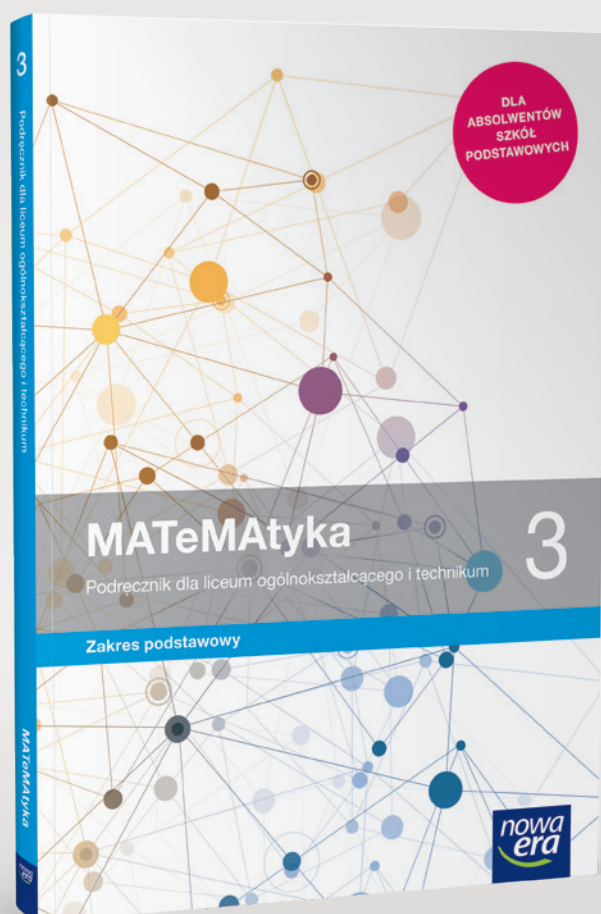


Podręcznik Nauczyciela

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

3

Zakres podstawowy



Podręcznik Nauczyciela zawiera:

- podręcznik ucznia
- odpowiedzi do wszystkich ćwiczeń i zadań
- rozwiązania trudniejszych zadań
- odnośniki do Multiteki – zasobów multimedialnych do lekcji
- komentarze merytoryczne

Program nauczania i inne materiały dydaktyczne są dostępne w portalu

dlanauczyciela.pl

MATeMATyka

Podręcznik Nauczyciela

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

Zakres podstawowy

3

MATeMATyka

Podręcznik Nauczyciela 3 został przygotowany do podręcznika autorstwa Wojciecha Babiańskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej, Grzegorza Janochy i Jolanty Wesołowskiej *MATeMATyka 3* dopuszczonego do użytku szkolnego i wpisanego do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w szkołach ponadpodstawowych w zakresie podstawowym (971/3/2021).

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek. Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2021
ISBN 978-83-267-4273-6

W publikacji zamieszczono strony z podręcznika *MATeMATyka* dla klasy 3 szkoły ponadpodstawowej w zakresie podstawowym.
© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2021

Autor komentarzy i rozwiązań zadań: Barbara Jedynak.
Redakcja merytoryczna: Aleksandra Jankowska, Beata Zając.
Redakcja językowa: Paulina Szulim.
Nadzór artystyczny: Kaia Pichler.
Opieka graficzna: Ewa Kaletyn.
Projekt graficzny: Klaudia Jarocka.
Projekt okładki: Maciej Galiński, Klaudia Jarocka-Ciok.
Rysunki: Lech Chańko.
Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko.
Opracowanie graficzne infografik: Aleksandra Szpunar.
Realizacja projektu okładki: Ultra.

Zdjęcie na okładce: Shutterstock/designleo.
Zdjęcia: BE&W: Alamy Stock Photo - Gunter Kirsch s. 79 (zamek Czocha), Nerthuz s. 42, Witold Skrypczak s. 79 (zamek w Czersku); Getty Images: E+/4x6 s. 36 (gitarzysta), iStock Unreleased/ewg3D s. 79 (zamek w Niedzicy), iStock/Getty Images Plus - Andrey Mitrofanov s. 111, Antonio_Diaz s. 36 (dziewczyna), Moment/Troy Harrison s. 171; Shutterstock: Alexey Boldin s. 187 (smartwatch), Dmitry Demkin s. 127 (słonecznik), Ian 2010 s. 127 (słonecznik), Marcin Krzyzak s. 79 (zamek w Ogrodzieńcu), Maridav s. 187 (bieg), Pecold s. 79 (zamek w Gniewie); Thinkstock/Getty Images: Fuse s. 175; Lech Chańko s. 9, 45, 53.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w publikacji. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Druk i oprawa: ArtDruk Kobyłka

Wojciech Babiański
Lech Chańko
Joanna Czarnowska
Grzegorz Janocha
Jolanta Wesołowska

MATeMATyka

Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum

3

Zakres podstawowy

**nowa
era** *Twoje mocne strony*

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:

dr. hab. Gustawa Trelńskiego, dr. Jacka Stańdo, mgr Teresy Kosyry-Cieślak.

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa

Rok dopuszczenia: 2021

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 971/3/2021

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Doroty Ponczek.

Ta publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek. Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2021
ISBN 978-83-267-4203-3

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Katarzyna Radziwińska

Współpraca redakcyjna: Urszula Cielniak, Marcin Minda

Opracowanie odpowiedzi: Ewa Kowalik, Katarzyna Radziwińska

Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak

Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski, Ewa Muszyńska, Barbara Sasim-Leciejewska

Redakcja językowa: Paulina Szulim

Korekta językowa: Dorota Rzeszewska

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler

Opieka graficzna: Ewa Kaletyn

Projekt graficzny: Marek Błoszko, Ewa Kaletyn, Wojtek Urbanek

Projekt okładki: Maciej Galiński, Ewa Kaletyn

Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska

Rysunki merytoryczne: Lech Chańko

Opracowanie graficzne infografik: Marek Błoszko, Aleksandra Szpunar

Ilustracje na infografikach: Krzysztof Mrawiński, Aleksandra Szpunar

Mapa: Zespół Kartograficzny Nowa Era

Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko

W pracy nad podręcznikiem wykorzystano materiały z podręczników:

MATeMAtyka kl. 2 ZP autorstwa Wojciecha Babińskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej, Grzegorza Janochy oraz MATeMAtyka kl. 3 ZP i MATeMAtyka kl. 3 ZR autorstwa Wojciecha Babińskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej, Jolanty Wesółowskiej

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Druk i oprawa: Walstead Central Europe

Spis treści

1. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Potęga o wykładniku całkowitym – warto powtórzyć	10
1.1. Potęga o wykładniku wymiernym – powtórzenie	11
1.2. Potęga o wykładniku rzeczywistym	13
1.3. Funkcja wykładnicza	16
1.4. Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej	19
1.5. Logarytm	22
1.6. Logarytm dziesiętny	26
1.7. Logarytm iloczynu i logarytm ilorazu	28
1.8. Logarytm potęgi	30
1.9. Funkcja logarytmiczna	32
1.10. Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej	37
1.11. Funkcje wykładnicza i logarytmiczna – zastosowania	41
1.12. Zagadnienia uzupełniające	44
Zestawy powtórzeniowe	46
Sposób na zadanie	50
Zadania testowe	51
Przed obowiązkową maturą z matematyki	52

2. Geometria analityczna

Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie do niego odwrotne – warto powtórzyć	54
2.1. Odległość między punktami w układzie współrzędnych	55
2.2. Środek odcinka	58
Prosta w układzie współrzędnych – warto powtórzyć	61
2.3. Odległość punktu od prostej	62
Pole trójkąta w układzie współrzędnych – warto wiedzieć	66
2.4. Okrąg w układzie współrzędnych (1)	67
2.5. Okrąg w układzie współrzędnych (2)	72
Postać ogólna równania okręgu – warto wiedzieć	75
2.6. Wzajemne położenie dwóch okręgów	76
2.7. Wzajemne położenie okręgu i prostej	80
2.8. Układy równań – powtórzenie	83
2.9. Punkty wspólne prostej i okręgu (1)	86

2.10. Punkty wspólne prostej i okręgu (2)	89
2.11. Symetria osiowa	93
2.12. Symetria środkowa	97
2.13. Zagadnienia uzupełniające	101
Zestawy powtórzeniowe	104
Sposób na zadanie	108
Zadania testowe	109
Przed obowiązkową maturą z matematyki	110

3. Ciągi

3.1. Pojęcie ciągu	112
3.2. Sposoby określania ciągu	115
3.3. Ciągi monotoniczne	119
3.4. Ciągi określone rekurencyjnie	123
3.5. Ciąg arytmetyczny (1)	128
3.6. Ciąg arytmetyczny (2)	132
Suma, różnica, iloczyn i iloraz ciągów – warto wiedzieć	135
3.7. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (1)	136
3.8. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (2)	140
3.9. Ciąg geometryczny (1)	142
3.10. Ciąg geometryczny (2)	145
3.11. Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego	148
3.12. Ciągi arytmetyczne i ciągi geometryczne – zadania	152
3.13. Procent składany	155
3.14. Zagadnienia uzupełniające	161
Zestawy powtórzeniowe	164
Sposób na zadanie	168
Zadania testowe	169
Przed obowiązkową maturą z matematyki	170

4. Statystyka

4.1. Średnia arytmetyczna	172
4.2. Mediana, skala centylowa i dominanta	176
4.3. Odchylenie standardowe	182
Inne miary rozrzutu danych – warto wiedzieć	188
4.4. Średnia ważona	189
4.5. Zagadnienia uzupełniające	192

Zestawy powtórzeniowe	193
Sposób na zadanie	196
Zadania testowe	197
Przed obowiązkową maturą z matematyki	198
Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań	199
Indeks	228
Tablice logarytmów dziesiętnych	230

Odpowiedzi do pytań i poleceń, a także rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

 Żółtym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.

 Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.

 Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu należy skorzystać z kalkulatora.



1 Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Do opisu niektórych wielkości fizycznych wykorzystujemy **skale logarytmiczną**. Jedną z takich wielkości jest poziom głośności różnych źródeł dźwięku (tabela obok) – dziesięciokrotnemu wzrostowi natężenia dźwięku odpowiada wzrost poziomu głośności o 10 decybeli (patrz str. 36).

Źródło dźwięku	Poziom głośności
Odrzutowiec	160 decybeli
Koncert rockowy	120 decybeli
Cicha rozmowa	40 decybeli
Szelest liści	10 decybeli
Próg słyszalności	0 decybeli

Multiteka

- Trzęsienia ziemi a skala Richtera
- Spirale w przyrodzie
- Ulubiona gra cesarza

Odpowiedzi do zadań

1. a) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024

b) 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729

2. a) 81 b) -32 c) -216 d) 1

3. a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{1}{625}$ c) $\frac{1}{216}$ d) $\frac{1}{729}$
e) $-\frac{1}{4}$ f) $\frac{1}{25}$ g) $\frac{1}{16}$ h) $-\frac{1}{243}$

4. a) $\frac{1}{64}$ b) $\frac{16}{81}$ c) $11\frac{25}{64}$ d) 1
e) $1\frac{4}{5}$ f) $3\frac{3}{8}$ g) $\frac{64}{125}$ h) $\frac{81}{10000}$

5. a) x b) y c) y d) x

6. a) 2^{10} b) 2^8 c) 2^4 d) 2^7
e) 2^2 f) 2^{10} g) 2^2 h) 2^7
i) 2^{13} j) 2^{-16}

7. a) 2^9 b) 2^{22} c) 2^{-3} d) 2^6
e) 2^0 f) 2^6

8. np.: a) 3^{12} b) 5^{16} c) 10^2
d) 6^{-6} e) 2^{-31} f) $(\frac{3}{2})^{-5}$

Potęga o wykładniku całkowitym

1. Oblicz:

a) 2^n dla $n = 0, 1, 2, \dots, 10$,

b) 3^n dla $n = 0, 1, \dots, 6$.

2. Oblicz.

a) $(-3)^4$

b) $(-2)^5$

c) $(-6)^3$

d) $(-5)^0$

Dla liczby naturalnej $n \geq 1$ i dla liczby $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

3. Oblicz.

a) 4^{-2}

c) 6^{-3}

e) $(-4)^{-1}$

g) $(-2)^{-4}$

b) 5^{-4}

d) 9^{-3}

f) $(-5)^{-2}$

h) $(-3)^{-5}$

4. Oblicz.

a) $(\frac{1}{4})^3$

c) $(1\frac{1}{2})^6$

e) $(\frac{5}{9})^{-1}$

g) $(1\frac{1}{4})^{-3}$

b) $(\frac{2}{3})^4$

d) $(\frac{13}{7})^0$

f) $(\frac{2}{3})^{-3}$

h) $(3\frac{1}{3})^{-4}$

5. Która z liczb jest większa: x czy y ?

a) $x = 2^{10}$, $y = (-2)^{11}$

c) $x = (-3)^4$, $y = (-4)^4$

b) $x = 5^4$, $y = (-5)^6$

d) $x = (-5)^3$, $y = (-7)^3$

6. Przedstaw liczbę w postaci 2^m , gdzie m jest liczbą całkowitą.

a) $2^4 \cdot 2^6$

f) $2 \cdot 2^4 \cdot 2^5$

b) $4^2 \cdot 2^4$

g) $2^{-4} : 2^{-6}$

c) $2^7 : 2^3$

h) $(2^2)^3 \cdot 2$

d) $(2^3 \cdot 2^4) : 2^0$

i) $2 \cdot 2^{15} : 2^3$

e) $2^{-3} \cdot 2^5$

j) $2^{-6} : (2^6 : 2^{-4})$

7. Przedstaw liczbę w postaci 2^m , gdzie m jest liczbą całkowitą.

a) $2^4 \cdot 4^3 \cdot 2^{-1}$

c) $(16^{-2} : 2^{-3}) \cdot 4$

e) $32^{-3} \cdot (2^{-3})^{-5}$

b) $4^3 \cdot 2^4 : 8^{-4}$

d) $(4^3)^{-2} : 64^{-3}$

f) $(8^{-6} : 4^{-6})^{-1}$

8. Przedstaw liczbę w postaci a^m , gdzie m jest liczbą całkowitą.

a) $3^4 \cdot (81 \cdot 9^{-6})^{-1}$

c) $0,01 \cdot 16 \cdot 5^4$

e) $32^{-2} : (64^3 \cdot (\frac{1}{2})^{-3})$

b) $125^3 \cdot 0,2^{-7}$

d) $2^4 \cdot 9^2 \cdot 36^{-5}$

f) $(\frac{2}{3})^{-3} \cdot (\frac{27}{8})^{-3} \cdot 1,5$

Dla $m, n \in \mathbb{Z}$ i $a, b \neq 0$:

■ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

■ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

■ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

■ $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

■ $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$

1.1. Potęga o wykładniku wymiernym – powtórzenie

Definicja

Dla dowolnej liczby $a \geq 0$ i liczby naturalnej $n > 1$ przyjmujemy:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Przykład 1

a) $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$ b) $64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$ c) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $81^{\frac{1}{2}}$ c) $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}}$ e) $169^{\frac{1}{2}}$ g) $8^{\frac{1}{3}}$ i) $81^{\frac{1}{4}}$ k) $256^{\frac{1}{4}}$
b) $100^{\frac{1}{2}}$ d) $\left(\frac{1}{121}\right)^{\frac{1}{2}}$ f) $441^{\frac{1}{2}}$ h) $27^{\frac{1}{3}}$ j) $64^{\frac{1}{6}}$ l) $1024^{\frac{1}{10}}$

Definicja

Dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m przyjmujemy:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Przykład 2

a) $8^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^4 = 2^4 = 16$ b) $9^{-\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{9}\right)^{-3} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $8^{\frac{2}{3}}$ b) $32^{\frac{4}{5}}$ c) $81^{2,5}$ d) $625^{-\frac{1}{4}}$ e) $64^{-\frac{2}{3}}$ f) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{2}}$

Prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych są analogiczne do praw działań na potęgach o wykładnikach całkowitych.

Przykład 3

a) $2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{2}} = 2^{\frac{3}{2} + \frac{5}{2}} = 2^4 = 16$
b) $8^{\frac{7}{3}} : 8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{7}{3} - \frac{2}{3}} = 8^{\frac{5}{3}} = 2^5 = 32$
c) $25^{\frac{3}{2}} : 125^{\frac{2}{3}} = (5^2)^{\frac{3}{2}} : (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^3 : 5^2 = 5^{3-2} = 5$

Dla $a, b > 0$ i $x, y \in \mathbb{Q}$:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
- $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

Uczeń:

- zapisuje pierwiastek n -tego stopnia w postaci potęgi o podanej podstawie i wykładniku $\frac{1}{n}$,
- oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych,
- zapisuje daną liczbę w postaci potęgi o wykładniku wymiernym.

Ćwiczenie 1

a) 9 b) 10 c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{1}{11}$ e) 13
f) 21 g) 2 h) 3 i) 3 j) 2 k) 4
l) 2

Ćwiczenie 2

a) 4 b) 16 c) 59049 d) $\frac{1}{5}$
e) $\frac{1}{16}$ f) 729

Ćwiczenie 3

- a) 4 b) $\frac{1}{2}$ c) 3 d) 5 e) 3
f) 2 g) 36 h) $\sqrt[6]{7}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $5^{\frac{1}{2}}$ b) $5^{\frac{1}{3}}$ c) $5^{\frac{3}{2}}$ d) $5^{\frac{2}{3}}$
e) $5^{\frac{3}{4}}$
2. a) $3^{\frac{1}{4}}$ b) $3^{\frac{4}{3}}$ c) $3^{-\frac{1}{5}}$ d) $3^{-\frac{3}{2}}$
e) $3^{\frac{5}{4}}$
3. a) $5^{\frac{1}{8}}$ b) $5^{\frac{3}{2}}$ c) $3^{\frac{1}{12}}$ d) $3^{\frac{5}{6}}$
e) 2^{-1} f) $2^{\frac{3}{2}}$ g) $3^{\frac{7}{8}}$ h) $3^{\frac{5}{3}}$
4. a) 243 b) 625 c) 8 d) $\frac{1}{4}$
e) $\frac{1}{81}$ f) $\frac{1}{5}$ g) 100000 h) $\frac{\sqrt{3}}{9}$
i) $\frac{1}{12}$ j) $\frac{1}{3}$ k) 16 l) 25
5. a) 0,027 b) 2 c) 0,04 d) $\frac{1000}{27}$
e) 8 f) 0,0016 g) 1 h) 64
6. np.: a) 3^{12} b) 5^{16} c) 10^2
d) 6^{-6} e) 2^{-31} f) 1^1

7. a) 1024 b) 9 c) 16 d) 5

8. np.: a) $7^{\frac{5}{6}}$ b) $3^{\frac{13}{4}}$ c) $(\frac{2}{3})^{\frac{1}{6}}$
d) $5^{-\frac{5}{3}}$ e) $3^{\frac{10}{3}}$ f) 5^{-3}

Ćwiczenie 3

Oblicz.

- a) $16^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{6}}$ c) $3^{\frac{3}{2}} : \sqrt{3}$ e) $15^{0,5} \cdot 0,36^{0,25}$ g) $(6^{\frac{2}{3}} \cdot 6^{\frac{3}{2}}) : 6^{\frac{1}{6}}$
b) $(\frac{3}{20})^{\frac{1}{4}} \cdot (\frac{5}{12})^{\frac{1}{4}}$ d) $(25\sqrt{5}) : 5^{\frac{3}{2}}$ f) $20^{\frac{1}{3}} \cdot 2,5^{-\frac{1}{3}}$ h) $7 : (7^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{7})$

Zadania

1. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 5.
a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{5}$ c) $\sqrt{125}$ d) $\sqrt[3]{25}$ e) $\sqrt[4]{125}$
2. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 3.
a) $\sqrt[4]{3}$ b) $\sqrt[3]{3^4}$ c) $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ e) $3 \cdot \sqrt[4]{3}$
3. Zapisz liczbę w postaci a^x , gdzie $a \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{Q}$.
a) $\sqrt[4]{5^{\frac{1}{2}}}$ c) $\sqrt[3]{3} : \sqrt[4]{3}$ e) $2 : 8^{\frac{2}{3}}$ g) $3^{\frac{1}{8}} \cdot 12^{\frac{3}{4}} : \sqrt{8}$
b) $(\sqrt{5})^3$ d) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{3}$ f) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{3}{2}} : 8^{\frac{2}{3}}$ h) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3}$
4. Oblicz.
a) $9^{\frac{5}{2}}$ d) $8^{-\frac{2}{3}}$ g) $10\,000^{1,25}$ j) $3^3 \cdot 27^{-\frac{4}{3}}$
b) $125^{\frac{4}{3}}$ e) $27^{-\frac{4}{3}}$ h) $81^{-0,375}$ k) $2^2 \cdot 8^{\frac{2}{3}}$
c) $16^{\frac{3}{4}}$ f) $25^{-\frac{1}{2}}$ i) $144^{-0,5}$ l) $5^3 \cdot 125^{-\frac{1}{3}}$
5. Oblicz.
a) $0,09^{\frac{3}{2}}$ c) $0,008^{\frac{2}{3}}$ e) $0,0625^{-\frac{3}{4}}$ g) $0,008^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{125}$
b) $0,25^{-\frac{1}{2}}$ d) $0,0081^{-\frac{3}{4}}$ f) $0,00032^{\frac{4}{3}}$ h) $0,0256^{\frac{3}{4}} \cdot (\sqrt[3]{10})^9$
6. Przedstaw liczbę w postaci a^m , gdzie $a \in \mathbf{N}$.
a) $3^4 \cdot (81 \cdot 9^{-6})^{-1}$ c) $0,01 \cdot 16 \cdot 5^4$ e) $32^{-2} : (64^3 \cdot (\frac{1}{2})^{-3})$
b) $125^3 \cdot 0,2^{-7}$ d) $2^4 \cdot 9^2 \cdot 36^{-5}$ f) $(\frac{2}{3})^{-3} \cdot (\frac{27}{8})^{-3} \cdot 1,5^6$

Powtórzenie

7. Oblicz.
a) $\sqrt{16^5}$ b) $\sqrt[3]{27^2}$ c) $\sqrt[5]{32^4}$ d) $(\sqrt[6]{125})^2$
8. Przedstaw liczbę w postaci a^m , gdzie $m \in \mathbf{Q}$.
a) $7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{2}}$ c) $(\frac{2}{3})^{\frac{1}{2}} \cdot (\frac{2}{3})^{-\frac{1}{3}}$ e) $3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{4}{3}} \cdot 9^2$
b) $3^{\frac{5}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}$ d) $\frac{1}{5} \cdot (5^2)^{-\frac{1}{3}}$ f) $25^{-0,5} \cdot (5^{\frac{1}{3}})^{-6}$

1.2. Potęga o wykładniku rzeczywistym

Potrąfimy określić wartość liczbową potęgi a^x (nie określamy potęgi 0^0), gdy wykładnik x jest liczbą naturalną, całkowitą lub wymierną.

Pokażemy na przykładach, jak można określić wartość liczbową potęgi a^x , gdy x jest liczbą niewymierną.

Przykład 1

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby $3^{\sqrt{2}}$.

$\sqrt{2} = 1,414213562\dots$, zatem rozpatrujemy kolejno:

$3^{1,4}$	$\approx 4,655536722$
$3^{1,41}$	$\approx 4,706965002$
$3^{1,414}$	$\approx 4,727695035$
$3^{1,4142}$	$\approx 4,728733930$
$\vdots$	$\vdots$
$3^{1,414213562}$	$\approx 4,728804386$

Podane w tabeli przybliżenia możemy obliczyć, korzystając z odpowiedniego kalkulatora lub komputera.

Po podstawieniu w wykładniku coraz dokładniejszych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$ otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenie liczby $3^{\sqrt{2}}$.

Zauważmy, że gdy wykładnik x „zbliża się” do $\sqrt{2}$, to 3^x „zbliża się” do pewnej liczby rzeczywistej, którą oznaczamy $3^{\sqrt{2}}$. Korzystając z kalkulatora, możemy obliczyć przybliżoną wartość $3^{\sqrt{2}} \approx 4,72880438784$.

Przykład 2

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby $5^{\sqrt{2}}$.

$5^{1,4}$	$\approx 9,518269694$
$5^{1,4142}$	$\approx 9,738305174$
$5^{1,414213}$	$\approx 9,738508928$
$5^{1,414213562}$	$\approx 9,738517736$
$\vdots$	$\vdots$
$5^{\sqrt{2}}$	$\approx 9,738517742$

$\sqrt{2} = 1,414213562\dots$

Po podstawieniu w wykładniku coraz dokładniejszych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$ otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenie liczby $5^{\sqrt{2}}$.

Ćwiczenie 1

Podaj przybliżenia dziesiętne liczb $5^{\sqrt{3}}$ i $5^{\sqrt{5}}$ z dokładnością do 0,0001.

Ćwiczenie 1

$5^{\sqrt{3}} \approx 16,2425$, $5^{\sqrt{5}} \approx 36,5548$

Uczeń:

- zapisuje daną liczbę w postaci potęgi o podanej podstawie i wykładniku rzeczywistym,
- upraszcza wyrażenia, stosując twierdzenia o działaniach na potęgach, i oblicza wartości tych wyrażeń,
- szacuje wartości potęg o wykładnikach rzeczywistych,
- stosuje w zadaniach twierdzenia o działaniach na potęgach.

Przykład 3

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby 2^π .

$2^{3,14}$	$\approx 8,815240927$
$2^{3,14159}$	$\approx 8,824961595$
$2^{3,14159265}$	$\approx 8,824977805$
$\vdots$	$\vdots$
2^π	$\approx 8,824977827$

$$\pi = 3,14159265\dots$$

Po podstawieniu w wykładniku coraz dokładniejszych przybliżeń liczby π , otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenie liczby 2^π .

Ćwiczenie 2

- a) $3^\pi \approx 31,5443$
- b) $5^\pi \approx 156,9925$
- c) $\pi^\pi \approx 36,4622$



Ćwiczenie 2

Korzystając z odpowiedniego kalkulatora, podaj z dokładnością do 0,0001 przybliżenie dziesiętne liczby: a) 3^π , b) 5^π , c) π^π .

Podane na str. 11 wzory dla potęg o wykładnikach wymiernych są prawdziwe również dla potęg o wykładnikach rzeczywistych (zarówno wymiernych, jak i niewymiernych).

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbf{R}_+$ i dowolnych $x, y \in \mathbf{R}$ prawdziwe są wzory:

$$\begin{aligned} \blacksquare a^x \cdot a^y &= a^{x+y} & \blacksquare (a^x)^y &= a^{x \cdot y} & \blacksquare \frac{a^x}{b^x} &= \left(\frac{a}{b}\right)^x \\ \blacksquare \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} & \blacksquare a^x \cdot b^x &= (ab)^x \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

- a) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- b) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
- c) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
- d) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

Ćwiczenie 3

Który z powyższych wzorów wykorzystano w obliczeniach?

- a) $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 2^2 = 4$
- b) $\frac{6^{\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}}} = \left(\frac{6}{2}\right)^{\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}}$
- c) $6^\pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^\pi = \left(6 \cdot \frac{3}{2}\right)^\pi = 9^\pi$
- d) $5^{\sqrt{2}} \cdot 5^{1-\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}} = 5$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $(5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$
- b) $(3^{\sqrt{2}})^{2\sqrt{2}}$
- c) $(5^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}$
- d) $(2^{\sqrt{7}-\sqrt{2}})^{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$
- e) $7^{\sqrt{2}} \cdot 49^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$
- f) $9^{\sqrt{5}} \cdot 3^{1-2\sqrt{5}}$
- g) $\frac{2^{\sqrt{3}+6}}{2^{\sqrt{3}+1}}$
- h) $\frac{6^{\sqrt{3}+1} \cdot 2^{-\sqrt{3}}}{3^{\sqrt{3}}}$

Ćwiczenie 4

- a) $5^3 = 125$
- b) $3^4 = 81$
- c) $5^{3-1} = 25$
- d) $2^{7-2} = 32$
- e) $7^{\sqrt{2}-\sqrt{2}} = 1$
- f) $3^{2\sqrt{5}+1-2\sqrt{5}} = 3$
- g) $2^5 = 32$
- h) $\frac{6 \cdot 3^{\sqrt{3}} \cdot 2^{\sqrt{3}-\sqrt{3}}}{3^{\sqrt{3}}} = 6$

Zadania

1. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 3.

- a) $3^4 \cdot 3^{1-\sqrt{2}}$ c) $\left(3^{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ e) $6^{\sqrt{7}} : 2^{\sqrt{7}}$
 b) $3^3 : 3^{2-\sqrt{2}}$ d) $\left(3^{\sqrt{3}}\right)^{1-\sqrt{3}}$ f) $(\sqrt{3})^\pi \cdot (\sqrt{3})^\pi$

2. Oblicz.

- a) $6^{1-\sqrt{2}} \cdot 6^{\sqrt{2}+1}$ d) $2^{3\sqrt{5}} \cdot 8^{-\sqrt{5}}$ g) $6^{\sqrt{3}} \cdot 3^{1-\sqrt{3}} \cdot 2^{-\sqrt{3}}$
 b) $5^{\pi+3} : 5^\pi$ e) $4^{\sqrt{3}} : 2^{2\sqrt{3}}$ h) $4^{\pi+3} \cdot 3^\pi : 12^\pi$
 c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\sqrt{6}-1} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{\sqrt{6}+2}$ f) $\frac{7^{\frac{5}{6}}}{7^{\frac{1}{3}\sqrt{7}}} \cdot \frac{7^{\sqrt{5}+5}}{7^{\sqrt{5}+2}}$ i) $\frac{6^{\frac{2}{3}} \cdot 6^{\frac{3}{2}}}{6^{\frac{1}{6}}} \cdot \left(6^{\sqrt{5}-2}\right)^{\sqrt{5}+2}$

3. Przedstaw liczbę w postaci a^x , gdzie $a \in \mathbf{N}$.

- a) $2^{\sqrt{7}-2} \cdot 4^3$ c) $9^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \cdot 27^{-1}$ e) $\frac{1}{3} \cdot 9^{\pi+\frac{1}{2}} : 81^{2\pi}$
 b) $2^{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2}$ d) $27 \cdot \left(3^{-\sqrt{3}}\right)^2$ f) $7^{-2\sqrt{2}} : 49^{\pi+\sqrt{2}}$

4. Sprawdź, czy liczba q należy do przedziału $(3; 6)$. Nie korzystaj z kalkulatora, tylko z podanych przybliżeń.

- a) $q = 4^{\sqrt{3}-1} : \frac{1}{4}$ c) $q = 6^{\sqrt{3}} : \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ $2^{\sqrt{3}} \approx 3,32199709$
 b) $q = 0,5^{\sqrt{3}+1} \cdot 6^{\sqrt{3}}$ d) $q = \left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{4}}$ $3^{\sqrt{3}} \approx 6,70499185$
 $6^{\sqrt{3}} \approx 22,2739634$

5. Spośród liczb x, y, z wybierz takie dwie, z których jedna jest odwrotnością drugiej.

- a) $x = 2^{4\sqrt{2}}, y = 4^{\frac{\sqrt{2}}{2}}, z = 8^{-\frac{\sqrt{2}}{3}}$
 b) $x = 1,5^{4-2\sqrt{3}}, y = \left(\frac{4}{9}\right)^{2+\sqrt{3}}, z = \left(\frac{9}{4}\right)^{\sqrt{3}-2}$
 c) $x = 125^{1-2\sqrt{5}}, y = 25^{2-3\sqrt{5}}, z = 0,0016 \cdot 5^{\sqrt{180}}$

Powtórzenie

6. Przedstaw liczbę w postaci a^x , gdzie $a \in \mathbf{N}$.

- a) $5^{\sqrt{3}-1} \cdot 5$ c) $7^{\sqrt{5}+5} : 7^5$ e) $9^{\sqrt{5}+1} : 81^{\frac{1}{2}}$
 b) $4^{\sqrt{2}+3} \cdot 4^{-3}$ d) $9^{\sqrt{7}-2} : 9^{-2}$ f) $16^{\sqrt{3}-2} \cdot 4^4$

7. Oblicz.

- a) $\left(5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$ c) $\left(2^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}}$ e) $3^{\sqrt{27}} : 3^{3\sqrt{3}}$
 b) $4^{\sqrt{3}} \cdot 4^{2-\sqrt{3}}$ d) $5^{2+\sqrt{5}} \cdot 5^{2-\sqrt{5}}$ f) $7^{4+2\sqrt{2}} : 7^{2+\sqrt{8}}$

6. a) $5^{\sqrt{3}}$ b) $4^{\sqrt{2}}$ c) $7^{\sqrt{5}}$ d) $9^{\sqrt{7}}$ e) $9^{\sqrt{5}}$ f) $16^{\sqrt{3}}$

7. a) 125 b) 16 c) 64 d) 625 e) 1 f) 49

Odpowiedzi do zadań

1. a) $3^{5-\sqrt{2}}$ b) $3^{1+\sqrt{2}}$
 c) 3^4 d) $3^{\sqrt{3}-3}$
 e) $3^{\sqrt{7}}$ f) 3^π

2. a) 36 b) 125
 c) $\frac{125}{27}$ d) 1
 e) 1 f) 343
 g) 3 h) 64 i) 216

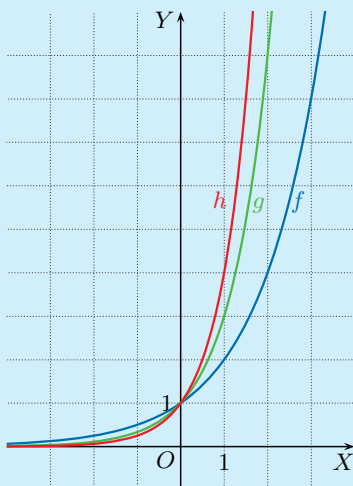
3. a) $2^{\sqrt{7}+4}$ b) $2^{\sqrt{3}+\frac{1}{2}}$
 c) $3^{\sqrt{5}-3}$ d) $3^{3-2\sqrt{3}}$
 e) $3^{-6\pi}$ f) $7^{-4\sqrt{2}-2\pi}$
 4. a) $q = 4^{\sqrt{3}} > 3^{\sqrt{3}} > 6$,
 nie należy
 b) $q = \frac{1}{2} \cdot 3^{\sqrt{3}} \approx 3,35$,
 należy
 c) $q = 6^{\sqrt{3}} : 2 \approx 11,1 > 6$,
 nie należy
 d) $q = \left(\frac{3}{2}\right)^{\sqrt{3}} < \frac{7}{3} < 3$,
 nie należy

5. a) $x = 2^{4\sqrt{2}}, y = 2^{\sqrt{2}},$
 $z = 2^{-\sqrt{2}}; y = \frac{1}{z}$
 b) $x = \left(\frac{3}{2}\right)^{4-2\sqrt{3}},$
 $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{2(2+\sqrt{3})},$
 $z = \left(\frac{3}{2}\right)^{2(\sqrt{3}-2)} =$
 $= \left(\frac{3}{2}\right)^{-(4-2\sqrt{3})}; x = \frac{1}{z}$
 c) $x = 5^{3-6\sqrt{5}}, y = 5^{4-6\sqrt{5}},$
 $z = 5^{-4} \cdot 5^{6\sqrt{5}} = 5^{-(4-6\sqrt{5})};$
 $y = \frac{1}{z}$

Uczeń:

- oblicza wartości funkcji wykładniczej dla podanych argumentów,
- sprawdza, czy podany punkt należy do wykresu danej funkcji wykładniczej,
- szkicuje wykres funkcji wykładniczej i podaje jej własności,
- porównuje liczby przedstawione w postaci potęg, korzystając z monotoniczności funkcji wykładniczej,
- wyznacza wzór funkcji wykładniczej na podstawie współrzędnych punktu należącego do jej wykresu oraz szkicuje ten wykres.

Ćwiczenie 1



Punkt wspólny: $(0, 1)$

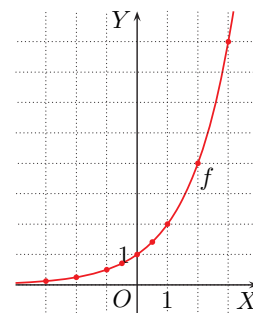
1.3. Funkcja wykładnicza

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = 2^x$ określonej dla $x \in \mathbf{R}$ szkicujemy, łącząc odpowiednie punkty krzywą jak na rysunku.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4	8

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(0; \infty)$.



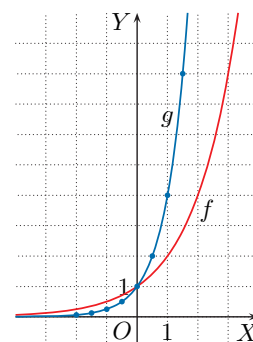
Przykład 2

Wykres funkcji $g(x) = 4^x$ określonej dla $x \in \mathbf{R}$ szkicujemy, łącząc odpowiednie punkty krzywą jak na rysunku.

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$g(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

Zbiorem wartości funkcji g jest przedział $(0; \infty)$.

Wykresy funkcji $g(x) = 4^x$ i $f(x) = 2^x$ dla porównania naszkicowano w tym samym układzie współrzędnych.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$ i $h(x) = 4^x$ określonych dla $x \in \mathbf{R}$. Podaj współrzędne punktu wspólnego tych wykresów.

Ćwiczenie 2

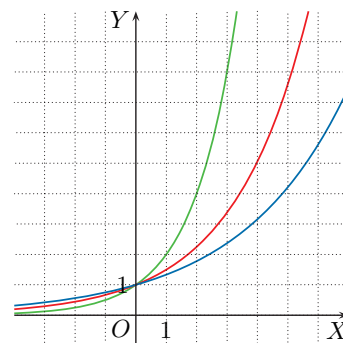
Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = 2^x$, $g(x) = (\frac{3}{2})^x$ i $h(x) = (\frac{4}{3})^x$.

- Dobierz wzór do każdego wykresu.
- Punkty $P(4, a)$, $Q(-2, b)$, $R(c, 3\frac{3}{8})$ należą do wykresu funkcji g . Wyznacz niewiadome współrzędne tych punktów.

- Które spośród punktów:

$$A(4, 3\frac{15}{81}), B(-4, \frac{81}{256}), C(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

należą do wykresu funkcji h ?



Ćwiczenie 2

- zielony – f , czerwony – g , niebieski – h
- $a = \frac{81}{16}$, $b = \frac{4}{9}$, $c = 3$
- B, C

Multiteka

• Wykres funkcji wykładniczej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.3

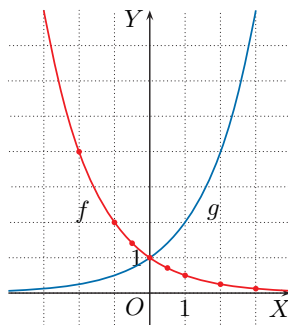
Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 3

Wykres funkcji $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ określonej dla $x \in \mathbf{R}$ szkicujemy, łącząc odpowiednie punkty krzywą jak na rysunku.

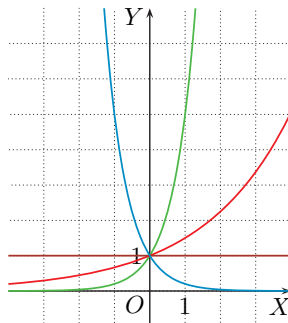
x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	8	4	2	$\sqrt{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Uwaga. Wykres funkcji $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ można otrzymać przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $g(x) = 2^x$ względem osi OY , ponieważ $f(x) = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x} = g(-x)$.



Ćwiczenie 3

- a) Naskicuj wykres funkcji $f(x) = (\frac{1}{3})^x$.
 b) Naskicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji $g(x) = 4^x$ i $h(x) = (\frac{1}{4})^x$.

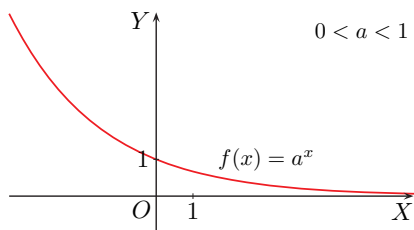


Ćwiczenie 4

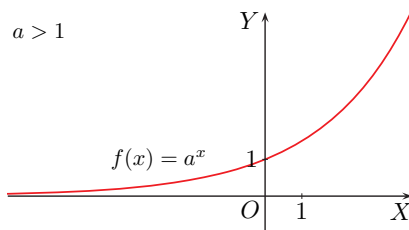
Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = 5^x$, $g(x) = 0,2^x$, $h(x) = 1,5^x$ i $k(x) = 1^x$. Dobierz wzór do każdego wykresu.

Definicja

Funkcję postaci $f(x) = a^x$ określoną dla $x \in \mathbf{R}$, gdzie $a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$ jest pewną stałą, nazywamy **funkcją wykładniczą**.



Dla $a \in (0; 1)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest malejąca.

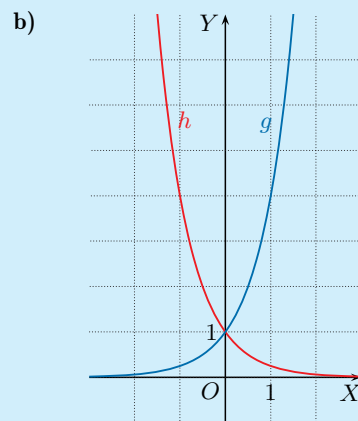
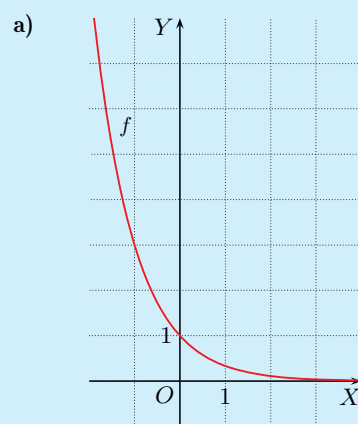


Dla $a \in (1; \infty)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest rosnąca.

Dziedziną funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ dla dowolnego $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$, a jej zbiorem wartości – przedział $(0; \infty)$. Wykres funkcji wykładniczej przecina oś OY w punkcie $(0, 1)$, natomiast nie ma punktów wspólnych z osią OX , która jest jego asymptotą poziomą.

Uwaga. Dla $a = 1$ funkcja $f(x) = a^x$ jest funkcją stałą: $f(x) = 1$.

Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4

zielony – f , niebieski – g ,
 czerwony – h , brązowy – k

Ćwiczenie 5

- a) $5^{0,3} < 5^{0,33} < 5^{\frac{1}{3}} < 5^{\frac{1}{2}}$
b) $7^{\sqrt{5}} < 7^{3,1} < 7^{\pi} < 7^{3,2}$
c) $0,6^{\frac{1}{2}} < 0,6^{\frac{3}{7}} < 0,6^{\frac{3}{8}} < 0,6^{0,35} < 0,6^{\frac{1}{3}}$
d) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{\pi}{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{1,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $f(-4) = \frac{1}{81}$, $f(-3) = \frac{1}{27}$,
 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{3}$,
 $f(3) = 27$, $f(4) = 81$
b) $f(-4) = \frac{1}{256}$, $f(-3) = \frac{1}{64}$,
 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = 2$,
 $f(3) = 64$, $f(4) = 256$
c) $f(-4) = 256$, $f(-3) = 64$,
 $f(-\frac{1}{2}) = 2$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$,
 $f(3) = \frac{1}{64}$, $f(4) = \frac{1}{256}$
d) $f(-4) = 16$, $f(-3) = 8$,
 $f(-\frac{1}{2}) = \sqrt{2}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $f(3) = \frac{1}{8}$, $f(4) = \frac{1}{16}$
2. $f(x) = 4^x$
a), b), d) tak
c) nie
3. a), c) nie
b), d) tak
4. a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
c) $f(x) = 4^x$
d) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$
5. a) $f(x) = g(x)$ dla $x = 0$
b) $f(x) = g(x)$ dla $x = 0$

Przykład 4

Zapisz liczby $10^{\sqrt{2}}$, $10^{1,4}$, $10^{1,5}$ w kolejności od najmniejszej do największej.
Funkcja $y = 10^x$ jest rosnąca i $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$, zatem $10^{1,4} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1,5}$.

Przykład 5

Zapisz liczby $0,9^{\sqrt{3}}$, $0,9^{1,7}$, $0,9^{1,8}$ w kolejności od najmniejszej do największej.
Funkcja $y = 0,9^x$ jest malejąca i $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$, zatem:

$$0,9^{1,8} < 0,9^{\sqrt{3}} < 0,9^{1,7}$$

Ćwiczenie 5

Zapisz liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

- a) $5^{\frac{1}{2}}$, $5^{\frac{1}{3}}$, $5^{0,3}$, $5^{0,33}$ c) $0,6^{\frac{1}{2}}$, $0,6^{\frac{1}{3}}$, $0,6^{\frac{3}{7}}$, $0,6^{\frac{3}{8}}$, $0,6^{0,35}$
b) $7^{3,1}$, $7^{3,2}$, 7^{π} , $7^{\sqrt{5}}$ d) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{1,5}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{\pi}{2}}$

Zadania

1. Oblicz wartości funkcji f dla $x \in \{-4, -3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3, 4\}$.
a) $f(x) = 3^x$ b) $f(x) = 4^x$ c) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
2. Punkt $P(2, 16)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = a^x$. Czy punkt Q też należy do wykresu funkcji f ?
a) $Q(\frac{1}{2}, 2)$ b) $Q(5, 1024)$ c) $Q(-3, \frac{1}{16})$ d) $Q(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
3. Punkt $P(2, 2)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = a^x$. Czy punkt Q też należy do wykresu funkcji f ?
a) $Q(1, 1)$ b) $Q(4, 4)$ c) $Q(8, 8)$ d) $Q(-8, \frac{1}{16})$
4. Do wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ należy punkt M . Naskicuj ten wykres.
a) $M(2, \frac{1}{9})$ b) $M(-3, 8)$ c) $M(\frac{1}{2}, 2)$ d) $M(3, 3\frac{3}{8})$

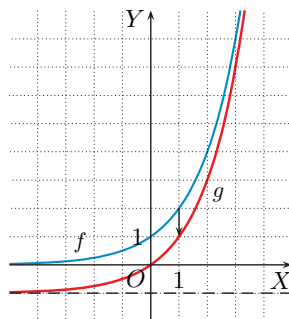
Powtórzenie

5. Naskicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g . Odczytaj z rysunku rozwiązanie równania $f(x) = g(x)$.
a) $f(x) = 3^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ b) $f(x) = 4^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
6. Zapisz liczby w kolejności od najmniejszej do największej.
a) $2^{\frac{3}{2}}$, $2^{\frac{7}{5}}$, $2^{\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt{3}}$ c) $\sqrt[3]{\pi}$, $\pi^{\frac{1}{2}}$, $\pi^{\frac{3}{7}}$, $\pi^{\frac{1}{\pi}}$
b) $\left(\frac{3}{4}\right)^5$, $\left(\frac{3}{4}\right)^6$, $\left(\frac{3}{4}\right)^{2\sqrt{6}}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{26}}$ d) 9^0 , 9^{-2} , $9^{-\sqrt{3}}$, $9^{-\sqrt{\pi}}$
6. a) $2^{\frac{7}{5}} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{\frac{3}{2}} < 2^{\sqrt{3}}$
b) $\left(\frac{3}{4}\right)^6 < \left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{26}} < \left(\frac{3}{4}\right)^5 < \left(\frac{3}{4}\right)^{2\sqrt{6}}$
c) $\pi^{\frac{1}{\pi}} < \sqrt[3]{\pi} < \pi^{\frac{3}{7}} < \pi^{\frac{1}{2}}$
d) $9^{-2} < 9^{-\sqrt{\pi}} < 9^{-\sqrt{3}} < 9^0$

1.4. Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej

Przykład 1

Wykres funkcji $g(x) = 2^x - 1$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ o 1 jednostkę w dół (rysunek obok). Asymptotą poziomą wykresu funkcji g jest prosta $y = -1$.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji g . Podaj zbiór wartości tej funkcji i równanie asymptoty poziomej jej wykresu.

- a) $g(x) = 3^x - 2$ b) $g(x) = 2^x + 1$ c) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$

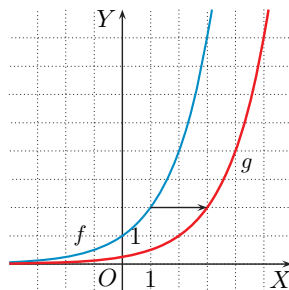
Ćwiczenie 2

Dla jakiego a zbiorem wartości funkcji $f(x) = 2^x + a$ jest przedział:

- a) $(3; \infty)$, b) $(-6; \infty)$, c) $(-\frac{1}{4}; \infty)$?

Przykład 2

Wykres funkcji $g(x) = 2^{x-2}$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ o 2 jednostki w prawo (rysunek obok).



Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji g . Podaj odcięłą punktu należącego do wykresu funkcji g , jeśli rzędna tego punktu jest równa 1.

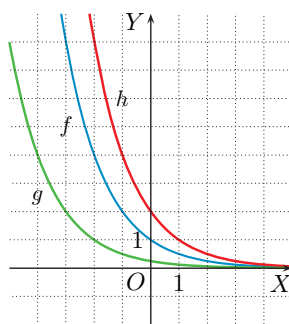
- a) $g(x) = 3^{x-1}$ b) $g(x) = 2^{x+2}$ c) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$

Ćwiczenie 4

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji f , g i h . Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

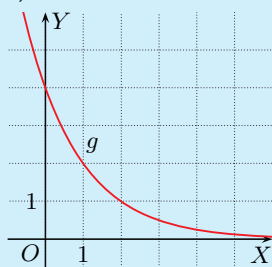
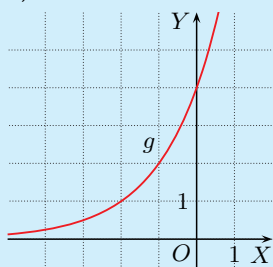
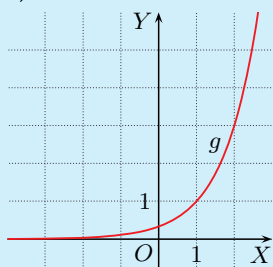
a) Funkcja g dana jest wzorem $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+a}$. Podaj wartość współczynnika a , jeśli do wykresu funkcji g należy punkt $(-3, 2)$.

b) Funkcja h dana jest wzorem $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-b}$. Podaj wartość współczynnika b , jeśli do wykresu funkcji h należy punkt $(0, 2)$.



Ćwiczenie 3

- a) $x = 1$ b) $x = -2$ c) $x = 2$



Uczeń:

- szkicuje wykres funkcji, stosując przesunięcie wykresu odpowiedniej funkcji wykładniczej wzdłuż osi układu współrzędnych albo symetrię względem osi układu współrzędnych, i podaje własności tej funkcji,
- szkicuje wykres funkcji, stosując złożenia przekształceń: przesunięcia wzdłuż osi układu współrzędnych i symetrię względem osi OX oraz podaje własności tej funkcji i jej wykresu,
- wyznacza wartość współczynnika, dla której wykres danej funkcji przechodzi przez podany punkt,
- odczytuje z wykresu funkcji wykładniczej zbiór rozwiązań nierówności,
- opisuje, jak należy przekształcić wykres funkcji, aby otrzymać wykres innej funkcji.

Ćwiczenie 1

- a) $g(D) = (-2; \infty)$, $y = -2$
b) $g(D) = (1; \infty)$, $y = 1$
c) $g(D) = (2; \infty)$, $y = 2$

Ćwiczenie 2

- a) $a = 3$ b) $a = -6$ c) $a = -0,25$

Ćwiczenie 4

- a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3+a} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, czyli $a = 2$
b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{0-b} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, czyli $b = 1$

Multiteka

- Przekształcanie wykresu funkcji wykładniczej (1)

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.4

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 5

a) $g(x) = 3^{x-1}$

Należy przesunąć o 1 jednostkę w prawo.

b) $g(x) = 3^{x-3}$

Należy przesunąć o 3 jednostki w prawo.

c) $g(x) = 3^{x+1}$

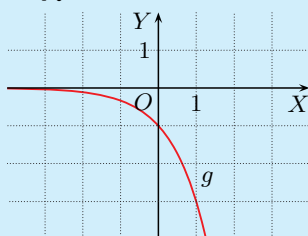
Należy przesunąć o 1 jednostkę w lewo.

d) $g(x) = 3^{x+\frac{1}{2}}$

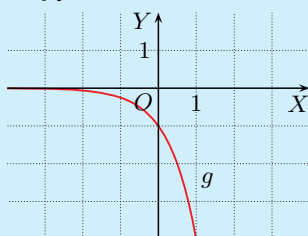
Należy przesunąć o $\frac{1}{2}$ jednostki w lewo.

Ćwiczenie 6

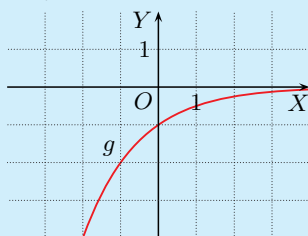
a) malejąca



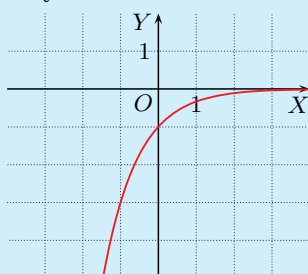
b) malejąca



c) rosnąca



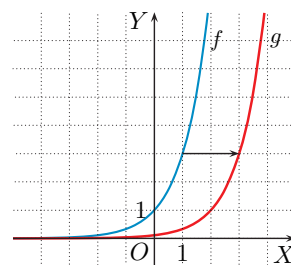
d) rosnąca

**Przykład 3**

Opisz, jak należy przekształcić wykres funkcji $f(x) = 3^x$, aby otrzymać wykres funkcji $g(x) = \frac{3^x}{9}$.

$$g(x) = \frac{3^x}{9} = \frac{3^x}{3^2} = 3^{x-2}$$

Wykres funkcji f należy przesunąć o 2 jednostki w prawo (rysunek obok).

**Ćwiczenie 5**

Opisz, jak należy przekształcić wykres funkcji $f(x) = 3^x$, aby otrzymać wykres funkcji g .

a) $g(x) = \frac{3^x}{3}$

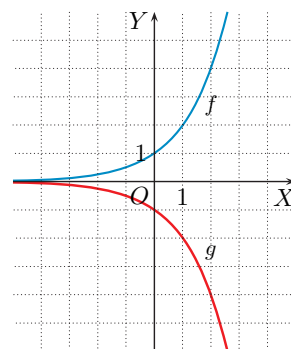
b) $g(x) = \frac{3^x}{27}$

c) $g(x) = 3 \cdot 3^x$

d) $g(x) = \sqrt{3} \cdot 3^x$

Przykład 4

Wykres funkcji $g(x) = -2^x$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ względem osi OX (rysunek obok).

**Ćwiczenie 6**

Naszkicuj wykres funkcji g i określ jej monotoniczność.

a) $g(x) = -3^x$

c) $g(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$

b) $g(x) = -4^x$

d) $g(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$

Ćwiczenie 7

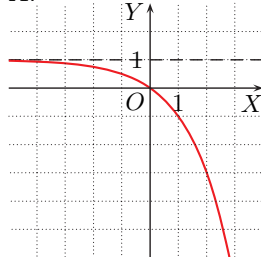
Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji:

$$f(x) = -2^{x+1}, \quad g(x) = -2^{x-1}, \quad h(x) = -2^x + 1$$

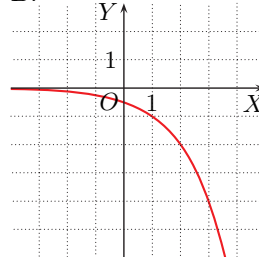
a) Dopasuj wzór funkcji do każdego wykresu.

b) Odczytaj z wykresu każdej funkcji, dla jakich argumentów przyjmuje ona wartości większe od -1 .

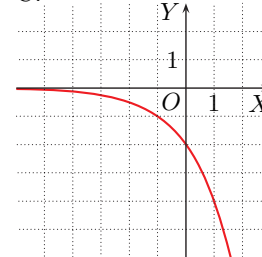
A.



B.

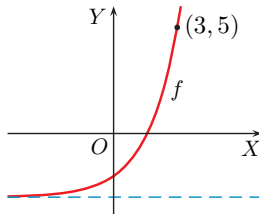


C.

**Ćwiczenie 7**a) A - h , B - g , C - f b) $h(x) > -1$ dla $x \in (-\infty; 1)$,
 $g(x) > -1$ dla $x \in (-\infty; 1)$, $f(x) > -1$ dla $x \in (-\infty; -1)$

Zadania

- Naszczuj wykres funkcji f . Podaj zbiór wartości i miejsce zerowe funkcji f oraz równanie asymptoty poziomej jej wykresu.
 - $f(x) = 2^x + 2$
 - $f(x) = 3^x - 1$
 - $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$
 - $f(x) = 3^{-x} + 1$
 - $f(x) = 4^{-x} - 4$
 - $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$
- Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = 2^x + a$. Podaj wartość współczynnika a .
- Wykres funkcji $f(x) = 2^x + a$ przechodzi przez punkt P . Podaj wartość współczynnika a .
 - $P(0, -3)$
 - $P(2, 7)$
 - $P(4, 0)$
- Opisz, jak należy przekształcić wykres funkcji $f(x) = 2^x$, aby otrzymać wykres funkcji g .
 - $g(x) = \frac{2^x}{16}$
 - $g(x) = \frac{2^x}{1024}$
 - $g(x) = 8 \cdot 2^x$
 - $g(x) = \sqrt{2} \cdot 2^x$
- Naszczuj wykres funkcji f , a następnie odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 1$.
 - $f(x) = 2^{x-1}$
 - $f(x) = 2^{x+3}$
 - $f(x) = 4 \cdot 2^x$
 - $f(x) = \frac{2^x}{8}$
 - $f(x) = \frac{27}{3^x}$
 - $f(x) = \frac{0,04}{5^x}$
- Naszczuj wykres funkcji f , a następnie odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq -1$.
 - $f(x) = -2^{x-2}$
 - $f(x) = -3^{x+1}$
 - $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$

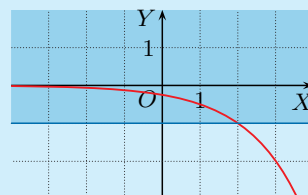


Powtórzenie

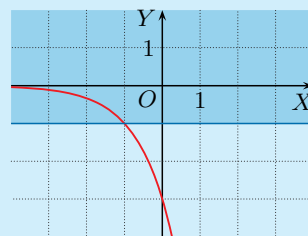
- Naszczuj wykres funkcji f . Podaj jej miejsce zerowe i zbiór wartości.
 - $f(x) = 2^x - 4$
 - $f(x) = 3^x + 1$
 - $f(x) = 2^{x-3}$
 - $f(x) = 3^{x+2}$
 - $f(x) = -2^x + 2$
 - $f(x) = -3^x + 1$
- Naszczuj wykres funkcji f i podaj równanie jego asymptoty poziomej.
 - $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$
 - $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$
 - $f(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$
- Naszczuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj zbiory wartości funkcji f i g .
 - $f(x) = 2^x - 3$
 - $f(x) = 3^x + 1$
 - $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$
- $f(x) = 0$ dla $x = 2$, $f(D_f) = (-4; \infty)$
 - brak miejsc zerowych, $f(D_f) = (1; \infty)$
 - brak miejsc zerowych, $f(D_f) = (0; \infty)$
 - brak miejsc zerowych, $f(D_f) = (0; \infty)$
 - $f(x) = 0$ dla $x = 1$, $f(D_f) = (-\infty; 2)$
 - $f(x) = 0$ dla $x = 0$, $f(D_f) = (-\infty; 1)$
- $y = -3$
 - $y = 0$
 - $y = 1$
- $f(D_f) = (-3; \infty)$, $g(D_g) = (-\infty; 3)$
 - $f(D_f) = (1; \infty)$, $g(D_g) = (-\infty; -1)$
 - $f(D_f) = (-2; \infty)$, $g(D_g) = (-\infty; 2)$

Odpowiedzi do zadań

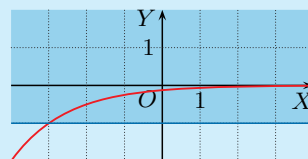
- $f(D) = (2; \infty)$, brak miejsc zerowych, asymptota: $y = 2$
 - $f(D) = (-1; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 0$, asymptota: $y = -1$
 - $f(D) = (1; \infty)$, brak miejsc zerowych, asymptota: $y = 1$
 - $f(D) = (-4; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = -1$, asymptota: $y = -4$
 - $f(D) = (-3; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = -1$, asymptota: $y = -3$
- $a = -3$
- $a = -4$
 - $a = 3$
 - $a = -16$
- Należy przesunąć:
 - o 4 jednostki w prawo,
 - o 10 jednostek w prawo,
 - o 3 jednostki w lewo,
 - o $\frac{1}{2}$ jednostki w lewo.
- $x \in \langle 1; \infty \rangle$
 - $x \in \langle -3; \infty \rangle$
 - $x \in \langle -2; \infty \rangle$
 - $x \in \langle 3; \infty \rangle$
 - $x \in (-\infty; 3]$
 - $x \in (-\infty; -2]$
- $a) x \in (-\infty; 2]$



- b) $x \in (-\infty; -1)$



- c) $x \in \langle -3; \infty \rangle$



Uczeń:

- oblicza logarytm danej liczby,
- stosuje równości wynikające z definicji logarytmu do obliczania jego wartości,
- wyznacza podstawę logarytmu lub liczbę logarytmowaną, gdy dana jest wartość logarytmu, podaje odpowiednie założenia dla podstawy logarytmu oraz liczby logarytmowanej,
- udowadnia twierdzenie dotyczące niewymierności liczby, np. $\log_2 3$.

Ćwiczenie 1

- a) 5 b) 1 c) 0 d) -2
e) -6 f) $\frac{1}{2}$ g) $\frac{3}{2}$ h) $\frac{2}{3}$

Ćwiczenie 2

- a) 4 b) -2 c) -3 d) $-\frac{1}{2}$
e) $\frac{1}{2}$ f) $-\frac{3}{2}$ g) $\frac{3}{2}$ h) 3
i) $-\frac{1}{2}$ j) -4 k) $\frac{2}{3}$ l) 3

1.5. Logarytm

Przypomnijmy, że **logarytmem** z liczby dodatniej b przy podstawie a (gdzie a jest liczbą dodatnią różną od 1) nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść podstawę a , aby otrzymać liczbę logarytmowaną b .

$$\log_a b = x \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a^x = b$$

Przykład 1

- a) $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$
b) $\log_2 1024 = 10$, ponieważ $2^{10} = 1024$
c) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$, ponieważ $2^{-4} = \frac{1}{16}$

$$\log_a b = x$$

liczba logarytmowana
logarytm
podstawa logarytmu

Ćwiczenie 1

Oblicz.

- a) $\log_2 32$ c) $\log_2 1$ e) $\log_2 \frac{1}{64}$ g) $\log_2 \sqrt{8}$
b) $\log_2 2$ d) $\log_2 \frac{1}{4}$ f) $\log_2 \sqrt{2}$ h) $\log_2 \sqrt[3]{4}$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

- a) $\log_3 81$ d) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$ g) $\log_7 7\sqrt{7}$ j) $\log_{\frac{1}{2}} 16$
b) $\log_3 \frac{1}{9}$ e) $\log_9 3$ h) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$ k) $\log_6 \sqrt[3]{36}$
c) $\log_3 \frac{1}{27}$ f) $\log_9 \frac{1}{27}$ i) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$ l) $\log_6 216$

Zwróć uwagę na to, że wartość logarytmu może być dodatnia, ujemna lub równa 0. Z definicji logarytmu wynikają własności podane obok.

Dla $a > 0$, $a \neq 1$:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = 2^x$.

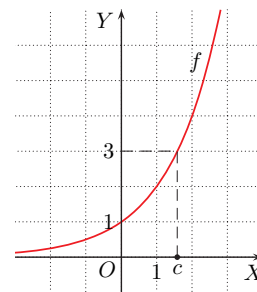
Zauważmy, że $\log_2 3$ to taka liczba c , że $2^c = 3$.

Z wykresu możemy odczytać, że:

$$1 < \log_2 3 < 2$$

Korzystamy z odpowiedniego kalkulatora i otrzymujemy przybliżenie: $\log_2 3 \approx 1,5849625$.

Udowodnimy, że liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.



Liczba $\log_2 3$ jest liczbą niewymierną.

Dowód

Przyjmijmy przeciwnie, że $\log_2 3$ jest liczbą wymierną. Oznacza to, że istnieją różne od zera liczby naturalne m i n , takie że $\log_2 3 = \frac{m}{n}$.

Zatem $3 = 2^{\frac{m}{n}}$

$$3^n = 2^m \quad \begin{array}{l} \text{Podnosimy obie strony} \\ \text{równości do potęgi } n. \end{array}$$

Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ prawa strona równości jest liczbą podzieloną przez 2, a lewa nie. Zatem liczba $\log_2 3$ jest liczbą niewymierną.

D Ćwiczenie 3

Wykaż, że podana liczba jest liczbą niewymierną.

- a) $\log_2 5$ b) $\log_3 5$ c) $\log_2 6$ d) $\log_6 2$

Bezpośrednio z definicji logarytmu wynikają własności podane obok.

Dla $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$:

$$\log_a a^x = x$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $\log_2 2^{100}$ c) $\log_{1,1} 1,1^{10}$ e) $2^{\log_2 3}$ g) $0,4^{\log_{0,4} 10}$
b) $\log_6 6^{15}$ d) $\log_\pi \pi^{-3}$ f) $3^{\log_3 7}$ h) $5^{\log_5 1}$

Przykład 3

- a) Oblicz $\log_3 (\log_2 512)$.

$512 = 2^9$, więc $\log_2 512 = 9$, zatem $\log_3 (\log_2 512) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$.

- b) Oblicz $\log_{\sqrt{2}} (\log_{\sqrt{3}} 3)$.

$3 = (\sqrt{3})^2$, więc $\log_{\sqrt{3}} 3 = 2$, zatem $\log_{\sqrt{2}} (\log_{\sqrt{3}} 3) = \log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^2 = 2$.

- c) Oblicz $\log_6 (\log_4 (\log_5 625))$.

$625 = 5^4$, więc $\log_5 625 = 4$, zatem:

$$\log_6 (\log_4 (\log_5 625)) = \log_6 (\log_4 4) = \log_6 1 = \log_6 6^0 = 0$$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

- a) $\log_4 (\log_6 36)$ c) $\log_8 (\log_2 4)$ e) $\log_4 (\log_{16} (\log_3 81))$
b) $\log_5 (\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32})$ d) $\log_2 (\log_9 (\log_5 125))$ f) $\log_{\frac{1}{2}} (\log_{\sqrt{2}} (\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}))$

Ćwiczenie 3

Przyjmijmy, że podana liczba jest wymierna. Oznacza to, że istnieją różne od zera liczby naturalne m i n , takie że:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \log_2 5 &= \frac{m}{n} \\ 5 &= 2^{\frac{m}{n}} \\ 5^n &= 2^m \end{aligned}$$

Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ lewa strona równości jest podzielna przez 5, a prawa nie. Zatem $\log_2 5$ jest liczbą niewymierną.

b) Dowód alogiczny jak w podpunkcie a).

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \log_2 6 &= \frac{m}{n} \\ 6 &= 2^{\frac{m}{n}} \\ 3^n \cdot 2^n &= 2^m \\ 3^n &= 2^{m-n} \end{aligned}$$

Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ lewa strona równości jest podzielna przez 3, a prawa nie. Zatem $\log_2 6$ jest liczbą niewymierną.

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \log_6 2 &= \frac{m}{n} \\ 2 &= 6^{\frac{m}{n}} \\ 2^n &= 3^m \cdot 2^m \\ 2^{n-m} &= 3^m \end{aligned}$$

Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ prawa strona równości jest podzielna przez 3, a lewa nie. Zatem $\log_6 2$ jest liczbą niewymierną.

Ćwiczenie 4

- a) 100 b) 15 c) 10 d) -3
e) 3 f) 7 g) 10 h) 1

Ćwiczenie 5

- a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{1}{3}$ d) -1
e) $-\frac{1}{2}$ f) -1

Odpowiedzi do zadań

1. a) 6 b) 9 c) -5 d) -10
e) -3 f) $\frac{1}{2}$ g) $\frac{3}{2}$ h) -5

2. a) $b = 2^{\frac{5}{2}}$, $\log_2 b = \frac{5}{2}$
b) $b = 2^{\frac{13}{3}}$, $\log_2 b = \frac{13}{3}$
c) $b = 2^{-\frac{5}{2}}$, $\log_2 b = -\frac{5}{2}$
d) $b = 2^{-\frac{14}{3}}$, $\log_2 b = -\frac{14}{3}$

3. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $-\frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{4}$
e) 4 f) 10 g) $\frac{3}{2}$ h) $\frac{7}{3}$

4. a) -1 b) -6 c) 7
d) -2 e) -3 f) 3
g) $-\frac{1}{2}$ h) $-\frac{3}{2}$

5. a) 9 b) 5 c) $\frac{1}{9}$ d) 3
e) 81 f) $\frac{1}{16}$ g) 3 h) 4

8. a) $a = 5$ b) $a = \frac{1}{2}$
c) $a = 4$ d) $a = \frac{1}{4}$

9. a) $b = 32$ b) $b = 2$ c) $b = 9$
d) $b = 1$ e) $b = 8$ f) $b = \frac{1}{8}$
g) $b = 27$ h) $b = \frac{4}{3}$

10. a) $\log_2 2 = 1$
b) $\log_{0,1} 10 = -1$
c) $\log_{\frac{1}{9}} 3 = -\frac{1}{2}$
d) $\log_{\sqrt{2}} 4 = \log_{\sqrt{2}} \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 4$
e) $\log_9 (\log_8 2) = \log_9 \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$
f) $\log_8 \left(\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}\right) = \log_8 \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$

Zadania

1. Oblicz.

- a) $\log_2 64$ c) $\log_2 \frac{1}{32}$ e) $\log_2 0,125$ g) $\log_4 8$
b) $\log_2 512$ d) $\log_2 \frac{1}{1024}$ f) $\log_4 2$ h) $\log_4 \frac{1}{1024}$

2. Zapisz liczbę b w postaci 2^x . Oblicz $\log_2 b$.

- a) $b = 4\sqrt{2}$ b) $b = 16\sqrt[3]{2}$ c) $b = \frac{\sqrt{2}}{8}$ d) $b = \frac{\sqrt[3]{2}}{32}$

3. Oblicz.

- a) $\log_4 \sqrt{2}$ c) $\log_4 \frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\log_{\sqrt{2}} 4$ g) $\log_3 3\sqrt{3}$
b) $\log_4 \sqrt[3]{2}$ d) $\log_4 2\sqrt{2}$ f) $\log_{\sqrt{2}} 32$ h) $\log_3 9\sqrt[3]{3}$

4. Oblicz.

- a) $\log_{\frac{1}{3}} 3$ c) $\log_{0,5} \frac{1}{128}$ e) $\log_{0,2} 125$ g) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$
b) $\log_{0,1} 10^6$ d) $\log_{0,25} 16$ f) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{216}$ h) $\log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2}$

5. Oblicz.

- a) $2^{\log_2 9}$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 9}$ e) $4^{\log_2 9}$ g) $\sqrt{2}^{\log_2 9}$
b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 5}$ d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_4 \frac{1}{3}}$ f) $81^{\log_3 0,5}$ h) $\sqrt{3}^{\log_3 16}$

6. Oblicz.

- a) $\log_3 81 \cdot \log_3 \sqrt{27}$ b) $\log_5 625 \cdot \log_5 0,04$ c) $\log_3 9\sqrt{3} \cdot \log_3 \frac{\sqrt{3}}{81}$

7. Oblicz.

- a) $\log_8 64 + \log_4 \frac{1}{8}$ c) $\log_6 \frac{1}{36} + \log_4 \sqrt[3]{4}$ e) $\log_{1,5} \frac{9}{4} - \log_{\pi} 1$
b) $\log_5 5^8 - \log_{0,5} 8$ d) $\log_9 \sqrt{3} - \log_3 \sqrt[4]{3}$ f) $\log_{\frac{2}{3}} 1,5 - \log_{1,5} \frac{8}{27}$

8. Dla jakiej podstawy logarytmu a podana równość jest prawdziwa?

- a) $\log_a 25 = 2$ b) $\log_a \frac{1}{8} = 3$ c) $\log_a 0,25 = -1$ d) $\log_a 64 = -3$

9. Dla jakiej liczby logarytmowanej b podana równość jest prawdziwa?

- a) $\log_2 b = 5$ c) $\log_{27} b = \frac{2}{3}$ e) $\log_{\frac{1}{16}} b = -\frac{3}{4}$ g) $\log_{\sqrt{3}} b = 6$
b) $\log_{\frac{1}{2}} b = -1$ d) $\log_7 b = 0$ f) $\log_{\sqrt{2}} b = -6$ h) $\log_{\frac{3}{4}} b = -1$

10. Oblicz.

- a) $\log_2 (\log_{11} 121)$ c) $\log_{\frac{1}{9}} (\log_2 8)$ e) $\log_9 (\log_8 (\log_3 9))$
b) $\log_{0,1} (\log_2 1024)$ d) $\log_{\sqrt{2}} \left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}\right)$ f) $\log_8 (\log_{\frac{1}{4}} (\log_4 2))$

6. a) $\log_3 3^4 \cdot \log_3 \sqrt{3^3} = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$
b) $\log_5 5^4 \cdot \log_5 \frac{1}{25} = 4 \cdot (-2) = -8$
c) $\log_3 \left(3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \log_3 \left(3^{\frac{1}{2}} : 3^4\right) = \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = -\frac{35}{4}$
7. a) $\log_8 8^2 + \log_4 2^{-3} = 2 + \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$
b) $\log_5 5^8 - \log_{0,5} 2^3 = 8 - (-3) = 11$
c) $\log_6 6^{-2} + \log_4 4^{\frac{1}{3}} = -2 + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}$
d) $\log_9 \sqrt{3} - \log_3 \sqrt[4]{3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$
e) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{9}{4} - \log_{\pi} 1 = 2 - 0 = 2$
f) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} - \log_{\frac{3}{2}} \frac{8}{27} = -1 - (-3) = 2$

11. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Dane są liczby x i y takie, że $2^x = 16$ i $3^y = 16$. Zapisz x i y jako logarytmy pewnych liczb. Która z liczb x , y jest całkowita?

$2^x = 16$, zatem $x = \log_2 16$ oraz $x \in \mathbf{Z}$, gdyż $\log_2 16 = 4$

$3^y = 16$, zatem $y = \log_3 16$ oraz $y \notin \mathbf{Z}$

Liczby x i y spełniają poniższe warunki. Zapisz x i y jako logarytmy pewnych liczb. Która z liczb x , y jest całkowita?

a) $2^x = 27$, $3^y = 27$

c) $6^x = 216$, $8^y = 216$

b) $2^x = 1000$, $10^y = 1000$

d) $3^x = \frac{1}{3}$, $9^y = \frac{1}{3}$

12. Oblicz a , jeśli spełnione są warunki:

a) $4^x = 64$ i $x = \log_2 a$,

c) $(\frac{1}{2})^x = \frac{1}{32}$ i $x = \log_4 a$,

b) $5^x = 5\sqrt{5}$ i $x = \log_8 a$,

d) $(\frac{1}{3})^x = 9$ i $x = \log_2 a$.

13. Rozwiąż równanie.

a) $2^{x-1} = 4$

e) $4^{x-3} = 16$

b) $2^{x+2} = 64$

f) $5^{x+2} = 625$

c) $3^{x-4} = 9$

g) $6^{2x-1} = 216$

d) $3^{x+4} = 27$

h) $8^{3x+4} = 64$

Rozwiąż równanie $2^{x+1} = 16$.

$$\log_2 2^{x+1} = \log_2 16$$

$$x + 1 = 4$$

$$x = 3$$

14. a) Dla jakich wartości x liczba $\log_2 x$ jest dodatnia, a dla jakich – ujemna?

b) Dla jakich wartości x liczba $\log_{\frac{1}{2}} x$ jest dodatnia, a dla jakich – ujemna?

Powtórzenie

15. Oblicz.

a) $\log_2 8 + \log_2 16$

c) $\log_3 27 - \log_3 1$

e) $\log_5 125 - \log_5 \frac{1}{5}$

b) $\log_3 9 + \log_3 81$

d) $\log_4 4 - \log_4 64$

f) $\log_3 \frac{1}{9} - \log_3 \frac{1}{3}$

16. Oblicz.

a) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{2}} 2$

c) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} - \log_2 \sqrt{2}$

e) $\log_4 2 + \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{8}$

b) $\log_{\frac{1}{3}} 9 + \log_{\frac{1}{3}} 27$

d) $\log_3 \sqrt{3} - \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{3}$

f) $\log_6 6\sqrt{6} - \log_{\frac{1}{6}} 36$

17. Dla jakiej podstawy logarytmu a podana równość jest prawdziwa?

a) $\log_a 16 = 4$

c) $\log_a 16 = 1$

e) $\log_a 16 = -1$

b) $\log_a 16 = 2$

d) $\log_a 16 = \frac{1}{2}$

f) $\log_a 16 = -2$

15. a) 7 b) 6 c) 3 d) -2 e) 4 f) -1

16. a) 0 b) -5 c) $1\frac{1}{2}$ d) $\frac{5}{6}$ e) 2 f) $3\frac{1}{2}$

17. a) $a = 2$ b) $a = 4$ c) $a = 16$ d) $a = 256$ e) $a = \frac{1}{16}$ f) $a = \frac{1}{4}$

11. a) $x = \log_2 27$,

$y = \log_3 27 \in \mathbf{Z}$

b) $x = \log_2 1000$,

$y = \log_{10} 1000 \in \mathbf{Z}$

c) $x = \log_6 216 \in \mathbf{Z}$,

$y = \log_8 216$

d) $x = \log_3 \frac{1}{3} \in \mathbf{Z}$, $y = \log_9 \frac{1}{3}$

12. a) $a = 8$ b) $a = 16\sqrt{2}$

c) $a = 1024$ d) $a = \frac{1}{4}$

13. a) $x = 3$ b) $x = 4$ c) $x = 6$

d) $x = -1$ e) $x = 5$ f) $x = 2$

g) $x = 2$ h) $x = -\frac{2}{3}$

14. a) dodatnia dla $x > 1$,

ujemna dla $0 < x < 1$

b) dodatnia dla $0 < x < 1$,

ujemna dla $x > 1$

Uczeń:

- odczytuje z tablic przybliżone wartości logarytmów dziesiętnych,
- oblicza wartości wyrażeń, stosując własności logarytmu, w szczególności logarytmu dziesiętnego.

Ćwiczenie 1

- a) 3 b) -1 c) 6 d) -4
e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{3}{2}$

Ćwiczenie 2

- a) 0,301 b) 0,1761 c) 0,2504
d) 0,3598

1.6. Logarytm dziesiętny

Przypomnijmy, że **logarytmy dziesiętne** to logarytmy o podstawie 10. Zamiast $\log_{10} b$ piszemy $\log b$. Na przykład $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$.

Ćwiczenie 1

Oblicz.

- a) $\log 1000$ c) $\log 10^6$ e) $\log \sqrt{10}$
b) $\log 0,1$ d) $\log 0,0001$ f) $\log 10\sqrt{10}$

Poniżej zamieszczono fragment tablic (str. 230–231), w których znajdują się przybliżone wartości logarytmów dziesiętnych liczb.

b	$b + 0,00$	$b + 0,01$	$b + 0,02$	$b + 0,03$	$b + 0,04$	$b + 0,05$	$b + 0,06$	$b + 0,07$	$b + 0,08$	$b + 0,09$
1,0	0,0000	0,0043	0,0086	0,0128	0,0170	0,0212	0,0253	0,0294	0,0334	0,0374
1,1	0,0414	0,0453	0,0492	0,0531	0,0569	0,0607	0,0645	0,0682	0,0719	0,0755
1,2	0,0792	0,0828	0,0864	0,0899	0,0934	0,0969	0,1004	0,1038	0,1072	0,1106
1,3	0,1139	0,1173	0,1206	0,1239	0,1271	0,1303	0,1335	0,1367	0,1399	0,1430
1,4	0,1461	0,1492	0,1523	0,1553	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1732
1,5	0,1761	0,1790	0,1818	0,1847	0,1875	0,1903	0,1931	0,1959	0,1987	0,2014
1,6	0,2041	0,2068	0,2095	0,2122	0,2148	0,2175	0,2201	0,2227	0,2253	0,2279
1,7	0,2304	0,2330	0,2355	0,2380	0,2405	0,2430	0,2455	0,2480	0,2504	0,2529
1,8	0,2553	0,2577	0,2601	0,2625	0,2648	0,2672	0,2695	0,2718	0,2742	0,2765
1,9	0,2788	0,2810	0,2833	0,2856	0,2878	0,2900	0,2923	0,2945	0,2967	0,2989
2,0	0,3010	0,3032	0,3054	0,3075	0,3096	0,3118	0,3139	0,3160	0,3181	0,3201
2,1	0,3222	0,3243	0,3263	0,3284	0,3304	0,3324	0,3345	0,3365	0,3385	0,3404
2,2	0,3424	0,3444	0,3464	0,3483	0,3502	0,3522	0,3541	0,3560	0,3579	0,3598
2,3	0,3617	0,3636	0,3655	0,3674	0,3692	0,3711	0,3729	0,3747	0,3766	0,3784

Ćwiczenie 2

Korzystając z tablicy logarytmów dziesiętnych, podaj przybliżoną wartość:

- a) $\log 2$, b) $\log 1,5$, c) $\log 1,78$, d) $\log 2,29$.

Przykład 1

Korzystając z tablicy logarytmów dziesiętnych, podaj przybliżoną wartość liczby $10^{0,356}$.

Zauważmy, że $\log 10^{0,356} = 0,356$. Zatem znajdujemy w tablicy liczbę 0,356 i odczytujemy, że $\log 2,27 \approx 0,356$, czyli $10^{0,356} \approx 2,27$.

Ćwiczenie 3

Odczytaj z tablicy logarytmów dziesiętnych przybliżoną wartość liczby:

- a) $10^{0,301}$, b) $10^{0,1761}$, c) $10^{0,0043}$, d) $10^{0,3522}$.

Ćwiczenie 3

- a) $10^{0,301} = x$, czyli $\log x = 0,301$, zatem $x \approx 2$
b) $10^{0,1761} = x$, czyli $\log x = 0,1761$, zatem $x \approx 1,5$
c) $10^{0,0043} = x$, czyli $\log x = 0,0043$, zatem $x \approx 1,01$
d) $10^{0,3522} = x$, czyli $\log x = 0,3522$, zatem $x \approx 2,25$

Przed wynalezieniem kalkulatorów tablice logarytmów były wykorzystywane do szybszego wykonywania obliczeń. Dzięki logarytmowaniu mnożenie zastępowano dodawaniem.

Przykład 2

Oblicz $1,22 \cdot 1,55$, korzystając z tablicy logarytmów dziesiętnych.

$$\begin{aligned} 1,22 \cdot 1,55 &\approx 10^{0,0864} \cdot 10^{0,1903} = && \text{Z tablicy odczytujemy:} \\ &= 10^{0,0864 + 0,1903} = 10^{0,2767} \approx && 1,22 \approx 10^{0,0864} \\ &\approx 1,89 && 1,55 \approx 10^{0,1903} \\ &&& 10^{0,2767} \approx 1,89 \end{aligned}$$

Zadania

- Oblicz.
 - $\log 10^9 - \log 10^8$
 - $\log 100 + \log_4 \frac{1}{16}$
 - $\log 10^7 - \log_{0,5} 8$
 - $\log \frac{1}{100} + \log \frac{1}{1000}$
 - $\log_8 \frac{1}{64} + \log \sqrt[3]{10}$
 - $\log \sqrt[4]{10} - \log_3 \sqrt[4]{27}$
 - $\log \frac{\sqrt{10}}{10} - \log \frac{\sqrt[3]{10}}{10}$
 - $\log_{1,5} \frac{27}{8} - \log 1$
 - $\log_{\frac{2}{5}} 2,5 - \log \sqrt{10}$
- Oblicz.
 - $\log_2(\log 10\,000)$
 - $\log_3(\log 1000)$
 - $\log_{\frac{1}{9}}(\log 1000)$
 - $\log_{\sqrt{2}}(\log 10\,000)$
 - $\log_9(\log_8(\log 100))$
 - $\log_8(\log_{\frac{1}{4}}(\log \sqrt{10}))$
- Która z liczb jest większa: x czy y ?
 - $x = \log_2 32$, $y = \log 10^6$
 - $x = \log 0,01$, $y = \log_2 \frac{1}{8}$
 - $x = \log_8 2$, $y = \log \sqrt{10}$
 - $x = \log(\log 10)$, $y = \log_{\frac{1}{2}} 2$
 - $x = \log_4(\log_2 16)$, $y = \log 10\sqrt{10}$
 - $x = \log_{\frac{1}{4}}(\log 100)$, $y = \log_{\sqrt{2}} 2$
- Oblicz przybliżoną wartość sumy, korzystając z tablicy logarytmów dziesiętnych.
 - $10^{0,0792} + 10^{0,2553}$
 - $10^{0,5132} + 10^{0,8293}$
 - $10^{0,2989} + 10^{0,1732}$

Powtórzenie

- Czy x jest liczbą całkowitą? Czy jest liczbą wymierną?
 - $x = \log 100$
 - $x = \log \sqrt[3]{10}$
 - $x = \log 10^{\frac{2}{3}}$
 - $x = \log 0,01$
 - $x = \log 10\sqrt[3]{10}$
 - $x = \log 10^{\sqrt{2}}$
- Oblicz.
 - $\log_2(3 + \log 10)$
 - $\log_2(3 - \log 100)$
 - $\log_2(\log \sqrt{10})$
 - $\log_9(\log \sqrt[3]{10})$
 - $\log_2 2^{100} - \log 100^{10}$
 - $\log 10^5 + \log_{0,1} 100$
- $x = 2$, całkowita
 - $x = \frac{1}{3}$, wymierna, ale nie całkowita
 - $x = \frac{2}{3}$, wymierna, ale nie całkowita
 - $x = -2$, całkowita
 - $x = \frac{4}{3}$, wymierna, ale nie całkowita
 - $x = \sqrt{2}$, niewymierna
- $\log_2 4 = 2$
 - $\log_2 1 = 0$
 - $\log_2 \frac{1}{2} = -1$
 - $\log_9 \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$
 - $100 - 20 = 80$
 - $5 + (-2) = 3$

Odpowiedzi do zadań

- 1
 - 0
 - 10
 - 5
 - $-\frac{5}{3}$
 - $-\frac{1}{2}$
 - $\frac{1}{6}$
 - 3
 - $-\frac{3}{2}$
- $\log_2 4 = 2$
 - $\log_3 3 = 1$
 - $\log_{\frac{1}{9}} 3 = -\frac{1}{2}$
 - $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$
 - $\log_9(\log_8 2) = \log_9 \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$
 - $\log_8 \left(\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} \right) = \log_8 \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$
- $x = 5 < 6 = y$
 - $x = -2 > -3 = y$
 - $x = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = y$
 - $x = 0 > -1 = y$
 - $x = 1 < \frac{3}{2} = y$
 - $x = -\frac{1}{2} < 2 = y$
- $1,2 + 1,8 = 3$
 - $3,26 + 6,75 = 10,01$
(tablice na końcu podręcznika)
 - $1,99 + 1,49 = 3,48$

Uczeń:

- stosuje twierdzenia o logarytmie iloczynu i logarytmie ilorazu do obliczania wartości wyrażeń z logarytmami,
- stosuje twierdzenie o logarytmie iloczynu i logarytmie ilorazu do uzasadniania równości wyrażeń,
- udowadnia twierdzenia o logarytmie iloczynu i logarytmie ilorazu.

Ćwiczenie 1

I sposób

Niech $p = \log_a x$ oraz $q = \log_a y$. Wtedy:

$$a^p = x \text{ i } a^q = y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q}$$

$$\frac{x}{y} = a^{p-q}$$

$$\log_a \frac{x}{y} = p - q$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

II sposób

Na mocy twierdzenia o logarytmie iloczynu mamy:

$$\log_a \frac{x}{y} + \log_a y =$$

$$= \log_a \left(\frac{x}{y} \cdot y \right) = \log_a x$$

$$\text{Zatem } \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

1.7. Logarytm iloczynu i logarytm ilorazu

Twierdzenie o logarytmie iloczynu

Jeżeli a , x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Dowód

Niech a , x i y będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$. Niech $p = \log_a x$ oraz $q = \log_a y$, wtedy:

$$a^p = x \text{ i } a^q = y$$

Korzystamy z definicji logarytmu.

$$x \cdot y = a^p \cdot a^q$$

Korzystamy z własności działań na potęgach.

$$x \cdot y = a^{p+q}$$

$$\log_a (x \cdot y) = p + q$$

Korzystamy z definicji logarytmu.

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Twierdzenie o logarytmie ilorazu

Jeżeli a , x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

D Ćwiczenie 1

Udowodnij twierdzenie o logarytmie ilorazu.

Przykład 1

a) Sprawdź, czy prawdziwa jest równość: $\log_2 96 = 5 + \log_2 3$.

$$\log_2 96 = \log_2 (32 \cdot 3) = \log_2 32 + \log_2 3 = 5 + \log_2 3$$

b) Sprawdź, czy prawdziwa jest równość: $\log_3 \frac{7}{9} = \log_3 7 - 2$.

$$\log_3 \frac{7}{9} = \log_3 7 - \log_3 9 = \log_3 7 - 2$$

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy równość jest prawdziwa.

a) $\log_2 6 = 1 + \log_2 3$

c) $\log_2 \frac{8}{3} = 3 - \log_2 3$

b) $\log 500 = 2 + \log 5$

d) $\log 0,07 = -2 + \log 7$

Przykład 2

Oblicz.

a) $\log 125 + \log 4 - \log 5 = \log \frac{125 \cdot 4}{5} = \log 100 = 2$

b) $\log_3 36 - \log_3 2 + \log_3 \frac{1}{6} = \log_3 \left(\frac{36}{2} \cdot \frac{1}{6} \right) = \log_3 3 = 1$

Ćwiczenie 2

a) $\log_2 6 = \log_2 (2 \cdot 3) = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3$, równość prawdziwa

b) $\log 500 = \log (100 \cdot 5) = \log 100 + \log 5 = 2 + \log 5$, równość prawdziwa

c) $\log_2 \frac{8}{3} = \log_2 8 - \log_2 3 = 3 - \log_2 3$, równość prawdziwa

d) $\log 0,07 = \log \frac{7}{100} = \log 7 - \log 100 = \log 7 - 2$, równość prawdziwa

Ćwiczenie 3

Oblicz.

- a) $\log_6 4 + \log_6 9$ c) $\log_{\frac{1}{2}} 0,6 - \log_{\frac{1}{2}} 0,15$ e) $\log_5 0,04 - \log_5 0,008$
b) $\log_7 19 - \log_7 \frac{19}{49}$ d) $\log 6 - \log 2 - \log 3$ f) $\log \frac{7}{4} - \log 14 - \log 125$

Przykład 3

Przedstaw wyrażenie $3 + \log_2 7$ w postaci logarytmu o podstawie 2.

$$\begin{aligned} 3 + \log_2 7 &= \log_2 8 + \log_2 7 = \text{Zapisujemy 3 jako } \log_2 8. \\ &= \log_2(8 \cdot 7) = \log_2 56 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 4

Przedstaw wyrażenie w postaci logarytmu o podstawie a .

- a) $2 + \log_3 5, a = 3$ b) $\log_2 10 - 1, a = 2$ c) $4 - \log_3 36, a = 3$

Zadania

1. Oblicz.

- a) $\log_{12} 2 + \log_{12} 8 + \log_{12} 9$ c) $\log 0,12 - \log 0,3 + \log 25$
b) $\log_3 \frac{1}{12} + \log_3 \frac{14}{15} + \log_3 \frac{10}{21}$ d) $\log_{0,2} 0,3 - \log_{0,2} 0,5 - \log_{0,2} 15$

2. Wiadomo, że $\log 5 \approx 0,7$. Oblicz przybliżoną wartość:

- a) $\log 50$, b) $\log 500$, c) $\log 0,05$, d) $\log \frac{1}{5}$.

3. Wiadomo, że $\log_2 7 \approx 2,8$. Oblicz przybliżoną wartość:

- a) $\log_2 14$, b) $\log_2 28$, c) $\log_2 3,5$, d) $\log_2 \frac{7}{4}$.

4. Wiadomo, że $\log_5 2 \approx 0,43$, $\log_5 7 \approx 1,21$. Oblicz przybliżoną wartość:

- a) $\log_5 14$, b) $\log_5 70$, c) $\log_5 0,4$, d) $\log_5 0,7$.

5. Zapisz liczbę p w postaci $\log_a b$.

- a) $p = \log_2 5 + \log_2 6$ b) $p = \log_3 8 - \log_3 2$ c) $p = 1 + \log_4 3$

Powtórzenie

6. Oblicz.

- a) $\log_4 2 + \log_4 8$ c) $\log_{\frac{1}{6}} 3 + \log_{\frac{1}{6}} 2$ e) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$
b) $\log 2 + \log 50$ d) $\log_{0,1} 0,2 + \log_{0,1} 0,5$ f) $\log_{20} 100 + \log_{20} 4$

7. Oblicz.

- a) $\log_4 12 - \log_4 3$ c) $\log_6 72 - \log_6 2$ e) $\log_{\frac{1}{2}} 3,5 - \log_{\frac{1}{2}} 7$
b) $\log 8 + \log 125$ d) $\log_3 54 - \log_3 2$ f) $\log_5 15 - \log_5 75$

6. a) 2 b) 2 c) -1 d) 1 e) 1 f) 2

7. a) 1 b) 3 c) 2 d) 3 e) 1 f) -1

Ćwiczenie 3

- a) 2 b) 2 c) -2
d) 0 e) 1 f) -3

Ćwiczenie 4

- a) $\log_3 45$ b) $\log_2 5$ c) $\log_3 \frac{9}{4}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) 2 b) -3 c) 1 d) 2

2. a) 1,7 b) 2,7 c) -1,3 d) -0,7

3. a) 3,8 b) 4,8 c) 1,8 d) 0,8

4. a) 1,64 b) 2,64
c) -0,57 d) -0,22

5. a) $\log_2 30$ b) $\log_3 4$ c) $\log_4 12$

Uczeń:

- stosuje twierdzenie o logarytmie potęgi do obliczania wartości wyrażeń z logarytmami,
- stosuje twierdzenie o logarytmie potęgi do uzasadniania równości wyrażeń,
- udowadnia twierdzenia o logarytmie potęgi.

1.8. Logarytm potęgi

Twierdzenie o logarytmie potęgi

Jeżeli a i x są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to dla dowolnego $p \in \mathbb{R}$:

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

Dowód

Niech a i x będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$. Niech $q = \log_a x$, wtedy z definicji logarytmu $x = a^q$, zatem:

$$x^p = (a^q)^p$$

$$x^p = a^{p \cdot q}$$

$$\log_a x^p = p \cdot q$$

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

Korzystamy z własności działań na potęgach.

Korzystamy z definicji logarytmu.

Przykład 1

Niech x będzie taką liczbą, że $\log_2 x = 0,3$. Oblicz $\log_2 x^5$ i $\log_2 \frac{1}{x}$.

$$\log_2 x^5 = 5 \log_2 x = 5 \cdot 0,3 = 1,5$$

$$\log_2 \frac{1}{x} = \log_2 x^{-1} = -\log_2 x = -0,3$$

Ćwiczenie 1

Niech x będzie taką liczbą, że $\log x = \frac{1}{3}$. Oblicz:

a) $\log x^6$, b) $\log \frac{1}{x^3}$, c) $\log \sqrt{x}$, d) $\log \frac{1}{\sqrt{x^3}}$, e) $\log \frac{x^3}{\sqrt{x}}$.

Przykład 2

Przedstaw wyrażenie $3 \log_4 8 - 2$ w postaci logarytmu o podstawie 4.

$$\begin{aligned} 3 \log_4 8 - 2 &= \log_4 8^3 - \log_4 4^2 = && \text{Zapisujemy 2 jako } \log_4 4^2. \\ &= \log_4 \frac{8^3}{4^2} = \log_4 (2 \cdot 2 \cdot 8) = \log_4 32 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

Przedstaw wyrażenie w postaci logarytmu pewnej liczby.

a) $3 + \log_2 5$ b) $2 \log_3 4 - 1$ c) $3 \log_{\frac{1}{2}} 3 + 1$ d) $4 - 2 \log_3 6$

Przykład 3

Wiadomo, że $\log_2 5 \approx 2,32$. Oblicz przybliżoną wartość $\log_2 250$.

$$\begin{aligned} \log_2 250 &= \log_2 (2 \cdot 125) = \log_2 2 + \log_2 125 = 1 + \log_2 5^3 = 1 + 3 \log_2 5 \approx \\ &\approx 1 + 3 \cdot 2,32 = 7,96 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 1

a) $\log x^6 = 6 \log x = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$

b) $\log \frac{1}{x^3} = -3 \log x = -3 \cdot \frac{1}{3} = -1$

c) $\log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

d) $\log \frac{1}{\sqrt{x^3}} = -\frac{3}{2} \log x = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$

e) $\log \frac{x^3}{\sqrt{x}} = \log x^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} \log x = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

Ćwiczenie 2

a) $3 \cdot \log_2 2 + \log_2 5 = \log_2 8 + \log_2 5 = \log_2 40$

b) $\log_3 16 - 1 \cdot \log_3 3 = \log_3 16 + \log_3 \frac{1}{3} = \log_3 \frac{16}{3}$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 27 + 1 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{27}{2}$

d) $4 \cdot \log_3 3 + \log_3 \frac{1}{36} = \log_3 \frac{81}{36} = \log_3 \frac{9}{4}$

Ćwiczenie 3

Wiadomo, że $\log_3 2 \approx 0,63$. Oblicz przybliżoną wartość:

- a) $\log_3 4$, b) $\log_3 12$, c) $\log_3 96$, d) $\log_3 72$.

Zadania

1. Wiadomo, że $\log 2 \approx 0,3$. Oblicz przybliżoną wartość:
a) $\log 4$, b) $\log 16$, c) $\log 0,04$, d) $\log 1600$.
2. Wiadomo, że $\log 4 \approx 0,6$ oraz $\log 5 \approx 0,7$. Oblicz przybliżoną wartość:
a) $\log 25$, b) $\log 64$, c) $\log 0,64$, d) $\log 2,5$, e) $\log \frac{5}{4}$, f) $\log 20$.
- D** 3. Niech x będzie taką liczbą, że $\log_2 x = 0,4$. Uzasadnij, że:
a) $\log_2 2x^2 = 1,8$, b) $\log_2 16x^3 = 5,2$, c) $\log_2 \frac{x^4}{2} = 0,6$.
4. Niech x będzie taką liczbą, że $\log_3 x = -\frac{1}{4}$. Oblicz:
a) $\log_3 3x^2$, b) $\log_3 9x^8$, c) $\log_3 \frac{x^4}{81}$, d) $\log_3 27x^6$.
- D** 5. Niech $p = \log_2 3$ oraz $q = \log_2 5$. Uzasadnij poniższą równość.
a) $\log_2 45 = 2p + q$ b) $\log_2 75 = p + 2q$ c) $\log_2 405 = 4p + q$
6. Wyraż liczbę a za pomocą p , jeśli $p = \log 2$.
a) $a = \log 200$ b) $a = \log 0,02$ c) $a = \log 0,04$ d) $a = \log 1600$
- D** 7. Wykaż, że dla dowolnych $x, y \in \mathbf{R}_+$ podana równość jest prawdziwa.
a) $\log \frac{x}{y} + \log \frac{y}{x} = 0$ c) $\log x^2 y - \log xy^2 = \log x - \log y$
b) $\log x^2 y^2 = 2 \log x + 2 \log y$ d) $\log x^3 y^4 - \log x^2 y^3 = \log x + \log y$

Powtórzenie

8. Dla jakiej liczby a prawdziwa jest poniższa równość?
a) $\log_2 3^5 = a \log_2 3$ c) $\log_2 81 = a \log_2 3$ e) $\log_7 625 = a \log_7 5$
b) $\log_5 2^{100} = a \log_5 2$ d) $\log_5 32 = a \log_5 2$ f) $\log_{\frac{1}{2}} 64 = a \log_{\frac{1}{2}} 4$
9. Oblicz x .
a) $\log_5 x = 3 \log_5 2$ c) $\log_{\frac{1}{2}} x = 3 \log_{\frac{1}{2}} 5$ e) $\log x = 2 \log \sqrt{2}$
b) $\log_7 x = 2 \log_7 3$ d) $\log_{\frac{1}{10}} x = 6 \log_{\frac{1}{10}} 10$ f) $\log x = 4 \log \sqrt{3}$
10. Wiadomo, że $\log 3 \approx 0,48$. Oblicz przybliżoną wartość:
a) $\log 9$, b) $\log 27$, c) $\log 0,9$, d) $\log 0,81$.
6. a) $a = \log(2 \cdot 100) = \log 2 + \log 100 = p + 2$
b) $a = \log \frac{2}{100} = \log 2 - \log 100 = p - 2$
c) $a = \log \frac{4}{100} = \log 2^2 - \log 100 = 2 \log 2 - 2 = 2p - 2$
d) $a = \log(2^4 \cdot 100) = 4 \log 2 + \log 100 = 4p + 2$
7. a) $\log \frac{x}{y} + \log \frac{y}{x} = \log x - \log y + \log y - \log x = 0$
b) $\log x^2 y^2 = \log x^2 + \log y^2 = 2 \log x + 2 \log y$
c) $\log x^2 y - \log xy^2 = \log \frac{x^2 y}{xy^2} = \log \frac{x}{y} = \log x - \log y$
d) $\log x^3 y^4 - \log x^2 y^3 = \log \frac{x^3 y^4}{x^2 y^3} = \log xy = \log x + \log y$
8. a) $a = 5$ b) $a = 100$ c) $a = 4$ d) $a = 5$ e) $a = 4$ f) $a = 3$
9. a) $x = 8$ b) $x = 9$ c) $x = 125$ d) $x = 1000000$ e) $x = 2$ f) $x = 9$
10. a) 0,96 b) 1,44 c) -0,04 d) -0,08

Ćwiczenie 3

- a) $\log_3 4 = \log_3 2^2 = 2 \log_3 2 \approx \approx 1,26$
b) $\log_3 12 = \log_3 (3 \cdot 4) = \log_3 3 + \log_3 4 = 1 + 2 \log_3 2 \approx 2,26$
c) $\log_3 96 = \log_3 (3 \cdot 32) = \log_3 3 + \log_3 2^5 = 1 + 5 \log_3 2 \approx 4,15$
d) $\log_3 72 = \log_3 (9 \cdot 8) = \log_3 9 + \log_3 8 = 2 + 3 \log_3 2 \approx 3,89$

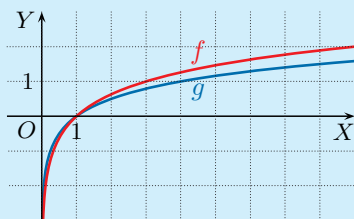
Odpowiedzi do zadań

1. a) 0,6 b) 1,2 c) -1,4 d) 3,2
2. a) 1,4 b) 1,8 c) -0,2 d) 0,4 e) 0,1 f) 1,3
3. a) $\log_2 2x^2 = \log_2 2 + \log_2 x^2 = 1 + 2 \log_2 x = 1 + 2 \cdot 0,4 = 1,8$
b) $\log_2 16x^3 = \log_2 16 + \log_2 x^3 = 4 + 3 \log_2 x = 4 + 3 \cdot 0,4 = 5,2$
c) $\log_2 \frac{x^4}{2} = \log_2 x^4 - \log_2 2 = 4 \log_2 x - 1 = 4 \cdot 0,4 - 1 = 0,6$
4. a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) -5 d) $1\frac{1}{2}$
5. a) $\log_2 45 = \log_2 (9 \cdot 5) = \log_2 3^2 + \log_2 5 = 2 \log_2 3 + q = 2p + q$
b) $\log_2 75 = \log_2 (3 \cdot 25) = \log_2 3 + \log_2 5^2 = p + 2 \log_2 5 = p + 2q$
c) $\log_2 405 = \log_2 (81 \cdot 5) = \log_2 3^4 + \log_2 5 = 4 \log_2 3 + q = 4p + q$

Uczeń:

- szkicuje wykres funkcji logarytmicznej i określa jej własności,
- wyznacza wzór funkcji logarytmicznej, gdy dane są współrzędne punktu należącego do jej wykresu,
- wyznacza zbiór wartości funkcji logarytmicznej o podanej dziedzinie,
- odczytuje z wykresu funkcji logarytmicznej zbiór rozwiązań nierówności,
- rozwiązuje zadania dotyczące monotoniczności funkcji logarytmicznej, w tym zadania z parametrem.

Ćwiczenie 1



Punkt wspólny wykresów: (1, 0)

Ćwiczenie 2

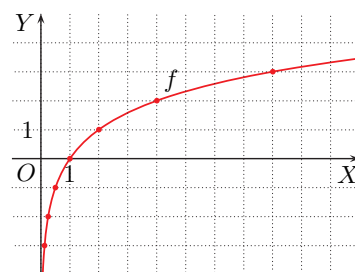
- $h(216) = \log_6 216 = 3$
- $f(2\frac{1}{4}) = \log_{\frac{3}{2}} \frac{9}{4} = 2$
- $g(1024) = \log_2 1024 = 10$

1.9. Funkcja logarytmiczna

Przykład 1

Jeśli każdej liczbie dodatniej x przyporządkujemy wartość $\log_2 x$, to otrzymamy funkcję $f(x) = \log_2 x$ określoną dla $x \in (0; \infty)$. Jej wykres przedstawiono na rysunku obok.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3



Definicja

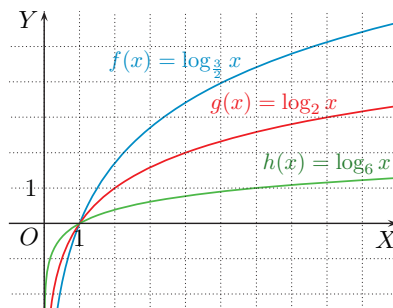
Funkcję postaci $f(x) = \log_a x$ określoną dla $x \in (0; \infty)$, gdzie $a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$ jest pewną stałą, nazywamy **funkcją logarytmiczną**.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

$$f(x) = \log_3 x \text{ oraz } g(x) = \log_4 x$$

Podaj współrzędne punktu wspólnego tych wykresów.



Ćwiczenie 2

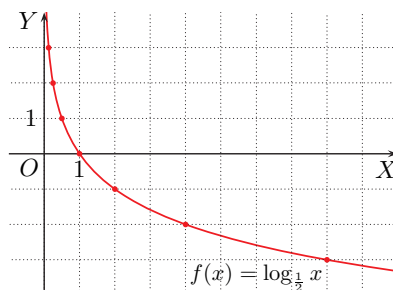
Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \log_{\frac{3}{2}} x$, $g(x) = \log_2 x$ oraz $h(x) = \log_6 x$. Do którego z tych wykresów należy punkt:

- (216, 3), b) $(2\frac{1}{4}, 2)$, c) (1024, 10)?

Przykład 2

Wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ określonej dla $x \in (0; \infty)$ szkicujemy, łącząc odpowiednie punkty krzywą jak na rysunku.

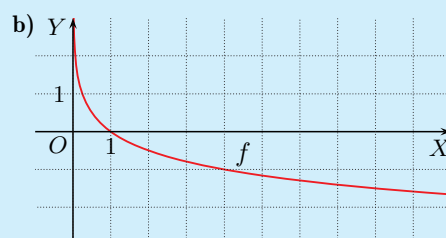
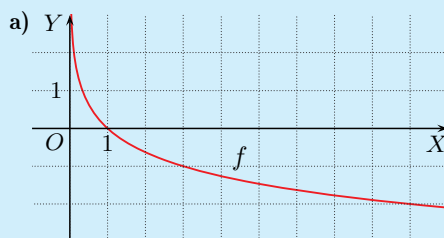
x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	3	2	1	0	-1	-2	-3



Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji: a) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, b) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$.

Ćwiczenie 3

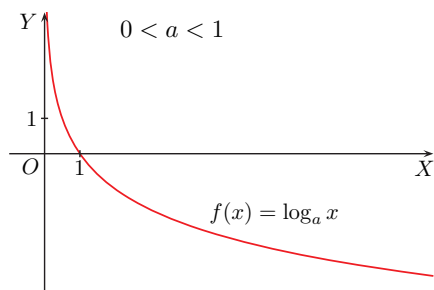


Multiteka

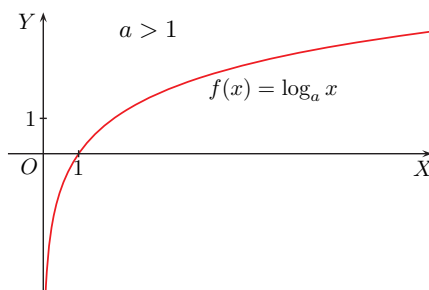
- Wykres funkcji logarytmicznej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.9

Generator
testów i sprawdzianów



Dla $a \in (0; 1)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest malejąca.



Dla $a \in (1; \infty)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest rosnąca.

Dziedziną funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ dla $a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$ jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, a jej zbiorem wartości – zbiór liczb rzeczywistych. Oś OY jest asymptotą pionową wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$, a punkt $(1, 0)$ jest punktem przecięcia tego wykresu z osią OX .

Ćwiczenie 4

Dla jakich argumentów x funkcja $f(x) = \log_a x$ przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne, jeśli wiadomo, że: a) $a \in (1; \infty)$, b) $a \in (0; 1)$?

Przykład 3

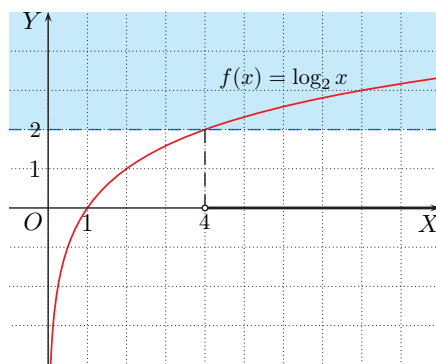
Rozwiąż nierówność $\log_2 x > 2$.

Zakładamy, że $x > 0$.

$$\log_2 x > \log_2 4 \quad 2 = \log_2 4$$

$$x > 4, \text{ czyli } x \in (4; \infty)$$

Nie zmieniamy zwrotu nierówności, ponieważ funkcja $f(x) = \log_2 x$ jest rosnąca.



Przykład 4

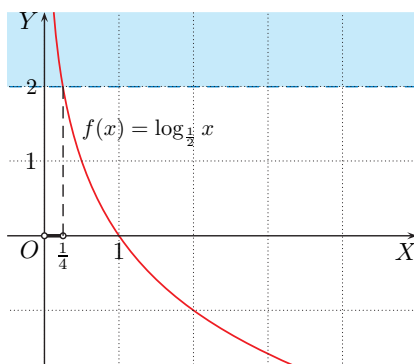
Rozwiąż nierówność $\log_{\frac{1}{2}} x > 2$.

Zakładamy, że $x > 0$.

$$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \quad 2 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$$

$$x < \frac{1}{4}, \text{ czyli } x \in (0; \frac{1}{4})$$

Zmieniamy zwrot nierówności, ponieważ funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ jest malejąca.



Ćwiczenie 4

a) Jeśli $a \in (1; \infty)$, to $f(x) > 0$ dla $x \in (1; \infty)$ oraz $f(x) < 0$ dla $x \in (0; 1)$.

b) Jeśli $a \in (0; 1)$, to $f(x) > 0$ dla $x \in (0; 1)$ oraz $f(x) < 0$ dla $x \in (1; \infty)$.

Ćwiczenie 5

- a) $x \in \langle 4; \infty \rangle$ b) $x \in (0; 4)$
c) $x \in (8; \infty)$ d) $x \in (0; 8)$

Ćwiczenie 6

- a) $x \in (3; \infty)$ b) $x \in (0; 3)$
c) $x \in \langle \frac{1}{9}; \infty \rangle$ d) $x \in (9; \infty)$
e) $x \in (0; 3)$ f) $x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
g) $x \in (\frac{1}{9}; \infty)$ h) $x \in (0; \frac{1}{9})$

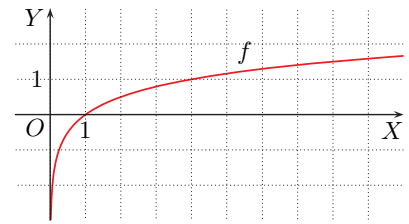
Odpowiedzi do zadań

1. a), d) g b), c) f
2. a) $a = 3$ b) $a = 5$
c) $a = \frac{1}{2}$ d) $a = \sqrt{2}$
3. a) $f(D_f) = \langle -1; 0 \rangle$
b) $f(D_f) = \langle -3; 2 \rangle$
c) $f(D_f) = \langle -\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \rangle$
d) $f(D_f) = \langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{6} \rangle$
4. a) $x \in \langle \frac{1}{4}; \infty \rangle$
b) $x \in (0; \frac{1}{48})$
c) $x \in (0; 4)$
d) $x \in (2; \infty)$
5. a) $x \in \langle \frac{1}{4}; 2 \rangle$
b) $x \in (\frac{1}{8}; \frac{1}{2})$
6. a) $x \in \langle \frac{1}{4}; 2 \rangle$
b) $x \in (\frac{1}{2}; 4)$

Ćwiczenie 5

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log_4 x$. Podaj rozwiązanie nierówności.

- a) $\log_4 x \geq 1$ c) $\log_4 x > \frac{3}{2}$
b) $\log_4 x < 1$ d) $\log_4 x \leq \frac{3}{2}$



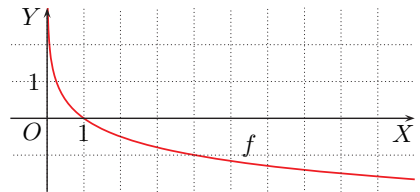
Ćwiczenie 6

Naszkicuj odpowiedni wykres i podaj rozwiązanie nierówności.

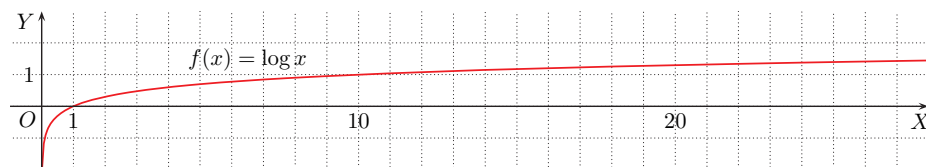
- a) $\log_3 x > 1$ c) $\log_3 x \geq -2$ e) $\log_{\frac{1}{3}} x \geq -1$ g) $\log_{\frac{1}{3}} x < 2$
b) $\log_3 x \leq 1$ d) $\log_3 x > 2$ f) $\log_{\frac{1}{3}} x < 1$ h) $\log_{\frac{1}{3}} x \geq 2$

Zadania

1. Czy punkt P należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_2 x$ lub $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$?
- a) $P(\frac{1}{8}, 3)$ b) $P(\frac{1}{16}, -4)$ c) $P(2\sqrt{2}, \frac{3}{2})$ d) $P(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$
2. Dla jakiej wartości a punkt P należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$?
- a) $P(27, 3)$ b) $P(625, 4)$ c) $P(32, -5)$ d) $P(4, 4)$
3. Podaj zbiór wartości funkcji f o dziedzinie D_f .
- a) $f(x) = \log_3 x, D_f = \langle \frac{1}{3}; 1 \rangle$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x, D_f = \langle \frac{1}{2}; 8 \rangle$
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x, D_f = \langle \frac{1}{9}; 27 \rangle$ d) $f(x) = \log_8 x, D_f = \langle \frac{1}{2}; \sqrt{2} \rangle$
4. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$. Podaj rozwiązanie nierówności.
- a) $\log_{\frac{1}{4}} x \leq 1$ c) $\log_{\frac{1}{4}} x \geq -1$
b) $\log_{\frac{1}{4}} x \geq 8$ d) $\log_{\frac{1}{4}} x < -\frac{1}{2}$
5. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_2 x$ i podaj rozwiązanie nierówności.
- a) $-2 \leq \log_2 x \leq 1$ b) $-3 < \log_2 x < -1$
6. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ i podaj rozwiązanie nierówności.
- a) $-1 < \log_{\frac{1}{2}} x \leq 2$ b) $-2 \leq \log_{\frac{1}{2}} x < 1$
7. Określ monotoniczność funkcji f .
- a) $f(x) = \log_{\sqrt{5}} x$ b) $f(x) = \log_{\sqrt{5}-1} x$ c) $f(x) = \log_{\sqrt{2}-1} x$
7. a) $\frac{\sqrt{5}}{5} < \frac{5}{5} = 1$, czyli funkcja jest malejąca
b) $\sqrt{5} - 1 > \sqrt{4} - 1 = 1$, czyli funkcja jest rosnąca
c) $\sqrt{2} - 1 < 2 - 1 = 1$, czyli funkcja jest malejąca



8. Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest rosnąca?
 a) $f(x) = \log_{2m} x$ b) $f(x) = \log_{\frac{m}{4}} x$ c) $f(x) = \log_{m+1} x$
9. Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest malejąca?
 a) $f(x) = \log_{3m} x$ b) $f(x) = \log_{\frac{m}{2}} x$ c) $f(x) = \log_{m+2} x$
10. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log x$.



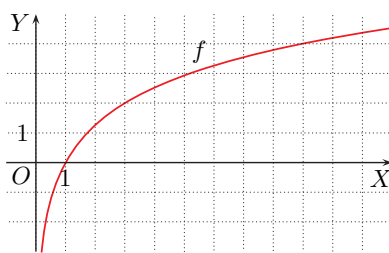
Dla jakich argumentów x spełniona jest podana nierówność?

- a) $\log x > 1$ b) $\log x > 2$ c) $\log x > 3$ d) $\log x > 6$
11. Rozwiąż nierówność.
 a) $|\log x| \leq 1$ b) $|\log x| \leq 4$ c) $\log^2 x \leq 4$ d) $\log^2 x \leq 9$
- Uwaga.** Zamiast $(\log_a x)^2$ piszemy $\log_a^2 x$.
12. Rozwiąż nierówność.
 a) $|\log_4 x| \leq 1$ b) $|\log_4 x| > 1$ c) $\log_4^2 x \leq 4$ d) $\log_4^2 x \geq 4$

Powtórzenie

13. Korzystając z monotoniczności odpowiedniej funkcji logarytmicznej, uporządkuj liczby x, y, z w kolejności rosnącej.
 a) $x = 2 \log_3 2, y = \frac{1}{3} \log_3 27, z = \log_3 \frac{7}{2}$
 b) $x = \frac{3}{4} \log_{\frac{1}{3}} 16, y = \frac{2}{3} \log_{\frac{1}{3}} 8, z = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 80$
14. Podaj zbiór wartości funkcji $f(x) = \log_2 x$ o dziedzinie D_f .
 a) $D_f = (0; 1)$ b) $D_f = \langle 2; \infty \rangle$ c) $D_f = \langle \frac{1}{2}; 8 \rangle$ d) $D_f = \langle \frac{\sqrt{2}}{2}; 1024 \rangle$

15. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x$. Podaj cztery punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu tej funkcji. Rozwiąż nierówność.



- a) $\log_{\sqrt{3}} x > 2$ c) $\log_{\sqrt{3}} x < 4$
 b) $\log_{\sqrt{3}} x \leq 2$ d) $\log_{\sqrt{3}} x \geq 4$

13. a) $y < z < x$ b) $z < x < y$
14. a) $f(D_f) = (-\infty; 0)$ b) $f(D_f) = \langle 1; \infty \rangle$
 c) $f(D_f) = \langle -1; 3 \rangle$ d) $f(D_f) = \langle -\frac{1}{2}; 10 \rangle$
15. np.: $(1, 0), (3, 2), (9, 4), (27, 6)$
 a) $x \in (3; \infty)$ b) $x \in (0; 3)$
 c) $x \in (0; 9)$ d) $x \in \langle 9; \infty \rangle$

8. a) $2m > 1$, czyli $m \in (\frac{1}{2}; \infty)$
 b) $\frac{m}{4} > 1$, czyli $m \in (4; \infty)$
 c) $m+1 > 1$, czyli $m \in (0; \infty)$
9. a) $0 < 3m < 1$,
 czyli $m \in (0; \frac{1}{3})$
 b) $0 < \frac{m}{2} < 1$, czyli $m \in (0; 2)$
 c) $0 < m+2 < 1$,
 czyli $m \in (-2; -1)$

10. a) $x > 10$
 b) $x > 100$
 c) $x > 1000$
 d) $x > 10^6$

11. a) $-1 \leq \log x \leq 1$
 $x \in \langle \frac{1}{10}; 10 \rangle$
 b) $x \in \langle \frac{1}{10000}; 10000 \rangle$
 c) $-2 \leq \log x \leq 2$
 $x \in \langle \frac{1}{100}; 100 \rangle$
 d) $x \in \langle \frac{1}{1000}; 1000 \rangle$

12. a) $-1 \leq \log_4 x \leq 1$
 $x \in \langle \frac{1}{4}; 4 \rangle$
 b) $\log_4 x > 1$ lub $\log_4 x < -1$
 $x \in (0; \frac{1}{4}) \cup (4; \infty)$
 c) $-2 \leq \log_4 x \leq 2$
 $x \in \langle \frac{1}{16}; 16 \rangle$
 d) $\log_4 x \geq 2$ lub $\log_4 x \leq -2$
 $x \in (0; \frac{1}{16}) \cup \langle 16; \infty \rangle$

Skala logarytmiczna

Gdy porównujemy wielkości fizyczne, które przyjmują wartości z szerokiego zakresu, wygodniej jest porównywać ich logarytmy. W ten sposób powstaje **skala logarytmiczna**, na której w równych odstępach umieszczone są logarytmy wartości tych wielkości fizycznych.

Dźwięk

Natężenie dźwięku i poziom natężenia dźwięku to wielkości fizyczne związane z falą dźwiękową. Zachodzi między nimi zależność:

$$L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

gdzie:

I – natężenie badanej fali dźwiękowej w watach na metr kwadratowy (W/m^2),

$I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ – próg słyszalności (dolna granica zakresu słyszalności dla częstotliwości 1000 Hz),

L – poziom natężenia dźwięku.

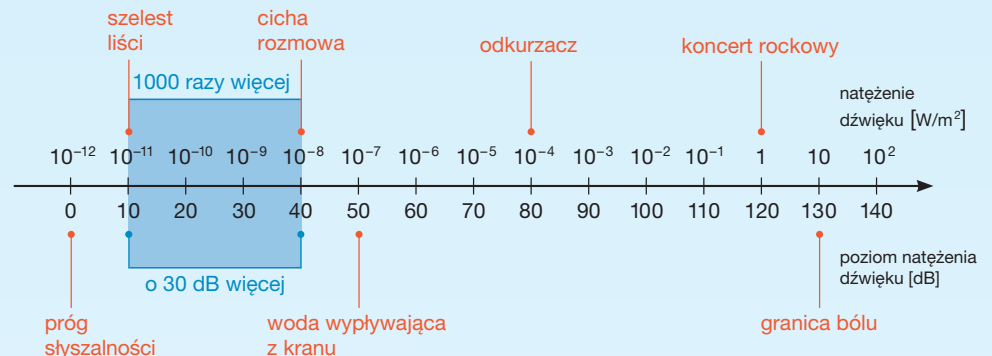
Poziom natężenia dźwięku podawany jest w **decybelach** (dB).

Na przykład jeżeli podczas koncertu rockowego natężenie dźwięku jest równe 1 W/m^2 , to poziom natężenia dźwięku wynosi:

$$L = 10 \cdot \log \frac{1}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^{12} = 10 \cdot 12 = 120 \text{ [dB]}$$



Na osi poniżej pokazano natężenia dźwięków z różnych źródeł (skala liniowa) i odpowiadające im poziomy natężenia dźwięków (skala logarytmiczna). Zwróć uwagę, że wzrost poziomu natężenia dźwięku o 30 dB oznacza tysiąckrotny wzrost natężenia tego dźwięku.



1 O ile decybeli wzrośnie poziom natężenia dźwięku, jeżeli natężenie dźwięku wzrośnie dwukrotnie?

Odpowiedzi do zadań

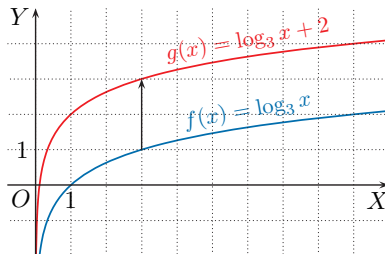
1. $L_2 - L_1 = 10 \cdot \log \frac{2I}{10^{-12}} - 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}} = 10 \cdot \log \left(\frac{2I}{10^{-12}} : \frac{I}{10^{-12}} \right) = 10 \log 2 \approx 3 \text{ [dB]}$

1.10. Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \log_3 x + 2$.

Wykres funkcji g możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_3 x$ o 2 jednostki w górę. Dziedziną funkcji g jest zbiór $D_g = (0; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 0$.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

$$f(x) = \log_2 x, \quad g(x) = \log_2 x + 1, \quad h(x) = \log_2 x - 3$$

Podaj wartości każdej z tych funkcji dla $x \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8\}$.

Ćwiczenie 2

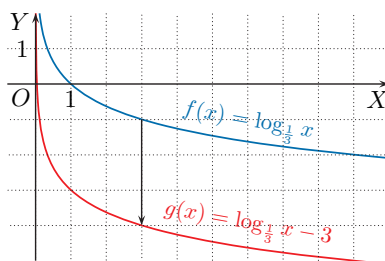
Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g .

a) $f(x) = \log_3 x - 1, \quad g(x) = \log_3 x + 1$ b) $f(x) = \log_4 x - 3, \quad g(x) = \log_4 x + 3$

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x - 3$.

Wykres funkcji g możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ o 3 jednostki w dół. Dziedziną funkcji g jest zbiór $D_g = (0; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 0$.



Ćwiczenie 3

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 2, \quad h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x - 4$$

Podaj, dla jakich argumentów funkcje te przyjmują wartości nieujemne.

Ćwiczenie 4

Punkt P należy do wykresu funkcji f . Wyznacz współczynnik a i naszkicuj wykres funkcji f .

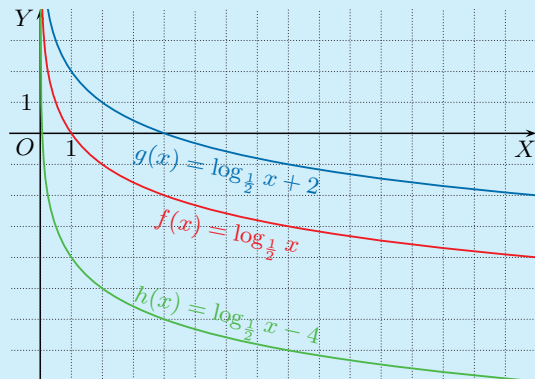
a) $f(x) = \log_3 x + a, \quad P(3, 2)$

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x + a, \quad P(3, -3)$

b) $f(x) = \log_4 x + a, \quad P(4, -1)$

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x + a, \quad P(4, 0)$

Ćwiczenie 3



$$f(x) \geq 0 \text{ dla } x \in (0; 1),$$

$$g(x) \geq 0 \text{ dla } x \in (0; 4),$$

$$h(x) \geq 0 \text{ dla } x \in (0; \frac{1}{16})$$

Ćwiczenie 4

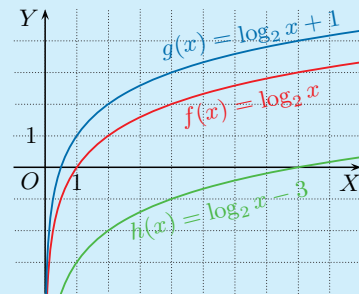
a) $a = 1$ b) $a = -2$

c) $a = -2$ d) $a = 1$

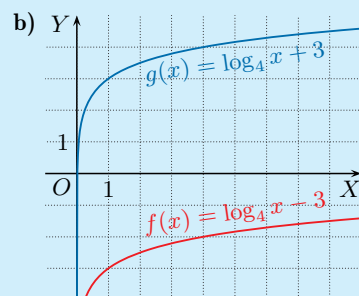
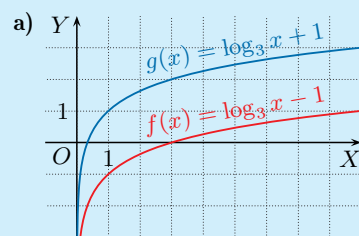
Uczeń:

- szkicuje wykres funkcji, stosując przesunięcie wykresu odpowiedniej funkcji logarytmicznej wzdłuż osi układu współrzędnych, i podaje jej własności,
- szkicuje wykres funkcji, stosując symetrię względem osi układu współrzędnych wykresu odpowiedniej funkcji logarytmicznej, i podaje jej własności,
- szkicuje wykres funkcji, stosując złożenia przekształceń: przesunięcia wzdłuż osi układu współrzędnych i symetrię względem osi OY , i określa własności tej funkcji.

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Multiteka

- Przekształcanie wykresu funkcji logarytmicznej (1)

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.10

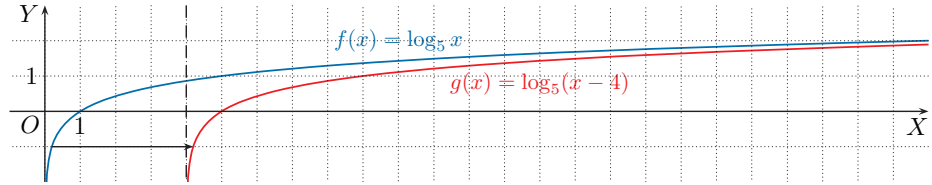
Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 3

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \log_5(x - 4)$.

Wykres funkcji g możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_5 x$ o 4 jednostki w prawo.

Dziedziną funkcji g jest zbiór $D_g = (4; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 4$. Miejscem zerowym funkcji g jest liczba 5.



Ćwiczenie 5

- a) $D = (1; \infty)$,
 $f(x) = 0$ dla $x = 2$,
asymptota: $x = 1$
- b) $D = (3; \infty)$,
 $f(x) = 0$ dla $x = 4$,
asymptota: $x = 3$
- c) $D = (2; \infty)$,
 $f(x) = 0$ dla $x = 3$,
asymptota: $x = 2$
- d) $D = (4; \infty)$,
 $f(x) = 0$ dla $x = 5$,
asymptota: $x = 4$
- e) $D = (2; \infty)$,
 $f(x) = 0$ dla $x = 3$,
asymptota: $x = 2$
- f) $D = (1; \infty)$,
 $f(x) = 0$ dla $x = 2$,
asymptota: $x = 1$

Ćwiczenie 5

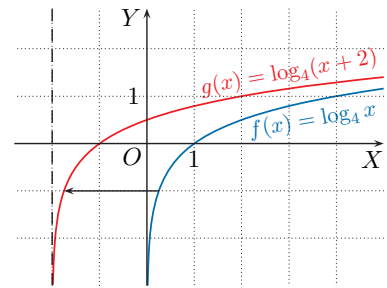
Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Wyznacz miejsce zerowe tej funkcji oraz równanie asymptoty pionowej jej wykresu.

- a) $f(x) = \log_2(x - 1)$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 2)$ e) $f(x) = \log_3(x - 2)$
- b) $f(x) = \log_2(x - 3)$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 4)$ f) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x - 1)$

Przykład 4

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \log_4(x + 2)$.

Wykres funkcji g możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_4 x$ o 2 jednostki w lewo. Dziedziną funkcji g jest zbiór $D_g = (-2; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = -2$. Miejscem zerowym funkcji g jest liczba -1 .



Ćwiczenie 6

Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Wyznacz miejsce zerowe tej funkcji oraz równanie asymptoty pionowej jej wykresu. Odczytaj z rysunku zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 1$.

- a) $f(x) = \log_2(x + 1)$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 1)$ e) $f(x) = \log_3(x + 2)$
- b) $f(x) = \log_2(x + 2)$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 4)$ f) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x + 3)$

Ćwiczenie 7

Punkt P należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_2(x + a)$. Wyznacz a .

- a) $P(-5, 0)$ b) $P(-2, 1)$ c) $P(-\frac{1}{2}, -1)$

Ćwiczenie 6

- a) $D = (-1; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 0$, asymptota: $x = -1$, $f(x) \geq 1$ dla $x \geq 1$
- b) $D = (-2; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = -1$, asymptota: $x = -2$, $f(x) \geq 1$ dla $x \geq 0$
- c) $D = (-1; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 0$, asymptota: $x = -1$, $f(x) \geq 1$ dla $x \in (-1; -\frac{1}{2}]$
- d) $D = (-4; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = -3$, asymptota: $x = -4$, $f(x) \geq 1$ dla $x \in (-4; -3\frac{1}{2}]$
- e) $D = (-2; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = -1$, asymptota: $x = -2$, $f(x) \geq 1$ dla $x \geq 1$
- f) $D = (-3; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = -2$, asymptota: $x = -3$, $f(x) \geq 1$ dla $x \in (-3; -2\frac{2}{3}]$

Ćwiczenie 7

- a) $a = 6$ b) $a = 4$ c) $a = 1$

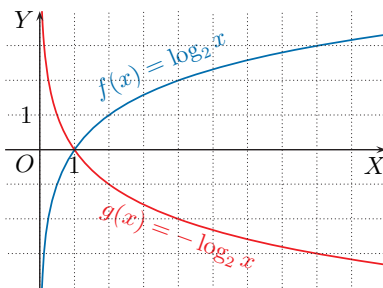
Przykład 5

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -\log_2 x$.

Wykres funkcji g możemy otrzymać przez odbicie symetryczne względem osi OX wykresu funkcji $f(x) = \log_2 x$.

Dziedziną funkcji f i g jest zbiór $(0; \infty)$.

Asymptotą pionową ich wykresów jest oś OY . Zwróć uwagę, że: $-\log_2 x = \log_{\frac{1}{2}} x$.



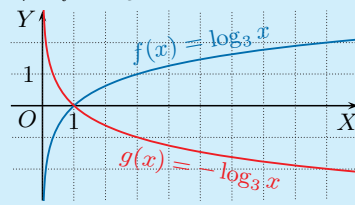
Ćwiczenie 8

Określ dziedziny funkcji f i g oraz naszkicuj ich wykresy w jednym układzie współrzędnych.

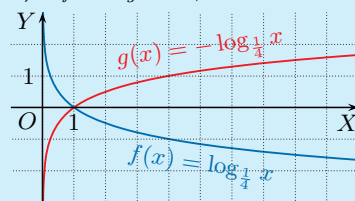
- a) $f(x) = \log_3 x$, $g(x) = -\log_3 x$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $g(x) = -\log_{\frac{1}{3}} x$

Ćwiczenie 8

- a) $D_f = D_g = \mathbf{R}_+$



- b) $D_f = D_g = \mathbf{R}_+$

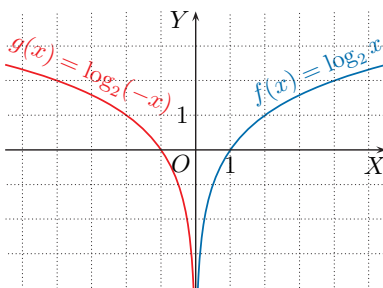


Przykład 6

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \log_2(-x)$.

Wykres funkcji g możemy otrzymać przez odbicie symetryczne względem osi OY wykresu funkcji $f(x) = \log_2 x$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (0; \infty)$, a funkcji g – zbiór $D_g = (-\infty; 0)$. Asymptotą pionową ich wykresów jest oś OY .



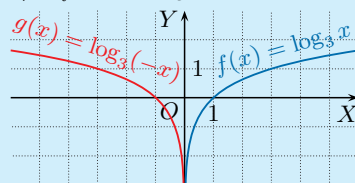
Ćwiczenie 9

Określ dziedziny funkcji f i g oraz naszkicuj ich wykresy w jednym układzie współrzędnych.

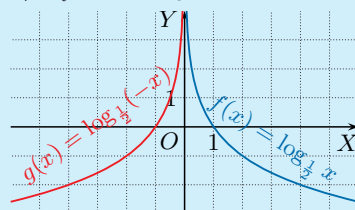
- a) $f(x) = \log_3 x$, $g(x) = \log_3(-x)$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(-x)$

Ćwiczenie 9

- a) $D_f = \mathbf{R}_+$, $D_g = \mathbf{R}_-$



- b) $D_f = \mathbf{R}_+$, $D_g = \mathbf{R}_-$



Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji f . Wyznacz jej miejsce zerowe.

- a) $f(x) = \log_2 x - 2$ c) $f(x) = \log_3 x + 1$ e) $f(x) = \log_4 x - 2$
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 1$ d) $f(x) = \log_3 x - 2$ f) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x + 2$

2. Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Podaj równanie asymptoty pionowej tego wykresu.

- a) $f(x) = \log_2(x+3)$ c) $f(x) = \log_3(x-1)$ e) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$
b) $f(x) = \log_2(x-4)$ d) $f(x) = \log_3(x+2)$ f) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x-3)$

2. a) $D = (-3; \infty)$, asymptota: $x = -3$
b) $D = (4; \infty)$, asymptota: $x = 4$
c) $D = (1; \infty)$, asymptota: $x = 1$
d), e) $D = (-2; \infty)$, asymptota: $x = -2$
f) $D = (3; \infty)$, asymptota: $x = 3$

Odpowiedzi do zadań

1. a) 4 b) 2 c) $\frac{1}{3}$
d) 9 e) 16 f) 16

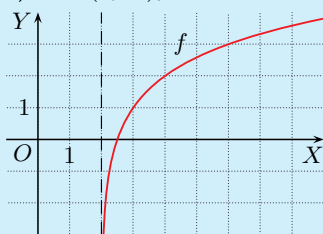
3. a) $g(x) = \log_{\sqrt{2}} x - 2$,
 $g(x) = 0$ dla $x = 2$
 b) $g(x) = \log_{\sqrt{2}} x + 1$,
 $g(x) = 0$ dla $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 c) $g(x) = \log_{\sqrt{2}} x - 1$,
 $g(x) = 0$ dla $x = \sqrt{2}$

4. a) $D = (-1; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-1; 3)$
 b) $D = (1; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (\frac{3}{2}; \infty)$
 c) $D = (2; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (2; \frac{55}{27})$
 d) $D = (-3; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-3; 0)$
 e) $D = (-4; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-2; \infty)$
 f) $D = (1; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (\frac{28}{27}; \infty)$

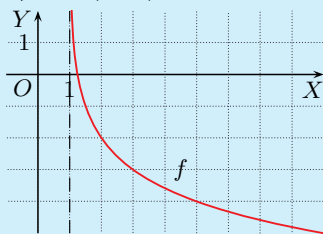
5. $D = \mathbf{R}_+$
 a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) 4 d) 3

6. $D = \mathbf{R}_-$
 a) $-\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) -9 d) -8

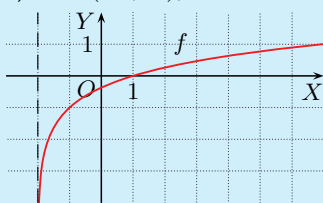
7. a) $D = (2; \infty)$, $x = 2$



- b) $D = (1; \infty)$, $x = 1$



- c) $D = (-2; \infty)$, $x = -2$

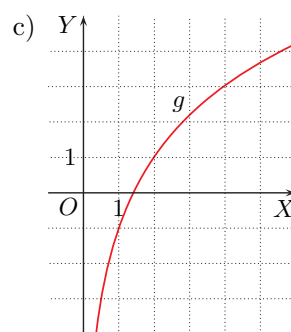
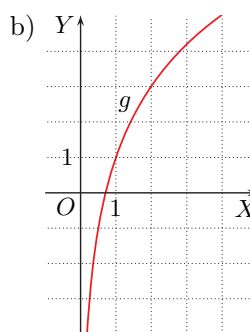
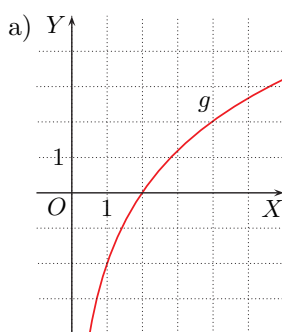


- d) $D = (-3; \infty)$, $x = -3$

- e) $D = (1; \infty)$, $x = 1$

- f) $D = (-2; \infty)$, $x = -2$

3. Przedstawiony na rysunku wykres funkcji g można otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_{\sqrt{2}} x$ wzdłuż osi OY . Podaj wzór funkcji g i wyznacz jej miejsce zerowe.



4. Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres. Podaj zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne.

- a) $f(x) = \log_2(x + 1) - 2$ d) $f(x) = \log_3(x + 3) - 1$
 b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) - 1$ e) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 4) + 1$
 c) $f(x) = \log_3(x - 2) + 3$ f) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x - 1) - 3$

5. Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres. Podaj jej miejsce zerowe.

- a) $f(x) = -\log_3 x - 1$ c) $f(x) = 2 - \log_2 x$
 b) $f(x) = -\log_{\frac{1}{2}} x + 2$ d) $f(x) = -1 - \log_{\frac{1}{3}} x$

6. Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres. Podaj jej miejsce zerowe.

- a) $f(x) = \log_2(-x) + 1$ c) $f(x) = \log_3(-x) - 2$
 b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(-x) - 1$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x) + 3$

Powtórzenie

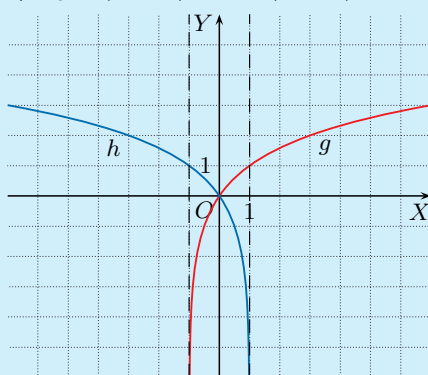
7. Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres. Podaj równanie asymptoty pionowej wykresu tej funkcji.

- a) $f(x) = \log_2(x - 2) + 1$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x + 3) + 2$
 b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) - 2$ e) $f(x) = \log_4(x - 1) - 3$
 c) $f(x) = \log_3(x + 2) - 1$ f) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x + 2) - 2$

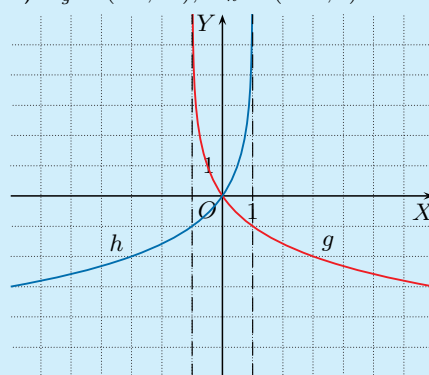
8. Naskicuj wykresy funkcji $g(x) = f(x + 1)$ i $h(x) = g(-x)$. Podaj dziedziny tych funkcji.

- a) $f(x) = \log_2 x$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

8. a) $D_g = (-1; \infty)$, $D_h = (-\infty; 1)$



- b) $D_g = (-1; \infty)$, $D_h = (-\infty; 1)$



1.11. Funkcje wykładnicza i logarytmiczna – zastosowania

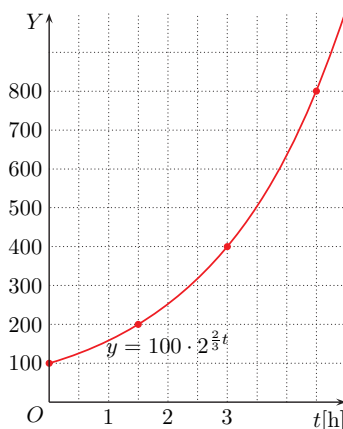
■ Wzrost wykładniczy

Przykład 1

Pewne doświadczenie polegało na badaniu wzrostu liczebności kolonii bakterii. Na początku doświadczenia było 100 bakterii. Stwierdzono, że liczba bakterii podwaja się w ciągu półtorej godziny. Przyjmuje się, że liczbę bakterii, w zależności od czasu t mierzonych w godzinach, wyraża wzór:

$$y = y_0 \cdot a^t$$

w którym y_0 jest początkową liczbą bakterii, natomiast a jest pewną stałą. Aby wyznaczyć a , zauważmy, że dla $t = 1,5$ zachodzi równość $200 = 100 \cdot a^{1,5}$. Stąd $a = 2^{\frac{2}{3}} \approx 1,588$.



Ćwiczenie 1

Po dwóch godzinach od rozpoczęcia pewnego doświadczenia liczba bakterii była równa 1200, a po sześciu godzinach wzrosła do 10 800. Liczbę bakterii, w zależności od czasu t mierzonych w godzinach, wyraża wzór:

$$y = y_0 \cdot a^t$$

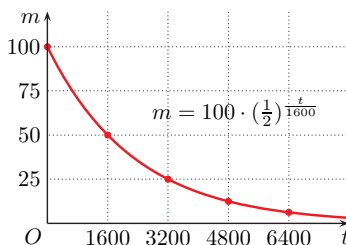
w którym y_0 jest początkową liczbą bakterii, natomiast a jest pewną stałą. Oblicz, ile było bakterii na początku doświadczenia, a ile po 10 godzinach.

■ Rozpad promieniotwórczy

Wzór $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ opisuje masę próbki promieniotwórczego izotopu o okresie połowicznego rozpadu T , po upływie czasu t (m_0 oznacza masę początkową próbki).

Na przykład okres połowicznego rozpadu radu-226 jest równy 1600 lat. Jeśli masa początkowa m_0 próbki tego izotopu była równa 100 mg, to po upływie t lat masa dana jest za pomocą wzoru:

$$m = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$$



Uwaga. Czas t powinien być podany w tych samych jednostkach co okres połowicznego rozpadu T (w tym przypadku jest podany w latach).

Ćwiczenie 1

$$10800 = y_0 \cdot a^6 = y_0 \cdot a^2 \cdot a^4 = 1200 \cdot a^4$$

$$a^4 = 9$$

$$a = \sqrt{3}$$

$$1200 = y_0 \cdot (\sqrt{3})^2$$

$$\text{Zatem } y_0 = 400.$$

$$\text{Po 10 godzinach: } y = 400 \cdot (\sqrt{3})^{10} = 97200.$$

Uczeń:

- wykorzystuje funkcje wykładniczą i logarytmiczną do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym, dotyczących wzrostu wykładniczego i rozpadu promieniotwórczego.

Multiteka

- Datowanie radiowęglowe
- Wzrost wykładniczy w przyrodzie
- Czy podane wyrażenia są równoważne

dla nauczyciel.pl | Kartkówka 1.11



Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

a) $12,5 = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$
 $\frac{t}{1600} = 3$
 $t = 4800$ lat

b) $0,01 = 10,24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}} = \frac{1}{1024} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$
 $\frac{t}{1600} = 10$
 $t = 16000$ lat

Ćwiczenie 3

$$m = 0,25m_0$$

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{28}}$$

$$\frac{t}{28} = 2$$

$$t = 56$$
 lat

$$m = 0,125m_0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{28}} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{t}{28} = 3$$

$$t = 84$$
 lata

Masa próbki zmniejszy się o 75% po 56 latach, a o 87,5% po 84 latach.

Ćwiczenie 4

a) $0,5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$

$$\frac{t}{5700} = 1$$

$$t = 5700$$
 lat

b) $0,25 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$

$$\frac{t}{5700} = 2$$

$$t = 11400$$
 lat

Komentarz

Zauważmy, że w ćwiczeniu 4. nie są potrzebne powyższe rachunki. Zawartość izotopu zmniejszy się o 50% po 5700 latach, bo jest to okres jego połowicznego rozpadu. Połowa, która zostanie, rozpadnie się na pół po kolejnych 5700 latach, czyli zawartość izotopu zmniejszy się o 75% po 11400 latach.

Ćwiczenie 2

Po jakim czasie z próbki radu-226:

a) o masie 100 mg zostanie 12,5 mg tego izotopu,

b) o masie 10,24 mg zostanie 0,01 mg tego izotopu?

Ćwiczenie 3

Okres połowicznego rozpadu strontu-90 jest równy 28 lat. Po jakim czasie początkowa masa próbki tego izotopu zmniejszy się o 75%, a po jakim czasie o 87,5%?

W żyjącym organizmie (roślinnym lub zwierzęcym) stosunek ilości radioaktywnego izotopu węgla ^{14}C do izotopu nieradioaktywnego ^{12}C wynosi około $1,5 \cdot 10^{-12}$. Po śmierci organizmu ilość radioaktywnego izotopu ^{14}C maleje (okres jego połowicznego rozpadu wynosi około 5700 lat), a ilość izotopu ^{12}C pozostaje niezmienną. Podczas prac archeologicznych pomiar zawartości izotopu ^{14}C może więc stanowić podstawę określenia wieku znalezisk.

Przykład 2

Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ^{14}C jest równa 66% początkowej zawartości tego izotopu.

Korzystamy ze wzoru: $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$,
gdzie $T = 5700$ lat.

$m = 0,66m_0$, zatem otrzymujemy:

$$0,66 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$\log 0,66 = \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$\log 0,66 = \frac{t}{5700} \log 0,5$$

$$t = 5700 \cdot \frac{\log 0,66}{\log 0,5} \approx 3417$$

Znalezisko ma około 3417 lat.

Ćwiczenie 4

Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ^{14}C jest mniejsza od zawartości początkowej o: a) 50%, b) 75%.

Ćwiczenie 5

W pewnym znalezisku stosunek ilości izotopu węgla ^{14}C do izotopu ^{12}C wynosi $1,875 \cdot 10^{-13}$. Oblicz przybliżony wiek znaleziska.

Ćwiczenie 5

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1,875 \cdot 10^{-13}}{1,5 \cdot 10^{-12}} = \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{t}{5700} = 3$$

$$t = 17100$$
 lat



Zadania

1. W laboratorium obserwowano wzrost liczebności kolonii bakterii, która co pół godziny zwiększała się o 25%. Doświadczenie rozpoczęło się o godzinie 9.00, a o 10.00 populacja liczyła 10^5 organizmów. Wyznacz początkową liczbę bakterii y_0 i współczynnik a , jeśli wzór $y = y_0 \cdot a^t$ opisuje liczbę bakterii y po upływie czasu t . Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij (zastosuj notację wykładniczą).

Godzina	9.00	9.30	9.45	10.00	10.30	11.45	12.00
Liczba bakterii	?	?	?	10^5	?	?	?

2. a) Oblicz okres połowicznego rozpadu jodu-131, jeśli wiadomo, że z próbki o masie 4,8 g po szesnastu dniach zostało 1,2 g.
b) Po siedmiu dniach z 40 g neptunu-239 zostało 5 g tego izotopu. Oblicz okres połowicznego rozpadu.

3. Jednym z radioaktywnych odpadów w elektrowniach jądrowych jest pluton-239. Oblicz okres połowicznego rozpadu tego izotopu, jeśli wiadomo, że po 100 000 lat jego masa zmniejsza się o 75%.

4. Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ^{14}C jest mniejsza od zawartości początkowej o: a) 20%, b) 80%.

5. Oblicz, ile procent początkowej zawartości izotopu ^{14}C znajduje się w:
a) egipskiej mumii mającej 3330 lat, b) kości mającej 17 000 lat.

Powtórzenie

6. W tabeli podano, jaka część masy promieniotwórczego izotopu pozostała po upływie czasu T , $2T$, $3T$, $4T$, $5T$, $6T$, gdzie T to okres połowicznego rozpadu. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

Upływ czasu	Ułamek	Procent
T	$\frac{1}{2}$	50
$2T$	$\frac{1}{4}$	25
$3T$	$\frac{1}{8}$	12,5
$4T$	$\frac{1}{16}$	6,25
$5T$	$\frac{1}{32}$	3,125
$6T$	$\frac{1}{64}$	1,5625

7. W laboratorium obserwowano szybkość namnażania się pewnej bakterii. Badana kolonia liczyła początkowo 1000 organizmów.

Funkcja $y = 1000 \cdot (\sqrt[3]{2})^t$ opisuje liczbę bakterii po czasie t (w godzinach) od rozpoczęcia obserwacji. Oblicz $y(1)$ i $y(2)$. Po jakim czasie od rozpoczęcia obserwacji liczba bakterii się podwoiła?

5. a) $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3330}{5700}}, \frac{m}{m_0} \approx 67\%$

b) $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{17000}{5700}}, \frac{m}{m_0} \approx 13\%$

7. $y(1) \approx 1260$, $y(2) \approx 1587$, po 3 godzinach

Odpowiedzi do zadań

1. $a = 1,5625$

Liczba bakterii o godzinie:

9.00: $y_0 = 6,4 \cdot 10^4$

9.30: $8 \cdot 10^4$

9.45: ok. $8,94 \cdot 10^4$

10.30: $1,25 \cdot 10^5$

11.45: ok. $2,18 \cdot 10^5$

12.00: ok. $2,44 \cdot 10^5$

2. a) $1,2 = 4,8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{16}{T}}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{16}{T}} = \frac{1}{4}$

$\frac{16}{T} = 2$

$T = 8$ dni

b) $5 = 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{T}}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{T}} = \frac{1}{8}$

$\frac{7}{T} = 3$

$T = 2\frac{1}{3}$ dnia

3. $m = 0,25m_0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100\,000}{T}} = \frac{1}{4}$

$\frac{100\,000}{T} = 2$

$T = 50\,000$ lat

4. a) $m = 0,8m_0$

$0,8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$

$\log 0,8 = \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$

$\log 0,8 = \frac{t}{5700} \log 0,5$

$t = 5700 \cdot \frac{\log 0,8}{\log 0,5} \approx 1835$ [lat]

b) $m = 0,2m_0$

$0,2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$

$\log 0,2 = \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$

$\log 0,2 = \frac{t}{5700} \log 0,5$

$t = 5700 \cdot \frac{\log 0,2}{\log 0,5} \approx 13235$ [lat]

1.12. Zagadnienia uzupełniające

Zmiana podstawy logarytmu

Twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu

Jeśli a, b, x są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1, b \neq 1$, to $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.

Przykład 1

a) Przedstaw $\log_4 9$ w postaci logarytmu o podstawie 2.

$$\log_4 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 4} = \frac{\log_2 9}{2} = \frac{1}{2} \log_2 9 = \log_2 9^{\frac{1}{2}} = \log_2 3$$

b) Przedstaw $\log_4 9$ w postaci logarytmu o podstawie 0,25.

$$\log_4 9 = \frac{\log_{0,25} 9}{\log_{0,25} 4} = \frac{\log_{0,25} 9}{-1} = -\log_{0,25} 9 = \log_{0,25} 9^{-1} = \log_{0,25} \frac{1}{9}$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\log_2 \sqrt[4]{3}$ b) $\log_2 \frac{1}{7}$
 c) $\log_2 121$ d) $\log_2 9^{-\frac{1}{3}}$
 e) $\log_2 6^{\frac{5}{6}}$ f) $\log_2 3^{-\frac{11}{6}}$
2. a) $\frac{\log 7}{\log 0,1} = -\log 7 = \log \frac{1}{7}$
 b) $\frac{\log_2 3}{\log_2 8} = \frac{\log_2 3}{3} = \frac{1}{3} \log_2 3 = \log_2 \sqrt[3]{3}$
 c) $\frac{\log_{49} 11}{\log_{49} 7} = \frac{\log_{49} 11}{\frac{1}{2}} = 2 \log_{49} 11 = \log_{49} 121$
 d) $\frac{\log_{0,1} 625}{\log_{0,1} 10} = \frac{\log_{0,1} 625}{-1} = -\log_{0,1} 625 = \log_{0,1} \frac{1}{625}$
 e) $\frac{\log_{\frac{1}{2}} 6}{\log_{\frac{1}{2}} 2} = \frac{\log_{\frac{1}{2}} 6}{-1} = -\log_{\frac{1}{2}} 6 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{6}$
 f) $\frac{\log_3 12}{\log_3 \frac{1}{3}} = \frac{\log_3 12}{-1} = -\log_3 12 = \log_3 \frac{1}{12}$
4. a) $a = \frac{1}{2}p$ b) $a = -\frac{1}{3}p$
 c) $a = 4p$ d) $a = \frac{1}{8}p$
 e) $a = -2 - p$ f) $a = 3 + 3p$
 g) $a = -\frac{1}{3} - \frac{4}{3}p$ h) $a = -\frac{1}{3}p$
5. a) $x = 5$ b) $x = 81$
 c) $x = 9$ d) $x = 10^6 \cdot \sqrt[3]{100}$
6. $\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}$

1. Przedstaw wyrażenie w postaci logarytmu o podstawie 2.

- a) $\log_{16} 3$ c) $\log_{\sqrt{2}} 11$ e) $\log_4 6 + \log_8 6$
 b) $\log_{0,5} 7$ d) $\log_{\frac{1}{8}} 9$ f) $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_{\frac{1}{4}} 3 + \log_{0,125} 3$

2. Przedstaw podany logarytm w postaci logarytmu o podstawie c .

- a) $\log_{0,1} 7, c = 10$ c) $\log_7 11, c = 49$ e) $\log_2 6, c = \frac{1}{2}$
 b) $\log_8 3, c = 2$ d) $\log 625, c = 0,1$ f) $\log_{\frac{1}{3}} 12, c = 3$

D 3. Wykaż, że podana równość jest prawdziwa.

- a) $\log_2 25 + \log_4 25 = \log_2 125$ c) $\log_3 4 + \log_9 4 = \log_{\frac{1}{3}} 0,125$
 b) $\log_{0,1} 4 + \log_{0,01} 16 = \log \frac{1}{16}$ d) $\log_{\frac{1}{2}} 9 + \log_4 9 = \log_2 \frac{1}{3}$

4. Wyraż liczbę a za pomocą p , jeśli $p = \log_3 2$.

- a) $a = \log_9 2$ c) $a = \log_{\sqrt{3}} 4$ e) $a = \log_{\frac{1}{3}} 18$ g) $a = \log_{27} \frac{1}{48}$
 b) $a = \log_{\frac{1}{27}} 2$ d) $a = \log_{81} \sqrt{2}$ f) $a = \log_{\sqrt[3]{3}} 6$ h) $a = \log_{3\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Oblicz x .

- a) $\log_4 x = \log_{64} 125$ c) $\log_4 x = \log_8 27$
 b) $\log_4 x = \log_{\sqrt{2}} 3$ d) $\log_4 x = \log_{2\sqrt{2}} 10^5$

D 6. Uzasadnij, że jeśli $a > 0, b > 0$ oraz $a \neq 1, b \neq 1$, to prawdziwy jest wzór:
 $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

$$3. \text{ a) } L = \log_2 25 + \frac{\log_2 25}{\log_2 4} = \log_2 25 + \frac{\log_2 25}{2} = \log_2 25 + \frac{1}{2} \log_2 25 = \frac{3}{2} \log_2 25 = \log_2 25^{\frac{3}{2}} = \log_2 125 = P$$

$$\text{b) } L = \frac{\log 4}{\log 0,1} + \frac{\log 16}{\log 0,01} = \frac{\log 4}{-1} + \frac{\log 16}{-2} = -\log 4 - \frac{1}{2} \log 16 = \log 4^{-1} + \log 16^{-\frac{1}{2}} = \log \frac{1}{4} + \log \frac{1}{4} = \log \frac{1}{16} = P$$

$$\text{c) } L = \frac{\log_{\frac{1}{3}} 4}{\log_{\frac{1}{3}} 3} + \frac{\log_{\frac{1}{3}} 4}{\log_{\frac{1}{3}} 9} = \frac{\log_{\frac{1}{3}} 4}{-1} + \frac{\log_{\frac{1}{3}} 4}{-2} = -\log_{\frac{1}{3}} 4 - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 4 = -\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{3}} 4 = \log_{\frac{1}{3}} 4^{-\frac{3}{2}} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{8} = \log_{\frac{1}{3}} 0,125 = P$$

$$\text{d) } L = \frac{\log_2 9}{\log_2 \frac{1}{2}} + \frac{\log_2 9}{\log_2 4} = \frac{\log_2 9}{-1} + \frac{\log_2 9}{2} = -\log_2 9 + \frac{1}{2} \log_2 9 = -\frac{1}{2} \log_2 9 = \log_2 9^{-\frac{1}{2}} = \log_2 \frac{1}{3} = P$$

Większość kalkulatorów naukowych jest wyposażona jedynie w dwa klawisze umożliwiające obliczanie logarytmów: $\boxed{\text{LOG}}$ – dla logarytmu dziesiętnego oraz $\boxed{\text{LN}}$ – dla logarytmu naturalnego (czyli takiego, którego podstawą jest niewymierna liczba e o przybliżonej wartości 2,718281828). Jeśli chcemy użyć kalkulatora do obliczenia logarytmu o innej podstawie, najpierw korzystamy ze wzoru na zmianę podstawy logarytmu.



Przykład 2

Korzystając z odpowiedniego kalkulatora, oblicz wartość $\log_3 5$ z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

Korzystamy z twierdzenia o zmianie podstawy logarytmu:

$$\log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3} \approx \frac{0,69897}{0,47712} \approx 1,465$$

7. Oblicz wartość logarytmu z dokładnością do trzech miejsc po przecinku. Skorzystaj z tablic logarytmów dziesiętnych (str. 230–231) lub odpowiedniego kalkulatora.

- | | | | |
|---------------|---------------|-------------------|----------------|
| a) $\log_2 9$ | c) $\log_6 3$ | e) $\log_{0,5} 9$ | g) $\log_3 12$ |
| b) $\log_3 7$ | d) $\log_4 5$ | f) $\log_{0,4} 6$ | h) $\log_4 20$ |

7. a) 3,170 b) 1,771 c) 0,613
d) 1,161 e) –3,170 f) –1,955
g) 2,262 h) 2,161

Skala Richtera

Jednym z przykładów skali logarytmicznej (str. 36) jest **skala Richtera**, opublikowana w 1935 roku przez amerykańskiego geofizyka Charlesa Richtera [czyt. czarlisa richtera] (1900–1985). Służy ona do określania siły trzęsień ziemi. Miarą tej siły jest liczba $R = \log \frac{A}{A_0}$, gdzie A oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach, a $A_0 = 10^{-4}$ cm jest stałą nazywaną amplitudą wzorcową (drżania niewyczuwalne przez człowieka). Liczbę R wyraża się w stopniach skali Richtera.

8. a) W Nepalu 25 kwietnia 2015 roku miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 7,8 stopnia w skali Richtera. Oblicz amplitudę tego trzęsienia ziemi.
b) W południowych Chinach 20 kwietnia 2013 roku odnotowano trzęsienie ziemi o sile 6,6 stopnia w skali Richtera. Oblicz, ile razy większą amplitudę drgań miało to trzęsienie ziemi od amplitudy najsilniejszego ze wstrząsów wtórnych, który miał siłę 5,1 stopnia.

8. $R = \log \frac{A}{A_0} = \log A - \log 10^{-4} = \log A + 4$

a) $\log A = 7,8 - 4 = 3,8$

$A = 10^{3,8} \approx 6310$ [cm]

b) $\log A_1 = 6,6 - 4 = 2,6$, czyli $A_1 = 10^{2,6}$

$\log A_2 = 5,1 - 4 = 1,1$, czyli $A_2 = 10^{1,1}$

$\frac{A_1}{A_2} = 10^{1,5} \approx 31,6$ razy



Zestawy powtórzeniowe

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\frac{1}{64}$ b) $\frac{1}{81}$ c) -8 d) $1\frac{7}{9}$
e) 4 f) $\frac{1}{5}$ g) 27 h) 216
2. a) 5 b) -6 c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{3}{4}$
e) 13 f) $124\frac{3}{4}$ g) 0 h) $1\frac{1}{25}$
3. a) 9 b) $\sqrt[12]{5}$ c) 3 d) 3
e) 2 f) 1 g) 4 h) 27
4. a) $5^{\frac{3}{2}}$ b) $7^{2\frac{1}{2}}$ c) $5^{3\frac{1}{3}}$ d) $5^{1\frac{2}{3}}$
e) $2^{5\frac{1}{2}}$ f) $2^{4\frac{1}{3}}$ g) $2^{1\frac{2}{3}}$ h) $2^{-1\frac{1}{6}}$
6. a) $x = \frac{16}{9}, y = 2, y > x$
b) $x = 2,25, y = 2,56, y > x$
7. a) $x > 0, 2x^{\frac{2}{3}}$ b) $x \neq 0, \frac{4}{x}$
c) $x > 0, x\sqrt{x}$ d) $x > 0, x$
8. a) $x \in \{0, 2\}$ b) $x \in \{0, 2\}$
c) $x = -1$ d) $x = -1$

Zestaw I

1. Oblicz.
a) 4^{-3} c) $(-\frac{1}{2})^{-3}$ e) $\frac{2^3 \cdot 2^4}{2^5}$ g) $\frac{3^6 \cdot 9}{3^5}$
b) 3^{-4} d) $(\frac{3}{4})^{-2}$ f) $\frac{5^4 \cdot 5^{-2}}{5^3}$ h) $\frac{6^4 \cdot 36^{-1}}{6^{-1}}$
2. Oblicz.
a) $8^{\frac{1}{3}} + 9^{\frac{1}{2}}$ c) $4^{-\frac{1}{2}} + 27^{-\frac{1}{3}}$ e) $27^{\frac{2}{3}} + 32^{\frac{2}{5}}$ g) $(\frac{9}{4})^{\frac{3}{2}} - (\frac{81}{16})^{\frac{3}{4}}$
b) $64^{\frac{1}{6}} - 64^{\frac{1}{2}}$ d) $16^{-\frac{1}{4}} + 16^{-\frac{1}{2}}$ f) $25^{\frac{3}{2}} - 8^{-\frac{2}{3}}$ h) $(\frac{64}{125})^{\frac{2}{3}} + (\frac{4}{25})^{\frac{1}{2}}$
3. Oblicz.
a) $3^{\frac{5}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}$ c) $81^{\frac{3}{4}} : 81^{\frac{1}{2}}$ e) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}}$ g) $4^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}}$
b) $5^{-\frac{5}{4}} \cdot 5^{\frac{4}{3}}$ d) $9^{\frac{1}{3}} : 9^{-\frac{1}{6}}$ f) $5^{-\frac{2}{7}} : 25^{-\frac{1}{7}}$ h) $9^{\frac{3}{10}} : 27^{-\frac{4}{5}}$
4. Zapisz liczbę w postaci a^x , gdzie $a \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{Q}$.
a) $5\sqrt{5}$ c) $125\sqrt[3]{5}$ e) $16\sqrt{8}$ g) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$
b) $49\sqrt{7}$ d) $5\sqrt[3]{25}$ f) $8\sqrt[3]{16}$ h) $\frac{\sqrt[3]{2}}{2\sqrt{2}}$
5. Zapisz liczby w kolejności od największej do najmniejszej.
a) $4^{\frac{\sqrt{3}}{2}}, 8^{\frac{1}{2}}, 16^{\frac{\sqrt{2}}{4}}, 32^{\frac{\pi}{10}}, 256^{\frac{1}{4}}$ b) $(\frac{1}{3})^{3\sqrt{2}}, (\frac{1}{9})^{2,6}, (\frac{1}{27})^{\frac{3}{2}}, (\frac{1}{81})^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{243}$
6. Która z liczb jest większa: x czy y ?
a) $x = (\frac{\sqrt{3}}{2})^{-4}, y = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2}$ b) $x = (\frac{2^6}{6^3})^{-\frac{2}{3}}, y = (\sqrt[3]{1,6})^6$
7. Podaj konieczne założenia, a następnie uprość wyrażenie.
a) $\frac{(4x)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{x}}$ b) $\frac{(64x)^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{x^2}$ c) $\frac{\sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt{x}}{x^{\frac{1}{3}}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}$
8. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g . Odczytaj z rysunku rozwiązanie równania $f(x) = g(x)$.
a) $f(x) = 3^x, g(x) = 4x + 1$ c) $f(x) = (\frac{1}{3})^x, g(x) = x + 4$
b) $f(x) = 2^x, g(x) = \frac{3}{2}x + 1$ d) $f(x) = (\frac{1}{4})^x, g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{17}{4}$
9. Naskicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego, dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartości ujemne.
a) $f(x) = 5(5^x - 1)$ b) $f(x) = 8(2^{-x} - 1)$ c) $f(x) = 3(3^{x+2} - 1)$
5. a) $256^{\frac{1}{4}} > 4^{\frac{\sqrt{3}}{2}} > 32^{\frac{\pi}{10}} > 8^{\frac{1}{2}} > 16^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$
b) $(\frac{1}{3})^{3\sqrt{2}} > (\frac{1}{27})^{\frac{3}{2}} > \frac{1}{243} > (\frac{1}{9})^{2,6} > (\frac{1}{81})^{\frac{3}{2}}$
9. a) $f(x) = 5^{x+1} - 5, f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; 0)$
b) $f(x) = (\frac{1}{2})^{x-3} - 8, f(x) < 0$ dla $x \in (0; \infty)$
c) $f(x) = 3^{x+3} - 3, f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -2)$



10. Oblicz.

- a) $\log_3 27$ c) $\log_3 \frac{1}{27}$ e) $\log_{\frac{1}{3}} 27$ g) $\log_{\sqrt{3}} 27$
 b) $\log_{27} 3$ d) $\log_{\frac{1}{27}} 3$ f) $\log_{27} \sqrt{3}$ h) $\log_{27} 3\sqrt{3}$

11. Oblicz.

- a) $\log_2 8 + \log_{\frac{1}{2}} 4 + \log_9 81$ c) $\log_3 27 - \log_4 2 - \log_2 \frac{1}{8}$
 b) $\log 0,1 + \log 1000 + \log_{0,1} 10$ d) $\log_{36} 6 + \log_{16} 4 - \log_8 2$

12. Oblicz.

- a) $3^{\log_3 2}$ b) $9^{\log_3 2}$ c) $3^{1-\log_3 2}$ d) $4^{\log_4 0,5-2}$

13. Naskicuj wykres funkcji f . Odczytaj z wykresu, dla jakiego argumentu funkcja ta przyjmuje wartość a .

- a) $f(x) = 2^x - 1$, $a = \log_4 64$ c) $f(x) = -3^x$, $a = \log_3 \frac{1}{27}$
 b) $f(x) = 2^{x+1}$, $a = \log_{\frac{1}{2}} 0,25$ d) $f(x) = 3^{-x}$, $a = \log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2}$

14. Oblicz.

- a) $\log_2 6 + \log_2 8 - \log_2 3$ d) $\log 4 - \log 16 - \log 25$
 b) $\log_3 2 + \log_3 27 - \log_3 6$ e) $2 \log 5 + \log 4 - \log 10^4$
 c) $\log_4 10 - \log_4 5 + \log_4 8$ f) $3 \log 2 - \log 80 + 6 \log 1$

15. W karcie wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych na egzaminie maturalnym z biologii, chemii i fizyki znajduje się tablica przybliżonych wartości logarytmów dziesiętnych. Korzystając z zamieszczonego fragmentu tablicy, podaj przybliżone wartości:

- a) $\log 0,03$, $\log 0,3$, $\log 3$,
 b) $\log 0,054$, $\log 0,0054$, $\log 5,4$,
 c) $\log 3 + \log 9$, $\log 8 - \log 2$.

x	$\log x$	x	$\log x$	x	$\log x$
0,01	-2,000	0,26	-0,585	0,51	-0,292
0,02	-1,699	0,27	-0,569	0,52	-0,284
0,03	-1,523	0,28	-0,553	0,53	-0,276
0,04	-1,398	0,29	-0,538	0,54	-0,268
0,05	-1,301	0,30	-0,523	0,55	-0,260
0,06	-1,222	0,31	-0,509	0,56	-0,252
0,07	-1,155	0,32	-0,495	0,57	-0,244

D 16. Wykaż, że dla dowolnego $x > 0$ prawdziwa jest poniższa równość.

- a) $1 + 2 \log_3 x = \log_3 (3x^2)$ c) $2 + 3 \log_4 x = \log_4 (16x^3)$
 b) $10 \log x - 1 = \log(0,1x^{10})$ d) $6 - 2 \log x = \log \frac{1\,000\,000}{x^2}$

15. a) $\log 0,03 \approx -1,523$, $\log 0,3 \approx -0,523$

$$\log 3 = \log(0,3 \cdot 10) = \log 0,3 + \log 10 \approx 0,477$$

$$\text{b) } \log 0,054 = \log(0,54 \cdot 0,1) = \log 0,54 + \log \frac{1}{10} \approx -1,268$$

$$\log 0,0054 = \log(0,54 \cdot 0,01) = \log 0,54 + \log \frac{1}{100} \approx -2,268$$

$$\log 5,4 = \log(0,54 \cdot 10) = \log 0,54 + \log 10 \approx 0,732$$

$$\text{c) } \log 3 + \log 9 = \log 27 = \log(0,27 \cdot 100) = \log 0,27 + \log 100 \approx 1,431$$

$$\log 8 - \log 2 = \log 4 = \log(0,04 \cdot 100) = \log 0,04 + \log 100 \approx 0,602$$

16. a) $\log_3 (3x^2) = \log_3 3 + \log_3 x^2 = 1 + 2 \log_3 x$

$$\text{b) } \log(0,1x^{10}) = \log x^{10} + \log 0,1 = 10 \log x - 1$$

$$\text{c) } \log_4 (16x^3) = \log_4 16 + \log_4 x^3 = 2 + 3 \log_4 x$$

$$\text{d) } \log \frac{1\,000\,000}{x^2} = \log 1\,000\,000 - \log x^2 = 6 - 2 \log x$$

10. a) 3 b) $\frac{1}{3}$ c) -3 d) $-\frac{1}{3}$
 e) -3 f) $\frac{1}{6}$ g) 6 h) $\frac{1}{2}$

11. a) 3 b) 1 c) $\frac{11}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

12. a) 2

$$\text{b) } (3^{\log_3 2})^2 = 4$$

$$\text{c) } 3 \cdot (3^{\log_3 2})^{-1} = \frac{3}{2}$$

$$\text{d) } 4^{\log_4 0,5} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{32}$$

13. a) $a = 3$ dla $x = 2$

b) $a = 2$ dla $x = 0$

c) $a = -3$ dla $x = 1$

d) $a = 3$ dla $x = -1$

14. a) $\log_2 \left(\frac{6 \cdot 8}{3}\right) = \log_2 16 = 4$

$$\text{b) } \log_3 \left(\frac{2 \cdot 27}{6}\right) = \log_3 9 = 2$$

$$\text{c) } \log_4 \left(\frac{10 \cdot 8}{5}\right) = \log_4 16 = 2$$

$$\text{d) } \log \left(\frac{4}{16 \cdot 25}\right) = \log \frac{1}{100} = -2$$

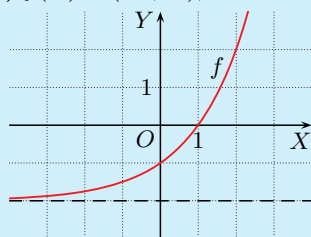
$$\text{e) } \log(5^2 \cdot 4) - 4 =$$

$$= \log 100 - 4 = -2$$

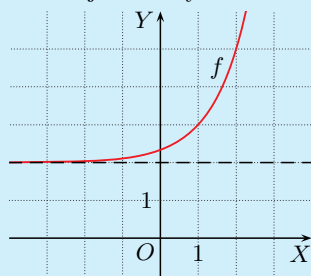
$$\text{f) } \log \left(\frac{2^3}{80}\right) + 6 \cdot 0 =$$

$$= \log \frac{1}{10} = -1$$

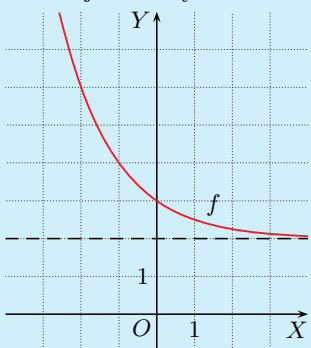
- a) $\frac{1}{81}$ b) 16 c) 1 d) 3
e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{4}$ g) $\frac{4}{27}$ h) $\frac{1}{80}$
- a) 25 b) 1 c) 2 d) 1
e) 25 f) 4 g) $\frac{1}{2}$ h) 3
- a) 7 b) 1 c) 2
d) $\frac{1}{3}$ e) 20 f) $\frac{4}{121}$
- a) $2^{\frac{7}{2}}$ b) $2^{\frac{7}{3}}$ c) $3^{-\frac{1}{2}}$
d) $3^{\frac{3}{8}}$ e) $5^{\frac{7}{8}}$ f) $2^{\frac{53}{24}}$
- a), f) – mniejsza
b), c), d), e) – większa
- a) $25^{1,1} < 5^{\sqrt{5}} < 125^{\frac{4}{5}} < 25\sqrt{5}$
b) $\frac{1}{\sqrt{8}} < 16^{-\frac{1}{3}} < 0,5 < (\sqrt{2})^{-\frac{3}{2}}$
c) $(\sqrt[3]{3})^{-2} < \frac{1}{\sqrt{3}} < 9^{\frac{1}{3}} < \sqrt[4]{27}$
d) $(4,5)^{-2} < 0,064 < (2,5)^{-2,4} < \sqrt[12]{0,4}$
- a) 12,5893 b) 0,1259
c) 0,0126 d) 0,0013
- a) $y = 4^x$ b) $y = (\frac{1}{2})^x$
c) $y = (\frac{1}{3})^x$
- a) $f(D) = (-2; \infty)$, $x = 1$



b) $f(D) = (2; \infty)$,
brak miejsc zerowych



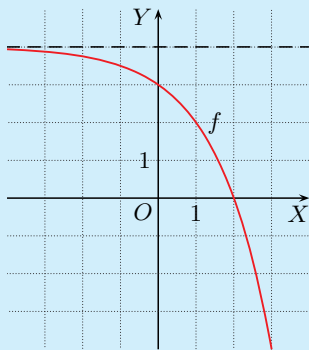
c) $f(D) = (2; \infty)$,
brak miejsc zerowych



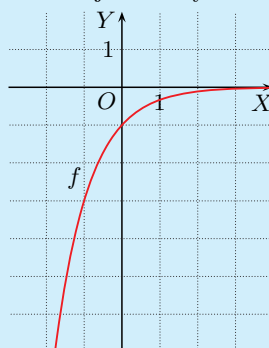
Zestaw II

- Oblicz.
 - $(3^{-2})^2$
 - $(\frac{1}{2})^{-4}$
 - $2^{-3} \cdot (\frac{1}{2})^{-3}$
 - $9^3 \cdot 3^{-5}$
 - $\frac{2^{-3} \cdot 4^{-2}}{2^{-6}}$
 - $\frac{10^{-2}}{5^{-6} \cdot 25^2}$
 - $\frac{6^4 \cdot 9^{-4}}{4^2 \cdot 12^{-1}}$
 - $\frac{16^{-2} \cdot 125^{-3}}{10^{-4} \cdot 25^{-2}}$
- Oblicz.
 - $25^{\frac{1}{2}} \cdot 625^{\frac{1}{4}}$
 - $8^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{-\frac{1}{4}}$
 - $2^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2}$
 - $27^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{-\frac{1}{2}}$
 - $25^{\frac{3}{2}} \cdot 125^{-\frac{1}{3}}$
 - $64^{-\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{5}{3}}$
 - $8^{\frac{2}{3}} \cdot 32^{-\frac{3}{5}}$
 - $0,001^{-\frac{1}{3}} \cdot 0,09^{\frac{1}{2}}$
- Oblicz.
 - $7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{6}}$
 - $5^{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{5} \cdot 5^{-\frac{4}{3}}$
 - $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} \cdot 2^{\frac{7}{5}}$
 - $(\sqrt[6]{81})^{-\frac{3}{2}}$
 - $\sqrt[3]{100} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}$
 - $\frac{11^{\frac{3}{2}}}{\sqrt[4]{44}} \cdot (\frac{2}{11})^3$
- Zapisz liczbę w postaci a^x , gdzie $a \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{Q}$.
 - $8\sqrt{2}$
 - $4\sqrt[3]{2}$
 - $\frac{\sqrt{27}}{9}$
 - $\sqrt[4]{3\sqrt{3}}$
 - $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}$
 - $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{8}$
- Określ, czy podana liczba jest większa, czy mniejsza od 1. Skorzystaj z własności funkcji wykładniczej.
 - $(\frac{3}{4})^{\frac{4}{3}}$
 - $(\frac{3}{2})^{\frac{2}{3}}$
 - $(\frac{4}{3})^{\frac{3}{4}}$
 - $(\frac{2}{3})^{-\frac{3}{2}}$
 - $(\frac{3}{4})^{-\frac{2}{3}}$
 - $(\frac{3}{2})^{-\frac{3}{4}}$
- Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej.
 - $5^{\sqrt{5}}$, $25\sqrt{5}$, $125^{\frac{4}{5}}$, $25^{1,1}$
 - $\frac{1}{\sqrt{8}}$, $(\sqrt{2})^{-\frac{3}{2}}$, $0,5$, $16^{-\frac{1}{3}}$
 - $9^{\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt[4]{27}$, $(\sqrt[3]{3})^{-2}$
 - $(4,5)^{-2}$, $\sqrt[12]{0,4}$, $(2,5)^{-2,4}$, $0,064$
- Wyznacz przybliżoną wartość potęgi z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. Skorzystaj z przybliżenia $\sqrt[10]{10} \approx 1,258925$.
 - $10^{1,1}$
 - $10^{-0,9}$
 - $10^{-1,9}$
 - $10^{-2,9}$
- Wykres funkcji wykładniczej $y = a^x$ przechodzi przez punkt P . Wyznacz wzór tej funkcji i naszkicuj jej wykres.
 - $P(\frac{5}{2}, 32)$
 - $P(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
 - $P(-6, 729)$
- Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj zbiór wartości tej funkcji oraz jej miejsca zerowe (jeśli istnieją).
 - $f(x) = 2^x - 2$
 - $f(x) = 3^{x-1} + 2$
 - $f(x) = 2 + 2^{-x}$
 - $f(x) = 4 - 2^x$
 - $f(x) = -3^{-x}$
 - $f(x) = 2^{2x} - 4$

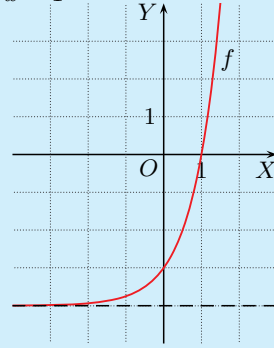
d) $f(D) = (-\infty; 4)$,
 $x = 2$



e) $f(D) = (-\infty; 0)$,
brak miejsc zerowych



f) $f(D) = (-4; \infty)$,
 $x = 1$





10. Oblicz $\sqrt{ab}$.

a) $a = \log_3 9$, $b = \log_2 256$

b) $\log_2 a = 5$, $\log_4 b = \frac{1}{2}$

11. Oblicz x .

a) $\log_{\frac{1}{4}} x = -2$

c) $\log_{81} x^2 = \frac{1}{2}$

e) $\log_9 |x| = \frac{3}{2}$

b) $\log_4 x = \frac{3}{2}$

d) $\log_{\frac{1}{8}} x^2 = \frac{1}{3}$

f) $\log_{2\sqrt{2}} |x| = 4$

12. Oblicz x .

a) $\log_6 x = \log_6 4 + \log_6 9$

c) $\log x = 2 \log 5 + \log 4$

b) $\log_3 x = \log_3 18 - \log_3 2$

d) $\log x = \log 80 - 3 \log 2$

13. Oblicz podstawę logarytmu.

a) $\log_a 2 = \frac{1}{2}$

b) $\log_a 8 = 6$

c) $\log_a 32 = -5$

14. Do której ćwiartki układu współrzędnych należy punkt (x, y) ?

a) $x = \log_{\frac{1}{4}} 1024$, $y = \log_{\sqrt{2}} 4$

b) $x = \log_2 \pi$, $y = \log_{\frac{1}{2}} \pi$

15. Oblicz $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x)$, jeśli:

a) $x = 3$,

b) $x = \sqrt{3}$,

c) $x = 81$,

d) $x = 3^8$.

16. Wykres funkcji g otrzymano w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = (\frac{1}{2})^x$. Naskicuj wykres funkcji g i podaj jej wzór, jeżeli przekształceniem tym jest:

a) przesunięcie o 2 jednostki w dół,

c) symetria względem osi OY ,

b) przesunięcie o 1 jednostkę w lewo,

d) symetria względem osi OX .

17. Naskicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji f , g i h . Podaj asymptoty tych wykresów i miejsca zerowe funkcji.

a) $f(x) = \log_2 x + 2$, $g(x) = \log_2(x + 2)$, $h(x) = \log_2(x + 2) + 2$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 2)$, $h(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}(x - 2)$

18. Do wykresu funkcji $f(x) = \log_a(x - 2) + 1$ należy punkt P . Wyznacz a i naskicuj wykres funkcji f .

a) $P(4, 2)$

b) $P(6, 2)$

c) $P(\frac{7}{3}, 0)$

d) $P(4, 3)$

19. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj jej dziedzinę oraz zbiór argumentów, dla których funkcja ta przyjmuje wartości ujemne.

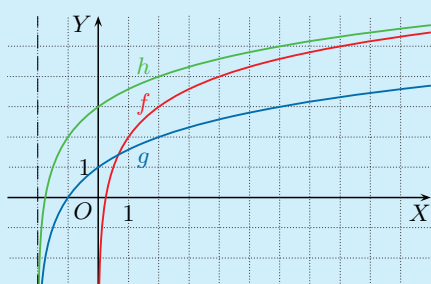
a) $f(x) = \log_2(x - 3) - 1$

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x + 2)$

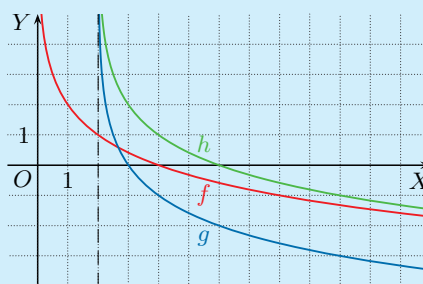
b) $f(x) = -\log_4(x + 1) + 1$

d) $f(x) = -\log_3(x + 3) + 2$

17. a) asymptota f : $x = 0$, g i h : $x = -2$,
 $f(\frac{1}{4}) = 0$, $g(-1) = 0$, $h(-\frac{7}{4}) = 0$



b) asymptota f : $x = 0$, g i h : $x = 2$,
 $f(4) = 0$, $g(3) = 0$, $h(6) = 0$



10. a) 4 b) 8

11. a) $x = 16$

b) $x = 8$

c) $x = -3$ lub $x = 3$

d) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $x = -27$ lub $x = 27$

f) $x = -64$ lub $x = 64$

12. a) $x = 36$ b) $x = 9$

c) $x = 100$ d) $x = 10$

13. a) $a = 4$ b) $a = \sqrt{2}$ c) $a = \frac{1}{2}$

14. a) $x = -5$, $y = 4$; II ćwiartka

b) $x = \log_2 \pi > \log_2 1 = 0$,

$y = \log_{\frac{1}{2}} \pi < \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$;

IV ćwiartka

15. a) 0 b) 1 c) -2 d) -3

16. a) $g(x) = (\frac{1}{2})^x - 2$

b) $g(x) = (\frac{1}{2})^{x+1}$

c) $g(x) = 2^x$

d) $g(x) = -(\frac{1}{2})^x$

18. a) $a = 2$ b) $a = 4$

c) $a = 3$ d) $a = \sqrt{2}$

19. a) $D = (3; \infty)$,

$f(x) < 0$ dla $x \in (3; 5)$

b) $D = (-1; \infty)$,

$f(x) < 0$ dla $x \in (3; \infty)$

c) $D = (-1; \infty)$,

$f(x) < 0$ dla $x \in (-\frac{1}{2}; \infty)$

d) $D = (-3; \infty)$,

$f(x) < 0$ dla $x \in (6; \infty)$

**D Przykład 1**

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb x, y prawdziwa jest równość:

$$\log \frac{1}{xy^2} - \log x^{-1} = -\frac{1}{2} \log y^4$$

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

Przekształcamy lewą stronę równania tak, aby otrzymać jego prawą stronę:

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{xy^2} - \log x^{-1} &= -\log xy^2 + \log x = -\log x - \log y^2 + \log x = \\ &= -\log y^2 = -\log(y^4)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \log y^4 \end{aligned}$$

II sposób

Kolejno piszemy równania równoważne z równaniem wyjściowym:

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{xy^2} - \log x^{-1} &= -\frac{1}{2} \log y^4 \\ \log x^{-1} y^{-2} - \log x^{-1} &= \log(y^4)^{-\frac{1}{2}} \\ \log \frac{x^{-1} y^{-2}}{x^{-1}} &= \log y^{-2} \\ \log y^{-2} &= \log y^{-2} \end{aligned}$$

Ostatnia równość jest prawdziwa, więc prawdziwa jest też równość wyjściowa.

D Przykład 2

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb x, y, z prawdziwa jest równość:

$$\log xy + \log \frac{z^2}{y} = \log xyz - \log \frac{y}{z}$$

I sposób

Przekształcamy lewą stronę równania tak, aby otrzymać jego prawą stronę:

$$\begin{aligned} \log xy + \log \frac{z^2}{y} &= \log \left(xy \cdot \frac{z^2}{y} \right) = \log \left(xyz \cdot \frac{z}{y} \right) = \\ &= \log \left(xyz : \frac{y}{z} \right) = \log xyz - \log \frac{y}{z} \end{aligned}$$

II sposób

Przekształcamy podaną równość w sposób równoważny:

$$\begin{aligned} \log xy + \log \frac{z^2}{y} &= \log xyz - \log \frac{y}{z} \\ \log \left(xy \cdot \frac{z^2}{y} \right) &= \log \frac{xyz}{\frac{y}{z}} \\ \log xz^2 &= \log xz^2 \end{aligned}$$

Ostatnia równość jest prawdziwa, więc prawdziwa jest też równość wyjściowa.



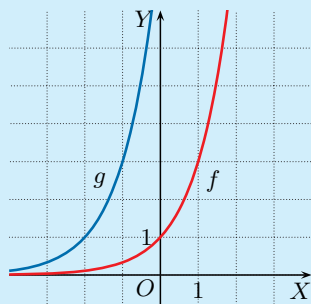
Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

- Do wykresu funkcji $f(x) = 4^x$ należy punkt o współrzędnych:
 A. $(-1, -4)$, B. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, **C. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,** D. $(\frac{1}{4}, 1)$.
- Wartość funkcji $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ jest liczbą całkowitą dla:
 A. $x = \frac{1}{2}$, **B. $x = -3$,** C. $x = 2$, D. $x = 10$.
- Wartość funkcji $f(x) = (\sqrt{2})^x$ jest liczbą wymierną dla:
 A. $x = 1$, B. $x = -1$, C. $x = -3$, **D. $x = -6$.**
- Funkcją rosnącą jest funkcja:
 A. $f(x) = (\sqrt{3} - 1)^x$, C. $f(x) = (\frac{1}{2})^x$,
B. $f(x) = (\sqrt{5} - 1)^x$, D. $f(x) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^x$.
- Która funkcja ma dodatnie miejsce zerowe?
A. $f(x) = 6^x - 6$ C. $h(x) = (\frac{1}{2})^x - 2$
 B. $g(x) = 4^x + 4$ D. $k(x) = (\frac{1}{2})^x + 2$
- Prawdziwa jest nierówność:
A. $3^{\sqrt{2}} \leq 3^{1,5}$, C. $2^\pi \leq 2^{3,14}$,
 B. $0,5^{\sqrt{2}} \leq 0,5^{1,5}$, D. $4^\pi \leq 4^{3,141}$.
- Prawdziwa jest równość:
 A. $16^{\sqrt{2}} \cdot 4^{2\sqrt{2}} = 16^{3\sqrt{2}}$, C. $4^{\sqrt{3}} : 2^{2\sqrt{3}} = 2$,
B. $8^{2\sqrt{5}} : 2^{6\sqrt{5}-1} = 2$, D. $2^{5\sqrt{5}} \cdot 32^{2-\sqrt{5}} = 2^5$.
- Prawdziwa jest nierówność:
 A. $\log_2 8 < \log_3 9$, C. $\log_2 \frac{1}{2} > \log_{\frac{1}{3}} 3$,
B. $\log_{\frac{1}{2}} 8 < \log_{\frac{1}{3}} 9$, D. $\log_{\frac{1}{2}} 1 > \log_3 3$.
- Prawdziwa jest równość:
A. $\log_3 12 - 2\log_3 2 = 1$, C. $\log_3 6 + \log_3 \frac{1}{2} = 3$,
 B. $\log_3 27 + \log_3 3 = 3$, D. $\log_3 75 - \log_3 25 = -1$.
- Punkt $(8, -3)$ należy do wykresu funkcji:
 A. $f(x) = \log_6(x - 6) - 6$, C. $f(x) = \log_3(x - 3) - 3$,
B. $f(x) = \log_4(x - 4) - 4$, D. $f(x) = \log_2(x - 2) - 2$.
- A. $f(1) = 0$
 B. $g(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$
 C. $h(-1) = 0$
 D. $k(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$
- A. $16^{\sqrt{2}} \cdot 16^{\sqrt{2}} = 16^{2\sqrt{2}}$
 B. $2^{6\sqrt{5}} : \frac{2^{6\sqrt{5}}}{2} =$
 $= 2^{6\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{2^{6\sqrt{5}}} = 2$
 C. $4^{\sqrt{3}} : 4^{\sqrt{3}} = 1$
 D. $2^{5\sqrt{5}} : \frac{(2^5)^2}{2^{5\sqrt{5}}} = 2^{10}$
- A. $3 < 2$, nie
 B. $-3 < -2$, tak
 C. $-1 > -1$, nie
 D. $0 > 1$, nie
- A. $\log_3 \frac{12}{32} = \log_3 3 = 1$
 B. $3 + 1 = 4$
 C. $\log_3 (6 \cdot \frac{1}{2}) = \log_3 3 = 1$
 D. $\log_3 \frac{75}{25} = \log_3 3 = 1$
- A. $\log_6 2 - 6 \neq -3$
 B. $\log_4 4 - 4 = 1 - 4 = -3$
 C. $\log_3 5 - 3 \neq -3$
 D. $\log_2 6 - 2 \neq -3$



Odpowiedzi do zadań

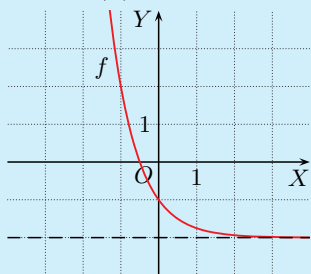
- $2^{3+2\sqrt{3}} : 4^{\sqrt{3}} = 2^{3+2\sqrt{3}} : 2^{2\sqrt{3}} = 2^3 = 8$
Zatem szukaną liczbą jest 10.
- $2 = 16^p$
 $p = \frac{1}{4}$
- $L = 4 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot 2 = 20$
 $P = 5 \cdot 4 = 20 = L$
- $\log_2 \sqrt{6} + \log_2 \sqrt{8} - \log_2 \sqrt{3} = \log_2 \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \log_2 4 = 2 \in \mathbb{Q}$
- $\log x^2 y^3 = \log(x \cdot y^2 \cdot xy) = \log x + \log y^2 + \log xy = \log x + 2 \log y + \log xy$
- $-1 = a^{-\frac{1}{2}} - 3$
 $\sqrt{\frac{1}{a}} = 2$
 $a = \frac{1}{4}$
 $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 3$
 $f(-5) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-5} - 3 = 1021$
- $f(x) = 3^x$,
 $g(x) = 9 \cdot 3^x = 3^{x+2}$



Wykres funkcji g otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji f o 2 jednostki w lewo.

Zatem $|PQ| = 2$.

- $a = \frac{1}{4}$, $b = -2$,
 $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 2$



Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Wyznacz liczbę, której 80% jest równe $2^{3+2\sqrt{3}} : 4^{\sqrt{3}}$.

Zadanie 2 (2 pkt)

Punkt $P(p, 2)$ należy do wykresu funkcji $y = 16^x$. Wyznacz p .

D Zadanie 3 (2 pkt)

Uzasadnij równość $4 \log_9 3 + 9 \log_3 9 = 5 \log_3 81$.

D Zadanie 4 (2 pkt)

Uzasadnij, że liczba $\log_2 \sqrt{6} + \log_2 \sqrt{8} - \log_2 \sqrt{3}$ jest wymierna.

D Zadanie 5 (2 pkt)

Wykaż, że dla $x > 0$, $y > 0$ prawdziwa jest równość:

$$\log x^2 y^3 = \log x + 2 \log y + \log xy$$

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 6 (4 pkt)

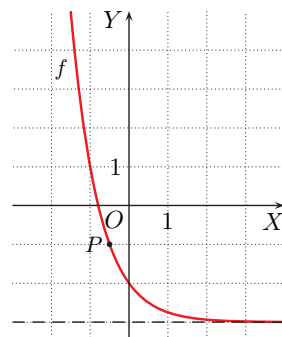
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = a^x - 3$$

Oblicz wartość tej funkcji dla $x = -5$, jeśli wiadomo, że punkt $P(-\frac{1}{2}, -1)$ należy do jej wykresu.

Zadanie 7 (4 pkt)

Naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = 3^x$ i $g(x) = 9 \cdot 3^x$. Prosta o równaniu $y = 100$ przecina wykres funkcji f w punkcie P , a wykres funkcji g w punkcie Q . Ile jest równa długość odcinka PQ ?



Zadanie 8 (4 pkt)

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = a^x + b$, gdzie $a = \log_9 \sqrt{3}$ oraz $b = \log_3 \frac{1}{9}$.

D Zadanie 9 (3 pkt)

Wykaż, że dla $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ prawdziwa jest równość:

$$2 \log \frac{x^3}{y} - 3 \log x^2 z = 2 \log \left(\frac{y}{z}\right)^{-1} - 5 \log z$$

Zadanie 10 (4 pkt)

Punkt $(1, -1)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_2(x - a) + b$, a prosta o równaniu $x = -3$ jest jego asymptotą pionową. Podaj współczynniki a i b oraz naszkicuj wykres funkcji f .

$$9. L = \log \frac{x^6}{y^2} - \log x^6 z^3 = \log x^6 - \log y^2 - (\log x^6 + \log z^3) = -\log y^2 - \log z^3 = \log z^{-3} - \log y^2$$

$$P = \log \left(\frac{y}{z}\right)^{-2} - \log z^5 = \log \left(\frac{z}{y}\right)^2 - \log z^5 = \log z^2 - \log y^2 - \log z^5 = \log z^{-3} - \log y^2$$

$$\text{Zatem } L = P.$$

$$10. a = b = -3$$

