



MATEMATYKA Z PLUSEM

multipodręcznik do liceum i technikum

zakres podstawowy



MATEMATYKA Z PLUSEM

multi podręcznik do liceum i technikum

zakres podstawowy

Małgorzata Dobrowolska
Marcin Karpiński
Jacek Lech



MATEMATYKA Z PLUSEM

multipodręcznik do liceum i technikum

zakres podstawowy



Projekt okładki: *Iwona Duczmal*

Ilustracje: *Bartłomiej Brosz*

Grafika komputerowa: *Leszek Jakubowski*

Fotografie: Archiwum GWO, Shutterstock

Skład (T_gX): *Joanna Szyller*

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników szkolnych przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki (w zakresie podstawowym) na poziomie klasy IV liceum i technikum, na podstawie recenzji rzeczoznawców: dr Marii Borowskiej, dr. hab. Gustawa Trelińskiego, dr Barbary Pędzich.

Numer dopuszczenia: 964/4/2022

ISBN 978-83-8118-478-6

© Copyright by Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe

Wydawca: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 80-309 Gdańsk, al. Grunwaldzka 413

Niniejsza publikacja podlega ochronie przewidzianej w przepisach Ustawy z dnia 4.02.1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych. Każdy przypadek kopiowania lub zwielokrotniania fragmentu lub całości publikacji stanowi niedozwolone naruszenie praw twórcy lub wydawcy, o ile nie odbywa się zgodnie z przepisami wyżej wymienionej ustawy. Uwaga. W podręczniku nie należy zapisywać żadnych odpowiedzi, podkreślać ani zaznaczać rozwiązań zadań.

Wszystkie książki Wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.
Zamówienia można składać w księgarni internetowej: www.ksiegarnia.gwo.pl
lub nadsyłać listownie pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe
80-305 Gdańsk 5, skrytka pocztowa 80
tel. 801 643 917, 58 340 63 63
fax 58 340 63 61, 58 340 63 66
<http://www.gwo.pl> e-mail: handel@gwo.pl

Spis treści

Geometria analityczna

■ Punkty i odcinki w układzie współrzędnych	10
■ Równanie prostej	16
■ Równanie prostej (cd.)	23
■ Równanie okręgu	28
■ Interpretacja geometryczna układu równań	32
■ Powtórzenie	38

Prawdopodobieństwo

■ Prawdopodobieństwo — podstawowe pojęcia	40
■ Obliczanie prawdopodobieństwa	50
■ Drzewka	55
■ Wartość oczekiwana	65
■ Zasada mnożenia i zasada dodawania	70
■ Obliczanie prawdopodobieństwa (cd.)	79
■ Powtórzenie	84

Przygotowanie do matury

■ Działania na liczbach	86
■ Równania i nierówności	91
■ Ciagi	95
■ Własności funkcji. Funkcja liniowa	99
■ Funkcja kwadratowa	104
■ Wielomiany i wyrażenia wymierne	109
■ Funkcje wykładnicze i logarytmiczne	112
■ Trygonometria	115
■ Planimetria	118
■ Geometria analityczna	127
■ Stereometria	132
■ Rachunek prawdopodobieństwa	139
■ Procenty. Elementy statystyki	143

TABELA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGNOMETRYCZNYCH	151
---	-----

ODPOWIEDZI	153
------------------	-----

Drogie Uczennice!
Drodzy Uczniowie!

To Wasz ostatni szkolny podręcznik do matematyki. Uczyliście się tego przedmiotu ponad dziesięć lat i już niedługo większość z Was podsumuje swoje umiejętności egzaminem.

Przed Wami kilka pracowitych miesięcy przygotowań do matury z matematyki. Na pewno będziecie się starali dobrze ten czas wykorzystać.

Słowo „matura” wywodzi się z języka łacińskiego — *maturus* oznacza „dojrzały”. Dlatego ten egzamin bywa nazywany egzaminem dojrzałości. Jego wynik nie rozstrzygnie oczywiście, czy jesteście osobami dojrzałymi, czy też nie. Taka nazwa egzaminu pierwotnie miała oznaczać tylko (i aż) dojrzałość do podjęcia studiów wyższych.

Jesteśmy przekonani, że niezależnie od tego, jakie studia podejmiecie lub jaką pracę wybierzecie, przyda się Wam ten sposób argumentacji, rozumowania i odróżniania prawdy od fałszu, którego uczy matematyka. O sile matematyki świadczy jednak nie tylko jej użyteczność. Ładnie ujął to polski matematyk Hugo Steinhaus, mówiąc: „Między duchem a materią pośredniczy matematyka”.

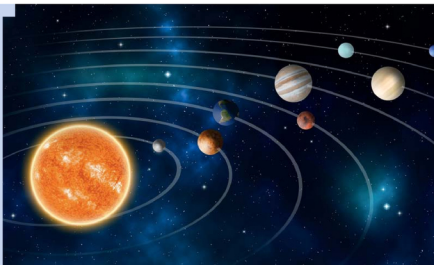
Autorzy

W podręczniku przyjęto następujące oznaczenia:

-  — zadania 7–10 — odsyłacz do zadań, które proponujemy rozwiązywać po zapoznaniu się z odpowiednim fragmentem teorii
-  — odsyłacz do fragmentu teorii oznaczonego indeksem 
-  — zadanie nieelementarne (niekoniecznie trudne)
-  — zadanie trudne

Geometria analityczna

W 1605 roku niemiecki matematyk i astronom Johannes Kepler odkrył, że planety nie poruszają się po okręgach, jak sądził Kopernik, ale po elipsach. Słońce zaś znajduje się w jednym z ognisk takiej elipsy. Własności elipsy bardzo wygodnie można badać, gdy się ją opisze za pomocą równania.



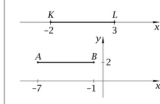
Punkty i odcinki w układzie współrzędnych ■ Równanie prostej
■ Równanie prostej (cd.) ■ Równanie okręgu ■ Interpretacja
geometryczna układu równań ■ Powtórzenie

PUNKTY I ODCINKI W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

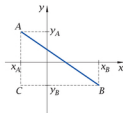
- 1** W układzie współrzędnych rozważaliśmy już punkty i wykresy funkcji. W podobny sposób — za pomocą współrzędnych punktów i wyrażeń algebraicznych — możemy opisywać własności innych figur płaskich.

Jeśli znamy położenie dwóch punktów na osi liczbowej, możemy obliczyć odległość między nimi. Podobnie jest, gdy znamy współrzędne dwóch punktów na płaszczyźnie.

ĆWICZENIE A Ustal długość odcinka KL zaznaczonego na osi liczbowej. Ustal długości odcinków AB i PR zaznaczonych w układzie współrzędnych.



Przyjrzyj się rysunkowi obok. Odległość między punktami A i B , czyli długość odcinka AB , możemy obliczyć, korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ACB . Jeśli $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, to $C = (x_A, y_B)$.



Długość odcinka BC to odległość między liczbami x_A i x_B na osi x , czyli $|x_B - x_A|$, zaś długość odcinka AC jest równa odległości między liczbami y_A i y_B na osi y , czyli $|y_B - y_A|$. Zatem:

$$|BC| = |x_B - x_A| \quad |AC| = |y_B - y_A|$$

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$|AB|^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$$

Stąd wynika wzór podany w ramce obok.

Odległość między punktami $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ wynosi:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

PRZYKŁAD 1 Trójkąt ABC jest równoramienny ($|AC| = |BC|$). Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = 4$, a wierzchołki przy podstawie mają współrzędne $A = (-1, 0)$, $B = (-3, 3)$. Znajdź współrzędne wierzchołka C .

$$\begin{aligned}
 A &= (-1, 0), \quad B = (-3, 3), \quad C = (x, 4) && \vdots \text{ Punkt } C \text{ leży na prostej } y = 4. \\
 |AC| &= \sqrt{(x - (-1))^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{x^2 + 2x + 17} \\
 |BC| &= \sqrt{(x - (-3))^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{x^2 + 6x + 10} \\
 |AC|^2 &= |BC|^2 && \vdots |AC| = |BC|, \text{ więc } |AC|^2 = |BC|^2 \\
 x^2 + 2x + 17 &= x^2 + 6x + 10 \\
 4x &= 7, \text{ czyli } x = \frac{7}{4} \\
 C &= \left(\frac{7}{4}, 4\right)
 \end{aligned}$$

ZADANIE Punkty $K = (-2, 1)$ i $M = (0, 4)$ leżą na okręgu, którego środek S leży na prostej o równaniu $y = -3$. Znajdź współrzędne punktu S .

PRZYKŁAD 2 Na prostej będącej wykresem funkcji $y = 2x$ znajdź punkt, którego odległość od punktu $A = (-2, 4)$ jest równa 4.

$$\begin{aligned}
 P &= (x, 2x) && \vdots \text{ Punkt } P \text{ leży na wykresie funkcji } y = 2x, \text{ więc} \\
 |PA| &= 4 && \vdots \text{ jeśli pierwsza współrzędna jest równa } x, \text{ to} \\
 &&& \vdots \text{ druga jest równa } 2x. \\
 \sqrt{(-2 - x)^2 + (4 - 2x)^2} &= 4 && \vdots \text{ Korzystamy ze wzoru na długość odcinka.} \\
 (-2 - x)^2 + (4 - 2x)^2 &= 16 && \vdots \text{ Podnosimy obie strony równania do kwadratu.} \\
 4 + 4x + x^2 + 16 - 16x + 4x^2 &= 16 \\
 5x^2 - 12x + 4 &= 0 \\
 \Delta &= 12^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4 = 64 \\
 x_1 &= \frac{12 - 8}{10} = \frac{2}{5} && x_2 = \frac{12 + 8}{10} = 2 \\
 P_1 &= \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) && P_2 = (2, 4) && \vdots \text{ Zadanie ma dwa rozwiązania.}
 \end{aligned}$$

ZADANIE Znajdź na wykresie funkcji $y = 3x$ punkt, którego odległość od punktu $K = (4, -1)$ wynosi 5.

zadania 1–9 ►

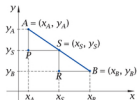
III **ĆWICZENIE B** Ustal, jaka liczba leży na osi liczbowej dokładnie pośrodku między liczbami: a) 2 i 7 b) -3 i 9

Przyjrzyj się rysunkowi obok. Punkt S jest środkiem odcinka AB , a trójkąty SAP oraz BSR mają odpowiednie kąty takie same, więc są przystające (cecha kbk). Z równości $|PS| = |RB|$ oraz $|RS| = |PA|$ wynika, że:

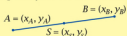
$$x_S - x_A = x_B - x_S \quad y_S - y_B = y_A - y_S$$

Stąd:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$



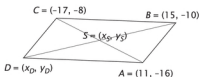
Współrzędne środka odcinka



$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Współrzędne środka odcinka są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych jego końców.

PRZYKŁAD 3 Punkty $A = (11, -16)$, $B = (15, -10)$, $C = (-17, -8)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Ustal współrzędne punktu D .



Sporządzamy rysunek pomocniczy.

$$x_S = \frac{-17 + 11}{2} = -3 \quad y_S = \frac{-8 - 16}{2} = -12$$

$$\frac{x_D + 15}{2} = -3 \quad \frac{y_D - 10}{2} = -12$$

$$x_D = -21 \quad y_D = -14$$

$$\underline{D = (-21, -14)}$$

Punkt S jest środkiem przekątnych równoległoboku $ABCD$.

$$x_S = \frac{x_D + 15}{2} \quad y_S = \frac{y_D - 10}{2}$$

ZADANIE Punkty $A = (-7, 3)$ i $B = (-20, -9)$ są sąsiednimi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Przekątne tego równoległoboku przecinają się w punkcie $S = (1, -4)$. Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków równoległoboku.

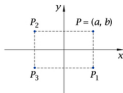
zadania 10–12

ĆWICZENIE C Niech $A = (-3, 0)$, $B = (4, 2)$, $C = (-1, 5)$. Podaj współrzędne wierzchołków trójkąta, który jest symetryczny do trójkąta ABC względem:

- a) osi x b) osi y c) początku układu współrzędnych

Punktem symetrycznym do punktu $P = (a, b)$ względem osi x jest punkt $P_1 = (a, -b)$, a względem osi y — punkt $P_2 = (-a, b)$.

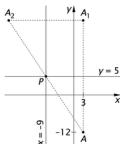
Punktem symetrycznym do punktu $P = (a, b)$ względem początku układu współrzędnych jest punkt $P_3 = (-a, -b)$.



Prostą równoległą do osi x przechodzącą przez punkt $(0, b)$ opisuje równanie $y = b$, a prostą prostopadłą do osi x przechodzącą przez punkt $(a, 0)$ opisuje równanie $x = a$.

W poniższym przykładzie pokazujemy, jak znajdować obrazy danego punktu w symetrii względem takich prostych.

PRZYKŁAD 4 Punkt A_1 jest symetryczny do punktu $A = (3, -12)$ względem prostej o równaniu $y = 5$, a punkt A_2 jest symetryczny do punktu A_1 względem prostej o równaniu $x = -9$. Wykaż, że punkt A_2 jest symetryczny do punktu A względem punktu przecięcia się tych prostych.



$$A_1 = (3, y_1), \quad A_2 = (x_2, y_1)$$

$$\frac{y_1 + (-12)}{2} = 5$$

$$y_1 = 22$$

$$\frac{x_2 + 3}{2} = -9$$

$$x_2 = -21$$

$$A_1 = (3, 22)$$

$$A_2 = (-21, 22)$$

Środek odcinka AA_1 ma drugą współrzędną równą 5 (bo leży na prostej o równaniu $y = 5$).

Środek odcinka A_1A_2 ma pierwszą współrzędną równą -9 (bo leży na prostej o równaniu $x = -9$).

Punkt przecięcia prostych o równaniach $x = -9$ i $y = 5$ ma współrzędne $P = (-9, 5)$.

Współrzędne środka odcinka AA_2 to:

$$x_S = \frac{-21 + 3}{2} = -9 \quad y_S = \frac{22 + (-12)}{2} = 5$$

Zatem punkt P i środek odcinka AA_2 to ten sam punkt. Wynika stąd, że punkt A_2 jest symetryczny do punktu A względem punktu P .

ZADANIE Punkt P_1 jest symetryczny do punktu $P = (-5, -2)$ względem prostej o równaniu $x = 4$, a punkt P_2 jest symetryczny do punktu P_1 względem prostej o równaniu $y = -6$. Wykaż, że punkt P_2 jest symetryczny do punktu P względem punktu przecięcia się tych prostych.

zadania 13–18 ►

René Descartes (czyt. dekart) zwany Kartezjuszem (1596–1650) znany jest z sentencji: *cogito ergo sum* (myślę, więc jestem). Był on także pomysłodawcą zastosowania metod algebraicznych w geometrii. Tym samym zapoczątkował nowy dział matematyki – geometrię analityczną.

Kartezjusz od młodości miał zwyczaj bardzo późnego wstawania. W czasie długich porannych godzin spędzonych w łóżku miał najlepsze matematyczne i filozoficzne pomysły.

Niektórzy historycy uważają, że geometria analityczna narodziła się w pewną listopadową noc w 1619 roku. Tej nocy Kartezjusz miał sen, po którym, jak twierdził, obudził się z przeświadczeniem, że posiadał magiczny klucz, który pozwoli mu otworzyć skarbiec natury. Odtąd wierzył, że zna metodę odkrywania praw natury za pomocą eksperymentów i rozumowania. Być może miał na myśli zastosowanie metod algebraicznych w geometrii.

ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz odległość między podanymi punktami.

a) $A = (5, -2)$, $B = (-7, 3)$

b) $K = (10, 4)$, $L = (8, -2)$

c) $P = (1 + \sqrt{2}, 3\sqrt{5})$, $R = (2 + \sqrt{2}, 2\sqrt{5})$

d) $M = (3 - \sqrt{2}, 1 - 3\sqrt{3})$, $N = (3, 1 + \sqrt{3})$

2. Sprawdź, czy trójkąt ABC o podanych wierzchołkach jest równoramienny.

a) $A = (0, 0)$, $B = (\sqrt{2}, \sqrt{7})$, $C = (-2, \sqrt{5})$

b) $A = (-3, -2)$, $B = (5, -1)$, $C = (1, 7)$

3. Ustal, który z kątów trójkąta o wierzchołkach $A = (3, 0)$, $B = (-1, -3)$, $C = (-7, 1)$ jest najmniejszy.

Warto wiedzieć

Jeśli punkty A , B , C spełniają warunek $|AB| + |BC| = |AC|$, to są współliniowe.

4. Korzystając z informacji podanych w ramce obok, uzasadnij, że punkty $P = (3, 5)$, $Q = (-6, 2)$, $R = (-15, -1)$ leżą na jednej prostej.

5. Na trójkącie prostokątnym o wierzchołkach $(-2, 4)$, $(4, -7)$ i $(4, 4)$ opisano okrąg. Oblicz długość promienia tego okręgu.

6. Znajdź wartość a , dla której długość odcinka PR jest równa 10.

a) $P = (a, 7)$, $R = (3, 1)$

b) $P = (1, -2)$, $R = (-1, a)$

7. Dwa wierzchołki trójkąta równobocznego mają współrzędne $(1, 3)$ i $(4, -1)$. Znajdź współrzędne trzeciego wierzchołka tego trójkąta.

8. Trójkąt PQR , gdzie $P = (1, -2)$, $R = (4, -3)$, jest równoramienny. Punkt Q leży na prostej $y = 2x$. Znajdź współrzędne punktu Q . Rozważ wszystkie przypadki.

9. Znajdź współrzędne punktu, który jest jednakowo odległy od punktu $A = (-1, 2)$ oraz od punktu $B = (5, 8)$ i który leży:

- a) na osi x , b) na osi y , c) na prostej $y = x$.

◀ **10. a)** Znajdź współrzędne środka odcinka o końcach $A = (-6, 20)$ i $B = (-2, -53)$.

b) Środkiem odcinka KL jest punkt $(-4, 7)$. Wiadomo, że $K = (12, -40)$. Znajdź współrzędne punktu L .

11. Oblicz długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka A w trójkącie o wierzchołkach $A = (-3, 2)$, $B = (-1, 5)$, $C = (4, -3)$.

12. a) Punkty $A = (-2, 5)$ i $B = (-4, -3)$ są sąsiednimi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, a punkt $S = (2, -1)$ jest środkiem symetrii tego równoległoboku. Oblicz współrzędne wierzchołków C i D .

b) Punkty $A = (-4, -5)$, $B = (5, -1)$ i $C = (2, 7)$ to kolejne wierzchołki równoległoboku $ABCD$. Znajdź współrzędne wierzchołka D .

◀ **13.** Podaj współrzędne punktu symetrycznego do punktu $A = (-7, \sqrt{2})$ względem:

- a) osi x , b) osi y , c) początku układu współrzędnych.

14. Znajdź współrzędne punktu symetrycznego do punktu A względem prostej o podanym równaniu.

- a) $A = (8, -5)$, prosta $y = -4$ c) $A = (0, 1)$, prosta $y = 3\sqrt{2}$
b) $A = (-3, 4)$, prosta $x = -2$ d) $A = (-5 - \sqrt{7}, 9)$, prosta $x = \sqrt{7}$

15. Punkt R jest symetryczny do punktu $P = (-1, 7)$ względem osi y . Punkt S jest symetryczny do punktu R względem prostej o równaniu $y = -3$. Wyznacz współrzędne punktu symetrycznego do punktu S względem osi x .

16. Podaj współrzędne punktów, które są symetryczne do punktów $A = (-10, 2)$ i $B = (0, 1)$ względem punktu:

- a) $S = (0, 0)$ b) $S = (0, 2)$ c) $S = (1, 0)$ d) $S = (\sqrt{7}, 2\sqrt{7})$

17. Znajdź współrzędne punktu, względem którego punkty A i A' są symetryczne do siebie.

- a) $A = (-2, 5)$, $A' = (-4, -3)$ c) $A = (a, b)$, $A' = (5a, b - 4)$
b) $A = (3 - \sqrt{5}, -2)$, $A' = (\sqrt{5}, 4)$ d) $A = (a + b, a - b)$, $A' = (a - b, a + b)$

18. Punkty B i C są symetryczne do punktu $A = (9, 2)$ odpowiednio względem prostej o równaniu $y = -2$ i względem prostej o równaniu $x = 4$. Oblicz długość średnicy okręgu opisanego na trójkącie ABC .

MINISPRAWDZIAN

51. Punkty $A = (-4, -4)$, $B = (3, 0)$, $C = (2, 8)$, $D = (-5, 4)$ są kolejnymi wierzchołkami rombu. Pole tego rombu jest równe:

- A. 60 B. 65 C. $4\sqrt{65}$ D. $20\sqrt{13}$

52. Punkty $(-17, 3)$ i $(17, -3)$ to końce jednej z przekątnych równoległoboku. Trzeci wierzchołek równoległoboku ma współrzędne $(30, 75)$. Wskaż współrzędne czwartego wierzchołka tego równoległoboku.

- A. $(17, 3)$ B. $(-17, -3)$ C. $(-30, 75)$ D. $(-30, -75)$

53. Wskaż punkt symetryczny do punktu $(120, -350)$ względem punktu $(-50, 70)$.

- A. $(35, -140)$ B. $(85, -210)$ C. $(-220, 490)$ D. $(290, -770)$

RÓWNANIE PROSTEJ

- I Wiesz już, że wszystkie punkty, których współrzędne spełniają równanie $y = ax + b$, leżą na pewnej prostej. Równanie to nazywamy **równaniem kierunkowym tej prostej**.

Każdą prostą, która nie jest prostopadła do osi x , można opisać za pomocą równania kierunkowego.

Rozważmy prostą o równaniu:

$$y = -\frac{3}{2}x + 4$$

Równanie tej prostej można zapisać w postaci:

$$3x + 2y - 8 = 0$$

Każdy punkt płaszczyzny, którego współrzędne spełniają to równanie, leży na rozważanej prostej.

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie liczby A i B nie są jednocześnie równe 0, nazywamy **ogólnym równaniem prostej**.

Zauważ, że gdyby w równaniu typu $Ax + By + C = 0$ oba współczynniki A i B były jednocześnie równe 0, to równanie miałoby postać $0 \cdot x + 0 \cdot y + C = 0$. Gdy $C = 0$, takie równanie spełniałyby współrzędne wszystkich punktów płaszczyzny, a gdy $C \neq 0$, nie byłoby żadnego punktu, którego współrzędne spełniałyby to równanie.

Gdy $B \neq 0$, równanie ogólne prostej $Ax + By + C = 0$ można zapisać w postaci kierunkowej. Natomiast gdy $B = 0$, to równanie ogólne $Ax + By + C = 0$ ma postać $Ax + C = 0$ i opisuje prostą prostopadłą do osi x przechodzącą przez punkt $(-\frac{C}{A}, 0)$. Zatem za pomocą równania ogólnego można opisać każdą prostą na płaszczyźnie.

Proste, których fragmenty przedstawiono na poniższych rysunkach, są opisane za pomocą równań ogólnych.



ĆWICZENIE A a) Zapisz równania podanych prostych w postaci ogólnej.

$$y = \frac{2}{3}x - 2 \quad x = \frac{3}{4} \quad y = 0,7 \quad y = \frac{5}{4}x$$

b) Które z podanych równań można zapisać w postaci kierunkowej? Zapisz je w tej postaci.

$$\begin{array}{ll} 5x + 3y + 2 = 0 & \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0 \\ 6x - 2 = 0 & 12y - 7 = 0 \end{array}$$

ĆWICZENIE B a) Znajdź współrzędne dwóch punktów należących do prostej o równaniu $3x - 2y + 6 = 0$, a następnie naszkicuj tę prostą.

b) Zapisz w postaci ogólnej równania prostych prostopadłych do osi układu współrzędnych i przechodzących przez punkt $P = (3, -7)$.

Zwróć uwagę na to, że równanie ogólne tej samej prostej można zapisać na różne sposoby. Na przykład tę samą prostą opisują następujące równania:

$$-3x - 2y + 8 = 0 \qquad \frac{3}{2}x + y - 4 = 0 \qquad \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - \frac{4}{3} = 0$$

ĆWICZENIE C Trzy z poniższych równań opisują tę samą prostą. Które?

$$3x - 6y + 3 = 0 \qquad -x + 2y - 1 = 0 \qquad x + 2y + 1 = 0 \qquad \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + \sqrt{2} = 0$$

PRZYKŁAD 1 Dane są punkty $A = (-3, -7)$ i $B = (6, -1)$. Znajdź równanie ogólne o współczynnikach całkowitych prostej AB .

prosta AB : $y = ax + b$

$$\begin{cases} -7 = a \cdot (-3) + b \\ -1 = a \cdot 6 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -5 \end{cases}$$

$$y = \frac{2}{3}x - 5$$

$$-\frac{2}{3}x + y + 5 = 0 \quad | \cdot 3$$

$$\underline{-2x + 3y + 15 = 0}$$

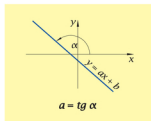
Punkty A i B nie leżą na prostej prostopadłej do osi x , więc równanie prostej AB możemy zapisać w postaci kierunkowej.

Zapisujemy równanie prostej w postaci ogólnej i zgodnie z poleceniem przekształcamy je do postaci ogólnej o współczynnikach całkowitych.

ZADANIE Dane są punkty $P = (-5, 8)$ i $R = (-11, 18)$. Znajdź równanie ogólne prostej PR .

Przypomnijmy, że współczynnik kierunkowy prostej o równaniu $y = ax + b$ jest równy tangensowi kąta nachylenia prostej do osi x .

ĆWICZENIE D Znajdź tangens kąta nachylenia prostej o równaniu $2x + 3y - 5 = 0$ do osi x .

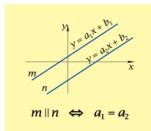


zadania 1–9 ►

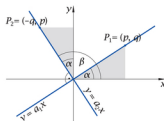
- || Fakt, że współczynnik kierunkowy jednoznacznie wyznacza kąt nachylenia prostej do osi x , możemy wykorzystać do sformułowania warunku równoległości prostych o danych równaniach kierunkowych.

**Prosta o równaniu $y = a_1x + b_1$
jest równoległa do prostej
o równaniu $y = a_2x + b_2$
wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$.**

ĆWICZENIE E Znajdź wartość t , dla której proste o równaniach $tx - 3y + 1 = 0$ oraz $y = 2x - 5$ są równoległe.



Na poniższym rysunku przedstawiono fragmenty dwóch prostych prostopadłych przechodzących przez początek układu współrzędnych. Żadna z nich nie jest prostopadła do osi x . Zastanówmy się, jaka jest zależność między współczynnikami kierunkowymi tych prostych.



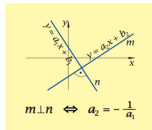
Wybermy na jednej prostej punkt $P_1 = (p, q)$, a na drugiej z tych prostych taki punkt P_2 , że $|OP_2| = |OP_1|$. Wówczas zaznaczone na rysunku trójkąty prostokątne są przystające. Zatem $P_2 = (-q, p)$. Współczynniki kierunkowe tych prostych to tangensy kątów α i β :

$$a_1 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{q}{p}$$

$$a_2 = \operatorname{tg} \beta = \frac{p}{-q} = -\frac{1}{\frac{q}{p}} = -\frac{1}{a_1}$$

Ta zależność będzie zachodzić także wtedy, gdy proste prostopadłe nie będą przechodzić przez początek układu współrzędnych.

Prosta o równaniu $y = a_1x + b_1$,
gdzie $a_1 \neq 0$, jest prostopadła
do prostej o równaniu $y = a_2x + b_2$,
wtedy i tylko wtedy, gdy $a_2 = -\frac{1}{a_1}$.



ĆWICZENIE F Znajdź wartość t , dla której
proste o równaniach $tx - 3y + 1 = 0$ oraz
 $y = 2x - 5$ są prostopadłe.

PRZYKŁAD 2 Niech m będzie prostą opisaną równaniem $3x - 2y + 5 = 0$. Znajdź
równania ogólne dwóch prostych — równoległej do prostej m przechodzącej
przez punkt $A = (2, -3)$ oraz prostej prostopadłej do prostej m przechodzącej
przez punkt $B = (-1, \frac{1}{3})$.

$$3x - 2y + 5 = 0$$

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

⋮ Znajdujemy równanie kierunkowe prostej m .

Prosta równoległa do prostej m :

$$y = \frac{3}{2}x + b$$

$$-3 = \frac{3}{2} \cdot 2 + b$$

⋮ Korzystamy z tego, że punkt $A = (2, -3)$ należy
do szukanej prostej.

$$b = -6$$

$$y = \frac{3}{2}x - 6$$

$$3x - 2y - 12 = 0$$

⋮ Zapisujemy równanie ogólne otrzymanej prostej.

Prosta prostopadła do prostej m :

$$y = -\frac{2}{3}x + b$$

$$\frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \cdot (-1) + b$$

⋮ Punkt $B = (-1, \frac{1}{3})$ należy do szukanej prostej.

$$b = -\frac{1}{3}$$

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$2x + 3y + 1 = 0$$

⋮ Zapisujemy równanie ogólne otrzymanej prostej.

ZADANIE Znajdź równanie ogólne prostej przechodzącej przez punkt $P = (-2, -1)$:

- równoległej do prostej o równaniu $x - 3y + 1 = 0$,
- prostopadłej do prostej o równaniu $3x - 2y = 0$.

ZESTAW ZADAŃ

1. a) Podane równania prostych zapisz w postaci ogólnej.

$$y = \frac{1}{3}x + 4 \quad 3y - 4 = \frac{x}{2} \quad y = -5 \quad 2y + 3x = 2(y - x)$$

- b) Podane równania prostych zapisz w postaci kierunkowej.

$$-2x - 3y + 12 = 0 \quad 2x - y = 5x \quad 5y - 2 = 0 \quad \frac{y-x}{2} = 4(x-2y)$$

2. a) Trzy z podanych równań przedstawiają tę samą prostą. Wskaż te równania.

$$4x - 3y + 2 = 0 \quad y = \frac{3}{4}x + \frac{2}{3} \quad 2x - 1,5y + 1 = 0$$

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3} \quad y = \frac{4x}{3} + \frac{2}{3}$$

- b) Ile różnych prostych opisują poniższe równania?

$$-5x - 4y + 7 = 0 \quad y = -\frac{4}{5}x + \frac{7}{5} \quad 2,5x - 2y - 3,5 = 0$$

$$5x + 4y - 7 = 0 \quad 4x + 5y - 7 = 0$$

3. Ustal wartości a , b , c , dla których punkty $A = (-3, a)$, $B = (2b, \frac{1}{2})$ i $C = (c-2, -3c)$ leżą na prostej o równaniu $5x + 2y - 4 = 0$.

4. Znajdź współrzędne punktów przecięcia podanej prostej z osiami układu współrzędnych, a następnie naskicuj tę prostą.

a) $5x + 2y - 4 = 0$ b) $3x - 4y + 6 = 0$ c) $-2x + 5y - 10 = 0$

5. Znajdź współrzędne punktu przecięcia prostych o podanych równaniach.

a) $x + 3 = 0$ i $y - 5 = 0$ c) $y + 10 = 0$ i $3x + 2y - 20 = 0$

b) $x - \frac{1}{2} = 0$ i $2x + y - 4 = 0$ d) $\frac{1}{4}y - \frac{1}{2} = 0$ i $3x - 5y + 2 = 0$

6. Sprawdź, czy proste o równaniach $2x - 4y + 2 = 0$, $2x + y - 3 = 0$ i $x + 2y + 1 = 0$ przecinają się w jednym punkcie.

7. Znajdź równanie kierunkowe i ogólne prostej przechodzącej przez punkty:

a) $A = (1, -3)$, $B = (0, 4)$ c) $A = (20, 1)$, $B = (0, -10)$

b) $A = (0, 4, 17)$, $B = (\frac{2}{3}, \sqrt{3})$ d) $A = (2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, $B = (1, 1 + \sqrt{2})$

8. a) Czy punkty $A = (2, 12)$, $B = (-7, -1)$ i $C = (-10, -5)$ leżą na jednej prostej?

- b) Znajdź wartość t , dla której punkty $A = (2, -1)$, $B = (-3, 4)$ i $C = (t, 3t + 2)$ są współliniowe.

9. a) Wyznacz miary kątów trójkąta ograniczonego osią x , prostą o równaniu $y = -x + 5$ oraz prostą o równaniu $y = \sqrt{3}x + 7$.

b) Znajdź miarę kąta ostrego, pod jakim przecinają się proste o równaniach $2x + 3y + 15 = 0$ i $5x - 2y - 10 = 0$. Możesz się posłużyć tablicami trygonometrycznymi lub kalkulatorem.

10. Znajdź równanie prostej równoległej do danej prostej i przechodzącej przez punkt A .

a) $y = -4x + 2$, $A = (-7, 0)$

c) $-3x + 5y - 1 = 0$, $A = (0, 4)$

b) $y = \frac{1}{3}x - 5$, $A = (-9, -2)$

d) $2x - 3y + 4 = 0$, $A = (2, -5)$

11. Znajdź równanie prostej prostopadłej do danej prostej i przechodzącej przez punkt P .

a) $y = -\frac{2}{3}x - 7$, $P = (8, 0)$

c) $3x + 4y = 0$, $P = (0, -5)$

b) $y = 8x + \frac{1}{5}$, $P = (4, -3)$

d) $-2x - 5y + 1 = 0$, $P = (-1, 2)$

12. Która z podanych prostych jest prostopadła do prostej o równaniu $y = -\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}$, a która jest do niej równoległa?

$$2x + 3y - 4 = 0$$

$$1,5x - y = 0$$

$$y = 1,5x + 2$$

$$-10y + 15x - 1 = 0$$

$$\frac{5}{3}x - y + \frac{2}{3} = 0$$

13. Znajdź równania kierunkowe dwóch prostych przechodzących przez początek układu współrzędnych, takich że jedna z nich jest równoległa do prostej o równaniu $3x - 7y + 5 = 0$, a druga — prostopadła do tej prostej.

14. Dane są punkty $A = (-1, 5)$ i $B = (\frac{1}{2}, 0)$.

a) Znajdź równanie ogólne prostej równoległej do prostej AB i przechodzącej przez punkt $P = (1, -\frac{1}{4})$.

b) Znajdź równanie ogólne prostej prostopadłej do prostej AB i przechodzącej przez punkt $R = (-\frac{3}{2}, -2)$.

15. Zapisz równanie dowolnej prostej równoległej oraz dowolnej prostej prostopadłej do danej prostej.

a) $y = \sqrt{2}x - \sqrt{5}$

b) $\sqrt{3}x - y + \sqrt{2} = 0$

16. Wyznacz wartości t , dla których prosta m jest równoległa do prostej n , oraz takie, dla których jest do niej prostopadła.

a) prosta m :

$$3x - 4y + 7 = 0$$

prosta n :

$$y = tx + 6$$

b) prosta m :

$$y = -\frac{2}{3}x + 4$$

prosta n :

$$tx + 5y - 3 = 0$$

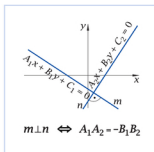
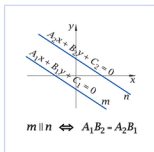
c) prosta m :

$$y = 5x - 7$$

prosta n :

$$2x - ty + 4 = 0$$

17. W poniższych ramkach podano warunki równoległości i prostokątłości prostych opisanych równaniami ogólnymi.



Przyjmijmy, że proste o równaniach $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ nie są prostokątne do osi x .

a) Uzasadnij, że jeśli prosta o równaniu $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ jest równoległa do prostej o równaniu $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, to $A_1B_2 = A_2B_1$.

b) Uzasadnij, że jeśli prosta o równaniu $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ jest prostokątna do prostej o równaniu $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, to $A_1A_2 = -B_1B_2$.

MINISPRAWDZIAN

51. Prosta o równaniu $y = 0,6x + 2$ jest nachylona do osi x pod kątem:

- A. mniejszym niż 30° C. 60°
B. między 30° a 60° D. większym niż 60°

52. Ustal, która z podanych prostych nie jest równoległa do prostej o równaniu $2x - 6y + \sqrt{3} = 0$.

- A. $-x + 3y + 5 = 0$ C. $2x - 6y - 7 = 0$
B. $x + 3y + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ D. $x - 3y - \sqrt{3} = 0$

53. Prosta o równaniu $x - 2y - 3 = 0$ jest prostokątna do prostej o równaniu:

- A. $y = 2x + 3$ B. $y = -2x + 1$ C. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ D. $y = -\frac{1}{2}x - 3$

54. Wskaż, która z podanych prostych jest prostokątna do prostej o równaniu $x - 4y - 1 = 0$ i przechodzi przez punkt $P = (-1, -1)$.

- A. $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$ B. $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$ C. $y = -4x + 5$ D. $y = -4x - 5$

RÓWNANIE PROSTEJ (CD.)

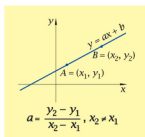
- 1 Aby znaleźć równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$, gdzie $x_1 \neq x_2$, wystarczy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

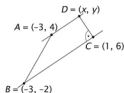
Odejmując stronami, otrzymujemy:

$$a(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$$

Stąd wynika wzór podany w ramce obok.



PRZYKŁAD 1 W trapezie prostokątnym $ABCD$ dane są: $A = (-3, 4)$, $B = (-3, -2)$, $C = (1, 6)$ oraz $BC \parallel AD$ i $CD \perp BC$. Znajdź współrzędne wierzchołka D .



Współczynnik kierunkowy prostej BC : $a = \frac{6+2}{1+3} = 2$

prosta AD :

$$y = 2x + b_1$$

$$4 = 2 \cdot (-3) + b_1$$

$$b_1 = 10$$

$$y = 2x + 10$$

prosta CD :

$$y = -\frac{1}{2}x + b_2$$

$$6 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 + b_2$$

$$b_2 = 6\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{2}$$

Proste AD i BC są równoległe, więc mają taki sam współczynnik kierunkowy.

Proste BC i CD są prostopadłe, więc współczynnik kierunkowy prostej CD to $-\frac{1}{a} = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} y = 2x + 10 \\ y = -\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2x + 10 = -\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{7}{5}$$

$$y = 2 \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) + 10 = \frac{36}{5}$$

$$D = \left(-\frac{7}{5}; \frac{36}{5}\right)$$

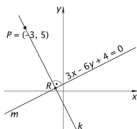
Wyznaczamy współrzędne punktu przecięcia prostych AD i CD .

ZADANIE W trapezie prostokątnym $ABCD$ dane są $A = (-1, 4)$, $B = (1, -2)$, $D = (2, 4)$ oraz wiadomo, że $AB \parallel CD$ i $BC \perp CD$. Znajdź współrzędne wierzchołka C .

zadania 1-6

- III Poniższy przykład pokazuje, jak można obliczyć odległość danego punktu od danej prostej.

PRZYKŁAD 2 Znajdź odległość punktu $P = (-3, 5)$ od prostej m opisanej równaniem $3x - 6y + 4 = 0$.



Sporządzamy rysunek pomocniczy.

prosta m : $y = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$

..... Znajdujemy równanie kierunkowe prostej m .

prosta k : $y = -2x + b$
 $5 = -2 \cdot (-3) + b$
 $b = -1$
 $y = -2x - 1$

..... Znajdujemy równanie prostej k prostopadłej do prostej m , przechodzącej przez punkt P .

Punkt R : $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \\ y = -2x - 1 \end{cases}$

..... Wyznaczamy współrzędne punktu przecięcia prostych m i k .

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$y = -2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 1 = \frac{1}{3}$$

$$R = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$|PR| = \sqrt{\left(-3 + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(5 - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{196}{9}} = \frac{\sqrt{245}}{3} = \frac{7\sqrt{5}}{3}$$

ZADANIE Znajdź odległość punktu $P = (0, 2)$ od prostej o równaniu $2x + y + 5 = 0$.

Aby ustalić odległość między dwiema prostymi równoległymi, można postępować jak w poprzednim przykładzie (tzn. znaleźć prostą prostopadłą do nich, następnie obliczyć współrzędne punktów przecięcia tej prostej z danymi prostymi i odległość między tymi punktami). Można też skorzystać ze wzoru pokazanego na sąsiedniej stronie.

Odległość d między prostymi równoległymi o równaniach

$$Ax + By + C_1 = 0 \text{ i } Ax + By + C_2 = 0:$$

$$d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Z powyższego wzoru warto korzystać tylko wówczas, gdy rozważane proste nie są prostopadłe do żadnej z osi układu współrzędnych. Dowód przeprowadzimy więc tylko dla takich przypadków.

Dowód

Rozważmy najpierw przypadek, gdy proste równoległe są nachylone do osi x pod kątem ostrym.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok.

Zacieniowany trójkąt jest prostokątny, więc:

$$\sin \beta = \frac{d}{|PQ|}$$

Ponieważ $\sin \beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$, więc:

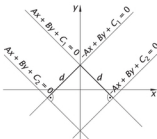
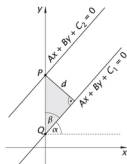
$$d = |PQ| \cdot \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{A}{B}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} = \frac{1}{\frac{A^2}{B^2} + 1} = \\ &= \frac{B^2}{A^2 + B^2} \end{aligned}$$

Ponieważ $P = (0, -\frac{C_2}{B})$ i $Q = (0, -\frac{C_1}{B})$, więc: $|PQ| = \left| \frac{C_2 - C_1}{B} \right| = \frac{|C_2 - C_1|}{|B|}$

$$\text{Zatem: } d = \frac{|C_2 - C_1|}{|B|} \cdot \sqrt{\frac{B^2}{A^2 + B^2}} = \frac{|C_2 - C_1|}{|B|} \cdot \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



Rozważmy teraz przypadek, gdy proste równoległe są nachylone do osi x pod kątem rozwartym. Odległość między takimi prostymi jest taka sama jak odległość między prostymi symetrycznymi do nich względem osi y . Jeśli rozważane proste są opisane równaniami $Ax + By + C_1 = 0$ oraz $Ax + By + C_2 = 0$, to proste do nich symetryczne względem osi y są opisane równaniami $-Ax + By + C_1 = 0$ oraz $-Ax + By + C_2 = 0$.

Wobec tego odległość między takimi prostymi można obliczyć, korzystając z udowodnionego wzoru:

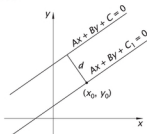
$$d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{(-A)^2 + B^2}} = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \square$$

Korzystając ze wzoru na odległość dwóch prostych równoległych, łatwo jest znaleźć wzór na odległość punktu od danej prostej.

Odległość d punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Dowód



Prostą równoległą do prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ można opisać równaniem $Ax + By + C_1 = 0$. Gdy ponadto przechodzi przez punkt (x_0, y_0) , to $Ax_0 + By_0 + C_1 = 0$, więc:

$$C_1 = -Ax_0 - By_0$$

Odległość d punktu (x_0, y_0) od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ jest równa odległości tej prostej od prostej $Ax + By + C_1 = 0$:

$$d = \frac{|C - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C + Ax_0 + By_0|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \square$$

ĆWICZENIE Rozwiąż zadanie z przykładu 2 (na str. 24), korzystając z powyższego wzoru.

zadania 7–12 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. a) Oblicz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A i B , gdzie $A = (-5, -7)$, $B = (8, -12)$.
b) Znajdź równanie prostej przechodzącej przez punkt $P = (1, -2)$ i równoległej do prostej przechodzącej przez punkty $K = (4, -5)$ i $L = (-10, 2)$.
2. Znajdź równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta UVW opuszczoną z wierzchołka V , gdzie $U = (-5, 2)$, $V = (-1, 6)$ i $W = (3, 0)$.
3. Jaki warunek musi spełniać współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych, aby prosta ta przecinała odcinek AB ?
a) $A = (3, 0)$, $B = (3, 2)$ b) $A = (1, 5)$, $B = (3, 5)$ c) $A = (-4, 0)$, $B = (-4, 2)$

4. a) Znajdź równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i prostopadłej do prostej KL , jeśli $K = (-3, 2)$ i $L = (95, -10)$.

b) Znajdź równanie symetralnej odcinka AB , jeśli $A = (-5, -2)$, $B = (7, 6)$.

5. Znajdź współrzędne punktu symetrycznego do punktu $P = (2, 3)$ względem prostej o równaniu $y = -\frac{1}{2}x - 4$.

6. a) Znajdź ortocentrum trójkąta o wierzchołkach: $(-3, 4)$, $(2, -2)$, $(1, 5)$.

b) Znajdź środek ciężkości trójkąta o wierzchołkach: $(-3, 2)$, $(1, -2)$, $(3, 4)$.

7. Uzasadnij, że prosta l jest równoległa do prostej k , i oblicz odległość między tymi prostymi.

a) prosta l : $2x - 4y + 1 = 0$

prosta k : $x - 2y - 1 = 0$

b) prosta l : $y = \frac{2}{3}x + 3$

prosta k : $y = 0,4x - 2$

8. Oblicz odległość punktu A od prostej o podanym równaniu.

a) $A = (-1, 3)$, $2x - y + 3 = 0$

b) $A = (2, -7)$, $y = -\frac{1}{3}x + 2$

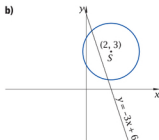
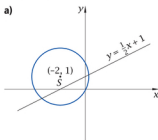
9. a) Oblicz długość wysokości trójkąta o wierzchołkach $A = (1, 4)$, $B = (-3, -2)$ i $C = (5, 2)$, opuszczonej z wierzchołka A , a następnie oblicz pole tego trójkąta.

b) Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach: $A = (-2, -5)$, $B = (1, 4)$, $C = (5, 7)$.

10. Punkt $P = (3, 4)$ jest wierzchołkiem równoległoboku, którego jeden bok leży na prostej o równaniu $y = x$, a drugi — na prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 1$. Oblicz pole tego równoległoboku.

11. Oblicz długość promienia okręgu o środku $S = (7, -2)$, stycznego do prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x - 2$.

12. Okrąg o środku S wycina z prostej cięciwę o długości 4 (zob. rysunek). Oblicz długość promienia tego okręgu.



MINISPRAWDZIAN

51. Niech $A = (-2, 3)$, $B = (6, 7)$ i $C = (5, t)$. Wskaż wartość t , dla której prosta AB jest prostopadła do prostej BC .

- A. $t = 5$ B. $t = 9$ C. $t = 6,5$ D. $t = 7,5$

52. Który z poniższych punktów jest najbardziej oddalony od prostej o równaniu $3x - 4y + 6 = 0$?

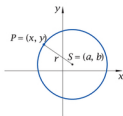
- A. $(0, 7)$ B. $(-1, 5)$ C. $(-6, 0)$ D. $(-3, -4)$

53. Dwa wierzchołki trójkąta leżą na prostej o równaniu $y = \frac{1}{3}x + 4$ i odległość między nimi jest równa 10. Trzecim wierzchołkiem trójkąta jest punkt $(1, -4)$. Pole tego trójkąta jest równe:

- A. 2,5 B. $\frac{25\sqrt{10}}{2}$ C. 4,5 D. $\frac{\sqrt{10}}{4}$

RÓWNANIE OKRĘGU

I ĆWICZENIE A Sprawdź, które z podanych punktów: $A = (7, -3)$, $B = (5, 7)$, $C = (-2, 0)$, $D = (-5, 7)$ należą do okręgu o środku $S = (2, 3)$ i promieniu 5.



Niech $S = (a, b)$ będzie środkiem okręgu o promieniu r . Punkt $P = (x, y)$ należy do tego okręgu, gdy jego odległość od punktu S jest równa r . Korzystając ze wzoru na odległość dwóch punktów, otrzymujemy równość:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

Zatem punkt $P = (x, y)$ należy do okręgu o środku $S = (a, b)$ i promieniu r , gdy jego współrzędne spełniają równanie zapisane w poniższej ramce.

Postać kanoniczna równania okręgu
o środku $S = (a, b)$ i promieniu r ($r > 0$):

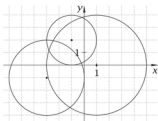
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

ĆWICZENIE B a) Ustal, jakie współrzędne ma środek okręgu o równaniu:

$$(x + 5)^2 + (y - 13)^2 = 5$$

Jaką długość ma promień tego okręgu?

b) Zapisz równania okręgów przedstawionych na rysunku.

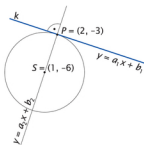


c) Zapisz równanie okręgu o środku w punkcie $S = (0, 0)$ i promieniu 7.

zadania 1-7 ►

II

PRZYKŁAD Znajdź równanie prostej stycznej w punkcie $P = (2, -3)$ do okręgu o równaniu $(x - 1)^2 + (y + 6)^2 = 10$.



Wykonujemy rysunek pomocniczy; współrzędne środka okręgu odczytujemy z równania; szukana styczna (prosta k) jest prostopadła do prostej PS .

$$a_2 = \frac{-3 + 6}{2 - 1} = 3$$

$$a_1 = -\frac{1}{a_2} = -\frac{1}{3}$$

Równanie prostej k : $y = -\frac{1}{3}x + b_1$

$$-3 = -\frac{1}{3} \cdot 2 + b_1, \text{ stąd } b_1 = -\frac{7}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$$

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej PS ; korzystamy ze wzoru $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej PS .

Punkt $P = (2, -3)$ leży na prostej k , więc jego współrzędne spełniają równanie tej prostej.

Zapisujemy równanie prostej k .

ZADANIE Znajdź równanie prostej stycznej w punkcie $(-1, 1)$ do okręgu o równaniu $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

zadania 8-11 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Zapisz równanie okręgu o środku w punkcie A i promieniu r .

a) $A = (0, 0)$, $r = 30$

d) $A = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right)$, $r = \frac{3}{4}$

b) $A = (0, -4)$, $r = 1$

e) $A = (1, 0)$, $r = 2\sqrt{2}$

c) $A = (-2, -11)$, $r = 1,1$

f) $A = (\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, $r = 2\sqrt[4]{3}$

2. Które z podanych punktów leżą na okręgu o równaniu $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 13$?

$P = (0, 0)$ $Q = (3, -5)$ $R = (1, -2)$ $S = (0, -1)$ $T = (5, -8)$ $U = (-10, -5)$

3. Znajdź równanie:

a) okręgu, którego średnicą jest odcinek o końcach $(-8, -2)$ i $(-5, 3)$,

b) okręgu o środku $(1, 7)$, przechodzącego przez początek układu współrzędnych,

c) okręgu, na którym leży punkt $(0, 2)$ i którego środkiem jest punkt $(8, -5)$,

d) okręgu o środku w punkcie $(8, -9)$, stycznego do osi x .

4. Zapisz równania okręgów:

a) o promieniu 7, stycznych do obu osi układu współrzędnych,

b) stycznych do obu osi układu współrzędnych oraz do prostej o równaniu $y = -8$,

c) których środki leżą na prostej o równaniu $x = 5$ i które są styczne do obu osi układu współrzędnych.

5. Czy okręgi o podanych równaniach są styczne, przecinają się czy są rozłączne?

a) $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 16$

d) $x^2 + y^2 = 10$

$(x+6)^2 + (y-3)^2 = 9$

$(x+1)^2 + (y-7)^2 = 26$

b) $(x-2)^2 + (y+7)^2 = 18$

e) $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 9$

$(x-7)^2 + (y+7)^2 = 8$

$x^2 + (y-10)^2 = 16$

c) $(x+6)^2 + y^2 = 49$

f) $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 144$

$(x+6)^2 + (y+8)^2 = 4$

$(x+1)^2 + (y+5)^2 = 4$

6. Znajdź równania okręgów o środku S , stycznych do podanego okręgu.

a) $S = (3, -6)$, $(x+9)^2 + (y+1)^2 = 4$

b) $S = (-1, 3)$, $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 49$

7. Zapisz równania okręgów o środkach na osi x i promieniu 4, stycznych do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 100$.

8. Znajdź równanie prostej stycznej do okręgu o podanym równaniu w punkcie P .

a) $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 10$

$P = (6, -3)$

b) $(x+5)^2 + (y+1)^2 = 13$

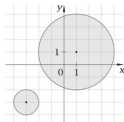
$P = (-8, 1)$

9. Z punktu P poprowadzono dwie proste styczne w punktach $(-3, 4)$ i $(1, 0)$ do okręgu o równaniu $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$. Znajdź współrzędne punktu przecięcia tych stycznych.

10. Punkt $P = (x, y)$ należy do koła o środku $S = (a, b)$ i promieniu r , gdy jego współrzędne spełniają nierówność $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$.

a) Opisz za pomocą nierówności koła zaznaczone na rysunku obok.

b) Zapisz nierówność, którą spełniają współrzędne punktów nienależących do koła o środku $S = (0, 4)$ i promieniu $\frac{1}{2}$.



11. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne spełniają podany warunek.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 36 \\ x^2 + (y-1)^2 \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ (x+5)^2 + (y-2)^2 \geq 9 \end{cases}$

c) $x^2 + (y-6)^2 \leq 9$
lub $x^2 + y^2 \leq 4$

MINISPRAWDZIAN

51. Ustal, jakie jest położenie punktu $P = (-3, 4)$ względem okręgu opisanego równaniem $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 10$.

A. Punkt P jest środkiem tego okręgu.

B. Punkt P leży wewnątrz tego okręgu, ale nie jest jego środkiem.

C. Punkt P leży na tym okręgu.

D. Punkt P leży na zewnątrz tego okręgu.

52. Koło ograniczone okręgiem o równaniu $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 9$ ma pole równe:

A. 3π

B. 6π

C. 9π

D. 81π

53. Odcinek o końcach $(-2, 5)$ i $(4, -1)$ jest średnicą okręgu o równaniu:

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 18$

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 72$

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 18$

D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 72$

INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA UKŁADU RÓWNAŃ

- I** Niektóre typy równań opisują pewne figury w układzie współrzędnych. Układ takich równań można interpretować graficznie, a jego rozwiązywanie jest poszukiwaniem wspólnych punktów tych figur.

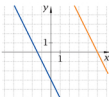
Przyjrzyj się poniższym układom równań i ich interpretacjom geometrycznym.

$$\begin{cases} x - 3y + 2 = 0 \\ x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$$



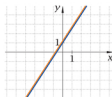
Te proste przecinają się w jednym punkcie — układ równań ma jedno rozwiązanie, jest to układ oznaczony.

$$\begin{cases} 2x + y - 10 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$$



Proste są równoległe, nie mają punktów wspólnych — układ równań nie ma rozwiązań, jest to układ sprzeczny.

$$\begin{cases} 3x - 2y + 2 = 0 \\ -1,5x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

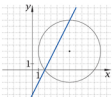


Oba równania opisują tę samą prostą. Współrzędne każdego punktu tej prostej spełniają układ równań — układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, jest to układ nieoznaczony.

zadania 1-2 ►

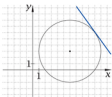
- II** Oto inne przykłady układów równań i ich interpretacje geometryczne:

$$\begin{cases} (x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases}$$



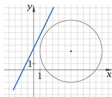
Prosta przecina okrąg w dwóch punktach. Układ równań ma dwa rozwiązania.

$$\begin{cases} (x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25 \\ 4x + 3y - 58 = 0 \end{cases}$$



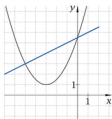
Prosta jest styczna do okręgu. Układ równań ma jedno rozwiązanie.

$$\begin{cases} (x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25 \\ 3x - 2y + 7 = 0 \end{cases}$$



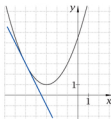
Prosta jest rozłączna z okręgiem. Układ równań jest sprzeczny.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 5,5 \\ x - 2y + 11 = 0 \end{cases}$$



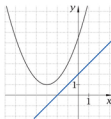
Prosta przecina parabolę w dwóch punktach. Układ równań ma dwa rozwiązania.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 5,5 \\ y = -2x - 7 \end{cases}$$



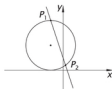
Prosta jest styczna do paraboli. Układ równań ma jedno rozwiązanie.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 5,5 \\ y = x + 2 \end{cases}$$



Prosta nie ma punktów wspólnych z parabolą. Układ równań nie ma rozwiązań, jest sprzeczny.

PRZYKŁAD 1 Znajdź współrzędne punktów, w których prosta opisana równaniem $y = -3x + 1$ przecina okrąg o równaniu $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$.



$$\begin{cases} y = -3x + 1 \\ (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4 \end{cases}$$

$$(x + 1)^2 + (-3x + 1 - 2)^2 = 4$$

$$x^2 + 2x + 1 + 9x^2 + 6x + 1 = 4$$

$$10x^2 + 8x - 2 = 0$$

$$5x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$\Delta = 36$$

$$\begin{cases} x = \frac{-4-6}{2 \cdot 5} = -1 \\ y = -3 \cdot (-1) + 1 = 4 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = \frac{-4+6}{2 \cdot 5} = \frac{1}{5} \\ y = -3 \cdot \frac{1}{5} + 1 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

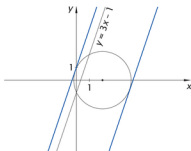
$$P_1 = (-1, 4), \quad P_2 = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Szukamy współrzędnych punktów, które spełniają oba równania.

ZADANIE Znajdź współrzędne punktów, w których prosta opisana równaniem $y = 2x - 8$ przecina okrąg o równaniu $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$.

PRZYKŁAD 2 Znajdź równanie prostej równoległej do prostej opisanej równaniem $y = 3x - 1$ i stycznej do okręgu o równaniu $(x - 2)^2 + y^2 = 5$.



Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Równanie kierunkowe szukanej prostej ma postać: $y = 3x + b$

Szukana prosta jest równoległa do prostej $y = 3x - 1$, ma więc współczynnik kierunkowy równy 3.

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = 5 \\ y = 3x + b \end{cases}$$

Prosta jest styczna do okręgu, gdy ma z nim jeden punkt wspólny, tak więc układ równań powinien mieć jedno rozwiązanie.

$$(x - 2)^2 + (3x + b)^2 = 5$$

$$x^2 - 4x + 4 + 9x^2 + 6bx + b^2 = 5$$

$$10x^2 + (6b - 4)x + b^2 - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (6b - 4)^2 - 4 \cdot 10(b^2 - 1) = 36b^2 - 48b + 16 - 40b^2 + 40 = \\ &= -4b^2 - 48b + 56 \end{aligned}$$

$$-4b^2 - 48b + 56 = 0$$

$$b^2 + 12b - 14 = 0$$

$$\Delta_1 = 144 + 56 = 200$$

$$\sqrt{\Delta_1} = 10\sqrt{2}$$

$$b_1 = \frac{-12 - 10\sqrt{2}}{2} = -6 - 5\sqrt{2}$$

$$b_2 = \frac{-12 + 10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} - 6$$

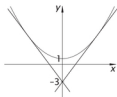
Układ równań ma jedno rozwiązanie, gdy otrzymane równanie kwadratowe ma jeden pierwiastek, czyli gdy $\Delta = 0$.

Obliczamy, dla jakich wartości b zachodzi równość $\Delta = 0$.

Odp. Warunki zadania spełniają dwie proste: $y = 3x - 6 - 5\sqrt{2}$ i $y = 3x + 5\sqrt{2} - 6$.

ZADANIE Znajdź równanie prostej równoległej do prostej opisanej równaniem $y = -2x + 3$ i stycznej do okręgu o równaniu $x^2 + (y - 3)^2 = 2$.

PRZYKŁAD 3 Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których prosta o równaniu $y = ax - 3$ ma jeden punkt wspólny z parabolą o równaniu $y = \frac{1}{9}x^2 + 1$.



Sporządzamy rysunek pomocniczy.

$$\begin{cases} y = ax - 3 \\ y = \frac{1}{9}x^2 + 1 \end{cases}$$

Szukamy punktów wspólnych prostej i paraboli.

$$ax - 3 = \frac{1}{9}x^2 + 1$$

$$\frac{1}{9}x^2 - ax + 4 = 0$$

$$\Delta = a^2 - 4 \cdot \frac{1}{9} \cdot 4 = a^2 - \frac{16}{9}$$

$$\Delta = 0, \text{ gdy } a^2 = \frac{16}{9}$$

Równanie ma jedno rozwiązanie, gdy $\Delta = 0$.

$$a = \frac{4}{3} \quad \text{lub} \quad a = -\frac{4}{3}$$

ZADANIE Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których prosta o równaniu $y = ax + 1$ ma jeden punkt wspólny z parabolą o równaniu $y = -25x^2$.

zadania 3–15 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Ustal, ile rozwiązań ma podany układ równań, korzystając z jego interpretacji geometrycznej.

a) $\begin{cases} y = 3x - 7 \\ y = -x + 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ 2x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 6x - 3y = 12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x + 7y = -1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

2. Dla jakiej wartości parametru p podany układ równań jest sprzeczny?

a) $\begin{cases} px + 2y = 4 \\ 3x + (1 + p)y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = 2 - 2p \\ 2x - py = -3p \end{cases}$

3. Znajdź równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $y = 2x + 3$, która ma z parabolą o równaniu $y = x^2 - 2$ jeden punkt wspólny.

4. Oblicz, ile punktów wspólnych mają podana prosta i parabola.

a) $y = -2x + 1$ $y = x^2 + 2x - 4$

c) $x - 2y + 3 = 0$ $y = 5x^2 - 2,5x + 3$

b) $3x - y + 1 = 0$ $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$

d) $x - y + 1 = 0$ $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 1$

5. a) Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których parabola o równaniu $y = x^2 + 1$ i prosta o równaniu $y = ax$ mają jeden punkt wspólny.

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których parabola opisana równaniem $y = px^2 + 1$ i prosta o równaniu $y = x$ mają jeden punkt wspólny.

6. Ustal, w jakich punktach podany okrąg przecina osie układu współrzędnych.

a) $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$

b) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$

c) $(x + 7)^2 + (y - 1)^2 = 49$

7. Znajdź współrzędne punktów wspólnych prostej i okręgu o równaniach:

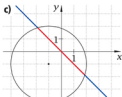
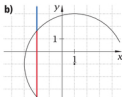
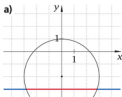
a) $y = -2x + 3$, $x^2 + y^2 = 4$

c) $y = -2x + 3$, $(x + 3)^2 + y^2 = 4$

b) $x - 2y - 2 = 0$, $x^2 + (y - 1)^2 = \frac{24}{5}$

d) $3x - y + 1 = 0$, $(x - 3)^2 + y^2 = 10$

8. Oblicz długość zaznaczonej cięciwy okręgu.



9. Oblicz długość cięciwy wyciętej z prostej o równaniu $y = -2x + 1$ przez okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 4$.

10. Prosta o równaniu $y = x + 4$ przecina okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 36$ w punktach A i B . Odcinek BC jest średnicą tego okręgu. Oblicz pole trójkąta ABC .

11. Znajdź równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $y = 2x$ i stycznej do okręgu o równaniu:

a) $x^2 + y^2 = 6$

b) $(x + 4)^2 + y^2 = 1$

c) $x^2 + (y + 5)^2 = 4$

d) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$

12. Znajdź równania stycznych do okręgu opisanego równaniem $x^2 + y^2 = 1$:

a) przechodzących przez $P = (0, -5)$,

c) prostopadłych do prostej $y = 2x$,

b) równoległych do prostej $y = x$,

d) przechodzących przez $R = (1, 2)$.

13. Znajdź równanie okręgu o promieniu 10, stycznego do prostej o równaniu $y = \frac{1}{3}x$ oraz do prostej o równaniu $y = -\frac{1}{3}x$.

- 14. a)** Znajdź wszystkie wartości b , dla których prosta o równaniu $y = \frac{1}{3}x + b$ jest styczna do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 10$.
- b)** Znajdź wszystkie wartości a , dla których prosta o równaniu $y = ax - 5$ przecina okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 5$ w dwóch punktach.
- c)** Jaką długość powinien mieć promień okręgu o środku w punkcie $S = (0, 0)$, aby okrąg ten nie miał punktów wspólnych z prostą o równaniu $y = -2x + 3$?
- d)** Znajdź wszystkie wartości t , dla których okrąg o środku $(t, 0)$ i promieniu 1 ma co najmniej jeden punkt wspólny z prostą o równaniu $y = 2x$.

Warto wiedzieć!

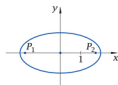
Na płaszczyźnie dane są dwa różne punkty P_1 i P_2 . Zbiór wszystkich punktów, których suma odległości od punktów P_1 i P_2 jest taka sama, tworzy pewną krzywą zwaną elipsą. Punkty P_1 i P_2 nazywamy ogniskami elipsy.

Elipsa i inne krzywe stożkowe (parabola i hiperbola) znane były już w starożytności. Po raz pierwszy pojawiły się w IV w. p.n.e. w pracach greckiego matematyka Menaichmosa, przyjaciela Platona. Użył on krzywych stożkowych do rozwiązywania jednego ze słynnych geometrycznych problemów starożytności — podwojenia sześcianu.



$$|PP_1| + |PP_2| = a$$

15. Przeczytaj informacje w ramce. Krzywa przedstawiona na rysunku obok to elipsa. Współrzędne każdego punktu tej elipsy spełniają warunek $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Jej ogniskami są punkty $P_1 = (-\sqrt{3}, 0)$ i $P_2 = (\sqrt{3}, 0)$. Znajdź współrzędne punktów przecięcia tej elipsy z osiami współrzędnych i dla każdego z nich oblicz sumę odległości od punktów P_1 i P_2 .



MINISPRAWDZIAN

51. Prosta o równaniu $y = x$ jest styczna do okręgu opisanego równaniem:

- A. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ C. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$
 B. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ D. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$

52. Jedna z prostych stycznych do okręgu o równaniu $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ i przechodząca przez początek układu współrzędnych ma równanie:

- A. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ B. $y = \sqrt{3}x$ C. $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ D. $y = \sqrt{2}x$

53. Częścią wspólną prostej o równaniu $y = 2x + 1$ i koła o środku $S = (0, 3)$ i promieniu 2 jest cięciwa o długości:

- A. $\frac{13\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{8}{5}$ C. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

POWTÓRZENIE

1. Znajdź równanie prostej przechodzącej przez punkt $(2, 1)$, która jest:

- a) równoległa do prostej o równaniu $5x + 3y - 4 = 0$,
- b) prostopadła do prostej o równaniu $2x - 3y + 1 = 0$.

2. Ze wszystkich punktów leżących na prostej $y = 2x + 10$ punkt P leży najbliżej początku układu współrzędnych. Oblicz współrzędne punktu P .

3. Punkty o współrzędnych $(-3, 5)$ i $(3, 1)$ są przeciwległymi wierzchołkami równoległoboku. Kolejnym z jego wierzchołków jest punkt o współrzędnych $(-3, -2)$. Jakie współrzędne ma czwarty wierzchołek tego równoległoboku?

4. Trzy proste o równaniach: $y = 2x + 4$, $y = -3x - 6$ i $x + 2y - 3 = 0$ ograniczają trójkąt. Wykaż, że ten trójkąt jest prostokątny i równoramienny, oraz znajdź równanie osi symetrii tego trójkąta.

5. Ustal, który z punktów: $A = (-2, 5)$ czy $B = (8, -4)$ leży bliżej prostej $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

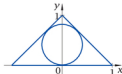
6. Pole trójkąta ABC jest równe 21. Punkty A i B leżą na prostej o równaniu $-3x + 2y - 1 = 0$, a $C = (-3, -1)$. Znajdź długość boku AB .

7. Znajdź równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek o końcach $A = (-2, -2)$ i $B = (4, 2)$.

8. Jednym z końców średnicy okręgu opisanego równaniem $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ jest punkt $A = (1, -\sqrt{3})$. Podaj współrzędne drugiego końca tej średnicy.

9. Punkt $P = (3, -2)$ jest środkiem okręgu i leży na prostej m . Prosta m przechodzi przez punkt $(0, 4)$, a okrąg przez punkt $(0, -3)$. Znajdź współrzędne punktów wspólnych prostej i okręgu.

10. Trójkąt zaznaczony na niebiesko (zob. poniższy rysunek) jest prostokątny i równoramienny, a przedstawiony okrąg jest styczny do boków tego trójkąta. Znajdź równanie okręgu.



11. Znajdź równanie okręgu, który jest symetryczny do okręgu o równaniu $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 5$ względem:

- a) osi x
- b) prostej $x = 3$

12. Znajdź równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC .

- a) $A = (0, 10)$, $B = (0, 0)$, $C = (24, 0)$
- b) $A = (0, 10)$, $B = (0, 0)$, $C = (6, 2)$

13. Znajdź równanie prostej stycznej w punkcie $P = (1, 5)$ do okręgu o równaniu $x^2 + (y - 2)^2 = 10$.

14. Znajdź wartości parametru C , dla których prosta opisana równaniem $4x + 3y + C = 0$ jest styczna do okręgu o równaniu $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$. Znajdź współrzędne punktu styczności.

15. Oblicz długość cięciwy wyciętej z prostej o równaniu $2y - x + 1 = 0$ przez okrąg o środku $(2, -1)$ i promieniu 3.

Prawdopodobieństwo

W 1654 roku sławny matematyk i fizyk Blaise Pascal (czyt. blez paskal) otrzymał list od znanego hazardzisty i namiętnego gracza w kości, kawalera de Méré. Autor listu prosił Pascala o odpowiedź na następujące pytanie: Ile razy powinno się rzucać dwiema kostkami do gry, aby warto było obstawiać, że przynajmniej raz na obu kostkach wypadną szóstki? Od tego momentu zaczęło się zainteresowanie Pascala teorią opisującą zjawiska, których dokładnego wyniku nie można przewidzieć, nazwaną później rachunkiem prawdopodobieństwa.



Prawdopodobieństwo – podstawowe pojęcia ■ Obliczanie prawdopodobieństwa ■ Drzewka ■ Wartość oczekiwana ■ Zasada mnożenia i zasada dodawania ■ Obliczanie prawdopodobieństwa (cd.) ■ Powtórzenie

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

– PODSTAWOWE POJĘCIA

- I W niektórych sytuacjach, na przykład gdy rzucamy kostką do gry lub monetą czy bierzemy udział w loterii fantowej, o wyniku działania decyduje tak zwany ślepy los. Czasem jednak można ocenić szansę interesującego nas rezultatu.

Każde działanie, którego wyniku nie można z góry przewidzieć, nazywamy **doświadczeniem losowym**. Oto kilka przykładów doświadczeń losowych:

- Rzut monetą

Możliwe są dwa wyniki tego doświadczenia: wypadnie reszka lub wypadnie orzeł.



Przyjmujemy, że szansa wypadnięcia reszki jest taka sama jak szansa wypadnięcia orła. W takim razie szansa, że w wyniku rzutu monetą otrzymamy orła, jest jak jeden do dwóch, czyli wynosi $\frac{1}{2}$. Taka sama jest szansa otrzymania reszki.

- Rzut kostką do gry (sześcienną)

Możliwych jest sześć wyników tego doświadczenia. Szansa otrzymania jednego z tych wyników, na przykład pięć oczek, jest jak jeden do sześciu, czyli wynosi $\frac{1}{6}$.



Oceniając szansę, że wypadną mniej niż trzy oczka, możemy rozumować tak: skoro dwa z sześciu możliwych rezultatów to liczby mniejsze od 3, więc szansa jest jak dwa do sześciu, czyli wynosi $\frac{1}{3}$.

- Rzut monetą i kostką

Wszystkie możliwe wyniki przedstawione są w tabelce (jest ich dwanaście). Szansa otrzymania każdego z tych wyników jest jednakowa i wynosi $\frac{1}{12}$.

A jaka jest szansa otrzymania pary: orzeł na monecie i parzysta liczba oczek na kostce? Wśród dwunastu możliwych wyników doświadczenia są trzy takie pary (zaznaczono je w tabeli). W takim razie szansa rozważanego rezultatu jest jak trzy do dwunastu, czyli $\frac{1}{4}$.

Przy rzucie monetą szansa wypadnięcia orła jest taka sama jak szansa wypadnięcia reszki i wynosi $\frac{1}{2}$. Nie znaczy to jednak, że gdy na przykład rzucimy monetą 50 albo 5000 razy, to na pewno połowę wyników będą stanowiły orły.

Takimi zagadnieniami zajmował się już w XVII wieku szwajcarski matematyk Jakub Bernoulli (czyt. bernuli). Udowodnił on twierdzenie zwane prawem wielkich liczb. Korzystając z tego prawa, możemy powiedzieć w pewnym uproszczeniu, że

jeśli wykonamy bardzo dużo rzutów monetą, to stosunek liczby orłów do liczby wszystkich rzutów będzie bliski $\frac{1}{2}$.

Fakt ten bywa czasem źle interpretowany. Na przykład niektórzy sądzą, że jeśli reszka wypadnie 10 razy z rzędu, to w kolejnym rzucie szansa wypadnięcia orła jest większa niż szansa wypadnięcia reszki. Należy jednak pamiętać, że za każdym razem (nawet w takiej sytuacji) wypadnięcie orła czy reszki jest tak samo prawdopodobne.

Opisując doświadczenie losowe, zaczynaliśmy od ustalenia, jakie wyniki możemy otrzymać. Każdy możliwy wynik doświadczenia losowego nazywamy **zdarzeniem elementarnym**. Zbiór wszystkich takich zdarzeń nazywamy **przestrzenią zdarzeń elementarnych** i będziemy oznaczać grecką literą Ω (czyt. omega).

W omówionych doświadczeniach losowych przestrzenie zdarzeń elementarnych można opisać w następujący sposób: niech litera O oznacza wypadnięcie orła, a litera R — wypadnięcie reszki, para (R, 1) — wypadnięcie na monecie reszki, a na kostce jedynki, para (R, 2) — wypadnięcie reszki i dwójki itd.

$$\text{Rzut monetą:} \quad \Omega = \{O, R\}$$

$$\text{Rzut kostką:} \quad \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\text{Rzut monetą i kostką:} \quad \Omega = \{(O, 1), (R, 1), (O, 2), (R, 2), \dots, (O, 6), (R, 6)\}$$

Uwaga. Te przestrzenie zdarzeń elementarnych są zbiorami skończonymi — składają się odpowiednio z dwóch, sześciu i dwunastu elementów. Można także rozważać doświadczenia losowe, których przestrzenie zdarzeń elementarnych są zbiorami nieskończonymi (na przykład gdy wybieramy w sposób losowy punkt należący do danej prostej). Tego typu doświadczeniami nie będziemy się jednak zajmować.

Oceniając szanse wyników doświadczeń, rozważaliśmy nie tylko zdarzenia elementarne. W doświadczeniu *rzut kostką* ocenialiśmy na przykład szansę zdarzenia: *wypadną mniej niż trzy oczka*. Temu zdarzeniu sprzyjają dwa zdarzenia elementarne, innymi słowy odpowiada mu 2-elementowy podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych.

Dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych będziemy nazywać **zdarzeniem losowym** i oznaczać wielką literą.

W tabeli podano przykłady zdarzeń losowych.

Doświadczenie losowe	Opis słowny zdarzenia losowego	Zbiór sprzyjających zdarzeń elementarnych
Rzut monetą	A — Wypadł orzeł.	$A = \{O\}$
Rzut kostką	B — Otrzymano 5 oczek.	$B = \{5\}$
Rzut kostką	C — Otrzymano parzystą liczbę oczek.	$C = \{2, 4, 6\}$
Rzut monetą i kostką	D — Otrzymano reszkę na monecie i więcej niż 3 oczka na kostce.	$D = \{(R, 4), (R, 5), (R, 6)\}$



Na rysunku obok w schematyczny sposób przedstawiono pewną przestrzeń zdarzeń elementarnych. Kropki oznaczają jednakowo prawdopodobne zdarzenia. Zdarzeniu Z sprzyja pięć spośród dziewięciu zdarzeń elementarnych. Zatem szansa, że zajdzie zdarzenie Z jest jak pięć do dziewięciu, czyli wynosi $\frac{5}{9}$. Tę liczbę nazywamy prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia Z .

Jeśli wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to **prawdopodobieństwo zdarzenia losowego** A będziemy oznaczać $P(A)$ i obliczać ze wzoru:

$$P(A) = \frac{n_A}{N}$$

N — liczba wszystkich zdarzeń elementarnych

n_A — liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A

Ta definicja nazywana jest klasyczną definicją prawdopodobieństwa. Można z niej korzystać tylko wówczas, gdy zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne i jest ich skończenie wiele.

Dla dowolnego zdarzenia A liczba n_A spełnia warunek $0 \leq n_A \leq N$. Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest liczbą nieujemną i nie większą od 1:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Uwaga. Prawdopodobieństwa zdarzeń wyraża się czasem za pomocą procentów.

Jeśli zdarzeniu losowemu nie sprzyja żadne zdarzenie elementarne, to nazywamy je **zdarzeniem niemożliwym** i oznaczamy symbolem $\emptyset$.

Jeśli zdarzeniu losowemu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne, to nazywamy je **zdarzeniem pewnym**. Zdarzenie pewne jest równe przestrzeni wszystkich zdarzeń elementarnych, oznaczamy je symbolem Ω .

$\emptyset$ — zdarzenie niemożliwe

$$P(\emptyset) = 0$$

Ω — zdarzenie pewne

$$P(\Omega) = 1$$

ĆWICZENIE A Spośród 15 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 15 losujemy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że numer wylosowanej kuli jest:

- a) liczbą większą od 9,
- b) liczbą mniejszą od 20,
- c) liczbą dwucyfrową o sumie cyfr równej 10?

W rozważanych dotąd doświadczeniach dosyć łatwo można było ustalić, że zdarzenia elementarne mają równe prawdopodobieństwa. Nie zawsze jednak jest to oczywiste.

ĆWICZENIE B Rzucamy dwiema monetami — pięciozłotówką i złotówką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na jednej z monet wypadnie orzeł, a na drugiej reszka?

Rozważmy doświadczenie polegające, podobnie jak w ćwiczeniu B, na rzucie dwiema monetami, ale tym razem jednakowymi.

Wiadomo, że w wyniku otrzymamy dwa orły albo dwie reszki, albo orła i reszkę. Gdybyśmy jednak przyjęli, że te trzy zdarzenia tworzą przestrzeń zdarzeń elementarnych, to nie moglibyśmy zastosować definicji klasycznej do obliczania prawdopodobieństwa, bowiem te zdarzenia nie są jednakowo prawdopodobne. Zwróćmy bowiem uwagę, iż szansa, że wypadną orzeł i reszka jest, podobnie jak przy rzucaniu dwiema różnymi monetami, większa niż szansa, że wypadną np. dwa orły.

Aby zdarzenia były jednakowo prawdopodobne, należy w tym wypadku przyjąć, że przestrzeń zdarzeń elementarnych to zbiór czteroelementowy:

$$\Omega = \{ (O, O), (O, R), (R, O), (R, R) \}$$

Z historii

W słynnej *Wielkiej encyklopedii francuskiej* z XVIII wieku umieszczono artykuł *Orzeł i reszka*, którego autorem był Jean Le Rond d'Alembert (czyt. żan le ra d'alambert) — znany francuski matematyk. W artykule tym autor popełnił błąd, przyjmując, że przy dwukrotnym rzucie monetą są tylko trzy możliwe wyniki i każdy z tych wyników jest jednakowo prawdopodobny.

Okazuje się, że w czasach, gdy nieznane były jeszcze metody teorii prawdopodobieństwa, nawet tak znakomitemu matematykowi jak d'Alembert zdarzały się pomyłki przy ocenie prawdopodobieństwa zdarzeń. W jednym z kolejnych wydań encyklopedii d'Alembert poprawił swój artykuł, podając prawidłowe wytłumaczenie problemu.

PRZYKŁAD

W urnie jest pięć kul białych, trzy czerwone i jedna zielona.

a) Losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej lub czerwonej.

$$N = 5 + 3 + 1 = 9$$

..... $\Omega = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, c_1, c_2, c_3, z\}$, gdzie b_1
..... oznacza wyciągnięcie pierwszej białej kuli,
..... b_2 — drugiej białej kuli itd.

A — Wylosowano kulę białą lub czerwoną.

$$n_A = 5 + 3 = 8$$

..... $A = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, c_1, c_2, c_3\}$
.....

$$P(A) = \frac{8}{9}$$

b) Wylosowano trzy kule, każdą innego koloru, i usunięto je z urny. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że następna wylosowana kula będzie czerwona?

$$N = 4 + 2 = 6$$

..... Po usunięciu kul w urnie zostały 4 kule białe
..... i 2 czerwone.

..... $\Omega = \{b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2\}$
.....

B — Wylosowana kula jest czerwona.

$$n_B = 2$$

..... $B = \{c_1, c_2\}$
.....

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ZADANIE

W torebce jest 8 cukierków czekoladowych, 10 owocowych i 4 krówki.

a) Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania cukierka czekoladowego lub krówki.

b) Z torebki zabrano 6 cukierków czekoladowych i jedną krówkę. Jakie jest teraz prawdopodobieństwo wylosowania cukierka czekoladowego lub krówki?

Uwaga. W powyższym przykładzie, w podpunkcie a) przyjęliśmy, że jest 9 zdarzeń elementarnych. Gdybyśmy przyjęli, że są 3 zdarzenia elementarne: 1) wylosowano białą kulę, 2) wylosowano czerwoną kulę, 3) wylosowano zieloną kulę, to zdarzenia te nie byłyby jednakowo prawdopodobne i nie można byłoby zastosować klasycznej definicji przy obliczaniu prawdopodobieństwa.

zadania 1–7 ►

II Wyobraźmy sobie, że wybieramy w sposób losowy dowolny dzień listopada 2021 roku.

Listopad ma 30 dni, zatem przestrzeń zdarzeń elementarnych możemy określić następująco:

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 29, 30\}$$

Liczby oznaczają odpowiednie dni listopada.

2021	NOVEMBER + LISTOPAD + NOVEMBER							2021
45	1	2	3	4	5	6	7	
46	8	9	10	11	12	13	14	
47	15	16	17	18	19	20	21	
48	22	23	24	25	26	27	28	
49	29	30	1	2	3	4	5	

Rozważmy zdarzenia:

A — Wylosowanym dniem jest niedziela lub dzień świąteczny.

B — Wylosowanym dniem jest dzień powszedni.

Korzystając z kalendarza, otrzymujemy:

$$A = \{1, 7, 11, 14, 21, 28\}$$

$$B = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30\}$$

ĆWICZENIE C Dla zdarzeń A i B opisanych powyżej oblicz $P(A)$ i $P(B)$.

Zauważmy, że zdarzeniu B sprzyjają wszystkie te i tylko te zdarzenia elementarne, które nie sprzyjają zdarzeniu A . Zatem zbiór odpowiadający zdarzeniu B to zbiór równy różnicy $\Omega \setminus A$.

Zdarzenie $\Omega \setminus A$ nazywamy **zdarzeniem przeciwnym** do zdarzenia A i oznaczamy symbolem A' .

Zdarzenia losowe to pewne zbiory, więc własności zdarzeń przeciwnych można zapisać za pomocą działań na zbiorach.

Jeśli zdarzenia A i A' są zdarzeniami przeciwnymi, to:

$$A \cap A' = \emptyset \quad A \cup A' = \Omega \quad P(A') = 1 - P(A)$$

Uwaga. Zauważ, że zdarzenie pewne jest zdarzeniem przeciwnym do niemożliwego.

Pierwsza i druga z powyższych równości są oczywiste (wynikają z definicji zdarzenia przeciwnego). Oto jak można uzasadnić trzecią z tych równości:

Niech N oznacza liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych, a n_A i $n_{A'}$ — liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających odpowiednio zdarzeniom A oraz A' . Wówczas:

$$P(A') = \frac{n_{A'}}{N} = \frac{N - n_A}{N} = 1 - \frac{n_A}{N} = 1 - P(A)$$

Gdy mamy obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, czasami łatwiej jest najpierw obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego.

ĆWICZENIE D Rzucamy sześcienną kostką do gry. Dla każdego z poniższych zdarzeń określ zdarzenie przeciwne i ustal jego prawdopodobieństwo.

A — Wypadnie jedynka.

B — Wypadnie nieparzysta liczba oczek.

C — Wypadnie 5 lub więcej oczek.

D — Wypadnie liczba oczek podzielna przez 6.

zadania 8–20 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Losujemy jedną kartę z talii 52 kart. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania:

- a) trefla,
- b) figury,
- c) damy kier,
- d) dziesiątki,
- e) blotki z liczbą parzystą.

Typowa talia kart do gry składa się z 52 kart: 13 pików, 13 kierów, 13 kar i 13 trefli.



pik



kier



karo



trefl

W każdym z tych karcianych kolorów są 4 figury (as, król, dama i walet) oraz 9 blotek (od dwójki do dziesiątki).

2. a) Czy większe jest prawdopodobieństwo wylosowania figury spośród wszystkich kierów, czy — kiera spośród wszystkich 52 kart talii?

b) Z talii 52 kart wylosowano już 3 karty i wszystkie są asami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że czwarta wylosowana karta też będzie asem?

3. Najbardziej popularnym nazwiskiem w USA jest Smith — nosi je 1,01% mieszkańców. Smith to po angielsku „kował”. Ciekawe, że w Polsce bardzo dużo osób nosi nazwisko Kowalski — około 140 tys. spośród ok. 38 mln mieszkańców. Co jest bardziej prawdopodobne: że losowo wybrany Amerykanin to Smith czy że losowo wybrany Polak to Kowalski?

Na fotografiach są przedstawione trzy kostki do gry: sześcienna (z liczbami od 1 do 6), czworościenna (z liczbami od 1 do 4) oraz dwunastościenna (z liczbami od 1 do 12).

W typowej kostce sześciennej suma oczek na przeciwległych ściankach wynosi 7, a w dwunastościennej wynosi 13. Natomiast na każdej ściance typowej kostki czworościennej umieszczone są trzy liczby, ale tak, że liczby przy wspólnym wierzchołku ścianek są takie same. Wynikiem rzutu taką kostką jest liczba przy wierzchołku, który nie leży na stole.



4. a) Rzucamy sześcienną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wypadną co najmniej dwa oczka?

b) Rzucamy dwunastościenną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wypadnie liczba oczek większa niż 9.

c) Rzucamy czworościenną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wypadnie liczba oczek będąca liczbą pierwszą?



5. Powyżej przedstawiono siatki nietypowych kostek sześciennych. Którą kostkę należy wybrać, aby przy jednym rzucie mieć największą szansę otrzymania:

- a) szóstki, b) szóstki lub jedynek, c) nieparzystej liczby oczek?

6. W urnie jest 16 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 16. Kule z numerami od 1 do 3 są białe, z numerami od 4 do 7 — czerwone, a pozostałe są zielone. Losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo opisanego zdarzenia.

- a) Wylosowana kula jest czerwona lub zielona.
b) Liczba na wylosowanej kuli jest podzielna przez 3.
c) Wylosowano kulę zieloną z liczbą jednocyfrową.
d) Wylosowano kulę czerwoną lub z numerem parzystym.

7. W pudełku zmieszano 30 ziarenek fasoli, 20 ziarenek ciecierzycy i 50 ziarenek grochu.

- a) Jako pierwsze wylosowano ziarenko fasoli. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że drugim wylosowanym ziarenkiem nie będzie fasola?
b) Z pudełka usunięto po 10 ziarenek każdego rodzaju. Jakie jest teraz prawdopodobieństwo wylosowania ziarenka fasoli?

◀ **8.** Rzucamy sześcienną kostką do gry. Wśród poniższych zdarzeń znajdź parę zdarzeń przeciwnych. Jedno ze zdarzeń nie ma pary. Określ zdarzenie do niego przeciwne.

- | | |
|--|------------------------|
| A_1 — Liczba oczek jest mniejsza od 5. | $A_5 = \{1, 4, 6\}$ |
| A_2 — Liczba oczek jest podzielna przez 3. | $A_6 = \{2, 4, 6\}$ |
| A_3 — Liczba oczek jest liczbą pierwszą. | $A_7 = \{1, 2, 4, 5\}$ |
| A_4 — Liczba oczek jest większa od 4. | |

9. Rzucamy czterokrotnie monetą. Wśród poniższych zdarzeń znajdź trzy pary zdarzeń przeciwnych. Jedno z opisanych zdarzeń nie ma pary. Określ zdarzenie do niego przeciwne.

- A_1 — Orzeł wypadnie co najmniej raz.
 A_2 — Orzeł wypadnie tyle samo razy co reszka.
 A_3 — Przynajmniej raz wypadnie reszka.
 A_4 — Orzeł wypadnie co najwyżej raz.
 A_5 — Orzeł nie wypadnie ani razu.
 A_6 — Orzeł wypadnie dwa, trzy lub cztery razy.
 A_7 — Wypadną same orły.

10. Wybieramy losowo jedną z początkowych czterdziestu cyfr występujących po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby π . Oblicz prawdopodobieństwo tego, że nie jest to 0 oraz prawdopodobieństwo tego, że nie jest to 1.

$\pi = 3,1415926535897932384626433832795028841971\dots$

Warto wiedzieć

W 1927 roku ukazała się książka *Zestaw liczb losowych* angielskiego naukowca L.H.C. Tippetta. Wszystkie 24 strony tej książki wypełniało 41 600 cyfr ułożonych (jak zapewniał autor) w przypadkowej kolejności. Książka stała się bestsellerem wśród książek naukowych.

Komu i do czego może się przydać losowo ułożony ciąg cyfr? Tablice liczb losowych są potrzebne naukowcom w wielu eksperymentach. Gdy na przykład trzeba zbadać skuteczność działania leków, ważne jest, by dobór pacjentów był zupełnie przypadkowy. Liczby losowe ułatwiają wybór odpowiedniego sposobu losowania badanych osób.

Można stwierdzić, że od czasu ukazania się pierwszych tablic liczb losowych rozwinął się cały „przemysł” związany z tworzeniem liczb losowych (ocenia się, że wartość tego rynku wynosi kilkadziesiąt miliardów dolarów).

L.H.C. Tippett opracował swoje tablice, wykorzystując przekształcone odpowiednie dane dotyczące powierzchni angielskich parafii. Współcześnie do tworzenia zestawów liczb losowych używa się programów komputerowych zwanych generatorami liczb losowych. Programy te są w informatyce niezwykle ważne, gdyż służą między innymi do zaszyfrowywania informacji i zabezpieczania danych.

11. Poniżej przedstawiono fragment tablicy liczb losowych. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybraną z tego zestawu cyfrą będzie 9, a jakie — że nie będzie to cyfra 7.

76052	05735	34843	67809	84927	29827	00812	65176
47134	48958	90863	05304	36333	61087	95482	30895
27919	50407	61154	49366	46870	25831	39449	86426
92222	12795	30723	50290	73967	36539	07714	09800
12340	02920	36288	81453	34026	87350	94393	02475
38696	97703	81305	11218	20537	68684	67208	92875

12. Losujemy jedną liczbę spośród wszystkich liczb dwucyfrowych.

- Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania liczby mniejszej od 98?
- Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania liczby o sumie cyfr większej od 3?
- Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 12?

13. W urnie jest 12 kul zielonych. Ile kul czerwonych trzeba dorzucić, aby prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej było równe 0,4?

14. W sali są dziewczęta i chłopcy. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana osoba będzie dziewczynką, wynosi $\frac{3}{5}$. Z sali wyszły trzy dziewczynki i prawdopodobieństwo wylosowania dziewczynki wyniosło wtedy $\frac{2}{9}$. Ile osób zostało w sali?

15. W urnie były kule białe i czerwone. Prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli wynosiło $\frac{2}{7}$. Gdy z urny wyjęto trzy kule białe i trzy czerwone, prawdopodobieństwo wylosowania czerwonej kuli wynosiło $\frac{2}{3}$. Ile kul było na początku w urnie?

16. W mieszance cukierków czekoladowych 25% stanowią galaretki, 60% pralinki owocowe, a resztę — trufle. Z torebki zawierającej tę mieszankę wyciągamy losowo cukierek.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest to trufla?

b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że nie jest to pralinka owocowa?



17. W pewnym mieście 20% mieszkańców to artyści, a 5% spośród nich to śpiewacy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany mieszkaniec tego miasta nie jest śpiewakiem?

18. W grze w okręty dwaj gracze umieszczają w kwadracie podzielonym na 100 kratek po 10 „okrętów”: jeden okręt czteromasztowy (zajmujący 4 kratki), dwa trójmasztowce, trzy dwumasztowce i cztery jednomasztowce (np. tak jak na rysunku obok). Następnie każdy gracz próbuje odgadnąć, gdzie leżą okręty zaznaczone przez przeciwnika.

a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że gracz trafi w okręt przeciwnika już w pierwszej próbie.

b) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w pierwszej próbie gracz trafi w największy okręt.

c) W który typ okrętu najłatwiej trafić (z największym prawdopodobieństwem) w pierwszej próbie?

d) Pierwsze trzy próby gracza były nieudane. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że trafi on w okręt w następnej próbie?

• e) Przeciwnik zgłosił, że w pierwszej próbie gracz trafił w okręt. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że trafiony okręt jest dwumasztowy?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

19. W równaniu $x^2 + kx + k = 0$ w miejsce k wstawiono liczbę wybraną losowo spośród liczb: $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że otrzymane równanie będzie miało jedno rozwiązanie?

20. a) Z talii 52 kart losujemy kolejno po jednej karcie. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że ostatnią wylosowaną kartą będzie as?
- b) W sali jest 9 chłopców i 12 dziewcząt. Przyjmijmy, że kolejność wychodzenia jest przypadkowa. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że ostatnią osobą, która wyjdzie z sali, będzie chłopak?
- c) Z pudełka, w którym było 6 kul białych i 4 kule czarne, losowano po jednej kuli. W końcu została jedna kula. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest ona czarna.

MINISPRAWDZIAN

51. W urnie jest siedem kul z numerami od 1 do 7. Losujemy jedną kulę. Niech a oznacza prawdopodobieństwo tego, że losując kulę z urny, trafimy na kulę z liczbą parzystą, b — z liczbą nieparzystą, a c — z liczbą pierwszą. Wynika stąd, że:

- A. $a = b = c$ B. $a < b < c$ C. $a < b = c$ D. $a = b < c$

52. Z talii wybrano zestaw kilkunastu kart. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana karta z tego zestawu będzie kierem, wynosiło $\frac{1}{3}$. Z zestawu usunięto 2 kiery i teraz prawdopodobieństwo tego, że karta wylosowana z pozostałych kart z zestawu będzie kierem, jest równe $\frac{1}{5}$. Ile kart początkowo było w zestawie?

- A. 12 B. 15 C. 16 D. 18

53. Z talii losujemy kolejno 3 karty. Jako zdarzenie A określimy wylosowanie co najmniej jednego pika. Które z poniższych zdarzeń będzie zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A ?

- A. Tylko jedna z wylosowanych kart jest pikiem.
 B. Wszystkie wylosowane karty to kiery.
 C. Żadna z wylosowanych kart nie jest pikiem.
 D. Jedna z wylosowanych kart nie jest pikiem.

OBLICZANIE PRAWDOPODOBIEŃSTWA

I ĆWICZENIE W jednym pudełku znajdują się cztery kule z liczbami od 1 do 4, w drugim pudełku są trzy kule z literami A , B , C . Losujemy po jednej kuli z każdego pudełka. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne.

W poprzednim rozdziale pokazaliśmy, jak za pomocą tabelki przedstawić wszystkie zdarzenia elementarne przy rzucie kostką i monetą (zob. s. 40). Podobne tabelki mogą być pomocne przy obliczaniu prawdopodobieństwa.

PRZYKŁAD 1 Rzucamy kostkami czworościenną i sześcienną. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma wyników będzie różna od 6?

A — Suma liczb na kostkach jest różna od 6.

A' — Suma liczb na kostkach wynosi 6.

I kostka \ II kostka	1	2	3	4	5	6
1					✓	
2				✓		
3			✓			
4		✓				

Przestrzeń zdarzeń elementarnych przedstawiamy za pomocą tabelki. Pola tabelki odpowiadają zdarzeniom elementarnym (parom liczb). Zaznaczone pola sprzyjają zdarzeniu A' .

$$N = 4 \cdot 6 = 24$$

$$n_{A'} = 4$$

$$P(A') = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

ZADANIE Rzucamy kostkami sześcienną i czworościenną. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że iloczyn otrzymanych liczb nie będzie równy 12?

PRZYKŁAD 2 Spośród pięciu kul ponumerowanych liczbami od 1 do 5 losujemy kolejno dwie kule i zapisujemy — od lewej do prawej — cyfrę z pierwszej kuli, a potem cyfrę z drugiej kuli. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba jest parzysta i większa od 30?

A — Otrzymana liczba jest parzysta i większa od 30.

I kula \ II kula	1	2	3	4	5
1					
2					
3		✓		✓	
4		✓			
5		✓		✓	

Rysujemy tabelkę. Ponieważ w tym doświadczeniu niemożliwe jest wylosowanie dwóch kul o tym samym numerze, więc nie bierzemy pod uwagę pól odpowiadających parom tych samych liczb (w tabelce je zacieniowano).

$$N = 5 \cdot 5 - 5 = 20$$

$$n_A = 5$$

$$P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

ZADANIE Spośród liczb 1, 2, 3, 4 i 5 losujemy kolejno dwie. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma tych liczb jest nieparzysta i mniejsza od 7?

PRZYKŁAD 3 W skarbonce jest sześć monet: dwuzłotówka, trzy złotówki i dwie pięćdziesięciogroszówki. Wybieramy losowo dwie monety. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy kwotę mniejszą niż 2 zł?

A — Wylosowana kwota jest mniejsza niż 2 zł.

	2 zł	1 zł ₁	1 zł ₂	1 zł ₃	50 gr ₁	50 gr ₂
2 zł						
1 zł ₁					✓	✓
1 zł ₂					✓	✓
1 zł ₃					✓	✓
50 gr ₁		✓	✓	✓		✓
50 gr ₂		✓	✓	✓	✓	

W tabeli 1 zł₁, 1 zł₂, 1 zł₃ oznaczają trzy różne monety jednoczłotowe, a 50 gr₁ i 50 gr₂ oznaczają dwie różne monety pięćdziesięciogroszowe. Nie możemy wylosować dwa razy tej samej monety, więc nie bierzemy pod uwagę pól odpowiadających parom tych samych monet.

$$N = 6 \cdot 6 - 6 = 30$$

$$n_A = 14$$

$$P(A) = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

ZADANIE W skarbonce są następujące monety: dwie pięcizłotówki, cztery dwuzłotówki i dwie złotówki. Losujemy dwie monety. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy więcej niż 3 zł?

Uwaga. W powyższym przykładzie interesowała nas otrzymana kwota, a nie kolejność wylosowanych monet, moglibyśmy więc inaczej opisać przestrzeń zdarzeń elementarnych — biorąc pod uwagę tylko połowę tabeli (jak na rysunku poniżej). Zdarzeń elementarnych byłoby 2 razy mniej, czyli 15, a zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A byłoby wówczas 7.

	2 zł	1 zł ₁	1 zł ₂	1 zł ₃	50 gr ₁	50 gr ₂
2 zł						
1 zł ₁					✓	✓
1 zł ₂					✓	✓
1 zł ₃					✓	✓
50 gr ₁						✓
50 gr ₂						

$$N = 15$$

$$n_A = 7$$

$$P(A) = \frac{7}{15}$$

zadania 1–10 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. a) Rzucamy sześcienną kostką i monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że na monecie wypadnie reszka, a na kostce — nie więcej niż 4 oczka?

b) Losujemy jedną kartę spośród wszystkich królów z talii oraz jedną kartę spośród wszystkich dam. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania w ten sposób dwóch kart tego samego koloru (np. dwóch trefli lub dwóch kar itd.)?

c) W jednej urnie są 3 kule — czerwona, biała i zielona, a w drugiej urnie są 2 kule — czerwona i biała. Losujemy po jednej kuli z każdej urny. Jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia dwóch kul w tym samym kolorze?

2. Rzucamy dwiema różnymi sześciennymi kostkami.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że co najmniej na jednej będzie jedynka?

b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że na obu będzie ta sama liczba oczek?

c) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że na każdej będzie co najmniej 5 oczek?

d) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek będzie równa 4.

e) Czy bardziej prawdopodobne jest, że suma wyrzuconych oczek będzie równa 5, czy — że będzie równa 10?

f) Jaka jest najbardziej prawdopodobna suma wyrzuconych oczek?

g) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że różnica między liczbami oczek wyrzuconych na kostkach (od większej odejmujemy mniejszą) będzie równa 2?

h) Jaka jest najbardziej prawdopodobna różnica między wynikami na kostkach (od większego wyniku odejmujemy mniejszy)?

3. Losujemy dwie karty spośród wszystkich figur pikowych.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jedną z wybranych kart będzie król?

b) Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania króla i damy?

4. W grze „kamień, papier, nożyczki” każdy z dwóch grających pokazuje albo pięść (kamień), albo otwartą dłoń (papier), albo dwa palce (nożyczki). Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że gra zakończy się wygraną nożyczek?



kamień wygrywa
z nożyczkami



papier wygrywa
z kamieniem



nożyczki wygrywają
z papierem

5. W skrzyni przechowywanych jest 6 różnych par butów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dwa losowo wybrane buty będą pochodziły z tej samej pary?

6. W sklepie zoologicznym są dwie myszy — biała i szara.

a) Wiadomo, że co najmniej jedna z myszy jest samcem. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że obie myszy są samcami?

b) Sprzedawca powiedział, że biała mysz jest samcem. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że obie myszy są samcami?

Zestaw do gry w domino składa się z 28 różnych kostek. Każda kostka podzielona jest na dwie części, a na każdej części jest od 1 do 6 oczek albo nie ma oczka.

7. Z zestawu kostek do gry w domino losujemy jedną kostkę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) na obu częściach wylosowanej kostki jest taka sama liczba oczek,

b) co najmniej na jednej z dwóch części wylosowanej kostki znajdują się 4 oczka,

c) suma oczek na wylosowanej kostce jest równa 8.

8. Na rysunku przedstawiono sytuację po kilku ruchach rozpoczętej partii domina. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że kostkę wybraną losowo spośród pozostałych będzie można dołączyć do kostek leżących już na stole?



9. Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką, której siatkę przedstawiono na rysunku obok. Jakie jest prawdopodobieństwo poniższych zdarzeń?

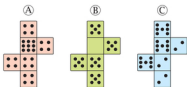
A — Dwa razy wypadnie ta sama liczba oczek.

B — W drugim rzucie wypadnie większa liczba oczek niż w pierwszym.

10. Na sześciennych kostkach (A), (B) i (C) umieszczono takie liczby oczek, jakie widać na rysunkach obok. Pierwszy gracz wybiera jedną z kostek, a drugi gracz — jedną z pozostałych i obaj rzucają swoimi kostkami. Wygrywa ten, który wyrzuci większą liczbę oczek.

a) Pierwszy gracz wybrał kostkę (A). Którą kostkę powinien wybrać drugi gracz, by mieć jak największą szansę wygranej?

- b) Czy jest wśród tych kostek najsilniejsza, to znaczy taka, że jeśli ją wybierze pierwszy gracz, to ma większą szansę wygrania niż gracz drugi, niezależnie od tego, którą z pozostałych kostek wybierze drugi gracz?



MINISPAWIDZIAN

51. Rzucamy sześcienną kostką oraz żetonem, który na jednej stronie ma jedną kropkę (1 oczko), a na drugiej — dwie. Wynikiem rzutu nazywamy iloczyn liczby oczek na kostce i żetonie. Niech A oznacza zdarzenie, że wynik jest liczbą parzystą, B — że jest wielokrotnością liczby 4, C — że jest większy od 5, D — że jest liczbą pierwszą. Która równość nie jest prawdziwa?

A. $P(A) = \frac{3}{4}$

B. $P(B) = \frac{1}{3}$

C. $P(C) = \frac{1}{2}$

D. $P(D) = \frac{1}{3}$

52. W szufladzie są skarpetki w różnych kolorach — 3 czarne, 3 granatowe i 2 czerwone. Wyciągamy losowo dwie skarpetki. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że będą one w różnych kolorach?

A. $\frac{17}{64}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{42}{64}$

D. $\frac{47}{56}$

DRZEWKA

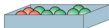
I W poprzednich rozdziałach omawialiśmy, jak obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń w prostych doświadczeniach losowych. Pokażemy teraz, jak można postępować, gdy sytuacja jest nieco bardziej skomplikowana.

Rozważmy doświadczenie, które polega na tym, że najpierw rzucamy kostką do gry, następnie — gdy wypadnie szóstka — losujemy kulę z pierwszego pudełka, a w pozostałych wypadkach — z drugiego.

W pierwszym pudełku są kule czerwone, zielone i białe, a w drugim — czerwone i zielone (zob. rysunek poniżej). Zastanówmy się, jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli.



15 kul - 6 czerwonych
4 zielone, 5 białych



10 kul - 3 czerwone
i 7 zielonych

Białe kule są tylko w pierwszym pudełku. Losujemy z tego pudełka, gdy wyrzucimy szóstkę, zatem zdarzenia, w których losowane będą kule z tego pudełka, stanowią $\frac{1}{6}$ wszystkich możliwych zdarzeń. Natomiast wylosowanie białej kuli z pierwszego pudełka to $\frac{5}{15}$ wszystkich możliwych wyników losowania z tego pudełka. Zatem prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli wynosi:

$$\frac{5}{15} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

A jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania czerwonej kuli?

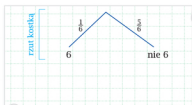
Zdarzenia, w których wylosujemy czerwoną kulę z pierwszego pudełka, stanowią $\frac{6}{15} \cdot \frac{1}{6}$ wszystkich możliwych zdarzeń, a zdarzenia, w których wylosujemy kulę czerwoną z drugiego pudełka, stanowią $\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{6}$ wszystkich zdarzeń. Wobec tego prawdopodobieństwo wylosowania czerwonej kuli wynosi:

$$\frac{6}{15} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{19}{60}$$

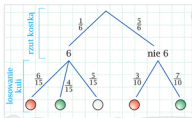
Doświadczenie to wygodnie jest zilustrować za pomocą diagramu zwanego drzewkiem. Poniżej przedstawiamy kolejne etapy rysowania drzewka.



1. Ilustrujemy pierwszy etap doświadczenia, czyli rzut kostką. Interesują nas zdarzenia: wypadnie szóstka (wówczas będziemy losować z I pudełka) lub wypadnie inna liczba oczek (wówczas będziemy losować z II pudełka).



2. Przy narysowanych gałęziach zapisujemy prawdopodobieństwa odpowiednich zdarzeń (szóstkę otrzymamy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$, a inny wynik — z prawdopodobieństwem $\frac{5}{6}$).

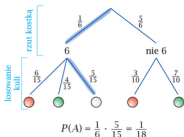


3. Ilustrujemy drugi etap doświadczenia, czyli losowanie kul z pudełek. Przy narysowanych gałęziach zapisujemy odpowiednie prawdopodobieństwa (losując z I pudełka, możemy otrzymać kulę czerwoną z prawdopodobieństwem $\frac{6}{15}$, zieloną z prawdopodobieństwem $\frac{4}{15}$ itd.).

Otrzymane drzewko może posłużyć do obliczania prawdopodobieństw różnych zdarzeń związanych z rozważanym doświadczeniem.

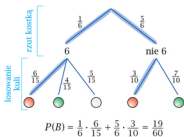
Na pierwszych dwóch rysunkach poniżej zilustrowano omówione już zdarzenia. Trzeci rysunek ilustruje zdarzenie: wylosowano kulę z pierwszego pudełka i była ona biała lub czerwona.

- A – Wylosowano kulę białą.



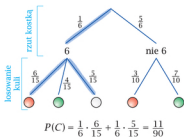
Zdarzeniu A odpowiada zaznaczona gałąź drzewka; szukany wynik otrzymamy, mnożąc prawdopodobieństwa zapisane przy tej gałęzi.

- B – Wylosowano kulę czerwoną.



Zaznaczamy gałęzie drzewka odpowiadające zdarzeniu B ; szukany wynik otrzymamy, mnożąc prawdopodobieństwa zapisane przy tych gałęziach i dodając otrzymane iloczyny.

- C – Wylosowano kulę z pierwszego pudełka i była ona biała lub czerwona.



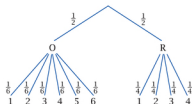
Zaznaczamy gałęzie drzewka odpowiadające zdarzeniu C ; obliczamy odpowiednie iloczyny i dodajemy je.

ĆWICZENIE Skorzystaj z drzewka ilustrującego opisane wyżej doświadczenie i oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana kula to:

a) kula zielona z drugiego pudełka,

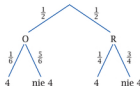
b) kula zielona.

Na rysunku poniżej zilustrowano następujące doświadczenie: rzucamy monetą i jeśli wypadnie orzeł — rzucamy sześcienną kostką, a gdy wypadnie reszka — rzucamy czworościenną kostką.



Z tego drzewka moglibyśmy korzystać przy obliczaniu prawdopodobieństwa różnych zdarzeń związanych z tym doświadczeniem.

Gdy chcemy obliczyć prawdopodobieństwo wybranego zdarzenia, np. „Na kostce wypadnie czwórka”, wygodniej jest korzystać z uproszczonego drzewka, takiego jak na rysunku obok.



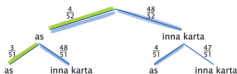
Zwróć uwagę, że w każdym drzewku gałęzie wychodzące z jednego punktu ilustrują wszystkie możliwe wyniki w danym etapie. Dlatego suma prawdopodobieństw zapisanych przy tych gałęziach zawsze jest równa 1.

Poniżej podano przykłady różnych doświadczeń, w których możemy wykorzystać drzewka.

PRZYKŁAD 1 Losujemy kolejno dwie karty z talii 52 kart. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wylosowane karty to dwa asy, a jakie — że wśród wylosowanych kart jest dokładnie jeden as?

A — Wylosowano dwa asy.

B — Wylosowano dokładnie jednego asa.



$$P(A) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$$

$$P(B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{32}{221}$$

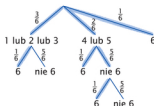
Po pierwszym losowaniu w talii zostało 51 kart. Jeżeli za pierwszym razem wylosowano asa — to w talii zostały jeszcze 3 asy, a jeśli nie wylosowano asa — wtedy zostały tam jeszcze 4 asy.

Na drzewku zaznaczono kolorem zielonym gałęzie odpowiadające zdarzeniu A, niebieskim zaś — odpowiadające zdarzeniu B.

ZADANIE Losujemy kolejno dwie karty z talii 52 kart. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wśród tych kart będzie tylko jeden kier?

PRZYKŁAD 2 Wyobraź sobie, że wykonamy rzut sześcienną kostką. Jeśli otrzymamy 1, 2 lub 3 oczka, to rzucamy kostką ponownie, a jeśli otrzymamy 4 lub 5 oczek — mamy prawo do dwóch kolejnych rzutów. Wygrywamy wtedy, gdy wypadnie szóstką. Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej?

A — W jednym z rzutów wypadła szóstką.



$$P(A) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{19}{54}$$

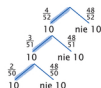
ZADANIE Rzucamy monetą. Jeśli wypadnie orzeł, to rzucamy sześcienną kostką do gry, a jeśli wypadnie reszka — rzucamy taką kostką dwukrotnie. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że co najmniej raz wypadnie jedynka?

Zwróć uwagę, że nie zawsze musimy narysować całe drzewko, aby obliczyć prawdopodobieństwo jakiegoś zdarzenia — wystarczy narysować te gałęzie, które dotyczą interesujących nas wyników doświadczenia losowego.

PRZYKŁAD 3 Z talii 52 kart wyciągnięto kolejno trzy karty. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej jedna z nich nie jest dziesiątką.

A — Co najmniej jedna z wyciągniętych kart nie jest dziesiątką.

A' — Wszystkie wyciągnięte karty to dziesiątki.



$$P(A') = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} = \frac{1}{5525}$$

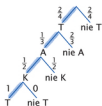
$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{5525} = \frac{5524}{5525}$$

..... Zdarzeniu A' odpowiada zaznaczona gałąź drzewka.

ZADANIE W urnie jest 5 białych kul i 10 czarnych. Losujemy kolejno trzy kule. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że co najmniej jedna z nich nie jest biała?

PRZYKŁAD 4 Dwa klocki z literą T i po jednym klocku z literami A i K ustawiamy losowo obok siebie. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania w ten sposób słowa TAKT.

S — Otrzymamy słowo TAKT.



Wystarczy narysować ten fragment drzewka, który zawiera gałąź przechodzącą kolejno przez litery T, A, K, T.

Po wylosowaniu pierwszej litery następną literę losujemy spośród pozostałych trzech (dlatego na drugim poziomie prawdopodobieństwa wynoszą $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$).

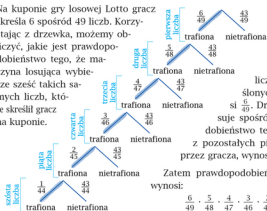
$$P(S) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{12}$$

ZADANIE Ustawiamy losowo obok siebie dwa klocki z literą A i dwa klocki z literą M. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ułożymy słowo MAMA.

zadania 1–18 ►

Ciekawostka

Na kuponie gry losowej Lotto gracz skreśla 6 spośród 49 liczb. Korzystając z drzewka, możemy obliczyć, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że maszyna losująca wybierze sześć takich samych liczb, które skreślił gracz na kuponie.



Prawdopodobieństwo tego, że pierwsza z wylosowanych liczb jest jedną ze skreślonych przez gracza, wynosi $\frac{6}{49}$. Drugą liczbę maszyna losuje spośród 48 liczb; prawdopodobieństwo tego, że będzie to jedna z pozostałych pięciu liczb skreślonych przez gracza, wynosi $\frac{5}{48}$ itd.

Zatem prawdopodobieństwo trafienia szóstki wynosi:

$$\frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{2}{45} \cdot \frac{1}{44} = \frac{1}{13\,983\,816}$$

Możemy powiedzieć, że szansa trafienia szóstki w Lotto jest w przybliżeniu jak jeden do czternastu milionów. Zatem, aby mieć pewność głównej wygranej, należałoby złożyć około 14 mln różnych zakładów. Warto się zastanowić, dlaczego — skoro prawdopodobieństwo jest tak małe — co jakiś czas trafia się najwyższa wygrana.

Przypuśćmy, że przed losowaniem złożono 10 mln różnych zakładów. Szansa, że co najmniej jeden z nich to szczęśliwa szóstka, jest jak 10 do 14, czyli ponad 70%.

ZESTAW ZADAŃ

1. Pewne doświadczenie polega na rzucie monetą i wylosowaniu jednej karty. Jeśli wypadnie reszka — karta jest losowana z talii 52 kart, a jeśli wypadnie orzeł — kartę losuje się z talii, z której usunięto wszystkie figury. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo:

- a) wylosowania króla,
- b) wylosowania króla trefl,
- c) wylosowania dwójki,
- d) wylosowania dwójki pik.

2. W urnie znajdują się 3 kule białe i 7 czarnych. Losujemy jedną kulę. Jeśli wylosowana kula jest biała, to rzucamy sześcienną kostką do gry, a jeśli czarna — rzucamy kostką dwunastościenną.

- a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy kulę białą, a w wyniku rzutu kostką otrzymamy liczbę pierwszą?
- b) Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania liczby pierwszej na kostce?

3. W dwóch pudełkach są losy loteryjne. W pierwszym pudełku jest 50 losów, w tym 10 wygrywających. W drugim pudełku jest 80 losów, w tym 20 wygrywających. Rzucamy kostką do gry. Jeśli wypadnie 1 lub 6 — ciągniemy los z pierwszego pudełka. W pozostałych wypadkach ciągniemy los z drugiego pudełka. Oblicz prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu wygrywającego.

4. Do worka wrzucono 50 losów loteryjnych, w tym 15 wygrywających.

- a) Wyciągamy kolejno dwa losy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wyciągnęliśmy dwa losy wygrywające? Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej jeden los jest wygrywający?
- b) Wyciągamy kolejno trzy losy z worka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jeden z nich jest wygrywający, a dwa — przegrywające?

5. W dwóch pudełkach są cukierki. W pierwszym pudełku jest 15 cukierków czekoladowych i 5 owocowych, a w drugim jest 20 cukierków czekoladowych i 30 owocowych. Losujemy cukierek najpierw z pierwszego, a potem z drugiego pudełka.



- a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w wyniku losowania otrzymamy dwa cukierki czekoladowe?
- b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jeden z wylosowanych cukierków będzie czekoladowy, a drugi — owocowy?

6. Rzucamy trzy razy monetą. Wyjaśnij, dlaczego zdarzenia „wypadną dwa orły i jedna reszka” oraz „wypadną dwie reszki i jeden orzeł” są jednakowo prawdopodobne. Jakie jest prawdopodobieństwo każdego z tych zdarzeń?

7. Rzucamy pięć razy monetą. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że:

- a) co najmniej raz wypadnie orzeł,
- b) co najwyżej trzy razy wypadnie reszka.

8. Rzucamy trzema różnymi sześciennymi kostkami do gry.

- a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wypadnie tylko jedna szóstka?
- b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że iloczyn liczb otrzymanych na kostkach będzie liczbą parzystą?

9. Wyobraź sobie, że losujemy kolejno dwie karty spośród kart przedstawionych na fotografii. Przyjmijmy, że wynik losowania to suma liczb na kartach. Dla każdego z możliwych wyników oblicz prawdopodobieństwo otrzymania tego wyniku.



10. Wybieramy kolejno trzy karty z talii 24 kart, składającej się ze wszystkich figur oraz dziewiątek i dziesiątek. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że:

- a) wszystkie wylosowane karty będą kierami,
- b) wśród tych kart będzie tylko jedna figura,
- c) wśród tych kart będzie przynajmniej jeden as?

11. Z talii 52 kart wybieramy kolejno 4 karty. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wśród wybranych kart:

- a) nie będzie ani jednego kiera,
- b) będzie co najmniej jeden as.

12. Drużyny piłkarskie Arsenal i Bajer mają rozegrać ze sobą dwa mecze. Eksperci twierdzą, że w każdym z tych meczów prawdopodobieństwo wygranej Arsenalu jest równe 0,5, a wygranej Bajeru — 0,4. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- a) oba spotkania zakończą się remisem,
- b) Arsenal przegra tylko jeden mecz,
- c) Bajer wygra co najmniej jeden mecz,
- d) obie drużyny zdobędą w tych dwóch meczach po tyle samo punktów (tzn. albo wygrają po jednym meczu, albo oba mecze zakończą się remisem).

Uwaga. Za zwycięstwo drużyna otrzymuje 3 pkt, a za remis 1 pkt.

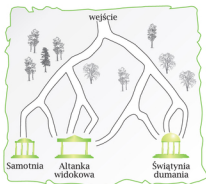
13. Na meczu koszykówki mężczyźni stanowią 20% kibiców. Barwami swojej drużyny pomalowało twarze 70% panów i 80% kobiet. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany kibic zachował własną twarz (niepomalowaną).



14. Najstarsi górale oceniają, że w tym roku szanse na ciepłą jesień są dwa razy większe niż na zimną jesień. Przewidują oni, że jeśli jesień będzie ciepła, to z prawdopodobieństwem 95% zima będzie śnieżna. Jeśli jednak jesień będzie chłodna, to śnieżnej zimy należy się spodziewać z prawdopodobieństwem 90%. Oblicz, jakie — według górali — jest prawdopodobieństwo tego, że zima będzie śnieżna.

15. Z dworca prowadzą dwa wyjścia: wyjście A — na przystanek autobusowy oraz wyjście B — na postój taksówek. Zaobserwowano, że pasażer korzysta z wyjścia A z prawdopodobieństwem 70%, zaś z wyjścia B — z prawdopodobieństwem 30%. Losowo wybrano trzech pasażerów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- wszyscy wybiorą wyjście A,
- wszyscy wybiorą to samo wyjście,
- jeden wybierze wyjście A, a pozostali dwaj — wyjście B,
- tylko dwaj z nich wybiorą to samo wyjście.



16. Na rysunku przedstawiono plan ścieżek w parku. Wyobraź sobie, że idąc od wejścia, na każdym rozwieleniu decydujesz za pomocą rzutu monetą o tym, w którą stronę pójdziesz (orzeł — w prawo, reszka — w lewo).

Przeprowadźcie w klasie symulację spaceru po parku. Niech każdy rzuci monetą trzy razy i zapisze, w której altance by się znalazł. Ustalcie, jaka część z was trafiła do każdej z altanek.

17. a) W pudełku jest 16 czekoladek, w tym tylko 4 marcepanowe. Losowo wybieramy po jednej czekoladce do momentu, gdy wylosujemy czekoladkę marcepanową. Czy prawdopodobieństwo tego, że losować będziemy mniej niż trzy razy, jest większe niż $\frac{1}{2}$?

b) Z talii 52 kart losujemy po jednej karcie tak długo, aż w ręku będziemy mieć dwa asy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowanie zakończy się po wyciągnięciu trzeciej karty?

c) Rzucamy monetą tak długo, aż wypadną dwa orły, niekoniecznie kolejno. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że zakończysz rzucanie po trzecim rzucie?

d) Rzucamy monetą. Gdy wypadnie orzeł, przerywamy rzucanie, a gdy reszka — rzucamy jeszcze raz. Wykonujemy najwyżej trzy rzuty. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w ostatnim rzucie wypadnie orzeł?

W pewnym teleturnieju za jednymi z trzech drzwi jest ukryta nagroda. Uczestnik gry staje się jej właścicielem, gdy wskaże właściwe drzwi. Zgadywanie odbywa się w następujący sposób:

- Grający wskazuje drzwi, za którymi według niego schowano nagrodę.
- Prowadzący teleturniej otwiera jedno z pozostałych drzwi (za którymi nie ma nagrody) i pyta grającego, czy podtrzymuje swoją decyzję, czy może chce ją zmienić.
- Grający wskazuje jedno z dwojga drzwi, które pozostały zamknięte.

Ten teleturniej nadawano w telewizji wiele lat. Widzowie, uważnie śledząc wyniki, mogliby zauważyć, że wśród graczy zmieniających swą pierwotną decyzję odsetek wygrywających był wyższy niż wśród pozostałych graczy.

Obliczmy prawdopodobieństwo wygrania nagrody w tym teleturnieju, przy założeniu, że gracz zawsze zmienia decyzję.



Przy zmianie decyzji prawdopodobieństwo wygranej wynosi:

$$\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

Zagadnienie to budziło bardzo wiele emocji i stało się tak znane, że nadano mu nawet nazwę: dylemat Monty'ego Halla (od imienia i nazwiska prezentera, który prowadził ten teleturniej przez kilka lat).

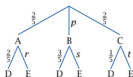
18. Przeczytaj ciekawostkę. Oblicz prawdopodobieństwo wskazania przez grającego właściwych drzwi, gdy przyjął on strategię, że:

- nie zmienia swojej decyzji,
- zmienia decyzję lub jej nie zmienia w zależności od wyniku rzutu monetą.

MINISPRAWDZIAN

51. Przyjrzyj się rysunkowi. Niektóre prawdopodobieństwa oznaczono literami p , r , s i t . Które z nich jest równe $\frac{2}{5}$?

- A. p B. r C. s D. t



52. W torbie znajduje się 50 orzechów, wśród których 7 jest pustych. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dwa losowo wybrane z torby orzechy będą puste?

- A. $\frac{6}{49}$ B. $\frac{49}{250}$ C. $\frac{3}{175}$ D. $\frac{21}{125}$

53. W pewnym regionie zaobserwowano, że jeśli wieje wiatr z zachodu, to prawdopodobieństwo deszczu wynosi 0,2, a jeśli z innego kierunku — to tylko 0,1. Meteorolodzy oceniają prawdopodobieństwo wiatru z zachodu w najbliższy weekend na 0,8. Prawdopodobieństwo tego, że ten weekend będzie deszczowy, jest równe:

- A. 0,16 B. 0,18 C. 0,2 D. 0,26

WARTOŚĆ OCZEKIWANA

- 1 Jeden z dwóch graczy rzuca wielokrotnie sześcienną kostką. Za każdym razem, gdy wyrzuci szóstkę, otrzymuje od drugiego gracza 9 zł, a w pozostałych wypadkach — płaci mu 1 zł. Zastanówmy się, jakiej wygranej może się spodziewać gracz rzucający kostką po 60 rzutach?

Prawdopodobieństwo wyrzucenia szóstki to $\frac{1}{6}$. Zatem można się spodziewać, że jedna szóstka wszystkich rzutów, czyli 10 rzutów, zakończy się wygraną gracza rzucającego kostką, a pozostałe 50 rzutów zakończy się jego przegraną. Możemy oczekiwać, że po 60 rzutach jego wygrana wyniesie: $10 \cdot 9 - 50 \cdot 1 = 40$ [zł]. Zatem średnio może on oczekiwać w każdym rzucie wygranej równej $\frac{40}{60}$, czyli $\frac{2}{3}$ złotego.

Obliczmy, jakiej średniej wygranej mógłby oczekiwać ten gracz w każdym rzucie po n rzutach:

$$\frac{\frac{1}{6} \cdot n \cdot 9 - \frac{5}{6} \cdot n \cdot 1}{n} = \frac{1}{6} \cdot 9 - \frac{5}{6} \cdot 1 = \frac{2}{3} \text{ [zł]}$$

Jak widać, otrzymana wielkość nie zależy od liczby rzutów. Tę wielkość nazywamy wartością oczekiwaną zysku gracza rzucającego kostką w tej grze.

Jeśli możliwymi zyskami uczestnika U w pewnej grze są liczby $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$, którym odpowiadają prawdopodobieństwa $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, to **wartość oczekiwaną** zysku tego uczestnika oznaczamy symbolem EZ_U i obliczamy ze wzoru:

$$EZ_U = p_1 \cdot l_1 + p_2 \cdot l_2 + p_3 \cdot l_3 + \dots + p_n \cdot l_n$$

PRZYKŁAD 1 Losujemy kartę z talii 52 kart. Jeśli wyciągniemy asa — tracimy 10 punktów, jeśli wyciągniemy waleta, damę lub króla — zdobywamy 2 punkty. W pozostałych wypadkach zdobywamy 1 punkt. Oblicz wartość oczekiwaną wyniku.

$$A - \text{Wyciągnięcie asa.} \quad P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$F - \text{Wyciągnięcie figury innej niż as.} \quad P(F) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

$$B - \text{Wyciągnięcie blotki.} \quad P(B) = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$$

$$EZ = \frac{1}{13} \cdot (-10) + \frac{3}{13} \cdot 2 + \frac{9}{13} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{5}{13}}}$$

ZADANIE W pudełku jest 5 kul czerwonych, 4 niebieskie i 3 zielone. Losujemy jedną kulę. Jeśli jest czerwona, zdobywamy 6 zł, gdy wyciągniemy niebieską kulę — tracimy 3 zł, a gdy zieloną — tracimy 2 zł. Oblicz wartość oczekiwaną wyniku tej gry.

ĆWICZENIE Przyjmijmy, że gra opisana w przykładzie 1. toczy się w ten sposób, że po każdym losowaniu karty zwracamy ją do talii, karty tasujemy i następuje kolejne losowanie. Jakiej wygranej można się spodziewać po 52 losowaniach, a jakiej — po 260 losowaniach?

zadania 1–3 ►

- III. Zauważmy, że w przykładzie gry opisanej na początku rozdziału pierwszy gracz (rzucający kostką) może się spodziewać w każdym rzucie średniej wygranej $\frac{2}{3}$ złoteo, czyli $EZ_1 = \frac{2}{3}$ [zł]. W takim razie drugi gracz musi się spodziewać takiej przegranej, czyli $EZ_2 = -\frac{2}{3}$ [zł]. Trudno zatem taką grę uważać za sprawiedliwą.

Grę będziemy uznawać za sprawiedliwą, gdy wartość oczekiwana wyniku każdego z graczy jest równa 0.

PRZYKŁAD 2 W dwóch pudełkach są kule. W pierwszym jest pięć kul z numerami od 1 do 5, a w drugim są cztery kule z numerami od 1 do 4. Losujemy po jednej kuli z każdego pudełka. Jeśli suma liczb z wylosowanych kul jest równa 5, to wygrywamy 5 zł, jeśli ta suma jest mniejsza od 5 — przegrywamy 2 zł. Jaką należy ustalić stawkę w przypadku wylosowania kul z liczbami o sumie większej od 5, aby gra była sprawiedliwa?

A — Suma wylosowanych liczb jest równa 5.

B — Suma wylosowanych liczb jest mniejsza od 5.

C — Suma wylosowanych liczb jest większa niż 5.

	1	2	3	4	5
1	o	o	o	✓	□
2	o	o	✓	□	□
3	o	✓	□	□	□
4	✓	□	□	□	□

W tabeli pola odpowiadające zdarzeniu A oznaczono symbolem ✓, pola odpowiadające zdarzeniu B oznaczono symbolem o, a odpowiadające zdarzeniu C — symbolem □.

$$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$P(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$P(C) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

x — kwota odpowiadająca wylosowaniu sumy większej od 5

$$\frac{1}{5} \cdot 5 + \frac{3}{10} \cdot (-2) + \frac{1}{2} \cdot x = 0$$

$$x = -0,8$$

Odp. Gra będzie sprawiedliwa, gdy przy wylosowaniu kul z liczbami o sumie większej niż 5 będziemy tracić 80 groszy.

ZADANIE Rzucamy dwiema różnymi sześciennymi kostkami do gry. Gdy suma oczek na kostkach jest równa 7 — otrzymujemy 10 zł. Gdy suma oczek jest większa od 7 — tracimy 2 zł. Jaka powinna być stawka za sumę oczek mniejszą od 7, aby gra była sprawiedliwa?

PRZYKŁAD 3 W pewnej loterii co trzeci los wygrywa. Jedna czwarta z wygranych losów oznacza otrzymanie 90 zł, a pozostałe wygrane oznaczają zwrot ceny losu. Po każdym losowaniu los wraca do pojemnika po to, aby wszyscy uczestnicy mieli taką samą szansę wygranej. Ile powinien kosztować los, aby loteria była sprawiedliwa?

A — Wyciągnięto los z wygraną 90 zł.

$$P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

B — Wyciągnięto los, który zwraca jego koszt.

$$P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

C — Wyciągnięto pusty los.

$$P(C) = \frac{2}{3}$$

x — cena jednego losu

$$\frac{1}{12} \cdot (90 - x) + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot (-x) = 0$$

..... Wielkość wygranej trzeba pomniejszyć
..... o koszt losu.

$$x = 10$$

Odp. Loterię będzie można uznać za sprawiedliwą, gdy losy będą sprzedawane po 10 zł.

ZADANIE W pewnej loterii połowa losów wygrywa. Co trzeci wygrany los oznacza otrzymanie 15 zł. Pozostałe wygrane oznaczają zwrot ceny losu. Po każdym losowaniu los wraca do pojemnika z losami. Ile powinien kosztować los, aby ta loteria była sprawiedliwa?

zadania 4–12 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz wartość oczekiwaną wyniku w opisaney grze.

a) Rzucamy sześcienną kostką do gry. Gdy wypadną 4 oczka, zdobywamy 4 punkty, gdy wypadnie 5 oczek — zdobywamy 5 punktów. W pozostałych wypadkach tracimy 1 punkt.

b) W pudełku jest 10 kul: 1 niebieska, 2 czerwone, 3 zielone i 4 białe. Za wylosowanie kuli niebieskiej otrzymujemy 10 punktów, za kulę czerwoną — 4 punkty, a za zieloną — tracimy 1 punkt. W wypadku wylosowania białej kuli nie tracimy ani nie zyskujemy punktów.

2. Oblicz wartość oczekiwaną wyniku w opisaney grze.

a) Rzucamy monetą i sześcienną kostką do gry. Jeśli na monecie wypadnie orzeł — wygrywamy 2 zł. Jeśli wypadnie reszka i 1 oczko — przegrywamy 5 zł. W pozostałych wypadkach — przegrywamy 1 zł.

b) Rzucamy dwiema różnymi kostkami do gry. Jeśli na obu kostkach będzie ta sama liczba oczek — wygrywamy 10 zł. Jeśli różnica liczby oczek będzie równa 1 — wygrywamy 2 zł. W pozostałych wypadkach przegrywamy 5 zł.

3. Oblicz wartość oczekiwaną wyniku w opisanej grze.

a) Rzucamy trzema różnymi monetami. Jeśli wypadną trzy orły lub 3 reszki — wygrywamy 100 zł. Jeśli wypadną dokładnie 2 orły — wygrywamy 5 zł. W pozostałych wypadkach przegrywamy 10 zł.

b) Z pudełka, w którym jest 9 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 9, wyciągamy losowo trzy kule. Jeśli na wszystkich wylosowanych kulach są liczby nieparzyste — przegrywamy 20 zł, jeśli na wszystkich są liczby parzyste — wygrywamy 10 zł. W pozostałych wypadkach wygrywamy 1 zł.

4. Rzucamy dwiema różnymi sześciennymi kostkami do gry — czerwoną i zieloną. Jeśli wynik na czerwonej kostce jest większy niż na zielonej, gracz otrzymuje 2 zł. Jeśli wynik jest większy na zielonej kostce — gracz traci 4 zł. Jaka powinna być stawka za ten sam wynik na obu kostkach, aby gra była sprawiedliwa?

5. Na kole ruletki są liczby od 0 do 36. Gracz obstawia jedną z liczb od 1 do 36. Jeśli wypadnie wybrana przez niego liczba, to otrzyma od krupiera 35 razy więcej, niż postawił, i zwrot postawionej kwoty.

a) Czy ta gra jest sprawiedliwa?

b) Gracz postawił 100 zł na pewną liczbę. Jaka jest wartość oczekiwana wyniku?



6. Gracz rzuca sześcienną kostką. Jeśli wyrzuci szóstkę — przegrywa pewną kwotę. Jeśli wyrzuci mniej niż sześć oczek, rzuca jeszcze raz i otrzymuje tyle złotych, ile jest oczek na kostce w drugim rzucie. Jaka powinna być kwota przegranej, aby gra była sprawiedliwa?

7. W urnie jest 7 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 7. Wyciągamy losowo jedną kulę. Gdy wynik jest liczbą podzielną przez 3 — przegrywamy 3 zł. Jeśli nie — losujemy następną kulę. Jeśli na tej kuli jest liczba podzielna przez 3 — przegrywamy 5 zł, a jeśli nie — wygrywamy pewną kwotę. Jaka to powinna być kwota, aby gra była sprawiedliwa?

8. Losujemy trzykrotnie kartę z talii 52 kart, za każdym razem zwracając ją do talii. Jeśli wyciągniemy 3 razy kiera, wygrywamy pewną kwotę. Jeśli wylosujemy trzy razy pika — wygrywamy kwotę dwa razy większą. W każdym pozostałym wypadku przegrywamy 3 zł. Jakie powinny być stawki wygranych, aby grę uznać za sprawiedliwą?

9. W pojemniku z losami jest 20% losów wygrywających. 10% spośród losów wygrywających oznacza otrzymanie 100 zł, 30% losów wygrywających oznacza otrzymanie 20 zł. Pozostałe losy wygrywające oznaczają zwrot ceny losu. Po każdym losowaniu los wraca do pojemnika. Ile powinien kosztować los, aby loteria była sprawiedliwa?

10. Z 10 kart, spośród których są dwa króle i dwa asy, losujemy dwie karty. Gdy wylosujemy dwa asy lub dwa króle — otrzymujemy 300 zł, gdy wylosujemy króla i asa — otrzymujemy 60 zł, a gdy w wylosowanej parze będzie jeden król lub jeden as z inną od króla i asa kartą — krupier zwraca nam koszt udziału w losowaniu. W pozostałych wypadkach nie dostajemy nic. Ile powinno się płacić za możliwość losowania, aby gra była sprawiedliwa?

11. W trzech pudełkach znajdują się zapalki. W tabelce podano, ile zapalek jest w każdym z nich. Rzucamy sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie 6 — losujemy zapalkę z III pudełka, gdy wypadnie 1 lub 2 — losujemy z II pudełka, a w pozostałych wypadkach — z I pudełka. Za wylosowanie zapalki z łebkiem gracz otrzymuje 3 zł. Jaka powinna być kwota przegranej za wylosowanie zapalki bez łebka, aby gra była sprawiedliwa?

Pudełko	I	II	III
Zapalki z łebkami	6	3	14
Zapalki bez łebków	4	12	16

- **12.** Organizatorzy loterii charytatywnej przyjęli następujące założenia:

1. Losowanie polega na wyciągnięciu jednej kuli z pojemnika, w którym są kule białe i czarne.
2. Grający otrzymuje 100 zł, gdy wylosuje kulę czarną.
3. Po każdym losowaniu kula wraca do pojemnika.
4. Spodziewana liczba uczestników loterii to 2000 osób, a spodziewany dochód to 10 000 zł.

a) Jaka powinna być opłata za możliwość udziału w loterii, gdy w pojemniku są 2 kule czarne i 8 białych?

b) Zaplanuj, ile białych kul i ile czarnych kul powinno być w pojemniku, jeśli organizatorzy zaplanowali, że opłata za jeden los wyniesie 10 zł.

MINISPRAWDZIAN

51. W urnie są 2 kule zielone i 4 żółte. Losujemy dwie kule. Jeśli obie są zielone — wygrywamy 15 zł, jeśli obie są żółte — wygrywamy 5 zł. W pozostałych wypadkach przegrywamy 3 zł. Jaka jest wartość oczekiwana w tym losowaniu?

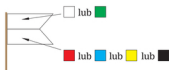
- A. 1,40 zł B. 4,60 zł C. $\frac{23}{9}$ zł D. $\frac{47}{9}$ zł

52. Rzucamy dwiema różnymi sześciennymi kostkami do gry. Jeśli wyrzucimy parę (na obu kostkach będzie taka sama liczba oczek), to wygrywamy pewną kwotę. Jeśli wyrzucimy jedną szóstkę — wygrywamy złotówkę. W pozostałych wypadkach przegrywamy dwuzłotówkę. Jaka powinna być kwota wygranej za wyrzucenie pary, aby gra była sprawiedliwa?

- A. 50 gr B. 5 zł C. 2,50 zł D. 3 zł

ZASADA MNOŻENIA I ZASADA DODAWANIA

- I Wyobraź sobie, że chorągiewka na rysunku obok ma być pomalowana w taki sposób, że górna jej część będzie miała kolor biały lub zielony, a dolna część — kolor czerwony, niebieski, żółty lub czarny.



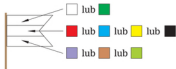
Na ile różnych sposobów można pokolorować tę chorągiewkę?

Sposób pokolorowania zależy od dwóch decyzji. Pierwsza z decyzji to wybór koloru na górny pasek, a druga — na dolny. Pierwszą decyzję można podjąć na 2 sposoby, a drugą — na 4 sposoby. Na poniższym rysunku są przedstawione wszystkie możliwości.



Całą chorągiewkę można więc pomalować na $2 \cdot 4$ sposobów.

Kolejna chorągiewka składa się z trzech pasków. Załóżmy, że mamy ją pomalować różnymi kolorami zgodnie z podanym opisem.



Ile trójkolorowych chorągiewek można utworzyć?

Decyzje dotyczące kolorów poszczególnych pasków można podjąć odpowiednio na 2, 4 i 3 sposoby. Wiemy już, że dwa górne paski można pomalować na $2 \cdot 4$ sposoby. Dla każdej z otrzymanych częściowo pomalowanych chorągiewek trzeci pasek można pomalować na 3 sposoby. Zatem chorągiewkę można pomalować na $2 \cdot 4 \cdot 3$, tzn. 24 sposoby.

ĆWICZENIE Kolorując chorągiewkę składającą się z trzech pasków w sposób opisany powyżej, można otrzymać 24 różne chorągiewki. Ile wśród tych chorągiewek jest takich, w których:

- środkowy pasek jest czerwony,
- dolny pasek jest brązowy lub fioletowy?

W opisanych przypadkach stosowaliśmy regułę zwaną **zasadą mnożenia**, którą opisano poniżej.

Przypuśćmy, że wynik pewnego działania zależy od kolejno podejmowanych decyzji i że decyzje te są niezależne. Jeśli przy podejmowaniu pierwszej decyzji mamy do wyboru n_1 możliwości, przy drugiej — n_2 możliwości itd., a przy ostatniej — n_k możliwości, to liczba różnych wyników, które możemy otrzymać, jest równa iloczynowi:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$

W worku znajduje się pięć kul ponumerowanych cyframi od 1 do 5.

- Losujemy kolejno trzy kule i zapisujemy otrzymane cyfry obok siebie. Ile różnych liczb można w ten sposób otrzymać?

Jako pierwsza zostanie wybrana jedna z pięciu cyfr (a więc jest pięć możliwości), jako druga zostanie wybrana jedna z pozostałych czterech cyfr (cztery możliwości), jako trzecia — jedna z trzech cyfr. Zatem różnych liczb, jakie możemy otrzymać, jest:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

- Wyciągamy kolejno wszystkie kule i zapisujemy wylosowane cyfry. Ile różnych liczb można w ten sposób otrzymać?

Różnych pięciocyfrowych liczb, jakie mogą zostać zapisane, jest:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

- Wyciągamy kolejno cztery kule i zapisujemy cyfry. Ile różnych liczb nieparzystych można w ten sposób otrzymać?

Cyfrą jedności może być jedna z trzech cyfr (1, 3 lub 5). Cyfrą dziesiątek może być zatem jedna z czterech pozostałych cyfr, cyfrą setek — jedna z trzech pozostałych, a cyfrą tysięcy — jedna z dwóch cyfr. Zatem różnych nieparzystych liczb czterocyfrowych możemy otrzymać:

$$3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 72$$

- Losujemy jedną kulę, zapisujemy otrzymaną cyfrę, a następnie wrzucamy kulę z powrotem do worka. Losowanie powtarzamy sześć razy. Ile różnych liczb można w ten sposób otrzymać?

Na każdym z sześciu miejsc może zostać zapisana jedna z pięciu cyfr. Wobec tego liczb, które możemy w ten sposób zapisać, jest:

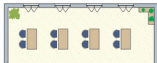
$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 15\,625$$

- Losujemy kolejno trzy kule i za każdym razem wrzucamy kulę z powrotem do worka. Ile liczb większych od 300 możemy otrzymać?

Na pierwszym miejscu może być jedna z trzech cyfr (3, 4 lub 5). A więc razem liczb trzycyfrowych większych od 300 będzie:

$$3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$$

PRZYKŁAD 1 Na rysunku przedstawiono fragment planu klasy, na którym zaznaczono cztery dwuosobowe ławki szkolne. Miejsca w tych ławkach przydzielamy sześciu osobom — dwóm dziewczynkom oraz czterem chłopcom.



a) Na ile różnych sposobów można przydzielić miejsca tym sześciu osobom?

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \underline{20\,160}$$

Pierwszej osobie można przydzielić jedno z ośmiu miejsc, drugiej jedno z siedmiu itd.

b) Na ile sposobów można przydzielić miejsca tym sześciu osobom tak, aby dziewczynki siedziały w jednej ławce?

Liczba możliwych sposobów zajęcia miejsc przez dziewczynki wynosi:

$$4 \cdot 2 = 8$$

Dziewczynki mogą usiąść w jednej z czterech ławek, a w każdej na dwa sposoby.

Gdy dziewczynki siedzą, liczba możliwych sposobów zajęcia miejsc przez chłopców wynosi:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

Pierwszy z chłopców może zająć jedno z sześciu pozostałych miejsc, drugi chłopiec — jedno z pięciu miejsc itd.

Liczba wszystkich możliwych sposobów zajęcia miejsc wynosi więc:

$$8 \cdot 360 = \underline{2\,880}$$

c) Na ile sposobów można przydzielić miejsca tak, aby dziewczynki nie siedziały razem?

Liczba możliwych sposobów wynosi:

$$20\,160 - 2\,880 = \underline{17\,280}$$

Od liczby wszystkich możliwych sposobów zajęcia miejsc odejmujemy te, w których dziewczynki siedzą w jednej ławce.

d) Na ile sposobów można przydzielić miejsca, aby każda dziewczynka siedziała z chłopcem i nikt nie siedział sam w ławce?

Liczba sposobów zajęcia miejsc przez pierwszą z dziewcząt z chłopcem wynosi:

$$8 \cdot 4 = 32$$

Dziewczynka może wybrać jedno z ośmiu miejsc, a obok niej może usiąść jeden z czterech chłopców.

Gdy pierwsza para już siedzi, liczba sposobów zajęcia miejsc przez drugą dziewczynkę z chłopcem wynosi:

$$6 \cdot 3 = 18$$

Druga dziewczynka może zająć jedno z sześciu pozostałych miejsc, a obok niej może usiąść jeden z trzech pozostałych chłopców.

Gdy obie pary siedzą, liczba możliwych sposobów zajęcia miejsc przez pozostałych chłopców wynosi:

$$4 \cdot 1 = 4$$

Szukana liczba możliwych sposobów wynosi:

$$32 \cdot 18 \cdot 4 = \underline{2304}$$

Jeden z pozostałych dwóch chłopców może wybrać jedno z czterech miejsc, a ostatni z chłopców musi usiąść obok niego.

ZADANIE Odpowiedz na wszystkie powyższe pytania, gdy w klasie jest pięć dwuosobowych ławek, a liczby dziewcząt i chłopców się nie zmieniły.

zadania 1–15 ►

II Ustalając liczbę możliwości, czasami możemy rozważyć kilka rozłącznych przypadków, policzyć, ile jest możliwości w każdym z nich, i dodać otrzymane wyniki. Taki sposób postępowania nazywamy **zasadą dodawania**.

PRZYKŁAD 2 a) Spośród liczb od 1 do 9 wybieramy kolejno dwie różne. Na ile sposobów można wybrać te dwie liczby tak, aby ich suma była liczbą parzystą?

Suma dwóch liczb jest parzysta, gdy obie są parzyste lub gdy obie są nieparzyste.

Przypadek 1
Obie liczby są
parzyste, wtedy
odpowiednich par jest:
 $4 \cdot 3 = 12$

Przypadek 2
Obie liczby są
nieparzyste, wtedy
odpowiednich par jest:
 $5 \cdot 4 = 20$

Są 4 liczby parzyste. Pierwszą liczbę można wybrać na 4 sposoby, drugą na 3 sposoby.
Jest 5 liczb nieparzystych. Pierwszą możemy wybrać na 5 sposobów, a drugą — na 4 sposoby.

Łącznie wszystkich par liczb, których suma jest liczbą parzystą, jest:

$$12 + 20 = \underline{32}$$

b) W klasie IVa jest 25 osób, w IVb — 30 osób, a w IVc — 28 osób. Na ile sposobów można wybrać dwuosobową delegację tak, aby były w niej osoby z różnych klas?

Przypadek 1
IVa i IVb:

Przypadek 2
IVa i IVc:

Przypadek 3
IVb i IVc:

$$25 \cdot 30 + 25 \cdot 28 + 30 \cdot 28 = \underline{2290}$$

Wybrane osoby mogą być uczniami klas IVa i IVb albo klas IVa i IVc, albo klas IVb i IVc.

ZADANIE a) Spośród cyfr od 0 do 9 wybieramy kolejno trzy różne. Na ile sposobów można je wybrać tak, aby ich suma była liczbą parzystą?

b) W klasach IVa, IVb, IVc i IVd liczby uczniów wynoszą odpowiednio 20, 22, 21, 24. Na ile sposobów można wybrać trzyosobową delegację, aby były w niej osoby z trzech różnych klas?

Zagadnieniami takimi jak te, które omówiliśmy w powyższych przykładach, zajmuje się dział matematyki zwany kombinatoryką.

zadania 16–25 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Ile różnych słów można utworzyć, łącząc poniższe przedrostki (z pierwszego wiersza) z podanymi wyrazami (z drugiego wiersza)?

wy

za

na

prze

brać

grać

rzucić

robić

liczyć

nosić

bić

2. Pewien leniwy autor przemówień zauważył, że można utworzyć wypowiedź, budując każde zdanie według pewnego schematu:

- Najpierw podzielił na cztery grupy wybrane wyrazy i zwroty (zapisano je poniżej).
- Następnie tworzył zdania, losując dowolny zwrot z pierwszej grupy, potem dowolny zwrot z drugiej grupy, później z trzeciej i na koniec z czwartej.



Jak długo mogłoby trwać takie „przemówienie”, gdyby żadnego ze zdań nie powtarzać (przyjmij, że jedno zdanie przemawiający wypowiada przez 5 sekund)?

Grupa I

Ludziom ubogim
Calemu narodowi
Naszemu krajowi
Wyborcom
Wszystkim
uczciwym ludziom

Grupa II

jest potrzebna
nie wystarcza
należy się

Grupa III

lepsza
dobra
odważna
uczciwa
mądra
rozwężna
ostrożna

Grupa IV

władza
polityka
partia
reforma
zmiana

3. a) Pewien bar oferuje zestawy obiadowe składające się z zupy i drugiego dania. Do wyboru mamy trzy rodzaje zup i pięć rodzajów drugich dań. Ile różnych zestawów obiadowych można wybrać?

b) Mechanizm przerzutki pewnego roweru ma trzy koła zębate z przodu i osiem z tyłu. Na ile sposobów można w tym rowerze ustawić przerzutki?

c) Wybieramy jedną spośród pięciu czapek, jeden z siedmiu szalików oraz jedną z dwóch par rękawiczek. Na ile sposobów można wybrać te rzeczy?

4. Z domu Czerwonego Kapturka do domu babci wiedzie pięć różnych dróg. Na ile sposobów Czerwony Kapturek może przebyć drogę do babci i z powrotem, jeśli:

- a) nie wraca do domu tą samą drogą, którą szedł do babci,
- b) w każdą stronę może iść dowolną drogą?

5. a) W herbaciarni możesz wybrać jeden z dwunastu gatunków herbaty. Do herbaty możesz dodać cukier lub mleko. Ile masz różnych możliwości?

b) Wyobraź sobie, że kupujesz samochód i możesz wybrać jeden z pięciu oferowanych kolorów lakieru oraz jeden z trzech rodzajów tapicerki. Możesz również dodatkowo wybrać (lub nie) klimatyzację, a także centralny zamek jako wyposażenie. Ile masz różnych możliwości?

6. Oblicz, ile różnych liczb trzycyfrowych można utworzyć z podanych cyfr (cyfry mogą się powtarzać).

a) 1, 3, 7

b) 0, 1, 5

c) 1, 3, 5, 7

d) 6, 8

7. Z cyfr 0, 1, 4, 7, 8 tworzymy liczby (cyfry mogą się powtarzać). Ile można w ten sposób utworzyć liczb:

a) pięciocyfrowych,

b) czterocyfrowych parzystych,

c) trzycyfrowych nieparzystych,

d) trzycyfrowych podzielnych przez 4?

8. Losujemy kule z urny, w której znajduje się 9 kul z numerami od 1 do 9. Wynikiem losowania jest liczba utworzona z cyfr na kolejno wyjmowanych kulach. Ustal, ile różnych liczb możemy otrzymać, jeśli wyjmujemy:

a) 2 kule i żadnej nie wrzucamy z powrotem do urny,

b) dwa razy kulę i za każdym razem wrzucamy ją z powrotem do urny,

c) 3 kule i tylko za pierwszym razem wrzucamy kulę z powrotem do urny,

d) 3 kule i za każdym razem wrzucamy kulę z powrotem do urny.

9. Z siedmiu płócien w różnych jednolitych kolorach (wśród nich jest niebieski) zamierzamy uszyć spódnicę, która składa się z trzech poziomych pasów jednakowej szerokości o różnych kolorach.

a) Ile różnych spódnic możemy uszyć?

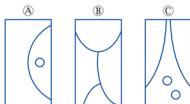
b) Ile różnych spódnic możemy uszyć, jeżeli środkowy pas musi być niebieski?

c) Ile różnych spódnic możemy uszyć, jeżeli jeden z pasów musi być niebieski?

10. Figury **A**, **B** i **C** należy pokolorować tak, aby sąsiadujące obszary miały różne kolory. Na ile sposobów można pokolorować każdą z tych figur, jeśli mamy do dyspozycji:

a) trzy kolory,

b) cztery kolory?



Wolfgang Amadeusz Mozart (czyt. mo-cart) był znany z poczucia humoru. Jednym z przykładów może być utwór *Musikalisches Würfelspiel* (*Muzyczna gra w kości*), wydany już po śmierci autora.

Dzielnko to jest przepisem na tworzenie różnych 16-taktowych menuetów. Mozart przedstawił po dwie propozycje taktów ósmego i szesnastego oraz po jedenaście propozycji każdego z pozostałych taktów. Wykonawca sam mógł wybrać warianty taktów i „skomponować”

własny menuet. Odegranie takiego utworu zajmowało około pół minuty.

Mozart chciał, by wybór wersji taktu ósmego i szesnastego następował na przykład w wyniku rzutu monetą, a wybór wersji każdego z pozostałych jedenastu taktów — w wyniku rzutu kostkami. Proponował, by rzucać dwiema kostkami i od sumy wyrzuconych oczek na kostkach odejmować 1. Otrzymany wynik wskazywałby, którą z jedenastu wersji należy wybrać.

11. Przeczytaj ciekawostkę.

- a) Ile różnych menuetów można utworzyć, korzystając z przepisu Mozarta? Jak długo trwałoby odegranie ich wszystkich?
- b) Sposób losowania taktu spośród jedenastu zaproponowanych przez Mozarta nie daje równych szans wszystkim tym jedenastu taktom. Który z nich byłby wybierany najczęściej, a który — najrzadziej?

12. a) Na ile sposobów można przydzielić 4 tory biegni czterem lekkoatletom?

- b) W jednej z gonitw wyścigów konnych bierze udział 6 koni. Na ile sposobów można obstawić pierwszą trójkę na mecie?
- c) Prezenty na Boże Narodzenie trzeba zapakować w ozdobny papier wybrany spośród trzech papierów o różnych kolorach. Na ile różnych sposobów można zapakować cztery różne prezenty?
- d) Na ile sposobów można ustawić 6 kobiet i 4 mężczyzn w kolejce tak, aby kobiety zajmowały 6 początkowych miejsc?

13. Oblicz, na ile sposobów można rozmieścić:

- a) 5 różnych kul w siedmiu szufladach,
- b) 7 różnych kul w pięciu szufladach,

14. Każdy znak alfabetu Braille'a (czyt. brajla) to układ wypukłych kropek wybranych z podstawowego układu sześciu kropek. W każdym znaku jest co najmniej jedna wypukła kropka. Oblicz, ile znaków można w ten sposób utworzyć.

Przykłady znaków alfabetu Braille'a



15. Każde z sześciorga dzieci w rodzinie — Julek, Kuba, Adam, Mateusz, Ryszard i Edmund — sprząta w kuchni raz w tygodniu (od poniedziałku do soboty). Oblicz, na ile sposobów można przydzielić dyżury w kuchni tak, aby:

- a) w poniedziałek sprzątał Edmund,
- b) w sobotę nie sprzątał Adam,
- c) wtorek i środa były dniami dyżuru Julka i Kuby,
- d) Ryszard dyżurował następnego dnia po Mateuszu.

16. W klasie IVa jest 12 dziewcząt i 13 chłopców, a w klasie IVb jest 15 dziewcząt i 10 chłopców. Wybieramy dwuosobową delegację, w której jest chłopiec i dziewczynka.

- a) Ile takich delegacji można wybrać w klasie IVa, a ile — w klasie IVb?
- b) Ile takich delegacji można wybrać spośród uczniów obu klas?
- c) Ile takich delegacji można wybrać, tak aby osoby były uczniami różnych klas?

17. W salonie są dwie sofy, 3-osobowa i 4-osobowa. Na jednej z nich układamy trzy różne poduszki. Na ile sposobów można tego dokonać tak, aby każda była na jednym z miejsc siedzących?

18. Jedna z lodziarni oferuje 5 smaków lodów, a druga — 7 smaków. Trzy koleżanki chcą kupić w jednej z tych lodziarni po jednej gałce. Na ile różnych sposobów dziewczynki mogą kupić lody?

19. W odtwarzaczu umieszczamy trzy płyty CD różnych wykonawców. Losowo wybieramy jedną z płyt i słuchamy wszystkich utworów w przypadkowej kolejności. Ile różnych ciągów utworów możemy przesłuchać, jeśli na dwóch płytach jest po 10 utworów, a na trzeciej płycie jest 12 utworów?

20. W wagonie są wolne miejsca tylko w trzech przedziałach. W jednym są wolne 4 miejsca, w drugim 3 miejsca, a w trzecim jest 5 wolnych miejsc. Na ile sposobów dwie osoby mogą zająć miejsca w wagonie, jeśli chcą siedzieć w jednym przedziale?

21. Znak alfabetu Morse'a (czyt. morsa) jest zbudowany z ustawionych obok siebie kropek lub kresek. Łącznie kropki lub kresek w każdym znaku może być od jednej do czterech. Ile znaków można w ten sposób utworzyć?

Przykłady znaków alfabetu Morse'a

$\cdot -$ a $- \cdot \cdot$ d $\cdot \cdot \cdot \cdot$ h $- \cdot -$ k $- -$ m $\cdot - \cdot$ r $\cdot \cdot -$ u $- - \cdot \cdot$ z

22. Ustal, ile jest trzycyfrowych liczb parzystych, w których występuje:

- a) dokładnie jedna cyfra 5,
- b) co najmniej jedna cyfra 4.

23. Ile jest różnych liczb spełniających podany warunek?

- a) Liczba jest trzycyfrowa parzysta i występuje w niej dokładnie jedna cyfra 0.
- b) Liczba jest trzycyfrowa nieparzysta i występuje w niej dokładnie jedna cyfra 1 i dokładnie jedna cyfra 2.

24. Ile jest liczb trzycyfrowych, które są podzielne przez 3 i spełniają podany warunek?

- a) W liczbie jest jedna jedynka i jedno zero.
- b) W liczbie jest dokładnie jedna dziewiątka.

- 25.** Na rysunku przedstawiono schematy miejsc siedzących w samochodzie osobowym. Litery oznaczają, jakie osoby mogą zająć miejsca w samochodzie. Wielkimi literami oznaczono osoby dorosłe, przy czym literą *K* osobę posiadającą prawo jazdy, a małymi literami — dzieci. Przyjmujemy, że dzieci nie mogą zajmować miejsc na przednich siedzeniach. Na ile sposobów osoby opisane literami przy rysunkach mogą zająć miejsca w samochodzie?

a) *K a A B*



b) *K a b c A*



c) *K a A B C*



d) *K a b A B C*



MINISPRAWDZIAN

51. Ile jest różnych liczb naturalnych trzycyfrowych, takich że cyfra setek jest parzysta, a pozostałe cyfry są nieparzyste?

- A. 125 B. 100 C. 14 D. 80

52. Na ile sposobów można posadzić na siedmioosobowej ławce siedem osób tak, aby ustalone dwie osoby *A* i *B* siedziały obok siebie?

- A. 1440 B. 10 080 C. 5040 D. 720

53. W klasie liczącej 21 uczniów przeprowadzono losowanie 3 biletów do trzech różnych teatrów. Na ile różnych sposobów mogło się zakończyć to losowanie, jeżeli każdy uczeń mógł wylosować co najwyżej jeden bilet?

- A. 7980 B. 7 C. 42 D. 60

54. Spośród cyfr od 0 do 9 i 24 małych liter alfabetu tworzymy kod składający się z dwóch różnych znaków — dwóch liter lub dwóch cyfr. Ile takich kodów można utworzyć?

- A. 480 B. 642 C. 676 D. 1122

OBLICZANIE PRAWDOPODOBIEŃSTWA (CD.)

I Rozważmy następujące zagadnienie:

W pewnej kawiarni można kupić deser, który składa się z dwóch warstw: na dole jest galaretka, a u góry krem.

Galaretka może być w czterech smakach: cytrynowym, truskawkowym, malinowym lub pomarańczowym.

Są dwa rodzaje kremu: kawowy i waniliowy.

Przygotowując taki deser, cukiernik wybiera losowo galaretkę i krem.

Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przygotowuje on deser z galaretką cytrynową i kremem waniliowym?

Oto dwa sposoby rozwiązania tego zadania:

Sposób I

Korzystamy z drzewka ilustrującego doświadczenie losowe.

A — Cukiernik przygotował deser cytrynowo-waniliowy.



$$P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Sposób II

Korzystamy z zasady mnożenia.

A — Cukiernik przygotował deser cytrynowo-waniliowy.

$$N = 4 \cdot 2 = 8$$

$$n_A = 1$$

$$P(A) = \frac{1}{8}$$

Galaretkę cukiernik może wybrać na 4 sposoby, a krem na 2 sposoby.

Tylko jedna z 8 możliwości to deser cytrynowo-waniliowy.

Oba przedstawione powyżej sposoby obliczenia prawdopodobieństwa są skuteczne. Wcześniej już pokazaliśmy, jak się oblicza prawdopodobieństwo za pomocą drzewek. Dalej podajemy przykłady, jak stosować kombinatorykę w rachunku prawdopodobieństwa.

PRZYKŁAD 1 Trzech pasażerów jedzie windą. Każdy z nich może wysiąść na jednym z 8 pięter. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wszyscy pasażerowie wysiądą na tym samym piętrze, a jakie — że każdy z pasażerów wysiądzie na innym piętrze?

A — Pasażerowie wysiądą na tym samym piętrze.

B — Pasażerowie wysiądą na różnych piętrach.

$$N = 8 \cdot 8 \cdot 8$$

⋮ Pierwszy pasażer może wysiąść na dowolnym z 8 pięter, drugi
⋮ i trzeci pasażer także mogą wysiąść na dowolnym z 8 pięter.

$$n_A = 8$$

⋮ Cała trójka pasażerów może wysiąść na jednym z 8 pięter.

$$P(A) = \frac{8}{8 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{1}{64}$$

$$n_B = 8 \cdot 7 \cdot 6$$

⋮ Pierwszy pasażer może wysiąść na dowolnym z 8 pięter, drugi —
⋮ na jednym z 7 pozostałych, trzeci — na jednym z 6 pozostałych.

$$P(B) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{8 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{42}{64} = \frac{21}{32}$$

Odp. Pasażerowie wysiądą na tym samym piętrze z prawdopodobieństwem $\frac{1}{64}$, a na różnych piętrach z prawdopodobieństwem równym $\frac{21}{32}$.

ZADANIE Czterech pasażerów jedzie windą. Każdy może wysiąść na jednym z 10 pięter. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wysiądą na różnych piętrach?

PRZYKŁAD 2 Na kartonikach są litery A, A, A, K, K, F, R. Układamy je w przypadkowej kolejności. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że ułożymy w ten sposób słowo KARAFKA?

A — Ułożymy słowo KARAFKA.

$$N = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

⋮ Pierwszy kartonik możemy wybrać na 7 sposobów, drugi na
⋮ 6 sposobów, trzeci — na 5 sposobów itd.

$$n_A = 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

⋮ Pierwszą literę (K) słowa KARAFKA można wybrać na 2 sposoby,
⋮ ponieważ mamy 2 litery K. Drugą literę (A) można
⋮ wybrać na 3 sposoby, trzecią (R) — tylko w 1 sposób,
⋮ a czwartą literę (A) — na 2 sposoby, gdyż pozostały jeszcze
⋮ 2 litery A itd.

$$P(A) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{420}$$

Odp. Słowo KARAFKA ułożymy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{420}$.

ZADANIE Na kartonikach są litery: A, A, A, M, M, T, T, E, Y, K. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że układając losowo kolejne kartoniki, ułożymy słowo MATEMATYKA?

ZESTAW ZADAŃ

1. a) Maszyna losuje kolejno trzy spośród dziesięciu kul ponumerowanych cyframi od 0 do 9. Ile jest możliwych wyników takiego losowania? Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że maszyna kolejno wylosuje kule z numerami 1, 2 i 3?
- b) Na ile sposobów mogą się ustawić w szeregu cztery osoby? Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że te cztery osoby ustawią się według wzrostu (od najwyższej do najniższej lub odwrotnie)? Zakładamy, że każda osoba jest innego wzrostu.
- c) Ile różnych ciągów liczb można uzyskać, gdy trzy razy rzucamy kostką? Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że za każdym razem wypadnie ta sama liczba oczek?
- d) Małpa usiadła przy komputerze i nacisnęła przypadkowe klawisze 5 razy. Na klawiaturze są 104 klawisze. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że małpa wystukała słowo *palma*?
- e) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że cztery losowo wybrane osoby z trzydziestoosobowej klasy będą czterema pierwszymi osobami na liście w dzienniku?

2. Z talii 52 kart wybrano wszystkie asy, króle, damy i walety. Z otrzymanego zestawu 16 kart losujemy kolejno 4 karty. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wśród wybranych kart:

- a) będą 4 króle, b) będą 4 karty tego samego koloru?



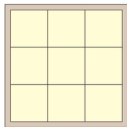
3. Trzy jaja: kurze, kacze i gęsie należy pomalować różnymi kolorami losowo wybranymi spośród sześciu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- a) żadne z jaj nie zostanie pomalowane na żółto,
b) jajo gęsie zostanie pomalowane na czerwono,
c) jajo kurze będzie żółte lub czerwone, a jajo kacze – niebieskie lub zielone.

4. Rysunek obok przedstawia kwadratową planszę z dziewięcioma polami.

a) Na wszystkich polach planszy kładziemy po jednej monetce, za każdym razem losując, czy moneta będzie leżeć do góry orłem czy reszką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że na wszystkich polach monety leżą tą samą stroną do góry?

b) Na planszy zapisujemy losowo dziewięć cyfr od 1 do 9. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w wierszach, niekoniecznie kolejnych, będą ułożone liczby 123, 456 i 789?



5. Na kartonikach zapisano podane litery. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że ustawiając je w przypadkowej kolejności, utworzymy podane słowo?



- a) litery: A, B, D, N, O, Ż; słowo: BANDŻO
- b) litery: A, A, G, I, R, T; słowo: GITARA
- c) litery: A, A, A, A, B, J, K, Ł, L; słowo: BALAJKA

6. Spośród siedmiorga gości pewnej restauracji jeden zamówił kawę, a inny — herbatę. Gdy goście na chwilę odeszli od stołu, kelner podał te napoje, ustawiając losowo filiżanki przy dwóch nakryciach. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że:

- a) kelner postawił odpowiednie napoje przy nakryciach osób, które je zamówiły,
- b) kelner postawił filiżanki przy nakryciach osób, które napojów nie zamówiły,
- c) kelner popełnił tylko jedną pomyłkę?

7. Na pewnej płycie jest 10 utworów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jeśli wybierzemy odtwarzanie w przypadkowej kolejności bez powtarzania utworów, to:

- a) utwory zostaną odtworzone w takiej kolejności, w jakiej znajdują się na płycie,
- b) utwór ostatni zostanie odtworzony jako pierwszy, a pierwszy jako ostatni,
- c) utwory pierwszy i ostatni zostaną odtworzone obok siebie.

8. Należy ułożyć we właściwej kolejności sześć obrazków komiksu. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jeśli ułożymy te obrazki losowo, to:

- a) będą we właściwej kolejności,
- b) co najmniej jeden obrazek nie będzie na swoim miejscu,
- c) tylko początkowe dwa obrazki nie będą na swoich miejscach?



9. Winda może się zatrzymać na dowolnym z czternastu pięter budynku. Znajduje się w niej 5 pasażerów. Każdy z nich może wysiąść na którymkolwiek piętrze z takim samym prawdopodobieństwem. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- a) wszyscy pasażerowie wysiądą na tym samym piętrze,
- b) nikt nie wysiądzie na pierwszym piętrze.

10. Czterech nieznajomych jedzie pociągiem w tym samym przedziale. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że:

- a) wszyscy urodzili się w tym samym dniu tygodnia,
- b) urodzili się w różne dni tygodnia,
- c) tylko trzy osoby urodziły się w tym samym dniu tygodnia?



11. W szufladzie są skarpetki niepołączone w pary. Wyjmujemy z niej po omacku kolejno dwie skarpetki. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że są to skarpetki do pary, jeśli w szufladzie znajduje się:

- a) sześć różnych par skarpetek,
- b) trzy jednakowe pary białych i trzy jednakowe pary czarnych skarpetek,
- c) jedna skarpetka biała i dziewięć jednakowych czarnych skarpetek,
- d) dwie skarpetki białe, dwie czarne i cztery szare?

12. W popularnej grze w kości rzucamy pięcioma różnymi sześciennymi kostkami. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w jednym rzucie:

- a) na wszystkich pięciu kostkach otrzymamy taką samą liczbę oczek (wyrzucimy tzw. generała),
- b) dokładnie na czterech kostkach otrzymamy taką samą liczbę oczek (wyrzucimy tzw. karete)?

MINISPRAWDZIAN

51. Losujemy kolejno 3 karty spośród 13 kierów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pierwszą kartą będzie dama, a ostatnią — król?

- A. $\frac{11}{2197}$ B. $\frac{1}{572}$ C. $\frac{1}{156}$ D. $\frac{1}{1716}$

52. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że ułożymy słowo KOT, wybierając losowo i ustawiając w kolejności losowania trzy spośród liter występujących w słowie GOTYK?

- A. $\frac{1}{60}$ B. $\frac{1}{10}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{20}$

53. W składzie pewnego pociągu jest 6 wagonów. W każdym z tych wagonów jest 10 przedziałów z 8 miejscami siedzącymi. Dwie nieznajome osoby kupiły bilety z miejscówkami na ten pociąg. Prawdopodobieństwo tego, że te osoby usiądą w tym samym przedziale naprzeciwko siebie przy oknie, jest równe:

- A. $\frac{1}{1920}$ B. $\frac{1}{1916}$ C. $\frac{1}{3832}$ D. $\frac{1}{3840}$

POWTÓRZENIE

1. Spośród punktów w układzie współrzędnych, których obie współrzędne są liczbami naturalnymi mniejszymi od 6, wybieramy losowo jeden punkt. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- obie współrzędne są parzyste,
- co najmniej jedna współrzędna jest liczbą pierwszą,

2. Wśród 10 losów loteryjnych jest jeden los wygrywający, dwa uprawniające do ponownego losowania, a pozostałe są przegrywające. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pierwsza osoba biorąca udział w loterii wygra nagrodę?

3. Z talii 52 kart losujemy dwie karty. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- pierwsza wylosowana karta to karo, a druga to trefl,
- żadna z nich nie jest pikiem,
- co najmniej jedna z nich to as.

4. Jeśli strzałka zatrzyma się na złotym polu koła fortuny (zob. rysunek), gracz wygrywa wskazaną kwotę, a gdy zatrzyma się na niebieskim — traci wskazaną kwotę. Oblicz wartość oczekiwaną wygranej uczestnika tej gry.



5. Rzucamy trzema kostkami do gry. Jeśli wypadnie co najmniej jedna szóstka — wygrywamy 20 zł. Jeśli wypadną trzy jedynki — wygrywamy 100 zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy pewną kwotę. Jaka to kwota, jeśli gra jest sprawiedliwa?

6. a) Ile meczów odbywa się w sezonie, jeśli każda z 16 drużyn w lidze rozgrywa z każdą z pozostałych po 2 mecze?

b) Na ile sposobów można wskazać odpowiedzi w teście złożonym z pięciu pytań, jeżeli do każdego podano trzy odpowiedzi?

7. Z zestawu sześciu karteczek z cyframi 1, 2, 3, 6, 8, 9 losujemy kolejno karteczki i układamy jedną za drugą.

a) Losujemy dwie karteczki. Ile liczb większych od 55 możemy utworzyć?

b) Losujemy trzy karteczki. Ile liczb parzystych mniejszych niż 555 możemy utworzyć?

8. Pewien kod składa się z ośmiu znaków (jedynek lub dwójek). Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wystąpią w nim:

- na przemian jedynki oraz dwójki,
- co najmniej dwie jedynki?

9. Wśród 7 kobiet i 8 mężczyzn jest pięć osób z tej samej rodziny — dwie siostry i trzech braci. Z całej grupy wybrano losowo jedną kobietę i jednego mężczyznę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wybrano w ten sposób rodzeństwo?

10. Student na egzaminie losuje po jednym pytaniu z dwóch zestawów. Zna odpowiedzi na 4 spośród 5 pytań pierwszego zestawu i na 3 spośród 4 pytań z drugiego. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- nie będzie znał odpowiedzi na żadne z wylosowanych pytań,
- będzie znał odpowiedź tylko na jedno z wylosowanych pytań.

Powtórzenie przed maturą



- Działania na liczbach ■ Równania i nierówności ■ Ciągi
- Własności funkcji. Funkcja liniowa ■ Funkcja kwadratowa
 - Wielomiany i wyrażenia wymierne ■ Funkcje wykładnicze i logarytmiczne
 - Trygonometria ■ Planimetria ■ Geometria analityczna
 - Stereometria ■ Rachunek prawdopodobieństwa
 - Procenty. Elementy statystyki

DZIAŁANIA NA LICZBACH

PIERWIASTKI

Niech $k \in \mathbb{N}$ i $k > 1$.

Gdy k jest liczbą parzystą, to dla $a \geq 0$ przyjmujemy, że:

$$\sqrt[k]{a} = b \iff (b^k = a \text{ i } b \geq 0)$$

Gdy k jest liczbą nieparzystą, to dla $a \in \mathbb{R}$ przyjmujemy, że:

$$\sqrt[k]{a} = b \iff b^k = a$$

PRAWA DZIAŁAŃ NA PIERWIASTKACH

Dla parzystej liczby n :

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|$$

Dla nieparzystej liczby m :

$$\sqrt[m]{a^m} = a$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \text{ dla } a \geq 0 \text{ i } b \geq 0$$

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ dla } a \geq 0 \text{ i } b > 0$$

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} \text{ dla } b \neq 0$$

$$\sqrt[n]{a^t} = (\sqrt[n]{a})^t \text{ dla } a \geq 0$$

$$\sqrt[m]{a^t} = (\sqrt[m]{a})^t$$

$$\sqrt[m]{-a} = -\sqrt[m]{a}$$

POTĘGI

Dla $n \in \mathbb{N}$ przyjmujemy, że:

$$a^0 = 1 \text{ dla } a \neq 0$$

$$a^1 = a$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \text{ czynników}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ dla } a \neq 0$$

Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n > 1$ oraz $k \in \mathbb{N}_+$. Wówczas dla $a \geq 0$ przyjmujemy, że:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{k}{n}} = (\sqrt[n]{a})^k$$

$$a^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^k} \text{ dla } a > 0$$

PRAWA DZIAŁAŃ NA POTĘGACH

Niech a , b , s i t są takimi liczbami rzeczywistymi, że istnieją potęgi a^s , a^t i b^s . Wówczas dla $a > 0$ przyjmujemy, że:

$$a^s \cdot a^t = a^{s+t}$$

$$a^s : a^t = a^{s-t}$$

$$(a^s)^t = a^{s \cdot t}$$

$$(ab)^s = a^s b^s$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^s = \frac{a^s}{b^s} \quad \text{dla } b \neq 0$$

LOGARYTMY

Niech a i b będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $a > 0$, $b > 0$ i $a \neq 1$.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Liczbę $\log_{10} x$ nazywamy logarytmem dziesiętnym liczby x i oznaczamy $\log x$.

WŁASNOŚCI LOGARYTMÓW

Niech a , b , c występujące poniżej będą takimi liczbami, że istnieją odpowiednie logarytmy. Wówczas zachodzą równości:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a a^b = b$$

$$\log_a b^c = c \log_a b$$

$$a^{\log_a b} = b$$

WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Różnica kwadratów: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Różnica sześcianów: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Wzór ogólny:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \quad \text{gdzie } n \in \mathbb{N}_+$$

Kwadrat sumy: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Kwadrat różnicy: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Sześcian sumy: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Sześcian różnicy: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

ZESTAW ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. Wartość wyrażenia $1001\frac{1}{3} : 2002\frac{2}{3} + \frac{1}{2001} \cdot \left(301\frac{3}{10} - 101\frac{1}{5}\right)$ jest równa:
A. $\frac{1}{20}$ B. $\frac{1}{12}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $2\frac{1}{10}$
2. Wartość wyrażenia $(27^6 + 27^6 + 27^6)^3$ jest równa:
A. 3^{22} B. 3^{30} C. 3^{55} D. 3^{57}
3. Jeśli $a = 4$ i $b = -2$, to wartość wyrażenia $a^b + b^a + a^{\frac{1}{b}}$ jest równa:
A. -20 B. $-7\frac{7}{16}$ C. $16\frac{9}{16}$ D. $10\frac{1}{16}$
4. Dane są liczby: $a = 7^2 \cdot \sqrt{7}$, $b = (7^{-6})^{-\frac{2}{3}}$ i $c = \frac{7}{\sqrt[3]{5}}$. Liczby te spełniają warunek:
A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < c < a$ D. $c < a < b$
5. Która z podanych równości jest prawdziwa?
A. $\frac{1}{\sqrt[3]{9}} = 3^{\frac{2}{3}}$ B. $\sqrt[3]{\sqrt{3}} = 3^{\frac{1}{6}}$ C. $\frac{\sqrt[6]{3}}{\sqrt[3]{9}} = 3^{-\frac{1}{2}}$ D. $\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{9} = 3^{-\frac{1}{6}}$
6. Która z podanych liczb nie jest równa $0,25^2\frac{1}{2}$?
A. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{14}{3}}$ B. $\frac{1}{16\sqrt[3]{4}}$ C. $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^2}$ D. $(4^7)^{-\frac{1}{3}}$
7. Przyjmij, że długość równika Ziemi jest równa 40 000 km, a obwód monety jednogroszowej — 50 mm. Ile razy obróciłaby się ta moneta, gdyby toczono ją wzdłuż drogi o długości równika?
A. $8 \cdot 10^8$ B. $1,25 \cdot 10^9$ C. $8 \cdot 10^5$ D. $0,8 \cdot 10^{10}$
8. Jedna z podanych liczb nie równa się trzem pozostałym. Wskaż tę liczbę.
A. $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$ B. $\log_{16} 0,25$ C. $\log_{\frac{1}{25}} 5$ D. $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2}$
9. Która z podanych liczb nie jest całkowita?
A. $\log_{\frac{1}{6}} \sqrt{6}$ B. $\log_{\frac{1}{7}} \sqrt{7}$ C. $\log_{\sqrt{3}} 25\sqrt{5}$ D. $\log_{\sqrt[3]{4}} \frac{1}{4}$
10. Które z podanych wyrażeń ma największą wartość?
A. $\log_5 \frac{25}{7} + \log_5 \frac{7}{125}$ B. $\log_7 \frac{5}{7} - \log_7 \frac{5}{49}$ C. $\log_5 125^{\frac{1}{7}}$ D. $\log_7 \sqrt[3]{49}$

11. Przyjmij, że $\log 2 \approx 0,3$ i $\log 5 \approx 0,7$. Która z podanych równości jest fałszywa?

- A. $\log 2,5 \approx 0,4$ B. $\log 20 \approx 1,3$ C. $\log 125 \approx 2,1$ D. $\log \frac{5}{\sqrt[3]{2}} \approx 0,07$

12. Wyrażenie $(5x - 2)^2 + 20x$ można przekształcić do postaci:

- A. $(5x + 2)^2 - 20x$ C. $(5x - 1)^2 + 10x$
B. $(5x - 2)(5x + 2)$ D. $(2x - 1)(5x + 2)$

13. Różnica $12355^2 - 12345^2$ jest równa:

- A. 100 B. 1000 C. 123 500 D. 247 000

14. Wartość wyrażenia $(\sqrt{3} - 2)^3$ jest równa:

- A. $15\sqrt{3} - 26$ B. $3\sqrt{3} - 8$ C. $9\sqrt{3} - 14$ D. $7\sqrt{3} - 14$

15. Wyrażenie $8x^3 - 3\sqrt{3}y^3$ przedstawiono w postaci iloczynu i jednym z czynników jest $2x - \sqrt{3}y$. Zatem drugim czynnikiem jest:

- A. $4x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2$ C. $4x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2$
B. $4x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2$ D. $2x^2 + 2\sqrt{3}y + \sqrt{3}$

ZADANIA OTWARTE

16. Przyjmuje się, że roztwór danej substancji jest tym bardziej kwasowy, im więcej jest w nim dodatnich jonów wodorowych. Kwasowość roztworu mierzy się za pomocą tzw. współczynnika pH określonego w następujący sposób:

$$\text{współczynnik pH} = -\log s,$$

gdzie s oznacza stężenie jonów wodorowych w danym roztworze (w molach/dm³).

Woda destylowana (czyli roztwór, który nie wykazuje ani kwasowości, ani zasadowości) ma współczynnik pH równy 7. W tabeli obok podano współczynniki pH niektórych substancji.

a) Oblicz stężenie jonów wodorowych w wodzie destylowanej i w roztworze piorącym.

b) Współczynnik pH kawy jest dwa razy większy niż współczynnik pH soku z cytryny. Jaki jest stosunek stężenia jonów wodorowych w tych substancjach?

c) Korzystając z podanego wyżej opisu współczynnika pH, uzasadnij, że im większa kwasowość roztworu, tym niższy współczynnik pH.

Roztwór	pH
sok z cytryny	2,5
sok z jabłek	3
kwaśne mleko	4,4
piwo	4,5
kawa	5
herbata	5,5
mleko krowie	6
kwes	7,4
roztwór piorący	10

17. W tabeli podano objętość wody w Wielkich Jeziorach w Ameryce Północnej. Zapisz w notacji wykładniczej odpowiedzi na następujące pytania:

- a) Jaka jest łączna objętość wody w tych jeziorach?
b) Jak długą krawędź miałby sześcian o objętości równej objętości wody w Wielkich Jeziorach?
c) Ile kropeł można by utworzyć z wody zawartej w Wielkich Jeziorach? Przyjmij, że kropla wody ma objętość około $4,5 \cdot 10^{-2}$ ml.

Jezioro	Objętość wody w m ³
Górne	$1,16 \cdot 10^{13}$
Michigan	$4,68 \cdot 10^{12}$
Huron	$3,58 \cdot 10^{12}$
Ontario	$1,52 \cdot 10^{12}$
Erie	$5,45 \cdot 10^{11}$

18. Aluminiowy drut o długości L milimetrów ogrzany o $t^{\circ}\text{C}$ wydłuży się o p milimetrów. Wydłużenie to można obliczyć ze wzoru $p = 25 \cdot 10^{-6} \cdot t \cdot L$.

a) Aluminiowy drut, który początkowo miał 4 m długości, ogrzano do temperatury 50°C i stwierdzono, że wydłużył się on o 2,1 mm. Oblicz początkową temperaturę drutu.

b) Aluminiowy drut po ogrzaniu o 20°C osiągnął długość 612 cm. Oblicz początkową długość drutu. Wynik zaokrąglaj do 1 mm.

19. Wykaż, że liczba $2^{15} + 2^{14} + 2^{13} + 2^{12}$ jest podzielna przez 30.

20. Udowodnij, że suma dowolnej liczby dodatniej i jej odwrotności nie może być mniejsza od 2.

21. Udowodnij, że jeżeli reszta z dzielenia pewnej liczby przez 7 jest równa 2, to reszta z dzielenia sześcianu tej liczby przez 7 jest równa 1.

22. Udowodnij, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest liczbą podzielną przez 8.

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

Układ równań liniowych:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$

- może mieć jedno rozwiązanie — taki układ nazywamy oznaczonym,
- może nie mieć rozwiązań, wówczas nazywamy go sprzecznym,
- może mieć nieskończenie wiele rozwiązań, taki układ nazywamy nieoznaczonym; rozwiązaniem układu nieoznaczonego jest każda para liczb spełniająca jedno z równań układu (każda taka para spełnia także drugie z równań).

WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

WŁASNOŚCI

$$|x| = |-x| \qquad |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \qquad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad \text{dla } y \neq 0$$

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ I NIERÓWNOŚCI

Niech $c \geq 0$. Wówczas:

$$|ax + b| = c \iff ax + b = c \text{ lub } ax + b = -c$$

$$|ax + b| \leq c \iff ax + b \leq c \text{ i } ax + b \geq -c$$

$$|ax + b| \geq c \iff ax + b \geq c \text{ lub } ax + b \leq -c$$

Uwaga. Równania i nierówności z wartościami bezwzględnymi można zapisać bez symbolu wartości bezwzględnej, gdy rozpatrujemy odpowiednie przypadki.

RÓWNANIA KWADRATOWE

Liczba rozwiązań równania $ax^2 + bx + c = 0$ (z niewiadomą x), gdzie $a \neq 0$ zależy od wartości $\Delta = b^2 - 4ac$.

Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma jedno rozwiązanie:

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

Jeśli $\Delta < 0$, to równanie nie ma rozwiązań.

Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Wówczas:

$$\begin{aligned} a^x &= a^y & \Leftrightarrow & & x &= y \\ \log_a x &= \log_a y & \Leftrightarrow & & x &= y \end{aligned}$$

Uwaga. Nierówności kwadratowe oraz równania wielomianowe i wymierne będą omawiane w rozdziałach dotyczących odpowiednich funkcji.

ZESTAW ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. Ze wzoru $\frac{3}{p} = \frac{1}{x} + \frac{3}{y}$ wynika jedna z podanych równości (przy odpowiednich założeniach). Która?

- A. $y = \frac{3px}{3x-p}$ C. $y = \frac{1}{p} - \frac{1}{3x}$
 B. $y = 3 \left(\frac{p}{3} - x \right)$ D. $y = \frac{9x-3p}{xp}$

2. Jeśli $\frac{a+2b}{a+b} = \frac{2}{3}$, to liczba $\frac{a}{b}$ jest równa:

- A. -4 B. $-\frac{1}{4}$ C. 0 D. $\frac{2}{3}$

3. Dane są trzy równania:

$$98x + 79 = x(98 + 79) \quad 93(x + 11) = 93(2x + 13) \quad 54(x - 47) + 54(x + 47) = 0$$

Suma rozwiązań tych trzech równań wynosi:

- A. -96 B. -2 C. -1 D. 0

4. Ile jest liczb naturalnych spełniających nierówność $2x - \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 \leq \frac{3}{2} - \frac{(x-8)^2}{4}$?

- A. 7 B. 8 C. 14 D. nieskończenie wiele

5. Suma rozwiązań równania $7 - |x + 3| = 2$ wynosi:

- A. 0 B. -6 C. 4 D. 5

6. Iloczyn rozwiązań równania $|5x| = |5 - 3x|$ wynosi:

- A. $-\frac{1}{4}$ B. $\frac{25}{64}$ C. $-\frac{25}{16}$ D. $\frac{5}{16}$

7. Suma liczb całkowitych spełniających nierówność $|2x - 3| < 7$ jest równa:

- A. 7 B. 9 C. 10 D. 14

8. Suma liczb spełniających układ równań $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \frac{2}{3} \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$ jest równa:
- A. $1\frac{1}{3}$ B. $3\frac{5}{6}$ C. $6\frac{2}{3}$ D. $10\frac{2}{3}$

9. Dany jest układ równań:

$$\begin{cases} 2x = 3y - 11 \\ 1,5y - x - 5,5 = 0 \end{cases}$$

Które z poniższych zdań jest fałszywe?

- A. Para liczb $x = -1$, $y = 3$ jest rozwiązaniem tego układu równań.
B. Ten układ równań jest układem nieoznaczonym.
C. Para liczb $x = -10$, $y = -3$ spełnia ten układ równań.
D. Dowolna para liczb jest rozwiązaniem tego układu równań.

10. Wskaż równanie, którego suma rozwiązań jest największa.

- A. $3(x+4)(2-3x) = 0$ B. $(x-1)^2 - 9 = 0$ C. $x^2 - 5x = 0$ D. $6x^2 - 7 = 0$

11. Dla której z podanych wartości m równanie $9x^2 - 6x + 1 - m = 0$ nie ma rozwiązań?

- A. $m = -1$ B. $m = 0$ C. $m = 1$ D. $m = 2$

12. Liczby a , b są rozwiązaniami równania $-2x^2 + 5x + 12 = 0$ i $a > b$. Wartość wyrażenia a^b jest równa:

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\sqrt[3]{16}$ C. $\frac{16}{81}$ D. 64

13. Iloczyn wszystkich rozwiązań równania $2x^4 - x^2 - 15 = 0$ jest równy:

- A. $-7,5$ B. -3 C. 3 D. $7,5$

14. Rozwiązaniem tylko jednego z podanych równań nie jest liczba naturalna. Wskaż to równanie.

- A. $49^{5-x} = \left(\frac{1}{7}\right)^x$ C. $(\sqrt{5})^x = \left(\frac{1}{25}\right)^{x-5}$
B. $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 27^{5-x}$ D. $4^{x+5} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$

15. Suma rozwiązań równań $5^{x+2} - 5^x = \frac{24}{25}$ oraz $2^{x-5} + 2^x = 66$ jest równa:

- A. -2 B. 2 C. 4 D. 5

16. Jedno z podanych równań nie ma rozwiązań. Wskaż je.

- A. $\log_5(2x-4) = \log_5(5-x)$ C. $\log_6(5-x) = \log_6(x-1)$
B. $\log(3x-12) = \log(3-x)$ D. $\log_{\frac{1}{3}}(4-x) = \log_{\frac{1}{3}}(2+x)$

17. Rozwiązanie równania $\log_7(x-1) + \log_7(x+2) = 2\log_7 x$ jest:

- A. ujemną liczbą całkowitą,
- B. liczbą naturalną,
- C. liczbą należącą do przedziału $(-1; 0)$,
- D. liczbą należącą do przedziału $(1; 2)$.

18. Ile rozwiązań ma równanie $\log_{x-2}(x+2) = 2$?

- A. Nie ma rozwiązań.
- B. Ma jedno rozwiązanie.
- C. Ma dwa rozwiązania.
- D. Ma nieskończenie wiele rozwiązań.

ZADANIA OTWARTE

19. Żadna z planet nie ma kształtu kuli. Odległość a od środka planety do punktu na równiku jest większa od odległości b do bieguna (zob. rysunek obok). Liczbę f , za pomocą której najczęściej opisuje się tzw. spłaszczenie, oblicza się ze wzoru $f = \frac{a-b}{a}$. Można przyjąć, że dla Ziemi $f = \frac{1}{300}$ i $b = 6358$ km. Ustal z dokładnością do 1 km, o ile kilometrów odległość od środka Ziemi do równika jest większa od odległości do bieguna.



20. Wykaż, że suma rozwiązań równania (z niewiadomą x): $|x+a| = b$, gdzie $b > 0$, wynosi $-2a$, a wartość bezwzględna różnicy między tymi rozwiązaniami jest równa $2b$.

21. Znajdź wszystkie liczby, które spełniają jednocześnie dwie nierówności:
 $|5x+4| < 8$ oraz $|3-4x| \geq 5$.

22. Rozwiąż równanie $(x-1)^4 + 3(x-1)^2 - 10 = 0$.

23. Wiadomo, że spełnione są warunki: $7 = 3^b$, $\log_p q = b - 2$ oraz $3pq = 7$. Wyznacz p i q .

24. Drut o długości 10 m rozcięto na dwie części i z jednej wygięto ramkę w kształcie kwadratu, a z drugiej — ramkę w kształcie prostokąta, którego jeden bok ma tę samą długość co bok kwadratu. Suma pól obszarów ograniczonych przez te ramki jest równa 3 m^2 . Jakie wymiary mają te ramki?

25. Fabryka produkuje laptopy i tablety. Miesięcznie wytwarza i sprzedaje łącznie 1200 urządzeń. Tablety są 4 razy tańsze od laptopów. Gdyby cenę laptopów zwiększyć o 10%, a tabletów o 10% zmniejszyć, to przychód ze sprzedaży by się nie zmienił. Ile laptopów produkuje fabryka?

CIĄGI

Ciąg to funkcja określona na zbiorze liczb naturalnych dodatnich (ciąg nieskończony) lub na jego skończonym podzbiorze $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ (ciąg skończony). Wartości takiej funkcji nazywamy wyrazami ciągu.

Ciąg (a_n) , w którym dla dowolnych dwóch kolejnych wyrazów a_n i a_{n+1} zachodzi nierówność $a_n < a_{n+1}$, nazywamy rosnącym, a gdy zachodzi nierówność $a_{n+1} < a_n$, to ciąg nazywamy malejącym. Ciąg, w którym dla każdego n zachodzi równość $a_{n+1} = a_n$, nazywamy stałym.

CIĄG ARYTMETYCZNY

Ciąg (a_n) nazywamy arytmetycznym, jeśli ma co najmniej trzy wyrazy i każdy jego wyraz, z wyjątkiem pierwszego, powstaje przez dodanie pewnej stałej liczby r (różnicy ciągu) do poprzedniego wyrazu.

Wzór rekurencyjny:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Wzór ogólny:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Własność ciągu arytmetycznego:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla } n \geq 2$$

Suma n początkowych wyrazów:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

CIĄG GEOMETRYCZNY

Ciąg (a_n) nazywamy geometrycznym, jeśli ma co najmniej trzy wyrazy i każdy jego wyraz, z wyjątkiem pierwszego, powstaje w wyniku pomnożenia poprzedniego wyrazu przez pewną stałą liczbę q (iloraz ciągu).

Wzór rekurencyjny:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Wzór ogólny:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Własność:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad \text{dla } n \geq 2$$

Suma n początkowych wyrazów:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad \text{gdy } q \neq 1$$

ZESTAW ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. Niech (p_n) będzie ciągiem kolejnych liczb pierwszych. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (2n - 1)(n + 2)$. Znajdź siódmy wyraz ciągu $b_n = a_{n+1} - p_n$.

- A. 116 B. 118 C. 131 D. 133

2. Ciąg (a_n) jest określony wzorem rekurencyjnym: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + n + 1$. Który z podanych wzorów jest wzorem ogólnym tego ciągu?

- A. $a_n = 2^{n-1} + n - 1$ C. $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$
B. $a_n = 2n - 1$ D. $a_n = \sqrt{8n - 7}$

3. Wyrazy ciągu (a_n) spełniają warunek $a_{n+1} = a_n + 2n - 1$. Jedenasty wyraz tego ciągu jest równy 25. Wyraz a_{10} jest równy:

- A. -44 B. -6 C. 6 D. 44

4. Jeden z podanych ciągów jest rosnący. Który?

- A. $a_n = 3 - \frac{2}{n}$ C. $c_n = \frac{n+1}{2n}$
B. $b_n = n^2 - 2n$ D. $d_n = |7 - n|$

5. Liczby $1 + \sqrt{2}$ i $1 - \sqrt{2}$ to odpowiednio pierwszy i trzeci wyraz ciągu arytmetycznego. Dziesiąty wyraz tego ciągu jest równy:

- A. $1 - 17\sqrt{2}$ B. $1 - 9\sqrt{2}$ C. $1 - 8\sqrt{2}$ D. $10 + \sqrt{2}$

6. Oblicz sumę dziesiątego, jedenastego i dwunastego wyrazu ciągu arytmetycznego (a_n) , w którym $a_3 = 8$ i $a_7 = 6$.

- A. 4,5 B. 5,5 C. 12 D. 15

7. W ciągu arytmetycznym (a_n) spełniony jest warunek $a_8 + a_{10} = 64$. Dziewiąty wyraz tego ciągu jest równy:

- A. 9 B. 18 C. 32 D. 64

8. Piętnasty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 37. Suma $a_{10} + a_{20}$ wynosi:

- A. 15 B. 18,5 C. 37 D. 74

9. Piętnasty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 40, a suma piętnastu jego początkowych wyrazów jest równa 57. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy:

- A. -32,4 B. -16,2 C. -36,2 D. $-51\frac{2}{3}$

10. Wszystkie liczby naturalne, dla których reszta z dzielenia przez 7 jest równa 3, ustawiono w ciąg rosnący. Trzynasty wyraz tego ciągu jest równy:

- A. 81 B. 87 C. 88 D. 94

11. Liczby -2 i 4 to odpowiednio drugi i czternasty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) . Suma $a_{20} + a_{21} + \dots + a_{30}$ jest równa:

- A. 95 B. 100,5 C. 104,5 D. 110

12. Ciąg określony wzorem $a_n = \frac{(n+1)^2 - n^2}{7}$ jest ciągiem:

- A. arytmetycznym o różnicy $\frac{1}{7}$. C. geometrycznym o ilorazie $\frac{1}{7}$.
B. arytmetycznym o różnicy $\frac{2}{7}$. D. geometrycznym o ilorazie 7.

13. Poniżej podano wzory ogólne kilku ciągów.

$$a_n = n^3$$

$$c_n = 3n$$

$$e_n = |n+2|$$

$$b_n = 3^n$$

$$d_n = 1 - \frac{n}{4}$$

$$f_n = |n-2|$$

Ile wśród nich jest ciągów arytmetycznych?

- A. jeden B. dwa C. trzy D. cztery

14. W rosnącym ciągu geometrycznym (a_n) , spełniony jest warunek $a_5 = 7a_2$. Iloraz tego ciągu jest równy:

- A. $\frac{1}{7}$ B. $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$ C. $\sqrt[3]{7}$ D. 7

15. W ciągu geometrycznym (a_n) dwa początkowe wyrazy są równe: $a_1 = \sqrt{3}$, $a_2 = 3$. Wzór na n -ty wyraz tego ciągu można zapisać w postaci:

- A. $a_n = (\sqrt{3})^n$ C. $a_n = 3 \cdot (\sqrt{3})^n$
B. $a_n = 3^{n-1} \cdot \sqrt{3}$ D. $a_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$

16. Ciąg geometryczny (a_n) jest określony wzorem $a_n = (\sqrt{3})^n$. Suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa:

- A. $40(3 + \sqrt{3})$ C. $\frac{81}{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt{3}$
B. $40(1 + \sqrt{3})$ D. $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}$

17. Składowiki sumy $2 + 2\sqrt{2} + 4 + \dots + 16\sqrt{2}$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Suma ta wynosi:

- A. $30(\sqrt{2} + 1)$ C. $34 - 18\sqrt{2}$
B. $30(\sqrt{2} - 1)$ D. $15(1 + \sqrt{2})$

18. Dziesiąty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 1, a ostatni wyraz — czterdziesty — jest równy 11. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

19. Oblicz sumę wszystkich trzycyfrowych parzystych liczb naturalnych.

20. Wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) są dodatnie i spełniony jest warunek $a_3 - a_2 = 6a_1$. Oblicz iloraz tego ciągu.

21. Wykaż, że liczby $(\sqrt{3})^4 - 2\sqrt{3}$, 9, $3^2 + \sqrt{3}$ w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny. Czy iloraz tego ciągu jest liczbą większą od 3?

22. Wykaż, że ciąg $\log_2 10$, $\log_2 100$, $\log_2 1000$, ... jest ciągiem arytmetycznym. Czy różnica tego ciągu jest liczbą większą od 3?

23. Suma trzech początkowych wyrazów pewnego ciągu geometrycznego jest równa trzykrotności pierwszego wyrazu. Wiadomo, że ciąg ten nie jest ciągiem stałym. Oblicz iloraz tego ciągu.

24. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = n^2 + 13n - 12$. Uzasadnij, że różnica dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu jest liczbą parzystą.

25. W pewnym amfiteatrze jest razem 1250 miejsc w 25 rzędach. W drugim rzędzie są o 3 miejsca więcej niż w pierwszym, w trzecim — o 3 miejsca więcej niż w drugim itd. W każdym rzędzie miejsca ponumerowane są liczbami 1, 2, 3 itd.

a) Jaki numer miejsca w rzędzie XVI trzeba wybrać, aby siedzieć dokładnie na środku rzędu?

b) Bilety na miejsca w rzędach od I do XVI są droższe. Czy droższych biletów jest więcej czy mniej niż połowa?

26. Na szpulę o średnicy 7 cm nawijana jest wstążka o długości 5 m. Podczas każdego kolejnego pełnego obrotu szpuli nawija się na nią fragment wstążki o 2 mm dłuższy niż podczas poprzedniego obrotu. Ile razy należy obrócić szpulę, by nawinęła się na nią cała wstążka? Przyjmij, że $\pi = \frac{22}{7}$.

27. Marcin, który ostatnio zjadał dwie tabliczki czekolady dziennie, postanowił w niedzielę, że od jutra codziennie będzie jadł o 5% czekolady mniej niż dnia poprzedniego.

a) Ile czekolady powinien zjeść w następną niedzielę? Wynik zaokrąglij do części dziesiątych.

b) O ile co najmniej procent dziennie Marcin powinien zmniejszać porcję zjadanej czekolady, aby w następną niedzielę po raz pierwszy zjeść mniej niż 1 tabliczkę? Wynik zaokrąglij do 0,1% tabliczki.

WŁASNOŚCI FUNKCJI. FUNKCJA LINIOWA

PODSTAWOWE POJĘCIA

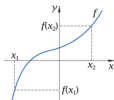
Funkcja f określona na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y to takie przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi zbioru X odpowiada dokładnie jeden element zbioru Y .

$$f: X \rightarrow Y$$

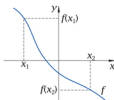
Zbiór X , na którym określona jest funkcja, nazywamy dziedziną funkcji, a każdy element dziedziny nazywamy argumentem funkcji.

Argument a jest miejscem zerowym funkcji f , gdy $f(a) = 0$.

MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI



Funkcja f jest rosnąca, gdy dla dowolnych argumentów x_1 i x_2 prawdziwa jest implikacja:
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



Funkcja f jest malejąca, gdy dla dowolnych argumentów x_1 i x_2 prawdziwa jest implikacja:
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



Funkcję, która dla każdego argumentu przyjmuje taką samą wartość, nazywamy funkcją stałą.

Uwaga. Niech x_1, x_2 będą dowolnymi liczbami ze zbioru A , takimi że $x_1 < x_2$, i niech A będzie podzbiorem dziedziny funkcji f . Wówczas:

Jeśli $f(x_2) - f(x_1) > 0$, to funkcja f jest rosnąca w zbiorze A .

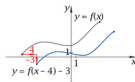
Jeśli $f(x_2) - f(x_1) < 0$, to funkcja f jest malejąca w zbiorze A .

PRZEKSZTAŁCANIE WYKRESÓW FUNKCJI

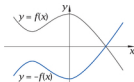
Gdy wykres funkcji $y = f(x)$ przesuwamy o 5 jednostek w lewo i 7 jednostek w górę, otrzymujemy wykres funkcji $y = f(x + 5) + 7$.



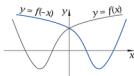
Gdy wykres funkcji $y = f(x)$ przesuwamy o 4 jednostki w prawo i 3 jednostki w dół, otrzymujemy wykres funkcji $y = f(x - 4) - 3$.



Wykres funkcji $y = -f(x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi x .



Wykres funkcji $y = f(-x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi y .



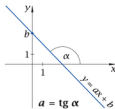
FUNKCJA LINIOWA

Funkcję określoną na zbiorze liczb rzeczywistych, której wzór można zapisać w postaci:

$$y = ax + b,$$

gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi, nazywamy funkcją liniową.

Wykresem funkcji liniowej jest prosta.

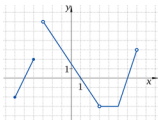


ZESTAW ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

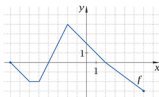
1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Wskaż zdanie prawdziwe.

- A. Dziedzina funkcji f jest przedział $\langle -6; 7 \rangle$.
- B. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -3; 6 \rangle$.
- C. Funkcja f przyjmuje wartości ujemne dla $x \in \langle -6; -5 \rangle \cup \langle 1; 3 \rangle \cup \langle 3; 6 \rangle$.
- D. W przedziale $\langle -6; -4 \rangle$ funkcja f jest rosnąca.



2. Na rysunku jest przedstawiony jest wykres funkcji f . Wskaż zdanie fałszywe.

- A. Suma miejsc zerowych funkcji f jest równa -10 .
 B. Nierówność $f(x) \leq 0$ jest spełniona dla $x \in \langle -8; -4 \rangle \cup \langle 2; 6 \rangle$.
 C. Funkcja f przyjmuje wartość $-0,1$ dla trzech argumentów.
 D. Równanie $f(x) = -2,5$ nie ma rozwiązań.



3. Funkcja f jest określona za pomocą tabeli przedstawionej obok. Który z poniższych wykresów jest wykresem funkcji $g(x) = f(x - 2) - 4$?

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	2	2	0	1



4. Punkt $(5, \frac{1}{4})$ należy do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{m\sqrt{x-1}}{2mx-6}$, gdy:

- A. $m = 3$ B. $m = 4$ C. $m = 5$ D. $m = 6$

5. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 3x$. Wskaż przedział, do którego należy rozwiązanie równania $f(x-1) = f(x+3)$.

- A. $(-2; -1)$ B. $(-1; 0)$ C. $(0; 1)$ D. $(1; 2)$

6. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2-9}{\sqrt{x+3}}$. Wskaż zdanie prawdziwe.

- A. Dziedzina funkcji f jest przedział $\langle -3; +\infty \rangle$.
 B. Wykres funkcji f przecina oś y w punkcie, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi.
 C. Funkcja f ma dwa miejsca zerowe.
 D. Wykres funkcji f przechodzi przez punkt $(-1, -4\sqrt{2})$.

7. Dana jest funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x - 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \\ 2x + 4 & \text{dla } x \in \langle -3; +\infty \rangle \end{cases}$$

Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości większe od 500?

- A. $x \in (-1503; +\infty)$ C. $x \in \langle -3; 248 \rangle$
 B. $x \in (-1800; -1500) \cup \langle 240; 500 \rangle$ D. $x \in (-\infty; -1503) \cup \langle 248; +\infty \rangle$

8. O funkcji f wiadomo, że jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 5)$ i malejąca w przedziale $(5; +\infty)$ oraz że $f(1) = f(7)$. Która z podanych nierówności jest fałszywa?

- A. $f(10) > f(11)$ B. $f(-5) < f(0)$ C. $f(-2) < f(6)$ D. $f(3) < f(9)$

9. Wykres funkcji $f(x) = \sqrt{2x-5}$ przekształcono przez symetrię względem osi x , a następnie przesunięto o 3 jednostki w dół. Otrzymano wykres funkcji:

- A. $g(x) = -\sqrt{2(x-3)} - 5$ C. $g(x) = -3 - \sqrt{2x-5}$
B. $g(x) = \sqrt{-2x-5} - 3$ D. $g(x) = -(\sqrt{2x-5} - 3)$

10. Dana jest funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x + 4\frac{1}{2} & \text{dla } x \in \langle -8; -2 \rangle \\ x & \text{dla } x \in \langle -2; 2 \rangle \end{cases}$$

Zbiorem wartości funkcji $g(x) = f(x+50) - 20$ jest:

- A. $\langle -22; -17 \rangle$ B. $\langle 48; 53 \rangle$ C. $\langle -52; -47 \rangle$ D. $\langle 18; 23 \rangle$

11. Wykres funkcji $f(x) = ax + b$ przecina osie układu współrzędnych w punktach $(0, -6)$ i $(2, 0)$. Suma współczynników $a + b$ jest równa:

- A. -9 B. -4 C. -3 D. $2\frac{1}{3}$

12. Wykres jednej z poniższych funkcji przechodzi przez drugą, trzecią i czwartą ćwiartkę układu współrzędnych. Która to funkcja?

- A. $y = -12x + 35$ C. $y = -67x - 13$
B. $y = 17x - 62$ D. $y = 51x + 28$

13. Dla jakiej wartości m funkcje $f(x) = mx + m + 5$ i $g(x) = 2x - 5$ mają to samo miejsce zerowe?

- A. dla $m = -1\frac{3}{7}$ C. dla $m = 0,8$
B. dla $m = -0,7$ D. dla $m = \frac{7}{5}$

14. Wykresy funkcji $f(x) = x - 7$ i $g(x) = -8x + 11$ przecinają się w punkcie, którego suma współrzędnych jest równa:

- A. -10 B. -6 C. -3 D. 4

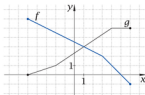
15. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = |x - 5|$, a jej dziedziną jest zbiór liczb całkowitych. Dla ilu argumentów wartość tej funkcji jest mniejsza od 7?

- A. 12 B. 13 C. 14 D. nieskończenie wielu

16. Na rysunku są przedstawione wykresy funkcji f i g . Rozważmy funkcję:

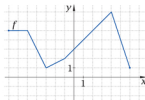
$$h(x) = f(x) - g(x)$$

- Podaj wartość $h(4)$.
- Znajdź miejsca zerowe funkcji h .
- Czy funkcja h jest monotoniczna?
- Dla jakiego argumentu funkcja h przyjmuje wartość największą, a dla jakiego — najmniejszą? Jakie to wartości?



17. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .

- Narysuj wykres funkcji $g(x) = f(x + 3) + 1$.
Dla jakich argumentów (należących zarówno do dziedziny funkcji f , jak i do dziedziny funkcji g) spełniony jest warunek $g(x) \geq f(x)$?
- Dla jakich wartości k funkcja $h(x) = f(x) + k$ ma dokładnie dwa miejsca zerowe?



18. Funkcja f ma następujące własności:

- Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych.
- Zbiorem wartości jest przedział $(-\infty; 7)$.
- Miejscami zerowymi funkcji f są liczby: -5 , 0 , 3 i 7 .
- Funkcja jest malejąca w przedziałach: $(-\infty; -2)$, $(1; 3)$ oraz $(5; +\infty)$.
- Funkcja jest rosnąca w przedziałach: $(-2; 1)$ i $(3; 5)$.

Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie?

19. a) Wykaż, że jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to w układzie współrzędnych wszystkie punkty (n, a_n) leżą na jednej prostej.

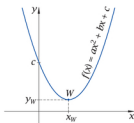
b) Piąty wyraz pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 15, a różnica tego ciągu wynosi -3 . Znajdź równanie prostej, na której leżą wszystkie punkty wykresu ciągu (a_n) .

FUNKCJA KWADRATOWA

WZORY FUNKCJI KWADRATOWEJ

Funkcję określoną na zbiorze liczb rzeczywistych, której wzór można zapisać w postaci $y = ax^2 + bx + c$, gdzie a , b i c są liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$, nazywamy funkcją kwadratową.

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola.



$$x_W = \frac{-b}{2a} \quad y_W = \frac{-\Delta}{4a}$$

Wzór w postaci ogólnej:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Wierzchołek paraboli ma współrzędne:

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right),$$

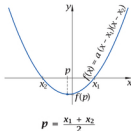
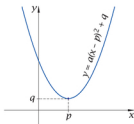
gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$.

Wzór w postaci kanonicznej:

$$y = a(x - p)^2 + q$$

Wierzchołek paraboli ma współrzędne:

$$(p, q)$$



$$p = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Wzór w postaci iloczynowej:

Jeśli funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe x_1 , x_2 , to jej wzór można zapisać w postaci:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Wierzchołek paraboli ma współrzędne:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right)$$

Uwaga. Jeśli funkcja kwadratowa ma jedno miejsce zerowe x_0 , to jej wzór można zapisać w postaci $y = a(x - x_0)^2$. Wówczas wierzchołek paraboli ma współrzędne $(x_0, 0)$.

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, zależy od wartości $\Delta = b^2 - 4ac$.

Jeśli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe:

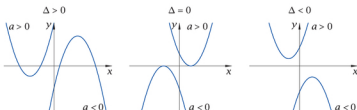
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Jeśli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma jedno miejsce zerowe:

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

Jeśli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych.



ZESTAW ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. Dana jest funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} 2(x+3)(x-1) & \text{dla } x \leq 0 \\ \frac{x}{2} - 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby:

- A. -3 i 1 B. 3 i -1 C. -3 i 2 D. -6 i -1

2. Wykres funkcji $f(x) = x^2 - 2x - 10$ przecina wykres funkcji $g(x) = -3x + 10$ w dwóch punktach o współrzędnych:

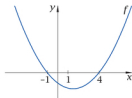
- A. (0, -10) i (5, 5) C. (0, 10) i (-5, -5)
B. (-5, 25) i (4, -2) D. $(1 - \sqrt{11}, 13 + 3\sqrt{11})$ i $(1 + \sqrt{11}, 13 - 3\sqrt{11})$

3. Wykresem pewnej funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku $(-3, 2)$, przecinająca oś y w punkcie $(0, -1)$. Wartość tej funkcji dla $x = -6$ jest równa:

- A. -4 B. -1 C. 4 D. 5

4. Funkcję kwadratową, której wykres przedstawiono na rysunku można opisać wzorem:

- A. $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-4)$
B. $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x+4)$
C. $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-4)$
D. $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x+4)$



5. Punkt W to wierzchołek paraboli o równaniu $y = -2(x+1)(x-5)$. Parabola ta przecina oś x w punktach A i B . Pole trójkąta ABW jest równe:

- A. 6 B. 12 C. 48 D. 54

6. Miejscami zerowymi pewnej funkcji kwadratowej są liczby -1 i 2 . Do wykresu tej funkcji należy punkt $(1, 4)$. Wykres ten przecina oś y w punkcie:

- A. $(0, 4)$ B. $(0, -4)$ C. $(0, \frac{5}{2})$ D. $(0, -\frac{5}{2})$

7. Wykresem funkcji kwadratowej f jest parabola o wierzchołku $W = (-7, 9)$. Wówczas prawdziwa jest równość:

- A. $f(9) = f(-7)$ B. $f(-11) = f(-17)$ C. $f(1) = f(-15)$ D. $f(2) = f(-9)$

8. Maksymalny przedział, w którym funkcja $f(x) = -3(x+1)(x-13)$ jest malejąca, to:

- A. $(-\infty; -1)$ B. $(-\infty; 1)$ C. $(6; +\infty)$ D. $(13; +\infty)$

9. Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Jeżeli wierzchołek paraboli, która jest wykresem tej funkcji, ma współrzędne $(-1, 3)$, to spełniony jest warunek:

- A. $2c - b = 6$ B. $a - c = -3$ C. $a = 2b$ D. $c = 3a$

10. Największa wartość funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest równa 2 oraz $f(-6) = f(4) = 7$. Wartość współczynnika a wynosi:

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{5}{9}$ C. 2 D. $\frac{2}{9}$

11. Pewna funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe. Wierzchołek paraboli, która jest wykresem tej funkcji, ma współrzędne $(-24, 36)$. Suma miejsc zerowych tej funkcji wynosi:

- A. -48 B. -24 C. 36 D. 72

12. Największa wartość funkcji $f(x) = -(x+3)^2 + 20$ w przedziale $\langle -2; 2 \rangle$ jest równa:

- A. -5 B. 3 C. 19 D. 20

13. Ile jest liczb całkowitych spełniających nierówność $-2x^2 - x + 21 > 0$?

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

14. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = n(n - 14)$. Ile wyrazów tego ciągu jest mniejszych od 15?

- A. 13 B. 14 C. 15 D. 16

15. Miejsca zerowe funkcji kwadratowej f to -3 i 5 . Wówczas $\frac{f(9)}{f(-9)}$ jest równe:

- A. -1 B. 1 C. $-\frac{4}{7}$ D. $\frac{4}{7}$

ZADANIA OTWARTE

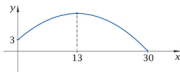
16. Znajdź liczby, które spełniają jednocześnie trzy poniższe nierówności.

$$(1 + 2x)(5 - x) \geq 0$$

$$x^2 > 8(x - 2)$$

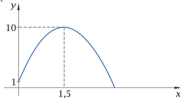
$$(3x - 4)^2 > 6 - 25x$$

17. Woda wypływająca z węża strażackiego porusza się po linii, która jest fragmentem paraboli. Na wykresie przedstawiono tor ruchu wody (kropką zaznaczono wierzchołek paraboli). Oblicz, na jaką największą wysokość sięgnęła woda.



x - odległość w metrach
 y - wysokość w metrach

18. Kopnięta piłka poszybowała w górę. Najwyższy punkt osiągnęła po 1,5 s ruchu. Poniższy wykres przedstawia, jak zmieniała się wysokość, na której znajdowała się piłka, od momentu, w którym została kopnięta, do momentu, gdy upadła na ziemię. Wykres ten jest fragmentem paraboli. Oblicz, po jakim czasie piłka spadła na ziemię.



x - czas w sekundach
 y - wysokość w metrach

19. Znajdź współrzędne punktów przecięcia wykresów funkcji f i g , gdzie:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 3 & \text{dla } x \leq 2 \\ -2x + 7 & \text{dla } x > 2 \end{cases} \quad g(x) = -x^2 - 6x - 11$$

20. Dla jakich argumentów wartości funkcji $f(x) = x^2 - 3x - 4$ są większe od wartości funkcji $g(x) = 2x + 10$?

21. W wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = \frac{1}{2}x^2$ otrzymano funkcję, której miejscami zerowymi są liczby -6 i 3 . Dla jakich argumentów ta funkcja przyjmuje wartości większe od -9 ?

22. Dane są funkcje:

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 3 \quad \text{ i } \quad g(x) = 3x^2 + x - 2$$

Znajdź argument x , dla którego różnica $f(x) - g(x)$ ma największą wartość.

23. Trzynasty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 0 , a wyraz dwudziesty trzeci jest równy 2 . Ile co najmniej początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby ich suma była liczbą większą od 100 ?

24. Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji $y = -x^2 + 6x + 7$ w przedziale $\langle -10; 20 \rangle$.

25. Z drutu należy wygiąć uchwyt do szuflady. Jakie wymiary powinien mieć prostokąt ograniczony tym uchwytem i ścianką szuflady, aby jego pole było jak największe, jeśli długość widocznej części drutu wynosi 20 cm? Pomiń grubość drutu.



26. Uzasadnij, że jeśli funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 , to jej wykres przecina oś y w punkcie $(0, ax_1x_2)$.

27. Z drutu o długości d należy zbudować ramkę w kształcie równoległoboku, w którym kąt ostry między bokami ma miarę α . Wykaż, że aby ramka ograniczała jak największe pole, powinna mieć kształt rombu.

WIELOMIANY I WYRAŻENIA WYMIERNE

WIELOMIANY

Wielomianem $W(x)$ stopnia n zmiennej x nazywamy wyrażenie postaci:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gdzie współczynniki $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ są liczbami rzeczywistymi i $n \in \mathbb{N}$ oraz $a_n \neq 0$.

Dwa wielomiany są równe, gdy są tego samego stopnia oraz mają takie same współczynniki przy odpowiednich potęgach.

Liczbę, która jest rozwiązaniem równania wielomianowego $W(x) = 0$, nazywamy pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

TWIERDZENIE BÉZOUTA

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian ten jest podzielny przez dwumian $x - a$.

TWIERDZENIE O RESZCIE

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - a$ jest równa $W(a)$.

TWIERDZENIE O ROZWIĄZANIACH CAŁKOWITYCH

Załóżmy, że w równaniu wielomianowym postaci:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

wszystkie współczynniki są liczbami całkowitymi oraz $a_0 \neq 0$ i $a_n \neq 0$.

Jeśli rozwiązaniem tego równania jest liczba całkowita, to jest ona dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .

WYRAŻENIA WYMIERNE

Niech $W(x)$ i $V(x)$ będą wielomianami i $V(x)$ nie jest wielomianem zerowym. Wyrażenie:

$$\frac{W(x)}{V(x)}$$

nazywamy wyrażeniem wymiernym. Dziedzina tego wyrażenia jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których $V(x) \neq 0$.

RÓWNANIA WYMIERNE

Niech $V(x) \neq 0$.

$$\frac{W(x)}{V(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad W(x) = 0$$

ZESTAW ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. Wielomiany $W(x) = (ax^3 + bx)(2x - 1)$ oraz $V(x) = 3x(cx^2 + x) - (2x^3 + dx)$ są równe. Która z wartości jest podana błędnie?

- A. $a = 0$ B. $b = 1\frac{1}{2}$ C. $c = \frac{1}{3}$ D. $d = 1\frac{1}{2}$

2. Reszta z dzielenia wielomianu $-5x^4 + ax^2 + 2ax + 3$ przez dwumian $x + 1$ jest równa 7. Wynika stąd, że:

- A. $a = -9$ B. $a = -3$ C. $a = 3$ D. $a = 7$

3. Liczba 7 jest pierwiastkiem jednego z poniższych wielomianów. Wskaż ten wielomian.

- A. $14x^6 - 5x^3 + 2x^2 + 3$ C. $5x^6 + 14x^4 + 21x^3 - 1$
B. $3x^6 - 21x^5 + 2x - 14$ D. $7x^6 + 3x^5 + 14x^3 + 5$

4. Równanie $x^5 - 7x^3 + 12x = 0$ ma:

- A. dwa rozwiązania, C. cztery rozwiązania,
B. trzy rozwiązania, D. pięć rozwiązań.

5. Iloczyn rozwiązań równania $2x^4 - x^3 + 4x - 2 = 0$ jest równy:

- A. 2^{-1} B. $-2^{-\frac{1}{2}}$ C. $-2^{-\frac{2}{3}}$ D. $2^{-\frac{1}{2}}$

6. W wyniku dzielenia wielomianu $2x^3 - 3x^2 - 5x + 1$ przez dwumian $x - 3$ otrzymujemy:

- A. $-2x^2 - 3x - 5$ reszta -2 C. $x^2 - 3x - 5$ reszta 3
B. $2x^2 + 3x + 4$ reszta 13 D. $2x^2 + 9x + 32$ reszta -65

7. Liczba -2 jest pierwiastkiem równania $2x^3 + 2x^2 - 5x - 2 = 0$. Jednym z pozostałych pierwiastków tego równania jest:

- A. $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

8. Suma $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$ wynosi:

- A. $\frac{x^2 + 2x + 3}{x^6}$ B. $\frac{x^2 + 2x + 3}{x^3}$ C. $\frac{6}{x + x^2 + x^3}$ D. $\frac{x^3 + 2x^2 + 3x}{x^6}$

9. Wyrażenie $\frac{-4x-5}{x^2+3x+2}$ jest równe:

- A. $\frac{x-1}{x+2} - \frac{x+2}{x+1}$ B. $\frac{x+1}{x+2} - \frac{x+2}{x+1}$ C. $\frac{x-1}{x+2} + \frac{x+2}{x+1}$ D. $\frac{x-1}{x+2} - \frac{x-2}{x+1}$

10. Suma wszystkich rozwiązań równań $\frac{4+x}{2x-5} = 0$ i $\frac{2x+5}{4-x} = 3$ wynosi:

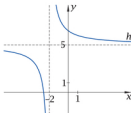
- A. $-5\frac{2}{5}$ B. $-4\frac{5}{7}$ C. $-2\frac{3}{5}$ D. $-2\frac{5}{7}$

11. Największym z rozwiązań równania $\frac{-3x(x-5)^2(x+3)^3(x-2)}{-6(x+3)(x-5)} = 0$ jest:

- A. 0 B. 2 C. 3 D. 5

12. Wykres funkcji h przedstawiony na rysunku obok powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $f(x) = \frac{3}{x}$. Wskaż wzór funkcji h .

- A. $h(x) = \frac{5x-7}{x-2}$ C. $h(x) = \frac{3x+5}{x+2}$
B. $h(x) = \frac{5x+13}{x+2}$ D. $h(x) = \frac{3x+15}{x-2}$



ZADANIA OTWARTE

13. Rozważmy następujące wielomiany:

$$U(x) = ax^2 + bx$$

$$V(x) = 2x^3 - 11x^2 + 12x$$

$$W(x) = x - 3$$

Dla jakich wartości współczynników a i b wielomian $U(x) - V(x)$ jest równy wielomianowi $U(x) \cdot W(x)$?

14. Dzieląc pewien wielomian $W(x)$ przez dwumian $x + 2$, otrzymujemy $2x^2 + 3x - 4$ oraz resztę 5.

- a) Znajdź wielomian $W(x)$.
b) Znajdź resztę z dzielenia $W(x) : (x + 1)$.
c) Znajdź pierwiastki wielomianu $W(x)$.

15. Oblicz, dla jakiej wartości p wielomian $W(x) = x^3 + px^2 - 3x - 18$ jest podzielny przez $x + 3$, a następnie dla wyznaczonej wartości p rozwiąż równanie $W(x) = 0$.

16. Suma pól dwóch prostokątów wynosi 10. Jeden z tych prostokątów ma wymiary $a \times b$, a drugi $(a - 1) \times b$. Zapisz wzór funkcji $b = f(a)$, tzn. funkcji, która opisuje, jak wielkość b zależy od wielkości a . Podaj dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji. Naszkicuj jej wykres.

17. Rozwiąż równania:

$$p^6 - 2p^4 - p^2 + 2 = 0 \quad \text{ i } \quad \frac{p^6 - 2p^4 - p^2 + 2}{p^2 - p - 2} = 0$$

18. Dla jakiej wartości p wielomiany $W(x) = 5x^4 + 41x + 2$ i $Q(x) = -4x^3 + px^2 - 8$ mają ten sam pierwiastek całkowity?

FUNKCJE WYKŁADNICZE I LOGARYTMICZNE

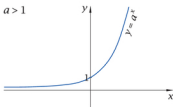
FUNKCJA WYKŁADNICZA

Funkcję, której wzór można zapisać w postaci

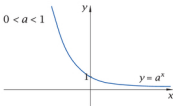
$$y = a^x, \text{ gdzie } a > 0,$$

nazywamy funkcją wykładniczą. Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych.

Jeżeli $a > 1$, to funkcja $y = a^x$ jest rosnąca.



Jeżeli $0 < a < 1$, to funkcja $y = a^x$ jest malejąca.



Jeśli $a = 1$ to funkcja $y = a^x$ jest funkcją stałą.

Wykres każdej funkcji wykładniczej przechodzi przez punkt $(0, 1)$. Prosta o równaniu $y = 0$ jest asymptotą wykresu funkcji wykładniczej $y = a^x$, gdy $a \neq 1$.

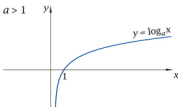
FUNKCJA LOGARYTMICZNA

Funkcję, której wzór można zapisać w postaci

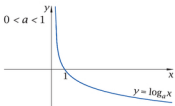
$$y = \log_a x, \text{ gdzie } a > 0 \text{ i } a \neq 1,$$

nazywamy funkcją logarytmiczną. Dziedziną funkcji logarytmicznej jest przedział $(0; +\infty)$.

Jeżeli $a > 1$, to funkcja $y = \log_a x$ jest rosnąca.



Jeżeli $0 < a < 1$, to funkcja $y = \log_a x$ jest malejąca.



Wykres każdej funkcji logarytmicznej przechodzi przez punkt $(1, 0)$. Prosta o równaniu $x = 0$ jest asymptotą wykresu funkcji logarytmicznej.

ZESTAW ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji:

$$f(x) = 5,2^x \quad g(x) = 0,52^x$$

$$h(x) = \left(\frac{25}{52}\right)^x \quad i(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x$$



Poprawne dopasowanie wykresów do funkcji to:

- A. ① – f ② – i ③ – g ④ – h C. ① – h ② – i ③ – f ④ – g
B. ① – h ② – g ③ – f ④ – i D. ① – g ② – h ③ – i ④ – f

2. Jedna z podanych funkcji jest malejąca. Która?

- A. $f(x) = 1 - \log_{\frac{1}{2}} x$ C. $f(x) = 1 + \log_{\frac{1}{2}} x$
B. $f(x) = 1 + \log x$ D. $f(x) = -1 + \log x$

3. Ile wśród poniższych funkcji jest takich, które nie mają miejsc zerowych i są malejące?

$$f_1(x) = -3^x - 4 \quad f_2(x) = 0,1^x + 3 \quad f_3(x) = 7 - \log_5 x \quad f_4(x) = \log_{0,1}(x + 2)$$

- A. jedna B. dwie C. trzy D. cztery

4. Dla jakiej wartości parametru a miejscem zerowym funkcji $f(x) = \log_{0,3}(x - a)$ jest liczba 5?

- A. -4 B. -1 C. 1 D. 4

5. Dziedzina funkcji $f(x) = \log_x(x + 1)(x - 7)$ jest zbiór:

- A. $(7; +\infty)$ C. $(0; 1) \cup (1; +\infty)$
B. $(-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$ D. $(0; +\infty)$

6. Dla jakich argumentów wartości funkcji $f(x) = 0,4^{x-1} - 2$ są mniejsze od $\frac{17}{4}$?

- A. $(-\infty; -1)$ B. $(-\infty; 2)$ C. $(-1; +\infty)$ D. $(2; +\infty)$

7. Wzór funkcji $f(x) = \log_3 \sqrt[3]{3x^3}$ zapisano w postaci $f(x) = p + q \log_3 x$. Wówczas:

- A. $p = 0,2$, $q = 0,6$ C. $p = 1$, $q = 0,2$
B. $p = 0,2$, $q = 3$ D. $p = 3$, $q = 0,2$

8. Funkcja $f(x) = 5^x$ przyjmuje wartość 10 dla argumentu:

- A. 2 B. $\log_5 10$ C. $\log 5$ D. $\log \frac{1}{5}$

9. Wykres funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ przechodzi przez punkt $(2, 5)$, gdy:

A. $a = \log_2 5$

B. $a = \log_5 2$

C. $a = \sqrt{5}$

D. $a = 2^5$

10. Dana jest funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{dla } x < 1 \\ \log_{\frac{1}{2}} x & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

Który z podanych punktów nie należy do wykresu funkcji f ?

A. $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$

B. $(-1, 2)$

C. $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

D. $(2, -1)$

ZADANIA OTWARTE

11. Podaj równanie asymptoty wykresu funkcji $f(x) = -2^{x+5} + 1$ oraz miejsce zerowe tej funkcji.

12. Miejscem zerowym funkcji $f(x) = \log_{1,7}(x - a)$ jest liczba 8. Podaj równanie asymptoty wykresu tej funkcji.

13. Tabelka obok przedstawia część wyników pewnego eksperymentu. Na początku eksperymentu badany zapamiętał 50 nowych słów. W kolejnych dniach część tych słów zapominał.

Numer dnia (n)	0	1
Liczba pamiętanych słów (s)	50	45

Uznaje się, że liczbę s zapamiętanych słów po upływie n dni od rozpoczęcia doświadczenia można obliczyć ze wzoru $s = a - b \log_2(n+1)$, gdzie a i b są pewnymi liczbami.

a) Ile słów pamiętał badany po upływie tygodnia od rozpoczęcia doświadczenia?

b) Przez ile dni badany pamiętał ponad połowę nauczonych słów?

14. W pewnym laboratorium badano próbkę zawierającą początkowo masę m_0 izotopu jodu ^{131}I . Na skutek rozpadu promieniotwórczego po upływie t dni masa m izotopu jodu zawartego w próbce zmienia się zgodnie ze wzorem $m(t) = m_0 \cdot 0,917^t$.

a) Oblicz, o ile procent zmniejszy się masa izotopu jodu zawartego w tej próbce po upływie 2 dni.

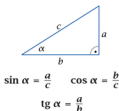
b) Oblicz czas połowicznego rozpadu izotopu jodu ^{131}I , tzn. czas, po którym w próbce pozostanie połowa początkowej masy tego izotopu.

15. Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = (-x^2 + 3x - 2) \cdot \log(x + 1)$ przyjmuje wartości dodatnie?

TRYGONOMETRIA

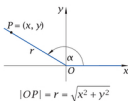
PODSTAWOWE DEFINICJE I WŁASNOŚCI

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE W TRÓJKĄCE PROSTOKĄTNYM



α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE DOWOLNEGO KĄTA



$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \text{gd}y \alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

TOŻSAMOŚCI TRYGONOMETRYCZNE

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Jeśli α jest kątem ostrym, to kąt $180^\circ - \alpha$ jest rozwarty i zachodzą równości:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \quad \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

Uwaga. Każdy z tych wzorów można stosować dla dowolnego kąta α , dla którego odpowiednia funkcja jest określona.

KĄT NACHYLENIA PROSTEJ DO OSI x



Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest nachylona do osi x pod takim kątem α , dla którego $\operatorname{tg} \alpha = a$.

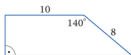
Uwaga. Twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów omawiane będą w rozdziale *Planimetria*.

ZESTAW ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. Obwód trapezu przedstawionego na rysunku obok, po zaokrągleniu do części dziesiątych, jest równy:

- A. 36,3 B. 38,3 C. 39,3 D. 40,3



2. Największy kąt trójkąta przedstawionego na rysunku obok ma miarę, która po zaokrągleniu do pełnych stopni jest równa:

- A. 53° B. 62° C. 67° D. 74°



3. Wartość wyrażenia $\frac{\sin 60^\circ}{\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \sin 45^\circ}$ jest równa:

- A. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ B. 3 C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

4. Kąt α spełnia warunki: $\sin \alpha = 0,6$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Wartość $\operatorname{tg} \alpha$ jest równa:

- A. 0,75 B. -0,75 C. $\frac{4}{3}$ D. $-\frac{4}{3}$

5. Równanie prostej, która jest nachylona do osi x pod kątem 60° i przecina oś x w punkcie o współrzędnych $(2, 0)$, można zapisać w postaci:

- A. $y = x\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$ C. $y = x\sqrt{3} + 2$
B. $y = \frac{x\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $y = -x\sqrt{3} + 2$

6. W trójkącie prostokątnym cosinus jednego z kątów ostrych wynosi $\frac{2}{5}$, a przeciwprostokątna ma długość 20. Obwód tego trójkąta jest równy:

- A. 27 B. $28 + 4\sqrt{21}$ C. $22 + 6\sqrt{11}$ D. $24 + 8\sqrt{21}$

7. Kąt nachylenia prostej o równaniu $y = -3x - 7$ do osi x z dokładnością do 1° ma miarę:

- A. 72° B. 98° C. 108° D. 119°

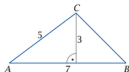
8. Jeśli $\operatorname{tg} \alpha = -2$ i $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$, to $\cos \alpha$ jest równy:

- A. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $-\frac{1}{5}$

9. Jeśli $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 3\frac{4}{5}$, to $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ jest równy:

- A. $\frac{5}{4}$ B. $-\frac{5}{4}$ C. $\frac{5}{19}$ D. $-\frac{5}{19}$

- 10.** Podaj miary kątów trójkąta ABC z dokładnością do 1° .



- 11.** Kąty α i β są kątami ostrymi w pewnym trójkącie prostokątnym. Wykaż, że:

a) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta}$

b) $\sin(\alpha + \beta) = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta$

- 12.** Uzasadnij tożsamość:

$$\frac{(\sin \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \beta - \cos \alpha)^2 - 2}{2 \cos \alpha \cos \beta} = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta$$

- 13.** Zgodnie z przepisami budowlanymi podjazdy dla wózków inwalidzkich we wnętrzu budynków nie mogą być nachylone pod kątem większym niż 5° . Czy spełnia te wymagania podjazd o długości 2,8 m, który pozwala pokonać różnicę wysokości 30 cm?

- 14.** Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta nachylenia prostej o równaniu $y = -3x + 5$ do osi x .

- 15.** Wiadomo, że $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{8}{3}$. Uzasadnij, że $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{7}{4}$.

- 16.** Znajdź miarę kąta ostrego utworzonego przez proste $y = 2x + 4$ i $y = -x + 6$.

PLANIMETRIA

TRÓJKĄTY

POLE TRÓJKĄTA



$$P = \frac{a \cdot h}{2}$$



$$P = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$$

NIERÓWNOŚĆ TRÓJKĄTA

Suma długości dowolnych dwóch boków trójkąta jest większa niż długość trzeciego boku.



$$\begin{aligned} a + b &> c \\ b + c &> a \\ c + a &> b \end{aligned}$$

TWIERDZENIE PITAGORASA



$$a^2 + b^2 = c^2$$

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

TWIERDZENIE ODWROTNE DO TWIERDZENIA PITAGORASA

Jeśli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

PUNKTY SZCZEGÓLNE W TRÓJKĄCIE

W każdym trójkącie:

- symetralne boków przecinają się w jednym punkcie, który jest równo oddalony od wierzchołków trójkąta,
- dwusieczne kątów przecinają się w jednym punkcie, który jest równo oddalony od boków trójkąta,
- proste zawierające wysokości przecinają się w jednym punkcie nazywanym ortocentrum
- środkowe przecinają się w jednym punkcie, nazywanym środkiem ciężkości trójkąta. Środek ciężkości trójkąta dzieli każdą środkową w stosunku 2 : 1.

TWIERDZENIE O DWUSIECZNEJ

Jeśli w trójkącie ABC dwusieczna kąta o wierzchołku C przecina bok AB w punkcie D , to stosunek długości odcinków $|AD| : |BD|$ jest równy stosunkowi długości boków $|AC| : |BC|$.



TRÓJKĄT RÓWNOBOCZNY



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



$$R = \frac{2}{3}h$$

$$r = \frac{1}{3}h$$

CECHY PRZYSTAWANIA TRÓJKĄTÓW



Cecha bbb

Jeśli boki jednego trójkąta mają takie same długości jak odpowiednie boki drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



Cecha bkb

Jeśli dwa boki jednego trójkąta mają takie same długości jak odpowiednie boki drugiego trójkąta i kąty między tymi bokami są równe, to trójkąty są przystające.



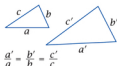
Cecha kbk

Jeśli bok jednego trójkąta ma taką samą długość jak bok drugiego trójkąta, a kąty jednego trójkąta przy tym boku są równe odpowiednim kątom drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.

CECHY PODOBIEŃSTWA TRÓJKĄTÓW

Cecha bbb

Jeśli długości boków jednego trójkąta są proporcjonalne do długości odpowiednich boków drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne.



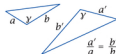
Cecha kk

Jeśli dwa kąty jednego trójkąta są równe odpowiednim kątom drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne.



Cecha bkb

Jeśli długości dwóch boków jednego trójkąta są proporcjonalne do długości odpowiednich boków drugiego trójkąta i kąty między tymi bokami w obu trójkątach są równe, to trójkąty są podobne.



TWIERDZENIE SINUSÓW

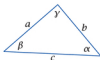
W trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta leżącego naprzeciw tego boku jest równy średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

TWIERDZENIE COSINUSÓW

W trójkącie kwadrat długości boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta między nimi.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

WIEŁOKĄTY

Suma miar kątów n -kąta wynosi $(n-2) \cdot 180^\circ$.

Każdy kąt n -kąta foremnego ma miarę $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$.

Liczba przekątnych w n -kącie wynosi $\frac{n(n-3)}{2}$.

CZWOROKĄTY

Prostokąt



$$P = a \cdot b$$

Romb



$$P = \frac{e \cdot f}{2}$$

Równoległobok



$$P = a \cdot h$$

$$P = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

Trapez



$$P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$$

W trapezie suma kątów leżących przy tym samym ramieniu wynosi 180° .

W równoległoboku przekątne przecinają się w połowie i kąty leżące naprzeciw siebie są równe.

W rombie przekątne przecinają się pod kątem prostym.

W prostokącie przekątne mają równe długości.



Długość okręgu:

$$L = 2\pi r$$

Długość łuku:

$$l = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

Pole koła:

$$P = \pi r^2$$

Pole wycinka koła:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

KĄTY WPISANE I ŚRODKOWE



Kąt środkowy w kole ma 2 razy większą miarę niż kąt wpisany oparty na tym samym łuku.

Kąty wpisane oparte na tym samym łuku mają równe miary.



Kąt wpisany oparty na średnicy jest kątem prostym.

Styczna do okręgu przechodząca przez koniec cięciwy tworzy z nią kąt ostry równy ostremu kątowi wpisanemu opartemu na tej cięciwie.



WIELOKĄTY I OKRĘGI

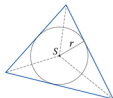
Środek okręgu opisanego na trójkącie leży na przecięciu symetralnych boków tego trójkąta.

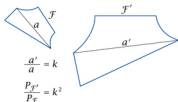
Ponieważ w trójkącie symetralne wszystkich boków przecinają się w jednym punkcie, więc na każdym trójkącie można opisać okrąg.



Środek okręgu wpisanego w trójkąt jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów tego trójkąta.

Ponieważ w trójkącie dwusieczne wszystkich kątów przecinają się w jednym punkcie, więc w każdy trójkąt można wpisać okrąg.

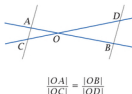
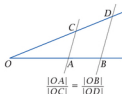




Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

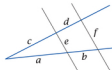
TWIERDZENIE TALESA

Jeżeli dwie proste równoległe przecinają ramiona pewnego kąta, to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do długości odpowiednich odcinków na drugim ramieniu kąta.



Przy takich oznaczeniach jak na rysunku obok zachodzą również następujące proporcje:

$$\frac{c}{a} = \frac{c+d}{a+b} \quad \frac{c}{a} = \frac{d}{b} \quad \frac{f}{e} = \frac{a+b}{a} \quad \frac{e}{a} = \frac{f}{a+b}$$



TWIERDZENIE ODWROTNE DO TWIERDZENIA TALESA

Jeśli na jednym ramieniu kąta o wierzchołku O wybierzemy punkty A i B , a na drugim ramieniu punkty C i D w taki sposób, że zachodzi proporcja $\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|OB|}{|OD|}$, to proste AC i BD są równoległe.

ZESTAW ZADAŃ

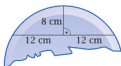
ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. Wysokość rombu o przekątnych 3 i 8 jest równa:

- A. $\frac{12\sqrt{73}}{73}$ B. $\frac{48\sqrt{73}}{73}$ C. $\frac{24\sqrt{55}}{55}$ D. $\frac{24\sqrt{73}}{73}$

2. Jaką miarę ma kąt oznaczony literą α na rysunku obok?

- A. $40,5^\circ$ B. 27° C. 39° D. $49,5^\circ$



3. Podczas pewnych badań archeologicznych znaleziono fragment talerza. Na rysunku obok przedstawiono niektóre wymiary tego fragmentu. Oblicz, jaką średnicę miał talerz.

- A. 13 cm B. 26 cm C. 30 cm D. 32 cm

4. Zaznaczona na rysunku cięciwa większego okręgu ma długość d i jest styczna do mniejszego okręgu. Oblicz pole zacieniowanego pierścienia.

- A. $\frac{\pi d^2 \sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\pi}{4} d^2$ C. $\frac{\pi}{2} d^2$ D. πd^2



5. Pole zacieniowanego trójkąta jest równe:

- A. $1\frac{2}{5}$ B. 2 C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$



6. Jaką długość ma odcinek oznaczony literą a na rysunku obok?

- A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{4}$

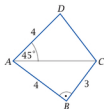


7. W okrąg o promieniu a wpisano trójkąt równoboczny. W ten trójkąt wpisano drugi okrąg, w który z kolei wpisano trójkąt równoboczny, a w ten trójkąt wpisano trzeci okrąg itd. Jaką długość ma promień dziesiątego okręgu?

- A. $\frac{a}{2^{10}}$ B. $\frac{a}{2^8}$ C. $\frac{a}{2^7}$ D. $\frac{a}{2^9}$

8. Pole czworokąta $ABCD$ przedstawionego na rysunku obok jest równe:

- A. $30\sqrt{2}$ B. $5\sqrt{2} + 6$ C. $10\sqrt{2} + 12$ D. 14



9. W sześciokąt foremny, którego dłuższe przekątne mają długość 4, wpisano koło. Stosunek pola koła do pola sześciokąta jest równy:

- A. $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$ D. $\frac{\pi}{6}$

10. Kwadrat i trójkąt równoboczny wpisano w ten sam okrąg. Ile razy większy jest obwód kwadratu od obwodu trójkąta?

- A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ B. $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ C. $\frac{3\sqrt{6}}{9}$ D. $\frac{4\sqrt{6}}{9}$

11. Ile jest wielokątów foremnych, których kąt wewnętrzny ma miarę większą od 150° , ale mniejszą od 170° ?

- A. 23 B. 25 C. 24 D. 26

12. O ile mniej przekątnych ma pięciokąt od dziesięciokąta?

- A. o 38 B. o 30 C. o 5 D. o 28

13. Pole zacieniowanej figury przedstawionej na rysunku obok jest równe:

- A. $\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi$ C. 4
B. $1 + \frac{2}{3}\pi$ D. $2\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi$



14. Kąt ostry trapezu prostokątnego ma miarę α . Krótsza postawa i dłuższe ramię mają długość a . Pole trapezu jest równe:

- A. $\frac{a^2}{2} \sin \alpha (\cos \alpha + 2)$
B. $a^2 (\sin \alpha + \cos \alpha)$
C. $2a^2 \sin \alpha (\cos \alpha + 1)$
D. $\frac{a^2}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha)$

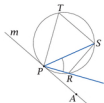
15. Największy z kątów czworokąta przedstawionego na rysunku obok ma miarę:

- A. 90° B. 95° C. 100° D. 105°



16. W równoległoboku boki mają długości 6 cm i 4 cm i jedna z przekątnych ma długość 8 cm. Tangens kąta ostrego tego równoległoboku wynosi:

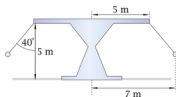
- A. $\sqrt{15}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{2}{3}$



17. Na rysunku obok prosta m jest styczna do okręgu w punkcie P . Ponadto wiadomo, że $|\angle APR| = 25^\circ$, $|\angle PTS| = 65^\circ$. Jaka miarę ma kąt ostry SPR ?

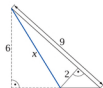
- A. 40° B. 45° C. 50° D. 65°

18. Krzeselka karuzeli są zaczepione na łańcuchach i gdy karuzela się obraca, odchylają się od pionu o 40° . Korzystając z informacji przedstawionych na rysunku, oblicz, jak wysoko nad ziemią znajdują się krzeselka, gdy karuzela się kręci.

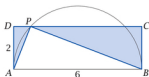


19. Łuki na rysunku obok są półkramiami. Uzasadnij, że niebieska linia jest dłuższa od czerwonej.

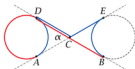
20. Oblicz długość odcinka oznaczonego literą x na rysunku obok.



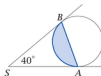
21. Okrąg o średnicy AB przecina bok DC prostokąta $ABCD$ w dwóch punktach (zob. rysunek). Punkt P to ten z tych punktów, który leży bliżej wierzchołka D . Ile razy większe jest pole trójkąta BCP od pola trójkąta PDA ?



22. Okręgi przedstawione na rysunku mają jednakowe promienie i są styczne w punktach A , B , D i E do prostych AC i BC . Punkty A i B połączono dwiema liniami ciągłymi. Jedną z nich zaznaczono kolorem niebieskim, a drugą — czerwonym. Dla jakiego kąta α obie linie mają równe długości?



23. Okrąg o promieniu 4 jest styczny w punktach A i B do obu ramion kąta ASB o mierze 40° (zob. rysunek). Oblicz pole zaciętego odcinka koła.



24. W trapezie $ABCD$ krótsza podstawa CD ma taką samą długość jak ramię BC . Uzasadnij, że przekątna BD dzieli kąt ABC na dwa równe kąty.

25. Dłuższa z przekątnych równoległoboku ma długość 5 i dzieli kąt równoległoboku na kąty 20° i 40° . Oblicz obwód tego równoległoboku.

26. Geodeta wykonał w terenie pomiary, stojąc w punkcie oznaczonym na planie literą C . Wyniki pomiarów są przedstawione na rysunku obok. Oblicz, w jakiej odległości od punktów A , B i C znajduje się punkt jednakowo odległy od tych trzech punktów.



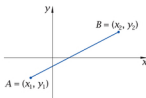
27. Kąt ostry rombu ma 80° . Oblicz z dokładnością do $0,1\%$, o ile procent mniejsze jest pole tego rombu od pola kwadratu o takim samym boku.

28. Jeden z kątów trójkąta ma miarę 18° . Bok leżący naprzeciw tego kąta ma długość 3, a inny z boków tego trójkąta ma długość 5. Oblicz z dokładnością do $0,1$ pole tego trójkąta.

29. Przekątne równoległoboku przecinają się pod kątem 60° i mają długości 8 i 5. Oblicz długości boków tego równoległoboku oraz miary jego kątów.

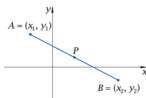
GEOMETRIA ANALITYCZNA

ODCINKI



Długość odcinka:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Środek odcinka:

$$P = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

PROSTE W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

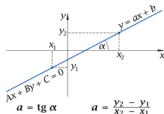
Równanie każdej prostej można zapisać w postaci ogólnej:

$$Ax + By + C = 0,$$

gdzie $A, B, C \in \mathbb{R}$ i $A^2 + B^2 \neq 0$.

Jeśli prosta nie jest równoległa do osi y , to jej równanie można zapisać w postaci kierunkowej:

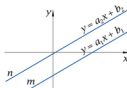
$$y = ax + b$$



$$a = \tan \alpha$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

PROSTE RÓWNOLEGŁE



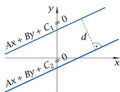
$$m \parallel n \Leftrightarrow a_1 = a_2$$

PROSTE PROSTOPADŁE



$$m \perp n \Leftrightarrow a_2 = -\frac{1}{a_1}$$

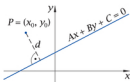
ODLEGŁOŚĆ DWÓCH PROSTYCH RÓWNOLEGLYCH



Odległość d między prostymi równoległymi o równaniach $Ax + By + C_1 = 0$ i $Ax + By + C_2 = 0$ można wyznaczyć ze wzoru:

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

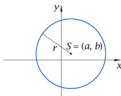
ODLEGŁOŚĆ PUNKTU OD PROSTEJ



Odległość d punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ można wyznaczyć ze wzoru:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

KOŁO I OKRĄG



Postać kanoniczna równania okręgu o środku $S = (a, b)$ i promieniu r :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

PUNKTY WSPÓLNE PROSTYCH I KRZYWYCH

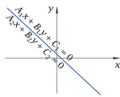
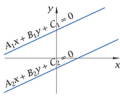
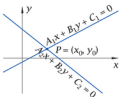
Aby znaleźć wspólne punkty prostych o równaniach $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, wystarczy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Jeśli układ jest oznaczony i jego rozwiązaniem jest para liczb x_0 i y_0 , to proste przecinają się w punkcie $P = (x_0, y_0)$.

Jeśli układ jest sprzeczny, to proste są równoległe — nie mają punktów wspólnych.

Jeśli układ jest nieoznaczony, to proste mają nieskończenie wiele punktów wspólnych (oba równania opisują tę samą prostą).



Aby znaleźć wspólne punkty prostej z okręgiem lub prostej z parabolą, wystarczy rozwiązać odpowiedni układ równań.

Rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{cases}$$

to współrzędne punktów wspólnych prostej i okręgu.

Rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$

to współrzędne punktów wspólnych prostej i paraboli.

ZESTAW ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. Punkty $(-4, -3)$ i $(2, 5)$ są końcami średnicy pewnego okręgu. Które z poniższych zdań jest fałszywe?

- A. Środkiem tego okręgu jest punkt $(-1, 1)$.
- B. Promień tego okręgu ma długość 10.
- C. Punkt $(2, -3)$ leży na tym okręgu.
- D. Punkt $(-5, 0)$ należy do koła ograniczonego tym okręgiem.

2. Punkt $S = (-5, 7)$ jest środkiem odcinka, którego końcami są punkty $(a, 9)$ i $(-4, b)$. Suma $a + b$ jest równa:

- A. -3 B. -1 C. 2 D. 5

3. Proste o równaniach $y = (m - 1)x + m$ i $2mx + 3y - 1 = 0$ są równoległe. Wynika stąd, że:

- A. $m = -3$ B. $m = 0,6$ C. $m = 1$ D. $m = \frac{1 + \sqrt{7}}{2}$

4. W którym przypadku prosta przechodząca przez punkty $(101, -63)$ i $(116, -83)$ jest równoległa do prostej o równaniu AB ?

- A. $A = (-63, 101)$, $B = (-83, 116)$
- B. $A = (3, -7)$, $B = (-3, 1)$
- C. $A = (4, 6)$, $B = (5, 26)$
- D. $A = (-11, 10)$, $B = (19, -10)$

5. Które z podanych równań przedstawia prostą prostopadłą do prostej o równaniu $y = -2x - 4$ przechodzącą przez punkt $(1, -2)$?

- A. $x - 2y + 5 = 0$ C. $x + 2y + 3 = 0$
- B. $-4x - y + 2 = 0$ D. $-x + 2y + 5 = 0$

6. Symetralna odcinka o końcach w punktach $(-7, 6)$ i $(-3, -4)$ ma równanie:

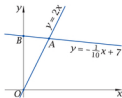
- A. $y = -2,5x - 11,5$ B. $y = 0,4x + 3$ C. $y = \frac{2}{3}x + 1$ D. $y = -\frac{2}{3}x - 1$

7. Proste o równaniach $-3x + 5y = -11$ i $5x + 2y = -23$ oraz jedna z prostych podanych poniżej przecinają się w jednym punkcie. Wskaż tę prostą.

- A. $6x - 7y = 10$ B. $x + y = 7$ C. $2x - 5y = 11$ D. $-4x + 3y = 8$

8. Pole trójkąta OAB przedstawionego na rysunku obok jest równe:

- A. $11\frac{2}{3}$ B. $12\frac{17}{19}$ C. $13\frac{9}{10}$ D. $23\frac{1}{3}$



9. Odległość między punktami, w których prosta o równaniu $y = -2x + 4$ przecina parabolę o równaniu $y = x^2$, jest równa:

- A. 5 B. $20\sqrt{2}$ C. 10 D. $6\sqrt{5}$

10. Dla jakiej wartości parametru p parabola o równaniu $y = 2x^2$ ma dwa punkty wspólne z prostą o równaniu $y = x + p$?

- A. $p > -\frac{1}{8}$ B. $p < \frac{1}{8}$ C. $p < \frac{1}{9}$ D. $p > -\frac{1}{9}$

11. Odległość punktu $P = (-3, 5)$ od prostej o równaniu $y = -2x + 4$ jest równa:

- A. $\frac{7}{\sqrt{5}}$ B. $\frac{7}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\sqrt{5}$

12. Które z poniższych zdań dotyczy okręgu o równaniu $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 34$?

- A. Środek okręgu ma współrzędne $(-3, 5)$.
B. Promień okręgu ma długość 17.
C. Okrąg jest styczny do osi y .
D. Okrąg przechodzi przez początek układu współrzędnych.

13. Znajdź równanie okręgu o środku w punkcie $(-8, 0)$, który jest styczny zewnętrznie do okręgu o równaniu $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 100$.

- A. $(x + 8)^2 + y^2 = 9$ C. $x^2 + (y + 8)^2 = 9$
B. $x^2 + (y - 8)^2 = 4$ D. $(x - 8)^2 + y^2 = 36$

14. Punkt A_1 jest obrazem punktu $A = (-9, 7)$ w symetrii osiowej względem osi x , a punkt A_2 jest obrazem punktu A w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Okrąg opisany na trójkącie A_1AA_2 ma równanie:

- A. $x^2 + y^2 = 260$ C. $x^2 + y^2 = 130$
B. $(x + 9)^2 + (y - 7)^2 = \sqrt{130}$ D. $(x - 4,5)^2 + (y + 3,5)^2 = 65$

15. Dane są punkty $A = (-3, -5)$, $B = (1, 5)$ i $C = (-2, 3)$. Oblicz odległość punktu C od prostej AB oraz pole trójkąta ABC .

16. Punkty $A = (-1, 1 + 2\sqrt{3})$, $B = (-3, 1)$, $C = (-3 - \sqrt{3}, 0)$ są wierzchołkami trójkąta. Jaką miarę ma kąt ABC ?

17. Punkt $A = (3, 4)$ jest wierzchołkiem równoległoboku, którego dwa boki zawarte są w prostych o równaniach $y = x$ i $y = \frac{1}{2}x + 1$. Znajdź współrzędne punktu przecięcia przekątnych.

18. Uzasadnij, że prosta o równaniu $x + 3y - 9 = 0$ jest styczna do okręgu o równaniu $(x + 1)^2 + y^2 = 10$, i znajdź współrzędne punktu styczności.

19. Znajdź współrzędne środka ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (8, 0)$, $C = (0, 4)$.

20. Znajdź na prostej o równaniu $-x + y = 4$ punkt, którego odległości od punktów $(2, 20)$ i $(14, 24)$ są równe.

21. Znajdź ogólne równanie prostej, która jest obrazem prostej o równaniu $x - 3y + 6 = 0$ w symetrii względem:

- a)** osi y , **b)** środka układu współrzędnych.

22. Znajdź równanie prostej, która jest styczna w punkcie o współrzędnych $(-1, 3)$ do okręgu o równaniu $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

23. Znajdź współrzędne końców cięciwy wyciętej z prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 3$ przez okrąg o równaniu $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9\frac{1}{4}$.

STEREOMETRIA

WIEŁOŚCIANY

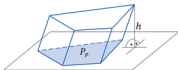
GRANIASTOSŁUPY

W graniastosłupie podstawy są wielokątami przystającymi leżącymi na płaszczyznach równoległych i krawędzie boczne są równoległe.

Graniastosłup, w którym krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw, nazywamy graniastosłupem prostym. W takim graniastosłupie ściany boczne są prostokątami.

Graniastosłup, w którym krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstaw, nazywamy graniastosłupem pochyłym.

Graniastosłup prosty, w którym podstawy są wielokątami foremnymi, nazywamy graniastosłupem prawidłowym.



$$V = P_p \cdot h$$

V – objętość graniastosłupa

P_p – pole podstawy graniastosłupa

h – wysokość graniastosłupa

OSTROSŁUPY

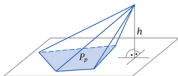
W ostrosłupie podstawa jest wielokątem, a krawędzie boczne mają wspólny punkt nazywany wierzchołkiem ostrosłupa.

Ostrosłup trójkątny jest nazywany czworościanem.

Uwaga. W czworościanie każdą ze ścian możemy uznać za podstawę. Czworościan ma zatem cztery wysokości.

Ostrosłup, w którym podstawa jest wielokątem foremnym i krawędzie boczne mają równe długości, nazywamy ostrosłupem prawidłowym.

Jeśli wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają równe długości, to na podstawie ostrosłupa można opisać okrąg i środek tego okręgu jest spodem wysokości ostrosłupa.

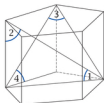


$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

V – objętość ostrosłupa

P_p – pole podstawy ostrosłupa

h – wysokość ostrosłupa



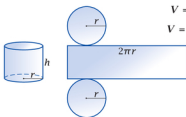
- 1 – kąt między przekątną graniastosłupa a podstawą
 2 – kąt między przekątną graniastosłupa a krawędzią boczną
 3 – kąt między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych
 4 – kąt między przekątną ściany bocznej a podstawą



- 5 – kąt między krawędzią boczną ostrosłupa a krawędzią podstawy
 6 – kąt między krawędzią boczną a podstawą
 7 – kąt między wysokością ostrosłupa a krawędzią boczną
 8 – kąt między wysokością ostrosłupa a ścianą boczną

BRYŁY OBROTOWE

WALEC



$$V = P_p \cdot h$$

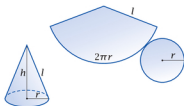
$$P_c = 2P_p + P_b$$

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

$$P_c = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$$

- V – objętość
 P_p – pole podstawy
 P_b – pole powierzchni bocznej
 P_c – pole powierzchni całkowitej
 r – promień podstawy
 h – wysokość walca

STOŻEK



$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h \quad P_b = \pi r l$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h \quad P_c = \pi r^2 + \pi r l$$

- V – objętość
 P_p – pole podstawy
 P_b – pole powierzchni bocznej
 P_c – pole powierzchni całkowitej
 r – promień podstawy
 h – wysokość stożka
 l – długość tworzącej



KULA

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

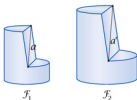
$$P = 4\pi r^2$$

V – objętość kuli

P – pole powierzchni kuli

r – promień kuli

BRYŁY PODOBNE



Stosunek objętości brył podobnych jest równy sześcianowi skali podobieństwa.

$$\frac{V_{F_2}}{V_{F_1}} = k^3 \quad \frac{a'}{a} = k$$

Stosunek pól powierzchni brył podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

$$\frac{P_{F_2}}{P_{F_1}} = k^2$$

ZESTAW ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź podstawy ma długość 6, a krawędź boczna ma długość 8. Krótsza przekątna tego graniastosłupa ma długość:

- A. 10 B. $4\sqrt{13}$ C. $2\sqrt{43}$ D. $2\sqrt{37}$

2. Ile przekątnych ma graniastosłup sześciokątny?

- A. 6 B. 12 C. 18 D. 36

3. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny o boku 8. Jedna z krawędzi bocznych jest prostopadła do podstawy i ma długość 6. Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe:

- A. $6\sqrt{5} + 16\sqrt{3}$ B. $6\sqrt{5} + 4\sqrt{3}$ C. $8\sqrt{21} + 4\sqrt{3} + 24$ D. $8\sqrt{21} + 16\sqrt{3} + 48$

4. Które z poniższych zdań nie musi być prawdziwe w wypadku ostrosłupa prawidłowego czworokątnego?

- A. Wysokość ostrosłupa jest dłuższa od krawędzi podstawy.
 B. Krawędź boczna jest dłuższa od wysokości ostrosłupa.
 C. Ściany boczne są nachylone do podstawy pod takim samym kątem.
 D. Krawędzie boczne są nachylone do podstawy pod takim samym kątem.

5. Objętość czworoszczanu foremnego o krawędzi 3 wynosi:

- A. $\frac{27}{8}$ B. $\frac{9}{4}\sqrt{2}$ C. $\frac{9}{8}\sqrt{6}$ D. $\frac{27}{4}\sqrt{2}$

6. Pole powierzchni bocznej pewnego walca o wysokości h i średnicy podstawy d jest równe sumie pól obu podstaw. Wynika stąd, że:

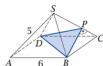
- A. $h = \frac{d}{2}$ B. $h = \frac{d}{\pi}$ C. $h = d$ D. $h = \pi d$

7. W naczyniu w kształcie walca umieszczono kulę, która jest styczna do obu podstaw walca i do jego powierzchni bocznej. Jaką część objętości tego naczynia zajmuje kula?

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{2}{3}$

8. Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy czworokątny. Pole trójkąta PDB jest równe:

- A. 18 B. $\frac{18}{5}\sqrt{7}$ C. $\frac{72}{5}\sqrt{5}$ D. $\frac{225}{4}\sqrt{2}$

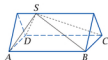


9. Z wycinka koła o kącie środkowym 90° utworzono powierzchnię boczną stożka o promieniu podstawy R_1 . Z pozostałej części koła utworzono powierzchnię boczną stożka o promieniu podstawy R_2 . Stosunek $\frac{R_1}{R_2}$ jest równy:

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

10. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 12, a jego wysokość wynosi 10. Z tego graniastosłupa wycięto ostrosłup $ABCD$ (zob. rysunek). Objętość tego ostrosłupa jest równa:

- A. $240\sqrt{3}$ B. $720\sqrt{3}$ C. 280 D. $144\sqrt{3}$



11. Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy sześciokątny $ABCDEF$. Kąt między krawędzią DS , a podstawą ostrosłupa to:

- A. $\angle EDS$ C. $\angle FDS$
B. $\angle CDS$ D. $\angle ADS$

12. W prostopadłościanie przedstawionym na rysunku obok kąt BHG ma miarę α . Wynika stąd, że:

- A. $\alpha = 30^\circ$ C. $\sin \alpha = \frac{2}{3}\sqrt{5}$
B. $\alpha = 60^\circ$ D. $\tan \alpha = \frac{9}{5}\sqrt{5}$





13. Prostopadłościan o polu powierzchni równym p rozcięto na dwie części płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki (zob. rysunek). O ile większe jest pole powierzchni większej z tych brył od pola powierzchni mniejszej bryły?

- A. o $\frac{1}{6}p$ B. o $\frac{1}{2}p$ C. o $\frac{2}{3}p$ D. o $\frac{5}{6}p$

ZADANIA OTWARTE

14. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość a . Kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi ma miarę α . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

15. Podstawą graniastoslupa prostego jest trapez równoramienny o bokach długości 5 cm, 5 cm, 6 cm i 12 cm. Przekątne tego graniastoslupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz objętość tego graniastoslupa.

16. Po zwinieciu wycinka kołowego o promieniu 7 i kącie środkowym 135° otrzymano powierzchnię boczną pewnego stożka. Oblicz objętość tego stożka.

17. Pojemnik na ołówki ma kształt graniastoslupa prawidłowego sześciokątnego (bez górnej podstawy). Krawędź podstawy tego pojemnika ma długość 5 cm, a wysokość wynosi 9 cm. Czy ołówek o długości 14 cm można włożyć do tego pojemnika tak, aby z niego nie wystawał?

18. Wyobraź sobie, że z zapalek budujemy modele ostrosłupów prawidłowych tak, aby każda krawędź zbudowana była z jednej zapalki. Jakimi wielokątami mogą być podstawy tych ostrosłupów? Oblicz wysokość najniższego z tych ostrosłupów. Przyjmij, że zapalka ma długość 4 cm.

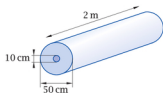
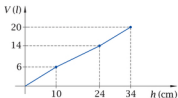


19. Z kartonu zawierającego 1 litr mleka przelano część mleka do słoika (zob. rysunek obok). Oblicz, do jakiej wysokości sięga mleko, które zostało w kartoniku (pomiń grubości ścianek kartonu i słoika).

20. W skarbcu Międzynarodowego Urzędu Miar w Sèvres pod Paryżem od ponad stu lat jest przechowywany wzorzec kilograma. Wzorzec ma kształt walca, którego średnica podstawy równa jest wysokości. Został on wykonany ze stopu, w którym 90% stanowi platyna, a 10% — iryd. Gęstość platyny wynosi $21,45 \text{ g/cm}^3$, a irydu $22,65 \text{ g/cm}^3$. Oblicz, jakie są wymiary wzorca kilograma (z dokładnością do 0,1 mm).

21. Góra piasku o gęstości 1500 kg/m^3 waży 2 t i ma kształt stożka, w którym tworząca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° . Po dosypaniu pewnej ilości piasku wysokość stożka wzrosła o 10 cm, a kąt nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy się nie zmienił. Ile ton piasku dosypano?

22. Na fotografii przedstawiona jest butla na wodę. Przyjmij, że część butli wypełniona wodą ma kształt walca o wysokości 34 cm, z którego usunięto pewien fragment. Poniższy wykres opisuje zależność objętości wody (w litrach) od wysokości (w centymetrach), do której sięga woda w butli. Jaką objętość ma usunięty fragment walca? W obliczeniach pominięto grubość ścianek butli.



23. Papier nawinięty na rulon o średnicy 10 cm tworzy rolę o średnicy 50 cm i długości 2 m.

a) Gęstość papieru wynosi 800 kg/m^3 . Ile waży papier w tej roli?

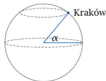
b) Zewnętrzne warstwy papieru w tej roli uległy zniszczeniu tak, że nieuszkodzona część stanowi 40% papieru w roli. Oblicz średnicę nieuszkodzonej części roli.

24. Z kwadratowego arkusza kartonu o boku a wycięto w rogach cztery jednakowe kwadraty, a następnie sklejono prostopadłościennie pudełko. Jaka powinna być długość boku wycinanych kwadratów, aby powierzchnia ścianek bocznych tego pudełka była możliwie największa?



25. Przyjmijmy, że Ziemia ma kształt kuli o promieniu 6371 km. O ile dłuższa byłaby podróż dookoła świata wzdłuż równika od podróży wzdłuż równoleżnika przechodzącego przez Kraków (szerokość geograficzna 50°N)?

Uwaga. Na rysunku kąt α to szerokość geograficzna Krakowa.



26. Przeczytaj poniższe informacje.

Każda z części, na które płaszczyzna rozcina sferę, nazywa się czaszą. Pole P powierzchni czaszy przedstawionej na rysunku obok można obliczyć ze wzoru $P = 2\pi R h$.



Wycinkiem kuli nazywamy część kuli ograniczoną czaszą i powierzchnią boczną stożka o wierzchołku w środku tej kuli. Objętość wycinka kuli można obliczyć, mnożąc pole powierzchni czaszy przez $\frac{1}{3}$ długości promienia kuli.



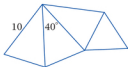
Wykaż, że objętość V czaszy można obliczyć ze wzoru $V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right)$.



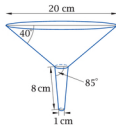
27. Masa pływającego ciała jest równa masie wody wypartej przez to ciało. Piłka o promieniu 10 cm pływa w wodzie tak, że wystaje 3 cm ponad powierzchnię wody. Oblicz masę piłki. Przyjmij, że gęstość wody wynosi 1 g/cm^3 . Skorzystaj ze wzoru wykazanego w poprzednim zadaniu.

28. Od ostrosłupa o wysokości h odcinamy mniejszy ostrosłup płaszczyzną równoległą do podstawy. W jakiej odległości od podstawy powinna być poprowadzona płaszczyzna cięcia, aby mniejszy ostrosłup:

- miał objętość równą połowie objętości większego ostrosłupa,
- miał pole powierzchni równe połowie pola powierzchni większego ostrosłupa?



29. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego, którego siatkę przedstawiono na rysunku obok.



30. Z rysunku obok można odczytać niektóre wymiary lejka. Oblicz, jaką wysokość ma ten lejek. Wynik zaokrąglij do 1 mm.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Jeśli wszystkie zdarzenia elementarne w pewnym zdarzeniu losowym są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwem zdarzenia losowego A nazywamy iloraz:

$$P(A) = \frac{n_A}{N}$$

N — liczba wszystkich zdarzeń elementarnych

n_A — liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A

WŁASNOŚCI PRAWDOPODOBIEŃSTWA

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Ω — przestrzeń zdarzeń elementarnych

$$P(\emptyset) = 0$$

$\emptyset$ — zdarzenie niemożliwe

$$P(\Omega) = 1$$

A' — zdarzenie przeciwne do zdarzenia A ($A' = \Omega \setminus A$)

$$P(A') = 1 - P(A)$$

WARTOŚĆ OCZEKIWANA

Jeśli możliwymi zyskami uczestnika U w pewnej grze są liczby $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$, którym odpowiadają prawdopodobieństwa $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, to **wartość oczekiwaną** zysku tego uczestnika oznaczamy symbolem EZ_U i obliczamy ze wzoru:

$$EZ_U = p_1 \cdot l_1 + p_2 \cdot l_2 + p_3 \cdot l_3 + \dots + p_n \cdot l_n$$

ELEMENTY KOMBINATORYKI

ZASADA MNOŻENIA

Gdy wynik pewnego postępowania zależy od kolejno podejmowanych decyzji i przy podejmowaniu pierwszej decyzji mamy do wyboru n_1 możliwości, drugiej — n_2 itd., a ostatniej — n_k możliwości, to liczba różnych wyników, które możemy otrzymać, jest równa $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

ZASADA DODAWANIA

Jeśli ustalając liczbę możliwości, możemy rozważyć kilka rozłącznych przypadków, to możemy policzyć, ile jest możliwości w każdym z nich i dodać otrzymane wyniki.

ZESTAW ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. Rzucamy jeden raz dwiema sześciennymi kostkami do gry. Prawdopodobieństwo, że suma oczek na obu kostkach będzie mniejsza niż 10, jest równe:

- A. $\frac{11}{12}$ B. $\frac{8}{9}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

2. Spośród wszystkich liczb naturalnych od 1 do 9 losujemy dwie różne liczby. Prawdopodobieństwo, że suma tych liczb jest równa 13, wynosi:

- A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{2}{27}$ C. $\frac{1}{24}$ D. $\frac{1}{27}$

3. Spośród wszystkich liczb naturalnych od 1 do 9 wybieramy dwie różne liczby. Prawdopodobieństwo, że jedna z nich jest dzielnikiem drugiej, jest równe:

- A. $\frac{28}{81}$ B. $\frac{14}{81}$ C. $\frac{7}{36}$ D. $\frac{7}{18}$

4. Ze zbioru liczb naturalnych od 1 do 60 losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo, że liczba ta będzie dzielnikiem liczby 60, jest równe:

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{3}{20}$ C. $\frac{2}{17}$ D. $\frac{1}{5}$

5. W jednej przegródce portfela jest pięć banknotów: dwa o nominale 10 zł, dwa — 20 zł i jeden — 50 zł. W drugiej przegródce są cztery banknoty: jeden o nominale 50 zł, dwa o nominale 100 zł i jedna dwustuzłotówka. Losowo wybieramy po jednym banknocie z każdej przegródki. Prawdopodobieństwo, że wyjmemy w sumie kwotę większą niż 120 zł, jest równe:

- A. $\frac{11}{20}$ B. $\frac{7}{20}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{2}{10}$

6. W pewnym teście do każdego z trzech pytań podano pięć możliwych odpowiedzi, z których tylko jedna jest poprawna. Przy każdym pytaniu wskazujemy losowo wybraną jedną z odpowiedzi. Prawdopodobieństwo, że wskażemy trzy poprawne odpowiedzi, jest równe:

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{15}$ D. $\frac{1}{125}$

7. W wyścigu bierze udział 12 zawodników. Pierwszą trójkę na mecie typujemy, wskazując, kto zajmie pierwsze miejsce, kto — drugie, a kto — trzecie. Ile różnych trójek można w ten sposób wytypować?

- A. 6 B. 48 C. 220 D. 1320

8. Ile trzycyfrowych liczb nieparzystych można utworzyć z cyfr od 2 do 6?

- A. 18 B. 40 C. 50 D. 75

9. Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych parzystych, takich że w ich zapisie występuje dokładnie jedna cyfra 5 i dokładnie jedna cyfra 7?

- A. 190 B. 230 C. 290 D. 300

10. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przypadkowo ustawiając litery występujące w słowie BAROK, utworzymy słowo ROBAK?

- A. $\frac{1}{120}$ B. $\frac{1}{24}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{4}$

11. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ustawiając w przypadkowej kolejności litery A, A, B, K, R, utworzymy słowo BARKA?

- A. $\frac{1}{240}$ B. $\frac{1}{120}$ C. $\frac{1}{60}$ D. $\frac{1}{5}$

12. Na loterię przygotowano 100 losów, w tym 8 wygrywających. Po wylosowaniu pewnej liczby losów, wśród których dwa były wygrywające, okazało się, że szansa na wygraną była taka sama jak przed rozpoczęciem loterii. Zatem wylosowano:

- A. 4 losy B. 16 losów C. 20 losów D. 25 losów

13. Przed przystąpieniem do pewnej gry losowej gracz wpłaca ustaloną kwotę organizatorowi. Jeśli gracz przegra, to traci tę kwotę. Jeśli wygra, to organizator wypłaca mu 300 zł. Wiadomo, że prawdopodobieństwo wygrania jest równe $\frac{2}{5}$. Aby gra była sprawiedliwa, wpłacona na początku gry kwota powinna wynosić:

- A. 120 zł B. 200 zł C. 60 zł D. 180 zł

ZADANIA OTWARTE

14. Cztery pączki są nadziewane dżemem, a pięć — budyniem. Losowo wybrano trzy pączki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dwa nadziewane są dżemem, a trzeci — budyniem.

15. Dziesięć osób: 6 kobiet i 4 mężczyzn podzielono w sposób losowy na dwie grupy: sześćo- i czteroosobową. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że obie grupy są złożone z osób jednej płci.

16. W pewnej firmie na ogłoszenie o wolnym miejscu pracy zgłosiło się 25 kandydatów. W tabelce przedstawiono, ilu z nich ma doświadczenie, a ilu — odpowiednie wykształcenie.

Kandydat	ma doświadczenie	nie ma doświadczenia
ma wykształcenie	3	12
nie ma wykształcenia	2	8

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany kandydat nie ma odpowiedniego wykształcenia lub nie ma doświadczenia.

17. W pudełku jest 500 losów loteryjnych, w tym 60 wygrywających. Wyciągamy dwa losy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej jeden z nich jest wygrywający.

18. Na rysunku przedstawiono fragment mapki, na której zaznaczono pięć miejscowości i wszystkie przechodzące przez nie drogi. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że podróżując z A do B i z powrotem, podróżny wybierze dwie różne drogi, ale obie prowadzące przez M .



19. Prawdopodobieństwo uzyskania połączenia z pewnym numerem telefonicznym wynosi 70%. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania połączenia z tym numerem dopiero w czwartej próbie.

20. Układamy hasło ośmioznakowe. W hasło można użyć cyfr od 0 do 3 i wielkich liter A, B, C, D, E. Ile takich różnych haseł można utworzyć, w których:

- a) występuje co najmniej jedna litera,
- b) na początku hasła występują dwie cyfry lub dwie litery?

21. Ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych podzielnych przez 5, w których występują dokładnie dwie piątki?

PROCENTY. ELEMENTY STATYSTYKI

PROCENTY I PROMILE

$p\%$ liczby a to $\frac{p}{100} \cdot a$.

Liczba a stanowi $\frac{a}{b} \cdot 100\%$ liczby b .

Liczba o $p\%$ większa od a to $a + \frac{p}{100} \cdot a$.

$p\text{‰}$ liczby a to $\frac{p}{1000} \cdot a$.

OBLICZANIE ODSETEK

Procent prosty (odsetki obliczane są od stałej kwoty). Jeśli kapitał początkowy wynosi K_0 , a oprocentowanie jest równe $p\%$, to po n okresach naliczania odsetek kapitał wraz z odsetkami wynosi:

$$K_n = K_0 + \frac{p}{100} \cdot K_0 \cdot n$$

Procent składany (odsetki obliczane są od kapitału powiększonego o odsetki za wcześniejszy okres). Jeśli kapitał początkowy wynosi K_0 , a po każdym okresie naliczania odsetek stan konta zwiększa się o $p\%$, to po n okresach naliczania odsetek kapitał wraz z odsetkami wynosi:

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

ELEMENTY STATYSTYKI

MEDIANA

Każdy zestaw n liczb można ustawić w taki ciąg $a_1, a_2, \dots, a_n$, że spełniona jest nierówność: $a_n \leq a_{n+1}$.

Gdy n jest liczbą nieparzystą, to medianą liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy środkowy wyraz w tym ciągu.

Na przykład dla $n = 7$ medianą jest a_4 .

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ & & & \vdots & & & \\ & & & \text{mediana} = a_4 & & & \end{array}$$

Gdy n jest liczbą parzystą, to medianą liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy średnią arytmetyczną dwóch środkowych wyrazów.

Na przykład dla $n = 6$ medianą jest średnia arytmetyczna liczb a_3 i a_4 .

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ & & & \vdots & & & \\ & & & \text{mediana} = \frac{a_3 + a_4}{2} & & & \end{array}$$

DOMINANTA (MODA)

Dominanta zestawu danych to taka wartość, która w tym zestawie występuje najczęściej.

Uwaga. Jeśli w zestawie kilka wartości występuje z tą samą (najwyższą) częstością, to każda z tych wartości jest dominantą.

ŚREDNIA ARYTMETYCZNA

Średnia arytmetyczna liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ to liczba $\bar{x}$ obliczana według wzoru:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

ŚREDNIA WAŻONA

Średnia ważona liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ z wagami odpowiednio $w_1, w_2, \dots, w_n$ (gdzie $w_1, w_2, \dots, w_n$ są liczbami dodatnimi) to liczba $\bar{s}$ obliczana według wzoru:

$$\bar{s} = \frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + \dots + w_n a_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

ODCHYLENIE STANDARDOWE

Odchylenie standardowe zestawu danych liczbowych $x_1, x_2, \dots, x_n$ to liczba σ obliczana według wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

lub według wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2}$$

ZESTAW ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. Liczba a to 32% liczby dodatniej m , a także 160% liczby dodatniej n . Wynika stąd, że:

A. $n = 0,2m$

B. $n = 0,5m$

C. $n = 1,28m$

D. $n = 1,92m$

2. W Polsce inflacja w 2018 roku wynosiła 1,6%, w 2019 roku — 2,3%, a w 2020 roku — 3,4%. Jeśli cena pewnego towaru na początku 2018 roku wynosiła 200 zł i wzrastała zgodnie z inflacją, to można się spodziewać, że cena tego towaru w końcu 2020 roku wynosiła około:

A. 207,30 zł

B. 214,60 zł

C. 214,94 zł

D. 346,00 zł

3. Cenę pewnego towaru zmniejszono po sezonie o 36%. Przed następnym sezonem podwyższono cenę do poprzedniej wysokości. O ile procent wzrosła wówczas cena tego towaru?

- A. 36% B. 42,5% C. 56,25% D. 64%

4. Na lokatę roczną wpłacono 50 000 zł. Oprocentowanie tej lokaty wynosi 2% w skali roku. Roczny podatek od odsetek wynosi 19%. Jaki będzie stan tego konta po 10 latach oszczędzania, jeśli w tym czasie nie będą dokonywane żadne wpłaty ani wypłaty?

- A. 58 716,74 zł C. 51 932,82 zł
B. 60 949,72 zł D. 60 000 zł

5. Na lokatę, której oprocentowanie netto w skali roku, czyli po uwzględnieniu podatku od odsetek, wynosi 3%, wpłacono 100 000 zł. Gdyby odsetki doliczano co miesiąc, to ich wielkość po roku byłaby większa od odsetek doliczanych co pół roku. O ile większa?

- A. o 6,18 zł B. o 12,50 zł C. o 19,10 zł D. o 36,49 zł

6. Na lokatę półroczną wpłacono 20 000 zł. Przez 5 lat nie dokonywano żadnych dodatkowych wpłat ani wypłat i po upływie tego czasu kwota na lokacie wzrosła do 26 278,50 zł. Jakiego było rocznego oprocentowania tej lokaty netto (po odliczeniu podatku od odsetek)?

- A. 2,8% B. 5,5% C. 7% D. 11,2%

7. Z 1 kg mleka o zawartości 4% tłuszczu zebrano 10 dag śmietany o zawartości 12% tłuszczu. Jaki jest procent tłuszczu w mleku, które pozostało?

- A. około 2,8% B. około 2,9% C. około 3,1% D. około 3,4%

8. W tabeli podano wyniki badania dotyczącego liczby dzieci w rodzinie.

Liczba dzieci	0	1	2	3	4	5	6
Liczba rodzin	9	12	16	8	4	0	1

Na podstawie tych danych można stwierdzić, że średnia liczba dzieci w jednej rodzinie jest równa:

- A. 0,22 B. 1,8 C. 2,08 D. 3

9. Średnia arytmetyczna liczb 1, 3, 5, 5, 6, x jest równa m , a średnia arytmetyczna liczb 1, 3, 5, 5, 6, x , $4x$ jest równa $2m$. Wynika stąd, że suma $x + m$ wynosi:

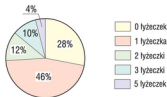
- A. 5 B. 10 C. 15 D. 20

10. Zestaw A składa się z 50 liczb o średniej arytmetycznej równej 9, a zestaw B – z 30 liczb o średniej arytmetycznej równej 1. Średnia arytmetyczna zestawu powstałego w wyniku połączenia zestawów A i B wynosi:

- A. 1,25 B. 4,5 C. 5 D. 6

11. Pięćdziesiąt osób spytano, ile łyżek cukru dodają do szklanki herbaty. Wyniki tej ankiety przedstawiono za pomocą diagramu kołowego. Mediana danych jest równa:

- A. 1 B. 1,3 C. 1,5 D. 2



12. Różnica między średnią arytmetyczną zestawu liczb: 1, 2, 3, 1, 3, 1, 5, 9 a medianą tego zestawu wynosi:

- A. 0,125 B. 0,625 C. 1,125 D. 1,225

13. W pewnej firmie wszyscy oprócz szefa zarabiają tyle samo, a szef zarabia o 2400 zł więcej niż inni. W firmie pracuje 30 osób (razem z szefem). O ile średnia arytmetyczna płac jest większa od mediany płac w tej firmie?

- A. 10 zł B. 60 zł C. 80 zł D. Za mało danych, by to stwierdzić.

14. Średnia arytmetyczna oraz mediana zestawu dziewięciu liczb: 7, 9, 2, 3, 2, 7, 3, a , b są równe 5. Dominantą tego zestawu jest:

- A. 2 B. 3 C. 5 D. 7

15. Mediana podanego zestawu liczb wynosi 6. Oblicz średnią arytmetyczną tego zestawu.

Wartość danych	2	5	7	9
Liczba wskazań	11	9	x	17

- A. $2\frac{19}{37}$ B. 6 C. $6\frac{1}{40}$ D. $6\frac{4}{43}$

16. Rzucono dziesięciokrotnie sześcienną kostką do gry. W pierwszych ośmiu rzutach otrzymano wyniki: 2, 3, 2, 4, 5, 6, 4, 5. Średnia arytmetyczna wszystkich dziesięciu wyników jest równa 3,4. Jaka jest mediana wszystkich wyników?

- A. 3,4 B. 3,5 C. 4 D. 4,5

17. W tabeli podano liczby i odpowiadające im wagi. Średnia ważona tych liczb to:

Liczba	3	10	12	20
Waga	5	3	1	1

- A. 5,1(3) B. 7,7 C. 11,25 D. 19,251

18. Odchylenie standardowe zestawu danych 1, 2, 2, 2, 3 jest równe:

- A. 0,5 B. $\sqrt{6}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

19. Poniżej przedstawiono dane o wzroście zawodników dwóch drużyn.

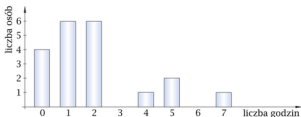
Drużyna A: 168 cm, 179 cm, 180 cm, 183 cm, 190 cm.

Drużyna B: 166 cm, 184 cm, 185 cm, 186 cm, 189 cm.

Niech $\bar{x}_A$ i σ_A oznaczają odpowiednio średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe wzrostu zawodników drużyny A, a $\bar{x}_B$ i σ_B — zawodników drużyny B. Która z podanych par nierówności jest prawdziwa?

- A. $\bar{x}_A < \bar{x}_B$ i $\sigma_A < \sigma_B$ C. $\bar{x}_A > \bar{x}_B$ i $\sigma_A < \sigma_B$
B. $\bar{x}_A < \bar{x}_B$ i $\sigma_A > \sigma_B$ D. $\bar{x}_A > \bar{x}_B$ i $\sigma_A > \sigma_B$

20. Na diagramie słupkowym przedstawiono wyniki ankiety na temat liczby godzin poświęconych na uprawianie sportu w ciągu tygodnia.



Która z podanych liczb jest najdokładniejszym przybliżeniem odchylenia standardowego zebranych danych?

- A. 1,86 B. 1,95 C. 2 D. 2,05

ZADANIA OTWARTE

21. Sprawność pisania na maszynie lub klawiaturze komputerowej określa się w następujący sposób: osoba, która w czasie t (w minutach) napisała tekst składający się z n wyrazów i popełniła b błędów, ma sprawność pisania równą S , gdzie:

$$S = \frac{n - 10b}{t}$$

Pani Jadwiga i pani Henryka pisały na maszynie ten sam tekst i popełniły tyle samo błędów. Pani Jadwiga ma sprawność pisania o 25% wyższą niż pani Henryka. Pani Henryce pisanie tekstu zajęło 15 minut. Jak długo pisała go pani Jadwiga?

22. Średnie miesięczne wynagrodzenie w 1980 roku było w Polsce o 13% wyższe niż w 1979 roku i o 24% wyższe niż w 1978 roku. O ile procent średnie miesięczne wynagrodzenie w 1979 roku było wyższe od średniego miesięcznego wynagrodzenia w roku 1978?

23. Suszone grzyby ważą o 80% mniej niż przed suszeniem i zawierają jeszcze 5% wody.

a) Ile grzybów trzeba zebrać, aby otrzymać 1 kg grzybów suszonych?

b) Ile procent stanowi woda w świeżo zebranych grzybach?

24. Jakie powinno być oprocentowanie netto (po uwzględnieniu podatku) lokaty rocznej, aby po czterech latach przechowywania na niej oszczędności stan konta powiększył się o 50%? O ile procent powiększyłyby się oszczędności na tej lokacie po ośmiu latach?

25. W pewnym banku oprocentowanie lokaty trzymiesięcznej wynosi 6% w skali roku. Po upływie terminu lokaty bank dopisze nam odsetki pomniejszone o podatek, który wynosi 20% kwoty odsetek. O ile procent wzrośnie po trzech miesiącach kwota wpłacona na tę lokatę po dopisaniu odsetek pomniejszonych o podatek?

26. Reklama pewnego funduszu inwestycyjnego głosi, że po trzech latach od za-inwestowania w ten fundusz zysk wyniósł 20% wpłaconej kwoty. W tym samym czasie oprocentowanie lokaty wynosiło 6,5% w stosunku rocznym, a odsetki dopisywane były po każdym roku. Realizując zyski z funduszu inwestycyjnego, po trzech latach należało zapłacić jednorazowo podatek od tego zysku. W wypadku lokaty bankowej podatek od odsetek był odliczany co roku. W obu wypadkach wysokość podatku wynosiła 19%. Oblicz procentowy zysk netto (po odliczeniu podatku) z każdej z tych inwestycji.

27. Średnią dobową temperaturę powietrza oblicza się jako średnią arytmetyczną czterech temperatur zanotowanych w ciągu doby:

$T_{\max}$ — temperatury najwyższej, $T_{\min}$ — temperatury najniższej, T_7 — temperatury o godzinie 7⁰⁰, T_{19} — temperatury o godzinie 19⁰⁰.

W pewnym mieście o godzinie 7⁰⁰ zanotowano temperaturę -5°C , a o godzinie 19⁰⁰ było -2°C . Wiadomo, że różnica między najwyższą a najniższą temperaturą w ciągu doby wynosiła 10°C . Czy średnia dobową temperatura tego dnia mogła osiągnąć -1°C ?

28. Pewna gazeta ocenia restauracje, przydzielając im punkty w skali od 0 do 10 w trzech kategoriach: wystrój sali, obsługa i jakość potraw. Ocena końcowa to średnia ważona tych punktów. Poniżej podano liczbę punktów, które zdobyły dwie z ocenianych restauracji. Oblicz wagi punktów w każdej kategorii (przyjmij, że suma wag jest równa 1).

Restauracja	Wystrój sali	Obsługa	Jakość potraw	Ocena końcowa
Telmo	8	4	6	5,8
Keruż	2	2	9	5,5

29. Zgodnie z regulaminem pewnej uczelni wynik końcowy studiów jest średnią ważoną następujących liczb: średniej arytmetycznej ocen wpisanych do indeksu (z wagą 0,5), oceny z pracy dyplomowej (z wagą 0,3) i oceny z egzaminu dyplomowego (z wagą 0,2). Ewelina uzyskała średnią ocen z indeksu równą 3,7, za pracę dyplomową otrzymała ocenę 4,5 i obroniła ją na egzaminie dyplomowym na ocenę 4. Władze uczelni proponują zmianę wag ocen branych pod uwagę przy obliczaniu wyniku końcowego tak, by wagi ocen z pracy dyplomowej i z egzaminu dyplomowego były równe. Gdyby te zmiany weszły w życie, to wynik końcowy Eweliny wyniósłby 3,92. Jakie nowe wagi proponują władze uczelni?

30. W pewnej stacji hodowli roślin trwają próby wyhodowania odmiany grochu o dużych ziarnach i małym zróżnicowaniu wielkości ziaren — średnia masa ziarna ma być większa od 0,06 g, a odchylenie standardowe masy ziaren ma być mniejsze niż 0,001 g. W laboratorium tej stacji zważono 100 ziaren nowej odmiany grochu. Wyniki tego ważenia przedstawiono w poniższej tabeli. Czy ziarna w badanej próbie spełniają oczekiwane wymagania?

Masa ziarna (g)	0,059	0,06	0,061	0,062
Liczba ziaren	40	32	8	20

31. W pewnym zakładzie przetwórstwa owocowego jedna z maszyn odmierza 100-gramowe porcje dżemu i pakuje je do pojemników. Normy zakładowe wymagają, by średnia arytmetyczna mas porcji zawierała się między 98,5 g i 101,5 g, a odchylenie standardowe tych mas nie było większe od 1,5 g. Aby sprawdzić, czy maszyna spełnia te normy, zważono 100 porcji dżemu. Wyniki zebrano w poniższej tabeli. Czy masy sprawdzonych porcji spełniają normy zakładowe?

Masa porcji	97	98	99	100	101	102	103
Liczba porcji	20	30	17	27	0	1	5

Tabela wartości funkcji trygonometrycznych

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0	1	0	46°	0,7193	0,6947	1,0355
1°	0,0175	0,9998	0,0175	47°	0,7314	0,6820	1,0724
2°	0,0349	0,9994	0,0349	48°	0,7431	0,6691	1,1106
3°	0,0523	0,9986	0,0524	49°	0,7547	0,6561	1,1504
4°	0,0698	0,9976	0,0699	50°	0,7660	0,6428	1,1918
5°	0,0872	0,9962	0,0875	51°	0,7771	0,6293	1,2349
6°	0,1045	0,9945	0,1051	52°	0,7880	0,6157	1,2799
7°	0,1219	0,9925	0,1228	53°	0,7986	0,6018	1,3270
8°	0,1392	0,9903	0,1405	54°	0,8090	0,5878	1,3764
9°	0,1564	0,9877	0,1584	55°	0,8192	0,5736	1,4281
10°	0,1736	0,9848	0,1763	56°	0,8290	0,5592	1,4826
11°	0,1908	0,9816	0,1944	57°	0,8387	0,5446	1,5399
12°	0,2079	0,9781	0,2126	58°	0,8480	0,5299	1,6003
13°	0,2250	0,9744	0,2309	59°	0,8572	0,5150	1,6643
14°	0,2419	0,9703	0,2493	60°	0,8660	0,5000	1,7321
15°	0,2588	0,9659	0,2679	61°	0,8746	0,4848	1,8040
16°	0,2756	0,9613	0,2867	62°	0,8829	0,4695	1,8807
17°	0,2924	0,9563	0,3057	63°	0,8910	0,4540	1,9626
18°	0,3090	0,9511	0,3249	64°	0,8988	0,4384	2,0503
19°	0,3256	0,9455	0,3443	65°	0,9063	0,4226	2,1445
20°	0,3420	0,9397	0,3640	66°	0,9135	0,4067	2,2460
21°	0,3584	0,9336	0,3839	67°	0,9205	0,3907	2,3559
22°	0,3746	0,9272	0,4040	68°	0,9272	0,3746	2,4751
23°	0,3907	0,9205	0,4245	69°	0,9336	0,3584	2,6051
24°	0,4067	0,9135	0,4452	70°	0,9397	0,3420	2,7475
25°	0,4226	0,9063	0,4663	71°	0,9455	0,3256	2,9042
26°	0,4384	0,8988	0,4877	72°	0,9511	0,3090	3,0777
27°	0,4540	0,8910	0,5095	73°	0,9563	0,2924	3,2709
28°	0,4695	0,8829	0,5317	74°	0,9613	0,2756	3,4874
29°	0,4848	0,8746	0,5543	75°	0,9659	0,2588	3,7321
30°	0,5000	0,8660	0,5774	76°	0,9703	0,2419	4,0108
31°	0,5150	0,8572	0,6009	77°	0,9744	0,2250	4,3315
32°	0,5299	0,8480	0,6249	78°	0,9781	0,2079	4,7046
33°	0,5446	0,8387	0,6494	79°	0,9816	0,1908	5,1446
34°	0,5592	0,8290	0,6745	80°	0,9848	0,1736	5,6713
35°	0,5736	0,8192	0,7002	81°	0,9877	0,1564	6,3138
36°	0,5878	0,8090	0,7265	82°	0,9903	0,1392	7,1154
37°	0,6018	0,7986	0,7536	83°	0,9925	0,1219	8,1443
38°	0,6157	0,7880	0,7813	84°	0,9945	0,1045	9,5144
39°	0,6293	0,7771	0,8098	85°	0,9962	0,0872	11,4301
40°	0,6428	0,7660	0,8391	86°	0,9976	0,0698	14,3007
41°	0,6561	0,7547	0,8693	87°	0,9986	0,0523	19,0811
42°	0,6691	0,7431	0,9004	88°	0,9994	0,0349	28,6363
43°	0,6820	0,7314	0,9325	89°	0,9998	0,0175	57,2900
44°	0,6947	0,7193	0,9657	90°	1	0	—
45°	0,7071	0,7071	1				

ODPOWIEDZI

str. 14-15: 1. a) 13, b) $2\sqrt{10}$, c) $\sqrt{6}$, d) $5\sqrt{2}$. 2. a) Tak, b) nie. 3. $\angle ACB$.
 5. $\frac{\sqrt{137}}{2}$. 6. a) $a = -5$ lub $a = 11$, b) $a = -2 - 4\sqrt{6}$ lub $a = -2 + 4\sqrt{6}$. 7. $(\frac{5-4\sqrt{3}}{2}, \frac{2-3\sqrt{3}}{2})$ lub $(\frac{5+4\sqrt{3}}{2}, \frac{2+3\sqrt{3}}{2})$. 8. (10, 20), $(\frac{-3-\sqrt{34}}{5}, \frac{-6-2\sqrt{34}}{5})$ lub $(\frac{-3+\sqrt{34}}{5}, \frac{-6+2\sqrt{34}}{5})$. 9. a) (7, 0), b) (0, 7), c) $(3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$. 10. a) $(-4, 16\frac{1}{2})$, b) $(-20, 54)$. 11. $\frac{\sqrt{85}}{2}$. 12. a) $C = (6, -7)$, $D = (8, 1)$, b) $D = (-7, 3)$. 13. a) $(-7, -\sqrt{2})$, b) $(7, \sqrt{2})$, c) $(7, -\sqrt{2})$. 14. a) (8, -3), b) (-1, 4), c) $(0, 6\sqrt{2} - 1)$, d) $(5 + 3\sqrt{7}, 9)$. 15. (1, 13). 16. a) $A' = (10, -2)$, $B' = (0, -1)$, b) $A' = (10, 2)$, $B' = (0, 3)$, c) $A' = (12, -2)$, $B' = (2, -1)$, d) $A' = (2\sqrt{7} + 10, 4\sqrt{7} - 2)$, $B' = (2\sqrt{7}, 4\sqrt{7} - 1)$. 17. a) $(-3, 1)$, b) $(\frac{3}{2}, 1)$, c) $(3a, b - 2)$, d) (a, a) . 18. $2\sqrt{41}$.

str. 20-22: 1. a) $x - 3y + 12 = 0$, $-x + 6y - 8 = 0$, $y + 5 = 0$, $x = 0$, b) $y = -\frac{2}{3}x + 4$, $y = -3x$, $y = \frac{2}{3}$, $y = \frac{9}{17}x$. 2. a) $4x - 3y + 2 = 0$, $2x - 1, 5y + 1 = 0$ i $y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$, b) trzy. 3. $a = 9\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{10}$, $c = -14$.
 4. a) $(0, 2)$ i $(\frac{4}{5}, 0)$, b) $(0, \frac{3}{2})$ i $(-2, 0)$, c) $(0, 2)$ i $(-5, 0)$. 5. a) $(-3, 5)$, b) $(\frac{1}{2}, 3)$, c) $(13\frac{1}{3}, -10)$, d) $(2\frac{2}{3}, 2)$. 6. Nie. 7. a) $y = -7x + 4$; $7x + y - 4 = 0$, b) brak postaci kierunkowej; $x - \frac{2}{5} = 0$, c) $y = \frac{11}{20}x - 10$; $11x - 20y - 200 = 0$, d) $y = \frac{-13-5\sqrt{2}}{7}x + \frac{20+12\sqrt{2}}{7}$; $(13 + 5\sqrt{2})x + 7y - 20 - 12\sqrt{2} = 0$.
 8. a) Nie, b) $t = -\frac{1}{4}$. 9. a) $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$, b) około 78° . 10. a) $y = -4x - 28$, b) $y = \frac{1}{3}x + 1$, c) $-3x + 5y - 20 = 0$, d) $2x - 3y - 19 = 0$. 11. a) $y = \frac{3}{2}x - 12$, b) $y = -\frac{1}{8}x - 2\frac{1}{2}$, c) $4x - 3y - 15 = 0$, d) $5x - 2y + 9 = 0$. 12. Równoległa: $2x + 3y - 4 = 0$, prostopadła: $1,5x - y = 0$, $y = 1,5x + 2$, $-10y + 15x - 1 = 0$. 13. $y = \frac{3}{7}x$ i $y = -\frac{7}{3}x$. 14. a) $40x + 12y - 37 = 0$, b) $6x - 20y - 31 = 0$.
 16. a) $t = \frac{3}{4}$; $t = -\frac{4}{3}$, b) $t = 3\frac{1}{3}$; $t = -7\frac{1}{3}$, c) $t = \frac{2}{3}$; $t = -10$.

str. 26-27: 1. a) $-\frac{5}{13}$, b) $y = -\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$. 2. $y = 4x + 10$. 3. a) $0 \leq a \leq \frac{2}{3}$, b) $\frac{5}{3} \leq a \leq 5$, c) $-\frac{1}{2} \leq a \leq 0$. 4. a) $y = 8\frac{1}{6}x$, b) $y = -1\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$. 5. $(-4\frac{2}{5}, -9\frac{4}{5})$. 6. a) $(\frac{11}{29}, 4\frac{14}{29})$, b) $(\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3})$.
 7. a) $\frac{3\sqrt{5}}{10}$, b) $\frac{2\sqrt{29}}{29}$. 8. a) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, b) $\frac{5\sqrt{10}}{2}$. 9. a) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$; 16, b) 13,5. 10. 3. 11. $\frac{7\sqrt{5}}{5}$.
 12. a) $\frac{2\sqrt{30}}{5}$, b) $\frac{7\sqrt{10}}{10}$.

str. 30-31: 1. a) $x^2 + y^2 = 900$, b) $x^2 + (y + 4)^2 = 1$, c) $(x + 2)^2 + (y + 11)^2 = 1,21$, d) $(x - \frac{1}{3})^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = \frac{9}{16}$, e) $(x - 1)^2 + y^2 = 8$, f) $(x - \sqrt{3})^2 + (y + \sqrt{3})^2 = 4\sqrt{3}$. 2. R i T.
 3. a) $(x + \frac{13}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{17}{2}$, b) $(x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 50$, c) $(x - 8)^2 + (y + 5)^2 = 113$, d) $(x - 8)^2 + (y + 9)^2 = 81$. 4. a) $(x - 7)^2 + (y - 7)^2 = 49$; $(x + 7)^2 + (y - 7)^2 = 49$; $(x + 7)^2 + (y + 7)^2 = 49$; $(x - 7)^2 + (y + 7)^2 = 49$, b) $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$; $(x + 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$, c) $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$; $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$. 5. a) Styczne wewnętrznie, b) przecinają się, c) przecinają się, d) przecinają się, e) rozłączne zewnętrznie, f) styczne wewnętrznie.
 6. a) $(x - 3)^2 + (y + 6)^2 = 121$, $(x - 3)^2 + (y + 6)^2 = 225$, b) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = (7 + \sqrt{10})^2$, $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = (7 - \sqrt{10})^2$. 7. $(x - 6)^2 + y^2 = 16$; $(x + 6)^2 + y^2 = 16$; $(x - 14)^2 + y^2 = 16$; $(x + 14)^2 + y^2 = 16$. 8. a) $y = -3x + 15$, b) $y = \frac{3}{2}x + 13$. 9. $P = (3, 6)$. 10. a) $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 \leq 1$, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 9$, b) $x^2 + (y - 4)^2 > \frac{1}{4}$.

str. 35-37: 1. a) Jedno rozwiązanie, b) brak rozwiązań, c) nieskończenie wiele rozwiązań, d) jedno rozwiązanie. 2. a) $p = -3$ lub $p = 2$, b) $p \in \emptyset$. 3. $y = 2x - 3$. 4. a) Dwa, b) dwa, c) żadnego, d) jedno. 5. a) $a = 2$ lub $a = -2$, b) $p = \frac{1}{4}$. 6. a) $(1, 0)$, $(-5, 0)$, $(0, \sqrt{21} - 4)$, $(0, -\sqrt{21} - 4)$, b) $(2, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 6)$, c) $(4\sqrt{3} - 7, 0)$, $(-4\sqrt{3} - 7, 0)$, $(0, 1)$. 7. a) $(\frac{6-\sqrt{11}}{5}, \frac{3+2\sqrt{11}}{5})$, $(\frac{6+\sqrt{11}}{5}, \frac{3-2\sqrt{11}}{5})$, b) $(\frac{4-4\sqrt{2}}{5}, \frac{-3+2\sqrt{2}}{5})$, $(\frac{4+4\sqrt{2}}{5}, \frac{-3-2\sqrt{2}}{5})$, c) brak punktów wspólnych, d) $(0, 1)$. 8. a) $4\sqrt{2}$, b) $2\sqrt{7}$, c) $2\sqrt{7}$. 9. $\frac{2\sqrt{95}}{5}$. 10. $8\sqrt{14}$. 11. a) $y = 2x - \sqrt{30}$ lub $y = 2x + \sqrt{30}$, b) $y = 2x + 8 + \sqrt{5}$ lub $y = 2x + 8 - \sqrt{5}$, c) $y = 2x + 2\sqrt{5} - 5$ lub $y = 2x - 2\sqrt{5} - 5$, d) $y = 2x - 8$ lub $y = 2x + 2$. 12. a) $y = 2\sqrt{6}x - 5$, $y = -2\sqrt{6}x - 5$, b) $y = x + \sqrt{2}$, $y = x - \sqrt{2}$, c) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{5}}{2}$, $y = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{5}}{2}$, d) $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$, $x = 1$. 13. $(x - 10\sqrt{10})^2 + y^2 = 100$, $(x + 10\sqrt{10})^2 + y^2 = 100$, $x^2 + (y + \frac{10\sqrt{10}}{3})^2 = 100$ lub $x^2 + (y - \frac{10\sqrt{10}}{3})^2 = 100$. 14. a) $b = \frac{10}{3}$, $b = -\frac{10}{3}$, b) $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, c) $r \in (0; \frac{3\sqrt{5}}{2})$, d) $t \in (-\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}}{2})$. 15. $(0, -1)$, $(0, 1)$, $(-2, 0)$ i $(2, 0)$; suma odległości wynosi 4.

str. 38: 1. a) $5x + 3y - 13 = 0$, b) $3x + 2y - 8 = 0$. 2. $(-4, 2)$. 3. $(3, 8)$. 4. $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$. 5. A. 6. $7\sqrt{13}$. 7. $(x - 1)^2 + y^2 = 13$. 8. $(3, \sqrt{3})$. 9. $(3 + \sqrt{2}, -2 - 2\sqrt{2})$, $(3 - \sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2})$. 10. $x^2 + (y - \sqrt{2} + 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$. 11. a) $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 5$, b) $(x - 8)^2 + (y - 5)^2 = 5$. 12. a) $(x - 12)^2 + (y - 5)^2 = 169$, b) $(x - \frac{5}{3})^2 + (y - 5)^2 = \frac{250}{9}$. 13. $y = -\frac{1}{3}x + 5\frac{1}{3}$. 14. $C = 26$, $(-2, -6)$ lub $C = -24$, $(6, 0)$. 15. $\frac{12\sqrt{3}}{5}$.

str. 46-50: 1. a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{4}{13}$, c) $\frac{1}{52}$, d) $\frac{1}{13}$, e) $\frac{5}{13}$. 2. a) Większe jest prawdopodobieństwo wylosowania figury spośród kierów. b) $\frac{1}{49}$. 3. Losowo wybrany Amerykanin to Smith. 4. a) $\frac{5}{6}$, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{1}{2}$. 5. a) C, b) B lub C, c) B. 6. a) $\frac{13}{16}$, b) $\frac{5}{16}$, c) $\frac{1}{8}$, d) $\frac{5}{8}$. 7. a) $\frac{70}{99}$, b) $\frac{2}{9}$. 8. A_1 i A_4 , A_2 i A_7 , A_3 i A_5 ; A'_6 — liczba oczek jest nieparzysta. 9. A_3 i A_7 , A_4 i A_6 , A_1 i A_5 ; A'_2 — Orzeł nie wypadnie tyle samo razy co reszka. 10. $\frac{39}{40}$; $\frac{9}{10}$. 11. $\frac{1}{10}$; $\frac{9}{10}$. 12. a) $\frac{44}{45}$, b) $\frac{14}{15}$, c) $\frac{4}{45}$. 13. 8 kul czerwonych. 14. 27 osób. 15. 21 kul. 16. a) $\frac{3}{20}$, b) $\frac{2}{5}$. 17. $\frac{99}{100}$. 18. a) $\frac{1}{5}$, b) $\frac{1}{25}$, c) w dwumasztowiec lub w trójmasztowiec, d) $\frac{20}{97}$, e) $\frac{3}{10}$. Wskazówka e). Ile jest pól zajętych przez wszystkie okręty, a ile — przez dwumasztowiec. 19. $\frac{2}{11}$. 20. a) $\frac{1}{13}$, b) $\frac{3}{7}$, c) $\frac{2}{3}$.

str. 53-54: 1. a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{1}{3}$. 2. a) $\frac{11}{36}$, b) $\frac{1}{6}$, c) $\frac{1}{9}$, d) $\frac{1}{12}$, e) suma oczek równa 5, f) suma oczek równa 7, g) $\frac{2}{9}$, h) 1. 3. a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{6}$. 4. $\frac{2}{9}$. 5. $\frac{1}{11}$. 6. a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{2}$. 7. a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{3}{28}$. 8. $\frac{7}{19}$. 9. $P(A) = \frac{7}{18}$, $P(B) = \frac{11}{36}$. 10. a) B, b) nie ma.

str. 61-64: 1. a) $\frac{1}{20}$, b) $\frac{1}{104}$, c) $\frac{11}{117}$, d) $\frac{11}{468}$. 2. a) $\frac{3}{20}$, b) $\frac{53}{120}$. 3. $\frac{7}{30}$. 4. a) $\frac{3}{35}$, b) $\frac{51}{112}$. 5. a) $\frac{3}{10}$, b) $\frac{11}{20}$. 6. $\frac{3}{8}$. 7. a) $\frac{31}{32}$, b) $\frac{13}{16}$. 8. a) $\frac{25}{72}$, b) $\frac{7}{8}$. 9. $P(4) = \frac{1}{15}$, $P(5) = \frac{2}{5}$, $P(6) = \frac{1}{3}$, $P(7) = \frac{1}{5}$. 10. a) $\frac{6327}{20825} \approx 0,3$, b) $\frac{221}{506}$, c) $\frac{221}{506}$. 11. a) $\frac{6327}{20825} \approx 0,3$, b) $\frac{15229}{44145} \approx 0,3$. 12. a) 0,01, b) 0,48, c) 0,64, d) 0,41. 13. 0,22. 14. $\frac{14}{15}$. 15. a) 0,343, b) 0,37, c) 0,189, d) 0,63. 17. a) Nie, b) $\frac{48}{325}$, c) $\frac{1}{4}$, d) $\frac{7}{8}$. 18. a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{2}$.

str. 67-69: 1. a) $\frac{5}{6}$ pkt, b) 1,5 pkt. 2. a) $\frac{1}{6}$ zł, czyli ok. 17 gr, b) $-\frac{5}{9}$ zł, czyli ok. -56 gr. 3. a) Wygrywamy ok. 23,13 zł, b) $-\frac{15}{14}$ zł, czyli ok. -1,07 zł. 4. 5 zł. 5. a) Nie, b) gracz

traci ok. 2,70 zł. 6. 17,50 zł. 7. 4,30 zł. 8. 62 zł i 124 zł. 9. $3\frac{7}{11}$ zł, czyli ok. 3,64 zł. 10. 40 zł. 11. 2,40 zł. 12. a) 25 zł, b) Kul białych powinno być 19 razy więcej niż czarnych.

str. 74-78: 1. 28. 2. 43 minuty 45 sekund. 3. a) 15 zestawów, b) na 24 sposoby, c) na 70 sposobów. 4. a) Na 20 sposobów, b) na 25 sposobów. 5. a) 48 możliwości, b) 60 możliwości. 6. a) 27 liczb, b) 18 liczb, c) 64 liczby, d) 8 liczb. 7. a) 2500 liczb, b) 300 liczb, c) 40 liczb, d) 36 liczb. 8. a) 72 liczby, b) 81 liczb, c) 648 liczb, d) 729 liczb. 9. a) 210 spódnic, b) 30 spódnic, c) 90 spódnic. 10. a) A — 12 sposobów, B — 6 sposobów, C — 48 sposobów, b) A — 36 sposobów, B — 48 sposobów, C — 324 sposoby. 11. a) Około 14,5 miliona stuleci, b) najczęściej szósty, najrzadziej — pierwszy i jedenasty. 12. a) Na 24 sposoby, b) na 120 sposobów, c) na 81 sposobów, d) na 17 280 sposobów. 13. a) Na 16 807 sposobów, b) na 78 125 sposobów. 14. 63 znaki. Wskazówka. Tworząc znak, decydujemy o każdej kropce, czy będzie wypukła, czy nie. 15. a) Na 120 sposobów, b) na 600 sposobów, c) na 48 sposobów, d) na 120 sposobów. 16. a) IVa — 156 par, IVb — 150 par, b) 621 par, c) 315 par. 17. Na 30 sposobów. 18. 468 zestawów. 19. 486 259 200 ciągów. 20. Na 38 sposobów. 21. 30 znaków. 22. a) 85 liczb, b) 162 liczby. 23. a) 117 liczb, b) 23 liczby. 24. a) 12 liczb, b) 75 liczb. 25. a) Na 4 sposoby, b) na 6 sposobów, c) na 18 sposobów, d) na 36 sposobów.

str. 81-83: 1. a) 720, $\frac{1}{720}$, b) 24, $\frac{1}{12}$, c) $6^3 = 216$, $\frac{1}{36}$, d) $\left(\frac{1}{104}\right)^5$, e) $\frac{1}{27 405}$. 2. a) $\frac{1}{1820}$, b) $\frac{1}{435}$. 3. a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{6}$, c) $\frac{2}{15}$. 4. a) $\frac{1}{256}$, b) $\frac{1}{60 480}$. 5. a) $\frac{1}{720}$, b) $\frac{1}{360}$, c) $\frac{1}{7560}$. 6. a) $\frac{1}{43}$, b) $\frac{10}{21}$, c) $\frac{5}{21}$. 7. a) $\frac{1}{3 628 800}$, b) $\frac{1}{90}$, c) $\frac{1}{5}$. 8. a) $\frac{1}{720}$, b) $\frac{719}{720}$, c) $\frac{1}{720}$. 9. a) $\left(\frac{1}{14}\right)^4$, b) $\left(\frac{13}{14}\right)^5 \approx 0,69$. 10. a) $\frac{1}{343}$, b) $\frac{120}{343}$, c) $\frac{24}{343}$. 11. a) $\frac{1}{11}$, b) $\frac{5}{11}$, c) $\frac{4}{3}$, d) $\frac{2}{3}$. 12. a) $\frac{25}{1296}$.

str. 84: 1. a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{3}{4}$. 2. $\frac{1}{8}$. 3. a) $\frac{13}{204}$, b) $\frac{19}{34}$, c) $\frac{33}{221}$. 4. 0,75. 5. $15\frac{15}{31}$ zł, czyli około 15,50 zł. 6. a) 240, b) 243. 7. a) 15, b) 32. 8. a) $\frac{1}{128}$, b) $\frac{247}{256}$. 9. $\frac{3}{28}$. 10. a) $\frac{1}{20}$, b) $\frac{7}{20}$.

str. 88-90: 1. C. 2. D. 3. C. 4. A. 5. C. 6. C. 7. A. 8. D. 9. B. 10. B. 11. D. 12. A. 13. D. 14. A. 15. A. 16. a) Woda destylowana: $s = 10^{-7} \frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}$, roztwór piorący: $s = 10^{-10} \frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}$, b) $10^{-2,5}$. 17. a) $2,1925 \cdot 10^{13} \text{ m}^3$, b) około $2,7989 \cdot 10^4 \text{ m} \approx 28 \text{ km}$, c) około $4,87 \cdot 10^{20}$ kropeł. 18. a) 29°C , b) około 6117 mm.

str. 92-94: 1. A. 2. A. 3. C. 4. D. 5. B. 6. C. 7. B. 8. B. 9. D. 10. C. 11. A. 12. A. 13. B. 14. D. 15. C. 16. B. 17. B. 18. B. 19. O 21 km. 21. $x \in \left(-2\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right)$. 22. $x = 1 - \sqrt{2}$, $x = 1 + \sqrt{2}$. 23. $p = 3$, $q = \frac{7}{5}$. 24. $1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ lub $1,5 \text{ m} \times 1,5 \text{ m} \times 1,5 \text{ m} \times 0,5 \text{ m}$. 25. 240.

str. 96-98: 1. D. 2. C. 3. C. 4. A. 5. C. 6. C. 7. C. 8. D. 9. A. 10. B. 11. C. 12. B. 13. C. 14. C. 15. A. 16. A. 17. A. 18. 180. 19. 247 050.

20. $q = 3$. 21. Tak. 22. Tak. 23. $q = -2$. 25. a) 30, b) mniej. 26. 21 obrotów, ale ostatni niepełny. 27. a) Około 1,4 b) o około 9,5%.

str. 100-103: 1. D. 2. D. 3. B. 4. A. 5. C. 6. D. 7. D. 8. D. 9. C. 10. A. 11. C. 12. C. 13. A. 14. C. 15. B. 16. a) $h(4) = -4$, b) $x = 1$, c) tak, jest malejąca, d) wartość największa dla $x = -5$, $h(-5) = 6$; wartość najmniejsza dla $x = 6$, $h(6) = -6$. 17. a) Dla $x \in \langle -4; 2 \rangle$, b) dla $k = -1$ lub $k \in \langle -7; -5 \rangle$. 18. Dla $x \in \langle -5; 0 \rangle \cup \{3\} \cup \langle 7; +\infty \rangle$. 19. b) $y = -3x + 30$.

str. 105-108: 1. C. 2. B. 3. B. 4. C. 5. D. 6. A. 7. C. 8. C. 9. B. 10. A. 11. A. 12. C. 13. B. 14. B. 15. D. 16. $x \in \langle -\frac{1}{2}; 4 \rangle \cup \langle 4; 5 \rangle$. 17. 7,225 m. 18. Po około 3,1 sekundy. 19. $(-1, -6)$, $(-8, -27)$. 20. Dla $x \in \langle -\infty; -2 \rangle \cup \langle 7; +\infty \rangle$. 21. $x \in \langle -\infty; -3 \rangle \cup \langle 0; +\infty \rangle$. 22. $x = -\frac{1}{2}$. 23. Co najmniej 47 wyrazów. 24. Wartość największa 16 dla $x = 3$, wartość najmniejsza -273 dla $x = 20$. 25. $5 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$.

str. 110-111: 1. C. 2. A. 3. B. 4. D. 5. C. 6. B. 7. D. 8. B. 9. A. 10. C. 11. B. 12. B. 13. Dla $a = -2$ i $b = 3$. 14. a) $W(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$, b) 0, c) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -3$. 15. $p = 4$; $x = -3$, $x = 2$. 16. $D = (1; +\infty)$, zbiorem wartości jest przedział $(0; 10)$, $f(a) = \frac{10}{2a-1}$. 17. $p = -\sqrt{2}$, $p = -1$, $p = 1$, $p = \sqrt{2}$; $p = -\sqrt{2}$, $p = 1$, $p = \sqrt{2}$. 18. $p = -6$.

str. 113-114: 1. B. 2. C. 3. B. 4. D. 5. A. 6. C. 7. A. 8. B. 9. C. 10. C. 11. Asymptota pozioma: $y = 1$; miejsce zerowe: $x = -5$. 12. $x = 7$. 13. a) 35 słów, b) przez mniej niż 31 dni. 14. a) O około 16%, b) około 8 dni. 15. Dla $x \in \langle -1; 0 \rangle \cup \langle 1; 2 \rangle$.

str. 116-117: 1. C. 2. D. 3. B. 4. B. 5. A. 6. B. 7. C. 8. A. 9. C. 10. 37° , 98° , 45° . 13. Nie. 14. $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\tan \alpha = -3$. 16. Około 72° .

str. 122-126: 1. D. 2. B. 3. B. 4. B. 5. C. 6. A. 7. D. 8. B. 9. B. 10. D. 11. A. 12. B. 13. A. 14. A. 15. B. 16. A. 17. A. 18. Około 2,6 m nad ziemią. 20. $x = \sqrt{90 - 18\sqrt{5}} \approx 7,1$. 21. $\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ razy. 22. Dla $\alpha = 60^\circ$. 23. $\frac{56}{9}\pi - 8 \sin 40^\circ$. 25. Obwód $= \frac{20\sqrt{3}}{3}(\sin 20^\circ + \sin 40^\circ)$. 26. 23 m. 27. O około 1,5%. 28. $P \approx 5,7$. 29. 3,5 i około 5,7; 60° i około 120° .

str. 129-131: 1. B. 2. B. 3. B. 4. B. 5. D. 6. B. 7. A. 8. A. 9. C. 10. A. 11. D. 12. D. 13. A. 14. C. 15. $\frac{11\sqrt{29}}{29}$; $P = 11$. 16. 150° . 17. $(2\frac{1}{2}, 3)$. 18. $(0, 3)$. 19. $(\frac{8}{3}, \frac{4}{3})$. 20. $(10\frac{1}{2}, 14\frac{1}{2})$. 21. a) $x + 3y - 6 = 0$, b) $x - 3y - 6 = 0$. 22. $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$. 23. $(1, 3\frac{1}{2})$, $(-4\frac{1}{2}, \frac{9}{10})$.

str. 134-138: 1. C. 2. C. 3. D. 4. A. 5. B. 6. A. 7. D. 8. B. 9. B. 10. A. 11. D. 12. C. 13. B. 14. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6 \lg \frac{2}{3}}$. 15. $V = 36\sqrt{291} \text{ cm}^3$. 16. $V = \frac{1029\sqrt{33}}{312}\pi$. 17. Nie. 18. Trójkąt, kwadrat lub pięciokąt foremny; około 2,1 cm.

19. $\frac{1000-63\pi}{63}$ cm $\approx 12,7$ cm. 20. $r \approx 19,5$ mm, $h \approx 38,9$ mm. 21. Około 0,9 tony.
 22. Około 0,41. 23. a) 96π kg $\approx 301,6$ kg, b) około 32 cm. 24. $\frac{1}{3}a$. 25. O około
 14 300 km. 27. $1252\frac{1}{3}\pi$ g ≈ 3932 g. 28. a) W odległości $(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})h$, b) w odległości
 $(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})h$. 29. $V \approx 62,04$. 30. Około 154 mm.

str. 140-142: 1. D. 2. A. 3. D. 4. D. 5. B. 6. D. 7. D. 8. C. 9. B. 10. A.
 11. C. 12. D. 13. B. 14. $\frac{5}{14}$. 15. $\frac{1}{210}$. 16. $\frac{22}{25}$. 17. $\frac{2817}{12475} \approx 0,226$. 18. $\frac{1}{10}$.
 19. 0,0189. 20. a) 42 981 185, b) 21 789 081. 21. 3132.

str. 144-149: 1. A. 2. C. 3. C. 4. A. 5. C. 6. B. 7. C. 8. B. 9. C.
 10. D. 11. A. 12. B. 13. C. 14. D. 15. C. 16. B. 17. B. 18. D. 19. A.
 20. A. 21. 12 minut. 22. O około 10%. 23. a) 5 kg, b) 81%. 24. Około 10,7%; o około
 126%. 25. O 1,2%. 26. Fundusz — 16,2%; lokata — 16,64%. 27. Nie. 28. Wystrój sali
 — 0,2, obsługa — 0,3, jakość potraw — 0,5. 29. Średnia ocen z indeksu: 0,6, ocena z pracy
 dyplomowej: 0,2, ocena z egzaminu dyplomowego: 0,2. 30. Nie, $\sigma \approx 0,00113$ g. 31. Tak,
 $\bar{x} = 98,8$ g, $\sigma \approx 1,49$ g.

Wszystkie książki Wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.
Zamówienia prosimy nadsyłać pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe
80-305 Gdańsk 5, skrytka pocztowa 80
tel. 801 643 917, 58 340 63 63
fax 58 340 63 61, 58 340 63 66
<http://www.gwo.pl> e-mail: handel@gwo.pl



Podręcznik jest przeznaczony do nauki matematyki w czteroletnim liceum lub pięcioletnim technikum. Spełnia on kryteria *Ustawy o systemie oświaty* i jest zgodny z najnowszą podstawą programową z 2018 roku.

Został dopuszczony przez MEiN do użytku szkolnego i wpisany do wykazu podręczników.

Numer dopuszczenia: 964/4/2022

