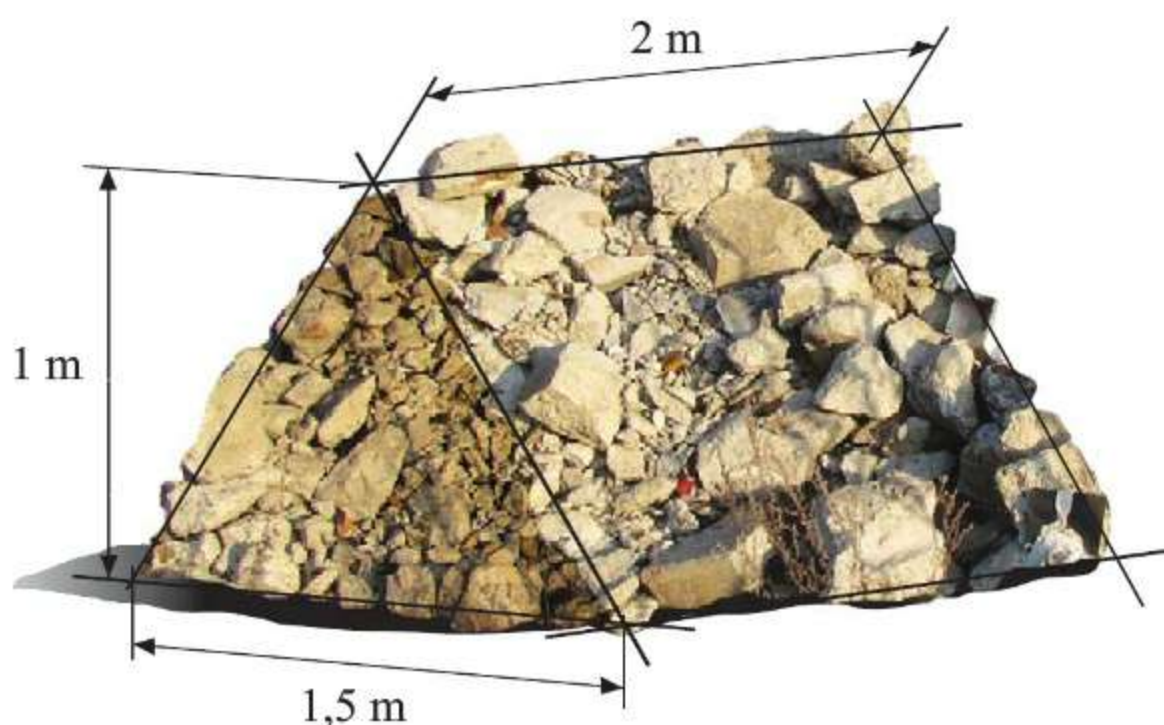
- 1 Oblicz objętość prostopadłościanu o podanych wymiarach.
a) 6 cm, 4 cm, 12 cm b) $3\frac{1}{2}$ dm, $6\frac{2}{3}$ dm, 10,5 dm
- 2 Suma długości wszystkich krawędzi sześcianu jest równa 48 m. Oblicz objętość tego sześcianu.
- 3 Ile sześcianów o krawędzi 5 cm zmieści się w sześcianie o objętości 1 m^3 ?
- 4 Objętość prostopadłościanu jest równa 1989 dm^3 . Długość podstawy jest równa 13 dm, a jej szerokość 9 dm. Oblicz wysokość tego prostopadłościanu.
- 5 Deska sosnowa ma 1,5 m długości, 20 cm szerokości i 4 cm grubości. Ile kilogramów waży deska, jeżeli 1 dm^3 drewna sosnowego waży 0,8 kg?
- 6 Na wykonanie altany według projektu potrzeba $4,17 \text{ m}^3$ desek o wymiarach $10 \text{ cm} \times 30 \text{ mm} \times 2 \text{ m}$. Czy 700 takich desek wystarczy, aby ją zbudować? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.



A.	Tak,	ponieważ	1.	do wykonania altany wystarczy 695 desek.
B.	Nie,		2.	do wykonania altany potrzeba dokładnie 700 desek.
			3.	do wykonania altany potrzeba więcej niż 700 desek.

- 7 Metalowe pudełko ma kształt prostopadłościanu o podstawie $4 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$ i wysokości 13 cm. Jeżeli wysokość pudełka zwiększymy o 3 cm, o ile mililitrów wzrośnie jego pojemność?
- 8 Dwustugramowe czekolady pakowane są w pudełka w kształcie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o przekątnej podstawy $\sqrt{392} \text{ cm}$. Oblicz wysokość pudełka, jeżeli jego objętość jest równa 882 cm^3 .
- 9 Objętość graniastosłupa prostego o podstawie trójkąta prostokątnego jest równa 200. Oblicz wysokość graniastosłupa, jeżeli prostopadłe krawędzie podstawy mają długości 4 i 10.
- 10 Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, jeśli krawędź podstawy ma 5 cm, a pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe 276 cm^2 .

- 11** Na placu budowy jest 25 pryzm gruzu. Pryzmy te mają kształt graniastopów o wymiarach podanych na rysunku. Ile kursów musi wykonać samochód ciężarowy, aby przewieźć gruz, jeżeli jednorazowo zabiera 6 m^3 ?



Wyzwanie

Jacek z Tomkiem układali piramidki z klocków według pewnej reguły przedstawionej na rysunku. Ile klocków będą potrzebowali na wykonanie siódmej piramidki? Jaka będzie jej objętość, jeżeli klocek ma wymiary $2 \text{ cm} \times 4,5 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$?

I



II



III



IV



Sprawdź się!

- Oblicz objętość sześcianu o krawędzi 50 cm . Wynik podaj w dm^3 .
- Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Objętość prostopadłościanu o wymiarach $2 \text{ dm} \times 30 \text{ cm} \times 50 \text{ mm}$ wynosi
A. $30\,000 \text{ cm}^3$ B. 300 cm^3 C. 30 dm^3 D. $0,003 \text{ m}^3$
- Oblicz objętość sześcianu, którego pole powierzchni jest równe 150 cm^2 .
- Jaką wysokość ma naczynie w kształcie graniastopu o pojemności 120 l , jeżeli jego podstawą jest romb o przekątnych $0,4 \text{ m}$ i 6 dm ?
- Graniastop prosty ma w podstawie trójkąt prostokątny równoramienny, a jego wysokość jest trzy razy większa od przyprostokątnej podstawy. Ile razy wzrośnie objętość graniastopu, jeśli wszystkie jego wymiary zwiększymy dwukrotnie? Odpowiedź uzasadnij.



Zadania utrwalające

- 1 Sporządź w skali 1 : 2 siatkę prostopadłościanu o wymiarach 0,6 dm, 40 mm, 10 cm.
- 2 Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu o objętości 125 dm^3 .
- 3 Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu, którego objętość jest równa sumie objętości trzech sześcianów o polach powierzchni całkowitej równych 54 cm^2 , 96 cm^2 , 150 cm^2 .
- 4 Obwód prostokątnej podstawy graniastosłupa prostego jest równy 70 cm, co stanowi 175% jego wysokości. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.
- 5 W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość $2n \text{ cm}$, a jego wysokość jest o połowę dłuższa. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tej bryły.
- 6 Przekątna podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $\sqrt{288} \text{ cm}$, jego wysokość zaś jest równa trzeciej części krawędzi podstawy. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa.
- 7 Podstawą graniastosłupa prostego jest romb, w którym jedna z przekątnych ma długość 10 cm. Suma pól podstaw tego graniastosłupa jest równa 240 cm^2 , a jego wysokość ma 20 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa.
- 8 Długości przekątnych rombu, który jest podstawą graniastosłupa prostego, są równe 16 cm i 12 cm. Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa wynosi 672 cm^2 . Oblicz objętość tego graniastosłupa.
- 9 Kartonowe pudełko ma kształt graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym długość krawędzi podstawy jest równa 4 cm, a wysokość 10 cm. Ile centymetrów kwadratowych kartonu zużyto na wykonanie pudełka, jeżeli na zakładki do sklejania trzeba dodać 5% pola powierzchni pudełka?
- 10 Plastikowy pojemnik w kształcie prostopadłościanu o krawędziach równych 5 cm, 1,2 dm, 2 dm jest częściowo napełniony wodą. Jeżeli podstawą pojemnika będzie ściana o najmniejszym polu, to woda sięgnie do wysokości 16 cm. Na jaką wysokość będzie sięgać woda, gdy podstawą pojemnika będzie ściana o największym polu? Jaką pojemność ma ten pojemnik?

11 Koparka mechaniczna przenosi jedno-razowo $0,5 \text{ m}^3$ ziemi za pomocą łyżki. Ile łyżek nabierze koparka, aby wykonać wykop w kształcie prostopadłościanu o wymiarach: $8 \text{ m} \times 2\frac{1}{2} \text{ m} \times 3,5 \text{ m}$?

12 Podłoga skrzyni samochodu ciężarowego ma wymiary $3\frac{4}{5} \text{ m}$ i $2\frac{1}{10} \text{ m}$. Skrzynię wypełniono piaskiem, którego warstwa ma grubość 25 cm . Ile waży ten ładunek, jeżeli metr sześcienny piasku waży $1,6 \text{ tony}$? Wynik zaokrąglaj do jednej tony.

13 Dom ma kształt prostopadłościanu o wymiarach podstawy $12 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ i wysokości 7 m . Na otwory okienne przypada 20% pola powierzchni ścian zewnętrznych domu. Ile kilogramów zaprawy należy przygotować na otynkowanie tego domu, jeżeli 1 kg zaprawy wystarcza na otynkowanie $0,25 \text{ m}^2$ muru?

14 Betonowy słupek ogrodzeniowy ma kształt prostopadłościanu, którego wymiary wynoszą $0,1 \text{ m} \times 0,15 \text{ m} \times 0,8 \text{ m}$. Ile kilogramów cementu zużyto na wykonanie 64 takich słupków, jeżeli na przygotowanie 1 m^3 betonu potrzeba 250 kg cementu?

15 Dane są trzy sześciany o krawędziach długości x, y, z . Wykaż, że długość krawędzi takiego sześcianu, którego pole powierzchni całkowitej będzie równe sumie pól powierzchni całkowitych tych trzech sześcianów, jest równa $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

 **16** Długość krawędzi jednego sześcianu jest o 20% mniejsza od długości krawędzi drugiego sześcianu. O ile procent większa jest objętość większego sześcianu od objętości mniejszego? Wynik podaj z dokładnością do 1% .

17 Narysuj w skali $1 : 2$ siatkę graniastopu prawidłowego czworokątnego, którego pole powierzchni całkowitej wynosi 160 cm^2 , a wysokość jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy.



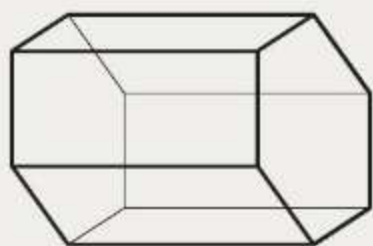
Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

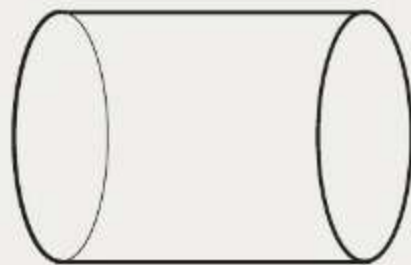
W zadaniach 1.–3. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

1 Który rysunek nie przedstawia graniastoslupa?

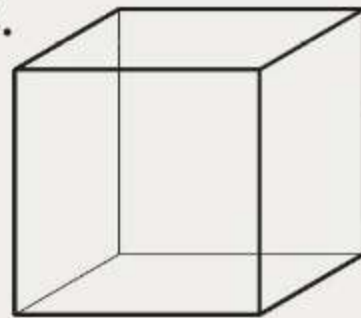
A.



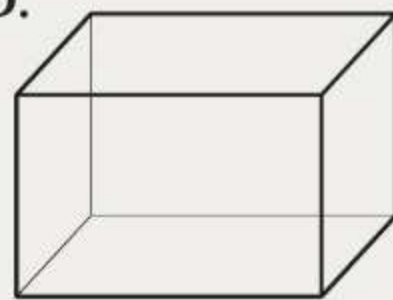
B.



C.



D.



2 W dzbanie jest 2,4 litra soku malinowego. Ile szklanek o pojemności 200 cm^3 można napełnić tym sokiem?

A. Mniej niż 10 szklanek.

B. 18 szklanek.

C. Więcej niż 20 szklanek.

D. 12 szklanek.

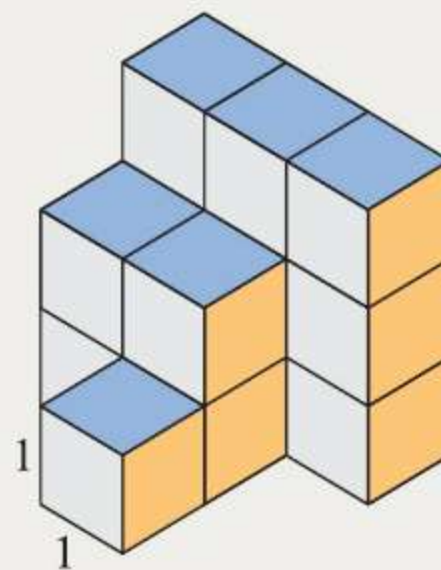
3 Bryła przedstawiona na rysunku zbudowana jest z trzech prostopadłościanów, a każdy z nich z sześciennych kostek o krawędzi 1. Ile takich kostek trzeba dołożyć do bryły, aby otrzymać sześcian?

A. 13

B. 15

C. 11

D. 17



W zadaniach 4.–7. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

4 Prostopadłościan ma

A. 12 krawędzi, 4 wierzchołki, 6 ścian.

B. 4 krawędzie, 8 wierzchołków, 6 ścian.

C. 4 krawędzie, 4 wierzchołki, 4 ściany.

D. 12 krawędzi, 8 wierzchołków, 6 ścian.

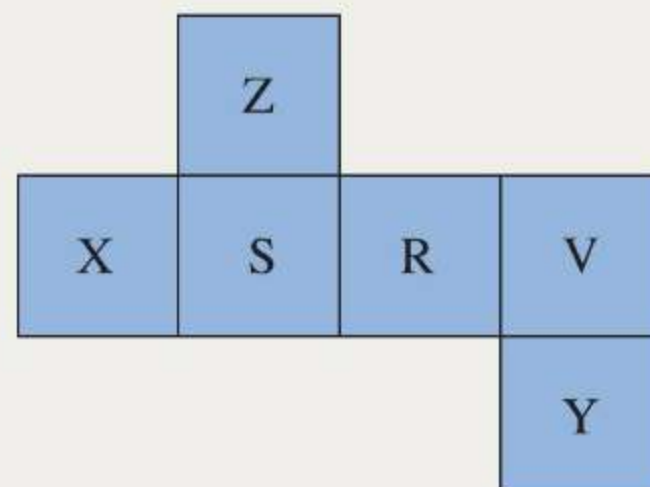
5 Po złożeniu sześcianu z narysowanej obok siatki naprzeciw ściany z literą X będzie ściana z literą

A. Y.

B. S.

C. R.

D. V.



- 6 W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość 12 cm. Wysokość graniastosłupa ma 8 dm długości. Pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa wynosi
- A. $9,6 \text{ dm}^2$ B. 288 cm^2 C. $28,8 \text{ dm}^2$ D. 960 cm^2

- 7 Jeśli wymiary sześcianu zmniejszymy trzykrotnie, to jego pole powierzchni całkowitej zmniejszy się
- A. trzy razy. B. sześć razy. C. dwa razy. D. dziewięć razy.

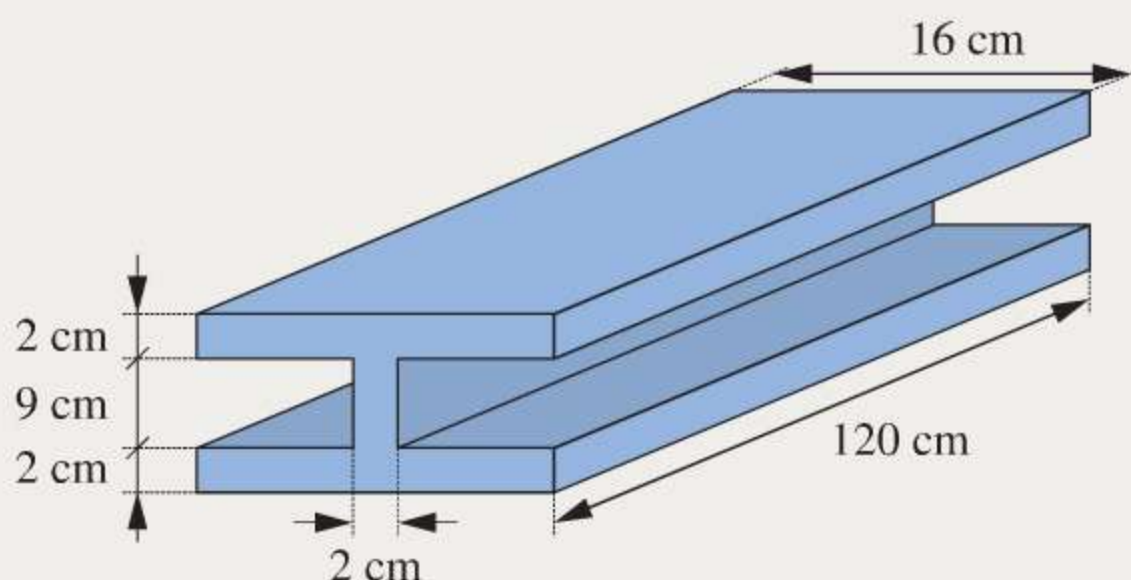
W zadaniach 8.–9. oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

8	Wszystkie krawędzie sześcianu są równej długości.	P	F
	Wszystkie ściany sześcianu są przystające.	P	F
	Podstawą sześcianu jest sześciokąt foremny.	P	F
	Każda ściana sześcianu może być jego podstawą.	P	F

- 9 Wymiary prostopadłościanu wynoszą $1 \text{ dm} \times 7 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$, a krawędź sześcianu jest równa 9 cm.

Objętość sześcianu jest o 169 ml większa od objętości prostopadłościanu.	P	F
Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest o $0,74 \text{ dm}^2$ mniejsze od pola powierzchni całkowitej sześcianu.	P	F
Suma długości krawędzi prostopadłościanu jest o 0,08 m większa od sumy długości krawędzi sześcianu.	P	F
Siatka tego prostopadłościanu narysowana w skali 1 : 3 ma pole 103 cm^2 .	P	F

- 10 Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.



Objętość bryły przedstawionej na rysunku jest równa A / B.

A. $9,84 \text{ dm}^3$ B. 6 dm^3

Pole podstawy graniastosłupa przedstawionego na rysunku wynosi C / D.

C. 1920 cm^2 D. 82 cm^2



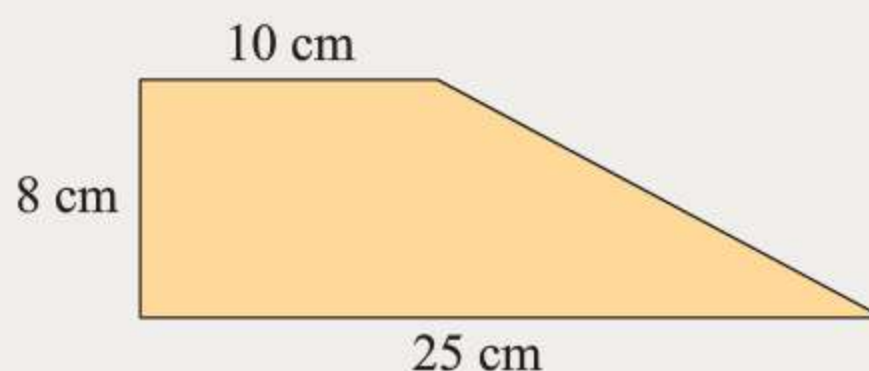
- 11** Akwarium ma wymiary $30\text{ cm} \times 80\text{ cm} \times 50\text{ cm}$. Czy wystarczy wlać do niego 21 konewek z wodą o pojemności 5 l, aby wypełnić je do $\frac{7}{8}$ wysokości? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	potrzeba więcej niż 27 konewek: $(3 \cdot 8 \cdot 5) : 5 : \frac{7}{8} = 27\frac{3}{7}$.
			2.	trzeba wlać 105 l wody, a więc dokładnie 21 konewek.
B.	Nie,		3.	objętość akwarium wynosi 120 l, a więc trzeba wlać $120 : 5 = 24$ konewki.

- 12** Na drogę o długości 250 m i szerokości 4 m postanowiono nałożyć pięciocentymetrową warstwę żużlu. Ciężarówka ma ładowność 8 m^3 . Ile minimalnie kursów musi wykonać ciężarówka, aby dowieźć potrzebną ilość żużlu? Zapisz obliczenia.



- 13** W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna stanowi 400% krawędzi podstawy. Ile razy wzrośnie pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa, jeżeli jego wszystkie wymiary zwiększymy trzykrotnie? Odpowiedź uzasadnij.
- 14** Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez prostokątny przedstawiony na rysunku. Ile wynosi pole powierzchni bocznej i objętość tego graniastosłupa, jeśli jego wysokość jest równa 20 cm? Zapisz obliczenia.



1. Odczytywanie i przedstawianie danych statystycznych za pomocą tabel i diagramów

Przypomnij sobie

- w jaki sposób można przedstawić dane,
- jak przedstawiasz dane na diagramie słupkowym.

Dane dotyczące na przykład liczby ludności, oglądalności programów telewizyjnych, najczęściej używanych proszków do prania, najlepiej sprzedających się marek samochodów, sprzętu radiowego i telewizyjnego, wyświetleń utworu w serwisie internetowym to **dane statystyczne**. Są one uzyskiwane w różny sposób, na przykład za pomocą spisów, sondaży, wywiadów lub badań naukowych. Dane te można przedstawić za pomocą tabel, różnego rodzaju diagramów, wykresów.

W Polsce najobszerniejszą publikacją, w której – w postaci tablic – są zamieszczane dane dotyczące całej gospodarki narodowej, jest Rocznik Statystyczny Rzeczypospolitej Polskiej wydawany przez Główny Urząd Statystyczny (GUS).

Przykład 1.

Utargiem dziennym nazywamy sumę wpływów gotówki do kasy z całodzienniej sprzedaży artykułów.

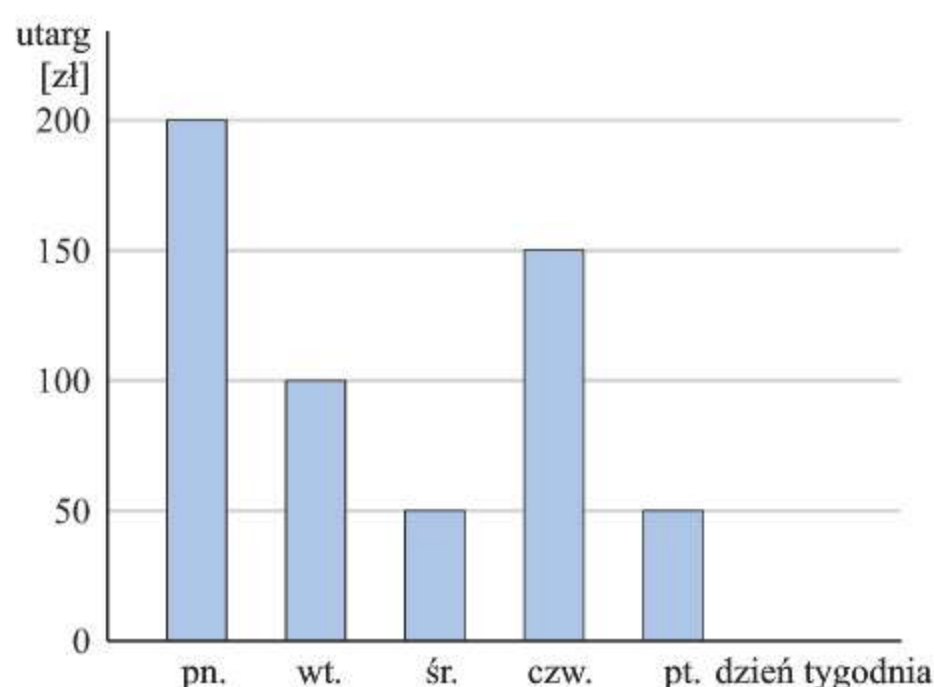
W tabeli podano utarg sklepiku szkolnego w kolejnych dniach tygodnia.

Dzień tygodnia	Utarg dzienny [zł]
poniedziałek	200
wtorek	100
środa	50
czwartek	150
piątek	50

Te same dane można przedstawić w inny sposób, np. za pomocą **pionowego diagramu słupkowego**, czyli **wykresu kolumnowego**.

Z diagramu słupkowego łatwo można odczytać, że:

- największy utarg był w poniedziałek,
- najmniejszy – w środę i piątek.



Przykład 2.

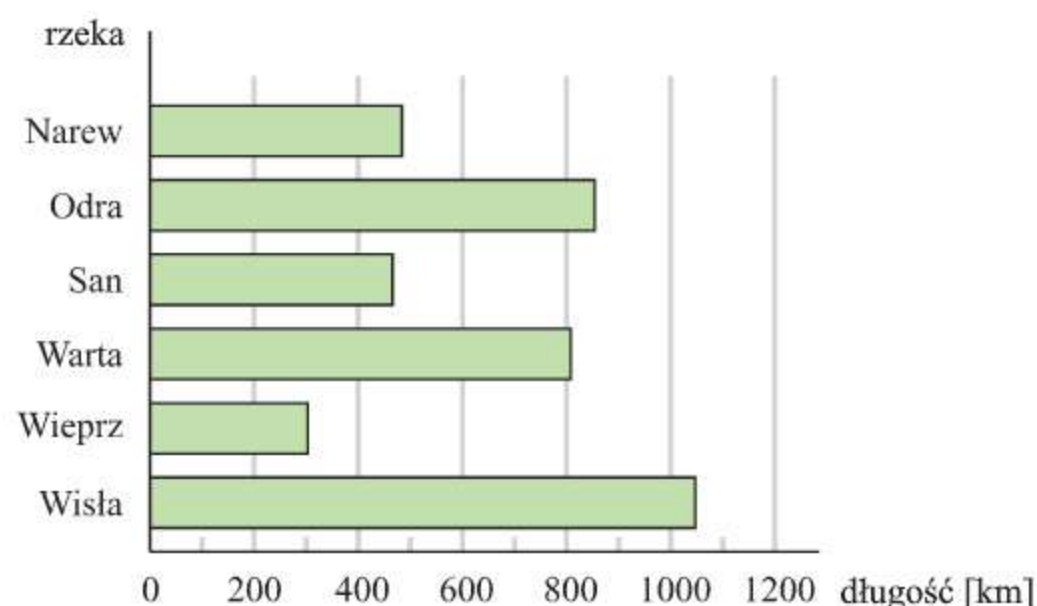
Przeanalizujmy tabelę i diagram ilustrujące długości niektórych rzek w Polsce.

Rzeka	Narew	Odra	San	Warta	Wieprz	Wisła
Długość [km]	484	854	458	808	303	1047

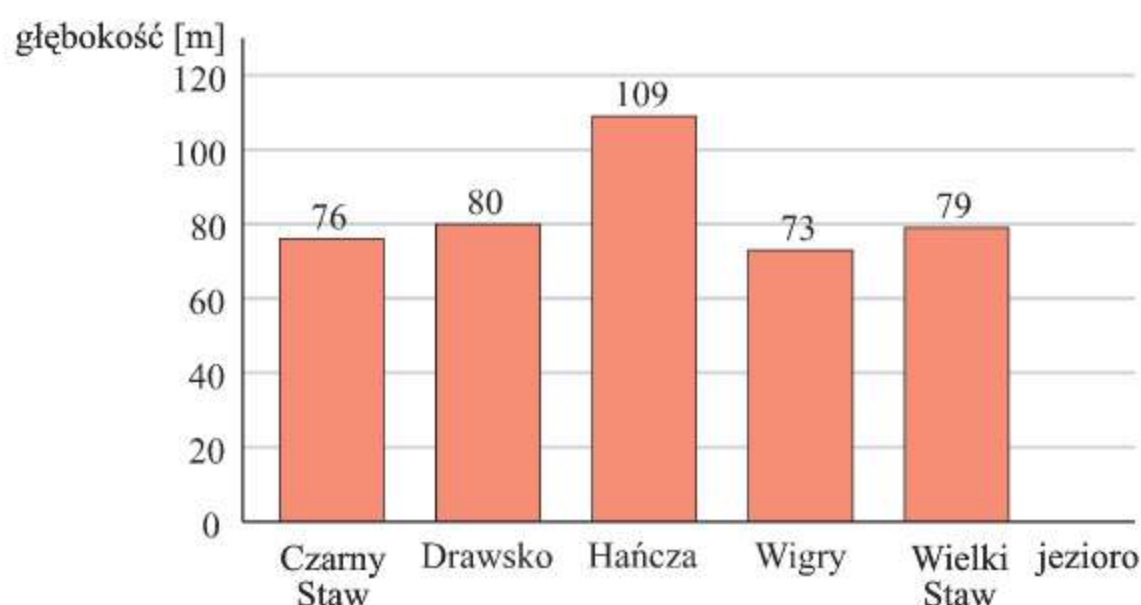
Na osi poziomej diagramu zaznaczono liczby określające długości rzek, a na osi pionowej – ich nazwy. Z diagramu łatwo odczytać, że:

- najdłuższą rzeką jest Wisła, a najkrótszą – Wieprz,
- San i Narew mają zbliżone długości.

Z danych w tabeli możemy obliczyć, że Warta jest o 46 km krótsza od Odry.



- 1 Na diagramie przedstawiono głębokość wybranych jezior w Polsce.



Ułóż pytania, na które można odpowiedzieć na podstawie tego diagramu.

- 2 Na podstawie danych przedstawionych w tabeli można zauważyć, jak zmieniał się w Polsce bezrobocie w grudniu w latach 2010–2018. Zjawisko to określa tzw. stopa bezrobocia, tj. stosunek liczby osób bezrobotnych do liczby ludności aktywnej zawodowo, wyrażony w procentach. Narysuj pionowy diagram słupkowy ilustrujący te dane.

Rok	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Stopa bezrobocia [%]	12,4	12,5	13,4	13,4	11,4	9,7	8,2	6,6	5,8

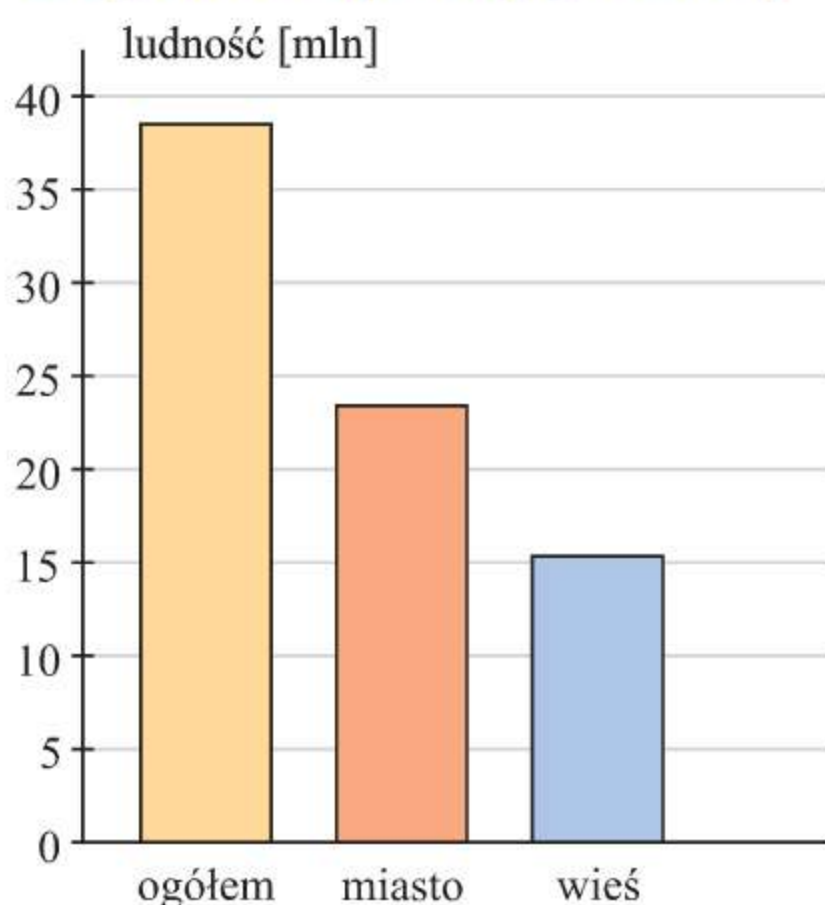
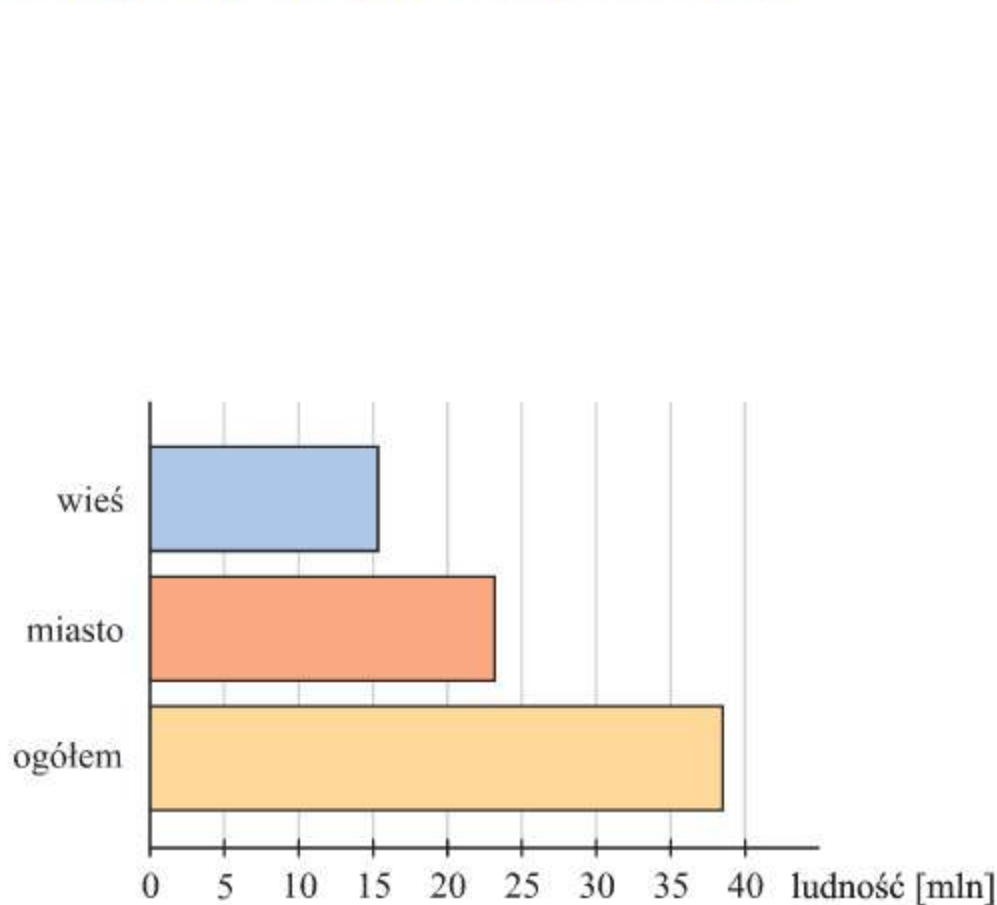
Źródło: GUS, 2019 r.

Przykład 3.

Przedstawmy dane zamieszczone w tabeli w postaci diagramów słupkowych: pionowego i poziomego oraz diagramów procentowych: prostokątnego i kołowego.

Stan ludności w Polsce na podstawie spisu w dniu 31 III 2011 r.		
Ogółem	Miasto	Wieś
38 511 800	23 405 900	15 105 900

Źródło: GUS

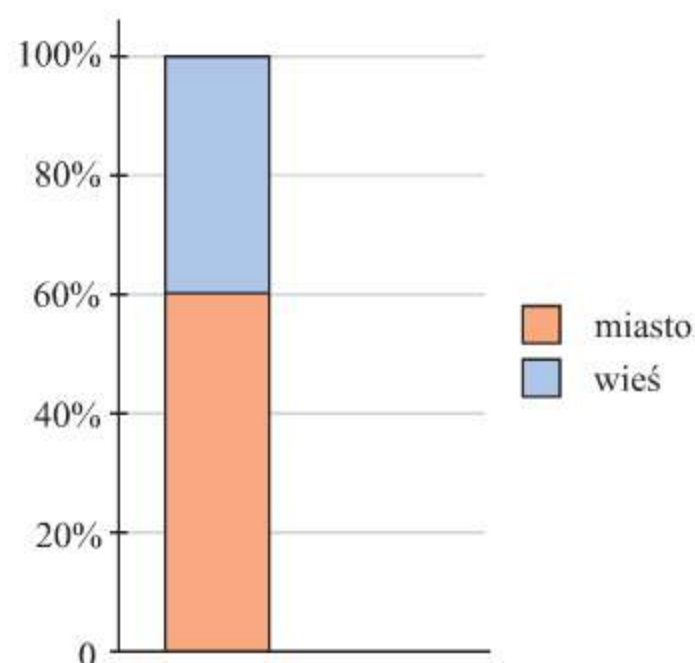
Diagram słupkowy pionowy**Diagram słupkowy poziomy****Diagram procentowy prostokątny**

Liczbę ludności ogółem, czyli 38 511 800, przyjmujemy jako 100%. Wtedy:

- ludność miast stanowi

$$\frac{23\,405\,900}{38\,511\,800} \cdot 100\% \approx 60,8\% \text{ ogółu ludności,}$$
- ludność wsi stanowi

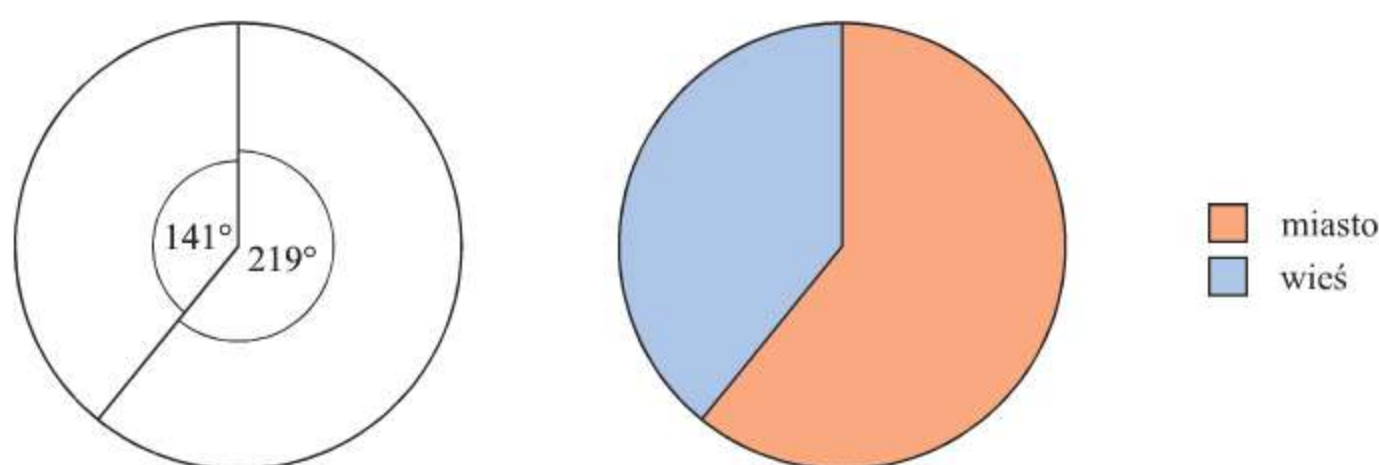
$$\frac{15\,105\,900}{38\,511\,800} \cdot 100\% \approx 39,2\% \text{ ogółu ludności.}$$

**Diagram procentowy kołowy**

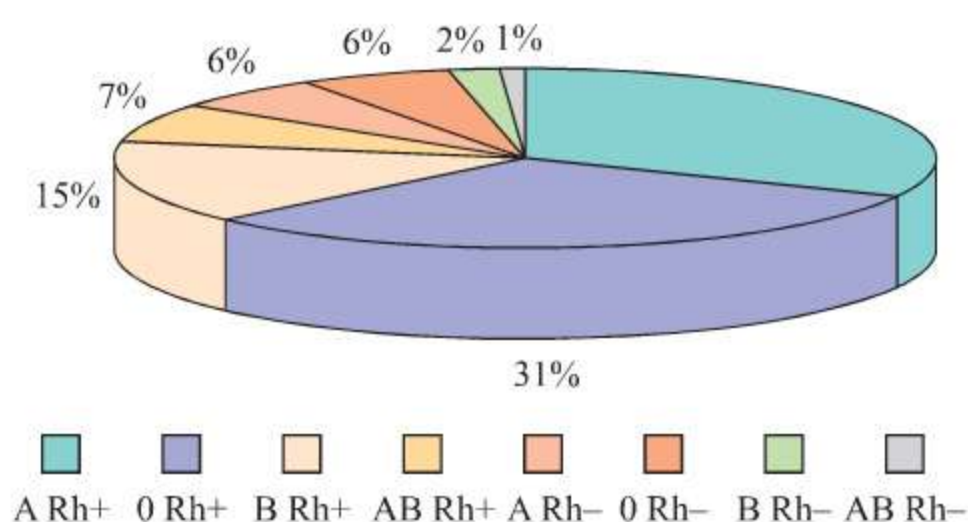
Obliczamy miary kątów odpowiadających poszczególnym danym wyrażonym w procentach. Kąt pełny (360°) to 100%, więc 1% odpowiada kątowi o mierze $3,6^\circ$. Wtedy:

- ludność miast odpowiada kątowi o mierze około 219° ($60,8 \cdot 3,6^\circ = 218,88^\circ$ lub $60,8\% \text{ z } 360^\circ \text{ to jest } 218,88^\circ$),
- ludność wsi odpowiada kątowi o mierze około 141° ($39,2 \cdot 3,6^\circ = 141,12^\circ$ lub $39,2\% \text{ z } 360^\circ \text{ to jest } 141,12^\circ$).

Rysujemy koło i zaznaczamy kąty o miarach 219° i 141° .

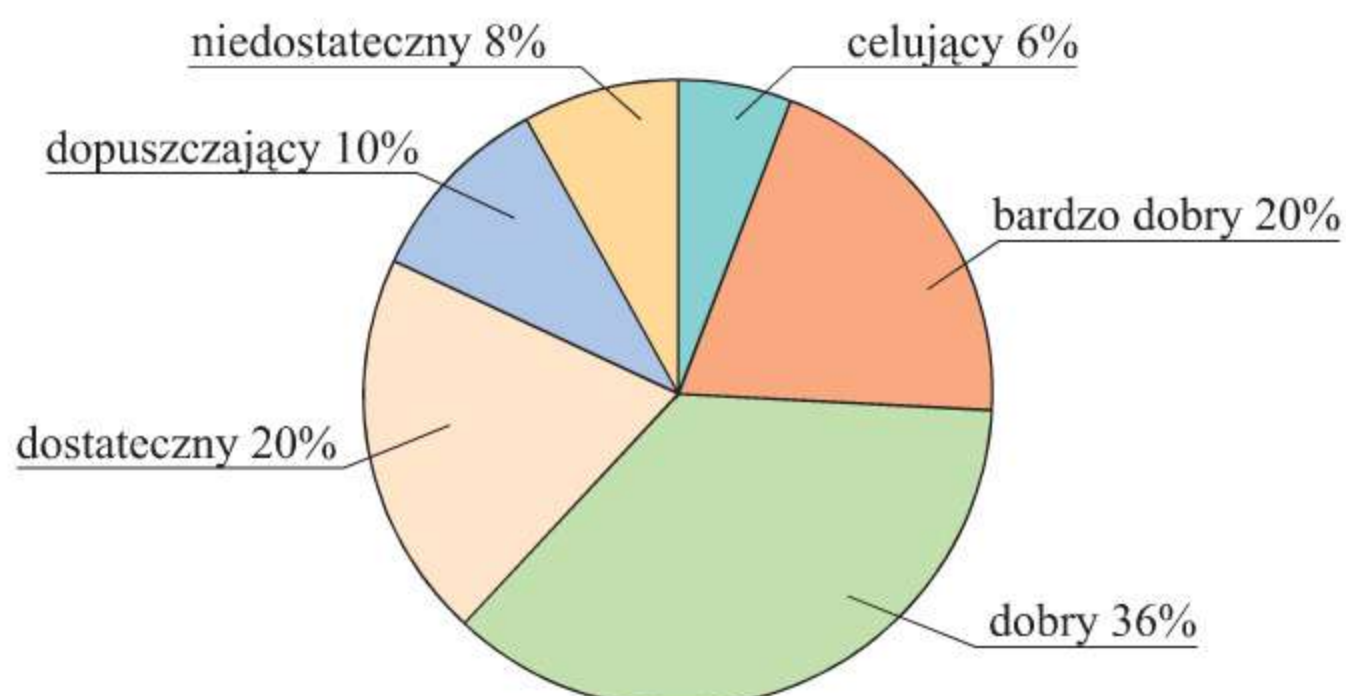


- 3** Każdy człowiek ma określoną grupę krwi: A, B, AB lub 0 oraz określony czynnik Rh: Rh+ lub Rh-. Wyróżniamy 8 grup krwi z poszczególnymi czynnikami Rh: A Rh+, B Rh+, AB Rh+, 0 Rh+, A Rh-, B Rh-, AB Rh-, 0 Rh-. Na diagramie kołowym przedstawiono procentowy rozkład grup krwi Polaków z czynnikiem Rh.



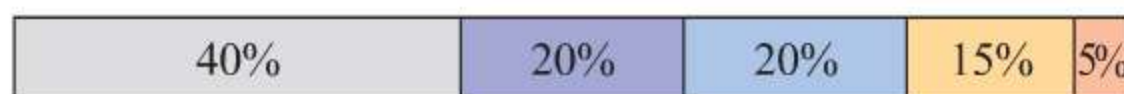
Źródło: www.rckik-warszawa.com.pl

- a) Jaki procent Polaków ma grupę krwi A z czynnikiem Rh+?
 b) Jaki procent Polaków ma krew z czynnikiem Rh-?
 c) Oszacuj, ile osób w grupie 4 000 000 Polaków ma grupę krwi AB z czynnikiem Rh+.
- 4** Na diagramie kołowym przedstawiono oceny z matematyki za pierwsze półrocze nauki we wszystkich klasach siódmych pewnej szkoły.



- a) Jeśli ocenę celującą otrzymało 12 uczniów, ilu uczniów otrzymało inne poszczególne oceny?
 b) Ilu uczniów jest w klasach siódmych tej szkoły?

- 5 Każdy uczestnik sześćdziesięcioosobowej wycieczki jest pracownikiem jednego z pięciu różnych sektorów. Na prostokątnym diagramie procentowym przedstawiono dane dotyczące zatrudnienia wycieczkowiczów.



■ szkolnictwo ■ służba zdrowia ■ usługi ■ przemysł ■ rolnictwo

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

W szkolnictwie jest zatrudnionych 24 uczestników wycieczki.	P	F
Wśród uczestników wycieczki więcej jest zatrudnionych łącznie w przemyśle i rolnictwie niż w usługach.	P	F
Na wycieczkę pojechało cztery razy mniej pracujących w rolnictwie niż pracujących w służbie zdrowia.	P	F

- 6 Wśród 72 uczniów przeprowadzono ankietę na temat: *Mój ulubiony owoc*. Aż 24 uczniów wybrało jabłka, 18 – banany, 12 – winogrona, 3 – śliwki, 3 – morele, 6 – brzoskwinie, a reszta uczniów – inne owoce. Narysuj procentowy diagram prostokątny ilustrujący te dane.

Przykład 4.

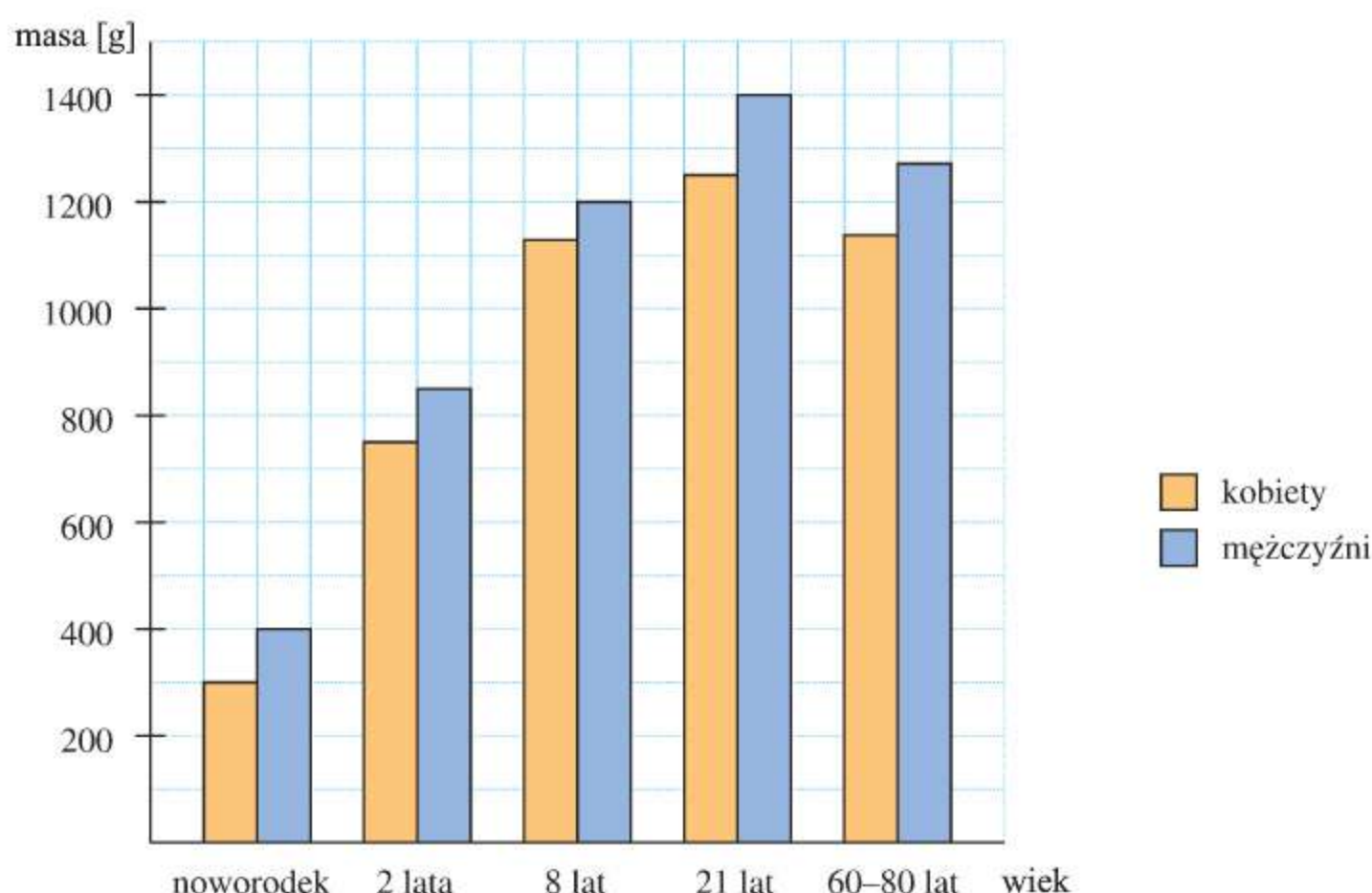
W tabeli podano masę mózgu człowieka w zależności od wieku i płci.

Mózg człowieka a wiek i płeć		
Wiek	Masa mózgu [g]*	
	kobiety	mężczyźni
Noworodek	300	400
2 lata	750	850
8 lat	1120	1200
21 lat	1250	1400
60–80 lat	1130	1285

* – wartości średnie

Źródło: *Tablice biologiczne*, Adamantan, Warszawa 1994

- Narysujmy diagram słupkowy prezentujący dane z tabeli.
- Obliczmy, o ile procent wzrasta masa mózgu dorosłych kobiet, a o ile – dorosłych mężczyzn w stosunku do okresu noworodkowego.
- Na osi pionowej zaznaczamy masę, a na osi poziomej – wiek. Dla każdego wieku podanego w tabeli rysujemy po dwa słupki obok siebie.



Tak wykonany diagram służy do porównywania dwóch wielkości.

b) Masa mózgu kobiety wzrasta o $\frac{1250 - 300}{300} \cdot 100\% \approx 317\%$.

Masa mózgu mężczyzny wzrasta o $\frac{1400 - 400}{400} \cdot 100\% = 250\%$.

7 Grupę sportowców trenujących różne dyscypliny zapytano o ich wzrost. Otrzymano następujące wyniki w centymetrach:

- mężczyźni: 158, 187, 176, 168, 163, 162, 170, 165, 194, 194, 187, 175, 172, 161, 170, 188, 193, 179, 199, 180;
- kobiety: 150, 160, 158, 170, 174, 155, 175, 166, 168, 165, 169, 181, 163, 173, 178, 157, 171, 182, 180, 153.

a) Pogrupuj te dane i przedstaw w takiej tabeli jak poniżej.

Wzrost [cm]	150–159	160–169	170–179	180–189	190 i więcej	razem
Liczba mężczyzn						
Liczba kobiet						

b) Narysuj poziomy diagram słupkowy ilustrujący dane przedstawione w tabeli.

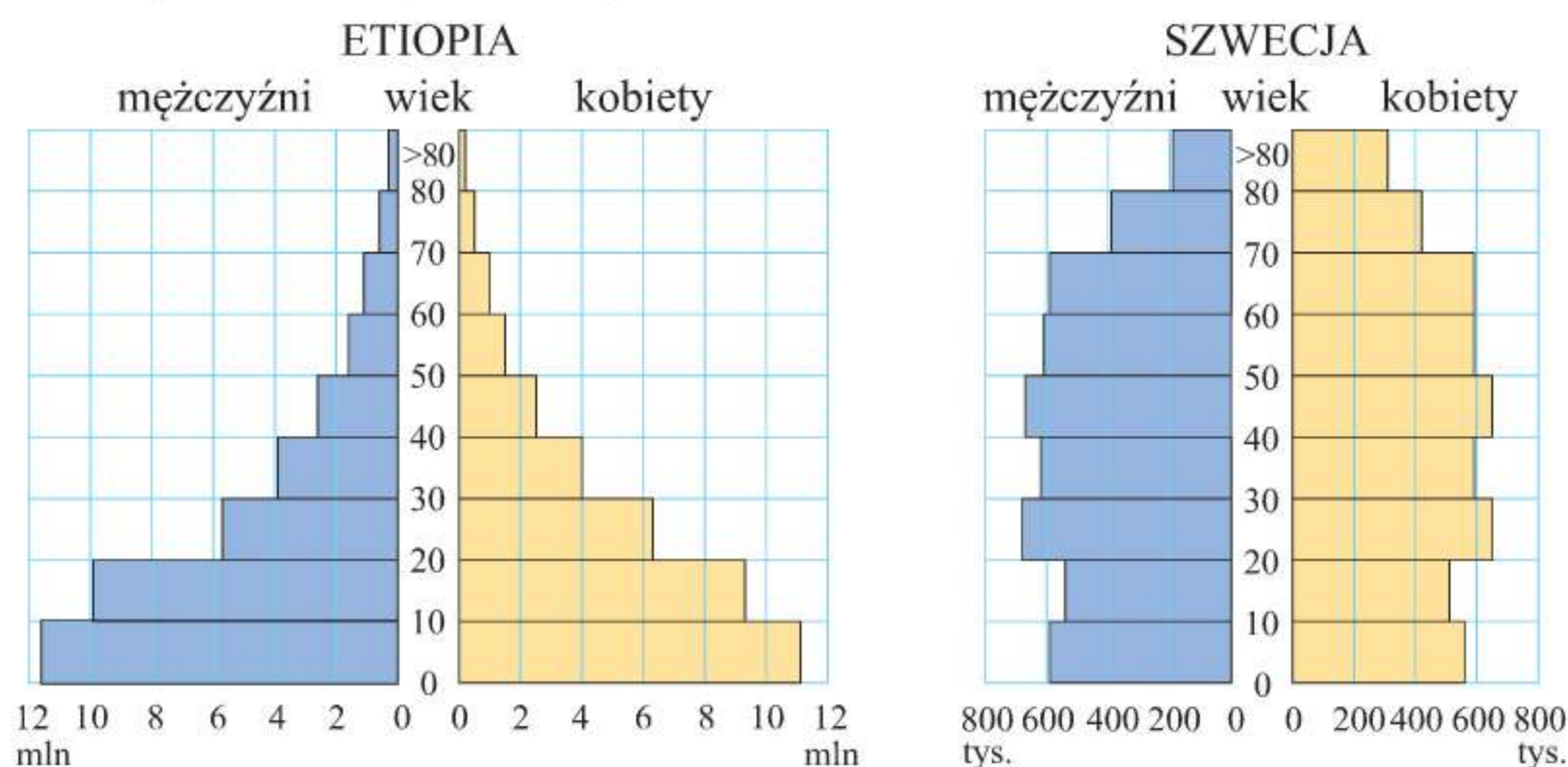
c) Napisz trzy wnioski wynikające z tych danych.

Dane dotyczące liczby ludności w różnych krajach lub na różnych kontynentach, w zależności od wieku i płci, przedstawia się zwykle jako zbiorcze diagramy słupkowe, zwane **piramidami populacji**.

Piramida populacji składa się z dwóch diagramów słupkowych poziomych: na jednym przedstawia się dane dotyczące mężczyzn, a na drugim – kobiet.

Przykład 5.

Poniżej znajdują się dwa diagramy, na których przedstawiono liczby ludności w dwóch krajach z różnych kontynentów.



Źródło: Demographic Yearbook 2015

Z tych diagramów można odczytać na przykład, że:

- Dziewczynek w wieku 0–10 lat jest w Etiopii ok. 11 milionów, a w Szwecji – ok. 550 tysięcy.
- Diagram w przypadku Etiopii ma kształt piramidy, a w przypadku Szwecji jest prawie prostokątny.
- Społeczeństwo Etiopii jest bardzo młode, rodzi się tam dużo dzieci i niewielki procent osiąga wiek 50 lat. W Szwecji rodzi się mało dzieci, większość z nich dożywa starszego wieku, kobiety żyją dłużej.

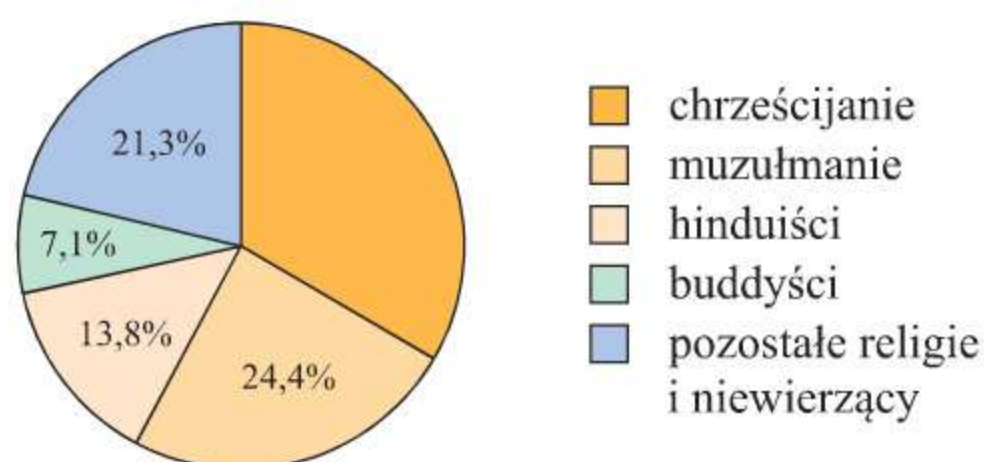
- 8** Na podstawie diagramów z *Przykładu 5* odpowiedz na pytania.
- Ilu jest chłopców w wieku od 11 do 20 lat w Etiopii, a ilu – w Szwecji?
 - W którym kraju ludność żyje dłużej?
- 9** Znajdź w Roczniku Statystycznym Rzeczypospolitej Polskiej dane dotyczące liczby mieszkańców pięciu największych (pod względem liczby mieszkańców) miast Polski i przedstaw je na diagramie słupkowym.



- 10** Na diagramie kołowym przedstawiono udział procentowy wyznawców głównych religii w ludności świata, według danych z 2010 r.

W 2010 r. na świecie żyło ogółem około 6780 mln mieszkańców.

- Jaki procent ludności świata stanowili chrześcijanie?
- Ilu ludzi było wyznawcami poszczególnych religii?
- O ilu więcej było hinduistów niż buddystów?

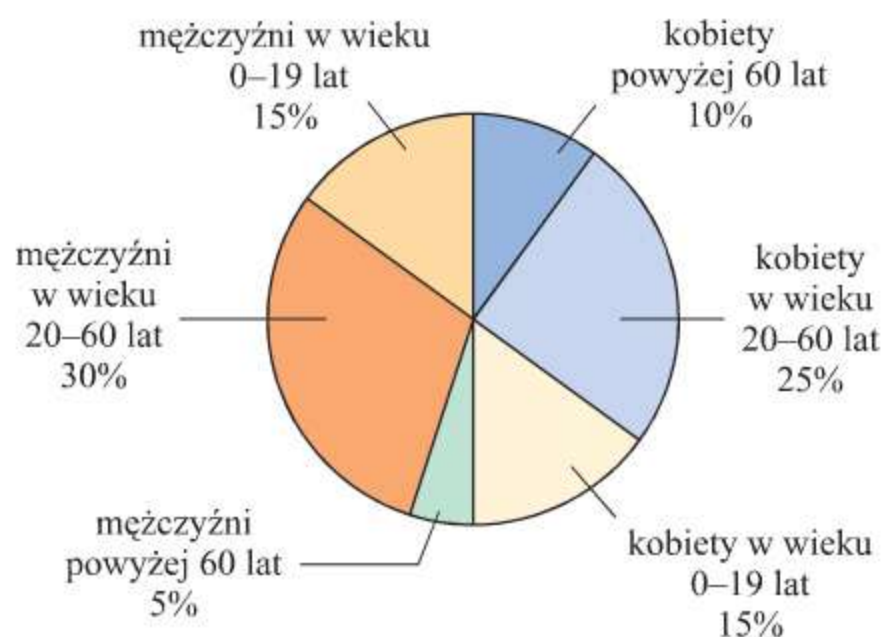


Źródło: pl.wikipedia.org/wiki/Religia

- 11** Wypisz swoje oceny półroczne. Oblicz, ile masz ocen celujących, bardzo dobrych, dobrych itd. Przedstaw te dane na diagramie procentowym prostokątnym.

Wyzwanie

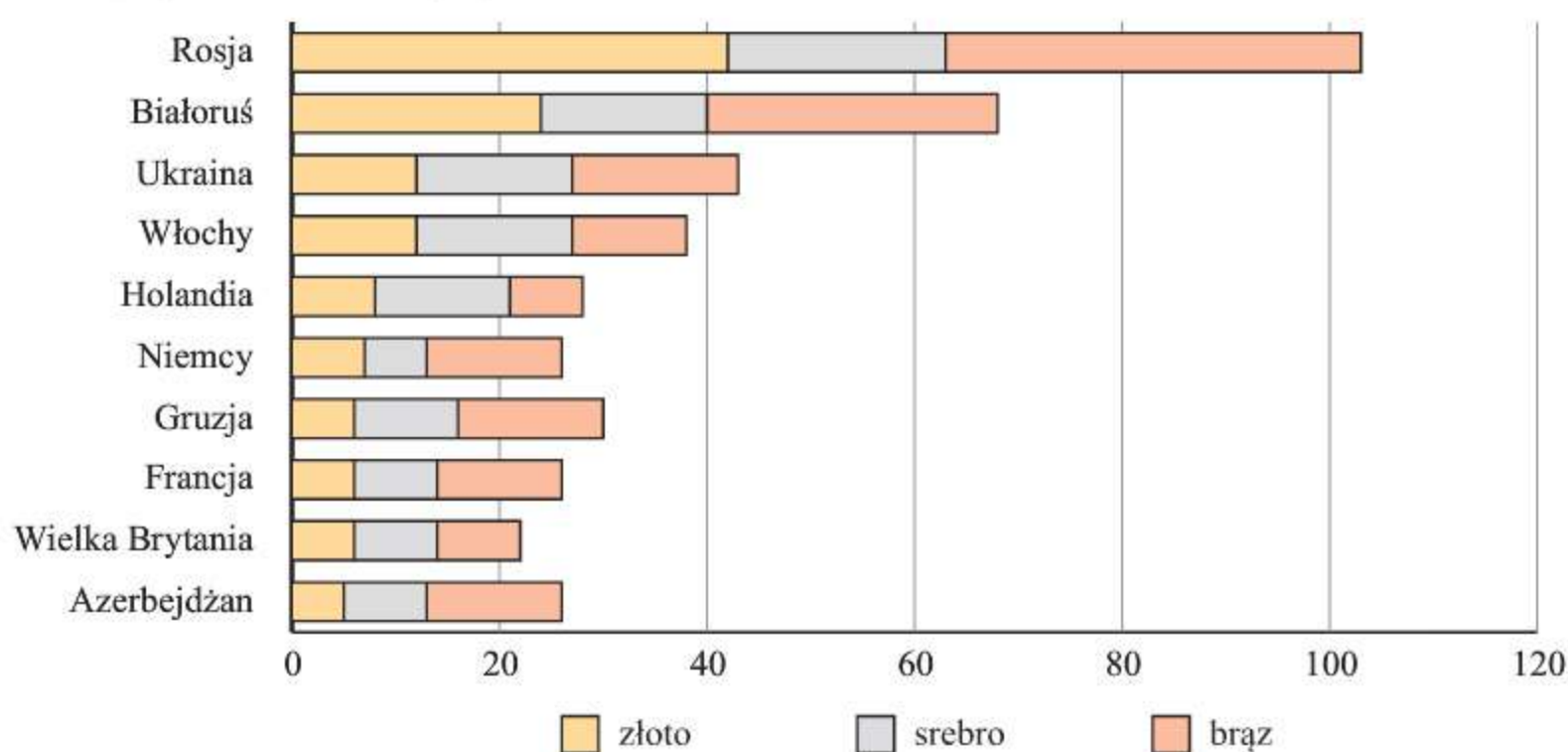
W pewnej gminie jest 6200 mieszkańców. Na diagramie kołowym przedstawiono ich podział ze względu na płeć i wiek.



- Narysuj piramidę populacji kobiet i mężczyzn tej gminy.
- Sformułuj trzy wnioski dotyczące przedstawionych danych.

Sprawdź się!

- 1** Na diagramie słupkowym poziomym przedstawiono klasyfikację medalową dziesięciu państw, które zdobyły najwięcej medali na drugich igrzyskach europejskich. Odbyły się one w Mińsku w 2019 r.



Źródło: pl.wikipedia.org/wiki/Igrzyska_Europejskie_2019

- Który kraj zdobył największą liczbę złotych medali, a który – spośród wymienionych – najmniejszą?
- Które kraje zdobyły mniej niż 30 brązowych medali?
- W których krajach łączna liczba zdobytych medali złotych i srebrnych była większa niż 30?



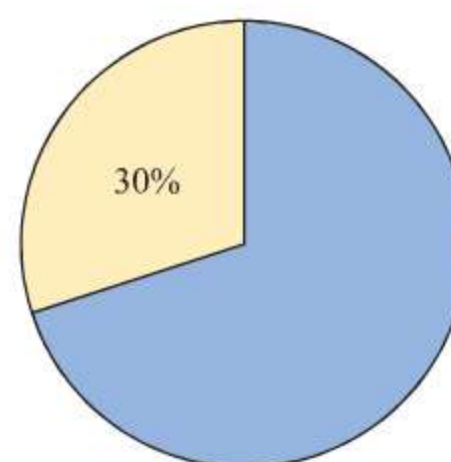
- 2 W 2014 r. około 20 mln Polaków stanowiła Polonia (Polacy mieszkający na stałe w innych państwach). W tabeli zestawiono informacje dotyczące największych ośrodków polonijnych w 2014 r. Przedstaw te dane w postaci diagramu procentowego kołowego.

Brazylia	Francja	Kanada	Niemcy	USA	Wielka Brytania
1,8 mln	1 mln	900 tys.	2 mln	10 mln	850 tys.

Źródło: pl.wikipedia.org/wiki/Polonia

- 3 Gdy trzydziestu osobom zadano pytanie: *Dokąd udałbyś się na wycieczkę swoich marzeń?*, 20% wybrało Daleki Wschód, 6 osób – kraj Inków (Ameryka Południowa), 40% – krainę faraonów (Egipt), 3 osoby wybrały Australię, a pozostałe – bezkresy Ameryki Północnej. Narysuj procentowy diagram kołowy dla tych danych.

- 4 Lądy zajmują około 30% całej powierzchni kuli ziemskiej, a reszta to wody, które zajmują około 360 mln km². Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.



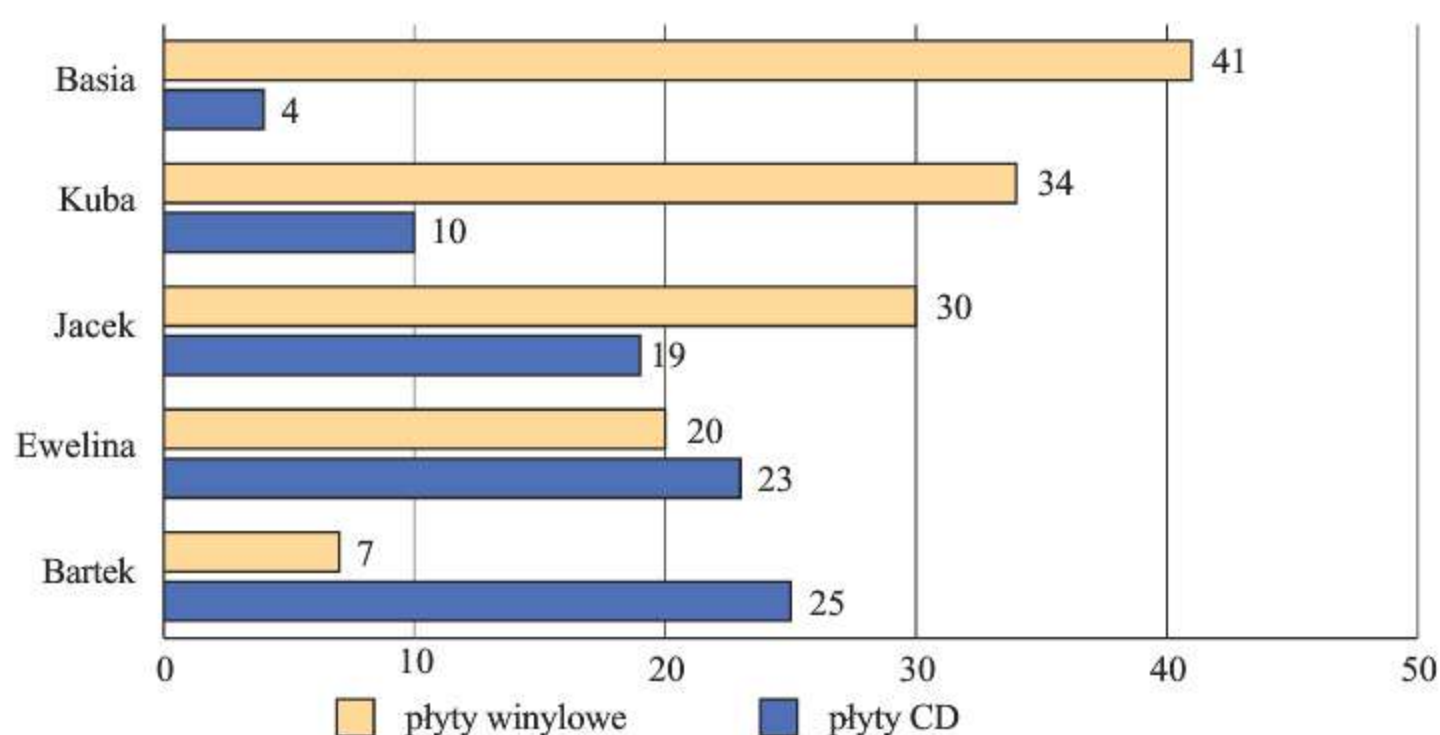
Powierzchnia kuli ziemskiej jest równa A / B.

A. ok. 510 mln km² B. mniej niż 500 mln km²

Powierzchnia lądów jest równa C / D.

C. więcej niż 170 mln km² D. ok. 150 mln km²

- 5 Zapisz dane przedstawione na diagramie w postaci tabeli i ułóż do nich treść zadania.



2. Odczytywanie i przedstawianie danych statystycznych za pomocą wykresów

Niektóre zbiory danych wygodnie jest przedstawić za pomocą wykresów liniowych, ponieważ najlepiej ilustrują one tendencje wzrostowe i spadkowe danych.

Przykład 1.

Kasia podczas choroby mierzyła temperaturę pięć razy dziennie, a wyniki zapisywała w tabelkach. Skorzystajmy z tych danych i sporządźmy wykres temperatury Kasi w zależności od godziny, o której była mierzona.

Piątek

6 ⁰⁰	10 ⁰⁰	13 ⁰⁰	17 ⁰⁰	20 ⁰⁰
37,0°C	37,7°C	37,5°C	38,3°C	38,9°C

Sobota

6 ⁰⁰	10 ⁰⁰	13 ⁰⁰	17 ⁰⁰	20 ⁰⁰
37,8°C	37,5°C	38,0°C	38,5°C	38,2°C

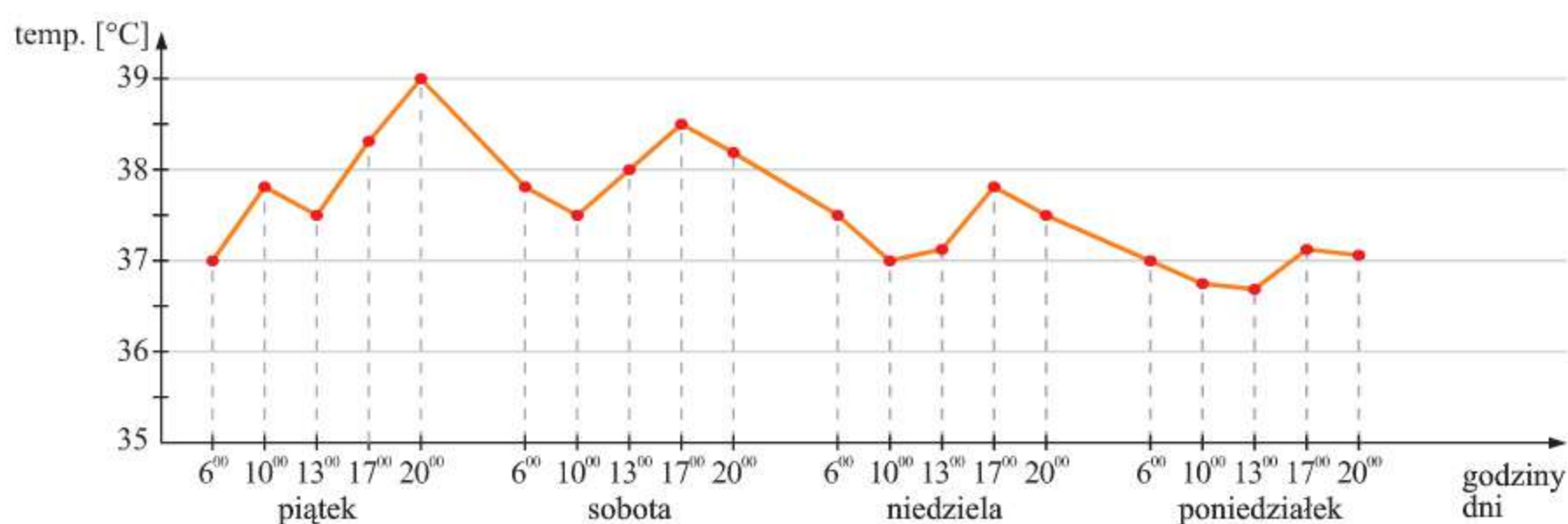
Niedziela

6 ⁰⁰	10 ⁰⁰	13 ⁰⁰	17 ⁰⁰	20 ⁰⁰
37,5°C	37,0°C	37,2°C	37,8°C	37,5°C

Poniedziałek

6 ⁰⁰	10 ⁰⁰	13 ⁰⁰	17 ⁰⁰	20 ⁰⁰
37,0°C	36,8°C	36,7°C	37,2°C	37,1°C

Na osi poziomej zaznaczamy dni tygodnia oraz godziny, a na osi pionowej – temperaturę. Następnie zaznaczamy punkty odpowiadające poszczególnym pomiarom. Aby lepiej zilustrować zmiany temperatury, punkty łączymy odcinkami. W ten sposób otrzymujemy wykres liniowy temperatury, jaką miała Kasia w kolejnych dniach. Przerywane pionowe linie ułatwiają odczytywanie informacji.



Z rysunku łatwo odczytać, jaki był przebieg choroby Kasi.

- Najwyższą temperaturę Kasia miała w piątek o godzinie 20.00.
- Najniższą temperaturę Kasia miała w poniedziałek o godzinie 13.00.
- W pewnych godzinach każdego dnia temperatura wzrastała, a w pewnych malała. Można to opisać dzień po dniu.

Czy wiesz, jaką temperaturę mogła mieć Kasia we wtorek o godzinie 6.00?

Przykład 2.

Jacek obserwował robotników stawiających ogrodzenie wokół nowego domu. Na podstawie obserwacji wykonał wykres. Obliczmy czas pracy robotników i długość wykonanego ogrodzenia.

Odcinki poziome wykresu oznaczają przerwę na śniadanie i obiad. Wobec tego od odczytanych na wykresie godzin pracy trzeba odjąć czas przeznaczony na posiłki:

$$9,5 - (0,5 + 1) = 8 \text{ [h]}.$$

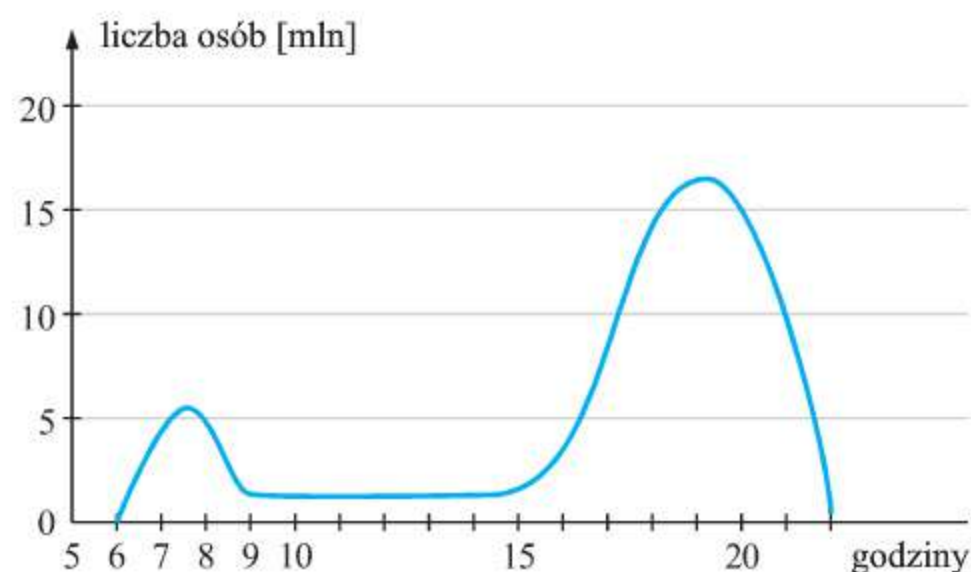


Długość ogrodzenia odczytujemy z osi pionowej: 40 m.

ODPOWIEDŹ: W ciągu ośmiu godzin pracy robotnicy założyli 40 m ogrodzenia.

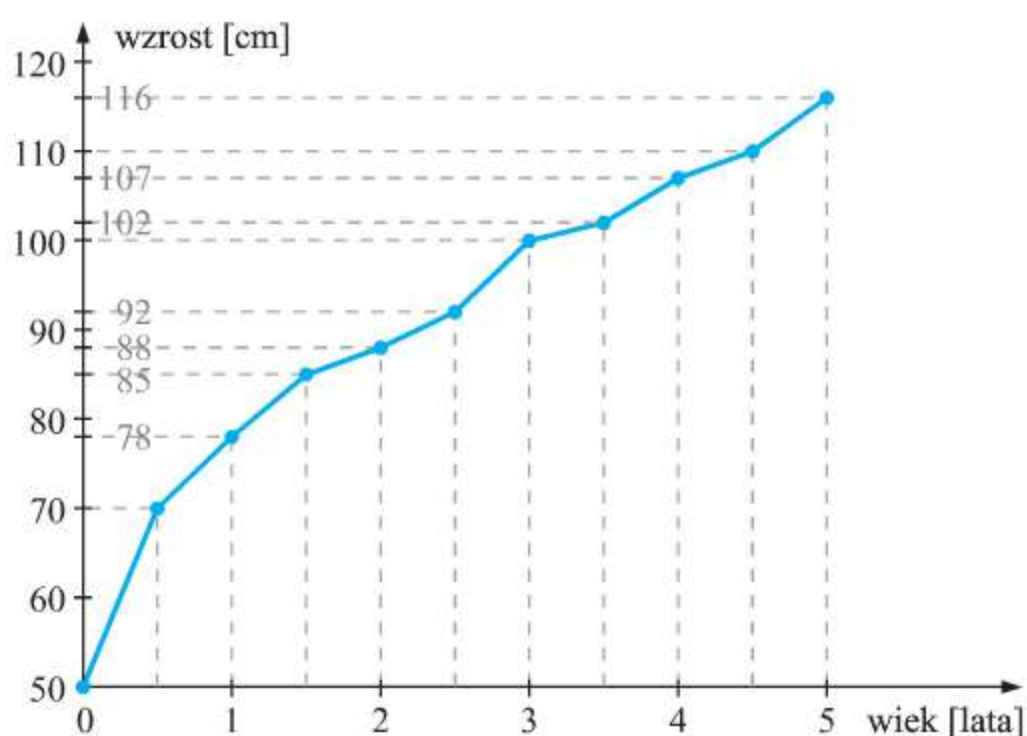
- 1** Na wykresie przedstawiono liczbę osób oglądających telewizję w zależności od pory dnia.

- Jaki czas nazwiesz okresem tzw. największej oglądalności?
- Odczytaj przybliżoną liczbę osób oglądających wtedy telewizję.
- Którą godzinę wybierzesz na emisję reklamy jakiegoś produktu?
- Jakie inne godziny nadają się do tego celu najlepiej?

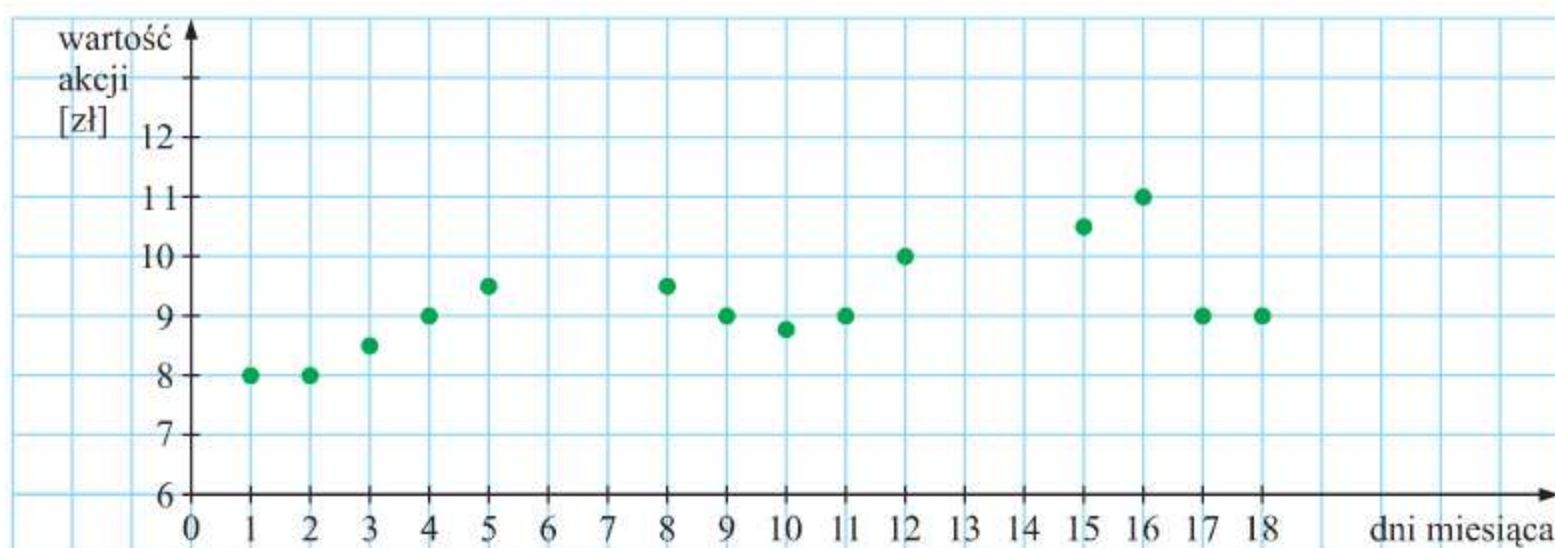


- 2** Na wykresie przedstawiono wzrost Basi w pierwszych latach życia.

- Ile centymetrów mierzyła Basia w momencie narodzin?
- W którym roku życia dziewczynka rosła najszybciej?
- Kiedy osiągnęła 1 m wzrostu?
- Ile centymetrów wzrostu miała Basia w wieku 5 lat?
- W jakim wieku miała 92 cm wzrostu?
- Basia w wieku 19 lat osiągnęła 174 cm wzrostu. Ile centymetrów urosła od momentu narodzin?



- 3 Na wykresie przedstawiono ceny akcji pewnej firmy w kilkunastu dniach roboczych miesiąca.



Skorzystaj z wykresu i odpowiedz na pytania.

- Jaka była najwyższa, a jaka najniższa cena akcji w podanym okresie?
 - Kiedy akcje firmy osiągnęły najwyższą cenę?
 - Kiedy należało kupić akcje, a kiedy sprzedać, aby zysk z transakcji był największy?
 - Kiedy był największy spadek wartości akcji?
- 4 Skorzystaj z danych zamieszczonych w tabeli i sporządź wykres średniej miesięcznej temperatury w Krakowie w 2018 r., a następnie odpowiedz na pytania.

Miesiąc	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Średnia temp. [°C]	0,9	-3,0	0,6	13,8	17,1	18,9	19,9	20,6	15,6	10,4	4,5	1,2

Źródło: <https://krakow.stat.gov.pl>

- W jakim okresie średnia temperatura rosła?
- W jakim okresie średnia temperatura malała?
- Na przełomie których dwóch miesięcy średnia temperatura najbardziej się obniżyła? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
A. IX–X B. X–XI C. XI–XII D. I–II
- Jaka była różnica między najwyższą i najniższą średnią temperaturą miesiąca w skali roku? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
A. 3,6°C B. 23,6°C C. 19,0°C D. 17,6°C

Wyzwanie

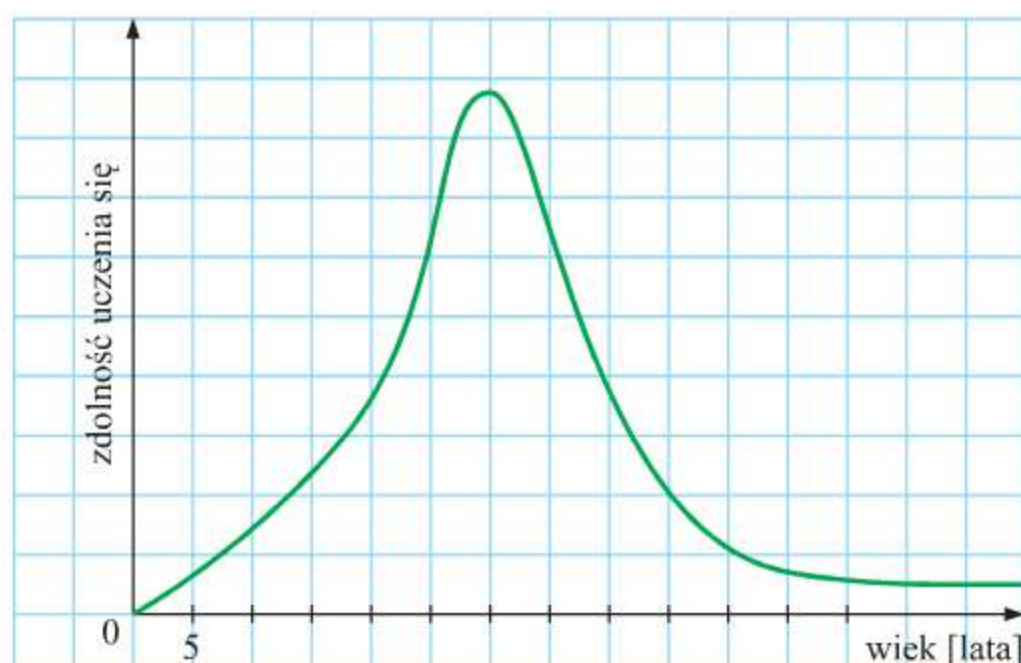
Andrzej wyjechał rowerem z domu o godzinie 9.00. W pierwszej godzinie jazdy przebył 20 km, a następnie zrobił sobie półgodzinną przerwę na drugie śniadanie. Kolejną godzinę jechał z tą samą prędkością co wcześniej, a następnie znacznie zwiększył prędkość. Do godziny 12.30 przejechał 80 km.

- Wykonaj wykres ilustrujący przebieg podróży Andrzeja.
- Ile kilometrów przejechał Andrzej od godziny 11.00 do 12.00?
- O której godzinie Andrzej pokonał 30 km?
- Podaj średnią prędkość Andrzeja na tej trasie. Uwzględnij przerwę na posiłek.

Sprawdź się!

- 1 Na wykresie przedstawiono zależność między zdolnością uczenia się a wiekiem człowieka.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



W wieku ok. 30 lat zdolność uczenia się jest największa.

P

F

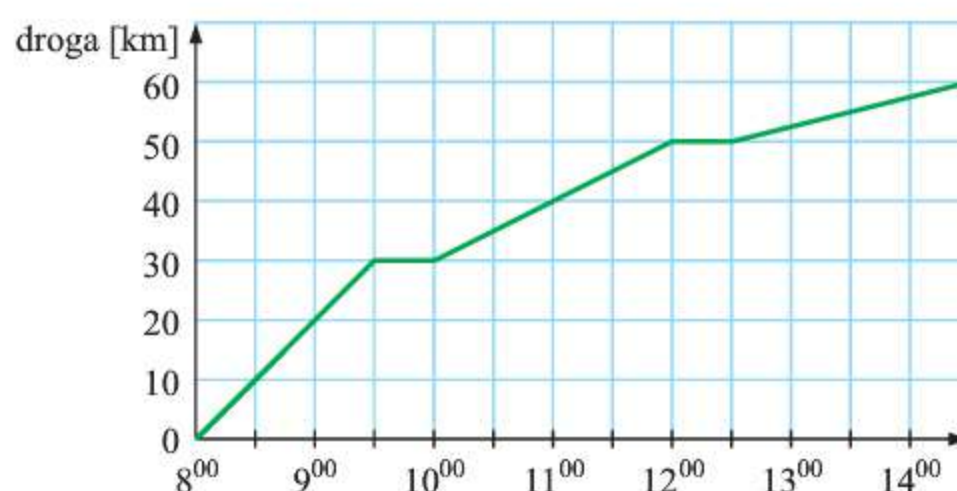
Zdolność uczenia się maleje od urodzenia do ok. 30. roku życia, rośnie po 30 roku życia i jest stała po 60. roku życia.

P

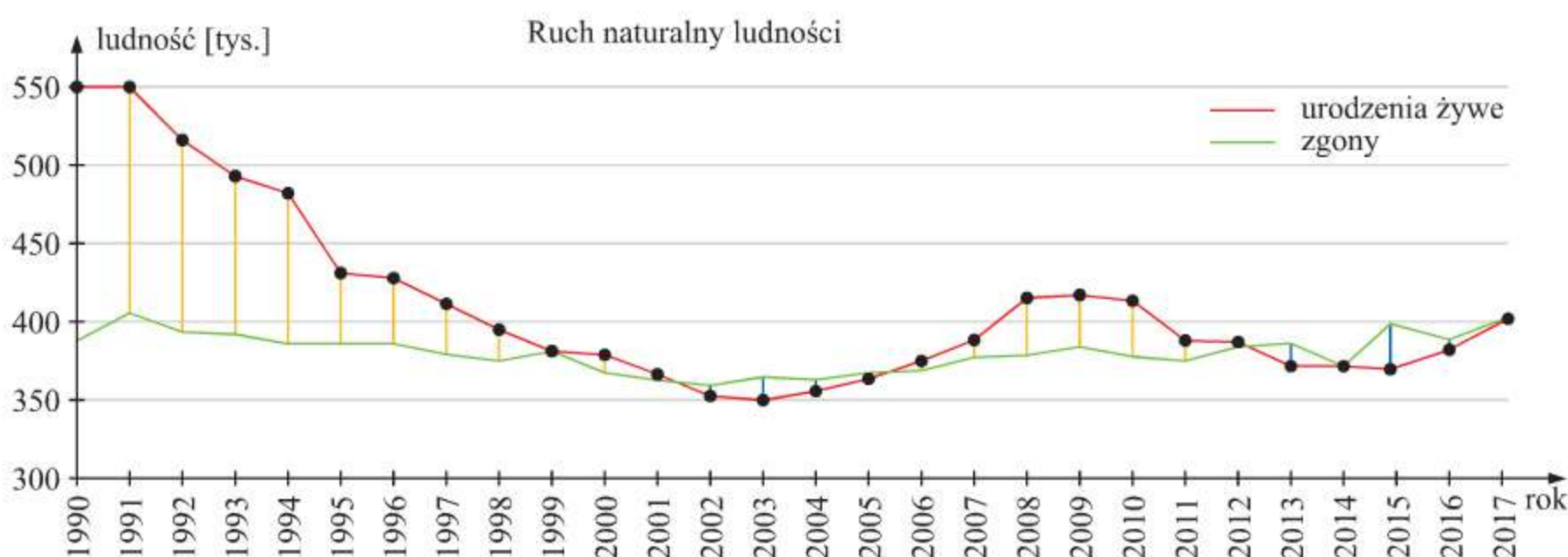
F

- 2 Na wykresie przedstawiono przebieg rowerowej wycieczki Tomka. Z powodu awarii roweru jeden etap trasy Tomek przebył pieszo.

- a) Z jaką średnią prędkością Tomek pokonał odcinek trasy przed pierwszą przerwą?
b) Który etap trasy Tomek przebył pieszo?
c) W jakim czasie Tomek przebyłby całą trasę, gdyby jego średnia prędkość była taka jak między godziną 10.00 a 12.00?



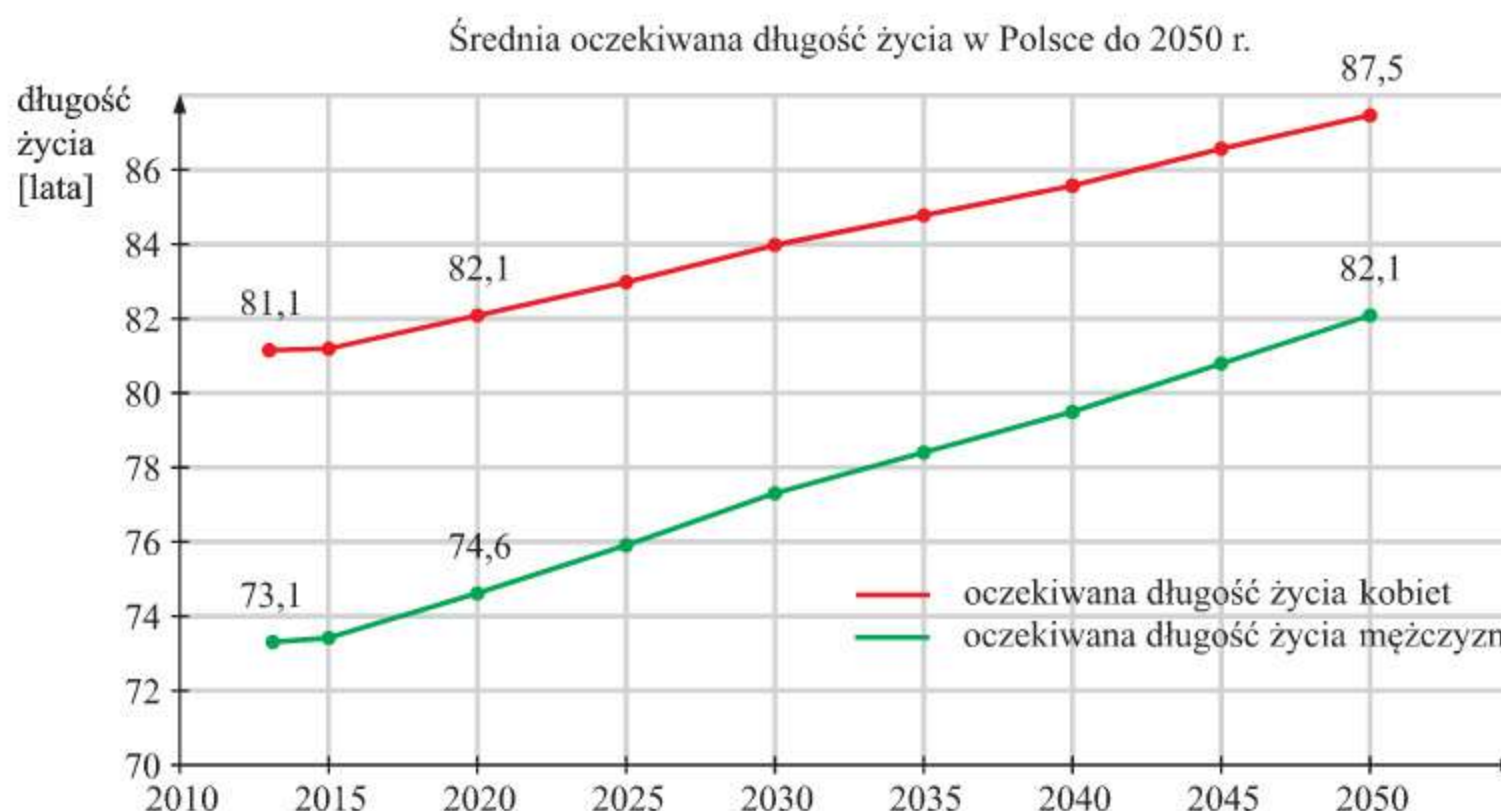
- 3 Przyrost naturalny to różnica między liczbą urodzeń i zgonów przypadająca na 1000 mieszkańców. Na wykresie przedstawiono urodzenia, zgony i przyrost naturalny ludności w Polsce w latach 1990–2017.



Źródło: GUS, Rocznik Demograficzny 2018 r.

- W którym roku przyrost naturalny był największy?
- W których latach przyrost naturalny utrzymywał się prawie na stałym poziomie?
- W których latach występował ujemny lub bliski zeru przyrost naturalny?
- W których latach nastąpił największy spadek liczby urodzeń?

- 4 Na wykresie przedstawiono prognozę przeciętnej długości życia kobiet i mężczyzn w Polsce w latach 2014–2050.



Źródło: GUS, Prognoza ludności na lata 2014–2050

- Kto przeciętnie będzie żył dłużej – kobiety czy mężczyźni?
- O ile lat wzrasta średnia oczekiwana długość życia w przypadku mężczyzn, a o ile w przypadku kobiet w prezentowanym okresie?
- Czy w latach 2020–2030 wzrost średniej długości życia będzie większy w przypadku kobiet czy mężczyzn?
- O ile lat zmieni się różnica średniej oczekiwanej długości życia mężczyzn w stosunku do średniej oczekiwanej długości życia kobiet w ciągu prezentowanego okresu?

- 5 W tabeli przedstawiono roczne zużycie gazu w poszczególnych miesiącach przez czteroosobową rodzinę.

Miesiąc	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Zużycie gazu [m ³]	350	300	250	300	200	125	50	25	50	100	175	325

Przedstaw te dane na wykresie.

3. Średnia arytmetyczna

Przypomnij sobie

- jak obliczamy średnią arytmetyczną liczb,
- jak zaokrąglamy liczby.



Podczas zbierania różnego rodzaju danych powinniśmy zadbać o to, by pochodziły one od reprezentatywnej grupy osób. Gdy interesuje nas na przykład, jakiej muzyki słuchają uczniowie naszej szkoły, pamiętajmy, by zadać to pytanie chłopcom i dziewczętom, młodszym i starszym, znajomym bliższym i dalszym. Jeśli uda się nam dobrać taką zróżnicowaną grupę uczniów, mówimy, że badanie zostało przeprowadzone na **próbie reprezentatywnej**, a więc wyniki takiego badania mają szansę być wiarygodne.

Zgromadzone wyniki, inaczej dane statystyczne, są **danymi surowymi**. Gdy chcemy poznać ich cechy charakterystyczne, musimy je uporządkować i opracować. Cechy charakterystyczne danych statystycznych nazywamy **zmiennymi**.

Przykład 1.

Dwunastoosobowa grupa turystów zwiedziła Kraków, Gdańsk, Warszawę, Sopot i Zakopane. Uczestnikom tej grupy zadano pytanie: *Które ze zwiedzanych miast podoba ci się najbardziej?*. Odpowiedzi zamieszczono w poniższej tabeli.

Miasto (zmienna)	Odpowiedzi turystów (dane surowe)	Liczebność (wartość zmiennej)
Kraków		4
Gdańsk		4
Warszawa		2
Sopot		1
Zakopane		1
Razem		12

Narysuj diagramy słupkowy i kołowy prezentujące dane z tabeli.

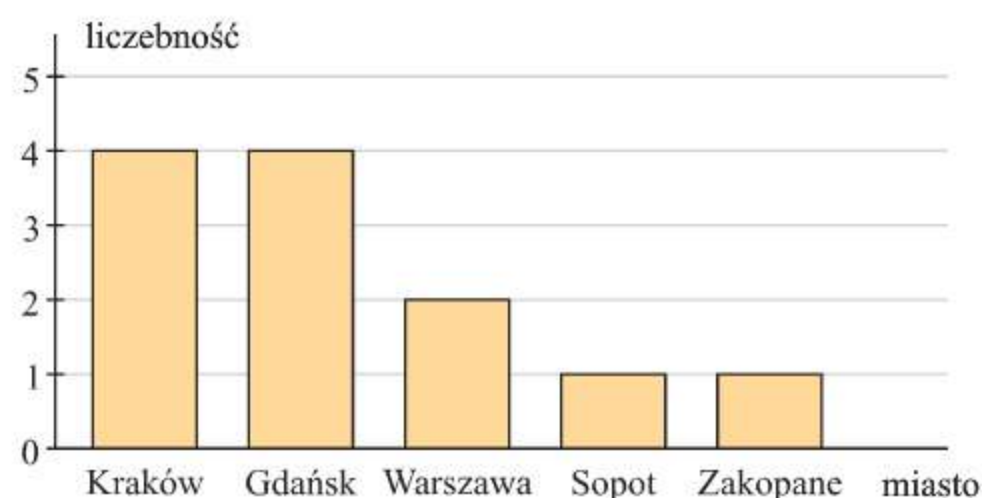
Liczebność zmiennej to liczba wskazująca, ile razy zmienna pojawiła się w próbie. Liczebność zmiennej Kraków wynosi 4, liczebność całej próby to 12. Powyższa tabela przedstawia **rozkład liczebności**. Tak uporządkowane dane możemy teraz zaprezentować na różne sposoby.

Diagram słupkowy

Wysokość słupka obrazuje, ile razy zmienna pojawiła się w próbie, czyli odpowiada jej liczebności.

Diagramy słupkowe służące do przedstawiania rozkładu liczebności zwane są **histogramami**.

Wśród 12 turystów 4 wybrało Kraków jako najładniejsze miasto. Odpowiedź ta padła z **częstością** $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

**Diagram kołowy**

Zaznaczmy na nim kąty odpowiadające częstości występowania poszczególnych danych w całej próbie.

Miasto	Częstość	Miara kąta
Kraków	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{12} \cdot 360^\circ = 120^\circ$
Gdańsk	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{12} \cdot 360^\circ = 120^\circ$
Warszawa	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12} \cdot 360^\circ = 60^\circ$
Sopot	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12} \cdot 360^\circ = 30^\circ$
Zakopane	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12} \cdot 360^\circ = 30^\circ$



Z diagramu łatwo odczytać, że ulubionymi miastami turystów z badanej grupy są Kraków i Gdańsk.

Przykład 2.

Oto wzrost 30-osobowej grupy uczniów, wyrażony w centymetrach.

154	170	160	158	174	182	165	152	148	172	168	172	163	149	169
173	176	181	166	175	180	159	163	176	178	182	166	157	170	176

Uzyskane dane mają bardzo dużą rozpiętość: wzrost najniższego ucznia to 148 cm, a najwyższego to 182 cm. Dane te trzeba uporządkować. Uporządkujemy je od wartości najmniejszej do największej:

148	149	152	154	157	158	159	160	163	163	165	166	166	168	169
170	170	172	172	173	174	175	176	176	176	178	180	181	182	182

Różnica między największą a najmniejszą liczbą w danej próbie jest równa $182 - 148 = 34$. Tę różnicę nazywamy **rozstępem**.

Średnia arytmetyczna to liczba uzyskana przez dodanie wszystkich wyników w próbie i podzielenie tej sumy przez liczebność próby.

Średnia arytmetyczna wynosi:

$$\frac{148 + 149 + 152 + \dots + 3 \cdot 176 + 178 + 180 + 181 + 2 \cdot 182}{30} = 167,8$$

Średni wzrost ucznia w tej grupie uczniów jest równy 167,8 cm.

W danej próbie najczęściej wystąpiła liczba 176. Taką liczbę nazywamy **modą**.

- 1 Wśród uczniów pewnej klasy przeprowadzono ankietę na temat: *Ile czasu średnio poświęcasz na codzienną naukę w domu?*, a wyniki ankiety przedstawiono w tabelce.

- a) Narysuj histogram dla tych danych.
b) Ile czasu ty średnio poświęcasz na naukę w domu?



Czas t [h]	Liczba uczniów
$t < 1$	5
$1 \leq t < 1,5$	5
$1,5 \leq t < 2$	10
$2 \leq t < 2,5$	6
$t \geq 2,5$	4

- 2 W sześciu różnych sklepach ceny (w złotych) jednego kilograma czereśni były następujące: 18, 12, 16, 14, 10, 20. Oblicz:

- a) średnią cenę 1 kg czereśni,
b) rozstęp, czyli różnicę między najwyższą a najniższą ceną.

- 3 W klasie 7a z pracy klasowej z matematyki uczniowie uzyskali następujące oceny: 4, 3, 5, 1, 3, 6, 4, 4, 3, 2, 5, 1, 3, 3, 2, 5, 4, 3, 5, 4, 3, 3, 2, 4. Oblicz:

- a) częstość wystąpienia oceny 5 oraz oceny 1,
b) średnią arytmetyczną wystawionych ocen – wynik zaokrąglaj do 0,1.

- 4 W tabeli podano oceny roczne Wojtka z wybranych przedmiotów.

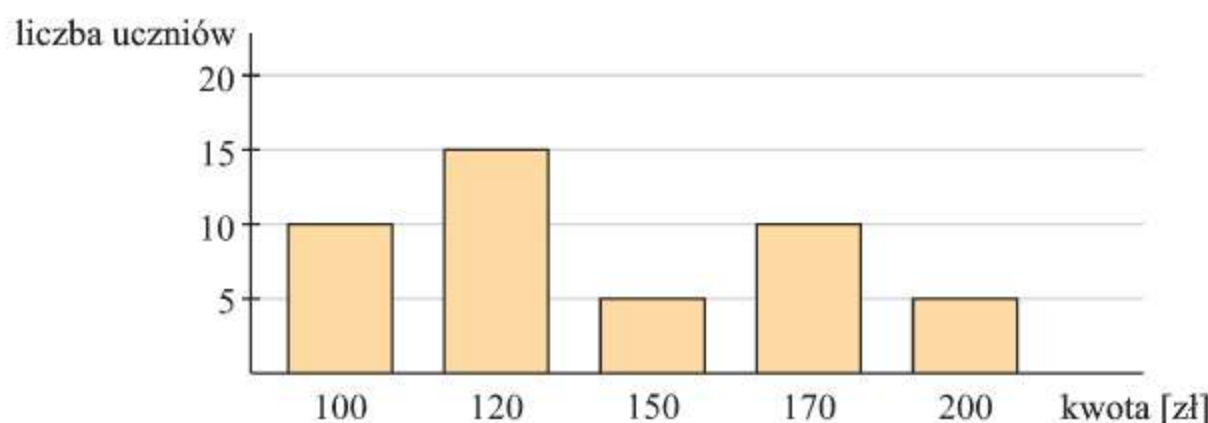
Jaką ocenę powinien otrzymać Wojtek z matematyki, aby jego średnia ocen rocznych z podanych przedmiotów była równa 5? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 3 B. 4
C. 5 D. 6

Przedmiot	Ocena
język polski	6
język angielski	5
historia	6
fizyka	4
matematyka	?

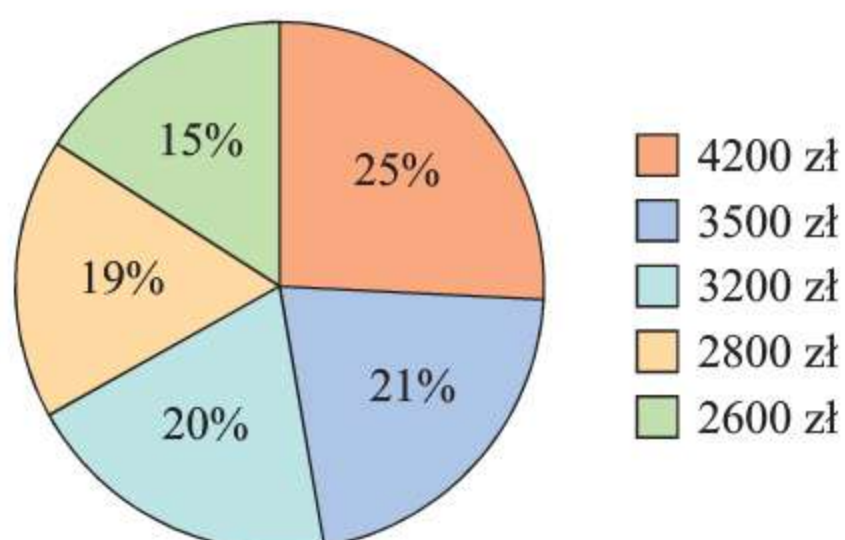
- 5 Średnia arytmetyczna liczb: 11, 12, 8, 11, x , 3, 4, 6, 8, 8 jest równa 8,5. Oblicz x .

- 6 Na diagramie przedstawiono informacje o stypendiach za bardzo dobre wyniki w nauce, otrzymanych przez uczniów pewnej szkoły.



- Jaką kwotę przeznaczono na stypendia za bardzo dobre wyniki w nauce w tej szkole?
- Ilu uczniów otrzymało stypendium za bardzo dobre wyniki w nauce?
- Oblicz z dokładnością do 1 zł średnią wysokość wypłaconego stypendium.

- 7 Na diagramie przedstawiono rozkład miesięcznych wynagrodzeń pracowników pewnej firmy.



Sześćdziesięciu pracowników otrzymało pensję w wysokości 2600 zł. Oblicz:

- ilu pracowników liczy firma,
- jaka jest średnia pensja w tej firmie,
- jaka jest różnica między najwyższym i najniższym wynagrodzeniem,
- jaki procent pracowników tej firmy zarabia więcej, niż wynosi średnia.

- 8 Średnia arytmetyczna wzrostu dwunastu chłopców z klasy sportowej była równa 175 cm. Do klasy dołączył jeden uczeń i wtedy średnia arytmetyczna wzrostu chłopców wzrosła o 1 cm. Ile centymetrów wzrostu miał ten chłopiec?

Wyzwanie

Zapisz średnią arytmetyczną średniej arytmetycznej liczb a i b oraz średniej arytmetycznej:

- liczb c i d . Czy jest ona równa średniej arytmetycznej liczb a , b , c i d ?
- liczb c , d i e . Czy jest ona równa średniej arytmetycznej liczb a , b , c , d i e ?

Sprawdź się!

- 1 Masa siedmiu dziewcząt mierzona w kilogramach wynosi: 52, 47, 53, 49, 51, 48, 57. Oblicz średnią arytmetyczną ich mas.
- 2 W pewnym tygodniu lutego minimalne temperatury w Krakowie wynosiły kolejno (w stopniach Celsjusza): -12 , -13 , -8 , -4 , 0 , 3 , 5 . Oblicz z dokładnością do $0,1^{\circ}\text{C}$ średnią arytmetyczną tych danych oraz różnicę między najwyższą i najniższą temperaturą.
- 3 W czerwcu wychowawca pewnej klasy zanotował następujące liczby spóźnień poszczególnych uczniów:
2, 4, 5, 2, 0, 0, 0, 2, 1, 1, 1, 3, 3,
4, 5, 5, 0, 0, 0, 1, 2, 0, 0, 0, 3, 3.
a) Oblicz z dokładnością do jednostki średnią liczbę spóźnień przypadającą na jednego ucznia tej klasy.
b) Ilu uczniów miało liczbę spóźnień poniżej średniej?
- 4  Podczas badań lekarskich na koloniach letnich zmierzono wzrost uczestników grupy średniej. Wyniki przedstawiono za pomocą tabeli.

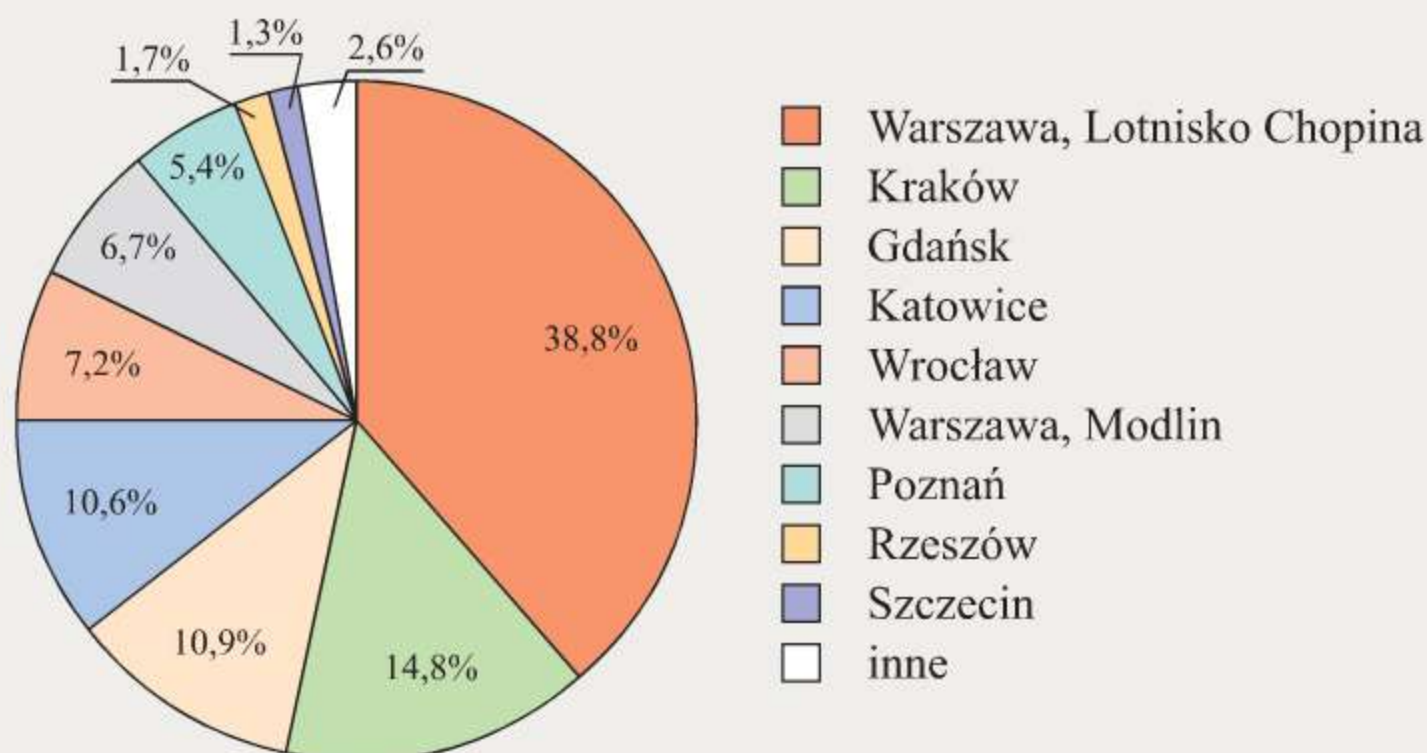


Wzrost [cm]	151	152	153	154	155	156
Liczebność	3	4	7	6	3	1

- a) Ile dzieci było w tej grupie?
- b) Oblicz z dokładnością do 1 cm średni wzrost tej grupy.
- 5 Szef pewnej firmy zatrudnia 20 pracowników, czyli w sumie w tej firmie pracuje 21 osób. Pewnego dnia szef zapowiedział podwyżkę pensji dla wszystkich, średnio po 100 zł. Okazało się, że każdy pracownik otrzymał 70 zł więcej niż dotychczas. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.
Szef A / B danego słowa.
A. mógł dotrzymać B. nie dotrzymał
Jeśli szef dotrzymał słowa, to podwyżka jego pensji wynosiła C / D.
C. 600 zł D. 700 zł

Zadania utrwalające

- 1** Na diagramie przedstawiono ruch pasażerów odprawianych w polskich portach lotniczych w 2018 r.



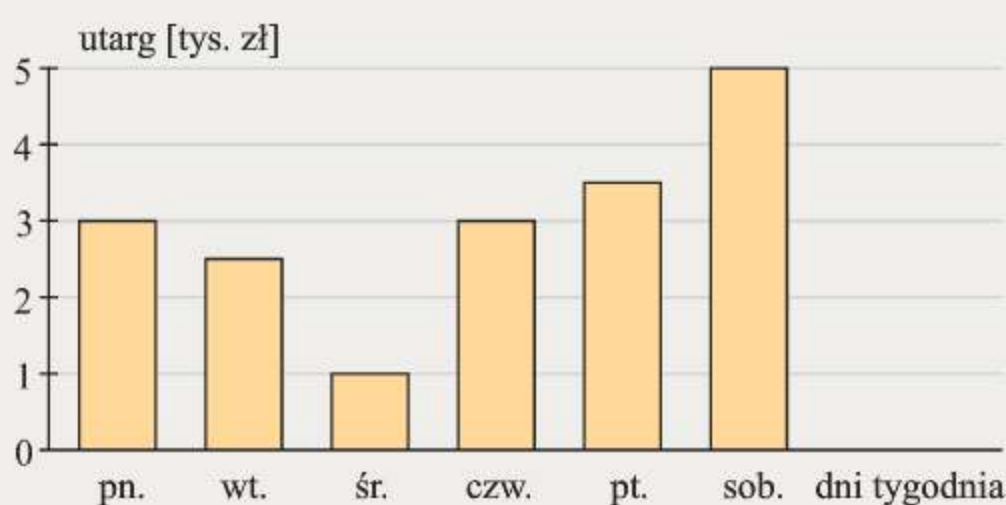
Źródło: Urząd Lotnictwa Cywilnego

Ogółem na polskich lotniskach odprawiono 45 705 877 pasażerów.

- Ile procent pasażerów łącznie odprawiono z lotnisk w Szczecinie i Rzeszowie?
- Ilu pasażerów odprawiono z lotniska w stolicy Małopolski?
- Ilu pasażerów odprawiono z lotnisk poza stolicą Polski i Modlinem?
- O ilu więcej pasażerów odprawiono z lotniska w Gdańsku niż z lotniska w Katowicach?

W punktach b)–d) wyniki zaokrąglaj do jedności.

- 2** Na diagramie przedstawiono utarg małej stacji benzynowej w ciągu tygodnia.



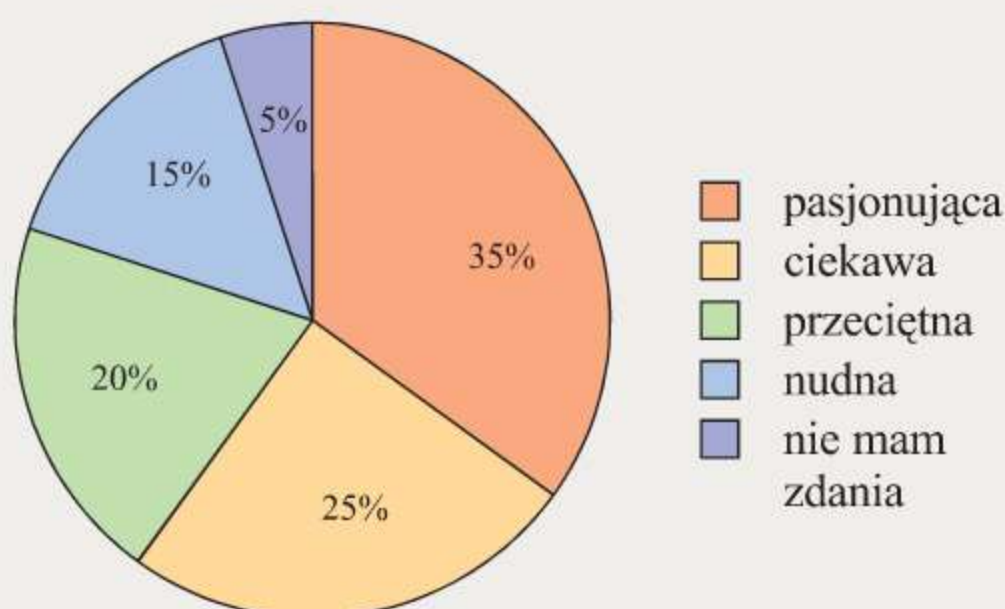
- Którego dnia sprzedano więcej benzyny niż w czwartek?
- Którego dnia stacja była nieczynna?
- Jaki był utarg z całego tygodnia?
- Jaki był średni utarg dzienny w wymienionych dniach?
- Ile litrów paliwa sprzedano w wymienionych dniach, jeśli 1 l benzyny kosztuje średnio 4,50 zł?
- Ile łącznie kilometrów mogą przejechać samochody, które tankowały paliwo w środę, jeżeli samochód zużywa średnio 8 l paliwa na 100 km?

- 3 W tabelce przedstawiono długości polskich dróg publicznych o twardej nawierzchni.

Lata	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Drogi [tys. km]	113	124	154	180	218	250	274	284	288	291	294	300	304

Źródło: *Świat w liczbach 2013*, WSiP, Warszawa 2013; GUS

- a) Narysuj pionowy diagram słupkowy ilustrujący te dane.
 b) Jak zmieniła się długość dróg publicznych w Polsce w ciągu 68 lat?
 c) W których dziesięcioleciach pomiędzy 1950 a 2010 rokiem przyrost długości dróg publicznych liczony w kilometrach był największy, a w których – najmniejszy? Ile wynosił ten przyrost?
- 4 Grupę 40 uczniów zapytano o zdanie na temat pewnej przeczytanej lektury szkolnej. Wyniki tej ankiety przedstawiono na diagramie kołowym.



Zaprezentuj te wyniki na diagramie słupkowym ukazującym liczbę uczniów wyrażających poszczególne opinie.

- 5 Na wykresie przedstawiono wyniki dotyczące przyjazdów turystów zagranicznych do Polski, przygotowane na podstawie danych Instytutu Turystyki.



- a) W jakich przedziałach czasu przyjazd turystów zagranicznych do Polski miał tendencję spadkową?
 b) W którym roku liczba turystów zagranicznych była najmniejsza?
 c) W których latach liczba turystów zagranicznych była mniejsza niż 15 mln?

- 6 Zapytano 24 uczniów, jaki przedmiot lubią najbardziej. Otrzymano wyniki:

wf – 8

język polski – 5

historia – 3

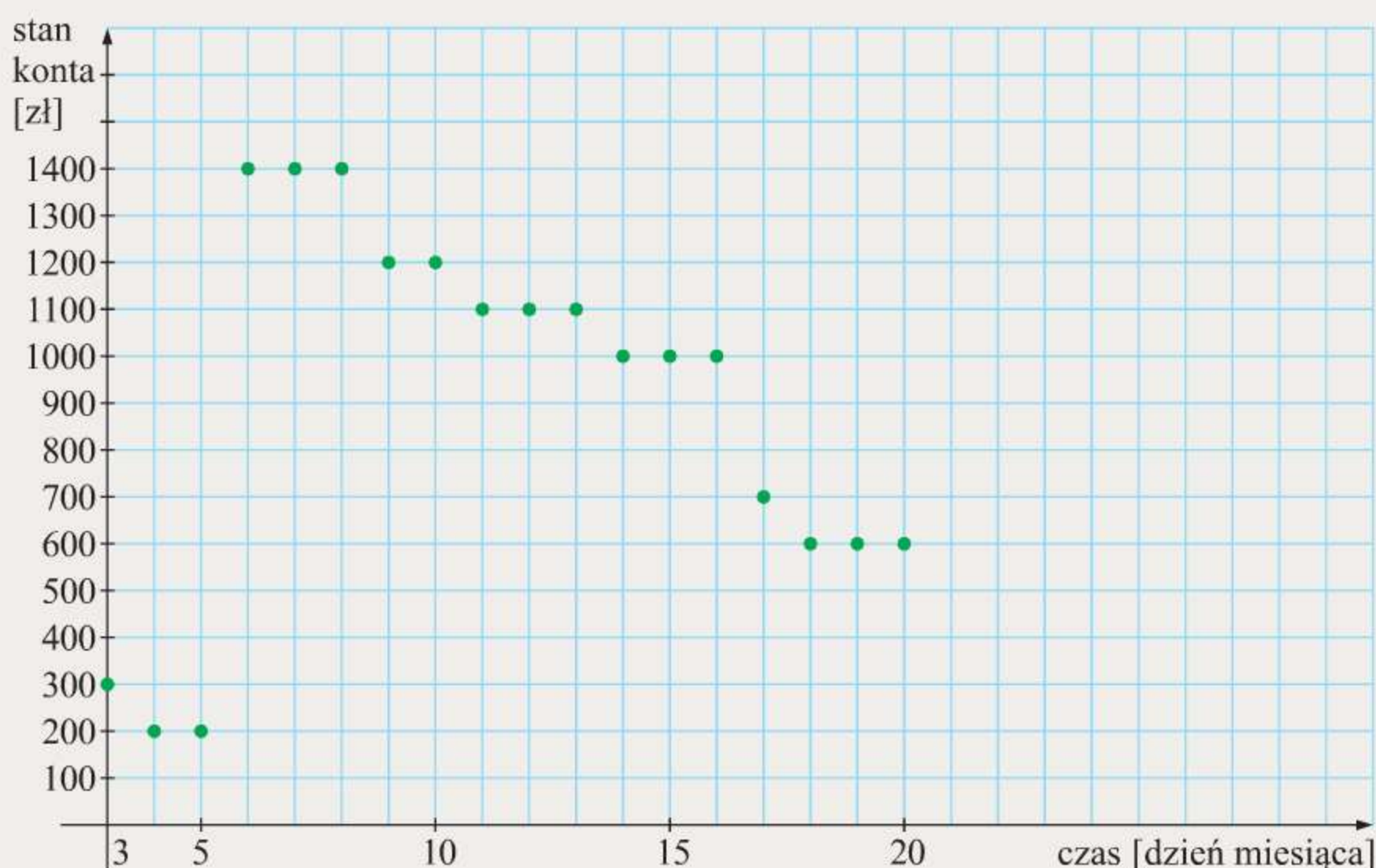
matematyka – 1

geografia – 6

fizyka – 1

Sporządź procentowy diagram kołowy dla tych danych.

- 7 Na wykresie przedstawiono stan konta bankowego babci Marka w okresie od 3 do 20 maja. Jedynym dochodem babci jest emerytura. Wiadomo też, że babcia każdego dnia wykonywała najwyżej jedną operację bankową, a w dniu, w którym na jej konto wpłynęła emerytura, nie dokonywała wypłat.



- Ile razy (między 3 a 19 maja) babcia Marka dokonywała wypłaty z konta?
- Którego dnia miesiąca wpłynęła emerytura i w jakiej wysokości?
- Podaj liczbę dni, w których na koncie nie dokonano żadnych operacji.
- Jaki będzie stan konta 25 maja, jeżeli babcia będzie pobierać z konta po 100 zł dziennie od 21 do 25 maja?

- 8 Oto wyniki gry w rzutki przeprowadzonej w pewnej klasie:

82	86	85	88	92	103	80	87	91	85	83	86	88
87	94	82	96	100	94	86	81	90	89	86	94	

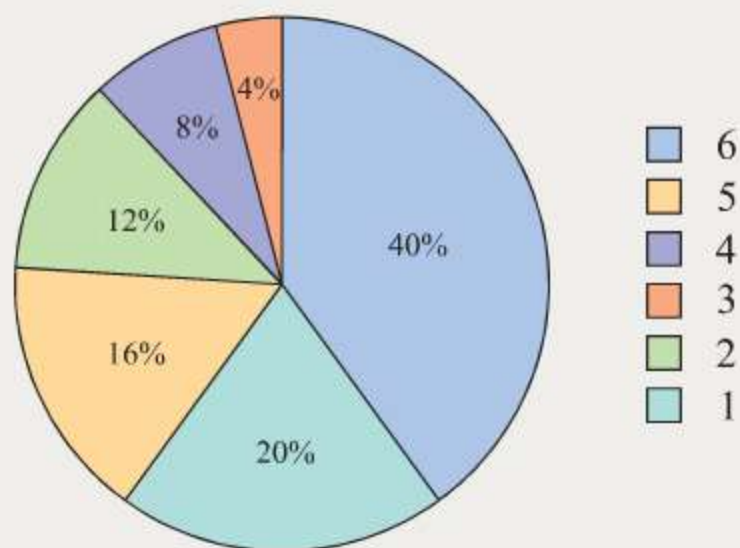
- Które wyniki były częstsze: poniżej 85 punktów czy powyżej 90?
- Jaki był średni wynik w tej klasie?
- Który wynik pojawiał się najczęściej?

- 9 W pewnym szpitalu notowano masę noworodków przebywających na oddziale położniczym. Uzyskano następujące wyniki w kilogramach:

3,7	4,0	3,5	3,7	2,5	1,8	3,5	3,6	2,9	1,5	4,5	2,3	1,6	4,2	3,2
3,8	2,5	2,4	3,7	5,0	3,4	2,6	2,8	2,6	4,1	4,8	3,0	4,4	3,0	3,2

- Podaj najczęściej występującą masę noworodka.
- Jaka jest różnica między najwyższą i najniższą masą noworodka?
- Oblicz średnią masę noworodków.
- Oblicz, jaki procent liczby noworodków ma masę powyżej 4 kg.

- 10 Na diagramie kołowym przedstawiono wyniki pracy klasowej w klasie, w której jest 16 dziewcząt i 9 chłopców.



- a) Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów						

- b) Wyznacz średnią arytmetyczną wszystkich ocen.

- 11 W pewnym zakładzie pracy jest 100 pracowników, z których: 90 zarabia po 2800 zł miesięcznie, 5 – po 3000 zł miesięcznie, 4 – po 5000 zł miesięcznie, 1 – 11 000 zł miesięcznie. Oblicz średnie miesięczne wynagrodzenie w tym zakładzie pracy.

Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

W zadaniach 1.–7. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

W szkolnym sklepiku sprzedawano lizaki w różnej cenie. W tabeli zanotowano, ile lizaków każdego rodzaju sprzedano w ciągu tygodnia.

Cena lizaka [zł]	0,50	0,60	0,70	0,80	1,00
Liczba sprzedanych lizaków	102	154	31	134	50

Na podstawie tych danych wykonaj zadania 1.–2.

- 1 Ile wynosi średnia cena lizaka?
A. 0,45 zł B. 0,72 zł C. 0,65 zł D. 0,75 zł
- 2 Ile złotych kosztuje najczęściej kupowany lizak?
A. 0,80 B. 0,70 C. 1,00 D. 0,60

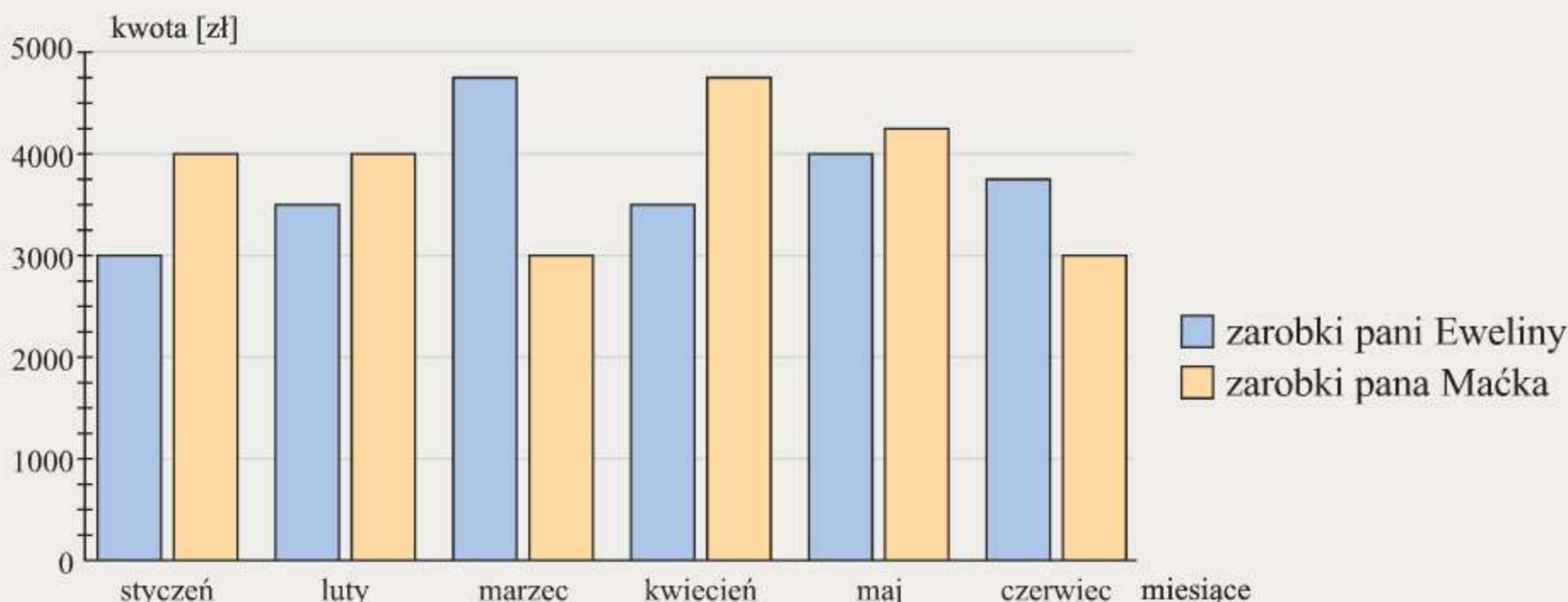
W pewnej klasie przeprowadzono ankietę na temat: *Ile godzin dziennie korzystasz z komputera?*, a wyniki przedstawiono w tabeli.

Liczba godzin	0	1	2	3	4
Liczba uczniów	2	6	10	4	8

Na podstawie tych danych wykonaj zadania 3.–5.

- 3 Ilu uczniów liczy ta klasa?
A. 30 B. 28 C. 22 D. 20
- 4 Ile godzin najczęściej spędzają uczniowie przy komputerze?
A. 1 B. 2 C. 10 D. 3
- 5 Ile wynosi średnia liczba godzin spędzonych przez uczniów przy komputerze?
A. ok. 2,3 B. 2,5 C. ok. 2,4 D. 2

Na diagramie słupkowym przedstawiono miesięczne zarobki pani Eweliny i pana Maćka.



Na podstawie tych danych wykonaj zadania 6.–8.

6 W których miesiącach zarobki pani Eweliny były wyższe niż pana Maćka?

- A. Tylko w marcu.
- B. W marcu i czerwcu.
- C. Tylko w czerwcu.
- D. W maju i czerwcu.

7 W których miesiącach zarobki pana Maćka były niższe od 4250 zł?

- A. Tylko w marcu.
- B. Tylko w styczniu i lutym.
- C. W styczniu, lutym, marcu i czerwcu.
- D. Tylko w styczniu, lutym i czerwcu.

8 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



Średnie zarobki pani Eweliny są równe 3875 zł.	P	F
Średnie zarobki pana Maćka są o 150 zł wyższe od średnich zarobków pani Eweliny.	P	F

9 Średnia ocen ze sprawdzianu dziesięciu uczniów jest równa 4,2. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Jeśli jeden uczeń z tej grupy otrzymał szóstkę, to średnia ocen pozostałych dziewięciu uczniów jest równa A / B.

A. 3,6

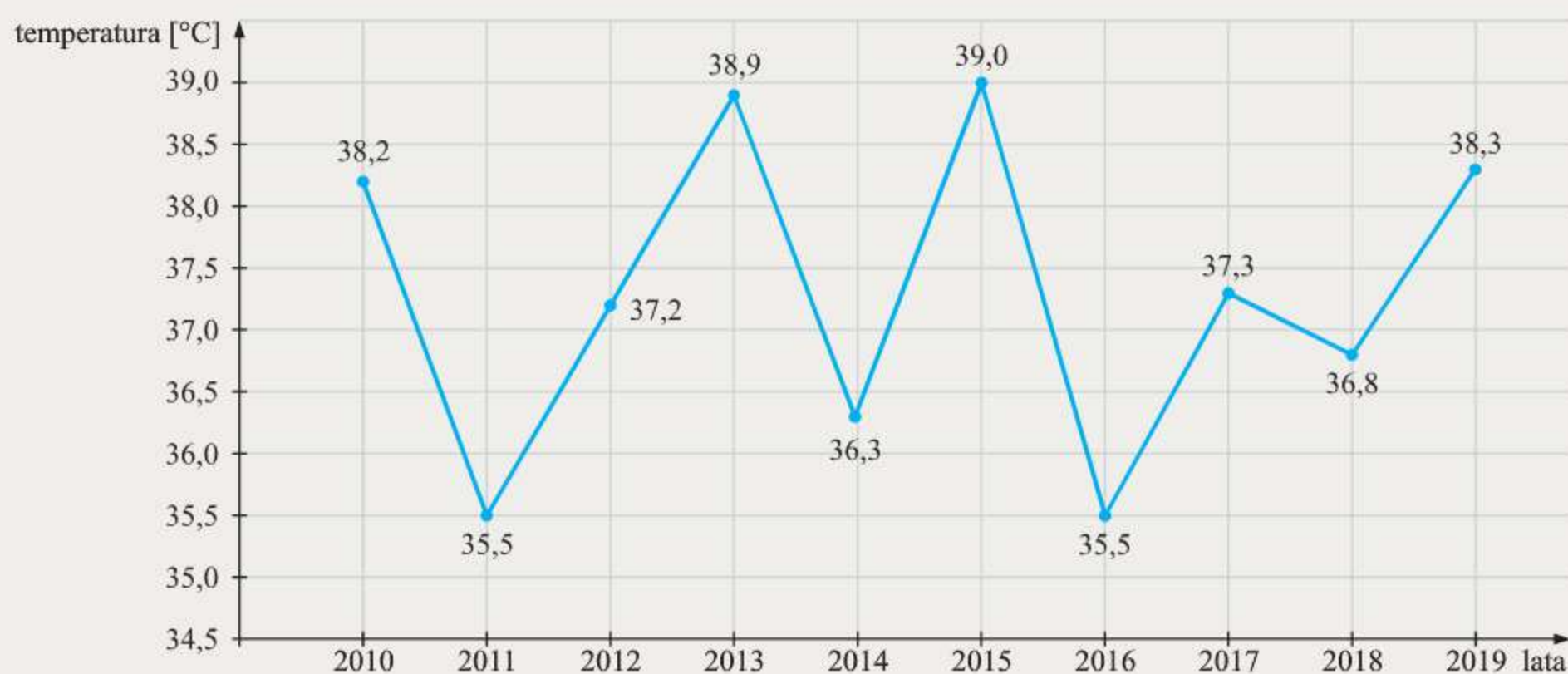
B. 4

Jeśli uczeń z tej grupy otrzymał trójkę, to średnia ocen pozostałych dziewięciu uczniów jest C / D niż 4,2.

C. mniejsza

D. większa

- 10 Na wykresie przedstawiono najwyższe temperatury w Polsce w latach 2010–2019.



Źródło: GUS

- Podaj lata, w których odnotowano wzrost najwyższej temperatury w Polsce.
- Oblicz różnicę między najwyższą a najniższą temperaturą w tym okresie.
- Oblicz średnią arytmetyczną najwyższych temperatur z dokładnością do $0,1^{\circ}\text{C}$.

Cyfry to znaki służące do zapisywania liczb w dziesiętnym układzie liczenia. Jest 10 cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Nazywamy je cyframi arabskimi, ponieważ w Europie rozpowszechnili je Arabowie.

Liczby naturalne: 0, 1, 2, 3, ..., 586, ... – liczby całkowite dodatnie wraz z 0. Zbiór liczb naturalnych oznaczamy jako N .

Liczby pierwsze: 2, 3, 5, ..., 79, ... – liczby naturalne większe od jedności, które mają tylko dwa dzielniki naturalne: 1 oraz samą siebie.

Np. $17 : 1 = 17$ $17 : 17 = 1$

Liczb pierwszych większych od 1 oraz mniejszych od 100 jest 25.

Liczby złożone: 4, 6, 8, ..., 72, ... – liczby naturalne większe od jedności, które mają więcej niż dwa dzielniki naturalne. Liczbę złożoną można przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych.

Np. $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ $25 = 5 \cdot 5$ $33 = 3 \cdot 11$

Uwaga: Liczby 0 i 1 nie są liczbami pierwszymi, a liczba 1 nie jest liczbą złożoną.

Rozłożenie liczb złożonych na czynniki pierwsze polega na zapisaniu ich w postaci iloczynu liczb pierwszych.

Np.

2	4	2
1	2	2
	6	2
	3	3
	1	

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

6	0	2
3	0	2
1	5	3
	5	5
	1	

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

4	7	2	2	
2	3	6	2	
1	1	8	2	
	5	9	5	9
		1		

$$472 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 59$$

Aby znaleźć **największy wspólny dzielnik** dwóch liczb, należy rozłożyć je na czynniki pierwsze, zakreślić wspólne dzielniki i obliczyć ich iloczyn.

3	6	2	2	4	2
1	8	2	1	2	2
	9	3		6	2
	3	3		3	3
	1			1	

$$\text{NWD}(36, 24) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

Aby znaleźć **najmniejszą wspólną wielokrotność** dwóch liczb, należy rozłożyć je na czynniki pierwsze, zakreślić dzielniki jednej liczby i niepowtarzające się dzielniki drugiej liczby oraz pomnożyć pierwszą liczbę przez zakreślone czynniki drugiej liczby.

3	6	2	2	4	2
1	8	2	1	2	2
	9	3		6	2
	3	3		3	3
	1			1	

$$\text{NWW}(36, 24) = 36 \cdot 2 = 72$$

Mnożenie i dzielenie ułamków dziesiętnych przez 10, 100, 1000, ...

Jeżeli ułamek dziesiętny mnożymy przez 10, 100, 1000, ..., to przecinek przesuwamy o 1, 2, 3, ... cyfry w prawo.

Np. $2,35 \cdot 10 = 23,5$	$0,58 \cdot 10 = 5,8$	$0,007 \cdot 10 = 0,07$
$5,035 \cdot 100 = 503,5$	$0,72 \cdot 100 = 72$	$0,008 \cdot 100 = 0,8$
$3,9045 \cdot 1000 = 3904,5$	$0,86 \cdot 1000 = 860$	$0,005 \cdot 1000 = 5$

Jeżeli ułamek dziesiętny dzielimy przez 10, 100, 1000, ..., to przecinek przesuwamy o 1, 2, 3, ... cyfry w lewo.

Np. $15,2 : 10 = 1,52$	$13,26 : 10 = 1,326$	$0,04 : 10 = 0,004$
$345,8 : 100 = 3,458$	$29,2 : 100 = 0,292$	$0,5 : 100 = 0,005$
$15,8 : 1000 = 0,0158$	$2,5 : 1000 = 0,0025$	$0,2 : 1000 = 0,0002$

Cechy podzielności liczb naturalnych przez: 2, 5, 10, 3, 9, 4

Liczba jest podzielna przez:

2 – jeżeli jej ostatnią cyfrą jest: 0, 2, 4, 6, lub 8, Liczby parzyste są podzielne przez 2.

5 – jeżeli jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5,

10 – jeżeli jej ostatnią cyfrą jest 0,

Liczba, której ostatnią cyfrą jest 0, jest podzielna przez 2, 5 i 10.

3 – jeżeli suma cyfr tej liczby jest podzielna przez 3, np.: 48, 153, 1920

9 – jeżeli suma jej cyfr jest podzielna przez 9, np.: 72, 189, 3456

4 – jeżeli jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4, np.: 124, 2540, 3864.

Prawa działań

Przemienność dodawania i mnożenia

$$a + b = b + a \quad \text{np. } 5 + 8 = 8 + 5$$

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \text{np. } 3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$$

Łączność dodawania i mnożenia

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{np. } (6 + 2) + 4 = 6 + (2 + 4)$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \text{np. } (2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5)$$

Rozdzielność mnożenia względem dodawania i odejmowania

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{np. } 4 \cdot (5 + 2) = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 2$$

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c \quad \text{np. } 6 \cdot (8 - 4) = 6 \cdot 8 - 6 \cdot 4$$

Rozdzielność dzielenia względem dodawania i odejmowania

$$(a + b) : c = a : c + b : c \quad \text{np. } (4 + 12) : 2 = 4 : 2 + 12 : 2$$

$$(a - b) : c = a : c - b : c \quad \text{np. } (24 - 6) : 3 = 24 : 3 - 6 : 3$$

Zero w mnożeniu i dzieleniu

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad \text{np. } 8 \cdot 0 = 0 \cdot 8 = 0$$

$$0 : 0 = 0$$

Jeżeli jednym z czynników jest 0, to iloczyn zawsze jest równy zero.

$$\text{Np. } 25 \cdot 39 \cdot 86 \cdot 41 \cdot 611 \cdot 1000 \cdot 0 \cdot 7 = 0$$

$0 : a = 0$ dla każdej liczby a różnej od zera np., $0 : 97 = 0$.

Dzielenie przez zero jest niewykonalne!!!

Rozszerzanie ułamków

Aby rozszerzyć ułamek, należy pomnożyć licznik i mianownik przez dowolną liczbę naturalną większą od 1.

$$\text{Np. } \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12} \quad \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

Skracanie ułamków

Aby skrócić ułamek, należy podzielić licznik i mianownik tego ułamka przez wspólny dzielnik różny od 1.

$$\text{Np. } \frac{16}{20} = \frac{16 : 4}{20 : 4} = \frac{4}{5} \quad \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

Średnia arytmetyczna liczb to iloraz sumy tych liczb przez liczbę składników sumy.

Na przykład średnia arytmetyczna liczb: 15, 17, 18, 20 jest równa:

$$\frac{15 + 17 + 18 + 20}{4} = \frac{70}{4} = 17,5.$$

System rzymski

Do zapisu liczb w systemie rzymskim używa się siedmiu liter. Każda z nich oznacza inną liczbę.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Litery te ustawia się w określonym porządku. Liczbę odczytuje się poprzez dodawanie lub odejmowanie liczb przypisanych poszczególnym literom, a następnie sumowanie częściowych wyników.

$$\text{Np. DLX} = 500 + (50 + 10) = 560$$

$$\text{DXL} = 500 + (50 - 10) = 540$$

$$\text{MDCCLXXIX} = 1000 + (500 + 100 + 100) + (50 + 10 + 10) + (10 - 1) = 1779$$

Podczas używania znaków rzymskich należy stosować następujące zasady zapisu liczb:

1. Obok siebie mogą stać maksymalnie trzy jednakowe znaki spośród: I, X, C, M.
2. Nie można powtarzać obok siebie znaków: V, L, D.
3. Liczby, które wymagałyby czterech jednakowych znaków obok siebie, zapisujemy następująco: IV = 5 - 1 = 4, IX = 10 - 1 = 9, XL = 50 - 10 = 40 itd.
4. Znak I może stać tylko przed V i X, znak X – tylko przed L i C, a znak C – tylko przed D i M.
5. Znaki I, X, C poprzedzające znaki oznaczające większe liczby mogą występować tylko jeden raz.
6. Znaki V, L, D nie mogą poprzedzać znaków oznaczających większe liczby.

A

ar / 94

B

bok czworokąta / 102

bok trójkąta / 78

C

cechy podzielności liczb naturalnych
przez: 2, 5, 10, 3, 9, 4 / 303

cecha przystawania trójkątów druga
(bkb) / 89

cecha przystawania trójkątów pierwsza
(bbb) / 88

cecha przystawania trójkątów trzecia
(kbb) / 90

cyfra / 302

częstość / 291

czworokąt / 101

Ć

ćwiartka układu współrzędnych / 218

D

dane statystyczne / 276

dane surowe / 290

definicja / 226

definiowanie pojęcia / 226

diagram kołowy / 278

diagram procentowy / 278

diagram prostokątny / 278

diagram słupkowy / 276

długość odcinka / 237

dowód / 227

F

figura płaska / 60

figury przystające / 87

G

graniastosłup czworokątny / 255

graniastosłup pochyły / 257

graniastosłup prawidłowy / 256

graniastosłup prosty / 254

graniastosłup sześciokątny / 255

graniastosłup trójkątny / 255

H

hektar / 94

hektolitr / 265

hipoteza / 227

histogram / 291

J

jednomian / 164

jednomian uporządkowany / 164

jednostka objętości / 265

jednostka pola / 94

K

kartezjański układ współrzędnych / 219

kąt / 64

kąt ostry / 65

kąt pełny / 65

kąt półpełny / 65

kąt prosty / 65

kąt rozwarty / 65

kąt wewnętrzny trójkąta / 78

kąt wklęsły / 65

kąt wypukły / 65

kąt zerowy / 65

kąt zewnętrzny trójkąta / 84

kąty naprzemianległe / 73

kąty odpowiadające / 73

kąty przyległe / 68

kąty wierzchołkowe / 68

kolejność działań / 12

kontraprzykład / 227

kwadrat / 102

kwadrat liczby / 152

L

liczba całkowita / 132

liczba dodatnia / 132

liczba naturalna / 302

liczba niewymierna / 159

liczba pierwsza / 302

liczba podpierwiastkowa / 156

liczba spełniająca równanie / 188

liczba ujemna / 132

liczba wymierna / 132

liczba złożona / 302

liczby przeciwne / 133

liczebność zmiennej / 290

litr / 265

L

łamana / 60

M

miara kąta / 64

mililitr / 265

moda / 292

N

najmniejsza wspólna wielokrotność / 302

największy wspólny dzielnik / 302

O

objętość bryły / 265

objętość graniastoslupa / 268

objętość prostopadłościanu / 268

objętość sześcienu / 269

obwód kwadratu / 102

obwód prostokąta / 102

obwód rombu / 102

obwód równoległoboku / 102

obwód trapezu / 106

obwód trójkąta / 78

odcinka / 218

odcinek / 60

odległość punktu od prostej / 61

odsetki / 49

odwrotność liczby / 133

okres rozwinięcia dziesiętnego

nieskończonego / 16

oprocentowanie / 49

oś odciętych / 218

oś rzędnych / 218

P

pierwiastek drugiego stopnia / 156

pierwiastek kwadratowy / 156

pierwiastek równania / 188

pierwiastek sześcienny / 157

pierwiastek trzeciego stopnia / 157

piramida populacji / 281

początek układu współrzędnych / 218

podstawa graniastoslupa prostego / 254

podstawa prostopadłościanu / 254

podstawa trapezu / 106

podstawa trójkąta / 81

podział proporcjonalny / 205

pojemność / 265

pole figury / 94

pole kwadratu / 110

pole powierzchni całkowitej

graniastoslupa / 259

pole prostokąta / 110

pole rombu / 110

pole równoległoboku / 110

pole trapezu / 110

pole trójkąta / 97

pole trójkąta prostokątnego / 98

potęga liczby / 152

półprosta / 226

prawa działań / 303

procent / 32

promil / 52

proporcja / 199

proste prostopadłe / 60

proste równoległe / 61

prostokąt / 102

prostokątny układ współrzędnych / 218

prostopadłościan / 254

próba reprezentatywna / 290

przekątna czworokąta / 102

przybliżenie / 20

przybliżenie z nadmiarem / 20

przybliżenie z niedomiarem / 20

przyrost naturalny / 288

R

ramię kąta / 64

ramię trapezu / 106

redukcja wyrazów podobnych / 172

romb / 102

rozkład liczebności / 290

rozstęp / 292

roztwór / 51

rozwiązanie równania / 188

rozwinięcie dziesiętne nieskończone

nieokresowe / 159

rozwinięcie dziesiętne nieskończone

okresowe / 16

rozwinięcie dziesiętne skończone / 16

równania równoważne / 191

równanie / 188

równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą / 188
 równanie z jedną niewiadomą / 188
 równoległobok / 102
 rzędna / 218

S

siatka graniastoslupa prostego / 259
 siatka prostopadloscianu / 259
 siatka sześcianu / 259
 stężenie procentowe roztworu / 51
 stop / 52
 stosunek długości odcinków / 205
 stosunek dwóch wielkości / 205
 stosunek kilku wielkości / 207
 suma algebraiczna / 172
 suma miar kątów wewnętrznych czworokąta / 101
 suma miar kątów wewnętrznych trójkąta / 81
 system rzymski / 304
 szacowanie / 23
 sześcian / 254
 sześcian liczby / 152

Ś

ściana boczna graniastoslupa prostego / 254
 ściana prostopadloscianu / 254
 ściana sześcianu / 254
 średnia arytmetyczna / 292

T

teza / 226
 trapez / 106
 trapez prostokątny / 106
 trapez równoramienny / 106
 trójkąt / 78
 trójkąt egipski / 232
 trójkąt ostrokątny / 82
 trójkąt pitagorejski / 240
 trójkąt prostokątny / 82
 trójkąt rozwartokątny / 82
 trójkąt równoboczny / 81
 trójkąt równoramienny / 81
 trójkąt różnoboczny / 81
 trójkąty przystające / 88

twierdzenie / 226
 twierdzenie Pitagorasa / 233

U

ułamek / 8
 ułamek dziesiętny / 8
 ułamek dziesiętny okresowy / 17
 ułamek właściwy / 19

W

wartość bezwzględna / 133
 wartość liczbową wyrażenia algebraicznego / 169
 wielkości wprost proporcjonalne / 198
 wielokąt foremny / 120
 wielokąt wklęsły / 118
 wielokąt wypukły / 118
 wielościan / 254
 wierzchołek kąta / 64
 wierzchołek trójkąta / 78
 współczynnik liczbowy jednomianu / 164
 współczynnik proporcjonalności / 198
 współrzędne punktu / 218
 współrzędne środka odcinka / 221
 wykres kolumnowy / 276
 wykres liniowy / 285
 wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias / 182
 wyraz skrajny proporcji / 202
 wyraz sumy algebraicznej / 172
 wyraz środkowy proporcji / 202
 wyrazy podobne sumy algebraicznej / 172
 wyrażenie algebraiczne / 164
 wyrażenie arytmetyczne / 164
 wysokość graniastoslupa / 257
 wysokość równoległoboku / 110
 wysokość trapezu / 106
 wysokość trójkąta / 85

Z

założenie / 226
 zaokrąglenie z nadmiarem / 21
 zaokrąglenie z niedomiarem / 21
 zasada zaokrąglania / 21
 zbiór rozwiązań równania / 188
 zmienna / 290

I. Ułamki zwykłe i dziesiętne

1. Działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych / 7

1. 0,75; 0,85; 0,68; 0,18 2. 0,3125; 0,575; 0,92; 0,792 3. a) 2,42; 3,24; 5,375; 2,55; 4,325 b) 7,1875; 1,34375; 4,1125; 2,234375; 8,248 4. $\frac{3}{6} = 0,5$; $2\frac{18}{24} = 2,75$ 5. $\frac{13}{50}$, $\frac{241}{200}$, $\frac{277}{25}$, $\frac{1}{5000}$ 6. piłka do koszykówki 7. a) 8,25; 10,1; 3,25; $3\frac{11}{30}$; 10,37 b) 3,8; 4,35; 0,525; 0; $3\frac{17}{21}$ 8. AC 10. a) 0,4; 1,2; 0,02; 3,3; 1,5 b) $\frac{5}{28}$; 4,5; 4,8; 2; 3 11. 18,80 zł 12. 174 GB 13. B3 14. bagażnik: 72 zł, licznik: 72 zł, pokrowiec: 180 zł, oszczędności: 36 zł 15. 229 kcal, o 62 kcal 16. Ułamek o mianowniku 400 można rozszerzyć do ułamka o mianowniku 10 000, a ułamka nieskracalnego o mianowniku 600 nie można zapisać w postaci ułamka o mianowniku 10, 100, 1000, ..., bo 600 jest podzielne przez 3. 17. a) np. $\frac{9}{14}$ b) np. $\frac{5}{12}$ Wyzwanie. np. $\frac{16}{64}$ Sprawdź się! 1. a) 1,7; 0,03; 0,625 b) $\frac{1}{4}$; $\frac{17}{5}$; $\frac{39}{5}$ 2. a) 4,55 b) $9\frac{23}{28}$ c) 0,6 d) $\frac{4}{9}$ 3. 1,5 kg 4. PP 5. 240 zł

2. Kolejność wykonywania działań / 12

1. a) 1 b) $4\frac{7}{30}$ c) $\frac{1}{6}$ 2. a) 8 b) $1\frac{3}{17}$ c) $1\frac{13}{15}$ d) 0,875 e) $\frac{4}{9}$ f) 27,4 3. a) $1\frac{3}{11}$ b) 2,4 c) 8 d) 2,2925 4. a) $\frac{9}{64}$ b) 200 c) 5 d) $\frac{5}{6}$ 5. a) 192,45 b) 17,5 7. W sklepie Grono o 0,70 zł. 8. FP 9. BC 10. 7 11. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{100}$ Wyzwanie. a) $5\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{7}\right) + 3 = 4$ b) $(0,5 + 1,75) \cdot \left(2 - 1\frac{5}{9}\right) = 1$ Sprawdź się! 1. 5,35 2. 2 3. D 4. 25 g 5. $5\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot (0,15 + 0,85) = 5$

3. Rozwinięcia dziesiętne ułamków / 16

1. a) 0,4; 0,9; 0,15; 0,26; 0,75; 1,875; 6,05 b) 0,5; 1,6; 0,125; 0,375; 2,25; 6,6; 12,8; c) 0,06; 0,17; 0,255; 0,018; 0,011; 4,8 2. 0,(6); 0,2(6); 0,(296); 0,(0231); 3,(36); 1,(21); 3,2(8) 3. a) 0,(6) b) 6,(405) c) 32,0(83) d) 0,25(52) e) 5,(454) f) 16,0(01) 4. $\frac{2}{15}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{1}{9}$ 5. A2 6. $\frac{1}{9} = 0,(1)$, $\frac{2}{9} = 0,(2)$, $\frac{3}{9} = 0,(3)$, $\frac{4}{9} = 0,(4)$ Okresem jest licznik ułamka. $\frac{7}{9} = 0,(7)$, $\frac{8}{9} = 0,(8)$ 7. a) $\frac{170}{142}$, $\frac{170}{98}$ 8. a) $0,3 < 0,(3)$ b) $0,2(3) > 0,(23)$ c) $1\frac{1}{3} > 1,0(30)$ d) $2,(6) > 2,1(6)$ e) $4,06 < 4\frac{1}{6}$ f) $0,1(54) > 0,(154)$ 9. BD 10. Wskazówka: $20 = 2 + 4 \cdot 4 + 2$ 11. a) 5 b) 6 c) 5 12. Po skróceniu ułamków w mianownikach nie ma innych czynników pierwszych niż 2 i 5. Wyzwanie. $\frac{1}{11} = 0,(09)$, $\frac{2}{11} = 0,(18)$, $\frac{3}{11} = 0,(27)$, $\frac{1}{111} = 0,(009)$, $\frac{2}{111} = 0,(018)$, $\frac{3}{111} = 0,(027)$ a) Długość okresu jest równa liczbie jedynek w mianowniku. b) Okres jest iloczynem licznika i liczby 9, uzupełnionym z przodu przez odpowiednią liczbę zer. c) $\frac{103}{111} = 0,(927)$ Sprawdź się! 1. FF 2. $0,1(54) > 0,(154)$ 3. a) 31,(301) b) 56,345(567) 4. 6 5. $\frac{2}{9}$ Ułamek jest nieskracalny i w rozkładzie mianownika na czynniki pierwsze jest liczba 3.

4. Przybliżenia dziesiętne / 20

1. $0,62 < \frac{5}{8} < 0,63$ $0,02 < \frac{3}{125} < 0,03$ $0,57 < \frac{4}{7} < 0,58$ $0,66 < \frac{2}{3} < 0,67$ 2. a), d), f) z nadmiarem, b), c), e) z niedomiarem 3. a) 0,25 – z niedomiarem; 11,25 – z nadmiarem; 0,86 – z nadmiarem; 6,80 – z nadmiarem b) 0 – z niedomiarem; 11 – z niedomiarem; 1 – z nadmiarem; 7 – z nadmiarem 4. a) 2,0; 5,4; 6,4; 3,0; 2,9; 0,1; 10,0 b) 1,65; 2,06; 4,46; 1,00; 7,40; 9,01 c) 1,654; 9,101; 0,003; 7,259; 1,000; 4,111; 0,001; 2,010; 7,230 5. a) 0,8 – z niedomiarem; 0,8333 – z niedomiarem

- b) 0,8 – z niedomiarem; 0,8182 – z nadmiarem c) 0,5 – z nadmiarem; 0,4615 – z niedomiarem
 d) 0,8 – z nadmiarem; 0,7778 – z nadmiarem 7. a) 0,4; 0,4 b) 0,31; 0,35 c) 3,792; 2,314
 8. AC 9. a) $\frac{89}{4} \approx 22$ b) $\frac{204}{15} \approx 14$ 10. nie 11. a) $1234 + 445 < 1800$ b) $3543 - 512 > 2900$

- c) $12 \cdot 2,089 > 24$ d) $2,9813 : 3 < 1$ 12. a) $10 > 8\frac{2}{3}$, oszacowany b) $54 > 45,5$, oszacowany

- c) $56 > 51\frac{1}{3}$, oszacowany d) $7 < 7,35$, dokładny e) $4 > 3\frac{1}{8}$, oszacowany f) $7 < 7\frac{19}{35}$, dokładny

g) $20 < 20\frac{1}{9}$, dokładny h) $0,25 < \frac{21}{71}$, dokładny **Wyzwanie.** Okresy są sześciocyfrowe, występują w nich te same cyfry, choć w różnej kolejności. Kolejne okresy otrzymamy po pomnożeniu 142 857 przez licznik ułamka: $\frac{1}{7} = 0, (142857)$, $\frac{2}{7} = 0, (285714)$ i $2 \cdot 142\,857 = 285\,714$, $\frac{3}{7} = 0, (428571)$

i $3 \cdot 142\,857 = 428\,571$ itd. Suma ułamków jest równa sumie zaokrągleń i wynosi 3.

- Sprawdź się!** 1. a) 2,95 – z niedomiarem, 6,44 – z nadmiarem, 5,23 – z nadmiarem b) 3 – z nadmiarem, 6 – z niedomiarem, 5 – z niedomiarem 2. a) 0,7; 0,6 b) 0,63; 0,19 c) 2,941; 2,424 3. 4,12311

4. tak 5. A1

Zadania utrwalające / 25

1. a) 22 b) 5,75 c) 6,2 d) 4 2. o 0,88 3. a) $1\frac{7}{9}$ b) $4\frac{2}{7}$ 4. 22 m 5. a) 24 b) 4 c) $\frac{5}{8}$ d) 9

6. prędkość Marysi: $4,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, prędkość Krysi: $4,8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ 7. 840 torebek 8. 2,5 kg 10. 5,40 zł

11. ok. 2,3 razy 12. ok. 40 razy 13. tak 14. ok. 130 g 15. $\frac{4}{21}$, $\frac{15}{45}$ 16. $\frac{15}{12} = \frac{5}{4} \approx 1$, $\frac{121}{44} = \frac{11}{4} \approx 3$, $\frac{627}{150} = \frac{209}{50} \approx 4$ 17. III, VI, VII, IX 18. a) Odległość Ziemi od Słońca to ok. 150 mln km, odległość Neptuna od Słońca to ok. 4 498 mln km. b) ok. 227 937 tys. km c) o ok. 670 mln km 19. 70

20. a) 8, 8, 8 b) 2, 2, 2 c) 9, 2, 9 22. ok. 0,01 23. a) $10 \cdot (21,1 + 8,9) \cdot \left(3,5 + 1\frac{1}{2}\right) = 1500$

- b) $\left(96\frac{1}{8} - 6,125\right) : \left(4\frac{1}{3} + 1\frac{2}{3}\right) = 15$ 24. a) $\frac{9}{20} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{60}$ b) np. $\frac{11}{18} = \frac{1}{2} + \frac{1}{9}$, $\frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, $\frac{2}{5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}$

Zadania sprawdzające / 28

1. C 2. B 3. A 4. A 5. B 6. A 7. B 8. D 9. A 10. PP 11. AC 12. A2 13. 9,6 kg
 14. ok. 3 kg 15. osobowy o 15 minut

II. Procenty

1. Pojęcie procentu / 32

1. 35% 2. 34% 3. a) 0,1; 0,35; 0,67; 1,3; 2,45; 5 b) 0,008; 0,0045; 0,058; 0,125; 1,672
 4. a) $\frac{1}{200}$, $\frac{1}{300}$, $\frac{3}{400}$, $\frac{17}{2000}$, $\frac{1}{132}$ b) $\frac{3}{250}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{37}{700}$ 5. a) 500%, 2000%, 470%, 325%, 12,8%, 0,7%
 b) 50%, 25%, 90%, 24%, 6%, 13,5% 6. a) $16\frac{2}{3}\%$, $42\frac{6}{7}\%$, $88\frac{8}{9}\%$ b) $262,5\%$, $166\frac{2}{3}\%$, $409\frac{1}{11}\%$
 7. a) Niemcy, Francja, Włochy, Belgia, Holandia, Luksemburg b) Francja, Holandia, Luksemburg
 c) Dania, Austria, Grecja 8. a) $\frac{1}{3}$, $33\frac{1}{3}\%$ b) $\frac{8}{25}$, 32% c) $\frac{4}{5}$, 80% d) $\frac{1}{2}$, 50% e) $\frac{5}{8}$, 62,5%
 10. PPFPPF 11. 36,5% **Wyzwanie.** 20% **Sprawdź się!** 1. 1% 2. a) 0,6 b) 2,1 c) 0,005
 d) $\frac{1}{180}$ 3. a) 20% b) $6\frac{2}{3}\%$ c) $33\frac{1}{3}\%$ 4. AD 5. Jest to niemożliwe, gdyż w sumie byłoby $42\frac{6}{7}\% + 60\% = 102\frac{6}{7}\%$ ciasteczek.

2. Obliczanie procentu danej liczby / 37

1. a) 10 b) 10 c) 60 d) 16 e) 250 f) 6 g) 0,7 h) 64 i) 810 j) 0,0081 k) 110 l) 66
 2. a) 144 b) 600 c) 6300 d) 3,5 e) 18 f) 99 3. a) 72 b) 308 c) 28 d) 36 e) 30 f) 151
 4. a) 44 zł b) 3,2 dag c) 6 h d) 90 m e) 52,50 zł f) 2,4 l 5. 5 uczniów 6. 7 dziewczyn
 7. 932,20 zł 8. ser żółty 25,20 zł, chleb 8,16 zł, jogurt 2,64 zł 9. rower 552 zł, deskorolka 220 zł, dres 221 zł 10. 96 zł 11. 93,80 zł 12. a) 45,6 b) 249,4 c) 22,08 d) 268 13. 2464 zł

za 110 bluzek, 2520 zł za 90 bluzek 14. 7 szamponów 15. o 280 zł 16. a) druga b) pierwsza
 17. a) Obniżyła się o 2 zł. b) Obniżyła się o 8 zł. c) Wzrosła o 4 zł. d) Wzrosła o 4 zł, kolejność zmian
 nie miała znaczenia. 18. B2 Wyzwanie. o 44% Sprawdź się! 1. a) 240 b) 72 c) 8 2. sosny
 2,6 ha, brzozy 0,65 ha 3. AD 4. 424,9 5. 68 kg

3. Obliczanie liczby, gdy dany jest jej procent / 42

1. a) 600 b) 1200 c) 700 d) 125 e) 600 f) 2 2. a) 1260 b) 350 c) 60 d) 40 e) 25 f) 400
 3. a) 220 dag, 250 dag, 100 dag b) 80 kg, 900 kg, 900 kg c) 300 km, 30 km, 90 km 4. a) 140 kg
 b) 36 cm c) 250 km d) 2 h e) 2 m f) $\frac{11}{60}$ kg 5. 19 360 książek 6. BC 7. 120 zł, o 24 zł
 8. 35 000 zł, o 5250 zł 9. a) 27,68 b) 6,8 c) 170,8 d) 25,2 e) 33,8 f) 21,52 10. 700, 28
 11. ok. 4,7 kg 12. a) światową produkcję ryżu (w tonach) b) roczną produkcję ryżu na 1 mieszkańca
 Chin (w tonach) c) Powierzchnię, jaka przypada na 1 mieszkańca Chin (w km²). 13. 1,5 cm²
 14. 800 zł 15. 500 zł 16. 1500 m² i 1485 m² Wyzwanie. o 25% Sprawdź się! 1. a) 300 m
 b) 200 m c) 2000 m 2. 300 kg 3. C 4. 480 zł 5. 2400 zł

4. Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba / 45

1. a) 12,5%, $5\frac{5}{9}\%$, 25%, 37,5%, 50%, 100%, 150%, 200% b) 1%, 15%, 90%, 25%, 50%, 0,1% c) 0,1%,
 35%, 100%, 84%, 10%, 0,001%, 0,05% 2. a) 1,6% b) 4,5% c) 2,525% d) 4,6% 3. 65%
 4. 3,75% 5. 12% 6. M. Czerwone 4,2%, M. Martwe 28%, M. Sargassowe 3,7%, M. Bałtyckie 0,7%
 7. 29,6% 8. 87,6 g, 87,6% 9. kuchnia 20%, pokój I 25%, pokój II 30%, łazienka 10%, przedpokój
 15% 10. B3 11. o 8% 12. 88% 13. a) z orzechami 6,1%, z migdałami 7,8% b) z migdałami
 c) z orzechami 14. o 12,5% 15. o 5% 16. a) o 25% b) o 20% 17. a) z siedmioma b) 440 km
 c) z Czechami, ok. 22,7% d) 39,5% e) o ok. 6,6% Wyzwanie. Nie, Jarek ma o $33\frac{1}{3}\%$ mniej
 pieniędzy niż Marek. Sprawdź się! 1. 80% 2. 4% 3. 2,5% 4. 4400 zł 5. BC

5. Obliczenia procentowe w praktyce / 49

1. a) 800 zł b) 2250 zł 2. 1840 zł 3. 176 zł 4. a) 121,60 zł b) 230,40 zł 5. 32 700 zł
 6. 6 dolarów 7. 6480 euro 8. drugi 9. o 120 zł 10. Tak, mają tyle samo.
 Wyzwanie. 7500 euro 11. 25% 12. 19,6% 13. 6% 14. 25 dag 15. Beata, gdyż jej herbata
 z cukrem ma wyższe stężenie procentowe. 16. ok. 5,7% 18. BC 19. o 273 kg 20. miedź 98%,
 glin 2% 21. A2 22. 25 dag 23. po 2 litry Sprawdź się! 1. 7200 zł 2. 84 dag 3. 13 140 zł
 4. FF 5. 21%

Zadania utrwalające / 54

1. a) 62,5% b) 32% c) $66\frac{2}{3}\%$ 2. 0,72 kg 3. nie 4. 290 zł 5. cena po podwyżce: 39,90 zł
 6. w I wariantcie 7. ok. 6 kg 8. 20% 9. o 15% 10. 48 zł 11. Gabrysia o $33\frac{1}{3}\%$ więcej niż
 Michalina, Michalina o 25% mniej niż Gabrysia. 12. 170% 13. cena po obniżce: 1152 zł
 14. 23,8 l 15. 25 zł i 20 zł 16. 620 stron, 60 minut 17. ok. 2% 18. 7,5% 19. 20 000 zł
 20. 5 g 21. 25% 22. Tak, wzrosła o $6\frac{2}{3}\%$.

Zadania sprawdzające / 56

1. B 2. C 3. C 4. B 5. B 6. D 7. C 8. B3 9. PF 10. 19% 11. Tak, wynosi 8,8%.
 12. 300 zł

III. Własności figur płaskich

1. Wzajemne położenie prostych i odcinków / 60

6. BC 7. Są tej samej długości. 8. PP Wyzwanie. 4 rozwiązania Sprawdź się! 2. C
 3. prostopadłe: np. AB i CD, BC i EF, FG i GH, IJ i JK, równoległe: np. AB i KL, BC i DE, CD i HI,
 EF i IJ 4. po 2 cm, bo proste są równoległe

2. Kąty i ich rodzaje / 64

5. a) $\alpha, \beta, \varepsilon, \varphi, \omega$ b) γ, δ, λ c) ε, φ d) α, β, ω 6. a) 120° b) 30° c) 300° 7. PP 8. BD
 9. a) 6° b) 180° c) 216° 10. a) 9 h b) 7 h c) 11 h 11. a) 90° i 270° b) 15° i 345°
 c) 95° i 265° 12. a) 4 b) 3 c) 8 d) 2 e) 5 f) 6 13. nie 14. a) 170° b) 40° 15. tak
 Wyzwanie. nie, bo $|\sphericalangle ABD| = 25,2^\circ$ lub $|\sphericalangle ABD| = 151,2^\circ$ Sprawdź się! 1. 114° 2. 150° i 210°
 4. 90° i 66° 5. B2

3. Kąty przyległe i wierzchołkowe / 68

1. a) 145° b) 15° c) 112° d) 78° 2. a) 135° b) 65° c) 168° d) 22° 3. obaj
 4. $|\sphericalangle AKB| = 139^\circ$, $|\sphericalangle AKD| = 41^\circ$, $|\sphericalangle BKC| = 41^\circ$ 5. $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 70^\circ$, $\gamma = 30^\circ$ 6. a) o 180°
 b) o 90° c) o 36° 7. I, II, IV, VI 8. III, IV 9. a) 30° b) 105° c) $180^\circ - \alpha$ d) $90^\circ - \alpha$
 10. 104° i 76° 11. 30° 12. B2 13. AC Wyzwanie. $x = 180^\circ - \alpha$, $y = \alpha$, $z = 90^\circ - \alpha$
 Sprawdź się! 1. α i δ 2. PP 3. a) rozwartym b) ostrym 4. 75° i 105° 5. $|\sphericalangle 1| = 50^\circ$,
 $|\sphericalangle 2| = 30^\circ$, $|\sphericalangle 3| = 40^\circ$, $|\sphericalangle 4| = 60^\circ$, $|\sphericalangle 5| = 80^\circ$, $|\sphericalangle 6| = 100^\circ$

4. Dwie proste równoległe przecięte trzecią prostą / 73

1. a) α i γ , γ i ω b) β i x , δ i z 2. C 3. I. 80° II. 135° III. 97° IV. 49° , 131° , 131° V. 27° ,
 27° , 153° , 153° 4. a) $\alpha = \gamma = 60^\circ$, $\beta = \delta = 120^\circ$ b) $\alpha = 145^\circ$, $\beta = \gamma = 55^\circ$, $\delta = 35^\circ$ c) $\alpha = 33^\circ$,
 $\beta = 70^\circ$, $\gamma = 147^\circ$, $\delta = 110^\circ$ d) $\alpha = \beta = 68^\circ$, $\gamma = 112^\circ$, $\delta = 136^\circ$ 5. a) $\alpha = \gamma = \varepsilon = \varphi = 60^\circ$,
 $\beta = \delta = \lambda = \omega = 120^\circ$ b) $\alpha = \gamma = \varepsilon = \varphi = 70^\circ$, $\beta = \delta = \lambda = \omega = 110^\circ$, c) $\alpha = \gamma = \varepsilon = \varphi = 84^\circ$,
 $\beta = \delta = \lambda = \omega = 96^\circ$ d) $\alpha = \gamma = \varepsilon = \varphi = 77\frac{1}{7}^\circ$, $\beta = \delta = \lambda = \omega = 102\frac{6}{7}^\circ$ 6. PP 7. a) kąty ostre
 mają po 37° , kąty rozwarte po 143° b) kąty ostre mają po 70° , kąty rozwarte po 110° 8. FF
 9. a) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 50^\circ$, $\gamma = 100^\circ$ b) $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 40^\circ$ c) $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 50^\circ$, $\gamma = 90^\circ$
 11. 2 rozwiązania: $\alpha = 20^\circ$ lub $\alpha = 40^\circ$ Sprawdź się! 1. $|\sphericalangle 1| = |\sphericalangle 3| = |\sphericalangle 4| = |\sphericalangle 6| = 118^\circ$,
 $|\sphericalangle 2| = |\sphericalangle 5| = |\sphericalangle 7| = 62^\circ$ 2. $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 100^\circ$, $\delta = 140^\circ$ 3. AD 4. $\beta = 40^\circ$

5. Trójkąty, część 1 / 78

1. a) $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle BCD$ b) $\triangle ABC$, $\triangle ADF$, $\triangle BEF$, $\triangle CDE$, $\triangle DEF$ c) $\triangle ABC$, $\triangle ABE$, $\triangle ACD$,
 $\triangle ACE$, $\triangle ACF$, $\triangle ADF$, $\triangle BCD$, $\triangle CEF$ 2. a) α b) b c) naprzeciw d) a i b e) α f) między, a i c
 3. a) największy $\sphericalangle ABC$, najmniejszy $\sphericalangle BAC$, obwód: 15,6 cm b) największy $\sphericalangle BAC$, najmniejszy
 $\sphericalangle ACB$, obwód: 105,25 cm c) największy $\sphericalangle ACB$, najmniejszy $\sphericalangle ABC$, obwód: 206,5 cm 4. Maciek
 się pomylił: $100\text{ m} + 300\text{ m} = 400\text{ m}$, czyli jego dom musiałby być położony na prostej łączącej
 szkołę i pocztę. 5. a) tak b) tak c) nie 6. 1 cm, 2 cm, 2 cm 7. $d < |AC| + c$ i $|AC| < a + b$,
 a zatem $d < a + b + c$ 8. C 9. a) najdłuższy LM , najkrótszy KL b) najdłuższy KL , najkrótszy
 KM c) najdłuższy LM , najkrótszy KL 10. a) równoboczny, 45 cm b) równoramienny, 25,4 cm
 c) różnoboczny, 13,6 cm 11. 13 cm 12. ramię: 37 cm, podstawa: 15 cm, obwód: 89 cm
 13. FP 14. PFPF 15. FFFP 16. najdłuższe – trójkąt ostrokątny, najkrótsze – rozwartokątny
 Wyzwanie. 13 Sprawdź się! 1. największy $\sphericalangle ACB$, najmniejszy $\sphericalangle ABC$, obwód: 24,5 cm
 2. nie 3. AC 4. 30° 5. 40° i 100° lub 70° i 70°

6. Trójkąty, część 2 / 84

1. a) 100° , 130° , 130° b) 70° , 130° , 160° c) 90° , 115° , 155° 2. a) 30° b) 50° c) 130° 3. A3
 4. PFPF 5. $\sphericalangle ACD$ 6. AD 8. nie, bo $|BC| < |CD| + |DB|$ 9. 120° Sprawdź się! 1. $x = 150^\circ$,
 $y = 153^\circ$ 2. B 3. 60° i 120° 4. tak, bo $|AC| < |AD| + |CD|$ 5. 72°

7. Przystawianie trójkątów / 87

1. 5 2. PFFPPP 3. a) tak – cecha bbb b) nie 5. I, II i III – cecha bkb 7. tak 10. FFPF
 11. A1 12. AD 15. $\triangle EAC \equiv \triangle BAD$, $\triangle DEC \equiv \triangle CBD$, $\triangle DEO \equiv \triangle CBO$ Sprawdź się! 1. B
 2. wszystkie 4. którykolwiek z warunków: $|AB| = |DE|$, $|BC| = |EF|$, $|CA| = |FD|$

8. Pole figury, jednostki pola / 94

1. a) 10 000, 20 000, 40 000, 250 000, 5000, 20 000 b) 3000; 0,000042; 510; 489 100; 0,03;
 0,000025 2. 25 a 3. 350 m^2 4. PP 5. 900 m^2 , 1,24 ha, 535 a, 13,5 ha, $0,45\text{ km}^2$, $0,58\text{ km}^2$

6. 210 m^2 7. AC 8. $1,8 \text{ cm}^2$ 9. 20 a **Wyzwanie.** $12\,000 \text{ km}^2$ **Sprawdź się!** 1. I
2. a) 8 b) 430 c) 12 d) 640 3. a), c), d) $\neq$ b) = 4. 88 5. A

9. Pole trójkąta / 97

1. a) 12 cm^2 b) $31,5 \text{ cm}^2$ c) $6,75 \text{ cm}^2$ 2. PP 3. 30 cm^2 5. $\frac{12}{25}$ 6. $3,84 \text{ dm}^2$ 7. 14 cm
8. pole: 6, obwód: 12 9. ok. 9 a 10. 90 cm, $337,5 \text{ cm}^2$ 11. Trójkąty mają jednakowe pola, ponieważ mają wspólną wysokość i podstawy tej samej długości. 12. ok. 7 m^2
Sprawdź się! 1. D 2. a) 6 b) 6 c) 5 d) 7,5 3. Bartek o $0,75 \text{ cm}^2$ 4. tak 5. 4 m

10. Czworokąty, część 1 / 101

1. a), c) tak b) nie 2. a) 120° b) 80° c) $45^\circ, 90^\circ$ 3. a) 36° b) 13° c) 32° 4. a) $50^\circ, 40^\circ$
b) $50^\circ, 130^\circ$ c) $45^\circ, 45^\circ$ 5. 46,40 zł 6. kwadrat 7. a) $50^\circ, 130^\circ, 50^\circ, 130^\circ$ b) $60^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ c) $100^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 80^\circ$ d) $120^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 60^\circ$ 8. PP 9. 28 cm 10. 10 cm
11. $60^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ 12. AD **Wyzwanie.** 4 prostokąty (w tym 1 kwadrat): $1 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$,
 $2 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$, $3 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$, $4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$ **Sprawdź się!** 1. 109,1 m 2. 10 cm, 14 cm, 10 cm,
14 cm 3. 149° 4. A2

11. Czworokąty, część 2 / 106

1. a) $67^\circ, 107^\circ$ b) $90^\circ, 76^\circ, 104^\circ$ c) $52^\circ, 52^\circ, 128^\circ, 128^\circ$ d) $99^\circ, 61^\circ, 119^\circ, 81^\circ$ 2. a) $\alpha = 40^\circ$,
 $\beta = 30^\circ, \gamma = 40^\circ$ b) $\alpha = 60^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 120^\circ$ 3. $60^\circ, 120^\circ, 120^\circ$ 4. $90^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 90^\circ$
5. $80^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 100^\circ$ 6. a) $120^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 60^\circ$ b) $120^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 60^\circ$ 7. 20 cm 8. B3
11. 2,4 m 12. 20 cm **Sprawdź się!** 1. BC 2. 10 dm 3. 20 cm 4. $50^\circ, 140^\circ, 40^\circ, 130^\circ$
5. 60°

12. Pola czworokątów / 110

1. a) 25 cm^2 b) $112,5 \text{ cm}^2$ c) $180\,000 \text{ cm}^2$ 2. 84 cm^2 3. 32% 4. a) np. $3 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$,
 $L = 22 \text{ cm}$; $4 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$, $L = 20 \text{ cm}$; $1,5 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$, $L = 35 \text{ cm}$ b) np. $4 \text{ cm} \times 9 \text{ cm}$, $L = 26 \text{ cm}$;
 $6 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$, $L = 24 \text{ cm}$; $4,5 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$, $L = 25 \text{ cm}$ c) np. $1,5 \text{ cm} \times 1,5 \text{ cm}$, $L = 6 \text{ cm}$;
 $5 \text{ cm} \times 0,45 \text{ cm}$, $L = 10,9 \text{ cm}$; $0,3 \text{ cm} \times 7,5 \text{ cm}$, $L = 15,6 \text{ cm}$ 5. właściciel działki prostokątnej
11 220 zł, właściciel działki kwadratowej 10 500 zł 6. PF 7. $x \approx 6,7$ 8. a) 50 cm^2 b) 60 cm^2
9. kolejno możemy wpisać: 30 dm, 431,25 cm, 300 cm^2 , 84 m^2 , 45 dm^2 10. 40 m 11. 120 cm^2
12. 19 paczek 13. 34 cm 14. a) $P = \frac{x+y}{2} \cdot z$ b) $P = \frac{m+n}{2} \cdot k$ 15. III 16. B2
17. 18 cm^2 18. 12 cm 19. a) 6 cm b) 12 cm c) 15 cm 20. 112 cm^2 21. $13,2 \text{ m}^2$, 858 zł
22. 2100 zł 23. 27 cm^2 24. 150 cm^2 25. 42 cm 28. 56 cm^2 , 14 cm^2 29. 36 000 zł
30. 34 cm 31. 9 cm 32. pierwsza 35. 3 i 6 36. 108% **Wyzwanie.** $P_{\triangle ABD} = P_{\triangle ABC}$,
bo te trójkąty mają wspólną podstawę i tę samą wysokość.
Stąd: $P_{\triangle ASD} = P_{\triangle ABD} - P_{\triangle ABS} = P_{\triangle ABC} - P_{\triangle ABS} = P_{\triangle BSC}$, czyli trójkąty ASD i BSC mają równe pola.
Sprawdź się! 1. A – III, B – I, C – II 2. a) 34 b) 16 3. 32 cm^2 4. BD 5. 88 dm^2

13. Inne wielokąty / 118

1. trójkąt 3. FFFP 4. a) 41 b) 27,5 c) 21,5 7. 12,24 a 8. 90 9. BD 10. tak, 2,025 ha
11. 1800° **Sprawdź się!** 1. a) 27 b) 294 2. 9 3. połową 4. 63 cm, ok. 63 cm^2 5. A2

Zadania utrwalające / 123

2. 160° – kąt rozwarty 3. $75^\circ, 105^\circ$ 4. miary kątów obu trójkątów są takie same: $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$
5. a) nie b) nie c) tak 6. nie 7. a) 4 m, 6 m, 9 m b) największy $\sphericalangle ABC$, najmniejszy $\sphericalangle ACB$
8. $65^\circ, 50^\circ, 65^\circ$, trójkąt równoramienny ostrokątny 10. 60° 11. $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$ 16. $30^\circ, 60^\circ$
17. 38° 18. 10 cm 19. powierzchnia działki: 91 a, wymiary planu działki: $7 \text{ cm} \times 13 \text{ cm}$
21. $16\frac{2}{3} \text{ cm}$ 22. ok. 5% 23. a) 31 269 600 ha b) 41 526 600 ha c) 11 400 ha
24. pokój Tomka, o 2 m^2 26. a) 2025 m^2 b) 2000 m^2 27. nie 28. $1,28 \text{ m}^2$ 29. a) I, III
i IV, b) I, III i IV 31. a) $8,64 \text{ m}^2$ b) 9,5 m c) 126 cm d) $120 \text{ cm} \times 60 \text{ cm}$ 32. $20,33 \text{ cm}^2$
33. a) Kolejne arkusze powstają przez złożenie poprzedniego na pół, tzn. długość arkusza formatu
A1 jest szerokością arkusza formatu A0, a szerokość arkusza formatu A1 jest długością arkusza

formatu A2, itd. A0: 1189 mm $\times$ 841 mm, A1: 841 mm $\times$ 594 mm, A2: 594 mm $\times$ 420 mm, A3: 420 mm $\times$ 297 mm, A4: 297 mm $\times$ 210 mm, A5: 210 mm $\times$ 148 mm b) 74 mm $\times$ 52 mm c) 1280
34. a) 31 b) 39 **35.** ok. 8% **36.** a) 5 trójkątów prostokątnych równoramiennych, kwadrat i równoległobok b) 2 pary trójkątów c) kwadrat

Zadania sprawdzające / 128

1. D **2.** C **3.** B **4.** C **5.** B **6.** FP **7.** PF **8.** AC **9.** A2 **10.** Wskazówka:
 Zastanów się, którym kątem trójkąta jest kąt przyległy do kąta 60° . **11.** ok. 30 dm^2 **12.** $33,28 \text{ cm}^2$

IV. Liczby wymierne

1. Oś liczbowa, pojęcie liczby wymiernej / 132

4. odwrotności: $\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{5}$; $-\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{4}$ **5.** a) $\frac{4}{2}$; $\frac{0}{5}$ b) $-\frac{6}{3}$; $-\frac{27}{9}$; $\frac{4}{2}$; $\frac{0}{5}$; -1 c) $\frac{2}{3}$; $\frac{48}{5}$; $3,5$; $1,5$; $\frac{4}{2}$; $6,7$
 d) $-9,6$; $-3\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{2}$; $-\frac{6}{3}$; $-\frac{27}{9}$; -1 e) wszystkie f) $-9,6$ i $\frac{48}{5}$; $-3\frac{1}{2}$ i $3,5$; $-\frac{3}{2}$ i $1,5$; $-\frac{6}{3}$ i $\frac{4}{2}$ **6.** PFP
7. l. naturalna: I, II; l. dodatnia: I, II, IV; l. ujemna: III **8.** a) 29 b) w III w. n.e.

Wyzwanie. 0,(357) **Sprawdź się!** **2.** $-\frac{5}{6}$ **3.** $-2\frac{1}{2}$ **4.** BC **5.** A: $-2\frac{1}{3}$, B: $-1\frac{2}{3}$, C: $-\frac{1}{3}$, D: $\frac{2}{3}$,
 E: $2\frac{2}{3}$, F: $3\frac{2}{3}$, G: 4

2. Porównywanie liczb wymiernych / 135

1. a) Moskwa b) Berlin, Helsinki, Moskwa, Oslo, Wiedeń c) -15°C , -12°C , -7°C , -5°C , -4°C ,
 -3°C , -2°C , -1°C , 0°C , 1°C , 2°C **3.** najmniejsza: -112 , największa: 20
4. $-4,8 < -3,5 < -1,6 < -1\frac{1}{2} < -0,7 < -\frac{1}{2} < 0 < 2\frac{1}{2}$
5. $\frac{1}{2} > -0,1 > -0,2 > -\frac{1}{4} > -\frac{5}{4} > -1,8 > -1,9 > -2,4$ **6.** a) np. 5, 7, 2020 i -4 , -3 , -1 b) np. 1, 2, 4
 i -2020 , -13 , -1 c) np. 2, 5, 7 i -3 , -2 , -1 **7.** I – B II – A, C, D III – C, D IV – A, B, C
8. a) 10; 8; 2; 6; 2,1 b) -4 ; 15; -5 ; 0 c) 6; -5 ; 0 d) 0; 4,6 **11.** a) $x \geq 2$ b) $x < -\frac{1}{2}$ c) $x \leq 3,5$
 d) $x > -4,3$ **12.** a) $x \geq -2$ i $x < 4$ b) $x \geq -5$ i $x \leq 2$ c) $x > 1$ i $x \leq 6$ d) $x > -8$ i $x < -3$ **13.** a) $>$
 b) $<$ c) $>$ d) $<$ e) $>$ f) $>$ g) $>$ h) $<$ i) $=$ **14.** a) a, b, c b) a, b, c, d c) a, c, d **15.** PF
Wyzwanie. a) np. 4,25; nieskończenie wiele b) np. $-2,125$; nieskończenie wiele c) np. $-6,7245$;
 nieskończenie wiele **Sprawdź się!** **1.** C **2.** -1 ; 2; 4; 0 **3.** a) $x < 3$ b) $x \geq 6$ **4.** $x > -3$
 i $x \leq 5$ **5.** a) $=$ b) $<$

3. Dodawanie i odejmowanie liczb wymiernych / 139

1. a) $4 - 10 = 4 + (-10) = -6$ b) $17 - (-20) = 17 + 20 = 37$ c) $-8 - (-12) = -8 + 12 = 4$
 d) $-15 - 42 = -15 + (-42) = -57$ e) $-10 - 7 = -10 + (-7) = -17$ f) $-25 - (-13) = -25 + 13 = -12$
2. a) 6 b) -9 c) $\frac{1}{2}$ **3.** a) $-15 - 3 = -18$ b) $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ c) $0,5 + \frac{1}{2} = 1$ d) $-21 + 15 = -6$
 e) $-1,2 + 0,8 = -0,4$ f) $24 + 15 - 32 = 7$ **4.** a) -30 b) -11 c) -5 d) -8 e) 12 f) $-1,8$ g) $-18\frac{1}{6}$
 h) 1,9 i) $\frac{1}{2}$ **5.** a) $-3\frac{1}{4}$ b) $-12,4$ c) $-16\frac{1}{3}$ d) $-4\frac{3}{4}$ e) $-8,2$ f) $-3\frac{4}{15}$ **6.** BC **7.** a) 14,77
 b) $-32,23$ c) $-0,46$ d) $-0,23$ **8.** $14,2^\circ\text{C}$ **9.** kolejno mamy: 4°C , 7°C , 0°C , 5°C , -10°C , -3°C ,
 -11 , -3 , 8, -7 , 21, 20 **10.** a) 39 b) -50 c) $-3,5$ d) 6,15 e) $\frac{3}{7}$ f) $-\frac{7}{8}$ g) 2 h) 11 **11.** a) 1
 b) 2,5 c) -3 d) 2 e) -15 f) -94 **12.** -6 **13.** $-6,84$ **14.** 2500,8 m **15.** a) o $395,56^\circ\text{C}$
 b) o $220,49^\circ\text{C}$ c) $609,61^\circ\text{C}$ d) Nie, bo w temperaturze -40°C rtęć jest ciałem stałym.
16. Różnice wysokości między Mount Everestem a depresjami [m]: 9265; 9001; 8953; 8934; 8876;
 8849,8. Różnice wysokości między K2 a depresjami [m]: 9028; 8764; 8716; 8697; 8639; 8612,8.
17. 145°C , 90°C **Wyzwanie.** a) np. $\frac{2}{3} + (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{6}$; nieskończenie wiele b) np. $(-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{4}) = -\frac{3}{4}$;
 nieskończenie wiele c) np. $0,5 - (-0,3) = 0,8$; nieskończenie wiele
Sprawdź się! **1.** $-3 - (-7) = -3 + 7 = 4$ **2.** a) 5 b) 0 c) 9 **3.** C **4.** $-19,5$ **5.** 58

4. Mnożenie i dzielenie liczb wymiernych / 145

1. a) -1 b) 320 c) -1 2. a) -240 b) 0,1 c) 182 d) -10 3. a) < b) > c) > d) = e) < f) > 4. a) -9 b) 6 c) -8 d) -3 e) -5 f) -77 g) 0,4 h) 0,7 i) -1,41 5. $1\frac{1}{2}$; $\frac{1}{8}$; $-1\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{5}$; $-1\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$; $-\frac{3}{7}$; $\frac{5}{6}$; $-\frac{5}{17}$ 6. a) 2 b) 0 c) -1,6 d) 40 e) -4 f) -0,4 g) -1,5 h) $7\frac{1}{3}$ i) 1 7. a), b), d) ujemną, c) dodatnią 8. PLATON 9. 0 10. -3,8 11. FP 12. iloczyn 13. różnice są równe Wyzwanie. a) np. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, $\frac{1}{3} \cdot 0 = 0$, $-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$, $\frac{5}{6} \cdot (-1) = -\frac{5}{6}$; nieskończenie wiele b) np. $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 1\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$, $0 : \frac{6}{7} = 0$, $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 1\frac{1}{2}$; nieskończenie wiele Sprawdź się! 1. a) 56 b) -41 c) -0,36 2. liczba b jest większa o $\frac{1}{3}$ 3. a), c) dodatnią, b), d) ujemną 4. A2 5. -9,3

5. Działania na liczbach wymiernych / 150

1. a) 62 b) 12 c) -216 d) -60 e) -2 f) -1 2. I i VI, II i III, IV i V 3. II i III 4. -12 5. a) -50 b) -1,6 c) $-\frac{1}{6}$ d) 3,75 6. 7,38 7. -1,4 8. 2 10. a) 2,8 b) 0,6 Wyzwanie. -4 Sprawdź się! 1. a) -10 b) 3 2. D 3. 8 5. $-8\frac{3}{8}$

6. Potęga o wykładniku naturalnym / 152

1. 0, 1, 25, 4, $\frac{1}{4}$ 2. 0, 27, -1, $\frac{1}{27}$, 64 3. a) $(-5)^5 < 0$ b) $(-2,8)^4 > 0$ 4. a) 10^1 b) 10^2 c) 10^3 d) 10^4 e) 10^9 5. a) 32, -64 b) $\frac{4}{25}$, $-\frac{100\,000}{243} = -411\frac{127}{243}$ c) 0,000001; 1,69 6. a) 7 lub -7, 11 lub -11, 13 lub -13, 15 lub -15, 25 lub -25, 100 lub -100 b) 4, 5, 8, 9, 10, 20 7. a) 6^1 , 6^3 , 6^4 , 6^0 b) $(-3)^2$, $(-3)^3$, $(-3)^4$, $(-3)^5$, $(-3)^0$ c) $(-\frac{1}{7})^1$, $(-\frac{1}{7})^2$, $(-\frac{1}{7})^3$, $(-\frac{1}{7})^0$ 8. a) 24 b) -16 c) -100 d) 128 e) 65 f) -65 9. a) $3\frac{2}{3}$ b) $1\frac{1}{4}$ c) 1 10. 4 razy 11. 64 12. a) 0, 1, 4, 5, 6, 9 b) 0, 2, 3, 5, 7, 8 14. a) 6 b) 6 c) 3 15. a) 2^3 b) 4^3 16. a) 1 b) 2 c) 1 d) 6 Wyzwanie. 6^3 , 6^{10} , 6^{94} Sprawdź się! 1. a) $(-1)^4 > 0$ b) $(-1\frac{1}{2})^3 < 0$ 2. a) 0,000001 b) $4\frac{17}{27}$ 3. A3 4. 3 5. 0, 2, 8

7. Pierwiastki / 156

1. a) 10 b) 9 c) $2\frac{1}{2}$ d) 0 e) $\frac{3}{7}$ f) 0,1 g) 11 h) 15 2. a) 0, 1, 2, 5, 3, 10, 20, 11 b) $\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{5}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{9}{14}$; 0,01; 2,5 3. a) 2 b) -1 c) 0,1 d) 10 e) 0 f) $\frac{2}{3}$ g) 5 h) -0,3 4. a) 0, 1, -3, 5, 4, 2, 10 b) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{5}$; $1\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $1\frac{2}{3}$; 0,2; 0,5 5. KWADRAT 6. a) -7 b) -9 c) $\frac{1}{15}$ d) 16 e) 3 f) 0 7. a) 2 b) 5 c) 3 d) 3 e) 10 f) 11,5 8. a), b) = c) < d) > 9. a) 6 cm b) 9 dm c) $\frac{7}{11}$ cm d) 2,4 m e) 0,4 cm f) 1,2 m 11. a) 160 m b) 80 m c) 440 m 12. a) 8 m b) 0,3 m c) 1,5 m 13. 8640 cm^3 14. $12\,005\text{ cm}^3$ 15. a) 343 b) 169 c) 0,09 16. 4,5; 2,2; 7,1; 2,9; 2,7; 8,1 17. 8,94; 4,64; 10,95; 21,54; 2,92; 3,16 18. I, II, IV 19. PFFP 20. a) < b) > c) < d) > e) < f) > Wyzwanie. a) nie b) nie c) tak, np. $0 \cdot \sqrt{3} = 0$ d) tak, np. $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ Sprawdź się! 1. a) 4 ; $1\frac{3}{5}$; 0,2 b) 4 ; $-\frac{1}{5}$; 0,2 2. a) = b) < 3. 993 cm^2 4. a) 6 cm b) 2,5 dm c) 0,2 cm 5. AC

Zadania utrwalające / 161

1. a) $-3\frac{1}{2}$; 10; -3,2; 1,25 b) $\frac{2}{7}$; -0,1; 0,3125; -0,8 2. a) $-1\frac{7}{15}$ b) -14,05 c) 1 d) 15 e) $16\frac{3}{8}$ f) -42 g) -1 h) $4\frac{1}{4}$ 3. $a = -12$, $b = -\frac{2}{3}$, $a < b$ 4. SZYMBORSKA 5. a) > b) > c) < d) > e) = f) = g) < h) = 6. 21 7. -85,5 9. 6 10. 13,5

Zadania sprawdzające / 162

1. A 2. C 3. C 4. D 5. D 6. B 7. D 8. B 9. C 10. D 11. FF 12. BD 13. b 14. $x = 2,5$

V. Rachunek algebraiczny

1. Wyrażenia algebraiczne / 164

1. II, III, VI 2. iloczyn liczb a i b ; połowa kwadratu liczby d ; iloczyn liczb a , b i h ; jedna trzecia iloczynu liczb a , b i h ; suma liczb a i b ; kwadrat różnicy liczb c i d ; suma kwadratów liczb a i b ; iloraz różnicy liczb a i b i liczby 4 3. a) $a + (-3)$ b) $n - (-7)$ c) xy d) $-5 : m$ e) $b + 2a$ f) $\left(20 - \frac{x}{y}\right)^2$ g) $(a+b)(a-b)$ 5. a) 5 b) $-x^2y^2$ c) $-12ax^2y^2$ d) $-x^3y^3$ e) $-a^3b^3$ f) x^2y^2 g) $81a^2b^2$ h) $-4m^4n^3$ 6. $4; -\frac{1}{2}; 0,8; 1; -1; 1; -22$ 7. PFPPFF 8. a) 4m zł b) 8x c) a^2 d) nx e) kx 9. a) $(30m - 40) : 30$ zł b) $2x - 4$ c) $300\left(1 + \frac{x}{100}\right)$ zł 10. $\frac{4}{3}x$ 11. o $\frac{x-y}{x} \cdot 100\%$ 12. $100a + 10b + c$ 13. a) $2n$ b) $2n + 1$ c) $3n$ d) $4n, 4n + 4, 4n + 8$ 14. 6 zł 15. granat $\left(\frac{32-n}{n+7} + 1\right)$ zł, kiwi $\frac{32-n}{n+7}$ zł 16. $\left(\frac{8-z}{z+4} + 1\right)$ zł 17. banany $\frac{24-2x}{x+3}$ zł, mandarynki $\left(\frac{24-2x}{x+3} + 2\right)$ zł 18. bombka $\left(\frac{154-3m}{m+5} + 3\right)$ zł, aniołek $\frac{154-3m}{m+5}$ zł Wyzwanie. a) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55 b) $\frac{n(n+1)}{2}$ c) 5050 d) tak Sprawdź się! 1. B 2. $5ab \text{ cm}^2$ 3. $4m + 2n$ 4. $28\left(1 + \frac{y}{100}\right)$ zł 5. $10x + y$

2. Wartość liczbową wyrażenia algebraicznego / 169

1. a) 56 b) $\frac{2}{3}$ c) -1,0001 2. a) $\frac{3}{8}$ b) 16,8 c) 4 3. BD 4. a) $\frac{1}{4}$ b) $1\frac{1}{8}$ 5. 0,03m zł, 45 zł 6. a) np. $a = 1, b = 1$ b) np. $a = 3, b = -1$ c) np. $a = 0, b = 1$ 7. a) BMI $\approx 24,2$, masa w normie 8. a) 7 b) $2\frac{2}{3}$ 9. a) 4,1 b) 2°C Wyzwanie. 122 Sprawdź się! 1. B 2. 12,4 3. 0,29 4. 6 5. np. $a = -1, b = -1$

3. Suma algebraiczna / 172

1. a) $-2x^3 + 5y - 3z^3$ b) $0,5y + y^2 - xy$ c) $6a^4 + b^2 - 4c + 12$ 2. a) $15x + (-5)$ b) $-4,5 + (-0,5y)$ c) $2\frac{2}{3}x + \left(-\frac{2}{3}y\right)$ d) $-3,1x^2 + (-3y)$ e) $5a + \left(-\frac{1}{2}y^3\right)$ f) $xyz + (-abc)$ 3. a) $-\frac{1}{2}x; 2y; -z$ b) $x^2; -xy; -6$ c) $x; y; -1$ d) $4mn; -0,8m; p$ e) $a^5; b^4; -c^3; -d^2$ f) $-3x^2; 1,5a$ 4. a) 5x b) -5y c) z d) $-\frac{1}{8}m$ e) 5b f) 0 5. a) -b b) b^2 c) 3x d) $x + 8xy + 8y$ e) $2x^2 - x + 2,3y$ f) $\frac{1}{8}n$ 6. a) $6x + 2y + 5; 23$ b) $11x + 2y + 1; 29$ 7. FP 8. $(3,25x + 30)$ zł 9. C 10. suma: $101a + 20b + 101c$, a – cyfra setek, b – cyfra dziesiątek, c – cyfra jedności danej liczby 11. 9x 12. $\frac{9}{7}x$ zł 13. a) $3n + 2$ b) $4n + 1$ c) $xn + y$ 14. tak samo się opłaca Wyzwanie. np. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ i $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$ Sprawdź się! 1. C 2. $3x + 3y + 1; 28$ 3. 2940x zł 4. 1,5x zł 5. $10n + 6$, n – liczba naturalna

4. Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych / 176

1. a) $9x + 1$ b) $3y^2 + 4y + 2$ c) $7a^3 - 8b^4$ d) $x^2 + 2x + 1$ 2. a) $\frac{4}{15}m^2 + 3\frac{2}{5}$ b) $-2xy^2 - 2y^2 + 2\frac{7}{8}$ 3. a) $9a^2 + 4a - 4$ b) $10,25m^2 - 5n^2 - 4$ c) $1,1x^2y - \frac{5}{8}x^2 - 12\frac{1}{3}$ 4. a) $-7x + 5$ b) $-9x + 2$ c) $z - 18y - 11$ 5. a) $49a^2 - 6a; 1\frac{6}{7}$ b) $\sqrt{c} - 7c; -26$ 6. a) $6x - y - z; -15$ b) $x - 9y - 6z + 1; -2,5$ c) $5x - 5y; -25$ d) $5a - 3b - 5,8; -5,1$ 7. wartość wyrażenia: -5 8. równe $a + b$: II, III, równe $a - b$: I, IV 9. I i IV 10. a) 0 b) $-2l + 2m$ c) 0 11. BC 12. $4p + q + 7r, -13$ 13. a) $7x - 10$ b) $-2b^2$ 14. $15n + 30$, n – liczba naturalna 15. $(155x + 80)$ zł 16. $24a + 4b$ 17. $(x + 4y)$ dm 18. $(9p + 5q - 0,5)$ zł Wyzwanie. $a = 9, b = 6, c = 2, f = 1, g = 8, h = 7, i = 4$ Sprawdź się! 1. PP 2. a) $a + b$ b) $a - b$ 3. $8y - 2x - 34; -26$ 4. $2x - 2y$ 5. $5x - 2y$

5. Mnożenie sumy algebraicznej przez liczbę / 179

1. a) $4x + 12; -10a + 5b; -20y + 4z$ b) $-0,4y + 7,2; 3a - 6b; 0,8x - 0,08y$ c) $y - 0,9; -2,4a + b; 2x + 0,1$ 2. a) $3x - 9; 5y + 5z; 12x - 4y; 8n - 14$ b) $2z + 1; -2b + 1; 0,2x - y; a + 3$ 3. a) $-9c - 2$ b) $2x - 14$ c) $12y + 8$ d) $17x - 9$ e) $-5c + 14$ f) $-33x + 18$ g) $87z + 19$ h) $-20x - 48$ 4. D 5. a) $9a - 4$ b) $8a + 5b - 6$ c) $2b + 2$ d) $2,5a + 5b - 1$ e) $3,4x - 0,2$ f) $-2\frac{1}{3}a - b$ 7. a) $15x - 24z - 6$

b) $-56n - 72p - 8t$ c) $-17a - 3b$ d) $9x + 17y$ e) $-2x + 8y$ f) $-2x - 2y$ 8. a) $4b + c$ b) $2a - b + 15$
 c) 18 d) $4x + 24y + 28$ 9. $(69x + 288)$ € 10. a) $-2y + 36$; 35 b) $5x - 5y$; 12,5 11. wartość
 wyrażenia: $-31,5$ 12. a) $11x - 48y$; $-8,9$ b) $8x - 4y - 8$; -5 13. $(3,5x + 10,5)$ cm; 15,4 cm
Wyzwanie. $(2a - 0,12ab)$ zł; 0,16 zł **Sprawdź się!** 1. $12a - 3c$ 2. FP 3. $4y - 3x - 15$; -19
 4. $(12x - 3500)$ zł 5. $(1,4a - 10,5)$ kg

6. Wylaczanie wspólnego czynnika liczbowego przed nawias / 182

1. a) $4(a + 1)$; $5(5a - 1)$; $0,6(a + 1)$ b) $\frac{1}{3}(1 - a)$; $2\frac{2}{5}(a + 1)$; $1,5(a - 1)$ 2. a) $2(10b + 3c)$; $7(2a - 1)$;
 $3(3b + 4)$; $4(3a^2 - 2b)$ b) $0,8(2a - 3c)$; $0,5(5a + b)$; $0,7(3a^2 - 4c^2)$; $0,8(3x^2 - 2y)$ 3. a) $4(x - 2y - z)$;
 $3(2a - 3b + 4y)$ b) $9(7m + 6n - 1)$; $\frac{3}{5}(a^2 + 2b - 3)$ 4. B 5. a) $\frac{1}{4}(3x + 3y^2 - z^3)$ b) $\frac{1}{3}(a - 2b^2 + 4c^3)$
 c) $\frac{1}{8}(c - bz^2 + 2a^3)$ 6. a) $\sqrt{3}(-1 + 4y)$ b) $2\sqrt[3]{3}(-2 + a^2)$ 7. a) $7x(2y - 3x + y^2)$ b) $12(-3y^2 + x - 2y)$
 c) $\sqrt[3]{2}(xy + 1 - z)$ d) $9\sqrt[3]{7}(a - 3b - 4)$ 8. $3(2b + 4) - 2(2b + 3) = 2(b + 3)$ 9. 6 razy **Wyzwanie.** tak
Sprawdź się! 1. a) $6(m - a)$ b) $5(2n - 3m)$ 2. D 3. $\frac{1}{5}(3a - b^2 + 2z)$ 4. a) $\sqrt{5}(2x + 1)$
 b) $\sqrt[3]{5}(3 - 2x^2)$ 5. tak

Zadania utrwalające / 184

1. a) $a - (-b + c)$ b) $x + (x - 5) + (x - 10)$ c) $2(a^2 - b^2)$ d) $(x + 6)(x - 6)$ e) $(a - b)^3$
 f) $(-3 - m) : (-3 + m)$ g) $2n + (2n + 2) + (2n + 4)$, n – liczba naturalna 2. a) 1 b) $-0,000001$ c) $\frac{3}{4}$
 d) 4 3. a) $2x - 4$ b) $3a - 9$ c) $17y - 31y^2$ d) $-6b - 23z$ 4. a) $7x - 14$ b) $3x + 12$ c) $11x^2 - 77$
 d) $6x - 18$ e) $24x + 120$ f) $-0,8x + 8$ 5. A i III, B i II, C i I, D i IV 6. a) $2(-4x + 3y - 1)$
 b) $6(a - 2b + 3c)$ c) $7(3x^2 + 2y^3 - 1)$ d) $-0,8(2a + b + 6c)$ e) $\frac{1}{5}(4x + 3y + 1)$ f) $\frac{5}{4}(3a + 5b - 1)$
 7. 3950 zł 8. $311x - 620$, x jest jedną z liczb 3, 4, 5 9. 0,8y zł 10. $(30 - 5x - y)$ zł 11. $2x - 5$
 12. $(75n + 250)$ kwiatów 13. $120x$ cm² 14. $(8a + 4b)$ m 15. $\frac{1}{2}a^2$ 16. $66 - x$; 61 17. dla
 $a = -1$

Zadania sprawdzające / 186

1. B 2. A 3. D 4. C 5. C 6. BC 7. PF 8. FP 9. BD 10. A2 11. $9(x - y)$,
 np. 94 i 49, 83 i 38, 72 i 27 12. o $\frac{x - 8000}{80}\%$ 13. Suma jest równa $4(4n - 3)$.

VI. Równania

1. Równania z jedną niewiadomą / 188

1. a) tak b) nie c) tak 3. a), b) tak c), d), e), f) nie 4. a) tak b) nie 5. PPF 6. a) 2, 3
 b) 2 c) 1 7. a) $-4, -2$ b) -1 c) 0 8. a) 1 b) $-3, 0$ c) -1 9. PFPP 10. a) tak
 b) tylko -3 c) tylko -1 d) tak 11. A – II, B – I, C – IV, D – III **Sprawdź się!** 1. C
 2. a) nie b) tak c) nie d) nie 3. 1 4. 1 5. $-3, 0$

2. Rozwiązywanie równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą / 191

2. V 3. a) $x = -7\frac{1}{8}$ b) $y = -\frac{5}{8}$ c) $x = 1,6$ d) $y = \frac{8}{49}$ e) $y = -30$ f) $l = -12$ 4. Wskazówka:
 Rozwiąż równania. 5. a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = 2$ d) $x = -7$ 6. BD 7. a) $y = 4$ b) $u = 7$
 c) $y = 3$ d) $a = -2$ 8. I i III 9. I i II liczba naturalna, III i IV liczba ujemna 10. a) $x = 2$; tak
 b) $x = 4,5$; nie c) $x = -1$; tak d) $x = -0,5$; nie 11. a) $x = 0,5$ b) $x = 15$ 12. a) $x = -3$ b) $x = -2$
 c) $x = -2$ d) $x = -1$ **Wyzwanie.** dowolną z liczb, która przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1,
 tj.: 1, 4, 7, 10, ... **Sprawdź się!** 1. B 2. nie 3. $x = -0,8$ 4. tak 5. $x = 20$

3. Równania – zadania tekstowe / 195

1. 7,20 zł 2. 275 3. 700 dzieci 4. 5,5 cm i 14,5 cm 5. długości ogrodzeń ogródków:
 74 m i 70 m 6. 64,8 i 48 8. 20 monet 9. 25 000 zł 10. D 11. 30 000 zł 12. 24
 uczniów 13. po 50 kg 14. 42 lata i 12 lat 15. 84 lata 16. 62 17. 345 18. po 2,5 h,

225 km i 125 km 19. o jeden dzień **Wyzwanie.** 18 km **Sprawdź się!** 1. 4,5 l i 2,3 l
2. Zosia 150 zł, Tosia 50 zł 3. 7 zł 4. FP 5. 20 lat

4. Wielkości wprost proporcjonalne / 198

1. tak, $a = 12,6$ 2. $a = 8$, $y = 8x$ 3. 2 s 5. 5 s, 300 000 km/s 6. 1,5 szklanki cukru, 4 jaja
7. AC 8. 0,7 km 9. a) 24 zł b) 8 10. B 11. PP 12. 2,6 l 13. 10 km 14. 10
Wyzwanie. 64 ha **Sprawdź się!** 1. tak, $a = 2,5$ 2. 5 kg 3. 15 ryz, 250 zł 4. 12 km
5. 125 km

5. Proporcja / 202

1. np. $\frac{4}{16} = \frac{2}{8}$, $\frac{8}{16} = \frac{2}{4}$, $\frac{4}{2} = \frac{16}{8}$, $\frac{16}{4} = \frac{8}{2}$ 2. a) $\neq$ b), c), d) = proporcje: b), c), d) 3. a) 2,5
b) 5 c) 0,36 d) 9 4. a) 7,2 b) 0,36 c) 4 d) 1 e) 4,5 f) 4,5 g) 9,2 h) -15 i) -2 j) 8
6. 12 m² 8. 40,5 kg 9. 12,92 g **Wyzwanie.** $\frac{1}{4}$ **Sprawdź się!** 1. A 2. $m = 10,5$
3. $x = -31$ 4. 7 5. 13 cm

6. Podział proporcjonalny / 205

1. złoto 6 g, miedź 2 g 2. 10 : 11 3. $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{2}{5}$, $\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{5}{2}$, $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{2}{7}$, $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{7}{2}$, $\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{5}{7}$,
 $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{7}{5}$ 4. 35 cm 6. 78,75 cm i 288,75 cm 7. a) 5 : 1 b) 3 : 1 c) 5 : 3 8. 37,5 i 62,5
9. piłka pingpongowa 2,7 g, piłka tenisowa 56,7 g 10. 80 zł 11. 4 : 1 13. 720 m² 14. PP
Wyzwanie. beczka z 20 kg **Sprawdź się!** 1. B 2. 3,5 cm i 4,5 cm 3. 160 cm 4. 187,
561,935 5. 135 000 zł

7. Przekształcanie wzorów / 209

1. a) $x = a + 4$ b) $y = 3ab - 2c$ c) $z = 2a - 5$ 2. a) $y = \frac{dv-b}{a}$ b) $y = \frac{d-c}{3a}$ 4. a) $z = \frac{at}{c}$ b) $z = \frac{ab}{3x}$
c) $z = \frac{bc-3}{3}$ 6. a) $m = \frac{2E_k}{v^2}$ b) $v = \frac{s}{t}$, $t = \frac{s}{v}$ c) $r = \frac{a}{\omega^2}$ d) $m = \frac{F}{a}$, $a = \frac{F}{m}$ e) $a = \frac{2s}{t^2}$ f) $T_2 = \frac{T_1 v_2}{v_1}$,
 $v_2 = \frac{T_2 v_1}{T_1}$ 7. a) $z = \frac{c-2ay}{y}$ b) $z = \frac{1}{c-ab}$ c) $z = -\sqrt{\frac{a-c}{b}}$ lub $z = \sqrt{\frac{a-c}{b}}$, $a \geq c$ 8. $x = \frac{6n}{m} - y$
9. $b = 4c - a$ 10. FP 11. $c = \frac{8a}{d}$ 12. $c = \frac{b-2a}{4}$ 13. $a = \frac{4c-2b}{3}$ 14. $P = 5ah$, $a = \frac{P}{5h}$
15. BC **Wyzwanie.** Mamy kolejno: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$, $\frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d}$
Sprawdź się! 1. C 2. $z = \frac{a+b}{x}$ 3. a) $a = -\sqrt{P}$ lub $a = \sqrt{P}$ b) $h = \frac{2P}{a}$ 4. $x = 5a - y$
5. $n = \sqrt{17x}$

Zadania utrwalające / 212

1. a) $a = \frac{2}{3}$ b) $b = 3$ c) $x = -8$ d) $y = -8$ e) $y = -8,1$ f) $z = 8$ g) $x = 4$ h) $x = -6$ 2. 8 l i 10,5 l
3. 110 zł, 55 zł, 88 zł 4. 7a – 35 uczniów, 7b – 32 uczniów 5. w 2017 roku 6. 5 cm i 7,5 cm
7. 1008 zł, 2268 zł, 1260 zł, 1764 zł 8. 1600 zł 9. a) $x = 3,75$ b) $y = 1$ c) $z = -31$
10. 9,88 g 11. ok. 32,3 m³ 12. 10 000 pszczoł 13. z 1240 płytek 14. 39,6 km
15. 1,3 km 16. 20 000 zł 17. 50 000 zł i 80 000 zł 18. 2 kg 19. 4 l roztworu o stężeniu
3 : 7, 12 l roztworu o stężeniu 2 : 3

Zadania sprawdzające / 214

1. B 2. D 3. B 4. C 5. D 6. B 7. B 8. C 9. C 10. PF 11. A2 12. BC
13. o 20% 14. 13 i 31

VII. Twierdzenie Pitagorasa

1. Prostokątny układ współrzędnych na płaszczyźnie / 218

2. $A = (-2, 1)$, $B = (3, 2)$, $C = (0, -2)$, $D = (-4, -3)$, $E = (4, -4)$, $F = (4, 0)$, $G = (0, 3)$, $H = (-5, 0)$
3. a) C, I, J b) A, E c) B, D d) G, K e) F, H f) L, F 6. Chorzów: (50°N, 19°E), Gdańsk:
(54°N, 19°E), Poznań: (52°N, 17°E), Warszawa: (52°N, 21°E), Wrocław: (51°N, 17°E) 7. Kuba: Kgl,
g2, h2, Sd3, e3, b4, d4, Se5, Hb6, Wc7, Gd7; Bartek: Sc4, d5, g5, e6, Wf6, Gb7, He7, h7, Gf8, Kg8

8. 49 9. a) (3, 0) b) $\left(-2\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 10. a) (4, -8) b) (-4, 0) 11. 36 12. a) 28 b) 44
 14. A2 15. PP 16. $C = (6, 0), D = (0, -4)$ 17. $A = (-5, -4), C = (3, 2)$ (lub na odwrót),
 $D = (-5, 2)$, obwód: 28 18. czworokąt $KLMN$, o 50% 19. a) prostą przechodzącą przez punkty
 (0, 0) i (1, 1) b) prostą przechodzącą przez punkty (0, 0) i (1, -1) c) prostą równoległą do osi x
 i przechodzącą przez punkt (0, -5) d) prostą równoległą do osi y i przechodzącą przez punkt (4, 0)
 20. a) półpłaszczyznę złożoną z punktów na osi y i na prawo od niej b) półpłaszczyznę złożoną
 z punktów na osi x i poniżej c) kąt prosty, którego wnętrzem jest I ćwiartka układu współrzędnych
Wyzwanie. $A - III, B - II, C - I, D - IV$ **Sprawdź się!** 1. $A = (1, 3), B = (3, 2), C = (-2, 1),$
 $D = (4, 0), E = (2, -2), F = (-3, -4), G = (0, -3)$ 2. C 3. $B = (-3, 3)$ 5. 22,5

2. Twierdzenie, założenie, teza, dowód / 226

1. a) Z: kąty są wierzchołkowe; T: miary kątów są równe b) Z: trójkąt jest równoramienny;
 T: miary kątów przy podstawie trójkąta są równe c) Z: n jest liczbą naturalną podzielną przez
 3 i 5; T: n jest liczbą naturalną podzielną przez 15 d) Z: n jest liczbą naturalną podzielną przez 6;
 T: n jest liczbą naturalną podzielną przez 3 i 2 2. a) Z: kąty α i β są wierzchołkowe; T: $\alpha = \beta$
 b) Z: $|AC| = |BC|$; T: $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC|$ 3. a) Jeżeli trójkąt jest równoboczny, to miary jego kątów
 wewnętrznych są równe. b) Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma miar jego kątów ostrych jest
 równa 90° . c) Jeżeli czworokąt jest równoległobokiem, to jego kąty przeciwległe mają równe
 miary. d) Jeżeli liczba naturalna jest podzielna przez 9, to jest podzielna przez 3. e) Jeżeli dwie
 ostatnie cyfry liczby naturalnej są zerami, to dzieli się ona przez 4. 4. b) np. 4 i 3
 5. **Wskazówka:** Przyjmij oznaczenia: $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle ACB| = \beta$, wtedy
 $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle BDC| = 180^\circ - (\alpha + \frac{1}{2}\beta)$, więc trójkąty ADC i BDC są przystające. 7. FFFPFPF
 8. a) Z: $ABCD$ – romb; T: $AC \perp BD$ b) Z: a, b, c są długościami boków trójkąta; T: $a + b > c,$
 $b + c > a$ i $c + a > b$ c) Z: a i b są długościami sąsiednich boków prostokąta; T: $P = ab$.
Sprawdź się! 1. a) Z: wielokąt jest trójkątem; T: suma miar kątów wewnętrznych wielokąta jest
 równa 180° b) Z: liczba naturalna n jest podzielna przez 4; T: liczba n jest podzielna przez 2
 2. a) Jeżeli czworokąt jest rombem, to jego przekątne są prostopadłe. b) Jeżeli liczba naturalna
 jest podzielna przez 21, to jest podzielna przez 3 i przez 7. 3. Z: $ABCD$ – równoległobok;
 T: $|OA| = |OC|$ i $|OB| = |OD|$ 4. D

3. Twierdzenie Pitagorasa / 231

2. Z: $|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$; T: $|BC|^2 + |AC|^2 = |AB|^2$ 3. a) $a^2 + x^2 = y^2$ b) $c^2 + d^2 = x^2$ c) $x^2 + z^2 = y^2$
 d) $|PR|^2 + |RS|^2 = |PS|^2$ e) $|LM|^2 + |KM|^2 = |KL|^2$ 4. a) 25 cm b) $\sqrt{21}$ cm c) 1 cm 5. a) 15
 b) 13 c) $\sqrt{61}$ d) 8 e) $\sqrt{14}$ f) 2 6. a) $\sqrt{353}$ cm lub 15 cm b) $\sqrt{34}$ cm lub 4 cm c) $\sqrt{2696}$ cm
 lub 48 cm 7. a) $\sqrt{45}$ cm b) $\sqrt{38}$ cm 8. AC 10. A2 11. $\sqrt{3}$ cm² **Wyzwanie.** a) np.
 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ b) np. $\sqrt{2}, \sqrt{7}, 3$ **Sprawdź się!** 1. $|SM|^2 + |SU|^2 = |MU|^2$ 2. a) 17 b) 2 4. B
 5. ok. 37 lub ok. 31

4. Długość odcinka w układzie współrzędnych / 236

1. a) $|AO| = \sqrt{34}, |BO| = \sqrt{53}, |CO| = \sqrt{41}, |DO| = 10$ b) $|AO| = \sqrt{12\frac{1}{2}}, |BO| = \sqrt{\frac{5}{8}}, |CO| = 3,9$
 2. a) $|AB| = 5, |BC| = 10, |AC| = \sqrt{97}$ b) $|AB| = \sqrt{89}, |BC| = 10, |AC| = \sqrt{89}$ c) $|AB| = \sqrt{29},$
 $|BC| = \sqrt{52}, |AC| = \sqrt{65}$ 3. b) $2\sqrt{58} + 6$ 4. tak 5. nie 6. odległości: 6, 10 7. nie
 8. a) $\sqrt{50}$ b) $D = (0, -8)$ 9. AC 10. A3 11. $|KL| = \sqrt{50}, |KM| = \sqrt{65}, |KN| = \sqrt{18}, |LM| = 5,$
 $|LN| = \sqrt{68}, |MN| = \sqrt{41}$ **Wyzwanie.** $S = (-4, -4)$ lub $S = (4, -4)$ **Sprawdź się!** 1. PP 2. AB
 3. $|KL| = |KM| = 5$ 4. tak 5. 10

5. Praktyczne zastosowania twierdzenia Pitagorasa / 240

2. tak 3. 9,5 m 5. Potrzebne są łańcuchy o długości ok. 7,81 m. 6. AC 7. 20 cali
 8. ok. 2100 km 9. PF 10. 60 11. ok. 424 cm 12. ok. 11 m 13. o ok. 1 cm 14. nie
 15. tak 16. 48 m² **Sprawdź się!** 1. B 2. tak 3. Stolik ma 120 cm wysokości.
 4. o 40 m 5. 5 km

Zadania utrwalające / 246

1. BRAWO 2. a) 2,5 b) 2 c) 1 d) 2 3. np. (4, 7), (3, 6), (-1, 2) 6. a) Równoległoboki o równych polach mogą mieć różne kąty ostre. b) np. 15 c) np. $(-2) \cdot (-3) = 6$ 7. a) $y^2 + z^2 = x^2$
 b) $\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = a^2$ c) $h^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = c^2$ 8. a) 3 b) 9 c) 8 9. 16 cm 10. $2\sqrt{12}$ cm²
 12. 80 cm, 360 cm² 13. a) $\sqrt{61}$ b) $11 + \sqrt{61}$ c) 15 14. a) 5, 12, 13 b) $\sqrt{5}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{20}$ i $\sqrt{6}$,
 3, $\sqrt{15}$ 15. wystarczy, zostanie ok. 0,32 m² 16. ok. 14 m 17. 2,4 m 18. $\sqrt{20}$ lub $\sqrt{44}$
 19. $(60 + 2\sqrt{1000})$ cm 20. ok. 7 m²

Zadania sprawdzające / 249

1. C 2. A 3. A 4. D 5. C 6. C 7. D 8. A 9. B2 10. FP 11. AC 12. 1 cm
 13. tak 14. Czarek, o 200 m

VIII. Graniastosłupy**1. Graniastosłupy i ich rodzaje / 254**

1. tak, nie 3. kolejno: równe, równoległe, wspólną 4. PPFP 5. nie 6. $12(a+b)$ cm
 9. AD 11. a) ośmiokątem b) dwunastokątem c) siedmiokątem 12. a) nie b) nie
 13. a) czworokątny b) trójkątny c) dowolny 14. a) tak b) nie 15. $42n$ cm
 16. $30(2x+3)$ cm 17. Potrzeba 288 cm wstążki. Wyzwanie. a) tak b) nie c) nie
 Sprawdź się! 1. tak 2. BC 3. 11 4. $8(7a+2b)$ cm 5. a) nie b) tak

2. Pole powierzchni graniastosłupa prostego / 259

1. a) 27 cm² b) 24 cm² 2. 39,5 mm², wymiary modelu: 7,5 cm $\times$ 4,5 cm $\times$ 12 cm 3. FFP
 4. 120 cm² 5. BC 6. 3 cm 7. tak 8. 4 rolki 10. A 11. 230 cm² 12. ok. 88 cm²
 13. ok. 82 cm² 14. 360 cm² 15. 20 cm 16. 28,8 m² płytek i 100 m² dachówki
 17. 1260 cm² 18. 2 rozwiązania: ok. 175 cm² lub ok. 199 cm² Sprawdź się! 1. B
 2. Jest to sześciąt o krawędzi 2,5 cm. 3. 150 cm² 4. 236 cm² 5. 16 dm²

3. Objętość bryły, jednostki objętości / 265

1. a) 1 000 000 b) 3200 c) 1,2 d) 25 2. a) 0,382 b) 0,005324 c) 25 d) 8000 3. a) 4,53
 b) 15 c) 0,5 d) 37,5 4. 750 cm³ 5. D 6. 40 7. a) 243 mm³ = 0,243 cm³
 b) 15 dm³ > 1500 cm³ c) $6\frac{1}{2}$ l < 65 dm³ d) 0,08 dm³ = 80 000 mm³ e) 358 ml > 148,5 cm³
 f) 12 m³ > 1300 l 8. FFP Sprawdź się! 1. a) 1,5 b) 300 2. a) 1250 b) 20 000 3. 1,24 g
 4. a) 1285 ml < 1,3 l b) $\frac{3}{4}$ m³ > 75 dm³ 5. B1

4. Objętość graniastosłupa prostego / 268

1. a) 288 cm³ b) 245 dm³ 2. 64 m³ 3. 8000 4. 17 dm 5. 9,6 kg 6. A1 7. o 96 ml
 8. 4,5 cm 9. 10 10. 282,5 cm³ 11. 7 Wyzwanie. 28 klocków, 1764 cm³
 Sprawdź się! 1. 125 dm³ 2. D 3. 125 cm³ 4. 1 m 5. 8

Zadania utrwalające / 271

2. 150 dm² 3. 216 cm² 4. 2800 cm² 5. $32n^2$ cm², $12n^3$ cm³ 6. 480 cm², 576 cm³
 7. 1280 cm², 2400 cm³ 8. 1152 cm³ 9. 201,6 cm² 10. na wysokość 4 cm, 1,2 l
 11. 140 łyżek 12. ok. 3 ton 13. 896 kg 14. 192 kg 16. o ok. 95% 17. W skali 1 : 2
 długość krawędzi podstawy to 2 cm, a wysokość 4 cm.

Zadania sprawdzające / 273

1. B 2. D 3. A 4. D 5. C 6. C 7. D 8. PPFP 9. PPFF 10. AD 11. A2
 12. 7 13. 9 14. 1200 cm², 2800 cm³

IX. Elementy statystyki opisowej**1. Odczytywanie i przedstawianie danych statystycznych za pomocą tabel i diagramów / 276**

3. a) 32% b) 15% c) 280 000 4. a) bdb – 40, db – 72, dst – 40, dop – 20, ndst – 16 b) 200

5. PFP 7. c) Np. Najwięcej osób ma wzrost w przedziale 170–179 cm. Wzrost z przedziału 150–159 cm ma 5 razy więcej kobiet niż mężczyzn. Wzrost co najmniej 180 cm ma o 5 mężczyzn więcej niż kobiet. 8. a) ok. 10 mln w Etiopii, ok. 0,5 mln w Szwecji b) w Szwecji 10. a) 33,4% b) chrześcijanie – ok. 2265 mln, muzułmanie – ok. 1654 mln, hinduiści – ok. 936 mln, buddyści – ok. 481 mln, pozostałe religie ok. 1444 mln c) o ok. 454 mln więcej
Wyzwanie. b) Np. Nastolatków każdej płci jest tyle samo. Jest 2 razy więcej kobiet niż mężczyzn w wieku powyżej 60 lat. W wieku 20–60 lat jest więcej mężczyzn niż kobiet.
Sprawdź się! 1. a) najwięcej Rosja, najmniej Azerbejdżan b) wszystkie oprócz Rosji c) w Rosji, na Białorusi 4. AD

2. Odczytywanie i przedstawianie danych statystycznych za pomocą wykresów / 285

1. a) wieczór – godziny 18.00–20.00 b) ok. 17 mln c) ok. godz. 19.00 d) np. pomiędzy godz. 17.00 a 21.00 2. a) 50 cm b) w 1. roku życia c) w wieku 3 lat d) 116 cm e) w wieku 2,5 lat f) 124 cm 3. a) najwyższa: 11 zł, najniższa: 8 zł b) 16. dnia c) kupić 1. lub 2. dnia, a sprzedać 16. dnia d) z 16. na 17. dzień 4. a) od II do VIII b) od I do II i od VIII do XII c) B d) B **Wyzwanie.** b) 30 km c) o 11.00 d) $26\frac{2}{3}$ km/h **Sprawdź się!** 1. PF
 2. a) 20 km/h b) pomiędzy godziną 12.30 a 15.30 c) 6 godzin 3. a) w 1990 r. b) w latach 1995–1996 oraz 2008–2010 c) w latach 1999–2007 i 2011–2017 d) w latach 1994–1995
 4. a) kobiety b) mężczyźni: o 9 lat, kobiety: o 6,4 roku c) u mężczyzn d) zmniejszy się o 2,6 roku

3. Średnia arytmetyczna / 290

2. a) 15 zł b) 10 zł 3. a) ocena 5: $\frac{1}{6}$, ocena 1: $\frac{1}{12}$ b) 3,4 4. B 5. $x = 14$ 6. a) 6250 zł
 b) 45 uczniów c) ok. 139 zł 7. a) 400 b) 3347 zł c) 1600 zł d) 46% 8. 188 cm
Wyzwanie. a) tak b) nie **Sprawdź się!** 1. 51 kg 2. ok. $-4,1^{\circ}\text{C}$, 18°C 3. a) ok. 2 b) 13
 4. a) 24 b) ok. 153 cm 5. AD

Zadania utrwalające / 295

1. a) 3% b) 6 764 470 c) 24 909 703 d) o 137 118 2. a) w piątek i sobotę b) w niedzielę
 c) 18 000 zł d) 3000 zł e) 4000 l f) ok. 2800 km 3. b) wzrosła o 191 tys. km c) największy o 38 tys. km w latach 1980–1990, a najmniejszy o 11 tys. km w latach 1950–1960
 5. a) w latach 2001–2003 i 2006–2009 b) w 2009 r. c) w latach 2002–2004 i 2008–2012
 7. a) 6 razy b) 6 maja, 1200 zł c) 10 dni d) 100 zł 8. a) powyżej 90 b) 88,6 c) 86
 9. a) 3,7 kg b) 3,5 kg c) 3,26 kg d) 20% 10. b) 4,08 11. 2980 zł

Zadania sprawdzające / 299

1. B 2. D 3. A 4. B 5. A 6. B 7. C 8. FF 9. BD 10. a) 2011–2013, 2014–2015, 2016–2017, 2018–2019 b) $3,5^{\circ}\text{C}$ c) $37,3^{\circ}\text{C}$

Źródła ilustracji

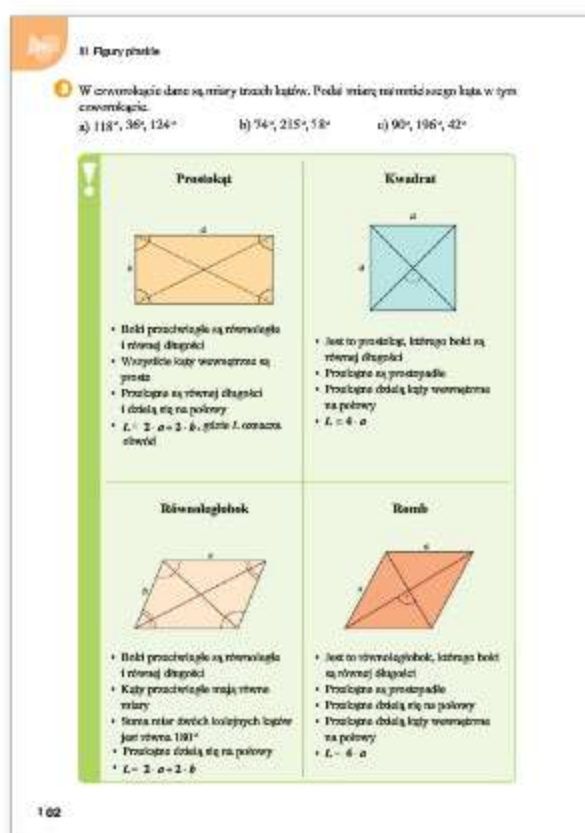
Okladka: (kratka) Valerio Rosati/EyeEm/Getty Images, (kiwi) benimage/E+/Getty Images

Tekst główny: s. 9 (piłka do gry w piłkę nożną) Central Stock/ThETA, (piłka do gry w koszykówkę) Ingram Publishing/ThETA; s. 14 (morele) OrangeVector/Shutterstock.com, (winogrona) Buu/Shutterstock.com; s. 15 (czekolada) baibaz/Shutterstock.com; s. 22 (niebo) JBOY/Shutterstock.com, (samolot) Holy Polygon/Shutterstock.com, (żółta karteczka) Garder Elena/Shutterstock.com; s. 23 (cukierki) stockcreations/Shutterstock.com; s. 25 (tkanina) Kseniya Lavizina/Shutterstock.com, (cena) iierlok_xolms/Shutterstock.com; s. 26 (pingwiny) Coldimages/iStockphoto/Getty Images; s. 27 (kompas) scanrail/iStockphoto/Getty Images, (mapa) Adrian Bergiel/WSiP; s. 29 (skrzynka z jabłkami) Madlen/Shutterstock.com, (cena) iierlok_xolms/Shutterstock.com; s. 28–29 (finał biegu na 100 m mężczyzn, MŚ, Berlin 2009) VON DER LAAGE, GLADYS CHAI/BE&W, (Anita Włodarczyk) PAP/Bartłomiej Zborowski, (Anna Rogowska) PAP/Radek Pietruszka, (Marek Plawgo) PAP/Jacek Kostrzewski, (ikony – sport) yut548/Shutterstock.com, (ikona – medale) Admin/Shutterstock.com, (koła olimpijskie) Paul Crash/Shutterstock.com; s. 33 (żółta karteczka) Lyudmyla Kharlamova/Shutterstock.com; s. 36 (pierwsze ciastko) robynmac/iStock Photo/Getty Images, (drugie ciastko) Turnervisual/iStock Photo/Getty Images, (trzecie ciastko) burwellphotography/iStock Photo/Getty Images, (czwarte ciastko) Bozena_Fulawka/iStock Photo/Getty Images; s. 39 (banknoty polskie) Adrian Lenart/Shutterstock.com; s. 40 (żółta karteczka) Lyudmyla Kharlamova/Shutterstock.com, (niebieska koszula) Floortje/iStock/Getty Images, (cena) iierlok_xolms/Shutterstock.com; s. 41 (chleb) Magone/iStock Photo/Getty Images; s. 42 (chłopak) iagodina/iStockphoto/Getty Images; (Chiny na kuli ziemskiej) Tatiana53/Shutterstock.com; s. 45 (budzik) Photoonline/Shutterstock.com; s. 47 (grzyby w koszyku) Gbuglok/Shutterstock.com; s. 49 (żółta karteczka) Lyudmyla Kharlamova/Shutterstock.com; s. 50 (banknoty euro) Cristina Jurca/Shutterstock.com; s. 51 (małe karteczki) Garder Elena/Shutterstock.com; s. 52 (filiżanka z herbatą) pekour/iStock Photo/Getty Images; s. 53 (sól) Jiri Hera/Shutterstock.com; s. 55 (deska snowboardowa) walik/iStock Photo/Getty Images, (gwiazdka – obniżka) iierlok_xolms/Shutterstock.com; s. 64 (kątomierz) Peter Hermes Furian/Shutterstock.com; s. 66 (zegar) monticello/Shutterstock.com; s. 87 (kwadratowe płytki – twierdzenie Pitagorasa) marekuliasz/Shutterstock.com; s. 95 (mężczyzna) HQuality/Shutterstock.com; s. 96 (kafelki) josepizarro/Shutterstock.com; s. 104 (boisko) Gearstd/iStock/Getty Images; s. 114 (mężczyzna z dywanem) New Africa/Shutterstock.com; s. 116 (narzędzia ogrodnicze) Africa Studio/Shutterstock.com; s. 130131 (pokój) Anna Marynenko/Shutterstock.com; s. 135 (mapa) Adrian Bergiel/WSiP; s. 143 (zestaw do wspinaczki) PauloResende/iStockphoto/Getty Images; s. 146 (stary papier) sl_photo/Shutterstock.com, (portret Platona) FALKENSTEINFOTO/Alamy Stock Photo/BE&W; s. 158 (serweta) fcacotodigital/iStockphoto/Getty Images; s. 159 (karteczka) Lyudmyla Kharlamova/Shutterstock.com; s. 163 (kolba z chlorem) Wojciech Wójtowicz/WSiP; s. 166 (galaretki) inkanya Anankitrojana/Shutterstock.com; s. 167 (kolorowe cienkopisy) Dmitriy Yakovlev/Shutterstock.com, (owoc granatu) Agave Studio/Shutterstock.com, (kiwi) Roman Samokhin/Shutterstock.com; s. 175 (rower) kvsan/Shutterstock.com, (orzechy laskowe) Tanya_mtv/Shutterstock.com, (orzechy nerkowca) Binh Thanh Bui/Shutterstock.com; s. 180 (banknoty euro w portfelu) Picsfive/Shutterstock.com; s. 181 (zeszyty) Lifestyle Travel Photo/Shutterstock.com, (nalewak do paliwa) Richard Peterson/Shutterstock.com; s. 185 (bukiet) Vereschagin/Shutterstock.com; s. 185 (laptop) GreenLandStudio/Shutterstock.com; s. 195 (zeszyty) Hong Vo/Shutterstock.com, (długopis) J. background/Shutterstock.com; s. 197 (buraki i ziemniaki) Kovaleva_Ka/Shutterstock.com, (kapusta) Spayder pauk_79/Shutterstock.com; s. 198 (kanister) Mikhail Olykainen/Shutterstock.com; s. 199 (stos papieru) Picsfive/Shutterstock.com; s. 200 (mandarynki) Best_photo_studio/Shutterstock.com; s. 201 (zakreślacz) MyImages-Micha/Shutterstock.com, (cukier) Photoongraphy/Shutterstock.com; s. 205 (zestaw do mycia okien) Ivonne Wierink/Shutterstock.com; s. 207 (prezenty) phive/Shutterstock.com; s. 208 (beczki) Alex Tuzhikov/Shutterstock.com; s. 211 (skarbonka) r.classen/Shutterstock.com; s. 212 (złoty medal) Valery Evlakhov/Shutterstock.com; s. 213 (pszenica) New Africa/Shutterstock.com; s. 214 (pociąg) Tommy Alven/Shutterstock.com; s. 215 (książki) Scisetti Alfio/Shutterstock.com; s. 216–217 (cytryna) Vectorpocket/Shutterstock.com, (pizza) Danyliuk Konstantine/Shutterstock.com, (lemoniada) Sudowoodo/Shutterstock.com, (składniki pizzy) GreyLilac/Shutterstock.com, (butelka z wodą) Mr. Kaizer/Shutterstock.com, (mięta) mart/Shutterstock.com, (pomarańcza) CRStocker/Shutterstock.com, (składniki pizzy) baras/Shutterstock.com; s. 220 (szachownica) grandnat/Shutterstock.com, (figury szachowe) Kolesov Sergei/Shutterstock.com, (mapa) Adrian Bergiel/WSiP, (mapa, plan) Adrian Bergiel/WSiP; s. 224 (kurtyna) SCOTTCHAN/Shutterstock.com; s. 231 (stary papier) sl_photo/Shutterstock.com, (portret Pitagorasa) AKG IMAGES/BE&W; s. 248 (witraż) Lightguard/iStockphoto/Getty Images; s. 250 (szachownica) grandnat/Shutterstock.com, (figury szachowe) Kolesov Sergei/Shutterstock.com; s. 252–253 (samochody) TheAYS/iStockphoto/Getty Images; s. 257 (krzywa wieża w Toruniu) Sławek Staszczuk/Alamy Stock Photo/BE&W, (krzywa wieża w Ząbkowicach Śląskich) Dariusz Bednarek/BE&W; s. 258 (prezenty) Sarawut Aiemsinsuk/Shutterstock.com; s. 261 (kostka do gry) JupiterImages/Comstock/Photo; s. 256 (kostki do gry) Grażyna Bryk/WSiP, (pudełka z zapalnikami) Grażyna Bryk/WSiP, (drewniane klocki) Grażyna Bryk/WSiP, (sok pomarańczowy w butelce) Evgeny Karandaev/Shutterstock.com; s. 266 (pasta do zębów) gresei/Shutterstock.com; s. 267 (farba emulsyjna) Gruffi/Shutterstock.com; s. 269 (deska) donatas1205/Shutterstock.com; s. 270 (pryzma gruzu) J. Plakiewicz, (drewniane klocki) Grażyna Bryk/WSiP; s. 272 (koparka) maggee/Shutterstock.com; s. 275 (ciężarówka) Creativa Images/Shutterstock.com; s. 283 (medale) Olga Galkina/Shutterstock.com; s. 290 (dziewczyna) Africa Studio/Shutterstock.com, (Bazylika Mariacka w Krakowie) Martina Bodini/Shutterstock.com; s. 292 (książki) paulista/Shutterstock.com; s. 293 (pracownicy firmy) Syda Productions/Shutterstock.com; s. 294 (dziewczyna z zegarem) Dean Drobot/Shutterstock.com; s. 296 (uczniowie z książkami) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 300 (dłoń z banknotami) mkos83/Shutterstock.com.

Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne oświadczają, że podjęły starania mające na celu dotarcie do właścicieli i dysponentów praw autorskich wszystkich zamieszczonych utworów. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, przytaczając w celach dydaktycznych utwory lub fragmenty, postępują zgodnie z art. 27¹ ustawy o prawie autorskim. Jednocześnie Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne oświadczają, że są jedynym podmiotem właściwym do kontaktu autorów tych utworów lub innych podmiotów uprawnionych w wypadkach, w których twórcy przysługuje prawo do wynagrodzenia.

Matematyka wokół nas

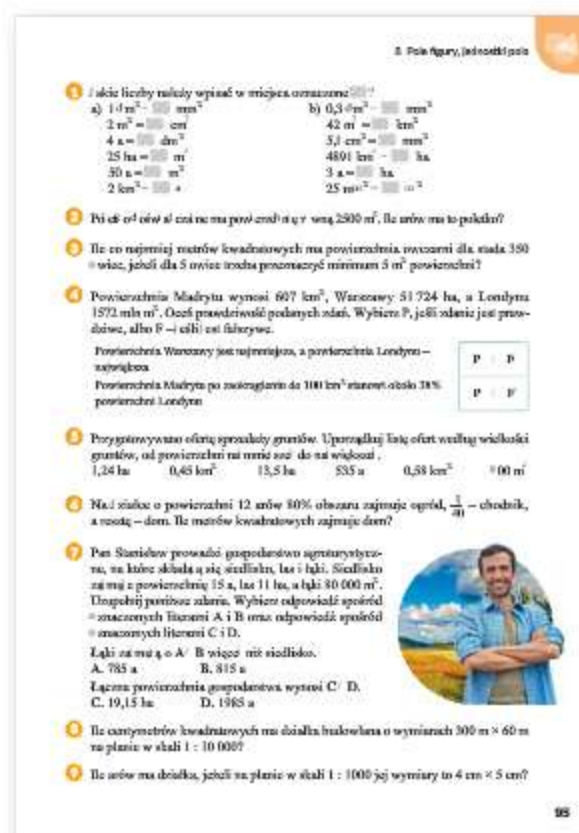
O podręczniku



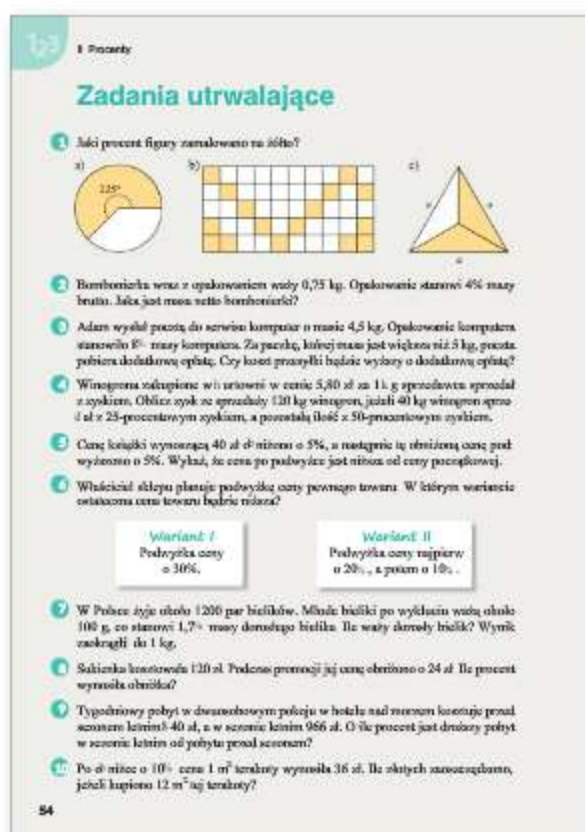
Dobrze wyjaśnione pojęcia matematyczne umożliwią samodzielną naukę.



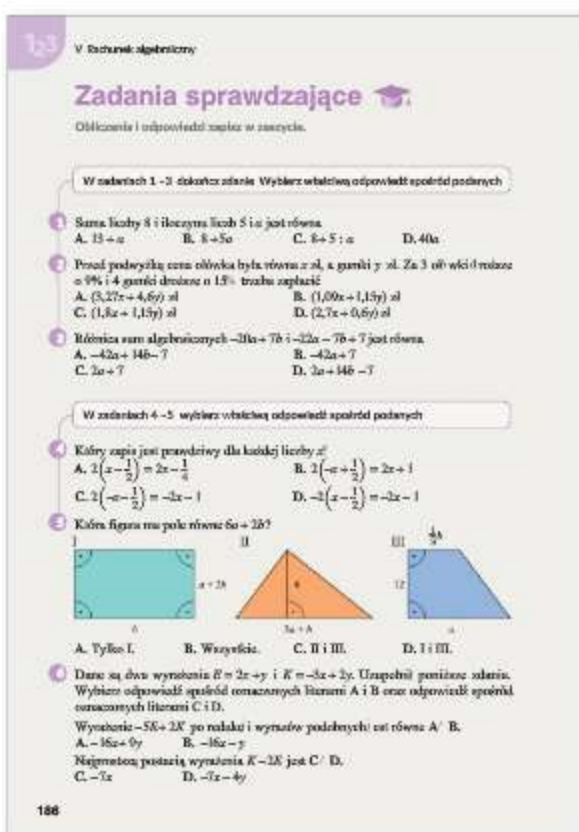
Przykłady rozwiązane krok po kroku pomagają w zrozumieniu nowych pojęć i reguł.



Duża liczba zadań różnych typów wspomaga ćwiczenie umiejętności.



Zadania utrwalające dobrze przygotowują do sprawdzianów.



Zadania sprawdzające – zestawy zadań testowych ułatwiają ocenę własnych umiejętności.



Infografiki przedstawiają zastosowania matematyki i zachęcają do nauki.



WYDAWNICTWA
SZKOLNE
i PEDAGOGICZNE

wsip.pl
sklep.wsip.pl
infolinia: 801 220 555