



gdańskie
wydawnictwo
oświatowe



MATEMATYKA Z PLUSEM

podręcznik do liceum i technikum

zakres rozszerzony

3

MATEMATYKA Z PLUSEM

podręcznik do liceum i technikum

zakres rozszerzony

Małgorzata Dobrowolska
Marcin Karpiński
Jacek Lech

3

MATEMATYKA Z PLUSEM

podręcznik do liceum i technikum

zakres rozszerzony



Projekt okładki: *Iwona Duczmal*

Ilustracje: *Bartłomiej Brosz*

Grafika komputerowa: *Leszek Jakubowski*

Fotografie: © dbrnjhrj – stock.adobe.com (okładka), Agencja BE&W (s. 251, 261), Archiwum GWO (s. 68, 120, 285), Domena publiczna (s. 137), Shutterstock (s. 9, 49, 68, 76, 79, 113, 145, 149, 150, 215)

Skład (T_EX): *Joanna Szyller*

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników szkolnych przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki (w zakresie rozszerzonym) na poziomie klasy III liceum i technikum, na podstawie recenzji rzeczoznawców: dr. hab. Jacka Jędrzejewskiego, dr. Edwarda Stachowskiego i dr. Zofii Ireny Krzywickiej-Vauthier.

Numer dopuszczenia: 963/3/2021

ISBN 978-83-8118-136-5

© Copyright by Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe

Wydawca: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 80-309 Gdańsk, al. Grunwaldzka 413

Gdańsk 2021. Wydanie pierwsze

Druk i oprawa: Interak, Czarnków

Podręcznik został wyprodukowany na papierze posiadającym certyfikaty FSC, PEFC, EU-Ecolabel oraz Blue Angel.

Niniejsza publikacja podlega ochronie przewidzianej w przepisach Ustawy z dnia 4.02.1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych. Każdy przypadek kopiowania lub zwielokrotniania fragmentu lub całości publikacji stanowi niedozwolone naruszenie praw twórcy lub wydawcy, o ile nie odbywa się zgodnie z przepisami wyżej wymienionej ustawy. Uwaga. W podręczniku nie należy zapisywać żadnych odpowiedzi, podkreślać ani zaznaczać rozwiązań zadań.

Wszystkie książki Wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.
Zamówienia można składać w księgarni internetowej: www.ksiegarnia.gwo.pl
lub nadsyłać listownie pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe
80-305 Gdańsk 5, skrytka pocztowa 80
tel. 801 643 917, 58 340 63 63
fax 58 340 63 61, 58 340 63 66
<http://www.gwo.pl> e-mail: handel@gwo.pl

Spis treści

Wyrażenia wymierne

■ Wyrażenia wymierne	10
■ Równania wymierne	16
■ Nierówności wymierne	22
■ Przekształcanie wyrażeń algebraicznych	26
■ Hiperbola. Przesuwanie hiperboli	30
■ Funkcje wymierne	38
■ Powtórzenie	48

Ciągi

■ Przykłady ciągów	50
■ Ciąg arytmetyczny	60
■ Suma wyrazów ciągu arytmetycznego	65
■ Ciąg geometryczny	70
■ Suma wyrazów ciągu geometrycznego	77
■ Procent prosty i procent składany	80
■ Granice ciągów	88
■ Obliczanie granic	96
■ Szereg geometryczny	104
■ Powtórzenie	112

Podobieństwo figur

■ Twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa	114
■ Wielokąty podobne	120
■ Cechy podobieństwa trójkątów	128
■ Cechy podobieństwa trójkątów (cd.)	135
■ Pola figur podobnych	139
■ Powtórzenie	144

Funkcje trygonometryczne

■ Funkcje trygonometryczne kąta ostrego	146
■ Kąty o miarach dodatnich i ujemnych	149
■ Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta	153
■ Podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi	159

■ Wykres funkcji $y = \sin \alpha$	162
■ Wykres funkcji $y = \cos \alpha$	167
■ Wykres funkcji $y = \operatorname{tg} \alpha$	172
■ Wzory redukcyjne	175
■ Miara łukowa kąta	181
■ Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej	186
■ Funkcje o wzorach $y = a \sin x$, $y = \sin ax$	194
■ Równania i nierówności trygonometryczne	198
■ Sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów	209
■ Powtórzenie	214

Geometria analityczna

■ Punkty i odcinki w układzie współrzędnych	216
■ Równanie prostej	223
■ Równanie prostej (cd.)	230
■ Równanie okręgu	236
■ Interpretacja geometryczna układu równań	241
■ Powtórzenie	250

Stereometria

■ Wielościany i inne figury przestrzenne	252
■ Figury obrotowe i inne figury przestrzenne	262
■ Proste i płaszczyzny w przestrzeni	266
■ Przekroje graniastosłupów i ostrosłupów	277
■ Bryły podobne	285
■ Powtórzenie	292

TABELA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH	293
--	-----

ODPOWIEDZI	295
------------------	-----

W podręczniku przyjęto następujące oznaczenia:

zadania 7–10 ► — odsyłacz do zadań, które proponujemy rozwiązywać po zapoznaniu się z odpowiednim fragmentem teorii

◄ **III** — odsyłacz do fragmentu teorii oznaczonego indeksem **III**

● — zadanie nieelementarne (niekoniecznie trudne)

● — zadanie trudne

Drogie Uczennice!

Drodzy Uczniowie!

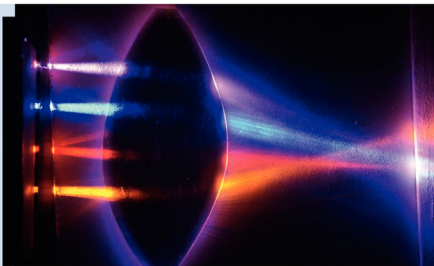
Nazwa *matematyka* pochodzi od greckiego słowa *mathema* — poznanie. W serii *Matematyka z plusem* staramy się traktować matematykę podobnie jak starożytni Grecy — jako poznawanie tego, co da się ogarnąć rozumem. Do uczenia się takiej matematyki potrzeba tylko chęci, nieco wyobraźni oraz wiary we własne możliwości. A jak mawiał poeta Louis Aragon: „Twoja wyobraźnia jest więcej warta, niż sobie wyobrażasz”.

Warto zdobyć się na odrobinę wysiłku, bo — jak powiedział Jonathan Swift, autor *Podróży Guliwera* — „Człowiek nie jest zwierzęciem rozumnym, jest tylko zdolny do rozumowania”.

Autorzy

Wyrażenia wymierne

Za pomocą soczewki wypukłej można skupić wiązkę promieni równoległych w jednym punkcie zwanym ogniskiem. Soczewka ta pozwala też na uzyskanie powiększonych obrazów przedmiotów. Aby opisać zależność między odległościami ogniska, przedmiotu i jego obrazu od soczewki, używa się pewnych wyrażen wymiernych.



Wyrażenia wymierne ■ Równania wymierne ■ Nierówności wymierne ■ Przekształcanie wyrażeń algebraicznych ■ Hiperbola. Przesuwanie hiperboli ■ Funkcje wymierne ■ Powtórzenie

WYRAŻENIA WYMIERNE

- I Każde z wyrażeń algebraicznych podanych obok ma postać ułamka, w którego liczniku i mianowniku występuje wielomian.

Przykłady wyrażeń wymiernych:

$$\frac{x^{12} - 5}{x^{12} + 3x^{10} + x^5 + 2} \quad \frac{3x + 2}{x - 5}$$
$$\frac{7y^8 + 2y^7 - 5}{-5y^4 - 9y^3 + 3y} \quad \frac{-3}{2t^2 - 1}$$

Wyrażenie postaci $\frac{W(x)}{V(x)}$, gdzie $W(x)$ i $V(x)$ są wielomianami i $V(x)$ nie jest wielomianem zerowym, nazywamy **wyrażeniem wymiernym** zmiennej x .

Uwaga. W wyrażeniu wymiernym zmienna może być oczywiście oznaczona dowolną literą. Zauważ też, że każdy wielomian $W(x)$ jest wyrażeniem wymiernym, gdyż można go zapisać w postaci $\frac{W(x)}{1}$.

ĆWICZENIE A Ustal, dla jakich wartości x można określić wartość podanego wyrażenia.

a) $\frac{x+3}{3x(x-2)}$

b) $\frac{3x^5 - 7x^2 + 3}{3x^2 + 2}$

Zbiór tych liczb, dla których można określić wartość wyrażenia $\frac{W(x)}{V(x)}$, nazywamy **dziedzina wyrażenia wymiernego**. Jest to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których $V(x) \neq 0$.

ĆWICZENIE B Czy dla każdej liczby rzeczywistej wartość wyrażenia $\frac{x}{x^2+1}$ jest taka sama, jak wartość wyrażenia $\frac{x(x-1)}{(x^2+1)(x-1)}$?

Czasami wyrażenie wymierne można uprościć. Należy jednak pamiętać o uwzględnieniu jego dziedziny. Rozważmy na przykład wyrażenie:

$$\frac{x^2 + 6x + 5}{(x-3)(x+1)}$$

Jego dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od 3 i od -1. Możemy to wyrażenie uprościć:

$$\frac{x^2 + 6x + 5}{(x-3)(x+1)} = \frac{(x+1)(x+5)}{(x-3)(x+1)} = \frac{x+5}{x-3}$$

Zatem wyrażenie $\frac{x^2 + 6x + 5}{(x-3)(x+1)}$ jest równe $\frac{x+5}{x-3}$, ale tylko gdy $x \neq 3$ i $x \neq -1$.

PRZYKŁAD 1 Uprość wyrażenie $\frac{2x^3 - 7x^2 + 6x}{x^3(x-2)(x-3)}$.

Dziedzina wyrażenia:

$$x^3 \neq 0, \quad x-2 \neq 0 \quad \text{i} \quad x-3 \neq 0$$

Zatem: $x \neq 0, \quad x \neq 2 \quad \text{i} \quad x \neq 3$

$$\begin{aligned} \frac{2x^3 - 7x^2 + 6x}{x^3(x-2)(x-3)} &= \frac{x(2x^2 - 7x + 6)}{x^3(x-2)(x-3)} = \\ &= \frac{2(x-1,5)(x-2)}{x^2(x-2)(x-3)} = \\ &= \frac{2(x-1,5)}{x^2(x-3)} \end{aligned}$$

$$2x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$\Delta = 49 - 48 = 1$$

$$x_1 = \frac{7-1}{4} = 1,5$$

$$x_2 = \frac{7+1}{4} = 2$$

ZADANIE Uprość wyrażenie $\frac{x^4 + 3x^3 - 4x^2}{x(x+2)(x-1)}$.

zadania 1-3 ►

II ĆWICZENIE C Zapisz w postaci jednego ułamka.

a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ b) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ d) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$

Na wyrażeniach wymiernych możemy wykonywać działania w podobny sposób jak na ułamkach.

PRZYKŁAD 2 Wykonaj działanie. Podaj wynik w postaci ilorazu wielomianów.

a) $\frac{5x-2}{4x^4-9x^2} : \frac{3x-2x^2}{x+1}$

Dziedzina wyrażenia:

$$4x^4 - 9x^2 \neq 0 \quad \text{i} \quad x+1 \neq 0$$

$$\begin{aligned} \frac{5x-2}{x^2(2x-3)(2x+3)} : \frac{-x(2x-3)}{x+1} &= \\ = \frac{-5x+2}{x(2x+3)(x+1)} \end{aligned}$$

$$4x^4 - 9x^2 = x^2(4x^2 - 9) = x^2(2x-3)(2x+3)$$

Zatem: $x \neq 0, \quad x \neq \frac{3}{2}, \quad x \neq -\frac{3}{2} \quad \text{i} \quad x \neq -1$

b) $\frac{x+1}{x-1} : \frac{x+3}{x^2-1}$

Dziedzina wyrażenia:

$$x-1 \neq 0, \quad x^2-1 \neq 0 \quad \text{i} \quad \frac{x+3}{x^2-1} \neq 0$$

$$\frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{x+3} = \frac{(x+1)^2}{x+3}$$

Zatem: $x \neq 1, \quad x \neq -1 \quad \text{i} \quad x \neq -3$

ZADANIE Wykonaj działanie. Wynik przedstaw w postaci ilorazu wielomianów.

a) $\frac{x-2}{3x^3-x^2} : \frac{3x^2-x}{x^2-2x}$

b) $\frac{3x+1}{x^2} : \frac{9x^2-1}{2x^2-8}$

zadania 4-8 ►

PRZYKŁAD 3 Wykonaj działania. Podaj wynik w postaci ilorazu wielomianów.

a) $\frac{2}{x} - \frac{x-1}{x^2+2x}$

Dziedzina wyrażenia:

$x \neq 0$ i $x \neq -2$

$$\frac{2}{x} - \frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{2(x+2) - (x-1)}{x(x+2)} = \frac{x+5}{x(x+2)}$$

b) $\frac{5}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{2x+1}{x^3}$

Dziedzina wyrażenia:

$x \neq 0$

$$\frac{5 \cdot 2x^2 + x - 2(2x+1)}{2x^3} = \frac{10x^2 + x - 4x - 2}{2x^3} = \frac{10x^2 - 3x - 2}{2x^3}$$

c) $\frac{1}{x+2} + \frac{x}{x^2-4}$

Dziedzina wyrażenia:

$x+2 \neq 0$ i $x^2-4 \neq 0$

$x \neq -2$ i $x \neq 2$

$$\frac{1}{x+2} + \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-2+x}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x-2}{(x+2)(x-2)}$$

ZADANIE Wykonaj działanie. Wynik przedstaw w postaci ilorazu wielomianów.

a) $\frac{3}{x+1} + \frac{x}{x-2}$

b) $\frac{2}{3x} - \frac{3x-1}{x^2} + \frac{3}{x^3}$

c) $\frac{1}{x+3} - \frac{x}{x^2-9}$

zadania 9–16 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Określ dziedzinę wyrażenia.

a) $\frac{3x^3-4}{2x+5}$

c) $\frac{2x-1}{4x^2-1}$

e) $\frac{2x^7-x^5+1}{3x^2+5x+2}$

b) $\frac{x^3+2}{x^2-3x}$

d) $\frac{x^3+2}{x^2-2x-15}$

f) $\frac{2x^3-1}{x^3-100x}$

2. Podaj przykład wyrażenia wymiernego, którego dziedziną jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$ i które przyjmuje wartość -10 , gdy $x = 1$.

3. Określ dziedzinę podanego wyrażenia, a następnie przedstaw to wyrażenie w prostszej postaci.

a) $\frac{6x^4+5x^2}{-7x^3+2x^2}$

c) $\frac{20x-5}{4x^3-x^2}$

e) $\frac{20x-50}{16x^2-100}$

g) $\frac{300x^2-3}{1000x^3+1}$

b) $\frac{2x^6-5x^5}{15x^4-6x^3}$

d) $\frac{x^2-25}{(x+5)^2}$

f) $\frac{x^3-8}{x^2-4}$

h) $\frac{x^2-3x-4}{x^2+6x+5}$

◀ II 4. Wykonaj działanie i zapisz wynik w postaci ilorazu wielomianów.

a) $\frac{4x-1}{2x+8} \cdot 4$

c) $5 : \frac{5x^2-4}{5x}$

e) $\frac{3x+1}{9x^3+6} : \frac{1}{3}$

b) $\frac{6x^2-3}{4x^2-2} : 6$

d) $\frac{2}{5} \cdot \frac{2x-5}{10x^2}$

f) $\frac{16x^2+4x}{x+4} : 0,5$

5. Przedstaw wynik działania w postaci ilorazu wielomianów.

a) $\frac{x}{x+1} \cdot \frac{2x}{x-1}$

d) $\frac{-8x^2-4x}{x^3} \cdot \frac{x+1}{10x}$

g) $\frac{x}{x-1} \cdot \frac{3}{x} \cdot \frac{-5}{2x}$

b) $\frac{x^3}{x+7} : \frac{7}{x}$

e) $\frac{x+1}{x^2+2x+1} : \frac{1}{x^2}$

h) $\frac{3}{x} \cdot \frac{-2}{x^3} \cdot \frac{7x-5}{x+2}$

c) $\frac{5}{x} : \frac{x}{5x+1}$

f) $\frac{-2x^4+x^3-2x^2}{10x^7-7x^5} \cdot \frac{-4}{3x^2}$

i) $\frac{9}{x+2} \cdot \frac{10}{3x} \cdot \frac{-3x+6}{x+1}$

6. Wykonaj działanie.

a) $\frac{x-3}{3x^2+2} \cdot 3x^3$

c) $(2x-1) \cdot \frac{2x+1}{x+1}$

e) $\frac{x+2}{x+6} : [(x+2)(x+6)]$

b) $\frac{5x+10}{2x^2+4} : (-10x)$

d) $\frac{x-3}{2x-1} : (2x-6)$

f) $(2x+1)(x-3) : \frac{x-3}{2x+1}$

7. Wykonaj działanie i przedstaw wynik w jak najprostszej postaci.

a) $\frac{4x^2+3x}{x-2} \cdot \frac{1}{x}$

e) $\frac{(x-3)^2(x+2)}{4x} \cdot \frac{2}{x-3}$

i) $\frac{x^3-8}{2x^2+2x} : \frac{x-2}{x}$

b) $\frac{4x^2-9}{2x} \cdot \frac{4}{2x-3}$

f) $\frac{12}{3x^2-4x} \cdot \frac{x}{18x+6}$

j) $\frac{3x^2}{x+4} \cdot \frac{x^2-16}{x^2+x}$

c) $\frac{x}{x+1} : \frac{1}{x(x^2-1)}$

g) $\frac{5}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{x+3}$

k) $\frac{x^3-8}{6-2x} : \frac{x^2-2x}{x-3}$

d) $\frac{3x}{4x-2} \cdot \frac{2x-1}{9x^2}$

h) $\frac{x^3+5x^2}{10x-5} \cdot \frac{15x-10}{2x^4}$

l) $\frac{5x^3-15x^2}{x^2-4} \cdot \frac{(x-2)^2}{4x-12}$

8. Wykonaj działanie i przedstaw wynik w jak najprostszej postaci.

a) $\frac{x}{-5x+4} : \frac{x-5}{5x^2+x-4}$

d) $\frac{4x^2-25}{x^2+6x+9} \cdot \frac{x^3+27}{4x^2+20x+25}$

b) $\frac{2x+1}{x^2+2x-3} : \frac{2x^2-7x-4}{x^2-x-12}$

e) $\frac{x^2-x-6}{x^2-4x-5} \cdot \frac{x^2-6x+5}{x+2}$

c) $\frac{2x-10}{x^2+x-6} \cdot \frac{x^2+2x-3}{10x^2-2x^3}$

f) $\frac{x^2+4x+3}{x^2-7x+6} \cdot \frac{x^2+x-2}{x^2-2x-3}$

9. Przedstaw wynik działania w postaci ilorazu wielomianów.

a) $\frac{2x}{x+5} + 2$

c) $\frac{4x^3}{x^2-4} + x$

e) $3x - \frac{5x-1}{x-2}$

b) $\frac{2-3x}{2x^3-x} - 3$

d) $\frac{6x^3-4x}{3x^2-2x+5} - 2x$

f) $x + \frac{x^2-1}{3x+2}$

10. Zapisz wynik działania w postaci ilorazu wielomianów.

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$

c) $\frac{3}{x} + \frac{5}{2x-3}$

e) $\frac{2x}{x+1} + \frac{x-1}{3-x}$

b) $\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+2}$

d) $\frac{4}{x-2} - \frac{5}{x+2}$

f) $\frac{3x+5}{2x+2} - \frac{4}{x-2}$

11. Wykonaj działanie i przedstaw wynik w jak najprostszej postaci.

a) $\frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}$

d) $\frac{1}{x-2} + \frac{x}{(x-2)^2}$

g) $\frac{3x^2-1}{x^2+2x} + \frac{2x}{x+2}$

b) $\frac{3}{2x^3} - \frac{1}{5x}$

e) $\frac{4x^2+1}{(x+1)(x-3)} + \frac{1-5x}{x-3}$

h) $\frac{-3x}{5x-1} - \frac{x^4-6x^3}{10x^3-2x^2}$

c) $\frac{2}{x^3} - \frac{2x+1}{x^2}$

f) $\frac{x+2}{2x-5} - \frac{3x^3-2x^2}{(2x-5)(3+x)}$

i) $\frac{10x^2-5x}{4x^2-9} - \frac{5x}{2x+3}$

12. Wykonaj działanie. Wynik przedstaw w postaci jak najprostszego ilorazu wielomianów.

a) $\frac{5}{x} + \frac{2}{3x^2} - \frac{3}{5x^3}$

c) $\frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{x^4}$

e) $\frac{1}{x} - \frac{x-1}{2x^2} + \frac{1-x^2}{4x^3} - \frac{x^3+1}{x^4}$

b) $\frac{7}{5x} - \frac{4}{3x^2} + \frac{2}{x^4}$

d) $\frac{5}{2x} - \frac{2x+1}{6x^2} - \frac{x-3}{x^3}$

f) $\frac{x^2-3}{x^4} + \frac{x+1}{x^3} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}$

13. a) Od odwrotności liczby naturalnej n większej od 0 odejmujemy odwrotność liczby o 1 większej od n . Zapisz wynik w jak najprostszej postaci.

b) Zapisz w jak najprostszej postaci sumę odwrotności liczby naturalnej n większej od 1, odwrotności liczby o 1 mniejszej od n oraz odwrotności liczby o 1 większej od n .

14. Wykonaj działanie. Wynik przedstaw w jak najprostszej postaci.

a) $\frac{3x}{x^2-x-12} + \frac{2}{x+3}$

c) $\frac{x+2}{x^2-x-6} + \frac{x+1}{x^2+7x+10}$

b) $\frac{5x+1}{2x-1} - \frac{4x^2-3}{2x^2+5x-3}$

d) $\frac{2x-1}{x^2-4x+3} - \frac{2-x}{x^2-5x+6}$

Rozważmy wyrażenie wymierne $\frac{W(x)}{V(x)}$.

Wiadomo, że każdy wielomian można rozłożyć na czynniki stopnia co najwyżej drugiego, zatem wielomian $V(x)$ można zapisać w postaci iloczynu wyrażen typu $ax + b$ lub $ax^2 + bx + c$. Rozważane wyrażenie wymierne $\frac{W(x)}{V(x)}$, w którym stopień wielomianu $W(x)$ jest mniejszy niż stopień wielomianu $V(x)$, można zapisać jako sumę wyrażen postaci $\frac{A}{ax+b}$ lub $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, gdzie trójmian $ax^2 + bx + c$ nie ma pierwiastków. Tego typu wyrażenia nazywamy ułamiłkami prostymi. Mianowniki tych wyrażen to czynniki występujące w rozkładzie wielomianu $V(x)$.

Oto jak można znaleźć ułamki proste, których suma jest równa $\frac{-4x}{(x+3)(x+6)}$:

$$\frac{-4x}{(x+3)(x+6)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+6}$$

$$\frac{-4x}{(x+3)(x+6)} = \frac{A(x+6) + B(x+3)}{(x+3)(x+6)}$$

$$\frac{-4x}{(x+3)(x+6)} = \frac{(A+B)x + 6A + 3B}{(x+3)(x+6)}$$

$$\begin{cases} A+B=-4 \\ 6A+3B=0 \end{cases}$$

$$\text{Stąd } 6A + 3(-4 - A) = 0,$$

$$\text{czyli } A = 4, \quad B = -8.$$

$$\text{Otrzymaliśmy rozkład na ułamki proste: } \frac{-4x}{(x+3)(x+6)} = \frac{4}{x+3} - \frac{8}{x+6}$$

Prawą stronę równości sprowadzamy do wspólnego mianownika i porządkujemy licznik.

Porównujemy liczniki. Współczynniki przy wyrażeniach o tej samej potęgde zmiennej x powinny być równe.

15. Przeczytaj informacje w ramce. Przedstaw podane wyrażenie w postaci sumy ułamków prostych.

a) $\frac{4}{x(5x-2)}$

c) $\frac{1}{x(x+5)}$

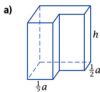
e) $\frac{7x-11}{(x+4)(1-3x)}$

b) $\frac{15}{(x-3)(x+2)}$

d) $\frac{-10x}{(2x+1)(x+3)}$

f) $\frac{4x-3}{(x-1)(x+2)}$

16. Z prostopadłościanu, którego podstawą jest kwadrat o boku a , wycięto inny prostopadłościan w sposób pokazany na rysunku. Objętość tak powstałej bryły wynosi 20. Przedstaw sumę długości wszystkich krawędzi tej bryły w postaci wyrażenia wymiernego zmiennej a .



MINISPRAWDZIAN

51. Dziedziną wyrażenia wymiernego $\frac{(x-5)(x+2)}{x^3-4x}$ jest zbiór:

- A. $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ B. $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2, 5\}$ C. $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$ D. $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

52. Wynik działania $\frac{16x^2}{4x^2-9} - \frac{4x}{2x+3}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$, można przedstawić w postaci ilorazu wielomianów:

- A. $\frac{4x}{2x-3}$ B. $\frac{4x}{2x+3}$ C. $\frac{2x}{x-3}$ D. $\frac{4x-1}{x-9}$

53. Wyrażenie $\frac{(x^2-25)(x^3+27)}{(x^2+10x+25)(x^2-3x+9)}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$, jest równe:

- A. $\frac{(x+5)(x+3)}{x-5}$ B. $\frac{(x-5)(x+3)}{x+5}$ C. $\frac{(x-5)(x-3)}{x+5}$ D. $x+3$

RÓWNANIA WYMIERNE

- I** Wiadomo, że równość $\frac{a}{b} = 0$, gdzie $b \neq 0$, jest spełniona wtedy, gdy $a = 0$. Tę obserwację można wykorzystać przy rozwiązywaniu równań wymiernych, których przykłady podano w ramce obok.

Przykłady równań wymiernych:

$$\begin{aligned} \frac{-x^3 + x^2 + 1}{2x - 3} &= 3 \\ \frac{2x + 3}{3x + 8} &= 0 & \frac{x + 1}{x + 2} &= \frac{1}{x} \\ \frac{(x - 5)^2}{x^2 + x - 1} &= \frac{x}{x - 3} \end{aligned}$$

PRZYKŁAD 1 Rozwiąż równanie $\frac{2x^2 - x - 1}{3x + 2} = 0$.

Założenie: $3x + 2 \neq 0$

Zatem: $x \neq -\frac{2}{3}$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$$

$$x_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{1+3}{4} = 1$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ lub } x = 1$$

Równanie typu $\frac{a}{b} = 0$ może być spełnione przez liczby, dla których mianownik jest różny od zera.

Równanie typu $\frac{a}{b} = 0$ spełniają tylko te liczby, dla których licznik jest równy zeru.

Obie liczby spełniają założenie.

ZADANIE Rozwiąż równanie $\frac{2x^2 - 4x - 3}{3x + 1} = 0$.

zadania 1-2

- II Każde równanie wymierne można przekształcić, otrzymując równanie mające postać $\frac{W(x)}{V(x)} = 0$, i rozwiązać w sposób opisany w przykładzie 1. Można też znaleźć rozwiązanie, używając innej metody. W kolejnych przykładach pokazujemy różne sposoby wyznaczania rozwiązań tego samego równania.

PRZYKŁAD 2 Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x-2}{2x+1} = -12$ Założenie: $2x+1 \neq 0$
 Zatem: $x \neq -\frac{1}{2}$

Sposób I

$$\frac{x-2}{2x+1} = -12$$

Przekształcamy równanie tak, aby
 otrzymać postać $\frac{W(x)}{V(x)} = 0$.

$$\frac{x-2}{2x+1} + 12 = 0$$

$$\frac{x-2+12(2x+1)}{2x+1} = 0$$

$$x-2+24x+12 = 0$$

$$25x+10 = 0$$

W obu wypadkach otrzymaliśmy to samo równanie.

$$x = -\frac{10}{25}$$

$$x = -\frac{2}{5}$$

Otrzymana liczba spełnia założenie.

Sposób II

$$\frac{x-2}{2x+1} = -12 \quad | \cdot (2x+1)$$

Obie strony równania możemy
 pomnożyć przez $2x+1$,
 bo założyliśmy, że $2x+1 \neq 0$.

$$x-2 = -12(2x+1)$$

$$x-2 = -24x-12$$

$$25x+10 = 0$$

b) $\frac{3x}{x-1} = \frac{7-x}{x^2-1}$ Założenia: $x-1 \neq 0$ i $x^2-1 \neq 0$
 Zatem: $x \neq 1$ i $x \neq -1$

Sposób I

$$\frac{3x}{x-1} = \frac{7-x}{x^2-1}$$

$$\frac{3x}{x-1} - \frac{7-x}{(x-1)(x+1)} = 0$$

$$\frac{3x(x+1)-(7-x)}{(x-1)(x+1)} = 0$$

$$3x^2+3x-7+x = 0$$

$$3x^2+4x-7 = 0$$

W obu wypadkach otrzymaliśmy to samo równanie kwadratowe,
 które należy rozwiązać z uwzględnieniem założeń.

Sposób II

$$\frac{3x}{x-1} = \frac{7-x}{x^2-1} \quad | \cdot (x^2-1)$$

$$3x(x+1) = 7-x$$

$$3x^2+3x = 7-x$$

$$3x^2+4x-7 = 0$$

$$3x^2 + 4x - 7 = 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-7) = 100$$

$$x_1 = \frac{-4 - 10}{6} = -\frac{7}{3}$$

$$x_2 = \frac{-4 + 10}{6} = 1$$

$$x = -\frac{7}{3}$$

Liczba $-\frac{7}{3}$ spełnia założenia, a liczba 1 nie spełnia założeń.

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x-2}{x^2-2} = 3$

b) $\frac{x+3}{x+5} = \frac{2x+1}{x^2-25}$

zadania 3–17

ZESTAW ZADAŃ

I 1. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x+7}{2x-1} = 0$

c) $\frac{4x^2-12x}{x-3} = 0$

e) $\frac{x^2+3x-10}{2x-1} = 0$

b) $\frac{4x-3}{7+2x} = 0$

d) $\frac{2x^2+x-6}{2x^2+4} = 0$

f) $\frac{6x^2+12x}{x^2-4} = 0$

2. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{(x+5)(3x-1)}{(x+4)(x-5)} = 0$

c) $\frac{4x(x+\frac{1}{2})}{(2x+1)(x+3)} = 0$

e) $\frac{(x^2+7)(x-5)^3}{x^3(5x+1)(x+7)} = 0$

b) $\frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = 0$

d) $\frac{x^2(x+1)(x^2-4)}{x(3x+7)(x-4)} = 0$

f) $\frac{(2x-6)(5x+1)x^3}{x^5(x+\frac{1}{2})(x-3)} = 0$

III 3. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{7x}{x-3} = 5$

c) $\frac{9+x}{2x+5} + 6 = 0$

e) $\frac{3}{4} = \frac{4x-11}{6x+2}$

b) $\frac{6x+1}{5x-4} = -3$

d) $3 - \frac{3x-7}{4-5x} = 0$

f) $\frac{6x-5}{2-7x} + \frac{4}{5} = 0$

4. Przyjrzyj się równaniu i spróbuj je rozwiązać bez przekształcania równania.

a) $\frac{2x}{x-1} = \frac{12}{x-1}$

c) $\frac{1}{1-x} = \frac{-x}{x-1}$

e) $\frac{7x-1}{1-7x} = \frac{1}{x}$

b) $\frac{2}{x-2} = \frac{3}{x-2}$

d) $\frac{3x+1}{1+3x} = \frac{x}{5}$

f) $\frac{x-3}{x-1} = \frac{3-x}{1-x}$

5. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x-1}{x+1} = x$

d) $3 - \frac{3}{x+2} = 2x$

g) $\frac{3x-4}{6x+1} = \frac{2x+7}{4x-1}$

b) $x + \frac{1}{x} = 2$

e) $x - 5 = \frac{3x^2}{3x+2}$

h) $\frac{6x-5}{2-3x} - \frac{10x}{6-5x} = 0$

c) $2 - 5x = \frac{8}{x-4}$

f) $2x + 1 - \frac{3x}{5x-1} = 0$

i) $0 = \frac{7}{4x+1} + \frac{2x+3}{5-8x}$

6. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$

c) $\frac{x-1}{2} = \frac{2}{x-1}$

e) $\frac{8x-2}{1-x^2} + \frac{2x+1}{x-1} = 0$

b) $\frac{x+1}{x^2} = \frac{x+1}{x^3}$

d) $\frac{2}{x+2} - \frac{4x}{x^2-4} = 0$

f) $\frac{6x+1}{9x^2-1} = \frac{1}{6x+2}$

7. Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

a) $f(x) = \frac{3x-2}{x^2+5}$

d) $f(x) = \frac{-3x(x^2-4)}{x^2+2x}$

b) $f(x) = \frac{4x^2+6x}{3x-4}$

e) $f(x) = \frac{x-5}{x+3} - \frac{x+2}{x-1}$

c) $f(x) = \frac{(2x+5)(x-3)}{x^2-9}$

f) $f(x) = \frac{2x}{3x+4} + \frac{2x-1}{2x-4}$

8. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1}{x} - \frac{4}{x+1} = \frac{3}{x+2}$

c) $\frac{2}{x+4} = \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x}$

b) $\frac{2}{x} = \frac{5}{x+1} + \frac{6}{x-1}$

d) $\frac{3}{x} - \frac{2}{1-x} = \frac{5}{x+2}$

9. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{3}{x-2} = \frac{2}{x+2} + \frac{7}{x^2-4}$

e) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x^2+x-2} = 0$

b) $\frac{1}{x} + \frac{5}{x+3} = \frac{3}{x^2+3x}$

f) $\frac{7}{x-2} + \frac{4}{x^2-2x} - \frac{1}{x^2-3x+2} = 0$

c) $\frac{1}{x^2+2x} + \frac{2}{x^2-4} = \frac{5}{x^2-2x}$

g) $\frac{15}{x^2+5x+6} - \frac{x+1}{x+2} = \frac{x-2}{x+3}$

d) $\frac{5}{3x^2+x} + \frac{3}{3x^2-x} = \frac{2}{9x^2-1}$

h) $\frac{x-3}{x-1} + \frac{8}{x^2+3x-4} = \frac{2x-3}{x+4}$

10. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{3}{2x^2 - 10x + 8} + \frac{1}{x^3 - 4x^2 - x + 4} = 0$

b) $\frac{4}{x^3 + 5x^2 - 4x - 20} - \frac{3}{x^2 + 2x - 15} = 0$

c) $\frac{3x}{x^3 + 4x^2 + 2x + 8} - \frac{2}{x^2 + 6x + 8} = 0$

d) $\frac{5}{x^3 + 9x^2 - 9x - 81} = \frac{-2}{x^3 - 9x^2 - 9x + 81}$

e) $\frac{7}{x^3 - 3x^2 + 2x - 6} = \frac{4}{x^3 + 3x^2 + 2x + 6}$

f) $\frac{2x}{x^3 + 3x^2 - x - 3} - \frac{5}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = 0$

11. Rozwiąż równanie.

a) $(6 - 3x) : \frac{x+2}{x} = 1$

b) $\frac{7x-1}{5-2x} : (3x) = \frac{1}{2}$

c) $\frac{-2}{x+2} : \frac{x+1}{x^2-4} = -3$

d) $\frac{x-5}{x} : \frac{2x}{x+1} = \frac{x+1}{x}$

e) $\frac{3x+2}{2x^4-x^3} : \frac{6x+4}{4x^3-x} = \frac{6x+3}{x^3}$

f) $\frac{-x^2+x+6}{5-x} : \frac{9-x^2}{25-10x+x^2} = \frac{x+2}{6+2x}$

12. a) Wyznacz wartość a , dla której wykres funkcji $y = \frac{a}{x-1} + 2$ przechodzi przez początek układu współrzędnych.

b) Znajdź wartość a , dla której wykres funkcji $y = \frac{3}{x+a} - 5$ przecina oś x w punkcie o współrzędnych $(1, 0)$.

13. Prostokąt $ABCD$ (zob. rysunek) jest zbudowany z kwadratu i takiego prostokąta, że stosunek długości boków w prostokącie $ABCD$ jest taki sam jak stosunek odpowiednich boków w prostokącie $EBCF$, czyli $\frac{|AB|}{|CB|} = \frac{|CB|}{|EB|}$. Prostokąt o tej własności nazywamy złotym prostokątem. Oblicz, jaką długość ma krótszy bok złotego prostokąta, jeżeli jego dłuższy bok ma długość 5.



14. a) Suma pewnej liczby a i jej odwrotności jest równa $2\frac{4}{63}$. Oblicz a .

b) Odejmując odwrotność liczby a od odwrotności liczby o 1 większej od a , otrzymamy $-\frac{1}{90}$. Oblicz a .

15. a) Różnica pewnych dwóch liczb wynosi 1, a suma odwrotności tych liczb jest równa 2. Znajdź te liczby.

b) Suma pewnych dwóch liczb wynosi $1\frac{2}{3}$, a różnica odwrotności tych liczb jest równa $5\frac{1}{3}$. Znajdź te liczby.

16. Wielkość dawki leku dla dziecka lub nastolatka ustalano do niedawna jako procent p dawki dla dorosłego. Pierwszymi próbami ustalenia wartości p były poniższe wzory, gdzie x oznacza wiek młodego pacjenta (w latach). Obecnie dawkę dla dziecka określa się na podstawie wielu czynników (wieku, masy ciała, płci i innych).

Wzór Younga:

$$p = \frac{100x}{x+12}$$

Wzór Augsbergera:

$$p = 4x + 20$$

Wzór Basteda:

$$p = \frac{10(x+3)}{3}$$

a) Ustal, dla jakiego wieku pacjenta wzory Younga i Basteda podają taką samą wartość p .

b) Uzasadnij, że niezależnie od wieku pacjenta wzory Younga i Augsbergera podają różne wartości p .

17. Prędkość v dźwięku w powietrzu zależy od temperatury powietrza. Przybliżoną wartość tej prędkości (w m/s) można obliczyć ze wzoru $v = 331 + 0,6T$, gdzie T oznacza temperaturę powietrza wyrażoną w stopniach Celsjusza. Zatem jeśli w czasie t sekund dźwięk pokonuje odległość d metrów, to:

$$t = \frac{d}{331 + 0,6T}$$

W czasie burzy piorun uderzył w odległości 7 km od obserwatora, a grzmot dotarł do niego po upływie 20 sekund. Oblicz, jaka była wtedy temperatura powietrza.



MINISPRAWDZIAN

51. Równanie $\frac{4x-3}{x-5} - 1 = 0$ ma takie samo rozwiązanie jak równanie:

A. $\frac{15x+10}{x+3} = 0$

B. $\frac{2x+3}{x-5} = 0$

C. $\frac{3x+2}{6x+4} = 0$

D. $\frac{3x-2}{x+5} = 0$

52. Iloczyn rozwiązań równania $\frac{x}{2x-1} = \frac{3x+2}{3x^2}$ jest równy:

A. $-\frac{2}{9}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D. $-\frac{2}{3}$

53. Ile miejsc zerowych ma funkcja określona za pomocą wzoru $f(x) = \frac{x^4 - 9x^2}{2x^2 - 6x}$?

A. trzy

B. jeden

C. zero

D. dwa

54. Ile rozwiązań ma równanie $\frac{x+1}{x^3-3x^2-x+3} + \frac{x^2+x}{x^3+x^2-9x-9} = 0$?

A. trzy

B. dwa

C. jedno

D. nie ma rozwiązań

NIERÓWNOŚCI WYMIERNE

- Iloraz dwóch liczb o przeciwnych znakach jest liczbą ujemną, a iloraz dwóch liczb o takich samych znakach jest liczbą dodatnią. Taką samą własność ma iloczyn. Zatem nierówność $\frac{a}{b} > 0$, gdzie $b \neq 0$, jest równoważna nierówności $ab > 0$.

PRZYKŁAD Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{x-7}{5x+2} \geq 0$

Założenie: $5x+2 \neq 0$, zatem $x \neq -\frac{2}{5}$

$$(x-7)(5x+2) \geq 0$$



$$x \in (-\infty; -\frac{2}{5}) \cup (7; +\infty)$$

Nierówność $\frac{x-7}{5x+2} \geq 0$ jest równoważna nierówności $(x-7)(5x+2) \geq 0$, gdy $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{5}\}$.

Szkieujemy wykres zmiany znaku wartości funkcji $y = 5(x-7)(x+\frac{2}{5})$ i zaznaczamy liczby spełniające nierówność (uwzględniając założenia).

Odczytujemy rozwiązanie nierówności.

b) $\frac{-3}{7x+1} < \frac{4}{5-6x}$

Założenia: $7x+1 \neq 0$ i $5-6x \neq 0$

Zatem: $x \neq -\frac{1}{7}$ i $x \neq \frac{5}{6}$

$$\frac{-3}{7x+1} - \frac{4}{5-6x} < 0$$

$$\frac{-3(5-6x) - 4(7x+1)}{(7x+1)(5-6x)} < 0$$

$$\frac{-15 + 18x - 28x - 4}{(7x+1)(5-6x)} < 0$$

$$\frac{-10x - 19}{(7x+1)(5-6x)} < 0$$

$$(-10x - 19)(7x+1)(5-6x) < 0$$

$$-10 \cdot 7 \cdot (-6) \left(x + \frac{19}{10}\right) \left(x + \frac{1}{7}\right) \left(x - \frac{5}{6}\right) < 0$$



$$x \in (-\infty; -\frac{19}{10}) \cup (-\frac{1}{7}; \frac{5}{6})$$

Przekształcamy nierówność tak, aby po jednej stronie występowała liczba 0.

Nierówność $\frac{-10x-19}{(7x+1)(5-6x)} < 0$ jest równoważna nierówności $(-10x-19)(7x+1)(5-6x) < 0$, gdy $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{7}, \frac{5}{6}\}$.

Szkieujemy wykres zmiany znaku wartości funkcji $y = 420(x + \frac{19}{10})(x + \frac{1}{7})(x - \frac{5}{6})$ i zaznaczamy liczby spełniające otrzymaną nierówność (uwzględniając założenia).

Odczytujemy rozwiązanie nierówności.

$$c) \frac{6-5x}{(x+3)(2x-1)} + \frac{x+6}{x+3} \geq 0$$

Założenia: $x+3 \neq 0$ i $2x-1 \neq 0$

Zatem: $x \neq -3$ i $x \neq \frac{1}{2}$

$$\frac{6-5x+(x+6)(2x-1)}{(x+3)(2x-1)} \geq 0$$

$$\frac{6-5x+2x^2-x+12x-6}{(x+3)(2x-1)} \geq 0$$

$$(2x^2+6x)(x+3)(2x-1) \geq 0$$

$$2x(x+3)(x+3)(2x-1) \geq 0$$

$$4x(x+3)^2\left(x-\frac{1}{2}\right) \geq 0$$



$$x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

Szkicujemy wykres zmiany znaku wartości funkcji $y = 4x(x+3)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ (liczba -3 to pierwiastek dwukrotny) i zaznaczamy liczby spełniające otrzymaną nierówność (uwzględniając założenia).

Odczytujemy rozwiązanie rozważanej nierówności.

ZADANIE Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{2x-3}{x+1} \leq 0$

b) $\frac{3}{4-5x} > 7$

c) $\frac{-2x}{(x-2)^2} \leq \frac{x+2}{x(x-2)}$

Uwaga. W powyższym przykładzie w podpunkcie c) otrzymaliśmy nierówność $4x(x+3)^2\left(x-\frac{1}{2}\right) \geq 0$. Ponieważ czynnik $(x+3)^2$ ma zawsze wartość dodatnią, więc ta nierówność jest spełniona, gdy $4x\left(x-\frac{1}{2}\right) \geq 0$. Oczywiście po rozwiązaniu tej prostszej nierówności także należy uwzględnić założenia.

zadania 1–11 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{x+5}{x-4} > 0$

c) $\frac{3-4x}{x+7} - 3 < 0$

e) $\frac{1-3x}{2-3x} \leq 2$

b) $\frac{4-x}{2x-5} \leq 0$

d) $\frac{6x+5}{3-2x} - 4 \geq 0$

f) $\frac{5x}{4+x} > -1$

2. Rozwiąż nierówność.

a) $x - \frac{1}{x} < 0$

b) $\frac{5}{x} \leq \frac{x}{5}$

c) $x+1 > \frac{1}{x+1}$

d) $\frac{1}{x^2-1} < \frac{1}{x^2}$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{5}{2x} - \frac{7}{4x+3} \leq 0$

d) $\frac{1}{x-2} < \frac{7}{8x}$

g) $\frac{2-x}{5x+3} < \frac{1-2x}{3+10x}$

b) $\frac{3}{2x-1} - \frac{5}{4x+3} \geq 0$

e) $\frac{3}{5-3x} \geq \frac{2}{4x+1}$

h) $\frac{5x+2}{4-3x} > \frac{-10x}{3+6x}$

c) $\frac{4}{5+3x} + \frac{7}{6-5x} < 0$

f) $\frac{-5}{6x-2} \leq \frac{6}{3-5x}$

i) $\frac{3x-2}{4x-7} \leq \frac{1-3x}{5-4x}$

Warto wiedzieć!

Niektóre nierówności wymierne można rozwiązywać w nieco prostszy sposób. Rozważmy nierówność:

$$\frac{5x^2}{8x+3} \geq 0 \quad \text{Założenie: } x \neq -\frac{3}{8}$$

Ponieważ wyrażenie $5x^2$ występujące w liczniku dla wszystkich liczb rzeczywistych ma wartość nieujemną, więc nierówność jest spełniona gdy:

$$8x+3 \geq 0 \quad \text{lub} \quad x=0$$

$$x \geq -\frac{3}{8}$$

Po uwzględnieniu założenia otrzymujemy rozwiązanie:

$$x \in \left(-\frac{3}{8}; +\infty\right)$$

4. Przeczytaj tekst w ramce obok i rozwiąż nierówność, korzystając z opisanej metody.

a) $\frac{2x^2}{3x+1} \leq 0$

d) $\frac{x^2-1}{-5-x^2} \geq 0$

b) $\frac{8x-3}{5x^2} \geq 0$

e) $\frac{x^2+1}{x^4+x} \geq 0$

c) $\frac{-4x^2}{2+5x} \geq 0$

f) $\frac{x^4}{x^3+1} < 0$

5. Przyjrzyj się podanej nierówności i podaj jej rozwiązanie, nie wykonując przekształceń.

a) $\frac{-(x-1)^2}{(x+7)^2} < 0$

c) $\frac{x^2}{x^2+7} \leq 0$

b) $-\frac{1}{x^2} > x^2$

d) $\frac{x^2+\sqrt{2}}{x^4+1} > 0$

6. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} < 0$

c) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} \geq 0$

e) $x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \leq 0$

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} > 0$

d) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} \leq 0$

f) $x^2 - x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} > 0$

7. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{-2}{(x+4)^2} - \frac{3}{x+4} < 0$

d) $\frac{x}{x^2+2x} \geq \frac{x-2}{x^2-3x}$

g) $\frac{2x}{x+2} + \frac{x+1}{x+2} < \frac{x-2}{x}$

b) $\frac{1}{5-2x} > \frac{x}{(5-2x)^2}$

e) $\frac{2x}{x^2-4x} < \frac{5x}{x^2-3x}$

h) $\frac{3}{x} + \frac{13}{x(x-3)} \geq \frac{x}{x-3}$

c) $\frac{2x-1}{(3-x)^4} \leq \frac{3}{(3-x)^3}$

f) $\frac{x+3}{x^2-16} > \frac{2x}{x^2-4x}$

i) $\frac{5}{x^2+x} - \frac{4}{x} \leq \frac{2-x}{x+1}$

8. Rozwiąż nierówność.

$$\text{a)} \quad \frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x(x-1)} + \frac{1}{x-1} \geq \frac{2x}{(x+1)(x-1)}$$

$$\text{b)} \quad \frac{x+3}{2x-1} - \frac{1}{x-2} \geq \frac{x-1}{2x-1} - \frac{5x}{(2x-1)^2}$$

9. Rozwiąż nierówność.

$$\text{a)} \quad \frac{x}{x^2-6x+9} + \frac{2}{x^2-9} > 0$$

$$\text{c)} \quad \frac{3}{x^2-4x+3} - \frac{x}{-x^2+5x-4} \geq 0$$

$$\text{b)} \quad \frac{1-x}{x^2+10x+25} - \frac{2}{x^2+5x} \leq 0$$

$$\text{d)} \quad \frac{x-3}{x^2-3x-10} < \frac{2x}{x^2+5x+6}$$

10. Określ dziedzinę funkcji.

$$\text{a)} \quad f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{4x+1}}$$

$$\text{c)} \quad f(x) = \sqrt{\frac{3x-2}{x-5}} - 4$$

$$\text{e)} \quad f(x) = \frac{6-x}{1-\sqrt{\frac{x-3}{x+2}}}$$

$$\text{b)} \quad f(x) = \sqrt{\frac{x}{5+2x}} + 1$$

$$\text{d)} \quad f(x) = \frac{4x-7}{\sqrt{\frac{3}{2+x}}-5}$$

$$\text{f)} \quad f(x) = \frac{-7}{\sqrt{\frac{x}{4x+1}}-2}$$

11. Jeśli pewne urządzenie kosztuje c zł, a koszt jego miesięcznej eksploatacji wynosi m zł, to po n miesiącach eksploatacji można obliczyć jego „średni miesięczny koszt” (k), korzystając ze wzoru:

$$k = \frac{c + nm}{n}$$

Przyjmijmy, że żarówka energooszczędna kosztuje 15 zł oraz że jeśli będzie włączona przez 10 godzin dziennie, to koszt zużytej przez nią w ciągu miesiąca energii wyniesie 2 zł. Przypomnijmy też, że gdyby tę żarówkę zastąpić innym typem żarówki, to koszt zakupu wyniósłby 1 zł, a miesięczny koszt eksploatacji wyniósłby 3 zł.



a) Dla każdej z tych żarówek oblicz, po jakim czasie średni miesięczny koszt będzie mniejszy od 2,50 zł.

b) Oblicz, po ilu miesiącach różnica pomiędzy średnim miesięcznym kosztem eksploatacji żarówki energooszczędnej a średnim miesięcznym kosztem eksploatacji żarówki tradycyjnej będzie mniejsza od 1 zł.

c) Żarówka energooszczędna może świecić 6000 godzin, a żarówka tradycyjna 1000 godzin. Porównaj średni miesięczny koszt eksploatacji żarówki energooszczędnej i średni miesięczny koszt eksploatacji sześciu kolejno używanych żarówek tradycyjnych, jeżeli będą świeciły przez 6000 godzin.

MINISPRAWDZIAN

51. Ile liczb całkowitych należy do zbioru rozwiązań nierówności $\frac{-x^2+1}{(x-1)(x-4)} \geq 0$?

- A. 4 B. 6 C. 5 D. 2

52. Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x+3}{x^2-9} \leq \frac{2}{x^2-3x}$ jest zbiór:

- A. $(-\infty; 0) \cup (2; 3)$ C. $(-\infty; 0) \cup (2; 3)$
 B. $(-3; 0) \cup (2; 3)$ D. $(-\infty; -3) \cup (-3; 0) \cup (2; 3)$

53. Dziedzina funkcji $f(x) = \sqrt{\frac{6}{1-x}} + x - 2$ jest zbiór:

- A. $\langle -4; -1 \rangle \cup (1; +\infty)$ C. $(-\infty; -1) \cup (1; 4)$
 B. $\langle -1; 1 \rangle \cup \langle 4; +\infty \rangle$ D. $\langle -1; 1 \rangle \cup \langle 4; +\infty \rangle$

PRZEKSZTAŁCANIE WYRAŻEŃ ALGEBRAICZNYCH

- I Zwróć uwagę, że przy przekształcaniu wzorów wykonujemy często działania podobne jak przy rozwiązywaniu równań wymiernych.

PRZYKŁAD 1 Niech R oznacza opór całkowity układu oporników przedstawionego na rysunku. Wtedy:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3}$$

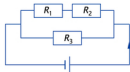
Wyznacz R_1 z tego wzoru.

$$\frac{1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{R_1 + R_2} = \frac{R_3 - R}{RR_3}$$

$$R_1 + R_2 = \frac{RR_3}{R_3 - R}$$

$$R_1 = \frac{RR_3}{R_3 - R} - R_2$$



Litery występujące we wzorze oznaczają opory, które są liczbami dodatnimi, więc wszystkie niezbędne założenia: $R \neq 0$, $R_1 + R_2 \neq 0$, $R_3 \neq 0$ są spełnione.

Ponieważ opór całkowity R jest różny od R_3 , więc $R_3 - R \neq 0$. Zatem możemy skorzystać z własności proporcji.

ZADANIE Ze wzoru $\frac{1}{A} = \frac{1}{B-C} - \frac{1}{D}$ wyznacz B .

zadania 1-3 ►

- II Umiejętność przekształcania wyrażeń algebraicznych przydaje się też czasem przy dowodzeniu różnych własności liczb.

PRZYKŁAD 2 Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej spełniona jest nierówność.

$$\frac{a^2}{4+a^4} \leq \frac{1}{4} \quad \left| \cdot 4(4+a^4) \right.$$

Zapisujemy kolejne nierówności równoważne danej. Suma $4+a^4$ jest dodatnia dla każdej liczby rzeczywistej a .

$$4a^2 \leq 4+a^4$$

$$a^4 - 4a^2 + 4 \geq 0$$

$$(a^2 - 2)^2 \geq 0$$

Otrzymaną nierówność spełniają wszystkie liczby rzeczywiste.

$$a \in \mathbb{R}$$

ZADANIE Wykaż, że każda liczba rzeczywista spełnia nierówność $\frac{a^2}{1+a^4} \leq \frac{1}{2}$.

zadania 4–11 ►

III **PRZYKŁAD 3** Znajdź wszystkie wartości m , dla których podane równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2 spełniające warunek $\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} < 1$.

$$x^2 - x + m^2 - 4 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (m^2 - 4) = -4m^2 + 17$$

$$\Delta > 0, \text{ gdy } -4m^2 + 17 > 0, \text{ czyli } m \in \left(-\frac{\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$$

$$\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} < 1$$

$$x_1^3 + x_2^3 < x_1^2 + x_2^2$$

$$x_1^3 + x_2^3 - (x_1^2 + x_2^2) < 0$$

$$(x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 - [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] < 0$$

Korzystamy ze wzorów:

$$(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3$$

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

$$(x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 - (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 < 0$$

Korzystamy ze wzorów Viète'a:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 1$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} = m^2 - 4$$

$$1^3 - 3(m^2 - 4) \cdot 1 - 1^2 + 2(m^2 - 4) < 0$$

$$-m^2 + 4 < 0, \text{ czyli } m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$$

Zatem:

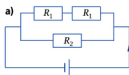
$$m \in \left(-\frac{\sqrt{17}}{2}; -2\right) \cup \left(2; \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$$

ZADANIE Znajdź wszystkie wartości p , dla których równanie $x^2 + px + 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2 spełniające warunek $\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} > 2$.

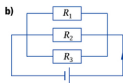
zadania 12–14 ►

ZESTAW ZADAŃ

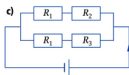
1. Opór R układu oporników przedstawionego na rysunku można obliczyć, korzystając z podanego wzoru. Wyznacz R_2 .



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{R_2}$$



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_1 + R_3}$$

2. Przekształć wzór tak, aby wyznaczyć wskazaną wielkość.

a) $\frac{F_1}{d} + \frac{F_2}{f} = 1, \quad f$

d) $p_1 - p_2 = c \left(\frac{T_1}{v_1} - \frac{T_2}{v_2} \right), \quad v_2$

b) $v_0 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad m_1$

e) $C = \frac{p}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}, \quad r_1$

c) $v_1 = v \cdot \frac{1 + \frac{w}{c}}{1 + \frac{u}{c}}, \quad w$

f) $\frac{1}{F} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad n_2$

3. W ramce obok podano definicje różnych średnich dwóch liczb — harmonicznej, geometrycznej i arytmetycznej.

a) Wykaż, że $H = \frac{G^2}{A}$.

b) Wykaż, że $\frac{2}{H} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

- c) Wykaż, że jeśli pojazd pokonuje połowę drogi z prędkością v_1 , a drugą połowę jedzie z prędkością v_2 , to średnia prędkość na całym dystansie jest średnią harmoniczną prędkości v_1 i v_2 .

- d) Wykaż, że iloczyn średniej harmonicznej i średniej arytmetycznej dwóch liczb jest równy iloczynowi tych liczb.

Dla liczb dodatnich a i b możemy obliczać następujące średnie:

H — średnia harmoniczna liczb a i b

$$H = \frac{2ab}{a+b}$$

G — średnia geometryczna liczb a i b

$$G = \sqrt{ab}$$

A — średnia arytmetyczna liczb a i b

$$A = \frac{a+b}{2}$$

4. Uprość wyrażenia.

a) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \quad \text{ i } \quad \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

b) $(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}) \quad \text{ i } \quad \frac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}} + \frac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

5. a) Zapisz $(\sqrt{x} - 1)^2$ w postaci sumy. Wykaż, że gdy $x \geq 1$, to zachodzi równość:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x+1}} = 2$$

b) Zapisz $(2 + \sqrt{x-4})^2$ w postaci sumy. Wykaż, że gdy $x \geq 8$, to zachodzi równość:

$$\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = 4$$

6. Niech a, b i c będą liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek $0 < a < b < c$.

a) Wykaż, że $\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b}{2}$.

b) Wykaż, że $\frac{c}{2} - \frac{a}{3} > \frac{b}{6}$.

c) Wykaż, że $\frac{b}{2} > \frac{3a-c}{4}$.

7. Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a i b spełniona jest podana nierówność.

a) $\frac{a^2+b^2}{2ab} \geq 1$

b) $\frac{ab}{(a+b)^2} \leq \frac{1}{4}$

c) $\frac{(a-b)^2}{ab} \geq -4$

8. Wykaż, że dla dowolnych dwóch liczb dodatnich a i b ich średnie (arytmetyczna, geometryczna i harmoniczna) spełniają warunek $A \geq G \geq H$ (zob. ramka na s. 28).

9. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność:

$$\frac{x(x+1)}{y} + \frac{y(y+1)}{x} > 2$$

10. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y takich, że $x < y$ i dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej m prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{x+m}{y+m} + \frac{y}{x} > 2$$

11. Udowodnij, że jeżeli a i b są liczbami rzeczywistymi i $a+b \geq 0$, to prawdziwa jest nierówność:

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$$

◀ ||| **12.** Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których równanie $kx^2 + kx + 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste, takie że $x_1^2 + x_2^2 > x_1^2 x_2^2$.

13. Dane jest równanie $x^2 + (p+1)x - p^2 + 1 = 0$. Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których równanie to ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 , takie że $x_1^3 + x_2^3 > 2x_1x_2$.

14. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $mx^2 + x + 2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2 spełniające warunek $x_1^2 + x_2^2 > 1$.

MINISPRAWDZIAN

51. Wielkość m_2 wyznaczoną ze wzoru $V_0 = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}$ można zapisać w postaci:

A. $m_2 = \frac{m_1(V_0 + V_1)}{V_0 + V_2}$

C. $m_2 = \frac{V_0 - V_2}{m_1(V_0 + V_1)}$

B. $m_2 = \frac{m_1(V_1 - V_0)}{V_0 - V_2}$

D. $m_2 = \frac{m_1 V_1}{V_2}$

52. Wartość wyrażenia $\frac{2a^2}{a+2} + \frac{4a^2-8a}{a^2-4}$ dla dowolnej liczby całkowitej a , gdzie $a \neq 2$ i $a \neq -2$, jest:

A. ułamkiem właściwym

C. liczbą dodatnią

B. liczbą parzystą

D. mniejsza od 4

HIPERBOLA. PRZESUWANIE HIPERBOLI

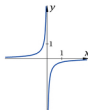
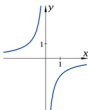
1 Poniżej przedstawiono fragmenty wykresów kilku różnych funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$.

$$y = \frac{2}{x}$$

$$y = -\frac{1,2}{x}$$

$$y = \frac{2}{3x}$$

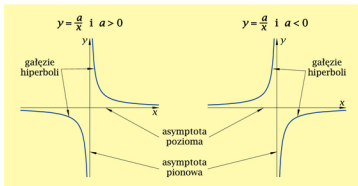
$$y = -\frac{1}{4x}$$



ĆWICZENIE A Zaznacz w układzie współrzędnych kilka punktów należących do wykresu funkcji $f(x) = -\frac{2}{x}$ i naszkicuj jej wykres.

Krzywa, która jest wykresem funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$, to **hiperbola**. Składa się ona z dwóch rozłącznych części — gałęzi hiperboli. Środkiem symetrii tej krzywej jest początek układu współrzędnych.

Oś y jest jej asymptotą pionową, a oś x jest asymptotą poziomą.



Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$, jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera, czyli $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Jeśli $a > 0$, to funkcja ta jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$, a także jest malejąca w przedziale $(0; +\infty)$.

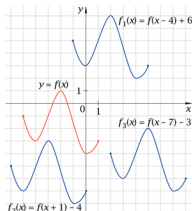
Jeśli $a < 0$, to funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$, a także jest rosnąca w przedziale $(0; +\infty)$.

Uwaga. Funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a > 0$, nie jest malejąca w całej swej dziedzinie, ponieważ można wskazać takie liczby x_1 oraz x_2 należące do dziedziny funkcji, dla których warunek $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ nie jest spełniony — mogą to być na przykład liczby $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$. Podobnie funkcja $f(x) = \frac{x}{a}$, gdzie $a < 0$, nie jest rosnąca w całej swej dziedzinie.

Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$ oraz wykresy innych funkcji, które otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o pewne wektory.

Ogólna reguła dotycząca przesuwania wykresów funkcji jest następująca:

Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przesuniemy o wektor $[p, q]$, to otrzymamy wykres funkcji $y = f(x - p) + q$.



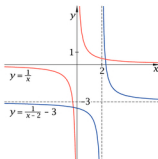
Jeśli wykres funkcji:

$$y = \frac{1}{x}$$

przesuniemy o wektor $[2, -3]$, to otrzymamy wykres funkcji:

$$y = \frac{1}{x-2} - 3$$

Podobnie przesuną się też asymptoty i przetną się w punkcie $(2, -3)$. Współrzędne punktów leżących na asymptocie pionowej (równoległej do osi y) spełniają warunek $x = 2$, a współrzędne punktów leżących na asymptocie poziomej spełniają warunek $y = -3$.



Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, a zbiorem wartości jest $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

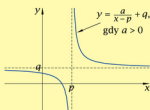
ĆWICZENIE B Naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{-2}{x}$, a następnie przesun ten wykres o wektor $[-3, -4]$. Zapisz wzór otrzymanej funkcji i ustal równania prostych będących asymptotami jej wykresu.

Wykresem funkcji:

$$y = \frac{a}{x-p} + q, \text{ gdzie } a \neq 0,$$

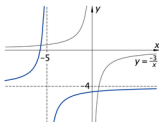
jest hiperbola, której asymptoty są opisane równaniami $x = p$ oraz $y = q$.

Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{p\}$, a zbiór jej wartości to $\mathbb{R} \setminus \{q\}$.



PRZYKŁAD

Określ dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{-3}{x+5} - 4$, naszkicuj jej wykres, określ przedziały monotoniczności tej funkcji i znajdź współrzędne punktów przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych.



Najpierw szkicujemy wykres funkcji $y = -\frac{3}{x}$, potem asymptoty szukanego wykresu, czyli proste o równaniach $y = -4$ i $x = -5$, a następnie szkicujemy wykres funkcji f .

Dziedzina: $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$

Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -5)$, a także jest rosnąca w przedziale $(-5; +\infty)$.

Jeśli $x = 0$, to $y = \frac{-3}{0+5} - 4 = -4\frac{3}{5}$.

Zatem punkt przecięcia wykresu funkcji f z osią y to $(0, -4\frac{3}{5})$.

Jeśli $y = 0$, to $\frac{-3}{x+5} - 4 = 0$.

Stąd:

$$\frac{-3}{x+5} = 4 \quad | \cdot (x+5)$$

$$-3 = 4x + 20$$

$$x = -\frac{23}{4} = -5\frac{3}{4}$$

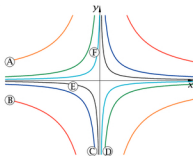
Obie strony równania możemy pomnożyć przez $x+5$, bo $x \neq -5$.

Zatem punkt przecięcia wykresu funkcji f z osią x to $(-5\frac{3}{4}, 0)$.

ZADANIE Naskicuj wykres funkcji $y = \frac{2}{x-3} + 5$, określ przedziały monotoniczności tej funkcji i znajdź współrzędne punktów przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych.

zadania 1-22 ►

ZESTAW ZADAŃ



1. Na rysunku obok przedstawione są hiperbole o równaniach:

① $y = \frac{1}{x}$

④ $y = -\frac{1}{x}$

② $y = \frac{5}{x}$

⑤ $y = -\frac{5}{x}$

③ $y = \frac{0,3}{x}$

⑥ $y = -\frac{0,3}{x}$

Dopasuj wzory do wykresów.

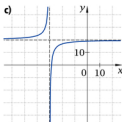
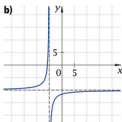
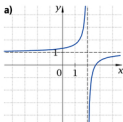
2. Wykres podanej funkcji można otrzymać w wyniku przesunięcia pewnej hiperboli, której asymptotami są osie układu współrzędnych. Zapisz wzór funkcji, której wykresem jest ta hiperbola.

a) $f(x) = \frac{3}{7(x-2)} - 1$

b) $f(x) = -\frac{1}{2(x+7)} + \sqrt{2}$

c) $f(x) = \frac{5}{2x-6} - 8$

3. Hiperbole, której fragment pokazano na rysunku, otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = -\frac{2}{3x}$. Zapisz wzór funkcji, której wykres przedstawiono na rysunku.



4. Zapisz równania asymptot wykresu podanej funkcji.

a) $y = \frac{3}{x-1} + 2$

b) $y = \frac{-0,7}{x+12} - \frac{1}{3}$

c) $y = \frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{3}} - \sqrt{5}$

d) $y = \frac{7}{3(x-\frac{1}{2})} + \frac{4}{5}$

5. a) Podaj współrzędne punktu przecięcia asymptot wykresu funkcji $y = -\frac{10}{x+7} - 9$.

b) Podaj współrzędne punktów przecięcia czterech prostych, które są asymptotami wykresów funkcji $y = \frac{-6}{x-12} + 8$ oraz $y = \frac{6}{x+7} - 15$.

6. Podaj wzory kilku funkcji, których wykresami są hiperbole o asymptotach:

a) $x = -5$ i $y = 3$

b) $x = 0,6$ i $y = 0$

7. Przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi wykres podanej funkcji?

a) $y = \frac{6}{x-3}$

b) $y = \frac{-2}{x} + 7$

c) $y = \frac{1}{x+7} + 5$

d) $y = \frac{-\sqrt{2}}{x-4} + 0,7$

8. Czy wykres funkcji $y = \frac{7}{x-2} + 3$ przechodzi przez wszystkie ćwiartki układu współrzędnych? Odpowiedź uzasadnij.

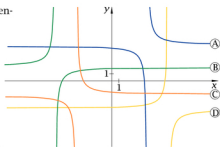
9. Na rysunku przedstawiono fragmenty wykresów następujących funkcji:

① $y = \frac{2}{x+5} - 2$

② $y = \frac{2}{x-5} + 5$

③ $y = -\frac{2}{x+8} + 2$

④ $y = -\frac{2}{x-8} - 4$



Dopasuj wzory funkcji do wykresów.

10. Znajdź współrzędne punktów, w których wykres podanej funkcji przecina oś układu współrzędnych. Naskicuj ten wykres. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji i podaj, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

a) $f(x) = \frac{\frac{1}{2}}{x+6}$

c) $f(x) = \frac{3}{x+2} - 3$

e) $f(x) = -\frac{1}{x-4} + 2$

b) $f(x) = \frac{-3}{x} + 1$

d) $f(x) = \frac{1}{5(x-1)} + 0,2$

f) $f(x) = \frac{2}{3-x} - \frac{1}{3}$

11. Podaj liczbę, dla której funkcja f nie jest określona. Naskicuj jej wykres i ustal, dla jakiej wartości a równanie $f(x) = a$ nie ma rozwiązań.

a) $f(x) = \frac{2}{3x} - 4$

c) $f(x) = -\frac{5}{x-7} + 2$

e) $f(x) = \frac{12}{x+\sqrt{3}} + 18$

b) $f(x) = \frac{0,6}{x-0,8}$

d) $f(x) = \frac{13}{x+3} - \frac{1}{7}$

f) $f(x) = \frac{-4}{x-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

12. Naskicuj wykres funkcji $y = f(x)$, a następnie skorzystaj z wykresu i wyznacz zbiór argumentów, dla których wartości funkcji należą do przedziału $(0; 3)$.

a) $f(x) = \frac{-6}{x} + 3$

c) $f(x) = \frac{-3}{x+1} + 3$

e) $f(x) = \frac{4}{x+2} - 1$

b) $f(x) = \frac{6}{x} - 3$

d) $f(x) = \frac{6}{x-4} + 3$

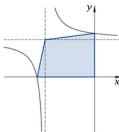
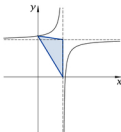
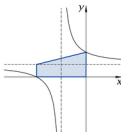
f) $f(x) = \frac{-4}{2x-6}$

13. Na poniższym rysunku przedstawiono fragment hiperboli będącej wykresem podanej funkcji. Przerywane linie to asymptoty tej hiperboli. Oblicz pole zacienionej figury.

a) $y = \frac{2}{x+2} + 1$

b) $y = -\frac{0,6}{x-2} + 3$

c) $y = \frac{2}{x+4} + 3$



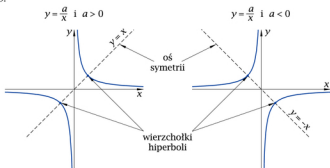
14. Znajdź wzór funkcji, której wykresem jest hiperbola o asymptocie pionowej o równaniu $x = 1$, przecinająca oś układu współrzędnych w punktach o współrzędnych $(0, 4)$ i $(2, 0)$.

15. a) Hiperbolę o równaniu $y = \frac{3}{x+2} - 5$ przesunięto o wektor $[4, 2]$. Zapisz wzór funkcji, której wykres otrzymano.

b) Ustal, o jaki wektor należałoby przesunąć hiperbolę o równaniu $y = \frac{-2}{x+1} - 3$, aby otrzymać hiperbolę o równaniu $y = \frac{-2}{x-2} + 7$.

Warto wiedzieć!

Każda hiperbola ma dwie osie symetrii. Wierzchołkami hiperboli nazywamy punkty hiperboli, które leżą na jednej z tych osi, czyli leżą na przecięciu hiperboli o równaniu $y = \frac{a}{x}$ z prostą o równaniu $y = x$, gdy $a > 0$, lub z prostą o równaniu $y = -x$, gdy $a < 0$.



16. Przeczytaj informacje w ramce. Znajdź współrzędne wierzchołków podanej hiperboli, a następnie ją naszkicuj.

a) $y = \frac{4}{x}$

b) $y = -\frac{0,25}{x}$

c) $y = \frac{9}{4x}$

d) $y = -\frac{2}{x}$

17. Przeczytaj informacje w ramce. Znajdź wzory opisujące współrzędne wierzchołków hiperboli o równaniu $y = \frac{a}{x}$, gdy $a > 0$ oraz gdy $a < 0$.

18. Przeczytaj informacje w ramce. Podaj współrzędne wierzchołków hiperboli o równaniu $y = \frac{9}{x}$, a następnie znajdź współrzędne wierzchołków:

a) hiperboli otrzymanej w wyniku przesunięcia hiperboli opisanej równaniem $y = \frac{9}{x}$ o wektor $[-3, 2]$,

b) hiperboli, która jest wykresem funkcji $y = \frac{9}{x-10} - 7$.

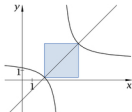
19. Przeczytaj informacje w ramce. Znajdź współrzędne wierzchołków hiperboli.

a) $y = \frac{1}{x+4}$

b) $y = \frac{1}{x-4} - 7$

c) $y = \frac{-2}{x-3} + 1$

d) $y = \frac{-3}{x+1} - 8$



20. Hiperbola przedstawiona na rysunku jest wykresem funkcji:

$$y = \frac{3}{x-4} + 2$$

Zaznaczona prosta jest osią symetrii tego wykresu. Oblicz pole zacięniowanego kwadratu.

21. Znajdź równania prostych, które są osiami symetrii hiperboli.

a) $y = \frac{-5}{x} + 2$

b) $y = \frac{1}{x-2} + 6$

c) $y = \frac{7}{x+5} - 9$

d) $y = \frac{-5}{x-5} + 2$

22. Podaj przykład wzoru funkcji, której wykresem jest hiperbola i która:

a) nie ma miejsc zerowych i przecina oś y w punkcie $(0, 2)$,

b) przyjmuje wartości dodatnie tylko wtedy, gdy $x > 3$,

c) przyjmuje wartości ujemne tylko wtedy, gdy $x > 1$.

MINISPRAWDZIAN

S1. Wykres funkcji $f(x) = \frac{2}{x+7} - 3$ ma takie same asymptoty jak wykres funkcji:

A. $g(x) = \frac{2}{x-7} + 3$

B. $g(x) = \frac{-2}{x-7} - 3$

C. $g(x) = \frac{-1}{x+7} - 3$

D. $g(x) = \frac{3}{x+7} - 2$

S2. Wykres funkcji $f(x) = \frac{-1}{x+4} - 5$ nie przechodzi przez:

A. ćwiartkę I

B. ćwiartkę II

C. ćwiartkę III

D. ćwiartkę IV

S3. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x+b} + c$. Wynika stąd, że:

A. $a = 2$

C. $c = 6$

B. $b = -1$

D. $a + b + c = 0$

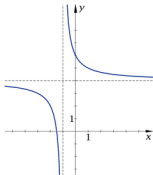
S4. Którą z poniższych własności ma funkcja f określona wzorem $f(x) = -2 - \frac{4}{x+1}$?

A. Miejsce zerowe funkcji f to $x = -4$.

B. Wykres funkcji f przecina oś y w punkcie o współrzędnych $(0, -2)$.

C. Asymptotą pionową wykresu funkcji f jest prosta o równaniu $x = 1$.

D. Wykres funkcji f nie przechodzi przez I ćwiartkę układu współrzędnych.



FUNKCJE WYMIERNE

- 1 Funkcję mającą postać $f(x) = \frac{W(x)}{V(x)}$, gdzie $W(x)$ i $V(x)$ są wielomianami i $V(x)$ nie jest wielomianem zerowym, nazywamy **funkcją wymierną**. Dziedziną takiej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych x , dla których $V(x) \neq 0$.

Zauważ, że funkcje wielomianowe są także funkcjami wymiernymi.

Poniżej zapisano trzy wzory funkcji wymiernych mających postać $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

$$y = \frac{3x-6}{x-2}$$

$$y = \frac{2x+7}{2x+6}$$

$$y = \frac{3x-4}{2}$$

Dziedzinami tych funkcji są odpowiednio zbiory:

$$\mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$\mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$$\mathbb{R}$$

Wyrażenie występujące po prawej stronie każdego z tych wzorów można przekształcić:

$$\frac{3x-6}{x-2} = \frac{3(x-2)}{x-2} = 3$$

$$\frac{2x+7}{2x+6} = \frac{2x+6+1}{2x+6} = 1 + \frac{1}{2x+6}$$

$$\frac{3x-4}{2} = \frac{3}{2}x - 2$$

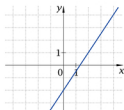
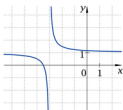
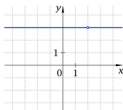
Wzory tych funkcji można więc zapisać w postaci:

$$y = 3$$

$$y = \frac{1}{2(x+3)} + 1$$

$$y = \frac{3}{2}x - 2$$

Wykresem funkcji $y = \frac{3x-6}{x-2}$ jest prosta bez punktu, funkcji $y = \frac{2x+7}{2x+6}$ — hiperbola, a funkcji $y = \frac{3x-4}{2}$ — prosta.



Przykłady funkcji
homograficznych:

$$y = \frac{-x+1}{3x-5}$$

$$y = \frac{-5}{2x-7}$$

$$y = \frac{2x+\sqrt{3}}{x}$$

$$y = \frac{4x-3}{2(x-\sqrt{3})}$$

Jeśli funkcję można określić za pomocą wzoru:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

a wzoru tego nie można uprościć do postaci liniowej $y = px+q$ (tzn. $ad \neq cb$), to wykresem tej funkcji jest hiperbola i funkcję tę nazywamy **homograficzną**.

ĆWICZENIE A a) Trzy z podanych funkcji nie są homograficzne. Wskaż je.

$$y = \frac{3x+6}{2x+1}$$

$$y = \frac{7x+3}{2x}$$

$$y = \frac{6x-4}{5}$$

$$y = \frac{9x-6}{2-3x}$$

$$y = \frac{x+40}{0,1x+4}$$

b) Przekształć każdy z podanych wzorów funkcji do postaci $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

$$f(x) = \frac{2}{x-1} + 5$$

$$g(x) = \frac{1}{3(x+2)} - 3$$

$$h(x) = \frac{-3}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} + 1$$

Wzór funkcji wymiernej, której wykresem jest hiperbola, można zapisać w postaci ogólnej:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

albo w postaci kanonicznej:

$$y = \frac{a}{x-p} + q$$

Przykłady wzorów funkcji, których wykresami są hiperbole:

w postaci ogólnej

$$y = \frac{-x+7}{x-5}$$

$$y = \frac{6x+2}{2x+1}$$

$$y = \frac{x-4}{3x}$$

w postaci kanonicznej

$$y = \frac{2}{x-5} - 1$$

$$y = \frac{-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}} + 3$$

$$y = \frac{-\frac{4}{3}}{x} + \frac{1}{3}$$

Jeśli funkcja $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ nie jest funkcją stałą ani funkcją liniową, to aby narysować jej wykres, będziemy przekształcać ten wzór tak, aby otrzymać jego postać kanoniczną. Takie przekształcenie jest zawsze wykonalne.

PRZYKŁAD 1 Przekształć wzór funkcji tak, aby otrzymać jego postać kanoniczną.

a) $f(x) = \frac{5x+4}{x-1}$

$$\frac{5x+4}{x-1} = \frac{5(x-1)+5+4}{x-1} = \frac{5(x-1)+9}{x-1} = \frac{5(x-1)}{x-1} + \frac{9}{x-1} = 5 + \frac{9}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{9}{x-1} + 5$$

b) $f(x) = \frac{x-3}{-2x+5}$

$$\frac{x-3}{-2x+5} = \frac{-\frac{1}{2}(-2x+5) + \frac{5}{2} - 3}{-2x+5} = \frac{-\frac{1}{2}(-2x+5) - \frac{1}{2}}{-2x+5} = -\frac{1}{2} + \frac{-\frac{1}{2}}{-2x+5} = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{x-\frac{5}{2}}$$

$$f(x) = \frac{\frac{1}{4}}{x-\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}$$

ZADANIE Przekształć wzór funkcji tak, aby otrzymać jego postać kanoniczną.

a) $y = \frac{x}{x+3}$

b) $f(x) = \frac{4x+6}{x+3}$

c) $g(x) = \frac{4x+6}{2x-1}$

zadania 1-10 ►

II PRZYKŁAD 2 Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{3x-5}{2x+1}$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -\frac{1}{2})$.

Niech $x_1 \in (-\infty; -\frac{1}{2})$, $x_2 \in (-\infty; -\frac{1}{2})$ i $x_1 < x_2$.

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{3x_2-5}{2x_2+1} - \frac{3x_1-5}{2x_1+1} = \frac{(3x_2-5)(2x_1+1) - (3x_1-5)(2x_2+1)}{(2x_2+1)(2x_1+1)} =$$

$$= \frac{6x_1x_2 + 3x_2 - 10x_1 - 5 - 6x_1x_2 - 3x_1 + 10x_2 + 5}{(2x_2+1)(2x_1+1)} =$$

$$= \frac{13x_2 - 13x_1}{(2x_2+1)(2x_1+1)} = \frac{13(x_2 - x_1)}{(2x_2+1)(2x_1+1)} > 0$$

$x_2 > x_1$, więc $x_2 - x_1 > 0$

$x_1 \in (-\infty; -\frac{1}{2})$ oraz $x_2 \in (-\infty; -\frac{1}{2})$,
więc $2x_2 + 1 < 0$ i $2x_1 + 1 < 0$

Zatem $f(x_2) - f(x_1) > 0$, czyli $f(x_2) > f(x_1)$.

Wykazaliśmy więc, że funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -\frac{1}{2})$.

ZADANIE Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{7-2x}{3x-6}$ jest malejąca w przedziale $(2; +\infty)$.

zadanie 11 ►

III Korzystając z wykresów funkcji typu $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, niektóre nierówności wymierne możemy interpretować graficznie i rozwiązywać je nieco inaczej niż dotychczas.

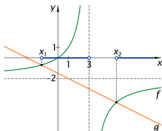
PRZYKŁAD 3 Naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = \frac{-2x}{x-3}$ i $g(x) = \frac{-x-3}{2}$. Korzystając z rysunku, odczytaj rozwiązanie nierówności $\frac{-2x}{x-3} > \frac{-x-3}{2}$.

$$\frac{-2x}{x-3} = \frac{-2(x-3)-6}{x-3} = \frac{-6}{x-3} - 2$$

Doprowadzamy wzór funkcji f do postaci kanonicznej.

$$f(x) = \frac{-6}{x-3} - 2$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$



Szkicujemy wykresy obu funkcji.

$$\frac{-2x}{x-3} = \frac{-x-3}{2}$$

$$-4x = -(x-3)(x+3)$$

$$x^2 - 4x - 9 = 0, \quad \Delta = 52$$

$$x_1 = \frac{4-2\sqrt{13}}{2} = 2 - \sqrt{13}$$

$$x_2 = \frac{4+2\sqrt{13}}{2} = 2 + \sqrt{13}$$

$$x \in (2 - \sqrt{13}; 3) \cup (2 + \sqrt{13}; +\infty)$$

Obliczamy pierwsze współrzędne punktów przecięcia hiperboli z prostą.

Nierówność jest spełniona dla argumentów, dla których hiperbola znajduje się nad prostą.

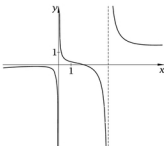
ZADANIE Naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = \frac{2x-5}{x-3}$ i $g(x) = 2x - 1$. Korzystając z rysunku, znajdź rozwiązanie nierówności $\frac{2x-5}{x-3} \leq 2x - 1$.

zadania 12-15 ►

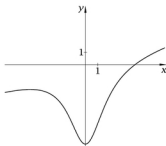
IV

ĆWICZENIE B Poniżej przedstawiono wzory i fragmenty wykresów kilku funkcji wymiernych, które nie są funkcjami homograficznymi. Ustal dziedzinę każdej z tych funkcji oraz miejsca zerowe.

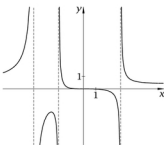
$$f(x) = \frac{0,1(x^3 - 8)}{x^2 - 4x}$$



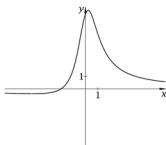
$$g(x) = \frac{0,3(x^3 - 64)}{x^2 + 3}$$



$$h(x) = \frac{0,5x^3}{(x+4)(x+2)(x-3)}$$

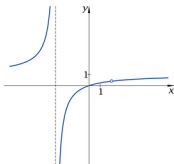


$$i(x) = \frac{3x+6}{x^2+1}$$

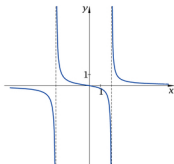


Przyjrzyj się fragmentom wykresów funkcji przedstawionym poniżej. Zwróć uwagę, że dziedziną każdej z tych funkcji jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$. Wszystkie wykresy mają asymptotę pionową o równaniu $x = -3$, a tylko dwa z nich mają asymptotę pionową o równaniu $x = 2$.

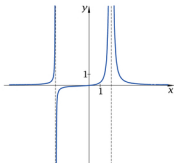
$$y = \frac{(x-2)x}{(x-2)(x+3)}$$



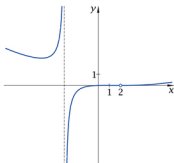
$$y = \frac{x}{(x-2)(x+3)}$$



$$y = \frac{(x-2)x}{(x-2)^3(x+3)}$$



$$y = \frac{(x-2)^3 x}{50(x-2)(x+3)}$$



Zauważ, że wzór funkcji wymiernej $\frac{W(x)}{V(x)}$ można uprościć, gdy wielomiany $W(x)$ i $V(x)$ mają wspólne pierwiastki. Jeśli po uproszczeniu wzoru funkcji wymiernej otrzymamy $\frac{U(x)}{Q(x)}$, gdzie wielomiany $U(x)$ i $Q(x)$ nie mają wspólnych pierwiastków, to asymptotą pionową wykresu będzie każda prosta opisana równaniem $x = a$, gdzie a jest pierwiastkiem wielomianu $Q(x)$.

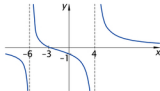
ĆWICZENIE C Wyznacz równania asymptot pionowych wykresu podanej funkcji.

a) $y = \frac{x(x+1)^2}{(x+1)(x+2)}$

b) $y = \frac{-x(x-1)(x+2)(x-\sqrt{5})}{(x+2)^2(x-\sqrt{5})}$

c) $y = \frac{3x^2+4}{x^2-9}$

PRZYKŁAD 4 Rysunek przedstawia fragment wykresu pewnej funkcji. Wiadomo, że wzór tej funkcji ma postać $f(x) = \frac{ax+b}{(x+c)(x+d)}$. Zapisz wzór funkcji f , zastępując litery a, b, c, d odpowiednimi liczbami.



Asymptotami pionowymi są proste o równaniach:

$$x = -6 \text{ i } x = 4$$

Zatem wzór ma postać:

$$f(x) = \frac{ax+b}{(x+6)(x-4)}$$

$$f(0) = -1 \text{ i } f(-3) = 0$$

$$\frac{a \cdot 0 + b}{(0+6)(0-4)} = -1, \text{ stąd } b = 24$$

$$\frac{-3 \cdot a + 24}{(-3+6)(-3-4)} = 0, \text{ stąd } a = 8$$

$$f(x) = \frac{8x+24}{(x+6)(x-4)}$$

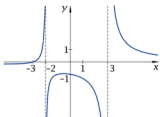
Wykres ma dwie asymptoty pionowe: $x = -6$ i $x = 4$, więc liczby -6 i 4 są pierwiastkami wielomianu $(x+c)(x+d)$.

Z wykresu odczytujemy współrzędne punktów przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych.

Z równości $f(0) = -1$ obliczamy b .

Z równości $f(-3) = 0$ obliczamy a .

ZADANIE Rysunek przedstawia fragment wykresu pewnej funkcji. Wiadomo, że wzór tej funkcji ma postać $f(x) = \frac{ax+b}{(x+c)(x+d)}$. Zapisz wzór funkcji f , zastępując litery a, b, c, d odpowiednimi liczbami.



ĆWICZENIE D Jeśli dysponujesz kalkulatorem graficznym lub komputerem, użyj ich do sporządzenia wykresów kilku funkcji wymiernych.

zadania 16–19 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Zapisz wzór funkcji w postaci kanonicznej i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = \frac{-3x+5}{x}$

d) $f(x) = \frac{-x+4}{x+2}$

g) $f(x) = \frac{x+4}{2x+5}$

b) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

e) $f(x) = \frac{2x+8}{x+3}$

h) $f(x) = \frac{-x+6}{-3x+2}$

c) $f(x) = \frac{-4x-2}{-4x+1}$

f) $f(x) = \frac{-6x+5}{2x-3}$

i) $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$

2. Określ dziedzinę i zbiór wartości funkcji.

a) $y = \frac{-6x}{2x-9}$

b) $y = \frac{5x-12}{5x+12}$

c) $y = \frac{x+5}{3x-2}$

3. Znajdź równania asymptot wykresu podanej funkcji.

a) $f(x) = \frac{x+11}{x}$

c) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

e) $f(x) = \frac{8x-6}{4x-1}$

b) $f(x) = \frac{6x-9}{x}$

d) $f(x) = \frac{5x+12}{x+2}$

f) $f(x) = \frac{-5x+1}{3x-4}$

4. Znajdź współrzędne punktu przecięcia asymptot wykresu funkcji.

a) $f(x) = \frac{4x-21}{x}$

c) $f(x) = \frac{3x-15}{x-6}$

e) $f(x) = \frac{2x-2}{3x-2}$

b) $f(x) = \frac{-6x+13}{2x}$

d) $f(x) = \frac{10x-3}{2x+1}$

f) $f(x) = \frac{-3x}{5x+2}$

5. Naszkicuj wykres funkcji.

a) $y = \left| \frac{-2x+6}{x-1} \right|$

b) $y = \left| \frac{-3x}{x-2} \right|$

c) $y = \left| \frac{x+1}{x+3} \right|$

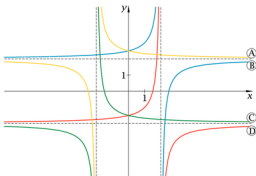
6. Na rysunku obok przedstawiono fragmenty wykresów następujących funkcji:

① $y = \frac{2x-5}{x-2}$

② $y = \frac{2x+5}{x+2}$

③ $y = \frac{-2x+3}{x-2}$

④ $y = \frac{-2x-3}{x+2}$



Dopasuj powyższe wzory do wykresów.

7. Znajdź współrzędne punktów przecięcia wykresu podanej funkcji z osiami układu współrzędnych, a następnie naszkicuj wykres tej funkcji i określ jej przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = \frac{-x+6}{2x-4}$

b) $f(x) = \frac{3x-4}{-x+2}$

c) $f(x) = \frac{-6x-14}{-2x+7}$

8. a) Ustal, jakiej wartości nie przyjmuje funkcja $y = \frac{2x+3}{5x-1}$.

b) Wyznacz wartość a , dla której prosta o równaniu $y = a$ nie przecina wykresu funkcji:

$$f(x) = \frac{7x-2}{3x+5}$$

9. a) Ustal, ile miejsc zerowych może mieć funkcja homograficzna $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

b) Ustal, ile miejsc zerowych ma funkcja homograficzna $y = \frac{ax+b}{x+1}$ w zależności od wartości a i b .

• **10.** Zbadaj monotoniczność funkcji.

a)

$$y = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & \text{gdy } x \leq -3 \\ -x-4, & \text{gdy } x > -3 \end{cases}$$

b)

$$y = \begin{cases} \frac{x-1}{x-2}, & \text{gdy } x < 2 \\ \frac{-x+1}{x-2}, & \text{gdy } x > 2 \end{cases}$$

c)

$$y = \begin{cases} -x^2 + x, & \text{gdy } x \leq 2 \\ -\frac{x}{x-1}, & \text{gdy } x > 2 \end{cases}$$

◀ **11. a)** Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ jest malejąca w przedziale $(-\infty; 3)$.

b) Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x+6}{2x+4}$ jest malejąca w przedziale $(-\infty; -2)$.

c) Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ jest rosnąca w przedziale $(-1; +\infty)$.

◀ **12.** Naszkicuj wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = g(x)$, a następnie znajdź współrzędne punktów przecięcia tych wykresów.

a) $f(x) = \frac{1}{x-1}, \quad g(x) = x$

c) $f(x) = \frac{1}{x+6}, \quad g(x) = \frac{x}{x+3}$

b) $f(x) = \frac{x+2}{x}, \quad g(x) = 2x+3$

d) $f(x) = \frac{2x}{x+1}, \quad g(x) = \frac{3x}{x+2}$

13. Naszkicuj wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = g(x)$, a następnie, korzystając z wykresów, znajdź zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq g(x)$.

a) $f(x) = \frac{-3x-13}{x+5}, \quad g(x) = 2$

c) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{1-x}{x-4}$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x, \quad g(x) = \frac{x}{x+3}$

d) $f(x) = \frac{3-x}{x-2}, \quad g(x) = \frac{x+1}{x}$

14. a) Asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \frac{ax+1}{x+b}$ przecinają się w punkcie $(5, -3)$. Znajdź wartości a i b .

b) Środkiem symetrii wykresu funkcji $g(x) = \frac{px-2}{2x+q}$ jest punkt $(-4, 1)$. Znajdź wartości p i q .

15. Uzasadnij, że jeśli $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ jest funkcją homograficzną, to:

- a) asymptotą pionową wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu $x = -\frac{d}{c}$,
 b) asymptotą poziomą wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu $y = \frac{a}{c}$.

IV 16. Naskicuj wykres funkcji.

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 + x}$

b) $f(x) = \frac{x-3}{x^2 - 3x}$

c) $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 4}$

17. Znajdź punkty, w których wykresy poniższych funkcji przecinają osie układu współrzędnych. Wskaż te funkcje, które przyjmują tylko wartości dodatnie.

$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^4 + 2x^2 + 5}$

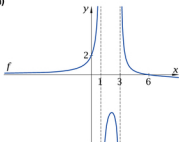
$g(x) = \frac{3}{(x-3)^2 - x^2}$

$h(x) = \frac{5}{4x^8 + 7x^2 + 1}$

$q(x) = \frac{12 + x^2}{(x^3 - 8)^2}$

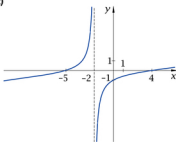
18. Na rysunku przedstawiono fragmenty wykresu funkcji. Jej wzór można zapisać w takiej postaci, jaką podano pod wykresem. Znajdź wzór tej funkcji.

a)



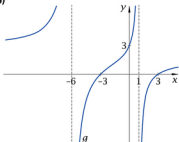
$f(x) = \frac{ax+b}{(x+c)(x+d)}$

c)



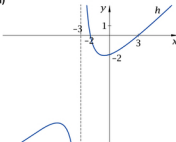
$h(x) = \frac{a(x+b)(x+c)}{x+d}$

b)



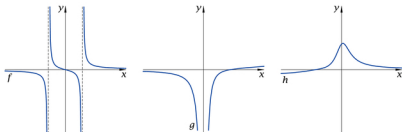
$g(x) = \frac{ax^2+b}{(x+c)(x+d)}$

d)



$i(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x+d}$

19. Na rysunkach pokazano fragmenty wykresów funkcji, których wzory mają postać $y = \frac{x+a}{x^2+b}$. Dla poszczególnych funkcji podaj, jaki znak ma współczynnik a i jaki znak ma współczynnik b (tzn. czy jest to liczba dodatnia, ujemna, czy równa 0).



MINISPRAWDZIAN

51. Która z podanych funkcji jest funkcją homograficzną?

- A. $f(x) = \frac{10-2x}{x-5}$ B. $f(x) = \frac{x+5}{0,2x+1}$ C. $f(x) = \frac{2x+6}{3x+1}$ D. $f(x) = \frac{8x-4}{4}$

52. Wskaż wartość m , dla której prosta o równaniu $y = m$ nie ma punktów wspólnych z wykresem funkcji $f(x) = \frac{7x-4}{x-1}$.

- A. $m = 7$ B. $m = -4$ C. $m = 1$ D. $m = 3$

53. Funkcja jest określona wzorem $f(x) = \frac{-3x-4}{x+1}$. Oceń, które zdania są prawdziwe.

I	Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$.	TAK/NIE
II	Funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty; -1)$ oraz w przedziale $(-1; +\infty)$.	TAK/NIE
III	Asymptoty wykresu funkcji przecinają się w punkcie $(-1, -3)$.	TAK/NIE
IV	Prosta o równaniu $y = x$ ma jeden punkt wspólny z wykresem funkcji f .	TAK/NIE

54. Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x-3}{x^3+2x^2-x-2}$ jest zbiór:

- A. $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ B. $\mathbb{R} \setminus \{0, -2\}$ C. $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1, 3\}$ D. $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$

55. Asymptoty pionowe wykresu funkcji $f(x) = \frac{x-5}{x^4-27x}$ są opisane za pomocą równań:

- A. $x = 0, x = 3$ B. $x = 0, x = 3, x = 5$ C. $x = 5$ D. $x = -3, x = 0$

POWTÓRZENIE

1. Określ dziedzinę wyrażenia wymiernego, a następnie przedstaw to wyrażenie w najprostszej postaci.

a) $\frac{x^4 - 16}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}$ b) $\frac{x^6 - 8x^3}{x^4 + 2x^3 + 4x^2}$

2. Określ dziedzinę wyrażenia, a następnie wykonaj działania i przedstaw wynik w postaci ilorazu wielomianów.

a) $\frac{x^2}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$

b) $\frac{x^2 - 25}{3x^2 - 2x} : \frac{(x+5)^2}{2 - 3x}$

c) $\frac{5x}{x^2 + 4} + \frac{4}{2x - 3}$

d) $\frac{4 - 5x}{3x^2 - x} + \frac{2x - 7}{1 - 3x}$

3. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x-2}{2x-6} = \frac{3}{4}$ c) $\frac{4}{3x+6} + \frac{2x}{2+x} = 0$

b) $4x = \frac{x}{10-3x}$ d) $\frac{x+2}{x-3} = \frac{2x+4}{x-1}$

4. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x}{3-x} + 3 = \frac{5}{2x-6}$

b) $\frac{4}{2x^2+x} - \frac{x}{2x+1} = 1$

c) $\frac{1}{2x^2-x} + \frac{2}{4x^2-1} = \frac{3}{2x^2+x}$

d) $\frac{1}{x^2-x-6} - \frac{1}{x^2-4x+3} = 0$

5. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{3-4x}{x+2} > 0$ c) $\frac{x-2}{3x+6} \leq \frac{1-x}{9-3x}$

b) $\frac{1+5x}{2x-3} - 3 \leq 0$ d) $\frac{2x}{x^2-5x} < \frac{x+3}{x^2-25}$

6. Liczby a i b są odwrotnościami dwóch kolejnych liczb naturalnych. Różnica liczby $\frac{1}{4}$ i sumy liczb a i b jest 10 razy większa od iloczynu ab . Znajdź liczby a i b .

7. Wyznacz wszystkie wartości a , dla których podana suma ma większą wartość od wartości wyrażenia $\frac{4a}{a^2-4}$.

$$\frac{3}{a-2} + \frac{a+2}{a^2+2a}$$

8. Określ dziedzinę funkcji.

a) $y = \sqrt{\frac{x+2}{2x-5}} - 1$ b) $y = \frac{x+5}{\sqrt{\frac{2x-3}{x+3}} + 2}$

9. Wykres funkcji $f(x) = a + \frac{b}{x+c}$ przechodzi przez punkt $(0, 2)$, a jego asymptotami są proste o równaniach $y = -3$ i $x = 5$. Znajdź wartości a , b i c .

10. Oblicz pole prostokąta ograniczonego asymptotami hiperbol:

$$y = \frac{-7}{2x-4} \quad \text{ i } \quad y = \frac{-2x}{x+5}$$

11. Dane są funkcje: $f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$ oraz $g(x) = \frac{2x+5}{x+2}$. Naskicuj wykresy funkcji f i g , a następnie określ, dla jakich argumentów wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g .

12. Wyznacz p z podanego wzoru.

a) $\frac{m}{n} = \frac{p-k}{p}$ c) $S = \frac{Q}{\frac{1}{p} + \frac{1}{r}}$

b) $\frac{1}{a} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{p}$ d) $\frac{x+y}{\frac{1}{p}+x} = \frac{x}{y}$

13. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ zachodzi nierówność:

$$\left| a + \frac{25}{a} \right| \geq 10$$

Ciągi

W 1965 roku Amerykanin Gordon Moore (czyt. mur) sformułował zasadę znaną jako prawo Moore'a: „Moc obliczeniowa komputerów podwaja się co 18 miesięcy”. Prawo to sprawdzało się przez ponad 40 lat. Oznacza to, że moc obliczeniowa wzrosła w tym czasie ponad milion razy!



Przykłady ciągów ■ Ciąg arytmetyczny ■ Suma wyrazów ciągu arytmetycznego ■ Ciąg geometryczny ■ Suma wyrazów ciągu geometrycznego ■ Procent prosty i procent składany ■ Granice ciągów ■ Obliczanie granic ■ Szereg geometryczny ■ Powtórzenie

PRZYKŁADY CIĄGÓW

- I W pierwszej tabeli uporządkowano kraje należące do ONZ według ich powierzchni, a w drugiej — według liczby ludności. Z tabeli możemy odczytać, które miejsca w danej klasyfikacji zajmują poszczególne państwa.

Gdy pewne elementy ustawimy w kolejności tak, że wiadomo, który jest pierwszy, który drugi, który trzeci itd., to mówimy, że utworzyliśmy **ciąg**. Tak ponumerowane elementy nazywamy **wyrazami ciągu**.

W tabelach są przedstawione dwa różne ciągi państw. Jak widać, w wypadku ciągu ważne jest nie tylko to, z jakich wyrazów się składa, ale też — w jakiej kolejności te wyrazy występują.

ĆWICZENIE A Dla każdego z ciągów podanych w tabelach ustal:

- ile wyrazów ma ciąg,
- którym wyrazem jest Polska,
- ile wyrazów ciągu znajduje się między Chinami a Polską.

Kolejność państw ONZ wg powierzchni w 2012 roku

Kolejność państw ONZ wg liczby ludności w 2012 roku

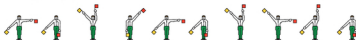
Lp.	Państwo	Lp.	Państwo
1	Rosja	1	Chiny
2	Kanada	2	Indie
3	Chiny	3	USA
4	USA	4	Indonezja
5	Brazylia	5	Brazylia
6	Australia	6	Pakistan
7	Indie	7	Nigeria
8	Argentyna	8	Bangladesz
9	Kazachstan	9	Rosja
10	Algieria	10	Japonia
⋮	⋮	⋮	⋮
70	Polska	33	Polska
71	Oman	34	Algieria
72	Włochy	35	Kanada
⋮	⋮	⋮	⋮
192	Nauru	192	Tuvalu
193	Monako	193	Nauru

Poniżej podajemy kilka przykładów różnych ciągów. Zwróć uwagę, że wyrazy ciągu mogą się powtarzać.

- Ciąg nazw miast — gospodarzy letnich igrzysk olimpijskich od roku 1896 do roku 2016:

Ateny, Paryż, St. Louis, Londyn, Sztokholm, ..., Berlin, Londyn, Helsinki, ..., Ateny, Pekin, Londyn, Rio de Janeiro

- Ciąg kolejnych liter słowa MATEMATYKA w alfabecie semaforowym:



- Ciąg kolejnych znaków numeru rejestracyjnego pewnego samochodu:
G, A, 7, 0, 4, 0, N

- Ciąg figur budowanych z zapalek:



- Ciąg liczb naturalnych podzielnych przez 11:

0, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110, 121, 132, ...

Dwa ostatnie z podanych ciągów mają nieskończenie wiele wyrazów. Takie ciągi nazywamy **ciągami nieskończonymi**. Gdy ciąg składa się ze skończonej liczby wyrazów, nazywamy go **ciągiem skończonym**.

Wyrazy ciągu oznaczamy zwykle za pomocą małych liter z indeksem (indeksami są liczby naturalne dodatnie), na przykład a_1 to pierwszy wyraz ciągu, a_7 to siódmy wyraz, zaś a_n — to n -ty wyraz ciągu.

Ciąg $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{100}, a_{101}, \dots$ będziemy oznaczać symbolem (a_n) .

Uwaga. Symbolu (a_n) będziemy używać do oznaczania zarówno ciągów nieskończonych, jak i ciągów skończonych.

Ciąg (a_n) możemy zinterpretować jako pewną funkcję f , której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich lub jego skończony podzbiór $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ oraz $f(n) = a_n$, czyli $f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3, \dots$

Ciągi, których wszystkie wyrazy są liczbami, nazywamy ciągami liczbowymi. Oto kilka przykładów takich ciągów:

- 1, $\frac{1}{2}$, 3, $\frac{1}{4}$, 5, $\frac{1}{6}$, 7, ...
- 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ...
- -1, -2, 3, 4, -5, -6, 7, 8, ...
- $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, ...

ĆWICZENIE B W każdym z powyższych ciągów liczbowych kolejne wyrazy powstają według pewnej reguły. Spróbuj odgadnąć tę regułę i podaj trzy następne wyrazy każdego z tych ciągów.

zadania 1–4 ►

- II** Kolejne wyrazy ciągu liczbowego można czasem opisać za pomocą ogólnego wzoru przedstawiającego zależność wyrazu a_n od liczby n . Na przykład ciąg kolejnych liczb naturalnych parzystych: 0, 2, 4, 6, 8, 10, ... można opisać za pomocą wzoru:

$$a_n = 2(n - 1)$$

Korzystając z tego wzoru, można obliczyć dowolny wyraz ciągu, na przykład setny lub pięćset jedenasty:

$$a_{100} = 2(100 - 1) = 198 \quad a_{511} = 2(511 - 1) = 1020$$

Oto przykłady ciągów opisanych za pomocą wzorów ogólnych:

CIĄG	WZÓR OGÓLNY
• $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$	$a_n = \frac{n}{n+1}$
• $1, -\sqrt{2}, 2, -2\sqrt{2}, 4, \dots$	$b_n = (-\sqrt{2})^{n-1}$
• $2, 6, 12, 20, 30, \dots$	$c_n = n(n+1)$
• $5, 5, 5, 5, \dots$	$d_n = 5$

ĆWICZENIE C a) Oblicz pięćdziesiąty wyraz każdego z powyższych ciągów.

b) Korzystając z pierwszego wzoru, możemy otrzymać równość $a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$.
Zapisz w podobny sposób liczby:

$$a_{n+3} \quad b_{n-1} \text{ (gd } n > 1) \quad c_{n+1} - c_n \quad \frac{d_n + d_{n+1}}{2}$$

zadania 5–15 ►

III Przyjrzyj się ciągowi figur tworzonych z kropek.

Liczby kropek tworzą ciąg liczb zwanych liczbami trójkątnymi.



ĆWICZENIE D Podaj szóstą i dziewiątą liczbę trójkątną.

W ciągu liczb trójkątnych (t_n) pierwszy wyraz to 1 ($t_1 = 1$), drugi wyraz jest o 2 większy od pierwszego ($t_2 = t_1 + 2$), trzeci wyraz jest o 3 większy od drugiego ($t_3 = t_2 + 3$) itd. Ciąg ten można więc określić następująco:

$$t_1 = 1 \quad t_{n+1} = t_n + n + 1$$

Jeśli podajemy pierwszy wyraz ciągu (lub kilka początkowych wyrazów ciągu) i wzór pozwalający obliczyć kolejne wyrazy na podstawie wyrazów poprzednich, to taki sposób opisywania ciągu nazywamy **rekurencyjnym**. Oto przykłady ciągów opisanych za pomocą wzorów rekurencyjnych:

CIĄG	WZÓR REKURENCYJNY
• $-216, -220, -224, -228, \dots$	$a_1 = -216, a_{n+1} = a_n - 4$
• $1, 11, 111, 1111, \dots$	$b_1 = 1, b_{n+1} = 10b_n + 1$
• $3, 5, 4, 4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{4}, \dots$	$c_1 = 3, c_2 = 5, c_{n+2} = \frac{c_n + c_{n+1}}{2}$

Uwaga. Powyższe wzory można też zapisać za pomocą klamry:

$$\begin{cases} a_1 = -216 \\ a_{n+1} = a_n - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = 10b_n + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = 5 \\ c_{n+2} = \frac{c_n + c_{n+1}}{2} \end{cases}$$

ĆWICZENIE E Spróbuj odgadnąć regułę, według której utworzono zapisany ciąg. Podaj wzór rekurencyjny tego ciągu.

a) 100, 94, 88, 82, 76, 70, ...

c) 160, -80, 40, -20, 10, -5, $\frac{5}{2}$, ...

b) 2, 6, 18, 54, 162, ...

d) 5, 5, 10, 15, 25, 40, 65, ...

Zauważ, że gdy ciąg jest określony wzorem ogólnym, to można obliczyć wyraz a_n , nawet gdy nie znamy żadnego innego wyrazu tego ciągu. Gdy jednak ciąg określamy rekurencyjnie, to aby znaleźć wyraz a_n , musimy obliczyć wszystkie poprzedzające go wyrazy.

Niektóre ciągi liczbowe można opisać zarówno za pomocą wzoru rekurencyjnego, jak i wzoru ogólnego. Taką własność ma na przykład ciąg liczb trójkątnych.

Przyjrzyj się rysunkom. Połowa liczby kropek na każdym z nich to liczba trójkątna.



Korzystając z tych rysunków, łatwo zauważyć, że kolejne liczby trójkątne można zapisać w postaci:

$$t_1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \quad t_2 = \frac{2 \cdot 3}{2} \quad t_3 = \frac{3 \cdot 4}{2} \quad t_4 = \frac{4 \cdot 5}{2} \quad t_5 = \frac{5 \cdot 6}{2} \quad \dots$$

Wobec tego wzór ogólny pozwalający obliczać liczby trójkątne ma postać:

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Oto inne przykłady ciągów, które można zapisać zarówno za pomocą wzoru ogólnego, jak i wzoru rekurencyjnego.

CIĄG	WZÓR OGÓLNY	WZÓR REKURENCYJNY
• 2, 4, 8, 16, ...	$a_n = 2^n$	$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n$
• 10, 20, 30, 40, ...	$b_n = 10n$	$b_1 = 10, \quad b_{n+1} = b_n + 10$
• 1, 4, 9, 16, ...	$c_n = n^2$	$c_1 = 1, \quad c_{n+1} = c_n + 2n + 1$
• $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots$	$d_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$	$d_1 = \frac{1}{2}, \quad d_{n+1} = \frac{d_n + 1}{2}$
• 1, -1, 1, -1, ...	$e_n = (-1)^{n+1}$	$e_1 = 1, \quad e_{n+1} = -e_n$

- IV Jeśli wyrazy ciągu są liczbami, z których każda następna jest większa od poprzedniej, to ciąg nazywamy **rosnącym**. W takim ciągu dla dowolnych dwóch kolejnych wyrazów a_n i a_{n+1} zachodzi nierówność $a_n < a_{n+1}$.

Gdy wyrazy ciągu są liczbami, z których każda następna jest mniejsza od poprzedniej, to ciąg nazywamy **malejącym**. W takim ciągu dla dowolnych dwóch kolejnych wyrazów a_n i a_{n+1} zachodzi nierówność $a_n > a_{n+1}$.

Gdy wszystkie wyrazy ciągu liczbowego są równe, to ciąg nazywamy **ciągą stałą**. W takim ciągu dla dowolnych dwóch kolejnych wyrazów a_n i a_{n+1} zachodzi równość $a_n = a_{n+1}$.

ĆWICZENIE F Podaj przykład ciągu liczbowego, który ma cztery wyrazy i który:

- a) jest ciągiem rosnącym,
- b) jest ciągiem malejącym,
- c) nie jest ciągiem rosnącym ani malejącym, ani stałym.

PRZYKŁAD Zbadaj monotoniczność ciągu.

a) $a_n = \frac{2n}{n+1}$

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_n &= \frac{2(n+1)}{n+1+1} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \\&= \frac{(2n+2)(n+1) - 2n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \\&= \frac{2n^2 + 2n + 2n + 2 - 2n^2 - 4n}{(n+1)(n+2)} = \\&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0\end{aligned}$$

... Dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n liczby $n+1$ oraz $n+2$ są dodatnie.

Dla każdej liczby naturalnej dodatniej n zachodzi nierówność $a_{n+1} - a_n > 0$, więc $a_{n+1} > a_n$. Zatem ciąg (a_n) jest rosnący.

b) $b_n = n^2 - 8n + 7$

$$\begin{aligned}b_{n+1} - b_n &= (n+1)^2 - 8(n+1) + 7 - (n^2 - 8n + 7) = \\&= n^2 + 2n + 1 - 8n - 8 + 7 - n^2 + 8n - 7 = \\&= 2n - 7\end{aligned}$$

Wartość różnicy $b_{n+1} - b_n = 2n - 7$ może być liczbą dodatnią (np. gdy $n = 4$) lub ujemną (np. gdy $n = 3$).

Zatem ciąg (b_n) nie jest ani rosnący, ani malejący.

ZADANIE Określ monotoniczność ciągu.

a) $a_n = \frac{1-n}{n+2}$

b) $b_n = n^2 - 5n + 4$

ZESTAW ZADAŃ

1. Antoni Słonimski i Julian Tuwim w „Pracowitej pszczołce. Kalendarzyku encyklopedyczno-informacyjnym na rok 1921” wśród wielu dowcipnych tekstów zamieścili pewien ciąg — spis alfabetyczny wszystkich nazw liczb od jeden do sto. Ułóż podobny ciąg dla liczb naturalnych od zero do dziesięć.

2. Ustal, ile wyrazów ciągu (a_n) znajduje się między wyrazami:

a) a_{22} i a_{30}

b) a_{25} i a_{108}

c) a_n i a_{2n}

d) a_{n+1} i a_{3n}

3. Podaj trzy początkowe wyrazy i wyraz dziesiąty ciągu określonego następująco:

a) n -tym wyrazem ciągu jest liczba zer w liczbie 10^n ,

b) n -ty wyraz ciągu to liczba jedynek w zapisie dziesiętkowym liczby n ,

c) a_n oznacza, ile liter występuje w zapisie liczby n słowami.

4. Podaj wyrazy a_{100} i a_{101} ciągu określonego w następujący sposób:

a) a_n to cyfra jedności liczby $5n$,

c) a_n to cyfra jedności liczby 2^n ,

b) a_n to cyfra jedności liczby 9^n ,

d) a_n to cyfra jedności liczby 3^n .

5. Podaj trzy początkowe wyrazy oraz dziewiąty wyraz ciągu określonego wzorem:

a) $a_n = -7n + \frac{1}{n}$

b) $a_n = (-3)^n + 3^n$

c) $a_n = \frac{2^n}{n^2}$

6. Znajdź wyrazy: trzeci, szósty i trzynasty podanego ciągu.

a) $a_n = \begin{cases} \sqrt{2^n}, & \text{gdy } n < 10 \\ \frac{n}{n-3}, & \text{gdy } n \geq 10 \end{cases}$

b) $b_n = \begin{cases} -n^2 + \frac{3}{n}, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste} \\ \frac{n}{13}, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste} \end{cases}$

7. a) Które wyrazy podanych ciągów są równe 1?

$$a_n = (-1)^{n+1}$$

$$b_n = 1 + (-1)^n + (-1)^{n+1}$$

$$c_n = 3 - 2 \cdot (-1)^n$$

b) Które wyrazy podanych ciągów są liczbami całkowitymi?

$$d_n = 2 + \frac{n}{5}$$

$$e_n = \frac{11 - (-1)^n}{3}$$

$$f_n = \frac{n}{2} + \frac{n}{3}$$

8. Poniżej zapisano wzory ogólne trzech ciągów:

$$a_n = (n-1)(n+3)$$

$$b_n = 5^n + 4$$

$$c_n = \frac{\frac{1}{2}n-1}{n+1}$$

Zapisz wyrażenia przedstawiające liczby:

$$a_{n+1} \text{ i } a_n - a_1$$

$$b_{n-1} \text{ i } b_{n+1} - b_{n-1} \text{ (gdy } n > 1)$$

$$c_{2n+1} \text{ i } \frac{c_n}{c_{n-2}} \text{ (gdy } n > 2)$$

9. Czterdzieści początkowych wyrazów ciągu $a_n = n^2 - n + 41$ to liczby pierwsze. Wzór ten podał szwajcarski matematyk Leonhard Euler (czyt. ojler). Podaj kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n) i wykaż, że a_{41} nie jest liczbą pierwszą.

Jednostka astronomiczna to średnia odległość Ziemi od Słońca. W tabelce obok przedstawiono średnie odległości od Słońca sześciu kolejnych planet. Jako jednostkę odległości przyjęto $\frac{1}{10}$ jednostki astronomicznej.

W 1772 roku niemiecki astronom Daniel Titius zauważył, że gdyby między liczbą 16 i 52 wymienione w tabeli wpisać jeszcze liczbę 28, to otrzymany ciąg można by opisać regułą:

$$a_1 = 4 \quad \text{ i } \quad a_n = 4 + 3 \cdot 2^{n-2}, \quad \text{gdzie } n \geq 2$$

Ku zaskoczeniu astronomów, dzięki znacznie późniejszym obserwacjom, znaleziono między Marsem a Jowiszem pas planetoid, którego odległość od Słońca odpowiada w tym ciągu właśnie liczbie 28.

Planeta	Średnia odległość od Słońca
Merkury	4
Wenus	7
Ziemia	10
Mars	16
Jowisz	52
Saturn	100

10. Przeczytaj informacje w ramce.

a) Planetę Uran odkryto dopiero w 1781 roku i dlatego Titius nie uwzględnił jej w swoich rozważaniach. Jednak liczba w ciągu Titiusa odpowiadająca planecie następnej po Saturnie jest zdumiewająco bliska prawdziwej odległości Urana od Słońca. Znajdź tę liczbę.

b) Neptun to następna po Uranie planeta. Znajduje się ona około 30 razy dalej od Słońca niż Ziemia. Sprawdź, czy i tę odległość pozwalał przewidzieć ciąg Titiusa.

11. Ciąg jest określony za pomocą wzoru: $a_n = \frac{2n}{5} - 8$.

a) Którym wyrazem tego ciągu jest liczba 0?

b) Czy wyrazami tego ciągu są liczby $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{5}$?

c) Które wyrazy tego ciągu są większe od 10, a które są mniejsze od 13?

12. Zaproponuj, jaki może być wzór ogólny ciągu, którego początkowymi wyrazami są podane liczby.

a) $1 + 5^1, 2 + 5^2, 3 + 5^3, \dots$

d) 1, 8, 27, 64, 125, ...

b) 2, 4, 6, 8, 10, ...

e) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$

c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

f) -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...

13. Wyrazami każdego z podanych ciągów są kwadraty liczb całkowitych. Zaproponuj, jakie mogą być wzory ogólne tych ciągów.

a) 1, 4, 9, 16, 25, ...

• b) 0, 4, 16, 36, 64, ...

4, 9, 16, 25, 36, ...

9, 4, 1, 0, 1, 4, ...

25, 36, 49, 64, 81, ...

100, 81, 64, 49, 36, ...

- **14.** Zaproponuj wzór ogólny ciągu, którego początkowymi wyrazami są liczby:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2}{3\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{6}}{10}, \frac{\sqrt{7}}{6\sqrt{5}}, \dots$ b) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt[3]{4}}{2}, \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt{10}}, \dots$

15. Niech S_k oznacza sumę k początkowych wyrazów ciągu (a_n) , czyli: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, $S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$.

a) Znajdź S_1, S_2, S_3 i S_4 dla ciągu (a_n) określonego za pomocą wzoru $a_n = 2n$.

b) Dla pewnego ciągu (a_n) wartość S_n można obliczyć ze wzoru $S_n = n^2 - \frac{5}{n}$. Oblicz pierwszy oraz dziesiąty wyraz ciągu (a_n) . Znajdź wzór ogólny ciągu (a_n) .

- ◀ **16.** Podaj cztery początkowe wyrazy ciągu określonego rekurencyjnie:

a) $a_1 = 90$ i $a_{n+1} = \frac{a_n}{3} + 3$ d) $a_1 = -2$, $a_2 = 2$ i $a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1}$

b) $a_1 = -5$ i $a_{n+1} = a_n + 3(n-1)^{n+1}$ e) $a_1 = -2$, $a_2 = 5$ i $a_{n+2} = a_n + 3$

c) $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = 2a_n - n$ f) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ i $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

17. Zaproponuj wzór rekurencyjny i wzór ogólny ciągu o początkowych wyrazach:

a) 5, 10, 15, 20, 25, ... d) 8, -4, 2, -1, $\frac{1}{2}$, ...

b) 2, -2, 2, -2, 2, ... e) $3a$, $3a-1$, $3a-2$, $3a-3$, ...

c) 113, 123, 133, 143, ... • f) a , $2a+1$, $3a+2$, $4a+3$, ...

18. Zaproponuj, jaki może być wzór rekurencyjny ciągu o początkowych wyrazach:

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \dots$ • b) 1, 2, 0, 3, -1, 4, -2, ...

19. a) Przyjmij za wyraz a_1 dowolną liczbę naturalną dwucyfrową. Znajdź wyrazy $a_2, a_3, \dots, a_{10}$, posługując się następującą regułą rekurencyjną:

Wyraz a_{n+1} to liczba liter występujących w nazwie liczby a_n .

Wykonaj to samo polecenie, przyjmując za a_1 inną liczbę naturalną. Co zauważasz?

- **b)** Podobnie jak w ciągu opisanym w podpunkcie a), wyrazy w poniższych ciągach powtarzają się z pewną regularnością. Przyjmij za pierwszy wyraz dowolną liczbę naturalną i odkryj tę regularność.

$b_{n+1} = 100x + 10y + x + y$, gdzie x to liczba cyfr parzystych w liczbie b_n ,
zaś y to liczba cyfr nieparzystych w liczbie b_n

c_{n+1} to suma sześcianów cyfr występujących w zapisie liczby c_n

d_{n+1} to różnica między największą i najmniejszą z liczb, jakie można ułożyć z cyfr występujących w liczbie d_n

$$e_{n+1} = \begin{cases} 3e_n + 1, & \text{gdy } e_n \text{ jest liczbą nieparzystą} \\ \frac{e_n}{2}, & \text{gdy } e_n \text{ jest liczbą parzystą} \end{cases}$$

W roku 1202 Leonardo z Pizy, zwany Fibonaccim (czyt. fibonaczczim), opublikował słynną „Księgę abaku”, w której spisał ówczesną wiedzę matematyczną. W jednym z zadań tej książki rozważał pewien ciąg liczb, który (jak się później okazało) ma niezwykle własności. W ciągu tym pierwszy i drugi wyraz to 1, a każdy następny jest sumą dwóch poprzednich. Zatem określony jest następująco:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$$

Okazuje się, że w różnych zjawiskach przyrodniczych można dostrzec ciąg Fibonacciego. Ciekawe jest to, że ciąg ten jest ściśle związany z często stosowanym przez artystów tzw. złotym podziałem i wynikającą z niego złotą liczbą $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Można bowiem wykaazać, że wzór ogólny ciągu Fibonacciego jest następujący:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi} \right)^n \right)$$

20. Przeczytaj informacje w ramce.

- a) Zapisz dziesięć początkowych wyrazów ciągu Fibonacciego.
- b) *Jeśli krowa rodzi swoje pierwsze cielę — jałówkę w wieku dwóch lat, a potem nową jałówkę każdego roku, to ile krów będzie po 12 latach — przy założeniu, że żadna nie padnie?* To zadanie podał znany twórca łamigłówek Henry Dudeney (czyt. henri djudeney). Przyjął on, że każda jałówka po 2 latach także zacznie rodzić cielęta — jałóWKi. Sprawdź, że liczby krów w kolejnych latach tworzą ciąg Fibonacciego.
- c) Korzystając z podanego w ciekawostce ogólnego wzoru ciągu Fibonacciego, sprawdź, że $a_1 = a_2 = 1$. Posługując się kalkulatorem, oblicz z tego wzoru a_3 i a_4 .

21. a) Wykaż, że jeśli $a_n = (2n)^2$, to $a_1 = 4$ i $a_{n+1} = a_n + 4(2n + 1)$.

b) Wykaż, że jeśli $a_n = 6 - 4 \cdot 3^{n-1}$, to $a_1 = 2$ i $a_{n+1} = 3a_n - 12$.

22. Znajdź wzór ogólny ciągu określonego rekurencyjnie:

a) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n^2$

b) $b_1 = 2, \quad b_{n+1} = \sqrt[3]{b_n}$

23. Wykaż, że ciąg (a_n) jest rosnący, a ciąg (b_n) malejący.

a) $a_n = 4n - 5, \quad b_n = -\frac{3}{4}n - \frac{1}{3}$

c) $a_n = n^2 + 3n - 10, \quad b_n = -5n^2 + 10$

b) $a_n = -\frac{7}{n} + 1, \quad b_n = \frac{1}{2n} + 2$

d) $a_n = 5^{n+3}, \quad b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

24. Wykaż, że ciąg (a_n) nie jest ani rosnący, ani malejący.

a) $a_n = |5 - n|$

b) $a_n = \frac{1}{n-9,5}$

c) $a_n = n^2 - 6n$

d) $a_n = (-2)^{n-1}$

25. Zbadaj monotoniczność podanego ciągu.

a) $a_n = -2n + 20$

b) $a_n = 1 + (-1)^n$

c) $a_n = \frac{n}{n+1}$

d) $a_n = n^2$

- 26. Uzasadnij, że podany ciąg jest ciągiem stałym.

a) $a_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}$

c) $c_n = (-1)^{(-1)^n}$

b) $b_n = (-1)^n - (-1)^{n+2}$

d) $d_n = ((-1)^n)^{n+1}$

27. Przyjmijmy, że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie. Czy na podstawie podanej nierówności można określić monotoniczność ciągu (a_n) ?

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 2$

c) $a_{n+1} > a_n + 2$

d) $a_{n+1} + a_n \geq 0$

- 28. Ciąg (a_n) jest rosnący. Wykaż, które z podanych ciągów również są rosnące.

$b_n = a_n + 5$

$c_n = -a_n$

$d_n = |a_n|$

$r_n = a_n + a_{n+1}$

$t_n = \frac{a_n}{4}$

29. Zbadaj monotoniczność podanego ciągu.

a) $a_1 = -10$ i $a_{n+1} = a_n - 5$

c) $a_1 = \frac{1}{7}$ i $a_{n+1} = -a_n$

b) $a_1 = 8$ i $a_{n+1} = a_n - 3n$

d) $a_1 = -\sqrt{2}$ i $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$

MINISPRAWDZIAN

51. Jeśli ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = n + (-2)^n$, to $a_{n+1} - a_n$ wynosi:

A. $1 + (-2)^n$

B. $1 - 3 \cdot (-2)^n$

C. $1 - 2^{n+1}$

D. $3 \cdot (-2)^n$

52. W którym z podanych ciągów jeden z wyrazów jest równy 2?

A. $a_n = 2n + 2$

B. $b_n = \frac{n+8}{2}$

C. $c_n = 2n^2 - 2$

D. $d_n = \frac{2}{8-n}$

53. Ciąg jest określony wzorem $a_n = \frac{5}{n+1}$. Oceń prawdziwość poniższych zdań.

I	Ciąg jest malejący.	TAK/NIE
II	Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie.	TAK/NIE
III	Dziewiąty wyraz tego ciągu jest 10 razy większy niż a_{99} .	TAK/NIE
IV	Tylko jeden wyraz tego ciągu jest liczbą całkowitą.	TAK/NIE

54. Ciąg (a_n) jest określony wzorem rekurencyjnym: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = -2a_n + 5$. O ile większy jest szósty wyraz tego ciągu od wyrazu piątego?

A. o 95

B. o 140

C. o 80

D. o 25

55. Ciąg (a_n) jest rosnący. Który z poniższych ciągów jest malejący?

A. $b_n = a_n - 2$

B. $c_n = \frac{a_n}{2}$

C. $d_n = -2a_n$

D. $e_n = -\frac{2}{a_n}$

CIĄG ARYTMETYCZNY

ĆWICZENIE A Spróbuj odkryć regułę, według której powstają kolejne wyrazy ciągu. Podaj dwa następne wyrazy.

a) 1, 11, 21, 31, 41, ...

c) $1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -1, -1\frac{2}{3}, -2\frac{1}{3}, \dots$

b) 5, 3, 1, -1, -3, -5, ...

d) $\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, 9\pi, 11\pi, \dots$

W każdym z ciągów z ćwiczenia A kolejny wyraz powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego pewnej liczby, zawsze takiej samej.

Jeśli ciąg (a_n) ma co najmniej trzy wyrazy i każdy jego wyraz, z wyjątkiem pierwszego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego pewnej stałej liczby r , to taki ciąg nazywamy **ciągą arytmetyczną**. Liczbę r nazywamy **różnicą ciągu**.

Wzór rekurencyjny ciągu arytmetycznego
o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r :

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Aby stwierdzić, czy ciąg jest arytmetyczny, wystarczy sprawdzić, czy różnice między jego kolejnymi wyrazami są równe.

ĆWICZENIE B Zapisz kilka początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o podanym pierwszym wyrazie i różnicy.

a) $a_1 = 10, \quad r = 7$

b) $a_1 = 22, \quad r = -2$

c) $a_1 = 8, \quad r = 0$

Zauważ, że dla dowolnych dwóch kolejnych wyrazów a_n i a_{n+1} ciągu arytmetycznego o różnicy r zachodzi równość $a_{n+1} - a_n = r$. Zatem ciąg arytmetyczny o różnicy r jest rosnący, gdy $r > 0$, jest malejący — gdy $r < 0$ i jest ciągiem stałym — gdy $r = 0$.

ĆWICZENIE C Oznaczmy przez r różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) .

a) Który wyraz tego ciągu otrzymamy, gdy do wyrazu a_{50} dodamy $2r$, a który — gdy od wyrazu a_{100} odejmiemy $5r$?

b) Przyjmijmy, że a_n nie jest pierwszym ani ostatnim wyrazem ciągu. Zapisz za pomocą a_n oraz r wyrazy: a_{n-1} , a_{n+1} i oblicz ich średnią arytmetyczną.

W ciągu arytmetycznym każdy wyraz (który nie jest ani pierwszym, ani ostatnim) jest równy średniej arytmetycznej dwóch sąsiednich wyrazów.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Z tej własności zapewne wzięła się nazwa „ciąg arytmetyczny”.

zadania 1–12 ►

- II ĆWICZENIE D W ciągu arytmetycznym (a_n) pierwszy wyraz jest równy 7, a różnica tego ciągu wynosi $\sqrt{2}$. Znajdź kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n) oraz wyrazy a_{10} , a_{20} , a_{100} . Podaj wzór ogólny tego ciągu.

W ciągu arytmetycznym (a_n) o różnicy r i pierwszym wyrazie a_1 kolejne wyrazy są równe:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$$

itd.

Z równości tych wynika wzór ogólny ciągu (a_n) .

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego
o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r :

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Oto przykłady ciągów arytmetycznych oraz ich wzory rekurencyjne i ogólne.

CIĄG ARYTMETYCZNY	WZÓR REKURENCYJNY	WZÓR OGÓLNY
• $\sqrt{2}$, $\sqrt{2} + 3$, $\sqrt{2} + 6$, ...	$a_1 = \sqrt{2}$ $a_{n+1} = a_n + 3$	$a_n = \sqrt{2} + 3(n - 1)$
• 1 , $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, 0 , $-\frac{1}{4}$, ...	$a_1 = 1$ $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{4}$	$a_n = 1 - \frac{1}{4}(n - 1)$

ĆWICZENIE E Podaj wzór ogólny ciągu arytmetycznego $2, \frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \dots$

PRZYKŁAD W ciągu arytmetycznym dane są $a_5 = 8$ oraz $a_{12} = -6$. Oblicz a_{50} .

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

⋮ Zapisujemy wzór ogólny ciągu arytmetycznego.

$$\begin{cases} 8 = a_1 + 4r \\ -6 = a_1 + 11r \end{cases}$$

⋮ Korzystając z tego, że $a_5 = 8$ i $a_{12} = -6$,
⋮ zapisujemy układ równań.

$$14 = -7r$$

$$r = -2$$

$$a_1 = 8 - 4r = 8 - 4 \cdot (-2) = 16$$

$$a_{50} = a_1 + 49r = 16 + 49 \cdot (-2) = -82$$

ZADANIE W ciągu arytmetycznym dane są $a_7 = -32$ oraz $a_{15} = -74$. Oblicz a_3 .

Uwaga. Aby obliczyć różnicę r w powyższym przykładzie, można też było skorzystać z równości $a_{12} = a_5 + 7r$, a do obliczenia a_{50} można było skorzystać z równości $a_{50} = a_5 + 45r$.

zadania 13–23 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Podany ciąg jest ciągiem arytmetycznym. Oblicz różnicę tego ciągu i zapisz kolejne dwa jego wyrazy.

a) $-3, 2, 7, \dots$ c) $10, 2, 10, 6, 11, \dots$ e) $1 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, 1 + 3\sqrt{2}, \dots$

b) $1\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7}, \dots$ d) $125, 5, 120, 114, 5, \dots$ f) $(1 + \sqrt{2})^2, 3, (1 - \sqrt{2})^2, \dots$

2. Zapisz drugi, trzeci i czwarty wyraz ciągu arytmetycznego, w którym:

a) $a_1 = 7, r = -3$

c) $a_7 = -4, r = 0$

b) $a_5 = 11, r = 2$

d) $a_5 = 13, a_6 = 6$

3. Podany ciąg jest ciągiem arytmetycznym. Ustal jego różnicę oraz podaj a_1 i a_2 .

a) $a_1, a_2, 24, 31, 38, \dots$

c) $a_1, a_2, m+7, m-7, m-21, \dots$

b) $a_1, a_2, -3, -5, -7, \dots$

d) $a_1, a_2, \frac{x-3}{4}, \frac{x-4}{4}, \frac{x-5}{4}, \dots$

4. Oblicz wartość t , dla której podane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

a) $-6, -12, 18 - t^2$

b) $\frac{t-1}{2}, 8, \frac{t+3}{2}$

c) $t^2 - 3, 2t, t - 1$

5. Uzasadnij, że jeśli ciąg (a_n) jest arytmetyczny, to gdy $n > k$, wyraz a_n jest średnią arytmetyczną wyrazów a_{n-k} i a_{n+k} .

Liczby pierwsze mniejsze od 50:

2 3 5 7 11 13 17 19

23 29 31 37 41 43 47

6. a) Znajdź trójwyrazowy ciąg arytmetyczny, którego wyrazami są liczby pierwsze.

b) Znajdź pięciowyrazowy ciąg arytmetyczny o różnicy 6, którego wyrazami są liczby pierwsze.

7. a) Pierwszym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego jest liczba -3 , a piątym — liczba 15. Oblicz drugi, trzeci i czwarty wyraz tego ciągu.

b) Dany jest ciąg arytmetyczny: $2, a, b, c, d, -24$. Oblicz a, b, c i d .

c) Wstaw pomiędzy liczby $\frac{1}{2}$ i 8 sześć takich liczb, by razem tworzyły one osiem kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego.

8. Ile jest nieskończonych ciągów arytmetycznych o wyrazach całkowitych, w których pierwszym wyrazem jest liczba 4, a jednym z wyrazów jest liczba 167?

9. Ciągi (a_n) i (b_n) są arytmetyczne.

a) Wykaż, że ciąg (c_n) , w którym $c_n = a_n + b_n$, też jest arytmetyczny.

b) Wykaż, że ciąg określony wzorem $d_n = 2a_n - b_n$ jest ciągiem arytmetycznym.

10. Uzasadnij, że jeśli w ciągu arytmetycznym wszystkie wyrazy są liczbami całkowitymi, a wyrazy a_5 i a_8 są liczbami nieparzystymi, to wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami nieparzystymi.

11. Wykaż, że jeśli ciąg (a_n) jest arytmetyczny, to ciąg określony wzorem $b_n = a_{3n}$ też jest ciągiem arytmetycznym.

12. Oto wzory ogólne czterech ciągów. Które z tych ciągów są arytmetyczne?

$$a_n = -13 - 5n \quad b_n = \frac{4n+n^2}{n} \quad c_n = \sqrt{3+(n-1) \cdot 2} \quad d_n = \frac{6n^2+12n}{n+2}$$

13. a) Zapisz wzory ogólne i rekurencyjne następujących ciągów arytmetycznych:

$$5\frac{1}{7}, 5\frac{4}{7}, 6, \dots \quad 3+4\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}, 3-2\sqrt{3}, \dots \quad -27,4, -26, -24,6, \dots$$

b) Zapisz wzory ogólne ciągów arytmetycznych (określonych rekurencyjnie):

$$a_1 = -7 \text{ i } a_{n+1} = a_n + 2 \quad b_1 = \frac{1}{4} \text{ i } b_{n+1} = b_n - \frac{1}{2} \quad c_1 = -13 \text{ i } c_{n+1} = c_n - 0,2$$

c) Zapisz wzory rekurencyjne ciągów arytmetycznych (określonych za pomocą wzorów ogólnych):

$$x_n = 4 + 5(n-1) \quad y_n = -2,5 + \frac{n}{2} \quad z_n = 104 - 4n$$

14. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

a) Oblicz a_{10} , jeśli $a_1 = 2$ i $r = 5$.

c) Oblicz a_{13} , jeśli $a_1 = 1$ i $a_2 = 4$.

b) Oblicz a_{21} , jeśli $a_1 = \sqrt{2}$ i $r = \sqrt{2}$.

d) Oblicz a_{100} , jeśli $a_1 = -6$ i $a_2 = -8$.

15. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

a) Oblicz różnicę tego ciągu oraz a_{12} , jeśli $a_1 = 3$ i $a_{13} = -5,4$.

b) Oblicz a_1 oraz a_{15} , jeśli $a_{31} = 8$, a różnica ciągu wynosi 0,1.

c) Oblicz różnicę tego ciągu oraz a_1 , jeśli $a_{100} = 100$ i $a_{102} = 104$.

d) Oblicz różnicę tego ciągu oraz a_1 , jeśli $a_5 = -8$ i $a_9 = -2$.

16. Wykaż, że jeśli suma trzech kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa p , to środkowy z tych wyrazów jest równy $\frac{p}{3}$.

17. Ile zapalek potrzeba do ułożenia setnej figury w podanym ciągu arytmetycznym?

a)



b)



18. W pewnym ciągu arytmetycznym wyraz dziesiąty jest liczbą 2 razy większą niż wyraz piąty i zarazem liczbą o 2 mniejszą od wyrazu piętnastego. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

19. Podane liczby to początkowe wyrazy ciągu arytmetycznego. Sprawdź, czy liczba -120 jest wyrazem tego ciągu. Jeśli tak — to którym?

- a) $-240, -230, \dots$ b) $26, 22, \dots$ c) $66, 65\frac{1}{2}, \dots$

20. Podany ciąg jest ciągiem arytmetycznym. Ustal, ile ma wyrazów.

- a) $7, 11, 15, \dots, 55$ b) $121, 132, 143, \dots, 1100$

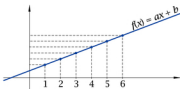
21. Dane są ciągi arytmetyczne: $17, 21, \dots$ oraz $16, 21, \dots$. Znajdź pięć liczb, które występują zarówno w jednym, jak i w drugim ciągu.

22. a) Wybierz dowolną liczbę naturalną większą od 1. Zapisz rosnący ciąg wszystkich liczb naturalnych, dla których reszta z dzielenia przez wybraną przez siebie liczbę jest równa 1. Sprawdź, czy otrzymany ciąg jest ciągiem arytmetycznym.

b) Wykaż, że jeśli wyrazami ciągu arytmetycznego są liczby całkowite, to przy dzieleniu każdej z tych liczb przez różnicę ciągu otrzymamy taką samą resztę.

Warto wiedzieć

Ciąg arytmetyczny ma ścisły związek z funkcją liniową. Dla dowolnej funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ wartości $f(1), f(2), f(3), f(4), \dots$ tworzą ciąg arytmetyczny.



Kolejne wyrazy tego ciągu to:
 $a \cdot 1 + b, a \cdot 2 + b, a \cdot 3 + b, a \cdot 4 + b, \dots$

Liczby te można zapisać inaczej:

$$a + b, a + b + a, a + b + 2a, a + b + 3a, \dots$$

Widać więc, że jest to ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie $a + b$ i różnicy a .

Wynika stąd m.in., że dla danej funkcji liniowej różnica między jej wartościami dla dwóch kolejnych liczb naturalnych jest zawsze taka sama (zob. rysunek).

Można wykażać ogólniejszą własność: Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy punkty $(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3)$ itd. leżą na jednej prostej.

23. Przeczytaj informacje w ramce.

a) Dana jest funkcja $f(x) = -3x + 5$. Sprawdź, że ciąg $f(1), f(2), f(3), \dots$ jest ciągiem arytmetycznym. Podaj pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

b) Dany jest ciąg arytmetyczny o wyrazach $a_1 = -5, a_2 = -2, a_3 = 1, \dots$. Znajdź wzór takiej funkcji liniowej f , że $f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3, \dots$

c) Wykaż, że jeśli f jest funkcją liniową, a ciąg $b_1, b_2, b_3, \dots$ jest ciągiem arytmetycznym, to ciąg $f(b_1), f(b_2), f(b_3), \dots$ też jest ciągiem arytmetycznym.

MINISPRAWDZIAN

51. Jeżeli dziesiątym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego jest 20, a trzynastym wyrazem tego ciągu jest 29, to drugim wyrazem tego ciągu jest:

- A. -4 B. -1 C. 3 D. -7

52. Trzy początkowe wyrazy pewnego ciągu arytmetycznego to liczby 1, $1\frac{5}{6}$, $2\frac{2}{3}$. Ile wyrazów tego ciągu jest mniejszych od 20?

- A. 21 B. 23 C. 24 D. 25

53. Istnieją dwie wartości p , dla których ciąg $p, 6, p^2$ jest ciągiem arytmetycznym. Suma tych dwóch wartości jest równa:

- A. -6 B. -1 C. 0 D. 3

SUMA WYRAZÓW CIĄGU ARYTMETYCZNEGO

1 Z historii

Carl Friedrich Gauss (czyt. karl fridriś gals), jeden z najwybitniejszych matematyków, już od najmłodszych lat wykazywał niezwykle zdolności matematyczne. Gdy miał 7 lat, nauczyciel w jego klasie kazał uczniom obliczyć sumę liczb naturalnych od 1 do 50. Zapewne miał nadzieję, że zajmie to uczniom dużo czasu i dzięki temu będzie miał spokój do końca lekcji. Można sobie wyobrazić jego zaskoczenie, gdy młody Gauss podał poprawną odpowiedź już po chwili. Podobno Gauss liczył w następujący sposób: zapisał liczby od 1 do 50, a pod spodem te same liczby w odwrotnej kolejności i wykonał dodawanie.

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 49 + 50 \\ + 50 + 49 + 48 + 47 + \dots + 2 + 1 \\ \hline 51 + 51 + 51 + 51 + \dots + 51 + 51 = 51 \cdot 50 \end{array}$$

W ten sposób otrzymał liczbę 2 razy większą niż szukana suma. Zatem:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 50 = \frac{51 \cdot 50}{2} = 1275$$

Opisany w powyższej ramce sposób obliczania sumy 50 początkowych liczb naturalnych można wykorzystać do znalezienia sumy początkowych wyrazów dowolnego ciągu arytmetycznego.

Niech (a_n) oznacza ciąg arytmetyczny o różnicy r . Zapiszmy sumę wyrazów od a_1 do a_n , a pod spodem — tę samą sumę, ale składniki ustawmy w odwrotnej kolejności.

$$\begin{array}{r} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 \end{array}$$

Sumy te zapisano poniżej w innej postaci i dodano odpowiednie wyrazy:

$$\begin{array}{r} a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \dots + a_n \\ + \quad a_n + (a_n - r) + (a_n - 2r) + \dots + a_1 \\ \hline (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) = (a_1 + a_n) \cdot n \end{array}$$

Z powyższych rozważań wynika równość:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

ĆWICZENIE Oblicz sumę jedenaśtu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = -12$ i $r = 0,2$.

PRZYKŁAD Liczby 5, 1, -3 są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) . Oblicz sumę $a_{11} + a_{12} + \dots + a_{30}$.

$$a_{11} + a_{12} + \dots + a_{30} = S_{30} - S_{10}$$

$$a_1 = 5, \quad r = 1 - 5 = -4$$

$$a_n = 5 + (n - 1) \cdot (-4) \quad \dots \quad \text{Ustalamy wzór ogólny ciągu } a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

$$a_{30} = 5 + 29 \cdot (-4) = -111$$

$$S_{30} = \frac{5 - 111}{2} \cdot 30 = -1590 \quad \dots \quad \text{Korzystamy ze wzoru } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$a_{10} = 5 + 9 \cdot (-4) = -31$$

$$S_{10} = \frac{5 - 31}{2} \cdot 10 = -130$$

$$S_{30} - S_{10} = -1590 - (-130) = \underline{\underline{-1460}}$$

ZADANIE Liczby -9, -3, 3 są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) . Oblicz sumę $a_5 + a_6 + \dots + a_{20}$.

Uwaga. Zadanie w powyższym przykładzie można było rozwiązać inaczej — zauważyć, że liczbę $a_{11} + a_{12} + \dots + a_{30}$ można potraktować jako sumę dwudziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, którego pierwszym wyrazem jest a_{11} , a dwudziestym wyrazem jest a_{30} .

zadania 1-18 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. a) Oblicz sumę dwudziestu jeden początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = 42$ i $r = -3$.
 b) Oblicz sumę trzydziestu pięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego określonego wzorem $a_n = 8 - 5n$.
 c) Oblicz sumę stu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego $-5\frac{1}{2}, -5, -4\frac{1}{2}, \dots$.
 d) W ciągu arytmetycznym dane są: $a_4 = -1,9$ i $a_7 = -4$. Oblicz sumę dziewiętnastu początkowych wyrazów tego ciągu.

2. Suma dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa 21 oraz $a_7 = 3\frac{2}{3}$. Oblicz a_1 i r .

3. Oblicz sumę pięćdziesięciu początkowych dodatnich liczb parzystych.

4. Ciąg (a_n) jest arytmetyczny i $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Znajdź pierwszy wyraz i różnicę ciągu (a_n) , jeżeli wiadomo, że:

a) $S_2 = -24$, $a_2 = 12$

b) $S_2 = 13$, $S_3 = 16$

c) $S_n = 4n^2 - 9n$

5. a) Oblicz sumę wyrazów od dziesiątego do trzydziestego ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = -5$ i $r = \frac{1}{2}$.

b) Dla ciągu arytmetycznego dane są sumy: $S_{10} = -37,5$, $S_{20} = 25$. Oblicz sumę trzydziestu początkowych wyrazów tego ciągu.

c) Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, w którym $S_{20} = 33$ i $S_{30} = 86$.

6. Ile zapalek potrzeba do ułożenia dwudziestu figur podanego ciągu arytmetycznego? Ile figur tego ciągu można ułożyć z 1000 zapalek?

a)



b)



7. W pierwszym rzędzie amfiteatru może zasiąść 40 osób, a w każdym następnym rzędzie — o 8 osób więcej.

a) Ile miejsc znajduje się w ostatnim, dwudziestym pierwszym rzędzie?

b) Ile wszystkich miejsc ma ten amfiteatr?





8. Dachówki są ułożone na jednej połaci dachu w szesnastu rzędach. Najniższy rząd składa się ze 130 dachówek, a w każdym następnym rzędzie leży o 5 dachówek mniej niż w rzędzie poprzednim. Ile dachówek leży w najwyższym rzędzie? Ile dachówek leży na całej połaci dachu?

9. Która z dwóch podanych ofert jest bardziej opłacalna? Oblicz w obu przypadkach sumę zarobionych w ciągu 5 lat pieniędzy.

Oferta 1: Wynagrodzenie wypłacane jest co pół roku. Pierwsza wypłata wyniesie 10 000 zł, a po każdym następnym półroczu dostaniesz 100 zł podwyżki.

Oferta 2: Wynagrodzenie wypłacane jest raz w roku. Pierwsza wypłata wyniesie 21 100 zł, a po każdym następnym roku dostaniesz 200 zł podwyżki.

10. Układamy domek z kart tak, że w każdej kondygnacji są o 3 karty mniej niż w poprzedniej, a najwyższe „piętro” jest zbudowane z dwóch kart.

a) Ile kondygnacji może mieć domek zbudowany z dwóch talii kart (tzn. ze 104 kart)? Ile kart potrzeba do ułożenia parteru tego domku?

b) Według książki rekordów Guinnessa najwyższa budowla ułożona z kart miała 131 kondygnacji. Ile talii kart potrzeba do ułożenia tak wysokiego domku w sposób, który opisano na początku?



11. a) Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 210.

b) Oblicz sumę wszystkich trzycyfrowych liczb naturalnych.

c) Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych większych od 39 i mniejszych od 93.

12. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych:

a) podzielnych przez 3 i mniejszych od 1000,

b) niepodzielnych przez 5 i mniejszych od 500,

c) mniejszych od 200, które przy dzieleniu przez 7 dają resztę 2.

13. Oblicz sumę wyrazów ciągu arytmetycznego.

a) $2 + 4 + 6 + \dots + 248$

c) $-34 - 38 - 42 - \dots - 126$

b) $12,5 + 11,25 + 10 + \dots + (-5)$

d) $29\frac{1}{3} + 28\frac{2}{3} + 28 + \dots + 17\frac{1}{3}$

14. Oblicz sumę wyrazów ciągu, który jest sumą dwóch ciągów arytmetycznych.

a) $13,7 + \frac{2}{7} + 13,3 + \frac{5}{7} + 12,9 + 1\frac{1}{7} + \dots + 8,1 + 6\frac{2}{7}$

b) $12 - 7 + 10 - 4 + 8 - 1 + 6 + 2 + \dots - 20 + 41$

c) $-129 - 6 - 123 - 11 - 117 - 16 - 111 - 21 - \dots - 69 - 56$

15. Ile początkowych wyrazów podanego ciągu arytmetycznego wystarczy dodać, aby otrzymana suma była większa od liczby p ?

a) $-2,7, -2,1, -1,5, -0,9, \dots, \quad p = 2$

c) $a_3 = 1, a_2 = \frac{4}{5}, \quad p = 13$

b) $a_1 = -59, r = 10, \quad p = -29$

d) $S_5 = -35, a_5 = -1, \quad p = 0$

16. Lewa strona równania jest sumą wyrazów ciągu arytmetycznego. Rozwiąż to równanie.

a) $0,2 + (0,2 + x) + (0,2 + 2x) + \dots + (0,2 + 19x) = -129$

b) $x + (x + 3) + (x + 6) + \dots + (x + 57) = 580$

c) $13 + 11 + 9 + \dots + x = -51$

d) $-24,3 - 23,7 - 23,1 - \dots - x = -480$

17. Udowodnij, że:

a) suma wszystkich liczb parzystych od 2 do $2n$ jest równa $n(n+1)$,

b) suma wszystkich liczb nieparzystych od 1 do $2n-1$ jest równa n^2 .

- **18.** Sumę n początkowych wyrazów pewnego ciągu (a_n) można obliczyć ze wzoru $S_n = 20n - 3n^2$. Znajdź wzór ogólny ciągu (a_n) . Wykaż, że ten ciąg jest ciągiem arytmetycznym.

MINISPRAWDZIAN

51. W ciągu arytmetycznym dane są: $a_4 = -50, a_6 = -44$. Suma wszystkich ujemnych wyrazów tego ciągu jest równa:

- A. -594 B. -601 C. -610 D. -616

52. Suma wszystkich trzycyfrowych liczb podzielnych przez 6 wynosi:

- A. 83 166 B. 82 170 C. 82 350 D. 81 801

53. Suma pewnej liczby kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa 65. Pierwszy z tych wyrazów jest równy 8, a ostatni 18. Ile wyrazów zsumowano?

- A. 5 B. 9 C. 13 D. 26

CIĄG GEOMETRYCZNY

- I Załóżmy, że ktoś wysłał do 100 osób SMS o treści, którą podano obok. Przypuśćmy też, że każda osoba, która otrzymała taką wiadomość, wysłała cztery SMS-y o tej samej treści. W takim razie każdego dnia wysyłano takich SMS-ów 4 razy więcej niż dnia poprzedniego.

SMS-OWY ŁAŃCUSZEK
SZCZĘŚCIA. Jutro rano
wyślij ten SMS do czterech
osób. Wkrótce spotka cię
coś bardzo milego.
Nie przerywaj łańcuszka!
Jacek L. przerwał i wypadły
mu włosy. Te same włosy
wrosły z kolei łysej
Marcinowi K., który
łańcuszka nie przerwał.

Zatem liczby wysłanych SMS-ów w kolejnych dniach wynosiłyby:

$100, 100 \cdot 4, 100 \cdot 4^2, 100 \cdot 4^3, 100 \cdot 4^4, 100 \cdot 4^5, 100 \cdot 4^6, \dots$

Łatwo zauważyć, że dziesiątego dnia liczba wysłanych SMS-ów wyniosłaby $100 \cdot 4^9$, czyli ponad 26 milionów. Liczba SMS-ów wysłanych jedenastego dnia byłaby więc znacznie większa niż liczba mieszkańców Polski.

Kolejne wyrazy ciągu $100, 100 \cdot 4, 100 \cdot 4^2, \dots$ otrzymaliśmy, mnożąc poprzedni wyraz przez 4.

Jeśli ciąg (a_n) ma co najmniej trzy wyrazy i każdy jego wyraz, z wyjątkiem pierwszego, powstaje w wyniku pomnożenia poprzedniego wyrazu przez pewną stałą liczbę q , to taki ciąg nazywamy **geometrycznym**. Liczbę q nazywamy **ilorazem ciągu**.

Wzór rekurencyjny ciągu geometrycznego
o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q :

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

ĆWICZENIE A Zapisz cztery początkowe wyrazy ciągu geometrycznego o podanym pierwszym wyrazie i ilorazie.

a) $a_1 = 18, \quad q = \frac{1}{2}$

b) $a_1 = 1, \quad q = \sqrt{2}$

c) $a_1 = -\pi, \quad q = -1$

Zauważ, że dla dowolnych dwóch kolejnych (niezerowych) wyrazów a_n i a_{n+1} ciągu geometrycznego zachodzi równość $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Zatem aby stwierdzić, czy dany ciąg o wyrazach różnych od 0 jest geometryczny, wystarczy sprawdzić, czy dzieląc wyraz przez wyraz go poprzedzający, otrzymujemy zawsze tę samą liczbę.

ĆWICZENIE B Niech (a_n) oznacza ciąg geometryczny o ilorazie q .

- a) Który wyraz tego ciągu otrzymamy, gdy wyraz a_{37} pomnożymy przez q^2 , a który — gdy wyraz a_{101} podzielimy przez q^5 ?
- b) Zapisz za pomocą a_n oraz q wyrazy a_{n-1} i a_{n+1} . Wykaż, że gdy $n > 1$, to zachodzi równość $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$.

Gdy wyraz a_n ciągu geometrycznego nie jest ani pierwszym, ani ostatnim wyrazem, to zachodzi równość:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Z tej równości wynika, że:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \quad \text{lub} \quad a_n = -\sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Średnią geometryczną liczb dodatnich p i q jest liczba $\sqrt{pq}$. Zatem w ciągu geometrycznym o wyrazach dodatnich wyraz a_n jest średnią geometryczną dwóch sąsiednich wyrazów. Tej własności ciąg geometryczny zawdzięcza zapewne swą nazwę.

zadania 1–12 ►

II ĆWICZENIE C Podaj przykład ciągu geometrycznego, który:

- a) jest rosnący i jego pierwszy wyraz jest liczbą dodatnią,
b) jest malejący i jego pierwszy wyraz jest liczbą ujemną,
c) nie jest ani rosnący, ani malejący.

Ciąg geometryczny (a_n) o ilorazie q jest:

- ciągiem rosnącym, gdy:

$$a_1 > 0 \text{ i } q > 1$$

(np. 0,7, 7, 70, 700, ...)

lub

$$a_1 < 0 \text{ i } 0 < q < 1$$

(np. -0,5, -0,05, -0,005, ...)

- ciągiem malejącym, gdy:

$$a_1 > 0 \text{ i } 0 < q < 1$$

(np. 6, 3, 1,5, 0,75, ...)

lub

$$a_1 < 0 \text{ i } q > 1$$

(np. -10, -20, -40, -80, ...)

Ciąg geometryczny (a_n) o ilorazie q , gdzie $q < 0$ nie jest ani rosnący, ani malejący.

Ciąg geometryczny o ilorazie q równym 1 jest ciągiem stałym. Ciągami stałymi jest także ciąg geometryczny, którego pierwszy wyraz jest równy 0.

zadania 13–14 ►

III ĆWICZENIE D W ciągu geometrycznym (a_n) pierwszy wyraz jest równy $\sqrt{3}$, a iloraz tego ciągu wynosi 2. Zapisz kilka początkowych wyrazów tego ciągu oraz wyrazy a_{10} i a_{20} . Podaj wzór ogólny tego ciągu.

W ciągu geometrycznym (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q kolejne wyrazy są równe:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 q^3$$

itd.

Z równości wynika wzór ogólny ciągu (a_n):

Wzór ogólny ciągu geometrycznego
o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Oto przykłady ciągów geometrycznych i ich wzory rekurencyjne i ogólne:

CIĄG GEOMETRYCZNY	WZÓR REKURENCYJNY	WZÓR OGÓLNY
• $\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 9\sqrt{2}, \dots$	$a_1 = \sqrt{2} \quad a_{n+1} = 3a_n$	$a_n = \sqrt{2} \cdot 3^{n-1}$
• $3, -\frac{3}{4}, \frac{3}{16}, \dots$	$a_1 = 3 \quad a_{n+1} = -\frac{1}{4}a_n$	$a_n = 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
• $-90, -9, -0,9, \dots$	$a_1 = -90 \quad a_{n+1} = 0,1a_n$	$a_n = -90 \cdot 0,1^{n-1}$

PRZYKŁAD 1 W ciągu geometrycznym pierwszy wyraz jest równy 2, a piąty wyraz jest o 40 większy od trzeciego. Znajdź wzór ogólny tego ciągu.

$$a_5 = a_3 + 40$$

$$2q^4 = 2q^2 + 40$$

$$q^4 - q^2 - 20 = 0$$

..... Równość wynika z warunków zadania.

..... Korzystamy z tego, że $a_5 = a_1 q^4 = 2q^4$
oraz $a_3 = a_1 q^2 = 2q^2$.

Niech $q^2 = t$. Wówczas: $t^2 - t - 20 = 0$

$$\Delta = 1 + 80 = 81$$

$$t_1 = \frac{1+9}{2} = 5$$

$$t_2 = \frac{1-9}{2} = -4$$

$$q^2 = 5 \quad \text{lub}$$

$$q^2 = -4$$

$$q = \sqrt{5} \quad \text{lub} \quad q = -\sqrt{5}$$

równanie sprzeczne

$$a_n = 2 \cdot (\sqrt{5})^{n-1} \quad \text{lub} \quad a_n = 2 \cdot (-\sqrt{5})^{n-1} \quad \vdots \quad \text{Dwa ciągi spełniają warunki zadania.}$$

ZADANIE W ciągu geometrycznym (a_n) o pierwszym wyrazie równym 5 wyraz a_7 jest o 10 większy od wyrazu a_4 . Znajdź wzór ogólny tego ciągu.

zadania 15–20 ►

PRZYKŁAD 2 Znajdź różnicę r ciągu arytmetycznego (a_n) , jeśli wiadomo, że $a_6 = 1$ oraz wyrazy a_2 , a_6 i a_{26} to kolejne wyrazy ciągu geometrycznego.

$$a_2 = a_6 - 4r$$

$$a_2 = 1 - 4r$$

$$a_{26} = a_6 + 20r$$

$$a_{26} = 1 + 20r$$

Ciąg a_2 , a_6 i a_{26} jest ciągiem geometrycznym.

Wiemy, że $a_2 \neq 0$.

..... Gdyby $a_2 = 0$, to każdy kolejny wyraz także byłby równy 0. Wiemy zaś, że $a_6 = 1$.

Zachodzi zatem równanie:

$$\frac{a_{26}}{a_6} = \frac{a_6}{a_2}$$

$$\frac{1+20r}{1} = \frac{1}{1-4r}$$

$$(1+20r)(1-4r) = 1$$

$$1 - 4r + 20r - 80r^2 = 1$$

$$80r^2 - 16r = 0 \quad | : 16$$

$$5r^2 - r = 0$$

$$r(5r - 1) = 0$$

$$r = 0 \quad \text{lub} \quad r = \frac{1}{5}$$

ZADANIE Znajdź różnicę r ciągu arytmetycznego (a_n) , jeśli wiadomo, że $a_1 = 28$ oraz wyrazy a_1 , a_3 i a_4 to kolejne wyrazy ciągu geometrycznego.

zadania 21–25 ►

ZESTAW ZADAŃ

◀ 1. Czy podany ciąg jest geometryczny?

a) $-\frac{4}{27}, \frac{2}{9}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

b) $14, 2, \frac{2}{7}, \frac{1}{2}$

c) $5\sqrt{5}, \sqrt{5}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{5\sqrt{5}}$

2. Podany ciąg jest ciągiem geometrycznym. Oblicz iloraz tego ciągu.

a) $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$

b) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 2, -4, 8, \dots$

c) $-3, -0,3, -0,03, -0,003, -0,0003, \dots$

d) $1 + \sqrt{2}, \sqrt{3} + \sqrt{6}, 3 + 3\sqrt{2}, 3\sqrt{3} + 3\sqrt{6}, \dots$

3. Podany ciąg jest ciągiem geometrycznym. Znajdź kolejny wyraz tego ciągu.

- a) 10, 100, 1000, ... d) 1, -1, 1, -1, ...
b) $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{25}$, 5, $5\sqrt[3]{5}$, ... e) 200, 2, 0,02, 0,0002, ...
c) $\frac{3}{7}$, -1, $\frac{7}{3}$, $-\frac{49}{9}$, ... f) $1+\sqrt{5}$, $(1+\sqrt{5})^3$, ...

4. Podany ciąg jest ciągiem geometrycznym. Oblicz a_1 oraz a_4 .

- a) a_1 , -3, 15, a_4 , ... b) a_1 , 2, 7, a_4 , ... c) a_1 , 204, -68, a_4 , ...

5. Podany ciąg liczb jest ciągiem geometrycznym. Znajdź jego iloraz i oblicz następny wyraz tego ciągu.

- a) $\log 2$, $\log 4$, $\log 16$, ... b) $\log 3$, $\log \frac{1}{9}$, $\log 81$, ...

6. Oblicz x , dla którego podany ciąg jest geometryczny.

- a) -6, 15, $\frac{x}{2}$ b) -4, $x+1$, -25 c) $3+x$, x , 3

7. a) Pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego jest liczba -0,15, a trzecim — liczba -6. Oblicz drugi wyraz tego ciągu.

b) Dany jest ciąg geometryczny: 25, x , y , $12\frac{4}{5}$. Oblicz x i y .

c) Wstaw pomiędzy liczby 16 i 81 takie trzy liczby, by razem tworzyły pięć kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego.

d) Szósty wyraz pewnego ciągu geometrycznego o niezerowych wyrazach jest dwa razy większy od wyrazu trzeciego. Oblicz iloraz tego ciągu.

8. Które z ciągów o podanych wyrazach ogólnych są ciągami geometrycznymi?

$$a_n = 4 - 3^n \quad b_n = \frac{2}{11^n} \quad c_n = 2^n \cdot 7^{n+2} \quad d_n = 3 \cdot 5^{n-3} \quad e_n = 6n^2$$

9. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, a jego wyrazy są różne od 0. Które z ciągów o podanych wzorach ogólnych są geometryczne?

$$b_n = \frac{1}{a_n} \quad c_n = |a_n| \quad d_n = a_n^2 \quad e_n = 2a_n \quad f_n = a_n + 2$$

10. a) Piąty wyraz pewnego ciągu geometrycznego jest równy -5. Czy siódmym wyrazem tego ciągu może być liczba 20?

b) Czy istnieje taki ciąg geometryczny, w którym $a_{12} = 8$ i $a_{28} = -64$?

11. Wykaż, że w ciągu geometrycznym (a_n) o wyrazach różnych od zera wyrazy a_n i a_{n+2} mają taki sam znak.

- **12. a)** Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy $\sqrt{7}$, a jeden z następnych wyrazów tego ciągu jest równy 0. Podaj a_{127} .

b) W ciągu geometrycznym (b_n) czwarty wyraz jest równy 3, a wyrazy b_{17} i b_{25} są jednakowe. Podaj b_{100} .

◀ **13.** Określ monotoniczność podanego ciągu geometrycznego.

a) $a_n = 4 \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^n$

c) $c_n = \frac{-5^n}{10}$

e) $e_n = \frac{-8}{4^n}$

b) $b_n = 100 \cdot 0,1^n$

d) $d_n = -9 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)^n$

f) $f_n = 5 \cdot 1,1^{-n}$

- **14.** Spośród liczb -3 , $-\frac{2}{3}$, 0 , $\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, 5 wybieramy dwie różne i tworzymy ciąg geometryczny (a_n) w taki sposób, że jedna z tych liczb jest pierwszym wyrazem ciągu, a druga — jego ilorazem.

a) Wybierz a_1 i q tak, by ciąg (a_n) był ciągiem malejącym. Ile takich ciągów można utworzyć?

b) Ustal, ile ciągów rosnących o wyrazach ujemnych można utworzyć w ten sposób.

◀ **15. a)** Zapisz wzory ogólne i rekurencyjne następujących ciągów geometrycznych:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \dots \quad 5\sqrt{2}, 10, 10\sqrt{2}, \dots \quad -2, 1, -\frac{1}{2}, \dots$$

b) Zapisz wzory ogólne ciągów geometrycznych (określonych rekurencyjnie):

$$a_1 = 13 \text{ i } a_{n+1} = 5a_n \quad b_1 = -0,4 \text{ i } b_{n+1} = \frac{b_n}{7} \quad c_1 = \frac{3}{4} \text{ i } c_{n+1} = -9c_n$$

c) Zapisz wzory rekurencyjne ciągów geometrycznych (określonych za pomocą wzorów ogólnych):

$$x_n = 19 \cdot (-0,7)^{n-1} \quad y_n = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad z_n = \frac{-5}{3^n}$$

16. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym.

a) Oblicz iloraz tego ciągu oraz a_{10} , jeśli $a_1 = 1$ i $a_{11} = 32$.

b) Oblicz iloraz tego ciągu oraz a_{10} , jeśli $a_9 = 0,28$ i $a_{13} = 175$.

c) Oblicz a_4 , jeśli $a_{10} = 24$ i $q = \sqrt{2}$.

d) Oblicz a_{10} , jeśli $a_{13} = -1$ i $a_{15} = -\frac{1}{9}$.

17. Sprawdź, czy liczba b jest wyrazem podanego ciągu geometrycznego.

a) $1, \frac{3}{5}, \frac{9}{25}, \dots$ $b = \frac{243}{625}$ **b)** $6, 4, 2\frac{2}{3}, \dots$ $b = \frac{64}{81}$

18. Wyobraź sobie ogromny arkusz papieru o grubości 0,1 mm. Arkusz ten składamy na pół, potem jeszcze raz na pół i jeszcze raz na pół.

a) Zapisz wzór pozwalający obliczyć grubość złożonego arkusza po n złożeniach.

b) Oblicz grubość złożonego arkusza, gdyby udało się go złożyć 30 razy.

- **19.** Masa każdego pierwiastka promieniotwórczego zmniejsza się o połowę po upływie pewnego określonego dla tego pierwiastka czasu. Czas ten nazywany jest okresem połowicznego rozpadu.

a) W próbówce znajduje się m_0 gramów pewnego pierwiastka promieniotwórczego. Zapisz wzór pozwalający obliczyć masę tego pierwiastka, który będzie w próbówce po upływie n okresów połowicznego rozpadu.

b) Okres połowicznego rozpadu izotopu jodu ^{131}I wynosi około 8 dni. Zmierzono, że pewna próbka zawiera 0,4 mg jodu ^{131}I . Oblicz masę izotopu ^{131}I , jaką zawierała ta próbka 40 dni wcześniej.

20. Moc obliczeniowa to największa możliwa liczba operacji wykonywanych przez komputer w ciągu sekundy. W 1965 roku Amerykanin Gordon Moore (czyt. mur), sformułował zasadę znaną jako prawo Moore'a:

Moc obliczeniowa komputerów podwaja się co 18 miesięcy.



W 1994 roku najszybszym komputerem na świecie był Paragon wykonujący około $15 \cdot 10^{10}$ operacji na sekundę. Najszybsze komputery w 2000 roku wykonywały około $2,4 \cdot 10^{12}$ operacji na sekundę. Czy wzrost mocy obliczeniowej w latach 1994–2000 był zgodny z prawem Moore'a?

- ◀ **IV 21.** Pierwszym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego jest liczba 1. Drugi, trzeci i piąty wyraz tego ciągu są kolejnymi początkowymi wyrazami ciągu geometrycznego. Zapisz wzór ogólny ciągu geometrycznego.

22. Trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego (a_n) jest 6. Pierwszy, trzeci i dziesiąty wyraz tego ciągu to kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Znajdź wzór ogólny ciągu (a_n).

23. Liczby a , b i c są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego. Ich suma jest równa 45. Liczby $\frac{a}{4}$, $b - 3$, $c + 30$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Znajdź liczby a , b i c .

24. Z czterech liczb utworzono ciąg. Trzy początkowe jego wyrazy tworzą ciąg arytmetyczny, a trzy końcowe — ciąg geometryczny. Suma dwóch środkowych wyrazów jest równa 10, a suma dwóch skrajnych jest równa 11. Znajdź te cztery liczby.

25. Udowodnij, że jeśli ciąg $a_1, a_2, a_3, \dots$ o wyrazach dodatnich jest ciągiem geometrycznym, to ciąg $\log a_1, \log a_2, \log a_3, \dots$ jest ciągiem arytmetycznym.

MINISPRAWDZIAN

51. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, w którym pierwszy wyraz jest równy 6, a iloraz wynosi $\frac{1}{3}$. Która z poniższych równości nie jest prawdziwa?

- A. $a_3 = \frac{2}{3}$ B. $a_{11} = \frac{2}{3^9}$ C. $\frac{a_{20}}{a_{21}} = 3$ D. $a_{13} \cdot a_{12} = \frac{1}{3}$

52. Iloraz pewnego ciągu geometrycznego wynosi 2, a suma trzech początkowych wyrazów jest równa 14. Suma czterech początkowych wyrazów jest równa:

- A. 16 B. 28 C. 30 D. 31

53. Drugim wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) jest 1, a trzy początkowe wyrazy tego ciągu są odpowiednio pierwszym, drugim i czwartym wyrazem ciągu geometrycznego. Która z podanych liczb nie może być różnicą ciągu (a_n) ?

- A. 0 B. 1 C. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ D. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

SUMA WYRAZÓW CIĄGU GEOMETRYCZNEGO

- 1 Przyjmijmy, że (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q , gdzie $q \neq 1$, czyli że (a_n) nie jest ciągiem stałym. Niech S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów tego ciągu:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Mnożąc obie strony powyższej równości przez q , otrzymujemy:

$$S_n q = \underbrace{a_1 q}_{a_2} + \underbrace{a_2 q}_{a_3} + \underbrace{a_3 q}_{a_4} + \dots + \underbrace{a_{n-1} q}_{a_n} + \underbrace{a_n q}_{a_{n+1}}$$

Wobec tego liczba $S_n q$ jest równa sumie wyrazów od a_2 do a_{n+1} .

Stąd:

$$S_n - S_n q = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1})$$

$$S_n(1 - q) = a_1 - a_{n+1}$$

$$S_n(1 - q) = a_1 - a_1 q^n$$

$$S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \quad \text{gdzie } q \neq 1$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o ilorazie q (gdzie $q \neq 1$):

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

ĆWICZENIE Oblicz sumę wyrazów skończonego ciągu geometrycznego:

a) 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729

b) 1, $-\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, $-\frac{8}{27}$, $\frac{16}{81}$

Jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q , gdzie $q = 1$, czyli jest ciągiem stałym, to $S_n = na_1$.

PRZYKŁAD Składniki podanej sumy to kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Oblicz tę sumę.

$$4 + 12 + 36 + \dots + 4 \cdot 3^{10}$$

$$a_1 = 4$$

$$q = \frac{12}{4} = 3$$

$$a_n = 4 \cdot 3^{10}$$

$$4 \cdot 3^{n-1} = 4 \cdot 3^{10}$$

$$n - 1 = 10$$

$$n = 11$$

$$S_{11} = 4 \cdot \frac{1 - 3^{11}}{1 - 3} = 4 \cdot \frac{1 - 177147}{-2} = 354292$$

Korzystając z równości $q = \frac{a_2}{a_1}$, znajdujemy iloraz, a następnie wzór ogólny ciągu.

Ustalamy, którym wyrazem ciągu jest wyraz $4 \cdot 3^{10}$, korzystając ze wzoru $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Zatem jest 11 składników sumy.

ZADANIE Składniki sumy $-3 - 6 - 12 - \dots - 3 \cdot 2^{15}$ to kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Oblicz tę sumę.

zadania 1-9 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz sumę:

- pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = 3$ i $q = -2$,
- siedmiu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego $b_n = \frac{5}{2^n}$,
- sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego 22, -66, 198, ...

2. Składniki podanej sumy to kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Oblicz tę sumę.

a) $3 + 15 + 75 + \dots + 3 \cdot 5^9$

c) $50 - 10 + 2 - \dots + \frac{2}{625}$

b) $-1 - \frac{3}{2} - \frac{9}{4} - \dots - \frac{243}{32}$

d) $-\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \dots - \frac{1}{3072}$

3. a) Każdy człowiek ma dwoje rodziców, czworo dziadków, ośmiu pradziadków itd. Oblicz liczbę wszystkich swoich przodków w 10 pokoleniach.

b) Przyjmijmy, że co 25 lat rodzi się nowe pokolenie. Ilu twoich przodków urodziło się w ciągu ostatnich 2000 lat? Szacuje się, że od zarania ludzkości na Ziemi żyło $11 \cdot 10^{10}$ ludzi. Wyłutnac sprzeczność między tą liczbą a otrzymanym rezultatem.

4. Grę w szachy wymyślono w Indiach. Legenda głosi, że władca Indii zachwycony tą grą postanowił nagrodzić jej twórcę, proponując mu, by sam wybrał nagrodę. Sprytny wynalazca poprosił o jedno ziarno pszenicy za pierwsze pole szachownicy, dwa ziarna za drugie, a za każde następne 2 razy więcej ziaren niż za pole poprzednie.



a) Zapisz wzór, który przedstawia liczbę ziaren za n -te pole szachownicy.

b) Oszacuj, ile ton pszenicy miałby otrzymać wynalazca szachów. Możesz przyjąć, że 4 tony pszenicy to około 10^8 ziaren. Na świecie produkuje się około 600 mln ton pszenicy rocznie. Porównaj otrzymany wynik z tą liczbą.

5. Piłkę puszczono z wysokości 2 m. Po każdym odbiciu się od podłogi piłka wznosi się na wysokość równą 0,7 wysokości, z której opadała. Oblicz:

a) wysokość, na którą wzniesie się piłka po piątym odbiciu się od podłogi,

b) drogę, jaką pokona piłka od momentu puszczenia jej do momentu szóstego odbicia się od podłogi.

6. Sześcian, który jest podstawą budowli przedstawionej na rysunku, ma krawędź długości 30 m. Krawędź każdego następnego sześcianu jest o $\frac{1}{3}$ krótsza od krawędzi sześcianu poniżej. Oblicz wysokość budowli, jej pole powierzchni całkowitej oraz objętość.



7. Oblicz sumę wyrazów ciągu.

a) $5 - 4 + 25 - 8 + 125 - 16 + \dots + 5^7 - 2^8$

c) $3 + 2 + 6 + 1 + 9 + \frac{1}{2} + \dots + 30 + \frac{1}{256}$

b) $3 - 1 + 9 - 4 + 27 - 7 + \dots + 3^{10} - 28$

d) $\frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} + \frac{17}{16} + \frac{33}{32} + \dots + \left(1 + \frac{1}{2^9}\right)$

8. Oblicz sumę.

a) $9 + 99 + 999 + \dots + 999999999$

b) $3 + 33 + 333 + \dots + 333333333$

9. Uzasadnij, że gdy spełniony jest warunek $a \neq 1$, to zachodzi równość:

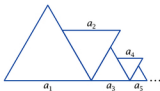
$$a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + \dots + 30a^{30} = \frac{a(30a^{31} - 31a^{30} + 1)}{(1-a)^2}$$

MINISPRAWDZIAN

51. Suma ośmiu początkowych wyrazów ciągu określonego za pomocą wzoru $a_n = \frac{0,3^n}{9}$, zaokrąglona do części dziesiętysięcznych, jest równa:

- A. 0,0476 B. 3,6666 C. 0,9303 D. 2,4932

52. Na rysunku przedstawiono ciąg trójkątów równobocznych. Długości boków tych trójkątów tworzą ciąg geometryczny, w którym $a_1 = 2$ i $q = \frac{2}{3}$. Suma pól dziesięciu początkowych trójkątów w tym ciągu jest równa:



- A. $\frac{3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right)}{\frac{1}{3}}$ B. $\frac{\sqrt{3}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{10}\right)}{\frac{5}{9}}$ C. $\frac{\sqrt{3}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right)}{\frac{2}{3}}$ D. $\frac{4\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right)}{\frac{3}{2}}$

53. Liczba $1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{10}}\right)$ jest równa:

- A. $\frac{1}{2^{10}}$ B. $1 - \frac{1}{2^{10}}$ C. $1 - 2^{10}$ D. 2^{10}

PROCENT PROSTY I PROCENT SKŁADANY

- 1 Wyobraź sobie, że niespodziewanie odwiedził cię bogaty krewny i obiecał, że przez najbliższe dwa lata będzie ci co miesiąc wypłacał kieszonkowe. Złożył przy tym dwie propozycje do wyboru.

PROPOZYCJA I

W pierwszym miesiącu otrzymasz kwotę 100 zł, a w każdym następnym — więcej niż w poprzednim o kwotę równą 50% kieszonkowego w pierwszym miesiącu.

PROPOZYCJA II

W pierwszym miesiącu otrzymasz 2 zł, a w każdym następnym miesiącu — o 50% więcej niż w poprzednim miesiącu.

Która propozycja wydaje się korzystniejsza?

ĆWICZENIE A Oblicz, ile wyniosłoby kieszonkowe w trzecim miesiącu według pierwszej propozycji, a ile — według drugiej.

Niech K_n oznacza kieszonkowe (w złotych) otrzymane w n -tym miesiącu. Zatem wypłaty w kolejnych miesiącach wyniosłyby:

PROPOZYCJA I	PROPOZYCJA II
$K_1 = 100$	$K_1 = 2$
$K_2 = K_1 + 50 = 100 + 50$	$K_2 = K_1 \cdot 1,5 = 2 \cdot 1,5$
$K_3 = K_2 + 50 = 100 + 2 \cdot 50$	$K_3 = K_2 \cdot 1,5 = 2 \cdot 1,5^2$
$K_4 = K_3 + 50 = 100 + 3 \cdot 50$	$K_4 = K_3 \cdot 1,5 = 2 \cdot 1,5^3$
$\vdots$	$\vdots$
$K_n = K_{n-1} + 50 = 100 + (n-1) \cdot 50$	$K_n = K_{n-1} \cdot 1,5 = 2 \cdot 1,5^{n-1}$

Łatwo zauważyć, że kolejne wypłaty obliczone według reguły z pierwszej propozycji tworzą ciąg arytmetyczny (o pierwszym wyrazie $K_1 = 100$ i różnicy $r = 50$), a według drugiej — ciąg geometryczny (o pierwszym wyrazie $K_1 = 2$ i ilorazie $q = 1,5$). Korzystając z powyższych wzorów ogólnych, można porównać kieszonkowe po pierwszym roku i po drugim.

	PROPOZYCJA I	PROPOZYCJA II
K_{12}	$100 + 11 \cdot 50 = 650$	$2 \cdot 1,5^{11} \approx 173$
K_{24}	$100 + 23 \cdot 50 = 1250$	$2 \cdot 1,5^{23} \approx 22\,445$

Jak widać, w ostatnim miesiącu drugiego roku wypłaty naliczone według drugiej propozycji byłyby zdecydowanie wyższe.

ĆWICZENIE B Propozycja druga stała się w pewnym momencie korzystniejsza. Uzasadnij, że zdarzyło się to w szesnastym miesiącu.

Aby porównać oba warianty, należałoby obliczyć sumę wszystkich wypłat. W tym celu możemy skorzystać ze wzorów na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego.

PROPOZYCJA I	PROPOZYCJA II
$S_{24} = \frac{K_1 + K_{24}}{2} \cdot 24 =$ $= \frac{100 + 1250}{2} \cdot 24 = 16\,200$	$S_{24} = K_1 \cdot \frac{1 - q^{24}}{1 - q} =$ $= 2 \cdot \frac{1 - 1,5^{24}}{1 - 1,5} \approx 67\,332$

Choć propozycja druga wydawała się początkowo mało atrakcyjna, okazała się jednak dużo korzystniejsza.

Opisane powyżej sytuacje przypominają dwa najczęściej spotykane sposoby naliczania odsetek przy różnych operacjach finansowych.

Jeżeli odsetki są naliczane od stałej kwoty, to mamy do czynienia z procentem prostym. Wtedy kapitał końcowy obliczamy według wzoru podanego obok.

PROCENT PROSTY

$$K_n = K_0 + \frac{p}{100} \cdot K_0 \cdot n$$

K_0 — kapitał początkowy

p — oprocentowanie za jeden okres naliczania odsetek

n — liczba okresów naliczania odsetek

K_n — kapitał z odsetkami po n okresach

PRZYKŁAD 1 Warunki kredytowe są następujące: przez 2 lata należy spłacać co miesiąc 1% pożyczonej kwoty, przy czym w ostatnim miesiącu oprócz odsetek trzeba oddać całą pożyczoną kwotę. Oblicz, jaką sumę trzeba będzie wpłacić pożyczkodawcy w ciągu 2 lat, jeśli na tych warunkach zaciągniemy kredyt 5000 zł.

$$K_0 = 5000 \text{ zł}, \quad p\% = 1\%, \quad n = 24$$

$$K_{24} = K_0 + \frac{p}{100} \cdot K_0 \cdot 24 \quad \vdots \quad K_{24} \text{ — suma do spłacenia po 24 miesiącach}$$

$$K_{24} = 5000 + 0,01 \cdot 5000 \cdot 24 = 6200$$

Odp. Suma wpłat wyniesie 6200 zł.

ZADANIE Warunki kredytu są następujące: przez 3 lata należy spłacać co miesiąc 2% pożyczonej kwoty i w ostatnim miesiącu oddać całą pożyczoną kwotę. Ile wyniesie suma odsetek, jeśli pożyczymy na tych warunkach 10 tysięcy złotych?

Jeżeli odsetki są naliczane od kapitału powiększonego o odsetki za wcześniejszy okres, mamy do czynienia z procentem składanym, tzn. jeśli kapitał początkowy wynosi K_0 , a oprocentowanie jest równe $p\%$, to po kolejnych okresach naliczania odsetek kapitał wraz z odsetkami wynosi:

$$\text{po pierwszym okresie: } K_1 = K_0 + \frac{p}{100} \cdot K_0 = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)$$

$$\text{po dwóch okresach: } K_2 = K_1 + \frac{p}{100} \cdot K_1 = K_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2$$

$$\text{po trzech okresach: } K_3 = K_2 + \frac{p}{100} \cdot K_2 = K_2 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^3 \text{ itd.}$$

Ten sposób naliczania odsetek jest zwykle stosowany przez banki. Gdy bank dolicza kwotę odsetek do kapitału (stanu konta), to mówimy, że odsetki są kapitalizowane.

PROCENT SKŁADANY

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$$

K_0 — kapitał początkowy

p — oprocentowanie za jeden okres naliczania odsetek

n — liczba okresów naliczania odsetek

K_n — kapitał z odsetkami po n okresach

PRZYKŁAD 2 Na konto, którego oprocentowanie wynosi 4% w skali roku, wpłacono 10 000 zł. Oblicz, jaki będzie stan konta po upływie 5 lat, jeśli właściciel konta nie będzie dokonywał żadnych wpłat ani wypłat.

$$K_0 = 10\,000 \text{ zł}, \quad p\% = 4\%, \quad n = 5$$

$$K_5 = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 \quad \vdots \quad K_5 \text{ — kwota na koncie po 5 latach}$$

$$\begin{aligned} K_5 &= 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^5 = \\ &= 10\,000 \cdot (1,04)^5 \approx 12\,166,53 \end{aligned}$$

Odp. Po 5 latach na koncie będzie 12 166,53 zł.

ZADANIE Na konto, którego oprocentowanie wynosi 1% w skali roku, wpłacono 20 000 zł. Oblicz, jaki będzie stan konta po upływie 10 lat, jeśli właściciel nie będzie dokonywał żadnych wpłat ani wypłat.

zadania 1–4 ►

- II Przy lokatach krótszych niż rok bank kapitalizuje odsetki po każdym okresie trwania lokaty. Jeśli na przykład przez dłuższy czas pozostawimy pieniądze na lokacie 3-miesięcznej, to odsetki będą doliczane co kwartał.

Oprocentowanie lokat banki zawsze określają w skali roku, dotyczy to także lokat, które trwają krócej. Trzeba o tym pamiętać przy obliczaniu odsetek. Na przykład: gdy bank podaje, że oprocentowanie lokaty 3-miesięcznej wynosi 4%, to oznacza, że po 3 miesiącach odsetki wynoszą $\frac{3}{12} \cdot 4\%$ kwoty, która była na koncie.

PRZYKŁAD 3 Na lokatę 2-miesięczną wpłacamy 30 000 zł. Oprocentowanie lokaty wynosi 5%. Oblicz sumę odsetek z tej lokaty po półtora roku oszczędzania.

$$K_0 = 30\,000 \text{ zł}$$

$$p\% = \frac{2}{12} \cdot 5\% = \frac{5}{6}\%$$

$$n = 9$$

$$K_9 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^9 \quad \vdots \quad K_9 \text{ — kwota na koncie po 9 okresach naliczania odsetek.}$$

$$K_9 = 30\,000 \cdot \left(1 + \frac{5}{6 \cdot 100}\right)^9 \approx 32\,326,48$$

$$K_9 - K_0 \approx 2326,48 \quad \vdots \quad \text{Obliczamy sumę odsetek.}$$

Odp. Suma odsetek po półtora roku oszczędzania będzie równa 2326,48 zł.

ZADANIE Na lokatę półroczną wpłacamy 20 000 zł. Oprocentowanie lokaty jest równe 2%. Oblicz, ile wyniesie suma odsetek z tej lokaty po 5 latach.

zadania 5–9 ►

- III W przykładach 2 i 3, w których była mowa o oprocentowaniu lokat bankowych, nie uwzględniliśmy podatku. W rzeczywistości odsetki, które dopisuje bank do naszych oszczędności, traktowane są przez państwo jako nasz dochód. Dlatego zapłacimy od nich podatek. Wynosi on w Polsce 19% kwoty odsetek i jest automatycznie przekazywany przez bank do skarbu państwa po każdym naliczeniu odsetek. Po zapłaceniu podatku zostaje więc 81% odsetek. Można więc powiedzieć, że jeśli oprocentowanie lokaty w pewnym okresie wynosi $p\%$, to oprocentowanie netto w tym okresie jest równe $0,81 \cdot p\%$.

PRZYKŁAD 4 Na lokatę 6-miesięczną wpłacono 10 000 zł. Oprocentowanie lokaty jest równe 4%, a podatek od odsetek wynosi 19%. Oblicz, jaką kwotę odsetek otrzyma łącznie po dwóch latach właściciel konta, jeśli:

- będzie wypłacał odsetki co pół roku,
- nie będzie wypłacał pieniędzy z tego konta ani na nie wpłacał przed upływem dwóch lat.

$$K_0 = 10\,000$$

$$p\% \text{ (brutto)} = \frac{4}{2}\% = 2\% \quad \begin{array}{l} \vdots \text{ Obliczamy oprocentowanie brutto po pół roku.} \\ \vdots \end{array}$$

$$n = 4 \quad \begin{array}{l} \vdots \text{ W ciągu 2 lat odsetki zostaną naliczone 4 razy.} \\ \vdots \end{array}$$

$$\text{a) } K_a = 0,81 \cdot \frac{p}{100} \cdot K_0 \cdot n = 0,81 \cdot \frac{2}{100} \cdot 10\,000 \cdot 4 = 648 \text{ zł}$$

Odp. Suma wypłacanych co pół roku odsetek wyniesie 648 zł.

$$\text{b) } K_b = K_0 \left(1 + 0,81 \cdot \frac{p}{100}\right)^4 - K_0 = 10\,000 \left(1 + 0,81 \cdot \frac{2}{100}\right)^4 - 10\,000 = 663,92 \text{ zł}$$

Odp. Po dwóch latach suma odsetek wyniesie 663,92 zł.

ZADANIE Na lokatę 3-miesięczną wpłacono 50 000 zł. Oprocentowanie lokaty jest równe 2%, a podatek od odsetek wynosi 19%. Oblicz, jaką kwotę odsetek otrzyma łącznie po dwóch latach właściciel konta, jeśli:

- będzie wypłacał odsetki co 3 miesiące,
- nie będzie wypłacał pieniędzy z tego konta ani na nie wpłacał przed upływem dwóch lat.

zadania 10–16 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Kasa pożyczkowa proponuje kredyty, które należy spłacić w całości po upływie ustalonego terminu, a do tego czasu trzeba po upływie każdego miesiąca wpłacać do kasy 2% pożyczonej kwoty (pierwsza wpłata po upływie miesiąca od zaciągnięcia pożyczki). Oblicz, jaką kwotę trzeba by w sumie wpłacić do kasy, pożyczając:

- a) 1000 zł na 1 rok, b) 10 000 zł na 8 miesięcy, c) 15 000 zł na 3 lata.

2. Cena pewnego towaru wynosi 1000 zł. Sprzedawca ma zamiar zmieniać ją co tydzień. Zapisz wzór, który pozwala obliczać, jaka będzie cena towaru po n tygodniach, jeśli co tydzień sprzedawca:

- a) będzie podwyższać cenę o 10% ceny początkowej,
- b) będzie obniżać cenę o 10% ceny początkowej,
- c) będzie podwyższać cenę o 2%,
- d) będzie obniżać cenę o 2%.

Uwaga. Rozwiąż zadania 3–9, nie uwzględniając podatku od odsetek. Przyjmij też, że właściciel konta nie dokonuje wpłat ani wypłat w trakcie trwania lokaty.

3. Na lokatę roczną, której oprocentowanie wynosi $p\%$, wpłacono kwotę K zł. Oblicz, jaki będzie stan tego konta, na którym ulokowano pieniądze, po upływie n lat, jeśli:

- a) $K = 4000$, $p\% = 3\%$, $n = 5$
- b) $K = 1200$, $p\% = 5\%$, $n = 10$
- c) $K = 35\,000$, $p\% = 2\%$, $n = 8$
- d) $K = 5500$, $p\% = 3,5\%$, $n = 6$

4. a) Na lokatę roczną, której oprocentowanie wynosi 3%, wpłacono 2000 zł. Po pewnym czasie stan oszczędności wyniósł 2388,10 zł. Oblicz, ile lat upłynęło.

b) Oblicz, jaką kwotę wpłacono na lokatę roczną, której oprocentowanie wynosiło 10%, skoro po upływie 4 lat oszczędzania na koncie znajdowało się 8052,55 zł.

c) Na lokatę roczną wpłacono 5200 zł i po 4 latach oszczędzania kwota ta wzrosła do 6201,10 zł. Oblicz oprocentowanie tej lokaty.

II **5.** Na lokatę terminową, oprocentowaną $p\%$ w stosunku rocznym, wpłacono kwotę 10 000 zł. Oblicz, jaki będzie stan tej lokaty po upływie okresu t , jeśli:

- a) lokata jest miesięczna, $p\% = 4\%$, $t = 2$ lata,
- b) lokata jest 3-miesięczna, $p\% = 3,5\%$, $t = 3$ lata,
- c) lokata jest 6-miesięczna, $p\% = 3\%$, $t = 3,5$ roku.

6. Pan Adam i pan Jan skorzystali z lokaty rocznej, której oprocentowanie wynosi 3%. Pan Adam wpłacił 10 000 zł, a pan Jan 20 000 zł. Oceń, które z podanych zdań są prawdziwe.

- ① Po trzech latach pan Adam otrzyma w sumie 1500 zł odsetek.
- ② Po drugim roku panu Janowi zostanie dopisana dwa razy większa łączna kwota odsetek niż panu Adamowi.
- ③ Po trzech latach na lokacie pana Jana zgromadzi się dwa razy więcej pieniędzy niż na lokacie pana Adama.
- ④ Po czterech latach pan Adam będzie miał na lokacie tyle samo co pan Jan po dwóch latach.

7. a) Na lokatę miesięczną oprocentowaną w wysokości 2% wpłacono 5000 zł. Po jakim czasie łączna kwota odsetek wyniesie ponad 200 zł?

b) Oblicz, jaką kwotę wpłacono na lokatę 3-miesięczną, której oprocentowanie wynosi 2,5%, skoro po upływie 2 lat oszczędzania na koncie znajduje się 7778,20 zł.

c) Ile było równe oprocentowanie lokaty 3-miesięcznej, jeśli wpłacona kwota 7200 zł po trzech latach zwiększyła się o 913,14?

d) Kwotę 12 000 zł wpłacono na lokatę 3-letnią, ale odsetki doliczane były co pół roku. Kwota odsetek wyniosła w sumie 1513,95 zł. Oblicz oprocentowanie lokaty.

8. a) O ile procent wzrosnie po roku kwota wpłacona na lokatę miesięczną, której oprocentowanie wynosi 5%? (Odpowiedź podaj z dokładnością do dziesiątej części procenta).

b) Ustal, jak długo należałoby oszczędzać na lokacie półrocznej, której oprocentowanie wynosi 6%, by kwota na lokacie się podwoiła.

9. Bank proponuje lokatę miesięczną o stałym oprocentowaniu w wysokości 3% i lokatę półroczną o stałym oprocentowaniu 4%. Która z tych lokat przyniesie większe korzyści po dwóch latach od jej założenia?

◀ ||| **10.** Podatek od odsetek wynosi 19%.

a) Kwotę 10 000 zł wpłacono na lokatę półroczną o oprocentowaniu 4%. Oblicz, jaki będzie stan konta po 3 latach oszczędzania.

b) Po pięciu latach oszczędzania na lokacie rocznej, której oprocentowanie wynosiło 3%, stan konta zwiększył się o 5102,01 zł. Oblicz, jaki był stan konta po roku oszczędzania.

11. Pan Kowalski wpłacił 50 000 zł na lokatę miesięczną, której oprocentowanie wynosi 5%, i co miesiąc wypłaca odsetki pomniejszone o 19% podatku. Oblicz, jaką kwotę odsetek wypłaci w ciągu roku. O ile wyższa byłaby ta kwota, gdyby łączne odsetki wypłacił po roku?

• **12.** Przypuśćmy, że kwotę 10 000 zł wpłacono na lokatę półroczną, której oprocentowanie wynosi 4%. Wiadomo, że przy tej lokacie co pół roku jest odprowadzany do skarbu państwa podatek od odsetek w wysokości 19%.

a) Oblicz, jaki podatek od odsetek zostanie odprowadzony do skarbu państwa, gdy pieniądze pozostaną na tej lokacie przez 1,5 roku.

b) Oblicz, jaki podatek od odsetek zostałby odprowadzony do skarbu państwa, gdyby podatek ten był obliczany dopiero po 1,5 rocznym oszczędzaniu od całej kwoty uzyskanych odsetek.

13. Miesięczne obroty pewnej firmy początkowo wynosiły 5000 zł, a następnie wzrastały systematycznie o 2% miesięcznie przez 1,5 roku. Oblicz, jakie obroty osiągnęła ta firma po osiemnastu miesiącach takiego wzrostu.

14. Pięć lat temu państwo Malinowscy kupili mieszkanie za 500 000 zł i spodziewali się, że co roku jego wartość będzie wzrastała o 10%. W rzeczywistości jego wartość wzrastała o 6% rocznie. O ile złotych obecna wartość tego mieszkania jest niższa od wartości, jakiej spodziewali się państwo Malinowscy?

15. Cena akcji pewnej firmy przez pięć kolejnych sesji giełdowych spadała o 4%. Oblicz, o ile procent cena po piątej sesji będzie niższa od ceny początkowej?

16. Przyjmijmy, że wartość samochodu co roku spada o 10%. Po ilu latach jego cena będzie mniejsza od połowy ceny początkowej?



MINISPRAWDZIAN

51. Pani Marta wpłaciła 10 000 zł na lokatę roczną, której oprocentowanie jest równe 4%. Każdego roku odsetki z tej lokaty są przekazywane na rachunek bieżący, a kwota na lokacie się nie zmienia. Po upływie 10 lat suma odsetek wpłaconych na rachunek będzie wynosić:

- A. 400 zł B. 3600 zł C. 4000 zł D. 4802 zł

52. Pani Jola potrzebowała sporej kwoty, postanowiła więc oszczędzać. Obliczyła, że dokładnie tyle pieniędzy, ile potrzebuje, będzie miała po czterech latach, gdy wpłaci 2500 zł na 3-miesięczną lokatę oprocentowaną 4% netto w skali roku. Ile musiałaby wpłacić na tę lokatę, aby potrzebną kwotę zgromadzić rok wcześniej?

- A. 2931 zł B. 2751 zł C. 2602 zł D. 2525 zł

53. Pan Nowak zainwestował 40 tys. zł w przedsięwzięcie i zakłada, że jego wartość po każdym roku będzie rosła o $p\%$ (p jest liczbą naturalną). Obliczył, że przy takim założeniu dokładnie po czwartym roku (nie wcześniej) wartość jego inwestycji przekroczy 50 tys. zł. Wynika stąd, że p jest równe:

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

54. Kwotę K wpłacamy na lokatę 6-miesięczną, której oprocentowanie wynosi $p\%$. Wskaż stan konta po 2 latach, jeśli wiadomo, że podatek wynosi 19%.

- A. $K \left(1 + 0,81 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{2} \right)^4$ C. $K \left(1 + 0,81 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{2} \right)^2$
 B. $K \left(1 + 0,81 \cdot \frac{p}{100} \right)^4$ D. $K \left(1 + 0,81 \cdot \frac{p}{100} \right)^2$

GRANICE CIĄGÓW

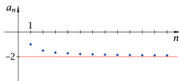
- ĆWICZENIE A** Oblicz sześć początkowych wyrazów ciągu określonego wzorem $a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Zaznacz w układzie współrzędnych kilka punktów należących do wykresu tego ciągu, tzn. punktów o współrzędnych (n, a_n) .

Poniżej podano wzory ogólne oraz zapisano kilka wyrazów trzech różnych ciągów. Na rysunkach zilustrowano te ciągi za pomocą wykresów.

• $a_n = -2 + \frac{1}{n}$

$-1, -1\frac{1}{2}, -1\frac{2}{3}, -1\frac{3}{4}, \dots$

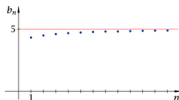
Łatwo zauważyć, że im większe są wartości n , tym wyrazy a_n są bliższe liczbie -2 . Możemy powiedzieć, że wyrazy tego ciągu zbliżają się do liczby -2 .



• $b_n = 5 - 0,7^n$

$4,3, 4,51, 4,657, 4,7599, \dots$

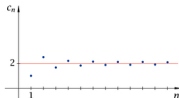
W tym ciągu wraz ze wzrostem n między liczbą 5 a wyrazami ciągu różnice są coraz mniejsze i coraz bliższe zeru. Możemy powiedzieć, że wyrazy tego ciągu zbliżają się do liczby 5.



• $c_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$

$1, 2\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 2\frac{1}{4}, 1\frac{4}{5}, \dots$

W tym ciągu nieskończenie wiele wyrazów jest większych od liczby 2 i nieskończenie wiele wyrazów jest od niej mniejszych, ale wyrazy tego ciągu zbliżają się do liczby 2.



O każdym z tych trzech ciągów możemy powiedzieć, że jest zbieżny do pewnej liczby. Tę liczbę, do której „zbliżają się” kolejne wyrazy ciągu, nazywamy **granica ciągu**.

Granica ciągu (a_n) jest więc liczba -2 . Zapisujemy to tak:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -2$$

Czytamy: *granica ciągu (a_n) (przy n dążącym do nieskończoności) jest liczba -2 . Granica to po łacinie *limes* i stąd pochodzi skrót *lim*.*

Ponieważ $a_n = -2 + \frac{1}{n}$, więc podaną na poprzedniej stronie równość można zapisać tak:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-2 + \frac{1}{n}\right) = -2$$

Granice ciągów (b_n) i (c_n) są równe 5 i 2, zatem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (5 - 0,7^n) = 5$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 2$$

ĆWICZENIE B Każdy z podanych ciągów ma granicę, która jest liczbą rzeczywistą. Oblicz kilka początkowych wyrazów każdego z tych ciągów. Czy domyślasz się, jakie są granice tych ciągów?

$$a_n = 7 - \frac{1}{10^n}$$

$$b_n = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

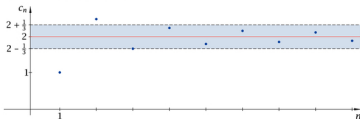
$$c_n = 3 + \frac{1}{n}$$

$$d_n = \frac{n-2}{n}$$

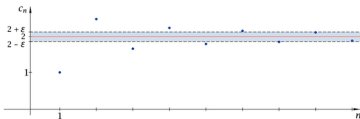
Spróbujemy teraz precyzyjniej określić, co to znaczy, że ciąg ma granicę. Rozważmy ciąg:

$$c_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$$

Można wskazać przedział, w którym mieszczą się wszystkie wyrazy tego ciągu, np. przedział $(0; 3)$. Ponadto można zauważyć, że wraz ze wzrostem n wyrazy ciągu (c_n) zbliżają się do liczby 2. W przedziale $\left(2 - \frac{1}{3}; 2 + \frac{1}{3}\right)$ mieszczą się — oprócz trzech początkowych — wszystkie pozostałe wyrazy tego ciągu.



Ogólnie mówiąc, gdy wybieramy dowolnie małą dodatnią liczbę ε (czyt. epsilon), to poza przedziałem $(2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon)$ znajdzie się tylko skończona liczba wyrazów ciągu (c_n) .



Uwaga. Możemy też powiedzieć, że dla dowolnie małej dodatniej liczby ε prawie wszystkie wyrazy ciągu (c_n) różnią się od liczby 2 o mniej niż ε .

ĆWICZENIE C a) Oblicz, dla jakiej liczby k spełniony jest warunek:

Jeśli $a_n = -2 + \frac{1}{n}$ oraz $n > k$, to $a_n \in \left(-2 - \frac{1}{20}; -2 + \frac{1}{20}\right)$.

b) Ustal, ile wyrazów ciągu (b_n) określonego wzorem $b_n = 5 - 0,7^n$ leży poza przedziałem $(5 - 0,01; 5 + 0,01)$.

Liczba g jest **granica nieskończonego ciągu** (a_n) , czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba naturalna k , że gdy $n > k$, spełniony jest warunek $a_n \in (g - \varepsilon; g + \varepsilon)$.

Uwaga. Warunek $a_n \in (g - \varepsilon; g + \varepsilon)$ podany w powyższej definicji jest równoważny z każdym z warunków:

$$g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon \quad |a_n - g| < \varepsilon$$

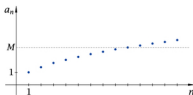
Ciąg, który ma granicę, nazywamy **zbieżnym**. Ciąg, który nie ma granicy, nazywamy **rozbieżnym**.

Poniżej podajemy przykłady czterech ciągów rozbieżnych.

• $a_n = \sqrt{n}$

$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \dots$

Prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są większe od $M = 3$ (poza wyrazami od a_1 do a_9). Niezależnie od tego, jak dużą liczbę M wybierzemy, prawie wszystkie wyrazy tego ciągu będą większe od M .



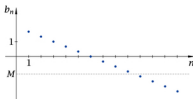
O ciągu (a_n) możemy powiedzieć, że jest rozbieżny do $+\infty$. W skrócie zapisujemy to tak:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$$

• $b_n = -\frac{1}{3}n + 2$

$1\frac{2}{3}, 1\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}, \dots$

Dla dowolnej liczby M można wskazać w tym ciągu taki wyraz, po którym wszystkie kolejne wyrazy są mniejsze od liczby M .



O ciągu (b_n) możemy powiedzieć, że jest rozbieżny do $-\infty$. Zapisujemy to tak:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3}n + 2\right) = -\infty$$

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągą rozbieżnym do $+\infty$** , czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, jeśli dla dowolnej liczby M istnieje taka liczba naturalna k , że gdy $n > k$, zachodzi nierówność $a_n > M$.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągą rozbieżnym do $-\infty$** , czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, jeśli dla dowolnej liczby M istnieje taka liczba naturalna k , że gdy $n > k$, zachodzi nierówność $a_n < M$.

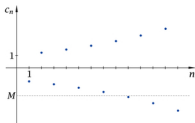
O ciągach rozbieżnych do $+\infty$ lub $-\infty$ mówimy, że mają granicę niewłaściwą. Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, to mówimy, że ciąg (a_n) ma granicę niewłaściwą $+\infty$. Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, to mówimy, że ciąg (a_n) ma granicę niewłaściwą $-\infty$.

Dwa kolejne przykłady ciągów rozbieżnych nie mają granicy niewłaściwej.

- $c_n = (-1, 1)^n$

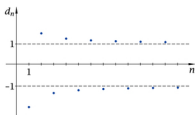
$-1, 1, 1, 21, -1, 331, 1, 4641, \dots$

Dla dowolnie wybranej liczby M nieskończenie wiele wyrazów ciągu (c_n) jest od niej większych i nieskończenie wiele wyrazów jest od niej mniejszych. Jest to ciąg rozbieżny (choć nie jest on rozbieżny ani do $+\infty$, ani do $-\infty$).



- $d_n = (-1)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$
 $-2, 1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, \dots$

W tym ciągu nieskończenie wiele wyrazów leży dowolnie blisko liczby 1, ale również nieskończenie wiele wyrazów leży dowolnie blisko liczby -1 . Ciąg ten nie ma granicy, czyli jest rozbieżny, i nie ma granicy niewłaściwej.



Omówimy teraz granice niektórych typów ciągów.

- Każdy ciąg stały jest ciągiem zbieżnym. Granicą ciągu stałego, w którym wszystkie wyrazy są równe c , jest liczba c .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$$

ĆWICZENIE D Obok zapisano przykłady kilku ciągów mających postać $a_n = \frac{1}{n^k}$, gdzie k jest liczbą naturalną. Jaką granicę mają te ciągi?

$$\begin{array}{ll} a_n = \frac{1}{n} & b_n = \frac{1}{n^2} \\ c_n = \frac{1}{n^5} & d_n = \frac{1}{n^{10}} \end{array}$$

- Dla dowolnej liczby naturalnej k różnej od zera zachodzi równość:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

ĆWICZENIE E Obok zapisano przykłady kilku ciągów geometrycznych mających postać $a_n = q^n$. Które z tych ciągów są zbieżne?

$$\begin{array}{ll} a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n & b_n = (-2)^n \\ c_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n & d_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{array}$$

- Ciąg geometryczny typu $a_n = q^n$ jest zbieżny, gdy $q \in (-1; 1)$, przy czym:

$$\text{Jeśli } -1 < q < 1, \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0. \quad \text{Jeśli } q = 1, \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1.$$

Jeśli $q \in \mathbb{R} \setminus (-1; 1)$, to ciąg geometryczny $a_n = q^n$ jest rozbieżny, przy czym:

$$\text{Jeśli } q > 1, \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty.$$

Jeśli $q \leq -1$, to ciąg $a_n = q^n$ jest rozbieżny i nie ma granicy niewłaściwej.

- Ciąg typu $a_n = \sqrt[n]{a}$, gdzie $a > 0$, jest zbieżny i jego granicą jest 1, czyli:

$$\text{Jeśli } a > 0, \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Uwaga. Ostatnią implikację wykażemy, korzystając z definicji granicy ciągu.

Dowód

Niech $a_n = \sqrt[n]{a}$ i $a > 0$. Pokażemy, że dla dowolnie małej liczby dodatniej ε prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) należą do przedziału $(1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon)$.

Załóżmy, że $\varepsilon \in (0; 1)$. Ustalimy, dla jakich liczb naturalnych dodatnich n liczba $\sqrt[n]{a}$ należy do przedziału $(1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon)$, czyli dla jakich n spełniony jest warunek $1 - \varepsilon < \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$.

Funkcja $y = \log x$ jest różnowartościowa i rosnąca, zatem powyższy warunek jest równoważny warunkowi $\log(1 - \varepsilon) < \log \sqrt[n]{a} < \log(1 + \varepsilon)$, czyli:

$$\log(1 - \varepsilon) < \frac{1}{n} \log a \quad \text{ i } \quad \frac{1}{n} \log a < \log(1 + \varepsilon)$$

Ponieważ $\log(1 - \varepsilon) < 0$ i $\log(1 + \varepsilon) > 0$, więc otrzymujemy nierówności:

$$n > \frac{\log a}{\log(1 - \varepsilon)} \quad \text{ i } \quad n > \frac{\log a}{\log(1 + \varepsilon)}$$

Zatem jeśli k jest liczbą naturalną większą od liczby $\frac{\log a}{\log(1 - \varepsilon)}$ oraz od liczby $\frac{\log a}{\log(1 + \varepsilon)}$, to gdy $n > k$, mamy $a_n \in (1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon)$. $\square$

Ciąg określony wzorem $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest zbieżny. Liczbę równą jego granicy oznaczamy literą e . Oznaczenie to wprowadził w 1736 roku szwajcarski matematyk Leonhard Euler (czyt. lijonart ojler).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Liczba e jest liczbą niewymierną. W matematyce ma ona szczególne znaczenie. Jest podstawą logarytmu naturalnego i pojawia się we wzorach i zależnościach w wielu różnych działach matematyki. Poniżej zapisano kilkanaście cyfr rozwinięcia dziesiętnej liczby e .

$$e = 2,718281828459045 \dots$$

Ciąg $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pojawił się po raz pierwszy przy okazji rozważań dotyczących procentu składanego, prowadzonych w 1683 roku przez szwajcarskiego matematyka Jakoba Bernoulliego (czyt. jakoba bernulego).

Załóżmy, że kwotę 1 zł wpłacamy na lokatę, której oprocentowanie wynosi $p\%$ w stosunku rocznym. Wówczas stan konta po roku zależy od tego, jak często kapitalizowane są odsetki.

Stan konta po roku	Jak często w ciągu roku kapitalizowane są odsetki
$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^1$	1 raz dolicza się odsetki (po roku)
$\left(1 + \frac{p}{2 \cdot 100}\right)^2$	2 razy dolicza się odsetki (co pół roku)
$\left(1 + \frac{p}{12 \cdot 100}\right)^{12}$	12 razy dolicza się odsetki (co miesiąc)
$\left(1 + \frac{p}{n \cdot 100}\right)^n$	n razy w roku dolicza się odsetki

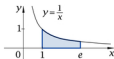
Gdy przyjmiemy, że oprocentowanie jest równe 100%, to stan konta po roku przy n okresach doliczania odsetek będzie wynosił:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Ciąg ten jest ciągiem rosnącym. Ponieważ jego granicą jest liczba $e \approx 2,72$, więc nawet gdyby odsetki były doliczane co ułamek sekundy, to stan konta po roku nigdy nie przekroczy kwoty 2,72 zł.

Jakob Bernoulli nie przypuszczał zapewne, jak wielką rolę odegra granica rozważanego przez niego ciągu. Oto przykłady tylko niektórych wzorów i zależności ze współczesnej matematyki, w których pojawia się liczba e :

- Pole obszaru zacieniowanego na rysunku poniżej jest równe 1.



- $e = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$
- Niech p_n (gdy $n \geq 2$) oznacza iloczyn wszystkich liczb pierwszych mniejszych lub równych n , czyli $p_2 = 2$, $p_3 = 2 \cdot 3$, $p_4 = 2 \cdot 3$, $p_5 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ itd. Wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p_n} = e$.

ZESTAW ZADAŃ

1. Zastąp znak zapytania odpowiednią liczbą lub jednym ze znaków: $+\infty$ lub $-\infty$.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = ?$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^5 = ?$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n-3) = ?$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^7} = ?$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} 6^n = ?$

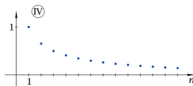
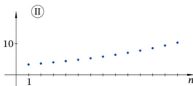
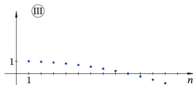
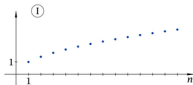
h) $\lim_{n \rightarrow \infty} 1,6^n = ?$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5} = ?$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = ?$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{0,3} = ?$

2. Na poniższych rysunkach przedstawiono fragmenty wykresów ciągów: $a_n = n^{\frac{1}{2}}$, $b_n = n^{-\frac{1}{2}}$, $c_n = 1 - \left(\frac{n}{9}\right)^2$ i $d_n = 3 \cdot 1,1^n$. Do każdego z tych ciągów dopasuj odpowiedni wykres. Które z tych ciągów są rozbieżne? Które z nich są rozbieżne do $+\infty$, a które — do $-\infty$?



3. Podany ciąg jest ciągiem geometrycznym. Czy jest to ciąg zbieżny? Jeśli tak, to podaj jego granicę, a jeśli nie — określ, czy ma granicę niewłaściwą.

a) 16, 8, 4, ...

c) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

e) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{4a_n}{3}$

b) $a_1 = -\frac{5}{3}, q = 5$

d) $a_n = \left(-\frac{3}{4}\right)^n$

f) $a_1 = -\sqrt{2}, a_{n+1} = a_n$

4. Podaj przykłady ciągu rosnącego oraz ciągu malejącego, które mają:

a) tę samą granicę równą 0,

b) tę samą granicę równą 7.

5. a) Wybierz taką dowolną liczbę a , by $0 < a < 1$. Oblicz za pomocą kalkulatora kilka wyrazów ciągu $a, a^2, (a^2)^2, ((a^2)^2)^2, \dots$. Podaj granicę tego ciągu.

b) Wybierz dowolną liczbę dodatnią a . Oblicz za pomocą kalkulatora kilka wyrazów ciągu: $a, \sqrt{a}, \sqrt{\sqrt{a}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}, \dots$. Podaj granicę tego ciągu.

6. Naskicuj wykres funkcji f i odpowiedz, czy ciąg $a_n = f(n)$ jest zbieżny czy rozbieżny.

a) $f(x) = 2(x+2)(x-5)$

b) $f(x) = \frac{1}{x+2} - 4$

c) $f(x) = -3x(x+1)(x-1)$

7. Czy ciąg (a_n) jest ciągiem zbieżnym? Jeśli tak, to jaka jest jego granica?

a) $a_n = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste} \\ \frac{1}{n}, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste} \end{cases}$

d) $a_n = \begin{cases} -1, & \text{gdy } n \leq 10^9 \\ 1, & \text{gdy } n > 10^9 \end{cases}$

b) $a_n = \begin{cases} n^2, & \text{gdy } n \leq 1000 \\ -\frac{1}{n}, & \text{gdy } n > 1000 \end{cases}$

e) $a_n = \begin{cases} 3n^2, & \text{gdy } n \leq 100 \\ -5, & \text{gdy } n > 100 \end{cases}$

c) $a_n = \begin{cases} 2, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste} \\ 1, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste} \end{cases}$

f) $a_n = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n < 10^6 \\ \sqrt[n]{2}, & \text{gdy } n \geq 10^6 \end{cases}$

8. Podaj przykład:

a) ciągu, którego granicą jest liczba dodatnia i który ma 100 wyrazów ujemnych,

b) ciągu rozbieżnego do $+\infty$, który nie jest ciągiem rosnącym,

c) ciągu, w którym dokładnie 10 wyrazów jest równych 1 i którego granicą jest liczba 1,

d) ciągu, którego wszystkie wyrazy są liczbami niewymiernymi i którego granicą jest liczba wymierna.

9. a) Czy w ciągu rosnącym jeden z wyrazów może być równy granicy ciągu?

b) Czy granica ciągu, którego wszystkie wyrazy są ujemne, może być liczbą nieujemną?

c) Czy ciąg, którego wyrazy przyjmują tylko dwie wartości, musi być ciągiem rozbieżnym?

d) Czy ciąg, w którym nieskończenie wiele wyrazów jest ujemnych i nieskończenie wiele wyrazów jest dodatnich, musi być ciągiem rozbieżnym?

10. a) Granicą pewnego ciągu arytmetycznego jest liczba 7. Ile jest równy pierwszy wyraz tego ciągu?

b) Granicą pewnego ciągu geometrycznego jest $-\frac{1}{2}$. Wyznacz piąty wyraz tego ciągu.

11. Wśród podanych ciągów wskaż ciągi zbieżne i podaj ich granice. Które z tych ciągów są rozbieżne i nie mają granicy niewłaściwej?

$$a_n = (-2)^n$$

$$b_n = -n^4$$

$$c_n = \sqrt[n]{n}$$

$$d_n = 2 \cdot (-1)^n$$

$$e_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}$$

$$f_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}}$$

MINISPRAWDZIAN

51. Granicą jednego z poniższych ciągów nie jest liczba 0. Wskaż ten ciąg.

- A. $a_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$ B. $b_n = \frac{5}{n^2}$ C. $c_n = \left(\frac{5}{2}\right)^n$ D. $d_n = \frac{5}{2^n}$

52. Która z poniższych liczb może być ilorazem zbieżnego ciągu geometrycznego (o wyrazach różnych od zera)?

- A. 3 B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{3}{7}$ D. -1

53. Jeden z poniższych ciągów jest rozbieżny do $-\infty$. Wskaż ten ciąg.

- A. $a_n = 6 \cdot 1,2^n$ C. $c_n = -6 \cdot 1,8^n$
B. $b_n = 6 \cdot 1^n$ D. $d_n = 6 \cdot (-0,2)^n$

OBLICZANIE GRANIC

ĆWICZENIE A Rozważmy ciągi określone wzorami: $a_n = 4 + \frac{5}{n}$ oraz $b_n = 3 + \frac{2}{n}$.

a) Podaj $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

b) Zapisz wzory ciągów $c_n = a_n + b_n$ i $d_n = a_n - b_n$. Jakie są granice tych ciągów?

Przy obliczaniu granic różnych ciągów przydatne są poniższe własności.

Jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to zachodzą równości:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne i wyrazy ciągu (b_n) są różne od 0 oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, to:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

Zauważ, że z trzeciej z powyższych równości wynika, że jeśli (a_n) jest ciągiem zbieżnym i k jest dowolną liczbą rzeczywistą, to:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot a_n) = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

PRZYKŁAD 1 Oblicz.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 5 + 0 - 0 = 5$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(7 \cdot \frac{1}{n^2} \right) = 7 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 7 \cdot 0 = 0$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} (2 - 0,4^n) \left(3 + \frac{2}{n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 - 0,4^n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n^3} \right) = 2 \cdot 3 = 6$$

ZADANIE Oblicz.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(7 - \left(\frac{2}{3} \right)^n - \frac{1}{n^3} \right)$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6}{n}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{n^3} - 4 \right) (1 - 0,9^n)$$

Dla uproszczenia zapisu możemy zakreślić ogólny wyraz ciągu, narysować strzałkę i na jej końcu zapisać liczbę równą granicy tego ciągu. Na przykład obliczenia z przykładu a) można zapisać w następujący sposób:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\overset{5}{\left(5 + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^2} \right)} \right) = 5$$

zadania 1-3 ►

- II Przy obliczaniu granic ciągów można też korzystać z następującego twierdzenia.

Twierdzenie o trzech ciągach

Jeżeli prawie wszystkie wyrazy ciągów (a_n) , (b_n) , (c_n) spełniają warunek $a_n \leq c_n \leq b_n$ oraz ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$, to ciąg (c_n) jest zbieżny i $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$.

Dowód

Załóżmy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$ oraz że dla ciągów (a_n) , (b_n) , (c_n) istnieje taka liczba naturalna k_1 , że gdy $n > k_1$, to spełniony jest warunek $a_n \leq c_n \leq b_n$.

Niech $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieją liczby k_2 i k_3 , takie że:

gdy $n > k_2$, spełniona jest nierówność $g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$, czyli $-\varepsilon < a_n - g < \varepsilon$

gdy $n > k_3$, spełniona jest nierówność $g - \varepsilon < b_n < g + \varepsilon$, czyli $-\varepsilon < b_n - g < \varepsilon$

Niech k będzie liczbą większą od k_1 , k_2 i k_3 . Wówczas gdy $n > k$, spełniony jest warunek:

$$\begin{aligned} a_n - g &\leq c_n - g \leq b_n - g \\ -\varepsilon &< c_n - g < \varepsilon \end{aligned}$$

Zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$. $\square$

PRZYKŁAD 2 Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n + 7^n}$.

$$\sqrt[n]{7^n} < \sqrt[n]{4^n + 7^n} < \sqrt[n]{2 \cdot 7^n}$$

Najpierw szacujemy wyraz pod pierwiastkiem,
 $7^n < 4^n + 7^n < 7^n + 7^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 7 = 7$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \cdot 7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (7 \sqrt[n]{2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 7 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 7$$

Z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n + 7^n} = 7$.

ZADANIE Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n + 2^n}$.

zadania 4–5 ►

III Do tej pory omawialiśmy własności granic ciągów zbieżnych. Poniżej podajemy kilka własności granic ciągów rozbieżnych do $+\infty$ lub do $-\infty$.

ĆWICZENIE B Podaj $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, a następnie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n}$, jeśli:

a) $a_n = 5^n$

b) $a_n = n^5$

c) $a_n = -\left(\frac{4}{3}\right)^n$

d) $a_n = -n^3$

Jeśli wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są różne od 0 oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad \text{lub} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty, \quad \text{to} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

ĆWICZENIE C Podaj $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Ile wynosi $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$, a ile $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$?

a) $a_n = n^3$, $b_n = n^2$

b) $a_n = -n^5$, $b_n = -n^7$

c) $a_n = 2^n$, $b_n = 5^n$

$$\text{Jeśli } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty, \quad \text{to} \quad \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) &= +\infty. \end{aligned}$$

$$\text{Jeśli } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty, \quad \text{to} \quad \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= -\infty, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) &= +\infty. \end{aligned}$$

$$\text{Jeśli } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty, \quad \text{to} \quad \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) &= -\infty, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) &= -\infty. \end{aligned}$$

ĆWICZENIE D Podaj $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Ile wynosi $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$, a ile $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$?

a) $a_n = n^2$, $b_n = 3 + \frac{1}{n^2}$

b) $a_n = -n^3$, $b_n = 5 - \frac{1}{n^4}$

Niech (a_n) będzie ciągiem zbieżnym i $\lim a_n = g$.

		$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty.$
Jeśli	$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty,$	to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty,$ gdy $g > 0.$
		$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty,$ gdy $g < 0.$
		$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -\infty.$
Jeśli	$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty,$	to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty,$ gdy $g > 0.$
		$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty,$ gdy $g < 0.$

Uwaga. Omówione własności granic można zapisać w skrócie następująco:

$\frac{1}{+\infty} = 0$	$\frac{1}{-\infty} = 0$
$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
$(-\infty) - (+\infty) = -\infty$	$(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$
$g \cdot (+\infty) = +\infty,$ gdy $g > 0$	$g \cdot (+\infty) = -\infty,$ gdy $g < 0$
$g \cdot (-\infty) = -\infty,$ gdy $g > 0$	$g \cdot (-\infty) = +\infty,$ gdy $g < 0$

zadania 6-7 ►

IV Przyjrzyj się poniższym czterem przykładom. Zauważ, że w każdym z nich $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$. Natomiast rezultaty obliczania granicy ciągu $c_n = a_n - b_n$ są różne.

- $a_n = n^2$
 $b_n = 2n^2$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 2n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) = -\infty$
- $a_n = 4n^3$
 $b_n = n^3$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (4n^3 - n^3) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3n^3 = +\infty$
- $a_n = \frac{n}{3}$
 $b_n = \frac{n}{3} + 5$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3} - \frac{n}{3} - 5 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-5) = -5$
- $a_n = n + (-1)^n$
 $b_n = n$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n + (-1)^n - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ — nie istnieje
 Ciąg (c_n) określony wzorem $c_n = a_n - b_n$ jest rozbieżny i nie ma granicy niewłaściwej.

Gdy ciągi (a_n) i (b_n) są rozbieżne do $+\infty$, nie można podać ogólnej reguły pozwalającej określić $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$. Mówimy, że symbol „ $\infty - \infty$ ” jest nieoznaczony.

ĆWICZENIE E Dane są ciągi (a_n) i (b_n) . Zauważ, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$.
Oblicz, jeśli istnieje, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$.

a) $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = n^6$ b) $a_n = \frac{1}{n^4}$, $b_n = n^3$ c) $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = 6n^5$

Poniżej podajemy symbole nieoznaczone, z którymi można się zetknąć przy obliczaniu granic ciągów.

Symbole nieoznaczone

$$[\infty - \infty] \quad [0 \cdot \infty] \quad \left[\frac{0}{0} \right] \quad \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

W poniższym przykładzie pokazujemy sposób obliczania granic ciągów, które można by opisać symbolami nieoznaczonymi.

PRZYKŁAD 3 Oblicz.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (5n^7 - 2n^3 + 3) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^7 \left(5 - \frac{2}{n^4} + \frac{3}{n^7} \right) = +\infty$

Wyłączamy przed nawias najwyższą potęgę n i korzystamy z własności granic ciągów.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^5 + 9n^3) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^5 \left(-1 + \frac{9}{n^2} \right) = -\infty$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + 4n^2}{2n^3 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(5 + \frac{4}{n} \right)}{n^3 \left(2 + \frac{3}{n^3} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{4}{n}}{2 + \frac{3}{n^3}} = \frac{5}{2}$

Wyłączamy przed nawias najwyższą potęgę n w liczniku i mianowniku.

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 + 2n - 3}{-2n^3 + 4n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \left(3 + \frac{2}{n^4} - \frac{3}{n^5} \right)}{n^3 \left(-2 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(3 + \frac{2}{n^4} - \frac{3}{n^5} \right)}{-2 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3}} = -\infty$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 - 7n^3 + n}{10n^6 + 2n^5 - 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \left(5 - \frac{7}{n} + \frac{1}{n^3} \right)}{n^6 \left(10 + \frac{2}{n} - \frac{4}{n^6} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(5 - \frac{7}{n} + \frac{1}{n^3} \right)}{n^2 \left(10 + \frac{2}{n} - \frac{4}{n^6} \right)} = 0$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 5^n + 1}{5^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \left(3 + \frac{1}{5^n} \right)}{5^n \left(1 + \frac{2^n}{5^n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{5^n}}{1 + \left(\frac{2}{5} \right)^n} = 3$

ZADANIE Oblicz.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-5n^3 + 4n - 2)$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n^3 - 4}{3n^5 + 6n^4 - n}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n^4 + 5n^3}{2n^5 - 7n^2 + 3}$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \cdot 3^n + 2^n}{2 \cdot 3^n - 5}$

zadania 8–18

ZESTAW ZADAŃ

◀ I 1. Oblicz.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) & \text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{n} - 3 \right) \left(-5 + \frac{4}{n^2} \right) & \text{e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} - 1,5}{3 - 0,5n} \\ \text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \left(\frac{2}{3} \right)^n + \frac{2}{n^3} \right) & \text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 0,3^n) \left(\frac{5}{n^3} - \frac{1}{4} \right) & \text{f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0,7^n - 10}{0,1^n + 0,01} \end{array}$$

2. Przyjmijmy, że ciąg (x_n) ma granicę równą 3 oraz $x_n \neq 0$ dla każdego n . Znajdź granice podanych ciągów.

$$a_n = \frac{-2}{x_n} \quad b_n = 2x_n^3 + 3 \quad c_n = \frac{-3}{x_n^3} + \frac{1}{n^2} \quad d_n = \frac{x_n^4 - x_n}{2x_n^4 + x_n}$$

3. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n}{3b_n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 4b_n}{5}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} a_n (b_n - 1) \right)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n + 1)$, jeśli:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3, & \text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, & \text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -5, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2 & \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3 & \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -4 \end{array}$$

◀ II 4. Oblicz.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n} & \text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{10^n + 2^n} & \text{e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 5^n + 9^n} \\ \text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{0,2^n + 0,7^n} & \text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} & \text{f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{0,3^n + 0,8^n + 1,2^n} \end{array}$$

5. Oblicz.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{6^n + 8^n}{3^n + 9^n}} & \text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{38 + 7^n}{0,4^n + 2^n}} & \text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + 7^n + 10^n}{10 + 6^n + 11^n}} \end{array}$$

◀ III 6. Oblicz.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3^n + \frac{2}{n} \right) & \text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(0,6^n + \frac{n^4}{2} - \frac{3}{n^3} \right) & \text{g)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n + n^5 \right) \left(3n^4 + \frac{1}{n} \right) \\ \text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} (0,3^n - n^5) & \text{e)} \lim_{n \rightarrow \infty} (5^n - 0,2^n + n^2) & \text{h)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4n^2 - \left(\frac{2}{7} \right)^n \right) \left(\left(\frac{1}{7} \right)^n - 5n^3 \right) \\ \text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{n^4} - \left(\frac{1}{6} \right)^n \right) & \text{f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{3}{5} \right)^n + \frac{4}{n} - 2n \right) & \text{i)} \lim_{n \rightarrow \infty} (0,1^n - 3n^3) \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - 4n^4 \right) \end{array}$$

7. Oblicz.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n), \text{ gdy } a_n = 3n^2, b_n = \frac{2}{n} & \text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n), \text{ gdy } a_n = \frac{3}{n^2}, b_n = \frac{1}{2n^2} \\ \text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n), \text{ gdy } a_n = \frac{5}{n^2}, b_n = 4n & \text{e)} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n), \text{ gdy } a_n = -8n^4, b_n = 4n^3 \\ \text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n), \text{ gdy } a_n = 2n^5, b_n = 6n^5 & \text{f)} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n), \text{ gdy } a_n = \frac{2}{n^3}, b_n = \frac{5}{n} \end{array}$$

IV 8. Oblicz.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 - 2n - 1)$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^5 - n^7 + 1)$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} -2n(n-1)(n+3)$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2n^3 + n^2 - 13)$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-5n^2 + 2n^3 - 7)$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)(3-n)(6n+2)$

9. Oblicz.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n-7}$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+n}{n^5}$ i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)(2n+1)}{n(1-n)}$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-5n}{n+1}$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n+1}{3-2n^2}$ j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3}{2n(n-7)(n-2)}$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2-n}{4n^2+8n}$ g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^4-n^3}{n^3+12}$ k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-n^3+n}{n^2+1} \right)^2$
 d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^3+n^2-17}{n^2-n^3}$ h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5+5n^2}{n^{10}+3n}$ l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{2-n} \right)^3$

10. Oblicz.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+2}{2n^4-5n} \cdot (4n^2-1) \right)$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9n^4-2n^2}{3n^3+2} + \frac{5n^2}{n^2+2} \right)$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^3+6n}{3n^3-7} - \frac{4n}{2n^3+1} \right)$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^6-5n^3}{4n^3-1} \cdot \frac{n}{n^4+1} \right)$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8n^5+3n}{2n^2-5} : (4n^3+2) \right)$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^6}{6n^5+2n} : \frac{n^3}{n+1} \right)$

11. Oblicz.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{7 \cdot 3^n + 2}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+4}{3^n+5^n}$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4^n - 6^{n+1}}{5 \cdot 6^n - 3}$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 5^n}{5^n + 3^n}$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 7^n - 2^n}{3 \cdot 2^n - 2 \cdot 7^n}$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 9^n - 8^n}{\sqrt{2} \cdot 9^n}$

12. Oblicz.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$, gdy $a_n = \frac{-7}{n^3}$, $b_n = 2n^3$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$, gdy $a_n = \frac{2}{n^5}$, $b_n = \frac{6}{n^2}$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$, gdy $a_n = -5n^4$, $b_n = \frac{-1}{10n^4}$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$, gdy $a_n = \frac{5}{n^4}$, $b_n = -3n^2$

13. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$, jeśli:

- a) $a_n = 2^{-n}$, $b_n = 2^{n+1}$ c) $a_n = \frac{1}{3n}$, $b_n = \frac{3}{n}$
 b) $a_n = n+1$, $b_n = -n$ d) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $b_n = 1 - \frac{1}{n^2}$

14. Oblicz.

a) $a_n = \frac{5^n}{\left(\frac{5}{3}\right)^n}$

c) $a_n = \frac{4^n}{6^{n+2}}$

e) $a_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n+3}$

b) $a_n = \frac{(0,3)^n}{(\sqrt{2})^n}$

d) $a_n = n \cdot 7^n$

f) $a_n = \frac{(0,3)^{n+7}}{2n^2+1}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3-n}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} &= 0 \end{aligned}$$

- **15.** Przyjrzyj się obliczeniom przedstawionym obok, a następnie w podobny sposób oblicz granicę.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-2})$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n+1} - \sqrt{3n-1})$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{5n} - \sqrt{5n+8})$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n)$

16. Oblicz.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{5^n} \right)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+\dots+2n}{1+3+5+\dots+(2n-1)}$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n}}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+10+\dots+5n}{\frac{1}{2} + 1 + 1\frac{1}{2} + \dots + \frac{n}{2}}$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{49} + \dots + \frac{1}{7^n} \right)}{2n+1}$

- **17.** Oblicz granicę ciągu $a_n = f(n+1) - f(n)$.

a) $f(x) = 2x+3$

b) $f(x) = \frac{1}{2x+3}$

c) $f(x) = x^2$

d) $f(x) = \sqrt{x}$

18. a) Oblicz wartość parametru p , dla której granica ciągu $a_n = \frac{(p+3)n^3-7}{1-2n^3}$ jest równa $\frac{1}{2}$.

b) Oblicz wartość parametru p , dla której granica ciągu $a_n = \frac{1-(p-2)^2n}{n}$ jest największa.

- **c)** Ustal, jaka jest największa możliwa wartość wyrażenia $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(|a|-a)}{1+2n^2}$. Dla jakiej wartości parametru a wyrażenie to przyjmuje najmniejszą wartość?

MINISPRAWDZIAN

51. Wiadomo, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -2$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$. Która z równości nie jest spełniona?

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$ C. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = -\infty$ D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = +\infty$

52. Jeden z podanych ciągów jest zbieżny. Wskaż ten ciąg.

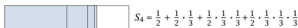
A. $a_n = -2n^2 - 7n + 5$ B. $b_n = \frac{6n^2 + 5}{-5n^2 + 2n}$ C. $c_n = \frac{2n^2 - 3}{2n + 4}$ D. $d_n = \frac{-3n^3 + 5}{n^2 - 6n}$

53. Granica ciągu $a_n = \frac{3 \cdot 2^n - 5 \cdot 3^n}{4 + 2 \cdot 3^n}$ jest równa:

A. $\frac{3}{4}$ B. $-\frac{5}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $-\frac{5}{4}$

SZEREG GEOMETRYCZNY

- 1 Przyjrzyj się rysunkom. Przyjmijmy, że pole każdego dużego prostokąta jest równe 1. Liczby zapisane obok opisują, jakie pole ma zamalowana część prostokąta.



ĆWICZENIE A Jak myślisz, czy postępując dalej w ten sam sposób, moglibyśmy zamalować dowolnie dużą część prostokąta?

Gdybyśmy w ten sam sposób zamalowywali kolejne fragmenty prostokąta, to n -ty prostokąt miałby pole równe sumie n składników:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}$$

Postępując w ten sposób w nieskończoność, otrzymalibyśmy sumę o nieskończonej liczbie składników. Przyjmujemy, że wynik takiego nieskończonego dodawania jest równy granicy ciągu (S_n) :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^2} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Ponieważ przy n dążącym do nieskończoności kolejne wyrazy ciągu $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ są coraz bliższe liczbie 0, więc granica ciągu (S_n) jest równa:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

Zatem postępując w opisany wyżej sposób, moglibyśmy zamałować nie więcej niż $\frac{3}{4}$ prostokąta.

Dla nieskończonego ciągu (a_n) wyrażenie $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ nazywamy szeregiem. Gdy ciąg (a_n) jest geometryczny, to tę nieskończoną sumę nazywamy **szeregiem geometrycznym**.

Jeśli ciąg (a_n) jest geometryczny i $|q| < 1$, to ciąg (S_n) o wyrazach $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_1q$, $S_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2$, ... jest zbieżny i mówimy, że szereg geometryczny $a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots$ jest zbieżny, a liczbę $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ nazywamy **sumą szeregu**.

Gdy $|q| \geq 1$, to szereg geometryczny $a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots$ jest rozbieżny.

Uwaga. Zauważ, że gdy $q = 1$, to szereg geometryczny $a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots$ jest rozbieżny (choćby ciąg $a_1, a_1q, a_1q^2, \dots$ jest zbieżny).

Wiadomo, że:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Gdy $|q| < 1$, to przy n dążącym do nieskończoności kolejne wyrazy ciągu q^n są coraz bliższe liczbie 0. Zatem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \right) = \frac{a_1}{1 - q}$$

Suma S szeregu geometrycznego $a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots$, gdy $|q| < 1$:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

ĆWICZENIE B Oblicz sumę wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego:

- a) $3, \frac{2}{3}, \frac{4}{27}, \frac{8}{243}, \dots$ b) $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \dots$ c) $70, 7, 0,7, 0,07, \dots$

PRZYKŁAD 1 Zamień ułamek okresowy $1,2(45)$ na ułamek zwykły.

$$1,2(45) = 1,2454545... =$$

$$= 1,2 + 0,045 + 0,00045 + 0,000045 + ... =$$

$$= 1,2 + \frac{0,045}{1-0,01} = 1,2 + \frac{0,045}{0,99} = 1\frac{2}{10} + \frac{45}{990} =$$

$$= 1\frac{2}{10} + \frac{5}{110} = \underline{\underline{\frac{137}{110}}}$$

$0,045 + 0,00045 + 0,000045 + ...$ jest szeregiem geometrycznym, w którym $a_1 = 0,045$ i $q = 0,01$. Ponieważ $|q| < 1$, więc możemy skorzystać ze wzoru $S = \frac{a_1}{1-q}$.

ZADANIE Zamień ułamek okresowy $3,1(4)$ na ułamek zwykły.

PRZYKŁAD 2 Figura przedstawiona na rysunku to fragment nieskończonego ciągu kwadratów. Pierwszy z nich ma bok o długości 1, a każdy kolejny kwadrat ma bok dwa razy krótszy niż bok poprzedniego kwadratu. Linia zaznaczona kolorem niebieskim to fragment nieskończonej łamanej. Oblicz długość tej łamanej oraz pole całej figury.



L – długość łamanej

P – pole figury

$$L = 3 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} + ...$$

$$L = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = 6$$

Długość łamanej jest równa sumie wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 3$ i ilorazie $q = \frac{1}{2}$. Korzystamy więc ze wzoru $S = \frac{a_1}{1-q}$.

$$P = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + ...$$

$$P = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + ...$$

Pole figury jest równe sumie wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i ilorazie $q = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

$$P = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

ZADANIE Figura przedstawiona na rysunku obok to fragment nieskończonego ciągu trójkątów równobocznych. Pierwszy z nich ma bok o długości 1, a każdy następny trójkąt ma bok o długości równej $\frac{3}{4}$ długości boku poprzedniego trójkąta. Zaznaczona niebieskim kolorem linia to fragment nieskończonej łamanej. Oblicz długość tej łamanej i pole całej figury.



zadania 1–9 ►

PRZYKŁAD 3 Rozwiąż równanie, w którym lewa strona jest szeregiem geometrycznym.

$$x - 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \dots = 2$$

Założenie: $x \neq 0$ i $\left| -\frac{1}{x} \right| < 1$

$$\frac{x}{1 - \left(-\frac{1}{x}\right)} = 2$$

$$\frac{x}{1 + \frac{1}{x}} = 2$$

$$x = 2 + \frac{2}{x} \quad | \cdot x$$

$$x^2 = 2x + 2$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\Delta = 12 \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$$

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

$$x = 1 + \sqrt{3}$$

Lewa strona równania jest szeregiem geometrycznym o ilorazie q , gdzie $q = -\frac{1}{x}$. Ten szereg jest zbieżny, gdy iloraz spełnia warunek $|q| < 1$.

Korzystamy ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego $S = \frac{a_1}{1-q}$.

Zgodnie z założeniem $x \neq 0$, więc obie strony równania możemy pomnożyć przez x .

Rozwiązanie $1 - \sqrt{3}$ nie spełnia założenia, bo $\left| -\frac{1}{1 - \sqrt{3}} \right| > 1$.

ZADANIE Rozwiąż równanie, w którym lewa strona jest szeregiem geometrycznym: $1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \dots = 1\frac{1}{13}$.

zadania 10–18 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Wykaż, że podany szereg geometryczny jest zbieżny. Oblicz sumę tego szeregu.

a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$

d) $5 + 2 + 0,8 + \dots$

b) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$

e) $-100 - 60 - 36 - \dots$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \dots$

f) $-4 + \frac{5}{3} - \frac{25}{36} + \dots$

2. Znajdź wszystkie wartości a , dla których podany szereg geometryczny jest zbieżny.

a) $2a + 2a^2 + 2a^3 + \dots$

d) $\frac{1}{3} - \frac{1}{a} + \frac{3}{a^2} - \dots$

b) $1 + \frac{a^2}{3} + \frac{a^4}{9} + \dots$

e) $3 + 0,3 \cdot (a - 1) + 0,03 \cdot (a - 1)^2 + \dots$

c) $5 + \frac{5}{a} + \frac{5}{a^2} + \dots$

f) $4a - 2a(3 - a) + a(3 - a)^2 - \dots$

3. Niech a_1 oznacza pierwszy wyraz nieskończonego ciągu geometrycznego, a q – iloraz tego ciągu. Oblicz różnicę między sumą dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu a sumą wszystkich jego wyrazów, jeśli:

a) $a_1 = 50, q = \frac{1}{2}$

b) $a_1 = 9, q = 0,1$

4. Zamień podany ułamek okresowy na ułamek zwykły.

a) $1,(7)$

c) $5,(07)$

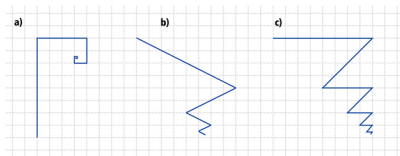
e) $-7,1(25)$

b) $-2,(80)$

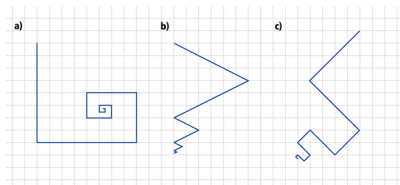
d) $-4,3(2)$

f) $0,0(320)$

5. Na rysunku przedstawiono fragment linii zbudowanej z nieskończonej liczby odcinków. Długości kolejnych odcinków tworzą ciąg geometryczny. Oblicz długość nieskończonej linii.



6. Na rysunku przedstawiono fragment linii zbudowanej z nieskończonej liczby odcinków. Oblicz długość nieskończonej linii.



Niezwykłym osiągnięciem Polski międzywojennej była tzw. polska szkoła matematyczna. Mianem tym określa się liczną grupę wybitnych polskich matematyków pracujących głównie w trzech ośrodkach: we Lwowie, w Warszawie i w Krakowie.

Najbardziej znani przedstawiciele polskiej szkoły matematycznej to Stefan Banach, Wacław Sierpiński, Alfred Tarski, Stanisław Ulam, Hugo Steinhaus. Ich prace miały ogromny wpływ na rozwój wielu dziedzin matematyki w XX w., zwłaszcza tych, które powstawały właśnie w tym czasie: teorii mnogości, topologii, analizy funkcjonalnej. Za twórcę ostatniej z wymienionych dziedzin uznaje się Stefana Banacha.

Do osiągnięć polskiej szkoły matematycznej można też zaliczyć prace mniej znanych matematyków poznańskich — Mariana Rejewskiego, Henryka Żygalskiego, Jerzego Różyckiego. W 1933 roku złamali oni szyfr Enigmy — niemieckiej maszyny używanej do szyfrowania wojskowych depeš.

Wielu polskich matematyków nie przeżyło II wojny światowej. Duża ich część była pochodzenia żydowskiego i zginęła w gettach w czasie okupacji niemieckiej.

Sporo sukcesów polska szkoła matematyczna zawdzięcza Wacławowi Sierpińskiemu, matematykowi, który oprócz znakomitych osiągnięć matematycznych miał niezwykłą umiejętność rozwijania talentu swoich studentów. Jednym z najbardziej znanych na świecie pomysłów Sierpińskiego jest tzw. dywan Sierpińskiego, który powstaje w następujący sposób: najpierw dzielimy kwadrat o polu 1 na 9 mniejszych kwadratów i wycinamy środkowy. Potem każdy z mniejszych kwadratów znowu dzielimy na 9 jeszcze mniejszych kwadratów i wycinamy środkowy itd. Figura otrzymana w wyniku kontynuowania wycinania kwadratów w nieskończoność to dywan Sierpińskiego.



7. Przeczytaj informacje w ramce. Ile jest równa suma pól wszystkich kwadratów, które trzeba by usunąć z pierwszego kwadratu, aby otrzymać dywan Sierpińskiego?

8. W kwadrat o długości boku 2 wpisano okrąg i zamalowano część kwadratu leżącą na zewnątrz okręgu (zob. rysunek). W ten okrąg wpisano kwadrat i zamalowano jego część leżącą na zewnątrz okręgu w niego wpisanego. Następnie w ten okrąg ponownie wpisano kwadrat i zamalowano jego część leżącą na zewnątrz okręgu w niego wpisanego. Ile wyniesie suma pól wszystkich zamalowanych obszarów, jeżeli ten proces będziemy kontynuować w nieskończoność?



9. Na rysunkach przedstawiono kolejne etapy powstawania figury zwanej płatkami Kocha. Aby ją otrzymać, należałoby w podobny sposób postępować nieskończenie wiele razy. Oblicz pole płatka Kocha, którego budowę zaczynamy od trójkąta o długości boku 1.



Trójkąt równoboczny.



Dorysowujemy trójkąty równoboczne o boku trzy razy krótszym.



Do każdego boku poprzednio otrzymanej gwiazdy dorysowujemy trójkąty równoboczne o boku trzy razy krótszym niż poprzednio.

10. Rozwiąż równanie, w którym lewa strona jest szeregiem geometrycznym.

a) $4 + 4x + 4x^2 + \dots = 5$

d) $2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \dots = 2,5$

b) $x + x^2 + x^3 + \dots = 3$

e) $x + 1 + \frac{1}{x} + \dots = 4,5$

c) $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \dots = \frac{50}{49}$

f) $1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \dots = 1,5$

11. Rozwiąż równanie, w którym lewa strona jest różnicą dwóch szeregów geometrycznych.

$$x - \frac{1}{2x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{x^3}{4} - \frac{1}{8x} + \dots = 1$$

12. Rozwiąż równanie, w którym obie strony są szeregami geometrycznymi.

$$15 \cdot \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \dots\right) = 8 \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \dots\right)$$

13. Suma wszystkich wyrazów pewnego nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 1, a suma kwadratów tych wyrazów jest równa 7. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

14. Iloraz pewnego nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 0,7, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu wynosi 20. Oblicz sumę $a_1 + a_3 + a_5 + \dots$.

15. Lewa strona poniższego równania jest szeregiem geometrycznym. Wykaż, że:

$$\log_2 10 - \log_4 10 + \log_{16} 10 + \dots + (-1)^n \log_{2^{2^n}} 10 + \dots = \frac{1}{\log 2\sqrt{2}}$$

16. W nieskończonym ciągu geometrycznym każdy wyraz jest p razy większy od sumy wyrazów po nim następujących. Oblicz iloraz tego ciągu.

17. Niech ciąg (a_n) będzie nieskończonym ciągiem geometrycznym. Znajdź iloraz tego ciągu, jeśli wiadomo, że $S_1 = 3S_0$, gdzie:

$$S_0 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \quad \text{oraz} \quad S_1 = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots$$

Warto wiedzieć!

W XVIII wieku szwajcarski matematyk Leonhard Euler (czyt. lijonart ojler) opisał następujący paradoks. Wybierzmy dowolną liczbę dodatnią a i rozważmy ciągi geometryczne o wyrazach $a, a^2, a^3, \dots$ oraz $1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \dots$. Po skorzystaniu ze wzoru na sumę nieskończonego ciągu geometrycznego otrzymujemy równości:

$$a + a^2 + a^3 + \dots = \frac{a}{1-a} \quad \text{oraz} \quad 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{a}}$$

Po dodaniu tych równości stronami otrzymamy następującą równość:

$$1 + a + \frac{1}{a} + a^2 + \frac{1}{a^2} + a^3 + \frac{1}{a^3} + \dots = 0$$

Ale gdy $a > 0$, to lewa strona tej równości jest liczbą większą od 1! Jak to możliwe?

18. Wyjaśnij paradoks opisany w powyższej ramce, tzn. znajdź błąd w tym rozumowaniu.

MINISPRAWDZIAN

51. Który z podanych szeregów geometrycznych nie jest zbieżny?

- A. $18 + 6 + 2 + \dots$ C. $4 + 0,8 + 0,16 + \dots$
 B. $-16 + 12 - 9 + \dots$ D. $-8 + 12 - 18 + \dots$

52. Lewa strona równania $3 - 3x + 3x^2 - 3x^3 + \dots = 5$ jest szeregiem geometrycznym. Rozwiązaniem tego równania jest:

- A. $-\frac{2}{5}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

53. Rozważ nieskończony ciąg kwadratów. Długości boków tych kwadratów tworzą ciąg geometryczny: 1 m, 0,8 m, 0,64 m itd. Suma pól wszystkich kwadratów należących do tego ciągu jest równa:

- A. $2,0496 \text{ m}^2$ B. 5 m^2 C. $\frac{25}{9} \text{ m}^2$ D. $3\frac{2}{5} \text{ m}^2$

54. Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest 4 razy większa od pierwszego wyrazu tego ciągu. Iloraz tego ciągu geometrycznego jest równy:

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\sqrt{2}$

1. Zbadaj monotoniczność ciągu określonego wzorem $a_n = 4n^2 - 3$.

2. Znajdź wzór ogólny ciągu określonego rekurencyjnie.

a) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n^2$

b) $a_1 = 5, a_{n+1} = 5a_n$

3. Znajdź wzór rekurencyjny ciągu określonego wzorem ogólnym.

a) $a_n = 7^n$ c) $a_n = n^2$

b) $a_n = 2n + 17$ d) $a_n = \log 5^n$

4. Znajdź wartość p , dla której liczby $5p - 4$, $p + 5$, 2 są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

5. W pewnym ciągu (a_n) sumę n początkowych wyrazów ciągu można obliczać ze wzoru $S_n = pn^2 + qn$. Wykaż, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

6. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 500, dla których reszta z dzielenia przez 7 wynosi 5.

7. Dana jest funkcja $f(x) = 3x + 7$. Uzasadnij, że liczby $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ... tworzą ciąg arytmetyczny. Zapisz wzór ogólny tego ciągu.

8. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym. Uzasadnij, że ciąg (a_{5n}) także jest ciągiem arytmetycznym.

9. Oblicz, dla jakiej liczby n sumy n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego 6, 18, 30, ... i ciągu arytmetycznego 18, 24, 30, ... są równe.

10. W pewnym ciągu geometrycznym $a_6 = 5$ i $a_8 = 10$. Znajdź a_1 , a_7 i a_{10} .

11. Siódmy wyraz pewnego ciągu geometrycznego jest 16 razy większy od wyrazu trzeciego. Ustal, ile razy większy jest dwudziesty wyraz tego ciągu od wyrazu dziesiątego.

12. Liczbę a określamy jako sumę:

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

Czy istnieje taka liczba n , że $a > 1$?

13. Przypuśćmy, że wartość pewnego mieszkania zwiększa się o 10% po każdym roku od chwili zakupu. Po ilu najwcześniej latach mieszkanie będzie warte o 60% więcej niż w chwili zakupu?

14. Oblicz.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{n} - \frac{3}{5n^2} \right)$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 2}{2n^3 - n}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} 4\sqrt{4 + 0,3^n}$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + n + 5}{5n^5}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^5 - n^4 - n)$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 2n}{5 - 3n}$

15. Oblicz podaną granicę, wiedząc, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -3$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n - 4)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{2}{1 - b_n} \right)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)^2$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 3}{b_n}$

16. Rozwiąż równanie, którego lewa strona jest szeregiem geometrycznym.

$$x + x^3 + x^5 + \dots = -\frac{15}{16}$$

Podobieństwo figur

Filary, które przedstawiono na fotografii, mają taką samą wysokość i stoją w jednakowych odległościach od siebie. Jednak te, które są dalej, wydają się mniejsze i wydaje się, że coraz mniejsze są także odległości między nimi. Wielkości te zmieniają się zgodnie z zasadami perspektywy. Zmianę tę można opisać za pomocą figur podobnych.



Twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

- Wielokąty podobne
- Cechy podobieństwa trójkątów
- Cechy podobieństwa trójkątów (cd.)
- Pola figur podobnych
- Powtórzenie

TWIERDZENIE TALESA I TWIERDZENIE ODWROTNE DO TWIERDZENIA TALESA

ĆWICZENIE Naszkicuj dowolny kąt i dwie proste równoległe przecinające jego ramiona. Proste oznacz literami k i m , wierzchołek kąta — literą O , a punkty przecięcia prostych k i m z ramionami kąta — literami A, B, C, D tak, aby punkty A i C leżały na jednym ramieniu kąta, a punkty B i D — na drugim. Zmierz długości odpowiednich odcinków i oblicz ilorazy $\frac{|OA|}{|OB|}$ oraz $\frac{|OC|}{|OD|}$.

Twierdzenie Taleasa

Jeżeli dwie proste równoległe przecinają oba ramiona pewnego kąta, to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do długości odpowiednich odcinków wyznaczonych na drugim ramieniu kąta.



Jeżeli $AB \parallel CD$, to $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|}$.

Dowód

Przyjmijmy, że proste AB i CD przedstawione na rysunku obok są równoległe.

Trójkąty ACB i ADB mają wspólny bok AB , a z równoległości prostych AB i CD wynika, że wysokości tych trójkątów opuszczone z wierzchołków C i D są równe. Zatem pola trójkątów ACB i ADB są równe.

Wynika stąd, że trójkąty OCB i OAD mają równe pola, ponieważ pole trójkąta OCB jest sumą pól trójkątów OAB i ACB , a pole trójkąta OAD jest sumą pól trójkątów OAB i ADB .

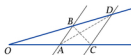
Trójkąty OAB i OCB mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka B , więc stosunek ich pól jest równy stosunkowi długości boków OA i OC . Podobnie stosunek pól trójkątów OAB i OAD jest równy stosunkowi długości boków OB i OD .

$$\frac{P_{\triangle OAB}}{P_{\triangle OCB}} = \frac{|OA|}{|OC|} \quad \frac{P_{\triangle OAB}}{P_{\triangle OAD}} = \frac{|OB|}{|OD|}$$

Ponieważ $P_{\triangle OCB} = P_{\triangle OAD}$, więc z powyższych równości wynika równość:

$$\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|OB|}{|OD|}$$

Stąd: $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|}$ $\square$



Przyjrzyj się równościom, które zapisa-
no w ramce obok. Każdą z nich moż-
na uzasadnić, korzystając z twierdzenia
Talesa. Na przykład równość $\frac{e}{a} = \frac{e+f}{a+b}$
wynika wprost z tego twierdzenia. Prze-
kształcając tę równość, otrzymamy ko-
leijną równość $\frac{e}{a} = \frac{f}{b}$.

Pokażemy teraz, że zachodzi równość:

$$\frac{d}{c} = \frac{a+b}{a}$$

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku
obok oraz to, że proste AB i CD są
równoległe.

Pole trójkąta OCD jest sumą pól trój-
kąta OAB i trapezu $CDBA$.

$$\frac{d(p+q)}{2} = \frac{cp}{2} + \frac{(d+c)q}{2}$$

Przekształcając tę równość, otrzymujemy:

$$dp + dq = cp + dq + cq$$

$$dp = c(p+q)$$

$$\frac{d}{c} = \frac{p+q}{p}$$

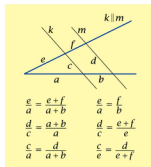
Z twierdzenia Talesa wiemy, że:

$$\frac{p+q}{a+b} = \frac{p}{a}$$

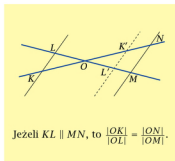
Stąd:

$$\frac{p+q}{p} = \frac{a+b}{a}$$

Wobec tego: $\frac{d}{c} = \frac{a+b}{a}$ $\square$



Twierdzenie Talesa można rozszerzyć do sytuacji, w której dwie równole-
głe proste przecinają dowolne dwie proste przecinające się.



Na rysunku obok przedstawiono równo-
ległe proste KL i MN , które przecina-
ją ramiona kątów wierzchołkowych. Na
półprostych ON i OM wybieramy punk-
ty K' i L' w taki sposób, aby $|OK'| =$
 $|OK|$ i $|OL'| = |OL|$. Trójkąt $OL'K'$ jest
wówczas przystający do trójkąta OLK . Za-
tem $K'L' \parallel NM$, czyli zachodzi równość:

$$\frac{|OK'|}{|OL'|} = \frac{|ON|}{|OM|}$$

Stąd wynika równość:

$$\frac{|OK|}{|OL|} = \frac{|ON|}{|OM|}$$

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

Jeżeli dwie proste przecinają oba ramiona pewnego kąta i odcinki wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych na drugim ramieniu kąta, to te proste są równoległe.



Jeżeli $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|}$, to $AB \parallel CD$.

Dowód

Załóżmy, że punkty A i C leżą na jednym ramieniu kąta o wierzchołku O , a punkty B i D leżą na jego drugim ramieniu oraz, że $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|}$.

Jeśli przez punkt C poprowadzimy prostą równoległą do prostej AB i przetnie ona ramię kąta w punkcie C' , to $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC'|}{|OD|}$, co wynika z twierdzenia Talesa. Z tej równości oraz z założenia $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|}$ wynika, że $|OC'| = |OD|$, zatem $C' = D$, czyli prosta CD jest równoległa do prostej AB . $\square$

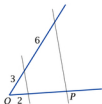
zadania 11–13 ►

ZESTAW ZADAŃ

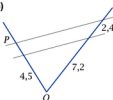
Uwaga. Na rysunkach w zadaniach 1–5 proste zaznaczone czarnym kolorem są równoległe.

1. Oblicz długość odcinka OP .

a)



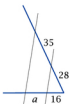
b)



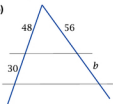
c)

**2. Oblicz długość odcinka oznaczonego literą.**

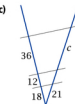
a)



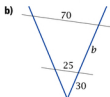
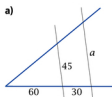
b)



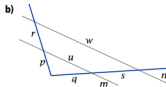
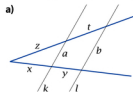
c)



3. Oblicz długość odcinka oznaczonego literą.



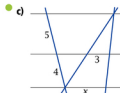
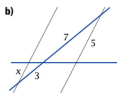
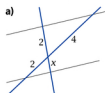
4. Znajdź brakujące wyrazy proporcji.



$$\frac{x}{z} = \frac{x+y}{?} \quad \frac{a}{z} = \frac{b}{?}$$

$$\frac{r}{p+r} = \frac{?}{?} \quad \frac{q+s}{w} = \frac{?}{?}$$

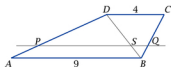
5. Oblicz długość odcinka x .



6. Gdy Mikołaj stoi wieczorem 3 m od latarni, to rzuca cień, który ma długość 1 m. Mikołaj ma 1,8 m wzrostu. Oblicz wysokość latarni.

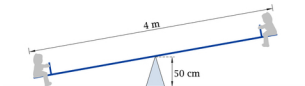
7. Proste m i n przedstawione na rysunku obok są równoległe. Wykaż, że:

$$|AC| \cdot |OD| = |BD| \cdot |OC|$$



8. W trapezie $ABCD$ przedstawionym na rysunku obok punkt P dzieli ramię AD trapezu $ABCD$ w stosunku 1 : 3 i $PQ \parallel AB$. Oblicz długości odcinków PS i SQ .

- 9. a)** Huśtawka przedstawiona na rysunku ma podparcie w środku belki. Oblicz, jak wysoko znajduje się koniec huśtawki, gdy drugi jej koniec dotyka ziemi.

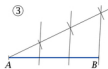
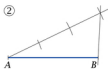
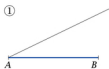


- b)** Jak zmieni się największa wysokość, na którą wznosi się koniec huśtawki, gdy zmienimy długość belki huśtawki, a punkt podparcia ciągle będzie w środku i nie zmieni się jego wysokość?

Warto wiedzieć!

Wiadomo, jak podzielić konstrukcyjnie dany odcinek na połowę i na cztery równe części. Korzystając z twierdzenia Talesa, możemy konstrukcyjnie podzielić dany odcinek na dowolnie ustaloną liczbę równych części.

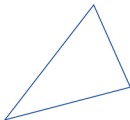
Poniższa konstrukcja pokazuje, jak za pomocą cyrkla i linijki podzielić odcinek AB na trzy równe części.



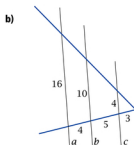
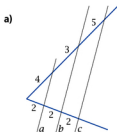
- ① Rysujemy dowolną półprostą o początku w punkcie A (nachyloną do odcinka AB pod kątem różnym od 180°).
- ② Na półprostej odkładamy kolejno trzy odcinki o jednakowej długości. Prowadzimy prostą przez punkt B i koniec ostatniego odcinka.
- ③ Kreślimy proste równoległe do narysowanej prostej, przechodzące przez pozostałe końce odkładanych odcinków. Dzielą one odcinek AB na trzy równe części.

10. Przeczytaj informacje w ramce.

- a)** Narysuj dowolny odcinek i podziel go konstrukcyjnie na pięć równych części.
- b)** Skonstruuj trójkąt równoboczny, który ma taki sam obwód jak trójkąt narysowany obok.
- c)** Narysuj dowolny trójkąt, a następnie podziel go prostymi przechodzącymi przez jeden z wierzchołków na trzy części o równych polach.
- d)** Narysuj dowolny odcinek i podziel go konstrukcyjnie w stosunku $2 : 5$.



11. Które z prostych a , b , c są równoległe?



12. a) Uzasadnij, że odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku tego trójkąta.

b) Uzasadnij, że odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do podstaw trapezu.

13. Uzasadnij, że jeśli połączymy odcinkami środki kolejnych boków dowolnego czworokąta, to otrzymamy równoległobok.

MINISPRAWDZIAN

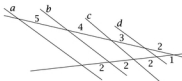
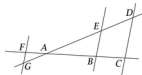


51. Proste AC i BD przedstawione na rysunku obok są równoległe. Obwód trójkąta OAC jest równy:

- A. $10\frac{3}{7}$ B. $10\frac{1}{3}$ C. $11\frac{2}{3}$ D. $12\frac{2}{21}$

52. Proste BE , CD i FG pokazane na rysunku obok są równoległe, $|AE| = 12$, $|ED| = 8$, $|EB| = 6$, $|FG| = 2$ i $|BC| = 6$. Która z poniższych równości nie jest prawdziwa?

- A. $|AB| = 9$ C. $|AG| = 5$
B. $|CD| = 10$ D. $|AF| = 3$



53. Które z prostych pokazanych na rysunku obok są równoległe?

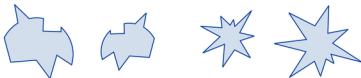
- A. a i b C. a i d
B. b i d D. b i c

WIELOKĄTY PODOBNE

I ĆWICZENIE A Z prawej strony przedstawiony jest spinacz naturalnej wielkości. Poniżej ten sam spinacz (lub jego fragment) przedstawiono w różnych skalach. Zmierz długości odpowiednich odcinków i oblicz te skale.



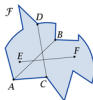
Jeśli daną figurę $\mathcal{F}$ powiększymy lub pomniejszymy w pewnej skali, to otrzymamy figurę podobną do figury $\mathcal{F}$. Figury pozostaną podobne, gdy jedną z nich przesuniemy, obrócimy lub odbijemy symetrycznie. Na poniższych rysunkach przedstawiono dwie pary figur podobnych.



O figurach podobnych możemy powiedzieć, że mają taki sam kształt, ale różnią się wielkością.

W figurach podobnych stosunek długości każdej pary odpowiadających sobie odcinków jest taki sam.

Figury $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}'$ przedstawione na rysunku obok są podobne. Odcinkowi AB w figurze $\mathcal{F}$ odpowiada odcinek $A'B'$ w figurze $\mathcal{F}'$, odcinkowi CD odpowiada odcinek $C'D'$ itd.



Liczbę równą stosunkowi długości odpowiadających sobie odcinków nazywamy **skala podobieństwa**.

Figura $\mathcal{F}'$ jest podobna do figury $\mathcal{F}$ w skali k , gdzie $k = \frac{|A'B'|}{|AB|}$. Natomiast figura $\mathcal{F}$ jest podobna do figury $\mathcal{F}'$ w skali $\frac{1}{k}$, gdzie $\frac{1}{k} = \frac{|AB|}{|A'B'|}$.

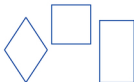


$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|C'D'|}{|CD|} = \frac{|E'F'|}{|EF|} = k$$

W wypadku niektórych figur łatwo jest stwierdzić, czy są podobne. Dotyczy to na przykład wielokątów.

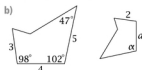
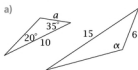
Dwa wielokąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są dwa warunki:

- *Kąty jednego wielokąta mają takie same miary jak odpowiednie kąty drugiego wielokąta.*
- *Stosunki długości boków jednego wielokąta do długości odpowiadających im boków drugiego wielokąta są takie same.*



Zauważmy, że kwadrat i romb, który nie jest kwadratem, mają boki proporcjonalne, ale nie są wielokątami podobnymi, bo odpowiednie kąty nie są równe. Z kolei kwadrat i prostokąt, który nie jest kwadratem, mają równe kąty, ale także nie są wielokątami podobnymi, bo odpowiednie boki nie są proporcjonalne.

ĆWICZENIE B Przedstawione poniżej wielokąty są podobne. Znajdź miarę kąta α , skalę podobieństwa mniejszej figury do większej oraz długość boku a .



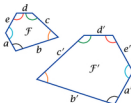
Wielokąt $\mathcal{F}'$ przedstawiony na rysunku obok jest podobny do wielokąta $\mathcal{F}$ w skali k , gdzie $k = \frac{a'}{a}$ (oczywiście także $k = \frac{b'}{b}$, $k = \frac{c'}{c}$ itd.).

Łatwo zauważyć, że równość:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$

jest równoważna równości:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

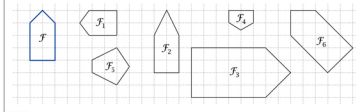


$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{d'}{d} = \frac{e'}{e}$$

Wynika stąd poniższa własność wielokątów podobnych.

Dwa wielokąty, których odpowiednie kąty mają równe miary, są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy stosunek długości dowolnych dwóch boków w jednym wielokącie jest równy stosunkowi długości odpowiadających im boków w drugim wielokącie.

ĆWICZENIE C Dwa z pięciokątów $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_6$ są podobne do pięciokąta $\mathcal{F}$. Które?



zadania 1–21 ►

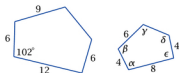
ZESTAW ZADAŃ

1. Figury przedstawione na rysunku są podobne. Ustal, w jakiej skali większa z figur jest podobna do mniejszej.

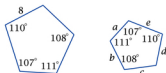


2. a) Kwadrat $A'B'C'D'$ jest podobny do kwadratu $ABCD$ w skali 5. Bok mniejszego kwadratu ma długość 3. Wyznacz długość przekątnej większego kwadratu.
 b) Czworokąt $K'L'M'N'$ jest podobny do czworokąta $KLMN$ w skali $\frac{1}{3}$. Oblicz obwód czworokąta $KLMN$, wiedząc, że obwód czworokąta $K'L'M'N'$ jest równy 60.
 c) Trójkąt $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC w skali 3. Najmniejszy kąt w trójkącie ABC ma miarę 20° , a największy kąt w trójkącie $A'B'C'$ ma miarę 110° . Oblicz miary kątów trójkąta $A'B'C'$.
 d) W trójkącie T_1 o bokach mających długości 3, 10 i 8 dwa kąty mają miary α i β , takie że $\alpha < \beta < 60^\circ$. Trójkąt T_2 jest podobny do trójkąta T_1 w skali $\frac{4}{3}$. Ustal, jaką długość ma w trójkącie T_2 bok leżący naprzeciw kąta α , a jaką — bok leżący naprzeciw kąta β .

3. a) Przedstawione poniżej pięciokąty są podobne. Który z kątów oznaczonych greckimi literami ma miarę 102° ?



- b) Przedstawione poniżej pięciokąty są podobne w skali $\frac{3}{4}$. Który spośród boków oznaczonych literami ma długość 6?



4. Przedstawione wielokąty są podobne. Znajdź brakujące wyrazy proporcji.

a)



$$\frac{f}{a} = \frac{?}{b} \quad \frac{a}{?} = \frac{c}{e} \quad \frac{a}{c} = \frac{?}{?} \quad \frac{d}{e} = \frac{?}{?}$$

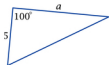
b)



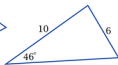
$$\frac{z}{s} = \frac{x}{?} \quad \frac{p}{?} = \frac{t}{y} \quad \frac{p}{r} = \frac{?}{?} \quad \frac{w}{y} = \frac{?}{?}$$

5. Trójkąty przedstawione na rysunku są podobne. Oblicz długość boku a .

a)



b)



6. Wielokąty przedstawione na rysunku są podobne. Oblicz długość boku a oraz miary kątów α i β .

a)

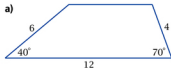


b)

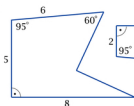


7. Uzasadnij, że figury przedstawione na rysunku nie są podobne.

a)



b)



8. Które z poniższych zdań są prawdziwe?

- ① Jeśli stosunki długości dwóch sąsiednich boków dwóch prostokątów są równe, to prostokąty te są podobne.
- ② Dowolne dwa kwadraty są podobne.
- ③ Dwa trapezy prostokątne o takim samym kącie ostrym są podobne.
- ④ Jeśli jeden kąt rombu jest równy kątowi innego rombu, to romby te są podobne.
- ⑤ Jeśli długości przekątnych jednego równoległoboku są proporcjonalne do długości przekątnych drugiego równoległoboku, to równoległoboki te są podobne.

9. a) Wielokąt $\mathcal{F}_1$ jest podobny do wielokąta $\mathcal{F}_2$ w skali 2, a wielokąt $\mathcal{F}_2$ jest podobny do wielokąta $\mathcal{F}_3$ w skali 7. Znajdź skalę podobieństwa wielokąta $\mathcal{F}_3$ do wielokąta $\mathcal{F}_1$.

b) Wielokąt $\mathcal{F}_1$ jest podobny do wielokąta $\mathcal{F}_2$ w skali 5, a do wielokąta $\mathcal{F}_3$ — w skali 3. Znajdź skalę podobieństwa wielokąta $\mathcal{F}_2$ do wielokąta $\mathcal{F}_3$.

10. Trapez $ABCF$ przedstawiony na rysunku jest podobny do trapezu $FCDE$. Oblicz długość odcinka ED .

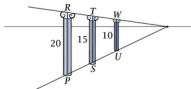
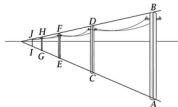


Warto wiedzieć!

Perspektywa w malarstwie to sposób uzyskiwania wrażenia trójwymiarowości na płaskim rysunku. Opiera się on na wrażeniu pozornego zmniejszania się przedmiotów wraz z oddalaniem się ich od obserwatora i na złudzeniu zbieżności linii biegnących ku horyzontowi.

Już starożytni twórcy próbowali stosować perspektywę, ale po raz pierwszy prawidłowo opisał ją i stosował w malarstwie włoski architekt i rzeźbiarz Filippo Brunelleschi (czyt. bruneleski) na początku XV wieku.

Rysunek poniżej przedstawia rząd słupów, które w rzeczywistości mają równe wysokości i są rozstawione w takich samych odstępach. Takie słupy są narysowane zgodnie z zasadą perspektywy, gdy trapezy $ABDC$, $CDFE$, $EFHG$ itd. są podobne.



11. Przeczytaj informacje w ramce. Rysunek obok został wykonany zgodnie z regułami perspektywy. Kolumny przedstawione na rysunku w rzeczywistości mają równe wysokości. Liczby na rysunku oznaczają długości narysowanych odcinków w milimetrach.

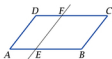
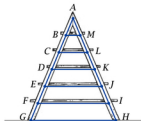
a) Uzasadnij, że w rzeczywistości odległość między kolumnami RP i TS jest inna niż między kolumnami TS i WU .

b) Przypuśćmy, że przed kolumną oznaczoną na rysunku RP w tej samej linii stoi jeszcze jedna kolumna o tej samej wysokości, ale jej odległość (w rzeczywistości) od kolumny RP jest taka sama jak odległość między kolumnami RP i TS . Ustal, jaką długość powinien mieć odcinek przedstawiający tę kolumnę na rysunku.

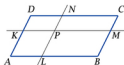
12. Na szczeblach drabiny położono poziomo deski (zob. rysunek obok). Odległości między kolejnymi szczeblami są jednakowe i równe długości odcinka AB .

a) Wyjaśnij, dlaczego trapezy $FGHI$ i $EFIJ$ nie są podobne.

b) Wskaż dwa trapezy podobne do trapezu $BCLM$ oraz trapez podobny do trapezu $BDKM$.



13. Równoległobok $ABCD$ przedstawiony na rysunku obok ma boki o długościach 5 i 7. Prosta EF odcina równoległobok $AEFD$, podobny do równoległoboku $ABCD$. Oblicz długość odcinka AE .



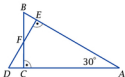
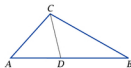
14. Równoległobok $ABCD$ rozcięto na cztery równoległoboki prostymi KM i LN równoległymi do jego boków. Proste te przecinają się w punkcie P , a równoległobok $KPND$ jest podobny do równoległoboku $ABCD$. Wykaż, że równoległobok $LBMP$ jest podobny do równoległoboku $ABCD$.

15. Papier produkuje się w prostokątnych arkuszach. Wymiary arkusza dobrane są tak, że po złożeniu go na pół (równolegle do krótszego boku) otrzymujemy prostokąt podobny do całego arkusza. Wyznacz stosunek długości boków arkusza papieru.



16. Z prostokąta odcięto kwadrat (zob. rysunek obok) i otrzymano prostokąt podobny do tego prostokąta. Oblicz stosunek długości boków prostokąta.

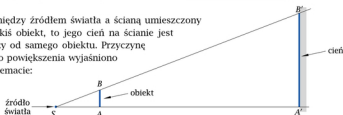
17. Trójkąty ABC i CBD przedstawione na rysunku obok są podobne. Boki trójkąta CBD mają długości $|CD| = 2$, $|DB| = 3$, $|BC| = 4$. Oblicz długości boków AB i AC .



18. Punkt F zaznaczony na rysunku obok jest środkiem odcinka BC . Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta ADE . Oblicz skalę tego podobieństwa.



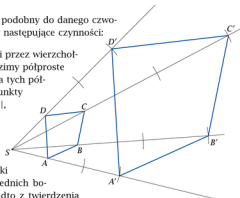
Jeśli między źródłem światła a ścianą umieszczony jest jakiś obiekt, to jego cień na ścianie jest większy od samego obiektu. Przyczynę takiego powiększenia wyjaśniono na schemacie:



Podobny schemat możemy wykorzystać do konstrukcyjnego powiększania (lub zmniejszania) figur geometrycznych, a więc do rysowania figury podobnej do danej.

Aby skonstruować czworokąt podobny do danego czworokąta w skali 3, wykonujemy następujące czynności:

Wybieramy dowolny punkt S i przez wierzchołki czworokąta $ABCD$ prowadzimy półproste SA, SB, SC i SD . Następnie na tych półprostych zaznaczamy takie punkty A', B', C', D' , że $|SA'| = 3|SA|$, $|SB'| = 3|SB|$, $|SC'| = 3|SC|$, $|SD'| = 3|SD|$.

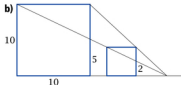


Otrzymany w ten sposób czworokąt $A'B'C'D'$ ma boki trzy razy dłuższe od odpowiednich boków czworokąta $ABCD$. Ponadto z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że bok $A'B'$ jest równoległy do boku AB , bok $B'C'$ jest równoległy do boku BC itd. Zatem oba czworokąty mają takie same kąty. Wobec tego czworokąt $A'B'C'D'$ jest podobny do czworokąta $ABCD$.

O narysowanym w ten sposób czworokącie $A'B'C'D'$ mówimy, że jest jednokładny do czworokąta $ABCD$ w skali k równej 3. Punkt S nazywamy środkiem jednokładności, a liczbę k nazywamy skalą jednokładności.

19. Przeczytaj informacje w ramce powyżej. Narysuj dowolny pięciokąt, a następnie skonstruuj pięciokąt podobny do niego w skali 2.

20. Prostokąty na rysunku są jednokładne (zob. informacje w ramce na stronie obok). Oblicz ich obwody.



21. Przeczytaj informacje w ramce na stronie obok.

a) Narysuj dowolny trójkąt, a następnie skonstruuj kwadrat, którego wszystkie wierzchołki leżą na bokach tego trójkąta.

b) Narysuj dowolny trójkąt i skonstruuj taki trójkąt równoboczny, którego wierzchołki leżą na bokach danego trójkąta (każdy z wierzchołków na innym boku).

MINISPRAWDZIAN

51. Który z czworokątów jest podobny do czworokąta przedstawionego obok?



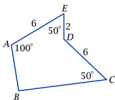
52. Do prostokąta o wymiarach $3\text{ cm} \times 12\text{ mm}$ jest podobny prostokąt o wymiarach:

A. $6\text{ cm} \times 6\text{ mm}$

B. $12\text{ cm} \times 3\text{ mm}$

C. $12\text{ cm} \times 3\text{ mm}$

D. $2\text{ m} \times 5\text{ mm}$



53. Pięciokąty przedstawione na rysunku są podobne. Która z poniższych równości nie jest prawdziwa?

A. $|UW| = 4$

C. $|XW| = 1$

B. $|\angle ABC| = 90^\circ$

D. $|BC| = 9$

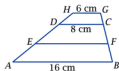
54. Trapez $ABCD$ (zob. rysunek) jest podobny do trapezu $EFGH$. Obwód trapezu $EFGH$ wynosi 36 cm . Obwód trapezu $ABCD$ jest równy:

A. 42 cm

B. 48 cm

C. 64 cm

D. 72 cm



CECHY PODOBIEŃSTWA TRÓJKĄTÓW

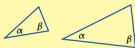
- ĆWICZENIE A** a) Narysuj dowolny trójkąt ABC , a następnie narysuj trójkąt, który ma takie same kąty jak trójkąt ABC , ale boki — o innych długościach. Sprawdź, czy odpowiadające sobie boki tych dwóch trójkątów są proporcjonalne.
- b) Narysuj dowolny trójkąt KLM , a następnie skonstruuj trójkąt, który ma wszystkie boki 2 razy dłuższe od boków trójkąta KLM . Sprawdź, czy oba te trójkąty mają takie same kąty.

Aby sprawdzić, czy dwa wielokąty są podobne, należy porównać stosunek długości odpowiednich boków i miary odpowiednich kątów. W wypadku trójkątów sprawdzenie obu warunków nie jest konieczne, gdyż jeśli dwa trójkąty mają proporcjonalne boki, to na pewno mają takie same kąty, a także gdy kąty dwóch trójkątów są takie same, to ich boki są proporcjonalne. Wynika to z własności zwanych cechami podobieństwa trójkątów.

CECHY PODOBIEŃSTWA TRÓJKĄTÓW

Cecha kk (kąć-kąt)

Jeśli miary dwóch kątów jednego trójkąta są takie same jak miary dwóch kątów drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.



Dowód

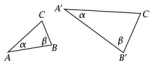
Załóżmy, że dwa kąty trójkąta ABC są takie same jak dwa kąty trójkąta $A'B'C'$. Z twierdzenia o sumie kątów trójkąta wynika, że trzeci kąt jest taki sam w obu tych trójkątach.

Pokażemy teraz, że boki tych trójkątów są proporcjonalne. Umieścimy w trójkącie $A'B'C'$ trójkąt $A'B_1C_1$ przystający do trójkąta ABC (zob. rysunek).

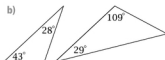
Kąty przy wierzchołkach B_1 i B' są równe, więc proste B_1C_1 i $B'C'$ są równoległe. Zatem z twierdzenia Talesa wynikają równości:

$$\frac{|A'B_1|}{|A'B'|} = \frac{|B'C_1|}{|B'C'|} = \frac{|A'C_1|}{|A'C'|}$$

Wykazaliśmy więc, że trójkąt $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta $A'B_1C_1$, zatem jest też podobny do trójkąta ABC . $\square$

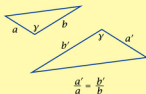


ĆWICZENIE B Czy poniższe trójkąty są podobne?



Cecha bkb (bok-kąt-bok)

Jeśli długości dwóch boków jednego trójkąta są proporcjonalne do długości odpowiednich boków drugiego trójkąta i kąty między tymi bokami w obu trójkątach mają równe miary, to trójkąty te są podobne.



Dowód

Załóżmy, że dla trójkątów ABC i $A'B'C'$ zachodzą równości:

$$|\angle ACB| = |\angle A'C'B'| = \gamma$$

$$\frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|BC|}$$

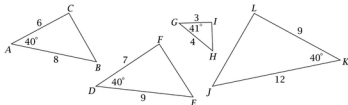
Umieścimy w trójkącie $A'B'C'$ trójkąt A_1B_1C' przystający do trójkąta ABC (zob. rysunek). Wynika stąd proporcja:

$$\frac{|A'C'|}{|A_1C'|} = \frac{|B'C'|}{|B_1C'|}$$

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że $A'B' \parallel A_1B_1$.

Wobec tego w trójkątach $A'B'C'$ i A_1B_1C' kąty o wierzchołkach A' i A_1 są równe i kąty o wierzchołkach B' i B_1 też są równe. Zatem z cechy kk wynika, że trójkąt $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta A_1B_1C' , jest więc też podobny do trójkąta ABC . $\square$

ĆWICZENIE C Który z trójkątów jest podobny do trójkąta ABC ?



Cecha bbb (bok-bok-bok)

Jeśli długości boków jednego trójkąta są proporcjonalne do długości odpowiednich boków drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.



$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

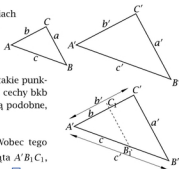
Dowód

Niech trójkąt ABC ma boki o długościach a, b i c , zaś trójkąt $A'B'C'$ ma boki o długościach a', b' i c' oraz:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

Na bokach b' i c' trójkąta wybieramy takie punkty B_1 i C_1 , że $|A'B_1| = c$ i $|A'C_1| = b$. Z cechy bkb wynika, że trójkąty $A'B_1C_1$ i $A'B'C'$ są podobne, więc zachodzi równość $\frac{a'}{|B_1C_1|} = \frac{b'}{b}$.

Ponieważ $\frac{b'}{b} = \frac{a'}{a}$, więc $|B_1C_1| = a$. Wobec tego trójkąt ABC jest przystający do trójkąta $A'B_1C_1$, czyli jest podobny do trójkąta $A'B'C'$. $\square$



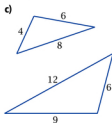
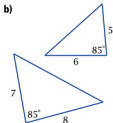
ĆWICZENIE D Który z trójkątów jest podobny do trójkąta ABC ?



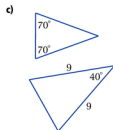
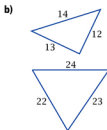
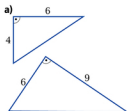
zadania 1-18

ZESTAW ZADAŃ

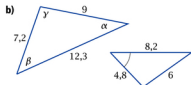
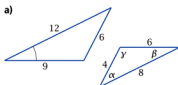
1. Czy z informacji podanych na rysunku wynika, że trójkąty są podobne?



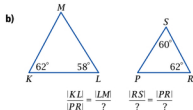
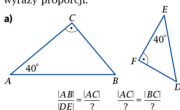
2. Czy z informacji podanych na rysunku wynika, że trójkąty są podobne?



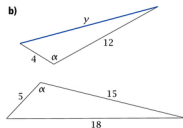
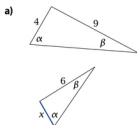
3. Na rysunkach przedstawiono pary trójkątów podobnych. Podaj cechę podobieństwa, na podstawie której można to uzasadnić. Ustal, jaką miarę — α , β czy γ — ma kąt zaznaczony łukiem.



4. Uzasadnij, że trójkąty przedstawione na rysunku są podobne. Znajdź brakujące wyrazy proporcji.



5. Uzasadnij, że trójkąty przedstawione na rysunku są podobne. Oblicz długość odcinka oznaczonego literą.



6. a) Dane są długości boków trzech trójkątów: $T_1 - 12, 9, 15$, $T_2 - 20, 16, 12$, $T_3 - 11, 8, 6$. Dwa z tych trójkątów mają odpowiednie kąty przystające. Które to trójkąty?

b) W każdym z trzech trójkątów jeden z kątów ma miarę α . Długości boków leżących na ramionach tego kąta wynoszą w trójkącie T_1 : 3 i 2, w trójkącie T_2 : 4,5 i 3, w trójkącie T_3 : 5 i 3,5. Dwa z tych trójkątów mają odpowiednie kąty przystające. Które to trójkąty?

7. Przekątne trapezu dzielą go na cztery trójkąty. Udowodnij, że dwa z tych trójkątów są podobne.

8. Znajdź na rysunku obok trzy trójkąty podobne do trójkąta ADC .

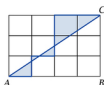


9. Uzasadnij, że wysokość trójkąta prostokątnego opuszczona z wierzchołka kąta prostego dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty do niego podobne.

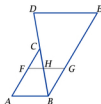
10. Narysuj prostokąt, a następnie podziel go na:

a) trzy trójkąty podobne,

b) pięć trójkątów podobnych.

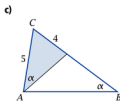
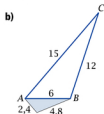
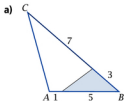


11. Wykaż, że trójkąty zaznaczone na rysunku obok są podobne do trójkąta ABC . Oblicz skale podobieństwa tych trójkątów do trójkąta ABC i wymień je w kolejności rosnącej.



12. Przedstawione na rysunku trójkąty ABC i BED są podobne. Odcinki FG i DE są równoległe. Udowodnij, że trójkąty FHC i GHB też są podobne.

13. Uzasadnij, że zacieniowany trójkąt jest podobny do trójkąta ABC . Oblicz skalę podobieństwa.

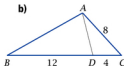


14. Uzasadnij, że trójkąt ABC jest podobny do trójkąta DAC . Oblicz skalę tego podobieństwa.

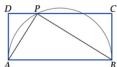
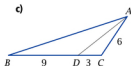
a)



b)



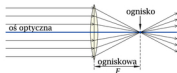
c)



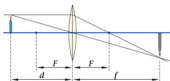
15. Na rysunku obok punkt P jest punktem przecięcia okręgu o średnicy AB z bokiem DC prostokąta $ABCD$. Wykaż, że trójkąt ADP jest podobny do trójkąta BPA i do trójkąta PCB .

Warto wiedzieć

Promień światła biegnący równolegle do osi optycznej soczewki skupiającej po przejściu przez tę soczewkę zmieniają kierunek i przechodzą przez punkt zwany ogniskiem soczewki. Odległość F między ogniskiem a środkiem soczewki jest nazywana ogniskową soczewki.

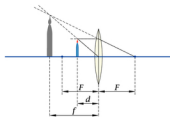


Jeśli ustawimy jakiś przedmiot w odległości d od soczewki, to w odległości f od niej pojawi się obraz tego przedmiotu.



Jeśli $d > F$, to po przeciwnej stronie soczewki powstaje tzw. obraz rzeczywisty i zachodzi równość:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$$



Jeśli $d < F$, to po tej samej stronie soczewki powstaje tzw. obraz pozorny i zachodzi równość:

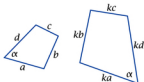
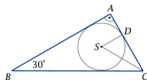
$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f}$$

- 16.** Przeczytaj informacje w ramce. Stosunek p wysokości obrazu przedmiotu do wysokości przedmiotu jest nazywany powiększeniem.

a) Wyjaśnij, dlaczego powiększenie można obliczać ze wzoru $p = \frac{f}{d}$.

b) Wykaż, że jeśli przedmiot znajduje się przed soczewką w odległości większej niż ogniskowa, to zachodzą równości $p = \frac{f-F}{F}$ oraz $p = \frac{F}{d-F}$.

17. Wykaż, że trójkąt DCS przedstawiony na rysunku obok jest podobny do trójkąta ABC . Znajdź skalę podobieństwa.



18. a) Wykaż, że czworokąty przedstawione na rysunku obok są podobne.
b) Rysunek ten ilustruje pewną cechę podobieństwa czworokątów. Sformułuj tę cechę.

MINISPRAWDZIAN

51. Trójkąt ABC ma boki o długościach 10, 8 i 12. Najmniejszy kąt tego trójkąta ma miarę α , a największy — ma miarę β . Który z poniższych trójkątów nie jest podobny do trójkąta ABC ?

A.



B.



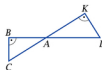
C.



D.



52. Na ilu rysunkach przedstawionych poniżej trójkąt AKL jest podobny do trójkąta ABC ?



A. na jednym

B. na dwóch

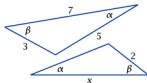
C. na trzech

D. na czterech

53. Poniżej podano pewne informacje o trójkątach ABC i KLM . W którym przypadku można stwierdzić, że te trójkąty są podobne?

- A. $|AB| = 8$, $|BC| = 6$, $|\angle ABC| = 40^\circ$ oraz $|KL| = 4$, $|LM| = 3$, $|\angle LKM| = 40^\circ$
 B. $|\angle ABC| = 80^\circ$, $|\angle ACB| = 40^\circ$ oraz $|\angle KLM| = 80^\circ$, $|\angle LKM| = 60^\circ$
 C. $|AB| = 8$, $|\angle ABC| = 40^\circ$ oraz $|KL| = 4$, $|\angle KLM| = 40^\circ$
 D. $|AB| = 8$, $|BC| = 6$ oraz $|KL| = 4$, $|KM| = 3$

54. Korzystając z danych przedstawionych na rysunku obok, oblicz, jaką długość ma odcinek x .



A. $3\frac{2}{3}$

B. 4

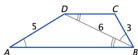
C. $4\frac{2}{3}$

D. 5

CECHY PODOBIEŃSTWA TRÓJKATÓW (CD.)

- 1 Cechy podobieństwa trójkątów pozwalają rozwiązywać różne problemy geometryczne (dotyczące nie tylko trójkątów).

PRZYKŁAD W trapezie $ABCD$ ramiona mają długości $|AD| = 5$ i $|BC| = 3$, przekątna BD ma długość 6 i $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CBD|$. Oblicz obwód tego trapezu.



$$|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CBD|$$

$$|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BDC|$$

Trójkąty ABD i BDC są podobne.

Zatem:

$$\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AD|}{|BC|} \quad \text{i} \quad \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AD|}{|BC|}$$

Stąd:

$$\frac{|AB|}{6} = \frac{5}{3} \quad \text{i} \quad \frac{6}{|DC|} = \frac{5}{3}$$

$$|AB| = 10 \quad \text{i} \quad |DC| = 3,6$$

$$\text{Obwód} = |AB| + |BC| + |CD| + |DA| = 10 + 3 + 3,6 + 5 = 21,6$$

Odp. Obwód trapezu wynosi 21,6.

... Sporządzamy rysunek pomocniczy.

... Równość podana w treści zadania.

... Kąty $\sphericalangle ABD$ i $\sphericalangle BDC$ są naprzemianległe.

... Boki trójkąta ABD — AB , BD , AD odpowiadają bokom odpowiednio: BD , DC i BC trójkąta BDC .

ZADANIE Trójkąt ABC jest równoramienny i $|AC| = |BC|$. Na boku BC wybrano punkt D tak, że ABD jest trójkątem równoramiennym. Oblicz obwód trójkąta ABC , jeśli wiadomo, że $|AB| = 6$ i $|BD| = 4$.

zadania 1–18 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Trójkąt ABC ma boki o długościach 3, 4 i 5. Oblicz długość odcinka AD .



2. W pewnym trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki o długościach 3 cm i 12 cm. Oblicz długość tej wysokości.

3. Ponad 2500 lat temu Tales z Miletu wzbudził podziw tym, że potrafił obliczyć odległość statku od brzegu. Jego pomiary mogły wyglądać tak: Tales stanął na brzegu w miejscu T leżącym najbliżej statku S i przeszedł wzdłuż brzegu 50 kroków — do punktu A . Tam wbił tyczkę i poszedł 5 kroków dalej — do punktu B . Stamtąd szedł w głąb łądy do takiego punktu C , z którego widział statek i wbił tyczkę w jednej linii.

Ustal, jak daleko od brzegu był statek, jeśli z punktu B do punktu C Tales przeszedł 14 kroków.



4. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.

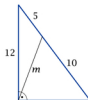
a)



b)



c)



5. Oblicz pole zacieniowanej figury.

a)



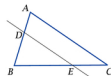
b)



c)



6. W trójkącie ABC dane są $|AC| = |BC| = a$ oraz $|AB| = b$. Prosta równoległa do ramienia AC przecina boki trójkąta w punktach D i E w taki sposób, że $|CE| = |BD|$. Wyznacz obwód trójkąta DBE .

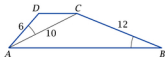


7. Podczas całkowitego zaćmienia Słońca Księżyc niemal całkowicie zasłania tarczę słoneczną. Korzystając z poniższych danych, oblicz średnicę Słońca.



Średnica Księżyca – 3,5 tys. km
Odległość Księżyca od Ziemi – 384 tys. km
Odległość Ziemi od Słońca – 150 mln km

8. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD dane są $|AD| = 6$, $|BC| = 12$ i $|AC| = 10$ (zob. rysunek). Wiadomo też, że $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CAD|$. Oblicz $|AB|$.



Warto wiedzieć

Prototypem aparatu fotograficznego jest szczelne pudełko z małym otworkiem w jednej ze ścian. Światło wpadające przez ten otwór rzuca na przeciwną ścianę (ekran) odwrócony obraz przedmiotu stojącego przed otworem.



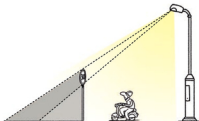
Takie urządzenie nazwano *camera obscura* (czyt. kamera obskura), czyli „ciemna komnata”, i rzeczywiście niekiedy miało ono rozmiary pokoju.



9. Przeczytaj informacje w ramce. Załóżmy, że odległość między otworem a ekranem w kamerze obskurze wynosi 30 cm.

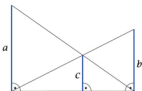
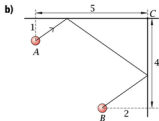
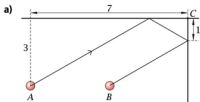
- Ustal, w jakiej odległości od budynku o wysokości 15 m należy umieścić to urządzenie, aby obraz budynku na ekranie miał 10 cm wysokości.
- Oblicz wysokość pomnika, którego obraz uzyskany za pomocą camery obscury z odległości 20 m ma wysokość 12 cm.

10. Jeśli osoba stanie w odległości 4 m od okna w mieszkaniu pewnego budynku, zobaczy przedstawiony na rysunku fragment budynku naprzeciwko. Przyjmij, że jedna kondygnacja ma 3 m wysokości i oblicz, jaka jest odległość między budynkami.



11. Znak drogowy stoi niedaleko od świecącej latarni. Okrągła tarcza znaku o średnicy 80 cm rzuca cień o długości 180 cm, a widoczna część słupka, na którym zamocowano znak, ma długość 2 m i rzuca cień o długości 250 cm. Oblicz, na jakiej wysokości znajduje się żarówka lampy.

12. Uderzona bila potoczyła się z punktu A i po odbiciu od dwóch band zatrzymała się w punkcie B . Ustal, w jakich odległościach od narożnika C bila odbiła się od band.



13. Na rysunku obok litery oznaczają długości zaznaczonych odcinków. Wykaż, że zachodzi równość:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

Uwaga. Liczba $2c$ jest nazywana średnią harmoniczną liczb a i b .

14. Podstawy trapezu mają długości a oraz b ($a > b$). Udowodnij, że odcinek łączący środki przekątnych tego trapezu ma długość $\frac{a-b}{2}$.

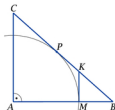
15. Na rysunku przedstawiono pięciokąt foremny. Uzasadnij, że zaznaczone trójkąty są podobne.



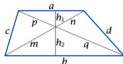
16. Przedstawiony na rysunku trójkąt ABC jest równoboczny. Punkt D dzieli wysokość tego trójkąta w stosunku $1:3$. Wyznacz stosunek, w jakim punkt E dzieli bok BC .

17. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny o bokach mających długości 10, 13 i 13.

18. Trójkąt ABC jest prostokątny. Okrąg o środku A , którego fragment widać na rysunku, jest styczny do przeciwprostokątnej BC w punkcie P i przecina bok AB w punkcie M . Styczna do tego okręgu w punkcie M dzieli przeciwprostokątną BC na odcinki o długościach $|BK| = 2$ i $|KC| = 4$. Oblicz długości odcinków BP i PC .

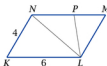


MINISPRAWDZIAN



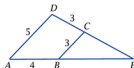
52. Czworokąt $ABCD$ (zob. rysunek obok) jest trapezem. Obwód trójkąta AED jest równy:

- A. 19 B. 22,5 C. 25 D. 25,5



51. O czworokącie przedstawionym na rysunku obok wiadomo, że $a \parallel b$ i $c \neq d$. Który z podanych ułamków nie jest równy trzem pozostałym?

- A. $\frac{m}{n}$ B. $\frac{q}{n}$ C. $\frac{b}{a}$ D. $\frac{h_2}{h_1}$



53. Z wierzchołka L równoległoboku $KLMN$ poprowadzono dwa odcinki: LN i LP tak, że trójkąt KLN jest podobny do trójkąta LMP (zob. rysunek obok). Stosunek $|PM| : |PN|$ jest równy:

- A. 1:2 B. 1:3 C. 2:3 D. 4:5

POŁA FIGUR PODOBNYCH

ĆWICZENIE A Prostokąt P_1 ma wymiary $2 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$. Ustal wymiary prostokąta P_2 podobnego do prostokąta P_1 w skali 3. Oblicz pola obu prostokątów. Ile razy pole prostokąta P_2 jest większe niż pole prostokąta P_1 ?

Przyjrzyj się rysunkom. Na każdym z nich większy prostokąt jest podobny do prostokąta, który zacieniowano.



Skala podobieństwa: $k = 2$. Pole większego prostokąta jest 4 razy większe od pola mniejszego prostokąta.



Skala podobieństwa: $k = 3$. Pole większego prostokąta jest 9 razy większe od pola mniejszego prostokąta.

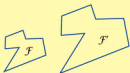


Skala podobieństwa: $k = 4$. Pole większego prostokąta jest 16 razy większe od pola mniejszego prostokąta.

Załóżmy, że prostokąt o bokach a' i b' jest podobny w skali k do prostokąta o bokach a i b . Stosunek pól tych prostokątów jest równy:

$$\frac{a' \cdot b'}{a \cdot b} = \frac{ka \cdot kb}{a \cdot b} = \frac{k^2 \cdot a \cdot b}{a \cdot b} = k^2$$

Pokazaliśmy, że stosunek pól prostokątów podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa. Taka własność jest prawdziwa także dla dowolnych figur podobnych.



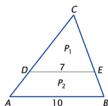
Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

$$\frac{\text{Pole figury } F'}{\text{Pole figury } F} = k^2, \text{ gdzie } k \text{ to skala podobieństwa figury } F' \text{ do figury } F.$$

ĆWICZENIE B a) Figura F_1 jest podobna do figury F_2 w skali $\frac{5}{4}$. Oblicz pole figury F_2 , jeśli pole figury F_1 jest równe 72 cm^2 .

b) Figura F_1 jest podobna do figury F_2 i ma pole 5 razy większe od pola figury F_2 . Znajdź skalę podobieństwa figury F_1 do F_2 .

PRZYKŁAD Trójkąt ABC przecięto prostą równoległą do boku AB w taki sposób, że otrzymano mniejszy trójkąt i trapez o podstawach długości 7 i 10. Trójkąt ABC ma pole równe 100. Oblicz pole otrzymanego trapezu.



$$P = P_1 + P_2 = 100$$

P_1 – pole trójkąta DEC

P_2 – pole trapezu $ABED$

Trójkąt DEC jest podobny do trójkąta ABC (cecha kk).

$$k = \frac{|DE|}{|AB|} = \frac{7}{10}$$

$$P_1 = k^2 \cdot P = \left(\frac{7}{10}\right)^2 \cdot 100 = 49$$

$$P_2 = P - P_1 = 100 - 49 = 51$$

Odp. Pole trapezu jest równe 51.

Z równoległości odcinków AB i DE wynika, że $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEC|$ oraz $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDC|$, czyli trójkąty ABC i DEC są podobne.

Obliczamy skalę podobieństwa trójkąta DEC do trójkąta ABC .

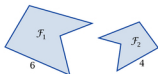
ZADANIE Trójkąt ABC o polu 20 przecięto prostą równoległą do boku AB . Oblicz pola otrzymanych części, jeśli ta prosta podzieliła jeden z boków tego trójkąta na odcinki o długościach 2 i 5. Rozpatrz dwie możliwości.

zadania 1–11 ►

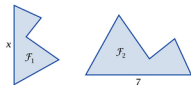
ZESTAW ZADAŃ

1. Figury $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ przedstawione na rysunku są podobne.

a) Pole figury $\mathcal{F}_1$ wynosi 21. Oblicz pole figury $\mathcal{F}_2$.



b) Pole figury $\mathcal{F}_1$ wynosi 15, a pole figury $\mathcal{F}_2$ jest równe 20. Oblicz długość boku x .

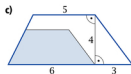
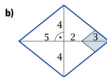


2. Zdjęcie o wymiarach $12\text{ cm} \times 15\text{ cm}$ przedstawia działkę budowlaną, która na tym zdjęciu zajmuje powierzchnię 54 cm^2 . Po powiększeniu zdjęcia działka zajęła powierzchnię 96 cm^2 . Znajdź wymiary powiększonego zdjęcia.

3. Dwie figury przedstawione na rysunkach są podobne. Znajdź skalę podobieństwa mniejszej z tych figur do większej.



4. W każdym z wielokątów (w trójkącie, w rombie i w trapezie) zaznaczono wielokąt do niego podobny. Oblicz pole zacieniowanej figury.



5. a) W trójkącie o polu P przez środki dwóch boków poprowadzono prostą. Oblicz pola figur, na jakie ta prosta podzieliła trójkąt.

b) Prosta równoległa do jednego z boków trójkąta podzieliła trójkąt na dwie części o równych polach. Znajdź stosunek długości odcinków, na które prosta ta podzieliła każdy z dwóch boków trójkąta.

6. W sześciokącie foremnym o polu 16 zaznaczono mniejszy sześciokąt foremny (jeśli wierzchołek mniejszego sześciokąta leży na boku większego sześciokąta, to dzieli ten bok na równe części). Oblicz pole mniejszego sześciokąta.

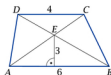
a)



b)



c)



7. a) Czworokąt $ABCD$ (zob. rysunek obok) jest trapezem. Oblicz pola trójkątów ABE , DEC , AED i BCE .

b) W trapezie $ABCD$ podstawy mają długości: $|AB| = a$ i $|CD| = b$. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie E . Oblicz stosunek pól trójkątów ABE i DEC oraz trójkątów AED i BCE .

Warto wiedzieć!

Twierdzenie Pitagorasa można sformułować w następujący sposób:

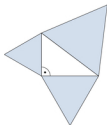
W trójkącie prostokątnym suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych jest równa polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej.

Twierdzenie to można uogólnić, zastępując kwadraty odpowiednimi figurami podobnymi:

Jeśli na bokach trójkąta prostokątnego zbudujemy trzy figury podobne, to suma pól figur zbudowanych na przyprostokątnych jest równa polu figury zbudowanej na przeciwprostokątnej.

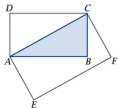


$$P_{F_1} + P_{F_2} = P_{F_3}$$



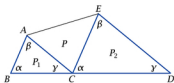
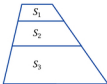
8. a) Uzasadnij uogólnione twierdzenie Pitagorasa podane w ramce powyżej.

b) Na bokach trójkąta prostokątnego zbudowano trójkąty równoboczne w sposób przedstawiony na rysunku. Pole największego z tych trójkątów jest równe 60, a najmniejszego 15. Znajdź długość boku trzeciego z tych trójkątów.



9. Przekątna AC prostokąta $ABCD$ jest bokiem podobnego do niego prostokąta $AEFC$. Pole części wspólnej tych prostokątów stanowi 40% pola prostokąta $AEFC$. Znajdź stosunek długości boków prostokąta $ABCD$.

10. Trapez pokazany na rysunku obok podzielono dwiema liniami równoległymi do podstaw na trzy figury, z których każda jest podobna do dwóch pozostałych. Dane są pola S_1 i S_3 . Wyznacz pole S_2 .



11. Punkty B , C i D przedstawione na rysunku obok są współliniowe. Wykaż, że pole P trójkąta ACE jest równe średniej geometrycznej pól P_1 i P_2 trójkątów ABC i ECD , tzn. $P = \sqrt{P_1 \cdot P_2}$.

MINISPRAWDZIAN

S1. Wielkość (wysokość) czcionki mierzona jest w punktach. Słowo „figura” poniżej napisano czcionkami o wielkości odpowiednio 12 punktów i 16 punktów.

figura figura

Ile razy więcej tuszu zużyto na wydrukowanie większego napisu niż na wydrukowanie mniejszego?

- A. $\frac{4}{3}$ razy B. $\frac{16}{9}$ razy C. 2 razy D. 3 razy

S2. Wskaż długości przekątnych rombu o polu 108 cm^2 , który jest podobny do rombu o przekątnych 4 cm i 6 cm .

- A. 18 cm i 27 cm B. 12 cm i 18 cm C. 36 cm i 54 cm D. 12 cm i 9 cm

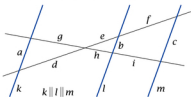
S3. Na planie w skali $1:100$ pewien obszar zajmuje powierzchnię 50 cm^2 . Ustal, jaką powierzchnię zajmuje ten obszar na planie w skali $1:500$.

- A. 2 cm^2 B. 250 cm^2 C. 10 cm^2 D. 1250 cm^2

S4. Figura $\mathcal{F}_1$ o polu 7 jest podobna do figury $\mathcal{F}_2$ o polu 63. Wskaż obwód figury $\mathcal{F}_1$, wiedząc, że figura $\mathcal{F}_2$ ma obwód 30.

- A. 9 B. 10 C. 30 D. 270

1. Popatrz na rysunek poniżej. Znajdź brakujące wyrazy proporcji.



a) $\frac{b}{c} = \frac{e}{?} = \frac{h}{?}$

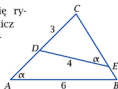
c) $\frac{h}{b} = \frac{?}{c} = \frac{?}{a}$

b) $\frac{a}{c} = \frac{?}{e+f} = \frac{g}{?}$

d) $\frac{i}{f} = \frac{?}{d-e} = \frac{i+h}{?}$

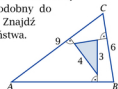
2. Prostokąt o bokach mających długości 1 i 3 rozcięto na dwa prostokąty podobne. Ustal, w jakiej skali jeden z tych prostokątów jest podobny do drugiego.

3. Przyjrzyj się rysunkowi. Oblicz długość odcinka BC .



4. Jeden z kątów ostrych pewnego trójkąta prostokątnego ma miarę α . Wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego tego trójkąta dzieli go na dwa trójkąty do niego podobne. Dla każdego z tych trójkątów ustal, w jakiej skali jest on podobny do dużego trójkąta.

5. Uzasadnij, że zacięniowany trójkąt jest podobny do trójkąta ABC . Znajdź skalę podobieństwa.

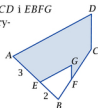


6. W trapezie $ABCD$, który nie jest równoległobokiem, boki AB i CD są równoległe. Przekątna BD dzieli ten trapez na dwa trójkąty podobne. Wiadomo, że $|AB| = 10$, $|BD| = 8$ i $|AD| = 5$. Oblicz obwód trapezu.

7. Darek wykonał na kopiarce kopię zdjęcia, a następnie postanowił powiększyć je tak, aby każdy jego bok był o 20% dłuższy. Ile razy więcej toneru potrzeba na wykonanie powiększenia niż na wykonanie pierwszej kopii?

8. Czworokąty $ABCD$ i $EBFG$

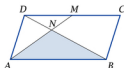
przedstawione na rysunku obok są podobne. Oblicz, ile procent pola czworokąta $ABCD$ zacięniowano.



9. Pewne dwa wielokąty są podobne. Wiadomo, że jeden z nich ma pole 2 razy większe, a obwód o 10 większy od drugiego wielokąta. Znajdź obwody tych wielokątów.

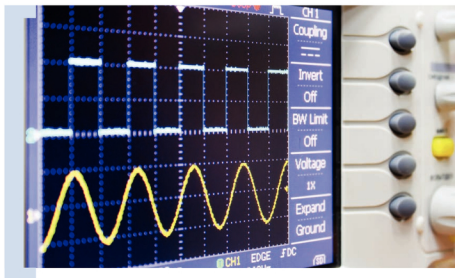
10. Figura $\mathcal{F}_2$ jest podobna do figury $\mathcal{F}_1$ w skali k . Figura $\mathcal{F}_3$ także jest podobna do figury $\mathcal{F}_1$, a jej obwód jest równy sumie obwodów figur $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$. Ile razy pole figury $\mathcal{F}_3$ jest większe od sumy pól figur $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$?

11. Punkt M jest środkiem boku CD równoległoboku $ABCD$. Ustal, jaką część pola równoległoboku stanowi pole trójkąta ABN .



Funkcje trygonometryczne

Przebieg wielu zjawisk, czasem z zupełnie odmiennych dziedzin wiedzy, można opisać wykresem, który ma kształt sinusoidy. Tak jest w wypadku zjawisk, które mają związek z ruchem obrotowym. Za pomocą funkcji trygonometrycznych można więc na przykład opisać zmiany długości dnia w kolejnych dniach roku czy napięcia prądu przemiennego w czasie.



- Funkcje trygonometryczne kąta ostrego
- Kąty o miarach dodatnich i ujemnych
- Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta
- Podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi
- Wykres funkcji $y = \sin \alpha$
- Wykres funkcji $y = \cos \alpha$
- Wykres funkcji $y = \operatorname{tg} \alpha$
- Wzory redukcyjne
- Miara łukowa kąta
- Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej
- Funkcje o wzorach $y = a \sin x$, $y = \sin ax$...
- Równania i nierówności trygonometryczne
- Sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów
- Powtórzenie

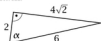
FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE KĄTA OSTREGO

- I W tym rozdziale powtarzamy wiadomości o funkcjach trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym. Poniżej przypominamy, jak określamy funkcje trygonometryczne kąta ostrego.



$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

ĆWICZENIE A Oblicz sinus, cosinus i tangens kątów α i β zaznaczonych na poniższych rysunkach.



Jeśli znamy miarę kąta, to wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta możemy obliczyć za pomocą kalkulatora lub odczytać z tablic trygonometrycznych (zob. tabela na końcu książki). I na odwrót — jeśli znamy wartość dowolnej funkcji trygonometrycznej kąta ostrego, możemy wyznaczyć jego miarę.

ĆWICZENIE B a) Korzystając z kalkulatora lub z tabeli na końcu książki, podaj (w zaokrągleniu do części setnych) wartości: $\sin 3^\circ$, $\operatorname{tg} 27^\circ$, $\cos 65^\circ$.

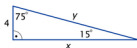
b) Wyznacz miary kątów ostrych α , β i γ , jeśli $\sin \alpha = 0,6$, $\cos \beta = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg} \gamma = 10$. Wyniki podaj w zaokrągleniu do pełnych stopni.

Dla większości kątów wartości funkcji trygonometrycznych, które można odczytać z tablic trygonometrycznych lub obliczyć za pomocą kalkulatora, podane są w przybliżeniu. W tabelce obok podano dokładne wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30° , 45° i 60° .

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ĆWICZENIE C Korzystając z tego, że trójkąt o kątach 90° , 60° , 30° to połowa trójkąta równobocznego, a trójkąt o kątach 90° , 45° , 45° to połowa kwadratu, uzasadnij wartości funkcji trygonometrycznych podane w tabeli.

PRZYKŁAD 1 Krótsza z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ma długość 4, a jeden z kątów ma 75° . Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.



$$180^\circ - 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$$

Najkrótszy bok trójkąta leży naprzeciw najmniejszego kąta.

$$\frac{x}{4} = \operatorname{tg} 75^\circ$$

$$\frac{4}{y} = \sin 15^\circ$$

$$x = 4 \cdot \operatorname{tg} 75^\circ$$

$$y = \frac{4}{\sin 15^\circ}$$

$$x \approx 4 \cdot 3,7321 \approx 14,9$$

$$y \approx \frac{4}{0,2588} \approx 15,5$$

Wartości $\operatorname{tg} 75^\circ$ i $\sin 15^\circ$ odczytujemy z tabeli lub obliczamy za pomocą kalkulatora.

Odp. Pozostałe boki trójkąta mają długości około 14,9 i około 15,5.

ZADANIE Przeciwnprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 8, a jeden z kątów ma miarę 22° . Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.

PRZYKŁAD 2 W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 4, a przeciwprostokątna ma długość 6. Oblicz miary kątów ostrych tego trójkąta.



$$\cos \alpha = \frac{4}{6} \approx 0,6667$$

$$\alpha \approx 48^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha \approx 42^\circ$$

Obliczamy wartość odpowiedniej funkcji trygonometrycznej.

Miarę kąta α odczytujemy z tabeli lub obliczamy za pomocą kalkulatora.

Odp. Kąty ostre trójkąta mają miary około 48° i około 42° .

ZADANIE W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 7 i 9. Oblicz miary kątów ostrych tego trójkąta.

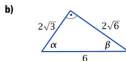
zadania 1–7 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz wartości podanych funkcji trygonometrycznych kątów α i β .

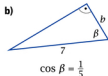
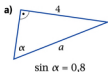


$$\begin{aligned} \sin \alpha \\ \cos \beta \\ \operatorname{tg} \beta \end{aligned}$$

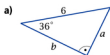


$$\begin{aligned} \sin \beta \\ \operatorname{tg} \alpha \\ \cos \alpha \end{aligned}$$

2. Oblicz długość boku oznaczonego literą.



3. Oblicz długości boków oznaczonych literami.



4. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę α , a najkrótszy bok ma długość a . Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta, jeśli:

a) $\alpha = 30^\circ$, $a = 15$

b) $\alpha = 60^\circ$, $a = 5\sqrt{2}$

c) $\alpha = 45^\circ$, $a = 10$

5. Oblicz miarę mniejszego z kątów ostrych trójkąta prostokątnego, w którym:

a) przyprostokątne mają długości 9 i 10,

b) boki mają długości $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$.

6. a) Uporządkuj liczby $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$ w kolejności od najmniejszej do największej, wiedząc, że $0^\circ < \alpha < 1^\circ$.

b) Uporządkuj kąty ostre α , β i γ w kolejności od kąta o najmniejszej mierze do kąta o mierze największej, wiedząc, że $\sin \alpha = \cos \beta = \operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{10}$.

7. a) Oblicz pole trójkąta równoramiennego, w którym podstawa ma długość a , natomiast kąt przy podstawie ma miarę α .

b) Oblicz obwód rombu o kącie ostrym β i krótszej przekątnej o długości d .

c) Oblicz długość cięciwy okręgu o promieniu r , na której oparty jest kąt środkowy o mierze γ .

MINISPRAWDZIAN

51. Obwód trójkąta przedstawionego na rysunku, po zaokrągleniu do jednej, wynosi:

A. 52

B. 48

C. 47

D. 39



52. Trójkąt ma boki o długościach 5 m, 12 m i 13 m. Miara większego z kątów ostrych tego trójkąta, po zaokrągleniu do pełnych stopni, jest równa:

A. 43°

B. 47°

C. 67°

D. 23°

KĄTY O MIARACH DODATNICH I UJEMNYCH

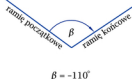
- 1 Fotografia przedstawia tarczę starego budzika. Żółta wskazówka, która służy do ustawiania godziny budzenia, pokazuje godzinę 7^{00} . Wyobraź sobie, że tę wskazówkę obrócono o 30° . Na którą godzinę nastawiony byłby wówczas budzik? Odpowiedź zależy od tego, w którą stronę obracamy wskazówkę.



Gdybyśmy obrócili tę wskazówkę zgodnie z ruchem wskazówek zegara, budzik byłby nastawiony na godzinę 8^{00} , a gdybyśmy obrócili ją w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, nastawiony byłby na godzinę 6^{00} .

Półprosta obracająca się wokół swojego początku zakreśla pewien kąt. Przyjmujemy, że miara tego kąta jest dodatnia, jeśli półprosta obraca się zgodnie z ruchem wskazówek zegara, a zakreślony kąt ma miarę ujemną.

Na każdym z rysunków obok przedstawiono kąt utworzony przez obracającą się półprostą. Strzałka na rysunku wskazuje kierunek obrotu półprostej i pozwala określić, które ramie jest początkowe, a które końcowe.



ĆWICZENIE A Pod rysunkami podano miary kątów zaznaczonych czarnymi strzałkami. Podaj miary pozostałych kątów zaznaczonych strzałkami na tych rysunkach.





Kolejną fotografię wykonano po przestawieniu żółtej wskazówki z godziny 7^{00} na godzinę 5^{00} . Zastanów się, w jaki sposób obracano tę wskazówkę. Można było to zrobić na wiele różnych sposobów. Na przykład wykonać wskazówką pełen obrót o 360° i jeszcze obrócić ją o 60° .

Aby opisać sytuację, w której półprosta wykonuje więcej niż jeden pełny obrót wokół swojego początku, przyjmujemy, że miara kąta może być większa niż 360° lub mniejsza niż -360° .



ĆWICZENIE B Na każdym z poniższych rysunków kąt ostry, który tworzą dwie półproste, ma miarę 32° . Podaj miary zaznaczonych kątów.



zadania 1-3 ►

II Gdy będziemy mówić o kącie umieszczonym w układzie współrzędnych, to zawsze będziemy mieli na myśli kąt, którego wierzchołek leży w początku układu współrzędnych, a ramię początkowe na nieujemnej części osi x .



kąt dodatni



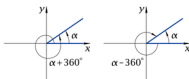
kąt ujemny

Jeśli ramię końcowe kąta umieszczonego w układzie współrzędnych leży na osi y lub na osi x , to jego miara jest wielokrotnością 90° .



ĆWICZENIE C Podaj dwa przykłady miar kątów dodatnich i dwa przykłady miar kątów ujemnych umieszczonych w układzie współrzędnych tak, że mają wspólne ramię końcowe, które leży:

- a) na dodatniej części osi y ,
- b) w I ćwiartce układu,
- c) w III ćwiartce układu,
- d) w IV ćwiartce układu.



Zauważ, że ramiona końcowe kątów: α , $\alpha + 360^\circ$, $\alpha - 360^\circ$, $\alpha + 2 \cdot 360^\circ$, $\alpha - 2 \cdot 360^\circ$, $\alpha + 3 \cdot 360^\circ$ itd. się pokrywają. Innymi słowy dla dowolnej liczby całkowitej k ramię końcowe kąta α pokrywa się z ramieniem końcowym kąta $\alpha + k \cdot 360^\circ$.

zadania 4–9 ►

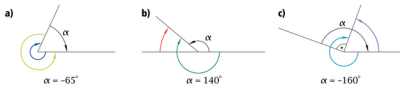
ZESTAW ZADAŃ

1. Pokrętło starego zamka szyfrowego jest ustawione na cyfrze 0 (zob. rysunek).

- a) Aby otworzyć zamek, pokrętło należy obrócić kolejno o kąty 36° , -108° i -396° . Ustal, z jakich trzech cyfr składa się szyfr tego zamka.
- b) O jakie kąty należy kolejno obracać pokrętło, aby otworzyć zamek, który jest zamknięty na szyfr 375?



2. Miarę kąta α podano pod rysunkiem. Podaj miary pozostałych kątów zaznaczonych strzałkami.



3. Dwie proste przedstawione na rysunku przecinają się pod kątem 37° . Podaj miarę zaznaczonego kąta.



◀ II 4. Naszkicuj w układzie współrzędnych kąt o podanej mierze.

- a) 45° b) 135° c) -135° d) -315° e) 405°

5. Kąt α jest umieszczony w układzie współrzędnych. Ustal, w której ćwiartce leży jego ramię końcowe, jeśli:

- a) $\alpha = 200^\circ$ c) $\alpha = -100^\circ$ e) $\alpha = 300^\circ$ g) $\alpha = -271^\circ$
b) $\alpha = -36^\circ$ d) $\alpha = -240^\circ$ f) $\alpha = -320^\circ$ h) $\alpha = 353^\circ$

6. Kąty α i β są umieszczone w układzie współrzędnych. Ustal, w których ćwiartkach leżą ich ramiona końcowe, jeśli:

- a) $\alpha = 370^\circ$, $\beta = -370^\circ$ d) $\alpha = 545^\circ$, $\beta = -545^\circ$
b) $\alpha = 480^\circ$, $\beta = -480^\circ$ e) $\alpha = 1200^\circ$, $\beta = -1200^\circ$
c) $\alpha = 800^\circ$, $\beta = -800^\circ$ f) $\alpha = 4580^\circ$, $\beta = -4580^\circ$

7. Kąt o podanej mierze jest umieszczony w układzie współrzędnych. Podaj współrzędne trzech takich punktów, które leżą na ramieniu końcowym tego kąta.

- a) 270° b) -180° c) -270° d) -720° e) 4500°

8. Zapisz podany kąt w postaci $\alpha + k \cdot 360^\circ$, gdzie $\alpha \in (-180^\circ; 180^\circ)$ i $k \in \mathbb{Z}$.

- a) 730° b) 700° c) 1820° d) -400° e) -320° f) -800°

9. Podaj przykłady kilku kątów o ramieniu końcowym leżącym w II ćwiartce układu współrzędnych, których miary są:

- a) mniejsze od -1000° , b) większe od 1000° .

MINISPRAWDZIAN

51. Zegar wskazywał godzinę 4^{05} . Wskazówkę minutową obrócono o jeden z podanych kątów tak, że obecnie zegar wskazuje 2^{55} . O jaki kąt obrócono tę wskazówkę?

- A. 300° B. 330° C. 390° D. 420°

52. Kąt o mierze -700° umieszczono w układzie współrzędnych. Ramię końcowe tego kąta leży:

- A. w I ćwiartce układu współrzędnych C. w III ćwiartce układu współrzędnych
B. w II ćwiartce układu współrzędnych D. w IV ćwiartce układu współrzędnych

53. Który z podanych kątów można zapisać w postaci $-15^\circ + k \cdot 360^\circ$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$?

- A. -555° B. 705° C. -345° D. 735°

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE DOWOLNEGO KĄTA

ĆWICZENIE A Zaznacz w układzie współrzędnych punkty $A = (4, 0)$ i $B = (4, 3)$. Punkty te oraz punkt $O = (0, 0)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta AOB w tym trójkącie.

Funkcje trygonometryczne można określić nie tylko dla kątów ostrych trójkąta prostokątnego. Można je też zdefiniować dla dowolnego kąta.

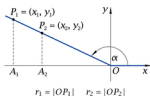
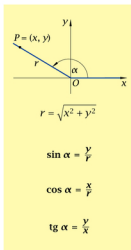
Niech α będzie dowolnym kątem umieszczonym w układzie współrzędnych (wierzchołek kąta α leży w punkcie $(0, 0)$, a ramię początkowe na nieujemnej części osi x).

Wybieramy na ramieniu końcowym kąta α punkt P różny od wierzchołka kąta. (Przypomnijmy, że pierwszą współrzędną punktu w układzie współrzędnych nazywamy odciętą, a drugą — rzędną).

Sinusem kąta α nazywamy stosunek rzędnej punktu P do odległości r tego punktu od początku układu współrzędnych.

Cosinusem kąta α nazywamy stosunek odciętej punktu P do odległości r tego punktu od początku układu współrzędnych.

Jeśli odcięta punktu P jest różna od zera, to **tangensem** kąta α nazywamy stosunek rzędnej punktu P do odciętej tego punktu.

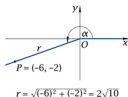


Zauważ, że jeśli punkty $P_1 = (x_1, y_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2)$ leżą na ramieniu końcowym kąta α , to z podobieństwa trójkątów OP_1A_1 i OP_2A_2 wynikają równości $\frac{-x_1}{-x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{r_1}{r_2}$, a stąd otrzymujemy:

$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2} \quad \frac{y_1}{r_1} = \frac{y_2}{r_2} \quad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

Zatem wartości funkcji trygonometrycznych kąta α nie zależą od tego, który z punktów na ramieniu końcowym kąta wybierzemy.

Uwaga. Łatwo można uzasadnić, że także wtedy, gdy ramię końcowe kąta leży na jednej z osi układu współrzędnych, wartości funkcji trygonometrycznych nie zależą od tego, jaki punkt na ramieniu końcowym kąta wybieramy.



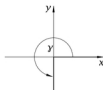
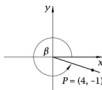
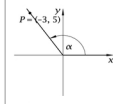
Na rysunku zaznaczono kąt α , którego ramię końcowe przechodzi przez punkt $(-6, -2)$. Wynika stąd, że:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{10}} = \frac{-\sqrt{10}}{10}$$

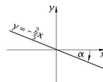
$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{-6}{2\sqrt{10}} = \frac{-3\sqrt{10}}{10}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

ĆWICZENIE B Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α , β i γ .



PRZYKŁAD Naskikuj w układzie współrzędnych wykres funkcji $y = -\frac{2}{3}x$. Zaznacz dowolny kąt, którego ramię końcowe jest częścią wykresu leżącą w IV ćwiartce układu współrzędnych. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.



Jeśli $x = 5$, to $y = -\frac{2}{3} \cdot 5 = -\frac{10}{3}$.

$$P = (5, -\frac{10}{3})$$

$$|OP| = \sqrt{5^2 + (-\frac{10}{3})^2} = \sqrt{\frac{250}{3}}$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{-\frac{10}{3}}{\sqrt{\frac{250}{3}}} = \frac{-2\sqrt{29}}{29}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{5}{\sqrt{\frac{250}{3}}} = \frac{5\sqrt{29}}{29}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{10}{3}}{5} = -\frac{2}{3}$$

Wybieramy punkt na ramieniu końcowym kąta α , np. o odciętej 5.

ZADANIE Ramię końcowe kąta α jest tą częścią prostej o równaniu $y = 0,7x$, która leży w III ćwiartce układu współrzędnych. Oblicz $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

zadania 1-4

III **ĆWICZENIE C** a) Oblicz $\sin 90^\circ$, $\cos 90^\circ$, $\sin 180^\circ$, $\cos 180^\circ$, $\operatorname{tg} 180^\circ$.

b) Tangens kąta 90° nie jest określony. Podaj przykłady innych kątów, których tangens nie jest określony.

c) Ramię końcowe pewnego kąta α leży w III ćwiartce układu współrzędnych. Ustal, które z liczb: $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ są ujemne.

Z definicji funkcji trygonometrycznych wynika, że $\operatorname{tg} \alpha$ może być dowolną liczbą, a $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ to liczby z przedziału $\langle -1; 1 \rangle$, gdyż dla dowolnego punktu $P = (x, y)$ zachodzą nierówności $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ i $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.

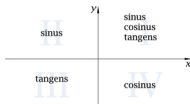
Informacje o wartościach funkcji trygonometrycznych kątów od 0° do 360° są zebrane w poniższej tabeli.

ćwiartka		I		II		III		IV	
α	0°	$(0^\circ; 90^\circ)$	90°	$(90^\circ; 180^\circ)$	180°	$(180^\circ; 270^\circ)$	270°	$(270^\circ; 360^\circ)$	360°
$\sin \alpha$	0	+	1	+	0	-	-1	-	0
$\cos \alpha$	1	+	0	-	-1	-	0	+	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	+	∞	-	0	+	∞	-	0

Znak + oznacza wartość dodatnią, znak - oznacza wartość ujemną, ∞ oznacza, że funkcja nie jest określona.

Z tabeli możemy odczytać na przykład, że jeśli ramię końcowe kąta leży w I ćwiartce układu współrzędnych, to wartości wszystkich funkcji trygonometrycznych tego kąta są dodatnie. Gdy natomiast ramię końcowe leży w II ćwiartce układu współrzędnych, to dodatnią wartość ma tylko sinus kąta. Reguły dotyczące znaków funkcji trygonometrycznych pomaga zapamiętać poniższy wierszyk:

*W pierwszej wszystkie są dodatnie,
w drugiej — tylko sinus,
w trzeciej — tylko tangens,
a w czwartej — cosinus.*

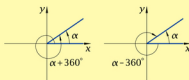


Wiemy już, że dla dowolnej liczby całkowitej k ramię końcowe kąta α pokrywa się z ramieniem końcowym kąta $\alpha + k \cdot 360^\circ$. Wobec tego zachodzą poniższe równości.

$$\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \operatorname{tg} \alpha$$

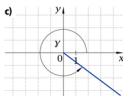
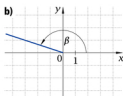
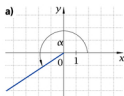


Uwaga. W jednym z następnych tematów pokażemy, że zachodzi też równość $\operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 180^\circ) = \operatorname{tg} \alpha$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

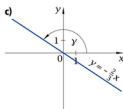
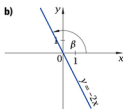
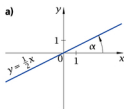
zadania 5–16 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Znajdź punkt o obu współrzędnych całkowitych leżący na ramieniu końcowym zaznaczonego kąta. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

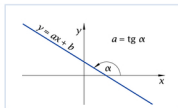


2. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych zaznaczonego kąta.



3. Na rysunku obok zaznaczono kąt nachylenia wykresu funkcji $y = ax + b$ do osi x . Wykaż, że tangens tego kąta jest równy współczynnikowi kierunkowemu a .

4. Naszkicuj odpowiednie kąty w układzie współrzędnych i oblicz: $\cos 135^\circ$, $\sin 225^\circ$, $\operatorname{tg}(-135^\circ)$, $\cos(-315^\circ)$.



5. Ustal, jaką najmniejszą i jaką największą wartość może mieć podane wyrażenie.

a) $2 \sin \alpha + 5$ b) $4 - \frac{1}{2} \cos \alpha$ c) $\sin^2 \alpha - 1$ d) $3 |\cos \alpha| - 0,6$

6. a) Dla których kątów spośród wymienionych poniżej sinus jest liczbą dodatnią?

88° -74° 174° -292° -800° 1200°

- b) Dla których kątów spośród wymienionych poniżej cosinus jest liczbą ujemną?

1° -98° 282° -165° -1000° 1500°

- c) Dla których kątów spośród wymienionych poniżej tangens jest liczbą dodatnią?

13° -87° 300° -284° -700° 1000°

7. Ustal, w której ćwiartce układu współrzędnych może leżeć ramię końcowe kąta α , jeżeli:

- a)** $\cos \alpha = -0,17$ **c)** $\operatorname{tg} \alpha = 2,15$ **e)** $\cos \alpha < 0$ i $\operatorname{tg} \alpha > 0$
b) $\sin \alpha = -0,327$ **d)** $\operatorname{tg} \alpha = -4\frac{1}{4}$ **f)** $\sin \alpha > 0$ i $\cos \alpha > 0$

8. Ustal, czy wartość podanego wyrażenia jest liczbą dodatnią, ujemną czy równą 0.

- a)** $\operatorname{tg} 200^\circ \cdot \cos(-100^\circ)$ **c)** $\operatorname{tg}(-420^\circ) \cdot \cos(-90^\circ) + \sin(-460^\circ)$
b) $\operatorname{tg} 232^\circ \cdot \sin(-540^\circ)$ **d)** $\cos 310^\circ \cdot \operatorname{tg}(-152^\circ) - \operatorname{tg}(-17^\circ)$

9. Oblicz.

- a)** $\sin 90^\circ$, $\cos 270^\circ$, $\operatorname{tg} 180^\circ$, $\sin(-180^\circ)$, $\cos 720^\circ$, $\operatorname{tg}(-900^\circ)$
b) $\cos(-180^\circ) + \operatorname{tg} 360^\circ$, $\sin 810^\circ - \cos(-90^\circ)$, $\operatorname{tg}(-540^\circ) \cdot \sin(-270^\circ)$
c) $\frac{\operatorname{tg}(-720^\circ) - \cos 90^\circ}{\sin 270^\circ}$, $\frac{\sin 180^\circ + \operatorname{tg}(-180^\circ)}{\cos(-540^\circ) + \sin(-450^\circ)}$, $\frac{\cos 0^\circ \cdot \sin(-90^\circ)}{\operatorname{tg} 0^\circ + \cos(-180^\circ)}$

10. Podaj przykłady trzech kątów spełniających podany warunek.

- a)** $\cos \alpha = 0$ **c)** $\cos \alpha = -1$ **e)** $\sin \alpha = 0$
b) $\sin \alpha = 1$ **d)** $\operatorname{tg} \alpha = 0$ **f)** $\operatorname{tg} \alpha = -1$

11. Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych, wyznacz wszystkie kąty, które spełniają warunek $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ oraz równość:

- a)** $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0$ **b)** $\sin \alpha = \cos \alpha$ **c)** $\operatorname{tg} \alpha = -1$

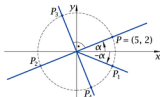
12. Naskicuj w układzie współrzędnych kąt α spełniający podane warunki.

- a)** $\sin \alpha = -0,8$ i $\cos \alpha > 0$ **b)** $\cos \alpha = 0,2$ i $\sin \alpha < 0$ **c)** $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ i $\sin \alpha < 0$

13. Przedstaw w układzie współrzędnych dwa różne kąty α i β (takie, których ramiona końcowe się nie pokrywają) spełniające podany warunek.

- a)** $\sin \alpha = \sin \beta = -\frac{1}{3}$ **b)** $\cos \alpha = \cos \beta = 0,4$ **c)** $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = 2$

14. Punkt $P = (5, 2)$ leży na ramieniu końcowym kąta α (zob. rysunek). Oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ oraz sinusy i cosinusy kątów, na których ramionach końcowych leżą punkty P_1 , P_2 , P_3 i P_4 .



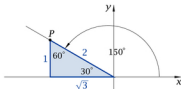
Warto wiedzieć!

Trójkąt o kątach 90° , 30° i 60° to połowa trójkąta równobocznego. Zatem jeśli krótsza przyprostokątna tego trójkąta ma długość 1, to pozostałe boki mają długości 2 i $\sqrt{3}$.



Korzystając z tego faktu, można obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych np. kąta 150° .

Umieszczamy kąt 150° w układzie współrzędnych (zob. rysunek poniżej). Ponieważ $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$, na rysunku możemy zaznaczyć trójkąt prostokątny o bokach mających długości 1, 2, $\sqrt{3}$.



Punkt P , który jest wierzchołkiem zaznaczonego trójkąta, ma współrzędne $(-\sqrt{3}, 1)$, więc:

$$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 150^\circ = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

15. Korzystając z metody opisanej w powyższej ramce, oblicz:

- a)** $\sin 120^\circ$ **b)** $\cos 210^\circ$ **c)** $\cos 240^\circ$ **d)** $\operatorname{tg} 300^\circ$ **e)** $\sin(-510^\circ)$

16. Oblicz wartość wyrażenia.

- a)** $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha$, gdy $\alpha = -30^\circ$
b) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} 4\alpha$, gdy $\alpha = 60^\circ$

MINISPRAWDZIAN

51. Ramię końcowe kąta α przechodzi przez punkt $(-3, -2)$. Która z podanych równości jest prawdziwa?

- A. $\sin \alpha = -\frac{2}{5}$ B. $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$ C. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$ D. $\sin \alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}}$

52. Dla którego z podanych kątów wartości wszystkich trzech funkcji trygonometrycznych są dodatnie?

- A. -300° B. -200° C. 300° D. -400°

53. Przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta o mierze 20° wynoszą: $\sin 20^\circ \approx 0,34$, $\cos 20^\circ \approx 0,94$ i $\operatorname{tg} 20^\circ \approx 0,36$. Która z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych kąta o mierze -20° jest błędna?

- A. $\sin(-20^\circ) \approx -0,34$ C. $\operatorname{tg}(-20^\circ) \approx -0,36$
B. $\cos(-20^\circ) \approx 0,94$ D. $\sin(-20^\circ) \approx 0,34$

PODSTAWOWE ZWIĄZKI MIĘDZY FUNKCJAMI TRYGONOMETRYCZNYMI

- 1 Obok zapisano dwie tożsamości trygonometryczne. Równości te zachodzą dla wszystkich kątów, dla których są określone odpowiednie funkcje trygonometryczne.

Pierwsza z równości, zwana jedynką trygonometryczną, zachodzi dla wszystkich kątów. Druga równość jest prawdziwa dla kątów, których tangens jest określony.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Uzasadnimy, że dla dowolnego kąta α zachodzi równość $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

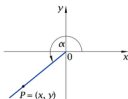
Dowód

Niech $P = (x, y)$ oznacza punkt (różny od punktu $(0, 0)$) leżący na ramieniu końcowym kąta α , a r — odległość punktu P od punktu $(0, 0)$.

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \text{gdzie} \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Wobec tego:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1 \quad \square$$



ĆWICZENIE Udowodnij, że dla kątów, dla których określony jest tangens, zachodzi równość $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

PRZYKŁAD 1 Oblicz $\operatorname{tg} \alpha$, wiedząc, że $\sin \alpha = \frac{2}{7}$.

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{49}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{45}{49}$$

$$\cos \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{7} \quad \text{lub} \quad \cos \alpha = -\frac{3\sqrt{5}}{7}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3\sqrt{5}}{7}} = \frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{15} \quad \text{lub} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{2}{7}}{-\frac{3\sqrt{5}}{7}} = -\frac{2\sqrt{5}}{15}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{15} \quad \text{lub} \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{15}$$

Korzystamy z tożsamości $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Korzystamy z tożsamości $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

ZADANIE Oblicz $\operatorname{tg} \alpha$, gdy $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$.

PRZYKŁAD 2 Wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = -5$ i $-270^\circ < \alpha < -180^\circ$, oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -5, \text{ więc } \sin \alpha = -5 \cos \alpha$$

... Korzystamy z tożsamości $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

$$(-5 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

... Korzystamy z jedynki trygonometrycznej.

$$25 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{26}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{26}}{26} \quad \text{lub} \quad \cos \alpha = -\frac{\sqrt{26}}{26}$$

... Z warunku $-270^\circ < \alpha < -180^\circ$ wynika, że ramie końcowe kąta α leży w II ćwiartce układu współrzędnych, a więc $\cos \alpha < 0$.

Nie spełnia warunków zadania

$$\sin \alpha = -5 \cdot \left(-\frac{\sqrt{26}}{26}\right) = \frac{5\sqrt{26}}{26}$$

... Wcześniej ustaliliśmy, że $\sin \alpha = -5 \cos \alpha$.

ZADANIE Wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ i $-180^\circ < \alpha < -90^\circ$, oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

zadania 1–5 ►

PRZYKŁAD 3 Uzasadnij tożsamość.

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$L = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 1 = P$$

ZADANIE Uzasadnij tożsamość $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} = \cos^2 \alpha$.

zadania 6–10 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. a) Oblicz $\sin \alpha$, gdy $\cos \alpha = \frac{3}{4}$.
 b) Oblicz $\cos \alpha$, gdy $\sin \alpha = -0,8$.
 c) Oblicz $\sin \alpha$, gdy $\cos \alpha = -\frac{1}{5}$ i $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.
 d) Oblicz $\cos \alpha$, gdy $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ i $-270^\circ < \alpha < -180^\circ$.
2. a) Oblicz $\operatorname{tg} \alpha$, gdy $\sin \alpha = -0,8$ i $\cos \alpha = 0,6$.
 b) Oblicz $\cos \alpha$, gdy $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$.
 c) Oblicz $\sin \alpha$, gdy $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ i $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

3. Oblicz $\operatorname{tg} \alpha$, gdy:

a) $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ i $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

c) $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ i $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

b) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ i $-90^\circ < \alpha < 0^\circ$

d) $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ i $-90^\circ < \alpha < 0^\circ$

4. Oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$, gdy:

a) $\operatorname{tg} \alpha = 2$ i $-180^\circ < \alpha < -90^\circ$

c) $\operatorname{tg} \alpha = 3$ i $-360^\circ < \alpha < -270^\circ$

b) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$ i $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

d) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

5. Uzasadnij, że nie istnieje kąt α , dla którego:

a) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ i $\cos \alpha = \frac{1}{4}$

c) $\operatorname{tg} \alpha = -6$ i $\cos \alpha = \frac{1}{3}$

b) $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$

d) $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ i $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$

6. Uzasadnij tożsamość.

a) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$

d) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$

b) $\frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} + \sin \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$

e) $\frac{2}{\cos^2 \alpha} - \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$

c) $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha - 1} + \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\cos \alpha}$

f) $1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$

7. Uprość wyrażenie.

a) $\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha$

c) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$

b) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

d) $\left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \right)$

8. Oblicz $\cos \alpha$, jeśli:

a) $\sin^2 \alpha + \cos \alpha + 1 = 0$

c) $2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{\sin \alpha}$

b) $3 \sin^2 \alpha + 7 \cos \alpha + 3 = 0$

d) $\frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) = \frac{1}{\sin \alpha}$

9. Ustal, jaką najmniejszą i jaką największą wartość może przyjąć wyrażenie:

a) $1 - \cos^2 \alpha$

c) $5 - 3 \sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha$

b) $2 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$

d) $\frac{1}{2} \cos^2 \alpha + 3 \sin^2 \alpha$

10. a) Niech $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = a$ oraz $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Wyraż za pomocą a wartość wyrażenia $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2$ oraz wyrażenia $\sin \alpha + \cos \alpha$.

b) Niech $\sin \beta + \cos \beta = b$ oraz $90^\circ < \beta < 180^\circ$. Wyraż za pomocą b wartość wyrażenia $\sin \beta \cdot \cos \beta$ oraz wyrażenia $\sin \beta - \cos \beta$.

MINISPRAWDZIAN

51. Jeśli $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ i $270^\circ < \alpha < 360^\circ$, to $\operatorname{tg} \alpha$ wynosi:

- A. $-2\sqrt{2}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ D. $2\sqrt{2}$

52. Wyrażenie $2 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$ można przekształcić, by otrzymać wyrażenie mające postać:

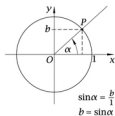
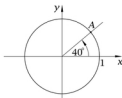
- A. $\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ B. $\frac{3}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}$ C. $\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{(\sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2}$ D. $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$

53. Które z poniższych wyrażeń przyjmuje tę samą wartość dla wszystkich miar kątów, dla których jest określone?

- A. $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ C. $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$
 B. $(1 - \sin \alpha - \cos \alpha)^2$ D. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

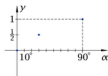
WYKRES FUNKCJI $y = \sin \alpha$

ĆWICZENIE A Promień okręgu przedstawionego na rysunku obok ma długość 1. Ustal drugą współrzędną punktu A.

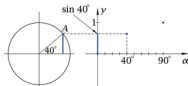


Kąt α przedstawiony na rysunku obok jest kątem środkowym w okręgu o promieniu 1. Punkt P jest wspólnym punktem ramienia końcowego tego kąta i okręgu, zatem odległość punktu P od początku układu współrzędnych jest równa 1. Wobec tego druga współrzędna punktu P jest równa $\sin \alpha$. Tę własność wykorzystamy przy rysowaniu wykresu funkcji $y = \sin \alpha$.

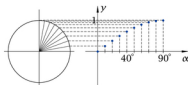
Ponieważ $\sin 0^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = 1$ i $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, więc do wykresu funkcji $y = \sin \alpha$ należą punkty $(0^\circ, 0)$, $(90^\circ, 1)$ oraz $(30^\circ, \frac{1}{2})$.



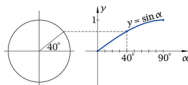
Aby zaznaczyć inne punkty wykresu funkcji $y = \sin \alpha$, posłużymy się tzw. kołem trygonometrycznym.



Rysujemy koło o promieniu 1 i zaznaczamy w nim np. kąt o mierze 40° (zob. rysunek obok). Druga współrzędna punktu A jest równa $\sin 40^\circ$.



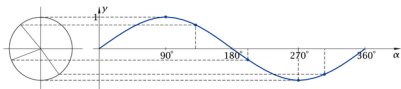
Postępując w analogiczny sposób jak powyżej, możemy zaznaczyć kolejne punkty wykresu funkcji $y = \sin \alpha$.



Wszystkie punkty należące do tego wykresu, których argumenty spełniają warunek $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, tworzą linię, którą przedstawiono na rysunku obok.

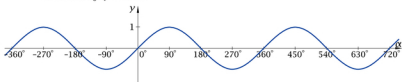
Uwaga. Zauważ, że jednostka na osi x nie ma związku z jednostką na osi y — ich wielkości zostały wybrane arbitralnie.

Postępując w podobny sposób, możemy narysować wykres funkcji $y = \sin \alpha$ dla kątów większych od 90° . Na poniższym rysunku przedstawiono fragment tego wykresu — dla argumentów z przedziału $[0^\circ; 360^\circ]$.



Na powstawanie omawianego wykresu można spojrzeć nieco inaczej. Wyobraźmy sobie, że punkt porusza się po okręgu o promieniu 1 przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Fragment wykresu przedstawiony powyżej odpowiada jednemu pełnemu obiegowi.

Łatwo sobie wyobrazić, że po każdym kolejnym obiegu całego okręgu otrzymamy linię o takim samym kształcie, stanowiącą wykres funkcji dla kątów większych od 360° . Jeśli punkt porusza się po okręgu w przeciwnym kierunku, czyli zgodnie z ruchem wskazówek zegara, otrzymamy fragment wykresu dla kątów ujemnych. W ten sposób powstanie **sinusoidea**, czyli wykres funkcji $y = \sin \alpha$.

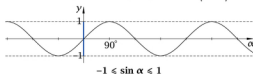


ĆWICZENIE B Korzystając z wykresu funkcji $y = \sin \alpha$, odpowiedz na pytania.

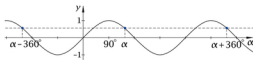
- Która z liczb jest większa: $\sin 200^\circ$ czy $\sin 202^\circ$?
- Która z liczb: $\sin(-170^\circ)$, $\sin(-190^\circ)$, $\sin 600^\circ$, $\sin 250^\circ$ jest dodatnia?

Wykres funkcji $y = \sin \alpha$ dobrze ilustruje różne jej własności. Na przykład:

- Wartość $\sin \alpha$ nie może być liczbą większą od 1 ani mniejszą od -1. Zbiorem wartości funkcji $y = \sin \alpha$ jest przedział $\langle -1; 1 \rangle$.



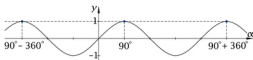
- Gdy argumenty różnią się o 360° , to wartości funkcji są takie same. $\sin \alpha = \sin(\alpha + 360^\circ) = \sin(\alpha - 360^\circ) = \sin(\alpha + 2 \cdot 360^\circ) = \dots$



$$\sin \alpha = \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

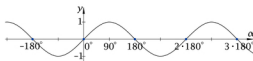
Uwaga. O funkcjach, których wartości powtarzają się regularnie, mówimy, że są okresowe. Funkcja $y = \sin \alpha$ jest okresowa o okresie równym 360° . Więcej o funkcjach okresowych będziemy mówili w jednym z następnych tematów.

- Największą wartość (równą 1) funkcja przyjmuje dla argumentów: 90° , $90^\circ + 360^\circ$, $90^\circ - 360^\circ$, $90^\circ + 2 \cdot 360^\circ$, $90^\circ - 2 \cdot 360^\circ$, $90^\circ + 3 \cdot 360^\circ$ itd.



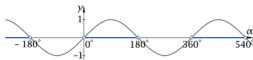
$$\sin \alpha = 1, \text{ gdy } \alpha = 90^\circ + k \cdot 360^\circ, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Funkcja ma nieskończenie wiele miejsc zerowych. Miejscami zerowymi są argumenty: 0° , 180° , -180° , $2 \cdot 180^\circ$, $-2 \cdot 180^\circ$ itd.



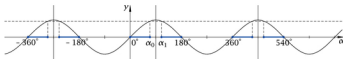
$\sin \alpha = 0$, gdy $\alpha = k \cdot 180^\circ$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

- Funkcja przyjmuje wartości dodatnie, gdy:
 $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ lub $360^\circ < \alpha < 540^\circ$, lub $-360^\circ < \alpha < -180^\circ$ itd.



$\sin \alpha > 0$, gdy $\alpha \in (k \cdot 360^\circ; 180^\circ + k \cdot 360^\circ)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

- Wykres funkcji ma nieskończenie wiele osi symetrii, które są prostopadłe do osi x . Na rysunku przedstawiono kilka z nich. Odcinki zaznaczone na osi x na niebiesko mają równe długości. Zatem funkcja sinus przyjmuje tę samą wartość dla kątów: α_0 , $\alpha_1 = 180^\circ - \alpha_0$, $\alpha_0 + 360^\circ$, $\alpha_1 + 360^\circ$, $\alpha_0 - 360^\circ$, $\alpha_1 - 360^\circ$ itd.



$\sin \alpha = \sin \alpha_0$, gdy $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 360^\circ$ lub
 $\alpha = 180^\circ - \alpha_0 + k \cdot 360^\circ$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

ĆWICZENIE C Korzystając z wykresu funkcji $y = \sin \alpha$, odpowiedz na pytania.

- Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość -1 ?
- Dla jakich argumentów wartości funkcji są ujemne?

zadania 1–8 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Korzystając z sinusoidy, ustal, która z podanych liczb jest większa.

- | | |
|--|--|
| a) $\sin 100^\circ$ czy $\sin 170^\circ$ | d) $\sin 351^\circ$ czy $\sin 622^\circ$ |
| b) $\sin 633^\circ$ czy $\sin 635^\circ$ | e) $\sin(-442^\circ)$ czy $\sin(-277^\circ)$ |
| c) $\sin(-457^\circ)$ czy $\sin(-460^\circ)$ | f) $\sin(-205^\circ)$ czy $\sin 193^\circ$ |

2. Naskicuj odpowiedni fragment sinusoidy, a następnie odczytaj największą i najmniejszą wartość oraz miejsca zerowe funkcji $y = \sin \alpha$, gdy:

- a)** $-360^\circ \leq \alpha \leq 0^\circ$ **b)** $360^\circ \leq \alpha \leq 540^\circ$ **c)** $-450^\circ \leq \alpha \leq -270^\circ$

3. Korzystając z sinusoidy, odpowiedz, które z podanych liczb są ujemne.

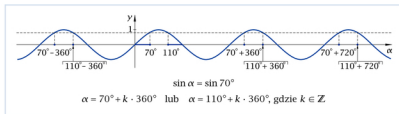
$\sin(-50^\circ)$ $\sin 121^\circ$ $\sin 179^\circ$ $\sin 194^\circ$ $\sin(-320^\circ)$ $\sin 451^\circ$ $\sin(-721^\circ)$

4. Wymień wszystkie kąty spełniające nierówność $-500^\circ < \alpha < 500^\circ$ oraz warunek:

- a)** $\sin \alpha = 1$ **b)** $\sin \alpha = -1$ **c)** $\sin \alpha = 0$

5. Ustal, ile punktów wspólnych ma wykres funkcji $y = \sin \alpha$ z prostą o równaniu $y = p$, gdy:

- a)** $p = \frac{3}{4}$ i $\alpha \in (0; 360^\circ)$ **c)** $p = \frac{7}{9}$ i $\alpha \in (-270; 540^\circ)$
b) $p = -0,1$ i $\alpha \in (0; 720^\circ)$ **d)** $p = -\frac{4}{7}$ i $\alpha \in (-450; 180^\circ)$



6. Przyjrzyj się rozwiązaniu w ramce. Znajdź kąty spełniające podany warunek.

- a)** $\sin \alpha = \sin 10^\circ$ **b)** $\sin \alpha = \sin 75^\circ$ **c)** $\sin \alpha = \sin(-20^\circ)$ **d)** $\sin \alpha = \sin(-110^\circ)$

7. Znajdź wszystkie argumenty, dla których wartość funkcji $y = \sin \alpha$ jest równa $\sin 25^\circ$, jeśli:

- a)** $0^\circ < \alpha < 540^\circ$ **c)** $-720^\circ \leq \alpha \leq 0^\circ$
b) $-180^\circ < \alpha < 540^\circ$ **d)** $-270^\circ \leq \alpha \leq 720^\circ$

8. Które zdania są prawdziwe?

- ① Wśród kątów większych od 100° i mniejszych od 1000° są trzy kąty, których sinus jest równy -1 .
 ② Wśród kątów dodatnich i mniejszych od 360° są dwa kąty, których sinus jest równy $-\frac{1}{3}$.
 ③ Dla argumentów większych od 810° i mniejszych od 900° funkcja $y = \sin \alpha$ nie przyjmuje wartości 1 .

MINISPRAWDZIAN

51. Która z poniższych własności nie jest własnością funkcji $y = \sin \alpha$?

- A. Funkcja osiąga wartość -1 dla argumentu -450° .
- B. Wartości funkcji dla argumentów 100° i 460° są równe.
- C. Jednym z miejsc zerowych funkcji jest 540° .
- D. Funkcja jest rosnąca w przedziale $(0^\circ; 180^\circ)$.

52. Korzystając z sinusoidy, wskaż, która z poniższych nierówności jest prawdziwa.

- A. $\sin 80^\circ < \sin 170^\circ$
- B. $\sin(-200^\circ) > \sin 200^\circ$
- C. $\sin(-90^\circ) < \sin 270^\circ$
- D. $\sin 2^\circ < \sin 361^\circ$

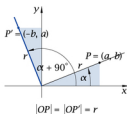
53. Która z poniższych wartości nie jest równa $\sin 40^\circ$?

- A. $\sin 400^\circ$
- B. $\sin 140^\circ$
- C. $\sin(-220^\circ)$
- D. $\sin 320^\circ$

WYKRES FUNKCJI $y = \cos \alpha$

- 1 Wykres funkcji $y = \cos \alpha$ moglibyśmy otrzymać, posługując się (podobnie jak w poprzednim temacie) kołem trygonometrycznym. Odpowiedni wykres można jednak otrzymać także w inny sposób — posługując się sinusoidą. Wykorzystamy w tym celu pewną zależność między sinusem a cosinusem.

Na rysunku obok przedstawiono punkty P i P' leżące w tej samej odległości od początku układu współrzędnych. Punkt P leży na ramieniu końcowym kąta α , a punkt P' — na ramieniu końcowym kąta $\alpha + 90^\circ$. Zaznaczone trójkąty są przystające. Zatem jeśli $P = (a, b)$, to $P' = (-b, a)$.



Z definicji sinusa i cosinusa wynikają równości:

$$\cos \alpha = \frac{a}{r} \qquad \sin(\alpha + 90^\circ) = \frac{a}{r}$$

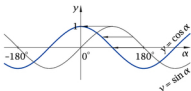
Stąd otrzymujemy:

$$\cos \alpha = \sin(\alpha + 90^\circ)$$

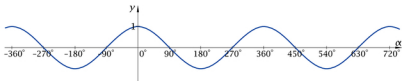
Uwaga. Przedstawiony na rysunku kąt α jest kątem ostrym. Można uzasadnić, że powyższa równość jest prawdziwa dla dowolnego kąta α .

Wykres funkcji $y = \cos \alpha$ jest więc taki sam jak wykres funkcji określonej wzorem $y = \sin(\alpha + 90^\circ)$, a wykres tej funkcji otrzymamy, gdy przesuniemy sinusoidę o 90 jednostek w lewo wzdłuż osi x .

Na rysunku obok niebieskim kolorem zaznaczono fragment wykresu funkcji $y = \cos \alpha$, który powstał po odpowiednim przesunięciu fragmentu sinusoidy.



Wykres funkcji $y = \cos \alpha$, zwany **cosinusoidą**, ma taki sam kształt jak sinusoida, a różni się tylko położeniem w układzie współrzędnych.

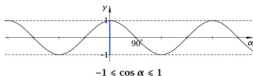


ĆWICZENIE A Korzystając z wykresu funkcji $y = \cos \alpha$, odpowiedz na pytania.

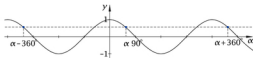
- Która z liczb jest większa: $\cos 200^\circ$ czy $\cos 202^\circ$?
- Która z liczb: $\cos 300^\circ$, $\cos(-170^\circ)$, $\cos(-370^\circ)$, $\cos 390^\circ$ jest ujemna?

Na podstawie cosinusoidy można określić różne własności funkcji $y = \cos \alpha$.
Na przykład:

- Zbiorem wartości funkcji $y = \cos \alpha$ jest przedział $\langle -1; 1 \rangle$.



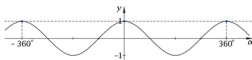
- Gdy argumenty różnią się o 360° , to wartości funkcji są takie same.



$$\cos \alpha = \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Uwaga. Podobnie jak funkcja $y = \sin \alpha$ funkcja $y = \cos \alpha$ jest funkcją okresową o okresie równym 360° .

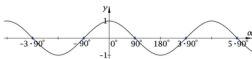
- Największą wartość (równą 1) funkcja przyjmuje co 360° . Z taką samą regularnością funkcja przyjmuje też najmniejszą wartość (równą -1).



$$\cos \alpha = 1, \text{ gdy } \alpha = k \cdot 360^\circ, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

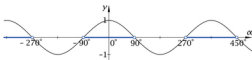
$$\cos \alpha = -1, \text{ gdy } \alpha = 180^\circ + k \cdot 360^\circ, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Funkcja ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.



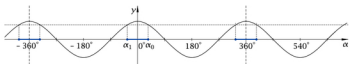
$$\cos \alpha = 0, \text{ gdy } \alpha = 90^\circ + k \cdot 180^\circ, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Funkcja przyjmuje wartości dodatnie, gdy:
 $-450^\circ < \alpha < -270^\circ$ lub $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$, lub $270^\circ < \alpha < 450^\circ$ itd.



$$\cos \alpha > 0, \text{ gdy } \alpha \in (-90^\circ + k \cdot 360^\circ; 90^\circ + k \cdot 360^\circ), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Cosinusoida ma nieskończenie wiele osi symetrii, które są prostopadłe do osi x . Na rysunku przedstawiono kilka z nich (jedną z nich jest oś y). Odcinki zaznaczone na osi x na niebiesko mają równe długości. Zatem funkcja cosinus przyjmuje taką samą wartość dla kątów: α_0 , $\alpha_1 = -\alpha_0$, $\alpha_0 + 360^\circ$, $\alpha_1 + 360^\circ$, $\alpha_0 - 360^\circ$, $\alpha_1 - 360^\circ$ itd.



$$\cos \alpha = \cos \alpha_0, \text{ gdy } \alpha = \alpha_0 + k \cdot 360^\circ \text{ lub}$$

$$\alpha = -\alpha_0 + k \cdot 360^\circ, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

ĆWICZENIE B Korzystając z wykresu funkcji $y = \cos \alpha$, odpowiedz, dla jakich argumentów wartości tej funkcji są ujemne.

zadania 1-11 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Korzystając z cosinusoidy, oceń, która z podanych liczb jest mniejsza.

- a) $\cos 14^\circ$ czy $\cos 62^\circ$ c) $\cos(-83^\circ)$ czy $\cos 192^\circ$
 b) $\cos(-342^\circ)$ czy $\cos(-339^\circ)$ d) $\cos(-176^\circ)$ czy $\cos 98^\circ$

2. Naskicuj odpowiedni fragment cosinusoidy i odczytaj największą wartość, najmniejszą wartość oraz miejsca zerowe funkcji $y = \cos \alpha$, gdy:

- a) $-360^\circ \leq \alpha \leq 0^\circ$ c) $450^\circ \leq \alpha \leq 630^\circ$
 b) $180^\circ < \alpha < 360^\circ$ d) $-90^\circ < \alpha < 540^\circ$

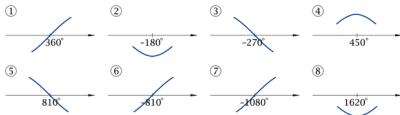
3. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych sinusoidę i cosinusoidę. Korzystając z rysunku, porównaj liczby:

- a) $\sin 50^\circ$ i $\cos 50^\circ$ d) $\sin 170^\circ$ i $\cos(-2^\circ)$
 b) $\sin 294^\circ$ i $\cos 294^\circ$ e) $\sin(-297^\circ)$ i $\cos(-157^\circ)$
 c) $\sin(-127^\circ)$ i $\cos(-127^\circ)$ f) $\sin(-354^\circ)$ i $\cos 354^\circ$

4. Przedstaw w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $y = \sin \alpha$ oraz $y = \cos \alpha$, gdy $\alpha \in (-180^\circ; 180^\circ)$. Wyznacz kąty z tego przedziału spełniające podany warunek.

- a) $\sin \alpha = \cos \alpha$ c) $\sin \alpha < 0$ i $\cos \alpha < 0$
 b) $\sin \alpha > \cos \alpha$ d) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$

5. Na poniższych rysunkach przedstawiono fragmenty wykresów funkcji $y = \sin \alpha$ oraz $y = \cos \alpha$. Które z nich są fragmentami sinusoidy, a które — cosinusoidy?



6. O kątach α , β , γ i δ wiadomo, że:

$$-520^\circ < \alpha < -470^\circ \quad 1020^\circ < \beta < 1070^\circ \quad 730^\circ < \gamma < 800^\circ \quad -930^\circ < \delta < -880^\circ$$

Dla których z tych kątów jednocześnie sinus i cosinus są liczbami ujemnymi?

- 7.** Ustal, której funkcji: $y = \sin \alpha$ czy $y = \cos \alpha$ dotyczy podane zdanie.
- Wartość funkcji dla 1800° jest równa 0.
 - Wartość funkcji dla 900° jest równa -1 .
 - Gdy $460^\circ < \alpha < 500^\circ$, funkcja przyjmuje wartości ujemne.
 - Wśród argumentów α spełniających warunek $-500^\circ < \alpha < 500^\circ$ liczba miejsc zerowych jest parzysta.
 - Gdy $320^\circ < \alpha < 400^\circ$, funkcja nie przyjmuje wartości 1.

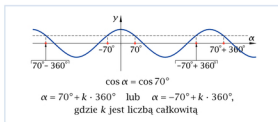
- 8.** Wyjaśnij, dlaczego nie istnieje kąt, który spełnia podaną równość.

a) $\sin \alpha + \cos \alpha = 2$ b) $\frac{2 + \cos \alpha}{2 + \sin \alpha} = -1$ c) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2$

- 9.** Wykres funkcji $y = \cos \alpha$ można otrzymać z wykresu funkcji $y = \sin \alpha$, odbijając sinusoidę symetrycznie względem prostej prostopadłej do osi x przechodzącej przez punkt $(45^\circ, 0)$. Znajdź wszystkie równania prostych, które mają tę samą własność i które przecinają oś x w przedziale $(-360^\circ; 360^\circ)$.

- 10.** Znajdź wszystkie kąty, które spełniają warunek:

- $\cos \alpha = \cos 15^\circ$
- $\cos \alpha = \cos(-39^\circ)$
- $\cos \alpha = \cos 132^\circ$
- $\cos \alpha = \cos(-254^\circ)$



- 11.** Znajdź wszystkie argumenty, dla których wartość funkcji $y = \cos \alpha$ jest równa $\cos 35^\circ$, jeśli:

- $-720^\circ \leq \alpha \leq 0^\circ$
- $-90^\circ < \alpha < 540^\circ$
- $180^\circ < \alpha < 630^\circ$

MINISPRAWDZIAN

51. Która z poniższych własności nie jest własnością funkcji $y = \cos \alpha$?

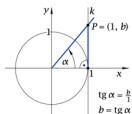
- Wartości funkcji dla argumentów -97° i 97° są równe.
- Oś y jest osią symetrii wykresu funkcji.
- Funkcja jest rosnąca w przedziale $(-180^\circ; 0^\circ)$.
- Funkcja osiąga wartość 1 dla argumentu -540° .

52. Nierówność $\sin \alpha < \cos \alpha$ jest spełniona, gdy kąt α należy do przedziału:

- $(100^\circ; 150^\circ)$
- $(-350^\circ; -230^\circ)$
- $(250^\circ; 300^\circ)$
- $(405^\circ; 450^\circ)$

WYKRES FUNKCJI $y = \operatorname{tg} \alpha$

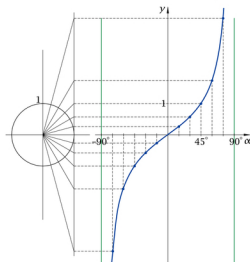
ĆWICZENIE Prosta PQ przedstawiona na rysunku obok jest prostopadła do osi x i przechodzi przez punkt $(1, 0)$. Ustal, jakie współrzędne ma punkt P , a jakie — punkt Q .



Kąt α przedstawiony na rysunku obok jest kątem środkowym w okręgu o środku $(0, 0)$ i promieniu 1. Prosta k jest styczna do okręgu i prostopadła do osi x . Na końcowym ramieniu kąta α wybieramy punkt P , który leży na tej stycznej. Druga współrzędna punktu P jest wobec tego równa $\operatorname{tg} \alpha$.

Uwaga. Opisanej własności tangens zawdzięcza swą nazwę. Po łacinie *tangens* oznacza *styczna*.

Rysunek przedstawiony poniżej pokazuje, w jaki sposób można zaznaczać punkty należące do wykresu funkcji $y = \operatorname{tg} \alpha$, gdy $\alpha \in (-90^\circ; 90^\circ)$.



Wiadomo, że tangens nie jest określony dla kątów 90° i -90° , więc wykres nie przetnie prostych zaznaczonych na zielono (które są równoległe do osi y). Te proste to **asymptoty** (pionowe) wykresu funkcji.

Wiemy już jak wygląda wykres funkcji $y = \operatorname{tg} \alpha$, gdy $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$. Aby narysować wykres dla pozostałych argumentów, skorzystamy z pewnej własności tangensa.

Na rysunku obok przedstawiono punkty P i P' leżące w tej samej odległości od początku układu współrzędnych. Punkt P leży na ramieniu końcowym kąta α , a punkt P' — na ramieniu końcowym kąta $\alpha + 180^\circ$. Zaznaczone trójkąty są przystające, zatem jeśli $P = (a, b)$, to $P' = (-a, -b)$. Wobec tego:

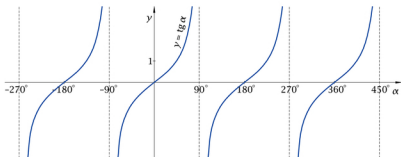
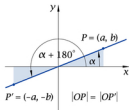
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \quad \operatorname{tg} (\alpha + 180^\circ) = \frac{-b}{-a} = \frac{b}{a}$$

Zatem otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\alpha + 180^\circ)$$

Uwaga. Przedstawiony na rysunku kąt α jest kątem ostrym. Można uzasadnić, że powyższa równość jest prawdziwa dla każdego kąta, dla którego tangens jest określony.

Równość $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\alpha + 180^\circ)$ oznacza, że wartości funkcji tangens powtarzają się co 180° , co wykorzystuje się do rysowania wykresu funkcji $y = \operatorname{tg} \alpha$, zwanego **tangensoidą** (zob. rysunek poniżej).

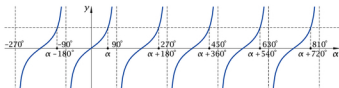


Na podstawie tangensoidy można określić różne własności funkcji $y = \operatorname{tg} \alpha$. Na przykład:

- Funkcja nie jest określona dla kątów o mierze $90^\circ + k \cdot 180^\circ$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Proste równoległe do osi y , przecinające oś x w punktach o pierwszej współrzędnej $\alpha = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, są asymptotami wykresu funkcji.
- Zbiorem wartości funkcji $y = \operatorname{tg} \alpha$ jest zbiór liczb rzeczywistych.
- Funkcja ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

$$\operatorname{tg} \alpha = 0, \text{ gdy } \alpha = k \cdot 180^\circ, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

- Dla argumentów różniących się o 180° wartości funkcji są takie same.



$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\alpha + k \cdot 180^\circ), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

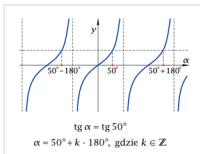
Uwaga. Funkcja $y = \operatorname{tg} \alpha$ jest funkcją okresową o okresie równym 180° .

- Funkcja przyjmuje wartości dodatnie, gdy:
 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ lub $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, lub $-180^\circ < \alpha < -90^\circ$ itd.
 $\operatorname{tg} \alpha > 0$, gdy $k \cdot 180^\circ < \alpha < 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
- Funkcja jest rosnąca w każdym przedziale $(-90^\circ + k \cdot 180^\circ; 90^\circ + k \cdot 180^\circ)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

zadania 1–4 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Naskicuj odpowiedni fragment tangensoidy i odczytaj:
- miejsca zerowe funkcji $y = \operatorname{tg} \alpha$, gdy $-180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$,
 - dla jakich kątów α , spełniających warunek $-360^\circ \leq \alpha \leq 540^\circ$, tangens nie jest określony,
 - dla jakich argumentów funkcja $y = \operatorname{tg} \alpha$ przyjmuje wartości dodatnie.
2. Korzystając z wykresów funkcji trygonometrycznych, uporządkuj podane liczby w kolejności od najmniejszej do największej.
- $\sin 85^\circ$, $\cos 85^\circ$, $\operatorname{tg} 85^\circ$
 - $\sin 92^\circ$, $\cos 92^\circ$, $\operatorname{tg} 92^\circ$
 - $\sin 80^\circ$, $\cos (-85^\circ)$, $\operatorname{tg} (-80^\circ)$
 - $\sin (-10^\circ)$, $\cos 50^\circ$, $\operatorname{tg} (-95^\circ)$



3. Znajdź wszystkie kąty, które spełniają podany warunek.

- $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 78^\circ$
- $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (-3^\circ)$
- $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (273^\circ)$
- $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (-319^\circ)$

4. Wśród kątów spełniających podany warunek znajdź te, których tangens jest równy $\operatorname{tg} 72^\circ$.

- $-360^\circ \leq \alpha \leq 0^\circ$
- $90^\circ < \alpha < 720^\circ$
- $-180^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$
- $-90^\circ < \alpha < 450^\circ$

MINISPRAWDZIAN

51. Która z poniższych miar kąta nie należy do dziedziny funkcji $y = \operatorname{tg} \alpha$?

- A. 0° B. -270° C. 180° D. 225°

52. Która z poniższych własności dotyczy funkcji $y = \operatorname{tg} \alpha$?

- A. Dziedziną funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.
B. Jednym z miejsc zerowych funkcji jest -270° .
C. Oś y jest jedną z asymptot wykresu funkcji.
D. Funkcja jest rosnąca dla argumentów α spełniających warunek $90^\circ < \alpha < 270^\circ$.

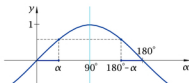
53. Która z poniższych wartości jest różna od $\operatorname{tg} 40^\circ$?

- A. $\operatorname{tg} (-140^\circ)$ B. $\operatorname{tg} 140^\circ$ C. $\operatorname{tg} 400^\circ$ D. $\operatorname{tg} 220^\circ$

WZORY REDUKCYJNE

- 1 Jeszcze raz przyjrzyjmy się sinusoidzie. Na rysunku obok zaznaczono jedną z jej osi symetrii. Rysunek ten ilustruje równość:

$$\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha)$$



Sinusoida ma także wiele środków symetrii. Jednym z nich jest początek układu współrzędnych. Dla argumentów o przeciwnych znakach wartości funkcji są liczbami przeciwnymi. Rysunek obok ilustruje równość:

$$\sin (-\alpha) = -\sin \alpha$$

Korzystając z tablic trygonometrycznych (zob. s. 293), możemy ustalać sinusy kątów ostrych. Posługując się sinusoidą albo korzystając ze wzorów, które zebrano w ramce obok, można sprowadzić obliczanie sinusa dowolnego kąta do obliczenia sinusa kąta ostrego.

$$\sin \alpha = \sin (\alpha + k \cdot 360^\circ),$$

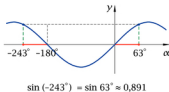
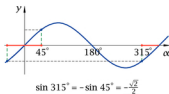
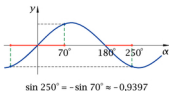
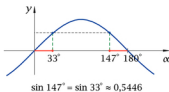
gdzie $k \in \mathbb{Z}$

$$\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha)$$
$$\sin (-\alpha) = -\sin \alpha$$

PRZYKŁAD 1 Oblicz sinusy kątów: 147° , -57° , 250° , 315° , -243° .

Sposób I

Posługujemy się sinusoidą (znajdujemy odpowiednie odcinki o jednakowej długości).



Sposób II

Korzystamy ze wzorów.

$$\begin{aligned}\sin 147^\circ &= \sin(180^\circ - 33^\circ) = \\ &= \sin 33^\circ \approx \underline{0,5446}\end{aligned}$$

$$\sin(-57^\circ) = -\sin 57^\circ \approx \underline{-0,8387}$$

$$\begin{aligned}\sin 250^\circ &= \sin(180^\circ - 250^\circ) = \\ &= \sin(-70^\circ) = -\sin 70^\circ \approx \underline{-0,9397}\end{aligned}$$

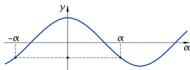
$$\begin{aligned}\sin 315^\circ &= \sin(315^\circ - 360^\circ) = \\ &= \sin(-45^\circ) = -\sin 45^\circ = \underline{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(-243^\circ) &= -\sin 243^\circ = \\ &= -\sin(180^\circ - 243^\circ) = -\sin(-63^\circ) = \\ &= \sin 63^\circ \approx \underline{0,891}\end{aligned}$$

ZADANIE Oblicz sinusy kątów: 102° , -83° , 200° , 307° , -210° .

zadania 1-4 ►

II



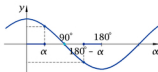
Cosinusoida ma też wiele środków symetrii. Jeden z nich to punkt $(90^\circ, 0)$. Rysunek obok ilustruje równość:

$$\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$$

Podobnie jak dla funkcji $y = \sin \alpha$, z pomocą tablic trygonometrycznych możemy obliczać cosinusy dowolnych kątów, posługując się sinusoidą albo korzystając ze wzorów, które podano obok.

Wykres funkcji $y = \cos \alpha$ ma nieskończenie wiele osi symetrii. Jedną z nich jest oś y . Rysunek obok ilustruje równość:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$



$$\cos \alpha = \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ),$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$

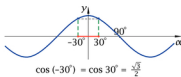
$$\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

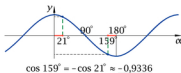
PRZYKŁAD 2 Oblicz cosinusy kątów -30° , 159° i 312° .

Sposób I

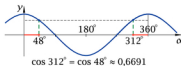
Posługujemy się sinusoidą.



$$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\cos 159^\circ = -\cos 21^\circ \approx -0,9336$$



$$\cos 312^\circ = \cos 48^\circ \approx 0,6691$$

Sposób II

Korzystamy ze wzorów.

$$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos 159^\circ &= -\cos(180^\circ - 159^\circ) = \\ &= -\cos 21^\circ \approx -0,9336 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 312^\circ &= \cos(312^\circ - 360^\circ) = \\ &= \cos(-48^\circ) = \cos 48^\circ \approx 0,6691 \end{aligned}$$

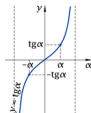
ZADANIE Oblicz cosinusy kątów: -70° , 225° , 350° .

zadania 5–8 ►

- III Wykres funkcji $y = \operatorname{tg} \alpha$ jest środkowosymetryczny. Jednym ze środków jego symetrii jest początek układu współrzędnych (zob. rysunek obok).

Spełniona jest więc następująca równość:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 180^\circ),$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$

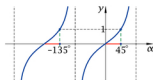
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

Z pomocą tablic trygonometrycznych można obliczyć tangens dowolnego kąta, posługując się wykresem albo wzorami, które zapisano obok.

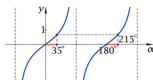
PRZYKŁAD 3 Oblicz tangensy kątów: -135° , 215° , 120° .

Sposób I

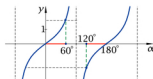
Posługujemy się tangensoidą.



$$\operatorname{tg}(-135^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = \underline{1}$$



$$\operatorname{tg} 215^\circ = \operatorname{tg} 35^\circ \approx \underline{0,7}$$



$$\operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ = \underline{-\sqrt{3}}$$

Sposób II

Korzystamy ze wzorów.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(-135^\circ) &= \operatorname{tg}(-135^\circ + 180^\circ) = \\ &= \operatorname{tg} 45^\circ = \underline{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 215^\circ &= \operatorname{tg}(215^\circ - 180^\circ) = \\ &= \operatorname{tg} 35^\circ \approx \underline{0,7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 120^\circ &= \operatorname{tg}(120^\circ - 180^\circ) = \operatorname{tg}(-60^\circ) = \\ &= -\operatorname{tg} 60^\circ = \underline{-\sqrt{3}} \end{aligned}$$

ZADANIE Oblicz tangensy kątów: -100° , 225° , 150° .

zadania 9–11 ►

IV Wzory, które pozwalają zredukować problem obliczania wartości funkcji trygonometrycznych do ustalenia wartości tych funkcji dla odpowiednich kątów ostrych, nazywamy **wzorami redukcyjnymi**.

Oprócz używanych dotąd wzorów istnieją także inne wzory redukcyjne. Poniżej zebrano wzory, z których będziemy korzystać.

PODSTAWOWE WZORY REDUKCYJNE

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

Uwaga. Każdy z tych wzorów można stosować dla dowolnego kąta α , dla którego odpowiednia funkcja jest określona.

zadania 12–19 ►

ZESTAW ZADAŃ

W poniższych zadaniach podaj wynik dokładny (jeśli to możliwe) albo korzystając z tablic trygonometrycznych, ustal wynik przybliżony z dokładnością do części setnych.

◀ I 1. Oblicz.

a) $\sin 150^\circ$, $\sin 120^\circ$

c) $\sin(-80^\circ)$, $\sin(-10^\circ)$

e) $\sin 303^\circ$, $\sin 342^\circ$

b) $\sin(-60^\circ)$, $\sin(-45^\circ)$

d) $\sin 238^\circ$, $\sin 254^\circ$

f) $\sin(-222^\circ)$, $\sin(-316^\circ)$

2. W przedziale $(-360^\circ; 360^\circ)$ znajdź wszystkie kąty spełniające warunek:

a) $\sin \alpha = \sin 100^\circ$

b) $\sin \alpha = \sin(-40^\circ)$

c) $\sin \alpha = \sin 230^\circ$

3. Znajdź wszystkie kąty spełniające warunek $-360^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ oraz równość:

a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$

d) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Znajdź kąty spełniające podane warunki.

a) $\sin \alpha = 0,26$ i $-180^\circ < \alpha < 180^\circ$

c) $\sin \alpha = -0,1$ i $-360^\circ < \alpha < 0^\circ$

b) $\sin \alpha = 0,99$ i $-360^\circ < \alpha < 360^\circ$

d) $\sin \alpha = -0,53$ i $-90^\circ < \alpha < 270^\circ$

◀ II 5. Oblicz.

a) $\cos 120^\circ$, $\cos 135^\circ$

c) $\cos(-12^\circ)$, $\cos(-61^\circ)$

e) $\cos 192^\circ$, $\cos 203^\circ$

b) $\cos 210^\circ$, $\cos 225^\circ$

d) $\cos(-280^\circ)$, $\cos(-315^\circ)$

f) $\cos(-124^\circ)$, $\cos(-155^\circ)$

6. W przedziale $(-360^\circ; 360^\circ)$ znajdź wszystkie kąty spełniające warunek:

a) $\cos \alpha = \cos 130^\circ$ **b)** $\cos \alpha = \cos (-80^\circ)$ **c)** $\cos \alpha = \cos (-200^\circ)$

7. Znajdź wszystkie kąty spełniające warunek $-360^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ oraz równość:

a) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ **b)** $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. Znajdź wszystkie kąty spełniające podane warunki.

a) $\cos \alpha = 0,81$ i $-180^\circ < \alpha < 180^\circ$ **c)** $\cos \alpha = 0,31$ i $-360^\circ < \alpha < 90^\circ$
b) $\cos \alpha = 0,45$ i $0^\circ < \alpha < 360^\circ$ **d)** $\cos \alpha = -0,07$ i $-180^\circ < \alpha < 270^\circ$

◀ **III** **9.** Posługując się odpowiednimi wykresami, oblicz:

a) $\operatorname{tg} 150^\circ$, $\operatorname{tg} 135^\circ$ **c)** $\operatorname{tg} (-17^\circ)$, $\operatorname{tg} (-82^\circ)$ **e)** $\operatorname{tg} (-166^\circ)$, $\operatorname{tg} (-134^\circ)$
b) $\operatorname{tg} 210^\circ$, $\operatorname{tg} 225^\circ$ **d)** $\operatorname{tg} 205^\circ$, $\operatorname{tg} 197^\circ$ **f)** $\operatorname{tg} 290^\circ$, $\operatorname{tg} 324^\circ$

10. Znajdź wszystkie kąty α spełniające warunek $-360^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ oraz równość:

a) $\operatorname{tg} \alpha = 1$ **b)** $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ **c)** $\operatorname{tg} \alpha = -1$ **d)** $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

11. Znajdź wszystkie kąty spełniające podane warunki.

a) $\operatorname{tg} \alpha = 0,65$ i $0^\circ < \alpha < 360^\circ$ **b)** $\operatorname{tg} \alpha = -4,7$ i $-360^\circ < \alpha < 180^\circ$

◀ **IV** **12.** Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych.

a) $\sin 410^\circ$, $\cos 375^\circ$, $\operatorname{tg} 415^\circ$ **c)** $\sin (-410^\circ)$, $\cos (-490^\circ)$, $\operatorname{tg} (-480^\circ)$
b) $\cos 550^\circ$, $\sin 600^\circ$, $\operatorname{tg} 690^\circ$ **d)** $\cos (-610^\circ)$, $\sin (-730^\circ)$, $\operatorname{tg} (-800^\circ)$

13. Przyjmij, że $a = \sin 10^\circ$. Wyraż za pomocą a podaną liczbę.

a) $\sin 170^\circ$ **b)** $\sin 190^\circ$ **c)** $\sin 350^\circ$ **d)** $\cos 260^\circ$ **e)** $\cos 100^\circ$

14. Uzasadnij tożsamość.

a) $\cos(90^\circ - \alpha) + \cos(90^\circ + \alpha) = 0$ **c)** $\cos^2(90^\circ + \alpha) + \sin^2(90^\circ - \alpha) = 1$
b) $\frac{\cos(90^\circ + \alpha)}{\sin(180^\circ - \alpha)} + 1 = 0$ **d)** $\frac{\cos(90^\circ + \alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$

• **15.** Uzasadnij tożsamość.

a) $\sin(45^\circ + \alpha) = \cos(45^\circ - \alpha)$ **b)** $\cos(45^\circ + \alpha) = \sin(45^\circ - \alpha)$

16. Wykaż, że jeśli α , β i γ są kątami trójkąta ($\gamma \neq 90^\circ$), to:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma \quad \text{oraz} \quad \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\operatorname{tg} \gamma$$

17. Podaj dokładną wartość wyrażenia.

a) $\sin 130^\circ \cdot \cos 40^\circ - \cos 130^\circ \cdot \sin 40^\circ$

c) $\frac{\cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ}{\sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ}$

b) $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \sin 70^\circ + \cos 110^\circ$

d) $\frac{\sin 25^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 75^\circ}{\sin 105^\circ \cdot \sin 130^\circ \cdot \sin 155^\circ}$

18. Uprość wyrażenie, a następnie oblicz jego dokładną wartość.

a) $\cos 225^\circ \cdot \operatorname{tg} 315^\circ - \cos 135^\circ$

b) $\frac{\cos 225^\circ}{\sin 315^\circ \cdot \sin 240^\circ} \cdot \operatorname{tg} 135^\circ$

19. Uzasadnij, że wartość wyrażenia:

$$\operatorname{tg}(\alpha - 180^\circ) \cdot \sin(\alpha - 90^\circ) - \cos(450^\circ + \alpha)$$

jest taka sama dla każdego kąta α różnego od $90^\circ + k \cdot 180^\circ$.

MINISPRAWDZIAN

S1. Który z podanych kątów nie spełnia warunku $\sin \alpha = \frac{1}{2}$?

A. $\alpha = 30^\circ$

B. $\alpha = -210^\circ$

C. $\alpha = 210^\circ$

D. $\alpha = 150^\circ$

S2. Ustal, który z podanych kątów spełnia warunek $\cos \alpha = \cos(-10^\circ)$.

A. $\alpha = -190^\circ$

B. $\alpha = 100^\circ$

C. $\alpha = 370^\circ$

D. $\alpha = -170^\circ$

MIARA ŁUKOWA KĄTA

1 Do tej pory, określając wielkość kąta, używaliśmy miary stopniowej. Jej podstawową jednostką jest 1° (taką miarę ma kąt, który stanowi $\frac{1}{90}$ kąta prostego).

Miara stopniowa nie jest jedyną stosowaną miarą kątów. Na przykład w geodezji wielkości kątów często określa się za pomocą jednostek zwanych gradusami. Miarę 1 gradusa (w skrócie 1 grad) ma kąt, który stanowi $\frac{1}{100}$ kąta prostego.

Warto wiedzieć

Gradusy i stopnie (kątowe) mają ciekawy związek z jednostkami długości. Odległość 1 km zdefiniowano pierwotnie za pomocą długości południka: przyjęto, że 10 000 km jest równe połowie długości południka, czyli odpowiada np. odległości mierzonej wzdłuż południka między biegunem a równikiem (różnica szerokości geograficznej tych punktów wynosi 90°). Gradus to $\frac{1}{100}$ kąta prostego, zatem kątowi o mierze 1 grad odpowiada odległość 100 km (mierzona wzdłuż południka).

Za pomocą długości południka określono też inną jednostkę długości — milę morską. Zdefiniowano ją jako odległość wzdłuż południka odpowiadającą $1'$ (minucie kątowej) szerokości geograficznej, czyli kątowi o mierze 1° odpowiada odległość 60 mil morskich.

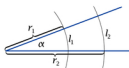
W nawigacji morskiej często wykorzystuje się związek między miarą kąta (współrzędne geograficzne) a odległością (długość rejsu). Niewygodnie jest używać wówczas stopni jako jednostki miary kąta, a odległości podawać w kilometrach. Zwykle kąty określa się w stopniach, a odległości — w milach morskich albo kąty określa się w gradach, a odległości — w kilometrach.



Omówimy teraz jeszcze jeden sposób określania miary kąta.

Kąt środkowy wyznacza na okręgu pewien łuk, którego długość zależy od miary kąta i promienia okręgu.

ĆWICZENIE A Dla każdego z trzech okręgów, które przedstawiono obok, oblicz stosunek długości zaznaczonego łuku do promienia okręgu.



$$l_1 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r_1 \quad l_2 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r_2$$

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi$$

Na rysunku obok przedstawiono kąt środkowy α , który wycina z dwóch okręgów łuki o różnych długościach. Wprawdzie długości tych łuków zależą od promieni okręgów, ale stosunek długości łuku do promienia okręgu jest w każdym wypadku taki sam.

Ta obserwacja pozwala określić nową miarę kąta, zwaną miarą łukową.

Miara łukowa kąta środkowego w okręgu to liczba równa stosunkowi długości łuku, na którym oparty jest ten kąt, do promienia okręgu.



Miara łukowa kąta α wynosi $\frac{l}{r}$.

Zauważ, że kąt środkowy, który jest kątem półpełnym, oparty jest na $\frac{1}{2}$ okręgu. Zatem miara łukowa kąta 180° to $\frac{\frac{1}{2} \cdot 2\pi r}{r}$. Stąd otrzymujemy, że:

miara łukowa kąta 180° to π

miara łukowa kąta 90° to $\frac{\pi}{2}$

miara łukowa kąta 360° to 2π

ĆWICZENIE B Oblicz miary łukowe kątów: 30° , 60° i 45° .

Miary łukowe niektórych kątów zebrano w poniższej tabeli.

miara w stopniach	360°	180°	90°	60°	45°	30°
miara łukowa	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

ĆWICZENIE C Zapis $\sin \frac{\pi}{6}$ oznacza sinus kąta, którego miara łukowa jest równa $\frac{\pi}{6}$, zatem $\sin \frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. Podaj wartości: $\cos \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$, $\sin \frac{\pi}{2}$.

Ponieważ miara łukowa kąta 180° wynosi π , więc jeśli α oznacza miarę pewnego kąta w stopniach, zaś x — miarę łukową tego kąta, to związek między α i x będzie określała proporcja:

$$\frac{\alpha}{180^\circ} = \frac{x}{\pi} \quad \begin{array}{l} \alpha - \text{miara kąta w stopniach} \\ x - \text{miara łukowa kąta} \end{array}$$

Miarę łukową kątów określiliśmy dla kątów środkowych w okręgu. Powyższa równość każdemu kątowi z przedziału $\langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$ przyporządkowuje pewną liczbę z przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$. To przyporządkowanie możemy „rozszerzyć” na kąty większe niż 360° i kąty ujemne. Przyjmujemy, że powyższa proporcja określa związek między miarą stopniową dowolnego kąta a miarą łukową tego kąta.

Kąt, którego miara łukowa jest równa 1, nazywamy **radianem**. Zatem 1 radian (w skrócie 1 rad) to kąt środkowy, który w okręgu wycina łuk o długości równej promieniowi okręgu. W kącie o mierze łukowej a radianów mieści się więc a kątów o mierze 1 rad. Jeśli mówimy, że kąt ma miarę łukową np. $\frac{\pi}{7}$, mamy na myśli kąt o mierze $\frac{\pi}{7}$ rad.



Łatwo obliczyć, ile stopni ma kąt o mierze 1 rad.

Jeśli $x = 1$, to przekształcając powyższą proporcję, otrzymamy $\alpha = \frac{180^\circ}{\pi}$.

Zatem:

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$$

PRZYKŁAD

a) Wyraż w radianach kąt 40° .

x — miara łukowa kąta 40°

$$\frac{40^\circ}{180^\circ} = \frac{x}{\pi}$$

$$\frac{2}{9} = \frac{x}{\pi}$$

$$x = \frac{2}{9}\pi$$

b) Wyraż w radianach kąt -400° .

x — miara łukowa kąta -400°

$$\frac{-400^\circ}{180^\circ} = \frac{x}{\pi}$$

$$x = \frac{-400^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$$

$$x = -\frac{20\pi}{9}$$

c) Wyraż w stopniach kąt $\frac{3}{5}\pi$ radianów.

α — miara stopniowa kąta $\frac{3}{5}\pi$

$$\frac{\alpha}{180^\circ} = \frac{\frac{3}{5}\pi}{\pi}$$

$$\frac{\alpha}{180^\circ} = \frac{3}{5}$$

$$\alpha = \frac{3}{5} \cdot 180^\circ$$

$$\alpha = 108^\circ$$

d) Wyraż w stopniach kąt -3π radianów.

α — miara stopniowa kąta -3π

$$\frac{\alpha}{180^\circ} = \frac{-3\pi}{\pi}$$

$$\frac{\alpha}{180^\circ} = -3$$

$$\alpha = (-3) \cdot 180^\circ$$

$$\alpha = -540^\circ$$

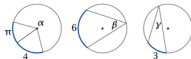
ZADANIE a) Wyraż w radianach kąt 420° . b) Wyraż w stopniach kąt $\frac{3}{4}\pi$ radianów.

zadania 1–10 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. a) W okręgu o promieniu 5 pewien kąt środkowy wyznacza łuk o długości 3. Podaj miarę łukową tego kąta.
b) W okręgu o promieniu $2\sqrt{3}$ kąt środkowy o mierze łukowej $\frac{3}{4}\pi$ wyznacza pewien łuk. Oblicz długość tego łuku.
c) Oblicz miarę łukową kąta środkowego okręgu opartego na $\frac{1}{10}$ okręgu.

2. Promień każdego z okręgów przedstawionych obok ma długość 4. Przy zaznaczonych łukach podano ich długości. Oblicz, ile radianów mają kąty α , β i γ .



3. Ustal:

a) miarę w radianach kątów:

$$720^\circ \quad 15^\circ \quad 10^\circ \quad 22,5^\circ \quad 75^\circ \quad 9^\circ$$

b) miarę w stopniach kątów o miarach łukowych:

$$\frac{2\pi}{3} \quad \frac{3\pi}{4} \quad \frac{5\pi}{6} \quad 6\pi \quad \frac{\pi}{8} \quad \frac{7\pi}{6}$$

4. Podaj wartości:

$$\cos \frac{\pi}{6} \quad \sin \frac{\pi}{4} \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \quad \cos 0 \quad \sin \pi \quad \operatorname{tg} 2\pi$$

5. a) Wyraż w radianach sumę miar kątów siedmiokąta.

b) Oblicz miarę łukową kąta 12-kąta foremnego.

Suma miar kątów wielokąta o n wierzchołkach (w stopniach) wynosi:

$$(n-2) \cdot 180^\circ$$

6. a) Wyraż w radianach kąty:

$$50^\circ \quad 7^\circ \quad 125^\circ \quad 24^\circ \quad 282^\circ \quad 315^\circ$$

b) Wyraż w stopniach kąty o miarach łukowych:

$$\frac{\pi}{5} \quad \frac{2\pi}{9} \quad \frac{7\pi}{8} \quad \frac{8\pi}{7} \quad 0,9\pi \quad 1,6\pi$$

7. a) Wyraż w radianach kąt 1° .

b) Korzystając z wyniku otrzymanego w a), wyraż w radianach kąty: 2° , 17° i 350° .

8. Gdy piszemy $\sin 1$, mamy na myśli liczbę równą sinusowi kąta o mierze 1 rad. Natomiast $\sin 1^\circ$ to sinus kąta 1° . Która liczba jest większa:

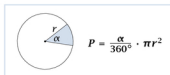
a) $\sin 1$ czy $\sin 1^\circ$, **b)** $\cos 0,5$ czy $\cos 0,5^\circ$, **c)** $\operatorname{tg} \pi$ czy $\operatorname{tg} 3,14^\circ$?

9. Jeżeli ciało porusza się po okręgu, to można badać jego prędkość kątową opisującą, o jaki kąt obraca się ono w jednostce czasu. Wyraż w rad/h prędkość kątową:

a) wskazówki minutowej zegara,

b) Ziemi obracającej się wokół swojej osi,

c) karuzeli wykonującej 1 obrót w ciągu 5 sekund.



10. Obok przypominamy wzór pozwalający obliczyć pole wycinka koła wyznaczonego przez kąt środkowy α , gdy miara kąta α podana jest w stopniach. Zapisz analogiczny wzór, gdy miara kąta α podana jest w radianach.

MINISPRAWDZIAN

51. Kąt o mierze 36° ma miarę łukową:

- A. π B. $\frac{\pi}{5}$ C. $\frac{\pi}{10}$ D. 3,6

52. Miara stopniowa kąta o mierze łukowej 1,2 należy do przedziału:

- A. $(40^\circ; 50^\circ)$ B. $(50^\circ; 60^\circ)$ C. $(60^\circ; 70^\circ)$ D. $(70^\circ; 80^\circ)$

53. Długość łuku L wyciętego z okręgu o promieniu r przez kąt środkowy o mierze łukowej β można obliczyć ze wzoru:

- A. $L = \beta r$ B. $L = \frac{\beta}{360} \cdot 2\pi r$ C. $L = 2\beta r$ D. $L = \frac{\beta}{180} \cdot \pi r^2$

54. Dwa kąty trójkąta mają miary $\frac{\pi}{5}$ i $\frac{\pi}{20}$. Wskaż miarę łukową trzeciego kąta tego trójkąta.

- A. $\frac{7}{4}\pi$ B. $\frac{3}{4}\pi$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{5}$

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE ZMIENNEJ RZECZYWISTEJ

- 1** Funkcje trygonometryczne, których własności omawialiśmy wcześniej, przyporządkowywały mierze kąta (w stopniach) pewną liczbę. Własności tych funkcji (w tym tożsamości trygonometryczne i wzory redukcyjne) są spełnione także wtedy, gdy miarę kąta zamiast w stopniach podamy w radianach.

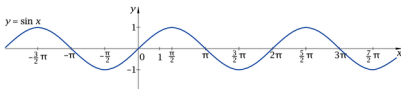
Dotychczas wykresy funkcji trygonometrycznych rysowaliśmy w układzie współrzędnych, w którym na osi poziomej były inne jednostki niż na osi pionowej.

ĆWICZENIE A Przerysuj poniższą oś. Pod zaznaczonymi punktami zapisz odpowiednie miary łukowe, a następnie zaznacz liczbę 1.



Jeśli zamienimy liczby stopni na odpowiadające im liczby radianów, będziemy mogli rozpatrywać funkcje trygonometryczne, których argumentami są liczby rzeczywiste.

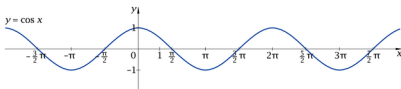
Poniżej przedstawiono fragmenty wykresów funkcji $y = \sin x$ oraz $y = \cos x$. Dziedziną obu tych funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych. Pod każdym wykresem podano kilka własności, które można z niego odczytać.



- Miejsca zerowe funkcji $y = \sin x$ to liczby mające postać $k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- Funkcja $y = \sin x$ przyjmuje najmniejszą wartość, równą -1 , gdy $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- Funkcja $y = \sin x$ jest rosnąca w każdym z przedziałów mających postać $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

ĆWICZENIE B Korzystając z wykresu funkcji $y = \sin x$, odpowiedz na pytania.

- Czy liczba $\sin 10$ jest dodatnią, czy — ujemną?
- Która liczba jest większa: $\sin(-5)$ czy $\sin(-6)$?
- Czy liczba $\sin(-1) + \sin 3$ jest dodatnią, czy — ujemną?

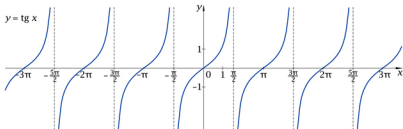


- Miejsca zerowe funkcji $y = \cos x$ to liczby mające postać $\frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- Funkcja $y = \cos x$ przyjmuje największą wartość równą 1 , gdy $x = 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- Funkcja $y = \cos x$ jest malejąca w każdym z przedziałów mających postać $\left(2k\pi; \pi + 2k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

ĆWICZENIE C Korzystając z wykresu funkcji $y = \cos x$, odpowiedz na pytania.

- Czy $\cos(-6)$ jest liczbą dodatnią, czy — ujemną?
- Która liczba jest większa: $\cos \frac{1}{2}$ czy $\cos\left(-\frac{1}{4}\right)$?
- Czy $\cos(-3) + \cos 4$ jest liczbą dodatnią, czy — ujemną?

Poniższy rysunek przedstawia fragment wykresu funkcji $y = \operatorname{tg} x$. Funkcja ta nie jest określona dla liczb mających postać $\frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Dziedziną tej funkcji jest więc zbiór $\mathbb{R} \setminus \{x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}\}$.



- Asymptoty wykresu funkcji $y = \operatorname{tg} x$ przecinają oś x w punktach o odciętej $\frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- Miejscami zerowymi funkcji $y = \operatorname{tg} x$ są liczby mające postać $k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- Funkcja $y = \operatorname{tg} x$ przyjmuje wartości ujemne, gdy $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- Funkcja $y = \operatorname{tg} x$ jest rosnąca w każdym z przedziałów $\left(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Na wykresach funkcji trygonometrycznych widać pewną powtarzalność. Na przykład dla funkcji $y = \operatorname{tg} x$ wartość dla dowolnego argumentu a jest taka sama jak dla argumentów $a + \pi$, $a - \pi$, $a + 2\pi$, $a - 2\pi$, $\dots$. Innymi słowy ta sama wartość powtarza się regularnie. Taką własność mają funkcje, które nazywamy okresowymi.

Funkcję f nazywamy **okresową**, jeśli istnieje taka dodatnia liczba t , że dla każdego argumentu x liczba $x + kt$ (gdzie $k \in \mathbb{Z}$) też należy do dziedziny funkcji oraz $f(x) = f(x + kt)$. Liczbę t nazywamy **okresem funkcji**. Najmniejszy okres funkcji (o ile istnieje) nazywamy okresem zasadniczym.

Funkcje trygonometryczne są okresowe, ponieważ dla dowolnego argumentu x i dla dowolnej liczby całkowitej k zachodzą następujące równości:

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(x + 2k\pi) & \cos x &= \cos(x + 2k\pi) \\ \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg}(x + k\pi) \end{aligned}$$

Okresem zasadniczym funkcji $y = \sin x$, a także funkcji $y = \cos x$ jest liczba 2π . Natomiast okresem zasadniczym funkcji $y = \operatorname{tg} x$ jest liczba π .

Oś y jest osią symetrii wykresu funkcji $y = \cos x$. Funkcje o takiej własności nazywamy **parzystymi**.

Funkcja $y = \cos x$ jest parzysta, więc $\cos(-x) = \cos x$.

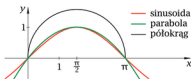
Początek układu współrzędnych jest środkiem symetrii wykresu funkcji $y = \sin x$ i wykresu funkcji $y = \operatorname{tg} x$. Funkcje o takiej własności nazywamy **nieparzystymi**.

Funkcje $y = \sin x$ i $y = \operatorname{tg} x$ są nieparzyste, więc prawdziwe są równości $\sin(-x) = -\sin x$ i $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

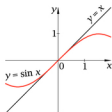
Warto wiedzieć

Dzięki potraktowaniu funkcji trygonometrycznych jako funkcji zmiennej rzeczywistej możemy porównać kształt ich wykresów z innymi krzywymi.

Na rysunku obok przedstawiono fragment sinusoidy, półokrąg i parabolę o wierzchołku $(\frac{\pi}{2}, 1)$ i miejscach zerowych 0 i π . Jak widać, kształt sinusoidy w przedziale $(0; \pi)$ znacznie różni się od półokręgu i nie jest też identyczny z kształtem zaznaczonej paraboli.



Na kolejnych rysunkach porównano wykresy funkcji trygonometrycznych z wykresami innych funkcji.



Wykres funkcji $y = \sin x$ ma z prostą opisaną równaniem $y = x$ jeden punkt wspólny.



Wykres funkcji $y = \cos x$ ma z parabolą o równaniu $y = -x^2 + 1$ jeden punkt wspólny.



Wykresy funkcji $y = \operatorname{tg} x$ i $y = x^3$ mają w przedziale $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ jeden punkt wspólny.

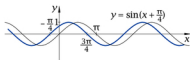
zadania 1-8

- III Sinusoida i cosinusoida mają taki sam kształt. Jedną z tych krzywych można otrzymać z drugiej w wyniku przesunięcia o $\frac{\pi}{2}$ wzdłuż osi x . Związki te opisują wzory podane poniżej.

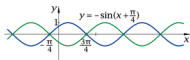
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Przekształcając wykresy funkcji trygonometrycznych, możemy też tworzyć wykresy innych funkcji i odczytywać ich własności.

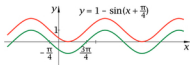
PRZYKŁAD

 Naszkicuj wykres funkcji $y = 1 - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.


Najpierw szkicujemy wykres funkcji $y = \sin x$.
Przesuwając go o wektor $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$, otrzymujemy wykres funkcji $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.



Odbijając wykres funkcji $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ symetrycznie względem osi x , otrzymujemy wykres funkcji $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.



Po przesunięciu o wektor $[0, 1]$ wykresu funkcji $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ otrzymujemy wykres funkcji $y = 1 - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

ZADANIE

 Naszkicuj wykres funkcji $y = -2 + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

zadania 9–18 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Naszkicuj wykres funkcji $y = \sin x$.

a) Wypisz wszystkie liczby z przedziału $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$, dla których wartości tej funkcji są równe 1.

b) Ustal, ile miejsc zerowych ma funkcja w przedziale $\langle 0; 8\pi \rangle$.

c) Które z podanych liczb są dodatnie?

$$\sin \frac{\pi}{8} \quad \sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) \quad \sin 3\pi \quad \sin(2\pi + 1)$$

d) Ustaw w kolejności od najmniejszej do największej liczby:

$$\sin 3 \quad \sin 3,5 \quad \sin 3,14 \quad \sin \pi$$

e) Ustal, dla ilu argumentów z przedziału $\langle 0; 60 \rangle$ wartości funkcji są liczbami całkowitymi.

2. Naszkicuj wykres funkcji $y = \cos x$.

a) Wypisz miejsca zerowe tej funkcji należące do przedziału $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$.

b) Podaj pięć argumentów, dla których wartości funkcji są równe -1.

c) Uporządkuj podane liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

$$\cos 2 \quad \cos 3 \quad \cos 4 \quad \cos 5$$

d) Które z podanych liczb są ujemne?

$$\cos \frac{3}{4} \quad \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad \cos 10\pi \quad \cos \left(-\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

e) Ustal, ile jest liczb w przedziale $\langle -10\pi; 10\pi \rangle$, dla których wartości funkcji są liczbami całkowitymi.

3. a) Podaj przedziały monotoniczności funkcji $y = \sin x$ oraz funkcji $y = \cos x$.

b) Ustal, dla jakich argumentów dodatnie są wartości funkcji $y = \sin x$, a dla jakich — wartości funkcji $y = \cos x$.

c) Znajdź wszystkie argumenty, dla których wartości funkcji $y = \sin x$ i $y = \cos x$ są jednocześnie ujemne.

4. Naskicuj wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$.

a) Ile miejsc zerowych ma ta funkcja w przedziale $(-5\pi; -\pi)$?

b) Ile liczb z przedziału $\langle -3\pi; 3\pi \rangle$ nie należy do dziedziny funkcji?

c) Podaj przykłady argumentów, dla których wartości funkcji są mniejsze od -1 .

• d) Uporządkuj podane liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

$$\operatorname{tg}(-1) \quad \operatorname{tg} 1 \quad \operatorname{tg} 2 \quad \operatorname{tg} 3 \quad \operatorname{tg} 4$$

5. Ustal, które z podanych punktów należą do wykresu funkcji $y = \sin x$, które — do wykresu funkcji $y = \cos x$, a które — do wykresu funkcji $y = \operatorname{tg} x$.

$$A = (0, 1) \quad C = \left(-\frac{3}{2}\pi, 0\right) \quad E = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right) \quad G = \left(-\frac{\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$B = \left(-\frac{\pi}{2}, -1\right) \quad D = \left(-\frac{3}{2}\pi, 1\right) \quad F = \left(-\frac{\pi}{4}, -1\right) \quad H = \left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$$

6. Przedstaw w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g oraz podaj współrzędne punktów przecięcia się tych wykresów.

a) $f(x) = \sin x, \quad g(x) = x - \pi$

d) $f(x) = \sin x, \quad g(x) = -x(x + \pi)$

b) $f(x) = \cos x, \quad g(x) = -x + 1$

e) $f(x) = \cos x, \quad g(x) = x^2 - \frac{\pi^2}{4}$

c) $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{2}{\pi}x$

f) $f(x) = \cos x, \quad g(x) = -\frac{2}{\pi}x + 1$

7. Określ zbiór wartości funkcji.

a) $y = \cos x - 3$

c) $y = -\left|\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right|$

e) $y = \operatorname{tg}^2 x + 2$

b) $y = 5 - |\sin x|$

d) $y = \sin^2 x - 5$

f) $y = (\cos x - 2)^2$

8. Określ dziedzinę i zbiór wartości funkcji.

a) $y = \sin^2 x - 3 \cos^2 x$

b) $y = \operatorname{tg} x \cdot \cos x$

c) $y = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$

d) $y = \frac{-2}{\cos x}$

9. Naskicuj wykres funkcji.

a) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

c) $y = 3 + \sin x$

e) $y = |\cos x|$

b) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

d) $y = -\operatorname{tg} x$

f) $y = \sin(-x)$

10. Przedstaw w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g . Ustal, dla jakich argumentów funkcje te mają równe wartości.

a) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x + 1$

c) $f(x) = \sin x + 2$, $g(x) = \cos x + 1$

b) $f(x) = \sin x - 1$, $g(x) = \cos x$

d) $f(x) = |\sin x|$, $g(x) = 1 - |\cos x|$

11. Naskicuj wykres podanej funkcji. Ustal, czy ta funkcja ma miejsca zerowe. Jeśli tak, to je podaj.

a) $y = 2 - \sin x$

d) $y = |\cos x| + 3$

g) $y = 2 + |\sin x|$

b) $y = -\cos(x + \pi)$

e) $y = -|\sin x|$

h) $y = |1 - \sin x|$

c) $y = |\operatorname{tg} x| - 1$

f) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + 1$

i) $y = |\operatorname{tg} x| + 1$

12. Podany wzór opisuje funkcję, której fragment wykresu jest przedstawiony na jednym z czterech rysunków. Wskaż ten rysunek.

a) $y = -\sin x$

d) $y = -\cos x$

g) $y = -\operatorname{tg} x$

b) $y = \sin(x - \pi)$

e) $y = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

h) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

c) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

f) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

i) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$



13. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach (zob. s. 97), wyznacz granicę podanego ciągu.

a) $a_n = \frac{\sin n}{n}$

b) $a_n = \frac{4 \cos 3n}{n^2 + 5}$

c) $a_n = \frac{\cos \frac{n\pi}{5}}{n+2}$

14. Ustal, dla jakiej wartości a jest spełniony podany warunek.

a) Zbiorem wartości funkcji $y = a - \sin x$ jest przedział $\langle -9; -7 \rangle$.

b) Funkcja $y = |\cos x| + a$ nie ma miejsc zerowych.

c) Wykres funkcji $y = -\cos(x + a)$ jest taki sam, jak wykres funkcji $y = \cos x$.

• **15.** Naszkicuj wykres funkcji.

$$\text{a) } y = \begin{cases} \cos x, & \text{gd}y \ x \in \mathbb{R} \setminus \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ -\cos x, & \text{gd}y \ x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle \end{cases} \quad \text{b) } y = \begin{cases} 1 + \sin x, & \text{gd}y \ x \in \mathbb{R} \setminus \left\langle \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right\rangle \\ -1 - \sin x, & \text{gd}y \ x \in \left\langle \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right\rangle \end{cases}$$

16. Podaj liczbę punktów wspólnych tangensoidy z wykresem podanej funkcji w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

a) $y = -\operatorname{tg} x$

b) $y = 1 + \sin x$

c) $y = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

• **17. a)** Czy wykres funkcji $y = \frac{1}{10}x$ ma więcej punktów wspólnych z sinusoidą czy z cosinusoidą?

b) Ile co najmniej punktów wspólnych ma sinusoida z wykresem funkcji $y = \frac{4}{5\pi}x$, a ile — z wykresem funkcji $y = -\frac{2}{5\pi}x$?

18. Naszkicuj odpowiednie wykresy funkcji i rozwiąż równanie.

a) $\sin x = \cos x$

c) $\sin x + \cos x = 0$

e) $|\cos x| + \sin x = 1$

b) $\cos x = 2 - \sin x$

d) $1 + \sin x - \cos x = 0$

f) $|\sin x| - \cos x = 0$

MINISPRAWDZIAN

51. Wskaż zdanie fałszywe.

A. W przedziale $\left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$ funkcja $y = \sin x$ jest malejąca.

B. Dla argumentu π funkcja $y = \cos x$ przyjmuje wartość 1.

C. Argument 2π jest miejscem zerowym funkcji $y = \operatorname{tg} x$.

D. Prosta prostopadła do osi x i przecinająca ją w punkcie $\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$ jest asymptotą wykresu funkcji $y = \operatorname{tg} x$.

52. Która z poniższych wartości jest największa?

A. $\sin 3$

B. $\cos 3$

C. $\operatorname{tg} 3$

D. $\sin(-3)$

53. Który z punktów nie jest punktem przecięcia się wykresu funkcji $y = \sin x$ z wykresem funkcji $y = \cos x$?

A. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

B. $\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

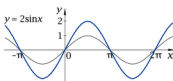
C. $\left(\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

D. $\left(\frac{9\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

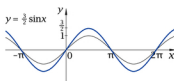
FUNKCJE O WZORACH $y = a \sin x$, $y = \sin ax$...

ĆWICZENIE A Podaj wartości funkcji $y = \sin x$ oraz funkcji $y = 2 \sin x$ dla argumentów: 0 , $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $-\pi$. Czy wykresy tych funkcji mają punkty wspólne?

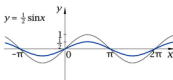
Na poniższych rysunkach czarnym kolorem zaznaczono fragment sinusoide, a niebieskim — fragmenty wykresów funkcji $y = a \sin x$.



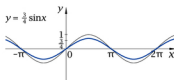
Zbiorem wartości funkcji $y = 2 \sin x$ jest przedział $\langle -2; 2 \rangle$. Funkcja ta ma te same miejsca zerowe co funkcja $y = \sin x$.



Zbiorem wartości funkcji $y = \frac{1}{2} \sin x$ jest przedział $\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle$. Funkcja ta ma te same miejsca zerowe co funkcja $y = \sin x$.



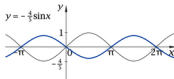
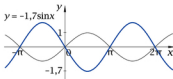
Zbiorem wartości funkcji $y = \frac{3}{4} \sin x$ jest przedział $\langle -\frac{3}{4}; \frac{3}{4} \rangle$. Funkcja ta ma te same miejsca zerowe co funkcja $y = \sin x$.



Zbiorem wartości funkcji $y = \frac{3}{4} \sin x$ jest przedział $\langle -\frac{3}{4}; \frac{3}{4} \rangle$. Funkcja ta ma te same miejsca zerowe co funkcja $y = \sin x$.

Wykres funkcji $y = a \sin x$, gdzie $a > 0$, kształtem przypomina sinusoidę „ściśniętą” lub „rozciągniętą” wzdłuż osi y .

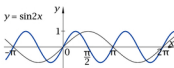
Gdy $a < 0$, to dodatkowo musimy odpowiedni wykres odbić symetrycznie względem osi x .



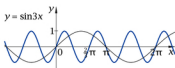
Podobnie można otrzymać wykresy funkcji $y = a \cos x$.

ĆWICZENIE B Podaj wartości funkcji $y = \sin \frac{1}{2}x$ dla argumentów: 0 , $\frac{\pi}{2}$, 2π , $-\frac{\pi}{2}$.

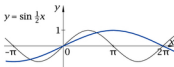
Na poniższych rysunkach czarnym kolorem zaznaczono fragment sinusoide, a niebieskim — fragmenty wykresów funkcji $y = \sin bx$.



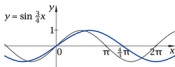
Okres zasadniczy funkcji $y = \sin 2x$ jest 2 razy mniejszy niż okres funkcji $y = \sin x$, wynosi więc π .



Okres zasadniczy funkcji $y = \sin 3x$ jest 3 razy mniejszy niż okres funkcji $y = \sin x$, wynosi więc $\frac{2}{3}\pi$.



Okres zasadniczy funkcji $y = \sin \frac{1}{2}x$ jest 2 razy większy niż okres funkcji $y = \sin x$, wynosi więc 4π .



Okres zasadniczy funkcji $y = \sin \frac{3}{4}x$ jest równy ilorazowi 2π przez $\frac{3}{4}$, jest zatem równy $\frac{8}{3}\pi$.

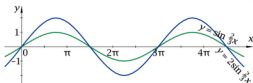
Każdy z tych wykresów kształtem przypomina sinusoidę „ściśniętą” lub „rozciągniętą” wzdłuż osi x . Okres zasadniczy funkcji $y = \sin bx$ ($b \neq 0$) jest równy $\frac{2\pi}{|b|}$. W ten sam sposób można ustalić okres funkcji $y = \cos bx$.

PRZYKŁAD

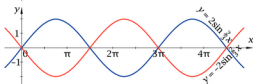
Naszkicuj wykres funkcji $y = -2 \sin \frac{2}{3}x$.



Najpierw szkicujemy wykres funkcji $y = \sin \frac{2}{3}x$. Okres tej funkcji wynosi $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$.



Następnie szkicujemy wykres funkcji $y = 2 \sin \frac{2}{3}x$.



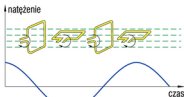
Po odbiciu symetrycznym wykresu funkcji $y = 2 \sin \frac{2}{3}x$ względem osi x otrzymamy wykres funkcji $y = -2 \sin \frac{2}{3}x$.

ZADANIE

Naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{1}{2} \cos 2x$.

Warto wiedzieć!

Krzywe, które kształtem przypominają sinusoidę, pojawiają się przy opisie różnych zjawisk fizycznych, szczególnie takich, które są związane z ruchem obrotowym. Na przykład gdy obracamy ze stałą prędkością metalową ramkę w jednorodnym polu magnetycznym, powstaje w niej prąd zmienny. Wykres na rysunku obok ilustruje, jak zmienia się natężenie tego prądu.



ZESTAW ZADAŃ

1. Naszkicuj wykres i odczytaj miejsca zerowe funkcji.

a) $y = 2 \cos x$

b) $y = \frac{5}{4} \sin x$

c) $y = \sin \frac{1}{4}x$

d) $y = \cos 6x$

2. Podaj zbiór wartości oraz okres zasadniczy funkcji.

a) $y = \frac{3}{4} \cos x$

c) $y = \cos 3x$

e) $y = 5 \sin 4x$

g) $y = 4 \sin \pi x$

b) $y = 3 \sin x$

d) $y = \sin \frac{1}{3}x$

f) $y = \frac{1}{2} \cos \frac{3}{2}x$

h) $y = \frac{2}{7} \cos \frac{\pi}{2}x$

3. Naszkicuj wykres funkcji i określ jej zbiór wartości.

a) $y = 2 \sin 3x$

b) $y = -\frac{1}{3} \sin \frac{1}{2}x$

c) $y = 3 \cos \frac{2}{3}x$

d) $y = -\frac{2}{3} \cos \frac{3}{2}x$

4. Na poniższych rysunkach są przedstawione fragmenty wykresów funkcji:

① $y = -\cos \frac{1}{2}x$

③ $y = -2 \cos 2x$

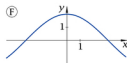
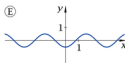
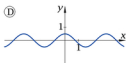
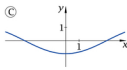
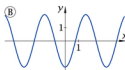
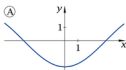
⑤ $y = \frac{1}{2} \cos 2x$

② $y = -\frac{1}{2} \cos 2x$

④ $y = -2 \cos \frac{1}{2}x$

⑥ $y = 2 \cos \frac{1}{2}x$

Dopasuj wzory funkcji do wykresów.



5. Znajdź wzór funkcji typu $y = a \sin bx$, której zbiorem wartości jest podany przedział i której okres zasadniczy jest równy t .

a) $\langle -5; 5 \rangle$, $t = 5\pi$

b) $\langle -\frac{3}{4}; \frac{3}{4} \rangle$, $t = \frac{\pi}{2}$

c) $\langle -7; 7 \rangle$, $t = 6$

6. Przedstaw wykresy podanych funkcji w jednym układzie współrzędnych, a następnie podaj współrzędne punktów przecięcia tych wykresów.

a) $y = 2 \cos x$

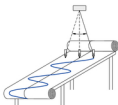
b) $y = 3 \sin \frac{1}{2}x$

c) $y = 2 \sin x$

$y = 3 \cos \frac{1}{3}x$

$y = -\frac{1}{3} \sin \frac{3}{2}x$

$y = -\frac{1}{2} \sin 2x$

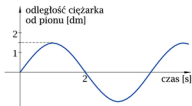


Do ciężarka wahadła przymocowano pisak na sprężynie (zob. rysunek). Gdy wahadło się porusza (niekończąc długo), wtedy linia, którą kreśli pisak na przesuwałcej się papierowej taśmie, ma kształt krzywej będącej wykresem funkcji typu $y = a \sin bx$. Czas jednego wahanía (tam i z powrotem) nazywamy okresem wahadła. Amplituda ruchu wahadła to największa odległość, na jaką ciężarek wahadła oddala się od pionu.

7. Przeczytaj informacje w ramce.

a) Rysunek obok przedstawia linię, którą nakreślił pisak. Odczytaj okres i amplitudę ruchu wahadła. Podaj wzór funkcji, której wykresem jest ta linia.

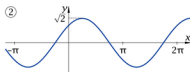
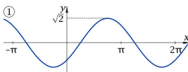
b) Dla innego wahadła pisak nakreślił krzywą, która jest wykresem funkcji $y = \frac{3}{4} \sin \frac{2\pi x}{5}$. Podaj okres i amplitudę ruchu tego wahadła.



8. Na poniższych rysunkach przedstawiono fragmenty wykresów dwóch funkcji: $f(x) = \sin x + \cos x$ oraz $g(x) = \sin x - \cos x$.

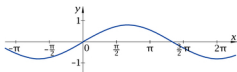
a) Który z nich jest wykresem funkcji f , a który — funkcji g ?

b) Wzory tych funkcji można zapisać w postaci $y = a \sin(x - p)$. Zapisz w tej postaci wzory funkcji f i g .



MINISPRAWDZIAN

51. Dana jest funkcja $f(x) = 3 \cos 4x$. Które zdanie nie jest prawdziwe?
- A. W przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$ funkcja f ma osiem miejsc zerowych.
 B. W przedziale $\langle \frac{3\pi}{4}; \pi \rangle$ funkcja f jest rosnąca.
 C. W przedziale $\langle -\pi; 0 \rangle$ wykres funkcji f przecina prostą o równaniu $y = -2$ w czterech punktach.
 D. Dla argumentów z przedziału $\langle -\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2} \rangle$ wartości funkcji f są dodatnie.
52. Rysunek przedstawia fragment wykresu jednej z podanych funkcji. Której?



A. $y = \frac{5}{4} \sin \frac{3}{4}x$

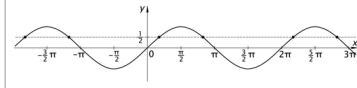
B. $y = \frac{4}{5} \sin \frac{3}{4}x$

C. $y = \frac{5}{4} \sin \frac{4}{3}x$

D. $y = \frac{4}{5} \sin \frac{4}{3}x$

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI TRYGONOMETRYCZNE

- I** ĆWICZENIE A Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji $y = \sin x$. Podaj pierwsze współrzędne punktów zaznaczonych kropkami.

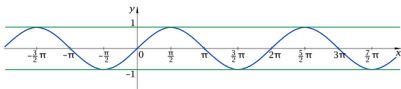


Rozważmy równanie typu:

$$\sin x = a$$

Korzystając z sinusoidy, łatwo zauważyć, że takie równanie nie ma rozwiązań, gdy $|a| > 1$, natomiast w pozostałych przypadkach równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań. Aby znaleźć wszystkie rozwiązania równania tego typu, wystarczy wyznaczyć rozwiązania z przedziału o długości 2π , na przykład z przedziału $\langle -\pi; \pi \rangle$, a następnie skorzystać z okresowości funkcji $y = \sin x$.

Gdy $a = 1$ lub $a = -1$, lub $a = 0$, rozwiązania odpowiednich równań można łatwo odczytać z wykresu.



$$\sin x = 1, \text{ gdy } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -1, \text{ gdy } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0, \text{ gdy } x = k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Załóżmy, że $a \in (-1; 0)$ lub $a \in (0; 1)$. Wówczas w przedziale o długości 2π są dwie liczby x_1 i x_2 spełniające równanie $\sin x = a$ (zob. rysunki poniżej).

Zatem korzystając z okresowości funkcji $y = \sin x$, możemy określić dwie rodziny rozwiązań tego równania:

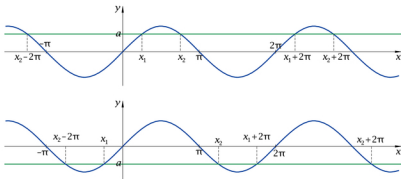
$$x = x_1 + 2k\pi \text{ lub } x = x_2 + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Zauważmy, że z symetryczności sinusoidy wynika:

Jeśli $a \in (0; 1)$, to $x_2 = \pi - x_1$ (zob. pierwszy rysunek).

Jeśli $a \in (-1; 0)$, to $x_2 = \pi + |x_1|$ (zob. drugi rysunek). Ponieważ w tym wypadku $x_1 < 0$, więc $|x_1| = -x_1$. Stąd $x_2 = \pi - x_1$.

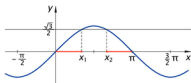
Pokazaliśmy więc, że dwie rodziny rozwiązań można określić w sposób zapisany pod rysunkami.



$$\sin x = a, \text{ gdy } x = x_1 + 2k\pi \text{ lub } x = \pi - x_1 + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

PRZYKŁAD 1 Rozwiąż równanie.

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$



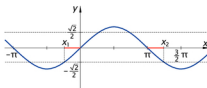
$$x_1 = \frac{\pi}{3}, \quad x_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Najpierw znajdujemy wszystkie rozwiązania w przedziale o długości 2π , np. w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



$$x_1 = -\frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{2}$

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

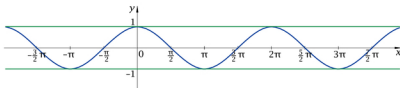
Uwaga. Zauważmy też, że w przykładzie 1 w podpunkcie b) moglibyśmy przyjąć, że $x_2 = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3}{4}\pi$, a wtedy zapis rozwiązania byłby następujący: $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Te równości opisują ten sam zbiór rozwiązań co odpowiedź w przykładzie.

ĆWICZENIE B Podaj liczby z przedziału $\langle 4\pi; 7\pi \rangle$, które należą do zbiorów rozwiązań równań omówionych w przykładzie 1.

Rozważmy równanie typu:

$$\cos x = a, \quad \text{gdzie } a \in \langle -1; 1 \rangle$$

Podobnie jak w wypadku sinusoidy, gdy $a = 0$ lub $a = 1$, lub $a = -1$, rozwiązanie odpowiednich równań łatwo można odczytać z wykresu.

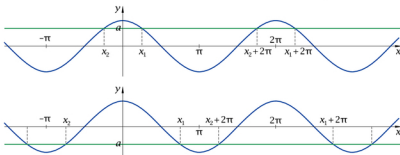


$\cos x = 1$, gdy $x = 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = -1$, gdy $x = -\pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

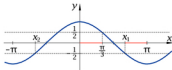
$\cos x = 0$, gdy $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

W przedziale o długości 2π są dwie liczby x_1 i x_2 spełniające równanie $\cos x = a$. Korzystając z okresowości funkcji $y = \cos x$ i symetryczności jej wykresu, otrzymujemy dwie rodziny rozwiązań rozważanego równania.



$\cos x = a$, gdy $x = x_1 + 2k\pi$ lub $x = -x_1 + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

PRZYKŁAD 2 Rozwiąż równanie $\cos x = -\frac{1}{2}$.



Znajdujemy wszystkie rozwiązania równania w przedziale o długości 2π , np. w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$.

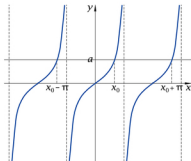
$$x_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}, \quad x_2 = -\frac{2\pi}{3}$$

$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, więc $\cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2}$

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

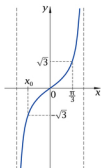
ZADANIE Rozwiąż równanie $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aby rozwiązać równanie $\operatorname{tg} x = a$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą, wystarczy znaleźć rozwiązanie z przedziału o długości π , np. $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, a następnie skorzystać z okresowości funkcji $y = \operatorname{tg} x$.



$\operatorname{tg} x = a$, gdy $x = x_0 + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

PRZYKŁAD 3 Rozwiąż równanie $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.



Znajdujemy rozwiązanie w przedziale $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

$$x_0 = -\frac{\pi}{3}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

ZADANIE Rozwiąż równanie $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

ĆWICZENIE C Rozwiąż równanie.

a) $\operatorname{tg} x = 1$

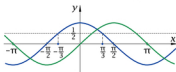
b) $\operatorname{tg} x = 0$

PRZYKŁAD 4 Rozwiąż równanie.

$$\sin x \cdot (1 - 2 \cos x) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{lub} \quad 1 - 2 \cos x = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$



..... Znajdujemy wszystkie rozwiązania równania w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$.

$$x = k\pi \quad \text{lub} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

ZADANIE Rozwiąż równanie $\cos x (2 \sin x + \sqrt{3}) = 0$.

zadania 1–5 ►

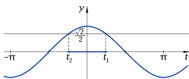
II Kolejne przykłady pokazują, jak rozwiązuje się nieco bardziej skomplikowane równania.

PRZYKŁAD 5 Rozwiąż równanie.

$$3 - \sqrt{2} \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Niech $5x + \frac{\pi}{4} = t$. Wtedy $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



..... Znajdujemy wszystkie rozwiązania równania $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$.

$$t_1 = \frac{\pi}{4}, \quad t_2 = -\frac{\pi}{4}$$

$$t = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad t = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

$$5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad 5x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$5x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = 2k\pi \quad \text{lub} \quad 5x = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \frac{2}{5}k\pi \quad \text{lub} \quad x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

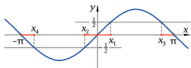
ZADANIE Rozwiąż równanie $2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.

PRZYKŁAD 6 Rozwiąż równanie.

$$4 \sin^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad \sin x = -\frac{1}{2}$$



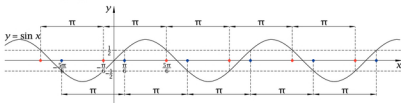
Znajdujemy wszystkie rozwiązania równania w przedziale $(-\pi; \pi)$.

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = -\frac{\pi}{6}, \quad x_3 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}, \quad x_4 = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ZADANIE Rozwiąż równanie $4 \cos^2 x = 3$.

Uwaga. Rozwiązania równania z przykładu 6 można zapisać w prostszy sposób. Na rysunku poniżej zaznaczono rozwiązania tego równania w przedziale $(-\frac{3\pi}{2}; \frac{9\pi}{2})$.



Z rysunku widać, że każda z zaznaczonych liczb należy do jednej z dwóch rodzin:

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{lub} \quad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

zadania 6-8 ►

III Przy rozwiązywaniu niektórych równań przydają się tożsamości trygonometryczne.

PRZYKŁAD 7 Rozwiąż równanie.

a) $3 \sin x = \sqrt{3} \cos x$

Przypadek 1. Zał. $\cos x = 0$

$$3 \sin x = 0$$

$$\sin x = 0$$

Sprzeczność z założeniem.

Przypadek 2. Zał. $\cos x \neq 0$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$b) \frac{\sin x \cos x}{\operatorname{tg} x} = 1$$

Założenia:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x \neq k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\sin x \cos x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\sin x \cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \cos^2 x$$

$$\cos^2 x = 1$$

$$\cos x = 1 \quad \text{lub} \quad \cos x = -1$$

$$x = 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \pi + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Równanie nie ma rozwiązań.

Równanie ma sens dla liczb, dla których $\operatorname{tg} x$ jest określony i różny od 0.

Przekształcamy lewą stronę równania, korzystając z tożsamości $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Każda z liczb $2k\pi$ oraz $\pi + 2k\pi$ jest wielokrotnością liczby π , więc nie spełnia założenia $x \neq k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

$$c) 2 \sin^2 x + 7 \cos x + 2 = 0$$

$$2(1 - \cos^2 x) + 7 \cos x + 2 = 0$$

$$-2 \cos^2 x + 7 \cos x + 4 = 0$$

$$\text{Niech } \cos x = t.$$

$$-2t^2 + 7t + 4 = 0$$

$$\Delta = 49 - 4 \cdot (-2) \cdot 4 = 81$$

$$t_1 = \frac{-7-9}{2 \cdot (-2)} = 4$$

$$t_2 = \frac{-7+9}{2 \cdot (-2)} = -\frac{1}{2}$$

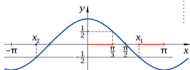
$$\cos x = 4 \quad \text{lub} \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

równanie sprzeczne

Rozwiązujemy równanie kwadratowe.

Równanie $\cos x = 4$ nie ma rozwiązań, gdyż $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Znajdujemy wszystkie rozwiązania równania $\cos x = -\frac{1}{2}$ w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$.



$$x_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi, \quad x_2 = -\frac{2}{3}\pi$$

$$x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $2 \sin x + 2\sqrt{3} \cos x = 0$

b) $\operatorname{tg} x \cdot \cos x = 1$

c) $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$

zadania 9–11 ►

IV Umiejętności rozwiązywania równań trygonometrycznych można wykorzystać przy rozwiązywaniu nierówności.

PRZYKŁAD 8 Rozwiąż nierówność.

a) $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$



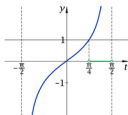
Znajdujemy rozwiązania równania $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ w dowolnym przedziale o długości 2π , w tym wypadku $\left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, i zaznaczamy na osi x , które liczby z tego przedziału spełniają nierówność.

$$x_1 = \frac{\pi}{3}, \quad x_2 = -\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3}$$

$$x \in \left(-\frac{4\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Nierówność spełnia każda liczba należąca do któregośkolwiek z przedziałów podanej postaci.

b) $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x > 1$



Niech $\frac{1}{2}x = t$. Wtedy $\operatorname{tg} t > 1$.

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < t < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{1}{2}x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

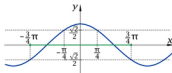
$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$$

$$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Odczytujemy z wykresu rozwiązania nierówności w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

c) $2 \cos^2 x \leq 1$

$$\cos^2 x \leq \frac{1}{2}, \quad \text{zatem} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$



W przedziale o długości 2π , np. $(-\pi; \pi)$, zaznaczmy zbiór wszystkich liczb spełniających nierówności $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$x \in \left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \quad \text{lub} \quad x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

ZADANIE Rozwiąż nierówność.

a) $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\operatorname{tg} 3x < \sqrt{3}$

c) $4 \sin^2 x \geq 3$

Uwaga. W powyższym przykładzie w podpunkcie c) można by zapisać rozwiązanie krócej: $x \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi\right)$.

zadania 12–15 ►

ZESTAW ZADAŃ

◀ I 1. Podaj wszystkie rozwiązania równania należące do przedziału $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$.

a) $\sin x = \frac{1}{2}$ b) $\sin x = -1$ c) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. Rozwiąż równanie.

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos x = -\frac{1}{2}$ c) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ d) $\operatorname{tg} x = -1$

3. Rozwiąż równanie.

a) $\operatorname{tg}^2 x = 1$ b) $2 \sin^2 x = 1$ c) $4 \cos^2 x = 3$ d) $\operatorname{tg}^2 x = 3$

4. Rozwiąż równanie.

a) $\sin x \cdot \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) = 0$ c) $\cos x \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x = 0$
b) $\cos^2 x - \cos x = 0$ d) $(\cos x - 2) \left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$

5. Znajdź miejsca zerowe podanej funkcji.

a) $y = -2 \sin x + 1$ c) $y = 5 \operatorname{tg} x + 5\sqrt{3}$
b) $y = \frac{1}{3} \cos x + \frac{1}{2\sqrt{3}}$ d) $y = \sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1$

◀ II 6. Rozwiąż równanie.

a) $\operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{5} \right) = \sqrt{3}$ c) $2 \sin(3x + 1) = 1$
b) $\cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\operatorname{tg}(x - 5) - \sqrt{3} = 0$

7. Rozwiąż równanie.

a) $2 \sin^2 \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) - 1 = 0$ c) $4 \cos^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \right) = 3$
b) $\operatorname{tg}^2 \left(\frac{3x - \pi}{6} \right) + 2 = 5$ d) $\operatorname{tg}^2 \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = 1$

8. Rozwiąż równanie.

a) $2 \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x - 3 = 0$ c) $\frac{1}{\cos x} + \cos x = \cos^2 x + 1$
b) $2 \cos^2 x = \cos x + 1$ d) $\frac{3}{\operatorname{tg} x} = 3 \operatorname{tg} x + 2\sqrt{3}$

◀ III 9. Rozwiąż równanie.

a) $\sin x = \sqrt{3} \cos x$ c) $3 \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$
b) $\sqrt{3} \cos x = 3 \sin x$ d) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 4 \cos x$

10. Rozwiąż równanie.

a) $\sin^2 x - \cos x \cdot \operatorname{tg} x = 0$

d) $\frac{\operatorname{tg}(x - \pi)}{\sin(x - \pi)} = \sqrt{2}$

b) $-2 \sin^2 x + 7 \cos x + 5 = 0$

e) $(1 - \cos 3x)(1 + \cos 3x) = \sin 3x$

c) $\sin x + 1 = 2 \cos^2 x$

f) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{2}{\sin \frac{x}{2}}$

11. Znajdź współrzędne punktów przecięcia wykresów funkcji f i g .

a) $f(x) = \sin(x - \pi)$

b) $f(x) = \sin x$

$g(x) = -\cos x$

$g(x) = \operatorname{tg} x$

IV 12. Rozwiąż nierówność.

a) $\sin x \leq \frac{1}{2}$

c) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\operatorname{tg} x < 1$

b) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\cos x \geq -\frac{1}{2}$

f) $\operatorname{tg} x > -\frac{\sqrt{3}}{3}$

13. Rozwiąż nierówność.

a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) > -1$

14. Rozwiąż nierówność.

a) $1 - 2 \sin x > 3$

b) $1 - 2\sqrt{2} \cos x < 3$

c) $2 - 3 \operatorname{tg} x \leq 5$

15. Rozwiąż nierówność.

a) $4 \cos^2 x < 3$

b) $\sin^2 x \geq \frac{1}{2}$

c) $\operatorname{tg}^2 x \geq 3$

MINISPRAWDZIANS1. Ile rozwiązań równania $\cos x = -0,7$ należy do przedziału $(-2\pi; \pi)$?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

S2. Miejscami zerowymi funkcji $y = 3 + 3 \sin x$ są dla $k \in \mathbb{Z}$ liczby postaci:

A. $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

B. $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

C. $-\frac{\pi}{6} + 3k\pi$

D. $-\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi$

S3. Zbiór rozwiązań nierówności $1 + 2 \operatorname{tg} x \geq 3$ to:

A. $\left\langle \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

C. $\left\langle \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi \right\rangle$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

B. $\left\langle \frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

D. $\left\langle -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

SINUS, COSINUS I TANGENS SUMY I RÓŻNICY KĄTÓW

- 1 Znasz już podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi. Omówimy teraz kilka innych tożsamości trygonometrycznych. Poniżej podano wzory na sinus sumy i różnicy oraz cosinus sumy i różnicy dwóch kątów. Równości te zachodzą oczywiście zarówno wtedy, gdy miary kątów są podane w stopniach, jak i wtedy, gdy są podane w radianach.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Udowodnimy wzór na cosinus różnicy kątów.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Dowód

Na rysunku przedstawiono dwa kąty α i β umieszczone w układzie współrzędnych. Na ramionach końcowych wybrano punkty A i B , których odległości od początku układu współrzędnych są równe 1.

Zatem:

$$A = (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad B = (\cos \beta, \sin \beta)$$

Długość odcinka AB można obliczyć na dwa sposoby — korzystając ze wzoru na odległość między punktami w układzie współrzędnych oraz korzystając z twierdzenia cosinusów.

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \beta - \sin \alpha)^2 = \\ &= \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \alpha = \\ &= 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

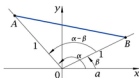
$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA| \cdot |OB| \cdot \cos \angle BOA = \\ &= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta) = 2 - 2 \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

Porównanie obu wyników prowadzi do równości:

$$2 - 2 \cos(\alpha - \beta) = 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta$$

Stąd:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \square$$



Korzystając z tożsamości udowodnionej na poprzedniej stronie i ze wzorów redukcyjnych, można uzasadnić, że prawdziwe są pozostałe trzy tożsamości.

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha - (-\beta)) = && \text{Korzystamy z tego, że} \\ &= \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) = && \cos(-\beta) = \cos \beta \text{ oraz} \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta && \sin(-\beta) = -\sin \beta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = && \text{Korzystamy z tego, że} \\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = && \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right). \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta = \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

ĆWICZENIE A Udowodnij równość: $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

PRZYKŁAD 1 Oblicz $\sin 75^\circ$.

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

ZADANIE Oblicz $\cos 15^\circ$.

W kolejnej ramce podano wzory na tangens sumy i tangens różnicy kątów. Oczywiście zachodzą one, gdy tangensy kątów występujących we wzorach są określone.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \qquad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Udowodnimy teraz wzór na tangens sumy kątów.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Dowód

$$\begin{aligned}L = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = P \quad \square\end{aligned}$$

ĆWICZENIE B Udowodnij wzór na tangens różnicy kątów.

zadania 1–6 ►

II W ramce podano wzory na sinus, cosinus i tangens podwojonego kąta.

Korzystając z jedynki trygonometrycznej, cosinus podwojonego kąta można zapisać na jeszcze dwa inne sposoby:

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

ĆWICZENIE C Udowodnij wzory na sinus, cosinus i tangens podwojonego kąta.

PRZYKŁAD 2 Znajdź wszystkie rozwiązania równania $\sin 2x + \sin x = 0$ należące do przedziału $(-\pi; 2\pi)$.

$$\sin 2x + \sin x = 0$$

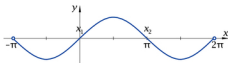
$$2 \sin x \cos x + \sin x = 0$$

$$\sin x \cdot (2 \cos x + 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{lub} \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

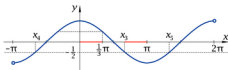
$$\sin x = 0 \quad \text{i} \quad x \in (-\pi; 2\pi)$$

Znajdujemy rozwiązania otrzymanych równań w przedziale $(-\pi; 2\pi)$.



$$x_1 = 0, \quad x_2 = \pi$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \text{i} \quad x \in (-\pi; 2\pi)$$



$$x_3 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

$$x_4 = -x_3 = -\frac{2}{3}\pi$$

$$x_5 = x_4 + 2\pi = -\frac{2}{3}\pi + 2\pi = \frac{4}{3}\pi$$

$$x \in \left\{ -\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3} \right\}$$

Ze zbioru wszystkich rozwiązań równania wybieramy tylko te, które należą do przedziału $(-\pi; 2\pi)$.

ZADANIE Znajdź wszystkie rozwiązania równania $\sin 2x - \cos x = 0$ należące do przedziału $(-\pi; 0)$.

zadania 7-14 ►

ZESTAW ZADAŃ

◀ I 1. Korzystając ze wzorów na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, oblicz:

- a) $\cos 75^\circ$ c) $\sin 15^\circ$ e) $\cos(-105^\circ)$ g) $\operatorname{tg} 15^\circ$
b) $\sin 105^\circ$ d) $\cos(-15^\circ)$ f) $\sin 165^\circ$ h) $\operatorname{tg}(-105^\circ)$

2. Oblicz, nie korzystając z kalkulatora ani tablic trygonometrycznych.

- a) $\sin 10^\circ \cos 50^\circ + \cos 10^\circ \sin 50^\circ$ c) $\cos 140^\circ \cos 40^\circ - \sin 140^\circ \sin 40^\circ$
b) $\cos 110^\circ \cos 20^\circ + \sin 110^\circ \sin 20^\circ$ d) $\frac{\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ}{1 - \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ}$

3. Naszkicuj wykres funkcji.

- a) $y = \sin x - \cos x$ b) $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$

4. Udowodnij tożsamość.

- a) $\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)$
b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}$
c) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$

5. Rozwiąż równanie.

- a) $2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cos x$ d) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg} x = 2$
b) $\sqrt{2} \sin x = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ e) $2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin x = 0$
c) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg} x = 1$ f) $\cos x - 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

6. Rozwiąż równanie.

- a) $4 \cos 2x \cdot \cos 5x = 2 \cos 7x + 1$ b) $1 + 2 \sin 5x \cdot \cos 3x = \sin 8x$

◀ II 7. a) Oblicz $\cos 2\alpha$, wiedząc, że $\cos \alpha = 0,6$.

b) Oblicz $\sin 2\alpha$, wiedząc, że $\sin \alpha = 0,6$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

c) Oblicz $\operatorname{tg} 2\alpha$, wiedząc, że $\cos \alpha = -0,8$ i $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

8. Uzasadnij tożsamość.

- a) $\frac{2}{\sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ b) $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ c) $1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1}{\cos 2\alpha}$

9. Narysuj wykres podanej funkcji.

a) $y = \sin x \cos x$ b) $y = \cos^4 x - \sin^4 x$ c) $y = \cos^2 x$ d) $y = -\frac{1}{3} \sin^2 x$

10. Rozwiąż równanie.

a) $1 + 2 \sin x \cos x = 0$ e) $\sin 2x - 2 \sin x = 0$ i) $\cos 2x = 2 \sin^2 x$
b) $3 \cos 2x + \sin^2 x = \cos^2 x + \sqrt{3}$ f) $\sin 2x + 3 \cos x = 0$ j) $\lg 2x(1 - \lg x) = 1$
c) $\cos 2x = \sin x$ g) $\cos 2x + \sin^2 x = 1$ k) $\cos 2x + \cos x = 0$
d) $\sin 2x = \cos x$ h) $\cos^2 x = \cos 2x$ l) $5 \cos x + 2 = \cos 2x$

11. Niech $\sin 17^\circ = a$. Wyraż za pomocą a podaną wartość.

a) $\cos 34^\circ$ b) $\sin 68^\circ$ c) $\sin 13^\circ$ d) $\cos 28^\circ$

12. Udowodnij wzór.

a) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$ b) $\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$

13. W poniższych wzorach $t = \tan \frac{\alpha}{2}$. Udowodnij te wzory.

a) $\tan \alpha = \frac{2t}{1-t^2}$ b) $\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}$ c) $\cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

14. Udowodnij tożsamość.

a) $\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$ b) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = 2$

MINISPRAWDZIAN

51. Wartość $\sin(-15^\circ)$ jest równa:

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{3})$ B. $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

52. Jeśli $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, to $\cos 2\alpha$ wynosi:

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{7}{9}$ D. $\frac{1}{6}$

53. Równanie $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ ma takie same rozwiązania jak równanie:

A. $\tan x = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{1}{2} \sin x$
B. $\cos x - \sin x = \frac{\pi}{12}$ D. $\tan\left(x + \frac{7\pi}{12}\right) = 0$

POWTÓRZENIE

1. Oblicz.

a) $\sin 120^\circ$ b) $\cos 750^\circ$ c) $\operatorname{tg}(-30^\circ)$

2. Czy podana liczba jest dodatnia?

a) $\operatorname{tg} 300^\circ$ c) $\sin 100^\circ \cdot \cos 95^\circ$
b) $\cos(-400^\circ)$ d) $\operatorname{tg}(-150^\circ) \cdot \sin 500^\circ$

3. a) Oblicz $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$, wiedząc, że $\sin \alpha = -\frac{2}{7}$ i $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

b) Oblicz $\sin \beta$ i $\cos \beta$, wiedząc, że $\operatorname{tg} \beta = -\frac{5}{12}$ i $-90^\circ < \beta < 0^\circ$.

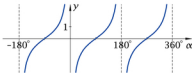
4. Uzasadnij tożsamość.

$$\frac{1}{1 - \sin^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1$$

5. Który z podanych wzorów nie opisuje funkcji przedstawionej na wykresie?

(A) $y = \operatorname{tg}(\alpha - 270^\circ)$ (C) $y = \operatorname{tg}(\alpha - 90^\circ)$

(B) $y = \operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ)$ (D) $y = \operatorname{tg}(\alpha + 90^\circ)$



6. a) Zapisz w radianach kąty:

6° 90° 210° 530°

b) Zapisz w stopniach kąty:

$\frac{\pi}{6}$ rad $\frac{3\pi}{5}$ rad $\frac{\pi}{3}$ rad 6π rad

7. Znajdź kąty spełniające warunki:

a) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ i $-180^\circ < \alpha < 360^\circ$

b) $\sin \alpha = -0,23$ i $-720^\circ < \alpha < 0^\circ$

c) $\operatorname{tg} \alpha = 4$ i $-180^\circ < \alpha < 360^\circ$

8. Naskicuj wykres funkcji.

a) $y = \operatorname{tg} \frac{1}{4}x$ b) $y = 4 \sin 2x$

9. Korzystając ze wzorów redukcyjnych, oblicz $\sin 135^\circ$, $\operatorname{tg} 150^\circ$ i $\cos 210^\circ$.

10. Uzasadnij tożsamość.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2} + x)}{\cos(\frac{\pi}{2} - x)} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos(-x)}\right) = 2$$

11. Znajdź liczby rzeczywiste spełniające równanie.

a) $1 + 2 \cos^2 x = 0$

b) $2 \sin(2x - 1) = 1$

c) $\sqrt{3} \sin\left(x - \frac{\pi}{9}\right) = 1,5$

d) $3 \operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 3 = 0$

12. Znajdź miejsca zerowe funkcji.

a) $y = \sin x \cdot \cos x$ b) $y = \operatorname{tg} x + \sqrt{3}$

13. Rozwiąż równanie.

a) $\cos^2 x - \cos 2x = 1$ c) $2 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2x$

b) $(\sin x + \cos x)^2 = 1$ d) $\sin x = \sin 2x$

14. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{\sin x}{5} > 0,1$ c) $\sqrt{6} \operatorname{tg} 2x \leq \sqrt{2}$

b) $\sqrt{2} \cos x < -1$ d) $2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < \sqrt{3}$

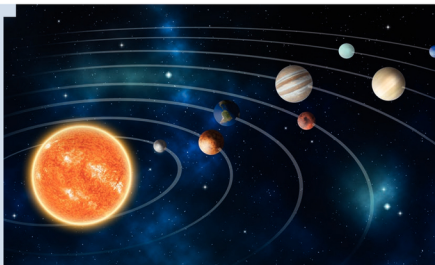
15. Jedna ze stron równania jest szeregiem geometrycznym. Znajdź te rozwiązania równania, które należą do przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$.

a) $1 + \cos x = \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x + \dots$

b) $\sin x + \sin^3 x + \sin^5 x + \dots = \frac{2}{3}$

Geometria analityczna

W 1605 roku niemiecki matematyk i astronom Johannes Kepler odkrył, że planety nie poruszają się po okręgach, jak sądził Kopernik, ale po elipsach. Słońce zaś znajduje się w jednym z ognisk takiej elipsy. Własności elipsy bardzo wygodnie można badać, gdy się ją opisze za pomocą równania.



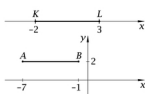
Punkty i odcinki w układzie współrzędnych ■ Równanie prostej
■ Równanie prostej (cd.) ■ Równanie okręgu ■ Interpretacja
geometryczna układu równań ■ Powtórzenie

PUNKTY I ODCINKI W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

- I W układzie współrzędnych rozważaliśmy już punkty, wektory i wykresy funkcji. W podobny sposób — za pomocą współrzędnych punktów i wyrażeń algebraicznych — możemy opisywać własności innych figur płaskich.

Jeśli znamy położenie dwóch punktów na osi liczbowej, możemy obliczyć odległość między nimi. Podobnie jest, gdy znamy współrzędne dwóch punktów na płaszczyźnie.

ĆWICZENIE A Ustal długość odcinka KL zaznaczonego na osi liczbowej. Ustal długości odcinków AB i PR zaznaczonych w układzie współrzędnych.



Przyjrzyj się rysunkowi obok. Odległość między punktami A i B , czyli długość odcinka AB , możemy obliczyć, korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ACB . Jeśli $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, to $C = (x_A, y_B)$.

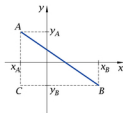
Długość odcinka BC to odległość między liczbami x_A i x_B na osi x , czyli $|x_B - x_A|$, zaś długość odcinka AC jest równa odległości między liczbami y_A i y_B na osi y , czyli $|y_B - y_A|$. Zatem:

$$|BC| = |x_B - x_A| \quad |AC| = |y_B - y_A|$$

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$|AB|^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$$

Stąd wynika wzór podany w ramce obok.



Odległość między punktami $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ wynosi:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

PRZYKŁAD 1 Trójkąt ABC jest równoramienny ($|AC| = |BC|$). Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = 4$, a wierzchołki przy podstawie mają współrzędne $A = (-1, 0)$, $B = (-3, 3)$. Znajdź współrzędne wierzchołka C .

$$A = (-1, 0), \quad B = (-3, 3), \quad C = (x, 4) \quad \vdots \quad \text{Punkt } C \text{ leży na prostej o równaniu } y = 4.$$

$$|AC| = \sqrt{(x - (-1))^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{x^2 + 2x + 17}$$

$$|BC| = \sqrt{(x - (-3))^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$$

$$|AC|^2 = |BC|^2 \quad \vdots \quad |AC| = |BC|, \text{ więc } |AC|^2 = |BC|^2$$

$$x^2 + 2x + 17 = x^2 + 6x + 10$$

$$4x = 7, \text{ czyli } x = \frac{7}{4}$$

$$C = \left(\frac{7}{4}, 4\right)$$

ZADANIE Punkty $K = (-2, 1)$ i $M = (0, 4)$ leżą na okręgu, którego środek S leży na prostej o równaniu $y = -3$. Znajdź współrzędne punktu S .

PRZYKŁAD 2 Na prostej będącej wykresem funkcji $y = 2x$ znajdź punkt, którego odległość od punktu $A = (-2, 4)$ jest równa 4.

$$P = (x, 2x) \quad \vdots \quad \begin{array}{l} \text{Punkt } P \text{ leży na wykresie funkcji } y = 2x, \text{ więc} \\ \text{jeśli pierwsza współrzędna jest równa } x, \text{ to} \\ \text{druga jest równa } 2x. \end{array}$$

$$|PA| = 4$$

$$\sqrt{(-2 - x)^2 + (4 - 2x)^2} = 4 \quad \vdots \quad \text{Korzystamy ze wzoru na długość odcinka.}$$

$$(-2 - x)^2 + (4 - 2x)^2 = 16 \quad \vdots \quad \text{Podnosimy obie strony równania do kwadratu.}$$

$$4 + 4x + x^2 + 16 - 16x + 4x^2 = 16$$

$$5x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4 = 64$$

$$x_1 = \frac{12 - 8}{10} = \frac{2}{5} \quad x_2 = \frac{12 + 8}{10} = 2$$

$$P_1 = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) \quad P_2 = (2, 4) \quad \vdots \quad \text{Zadanie ma dwa rozwiązania.}$$

ZADANIE Znajdź na wykresie funkcji $y = 3x$ punkt, którego odległość od punktu $K = (4, -1)$ wynosi 5.

zadania 1–11 ►

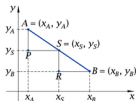
II **ĆWICZENIE B** Ustal, jaka liczba leży na osi liczbowej dokładnie pośrodku między liczbami: a) 2 i 7 b) -3 i 9

Przyjrzyj się rysunkowi obok. Punkt S jest środkiem odcinka AB , więc trójkąty SAP oraz BSR są przystające (cecha kbk). Z równości $|PS| = |RB|$ oraz $|RS| = |PA|$ wynika, że:

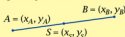
$$x_S - x_A = x_B - x_S \quad y_S - y_B = y_A - y_S$$

Stąd:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$



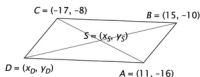
Współrzędne środka odcinka



$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Współrzędne środka odcinka są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych jego końców.

PRZYKŁAD 3 Punkty $A = (11, -16)$, $B = (15, -10)$, $C = (-17, -8)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Ustal współrzędne punktu D .



Sporządzamy rysunek pomocniczy.

$$x_S = \frac{-17 + 11}{2} = -3 \quad y_S = \frac{-8 - 16}{2} = -12$$

$$\frac{x_D + 15}{2} = -3 \quad \frac{y_D - 10}{2} = -12$$

$$x_D = -21 \quad y_D = -14$$

$$\underline{D = (-21, -14)}$$

Punkt S jest środkiem przekątnych równoległoboku $ABCD$.

$$x_S = \frac{x_D + 15}{2} \quad y_S = \frac{y_D - 10}{2}$$

ZADANIE Punkty $A = (-7, 3)$ i $B = (-20, -9)$ są sąsiednimi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Przekątne tego równoległoboku przecinają się w punkcie $S = (1, -4)$. Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków równoległoboku.

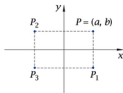
zadania 12–16

ĆWICZENIE C Niech $A = (-3, 0)$, $B = (4, 2)$, $C = (-1, 5)$. Podaj współrzędne wierzchołków trójkąta, który jest symetryczny do trójkąta ABC względem:

- a) osi x b) osi y c) początku układu współrzędnych

Punktem symetrycznym do punktu $P = (a, b)$ względem osi x jest punkt $P_1 = (a, -b)$, a względem osi y — punkt $P_2 = (-a, b)$.

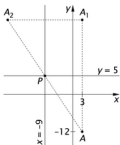
Punktem symetrycznym do punktu $P = (a, b)$ względem początku układu współrzędnych jest punkt $P_3 = (-a, -b)$.



Prostą równoległą do osi x przechodzącą przez punkt $(0, b)$ opisuje równanie $y = b$, a prostą prostopadłą do osi x przechodzącą przez punkt $(a, 0)$ opisuje równanie $x = a$.

W poniższym przykładzie pokazujemy, jak znajdować obrazy danego punktu w symetrii względem takich prostych.

PRZYKŁAD 4 Punkt A_1 jest symetryczny do punktu $A = (3, -12)$ względem prostej o równaniu $y = 5$, a punkt A_2 jest symetryczny do punktu A_1 względem prostej o równaniu $x = -9$. Wykaż, że punkt A_2 jest symetryczny do punktu A względem punktu przecięcia się tych prostych.



$$A_1 = (3, y_1), \quad A_2 = (x_2, y_1)$$

$$\frac{y_1 + (-12)}{2} = 5$$

$$y_1 = 22$$

$$\frac{x_2 + 3}{2} = -9$$

$$x_2 = -21$$

$$A_1 = (3, 22)$$

$$A_2 = (-21, 22)$$

Środek odcinka AA_1 ma drugą współrzędną równą 5 (bo leży na prostej o równaniu $y = 5$).

Środek odcinka A_1A_2 ma pierwszą współrzędną równą -9 (bo leży na prostej o równaniu $x = -9$).

Punkt przecięcia prostych o równaniach $x = -9$ i $y = 5$ ma współrzędne $P = (-9, 5)$.

Współrzędne środka odcinka AA_2 to:

$$x_S = \frac{-21 + 3}{2} = -9 \quad y_S = \frac{22 + (-12)}{2} = 5$$

Szukamy współrzędnych punktu A_2 jako obrazu punktu A w symetrii względem S . Punkt S jest środkiem odcinka AA_2 .

Zatem punkt P jest środkiem odcinka AA_2 , czyli punkt A_2 jest symetryczny do punktu A względem punktu P .

ZADANIE Punkt P_1 jest symetryczny do punktu $P = (-5, -2)$ względem prostej o równaniu $x = 4$, a punkt P_2 jest symetryczny do punktu P_1 względem prostej o równaniu $y = -6$. Wykaż, że punkt P_2 jest symetryczny do punktu P względem punktu przecięcia się tych prostych.

René Descartes (czyt. dekart) zwany Kartezjuszem (1596–1650) znany jest z sentencji: *cogito ergo sum* (myślę, więc jestem). Był on także pomysłodawcą zastosowania metod algebraicznych w geometrii. Tym samym zapoczątkował nowy dział matematyki — geometrię analityczną.

Kartezjusz od młodości miał zwyczaj bardzo późnego wstawania. W czasie długich porannych godzin spędzonych w łóżku miał najlepsze matematyczne i filozoficzne pomysły.

Niektórzy historycy uważają, że geometria analityczna narodziła się w pewną listopadową noc w 1619 roku. Tej nocy Kartezjusz miał sen, po którym, jak twierdził, obudził się z przeświadczeniem, że posiadał magiczny klucz, który pozwoli mu otworzyć skarbiec natury. Odtąd wierzył, że zna metodę odkrywania praw natury za pomocą eksperymentów i rozumowania. Być może miał na myśli zastosowanie metod algebraicznych w geometrii.

zadania 17–23 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz odległość między podanymi punktami.

a) $A = (5, -2)$, $B = (-7, 3)$

b) $K = (10, 4)$, $L = (8, -2)$

c) $P = (1 + \sqrt{2}, 3\sqrt{5})$, $R = (2 + \sqrt{2}, 2\sqrt{5})$

d) $M = (3 - \sqrt{2}, 1 - 3\sqrt{3})$, $N = (3, 1 + \sqrt{3})$

2. Sprawdź, czy trójkąt ABC o podanych wierzchołkach jest równoramienny.

a) $A = (0, 0)$, $B = (\sqrt{2}, \sqrt{7})$, $C = (-2, \sqrt{5})$

b) $A = (-3, -2)$, $B = (5, -1)$, $C = (1, 7)$

3. Ustal, który z kątów trójkąta o wierzchołkach $A = (3, 0)$, $B = (-1, -3)$, $C = (-7, 1)$ jest najmniejszy.

Warto wiedzieć!

Jeśli punkty A, B, C spełniają warunek $|AB| + |BC| = |AC|$, to są współliniowe.

4. Korzystając z informacji podanych w ramce obok, uzasadnij, że punkty: $P = (3, 5)$, $Q = (-6, 2)$, $R = (-15, -1)$ leżą na jednej prostej.

5. Na trójkącie prostokątnym o wierzchołkach $(-2, 4)$, $(4, -7)$ i $(4, 4)$ opisano okrąg. Oblicz długość promienia tego okręgu.

6. Znajdź wartość a , dla której długość odcinka PR jest równa 10.

a) $P = (a, 7)$, $R = (3, 1)$

b) $P = (1, -2)$, $R = (-1, a)$

7. Dwa wierzchołki trójkąta równobocznego mają współrzędne $(1, 3)$ i $(4, -1)$. Znajdź współrzędne trzeciego wierzchołka tego trójkąta.

8. Trójkąt PQR , gdzie $P = (1, -2)$, $R = (4, -3)$, jest równoramienny. Punkt Q leży na prostej o równaniu $y = 2x$. Znajdź współrzędne punktu Q . Rozważ wszystkie przypadki.

9. Znajdź współrzędne punktu, który jest jednakowo odległy od punktu $A = (-1, 2)$ oraz od punktu $B = (5, 8)$ i który leży:

- a) na osi x , b) na osi y , c) na prostej o równaniu $y = x$.

10. Punkt A porusza się po jednej gałęzi hiperboli o równaniu $y = \frac{2}{x}$, a punkt B — po drugiej jej gałęzi. Ustal najmniejszą możliwą odległość między tymi punktami.

11. Znajdź współrzędne środka okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $(-3, -1)$, $(3, -3)$, $(-1, 5)$.

◀ **12. a)** Znajdź współrzędne środka odcinka o końcach $A = (-6, 20)$ i $B = (-2, -53)$.

b) Środkiem odcinka KL jest punkt $(-4, 7)$. Wiadomo, że $K = (12, -40)$. Znajdź współrzędne punktu L .

13. Oblicz długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka A w trójkącie o wierzchołkach $A = (-3, 2)$, $B = (-1, 5)$, $C = (4, -3)$.

14. a) Punkty $A = (-2, 5)$ i $B = (-4, -3)$ są sąsiednimi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, a punkt $S = (2, -1)$ jest środkiem symetrii tego równoległoboku. Oblicz współrzędne wierzchołków C i D .

b) Punkty $A = (-4, -5)$, $B = (5, -1)$ i $C = (2, 7)$ to kolejne wierzchołki równoległoboku $ABCD$. Znajdź współrzędne wierzchołka D .

15. a) Każdy z wierzchołków pewnego równoległoboku umieszczonego w układzie współrzędnych ma obie współrzędne wymierne. Uzasadnij, że punkt przecięcia przekątnych tego równoległoboku także ma obie współrzędne wymierne.

b) Obie współrzędne każdego z trzech wierzchołków pewnego równoległoboku są wymierne. Uzasadnij, że czwarty wierzchołek tego równoległoboku także ma obie współrzędne wymierne.

16. Wykaż, że jeśli końce odcinka leżą na dodatnich częściach osi układu współrzędnych, to odległość środka tego odcinka od początku układu współrzędnych jest równa połowie długości tego odcinka.

◀ **17.** Znajdź współrzędne punktu symetrycznego do punktu A względem prostej o podanym równaniu.

a) $A = (8, -5)$, prosta $y = -4$

c) $A = (0, 1)$, prosta $y = 3\sqrt{2}$

b) $A = (-3, 4)$, prosta $x = -2$

d) $A = (-5 - \sqrt{7}, 9)$, prosta $x = \sqrt{7}$

18. Punkty A i A' są symetryczne do siebie względem pewnej prostej równoległej do jednej z osi układu współrzędnych. Jakie równanie ma ta prosta?

- a) $A = (3, 5)$, $A' = (3, -21)$ d) $A = (a, b)$, $A' = (a + 5, b)$
b) $A = (-10, \sqrt{2})$, $A' = (10\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e) $A = (a, b)$, $A' = (a, 3b + 4a)$
c) $A = (1 - \sqrt{5}, \sqrt{5})$, $A' = (3 - \sqrt{5}, \sqrt{5})$ f) $A = (a - 2, b - 1)$, $A' = (2, b - 1)$

19. Punkt R jest symetryczny do punktu $P = (-1, 7)$ względem osi y . Punkt S jest symetryczny do punktu R względem prostej o równaniu $y = -3$. Wyznacz współrzędne punktu symetrycznego do punktu S względem osi x .

20. Podaj współrzędne punktów, które są symetryczne do punktów $A = (-10, 2)$ i $B = (0, 1)$ względem punktu:

- a) $S = (0, 0)$ b) $S = (0, 2)$ c) $S = (1, 0)$ d) $S = (\sqrt{7}, 2\sqrt{7})$

21. Znajdź współrzędne punktu, względem którego punkty A i A' są symetryczne do siebie.

- a) $A = (-2, 5)$, $A' = (-4, -3)$ c) $A = (a, b)$, $A' = (5a, b - 4)$
b) $A = (3 - \sqrt{5}, -2)$, $A' = (\sqrt{5}, 4)$ d) $A = (a + b, a - b)$, $A' = (a - b, a + b)$

22. Punkty B i C są symetryczne do punktu $A = (9, 2)$ odpowiednio względem prostej o równaniu $y = -2$ i względem prostej o równaniu $x = 4$. Oblicz długość średnicy okręgu opisanego na trójkącie ABC .

23. Punkty $A = (199, 397)$ i $A' = (-201, -403)$ są symetryczne do siebie względem prostej a oraz punkty $B = (-199, -404)$ i $B' = (201, 396)$ są do siebie symetryczne względem tej samej prostej. Naszkicuj prostą a w układzie współrzędnych.

MINISPRAWDZIAN

51. Punkt $(-3, 17)$ jest środkiem odcinka, którego jednym końcem jest punkt $(1, 15)$. Drugim końcem tego odcinka jest punkt:

- A. $(-1, 16)$ B. $(-4, 2)$ C. $(-7, 19)$ D. $(5, 13)$

52. Punkty $(-17, 3)$ i $(17, -3)$ to końce jednej z przekątnych równoległoboku. Trzeci wierzchołek równoległoboku ma współrzędne $(30, 75)$. Wskaż współrzędne czwartego wierzchołka tego równoległoboku.

- A. $(17, 3)$ B. $(-17, -3)$ C. $(-30, 75)$ D. $(-30, -75)$

53. Wskaż punkt symetryczny do punktu $(120, -350)$ względem punktu $(-50, 70)$.

- A. $(35, -140)$ B. $(85, -210)$ C. $(-220, 490)$ D. $(290, -770)$

RÓWNANIE PROSTEJ

- 1 Wiesz już, że wszystkie punkty, których współrzędne spełniają równanie $y = ax + b$, leżą na pewnej prostej. Równanie to nazywamy **równaniem kierunkowym tej prostej**.

Każdą prostą, która nie jest prostopadłą do osi x , można opisać za pomocą równania kierunkowego. Natomiast prostą, która jest prostopadłą do osi x , opisuje równanie $x = p$.

Rozważmy prostą o równaniu:

$$y = -\frac{3}{2}x + 4$$

Równanie tej prostej można zapisać w postaci:

$$3x + 2y - 8 = 0$$

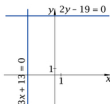
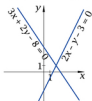
Każdy punkt płaszczyzny, którego współrzędne spełniają to równanie, leży na rozważanej prostej.

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie liczby A i B nie są jednocześnie równe 0, nazywamy **ogólnym równaniem prostej**. Za pomocą równania ogólnego można opisać każdą prostą na płaszczyźnie.

Zauważ, że gdyby w równaniu typu $Ax + By + C = 0$ oba współczynniki A i B były jednocześnie równe 0, to równanie miałoby postać $0 \cdot x + 0 \cdot y + C = 0$. Gdy $C = 0$, takie równanie spełniałyby współrzędne wszystkich punktów płaszczyzny, a gdy $C \neq 0$, nie byłoby żadnego punktu, którego współrzędne spełniałyby to równanie.

Gdy $B \neq 0$, równanie ogólne prostej $Ax + By + C = 0$ można zapisać w postaci kierunkowej. Natomiast gdy $B = 0$, to równanie ogólne $Ax + By + C = 0$ ma postać $Ax + C = 0$ i opisuje prostą prostopadłą do osi x .

Proste, których fragmenty przedstawiono na poniższych rysunkach, są opisane za pomocą równań ogólnych.



ĆWICZENIE A a) Zapisz równania prostych w postaci ogólnej.

$$y = \frac{2}{3}x - 2$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$y = 0,7$$

$$y = \frac{5}{4}x$$

b) Które z podanych równań można zapisać w postaci kierunkowej? Zapisz je w tej postaci.

$$5x + 3y + 2 = 0$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0$$

$$6x - 2 = 0$$

$$12y - 7 = 0$$

ĆWICZENIE B a) Znajdź współrzędne dwóch punktów należących do prostej o równaniu $3x - 2y + 6 = 0$, a następnie naskicuj tę prostą.

b) Zapisz w postaci ogólnej równania prostych prostopadłych do osi układu współrzędnych i przechodzących przez punkt $P = (3, -7)$.

Zwróć uwagę na to, że równanie ogólne tej samej prostej można zapisać na różne sposoby. Na przykład tę samą prostą opisują następujące równania:

$$-3x - 2y + 8 = 0 \quad \frac{3}{2}x + y - 4 = 0 \quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - \frac{4}{3} = 0$$

ĆWICZENIE C Trzy z poniższych równań opisują tę samą prostą. Które?

$$3x - 6y + 3 = 0 \quad -x + 2y - 1 = 0 \quad x + 2y + 1 = 0 \quad \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + \sqrt{2} = 0$$

PRZYKŁAD 1 Dane są punkty $A = (-3, -7)$ i $B = (6, -1)$. Znajdź równanie ogólne o współczynnikach całkowitych prostej AB .

prosta AB : $y = ax + b$

$$\begin{cases} -7 = a \cdot (-3) + b \\ -1 = a \cdot 6 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -5 \end{cases}$$

$$y = \frac{2}{3}x - 5$$

$$-\frac{2}{3}x + y + 5 = 0 \quad | \cdot 3$$

$$\underline{-2x + 3y + 15 = 0}$$

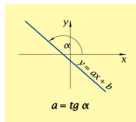
Punkty A i B nie leżą na prostej prostopadłej do osi x , więc równanie prostej AB możemy zapisać w postaci kierunkowej.

Zapisujemy równanie prostej w postaci ogólnej i zgodnie z poleceniem przekształcamy je do postaci ogólnej o współczynnikach całkowitych.

ZADANIE Dane są punkty $P = (-5, 8)$ i $R = (-11, 18)$. Znajdź równanie ogólne prostej PR .

Przypomnijmy, że współczynnik kierunkowy prostej o równaniu $y = ax + b$ jest równy tangensowi kąta nachylenia prostej do osi x .

ĆWICZENIE D Znajdź tangens kąta nachylenia prostej o równaniu $2x + 3y - 5 = 0$ do osi x .

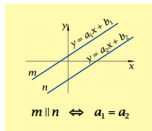


zadania 1–10 ►

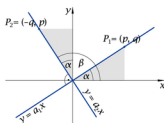
- II Fakt, że współczynnik kierunkowy jednoznacznie wyznacza kąt nachylenia prostej do osi x , możemy wykorzystać do sformułowania warunku równoległości prostych o danych równaniach kierunkowych.

**Prosta o równaniu $y = a_1x + b_1$
jest równoległa do prostej
o równaniu $y = a_2x + b_2$
wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$.**

ĆWICZENIE E Znajdź wartość t , dla której proste o równaniach $tx - 3y + 1 = 0$ oraz $y = 2x - 5$ są równoległe.



Na poniższym rysunku przedstawiono fragmenty dwóch prostych prostopadłych przechodzących przez początek układu współrzędnych. Żadna z nich nie jest prostopadła do osi x . Zastanówmy się, jaka jest zależność między współczynnikami kierunkowymi tych prostych.



Wybermy na jednej prostej punkt $P_1 = (p, q)$, a na drugiej z tych prostych taki punkt P_2 , że $|OP_2| = |OP_1|$. Wówczas zaznaczone na rysunku trójkąty prostokątne są przystające. Zatem $P_2 = (-q, p)$.

Współczynniki kierunkowe a_1 i a_2 tych prostych to tangensy kątów α i β :

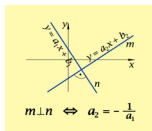
$$a_1 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{q}{p}$$

$$a_2 = \operatorname{tg} \beta = \frac{p}{-q} = -\frac{1}{\frac{q}{p}} = -\frac{1}{a_1}$$

Ta zależność będzie zachodzić także wtedy, gdy proste prostopadłe nie będą przechodzić przez początek układu współrzędnych.

**Prosta o równaniu $y = a_1x + b_1$,
gdzie $a_1 \neq 0$, jest prostopadła
do prostej o równaniu $y = a_2x + b_2$,
wtedy i tylko wtedy, gdy $a_2 = -\frac{1}{a_1}$.**

ĆWICZENIE F Znajdź wartość t , dla której proste o równaniach $tx - 3y + 1 = 0$ oraz $y = 2x - 5$ są prostopadłe.



PRZYKŁAD 2 Niech m będzie prostą opisaną równaniem $3x - 2y + 5 = 0$. Znajdź równania ogólne dwóch prostych — równoległej do prostej m przechodzącej przez punkt $A = (2, -3)$ oraz prostej prostopadłej do prostej m przechodzącej przez punkt $B = (-1, \frac{1}{3})$.

$$3x - 2y + 5 = 0$$

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

⋮ Znajdujemy równanie kierunkowe prostej m .

Prosta równoległa do prostej m :

$$y = \frac{3}{2}x + b$$

$$-3 = \frac{3}{2} \cdot 2 + b$$

⋮ Korzystamy z tego, że punkt $A = (2, -3)$ należy do szukanej prostej.

$$b = -6$$

$$y = \frac{3}{2}x - 6$$

$$\underline{3x - 2y - 12 = 0}$$

⋮ Zapisujemy równanie ogólne otrzymanej prostej.

Prosta prostopadła do prostej m :

$$y = -\frac{2}{3}x + b$$

$$\frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \cdot (-1) + b$$

⋮ Punkt $B = (-1, \frac{1}{3})$ należy do szukanej prostej.

$$b = -\frac{1}{3}$$

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$\underline{2x + 3y + 1 = 0}$$

⋮ Zapisujemy równanie ogólne otrzymanej prostej.

ZADANIE Znajdź równanie ogólne prostej przechodzącej przez punkt $P = (-2, -1)$:

a) równoległej do prostej o równaniu $x - 3y + 1 = 0$,

b) prostopadłej do prostej o równaniu $3x - 2y = 0$.

ĆWICZENIE 6 Która z podanych prostych jest prostopadła do prostej o równaniu $y = -\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}$, a która jest równoległa?

$$2x + 3y - 4 = 0$$

$$1,5x - y = 0$$

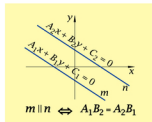
$$y = 1,5x + 2$$

$$-10y + 15x - 1 = 0$$

$$\frac{5}{3}x - y + \frac{2}{3} = 0$$

Sformułowaliśmy już warunki równoległości i prostopadłości prostych, które są opisane równaniami kierunkowymi. Korzystając z tego, możemy znaleźć warunki równoległości i prostopadłości dla prostych opisanych za pomocą równań w postaci ogólnej.

**Prosta o równaniu $A_1x + B_1y + C_1 = 0$
jest równoległa do prostej
o równaniu $A_2x + B_2y + C_2 = 0$
wtedy i tylko wtedy,
gdy $A_1B_2 = A_2B_1$.**



Dowód

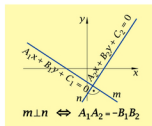
Założmy, że żadna z prostych nie jest prostopadła do osi x . To znaczy, że równania obu prostych można zapisać w postaci kierunkowej:

$$y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1} \quad \text{ i } \quad y = -\frac{A_2}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2}$$

Te proste są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich współczynniki kierunkowe są równe, tzn. gdy $-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$. A to oznacza, że $A_1B_2 = A_2B_1$.

Założmy, że jedna z prostych, np. prosta o równaniu $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, jest prostopadła do osi x , czyli $B_1 = 0$. Druga z prostych będzie do niej równoległa wtedy i tylko wtedy, gdy też będzie prostopadła do osi x , czyli gdy $B_2 = 0$. A to oznacza spełnienie warunku $A_1B_2 = A_2B_1$. $\square$

**Prosta o równaniu $A_1x + B_1y + C_1 = 0$
jest prostopadła do prostej
o równaniu $A_2x + B_2y + C_2 = 0$
wtedy i tylko wtedy,
gdy $A_1A_2 = -B_1B_2$.**



Dowód

Założmy, że żadna z prostych nie jest prostopadła do żadnej z osi układu współrzędnych. To znaczy, że równania obu prostych można zapisać w postaci kierunkowej:

$$y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1} \quad \text{ i } \quad y = -\frac{A_2}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2}$$

Te proste są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $-\frac{A_2}{B_2} = -\frac{1}{-\frac{A_1}{B_1}}$. A ta równość jest równoważna równości $\frac{A_2}{B_2} = -\frac{B_1}{A_1}$. Stąd $A_1A_2 = -B_1B_2$.

Założmy, że jedna z prostych, np. prosta o równaniu $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, jest prostopadła do osi x . Wówczas $B_1 = 0$ i druga prosta będzie do niej prostopadła wtedy i tylko wtedy, gdy będzie równoległa do osi x , tzn. gdy $A_2 = 0$. A to oznacza spełnienie warunku $A_1A_2 = -B_1B_2$.

Założmy, że jedna z prostych, np. prosta o równaniu $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, jest prostopadła do osi y . Wówczas $A_1 = 0$ i druga prosta będzie do niej prostopadła wtedy i tylko wtedy, gdy będzie równoległa do osi y , tzn. gdy $B_2 = 0$. A to oznacza spełnienie warunku $A_1A_2 = -B_1B_2$. $\square$

zadania 11–16 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. a) Podane równania prostych zapisz w postaci ogólnej.

$$y = \frac{1}{3}x + 4 \quad 3y - 4 = \frac{x}{2} \quad y = -5 \quad 2y + 3x = 2(y - x)$$

- b) Podane równania prostych zapisz w postaci kierunkowej.

$$-2x - 3y + 12 = 0 \quad 2x - y = 5x \quad 5y - 2 = 0 \quad \frac{y-x}{2} = 4(x-2y)$$

2. Dwa z podanych równań przedstawiają tę samą prostą. Wskaż te równania.

a) $4x - 3y + 2 = 0$ $y = \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}$ $2x - 1,5y + 1 = 0$ $y = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$

b) $-5x - 4y + 7 = 0$ $y = -\frac{4}{5}x + \frac{7}{5}$ $2,5x - 2y - 3,5 = 0$ $5x + 4y - 7 = 0$

3. Ustal wartości a , b , c , dla których punkty $A = (-3, a)$, $B = (2b, \frac{1}{2})$ i $C = (c-2, -3c)$ leżą na prostej o równaniu $5x + 2y - 4 = 0$.

4. Znajdź współrzędne punktów przecięcia podanej prostej z osiami układu współrzędnych, a następnie naszkicuj tę prostą.

a) $5x + 2y - 4 = 0$ b) $3x - 4y + 6 = 0$ c) $-2x + 5y - 10 = 0$

5. Znajdź współrzędne punktu przecięcia prostych o podanych równaniach.

a) $x + 3 = 0$ i $y - 5 = 0$ c) $y + 10 = 0$ i $3x + 2y - 20 = 0$

b) $x - \frac{1}{2} = 0$ i $2x + y - 4 = 0$ d) $\frac{1}{4}y - \frac{1}{2} = 0$ i $3x - 5y + 2 = 0$

6. Sprawdź, czy proste o równaniach $2x - 4y + 2 = 0$, $2x + y - 3 = 0$ i $x + 2y + 1 = 0$ przecinają się w jednym punkcie.

7. Znajdź równanie kierunkowe i ogólne prostej przechodzącej przez punkty:

a) $A = (1, -3)$, $B = (0, 4)$ c) $A = (20, 1)$, $B = (0, -10)$

b) $A = (0, 4, 17)$, $B = (\frac{2}{5}, \sqrt{3})$ d) $A = (2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, $B = (1, 1 + \sqrt{2})$

8. a) Czy punkty $A = (2, 12)$, $B = (-7, -1)$ i $C = (-10, -5)$ leżą na jednej prostej?

- b) Znajdź wartość t , dla której punkty $A = (2, -1)$, $B = (-3, 4)$ i $C = (t, 3t + 2)$ są współliniowe.

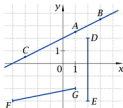
9. a) Wyznacz miary kątów trójkąta ograniczonego osią x , prostą o równaniu $y = -x + 5$ oraz prostą o równaniu $y = \sqrt{3}x + 7$.

- b) Znajdź miarę kąta ostrego, pod jakim przecinają się proste o równaniach $2x + 3y + 15 = 0$ i $5x - 2y - 10 = 0$. Możesz się posłużyć tablicami trygonometrycznymi lub kalkulatorem.

10. Odcinek AB (zob. rysunek obok) leży na prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 2$. Współrzędne punktów należących do tego odcinka spełniają warunek:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Opisz w podobny sposób odcinek AC , półproste CB i AC oraz odcinki DE i FG .



11. Znajdź równanie prostej równoległej do danej prostej i przechodzącej przez punkt A .

a) $y = -4x + 2$, $A = (-7, 0)$

c) $-3x + 5y - 1 = 0$, $A = (0, 4)$

b) $y = \frac{1}{3}x - 5$, $A = (-9, -2)$

d) $2x - 3y + 4 = 0$, $A = (2, -5)$

12. Znajdź równanie prostej prostopadłej do danej prostej i przechodzącej przez punkt P .

a) $y = -\frac{2}{3}x - 7$, $P = (8, 0)$

c) $3x + 4y = 0$, $P = (0, -5)$

b) $y = 8x + \frac{1}{5}$, $P = (4, -3)$

d) $-2x - 5y + 1 = 0$, $P = (-1, 2)$

13. Znajdź równania kierunkowe dwóch prostych przechodzących przez początek układu współrzędnych, takich że jedna z nich jest równoległa do prostej o równaniu $3x - 7y + 5 = 0$, a druga — prostopadła do tej prostej.

14. Dane są punkty $A = (-1, 5)$ i $B = (\frac{1}{2}, 0)$.

a) Znajdź równanie ogólne prostej równoległej do prostej AB i przechodzącej przez punkt $P = (1, -\frac{1}{4})$.

b) Znajdź równanie ogólne prostej prostopadłej do prostej AB i przechodzącej przez punkt $R = (-\frac{3}{2}, -2)$.

15. Zapisz równanie dowolnej prostej równoległej oraz dowolnej prostej prostopadłej do danej prostej.

a) $y = \sqrt{2}x - \sqrt{5}$

b) $\sqrt{3}x - y + \sqrt{2} = 0$

16. Wyznacz wartości t , dla których prosta m jest równoległa do prostej n , oraz takie, dla których jest do niej prostopadła.

a) prosta m :

$$3x - 4y + 7 = 0$$

prosta n :

$$y = tx + 6$$

b) prosta m :

$$y = -\frac{2}{3}x + 4$$

prosta n :

$$tx + 5y - 3 = 0$$

c) prosta m :

$$y = 5x - 7$$

prosta n :

$$2x - ty + 4 = 0$$

MINISPRAWDZIAN

51. Prosta o równaniu $y = 0,6x + 2$ jest nachylona do osi x pod kątem:

- A. mniejszym niż 30° B. między 30° a 60° C. 60° D. większym niż 60°

52. Ustal, która z podanych prostych nie jest równoległa do prostej o równaniu $2x - 6y + \sqrt{3} = 0$.

- A. $-x + 3y + 5 = 0$ B. $x + 3y + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ C. $2x - 6y - 7 = 0$ D. $x - 3y - \sqrt{3} = 0$

53. Prosta o równaniu $x - 2y - 3 = 0$ jest prostopadła do prostej o równaniu:

- A. $y = 2x + 3$ B. $y = -2x + 1$ C. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ D. $y = -\frac{1}{2}x - 3$

54. Wskaż, która z podanych prostych jest prostopadła do prostej o równaniu $x - 4y - 1 = 0$ i przechodzi przez punkt $P = (-1, -1)$.

- A. $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$ B. $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$ C. $y = -4x + 5$ D. $y = -4x - 5$

RÓWNANIE PROSTEJ (CD.)

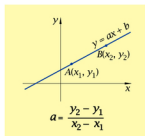
- 1** Aby znaleźć równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$, gdzie $x_1 \neq x_2$, wystarczy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

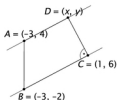
Odejmując stronami, otrzymujemy:

$$a(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$$

Stąd wynika wzór podany w ramce obok.



PRZYKŁAD 1 W trapezie prostokątnym $ABCD$ dane są: $A = (-3, 4)$, $B = (-3, -2)$, $C = (1, 6)$ oraz $BC \parallel AD$ i $CD \perp BC$. Znajdź współrzędne wierzchołka D .



Współczynnik kierunkowy prostej BC : $a = \frac{6+2}{1+3} = 2$

$$\begin{aligned}\text{prosta } AD: \quad y &= 2x + b_1 \\ 4 &= 2 \cdot (-3) + b_1 \\ b_1 &= 10 \\ y &= 2x + 10\end{aligned}$$

Proste AD i BC są równoległe, więc mają taki sam współczynnik kierunkowy.

$$\begin{aligned}\text{prosta } CD: \quad y &= -\frac{1}{2}x + b_2 \\ 6 &= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 + b_2 \\ b_2 &= 6\frac{1}{2} \\ y &= -\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Proste BC i CD są prostopadłe, więc współczynnik kierunkowy prostej CD to $-\frac{1}{a} = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} y = 2x + 10 \\ y = -\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{2} \end{cases}$$

Wyznaczamy współrzędne punktu przecięcia prostych AD i CD .

$$2x + 10 = -\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{7}{5}$$

$$y = 2 \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) + 10 = \frac{36}{5}$$

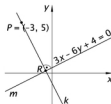
$$D = \left(-\frac{7}{5}; \frac{36}{5}\right)$$

ZADANIE W trapezie prostokątnym $ABCD$ dane są $A = (-1, 4)$, $B = (1, -2)$, $D = (2, 4)$ oraz $AB \parallel CD$ i $BC \perp CD$. Znajdź współrzędne wierzchołka C .

zadania 1–6 ►

II Poniższy przykład pokazuje, jak można obliczyć odległość danego punktu od danej prostej.

PRZYKŁAD 2 Znajdź odległość punktu $P = (-3, 5)$ od prostej m opisanej równaniem $3x - 6y + 4 = 0$.



Sporządzamy rysunek pomocniczy.

$$\text{prosta } m: \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$$

Znajdujemy równanie kierunkowe prostej m .

$$\begin{aligned}\text{prosta } k: \quad y &= -2x + b \\ 5 &= -2 \cdot (-3) + b \\ b &= -1 \\ y &= -2x - 1\end{aligned}$$

Znajdujemy równanie prostej k prostopadłej do prostej m , przechodzącej przez punkt P .

$$\text{Punkt } R: \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \\ y = -2x - 1 \end{cases}$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$y = -2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 1 = \frac{1}{3}$$

$$R = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$|PR| = \sqrt{\left(-3 + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(5 - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{196}{9}} = \frac{\sqrt{245}}{3} = \frac{7\sqrt{5}}{3}$$

..... Wyznaczamy współrzędne punktu przecięcia prostych m i k .

ZADANIE Znajdź odległość punktu $P = (0, 2)$ od prostej o równaniu $2x + y + 5 = 0$.

Aby ustalić odległość między dwiema prostymi równoległymi, można postępować jak w poprzednim przykładzie (tzn. znaleźć prostą prostopadłą do nich, następnie obliczyć współrzędne punktów przecięcia tej prostej z danymi prostymi i odległość między tymi punktami). Można też skorzystać z poniższego wzoru.

Odległość między prostymi równoległymi o równaniach

$$Ax + By + C_1 = 0 \quad \text{ i } \quad Ax + By + C_2 = 0:$$

$$d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Z powyższego wzoru warto korzystać tylko wówczas, gdy rozważane proste nie są prostopadłe do żadnej z osi układu współrzędnych. Dowód przeprowadzimy więc tylko dla takich przypadków.

Dowód

Rozważmy najpierw taki przypadek, gdy proste równoległe są nachylone do osi x pod kątem ostrym, i przyjmijmy takie oznaczenia, jak na rysunku obok. Zacięniowany trójkąt jest prostokątny, więc:

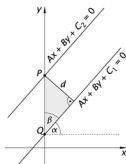
$$\sin \beta = \frac{d}{|PQ|}$$

Ponieważ $\sin \beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$, więc:

$$d = |PQ| \cdot \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{A}{B}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} = \frac{1}{\frac{A^2}{B^2} + 1} = \frac{B^2}{A^2 + B^2}$$



Ponieważ $P = \left(0, -\frac{C_2}{B}\right)$ i $Q = \left(0, -\frac{C_1}{B}\right)$, więc $|PQ| = \left|\frac{C_2 - C_1}{B}\right| = \frac{|C_2 - C_1|}{|B|}$.

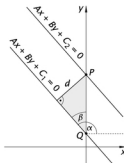
$$\text{Zatem } d = \frac{|C_2 - C_1|}{|B|} \cdot \sqrt{\frac{B^2}{A^2 + B^2}} = \frac{|C_2 - C_1|}{|B|} \cdot \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Rozważmy teraz przypadek, gdy proste równoległe są nachylone do osi x pod kątem rozwar-
tym. Wówczas przy oznaczeniach takich jak na
rysunku obok otrzymujemy:

$$\sin \beta = \frac{d}{|PQ|} \quad \text{i} \quad \sin \beta = \sin(\alpha - 90^\circ) = -\cos \alpha$$

$$\text{Zatem } d = |PQ| \cdot |\cos \alpha|.$$

Dalsza część dowodu przebiega analogicznie
jak w poprzednio rozważanym przypadku. $\square$

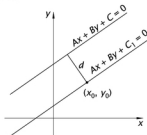


Korzystając ze wzoru na odległość dwóch prostych równoległych, łatwo
jest znaleźć wzór na odległość punktu od danej prostej.

Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Dowód



Prostą równoległą do prostej o równa-
niu $Ax + By + C = 0$ można opisać
równaniem $Ax + By + C_1 = 0$. Gdy
ponadto przechodzi przez punkt
 (x_0, y_0) , to $Ax_0 + By_0 + C_1 = 0$, więc:

$$C_1 = -Ax_0 - By_0$$

Odległość punktu (x_0, y_0) od pro-
stej o równaniu $Ax + By + C = 0$ jest
równa odległości między tymi pro-
stymi:

$$d = \frac{|C - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C + Ax_0 + By_0|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \square$$

ĆWICZENIE Rozwiąż zadanie z przykładu 2 (na str. 232), korzystając z powyż-
szego wzoru.

zadania 7–15 ►

ZESTAW ZADAŃ

◀ I 1. a) Oblicz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A i B , gdzie $A = (-5, -7)$, $B = (8, -12)$.

b) Znajdź równanie prostej przechodzącej przez punkt $P = (1, -2)$ i równoległej do prostej przechodzącej przez punkty $K = (4, -5)$ i $L = (-10, 2)$.

2. Znajdź równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta UVW opuszczoną z wierzchołka V , gdzie $U = (-5, 2)$, $V = (-1, 6)$ i $W = (3, 0)$.

• 3. Jaki warunek musi spełniać współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych, aby prosta ta przecinała odcinek AB ?

a) $A = (3, 0)$, $B = (3, 2)$ b) $A = (1, 5)$, $B = (3, 5)$ c) $A = (-4, 0)$, $B = (-4, 2)$

4. a) Znajdź równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i prostopadłej do prostej KL , jeśli $K = (-3, 2)$ i $L = (95, -10)$.

b) Znajdź równanie symetralnej odcinka AB , jeśli $A = (-5, -2)$, $B = (7, 6)$.

5. Znajdź współrzędne punktu symetrycznego do punktu $P = (2, 3)$ względem prostej o równaniu $y = -\frac{1}{2}x - 4$.

6. a) Znajdź ortocentrum trójkąta o wierzchołkach: $(-3, 4)$, $(2, -2)$, $(1, 5)$.

b) Znajdź środek ciężkości trójkąta o wierzchołkach: $(-3, 2)$, $(1, -2)$, $(3, 4)$.

◀ II 7. Uzasadnij, że prosta l jest równoległa do prostej k i oblicz odległość między tymi prostymi.

a) prosta l : $2x - 4y + 1 = 0$

b) prosta l : $y = \frac{2}{5}x + 3$

prosta k : $x - 2y - 1 = 0$

prosta k : $y = 0,4x - 2$

8. Oblicz odległość punktu A od prostej o podanym równaniu.

a) $A = (-1, 3)$, $2x - y + 3 = 0$

b) $A = (2, -7)$, $y = -\frac{1}{3}x + 2$

9. a) Oblicz długość wysokości trójkąta o wierzchołkach $A = (1, 4)$, $B = (-3, -2)$ i $C = (5, 2)$, opuszczonej z wierzchołka A , a następnie oblicz pole tego trójkąta.

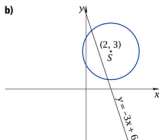
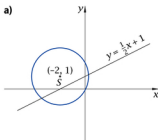
b) Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach: $A = (-2, -5)$, $B = (1, 4)$, $C = (5, 7)$.

10. Punkt $P = (3, 4)$ jest wierzchołkiem równoległoboku, którego jeden bok leży na prostej o równaniu $y = x$, a drugi — na prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 1$. Oblicz pole tego równoległoboku.

11. Znajdź współrzędne punktu przecięcia prostej o równaniu $2x - 3y + 1 = 0$ oraz prostej do niej prostopadłej i przechodzącej przez punkt $P = (3, 5)$, a następnie oblicz odległość punktu P od prostej o równaniu $2x - 3y + 1 = 0$.

12. Oblicz długość promienia okręgu o środku $S = (7, -2)$, stycznego do prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x - 2$.

13. Okrąg o środku S wycina z prostej cięciwę o długości 4 (zob. rysunek). Oblicz długość promienia tego okręgu.



14. Znajdź równanie prostej zawierającej dwusieczną kąta utworzonego przez proste o równaniach $5x + 12y + 2 = 0$ oraz $3x + 4y + 2 = 0$. Rozważ wszystkie przypadki.

15. Punkty przecięcia prostych o równaniach $2x - y - 4 = 0$, $2x + y - 8 = 0$ oraz $y + 2 = 0$ to wierzchołki pewnego trójkąta.

a) Znajdź współrzędne środka okręgu opisanego na tym trójkącie.

b) Znajdź współrzędne środka okręgu wpisanego w ten trójkąt.

MINISPRAWDZIAN

S1. Niech $A = (-2, 3)$, $B = (6, 7)$ i $C = (5, t)$. Wskaż wartość t , dla której prosta AB jest prostopadła do prostej BC .

- A. $t = 5$ B. $t = 9$ C. $t = 6,5$ D. $t = 7,5$

S2. Który z poniższych punktów jest najbardziej oddalony od prostej o równaniu $3x - 4y + 6 = 0$?

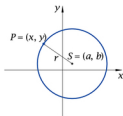
- A. $(0, 7)$ B. $(-1, 5)$ C. $(-6, 0)$ D. $(-3, -4)$

S3. Dwa wierzchołki trójkąta leżą na prostej o równaniu $y = \frac{1}{3}x + 4$ i odległość między nimi jest równa 10. Trzecim wierzchołkiem trójkąta jest punkt $(1, -4)$. Pole tego trójkąta jest równe:

- A. 2,5 B. $\frac{25\sqrt{10}}{2}$ C. 4,5 D. $\frac{\sqrt{10}}{4}$

RÓWNANIE OKRĘGU

- I ĆWICZENIE A Sprawdź, które z podanych punktów: $A = (7, -3)$, $B = (5, 7)$, $C = (-2, 0)$, $D = (-5, 7)$ należą do okręgu o środku $S = (2, 3)$ i promieniu 5.



Niech $S = (a, b)$ będzie środkiem okręgu o promieniu r . Punkt $P = (x, y)$ należy do tego okręgu, gdy jego odległość od punktu S jest równa r . Korzystając ze wzoru na odległość dwóch punktów, otrzymujemy równość:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

Zatem punkt $P = (x, y)$ należy do okręgu o środku $S = (a, b)$ i promieniu r , gdy jego współrzędne spełniają równanie zapisane w ramce.

Postać kanoniczna równania okręgu
o środku $S = (a, b)$ i promieniu r :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

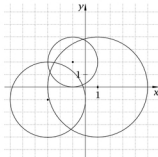
ĆWICZENIE B a) Ustal, jakie współrzędne ma środek okręgu o równaniu:

$$(x+5)^2 + (y-13)^2 = 5$$

Ustal długość promienia tego okręgu.

b) Zapisz równania okręgów przedstawionych na rysunku obok.

c) Zapisz równanie okręgu o środku w punkcie $S = (0, 0)$ i promieniu 7.



zadania 1-7 ►

- II Po przekształceniu równania okręgu otrzymujemy:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Wynika stąd, że równanie okręgu możemy zapisać w innej postaci.

Postać ogólna równania okręgu
o środku $S = (a, b)$ i promieniu r :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \text{ gdzie } c = a^2 + b^2 - r^2$$

Zauważ, że z powyższych warunków wynika równość $r^2 = a^2 + b^2 - c$, zatem równanie $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ opisuje okrąg, jeśli spełniony jest warunek $a^2 + b^2 - c > 0$.

PRZYKŁAD 1 Znajdź środek i promień okręgu opisanego równaniem.

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y - 30 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

$$-2a = -6$$

$$-2b = 10$$

$$c = -30$$

$$\text{Stąd: } a = 3$$

$$b = -5$$

$$r^2 = a^2 + b^2 - c = 9 + 25 + 30 = 64$$

$$\text{Stąd: } r = 8$$

Odp. Okrąg opisany podanym równaniem ma środek w punkcie $S = (3, -5)$ i jego promień jest równy 8.

Korzystamy z tego, że okrąg o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu r można opisać równaniem $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, gdzie $r^2 = a^2 + b^2 - c$.

ZADANIE Znajdź współrzędne środka i promień okręgu opisanego równaniem $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 11 = 0$.

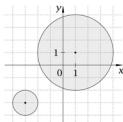
zadania 8–9 ►

- III Wszystkie punkty, których odległość od punktu S jest nie większa niż r , tworzą koło. Zatem punkt $P = (x, y)$ należy do koła o środku $S = (a, b)$ i promieniu r , gdy jego współrzędne spełniają nierówność:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$$

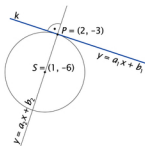
ĆWICZENIE C a) Opisz za pomocą nierówności koła zaznaczone na rysunku obok.

b) Zapisz nierówność, którą spełniają współrzędne punktów nienależących do koła o środku $S = (0, 4)$ i promieniu $\frac{1}{2}$.



zadania 10–12 ►

IV PRZYKŁAD 2 Znajdź równanie prostej stycznej w punkcie $P = (2, -3)$ do okręgu o równaniu $(x - 1)^2 + (y + 6)^2 = 10$.



$$a_2 = \frac{-3+6}{2-1} = 3 \quad a_1 = -\frac{1}{a_2} = -\frac{1}{3}$$

Równanie prostej k : $y = -\frac{1}{3}x + b_1$

$$-3 = -\frac{1}{3} \cdot 2 + b_1$$

$$b_1 = -\frac{7}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$$

Wykonujemy rysunek pomocniczy; współrzędne środka okręgu odczytujemy z równania; szukana styczna (prosta k) jest prostopadła do prostej PS .

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej PS ; korzystamy ze wzoru $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej PS .

Punkt $P = (2, -3)$ leży na prostej k , więc jego współrzędne spełniają równanie tej prostej.

Zapisujemy równanie prostej k .

ZADANIE Znajdź równanie prostej stycznej w punkcie $(-1, 1)$ do okręgu o równaniu $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

zadania 13–14

ZESTAW ZADAŃ

1. Zapisz równanie okręgu o środku w punkcie A i promieniu r .

- a) $A = (0, 0)$, $r = 30$ c) $A = (-2, -11)$, $r = 1,1$ e) $A = (1, 0)$, $r = 2\sqrt{2}$
 b) $A = (0, -4)$, $r = 1$ d) $A = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $r = \frac{3}{4}$ f) $A = (\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, $r = 2\sqrt[4]{3}$

2. Które z podanych punktów leżą na okręgu o równaniu $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 13$?

$P = (0, 0)$ $Q = (3, -5)$ $R = (1, -2)$ $S = (0, -1)$ $T = (5, -8)$ $U = (-10, -5)$

3. Znajdź równanie:

- a) okręgu, którego średnicą jest odcinek o końcach $(-8, -2)$ i $(-5, 3)$,
 b) okręgu o środku $(1, 7)$, przechodzącego przez początek układu współrzędnych,
 c) okręgu, na którym leży punkt $(0, 2)$ i którego środkiem jest punkt $(8, -5)$,
 d) okręgu o środku w punkcie $(8, -9)$, stycznej do osi x .

4. Zapisz równania okręgów:

- a) o promieniu 7, stycznych do obu osi układu współrzędnych,
- b) stycznych do obu osi układu współrzędnych oraz do prostej o równaniu $y = -8$,
- c) których środki leżą na prostej o równaniu $x = 5$ i które są styczne do obu osi układu współrzędnych.

5. Czy okręgi o podanych równaniach są styczne, przecinają się czy są rozłączne?

a) $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 16$

$(x+6)^2 + (y-3)^2 = 9$

b) $(x-2)^2 + (y+7)^2 = 18$

$(x-7)^2 + (y+7)^2 = 8$

c) $(x+6)^2 + y^2 = 49$

$(x+6)^2 + (y+8)^2 = 4$

d) $x^2 + y^2 = 10$

$(x+1)^2 + (y-7)^2 = 26$

e) $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 9$

$x^2 + (y-10)^2 = 16$

f) $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 144$

$(x+1)^2 + (y+5)^2 = 4$

6. Znajdź równania okręgów o środku S , stycznych do podanego okręgu.

a) $S = (3, -6)$, $(x+9)^2 + (y+1)^2 = 4$

b) $S = (-1, 3)$, $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 49$

7. Zapisz równania okręgów o środkach na osi x i promieniu 4, stycznych do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 100$.

◀ **8.** Podane równanie okręgu zapisz w postaci ogólnej.

a) $x^2 + (y-3)^2 = 25$

b) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 3$

9. Znajdź współrzędne środka i promień okręgu określonego równaniem.

a) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 6 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 14x - 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$

c) $x^2 + y^2 + 20x + 19 = 0$

f) $x^2 + y^2 + 12x - 4y = 0$

◀ **10.** Jaką figurę tworzą punkty, których współrzędne spełniają podany warunek?

a) $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$

c) $(x - \sqrt{3})^2 + (y - \sqrt{3})^2 > \sqrt{3}$

b) $x^2 + (y-9)^2 < 1,21$

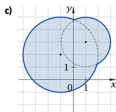
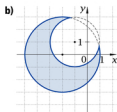
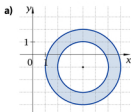
d) $(x-4)^2 + (y+1)^2 \geq 16$

11. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne spełniają podany warunek.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ (x+5)^2 + (y-2)^2 < 9 \end{cases}$

b) $x^2 + (y-6)^2 < 3$ lub $x^2 + y^2 = 4$

12. Opisz za pomocą nierówności zbiór punktów należących do zacięniowanego obszaru.



13. Znajdź równanie prostej stycznej do okręgu o podanym równaniu w punkcie P .

a) $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 10$

$P = (6, -3)$

b) $x^2 + y^2 + 10x + 2y + 13 = 0$

$P = (-8, 1)$

14. Z punktu P poprowadzono dwie proste styczne w punktach $(-3, 4)$ i $(1, 0)$ do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$. Znajdź współrzędne punktu przecięcia tych stycznych.

MINISPRAWDZIAN

51. Ustal, jakie jest położenie punktu $P = (-3, 4)$ względem okręgu opisanego równaniem $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 10$.

- A. Punkt P jest środkiem tego okręgu.
- B. Punkt P leży wewnątrz tego okręgu, ale nie jest jego środkiem.
- C. Punkt P leży na tym okręgu.
- D. Punkt P leży na zewnątrz tego okręgu.

52. Koło ograniczone okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 + 8x - 8y + 23 = 0$ ma pole równe:

- A. 3π
- B. 6π
- C. 9π
- D. 16π

53. Odcinek o końcach $(-2, 5)$ i $(4, -1)$ jest średnicą okręgu o równaniu:

- A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 18$
- B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 72$
- C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 18$
- D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 72$

54. Proste o równaniach $y = x - 1$ oraz $y = x + 3$ są styczne do tego samego okręgu. Średnica tego okręgu ma długość:

- A. $\sqrt{2}$
- B. $2\sqrt{2}$
- C. $4\sqrt{2}$
- D. 4

INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA UKŁADU RÓWNAŃ

- I Niektóre typy równań opisują pewne figury w układzie współrzędnych, więc układ takich równań można zinterpretować graficznie i jego rozwiązanie jest w istocie poszukiwaniem wspólnych punktów tych figur.

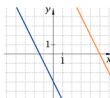
Przyjrzyj się poniższemu układowi równań i ich interpretacjom geometrycznym.

$$\begin{cases} x - 3y + 2 = 0 \\ x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$$



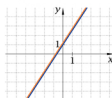
Te proste przecinają się w jednym punkcie — układ równań ma jedno rozwiązanie, jest to układ oznaczony.

$$\begin{cases} 2x + y - 10 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$$



Proste są równoległe, nie mają punktów wspólnych — układ równań nie ma rozwiązań, jest to układ sprzeczny.

$$\begin{cases} 3x - 2y + 2 = 0 \\ -1,5x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

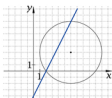


Oba równania opisują tę samą prostą. Współrzędne każdego punktu tej prostej spełniają układ równań — układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, jest to układ nieoznaczony.

zadania 1–3 ►

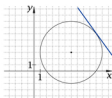
- II Takie układy równań jak powyższe pojawiły się przy okazji rozwiązywania zadań w poprzednich rozdziałach. Oto inne przykłady układów równań i ich interpretacje geometryczne:

$$\begin{cases} (x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases}$$



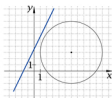
Prosta przecina okrąg w dwóch punktach. Układ równań ma dwa rozwiązania.

$$\begin{cases} (x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25 \\ 4x + 3y - 58 = 0 \end{cases}$$



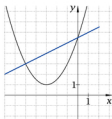
Prosta jest styczna do okręgu. Układ równań ma jedno rozwiązanie.

$$\begin{cases} (x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25 \\ 3x - 2y + 7 = 0 \end{cases}$$



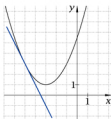
Prosta jest rozłączna z okręgiem. Układ równań jest sprzeczny.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 5,5 \\ x - 2y + 11 = 0 \end{cases}$$



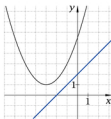
Prosta przecina parabolę w dwóch punktach. Układ równań ma dwa rozwiązania.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 5,5 \\ y = -2x - 7 \end{cases}$$



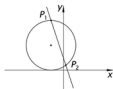
Prosta jest styczna do paraboli. Układ równań ma jedno rozwiązanie.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 5,5 \\ y = x + 2 \end{cases}$$



Prosta nie ma punktów wspólnych z parabolą. Układ równań nie ma rozwiązań. Jest sprzeczny.

PRZYKŁAD 1 Znajdź współrzędne punktów, w których prosta opisana równaniem $y = -3x + 1$ przecina okrąg o równaniu $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$.



$$\begin{cases} y = -3x + 1 \\ (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4 \end{cases}$$

$$(x + 1)^2 + (-3x + 1 - 2)^2 = 4$$

$$x^2 + 2x + 1 + 9x^2 + 6x + 1 = 4$$

$$10x^2 + 8x - 2 = 0$$

$$5x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$\Delta = 36$$

$$\begin{cases} x = \frac{-4-6}{2 \cdot 5} = -1 \\ y = -3 \cdot (-1) + 1 = 4 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = \frac{-4+6}{2 \cdot 5} = \frac{1}{5} \\ y = -3 \cdot \frac{1}{5} + 1 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

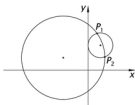
$$P_1 = (-1, 4), \quad P_2 = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Szukamy współrzędnych punktów, które spełniają oba równania.

ZADANIE Znajdź współrzędne punktów, w których prosta opisana równaniem $y = 2x - 8$ przecina okrąg o równaniu $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$.

PRZYKŁAD 2 Znajdź współrzędne punktów, w których przecinają się okręgi o równaniach $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ i $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 11$.



Sporządzamy rysunek pomocniczy.

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 = 11 \end{cases}$$

Szukamy współrzędnych punktów, które spełniają oba równania.

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 1 \\ x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0 \\ -x^2 - y^2 - 4x + 2y - 6 = 0 \\ \hline -6x - 2y + 10 = 0 \\ y = -3x + 5 \end{array}$$

Dodajemy równania stronami.

$$\begin{aligned} x^2 + (-3x + 5)^2 - 2x - 4(-3x + 5) + 4 &= 0 \\ 10x^2 - 20x + 9 &= 0 \end{aligned}$$

Podstawiamy $y = -3x + 5$ do pierwszego równania.

$$\Delta = 40$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{10}$$

$$\begin{cases} x = \frac{20 - 2\sqrt{10}}{2 \cdot 10} = 1 - 0,1\sqrt{10} \\ y = -3 \cdot (1 - 0,1\sqrt{10}) + 5 = 2 + 0,3\sqrt{10} \end{cases}$$

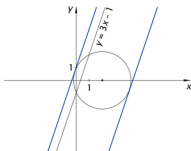
lub

$$\begin{cases} x = \frac{20 + 2\sqrt{10}}{2 \cdot 10} = 1 + 0,1\sqrt{10} \\ y = -3 \cdot (1 + 0,1\sqrt{10}) + 5 = 2 - 0,3\sqrt{10} \end{cases}$$

$$P_1 = (1 - 0,1\sqrt{10}, 2 + 0,3\sqrt{10}), \quad P_2 = (1 + 0,1\sqrt{10}, 2 - 0,3\sqrt{10})$$

ZADANIE Znajdź współrzędne punktów, w których przecinają się okręgi o równaniach $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 1$ i $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 6$.

PRZYKŁAD 3 Znajdź równanie prostej równoległej do prostej opisanej równaniem $y = 3x - 1$ i stycznej do okręgu o równaniu $(x - 2)^2 + y^2 = 5$.



Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Równanie kierunkowe szukanej prostej ma postać: $y = 3x + b$

Szukana prosta jest równoległa do prostej $y = 3x - 1$, ma więc współczynnik kierunkowy równy 3.

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = 5 \\ y = 3x + b \end{cases}$$

Prosta jest styczna do okręgu, gdy ma z nim jeden punkt wspólny, tak więc układ równań powinien mieć jedno rozwiązanie.

$$(x - 2)^2 + (3x + b)^2 = 5$$

$$x^2 - 4x + 4 + 9x^2 + 6bx + b^2 = 5$$

$$10x^2 + (6b - 4)x + b^2 - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (6b - 4)^2 - 4 \cdot 10(b^2 - 1) = 36b^2 - 48b + 16 - 40b^2 + 40 = \\ &= -4b^2 - 48b + 56 \end{aligned}$$

$$-4b^2 - 48b + 56 = 0$$

$$b^2 + 12b - 14 = 0$$

$$\Delta_1 = 144 + 56 = 200$$

$$\sqrt{\Delta_1} = 10\sqrt{2}$$

$$b_1 = \frac{-12 - 10\sqrt{2}}{2} = -6 - 5\sqrt{2}$$

$$b_2 = \frac{-12 + 10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} - 6$$

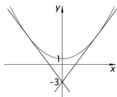
Układ równań ma jedno rozwiązanie, gdy otrzymane równanie kwadratowe ma jeden pierwiastek, czyli gdy $\Delta = 0$.

Obliczamy, dla jakich wartości b zachodzi równość $\Delta = 0$.

Odp. Warunki zadania spełniają dwie proste: $y = 3x - 6 - 5\sqrt{2}$ i $y = 3x + 5\sqrt{2} - 6$.

ZADANIE Znajdź równanie prostej równoległej do prostej opisanej równaniem $y = -2x + 3$ i stycznej do okręgu o równaniu $x^2 + (y - 3)^2 = 2$.

PRZYKŁAD 4 Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których prosta o równaniu $y = ax - 3$ ma jeden punkt wspólny z parabolą o równaniu $y = \frac{1}{9}x^2 + 1$.



Sporządzamy rysunek pomocniczy.

$$\begin{cases} y = ax - 3 \\ y = \frac{1}{9}x^2 + 1 \end{cases}$$

Szukamy punktów wspólnych prostej i paraboli.

$$ax - 3 = \frac{1}{9}x^2 + 1$$

$$\frac{1}{9}x^2 - ax + 4 = 0$$

$$\Delta = a^2 - 4 \cdot \frac{1}{9} \cdot 4 = a^2 - \frac{16}{9}$$

Równanie ma jedno rozwiązanie, gdy $\Delta = 0$.

$$a^2 - \frac{16}{9} = 0$$

$$a^2 = \frac{16}{9}$$

$$a = \frac{4}{3} \quad \text{lub} \quad a = -\frac{4}{3}$$

ZADANIE Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których prosta o równaniu $y = ax + 1$ ma jeden punkt wspólny z parabolą o równaniu $y = -25x^2$.

zadania 4–26 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Ustal, ile rozwiązań ma podany układ równań, korzystając z jego interpretacji geometrycznej.

a) $\begin{cases} y = 3x - 7 \\ y = -x + 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ 2x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 6x - 3y = 12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x + 7y = -1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

2. a) Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których układ równań jest sprzeczny.

a) $\begin{cases} px + 2y = 4 \\ 3x + (1 + p)y = 1 \end{cases}$

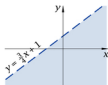
b) $\begin{cases} x - 2y = 2 - 2p \\ 2x - py = -3p \end{cases}$

Warto wiedzieć!

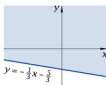
Na każdym z poniższych rysunków zaznaczono pewien podzbiór płaszczyzny. Współrzędne punktów należących do tego zbioru spełniają nierówności lub układy nierówności, które zapisano pod rysunkami.



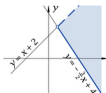
$$x \geq -2$$



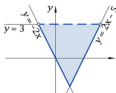
$$y < \frac{3}{4}x + 1$$



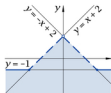
$$y \geq -\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$$



$$\begin{cases} y \geq -\frac{3}{2}x + 4 \\ y < x + 2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y < 3 \\ y \geq -2x \\ y \geq 2x - 5 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y < -x + 2 \\ y < x + 2 \\ y \leq -1 \end{cases}$$

3. Przeczytaj informacje w ramce. Na każdym z poniższych rysunków naszkicowano fragmenty prostych o równaniach $y = \frac{3}{4}x + 1$ oraz $y = -x + 2$. Zapisz warunki, jakie spełniają współrzędne punktów należących do zaznaczonych obszarów.



4. Znajdź równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $y = 2x + 3$, która ma z parabolą o równaniu $y = x^2 - 2$ jeden punkt wspólny.

5. a) Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których parabola o równaniu $y = x^2 + 1$ i prosta o równaniu $y = ax$ mają jeden punkt wspólny.

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których parabola opisana równaniem $y = px^2 + 1$ i prosta o równaniu $y = x$ mają jeden punkt wspólny.

6. Ustal, w jakich punktach podany okrąg przecina osie układu współrzędnych.

a) $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 25$ **b)** $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$ **c)** $(x+7)^2 + (y-1)^2 = 49$

7. Znajdź współrzędne punktów wspólnych prostej i okręgu o równaniu:

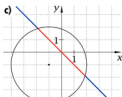
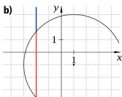
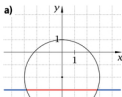
a) $y = -2x + 3$, $x^2 + y^2 = 4$

c) $y = -2x + 3$, $(x+3)^2 + y^2 = 4$

b) $x - 2y - 2 = 0$, $x^2 + (y-1)^2 = \frac{24}{5}$

d) $3x - y + 1 = 0$, $(x-3)^2 + y^2 = 10$

8. Oblicz długość zaznaczonej cięciwy okręgu.



9. Oblicz długość cięciwy wyciętej z prostej o równaniu $y = -2x + 1$ przez okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 4$.

10. Prosta o równaniu $y = x + 4$ przecina okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 36$ w punktach A i B . Odcinek BC jest średnicą tego okręgu. Oblicz pole trójkąta ABC .

11. Znajdź współrzędne punktów wspólnych:

a) okręgu o środku $S = (1, 0)$ i promieniu 2 z okręgiem o środku $T = (-1, 0)$ i promieniu 4,

b) okręgu o równaniu $x^2 + (y-3)^2 = 27$ z okręgiem o równaniu $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$.

12. Znajdź współrzędne punktów, w których przecinają się podane okręgi.

a) $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ i $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 20 = 0$

b) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 1$ i $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$

c) $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 10$ i $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

13. Oblicz długość wspólnej cięciwy okręgów opisanych równaniami $x^2 + y^2 = 9$ i $(x-4)^2 + y^2 = 4$.

14. Dwa okręgi o środkach w punktach $A = (-2, -4)$ i $C = (1, 1)$ i takim samym promieniu 3 przecinają się w punktach B i D . Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

15. Znajdź równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $y = 2x$ i stycznej do okręgu o równaniu:

a) $x^2 + y^2 = 6$ b) $(x + 4)^2 + y^2 = 1$ c) $x^2 + (y + 5)^2 = 4$ d) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$

16. a) Znajdź wszystkie wartości b , dla których prosta o równaniu $y = \frac{1}{3}x + b$ jest styczna do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 10$.

b) Znajdź wszystkie wartości a , dla których prosta o równaniu $y = ax - 5$ przecina okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 5$ w dwóch punktach.

c) Jaki powinien być promień okręgu o środku w punkcie $S = (0, 0)$, aby okrąg ten nie miał punktów wspólnych z prostą o równaniu $y = -2x + 3$?

d) Znajdź wszystkie wartości t , dla których okrąg o środku $(t, 0)$ i promieniu 1 ma co najmniej jeden punkt wspólny z prostą o równaniu $y = 2x$.

17. Znajdź równania stycznych do okręgu opisanego równaniem $x^2 + y^2 = 1$:

- a) przechodzących przez $P = (0, -5)$, c) prostopadłych do prostej $y = 2x$,
b) równoległych do prostej $y = x$, d) przechodzących przez $R = (1, 2)$.

18. Znajdź współrzędne punktów wspólnych okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 1$ i paraboli o równaniu:

a) $y = x^2$ b) $y = -4x^2 + 1$ c) $y = \frac{1}{5}x^2 - 1$

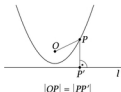
19. Znajdź współrzędne punktów wspólnych okręgu o równaniu $x^2 + (y + 2)^2 = 6$ i paraboli o równaniu $y = -x^2 - 2$.

20. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których parabola opisana równaniem $y = mx^2$ ma dwa punkty wspólne z okręgiem o równaniu $x^2 + (y - 2)^2 = 1$.

Warto wiedzieć!

Na płaszczyźnie dana jest prosta l i punkt O , który nie leży na tej prostej. Wszystkie punkty, których odległość od punktu O jest taka sama jak odległość od prostej l , tworzą pewną krzywą. Okazuje się, że ta krzywa to parabola.

Punkt O nazywamy ogniskiem paraboli, a prostą l — jej kierownicą.



21. Przeczytaj informacje w ramce. Udowodnij, że ogniskiem paraboli o równaniu $y = x^2$ jest punkt $P = (0, \frac{1}{4})$, a jej kierownicą jest prosta o równaniu $y = -\frac{1}{4}$.

- 22.** Znajdź równanie okręgu o promieniu 10, stycznego do prostej o równaniu $y = \frac{1}{3}x$ oraz do prostej o równaniu $y = -\frac{1}{3}x$.
- 23.** Wśród okręgów, które są styczne do prostej o równaniu $3x - 4y - 12 = 0$ i do okręgu o równaniu $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$, znajdź okrąg o najmniejszym promieniu.
- 24.** Wykaż, że równanie prostej stycznej do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = r^2$ w punkcie $P = (x_0, y_0)$ ma postać $xx_0 + yy_0 = r^2$.
- 25.** Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których parabola opisana równaniem $y = mx^2 - 1$ ma trzy punkty wspólne z okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 = 1$.

Warto wiedzieć!

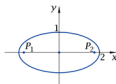
Na płaszczyźnie dane są dwa różne punkty P_1 i P_2 . Zbiór wszystkich punktów, których suma odległości od punktów P_1 i P_2 jest taka sama, tworzy pewną krzywą, zwaną elipsą. Punkty P_1 i P_2 nazywamy ogniskami elipsy.

Elipsa i inne krzywe stożkowe (parabola i hiperbola) znane były już w starożytności. Po raz pierwszy pojawiły się w IV w. p.n.e. w pracach greckiego matematyka Menaichmosa, przyjaciela Platona. Użył on krzywych stożkowych do rozwiązania jednego ze słynnych geometrycznych problemów starożytności — podwojenia sześcianu.



$$|PP_1| + |PP_2| = a$$

- 26.** Przeczytaj informacje w ramce. Krzywa przedstawiona na rysunku obok to elipsa. Współrzędne każdego punktu tej elipsy spełniają warunek $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Wykaż, że suma odległości dowolnego punktu na tej krzywej od punktów $P_1 = (-\sqrt{3}, 0)$ i $P_2 = (\sqrt{3}, 0)$ jest równa 4.



MINISPRAWDZIAN

51. Prosta o równaniu $y = x$ jest styczna do okręgu opisanego równaniem:

- A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$
 B. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ D. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$

52. Jedna z prostych stycznych do okręgu o równaniu $(x-2)^2 + y^2 = 1$ i przechodząca przez początek układu współrzędnych ma równanie:

- A. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ B. $y = \sqrt{3}x$ C. $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ D. $y = \sqrt{2}x$

53. Częścią wspólną prostej o równaniu $y = 2x + 1$ i koła o środku $S = (0, 3)$ i promieniu 2 jest cięciwa o długości:

- A. $\frac{13\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{8}{5}$ C. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

POWTÓRZENIE

1. Znajdź równanie prostej przechodzącej przez punkt $(2, 1)$, która jest:

- a) równoległa do prostej o równaniu $5x + 3y - 4 = 0$,
- b) prostopadła do prostej o równaniu $2x - 3y + 1 = 0$.

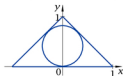
2. Ze wszystkich punktów leżących na prostej o równaniu $y = 2x + 10$ punkt P leży najbliżej początku układu współrzędnych. Oblicz współrzędne punktu P .

3. Trzy proste o równaniach: $y = 2x + 4$, $y = -3x - 6$ i $x + 2y - 3 = 0$ ograniczają trójkąt. Wykaż, że ten trójkąt jest prostokątny i równoramienny, oraz znajdź równanie osi symetrii tego trójkąta.

4. Pole trójkąta ABC jest równe 21. Punkty A i B leżą na prostej o równaniu $-3x + 2y - 1 = 0$, a $C = (-3, -1)$. Znajdź długość boku AB .

5. Jednym z końców średnicy okręgu opisanego równaniem $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ jest punkt $A = (1, -\sqrt{3})$. Podaj współrzędne drugiego końca tej średnicy.

6. Trójkąt zaznaczony na niebiesko jest prostokątny i równoramienny, a przedstawiony okrąg jest styczny do boków trójkąta. Znajdź równanie okręgu.



7. Znajdź równanie okręgu, który jest symetryczny do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 4x + 10y - 20 = 0$ względem prostej o równaniu:

- a) $x = 3$
- b) $y = -2x$

8. Znajdź równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC .

- a) $A = (0, 10)$, $B = (0, 0)$, $C = (24, 0)$
- b) $A = (0, 10)$, $B = (0, 0)$, $C = (6, 2)$

9. Znajdź równanie prostej stycznej w punkcie $P = (1, 5)$ do okręgu o równaniu $x^2 + (y - 2)^2 = 10$.

10. Znajdź wartość parametru C , dla którego prosta opisana równaniem $4x + 3y + C = 0$ jest styczna do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$. Znajdź współrzędne punktu styczności.

11. Oblicz długość cięciwy wyciętej z prostej o równaniu $2y - x + 1 = 0$ przez okrąg o środku $(2, -1)$ i promieniu 3.

12. Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego wpisanego w okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$ zawiera się w prostej o równaniu $x + 5y - 6 = 0$. Znajdź równania prostych, które zawierają pozostałe boki tego trójkąta.

13. Ustal, jakie współrzędne mają punkty przecięcia się okręgów o równaniach: $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$ oraz $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$.

14. Oblicz pole czworokąta, którego wierzchołkami są punkty przecięcia okręgu o równaniu $x^2 + (y - 4)^2 = 10$ i paraboli o równaniu $y = x^2$.

15. Jaki promień może mieć okrąg o środku w początku układu współrzędnych, który ma dwa punkty wspólne z parabolą o równaniu $y = x^2 - 4$?

Stereometria

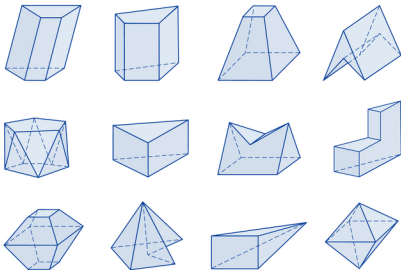
Atomium to gigantyczna konstrukcja (ok. 100 m wysokości) zbudowana w 1958 roku na przedmieściach Brukseli z okazji międzynarodowej wystawy osiągnięć techniki. Budowla ta przedstawia powiększony ok. 165 miliardów razy fragment sieci krystalicznej metalu. Dziewięć kul, każda o średnicy 18 m, znajduje się w wierzchołkach sześcianu i na przecięciu jego przekątnych. W rurze pionowej zainstalowano windę, a w pozostałych rurach łączących kule – schody.



- Wielościany i inne figury przestrzenne
- Figury obrotowe
- i inne figury przestrzenne
- Proste i płaszczyzny w przestrzeni
- Przekroje graniastosłupów i ostrosłupów
- Bryły podobne
- Powtórzenie

WIEŁOŚCIANY I INNE FIGURY PRZESTRZENNE

- I Na rysunku przedstawiono przykłady brył zwanych wielościanami. Są one ograniczone wielokątami — ścianami wielościanu — w taki sposób, że każda krawędź wielościanu jest wspólnym bokiem dwóch ścian. Każdy wierzchołek wielościanu to wspólny punkt co najmniej trzech krawędzi.



Warto wiedzieć!

Figurę nazywamy wypukłą, gdy każdy z odcinków łączących dwa dowolne punkty figury w całości zawiera się w tej figurze.

Liczba ścian (S), liczba wierzchołków (W) i liczba krawędzi (K) dowolnego wielościanu wypukłego są ze sobą związane zależnością, którą odkrył w 1752 roku wielki matematyk szwajcarski Leonhard Euler (czyt. ojler).

WZÓR EULERA:

$$S + W = K + 2$$

ĆWICZENIE A Przeczytaj informacje w ramce obok.

- Wśród powyższych wielościanów wskaż te, które nie są wypukłe.
- Podaj liczbę ścian, wierzchołków i krawędzi graniastosłupa, którego podstawą jest n -kąt. Sprawdź, czy liczby te spełniają wzór Eulera.
- Podaj liczbę ścian, wierzchołków i krawędzi ostrosłupa, którego podstawą jest n -kąt. Sprawdź, czy liczby te spełniają wzór Eulera.
- Korzystając ze wzoru Eulera, ustal, ile krawędzi ma wielościan wypukły o 10 ścianach i 12 wierzchołkach.

ĆWICZENIE B Wśród wielościanów przedstawionych na stronie obok wskaż graniastosłupy. Dokończ zdania.

- a) Graniastosłup prosty, to taki graniastosłup, w którym...
- b) Graniastosłup, w którym krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstaw, nazywamy...
- c) Graniastosłup prosty, którego podstawa jest wielokątem foremnym, nazywamy...

ĆWICZENIE C Wśród wielościanów przedstawionych na stronie obok wskaż ostrosłupy. Dokończ zdania.

- a) Ostrosłup prawidłowy to taki ostrosłup, w którym...
- b) Czworoscian foremny to...
- c) Spodek wysokości ostrosłupa to...

Poniżej przypominamy podstawowe wzory dotyczące graniastosłupów i ostrosłupów.

GRANIASTOSŁUP



Pole powierzchni całkowitej:

$$P = 2P_p + P_b$$

Objętość:

$$V = P_p \cdot h$$

OSTROSŁUP



Pole powierzchni całkowitej:

$$P = P_p + P_b$$

Objętość:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

W powyższych wzorach P_p , P_b i h oznaczają odpowiednio pole podstawy, pole powierzchni bocznej i wysokość. Wzory te można także wykorzystać przy obliczeniach dotyczących niektórych innych wielościanów.

ĆWICZENIE D Graniastosłup prawidłowy czworokątny i ostrosłup prawidłowy czworokątny mają tę samą wysokość i równe objętości. Oblicz stosunek długości krawędzi podstaw tych brył.

PRZYKŁAD 1 Od sześcianu o długości krawędzi a odcięto naroża płaszczyznami przechodzącymi przez środki krawędzi w sposób pokazany na rysunku. Oblicz pole powierzchni i objętość otrzymanej bryły.



$$x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

Ściany rozważanej bryły to 6 kwadratów o długości boku x i 8 trójkątów równobocznych o długości boku x .

$$P = 6x^2 + 8 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = x^2(6 + 2\sqrt{3}) = \frac{a^2}{2}(6 + 2\sqrt{3}) = a^2(3 + \sqrt{3})$$

$$V = a^3 - 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{a}{2} = a^3 - \frac{1}{6}a^3 = \frac{5}{6}a^3$$

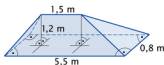
Od objętości sześcianu odejmujemy objętość ośmiu ostrosłupów o podstawie, która jest trójkątem prostokątnym równoramiennym.

Odp. Pole powierzchni bryły jest równe $a^2(3 + \sqrt{3})$, a objętość wynosi $\frac{5}{6}a^3$.

ZADANIE Sześcian o długości krawędzi a rozcięto na dwie części płaszczyzną przechodzącą przez trzy wierzchołki sześcianu w sposób pokazany na rysunku. Oblicz objętości i pola powierzchni otrzymanych brył.



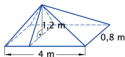
PRZYKŁAD 2 Oblicz objętość bryły przedstawionej na rysunku.



Bryłę można podzielić na dwa ostrosłupy czworokątne i graniastosłup trójkątny; otrzymane ostrosłupy można „skleić” w jeden ostrosłup, którego podstawa jest prostokątem o wymiarach $4\text{ m} \times 0,8\text{ m}$.



$$V_1 = \frac{0,8 \cdot 1,2}{2} \cdot 1,5 = 0,72 \text{ [m}^3\text{]}$$

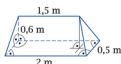


$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 0,8 \cdot 1,2 = 1,28 \text{ [m}^3\text{]}$$

$$V = V_1 + V_2 = 0,72 + 1,28 = 2 \text{ [m}^3\text{]}$$

Odp. Objętość bryły jest równa 2 m^3 .

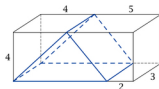
ZADANIE Oblicz objętość bryły przedstawionej na rysunku.



zadania 1–25 ►

ZESTAW ZADAŃ

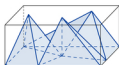
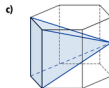
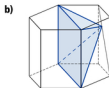
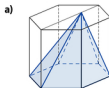
1. Na rysunku obok przedstawiono prostopadłościan podzielony na trzy graniastosłupy proste. Oblicz objętości tych graniastosłupów.



2. Z czterech takich samych sześcianów o długości krawędzi a wycięto ostrosłupy w sposób przedstawiony na rysunkach. Oblicz objętości tych ostrosłupów.

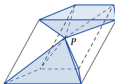


3. Z graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o długości krawędzi podstawy a i wysokości h wycięto ostrosłup w sposób przedstawiony na rysunku. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



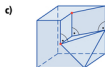
4. Podstawy ostrosłupów wypełniają jedną z podstaw prostopadłościanu, a ich wierzchołki leżą na przeciwległej podstawie (zob. rysunek). Jaką część prostopadłościanu zajmują te ostrosłupy?

5. Wewnątrz graniastosłupa o objętości V wybrano pewien punkt P . Następnie wycięto z graniastosłupa dwa ostrosłupy o wierzchołku P , których podstawami są podstawy graniastosłupa (zob. rysunek obok). Jaką część objętości graniastosłupa stanowi objętość bryły otrzymanej po usunięciu ostrosłupów?



6. Od sześcianu o długości krawędzi a odcięto w każdym wierzchołku mniejszy sześcian (zob. rysunek obok). Otrzymany wielościan ma wszystkie krawędzie jednakowej długości. Oblicz objętość i pole powierzchni tego wielościanu.

7. Bryłę przedstawioną na rysunku otrzymano w wyniku wycięcia z sześcianu o długości krawędzi a pewnego wielościanu. Zaznaczony kropką punkt to środek danej ściany. Oblicz objętość tej bryły.



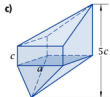
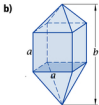
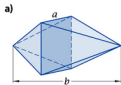
8. Do każdej ściany sześcianu o długości krawędzi a doklejono jednakowe ostrosłupy prawidłowe czworokątne o długości krawędzi podstawy a .

a) Jaka powinna być wysokość doklejonych ostrosłupów, aby objętość otrzymanej bryły była cztery razy większa od objętości sześcianu?

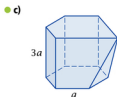
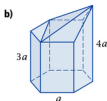
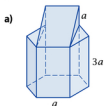
b) Jaka powinna być wysokość ostrosłupów, aby otrzymana bryła miała dwanaście ścian?



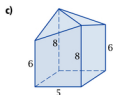
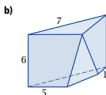
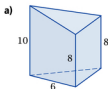
9. Zacieniowany czworokąt jest kwadratem. Oblicz objętość bryły przedstawionej na rysunku.



10. Bryła pokazana na rysunku powstała w wyniku sklejenia graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego i pewnego graniastosłupa lub ostrosłupa. Oblicz jej objętość.



11. W wyniku odcięcia pewnej bryły od graniastosłupa prawidłowego powstała bryła przedstawiona na rysunku. Oblicz jej objętość.



12. Od czworościanu foremnego o długości krawędzi a odcięto ostrosłup płaszczyzną przechodzącą przez dwie wysokości ścian. Oblicz objętość bryły, która pozostała po odcięciu ostrosłupa.

- **13.** Graniastosłup trójkątny rozcięto na dwie bryły w sposób pokazany na rysunku obok. Oblicz stosunek objętości tych brył.



- 14.** Graniastosłup prosty trójkątny o polu podstawy P i wysokości h podzielono na trzy części w sposób przedstawiony na rysunku obok. Oblicz objętość każdej z tych części.

15. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny prostokątny. Przeciwprostokątna podstawy i przekątne dwóch ścian bocznych tworzą trójkąt równoboczny o długości boku a . Oblicz wysokość tego graniastosłupa.

- **16.** Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość a . Jaką wysokość powinien mieć ten graniastosłup, aby trójkąt zbudowany z przekątnej ściany bocznej, dłuższej przekątnej podstawy i krótszej przekątnej graniastosłupa był równoramienny?

Wielościany foremne (zwane bryłami platońskimi) to takie wielościany wypukłe, w których:

- wszystkie ściany są przystającymi wielokątami foremnymi,
- w każdym wierzchołku spotyka się tyle samo ścian.

Istnieje pięć wielościanów foremných.



CZWOROSĆCIAN FOREMNY

- Ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi.
- W każdym wierzchołku spotykają się 3 ściany.



SZESĆCIAN

- Ściany są przystającymi kwadratami.
- W każdym wierzchołku spotykają się 3 ściany.



OŚMIOSĆCIAN FOREMNY

- Ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi.
- W każdym wierzchołku spotykają się 4 ściany.



DWUNASTOSĆCIAN FOREMNY

- Ściany są przystającymi pięciokątami foremnymi.
- W każdym wierzchołku spotykają się 3 ściany.



DWUDZIESCIOSĆCIAN FOREMNY

- Ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi.
- W każdym wierzchołku spotyka się 5 ścian.

Słynny filozof grecki Platon (427-347 p.n.e.) znał cztery wielościany foremne (oprócz dwunastościanu) i nadał im znaczenie symboliczne. Wyobrażał sobie, że wszechświat tworzą cztery elementy: ogień, ziemia, woda i powietrze, a każdy z tych elementów jest zbudowany z cząsteczek, które mają kształt wielościanów foremných. Według Platona na przykład cząsteczki wody mają kształt dwudziestościanów foremných. Piątą bryłę — dwunastościan foremny — odkrył uczeń Platona Teajtetos.

Archimedes z Syrakuz (287-212 p.n.e.) — matematyk, fizyk, astronom i wynalazca odkrył trzynaście wielościanów, które nazywamy wielościanami półforemnymi albo bryłami archimedesowymi.

Wielościany półforemne to takie wielościany wypukłe, w których:

- wszystkie ściany są wielokątami foremnymi, ale nie wszystkie są jednakowe,
- w każdym wierzchołku jest taki sam układ wielokątów foremnych.

Oto przykłady wielościanów półforemnych:



GRANIASTOSŁUP ARCHIMEDESOWY

- Dwie równoległe ściany są wielokątami foremnymi (ale nie kwadratami).
- Pozostałe ściany są kwadratami.



ANTYGRANIASTOSŁUP

- Dwie równoległe ściany są wielokątami foremnymi.
- Pozostałe ściany są trójkątami równobocznymi.

Oprócz graniastosłupów archimedesowych i antygraniastosłupów jest jeszcze 13 wielościanów półforemnych, z których większość można otrzymać, odpowiednio odcinając naroża wielościanów foremnych. Oto przykłady:



CZWOROŚCIAN ŚCIĘTY

Ściany: 4 sześciokąty foremne i 4 trójkąty równoboczne



OŚMIOŚCIAN ŚCIĘTY

Ściany: 8 sześciokątów foremnych i 6 kwadratów



SZEŚCIO-OŚMIOŚCIAN

Ściany: 8 trójkątów równobocznych i 6 kwadratów



DWUDZIESIÓŚCIAN ŚCIĘTY

Ściany: 20 sześciokątów foremnych i 12 pięciokątów foremnych



DWUNASTOŚCIAN ŚCIĘTY

Ściany: 12 dziesięciokątów foremnych i 20 trójkątów równobocznych



SZEŚĆCIAN ŚCIĘTY

Ściany: 6 ośmiokątów foremnych i 8 trójkątów równobocznych

Wielościany foremne i półforemne ponownie wzbudziły zainteresowanie w epoce odrodzenia. Wszystkie bryły platońskie dokładnie opisał Johannes Kepler (1571-1630). Ciekawe, że także on próbował opisać za pomocą tych brył budowę wszechświata. Dość zaskakujące jest jednak to, że także we współczesnej nauce wielościany foremne i półforemne służą do opisu budowy materii. Za ich pomocą opisuje się na przykład strukturę sieci krystalicznych.

17. Sześcian i ośmiościan foremny mają krawędzie tej samej długości. Oblicz stosunek pól powierzchni oraz stosunek objętości tych brył.



18. a) Oblicz długość przekątnej ośmiościanu foremnego o długości krawędzi a .

b) Oblicz długość krawędzi ośmiościanu foremnego o długości przekątnej p .

Warto wiedzieć

Przyjmijmy, że środek ściany wielościanu foremnego to punkt jednakowo oddalony od wierzchołków tej ściany.

Łącząc środki ścian czworościanu foremnego, otrzymujemy inny czworościan foremny.

Istnieje pewien związek między sześcianami a ośmiościanami foremnymi. Środki ścian sześcianu są wierzchołkami pewnego ośmiościanu foremnego; z kolei środki ścian ośmiościanu foremnego to wierzchołki pewnego sześcianu.

Podobne związki istnieją między dwunastościanami a dwudziestościanami foremnymi. Środki ścian dwunastościanu foremnego są wierzchołkami pewnego dwudziestościanu foremnego i odwrotnie — środki ścian dwudziestościanu foremnego są wierzchołkami dwunastościanu foremnego.



19. Przeczytaj informacje w ramce.

a) Środki ścian sześcianu o długości krawędzi a są wierzchołkami ośmiościanu foremnego. Jaką długość mają krawędzie tego ośmiościanu? Jaką część sześcianu zajmuje ten ośmiościan?

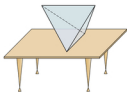
• **b)** Środki ścian ośmiościanu foremnego o długości krawędzi a są wierzchołkami sześcianu. Jaką długość mają krawędzie tego sześcianu? Jaką część ośmiościanu zajmuje ten sześcian?

20. Środki ścian czworościanu foremnego o długości krawędzi a są wierzchołkami innego czworościanu foremnego. Oblicz długość krawędzi tego mniejszego czworościanu.

- **21.** Z wierzchołka sześcianu poprowadzono odcinek prostopadły do jednej z przekątnych sześcianu. Punkt P jest punktem wspólnym tego odcinka i przekątnej. Ustal, w jakim stosunku punkt P dzieli przekątną.
- **22.** Przedstawione na fotografii Atomium to gigantyczna konstrukcja w kształcie sześcianu. Sześcian został postawiony na jednym z wierzchołków tak, że jedna z jego przekątnych jest pionowa. Każda z kul ma średnicę 18 m, a odległość między środkami kul leżących na tej samej krawędzi sześcianu wynosi 47 m. Kule B , C i D znajdują się na tej samej wysokości nad ziemią. Podobnie kule E , F i G . Ustal, na jakich wysokościach nad ziemią znajdują się środki poszczególnych kul Atomium.



Wskazówka. Rozważ trójkąt ADH . Ustal długości odcinków, na jakie został podzielony bok AH przez wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka D .



- **23. a)** Wyobraź sobie, że czworościan foremny o długości krawędzi a ustawimy tak, że jedna z krawędzi leży na stole, a przeciwległa krawędź jest równoległa do blatu stołu (zob. rysunek). Oblicz, jak wysoko nad stołem znajduje się ta krawędź.
- b)** Czy model czworościanu foremnego o długości krawędzi 1 m można przenieść przez drzwi o szerokości 0,8 m?

- **24.** Wielościan przedstawiony na rysunku obok to *stella octangula* (czyli gwiazda ośmioramienna), którą jako pierwszy opisał Johannes Kepler.



a) Oblicz pole powierzchni i objętość *stelli octanguli*, której ściany są trójkątami równobocznymi o długości boku a .

b) *Stellę octangulę* można sobie wyobrazić jako dwa przenikające się jednakowe czworościany foremne. Jaką bryłą jest wspólna część tych czworościanów? Oblicz objętość tej bryły, jeśli wiadomo, że każdy z czworościanów ma krawędź o długości b .



- **25.** Od sześcianu o długości krawędzi d odcinamy naroża tak, że wszystkie krawędzie otrzymanej bryły mają jednakową długość, a jej ściany są wielokątami foremnymi. Otrzymujemy w ten sposób wielościan półforemny zwany sześcianem ściętym. Oblicz jego objętość. Podaj wzór na objętość sześcianu ściętego o długości krawędzi a .

MINISPRAWDZIAN

51. Od sześcianu o długości krawędzi 5 odcięto narożnik w sposób przedstawiony na rysunku. Jaka długość ma odcinek x , jeżeli objętość odciętego narożnika stanowi 5% objętości sześcianu?

- A. $\frac{25}{26}$ B. $\frac{5}{8}$ C. $\frac{15}{8}$ D. $\frac{5}{16}$



52. Do podstawy ostrosłupa czworokątnego doklejono sześcian w sposób przedstawiony na rysunku. Każda krawędź ostrosłupa ma długość a . Krawędzie sześcianu są trzy razy krótsze od krawędzi ostrosłupa. Wskaż pole powierzchni otrzymanej bryły.

- A. $\left(\sqrt{3} + \frac{13}{9}\right)a^2$ C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\right)a^2$
 B. $\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + 5\right)a^2$ D. $\left(\sqrt{3} + \frac{5}{3}\right)a^2$



53. Wysokość czworoszczanu foremnego stanowi:

- A. mniej niż 70% długości jego krawędzi
 B. 75% długości jego krawędzi
 C. więcej niż 75%, ale mniej niż 80% długości jego krawędzi
 D. więcej niż 80% długości jego krawędzi

FIGURY OBROTOWE I INNE FIGURY PRZESTRZENNE

- 1 Poniżej przypominamy wzory dotyczące figur obrotowych. We wzorach tych P_p , P_b i l oznaczają odpowiednio pole podstawy, pole powierzchni bocznej i tworzącą stożka.

WALEC



Pole powierzchni bocznej:

$$P_b = 2\pi r h$$

Pole powierzchni całkowitej:

$$P = 2P_p + P_b = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Objętość:

$$V = \pi r^2 h$$

STOŻEK



Pole powierzchni bocznej:

$$P_b = \pi r l$$

Pole powierzchni całkowitej:

$$P = P_p + P_b = \pi r^2 + \pi r l$$

Objętość:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

KULA



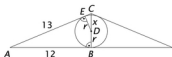
Pole powierzchni:

$$P = 4\pi r^2$$

Objętość:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

PRZYKŁAD Oblicz promień kuli wpisanej w stożek o promieniu podstawy 12 i tworzącej o długości 13.



$$(x + r)^2 = 13^2 - 12^2 = 25$$

$$x + r = 5 \quad \text{lub} \quad x + r = -5$$

$$x = 5 - r \quad \text{sprzeczność}$$

Trójkąty ABC i DEC są prostokątne i mają wspólny kąt o wierzchołku C , są więc podobne (cecha kk). Zatem $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|ED|}{|DC|}$.

$$\frac{12}{13} = \frac{r}{5-r}$$

$$60 - 12r = 13r$$

$$r = 2\frac{2}{5}$$



Sporządzamy rysunek przekroju osiowego stożka z wpisaną kulą.

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC .

Liczba $x + r$ musi być dodatnia, więc ujemnego rozwiązania nie bierzemy pod uwagę.

ZADANIE Oblicz promień kuli wpisanej w stożek o promieniu podstawy 6 i tworzącej o długości 10.

zadania 1-10

ZESTAW ZADAŃ

1. a) Ile razy większą objętość ma walec opisany na graniastosłupie prawidłowym czworokątnym od walcu wpisanego w ten graniastosłup?



- b) Ile razy większą objętość ma graniastosłup prawidłowy czworokątny opisany na walcu od graniastosłupa prawidłowego czworokątnego wpisanego w ten walec?



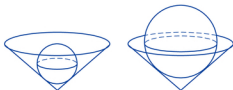
2. Na rysunku jest przedstawiony ostrosłup prawidłowy wpisany w stożek. Jaką część stożka zajmuje ostrosłup?



3. Ostrosłup prawidłowy czworokątny i stożek mają wspólny wierzchołek, a podstawa stożka jest wpisana w podstawę ostrosłupa. Kąt rozwarcia stożka ma miarę 120° , a tworząca ma długość 4. Oblicz objętość ostrosłupa.

4. Wykaż, że objętość walca o polu powierzchni całkowitej P opisanego na kuli o promieniu r jest równa $\frac{1}{3}Pr$.

5. Rożek zrobiony z papieru tworzy powierzchnię boczną pewnego stożka. Gdyby do tego rożka wrzucić piłeczkę o średnicy 6 cm, to byłaby ona styczna do płaszczyzny podstawy stożka, a gdyby wrzucić piłeczkę o średnicy 8 cm, to nad powierzchnię podstawy wystawałaby połowa tej piłeczki. Oblicz wysokość stożka.

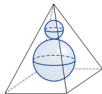




6. Walec wpisano w stożek w sposób przedstawiony na rysunku obok. Stożek ma wysokość 8, a promień jego podstawy jest równy 4. Oblicz objętość walca, jeśli:

- a) promień podstawy walca jest równy 1,
- b) wysokość walca jest równa 1.

7. W ostrosłup prawidłowy czworokątny o długości krawędzi podstawy 10 i wysokości 12 wpisano kulę. Następnie wpisano mniejszą kulę styczną do niej, a także styczną do czterech ścian bocznych ostrosłupa (zob. rysunek obok). Oblicz promienie tych kul.



- 8. a)** W kulę o promieniu 3 wpisano ostrosłup prawidłowy czworokątny o długości krawędzi podstawy 4. Znajdź wysokość tego ostrosłupa. Rozważ dwa przypadki.
- b)** W kulę o promieniu r wpisano ostrosłup prawidłowy czworokątny. Środek kuli leży na podstawie ostrosłupa. Oblicz długości krawędzi tego ostrosłupa.
- **9. a)** Wykaż, że promień kuli wpisanej w czworościan foremny jest równy $\frac{1}{4}$ wysokości tego czworościanu.
- b)** Ile razy większa jest objętość kuli opisanej na czworościanie foremnym od objętości kuli wpisanej w ten czworościan?
- **10. a)** Wykaż, że objętość wielościanu o polu powierzchni P opisanego na kuli o promieniu r jest równa $\frac{1}{3}Pr$.
- b)** Oblicz promień kuli wpisanej w ośmiościan foremny o długości krawędzi a .

MINISPAWIDZIAN

51. W stożek wpisano walec, którego promień podstawy jest 3 razy mniejszy od promienia podstawy stożka. Stosunek objętości walca do objętości stożka wynosi:

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{1}{27}$ D. $\frac{2}{9}$

52. Ostrosłup prawidłowy trójkątny i stożek mają wspólny wierzchołek, a podstawa stożka jest wpisana w podstawę ostrosłupa. Kąt rozwarcia stożka ma miarę 120° , a tworząca ma długość 4. Objętość ostrosłupa jest równa:

- A. 24 B. $6\sqrt{3}$ C. $24\sqrt{3}$ D. $\frac{32\sqrt{3}}{3}$

53. Wskaż powierzchnię kuli wpisanej w stożek, którego promień podstawy jest równy 1, a wysokość jest równa $\sqrt{3}$.

- A. $\frac{4}{3}\pi$ B. $\frac{1}{3}\pi$ C. 12π D. 3π

PROSTE I PŁASZCZYZNY W PRZESTRZENI

- I Do tej pory, opisując na przykład graniastosłup, mówiliśmy, że podstawy leżą na płaszczyznach równoległych, a wysokość jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Pojęcie prostokątności i równoległości w przestrzeni rozumieliśmy intuicyjnie. Uściślimy teraz te pojęcia.

POŁOŻENIE PROSTYCH W PRZESTRZENI

Przez dowolne trzy punkty przestrzeni zawsze można poprowadzić płaszczyznę. Gdy te punkty nie leżą na jednej prostej, to istnieje tylko jedna taka płaszczyzna.

Wynika stąd, że w przestrzeni dwie proste, które się przecinają, leżą zawsze na jednej płaszczyźnie.

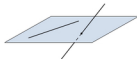


Gdy dwie proste w przestrzeni się nie przecinają, to mogą leżeć na jednej płaszczyźnie lub nie.

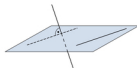
O dwóch prostych, które nie mają punktów wspólnych i leżą na jednej płaszczyźnie, mówimy, że są **równoległe**. Przyjmujemy, że proste pokrywające się też są równoległe.



O dwóch prostych, które nie mają punktów wspólnych i nie leżą w jednej płaszczyźnie, mówimy, że są **skośne**.



Mówimy, że dwie proste w przestrzeni są **prostopadłe**, gdy istnieje prosta równoległa do jednej z nich, przecinająca drugą pod kątem prostym.



Zwróć uwagę, że w przestrzeni proste prostopadłe mogą być skośne.

Mówimy, że odcinki w przestrzeni są równoległe, gdy leżą na prostych równoległych. Podobnie mówimy, że odcinki są skośne lub prostopadłe, gdy leżą odpowiednio na prostych skośnych lub prostopadłych.

Na poniższych rysunkach zaznaczono w graniastosłupach prawidłowych sześciokątnych po trzy pary odcinków odpowiednio równoległych, skośnych i prostopadłych.



pary odcinków
równoległych



pary odcinków
skośnych

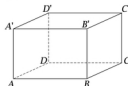


pary odcinków
prostopadłych

W prostopadłościanie każde dwie krawędzie są albo równoległe, albo prostopadłe (niektóre pary krawędzi prostopadłych są też krawędziami skośnymi).

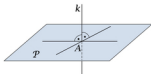
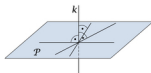
ĆWICZENIE Na rysunku jest przedstawiony prostopadłościan. Wymień wszystkie krawędzie, które są:

- prostopadłe do krawędzi AA' ,
- równoległe do krawędzi CC' ,
- prostopadłe do odcinka AB' ,
- skośne do odcinka AC ,
- skośne do przekątnej AC' .



PROSTA PROSTOPADŁA DO PŁASZCZYZNY

Mówimy, że **prosta jest prostopadła do płaszczyzny**, gdy jest prostopadła do każdej prostej leżącej na tej płaszczyźnie.



Niech A będzie punktem wspólnym prostej k i płaszczyzny P . Aby stwierdzić, że prosta k jest prostopadła do płaszczyzny P , wystarczy wskazać dwie proste leżące na tej płaszczyźnie i przechodzące przez punkt A , do których prosta k jest prostopadła. Wynika to z twierdzenia, które dowodzimy na następnej stronie.

Twierdzenie

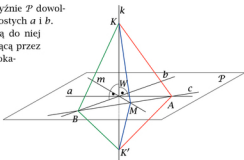
Jeśli prosta k jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych a i b , to jest prostopadła do każdej prostej leżącej na płaszczyźnie, na której leżą proste a i b .

Dowód

Zalóżmy, że prosta k jest prostopadła do przecinających się prostych a i b , leżących na płaszczyźnie P . Możemy przyjąć, że prosta k przechodzi przez wspólny punkt W prostych a i b . (Gdyby było inaczej, rozważalibyśmy proste równoległe do prostych a i b przecinające prostą k).

Wybieramy na płaszczyźnie P dowolną prostą różną od prostych a i b .

Niech m będzie prostą do niej równoległą przechodzącą przez punkt W . Wystarczy pokazać, że $k \perp m$.



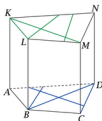
Na płaszczyźnie P prowadzimy jeszcze jedną prostą c , która przecina proste a , b i m odpowiednio w punktach A , B i M . Na prostej k wybieramy punkty K i K' różne od W , takie że $|WK| = |WK'|$.

Trójkąty KAK' i KBK' są równoramienne, więc trójkąty ABK i ABK' są przystające (cecha bbb). Wobec tego $|\angle KAM| = |\angle K'AM|$. Stąd wynika, że trójkąty AMK i AMK' są przystające (cecha bkb). Zatem $|MK| = |MK'|$.

W takim razie trójkąt MKK' jest równoramienny, środkiem podstawy tego trójkąta jest punkt W , więc odcinek MW jest jego wysokością. Zatem $MW \perp KK'$, czyli $m \perp k$. $\square$

Z powyższego twierdzenia wynika, że każda krawędź boczna w graniastosłupie prostym jest prostopadła do dowolnego odcinka leżącego na którejś z podstaw graniastosłupa.

Na rysunku obok przedstawiono graniastosłup prosty. Wszystkie jego ściany boczne są prostokątami, zatem np. krawędź LB jest prostopadła do krawędzi BA i BC , a więc jest także prostopadła do każdego z zaznaczonych na niebiesko odcinków.



W podobny sposób można wykazać, że krawędź LB jest prostopadła do każdego z odcinków zaznaczonych na zielono, a także uzasadnić prostopadłość innych odcinków w bryłach.

Na rysunkach przedstawiono graniastosłupy proste. Na każdym z nich odcinki niebieski i czerwony są prostopadłe (bo niebieski odcinek jest prostopadły do dwóch zielonych odcinków, a czerwony odcinek leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez zielone odcinki, zatem czerwony odcinek jest także prostopadły do niebieskiego odcinka).



prostokąt



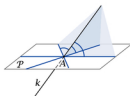
graniastosłup
prawidłowy
trójkątny



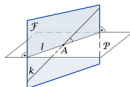
graniastosłup
prawidłowy
sześciokątny

KĄT MIĘDZY PROSTĄ A PŁASZCZYZNĄ

Niech prosta k przecina płaszczyznę $\mathcal{P}$ w punkcie A . Na płaszczyźnie $\mathcal{P}$ możemy poprowadzić wiele prostych przechodzących przez punkt A . Prosta k może tworzyć z tymi prostymi różne kąty.

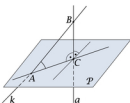


Pośród tych prostych wybierzmy taką prostą l , która leży w płaszczyźnie $\mathcal{F}$ prostopadłej do płaszczyzny $\mathcal{P}$ i zawiera prostą k . Miara kąta nachylenia prostej k do płaszczyzny $\mathcal{P}$ to miara kąta (ostrego lub prostego) między prostymi k i l .

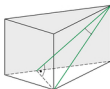


Kąt ostry między prostą k a płaszczyzną $\mathcal{P}$ można wyznaczyć w następujący sposób:

Przez dowolny punkt B prostej k ($B \neq A$) prowadzimy prostą a prostopadłą do płaszczyzny $\mathcal{P}$. Przecina ona tę płaszczyznę w pewnym punkcie C . Tak otrzymaną prostą AC będziemy nazywać **rzutem prostokątnym** prostej k na płaszczyznę $\mathcal{P}$. Kąt CAB jest kątem nachylenia prostej k do płaszczyzny $\mathcal{P}$.



Na poniższych rysunkach zaznaczono kilka kątów między odcinkami i ścianami w graniastosłupach prostych i w ostrosłupie.



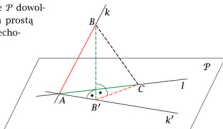
Twierdzenie o trzech prostopadłych

Niech k' będzie rzutem prostokątnym prostej k na płaszczyznę $\mathcal{P}$ i niech l oznacza inną prostą tej płaszczyzny. Wówczas proste l i k są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy l i k' są prostopadłe.

Dowód

Załóżmy, że prosta k' jest rzutem prostokątnym prostej k na płaszczyznę $\mathcal{P}$. Niech A będzie punktem wspólnym prostej k i płaszczyzny $\mathcal{P}$, a punkt B' — rzutem prostokątnym punktu B na płaszczyznę $\mathcal{P}$. Zatem $|\angle AB'B| = 90^\circ$.

Wybieramy na płaszczyźnie $\mathcal{P}$ dowolną prostą. Niech l oznacza prostą do niej równoległą i przechodzącą przez punkt A .



Niech C oznacza taki punkt prostej l , że $|AC| = |BB'|$.

Załóżmy najpierw, że $l \perp k$. Pokażemy, że $l \perp k'$.

Ponieważ trójkąty BCA oraz BCB' są prostokątne, mają wspólną przeciwprostokątną BC i po jednej przyprostokątnej tej samej długości ($|AC| = |BB'|$), więc $|AB| = |B'C|$.

Wobec tego trójkąt $AB'C$ jest przystający do trójkąta $AB'B$ (cecha bbb). Zatem $|\angle CAB'| = |\angle AB'B| = 90^\circ$, czyli proste l i k' są prostopadłe.

Załóżmy teraz, że $l \perp k'$. Pokażemy, że $l \perp k$.

Z warunku $l \perp k'$ wynika, że trójkąty $AB'B$ i CAB' są przystające (cecha bkb). Stąd $|AB| = |CB'|$.

Zatem z cechy bbb wynika, że trójkąt CBA jest przystający do trójkąta CBB' . Stąd $|\angle CAB| = |\angle CB'B| = 90^\circ$. To oznacza, że proste k i l są prostopadłe. $\square$

POŁOŻENIE PŁASZCZYZN W PRZESTRZENI

Gdy dwie płaszczyzny w przestrzeni nie mają punktów wspólnych, to mówimy, że są równoległe. Przyjmujemy, że płaszczyzny, które się pokrywają, też są równoległe.

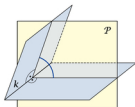
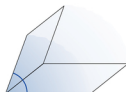


Dwie płaszczyzny, które nie są równoległe, przecinają się wzdłuż prostej.



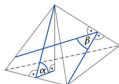
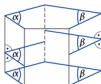
KĄT DWUŚCIENNY

Dwie półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi dzielą przestrzeń na dwie części. Każdą z tych części wraz z półpłaszczyznami nazywamy **kątem dwuściennym**.



Niech P będzie dowolną płaszczyzną prostopadłą do krawędzi k kąta dwuściennego. Wspólna część płaszczyzny P i kąta dwuściennego to pewien kąt płaski, którego ramiona są prostopadłe do krawędzi k . Za miarę kąta dwuściennego przyjmujemy miarę tego kąta płaskiego.

Na poniższych rysunkach zaznaczono kilka kątów między ścianami graniastosłupa prostego i dwóch ostrosłupów.



PRZYKŁAD 1 W graniastosłupie prostym, którego podstawa jest rombem, kąty nachylenia przekątnych do podstawy wynoszą 30° i 60° . Oblicz miary kątów między ścianami bocznymi tego graniastosłupa.



$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{|AC|}$$

$$|AC| = \frac{h}{\operatorname{tg} 30^\circ}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{|D'B'|}$$

$$|D'B'| = \frac{h}{\operatorname{tg} 60^\circ}$$



$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}|DB|}{\frac{1}{2}|AC|} = \frac{|D'B'|}{|AC|} = \frac{\frac{h}{\operatorname{tg} 60^\circ}}{\frac{h}{\operatorname{tg} 30^\circ}} = \frac{\operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}, \text{ więc } \frac{\alpha}{2} \approx 18,435^\circ, \text{ czyli } \alpha \approx 36,9^\circ$$

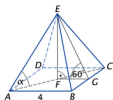
$$\beta = 180^\circ - \alpha \approx 143,1^\circ$$

Obliczamy za pomocą kalkulatora lub odczytujemy z tablic trygonometrycznych przybliżoną miarę kąta $\frac{\alpha}{2}$.

Odp. Kąty między ścianami graniastosłupa mają miary około $36,9^\circ$ i $143,1^\circ$.

ZADANIE W graniastosłupie prostym, którego podstawa jest trójkątem równobocznym, kąty nachylenia przekątnych ścian bocznych do podstawy wynoszą 45° i 60° . Oblicz miary kątów między ścianami tego graniastosłupa. Rozważ dwa przypadki.

PRZYKŁAD 2 W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 4, a kąt nachylenia ściany bocznej do podstawy ma miarę 60° . Znajdź miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do podstawy.



$$|FC| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{|EF|}{|FC|}$$

$$|EF| = |FC| \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 2\sqrt{3}$$

$$|AF| = \frac{|AC|}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|EF|}{|AF|} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \text{ więc } \alpha \approx 51^\circ$$

Kąt nachylenia ściany bocznej do podstawy to $\angle EGF$ (jego ramiona są prostopadłe do krawędzi BC).

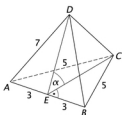
Odcinek AC jest przekątną kwadratu o boku 4.

Obliczamy za pomocą kalkulatora lub odczytujemy z tablic trygonometrycznych przybliżoną miarę kąta α .

Odp. Krawędź boczna jest nachylona do podstawy pod kątem około 51° .

ZADANIE W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 6, a kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy ma miarę 30° . Znajdź miarę kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy tego ostrosłupa.

PRZYKŁAD 3 Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny o podstawie o długości 6 i ramionach o długości 5, a wszystkie krawędzie boczne mają długość 7. Znajdź miary kątów nachylenia ścian bocznych do podstawy.



$$|EC|^2 + |EB|^2 = |BC|^2$$

$$|EC|^2 + 3^2 = 5^2$$

$$|EC| = 4$$

$$|ED|^2 + |EB|^2 = |BD|^2$$

$$|ED|^2 + 3^2 = 7^2$$

$$|ED| = 2\sqrt{10}$$

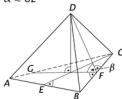
$$|DC|^2 = |EC|^2 + |ED|^2 - 2 \cdot |EC| \cdot |ED| \cdot \cos \alpha$$

$$7^2 = 4^2 + (2\sqrt{10})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{10} \cdot \cos \alpha$$

$$49 = 16 + 40 - 16\sqrt{10} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{7}{16\sqrt{10}} \approx 0,1383$$

$$\alpha \approx 82^\circ$$



$$|DF|^2 + |FC|^2 = |DC|^2$$

$$|DF|^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 7^2$$

$$|DF| = \frac{1}{2}\sqrt{171}$$

Trójkąty EBC i FWC są podobne.

$$\frac{|WF|}{|FC|} = \frac{|EB|}{|EC|}$$

$$\frac{|WF|}{2,5} = \frac{3}{4}$$

$$|WF| = \frac{15}{8}$$

$$\cos \beta = \frac{|WF|}{|DF|} = \frac{\frac{15}{8}}{\frac{1}{2}\sqrt{171}} \approx 0,2868$$

$$\beta \approx 73^\circ$$

Odp. Kąty nachylenia ścian bocznych do podstawy to około 82° , 73° i 73° .

ZADANIE Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny o podstawie o długości 4 i ramionach o długości 6, a krawędzie boczne mają długość 8. Znajdź miary kątów nachylenia ścian bocznych do podstawy.

zadania 1–18 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. a) Czy miara kąta nachylenia przekątnej sześcianu do podstawy sześcianu jest większa niż 30° ?

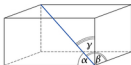
b) Znajdź miarę kąta między przekątnymi sześcianu.

2. Uzasadnij, że jeśli w prostopadłościanie przekątna tworzy z krawędziami równe kąty, to prostopadłościan ten jest sześcianem.

3. Podstawą graniastoslupa prostego jest trapez, w którym dłuższa podstawa i jedno ramie są do siebie prostopadłe i mają tę samą długość a . Dłuższa przekątna graniastoslupa ma długość $2a$. Pod jakim kątem przekątna ta jest nachylona do podstawy?

4. a) Przekątna prostopadłościanu tworzy z krawędziami wychodzącymi z tego samego wierzchołka kąty α , β , γ . Wykaż, że zachodzi równość:

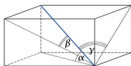
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$



b) Przekątna prostopadłościanu tworzy ze ścianami o wspólnym wierzchołku kąty α , β , γ . Wykaż, że zachodzą równości:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2$$



5. Wysokość graniastoslupa prostego trójkątnego ma długość 1. Dwie przekątne ścian bocznych poprowadzone z tego samego wierzchołka mają długość $\sqrt{3}$ i są do siebie prostopadłe. Pod jakimi kątami są do siebie nachylone ściany boczne tego graniastoslupa?

6. W graniastoslupie prostym, którego podstawa jest rombem, kąty nachylenia przekątnych do podstawy wynoszą 45° i 60° . Oblicz miary kątów między ścianami bocznymi tego graniastoslupa.

7. Na rysunku jest przedstawiony graniastoslup prawidłowy sześciokątny, w którym wszystkie krawędzie mają jednakowe długości. Oblicz miarę kąta α .

a)



b)



c)



8. Na rysunku jest przedstawiony graniastosłup prawidłowy sześciokątny. Uzasadnij, że zaznaczony trójkąt jest prostokątny, i oblicz miary kątów ostrych tego trójkąta.



- 9.** Jaki powinien być stosunek długości krawędzi bocznej do krawędzi podstawy w graniastosłupie prawidłowym ośmiokątnym, aby kąt nachylenia najdłuższej przekątnej tego graniastosłupa do podstawy był równy 45° ?

10. Naszkicuj ostrosłup prawidłowy czworokątny i zaznacz kąt między wysokościami sąsiednich ścian tego ostrosłupa:

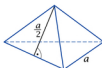
- opuszczonymi na krawędzie podstawy,
- opuszczonymi na wspólną krawędź boczną,
- opuszczonymi na przeciwległe krawędzie boczne.

11. Ostrosłup przedstawiony na rysunku jest prawidłowy. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy.

a)



b)



c)



12. a) Oblicz miarę kąta między ścianami czworościanu foremnego.

b) Pod jakim kątem krawędź boczna czworościanu foremnego jest nachylona do podstawy?

- 13.** Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 10, a kąt między jego przeciwległymi ścianami bocznymi ma 60° . Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

- 14. a)** Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma wszystkie krawędzie o równych długościach. Oblicz miarę kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi.

b) Kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma miarę 120° . Oblicz miarę kąta między krawędzią boczną a krawędzią podstawy tego ostrosłupa.

15. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o bokach mających długości 1 i $\sqrt{3}$. Wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa mają jednakowe długości, a przeciwległe większe ściany boczne są prostopadłe. Znajdź miarę kąta nachylenia mniejszych ścian bocznych do podstawy ostrosłupa.

- **16.** Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny o podstawie długości a . Krawędzie boczne mają długość b , a kąt dwuścienny między przystającymi ścianami ma miarę α . Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.
- 17.** Spodek wysokości ostrosłupa trójkątnego jest środkiem okręgu wpisanego w podstawę ostrosłupa.
- a) Udowodnij, że punkty styczności tego okręgu z bokami podstawy są spodkami wysokości ścian bocznych ostrosłupa.
- b) Udowodnij, że wszystkie wysokości ścian bocznych opuszczone z wierzchołka ostrosłupa mają taką samą długość.
- **18.** Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość a . Kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ma miarę α . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

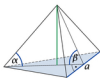
MINISPRAWDZIAN

51. Krótsza przekątna graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest nachylona do podstawy pod kątem 45° . Krawędź podstawy ma długość 1. Wysokość tego graniastosłupa jest równa:

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. 2 C. 1 D. $\sqrt{3}$

52. Wysokość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $10\sqrt{2}$, a jego krawędź podstawy ma długość 10. Tangens kąta między przekątną ściany bocznej a sąsiednią ścianą boczną jest równy:

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2



53. Na rysunku obok kolorem zielonym zaznaczono wysokość ostrosłupa. Objętość tego ostrosłupa, jeżeli zaznaczona krawędź podstawy ma długość a , a pole podstawy jest równe P , wynosi:

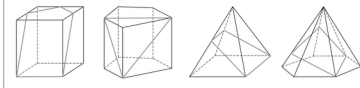
- A. $\frac{2P^2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{3a \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ C. $\frac{2P^2}{9a} \cdot \operatorname{tg} \beta$
 B. $\frac{4P^2}{9a} \cdot \operatorname{tg} \alpha$ D. $\frac{2P^2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{3a(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}$

54. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość $4\sqrt{2}$. Przekątne sąsiednich ścian bocznych poprowadzone z tego samego wierzchołka tworzą kąt o mierze 60° . Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe:

- A. $288\sqrt{3}$ B. $16(3\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$ C. $96(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$ D. $32(3\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$

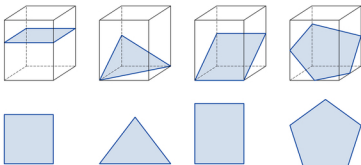
PRZEKROJE GRANIASTOSŁUPÓW I OSTROSŁUPÓW

- ĆWICZENIE A** Na każdym z poniższych rysunków zaznaczono pewne odcinki w graniastosłupie lub ostrosłupie. W których spośród tych brył odcinki te leżą w jednej płaszczyźnie?

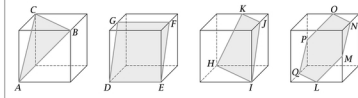


Przekrojem bryły nazywamy jej część wspólną z pewną płaszczyzną.

Na poniższych rysunkach zaznaczono kilka przekrojów pewnego graniastosłupa prawidłowego czworokątnego. Pod rysunkami przedstawiono rzeczywiste kształty tych przekrojów.



- ĆWICZENIE B** Na poniższych rysunkach zaznaczono przekroje sześcianu o krawędzi 2 cm (punkty oznaczone literami to wierzchołki sześcianu lub środki krawędzi). Naszkicuj te wielokąty i podaj długości ich boków.



PRZYKŁAD 1 Oblicz miarę najmniejszego kąta przekroju prostopadłościanu zaznaczonego na rysunku.



$$|AB| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$|AC| = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$$

$$|BC| = \sqrt{10^2 + 8^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$$

Obliczamy długości boków przekroju ABC , korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$|AB| < |AC|$ i $|AB| < |BC|$, więc $\sphericalangle BCA$ to najmniejszy kąt trójkąta ABC .

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \cos |\sphericalangle BCA|$$

Korzystamy z twierdzenia cosinusów.

$$100 = 136 + 164 - 2 \cdot 2\sqrt{34} \cdot 2\sqrt{41} \cdot \cos |\sphericalangle BCA|$$

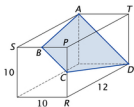
$$\cos |\sphericalangle BCA| = \frac{200}{8\sqrt{1394}} = \frac{25}{\sqrt{1394}} \approx 0,6696, \text{ więc } |\sphericalangle BCA| \approx 48^\circ$$

Odp. Najmniejszy kąt tego przekroju ma miarę około 48° .

ZADANIE Oblicz miarę największego kąta przekroju prostopadłościanu zaznaczonego na rysunku.



PRZYKŁAD 2 Na rysunku zaznaczono przekrój prostopadłościanu. Punkty B i C są środkami krawędzi. Oblicz pole tego przekroju.



$$|CD| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$|AB| = |CD| = 13$$

$$|BC| = 5\sqrt{2}$$

$$|AD| = 10\sqrt{2}$$

Trójkąt RDC jest prostokątny. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

Trójkąty RDC i SAB są przystające.

Trójkąt BPC to połowa kwadratu o boku 5.

Trójkąt ADT to połowa kwadratu o boku 10.



$$x = \frac{10\sqrt{2} - 5\sqrt{2}}{2} = 2,5\sqrt{2}$$

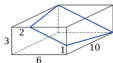
$$h^2 = 13^2 - (2,5\sqrt{2})^2 = \frac{313}{2}$$

$$h = \sqrt{\frac{313}{2}}$$

$$P = \frac{5\sqrt{2} + 10\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{313}}{\sqrt{2}} = 7,5\sqrt{313}$$

ZADANIE Na rysunku zaznaczono przekrój prostopadłościanu. Oblicz pole tego przekroju.

Przekrój $ABCD$ jest trapezem równoramiennym.



PRZYKŁAD 3 Przekrój graniastósłupa prawidłowego sześciokątnego zawiera dwie przeciwległe krawędzie podstaw i jest nachylony do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz obwód tego przekroju, jeżeli wiadomo, że krawędź podstawy graniastósłupa ma długość 2.



$$|AB| = 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

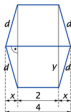
$$b = 4$$

$$|BC| = 2 \cdot |AB| = 4\sqrt{3}$$

AB — krótsza przekątna podstawy jest dwa razy dłuższa od wysokości trójkąta równobocznego o boku długości 2

b — dłuższa przekątna podstawy jest 2 razy dłuższa niż krawędź podstawy

Trójkąt ABC to połowa trójkąta równobocznego.



$$y = \frac{|BC|}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$x = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

Sporządzamy rysunek przekroju graniastósłupa.

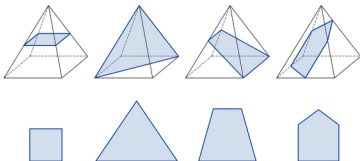
$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{13}$$

$$\text{Obwód} = 2 \cdot 2 + 4d = 4 + 4\sqrt{13}$$

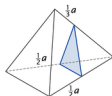
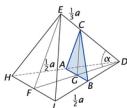
Odp. Obwód przekroju wynosi $4 + 4\sqrt{13}$.

ZADANIE Krawędź podstawy graniastósłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 4. Płaszczyzna przekroju tego graniastósłupa, która przechodzi przez krawędź górnej podstawy oraz przez krawędź dolnej podstawy, jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° . Oblicz obwód otrzymanego przekroju.

- III Na kolejnych rysunkach zaznaczono kilka przekrojów pewnego ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Pod rysunkami przedstawiono rzeczywiste kształty tych przekrojów.



PRZYKŁAD 4 Na rysunku zaznaczono przekrój czworoszczanu foremnego o krawędzi długości a . Oblicz pole tego przekroju.



Sporządzamy rysunek pomocniczy.



Trójkąty HID i ABD są podobne (cecha bkb), więc:

$$\frac{|AB|}{|HI|} = \frac{|AD|}{|HD|}, \text{ stąd } \frac{|AB|}{a} = \frac{1}{2} \frac{a}{a}, \text{ czyli } |AB| = \frac{1}{2} a$$

$$|DG| = \frac{1}{2} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Trójkąt ABD jest równoboczny. Odcinek DG to jego wysokość.



$$|EF| = |DF| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$|DJ| = \frac{1}{2} |ED| = \frac{1}{2} a$$

$$\cos \alpha = \frac{|DJ|}{|DF|} = \frac{\frac{1}{2} a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Odcinki EF i DF to wysokości ścian. Trójkąt DEF jest równoramienny.

Punkt J jest spodkiem wysokości trójkąta równoramiennego DEF opuszczonej na podstawę.



$$|CG|^2 = |DC|^2 + |DG|^2 - 2|DC| \cdot |DG| \cdot \cos \alpha$$

$$|CG|^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$|CG|^2 = \frac{43}{144}a^2$$

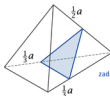
$$|CG| = \frac{\sqrt{43}}{12}a$$

Korzystamy z twierdzenia cosinusów.

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CG| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{43}}{12}a = \frac{\sqrt{43}}{48}a^2$$

Odp. Pole przekroju jest równe $\frac{\sqrt{43}}{48}a^2$.

ZADANIE Na rysunku zaznaczono przekrój czworoscianu foremnego o długości krawędzi a . Oblicz pole tego przekroju.



zadania 13–20

ZESTAW ZADAŃ

1. Naskicuj przekrój prostopadłościanu płaszczyzną, która nie zawiera żadnej jego ściany i przechodzi przez:

- krawędź podstawy i środki dwóch krawędzi bocznych,
- przekątną podstawy i środki dwóch przekątnych,
- przekątną podstawy i środek krawędzi bocznej,
- przekątne dwóch sąsiednich ścian,
- przekątne dwóch równoległych ścian.

2. Naskicuj przekrój graniastosłupa trójkątnego płaszczyzną przechodzącą przez:

- krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej,
- krawędź podstawy i środki dwóch krawędzi przeciwległej podstawy,
- krawędź boczną i wysokość podstawy.

3. Oblicz pole zaznaczonego przekroju sześcianu.

a)



b)



c)



d)



4. Oblicz pole zaznaczonego przekroju graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego. Krawędź podstawy tego graniastosłupa ma długość 6, a wysokość jest równa 9.

a)



b)



c)



d)

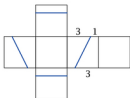


5. Pole zaznaczonego przekroju graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego (zob. rysunek obok) jest równe 6 cm^2 . Krawędź podstawy graniastosłupa ma długość 2 cm. Pod jakim kątem płaszczyzna przekroju jest nachylona do podstawy tego graniastosłupa?

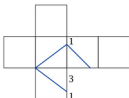


6. Na rysunku jest przedstawiona siatka sześcianu. Zaznaczone odcinki to brzegi pewnego przekroju tego sześcianu. Oblicz pole tego przekroju.

a)



b)



7. Prostopadłościan o wymiarach $6\text{ cm} \times 8\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ chcemy przeciąć płaszczyzną przechodzącą przez środki dokładnie czterech krawędzi. Podaj wymiary wszystkich przekrojów, jakie możemy w ten sposób otrzymać.

8. Prostopadłościan ma wymiary $3\text{ cm} \times 4\text{ cm} \times 4\text{ cm}$. Ustal, jakie jest największe możliwe pole przekroju tego prostopadłościanu, gdy ten przekrój ma kształt:

a) prostokąta,

b) trójkąta,

c) rombu.

9. Przez środki dwóch krawędzi sześcianu poprowadzono dwie płaszczyzny, otrzymując przekroje przedstawione na rysunku obok. Oblicz stosunek pól tych przekrojów.



10. Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o długościach boków 2 cm i 3 cm, a wysokość tego prostopadłościanu jest równa 4 cm. Prostopadłościan przecięto płaszczyzną zawierającą krawędź o długości 2 cm i nachyloną do podstawy pod kątem α . Oblicz pole tak otrzymanego przekroju, gdy:

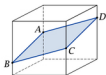
a) $\alpha = 30^\circ$

b) $\alpha = 60^\circ$

11. Sześcian o długości krawędzi 1 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i nachyloną do podstawy pod kątem α .

a) Oblicz pole otrzymanego przekroju, gdy $\alpha = 30^\circ$.

b) Ustal, jaką miarę powinien mieć kąt α , aby pole tego przekroju było o 30% większe od pola ściany sześcianu.



12. Rysunek przedstawia przekrój sześcianu płaszczyzną nachyloną do podstawy pod kątem α . Krawędź sześcianu ma długość a , a punkty A i C są środkami krawędzi.

a) Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

b) Znajdź kąt α , dla którego czworokąt $ABCD$ ma najmniejsze pole, oraz taki — dla którego pole to jest największe. Oblicz te pola.

13. Naszkicuj przekrój ostrosłupa prawidłowego czworokątnego płaszczyzną przechodzącą przez:

a) wysokość ściany bocznej i wysokość ostrosłupa,

b) krawędź boczną i wysokość ostrosłupa,

c) środki krawędzi wychodzących z wierzchołka podstawy,

d) krawędź podstawy i środek rozłącznej z nią krawędzi bocznej.

14. Oblicz pole zaznaczonego przekroju ostrosłupa prawidłowego.

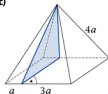
a)



b)

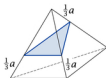


c)

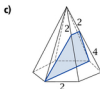
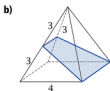


15. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 2, a krawędź boczna ma długość $3\sqrt{2}$. Jakić możliwie najmniejsze pole ma przekrój tego ostrosłupa płaszczyzną zawierającą przekątną jego podstawy?

- 16.** Oblicz pole zaznaczonego przekroju czworoscianu foremnego o długości krawędzi a .



- 17.** Przekrój czworoscianu foremnego o długości krawędzi a jest prostokątem o stosunku długości boków $1 : 2$. Oblicz pole tego przekroju.
- 18.** Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 6, a krawędź podstawy ma długość 4. Oblicz obwód przekroju tego ostrosłupa zawierający wysokość podstawy i przechodzący przez środek krawędzi bocznej.
- 19.** Ostrosłup przedstawiony na rysunku jest prawidłowy. Oblicz obwód zaznaczonego przekroju.



- 20.** Na rysunku obok przedstawiono ostrosłup prawidłowy czworokątny. Oblicz pole zaznaczonego przekroju.



MINISPRAWDZIAN

- 51.** Przekrój sześcianu o długości krawędzi a ma kształt trójkąta. Wskaż, jakie jest największe możliwe pole takiego trójkąta.

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ C. $a^2\sqrt{3}$ D. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$

- 52.** W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość 8, a krawędź boczna ma długość 14. Wskaż obwód przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną zawierającą jedną z jego krawędzi podstawy i przechodzącą przez środek przeciwległej krawędzi bocznej.

A. $2\sqrt{15} + 8$ B. $2\sqrt{97} + 8$ C. $2\sqrt{65} + 8$ D. 26

BRYŁY PODOBNE

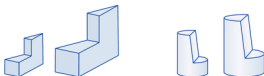
1



ĆWICZENIE A Rzeźba na fotografii przedstawia wielokrotnie powiększoną łatkę do gry w badminton. Wszystkie proporcje zachowano. Poniżej podano jeden z rzeczywistych wymiarów łatki. Zmierz długości odpowiednich odcinków i oszacuj, ile razy wymiary rzeźby są większe od wymiarów prawdziwej łatki. Przyjmij, że mężczyzna na fotografii ma 180 cm wzrostu.



Jeśli daną bryłę $\mathcal{F}$ powiększymy lub pomniejszymy w pewnej skali, to otrzymamy figurę podobną do bryły $\mathcal{F}$. O bryłach podobnych możemy powiedzieć, że mają taki sam kształt, a różnią się tylko wielkością. Na poniższych rysunkach są przedstawione dwie pary brył podobnych.



Uwaga. Bryły pozostaną podobne, gdy jedną z nich przesuniemy, obrócimy lub przekształcimy przez symetrię.

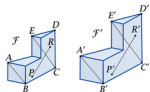
W bryłach podobnych stosunek długości każdej pary odpowiadających sobie odcinków jest taki sam. Liczbę równą temu stosunkowi nazywamy skalą podobieństwa.

Figury przestrzenne $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}'$ przedstawione na rysunku obok są podobne.

Odcinkowi PR w figurze $\mathcal{F}$ odpowiada odcinek $P'R'$ w figurze $\mathcal{F}'$. Figura $\mathcal{F}'$ jest podobna do figury $\mathcal{F}$ w skali k , gdzie:

$$k = \frac{|P'R'|}{|PR|}$$

Jeśli figura $\mathcal{F}'$ jest podobna do figury $\mathcal{F}$ w skali k , to oczywiście figura $\mathcal{F}$ jest podobna do figury $\mathcal{F}'$ w skali $\frac{1}{k}$.



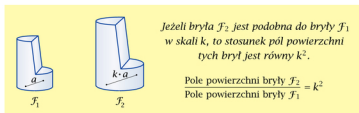
$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|C'D'|}{|CD|} = \frac{|E'E|}{|CE|} = \frac{|P'R'|}{|PR|}$$

ĆWICZENIE B a) Oblicz, jaką wysokość powinien mieć walec o promieniu podstawy równym 3, aby był podobny do walca o wysokości 6 i promieniu podstawy równym 2.

b) Prostopadłościan ma krawędzie o długościach 4, 6 i 12. Czy prostopadłościan o krawędziach 6, 9 i 18 jest do niego podobny?

c) Walec ma wysokość równą 6 i promień podstawy równy 3. Oblicz pole powierzchni bocznej walca podobnego do tego walca w skali $\frac{1}{6}$.

Przypomnijmy, że jeśli dwie figury płaskie są podobne w skali k , to stosunek pól tych figur jest równy kwadratowi skali podobieństwa. Taka sama zależność zachodzi między polami powierzchni brył podobnych.



Zastanówmy się teraz, jaka jest zależność między objętościami brył podobnych. Przyjrzyj się rysunkom. Na każdym jest przedstawiony prostopadłościan z pokolorowaną jego częścią, która też jest prostopadłościanem.



Większy prostopadłościan jest podobny w skali 2 do prostopadłościanu zaznaczonego kolorem.

Objętość większego prostopadłościanu jest 8 razy większa od objętości zaznaczonego prostopadłościanu.



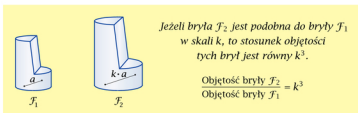
Większy prostopadłościan jest podobny w skali 3 do prostopadłościanu zaznaczonego kolorem.

Objętość większego prostopadłościanu jest 27 razy większa od objętości zaznaczonego prostopadłościanu.

Załóżmy, że prostopadłościan o wymiarach $a' \times b' \times c'$ jest podobny w skali k do prostopadłościanu o wymiarach $a \times b \times c$. Wówczas $a' = ka$, $b' = kb$ i $c' = kc$. Obliczmy stosunek objętości tych prostopadłościanów:

$$\frac{a' \cdot b' \cdot c'}{a \cdot b \cdot c} = \frac{ka \cdot kb \cdot kc}{abc} = k^3$$

Pokazaliśmy, że stosunek objętości prostopadłościów podobnych jest równy sześciannowi skali podobieństwa. Taka własność jest także prawdziwa dla dowolnych brył podobnych.



Oczywiście dowolne dwa sześciany (i dowolne dwie kule) są bryłami podobnymi. Gdy stożek (lub ostrosłup) przetniemy płaszczyzną równoległą do podstawy, to otrzymamy dwie bryły, z których jedna jest stożkiem (ostrosłupem) podobnym do przecinanego stożka (ostrosłupa), a druga figura to tzw. stożek ścięty (ostrosłup ścięty).

PRZYKŁAD Od ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o długości krawędzi podstawy 5 odcięto ostrosłup płaszczyzną równoległą do podstawy. Otrzymany w ten sposób ostrosłup ścięty ma wysokość 4, a krawędź jego górnej podstawy ma długość 3. Oblicz objętość tego ostrosłupa ściętego.



$$\frac{5}{3} = \frac{h+4}{h}$$

$$5h = 3(h+4)$$

$$h = 6$$

Dany ostrosłup jest podobny do ostrosłupa odciętego w skali $\frac{5}{3}$.

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot (6+4) = \frac{250}{3}$$

V_1 — objętość większego ostrosłupa

$$V_2 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot V_1 = \frac{27}{125} \cdot \frac{250}{3} = \frac{54}{3}$$

V_2 — objętość mniejszego ostrosłupa

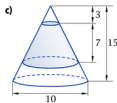
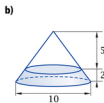
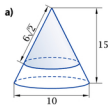
$$V = V_1 - V_2 = \frac{250}{3} - \frac{54}{3} = \frac{196}{3}$$

Odp. Objętość ostrosłupa ściętego jest równa $\frac{196}{3}$.

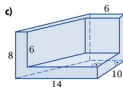
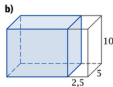
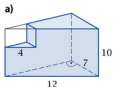
ZADANIE Od ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o długości krawędzi podstawy 6 i długości krawędzi bocznej 8 odcięto ostrosłup płaszczyzną równoległą do podstawy. Płaszczyzna ta przecięła wysokość w połowie. Oblicz objętość otrzymanego w ten sposób ostrosłupa ściętego.

ZESTAW ZADAŃ

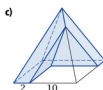
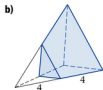
1. Oblicz objętość bryły zacieniowanej na rysunku.



2. Od graniastosłupa prostego odcięto graniastosłup do niego podobny (zob. rysunek). Oblicz objętość zacieniowanej bryły.



3. Od ostrosłupa prawidłowego o wysokości 10 odcięto ostrosłup do niego podobny (zob. rysunek). Oblicz objętość zacieniowanej bryły.



4. Od ostrosłupa o objętości 54 cm^3 odcięto górną część płaszczyzną równoległą do podstawy ostrosłupa. Otrzymano w ten sposób ostrosłup ścięty, którego wysokość jest równa $\frac{1}{3}$ wysokości ostrosłupa. Oblicz objętość tego ostrosłupa ściętego.

5. Pole powierzchni pewnego walca jest dwa razy większe od pola powierzchni walca podobnego do niego. Ustal, ile razy jest większa objętość tego walca.

6. Do kieliszka w kształcie stożka wiano płyn do $\frac{3}{4}$ wysokości kieliszka. Jąką część pojemności kieliszka zajął płyn? Do jakiego poziomu należałoby nalać płyn, aby wypełnić połowę objętości kieliszka?

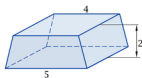
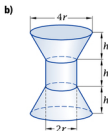
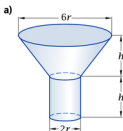
7. a) Stożek przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy, otrzymując przekrój o polu dwukrotnie mniejszym od pola podstawy. Oblicz, w jakim stosunku płaszczyzna przekroju dzieli wysokość tego stożka.

b) Płaszczyzną równoległą do podstawy dzielimy stożek na dwie części o równych objętościach. Oblicz, w jakim stosunku płaszczyzna ta podzieliła tworzącą stożka.

8. Oblicz objętość stożka ściętego o wysokości h , którego promienie podstaw są równe r i R (zob. rysunek obok).



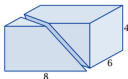
9. Oblicz objętość bryły przedstawionej na poniższym rysunku.



10. Na rysunku obok przedstawiony jest ostrosłup ścięty. Podstawy tej bryły są kwadratami. Oblicz objętość tej bryły.



11. Środki krawędzi czworokątnego foremnego są wierzchołkami ośmiościanu foremnego. Oblicz stosunek objętości czworokątnego foremnego do objętości ośmiościanu.



12. Na rysunku jest przedstawiony prostopadłościan rozcięty na dwie części płaszczyzną przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy i środki dwóch krawędzi górnej podstawy. Oblicz objętość mniejszej z otrzymanych brył.

13. Wykaż, że objętość ostrosłupa ściętego o wysokości h , którego podstawy mają pola P_1 i P_2 , wyraża się wzorem:

$$V = \frac{1}{3} h (P_1 + \sqrt{P_1 P_2} + P_2)$$

14. Na ilustracji przedstawiono jajo strusia i jajko kurze. Załóżmy, że czas gotowania jaj jest proporcjonalny do ich objętości oraz że jajko kurze i jajo strusia to bryły podobne. Jajko kurze gotuje się na twardo 6 minut. Jak długo powinno się gotować na twardo jajo strusia?



Warto wiedzieć!

W 1638 roku ukazało się dzieło Galileusza „Dialogi i dowodzenia matematyczne”, w którym wyjaśnia m.in., dlaczego zwierzęta nie mogą być dowolnie duże.

Galileusz rozumował tak:

Wytrzymałość kości jest proporcjonalna do pola powierzchni ich przekroju poprzecznego. Gdyby jakieś zwierzę zwiększyło swoje wymiary 3 razy, to jego masa zwiększyłaby się tak jak objętość, tzn. $3^3 = 27$ razy. Pole przekroju

poprzecznego kości natomiast zwiększyłoby się $3^2 = 9$ razy, więc 9 razy słabszy wytrzymałość kości. Widać z tego, że zwierzęta nie mogłyby być dowolnie duże, gdyż ich masa byłaby zbyt wielka w porównaniu z wytrzymałością kości.

Opisanych przez Galileusza faktów na ogół nie uwzględniają autorzy fantastycznych opowieści i filmów, w których występują nienaturalnie małe lub gigantyczne stwory.

15. Przeczytaj informacje w ramce.

a) Dorosły goryl ma około 1,8 m wzrostu. Filmowi twórcy nadali postaci King Konga proporcje ciała goryla powiększonego do wzrostu 45 m. Znajdź stosunek pól przekroju kości i stosunek mas goryla i King Konga.

b) W książce L. Carrolla „Alicja w krainie czarów” tytułowa bohaterka zmniejsza się gwałtownie i przez część powieści ma tylko $\frac{1}{3}$ swojego normalnego wzrostu. Przypuśćmy, że Alicja ważyła 35 kg. Ustal, ile powinna ważyć po zmniejszeniu.

c) Według Guliwera, bohatera powieści J. Swifta (czyt. slifta), Liliputy wyglądały jak 12-krotnie zmniejszeni ludzie. Liliput mógłby ważyć tyle razy mniej od człowieka, ile razy wytrzymałość kości Liliputa byłaby mniejsza od wytrzymałości kości człowieka, zatem kości Liliputa mogłyby unieść o wiele większą masę niż masa jego ciała. Ustal, ile razy Liliput mógłby przybrać na wadze bez szkody dla swojego kośćca.



16. Pewien pomnik ma być wykonany z mosiądzu i ma mieć 2,4 m wysokości. Gipsowy model tego pomnika ma 0,4 m wysokości i waży 4 kg. Mosiądz ma 3,5 razy większą gęstość niż gips. Oblicz masę gotowego pomnika.

17. Gęstość złota jest około 20 razy większa, a gęstość styropianu około 50 razy mniejsza niż gęstość ciała człowieka. Ustal, jakie wysokości miałyby twoje posagi, które ważyłyby tyle samo co ty, gdyby jeden z nich był wykonany ze złota, a drugi — ze styropianu.

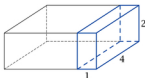


18. Model kadłuba statku jest zbudowany z drewna o gęstości 400 kg/m^3 i ma długość 0,8 m. Kadłub statku ma być wykonany ze stali o gęstości 8000 kg/m^3 i ma mieć długość 120 m. Oblicz, ile będzie ważył kadłub statku, jeśli jego model waży 2 kg.

MINISPRAWDZIAN

51. Od prostopadłościanu odcięto prostopadłościan do niego podobny o wymiarach $1 \times 2 \times 4$ (zob. rysunek obok). Objętość pozostałej części prostopadłościanu wynosi:

- A. 32 B. 48 C. 56 D. 64



52. Stosunek objętości dwóch brył podobnych jest równy $\frac{3}{8}$. Stosunek pól powierzchni tych brył wynosi:

- A. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{3\sqrt{9}}{4}$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

53. Stożek o wysokości 10 cm rozcięto na dwie bryły płaszczyzną równoległą do podstawy, odległą od niej o 6 cm. Wskaż, jaką część objętości tego stożka stanowi objętość większej z otrzymanych brył.

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{8}{125}$ C. $\frac{117}{125}$ D. $\frac{27}{125}$

54. Od ostrosłupa o wysokości h odcięto mniejszy ostrosłup płaszczyzną równoległą do podstawy. W jakiej odległości od podstawy ostrosłupa poprowadzono płaszczyznę cięcia, jeżeli wiadomo, że pole powierzchni odciętego ostrosłupa jest trzy razy mniejsze od pola powierzchni ostrosłupa dużego?

- A. $\frac{1}{3}h$ B. $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)h$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}h$ D. $\frac{2}{3}h$

POWTÓRZENIE

1. Z walca o promieniu podstawy 20 i wysokości 5 należy wyciąć graniastolup prawidłowy ośmiokątny o takiej samej wysokości. Jaka jest największa możliwa objętość takiego graniastolupa?

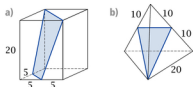
2. W stożku o wysokości h i promieniu podstawy r umieszczono sześcian w taki sposób, że jedna z jego ścian leży na podstawie stożka, a wszystkie wierzchołki przeciwległej ściany leżą na powierzchni bocznej stożka. Ustal objętość tego sześcianu.

3. Piramida Cheopsa ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Jej krawędź podstawy jest równa 230 m, a wysokość — 146 m. Ustal, jakim kątem — ostrym, prostym czy rozwartym — jest:

- kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi tej piramidy,
- kąt między przeciwległymi ścianami tej piramidy.

4. W graniastolupie prostym, którego podstawą jest trójkąt prostokątny, przekątne ścian bocznych wychodzące z wierzchołka kąta prostego tworzą z krawędziami podstawy kąty odpowiednio α i β . Znajdź cosinus kąta między tymi przekątnymi.

5. Oblicz pole zaznaczonego przekroju graniastolupa prawidłowego i ostrosłupa prawidłowego.

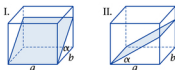


6. Prostopadłościan przecięto płaszczyzną nachyloną do podstawy pod kątem α na dwa sposoby (zob. rysunek). Wykaż, że w obu przypadkach przekrój będzie miał takie samo pole.

I. Płaszczyzna przechodzi przez krawędź o długości a .

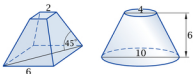
II. Płaszczyzna przechodzi przez krawędź o długości b .

Kąt α jest tak dobrany, że w obu przypadkach płaszczyzna nie przecina górnej podstawy.



7. Model ostrosłupa ma pole powierzchni całkowitej 5 razy mniejsze niż rzeczywiste pole powierzchni ostrosłupa. Ile razy mniejszą ma objętość?

8. Na poniższym rysunku przedstawiono ostrosłup ścięty o podstawach kwadratowych i stożek ścięty. Oblicz objętości tych brył.



9. Ze stożka ściętego wycięto walec (zob. rysunek). Oblicz objętość i pole powierzchni pozostałej części bryły.

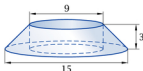


Tabela wartości funkcji trygonometrycznych

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0	1	0	46°	0,7193	0,6947	1,0355
1°	0,0175	0,9998	0,0175	47°	0,7314	0,6820	1,0724
2°	0,0349	0,9994	0,0349	48°	0,7431	0,6691	1,1106
3°	0,0523	0,9986	0,0524	49°	0,7547	0,6561	1,1504
4°	0,0698	0,9976	0,0699	50°	0,7660	0,6428	1,1918
5°	0,0872	0,9962	0,0875	51°	0,7771	0,6293	1,2349
6°	0,1045	0,9945	0,1051	52°	0,7880	0,6157	1,2799
7°	0,1219	0,9925	0,1228	53°	0,7986	0,6018	1,3270
8°	0,1392	0,9903	0,1405	54°	0,8090	0,5878	1,3764
9°	0,1564	0,9877	0,1584	55°	0,8192	0,5736	1,4281
10°	0,1736	0,9848	0,1763	56°	0,8290	0,5592	1,4826
11°	0,1908	0,9816	0,1944	57°	0,8387	0,5446	1,5399
12°	0,2079	0,9781	0,2126	58°	0,8480	0,5299	1,6003
13°	0,2250	0,9744	0,2309	59°	0,8572	0,5150	1,6643
14°	0,2419	0,9703	0,2493	60°	0,8660	0,5000	1,7321
15°	0,2588	0,9659	0,2679	61°	0,8746	0,4848	1,8040
16°	0,2756	0,9613	0,2867	62°	0,8829	0,4695	1,8807
17°	0,2924	0,9563	0,3057	63°	0,8910	0,4540	1,9626
18°	0,3090	0,9511	0,3249	64°	0,8988	0,4384	2,0503
19°	0,3256	0,9455	0,3443	65°	0,9063	0,4226	2,1445
20°	0,3420	0,9397	0,3640	66°	0,9135	0,4067	2,2460
21°	0,3584	0,9336	0,3839	67°	0,9205	0,3907	2,3559
22°	0,3746	0,9272	0,4040	68°	0,9272	0,3746	2,4751
23°	0,3907	0,9205	0,4245	69°	0,9336	0,3584	2,6051
24°	0,4067	0,9135	0,4452	70°	0,9397	0,3420	2,7475
25°	0,4226	0,9063	0,4663	71°	0,9455	0,3256	2,9042
26°	0,4384	0,8988	0,4877	72°	0,9511	0,3090	3,0777
27°	0,4540	0,8910	0,5095	73°	0,9563	0,2924	3,2709
28°	0,4695	0,8829	0,5317	74°	0,9613	0,2756	3,4874
29°	0,4848	0,8746	0,5543	75°	0,9659	0,2588	3,7321
30°	0,5000	0,8660	0,5774	76°	0,9703	0,2419	4,0108
31°	0,5150	0,8572	0,6009	77°	0,9744	0,2250	4,3315
32°	0,5299	0,8480	0,6249	78°	0,9781	0,2079	4,7046
33°	0,5446	0,8387	0,6494	79°	0,9816	0,1908	5,1446
34°	0,5592	0,8290	0,6745	80°	0,9848	0,1736	5,6713
35°	0,5736	0,8192	0,7002	81°	0,9877	0,1564	6,3138
36°	0,5878	0,8090	0,7265	82°	0,9903	0,1392	7,1154
37°	0,6018	0,7986	0,7536	83°	0,9925	0,1219	8,1443
38°	0,6157	0,7880	0,7813	84°	0,9945	0,1045	9,5144
39°	0,6293	0,7771	0,8098	85°	0,9962	0,0872	11,4301
40°	0,6428	0,7660	0,8391	86°	0,9976	0,0698	14,3007
41°	0,6561	0,7547	0,8693	87°	0,9986	0,0523	19,0811
42°	0,6691	0,7431	0,9004	88°	0,9994	0,0349	28,6363
43°	0,6820	0,7314	0,9325	89°	0,9998	0,0175	57,2900
44°	0,6947	0,7193	0,9657	90°	1	0	—
45°	0,7071	0,7071	1				

ODPOWIEDZI

str. 12-15: 1. a) $x \neq -\frac{5}{2}$, b) $x \neq 0$ i $x \neq 3$, c) $x \neq -\frac{1}{2}$ i $x \neq \frac{1}{2}$, d) $x \neq -3$ i $x \neq 5$, e) $x \neq -1$ i $x \neq -\frac{2}{3}$, f) $x \neq -10$, $x \neq 0$ i $x \neq 10$. 3. a) $x \neq 0$ i $x \neq \frac{2}{7}$; $\frac{6x^2+5}{-7x+2}$, b) $x \neq 0$ i $x \neq \frac{2}{5}$; $\frac{x^2(2x-5)}{3(5x-2)}$, c) $x \neq 0$ i $x \neq \frac{1}{4}$; $\frac{5}{x^2}$, d) $x \neq -5$; $\frac{x-5}{x+5}$, e) $x \neq -2,5$ i $x \neq 2,5$; $\frac{5}{x+2}$, f) $x \neq -2$ i $x \neq 2$; $\frac{x^2+2x+4}{x+2}$, g) $x \neq -\frac{1}{10}$; $\frac{30x-3}{100x^2-10x+1}$, h) $x \neq -5$ i $x \neq -1$; $\frac{x-4}{x+5}$. 4. a) $x \neq -4$; $\frac{8x-2}{x+4}$, b) $x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{1}{4}$, c) $x \neq -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $x \neq 0$ i $x \neq \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\frac{25x}{5x^2-4}$, d) $x \neq 0$; $\frac{2x-5}{25x^2}$, e) $x \neq -\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\frac{3x+1}{3x^2+2}$, f) $x \neq -4$; $\frac{32x^2+8x}{x+4}$. 5. a) $x \neq -1$ i $x \neq 1$; $\frac{2x^2}{x^2-1}$, b) $x \neq -7$ i $x \neq 0$; $\frac{x^4}{7x+49}$, c) $x \neq -\frac{1}{5}$ i $x \neq 0$; $\frac{25x+5}{x^2}$, d) $x \neq 0$; $\frac{-4x^2-6x-2}{5x^2}$, e) $x \neq -1$ i $x \neq 0$; $\frac{x^2}{x+1}$, f) $x \neq -\sqrt{0,7}$, $x \neq 0$ i $x \neq \sqrt{0,7}$; $\frac{8x^2-4x+8}{30x^2-21x^2}$, g) $x \neq 0$ i $x \neq 1$; $\frac{-15}{2x^2-2x}$, h) $x \neq -2$ i $x \neq 0$; $\frac{30-42x}{x^2+2x^2}$, i) $x \neq -2$, $x \neq -1$, $x \neq 0$ i $x \neq 2$; $\frac{10x+10}{-x^3+4x}$. 6. a) $\frac{3x^4-9x^3}{3x^2+2}$, b) $x \neq 0$; $\frac{-x-2}{4x^3+8x}$, c) $x \neq -1$; $\frac{4x^2-1}{x+1}$, d) $x \neq \frac{1}{2}$ i $x \neq 3$; $\frac{1}{4x-2}$, e) $x \neq -6$ i $x \neq -2$; $\frac{1}{x^2+1-2x-36}$, f) $x \neq -\frac{1}{2}$ i $x \neq 3$; $4x^2+4x+1$. 7. a) $x \neq 0$ i $x \neq 2$; $\frac{4x+3}{x-2}$, b) $x \neq 0$ i $x \neq \frac{3}{2}$; $\frac{4x+6}{x}$, c) $x \neq -1$, $x \neq 0$ i $x \neq 1$; x^3-x^2 , d) $x \neq 0$ i $x \neq \frac{1}{2}$; $\frac{1}{6x}$, e) $x \neq 0$ i $x \neq 3$; $\frac{x^2-x-6}{2x}$, f) $x \neq -\frac{1}{3}$, $x \neq 0$ i $x \neq \frac{4}{3}$; $\frac{2}{9x^2-9x-4}$, g) $x \neq -3$ i $x \neq 3$; $\frac{5}{x^3+6x+9}$, h) $x \neq 0$ i $x \neq \frac{1}{2}$; $\frac{3x^2+13x-10}{4x^3-2x^2}$, i) $x \neq -1$, $x \neq 0$ i $x \neq 2$; $\frac{x^2+2x+4}{2x+2}$, j) $x \neq -4$, $x \neq -1$ i $x \neq 0$; $\frac{3x^2-12x}{x+1}$, k) $x \neq 0$, $x \neq 2$ i $x \neq 3$; $\frac{x^2-2x-4}{2x}$, l) $x \neq -2$, $x \neq 2$ i $x \neq 3$; $\frac{5x^3-10x^2}{4x+8}$. 8. a) $x \neq -1$, $x \neq 0,8$ i $x \neq 5$; $\frac{x^2+x}{-x+5}$, b) $x \neq -3$, $x \neq -0,5$, $x \neq 1$ i $x \neq 4$; $\frac{1}{x-1}$, c) $x \neq -3$, $x \neq 0$, $x \neq 2$ i $x \neq 5$; $\frac{x-1}{2x^2-x}$, d) $x \neq -3$ i $x \neq -2,5$; $\frac{2x^3-11x^2+33x-45}{2x^2+11x+15}$, e) $x \neq -2$, $x \neq -1$ i $x \neq 5$; $\frac{x^2-4x+3}{x+1}$, f) $x \neq -1$, $x \neq 1$, $x \neq 3$ i $x \neq 6$; $\frac{x^2+5x+6}{x^2-9x+18}$. 9. a) $x \neq -5$; $\frac{4x+10}{x+5}$, b) $x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \neq 0$ i $x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{-6x^2+2}{2x^2-x}$, c) $x \neq -2$ i $x \neq 2$; $\frac{5x^3-4x}{x^2-4}$, d) $\frac{4x^2-14x}{3x^2-2x+5}$, e) $x \neq 2$; $\frac{3x^2-11x+1}{x-2}$, f) $x \neq \frac{2}{3}$; $\frac{4x^2+2x-1}{3x+2}$. 10. a) $x \neq -1$ i $x \neq 0$; $\frac{2x+1}{x^2+x}$, b) $x \neq -3$ i $x \neq -2$; $\frac{-1}{x^2+5x+6}$, c) $x \neq 0$ i $x \neq \frac{3}{2}$; $\frac{11x-9}{2x^2-3x}$, d) $x \neq -2$ i $x \neq 2$; $\frac{-x+18}{x^2-4}$, e) $x \neq -1$ i $x \neq 3$; $\frac{x^2-6x+1}{x^3-2x-3}$, f) $x \neq -1$ i $x \neq 2$; $\frac{3x^2-9x-18}{2x^2-2x-4}$. 11. a) $x \neq 0$; $\frac{6x+5}{x^2}$, b) $x \neq 0$; $\frac{15-2x^2}{10x^3}$, c) $x \neq 0$; $\frac{-2x^2-x+2}{x^3}$, d) $x \neq 2$; $\frac{2x-2}{(x-2)^2}$, e) $x \neq -1$ i $x \neq 3$; $\frac{-x^2-4x+2}{x^2-2x-3}$, f) $x \neq -3$ i $x \neq \frac{5}{2}$; $\frac{-3x^3+3x^2+5x+6}{2x^2+x-15}$, g) $x \neq -2$ i $x \neq 0$; $\frac{5x^2-1}{x^2+2x}$, h) $x \neq 0$ i $x \neq \frac{1}{5}$; $\frac{-x^2}{10x-2}$, i) $x \neq -\frac{3}{2}$ i $x \neq \frac{3}{2}$; $\frac{10x}{4x^2-9}$. 12. a) $x \neq 0$; $\frac{75x^2+10x-9}{15x^3}$, b) $x \neq 0$; $\frac{21x^3-20x^2+30}{15x^4}$, c) $x \neq 0$; $\frac{x^2+1}{x^4}$, d) $x \neq 0$; $\frac{13x^2-7x+18}{6x^3}$, e) $x \neq 0$; $\frac{-3x^3+2x^2+x-4}{4x^4}$, f) $x \neq 0$; $\frac{-x^3+x-3}{x^4}$. 13. a) $\frac{1}{n(n+1)}$, b) $\frac{3n^2-1}{(n-1)n(n+1)}$. 14. a) $x \neq -3$ i $x \neq 4$; $\frac{5x-8}{x^2-x-12}$, b) $x \neq -3$ i $x \neq \frac{1}{2}$; $\frac{x^2+16x+6}{2x^2+5x-3}$, c) $x \neq -5$, $x \neq -2$ i $x \neq 3$; $\frac{2x^2+5x+7}{x^3+4x^2-11x-30}$, d) $x \neq 1$, $x \neq 2$ i $x \neq 3$; $\frac{3x-2}{x^2-4x+3}$. 15. a) $\frac{-2}{x} + \frac{10}{3x-2}$, b) $\frac{3}{x} + \frac{-3}{x+2}$, c) $\frac{1}{5x} + \frac{-1}{x+25}$, d) $\frac{2}{x^2+1} + \frac{-6}{x+3}$, e) $\frac{-3}{x+4} + \frac{2}{3x-1}$, f) $\frac{1}{3x-3} + \frac{11}{3x+6}$. 16. a) $a > 0$; $\frac{8a^3+160}{a^2}$, b) $a > 0$; $\frac{70a^3+800}{7a^2}$, c) $a > 0$; $\frac{23a^3+160}{2a^2}$.

str. 18-21: 1. a) $x = -7$, b) $x = \frac{3}{4}$, c) $x = 0$, d) $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{3}{2}$, e) $x_1 = -5$, $x_2 = 2$, f) $x = 0$. 2. a) $x_1 = -5$, $x_2 = \frac{1}{3}$, b) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, c) $x = 0$, d) $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, e) $x = 5$, f) równanie sprzeczne. 3. a) $x = -7,5$, b) $x = \frac{11}{21}$, c) $x = -3$, d) $x = \frac{19}{18}$, e) $x = -25$, f) $x = 8,5$. 4. a) $x = 6$, b) równanie sprzeczne, c) równanie sprzeczne, d) $x = 5$, e) $x = -1$,

f) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. 5. a) Równanie sprzeczne, b) $x = -1$, c) $x_1 = \frac{11 - \sqrt{41}}{3}$, $x_2 = \frac{11 + \sqrt{41}}{3}$, d) $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{3}{2}$, e) $x = -\frac{10}{13}$, f) $x_1 = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $x_2 = \frac{\sqrt{10}}{10}$, g) $x = -\frac{1}{21}$, h) $x = \frac{30}{41}$, i) $x_1 = \frac{21 - \sqrt{137}}{8}$, $x_2 = \frac{21 + \sqrt{137}}{8}$. 6. a) $x = -2$, b) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, c) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, d) równanie sprzeczne, e) $x = \frac{3}{2}$, f) równanie sprzeczne. 7. a) $x = \frac{2}{3}$, b) $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 0$, c) $x = -\frac{5}{2}$, d) $x = 2$, e) $x = -\frac{1}{11}$, f) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{4}{3}$. 8. a) $x_1 = \frac{-2 - \sqrt{7}}{3}$, $x_2 = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3}$, b) równanie sprzeczne, c) $x_1 = \frac{-7 - \sqrt{33}}{2}$, $x_2 = \frac{-7 + \sqrt{33}}{2}$, d) $x = \frac{1}{2}$. 9. a) $x = -3$, b) równanie sprzeczne, c) $x = -6$, d) $x = \frac{1}{11}$, e) $x = -1$, f) $x_1 = \frac{2 - 4\sqrt{2}}{7}$, $x_2 = \frac{2 + 4\sqrt{2}}{7}$, g) $x_1 = 2$, $x_2 = -4$, h) $x_1 = 3 + \sqrt{2}$, $x_2 = 3 - \sqrt{2}$. 10. a) $x = -\frac{5}{3}$, b) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{3}$, c) $x_1 = -3 + \sqrt{13}$, $x_2 = -3 - \sqrt{13}$, d) $x = \frac{22}{9}$, e) $x = -11$, f) $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = 3$. 11. a) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 1$, b) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, c) $x = -7$, d) $x = -5$, e) $x = 6$, f) $x_1 = -2$, $x_2 = 4.5$. 12. a) $a = 2$, b) $a = -\frac{2}{5}$. 13. $\frac{5\sqrt{2}-5}{2}$. 14. a) $a = \frac{2}{9}$ lub $a = \frac{9}{9}$, b) $a = 9$ lub $a = -10$. 15. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ lub $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, b) $\frac{15}{8}$ i $-\frac{5}{24}$ lub $\frac{1}{6}$ i $\frac{3}{2}$. 16. a) Dla trzech lat oraz dla dwunastu lat. 17. Około 32°C .

str. 23-25: 1. a) $x \in (-\infty; -5) \cup (4; +\infty)$, b) $x \in (-\infty; 2.5) \cup (4; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; -7) \cup (-\frac{18}{7}; +\infty)$, d) $x \in (0.5; 1.5)$, e) $x \in (-\infty; \frac{2}{3}) \cup (1; +\infty)$, f) $x \in (-\infty; -4) \cup (-\frac{2}{3}; +\infty)$. 2. a) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$, b) $x \in (-5; 0) \cup (5; +\infty)$, c) $x \in (-2; -1) \cup (0; +\infty)$, d) $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$. 3. a) $x \in (-\infty; -2.5) \cup (-0.75; 0)$, b) $x \in (-7; -0.75) \cup (0.5; +\infty)$, c) $x \in (-59; -\frac{5}{3}) \cup (\frac{6}{5}; +\infty)$, d) $x \in (-\infty; -14) \cup (0; 2)$, e) $x \in (-\infty; -0.25) \cup (\frac{7}{18}; \frac{5}{3})$, f) $x \in (-\infty; -\frac{3}{11}) \cup (\frac{1}{3}; \frac{3}{5})$, g) $x \in (-\infty; -\frac{3}{5}) \cup (-\frac{3}{10}; -\frac{1}{6})$, h) $x \in (-\infty; -0.5) \cup (-\frac{6}{67}; \frac{4}{3})$, i) $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (\frac{5}{4}; \frac{7}{4})$. 4. a) $x \in (-\infty; -\frac{1}{3})$ lub $x = 0$, b) $x \in (\frac{3}{8}; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; -0.4)$ lub $x = 0$, d) $x \in (-1; 1)$, e) $x \in (0; +\infty)$, f) $x \in (-\infty; -1)$. 5. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-7, 1\}$, b) nierówność sprzeczna, c) $x = 0$, d) $x \in \mathbb{R}$. 6. a) $x \in (-\infty; 0)$, b) $x \in (-\frac{1-\sqrt{2}}{2}; 0) \cup (-\frac{1+\sqrt{2}}{2}; +\infty)$, c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, d) $x \in (\frac{1-\sqrt{2}}{2}; 0) \cup (0; \frac{1+\sqrt{2}}{2})$, e) $x = -1$, f) $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. 7. a) $x \in (-\frac{14}{3}; +\infty) \setminus \{-4\}$, b) $x \in (-\infty; \frac{5}{3})$, c) $x \in (-\infty; 2)$, d) $x \in (-2; 0) \cup (\frac{4}{3}; 3)$, e) $x \in (3; 4) \cup (\frac{14}{3}; +\infty)$, f) $x \in (-\infty; -5) \cup (-4; 0) \cup (0; 4)$, g) $x \in (-2; 0)$, h) $x \in (-1; 0) \cup (3; 4)$, i) $x \in (-1; 0) \cup (3 - 2\sqrt{2}; 3 + 2\sqrt{2})$. 8. a) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$, b) $x \in (\frac{13 - \sqrt{106}}{9}; 0.5) \cup (0.5; 2) \cup (\frac{13 + \sqrt{106}}{9}; +\infty)$. 9. a) $x \in (-6; -3) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$, b) $x \in (0; +\infty)$, c) $x \in (-2\sqrt{3}; 1) \cup (3; 2\sqrt{3}) \cup (4; +\infty)$, d) $x \in (-3; -2) \cup (1; 5) \cup (9; +\infty)$. 10. a) $x \in (-\infty; -2) \cup (-0.25; +\infty)$, b) $x \in (-\infty; -2.5) \cup (-\frac{5}{3}; +\infty)$, c) $x \in (5; 18)$, d) $x \in (-2; -\frac{2}{5})$, e) $x \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$, f) $x \in (-\infty; -\frac{4}{15}) \cup (-\frac{4}{15}; -\frac{1}{4}) \cup (0; +\infty)$. 11. a) Energooszczędna — po 31 miesiącach, tradycyjna — nigdy, b) po więcej niż 7 miesiącach, c) energooszczędna — 2,75 zł, tradycyjna — 3,30 zł.

str. 28-29: 1. a) $R \neq 0$, $R_1 \neq 0$, $R_2 \neq 0$ i $2R_1 - R \neq 0$; $R_2 = \frac{2R_1 R}{2R_1 - R}$, b) $R \neq 0$, $R_1 \neq 0$, $R_2 \neq 0$, $R_3 \neq 0$ i $R_1 R_3 - R(R_1 + R_3) \neq 0$; $R_2 = \frac{R R_1 R_3}{R_1 R_3 - R R_1 - R R_3}$, c) $R \neq 0$, $R_1 + R_2 \neq 0$, $R_1 + R_3 \neq 0$

i $R_1 + R_3 - R \neq 0$; $R_2 = \frac{R(R_1 + R_3)}{R_1 + R_3 - R} - R_1$. 2. a) $d \neq 0$, $f \neq 0$, $d - F_1 \neq 0$; $f = \frac{dF_2}{d - F_1}$, b) $m_1 + m_2 \neq 0$ i $v_1 - v_0 \neq 0$; $m_1 = \frac{m_2(v_0 - v_2)}{v_1 - v_0}$, c) $c \neq 0$, $u + c \neq 0$ i $v \neq 0$; $w = \frac{v_1}{v} (c + u) - c$, d) $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, $c \neq 0$ i $T_1 c - v_1(p_1 - p_2) \neq 0$; $v_2 = \frac{T_2 v_1 c}{T_1 c - v_1(p_1 - p_2)}$, e) $r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$, $C \neq 0$, $r_1 + r_2 \neq 0$ i $r_2 p - C \neq 0$; $r_1 = \frac{C p_2}{p r_2 - C}$, f) $R_1 \neq 0$, $R_2 \neq 0$, $n_1 \neq 0$, $F \neq 0$ i $R_1 + R_2 \neq 0$; $n_2 = n_1 \left(1 + \frac{R_2 R_3}{F(R_1 + R_2)}\right)$. 4. a) $a \geq 0$ i $b \geq 0$; $a - b$; $a \neq b$, $a \geq 0$ i $b \geq 0$; $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, b) $x \in \mathbf{R}$ i $y \in \mathbf{R}$; $x - y$; $x \neq y$ i $x \neq -y$; $2(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})$. 5. a) $x - 2\sqrt{x} + 1$, b) $x + 4\sqrt{x - 4}$. 12. $k \in (-\infty; 1 - \sqrt{2}) \cup (4; +\infty)$. 13. $p \in (-\infty; -1)$. 14. $m \in (-2 - \sqrt{5}; 0) \cup (0; \frac{1}{8})$.

str. 33-37: 1. ① - ③, ② - ⑤, ③ - ⑥, ④ - ⑦, ⑤ - ⑧, ⑥ - ⑨. 2. a) $y = \frac{3}{x^2}$, b) $y = \frac{-1}{2x}$, c) $y = \frac{5}{2x}$. 3. a) $f(x) = \frac{-2}{3(x-2)} + 1$, b) $f(x) = \frac{-2}{3(x+3)} - 10$, c) $f(x) = \frac{-2}{3(x+30)} + 20$. 4. a) $x = 1$, $y = 2$, b) $x = -12$, $y = -\frac{1}{3}$, c) $x = -\sqrt{3}$, $x = -\sqrt{5}$, d) $x = 0,5$, $y = 0,8$. 5. a) $(-7, -9)$, b) $(12, 8)$, $(12, -15)$, $(-7, 8)$, $(-7, -15)$. 6. a) Każda funkcja typu $y = \frac{a}{x+3} + 3$, $a \neq 0$, b) każda funkcja typu $y = \frac{a}{x-0,6}$, $a \neq 0$. 7. a) I, III i IV, b) I, II i IV, c) I, II i III, d) I, II i IV. 8. Tak. 9. ① - ③, ② - ⑤, ③ - ⑥, ④ - ⑦. 10. a) $(0, \frac{1}{12})$; funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; -6)$ i w przedziale $(-6; +\infty)$; $x \in (-6; +\infty)$, b) $(3, 0)$; funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$ i w przedziale $(0; +\infty)$; $x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$, c) $(0, -\frac{3}{2})$ i $(-1, 0)$; funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; -2)$ i w przedziale $(-2; +\infty)$; $x \in (-2; -1)$, d) $(0, 0)$; funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; 1)$ i w przedziale $(1; +\infty)$; $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$, e) $(0, 2\frac{1}{4})$ i $(4\frac{1}{2}, 0)$; funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 4)$ i w przedziale $(4; +\infty)$; $x \in (-\infty; 4) \cup (4\frac{1}{2}; +\infty)$, f) $(0, \frac{1}{3})$ i $(-3, 0)$; funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 3)$ i w przedziale $(3; +\infty)$; $x \in (-3; 3)$. 11. a) $x = 0$; dla $a = -4$, b) $x = 0,8$; dla $a = 0$, c) $x = 7$; dla $a = 2$, d) $x = -3$; dla $a = -\frac{1}{7}$, e) $x = -\sqrt{3}$; dla $a = 18$, f) $x = \sqrt{2}$; dla $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 12. a) $(2; +\infty)$, b) $(1; 2)$, c) $(0; +\infty)$, d) $(-\infty; 2)$, e) $(-1; 2)$, f) $(-\infty; \frac{7}{3})$. 13. a) 6, b) 3, c) 14. 14. $f(x) = \frac{-2}{x-1} + 2$. 15. a) $f(x) = \frac{3}{x+2} - 3$, b) $[3, 10]$. 16. a) $(-2, -2)$ i $(2, 2)$, b) $(-0,5, 0,5)$ i $(0,5, -0,5)$, c) $(-1,5, -1,5)$ i $(1,5, 1,5)$, d) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ i $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. 17. Gdy $a > 0$: $(-\sqrt{a}, -\sqrt{a})$ i $(\sqrt{a}, \sqrt{a})$, gdy $a < 0$: $(-\sqrt{-a}, -\sqrt{-a})$ i $(\sqrt{-a}, -\sqrt{-a})$. 18. $(3, 3)$, $(-3, -3)$, a) $(0, 5)$, $(-6, -1)$, b) $(13, -4)$, $(7, -10)$. 19. a) $(-5, -1)$, $(-3, 1)$, b) $(5, -6)$, $(3, -8)$, c) $(3 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$, $(3 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$, d) $(\sqrt{3} - 1, -8 - \sqrt{3})$, $(-\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} - 8)$. 20. $P = 12$. 21. a) $y = x + 2$ i $y = -x + 2$, b) $y = x + 4$ i $y = -x + 8$, c) $y = -x - 14$ i $y = x - 4$, d) $y = -x + 7$ i $y = x - 3$.

str. 43-47: 1. a) $f(x) = \frac{5}{x} - 3$, b) $f(x) = \frac{3}{x-2} + 1$, c) $f(x) = \frac{0,75}{x-0,25} + 1$, d) $f(x) = \frac{6}{x+2} - 1$, e) $f(x) = \frac{-2}{x+3} + 2$, f) $f(x) = \frac{-2}{x-1,5} - 3$, g) $f(x) = \frac{0,75}{x+2,5} + 0,5$, h) $f(x) = \frac{-10}{x-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}$, i) $f(x) = \frac{1}{x-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}$. 2. a) $\mathbf{R} \setminus \{4,5\}$, $\mathbf{R} \setminus \{-3\}$, b) $\mathbf{R} \setminus \{-2,4\}$, $\mathbf{R} \setminus \{1\}$, c) $\mathbf{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$, $\mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$. 3. a) $x = 0$, $y = 1$, b) $x = 0$, $y = 6$, c) $x = -1$, $y = 1$, d) $x = -2$, $y = 5$, e) $x = \frac{1}{4}$, $y = 2$, f) $x = \frac{4}{3}$, $y = -\frac{5}{3}$. 4. a) $(0, 4)$, b) $(0, -3)$, c) $(6, 3)$, d) $(-0,5, 5)$, e) $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, f) $(-0,4, -0,6)$. 6. ① - ③, ② - ⑤, ③ - ⑦, ④ - ⑧. 7. a) $(0, -1,5)$, $(6, 0)$; funkcja jest malejąca w przedziale

$(-\infty; 2)$, a także jest malejąca w przedziale $(2; +\infty)$. b) $(0, -2)$, $(\frac{4}{3}, 0)$; funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 2)$, a także jest rosnąca w przedziale $(2; +\infty)$. c) $(0, -2)$, $(-\frac{7}{3}, 0)$; funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; 3,5)$, a także jest malejąca w przedziale $(3,5; +\infty)$. 8. a) $\frac{2}{3}$, b) $a = \frac{7}{3}$. 9. a) Jedno miejsce zerowe lub brak miejsc zerowych, b) jedno miejsce zerowe, jeśli $a \neq b$ i $a \neq 0$, a brak miejsc zerowych, jeśli $b \neq 0$ i $a = 0$. 10. a) Funkcja jest malejąca, b) funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; 2)$ i rosnąca w przedziale $(2; +\infty)$. c) funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0,5)$, a także jest rosnąca w przedziale $(2; +\infty)$, funkcja jest malejąca w przedziale $(0,5; 2)$. 12. a) $(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2})$, b) $(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 2+\sqrt{3})$, $(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 2-\sqrt{3})$, c) $(\frac{\sqrt{37}-5}{2}, \frac{7-\sqrt{37}}{6})$, $(\frac{-\sqrt{37}-5}{2}, \frac{7+\sqrt{37}}{6})$, d) $(0, 0)$, $(1, 1)$. 13. a) $(-5; -\frac{23}{5})$, b) $(-3; +\infty)$, c) $(-\infty; -2) \cup (0; 2) \cup (4; +\infty)$, d) $(1-\sqrt{2}; 0) \cup (2; 1+\sqrt{2})$. 14. a) $a = -3$, $b = -5$, b) $q = 8$, $p = 2$. 17. $f: (0, 0,8)$ i $(2, 0)$, $g: (0, \frac{1}{3})$, $h: (0, 5)$, $q: (0, \frac{3}{16})$; h i q . 18. a) $f(x) = \frac{-x+6}{(x-1)(x-3)}$, b) $g(x) = \frac{2x^2-18}{(x-1)(x+6)}$, $h(x) = \frac{10(x-4)(x+5)}{x+2}$, $i(x) = \frac{x^2-x-6}{x+3}$. 19. $f: a = 0$ i $b < 0$, $g: a < 0$, $b = 0$, $h: a > 0$, $b > 0$.

str. 48: 1. a) $x \neq 2$; $x+2$, b) $x \neq 0$; $x(x-2)$. 2. a) $x \neq -2$, $x \neq 0$ i $x \neq 3$; $\frac{x^2+3x}{x^2-x-6}$, b) $x \neq 0$, $x \neq \frac{2}{3}$ i $x \neq -5$; $\frac{5-x}{x^2+5x}$, c) $x \neq 1,5$; $\frac{14x^2-15x+16}{2x^3-3x^2+8x-12}$, d) $x \neq 0$ i $x \neq \frac{1}{3}$; $\frac{-2x^2+2x+4}{3x^2-x}$. 3. a) $x = 5$, b) $x = 0$, $x = 3,25$, c) $x = -\frac{2}{3}$, d) $x_1 = 5$, $x_2 = -2$. 4. a) $x = 5,75$, b) $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{4}{3}$, c) $x = 2$, d) równanie sprzeczne. 5. a) $x \in (-2; \frac{3}{4})$, b) $x \in (-\infty; 1,5) \cup (10; +\infty)$, c) $x \in (-2; \frac{4}{3}) \cup (3; +\infty)$, d) $x \in (-\infty; -7) \cup (-5; 0) \cup (0; 5)$. 6. $a = \frac{1}{11}$, $b = \frac{1}{12}$. 7. $a \in (-\infty; -2) \cup (0; \frac{2}{3}) \cup (2; +\infty)$. 8. a) $(\frac{5}{2}; 7)$, b) $(-\infty; -3) \cup (-0,75; +\infty)$. 9. $a = -3$, $b = -25$, $c = -5$. 10. $P = 14$. 11. Dla $x \in (-\infty; -2) \cup (-\sqrt{3}; -1) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$. 12. a) $p = \frac{nk}{n-m}$, b) $p = \frac{a^2+ab}{b}$, c) $p = \frac{5r}{2r-3}$, d) $p = \frac{x}{y^2-x^2+xy}$.

str. 55-59: 2. a) 7, b) 82, c) $n-1$, d) $2n-2$. 3. a) 1, 2, 3; 10, b) 1, 0, 0; 1, c) 5, 3, 4; 8. 4. a) 0, 5, b) 1, 9, c) 6, 2, d) 1, 3. 5. a) -6 , $-13\frac{1}{2}$, $-20\frac{2}{3}$; $-62\frac{8}{9}$, b) 0, 18, 0; 0, c) 2, 1, $\frac{8}{9}$; $\frac{512}{81}$. 6. a) $2\sqrt{2}$, 8, 1,3, b) $\frac{3}{13}$, $-35\frac{1}{2}$, 1. 7. a) Wyrazy a_k , gdzie k jest dowolną liczbą naturalną dodatnią nieparzystą; wszystkie; wyrazy c_k , gdzie k jest dowolną liczbą naturalną dodatnią parzystą, b) wyrazy d_k , gdzie k jest dowolną liczbą naturalną dodatnią podzielną przez 5; wyrazy e_k , gdzie k jest dowolną liczbą naturalną dodatnią nieparzystą; wyrazy f_k , gdzie k jest dowolną liczbą naturalną dodatnią podzielną przez 6. 8. $a_{n+1} = n^2 + 4n$, $a_n - a_1 = n^2 + 2n - 3$, $b_{n-1} = 5^{n-1} + 4$, $b_{n+1} - b_{n-1} = 24 \cdot 5^{n-1}$, $c_{2n+1} = \frac{n-\frac{1}{2}}{2n+2}$, $\frac{c_n}{c_{n-2}} = \frac{(n-1)(\frac{1}{2}n-1)}{(n+1)(\frac{1}{2}n-2)}$. 9. $a_1 = 41$, $a_2 = 43$, $a_3 = 47$, $a_4 = 53$, $a_5 = 61$. 10. a) 196, b) nie. 11. a) Dwudziestym, b) nie, c) wyrazy większe od a_{45} ; wyrazy od a_1 do a_{52} . 12. a) Np. $a_n = n + 5^n$, b) np. $a_n = 2n$, c) np. $a_n = \frac{1}{n}$, d) np. $a_n = n^3$, e) np. $a_n = \frac{n}{n+1}$, f) np. $a_n = n-5$. 13. a) Np. $a_n = n^2$, $a_n = (n+1)^2$, $a_n = (n+4)^2$, b) np. $a_n = (2n-2)^2$, $a_n = (n-4)^2$, $a_n = (n-11)^2$. 14. a) Np. $a_n = \frac{\sqrt{n+2}}{(n+1)\sqrt{n}}$, b) np. $a_n = \frac{3\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}}$. 15. a) $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 12$, $S_4 = 20$, b) $a_1 = -4$, $a_{10} = 19\frac{1}{18}$, $a_n = 2n - 1 + \frac{5}{n(n-1)}$ dla $n \geq 2$.

16. a) $a_1 = 90, a_2 = 33, a_3 = 14, a_4 = 7\frac{2}{3}$, b) $a_1 = -5, a_2 = -5, a_3 = -2, a_4 = 46$, c) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = -3$, d) $a_1 = -2, a_2 = 2, a_3 = -4, a_4 = -8$, e) $a_1 = -2, a_2 = 5, a_3 = 1, a_4 = 8$, f) $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 3, a_4 = 1$. 17. a) Np. wzór rekurencyjny: $a_1 = 5, a_{n+1} = a_n + 5$, wzór ogólny: $a_n = 5n$, b) np. wzór rekurencyjny: $a_1 = 2, a_{n+1} = -a_n$, wzór ogólny: $a_n = 2 \cdot (-1)^{n+1}$, c) np. wzór rekurencyjny: $a_1 = 113, a_{n+1} = a_n + 10$, wzór ogólny: $a_n = 103 + 10n$, d) np. wzór rekurencyjny: $a_1 = 8, a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n$, wzór ogólny: $a_n = (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$, e) np. wzór rekurencyjny: $a_1 = 3a, a_{n+1} = a_n - 1$, wzór ogólny: $a_n = 3a - n + 1$, f) np. wzór rekurencyjny: $a_1 = a, a_{n+1} = a_n + a + 1$, wzór ogólny: $a_n = na + n - 1$. 18. a) Np. $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$, b) np. $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + (-1)^{n+1} \cdot n$. 20. a) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8, a_7 = 13, a_8 = 21, a_9 = 34, a_{10} = 55$, c) $a_3 = 2, a_4 = 3$. 22. a) $a_n = 3^{2^{n-1}}$, b) $b_n = 2^{3^{n-1}}$. 25. a) Malejący, b) ani rosnący, ani malejący, c) rosnący, d) rosnący. 27. a) Tak, ciąg jest malejący, b) tak, ciąg jest rosnący, c) tak, ciąg jest rosnący, d) nie można określić monotoniczności. 28. $(b_n), (r_n), (t_n)$. 29. a) Malejący, b) malejący, c) ani rosnący, ani malejący, d) rosnący.

str. 62-64: 1. a) $r = 5; 12, 17$, b) $r = -\frac{4}{7}; -\frac{2}{7}, -\frac{6}{7}$, c) $r = 0,4; 11,4, 11,8$, d) $r = -5,5; 109, 103,5$, e) $r = \sqrt{2}; 1 + 4\sqrt{2}, 1 + 5\sqrt{2}$, f) $r = -2\sqrt{2}; 3 - 4\sqrt{2}, 3 - 6\sqrt{2}$. 2. a) $a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = -2$, b) $a_2 = 5, a_3 = 7, a_4 = 9$, c) $a_2 = -4, a_3 = -4, a_4 = -4$, d) $a_2 = 34, a_3 = 27, a_4 = 20$. 3. a) $r = 7, a_1 = 10, a_2 = 17$, b) $r = -2, a_1 = 1, a_2 = -1$, c) $r = -14, a_1 = m + 35, a_2 = m + 21$, d) $r = -\frac{1}{4}, a_1 = \frac{x-1}{4}, a_2 = \frac{x-2}{4}$. 4. a) Dla $t = 6$ lub $t = -6$, b) dla $t = 15$, c) dla $t = -1$ lub $t = 4$. 6. a) Np. 3, 5, 7, b) 5, 11, 17, 23, 29. 7. a) $a_2 = 1,5, a_3 = 6, a_4 = 10,5$, b) $a = -3\frac{1}{5}, b = -8\frac{2}{5}, c = -13\frac{3}{5}, d = -18\frac{4}{5}$, c) $a_2 = 1\frac{4}{7}, a_3 = 2\frac{9}{14}, a_4 = 3\frac{5}{7}, a_5 = 4\frac{11}{14}, a_6 = 5\frac{6}{7}, a_7 = 6\frac{13}{14}$. 8. Sześć. 12. $(a_n), (b_n), (d_n)$. 13. a) $a_n = \frac{3}{2}n + 4\frac{5}{2}; a_1 = 5\frac{1}{2}, a_{n+1} = a_n + \frac{3}{2}; b_n = -3\sqrt{3}n + 3 + 7\sqrt{3}; b_1 = 3 + 4\sqrt{3}, b_{n+1} = b_n - 3\sqrt{3}; c_n = 1,4n - 28,8; c_1 = -27,4, c_{n+1} = c_n + 1,4$, b) $a_n = 2n - 9, b_n = -\frac{1}{2}n + \frac{3}{4}, c_n = -0,2n - 12,8$, c) $x_1 = 4, x_{n+1} = x_n + 5; y_1 = -2, y_{n+1} = y_n + 0,5; z_1 = 100, z_{n+1} = z_n - 4$. 14. a) $a_{10} = 47$, b) $a_{21} = 21\sqrt{2}$, c) $a_{13} = 37$, d) $a_{100} = -204$. 15. a) $r = -0,7, a_{12} = -4,7$, b) $a_1 = 5, a_{15} = 6,4$, c) $r = 2, a_1 = -98$, d) $r = 1,5, a_1 = -14$. 17. a) 399, b) 598. 18. $a_1 = \frac{2}{5}, r = \frac{2}{5}$. 19. a) Tak, trzynastym, b) nie, c) tak, trzysta siedemdziesiątym trzecim. 20. a) Trzynaście, b) dziewięćdziesiąt. 21. Np. 21, 41, 61, 81, 101. 23. a) $a_1 = 2; r = -3$, b) $f(x) = 3x - 8$.

str. 67-69: 1. a) $S_{21} = 252$, b) $S_{35} = -2870$, c) $S_{100} = 1925$, d) $S_{19} = -115,9$. 2. $a_1 = -\frac{13}{5}, r = \frac{47}{35}$. 3. $S_{50} = 2550$. 4. a) $a_1 = -36, r = 48$, b) $a_1 = \frac{23}{3}, r = -\frac{7}{3}$, c) $a_1 = -5, r = 8$. 5. a) $S = 94,5$, b) $S_{30} = 187,5$, c) $S_{10} = 4\frac{1}{3}$. 6. a) 970 zapalek; 20 figur, b) 800 zapalek; 22 figury. 7. a) 200 miejsc, b) 2520 miejsc. 8. 55 dachówek; 1480 dachówek. 9. Druga; $S_1 = 104\,500$ zł, $S_2 = 107\,500$ zł. 10. a) Osiem; 23 karty, b) 497 talii. 11. a) 21 945, b) 494 550, c) 3498. 12. a) 166 833, b) 100 000, c) 2900. 13. a) 15 500, b) 56,25,

c) -1920 , d) $443\frac{1}{3}$. 14. a) $212\frac{11}{14}$, b) 221 , c) -1430 . 15. a) 11 , b) 13 , c) 10 , d) 10 .
16. a) $x = -0,7$, b) $x = 0,5$, c) $x = -19$, d) $x = -5,1$ lub $x = 5,7$. 18. $a_n = -6n + 23$.

str. 73-76: 1. a) Tak, b) nie, c) tak. 2. a) $q = \frac{1}{3}$, b) $q = -2$, c) $q = 0,1$, d) $q = \sqrt{3}$.
3. a) $10\,000$, b) $5\sqrt[3]{25}$, c) $\frac{343}{27}$, d) 1 , e) $0,000002$, f) $(1 + \sqrt{5})^5$. 4. a) $a_1 = \frac{3}{5}$, $a_4 = -75$,
b) $a_1 = \frac{4}{7}$, $a_4 = 24\frac{1}{2}$, c) $a_1 = -612$, $a_4 = 22\frac{2}{3}$. 5. a) $q = 2$, $a_4 = \log 256$, b) $q = -2$, $a_4 = \log \frac{1}{6561}$.
6. a) $x = -75$, b) $x = 9$ lub $x = -11$, c) $x = \frac{3-3\sqrt{5}}{2}$ lub $x = \frac{3+3\sqrt{5}}{2}$. 7. a) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ lub $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$,
b) $x = 20$, $y = 16$, c) $24, 36, 54$ lub $-24, 36, -54$, d) $q = \sqrt[3]{2}$. 8. (b_n) , (c_n) i (d_n) . 9. (b_n) ,
 (c_n) , (d_n) , (e_n) . 10. a) Nie, b) nie. 12. a) $a_{127} = 0$, b) $b_{100} = 3$. 13. a) Rosnący,
b) malejący, c) malejący, d) ani rosnący, ani malejący, ani stały, e) rosnący, f) malejący.
14. a) 6 , b) 2 . 15. a) $a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1}$; $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 3a_n$; $b_n = 5 \cdot (\sqrt{2})^n$; $b_1 = 5\sqrt{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{2}b_n$;
 $c_n = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $c_1 = -2$, $c_{n+1} = -\frac{1}{2}c_n$, b) $a_n = 13 \cdot 5^{n-1}$; $b_n = -0,4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $c_n = \frac{3}{4} \cdot (-9)^{n-1}$,
c) $x_1 = 19$, $x_{n+1} = -0,7x_n$; $y_1 = -1$, $y_{n+1} = \frac{3}{2}y_n$; $z_1 = -\frac{5}{3}$, $z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n$. 16. a) $q = \sqrt{2}$, $a_{10} = 16\sqrt{2}$
lub $q = -\sqrt{2}$, $a_{10} = -16\sqrt{2}$, b) $q = 5$, $a_{10} = 1,4$ lub $q = -5$, $a_{10} = -1,4$, c) $a_4 = 3$, d) $a_{10} = -27$ lub
 $a_{10} = 27$. 17. a) Nie, b) tak. 18. a) $a_n = 0,1 \cdot 2^n$, b) około $107,4$ km. 19. a) $m_n = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$,
b) około $12,8$ mg. 20. Tak. 21. $a_n = 1$. 22. $a_n = \frac{15}{7}n - \frac{3}{7}$ lub $a_n = 6$. 23. $a = 12$, $b = 15$,
 $c = 18$ lub $a = 48$, $b = 15$, $c = -18$. 24. $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$, $d = 9$ lub $a = 8\frac{3}{4}$, $b = 6\frac{1}{4}$, $c = 3\frac{3}{4}$,
 $d = 2\frac{1}{4}$.

str. 78-79: 1. a) $S_5 = 33$, b) $S_7 = 4\frac{123}{128}$, c) $S_6 = -4004$. 2. a) $S_{10} = 7\,324\,218$,
b) $S_6 = -20\frac{25}{32}$, c) $S_7 = 41\frac{417}{625}$, d) $S_{11} = -\frac{683}{3072}$. 3. a) 2046 przodków, b) $2^{81} - 2$ przod-
ków. 4. a) $a_n = 2^{n-1}$, b) około $6,4 \cdot 10^{11}$ t. 5. a) Około 34 cm, b) około $9,76$ m.
6. Wysokość: około $78,1$ m, pole powierzchni całkowitej: około $8167,6$ m², objętość: około
 $38\,280,8$ m³. 7. a) $97\,147$, b) $88\,427$, c) $168\frac{255}{256}$, d) $9\frac{511}{512}$. 8. a) $1\,111\,111\,101$,
b) $370\,370\,367$.

str. 84-87: 1. a) 1240 zł, b) $11\,600$ zł, c) $25\,800$ zł. 2. a) $c_n = 1000 + 100n$, b) $c_n = 1000 -$
 $100n$, c) $c_n = 1000 \cdot 1,02^n$, d) $c_n = 1000 \cdot 0,98^n$. 3. a) $4637,10$ zł, b) $1954,67$ zł,
c) $41\,008,08$ zł, d) $6760,90$ zł. 4. a) 6 lat, b) 5500 zł, c) $4,5\%$. 5. a) $10\,831,43$ zł,
b) $11\,102,03$ zł, c) $11\,098,45$ zł. 6. ② i ③. 7. a) Po 2 latach, b) 7400 zł, c) 4%
d) 4% . 8. a) $0,51\%$, b) co najmniej 12 lat. 9. Lokata półroczna. 10. a) $11\,012,23$ zł,
b) $40\,972$ zł. 11. 2025 zł; o $38,02$ zł. 12. a) $115,86$ zł, b) $116,30$ zł. 13. $7141,23$ zł.
14. O $136\,142,21$ zł. 15. O $18,46\%$. 16. Po 7 latach.

str. 94-95: 1. a) 0 , b) 0 , c) 1 , d) $+\infty$, e) $+\infty$, f) 0 , g) $+\infty$, h) $+\infty$, i) 1 . 2. ① — a_n ,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$; ② — d_n , $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = +\infty$; ③ — c_n , $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\infty$; ④ — b_n , $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. 3. a) Tak,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, b) nie, ma granicę niewłaściwą $-\infty$, c) tak, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, d) tak, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, e) nie, ma granicę niewłaściwą $+\infty$, f) tak, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\sqrt{2}$. 5. a) 0, b) 1. 6. a) Rozbieżny, b) zbieżny, c) rozbieżny. 7. a) Zbieżny, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, b) zbieżny, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, c) rozbieżny d) zbieżny, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, e) zbieżny, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -5$, f) zbieżny, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. 9. a) Nie, b) tak, c) nie, d) nie. 10. a) $a_1 = 7$, b) $a_5 = -\frac{1}{2}$. 11. Zbieżne: (e_n) , (f_n) , $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = -1$; rozbieżne i nie mają granicy niewłaściwej: (a_n) , (d_n) .

str. 101-103: 1. a) 3, b) 5, c) 15, d) $-\frac{1}{3}$, e) $-\frac{1}{2}$, f) -1000. 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{2}{3}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 57$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\frac{1}{9}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \frac{26}{55}$. 3. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n}{3b_n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 4b_n}{5} = 2\frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}a_n(b_n - 1)\right) = 1\frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n + 1) = 2$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n}{3b_n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 4b_n}{5} = 2\frac{2}{5}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}a_n(b_n - 1)\right) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n + 1) = -2$, c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n}{3b_n} = \frac{5}{6}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 4b_n}{5} = -4\frac{1}{5}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}a_n(b_n - 1)\right) = 12\frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n + 1) = 0$. 4. a) 4, b) 0,7, c) 10, d) 4, e) 9, f) 1,2. 5. a) $\frac{8}{9}$, b) $3\frac{1}{2}$, c) $\frac{10}{11}$. 6. a) $+\infty$, b) $-\infty$, c) 0, d) $+\infty$, e) $+\infty$, f) $-\infty$, g) $+\infty$, h) $-\infty$, i) $+\infty$. 7. a) $+\infty$, b) $-\infty$, c) $+\infty$, d) 0, e) $-\infty$, f) 0. 8. a) $+\infty$, b) $-\infty$, c) $-\infty$, d) $+\infty$, e) $-\infty$, f) $-\infty$. 9. a) $\frac{1}{2}$, b) -5, c) $\frac{3}{2}$, d) 1, e) 0, f) 0, g) $+\infty$, h) 0, i) -2, j) $\frac{3}{2}$, k) $+\infty$, l) -27. 10. a) 6, b) $\frac{5}{3}$, c) 1, d) $+\infty$, e) $\frac{1}{2}$, f) 0. 11. a) $\frac{1}{2}$, b) 2, c) 0, d) $-\frac{3}{2}$, e) $-\frac{6}{5}$, f) $\sqrt{2}$. 12. a) -14, b) $+\infty$, c) 0, d) 0. 13. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -1$, c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{9}$, d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. 14. a) $+\infty$, b) 0, c) 0, d) $+\infty$, e) 0, f) 0. 15. a) 0, b) 0, c) 0, d) 0. 16. a) $\frac{1}{2}$, b) $+\infty$, c) 1, d) 10, e) 1, f) $\frac{1}{4}$, g) $\frac{3}{2}$, h) $\frac{1}{12}$. 17. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 18. a) $p = -4$, b) $p = 2$, c) największa $-a$, gdy $a < 0$, najmniejsza 0, gdy $a \geq 0$.

str. 107-111: 1. a) $S = \frac{3}{2}$, b) $S = \frac{3}{4}$, c) $S = \sqrt{2} + 1$, d) $S = 8\frac{1}{2}$, e) $S = -250$, f) $S = -2\frac{14}{17}$. 2. a) $a \in (-1; 1)$, b) $a \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$, c) $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, d) $a \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$, e) $a \in (-9; 11)$, f) $a \in (1; 5)$. 3. a) $S_{10} - S = -\frac{25}{256}$, b) $S_{10} - S = -10^{-9}$. 4. a) $\frac{16}{9}$, b) $-\frac{278}{99}$, c) $\frac{502}{99}$, d) $-\frac{389}{90}$, e) $-\frac{3527}{495}$, f) $\frac{32}{999}$. 5. a) 16, b) $8\sqrt{5}$, c) $8\sqrt{2} + 16$. 6. a) 32, b) $9\sqrt{5}$, c) $16\sqrt{2}$. 7. $S = 1$. 8. $S = 8 - 2\pi$. 9. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$. 10. a) $x = \frac{1}{5}$, b) $x = \frac{3}{4}$, c) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$, d) $x = 5$, e) $x = \frac{3}{2}$ lub $x = 3$ f) $x = -3$. 11. $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = 1$. 12. $x = -3$. 13. $a_1 = 1\frac{3}{4}$, $q = -\frac{3}{4}$. 14. $11\frac{13}{17}$. 16. $q = \frac{1}{p+1}$. 17. $q = -\frac{2}{3}$.

str. 112: 1. Ciąg jest rosnący. 2. a) $a_n = 2^{2^{n-1}}$, b) $a_n = 5^n$. 3. a) $a_1 = 7$, $a_{n+1} = 7a_n$, b) $a_1 = 19$, $a_{n+1} = a_n + 2$, c) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$, d) $a_1 = \log 5$, $a_{n+1} = a_n + \log 5$. 4. $p = 4$. 6. 17750. 7. $a_n = 3n + 7$. 9. Dla $n = 5$. 10. $a_1 = \frac{5\sqrt{2}}{8}$, $a_7 = 5\sqrt{2}$, $a_{10} = 20$ lub $a_1 = -\frac{5\sqrt{2}}{8}$, $a_7 = -5\sqrt{2}$, $a_{10} = 20$. 11. 1024 razy. 12. Nie. 13. Po 5 latach. 14. a) 0, b) 8, c) $+\infty$, d) 2, e) 0, f) $-\infty$. 15. a) $-\infty$, b) -3, c) $+\infty$, d) 0. 16. $x = -0,6$.

str. 116-119: 1. a) 6, b) 6, c) 8. 2. a) 20, b) 35, c) 42. 3. a) 67,5, b) 54, c) 35.
4. a) $\frac{x}{z} = \frac{x+y}{z+t}$, $\frac{a}{z} = \frac{b}{z+t}$, b) $\frac{r}{p+r} = \frac{s}{s+q}$, $\frac{a+s}{w} = \frac{a}{u}$. 5. a) 1, b) $2\frac{1}{2}$, c) $5\frac{2}{5}$. 6. 7,2 m.
8. $|PS| = 6\frac{3}{4}$, $|SQ| = 1$. 9. a) 1 m, b) nie zmienia się. 11. a) $a \parallel c$, b) $a \parallel c$.

str. 122-127: 1. a) $k = 3$, b) $k = 2$, c) $k = \sqrt{2}$. 2. a) $15\sqrt{2}$, b) 180, c) 20° , 50° , 110° ,
d) bok leżący naprzeciwko kąta α ma długość $2\frac{2}{5}$, bok leżący naprzeciwko kąta β ma długość
 $6\frac{2}{3}$. 3. a) α , b) d . 4. a) d, f , $\frac{f}{c}$, $\frac{b}{c}$, b) p, x , $\frac{x}{w}$, $\frac{f}{c}$. 5. a) $8\frac{1}{3}$, b) 4,2. 6. a) $a = 7,5$,
 $\alpha = 130^\circ$, $\beta = 70^\circ$, b) $a = 8\frac{1}{6}$, $\alpha = 100^\circ$, $\beta = 120^\circ$. 8. ①, ②, ④. 9. a) $\frac{1}{14}$, b) $\frac{3}{5}$. 10. $2\frac{2}{3}$.
11. b) $26\frac{2}{3}$ mm. 12. b) *CEJL*, *DGHK* oraz *CGHL*. 13. $3\frac{4}{7}$. 15. $\sqrt{2}$. 16. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
17. $|AB| = 5\frac{1}{3}$, $|AC| = 2\frac{2}{3}$. 18. $k = \frac{4\sqrt{3}}{7}$. 20. a) 14 oraz 39,2, b) 40 oraz 16, c) $16 + 8\sqrt{5}$
oraz $\frac{16+8\sqrt{5}}{3}$.

str. 130-134: 1. a) Tak, b) nie, c) tak. 2. a) Tak, b) nie, c) tak. 3. a) Cecha
bbb, β , b) cecha bbb, β . 4. a) Cecha kk; $|EF|$; $|EF|$, $|DF|$, b) cecha kk; $|PS|$; $|KM|$, $|KL|$.
5. a) $x = 2\frac{2}{3}$, b) $y = 14,4$. 6. a) T_1 i T_2 , b) T_1 i T_2 . 8. *ABE*, *DBF*, *FCE*. 11. $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$.
13. a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{2}{3}$, c) $\frac{4}{3}$. 14. a) $\frac{3}{2}$, b) 2, c) 2. 17. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 18. b) Dwa czworokąty są
podobne, jeżeli długości wszystkich boków jednego czworokąta są proporcjonalne do długości
odpowiednich boków drugiego czworokąta i kąt między dwoma bokami jednego czworokąta ma
taką samą miarę jak kąt między odpowiadającymi bokami drugiego czworokąta.

str. 135-138: 1. a) $2\frac{2}{3}$, b) 4,4, c) 3,125. 2. 6 cm. 3. 140 kroków. 4. a) $z = 4,8$,
 $x = 2,4$, $y = 3,2$, b) $a = \sqrt{23,2}$, c) $m = \sqrt{73}$. 5. a) 9, b) $3\frac{5}{6}$, c) 2,25. 6. $\frac{a(2a+b)}{a+b}$.
7. Około 1,4 mln km. 8. 20. 9. a) 45 m, b) 8 m. 10. 56 m. 11. 6,3 m. 12. a) 1;
1,75, b) 3,6; $\frac{18}{7} \approx 2,6$. 16. 9 : 7. 17. $\frac{10}{3}$. 18. $|PB| = 3\frac{1}{3}$, $|PC| = 2\frac{2}{3}$.

str. 141-143: 1. a) $9\frac{1}{3}$, b) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$. 2. 16 cm $\times$ 20 cm. 3. a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 4. a) 2,16,
b) 3,6, c) $12\frac{4}{9}$. 5. a) $\frac{3}{4}P$, $\frac{1}{4}P$, b) $\sqrt{2}+1$. 6. a) 4, b) 12, c) $5\frac{1}{3}$. 7. a) $P_{ABE} = 9$, $P_{DEC} = 4$,
 $P_{AED} = 6$, $P_{BCE} = 6$, b) $\frac{P_{ABE}}{P_{DEC}} = \frac{a^2}{b^2}$, $\frac{P_{AED}}{P_{ABE}} = \frac{b}{a}$. 8. b) $2\sqrt[4]{675}$. 9. $\frac{1}{2}$. 10. $S_2 = \sqrt{S_1 S_3}$.

str. 144: 1. a) $e+f$, $h+i$, b) $d, h+i$, c) $h+i$, g , d) $g-h$, $e+f$. 2. $k = 1$ lub $k = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.
3. 4,5. 4. $\sin \alpha$, $\cos \alpha$. 5. $\frac{4}{9}$. 6. 25,4. 7. 1,44 razy. 8. 84%. 9. $10(\sqrt{2}+2)$, $10(\sqrt{2}+1)$.
10. $\frac{(k+1)^2}{k^2+1}$ razy. 11. $\frac{1}{3}$.

str. 147-148: 1. a) $\sin \alpha = \frac{8}{17}$, $\cos \beta = \frac{8}{17}$, $\tan \beta = \frac{15}{8}$, b) $\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan \alpha = \sqrt{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
2. a) $a = 5$, b) $b = 1\frac{2}{3}$, c) $c = 2\frac{1}{2}$. 3. a) $a \approx 3,5$, $b \approx 4,9$, b) $c \approx 4$, $d \approx 2,7$, c) $e \approx 4,6$,
 $f \approx 2,3$. 4. a) 30, b) $10\sqrt{2}$, c) $10\sqrt{2}$. 5. a) Około 42° , b) około 18° . 6. a) $\sin \alpha$, $\tan \alpha$,
 $\cos \alpha$, b) α , y , β . 7. a) $\frac{a^2 \tan \alpha}{4}$, b) $\frac{2ad}{\sin \frac{\gamma}{2}}$, c) $2r \sin \frac{\gamma}{2}$.

str. 151-152: 1. a) 9, 2, 3, b) np. $-108^\circ, -144^\circ, 72^\circ$. 2. a) Niebieski: -295° , zielony: 295° , b) czerwony: -40° , zielony: -220° , c) fioletowy: 70° , niebieski: -290° . 3. a) -503° , b) 683° , c) -937° . 5. a) III, b) IV, c) III, d) II, e) IV, f) I, g) I, h) IV. 6. a) $\alpha - I, \beta - IV$, b) $\alpha - II, \beta - III$, c) $\alpha - I, \beta - IV$, d) $\alpha - III, \beta - II$, e) $\alpha - II, \beta - III$, f) $\alpha - III, \beta - II$. 8. a) $10^\circ + 2 \cdot 360^\circ$, b) $-20^\circ + 2 \cdot 360^\circ$, c) $20^\circ + 5 \cdot 360^\circ$, d) $-40^\circ + (-1) \cdot 360^\circ$, e) $40^\circ + (-1) \cdot 360^\circ$, f) $-80^\circ + (-2) \cdot 360^\circ$.

str. 156-158: 1. a) $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$, b) $\sin \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos \beta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{3}$, c) $\sin \gamma = -\frac{3}{5}$, $\cos \gamma = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \gamma = -\frac{3}{4}$. 2. a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, b) $\sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \beta = -2$, c) $\sin \gamma = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos \gamma = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg} \gamma = -\frac{2}{3}$. 4. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 5. a) Największa wartość: 7, najmniejsza wartość: 3, b) największa wartość: 4,5, najmniejsza wartość: 3,5, c) największa wartość: 0, najmniejsza wartość: -1, d) największa wartość: 2,4, najmniejsza wartość: -0,6. 6. a) $88^\circ, 174^\circ, -292^\circ, 1200^\circ$, b) $-98^\circ, -165^\circ$, c) $13^\circ, -284^\circ, -700^\circ$. 7. a) II lub III, b) III lub IV, c) I lub III, d) II lub IV, e) III, f) I. 8. a) Ujemna, b) równa 0, c) ujemna, d) dodatnia. 9. a) 1, 0, 0, 0, 1, 0, b) -1, 1, 0, c) 0, 0, 1. 11. a) $\alpha \in \{0^\circ, 90^\circ, 270^\circ, 360^\circ\}$, b) $\alpha \in \{45^\circ, 225^\circ\}$, c) $\alpha \in \{135^\circ, 315^\circ\}$. 14. $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\cos \alpha = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, dla punktu P_1 : $-\frac{2\sqrt{29}}{29}$ i $\frac{5\sqrt{29}}{29}$, dla punktu P_2 : $-\frac{2\sqrt{29}}{29}$ i $-\frac{5\sqrt{29}}{29}$, dla punktu P_3 : $\frac{5\sqrt{29}}{29}$ i $-\frac{2\sqrt{29}}{29}$, dla punktu P_4 : $-\frac{5\sqrt{29}}{29}$ i $\frac{2\sqrt{29}}{29}$. 15. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, c) $-\frac{1}{2}$, d) $-\sqrt{3}$, e) $-\frac{1}{2}$. 16. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $\sqrt{3}$.

str. 160-161: 1. a) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ lub $\frac{\sqrt{2}}{4}$, b) $-\frac{3}{5}$ lub $\frac{3}{5}$, c) $-\frac{2\sqrt{6}}{5}$, d) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$. 2. a) $-\frac{4}{3}$, b) $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$, c) $\frac{2}{3}$. 3. a) $-\frac{3}{4}$, b) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$, c) $\frac{\sqrt{15}}{15}$, d) $-2\sqrt{6}$. 4. a) $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, b) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, c) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 7. a) $\frac{1}{\cos \alpha}$, b) -1, c) $4 \sin \alpha \cos \alpha$, d) 1. 8. a) -1, b) $-\frac{2}{3}$, c) $\frac{1}{2}$, d) $\frac{1}{2}$. 9. a) Największa wartość: 1, najmniejsza wartość: 0, b) największa wartość: 2, najmniejsza wartość: -1, c) największa wartość: 3, najmniejsza wartość: 2, d) największa wartość: 3, najmniejsza wartość: 0,5. 10. a) $1 - 2a$, $-\sqrt{1+2a}$, b) $\frac{b^2-1}{2}$, $\sqrt{2-b^2}$.

str. 165-166: 1. a) $\sin 100^\circ$, b) $\sin 635^\circ$, c) $\sin(-460^\circ)$, d) $\sin 351^\circ$, e) $\sin(-277^\circ)$, f) $\sin(-205^\circ)$. 2. a) Największa wartość: 1, najmniejsza wartość: -1; $\alpha \in \{-360^\circ, -180^\circ, 0^\circ\}$, b) największa wartość: 1, najmniejsza wartość: 0; $\alpha \in \{360^\circ, 540^\circ\}$, c) największa wartość: 1, najmniejsza wartość: -1; $\alpha = -360^\circ$. 3. $\sin(-50^\circ)$, $\sin 194^\circ$, $\sin(-721^\circ)$. 4. a) $\alpha \in \{-270^\circ, 90^\circ, 450^\circ\}$, b) $\alpha \in \{-450^\circ, -90^\circ, 270^\circ\}$, c) $\alpha \in \{-360^\circ, -180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ\}$. 5. a) Dwa, b) cztery, c) pięć, d) trzy. 6. a) $\alpha = 10^\circ + k \cdot 360^\circ$ lub $\alpha = 170^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $\alpha = 75^\circ + k \cdot 360^\circ$ lub $\alpha = 105^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $\alpha = -20^\circ + k \cdot 360^\circ$ lub $\alpha = -160^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $\alpha = -110^\circ + k \cdot 360^\circ$ lub $\alpha = -70^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$. 7. a) $\alpha = 25^\circ$, $\alpha = 385^\circ$, $\alpha = 155^\circ$

lub $\alpha = 515^\circ$, b) $\alpha = 25^\circ$, $\alpha = 385^\circ$, $\alpha = 155^\circ$ lub $\alpha = 515^\circ$, c) $\alpha = -695^\circ$, $\alpha = -565^\circ$, $\alpha = -335^\circ$ lub $\alpha = -205^\circ$, d) $\alpha = 25^\circ$, $\alpha = 385^\circ$, $\alpha = 155^\circ$, $\alpha = 515^\circ$ lub $\alpha = -205^\circ$. 8. ①, ②, ③.

str. 170-171: 1. a) $\cos 62^\circ$, b) $\cos(-339^\circ)$, c) $\cos 192^\circ$, d) $\cos(-176^\circ)$. 2. a) Największa wartość: 1, najmniejsza wartość: -1; $\alpha \in \{-270^\circ, -90^\circ\}$, b) największa wartość: brak, najmniejsza wartość: brak; $\alpha = 270^\circ$, c) największa wartość: 0, najmniejsza wartość: -1; $\alpha \in \{450^\circ, 630^\circ\}$, d) największa wartość: 1, najmniejsza wartość: -1; $\alpha \in \{90^\circ, 270^\circ, 450^\circ\}$. 3. a) $\sin 50^\circ > \cos 50^\circ$, b) $\sin 294^\circ < \cos 294^\circ$, c) $\sin(-127^\circ) < \cos(-127^\circ)$, d) $\sin 170^\circ < \cos(-2^\circ)$, e) $\sin(-297^\circ) > \cos(-157^\circ)$, f) $\sin(-354^\circ) < \cos 354^\circ$. 4. a) $\alpha = -135^\circ$ lub $\alpha = 45^\circ$, b) $\alpha \in (-180^\circ; -135^\circ) \cup (45^\circ; 180^\circ)$, c) $\alpha \in (-180^\circ; -90^\circ)$, d) $\alpha \in (-90^\circ; 0^\circ) \cup (90^\circ; 180^\circ)$. 5. a) Sinusoidy: ①, ④, ⑦; cosinusoidy: ②, ③, ⑤, ⑥, ⑧. 6. α . 7. a) $y = \sin \alpha$, b) $y = \cos \alpha$, c) $y = \cos \alpha$, d) $y = \cos \alpha$, e) $y = \sin \alpha$. 9. $x = -315^\circ$, $x = -135^\circ$, $x = 45^\circ$, $x = 225^\circ$. 10. a) $\alpha = 15^\circ + k \cdot 360^\circ$ lub $\alpha = -15^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $\alpha = -39^\circ + k \cdot 360^\circ$ lub $\alpha = 39^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $\alpha = 132^\circ + k \cdot 360^\circ$ lub $\alpha = 228^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $\alpha = -254^\circ + k \cdot 360^\circ$ lub $\alpha = -106^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$. 11. a) $\alpha \in \{-685^\circ, -395^\circ, -325^\circ, -35^\circ\}$, b) $\alpha \in \{-35^\circ, 35^\circ, 325^\circ, 395^\circ\}$, c) $\alpha \in \{325^\circ, 395^\circ\}$.

str. 174: 1. a) $\alpha \in \{-180^\circ, 0^\circ, 180^\circ\}$, b) $\alpha \in \{-270^\circ, -90^\circ, 90^\circ, 270^\circ, 450^\circ\}$, c) $\alpha \in (0^\circ + k \cdot 180^\circ; 90^\circ + k \cdot 180^\circ)$, $k \in \mathbb{Z}$. 2. a) $\cos 85^\circ$, $\sin 85^\circ$, $\operatorname{tg} 85^\circ$, b) $\operatorname{tg} 92^\circ$, $\cos 92^\circ$, $\sin 92^\circ$, c) $\operatorname{tg}(-80^\circ)$, $\cos(-85^\circ)$, $\sin 80^\circ$, d) $\sin(-10^\circ)$, $\cos 50^\circ$, $\operatorname{tg}(-95^\circ)$. 3. a) $\alpha = 78^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $\alpha = -3^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $\alpha = -87^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $\alpha = 41^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$. 4. a) $\alpha \in \{-288^\circ, -108^\circ\}$, b) $\alpha \in \{252^\circ, 432^\circ, 612^\circ\}$, c) $\alpha = -108^\circ$, d) $\alpha \in \{252^\circ, 432^\circ\}$.

str. 179-181: 1. a) $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, c) około -0,98, około -0,17, d) -0,85, około -0,96, e) około -0,84, około -0,31, f) około 0,67, około 0,69. 2. a) $\alpha \in \{-280^\circ, -260^\circ, 80^\circ, 100^\circ\}$, b) $\alpha \in \{-140^\circ, -40^\circ, 220^\circ, 320^\circ\}$, c) $\alpha \in \{-130^\circ, -50^\circ, 230^\circ, 310^\circ\}$. 3. a) $\alpha \in \{-315^\circ, -225^\circ, 45^\circ, 135^\circ\}$, b) $\alpha \in \{-300^\circ, -240^\circ, 60^\circ, 120^\circ\}$, c) $\alpha \in \{-150^\circ, -30^\circ, 210^\circ, 330^\circ\}$, d) $\alpha \in \{-135^\circ, -45^\circ, 225^\circ, 315^\circ\}$. 4. a) $\alpha \approx 15^\circ$, $\alpha \approx 165^\circ$, b) $\alpha \approx -278^\circ$, $\alpha \approx -262^\circ$, $\alpha \approx 82^\circ$, $\alpha \approx 98^\circ$, c) $\alpha \approx -174^\circ$, $\alpha \approx -6^\circ$, d) $\alpha \approx -32^\circ$, $\alpha \approx 212^\circ$. 5. a) $-\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, c) około 0,98, około 0,48, d) około 0,17, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, e) około -0,98, około -0,92, f) około -0,56, około -0,91. 6. a) $\alpha \in \{-230^\circ, -130^\circ, 130^\circ, 230^\circ\}$, b) $\alpha \in \{-280^\circ, -80^\circ, 80^\circ, 280^\circ\}$, c) $\alpha \in \{-200^\circ, -160^\circ, 160^\circ, 200^\circ\}$. 7. a) $\alpha \in \{-300^\circ, -60^\circ, 60^\circ, 300^\circ\}$, b) $\alpha \in \{-315^\circ, -45^\circ, 45^\circ, 315^\circ\}$, c) $\alpha \in \{-210^\circ, -150^\circ, 150^\circ, 210^\circ\}$, d) $\alpha \in \{-225^\circ, -135^\circ, 135^\circ, 225^\circ\}$. 8. a) $\alpha \approx -36^\circ$, $\alpha \approx 36^\circ$, b) $\alpha \approx 63^\circ$, $\alpha \approx 297^\circ$, c) $\alpha \approx -288^\circ$, $\alpha \approx -72^\circ$, $\alpha \approx 72^\circ$, d) $\alpha \approx -94^\circ$, $\alpha \approx 94^\circ$, $\alpha \approx 266^\circ$. 9. a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, -1, b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 1, c) około -0,31, około -7,12, d) około 0,47, około 0,31, e) około 0,25, około 1,04, f) około -2,75, około -0,73. 10. a) $\alpha \in \{-315^\circ, -135^\circ, 45^\circ, 225^\circ\}$, b) $\alpha \in \{-300^\circ, -120^\circ, 60^\circ, 240^\circ\}$,

- c) $\alpha \in \{-225^\circ, -45^\circ, 135^\circ, 315^\circ\}$, d) $\alpha \in \{-210^\circ, -30^\circ, 150^\circ, 330^\circ\}$. 11. a) $\alpha \approx 33^\circ$, $\alpha \approx 213^\circ$, b) $\alpha \approx -258^\circ$, $\alpha \approx -78^\circ$, $\alpha \approx 102^\circ$. 12. a) Około 0,77, około 0,97, około 1,43, b) około -0,98, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, c) około -0,77, około -0,64, $\sqrt{3}$, d) około -0,34, około -0,17, około -5,67. 13. a) a, b) -a, c) -a, d) -a, e) -a. 17. a) 1, b) 0, c) 1, d) 1. 18. a) $\sqrt{2}$, b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

str. 184-185: 1. a) $\frac{3}{4}$, b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$, c) $\frac{1}{3}\pi$. 2. $\alpha = \frac{7\pi-4}{4}$, $\beta = \frac{3}{4}$, $\gamma = \frac{3}{8}$. 3. a) 4π , $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{18}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{5}{12}\pi$, $\frac{\pi}{20}$, b) 120° , 135° , 150° , 1080° , $22,5^\circ$, 210° . 4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 1, 0, 0. 5. a) 5π , b) $\frac{6}{5}\pi$. 6. a) $\frac{5}{18}\pi$, $\frac{7}{180}\pi$, $\frac{25}{36}\pi$, $\frac{7}{13}\pi$, $\frac{47}{30}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, b) 36° , 40° , $157,5^\circ$, $205\frac{5}{9}^\circ$, 162° , 288° . 7. a) $\frac{180}{\pi}$, b) $\frac{90}{180}\pi$, $\frac{17}{180}\pi$, $\frac{35}{18}\pi$. 8. a) $\sin 1$, b) $\cos 0,5^\circ$, c) $\lg 3,14^\circ$. 9. a) $2\pi \frac{\text{rad}}{h}$, b) $\frac{\pi}{12} \frac{\text{rad}}{h}$, c) $1440\pi \frac{\text{rad}}{h}$. 10. $\frac{\pi r^2}{2}$.

str. 190-193: 1. a) $x = -\frac{3}{2}\pi$ lub $x = \frac{\pi}{2}$, b) dziewięć, c) $\sin \frac{\pi}{8}$, $\sin(2\pi+1)$ d) $\sin 3,5$, $\sin \pi$, $\sin 3,14$, $\sin 3$, e) dla 39. 2. a) $x = -\frac{3}{2}\pi$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}\pi$, b) $x = -\pi$, $x = \pi$, $x = 3\pi$, $x = 5\pi$ lub $x = 7\pi$, c) $\cos 3$, $\cos 4$, $\cos 2$, $\cos 5$, d) $\cos(-\frac{\pi}{2}-1)$, e) dla czterdziestu jeden. 3. a) Funkcja $y = \sin x$ jest rosnąca w przedziałach $(-\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi)$, a malejąca w przedziałach $(\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{3}{2}\pi+2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Funkcja $y = \cos x$ jest rosnąca w przedziałach $(-\pi+2k\pi; 2k\pi)$, a malejąca w przedziałach $(2k\pi; \pi+2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $\sin x > 0$, gdy $x \in (2k\pi; \pi+2k\pi)$, $\cos x > 0$, gdy $x \in (-\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x \in (\pi+2k\pi; \frac{3}{2}\pi+2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. 4. a) Trzy, b) sześć, d) $\lg 2$, $\lg(-1)$, $\lg 3$, $\lg 4$, $\lg 1$. 5. a) $y = \sin x$; B, D, E, $y = \cos x$; A, C, $y = \lg x$; F, G, H. 6. a) $(\pi, 0)$, b) $(0, 1)$, c) $(-\frac{\pi}{2}, -1)$, $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$, d) $(-\pi, 0)$, $(0, 0)$, e) $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, f) $(0, 1)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\pi, -1)$. 7. a) $y \in \langle -4; -2 \rangle$, b) $y \in \langle 4; 5 \rangle$, c) $y \in (-\infty; 0)$, d) $y \in \langle -5; -4 \rangle$, e) $y \in \langle 2; +\infty \rangle$, f) $y \in \langle 1; 9 \rangle$. 8. a) $\mathbb{R}$, $y \in \langle -3; 1 \rangle$, b) $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$, $y \in (-1; 1)$, c) $\mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2}\}$, $k \in \mathbb{Z}$, $y \in (-1; 0) \cup (0; 1)$, d) $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$, $y \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. 10. a) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ lub $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ lub $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ lub $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. 11. b) $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e) $x = k\pi$, f) $x = -\frac{7\pi}{4} + k\pi$, h) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; a), d), g), i) brak miejsc zerowych. 12. a) (II), b) (II), c) (IV), d) (I), e) (I), f) (I), g) (III), h) (II), i) (IV). 13. 0, 0, 0. 14. a) $a = -8$, b) $a \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$, c) $a = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 16. a) Jeden, b) jeden, c) jeden. 17. a) Ma tyle samo punktów wspólnych, b) trzy, pięć. 18. a) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) równanie sprzeczne, c) $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ lub $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e) $x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, f) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

str. 196-197: 1. a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x = 4k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$. 2. a) $y \in \langle -\frac{3}{4}; \frac{3}{4} \rangle$, $t = 2\pi$, b) $y \in \langle -3; 3 \rangle$, $t = 2\pi$, c) $y \in \langle -1; 1 \rangle$, $t = \frac{2}{3}\pi$, d) $y \in \langle -1; 1 \rangle$, $t = 6\pi$, e) $y \in \langle -5; 5 \rangle$, $t = \frac{\pi}{2}$, f) $y \in \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle$, $t = \frac{4}{3}\pi$, g) $y \in \langle -4; 4 \rangle$, $t = 2$, h) $y \in \langle -\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \rangle$, $t = 4$. 3. a) $y \in \langle -2; 2 \rangle$, b) $y \in \langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \rangle$, c) $y \in \langle -3; 3 \rangle$, d) $y \in \langle -\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \rangle$.

4. ① - ③, ② - ⑤, ③ - ⑥, ④ - ①, ⑤ - ④, ⑥ - ②. 5. a) $y = -5 \sin \frac{2}{3}x$, $y = 5 \sin \frac{2}{3}x$, b) $y = -\frac{3}{4} \sin 4x$, $y = \frac{3}{4} \sin 4x$, c) $y = -7 \sin \frac{\pi}{3}x$, $y = 7 \sin \frac{\pi}{3}x$. 6. a) $(\frac{3}{2}\pi + 3k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $(2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. 7. a) Okres: 4 sekundy, amplituda: $1\frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2} \sin \frac{\pi x}{2}$, b) okres: 5 sekund, amplituda: $\frac{3}{4}$. 8. a) $f - \textcircled{2}$, $g - \textcircled{1}$, b) $f(x) = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$, $g(x) = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$.

str. 207-208: 1. a) $x = -\frac{11}{6}\pi$, $x = -\frac{7}{6}\pi$, $x = \frac{\pi}{6}$ lub $x = \frac{5}{6}\pi$, b) $x = -\frac{\pi}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}\pi$, c) $x = -\frac{7}{6}\pi$, $x = -\frac{5}{6}\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi$ lub $x = \frac{7}{6}\pi$, d) $x = -\frac{7}{6}\pi$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5}{6}\pi$ lub $x = \frac{11}{6}\pi$. 2. a) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ lub $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 3. a) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 4. a) $x = k\pi$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$ lub $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 5. a) $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 6. a) $x = \frac{8}{15}\pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}k\pi$ lub $x = \frac{5}{18}\pi - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x = \frac{\pi}{3} + 5 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 7. a) $x = -\frac{\pi}{8} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$, $x = \frac{3}{8}\pi + k\pi$ lub $x = -\frac{3}{8}\pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = \pi + 2k\pi$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x = -\pi + 4k\pi$, $x = -\frac{\pi}{3} + 4k\pi$, $x = -\frac{7}{3}\pi + 4k\pi$ lub $x = \pi + 4k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}k\pi$ lub $x = \frac{1}{3}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 8. a) $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = 2k\pi$, $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ lub $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 9. a) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 10. a) $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e) $x = \frac{1}{3}k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$, f) $x = -\frac{2}{3}\pi + 4k\pi$ lub $x = \frac{2}{3}\pi + 4k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 11. a) $(\frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. 12. a) $x \in (-\frac{7}{6}\pi + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x \in (-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x \in (\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{7}{4}\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x \in (-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, e) $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, f) $x \in (-\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. 13. a) $x \in (-\frac{5}{12}\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{12} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x \in (-\frac{11}{12}\pi + 2k\pi; \frac{7}{12}\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x \in (-\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi; \frac{1}{2}k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. 14. a) Nierówność sprzeczna, b) $x \in (-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi; \frac{3}{4}\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x \in (-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. 15. a) $x \in (-\frac{5}{6}\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi) \cup (\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x \in (-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi) \cup (\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3}{4}\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; -\frac{\pi}{3} + k\pi) \cup (\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

str. 212-213: 1. a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, b) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, c) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, d) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, e) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, f) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, g) $2-\sqrt{3}$, h) $2+\sqrt{3}$. 2. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) 0, c) -1, d) $\sqrt{3}$. 5. a) $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$,

$k \in \mathbb{Z}$, c) $x = k\pi$ lub $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, f) $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 6. a) $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 7. a) $-0,28$, b) $-0,96$, c) $3\frac{3}{7}$. 10. a) $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e) $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, f) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, g) $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, h) $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, i) $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, j) równanie sprzeczne, k) $x = \pi + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, l) $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 11. a) $1 - 2a^2$, b) $4(a - 2a^3)\sqrt{1 - a^2}$, c) $\frac{\sqrt{1 - a^2} - \sqrt{3}a}{2}$, d) $\frac{\sqrt{2 - 2a^2} - \sqrt{2}a}{2}$.

str. 214: 1. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 2. a) Ujemna, b) dodatnia, c) ujemna, d) dodatnia. 3. a) $\cos \alpha = -\frac{3\sqrt{5}}{7}$, $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{15}$, b) $\sin \beta = -\frac{5}{13}$, $\cos \beta = \frac{12}{13}$. 5. ⑧. 6. a) $\frac{\pi}{30}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{7}{6}\pi$; $\frac{53}{18}\pi$, b) 30° ; 108° ; 60° ; 1080° . 7. a) -60° , 60° , 300° , b) około $-526,5^\circ$, około $-373,5^\circ$, około $-166,5^\circ$, około $-13,5^\circ$, c) około -104° , około 76° , około 256° . 9. $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 11. a) Równanie sprzeczne, b) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} + k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{1}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{7}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 12. a) $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 13. a) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ lub $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x = k\pi$ lub $x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 14. a) $x \in (\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x \in (\frac{3}{4}\pi + 2k\pi; \frac{5}{4}\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x \in (-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x \in (-\frac{11}{12}\pi + 2k\pi; \frac{7}{12}\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. 15. a) $x = \frac{\pi}{4}$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3}{4}\pi$ lub $x = -\frac{3}{4}\pi$, b) $x = \frac{\pi}{6}$ lub $x = \frac{5}{6}\pi$.

str. 220-222: 1. a) 13, b) $2\sqrt{10}$, c) $\sqrt{6}$, d) $5\sqrt{2}$. 2. a) Tak, b) nie. 3. $\angle ACB$. 5. $\frac{\sqrt{157}}{2}$. 6. a) $a = -5$ lub $a = 11$, b) $a = -2 - 4\sqrt{6}$ lub $a = -2 + 4\sqrt{6}$. 7. $(\frac{5-4\sqrt{3}}{2}, \frac{2-3\sqrt{3}}{2})$ lub $(\frac{5+4\sqrt{3}}{2}, \frac{2+3\sqrt{3}}{2})$. 8. (10, 20), $(\frac{-3+\sqrt{34}}{5}, \frac{-6+2\sqrt{34}}{5})$ lub $(\frac{-3-\sqrt{34}}{5}, \frac{-6-2\sqrt{34}}{5})$. 9. a) (7, 0), b) (0, 7), c) $(3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$. 10. 4. 11. (1, 1). 12. a) $(-4, 16\frac{1}{2})$, b) $(-20, 54)$. 13. $\frac{\sqrt{85}}{2}$. 14. a) $C = (6, -7)$, $D = (8, 1)$, b) $D = (-7, 3)$. 17. a) (8, -3), b) (-1, 4), c) $(0, 6\sqrt{2} - 1)$, d) $(5 + 3\sqrt{7}, 9)$. 18. a) $y = -8$, b) $x = -5 + 5\sqrt{2}$, c) $x = 2 - \sqrt{5}$, d) $x = a + 2,5$, e) $y = 2a + 2b$, f) $x = \frac{a}{2}$. 19. (1, 13). 20. a) $A' = (10, -2)$, $B' = (0, -1)$, b) $A' = (10, 2)$, $B' = (0, 3)$, c) $A' = (12, -2)$, $B' = (2, -1)$, d) $A' = (2\sqrt{7} + 10, 4\sqrt{7} - 2)$, $B' = (2\sqrt{7}, 4\sqrt{7} - 1)$. 21. a) (-3, 1), b) $(\frac{3}{2}, 1)$, c) $(3a, b - 2)$, d) (a, a) . 22. $2\sqrt{41}$.

str. 228-229: 1. a) $x - 3y + 12 = 0$, $-x + 6y - 8 = 0$, $y + 5 = 0$, $x = 0$, b) $y = -\frac{2}{3}x + 4$, $y = -3x$, $y = \frac{2}{5}$, $y = \frac{9}{17}x$. 2. a) $4x - 3y + 2 = 0$ i $2x - 1,5y + 1 = 0$, b) $-5x - 4y + 7 = 0$ i $5x + 4y - 7 = 0$. 3. $a = 9\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{10}$, $c = -14$. 4. a) $(0, 2)$ i $(\frac{4}{5}, 0)$, b) $(0, \frac{3}{2})$ i $(-2, 0)$, c) $(0, 2)$ i $(-5, 0)$. 5. a) $(-3, 5)$, b) $(\frac{1}{2}, 3)$, c) $(13\frac{1}{3}, -10)$, d) $(2\frac{2}{3}, 2)$. 6. Nie. 7. a) $y = -7x + 4$; $7x + y - 4 = 0$, b) brak postaci kierunkowej; $x - \frac{2}{3} = 0$, c) $y = \frac{11x}{26} - 10$; $11x - 20y - 200 = 0$, d) $y = \frac{-13-5\sqrt{2}}{7}x + \frac{20+12\sqrt{2}}{7}$; $(13 + 5\sqrt{2})x + 7y - 20 - 12\sqrt{2} = 0$. 8. a) Nie, b) $t = -\frac{1}{4}$. 9. a) $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$, b) około 78° .

10. AC: $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases}$, CB: $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ x \geq -3 \end{cases}$, AC: $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ x \leq 1 \end{cases}$, DE: $\begin{cases} -3 \leq y \leq 2 \\ x = 2 \end{cases}$, FG: $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2} \\ -4 \leq x \leq 1 \end{cases}$.
 11. a) $y = -4x - 28$, b) $y = \frac{1}{3}x + 1$, c) $-3x + 5y - 20 = 0$, d) $2x - 3y - 19 = 0$. 12. a) $y = \frac{1}{2}x - 12$,
 b) $y = -\frac{1}{8}x - 2\frac{1}{2}$, c) $4x - 3y - 15 = 0$, d) $5x - 2y + 9 = 0$. 13. $y = \frac{3}{7}x$ i $y = -\frac{7}{3}x$.
 14. a) $40x + 12y - 37 = 0$, b) $6x - 20y - 31 = 0$. 16. a) $t = \frac{3}{4}$; $t = -\frac{4}{3}$, b) $t = 3\frac{1}{3}$; $t = -7\frac{1}{2}$,
 c) $t = \frac{2}{5}$; $t = -10$.

- str. 234-235: 1. a) $-\frac{5}{13}$, b) $y = -\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$. 2. $y = 4x + 10$. 3. a) $0 \leq a \leq \frac{2}{3}$, b) $\frac{5}{3} \leq a \leq 5$,
 c) $-\frac{1}{2} \leq a \leq 0$. 4. a) $y = 8\frac{1}{6}x$, b) $y = -1\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$. 5. $(-4\frac{2}{5}, -9\frac{4}{5})$. 6. a) $(\frac{11}{29}, 4\frac{14}{29})$, b) $(\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3})$.
 7. a) $\frac{3\sqrt{5}}{10}$, b) $\frac{25\sqrt{29}}{29}$. 8. a) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, b) $\frac{5\sqrt{10}}{2}$. 9. a) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$; 16, b) 13,5. 10. 3. 11. $(\frac{55}{13}, \frac{41}{13})$;
 $\frac{8\sqrt{13}}{13}$. 12. $\frac{7\sqrt{5}}{5}$. 13. a) $\frac{2\sqrt{30}}{5}$, b) $\frac{7\sqrt{10}}{10}$. 14. $7x - 4y + 8 = 0$ lub $16x + 28y + 9 = 0$.
 15. a) $(3, -\frac{1}{2})$, b) $(3, \sqrt{5} - 3)$.

- str. 238-240: 1. a) $x^2 + y^2 = 900$, b) $x^2 + (y+4)^2 = 1$, c) $(x+2)^2 + (y+11)^2 = 1,21$,
 d) $(x - \frac{1}{3})^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = \frac{9}{16}$, e) $(x-1)^2 + y^2 = 8$, f) $(x-\sqrt{3})^2 + (y+\sqrt{3})^2 = 4\sqrt{3}$. 2. R i T.
 3. a) $(x + \frac{13}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{17}{2}$, b) $(x-1)^2 + (y-7)^2 = 50$, c) $(x-8)^2 + (y+5)^2 = 113$, d) $(x-8)^2 +$
 $+(y+9)^2 = 81$. 4. a) $(x-7)^2 + (y-7)^2 = 49$; $(x+7)^2 + (y-7)^2 = 49$; $(x+7)^2 + (y+7)^2 = 49$;
 $(x-7)^2 + (y+7)^2 = 49$, b) $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 16$; $(x+4)^2 + (y+4)^2 = 16$, c) $(x-5)^2 +$
 $+(y-5)^2 = 25$; $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$. 5. a) Styczne wewnętrznie, b) przecinają się,
 c) przecinają się, d) przecinają się, e) rozłączne zewnętrznie, f) styczne wewnętrznie.
 6. a) $(x-3)^2 + (y+6)^2 = 121$, $(x-3)^2 + (y+6)^2 = 225$, b) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = (7+\sqrt{10})^2$,
 $(x+1)^2 + (y-3)^2 = (7-\sqrt{10})^2$. 7. $(x-6)^2 + y^2 = 16$; $(x+6)^2 + y^2 = 16$; $(x-14)^2 + y^2 = 16$;
 $(x+14)^2 + y^2 = 16$. 8. a) $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$, b) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 10 = 0$. 9. a) $(-1, -3)$; 2, b) $(3, 2)$;
 5, c) $(-10, 0)$; 9, d) $(7, 0)$; $5\sqrt{2}$, e) $(2, -1)$; $\sqrt{5}$, f) $(-6, 2)$; $2\sqrt{10}$. 10. a) Koło o środku w punk-
 cie $S = (0, 0)$ i promieniu $\frac{1}{2}$, b) wnętrze koła o środku w punkcie $S = (0, 9)$ i promieniu 1,1,
 c) płaszczyznę bez koła o środku w punkcie $S = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$ i promieniu $\sqrt[3]{3}$, d) płaszczyznę bez
 wnętrza koła o środku w punkcie $S = (4, -1)$ i promieniu 4. 12. a) $\begin{cases} (x-4)^2 + (y+1)^2 \leq 9 \\ (x-4)^2 + (y+1)^2 \geq 4 \end{cases}$,
 b) $\begin{cases} (x+2)^2 + y^2 \leq 9 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 \geq 4 \end{cases}$, c) $(x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 9$ lub $(x-1)^2 + (y-3)^2 \leq 4$. 13. a) $y = -3x + 15$,
 b) $y = \frac{3}{2}x + 13$. 14. $P = (3, 6)$.

- str. 245-249: 1. a) Jedno rozwiązanie, b) brak rozwiązań, c) nieskończenie wiele rozwią-
 zań, d) jedno rozwiązanie. 2. a) $p = -3$ lub $p = 2$, b) $p \in \emptyset$. 3. A) $\begin{cases} y \leq \frac{3}{4}x + 1 \\ y \leq -x + 2 \end{cases}$,
 B) $\begin{cases} y < \frac{3}{4}x + 1 \\ y < -x + 2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} y > \frac{3}{4}x + 1 \\ y > -x + 2 \end{cases}$, C) $\begin{cases} y \leq \frac{3}{4}x + 1 \\ y \leq -x + 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$, D) $\begin{cases} y \geq \frac{3}{4}x + 1 \\ y \leq -x + 2 \\ x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, E) $\begin{cases} y = \frac{3}{4}x + 1 \\ y < -x + 2 \end{cases}$.

$$\textcircled{F} \begin{cases} y \leq \frac{3}{4}x + 1 \\ y \leq -x + 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} y \geq -x + 2 \\ x \leq 0 \end{cases}, \textcircled{G} \begin{cases} y \leq \frac{3}{4}x + 1 \\ y \leq -x + 2 \end{cases} \text{ lub } y \leq 0, \textcircled{H} \begin{cases} y < -x + 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} y > \frac{3}{4}x + 1 \\ x \geq 0 \end{cases}.$$

4. $y = 2x - 3$. 5. a) $a = 2$ lub $a = -2$, b) $p = \frac{1}{4}$. 6. a) $(1, 0)$, $(-5, 0)$, $(0, \sqrt{21} - 4)$, $(0, -\sqrt{21} - 4)$, b) $(2, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 6)$, c) $(4\sqrt{3} - 7, 0)$, $(-4\sqrt{3} - 7, 0)$, $(0, 1)$. 7. a) $(\frac{6-\sqrt{11}}{3}, \frac{3+2\sqrt{11}}{3})$, $(\frac{6+\sqrt{11}}{3}, \frac{3-2\sqrt{11}}{3})$, b) $(\frac{4-4\sqrt{2}}{5}, \frac{-3+2\sqrt{2}}{5})$, $(\frac{4+4\sqrt{2}}{5}, \frac{-3+2\sqrt{2}}{5})$, c) brak punktów wspólnych, d) $(0, 1)$. 8. a) $4\sqrt{2}$, b) $2\sqrt{7}$, c) $2\sqrt{7}$. 9. $\frac{2\sqrt{103}}{5}$. 10. $8\sqrt{14}$. 11. a) $(3, 0)$, b) brak punktów wspólnych. 12. a) $(\frac{6+\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{6-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, b) $(1, -2)$, $(\frac{1}{3}, -3\frac{2}{3})$, c) brak punktów wspólnych. 13. $\frac{3\sqrt{13}}{4}$. 14. $\sqrt{17}$. 15. a) $y = 2x - \sqrt{30}$ lub $y = 2x + \sqrt{30}$, b) $y = 2x + 8 + \sqrt{5}$ lub $y = 2x + 8 - \sqrt{5}$, c) $y = 2x + 2\sqrt{5} - 5$ lub $y = 2x - 2\sqrt{5} - 5$, d) $y = 2x - 8$ lub $y = 2x + 2$. 16. a) $b = \frac{10}{3}$, $b = -\frac{10}{3}$, b) $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, c) $r \in (0; \frac{3\sqrt{5}}{2})$, d) $t \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$. 17. a) $y = 2\sqrt{6}x - 5$, $y = -2\sqrt{6}x - 5$, b) $y = x + \sqrt{2}$, $y = x - \sqrt{2}$, c) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}$, d) $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$, $x = 1$. 18. a) $(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$, $(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$, b) $(0, 1)$, $(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{3}{4})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{3}{4})$, c) $(0, -1)$. 19. $(-\sqrt{2}, -4)$ i $(\sqrt{2}, -4)$. 20. $m \in (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) \cup (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty)$. 22. $(x - 10\sqrt{10})^2 + y^2 = 100$, $(x + 10\sqrt{10})^2 + y^2 = 100$, $x^2 + (y + \frac{10\sqrt{10}}{3})^2 = 100$ lub $x^2 + (y - \frac{10\sqrt{10}}{3})^2 = 100$. 23. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$. 25. $m \in (\frac{1}{2}; +\infty)$.

- str. 250:** 1. a) $5x + 3y - 13 = 0$, b) $3x + 2y - 8 = 0$. 2. $(-4, 2)$. 3. $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$. 4. $7\sqrt{13}$. 5. $(3, \sqrt{3})$. 6. $x^2 + (y - \sqrt{2} + 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$. 7. a) $(x-8)^2 + (y+5)^2 = 49$, b) $(x - \frac{26}{5})^2 + (y + \frac{7}{5})^2 = 49$. 8. a) $(x-12)^2 + (y-5)^2 = 169$, b) $(x - \frac{5}{3})^2 + (y-5)^2 = \frac{250}{9}$. 9. $y = -\frac{1}{3}x + 5\frac{1}{3}$. 10. $C = 26$, $(-2, -6)$ lub $C = -24$, $(6, 0)$. 11. $\frac{12\sqrt{5}}{5}$. 12. $2x - 3y - 12 = 0$ i $5x - y - 4 = 0$ lub $3x + 2y - 5 = 0$ i $5x - y - 30 = 0$. 13. $(3, 1)$, $(-1, 3)$. 14. $5 + 5\sqrt{6}$. 15. $r \in (\frac{\sqrt{13}}{2}; +\infty)$.

- str. 255-261:** 1. $V_1 = 24$, $V_2 = 42$, $V_3 = 42$. 2. $V = \frac{1}{3}a^3$, $V = \frac{1}{3}a^3$, $V = \frac{1}{3}a^3$, $V = \frac{1}{6}a^3$. 3. a) $\frac{a^2h\sqrt{3}}{2}$, b) $\frac{a^2h\sqrt{3}}{3}$, c) $\frac{a^2h\sqrt{3}}{3}$. 4. $\frac{1}{3}$. 5. $\frac{2}{3}V$. 6. $V = \frac{19}{27}a^3$, $P = 6a^2$. 7. a) $\frac{11}{12}a^3$, b) $\frac{5}{6}a^3$, c) $\frac{37}{48}a^3$. 8. a) $\frac{3}{2}a$, b) $\frac{1}{2}a$. 9. a) $\frac{1}{3}a^2b$, b) $\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{3}a^2b$, c) $\frac{7}{3}a^2c$. 10. a) $5\sqrt{3}a^3$, b) $\frac{59\sqrt{3}}{12}a^3$, c) $5\sqrt{3}a^3$. 11. a) $78\sqrt{3}$, b) $67,5\sqrt{3}$, c) $183\frac{1}{3}$. 12. $\frac{a\sqrt{2}}{10}$. 13. 1:2. 14. $V_1 = \frac{1}{3}aP$, $V_2 = \frac{1}{3}P(3h - a - 2b)$, $V_3 = \frac{2}{3}bP$. 15. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 16. $a\sqrt{3}$ lub a . 17. Stosunek objętości: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, stosunek pól: $\sqrt{3}$. 18. a) $a\sqrt{2}$, b) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 19. a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\frac{1}{6}$, b) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$; $\frac{2}{9}$. 20. $\frac{1}{3}a$. 21. 1:2. 22. B, C, D : $\frac{47\sqrt{3}+27}{3} \approx 36,1$ m, E, F, G : $\frac{94\sqrt{3}+27}{3} \approx 63,3$ m, H : $47\sqrt{3} + 9 \approx 90,4$ m, I : $\frac{47\sqrt{3}+18}{2} \approx 49,7$ m, A : około 9 m. 23. a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, b) tak. 24. a) $V = \sqrt{2}a^3$, $P = 6\sqrt{3}a^2$, b) ośmiościan foremny; $\frac{b^3\sqrt{2}}{24}$. 25. $V = \frac{a^3(7\sqrt{2}-7)}{3}$, $V = \frac{a^3(21+14\sqrt{2})}{3}$.

- str. 264-265:** 1. a) Dwa razy większą, b) dwa razy większą. 2. a) $\frac{2}{\pi}$, b) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$, c) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$. 3. 32. 5. 12 cm. 6. a) 6π , b) $\frac{40}{4}\pi$. 7. $R = 3\frac{1}{3}$, $r = 1\frac{13}{27}$. 8. a) 2 lub 4, b) $r\sqrt{2}$. 9. b) 27 razy. 10. b) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

str. 274-276: 1. a) Tak, b) około 71° . 3. 45° . 5. $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$. 6. $120^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 60^\circ$. 7. a) Około 51° , b) około 52° , c) około 41° . 8. Około 55° i około 35° . 9. $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. 11. a) Około 69° , b) około 55° , c) 45° . 12. a) Około 71° , b) około 55° . 13. 15. 14. a) Około 109° , b) około 55° . 15. 30° . 16. $\frac{ab}{\sqrt{2-2\cos\alpha}} + \frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{4}$. 18. $\frac{a^3 \cos \frac{\pi}{2}}{3\sqrt{4\sin^2 \frac{\pi}{2}-2}}$
lub $\frac{a^3}{6} \sqrt{\frac{-1-\cos\alpha}{\cos\alpha}}$.

str. 281-284: 3. a) $3\sqrt{10}a^2$, b) $3\sqrt{3}a^2$, c) $2\sqrt{6}a^2$, d) $3\sqrt{14}a^2$. 4. a) $54\sqrt{3}$, b) 81, c) $54\sqrt{3}$, d) $9\sqrt{30}$. 5. 30° . 6. a) $8\sqrt{5}$, b) $\frac{3\sqrt{41}}{2}$. 7. Prostokąty o bokach: 6 cm i 8 cm lub 6 cm i 10 cm lub 8 cm i 10 cm lub 10 cm i 5 cm lub 6 cm i $\sqrt{41}$ cm lub 8 cm i $\sqrt{34}$ cm. 8. a) 20, b) $2\sqrt{34}$, c) $2\sqrt{82}$. 9. 3:1. 10. a) $4\sqrt{3}$ cm², b) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm². 11. a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, b) około 40° lub około 50° . 12. a) $\frac{a^2}{\cos\alpha}$, b) a^2 , gdy $\alpha = 0^\circ$, $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$, gdy $\alpha \approx 35^\circ$. 14. a) $\frac{a\sqrt{3b^2-4a^2}}{2}$, b) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$, c) $6a^2$. 15. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. 16. $\frac{a^2\sqrt{2}}{9}$. 17. $\frac{2}{9}a^2$. 18. $2\sqrt{3} + \sqrt{17} + 3$. 19. a) $\frac{12+4\sqrt{33}}{3}$, b) $6+2\sqrt{17}$, c) $\frac{14+4\sqrt{39}}{3}$. 20. $\frac{a^2 \sin \alpha}{2 \sin(\alpha + \beta)}$.

str. 288-291: 1. a) $\frac{216\sqrt{5}}{25}\pi$, b) $37\frac{11}{147}\pi$, c) $36\frac{1}{27}\pi$. 2. a) $\frac{910\sqrt{95}}{27}$, b) 875, c) 462,5. 3. a) $390\sqrt{3}$, b) $\frac{140\sqrt{3}}{3}$, c) $202\frac{2}{9}$. 4. 38 cm³. 5. $2\sqrt{2}$ razy. 6. $\frac{27}{64} \approx 0,42$ pojemności kieliszka; $\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 0,79$ wysokości kieliszka. 7. a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$, b) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$. 8. $\frac{1}{3}\pi h(R^2 + rR + r^2)$. 9. a) $\frac{16\pi r^2 h}{3}$, b) $\frac{17\pi r^2 h}{3}$, c) $\frac{4\pi r^2 h}{3}$. 10. $40\frac{2}{3}$. 11. 2:1. 12. 56. 14. 162 minuty. 15. a) Kość: 1:625, masa: 1:15 625, b) 0,28 kg, c) 12 razy. 16. 3024 kg. 18. 135 000 ton.

str. 292: 1. $4000\sqrt{2}$. 2. $\frac{8r^3h^2}{(\sqrt{2}h+2r)^2}$ lub $\frac{2\sqrt{2}h^3r^3}{(h+\sqrt{2}r)^3}$. 3. a) Rozwartym, b) ostrym. 4. $\cos\gamma = \sin\alpha \sin\beta$. 5. a) $37,5\sqrt{33}$, b) $25\sqrt{11}$. 7. $5\sqrt{5}$ razy mniejszą. 8. $\frac{104\sqrt{2}}{3}$, 78 π . 9. $V = 49,5\pi$, $P_C = 63\pi + 36\sqrt{2}\pi$.

Wszystkie książki Wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.
Zamówienia prosimy nadsyłać pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe
80-305 Gdańsk 5, skrytka pocztowa 80
tel. 801 643 917, 58 340 63 63
fax 58 340 63 61, 58 340 63 66
<http://www.gwo.pl> e-mail: handel@gwo.pl



ISBN 978-83-8118-136-5



Podręcznik jest przeznaczony do nauki matematyki w czteroletnim liceum lub pięcioletnim technikum. Spełnia on kryteria *Ustawy o systemie oświaty* i jest zgodny z najnowszą podstawą programową z 2018 roku.

Został dopuszczony przez MEiN do użytku szkolnego i wpisany do wykazu podręczników.

Numer dopuszczenia: 963/3/2021

