



gdańskie
wydawnictwo
oświatowe



MATEMATYKA Z PLUSEM

multipodręcznik do liceum i technikum

zakres podstawowy



Małgorzata Dobrowolska
Marcin Karpiński
Jacek Lech



MATEMATYKA Z PLUSEM

multipodręcznik do liceum i technikum

zakres podstawowy



Projekt okładki: *Iwona Duczmal*

Ilustracje: *Bartłomiej Brosz*

Grafika komputerowa: *Leszek Jakubowski*

Fotografie: Archiwum GWO, Fotolia, Shutterstock

Skład (T_EX): *Lukasz Sitko, Joanna Szyller*

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników szkolnych przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki (w zakresie podstawowym) na poziomie klasy II liceum i technikum, na podstawie recenzji rzeczoznawców: dr Marii Borowskiej, dr. hab. Gustawa Trelińskiego, dr Gabrieli Olszowskiej.

Numer dopuszczenia: 964/2/2020

ISBN 978-83-8118-183-9

© Copyright by Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe

Wydawca: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 80-309 Gdańsk, al. Grunwaldzka 413

Gdańsk 2020. Wydanie pierwsze

Niniejsza publikacja podlega ochronie przewidzianej w przepisach Ustawy z dnia 4.02.1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych. Każdy przypadek kopiowania lub zwielokrotniania fragmentu lub całości publikacji stanowi niedozwolone naruszenie praw twórcy lub wydawcy, o ile nie odbywa się zgodnie z przepisami wyżej wymienionej ustawy. Uwaga. W podręczniku nie należy zapisywać żadnych odpowiedzi, podkreślać ani zaznaczać rozwiązań zadań.

Wszystkie książki Wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.
Zamówienia można składać w księgarni internetowej: www.ksiegarnia.gwo.pl
lub nadsyłać listownie pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe
80-305 Gdańsk 5, skrytka pocztowa 80
tel. 801 643 917, 58 340 63 63
fax 58 340 63 61, 58 340 63 66
<http://www.gwo.pl> e-mail: handel@gwo.pl

Spis treści

Wielomiany

■ Przykłady wielomianów	10
■ Rozkład wielomianu na czynniki	15
■ Równania wielomianowe	21
■ Dzielenie wielomianów	26
■ Twierdzenie Bézouta	32
■ Równania wielomianowe (cd.)	36
■ Powtórzenie	42

Figury na płaszczyźnie. Część 1

■ Kąty. Kąty w trójkątach i w czworokątach	45
■ Podstawowe własności trójkątów	53
■ Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa	56
■ Własności trójkątów (cd.)	64
■ Własności czworokątów	73
■ Powtórzenie	80

Funkcje

■ Wzory i wykresy funkcji	82
■ Przykłady funkcji i ich własności	89
■ Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna	97
■ Równania wykładnicze i logarytmiczne	103
■ Zastosowania funkcji wykładniczych i logarytmicznych	108
■ Przekształcanie wykresów funkcji	117
■ Przekształcanie wykresów funkcji (cd.)	124
■ Powtórzenie	130

Figury na płaszczyźnie. Część 2

■ Pole koła. Długość okręgu	132
■ Własności kątów środkowych i kątów wpisanych	138
■ Proste i okręgi	143
■ Okrąg opisany na trójkącie. Okrąg wpisany w trójkąt	150
■ Własności wielokątów. Wielokąty foremne	155
■ Powtórzenie	162

Trygonometria

■ Tangens kąta ostrego	164
■ Sinus i cosinus kąta ostrego	169
■ Obliczenia trygonometryczne	174
■ Zastosowania trygonometrii	180
■ Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° i 60°	185
■ Związki między funkcjami trygonometrycznymi	188
■ Funkcje trygonometryczne kątów od 0° do 180°	191
■ Twierdzenie sinusów	199
■ Twierdzenie cosinusów	204
■ Powtórzenie	210

Figury w przestrzeni

■ Graniastosłupy	215
■ Ostrosłupy	223
■ Walec	231
■ Stożek	237
■ Kula	243
■ Powtórzenie	248

TABELA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH	249
--	-----

ODPOWIEDZI	251
------------------	-----

W podręczniku przyjęto następujące oznaczenia:

zadania 7–10 ► — odsyłacz do zadań, które proponujemy rozwiązywać po zapoznaniu się z odpowiednim fragmentem teorii

◄ **III** — odsyłacz do fragmentu teorii oznaczonego indeksem **III**

● — zadanie nieelementarne (niekoniecznie trudne)

● — zadanie trudne

Drogie Uczennice!

Drodzy Uczniowie!

Jeden z najwybitniejszych uczonych XVII wieku René Descartes, zwany w Polsce Kartezjuszem, w swoim dziele „Rozprawa o metodzie” pisał: „Nie wystarczy mieć rozum, trzeba jeszcze umieć z niego korzystać.”

Tadeusz Boy-Żeleński, tłumacz „Rozprawy o metodzie”, opatrzył pierwsze polskie wydanie dzieła Kartezjusza napisem „Tylko dla dorosłych” na obwolucie. Liczył na to, że skusi tym napisem młodzież, by sięgnęła po książkę, która mądrze mówi o tym, jak posługiwać się rozumem.

Kartezjusz pisał w swym dziele: „(...) wiadomości książkowe (...) nie są tak bliskie prawdy jak proste rozumowania, które (...) może uczynić człowiek o zdrowym rozsądku (...)”. Mamy nadzieję, że korzystając (zapewne nie zawsze dobrowolnie) z naszego podręcznika do matematyki, znajdziecie w nim nie tylko wiadomości książkowe, ale także pomoc w posługiwaniu się własnym zdrowym rozsądkiem.

Autorzy

Wielomiany

Czy wiesz, ilu pączków potrzebuje cukiernik, aby ułożyć składającą się z pięciu warstw piramidę, taką jak na fotografii? Ilu pączków potrzebowałby, gdyby warstw było 12? Problem ten można łatwo rozstrzygnąć, korzystając z pewnego wyrażenia algebraicznego.



- Przykłady wielomianów ■ Rozkład wielomianu na czynniki
- Równania wielomianowe ■ Dzielenie wielomianów
 - Twierdzenie Bézouta ■ Równania wielomianowe (cd.)
 - Powtórzenie

PRZYKŁADY WIELOMIANÓW

I

Przykłady jednomianów:

$$4x^{16} \quad -3m^5$$

$$\frac{2}{3}y \quad -3\sqrt{2}t^{101}$$

Każde z wyrażeń w ramce obok to iloczyn liczby i potęgi jednej zmiennej o wykładniku naturalnym. Takie wyrażenia nazywamy jednomianami.

Uwaga. Jednomianami nazywamy także wyrażenia, w których występuje więcej zmiennych, np. $3x^2y$, ab^3 , $\frac{3}{5}m^5n^6$. Nie będziemy się nimi jednak zajmować w tym rozdziale.

Jednomianem stopnia $n \geq 1$ zmiennej x nazywamy wyrażenie, które można przekształcić do postaci:

$$ax^n, \text{ gdzie } a \in \mathbb{R}, a \neq 0, n \in \mathbb{N}_+.$$

$$ax^n$$

Każda liczba rzeczywista różna od zera jest jednomianem stopnia zerowego. Przyjmujemy, że liczba 0 jest także jednomianem i nazywamy go **jednomianem zerowym**. Stopień takiego jednomianu nie jest określony.

Jednomiany oraz ich sumy nazywamy wielomianami.

Wielomianem stopnia n zmiennej x nazywamy wyrażenie, które można przekształcić do postaci:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gdzie współczynniki $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ są liczbami rzeczywistymi, $a_n \neq 0$ i $n \in \mathbb{N}$.

Współczynnik a_0 wielomianu jest nazywany wyrazem wolnym.

ĆWICZENIE A Określ stopień każdego z wielomianów podanych w ramce obok.

Przykłady wielomianów:

$$4x^5 + 11x^3 + 7$$

$$-8a^3 - \frac{2}{3}a^5$$

$$0,04u^8$$

$$3t^7 - 2\sqrt{6}t^5 + t^4 - 9$$

$$(2x - 1)^2$$

$$2 + \frac{m}{3} + 2m^2$$

$$6$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Przykłady dwumianów:

$$2x - 1$$

$$a^3 + 2$$

$$3x^5 - \sqrt{2}x$$

$$\frac{3}{4}t^7 + t^{12}$$

Przykłady trójmianów:

$$3x^2 - 2x + 3$$

$$\frac{2}{3}y^8 + y^4 + 1$$

$$m^{10} - 2m^7 + m^6$$

$$\sqrt{7}x^5 - x - x^6$$

Wielomian, który można zapisać w postaci sumy dwóch niezerowych jednomianów różnych stopni, nazywamy dwumianem, a sumę trzech jednomianów (różnych stopni) nazywamy trójmianem.

Trójmian, który jest wielomianem drugiego stopnia, nazywamy **trójmianem kwadratowym**.

ĆWICZENIE B a) Wymień współczynniki przy najwyższej potędze każdego z dwumianów i trójmianów zapisanych w ramce obok.

b) Podaj przykład trójmianu kwadratowego o współczynnikach całkowitych.

c) Czy wyrażenie $(2x - 3)^2$ jest trójmianem kwadratowym?

zadania 1-2 ►

- II** Wielomiany można dodawać, odejmować i mnożyć. Wykonując tego typu działania, otrzymujemy nowy wielomian, który warto uporządkować, czyli zredukować wyrazy podobne, a występujące w nim jednomiany zapisać w kolejności od stopnia najwyższego do najniższego.

PRZYKŁAD 1 Zapisz w jak najprostszej postaci:

a) sumę wielomianów:

$$(7 - 5x^5 - 3x^2) + (3x^2 - 4x - x^5) = 7 - 5x^5 - 3x^2 + 3x^2 - 4x - x^5 = \underline{-6x^5 - 4x + 7}$$

b) różnicę wielomianów:

$$(-8p^4 - 2p^6 + 3) - (3 - 5p + 2p^6) = -8p^4 - 2p^6 + 3 - 3 + 5p - 2p^6 = \underline{-4p^6 - 8p^4 + 5p}$$

c) iloczyn wielomianów:

$$(3 - 2t^5 + t)(-5t^2 - t) = -15t^2 - 3t + 10t^7 + 2t^6 - 5t^3 - t^2 = \underline{10t^7 + 2t^6 - 5t^3 - 16t^2 - 3t}$$

ZADANIE Uporządkuj wielomian.

a) $(4x^5 + 3x^2 - 2x + 5) + (2x^5 - 3x^2 + 3x - 5)$

b) $(9a^6 - 5a^3) - (9a^6 + 5a^4 - 4a^3 + 2)$

c) $(3z^5 - 2z)(z^2 - 2z + 3)$

Zmienna wielomianu może oczywiście być oznaczona dowolną literą. Wielomiany zmiennej x będziemy czasami oznaczać w skrócie $W(x)$, $V(x)$, $P(x)$.

zadania 3-8 ►

- III Wartość wielomianu dla danej liczby otrzymamy, wstawiając w wielomianie tę liczbę w miejsce zmiennej. Dla danego wielomianu $W(x)$ jego wartość na przykład dla $x = 5$ będziemy zapisywali jako $W(5)$.

PRZYKŁAD 2 Oblicz wartość podanego wielomianu dla $x = \frac{2}{5}$.

a) $W(x) = (3x^7 - 9x^3 - 4x) - (3x^7 - 8x^3 + x)$

$$W(x) = 3x^7 - 9x^3 - 4x - 3x^7 + 8x^3 - x = -x^3 - 5x$$

$$W\left(\frac{2}{5}\right) = -\left(\frac{2}{5}\right)^3 - 5 \cdot \frac{2}{5} = -\frac{8}{125} - 2 = -2\frac{8}{125}$$

..... Aby uprościć obliczenia, najpierw porządkujemy wielomian $W(x)$.

b) $V(x) = (25x^2 - 5x + 3)(1 - x)$

$$V\left(\frac{2}{5}\right) = \left(25 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 - 5 \cdot \frac{2}{5} + 3\right)\left(1 - \frac{2}{5}\right) = \underline{3}$$

..... Nie porządkujemy wielomianu $V(x)$, bo nie upraszcza to obliczeń.

ZADANIE Oblicz wartość podanego wielomianu dla $x = \frac{1}{3}$.

a) $W(x) = (8x^5 + 6x^2 + 3) + (-8x^5 - 5x^2 + x - 3)$

b) $V(x) = (3x - 2)(x^3 - 9x^2 + 1)$

zadania 9–12 ►

- IV Dwa wielomiany tej samej zmiennej są równe, gdy są tego samego stopnia i po uporządkowaniu każdego z nich współczynniki przy tych samych potęgach są równe.

PRZYKŁAD 3 Rozważmy wielomiany:

$$U(x) = ax^2 + bx \quad V(x) = 2x^3 - 11x^2 + 12x \quad W(x) = x - 3$$

Dla jakich wartości współczynników a i b wielomian $U(x) - V(x)$ jest równy wielomianowi $U(x) \cdot W(x)$?

$$U(x) - V(x) = (ax^2 + bx) - (2x^3 - 11x^2 + 12x) = ax^2 + bx - 2x^3 + 11x^2 - 12x = -2x^3 + (a + 11)x^2 + (b - 12)x$$

$$U(x) \cdot W(x) = (ax^2 + bx)(x - 3) = ax^3 - 3ax^2 + bx^2 - 3bx = ax^3 + (b - 3a)x^2 - 3bx$$

$$U(x) - V(x) = -2x^3 + (a + 11)x^2 + (b - 12)x$$

$$U(x) \cdot W(x) = ax^3 + (b - 3a)x^2 - 3bx$$

$$\begin{cases} -2 = a \\ a + 11 = b - 3a \\ b - 12 = -3b \end{cases}$$

..... Porównujemy współczynniki obu wielomianów przy odpowiednich potęgach zmiennej; rozwiązujemy układ równań.

..... Liczby $a = -2$ oraz $b = 3$ spełniają każde z trzech równań układu.

Stąd: $a = -2$ i $b = 3$

ZADANIE Dla jakich wartości współczynników a i b iloczyn wielomianów $U(x) = 2x - a$ i $V(x) = x^3 - x$ jest równy wielomianowi $W(x) = bx^4 - 5x^3 - 2x^2 + ax$?

zadania 13–15 ►

ZESTAW ZADAŃ

◀ I 1. Wskaż w ramce wielomiany i określ stopień każdego z nich.

a)

$$\frac{7x^5 - 5x^7}{2}$$

$$6u^3 - 11u^{-2} + 4$$

$$\sqrt{3}z^{105} + \frac{z^5}{3}$$

b)

$$\frac{1}{x^3 - 5x^2 + 4}$$

$$-2x^6 - 5\sqrt{x} + 4$$

$$8^{\frac{1}{2}}$$

c)

$$0,2t + 6t^3 - 1,4t^{10}$$

$$-3w^7$$

$$5w^{\frac{1}{3}} + 4w$$

2. Przedstaw podane wyrażenie w postaci ax^n .

a) $\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^3 \cdot x^3$

b) $x^2 + x^2\sqrt{2}$

c) $\frac{3x^3}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{5}x^5$

d) $\frac{5x^2 - (3x)^2}{2}$

◀ II 3. Wynik działania przedstaw w postaci uporządkowanego wielomianu.

a) $(4x - 8x^3) - (2x^5 - 3x + 2 - 8x^3)$

c) $x(x^7 - x^5) - x^6(x - x^7 - 1)$

b) $(6x^5 + 4x^3 - 2x) - 2x(2x^2 + x - 1)$

d) $-x(x^4 - 8x^3 - 5) + 4x^4(3x - 2)$

4. Wynik działania przedstaw w postaci uporządkowanego wielomianu.

a) $(5x^3 - 2)(x^3 + 1) - 6x^3(2 - x^3)$

d) $(3 - 4x^3)(5x^2 + x) - [6x^5 - 5x^3 - (5x^5 - x^3)]$

b) $(x^2 - 6)(2x + 3) + 3x(4 - 2x^2)$

e) $(-3x^3 + 2x^5)(x^5 - 1 + 5x^3)$

c) $[4x(-2x^9 + 7x^3) - 20x^4] \cdot (1 - 2x)$

f) $(2 - 3x^2)(x^4 - 7x^6 - 2)$

5. Niech P oznacza wielomian $-4x + 5$, Q — wielomian $x^2 - 3x + 1$, a R — wielomian $2x^3 - 1$. Wykonaj działania.

a) $P - (Q + R)$

b) $4Q - 3P + \frac{1}{2}R$

c) $R \cdot (P + Q)$

6. Bez porządkowania wielomianu określ jego stopień i wyraz wolny.

a) $(5x^2 + 3)(3x^3 + 2x^2 - 1)$

b) $(3x - 2)(x + 5)(7 - x)$

c) $(x + 1)^4(x - 9)^2(x^2 + 2)$

7. Stopień pewnego wielomianu $W(x)$ jest równy m , a stopień wielomianu $V(x)$ wynosi n oraz $m > n$. Określ stopień wielomianu:

a) $W(x) + V(x)$

b) $W(x) - V(x)$

c) $W(x) \cdot V(x)$

d) $[W(x)]^2 - V(x)$

• 8. Podaj przykłady dwóch wielomianów stopnia czwartego, których:

a) suma jest jednomianem stopnia trzeciego,

b) iloczyn jest dwumianem.

III 9. Oblicz wartość wielomianu dla podanej wartości zmiennej.

a) $-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{7}x^2 - 2x + \frac{4}{7}x^2$ dla $x = 2$

d) $5x(10x - 3)(2 - 15x)$ dla $x = \frac{1}{5}$

b) $\frac{5}{6}p^3 - 1\frac{2}{3}p^2 + \frac{1}{6}p^3 + \frac{5}{3}p^2$ dla $p = -5$

e) $3(3m - 2)^2(m + 3)$ dla $m = \frac{2}{3}$

c) $0,32t^3 - 0,42t - 1,32t^3 + 1,42t$ dla $t = -10$

f) $a(a - 5)(a - 1)^3$ dla $a = -1$

10. Oblicz wartość wielomianu dla podanej wartości x .

a) $\left(2\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 5\right) + \frac{1}{3}(x^3 + x^2)$ dla $x = \frac{1}{3}$

b) $(-1,3x^4 + 0,6x) - (2,7x^4 - 0,4x)$ dla $x = -\frac{1}{2}$

c) $\left(-9\frac{3}{7}x^2 + 3 + 4\frac{3}{7}x^2\right)\left(2 - \frac{x}{5}\right)^4$ dla $x = 5$

d) $(5,4x^4 + 2x^2 - 4,4x^4)(3 - 70x)^3$ dla $x = -\frac{1}{10}$

11. a) Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + rx^2 + sx + t$. Znajdź wartości współczynników r, s, t , jeśli wiadomo, że $W(1) = -2$, $W(-1) = -10$ i $W(0) = -4$.

b) Dany jest wielomian $W(x) = ax^5 + bx^2 + c$. Znajdź wartości współczynników a, b oraz c , jeśli wiadomo, że $W(\sqrt{2}) = 4$, $W(-\sqrt{2}) = -12$ i $W(0) = -10$.

12. Cukiernik układa pączki w piramidy, tak jak na zdjęciu. Liczba pączków w piramidzie o n warstwach wynosi:

$$L(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

a) Oblicz, z ilu pączków jest zbudowana piramida o 12 warstwach.

• b) Uzasadnij, że $L(n+1) - L(n) = (n+1)^2$.



IV 13. Ustal, dla jakich wartości współczynników p, q, r wielomian $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + 1$ jest równy wielomianowi:

a) $x^2 - 3x + x^4 - 13$

d) $(x - 2)\left(x^3 - 3x - \frac{1}{2}\right)$

b) $x^5 - (7x^3 - x^4 + x)$

e) $(x^2 + 5x - 1)^2$

c) $(x^2 - 1)^2$

f) $(x^2 - 2x)(x^2 + 2x) + 1$

14. Dane są wielomiany $A(x) = 3x^2 + 5x + 2$, $B(x) = 9x^3 + 3x^2 - 17x - 4$ oraz $C(x) = mx + n$. Dla jakich wartości współczynników m i n wielomian $B(x) + C(x)$ jest równy wielomianowi $A(x) \cdot C(x)$?

• 15. Podaj przykłady jednomianów, które można wstawić w miejsca liter A i B , aby zachodziła równość wielomianów.

a) $A(2x^2 + x) = 4x^2 + B$

b) $Ax^2(9x + 2) = 5x^4 + Bx$

MINISPRAWDZIAN

51. Dla wielomianu $W(x) = 3x - (2x^2 - 1)(5 - x)$ różnica $W(5) - W(0)$ jest równa:

- A. 5 B. 10 C. 15 D. 20

52. Który z poniższych wielomianów jest wielomianem szóstego stopnia?

- A. $(6x^3 - 6x^2 + 6)^6$ C. $(5x^5 + 2x^4) + (x^5 - 4x^4)$
B. $4x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 3$ D. $(4x^2 - 3x)(2x^4 - 6)$

53. Dla jakiej wartości a wielomiany $(x+a)(2x^3-x)$ i $5x-(x^2+10x^3-2x^4)$ są równe?

- A. $a = -5$ B. $a = -2$ C. $a = 1$ D. $a = 5$

ROZKŁAD WIELOMIANU NA CZYNNIKI

- 1 Wiadomo, że w wyniku mnożenia wielomianów otrzymujemy pewien wielomian. Czasem można wykonać operację odwrotną — rozłożyć wielomian na czynniki, czyli przedstawić go jako iloczyn innych wielomianów.

ĆWICZENIE A Jakie jednomiany należy wpisać w miejscu kraterk?

a) $x^5 + 2x^3 = \square (x^2 + \square)$

b) $6x^4 - 9x = 3x(\square - \square)$

PRZYKŁAD 1 Rozłóż wielomian na czynniki co najwyżej drugiego stopnia.

$$\begin{aligned} \text{a) } & 6x^3 - 3x^2 + 10x - 5 = \\ & = 3x^2(2x - 1) + 5(2x - 1) = \\ & = (2x - 1)(3x^2 + 5) \end{aligned}$$

W każdym z podkreślonych dwumianów wyłączamy wspólny czynnik przed nawias, tak aby otrzymać sumę wielomianów, które mają wspólny czynnik. Następnie ten wspólny czynnik, czyli $2x - 1$, wyłączamy przed nawias.

$$\begin{aligned} \text{b) } & 5x^4 - 20x^3 - x^2 + 4x = \\ & = 5x^3(x - 4) - x(x - 4) = \\ & = (x - 4)(5x^3 - x) = \\ & = x(x - 4)(5x^2 - 1) \end{aligned}$$

W każdym z podkreślonych dwumianów wyłączamy wspólny czynnik przed nawias, tak aby otrzymać sumę wielomianów, które mają wspólny czynnik.

Dwumian $x - 4$ wyłączamy przed nawias.

W zaznaczonym dwumianie wyłączamy wspólny czynnik x przed nawias.

ZADANIE Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $10x^3 - 4x^2 + 15x - 6$

b) $6x^4 - 15x^3 - 2x^2 + 5x$

Niektóre trójmiany kwadratowe można rozkładać na czynniki, korzystając ze wzorów, które przypominamy poniżej.

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, można przedstawić w postaci iloczynowej, gdy $\Delta \geq 0$ ($\Delta = b^2 - 4ac$).

Jeśli $\Delta > 0$, to równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

i zachodzi równość:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Jeśli $\Delta = 0$, to równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma jedno rozwiązanie:

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

i zachodzi równość:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

Jeśli $\Delta < 0$, to równanie $ax^2 + bx + c = 0$ nie ma rozwiązań i wielomianu $ax^2 + bx + c$ nie można rozłożyć na czynniki pierwszego stopnia.

PRZYKŁAD 2 Rozłóż wielomian $W(x)$ na czynniki jak najniższego stopnia.

a) $W(x) = -10x^3 + 25x^2 + 60x = -5x(2x^2 - 5x - 12)$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12) = 121$$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{121}}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{5 + \sqrt{121}}{2 \cdot 2} = 4$$

$$W(x) = -5x \cdot 2 \left(x - \left(-\frac{3}{2} \right) \right) (x - 4) = -10x \left(x + \frac{3}{2} \right) (x - 4)$$

..... Obliczamy wyróżnik Δ trójmianu $2x^2 - 5x - 12$.
..... Ponieważ $\Delta > 0$, trójmian ten rozkłada się na
..... czynniki pierwszego stopnia.

b) $W(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 =$

$$= x^3(x^2 - 3x + 4)$$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -7 < 0$$

..... Obliczamy wyróżnik Δ trójmianu $x^2 - 3x + 4$.
..... Ponieważ $\Delta < 0$, trójmian ten nie rozkłada się
..... na czynniki pierwszego stopnia.

ZADANIE Rozłóż wielomian $W(x)$ na czynniki jak najniższego stopnia.

a) $W(x) = -4x^5 + 14x^4 - 6x^3$

b) $W(x) = -x^4 + 4x^3 - 7x^2$

zadania 1-5 ►

- II Poniżej przypominamy wzory skróconego mnożenia. Można je także wykorzystywać przy rozkładaniu wielomianów na czynniki.

Wzory skróconego mnożenia

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

ĆWICZENIE B Uzasadnij, że ze wzoru pozwalającego rozłożyć na czynniki różnicę $a^n - b^n$ wynikają wzory na różnicę kwadratów i różnicę sześcianów.

PRZYKŁAD 3 Rozłóż wielomian na czynniki możliwie najniższego stopnia.

a) $4x^2 - 6x + 9 = \underline{(2x - 3)^2}$

Stosujemy wzór $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

b) $x^4 - 25 = (x^2 - 5)(x^2 + 5) =$

$= \underline{(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x^2 + 5)}$

Dwukrotnie stosujemy wzór $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

c) $x^5 + x^4 + x^3 - \underline{8x^2 - 8x - 8} =$

$= x^3(x^2 + x + 1) - 8(x^2 + x + 1) =$

$= (x^2 + x + 1)(x^3 - 8) =$

$= \underline{(x^2 + x + 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}$

W każdym z podkreślonych trójmianów wyłączamy wspólny czynnik przed nawias.

Wyłączamy wspólny czynnik (trójmian $x^2 + x + 1$) przed nawias.

Stosujemy wzór $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

$\Delta_1 = 1 - 4 < 0 \quad \Delta_2 = 4 - 16 < 0$

Sprawdzamy, czy otrzymane czynniki drugiego stopnia da się rozłożyć na czynniki pierwszego stopnia.

d) $x^4 - 10x^2 + 25 = (x^2)^2 - 2 \cdot 5x^2 + 5^2 =$

$= (x^2 - 5)^2 = [(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})]^2 =$

$= \underline{(x - \sqrt{5})^2 (x + \sqrt{5})^2}$

Stosujemy wzór $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$, a następnie wzór $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

ZADANIE Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $25x^2 + 10x + 1$

b) $81x^4 - 1$

c) $8x^5 + 8x^3 - x^2 - 1$

d) $x^4 - 6x^2 + 9$

W omawianych dotąd przykładach czynniki występujące w rozkładzie wielomianu nie miały stopnia wyższego niż 2. Okazuje się, że każdy wielomian można rozłożyć na czynniki stopnia co najwyżej drugiego.

Warto wiedzieć

Już w XVIII wieku znane było twierdzenie:

Każdy wielomian można rozłożyć na czynniki stopnia co najwyżej drugiego.

Pierwszy dowód tego twierdzenia podał w swojej rozprawie doktorskiej Carl Friedrich Gauss (czyt. karl fridrich gauss) (1777-1855). Miał wówczas zaledwie 22 lata. Gauss jest uważany, obok Archimedesa i Newtona, za jednego z największych matematyków świata (zwany był księciem matematyków). Zajmował się prawie wszystkimi działami matematyki, a także fizyką i astronomią.

zadania 6-15 ►

ZESTAW ZADAŃ

◀ I 1. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $x^5 - x^3$

d) $15x^5 - 20x^3 + 5x^2$

b) $x^4 - x^3 + x^2$

e) $-9x^6 + 18x^4 - 12x^3$

c) $4x^7 + 8x^6$

f) $14x^8 - 21x^7 - 28x^5$

2. Przedstaw w postaci iloczynu dwóch wielomianów.

a) $x^3 + 4x^2 + x + 4$

d) $2x^3 + 5x^2 - 2x - 5$

b) $6x^3 - 5x^2 + 6x - 5$

e) $3x^4 - 4x^3 - 3x + 4$

c) $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$

f) $-7x^3 - 6x^2 + 7x + 6$

3. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $x^3 + 5x^2 + 3x + 15$

d) $-15x^3 + 6x^2 - 5x + 2$

b) $2x^3 - 3x^2 + 6x - 9$

e) $5x^3 - \sqrt{7}x^2 + 10x - 2\sqrt{7}$

c) $2x^3 - 3x^2 + 4x - 6$

f) $\sqrt{2}x^3 - \sqrt{3}x^2 + 5\sqrt{2}x - 5\sqrt{3}$

4. Rozłóż wielomian na czynniki jak najniższego stopnia.

a) $15x^4 - 10x^3 + 6x^2 - 4x$

d) $2x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 9x$

b) $-10x^4 + 25x^3 - 8x^2 + 20x$

e) $2x^5 - 10x^4 + x^3 - 5x^2$

c) $x^5 + 10x^4 + x^3 + 10x^2$

f) $-6x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 2x^2$

5. Rozłóż wielomian na czynniki jak najniższego stopnia.

a) $10x^4 + 15x^3 - 45x^2$

d) $x^5 - 2x^4 - x^3$

b) $x^4 - 4x^3 - 5x^2$

e) $2x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 24x$

c) $2x^3 + 3x^2 - 2x$

f) $2x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 15x$

◀ **6.** Rozłóż wielomian na czynniki (skorzystaj ze wzorów skróconego mnożenia).

a) $x^2 - 16$

c) $x^2 - 6x + 9$

e) $x^3 - 27$

b) $4x^2 - 5$

d) $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$

f) $x^3 - 1$

7. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $x^4 - 25$

c) $4x^4 - 9$

e) $x^4 - 2x^2 + 1$

g) $\frac{1}{27}x^3 - 8$

b) $49x^4 - \frac{1}{81}$

d) $x^7 - 100x^5$

f) $(x+3)^2 + 2(x+3) + 1$

h) $64x^{10} - x^7$

8. Przedstaw wielomian w postaci iloczynu dwóch wielomianów, z których jeden jest dwumianem pierwszego stopnia.

a) $x^5 - 1$

b) $32x^5 - 1$

c) $x^6 - 64$

d) $x^5 - 3$

e) $x^6 - 27$

9. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $-3x^4 - 7x^3 + 6x^2 + 14x$

e) $2x^6 + 5x^5 - 2x^2 - 5x$

b) $-x^6 - 3x^5 + 2x^4 + 6x^3$

f) $15x^6 - 10x^5 - 45x^4 + 30x^3$

c) $-2x^5 + 5x^4 + 8x^3 - 20x^2$

g) $3x^4 + 2\sqrt{5}x^3 - 9x^2 - 6\sqrt{5}x$

d) $-10x^5 - 20x^3 + 80x^2 + 160$

h) $-6\sqrt{6}x^4 - 3\sqrt{5}x^3 + 2\sqrt{6}x^2 + \sqrt{5}x$

10. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $3x^5 + x^4 + 2x^3 - 3x^2 - x - 2$

d) $2x^5 + x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x - 3$

b) $x^5 - x^4 + x^3 - 5x^2 + 5x - 5$

e) $x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 16x - 16$

c) $x^5 + x^4 - 2x^3 - 8x^2 - 8x + 16$

f) $x^5 - \sqrt{5}x^4 + x^3 - x^2 + \sqrt{5}x - 1$

• **11. a)** Rozłóż wielomian $x^3 + 5x^2 + 3x + 15$ na czynniki, a następnie uzasadnij, że przyjmuje on wartości dodatnie tylko dla $x > -5$.

b) Rozłóż wielomian $4x^3 - 8x^2 + 3x - 6$ na czynniki, a następnie określ, dla jakich wartości x wielomian ten przyjmuje wartości ujemne.

c) Rozłóż wielomian $-12x^5 + 6x^4 - 2x + 1$ na czynniki, a następnie uzasadnij, że dla ujemnych wartości x wielomian ten przyjmuje wartości dodatnie.

12. Zapisz podane wyrażenie w jak najprostszej postaci (przyjmij, że x jest liczbą, dla której wyrażenie występujące pod kreską ułamkową jest różne od 0).

a) $\frac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{x - 3}$

b) $\frac{30x^4 - 6x^3 + 45x^2 - 9x}{8x^3 + 12x}$

c) $\frac{3x^2 - 5x + 2}{3x^3 - 2x^2 - 12x + 8}$

13. a) Rozłóż wielomian $n^3 - n$ na czynniki, a następnie uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej n wartość tego wielomianu jest liczbą podzielną przez 3.

b) Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej n wartość wielomianu $n^4 - 2n^3 + n^2$ jest liczbą podzielną przez 4.

c) Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n wartość wielomianu $n^5 - n$ jest liczbą podzielną przez 6.

14. Znajdź liczbę, którą należy wpisać w kratkę, a następnie rozłóż otrzymany wielomian na czynniki.

a) $3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 3x^4 + 2x^3 + x^2 + \square x^2 + 2x + 1$

b) $5x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 3 = 5x^4 - 7x^3 + \square x^2 + 5x^2 - 7x + 3$

c) $-2x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 7x + 15 = -2x^4 - 7x^3 + 15x^2 + \square x^2 - 7x + 15$

d) $-9x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 4x - 2 = -9x^4 + 6x^3 - 3x^2 + \square x^2 + 4x - 2$

15. Rozłóż wielomian na czynniki, korzystając z metody przedstawionej w poprzednim zadaniu.

a) $2x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1$

c) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x - 6$

b) $3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1$

d) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$

MINISPRAWDZIAN

51. Wskaż ten z wielomianów, którego nie można rozłożyć na czynniki tak, aby jednym z czynników był dwumian $x - 3$.

A. $x^2 - 6x + 9$

B. $x^3 - 27$

C. $x^2 + 9$

D. $x^2 - 9$

52. Wielomian $x^3 + 5x^2 - 3x - 15$ można przedstawić jako iloczyn trzech spośród podanych dwumianów. Który dwumian nie wystąpi w tym rozkładzie?

A. $x + 5$

B. $x - 5$

C. $x + \sqrt{3}$

D. $x - \sqrt{3}$

53. Wielomian $x^5 - 4x^4 + x^3 - 3x^2 + 12x - 3$ można przedstawić jako iloczyn $(x^3 + a)(bx^2 + cx + d)$. Która z wartości współczynników a, b, c, d jest błędna?

A. $a = -3$

B. $b = 4$

C. $c = -4$

D. $d = 1$

RÓWNANIA WIELOMIANOWE

1

Przykłady równań wielomianowych:

$$7x^2 = 4x$$

$$-15x + 6 = 6x$$

$$(3x + 2)^2 = 9x(x - 2)$$

$$-3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$5x^3 - 2x^2 + 15x - 6 = 0$$

$$-6x^2(x^2 - 3) = 2x^2 + 5$$

Każde z równań zapisanych w ramce obok można przekształcić tak, aby po jednej stronie równania występował wielomian, a po drugiej — liczba 0.

Równanie, które można zapisać w postaci $W(x) = 0$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem stopnia n , nazywamy **równaniem wielomianowym stopnia n** .

Liczbę, która jest rozwiązaniem równania wielomianowego $W(x) = 0$, nazywamy **pierwiastkiem wielomianu $W(x)$** lub **pierwiastkiem równania**.

ĆWICZENIE A a) Znajdź w powyższej ramce równania wielomianowe pierwszego stopnia i oblicz ich pierwiastki.

b) Znajdź w powyższej ramce równania wielomianowe drugiego stopnia i oblicz ich pierwiastki.

Metody znajdowania pierwiastków wielomianu pierwszego stopnia były już omawiane w szkole podstawowej. Wiesz też, jak rozwiązywać równania wielomianowe drugiego stopnia.

Pokażemy teraz, jak znajdować pierwiastki niektórych wielomianów wyższych stopni.

ĆWICZENIE B Podaj liczby, które spełniają równanie:

a) $(x + 1)(x - 6) = 0$

b) $(x - 2)^4 = 0$

c) $3x(x - 1)(2x - 4) = 0$

Dosyć łatwo można rozwiązać równanie wielomianowe $W(x) = 0$, gdy wielomian $W(x)$ jest przedstawiony w postaci iloczynowej. Wystarczy skorzystać z faktu, że iloczyn czynników jest równy zero wtedy, gdy którykolwiek z czynników jest równy zero.

$$a \cdot b = 0$$



$$a = 0 \text{ lub } b = 0$$

Uwaga. Przy rozwiązywaniu równań wielomianowych rozkładanie wielomianu na czynniki jak najniższego stopnia nie jest konieczne. Wystarczy rozłożyć wielomian na takie czynniki, których pierwiastki potrafimy obliczyć.

PRZYKŁAD 1 Rozwiąż równanie.

a) $x^5 - 6x^4 = 40x^3$

..... Przekształcamy równanie do postaci $W(x) = 0$.

$$x^5 - 6x^4 - 40x^3 = 0$$

..... Wielomian $W(x)$ rozkładamy na czynniki.

$$x^3(x^2 - 6x - 40) = 0$$

$$x^3 = 0 \quad \text{lub} \quad x^2 - 6x - 40 = 0$$

$$x = 0 \quad \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40) = 196$$

$$\sqrt{\Delta} = 14$$

$$x_1 = \frac{6-14}{2} = -4 \quad x_2 = \frac{6+14}{2} = 10$$

$$\underline{x = 0 \quad \text{lub} \quad x = -4 \quad \text{lub} \quad x = 10}$$

..... Pierwiastkami równania są liczby: $-4, 0$ i 10 .

b) $x^3 - 6x^2 - 3x + 18 = 0$

$$x^2(x-6) - 3(x-6) = 0$$

$$(x-6)(x^2-3) = 0$$

$$x-6 = 0 \quad \text{lub} \quad x^2-3 = 0$$

$$x = 6 \quad \text{lub} \quad x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3} \quad \text{lub} \quad x = -\sqrt{3}$$

$$\underline{x = 6 \quad \text{lub} \quad x = \sqrt{3} \quad \text{lub} \quad x = -\sqrt{3}}$$

..... Pierwiastkami równania są liczby: $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$ i 6 .

c) $4x^6 = x^2$

$$4x^6 - x^2 = 0$$

$$x^2(4x^4 - 1) = 0$$

$$x^2(2x^2 - 1)(2x^2 + 1) = 0$$

$$x^2 = 0 \quad \text{lub} \quad 2x^2 - 1 = 0 \quad \text{lub} \quad 2x^2 + 1 = 0$$

$$x = 0 \quad x^2 = \frac{1}{2} \quad \text{równanie sprzeczne}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{lub} \quad x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\underline{x = 0 \quad \text{lub} \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{lub} \quad x = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

..... Pierwiastkami równania są liczby: $-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0$ i $\frac{\sqrt{2}}{2}$.**ZADANIE** Rozwiąż równanie.

a) $2x^4 - 5x^3 - 3x^2 = 0$

b) $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$

c) $15x^3 = 9x$

zadania 1-7 ►

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$$

$$x^2 = t \quad t^2 - 7t + 12 = 0$$

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 12 = 1 \quad \sqrt{\Delta} = 1$$

$$t_1 = \frac{7-1}{2} = 3 \quad t_2 = \frac{7+1}{2} = 4$$

$$x^2 = 3 \quad \text{lub} \quad x^2 = 4$$

$$x = \sqrt{3} \quad \text{lub} \quad x = -\sqrt{3} \quad \text{lub} \quad x = 2 \quad \text{lub} \quad x = -2$$

W miejscu x^2 podstawiamy t i rozwiązujemy otrzymane równanie z niewiadomą t .

Rozwiązujemy równania $x^2 = t_1$ i $x^2 = t_2$.

Pierwiastkami równania są liczby: -2 , $-\sqrt{3}$, 2 i $\sqrt{3}$.

ZADANIE Rozwiąż równanie: $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$.

Zastanówmy się teraz, jaki może być związek między stopniem wielomianu a liczbą pierwiastków tego wielomianu.

Wiadomo, że wielomian pierwszego stopnia ma jeden pierwiastek (każde równanie postaci $ax + b = 0$, gdzie $a \neq 0$, ma jedno rozwiązanie). Wiadomo także, że wielomian drugiego stopnia może mieć dwa pierwiastki lub jeden albo wcale nie mieć pierwiastków.

ĆWICZENIE C a) Każdy z trzech poniższych wielomianów jest wielomianem trzeciego stopnia. Ustal, po ile pierwiastków mają te wielomiany.

$$U(x) = x(x-2)(x+3) \quad V(x) = (x+1)(x^2-3x+5) \quad W(x) = x(x+5)^2$$

b) Podaj przykład wielomianu czwartego stopnia, który nie ma pierwiastków, oraz wielomianu piątego stopnia, który ma tylko jeden pierwiastek.

Zauważmy, że:

- Wielomian n -tego stopnia ma co najwyżej n pierwiastków (taki wielomian można rozłożyć na co najwyżej n wielomianów pierwszego stopnia).
- Ponieważ każdy wielomian można rozłożyć na czynniki stopnia co najwyżej drugiego, więc w wypadku wielomianu nieparzystego stopnia co najmniej jeden czynnik musi być pierwszego stopnia. Zatem wielomian nieparzystego stopnia musi mieć co najmniej jeden pierwiastek.

W takim razie na przykład wielomian stopnia trzeciego zawsze ma jakiś pierwiastek, ale nie może mieć ich więcej niż trzy. Wielomian czwartego stopnia może nie mieć pierwiastków, ale jeśli ma, to nie więcej niż cztery.

ĆWICZENIE D Podaj przykład wielomianu jak najniższego stopnia, który ma sześć pierwiastków.

ZESTAW ZADAŃ

1. Rozwiąż równanie.

a) $(x+5)(x^2-7)=0$

d) $(5x+2)^2(3x^2+4)=0$

b) $(2x-3)(x^3+1)=0$

e) $(2x^3+54)(3x-1)^3=0$

c) $(x^2-6)(x^3-8)=0$

f) $(2x^2-1)^2\left(5x^3-\frac{1}{25}\right)=0$

2. Znajdź wszystkie liczby spełniające równanie.

a) $(2x+1)(x+5)(3x-2)=0$

d) $x\left(3x^2-\frac{1}{3}\right)(9x^2+1)=0$

b) $(x-3)(2x+5)(4-3x)^2=0$

e) $(2x^2+1)(4x^2-8x)(-8x+6)=0$

c) $(x+5)(x^3-8)(x^2-5)=0$

f) $x^3(x^3-1)(1+x^3)=0$

3. Nie rozwiązując równania, ustal, czy ma ono rozwiązania.

a) $x^4+1=0$

b) $3x^2+x^4=0$

c) $3x^2+4x^8+2=0$

4. Rozwiąż równanie.

a) $5x^3-45x=0$

d) $6x^4+3x^3=45x^2$

b) $3x^3=x^2+2x$

e) $2x^5-14x^4+24x^3=0$

c) $x^4-3x^3-10x^2=0$

f) $-5x^4+3x^3+14x^2=0$

5. Rozwiąż równanie.

a) $6x^3+6x^2-3x-3=0$

e) $2x^5-8x^3+16x^2-64=0$

b) $2x^5-18x^3+2x^2-18=0$

f) $3x^5-12x^3-12x^2+48=0$

c) $4x^3-14x^2+6x-21=0$

g) $5x^5+x^3-6=30x^2$

d) $3x^5-2x^4-27x+18=0$

h) $5=3x+5x^4-3x^5$

6. Rozłóż wielomian $W(x)$ na czynniki jak najniższego stopnia i podaj wszystkie jego pierwiastki.

a) $W(x) = (x^4-9)(-x^2+x+2)$

c) $W(x) = (x^3-8)(2x^2-x-3)$

b) $W(x) = (3x^2-4)(x^3-1)$

d) $W(x) = (2x^2-3x+1)^2(7x^2+5x)$

7. Rozwiąż równanie.

a) $2x^5=3x^4$

d) $x^4(x-6)-x^4=0$

g) $x^2(x+5)=4(x+5)$

b) $5x^7=10x^4$

e) $x^3(x+7)=x^3$

h) $x^3(x^2-9)=27(x^2-9)$

c) $x^6=5x^2$

f) $2x^2(3x-1)=3x^2$

i) $3x^2(x^3-8)=x(x^3-8)$

◀ II 8. Rozwiąż równanie.

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

d) $x^5 + x^3 - 12x = 0$

b) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

e) $2x^5 + 5x^3 - 12x = 0$

c) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

f) $2x^7 - x^4 - x = 0$

9. Rozwiąż równanie.

a) $x^5 - x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x - 2 = 0$

b) $x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 2x + 4 = 0$

c) $x^5 + 3x^4 - 3x^3 - 9x^2 - 4x - 12 = 0$

10. Rozwiąż równanie (postaraj się znaleźć rozwiązania w jak najprostszy sposób).

a) $(2x - 1)^2 = 100$

b) $(5 - x)^3 = -8$

c) $3(2x^2 - 7)^2 = 27$

11. a) Znajdź liczbę, której sześcián jest równy sumie tej liczby i jej kwadratu.

b) Znajdź liczbę, o której wiadomo, że suma tej liczby i sześciánu liczby o 1 od niej mniejszej wynosi 11.

c) Znajdź liczbę, której kwadrat jest o 2 mniejszy od jej czwartej potęgi.

12. Uzasadnij następującą własność:

Liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu wtedy i tylko wtedy, gdy suma współczynników tego wielomianu jest równa 0.

13. Uzasadnij, że jeśli wielomian $W(x) = ax^7 + bx^5 + cx^3 + dx + e$ spełnia warunek $W(-1) = -W(1)$, to 0 jest pierwiastkiem tego wielomianu.

MINISPRAWDZIAN

51. Wielomian $(4x^2 + 5)(x^2 + 3x - 10)(x + 6)^2$ ma:

A. sześć pierwiastków

C. trzy pierwiastki

B. cztery pierwiastki

D. jeden pierwiastek

52. Suma rozwiązań równania $6x^3 - 2x^2 - 24x + 8 = 0$ jest równa:

A. -2

B. $\frac{1}{3}$

C. $2\frac{1}{3}$

D. 4

53. Wszystkie pierwiastki równania $x^4 - 7x^2 + 10$ należą do przedziału:

A. $\langle -10; -7 \rangle$

B. $\langle -7; -3 \rangle$

C. $\langle -3; 3 \rangle$

D. $\langle 3; 7 \rangle$

DZIELENIE WIELOMIANÓW

- I Wiadomo, że jeśli dana liczba naturalna a jest iloczynem pewnych dwóch liczb, to w wyniku dzielenia liczby a przez jedną z tych liczb otrzymamy drugą z nich. Na przykład równość:

$$4503 = 57 \cdot 79$$

możemy zapisać w postaci:

$$4503 : 57 = 79$$

Oznacza to, że liczba 4503 jest podzielna przez 57 (a także przez 79). W analogiczny sposób będziemy rozumieli dzielenie wielomianów.

Wiesz już, że wielomiany można rozkładać na czynniki. Na przykład wielomian $W(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 6$ można zapisać w postaci iloczynu:

$$2x^3 - 4x^2 + 3x - 6 = (x - 2)(2x^2 + 3)$$

Powyższą równość można zapisać inaczej:

$$(2x^3 - 4x^2 + 3x - 6) : (x - 2) = 2x^2 + 3$$

Mówimy wówczas, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $x - 2$. Wynikiem dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x - 2$ jest wielomian $2x^2 + 3$.

Uwaga. Wielomian $W(x)$ jest także podzielny przez wielomian $2x^2 + 3$.

Mówimy, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez niezerowy wielomian $P(x)$, jeśli istnieje taki wielomian $Q(x)$, że:

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x)$$

Tę równość można też zapisać w postaci:

$$W(x) : P(x) = Q(x)$$

Zauważ, że po rozłożeniu danego wielomianu na czynniki łatwo można wskazać wielomiany, przez które jest on podzielny, i podać wyniki takiego dzielenia.

ĆWICZENIE A Rozłóż wielomian $x^5 - 4x^3 + x^2 - 4$ na czynniki, a następnie określ wynik dzielenia.

a) $(x^5 - 4x^3 + x^2 - 4) : (x - 2)$

b) $(x^5 - 4x^3 + x^2 - 4) : (x^2 - 4)$

Pokażemy teraz metodę, która pozwala znaleźć wynik dzielenia dwóch wielomianów bez konieczności rozkładania pierwszego z nich na czynniki. Metoda ta przypomina pisemne dzielenie liczb naturalnych.

Wynik dzielenia $W(x) : P(x)$, gdzie $W(x) = 2x^3 - x^2 - 16x + 3$ i $P(x) = x - 3$, można znaleźć w następujący sposób:

$$\begin{array}{r} 2x^2 \\ (2x^3 - x^2 - 16x + 3) : (x - 3) \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 2x^2 \\ (2x^3 - x^2 - 16x + 3) : (x - 3) \\ \underline{2x^3 - 6x^2} \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 2x^2 \\ (2x^3 - x^2 - 16x + 3) : (x - 3) \\ \underline{-(2x^3 - 6x^2)} \\ 5x^2 - 16x + 3 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 2x^2 + 5x \\ (2x^3 - x^2 - 16x + 3) : (x - 3) \\ \underline{-(2x^3 - 6x^2)} \\ 5x^2 - 16x + 3 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 2x^2 + 5x \\ (2x^3 - x^2 - 16x + 3) : (x - 3) \\ \underline{-(2x^3 - 6x^2)} \\ 5x^2 - 16x + 3 \\ \underline{-(5x^2 - 15x)} \\ -x + 3 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 2x^2 + 5x - 1 \\ (2x^3 - x^2 - 16x + 3) : (x - 3) \\ \underline{-(2x^3 - 6x^2)} \\ 5x^2 - 16x + 3 \\ \underline{-(5x^2 - 15x)} \\ -x + 3 \\ \underline{-(-x + 3)} \\ 0 \end{array}$$

1. Dzielimy pierwszy wyraz wielomianu $W(x)$ (jednomian najwyższego stopnia) przez pierwszy wyraz wielomianu $P(x)$; $2x^3 : x = 2x^2$

2. Mnożymy częściowy wynik $2x^2$ przez wielomian $P(x)$; $2x^2 \cdot (x - 3) = 2x^3 - 6x^2$

3. Otrzymany wynik mnożenia $2x^3 - 6x^2$ odejmujemy od wielomianu $W(x)$;
 $2x^3 - x^2 - 16x + 3 - (2x^3 - 6x^2) = 5x^2 - 16x + 3$

4. Dzielimy pierwszy wyraz wielomianu otrzymanego w wyniku odejmowania przez pierwszy wyraz wielomianu $P(x)$; $5x^2 : x = 5x$

5. Mnożymy częściowy wynik $5x$ przez wielomian $P(x)$; $5x \cdot (x - 3) = 5x^2 - 15x$ i otrzymany wynik odejmujemy od wielomianu $5x^2 - 16x + 3$;
 $5x^2 - 16x + 3 - (5x^2 - 15x) = -x + 3$

6. Dzielimy pierwszy wyraz wielomianu otrzymanego w wyniku odejmowania przez pierwszy wyraz wielomianu $P(x)$; $-x : x = -1$
 Mnożymy -1 przez wielomian $P(x)$ i otrzymany wynik odejmujemy od wielomianu $-x + 3$.

Wynikiem dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$ jest wielomian $2x^2 + 5x - 1$.

$$(2x^3 - x^2 - 16x + 3) : (x - 3) = 2x^2 + 5x - 1$$

ĆWICZENIE B Upewnij się, że otrzymany wynik jest poprawny — pomnóż wielomian $x - 3$ przez wielomian $2x^2 + 5x - 1$.

Zauważ, że przy wykonywaniu dzielenia obliczaliśmy różnice pewnych wielomianów. Gdy wykonujemy takie działania, łatwo o pomyłkę, dlatego warto nieco zmienić sposób zapisu dzielenia.

$$\begin{array}{r}
 2x^2 + 5x - 1 \\
 (2x^3 - x^2 - 16x + 3) : (x - 3) \\
 -2x^3 + 6x^2 \\
 \hline
 5x^2 - 16x + 3 \\
 -5x^2 + 15x \\
 \hline
 -x + 3 \\
 x - 3 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Wynik mnożenia $2x^2 \cdot (x - 3)$ zapisujemy ze zmienionymi znakami, a następnie dodajemy go do wielomianu $2x^3 - x^2 - 16x + 3$.

Wynik mnożenia $5x \cdot (x - 3)$ zapisujemy ze zmienionymi znakami, a następnie dodajemy go do wielomianu $5x^2 - 16x + 3$.

PRZYKŁAD 1 Podziel wielomian $W(x) = 3x^3 + 16x^2 + 3x - 10$ przez dwumian $x + 5$ i zapisz wielomian $W(x)$ w postaci iloczynu.

$$\begin{array}{r}
 3x^2 + x - 2 \\
 (3x^3 + 16x^2 + 3x - 10) : (x + 5) \\
 -3x^3 - 15x^2 \\
 \hline
 x^2 + 3x - 10 \\
 -x^2 - 5x \\
 \hline
 -2x - 10 \\
 2x + 10 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$W(x) = (x + 5)(3x^2 + x - 2)$$

ZADANIE Wykonaj dzielenie $(5x^3 - 17x^2 + 7x - 3) : (x - 3)$.

zadania 1-5 ►

- II Podobnie jak przy dzieleniu liczb naturalnych, także w wyniku dzielenia wielomianu przez inny wielomian możemy otrzymać resztę różną od 0.

LICZBY

$$\begin{array}{r}
 211 \\
 2745 : 13 \\
 -26 \\
 \hline
 14 \\
 -13 \\
 \hline
 15 \\
 -13 \\
 \hline
 2 \leftarrow \text{reszta}
 \end{array}$$

Wynik dzielenia:

$$2745 : 13 = 211 \text{ reszta } 2$$

Zatem:

$$2745 = 211 \cdot 13 + 2$$

Reszta jest mniejsza od liczby, przez którą dzielimy.

WIELOMIANY

$$\begin{array}{r}
 2x^2 + x + 1 \\
 (2x^3 + 7x^2 + 4x + 5) : (x + 3) \\
 -2x^3 - 6x^2 \\
 \hline
 x^2 + 4x + 5 \\
 -x^2 - 3x \\
 \hline
 x + 5 \\
 -x - 3 \\
 \hline
 2 \leftarrow \text{reszta}
 \end{array}$$

Wynik dzielenia

$$(2x^3 + 7x^2 + 4x + 5) : (x + 3) = 2x^2 + x + 1 \text{ reszta } 2$$

Zatem:

$$2x^3 + 7x^2 + 4x + 5 = (x + 3)(2x^2 + x + 1) + 2$$

Stopień reszty jest mniejszy od stopnia wielomianu, przez który dzielimy.

PRZYKŁAD 2 Wykonaj dzielenie $W(x) : P(x)$, gdy $W(x) = x^5 - 4x^4 - 3x^2 + 14x - 3$,
 $P(x) = x - 4$.

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 3x + 2 \\
 (x^5 - 4x^4 - 3x^2 + 14x - 3) : (x - 4) \\
 \underline{-x^5 + 4x^4} \\
 3x^2 - 12x - 3 \\
 \underline{3x^2 - 12x} \\
 2x - 3 \\
 \underline{-2x + 8} \\
 5
 \end{array}$$

W wyniku dzielenia $W(x) : P(x)$ otrzymujemy: $x^4 - 3x + 2$ reszta 5.

$$(x^5 - 4x^4 - 3x^2 + 14x - 3) : (x - 4) = x^4 - 3x + 2 \text{ reszta } 5$$

Zatem:

$$x^5 - 4x^4 - 3x^2 + 14x - 3 = (x - 4)(x^4 - 3x + 2) + 5 \quad ; \quad W(x) = P(x) \cdot (x^4 - 3x + 2) + 5$$

ZADANIE Wykonaj dzielenie $(2x^3 + x^2 - 12x + 5) : (x + 3)$.

Zauważ, że resztą z dzielenia dowolnego wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - a$ jest zawsze liczba. Gdy ta reszta jest równa 0, to mówimy, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$.

zadania 6-12 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Podaj przykłady trzech wielomianów, przez które podzielny jest wielomian $W(x)$.

- a) $W(x) = -(3x + 2)^4(2x + 5)^3$
 b) $W(x) = \frac{1}{3}(2x - 1)^5(4x - 1)(x^2 + 2)$

2. Wykonaj dzielenie.

- a) $(x^3 - 8x^2 + 17x - 10) : (x - 5)$ d) $(-4x^4 + 12x^3 - 5x^2 + 17x - 6) : (x - 3)$
 b) $(3x^3 + 8x^2 - 18x - 8) : (x + 4)$ e) $(x^5 + 9x^4 + 14x^3 + x + 7) : (x + 7)$
 c) $(x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1) : (x - 1)$ f) $(-x^5 - 2x^4 + 5x^2 + 17x + 14) : (x + 2)$

3. Znajdź taki wielomian $W(x)$, aby była spełniona podana równość.

- a) $(x + 2) \cdot W(x) = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$
 b) $W(x) \cdot (x - 3) = 5x^4 - 17x^3 + 6x^2 - x + 3$
 c) $10x^2 + (x - 5) \cdot W(x) = 3x^4 - 13x^3 - x + 5$
 d) $7(2x^2 + x) - (x + 4) \cdot W(x) = 4 - 3x^3$

$$\textcircled{1} 3x^4 + 2x - 3$$

$$\textcircled{2} 3x^4 - 3x - 6$$

$$\textcircled{3} 3x^3 + 2x + 3$$

$$\textcircled{4} 3x^3 - 2x - 3$$

$$\textcircled{5} 3x^4 + 3x - 2$$

4. Obok zapisano pięć różnych wielomianów. Jeden z nich jest wynikiem podanego dzielenia. Nie wykonując dzielenia, wskaż który.

$$\text{a)} (3x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 9x - 9) : (x + 3)$$

$$\text{b)} (3x^5 - 9x^4 + 3x^2 - 11x + 6) : (x - 3)$$

$$\text{c)} (3x^5 + 3x^4 - 3x^2 - 9x - 6) : (x + 1)$$

$$\text{d)} (3x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 5x + 3) : (x - 1)$$

5. Jakie liczby należy wstawić w miejsce krerek?

$$\text{a)} (3x^3 + \square x^2 + \square x + \square) : (x + 2) = \square x^2 + 1$$

$$\text{b)} (\square x^4 + \square x^3 + \square x^2 - 15x) : (x - 3) = -2x^3 + \square x$$

6. Wykonaj dzielenie z resztą.

$$\text{a)} (x^3 - 4x^2 + 10x) : (x - 1)$$

$$\text{d)} (-4x^4 + 17x^3 - 4x^2 + 2x - 5) : (x - 4)$$

$$\text{b)} (2x^3 + 7x^2 + 2x - 1) : (x + 3)$$

$$\text{e)} (x^5 + x^4 - 2x^2 + x + 10) : (x + 1)$$

$$\text{c)} (3x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 11x - 4) : (x + 2)$$

$$\text{f)} (3x^5 - 13x^4 - 10x^3 - x^2 + 7x - 6) : (x - 5)$$

7. Znajdź wielomian $W(x)$ spełniający podany warunek.

a) Dzieląc $W(x)$ przez $x - 4$, otrzymamy wielomian $3x - 2$ oraz resztę -2 .

b) Dzieląc $W(x)$ przez $x + 5$, otrzymamy wielomian $x^2 - 5$ oraz resztę 7 .

8. Podaj przykład wielomianu czwartego stopnia, dla którego reszta z jego dzielenia przez wielomian $x + 2$ jest równa 10 .

9. a) Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 2x^3 - x^2 - 11x - 4$ przez dwumian $P(x) = x - 2$ jest równa -14 . Jaką liczbą należałoby zastąpić wyraz wolny wielomianu $W(x)$, aby otrzymany wielomian był podzielny przez dwumian $P(x)$?

b) Reszta z dzielenia wielomianu $V(x) = 5x^4 + 15x^3 - 2x^2 - 2x + 7$ przez dwumian $Q(x) = x + 3$ wynosi -5 . Jak należałoby zmienić wyraz wolny wielomianu $V(x)$, aby otrzymany wielomian był podzielny przez dwumian $Q(x)$?

10. a) Dane są wielomiany:

$$W_1(x) = 2x^3 - 11x^2 - 4x - 2 \quad W_2(x) = 3x^4 - 15x^3 + 4x - 16$$

Podziel każdy z tych wielomianów przez dwumian $x - 5$, a następnie podziel wielomian $W_1(x) + W_2(x)$ przez dwumian $x - 5$.

b) Udowodnij, że jeśli resztą z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x - a$ jest r_1 i resztą z dzielenia wielomianu $V(x)$ przez $x - a$ jest r_2 , to reszta z dzielenia wielomianu $W(x) + V(x)$ przez $x - a$ jest równa $r_1 + r_2$.

Schemat Hornera

Dzieląc wielomian czwartego stopnia przez dwumian $x - p$, otrzymamy wielomian trzeciego stopnia oraz resztę r (reszta może być równa 0).

Możemy więc zapisać równość:

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - p)(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) + r$$

Przekształcając prawą stronę tej równości, otrzymamy:

$$b_3x^4 + (b_2 - pb_3)x^3 + (b_1 - pb_2)x^2 + (b_0 - pb_1)x + r - pb_0$$

Z równości wielomianów wynika, że:

$$a_4 = b_3 \quad a_3 = b_2 - pb_3 \quad a_2 = b_1 - pb_2 \quad a_1 = b_0 - pb_1 \quad a_0 = r - pb_0$$

Stąd:

$$b_3 = a_4 \quad b_2 = pb_3 + a_3 \quad b_1 = pb_2 + a_2 \quad b_0 = pb_1 + a_1 \quad r = pb_0 + a_0$$

Podobne zależności otrzymalibyśmy, dzieląc wielomian dowolnego stopnia przez dwumian $x - p$. Dlatego szukając wyniku takiego dzielenia, możemy skorzystać z uproszczonej metody zwanej schematem Hornera. Poniżej pokazano ją na przykładzie dzielenia wielomianu $-x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 25$ przez dwumian $x + 4$. William Horner był brytyjskim matematykiem, który tę metodę spopularyzował.

$$\overbrace{(-x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 0 \cdot x - 25)}^{W(x)} : \overbrace{(x + 4)}^{x - p} = ?$$

Diagram 1: Initial Setup

	-1	-4	2	0	-25
-4	-1				

Tu wpisujemy p (w tym wypadku -4).

Zapisujemy kolejne współczynniki wielomianu $W(x)$.

Tu przepisujemy pierwszy współczynnik wielomianu $W(x)$.

Diagram 2: Calculation

	-1	-4	2	0	-25
-4	-1	0	2	-8	7

To są współczynniki wielomianu, który otrzymujemy w wyniku dzielenia; wielomian ten ma stopień o 1 niższy niż wielomian $W(x)$, jest to więc wielomian $(-1) \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 8$.

To jest reszta z dzielenia.

W kolejnych kolumnach wpisujemy wyniki odpowiednich działań.

W wyniku dzielenia wielomianu $-x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 25$ przez dwumian $x + 4$ otrzymujemy wielomian $-x^3 + 2x - 8$ oraz resztę 7, czyli:

$$(-x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 25) = (x + 4)(-x^3 + 2x - 8) + 7$$

11. Zapisz dowolny wielomian piątego stopnia. Następnie podziel go przez dwumian $x + 2$. Wykonaj to dzielenie dwoma sposobami — korzystając z poznanej wcześniej metody oraz ze schematu Hornera omówionego powyżej.

12. Wykonaj dzielenie, korzystając ze schematu Hornera.

a) $(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) : (x - 2)$

d) $(x^5 - 9x^3 + 2x + 5) : (x + 3)$

b) $(x^4 + x^3 + x^2 + 4x + 3) : (x + 1)$

e) $(5x^5 - 7x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x) : (x - 1)$

c) $(2x^4 - 8x^3 + 5x - 20) : (x - 4)$

f) $(-3x^4 + 2x - 3) : (x + 2)$

MINISPRAWDZIAN

51. Przez który z wielomianów nie jest podzielny wielomian $(2x - 1)(x + 1)(x - 2)$?

A. $x + 1$

B. $x^2 - x - 2$

C. $2x^2 + x - 1$

D. $x^2 + 2x + 1$

52. Wynikiem dzielenia wielomianu $6x^4 - 13x^3 - 17x^2 + 10x - 12$ przez dwumian $x - 3$ jest wielomian $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Która z podanych równości jest prawdziwa?

A. $a = 3$

B. $b = 5$

C. $c = 2$

D. $d = -4$

53. Po podzieleniu wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x + 7$ otrzymano wielomian $3x^3 - 5x^2 + x + 4$ i resztę 2. Które z podanych zdań nie jest prawdziwe?

A. $W(x)$ jest wielomianem czwartego stopnia.

B. Współczynnik przy najwyższej potęgze wielomianu $W(x)$ jest równy 3.

C. Wyraz wolny wielomianu $W(x)$ jest równy 28.

D. Wielomian $W(x) - 2$ dzieli się przez dwumian $x + 7$ bez reszty.

TWIERDZENIE BÉZOUTA

- I** Wiemy już, że dzieląc dowolny wielomian $W(x)$ przez dwumian $x - a$, otrzymamy pewien wielomian $Q(x)$ i resztę R , która jest liczbą. Wielomian $W(x)$ można zapisać w postaci:

$$W(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R$$

Gdy $R = 0$, to zachodzi równość:

$$W(x) = (x - a) \cdot Q(x)$$

Wówczas $W(a) = 0$, czyli a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Ogólną własność wielomianów, która wiąże pierwiastek wielomianu z podzielnością tego wielomianu przez pewien dwumian, opisuje twierdzenie Bézouta (czyt. bezuta).

Twierdzenie Bézouta

*Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$
wtedy i tylko wtedy, gdy
wielomian ten jest podzielny przez dwumian $x - a$.*

Uwaga. Powyższe twierdzenie można zapisać w następujący sposób:

$$W(a) = 0 \Leftrightarrow W(x) : (x - a) = P(x), \text{ gdzie } P(x) \text{ jest pewnym wielomianem.}$$

Dowód

Zauważmy, że dla dowolnej liczby a wielomian $W(x)$ można zapisać w postaci:

$$W(x) = (x - a) \cdot P(x) + R,$$

gdzie $P(x)$ jest pewnym wielomianem, a R — pewną liczbą.

Wobec tego:

$$W(a) = (a - a) \cdot P(a) + R = 0 \cdot P(a) + R = R$$

Otrzymaliśmy zatem równość:

$$W(a) = R$$

Korzystając z tej równości, udowodnimy dwie implikacje.

1. Załóżmy, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, czyli $W(a) = 0$.

Ponieważ $W(a) = R$, zatem $R = 0$. Wynika stąd, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$.

2. Załóżmy teraz, że wielomian $W(x)$ dzieli się przez $x - a$, czyli $R = 0$.

Ponieważ $W(a) = R$, zatem $W(a) = 0$. Wynika stąd, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. $\square$

ĆWICZENIE A Dany jest wielomian $W(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$. Korzystając z twierdzenia Bézouta, ustal, przez które z podanych dwumianów jest on podzielny.

$$x - 1$$

$$x + 1$$

$$x - 2$$

$$x + 2$$

Analizując dowód twierdzenia Bézouta, można zauważyć, że przy okazji została uzasadniona następująca własność wielomianów:

*Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - a$
jest równa $W(a)$.*

ĆWICZENIE B Ustal reszty z dzielenia podanych wielomianów przez $x - 2$.

$$A(x) = x^3 - x^2 + 3x - 5$$

$$B(x) = \frac{1}{4}x^5 - x^2 - 7x + 1$$

$$C(x) = x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 12$$

zadania 1-4 ►

- III Przypuśćmy, że mamy rozwiązać równanie wielomianowe $W(x) = 0$ i wiemy, że liczba p jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Z twierdzenia Bézouta wynika, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $x - p$. Czyli istnieje wielomian $Q(x)$ niższego stopnia niż $W(x)$, taki że:

$$W(x) = (x - p) \cdot Q(x)$$

Równanie $W(x) = 0$ możemy więc zapisać w postaci:

$$(x - p) \cdot Q(x) = 0$$

Aby ustalić, czy wielomian $W(x)$ ma jakieś inne pierwiastki, należy rozwiązać równanie niższego stopnia: $Q(x) = 0$.

PRZYKŁAD Sprawdź, że liczba 1 jest rozwiązaniem danego równania, i znajdź pozostałe rozwiązania tego równania.

$$x^3 - 3x^2 + 2 = 0$$

$$1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x - 2 \\ (x^3 - 3x^2 + 2) : (x - 1) \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ -2x^2 + 2 \\ \underline{2x^2 - 2x} \\ -2x + 2 \\ \underline{2x - 2} \\ 0 \end{array}$$

$$x^3 - 3x^2 + 2 = (x - 1)(x^2 - 2x - 2)$$

$$(x - 1)(x^2 - 2x - 2) = 0$$

$$x = 1 \quad \text{lub} \quad x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot (-2) = 12$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

Odp. Równanie ma trzy rozwiązania: $x_1 = 1 - \sqrt{3}$, $x_2 = 1 + \sqrt{3}$, $x_3 = 1$.

ZADANIE Sprawdź, że liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - 7x + 6$, a następnie rozwiąż równanie $W(x) = 0$.

zadania 5-7 ►

Étienne Bézout (czyt. etien bezu) (1730–1783) był francuskim matematykiem. Zajmował się algebrą, ale znany jest głównie jako autor doskonałych podręczników. Jego książki są napisane niezwykle przystępnie. Sześciotomowe dzieło Bézouta „Kurs matematyki”, przetłumaczone na angielski, było przez wiele lat podstawowym podręcznikiem na Uniwersytecie Harvarda.

Twierdzenie o podzielności wielomianu przez dwumian nie zostało ani sformułowane, ani udowodnione przez Bézouta — było znane już wcześniej. Właściwie nie wiadomo, dlaczego w Polsce jest nazywane twierdzeniem Bézouta. W większości krajów, nawet we Francji, nie używa się takiej nazwy.

ZESTAW ZADAŃ

◀ I 1. Czy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $V(x)$?

a) $W(x) = 5x^{14} - 6x + 1$, $V(x) = x - 1$

b) $W(x) = 3x^7 - x^3 + x^2 + 1$, $V(x) = x + 1$

c) $W(x) = x^3 + 3x^2 + x - 10$, $V(x) = x + 2$

d) $W(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 1$, $V(x) = x - \frac{1}{2}$

2. Nie wykonując dzielenia, ustal, jaka jest reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$.

a) $W(x) = 3x^5 - 2x^3 + 4$ $P(x) = x - 1$ b) $W(x) = -5x^3 - 3x^2 + 6$ $P(x) = x + 2$

3. a) Dla jakiej wartości a wielomian $5x^5 - ax^3 + 3x^2 - 6x$ jest podzielny przez dwumian $x - 2$?

b) Dla jakiej wartości p wielomian $px^5 - px^3 - \frac{1}{2}x + 2$ jest podzielny przez dwumian $x + 2$?

• 4. a) Wykaż, że dla dowolnej liczby a wielomian $x^n - a^n$ jest podzielny przez dwumian $x - a$.

b) Wykaż też, że gdy n jest liczbą parzystą, to dla dowolnej liczby a wielomian $x^n - a^n$ jest podzielny przez dwumian $x + a$.

◀ II 5. Sprawdź, że podana liczba jest pierwiastkiem równania, a następnie znajdź jego pozostałe pierwiastki.

a) $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$, 2

d) $4x^3 - 4x^2 - 15x + 18 = 0$, -2

b) $6x^3 - 29x^2 - 6x + 5 = 0$, 5

e) $x^4 - x^3 - 14x^2 + 2x + 24 = 0$, -3

c) $x^3 + 7x^2 - 5x - 75 = 0$, 3

f) $x^4 + 8x^3 + 19x^2 + 32x + 60 = 0$, -5

6. Liczby 2 i -3 są pierwiastkami wielomianu $ax^3 + bx^2 - 11x + 30$. Znajdź trzeci pierwiastek tego wielomianu.

7. Sprawdź, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, i rozłóż ten wielomian na czynniki stopnia pierwszego.

a) $W(x) = 3x^3 - 35x^2 + 48x + 20$, $a = 10$

b) $W(x) = 10x^3 + 63x^2 - 48x + 7$, $a = -7$

c) $W(x) = x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 28x - 24$, $a = -6$

d) $W(x) = 2x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 6x + 40$, $a = 4$

MINISPRAWDZIAN

51. Tylko jeden z poniższych wielomianów nie jest podzielny przez dwumian $x - 1$. Wskaż ten wielomian.

A. $16x^7 - 5x - 11$

C. $x^{11} - 1$

B. $x^8 - 5x^6 - x^5 + 3x^2 + 2x$

D. $2x^5 - 2x^3 - 1$

52. Reszta z dzielenia wielomianu $2x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 5$ przez dwumian $x - 1$ to:

A. 2

B. 5

C. -1

D. -2

53. Wielomian $x^6 + 4x^3 - 32$ jest podzielny przez dwumian:

A. $x - 1$

B. $x + 1$

C. $x - 2$

D. $x + 2$

54. Wielomian $x^3 + mx^2 + mx + 3$ jest podzielny przez dwumian $x + 3$, gdy:

A. $m = -3$

B. $m = 4$

C. $m = 5$

D. $m = 10$

RÓWNANIA WIELOMIANOWE (CD.)

1 Aby skorzystać z twierdzenia Bézouta przy rozwiązywaniu równania wielomianowego, trzeba znać przynajmniej jedną liczbę spełniającą to równanie.

ĆWICZENIE A Przyjrzyj się poniższym równaniom i nie rozwiązując ich, odpowiedz, o którym z nich możemy powiedzieć, że na pewno nie ma rozwiązań, które są liczbami całkowitymi.

$$x^3 + 3x + \frac{1}{2} = 0$$

$$y^3 - y^2 + y - 1 = 0$$

$$z^3 + z^2 + z - \sqrt{2} = 0$$

Spróbujemy teraz odkryć, jakie warunki musiałyby być spełnione, aby jednym z rozwiązań równania wielomianowego o współczynnikach całkowitych mogła być liczba całkowita.

Rozważmy na przykład wielomian:

$$W(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

Aby znaleźć pierwiastki tego wielomianu, wystarczy rozwiązać równanie:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

To równanie możemy zapisać w postaci:

$$x(x^2 - 2x - 5) = -6$$

Przypuśćmy, że liczba całkowita c jest rozwiązaniem tego równania, zatem zachodzi równość:

$$c(c^2 - 2c - 5) = -6$$

Z powyższej równości wynika, że liczba -6 jest iloczynem dwóch liczb całkowitych: liczby c oraz liczby $c^2 - 2c - 5$.

Zatem liczba c musi być dzielnikiem liczby -6 . Jest więc także dzielnikiem liczby 6 , czyli liczby, która jest wyrazem wolnym rozważanego wielomianu.

Liczba 6 ma osiem całkowitych dzielników:

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$$

Aby ustalić, które liczby całkowite są rozwiązaniami rozważanego równania, wystarczy sprawdzić, które z tych ośmiu liczb spełniają to równanie.

Dla $x = 1$ otrzymamy:

$$W(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 0$$

Zatem liczba 1 jest rozwiązaniem danego równania.

Dla $x = -1$ otrzymamy:

$$W(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 6 \neq 0$$

Zatem liczba -1 nie jest rozwiązaniem tego równania.

Dla $x = 2$ otrzymamy:

$$W(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 \neq 0$$

Zatem liczba 2 nie jest rozwiązaniem tego równania.

Postępując dalej w ten sposób, można znaleźć wszystkie całkowite rozwiązania rozważanego równania.

ĆWICZENIE B Sprawdź, czy równanie $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ ma jeszcze całkowite rozwiązania inne niż $x = 1$.

Aby rozwiązać równanie wielomianowe o współczynnikach całkowitych, możemy skorzystać z następującego twierdzenia:

Twierdzenie (o rozwiązaniach całkowitych)

Załóżmy, że w równaniu wielomianowym:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

wszystkie współczynniki $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ są liczbami całkowitymi i $a_0 \neq 0$. Jeśli rozwiązaniem tego równania jest liczba całkowita, to jest ona dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .

Dowód

Przyjmijmy, że liczba całkowita c jest rozwiązaniem równania:

$$a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0 = 0,$$

gdzie współczynniki $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ są liczbami całkowitymi i $a_0 \neq 0$.

Wobec tego spełniona jest równość:

$$a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0 = 0$$

Zapiszmy tę równość w postaci:

$$c(a_n c^{n-1} + a_{n-1} c^{n-2} + \dots + a_1) = -a_0$$

Liczba $a_n c^{n-1} + a_{n-1} c^{n-2} + \dots + a_1$ jest całkowita (bo założyliśmy, że wszystkie współczynniki równania są liczbami całkowitymi). Wynika stąd, że liczba a_0 jest podzielna przez c .

Wykazaliśmy w ten sposób, że liczba c jest dzielnikiem liczby a_0 . $\square$

ĆWICZENIE C a) Wykaż, że równanie $x^5 + 2x - 11 = 0$ nie ma rozwiązań, które są liczbami całkowitymi.

b) Znajdź wszystkie całkowite rozwiązania równania $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = 0$.

c) Wykaż, że rozwiązaniem równania $x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$ jest liczba 2, chociaż rozwiązaniem to nie jest dzielnikiem wyrazu wolnego. Wyjaśnij, dlaczego nie jest to sprzeczne z powyższym twierdzeniem.

d) Przekształć równanie $x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 0$ tak, aby wszystkie współczynniki równania były liczbami całkowitymi, a następnie sprawdź, czy równanie to ma pierwiastek całkowity.

Stosując powyższe twierdzenie, można rozwiązywać niektóre równania typu $W(x) = 0$, w których wielomian $W(x)$ ma współczynniki całkowite.

PRZYKŁAD Rozwiąż równanie.

$$x^3 - 4x^2 + 8 = 0$$

Dzielniki wyrazu wolnego wielomianu $W(x) = x^3 - 4x^2 + 8$ to:

$$1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8$$

$$W(1) = 1 - 4 + 8 \neq 0$$

Liczby 1 i -1 nie spełniają równania $x^3 - 4x^2 + 8 = 0$.

$$W(-1) = -1 - 4 + 8 \neq 0$$

$$W(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 8 = 0$$

Liczba 2 spełnia równanie.

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x - 4 \\ (x^3 - 4x^2 + 8) : (x - 2) \\ \underline{-x^3 + 2x^2} \\ -2x^2 + 8 \\ \underline{2x^2 - 4x} \\ -4x + 8 \\ \underline{4x - 8} \\ 0 \end{array}$$

Dzielimy wielomian $x^3 - 4x^2 + 8$ przez dwumian $x - 2$.

$$x^3 - 4x^2 + 8 = (x - 2)(x^2 - 2x - 4)$$

$$(x - 2)(x^2 - 2x - 4) = 0$$

Zapisujemy równanie $x^3 - 4x^2 + 8 = 0$ w innej postaci i je rozwiązujemy.

$$x = 2 \quad \text{lub} \quad x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot (-4) = 20$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{5}$$

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{2} = 1 - \sqrt{5}$$

$$x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5}$$

Odp. Równanie ma trzy rozwiązania: $x_1 = 1 - \sqrt{5}$, $x_2 = 1 + \sqrt{5}$ i $x_3 = 2$.

ZADANIE Rozwiąż równanie: $x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = 0$.

Uwaga. Jeżeli korzystając z twierdzenia o rozwiązaniach całkowitych, nie znajdziemy żadnego rozwiązania równania wielomianowego, to oczywiście nie oznacza jeszcze, że równanie nie ma rozwiązań. Na przykład równanie $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ nie ma rozwiązań całkowitych, ale ma dwa rozwiązania ($x = \sqrt{3}$ i $x = -\sqrt{3}$).

zadania 1-7 ►

Na początku roku 1535 rozpoczął się matematyczny pojedynek. Jego uczestnikami byli dwaj Włosi — Mario Fior i Niccolò Fontana, znany pod przezwiskiem Tartaglia (czyt. tartalia; tłum. jąkała). Takie naukowe zawody były wówczas bardzo popularne, gdyż dzięki nim rosła sława (i dochody) zwycięzcy.

Zawody polegały na tym, że w ciągu 30 dni obaj uczestnicy mieli rozwiązać kilkadziesiąt zadań przygotowanych przez przeciwnika. Fior wygrał już wcześniej wiele turniejów, bo znał kilka równań trzeciego stopnia, które tylko on, jak mu się zdawało, umiał rozwiązać. Wszystkie zadania Fiora dotyczyły równań trzeciego stopnia. Tydzień przed upływem terminu Tartaglia odkrył metodę rozwiązywania tego typu równań i wygrał turniej.

Wielu uczonych pragnęło poznać metodę Tartaglii, jednak on nikomu nie chciał jej zdradzić. Jeden z włoskich matematyków — Girolamo Cardano (czyt. dzirolamo kardano) — tak długo prosił Tartaglię o pokazanie jego metody, że ten w końcu się zgodził — jednak pod warunkiem, że Cardano nikomu jej nie ujawni. Kilka lat później Cardano dowiedział się, że metodę Tartaglii odkrył wcześniej Scipione del Ferro (czyt. szipione del ferro). Uznał wtedy, że obietnica dana Tartaglii już go nie obowiązuje, i nieuczciwie opublikował wzory pod własnym nazwiskiem. Od tego czasu wzory pozwalające rozwiązać równanie trzeciego stopnia są nazywane wzorami Cardana.

ZESTAW ZADAŃ

1. Znajdź wszystkie całkowite pierwiastki wielomianu.

a) $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

d) $3x^4 + x^3 - x^2 - x - 2$

b) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

e) $x^5 - x^4 - 2x^2 - 4x$

c) $2x^3 + 8x^2 + 8x + 6$

f) $x^6 - 4x^5 - 6x^4 + 4x^3 + 5x^2$

2. Wykaż, że wielomian $W(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych.

a) $W(x) = 5x^5 + 3x^2 - 1$

c) $W(x) = 2x^3 + 5x + 3$

b) $W(x) = x^4 - x^2 - 2$

d) $W(x) = 3x^4 + x + 5$

3. Jednym z pierwiastków wielomianu jest liczba całkowita. Znajdź tę liczbę oraz pozostałe pierwiastki wielomianu.

a) $10x^3 - x^2 - 7x - 2$

d) $x^3 + 3x^2 + x - 2$

b) $-12x^3 - 11x^2 + 2x + 1$

e) $4x^3 - 12x^2 + 9x - 2$

c) $x^3 + x^2 - 5x + 3$

f) $x^3 - x^2 - 17x - 15$

4. Rozwiąż równanie.

a) $5x^3 + 10x^2 + 6x + 1 = 0$

e) $8x^3 - 26x^2 + 3x + 9 = 0$

b) $3x^3 + 8x^2 - 4x - 3 = 0$

f) $3x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 2x - 3 = 0$

c) $10x^3 + 11x^2 - 16x + 4 = 0$

g) $2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 10x - 4 = 0$

d) $4x^3 - 12x^2 + 9x - 2 = 0$

h) $-3x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 6x + 3 = 0$

5. Rozwiąż równanie.

a) $2x^3 + 2x^2 + 3 = 11x$

d) $5x(x^2 + 1) - (3x + 1)^2 = -2x^2 - x - 3$

b) $x(x + 2)^2 + 4x = -5$

e) $2(x^2 - 1)^2 + x(2x + 3)^2 = 11x^2 + 14x$

c) $5(x + 10) = x^2(8 - x)$

f) $(3x - 2)^2 + 4x(1 - x^2) = 6 - 5x^4$

6. Przekształć podane równanie do postaci $W(x) = 0$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, a następnie rozwiąż to równanie.

a) $x^3 - x^2 - 1,5x - 1 = 0$

d) $1,5x^3 + 2x^2 - 0,5x - 1 = 0$

b) $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x + 3\frac{1}{3} = 0$

e) $0,5x^3 + 1,5x^2 - 2 = 0$

c) $\frac{2}{3}x^3 - x^2 - 2\frac{2}{3}x - 1 = 0$

f) $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = 0$

- 7.** Dla jakich naturalnych wartości n równanie $x^n + x + 2 = 0$ ma rozwiązania całkowite? Znajdź te rozwiązania.

MINISPRAWDZIAN

S1. Ile pierwiastków całkowitych ma równanie $x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6 = 0$?

- A. jeden B. dwa C. trzy D. cztery

S2. Liczba -7 jest pierwiastkiem jednego z podanych wielomianów. Który to wielomian?

- A. $x^3 - 2x^2 + 7x - 17$ C. $x^3 + 4x^2 - 31x - 70$
B. $21x^4 + 7x^3 - 2x + 1$ D. $7x^4 - x^3 + 14x^2 - 2$

S3. Wielomian $x^3 - 2x^2 + 2x + 5$:

- A. nie ma pierwiastków C. ma dwa pierwiastki
B. ma jeden pierwiastek D. ma trzy pierwiastki

S4. Wielomian $x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ ma pierwiastek całkowity taki sam jak wielomian:

- A. $x^3 - 4x^2 + 2x + 3$ C. $x^3 - 3x^2 + x + 2$
B. $x^3 - x^2 - 5x - 6$ D. $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

POWTÓRZENIE

1. Oblicz współczynniki a i b wielomianu $W(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$, wiedząc, że $W(2) = -6$ i $W(-1) = 6$.

2. Dane są wielomiany: $U(x) = 4x^3 - 3x$, $V(x) = -3x^2 - 6x + 2$, $W(x) = x^4 - 2x^3 - 3x$. Wykonaj działania:

- a) $W(x) + 2U(x) - V(x)$
- b) $U(x) \cdot V(x) + W(x)$

3. Jakie jednomiany należy wstawić w miejsce liter A , B i C , aby zachodziła równość wielomianów?

- a) $Ax^2 + B + 4 = C(3x^2 - 5x + 2)$
- b) $A(3x^2 - x + B) = 6x^4 + Cx^2 + 8x$

4. Pierwiastkami wielomianu $W(x)$ są liczby -2 i 1 . Oblicz wartości współczynników p i q .

$$W(x) = x^3 + px^2 + qx - 4$$

5. Rozłóż wielomian na czynniki.

- a) $50x^2 - 72$
- b) $8x^3 - 27$
- c) $3x^4 + 15x^3$
- d) $x^3 + 7x^2 + 2x + 14$
- e) $5x^3 + \sqrt{2}x^2 - 10x - 2\sqrt{2}$
- f) $2x^5 + 4x^4 - 6x^3 - x^2 - 2x + 3$
- g) $x^5 - 2x^4 + \sqrt{3}x^3 - 3x^2 + 6x - 3\sqrt{3}$

6. Rozwiąż równanie.

- a) $(x - 7)(2x + 5)(6 - 3x) = 0$
- b) $(5x + 1)(x^2 - 9)(x^2 + 4) = 0$
- c) $(3x^2 - x)(x^2 + 6x + 9) = 0$
- d) $(2x^2 - x + 5)(x^2 + 2x - 1) = 0$

7. Rozwiąż równanie.

- a) $-3x^3 - 4x^2 + 4x = 0$
- b) $-x^4 + 6x^3 - 4x^2 = 0$
- c) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$
- d) $2x^4 - 7x^2 - 15 = 0$

8. Rozwiąż równanie.

- a) $3x^3 + 2x^2 + 15x + 10 = 0$
- b) $-x^3 + 3x^2 - x + 3 = 0$
- c) $x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = 0$
- d) $x^5 - 2x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x + 3 = 0$
- e) $x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$
- f) $4x^5 + 4x^4 + x^3 - 12x^2 - 12x - 3 = 0$

9. Wykonaj dzielenie.

- a) $(3x^3 + 7x^2 - x + 15) : (x + 3)$
- b) $(2x^3 - 7x^2 - 22x + 40) : (x - 5)$
- c) $(-4x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 1) : (x + 1)$
- d) $(-x^4 + 3x^2 + 3x - 5) : (x - 2)$

10. Jedną z liczb należących do zbioru $\{2, -3, 5, -7\}$ jest pierwiastkiem podanego wielomianu. Która?

- a) $x^3 + 5x^2 + 9x + 9$
- b) $x^3 + 4x^2 - 24$
- c) $x^3 - 8x^2 + 26x - 55$

11. a) Liczba 7 jest pierwiastkiem wielomianu $6x^3 - 55x^2 + 86x + 35$. Znajdź pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

b) Znajdź pierwiastek całkowity wielomianu $10x^3 + 23x^2 - 20x + 3$, a następnie oblicz pozostałe jego pierwiastki.

c) Znajdź pierwiastek całkowity wielomianu $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$, a następnie pokaż, że ten wielomian nie ma więcej pierwiastków.

Figury na płaszczyźnie część 1

Geometria to po grecku „mierzenie ziemi”. Dziedzina ta wywodzi się z pomiarów pól uprawnych, jednak od tysięcy lat ludzie zajmują się geometrią nie tylko ze względu na jej zastosowania, ale po prostu z ciekawości.

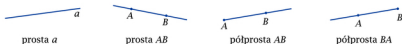


- Kąty. Kąty w trójkątach i czworokątach ■ Podstawowe własności trójkątów ■ Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa ■ Własności trójkątów (cd.) ■ Własności czworokątów ■ Powtórzenie

Kilka uwag wstępnych

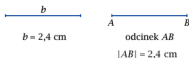
Figury geometryczne są obiektami abstrakcyjnymi, więc gdy mówimy, np. narysuj prostą, narysuj trójkąt, mamy na myśli sporządzenie rysunku przedstawiającego model rozważanej figury.

Punkty oznaczamy wielkimi literami. Proste możemy oznaczać małymi literami albo za pomocą dwóch wielkich liter. Półproste oznaczamy zwykle za pomocą dwóch wielkich liter, a pierwsza z nich to początek półprostej.

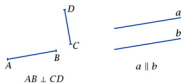


Odcinki możemy oznaczać małymi literami. Przyjmujemy, że mała litera może też oznaczać długość odcinka.

Odcinki oznaczamy też za pomocą dwóch wielkich liter, np. AB , ale długość odcinka oznaczonego w ten sposób zapisujemy tak: $|AB|$.



Za pomocą symbolu $\parallel$ zapisujemy, że proste lub odcinki są równoległe, a za pomocą symbolu $\perp$ zapisujemy, że proste lub odcinki są prostopadłe.



Wielokąty oznaczamy za pomocą kilku wielkich liter. Litery oznaczają kolejne wierzchołki wielokąta.



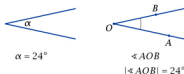
Gdy mówimy, że długość odcinka jest równa 4, oznacza to, że odcinek ten jest 4 razy dłuższy od pewnego odcinka przyjętego za jednostkę długości. Gdy mówimy, że pole figury jest równe 12, oznacza to, że pole tej figury jest 12 razy większe niż pole pewnego kwadratu przyjętego za jednostkę pola.

Kąty najczęściej oznaczamy małymi literami alfabetu greckiego:

α (alfa) β (beta) γ (gamma) δ (delta) φ (fi) χ (chi) ψ (psi) ω (omega)

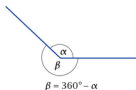
Przyjmujemy, że mała grecka litera może też oznaczać miarę kąta.

Kąty możemy oznaczać także za pomocą trzech wielkich liter, z których środkowa litera zawsze oznacza wierzchołek kąta. Np. $\angle AOB$ to kąt o wierzchołku O . Miarę oznaczonego w ten sposób kąta zapisujemy tak: $|\angle AOB|$.

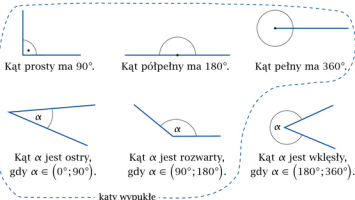


KĄTY. KĄTY W TRÓJKĄTACH I W CZWOROKĄTACH

- 1 Przypomnijmy, że dwie różne półproste o wspólnym początku dzielą płaszczyznę na dwa kąty; półproste to ramiona obu kątów. Jeśli te ramiona nie leżą na jednej prostej, to jeden z kątów jest kątem wypukłym, a drugi — wklęsłym. Suma ich miar jest równa 360° .



Kąt jest wypukły, gdy jego miara należy do zbioru $\langle 0^\circ; 180^\circ \rangle \cup \{360^\circ\}$.



ĆWICZENIE A Ile kątów wklęsłych można wskazać na rysunku obok?



Warto wiedzieć!

Figurę $\mathcal{F}$ nazywamy wklęsłą, gdy istnieje odcinek o końcach należących do figury $\mathcal{F}$, który nie zawiera się w tej figurze. Jeśli każdy z odcinków o końcach należących do figury $\mathcal{F}$ zawiera się w tej figurze, to tę figurę nazywamy wypukłą.

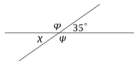
Przykłady figur wklęsłych



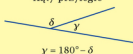
Przykłady figur wypukłych



ĆWICZENIE B Jakie miary mają kąty, które na rysunku obok zaznaczono literami φ , χ i ψ (czyt. fi, chi, psi)?

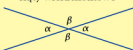


Kąty przyległe



Kąty, które mają wspólne ramię i tworzą razem kąt półpełny, nazywamy **kątami przyległymi**. Suma miar kątów przyległych jest równa 180° .

Kąty wierzchołkowe

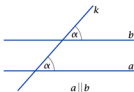


Gdy ramiona jednego kąta są przedłużeniami ramion drugiego kąta, to takie kąty mają równe miary i nazywamy je **kątami wierzchołkowymi**. Dwie przecinające się proste tworzą dwie pary kątów wierzchołkowych.

ĆWICZENIE C Narysuj dwie przecinające się proste i wskaż na tym rysunku dwie pary kątów wierzchołkowych oraz cztery pary kątów przyległych.

zadania 1-4 ►

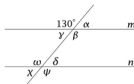
II



Prosta, która przecina dwie proste równoległe, jest nachylona do każdej z nich pod takim samym kątem.

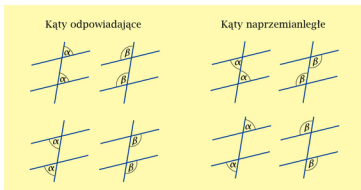
Jest też odwrotnie — jeśli jakaś prosta przecina dwie inne proste i każdą z nich pod tym samym kątem, to te proste muszą być równoległe.

ĆWICZENIE D Proste m i n na rysunku obok są równoległe. Jakie miary mają kąty oznaczone literami?



Jeżeli dwie proste są przecięte trzecią prostą, to możemy wskazać cztery pary kątów, które nazywamy odpowiadającymi, oraz cztery pary kątów nazywanych naprzemianległymi.

Na każdym z poniższych rysunków prosta przecina dwie proste równoległe, więc dwa zaznaczone kąty mają równe miary.

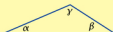


zadania 5–7 ►

- III Przypomniane dotąd wiadomości możemy wykorzystać do uzasadnienia twierdzenia o kątach trójkąta.

Twierdzenie

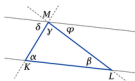
Suma miar kątów trójkąta jest równa 180° .



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Dowód

Niech α , β i γ oznaczają kąty trójkąta KLM . Pokażemy, że $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.



Przez wierzchołek M trójkąta KLM prowadzimy prostą równoległą do prostej KL . Oznaczmy przez δ i φ kąty, które razem z kątem γ tworzą kąt półpełny, czyli:

$$\delta + \varphi + \gamma = 180^\circ$$

Prosta KM przecina dwie proste równoległe, więc $\alpha = \delta$, bo są to kąty naprzemianległe. Podobnie $\beta = \varphi$.

Zatem: $\alpha + \beta + \gamma = \delta + \varphi + \gamma = 180^\circ$. $\square$

ĆWICZENIE E W trójkącie równoramiennym jeden z kątów ma 70° . Jakie miary mają pozostałe kąty tego trójkąta?

zadania 8–17 ►

IV



Ponieważ dowolny czworokąt można podzielić jedną z przekątnych na dwa trójkąty, więc suma miar kątów obu tych trójkątów to suma miar kątów czworokąta. Prawdziwe jest zatem następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Suma miar kątów czworokąta jest równa 360° .



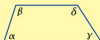
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

zadania 18–19 ►

- V Korzystając z własności kątów odpowiadających lub kątów naprzemianległych, można uzasadnić poniższe własności trapezu i równoległoboku.

Twierdzenie

W trapezie suma miar kątów leżących przy tym samym ramieniu jest równa 180° .



$$\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180^\circ$$

ĆWICZENIE F Zapisz dowód twierdzenia o kątach w trapezie, wzorując się na dowodzie twierdzenia o sumie miar kątów trójkąta. Skorzystaj z rysunku obok.

**Twierdzenie**

W równoległoboku przeciwległe kąty mają jednakowe miary, a suma miar kątów leżących przy tym samym boku jest równa 180° .



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

ĆWICZENIE G Proste a i b oraz m i n zawierają boki równoległoboku, czyli $a \parallel b$ i $m \parallel n$ (zob. rysunek obok). Wskaż kąty, które mają tę samą miarę jak kąt α , oraz kąty, które mają taką samą miarę jak kąt β . Korzystając z tego rysunku, udowodnij powyższe twierdzenie.

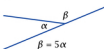


zadania 20–23 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Korzystając z informacji pod rysunkiem, oblicz miary kątów α i β .

a)



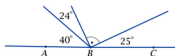
b)



c)



2. Punkty T, O, P na rysunku obok leżą na jednej prostej oraz $|\angle SOR| = 50^\circ$, $|\angle TOR| = 110^\circ$. Oblicz miarę kąta wklęsłego POS .



3. Popatrz na rysunek obok. Uzasadnij, że punkty A, B, C nie leżą na jednej prostej.

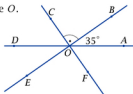
4. Na rysunku obok trzy proste przecinają się w punkcie O .

a) Podaj miary kątów wklęsłych:

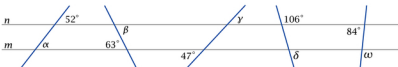
$$\angle DOB \quad \angle EOA \quad \angle COD \quad \angle EOF$$

b) Wskaż dwa kąty rozwarte, które są kątami wierzchołkowymi. Ile jest par takich kątów?

- c) Ile par kątów przyległych można wskazać na tym rysunku?



5. Proste m i n są równoległe. Jakie miary mają kąty oznaczone literami? $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega$?

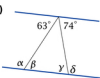


6. Proste zaznaczone kolorem niebieskim są równoległe. Oblicz miary kątów oznaczonych literami.

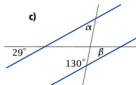
a)



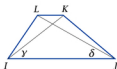
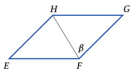
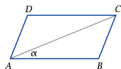
b)



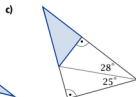
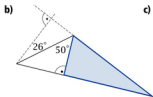
c)



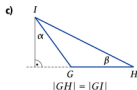
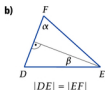
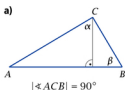
7. Poniższe rysunki przedstawiają dwa równoległoboki i trapez. Znajdź na tych rysunkach kąty, które mają takie same miary jak kąty α , β , γ i δ .



8. Jakie miary mają kąty trójkąta zaznaczonego kolorem niebieskim?



9. Jaki jest związek między kątami α i β ?



10. Oblicz miary kątów trójkąta prostokątnego, w którym:

- różnica miar kątów ostrych wynosi 20° ,
- jeden z kątów ma miarę trzykrotnie większą niż inny kąt tego trójkąta (rozpatrz dwa przypadki),
- suma miar pewnych dwóch kątów jest 11 razy większa od miary trzeciego kąta.

11. Stosunek miar kątów trójkąta jest równy $1:9:10$. Znajdź miary kątów tego trójkąta.

12. Kąty pewnego trójkąta mają miary $\alpha - 2^\circ$, $2\alpha - 16^\circ$ i $\frac{\alpha}{2} + 23^\circ$. Uzasadnij, że ten trójkąt jest równoramienny.

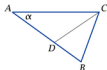
13. Oblicz miary kątów trójkąta równoramiennego, w którym:

- kąt przy podstawie ma miarę 7 razy mniejszą od miary kąta między ramionami,
- miara kąta między ramionami jest o 30° większa od miary kąta przy podstawie.

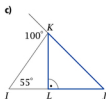
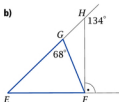
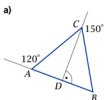


14. Promienie słoneczne padają pod kątem 50° do powierzchni ziemi. Pionowy patyk rzuca cień. Pod jakim kątem należy pochylić patyk w stronę cienia, aby patyk i jego cień miały tę samą długość?

15. Popatrz na rysunek obok. Odcinek CD dzieli trójkąt równoramienny ABC ($|AB| = |AC|$) na dwa trójkąty równoramienne ($|CD| = |AD| = |CB|$). Jaką miarę ma kąt α ?

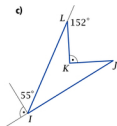
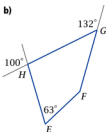
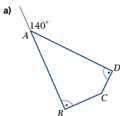


16. Uzasadnij, że trójkąt zaznaczony niebieskim kolorem jest równoramienny.



17. Punkty A , B i C są niewspółliniowe. Kąt przyległy do kąta ABC ma miarę dwa razy większą od miary kąta BAC . Uzasadnij, że trójkąt ABC jest trójkątem równoramiennym.

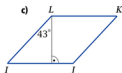
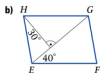
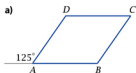
- IV 18. Jakie miary mają kąty narysowanego czworokąta?



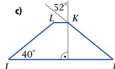
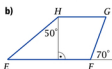
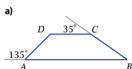
19. a) Kąty pewnego czworokąta mają miary α , 2α , $\alpha + 20^\circ$, $\alpha - 10^\circ$. Jaką miarę ma kąt α ? Jaką miarę ma największy, a jaką — najmniejszy kąt tego czworokąta?

- b) Zależności między kątami α , β , γ i δ pewnego czworokąta są następujące: $\beta = \alpha + 20^\circ$, $\gamma = 4\alpha + 30^\circ$ i $\delta = \gamma - 20^\circ$. Ile razy miara największego kąta jest większa od miary najmniejszego kąta w tym czworokącie?

20. Korzystając z informacji na rysunku, podaj miary kątów równoległoboku.



21. Korzystając z informacji na rysunku, podaj miary kątów trapezu.



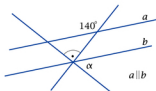
22. Jedną z przekątnych równoległoboku, który nie jest rombem, dzieli go na dwa trójkąty równoramienne. W każdym z tych trójkątów kąt między ramionami ma miarę 50° . Jakie miary mają kąty tego równoległoboku?

23. Naszkicuj romb i połącz odcinkami środki sąsiednich boków. Wykaż, że w otrzymanym czworokącie wszystkie kąty są proste (czworokąt jest prostokątem).

MINISPRAWDZIAN

51. Jaką miarę ma kąt α przedstawiony na rysunku obok?

- A. 30° B. 40° C. 50° D. 60°

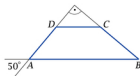


52. Jaką miarę ma kąt α przedstawiony na rysunku obok?

- A. 50° B. 95° C. 105° D. 145°

53. Największy kąt trapezu ABCD narysowanego obok ma miarę:

- A. 120° B. 130° C. 140° D. 150°



54. Na rysunku obok przedstawiono trapez. Jaką miarę ma kąt α ?

- A. $17,5^\circ$ B. 35° C. 70° D. 90°

PODSTAWOWE WŁASNOŚCI TRÓJKATÓW

- I ĆWICZENIE A a) W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 12$, $|BC| = 14$, $|AC| = 22$. Który kąt tego trójkąta jest największy?
b) W trójkącie KLM dane są $|\sphericalangle KLM| = 71^\circ$ i $|\sphericalangle LKM| = 66^\circ$. Który bok tego trójkąta jest najdłuższy?

W poprzednim rozdziale omówiliśmy twierdzenie o sumie miar kątów trójkąta. Warto też pamiętać, że w trójkącie najdłuższy bok leży naprzeciw kąta o największej mierze, a najkrótszy bok leży naprzeciw najmniejszego kąta.

zadania 1–2 ►

- II Teraz przypomnimy dwie ważne własności trójkątów.

ĆWICZENIE B Dwa boki trójkąta mają długości 5 cm i 2 cm. Czy trzeci bok trójkąta może mieć długość 7 cm? Czy może mieć długość 2 cm?

Nie zawsze z trzech wybranych odcinków można zbudować trójkąt. Warunek, jaki muszą spełniać boki trójkąta, jest opisany przez poniższe twierdzenie.

Twierdzenie (nierówność trójkąta)

Suma długości dowolnych dwóch boków trójkąta jest większa niż długość trzeciego boku.



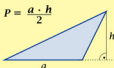
$$a + b > c \quad b + c > a \quad a + c > b$$

Uwaga. Jeśli dane są trzy odcinki o różnych długościach, to aby stwierdzić, czy można skonstruować z nich trójkąt, wystarczy sprawdzić, czy suma długości dwóch krótszych odcinków jest większa od długości trzeciego odcinka.

ĆWICZENIE C Dane są odcinki o długościach $a = 2$, $b = 5$, $c = 8$, $d = 9$. Wybierz takie trzy z nich, które mogą być bokami tego samego trójkąta.

zadania 3–7 ►

- III

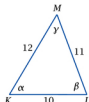
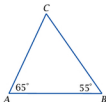


Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości boku i wysokości poprowadzonej do prostej zawierającej ten bok.

zadania 8–14 ►

ZESTAW ZADAŃ

- ◀ I 1. a) Który z boków trójkąta ABC jest najdłuższy, a który — najkrótszy?
 b) Który z kątów trójkąta KLM jest największy, a który — najmniejszy?



2. a) Boki trójkąta ABC mają długości: $|AB| = 17$, $|BC| = 12$, $|AC| = 15$. Który kąt tego trójkąta jest największy, a który — najmniejszy?
 b) W trójkącie ABC kąty mają miary: $|\sphericalangle BAC| = 50^\circ$, $|\sphericalangle CBA| = 85^\circ$. Który bok tego trójkąta jest najdłuższy, a który — najkrótszy?

- ◀ II 3. Sprawdź, czy trójkąt może mieć boki długości:

- a) 2 dm, 15 cm, 32 cm c) 6 , $3\sqrt{2}$, $7 - \sqrt{3}$
 b) 6 mm, 4 cm, 3 cm d) $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$

4. Dwa boki trójkąta równoramiennego mają długości a i b . Odpowiedz, jaką długość może mieć trzeci bok, jeśli:

- a) $a = 3$ cm, $b = 5$ cm c) $b = 2a$
 b) $a = 3$ km, $b = 7$ km d) $b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

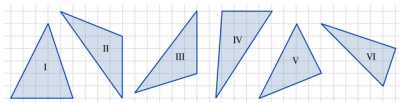
5. W pewnym czworokącie $ABCD$ boki mają długości: $|AB| = 9$ cm, $|BC| = 11$ cm, $|CD| = 15$ cm, $|AD| = 8$ cm. Czy przekątna AC może mieć długość 21 cm?

6. Ustal, czy w trójkącie stosunek długości boków może wynosić:

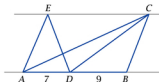
- a) 2 : 4 : 7 b) 3 : 6 : 8 c) 4 : 5 : 9

7. Czy kolejne boki czworokąta mogą mieć długości: 7 cm, 6 cm, 16 cm i 2 cm?

- ◀ III 8. Oblicz pola poniższych trójkątów. Przyjmij, że bok kratki ma długość 1.



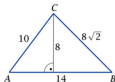
9. Na rysunku obok proste AB i EC są równoległe. Pole trójkąta ADE jest równe 35. Oblicz pola trójkątów ADC , DBC i ABC .



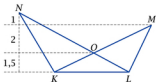
10. a) Boki pewnego trójkąta o polu równym 14 mają długości 5, 7 i $4\sqrt{2}$. Oblicz długość najkrótszej wysokości tego trójkąta.

b) Boki pewnego trójkąta prostokątnego mają długości 3, $3\sqrt{2}$ i $3\sqrt{3}$. Jakie pole ma ten trójkąt?

11. Popatrz na poniższy rysunek. W trójkącie ABC dane są długości boków oraz długość jednej wysokości. Oblicz pozostałe wysokości tego trójkąta.



12. Pole trójkąta KLN przedstawionego na rysunku poniżej jest równe 13,5. Oblicz pola trójkątów KLO i KLM . Jakie pole ma trójkąt OLM ?



13. W trójkącie ABC wybrano na boku BC taki punkt D , że $|BD| = 2|DC|$. Pole trójkąta ABD jest równe 18. Jakie pole ma trójkąt ABC ?

14. Wysokości pewnego trójkąta wynoszą 12, $11\frac{1}{2}$ i $12\frac{12}{13}$. Obwód tego trójkąta jest równy 42. Oblicz długości wszystkich jego boków.

MINISPRAWDZIAN

51. Jeden z boków trójkąta ma długość 8. Pozostałe dwa boki mogą mieć długości:

- A. 2 i 5 B. 2 i 10 C. 10 i 20 D. 20 i 22

52. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 4$ i $|BC| = 6$, a wysokość opuszczona na bok AB ma długość 5. Jaką długość ma wysokość tego trójkąta opuszczona na bok BC ?

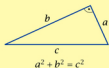
- A. 3 B. $3\frac{1}{3}$ C. $3\frac{2}{3}$ D. $6\frac{2}{3}$

53. Jeden z kątów trójkąta ma miarę 70° . Wskaż zdanie prawdziwe.

- A. Ten trójkąt nie może być rozwartokątny.
B. Naprzeciw tego kąta może leżeć najkrótszy bok.
C. Ten trójkąt nie może być równoramienny.
D. Naprzeciw tego kąta może leżeć najdłuższy bok.

TWIERDZENIE PITAGORASA I TWIERDZENIE ODWROTNE DO TWIERDZENIA PITAGORASA

I



Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

Dowód

Niech a i b oznaczają długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, zaś c niech oznacza długość przeciwprostokątnej. Wykorzystując własności pól figur, udowodnimy, że $a^2 + b^2 = c^2$.

Na przeciwprostokątnej c budujemy kwadrat (zob. pierwszy rysunek). Następnie do trzech boków kwadratu dokładamy trzy identyczne trójkąty prostokątne o bokach a , b i c (zob. drugi rysunek).

Ponieważ kąt kwadratu o boku c i sąsiadujące z nim dwa kąty ostre trójkątów tworzą kąt półpełny, więc otrzymana figura to czworokąt, a dokładniej — kwadrat o boku $a + b$.

Pole tego kwadratu wynosi: $P = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

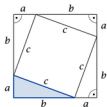
Ponieważ otrzymany kwadrat składa się z czterech trójkątów i kwadratu o boku c , więc jego pole można też obliczyć w następujący sposób:

$$P = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + c^2 = 2ab + c^2$$

Wobec tego możemy zapisać równość:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

Stąd: $a^2 + b^2 = c^2$ ☐



Z historii

Pitagoras z Samos (572–497 p.n.e.) żył w Grecji w czasach, gdy w Indiach nauczał Budda, a w Chinach Konfucjusz. Pitagoras był nie tylko matematykiem, ale także filozofem. Założona przez niego szkoła filozoficzna głosiła m.in. wiarę w reinkarnację. Pitagorejczycy wierzyli, że dusza człowieka może wcielić

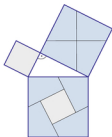
się nawet w roślinę. Prowadzili oni również działalność naukową. Nie wiadomo, czy twierdzenie Pitagorasa udowodnił po raz pierwszy sam Pitagoras, czy też któryś z jego uczniów. Jest natomiast pewne, że było ono znane wcześniej, gdyż znaleziono przykłady jego użycia już w egipskich papirusach.

Warto wiedzieć

Oto inne sformułowanie twierdzenia Pitagorasa:

W trójkącie prostokątnym suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych jest równa polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej.

Twierdzenie w tej wersji można udowodnić, dzieląc dwa mniejsze kwadraty na takie części, aby można było z nich złożyć większy kwadrat. Tego typu dowodów twierdzenia Pitagorasa jest wiele (kwadraty można dzielić na różne sposoby). Jeden z nich został przedstawiony na rysunku obok.



PRZYKŁAD Wielkość ekranu telewizora określamy, podając długość jego przekątnej (w calach). Jakie wymiary w centymetrach ma 24-calowy ekran, jeżeli stosunek jego szerokości do wysokości wynosi 4 : 3? (1 cal = 2,54 cm)



Wykonujemy rysunek pomocniczy; stosunek 4 : 3 oznacza, że jeśli dla pewnego x szerokość ekranu wynosi $4x$, to wysokość ekranu wynosi $3x$.

$$(4x)^2 + (3x)^2 = 24^2$$

$$16x^2 + 9x^2 = 24^2$$

$$25x^2 = 24^2$$

$$x^2 = \frac{24^2}{25}$$

$$x = \frac{24}{5}$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa (musimy pamiętać, że wynik otrzymamy w calach).

Litera x oznacza długość pewnego odcinka, czyli jest liczbą dodatnią, więc ujemnego rozwiązania równania kwadratowego ($-\frac{24}{5}$) nie bierzemy pod uwagę.

$$\text{Wysokość ekranu} = 3 \cdot \frac{24}{5} \text{ cali} = 3 \cdot \frac{24}{5} \cdot 2,54 \text{ cm} \approx 36,6 \text{ cm}$$

$$\text{Szerokość ekranu} = 4 \cdot \frac{24}{5} \cdot 2,54 \text{ cm} \approx 48,8 \text{ cm}$$

Odp. Ekran telewizora ma wymiary (w przybliżeniu) 48,8 cm $\times$ 36,6 cm.

ZADANIE Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest dwa razy dłuższa od drugiej. Przeciwprostokątna ma długość 10. Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.

zadania 1–8 ►

II

ĆWICZENIE A Trójkąt przedstawiony na rysunku obok jest równoboczny. Wysokość dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty prostokątne.

- Zapisz równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa dla jednego z tych trójkątów i wyznacz z niej h .
- Jakie pole ma trójkąt równoboczny o boku a ?



ĆWICZENIE B Trójkąt przedstawiony na rysunku obok jest prostokątny równoramienny. Zapisz równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa dla tego trójkąta i wyznacz b .



Wzory pozwalające obliczyć wysokość i pole trójkąta równobocznego oraz długość przekątnej kwadratu możesz zawsze łatwo otrzymać, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



$$d = a\sqrt{2}$$

ĆWICZENIE C Jedna z przekątnych rombu dzieli go na dwa trójkąty równoboczne. Jaki jest stosunek długości przekątnych tego rombu?

zadania 9–14 ►

III

ĆWICZENIE D Podane zdania to implikacja i implikacja do niej odwrotna. Które z tych zdań są prawdziwe?

- Jeśli jeden z kątów trójkąta jest prosty, to dwa kąty tego trójkąta są ostre. Jeśli dwa kąty trójkąta są ostre, to jeden z kątów tego trójkąta jest prosty.
- Jeśli trójkąt jest równoboczny, to każdy kąt tego trójkąta ma miarę 60° . Jeśli każdy kąt trójkąta ma miarę 60° , to ten trójkąt jest równoboczny.

Zauważmy, że twierdzenie Pitagorasa można sformułować w postaci następującej implikacji:

Jeśli
trójkąt jest prostokątny,
to
suma kwadratów długości dwóch krótszych boków
jest równa kwadratowi długości trzeciego boku.

Uzasadnimy teraz, że implikacja odwrotna także jest prawdziwa.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to ten trójkąt jest prostokątny.

Dowód

Założmy, że długości boków trójkąta wynoszą a , b i c oraz że $a^2 + b^2 = c^2$. Niech α będzie kątem między bokami a i b . Korzystając z metody nie wprost, udowodnimy, że $\alpha = 90^\circ$.

Przypuśćmy, że α nie jest kątem prostym. Może zatem być kątem ostrym lub rozwartym.

1. Założmy, że kąt α jest kątem ostrym i $a \geq b$. Wówczas mamy taką sytuację, jak na rysunku obok. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$h^2 = b^2 - x^2 \quad \text{oraz} \quad h^2 = c^2 - (a - x)^2$$

Stąd:

$$b^2 - x^2 = c^2 - a^2 + 2ax - x^2$$

Zatem:

$$a^2 + b^2 = c^2 + 2ax, \quad \text{gdzie } 2ax > 0$$

Wobec tego:

$$a^2 + b^2 > c^2$$

Otrzymana nierówność jest sprzeczna z założoną na początku równością: $a^2 + b^2 = c^2$. Zatem α nie może być kątem ostrym.

Zakładaliśmy, że $a \geq b$. Dla $b > a$ dowód przebiegałby analogicznie.

2. Przypuśćmy, że α jest kątem rozwartym. Sytuację tę zilustrowano na rysunku obok. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że:

$$h^2 = b^2 - x^2 \quad \text{oraz} \quad h^2 = c^2 - (x + a)^2$$

Stąd:

$$b^2 - x^2 = c^2 - x^2 - 2ax - a^2$$

Zatem:

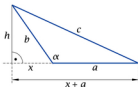
$$a^2 + b^2 = c^2 - 2ax, \quad \text{gdzie } 2ax > 0$$

Wobec tego:

$$a^2 + b^2 < c^2$$

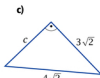
Ta nierówność jest sprzeczna z założeniem. Zatem α nie może być kątem rozwartym.

Ponieważ kąt α nie może być ani kątem ostrym, ani kątem rozwartym, musi więc być kątem prostym. $\square$

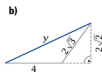


ZESTAW ZADAŃ

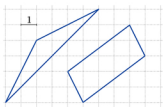
1. Oblicz długość boku oznaczonego literą.



2. Korzystając z informacji na rysunku, oblicz długość odcinka oznaczonego literą.



3. Korzystając z informacji na rysunku, ustal, która z figur ma większy obwód — trójkąt czy równoległobok. O ile większy?

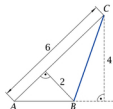


4. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają 5 cm i 10 cm. Jaką długość ma wysokość tego trójkąta poprowadzona z wierzchołka kąta prostego?

5. a) Oblicz pole trójkąta równoramiennego, w którym podstawa ma długość 6, a ramię ma długość 10.

- b) Wysokość trójkąta równoramiennego poprowadzona do podstawy ma długość 6. Jaki obwód ma ten trójkąt, jeśli jego pole jest równe 12?

6. Korzystając z danych na rysunku obok, oblicz długość odcinka BC .



7. W pewnym trójkącie równoramiennym ramię jest 3 razy dłuższe od podstawy. Oblicz stosunek wysokości opuszczonej na podstawę trójkąta do długości tej podstawy.

8. W trójkącie równoramiennym o obwodzie 18 wysokość opuszczona na podstawę jest o 1 dłuższa od długości tej podstawy. Oblicz pole tego trójkąta.

II 9. Zapisz wzór, który pozwala obliczać:

- długość boku a trójkąta równobocznego, gdy dane jest pole P tego trójkąta,
- obwód d trójkąta równobocznego, gdy dana jest wysokość h tego trójkąta,
- pole P trójkąta równobocznego, gdy dana jest wysokość h tego trójkąta,
- obwód d trójkąta równobocznego, gdy dane jest pole P tego trójkąta.

Warto zapamiętać!

Trójkąt prostokątny równoramienny to połowa kwadratu, a trójkąt prostokątny o kątach ostrych 30° i 60° to połowa trójkąta równobocznego.

Na rysunkach przedstawiono zależności między długościami boków w takich trójkątach.



10. a) Jeden z kątów trójkąta prostokątnego ma 45° , a długość jednego z boków jest równa 10. Oblicz pole i obwód tego trójkąta (rozpatrz dwa przypadki).

b) Jeden z kątów trójkąta prostokątnego ma 30° , a jeden z boków tego trójkąta ma długość 20. Jaki jest obwód tego trójkąta? (Rozpatrz wszystkie przypadki).

11. W okręgu o promieniu 8 poprowadzono cięciwę. Jaką długość ma ta cięciwa, jeśli jej odległość od środka okręgu jest równa 6?

12. a) Na 25-metrowym basenie pływackim tory są rozdzielone naprężoną liną. Na jaką wysokość nad powierzchnię wody można by unieść środek tej liny, gdyby jej długość zwiększyć o 1 m?



b) Wyobraź sobie, że o 1 m wydłużono linę rozdzielającą tory na basenie 50-metrowym. Jak myślisz, czy środek liny można unieść wyżej czy niżej niż w wypadku basenu 25-metrowego? Sprawdź swoją odpowiedź, wykonując obliczenia.



13. Czy przez drzwi o szerokości 70 cm i wysokości 2 m można przenieść lustro w kształcie koła o promieniu 106 cm? Odpowiedź uzasadnij.

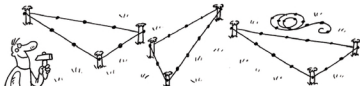
14. Czy przez okno w kształcie kwadratu o boku 95 cm można przenieść pudło w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $30 \text{ cm} \times 1 \text{ m} \times 1,5 \text{ m}$? Odpowiedź uzasadnij.



15. Sprawdź, czy trójkąt, którego boki mają podane długości, jest trójkątem prostokątnym.

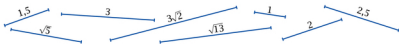
- a) 20, 26, 32 c) $3\sqrt{5}$, $6\sqrt{2}$, $3\sqrt{13}$ e) 3 dm, 3,6 dm, 20 cm
b) $3\sqrt{7}$, 12, 9 d) $2\sqrt{2}$, $3 + \sqrt{2}$, $\sqrt{3 + 6\sqrt{2}}$ f) 1,2 m, 5 dm, 130 cm

16. Na sznurkach zawiązano supełki w jednakowych odległościach, a sznurki rozpięto na kolkach. Przy którym kolku sznurek wyznaczył kąt prosty?

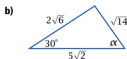


17. Czy równoległobok o bokach długości 6 i 9 oraz przekątnej długości 12 jest prostokątem? Odpowiedź uzasadnij.

18. Spośród odcinków przedstawionych na rysunku wybierz trzy, z których można zbudować trójkąt prostokątny. (Uwaga. Zadanie ma pięć rozwiązań).



19. Czy kąt α ma miarę 60° ?



20. Bok sześciokąta foremnego $ABCDEF$ ma długość 6.

- a) Oblicz długości przekątnych tego sześciokąta.
b) Wykaż, że trójkąt BCE jest prostokątny.



21. Trójkąt o bokach długości 3, 4 i 5 jest prostokątny. Czy istnieje inny trójkąt prostokątny, którego długości boków są kolejnymi liczbami naturalnymi?

Warto wiedzieć

Trzy liczby naturalne, które mogą być długościami boków trójkąta prostokątnego, nazywamy *trójką pitagorejską*. Oto przykłady takich trójek:

3, 4, 5; 5, 12, 13; 40, 198, 202.

Już 3,5 tys. lat temu Babilończycy znali wiele takich trójek. Okazuje się, że jest ich nieskończenie wiele.

Oto ogólna metoda znajdowania trójek pitagorejskich:

wyberamy dodatnie liczby naturalne p , q , takie że $p > q > 0$, i obliczamy a , b i c według wzorów:

$$a = p^2 - q^2 \quad b = 2pq \quad c = p^2 + q^2$$

Tak otrzymane liczby spełniają warunek:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

- 22. a)** Znajdź kilka trójek pitagorejskich, korzystając z metody opisanej wyżej.
b) Uzasadnij, że liczby a , b i c obliczone ze wzorów podanych w ciekawostce spełniają warunek $a^2 + b^2 = c^2$.
c) Znajdź trójkę pitagorejską, w której największą liczbą jest 20.
d) Znajdź trójkę pitagorejską, w której największą liczbą jest 34.

MINISPRAWDZIAN

51. Dwa boki trójkąta mają długości 7 i 24. Które z podanych zdań jest fałszywe?

- A. Gdy trzeci bok ma długość 25, to trójkąt jest prostokątny.
 B. Gdy trzeci bok ma długość $\sqrt{526}$, to trójkąt jest prostokątny.
 C. Długość trzeciego boku nie może być równa 16.
 D. Długość trzeciego boku może być równa 28.

52. O ile procent wysokość trójkąta równobocznego jest krótsza od jego boku?

- A. o mniej niż 15% B. o więcej niż 33% C. o 15% D. o 33%

53. Najdłuższy bok trójkąta prostokątnego ma długość 6, a najkrótszy ma długość 2. Oblicz wysokość tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego.

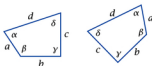
- A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ B. $4\sqrt{2}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{2\sqrt{10}}{3}$

54. Rysunki przedstawiają cztery maszty o wysokości 12 m, podtrzymywane przez napięte liny. Jeden z nich nie jest ustawiony pionowo. Który?



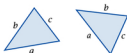
WŁASNOŚCI TRÓJKĄTÓW (CD.)

- I O dwóch wielokątach mówimy, że są przystające, jeśli kolejne boki jednego wielokąta mają takie same długości jak odpowiednie kolejne boki drugiego wielokąta i kąty między odpowiadającymi sobie bokami mają równe miary.



Aby stwierdzić, czy dwa trójkąty są przystające, nie trzeba sprawdzać, czy wszystkie odpowiednie boki mają równe długości i czy wszystkie odpowiednie kąty mają równe miary. Można bowiem skorzystać z cech przystawania trójkątów, które przypominamy poniżej.

CECHY PRZYSTAWANIA TRÓJKĄTÓW



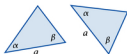
Cecha bbb

Jeśli boki jednego trójkąta mają takie same długości jak odpowiednie boki drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



Cecha kkb

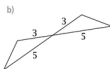
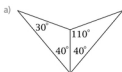
Jeśli dwa boki jednego trójkąta mają takie same długości jak odpowiednie boki drugiego trójkąta i kąty między tymi bokami są równe, to trójkąty są przystające.



Cecha kbk

Jeśli bok jednego trójkąta ma taką samą długość jak bok drugiego trójkąta, a kąty jednego trójkąta przy tym boku są równe odpowiednim kątom drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.

ĆWICZENIE A Z której cechy przystawania trójkątów wynika, że narysowane trójkąty są przystające?



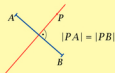
zadania 1-12

- II Korzystając z cech przystawania trójkątów, można udowodnić niektóre własności geometryczne.

Przypomnijmy, że **symetralna odcinka** to prosta do niego prostopadła i przechodząca przez jego środek.

Twierdzenie

Punkt należy do symetralnej odcinka wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednakowo oddalony od jego końców.



Dowód

Pokażemy, że jeśli punkt P leży na symetralnej odcinka AB , to $|PA| = |PB|$.



Niech S będzie środkiem odcinka AB i $P \neq S$. Trójkąty ASP i BSP mają wspólny bok SP . Ponadto $|AS| = |SB|$ i kąt o wierzchołku S w obu trójkątach jest prosty. Zatem z cechy *bkb* wynika, że trójkąty te są przystające. Wobec tego $|PA| = |PB|$.

Gdy $P = S$, to oczywiście także $|PA| = |PB|$.

Pokażemy, że jeśli punkt K leży w jednakowej odległości od końców odcinka AB , to leży on na symetralnej tego odcinka.



Niech S będzie środkiem odcinka AB i $K \neq S$. Trójkąty ASK i BSK mają odpowiednie boki tej samej długości, więc z cechy *bbb* wynika, że trójkąty te są przystające. Wobec tego $\sphericalangle ASK = \sphericalangle BSK$, a ponieważ są to kąty przyległe, więc oba są kątami prostymi. Wynika stąd, że prosta KS jest symetralną odcinka AB .

Gdy $K = S$, to oczywiście K leży na symetralnej odcinka AB . $\square$

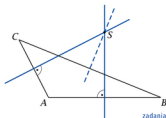
Twierdzenie

W każdym trójkącie symetralne boków przecinają się w jednym punkcie.

Dowód

Niech S będzie punktem przecięcia symetralnych boków AB i AC w trójkącie ABC . Z własności symetralnej wynika, że $|SA| = |SB|$ oraz $|SA| = |SC|$.

Stąd $|SB| = |SC|$, a to oznacza, że punkt S leży także na symetralnej boku BC . $\square$

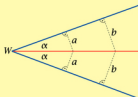


zadania 13–15

- III Przypomnijmy, że **dwusieczna kąta** to półprosta, która dzieli ten kąt na dwa kąty o równych miarach.

Twierdzenie

*Punkt należący do kąta wypukłego
leży na jego dwusiecznej
wtedy i tylko wtedy,
gdy jest jednakowo odległy
od obu ramion kąta.*



Będziemy korzystać z tego twierdzenia tylko dla kątów ostrych, prostych lub rozwartych, więc dowód przeprowadzimy dla takich kątów.

Dowód

Pokażemy, że jeśli punkt P leży na dwusiecznej kąta o wierzchołku W (ostry, prostego lub rozwartego), to odległości punktu P od ramion kąta są równe.



Niech $P \neq W$ i $PA \perp WA$ oraz $PB \perp WB$. Trójkąty WPA i WPB są prostokątne i mają wspólny bok WP . Ponadto kąty leżące przy tym boku są w obu trójkątach takie same. Zatem z cechy *kbk* wynika, że trójkąty te są przystające. Wobec tego $|PA| = |PB|$.

Gdy $P = W$, to oczywiście odległości punktu P od obu ramion kąta są jednakowe (równe 0).

Pokażemy, że jeśli K jest takim punktem kąta (ostry, prostego lub rozwartego) o wierzchołku W , który leży w równych odległościach od ramion kąta, to punkt ten leży na dwusiecznej tego kąta.



Niech $K \neq W$ i $KR \perp WR$, $KT \perp WT$ oraz $|KR| = |KT|$. Trójkąty WTK i WRK mają po dwa odpowiednie boki tej samej długości. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $|WR| = |WT|$. Z cechy *bbb* wynika, że te trójkąty są przystające. Wobec tego $|\angle TWK| = |\angle KWR|$, czyli punkt K leży na dwusiecznej kąta TWR .

Gdy $K = W$, to oczywiście punkt K leży na dwusiecznej kąta. $\square$

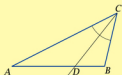
Twierdzenie

*W każdym trójkącie dwusieczne kątów przecinają się
w jednym punkcie.*

ĆWICZENIE B Udowodnij powyższe twierdzenie, wzorując się na dowodzie twierdzenia o punkcie przecięcia symetralnych boków trójkąta.

Twierdzenie o dwusiecznej

Jeżeli w trójkącie ABC dwusieczna kąta o wierzchołku C przecina bok AB w punkcie D , to stosunek $|AD| : |BD|$ jest równy stosunkowi $|AC| : |BC|$.



$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

Dowód

Niech w trójkącie ABC dwusieczna kąta o wierzchołku C przecina bok AB w punkcie D . Punkt ten leży na dwusiecznej kąta ACB , więc jego odległości od ramion AC i BC są równe (zob. twierdzenie podane u góry poprzedniej strony). Na rysunku odległości te oznaczono literą a .

Pole trójkąta ADC można zapisać na dwa sposoby, więc otrzymujemy równość:

$$\frac{|AD| \cdot h}{2} = \frac{|AC| \cdot a}{2}$$

Stąd:

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{a}{h}$$

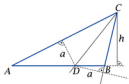
Dla trójkąta BDC otrzymujemy:

$$\frac{|BD| \cdot h}{2} = \frac{|BC| \cdot a}{2}$$

Stąd:

$$\frac{|BD|}{|BC|} = \frac{a}{h}$$

Wobec tego: $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|BC|}$. $\square$



zadania 16–20 ►

- IV Odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku nazywamy **środkową trójkąta**.

ĆWICZENIE C Narysuj dwa dowolne trójkąty nierównoramienne.

- W pierwszym trójkącie narysuj proste zawierające wysokości trójkąta.
- W drugim trójkącie narysuj wszystkie środkowe trójkąta.

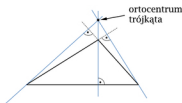
Jeśli twoje rysunki z ćwiczenia C były wykonane dokładnie, to na każdym z nich dorysowane linie powinny się przeciąć w jednym punkcie. Prawdziwe jest bowiem następujące twierdzenie:

Twierdzenie

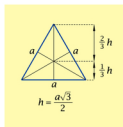
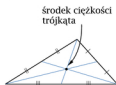
W każdym trójkącie:

- proste zawierające wysokości przecinają się w jednym punkcie,
- środkowe przecinają się w jednym punkcie i punkt ten dzieli każdą środkową w stosunku 2 : 1.

Punkt przecięcia prostych zawierających wysokości trójkąta nazywamy **ortocentrum**.



Punkt przecięcia środkowych trójkąta nazywamy **środkiem ciężkości** trójkąta.



Zauważmy, że w trójkącie równobocznym ortocentrum, środek ciężkości, punkt przecięcia symetrycznych boków i dwusiecznych kątów to ten sam punkt, który dzieli każdą wysokość w stosunku 1 : 2.

Uwaga. Jeśli trójkąt nie jest równoboczny, to ortocentrum, środek ciężkości, punkt przecięcia symetrycznych boków i punkt przecięcia dwusiecznych kątów są czterema różnymi punktami.

ĆWICZENIE D Wykonaj kolejno czynności:

1. Narysuj na kartonie dowolny trójkąt (raczej duży) i wytnij go. Powieś ten trójkąt na haczyku (miejsce zaczepienia wybierz w pewnej odległości od wierzchołków). Na tym samym haczyku powieś obciążoną nitkę. Zaznacz na trójkącie linię wzdłuż nitki.
2. Wybierz inny punkt do zawieszenia trójkąta i wykonaj te same czynności.
3. Znajdź punkt przecięcia narysowanych linii. Sprawdź (rysując środkowe), że ten punkt to środek ciężkości trójkąta.

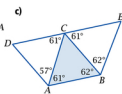
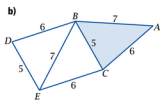
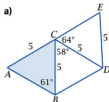


Warto wiedzieć

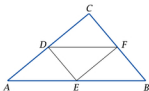
Pojęcie środka ciężkości powinno być ci znane z lekcji fizyki. Na każdy punkt ciała fizycznego działa siła grawitacji. Wypadkowa tych sił przyłożona jest w punkcie zwanym **środkiem ciężkości**. Gdybyśmy zatem wycięli z kartonu trójkąt, wyznaczyli jego środek ciężkości i przeciągnęli przez ten punkt nitkę, to po zawieszeniu na niej trójkąta powinien on zawisnąć poziomo i pozostawać w równowadze.

ZESTAW ZADAŃ

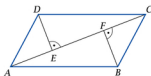
1. Korzystając z informacji podanych na rysunku, znajdź trójkąt przystający do zacieniowanego trójkąta.



2. W trójkącie ABC przedstawionym na rysunku poniżej punkty D, E, F są środkami boków. Boki trójkąta DEF są równoległe do odpowiednich boków trójkąta ABC . Uzasadnij, że trójkąty AED, EBF, DEF i DFC są przystające.



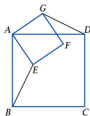
3. Czworokąt $ABCD$ przedstawiony na poniższym rysunku jest równoległobokiem. Wykaż, że trójkąt ABF jest przystający do trójkąta CDE oraz że trójkąt AED jest przystający do trójkąta CFB .



4. Dwa kwadraty są położone tak, jak na rysunku poniżej. Wykaż, że kąt α jest prosty.



5. Dwa kwadraty są położone tak, jak na rysunku. Uzasadnij, że $|BE| = |GD|$.



6. Każdy trapez można podzielić na prostokąt i dwa trójkąty prostokątne. Korzystając z cech przystawania trójkątów, uzasadnij własność trapezu równoramiennego opisaną w ramce obok.

W trapezie równoramiennym, który nie jest równoległobokiem, kąty przy tej samej podstawie mają równe miary.



7. Trójkąt ABC przedstawiony na rysunku obok jest równoboczny. Punkty K, L i M leżą na prostych zawierających boki tego trójkąta, a odcinki AK, BL i CM mają równe długości. Wykaż, że trójkąt KLM jest równoboczny.



8. Udowodnij, że w trójkącie równoramiennym:

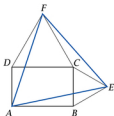
- a) środkowe poprowadzone do ramion tego trójkąta mają równe długości,
- b) wysokości poprowadzone do ramion trójkąta mają równe długości.

9. Udowodnij, że trójkąt, którego wierzchołkami są środki boków trójkąta równoramiennego, też jest równoramienny.

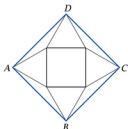
10. Trójkąt ABC przedstawiony na rysunku obok jest równoramienny. Na podstawie AB wybrano dwa punkty D, E , takie że $|AD| = |EB|$. Wykaż, że trójkąt DEC jest równoramienny.



11. Na nierównoległych bokach DC i BC prostokąta $ABCD$ zbudowano trójkąty równoboczne DCF i BCE (zob. rysunek poniżej). Wykaż, że trójkąt AEF jest równoboczny.



12. Na każdym z boków kwadratu zbudowano trójkąty równoboczne tak, jak pokazano na poniższym rysunku. Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.

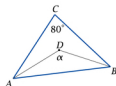


13. W trójkącie ABC dwa boki mają długości $|AB| = 12$ i $|BC| = 16$. Symetralne tych boków przecinają się w punkcie S . Przekątna SB czworokąta $ABCS$ ma długość 10. Oblicz pole tego czworokąta.

14. Boki trójkąta ostrokątnego mają długości a, b i c . Symetralne boków przecinają się w punkcie, którego odległość od wierzchołków trójkąta jest równa d . Jakie są odległości tego punktu od poszczególnych boków trójkąta?

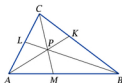
- **15.** W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 4, a punkt przecięcia symetralnych boków leży w odległości 3 od podstawy. Jakiej długości są ramiona tego trójkąta?

- ◀ **16.** Punkt D (zob. rysunek obok) jest punktem przecięcia dwusiecznych dwóch kątów trójkąta ABC . Oblicz miarę kąta α .



- 17.** Dwusieczne AM i BN kątów ostrych trójkąta prostokątnego ABC przecinają się w punkcie P . Punkty M i N leżą na bokach trójkąta. Uzasadnij, że największy kąt czworokąta $CNPM$ ma miarę 135° .

- 18.** W trójkącie ABC kąt ABC ma miarę 40° , a kąt BCA — miarę 80° . Dwusieczne kątów tego trójkąta przecinają boki w punktach K, L, M , a ich punktem wspólnym jest punkt P , jak na rysunku. Znajdź miary kątów trójkąta:



- a) AMP b) CLP c) BKP

- 19.** W trójkącie prostokątnym o bokach długości 3, 4, 5 poprowadzono dwusieczną większego z kątów ostrych, która podzieliła trójkąt na dwa trójkąty. Jakie pole ma większy z tych trójkątów?
- **20.** W trójkącie ABC dwusieczne kątów o wierzchołkach A i C przecinają boki trójkąta odpowiednio w punktach E i D oraz przecinają się w punkcie F . Wykaż, że:

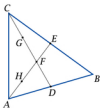
a) $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|DF|}{|CF|}$ b) $\frac{|AF| \cdot |DF|}{|FE| \cdot |CF|} = \frac{|AD|}{|CE|}$ c) $\frac{|DF|}{|CF|} + \frac{|BD|}{|AC|} = \frac{|BE|}{|CE|}$

- ◀ **IV 21.** Wysokości trójkąta równobocznego ABC przecinają się w punkcie D .

- a) Oblicz długość odcinka AD , jeśli wiadomo, że $|AB| = 5$.
 b) Jaka jest odległość punktu D od prostej BC , jeśli $|BC| = 10$?
 c) Jaka jest odległość punktu D od boku AB , jeśli $|DC| = 12$?
 d) Jakie pole ma trójkąt BCD , jeśli $|AD| = 20$?

- 22.** W trójkącie prostokątnym o bokach długości 6, 8, 10 z wierzchołka kąta prostego poprowadzono środkową i dwusieczną tego kąta. Podzieliły one przeciwprostokątną trójkąta na trzy odcinki. Jakie długości mają te odcinki?

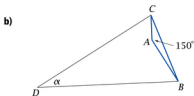
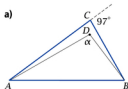
- 23.** W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 6, a długość ramion jest równa 9. Jaka jest odległość środka ciężkości tego trójkąta od jego podstawy?



24. Uzasadnij, że środkowe trójkąta dzielą go na sześć trójkątów o równych polach.

25. Odcinki AE i CD (zob. rysunek obok) są środkowymi trójkąta ABC . Punkt F jest środkiem ciężkości tego trójkąta, a punkty G i H są środkami odcinków CF i AF . Wykaż, że $|GE| = |DH|$.

26. Punkt D (zob. rysunek) jest ortocentrum trójkąta ABC . Oblicz miarę kąta α .

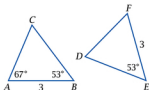


27. W trójkącie równoramiennym ABC środkowe AM i BN poprowadzone do ramion przecinają się w punkcie P . Obwód czworokąta $MCNP$ jest równy 10, a obwód trójkąta BCP jest równy 13. Oblicz wysokość trójkąta ABC opuszczoną na podstawę.

MINISPRAWDZIAN

51. Trójkąty przedstawione na rysunku obok są przystające. Wobec tego:

- kąt przy wierzchołku D ma miarę 60°
- kąt przy wierzchołku D ma miarę 67°
- kąt przy wierzchołku F ma miarę 60°
- kąt przy wierzchołku F ma miarę 53°



52. Które z poniższych zdań jest fałszywe?

- Ortocentrum trójkąta prostokątnego jest wierzchołkiem tego trójkąta.
- Dwusieczne kątów ostrych trójkąta prostokątnego przecinają się pod kątem 45° .
- Odległość środka ciężkości trójkąta prostokątnego od wierzchołka kąta prostego jest zawsze dwa razy większa od jego odległości od przeciwprostokątnej.
- Odległości punktu przecięcia symetralnych boków trójkąta prostokątnego od wierzchołków tego trójkąta są jednakowe.

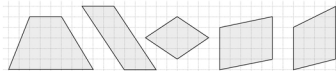
53. Odległość środka ciężkości pewnego trójkąta równobocznego od jego boków wynosi 4. Obwód tego trójkąta jest równy:

- $12\sqrt{3}$
- $18\sqrt{3}$
- $24\sqrt{3}$
- $36\sqrt{3}$

WŁASNOŚCI CZWOROKATÓW

- 1 Własności kątów w niektórych czworokątach omawialiśmy już wcześniej (patrz str. 48). Teraz przypomnijmy inne własności czworokątów.

ĆWICZENIE A Przyjmijmy, że bok kratki ma długość 1. Oblicz pola poniższych figur.

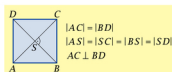
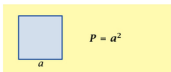


ĆWICZENIE B Naskicuj kwadrat, prostokąt (który nie jest kwadratem), romb (który nie jest kwadratem) i równoległobok (który nie jest rombem ani prostokątem). Zaznacz przekątne tych czworokątów. Zastanów się, co można powiedzieć o przekątnych każdej z narysowanych figur.

Kwadrat to czworokąt, którego wszystkie kąty są proste i wszystkie boki mają jednakowe długości.

Pole kwadratu jest równe kwadratowi długości jego boku.

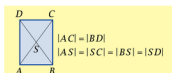
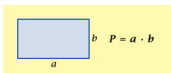
Przekątne kwadratu mają równe długości, przecinają się w połowie i są prostopadłe.



Prostokąt to czworokąt, którego wszystkie kąty są proste.

Pole prostokąta jest równe iloczynowi długości dwóch sąsiednich jego boków.

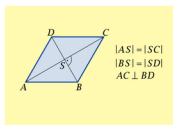
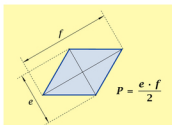
Przekątne prostokąta mają równe długości i przecinają się w połowie.



Romb to czworokąt, którego wszystkie boki mają jednakowe długości.

Pole rombu jest równe połowie iloczynu długości jego przekątnych.

Przekątne rombu przecinają się w połowie i są prostopadłe. Przekątna rombu dzieli kąt rombu na dwie równe części.

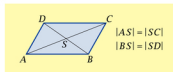
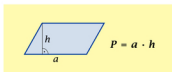


Uwaga. Kwadrat jest rombem, więc jego pole można też obliczyć, korzystając ze wzoru na pole rombu.

Równoległobok to czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

Pole równoległoboku jest równe iloczynowi długości jego boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

Przekątne równoległoboku przecinają się w połowie.

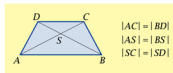
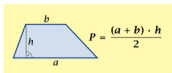


Uwaga. Romb jest równoległobkiem, więc jego pole możemy także obliczać, korzystając ze wzoru na pole równoległoboku.

Trapez to czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

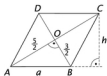
Pole trapezu jest równe połowie iloczynu sumy długości jego podstaw i wysokości.

W trapezie równoramiennym, który nie jest równoległobkiem, przekątne mają równe długości.



PRZYKŁAD

Przekątne rombu mają długości 3 i 5. Jaką wysokość ma ten romb?



Wykonujemy rysunek pomocniczy. Z własności rombu wynika, że trójkąt ABO jest prostokątny i jego przyprostokątne mają długości $\frac{3}{2}$ i $\frac{5}{2}$ (każda z nich to połowa odpowiedniej przekątnej rombu).

$$a^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Obliczamy długość boku rombu, korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABO .

$$a^2 = \frac{34}{4}$$

$$a = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

Ujemnego rozwiązania równania kwadratowego możemy nie brać pod uwagę, gdyż a to długość boku.

$$\frac{3 \cdot 5}{2} = a \cdot h$$

Przedstawiamy pole rombu na dwa sposoby i zapisujemy odpowiednią równość.

$$\frac{15}{2} = \frac{\sqrt{34}}{2} \cdot h$$

$$h = \frac{15}{\sqrt{34}} = \frac{15\sqrt{34}}{34}$$

Odp. Wysokość rombu wynosi $\frac{15\sqrt{34}}{34}$, czyli około 2,6.

ZADANIE Pole rombu wynosi 32, a jedna z przekątnych ma długość 4. Oblicz wysokość tego rombu.

zadania 1–17 ►

- II Przypomniane powyżej własności przekątnych kwadratu, prostokąta, rombu i równoległoboku można sformułować za pomocą równoważności. Oto przykład takiej równoważności:

Twierdzenie

Czworokąt jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy jego przekątne przecinają się w połowie.

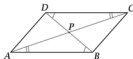
Dowód

Pokażemy, że jeśli czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, to jego przekątne przecinają się w połowie.

Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$. Z cechy kbk wynika, że trójkąty ABP i CDP są przystające, bo $|AB| = |CD|$ i odpowiednie kąty tych trójkątów są równe.

Stąd: $|AP| = |PC|$ i $|BP| = |PD|$.

Zatem punkt P jest środkiem przekątnej AC i środkiem przekątnej BD .



Pokażemy teraz, że jeśli $KLMN$ jest czworokątem, którego przekątne przecinają się w połowie, to jest równoległobokiem.

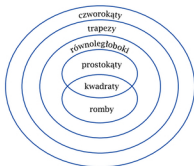
Niech S będzie punktem przecięcia przekątnych czworokąta $KLMN$. Trójkąty KLS i MNS są przystające (cecha bkb). Wobec tego: $|\angle KLS| = |\angle SNM|$. Zatem $KL \parallel MN$.

Analogicznie można pokazać, że $KN \parallel ML$.

Wynika stąd, że czworokąt $KLMN$ ma dwie pary boków równoległych, jest więc równoległobokiem. $\square$



ĆWICZENIE C Narysuj dwa odcinki o różnych długościach, ale przecinające się w połowie. Utwórz czworokąt, którego przekątnymi są te odcinki. Z której spośród dowodzonych powyżej implikacji wynika, jaki to czworokąt?



Wiadomo, że każdy równoległobok jest trapezem, każdy prostokąt — równoległobokiem itp.

ĆWICZENIE D Korzystając ze wzoru na pole trapezu, oblicz pole:

- kwadratu o boku długości a ,
- prostokąta o bokach długości a i b ,
- równoległoboku o boku a i wysokości h poprowadzonej do tego boku.

zadania 18–19

ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz pola figur przedstawionych na rysunkach.

a)



równoległobok



trapez



romb



prostokąt

b)



równoległobok



trapez

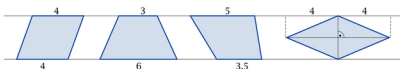


kwadrat



równoległobok

2. Proste przedstawione na poniższym rysunku są równoległe. Która z figur ma największe pole? Które figury mają równe pola?



3. Zapisz wzór pozwalający obliczać:

- pole kwadratu o danej przekątnej d ,
- obwód kwadratu o danym polu P ,
- pole rombu o obwodzie b i wysokości h ,
- obwód rombu o danych przekątnych e i f ,
- pole trapezu równoramiennego o danych podstawach a , b ($a > b$) i ramieniu r ,
- obwód trapezu równoramiennego o podstawach a i b ($a > b$) oraz polu P .

4. Oblicz pole prostokąta o obwodzie 27, w którym stosunek długości boków jest równy 4:5.

5. Jakie pole ma kwadrat, którego przekątna jest o 5 dłuższa od boku?

6. W rombie o obwodzie 20 jedna z przekątnych jest dwa razy krótsza od drugiej. Jakie pole ma ten romb?

7. Pole pewnego równoległoboku wynosi 36. Jeden z jego boków jest 3 razy krótszy od wysokości opuszczonej na ten bok. Oblicz długość tego boku.

8. W trapezie prostokątnym o polu 12 krótsza podstawa i wysokość mają równe długości. Różnica długości podstaw wynosi 2. Oblicz obwód tego trapezu.

9. Jedna z przekątnych rombu jest o 6 cm dłuższa od drugiej. Pole tego rombu jest równe 56 cm^2 . Oblicz obwód tego rombu.

10. Pole trapezu prostokątnego wynosi 40 cm^2 . Bok prostopadły do obu podstaw jest krótszy od jednej z nich o 2 cm, a od drugiej o 4 cm. Oblicz obwód tego trapezu.

- Jakie pole ma romb, w którym jeden z kątów ma 45° , a bok ma długość a ?
 - Jakie pole ma trapez równoramienny, w którym jeden z kątów ma 60° , krótsza podstawa ma długość a , a ramię ma długość $2a$?
 - Jaki obwód ma równoległobok o wysokościach a i b , którego jeden z kątów ma miarę 30° ?

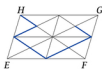
12. Poniżej przedstawiono cztery kwadraty — każdy o boku 10. Zaznaczono w nich dwa kwadraty, romb i trójkąt równoboczny. Oblicz długości boków tych figur.



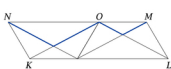
13. Poniżej przedstawiono prostokąt, równoległobok i figurę złożoną z dwóch jednakowych trapezów równoramiennych. Korzystając z informacji podanych pod rysunkami, oblicz długości zaznaczonych łamanych.



$$|AB| = 7 \quad |BC| = 4$$



$$|EG| = 9 \quad |FH| = 7$$



$$|KO| = 7$$

14. Przeczytaj ciekawostkę.

a) Jaki jest stosunek długości kartki formatu A do jej szerokości?

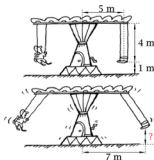
b) Kartkę formatu A podzielono na trójkąt prostokątny równoramienny i trapez. Ile razy pole trapezu jest większe od pola trójkąta?

Ciekawostka

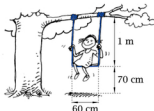


Kartki formatu A (np. A4 — używana do drukarek, A5 — kartka z zeszytu) mają następującą własność: jeśli poprowadzimy z wierzchołka linię pod kątem 45° (zob. rysunek), to linia ta ma taką samą długość jak dłuższy bok kartki.

15. Na rysunkach przedstawiono karuzelę w spoczynku i w ruchu. Jak wysoko nad ziemią znajduje się krzeselko, gdy karuzela się kręci?



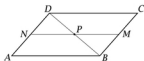
16. Popatrz na rysunek. Do gałęzi przywiązano linę i zamocowano na niej deskę o długości 60 cm. Huśtawka wisi 70 cm nad ziemią. Gdy zamiast tej deski włożono deskę krótszą, huśtawka zawisała 60 cm nad ziemią. Oblicz długość krótszej deski.



17. Przyjmij, że na papierze w kratkę długość boku kratki jest równa 1. Narysuj na takim papierze opisaną figurę.

- a) romb, którego przekątne mają długości 6 i 8,
- b) kwadrat o przekątnej 10,
- c) kwadrat o boku $\sqrt{17}$,
- d) równoległobok o bokach $\sqrt{3}$ i $\sqrt{17}$.

- 18.** Odcinek MN łączy środki przeciwnych boków równoległoboku $ABCD$. Wykaż, że odcinek MN i przekątna BD przecinają się w połowach swoich długości.



19. Ustal, czy zdanie jest prawdziwe. Jeśli tak, to je uzasadnij, a jeśli nie — podaj kontrprzykład.

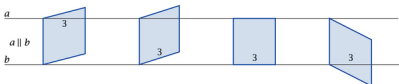
- a) Wszystkie trapezy są równoległobokami.
- b) Każdy prostokąt jest równoległobokiem.
- c) Każdy kwadrat jest rombem.
- d) Jeśli przekątne czworokąta są prostopadłe, to czworokąt jest rombem.

MINISPROWDZIAN

S1. Pole kwadratu o przekątnej 6 jest równe:

- A. 36
- B. 18
- C. $6\sqrt{2}$
- D. $\frac{6}{\sqrt{2}}$

S2. Zacieniowane na rysunku figury to równoległoboki. Dwa boki każdego z równoległoboków są prostopadłe do prostych a i b . Który z równoległoboków ma najmniejsze pole?



- A. pierwszy
- B. drugi
- C. trzeci
- D. czwarty

S3. Który wzór pozwala obliczać pole prostokąta o danym boku a i przekątnej d ?

- A. $P = a \cdot d$
- B. $P = a(d - a)$
- C. $P = \frac{a \cdot d}{2}$
- D. $P = a \cdot \sqrt{d^2 - a^2}$

POWTÓRZENIE

1. Oblicz, jakie są miary kątów trójkąta przedstawionego na rysunku.



2. Na rysunku przedstawiono równoległobok. Jaką miarę ma kąt γ ?



3. W trójkącie, którego obwód jest równy 7, długość każdego boku jest liczbą naturalną. Jakie długości mogą mieć boki takiego trójkąta? Podaj wszystkie możliwości.

4. Na rysunku przedstawiono kwadrat zbudowany z dziewięciu mniejszych kwadratów. Jaką część pola tego kwadratu stanowi pole zaznaczonego trójkąta?



5. Jakie pole ma trójkąt o bokach 6, 5 i 5? Jakie długości mają wysokości tego trójkąta?

6. Jaki obwód ma trójkąt prostokątny równoramienny o polu równym 7?

7. Jakie pole ma trójkąt równoboczny o wysokości $6\sqrt{3}$?

8. Sprawdź, czy trójkąt o bokach długości 5, 15, $5\sqrt{10}$ jest prostokątny. Jakie długości mają wysokości tego trójkąta?

9. Odcinek CD jest środkową trójkąta ABC (zob. rysunek). Udowodnij, że odległości punktów A i B od prostej CD są równe.



10. Trójkąty ABC i BDE przedstawione na poniższym rysunku są równoboczne. Udowodnij, że $|AE| = |CD|$.



11. Bok rombu ma długość 8, a jedna z jego przekątnych ma długość $8\sqrt{3}$. Oblicz pole tego rombu.

12. Wysokość trapezu równoramiennego jest równa 4, a jego ramię ma długość 7. Obwód tego trapezu jest równy 30. Oblicz pole tego trapezu.

13. Dwuścienne kątów trapezu $ABCD$ leżących przy ramieniu AD przecinają się w punkcie P . Uzasadnij, że trójkąt ADP jest prostokątny.

Funkcje

Dźwięk to zjawisko fizyczne wywoływane przez drgania. Wielkość tego zjawiska można więc mierzyć jako energię tych drgań. Okazuje się jednak, że dźwięk, który ma dwa razy większą energię, nie jest odbierany przez ludzi jako dwa razy głośniejszy. Gdy zależy nam na porównaniu poziomów głośności dźwięku zgodnie z tym, jak odbiera to ludzkie ucho, korzystamy z funkcji logarytmicznej.



- Wzory i wykresy funkcji ■ Przykłady funkcji i ich własności
- Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna ■ Równania wykładnicze i logarytmiczne
 - Zastosowania funkcji wykładniczych i logarytmicznych
 - Przekształcanie wykresów funkcji
 - Przekształcanie wykresów funkcji (cd.) ■ Powtórzenie

WZORY I WYKRESY FUNKCJI

- I Przypomnijmy, że **funkcją określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y** nazywamy przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi zbioru X odpowiada dokładnie jeden element zbioru Y .

Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji, jego elementy — argumentami, a odpowiadające im elementy zbioru Y — wartościami funkcji.

W tym rozdziale będziemy się zajmować funkcjami, których dziedziną i zbiorem wartości są zbiory liczbowe.

Zapis $f: X \rightarrow Y$ oznacza funkcję f o dziedzinie X , której wartości należą do zbioru Y . Zbiór wartości funkcji jest podzbiorem zbioru Y , ale nie musi być równy Y .

Rozważmy funkcję $f: (-1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ opisaną w następujący sposób:

Każdej liczbie rzeczywistej x większej od -1 przyporządkowujemy iloraz liczby x przez liczbę o 1 większą od x .

Sposób, w jaki argumentom są przyporządkowane wartości tej funkcji, można przedstawić za pomocą wzoru:

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

Wzór tej funkcji można też zapisać na inne sposoby. Oto przykłady:

$$y = \frac{x}{x+1} \qquad x \rightarrow \frac{x}{x+1}$$

Uwaga. Gdy argumenty się zmieniają, to wartości też mogą się zmieniać, ale zawsze wartość y zależy od wybranego argumentu x , dlatego x nazywamy zmienną niezależną, a y — zmienną zależną.

Korzystając ze wzoru, możemy obliczyć wartości rozważanej funkcji dla liczb należących do dziedziny, czyli do zbioru $(-1; +\infty)$. Na przykład dla argumentów 2, $-\frac{1}{2}$, 0, 3 otrzymujemy:

$$f(2) = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

$$f(0) = \frac{0}{0+1} = 0$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+1} = -1$$

$$f(3) = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$

W tabelce obok zestawiono wybrane argumenty i odpowiadające im wartości.

Z powyższych obliczeń wynika, że do wykresu funkcji f należą punkty:

$$\left(2, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{1}{2}, -1\right), (0, 0), \left(3, \frac{3}{4}\right)$$

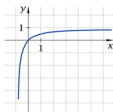
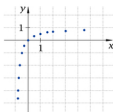
x	2	$-\frac{1}{2}$	0	3
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	-1	0	$\frac{3}{4}$

ĆWICZENIE A a) Zaznacz w układzie współrzędnych co najmniej siedem punktów należących do wykresu rozważanej funkcji.

b) Która z liczb: 1, 2, -50, -1000 może być wartością tej funkcji?

W układzie współrzędnych zaznaczono kilkanaście punktów należących do wykresu funkcji omawianej na poprzedniej stronie.

Wszystkie punkty wykresu rozważanej funkcji tworzą taką krzywą, jak na poniższym rysunku.



Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty; 1)$.

PRZYKŁAD 1 Wzór $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ opisuje funkcję określoną na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sprawdź, czy punkty A i B należą do wykresu tej funkcji.

$$A = \left(2, \frac{1}{4}\right) \quad f(2) = \frac{2-1}{2^2} = \frac{1}{4} \quad B = (-2, 1) \quad f(-2) = \frac{-2-1}{(-2)^2} = -\frac{3}{4} \neq 1$$

Odp. Punkt $A = \left(2, \frac{1}{4}\right)$ należy do wykresu funkcji f , a punkt $B = (-2, 1)$ nie należy do wykresu tej funkcji.

ZADANIE Czy punkty $A = \left(9, \frac{3}{10}\right)$, $B = \left(\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}\right)$ należą do wykresu funkcji $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$?

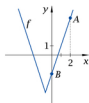
PRZYKŁAD 2 Rysunek przedstawia wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = |3x+2| - 4$. Znajdź współrzędne punktów A i B .

$$\text{Punkt } A: f(2) = |3 \cdot 2 + 2| - 4 = 4 \quad \therefore A = (2, f(2))$$

$$\underline{A = (2, 4)}$$

$$\text{Punkt } B: f(0) = |3 \cdot 0 + 2| - 4 = -2$$

$$\underline{B = (0, -2)}$$



ZADANIE Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = |2x-3| - 5$. Punkt P o pierwszej współrzędnej -7 należy do wykresu tej funkcji. Jaka jest druga współrzędna tego punktu? W jakim punkcie wykres tej funkcji przecina oś y ?

zadania 1-6 ►

- II Argument, dla którego wartość funkcji liczbowej jest równa 0, nazywamy **miejszem zerowym funkcji**. Innymi słowy:

$$x_0 \text{ jest miejscem zerowym funkcji} \Leftrightarrow f(x_0) = 0$$

ĆWICZENIE B a) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = (x+2)\sqrt{x^2-1}$. Które z argumentów: 1, -3, -2 są miejscami zerowymi tej funkcji?

b) Znajdź miejsce zerowe funkcji $y = \frac{4x-7}{3}$.

PRZYKŁAD 3 Funkcja $f(x) = (2x+1)(x^2-2x-1)$ jest określona na zbiorze $\mathbb{R}$. Znajdź wszystkie miejsca zerowe tej funkcji.

$$f(x) = (2x+1)(x^2-2x-1)$$

$$(2x+1)(x^2-2x-1) = 0$$

$$2x+1 = 0 \text{ lub } x^2-2x-1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \Delta = 4 + 4 = 8$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$x_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$$

Aby znaleźć argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartość 0, rozwiązujemy równanie $f(x) = 0$.

Odp. Miejscami zerowymi tej funkcji są liczby $-\frac{1}{2}$, $1-\sqrt{2}$ oraz $1+\sqrt{2}$.

ZADANIE Znajdź miejsca zerowe funkcji $y = x^3 - 2x^2$ określonej na zbiorze $\mathbb{R}$.

ĆWICZENIE C Ustal, jakie miejsca zerowe miałyby funkcja z powyższego przykładu, gdyby jej dziedziną był zbiór $(-\infty; 0]$?

zadania 7-12 ►

- III Gdy funkcja jest określona tylko za pomocą wzoru, a jej dziedzina nie jest podana, przyjmujemy, że do dziedziny należą wszystkie liczby rzeczywiste, dla których da się obliczyć wartość funkcji.

PRZYKŁAD 4 Określ dziedzinę funkcji $y = \frac{6}{x-2} + \sqrt{3x}$.

$$x-2 \neq 0 \quad \text{ i } \quad 3x \geq 0$$

Zatem:

$$x \neq 2 \quad \text{ i } \quad x \geq 0$$

Odp. Dziedziną funkcji jest zbiór $(0; +\infty) \setminus \{2\}$.

Dzielenie przez zero nie jest określone; liczba podpierwiastkowa musi być nieujemna.

ZADANIE Określ dziedzinę funkcji $y = \frac{\sqrt{2-x}}{x-1}$.

zadania 13-18 ►

Niekiedy za pomocą wzoru opisana jest zależność między dwiema wielkościami. Trzeba pamiętać, że argumentami takiej funkcji mogą być tylko takie wielkości, dla których korzystanie ze wzoru ma sens. Oto przykłady:

- Liczba L wszystkich ścian graniastosłupa zależy od liczby krawędzi podstawy graniastosłupa.

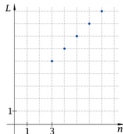
$$L = n + 2$$

n – liczba krawędzi podstawy graniastosłupa

L – liczba ścian graniastosłupa

Dziedzina tej funkcji jest zbiór:

$\{3, 4, 5, 6, \dots\}$.



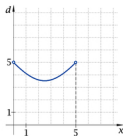
- Długość przekątnej (d) prostokąta o obwodzie 10 zależy od długości jednego z boków (x).

$$d = \sqrt{x^2 + (5 - x)^2}$$

x – długość jednego z boków prostokąta

d – długość przekątnej

Gdy obwód prostokąta wynosi 10, to długość każdego boku musi być mniejsza niż 5, więc dziedziną tej funkcji jest przedział $(0; 5)$.



ZESTAW ZADAŃ

- ◀ 1. Oblicz wartość podanej funkcji dla argumentu 0 i dla argumentu 2.

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = \sqrt{x} - 10$

c) $f(x) = \frac{1}{x+2}$

2. Określ współrzędne trzech punktów, które należą do wykresu podanej funkcji.

a) $y = 2x^2 + 1$

b) $y = -3x^3$

c) $y = \frac{-3}{x}$

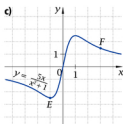
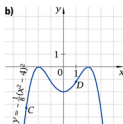
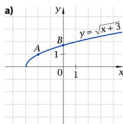
3. Sprawdź, które z punktów A , B , C należą do wykresu podanej funkcji.

a) $y = \frac{2x^2 - 1}{3x}$; $A = (1, \frac{1}{3})$, $B = (-20, \frac{79}{60})$, $C = (0, -1)$

b) $y = \sqrt{1 - 5x}$; $A = (\frac{1}{5}, 0)$, $B = (10, 7)$, $C = (-2, \sqrt{11})$

c) $y = x + \frac{1}{\sqrt{x+4}}$; $A = (0, \frac{1}{2})$, $B = (-3, -2)$, $C = (5, 5\frac{1}{3})$

4. Znajdź współrzędne punktów oznaczonych na wykresie literami.



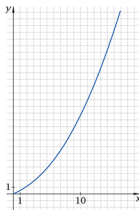
5. Znajdź taką liczbę a , dla której wykres funkcji określonej podanym wzorem przechodzi przez punkt $(2, 5)$.

a) $y = ax^2$

b) $y = \frac{a}{x}$

c) $y = a(x - 1)^2$

d) $y = \sqrt{ax}$



6. Fotografia przedstawia zawodniczkę pchającą kulę.

W zależności od prędkości początkowej x (w m/s) odległość y (w m), na jaką polecie kulę, opisuje wzór:

$$y = \frac{x}{20} (x + \sqrt{x^2 + 80}) \text{ dla } x \geq 0$$



Wykres tak opisanej funkcji przedstawiono obok. Spróbuj odczytać z wykresu i obliczyć, korzystając ze wzoru, na jaką odległość polecie kulę przy prędkości początkowej $8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. O ile dalej poleciałaby kulę, gdyby prędkość początkowa wynosiła $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$?

7. Sprawdź, które z podanych liczb są miejscami zerowymi funkcji f .

a) $f(x) = \sqrt{x+3}$

0, -3, 3

b) $f(x) = x - \sqrt{x+2}$

-1, 1, 2

c) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$

1, -1, 0

8. Dziedzina podanej funkcji jest zbiór $\mathbb{R}$. Znajdź miejsca zerowe tej funkcji.

a) $y = x(x+7)(3x-2)$

c) $y = 2x^3 - x^2$

e) $y = |2x-5| - 1$

b) $y = (x^2-5)(4x+1)$

d) $y = x^3 - 5x$

f) $y = |x-7| + 2$

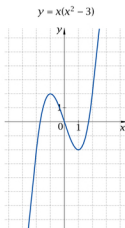
9. Ustal miejsca zerowe podanej funkcji.

a) $f: (-3; 3) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x - 3$

c) $f: (-\infty; 0) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x - 3| - 5$

b) $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x$

d) $f: (-3; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 - \frac{14+x}{2}$



10. Obok przedstawiono wzór i wykres funkcji. Na które z poniższych pytań łatwiej odpowiedzieć, korzystając z wykresu, a na które — korzystając ze wzoru?

- Jaką wartość przyjmuje funkcja dla $x = -1$?
- Czy wartość funkcji dla $x = 5$ jest większa od 100?
- Czy wartość funkcji dla $x = 1\frac{1}{7}$ jest dodatnia?
- Czy wartość funkcji dla $x = -1,8$ jest ujemna?
- Czy liczba 1,7 jest miejscem zerowym funkcji?
- Czy liczby $f(-20)$ i $f(20)$ są liczbami przeciwnymi?
- Czy punkt (6, 198) należy do wykresu tej funkcji?
- Czy wartość funkcji dla $x = -1,75$ jest większa czy mniejsza niż wartość dla $x = -2,75$?
- Ile jest liczb całkowitych ujemnych, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie?

11. Wśród funkcji zapisanych w ramce wskaż te, które spełniają podany warunek.

- Wykres funkcji przecina oś y w punkcie (0, 1).
- Wykres funkcji przechodzi przez punkt (1, 1).
- Miejsce zerowe funkcji jest równe 0.

$f_1(x) = x^2$	$f_5(x) = x + 1$
$f_2(x) = x^4$	$f_6(x) = x - 1$
$f_3(x) = \sqrt{x}$	$f_7(x) = 2x - 1$
$f_4(x) = \sqrt[3]{x}$	$f_8(x) = -x^4 + 1$

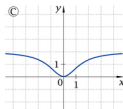
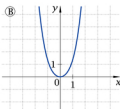
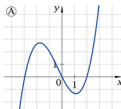
12. Poniżej narysowano wykresy następujących funkcji:

$$f(x) = \frac{-4}{x^2 + 2} + 2$$

$$g(x) = \frac{x^4}{3} + x^2$$

$$h(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{3} - 2x$$

Dopasuj te wzory do wykresów.



13. Określ dziedzinę funkcji.

a) $y = x^3 - 5x$

c) $y = \frac{1}{x-2}$

e) $y = \frac{1}{|x-2|}$

b) $y = \sqrt{x}$

d) $y = \sqrt{3-x}$

f) $y = \frac{5}{2x^2+3}$

14. Określ dziedzinę funkcji.

a) $y = \frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x+3}$

c) $y = \frac{x+2}{x+3} + \sqrt{5x}$

e) $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{5-x}$

b) $y = \sqrt{x+2} - \frac{1}{1-x}$

d) $y = \frac{\sqrt{x-4}}{x-5}$

f) $y = \sqrt{\frac{x^2}{x-1}}$

15. Funkcja f jest określona wzorem. Zapisz $f(-a)$, $f(a+1)$, $f(a+3)$, $f(a-3)$.

a) $f(x) = 2x^3 + 5$

b) $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$

c) $f(x) = \sqrt{x+5} - x^2$

16. Dla funkcji określonej wzorem $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ zapisz w jak najprostszej postaci różnicę $f(a) - f(a-1)$.

17. Wykaż, że dla funkcji $f(x) = \frac{x^4 + 2x^2}{|x|}$ zachodzi równość $f(-x) = f(x)$.

18. Wykaż, że jeśli różnica między argumentami funkcji $f(x) = \frac{5x-3}{2}$ jest równa 4, to różnica między odpowiadającymi im wartościami wynosi 10.

MINISPRAWDZIAN

51. Przez punkt $(-1, 2)$ przechodzi wykres funkcji:

A. $y = \frac{1-2x^5}{x^6}$

B. $y = x^2 + 2x - 1$

C. $y = \frac{4(x+1)}{2x+2}$

D. $y = \frac{\sqrt{1-3x}}{x+2}$

52. Na którym z poniższych rysunków przedstawiono wykres funkcji $y = \sqrt{x+4}$?



53. Dziedziną funkcji określonej wzorem $y = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x-3}$ jest zbiór:

A. $\langle 0; 3 \rangle \cup (3; +\infty)$

B. $\langle 0; +\infty)$

C. $(3; +\infty)$

D. $\langle 0; 3)$

54. Która z podanych funkcji ma miejsce zerowe będące liczbą całkowitą?

A. $y = x^2 + 5$

B. $y = x^2 - x - 3$

C. $y = 3x + 1$

D. $y = \sqrt{x-5}$

PRZYKŁADY FUNKCJI I ICH WŁASNOŚCI

1 Niech dziedziną funkcji f będzie zbiór liczbowy.

Przypomnijmy, że:

Funkcja f jest rosnąca, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2 spełniony jest warunek:

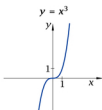
$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Funkcja f jest malejąca, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2 spełniony jest warunek:

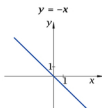
$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Funkcja f jest stała, gdy dla każdego argumentu x funkcja przyjmuje tę samą wartość.

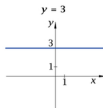
Oto przykłady kilku funkcji. Każda z nich jest albo rosnąca, albo malejąca, albo stała w całej swojej dziedzinie. O każdej z tych funkcji możemy powiedzieć, że jest monotoniczna.



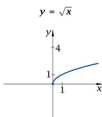
funkcja rosnąca



funkcja malejąca



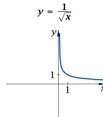
funkcja stała



funkcja rosnąca



funkcja rosnąca

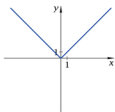


funkcja malejąca

ĆWICZENIE A Wiadomo, że funkcja f jest rosnąca, funkcja g jest malejąca i $f(8) = g(8)$, a dziedziną każdej z funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych. Uporządkuj liczby $f(3), g(3), f(7), g(7)$ w kolejności od najmniejszej do największej.

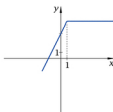
Żadna z poniższych funkcji nie jest monotoniczna, ale możemy wyznaczyć przedziały ich monotoniczności, czyli podzielić dziedziny tych funkcji na takie przedziały, w których dana funkcja jest albo rosnąca, albo malejąca, albo stała.

$$f_1(x) = |x|$$



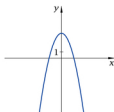
Funkcja f_1 jest malejąca w zbiorze $(-\infty; 0)$ i jest rosnąca w zbiorze $(0; +\infty)$.

$$f_2(x) = x - |x - 1| + 5$$



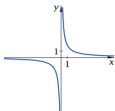
Funkcja f_2 jest rosnąca w zbiorze $(-\infty; 1)$ i jest stała w zbiorze $(1; +\infty)$.

$$f_3(x) = -x^2 + 4$$



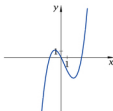
Funkcja f_3 jest rosnąca w zbiorze $(-\infty; 0)$ i jest malejąca w zbiorze $(0; +\infty)$.

$$f_4(x) = \frac{2}{x}$$



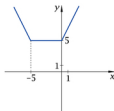
Funkcja f_4 jest malejąca w zbiorze $(-\infty; 0)$ i jest malejąca w zbiorze $(0; +\infty)$.

$$f_5(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$$



Funkcja f_5 jest rosnąca w zbiorze $(-\infty; -1)$, jest malejąca w zbiorze $(-1; 2)$ i jest rosnąca w zbiorze $(2; +\infty)$.

$$f_6(x) = |x| + |x + 5|$$



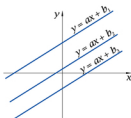
Funkcja f_6 jest malejąca w zbiorze $(-\infty; -5)$, jest stała w zbiorze $(-5; 0)$ i jest rosnąca w zbiorze $(0; +\infty)$.

Jeżeli funkcja jest określona na zbiorze $\mathbb{R}$ i jej wzór ma postać $y = W(x)$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem, to taką funkcję nazywamy wielomianową.

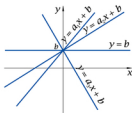
ĆWICZENIE B Które z powyższych funkcji są funkcjami wielomianowymi?

Funkcjami wielomianowymi są funkcje liniowe i funkcje kwadratowe. Na następnej stronie przypominamy ich własności.

Funkcja określona wzorem $y = ax + b$ to funkcja liniowa. Jej wykresem jest prosta. Gdy $a > 0$, to jest funkcją rosnącą, gdy $a < 0$, to jest funkcją malejącą, a gdy $a = 0$, to jest funkcją stałą.



Wykresy funkcji typu $y = ax + b$ o tym samym współczynniku a są prostymi równoległymi.



Wykresy funkcji typu $y = ax + b$ o tym samym współczynniku b przecinają się w punkcie $(0, b)$.

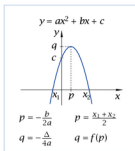
zadania 1–6 ►

- II Funkcja określona wzorem $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, to funkcja kwadratowa. Jej wykresem jest parabola o ramionach skierowanych do góry, gdy $a > 0$, lub w dół, gdy $a < 0$. Liczba miejsc zerowych takiej funkcji zależy od wartości wyrażenia $\Delta = b^2 - 4ac$.

Gdy $\Delta > 0$, funkcja ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Gdy $\Delta = 0$, funkcja ma jedno miejsce zerowe: $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

Gdy $\Delta < 0$, funkcja nie ma miejsc zerowych.



Wzór funkcji kwadratowej można zapisać w postaci ogólnej lub kanonicznej, a jeśli funkcja ta ma miejsca zerowe, to także w postaci iloczynowej.

Postać ogólna: $y = ax^2 + bx + c$

Postać kanoniczna: $y = a(x - p)^2 + q$

Postać iloczynowa: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

Gdy funkcja kwadratowa ma jedno miejsce zerowe x_0 , to wzór funkcji można zapisać w postaci $y = a(x - x_0)^2$.

zadania 7–11 ►

III Czasami nie dla wszystkich argumentów wartości funkcji są określone za pomocą tego samego wyrażenia. Oto przykład takiej funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{dla } x \leq -1 \\ x(x-2) & \text{dla } x > -1 \end{cases}$$

Zapis ten oznacza, że dla argumentów mniejszych od -1 lub równych -1 wartość funkcji f obliczamy ze wzoru $f(x) = x+4$, a dla argumentów większych od -1 korzystamy ze wzoru $f(x) = x(x-2)$. Na przykład:

$$f(-5) = -5 + 4 = -1$$

$$f(-1) = -1 + 4 = 3$$

$$f(2) = 2(2-2) = 0$$

$$f(4) = 4(4-2) = 8$$

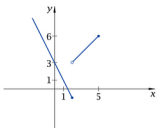
Na rysunku obok przedstawiono wykres tej funkcji. Tworzą go fragmenty prostej i paraboli. Wykres ten jest linią ciągłą (można go narysować bez odrywania ołówka od kartki).



W podobny sposób jak funkcja f opisana jest funkcja g :

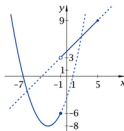
$$g(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{dla } x \leq 2 \\ x+1 & \text{dla } 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

Wykres funkcji g przedstawiono na rysunku obok. Zauważ, że nie jest on linią ciągłą.



PRZYKŁAD Narysuj wykres podanej funkcji.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+7)(x-1) & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ x+4 & \text{dla } x \in (-1; 5) \end{cases}$$



Najpierw szkicujemy wykres funkcji $y = \frac{1}{2}(x+7)(x-1)$.

Miejscami zerowymi są -7 i 1 , współrzędne wierzchołka paraboli to $\frac{-7+1}{2} = -3$ i $\frac{1}{2}(-3+7)(-3-1) = -8$, a wartość tej funkcji dla $x = -1$ wynosi -6 .

Następnie szkicujemy wykres funkcji $y = x+4$ (wartość tej funkcji dla $x = -1$ wynosi 3 , a dla $x = 5$ wynosi 9).

Na koniec zaznaczamy odpowiednie fragmenty paraboli i prostej.

ZADANIE

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} -x^2+4 & \text{dla } x \in (-3; 1) \\ 2x-5 & \text{dla } x \in [1; +\infty) \end{cases}$.

zadania 12-18 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Dopasuj wzory do wykresów.

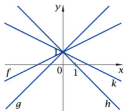
a)

$$y = x + 1$$

$$y = -x + 1$$

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$



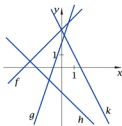
b)

$$y = x + 3$$

$$y = -x - 2$$

$$y = -2x + 3$$

$$y = 3x + 2$$

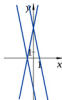


2. Na rysunku przedstawione są wykresy trzech funkcji liniowych. Dwie z prostych są równoległe. Wzory dwóch funkcji są podane. Znajdź wzór trzeciej funkcji.

a)

$$y = 5x + 5$$

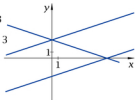
$$y = -5x - 5$$



b)

$$y = \frac{1}{3}x - 3$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 3$$

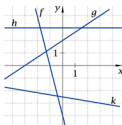


3. Znajdź wzory funkcji liniowych przedstawionych na rysunku obok.

4. Znajdź wzór funkcji liniowej, która spełnia podany warunek.

a) Wykres funkcji przechodzi przez punkty $(5, -2)$, $(-4, 1)$.

b) Miejscem zerowym funkcji jest -2 i wykres tej funkcji przecina oś y w punkcie $(0, 6)$.



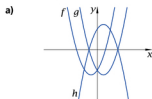
5. a) Znajdź wzór funkcji liniowej f , której miejsce zerowe jest o 3 mniejsze od miejsca zerowego funkcji $g(x) = -\frac{4}{3}x + 3$, ale wykresy funkcji f i g przecinają oś y w tym samym punkcie.

b) Funkcja liniowa f przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in (-\infty; -4)$ i jej wartości dla argumentów -10 i 4 różnią się o 3. Znajdź wzór tej funkcji.

6. a) Wykres funkcji liniowej f jest równoległy do wykresu funkcji $y = \frac{3x}{2} + 1$ i przechodzi przez punkt $(-6, 3)$. Znajdź wzór tej funkcji.

b) Znajdź wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do wykresu funkcji $f(x) = -5x + 7$ i przecina oś y w tym samym punkcie co wykres funkcji $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{5}$. Znajdź miejsce zerowe tej funkcji.

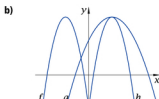
7. Dopasuj wzory do wykresów.



$$y = \frac{1}{2}(x-2)(x+5)$$

$$y = \frac{1}{2}(x+2)(x-5)$$

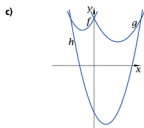
$$y = -\frac{1}{2}(x+2)(x-5)$$



$$y = -2(x-2)^2 + 5$$

$$y = -2(x+2)^2 + 5$$

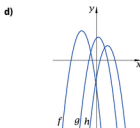
$$y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 5$$



$$y = x^2 - 2x - 4$$

$$y = x^2 + 2x + 4$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$$

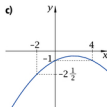
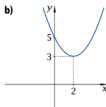
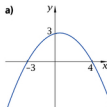


$$y = -(x+2)(x-3)$$

$$y = -(x+4)^2 + 8$$

$$y = -x^2 + 6x - 5$$

8. Znajdź wzór funkcji kwadratowej przedstawionej na wykresie.



9. Podaj wzór funkcji kwadratowej f spełniającej podane warunki i określ monotoniczność tej funkcji.

a) Miejscami zerowymi funkcji f są -3 i 2 . Największa wartość, jaką przyjmuje ta funkcja, to 6 .

b) Wierzchołkiem paraboli, która jest wykresem funkcji f , jest punkt $(-3, -1)$ i wykres funkcji przechodzi przez punkt $(2, 6)$.

10. Znajdź wzór funkcji kwadratowej, która ma takie same miejsca zerowe jak funkcja $f(x) = -5(x - 2)(x + 4)$, a parabola, która jest jej wykresem, ma ten sam wierzchołek co wykres funkcji $g(x) = 3(x + 1)^2 - 6$.

11. Rozwiąż nierówność (naszczukuj wykres odpowiedniej funkcji i odczytaj z wykresu rozwiązanie nierówności).

a) $x^2 + 4x + 3 \geq 0$

d) $2x^2 + 7x > 15$

b) $5x^2 + 3x - 2 < 0$

e) $7x \leq 3x^2 + 2$

c) $-3x^2 + 5x + 2 \leq 0$

f) $6x^2 \geq x + 2$

◀ ||| **12.** Oblicz $f(-2)$, $f(0)$, $f(10)$, jeśli:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{dla } x < -1 \\ x^2 - 1 & \text{dla } x \geq -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -2x^2 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ 1 & \text{dla } x \in (-1; 1) \\ 3x^2 & \text{dla } x \in (1; +\infty) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{2} & \text{dla } x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \\ x^2 + 21 & \text{dla } x \in (-\sqrt{2}; +\infty) \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{dla } x < 0 \\ 5x^3 - 2 & \text{dla } 0 \leq x \leq 5 \\ 0,1x - 10 & \text{dla } x > 5 \end{cases}$

13. Narysuj wykres funkcji f .

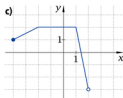
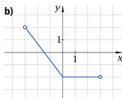
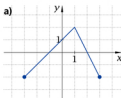
a) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{dla } x \in \langle -4; 4 \rangle \\ -\frac{1}{2}x + 6 & \text{dla } x \in \langle 4; 8 \rangle \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{dla } x \in \langle -5; -3 \rangle \\ 1 & \text{dla } x \in \langle -3; 1 \rangle \\ -3x + 4 & \text{dla } x \in \langle 1; 2 \rangle \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x - 4 & \text{dla } -5 < x \leq -2 \\ 2x + 2 & \text{dla } -2 < x \leq 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{dla } x \in \langle -6; -2 \rangle \\ -x + 5 & \text{dla } x \in \langle -2; 2 \rangle \\ 7 & \text{dla } x \in \langle 2; 4 \rangle \end{cases}$

14. Znajdź wzór funkcji, której wykres przedstawiono na rysunku.



15. Narysuj wykres funkcji.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 3 & \text{dla } x \in \langle -6; -2 \rangle \\ -x^2 + 4 & \text{dla } x \in \langle -2; 2 \rangle \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ x^2 - 4 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus (-2; 2) \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{dla } -4 \leq x \leq 1 \\ -x+4 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

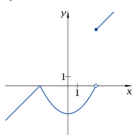
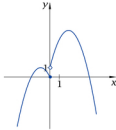
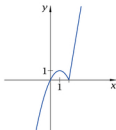
$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{dla } x \leq 0 \\ x^2 - 2x & \text{dla } 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

16. Wykres funkcji f składa się z fragmentów wykresów funkcji, które zapisano nad rysunkiem. Zapisz wzór funkcji f .

a) $y = x(2-x)$
 $y = 6x - 12$

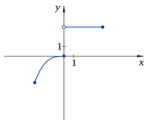
b) $y = -x(x+2)$
 $y = -x(x-4) + 1$

c) $y = \frac{x^2}{3} - 3$
 $y = x + 3$

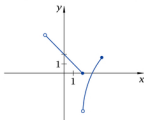


17. Korzystając z podanego wzoru lub wykresu funkcji, określ dziedzinę oraz zbiór wartości funkcji, ustal monotoniczność funkcji i podaj, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich — ujemne.

a) $f(x) = \begin{cases} 0,1x^3 & \text{dla } x \in \langle -3; 0 \rangle \\ 3 & \text{dla } x \in (0; 4) \end{cases}$



b) $h(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 4\sqrt{x-2} - 4 & \text{dla } x \in (2; 4) \end{cases}$



18. Określ dziedzinę, zbiór wartości oraz monotoniczność funkcji.

a) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{dla } x \in \langle -4; -1 \rangle \\ 1 & \text{dla } x \in (-1; 2) \\ -x+6 & \text{dla } x \in (2; 5) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } -4 < x < -2 \\ x^2 + 4 & \text{dla } -2 \leq x \leq 1 \\ -x+6 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

MINISPRAWDZIAN

S1. Zbiór wartości funkcji $f(x) = \begin{cases} x-4 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ x^2 & \text{dla } x \in (-1; +\infty) \end{cases}$ jest równy:

- A. $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ B. $(-\infty; -5) \cup (0; +\infty)$ C. $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$ D. $\mathbb{R}$

S2. Funkcja $f(x) = -x^2 - 4x + 1$ jest malejąca w przedziale:

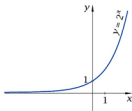
- A. $(-\infty; -2)$ B. $(-\infty; 2)$ C. $(-2; +\infty)$ D. $(2; +\infty)$

FUNKCJA WYKŁADNICZA I FUNKCJA LOGARYTMICZNA

- 1 Wiesz już, że dla każdej liczby rzeczywistej x określona jest liczba 2^x . Można więc rozpatrywać funkcję $y = 2^x$, której dziedziną jest zbiór $\mathbb{R}$.

ĆWICZENIE A Oblicz wartości funkcji $y = 2^x$ dla argumentów: $-3, -2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$ i zaznacz w układzie współrzędnych odpowiadające tym argumentom punkty wykresu funkcji. Naszkicuj wykres tej funkcji.

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = 2^x$. Zauważ, że:



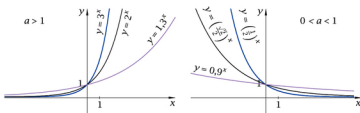
- Wartości funkcji są dodatnie, gdyż $2^x > 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x .
- Wykres nie przecina osi x , ale dla coraz mniejszych argumentów odpowiadające im punkty wykresu leżą coraz bliżej tej osi. Mówimy, że oś x jest asymptotą poziomą wykresu funkcji $y = 2^x$.
- Wykres funkcji przecina oś y w punkcie o współrzędnych $(0, 1)$, bo $2^0 = 1$.

ĆWICZENIE B Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Sprawdź, które z własności opisanych powyżej ma ta funkcja.



Każdą funkcję, której wzór można zapisać w postaci $y = a^x$, gdzie $a > 0$, nazywamy **funkcją wykładniczą**. Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych.

Zwróć uwagę, że dla $a = 1$ funkcja wykładnicza ma postać $y = 1$, a więc jest funkcją stałą. Poniższe rysunki przedstawiają wykresy kilku funkcji wykładniczych $y = a^x$, gdzie $a \neq 1$, i podano ich własności.



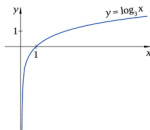
- Zbiorem wartości funkcji jest przedział $(0; +\infty)$.
- Oś x jest asymptotą poziomą wykresu funkcji.
- Wykres funkcji przecina oś y w punkcie o współrzędnych $(0, 1)$.
- Dla $a > 1$ funkcja $y = a^x$ jest rosnąca, a dla $0 < a < 1$ jest malejąca.

zadania 1-5 ►

- II Ponieważ każdej liczbie dodatniej x możemy jednoznacznie przyporządkować liczbę $\log_2 x$ (czyli taki wykładnik potęgi, do którego należy podnieść 2, aby otrzymać x), więc możemy rozpatrywać funkcję $\log_2 x$, której dziedziną jest zbiór $\mathbb{R}_+$.

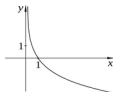
ĆWICZENIE C Oblicz wartości funkcji $y = \log_3 x$ dla argumentów: 3, 9, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, 1 i zaznacz w układzie współrzędnych odpowiadające tym argumentom punkty wykresu funkcji. Naszkicuj jej wykres.

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = \log_3 x$. Zauważ, że:



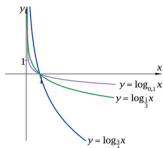
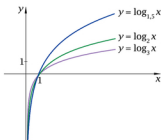
- Dziedziną funkcji jest zbiór $(0; +\infty)$.
- Wykres funkcji nie przecina osi y , ale im argumenty są bliższe zero, tym bardziej odpowiadające im punkty wykresu zbliżają się do osi y . Mówimy, że oś y jest asymptotą pionową wykresu funkcji.
- Wykres funkcji przecina oś x w punkcie $(1, 0)$.

ĆWICZENIE D Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = \log_{\frac{1}{3}} x$. Które z własności opisanych na poprzedniej stronie ma ta funkcja?



Każdą funkcję, której wzór można zapisać w postaci $y = \log_a x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, nazywamy **funkcją logarytmiczną**. Dziedziną funkcji logarytmicznej jest przedział $(0; +\infty)$.

Oto przykłady wykresów kilku funkcji logarytmicznych oraz ich własności.



- Zbiorem wartości funkcji logarytmicznej jest zbiór liczb rzeczywistych.
- Oś y jest asymptotą (pionową) wykresu funkcji.
- Wykres funkcji przecina oś x tylko w punkcie $(1, 0)$, tzn. jedynym miejscem zerowym funkcji jest $x = 1$.
- Dla $a > 1$ funkcja $y = \log_a x$ jest rosnąca, a dla $0 < a < 1$ jest malejąca.

Pojęcie logarytmu jest związane z potęgowaniem. Podobnie istnieje związek między funkcją logarytmiczną a funkcją wykładniczą.



Popatrz na rysunek obok. Łatwo zauważyć, że oś x i oś y są symetryczne do siebie względem prostej $y = x$ i każdy punkt o współrzędnych (a, b) jest symetryczny względem tej prostej do punktu (b, a) . Można ten fakt wykorzystać przy rysowaniu wykresów funkcji logarytmicznych.

Rozważmy następujące funkcje:

$$f(x) = 2^x \quad g(x) = \log_2 x$$

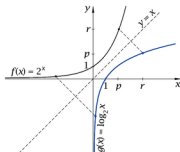
Niech punkt (p, r) będzie dowolnym punktem wykresu funkcji f . Zatem:

$$r = 2^p$$

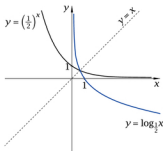
Stąd:

$$\log_2 r = p$$

Wobec tego punkt (r, p) należy do wykresu funkcji g . Oznacza to, że wykres funkcji g jest symetryczny względem prostej $y = x$ do wykresu funkcji f .



Podobnie wykres funkcji $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ względem prostej $y = x$.



zadania 6–10

ZESTAW ZADAŃ

1. Na każdym z poniższych rysunków przedstawiono wykresy dwóch spośród następujących funkcji:

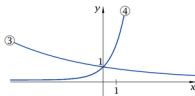
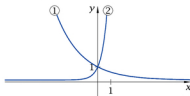
$$f(x) = 0,6^x$$

$$g(x) = \left(\frac{6}{7}\right)^x$$

$$h(x) = 2,7^x$$

$$k(x) = 10^x$$

Dopasuj wzory do wykresów.



2. Wśród podanych wzorów znajdź takie, które przedstawiają tę samą funkcję.

$$a(x) = 10^{x+2}$$

$$c(x) = 100 + 10^x$$

$$g(x) = \frac{10^x}{100}$$

$$i(x) = 10^{x^2}$$

$$b(x) = 10^{x-2}$$

$$d(x) = 100 \cdot 10^x$$

$$h(x) = 100^x$$

$$j(x) = 10^{2x}$$

3. a) Dla jakiej wartości a wykres funkcji $y = a^x$ przechodzi przez punkt $(2, 4)$?

b) Dla jakiej wartości a do wykresu funkcji $y = a^x$ należy punkt $(-3, 27)$?

4. Oblicz, dla jakich wartości a i b wykres funkcji $y = ba^x$ przechodzi przez punkty:

a) $K = (0, 6), L = (2, \frac{2}{3})$

b) $K = (1, 8), L = (\frac{1}{2}, 2)$

5. W tabelkach przedstawiono wyniki pomiarów wielkości t i M dokonanych podczas trzech doświadczeń. Przypuszcza się, że związek między tymi wielkościami wyraża się za pomocą wzoru $M = b \cdot a^t$, gdzie a i b są pewnymi liczbami, stałymi charakterystycznymi dla danego doświadczenia. Które wyniki pomiarów potwierdzają to przypuszczenie?

①

t	0	1	5
M	0,01	0,1	1000

②

t	0	2	3
M	50	2	3

③

t	0	2	4
M	5	20	80

6. Określ dziedzinę funkcji:

a) $y = \log_3(x - 2)$

d) $y = \log(x^2 - 3x - 10)$

g) $y = \log_x(x + 1)$

b) $y = \log(3 + 2x)$

e) $y = \log_x 2$

h) $y = \log_x(2 - x)$

c) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 9)$

f) $y = \log_{x-3} 5$

i) $y = \log_2 |x - 1|$

7. Na poniższych rysunkach przedstawione są wykresy funkcji:

① $y = (\frac{3}{4})^x$

② $y = (\frac{4}{3})^x$

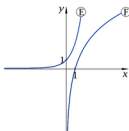
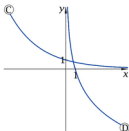
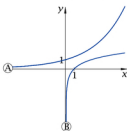
③ $y = 3^x$

④ $y = \log_{\frac{3}{4}} x$

⑤ $y = \log_{\frac{4}{3}} x$

⑥ $y = \log_3 x$

Dopasuj wzory do wykresów.



8. Oblicz, dla jakich wartości a i b wykres funkcji $y = a + b \log x$ przechodzi przez punkty P i R , jeśli:

a) $P = (1, 5), R = (10, 2)$

b) $P = (\frac{1}{10}, 6), R = (100, 0)$

9. W tabelkach przedstawiono wyniki pomiarów wielkości t i p dokonanych podczas trzech różnych doświadczeń. Przypuszcza się, że zależność między tymi wielkościami przedstawia wzór $p = a + b \log t$, gdzie a i b są pewnymi liczbami, stałymi charakterystycznymi dla danego doświadczenia. Które wyniki pomiarów potwierdzają to przypuszczenie?

①

t	$\frac{1}{10}$	1	10
p	-16	-10	-6

②

t	0,01	1	1000
p	13	-2	-12

③

t	0,1	1	100
p	-3	4	18

10. Na rysunkach obok przedstawione są wykresy następujących funkcji:

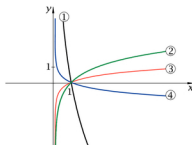
$$f(x) = \log x$$

$$g(x) = \log_3 x$$

$$h(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$$

$$k(x) = \log_{0,1} x$$

Dopasuj wzory do wykresów.



MINISPRAWDZIAN

51. Której z poniższych własności nie ma funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$, gdy $a \neq 1$?

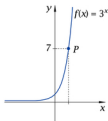
- A. Funkcja dla wszystkich argumentów przyjmuje wartości różne od 0.
- B. Asymptotą wykresu funkcji jest prosta o równaniu $y = 0$.
- C. Zbiorem wartości funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.
- D. Wykres funkcji przecina oś y w punkcie $(0, 1)$.

52. Punkt $(9, -2)$ leży na wykresie jednej z podanych funkcji. Która to funkcja?

- A. $y = \log_{\frac{1}{3}} x$
- C. $y = \log_3 x$
- B. $y = \log_{\sqrt{3}} x$
- D. $y = \log_9 x$

53. Jaka jest pierwsza współrzędna punktu P (na rysunku obok)?

- A. $\frac{1}{7}$
- B. $\sqrt{7}$
- C. $\log_3 7$
- D. $\log_7 3$



$$y = (\sqrt{5})^x \quad y = \left(\frac{1}{5}\right)^x \quad y = 0,5^x$$

$$y = \log_{\frac{1}{5}} x \quad y = \log_5 x$$

54. Ile jest funkcji malejących wśród podanych w ramce obok?

- A. dwie
- C. cztery
- B. trzy
- D. pięć

RÓWNANIA WYKŁADNICZE I LOGARYTMICZNE

- 1 O funkcji liczbowej mówimy, że jest **różnowartościowa**, gdy dla dowolnych dwóch różnych argumentów przyjmuje różne wartości. Innymi słowy: taka funkcja każdą wartość przyjmuje tylko dla jednego argumentu. Oznacza to, że spełniony jest warunek:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Zauważ, że każda funkcja rosnąca i każda funkcja malejąca jest różnowartościowa, więc ten warunek jest spełniony przez funkcje wykładniczą i logarytmiczną.



Równanie:

$$3^x = 9$$

można zapisać tak:

$$3^x = 3^2$$

Funkcja wykładnicza jest różnowartościowa, więc:

$$x = 2$$

i liczba 2 jest jedynym rozwiązaniem rozważanego równania.



Równanie:

$$\log_5 x = 2$$

można zapisać tak:

$$\log_5 x = \log_5 25$$

Funkcja logarytmiczna jest różnowartościowa, więc:

$$x = 25$$

i liczba 25 jest jedynym rozwiązaniem rozważanego równania.

Równanie $3^x = 9$ jest przykładem równania wykładniczego, czyli takiego, w którym niewiadoma występuje tylko w wykładniku. W równaniu $\log_5 x = 2$ niewiadoma jest wielkością logarytmowaną. Jest to przykład równania logarytmicznego.

PRZYKŁAD 1 Rozwiąż równanie.

a) $5^x = \frac{1}{25}$

$$5^x = 5^{-2}$$

$$x = -2$$

b) $3^x = \sqrt[5]{3}$

$$3^x = 3^{\frac{1}{5}}$$

$$x = \frac{1}{5}$$

..... Zapisujemy obie strony równania w postaci potęg o jednakowych podstawach.

..... Korzystamy z warunku: $a^p = a^r \Leftrightarrow p = r$ dla $a > 0$ i $a \neq 1$.

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $2^x = \sqrt[3]{2}$

b) $10^x = 0,001$

Przy rozwiązywaniu równań wykładniczych przydają się czasami własności potęg, które przypominamy obok.

Jeśli $a > 0$ i $m, n \in \mathbb{R}$, to:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

PRZYKŁAD 2 Rozwiąż równanie.

a) $2^x = \frac{\sqrt[3]{4}}{16}$

$$2^x = \frac{\sqrt[3]{2^6}}{2^4}$$

$$2^x = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{2^4}$$

$$2^x = 2^{\frac{2}{3}-4}$$

$$2^x = 2^{-\frac{10}{3}}$$

$$\underline{x = -\frac{10}{3}}$$

b) $9^x = \frac{27^x}{\sqrt{3}}$

$$(3^2)^x = \frac{(3^3)^x}{3^{\frac{1}{2}}}$$

$$3^{2x} = 3^{3x-\frac{1}{2}}$$

$$2x = 3x - \frac{1}{2}$$

$$\underline{x = \frac{1}{2}}$$

Korzystając z własności potęg, zapisujemy obie strony równania w postaci potęg o jednakowych podstawach.

Korzystamy z warunku: $a^p = a^r \Leftrightarrow p = r$ dla $a > 0$ i $a \neq 1$.

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $4^x = \sqrt{2}$

b) $8^x = 2 \cdot 4^x$

zadania 1-3 ►

II Rozwiązując równanie wykładnicze, nie zawsze da się zastosować metodę pokazaną w powyższych przykładach. Czasem można znaleźć rozwiązanie, korzystając z definicji logarytmu.

PRZYKŁAD 3 Rozwiąż równanie.

a) $5 \cdot 2^x + 1 = 4$

$$5 \cdot 2^x = 3$$

$$2^x = \frac{3}{5}$$

$$\underline{x = \log_2 \frac{3}{5}}$$

.....
Korzystamy
z definicji
logarytmu.

b) $3^x = 2 \cdot 5^x$

$$\frac{3^x}{5^x} = 2$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = 2$$

$$\underline{x = \log_{\frac{3}{5}} 2}$$

.....
Korzystamy
z definicji
logarytmu.

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $4 \cdot 3^x = 7$

b) $3 \cdot 5^x = 10^x$

Zauważ, że w przykładzie 3b) równanie można by przekształcać inaczej i otrzymać w wyniku $x = \log_{\frac{3}{5}} \frac{1}{2}$.

zadania 4-5 ►

- III Rozwiązując równania logarytmiczne, można korzystać z definicji logarytmu lub równowartościowości funkcji logarytmicznej. Przy rozwiązywaniu takich równań trzeba pamiętać o odpowiednich założeniach.

PRZYKŁAD 4 Rozwiąż równanie.

a) $3 \log_5 x + 4 = 6$ zał. $x > 0$

$$3 \log_5 x = 2$$

$$\log_5 x = \frac{2}{3}$$

..... Korzystamy z definicji logarytmu.

$$x = 5^{\frac{2}{3}}$$

$$x = \sqrt[3]{25}$$

..... Liczba $\sqrt[3]{25}$ jest dodatnia, więc spełnia założenie.

b) $\log_2 x = \log_2(2x + 5)$ zał. $x > 0$ i $2x + 5 > 0$

$$x = 2x + 5$$

..... Korzystamy z warunku: $\log_a p = \log_a r \Leftrightarrow p = r$
dla $a > 0$ i $a \neq 1$.

$$x = -5$$

Liczba -5 nie spełnia założeń. Równanie nie ma rozwiązania.

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $5 \log_2 x - 3 = 1$

b) $\log 2x = \log(1 - x)$

zadania 6–8 ►

- IV Czasami przy rozwiązywaniu równań logarytmicznych pojawiają się własności logarytmów, które przypominamy obok.

Dla liczb rzeczywistych a, b, c, p jeśli $a > 0, b > 0, c > 0$ i $a \neq 1$, to:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^p = p \log_a b$$

PRZYKŁAD 5 Rozwiąż równanie.

$$\log_7 \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \log_7 x = \log_7 \frac{1}{4} \quad \text{zał. } x > 0$$

$$\frac{1}{3} \log_7 x = \log_7 \frac{1}{2} - \log_7 \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{3} \log_7 x = \log_7 \left(\frac{1}{2} : \frac{1}{4} \right)$$

$$\log_7 x = 3 \log_7 2$$

$$\log_7 x = \log_7 2^3$$

..... Korzystamy z warunku: $\log_a p = \log_a r \Leftrightarrow p = r$
dla $a > 0$ i $a \neq 1$.

$$x = 8$$

ZADANIE Rozwiąż równanie: $\log_3 x - \log_3 4 = 2 \log_3 5$.

Zauważmy, że rozwiązując równanie typu $a^x = b$, zamiast korzystać z definicji logarytmu, możemy zlogarytmować obie strony takiego równania (przyjmując za podstawę logarytmu dowolną liczbę dodatnią różną od 1).

Poniżej rozwiązano równanie $7^x = 11$ na trzy sposoby. Za każdym razem otrzymano takie samo rozwiązanie, tylko zapisane w inny sposób.

$7^x = 11$	$7^x = 11$	$7^x = 11$
$\log_7 7^x = \log_7 11$	$\log_{11} 7^x = \log_{11} 11$	$\log 7^x = \log 11$
$x \log_7 7 = \log_7 11$	$x \log_{11} 7 = 1$	$x \log 7 = \log 11$
$x = \log_7 11$	$x = \frac{1}{\log_{11} 7}$	$x = \frac{\log 11}{\log 7}$

Uwaga. Aby obliczyć przybliżoną wartość rozwiązania równania $7^x = 11$ za pomocą kalkulatora, najwygodniej jest używać logarytmu dziesiętnego, czyli korzystać z ostatniego sposobu.

ĆWICZENIE Zapisz rozwiązanie równania $5^x = \frac{3}{4}$ za pomocą logarytmów dziesiętnych.

zadania 9–10 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Rozwiąż równanie.

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 125$ | e) $(\sqrt{2})^x = \frac{1}{32}$ | i) $2^x \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{16}$ |
| b) $\left(\frac{6}{7}\right)^4 = \left(\frac{7}{6}\right)^x$ | f) $(\sqrt{7})^x = \sqrt[3]{7}$ | j) $\frac{1}{49} \cdot 7^x = \sqrt{7}$ |
| c) $9^x = 27$ | g) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ | k) $\sqrt{0,2} = 25^x$ |
| d) $\frac{1}{4} = 8^x$ | h) $0,1 = 1000 \cdot 10^x$ | l) $\frac{4}{3} = \left(\frac{8}{27}\right)^x \cdot 3$ |

2. Rozwiąż równanie.

- | | | |
|---|---|---|
| a) $3^x \cdot 5^x = 15$ | d) $0,2 \cdot 5^x = (\sqrt{5})^x$ | g) $4^x \cdot 8^{x+1} = \frac{1}{2}$ |
| b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot 6^x = 9$ | e) $81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{9^x}{3}$ | h) $27^{x+3} = \sqrt{3} \cdot 81^x$ |
| c) $\frac{2^x}{16} = 2 \cdot 4^x$ | f) $\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot 1,5 = \left(\frac{8}{27}\right)^x$ | i) $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} = \frac{27}{8}$ |

3. Rozwiąż równanie.

- | | | |
|-------------------------------------|---------------------------------|------------------------------------|
| a) $\frac{15^x}{5^x} = \frac{1}{9}$ | c) $10^x = \sqrt{2} \cdot 5^x$ | e) $\frac{2^x}{3} = \frac{3^x}{2}$ |
| b) $6^x = 3^x \cdot 4$ | d) $\frac{2^x}{\sqrt{3}} = 6^x$ | f) $14^x = \frac{7^x}{2\sqrt{2}}$ |

◀ II 4. Rozwiąż równanie.

- a) $7^x = 3$ c) $3^{x+1} = 4$ e) $\frac{3^{2x}}{5} = 2$ g) $2^{3x-1} = 5$
 b) $5 \cdot 6^x = 10$ d) $4 \cdot 5^x - 1 = 7$ f) $7^{3x} \cdot 3 = 1$ h) $4^{2x+3} = 1$

5. Rozwiąż równanie.

- a) $7^x = 5 \cdot 3^x$ d) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ g) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 15^x = 2$
 b) $\frac{2^x}{3} = 5^x$ e) $4^{1-x} = 5^x$ h) $14^x = 3 \cdot 2^x$
 c) $5^x = 2^{x+1}$ f) $2^x \cdot 3^x = 5$ i) $5 \cdot 3^x = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

◀ III 6. Rozwiąż równanie.

- a) $2 \log_5 x = 6$ c) $4 \log_6 x + 3 = 5$ e) $1 - \frac{2}{3} \log_{\frac{1}{3}} x = 3$
 b) $3 + \log_{\frac{1}{3}} x = 1$ d) $\frac{1}{2} \log_4 x - 5 = -4$ f) $7 - \frac{3}{2} \log_8 x = 9$

7. Rozwiąż równanie.

- a) $\log_3(x-5) = 3$ c) $\log_{0,1}(2x-3) = 1$ e) $\log_8(x^2-2) = -\frac{1}{3}$
 b) $\log_{\frac{2}{3}}(x+2) = -2$ d) $\log_2\left(3 + \frac{x}{2}\right) = -4$ f) $\log_{\frac{1}{9}}(1-x^2) = \frac{3}{2}$

8. Rozwiąż równanie.

- a) $\log_3(2x+1) = \log_3 x$ d) $\log_5(3x+5) = \log_5(x+1)$
 b) $\log_{\frac{1}{4}} x = \log_{\frac{1}{4}}(3x-4)$ e) $\log_{\frac{2}{3}}(5x+1) = \log_{\frac{2}{3}}(4x-1)$
 c) $\log(x+2) = \log(2x-1)$ f) $\log_6(9x-2) = \log_6(7x+2)$

◀ IV 9. Rozwiąż równanie.

- a) $\log_3 x = \log_3 5 + \log_3 4$ e) $2 \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} 6 + \log_{\frac{1}{2}} 24$
 b) $\log_{0,7} x = 3 \log_{0,7} 2 - \log_{0,7} 3$ f) $4 \log 2 = 2 \log x + \log 5$
 c) $\log_5 4 + \log_5 x = \frac{1}{2} \log_5 49$ g) $\log_6 5 - \frac{1}{2} \log_6 x = \log_6 \frac{1}{2}$
 d) $\log 8 = \log x - 2 \log \frac{1}{5}$ h) $\log_2 x^2 - \log_2 x = 2 \log_2 5$

• 10. Rozwiąż równanie.

- a) $\log_{x+1} 36 = 2$ c) $\log_{\frac{5}{2}} \frac{8}{125} = -3$ e) $\log_{2+\frac{5}{2}} 5 = 1$
 b) $\log_{2-x} \frac{1}{8} = 3$ d) $\log_{3x} 15 = \frac{1}{2}$ f) $\log_{2x-1} \sqrt[3]{4} = -\frac{1}{3}$

MINISPRAWDZIAN

51. Rozwiązaniem którego z poniższych równań jest liczba dodatnia?

- A. $3^x = \frac{1}{9}$ B. $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25$ C. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$ D. $0,01^x = \frac{1}{10}$

52. Rozwiązaniem równania $3 \cdot 4^{x-3} + 5 = 11$ jest:

- A. 3 B. 3,5 C. 2,5 D. $5\frac{1}{3}$

53. Rozwiązanie równania $\log_3 x - 2 = 1$ jest liczbą:

- A. nieparzystą B. ujemną C. niewymierną D. niecałkowitą

54. Rozwiązaniem równania $\log_2 x - \log_2 9 = \log_2 5$ jest:

- A. $\frac{5}{9}$ B. $1\frac{4}{5}$ C. 14 D. 45

ZASTOSOWANIA FUNKCJI WYKŁADNICZYCH I LOGARYTMICZNYCH

- 1 Za pomocą funkcji wykładniczych i logarytmicznych można opisać zjawiska z bardzo różnych dziedzin wiedzy.

LICZEBNOŚĆ POPULACJI

Pewna kolonia bakterii liczyła początkowo 1000 bakterii, a co godzinę ich liczba rosła o 10%.

po pierwszej godzinie: $1000 \cdot 1,1$

po drugiej godzinie: $(1000 \cdot 1,1) \cdot 1,1 = 1000 \cdot 1,1^2$

po trzeciej godzinie: $(1000 \cdot 1,1^2) \cdot 1,1 = 1000 \cdot 1,1^3$

po t godzinach: $1000 \cdot 1,1^t$

Opisana kolonia bakterii to przykład populacji zmieniającej się w stałym tempie. Tak zmieniające się populacje można opisać za pomocą wzorów typu:

$$L(t) = b \cdot a^t,$$

gdzie t oznacza czas, a współczynniki a i b zależą od tempa zmian populacji oraz jej początkowej wielkości. Gdy w ten sposób opiszemy populację, mówimy, że stworzyliśmy jej model wykładniczy.

W 1862 roku prezydent Stanów Zjednoczonych Abraham Lincoln przedstawił Kongresowi prognozę liczby ludności USA do 1930 roku. Na podstawie spisów ludności z lat 1790–1860 Lincoln zauważył, że współczynnik przyrostu naturalnego w tym okresie był stały. Założył więc, że współczynnik ten nie będzie się zmieniał do 1930 roku, i stosując model wykładniczy, obliczył, że do tego czasu w USA będzie żyło ponad 250 mln ludzi. W rzeczywistości Stany Zjednoczone miały w 1930 roku 123 mln mieszkańców.

Jak widać, model wykładniczy do obliczania przyrostu populacji jest skuteczny tylko dla krótkich okresów, ponieważ zakłada niezmienność współczynnika przyrostu naturalnego. W rzeczywistości współczynnik ten nie jest stały i zależy od wielu czynników, m.in. od wielkości populacji, zmian kulturowych, migracji ludności, klęsk żywiołowych.

Model wykładniczy można stosować także do opisu innych wielkości niż populacja, ale tylko takich, które zmieniają się w stałym tempie.

ĆWICZENIE Masa M próbki zmienia się zgodnie z modelem wykładniczym. Ustal, czy masa ta rośnie, czy maleje, gdy:

a) $M = 20 \cdot 0,7^t$

b) $M = 10 \cdot 1,2^t$

zadania 1–3 ►

III POZIOM GŁOŚNOŚCI DŹWIĘKU

Niektóre wielkości są opisywane liczbami od bardzo małych do bardzo dużych, tak że zakres wartości utrudnia posługiwanie się nimi.

Przykładem jest natężenie dźwięku mierzone w W/m^2 (waty na metr kwadratowy). Ustalono, że próg słyszalności, czyli najniższe natężenia dźwięków, które słyszy przeciętny człowiek, wynosi 10^{-12} W/m^2 . Natomiast najgłośniejszy dźwięk wyemitowany na Ziemi towarzyszył wybuchowi wulkanu Krakatau w Indonezji. Wynosił on 10^{23} W/m^2 .

Siłę dźwięku określa się, obliczając, ile razy natężenie I tego dźwięku jest większe od natężenia I_0 dźwięku odpowiadającego progowi słyszalności. Tak więc siłę dźwięku opisuje iloraz $\frac{I}{I_0}$. Z informacji podanych powyżej wynika, że wartości tego ilorazu wahają się od 1 do 10^{35} . Skalą o takiej rozpiętości byłoby trudno się posługiwać. Natomiast logarytmy dziesiętne tych liczb przyjmują wartości od 0 ($\log 1 = 0$) do 35 ($\log 10^{35} = 35$).

Liczbami w takim zmniejszonym zakresie o wiele łatwiej się posługiwać, dlatego wprowadzono nowe pojęcie — poziom głośności dźwięku. Jest on najczęściej wyrażany w decybelach (w skrócie dB).

Poziom głośności dźwięku (w decybelach) można obliczyć ze wzoru:

$$L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

$L(I)$ — poziom głośności dźwięku (w decybelach)

I — natężenie dźwięku w W/m^2

I_0 — natężenie dźwięku odpowiadającego progowi słyszalności ($I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$)

Poziom głośności progu słyszalności wynosi 0 dB, a wybuch wulkanu Krakatau miał poziom około 350 dB.

Uwaga. Natężenie dwóch równoczesnych dźwięków jest sumą natężeń tych dźwięków, ale poziom głośności tych dwóch dźwięków nie jest sumą ich poziomów głośności, gdyż $\log(a+b) \neq \log a + \log b$ dla dodatnich liczb a i b .

PRZYKŁAD 2 Poziom głośności gwizdka czajnika wynosi 90 dB, a gwizdka pociągu — 110 dB.

a) Ile razy większe jest natężenie dźwięku gwizdka pociągu niż gwizdka czajnika?

I_c — natężenie dźwięku gwizdka czajnika

I_p — natężenie dźwięku gwizdka pociągu

$$90 = 10 \log \frac{I_c}{10^{-12}}$$

$$110 = 10 \log \frac{I_p}{10^{-12}}$$

..... Korzystamy ze wzoru

$$L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0},$$

..... gdzie $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

$$9 = \log \frac{I_c}{10^{-12}}$$

$$11 = \log \frac{I_p}{10^{-12}}$$

..... Korzystamy z definicji logarytmu.

$$\frac{I_c}{10^{-12}} = 10^9$$

$$\frac{I_p}{10^{-12}} = 10^{11}$$

$$I_c = 10^9 \cdot 10^{-12}$$

$$I_p = 10^{11} \cdot 10^{-12}$$

$$I_c = 10^{-3} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

$$I_p = 10^{-1} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

$$\frac{I_p}{I_c} = \frac{10^{-1}}{10^{-3}} = 100$$

Odp. Natężenie dźwięku gwizdka pociągu jest 100 razy większe od natężenia dźwięku gwizdka czajnika.

b) Oblicz poziom głośności dźwięku wydawanego przez gwizdki dwóch mijających się pociągów.

I — natężenie dźwięku gwizdków dwóch pociągów

$$I = I_p + I_p = 2 \cdot 10^{-1}$$

..... Natężenia dwóch równoczesnych dźwięków

..... się dodaje; wcześniej obliczyliśmy, że

$$I_p = 10^{-1} \text{ W/m}^2.$$

..... Korzystamy ze wzoru $L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0}$.

$$L = 10 \log \frac{2 \cdot 10^{-1}}{10^{-12}} = 10 \log(2 \cdot 10^{11}) =$$

$$\log(2 \cdot 10^{11}) = \log 2 + \log 10^{11}$$

$$= 10(\log 2 + \log 10^{11}) =$$

$$= 10(\log 2 + 11) \approx 113$$

Odp. Poziom głośności dźwięku gwizdków dwóch pociągów to około 113 dB.

c) Ile gwizdków czajników stwarza hałas bolesny dla ucha, czyli o poziomie głośności 130 dB?

I_n — natężenie dźwięku n gwizdków czajników

$$I_n = n \cdot I_c$$

$$I_n = n \cdot 10^{-3}$$

Obliczyliśmy wcześniej, że $I_c = 10^{-3} \text{ W/m}^2$.

$$130 = 10 \log \frac{n \cdot 10^{-3}}{10^{-12}}$$

Korzystamy ze wzoru $L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0}$.

$$13 = \log(n \cdot 10^9)$$

Korzystamy z definicji logarytmu.

$$n \cdot 10^9 = 10^{13}$$

$$n = \frac{10^{13}}{10^9}$$

$$n = 10^4$$

Odp. Potrzeba aż 10 000 gwizdzących czajników, aby poziom głośności wyniósł 130 dB.

ZADANIE Poziom głośności dźwięku wydawanego przez pewną lodówkę jest równy 40 dB, a przez pewien odkurzacz — 80 dB.

- Ile razy natężenie dźwięku wydawanego przez odkurzacz jest większe od natężenia dźwięku wydawanego przez lodówkę?
- Oblicz poziom głośności dźwięku wydawanego przez lodówkę i odkurzacz pracujące jednocześnie.
- Ile pracujących odkurzaczy stwarza hałas o poziomie głośności 100 dB?

zadania 4–11 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Liczba ludności Polski w latach 1962–1970 zmieniała się zgodnie z modelem wykładniczym. Skorzystaj z danych w tabelce i ustal wzór dla tego modelu.

Rok	1962	1964
Ludność Polski	30,5 mln	31,3 mln

- Oszacuj, jaka była (według otrzymanego wzoru) liczba ludności Polski w 1970 r. Porównaj swoje wyniki z rzeczywistą liczbą ludności w tym roku (32,6 mln).
- Oszacuj, jaka byłaby liczba mieszkańców Polski w bieżącym roku, gdyby przyrost naturalny z lat 1962–1964 utrzymywał się bez zmian aż do dzisiaj. Porównaj otrzymany wynik z rzeczywistą liczbą ludności Polski.
- W którym roku zgodnie z tym modelem liczba ludności Polski przekroczyłaby 50 mln, gdyby przyrost naturalny z lat 1962–1964 utrzymywał się bez zmian?

2. Pacjent przyjął dawkę 50 mg pewnego leku. Wiadomo, że w ciągu 6 godzin z krwiobiegu jest usuwane 60% tego leku.

a) Masę m leku (w mg) pozostałą w organizmie po upływie czasu t (w godzinach) można obliczyć ze wzoru: $m = ab^t$, gdzie a i b są stałymi. Oblicz wartości tych stałych.

b) Ile leku pozostaje w krwiobiegu po upływie godziny, a ile — po upływie doby?

c) Pacjent powinien przyjąć drugą dawkę leku, zanim zawartość pierwszej dawki w krwiobiegu spadnie poniżej 10 mg. Po ilu godzinach od przyjęcia pierwszej dawki pacjent powinien przyjąć drugą dawkę?

3. W pewnej mazurskiej miejscowości podjęto walkę z plagą komarów. Specjaliści twierdzą, że systematyczne opryski spowodują zmniejszenie liczby komarów o 15% rocznie. Przyjmij, że przed opryskami populacja komarów wynosiła 2 mln.

a) Po jakim czasie liczba komarów powinna się zmniejszyć o połowę?

b) Walkę z komarami zamierza się przerwać, gdy populacja komarów będzie mniejsza niż 500 000. Jak długo będzie trwała ta walka?

◀ **II** **4.** W ramce obok podano poziomy głośności kilku wybranych dźwięków.

a) Oblicz natężenie dźwięku wydawanego przez szeleszczące liście.

b) Ile razy mniejsze natężenie ma dźwięk skrzypiec grających pianissimo od dźwięku orkiestry grającej fortissimo?

c) Oblicz poziom głośności hałasu wydawanego przez dwa młoty pneumatyczne pracujące jednocześnie.

d) Oblicz poziom głośności koncertu wykonywanego równocześnie przez dziewięciu skrzypków grających pianissimo.

e) Oblicz poziom głośności hałasu, na który narażona jest osoba siedząca obok krzyczącego widza na głośnym koncercie rockowym.

• **f)** Oblicz, ile pracujących młotów pneumatycznych wytwarza hałas równy poziomem głośności koncertowi rockowemu.

szelest liści — 10 dB
skrzypce (pianissimo) — 30 dB
krzyk — 80 dB
młot pneumatyczny — 100 dB
orkiestra (fortissimo) — 100 dB
koncert rockowy — 120 dB



5. Przyjmij, że w grupie N osób informacja rozprzestrzeniła się z taką prędkością, że po czasie t zna ją n osób. Według instytucji badających opinie publiczną liczbę tę można oszacować za pomocą wzoru: $n = N(1 - a^t)$, gdzie a oznacza stałą.



a) Po godzinie od momentu ogłoszenia wiadomości o podwyżce płac znało ją 300 z 500 pracowników fabryki. Ilu pracowników zapewne dowie się o tej nowinie po 2 godzinach, a ilu — po 6 godzinach?

b) Plotka o „dniu bez samochodu” po trzech dniach od jej powstania dotarła do 40% kierowców. Jaka część kierowców znała tę plotkę po pierwszym dniu? Kiedy znać ją będzie 80% kierowców?

Ciekawostka

Jądra atomów niektórych pierwiastków ulegają samoistnej przemianie w jądra innych pierwiastków. Zjawisku temu towarzyszy promieniowanie i dlatego nazywa się rozpadem promieniotwórczym. Masa pierwiastka ulegającego rozpadowi promieniotwórczemu zmniejsza się o połowę po upływie pewnego — ściśle

określonego dla tego pierwiastka — czasu, zwanego okresem połowicznego rozpadu. Na przykład okres połowicznego rozpadu radu ^{226}Ra wynosi 1600 lat, zatem próbka radu ^{226}Ra o masie 10 g po 1600 latach będzie zawierać 5 g tego pierwiastka, a po kolejnych 1600 latach — tylko 2,5 g.

6. Przeczytaj ciekawostkę. Masa m pierwiastka promieniotwórczego po upływie czasu t wynosi:

$$m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

gdzie m_0 — masa początkowa pierwiastka, T — okres połowicznego rozpadu (podany w tej samej jednostce czasu co t).

a) Wykaż, że ten wzór jest zgodny z informacją o rozpadzie radu ^{226}Ra podaną w ciekawostce.

b) Okres połowicznego rozpadu izotopu cynku ^{65}Zn wynosi 244 dni. Pewna próbka zawiera 5 g tego izotopu. Oblicz masę ^{65}Zn w tej próbce po 2 latach.

c) Okres połowicznego rozpadu izotopu irydu ^{195}Ir wynosi 2,5 godziny. Oblicz, po jakim czasie zawartość tego izotopu w próbce zmniejszy się z 1 mg do 0,1 mg.

d) Zawartość izotopu ceszu ^{137}Cs w próbce zmniejszyła się w ciągu 6 lat z 2 g do 1,74 g. Oblicz okres połowicznego rozpadu tego izotopu.

Jednym z występujących w przyrodzie izotopów węgla jest ^{14}C . Okres połowicznego rozpadu ^{14}C wynosi około 5715 lat. Każdy żywy organizm absorbuje z otoczenia węgiel ^{12}C oraz izotop ^{14}C . Tak długo, jak żyje roślina, zwierzę czy człowiek, stosunek liczby atomów ^{12}C do ^{14}C w organizmie się nie zmienia (1 atom ^{14}C przypada na 1012 atomów ^{12}C). Po śmierci organizmu atomy ^{14}C ulegają rozpadowi, a atomy ^{12}C — nie. Zatem im więcej czasu upływa od śmierci organizmu, tym większa jest przewaga liczby atomów ^{12}C nad liczbą atomów ^{14}C . Amerykański fizyk Willard F. Libby w 1946 roku opracował metodę, która pozwala wykorzystać to zjawisko do określenia wieku znalezisk pochodzenia organicznego. W tym celu spala się niewielką próbkę znaleziska i otrzymany dwutlenek węgla przepuszcza przez urządzenie, które rozdziela atomy ^{12}C i ^{14}C na podstawie różnicy ich mas. To pozwala określić, jak zmieniła się zawartość

izotopu ^{14}C w znalezisku w porównaniu z zawartością ^{14}C w żywym organizmie, a w konsekwencji — wiek znaleziska.

Na przykład stwierdzono, że masa izotopu ^{14}C w znalezisku to tylko 90% masy tego izotopu, jaką zawierałby żywy organizm. Korzystając ze wzoru:

$$m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}, \text{ gdzie } T = 5715,$$

otrzymujemy:

$$0,9m_0 = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5715}}$$

$$0,9 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5715}}$$

$$\log 0,9 = \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5715}}$$

$$\log 0,9 = \frac{t}{5715} \cdot \log \frac{1}{2}$$

$$t = 5715 \cdot \frac{\log 0,9}{\log \frac{1}{2}}$$

$$t \approx 870$$

Wynika stąd, że znalezisko pochodzi sprzed około 870 lat.

7. Przeczytaj ciekawostkę.

a) Odkrywcą pewnego egipskiego grobowca twierdzi, że jego znalezisko pochodzi z okresu Średniego Państwa (około 2 tys. lat p.n.e.). Ponieważ niektórzy uczeni są innego zdania, przedmioty z grobowca będą poddane badaniom wieku metodą opartą na pomiarze zawartości izotopu ^{14}C . Jakiego procentu początkowej masy izotopu należy się spodziewać w znaleziskach, jeżeli ich odkrywca ma rację?

b) Pewien ekspert ma wątpliwości, czy obraz w muzeum jest dziełem wielkiego włoskiego malarza Giotto di Bondone (czyt. dziotta di bondone) (1266–1337). Po zbadaniu zawartości izotopu węgla ^{14}C w płótnie i farbach okazało się, że stanowi ona 95% początkowej masy tego izotopu. Czy autorem obrazu mógł być Giotto?

c) W połowie XX wieku pewien genialny fałszerz podrobił obrazy jednego z najwybitniejszych malarzy holenderskich Johanna Vermeera (1632–1675). Fałszerstwo udowodniono — mierząc zawartość izotopu ^{14}C . Jaki procent początkowej masy izotopu powinny zawierać płótno i farby, gdyby pochodziły z obrazu Vermeera?

d) Najstarszymi świadectwami operacji chirurgicznych przeprowadzanych przez naszych przodków są czaszki z wyciętymi otworami znalezione w Peru. Badania wykazały, że czaszki te zawierają zaledwie 23% początkowej masy ^{14}C . Sprzed ilu lat pochodzą te znaleziska?

Ciekawostka

Przedmiot umieszczony w otoczeniu o temperaturze niższej niż temperatura przedmiotu zacznie stygnąć. Gdy temperatura otoczenia jest stała, to temperaturę T przedmiotu po upływie czasu t opisuje wzór:

$$T(t) = T_0 + (T_p - T_0)a^t$$

T_0 — temperatura otoczenia (w $^{\circ}\text{C}$)

T_p — początkowa temperatura przedmiotu (w $^{\circ}\text{C}$)

a — stała charakterystyczna dla danego przedmiotu

8. Przeczytaj ciekawostkę. W laboratorium, w którym panowała temperatura 20°C , mierzono temperaturę herbaty w kubku. Wyniki pomiarów przedstawiono w tabeli. Znajdź wzór opisujący, jak się zmienia temperatura herbaty w zależności od czasu.

Czas t (w minutach)	0	1	5	10
Temperatura herbaty (w $^{\circ}\text{C}$)	90	81,6	56,9	39,5

9. Ciasto wyjęte z piekarnika stygnie w kuchni, w której panuje temperatura 25°C . Temperaturę ciasta (w $^{\circ}\text{C}$) po upływie t minut można obliczyć ze wzoru:

$$T(t) = 25 + 200 \cdot 0,9^t$$

- a) Jaką temperaturę miało ciasto zaraz po wyjęciu z piekarnika?
- b) Jaką temperaturę będzie miało ciasto po upływie 10 minut?
- c) Kiedy ciasto ostygnie do temperatury 30°C ?

- 10.** Z przedstawionego w powyższej ciekawostce wzoru $T = T_0 + (T_p - T_0)a^t$ korzystają specjaliści medycyny sądowej, określając czas, jaki upłynął od śmierci denata. Przyjmijmy, że policja znalazła zwłoki o godzinie 18^{00} oraz że temperatura ciała ofiary wynosiła 30° , a temperatura otoczenia, podobnie jak przez całe popołudnie, wynosiła 10°C . Przyjmijmy też, że po upływie godziny temperatura otoczenia się nie zmieniła, ale ciało ostygło do 28°C . Oblicz, o której godzinie nastąpił zgon.

Warto wiedzieć!

Niech a będzie liczbą naturalną. Liczba $\log a$ ma związek z liczbą jej cyfr. Zauważmy, że gdy $1 \leq a < 10$, to liczba a jest jednocyfrowa, gdy $10 \leq a < 100$, to liczba a jest dwucyfrowa. Ogólnie: gdy $10^n \leq a < 10^{n+1}$, to liczba a ma $n+1$ cyfr. Funkcja $y = \log x$ jest rosnąca, więc:

$$\log 10^n \leq \log a < \log 10^{n+1}$$

Stąd: $n \leq \log a < n+1$.

Aby zatem ustalić, ile cyfr ma na przykład liczba 3^{100} , wystarczy obliczyć jej logarytm dziesiętny i sprawdzić, między jakimi kolejnymi liczbami naturalnymi on się znajduje.

$$\log 3^{100} = 100 \log 3 \approx 47,7$$

Ponieważ $47 \leq \log 3^{100} < 48$, więc liczba 3^{100} ma 48 cyfr.

11. Przeczytaj informacje w ramce.

- a) Oblicz, ile cyfr ma liczba 2^{1410} zapisana w systemie dziesiętnym.
- b) Znajdź w internecie, jaka jest największa znana liczba pierwsza. Oblicz, ile ona ma cyfr.

MINISPRAWDZIAN

51. Przeczytaj informacje na s. 110. Poziom głośności dźwięku wydawanego przez pracujący odkurzacze jest równy 60 dB. Jaki byłby poziom głośności hałasu spowodowanego jednoczesną pracą 100 takich odkurzaczy?

- A. 70 dB B. 80 dB C. 160 dB D. 600 dB

52. Przeczytaj ciekawostkę na s. 114. Okres połowicznego rozpadu izotopu francu ^{223}Fr wynosi 22 minuty. Po jakim czasie zawartość tego izotopu w próbce zmniejszy się z 1 mg do 0,8 mg? Wynik zaokrąglaj do jednej minuty.

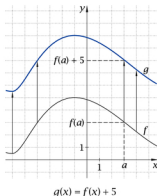
- A. po 1 min B. po 7 min C. po 11 min D. po 18 min

PRZEKSZTAŁCANIE WYKRESÓW FUNKCJI

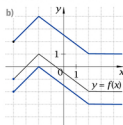
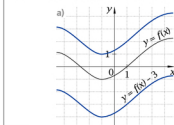
- 1 Popatrz na rysunek obok. Wartość funkcji g dla argumentu x jest o 5 większa od wartości funkcji f dla tego argumentu. Można więc powiedzieć, że dla każdego argumentu x funkcja g przyjmuje wartość równą $f(x) + 5$.

Wykres funkcji g powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o 5 jednostek w górę.

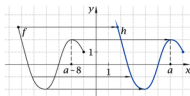
Uwaga. Mówiąc: „przesunięcie w górę”, będziemy mieli na myśli przesunięcie w kierunku zgodnym ze zwrotem osi y , a mówiąc: „przesunięcie w dół” — przesunięcie w kierunku przeciwnym.



ĆWICZENIE A Każdy z poniższych wykresów powstał przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$. Jeden z wykresów został opisany. Opisz pozostałe.



Popatrz na poniższy rysunek. Wartość funkcji h dla argumentu x jest taka sama, jak wartość funkcji f dla argumentu o 8 mniejszego od x .

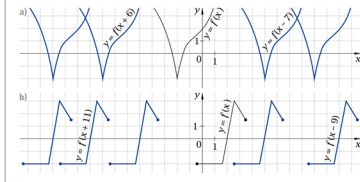


$$h(x) = f(x - 8)$$

Wykres funkcji h powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o 8 jednostek w prawo.

Uwaga. Mówiąc: „przesunięcie w prawo”, będziemy mieli na myśli przesunięcie w kierunku zgodnym ze zwrotem osi x , a mówiąc: „przesunięcie w lewo” — przesunięcie w kierunku przeciwnym.

ĆWICZENIE B Każdy z poniższych wykresów powstał przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$. Niektóre wykresy zostały opisane. Opisz pozostałe.



PRZYKŁAD 1 Dana jest funkcja $f(x) = \frac{2-x}{x^2} + 1$. Znajdź wzór funkcji, której wykres otrzymamy po przesunięciu wykresu funkcji f :

a) o 5 jednostek w górę

$$g(x) = f(x) + 5$$

$$g(x) = \frac{2-x}{x^2} + 1 + 5$$

$$g(x) = \frac{2-x}{x^2} + 6$$

b) o 5 jednostek w prawo

$$h(x) = f(x - 5)$$

$$h(x) = \frac{2-(x-5)}{(x-5)^2} + 1$$

$$h(x) = \frac{7-x}{(x-5)^2} + 1$$

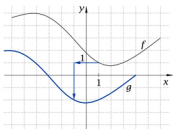
ZADANIE Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 2x^2 - 3x$. Znajdź wzór funkcji, której wykres otrzymamy po przesunięciu wykresu funkcji f :

a) o 7 jednostek w górę,

b) o 6 jednostek w lewo.

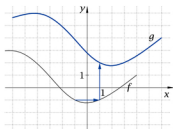
- II Na każdym z poniższych rysunków przedstawiono wykres funkcji f i wykres, który powstał w wyniku jego przesunięcia, w poziomie i w pionie. Pod rysunkami zapisano wzory otrzymanych funkcji.

Wykres funkcji f przesunięto
o 2 jednostki w lewo
i o 3 jednostki w dół.



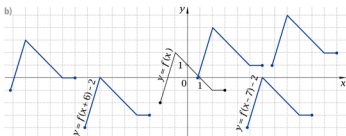
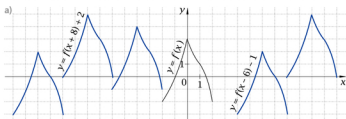
$$g(x) = f(x + 2) - 3$$

Wykres funkcji f przesunięto
o 2 jednostki w prawo
i o 3 jednostki w górę.



$$h(x) = f(x - 2) + 3$$

ĆWICZENIE C Każdy z poniższych wykresów powstał przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$. Niektóre wykresy zostały opisane. Opisz pozostałe.



ĆWICZENIE D Jak należy przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji h określonej wzorem $h(x) = f(x + 1) + 4$?

W tabeli zebrano przykłady ilustrujące, jak zmienia się wzór funkcji przy różnych przesunięciach.

Sposób przesunięcia wykresu funkcji $y = f(x)$		Otrzymana funkcja
w poziomie	w pionie	
o 5 jednostek w prawo $\rightarrow$	o 3 jednostki w górę $\uparrow$	$y = f(x - 5) + 3$
o 4 jednostki w prawo $\rightarrow$	o 2 jednostki w dół $\downarrow$	$y = f(x - 4) - 2$
o 7 jednostek w lewo $\leftarrow$	o 1 jednostkę w górę $\uparrow$	$y = f(x + 7) + 1$
o 6 jednostek w lewo $\leftarrow$	o 8 jednostek w dół $\downarrow$	$y = f(x + 6) - 8$

PRZYKŁAD 2 Znajdź wzór funkcji, której wykres otrzymamy po przesunięciu wykresu funkcji $f(x) = 4x^3 + 5x + 1$ o 2 jednostki w lewo i o 7 jednostek w górę.

$$y = f(x + 2) + 7$$

$$y = 4(x + 2)^3 + 5(x + 2) + 1 + 7$$

$$y = 4(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) + 5x + 10 + 8$$

$$y = 4x^3 + 24x^2 + 53x + 50$$

ZADANIE Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{2}{x} + 5x$. Znajdź wzór funkcji, której wykres otrzymamy w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o 6 jednostek w lewo i o 4 jednostki w dół.

zadania 9–20 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Zapisz wzór funkcji, której wykres otrzymamy po przesunięciu wykresu funkcji $y = f(x)$ o 7 jednostek:

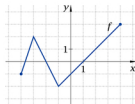
- a) w górę b) w lewo c) w dół d) w prawo

2. Na rysunku obok przedstawiono wykres pewnej funkcji f . Narysuj wykres funkcji:

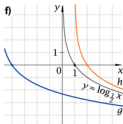
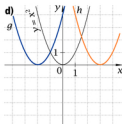
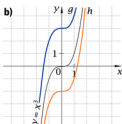
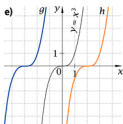
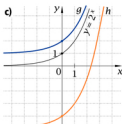
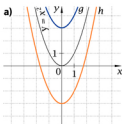
- a) $y = f(x - 2)$ c) $y = f(x + 4)$
b) $y = f(x) + 1$ d) $y = f(x) - 3$

3. Narysuj wykres dowolnej funkcji. Oznacz ją literą f . Narysuj wykres funkcji, którą opisuje równość:

- a) $y = f(x) + 3$ b) $y = f(x) - 3$ c) $y = f(x + 3)$ d) $y = f(x - 3)$



4. Wykresy funkcji g i h powstały w wyniku przesunięcia wykresu funkcji, której wzór podano na rysunku. Zapisz wzory funkcji g i h .



5. Przesuwając wykres funkcji f , można otrzymać wykres funkcji g . Podaj sposób przesunięcia, jeśli:

a) $f(x) = 5^x$ $g(x) = 5^{x+3}$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ $g(x) = \frac{1}{x} - 2$

b) $f(x) = 2x^3$ $g(x) = 2(x-11)^3$

d) $f(x) = \log_7 x$ $g(x) = 8 + \log_7 x$

6. a) W wyniku przesunięcia wykresu funkcji $f(x) = -3x^2 + 2$ równoległe do osi y otrzymano wykres funkcji $g(x) = -3x^2 - 7$. Jak przesunięto wykres funkcji f ?

b) W wyniku przesunięcia wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{x+1} - 5$ równoległe do osi x otrzymano wykres funkcji $g(x) = \frac{4}{x+3} - 5$. Jak przesunięto wykres funkcji f ?

7. Jak należy przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji g ?

a) $f(x) = \sqrt{x+2}$ $g(x) = \sqrt{x+7}$

b) $f(x) = \frac{3}{x} + 7$ $g(x) = \frac{3}{x} - 2$

c) $f(x) = 3^{x+4} + 2x - 3$ $g(x) = 3^{x+4} + 2x + 6$

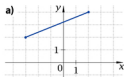
d) $f(x) = \log(x-3) + x$ $g(x) = \log(x+2) + x + 5$

8. Ustal, jak należy przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji g .

a) $f(x) = \sqrt{2x}$, $g(x) = \sqrt{2x+8}$

b) $f(x) = (2-x)^3$, $g(x) = (5-x)^3$

9. Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji f . Narysuj wykresy funkcji podanych pod rysunkiem.



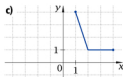
$$y = f(x - 3)$$

$$y = f(x - 3) - 5$$



$$y = f(x - 4)$$

$$y = f(x - 4) + 1$$

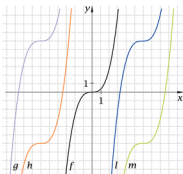


$$y = f(x + 5)$$

$$y = f(x + 5) - 3$$

10. Oznaczone kolorami wykresy otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{3}x^3$. Dopasuj poniższe wzory do wykresów.

- ① $y = \frac{1}{3}(x - 6)^3 - 6$
 ② $y = \frac{1}{3}(x - 6)^3 + 6$
 ③ $y = \frac{1}{3}(x + 6)^3 - 6$
 ④ $y = \frac{1}{3}(x + 6)^3 + 6$



11. Zapisz wzór funkcji, której wykres otrzymamy po przesunięciu:

- a) wykresu funkcji $y = 2x^2$ o 1 jednostkę w prawo i o 6 jednostek w górę,
 b) wykresu funkcji $y = 5^x$ o 5 jednostek w lewo i 2 jednostki w górę,
 c) wykresu funkcji $y = \log x$ o 2 jednostki w prawo i o 3 jednostki w dół,
 d) wykresu funkcji $y = 3x^2 - 1$ o 1 jednostkę w lewo i o 5 jednostek w górę.

12. Zapisz wzór funkcji, której wykres otrzymamy po przesunięciu:

- a) wykresu funkcji $f(x) = \frac{x}{2x+1}$ o 2 jednostki w prawo i o 5 jednostek w dół,
 b) wykresu funkcji $f(x) = (x+3)(x-4)$ o 3 jednostki w lewo i o 1 jednostkę w górę,
 c) wykresu funkcji $f(x) = x^3 + 3^x$ o 1 jednostkę w lewo i o 4 jednostki w górę.

13. Przesuwając wykres funkcji f , można otrzymać wykres funkcji g . Podaj sposób przesunięcia, jeśli:

- a) $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = \sqrt{x-1} + 7$ c) $f(x) = \log x$ $g(x) = \log(x-3) + 5$
 b) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+5} - 4$ d) $f(x) = -2x^3$ $g(x) = -2(x+1)^3 - 8$

14. Jak należy przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji g ?

a) $f(x) = 3^x$, $g(x) = 9 \cdot 3^x$

c) $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_2 32x$

b) $f(x) = 5^x$, $g(x) = \frac{5^x}{125}$

d) $f(x) = \log x$, $g(x) = \log 0,0001x$

15. Jak należy przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji g ?

a) $f(x) = 2(x-3)^3 + 5$, $g(x) = 2(x+3)^3$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x-2} + x$, $g(x) = \sqrt[3]{x+4} + x + 1$

b) $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = (x-1)^2 + x - 2$

d) $f(x) = \frac{2}{x+5} - 3x$, $g(x) = \frac{2}{x} - 3x$

16. a) Miejscem zerowym pewnej funkcji f jest liczba 5. Jaka liczba jest miejscem zerowym funkcji $y = f(x+3)$? Jaka liczba jest miejscem zerowym funkcji $y = f(x-7)$?

b) Czy funkcja f i funkcja $y = f(x) + 3$ mogą mieć to samo miejsce zerowe?

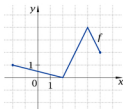
17. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$.

a) Znajdź najmniejszą wartość funkcji $y = f(x-50) + 30$.

b) W jakim przedziale funkcja $y = f(x+70) - 60$ jest rosnąca?

c) Znajdź miejsce zerowe funkcji $y = f(x+100) - 4$.

d) Dla jakich argumentów funkcja $y = f(x-40) - 2$ przyjmuje wartości dodatnie?



18. Dziedzina funkcji f jest zbiór $(-3; 7)$, a zbiorem wartości jest przedział $(-1; 4)$. Określ dziedzinę i zbiór wartości funkcji, której wykres otrzymamy po przesunięciu wykresu funkcji f :

a) o 5 jednostek w prawo,

b) o 7 jednostek w dół,

c) o 3 jednostki w lewo i o 4 jednostki w górę.

19. Funkcja f jest rosnąca tylko w przedziale $(-2; 5)$. Określ przedział, w którym funkcja g jest rosnąca.

a) $g(x) = f(x-5)$

b) $g(x) = f(x+10)$

c) $g(x) = f(x+7) - 3$

20. Wykres funkcji $f(x) = -3x + 7$ przesunięto o 2 jednostki w prawo i o 6 jednostek w górę i otrzymano prostą p .

a) Wykaż, że tę prostą można również otrzymać, przesuując wykres funkcji f o 4 jednostki w prawo albo o 12 jednostek w górę.

b) Jak jeszcze inaczej można przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać prostą p ?

MINISPRAWDZIAN

51. Po przesunięciu wykresu funkcji $y = x^5$ o trzy jednostki w prawo otrzymamy wykres funkcji:

- A. $y = x^5 + 3$ C. $y = (x + 3)^5$
 B. $y = x^5 - 3$ D. $y = (x - 3)^5$

52. Na rysunku obok przedstawiono fragment wykresu funkcji f . Który z poniższych rysunków przedstawia fragment wykresu funkcji $y = f(x + 2)$?



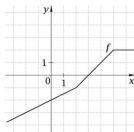
53. Wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x+2} - 5$ można otrzymać z wykresu funkcji $g(x) = \sqrt{x}$ w wyniku przesunięcia:

- A. o 2 jednostki w lewo i o 5 jednostek w dół
 B. o 2 jednostki w prawo i 5 jednostek w dół
 C. o 5 jednostek w lewo i o 2 jednostki w górę
 D. o 5 jednostek w prawo i o 2 jednostki w górę

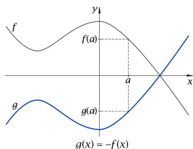
PRZEKSZTAŁCANIE WYKRESÓW FUNKCJI (CD.)

I ĆWICZENIE Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .

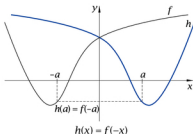
- a) Niech funkcja g będzie określona wzorem $g(x) = -f(x)$. Korzystając z wykresu funkcji f , ustal, jaką wartość przyjmuje funkcja g dla argumentu -2 , a jaką — dla argumentu 3 .
- b) Niech funkcja h będzie określona wzorem $h(x) = f(-x)$. Korzystając z wykresu funkcji f , ustal, jaką wartość przyjmuje funkcja h dla argumentu -2 , a jaką — dla argumentu 3 .



Na każdym z rysunków jest przedstawiony wykres pewnej funkcji f oraz jego odbicie symetryczne.



Wykres funkcji g powstał przez odbicie symetryczne wykresu funkcji f względem osi x . Dla każdego argumentu x wartości funkcji g i f są liczbami przeciwnymi. Zatem dla argumentu x funkcja g przyjmuje wartość $-f(x)$.



Wykres funkcji h powstał przez odbicie symetryczne wykresu funkcji f względem osi y . Dla każdego argumentu x wartość funkcji h jest taka sama jak wartość funkcji f dla argumentu $-x$.

PRZYKŁAD 1 Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^3 - \frac{1}{1-x}$.

a) Zapisz wzór funkcji g , której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi x .

$$g(x) = -f(x) = -\left(x^3 - \frac{1}{1-x}\right) = -x^3 + \frac{1}{1-x}$$

$$\underline{g(x) = -x^3 + \frac{1}{1-x}}$$

b) Zapisz wzór funkcji h , której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi y .

$$h(x) = f(-x) = (-x)^3 - \frac{1}{1-(-x)} = -x^3 - \frac{1}{1+x}$$

$$\underline{h(x) = -x^3 - \frac{1}{1+x}}$$

ZADANIE Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 3x^2 - x + 7$. Znajdź wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku odbicia symetrycznego wykresu funkcji f :

a) względem osi x ,

b) względem osi y .

II PRZYKŁAD 2 Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{2x-1} + 3$ przekształcono najpierw przez symetrię względem osi y , potem przez symetrię względem osi x , a następnie przesunięto o 5 jednostek w lewo i o 2 jednostki w dół. Zapisz wzór funkcji, której wykres otrzymano.

$$f(x) = \frac{1}{2x-1} + 3$$

$$f_1(x) = f(-x) = \frac{1}{2(-x)-1} + 3 = \frac{1}{-2x-1} + 3$$

$$f_1(x) = \frac{1}{-2x-1} + 3$$

$$f_2(x) = -f_1(x) = -\left(\frac{1}{-2x-1} + 3\right) = \frac{1}{2x+1} - 3$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2x+1} - 3$$

$$f_3(x) = f_2(x+5) - 2 = \frac{1}{2(x+5)+1} - 3 - 2$$

$$f_3(x) = \frac{1}{2x+11} - 5$$

Zapisujemy wzór funkcji f_1 , której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi y .

Zapisujemy wzór funkcji f_2 , której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f_1 względem osi x .

Zapisujemy wzór funkcji f_3 , której wykres otrzymano, przesuwając wykres funkcji f_2 o 5 jednostek w lewo i o 2 jednostki w dół.

ZADANIE Wykres funkcji $f(x) = 6\sqrt{x+4} - 2x$ najpierw przekształcono przez symetrię względem osi y , potem przez symetrię względem osi x , a następnie przesunięto o 7 jednostek w lewo i o 5 jednostek w górę. Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymano.

PRZYKŁAD 3 Korzystając z wykresu funkcji $y = \sqrt{x}$, narysuj wykres funkcji

$$y = -\sqrt{x+3} - 2.$$

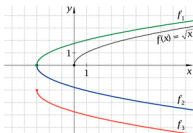
$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f_1(x) = f(x+3), \text{ czyli } f_1(x) = \sqrt{x+3}$$

$$f_2(x) = -f_1(x), \text{ czyli } f_2(x) = -\sqrt{x+3}$$

$$f_3(x) = f_2(x) - 2, \text{ czyli } f_3(x) = -\sqrt{x+3} - 2$$

Zapisujemy wzory funkcji, które możemy otrzymać po kolejnych przekształceniach.



Kolejność przekształceń:

1. Przesuwamy wykres funkcji f o 3 jednostki w lewo i otrzymujemy wykres funkcji f_1 .
2. Odbijamy wykres funkcji f_1 względem osi x , otrzymujemy wykres funkcji f_2 .
3. Przesuwamy wykres funkcji f_2 o 2 jednostki w dół i otrzymujemy wykres funkcji f_3 .

ZADANIE Korzystając z wykresu funkcji $y = \sqrt{x}$, narysuj wykres funkcji $y = \sqrt{-x} + 4$.

zadania 9–16 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Narysuj wykres funkcji f oraz jego odbicia symetryczne względem osi x oraz względem osi y . Zapisz wzory otrzymanych funkcji.

a) $f(x) = x - 2$ b) $f(x) = (x - 3)(x + 2)$ c) $f(x) = 2^x$ d) $f(x) = \log x$

2. Wykres funkcji $f(x) = x^3$ odbito symetrycznie względem osi x . Uzasadnij, że gdybyśmy wykres funkcji f odbili symetrycznie względem osi y , to otrzymalibyśmy tę samą funkcję.

3. Dziedzina funkcji f jest zbiór $(-1; 15)$. Podaj dziedzinę funkcji g , gdy:

a) $g(x) = -f(x)$ b) $g(x) = f(-x)$ c) $g(x) = -f(-x)$

4. Jedynym miejscem zerowym pewnej funkcji f określonej na zbiorze liczb rzeczywistych jest liczba -7 . Znajdź miejsce zerowe funkcji g , jeśli:

a) $g(x) = -f(x)$ b) $g(x) = f(-x)$ c) $g(x) = -f(-x)$

5. Funkcja f jest określona na zbiorze liczb rzeczywistych i jest rosnąca. Ustal, która z funkcji g , h , j też jest rosnąca, a która — malejąca, jeśli:

$$g(x) = f(-x) \qquad h(x) = -f(x) \qquad j(x) = -f(-x)$$

6. Zapisz wzór funkcji g , której wykres otrzymamy w wyniku przekształcenia:

- a) wykresu funkcji $f(x) = 5x - 2$ przez symetrię względem osi x ,
- b) wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ przez symetrię względem osi y .
- c) wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 1$ przez symetrię względem osi y .
- d) wykresu funkcji $f(x) = (x - 5)^2 - 3$ przez symetrię względem osi x .

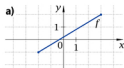
7. Wykres funkcji g jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi x , a wykres funkcji h jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi y . Zapisz wzory funkcji g i h , gdy:

a) $f(x) = -5x^4 - 2x + 3$ c) $f(x) = \frac{5x}{2x-1} - 4$ e) $f(x) = 3 \cdot 7^x - 2x^3$
b) $f(x) = 3x\sqrt{x} - 3$ d) $f(x) = 6 - \frac{x}{2} - \frac{3}{1-x}$ f) $f(x) = \sqrt{x-2} - (4-x)^2$

8. a) Uzasadnij, że dla $a > 0$ wykres funkcji $f(x) = a^x$ jest symetryczny względem osi y do wykresu funkcji $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$.

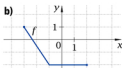
- b) Uzasadnij, że dla $a > 0$ i $a \neq 1$ wykres funkcji $f(x) = \log_a x$ jest symetryczny do wykresu funkcji $g(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$ względem osi x .

9. Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji f . Narysuj wykresy funkcji podanych pod rysunkiem.



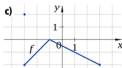
$$g(x) = -f(x) + 1$$

$$h(x) = -f(x + 1)$$



$$g(x) = f(-x) + 1$$

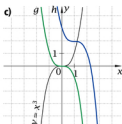
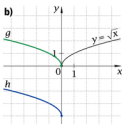
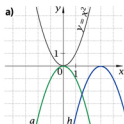
$$h(x) = -f(-x)$$



$$g(x) = 1 - f(x)$$

$$h(x) = -1 - f(x - 1)$$

10. Wykresy funkcji g i h powstały w wyniku przekształcenia wykresu funkcji, której wzór podano na rysunku. Zapisz wzory funkcji g i h .



11. Znajdź wzór funkcji, której wykres powstaje w wyniku przekształcenia:

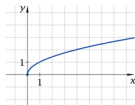
- a) wykresu funkcji $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{x}$ najpierw przez symetrię względem osi x , a następnie przez przesunięcie o 4 jednostki w dół,
 b) wykresu funkcji $f(x) = 3x\sqrt{x-1}$ najpierw przez przesunięcie o 4 jednostki w dół, a następnie przez symetrię względem osi y ,
 c) wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x+7} - \frac{1}{x-7}$ najpierw przez przesunięcie o 7 jednostek w prawo, a następnie przez symetrię względem osi y .

12. Narysuj wykres funkcji $y = 2^x$, a następnie wykres funkcji:

- a) $y = -2^{x-3}$ b) $y = 2^{-x} + 5$ c) $y = 3 - 2^{x+1}$

13. Na rysunku obok został przedstawiony wykres funkcji $y = \sqrt{x}$. Przekształcając odpowiednio ten wykres, narysuj wykres funkcji:

- a) $y = -\sqrt{x+5}$ d) $y = -\sqrt{-x} - 4$
 b) $y = 2 - \sqrt{x}$ e) $y = 1 - \sqrt{x-3}$
 c) $y = 3 + \sqrt{-x}$ f) $y = -\sqrt{x+2} - 4$



- **14. a)** Jak należy przekształcać wykres funkcji $y = \sqrt{x}$, aby otrzymać wykres funkcji $y = \sqrt{-x-2}$?
- b)** Jak należy przekształcać wykres funkcji $y = \sqrt{x-2}$, aby otrzymać wykres funkcji $y = \sqrt{-x+2}$?

15. Funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty; 2)$ i rosnąca w przedziale $(2; +\infty)$. Określ przedziały, w których malejąca jest funkcja g .

- a)** $g(x) = -f(x) + 2$ **b)** $g(x) = -f(x - 3)$ **c)** $g(x) = 3 + f(-x)$

16. a) Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie tylko w przedziale $(-5; 1)$. W jakim przedziale funkcja $g(x) = -f(x - 2)$ przyjmuje wartości ujemne?

b) Funkcja f przyjmuje największą wartość równą -4 dla argumentu 3. Podaj największą wartość funkcji $g(x) = 5 + f(-x)$ i argument, dla którego jest przyjmowana.

c) Funkcja f przyjmuje wartość 3 tylko dla argumentów -10 i 5 . Dla jakich argumentów przyjmuje tę wartość funkcja $g(x) = 6 - f(-x)$?

MINISPRAWDZIAN

51. Dziedzina funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych. Które z poniższych zdań jest zawsze prawdziwe?

- A. Jeśli funkcja $y = f(x)$ jest rosnąca, to funkcja $y = f(-x)$ też jest rosnąca.
 B. Jeśli funkcja $y = f(x)$ jest malejąca, to funkcja $y = -f(x)$ jest rosnąca.
 C. Funkcje $y = f(x)$ i $y = f(-x)$ mają zawsze te same miejsca zerowe.
 D. Funkcje $y = f(x)$ i $y = -f(x)$ przecinają oś y w tym samym punkcie.

52. Po odbiciu symetrycznym wykresu funkcji $y = \frac{3x}{1+x}$ względem osi x otrzymamy wykres funkcji:

- A. $y = \frac{3x}{1-x}$ B. $y = \frac{3x}{-1-x}$ C. $y = \frac{-3x}{1-x}$ D. $y = \frac{-3x}{-1+x}$



53. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = x^3 + 2x^2$. Na którym rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = -x^3 - 2x^2$?



POWTÓRZENIE

1. Funkcja jest określona następująco:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & \text{dla } x < 2 \\ -x + 5 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$$

Znajdź miejsca zerowe tej funkcji, ustal, jaką największą wartość przyjmuje oraz dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości ujemne, a dla jakich — wartości dodatnie.

2. Dla funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ określ:

- argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie,
- przedziały monotoniczności.

3. Określ dziedzinę funkcji.

a) $y = \frac{2x-3}{3x-2}$ b) $y = \sqrt{5x+1}$

4. Dopasuj wzory funkcji do wykresów.

$f(x) = 1,5^x$ $g(x) = 2,7^x$

$h(x) = 0,7^x$ $k(x) = \left(\frac{8}{9}\right)^x$



5. a) Znajdź wzór funkcji wykładniczej, której wykres przechodzi przez punkt $A = \left(-2, \frac{16}{9}\right)$.

b) Znajdź wzór funkcji logarytmicznej, której wykres przechodzi przez punkt $P = (9, -2)$.

6. Rozwiąż równanie.

a) $5^x = \frac{\sqrt{5}}{25}$ c) $5 - 2 \cdot 3^x = 1$

b) $2 \cdot 4^x = \sqrt[3]{16}$ d) $300 + 200 \cdot 3^x = 400$

7. Rozwiąż równanie.

a) $4 - 2 \log_9 x = 7$

b) $\frac{1}{3} \log x + \log 2 = \log 6$

c) $2 \log_2 x - \log_2 9 = 6$

8. Poniżej podano wzory, za pomocą których można oszacować liczbę ludności w Bułgarii i w Holandii po upływie t lat od 2002 roku.

Bułgaria: $L_B = 7\,600\,000 \cdot 0,99^t$

Holandia: $L_H = 16\,100\,000 \cdot 1,005^t$

Korzystając z tych wzorów, odpowiedz na pytania:

a) W którym z tych krajów liczba ludności z roku na rok rośnie, a w którym — maleje?

b) Jaka była liczba ludności w tych krajach w 2002 roku, a jakiej można było się spodziewać w roku 2005?

9. Zapisz wzór funkcji, której wykres otrzymasz w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = \frac{2}{x+1}$:

a) o 3 jednostki w prawo,

b) o 2 jednostki w lewo i 3 jednostki do góry.

10. Zapisz wzór funkcji, której wykres otrzymasz w wyniku odbicia symetrycznego wykresu funkcji $y = \frac{5}{2x-1}$ względem: a) osi x , b) osi y .

11. W jaki sposób należy przekształcić wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji g ?

a) $f(x) = \frac{1}{x^4}$ $g(x) = \frac{1}{(x-1)^4} - 3$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = \sqrt{-x}$

c) $f(x) = 3^x$ $g(x) = -3^x + 5$

Figury na płaszczyźnie część 2

*Wyobraź sobie, że stoisz na plaży w pogodny dzień i patrzysz na morze.
Jak daleko linia horyzontu jest od twoich oczu?*



Pole koła. Długość okręgu ■ Własności kątów środkowych i kątów wpisanych ■ Proste i okręgi ■ Okrąg opisany na trójkącie. Okrąg wpisany w trójkąt ■ Własności wielokątów. Wielokąty foremne ■ Powtórzenie

POLE KOŁA. DŁUGOŚĆ OKRĘGU

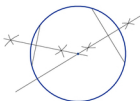
ĆWICZENIE A Jak narysować na piasku okrąg, mając do dyspozycji sznurek? Opisz słowami, jaką figurę nazywamy okręgiem, a jaką — kołem. Co nazywamy cięciwą okręgu, a co — średnicą?

Przypomnijmy, że **okrąg o środku S i promieniu r** to zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest równa r .

Koło o środku O i promieniu r to zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest mniejsza od r lub równa r .

ĆWICZENIE B Niech $o(S, r)$ oznacza okrąg o środku S i promieniu r i niech $k(S, r)$ oznacza koło o środku S i promieniu r . Punkty należące do okręgu spełniają warunek: $P \in o(S, r) \Leftrightarrow |PS| = r$. Zapisz podobny warunek dla koła.

Warto wiedzieć



Środek okręgu leży na symetralnej każdej cięciwy okręgu, gdyż jest jednakowo odległy od końców tej cięciwy. Wobec tego aby wyznaczyć konstrukcyjnie środek danego okręgu, wystarczy narysować dwie nierównoległe cięciwy i skonstruować ich symetralne. Punkt przecięcia tych symetralnych jest szukanym środkiem okręgu.

Już w czasach starożytnych zauważono, że stosunek długości okręgu do długości jego średnicy jest dla wszystkich okręgów taki sam (niezależnie od wielkości okręgu). Liczba równa temu stosunkowi jest niewymierna i oznaczamy ją literą π .

$$\frac{\text{długość okręgu}}{\text{długość średnicy}} = \pi$$

Oto kilkanaście początkowych cyfr rozwinięcia dziesiętnego tej liczby:

$$\pi = 3,14159265358979 \dots$$



Długość okręgu:
 $l = 2\pi r$



Pole koła:
 $P = \pi r^2$

Oznaczenie stosunku długości okręgu do długości średnicy literą π być może wzięło się stąd, że jest to pierwsza litera greckiego słowa *περίμετρος* (perimetros) — obwód.

Od wieków stosowane były rozmaite przybliżenia liczby π . Na przykład z pewnego fragmentu Biblii (I Księga Królewska, rozdział 7, 23) wynika, że w czasach biblijnych przyjmowano $\pi \approx 3$. Egipcjanie (XX w. p.n.e.) przyjmowali $\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2$, a Archimedes (III w. p.n.e.) przyjął $\pi \approx \frac{22}{7}$.

Także w czasach nowożytnych starano się podać jak najdokładniejszą wartość π . W 1610 r. holenderski uczony Ludolph van Ceulen (czyt. ludolf fan kylen) podał 35 cyfr po przecinku liczby π . Na jego cześć liczba π nazywana jest czasem ludolfiną.

Wykorzystując komputery, w roku 2016 ustalono około 22,5 biliona cyfr po przecinku liczby π . Obliczenia zajęły 105 dni. Liczba π jest niewymierna, co oznacza, że cyfry jej rozwinięcia dziesiętnego pojawiają się nieregularnie. Ciekawostką jest, że w tym rozwinięciu można znaleźć dowolną sekwencję kilku cyfr. Na przykład sekwencja 01052004, czyli kolejne cyfry daty przystąpienia Polski do Unii Europejskiej, pojawiają się w pierwszych 100 milionach cyfr po przecinku. Można to sprawdzić, wykorzystując odpowiedni program komputerowy dostępny w internecie.

Wzór, który pozwala obliczać długość l okręgu, wynika wprost z określenia liczby π . (Ponieważ $\pi = \frac{l}{2r}$, więc $l = 2\pi r$).

Pokażemy teraz, jak można by próbować uzasadnić wzór na pole koła.



Wyobraźmy sobie, że koło o promieniu r dzielimy na jednakowe części (zob. rysunek). Pole każdej z tych części niewiele się różni od pola trójkąta o podstawie a i wysokości r , czyli wynosi w przybliżeniu $\frac{a \cdot r}{2}$.



Jeśli liczba części, na które dzielimy koło, jest równa n , to podstawa a trójkąta jest w przybliżeniu równa $\frac{1}{n}$ długości okręgu, czyli:

$$a \approx \frac{1}{n} \cdot 2\pi r = \frac{2\pi r}{n}$$

Pole każdej części to $\frac{1}{n}$ pola koła. Zatem:

$$\text{pole koła} \approx n \cdot \frac{a \cdot r}{2} \approx n \cdot \frac{\frac{2\pi r}{n} \cdot r}{2} = \pi r^2$$



Im więcej będzie części, na które dzielimy koło, tym przybliżenie będzie dokładniejsze. Możemy zatem przyjąć, że pole koła jest równe πr^2 .

ĆWICZENIE C Popatrz na rysunek obok. Ile razy długość części okręgu zaznaczonej niebieskim kolorem jest mniejsza od długości całego okręgu, jeśli $\alpha = 108^\circ$? Jaką część pola całego koła stanowi pole zaznaczonej figury?



Kąt o wierzchołku w środku koła nazywamy **kątem środkowym**. Część wspólna kąta środkowego i koła to **wycinek koła**, a część wspólna tego kąta i okręgu to **łuk okręgu**. Mówimy, że kąt środkowy jest oparty na tym łuku.

Długość łuku to pewien ułamek długości okręgu, a pole wycinka koła to ułamek pola koła. Ułamek ten jest równy $\frac{\alpha}{360^\circ}$.



Długość łuku okręgu:

$$l = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

Pole wycinka koła:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

PRZYKŁAD

a) Kąt środkowy w kole o promieniu 9 ma miarę 140° . Jakie pole ma wycinek koła wyznaczony przez ten kąt?



$$\text{Pole wycinka} = \frac{140^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 9^2 = \frac{7}{18} \cdot 81 \cdot \pi = \underline{\underline{\frac{63}{2}\pi}}$$

b) Na rysunku przedstawiono wycinek koła. Jaki jest obwód tej figury?



$$\alpha = 360^\circ - 160^\circ = 200^\circ$$

Łuk jest wycięty przez kąt środkowy α o mierze 200° .

$$\text{Długość łuku} = \frac{200^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 3 = \frac{5}{9} \cdot 6\pi = \frac{10}{3}\pi$$

$$\text{Obwód wycinka} = \underline{\underline{6 + \frac{10}{3}\pi}}$$

ZADANIE W kole o promieniu 10 zaznaczono kąt środkowy o mierze 40° . Oblicz pole oraz obwód wycinka koła wyznaczonego przez ten kąt.

ZESTAW ZADAŃ



1. Oblicz:

- a) pole koła o promieniu 7,
- b) pole koła o średnicy 12,
- c) długość okręgu o średnicy 17,
- d) promień koła o polu 10,
- e) promień okręgu o długości 5,
- f) obwód koła o polu 4.

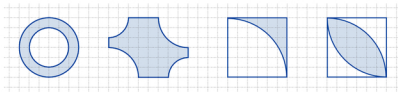
2. Zapisz wzór, który pozwala obliczać:

- a) długość okręgu l , gdy dana jest jego średnica d ,
- b) pole koła P , gdy dany jest jego obwód l ,
- c) średnicę koła d , gdy dane jest jego pole P ,
- d) obwód koła l , gdy dane jest jego pole P .

3. Minutowa wskazówka pewnego zegara ma 8 cm. Oblicz, jaką drogę pokonuje koniec tej wskazówki w ciągu:

- a) godziny,
- b) doby,
- c) kwadransa,
- d) 45 minut.

4. Oblicz pola zacieniowanych figur. Przyjmij, że bok kratki ma długość 1.

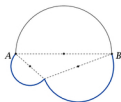
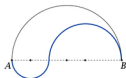


5. Z koła o promieniu R chcemy wyciąć trzy jednakowe koła tak, aby suma ich pól i pole pozostałej części były równe. Jaki promień powinny mieć wycinane koła?

6. Punkty A i B są połączone dwiema liniami zbudowanymi z półokręgów — czarną i niebieską.

a) Uzasadnij, że niebieska i czarna linia przedstawione na poniższym rysunku mają tę samą długość.

b) Która z linii na poniższym rysunku jest dłuższa — niebieska czy czarna?



- 7. a)** Zapisz, jaką długość ma bok kwadratu, który ma takie samo pole jak koło o promieniu długości r .
- b)** Koło i kwadrat mają równe pola. Która figura ma większy obwód? Ile razy?

Ciekawostka

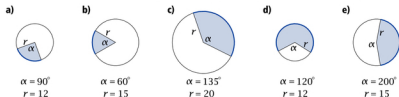
Jak skonstruować za pomocą cyrkla i linijki kwadrat o polu równym polu danego koła? Problem ten, nazwany kwadraturą koła, próbowano rozwiązać przez ponad 2000 lat. Dopiero w XIX w. udowodniono, że taka konstrukcja jest niemożliwa. Wykazano tym samym, że dla danego odcinka długości r niemożliwe jest skonstruowanie odcinka długości $r\sqrt{\pi}$. W wielu językach kwadratura koła oznacza w przenośni problem nie do rozwiązania.

- 8.** Koło o promieniu długości 5, obracając się, toczy się po prostej.
- a)** Jaką odległość pokona to koło, jeśli wykona 10 obrotów?
- b)** Ile pełnych obrotów wykona to koło na odcinku o długości 100?
- 9.** Długość średnicy koła samochodu wynosi około 64 cm. Ile obrotów na godzinę wykonują koła tego samochodu, gdy jedzie on z prędkością 60 km/h? Ile to obrotów na minutę? Ile to obrotów na sekundę?
- 10.** Ziemia jest oddalona od Słońca o około 150 mln km. Z jaką prędkością porusza się wokół Słońca? Możesz przyjąć, że orbita Ziemi jest okręgiem. W rzeczywistości orbita ta jest elipsą („spłaszczonym” okręgiem, ale to spłaszczenie jest niewielkie).



- 11.** Wyobraź sobie, że jakaś maszyna latająca wisi nieruchomo na wysokości 1 km nad pewnym punktem leżącym na równiku. Z jaką prędkością porusza się ta maszyna, obracając się (wraz z Ziemią) wokół ziemskiej osi? Porównaj tę prędkość z prędkością punktu, nad którym wisi maszyna. Przyjmij, że równikowy promień Ziemi to 6371 km.

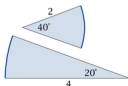
- 12.** Oblicz długość zaznaczonego łuku okręgu oraz pole zacieniowanej figury.



13. Na rysunkach przedstawiono wycinki kół z zaznaczonymi łukami.

a) Który łuk jest dłuższy?

b) Który wycinek ma większe pole? Ile razy jest większe?



14. a) Jaka jest długość promienia okręgu, w którym kąt o wierzchołku w środku okręgu i o mierze 45° jest oparty na łuku o długości 2π ?

b) Jaką długość ma promień koła, w którym wycinkowi o polu $\frac{1}{9}\pi$ odpowiada kąt o mierze 30° ?

15. Oblicz pole zacieniowanego obszaru i długość zaznaczonego łuku okręgu.

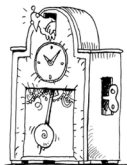


16. Wahadło starego zegara ma długość 50 cm i odchyła się od pionu o 18° . Pełne wahnięcie (od lewej do prawej i z powrotem) trwa 2 sekundy. Jaką drogę pokonuje końcówka wahadła w ciągu godziny?

17. Miary kątów można wyrażać w innych jednostkach niż stopnie, np. w radianach. Miara kąta środkowego jest równa 1 radianowi, gdy łuk, na którym ten kąt jest oparty, ma taką samą długość jak promień okręgu.

a) 1 radian — ile to stopni?

b) 90° — ile to radianów?



18. Koniec wskazówki minutowej pewnego zegara wieżowego jest oddalony od środka tarczy o 2,5 m. Jaką drogę pokonał koniec tej wskazówki, gdy obróciła się ona o kąt $2^\circ 45'$? Jak długo trwał ten obrót?

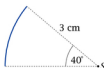
MINISPRAWDZIAN

51. Połowa koła o promieniu 4 ma takie samo pole jak koło o promieniu:

- A. 1 B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

52. Przedstawiony na rysunku łuk to fragment okręgu o środku S . Łuk ten ma długość:

- A. mniejszą niż 1 cm C. równą 2 cm
B. równą 1 cm D. większą niż 2 cm



53. Aby wycinek koła o promieniu 3 miał pole równe $\frac{\pi}{8}$, kąt środkowy tego wycinka musi być równy:

- A. 15° B. 5° C. $7,5^\circ$ D. $2,5^\circ$

54. Popatrz na rysunek obok. Kąt środkowy podzielił pierścień kołowy na dwie części. Jaki jest obwód części zaznaczonej na niebiesko?

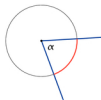
- A. 7π B. $4\pi+8$ C. $2\pi+4$ D. $\frac{14\pi}{5}+8$



WŁASNOŚCI KĄTÓW ŚRODKOWYCH I KĄTÓW WPISANYCH

- I Na rysunku obok w okręgu zaznaczono kąt środkowy α oraz łuk, na którym ten kąt jest oparty.

W tym okręgu można wskazać jeszcze jeden kąt środkowy, jego miara wynosi $360^\circ - \alpha$. Łuk, na którym ten kąt jest oparty, zaznaczono kolorem czarnym.



Kąt wpisany to kąt, którego wierzchołek leży na okręgu, ramiona przecinają okrąg, a miara jest mniejsza od 180° . Na rysunku obok zaznaczono kąt wpisany β i łuk, na którym ten kąt jest oparty.

Zauważ, że jest tylko jeden kąt środkowy oparty na danym łuku, natomiast istnieje nieskończenie wiele kątów wpisanych opartych na tym łuku.

Twierdzenie o kątach wpisanym i środkowym opartych na tym samym łuku okręgu

Kąt wpisany ma dwa razy mniejszą miarę niż kąt środkowy oparty na tym samym łuku.



Dowód

Przyjmijmy, że kąt α to kąt wpisany, a kąt β to kąt środkowy oparty na tym samym łuku co kąt α . Pokażemy, że $\beta = 2\alpha$, wykorzystując własności trójkąta równoramiennego.

Możliwe są trzy przypadki położenia środka okręgu względem kąta wpisanego α : środek okręgu może leżeć na ramieniu kąta α , może leżeć wewnątrz tego kąta, może też leżeć na zewnątrz kąta.

1. Niech środek okręgu leży na ramieniu kąta wpisanego α , tak jak pokazano na rysunku obok. Trójkąt BCO jest równoramienny, zatem:

$$|\angle BOC| = 180^\circ - 2\alpha$$

Kąt β oraz $\angle BOC$ to kąty przyległe, więc:

$$\beta = 180^\circ - |\angle BOC| = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha$$



2. Niech środek okręgu leży wewnątrz kąta wpisanego α , tak jak pokazano na pierwszym z rysunków poniżej.

Prowadząc średnicę z wierzchołka kąta α , dzielimy kąt α na dwa kąty γ i δ . Wtedy kąt β także zostanie podzielony na dwa kąty. Z poprzednich rozważań wiemy, że te kąty to 2γ i 2δ , zatem:

$$\alpha = \gamma + \delta \quad \beta = 2\gamma + 2\delta$$

Stąd:

$$\beta = 2(\gamma + \delta) = 2\alpha$$



3. Niech środek okręgu leży na zewnątrz kąta wpisanego α , tak jak pokazano na pierwszym rysunku poniżej.

Prowadząc średnicę z wierzchołka kąta α , otrzymujemy sytuację przedstawioną na drugim rysunku. Kąt wpisany $\alpha + \gamma$ jest oparty na tym samym łuku co kąt środkowy $\beta + 2\gamma$. Z poprzednich rozważań wiemy, że:

$$\beta + 2\gamma = 2(\alpha + \gamma)$$

Stąd:

$$\beta = 2(\alpha + \gamma) - 2\gamma = 2\alpha$$



W każdym z rozważanych przypadków otrzymaliśmy $\beta = 2\alpha$. $\square$

Twierdzenie o kątach wpisanych opartych na tym samym łuku okręgu

Kąty wpisane oparte na tym samym łuku mają równe miary.



Dowód

Z poprzedniego twierdzenia wynika, że gdy kąty wpisane są oparte na tym samym łuku, to każdy z nich ma miarę dwa razy mniejszą niż kąt środkowy oparty na tym łuku. Zatem wszystkie te kąty wpisane mają równe miary. $\square$

Jeśli łuki danego okręgu mają równe długości, to kąty środkowe, które je wycinają, mają równe miary. Wynika stąd, że kąty wpisane są równe także wtedy, gdy są oparte na łukach o tej samej długości.



Gdy kąt środkowy lub kąt wpisany jest oparty na pewnym łuku okręgu, to można też powiedzieć, że jest on oparty na cięciwie łączącej końce łuku okręgu.

Twierdzenie o kącie wpisanym opartym na średnicy okręgu

Kąt wpisany oparty na średnicy jest kątem prostym.



Dowód

Kąt środkowy oparty na półokręgu ma miarę 180° . Kąt wpisany oparty na średnicy ma miarę dwa razy mniejszą od niego, czyli jest kątem prostym. $\square$

zadania 1–11 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Podaj miary kątów α , β , γ i δ wyznaczonych w danych okręgach.



2. Podaj miary kątów α , β , γ i δ wyznaczonych w danych okręgach.



3. Popatrz na rysunek obok. Uzasadnij, że suma miar kątów wpisanych α i β opartych na tej samej cięciwie jest równa 180° .



4. Jaka jest miara kąta wpisanego w okrąg, opartego na cięciwie o długości równej promieniowi tego okręgu?

Uwaga. Zadanie ma dwa rozwiązania.

5. Punkt C leży na okręgu o średnicy AB . Wiadomo, że $|AC| = 8$ cm, $|BC| = 10$ cm. Oblicz pole trójkąta ABC .

6. Oblicz miary kątów wielokąta, którego boki zaznaczono niebieskim kolorem.



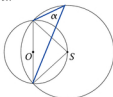
7. Popatrz na rysunek obok. Czy długość łuku zaznaczonego niebieskim kolorem to więcej czy mniej niż 10% długości okręgu?



8. Popatrz na poniższy rysunek. Kąty ostre ekerki mają miary 30° i 60° . Jaką część okręgu zakrywa ta ekerka?



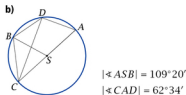
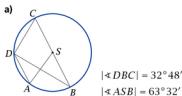
9. Punkty O i S na rysunku poniżej są środkami danych okręgów. Jaką miarę ma kąt α ?



10. Ze środka areny cyrkowej (która ma kształt koła) można oświetlić latarką fragment bandy o długości 3 m. Jak długi fragment bandy można oświetlić tą latarką z punktu na bandzie? Sytuację opisaną w zadaniu przedstawiono na rysunku obok.



11. Korzystając z informacji podanej obok rysunku, oblicz miary kątów wpisanych DCB i ADB .



MINISPRAWDZIAN

51. Punkty A, B, C leżą na okręgu o środku S . W czworokącie $ABCS$ kąt ABC ma miarę 70° . Jaką miarę ma kąt ASC w tym czworokącie?

A. 70° B. 140° C. 220° D. 35°

52. Korzystając z informacji na rysunku, ustal miarę kąta β .



A. 100° B. 40° C. 50° D. 25°

53. Korzystając z informacji na rysunku, ustal miarę kąta γ .



A. 27° B. 36° C. 18° D. 54°

PROSTE I OKRĘGI

- I Prosta i okrąg mogą nie mieć punktów wspólnych, mogą przecinać się w dwóch punktach albo mieć jeden punkt wspólny. Prosta, która ma z okręgiem tylko jeden punkt wspólny, nazywamy **styczną do okręgu**.



okrąg i prosta
są rozłączne



prosta przecina
okrąg



okrąg i prosta
są styczne

Twierdzenie

Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności.



Dowód

Uzasadnienie przeprowadzimy metodą nie wprost.

Przypuśćmy, że jeden z kątów między styczną do okręgu a promieniem poprowadzonym do punktu styczności jest ostry. Na rysunku to kąt α o wierzchołku A. Prowadząc ze środka okręgu inną prostą niż SA, ale nachyloną do stycznej pod kątem α , otrzymamy trójkąt równoramienny ABS .



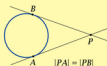
Wówczas $|SB| = |SA|$ i punkt B musiałby należeć do okręgu, byłby więc drugim punktem wspólnym stycznej i okręgu, co przeczy definicji stycznej. $\square$

zadania 1-7

II

Twierdzenie

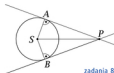
Gdy styczne do okręgu się przecinają, to odcinki łączące punkt przecięcia z punktami styczności mają równe długości.



$$|PA| = |PB|$$

Dowód

Niech proste PA i PB będą stycznymi do okręgu o środku S w punktach A i B. Wówczas trójkąty PSA i PSB są prostokątne, mają wspólną przeciwprostokątną PS oraz $|SA| = |SB|$. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $|PA| = |PB|$. $\square$



zadania 8-10

Twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą

Kąt ostry α między cięciwą okręgu a styczną w punkcie, który jest końcem cięciwy, jest równy kątowi ostremu wpisanemu w okrąg opartemu na tej cięciwie.

**Dowód**

Przyjmijmy, że prosta m i okrąg o środku S są styczne w punkcie A i kąt ostry między prostą m i cięciwą AB jest równy α (zob. rysunek obok).

Wówczas:

$$|\sphericalangle SAB| = 90^\circ - \alpha$$

Trójkąt SAB jest równoramienny, więc:

$$|\sphericalangle ASB| = 180^\circ - 2 \cdot |\sphericalangle SAB| = 180^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha$$

Kąt β to kąt wpisany oparty na cięciwie AB , więc:

$$\beta = \frac{1}{2} |\sphericalangle ASB| = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha \quad \square$$

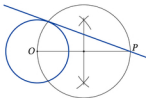
**Warto wiedzieć**

Niech O będzie środkiem okręgu. Przez punkt P chcemy poprowadzić styczną do tego okręgu.

Gdy punkt P leży na okręgu, to wystarczy poprowadzić półprostą OP i skonstruować prostą do niej prostopadłą przechodzącą przez punkt P (zob. pierwszy rysunek).



Gdy punkt P leży na zewnątrz okręgu, to najpierw wyznaczamy środek odcinka OP i konstruujemy okrąg, którego średnicą jest OP . Następnie prowadzimy prostą przez punkt P i punkt wspólny okręgów (zob. drugi rysunek).



Prosta ta jest prostopadła do promienia danego okręgu, gdyż wiadomo, że kąt wpisany oparty na średnicy OP jest kątem prostym, zatem ta prosta jest szukaną styczną.

Oczywiście prowadząc prostą przez punkt P i drugi wspólny punkt okręgów, też otrzymamy styczną do okręgu.

- IV Dwa różne okręgi mogą być położone względem siebie tak, że nie mają punktów wspólnych albo mają dwa punkty wspólne, albo tylko jeden punkt wspólny. Gdy okręgi mają tylko jeden punkt wspólny, mówimy, że są styczne.



okręgi rozłączne
zewnętrznie



okręgi rozłączne
wewnętrznie



okręgi przecinające się



okręgi styczne
zewnętrznie

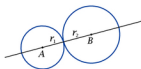


okręgi styczne
wewnętrznie

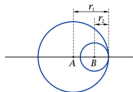
Uwaga. O okręgach, które mają wspólny środek, mówimy, że są współśrodkowe. Jeśli okręgi współśrodkowe mają różne promienie, to okręgi te są oczywiście rozłączne. Jeśli promienie okręgów współśrodkowych są jednakowe, to okręgi mają nieskończenie wiele punktów wspólnych (pokrywają się).

ĆWICZENIE A Narysuj okrąg o promieniu 2 cm. Oznacz jego środek literą O i poprowadź przez punkt O dowolną prostą. Narysuj za pomocą cyrkla okrąg o środku na narysowanej prostej styczny do narysowanego okręgu.

Prosta przechodząca przez środki dwóch okręgów stycznych przechodzi także przez punkt ich styczności. Wynika stąd, że odległość między środkami okręgów stycznych jest równa sumie lub różnicy długości promieni tych okręgów.



$$|AB| = r_1 + r_2$$



$$|AB| = r_1 - r_2$$

ĆWICZENIE B Okrąg o środku S ma promień długości 2, a okrąg o środku T ma promień długości 5. Określ wzajemne położenie tych okręgów, jeśli:

a) $|ST| = 7$

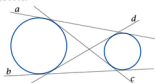
b) $|ST| = 8$

c) $|ST| = 4$

ĆWICZENIE C Ile może być prostych jednocześnie stycznych do dwóch okręgów? Rozważ różne położenia okręgów.

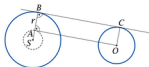
Ciekawostka

Na poniższym rysunku przedstawiono rozłączne zewnętrznie okręgi oraz cztery proste, z których każda jest styczna do obu okręgów. Pokażemy, jak konstruować takie proste.

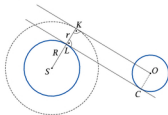


Niech okrąg o środku S i promieniu R leży na zewnątrz okręgu o środku O i promieniu r . Przyjmijmy, że $R > r$.

Sposób konstruowania prostej a : Wyznamy okrąg o środku S i promieniu $R - r$, następnie prowadzimy z punktu O prostą styczną do tego okręgu (w sposób opisany na s. 144). Przez otrzymany punkt styczności A prowadzimy półprostą SA , która przecina duży okrąg w punkcie B . Prowadząc przez punkt B prostą prostopadłą do półprostej SA , otrzymamy szukaną styczną, bo czworokąt $AOCB$ jest prostokątem.



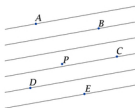
Sposób konstruowania prostej c : Wyznamy okrąg o środku S i promieniu $R + r$, następnie wyznaczamy prostą styczną do tego okręgu przechodzącą przez punkt O . Rysujemy promień SK (gdzie K jest punktem styczności) i przez punkt L — wspólny punkt okręgu o promieniu R i odcinka SK — prowadzimy prostą prostopadłą do SK . Ta prosta jest szukaną styczną, bo czworokąt $KLCO$ jest prostokątem.



Zauważ, że prostą b można skonstruować podobnie jak prostą a , zaś prostą d podobnie jak prostą c .

ZESTAW ZADAŃ

1. Proste na poniższym rysunku są parami równoległe. Odległości między sąsiednimi prostymi są równe 1.

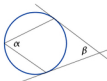
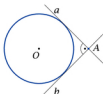


- Pewien okrąg o środku A ma z narysowanymi prostymi dokładnie trzy punkty wspólne. Jaką długość ma promień tego okręgu?
- Czy okrąg o środku B może mieć z tymi prostymi dokładnie trzy punkty wspólne?
- Jaki promień może mieć okrąg o środku C , aby przecinała go dokładnie jedna prosta?
- Jaki promień powinien mieć okrąg o środku D , aby przecinały go cztery proste (każda w dwóch punktach)?
- Jaki promień może mieć okrąg o środku E , jeśli wiadomo, że okrąg ten ma z narysowanymi prostymi dokładnie cztery punkty wspólne?
- Ile prostych przecina okrąg o środku P i promieniu 2?

2. Prosta m jest styczna do okręgu. Podaj miarę kąta, który zaznaczono łukiem.

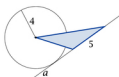


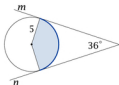
3. Ramiona kąta β (zob. rysunek obok) są styczne do okręgu. Jaki jest związek między miarami kątów α i β ?



4. Proste a i b przedstawione na rysunku obok są styczne do okręgu o środku O . Jaka jest odległość punktu A od punktu O , gdy promień okręgu ma długość 5?

5. Prosta a przedstawiona na rysunku obok jest styczna do okręgu. Jakie pole ma zacieniowany trójkąt?





6. Proste m oraz n przedstawione na rysunku obok są styczne do okręgu. Jakie pole ma zacieniowany wycinek koła?

7. Wyobraź sobie, że stoisz nad brzegiem morza.

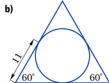
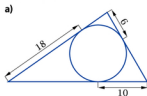
a) Jak daleko od twoich oczu jest horyzont, jeśli twoje oczy znajdują się na wysokości 1,5 m nad poziomem morza? Przyjmij, że promień Ziemi ma 6371 km.

b) O ile dalej sięgnie twój wzrok, jeśli wejdiesz na drzewo tak wysoko, że twoje oczy znajdują się 15 m nad poziomem morza?

c) Czy wystarczy wznieść się 1 km nad poziom morza, aby horyzont znajdował się w odległości ponad 100 km od oczu?



8. Boki trójkąta przedstawionego na rysunku są styczne do okręgu. Oblicz obwód tego trójkąta.

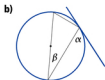


9. Wszystkie boki trójkąta prostokątnego są styczne do okręgu o promieniu 2 cm. Punkt styczności dzieli przeciwprostokątną na odcinki 4 cm i 6 cm. Oblicz obwód tego trójkąta.

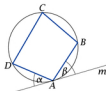
10. Na rysunku obok każde dwa sąsiednie okręgi są styczne w tym samym punkcie do pewnej prostej przechodzącej przez punkt P . Uzasadnij, że punkty styczności leżą na okręgu o środku w punkcie P .



11. Prosta przedstawiona na rysunku jest styczna do okręgu. Wyraż miarę kąta β w zależności od kąta α .



12. Popatrz na rysunek obok. Wierzchołki czworokąta $ABCD$ leżą na okręgu, a prosta m jest styczna do okręgu w punkcie A . Wykaż, że jeden z kątów tego czworokąta ma miarę $\alpha + \beta$ i przekątna dzieli go na kąty o miarach α i β .



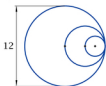
IV 13. Dane są dwa okręgi: jeden o promieniu 3 cm, drugi o promieniu 4 cm. Jaka powinna być odległość między środkami tych okręgów, aby okręgi te:

- a) były styczne zewnętrznie, c) przecinały się w dwóch punktach,
- b) były styczne wewnętrznie, d) były rozłączne?

14. Jaka jest odległość między środkami okręgów o promieniach 5 i 8, gdy mniejszy okrąg przechodzi przez środek większego, a jaka — gdy większy okrąg przechodzi przez środek mniejszego?

15. Jakie długości mają promienie okręgów przedstawionych na rysunkach?

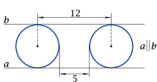
a)



b)



c)



16. Okręgi o promieniach 10 i 15 są współśrodkowe. Jaką długość ma promień okręgu stycznego do obu tych okręgów? (Są dwie możliwości).

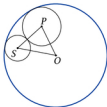
17. Trzy okręgi o środkach A , B , C są parami styczne zewnętrznie. Wiedząc, że $|AB| = 8$, $|BC| = 10$, $|AC| = 12$, oblicz długości promieni tych okręgów.

18. Na rysunku obok cztery jednakowe okręgi o promieniu r są parami styczne i jednocześnie są styczne do zacieniowanego koła. Jaką średnicę ma to koło?



19. Trzy piłki tenisowe, każda o średnicy 6,38 cm, umieszczono w pudełku w sposób pokazany na rysunku. Jakie wymiary ma pudełko, jeśli wiadomo, że piłki nie wystają ponad pudełko ani pudełko nie wystaje ponad piłki?

20. Okręgi na rysunku obok są parami styczne. Największy z okręgów ma promień długości r . Jaki obwód ma trójkąt OPS ?



MINISPRAWDZIAN

51. Z punktu A poprowadzono styczne do okręgu o środku B w punktach C i D . Która równość jest fałszywa?

- A. $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$ C. Pole czworokąta $ACBD = |AC| \cdot |BC|$
 B. $|\angle CAD| = 180^\circ - |\angle CBD|$ D. $|AC| + |AD| = 2|AB|$

52. Prosta AD przedstawiona na rysunku obok jest styczna do okręgu w punkcie A , a cięciwy AC i BC mają równe długości. Jeżeli $|\angle ABC| = 70^\circ$, to miara kąta DAB wynosi:

- A. 30° B. 40° C. 60° D. 70°



53. Dwa okręgi o promieniach 4 i 9 są styczne wewnętrznie. Jaka jest odległość między środkami tych okręgów?

- A. 5 B. 4 C. 7,5 D. 13

54. Ile punktów wspólnych ma okrąg o promieniu 7 z okręgiem o promieniu 12, jeśli odległość między środkami tych okręgów wynosi 15?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. nieskończenie wiele

OKRĄG OPISANY NA TRÓJKĄCIE. OKRĄG WPISANY W TRÓJKĄT

1



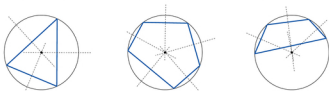
okrąg opisany
na wielokącie

wielokąt wpisany
w okrąg

Mówimy, że **okrąg jest opisany na wielokącie**, gdy wszystkie wierzchołki tego wielokąta leżą na okręgu.

Jeżeli okrąg jest opisany na wielokącie, to możemy też powiedzieć, że wielokąt jest wpisany w okrąg.

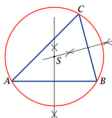
Środek okręgu opisanego na wielokącie jest punktem jednakowo odległym od jego wierzchołków. Z własności symetralnej (por. s. 65) wynika, że środek ten musi leżeć na symetralnej każdego boku wielokąta.



Wiemy już, że symetralne trzech boków każdego trójkąta przecinają się w jednym punkcie (por. s. 65). Wynika stąd następujące twierdzenie:

Twierdzenie

*Na każdym trójkącie można opisać okrąg.
Środkiem takiego okręgu jest punkt
przecięcia symetralnych boków trójkąta.*



Aby wyznaczyć konstrukcyjnie środek okręgu opisanego na trójkącie, wystarczy poprowadzić symetralne dwóch boków trójkąta. Ich punkt przecięcia to środek szukanego okręgu, a odległość tego punktu od dowolnego wierzchołka trójkąta to promień okręgu.



Zauważ, że z własności kątów środkowych i wpisanych wynika, że środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem przeciwprostokątnej.

ĆWICZENIE a) Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 4 i 5.

b) Jakie długości mają boki trójkąta prostokątnego równoramiennego wpisanego w okrąg o promieniu 20?

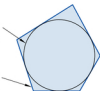
Nie na każdym wielokącie można opisać okrąg. Możliwe jest to tylko wówczas, gdy symetralne wszystkich jego boków przecinają się w jednym punkcie. Na przykład okręgu nie można opisać na równoległoboku, który nie jest prostokątem.

zadania 1-4 ►

II

okrąg
wpisany
w wielokąt

wielokąt
opisany
na okręgu



Mówimy, że **okrąg jest wpisany w wielokąt**, jeżeli jest styczny do wszystkich boków tego wielokąta.

Jeżeli okrąg jest wpisany w wielokąt, to możemy też powiedzieć, że wielokąt jest opisany na okręgu.

Odległość środka okręgu wpisanego w wielokąt od każdego boku wielokąta jest równa promieniowi okręgu. Środek takiego okręgu jest jednakowo odległy od wszystkich jego boków, zatem z własności dwusiecznej (por. s. 66) wynika, że środek ten musi leżeć na dwusiecznej każdego kąta wielokąta.



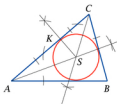
Ponieważ wiemy już, że dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie, zatem prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie

*W każdy trójkąt można wpisać okrąg.
Środkiem okręgu wpisanego w trójkąt jest punkt
przecięcia dwusiecznych kątów tego trójkąta.*



Aby skonstruować okrąg wpisany w trójkąt, prowadzimy dwusieczne dwóch dowolnych kątów trójkąta. Ich wspólny punkt S będzie jednakowo oddalony od trzech boków trójkąta (por. twierdzenia na str. 66), będzie to więc środek szukanego okręgu. Następnie kreślimy prostą przechodzącą przez punkt S i prostopadłą do jednego z boków. Punkt przecięcia tej prostej z bokiem AC (na rysunku oznaczony literą K) jest jednym z punktów styczności. Kreślimy okrąg o środku S i promieniu $|SK|$.



Nie w każdy wielokąt da się wpisać okrąg. Możliwe jest to tylko wtedy, gdy dwusieczne wszystkich kątów przecinają się w jednym punkcie. Na przykład nie można wpisać okręgu w prostokąt, który nie jest kwadratem.

zadania 5–11 ►

ZESTAW ZADAŃ

◀ I 1. a) Narysuj trzy dowolne trójkąty — ostrokątny, rozwartokątny oraz prostokątny — i na każdym z nich opisz okrąg. W którym wypadku środek okręgu należy do trójkąta?

• b) Narysuj trójkąt, którego obwód jest mniejszy od średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

2. Ustal, czy środek okręgu opisanego na trójkącie należy do trójkąta, gdy miary dwóch kątów trójkąta wynoszą:

a) 39° i 47°

b) 70° i 55°

c) 63° i 27°

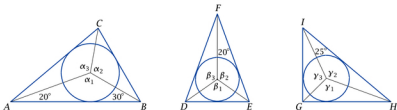
3. a) Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 5 i 12.

b) W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 6 i 8. Jaką długość ma odcinek łączący wierzchołek kąta prostego ze środkiem przeciwprostokątnej?

4. Które z podanych zdań są prawdziwe?

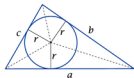
- ① Środek okręgu opisanego na trójkącie leży zawsze na przecięciu prostych zawierających wysokości tego trójkąta.
- ② Środek okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta.
- ③ Dla dowolnych trzech punktów niewspółliniowych można narysować okrąg, który przechodzi przez te punkty.
- ④ Każdy bok trójkąta ostrokątnego wpisanego w okrąg jest krótszy od średnicy tego okręgu.
- ⑤ Każdy bok trójkąta rozwartokątnego wpisanego w okrąg jest krótszy od średnicy tego okręgu.

◀ II 5. Poniżej przedstawiono trójkąty: ostrokątny, równoramienny oraz prostokątny. Oblicz miary kątów tych trójkątów oraz miary kątów oznaczonych literami.



6. Narysuj dowolny trójkąt. Skonstruuj okrąg wpisany w ten trójkąt.

- 7.** Narysuj dowolny kąt ostry. Na jednym z ramion zaznacz punkt A . Skonstruuj okrąg styczny do obu ramion kąta tak, aby punkt A był jednym z punktów styczności.
- 8.** W trójkąt równoramienny ABC , w którym kąt między ramionami AC i BC ma 100° , wpisano okrąg o środku O . Oblicz miarę kąta AOB .
- 9.** Kąt między ramionami AC i BC trójkąta równoramiennego ABC ma miarę 40° . Punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , a punkt S jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Oblicz miarę kąta SAO .
- 10.** W trójkąt o bokach a, b, c jest wpisany okrąg o promieniu r .
- a) Wykaż, że pole tego trójkąta można obliczać ze wzoru:
- $$P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$
- b) Oblicz, jaką długość ma promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o bokach długości 3, 4, 5.
- c) Wykaż, że promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym równoramiennym jest $1 + \sqrt{2}$ razy dłuższy niż promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
- 11.** Uzasadnij, że w trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych jest równa sumie długości średnic okręgu wpisanego w ten trójkąt oraz okręgu opisanego na tym trójkącie.



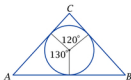
MINISPRAWDZIAN

51. Jakie pole ma trójkąt prostokątny równoramienny wpisany w okrąg o promieniu 14 cm?

- A. 196 cm^2 B. 292 cm^2 C. 584 cm^2 D. 98 cm^2

52. Na rysunku obok okrąg jest wpisany w trójkąt. Kąt ABC ma miarę:

- A. 110° C. 55°
B. 70° D. 60°



53. Na okręgu o środku S jest opisany trójkąt prostokątny równoramienny ABC . Odcinek BC to najdłuższy bok trójkąta. Jaką miarę ma kąt ASB ?

- A. 135° B. $67,5^\circ$ C. 90° D. $112,5^\circ$

WŁASNOŚCI WIELOKĄTÓW.

WIELOKĄTY FOREMNE

1 ĆWICZENIE A Naskicuj:

- a) czworokąt, w którym dwa niesąsiednie boki są prostopadłe,
- b) pięciokąt, który ma jedną parę boków równoległych,
- c) sześciokąt, w którym trzy boki są parami równoległe.

Zauważ, że niektóre wielokąty spełniają warunek: dla dowolnych dwóch punktów wielokąta odcinek, którego końcami są te punkty, zawiera się w tym wielokącie. Takie wielokąty nazywamy **wielokątami wypukłymi**.



wielokąt wypukły



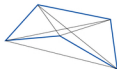
wielokąt niewypukły

ĆWICZENIE B Oto przykłady różnych wielokątów. Które z nich są wypukłe?



Zauważ, że wszystkie kąty wielokąta wypukłego to kąty o mierze większej od 0° i mniejszej od 180° (są to kąty wypukłe). W wielokącie niewypukłym co najmniej jeden kąt jest kątem wklęsłym.

Przypomnijmy, że przekątną wielokąta nazywamy każdy odcinek łączący niesąsiednie wierzchołki wielokąta. Niektóre przekątne wielokąta niewypukłego leżą poza wielokątem.



Wiemy już, że suma miar kątów trójkąta jest równa 180° , a suma miar kątów czworokąta wypukłego wynosi 360° . Zastanówmy się, co możemy powiedzieć o sumie miar kątów n -kąta, czyli wielokąta wypukłego, który ma n wierzchołków.

ĆWICZENIE C Naskicuj dowolny wielokąt wypukły. Wybierz dowolny wierzchołek i narysuj wszystkie wychodzące z niego przekątne. Na ile trójkątów podzieliły wielokąt narysowane przekątne?

ĆWICZENIE D Popatrz na rysunek obok. Na ile trójkątów przekątne podzieliły ten 11-kąt? Ile wynosi suma miar kątów 11-kąta?



Wszystkie przekątne poprowadzone z jednego wierzchołka n -kąta wypukłego dzielą ten wielokąt na $n - 2$ trójkąty (trójkątów jest tyle, ile boków, które nie zawierają wybranego wierzchołka). Suma miar kątów tych trójkątów wynosi $(n - 2) \cdot 180^\circ$ i jest równa sumie miar kątów n -kąta. Taka sama zależność zachodzi dla wielokątów niewypukłych.

Twierdzenie

Suma miar kątów n -kąta wynosi $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

ĆWICZENIE E Narysuj dowolny sześciokąt. Z każdego wierzchołka poprowadź trzy przekątne. Jeśli dla pewnego wierzchołka jakaś przekątna została już narysowana, to narysuj ją jeszcze raz, ale innym kolorem. Ile razy rysowana była każda z przekątnych? Ile przekątnych ma sześciokąt?

Z każdego wierzchołka n -kąta można poprowadzić $n - 3$ przekątne. (Z wybranego wierzchołka nie można poprowadzić przekątnej do niego ani do sąsiadujących z nim wierzchołków). Można sobie wyobrazić, że kreśląc przekątne z każdego wierzchołka, narysowalibyśmy $n(n - 3)$ odcinków, każdy dwukrotnie. To rozumowanie prowadzi do następującego twierdzenia:

Twierdzenie

Liczba przekątnych w n -kącie wynosi $\frac{n(n-3)}{2}$.

PRZYKŁAD Ile przekątnych ma wielokąt, w którym suma miar kątów jest równa 2700° ?

$$(n - 2) \cdot 180^\circ = 2700^\circ$$

$$n - 2 = 15$$

$$n = 17$$

$$\text{liczba przekątnych} = \frac{17(17-3)}{2} = 119$$

Odp. Ten wielokąt ma 119 przekątnych.

... Korzystamy z twierdzenia o sumie miar kątów n -kąta, aby obliczyć liczbę boków wielokąta.

... Wielokąt, o którym mowa, to 17-kąt.

... Obliczamy, ile przekątnych ma 17-kąt.

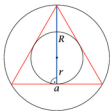
ZADANIE Ile przekątnych ma wielokąt o sumie miar kątów równej 2160° ?

zadania 1-5 ►

- II Wielokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości i wszystkie kąty jednakowej miary, nazywamy **wielokątem foremnym**. Wielokątami foremnymi są na przykład trójkąt równoboczny i kwadrat.



W każdym wielokącie foremnym wszystkie dwusieczne kątów i symetralne boków przecinają się w tym samym punkcie. Punkt ten jest więc jednocześnie środkiem okręgu opisanego na wielokącie i wpisanego w ten wielokąt. Przy obliczaniu długości promieni takich okręgów dla trójkąta równobocznego, kwadratu oraz sześciokąta foremnego przydają się wzory pozwalające obliczać wysokość trójkąta równobocznego oraz długość przekątnej kwadratu.



$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$R = 2r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



$$r = \frac{a}{2}$$

$$R = \frac{1}{2}a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$R = a$$

zadania 6–20 ►

- III Wiemy już, że suma kątów w n -kącie wynosi $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Ponieważ wszystkie kąty n -kąta foremnego są równe, więc możemy korzystać z następującego twierdzenia.

Twierdzenie

Każdy kąt n -kąta foremnego ma miarę $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$.

ĆWICZENIE F a) Jaką miarę mają kąty sześciokąta foremnego?

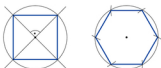
b) Ile przekątnych ma sześciokąt foremny?

zadania 21–25 ►

ZESTAW ZADAŃ

- I 1. a)** Oblicz sumy miar wszystkich kątów siedmiokąta oraz kątów stukąta.
b) Ile boków ma wielokąt, w którym suma miar kątów wynosi 1080° ?
c) Czy istnieje wielokąt, w którym suma miar wszystkich kątów wynosi 1000° ?
d) W pewnym 10-kącie jeden z kątów jest prosty, a pozostałe kąty mają tę samą miarę. Oblicz tę miarę.
- 2.** Wyobraź sobie, że dla każdego kąta pięciokąta wypukłego zaznaczamy jeden z kątów przyległych do tego kąta. Uzasadnij, że suma wszystkich zaznaczonych w ten sposób kątów jest równa 360° .
- 3. a)** Uzasadnij, że nie istnieje siedmiokąt, w którym każde dwa sąsiednie boki są prostopadłe.
b) Uzasadnij, że jeśli w n -kącie każde dwa sąsiednie boki są prostopadłe, to n jest liczbą parzystą.
- 4. a)** Ile przekątnych ma dziewięciokąt, a ile — dwustukąt?
b) Ile boków ma wielokąt, który ma 90 przekątnych?
c) Czy istnieje wielokąt, który ma 30 przekątnych? Czy istnieje wielokąt, który ma 170 przekątnych?
d) Czy istnieje wielokąt, który ma tyle samo przekątnych co boków?
- 5. a)** Z wierzchołka pewnego wielokąta można poprowadzić 15 przekątnych. Oblicz sumę miar kątów tego wielokąta.
b) Pewien wielokąt ma 275 przekątnych. Oblicz sumę miar kątów tego wielokąta.
c) Z jednego wierzchołka pewnego wielokąta wypukłego można poprowadzić 100 przekątnych. Uzasadnij, że największy kąt tego wielokąta ma więcej niż 175° .
- II 6. a)** Oblicz długość okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku 10.
b) Ustal, jaka jest długość okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku 5.
- 7. a)** Ile razy pole koła opisanego na trójkącie równobocznym jest większe od pola koła wpisanego w ten trójkąt?
b) Ile razy długość okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest większa od obwodu tego trójkąta?
- 8.** Określ, jaką długość ma bok trójkąta równobocznego:
a) opisanego na okręgu o promieniu $2\sqrt{3}$,
b) wpisanego w okrąg o promieniu 6.
- 9.** O ile dłuższy jest promień okręgu opisanego na kwadracie o boku 10 cm od promienia okręgu wpisanego w ten kwadrat?

Na poniższych rysunkach przedstawiono sposób konstruowania kwadratu i sześciokąta foremnego. Teoria wielokątów foremnych była jednym ze znakomitych osiągnięć szkoły pitagorejskiej. Pitagorejczycy potrafili za pomocą cyrkla i linijki wpisać w okrąg trójkąt równoboczny, kwadrat, pięciokąt foremny i sześciokąt foremny.



Potrąfili także skonstruować wielokąt foremny o liczbie boków dwukrotnie większej od liczby boków danego wielokąta (a więc np. znając konstrukcję

kwadratu wpisanego w okrąg, potrafili też zbudować 8-kąt foremny, 16-kąt foremny itd.).

Starożytnym uczonym nie udało się jednak skonstruować za pomocą cyrkla i linijki niektórych wielokątów foremnych, na przykład: 7-kąta, 9-kąta czy 17-kąta. Próby trwały wiele stuleci.

Po pitagorejczykach w teorii wielokątów foremnych nie odkryto niczego przez ponad 2000 lat. Dopiero w 1801 roku niemiecki matematyk Carl Friedrich Gauss pokazał, jak skonstruować 17-kąt foremny. Niedługo potem uzasadnił, że nie można skonstruować 7-kąta ani 9-kąta foremnego. Sformułował też twierdzenie pozwalające sprawdzić, czy dla danej liczby n można skonstruować n -kąt foremny.

10. Przeczytaj ciekawostkę.

- Skonstruuj sześciokąt foremny o boku 3 cm.
- Korzystając z konstrukcji sześciokąta foremnego, wpisz w okrąg trójkąt równoboczny i dwunastokąt foremny.

11. a) Jakie jest pole sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 5?

- Jaką długość ma okrąg wpisany w sześciokąt foremny o boku 10?

12. a) Oblicz długości przekątnych sześciokąta foremnego o boku 2.

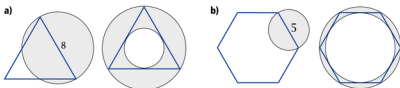
- Krótsza przekątna sześciokąta foremnego ma długość $6\sqrt{3}$. Jaki obwód ma ten sześciokąt?

13. a) Uzasadnij, że suma długości przekątnych wychodzących z jednego wierzchołka sześciokąta foremnego jest mniejsza od obwodu tego sześciokąta.

- Oblicz sumę długości wszystkich przekątnych sześciokąta foremnego o boku długości a . Ile razy ta suma jest większa od obwodu sześciokąta?

- 14. Kwadrat i sześciokąt foremny mają równe pola. Ile razy bok kwadratu jest dłuższy od boku sześciokąta?

15. Wielokąty przedstawione na poniższych rysunkach są foremne i przystające. Sprawdź, czy koło i pierścień mają takie same pola.



16. Narysuj okrąg o promieniu 4 cm. Wpisz w ten okrąg ośmiokąt foremny i szesnastokąt foremny.

- 17. a)** Na poniższym rysunku każdy bok kwadratu jest podzielony na trzy jednakowe części. Uzasadnij, że zacięniowany ośmiokąt nie jest foremny.



- b)** Na kolejnym rysunku zacięniowany ośmiokąt jest foremny. Bok kwadratu ma długość a . Jaką długość ma bok ośmiokąta?



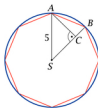
- 18.** Ośmiokąt foremny ma bok długości 4. Jakie długości mają przekątne tego ośmiokąta?

19. W okrąg o promieniu 5 jest wpisany ośmiokąt foremny (zob. rysunek obok).

a) Jaką miarę ma kąt ostry ASB ?

b) Oblicz wysokość AC trójkąta ASB .

c) Ustal, jakie pole ma narysowany ośmiokąt foremny.



- 20.** Rozważmy wielokąt foremny wpisane w okrąg o środku S .

a) Ile przekątnych ośmiokąta foremnego przechodzi przez punkt S ?

b) Czy któraś przekątna siedmiokąta foremnego może przechodzić przez punkt S ?

c) Co można powiedzieć o liczbie wierzchołków wielokąta foremnego, w którym przynajmniej jedna przekątna przechodzi przez środek okręgu? Ile przekątnych takiego n -kąta foremnego przechodzi przez środek okręgu?

111 21. a) Jakie miary mają kąty 20-kąta foremnego?

b) Każdy z kątów pewnego wielokąta foremnego ma miarę 150° . Ile boków ma ten wielokąt?

c) Czy istnieje wielokąt foremny, którego każdy kąt ma miarę 130° ?

22. Pięciokąt $ABCDE$ na rysunku obok jest foremny. Oblicz miary zaznaczonych kątów.



23. Punkty $P_1, P_2, \dots, P_{12}$ są kolejnymi wierzchołkami dwunastokąta foremnego. Oblicz miarę kąta:

a) $\sphericalangle P_1 P_7 P_2$

b) $\sphericalangle P_1 P_8 P_3$

c) $\sphericalangle P_3 P_2 P_7$

24. Dla jakiej liczby naturalnej n kąt n -kąta foremnego jest o $1,5^\circ$ mniejszy od kąta wielokąta foremnego, który ma $n+1$ boków?

25. Cięciwa AB jest bokiem pewnego wielokąta foremnego wpisanego w okrąg o środku w punkcie S . Jaką miarę mają kąty tego wielokąta foremnego, jeśli kąt ASB ma miarę α ?

MINISPRAWDZIAN

51. Kąt dziewięciokąta foremnego ma miarę:

- A. 100° B. 40° C. 70° D. 140°

52. Na rysunku obok trójkąt równoboczny jest opisany na okręgu o promieniu 1, a kwadrat jest wpisany w ten okrąg. O ile większe jest pole trójkąta niż pole kwadratu?



- A. o $3\sqrt{3} - 2$
 B. o $3\sqrt{2} - 2$
 C. o $6\sqrt{3} - \sqrt{2}$
 D. o $6\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$

53. Ile boków ma wielokąt o 44 przekątnych?

- A. 22 B. 14 C. 11 D. 8

54. O ile większa jest długość okręgu opisanego na sześciokącie foremnym o boku 4 od długości okręgu wpisanego w ten sześciokąt?

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. 4π C. $4 - 2\sqrt{3}$ D. $8\pi - 4\pi\sqrt{3}$

POWTÓRZENIE

1. Oblicz pole zacieniowanej figury. Przyjmij, że bok kratki ma długość 1, a końce i środek każdego łuku okręgu leżą w punktach kratowych.



2. Figura przedstawiona na poniższym rysunku składa się z dwóch wycinków kół. Oblicz jej pole i obwód.



3. Oblicz miary kątów trójkąta ABC przedstawionego na rysunku.



4. Ramiona kąta ADB są styczne do okręgu o środku S w punktach A i B . Oblicz obwód czworokąta o wierzchołkach D, A, S, B , jeżeli wiadomo, że:

- $|DS| = 10$ i $|DA| = 5$,
- promień okręgu ma długość r i jest trzy razy krótszy od odcinka DS .

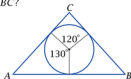
5. Odcinek AB ma długość 9, a okrąg o środku A ma promień równy 3. Jaki promień powinien mieć okrąg o środku B , aby z okręgiem o środku A miał:

- jeden punkt wspólny,
- dwa punkty wspólne?

6. Prosta a jest styczna do okręgu, a zaznaczony punkt jest jego środkiem. Jaką miarę ma kąt α ?



7. Na poniższym rysunku okrąg jest wpisany w trójkąt. Jaką miarę ma kąt ABC ?



8. W trójkąt o kątach 70° , 50° i 60° wpisano okrąg, który jest styczny do boków trójkąta w punktach A, B i C . Oblicz miary kątów trójkąta ABC .

9. Jaki promień ma okrąg opisany na trójkącie równoramiennym o podstawie długości 12 i wysokości opuszczonej na tę podstawę równej 8?

10. a) Ile przekątnych ma ośmiokąt?

b) Ile co najmniej boków ma wielokąt, który ma więcej niż 100 przekątnych?

c) O ile więcej przekątnych ma $n+1$ -kąt od n -kąta?

11. a) Ile boków ma wielokąt foremny, w którym miary kątów wynoszą 179° ?

b) Czy w wielokącie foremnym kąt może mieć 145° ? Czy może mieć 165° ?

12. Z koła o promieniu 6 wycięto największy możliwy trójkąt równoboczny. Jaką powierzchnię ma ta część koła, która została po wycięciu?

Trygonometria

Termin trygonometria pochodzi od dwóch greckich słów: trigōnon (trójkąt) i métron (mierzyć), oznacza więc dosłownie mierzenie trójkątów. Ta dziedzina matematyki zajmuje się m.in. opisywaniem związków między długościami boków trójkąta a miarami jego kątów.

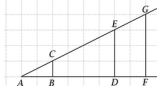


Tangens kąta ostrego ■ Sinus i cosinus kąta ostrego ■ Obliczenia trygonometryczne ■ Zastosowania trygonometrii ■ Wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30° , 45° i 60° ■ Związki między funkcjami trygonometrycznymi ■ Funkcje trygonometryczne kątów od 0° do 180° ■ Twierdzenie sinusów ■ Twierdzenie cosinusów ■ Powtórzenie

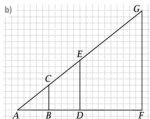
TANGENS KĄTA OSTREGO

ĆWICZENIE A Oblicz ilorazy: $\frac{|BC|}{|AB|}$, $\frac{|DE|}{|AD|}$, $\frac{|FG|}{|AF|}$. Przyjmij, że bok kratki ma długość 1.

a)



b)

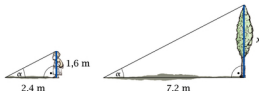


Legenda głosi, że starożytny mędrzec Tales z Miletu potrafił za pomocą cienia wyznaczać wysokości piramid i drzew.



Tales przy swoich pomiarach korzystał z faktu, że w danym momencie kąt padania promieni słonecznych wyznaczających cienie różnych obiektów jest taki sam i wykorzystywał następującą własność trójkątów prostokątnych:

Jeżeli dwa trójkąty prostokątne mają takie same kąty, to stosunek długości przyprostokątnych w jednym z tych trójkątów jest taki sam jak stosunek długości odpowiednich przyprostokątnych w drugim trójkącie.



Dla danych przedstawionych na rysunku z własności tej wynika równość:

$$\frac{1,6}{2,4} = \frac{x}{7,2}$$

Rozwiązując to równanie, można ustalić, że wysokość drzewa wynosi 4,8 m.

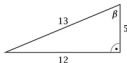
Niech α będzie jednym z kątów ostrych trójkąta prostokątnego.

Tangensem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do długości drugiej przyprostokątnej. Tangens kąta α oznaczamy w skrócie $\operatorname{tg} \alpha$.



Liczba $\operatorname{tg} \alpha$ nie zależy od wielkości trójkąta, a tylko od miary kąta α .

ĆWICZENIE B a) Oblicz tangensy kątów α , β i γ .

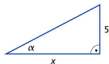


b) Podaj stosunki długości boków równe tangensom kątów α , β i γ .



zadania 1-3

II PRZYKŁAD 1 W pewnym trójkącie prostokątnym tangens jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{2}{7}$, a przyprostokątna leżąca naprzeciw tego kąta ma długość 5. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej.



Wykonujemy rysunek pomocniczy.

$$\frac{5}{x} = \frac{2}{7}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{x} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{7}$$

$$x = \frac{7 \cdot 5}{2}, \text{ stąd } x = 17,5$$

Odp. Długość drugiej przyprostokątnej wynosi 17,5.

ZADANIE Niech α będzie kątem ostrym trójkąta prostokątnego i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5}$. Przyprostokątna tego trójkąta leżąca przy kącie α ma 12 cm. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej.

zadania 4-6

- III **ĆWICZENIE C** Jakie długości mogą mieć przyprostokątne trójkąta prostokątnego, jeśli tangens jednego z kątów ostrych tego trójkąta wynosi $\frac{3}{4}$?

PRZYKŁAD 2 Narysuj kąt, którego tangens jest równy 1,5.

$$\operatorname{tg} \alpha = 1,5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{3 \text{ cm}}{2 \text{ cm}}$$



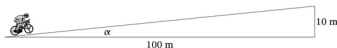
Wybieramy odcinki o takich długościach, aby ich stosunek był równy $\frac{3}{2}$, np. 3 cm i 2 cm (możliłobyśmy przyjąć też długości 6 cm i 4 cm).

Rysujemy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 3 cm i 2 cm. Szukany kąt leży naprzeciwko przyprostokątnej o długości 3 cm.

ZADANIE Narysuj kąt, którego tangens jest równy $\frac{3}{4}$.

zadania 7–8 ►

- IV Nachylenie stoków gór, schodów i dachów domów często podaje się w procentach. Na przykład znak drogowy przedstawiony na zdjęciu ostrzega przed stromym podjazdem, którego nachylenie wynosi 10%. Oznacza to, że tangens kąta nachylenia drogi do poziomu wynosi 0,10.



Rysunek ilustruje podjazd o nachyleniu 10% ($\operatorname{tg} \alpha = 0,10$).

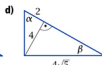
ĆWICZENIE D a) Nachylenie pewnego zbocza wyrażone w procentach wynosi 20%. Narysuj kąt odpowiadający temu nachyleniu.

b) Pod jakim kątem byłoby nachylone zbocze góry, gdyby nachylenie wyrażone w procentach wynosiło 100%?

zadania 9–14 ►

ZESTAW ZADAŃ

- I 1. Narysowany trójkąt jest prostokątny. Oblicz $\operatorname{tg} \alpha$ i $\operatorname{tg} \beta$.



2. Oblicz tangens kąta oznaczonego literą.

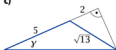
a)



b)



c)



3. a) W pewnym trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 6 cm i 20 cm. Ile wynosi tangens mniejszego z kątów ostrych w tym trójkącie?

b) Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest 5 razy krótsza od drugiej przyprostokątnej. Oblicz tangens większego z kątów ostrych trójkąta.

4. W danym trójkącie oblicz długość odcinka oznaczonego literą.

a)



$$\operatorname{tg} \alpha = 1,5$$

b)



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{7}{8}$$

c)



$$\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{5}$$

d)



$$\operatorname{tg} \delta = 1,5$$

5. Krótsza przyprostokątna trójkąta prostokątnego ma 6 cm, a tangens jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{2}{3}$. Jaką długość może mieć druga przyprostokątna?

6. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, w którym jedna z przyprostokątnych jest o 6 cm dłuższa od drugiej i tangens jednego z kątów ostrych wynosi $\frac{2}{3}$.

7. Skonstruuj taki kąt α , że:

a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$

b) $\operatorname{tg} \alpha = 3$

c) $\operatorname{tg} \alpha = 2\frac{2}{3}$

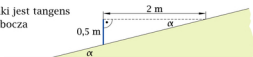
d) $\operatorname{tg} \alpha = 0,4$

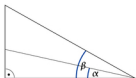
8. a) Narysuj dwa różne trójkąty prostokątne, w których jedna z przyprostokątnych ma 5 cm, a tangens jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{1}{3}$.

b) Narysuj trójkąt prostokątny, w którym dłuższa przyprostokątna ma 6 cm, a tangens jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{3}{2}$.

9. Najbardziej stromy odcinek drogi w Polsce znajduje się w Beskidach. Jego nachylenie wynosi 28%. Naskicuj kąt, pod jakim jest nachylona droga w tym miejscu.

10. Przyjrzyj się rysunkowi. Jaki jest tangens kąta α ? Jakie jest nachylenie zbocza wyrażone w procentach?





11. a) Popatrz na rysunek obok. Która liczba jest większa: $\operatorname{tg} \alpha$ czy $\operatorname{tg} \beta$?

b) Która z podanych liczb jest największa, a która najmniejsza?

$\operatorname{tg} 76^\circ$ $\operatorname{tg} 22^\circ$ $\operatorname{tg} 27,5^\circ$ $\operatorname{tg} 1^\circ$ $\operatorname{tg} 39^\circ$

c) Który z kątów ostrych, γ czy δ , jest większy, jeśli $\operatorname{tg} \gamma = 2$ i $\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{3}$?

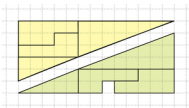
12. a) Tangens pewnego kąta ostrego jest równy 1. Jaką miarę ma ten kąt?

b) Nie wykonując obliczeń, odpowiedz, które z podanych liczb są większe od 1.

$\operatorname{tg} 37^\circ$ $\operatorname{tg} 46^\circ$ $\operatorname{tg} 80^\circ$ $\operatorname{tg} 1^\circ$ $\operatorname{tg} 89^\circ$

13. Czy z tego, że tangens kąta α jest dwa razy większy od tangensa kąta β wynika, że kąt α ma miarę dwa razy większą od miary kąta β ? Sporządź odpowiedni rysunek.

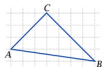
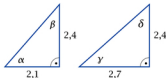
14. Popatrz na rysunek obok. Wydaje się, że zielona i żółta figura mają różne pola. Ale przecież obie figury zbudowane są z jednakowych części, zatem ich pola są równe. Spróbuj wyjaśnić ten paradoks.



MINISPRAWDZIAN

51. Przyjrzyj się rysunkom. Która z poniższych liczb jest największa?

A. $\operatorname{tg} \alpha$ B. $\operatorname{tg} \beta$ C. $\operatorname{tg} \gamma$ D. $\operatorname{tg} \delta$



52. Tangens kąta BAC w trójkącie przedstawionym na rysunku obok jest równy:

A. $4\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

53. Jeśli tangens jednego z kątów ostrych trójkąta prostokątnego jest równy 0,2, to tangens drugiego kąta ostrego jest równy:

A. 0,5 B. 0,8 C. 2 D. 5

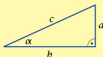
54. Tangens jednego z kątów trójkąta prostokątnego jest równy 2. Jeśli najkrótszy bok tego trójkąta ma długość 4, to najdłuższy bok ma długość:

A. 8 B. 10 C. $2\sqrt{5}$ D. $4\sqrt{5}$

SINUS I COSINUS KĄTA OSTREGO

- 1 Wiemy już, że jeśli dwa trójkąty prostokątne mają taki sam kąt ostry, to stosunki długości odpowiednich przyprostokątnych w obu tych trójkątach są takie same. Podobnie stosunki długości innych par boków są równe i mają swoje nazwy.

Niech α będzie kątem ostrym trójkąta prostokątnego.



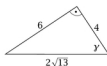
$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Sinusem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do długości przeciwprostokątnej. Sinus α oznaczamy $\sin \alpha$.

Cosinusem kąta α (czyt. kosinusem) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie α do długości przeciwprostokątnej. Cosinus α oznaczamy $\cos \alpha$.

ĆWICZENIE A Oblicz tangensy oraz sinusy i cosinusy kątów α , β i γ .



zadania 1–5 ►

Warto wiedzieć!

Przyjmując oznaczenia jak na rysunku obok, otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad \sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Pozostałe stosunki boków w tym trójkącie też mają nazwy: cotangens (czyt. kotangens) kąta α , w skrócie $\operatorname{ctg} \alpha$, secans (czyt. sekans) kąta α , w skrócie $\sec \alpha$, cosecans (czyt. kosekans) kąta α , w skrócie $\operatorname{csc} \alpha$.

Funkcję secans wprowadził i wykorzystał Mikołaj Kopernik w swoim słynnym dziele *De revolutionibus orbium coelestium*.

Zwróć uwagę, że zachodzą następujące zależności:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \quad \operatorname{csc} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$



$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sec \alpha = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{csc} \alpha = \frac{c}{a}$$

- II **PRZYKŁAD 1** W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 6, a cosinus kąta leżącego przy niej wynosi $\frac{4}{5}$. Jaką długość ma przeciwprostokątna?



$$\frac{6}{x} = \frac{4}{5}$$

$$x = \frac{6 \cdot 5}{4}$$

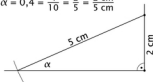
$$x = 7,5$$

$$\cos \alpha = \frac{6}{x} \text{ i } \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

ZADANIE W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 20, a sinus kąta leżącego naprzeciw niej wynosi $\frac{3}{5}$. Oblicz długość przeciwprostokątnej.

PRZYKŁAD 2 Narysuj kąt, którego sinus jest równy 0,4.

$$\sin \alpha = 0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = \frac{2 \text{ cm}}{5 \text{ cm}}$$



Wybieramy odcinki o takich długościach, aby ich iloraz był równy 0,4, np. 2 cm i 5 cm.

Rysujemy trójkąt prostokątny o jednej z przyprostokątnych długości 2 cm i przeciwprostokątnej długości 5 cm. Szukany kąt leży naprzeciw przyprostokątnej długości 2 cm.

ZADANIE Narysuj kąt, którego cosinus jest równy $\frac{3}{5}$.

zadania 6–10 ►

- III Wiesz już, że liczba równa tangensowi kąta nie zależy od długości boków trójkąta, ale od miary kąta. Podobnie sinus i cosinus kąta zależą wyłącznie od miary kąta. Tangens, sinus i cosinus możemy więc rozpatrywać jako funkcje, których argumentami są miary kątów. Te funkcje nazywamy **funkcjami trygonometrycznymi**.

ĆWICZENIE B Czy istnieje trójkąt prostokątny, w którym sinus jednego z kątów jest równy 2?

Zauważ, że przeciwprostokątna to najdłuższy bok trójkąta prostokątnego. W takim razie stosunek długości przyprostokątnej do długości przeciwprostokątnej jest zawsze liczbą mniejszą od 1. Wynika stąd, że sinus i cosinus kąta ostrego są liczbami dodatnimi mniejszymi od 1. Natomiast wartość tangensa kąta ostrego może być dowolną liczbą dodatnią.

ĆWICZENIE C Na każdym rysunku przeciwprostokątna ma długość 1. Która z podanych trzech wartości jest największa?

a) $\sin \alpha_1$, $\sin \alpha_2$, $\sin \alpha_3$

b) $\cos \alpha_1$, $\cos \alpha_2$, $\cos \alpha_3$

c) $\tan \alpha_1$, $\tan \alpha_2$, $\tan \alpha_3$



Poniższe wykresy pokazują, jak zmieniają się wartości funkcji trygonometrycznych dla $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$.



ĆWICZENIE D Która z podanych liczb jest największa, a która — najmniejsza?

- a) $\sin 73^\circ$, $\sin 23^\circ$, $\sin 11^\circ$ b) $\cos 35^\circ$, $\cos 9^\circ$, $\cos 83^\circ$ c) $\operatorname{tg} 16^\circ$, $\operatorname{tg} 67^\circ$, $\operatorname{tg} 47^\circ$

Ciekawostka

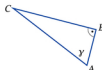
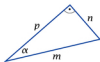
Nazwy funkcji trygonometrycznych pochodzą z łaciny. Ciekawa jest historia powstania nazwy sinus. Jak wiele innych pojęć matematycznych, także to pojęcie pochodzi z Indii. Stamtąd zostało przyswojone przez uczonych arabskich. Zwyczajem arabskim było zapisywanie wyrazów bez samogłosek, więc nazwę sinus — *jeilba* — zapisywali jako *jb*.

Gdy tłumacz arabskich ksiąg na łacinę natknął się na słowo *jb*, nie zdawał sobie sprawy, że jest ono obcego (niearabskiego) pochodzenia. Sprawdził tylko, że w języku arabskim słowo to może oznaczać *zatokę*. Ponieważ po łacinie *zatoka* to *sinus*, tak przetłumaczył słowo *jb*. Można więc powiedzieć, że nazwa *sinus* znalazła się w matematyce przez pomyłkę.

zadania 11–13 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Zapisz sinus, cosinus oraz tangens kątów α , β i γ jako stosunki odpowiednich długości boków trójkątów.



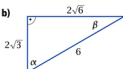
2. Oblicz wartości podanych funkcji trygonometrycznych kątów α i β .

a)



$\sin \alpha$
 $\cos \beta$
 $\operatorname{tg} \beta$

b)



$\cos \alpha$
 $\sin \beta$
 $\operatorname{tg} \alpha$

3. Korzystając z informacji podanych na rysunku, oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \beta$.



równoległobok



romb



trapez

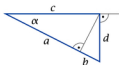
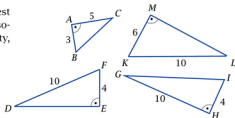


trapez

4. Każdy z kątów α , β , γ i δ jest kątem ostrym w jednym z narysowanych trójkątów. Wskaż te kąty, jeżeli wiadomo, że:

$$\sin \alpha = \frac{2}{5} \quad \text{tg } \gamma = \frac{3}{5}$$

$$\cos \beta = \frac{3}{5} \quad \text{tg } \delta = \frac{3}{5}$$



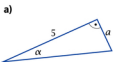
5. Popatrz na rysunek obok.

a) Do każdego z podanych ułamków dopasuj odpowiednią funkcję trygonometryczną kąta α .

$$\frac{d}{a+b} \quad \frac{a}{c} \quad \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a} \quad \frac{c}{a+b} \quad \frac{\sqrt{d^2 - b^2}}{c} \quad \frac{d}{c}$$

b) Uzasadnij równość $\frac{b}{d} = \frac{d}{a+b}$.

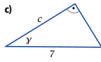
6. Korzystając z podanej wartości funkcji trygonometrycznej kąta, oblicz długość odcinka oznaczonego literą.



$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{3}$$



$$\sin \beta = \frac{2}{3}$$



$$\cos \gamma = \frac{4}{5}$$

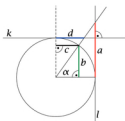
7. Najmniejszy z kątów pewnego trójkąta prostokątnego ma miarę α .

a) Jakie długości mają przyprostokątne tego trójkąta, jeśli przeciwprostokątna ma długość p ?

b) Najkrótszy bok trójkąta ma długość m . Jakie długości mają pozostałe boki?

8. Skonstruuj kąty α i β , jeżeli wiadomo, że $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ i $\cos \beta = \frac{3}{4}$.

- 9. a)** Skonstruuj trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości 6 cm i kącie ostrym α , takim że $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.
- b)** Skonstruuj trójkąt prostokątny o kącie ostrym α , takim że $\cos \alpha = \frac{2}{5}$, i przyprostokątnej długości 3 cm leżącej przy tym kącie.



- 10.** Okrąg na rysunku obok ma promień długości 1, a proste k i l są styczne do tego okręgu. Zapisz za pomocą funkcji trygonometrycznych kąta α długości zaznaczonych odcinków.

- 11.** Przyjrzyj się rysunkom i porównaj liczby:

a) $\sin \alpha$ i $\sin \beta$

b) $\cos \gamma$ i $\cos \delta$



- 12.** Kąty α i β są ostre. Oceń, który z nich jest większy, gdy:

a) $\sin \alpha = 0,7$, $\sin \beta = 0,1$

b) $\cos \alpha = 0,6$, $\cos \beta = 0,2$

- 13.** Kąt między ramieniem a podstawą trójkąta równoramiennego ma miarę α . Korzystając z funkcji trygonometrycznych, zapisz wzór pozwalający obliczać:

- a)** pole tego trójkąta, gdy dana jest wysokość h poprowadzona do podstawy,
b) pole tego trójkąta, gdy dana jest długość ramienia d ,
c) obwód tego trójkąta, gdy dana jest długość jego podstawy a .

MINISPRAWDZIAN

- 51.** Przy takich oznaczeniach jak na rysunku obok iloraz $\frac{k}{n}$ to:

A. $\cos \beta$

B. $\sin \alpha$

C. $\frac{1}{\cos \alpha}$

D. $\frac{1}{\sin \alpha}$



- 52.** Cosinus najmniejszego kąta w trójkącie prostokątnym o bokach 9, 12, 15 jest równy:

A. 0,6

B. 0,75

C. 0,8

D. 1,25

- 53.** Najdłuższy bok trójkąta prostokątnego ma długość 6, a mniejszy z kątów ostrych ma miarę α . Jaką długość ma krótsza z przyprostokątnych?

A. $6 \cdot \sin \alpha$

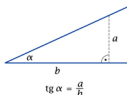
B. $\frac{6}{\sin \alpha}$

C. $6 \cdot \cos \alpha$

D. $\frac{6}{\cos \alpha}$

OBLICZENIA TRYGONOMETRYCZNE

- I Gdy dany jest kąt ostry α , możemy znaleźć jego tangens, postępując w następujący sposób. Rysujemy taki trójkąt prostokątny, w którym kąt α jest jednym z jego kątów. Mierzmy długości przyprostokątnych i obliczamy odpowiedni ich iloraz. Podobnie — po wykonaniu odpowiednich pomiarów — możemy obliczyć $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.



ĆWICZENIE A Posługując się kątomierzem, narysuj kąt o mierze 20° . Zmierz długości odpowiednich odcinków i na podstawie tych pomiarów oblicz $\sin 20^\circ$, $\cos 20^\circ$, $\operatorname{tg} 20^\circ$. Wynik zaokrąglaj do części dziesiętych.

Wykonywanie takich obliczeń jak w ćwiczeniu A jest uciążliwe i zawsze obarczone pewnym błędem (wynikającym na przykład z niedokładności pomiarów). Aby znaleźć wartości funkcji trygonometrycznych danego kąta, możesz się posłużyć tabelą zamieszczoną na s. 249 podręcznika. Oto jej fragment:

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
1°	0,0175	0,9998	0,0175	16°	0,2756	0,9613	0,2867
2°	0,0349	0,9994	0,0349	17°	0,2924	0,9563	0,3057
3°	0,0523	0,9986	0,0524	18°	0,3090	0,9511	0,3249
4°	0,0698	0,9976	0,0699	19°	0,3256	0,9455	0,3443
5°	0,0872	0,9962	0,0875	20°	0,3420	0,9397	0,3640
6°	0,1045	0,9945	0,1051	21°	0,3584	0,9336	0,3839
7°	0,1219	0,9925	0,1228	22°	0,3746	0,9272	0,4040
8°	0,1392	0,9903	0,1405	23°	0,3907	0,9205	0,4245
9°	0,1564	0,9877	0,1584	24°	0,4067	0,9135	0,4452
10°	0,1736	0,9848	0,1763	25°	0,4226	0,9063	0,4663
11°	0,1908	0,9816	0,1944	26°	0,4384	0,8988	0,4877
12°	0,2079	0,9781	0,2126	27°	0,4540	0,8910	0,5095
13°	0,2250	0,9744	0,2309	28°	0,4695	0,8829	0,5317
14°	0,2419	0,9703	0,2493	29°	0,4848	0,8746	0,5543
15°	0,2588	0,9659	0,2679	30°	0,5000	0,8660	0,5774

Z tej tabeli można na przykład odczytać, że:

$$\begin{array}{lll} \sin 8^\circ \approx 0,14 & \cos 8^\circ \approx 0,99 & \operatorname{tg} 8^\circ \approx 0,14 \\ \sin 27^\circ \approx 0,45 & \cos 27^\circ \approx 0,89 & \operatorname{tg} 27^\circ \approx 0,51 \end{array}$$

ĆWICZENIE B Odczytaj z tabeli $\sin 20^\circ$, $\cos 20^\circ$, $\operatorname{tg} 20^\circ$ i porównaj te liczby z wynikami otrzymanymi w ćwiczeniu A.

Jeszcze łatwiej znaleźć sinus, cosinus i tangens danego kąta, korzystając z odpowiedniego kalkulatora. Do obliczania wartości tych funkcji służą klawisze z napisami: *sin*, *cos*, *tan*.



Uwaga. Używając kalkulatora do obliczania wartości funkcji trygonometrycznych, należy najpierw sprawdzić, czy ustawioną w kalkulatorze jednostką miary kąta jest stopień. Najczęściej można wybrać jedną z trzech jednostek: stopień (skrót DEG od ang. *degree*), radian (skrót RAD) lub gradus (skrót GRAD).

Warto wiedzieć!

Wiadomo, że kąt o mierze 1° to $\frac{1}{90}$ kąta prostego. Kąt o mierze 1 grad to $\frac{1}{100}$ kąta prostego. Natomiast 1 rad to miara kąta środkowego opartego na łuku o długości równej promieniowi okręgu.

ĆWICZENIE C Oblicz za pomocą kalkulatora: $\sin 12^\circ$, $\cos 74^\circ$, $\operatorname{tg} 44^\circ$. Porównaj otrzymane wyniki z danymi zamieszczonymi w tabeli na końcu podręcznika.

Korzystając z funkcji trygonometrycznych, możemy obliczać długości odcinków i miary kątów w różnych figurach geometrycznych.

PRZYKŁAD 1 Jeden z kątów trójkąta prostokątnego ma miarę 37° , a przyprostokątna leżąca przy tym kącie ma długość 8. Jaką długość ma druga przyprostokątna?



Wykonujemy rysunek pomocniczy.

$$\operatorname{tg} 37^\circ = \frac{x}{8}$$

Zapisujemy i przekształcamy odpowiednią równość.

$$x = 8 \cdot \operatorname{tg} 37^\circ$$

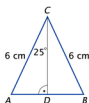
Wartość $\operatorname{tg} 37^\circ$ odczytujemy z tablic lub obliczamy za pomocą kalkulatora.

$$x \approx 8 \cdot 0,7536 \approx 6$$

Odp. Druga przyprostokątna ma długość około 6.

ZADANIE Jeden z kątów trójkąta prostokątnego ma miarę 42° , a przyprostokątna leżąca naprzeciwko tego kąta ma długość 5. Jaką długość ma druga przyprostokątna?

PRZYKŁAD 2 Ramiona trójkąta równoramiennego mają długość 6 cm. Kąt między tymi ramionami ma miarę 50° . Jaką długość ma podstawa tego trójkąta?



$$\sin 25^\circ = \frac{|AD|}{6}$$

$$|AD| = 6 \cdot \sin 25^\circ$$

$$|AB| = 2 \cdot |AD| = 12 \cdot \sin 25^\circ$$

$$|AB| \approx 12 \cdot 0,4226 \approx 5,1 \text{ [cm]}$$

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Wysokość opuszczona na podstawę trójkąta równoramiennego dzieli kąt między ramionami na dwa równe kąty.

Wartość $\sin 25^\circ$ odczytujemy z tabeli lub obliczamy za pomocą kalkulatora.

Odp. Podstawa trójkąta ma około 5,1 cm długości.

ZADANIE Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 8 cm. Kąt przy podstawie ma miarę 40° . Jaką długość ma ramię tego trójkąta?

zadania 1–14 ►

- II Korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych, możemy podać w pewnym przybliżeniu miarę kąta odpowiadającą danej wartości. Na przykład: aby znaleźć miarę kąta α , jeśli wiadomo, że $\sin \alpha = 0,31$, znajdujemy w kolumnie z wartościami funkcji sinus (zob. fragment tabeli poniżej) dwie liczby, z których jedna jest mniejsza, a druga większa od 0,31, i wybieramy ten kąt, którego sinus jest liczbą bliższą 0,31.

α	$\sin \alpha$
17°	0,2924
18°	0,3090
19°	0,3256
20°	0,3420

$$0,3090 < 0,31 < 0,3256$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \sin 18^\circ & \sin \alpha & \sin 19^\circ \end{array}$$

$$\alpha \approx 18^\circ$$

ĆWICZENIE D Korzystając z tabeli na końcu podręcznika, podaj w przybliżeniu, jakie miary mają kąty α , β i γ , jeśli $\operatorname{tg} \alpha = 0,2$, $\sin \beta = 0,53$, $\cos \gamma = 0,45$.

Znając sinus lub cosinus, lub tangens kąta, można z większą dokładnością i znacznie wygodniej ustalić jego miarę, gdy skorzystamy z kalkulatora. Służą do tego klawisze, nad którymi widnieją napisy: $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$.

ĆWICZENIE E Korzystając z kalkulatora, ustal miary kątów α , β i γ , jeśli $\operatorname{tg} \alpha = 0,2$, $\sin \beta = 0,53$, $\cos \gamma = 0,45$. Porównaj otrzymane liczby z liczbami otrzymanymi w ćwiczeniu D.

PRZYKŁAD 3 W rombie o boku długości 5 cm dłuższa przekątna ma 8 cm. Jakie miary mają kąty tego rombu?



$$|\angle DAB| = 2\alpha$$

Przekątne rombu są prostopadłe, przecinają się w połowie i dzielą kąty rombu na dwie równe części.

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\alpha \approx 37^\circ$$

$$|\angle DAB| = 2\alpha \approx 74^\circ$$

W trójkącie ABS mamy $\cos \alpha = \frac{|AS|}{|AB|}$.

Korzystając z tabeli lub kalkulatora, ustalamy miarę kąta, którego cosinus wynosi 0,8.

$$|\angle ADC| = 180^\circ - |\angle DAB| \approx 106^\circ$$

Korzystamy z tego, że suma miar sąsiednich kątów rombu wynosi 180° .

Odp. Sąsiednie kąty tego rombu mają miary około 74° i około 106° .

ZADANIE Przekątna prostokąta ma długość 8 cm, a jeden z jego boków — 3 cm. Oblicz miary kątów, jakie tworzy przekątna z bokami tego prostokąta.

zadania 15–20 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Korzystając z tabeli na str. 249 lub z kalkulatora, oblicz długość odcinka oznaczonego literą.



2. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, którego jeden z kątów ma miarę 26° , a przyprostokątna leżąca naprzeciw tego kąta ma długość 10 cm.

3. Oblicz stosunek długości krótszej przyprostokątnej do przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym o kącie ostrym α , gdy:

a) $\alpha = 22^\circ$

b) $\alpha = 72^\circ$

c) $\alpha = 48^\circ$

4. Oblicz stosunek długości dłuższej przyprostokątnej do krótszej w trójkącie prostokątnym o kącie ostrym α , gdy:

a) $\alpha = 73^\circ$

b) $\alpha = 15^\circ$

c) $\alpha = 28^\circ$

5. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości a i b , a przeciwprostokątna ma długość c . Naprzeciw boku a leży kąt o mierze α . Oblicz długości pozostałych boków trójkąta i miarę drugiego z jego kątów ostrych, jeśli dane są:

a) $a = 1$, $\alpha = 24^\circ$

b) $b = 6$, $\alpha = 58^\circ$

c) $c = 7$, $\alpha = 36^\circ$

6. Wysokość równoległoboku poprowadzona z jednego z wierzchołków podzieliła bok równoległoboku na odcinki o długościach 3 cm i 5 cm. Kąt ostry równoległoboku ma miarę 40° . Oblicz pole tego równoległoboku.

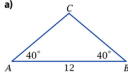
7. Przekątne prostokąta przecinają się pod kątem 80° . Dłuższy jego bok ma 5 cm. Oblicz pole tego prostokąta.

8. W trójkącie prostokątnym o kącie ostrym 20° jedna z przyprostokątnych jest o 5 cm dłuższa od drugiej. Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.

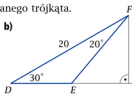
9. Krótsza przyprostokątna trójkąta prostokątnego ma 5 cm, a jeden z jego kątów ma 20° . Jaka jest wysokość tego trójkąta opuszczona na przeciwprostokątną?

10. Oblicz długości boków danego trójkąta.

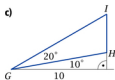
a)



b)



c)



11. Znajdź wysokości równoległoboku, którego boki mają długości 7 cm i 10 cm, a kąt ostry ma miarę 70° .

12. Bok rombu ma długość 5 cm, a jeden z jego kątów ma miarę 54° . Jakie długości mają przekątne tego rombu?

13. Oblicz długość cięciwy okręgu, na której jest oparty zaznaczony kąt.

a)



b)



c)



14. a) Oblicz długość boku pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu długości 4 cm.

b) Znajdź długość promienia okręgu opisanego na dziesięciokącie foremnym o boku 2 cm oraz promienia okręgu wpisanego w ten dziesięciokąt.

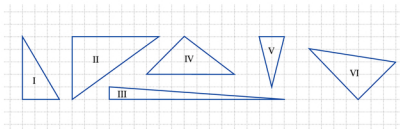
II 15. Korzystając z tabeli na str. 249 lub z kalkulatora, znajdź miarę kąta α , jeśli:

a) $\sin \alpha = 0,7$

b) $\cos \alpha = \frac{7}{12}$

c) $\operatorname{tg} \alpha = 0,8$

16. Oblicz miary kątów trójkątów. Przyjmij, że bok kratki ma długość 1.

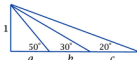
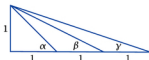


17. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy dłuższa od drugiej. Jakie miary mają kąty ostre tego trójkąta?

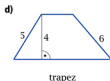
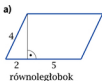
18. Znajdź miary kątów trójkąta równoramiennego o podstawie długości 3 cm i wysokości opuszczonej na tę podstawę równej 5 cm.

19. a) Oblicz miary kątów α , β i γ .

b) Oblicz długości odcinków a , b i c .



20. Oblicz miary kątów w danym czworokącie.



MINISPRAWDZIAN

51. Jeżeli α jest kątem ostrym i $\operatorname{tg} \alpha = 5$, to:

- A. $\alpha < 50^\circ$ B. $50^\circ < \alpha < 60^\circ$ C. $60^\circ < \alpha < 70^\circ$ D. $\alpha > 70^\circ$

52. Jeśli $\alpha = 65^\circ$, to $\sin \alpha + \cos \alpha$ zawiera się w przedziale:

- A. $(0; 0,5)$ B. $(0,5; 1)$ C. $(1; 1,5)$ D. $(1,5; 2)$

53. Boki trójkąta prostokątnego mają długości 5, 4, 3. Miara jednego z kątów tego trójkąta, po zaokrągleniu do pełnych stopni, jest równa:

- A. 35° B. 37° C. 39° D. 41°

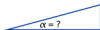
54. Przekątne prostokąta przecinają się pod kątem 44° . Jeśli przez a oznaczymy długość krótszego boku, a przez b — dłuższego, to:

- A. $a \approx 0,22b$ B. $a \approx 0,4b$ C. $a \approx 0,8b$ D. $a \approx 0,97b$

ZASTOSOWANIA TRYGONOMETRII

- I Funkcjami trygonometrycznymi posługują się często geodeci, architekci, konstruktorzy, a także specjaliści z takich dziedzin, jak fizyka, geografia i astronomia.

PRZYKŁAD 1 Kolejka linowo-terenowa na Gubałówkę wjeżdża po torach, których nachylenie wynosi 23%. Pod jakim kątem jest w tym miejscu nachylony stok Gubałówki?



$$23\% = 0,23$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,23$$

$$\alpha \approx 13^\circ$$

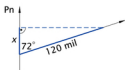
Nachylenie podane w procentach to tangens kąta nachylenia; $23\% = 0,23$.

Korzystając z tabeli lub kalkulatora, ustalamy miarę kąta, którego tangens wynosi 0,23.

Odp. Stok Gubałówki jest nachylony pod kątem około 13° .

ZADANIE Nachylenie pewnej ulicy wynosi 16%. Pod jakim kątem nachylona jest ta ulica do poziomu?

PRZYKŁAD 2 Statek przepłynął 120 mil morskich kursem 72° . O ile mil statek zbliżył się do bieguna północnego? (W obliczeniach nie uwzględniaj krzywizny Ziemi).



$$\frac{x}{120} = \cos 72^\circ$$

$$x = 120 \cdot \cos 72^\circ$$

$$x \approx 120 \cdot 0,309 \approx 37$$

Odp. Statek zbliżył się do bieguna o około 37 mil morskich.

Kurs statku to kąt między kierunkiem jego poruszania się a kierunkiem północnym (na rysunku jest to kąt α).



Wartość $\cos 72^\circ$ odczytujemy z tabeli lub obliczamy za pomocą kalkulatora.

ZADANIE Statek przepłynął 85 mil kursem 32° . O ile mil morskich statek przemieścił się na wschód?

PRZYKŁAD 3 Linę podtrzymującą maszt przymocowano do niego na wysokości 20,5 m nad ziemią i zamocowano w ziemi w odległości 10 m od podstawy masztu. Jaki kąt tworzy z poziomem naprężona lina?



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{20,5}{10} = 2,05$$

$$\alpha \approx 64^\circ$$

Odczytujemy z tabeli lub obliczamy za pomocą kalkulatora miarę kąta, którego tangens jest równy 2,05.

Odp. Lina nachylona jest do poziomu pod kątem około 64° .

ZADANIE Drabina o długości 4,50 m jest oparta o ścianę tak, że jej koniec dotyka ściany na wysokości 4 m. Pod jakim kątem drabina jest nachylona do podłoża?

zadania 1–16 ►

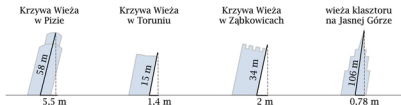
ZESTAW ZADAŃ

Wyciąg	Średnie nachylenie
Polanica	35,8%
Goryczkowa	37%
Hala Szrenicka	18%
Łabski Szczyt	28,9%

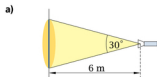
1. W tabelce podano nachylenia (w procentach) różnych wyciągów narciarskich. Pod jakimi kątami są nachylone te wyciągi?

2. Trasa kolejki linowej na Kasprowy Wierch składa się z dwóch części. Nachylenie pierwszej wynosi 16,6%, a drugiej 27,5%. O ile stopni różnią się kąty nachylenia tych dwóch odcinków trasy kolejki?

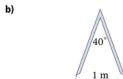
3. Dla każdej z poniższych budowli oblicz, o jaki kąt odchyłona jest od pionu.



4. Korzystając z informacji podanych na rysunku, odpowiedz na pytanie.



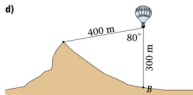
Jaka jest średnica kręgu światła rzucającego przez latarkę na ścianę?



Z jak długich listew jest zbudowany przyrząd do odmierzania odległości?



Jaka jest różnica wysokości między szczytem wzniesienia a punktem A?



Jaka jest różnica wysokości między szczytem wzniesienia a punktem B?

5. Zgodnie z przepisami budowlanymi podjazdy dla wózków inwalidzkich wewnątrz budynków nie mogą być nachylone pod kątem większym niż 5° . Jaka powinna być długość podjazdu, który umożliwia pokonanie różnicy wysokości 1 m?

6. Latarnia morska stoi 20 mil na zachód od portu, a statek znajduje się w punkcie położonym 50 mil na południe od tej latarni. Jakim kursem powinien popłynąć statek, by dotrzeć do portu najkrótszą drogą?

7. Gdy Mikołaj przebywał w miejscowości Oulu (Finlandia), notował każdego dnia w ciągu całego roku długość swojego cienia w południe. Okazało się, że najkrótszy cień miał 1,6 m, a najdłuższy 66,5 m. Mikołaj ma 180 cm wzrostu. Pod jakim kątem padały promienie słoneczne wtedy, gdy cień Mikołaja był najkrótszy, a pod jakim — gdy był najdłuższy?

8. Najbardziej stroma trasa kolejowa na świecie to Katoomba Scenic w Górach Błękitnych w Australii. Na jednym z jej odcinków, o długości 311 m, pociąg pokonuje różnicę wysokości 240 m. Jaki jest kąt nachylenia tego odcinka trasy?



10. a) Fotografia obok przedstawia tzw. diabelski młyn w pewnym lunaparku. Średnica jego koła wynosi 35 m. Zawieszono na nim 36 wagoników. W najniższym położeniu wagonik zawieszony jest 2 m nad ziemią. Jak wysoko nad ziemią jest zaczepiony wagonik oznaczony na fotografii literą A, a jak wysoko — wagonik oznaczony literą B?

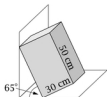
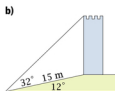
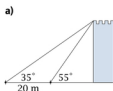
b) Największe na świecie koło widokowe London Eye (zob. fotografia na okładce) ma średnicę 135 m. Zawieszono na nim 32 gondole. Oblicz różnicę między wysokościami, na których znajdują się sąsiadujące ze sobą gondole, w momencie gdy jedna z nich znajduje się w najwyższym punkcie.



11. Zdjęcie przedstawia zamocowanie lin podtrzymujących wysoki maszt. Miejsce, w którym zakotwiczone są liny, jest oddalone o 20 m od podstawy masztu. Kąty między poszczególnymi linami a poziomem mają miary 15° , 33° i 45° .

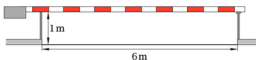
- Oblicz długości tych lin.
- Oblicz odległości między punktami zaczepienia tych lin na maszcie.

- 12.** Korzystając z informacji podanych na rysunku, oblicz wysokość wieży.



13. Prostopadłościennne pudełko jest oparte jedną krawędzią o ścianę, a drugą — o podłogę, tak jak przedstawiono na rysunku. Oblicz odległość najwyższego położonego wierzchołka tego pudełka od podłogi (po zaokrągleniu do pełnych centymetrów).

- 14.** Przyjrzyj się rysunkowi. O jaki najmniejszy kąt należałoby obrócić ramię szlabanu, aby mógł przejechać pod nim autobus, który ma 2,5 m szerokości i 3,1 m wysokości?



- 15.** Okrągłe lustro o średnicy 40 cm zawieszono na sznurze (zob. rysunek z lewej). Odległość między środkiem lustra a gwoździem, na którym wisi, jest równa 50 cm. Oblicz długość sznura.

- 16.** Na dwóch kołach o promieniach 40 cm i 10 cm rozpięto pas transmisyjny (zob. rysunek z prawej). Odległość między środkami kół jest równa 60 cm. Jaka jest długość pasa?

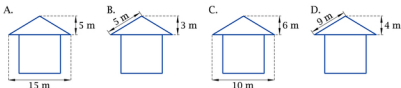


MINISPRAWDZIAN

51. Ruchome schody łączą parter z piętrzem położonym 3 m wyżej. Poręcz przy tych schodach nachylona jest do poziomu pod kątem 32° . Jaką odległość pokonuje osoba, która przemieści się z parteru na piętro, korzystając z tych schodów?

- A. większą niż 5,5 m, ale mniejszą niż 5,9 m C. mniejszą niż 5 m
B. większą niż 5 m, ale mniejszą niż 5,5 m D. większą niż 5,9 m

52. Architekci radzą, by dachówką pokrywać tylko te dachy, które są nachylone do poziomu pod kątem większym niż 31° . Na schematycznych rysunkach podano niektóre wymiary. Którego dachu nie powinno się pokryć dachówką?



WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH KĄTÓW 30° , 45° , 60°

- 1 Z tabeli na str. 249 można odczytać przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych. Korzystając z zależności między bokami w pewnych trójkątach, możemy wyznaczyć dokładne wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° i 60° .

Trójkąt prostokątny o kącie ostrym 45° to połowa kwadratu, więc:



$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

Ponieważ trójkąt prostokątny o kątach ostrych 30° i 60° to połowa trójkąta równobocznego, więc:



$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

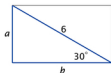
W tabelce obok zebrano wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° i 60° .

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Zadania dotyczące trójkątów prostokątnych równoramiennych oraz trójkątów prostokątnych o kątach ostrych 30° i 60° rozwiązywaliśmy już wcześniej (por. str. 61). Korzystając z tabelki, możemy rozwiązać tego typu zadania także za pomocą funkcji trygonometrycznych.

PRZYKŁAD

Oblicz długości boków prostokąta przedstawionego na rysunku.



$$\begin{aligned}\frac{a}{6} &= \sin 30^\circ & \frac{b}{6} &= \cos 30^\circ \\ \frac{a}{6} &= \frac{1}{2} & \frac{b}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2a &= 6 & 2b &= 6\sqrt{3} \\ \underline{a} &= 3 & \underline{b} &= 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

Korzystamy z wartości funkcji trygonometrycznych kąta 30° .

ZADANIE Krótszy bok prostokąta ma długość 3 cm, a kąt między przekątną a tym bokiem ma miarę 60° . Oblicz długość dłuższego boku tego prostokąta.

zadania 1–8 ►

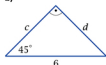
ZESTAW ZADAŃ

1. Korzystając z informacji podanych na rysunku, oblicz długości odcinków oznaczonych literami.

a)



b)



c)



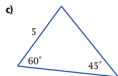
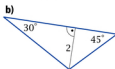
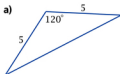
2. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę α , a najkrótszy bok ma długość a . Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta, jeśli:

a) $\alpha = 30^\circ$, $a = 4$

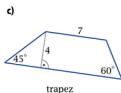
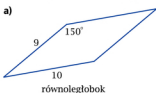
b) $\alpha = 45^\circ$, $a = \sqrt{3}$

c) $\alpha = 60^\circ$, $a = 2\sqrt{3}$

3. Oblicz obwód trójkąta przedstawionego na rysunku.



4. Oblicz pole czworokąta przedstawionego na rysunku.

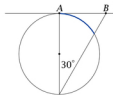


5. Krótsza przekątna równoległoboku ma długość 4 cm i dzieli go na dwa trójkąty prostokątne. Oblicz pole tego równoległoboku, jeśli jego kąt ostry ma miarę 60° .

6. Bok rombu ma długość 6 cm, a kąt rozwarty ma miarę 120° . Oblicz długości przekątnych tego rombu.

7. Z punktu P poprowadzono dwie styczne do okręgu o promieniu 4 cm. Kąt między stycznymi ma miarę 60° . Znajdź odległość punktu P od środka okręgu.

8. Czy łuk okręgu zaznaczony na rysunku ma większą długość niż odcinek AB ? Odpowiedź uzasadnij.



MINISPRAWDZIAN

51. Liczba $2 \sin 45^\circ + 3 \sin 30^\circ$ jest równa:

A. $2 + 3\sqrt{3}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2}$

C. $\sqrt{2} + 1$

D. $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$

52. Jaki obwód ma prostokąt, którego przekątne mają długość 6 i przecinają się pod kątem 60° ?

A. $6\sqrt{3} + 3$

B. $6(\sqrt{3} + 1)$

C. $3\sqrt{3} + 3$

D. 12

53. W trójkącie dwa kąty mają miary 60° i 45° . Najkrótszy bok tego trójkąta ma długość 10. Jaką długość ma najdłuższy bok tego trójkąta?

A. $5\sqrt{3} + 10$

B. $5\sqrt{3}$

C. $10\sqrt{3}$

D. $5\sqrt{3} + 5$

ZWIĄZKI MIĘDZY FUNKCJAMI TRYGONOMETRYCZNYMI

I

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Obok zapisano dwie **tożsamości trygonometryczne**, czyli równości, które są prawdziwe dla dowolnego kąta ostrego α . Pierwsza z nich jest nazywana jedynką trygonometryczną.

Uwaga. Zapis $\sin^2 \alpha$ (czytamy: sinus kwadrat alfa) oznacza liczbę $(\sin \alpha)^2$.

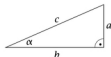
Dowód

Niech α będzie dowolnym kątem ostrym.

Stosując oznaczenia jak na rysunku obok, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} L &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \\ &= \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1 = P \end{aligned}$$

$$P = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha = L \quad \square$$



Przekształcamy lewą stronę pierwszej równości tak, aby otrzymać prawą stronę.

Z twierdzenia Pitagorasa $a^2 + b^2 = c^2$.

Przekształcamy prawą stronę drugiej równości tak, aby otrzymać lewą stronę.

PRZYKŁAD 1 a) Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Oblicz $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5}{13} : \frac{12}{13} = \frac{5}{13} \cdot \frac{13}{12} = \frac{5}{12}$$

Ponieważ cosinus kąta ostrego α jest dodatni, więc możemy pominąć rozwiązanie $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

b) Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = 7$. Oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 7, \text{ więc } \sin \alpha = 7 \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(7 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$49 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$50 \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{50}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{50}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\sin \alpha = 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

..... Ponieważ cosinus kąta ostrego jest dodatni, więc pomijamy rozwiązanie $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{50}}$.

ZADANIE a) Kąt α jest ostry i $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. Oblicz $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

b) Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

PRZYKŁAD 2 Sprawdź tożsamość $\frac{1 - \sin \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$.

$$L = \frac{1 - \sin \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} =$$

$$= \frac{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} =$$

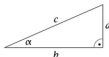
..... Przekształcamy lewą stronę równości tak, aby otrzymać prawą stronę.

$$= \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = P$$

ZADANIE Sprawdź tożsamość $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

zadania 1–5 ►

II **ĆWICZENIE** Korzystając z oznaczeń na rysunku obok, zapisz za pomocą liter a , b i c : $\sin(90^\circ - \alpha)$, $\cos(90^\circ - \alpha)$ i $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$.



Porównując wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych tego samego trójkąta prostokątnego, otrzymamy równości, które zostały zapisane obok.

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

PRZYKŁAD 3 Zapisz w prostszej postaci iloczyn $\operatorname{tg} 37^\circ \cdot \sin 53^\circ$.

$$\operatorname{tg} 37^\circ \cdot \sin 53^\circ = \frac{\sin 37^\circ}{\cos 37^\circ} \cdot \sin(90^\circ - 37^\circ) = \frac{\sin 37^\circ}{\cos 37^\circ} \cdot \cos 37^\circ = \underline{\sin 37^\circ}$$

ZADANIE Zapisz w prostszej postaci $\frac{\cos 18^\circ}{\operatorname{tg} 72^\circ}$.

zadania 6–10 ►

ZESTAW ZADAŃ

◀ I 1. Przyjmujemy, że α jest kątem ostrym.

- a) Oblicz $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$, jeśli $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. c) Oblicz $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$, gdy $\sin \alpha = \frac{2}{5}$.
b) Oblicz $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$, jeśli $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. d) Oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$, jeśli $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{13}$.

• 2. Wiedząc, że $\sin 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, oblicz $\cos 22,5^\circ$ i $\operatorname{tg} 22,5^\circ$.

3. Uzasadnij, że nie istnieje kąt ostry α , dla którego spełniony jest warunek:

- a) $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ i $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ b) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{2}$ c) $\operatorname{tg} \alpha = 3$ i $\cos \alpha = \frac{5}{7}$

4. Przedstaw w prostszej postaci.

- a) $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$ c) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$ e) $\sin \alpha \left(\sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right)$
b) $1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ d) $(\cos \alpha \operatorname{tg} \alpha)^2 - \left(\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2$ • f) $\frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$

5. Sprawdź tożsamości.

- a) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$ c) $\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$
b) $1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}$ d) $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$

◀ II 6. Uzasadnij, że dla dowolnego kąta ostrego α wartość podanego wyrażenia jest równa 1.

- a) $\sin^2 \alpha + \sin^2(90^\circ - \alpha)$ c) $\sin \alpha \cos(90^\circ - \alpha) + \cos \alpha \sin(90^\circ - \alpha)$
b) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$ d) $\frac{\sin \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos(90^\circ - \alpha)}$

7. Oblicz.

- a) $\operatorname{tg} 27^\circ \cdot \operatorname{tg} 63^\circ$ b) $\sin^2 12^\circ + \sin^2 78^\circ$ c) $\frac{\sin 39^\circ}{\sin 51^\circ} \cdot \frac{\cos 39^\circ}{\cos 51^\circ}$

• 8. a) Wiedząc, że $\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, oblicz $\sin 54^\circ$ i $\sin 36^\circ$.

b) Wiedząc, że $\operatorname{tg} 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$, oblicz $\operatorname{tg} 15^\circ$.

c) Wiedząc, że $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, oblicz $\sin 75^\circ$.

• 9. Znajdź miarę kąta ostrego α , jeżeli:

- a) $\cos \alpha = \sin 20^\circ$ b) $\sin \alpha = \cos(\alpha - 10^\circ)$ c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} 65^\circ}$

10. Niech α i β będą kątami ostrymi trójkąta prostokątnego. Ustal ich miary, gdy:

a) $\operatorname{tg} \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}$

b) $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}$

c) $\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \sqrt{3}$

MINISPRAWDZIAN

51. W trójkącie prostokątnym kąty ostre mają miary α i β . Wiadomo, że $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$. Która z podanych liczb jest równa $\cos \beta$?

A. $\frac{5-\sqrt{2}}{5}$

B. $\frac{\sqrt{27}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{23}}{5}$

52. Ile wynosi wartość wyrażenia $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha$?

A. 0

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

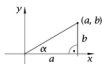
D. $\frac{1}{4}$

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE KĄTÓW OD 0° DO 180°

- 1 ĆWICZENIE A Na rysunkach kąty α , β i γ zaznaczono w układzie współrzędnych. Oblicz $\operatorname{tg} \alpha$, $\sin \beta$, $\cos \gamma$.



Jeśli trójkąt prostokątny jest umieszczony w układzie współrzędnych, to funkcje trygonometryczne kąta α możemy opisać za pomocą współrzędnych jednego z wierzchołków tego trójkąta.



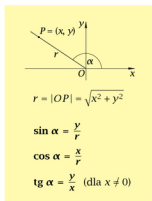
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Taką interpretację możemy wykorzystać do zdefiniowania funkcji trygonometrycznych dowolnych kątów — nie tylko ostrych.

Niech α będzie dowolnym kątem umieszczonym w układzie współrzędnych tak, że wierzchołek kąta α leży w punkcie $(0, 0)$, a jedno z ramion kąta — na nieujemnej części osi x . Wybieramy na drugim ramieniu kąta α dowolny punkt $P = (x, y)$ różny od wierzchołka kąta (zob. rysunek poniżej).



Funkcje trygonometryczne kąta α definiujemy w następujący sposób:

Sinusem kąta α nazywamy stosunek rzędnej punktu P (drugiej współrzędnej) do odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.

Cosinusem kąta α nazywamy stosunek odciętej punktu P (pierwszej współrzędnej) do odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.

Jeśli odcięta punktu P jest różna od zera, to **tangensem** kąta α nazywamy stosunek rzędnej punktu P do odciętej tego punktu.

W tym i następnych podrozdziałach będziemy rozpatrywać funkcje trygonometryczne dla kątów z przedziału $(0^\circ; 180^\circ)$.

ĆWICZENIE B a) Korzystając z danych na rysunkach, oblicz $\operatorname{tg} \alpha$, $\cos \beta$ i $\sin \gamma$.



b) Przyjmijmy, że $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$. Jakimi liczbami — dodatnimi czy ujemnymi — są liczby $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$?

Wszystkie funkcje trygonometryczne kąta ostrego są dodatnie, a dla kątów rozwartych sinus jest liczbą dodatnią, a cosinus i tangens są liczbami ujemnymi.

Na rysunku obok zaznaczono w układzie współrzędnych kąt 90° . Z definicji funkcji trygonometrycznych wynika, że:

$$\cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{r} = 0 \quad \sin 90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{0^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{y^2}} = 1$$

Nie możemy natomiast podać wartości tangensa dla kąta 90° , gdyż iloraz $\frac{y}{x}$ dla $x = 0$ nie jest określony.



zadania 1–3 ►

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\text{jeśli } \cos \alpha \neq 0)$$

Poznane wcześniej tożsamości trygonometryczne zachodzą również dla wszystkich kątów, dla których wyrażenia występujące w tych tożsamościach mają sens.

ĆWICZENIE C Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych, uzasadnij równości zapisane powyżej.

PRZYKŁAD 1 Kąt α jest rozwarty i $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz $\cos \alpha$ oraz $\operatorname{tg} \alpha$.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

∴ Cosinus kąta rozwartego jest liczbą ujemną.

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4}$$

ZADANIE Kąt α jest kątem rozwartym i $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Oblicz $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

Obok zapisano trzy równości, które są spełnione dla dowolnego kąta ostrygo α . Tego typu równości nazywamy wzorami redukcyjnymi. Łatwo te wzory uzasadnić, gdy sporządzimy odpowiedni rysunek.

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

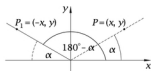
Dowód

Z danych na rysunku, wynika, że:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{r} = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{-x}{r} = -\frac{x}{r} = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tg} \alpha \quad \square$$



Tabele wartości funkcji trygonometrycznych są sporządzone dla kątów ostrych. Korzystając z nich oraz z powyższych wzorów, można obliczać wartości tych funkcji także dla kątów rozwartych.

PRZYKŁAD 2 Oblicz: $\sin 125^\circ$, $\operatorname{tg} 95^\circ$, $\cos 135^\circ$.

$$\sin 125^\circ = \sin(180^\circ - 55^\circ) = \sin 55^\circ \approx \underline{0,8192}$$

..... Korzystamy ze wzorów i z ta-
..... blic trygonometrycznych.

$$\operatorname{tg} 95^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 85^\circ) = -\operatorname{tg} 85^\circ \approx \underline{-11,4301}$$

$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

..... $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ZADANIE a) Korzystając z tablic trygonometrycznych, oblicz: $\sin 114^\circ$, $\cos 116^\circ$, $\operatorname{tg} 160^\circ$.

b) Oblicz: $\sin 135^\circ$, $\cos 150^\circ$, $\operatorname{tg} 120^\circ$.

Z równości $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ wynika, że w przedziale $(0^\circ; 180^\circ)$ są zwykle dwa kąty, dla których sinus przyjmuje tę samą wartość (wyjątkiem jest przypadek $\sin \alpha = 1$, wówczas $\alpha = 90^\circ$).

W wypadku cosinusa i tangensa w przedziale $(0^\circ; 180^\circ)$ jest tylko jeden kąt, którego cosinus jest równy danej wartości, a także tylko jeden kąt, którego tangens jest równy danej wartości.

PRZYKŁAD 3 a) Oblicz α , wiedząc, że $\sin \alpha = 0,6$ i $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$.

$$\sin \alpha = 0,6$$

$$\alpha \approx \underline{37^\circ} \text{ lub } \alpha \approx 180^\circ - 37^\circ = \underline{143^\circ}$$

..... Odczytujemy z tablic lub za pomocą kalku-
..... latora miarę kąta ostrego α spełniającego
..... warunek $\sin \alpha = 0,6$. Ten warunek spełnia też
..... kąt $180^\circ - \alpha$.

b) Oblicz α , wiedząc, że $\cos \alpha = -0,3$ i $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$.

$$\cos \alpha = -0,3$$

$$\cos \alpha \approx -\cos 73^\circ = \cos(180^\circ - 73^\circ) = \cos 107^\circ$$

$$\alpha \approx \underline{107^\circ}$$

..... Odczytujemy z tabeli miarę kąta,
..... dla którego cosinus jest równy 0,3.

..... Korzystamy z równości
..... $-\cos \alpha = \cos(180^\circ - \alpha)$

c) Oblicz α , wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = -4$ i $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$.

$$\operatorname{tg} \alpha = -4$$

$$\operatorname{tg} \alpha \approx -\operatorname{tg} 76^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 76^\circ) = \operatorname{tg} 104^\circ$$

$$\alpha \approx \underline{104^\circ}$$

..... Odczytujemy z tabeli miarę kąta,
..... dla którego tangens jest równy 4.

ZADANIE Oblicz α , jeśli wiadomo, że $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$ oraz:

a) $\sin \alpha = 0,2$

b) $\cos \alpha = -0,6$

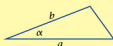
c) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{5}$

zadania 4–8 ►

- III Z definicji funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych i rozwartych wynikają dwa użyteczne twierdzenia, które omawiamy poniżej.

Twierdzenie

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch boków trójkąta i sinusa kąta między tymi bokami.



$$P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$$

Dowód

Z oznaczeń na rysunku wynika, że: $\sin \alpha = \frac{y}{b}$.

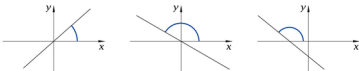
$$P = \frac{1}{2}ay = \frac{1}{2}ab \sin \alpha. \quad \square$$



ĆWICZENIE D Dwa boki pewnego trójkąta mają długości 4 i 6, a kąt między tymi bokami ma 100° . Oblicz pole tego trójkąta.

zadania 9–14 ►

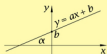
- IV Na rysunkach przedstawiono kilka prostych. Zaznaczone kąty nazywamy kątami nachylenia tych prostych do osi x . Zwróć uwagę, że jeśli prosta przecina oś x , to kąt nachylenia nie zawsze jest kątem ostrym, ale zawsze jest to kąt mniejszy od 180° .



ĆWICZENIE E Przedstaw w układzie współrzędnych proste $y = \frac{3}{4}x$ i $y = -\frac{4}{5}x$. Zaznacz kąty nachylenia tych prostych do osi x i oblicz tangensy tych kątów.

Twierdzenie

Jeśli prosta o równaniu $y = ax + b$ przecina oś x , to współczynnik kierunkowy a jest równy tangensowi kąta nachylenia tej prostej do osi x .



$$a = \tan \alpha$$

Dowód

Przypuśćmy, że prosta $y = ax + b$ jest nachylna do osi x pod kątem α . Ponieważ na prostej $y = ax$, która jest do niej równoległa, leży punkt $(1, a)$, więc: $\tan \alpha = \frac{a}{1} = a$. $\square$



PRZYKŁAD 4 Znajdź równanie prostej, która jest nachylona do osi x pod kątem 30° i przechodzi przez punkt $(6, 4)$.

$$y = ax + b$$

$$a = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$4 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 6 + b, \text{ stąd } b = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 4 - 2\sqrt{3}$$

Współczynnik a jest równy tangensowi kąta nachylenia prostej do osi x .

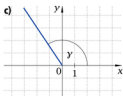
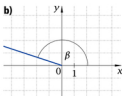
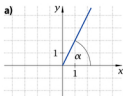
Punkt $(6, 4)$ leży na prostej, więc spełnia jej równanie.

ZADANIE Znajdź równanie prostej, która jest nachylona do osi x pod kątem 120° i przechodzi przez punkt $(1, -4)$.

zadania 15–16 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Znajdź punkt o obu współrzędnych całkowitych leżący na zaznaczonej półprostej. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych zaznaczonego kąta.



2. Które z podanych liczb są liczbami ujemnymi?

$\sin 57^\circ$

$\sin 97^\circ$

$\cos 88^\circ$

$\cos 100^\circ$

$\operatorname{tg} 57^\circ$

$\operatorname{tg} 105^\circ$

3. Narysuj w układzie współrzędnych kąt α , taki że $\alpha < 180^\circ$ oraz:

a) $\cos \alpha = -0,2$

b) $\operatorname{tg} \alpha = -0,4$

c) $\sin \alpha = 0,6$ i $\alpha > 90^\circ$

4. a) Wiadomo, że kąt α jest rozwarty i $\sin \alpha = \frac{1}{5}$. Oblicz $\cos \alpha$.

b) Wiadomo, że kąt α jest rozwarty i $\cos \alpha = -\frac{1}{6}$. Oblicz $\operatorname{tg} \alpha$.

c) Wiadomo, że kąt α jest rozwarty. Oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$, gdy $\operatorname{tg} \alpha = -3$.

5. Korzystając z tabeli funkcji trygonometrycznych, oblicz:

a) $\operatorname{tg} 170^\circ$

b) $\cos 100^\circ$

c) $\sin 125^\circ$

d) $\operatorname{tg} 145^\circ$

6. Oblicz.

a) $\sin 135^\circ$

b) $\operatorname{tg} 150^\circ$

c) $\cos 120^\circ$

d) $\cos 135^\circ$

7. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$ dla $\alpha = 45^\circ$

b) $\cos \alpha + \cos 2\alpha$ dla $\alpha = 60^\circ$

c) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha$ dla $\alpha = 60^\circ$

8. Przyjmijmy, że $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$. Korzystając z tablic lub z kalkulatora, oblicz miarę kąta α (z dokładnością do pełnych stopni), jeśli wiadomo, że:

a) $\cos \alpha = 0,97$

c) $\sin \alpha = 0,7$

e) $\operatorname{tg} \alpha = 0,83$

b) $\cos \alpha = -0,4$

d) $\sin \alpha = 0,29$

f) $\operatorname{tg} \alpha = -3$

9. a) Jakie jest pole trójkąta równoramiennego, w którym kąt między ramionami ma miarę 36° , a ramię ma długość 5?

b) Oblicz pole równoległoboku, w którym kąt ostry ma miarę 56° , a długości boków są równe 3 i 7.

c) Jakie pole ma osiemnastokąt foremny wpisany w okrąg o promieniu długości 5?

10. Oblicz pola figur przedstawionych na rysunkach.



11. a) Znajdź miary kątów rombu o boku długości 6 m i polu równym 34 m^2 .

b) Każde z ramion trójkąta równoramiennego ma długość 3 cm, a pole tego trójkąta jest równe 2 cm^2 . Znajdź miary kątów tego trójkąta.

12. Zapisz wzór na pole równoległoboku, gdy:

a) dwa jego boki mają długości a i b , a kąt między tymi bokami ma miarę α ,

b) jego przekątne mają długości d_1 i d_2 oraz przecinają się pod kątem β .

13. Koło przedstawione na rysunku ma promień długości 5. Jakie jest pole zacieniowanej figury?

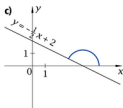
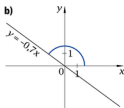
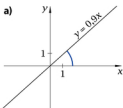


14. Pole trójkąta ABC jest równe 12 cm^2 . Oblicz miarę kąta BAC , jeśli:

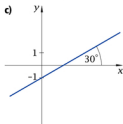
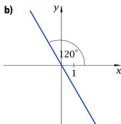
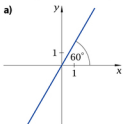
a) $|AB| = 8 \text{ cm}$ i $|AC| = 6 \text{ cm}$

b) $|AB| = 2 \text{ cm}$ i $|AC| = 15 \text{ cm}$

◀ **IV 15.** Podaj tangens zaznaczonego kąta, a następnie miarę tego kąta.



16. Zapisz wzór funkcji, której wykres jest przedstawiony na rysunku.



MINISPRAWDZIAN

51. Kąt α jest rozwarty i $\text{tg } \alpha = -2$. Wynika stąd, że:

A. $\sin \alpha = 2\sqrt{0,2}$, $\cos \alpha = -\sqrt{0,2}$

C. $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = -\sqrt{0,2}$

B. $\sin \alpha = -2$, $\cos \alpha = 1$

D. $\sin \alpha = -2\sqrt{0,2}$, $\cos \alpha = \sqrt{0,2}$

52. Jakie pole ma trójkąt przedstawiony na rysunku?



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\sqrt{3}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

53. Pod jakim kątem prosta $y = -\frac{3}{2}x + 2$ jest nachylona do osi x ? (Spośród podanych przybliżonych wartości wybierz wartość najbliższą dokładnej).

A. ok. 115°

B. ok. 124°

C. ok. 65°

D. ok. 56°

TWIERDZENIE SINUSÓW

- 1 Wiadomo, że w każdym trójkącie najdłuższy bok leży naprzeciwko kąta o największej mierze, a najkrótszy — naprzeciwko kąta o najmniejszej mierze. Okazuje się, że istnieją ściśle związki między długościami boków trójkąta a miarami jego kątów.



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Twierdzenie sinusów

W trójkącie stosunki długości boków do sinusów kątów leżących naprzeciw tych boków są równe.

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia takie jak na rysunku obok.

Pole tego trójkąta można zapisać na trzy sposoby:

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ac \sin \beta$$

Rozważmy równość:

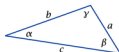
$$\frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$$

Liczby: b , $\sin \alpha$, $\sin \gamma$ są różne od 0, więc tę równość możemy przekształcić:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

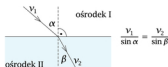
Podobnie z równości $\frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ac \sin \beta$ wynika równość $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}$.

Wobec tego $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$. $\square$



Ciekawostka

Holenderski fizyk, astronom i matematyk Snellius (zwany Snelliusem) żyjący w latach 1580–1626 jest najbardziej znany jako odkrywca prawa załamania światła (choć wiadomo, że znane ono było już Ptolemeuszowi prawie 1500 lat wcześniej). Równość opisująca to prawo przypomina równość z twierdzenia sinusów. Być może dlatego to twierdzenie jest czasem nazywane twierdzeniem Snelliusa.



α — kąt padania

β — kąt załamania

v_1 — prędkość światła w ośrodku I

v_2 — prędkość światła w ośrodku II

PRZYKŁAD 1 W trójkącie ABC bok BC ma długość 6 cm oraz $|\sphericalangle CAB| = 42^\circ$ i $|\sphericalangle ABC| = 68^\circ$. Oblicz długość boku AB .



$$|\sphericalangle ACB| = 180^\circ - (42^\circ + 68^\circ) = 70^\circ$$

$$\frac{6}{\sin 42^\circ} = \frac{x}{\sin 70^\circ}$$

$$x = \frac{6 \sin 70^\circ}{\sin 42^\circ}$$

$$x \approx 8,43$$

Odp. Bok AB ma około 8,43 cm długości.

Sporządzamy rysunek pomocniczy.

Obliczamy miarę kąta leżącego naprzeciwko boku AB .

Korzystamy z twierdzenia sinusów.

ZADANIE W trójkącie PQR bok PR ma długość 5 oraz $|\sphericalangle QPR| = 20^\circ$ i $|\sphericalangle RQP| = 44^\circ$. Oblicz długość boku PQ .

zadania 1-3 ►

PRZYKŁAD 2 Jeden z kątów trójkąta ma miarę 40° . Bok leżący naprzeciw tego kąta ma długość 4, a inny z boków tego trójkąta ma długość 5. Oblicz miarę kąta leżącego naprzeciw tego boku.



$$\frac{4}{\sin 40^\circ} = \frac{5}{\sin \beta}$$

$$\sin \beta = \frac{5 \sin 40^\circ}{4}$$

$$\sin \beta \approx 0,803$$

$$\beta_1 \approx 53^\circ, \quad \beta_2 \approx 180^\circ - 53^\circ = 127^\circ$$

$$40^\circ + 53^\circ < 180^\circ \quad 40^\circ + 127^\circ < 180^\circ$$

Odp. Szukany kąt ma około 53° lub około 127° .

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Korzystamy z twierdzenia sinusów.

$$0^\circ < \beta < 180^\circ.$$

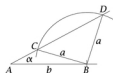
Sprawdzamy, czy $40^\circ + \beta < 180^\circ$.

ZADANIE Jeden z kątów trójkąta ma miarę 18° . Bok leżący naprzeciw tego kąta ma długość 10, a inny bok ma długość 20. Oblicz miary pozostałych kątów tego trójkąta.

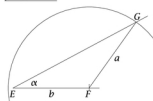
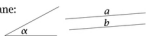
W przykładzie zadanie miało dwa rozwiązania. Nie zawsze jednak tak jest.

Na poniższych rysunkach przedstawiono dwie konstrukcje trójkąta, gdy dane są: jeden kąt trójkąta (α), bok leżący naprzeciw tego kąta (a) i jeden z boków leżących przy tym kącie (b).

Dane:



Dane:



Jak widać, w zależności od długości boków a i b przyjęte warunki mogą być spełnione przez dwa trójkąty (na pierwszym rysunku trójkąty ABC i ABD) albo jeden trójkąt (na drugim rysunku trójkąt EFG).

ĆWICZENIE Sprawdź, że gdybyśmy w zadaniu z przykładu 2 zmienili długość boku 4 na długość 6, otrzymalibyśmy tylko jedno rozwiązanie.

zadania 4–8 ►

III Twierdzenie sinusów można rozszerzyć w następujący sposób:



Twierdzenie

W trójkącie stosunek długości dowolnego boku do sinusa kąta leżącego naprzeciw tego boku jest równy średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Dowód

Warunek $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ wykazaliśmy już wcześniej. Co najmniej dwa z trzech kątów trójkąta muszą być kątami ostrymi. Przyjmijmy, że α jest kątem ostrym. Aby udowodnić twierdzenie, wystarczy wykazać równość $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$.

Niech ABC oznacza trójkąt wpisany w okrąg o promieniu R , w którym $\angle BAC = \alpha$ i $|BC| = a$.

Prowadząc średnicę CD i cięciwę BD , otrzymujemy trójkąt prostokątny BCD o kącie ostrym α , gdyż $\angle BAC$ i $\angle BDC$ są oparte na tym samym łuku. Zatem:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \angle BDC} = \frac{a}{\frac{a}{2R}} = |CD| = 2R \quad \square$$



PRZYKŁAD 3 W okrąg o promieniu 6 wpisano trójkąt równoramienny. Kąt między ramionami tego trójkąta ma miarę 120° . Oblicz obwód tego trójkąta.



$$\beta = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$\frac{a}{\sin 120^\circ} = 12 \quad \text{i} \quad \frac{b}{\sin 30^\circ} = 12$$

..... Korzystamy z $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$
i $\frac{b}{\sin \beta} = 2R$.

$$\begin{aligned} a &= 12 \cdot \sin 120^\circ = 12 \sin(180^\circ - 60^\circ) = 12 \sin 60^\circ = \\ &= 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$b = 12 \cdot \sin 30^\circ = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

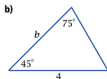
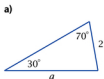
$$\text{Obwód} = a + 2b = 6\sqrt{3} + 2 \cdot 6 = 6\sqrt{3} + 12$$

ZADANIE W okrąg o promieniu 10 wpisano trójkąt o kątach 45° , 60° , 75° . Znajdź długość najkrótszego boku tego trójkąta.

zadania 9–11 ►

ZESTAW ZADAŃ

◀ I 1. Oblicz długość odcinka oznaczonego literą.

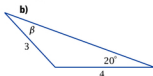


2. a) Czy istnieje trójkąt o kątach 30° , 70° , 80° i bokach długości 5, 9, 13?

b) Czy istnieje trójkąt, w którym dwa kąty mają miary 45° i 60° , a boki leżące naprzeciw tych kątów mają długości 3 i $\sqrt{6}$?

3. Jaką długość ma najkrótszy z boków trójkąta, w którym dwa kąty mają miary 10° i 20° , a najdłuższy bok ma długość 10?

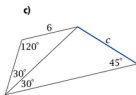
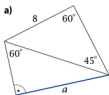
◀ II 4. Oblicz miarę kąta oznaczonego literą.



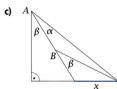
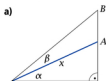
5. W trójkącie ABC dane są długości dwóch boków oraz miara jednego z kątów. Znajdź miary pozostałych kątów tego trójkąta.

- a) $|AC| = \sqrt{6}$, $|BC| = 2$, $|\angle ABC| = 60^\circ$ b) $|AC| = 1$, $|BC| = \sqrt{2}$, $|\angle ABC| = 30^\circ$

6. Znajdź długość odcinka oznaczonego literą.



7. Przyjmijmy, że dane są kąty α i β oraz że $|AB| = a$. Znajdź x .



8. Wykaż, że jeżeli kąty α i β są kątami trójkąta i naprzeciw kąta α leży bok a , a naprzeciw kąta β leży bok b , to:

a) $\frac{a+b}{b} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \beta}$

b) $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta}$

9. Oblicz długości odcinków a i r oraz miarę kąta α .



10. Wybieramy dowolny punkt P podstawy BC trójkąta równoramiennego ABC ($P \neq B$, $P \neq C$). Wykaż, że okrąg opisany na trójkącie APB ma taki sam promień jak okrąg opisany na trójkącie APC .

11. Przyjmijmy, że α , β i γ są kątami trójkąta oraz że naprzeciw tych kątów leżą odpowiednio boki o długościach a , b i c . Wykaż, że jeśli R oznacza długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie, to pole trójkąta wyraża się wzorem:

a) $P = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$

b) $P = \frac{abc}{4R}$

c) $P = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$

MINISPRAWDZIAN

51. Która z poniższych równości jest prawdziwa dla trójkąta przedstawionego na rysunku obok?

A. $z = \frac{x \cdot \sin \delta}{\sin \gamma}$

C. $y = \frac{\sin \delta \cdot z}{\sin \gamma}$

B. $\sin \omega = \frac{y \cdot \sin \gamma}{z}$

D. $\sin \delta = \frac{x \cdot y}{\sin \omega}$



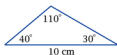
52. Długość najkrótszego boku trójkąta przedstawionego na rysunku obok wyrażona w centymetrach należy do przedziału:

A. (4;5)

B. (5;6)

C. (6;7)

D. (7;8)



53. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 10$, $|BC| = 7$ oraz $|\angle BAC| = 20^\circ$. Która z poniższych miar nie może być miarą żadnego z kątów tego trójkąta, zaokrągloną do pełnych stopni?

A. 29°

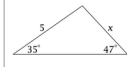
B. 49°

C. 131°

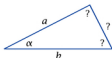
D. 151°

TWIERDZENIE COSINUSÓW

ĆWICZENIE W którym z poniższych trójkątów można obliczyć długość boku x za pomocą twierdzenia sinusów?



W sytuacji gdy dane są trzy boki trójkąta, trójkąt wyznaczony jest jednoznacznie. Powinniśmy zatem być w stanie obliczyć miary jego kątów.

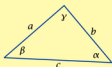


Jest podobnie, gdy dany jest jeden kąt i długości dwóch boków leżących przy tym kącie. W takim trójkącie także powinniśmy być w stanie obliczyć długość trzeciego boku i miary dwóch pozostałych kątów.

Ani w jednym, ani w drugim wypadku nie można znaleźć brakujących wielkości, korzystając jedynie z twierdzenia sinusów. Możemy jednak skorzystać z następującej zależności między bokami a kątami w trójkącie.

Twierdzenie cosinusów

W trójkącie kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta między nimi.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia takie jak na rysunku obok. Pokażemy, że zachodzi równość:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

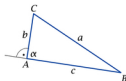
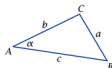
1. Załóżmy najpierw, że α jest kątem prostym.

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

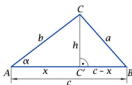
Ponieważ $\cos 90^\circ = 0$, więc $2bc \cos 90^\circ = 0$ i możemy zapisać równość:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 90^\circ$$



2. Załóżmy teraz, że kąt α jest kątem ostrym.

W każdym trójkącie co najmniej dwa kąty są ostre, możemy zatem założyć, że kąt ABC także jest ostry. Wobec tego wysokość h trójkąta poprowadzona z wierzchołka C dzieli bok AB na dwa odcinki (zob. rysunek).



Ponieważ $\cos \alpha = \frac{x}{b}$ i $\sin \alpha = \frac{h}{b}$, więc:

$$x = b \cos \alpha \quad \text{i} \quad h = b \sin \alpha$$

Stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta $CC'B$, otrzymujemy:

$$a^2 = h^2 + (c-x)^2$$

$$a^2 = b^2 \sin^2 \alpha + (c-b \cos \alpha)^2$$

$$a^2 = b^2 \sin^2 \alpha + c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha$$

$$a^2 = b^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

3. Rozważmy teraz przypadek, gdy α jest kątem rozwartym.

Prowadząc z wierzchołka C wysokość h , otrzymamy dwa trójkąty prostokątne $C'AC$ i $C'BC$ (zob. rysunek).

Ponieważ $\cos(180^\circ - \alpha) = -\frac{x}{b}$ i $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{h}{b}$, a ponadto:

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \quad \text{i} \quad \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\text{więc: } x = -b \cos \alpha \quad \text{i} \quad h = b \sin \alpha$$

Stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta $CC'B$, otrzymujemy:

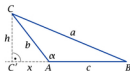
$$a^2 = h^2 + (c + x)^2$$

$$a^2 = b^2 \sin^2 \alpha + (c - b \cos \alpha)^2$$

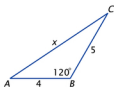
$$a^2 = b^2 \sin^2 \alpha + c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha$$

$$a^2 = b^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad \square$$



PRZYKŁAD 1 W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 4$, $|BC| = 5$ oraz $|\sphericalangle ABC| = 120^\circ$. Oblicz długość boku AC tego trójkąta.



Sporządzamy rysunek pomocniczy.

$$x^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ$$

Korzystamy z twierdzenia cosinusów.

$$x^2 = 16 + 25 - 40 \cos 120^\circ$$

$$\cos 120^\circ = -\cos(180^\circ - 120^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 = 41 - 40 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 = 61$$

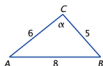
$$x = \sqrt{61}$$

Literą x oznaczyliśmy długość boku trójkąta, więc bierzemy pod uwagę tylko dodatnie rozwiązanie równania $x^2 = 61$.

Odp. Bok AC trójkąta ABC ma długość $\sqrt{61}$.

ZADANIE W trójkącie PQR dane są: $|PQ| = 7$, $|PR| = 3$ i $|\sphericalangle QPR| = 45^\circ$. Oblicz długość boku QR tego trójkąta.

PRZYKŁAD 2 Boki trójkąta ABC mają długości $|AB| = 8$, $|BC| = 5$ oraz $|AC| = 6$. Oblicz miarę kąta ACB .



$$8^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos \alpha$$

$$64 = 61 - 60 \cos \alpha$$

$$3 = -60 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{20}$$

$$\alpha \approx 93^\circ$$

Odp. Kąt ACB ma miarę około 93° .

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Korzystamy z twierdzenia cosinusów.

Odczytujemy miarę kąta, którego cosinus jest równy $-\frac{1}{20}$, i korzystamy z równości $-\cos \alpha = \cos(180^\circ - \alpha)$.

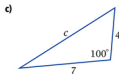
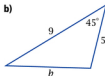
$$\cos \alpha \approx -\cos 87^\circ = \cos(180^\circ - 87^\circ) = \cos 93^\circ$$

ZADANIE Boki trójkąta mają długości 3, 5 i 7. Oblicz miarę największego kąta tego trójkąta.

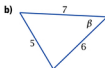
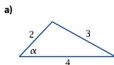
zadania 1–13 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz długość boku oznaczonego literą.



2. Oblicz miarę kąta oznaczonego literą.



3. Czy trójkąt o danych długościach boków jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny?

a) 5, 12, 13

b) 4, 5, 6

c) 5, 7, 9

4. Przekątne równoległoboku przecinają się pod kątem 60° , a ich długości wynoszą 2 i 6. Znajdź długości boków równoległoboku.

Warto wiedzieć

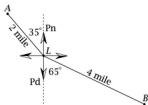
Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa można uogólnić w następujący sposób:

Jeśli a , b i c są długościami boków trójkąta oraz $a \leq c$ i $b \leq c$, to trójkąt ten jest:

- prostokątny, gdy $a^2 + b^2 = c^2$,
- rozwartokątny, gdy $a^2 + b^2 < c^2$,
- ostrokątny, gdy $a^2 + b^2 > c^2$.

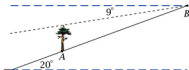
5. Uzasadnij twierdzenie podane w ramce, a następnie, korzystając z niego, rozwiąż zadanie 3.

Uwaga. Przy rozwiązywaniu zadań 6–13 przyda się twierdzenie cosinusów albo twierdzenie sinusów. W niektórych zadaniach trzeba skorzystać z obu tych twierdzeń.



6. Rysunek przedstawia położenie statków A i B względem latarni L. Znajdź odległość między statkami.

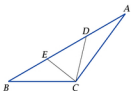
- 7.** Na rysunku obok niebieskie linie przecywane są równoległe. Oblicz wysokość drzewa, jeśli $|AB| = 150$ m.



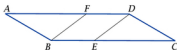
8. Korzystając z informacji przedstawionych na mapce, oblicz odległość między punktami A i B.

9. Boki trójkąta mają długości 2, 3 i 4. Jaka długość ma wysokość tego trójkąta opuszczona na najdłuższy bok?

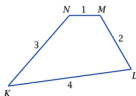
10. Na poniższym rysunku zaznaczono punkty D i E , które dzielą bok AB trójkąta ABC na trzy równe części. Wiedząc, że $|AB| = 6$, $|AC| = 5$ i $|\angle DAC| = 30^\circ$, znajdź długości odcinków CD i CE .



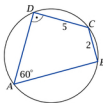
11. W równoległoboku $ABCD$ przedstawionym na rysunku poniżej dane są: $|AB| = \sqrt{3}$, $|AD| = 4$ oraz $|\angle BAD| = 30^\circ$. Czworokąt $BEDF$ jest rombem. Znajdź długość jego boku.



12. W czworokącie $KLMN$ przedstawionym na rysunku poniżej kąt LMN ma miarę 120° . Oblicz pole tego czworokąta.



13. Popatrz na rysunek poniżej. Jaka długość ma promień okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$?



MINISPRAWDZIAN

51. Długość boku oznaczonego na rysunku literą a spełnia warunek:

- A. $a \in (0; 7)$ C. $a \in (8; 9)$
B. $a \in (7; 8)$ D. $a \in (9; +\infty)$

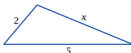


52. Trójkąt ma boki o długościach 4, 5 i 6. Miara najmniejszego kąta tego trójkąta, po zaokrągleniu do pełnych stopni, wynosi:

- A. 30° B. 38° C. 40° D. 41°

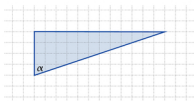
53. Pole trójkąta przedstawionego na rysunku obok wynosi 3. Długość boku x jest zatem równa:

- A. 3 B. 4 C. $\sqrt{13}$ D. $\sqrt{26}$



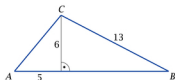
POWTÓRZENIE

1. Na rysunku zaznaczono kąt ostry α . Oblicz $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$. Przyjmij, że bok kratki ma długość 1.



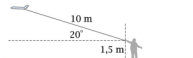
2. Kąt ostry trapezu prostokątnego ma miarę 50° , jego krótsza podstawa ma długość 2, a dłuższe ramię ma długość 3. Oblicz obwód tego trapezu.

3. Znajdź miary kątów trójkąta ABC przedstawionego na rysunku.



4. Nachylenie stoku wyrażone w procentach wynosi 2%. Jakie jest nachylenie tego stoku wyrażone w stopniach?

5. Na jakiej wysokości krąży model samolotu?



6. Kąt α jest kątem ostrym. Oblicz $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$, jeśli $\cos \alpha = \frac{3}{11}$.

7. Uzasadnij, że dla kąta ostrego α jest spełniona równość:

$$\frac{1}{1 - \sin^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1$$

8. Oblicz wartość wyrażenia:

$$\sin 135^\circ + \cos 150^\circ + \operatorname{tg} 120^\circ$$

9. Dwa boki trójkąta mają długości 3 i 4, a kąt między tymi bokami ma 120° . Oblicz pole tego trójkąta.

10. Pole trójkąta równe jest 4 cm^2 . Dwa boki tego trójkąta mają długości 2 cm i 5 cm. Jaką miarę ma kąt leżący między tymi bokami?

11. Pod jakim kątem jest nachylona do osi x prosta $y = -3x + 1$?

12. Oblicz miarę kąta ABC w trójkącie, w którym:

- a) $|AB| = 10$, $|BC| = 6$, $|AC| = 9$
- b) $\angle BAC = 20^\circ$, $|AC| = 5$, $|BC| = 4$
- c) $\angle ACB = 120^\circ$, $|AC| = 6$, $|BC| = 10$

13. W trójkącie ABC bok BC ma długość 4. Ustal długość boku AB , jeśli:

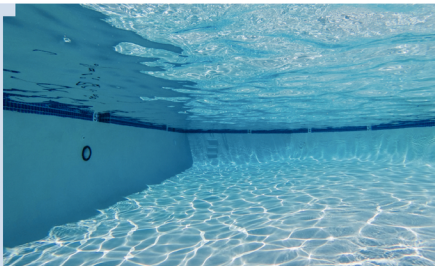
- a) $\angle ACB = 60^\circ$, $|AC| = 5$
- b) $\angle BAC = 45^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$
- c) $\angle ABC = 50^\circ$, $\angle ACB = 110^\circ$

14. Sprawdź, czy trójkąt o bokach długości 7, 8 i 10 jest ostrokątny czy rozwartokątny.

15. Środkowa CD trójkąta ABC ma długość 6, bok AB ma długość 8, a kąt ADC ma miarę 120° . Oblicz pole i obwód trójkąta ABC .

Figury w przestrzeni

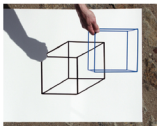
W basenach pływackich dno jest zwykle ukształtowane tak, że głębokość wody się zmienia: przy jednym końcu toru jest płytko, a przy drugim – głęboko. Woda w takim basenie przybiera kształt graniastosłupa. Obliczając jego objętość, ustalimy, ile litrów wody potrzeba, aby wypełnić basen.



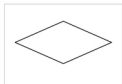
- Graniastosłupy ■ Ostrosłupy ■ Walec ■ Stożek ■ Kula
- Powtórzenie

Kilka uwag o rysowaniu brył

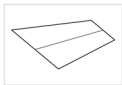
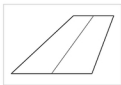
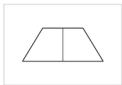
Na zdjęciu model krawędziowy sześcianu jest oświetlony światłem o równoległych promieniach. Na białym ekranie widać cień modelu.



Gdybyśmy ramkę w kształcie kwadratu ustawili w różnych położeniach względem ekranu, otrzymalibyśmy różne cienie. Poniższe rysunki przedstawiają kilka możliwych cieni tej samej kwadratowej ramki. Każdy z nich jest równoległobokiem i cienie równoległych boków też są równoległe.



Kolejne rysunki przedstawiają cienie ramki w kształcie trapezu równoramiennego, w którym poprowadzono wysokość łączącą środki podstaw. Każda z otrzymanych figur jest trapezem i w każdym z nich cień wysokości nadal łączy środki podstaw, choć nie musi być do nich prostopadły.

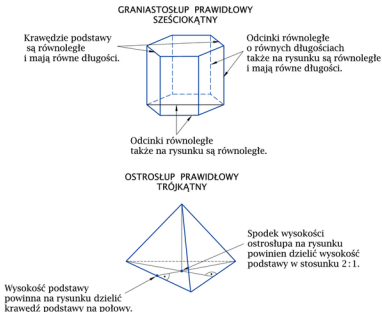


Sporządzając rysunek wielościanu na kartce, wykonujemy go tak, jakbyśmy rysowali cień rzucany przez krawędzie tego wielościanu.

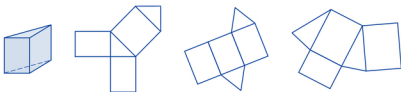
Rysując bryły, musimy przestrzegać następujących reguł:

- Jeśli w bryle odcinki są równoległe, to odpowiadające im odcinki na rysunku także są równoległe.
- Jeśli w bryle odcinki są równoległe i równej długości, to odpowiadające im na rysunku odcinki też są równoległe i równej długości.
- Jeśli punkt dzieli odcinek w bryle w pewnym stosunku, to odpowiadający mu punkt na rysunku dzieli odcinek w tym samym stosunku.

Oto rysunki wykonane z zachowaniem powyższych reguł.



Uwaga. Na podstawie rysunku bryły na ogół nie możemy rozstrzygnąć, jaka to dokładnie jest bryła. Na przykład pierwszy z poniższych rysunków (przedstawiający graniastosłup) mógłby być każdym z graniastosłupów, których siatki są narysowane obok.



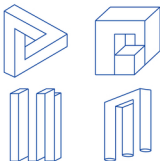
Rysowanie brył nie jest łatwe, gdyż musimy przedstawić w dwóch wymiarach figury, które są trójwymiarowe. Gotowe rysunki można na ogół interpretować na różne sposoby. Stąd biorą się niektóre złudzenia optyczne. Na przykład złudzeniu możemy ulec, patrząc na pierwszy rysunek sześciangu. Rysunek ten jest wieloznaczny. Sześcian możemy zobaczyć na dwa sposoby, zależnie od tego, które krawędzie uznamy za niewidoczne.



Inny przykład złudzenia optycznego to tzw. schody Zöllnera (czyt. celnera) przedstawione na rysunku poniżej (z lewej strony). Dwie osoby patrzące na ten rysunek mogą zobaczyć schody na różne sposoby, na przykład widziane z góry albo widziane od dołu. Kolejne rysunki pomagają dostrzec te dwie różne interpretacje (kropka wskazuje ścianę, którą powinniśmy zobaczyć bliżej nas).



Najbardziej zaskakujące są rysunki tzw. figur niemożliwych. Poniżej podajemy przykłady takich figur. Pozornie wydaje się, że rysunki przedstawiają rzeczywiste bryły i można zbudować ich modele. Jednak dokładniejsza analiza pokazuje, że jest to niemożliwe, gdyż bryły takie nie istnieją!



Na kanwie takich rysunków artyści potrafią stworzyć intrygujące obrazy. Przykładem wykorzystania pierwszego z nich jest grafika M.C. Eschera (czyt. eszera) „Wodospad”.



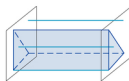
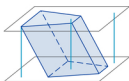
GRANIASTOSŁUPY

- 1 Przypomnijmy, że graniastosłup to wielościan, w którym dwie ściany (podstawy) są przystającymi wielokątami leżącymi na równoległych płaszczyznach, a pozostałe ściany (czyli ściany boczne) są równoległobokami.

Krawędzie boczne graniastosłupa mają równe długości i są równoległe.



Wysokością graniastosłupa nazywamy każdy odcinek łączący płaszczyznę podstaw i prostopadły do obu tych płaszczyzn.



Uwaga. Pojęcie odcinka prostopadłego do płaszczyzny jest intuicyjnie jasne i taka intuicja wystarcza na potrzeby naszych rozważań. Dokładniej prostopadłość prostych i płaszczyzn w przestrzeni będziemy omawiać w trzeciej klasie.



Graniastosłup prosty pięciokątny



Graniastosłup pochyły czworokątny



Graniastosłup prawidłowy ośmiokątny

Graniastosłup, w którym krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw, nazywamy **graniastosłupem prostym**. Wszystkie ściany boczne graniastosłupa prostego są prostokątami.

Uwaga. Szczególnym przypadkiem graniastosłupa prostego jest prostopadłościan, w którym wszystkie ściany są prostokątami i za podstawy można przyjąć dowolną parę ścian równoległych.

Graniastosłup, w którym krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstaw, nazywamy **graniastosłupem pochyłym**. Wszystkie ściany boczne graniastosłupa pochyłego są równoległobokami.

Graniastosłup prosty, w którym podstawy są wielokątami foremnymi, nazywamy **graniastosłupem prawidłowym**. Wszystkie ściany boczne graniastosłupa prawidłowego są przystającymi prostokątami.

Przekątna wielościanu to odcinek łączący dwa wierzchołki i nieleżący na żadnej ścianie.

zadania 1–4 ►

- II **PRZYKŁAD 1** Podstawą graniastostłupa prostego jest romb o boku 2 i kącie ostrym 60° . Wysokość tego graniastostłupa ma długość 3. Oblicz długość dłuższej z jego przekątnych.



Sporządzamy rysunki pomocnicze — graniastostłup i podstawę graniastostłupa.

Trójkąt ABD jest równoboczny, a odcinek AS to wysokość tego trójkąta.

$$|BD| = 2$$

$$|AS| = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$|AC| = 2 \cdot |AS| = 2\sqrt{3}$$

$$|AG|^2 = |AC|^2 + |CG|^2$$

⋮ Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ACG .

$$|AG|^2 = (2\sqrt{3})^2 + 3^2$$

$$|AG| = \sqrt{21}$$

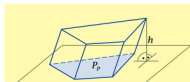
Odp. Dłuższa przekątna tego graniastostłupa ma długość $\sqrt{21}$.

- ZADANIE** Podstawą graniastostłupa prostego o wysokości 6 jest trapez prostokątny o podstawach długości 3 i 5 oraz wysokości 4. Oblicz długości przekątnych tego graniastostłupa.

zadania 5–12 ►

- III Suma pól wszystkich ścian bocznych graniastostłupa to jego pole powierzchni bocznej. Suma pól podstaw i pola powierzchni bocznej to pole powierzchni całkowitej graniastostłupa.

Objętość graniastostłupa jest równa iloczynowi pola podstawy i wysokości graniastostłupa.



Objętość graniastostłupa:

$$V = P_p \cdot h$$

P_p — pole podstawy graniastostłupa
 h — wysokość graniastostłupa

PRZYKŁAD 2 W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź podstawy ma długość a , zaś krótsza przekątna ma długość $3a$. Oblicz pole powierzchni całkowitej oraz objętość tego graniastosłupa.



$$|AC| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

$$h = \sqrt{|A'C|^2 - |AC|^2} = \sqrt{(3a)^2 - (a\sqrt{3})^2} = a\sqrt{6}$$

$$P_p = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$P_s = a \cdot h = a \cdot a\sqrt{6} = a^2\sqrt{6}$$

$$P_c = 2P_p + 6P_s = 2 \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 6 \cdot a^2\sqrt{6} = 3a^2(\sqrt{3} + 2\sqrt{6})$$

$$V = P_p \cdot h = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{6} = \frac{3a^3\sqrt{18}}{2} = \frac{9a^3\sqrt{2}}{2}$$

..... Krótsza przekątna podstawy jest 2 razy dłuższa niż wysokość trójkąta równobocznego o boku a .

..... Trójkąt ACA' jest prostokątny.

..... P_p – pole jednej podstawy

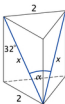
P_s – pole jednej ściany bocznej

P_c – pole powierzchni całkowitej

ZADANIE W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym o wysokości a krótsza przekątna ma długość $4a$. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa.

zadania 13–23 ►

IV PRZYKŁAD 3 Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 2, a kąt pomiędzy przekątną ściany bocznej i krawędzią boczną ma miarę 32° . Oblicz miarę kąta między przekątnymi ścian bocznych poprowadzonymi z jednego wierzchołka.



$$\frac{2}{x} = \sin 32^\circ$$

$$x = \frac{2}{\sin 32^\circ}$$



$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{2}{\sin 32^\circ}} = \frac{\sin 32^\circ}{2} \approx 0,265$$

$$\frac{\alpha}{2} \approx 15^\circ, \text{ stąd } \alpha \approx 30^\circ$$

ZADANIE Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 3, a kąt między przekątną ściany bocznej i krawędzią boczną ma miarę 40° . Oblicz miarę kąta między przekątnymi ścian bocznych poprowadzonymi z jednego wierzchołka.

zadania 24–28 ►

ZESTAW ZADAŃ

◀ I 1. Przerysuj i uzupełnij tabelkę.

Graniastosłupy			
Liczba ścian	7		
Liczba krawędzi		9	
Liczba wierzchołków			12

2. a) Ile ścian bocznych ma graniastosłup o 100 wierzchołkach?

b) Czy graniastosłup może mieć 20 krawędzi?

c) Czy graniastosłup może mieć 10 ścian bocznych i 20 wierzchołków?

3. a) Czy istnieje graniastosłup, który nie ma przekątnych?

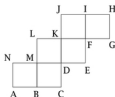
b) Czy w graniastosłupie prawidłowym wszystkie przekątne mają równą długość?

• c) Ile przekątnych ma graniastosłup n -kątny?

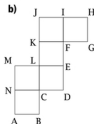
• d) Czy w każdym graniastosłupie czworokątnym dowolne dwie przekątne się przecinają?

4. Na rysunku przedstawiono siatkę sześcianu. Które punkty — po sklejeniu sześcianu — pokryją się z punktem A?

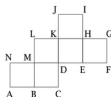
a)



b)



c)



◀ II 5. a) Jaką długość ma przekątna sześcianu o krawędzi długości a ?

b) Oblicz długość przekątnej prostopadłościanu o krawędziach długości a , b i c .

6. Na rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy. Oblicz długości zaznaczonych odcinków.

a)



b)

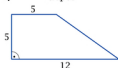


c)



7. Graniastosłup prosty ma wysokość 3, a jego podstawą jest czworokąt pokazany na rysunku. Znajdź długość krótszej przekątnej tego graniastosłupa.

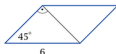
a) trapez



b) romb



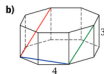
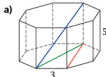
c) równoległobok



8. a) W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna ma długość 13, a przekątna ściany bocznej ma długość 12. Oblicz długości krawędzi graniastosłupa.

b) Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 8 i 5. Oblicz długości przekątnych ścian bocznych tego graniastosłupa, jeśli wysokość graniastosłupa wynosi 10.

9. Na rysunku obok przedstawiono graniastosłup prawidłowy ośmiokątny. Oblicz długości zaznaczonych odcinków.



10. a) W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym o krawędzi podstawy a dłuższa przekątna jest równa p . Oblicz długość krótszej przekątnej graniastosłupa.

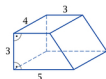
b) Jakie długości mają przekątne w graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym o krawędzi podstawy a i wysokości h ?

11. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny prostokątny. Przeciwprostokątna podstawy i przekątne dwóch ścian bocznych tworzą trójkąt równoboczny o boku długości a . Oblicz wysokość tego graniastosłupa.

12. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość a . Jaką wysokość powinien mieć ten graniastosłup, aby trójkąt zbudowany z przekątnej ściany bocznej, dłuższej przekątnej podstawy i krótszej przekątnej graniastosłupa był równoramienny?

13. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prostego.

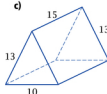
a)



b)

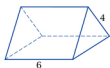


c)



14. Na rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy. Oblicz jego objętość.

a)



b)



c)



15. Oblicz pole powierzchni całkowitej:

a) graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy $\sqrt{3}$ i wysokości 2,

b) graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości 4 i długości przekątnej 5.

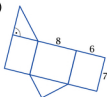
16. Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości 2 jest trójkąt o bokach długości 12, 10, 10. Oblicz pole powierzchni i objętość tego graniastosłupa.

17. a) Oblicz pole powierzchni i objętość sześcianu o przekątnej długości p .

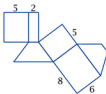
b) W prostopadłościannie o podstawie kwadratowej przekątna ściany bocznej ma długość p , a przekątna podstawy ma długość d . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościannu.

18. Oblicz objętość graniastosłupa prostego o siatce przedstawionej na rysunku.

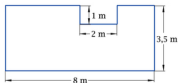
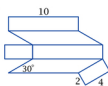
a)



b)



c)

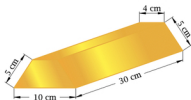


19. Rysunek przedstawia plan pewnej sali szkolnej. Ma ona 3,5 m wysokości. Ile waży powietrze wypełniające tę salę? Przyjmij, że gęstość powietrza wynosi $1,185 \text{ kg/m}^3$.

20. Na rysunku przedstawiona jest szklarnia, której dach i ściany zbudowano ze szkła o grubości 3 mm. Gęstość szkła wynosi 2400 kg/m^3 . Oszacuj, ile waży szkło użyte do budowy tej szklarni.

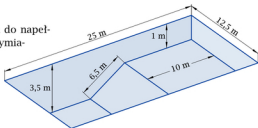


21. Ile waży sztaba złota w kształcie graniastosłupa, którego podstawą jest trapez równoramienny i którego wymiary podano na rysunku?



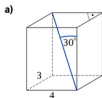
Przyjmij, że gęstość złota wynosi 19280 kg/m^3 . Sprawdź, jaka jest aktualna cena złota, i oblicz wartość tej sztaby.

22. Ile litrów wody potrzeba do napełnienia basenu o kształcie i wymiarach podanych na rysunku?

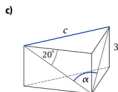
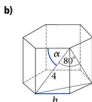
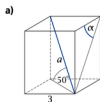


23. W prostopadłościanie pola trzech ścian o wspólnym wierzchołku są równe P_1 , P_2 i P_3 . Jaką objętość ma ten prostopadłościan?

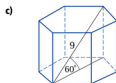
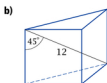
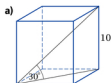
IV 24. Oblicz wysokość graniastosłupa prostego przedstawionego na rysunku.



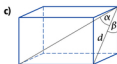
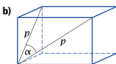
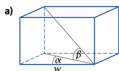
25. Na rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy. Oblicz długość odcinka i miarę kąta oznaczonych literami.



26. Na rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy. Oblicz jego objętość.



27. Podaj wzór na objętość narysowanego prostopadłościanu, gdy dane są wielkości oznaczone literami.



- **28.** Podstawą graniastosłupa prostego jest równoległobok o kącie ostrym α . Odległości między równoległymi ścianami bocznymi są równe k i l , a odległość między podstawami graniastosłupa wynosi h . Oblicz objętość tego graniastosłupa.

MINISPRAWDZIAN

51. Pewien graniastosłup ma 24 krawędzie. Podstawą tego graniastosłupa jest:

- A. sześciokąt B. ośmiokąt C. dwunastokąt D. szesnastokąt

52. Na rysunku obok przedstawiono graniastosłup prawidłowy czworokątny. Jaki obwód ma trójkąt ABC ?

- A. $6 + 3\sqrt{2}$ C. $3 + 2\sqrt{3}$
B. $4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ D. $12\sqrt{3}$



53. Podstawą graniastosłupa prostego jest kwadrat o przekątnej długości 12. Przekątna tego graniastosłupa ma długość 13. Jakie pole powierzchni całkowitej ma ten graniastosłup?

- A. $60\sqrt{3} + 120$ B. $60\sqrt{2} + 144$ C. $144\sqrt{2} + 65$ D. $144 + 120\sqrt{2}$

54. Na rysunku obok przedstawiono graniastosłup prawidłowy trójkątny. Która równość jest prawdziwa?

- A. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$
B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$ D. $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$



OSTROŚŁUPY

- I Przypomnijmy, że ostrosłup to wielościan, w którym jedna ściana (podstawa) jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany (czyli ściany boczne) są trójkątami o wspólnym wierzchołku.



Wspólny wierzchołek wszystkich ścian bocznych ostrosłupa nazywamy **wierzchołkiem ostrosłupa**.

Wysokością ostrosłupa nazywamy odcinek łączący wierzchołek ostrosłupa z płaszczyzną podstawy, prostopadły do tej płaszczyzny. Koniec wysokości leżący na płaszczyźnie podstawy nazywamy **spodkiem wysokości**.

Zauważ, że w graniastosłupie można wskazać wiele odcinków, które są wysokościami, a ostrosłup, który nie jest trójkątny, ma tylko jedną wysokość.



Ostrosłup, w którym podstawa jest wielokątem foremnym, a krawędzie boczne mają równe długości, nazywamy **ostrosłupem prawidłowym**.

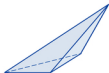
Ostrosłup prawidłowy sześciokątny

- Podstawa jest sześciokątem foremnym.
- Krawędzie boczne mają równe długości.

W ostrosłupie prawidłowym ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi.

Ostrosłup trójkątny nazywamy **czworościanem**.

Uwaga. W czworościanie każdą ze ścian możemy uznać za podstawę. Czworościan ma zatem cztery wysokości.



Czworościan, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi, nazywamy **czworościanem foremnym**.

Czworościan (ostrosłup trójkątny)

zadania 1–4 ►

- II **ĆWICZENIE A** Odcinając naroże sześcianu w sposób przedstawiony na rysunku obok, otrzymamy ostrosłup, który jest czworościanem. Przyjmijmy, że podstawą tego czworościanu jest ściana BCD . Jaka jest wysokość tego czworościanu? Jakie długości mają krawędzie boczne?



Twierdzenie

Jeśli wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają równe długości, to na podstawie ostrosłupa można opisać okrąg. Środek tego okręgu jest spodem wysokości ostrosłupa.



Dowód



Rozważmy w ostrosłupie o równych krawędziach bocznych trójkąty, których dwoma bokami są wysokość ostrosłupa i krawędź boczna.

Wszystkie takie trójkąty są prostokątne, mają wspólną przyprostokątną i przeciwprostokątną o tej samej długości. Wobec tego boki tych trójkątów leżące na podstawie ostrosłupa — odcinki łączące spodek wysokości z wierzchołkami podstawy — mają taką samą długość. Okrąg o promieniu równym temu odcinkowi i o środku w spodku wysokości jest więc opisany na podstawie ostrosłupa. $\square$

Poniższe rysunki przedstawiają ostrosłupy prawidłowe. Spodek wysokości w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym leży na przecięciu przekątnych podstawy, w ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym leży na przecięciu dłuższych przekątnych podstawy, a w ostrosłupie prawidłowym trójkątnym leży na przecięciu środkowych podstawy i dzieli każdą z nich w stosunku 2 : 1.

ostrosłup prawidłowy czworokątny



$$x = \frac{a}{2}$$

$$y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

ostrosłup prawidłowy sześciokątny



$$x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$y = a$$

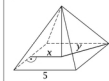
ostrosłup prawidłowy trójkątny



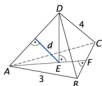
$$x = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$y = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

ĆWICZENIE B Na rysunkach przedstawiono ostrosłupy prawidłowe. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.



PRZYKŁAD 1 Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 3, a jego krawędź boczna ma długość 4. Oblicz odległość spodka wysokości tego ostrosłupa od krawędzi bocznej.



$$|AE| = \frac{2}{3}|AF| = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$|AE|^2 + |DE|^2 = |DA|^2$$

$$(\sqrt{3})^2 + |DE|^2 = 4^2$$

$$|DE| = \sqrt{13}$$

$$P_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |DE| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{13} = \frac{\sqrt{39}}{2}$$

$$P_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot d = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot d = 2d$$

$$2d = \frac{\sqrt{39}}{2}, \text{ stąd } d = \frac{\sqrt{39}}{4}$$

Obliczamy pole trójkąta AED na dwa sposoby.

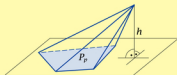
Odp. Odległość spodka wysokości ostrosłupa od krawędzi bocznej wynosi $\frac{\sqrt{39}}{4}$.

ZADANIE Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 4, a jego krawędź boczna ma długość 6. Oblicz odległość spodka wysokości tego ostrosłupa od krawędzi bocznej.

zadania 5–8

- III Pole powierzchni ostrosłupa to suma pola podstawy i pola powierzchni bocznej, czyli sumy powierzchni ścian bocznych.

Objętość ostrosłupa stanowi $\frac{1}{3}$ objętości graniastosłupa o takich samych podstawie i wysokości.

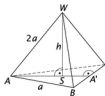


Objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

P_p — pole podstawy ostrosłupa
 h — wysokość ostrosłupa

PRZYKŁAD 2 Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość a , a krawędź boczna ma długość $2a$. Jakie jest pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa? Jaką objętość ma ten ostrosłup?



$$h_b = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2} \sqrt{15}$$

$$P_c = P_p + 3P_s = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \sqrt{15} = \frac{a^2}{4} (\sqrt{3} + 3\sqrt{15})$$

$$|AS| = \frac{2}{3} |AA'| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$h = \sqrt{|AW|^2 - |AS|^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{3a^2}{9}} = a\sqrt{\frac{11}{3}}$$

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{\frac{11}{3}} = \frac{a^3}{12} \sqrt{11}$$

Wysokość trójkąta równobocznego o boku a wynosi $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, a spodek wysokości ostrosłupa dzieli ją w stosunku 1 : 2.

Pole trójkąta równobocznego o boku a jest równe $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

ZADANIE Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 13, a wysokość tego ostrosłupa ma długość 5. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego ostrosłupa.

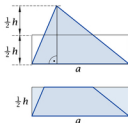
zadania 9–13

Ciekawostka

Wzór na pole trójkąta można wyprowadzić ze wzoru na pole prostokąta. Wystarczy zauważyć, że trójkąt o podstawie a i wysokości h da się podzielić na części, z których można złożyć prostokąt o bokach $\frac{1}{2}h$ i a (zob. rysunki).

Czy nie można by w podobny sposób wprowadzić wzoru na objętość ostrosłupa ze wzoru na objętość prostopadłościanu? To znaczy, czy można podzielić dowolny ostrosłup na skończoną liczbę części, z których da się ułożyć prostopadłościan?

To proste zdawałoby się pytanie okazało się trudnym i ważnym problemem matematycznym. Podczas II Międzynarodowego Kongresu Matematyków w roku 1900 zostało uznane przez Davida Hilberta za jeden z 23 najważniejszych problemów matematyki XX wieku. Zaskakującą odpowiedź na to pytanie znalazł jeszcze w tym samym roku Max Dehn (czyt. maks dejn) — uczeń Hilberta. Udowodnił on, że nie każdy ostrosłup można podzielić na części, z których da się ułożyć prostopadłościan.



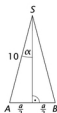
- IV Podobnie jak w wypadku innych brył, przy rozwiązywaniu zadań dotyczących ostrosłupów przydają się funkcje trygonometryczne.

PRZYKŁAD 3 Kraweź boczna ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 10 cm, a kąt między tą krawędzią a wysokością ostrosłupa ma miarę 20° . Jaką miarę ma kąt między sąsiednimi krawędziami bocznymi?



$$\frac{a}{10} = \sin 20^\circ$$

$$a = 10 \sin 20^\circ$$



$$\sin \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{10} = \frac{a}{20} = \frac{10 \sin 20^\circ}{20} =$$

$$= \frac{\sin 20^\circ}{2} \approx 0,171$$

$$\alpha \approx 10^\circ$$

$$|\sphericalangle ASB| = 2\alpha \approx 20^\circ$$

Odp. Kąt między sąsiednimi krawędziami bocznymi wynosi około 20° .

ZADANIE Kraweź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6, a kąt między tą krawędzią i wysokością ostrosłupa ma miarę 35° . Jaką miarę ma kąt między sąsiednimi krawędziami bocznymi?

zadania 14–17 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Przerysuj i uzupełnij tabelkę.

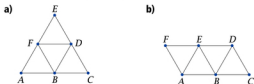
Ostrosłupy			
Liczba ścian	7		
Liczba krawędzi	10		
Liczba wierzchołków			9

2. a) Ile ścian bocznych ma ostrosłup o 100 krawędziach?
 b) Czy ostrosłup może mieć 15 krawędzi?
 c) Czy ostrosłup może mieć 22 krawędzie i 12 ścian bocznych?

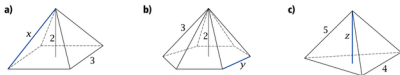
3. Wyjaśnij, dlaczego poniższe rysunki nie przedstawiają siatek ostrosłupów.



4. Na rysunku przedstawiono siatkę czworoscianu foremnego. Które punkty — po sklejeniu czworoscianu — pokryją się z punktem A?



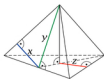
5. Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy (pionowy odcinek to wysokość ostrosłupa). Oblicz długość odcinka oznaczonego literą.



6. Na rysunku obok jest przedstawiony czworoscian foremny o krawędzi długości a .

a) Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.

b) Oblicz długość wysokości tego czworoscianu.



7. a) Wysokość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa 5, a wysokość jego ściany bocznej wynosi 10. Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa.

b) Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o bokach długości 2 i 4, a wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa mają długość 7. Jaką wysokość ma ten ostrosłup?

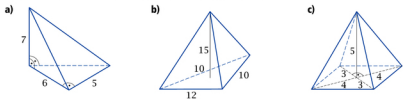
c) Przekątna podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość p , a wysokość ostrosłupa jest równa h . Jaką długość ma krawędź boczna?

8. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny równoramienny o przyprostokątnej długości 4. Wysokość ostrosłupa jest równa 8. Oblicz, jakie długości mają krawędzie boczne tego ostrosłupa, jeśli spodek wysokości jest:

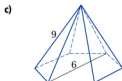
a) wierzchołkiem kąta prostego,

b) środkiem przeciwprostokątnej.

9. Oblicz objętość ostrosłupa przedstawionego na rysunku.



10. Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy. Oblicz jego objętość.



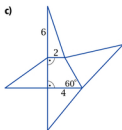
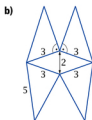
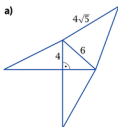
11. Oblicz pole powierzchni całkowitej:

a) ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy 2 i krawędzi bocznej 5,

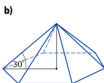
b) ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 4 i wysokości 1.

12. Jaką objętość ma czworościan foremny o krawędzi długości a ?

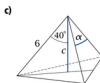
13. Oblicz objętość ostrosłupa, którego siatkę przedstawiono na rysunku.



◀ **IV 14.** Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego przedstawionego na rysunku ma długość 6. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

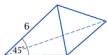


15. Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy. Oblicz długość odcinka i miarę kąta oznaczonych literami.



16. Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy. Oblicz jego objętość.

a)



b)



c)



17. Na rysunku obok przedstawiono ostrosłup prawidłowy ośmiokątny. Jakie długości mają zaznaczone odcinki? Jaką miarę ma zaznaczony kąt?



MINISPRAWDZIAN

S1. Które zdanie jest prawdziwe?

- A. W każdym ostrosłupie wysokość jest krótsza od wszystkich krawędzi bocznych.
- B. Podstawą każdego ostrosłupa jest wielokąt, na którym można opisać okrąg.
- C. W każdym graniastostłupie liczba jego krawędzi jest podzielna przez 3.
- D. W każdym graniastostłupie wysokość jest równa długości krawędzi bocznej.

S2. Krawędź podstawy i wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego mają taką samą długość równą a . Krawędź boczna tego ostrosłupa ma długość:

- A. a
- B. $a\sqrt{2}$
- C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
- D. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

S3. Graniastostłup prawidłowy trójkątny i ostrosłup prawidłowy czworokątny mają takie same wysokości i ich krawędzie podstawy mają jednakowe długości. Stosunek objętości graniastostłupa do objętości ostrosłupa jest równy:

- A. $3 : 1$
- B. $3\sqrt{3} : 4$
- C. $\sqrt{3} : \sqrt{2}$
- D. $2\sqrt{3} : 3$

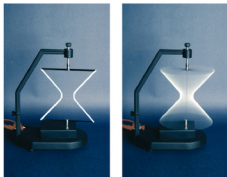
S4. Podstawą ostrosłupa przedstawionego na rysunku jest trójkąt prostokątny równoramienny o przyprostokątnych równych a . Wysokość ostrosłupa jest jedną z krawędzi bocznych i także ma długość a . Pole powierzchni tego ostrosłupa jest równe:

- A. $\frac{3}{2}a^2$
- B. $a^2 + \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$
- C. $\frac{1}{6}a^3$
- D. $a^2 + a^2\sqrt{2}$

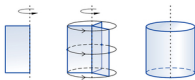


WALEC

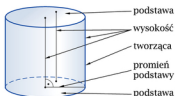
- 1 Wyobraź sobie, że figurę płaską obracamy wokół pewnej prostej tak, że każdy punkt figury zakreśla okrąg o środku leżącym na tej prostej. Punkty wszystkich zakreślonych w taki sposób okręgów tworzą **bryłę obrotową**. Prosta, wokół której jest wykonywany obrót, nazywamy osią obrotu bryły obrotowej.



Jeśli prostokąt obrócimy w opisany wyżej sposób wokół prostej zawierającej jego bok, to otrzymaną bryłą obrotową jest **walec**.



W walcu można wskazać dwie podstawy, które są przystającymi kołami leżącymi na równoległych płaszczyznach.



Każdy odcinek łączący płaszczyznę podstaw i prostopadły do nich nazywamy **wysokością walca**.

Wysokości, które łączą brzegi podstaw, tworzą powierzchnię boczną walca. Każdą taką wysokość nazywamy **tworzącą walca**.

ĆWICZENIE A Wyobraź sobie, że przedstawione (na sieci kwadratowej) figury obracamy wokół wskazanych osi. Które z otrzymanych brył obrotowych są walcami? Podaj długości promieni podstaw i tworzących tych walców. Przyjmij, że bok kratki ma długość 1.

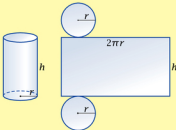


Przecinając bryłę obrotową płaszczyzną zawierającą oś obrotu, otrzymamy **przekrój osiowy** tej bryły. Przekrój osiowy walca jest prostokątem.



ĆWICZENIE B Czy przekroje dwóch walców o różnych wysokościach mogą być przystającymi prostokątami?

Jeśli walec ma promień podstawy r i wysokość h , to jego powierzchnia boczna po rozwinięciu na płaszczyznę jest prostokątem o bokach $2\pi r$ i h . Pole powierzchni całkowitej walca to suma pól dwóch podstaw i pola powierzchni bocznej.



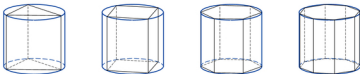
Pole powierzchni całkowitej walca:

$$P_c = 2P_p + P_b$$

$$P_c = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

P_p — pole podstawy
 P_b — pole powierzchni bocznej
 r — promień podstawy
 h — wysokość walca

Wyobraź sobie, że w walec wpisujemy graniastosłupy prawidłowe o takiej samej wysokości jak walec (zob. rysunki poniżej). Im więcej boków ma wielokąt, który jest podstawą graniastosłupa, tym objętość graniastosłupa bliższa jest objętości walca.



Objętość walca, podobnie jak w wypadku graniastosłupa, jest równa iloczynowi pola jego podstawy i wysokości.



Objętość walca:

$$V = P_p \cdot h$$

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

P_p — pole podstawy
 r — promień podstawy
 h — wysokość walca

PRZYKŁAD

Kąt między przekątną przekroju osiowego walca a tworzącą walca ma miarę 50° . Przekątna ma długość 10. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca.



$$\frac{2r}{10} = \sin 50^\circ$$

$$r = 5 \sin 50^\circ$$

$$\frac{h}{10} = \cos 50^\circ$$

$$h = 10 \cos 50^\circ$$

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot (5 \sin 50^\circ)^2 \cdot 10 \cos 50^\circ \approx 296$$

$$P_c = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 5 \sin 50^\circ \cdot 10 \cos 50^\circ + 2\pi \cdot (5 \sin 50^\circ)^2 \approx 247$$

Odp. Objętość walca wynosi około 296, a pole jego powierzchni całkowitej — około 247.

ZADANIE

Kąt między przekątną przekroju osiowego a średnicą podstawy walca ma miarę 20° . Przekątna ma długość 8. Oblicz objętość i pole powierzchni tego walca.

zadania 1–18 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Który z walców przedstawionych na rysunku ma większą objętość? Który ma większe pole powierzchni całkowitej?



2. Oblicz pole powierzchni całkowitej walca przedstawionego na rysunku.

a)



b)



c)



3. Oblicz objętość walca przedstawionego na rysunku.

a)



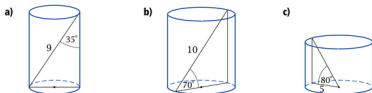
b)



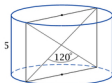
c)



4. Oblicz objętość walca przedstawionego na rysunku.



5. Oblicz objętość walca przedstawionego na rysunku obok.



6. a) Dwa różne walce mają taki sam przekrój osiowy, który jest prostokątem o wymiarach 4×6 . Porównaj objętości i pola powierzchni całkowitej tych walców.

b) Rozważmy walec otrzymany w wyniku obrotu pewnego prostokąta wokół krótszego boku oraz walec, który otrzymamy w wyniku obrotu tego samego prostokąta wokół dłuższego boku. Który z tych walców będzie miał większą objętość, a który będzie miał większe pole powierzchni całkowitej?

7. Przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku a . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca.

8. Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest kwadratem o boku a . Jakie jest pole przekroju osiowego tego walca?

9. W walcu o promieniu długości r kąt między przekątną przekroju osiowego a tworzącą walca ma miarę α . Uzasadnij, że objętość tego walca jest równa $\frac{2\pi r^3}{\lg \alpha}$.

10. Po rozwinięciu powierzchni bocznej walca otrzymano prostokąt, którego jeden bok jest dwa razy dłuższy od drugiego, a przekątna ma długość p . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

11. Na świecę w kształcie walca o wysokości 8 cm i średnicy podstawy 5 cm potrzeba 150 g parafiny. Ile świec w kształcie walca o wysokości 10 cm i średnicy podstawy 4 cm można zrobić z 1,5 kg takiej parafiny?

12. W garnku o średnicy 20 cm i wysokości 20 cm woda sięga do wysokości 16 cm. Czy woda wyleje się z garnka, gdy włożymy do niego sześcienną kostkę ze stali o krawędzi równej 10 cm?

Ciekawostka

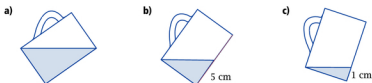
Benjamin Franklin, współtwórca amerykańskiej Deklaracji niepodległości, był znany z wielu pomysłowych eksperymentów. Jeden z nich był następujący: Franklin zauważył, że plama oleju na wodzie szybko rośnie wkrótce po powstaniu, ale po pewnym czasie przestaje się powiększać. Opuścił zatem kroplę oleju o objętości $0,1 \text{ cm}^3$ na spokojne wody jeziora i obserwował powstającą plamę.

Gdy przestała się powiększać, zmierzył jej średnicę. Miała 710 cm . Przyjmując, że plama jest walcem, Franklin obliczył grubość warstwy oleju.

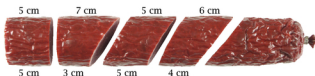
Wiele lat później okazało się, że wynik, jaki otrzymał Franklin, świadczy o tym, że plama oleju jest zbudowana z dokładnie jednej warstwy cząsteczek oleju (grubość warstwy i długość jednej cząsteczki oleju są jednakowe).

13. Przeczytaj ciekawostkę. Jaki wynik otrzymał Franklin?

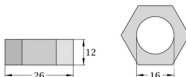
14. Kubek w kształcie walca o średnicy podstawy 8 cm i wysokości 10 cm napełniono częściowo wodą i pochyłono tak, jak pokazano na rysunku. Oblicz objętość wody w kubku.



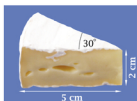
15. Cztery kawałki kielbasy o okrągłym przekroju odcięto w sposób przedstawiony na rysunku. Czy każdy z tych kawałków waży tyle samo?



16. Rysunki przedstawiają nakrętkę widzianą z dwóch stron — z góry i z boku. Wymiary podano w milimetrach. Nakrętkę wykonano ze stali o gęstości 8000 kg/m^3 . Oblicz masę 20 takich nakrętek.



17. Przyjrzyj się poniższym fotografiom. Ser w kształcie walca o promieniu podstawy 5 cm podzielono na 12 jednakowych części, takich jak na pierwszej fotografii. Od jednej z takich części odcięto trochę sera tak, że został taki kawałek, jak pokazano na drugiej fotografii. Jaka to część całego sera?



18. Końce średnicy podstawy walca połączono odcinkami z punktem leżącym na brzegu drugiej podstawy, tworząc w ten sposób trójkąt równoboczny o boku a . Jakie jest pole powierzchni całkowitej walca?



MINISPRAWDZIAN

51. Który z walców przedstawionych poniżej ma największą objętość?

A.



B.



C.



D.



52. Powierzchnia boczna walca jest po rozwinięciu kwadratem o boku a . Objętość tego walca jest równa:

A. πa^3

B. $2\pi a^3$

C. $\frac{a^3}{2\pi}$

D. $\frac{a^3}{4\pi}$

53. Z drewnianego klocka, który ma kształt prostopadłościanu o wymiarach $8\text{ cm} \times 8\text{ cm} \times 6\text{ cm}$, chcemy wyciąć walec. Maksymalna objętość tego walca w centymetrach sześcennych wynosi:

A. 72π

B. 96π

C. 108π

D. 144π

STOŻEK

- 1 Jeżeli trójkąt prostokątny obrócimy wokół prostej, która zawiera jedną z przyprostokątnych, to otrzymaną bryłę obrotową jest **stożek**.



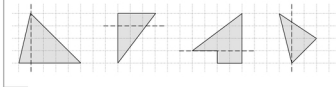
W stożku można wskazać podstawę, która jest kołem, oraz wierzchołek (zob. rysunek poniżej).



Odcinek łączący wierzchołek ze środkiem podstawy stożka nazywamy **wysokością stożka**.

Odcinki, które łączą wierzchołek z brzegiem podstawy, tworzą powierzchnię boczną stożka. Każdy taki odcinek nazywamy **tworzącą stożka**.

ĆWICZENIE A Wyobraź sobie, że przedstawione (na sieci kwadratowej) figury obracamy wokół wskazanych osi. Które z otrzymanych brył obrotowych są stożkami? Podaj długości promieni podstaw i długości tworzących tych stożków. Przyjmij, że bok kratki ma długość 1.



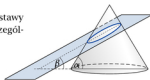
Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym. Kąt między ramionami tego trójkąta nazywamy **kątem rozwarcia stożka**. Kąt przy podstawie tego trójkąta to kąt nachylenia tworzącej do podstawy stożka.



ĆWICZENIE B Kąt rozwarcia stożka ma miarę 120° . Jaką miarę ma kąt nachylenia tworzącej do podstawy stożka?

Na poniższych rysunkach przedstawiono fragmenty płaszczyzn przecinających stożek i nachylonych pod różnymi kątami do podstawy stożka. Wspólne części tych płaszczyzn i powierzchni bocznej stożka tworzą trzy rodzaje linii. (Kąty między płaszczyznami oraz przekroje brył będą dokładnie omawiane w klasie trzeciej).

Gdy płaszczyzna nie przecina podstawy stożka, otrzymujemy elipsę (w szczególnym przypadku okrąg).



elipsa ($\beta < \alpha$)

Gdy płaszczyzna przecina podstawę i jest do niej nachylona pod takim samym kątem jak tworząca stożka, otrzymujemy fragment paraboli.



parabola

Gdy płaszczyzna jest nachylona do podstawy pod kątem większym niż tworząca, otrzymujemy fragment hiperboli.



hiperbola ($\beta > \alpha$)

Właśnie z tego powodu elipsa, parabola i hiperbola są nazywane krzywymi stożkowymi. Ciekawe, że orbity ciał niebieskich są krzywymi stożkowymi. Na przykład planety krążą po elipsach, a niektóre komety poruszają się po hiperbolach.

Słowa *elipsa*, *hiperbola* i *parabola* są też używane w teorii literatury. Elipsa to celowe opuszczenie pewnej części zdania, której można się domyślić, hiperbola to zamierzona przesada w opisie (np. w zwrocie *umrzeć ze śmiechu*), a parabola — to inaczej przypowieść alegoryczna.

ĆWICZENIE C Koło o promieniu długości 10 rozcięto na dwie części w sposób pokazany na rysunku obok. Z każdej z tych części utworzono powierzchnię boczną stożka. Jakie obwody mają podstawy tych stożków? Jakie długości mają promienie podstaw tych stożków?



PRZYKŁAD Z wycinka koła, który przedstawiono na rysunku obok, można utworzyć powierzchnię boczną stożka. Jaki kąt rozwarcia będzie miał ten stożek?



$$2\pi r = \frac{200^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 9$$

$$r = 5$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{\alpha}{2} \approx 34^\circ, \text{ stąd } \alpha \approx 68^\circ$$

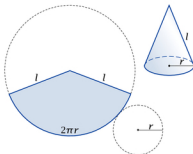


Obwód podstawy stożka jest równy długości łuku wycinka koła.

ZADANIE Z wycinka koła, który przedstawiono na rysunku, można utworzyć powierzchnię boczną stożka. Jaką miarę będzie miał kąt między tworzącą a średnicą podstawy tego stożka?



Powierzchnia boczna stożka o promieniu podstawy r i tworzącej l po rozłożeniu na płaszczyźnie jest wycinkiem koła o promieniu l . Łuk tego wycinka ma długość $2\pi r$.



Pole wycinka koła możemy obliczyć, korzystając z następującej proporcji:

$$\frac{\text{Pole wycinka koła}}{\text{Pole koła}} = \frac{\text{Długość łuku wycinka}}{\text{Obwód koła}}$$

$$\frac{P_b}{\pi l^2} = \frac{2\pi r}{2\pi l}$$

$$P_b = \pi r l$$

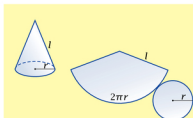
Pole powierzchni bocznej stożka:

$$P_b = \pi r l$$

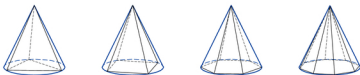
Pole powierzchni całkowitej stożka:

$$P_c = \pi r^2 + \pi r l$$

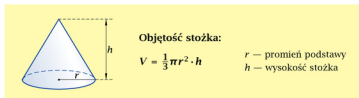
r – długość promienia podstawy stożka
 l – długość tworzącej



Wyobraź sobie, że wpisujemy w stożek ostrosłupy prawidłowe o tej samej wysokości co stożek (zob. rysunki poniżej). Im więcej boków miałby wielokąt w podstawie ostrosłupa, tym objętość ostrosłupa byłaby bliższa objętości stożka.



Objętość stożka stanowi $\frac{1}{3}$ objętości walca o takiej samej podstawie i wysokości.



zadania 1–16 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej stożka przedstawionego na rysunku.

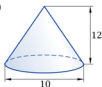
a)



b)



c)



2. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej stożka przedstawionego na rysunku.

a)



b)



c)



d)



e)

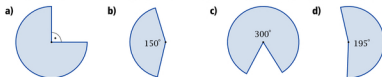


f)



3. Przekrój osiowy stożka o wysokości 3 jest trójkątem prostokątnym. Oblicz objętość tego stożka.
4. Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka o kącie rozwarcia 120° i wysokości 5.
5. Stożek otrzymano w wyniku obrotu trójkąta równoramiennego wokół wysokości opuszczonej na jego podstawę. Kąt między ramionami tego trójkąta ma miarę 90° , a jego podstawa ma długość 6 cm. Oblicz objętość tego stożka.
6. Trójkąt prostokątny ma przyprostokątne długości 5 cm i 12 cm. Rozważmy stożek, który otrzymano w wyniku obrotu tego trójkąta wokół krótszej przyprostokątnej, i stożek, który otrzymano w wyniku obrotu tego trójkąta wokół dłuższej przyprostokątnej. Porównaj ich objętości i pola powierzchni całkowitej.
7. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym. Jaka miarę ma kąt środkowy wycinka koła, z którego można utworzyć powierzchnię boczną tego stożka?
8. Stożek o kącie rozwarcia 90° ma objętość 9. Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka.

9. Na rysunku przedstawiono wycinek koła o promieniu 10. Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka, którego powierzchnią boczną po rozcięciu jest ten wycinek.



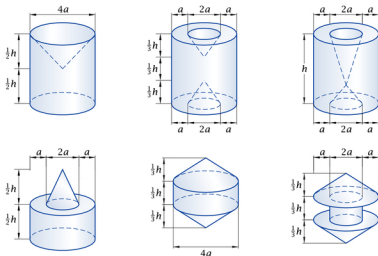
10. Z wycinka koła o promieniu 10 chcemy utworzyć powierzchnię boczną stożka, którego wysokość ma być równa 6. Jaki powinien być kąt środkowy tego wycinka?

11. Koło podzielono na dwa wycinki kołowe o kątach środkowych 60° i 300° . Z każdego z tych wycinków tworzymy powierzchnię boczną stożka.

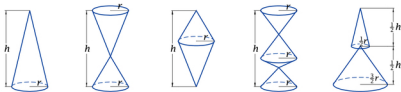
- a) Jaki jest stosunek długości promieni podstaw tych stożków?
- b) Jakie miary mają kąty rozwarcia stożków?
- c) Jaki jest stosunek długości wysokości stożków?
- d) W którym z tych stożków kąt nachylenia tworzącej do podstawy jest większy? Jaką ma miarę?

12. Koło o promieniu R rozcięto na dwa wycinki i z każdego z nich utworzono powierzchnię boczną stożka. Wykaż, że suma długości promieni podstaw tych stożków jest równa R .

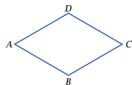
13. Bryły przedstawione na rysunkach powstały w wyniku wycięcia stożków z walców lub sklejenia walców ze stożkami. Oblicz objętości tych brył.



14. Która z poniższych brył (złożonych ze stożków) ma największą objętość?



- 15.** Trójkąty na rysunku obok mają równe wysokości opuszczone na bok AB . Wykaż, że objętości brył otrzymanych w wyniku obrotu tych trójkątów wokół prostej AB są równe.



16. Bok rombu ma długość 2 cm, a kąt ostry ma miarę 60° . Oblicz objętość bryły otrzymanej w wyniku obrotu tego rombu:

- wokół prostej BD ,
- wokół prostej AC ,
- wokół prostej przechodzącej przez punkt A i równoległej do prostej BD .

MINISPRAWDZIAN

51. Jaką wysokość ma stożek o promieniu podstawy długości r i objętości V ?

- A. $\frac{V}{\pi r^2}$ B. $3V - \pi r^2$ C. $\frac{\pi r^2}{3V}$ D. $\frac{3V}{\pi r^2}$

52. Mosiężny stożek o wysokości 30 cm i promieniu podstawy 5 cm przetopiono na jednakowe mniejsze stożki, każdy o wysokości 3 cm i promieniu podstawy 1 cm. Ile stożków otrzymano?

- A. 30 B. 10 C. 50 D. 250

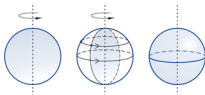
53. Jakie pole powierzchni całkowitej ma bryła (utworzona z walca i stożka) przedstawiona na rysunku?

- A. 57π B. 48π C. 24π D. 66π



KULA

1



Jeśli koło obracamy wokół prostej zawierającej średnicę koła, to otrzymamy bryłę obrotową jest **kula**.

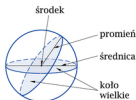
Powierzchnię kuli nazywamy **sferą**.

Zauważ, że tę samą kulę możemy otrzymać, obracając koło wokół prostej zawierającej dowolną średnicę tego koła. Każda taka prosta to oś obrotu tej kuli.

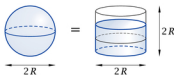
Kula o środku S i promieniu r jest zbiorem wszystkich punktów przestrzeni, których odległość od punktu S jest nie większa od r . Zbiór punktów, dla których odległość od punktu S jest równa r , nazywamy sferą.

Każdy przekrój kuli jest kołem.

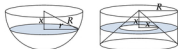
Przekrój kuli, który zawiera jej środek, nazywamy **kołem wielkim kuli**.



Wzór na objętość kuli potrafił uzasadnić już Archimedes (287–212 p.n.e.). W niezwykle pomysłowy sposób wykazał on bowiem, że objętość kuli to $\frac{2}{3}$ objętości walca, którego średnica podstawy i wysokość są równe średnicy kuli.



Rozumowanie Archimedesusa przebiegało mniej więcej tak (dla uproszczenia rozważania przeprowadzimy dla półkuli):



$$\begin{aligned}P &= \pi r^2 \\r^2 &= R^2 - x^2 \\P &= \pi(R^2 - x^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P &= \pi R^2 - \pi x^2 \\P &= \pi(R^2 - x^2)\end{aligned}$$

Wyobraź sobie dwa naczynia o jednakowej wysokości i średnicy. Jedno ma kształt półkuli (a właściwie półsfery). Drugie naczynie ma kształt walca pustego w środku, do którego wklejono stożek o takiej samej podstawie i wysokości jak walec.

Gdyby te naczynia stojące obok siebie przeciąć płaszczyzną poziomą, to otrzymalibyśmy dwa przekroje — jeden w kształcie koła, a drugi w kształcie pierścienia. Archimedes zauważył, że oba te przekroje mają równe pola.

Argumentacja Archimedesusa przebiegała dalej w następujący sposób:

Przypuśćmy teraz, że do każdego z tych naczyń nalewamy jednocześnie wodę takim samym strumieniem (w każdej chwili tyle samo wody). Skoro na każdym poziomie przekroje obu naczyń mają równe pola, to naczynia napełnione zostaną w tym samym momencie i będą zawierać tyle samo wody. Wynika stąd, że mają taką samą pojemność.

Teraz możemy już obliczyć objętość V kuli o promieniu R . Połowa tej objętości jest równa różnicy między objętością walca i stożka opisanych powyżej:

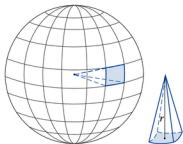
$$\frac{1}{2}V = \pi R^2 \cdot R - \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{2}{3}\pi R^3, \quad \text{zatem} \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3$$



Archimedes był tak dumny z odkrycia, że objętość kuli jest równa $\frac{2}{3}$ objętości walca opisanego na tej kuli, iż kazał na swym nagrobku wyryć rysunek ilustrujący to twierdzenie.

Właśnie dzięki temu rysunkowi 137 lat po śmierci Archimedesusa Ciceron odnalazł w Syrakuzach na Sycylii jego zarośnięty już i zniszczony grób.

Już od czasów Archimedesesa wiadomo, że objętość kuli o promieniu r wynosi $\frac{4}{3}\pi r^3$. Korzystając z tego, można uzasadnić wzór pozwalający obliczać pole powierzchni kuli. Wyobraź sobie, że kulę o promieniu r dzielimy na n brył przypominających ostrosłupy o wspólnym wierzchołku w środku kuli.



Wspólną część każdej takiej bryły i powierzchni kuli (sfery) nazwijmy podstawą bryły. Niech $P_1, P_2, \dots, P_n$ oznaczają pola podstaw brył, na które podzielono kulę. Suma tych pól jest równa polu powierzchni kuli:

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n = P$$

Zauważ, że im mniejsze pola podstaw tych brył, tym bardziej bryły te przypominają ostrosłupy o objętościach:

$$\frac{1}{3}P_1r, \frac{1}{3}P_2r, \dots, \frac{1}{3}P_nr$$

Suma objętości tych brył jest wówczas równa objętości kuli:

$$\frac{1}{3}P_1 \cdot r + \frac{1}{3}P_2 \cdot r + \dots + \frac{1}{3}P_n \cdot r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{1}{3}r(P_1 + P_2 + \dots + P_n) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Stąd otrzymujemy równość: $P = 4\pi r^2$



Objętość kuli:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Pole powierzchni kuli:

$$P = 4\pi r^2$$

r — promień kuli

zadania 1–12 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. a) Jakie jest pole powierzchni kuli o objętości 36π ?
b) Jaką objętość ma kula o polu powierzchni 100π ?
2. Koło wielkie kuli ma pole 16π . Jaka jest objętość i jakie jest pole powierzchni tej kuli?
3. Na pomalowanie kuli zużyto 10 litrów farby. Ile potrzeba tej farby, aby pomalować półkulę o takim samym promieniu?

4. a) Zgodnie z przepisami gry w tenisa stołowego piłeczka ma mieć średnicę 40 mm. Dawniej, przed rokiem 2000, grano mniejszymi piłeczkami — o średnicy 38 mm. O ile procent zwiększyła się powierzchnia piłeczki po zmianie przepisów?

b) Przepisy koszykówki dopuszczają do gry piłki o obwodzie od 74,9 cm do 78 cm. O ile procent objętość największej piłki jest większa od objętości najmniejszej piłki zgodnej z przepisami?

5. a) Dwie ołowiane kule o średnicach 8 cm i 4 cm przetopiono na jedną kulę. Jaka jest średnica tej kuli?

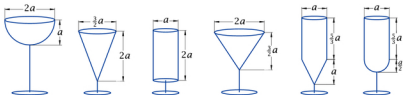
b) Mosiężną kulę o średnicy 12 cm przetopiono na jednakowe kule o średnicy 2 cm. Ile małych kul otrzymano?

6. Do pojemnika w kształcie walca o średnicy 10 cm nalano wody i wrzucono do niego 30 metalowych kulek, każda o promieniu 1 cm. Kulki całkowicie zanurzyły się w wodzie. O ile centymetrów podniósł się poziom wody w naczyniu?

7. a) Jaką część objętości sześcianu stanowi największa możliwa kula wycięta z tego sześcianu?

b) Jaką część objętości kuli stanowi objętość największego możliwego sześcianu wyciętego z tej kuli?

8. Określ, jaki kształt ma czasza każdego z kieliszków przedstawionych na rysunkach. Ustal, który z kieliszków ma największą pojemność, a który — najmniejszą.



9. Przedstawione na rysunkach bryły to półkula, ćwiartka i $\frac{1}{8}$ kuli. Wszystkie są wycięte z tej samej kuli.

a) Ile razy powierzchnia bryły (A) jest większa od powierzchni bryły (B)?

b) Ile razy powierzchnia bryły (B) jest większa od powierzchni bryły (C)?

(A)



(B)



(C)



- 10.** Przyjrzyj się rysunkowi. Przyjmij, że $r = 13$ cm, $d = 5$ cm, $\alpha = 120^\circ$. Który z zaznaczonych przekrojów kuli ma większe pole powierzchni? O ile większe?



- 11.** W walec o wysokości równej promieniowi podstawy wpisano półkulę i stożek w sposób przedstawiony na rysunku. Wykaż, że różnica między objętością walca i półkuli jest taka sama jak różnica między objętością półkuli i stożka.

- 12. a)** Oblicz stosunek pola powierzchni kuli do pola powierzchni całkowitej walca opisanego na tej kuli.

- b)** Wykaż, że objętość walca o polu powierzchni całkowitej P , opisanego na kuli o promieniu r , jest równa $\frac{1}{3}Pr$.

MINISPRAWDZIAN

- 51.** Koło wielkie kuli ma pole powierzchni równe 12π . Jaka objętość ma ta kula?

A. $24\sqrt{3}\pi$ B. $32\sqrt{3}\pi$ C. 48π D. $8\sqrt{3}\pi$

- 52.** Jedna z dwóch kul ma trzy razy większą średnicę niż druga. Ile razy większą ma objętość?

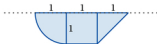
A. $\sqrt[3]{3}$ razy B. 3 razy C. 9 razy D. 27 razy



- 53.** Na rysunku przedstawiono fragment kuli o promieniu r (zaznaczone na rysunku odcinki o długości r są parami prostopadłe). Powierzchnia całej kuli jest równa 16π . Jaka jest objętość narysowanej bryły?

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2}{3}\pi$ C. $\frac{4}{3}\pi$ D. $\frac{8}{3}\pi$

- 54.** Figurę złożoną z ćwiartki koła, kwadratu i trójkąta (zob. rysunek obok) obracamy wokół zaznaczonej prostej. Jakie pole powierzchni ma otrzymana bryła?



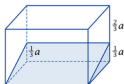
A. $\pi(4 + \sqrt{2})$ B. $\pi(6 + \sqrt{2})$ C. $\pi(8 + \sqrt{2})$ D. 2π

POWTÓRZENIE

1. a) Ile wierzchołków i ile krawędzi ma graniastosłup o 20 ścianach?

b) Ile ścian i ile krawędzi ma ostrosłup o 20 wierzchołkach?

2. Jaką część objętości prostopadłościanu przedstawionego na rysunku stanowi objętość zacieniowanej bryły?



3. W graniastosłupie prawidłowym oraz ostrosłupie prawidłowym zaznaczono pewne odcinki. Oblicz ich długości.



4. Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości równej 12 cm jest romb. Przekątne graniastosłupa mają długości 13 cm i 16 cm. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

5. Jaką objętość ma czworościan foremny o krawędzi $\sqrt{3}$?

6. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o bokach długości 1 i $\sqrt{2}$. Najkrótsza krawędź boczna jest prostopadła do podstawy, a najdłuższa krawędź boczna ma długość 2. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

7. Jaką wysokość ma walec o promieniu podstawy r , który ma taką samą objętość jak kula o promieniu r ?

8. Jaką objętość ma stożek o kącie rozwarcia 90° i wysokości 10?

9. Z koła o promieniu 10 odcięto wycinek o kącie środkowym 30° . Z pozostałej części koła utworzono powierzchnię boczną stożka. Jaką wysokość ma ten stożek?

10. Do walca o średnicy podstawy 6 i wysokości 4 doklejono walec o takiej samej wysokości i dwukrotnie mniejszej średnicy podstawy (zob. rysunek). Oblicz pole powierzchni otrzymanej bryły.



11. Gałki lodów mają kształt półkuli. Ile razy więcej waży gałka takich samych lodów o promieniu 5 cm od gałki o promieniu 4 cm?

12. Metalową kulę przetopiono bez strat materiału na kule o dwukrotnie mniejszym promieniu. Ile takich mniejszych kul otrzymano?

Tabela wartości funkcji trygonometrycznych

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
0°	0	1	0	—	46°	0,7193	0,6947	1,0355	0,9657
1°	0,0175	0,9998	0,0175	57,2900	47°	0,7314	0,6820	1,0724	0,9325
2°	0,0349	0,9994	0,0349	28,6363	48°	0,7431	0,6691	1,1106	0,9004
3°	0,0523	0,9986	0,0524	19,0811	49°	0,7547	0,6561	1,1504	0,8693
4°	0,0698	0,9976	0,0699	14,3007	50°	0,7660	0,6428	1,1918	0,8391
5°	0,0872	0,9962	0,0875	11,4301	51°	0,7771	0,6293	1,2349	0,8098
6°	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	52°	0,7880	0,6157	1,2799	0,7813
7°	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	53°	0,7986	0,6018	1,3270	0,7536
8°	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	54°	0,8090	0,5878	1,3764	0,7265
9°	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	55°	0,8192	0,5736	1,4281	0,7002
10°	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	56°	0,8290	0,5592	1,4826	0,6745
11°	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	57°	0,8387	0,5446	1,5399	0,6494
12°	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	58°	0,8480	0,5299	1,6003	0,6249
13°	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	59°	0,8572	0,5150	1,6643	0,6009
14°	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	60°	0,8660	0,5000	1,7321	0,5774
15°	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	61°	0,8746	0,4848	1,8040	0,5543
16°	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	62°	0,8829	0,4695	1,8807	0,5317
17°	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	63°	0,8910	0,4540	1,9626	0,5095
18°	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	64°	0,8988	0,4384	2,0503	0,4877
19°	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	65°	0,9063	0,4226	2,1445	0,4663
20°	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	66°	0,9135	0,4067	2,2460	0,4452
21°	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	67°	0,9205	0,3907	2,3559	0,4245
22°	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	68°	0,9272	0,3746	2,4751	0,4040
23°	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	69°	0,9336	0,3584	2,6051	0,3839
24°	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	70°	0,9397	0,3420	2,7475	0,3640
25°	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	71°	0,9455	0,3256	2,9042	0,3443
26°	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	72°	0,9511	0,3090	3,0777	0,3249
27°	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	73°	0,9563	0,2924	3,2709	0,3057
28°	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	74°	0,9613	0,2756	3,4874	0,2867
29°	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	75°	0,9659	0,2588	3,7321	0,2679
30°	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	76°	0,9703	0,2419	4,0108	0,2493
31°	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	77°	0,9744	0,2250	4,3315	0,2309
32°	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	78°	0,9781	0,2079	4,7046	0,2126
33°	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	79°	0,9816	0,1908	5,1446	0,1944
34°	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	80°	0,9848	0,1736	5,6713	0,1763
35°	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	81°	0,9877	0,1564	6,3138	0,1584
36°	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	82°	0,9903	0,1392	7,1154	0,1405
37°	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	83°	0,9925	0,1219	8,1443	0,1228
38°	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	84°	0,9945	0,1045	9,5144	0,1051
39°	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	85°	0,9962	0,0872	11,4301	0,0875
40°	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	86°	0,9976	0,0698	14,3007	0,0699
41°	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	87°	0,9986	0,0523	19,0811	0,0524
42°	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	88°	0,9994	0,0349	28,6363	0,0349
43°	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	89°	0,9998	0,0175	57,2900	0,0175
44°	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	90°	1	0	—	0
45°	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000					

ODPOWIEDZI

str. 13-14: 1. a) $\frac{7x^5-5x^7}{2}$, st. 7; $\sqrt{3}z^{105}+\frac{x^2}{3}$, st. 105, b) $8^{\frac{1}{3}}$, st. 0, c) $0,2t+6t^3-1,4t^{10}$, st. 10; $-3w^7$, st. 7. 2. a) $-\frac{1}{8}x^0$, b) $(1+\sqrt{2})x^2$, c) $1,3x^5$, d) $-2x^2$. 3. a) $-2x^2+7x-2$, b) $6x^5-2x^2$, c) $x^{13}+x^8-x^2$, d) $11x^5+5x$. 4. a) $11x^6-9x^3-2$, b) $-4x^3+3x^2-18$, c) $16x^{11}-8x^{10}-16x^5+8x^4$, d) $-21x^5-4x^4+4x^3+15x^2+3x$, e) $2x^{10}+7x^8-15x^6-2x^5+3x^3$, f) $21x^8-17x^6+2x^4+6x^2-4$. 5. a) $-2x^3-x^2-x+5$, b) $x^3+4x^2-11,5$, c) $2x^5-14x^4+12x^3-x^2+7x-6$. 6. a) St. 5; -3, b) st. 3; -70, c) st. 8; 162. 7. a) m , b) m , c) $m+n$, d) $2m$. 9. a) -4, b) -125, c) 990, d) 1, e) 0, f) -48. 10. a) $5\frac{1}{9}$, b) $-\frac{3}{4}$, c) -122, d) 20,1. 11. a) $r=-2$, $s=3$, $t=-4$, b) $a=\sqrt{2}$, $b=3$, $c=-10$. 12. a) 650 pączków. 13. a) Nie ma takich wartości. b) Nie ma takich wartości. c) Dla $p=0$, $q=-2$, $r=0$, d) dla $p=-2$, $q=-3$, $r=5,5$, e) dla $p=10$, $q=23$, $r=-10$, f) dla $p=0$, $q=-4$, $r=0$. 14. Dla $m=3$ i $n=-4$.

str. 18-20: 1. a) $x^3(x^2-1)$, b) $x^2(x^2-x+1)$, c) $4x^6(x+2)$, d) $5x^2(3x^3-4x+1)$, e) $-3x^3(3x^3-6x+4)$, f) $7x^5(2x^3-3x^2-4)$. 2. a) $(x+4)(x^2+1)$, b) $(6x-5)(x^2+1)$, c) $(x-\frac{1}{2})(x^2+1)$, d) $(x^2-1)(2x+5)$, e) $(3x-4)(x^3-1)$, f) $(1-x^2)(7x+6)$. 3. a) $(x+5)(x^2+3)$, b) $(2x-3)(x^2+3)$, c) $(2x-3)(x^2+2)$, d) $(2-5x)(3x^2+1)$, e) $(5x-\sqrt{7})(x^2+2)$, f) $(\sqrt{2}x-\sqrt{3})(x^2+5)$. 4. a) $x(3x-2)(5x^2+2)$, b) $-x(2x-5)\cdot(5x^2+4)$, c) $x^2(x^2+1)(x+10)$, d) $x(x+3)(2x^2+3)$, e) $x^2(x-5)(2x^2+1)$, f) $-x^2(2x-1)(3x^2+2)$. 5. a) $5x^2(x+3)(2x-3)$, b) $x^2(x+1)(x-5)$, c) $2x(x+2)(x-\frac{1}{2})$, d) $x^3(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$, e) $2x(x^2+3)(x-4)$, f) $x(x+3)(2x^2+5)$. 6. a) $(x-4)(x+4)$, b) $(2x-\sqrt{5})(2x+\sqrt{5})$, c) $(x-3)^2$, d) $(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2})^2$, e) $(x-3)(x^2+3x+9)$, f) $(x-1)(x^2+x+1)$. 7. a) $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x^2+5)$, b) $(\sqrt{7}x-\frac{1}{3})(\sqrt{7}x+\frac{1}{3})(7x^2+\frac{1}{9})$, c) $(\sqrt{2}x-\sqrt{3})(\sqrt{2}x+\sqrt{3})(2x^2+3)$, d) $x^5(x-10)(x+10)$, e) $(x-1)^2\cdot(x+1)^2$, f) $(x+4)^2$, g) $(\frac{1}{3}x-2)(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+4)$, h) $x^7(4x-1)(16x^2+4x+1)$. 8. a) $(x-1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1)$, b) $(2x-1)(16x^4+8x^3+4x^2+2x+1)$, c) $(x-2)(x^5+2x^4+4x^3+8x^2+16x+32)$, d) $(x-\sqrt[3]{3})(x^4+\sqrt[3]{3}x^3+\sqrt[3]{9}x^2+\sqrt[3]{27}x+\sqrt[3]{81})$, e) $(x-\sqrt{3})(x^5+\sqrt{3}x^4+3x^3+3\sqrt{3}x^2+9x+9\sqrt{3})$. 9. a) $-x(3x+7)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$, b) $-x^3(x+3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$, c) $-x^2(x+2)(x-2)(2x-5)$, d) $-10(x-2)\cdot(x^2+2)(x^2+2x+4)$, e) $x(2x+5)(x-1)(x+1)(x^2+1)$, f) $5x^3(3x-2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$, g) $x(3x+2\sqrt{5})\cdot(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$, h) $-x(2\sqrt{6}x+\sqrt{5})(\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1)$. 10. a) $(3x^2+x+2)(x-1)(x^2+x+1)$, b) $(x^2-x+1)\cdot(x-\sqrt[3]{5})(x^2+\sqrt[3]{5}x+\sqrt[3]{25})$, c) $(x+2)(x-1)(x-2)(x^2+2x+4)$, d) $(2x^2+x+3)(x-1)(x^2+x+1)$, e) $(x^2+2x+2)\cdot(x-2)(x^2+2x+4)$, f) $(x-1)(x^2+x+1)(x-\frac{\sqrt{5}-1}{2})(x-\frac{\sqrt{5}+1}{2})$. 11. a) $(x+5)(x^2+3)$. Wskazówka. Zauważ, że znak tego wielomianu zależy tylko od wartości wyrażenia $x+5$. b) $(x-2)(4x^2+3)$, dla $x < 2$, c) $-(2x-1)(6x^4+1)$. 12. a) x^2+1 , b) $\frac{15}{4}x-\frac{3}{4}$, c) $\frac{x-1}{x^2-4}$. 13. a) $n(n-1)(n+1)$. Wskazówka. Zauważ, że otrzymane wyrażenie jest iloczynem trzech kolejnych liczb całkowitych. 14. a) 3; $(x^2+1)(3x^2+2x+1)$, b) 3; $(x^2+1)(5x^2-7x+3)$, c) -2; $-2(x+5)(x^2+1)(x-\frac{3}{2})$, d) -6; $-(3x^2-2x+1)(3x^2+2)$. 15. a) $(x^2+1)(2x^2+x+1)$, b) $(x^2+1)(3x^2+2x+1)$, c) $(x^2+2)(x+1)(x-3)$, d) $(x-2)(x+2)(x^2+x+1)$.

str. 24-25: 1. a) $x = -5$ lub $x = -\sqrt{7}$, lub $x = \sqrt{7}$, b) $x = -1$ lub $x = \frac{3}{2}$, c) $x = -\sqrt{6}$ lub $x = 2$,
lub $x = \sqrt{6}$, d) $x = -\frac{2}{5}$, e) $x = -3$ lub $x = \frac{1}{3}$, f) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{1}{5}$, lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 2. a) $-5, -\frac{1}{2}$
lub $\frac{2}{3}$, b) $-2,5, \frac{4}{3}$ lub 3, c) $-5, -\sqrt{5}, \sqrt{5}$ lub 2, d) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ lub 0, e) $0, \frac{3}{4}$ lub 2, f) $-1, 0$ lub 1.
3. a) Nie, b) tak, c) nie. 4. a) $x = -3$ lub $x = 0$, lub $x = 3$, b) $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = 0$, lub $x = 1$,
c) $x = -2$ lub $x = 0$, lub $x = 5$, d) $x = -3$ lub $x = 0$, lub $x = 2,5$, e) $x = 0$ lub $x = 3$, lub $x = 4$,
f) $x = -1,4$ lub $x = 0$, lub $x = 2$. 5. a) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, lub $x = -1$, b) $x = -3$ lub $x = 3$, lub
 $x = -1$, c) $x = \frac{7}{2}$, d) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \frac{2}{3}$, lub $x = \sqrt{3}$, e) $x = -2$ lub $x = 2$, f) $x = -2$ lub $x = \sqrt[3]{4}$, lub
 $x = 2$, g) $x = \sqrt[3]{6}$, h) $x = -1$ lub $x = 1$, lub $x = \frac{5}{3}$. 6. a) $W(x) = -(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x^2 + 3)(x + 1)(x - 2)$;
 $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}, x = -1, x = 2$, b) $W(x) = (\sqrt{3}x + 2)(\sqrt{3}x - 2)(x - 1)(x^2 + x + 1)$; $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}, x = \frac{2\sqrt{3}}{3}, x = 1$,
c) $W(x) = 2(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 1)(x - \frac{3}{2})$; $x = 2, x = -1, x = \frac{3}{2}$, d) $W(x) = 4x(7x + 5)(x - \frac{1}{2})^2(x - 1)^2$;
 $x = 0, x = -\frac{5}{7}, x = \frac{1}{2}, x = 1$. 7. a) $x = 0$ lub $x = \frac{3}{2}$, b) $x = 0$ lub $x = \sqrt[3]{2}$, c) $x = 0$ lub $x = -\sqrt[3]{5}$,
lub $x = \sqrt[3]{5}$, d) $x = 0$ lub $x = 7$, e) $x = 0$ lub $x = -6$, f) $x = 0$ lub $x = \frac{5}{6}$, g) $x = -5$ lub $x = -2$,
lub $x = 2$, h) $x = -3$ lub $x = 3$, i) $x = 0$ lub $x = \frac{1}{3}$, lub $x = 2$. 8. a) $x = -3$ lub $x = -2$, lub $x = 2$,
lub $x = 3$, b) $x = -\sqrt{5}$ lub $x = -2$, lub $x = 2$, lub $x = \sqrt{5}$, c) $x = -1$ lub $x = -\frac{1}{2}$, lub $x = \frac{1}{2}$, lub
 $x = 1$, d) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = 0$, lub $x = \sqrt{3}$, e) $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ lub $x = 0$, lub $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$, f) $x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ lub $x = 0$,
lub $x = 1$. 9. a) $x = 1$, b) $x = -\sqrt{2}$ lub $x = -1$, lub $x = 1$, lub $x = \sqrt{2}$, lub $x = -2$, c) $x = -3$ lub
 $x = -2$, lub $x = 2$. 10. a) $x = -4,5$ lub $x = 5,5$, b) $x = 7$, c) $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \sqrt{2}$, lub $x = -\sqrt{5}$,
lub $x = \sqrt{5}$. 11. a) $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 0$ lub $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, b) 3, c) $-\sqrt{2}$ lub $\sqrt{2}$.

str. 29-32: 2. a) $x^2 - 3x + 2$, b) $3x^2 - 4x - 2$, c) $x^3 - x^2 + 1$, d) $-4x^3 - 5x + 2$, e) $x^4 + 2x^3 + 1$,
f) $-x^4 + 5x + 7$. 3. a) $W(x) = 2x^2 + 5x - 3$, b) $W(x) = 5x^3 - 2x^2 - 1$, c) $W(x) = 3x^3 + 2x^2 - 1$,
d) $W(x) = 3x^2 + 2x - 1$. 4. a) ④, b) ⑤, c) ②, d) ①. 5. a) Kolejno: 6, 1, 2, 3,
b) kolejno: -2, 6, 5, 5. 6. a) $x^2 - 3x + 7$ reszta 7, b) $2x^2 + x - 1$ reszta 2, c) $3x^3 - 2x^2 - 5x - 1$
reszta -2, d) $-4x^3 + x^2 + 2$ reszta 3, e) $x^4 - 2x + 3$ reszta 7, f) $3x^4 + 2x^3 - x + 2$ reszta 4.
7. a) $W(x) = 3x^2 - 14x + 6$, b) $W(x) = x^3 + 5x^2 - 5x - 18$. 9. a) Liczbą 10, b) zwiększyć o 5.
10. a) $W_1(x) = (2x^2 - x - 9)(x - 5) - 47$, $W_2(x) = (3x^3 + 4)(x - 5) + 4$, $W_1(x) + W_2(x) = (3x^3 + 2x^2 -$
 $-x - 5)(x - 5) - 43$. 12. a) $x^2 - 4x + 4$, b) $x^3 + x + 3$, c) $2x^3 + 5$, d) $x^4 - 3x^3 + 2$ reszta -1,
e) $5x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x + 4$ reszta 4, f) $-3x^3 + 6x^2 - 12x + 26$ reszta -55.

str. 35-36: 1. a) Tak, b) tak, c) nie, d) tak. 2. a) 5, b) 34. 3. a) Dla $a = 20$, b) dla
 $p = \frac{1}{8}$. 5. a) $x = -2, x = \frac{1}{2}$, b) $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{3}$, c) $x = -5$, d) $x = 1,5$, e) $x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}, x = 4$,
f) $x = -3$. 6. $x = 5$. 7. a) $W(x) = 3(x - 10)(x - 2)(x + \frac{1}{3})$, b) $W(x) = 10(x + 7)(x - \frac{1}{5})(x - \frac{1}{2})$,
c) $W(x) = (x + 6)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$, d) $W(x) = 2(x - 4)(x + 2\frac{1}{2})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.

str. 40-41: 1. a) 3, b) -2, 1, 4, c) -3, d) -1, 1, e) -1, 0, 2, f) -1, 0, 1, 5. 3. a) $x_1 = -\frac{1}{2}$,
 $x_2 = -\frac{2}{3}, x_3 = 1$, b) $x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{4}, x_3 = \frac{1}{3}$, c) $x_1 = -3, x_2 = 1$, d) $x_1 = -2, x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$,
 $x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$, e) $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2$, f) $x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 5$. 4. a) $x_1 = -1, x_2 = \frac{-5 - \sqrt{5}}{10}$,
 $x_3 = \frac{-5 + \sqrt{5}}{10}$, b) $x_1 = -3, x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{6}, x_3 = \frac{1 + \sqrt{13}}{6}$, c) $x_1 = -2, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{2}{5}$, d) $x_1 = \frac{1}{2}$,

$x_2 = 2$, e) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{4}$, $x_3 = 3$, f) $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, g) $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 2$,
h) $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 1$. 5. a) $x_1 = -3$, $x_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_3 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $x = -1$, c) $x_1 = -2$, $x_2 = 5$,
d) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{11}}{5}$, $x_3 = \frac{1+\sqrt{11}}{5}$, e) $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, $x_4 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, f) $x_1 = -\frac{1}{5}$,
 $x_2 = 1$. 6. a) $2x^3 - 2x^2 - 3x - 2 = 0$, $x = 2$, b) $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$,
c) $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = 3$, d) $3x^3 + 4x^2 - x - 2 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{2}{3}$,
e) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, f) $4x^3 - 3x + 1 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$. 7. Gdy $n = 0$, to $x = -3$.
Gdy n jest liczbą nieparzystą, to $x = -1$.

str. 42: 1. $a = -5$, $b = 4$. 2. a) $x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 3x - 2$, b) $-12x^5 - 23x^4 + 15x^3 + 18x^2 - 9x$.
3. a) $A = C = 0$, $B = -4$ lub $A = 6$, $B = -10x$, $C = 2$, b) $A = -8$, $B = -\frac{3}{4}x^4$, $C = -24$. 4. $p = 3$,
 $q = 0$. 5. a) $2(5x - 6)(5x + 6)$, b) $(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$, c) $3x^3(x + 5)$, d) $(x + 7)(x^2 + 2)$,
e) $(5x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$, f) $(\sqrt[3]{2}x - 1)(\sqrt[3]{4}x^2 + \sqrt[3]{2}x + 1)(x - 1)(x + 3)$, g) $(x - \sqrt[3]{3})(x^2 + \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{9})$.
6. a) $x_1 = -2\frac{1}{2}$, $x_2 = 2$, $x_3 = 7$, b) $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{1}{5}$, $x_3 = 3$, c) $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{5}$,
d) $x_1 = -1 - \sqrt{2}$, $x_2 = -1 + \sqrt{2}$. 7. a) $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{2}{3}$, b) $x_1 = 0$, $x_2 = 3 - \sqrt{5}$, $x_3 = 3 + \sqrt{5}$,
c) $x_1 = -2$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$, $x_4 = 2$, d) $x_1 = -\sqrt{5}$, $x_2 = \sqrt{5}$. 8. a) $x = -\frac{2}{3}$, b) $x = 3$, c) $x_1 = -5$,
 $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, d) $x = -1$, e) $x_1 = -2$, $x_2 = \sqrt[3]{2}$, $x_3 = 1$, f) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \sqrt[3]{3}$. 9. a) $3x^2 - 2x + 5$,
b) $2x^2 + 3x - 7$ reszta 5, c) $-4x^3 - 2x^2 - x + 1$, d) $-x^3 - 2x^2 - x + 1$ reszta -3. 10. a) -3, b) 2,
c) 5. 11. a) $-\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{2}$, b) -3 , $\frac{1}{5}$, c) -2.

str. 49-52: 1. a) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 150^\circ$, b) $\alpha = 37^\circ$, $\beta = 53^\circ$, c) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$. 2. 240° .
4. a) $|\angle DOB| = 215^\circ$, $|\angle EOA| = 215^\circ$, $|\angle COD| = 305^\circ$, $|\angle EOF| = 270^\circ$, b) np. $\angle DOF$ i $\angle COA$;
dwie pary, c) dwanaście par. 5. $\alpha = 52^\circ$, $\beta = 63^\circ$, $\gamma = 47^\circ$, $\delta = 74^\circ$, $\omega = 96^\circ$. 6. a) $\alpha = \gamma = 53^\circ$,
 $\beta = \delta = 127^\circ$, b) $\alpha = 117^\circ$, $\beta = 63^\circ$, $\gamma = 74^\circ$, $\delta = 106^\circ$, c) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 29^\circ$. 7. $|\angle ACD| = \alpha$,
 $|\angle EHF| = \beta$, $|\angle IKL| = \gamma$, $|\angle JKL| = \delta$. 8. a) 42° , 48° , 90° , b) 24° , 66° , 90° , c) 37° , 53° , 90° .
9. a) $\alpha = \beta$, b) $\alpha + \beta = 90^\circ$, c) $\alpha + 2\beta = 90^\circ$. 10. a) 35° , 55° , 90° , b) 30° , 60° , 90° lub
 $22,5^\circ$, $67,5^\circ$, 90° , c) 15° , 75° , 90° . 11. 9° , 81° , 90° . 13. a) 20° , 20° , 140° , b) 50° , 50° , 80° .
14. 80° . 15. 36° . 18. a) 40° , 90° , 140° , 90° , b) 48° , 100° , 63° , 149° , c) 27° , 270° , 28° , 35° .
19. a) $\alpha = 70^\circ$; największy kąt ma 140° , najmniejszy - 60° , b) 5 razy ($\alpha = 30^\circ$). 20. a) 55° ,
 125° , 55° , 125° , b) 80° , 100° , 80° , 100° , c) 47° , 133° , 47° , 133° . 21. a) 45° , 35° , 145° , 135° ,
b) 40° , 110° , 70° , 140° , c) 40° , 38° , 142° , 140° . 22. 65° , 115° , 65° , 115° .

str. 54-55: 1. a) BC - najdłuższy, AC - najkrótszy, b) β - największy, γ - najmniejszy.
2. a) $\angle ACB$ - największy, $\angle BAC$ - najmniejszy, b) AC - najdłuższy, AB - najkrótszy.
3. a) Tak, b) nie, c) tak, d) nie. 4. a) 3 cm lub 5 cm, b) 7 km, c) b, d) a lub b. 5. Nie.
6. a) Nie, b) tak, c) nie. 7. Nie. 8. $P_I = 15$, $P_{II} = 12,5$, $P_{III} = 12,5$, $P_{IV} = 14$, $P_V = 12$, $P_{VI} = 10$.
9. $P_{ADC} = 35$, $P_{DBC} = 45$, $P_{ABC} = 80$. 10. a) 4, b) $4,5\sqrt{2}$. 11. $11,2$ i $7\sqrt{2}$. 12. $P_{KLO} = 4,5$,
 $P_{KLM} = 10,5$, $P_{OLM} = 6$. 13. 27. 14. 13, 14 i 15.

str. 60–63: 1. a) $a = 6$, b) $b = 3$, c) $c = \sqrt{14}$, d) $d = \sqrt[4]{8}$. 2. a) $x = 2\sqrt{5}$, b) $y = 2\sqrt{11}$, c) $z = 2\sqrt{10}$, d) $w = 3$. 3. Trójkąt; o $2\sqrt{5} + 6\sqrt{2} - 10$. 4. $2\sqrt{5}$ cm. 5. a) $3\sqrt{91}$, b) $4 + 4\sqrt{10}$. 6. $\sqrt{45 - 12\sqrt{5}}$. Wskazówka. Zapisz pole trójkąta ABC na dwa sposoby. 7. $\frac{\sqrt{35}}{2}$. 8. 15. 9. a) $a = 2\sqrt{\frac{P}{\sqrt{3}}}$, b) $d = 2\sqrt{3}h$, c) $P = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}$, d) $d = 6\sqrt{\frac{P}{\sqrt{3}}}$. 10. a) $P = 50$, Obwód = $= 20 + 10\sqrt{2}$ lub $P = 25$, Obwód = $10 + 10\sqrt{2}$, b) Obwód = $60 + 20\sqrt{3}$ lub Obwód = $20 + 20\sqrt{3}$, lub Obwód = $30 + 10\sqrt{3}$. 11. $4\sqrt{7}$. 12. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}m \approx 3,6$ m, b) wyżej; $\frac{\sqrt{101}}{2}m \approx 5$ m. 13. Nie. 14. Tak. 15. a) Nie, b) tak, c) tak, d) tak, e) nie, f) tak. 16. Na trzecim rysunku. 17. Nie. 18. 2, 3, $\sqrt{13}$; 1, 2, $\sqrt{5}$; 2, $\sqrt{5}$, 3; 1,5, 2, 2,5; $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $3\sqrt{2}$. 19. a) Tak, b) nie. 20. a) 12, $6\sqrt{3}$. 21. Nie. 22. c) 12, 16, 20, d) 16, 30, 34.

str. 69–72: 1. a) Trójkąt BDC , b) trójkąt BEC oraz trójkąt BDE , c) trójkąt CBE oraz trójkąt ACD . 13. 96. 14. $\sqrt{d^2 - \frac{1}{4}a^2}$, $\sqrt{d^2 - \frac{1}{4}b^2}$, $\sqrt{d^2 - \frac{1}{4}c^2}$. 15. $\sqrt{26 + 6\sqrt{13}}$. 16. 130° . 18. a) 30° , 80° , 70° , b) 40° , 60° , 80° , c) 20° , 50° , 110° . 19. 3,75. 20. Wskazówka. a) Skorzystaj z twierdzenia o dwusiecznej dla trójkąta ADC . b) Skorzystaj z równości z punktu a). c) Zauważ, że $\frac{|BE|}{|CE|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. 21. a) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$, b) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$, c) 6, d) $100\sqrt{3}$. 22. $\frac{30}{7}$, $\frac{5}{7}$, 5. 23. $2\sqrt{2}$. 24. Wskazówka. Zauważ, że środkowa trójkąta dzieli go na dwa trójkąty o równych polach. 26. a) 97° , b) 30° . 27. 4,5.

str. 76–79: 1. a) Równoległobok: 15, trapez: 24, romb: 12, prostokąt: 18, b) równoległobok: 24, trapez: $21 - 4,5\sqrt{3}$, kwadrat: 18, równoległobok: $4\sqrt{3} + 2\sqrt{39}$. 2. Największe pole — druga; równe pola — pierwsza i czwarta. 3. a) $\frac{1}{2}d^2$, b) $4\sqrt{P}$, c) $\frac{1}{4}bh$, d) $2\sqrt{e^2 + f^2}$, e) $\frac{1}{4}(a+b)\sqrt{4r^2 - (a-b)^2}$, f) $a + b + 2\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4} + \frac{4P^2}{(a+b)^2}}$. 4. 45. 5. $25(3 + 2\sqrt{2})$. 6. 20. 7. $2\sqrt{3}$. 8. $11 + \sqrt{13}$. 9. $4\sqrt{65}$ cm. 10. $(21 + \sqrt{29})$ cm. 11. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$, b) $2\sqrt{3}a^2$, c) $4a + 4b$. 12. Kwadrat: $\frac{5\sqrt{2}}{3}$, kwadrat: $\frac{10}{3}$, romb: $10(\sqrt{2} - 1)$, trójkąt: $5(\sqrt{3} - 1)$. 13. $9 + 1,5\sqrt{65}$; 13,75; 14. 14. a) $\sqrt{2} : 1$, b) $(2\sqrt{2} - 1)$ razy. 15. $(5 - 2\sqrt{3})m \approx 1,54$ m. 16. 39 cm. 19. a) Fałszywe, b) prawdziwe, c) prawdziwe, d) fałszywe.

str. 80: 1. 60° , 40° , 80° . 2. $y = 40^\circ$. 3. 1,3,3 lub 2,2,3. 4. $\frac{1}{9}$. 5. $P = 12$; $h_1 = 4$, $h_2 = 4,8$. 6. $2(\sqrt{14} + \sqrt{7})$. 7. $36\sqrt{3}$. 8. Tak; 5, 15, $\frac{3\sqrt{10}}{2}$. 11. $32\sqrt{3}$. 12. 32.

str. 85–88: 1. a) $f(0) = 0$, $f(2) = 8$, b) $f(0) = -10$, $f(2) = \sqrt{2} - 10$, c) $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(2) = \frac{1}{4}$. 3. a) A, b) A, C, c) A, B, C. 4. a) $A = (-2, 1)$, $B = (0, \sqrt{3})$, b) $C = (-3, -\frac{25}{8})$, $D = (1, -\frac{9}{8})$, c) $E = (-1, -\frac{5}{2})$, $F = (3, \frac{3}{2})$. 5. a) $a = \frac{5}{4}$, b) $a = 10$, c) $a = 5$, d) $a = 12,5$. 6. 8 m; poleciałaby dalej o $(3\sqrt{5} - 3)m \approx 3,7$ m. 7. a) -3, b) 2, c) 1. 8. a) $x = 0$, $x = -7$, $x = \frac{2}{3}$, b) $x = \sqrt{5}$, $x = -\sqrt{5}$, $x = -\frac{1}{4}$, c) $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, d) $x = 0$, $x = \sqrt{5}$, $x = -\sqrt{5}$, e) $x = 2$, $x = 3$, f) funkcja nie ma miejsc zerowych. 9. a) $x = -1$, b) $x = 1 + \sqrt{6}$, c) $x = -2$, d) $x = -2$. 11. a) f_5 , f_8 , b) f_1 , f_2 , f_3 , f_4 , f_7 , c) f_1 , f_2 , f_3 , f_4 . 12. $f - \textcircled{C}$, $g - \textcircled{B}$, $h - \textcircled{A}$. 13. a) $\mathbb{R}$, b) $\langle 0; +\infty \rangle$, c) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, d) $(-\infty; 3)$, e) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, f) $\mathbb{R}$. 14. a) $\mathbb{R} \setminus \{2, -3\}$, b) $\langle -2; +\infty \rangle \setminus \{1\}$, c) $\langle 0; +\infty \rangle$.

d) $\{4; +\infty\} \setminus \{5\}$, e) $\{-2; 5\}$, f) $\{1; +\infty\}$. 15. a) $f(-a) = -2a^3 + 5$, $f(a+1) = 2(a+1)^3 + 5$,
 $f(a+3) = 2(a+3)^3 + 5$, $f(a-3) = 2(a-3)^3 + 5$, b) $f(-a) = \frac{3a+1}{a-2}$, $f(a+1) = \frac{3a+2}{a+3}$, $f(a+3) = \frac{3a+8}{a+5}$,
 $f(a-3) = \frac{3a-10}{a-1}$, c) $f(-a) = \sqrt{5-a} - a^2$, $f(a+1) = \sqrt{a+6} - (a+1)^2$, $f(a+3) = \sqrt{a+8} - (a+3)^2$,
 $f(a-3) = \sqrt{a+2} - (a-3)^2$. 16. a) $f(a) - f(a-1) = 6a - 5$.

str. 93-96: 1. a) $f - y = \frac{1}{2}x + 1$, $g - y = x + 1$, $h - y = -x + 1$, $k - y = -\frac{1}{2}x + 1$, b) $f - y = x + 3$,
 $g - y = 3x + 2$, $h - y = -x - 2$, $k - y = -2x + 3$. 2. a) $y = -5x + 5$, b) $y = \frac{1}{3}x + 3$. 3. $f(x) = -4x - 4$,
 $g(x) = \frac{2}{3}x + 2$, $h(x) = 3$, $k(x) = -\frac{1}{6}x - \frac{5}{2}$. 4. a) $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$, b) $y = 3x + 6$. 5. a) $f(x) = -4x + 3$,
b) $f(x) = -\frac{3}{14}x - \frac{6}{7}$. 6. a) $f(x) = \frac{3}{2}x + 12$, b) $y = -5x + \frac{4}{3}$; $x = \frac{4}{25}$. 7. a) $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x+5)$,
 $g(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-5)$, $h(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x-5)$, b) $f(x) = -2(x+2)^2 + 5$, $g(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 5$,
 $h(x) = -2(x-2)^2 + 5$, c) $f(x) = x^2 + 2x + 4$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$, $h(x) = x^2 - 2x - 4$, d) $f(x) = -(x+4)^2 + 8$,
 $g(x) = -(x+2)(x-3)$, $h(x) = -x^2 + 6x - 5$. 8. a) $y = -\frac{1}{4}(x+3)(x-4)$, b) $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$,
c) $y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$. 9. a) $f(x) = -\frac{2x^2}{25}(x+3)(x-2)$, funkcja rosnąca w $(-\infty; -\frac{1}{2})$, funkcja malejąca
w $(-\frac{1}{2}; +\infty)$, b) $f(x) = \frac{x^2}{25}(x+3)^2 - 1$, funkcja malejąca w $(-\infty; -3)$, funkcja rosnąca w $(-3; +\infty)$.
10. $y = \frac{2}{3}(x-2)(x+4) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}(x+1)^2 - 6$. 11. a) $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$,
b) $x \in (-1; 0; 4)$, c) $x \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (2; +\infty)$, d) $x \in (-\infty; -5) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$, e) $x \in (-\infty; \frac{1}{3}) \cup$
 $\cup (2; +\infty)$, f) $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$. 12. a) $f(-2) = 5$, $f(0) = -1$, $f(10) = 99$, b) $f(-2) = 2,5$,
 $f(0) = 21$, $f(10) = 121$, c) $f(-2) = -8$, $f(0) = 1$, $f(10) = 300$, d) $f(-2) = 2$, $f(0) = -2$,
 $f(10) = -9$. 14. a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x \in (-3; 1) \\ -2x+4 & \text{dla } x \in (1; 3) \end{cases}$, b) $f(x) = \begin{cases} -\frac{4}{3}x-2 & \text{dla } x \in (-3; 0) \\ -2 & \text{dla } x \in (0; 3) \end{cases}$,
c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x+3 & \text{dla } x \in (-4; -2) \\ 2 & \text{dla } x \in (-2; 1) \\ -5x+7 & \text{dla } x \in (1; 2) \end{cases}$. 16. a) $f(x) = \begin{cases} x(2-x) & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ 6x-12 & \text{dla } x \in (2; +\infty) \end{cases}$,
b) $f(x) = \begin{cases} -x(x+2) & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ -x(x-4)+1 & \text{dla } x \in (0; +\infty) \end{cases}$, c) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty) \\ \frac{x^2}{3}-3 & \text{dla } x \in (-3; 3) \end{cases}$.
17. a) Dziedzina funkcji: $\{-3; 4\}$, zbiór wartości: $\{-2, 7; 0\} \cup \{4\}$, funkcja rosnąca w $\{-3; 0\}$,
funkcja stała w $\{0; 4\}$, wartości dodatnie dla $x \in \{0; 4\}$, wartości ujemne dla $x \in \{-3; 0\}$,
b) dziedzina funkcji: $\{-2; 4\}$, zbiór wartości: $\{-4; 4\}$, funkcja rosnąca w $\{-2; 4\}$, funkcja malejąca
w $\{-2; 2\}$, wartości dodatnie dla $x \in (-2; 2) \cup \{3; 4\}$, wartości ujemne dla $x \in \{2; 3\}$.
18. a) Dziedzina funkcji: $\{-4; 5\}$, zbiór wartości: $\{-1; 4\}$, funkcja rosnąca w $\{-4; -1\}$, funkcja
stała w $\{-1; 2\}$, funkcja malejąca w $\{2; 5\}$, b) dziedzina funkcji: $\{-4; +\infty\}$, zbiór wartości:
 $(-\infty; 8)$, funkcja stała w $\{-4; -2\}$, funkcja rosnąca w $\{0; 1\}$, funkcja malejąca w $\{-2; 0\}$ oraz
w $\{1; +\infty\}$.

str. 100-102: 1. ① - f, ② - k, ③ - g, ④ - h. 2. a i d, b i g, h i j. 3. a) Dla
 $a = 2$, b) dla $a = \frac{1}{3}$. 4. a) Dla $a = \frac{1}{3}$ i $b = 6$, b) dla $a = 16$ i $b = \frac{1}{2}$. 5. ① i ③.
6. a) $(2; +\infty)$, b) $(-\frac{3}{2}; +\infty)$, c) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$, d) $(-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$, e) $(0; +\infty) \setminus \{1\}$,
f) $(3; +\infty) \setminus \{4\}$, g) $(0; +\infty) \setminus \{1\}$, h) $(0; 2) \setminus \{1\}$, i) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. 7. A - ②, B - ⑥.

- © — ①, ① — ④, ④ — ③, ③ — ⑤. 8. a) Dla $a = 5$ i $b = -3$, b) dla $a = 4$ i $b = -2$. 9. ③.
10. ① — h , ② — g , ③ — f , ④ — k .

str. 106–107: 1. a) $x = -3$, b) $x = -4$, c) $x = \frac{3}{2}$, d) $x = -\frac{2}{3}$, e) $x = -10$, f) $x = \frac{2}{3}$, g) $x = \frac{1}{4}$, h) $x = -4$, i) $x = -4,5$, j) $x = 2,5$, k) $x = -\frac{1}{4}$, l) $x = \frac{2}{3}$. 2. a) $x = 1$, b) $x = 2$, c) $x = -5$, d) $x = 2$, e) $x = \frac{5}{3}$, f) $x = -\frac{1}{4}$, g) $x = -\frac{4}{5}$, h) $x = \frac{1}{2}$, i) $x = -4$. 3. a) $x = -2$, b) $x = 2$, c) $x = \frac{1}{2}$, d) $x = -\frac{1}{2}$, e) $x = -1$, f) $x = -\frac{3}{2}$. 4. a) $x = \log_7 3$, b) $x = \log_6 2$, c) $x = \log_3 4 - 1$, d) $x = \log_5 2$, e) $x = \frac{1}{2} \log_3 10$, f) $x = \frac{1}{3} \log_7 \frac{1}{3}$, g) $x = \frac{1}{3} \log_2 5 + \frac{1}{3}$, h) $x = -\frac{3}{2}$. 5. a) $x = \log_{\frac{1}{3}} 5$, b) $x = \log_{\frac{1}{3}} 3$, c) $x = \log_{2,5} 2$, d) $x = \log_{1,5} 0,5$, e) $x = \log_{20} 4$, f) $x = \log_6 5$, g) $x = \log_5 2$, h) $x = \log_7 3$, i) $x = \log_{0,5} 5$. 6. a) $x = 125$, b) $x = 9$, c) $x = \sqrt{6}$, d) $x = 16$, e) $x = 125$, f) $x = \frac{1}{16}$. 7. a) $x = 32$, b) $x = \frac{1}{4}$, c) $x = 1,55$, d) $x = -\frac{47}{8}$, e) $x = -\frac{\sqrt{10}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$, f) $x = -\frac{\sqrt{78}}{9}$ lub $x = \frac{\sqrt{78}}{9}$. 8. a) Równanie sprzeczne, b) $x = 2$, c) $x = 3$, d) równanie sprzeczne, e) równanie sprzeczne, f) $x = 2$. 9. a) $x = 20$, b) $x = \frac{8}{3}$, c) $x = \frac{7}{4}$, d) $x = \frac{8}{25}$, e) $x = 12$, f) $x = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, g) $x = 100$, h) $x = 25$. 10. a) $x = 5$, b) $x = 1,5$, c) $x = 5$, d) $x = 75$, e) $x = 6$, f) $x = \frac{5}{8}$.

str. 112–116: 1. $L(t) = 30,5 \cdot 1,013^t$, gdzie t — czas (w latach) od 1962 r., a) około 33,8 mln, c) około 2001 roku. 2. a) $a = 50$, $b = (0,4)^{\frac{1}{2}} \approx 0,86$, b) $m_1 \approx 43$ mg, $m_{24} \approx 1,3$ mg, c) mniej więcej po 10 godzinach. 3. a) Po około 4 latach, b) około 9 lat. 4. a) $10^{-11} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$, b) 10^7 razy mniejsze, c) około 103 dB, d) około 40 dB, e) około 120 dB, f) 100 młotów. 5. a) Około 420 pracowników; około 498 pracowników (czyli prawie wszyscy), b) około 16% kierowców; po około 10 dniach. 6. b) Około 0,63 g, c) po około 8 h i 18 minutach, d) około 30 lat. 7. a) Około 61%, b) nie, c) około 96%, d) około 12 117 lat. 8. $T(t) = 20 + 70 \cdot 0,88^t$, gdzie t — czas (w minutach). 9. a) 225°C, b) około 95°C, c) po około 35 minutach. 10. Około 15:18. 11. a) 425 cyfr.

str. 120–123: 1. a) $y = f(x) + 7$, b) $y = f(x + 7)$, c) $y = f(x) - 7$, d) $y = f(x - 7)$. 4. a) $g(x) = x^2 + 3$, $h(x) = x^2 - 3$, b) $g(x) = x^3 + 3$, $h(x) = x^3 - 2$, c) $g(x) = 2^x + 1$, $h(x) = 2^x - 5$, d) $g(x) = (x + 2)^2$, $h(x) = (x - 3)^2$, e) $g(x) = (x + 3)^3$, $h(x) = (x - 2)^3$, f) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 5)$, $h(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$. 5. a) O 3 jednostki w lewo, b) o 11 jednostek w prawo, c) o 2 jednostki w dół, d) o 8 jednostek w górę. 6. a) O 9 jednostek w dół, b) o 2 jednostki w lewo. 7. a) O 5 jednostek w lewo, b) o 9 jednostek w dół, c) o 9 jednostek w górę, d) o 5 jednostek w lewo. 8. a) O 4 jednostki w lewo, b) o 3 jednostki w prawo. 10. g — ④, h — ③, l — ②, m — ①. 11. a) $y = 2(x - 1)^2 + 6$, b) $y = 5^{x+5} + 2$, c) $y = \log(x - 2) - 3$, d) $y = 3(x + 1)^2 + 4$. 12. a) $y = \frac{x-2}{2x-3} - 5$, b) $y = (x + 6)(x - 1) + 1$, c) $y = (x + 1)^3 + 3^{x+1} + 4$. 13. a) O 1 jednostkę w prawo i 7 jednostek w górę, b) o 5 jednostek w lewo i o 4 jednostki w dół, c) o 3 jednostki w prawo i o 5 jednostek w górę, d) o 1 jednostkę w lewo i o 8 jednostek w dół. 14. a) O 2 jednostki w lewo, b) o 3 jednostki w prawo, c) o 5 jednostek w górę, d) o 4 jednostki w dół. 15. a) O 6 jednostek w lewo i o 5 jednostek w dół, b) o 1 jednostkę w prawo i o 1 jednostkę

w dół, c) o 6 jednostek w lewo i o 5 jednostek w dół, d) o 5 jednostek w prawo i o 15 jednostek w górę. 16. a) 2; 12, b) nie. 17. a) 30, b) $\langle -68; -66 \rangle$, c) $x = -96$, d) dla $x \in (43; 45)$. 18. a) Dziedzina: $(2; 12)$, zbiór wartości: $(-1; 4)$, b) dziedzina: $(-3; 7)$, zbiór wartości: $(-8; -3)$, c) dziedzina: $(-6; 4)$, zbiór wartości: $(3; 8)$. 19. a) $\langle 3; 10 \rangle$, b) $\langle -12; -5 \rangle$, c) $\langle -9; -2 \rangle$.

str. 127-129: 1. a) $-f(x) = -x + 2$, $f(-x) = -x - 2$, b) $-f(x) = -(x-3)(x+2)$, $f(-x) = (x+3)(x-2)$, c) $-f(x) = -2^x$, $f(-x) = 2^{-x}$, d) $-f(x) = -\log x$, $f(-x) = \log(-x)$. 3. a) $(-1; 15)$, b) $(-15; 1)$, c) $(-15; 1)$. 4. a) $x = -7$, b) $x = 7$, c) $x = 7$. 5. Funkcja j jest rosnąca, a g i h są malejące. 6. a) $g(x) = -5x + 2$, b) $g(x) = -\frac{1}{x} + 1$, c) $g(x) = -x^3 - 1$, d) $g(x) = -(x-5)^2 + 3$. 7. a) $g(x) = 5x^4 + 2x - 3$, $h(x) = -5x^4 + 2x + 3$, b) $g(x) = -3x\sqrt{x} + 3$, $h(x) = -3x\sqrt{-x} - 3$, c) $g(x) = -\frac{5x}{2x-1} + 4$, $h(x) = \frac{5x}{2x+1} - 4$, d) $g(x) = -6 + \frac{5}{2} + \frac{3}{1-x}$, $h(x) = 6 + \frac{5}{2} - \frac{3}{1+x}$, e) $g(x) = -3 \cdot 7^x + 2 \cdot x^3$, $h(x) = 3 \cdot 7^{-x} + 2x^3$, f) $g(x) = -\sqrt{x-2} + (4-x)^2$, $h(x) = \sqrt{-x-2} - (4+x)^2$. 10. a) $g(x) = -x^2$, $h(x) = -(x-3)^2$, b) $g(x) = \sqrt{-x}$, $h(x) = \sqrt{-x} - 4$, c) $g(x) = -x^3$, $h(x) = -(x-1)^3 + 2$. 11. a) $y = -2x^2 + \frac{1}{x} - 4$, b) $y = -3x\sqrt{-x-1} - 4$, c) $y = \sqrt{-x} + \frac{1}{x+14}$. 14. a) Np. wykres danej funkcji należy odbić symetrycznie względem osi y , a następnie przesunąć o 2 jednostki w lewo. b) Np. wykres danej funkcji należy odbić symetrycznie względem osi y , a następnie przesunąć o 4 jednostki w prawo. 15. a) $\langle 2; +\infty \rangle$, b) $\langle 5; +\infty \rangle$, c) $(-\infty; -2)$. 16. a) $(-3; 3)$, b) $g_{\max}(-3) = 1$, c) dla $x = -5$ i $x = 10$.

str. 130: 1. $x = -4$, $x = 5$; $y_{\max} = 3$; $y < 0$ dla $x \in (-\infty; -4) \cup (5; +\infty)$, $y > 0$ dla $x \in (-4; 5)$. 2. a) $x \in (-2; 4)$, b) funkcja rosnąca w $(-\infty; 1)$, funkcja malejąca w $(1; +\infty)$. 3. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$, b) $D = (-\frac{1}{3}; +\infty)$. 4. $f - \textcircled{1}$, $g - \textcircled{2}$, $h - \textcircled{3}$, $k - \textcircled{4}$. 5. a) $y = (\frac{3}{4})^x$, b) $y = \log_3 x$. 6. a) $x = -1,5$, b) $x = \frac{1}{6}$, c) $x = \log_3 2$, d) $x = \log_3 \frac{1}{2}$. 7. a) $x = \frac{1}{2^2}$, b) $x = 27$, c) $x = 24$. 8. a) Rośnie w Holandii, a maleje w Bułgarii. b) W 2002 roku: Bułgaria — 7,6 mln, Holandia — 16,1 mln, w 2005 roku: Bułgaria — ok. 7,37 mln, Holandia — ok. 16,34 mln. 9. a) $y = \frac{x}{x-2}$, b) $y = \frac{x}{x+3} + 3$. 10. a) $y = -\frac{5}{2x-1}$, b) $y = \frac{5}{-2x-1}$. 11. a) Przesunąć o 1 jednostkę w prawo i o 3 jednostki w dół, b) odbić symetrycznie względem osi y , c) odbić symetrycznie względem osi x , a następnie przesunąć o 5 jednostek do góry.

str. 135-137: 1. a) 49π , b) 36π , c) 17π , d) $\sqrt{\frac{10}{\pi}}$, e) $\frac{5}{2\pi}$, f) $4\sqrt{\pi}$. 2. a) $l = d\pi$, b) $P = \frac{P}{4\pi}$, c) $d = \frac{2\sqrt{P\pi}}{\pi}$, d) $l = 2\sqrt{P\pi}$. 3. a) 16π cm, b) 384π cm, c) 4π cm, d) 12π cm. 4. 5π , $48 - 6,5\pi$, $36 - 9\pi$, $18\pi - 36$. 5. $\frac{8\sqrt{6}}{6}$. 6. b) Niebieska. 7. a) $r\sqrt{\pi}$, b) kwadrat; $\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi}$ razy. 8. a) 100π, b) 3. 9. Około 29 800; około 500; około 8. 10. Około 107 600 km/h. 11. Około 1668,19 km/h; jest o około 0,26 km/h większa od prędkości punktu na powierzchni Ziemi. 12. a) $l = 6\pi$, $P = 36\pi$, b) $l = 5\pi$, $P = 37,5\pi$, c) $l = 15\pi$, $P = 150\pi$, d) $l = 16\pi$, $P = 96\pi$, e) $l = \frac{40}{3}\pi$, $P = 100\pi$. 13. a) Są równe. b) Dolny; 2 razy. 14. a) 8, b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

15. a) $P = \frac{5}{4}\pi$, $l = \frac{13}{6}\pi$, b) $P = 4\pi - 8$, $l = 6\pi$, c) $P = \sqrt{3}$, $l = \frac{5}{3}\pi$, d) $P = 9\pi$, $l = \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi$.
 16. $360\pi \text{ m} \approx 1131 \text{ m}$. 17. a) $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ$, b) $\frac{\pi}{2}$ radianów. 18. $\frac{11}{288}\pi \text{ m} \approx 12 \text{ cm}$;
 27,5 sekundy.

str. 140-142: 1. $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 32^\circ$, $\gamma = 37^\circ$, $\delta = 29^\circ$. 2. $\alpha = 258^\circ$, $\beta = 40^\circ$, $\gamma = 110^\circ$, $\delta = 110^\circ$.
 4. 30° lub 150° . 5. 40 cm^2 . 6. a) 50° , 70° , 60° , b) 65° , 65° , 50° , c) 25° , 90° , 65° , d) 70° ,
 90° , 20° , e) 20° , 40° , 120° , f) 45° , 65° , 70° , g) 90° , 115° , 90° , 65° , h) 150° , 60° , 105° , 45° .
 7. Tyle samo. 8. $\frac{1}{6}$. 9. 45° . 10. 6 m. 11. a) $|\angle DCB| = 57^\circ 12'$, $|\angle ADB| = 31^\circ 46'$,
 b) $|\angle DCB| = 27^\circ 14'$, $|\angle ADB| = 125^\circ 20'$.

str. 147-150: 1. a) 1, b) nie, c) mniejszy niż 1, d) większy niż 2 i mniejszy niż 3,
 e) większy niż 1 i mniejszy niż 2, f) 4. 2. a) 36° , b) 42° , c) 45° . 3. $2\alpha + \beta = 180^\circ$.
 4. $5\sqrt{2}$. 5. 10. 6. 10π . 7. a) Około 4372 m, b) o około 9453 m, c) tak. 8. a) 68,
 b) 66. 9. 24 cm. 11. a) $\beta = \alpha$, b) $\beta = 90^\circ - \alpha$, c) $\beta = \frac{1}{2}\alpha$. 13. a) 7 cm, b) 1 cm,
 c) większa niż 1 cm i mniejsza niż 7 cm, d) mniejsza niż 1 cm lub większa niż 7 cm. 14. 5; 8.
 15. a) 6, 3, 1,5, b) 4, 4, c) 3,5, 3,5. 16. 2,5 lub 12,5. 17. 5, 3, 7. 18. $2r(\sqrt{2} - 1)$.
 19. $(6,38 + 3,19\sqrt{3}) \text{ cm} \times 12,76 \text{ cm} \times 6,38 \text{ cm}$, czyli w przybliżeniu $11,9 \text{ cm} \times 12,8 \text{ cm} \times 6,4 \text{ cm}$.
 20. $2r$.

str. 153-154: 1. a) W wypadku trójkątów ostrokątnego i prostokątnego. 2. a) Nie, b) tak,
 c) tak. 3. a) 6,5, b) 5. 4. ②, ③, ④, ⑤. 5. $|\angle CAB| = 40^\circ$, $|\angle ABC| = 60^\circ$, $|\angle BCA| = 80^\circ$,
 $\alpha_1 = 130^\circ$, $\alpha_2 = 110^\circ$, $\alpha_3 = 120^\circ$, $|\angle FDE| = 70^\circ$, $|\angle DEF| = 70^\circ$, $|\angle EFD| = 40^\circ$, $\beta_1 = 110^\circ$,
 $\beta_2 = 125^\circ$, $\beta_3 = 125^\circ$, $|\angle IGH| = 90^\circ$, $|\angle GHI| = 40^\circ$, $|\angle HIG| = 50^\circ$, $\gamma_1 = 115^\circ$, $\gamma_2 = 135^\circ$, $\gamma_3 = 110^\circ$.
 8. 140° . 9. 15° . 10. b) 1.

str. 158-161: 1. a) 900° , 17640° , b) 8, c) nie, d) 150° . 4. a) 27; 19 700, b) 15, c) nie;
 tak, d) tak. 5. a) 2880° , b) 4140° . 6. a) $\frac{20}{3}\pi\sqrt{3}$, b) $\frac{5}{3}\pi\sqrt{3}$. 7. a) 4 razy, b) $\frac{2}{3}\pi\sqrt{3}$ razy.
 8. a) 12, b) $6\sqrt{3}$. 9. O $5(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}$. 11. a) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$, b) $10\pi\sqrt{3}$. 12. a) 4, $2\sqrt{3}$, b) 36.
 13. b) $6\alpha(1 + \sqrt{3})$; $(1 + \sqrt{3})$ razy. 14. $\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{108}}{2}$ razy. 15. a) Tak, b) tak.
 17. b) $\frac{a}{1 + \sqrt{2}} = a(\sqrt{2} - 1)$. 18. $4\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$, $4\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 4(1 + \sqrt{2})$, $4\sqrt{2 + \sqrt{2}}$. Wskazówka.
 Rozważ najmniejszy z kwadratów, w którym mieści się ośmiokąt foremny. 19. a) 45° ,
 b) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$, c) $50\sqrt{2}$. 20. a) 4, b) nie, c) jest parzysta; $\frac{\pi}{2}$. 21. a) 162° , b) 12, c) nie.
 22. $|\angle EDC| = |\angle AGC| = |\angle AFB| = 108^\circ$, $|\angle ECA| = |\angle AEB| = 36^\circ$. 23. a) 15° , b) 30° , c) 60° .
 24. 15. 25. $180^\circ - \alpha$.

str. 162: 1. $12\pi - 16$. 2. $P = 16,2\pi$, obwód $= 18 + 4,4\pi$. 3. 50° , 70° i 60° . 4. a) $10 + 10\sqrt{3}$,
 b) $(2 + 4\sqrt{2})r$. 5. a) 6 lub 12, b) większy niż 6 i mniejszy niż 12. 6. 30° . 7. 70° . 8. 65° ,

60° i 55° . 9. 6,25. 10. a) 20, b) 16, c) o $n-1$ więcej. 11. a) 360 boków, b) nie; tak. 12. $36\pi - 27\sqrt{3}$.

str. 166-168: 1. a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{5}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{7}$, b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{6}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{6}{7}$, c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7\sqrt{13}}{15}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{13}}{7}$, d) $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2}$. 2. a) $\frac{5}{3}$, b) $\frac{\sqrt{11}}{2}$, c) $\frac{3}{7}$. 3. a) 0,3, b) 5. 4. a) 4,5, b) 4, c) $\sqrt{3}$, d) 4. 5. 9 cm. 6. 108 cm^2 . 10. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}$; 25%. 11. a) $\operatorname{tg} \beta$, b) największa — $\operatorname{tg} 76^\circ$, najmniejsza — $\operatorname{tg} 1^\circ$, c) γ . 12. a) 45° , b) $\operatorname{tg} 46^\circ$, $\operatorname{tg} 80^\circ$, $\operatorname{tg} 89^\circ$. 13. Nie. 14. Wskazówka. Oblicz tangensy odpowiednich kątów.

str. 171-173: 1. $\sin \alpha = \frac{n}{m}$, $\cos \alpha = \frac{p}{m}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{n}{p}$, $\sin \beta = \frac{r}{z}$, $\cos \beta = \frac{s}{z}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{r}{s}$, $\sin \gamma = \frac{|BC|}{|AC|}$, $\cos \gamma = \frac{|AB|}{|AC|}$, $\operatorname{tg} \gamma = \frac{|BC|}{|AB|}$. 2. a) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos \beta = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{2}$, b) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$. 3. a) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$, $\cos \beta = \frac{3}{4}$, b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, c) $\sin \alpha = \frac{2}{5}$, $\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\cos \beta = \frac{\sqrt{10}}{5}$. 4. $\alpha = \angle EDF$, $\beta = \angle LKM$, $\gamma = \angle ACB$, $\delta = \angle HGI$. 5. a) Kolejno: $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$. 6. a) $\frac{5}{3}$, b) 4,5, c) 5,6. 7. a) $p \cdot \sin \alpha$, $p \cdot \cos \alpha$, b) $\frac{m}{\operatorname{tg} \alpha}$, $\frac{m}{\sin \alpha}$. 10. $a = \operatorname{tg} \alpha$, $b = \sin \alpha$, $c = \cos \alpha$, $d = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$. 11. a) $\sin \alpha < \sin \beta$, b) $\cos \gamma < \cos \delta$. 12. a) α , b) β . 13. a) $\frac{h^2}{\operatorname{tg} \alpha}$, b) $d^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ lub $d^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$, lub $d^2 \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$, c) $\frac{a}{\cos \alpha} + a$.

str. 177-179: 1. a) Około 3,63, b) około 2,8, c) około 2,46, d) około 4,48. 2. Około $102,5 \text{ cm}^2$. 3. a) Około 0,37, b) około 0,31, c) około 0,67. 4. a) Około 3,27, b) około 3,73, c) około 1,88. 5. a) 66° , $b \approx 2,25$, $c \approx 2,46$, b) 32° , $a \approx 9,6$, $c \approx 11,32$, c) 54° , $a \approx 4,11$, $b \approx 5,66$. 6. Około $20,1 \text{ cm}^2$ lub około $33,6 \text{ cm}^2$. 7. Około 21 cm^2 . 8. Około 2,9 cm i około 7,9 cm. 9. Około 4,7 cm. 10. a) $|AC| = |BC| \approx 7,8$, b) $|EF| \approx 13,1$, $|DE| \approx 8,9$, c) $|GI| \approx 11,5$, $|HI| \approx 4$, $|GH| \approx 10,2$. 11. Około 6,6 cm i około 9,4 cm. 12. Około 4,5 cm i około 8,9 cm. 13. a) Około 6,9, b) około 6,4, c) około 10,7. 14. a) Około 4,7 cm, b) około 3,2 cm, około 3,1 cm. 15. a) Około 44° , b) około 54° , c) około 39° . 16. I— 90° , około 59° , około 31° , II— 90° , około 54° , około 36° , III— 90° , około 86° , około 4° , IV— 45° , około 82° , około 53° , V—około 76° , około 76° , około 28° , VI— 90° , około 37° , około 53° . 17. Około 27° , około 63° . 18. Około 73° , około 73° , około 34° . 19. a) $\alpha = 45^\circ$, $\beta \approx 27^\circ$, $\gamma \approx 18^\circ$, b) $a \approx 0,8$, $b \approx 0,9$, $c \approx 1$. 20. a) 60° , 120° , 60° , 120° , b) 90° , około 53° , około 127° , 90° , c) około 78° , około 78° , około 102° , około 102° , d) około 53° , około 42° , około 138° , około 127° , e) około 74° , około 106° , około 74° , około 106° , f) około 42° , około 138° , około 42° , około 138° .

str. 182-184: 1. Polanica — około $19,7^\circ$, Goryczkowa — około $20,3^\circ$, Hala Szrenicka — około $10,2^\circ$, Łabski Szczyt — około $16,1^\circ$. 2. O około 6° . 3. Kolejno: o około $5,44^\circ$, o około $5,36^\circ$, o około $3,37^\circ$, o około $0,42^\circ$. 4. a) Około 3,2 m, b) około 1,5 m, c) około 160 m, d) około 230,5 m. 5. Nie mniejsza niż około 11,5 m. 6. Około 22° . 7. Około 48° , około 2° . 8. Około 51° . 9. Wysokość około 80 m; długość około 510 m. 10. a) A — ok. 35,9 m, B —

ok. 6,1 m, b) ok. 1,3 m. 11. a) Około 20,7 m, około 23,8 m, około 28,3 m, b) około 7,6 m, około 7 m. 12. a) Około 27,5 m, b) około 11,1 m. 13. Około 58 cm. 14. O około 31°. 15. $(20\sqrt{21} + \frac{76}{3}\pi)$ cm $\approx$ 171 cm. 16. $(60\sqrt{3} + 60\pi)$ cm $\approx$ 292 cm.

str. 186-187: 1. a) $a = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, $b = \frac{10\sqrt{3}}{3}$, b) $c = d = 3\sqrt{2}$, c) $e = 3,5\sqrt{3}$, $f = 3,5$. 2. a) 8, b) $\sqrt{6}$, c) $4\sqrt{3}$. 3. a) $10 + 5\sqrt{3}$, b) $6 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$, c) $7,5 + 2,5\sqrt{3} + 2,5\sqrt{6}$. 4. a) 45, b) $\frac{121\sqrt{3}}{6}$, c) $36 + \frac{8\sqrt{3}}{3}$. 5. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm². 6. 6 cm i $6\sqrt{3}$ cm. 7. 8 cm. 8. Nie.

str. 190-191: 1. a) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, b) $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$, c) $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{7}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{15}$, d) $\sin \alpha = \frac{12\sqrt{313}}{313}$, $\cos \alpha = \frac{13\sqrt{313}}{313}$. 2. $\cos 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 22,5^\circ = \sqrt{3} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$. 4. a) $\operatorname{tg} \alpha$, b) $2\cos^2 \alpha$, c) 1, d) $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$, e) 1, f) 1. 7. a) 1, b) 1, c) 1. 8. a) $\sin 54^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$, $\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$, b) $\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$, c) $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. 9. a) 70° , b) 50° , c) 25° . 10. a) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, b) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 45^\circ$, c) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

str. 196-198: 1. a) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = 2$, b) $\sin \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos \beta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{3}$, c) $\sin \gamma = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos \gamma = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg} \gamma = -\frac{3}{2}$. 2. $\cos 100^\circ$, $\operatorname{tg} 105^\circ$. 4. a) $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$, b) $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{35}$, c) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$. 5. a) Około -0,1763, b) około -0,1736, c) około 0,8192, d) około -0,7002. 6. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, c) $-\frac{1}{2}$, d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 7. a) $1 + \sqrt{2}$, b) 0, c) 0. 8. a) 14° , b) 114° , c) 44° lub 136° , d) 17° lub 163° , e) 40° , f) 108° . 9. a) Około 7,35, b) około 17,41, c) około 76,95. 10. Kolejno: około 16,4, około 13,6, około 23,9, $32\sqrt{3}$. 11. a) Około 71° , około 109° , około 71° , około 109° , b) około 26° , około 77° , około 77° lub około 154° , około 13° , około 13° . 12. a) $P = ab \sin \alpha$, b) $P = \frac{d_1 d_2}{2} \sin \beta$. 13. a) Około 53,9, b) około 5,1, c) około 10,6, d) około 23,5. 14. a) 30° lub 150° . Wskazówka. Zadanie ma dwa rozwiązania, gdyż można wskazać dwa kąty spełniające warunek $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, gdy $0^\circ < \alpha < 180^\circ$. b) Około 53° lub około 127° . 15. a) 0,9, około 42° , b) -0,7, około 145° , c) -0,5, około 153° . 16. a) $y = \sqrt{3}x$, b) $y = -\sqrt{3}x$, c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1$.

str. 202-203: 1. a) Około 3,8, b) około 3,6, c) około 6,1. 2. a) Nie, b) tak. 3. Około 3,5. 4. a) Około 49° , b) około 27° , c) 75° . 5. a) $|\angle BAC| = 45^\circ$, $|\angle ACB| = 75^\circ$, b) $|\angle BAC| = 45^\circ$, $|\angle ACB| = 105^\circ$ lub $|\angle BAC| = 135^\circ$, $|\angle ACB| = 15^\circ$. 6. a) $6\sqrt{2}$, b) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$, c) $3\sqrt{6}$. 7. a) $\frac{a \cos \alpha + \beta}{\sin \beta}$, b) $\frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin 2\alpha \sin(\beta - \alpha)}$, c) $\frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(90^\circ + \beta) \sin(\beta - \alpha)}$. 9. $a = 3,9$, $r = \sqrt{2}$, $\alpha = 49^\circ$.

str. 207-209: 1. a) $\sqrt{43}$, b) $\sqrt{106 - 45\sqrt{2}}$, c) około 8,6. 2. a) Około 47° , b) około 44° , c) około 113° . 3. a) Prostokątny, b) ostrokątny, c) rozwartokątny. 4. $\sqrt{7}$ i $\sqrt{13}$. 6. $\sqrt{20 + 8\sqrt{3}}$ mili $\approx$ 5,8 mili. 7. Około 29 m. 8. $\sqrt{7 - 3\sqrt{2}}$ km $\approx$ 1,7 km. 9. $\frac{3\sqrt{15}}{8}$. 10. $|CD| = \sqrt{29 - 10\sqrt{3}}$, $|CE| = \sqrt{41 - 20\sqrt{3}}$. 11. 1,4. 12. $\frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{7}}{2}$. 13. $\sqrt{13}$.

str. 210: 1. $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{3}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg} \alpha = 3$. 2. Około 11,2. 3. Około 50° , około 27° , około 103° . 4. Około 1° . 5. Około 4,9 m. 6. $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{6}}{11}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4\sqrt{6}}{5}$. 8. $\frac{\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{2}$. 9. $3\sqrt{3}$. 10. Około 53° lub około 127° . 11. Około 108° . 12. a) Około 63° , b) około 25° lub około 155° , c) około 22° . 13. a) $\sqrt{21}$, b) $2\sqrt{2}$, c) około 11. 14. Ostrokątny. 15. $P = 12\sqrt{3}$, obwód $= 8 + 2\sqrt{7} + 2\sqrt{19}$.

str. 218-222: 1. 7 ścian, 15 krawędzi, 10 wierzchołków; 5 ścian, 9 krawędzi, 6 wierzchołków; 8 ścian, 18 krawędzi, 12 wierzchołków. 2. a) 50, b) nie, c) tak. 3. a) Tak, graniastosłup trójkątny, b) nie, c) $n(n-3)$, d) Nie. Wskazówka. Rozważ graniastosłup, którego podstawami są czworokąty niewypukłe. 4. a) I, b) I, c) G, I. 5. a) $a\sqrt{3}$, b) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. 6. a) $x = 4\sqrt{2}$, $y = \sqrt{41}$, $z = \sqrt{57}$, b) $p = \sqrt{13}$, $q = 5$, $r = \sqrt{21}$, c) $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{7}$, $c = 4\sqrt{2}$. 7. a) $\sqrt{59}$, b) $\sqrt{13}$, c) $3\sqrt{3}$. 8. a) 5, $\sqrt{119}$, b) $5\sqrt{3}$, $2\sqrt{41}$, $3\sqrt{21}$. 9. a) Czerwony: $\sqrt{27+18\sqrt{2}} = 3+3\sqrt{2}$, zielony: $3\sqrt{4+2\sqrt{2}}$, niebieski: $\sqrt{61+18\sqrt{2}}$, b) niebieski: $4\sqrt{2+\sqrt{2}}$, zielony: 5, czerwony: $\sqrt{41+16\sqrt{2}}$. 10. a) $\sqrt{p^2-a^2}$, b) $\sqrt{3a^2+h^2}$, $\sqrt{4a^2+h^2}$. 11. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 12. $a\sqrt{3}$ lub a . 13. a) $V = 48$, $P_c = 68 + 4\sqrt{13}$, b) $V = 480$, $P_c = 528$, c) $V = 900$, $P_c = 660$. 14. a) $24\sqrt{3}$, b) $67,5\sqrt{3}$, c) $27\sqrt{3}$. 15. a) $7,5\sqrt{3}$, b) $9 + 24\sqrt{2}$. 16. $P_c = 160$, $V = 96$. 17. a) $P_c = 2p^2$, $V = \frac{p^3\sqrt{3}}{9}$, b) $d^2 + 2d\sqrt{2p^2-d^2}$. 18. a) $42\sqrt{7}$, b) 120, c) 40. 19. 107,835 kg. 20. Około 2412 kg. 21. 16,1952 kg. 22. $687,5 \text{ m}^3 = 687\,500$ litrów. 23. $V = \sqrt{P_1 P_2 P_3}$. 24. a) $5\sqrt{3}$, b) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$, c) $4\sqrt{2}$. 25. a) $\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{\cos 50^\circ} \approx 6,6$, $\alpha \approx 59^\circ$, b) $b = \frac{8\sin 40^\circ}{\sqrt{3}} \approx 2,97$, $\alpha \approx 42^\circ$, c) $c = \frac{3}{\operatorname{tg} 20^\circ} \approx 8,2$, $\alpha \approx 56^\circ$. 26. a) 1500, b) $108\sqrt{6}$, c) $\frac{6561}{64}$. 27. a) $V = w^3 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}$, b) $V = 2p^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{1-2\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = p^3(1-\cos \alpha)\sqrt{\cos \alpha}$, c) $V = d^3 \sin \beta \cos \beta \operatorname{tg} \alpha$. 28. $V = \frac{hkl}{\sin \alpha}$.

str. 227-230: 1. 7 ścian, 12 krawędzi, 7 wierzchołków; 6 ścian, 10 krawędzi, 6 wierzchołków; 9 ścian, 16 krawędzi, 9 wierzchołków. 2. a) 50, b) nie, c) nie. 4. a) E, C, b) C. 5. a) $\sqrt{8,5}$, b) $\sqrt{5}$, c) $\frac{\sqrt{177}}{3}$. 6. a) $x = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, $y = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $z = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, b) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. 7. a) 10, b) $2\sqrt{11}$, c) $\sqrt{\frac{p^2}{4}+h^2}$. 8. a) 8, $4\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$, b) $6\sqrt{2}$, $6\sqrt{2}$, $6\sqrt{2}$. 9. a) 35, b) 240, c) 40. 10. a) $\frac{25\sqrt{208}}{6}$, b) $\frac{704}{3}$, c) $27\sqrt{6}$. 11. a) $6\sqrt{6}+\sqrt{3}$, b) $8\sqrt{5}+16$. 12. $\frac{a^2\sqrt{2}}{12}$. 13. a) $\frac{32\sqrt{3}}{3}$, b) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$, c) $12\sqrt{2}$. 14. a) $3\sqrt{2}$, b) 3, c) $2\sqrt{3}$. 15. a) $a = \frac{1,5}{\sin 15^\circ} \approx 5,8$, $\alpha \approx 69^\circ$, b) $b = \frac{2}{\sin 35^\circ} \approx 3,5$, $\alpha \approx 33^\circ$, c) $c = 6 \cos 40^\circ \approx 4,6$, $\alpha \approx 68^\circ$. 16. a) 36, b) $\frac{256\sqrt{3}}{3}$, c) $\frac{2187\sqrt{3}}{2}$. 17. Czerwony: $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$, zielony: $\sqrt{19+2\sqrt{2}}$, niebieski: $\sqrt{20+2\sqrt{2}}$; $\alpha \approx 57^\circ$.

str. 233-236: 1. Drugi ma większą objętość, a pierwszy ma większe pole powierzchni całkowitej. 2. a) $72,5\pi$, b) $(1+2\sqrt{2})8\pi$, c) 42π . 3. a) 54π , b) $16\sqrt{3}\pi$, c) 48π . 4. a) Około 49π , b) około 27π , c) około 709π . 5. $\frac{375}{4}\pi$. 6. a) $V_1 = 24\pi$, $V_2 = 36\pi$, $P_1 = 32\pi$, $P_2 = 42\pi$; Objętości tych walców różnią się o 12π , a pola powierzchni całkowitej o 10π . b) Walec obracany wokół krótszego boku prostokąta ma większą objętość i pole powierzchni całkowitej. 7. $V = \frac{a^3\pi}{4}$, $P_c = \frac{3\pi a^2}{2}$. 8. $\frac{a^2}{\pi}$. 10. $\frac{\pi^2(4n+1)}{10\pi}$ lub $\frac{2\pi^2(n+1)}{5\pi}$. 11. 12 świec.

12. Tak. 13. Około $2,5 \cdot 10^{-7}$ cm. 14. a) 80π cm³, b) 40π cm³, c) 8π cm³. 15. Tak.
16. Około 0,46 kg. 17. $\frac{1}{12} - \frac{2\sqrt{3}}{73\pi} \approx 0,07$. 18. $\frac{\pi^2}{2}(1 + \sqrt{2})$.

str. 240-242: 1. a) $V = 12\pi$, $P_c = 24\pi$, b) $V = \frac{32\sqrt{21}}{3}\pi$, $P_c = 56\pi$, c) $V = 100\pi$,
 $P_c = 90\pi$. 2. a) $V = 30,375\sqrt{3}\pi$, $P_b = 40,5\pi$, b) $V = 27\sqrt{3}\pi$, $P_b = 72\pi$, c) $V = 144\sqrt{2}\pi$,
 $P_b = 72\sqrt{2}\pi$, d) $V = \frac{125\pi}{3\sqrt{3}\cos 35^\circ} \approx 59,5\pi$, $P_b = \frac{25\pi}{\sin 35^\circ} \approx 43,6\pi$, e) $V = \frac{343\pi \sin 50^\circ \cos^2 50^\circ}{3} \approx 36,2\pi$,
 $P_b = 49\pi \cos 50^\circ \approx 31,5\pi$, f) $V = 72\pi \sin^2 35^\circ \cos 35^\circ \approx 19,4\pi$, $P_b = 36\pi \sin 35^\circ \approx 20,6\pi$.
3. 9π . 4. $(75 + 50\sqrt{3})\pi$. 5. 9π cm³. 6. Większe pole powierzchni całkowitej i objętość
ma stożek otrzymany w wyniku obrotu trójkąta wokół krótszej przyprostokątnej. 7. 180° .
8. $9\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{\pi}$. 9. a) $131,25\pi$, b) $\frac{2125}{36}\pi$, c) $\frac{1375}{9}\pi$, d) $\frac{12025}{144}\pi$. 10. 288° . 11. a) $\frac{1}{2}$,
b) około 19° i około 113° , c) $\sqrt{\frac{35}{11}} \approx 1,8$, d) w pierwszym; około 80° . 13. $\frac{10}{3}\pi a^2 h$, $\frac{34}{9}\pi a^2 h$,
 $\frac{11}{3}\pi a^2 h$, $\frac{13}{6}\pi a^2 h$, $\frac{20}{9}\pi a^2 h$, $\frac{11}{9}\pi a^2 h$. 14. Ostatnia (pozostałe bryły mają równe objętości).
16. a) 2π cm³, b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ cm³, c) 12π cm³.

str. 245-247: 1. a) 36π , b) $\frac{500\pi}{3}$. 2. $V = \frac{256\pi}{3}$, $P = 64\pi$. 3. 7,5 litra farby.
4. a) O około 11%, b) o około 13%. 5. a) $4\sqrt[3]{9}$ cm, b) 216 kul. 6. O 1,6 cm. 7. a) $\frac{\pi}{6} \approx \frac{1}{2}$,
b) $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi} \approx 0,37$. 8. Największą — pierwszy, najmniejszą — drugi. 9. a) 1,5 raza, b) 1,6 razy.
10. Dolny; o $17,25\pi$ cm². 12. a) $\frac{2}{3}$.

str. 248: 1. a) 54 krawędzie, 36 wierzchołków, b) 20 ścian, 38 krawędzi. 2. $\frac{1}{6}$. 3. $a = 18$,
 $b = 6\sqrt{13}$, $c = 9\sqrt{3}$, $d = 3\sqrt{21}$, $e = 4\sqrt{3}$, $f = 2\sqrt{3}$. 4. $120\sqrt{7}$ cm³. 5. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. 6. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. 7. $\frac{4}{3}\pi$.
8. $\frac{1000\pi}{3}$. 9. $\frac{5\sqrt{23}}{6}$. 10. 54π . 11. $\frac{125}{64} \approx 1,95$ razy. 12. 8 kul.

Wszystkie książki Wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.
Zamówienia prosimy nadsyłać pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe
80-305 Gdańsk 5, skrytka pocztowa 80
tel. 801 643 917, 58 340 63 63
fax 58 340 63 61, 58 340 63 66
<http://www.gwo.pl> e-mail: handel@gwo.pl



Podręcznik jest przeznaczony do nauki matematyki w czteroletnim liceum lub pięcioletnim technikum. Spełnia on kryteria *Ustawy o systemie oświaty* i jest zgodny z najnowszą podstawą programową z 2018 roku.

Został dopuszczony przez MEN do użytku szkolnego i wpisany do wykazu podręczników.

Numer dopuszczenia: 964/2/2020

