



## 2 Geometria analityczna

Dzięki wprowadzeniu układu współrzędnych, w którym punktom płaszczyzny odpowiadają pary liczb  $(x, y)$ , problemy geometryczne można rozwiązywać metodami algebraicznymi.

Układ współrzędnych wykorzystywany jest także w geografii. Określając położenie punktu na kuli ziemskiej, podaje się jego szerokość i długość geograficzną, np. położenie latarni morskiej na wyspie w archipelagu Utklippan w Szwecji – szerokość geograficzna:  $55^{\circ}57'10''\text{N}$ , długość geograficzna:  $15^{\circ}42'06''\text{E}$ .

### Multiteka

- Topologia
- Układ współrzędnych biegunowych
- Współrzędne kartezjańskie

**Uczeń:**

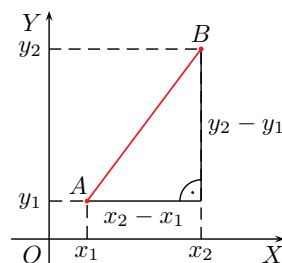
- oblicza odległości między punktami w układzie współrzędnych,
- stosuje wzór na odległość między punktami w zadaniach dotyczących wielokątów w układzie współrzędnych,
- wyznacza równanie krzywej, do której należą punkty równo odległe od punktu i od prostej.

## 2.1. Odległość między punktami w układzie współrzędnych

Odległość między punktami  $A$  i  $B$  jest równa długości odcinka  $AB$ .

Rozważmy punkty  $A(x_1, y_1)$  i  $B(x_2, y_2)$  w prostokątnym układzie współrzędnych. Odległość między nimi możemy obliczyć, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$



### Twierdzenie

Odległość między punktami  $A(x_1, y_1)$  i  $B(x_2, y_2)$  wyraża się za pomocą wzoru:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

### Przykład 1

Oblicz odległość między punktami  $A(2, 5)$  i  $B(-1, 1)$ .

$$|AB| = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

### Ćwiczenie 1

- a)  $|AB| = -3 + 5 = 2$   
 b)  $|AB|^2 = (-7 - 5)^2 + (-1\frac{1}{2} + 6\frac{1}{2})^2 = 169$   
 $|AB| = 13$   
 c)  $|AB|^2 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})^2 + (-1 + \frac{2}{3})^2 = \frac{5}{36}$   
 $|AB| = \frac{\sqrt{5}}{6}$   
 d)  $|AB|^2 = (\sqrt{3} - 3 - \sqrt{3})^2 + (-4 + \sqrt{7} - \sqrt{7})^2 = 25$   
 $|AB| = 5$

### Ćwiczenie 2

$$\begin{aligned} Ob_{\triangle ABC} &= 5 + 10 + 3\sqrt{5} = \\ &= 15 + 3\sqrt{5} \\ Ob_{\triangle DEF} &= \sqrt{26} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \\ &= \sqrt{26} + 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

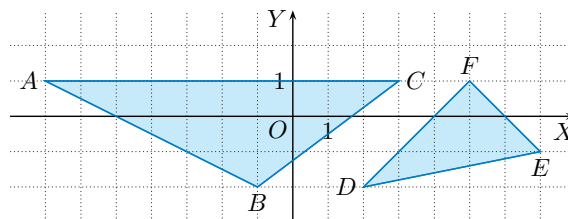
### Ćwiczenie 1

Oblicz odległość między punktami  $A$  i  $B$ .

- a)  $A(-3, -1)$ ,  $B(-5, -1)$       c)  $A(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ ,  $B(\frac{1}{2}, -1)$   
 b)  $A(5, -6\frac{1}{2})$ ,  $B(-7, -1\frac{1}{2})$       d)  $A(3 + \sqrt{3}, \sqrt{7})$ ,  $B(\sqrt{3}, -4 + \sqrt{7})$

### Ćwiczenie 2

Oblicz obwody trójkątów  $ABC$  i  $DEF$  przedstawionych na rysunku obok.



### Ćwiczenie 3

Sprawdź, czy trójkąt  $ABC$  jest równoramienny.

- a)  $A(1, 3)$ ,  $B(6, 4)$ ,  $C(4, -1)$       c)  $A(-3, -3)$ ,  $B(12, -3)$ ,  $C(6, 9)$   
 b)  $A(0, 0)$ ,  $B(4, -1)$ ,  $C(3, 3)$       d)  $A(-1, 0)$ ,  $B(2, \sqrt{3})$ ,  $C(2 - \sqrt{3}, \sqrt{3})$

### Ćwiczenie 3

- a)  $|AB| = \sqrt{26}$ ,  $|AC| = 5$ ,  $|BC| = \sqrt{29}$ , czyli nie jest równoramienny.  
 b)  $|AB| = |BC| = \sqrt{17}$ ,  $|AC| = 3\sqrt{2}$ , czyli jest równoramienny.  
 c)  $|AB| = |AC| = 15$ ,  $|BC| = 6\sqrt{5}$ , czyli jest równoramienny.  
 d)  $|AB| = 2\sqrt{3}$ ,  $|AC| = \sqrt{15 - 6\sqrt{3}}$ ,  $|BC| = \sqrt{3}$ , czyli nie jest równoramienny.

## Przykład 2

Sprawdź, czy trójkąt o wierzchołkach  $A(-2, -4)$ ,  $B(4, 2)$  i  $C(1, 5)$  jest prostokątny.

$$|AB| = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (2 - (-4))^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$$

$$|AC| = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (5 - (-4))^2} = \sqrt{9 + 81} = \sqrt{90}$$

$$|BC| = \sqrt{(1 - 4)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$$

Zauważmy, że:  $|AB|^2 + |BC|^2 = 72 + 18 = 90 = |AC|^2$ .

Zatem z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wynika, że trójkąt  $ABC$  jest prostokątny.

## Ćwiczenie 4

Sprawdź, czy trójkąt  $ABC$  jest równoramienny. Czy jest prostokątny?

a)  $A(-1, 2)$ ,  $B(4, 1)$ ,  $C(2, 4)$

c)  $A(1, 1)$ ,  $B(5, 3)$ ,  $C(-1, 6)$

b)  $A(-3, 0)$ ,  $B(1, -4)$ ,  $C(5, 4)$

d)  $A(-4, 0)$ ,  $B(-1, -3)$ ,  $C(5, 3)$

## Zadania

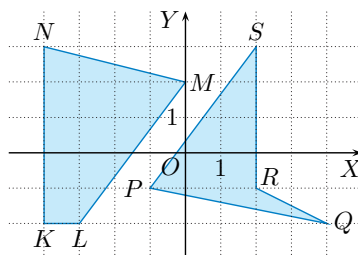
1. Który z czworokątów  $KLMN$  i  $PQRS$  (rysunek obok) ma większy obwód?

2. Który z odcinków  $AB$  i  $CD$  jest dłuższy?

a)  $A(1, -2)$ ,  $B(4, 4)$ ,  $C(2, 2)$ ,  $D(8, -2)$

b)  $A(-2, 3)$ ,  $B(4, 1)$ ,  $C(-1, 1)$ ,  $D(4, 6)$

c)  $A(3, -2)$ ,  $B(8, -2)$ ,  $C(-2, 2)$ ,  $D(2, 5)$



3. Sprawdź, czy trójkąt  $ABC$  jest prostokątny.

a)  $A(3, 0)$ ,  $B(-6, 8)$ ,  $C(-2, -2)$

b)  $A(-5, -1)$ ,  $B(4, 1)$ ,  $C(3, 5)$

4. Sprawdź, czy trójkąty  $ABC$  i  $DEF$  są przystające lub podobne.

a)  $A(2, 2)$ ,  $B(8, 5)$ ,  $C(1, 4)$ ,  $D(-2, 0)$ ,  $E(4, -3)$ ,  $F(5, -1)$

b)  $A(-1, 1)$ ,  $B(2, 5)$ ,  $C(0, 4)$ ,  $D(4, 4)$ ,  $E(0, 2)$ ,  $F(-2, -4)$

c)  $A(1, -1)$ ,  $B(3, 2)$ ,  $C(-1, 3)$ ,  $D(0, 3)$ ,  $E(-4, -3)$ ,  $F(4, -5)$

5. Oblicz obwód oraz wysokości trójkąta, którego jednym z wierzchołków jest punkt przecięcia prostych:

a)  $y = x - 1$  i  $y = -\frac{1}{2}x + 5$ , a pozostałe wierzchołki są punktami przecięcia tych prostych z osią  $OY$ ,

b)  $y = x + 2$  i  $y = 3x - 6$ , a pozostałe wierzchołki są punktami przecięcia tych prostych z osią  $OX$ .

3. a) Obliczamy współczynniki kierunkowe prostych zawierających boki trójkąta:

$$a_{AC} = \frac{2}{5}, a_{BC} = -\frac{5}{2}$$

Zauważmy, że  $a_{AC} \cdot a_{BC} = -1$ , zatem trójkąt jest prostokątny.

b) Obliczamy kwadraty długości boków trójkąta:

$$|AB|^2 = 85, |BC|^2 = 17, |AC|^2 = 100$$

Zauważmy, że  $85 + 17 \neq 100$ , zatem na podstawie twierdzenia Pitagorasa trójkąt nie jest prostokątny.

4. a)  $|AB| = |DE| = 3\sqrt{5}$ ,  $|AC| = |EF| = \sqrt{5}$ ,  $|BC| = |DF| = 5\sqrt{2}$ , więc trójkąty są przystające.

b)  $|AB| = 5$ ,  $|AC| = \sqrt{10}$ ,  $|BC| = \sqrt{5}$ ,  $|DE| = 2\sqrt{5}$ ,  $|DF| = 10$ ,  $|EF| = 2\sqrt{10}$ , więc trójkąty są podobne.

c)  $|AB| = \sqrt{13}$ ,  $|AC| = 2\sqrt{5}$ ,  $|BC| = \sqrt{17}$ ,  $|DE| = 2\sqrt{13}$ ,  $|DF| = 4\sqrt{5}$ ,  $|EF| = 2\sqrt{17}$ , więc trójkąty są podobne.

## Ćwiczenie 4

a)  $|AB| = \sqrt{26}$ ,

$$|AC| = |BC| = \sqrt{13},$$

$$(\sqrt{13})^2 + (\sqrt{13})^2 = (\sqrt{26})^2$$

Trójkąt jest równoramienny i prostokątny.

b)  $|AB| = 4\sqrt{2}$ ,

$$|AC| = |BC| = 4\sqrt{5}$$

Trójkąt jest równoramienny i nie jest prostokątny.

c)  $|AB| = 2\sqrt{5}$ ,  $|AC| = \sqrt{29}$ ,

$$|BC| = 3\sqrt{5}$$

Trójkąt nie jest równoramienny i nie jest prostokątny.

d)  $|AB| = 3\sqrt{2}$ ,  $|AC| = 3\sqrt{10}$ ,

$$|BC| = 6\sqrt{2}$$

Trójkąt nie jest równoramienny i jest prostokątny.

## Odpowiedzi do zadań

1.  $Ob_{KLMN} = 11 + \sqrt{17} < 11 + 5 = 16$

$$Ob_{PQRS} = 9 + \sqrt{26} + \sqrt{5} > 9 + 5 + 2 = 16$$

Zatem  $Ob_{PQRS} > Ob_{KLMN}$ .

2. a)  $|AB| = \sqrt{45}$ ,  $|CD| = \sqrt{52}$ ,  $|CD| > |AB|$

b)  $|AB| = \sqrt{40}$ ,  $|CD| = \sqrt{50}$ ,  $|CD| > |AB|$

c)  $|AB| = 5 = |CD|$

5. a)  $Ob = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{2} + 6$ ,  
wysokości: 4,  $3\sqrt{2}$ ,  $\frac{12\sqrt{5}}{5}$

b)  $Ob = 2\sqrt{10} + 6\sqrt{2} + 4$ ,  
wysokości: 6,  $2\sqrt{2}$ ,  $\frac{6\sqrt{10}}{5}$

6. a)  $Ob = 4\sqrt{10}$ ,  $|AC| = 4\sqrt{2}$ ,  
 $|BD| = 2\sqrt{2}$ ,  $h = \frac{4\sqrt{10}}{5}$   
 b)  $Ob = 20\sqrt{2}$ ,  $|AC| = 6\sqrt{5}$ ,  
 $|BD| = 2\sqrt{5}$ ,  $h = 3\sqrt{2}$
7. a)  $Q(x, 2x - 2)$  – punkt należący do prostej  $l$   
 $(5 - x)^2 + (3 - (2x - 2))^2 = 10$   
 $5x^2 - 30x + 40 = 0$   
 $x = 2$  lub  $x = 4$   
 Współrzędne punktów:  $(2, 2)$ ,  $(4, 6)$   
 b)  $(1, 5)$ ,  $(6, 0)$
8.  $B(4, 0)$ ,  $D(-1, 5)$
9. Proste  $AB$  i  $CD$  są równoległe, czyli  $a_{AB} = a_{CD} = -\frac{1}{3}$ .  
 Niech  $D(x, y)$ . Wtedy prosta  $CD$ :  $y = -\frac{1}{3}x + 6$ .  
 Trapez jest równoramienny, stąd:  
 $(x + 4)^2 + (-\frac{1}{3}x + 6 - 2)^2 = (6 - 8)^2 + (4 + 2)^2$   
 $x = -6$  lub  $x = \frac{6}{5}$   
 $D(-6, 8)$  lub  $D(\frac{6}{5}, \frac{28}{5})$
10. a)  $y = -\frac{1}{8}x^2 - 2$   
 b)  $y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$

12. a) Niech  $A(2, 0)$  i  $B(0, y)$  – punkt należący do osi  $OY$ .  
 Jeżeli do szukanej krzywej należą punkty postaci  $P(x, y)$  oraz  $|AP| = |BP|$ , to:  
 $\sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = |x|$   
 Stąd  $x = \frac{1}{4}y^2 + 1$ .  
 b)  $x = -\frac{1}{4}y^2 - 2y - 1$

6. Oblicz obwód, długości przekątnych oraz wysokość rombu  $ABCD$ .  
 a)  $A(-3, 0)$ ,  $B(0, 1)$ ,  $C(1, 4)$ ,  $D(-2, 3)$   
 b)  $A(-5, -2)$ ,  $B(2, -1)$ ,  $C(7, 4)$ ,  $D(0, 3)$
7. Wyznacz współrzędne punktów należących do prostej  $l$ , których odległość od punktu  $P$  jest równa  $d$ .  
 a)  $l: y = 2x - 2$ ,  $P(5, 3)$ ,  $d = \sqrt{10}$       b)  $l: y = -x + 6$ ,  $P(3, 2)$ ,  $d = \sqrt{13}$
8. Dane są punkty  $A(-2, 2)$  i  $C(5, 3)$ . Oblicz współrzędne wierzchołków  $B$  i  $D$  prostokąta  $ABCD$ , jeśli należą one do prostej o równaniu  $y = 4 - x$ .
9. Dane są wierzchołki  $A(-4, 2)$ ,  $B(8, -2)$  i  $C(6, 4)$  trapezu równoramiennego  $ABCD$  o podstawie  $AB$ . Oblicz współrzędne wierzchołka  $D$ .
10. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz równanie krzywej, do której należą punkty równo odległe od osi  $OX$  i punktu  $(0, 1)$ .

Niech  $P(x, y)$  będzie punktem spełniającym warunki zadania. Odległość punktu  $P$  od osi  $OX$  jest równa:

$$\sqrt{(x - x)^2 + (y - 0)^2} = |y|$$

a odległość od punktu  $(0, 1)$ :

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$$

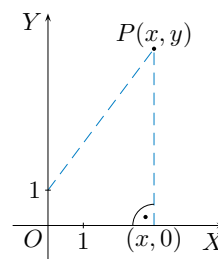
Otrzymujemy zatem równanie:

$$|y| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$$

Obie strony równania są dodatnie.

Stąd  $y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$ , czyli  $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ .

Szukaną krzywą jest parabola o równaniu  $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ .



Wyznacz równanie krzywej, do której należą punkty równo odległe od osi  $OX$  i punktu: a)  $(0, -4)$ , b)  $(4, 6)$ .

11. Wyznacz równanie krzywej, do której należą punkty równo odległe:  
 a) od prostej  $y = -2$  i punktu  $(2, 6)$ ,  
 b) od prostej  $y = 5$  i punktu  $(-4, -1)$ .
12. Wyznacz równanie krzywej, do której należą punkty równo odległe:  
 a) od osi  $OY$  i punktu  $(2, 0)$ ,  
 b) od prostej  $x = 4$  i punktu  $(2, -4)$ .

11. a) Niech  $A(2, 6)$  oraz  $B(x, -2)$  – punkt należący do prostej  $y = -2$ .  
 Jeżeli do szukanej krzywej należą punkty postaci  $P(x, y)$  oraz  $|AP| = |BP|$ , to:

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 6)^2} = |y + 2|$$

$$\text{Stąd } y = \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}.$$

- b) Niech  $A(-4, -1)$  oraz  $B(x, 5)$  – punkt należący do prostej  $y = 5$ .

Jeżeli do szukanej krzywej należą punkty postaci  $P(x, y)$  oraz  $|AP| = |BP|$ , to:

$$\sqrt{(x + 4)^2 + (y + 1)^2} = |y - 5|$$

$$\text{Stąd } y = -\frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}.$$

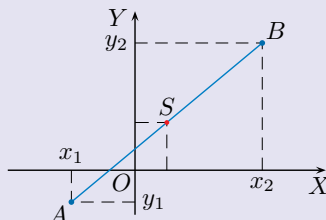
## 2.2. Środek odcinka

Jeżeli znamy współrzędne końców odcinka, możemy wyznaczyć współrzędne jego środka.

### Środek odcinka

Środkiem odcinka  $AB$  o końcach w punktach  $A(x_1, y_1)$  i  $B(x_2, y_2)$  jest punkt:

$$S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



#### Przykład 1

Wyznacz współrzędne środka odcinka  $AB$ , jeśli  $A(-3, 2)$  i  $B(5, -4)$ .

Środek odcinka  $AB$  ma współrzędne:  $\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{2-4}{2}\right) = (1, -1)$ .

#### Ćwiczenie 1

Wyznacz współrzędne środka odcinka  $AB$ .

- a)  $A(-2, -1)$ ,  $B(6, 3)$     b)  $A(-4, 1)$ ,  $B(5, -8)$     c)  $A(\frac{1}{2}, -2)$ ,  $B(3, \frac{1}{3})$

#### Przykład 2

Punkt  $S(1, 5)$  jest środkiem odcinka  $AB$ . Wyznacz współrzędne punktu  $A$ , jeśli punkt  $B$  ma współrzędne  $(-3, 4)$ .

Niech punkt  $A$  ma współrzędne  $(x_1, y_1)$ , wówczas:

$$\begin{aligned}\frac{x_1 - 3}{2} &= 1 & \text{ i } & \frac{y_1 + 4}{2} = 5 \\ x_1 - 3 &= 2 & \text{ i } & y_1 + 4 = 10 \\ x_1 &= 5 & \text{ i } & y_1 = 6\end{aligned}$$

#### Ćwiczenie 2

- a) Dany jest punkt  $A(5, 8)$ . Wyznacz współrzędne punktu  $B$ , jeśli punkt  $S(-1, -3)$  jest środkiem odcinka  $AB$ .
- b) Punkt  $S(2, 1)$  jest środkiem odcinka o końcach  $A(x, -2)$  i  $B(7, y)$ . Oblicz długość odcinka  $AB$ .
- c) Punkt  $S(1, 1)$  jest środkiem odcinka o końcach  $A(x, y)$  i  $B(x + y, x - y)$ . Oblicz długość odcinka  $AB$ .

#### Ćwiczenie 2

a) 
$$\begin{cases} \frac{5+x}{2} = -1 \\ \frac{8+y}{2} = -3 \end{cases}$$

czyli  $x = -7$ ,  $y = -14$ .  
Zatem  $B(-7, -14)$ .

b) 
$$\begin{cases} \frac{x+7}{2} = 2 \\ \frac{-2+y}{2} = 1 \end{cases}$$

czyli  $x = -3$ ,  $y = 4$ .  
Zatem  $A(-3, -2)$ ,  $B(7, 4)$   
oraz  $|AB| = 2\sqrt{34}$ .

c) 
$$\begin{cases} \frac{2x+y}{2} = 1 \\ \frac{x}{2} = 1 \end{cases}$$

czyli  $x = 2$ ,  $y = -2$ .  
Zatem  $A(2, -2)$ ,  $B(0, 4)$   
oraz  $|AB| = 2\sqrt{10}$ .

#### Uczeń:

- wyznacza współrzędne środka odcinka, gdy dane są współrzędne jego końców,
- wyznacza współrzędne jednego z końców odcinka, gdy dane są współrzędne jego środka i drugiego końca,
- stosuje wzór na środek odcinka w zadaniach dotyczących własności wielokątów w układzie współrzędnych.

#### Ćwiczenie 1

- a)  $S(\frac{-2+6}{2}, \frac{-1+3}{2}) = (2, 1)$
- b)  $S(\frac{-4+5}{2}, \frac{1-8}{2}) = (\frac{1}{2}, -\frac{7}{2})$
- c)  $S(\frac{\frac{1}{2}+3}{2}, \frac{-2+\frac{1}{3}}{2}) = (\frac{7}{4}, -\frac{5}{6})$

### Ćwiczenie 3

Niech  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$ ,  $C(x_C, y_C)$ . Wówczas:

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = -3 \\ \frac{x_B + x_C}{2} = -1 \\ \frac{x_C + x_A}{2} = 1 \end{cases}$$

$$x_A = -1, x_B = -5, x_C = 3$$

$$\begin{cases} \frac{y_A + y_B}{2} = 2 \\ \frac{y_B + y_C}{2} = 0 \\ \frac{y_C + y_A}{2} = 4 \end{cases}$$

$$y_A = 6, y_B = -2, y_C = 2$$

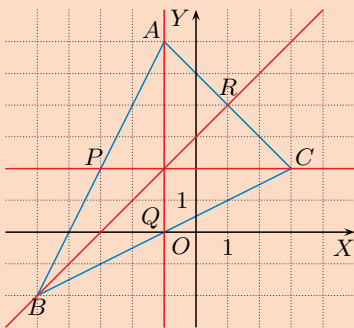
Zatem  $A(-1, 6)$ ,  $B(-5, -2)$ ,  $C(3, 2)$ .

Środki:

prosta  $BR$ :  $y = x + 3$ ,

prosta  $CP$ :  $y = 2$ ,

prosta  $AQ$ :  $x = -1$



### Ćwiczenie 3

Punkty  $P(-3, 2)$ ,  $Q(-1, 0)$  i  $R(1, 4)$  są środkami boków trójkąta  $ABC$ . Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta oraz równania prostych zawierających jego środkowe.

Przypomnijmy, że **symetralną odcinka**  $AB$  jest prosta do niego prostopadła i przechodząca przez jego środek. Jest ona zbiorem punktów, których odległości od punktów  $A$  i  $B$  są równe. W poniższym przykładzie przedstawiamy dwa sposoby wyznaczenia równania symetralnej odcinka.

#### Przykład 3

a) Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach  $A(-2, 3)$  i  $B(6, -1)$ .

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej  $y = ax + b$ , w której zawarty jest odcinek  $AB$ :

$$a = \frac{-1-3}{6-(-2)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Symetralna odcinka  $AB$  jest do niego prostopadła, więc jej współczynnik kierunkowy jest równy 2.

Wyznaczamy środek odcinka  $AB$ :

$$S\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = (2, 1)$$

Podstawiamy współrzędne punktu  $S$  do równania prostej  $y = 2x + b$ :

$$1 = 2 \cdot 2 + b, \text{ stąd } b = -3$$

Zatem symetralna odcinka  $AB$  opisana jest równaniem  $y = 2x - 3$ .

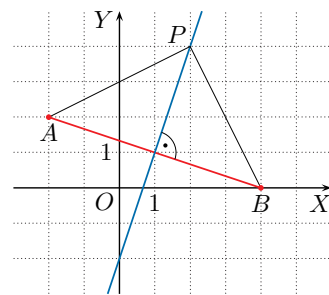
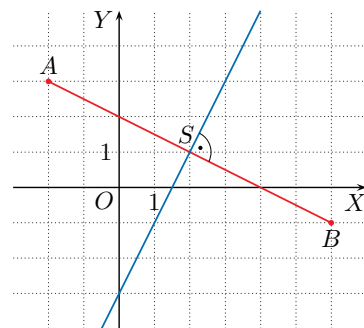
b) Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach  $A(-2, 2)$  i  $B(4, 0)$ .

Punkt  $P(x, y)$  należy do symetralnej odcinka  $AB$ , jeśli  $|PA| = |PB|$ , więc:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - (-2))^2 + (y - 2)^2} &= \sqrt{(x - 4)^2 + y^2} \\ (x + 2)^2 + (y - 2)^2 &= (x - 4)^2 + y^2 \\ x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 &= x^2 - 8x + 16 + y^2 \\ -4y &= -12x + 8 \end{aligned}$$

Zatem symetralna opisana jest równaniem:

$$y = 3x - 2$$



### Ćwiczenie 4

Wyznacz równanie symetralnej odcinka  $AB$ .

- a)  $A(1, 8)$ ,  $B(6, 4)$       b)  $A(-2, 6)$ ,  $B(10, 0)$       c)  $A(-2, -3)$ ,  $B(4, -1)$

### Ćwiczenie 4

Do symetralnej należą punkty postaci  $S(x, y)$  oraz  $|SA| = |SB|$ .

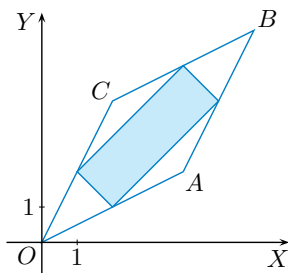
a)  $\sqrt{(1-x)^2 + (8-y)^2} = \sqrt{(6-x)^2 + (4-y)^2}$  i stąd  $y = \frac{5}{4}x + \frac{13}{8}$ .

b)  $\sqrt{(-2-x)^2 + (6-y)^2} = \sqrt{(10-x)^2 + y^2}$  i stąd  $y = 2x - 5$ .

c)  $\sqrt{(-2-x)^2 + (-3-y)^2} = \sqrt{(4-x)^2 + (-1-y)^2}$  i stąd  $y = -3x + 1$ .

## Zadania

- Oblicz odległość środka odcinka  $AB$  od początku układu współrzędnych.  
a)  $A(1, 6)$ ,  $B(-7, 2)$     b)  $A(-7, 7)$ ,  $B(11, 1)$     c)  $A(9, \sqrt{7})$ ,  $B(-4, -\sqrt{7})$
- Dany jest punkt  $A(4, 5)$  oraz punkt  $S$  będący środkiem odcinka  $AB$ . Wyznacz współrzędne punktu  $B$ .  
a)  $S(-2, 3)$     b)  $S(6, 7)$     c)  $S(-3, 1)$
- Dany jest punkt  $A(-4, -3)$ . Oblicz długość odcinka  $AB$ , jeśli:  
a) jego środkiem jest punkt  $(-1, -2)$ ,  
b) jego środek leży na osi  $OX$ , a odcięta punktu  $B$  jest równa 2.
- Oblicz długości przekątnych rombu o wierzchołkach  $O(0, 0)$ ,  $A(4, 2)$ ,  $B(6, 6)$  i  $C(2, 4)$  (rysunek obok). Oblicz pole prostokąta, którego wierzchołkami są środki boków rombu  $OABC$ .
- Dany jest prostokąt o wierzchołkach  $A(-4, -3)$ ,  $B(8, 3)$ ,  $C(6, 7)$  i  $D(-6, 1)$ .  
a) Oblicz obwód prostokąta  $ABCD$ .  
b) Oblicz obwód rombu, którego wierzchołkami są środki boków prostokąta  $ABCD$ .
- Wyznacz współrzędne środków odcinka  $AC$  i odcinka  $BD$ . Czy czworokąt  $ABCD$  jest równoległobokiem?  
a)  $A(-2, -1)$ ,  $B(17, 2)$ ,  $C(18, 5)$ ,  $D(-1, 2)$   
b)  $A(1, -1)$ ,  $B(7, 1)$ ,  $C(8, 5)$ ,  $D(2, 2)$
- Punkty  $A(1, 2)$ ,  $B(-1, -1)$  i  $C(5, 2)$  są wierzchołkami równoległoboku  $ABCD$ . Oblicz współrzędne punktu  $S$  będącego środkiem odcinka  $AC$  oraz współrzędne wierzchołka  $D$ .
- Wyznacz równania prostych zawierających środkowe trójkąta  $ABC$ .  
a)  $A(-2, 3)$ ,  $B(4, -1)$ ,  $C(2, 7)$     b)  $A(-5, -3)$ ,  $B(5, -1)$ ,  $C(-1, 5)$
- Oblicz pole trójkąta, którego środkami boków są punkty  $P(1, 0)$ ,  $Q(-2, 3)$  i  $R(-4, 1)$ .
- Punkty  $A(2, -4)$  i  $C(-1, -1)$  są wierzchołkami rombu  $ABCD$ . Uzasadnij, że przekątna  $BD$  tego rombu jest zawarta w prostej  $x - y - 3 = 0$ .



## Odpowiedzi do zadań

- a) 5    b)  $2\sqrt{5}$     c) 2,5
- a)  $B(-8, 1)$   
b)  $B(8, 9)$   
c)  $B(-10, -3)$
- a)  $|AS| = \sqrt{10}$ , czyli  $|AB| = 2\sqrt{10}$ .  
b) Środkiem odcinka  $AB$  jest punkt  $S(x_S, 0)$ , a punkt  $B(2, y_B)$ , zatem:  
$$\frac{-3 + y_B}{2} = 0$$
  
czyli  $y_B = 3$ .  
 $|AB| = 6\sqrt{2}$
- Długości przekątnych rombu:  
 $|BO| = 6\sqrt{2}$ ,  $|AC| = 2\sqrt{2}$   
**I sposób**  
Długości boków prostokąta:  $\sqrt{2}$  i  $3\sqrt{2}$ , czyli  $P = 6$ .  
**II sposób**  
Pole prostokąta:  
$$P = \frac{1}{2} P_{OABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot |BO| \cdot |AC| = 6$$
- a) Długości boków prostokąta:  $|AD| = |BC| = 2\sqrt{5}$  i  $|AB| = |DC| = 6\sqrt{5}$ ,  
czyli  $Ob = 16\sqrt{5}$ .  
b) Długość boku rombu:  $5\sqrt{2}$ ,  
czyli  $Ob = 20\sqrt{2}$ .
- a)  $S_{AC}(8, 2)$ ,  $S_{BD}(8, 2)$ , jest  
b)  $S_{AC}(4\frac{1}{2}, 2)$ ,  $S_{BD}(4\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$ , nie jest
- $S(3, 2)$ ,  $D(7, 5)$
- a)  $y = -\frac{3}{2}x + 5$ ,  $y = 6x - 5$ ,  
 $y = 3$   
b)  $y = \frac{5}{7}x + \frac{4}{7}$ ,  $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ ,  
 $y = -7x - 2$
- 24

- Współczynnik kierunkowy prostej  $AC$ :  $a_{AC} = -1$ . Prosta zawierająca przekątną  $BD$  jest prostopadła do prostej  $AC$ , zatem jej współczynnik kierunkowy  $a_{BD} = 1$ . Punkt  $S_{AC}(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$  należy do prostej  $BD$ :  $y = x - 3$ . Równanie tej prostej zapisujemy w postaci:

$$x - y - 3 = 0$$

**Uwaga.** Można również zauważyć, że przekątna  $BD$  jest zawarta w symetralnej odcinka  $AC$ .

11. a)  $P = 20$ ,  $Ob = 8\sqrt{5}$   
 b)  $(-4, -8)$  lub  $(3, -1)$
12. a)  $A(5, 5)$ ,  $B(1, 1)$  lub  $A(1, 1)$ ,  $B(5, 5)$   
 b)  $A(16, 14)$ ,  $B(8, 8)$  lub  $A(8, 8)$ ,  $B(16, 14)$
13. a)  $B(-1, -1)$ ,  $D(3, 7)$   
 b)  $B(13, -7)$ ,  $D(-3, 9)$
14. a)  $B(2, 0)$ ,  $D(-2, 4)$   
 b)  $B(-5, -6)$ ,  $D(11, 10)$
15. a)  $y = -3x + 3$   
 b)  $y = \frac{3}{2}x - 2$
16. a) Prosta  $AB$ :  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$   
 Środek odcinka  $AB$  jest punktem przecięcia prostej  $AB$  i jej symetralnej.  

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$
  
 $S(\frac{11}{5}, \frac{17}{5})$ , czyli:  
 $\frac{-1+x_B}{2} = \frac{11}{5}$  i  $\frac{5+y_B}{2} = \frac{17}{5}$ .  
 Zatem  $B(\frac{27}{5}, \frac{9}{5})$ .  
 b) Środek odcinka  $AB$  należy do prostej  $y = x - 2$ , czyli  $S(2, 0)$ .  
 Prosta  $AB$  jest prostopadła do swojej symetralnej i przechodzi przez punkt  $S$ , zatem  $AB$ :  $y = -x + 2$ .  
 Punkty  $A$  i  $B$  mają postać  $(x, -x + 2)$  i są oddalone od  $S$  o 2, czyli:  

$$\sqrt{(x-2)^2 + (-x+2)^2} = 2$$
  
 $x = 2 - \sqrt{2}$  lub  $x = 2 + \sqrt{2}$   
 Zatem  $A(2 - \sqrt{2}, \sqrt{2})$ ,  
 $B(2 + \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ .
18. 
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ y = x + 3 \end{cases}$$
 stąd  $A(-2, 1)$ .  
 $B(x_B, -\frac{1}{2}x_B)$ ,  $C(x_C, x_C + 3)$   
 $\frac{x_B + x_C}{2} = 4$  i  $\frac{-\frac{1}{2}x_B + x_C + 3}{2} = 1$   
 $x_B = 6$  i  $x_C = 2$ , zatem  
 $B(6, -3)$ ,  $C(2, 5)$ .

11. a) Przekątne kwadratu przecinają się w punkcie  $(2, 1)$ , a jeden z jego wierzchołków ma współrzędne  $(1, -2)$ . Oblicz pole i obwód tego kwadratu.  
 b) Pole kwadratu jest równe 58, a jeden z jego wierzchołków ma współrzędne  $(-2, -3)$ . Oblicz współrzędne punktu przecięcia przekątnych kwadratu, jeśli wiadomo, że punkt ten należy do prostej  $y = x - 4$ .
12. Odcinek  $AB$  leżący na prostej  $k$  ma długość  $d$ . Środkiem tego odcinka jest punkt  $S$ . Wyznacz współrzędne punktów  $A$  i  $B$ .  
 a)  $k: y = x$ ,  $d = 4\sqrt{2}$ ,  $S(3, 3)$       b)  $k: y = \frac{3}{4}x + 2$ ,  $d = 10$ ,  $S(12, 11)$
13. Wyznacz współrzędne wierzchołków  $B$  i  $D$  czworokąta  $ABCD$ , jeśli wiadomo, że:  
 a) jest on kwadratem oraz  $A(-3, 5)$  i  $C(5, 1)$ ,  
 b) jest on rombem oraz  $A(1, -3)$ ,  $C(9, 5)$  i  $|BD| = 2|AC|$ .
14. Pole rombu  $ABCD$  jest równe 32. Wyznacz współrzędne wierzchołków  $B$  i  $D$ , jeśli wiadomo, że:  
 a)  $A(-4, -2)$ ,  $C(4, 6)$ ,      b)  $A(2, 3)$ ,  $C(4, 1)$ .
15. Wyznacz równanie symetralnej odcinka  $AB$ .  
 a)  $A(-2, -1)$ ,  $B(4, 1)$       b)  $A(-1, 3)$ ,  $B(5, -1)$
16. a) Prosta  $y = 2x - 1$  jest symetralną odcinka  $AB$ . Wyznacz współrzędne punktu  $B$ , jeśli  $A(-1, 5)$ .  
 b) Prosta  $y = x - 2$  jest symetralną odcinka  $AB$ . Wyznacz współrzędne punktów  $A$  i  $B$ , jeśli wiadomo, że  $|AB| = 4$ , odcięta środka odcinka  $AB$  jest równa 2, a punkt  $A$  leży w I ćwiartce układu współrzędnych.
17. Punkty  $A(-3, 1)$  i  $B(2, -1)$  są wierzchołkami trójkąta  $ABC$ . Bok  $AC$  jest zawarty w prostej  $y = 2x + 7$ , a jedna ze środkowych trójkąta ma równanie  $y = x + 4$ . Oblicz współrzędne wierzchołka  $C$  i wyznacz równania prostych, w których są zawarte pozostałe boki tego trójkąta.
18. Boki  $AB$  i  $AC$  trójkąta  $ABC$  zawierają się odpowiednio w prostych  $y = -\frac{1}{2}x$  i  $y = x + 3$ . Oblicz współrzędne wierzchołków tego trójkąta, jeśli dany jest środek  $S(4, 1)$  boku  $BC$ .
19. Punkty  $A(2, 0)$  i  $C(4, 2)$  są wierzchołkami rombu  $ABCD$  o boku długości  $2\sqrt{5}$ . Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu i oblicz jego pole.

17. Niech  $C(x, 2x + 7)$ . Dana środkowa wychodzi z wierzchołka  $A$  i dzieli bok  $BC$  w punkcie  $S(\frac{2+x}{2}, \frac{2x+6}{2})$ , czyli:

$$\frac{2+x}{2} + 4 = \frac{2x+6}{2}$$

Stąd  $x = 4$ , zatem  $C(4, 15)$ ,  $AB: y = -\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$ ,  $BC: y = 8x - 17$ .

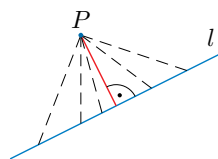
19. Punkt przecięcia przekątnych:  $S(3, 1)$ . Równanie prostej  $AC$ :  $y = x - 2$ .  
 Równanie symetralnej odcinka  $AC$ :  $y = -x + 4$ , stąd współrzędne wierzchołków  $B$  i  $D$  są postaci  $(x, -x + 4)$ .

$$\sqrt{(x-2)^2 + (-x+4-0)^2} = 2\sqrt{5}$$

$x = 0$  lub  $x = 6$ . Zatem  $B(6, -2)$ ,  $D(0, 4)$ .  $P = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 12$ .

## 2.3. Odległość punktu od prostej

Przypomnijmy, że **odległością punktu  $P$  od prostej  $l$**  nazywamy długość najkrótszego odcinka łączącego punkt  $P$  z punktem na prostej  $l$  (odcinek ten jest prostopadły do prostej  $l$ ). Jeśli punkt  $P$  leży na prostej  $l$ , to przyjmujemy, że jego odległość od tej prostej jest równa zero.



### Przykład 1

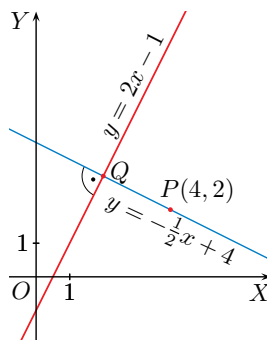
Oblicz odległość punktu  $P(4, 2)$  od prostej  $y = 2x - 1$ .

Wyznaczamy równanie prostej  $l$  przechodzącej przez punkt  $P$  i prostopadłej do prostej  $y = 2x - 1$ . Ma ona równanie postaci  $y = -\frac{1}{2}x + b$ . Podstawiamy do tego równania współrzędne punktu  $P$  i otrzymujemy  $2 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + b$ , czyli  $b = 4$ .

Zatem  $l: y = -\frac{1}{2}x + 4$ .

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$



i otrzymujemy współrzędne punktu przecięcia się prostych:  $Q(2, 3)$ .

Obliczamy długość odcinka  $PQ$ :

$$|PQ| = \sqrt{(2-4)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5}$$

Zatem odległość punktu  $P$  od prostej  $y = 2x - 1$  jest równa  $\sqrt{5}$ .

### Ćwiczenie 1

Oblicz odległość punktu  $P$  od prostej  $l$ .

a)  $P(5, 1)$ ,  $l: y = x$

b)  $P(-1, 3)$ ,  $l: y = \frac{4}{3}x - 4$

Jeżeli metodę opisaną w przykładzie 1. zastosujemy w przypadku ogólnym, to otrzymamy wzór na odległość punktu od prostej.

Odległość punktu  $P(x_0, y_0)$  od prostej  $l$  o równaniu ogólnym:

$$Ax + By + C = 0$$

wyraża się za pomocą wzoru:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

### Ćwiczenie 1

a) Równanie prostej prostopadłej do prostej  $l$  i przechodzącej przez punkt  $P$ :

$$y = -x + 6$$

Punkt przecięcia tych prostych ma współrzędne  $Q(3, 3)$ . Zatem:

$$|PQ| = \sqrt{(5-3)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}$$

b) Równanie prostej prostopadłej do prostej  $l$  i przechodzącej przez punkt  $P$ :

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$$

Punkt przecięcia tych prostych ma współrzędne  $Q(3, 0)$ . Zatem  $|PQ| = 5$ .

### Uczeń:

- oblicza odległość punktu od prostej,
- oblicza odległość między prostymi równoległymi,
- stosuje wzór na odległość punktu od prostej do obliczania pól wielokątów.

### Ćwiczenie 2

a)  $d_A = \sqrt{2}$ ,  $d_B = 0$ ,  $d_C = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

b)  $d_A = \sqrt{10}$ ,  $d_B = \sqrt{10}$ ,

$d_C = \frac{13\sqrt{10}}{10}$

c)  $d_A = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ,  $d_B = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ ,  $d_C = 0$

### Ćwiczenie 3

a) Odległość punktu  $C$  od prostej  $l$ :  $d = \frac{8\sqrt{10}}{5}$

Prosta  $l$  przecina osie układu współrzędnych w punktach  $A(-2, 0)$  i  $B(0, 6)$ , zatem:

$$|AB| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$$

Pole trójkąta  $ABC$ :

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{8\sqrt{10}}{5} = 16$$

b) Odległość punktu  $C$  od prostej  $l$ :  $d = \sqrt{13}$

Prosta  $l$  przecina osie układu współrzędnych w punktach  $A(6, 0)$  i  $B(0, 4)$ , zatem:

$$|AB| = 2\sqrt{13}$$

Pole trójkąta  $ABC$ :

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13$$

### Przykład 2

Oblicz odległość punktu  $P(5, -1)$  od prostej  $y = -\frac{4}{3}x + 2$ .

Aby skorzystać ze wzoru na odległość punktu od prostej, równanie prostej zapisujemy w postaci ogólnej:

$$4x + 3y - 6 = 0$$

i odczytujemy z niego wartości współczynników:  $A = 4$ ,  $B = 3$  i  $C = -6$ . Wartości te razem ze współrzędnymi  $x_0 = 5$  i  $y_0 = -1$  podstawiamy do wzoru:

$$d = \frac{|4 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) - 6|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|20 - 3 - 6|}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5}$$

### Ćwiczenie 2

Oblicz odległości punktów  $A(0, 3)$ ,  $B(-1, 0)$  i  $C(-1, 3)$  od prostej  $l$ .

a)  $l: y - x = 1$

b)  $l: 3x - y - 7 = 0$

c)  $l: y = -\frac{1}{2}x + 2,5$

### Przykład 3

Punkty  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 2)$  i  $C(2, -2)$  są wierzchołkami trójkąta  $ABC$ . Oblicz pole tego trójkąta.

Pole trójkąta obliczymy, korzystając ze wzoru  $P = \frac{1}{2}a \cdot h$ , w którym  $a = |AB|$ , a  $h$  jest odległością punktu  $C$  od prostej  $AB$ .

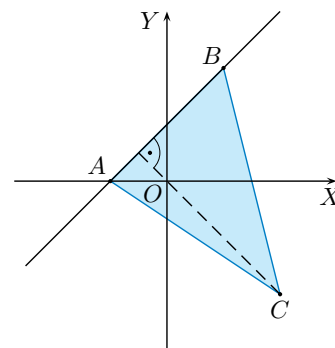
$$a = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Wyznaczamy równanie prostej  $AB$ :  $y = x + 1$  i zapisujemy je w postaci ogólnej:  $x - y + 1 = 0$ .

Obliczamy odległość punktu  $C$  od prostej  $AB$ :

$$h = \frac{|1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Zatem pole trójkąta:  $P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = 5$ .



### Ćwiczenie 3

Oblicz odległość punktu  $C$  od prostej  $l$  oraz pole trójkąta  $ABC$ , którego wierzchołki  $A$  i  $B$  są punktami przecięcia prostej  $l$  z osiami układu współrzędnych.

a)  $l: y = 3x + 6$ ,  $C(2, -4)$

b)  $l: y = -\frac{2}{3}x + 4$ ,  $C(1, -1)$

### Ćwiczenie 4

Punkty  $A$  i  $B$  są punktami przecięcia prostej  $y = \frac{3}{5}x - 6$  z osiami układu współrzędnych. Oblicz pole równoległoboku  $ABCD$ , którego wierzchołek  $D$  ma współrzędne  $(1, 4)$ .

### Ćwiczenie 4

Prosta  $AB$  przecina osie układu współrzędnych w punktach  $A(10, 0)$  i  $B(0, -6)$ , zatem:

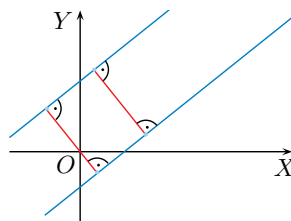
$$|AB| = \sqrt{10^2 + 6^2} = 2\sqrt{34}$$

Odległość punktu  $D$  od prostej  $AB$ :  $d = \frac{47\sqrt{34}}{34}$

Pole równoległoboku  $ABCD$ :  $P = 2\sqrt{34} \cdot \frac{47\sqrt{34}}{34} = 94$

Odległość między dwiema prostymi równoległymi jest równa odległości dowolnego punktu jednej z tych prostych od drugiej prostej.

Najkrótszy odcinek łączący dwa punkty prostych równoległych musi być prostopadły do tych prostych (dlaczego?).



#### Przykład 4

Oblicz odległość między prostymi  $l: 3x - 2y + 2 = 0$  i  $k: 3x - 2y - 11 = 0$ .

Dane proste są równoległe. Do równania prostej  $l$  podstawiamy  $x = 0$  i otrzymujemy  $y = 1$ , zatem punkt  $A(0, 1)$  należy do tej prostej.

Obliczamy odległość punktu  $A$  od prostej  $k$ :

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 - 11|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

#### Ćwiczenie 5

Oblicz odległość między prostymi:

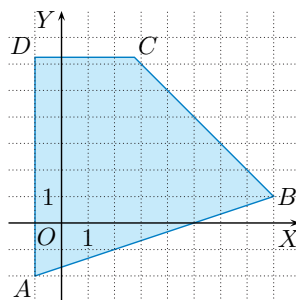
- a)  $y = x - 1$  i  $y = x + 3$ ,                      c)  $x - 2y - 4 = 0$  i  $y = \frac{1}{2}x + 6$ ,  
b)  $y = 2x - 1$  i  $y = 2x + 2$ ,                      d)  $3x - 2y - 4 = 0$  i  $y = \frac{3}{2}x + 1$ .

#### Zadania

1. Oblicz odległości punktów  $A$  i  $B$  od prostej  $l$ . Czy prosta  $AB$  jest równoległa do prostej  $l$ ?

- a)  $A(1, 4)$ ,  $B(5, 5)$ ,  $l: y = \frac{2}{5}x - 6$   
b)  $A(-4, -2)$ ,  $B(2, 6)$ ,  $l: y = 1\frac{1}{3}x - 5$   
c)  $A(-5, -1)$ ,  $B(7, -6)$ ,  $l: y = -2,4x$

2. Dany jest czworokąt  $ABCD$  o wierzchołkach  $A(-1, -2)$ ,  $B(8, 1)$ ,  $C(\frac{11}{4}, \frac{25}{4})$  i  $D(-1, \frac{25}{4})$  (rysunek obok). Oblicz odległości punktu  $S(2, 4)$  od boków tego czworokąta.



3. Punkty  $A(6, 4)$ ,  $B(-3, 7)$  oraz  $C(-2, 0)$  są wierzchołkami równoległoboku  $ABCD$ . Oblicz odległość wierzchołka  $C$  od prostej  $AB$  oraz pole tego równoległoboku.

4. Oblicz pole trójkąta  $ABC$ .

- a)  $A(-1, 1)$ ,  $B(3, -2)$ ,  $C(2, 3)$                       b)  $A(-2, 1)$ ,  $B(3, 6)$ ,  $C(2, -1)$

3. Równanie prostej  $AB: x + 3y - 18 = 0$

Odległość punktu  $C$  od prostej  $AB: d_C = 2\sqrt{10}$

Długość boku  $AB: 3\sqrt{10}$

Pole równoległoboku:  $P = 3\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10} = 60$

4. a) Równanie prostej  $AB: 3x + 4y - 1 = 0$

$d(C, AB) = \frac{17}{5}$ ,  $|AB| = 5$

Zatem pole trójkąta:  $P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{17}{5} = 8\frac{1}{2}$ .

b) Równanie prostej  $AB: x - y + 3 = 0$

$d(C, AB) = 3\sqrt{2}$ ,  $|AB| = 5\sqrt{2}$

Zatem pole trójkąta:  $P = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 15$ .

#### Ćwiczenie 5

- a) Do prostej  $y = x - 1$  należy punkt  $(0, -1)$ , zatem:

$$d = 2\sqrt{2}$$

- b) Do prostej  $y = 2x - 1$  należy punkt  $(0, -1)$ , zatem:

$$d = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

- c) Do prostej  $y = \frac{1}{2}x + 6$  należy punkt  $(0, 6)$ , zatem:

$$d = \frac{16\sqrt{5}}{5}$$

- d) Do prostej  $y = \frac{3}{2}x + 1$  należy punkt  $(0, 1)$ , zatem:

$$d = \frac{6\sqrt{13}}{13}$$

#### Odpowiedzi do zadań

1. a)  $l: 2x - 5y - 30 = 0$ ,  
 $d_A = \frac{48\sqrt{29}}{29}$ ,  $d_B = \frac{45\sqrt{29}}{29}$ ,  
nie jest

- b)  $l: 4x - 3y - 15 = 0$ ,  
 $d_A = d_B = 5$ , jest

- c)  $l: 12x + 5y = 0$ ,  
 $d_A = 5$ ,  $d_B = \frac{54}{13}$ , nie jest

2. Równania prostych zawierających boki czworokąta:

$$AB: x - 3y - 5 = 0,$$

$$BC: x + y - 9 = 0,$$

$$CD: y = \frac{25}{4},$$

$$AD: x = -1$$

$$d_{AB} = \frac{3\sqrt{10}}{2}, d_{BC} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$d_{CD} = 2\frac{1}{4}, d_{AD} = 3$$

5. a) Odległość między prostymi  $d = 2\sqrt{5}$ , czyli promień koła  $r = \sqrt{5}$  i pole  $P = 5\pi$ .

b) Odległość między prostymi  $d = 10$ , czyli  $r = 5$  i pole  $P = 25\pi$ .

6. a)  $AB \parallel CD$ ,  $d = \frac{7\sqrt{2}}{2}$ ,  
 $P = 38,5$

b)  $AB \parallel CD$ ,  $d = 3\sqrt{10}$ ,  
 $P = 75$

7. a)  $y = x + 10\sqrt{2}$   
lub  $y = x - 10\sqrt{2}$

b)  $y = x + 3 - 10\sqrt{2}$   
lub  $y = x + 3 + 10\sqrt{2}$

8. a) Współrzędne punktów:  
 $A(0, -4)$ ,  $B(2, 0)$ , zatem:

$$|AB| = 2\sqrt{5}$$

Odległość między prostymi jest równa wysokości trójkąta  $h = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ , zatem:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{6\sqrt{5}}{5} = 6$$

b) Współrzędne punktów:  
 $A(0, -6)$ ,  $B(12, 0)$ , zatem:

$$|AB| = 6\sqrt{5}$$

Odległość między prostymi jest równa wysokości równoległoboku  $h = 2\sqrt{5}$ , zatem:

$$P = 6\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 60$$

5. Oblicz pole koła stycznego jednocześnie do prostych  $k$  i  $l$ .

$$\text{a) } k: 2x - y + 4 = 0, l: 2x - y - 6 = 0 \quad \text{b) } k: y = \frac{3}{4}x + 6, l: y = \frac{3}{4}x - \frac{13}{2}$$

6. Sprawdź, czy proste  $AB$  i  $CD$  są równoległe. Jeśli są, oblicz odległość między nimi oraz oblicz pole czworokąta  $ABCD$ .

$$\text{a) } A(-2, -6), B(6, 2), C(0, 3), D(-3, 0)$$

$$\text{b) } A(-9, -2), B(3, -6), C(3, 4), D(0, 5)$$

7. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz równanie prostej  $l_2$  równoległej do prostej  $l_1: y = 2x$ , jeśli wiadomo, że odległość między tymi prostymi jest równa 4.

Równanie prostej  $l_2$  ma postać  $y = 2x + b$ . Dla  $x = 0$  otrzymujemy punkt  $P(0, b)$  należący do tej prostej. Zapisujemy równanie prostej  $l_1$  w postaci ogólnej:  $-2x + y = 0$ . Wyznaczamy odległość punktu  $P$  od tej prostej:

$$\frac{|-2 \cdot 0 + 1 \cdot b + 0|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{5}}$$

Ale  $\frac{|b|}{\sqrt{5}} = 4$ , zatem  $|b| = 4\sqrt{5}$ , czyli równanie prostej  $l_2$  zapisujemy w postaci:

$$y = 2x + 4\sqrt{5} \quad \text{lub} \quad y = 2x - 4\sqrt{5}$$

Wyznacz równanie prostej odległej o 10 od prostych: a)  $y = x$ , b)  $y = x + 3$ .

8. a) Punkty  $A$  i  $B$  są punktami przecięcia prostej  $y = 2x - 4$  z osiami układu współrzędnych, a punkt  $C$  leży na prostej  $y = 2x + 2$ . Oblicz pole trójkąta  $ABC$ .

b) Punkty  $A$  i  $B$  są punktami przecięcia prostej  $y = \frac{1}{2}x - 6$  z osiami układu współrzędnych, a punkty  $C$  i  $D$  leżą na prostej  $y = \frac{1}{2}x - 1$ . Oblicz pole równoległoboku  $ABCD$ .

9. Wyznacz równanie prostej równoległej do prostych  $k$  i  $l$  oraz równo odległej od każdej z nich.

$$\text{a) } k: \sqrt{3}x - y + 1 = 0, l: \sqrt{3}x - y + 7 = 0$$

$$\text{b) } k: 1,4x + 2y + 10 = 0, l: 7x + 10y - 20 = 0$$

10. Korzystając z podanego obok wzoru na odległość  $d$  między prostymi równoległymi  $Ax + By + C_1 = 0$  i  $Ax + By + C_2 = 0$ , oblicz odległość między prostymi:

$$d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\text{a) } 2x - y + 4 = 0 \quad \text{i} \quad 2x - y - 6 = 0, \quad \text{b) } y = \frac{12}{5}x - \frac{6}{5} \quad \text{i} \quad y = \frac{12}{5}x + \frac{7}{5}.$$

9. a) Szukana prosta ma postać:  $y = \sqrt{3}x + b$ . Należy do niej punkt  $P(0, b)$ , zatem  $d_{Pk} = d_{Pl}$ :

$$\frac{|-b+1|}{2} = \frac{|-b+7|}{2}$$

skąd otrzymujemy  $b = 4$ . Zatem szukana prosta:  $y = \sqrt{3}x + 4$ .

b) Szukana prosta ma postać:  $7x + 10y + b = 0$ , należy do niej punkt  $P(0, -\frac{b}{10})$ , zatem  $d_{Pk} = d_{Pl}$ :

$$\frac{|-b+50|}{\sqrt{149}} = \frac{|-b-20|}{\sqrt{149}}$$

skąd otrzymujemy  $b = 15$ . Zatem szukana prosta:  $7x + 10y + 15 = 0$ .

**Uwaga.** Łatwo udowodnić, że prosta równo odległa od prostych  $Ax + By + C_1 = 0$  oraz  $Ax + By + C_2 = 0$  ma równanie postaci:

$$Ax + By + \frac{C_1 + C_2}{2} = 0$$

10. a)  $2\sqrt{5}$

b) Równania ogólne prostych:

$$12x - 5y - 6 = 0 \quad \text{i} \quad 12x - 5y + 7 = 0, \quad \text{zatem } d = 1.$$

## Pole trójkąta w układzie współrzędnych

### Twierdzenie

Pole trójkąta o wierzchołkach  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  i  $C(x_3, y_3)$  wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2|$$

### Dowód

Rozpatrzmy trójkąt o wierzchołkach  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  i  $C(x_3, y_3)$  (rysunek obok).

Wierzchołki prostokąta  $ADEF$  mają współrzędne  $A(x_1, y_1)$ ,  $D(x_2, y_1)$ ,  $E(x_2, y_3)$  i  $F(x_1, y_3)$ .

Wyznaczamy pole prostokąta  $ADEF$ :

$$\begin{aligned} P_{ADEF} &= (x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) = \\ &= x_2 y_3 - x_2 y_1 - x_1 y_3 + x_1 y_1 \end{aligned}$$

Wyznaczamy pola trójkątów  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ :

$$P_1 = \frac{1}{2} (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = \frac{1}{2} (x_2 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + x_1 y_1)$$

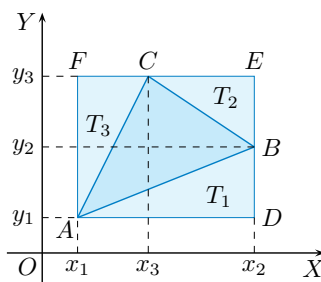
$$P_2 = \frac{1}{2} (x_2 - x_3)(y_3 - y_2) = \frac{1}{2} (x_2 y_3 - x_2 y_2 - x_3 y_3 + x_3 y_2)$$

$$P_3 = \frac{1}{2} (x_3 - x_1)(y_3 - y_1) = \frac{1}{2} (x_3 y_3 - x_3 y_1 - x_1 y_3 + x_1 y_1)$$

Zatem pole trójkąta  $ABC$ :  $P = P_{ADEF} - P_1 - P_2 - P_3$ , skąd otrzymujemy (sprawdź):

$$P = \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2)$$

Zauważmy, że wierzchołki trójkąta  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  i  $C(x_3, y_3)$  są położone w kolejności przeciwej do ruchu wskazówek zegara. Jeśli wierzchołki te byłyby położone w kolejności zgodnej z ruchem wskazówek zegara, to otrzymalibyśmy równość:  $P = -\frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2)$ . Oba wzory można zapisać w postaci:  $P = \frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2|$ .

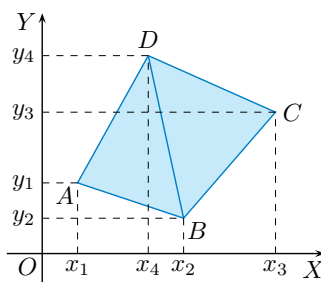


1. Korzystając z podanego wzoru, oblicz pole trójkąta  $ABC$ .

a)  $A(-3, 3)$ ,  $B(3, -2)$ ,  $C(5, 1)$

b)  $A(1, 6)$ ,  $B(-3, -2)$ ,  $C(6, 3)$

2. Wyznacz pola trójkątów  $ABD$  i  $BCD$  (rysunek obok), a następnie uzasadnij, że pole czworokąta  $ABCD$  dane jest wzorem:



$$P = \frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_4 + x_4 y_1 - x_1 y_4 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_4 y_3|$$

2.  $P_{ABD} = \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_4 + x_4 y_1 - x_1 y_4 - x_2 y_1 - x_4 y_2)$

$$P_{BCD} = \frac{1}{2} (x_2 y_3 + x_3 y_4 + x_4 y_2 - x_2 y_4 - x_3 y_2 - x_4 y_3)$$

$$P = P_{ABD} + P_{BCD} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_4 + x_4 y_1 - x_1 y_4 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_4 y_3|$$

1. a) 14 b) 26

### Uczeń:

- podaje równanie okręgu o danych środku i promieniu,
- sprawdza, czy punkt należy do danego okręgu,
- wyznacza równanie okręgu o danym środku, przechodzącego przez dany punkt,
- wyznacza środek i promień okręgu, gdy dane jest jego równanie w postaci kanonicznej lub postaci ogólnej,
- sprawdza, czy dane równanie jest równaniem okręgu,
- wyznacza wartość parametru tak, aby dane równanie opisywało okrąg,
- wyznacza równanie okręgu opisanego na trójkącie,
- stosuje w zadaniach równanie okręgu.

### Ćwiczenie 1

- a)  $x^2 + y^2 = 25$ , 12 punktów:  
(5, 0), (4, 3), (3, 4),  
(0, 5), (-3, 4), (-4, 3),  
(-5, 0), (-4, -3), (-3, -4),  
(0, -5), (3, -4), (4, -3)
- b)  $x^2 + y^2 = 4$ , 4 punkty:  
(2, 0), (0, 2), (-2, 0), (0, -2)
- c)  $x^2 + y^2 = 2$ , 4 punkty:  
(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)
- d)  $x^2 + y^2 = 5$ , 8 punktów:  
(2, 1), (1, 2), (-1, 2), (-2, 1),  
(-2, -1), (-1, -2), (1, -2),  
(2, -1)

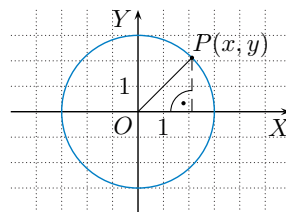
### Ćwiczenie 2

- a)  $x^2 + y^2 = 36$   
b)  $x^2 + y^2 = 64$

## 2.4. Okrąg w układzie współrzędnych

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o promieniu 3 i środku w początku układu współrzędnych. Zauważ, że współrzędne dowolnego punktu  $P(x, y)$  tego okręgu spełniają równanie:

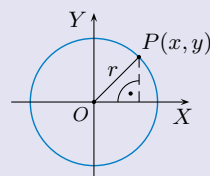
$$x^2 + y^2 = 3^2$$



### Równanie okręgu

Okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu  $r > 0$  jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne  $(x, y)$  spełniają równanie:

$$x^2 + y^2 = r^2$$



**Uwaga.** Zamiast „okrąg o równaniu  $x^2 + y^2 = r^2$ ” będziemy też pisać krótko: „okrąg  $x^2 + y^2 = r^2$ ”.

### Ćwiczenie 1

Narysuj okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu  $r$ . Podaj równanie tego okręgu. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych do niego należy?

- a)  $r = 5$       b)  $r = 2$       c)  $r = \sqrt{2}$       d)  $r = \sqrt{5}$

### Ćwiczenie 2

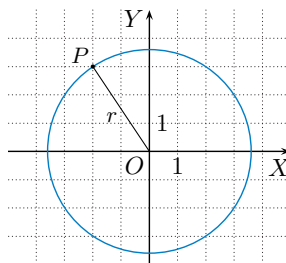
Podaj równanie okręgu o środku w początku układu współrzędnych przechodzącego przez punkt: a) (0, 6), b) (-8, 0).

### Przykład 1

Punkt  $P(-2, 3)$  leży na okręgu o środku w punkcie  $O(0, 0)$ . Wyznacz równanie i promień tego okręgu.

Do równania okręgu  $x^2 + y^2 = r^2$  podstawiamy  $x = -2$  i  $y = 3$ :  $(-2)^2 + 3^2 = r^2$ .

Stąd  $r^2 = 13$ , czyli równanie okręgu ma postać  $x^2 + y^2 = 13$ , a jego promień  $r = \sqrt{13}$ .



### Ćwiczenie 3

Wyznacz równanie i promień okręgu o środku w punkcie  $O(0, 0)$ , jeśli okrąg ten przechodzi przez punkt  $P$ .

- a)  $P(5, -12)$       b)  $P(-3, -3)$       c)  $P(-4, -5)$       d)  $P(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1)$

### Ćwiczenie 3

- a)  $r = 13$ ,  $x^2 + y^2 = 169$   
b)  $r = 3\sqrt{2}$ ,  $x^2 + y^2 = 18$   
c)  $r = \sqrt{41}$ ,  $x^2 + y^2 = 41$   
d)  $r = 2\sqrt{2}$ ,  $x^2 + y^2 = 8$

### Multiteka

- Okrąg i trójkąt w układzie współrzędnych

dla [nauczyciela.pl](http://nauczyciela.pl) | Kartkówka 2.4

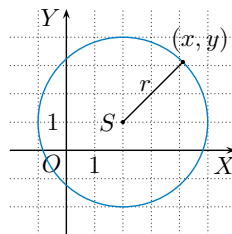
**Generator**  
testów i sprawdzianów

### Przykład 2

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie  $S(2, 1)$  i promieniu  $r = 3$ .

Szukany okrąg jest zbiorem wszystkich punktów  $(x, y)$ , których odległość od punktu  $S(2, 1)$  jest równa 3, zatem jego równanie ma postać:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = 3$$
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$$



### Twierdzenie

Okrąg o środku w punkcie  $(a, b)$  i promieniu  $r > 0$  jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne  $(x, y)$  spełniają równanie:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Równanie  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  nazywamy **równaniem okręgu w postaci kanonicznej**.

### Ćwiczenie 4

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie  $S$  i promieniu  $r$ , a następnie narysuj ten okrąg.

- a)  $S(2, 5)$ ,  $r = 3$       b)  $S(-7, 6)$ ,  $r = 2$       c)  $S(-4, -3)$ ,  $r = \sqrt{2}$

### Ćwiczenie 5

Podaj współrzędne środka i promień okręgu o równaniu:

- a)  $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 16$ ,      d)  $(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 8$ ,  
b)  $(x+\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{3}{4})^2 = 2\frac{7}{9}$ ,      e)  $(x+5)^2 + (y+9)^2 = 225$ ,  
c)  $x^2 + (y+\frac{9}{4})^2 = 10$ ,      f)  $(x-1\frac{1}{6})^2 + y^2 = 45$ .

### Przykład 3

Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie  $S(2, -1)$  przechodzącego przez punkt  $P(3, 1)$ .

Obliczamy promień:  $r = |SP| = \sqrt{(3-2)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ .

Zatem równanie okręgu ma postać:  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$ .

### Ćwiczenie 6

Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie  $S$  przechodzącego przez punkt  $P$ . Narysuj ten okrąg.

- a)  $S(0, -1)$ ,  $P(1, 1)$       b)  $S(-3, -1)$ ,  $P(-1, 3)$       c)  $S(-1, 1)$ ,  $P(2, 2)$

### Ćwiczenie 4

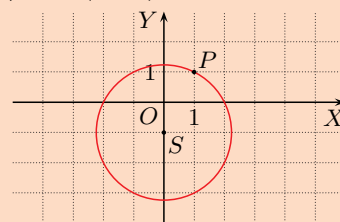
- a)  $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 9$   
b)  $(x+7)^2 + (y-6)^2 = 4$   
c)  $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 2$

### Ćwiczenie 5

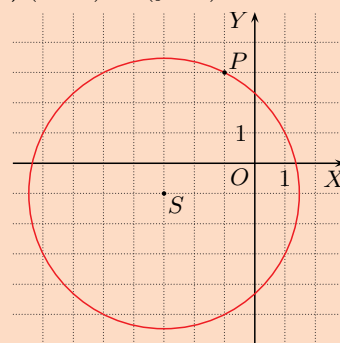
- a)  $S(2, 5)$ ,  $r = 4$   
b)  $S(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ ,  $r = \frac{5}{3}$   
c)  $S(0, -\frac{9}{4})$ ,  $r = \sqrt{10}$   
d)  $S(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ,  $r = 2\sqrt{2}$   
e)  $S(-5, -9)$ ,  $r = 15$   
f)  $S(1\frac{1}{6}, 0)$ ,  $r = 3\sqrt{5}$

### Ćwiczenie 6

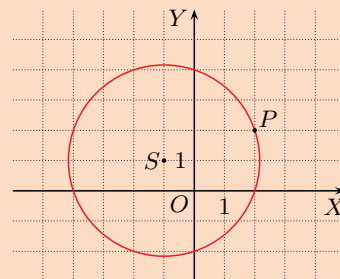
- a)  $x^2 + (y+1)^2 = 5$



- b)  $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 20$



- c)  $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 10$



#### Przykład 4

Sprawdź, czy podane równanie jest równaniem okręgu.

a)  $x^2 + y^2 + 2x + 10y - 10 = 0$

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 2 \cdot 5y + 25) - 10 - 1 - 25 = 0$$

$$(x + 1)^2 + (y + 5)^2 = 36$$

Jest to równanie okręgu o środku w punkcie  $(-1, -5)$  i promieniu 6.

b)  $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 13 = 0$

$$(x^2 + 2 \cdot 3x + 9) + (y^2 - 2 \cdot 2y + 4) + 13 - 9 - 4 = 0$$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 0$$

Powyższe równanie jest prawdziwe tylko dla  $x = -3$  i  $y = 2$ , zatem spełniają je jedynie współrzędne punktu  $(-3, 2)$ . Nie jest to więc równanie okręgu.

c)  $x^2 + y^2 - x - 3y + 3 = 0$

$$(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) + (y^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}) + 3 - \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = 0$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = -\frac{1}{2}$$

Suma kwadratów nie może być liczbą ujemną, więc powyższe równanie jest sprzeczne (zbiór rozwiązań jest pusty) i nie może być równaniem okręgu.

#### Ćwiczenie 7

Sprawdź, czy podane równanie jest równaniem okręgu.

a)  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

d)  $x^2 + y^2 - 3x - 3y + 4\frac{1}{2} = 0$

b)  $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 12 = 0$

e)  $x^2 + y^2 + 3y + 2 = 0$

c)  $x^2 + y^2 + 6y + 2x = 0$

f)  $2x^2 + 2y^2 - 20x - 4y + 2 = 0$

Równanie  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ , gdzie  $A, B, C$  są stałymi, jest równaniem okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy  $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C > 0$ .

#### Dowód

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 - \frac{A^2}{4} + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 - \frac{B^2}{4} + C = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C \end{aligned}$$

- Dla  $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C < 0$  równanie jest sprzeczne.
- Dla  $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C = 0$  równanie opisuje punkt  $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ .
- Dla  $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C > 0$  równanie opisuje okrąg o środku  $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$  i promieniu  $r = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$ .

Powyższe równanie nazywamy **równaniem okręgu w postaci ogólnej**.

#### Ćwiczenie 7

a)  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$  – równanie okręgu

b)  $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = -2$  – nie jest to równanie okręgu

c)  $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 10$  – równanie okręgu

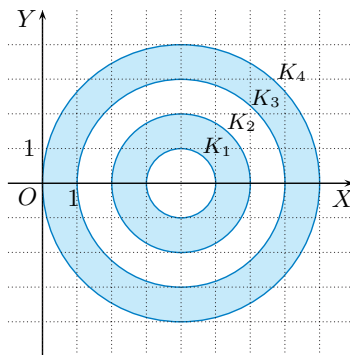
d)  $(x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = 0$  – nie jest to równanie okręgu

e)  $x^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4}$  – równanie okręgu

f)  $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 25$  – równanie okręgu

## Zadania

- Podaj równanie okręgu o środku w punkcie  $S$  i promieniu  $r$ .  
a)  $S(1, 3)$ ,  $r = 2$       b)  $S(-6, 2)$ ,  $r = \frac{3}{4}$       c)  $S(-5, -1)$ ,  $r = 2\sqrt{5}$
- Wyznacz równanie okręgu, który ma środek w punkcie  $S$  i przechodzi przez punkt  $P$ .  
a)  $S(2, 0)$ ,  $P(1, 3)$       b)  $S(2, -3)$ ,  $P(4, -1)$       c)  $S(-5, 2)$ ,  $P(-8, -2)$
- a) Podaj równania okręgów  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  i  $K_4$  przedstawionych na rysunku obok.  
b) Do których z przedstawionych okręgów należą punkty  $A(4 - \sqrt{6}, \sqrt{3})$ ,  $B(1, -\sqrt{7})$  i  $C(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ?  
c) Jaki procent koła ograniczonego okręgiem  $K_4$  został zacieniowany?
- Wyznacz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek  $AB$ . Narysuj ten okrąg.  
a)  $A(1, 2)$ ,  $B(7, 2)$       b)  $A(-1, -2)$ ,  $B(3, 6)$       c)  $A(-3, -4)$ ,  $B(5, 2)$
- Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym  $ABC$ .  
a)  $A(-1, 2)$ ,  $B(6, -2)$ ,  $C(3, 4)$       b)  $A(2, 3)$ ,  $B(5, -1)$ ,  $C(-3, -7)$
- Wyznacz współrzędne środka i promień okręgu. Narysuj ten okrąg.  
a)  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$       d)  $2x^2 + 2y^2 - 24x + 8y + 8 = 0$   
b)  $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 11 = 0$       e)  $2x^2 + 2y^2 - 6x - 8y = 0$   
c)  $x^2 + y^2 + 10x + 4y - 7 = 0$       f)  $3x^2 + 3y^2 + 24x - 6y + 3 = 0$
- Sprawdź, czy podane równanie jest równaniem okręgu.  
a)  $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$       d)  $x^2 + y^2 - x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = 0$   
b)  $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 8 = 0$       e)  $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 29 = 0$   
c)  $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 18 = 0$       f)  $x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{3}y - 4 = 0$
- Dla jakich wartości parametru  $m$  podane równanie jest równaniem okręgu?  
a)  $x^2 + y^2 - 4 + m^2 = 0$       d)  $x^2 + y^2 - 16x + 2y = -64 - m^2$   
b)  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + m = 0$       e)  $x^2 + y^2 + 4x - 8y = m^2 - m - 22$   
c)  $x^2 + y^2 - 6x - 4y - m^2 = 0$       f)  $x^2 + y^2 - 2mx - 2y = -2m - 16$



## Odpowiedzi do zadań

- a)  $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$   
b)  $(x + 6)^2 + (y - 2)^2 = \frac{9}{16}$   
c)  $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 20$
- a)  $(x - 2)^2 + y^2 = 10$   
b)  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 8$   
c)  $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$
- a)  $K_1: (x - 4)^2 + y^2 = 1$ ,  
 $K_2: (x - 4)^2 + y^2 = 4$ ,  
 $K_3: (x - 4)^2 + y^2 = 9$ ,  
 $K_4: (x - 4)^2 + y^2 = 16$   
b)  $A \in K_3$ ,  $B \in K_4$ ,  $C \in K_1$   
c) Pole koła ograniczonego okręgiem  $K_4$  jest równe  $16\pi$ .  
Pole obszaru zacieniowanego:  
 $16\pi - 9\pi + 4\pi - \pi = 10\pi$   
Zatem  $\frac{10\pi}{16\pi} \cdot 100\% = 62,5\%$ .
- a)  $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$   
b)  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$   
c)  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$
- a)  $(x - \frac{5}{2})^2 + y^2 = \frac{65}{4}$   
b)  $(x + \frac{1}{2})^2 + (y + 2)^2 = \frac{125}{4}$
- a)  $S(3, -2)$ ,  $r = 5$   
b)  $S(4, 3)$ ,  $r = 6$   
c)  $S(-5, -2)$ ,  $r = 8$   
d)  $S(6, -2)$ ,  $r = 6$   
e)  $S(\frac{3}{2}, 2)$ ,  $r = \frac{5}{2}$   
f)  $S(-4, 1)$ ,  $r = 4$
- a), b), d), f) jest  
c), e) nie jest

- a)  $x^2 + y^2 = 4 - m^2 > 0$ , czyli  $m \in (-2; 2)$   
b)  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5 - m > 0$ , czyli  $m \in (-\infty; 5)$   
c)  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13 + m^2 > 0$ , czyli  $m \in \mathbf{R}$   
d)  $(x - 8)^2 + (y + 1)^2 = 1 - m^2 > 0$ , czyli  $m \in (-1; 1)$   
e)  $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = m^2 - m - 2 > 0$ , czyli  $m \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$   
f)  $(x - m)^2 + (y - 1)^2 = m^2 - 2m - 15 > 0$ , czyli  $m \in (-\infty; -3) \cup (5; \infty)$

9. a)  $(x+2)^2 + (y-1)^2 = m^2 + 2m + 1 = 16$ ,  
czyli  $m = -5$  lub  $m = 3$   
b)  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = m^2 - 2m + 8 = 16$ ,  
czyli  $m = -2$  lub  $m = 4$   
c)  $(x+2)^2 + (y-\frac{1}{2}m)^2 = -\frac{3}{4}m^2 + \frac{1}{4}m + 16 = 16$ ,  
czyli  $m = 0$  lub  $m = \frac{1}{3}$

10. a) Niech  $S(x, y)$  będzie środkiem okręgu, wówczas:

$$|AS|^2 = |BS|^2 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (y+5)^2 \\ y = -2$$

Zatem  $S(x, -2)$ . Wyznaczamy pierwszą współrzędną:

$$|AS| = r \\ \sqrt{(x-2)^2 + (-2-1)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$x = -4 \text{ lub } x = 8$$

czyli równanie okręgu:

$$(x-8)^2 + (y+2)^2 = 45 \\ \text{lub } (x+4)^2 + (y+2)^2 = 45$$

$$\text{b) } (x-1)^2 + (y+1)^2 = 20 \\ \text{lub } (x+1)^2 + (y-1)^2 = 20$$

$$\text{c) } (x+2)^2 + y^2 = 25 \\ \text{lub } (x-6)^2 + (y-4)^2 = 25$$

$$\text{d) } (x+4)^2 + (y-6)^2 = 26 \\ \text{lub } (x-2)^2 + y^2 = 26$$

11. a)  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 20$   
b)  $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 45$

12. a)  $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 40$   
b)  $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 50$

9. Dla jakich wartości parametru  $m$  podane równanie jest równaniem okręgu o promieniu 4?

- a)  $x^2 + y^2 + 4x - 2y = m^2 + 2m - 4$   
b)  $x^2 - 2x + y^2 + 4y = m^2 - 2m + 3$   
c)  $x^2 + 4x + y^2 - my + m^2 - \frac{1}{4}m - 12 = 0$

10. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz równanie okręgu o promieniu  $5\sqrt{2}$  przechodzącego przez punkty  $A(-2, 0)$  i  $B(2, 2)$ .

Środek okręgu  $S$  leży na symetralnej odcinka  $AB$ . Jest to prosta o równaniu  $y = -2x + 1$  (sprawdź).

Zatem szukamy punktu  $S(x_0, -2x_0 + 1)$  takiego, że  $|SA| = 5\sqrt{2}$ .

$$|SA| = \sqrt{(x_0 - (-2))^2 + (-2x_0 + 1 - 0)^2}$$

Otrzymujemy więc równanie:

$$\sqrt{(x_0 + 2)^2 + (-2x_0 + 1)^2} = 5\sqrt{2}$$

Równanie jest spełnione, gdy  $x_0 = -3$  lub  $x_0 = 3$ , zatem  $S(-3, 7)$  lub  $S(3, -5)$ . Czyli równanie okręgu ma postać:

$$(x+3)^2 + (y-7)^2 = 50 \quad \text{lub} \quad (x-3)^2 + (y+5)^2 = 50$$

Wyznacz równanie okręgu o promieniu  $r$  przechodzącego przez punkty  $A$  i  $B$ .

- a)  $r = 3\sqrt{5}$ ,  $A(2, 1)$ ,  $B(2, -5)$       c)  $r = 5$ ,  $A(1, 4)$ ,  $B(3, 0)$   
b)  $r = 2\sqrt{5}$ ,  $A(-3, -3)$ ,  $B(3, 3)$       d)  $r = \sqrt{26}$ ,  $A(-3, 1)$ ,  $B(1, 5)$

11. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty  $A$  i  $B$ , którego środek należy do prostej  $l$ .

- a)  $A(3, -2)$ ,  $B(5, 0)$ ,  $l: y = x + 1$       b)  $A(-1, 4)$ ,  $B(2, 1)$ ,  $l: y = 2x + 6$

12. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ .

- a)  $A(-3, 2)$ ,  $B(9, 2)$ ,  $C(5, 10)$       b)  $A(3, -3)$ ,  $B(9, 3)$ ,  $C(-3, 9)$

13. Punkt  $S(4, -3)$  jest środkiem okręgu, a punkt  $A(2, 1)$  jest środkiem jego cięciwy. Wyznacz równanie okręgu, wiedząc, że długość tej cięciwy jest równa  $2\sqrt{5}$ .

14. Wykaż, że jeżeli  $m \neq n$ , to równanie  $x^2 + y^2 + mx + ny + \frac{mn}{2} = 0$  przedstawia okrąg. Podaj współrzędne środka i promień tego okręgu.

13.  $|SA|^2 = 20$ . Niech  $B$  będzie jednym z punktów wspólnych cięciwy i okręgu. Wówczas:

$$r^2 = |SA|^2 + |AB|^2 = 20 + (\sqrt{5})^2 = 25$$

$$\text{Równanie okręgu: } (x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$$

14.  $x^2 + mx + \frac{m^2}{4} + y^2 + ny + \frac{n^2}{4} = \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - \frac{mn}{2}$

$$(x + \frac{m}{2})^2 + (y + \frac{n}{2})^2 = (\frac{m}{2} - \frac{n}{2})^2 > 0 \text{ dla } m \neq n$$

$$\text{Środek okręgu: } (-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}), \text{ promień okręgu: } |\frac{m}{2} - \frac{n}{2}|$$

## Okrąg wpisany w trójkąt

### Przykład

Wyznacz współrzędne środka okręgu wpisanego w trójkąt o wierzchołkach  $A(0, 2)$ ,  $B(7, 3)$  i  $C(4, 6)$ .

Środek okręgu wpisanego w trójkąt jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów tego trójkąta.

Prosta  $AC$  opisana jest równaniem  $x - y + 2 = 0$ , a prosta  $AB$ :  $x - 7y + 14 = 0$  (sprawdź).

Dwusieczna kąta  $CAB$  (półprosta  $k$  na rysunku obok) jest zbiorem punktów równo odległych od ramion kąta  $CAB$ .

Rozważmy punkt  $P(x, y)$  należący do dwusiecznej kąta  $CAB$ . Odległość punktu  $P$  od ramienia  $AC$  jest równa:

$$\frac{|1 \cdot x + (-1) \cdot y + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|x - y + 2|}{\sqrt{2}}$$

Odległość punktu  $P$  od ramienia  $AB$  jest równa:

$$\frac{|1 \cdot x + (-7) \cdot y + 14|}{\sqrt{1^2 + (-7)^2}} = \frac{|x - 7y + 14|}{5\sqrt{2}}$$

Otrzymujemy równanie:

$$\frac{|x - y + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|x - 7y + 14|}{5\sqrt{2}}$$

$$5|x - y + 2| = |x - 7y + 14|$$

$$5(x - y + 2) = x - 7y + 14 \quad \text{lub} \quad -5(x - y + 2) = x - 7y + 14$$

$$5x - 5y + 10 = x - 7y + 14 \quad \text{lub} \quad -5x + 5y - 10 = x - 7y + 14$$

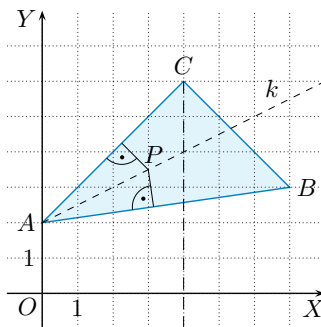
$$2y = -4x + 4 \quad \text{lub} \quad 12y = 6x + 24$$

$$y = -2x + 2 \quad \text{lub} \quad y = \frac{1}{2}x + 2$$

Dwusieczna kąta  $CAB$  jest zawarta w prostej  $y = \frac{1}{2}x + 2$  (prosta  $y = -2x + 2$  zawiera dwusieczne kątów rozwartych utworzonych przez proste  $AC$  i  $AB$ ).

Dwusieczna kąta  $ACB$  jest zawarta w prostej  $x = 4$  (sprawdź).

Środek okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$  jest punktem przecięcia prostych  $y = \frac{1}{2}x + 2$  i  $x = 4$ . Ma on zatem współrzędne  $(4, 4)$ .



1. Wyznacz współrzędne środka okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$ .

- a)  $A(-2, 4)$ ,  $B(3, -6)$ ,  $C(6, 0)$       b)  $A(-12, -1)$ ,  $B(0, -5)$ ,  $C(3, 4)$

1. a) Prosta  $AB$ :  $2x + y = 0$ , prosta  $AC$ :  $x + 2y - 6 = 0$ , prosta  $BC$ :  $2x - y - 12 = 0$

Odległość punktu  $P(x, y)$  od ramion  $AB$  i  $AC$ :  $\frac{|2x+y|}{\sqrt{5}} = \frac{|x+2y-6|}{\sqrt{5}}$

Dwusieczna kąta  $CAB$  jest zawarta w prostej:  $y = -x + 2$ .

Dwusieczna kąta  $ACB$ :  $y = \frac{1}{3}x - 2$

Środek okręgu:  $(3, -1)$

b) Prosta  $AB$ :  $x + 3y + 15 = 0$ , prosta  $AC$ :  $x - 3y + 9 = 0$ , prosta  $BC$ :  $3x - y - 5 = 0$

Odległość punktu  $P(x, y)$  od ramion  $AB$  i  $BC$ :  $\frac{|x+3y+15|}{\sqrt{10}} = \frac{|3x-y-5|}{\sqrt{10}}$

Dwusieczna kąta  $ABC$  jest zawarta w prostej:  $y = -2x - 5$ .

Dwusieczna kąta  $BAC$ :  $y = -1$

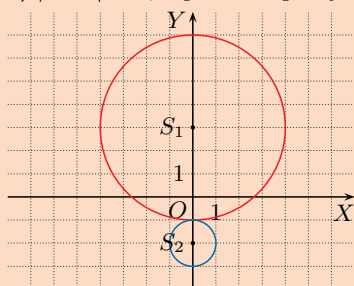
Środek okręgu:  $(-2, -1)$

### Uczeń:

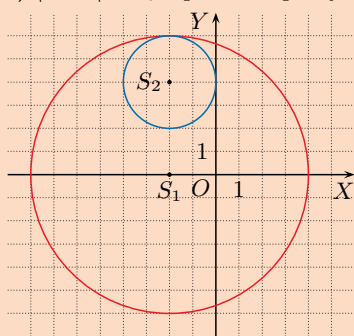
- określa wzajemne położenie dwóch okręgów,
- podaje liczbę punktów wspólnych dwóch okręgów,
- wyznacza równanie okręgu o danym środku, znając jego położenie względem okręgu opisanego podanym równaniem,
- rozwiązuje zadania dotyczące wzajemnego położenia okręgów, w tym zadania z parametrem.

### Ćwiczenie 1

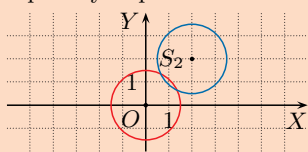
- a)  $|S_1S_2| = 2$ ,  
brak punktów wspólnych
- b)  $|S_1S_2| = 5$ , 1 punkt wspólny



- c)  $|S_1S_2| = 4$ , 1 punkt wspólny



- d)  $|S_1S_2| = 2\sqrt{2}$ ,  
2 punkty wspólne



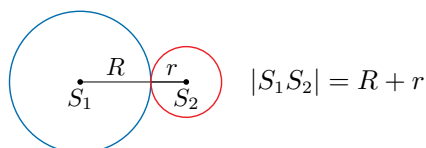
## 2.5. Wzajemne położenie dwóch okręgów

Przypomnijmy, jak mogą być położone względem siebie dwa różne okręgi.

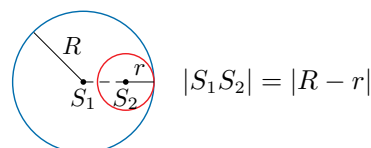
### Okręgi styczne

(mają jeden punkt wspólny)

styczne zewnętrznie

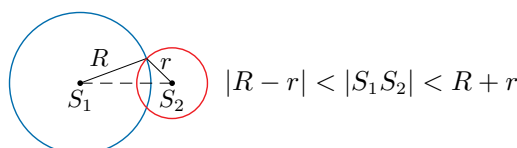


styczne wewnętrznie



### Okręgi przecinające się

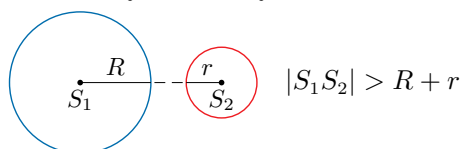
(mają dwa punkty wspólne)



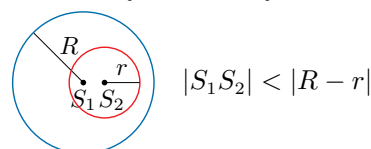
### Okręgi rozłączne

(nie mają punktów wspólnych)

rozłączne zewnętrznie



rozłączne wewnętrznie



### Ćwiczenie 1

Narysuj w układzie współrzędnych okrąg o środku w punkcie  $S_1$  i promieniu  $R$  oraz okrąg o środku w punkcie  $S_2$  i promieniu  $r$ . Podaj odległość między środkami tych okręgów. Ile punktów wspólnych mają te okręgi?

- a)  $S_1(-1, 0)$ ,  $R = 5$ ,  $S_2(1, 0)$ ,  $r = 2$       c)  $S_1(-2, 0)$ ,  $R = 6$ ,  $S_2(-2, 4)$ ,  $r = 2$
- b)  $S_1(0, 3)$ ,  $R = 4$ ,  $S_2(0, -2)$ ,  $r = 1$       d)  $S_1(0, 0)$ ,  $R = \frac{3}{2}$ ,  $S_2(2, 2)$ ,  $r = \frac{3}{2}$

### Ćwiczenie 2

Podaj liczbę punktów wspólnych okręgu o środku w punkcie  $S_1$  i promieniu  $R$  z okręgiem o środku w punkcie  $S_2$  i promieniu  $r$  w zależności od  $r$ .

- a)  $S_1(-3, 0)$ ,  $R = 5$ ,  $S_2(4, 0)$       c)  $S_1(\sqrt{2}, 0)$ ,  $R = 3$ ,  $S_2(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$
- b)  $S_1(2, 0)$ ,  $R = 4$ ,  $S_2(2, -1)$       d)  $S_1(\frac{1}{2}, 0)$ ,  $R = 1$ ,  $S_2(-\frac{10}{3}, 0)$

### Ćwiczenie 2

- a) 0 punktów dla  $r \in (0; 2) \cup (12; \infty)$ ,  
1 punkt dla  $r = 2$  lub  $r = 12$ ,  
2 punkty dla  $r \in (2; 12)$
- b) 0 punktów dla  $r \in (0; 3) \cup (5; \infty)$ ,  
1 punkt dla  $r = 3$  lub  $r = 5$ ,  
2 punkty dla  $r \in (3; 5)$
- c) 0 punktów dla  $r \in (0; 3 - \sqrt{3}) \cup (3 + \sqrt{3}; \infty)$ ,  
1 punkt dla  $r = 3 - \sqrt{3}$  lub  $r = 3 + \sqrt{3}$ ,  
2 punkty dla  $r \in (3 - \sqrt{3}; 3 + \sqrt{3})$
- d) 0 punktów dla  $r \in (0; 2\frac{5}{6}) \cup (4\frac{5}{6}; \infty)$ ,  
1 punkt dla  $r = 2\frac{5}{6}$  lub  $r = 4\frac{5}{6}$ ,  
2 punkty dla  $r \in (2\frac{5}{6}; 4\frac{5}{6})$

### Multiteka

- Położenie okręgów w układzie współrzędnych

dla [nauczyciela.pl](http://nauczyciela.pl) | Kartkówka 2.5

**Generator**  
testów i sprawdzianów

### Przykład 1

Określ wzajemne położenie okręgów:

$$K_1: x^2 + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0 \quad \text{oraz} \quad K_2: x^2 + y^2 - 8x + 4y + 2 = 0$$

Zapisujemy równania okręgów  $K_1$  i  $K_2$  w postaci kanonicznej i odczytujemy współrzędne ich środków oraz promienie.

$$K_1: x^2 + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - 6y + 9 - 9 + 2 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 8, \quad \text{środek } S_1(-1, 3), \quad \text{promień } r_1 = 2\sqrt{2}$$

$$K_2: x^2 + y^2 - 8x + 4y + 2 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 - 16 + y^2 + 4y + 4 - 4 + 2 = 0$$

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 18, \quad \text{środek } S_2(4, -2), \quad \text{promień } r_2 = 3\sqrt{2}$$

Obliczamy odległość między środkami okręgów:

$$|S_1 S_2| = \sqrt{(4 - (-1))^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$|S_1 S_2| = r_1 + r_2$ , zatem okręgi  $K_1$  i  $K_2$  są styczne zewnętrznie.

### Ćwiczenie 3

Określ wzajemne położenie okręgów  $K_1$  i  $K_2$ .

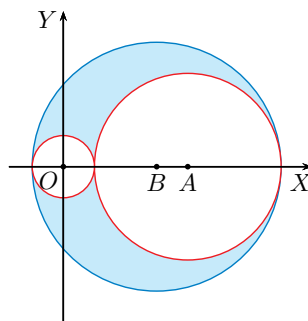
$$\text{a) } K_1: x^2 + y^2 + 6x + 2y - 3 = 0, \quad K_2: x^2 + y^2 - 10x - 4y + 19 = 0$$

$$\text{b) } K_1: x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0, \quad K_2: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$$

$$\text{c) } K_1: x^2 + y^2 + 4x - 16y - 30 = 0, \quad K_2: x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$$

### Zadania

- Dwa okręgi o środkach  $O(0,0)$  i  $A(11,0)$  są styczne zewnętrznie. Oba te okręgi są styczne wewnętrznie do okręgu o środku  $B(8,0)$  (rysunek obok). Oblicz promienie tych trzech okręgów i pole zacieniowanego obszaru.



- Dany jest okrąg  $x^2 + y^2 = 16$  i okrąg, którego średnicą jest odcinek o końcach  $A(0,4)$  i  $B(4,0)$ . Oblicz pola kół ograniczonych przez te okręgi i pole części wspólnej tych kół.

- Podaj liczbę punktów wspólnych okręgu opisanego podanym równaniem z okręgiem o środku  $S(1,3)$  i promieniu  $r$  w zależności od tego promienia.

$$\text{a) } x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$$

$$\text{c) } x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$$

$$\text{b) } x^2 + y^2 - 14x + 10y - 26 = 0$$

$$\text{d) } x^2 + y^2 + 4x - 12y + 8 = 0$$

- a) 0 punktów dla  $r \in (0; 3) \cup (7; \infty)$ ,

1 punkt dla  $r \in \{3, 7\}$ ,

2 punkty dla  $r \in (3; 7)$

- b) 0 punktów dla  $r \in (20; \infty)$ ,

1 punkt dla  $r = 20$ ,

2 punkty dla  $r \in (0; 20)$

- c) 0 punktów dla  $r \in (0; 3\sqrt{5} - 5) \cup (3\sqrt{5} + 5; \infty)$ ,

1 punkt dla  $r \in \{3\sqrt{5} - 5, 3\sqrt{5} + 5\}$ ,

2 punkty dla  $r \in (3\sqrt{5} - 5; 3\sqrt{5} + 5)$

- d) 0 punktów dla  $r \in (0; \sqrt{2}) \cup (7\sqrt{2}; \infty)$ ,

1 punkt dla  $r \in \{\sqrt{2}, 7\sqrt{2}\}$ ,

2 punkty dla  $r \in (\sqrt{2}; 7\sqrt{2})$

### Ćwiczenie 3

$$\text{a) } K_1: (x+3)^2 + (y+1)^2 = 13$$

$$K_2: (x-5)^2 + (y-2)^2 = 10$$

$$|S_1 S_2| = \sqrt{73}$$

$$\sqrt{13} + \sqrt{10} < 4 + 4 < \sqrt{73}$$

Okręgi są rozłączne zewnętrznie.

$$\text{b) } K_1: (x+2)^2 + (y+2)^2 = 4$$

$$K_2: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$$

$$|S_1 S_2| = \sqrt{34}$$

$$2 + \sqrt{5} < 2 + 3 < \sqrt{34}$$

Okręgi są rozłączne zewnętrznie.

$$\text{c) } K_1: (x+2)^2 + (y-8)^2 = 98$$

$$K_2: (x-2)^2 + y^2 = 2$$

$$|S_1 S_2| = \sqrt{80}$$

$$\sqrt{98} - \sqrt{2} = 7\sqrt{2} - \sqrt{2} =$$

$$= 6\sqrt{2} = \sqrt{72}$$

$$\sqrt{98} - \sqrt{2} < \sqrt{80} < \sqrt{98} + \sqrt{2}$$

Okręgi przecinają się.

### Odpowiedzi do zadań

- Oznaczmy promienie okręgów odpowiednio przez  $r_A$ ,  $r_B$ ,  $r_O$ , wówczas:

$$\begin{cases} 2r_B = 2r_O + 2r_A \\ r_O + r_A = 11 \\ r_B = 3 + r_A \end{cases}$$

$$\text{czyli } r_O = 3, r_A = 8, r_B = 11.$$

Pole obszaru:

$$P = P_B - P_A - P_O = 48\pi$$

- $P_1 = 16\pi$ ,  $P_2 = 8\pi$ ,  
 $P = 8\pi - 8$

4. a) styczne zewnętrznie  
b), c) styczne wewnętrznie  
d) przecinają się  
e) rozłączne wewnętrznie  
f) rozłączne zewnętrznie

5.  $d$  – odległość między środkami okręgów

a)  $d = 10$ ,  $m = -252$   
lub  $m = 28$

b)  $d = 13$ ,  $m = -35$   
lub  $m = 381$

c)  $d = 5$ ,  $m = -15$   
lub  $m = \frac{65}{9}$

d)  $d = \sqrt{41}$ ,  
 $m = 57 - 8\sqrt{41}$  lub  
 $m = 57 + 8\sqrt{41}$

7. a)  $|AB| = 7$ ,  $|AC| = 6$ ,  
 $|BC| = 5$ ,  $r_A = 4$ ,  $r_B = 3$ ,  
 $r_C = 2$   
b)  $|AB| = 10$ ,  $|AC| = 8$ ,  
 $|BC| = 6$ ,  $r_A = 6$ ,  $r_B = 4$ ,  
 $r_C = 2$

8. Okręgi są styczne wewnętrznie, gdy odległość między ich środkami jest równa różnicy ich promieni. Niech  $S(x, y)$ . Wówczas:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \\ \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 2 \end{cases}$$

$$S\left(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$$

9. a) Niech  $S(x, y)$ . Wówczas:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 4 \\ \sqrt{(x-6)^2 + (y-3)^2} = 2 \end{cases}$$

$$x = 4, y = 3$$

Równanie okręgu:

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$$

b)  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$   
lub  $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$

4. Określ wzajemne położenie okręgów  $K_1$  i  $K_2$ .

a)  $K_1: x^2 - 6x + y^2 + 5 = 0$ ,  $K_2: x^2 - 6x + y^2 - 12y + 29 = 0$

b)  $K_1: x^2 + 4x + y^2 + 4y + 7 = 0$ ,  $K_2: x^2 + 4x + y^2 - 6y - 23 = 0$

c)  $K_1: x^2 + 4x + y^2 + 2y - 95 = 0$ ,  $K_2: x^2 - 2x + y^2 - 6y - 15 = 0$

d)  $K_1: x^2 + 8x + y^2 - 10y + 5 = 0$ ,  $K_2: x^2 + 10x + y^2 + 4y + 13 = 0$

e)  $K_1: x^2 + 2x + y^2 - 16y + 16 = 0$ ,  $K_2: x^2 - 2x + y^2 - 12y + 33 = 0$

f)  $K_1: x^2 - 14x + y^2 - 4y + 4 = 0$ ,  $K_2: x^2 + 10x + y^2 + 6y + 9 = 0$

5. Oblicz odległość między środkami okręgów  $K_1$  i  $K_2$ . Podaj, dla jakich wartości parametru  $m$  okręgi te mają jeden punkt wspólny.

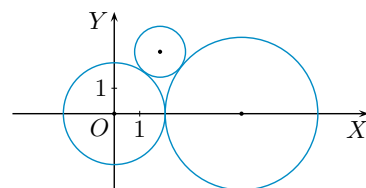
a)  $K_1: x^2 + 12x + y^2 - 2y + m = 0$ ,  $K_2: x^2 - 4x + y^2 + 10y - 20 = 0$

b)  $K_1: x^2 - 10x + y^2 + 2y - 38 = 0$ ,  $K_2: x^2 + 14x + y^2 - 8y - m + 5 = 0$

c)  $K_1: x^2 + y^2 + 6x + 2y + m = 0$ ,  $K_2: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4m - 35 = 0$

d)  $K_1: x^2 + 4x + y^2 + 2y - 11 = 0$ ,  $K_2: x^2 - 6x + y^2 - 6y + 18 - m = 0$

6. Okręgi o promieniach 1, 2 i 3, parami styczne zewnętrznie, położone są w sposób przedstawiony na rysunku obok. Wyznacz współrzędne środka najmniejszego okręgu.



7. Punkty  $A$ ,  $B$  i  $C$  są środkami trzech okręgów parami stycznych zewnętrznie. Oblicz odległości między środkami tych okręgów i ich promienie.

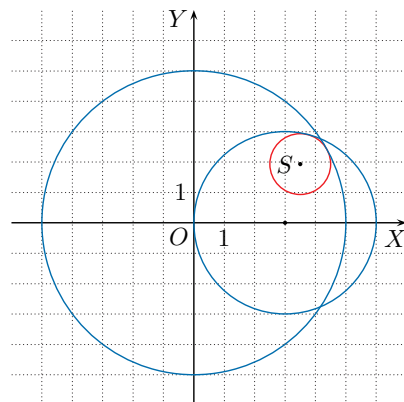
a)  $A(0,0)$ ,  $B(7,0)$ ,  $C\left(\frac{30}{7}, \frac{12\sqrt{6}}{7}\right)$

b)  $A(-6,0)$ ,  $B(4,0)$ ,  $C\left(\frac{2}{5}, \frac{24}{5}\right)$

8. Okrąg o środku w punkcie  $S$  i promieniu 1 (rysunek obok) jest styczny wewnętrznie do okręgów:

$$x^2 + y^2 = 25 \text{ oraz } (x-3)^2 + y^2 = 9$$

Wyznacz współrzędne punktu  $S$ .



9. Wyznacz równanie okręgu o promieniu  $r = 1$  stycznego wewnętrznie do okręgów: o środku  $S_1$  i promieniu  $r_1$  oraz o środku  $S_2$  i promieniu  $r_2$ .

a)  $S_1(0,3)$ ,  $r_1 = 5$ ,  $S_2(6,3)$ ,  $r_2 = 3$

b)  $S_1(0,0)$ ,  $r_1 = 6$ ,  $S_2(4,4)$ ,  $r_2 = 2$

6. Niech  $h = |DO_3|$ .

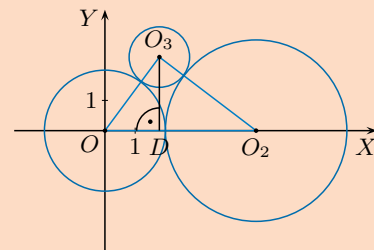
Z warunków zadania:  $|OO_2| = 5$ ,  $|O_2O_3| = 4$ ,  $|OO_3| = 3$ . Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa trójkąt  $OO_2O_3$  jest prostokątny. Obliczamy pole trójkąta  $OO_2O_3$  na dwa sposoby:

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 5h$$

czyli  $h = \frac{12}{5}$ . Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $ODO_3$  mamy:

$$|OD|^2 + h^2 = |OO_3|^2$$

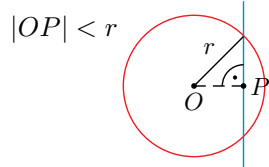
czyli  $|OD| = \frac{9}{5}$ . Zatem współrzędne środka najmniejszego okręgu:  $O_3\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$ .



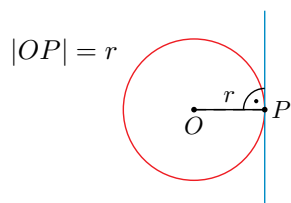
## 2.6. Wzajemne położenie okręgu i prostej

Przypomnijmy, że okrąg i prosta mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.

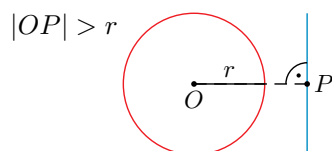
Niech  $|OP|$  będzie odległością środka okręgu od prostej.



Prostą, która ma z okręgiem dwa punkty wspólne, nazywamy jego **sieczną**. Odległość siecznej od środka okręgu jest mniejsza od jego promienia.



Jeśli prosta ma z okręgiem jeden punkt wspólny, to mówimy, że jest **styczna** do okręgu (wspólny punkt nazywamy **punktem styczności**). Promień okręgu prowadzony do punktu styczności z prostą jest do niej prostopadły. Odległość stycznej od środka okręgu jest równa jego promieniowi.



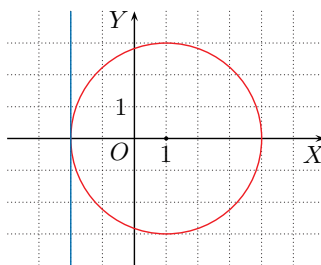
Na rysunku obok okrąg i prosta nie mają punktów wspólnych (są rozłączne). Odległość prostej od środka okręgu jest większa od jego promienia.

### Przykład 1

Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie  $(1, 0)$  ma prosta  $x = -2$  w zależności od promienia  $r$  tego okręgu?

Dana prosta:

- ma jeden punkt wspólny z okręgiem dla  $r = 3$  (rysunek obok),
- ma dwa punkty wspólne z okręgiem dla  $r > 3$ ,
- nie ma punktów wspólnych z okręgiem dla  $0 < r < 3$ .



### Ćwiczenie 1

Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie  $S$  ma prosta  $k$  w zależności od promienia  $r$  tego okręgu?

- |                                   |                                                           |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| a) $S(2, -2)$ , $k: y = 2$        | c) $S(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ , $k: x = 1 - \sqrt{2}$ |
| b) $S(-2, 2)$ , $k: x = \sqrt{3}$ | d) $S(-1, 3)$ , $k: y = x + 2$                            |

### Ćwiczenie 1

- |                                                                                                                                 |                                                                                                                                                               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) 0 punktów dla $r \in (0; 4)$ ,<br>1 punkt dla $r = 4$ ,<br>2 punkty dla $r \in (4; \infty)$                                  | c) 0 punktów dla $r \in (0; \frac{3}{2} - \sqrt{2})$ ,<br>1 punkt dla $r = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$ ,<br>2 punkty dla $r \in (\frac{3}{2} - \sqrt{2}; \infty)$ |
| b) 0 punktów dla $r \in (0; 2 + \sqrt{3})$ ,<br>1 punkt dla $r = 2 + \sqrt{3}$ ,<br>2 punkty dla $r \in (2 + \sqrt{3}; \infty)$ | d) 0 punktów dla $r \in (0; \sqrt{2})$ ,<br>1 punkt dla $r = \sqrt{2}$ ,<br>2 punkty dla $r \in (\sqrt{2}; \infty)$                                           |

### Uczeń:

- podaje liczbę punktów wspólnych i określa wzajemne położenie okręgu i prostej, porównując odległość środka okręgu od prostej z promieniem okręgu,
- wyznacza równanie stycznej do okręgu spełniającej podane warunki,
- określa liczbę punktów wspólnych okręgu i prostej w zależności od parametru,
- rozwiązuje zadania dotyczące wzajemnego położenia okręgu i prostej.

### Multiteka

- Prosta i okrąg w układzie współrzędnych

dla [nauczyciela.pl](http://nauczyciela.pl) | Kartkówka 2.6

**Generator**  
testów i sprawdzianów

### Ćwiczenie 2

Środek okręgu:  $S(2, 0)$ ,

promień:  $r = 5$ ,

$P$  – środek cięciwy

a)  $|SP| = 2$

$$|AP| = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$$

Zatem  $|AB| = 2\sqrt{21}$ .

b)  $|SP| = 3$

$$|AP| = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

Zatem  $|AB| = 8$ .

c) Odległość środka okręgu

$S(2, 0)$  od prostej  $x - 2y = 0$ :

$$|SP| = \frac{|2 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 0|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$|AP| = \sqrt{5^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{11\sqrt{5}}{5}$$

Zatem  $|AB| = \frac{22\sqrt{5}}{5}$ .

### Ćwiczenie 3

a)  $|SP| = 4$ ,  $|AP| = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ ,

$$r^2 = 4^2 + 3^2 = 25, \text{ zatem:}$$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 25$$

b)  $|SP| = 3$ ,  $|AP| = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ ,

$$r^2 = 3^2 + 3^2 = 18, \text{ zatem:}$$

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 18$$

### Przykład 2

Dane są okrąg o równaniu  $x^2 + y^2 = 16$  i prosta  $l: x = 3$ . Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty ich przecięcia.

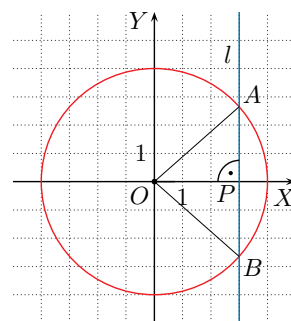
Środkiem okręgu jest punkt  $(0, 0)$ , a promień jest równy 4. Niech  $|OP|$  będzie odległością środka okręgu od prostej  $l$ , a punkty  $A, B$  niech będą punktami przecięcia okręgu z tą prostą.

Wówczas  $|OP| = 3$ , zatem:

$$|AP| = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$

Trójkąty  $OPA$  i  $OPB$  są przystające, więc długość cięciwy:

$$|AB| = 2 \cdot |AP| = 2\sqrt{7}$$



### Ćwiczenie 2

Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty przecięcia prostej  $l$  i okręgu o równaniu  $(x-2)^2 + y^2 = 25$ .

a)  $l: x = 4$

b)  $l: x = -1$

c)  $l: y = \frac{1}{2}x$

### Ćwiczenie 3

Cięciwa o długości 6 jest wyznaczona przez punkty przecięcia prostej  $l$  i okręgu o środku w punkcie  $S$ . Wyznacz równanie tego okręgu.

a)  $l: x = 3$ ,  $S(-1, -2)$

b)  $l: y = -2$ ,  $S(4, 1)$

### Przykład 3

Ile punktów wspólnych z okręgiem o równaniu  $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 10$  ma prosta  $l: x - 3y + 3 = 0$ ?

Promień okręgu jest równy  $\sqrt{10}$ , a środkiem okręgu jest punkt  $S(4, -1)$ .

Obliczamy odległość punktu  $S$  od prostej  $l$ :

$$d = \frac{|1 \cdot 4 + (-3) \cdot (-1) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

Odległość środka okręgu od prostej jest równa promieniowi okręgu, więc okrąg i prosta są styczne – mają jeden punkt wspólny.

### Ćwiczenie 4

Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie  $S$  i promieniu 4 ma prosta  $l$ ?

a)  $S(3, 4)$ ,  $l: 12x + 5y - 4 = 0$

c)  $S(-3, 2)$ ,  $l: 4x + 3y + 6 = 0$

b)  $S(7, 4)$ ,  $l: 3x + 4y - 12 = 0$

d)  $S(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ ,  $l: x + y = 0$

### Ćwiczenie 4

Niech  $d$  – odległość środka okręgu od prostej.

a)  $d = 4 = r$ , zatem jest jeden punkt wspólny.

b)  $d = 5 > r$ , zatem nie ma punktów wspólnych.

c)  $d = 0 < r$ , zatem są dwa punkty wspólne.

d)  $d = 4 = r$ , zatem jest jeden punkt wspólny.

#### Przykład 4

Określ liczbę punktów wspólnych okręgu o równaniu  $x^2 - 6x + y^2 - 4y = m$  oraz prostej  $l: x - 2y + 6 = 0$  w zależności od parametru  $m$ .

Przekształcamy równanie okręgu do postaci kanonicznej:

$$\begin{aligned}x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 &= m + 13 \\(x - 3)^2 + (y - 2)^2 &= m + 13\end{aligned}$$

Powyższe równanie jest równaniem okręgu dla  $m \in (-13; \infty)$ .

Środkiem okręgu jest punkt  $S(3, 2)$ , a promień jest równy  $\sqrt{m + 13}$ .

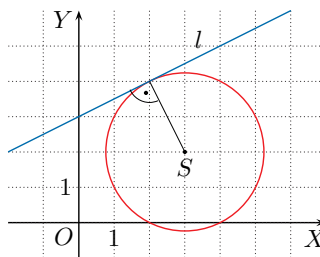
Obliczamy odległość środka okręgu od prostej  $l$ :

$$d = \frac{|1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + 6|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

- Okrąg ma jeden punkt wspólny z prostą  $l$ , gdy  $\sqrt{m + 13} = \sqrt{5}$ , czyli dla  $m = -8$  (rysunek obok).

- Okrąg ma dwa punkty wspólne z prostą  $l$ , gdy  $\sqrt{m + 13} > \sqrt{5}$ , czyli dla  $m \in (-8; \infty)$ .

- Okrąg nie ma punktów wspólnych z prostą  $l$ , gdy  $m \in (-13; -8)$ .



#### Ćwiczenie 5

Określ liczbę punktów wspólnych okręgu  $O$  i prostej  $l$  w zależności od parametru  $m$ .

a)  $O: x^2 + y^2 + 2y = m$ ,  $l: y = \frac{1}{2}x - 6$     b)  $O: x^2 + 6x + y^2 = m$ ,  $l: y = -\frac{3}{4}x + 4$

#### Przykład 5

Wyznacz równania stycznych do okręgu o środku w punkcie  $S(3, 2)$  i promieniu 2 przechodzących przez początek układu współrzędnych.

Równanie stycznej  $y = ax$  zapisujemy w postaci ogólnej  $ax - y = 0$ .

Odległość środka okręgu od stycznej jest równa promieniowi okręgu:

$$\frac{|a \cdot 3 - 1 \cdot 2|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 2$$

$$|3a - 2| = 2\sqrt{a^2 + 1} \quad \text{Obie strony równania są dodatnie.}$$

Obie strony równania podnosimy do kwadratu.

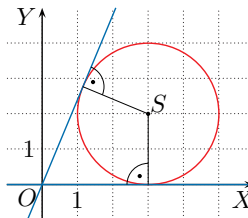
$$9a^2 - 12a + 4 = 4a^2 + 4$$

$$5a^2 - 12a = 0$$

$$a(5a - 12) = 0$$

$$a = 0 \text{ lub } a = \frac{12}{5}$$

Równania szukanych stycznych:  $y = 0$  oraz  $y = \frac{12}{5}x$ .



#### Ćwiczenie 5

a) Równanie okręgu:  $x^2 + (y + 1)^2 = 1 + m$

$S(0, -1)$ ,  $d = 2\sqrt{5}$ ,

$r = \sqrt{1 + m}$ , czyli  $m \in (-1; \infty)$

Liczba punktów wspólnych okręgu  $O$  i prostej  $l$ :

0 punktów dla  $m \in (-1; 19)$ ,

1 punkt dla  $m = 19$ ,

2 punkty dla  $m \in (19; \infty)$

b) Równanie okręgu:  $(x + 3)^2 + y^2 = 9 + m$

$S(-3, 0)$ ,  $d = 5$ ,

$r = \sqrt{9 + m}$ , czyli  $m \in (-9; \infty)$

Liczba punktów wspólnych okręgu  $O$  i prostej  $l$ :

0 punktów dla  $m \in (-9; 16)$ ,

1 punkt dla  $m = 16$ ,

2 punkty dla  $m \in (16; \infty)$

### Ćwiczenie 6

a) Równanie stycznej:

$$ax - y + 1 - 4a = 0$$

Odległość środka okręgu od

$$\text{stycznej: } d = \frac{|-2+1-4a|}{\sqrt{a^2+1}} = 1$$

$$a = 0 \text{ lub } a = -\frac{8}{15}$$

Równania stycznych:  $y = 1$  lub

$$y = -\frac{8}{15}x + \frac{47}{15}$$

$$|AS|^2 = 17,$$

czyli odległość punktu  $A$  od

punktu styczności  $P$ :

$$|AP| = \sqrt{17-1} = 4$$

b) Równanie stycznej:

$$ax - y + 3a - 2 = 0$$

Odległość środka okręgu od

$$\text{stycznej: } d = \frac{|2a-3+3a-2|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{10}$$

$$a = 3 \text{ lub } a = \frac{1}{3}$$

Równania stycznych:  $y = 3x + 7$

$$\text{lub } y = \frac{1}{3}x - 1$$

$$|AS|^2 = 50, \text{ czyli odległość}$$

punktu  $A$  od punktu styczności  $P$ :

$$|AP| = \sqrt{50-10} = 2\sqrt{10}$$

### Odpowiedzi do zadań

1. a)  $\sqrt{5}$  b) 5 c)  $\frac{2\sqrt{13}}{13}$  d)  $2\sqrt{10}$

2. a)  $d = \sqrt{5}$ , 2 punkty

b)  $d = 2\sqrt{5}$ , 0 punktów

c)  $d = \frac{7\sqrt{10}}{10}$ , 2 punkty

d)  $d = 3$ , 1 punkt

3. a) 0 punktów dla  $r \in (0; 2)$ ,

1 punkt dla  $r = 2$ ,

2 punkty dla  $r \in (2; \infty)$

b) 0 punktów dla  $r \in (0; 2\sqrt{6})$ ,

1 punkt dla  $r = 2\sqrt{6}$ ,

2 punkty dla  $r \in (2\sqrt{6}; \infty)$

c) 0 punktów dla  $r \in (0; 2\sqrt{5})$ ,

1 punkt dla  $r = 2\sqrt{5}$ ,

2 punkty dla  $r \in (2\sqrt{5}; \infty)$

d) 0 punktów dla  $r \in (0; \frac{11}{2})$ ,

1 punkt dla  $r = \frac{11}{2}$ ,

2 punkty dla  $r \in (\frac{11}{2}; \infty)$

### Ćwiczenie 6

Z punktu  $A$  poprowadzono styczne do okręgu o środku w punkcie  $S$  i promieniu  $r$ . Wyznacz równania tych stycznych i oblicz odległość punktu  $A$  od punktów styczności.

a)  $A(4, 1)$ ,  $S(0, 2)$ ,  $r = 1$

b)  $A(-3, -2)$ ,  $S(2, 3)$ ,  $r = \sqrt{10}$

### Zadania

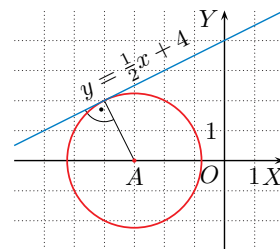
1. Prosta  $l$  jest styczna do okręgu, którego środkiem jest punkt  $A$ . Oblicz promień tego okręgu.

a)  $l: y = \frac{1}{2}x + 4$ ,  $A(-3, 0)$  (rysunek obok)

b)  $l: 3x + 4y - 5 = 0$ ,  $A(-4, -2)$

c)  $l: y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ ,  $A(2, 1)$

d)  $l: y = 3x - 1$ ,  $A(-5, 4)$



2. Oblicz odległość punktu  $S$  od prostej o podanym równaniu. Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie  $S$  i promieniu 3 ma ta prosta?

a)  $S(1, 3)$ ,  $2x + y = 0$

c)  $S(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $3x + y - 1 = 0$

b)  $S(-7, 2)$ ,  $x - 2y + 1 = 0$

d)  $S(-8\sqrt{2}, \sqrt{2} + 1)$ ,  $x - 7y + 7 = 0$

3. Określ liczbę punktów wspólnych podanej prostej z okręgiem o środku w punkcie  $S$  w zależności od promienia  $r$  tego okręgu.

a)  $3x + 4y - 1 = 0$ ,  $S(1, 2)$

d)  $\sqrt{3}x - y + 4 = 0$ ,  $S(2\sqrt{3}, -1)$

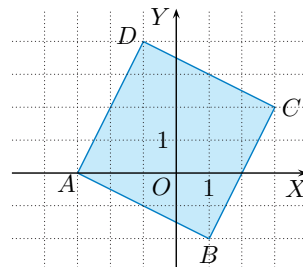
b)  $\sqrt{2}x - y = 0$ ,  $S(6, 0)$

c)  $0,5x - y - 1,5 = 0$ ,  $S(-5, 1)$

4. Dany jest kwadrat o wierzchołkach  $A(-3, 0)$ ,  $B(1, -2)$ ,  $C(3, 2)$  i  $D(-1, 4)$  (rysunek obok). Wyznacz równanie okręgu:

a) wpisanego w ten kwadrat,

b) opisanego na tym kwadracie.



5. Prosta równoległa do osi  $OY$  przecina okrąg  $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 100$  w punktach  $A$  i  $B$ . Wyznacz równanie tej prostej, jeśli:

a)  $|AB| = 12$ ,

b)  $|AB| = 10\sqrt{2}$ ,

c)  $|AB| = 10$ ,

d)  $|AB| = 20$ .

6. Oś  $OX$  przecina okrąg o promieniu  $2\sqrt{2}$  w punktach  $A(5, 0)$  i  $B$ . Cięciwa  $AB$  ma długość 4. Oblicz współrzędne środka okręgu.

4. a)  $x^2 + (y - 1)^2 = 5$

b)  $x^2 + (y - 1)^2 = 10$

5. a)  $x = -9$  lub  $x = 7$

b)  $x = -5\sqrt{2} - 1$  lub  $x = 5\sqrt{2} - 1$

c)  $x = -5\sqrt{3} - 1$  lub  $x = 5\sqrt{3} - 1$

d)  $x = -1$

6. Współrzędne środka okręgu mają postać  $S(3, y)$  lub  $S(7, y)$ .

Niech  $d$  będzie odległością środka okręgu od cięciwy. Wówczas:

$$d^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 4\right)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

Stąd  $d = 2$ , czyli  $y = -2$  lub  $y = 2$ .

Zatem  $S(3, -2)$  lub  $S(3, 2)$  lub  $S(7, -2)$  lub  $S(7, 2)$ .

7. Okrąg o środku w punkcie  $S(3, 2)$  ma z prostą  $x - y - 3 = 0$  punkty wspólne  $A$  i  $B$ . Wiadomo, że  $|AB| = 6\sqrt{2}$ . Wyznacz równanie tego okręgu.
8. Wyznacz równanie prostej, która w przecięciu z okręgiem  $O$  wyznacza cięciwę o środku w punkcie  $A(1, -3)$ .  
 a)  $O: (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$       b)  $O: (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$
9. Wyznacz równania prostych przechodzących przez punkt  $A(-2, 1)$  stycznych do podanego okręgu.  
 a)  $x^2 + y^2 = 1$       b)  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$       c)  $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 5$
10. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkt  $A(8, 8)$  oraz:  
 a) stycznego do osi  $OX$  w punkcie  $B(4, 0)$ ,  
 b) stycznego do osi  $OY$  w punkcie  $B(0, 12)$ .
11. Dla jakich wartości parametru  $m$  prosta  $3x + 4y = 0$  jest styczna do okręgu:  
 a)  $x^2 + y^2 - 14x - 2y + 2m = 0$ ,      b)  $x^2 + y^2 + 12x + 16y + m = 1$ ?
12. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych, która w przecięciu z okręgiem  $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 40 = 0$  wyznacza cięciwę długości  $2\sqrt{5}$ .
13. Wyznacz równania stycznych do okręgu  $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 45 = 0$ :  
 a) przechodzących przez początek układu współrzędnych,  
 b) równoległych do prostej  $y = -2x$ .
14. Wyznacz równania stycznych do okręgu  $O$  poprowadzonych z punktu  $A$ .  
 a)  $O: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$ ,  $A(-3, -2)$   
 b)  $O: x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$ ,  $A(-4, 1)$
- D** 15. Dany jest okrąg o równaniu  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ . Wykaż, że jeśli okrąg ten jest styczny do osi  $OX$ , to spełniony jest warunek  $a^2 - 4c = 0$ .
16. a) Wyznacz równanie okręgu o promieniu  $\sqrt{10}$  stycznego do prostej  $3x - y - 1 = 0$  w punkcie  $A(1, 2)$ .  
 b) Dany jest okrąg styczny do prostej  $x - y + 1 = 0$  i przechodzący przez punkt  $A(-3, 2)$ . Wyznacz współrzędne środka okręgu, jeśli leży on na prostej  $4x + y = 0$ .
- \*17. Wyznacz równania wspólnych stycznych do okręgów:  $x^2 + y^2 = 5$  oraz  $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 20$ .

7.  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 20$
8. a)  $y = -2x - 1$     b)  $y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$
9. a)  $y = 1$ ,  $y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$   
 b)  $y = 1$ ,  $y = \frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$   
 c)  $y = \frac{1}{2}x + 2$ ,  $y = 2x + 5$
10. a)  $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$   
 b)  $(x - 5)^2 + (y - 12)^2 = 25$
11. a)  $m = 12,5$     b)  $m = 1$
12.  $y = \frac{1}{2}x$ ,  $y = 2x$
13. a)  $y = \frac{1}{2}x$ ,  $y = 2x$   
 b)  $y = -2x + 10$ ,  $y = -2x + 20$
14. a)  $y = -2$ ,  $y = \frac{56}{33}x + \frac{34}{11}$   
 b)  $y = -\frac{4}{3}x - \frac{13}{3}$ ,  $y = \frac{3}{4}x + 4$
16. a)  $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 10$   
 lub  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$   
 b)  $(-\frac{25}{9}, \frac{100}{9})$  lub  $(-1, 4)$
17. Równanie stycznej zapisujemy w postaci:

$$ax - y + b = 0$$

Środki i promienie okręgów:

$$O_1: S_1(0, 0), r_1 = \sqrt{5}$$

$$O_2: S_2(5, 5), r_2 = 2\sqrt{5}$$

Odległość środka  $S_1$  od

$$\text{stycznej: } \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{5},$$

$$\text{czyli } b^2 = 5(a^2 + 1)$$

Odległość środka  $S_2$  od

$$\text{stycznej: } \frac{|5a - 5 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2\sqrt{5},$$

czyli

$$(5a - 5 + b)^2 = 20(a^2 + 1)$$

$$\text{Zatem } (5a - 5 + b)^2 = 4b^2.$$

$$5a - 5 + b = 2b \text{ lub}$$

$$5a - 5 + b = -2b$$

$$b = 5a - 5 \text{ lub } b = \frac{5}{3} - \frac{5}{3}a$$

$$\begin{cases} b = 5a - 5 \\ b^2 = 5(a^2 + 1) \end{cases} \text{ lub}$$

$$\begin{cases} b = \frac{5}{3} - \frac{5}{3}a \\ b^2 = 5(a^2 + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{5}{2} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ lub}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a = -2 \\ b = 5 \end{cases}$$

Równania stycznych:

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}, y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2},$$

$$y = 2x + 5, y = -2x + 5$$

15. Równanie okręgu:  $(x + \frac{1}{2}a)^2 + (y + \frac{1}{2}b)^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - c$   
 Środek okręgu:  $S(-\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}b)$ , promień okręgu:  $r = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - c}$   
 Okrąg jest styczny do osi  $OX$ , więc:  

$$-\frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - c}$$
  
 Podnosimy obie strony równania do kwadratu i otrzymujemy:  

$$\frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - c$$
  
 Zatem  $a^2 - 4c = 0$ .

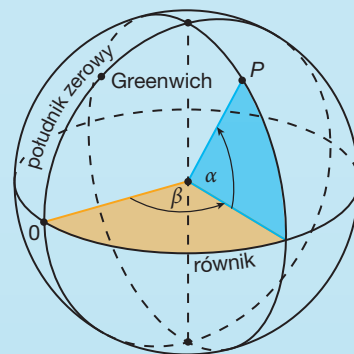
# Współrzędne geograficzne

Określając położenie punktu na kuli ziemskiej, podaje się jego:

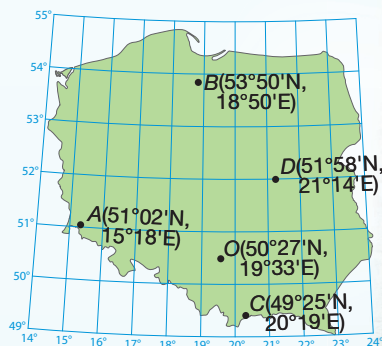
**szerokość geograficzną** (kąt  $\alpha$  mierzony od równika w kierunku północnym albo południowym),

**długość geograficzną** (kąt  $\beta$  mierzony od południka zerowego w kierunku wschodnim albo zachodnim).

Tak określony układ współrzędnych wykorzystuje się przy tworzeniu map.



Na mapie punkt O oznacza położenie zamku Ogródzieniec ( $50^{\circ}27'N$ ,  $19^{\circ}33'E$ ) pokazanego na zdjęciu obok.



## Odpowiedzi do zadań

1. A – Zamek Czocha  
B – Zamek w Gniewie  
C – Zamek w Niedzicy  
D – Zamek w Czersku

- 1 Czy potrafisz wskazać, które z punktów A, B, C, D odpowiadają położeniu zamków na zdjęciach?



Zamek w Niedzicy



Zamek w Czersku



Zamek Czocha



Zamek w Gniewie

## 2.7. Układy równań drugiego stopnia

### Przykład 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczamy  $y = -x - 2$  i podstawiamy do pierwszego równania:

$$x^2 + (-x - 2)^2 = 20$$

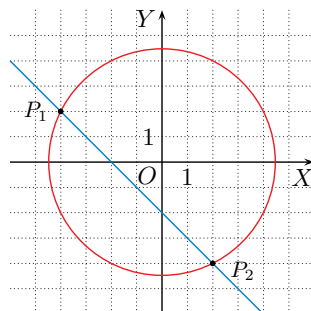
$$2x^2 + 4x - 16 = 0 \quad / : 2$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x = -4 \text{ lub } x = 2$$

Zatem rozwiązaniem układu są dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$$



Okrag  $x^2 + y^2 = 20$  i prosta  $x + y + 2 = 0$  mają dwa punkty wspólne:  $P_1(-4, 2)$  i  $P_2(2, -4)$ .

### Ćwiczenie 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y = x - 4 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x^2 + (y + 2)^2 = 9 \\ y = 5 - x \end{cases}$

### Ćwiczenie 2

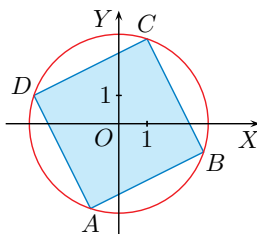
Prosta  $l$  przecina okrag  $x^2 + y^2 = 20$  w punktach  $A$  i  $B$ . Oblicz długość cięciwy  $AB$ .

a)  $l: y = -x - 6$

b)  $l: y = 3x - 10$

### Ćwiczenie 3

Na rysunku przedstawiono kwadrat wpisany w okrag o równaniu  $x^2 + y^2 = 10$ . Bok  $AB$  jest zawarty w prostej  $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ . Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu.



### Ćwiczenie 4

W okrag o równaniu  $(x-2)^2 + y^2 = 25$  wpisano kwadrat. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu, jeśli wiadomo, że jedna z jego przekątnych jest zawarta w prostej  $4x - 3y = 8$ .

### Ćwiczenie 3

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$x = -1, y = -3 \text{ lub } x = 3, y = -1$$

Zatem  $A(-1, -3)$ ,  $B(3, -1)$ .

Zauważmy, że wierzchołek  $C$  jest symetryczny do  $A$  względem początku układu współrzędnych, zatem  $C(1, 3)$ , a wierzchołek  $D$  jest symetryczny do  $B$ , zatem  $D(-3, 1)$ .

**Uwaga.** Można również wykorzystać fakt, że punkt  $O(0, 0)$  jest środkiem przekątnych  $AC$  i  $BD$  kwadratu.

### Ćwiczenie 4

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 25 \\ 4x - 3y = 8 \end{cases}$$

$$x = -1, y = -4 \text{ lub } x = 5, y = 4$$

Zatem  $A(-1, -4)$ ,  $C(5, 4)$ .

Środek okręgu:  $S(2, 0)$

Prosta prostopadła do  $AC$  i przechodząca przez  $S$ :  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 25 \\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$x = 6, y = -3 \text{ lub } x = -2, y = 3$$

Zatem  $B(6, -3)$ ,  $D(-2, 3)$ .

### Uczeń:

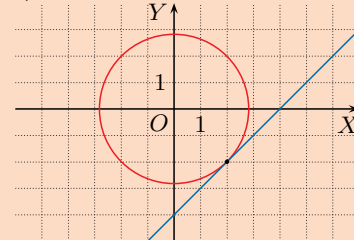
- rozwiązuje algebraicznie i graficznie układy równań, z których co najmniej jedno jest drugiego stopnia, w tym zadania z parametrem,
- stosuje układy równań drugiego stopnia w zadaniach różnych typów.

### Ćwiczenie 1

a)  $x = -3, y = -4$  lub  $x = 3, y = 4$

$y = 4$

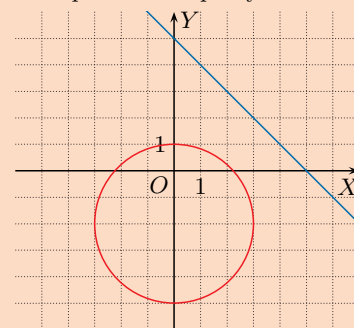
b)  $x = 2, y = -2$



c) Równanie okręgu:

$$x^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

Brak punktów wspólnych.



### Ćwiczenie 2

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ y = -x - 6 \end{cases}$$

$$x = -2, y = -4$$

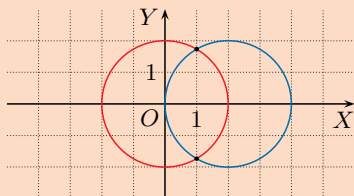
$$\text{lub } x = -4, y = -2$$

Zatem  $A(-2, -4)$ ,  $B(-4, -2)$

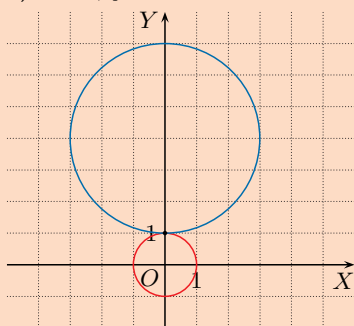
oraz  $|AB| = 2\sqrt{2}$ .

### Ćwiczenie 5

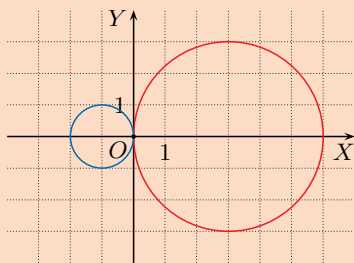
a)  $x = 1, y = -\sqrt{3}$  lub  $x = 1, y = \sqrt{3}$



b)  $x = 0, y = 1$



c)  $x = 0, y = 0$



### Przykład 2

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

Podstawiamy  $x^2 + y^2 = 9$  do drugiego równania i otrzymujemy  $9 - 6x = 0$ , skąd  $x = \frac{3}{2}$ . Podstawiamy  $x = \frac{3}{2}$  do równania  $x^2 + y^2 = 9$ :

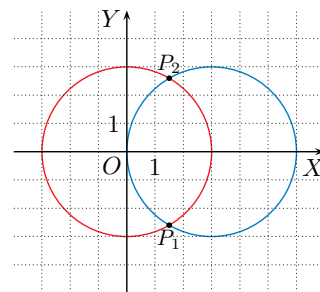
$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = 9$$

$$y^2 = \frac{27}{4}$$

$$y = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ lub } y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Zatem rozwiązaniem układu są dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ oraz } \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



Równanie  $x^2 + y^2 - 6x = 0$  można przekształcić do postaci:

$$(x - 3)^2 + y^2 = 9$$

Okrąg ten ma dwa punkty wspólne z okręgiem  $x^2 + y^2 = 9$ :  $P_1(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$  i  $P_2(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ .

### Ćwiczenie 5

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 - 4x = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 4)^2 = 9 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x^2 - 6x + y^2 = 0 \\ x^2 + 2x + y^2 = 0 \end{cases}$$

### Przykład 3

Ile rozwiązań w zależności od parametru  $m$  ma układ równań?

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0 \\ y = x + m \end{cases}$$

Podstawiamy  $y = x + m$  do pierwszego równania:

$$x^2 + (x + m)^2 - 2x - 4(x + m) + 3 = 0$$

$$x^2 + x^2 + 2mx + m^2 - 2x - 4x - 4m + 3 = 0$$

$$2x^2 + (2m - 6)x + m^2 - 4m + 3 = 0$$

Obliczamy wyróżnik otrzymanego równania kwadratowego. Liczba rozwiązań układu równań jest równa liczbie rozwiązań tego równania.

$$\Delta = (2m - 6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m^2 - 4m + 3) = 4m^2 - 24m + 36 - 8m^2 + 32m - 24 = -4m^2 + 8m + 12 = -4(m^2 - 2m - 3) = -4(m - 3)(m + 1)$$

- $\Delta = 0$  dla  $m \in \{-1, 3\}$  – układ ma jedno rozwiązanie,
- $\Delta > 0$  dla  $m \in (-1; 3)$  – układ ma dwa rozwiązania,
- $\Delta < 0$  dla  $m \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$  – układ nie ma rozwiązań.

## Ćwiczenie 6

Ile rozwiązań w zależności od parametru  $m$  ma układ równań?

- a)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x + m \end{cases}$  c)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ y = 2x + 1 \end{cases}$
- b)  $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0 \\ y = -2x + m \end{cases}$  d)  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y = m^2 \\ y = 3x + 3 \end{cases}$

## Zadania

1. Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

- a)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$  c)  $\begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 + (y - 3)^2 = 25 \end{cases}$  e)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y = |x| \end{cases}$
- b)  $\begin{cases} y = 8 - x \\ x^2 + (y - 4)^2 = 16 \end{cases}$  d)  $\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ (x - 3)^2 + y^2 = 5 \end{cases}$  f)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y = |x + 2| \end{cases}$

2. a) W okrąg  $x^2 + y^2 = 20$  wpisano trójkąt równoramienny prostokątny. Wierzchołek kąta prostego tego trójkąta ma współrzędne  $(2, 4)$ . Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków.

b) W okrąg  $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 20$  wpisano trójkąt równoramienny. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że jego podstawa jest zawarta w prostej  $y = \frac{1}{2}x + 3$ .

3. a) Jeden z boków prostokąta wpisanego w okrąg  $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 40$  jest zawarty w prostej  $y = x + 4$ . Wyznacz współrzędne wierzchołków tego prostokąta.

b) Bok kwadratu jest zawarty w prostej  $y = 2x - 6$ , a jego przekątne przecinają się w punkcie  $A(3, 5)$ . Wyznacz równanie okręgu opisanego na tym kwadracie i współrzędne jego wierzchołków.

4. Jedna z przekątnych kwadratu wpisanego w okrąg  $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 8$  zawarta jest w prostej  $3x + 2y - 8 = 0$ . Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu oraz oblicz jego pole.

5. Oblicz długość cięciwy danego okręgu zawartej w prostej  $l$ .

- a)  $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ ,  $l: y = x - 2$
- b)  $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 7 = 0$ ,  $l: y = -2x + 2$
- c)  $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 8 = 0$ ,  $l: y = x + 2$

4. Równanie okręgu przekształcamy do postaci  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 13$ .

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 13 \\ y = -\frac{3}{2}x + 4 \end{cases}$$

skąd  $x = 0$ ,  $y = 4$  lub  $x = 4$ ,  $y = -2$ . Zatem  $A(0, 4)$ ,  $C(4, -2)$ .

Prosta  $BD$  jest prostopadła do prostej  $AC$  i przechodzi przez środek okręgu o współrzędnych  $(2, 1)$ , zatem ma równanie  $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ .

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 13 \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \end{cases}$$

$x = -1$ ,  $y = -1$  lub  $x = 5$ ,  $y = 3$ . Zatem pozostałe wierzchołki:  $B(-1, -1)$ ,  $D(5, 3)$ .

Pole kwadratu:  $P = |AB|^2 = 26$

## Ćwiczenie 6

- a) 0 dla  $m \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; \infty)$ ,  
1 dla  $m \in \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$ ,  
2 dla  $m \in (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$
- b) 0 dla  $m \in (-\infty; -9) \cup (1; \infty)$ ,  
1 dla  $m \in \{-9, 1\}$ ,  
2 dla  $m \in (-9; 1)$
- c) 0 dla  $m \in (-\infty; \frac{1}{5})$ ,  
1 dla  $m = \frac{1}{5}$ ,  
2 dla  $m \in (\frac{1}{5}; \infty)$
- d) 2 dla  $m \in \mathbf{R}$

## Odpowiedzi do zadań

1. a)  $x = 1$ ,  $y = 3$   
lub  $x = -3$ ,  $y = -1$
- b)  $x = 0$ ,  $y = 8$   
lub  $x = 4$ ,  $y = 4$
- c)  $x = 0$ ,  $y = -2$   
lub  $x = 5$ ,  $y = 3$
- d)  $x = 1$ ,  $y = -1$   
lub  $x = 5$ ,  $y = 1$
- e)  $x = -1$ ,  $y = 1$   
lub  $x = 1$ ,  $y = 1$
- f)  $x = -3$ ,  $y = 1$   
lub  $x = 1$ ,  $y = 3$

2. a) Niech  $C(2, 4)$ . Środek okręgu ma współrzędne  $(0, 0)$ , zatem prosta  $OC$  ma równanie  $y = 2x$ .

Prosta  $AB$  jest prostopadła do prostej  $OC$ , czyli ma równanie  $y = -\frac{1}{2}x$ .

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$$

$x = -4$ ,  $y = 2$   
lub  $x = 4$ ,  $y = -2$

Zatem wierzchołki:

$A(-4, 2)$ ,  $B(4, -2)$ .

b)  $A(-6, 0)$ ,  $B(2, 4)$ ,  $C(0, -2)$   
lub  $C(-4, 6)$

3. a)  $(-3, 1)$ ,  $(1, 5)$ ,  $(5, -7)$ ,  
 $(9, -3)$

b)  $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 10$ ,  
 $(0, 4)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(6, 6)$ ,  $(2, 8)$

5. a)  $A(2, 0)$ ,  $B(3, 1)$ ,

$|AB| = \sqrt{2}$

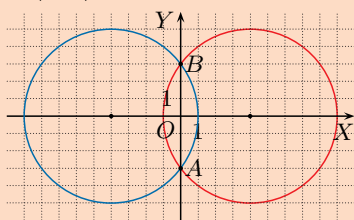
b)  $A(1, 0)$ ,  $B(3, -4)$ ,

$|AB| = 2\sqrt{5}$

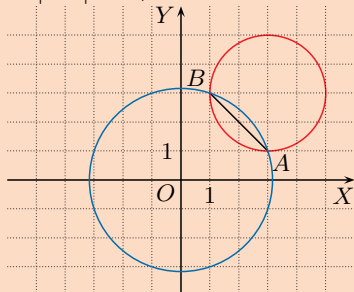
c)  $A(-4, -2)$ ,  $B(1, 3)$ ,

$|AB| = 5\sqrt{2}$

6. a)  $x = 0, y = -3$   
 b)  $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{\sqrt{7}}{2}$   
 lub  $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{7}}{2}$   
 c)  $x = 4, y = 0$   
 d)  $x = 0, y = 0$   
 lub  $x = \frac{96}{25}, y = \frac{72}{25}$   
 e)  $x = -3, y = -4$   
 lub  $x = 3, y = -4$   
 f)  $x = -1, y = 1$   
 lub  $x = 1, y = 1$
7. a)  $A(0, -3), B(0, 3),$   
 $|AB| = 6$



- b)  $A(1, 3), B(3, 1),$   
 $|AB| = 2\sqrt{2}$



8. a)  $S_1(0, 0), A(3, 1), S_2(4, 4),$   
 $B(1, 3), P = 8$   
 b)  $S_1(0, -2), A(2, -3),$   
 $S_2(5, 3), B(-1, 0), P = 15$
9.  $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$   
 lub  $(x-7)^2 + (y-4)^2 = 25$

6. Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 + 8y = -15 \end{cases}$  c)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 + y^2 - 4x = 0 \end{cases}$  e)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + 8y = -7 \end{cases}$   
 b)  $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x = 3 \end{cases}$  d)  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x = 0 \\ x^2 + y^2 - 8y = 0 \end{cases}$  f)  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 8y = -6 \\ x^2 + y^2 + 2y = 4 \end{cases}$

7. Oblicz długość wspólnej cięciwy okręgów  $K_1$  i  $K_2$ . Wykonaj rysunek.

a)  $K_1: x^2 + 8x + y^2 - 9 = 0, \quad K_2: x^2 - 8x + y^2 - 9 = 0$   
 b)  $K_1: x^2 + y^2 = 10, \quad K_2: x^2 - 6x + y^2 - 6y + 14 = 0$

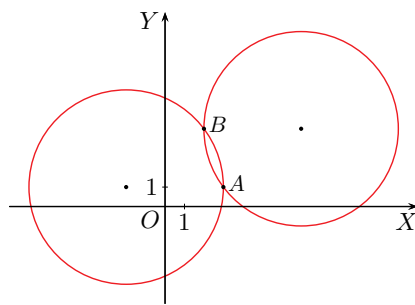
8. Oblicz pole czworokąta  $S_1AS_2B$ , gdzie  $S_1$  i  $S_2$  są odpowiednio środkami okręgów  $K_1$  i  $K_2$ , natomiast  $A$  i  $B$  są punktami wspólnymi tych okręgów.

a)  $K_1: x^2 + y^2 = 10, \quad K_2: x^2 + y^2 - 8x - 8y + 22 = 0$   
 b)  $K_1: x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0, \quad K_2: x^2 + y^2 - 10x - 6y - 11 = 0$

9. Wyznacz równania okręgów o promieniu 5 przechodzących przez punkty  $A(3, 1)$  i  $B(2, 4)$  (rysunek obok), rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} (3-a)^2 + (1-b)^2 = 25 \\ (2-a)^2 + (4-b)^2 = 25 \end{cases}$$

Dwa rozwiązania tego układu są współrzednymi środków szukanych okręgów.



10. Wyznacz równania okręgów o promieniu  $r$  przechodzących przez punkty  $A$  i  $B$ .

a)  $r = \sqrt{5}, A(4, 2), B(1, 3)$  c)  $r = 3, A(0, 0), B(1, 1)$   
 b)  $r = 2, A(1, 2), B(-1, 0)$  d)  $r = \sqrt{13}, A(5, 2), B(0, 1)$

11. Ile rozwiązań w zależności od parametru  $m$  ma układ równań?

a)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y = -x + m \end{cases}$  d)  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \\ y = -x + 2m \end{cases}$   
 b)  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0 \\ y = x + m \end{cases}$  e)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = m^2 - 1 \\ y = x + 4 \end{cases}$   
 c)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = mx - 5 \end{cases}$  f)  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x = m \\ y = 3x + 1 \end{cases}$

10. a)  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$  lub  $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$   
 b)  $(x-1)^2 + y^2 = 4$  lub  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$   
 c)  $(x - \frac{1-\sqrt{17}}{2})^2 + (y - \frac{1+\sqrt{17}}{2})^2 = 9$  lub  $(x - \frac{1+\sqrt{17}}{2})^2 + (y - \frac{1-\sqrt{17}}{2})^2 = 9$   
 d)  $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 13$  lub  $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 13$
11. a) 0 dla  $m \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty),$   
 1 dla  $m \in \{-2, 2\},$   
 2 dla  $m \in (-2; 2)$   
 b) 0 dla  $m \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty),$   
 1 dla  $m \in \{-1, 3\},$   
 2 dla  $m \in (-1; 3)$   
 c) 0 dla  $m \in (-2; 2),$   
 1 dla  $m \in \{-2, 2\},$   
 2 dla  $m \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$   
 d) 0 dla  $m \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty),$   
 1 dla  $m \in \{0, 4\},$   
 2 dla  $m \in (0; 4)$   
 e) 0 dla  $m \in (-3; 3),$   
 1 dla  $m \in \{-3, 3\},$   
 2 dla  $m \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$   
 f) 0 dla  $m \in (-\infty; 1),$   
 1 dla  $m = 1,$   
 2 dla  $m \in (1; \infty)$

## \*2.8. Koło w układzie współrzędnych

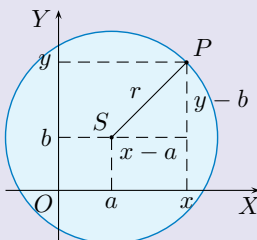
Przypomnijmy, że kołem o środku w punkcie  $S$  i promieniu  $r > 0$  nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu  $S$  jest mniejsza od  $r$  lub równa  $r$  (zwróć uwagę, że punkty należące do okręgu ograniczającego koło należą do tego koła).

Punkt  $P(x, y)$  należy do koła o środku w punkcie  $S(a, b)$  i promieniu  $r$ , gdy  $|PS| \leq r$ .

### Twierdzenie

Koło o środku w punkcie  $(a, b)$  i promieniu  $r > 0$  jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne  $(x, y)$  spełniają nierówność:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$$



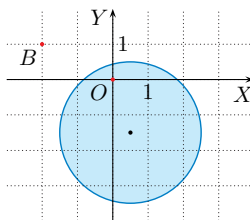
### Przykład 1

Sprawdź, czy punkty  $O(0, 0)$  i  $B(-2, 1)$  należą do koła  $(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 \leq 4$ .

Sprawdzamy, czy współrzędne punktów  $O$  i  $B$  spełniają nierówność opisującą koło.

Punkt  $O$ :  $(0 - \frac{1}{2})^2 + (0 + \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2} \leq 4$ , czyli punkt  $O$  należy do koła.

Punkt  $B$ :  $(-2 - \frac{1}{2})^2 + (1 + \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} = \frac{25}{2} > 4$ , czyli punkt  $B$  leży na zewnątrz koła.



### Ćwiczenie 1

Wyznacz nierówność opisującą koło o najmniejszym polu i o środku w punkcie  $S(1, 1)$ , jeżeli do tego koła należy punkt  $P$ .

- a)  $P(5, -2)$       b)  $P(-7, -5)$       c)  $P(3, 3)$       d)  $P(-3, 0)$

### Ćwiczenie 2

Oblicz pole najmniejszego koła o środku w punkcie  $S(-3, 2)$ , jeżeli do tego koła należą punkty  $A, B$  i  $C$ .

- a)  $A(-6, 6), B(-3, 7), C(1, 2)$       b)  $A(-1, 3), B(-2, 6), C(-6, 3)$

### Ćwiczenie 2

- a)  $|SA| = |SB| = 5, |SC| = 4$

Zatem  $r = 5$  i  $P = 25\pi$ .

- b)  $|SA| = \sqrt{5}, |SB| = \sqrt{17}, |SC| = \sqrt{10}$

Zatem  $r = \sqrt{17}$  i  $P = 17\pi$ .

### Uczeń:

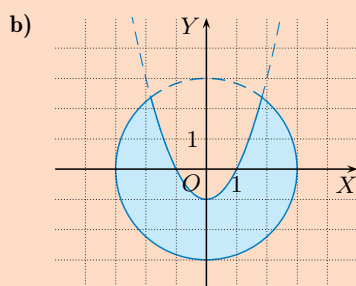
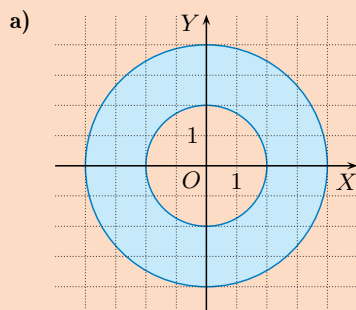
- sprawdza, czy dany punkt należy do danego koła,
- opisuje koło w układzie współrzędnych,
- podaje geometryczną interpretację rozwiązania układu nierówności drugiego stopnia,
- opisuje układem nierówności przedstawiony podzbiór płaszczyzny.

### Ćwiczenie 1

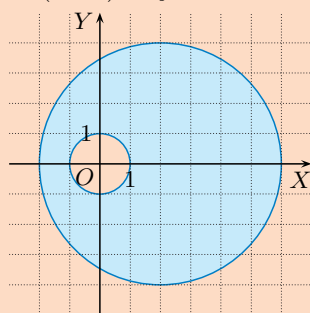
Zauważmy, że  $r^2 = |SP|^2$ .

- a)  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 25$   
 b)  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 100$   
 c)  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 8$   
 d)  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 17$

### Ćwiczenie 3



c) Pierwsza nierówność ma postać  $(x-2)^2 + y^2 \leq 16$ .



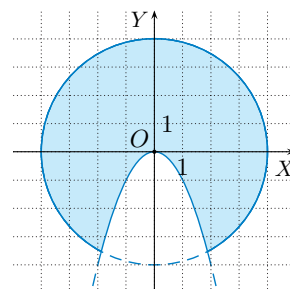
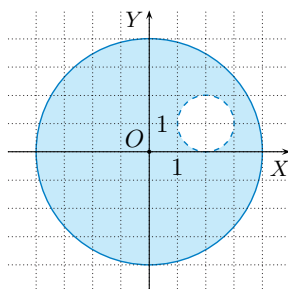
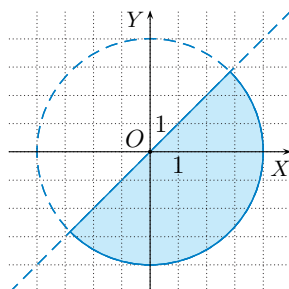
### Przykład 2

Podaj interpretację geometryczną układu nierówności.

a)  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ y \leq x \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 > 1 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ y \geq -x^2 \end{cases}$



W przykładzie a) zbiorem punktów płaszczyzny spełniających podane warunki jest półkole. W przykładzie b) otrzymujemy zbiór punktów płaszczyzny, które należą do koła o środku w punkcie  $(0,0)$  i promieniu 4 oraz nie należą do koła o środku w punkcie  $(2,1)$  i promieniu 1.

### Ćwiczenie 3

Podaj interpretację geometryczną układu nierówności.

a)  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ y \leq x^2 - 1 \end{cases}$

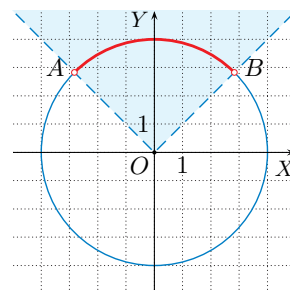
c)  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 12 \leq 0 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$

### Przykład 3

Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne  $(x,y)$  spełniają podane warunki.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y > |x| \end{cases}$$

Szukany zbiorem jest łuk  $\widehat{AB}$  bez punktów końcowych  $A$  i  $B$ .



### Ćwiczenie 4

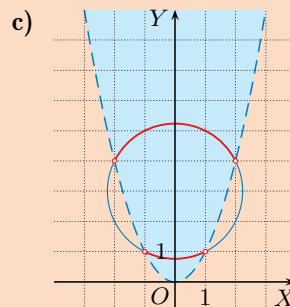
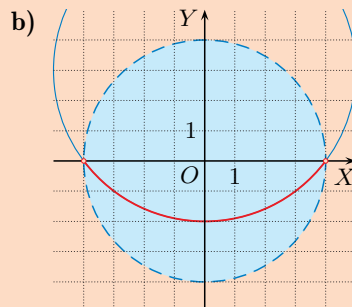
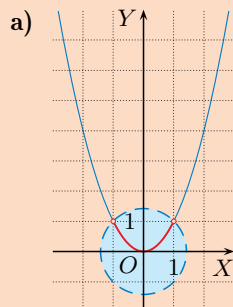
Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne  $(x,y)$  spełniają podane warunki.

a)  $\begin{cases} x^2 + y^2 < 2 \\ y = x^2 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x^2 + y^2 < 16 \\ x^2 + (y-3)^2 = 25 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x^2 + (y-3)^2 = 5 \\ y > x^2 \end{cases}$

### Ćwiczenie 4



## Zadania

1. Dane są trzy koła:

$$K_1: x^2 + y^2 \leq 16, \quad K_2: (x-2)^2 + y^2 \leq 4, \quad K_3: (x-2)^2 + (y+3)^2 \leq 9$$

Do których z tych kół należy punkt  $P$ ?

- a)  $P(-2, 2)$       b)  $P(2, 1)$       c)  $P(2, -1)$       d)  $P(4, -4)$

2. Podaj interpretację geometryczną układu nierówności.

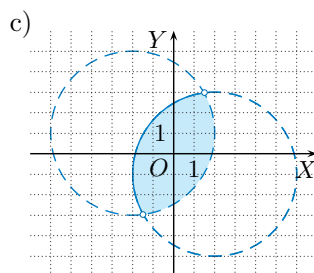
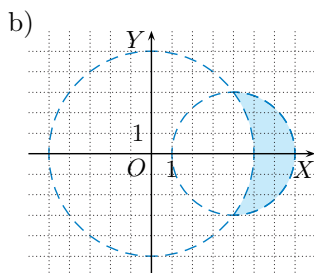
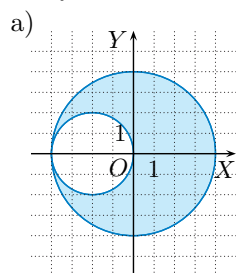
a) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 \geq 1 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 8y + 7 \geq 0 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ (x+3)^2 + y^2 \geq 25 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 \geq 0 \end{cases}$$

3. Podaj układ nierówności opisujący podzbiór płaszczyzny przedstawiony na rysunku.

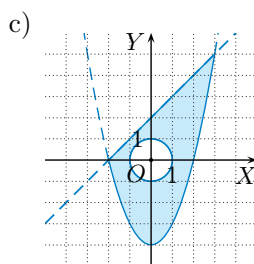
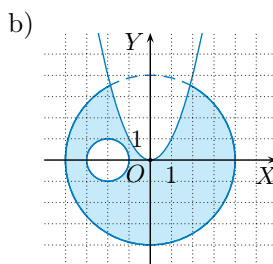
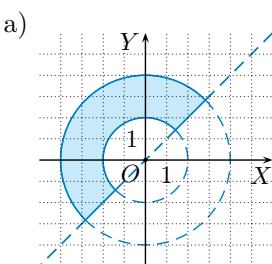


4. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiory  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$  oraz  $B \setminus A$ .

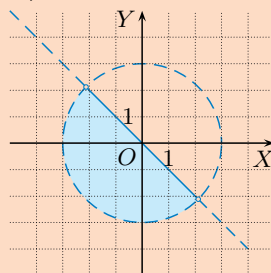
a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 9\}$ ,  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y + x \leq 0\}$

b)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 + 4x - 12 \leq 0\}$ ,  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y < x - 2\}$

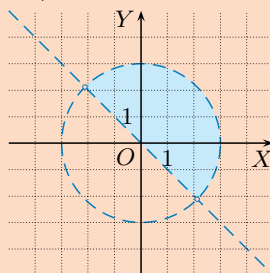
5. Podaj układ nierówności opisujący podzbiór płaszczyzny przedstawiony na rysunku.



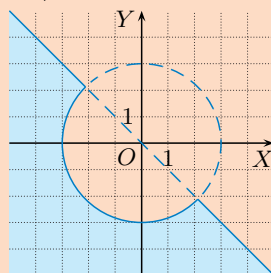
4. a)  $A \cap B$



$A \setminus B$



$B \setminus A$

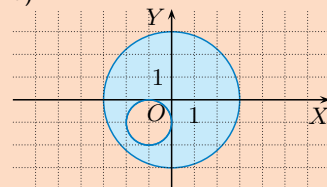


## Odpowiedzi do zadań

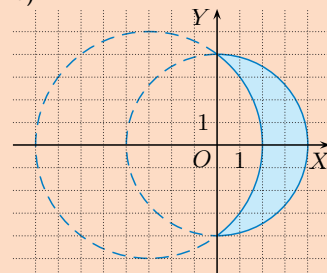
1. a)  $K_1$  b)  $K_1, K_2$

c)  $K_1, K_2, K_3$  d)  $K_3$

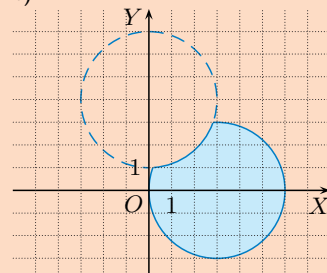
2. a)



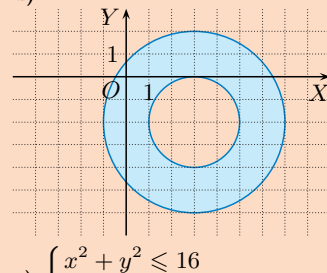
b)



c)



d)



3. a) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ (x+2)^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 25 \\ (x-4)^2 + y^2 < 9 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 16 \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 < 16 \end{cases}$$

5. a) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 \\ x^2 + y^2 \leq 16 \\ y \geq x \end{cases}$$

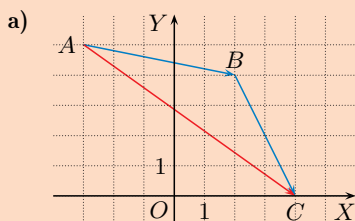
b) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ y \leq x^2 \\ (x+2)^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} y \leq x+2 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \\ y \geq x^2 - 4 \end{cases}$$

### Uczeń:

- wykonuje działania na wektorach,
- sprawdza, czy wektory są równoległe,
- wyznacza wartości parametru tak, aby wektory spełniały podany warunek,
- stosuje w zadaniach działania na wektorach i ich interpretację geometryczną.

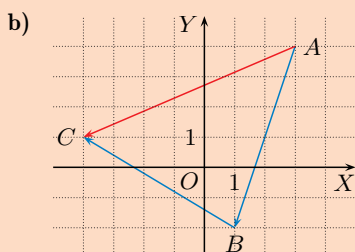
### Ćwiczenie 1



$$\vec{AB} = [5, -1], \vec{BC} = [2, -4],$$

$$\vec{AC} = [7, -5]$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$



$$\vec{AB} = [-2, -6], \vec{BC} = [-5, 3],$$

$$\vec{AC} = [-7, -3]$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

### Komentarz

Działania na wektorach, np. suma wektorów, pozwalają fizykom wyznaczyć siłę wypadkową działającą na ciało.

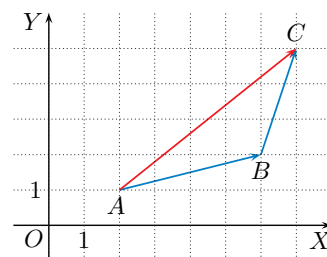
## \*2.9. Działania na wektorach

Na rysunku obok przedstawiono wektory  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$  i  $\vec{AC}$ . O wektorze  $\vec{AC}$  mówimy, że jest **sumą wektorów**  $\vec{AB}$  i  $\vec{BC}$ , i piszemy:

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

Zauważ, że  $\vec{AB} = [4, 1]$ ,  $\vec{BC} = [1, 3]$  oraz:

$$\vec{AC} = [4 + 1, 1 + 3] = [5, 4]$$



### Ćwiczenie 1

Narysuj w układzie współrzędnych wektory  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$  i  $\vec{AC}$ . Podaj współrzędne tych wektorów.

a)  $A(-3, 5)$ ,  $B(2, 4)$ ,  $C(4, 0)$

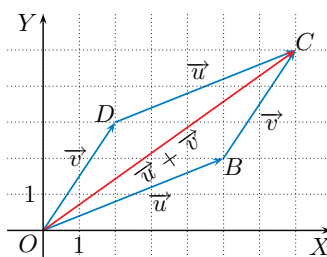
b)  $A(3, 4)$ ,  $B(1, -2)$ ,  $C(-4, 1)$

**Sumą wektorów**  $\vec{u} = [a, b]$  i  $\vec{v} = [c, d]$  jest wektor:

$$\vec{u} + \vec{v} = [a + c, b + d]$$

Powyższa definicja wywodzi się z obserwacji fizycznych.

Na rysunku obok wektor  $\vec{u} + \vec{v}$  odpowiada przekątnej  $OC$  równoległoboku  $OBCE$ .



Na rysunku przedstawiono wektory  $\vec{u} = [5, 2]$ ,  $\vec{v} = [2, 3]$  oraz ich sumę  $\vec{u} + \vec{v} = [7, 5]$ .

### Ćwiczenie 2

Narysuj wektor  $\vec{u} + \vec{v}$ . Podaj jego współrzędne.

a)  $\vec{u} = [3, -2]$ ,  $\vec{v} = [2, 6]$

b)  $\vec{u} = [-5, -4]$ ,  $\vec{v} = [-2, 3]$

Aby dodać wektory geometrycznie, rysujemy je w ten sposób, aby koniec jednego wektora był początkiem następnego. Początek sumy leży w początku pierwszego z dodawanych wektorów, a koniec – w końcu ostatniego.

### Przykład 1

Dane są wektory:

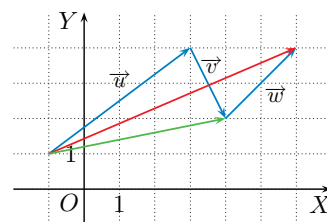
$$\vec{u} = [4, 3], \vec{v} = [1, -2], \vec{w} = [2, 2]$$

- Suma wektorów  $\vec{u} + \vec{v}$  (kolor zielony):

$$\vec{u} + \vec{v} = [4, 3] + [1, -2] = [5, 1]$$

- Suma wektorów  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$  (kolor czerwony):

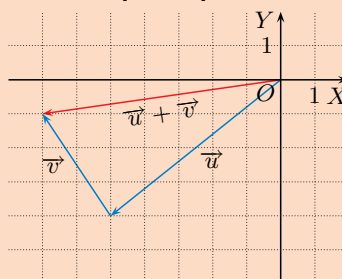
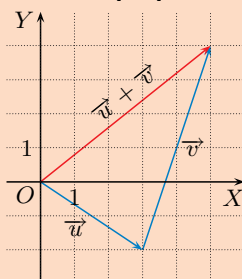
$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = [4, 3] + [1, -2] + [2, 2] = [7, 3]$$



### Ćwiczenie 2

a)  $\vec{u} + \vec{v} = [5, 4]$

b)  $\vec{u} + \vec{v} = [-7, -1]$



### Multiteka

- Kontrola lotów
- Wektor – podstawowe własności
- Działania na wektorach

dla [nauczyciela.pl](http://nauczyciela.pl) | Kartkówka 2.9

**Generator**  
testów i sprawdzianów

### Ćwiczenie 3

Oblicz i narysuj sumę wektorów  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ .

a)  $\vec{u} = [2, 1]$ ,  $\vec{v} = [1, 3]$ ,  $\vec{w} = [2, -6]$     b)  $\vec{u} = [-3, 3]$ ,  $\vec{v} = [6, 2]$ ,  $\vec{w} = [2, 1]$

### Ćwiczenie 4

Wyznacz wektory  $-\vec{u}$  i  $-\vec{v}$  przeciwne do wektorów  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$ . Oblicz i narysuj sumę wektorów  $-\vec{u}$  i  $-\vec{v}$ .

a)  $\vec{u} = [2, 3]$ ,  $\vec{v} = [4, 2]$

b)  $\vec{u} = [-4, -2]$ ,  $\vec{v} = [4, -3]$

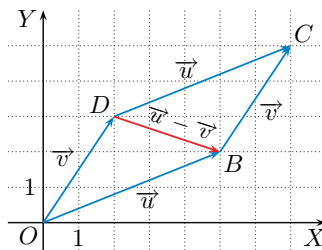
### Definicja

**Różnicą wektorów**  $\vec{u} = [a, b]$  i  $\vec{v} = [c, d]$  jest wektor:

$$\vec{u} - \vec{v} = [a - c, b - d]$$

Na rysunku obok wektor  $\vec{u} - \vec{v}$  odpowiada przekątną  $DB$  równoległoboku  $OBCD$ .

Zauważ, że różnica wektorów  $\vec{u} - \vec{v}$  jest równa sumie wektora  $\vec{u}$  i wektora  $-\vec{v}$  (przeciwnego do wektora  $\vec{v}$ ).



Na rysunku przedstawiono wektory  $\vec{u} = [5, 2]$ ,  $\vec{v} = [2, 3]$  oraz ich różnicę  $\vec{u} - \vec{v} = [3, -1]$ .

### Ćwiczenie 5

Oblicz i narysuj różnice wektorów  $\vec{u} - \vec{v}$  oraz  $\vec{v} - \vec{u}$ .

a)  $\vec{u} = [3, -2]$ ,  $\vec{v} = [2, 6]$

b)  $\vec{u} = [-5, -4]$ ,  $\vec{v} = [-2, 3]$

### Definicja

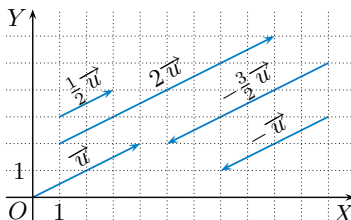
**Iloczynem wektora**  $\vec{u} = [a, b]$  przez liczbę  $\alpha \in \mathbb{R}$  nazywamy wektor:

$$\alpha \vec{u} = [\alpha a, \alpha b]$$

### Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wektor  $\vec{u} = [4, 2]$  oraz wektory:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \vec{u} &= [2, 1], & 2 \vec{u} &= [8, 4] \\ -\vec{u} &= [-4, -2] \\ -\frac{3}{2} \vec{u} &= [-6, -3] \end{aligned}$$



### Ćwiczenie 6

Dane są wektory  $\vec{u} = [2, -1]$  i  $\vec{v} = [-3, -2]$ . Oblicz i narysuj wektor:

a)  $2\vec{u} + 3\vec{v}$ ,

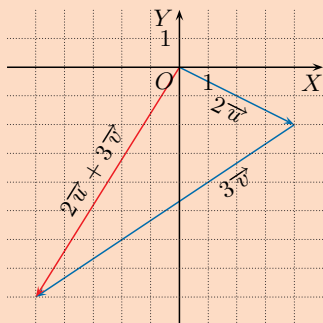
b)  $3\vec{u} - \vec{v}$ ,

c)  $-4\vec{u} + 2\vec{v}$ ,

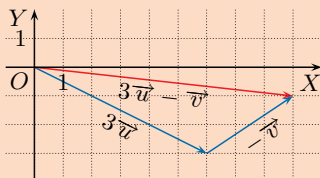
d)  $\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$ .

### Ćwiczenie 6

a)  $2\vec{u} + 3\vec{v} = [-5, -8]$



b)  $3\vec{u} - \vec{v} = [9, -1]$

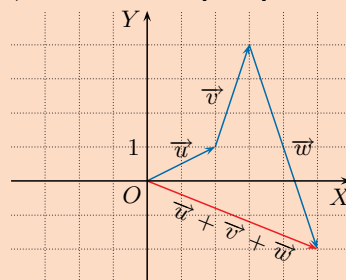


c)  $-4\vec{u} + 2\vec{v} = [-14, 0]$

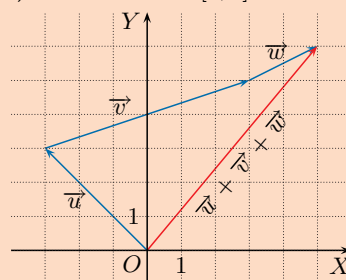
d)  $\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} = [2\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

### Ćwiczenie 3

a)  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = [5, -2]$



b)  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = [5, 6]$



### Ćwiczenie 4

a)  $-\vec{u} = [-2, -3]$ ,

$-\vec{v} = [-4, -2]$ ,

$-\vec{u} + (-\vec{v}) = [-6, -5]$

b)  $-\vec{u} = [4, 2]$ ,  $-\vec{v} = [-4, 3]$ ,

$-\vec{u} + (-\vec{v}) = [0, 5]$

### Ćwiczenie 5

a)  $\vec{u} - \vec{v} = [1, -8]$ ,

$\vec{v} - \vec{u} = [-1, 8]$

b)  $\vec{u} - \vec{v} = [-3, -7]$ ,

$\vec{v} - \vec{u} = [3, 7]$

### Ćwiczenie 7

- a)  $2\alpha - 6 = 0$  oraz  $-3\alpha + 9 = 0$ , zatem  $\alpha = 3$   
b)  $-12\alpha - 16 = 0$  oraz  $9\alpha + 12 = 0$ , zatem  $\alpha = -\frac{4}{3}$

Symbolem  $\vec{0}$  oznaczamy **wektor zerowy**:  $\vec{0} = [0, 0]$ .

### Ćwiczenie 7

Dla jakiego  $\alpha$  zachodzi równość  $\alpha \vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ ?

- a)  $\vec{u} = [2, -3]$ ,  $\vec{v} = [-6, 9]$       b)  $\vec{u} = [-12, 9]$ ,  $\vec{v} = [-16, 12]$

Przyjmujemy, że wektor zerowy jest równoległy do dowolnego wektora. Jeśli niezerowe wektory są równoległe, to mówimy, że mają ten sam **kierunek**.

### Twierdzenie

Dwa niezerowe wektory  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$  mają ten sam kierunek wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba  $\alpha \neq 0$ , że  $\vec{u} = \alpha \vec{v}$ .

### Przykład 3

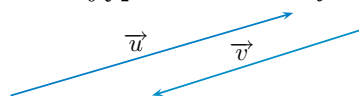
Dane są wektory  $\vec{u} = [12, 8]$  i  $\vec{v} = [9, 6]$ . Wektory te mają ten sam kierunek, gdyż  $\vec{u} = \frac{4}{3}\vec{v}$ .

Rozpatrzmy niezerowe wektory  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$ , dla których istnieje liczba  $\alpha \neq 0$ , taka że  $\vec{u} = \alpha \vec{v}$ .

- Jeśli  $\alpha > 0$ , to mówimy, że wektory  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$  mają **ten sam zwrot**.
- Jeśli  $\alpha < 0$ , to mówimy, że wektory  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$  mają **przeciwny zwrot**.



Wektory  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$  mają ten sam kierunek i zwrot.



Wektory  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$  mają ten sam kierunek, ale przeciwny zwrot.

### Ćwiczenie 8

Wśród poniższych wektorów wskaż te, które mają ten sam kierunek i zwrot co wektor  $\vec{u} = [-6, 8]$ , oraz te, które mają ten sam kierunek co wektor  $\vec{u}$ , ale przeciwny zwrot.

$$\vec{v}_1 = [-2, 2\frac{2}{3}], \quad \vec{v}_2 = [3, -4], \quad \vec{v}_3 = [18, -16], \quad \vec{v}_4 = [-\frac{3}{4}, 1], \quad \vec{v}_5 = [24, -32]$$

**Długość wektora**  $\overrightarrow{AB}$  (oznaczamy ją  $|\overrightarrow{AB}|$ ) to długość odcinka  $AB$ .

### Twierdzenie

Jeżeli wektor  $\vec{u}$  ma współrzędne  $[u_1, u_2]$ , to **długość wektora**  $\vec{u}$  wyraża się za pomocą wzoru:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

### Ćwiczenie 8

Ten sam kierunek i zwrot co wektor  $\vec{u}$ :  $\vec{v}_1 = \frac{1}{3}[-6, 8]$ ,  $\vec{v}_4 = \frac{1}{8}[-6, 8]$

Ten sam kierunek co wektor  $\vec{u}$ , ale przeciwny zwrot:  $\vec{v}_2 = -\frac{1}{2}[-6, 8]$ ,  $\vec{v}_3 = -4[-6, 8]$

### Ćwiczenie 9

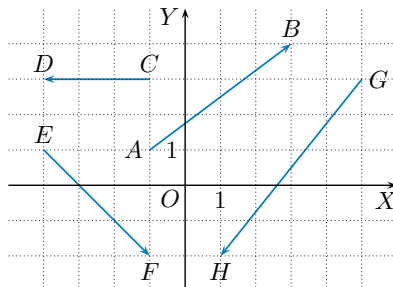
Oblicz długość wektora  $\vec{u}$ .

- a)  $\vec{u} = [-3, 4]$       b)  $\vec{u} = [-5, -12]$       c)  $\vec{u} = [3, 3]$

### Ćwiczenie 10

Dane są wektory  $\vec{AB}$ ,  $\vec{CD}$ ,  $\vec{EF}$  oraz  $\vec{GH}$  przedstawione na rysunku obok. Oblicz długość wektora  $\vec{u}$ .

- a)  $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{EF}$   
 b)  $\vec{u} = \vec{AB} - \vec{CD}$   
 c)  $\vec{u} = \vec{GH} + \frac{4}{3}\vec{EF}$   
 d)  $\vec{u} = \vec{EF} - \frac{1}{3}\vec{CD}$



### Zadania

- Sprawdź, czy wektor  $\vec{u} + \vec{v}$  jest wektorem przeciwnym do wektora  $\vec{w}$ .  
 a)  $\vec{u} = [\frac{9}{4}, \frac{9}{2}]$ ,  $\vec{v} = [-\frac{7}{2}, \frac{7}{4}]$ ,  $\vec{w} = [\frac{5}{4}, -\frac{25}{4}]$   
 b)  $\vec{u} = [-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}]$ ,  $\vec{v} = [\frac{3}{2}, -2]$ ,  $\vec{w} = [\frac{5}{6}, \frac{3}{2}]$
- Dane są punkty  $A(2, 1)$  i  $B(4, 5)$ . Wyznacz współrzędne punktu  $P$ .  
 a)  $\vec{AB} = \vec{BP}$       c)  $\vec{AP} = -\vec{BA}$       e)  $\vec{AP} = 2\vec{AB}$   
 b)  $\vec{AP} = \vec{BA}$       d)  $\vec{AP} = -\vec{BP}$       f)  $\vec{AP} = -3\vec{AB}$
- Dane są trzy punkty  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Wyznacz współrzędne punktu  $D$  takiego, że  $\vec{AB} = \vec{CD}$ . Oblicz długość wektora  $\vec{AD}$ .  
 a)  $A(0, 0)$ ,  $B(4, 3)$ ,  $C(-1, 2)$       c)  $A(4, 6)$ ,  $B(3, 1)$ ,  $C(6, 2)$   
 b)  $A(-1, 2)$ ,  $B(-2, -3)$ ,  $C(4, 2)$       d)  $A(-1, -3)$ ,  $B(-4, 1)$ ,  $C(2, 4)$
- Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

| $A$      | $B$                 | $\vec{AB}$          | $\vec{BA}$          | $3\vec{BA}$ | $ \vec{AB} $  | $ 3\vec{AB} $ |
|----------|---------------------|---------------------|---------------------|-------------|---------------|---------------|
| (3, 4)   | (1, 2)              | $[-2, -2]$          | $[2, 2]$            | $[6, 6]$    | $2\sqrt{2}$   | $6\sqrt{2}$   |
| (14, 12) | (6, 3)              | $[-8, -9]$          | $[8, 9]$            | $[24, 27]$  | $\sqrt{145}$  | $3\sqrt{145}$ |
| (-1, 4)  | (1, 1)              | $[2, -3]$           | $[-2, 3]$           | $[-6, 9]$   | $\sqrt{13}$   | $3\sqrt{13}$  |
| (1, 4)   | (3, -2)             | $[2, -6]$           | $[-2, 6]$           | $[-6, 18]$  | $2\sqrt{10}$  | $6\sqrt{10}$  |
| (3, -1)  | (2, $\frac{1}{3}$ ) | $[-1, \frac{4}{3}]$ | $[1, -\frac{4}{3}]$ | $[3, -4]$   | $\frac{5}{3}$ | 5             |

- $\vec{AB} = [2, 4] = [x - 4, y - 5] = \vec{BP}$ , czyli  $P(6, 9)$
  - $\vec{AP} = [x - 2, y - 1] = [-2, -4] = \vec{BA}$ , czyli  $P(0, -3)$
  - $\vec{AP} = [x - 2, y - 1] = [2, 4] = -\vec{BA}$ , czyli  $P(4, 5)$
  - $\vec{AP} = [x - 2, y - 1] = -[x - 4, y - 5] = -\vec{BP}$ , czyli  $P(3, 3)$
  - $\vec{AP} = [x - 2, y - 1] = 2[2, 4] = 2\vec{AB}$ , czyli  $P(6, 9)$
  - $\vec{AP} = [x - 2, y - 1] = -3[2, 4] = -3\vec{AB}$ , czyli  $P(-4, -11)$

### Ćwiczenie 9

- a) 5    b) 13    c)  $3\sqrt{2}$

### Ćwiczenie 10

- a)  $\vec{u} = [7, 0]$ ,  $|\vec{u}| = 7$   
 b)  $\vec{u} = [7, 3]$ ,  $|\vec{u}| = \sqrt{58}$   
 c)  $\vec{u} = [0, -9]$ ,  $|\vec{u}| = 9$   
 d)  $\vec{u} = [4, -3]$ ,  $|\vec{u}| = 5$

### Odpowiedzi do zadań

- $\vec{u} + \vec{v} = [-\frac{5}{4}, \frac{25}{4}]$ , czyli jest wektorem przeciwnym do  $\vec{w}$ .
  - $\vec{u} + \vec{v} = [\frac{5}{6}, -\frac{3}{2}]$ , czyli nie jest wektorem przeciwnym do  $\vec{w}$ .
- $D(3, 5)$ ,  $|\vec{AD}| = \sqrt{34}$
  - $D(3, -3)$ ,  $|\vec{AD}| = \sqrt{41}$
  - $D(5, -3)$ ,  $|\vec{AD}| = \sqrt{82}$
  - $D(-1, 8)$ ,  $|\vec{AD}| = 11$

5. a) ten sam kierunek, przeciwny zwrot b) d) ten sam kierunek i zwrot  
c) różne kierunki

6. a)  $m = 5$  b)  $m \in \{-1, 1\}$   
c)  $m \in \{-2, 0, 2\}$

7. Niech  $\alpha \in \mathbf{R}$ , wówczas:

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \vec{u} &= [\alpha \cdot x, \alpha \cdot y] \\ |\alpha \vec{u}| &= \sqrt{\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2} = \\ &= \sqrt{\alpha^2 (x^2 + y^2)} = \\ &= \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = \\ &= |\alpha| \cdot |\vec{u}|\end{aligned}$$

8.  $\vec{v} = \alpha \vec{u}$  i  $\alpha > 0$

$|\vec{v}| = \alpha |\vec{u}|$ , więc:

$$\alpha = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{v}|}{5}$$

- a)  $\alpha = \frac{20}{5} = 4$ , zatem  $4\vec{u} = \vec{v}$ , czyli  $\vec{v} = [-12, 16]$ .

- b)  $\alpha = \frac{8}{5}$ , zatem  $\frac{8}{5}\vec{u} = \vec{v}$ , czyli  $\vec{v} = [-4\frac{4}{5}, 6\frac{2}{5}]$ .

9.  $\vec{v} = \alpha \vec{u}$  i  $\alpha < 0$

$|\vec{v}| = |\alpha| |\vec{u}|$ , więc:

$$|\alpha| = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}, \alpha = -\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$$

- a)  $\alpha = -\frac{20}{\sqrt{10}} = -2\sqrt{10}$ ,

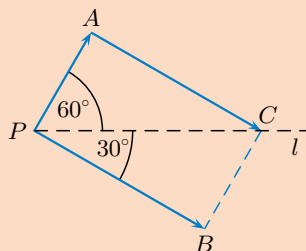
zatem  $-2\sqrt{10}\vec{u} = \vec{v}$ ,  
czyli  $\vec{v} = [-6\sqrt{10}, 2\sqrt{10}]$ .

- b)  $\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$ , zatem  $-\frac{3\sqrt{10}}{10}\vec{u} = \vec{v}$ , czyli:  
 $\vec{v} = [-\frac{9\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10}]$

12. a)  $\alpha = 2, \beta = -1$   
b)  $\alpha = -1\frac{2}{7}, \beta = 1\frac{3}{7}$   
c)  $\alpha = \frac{9}{14}, \beta = 1\frac{3}{14}$   
d)  $\alpha = -10, \beta = -3$

13. a)  $m = 2$   
b) nie ma takiego  $m$

- 14.



Znajdujemy na prostej  $l$  taki punkt  $C$ , że  $AC \parallel PB$ . Wtedy  $\angle PAC = 90^\circ$ .

Obliczamy długość wektora  $\vec{AC}$ :

$$|AC| = |PA| \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}F$$

Ale również  $|PB| = \sqrt{3}F$ , czyli:

$$|AC| = |PB|$$

Zatem wypadkowa sił  $\vec{PA}$  i  $\vec{PB}$  (ich suma) pokrywa się z prostą  $l$ , co oznacza, że statek porusza się wzdłuż tej prostej.

5. Sprawdź, czy wektory  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$  mają ten sam kierunek i zwrot.

- a)  $\vec{u} = [-2, 4], \vec{v} = [\frac{1}{2}, -1]$  c)  $\vec{u} = [12, 14], \vec{v} = [72, 86]$   
b)  $\vec{u} = [12, -9], \vec{v} = [2, -\frac{3}{2}]$  d)  $\vec{u} = [\sqrt{2} - 1, \sqrt{2}], \vec{v} = [1, 2 + \sqrt{2}]$

6. Dla jakich wartości parametru  $m$  wektor  $\vec{u}$  ma ten sam kierunek co wektor  $\vec{v} = [3, 1]$ ?

- a)  $\vec{u} = [m + 1, 2]$  b)  $\vec{u} = [6, m^2 + 1]$  c)  $\vec{u} = [12m, m^3]$

- D** 7. Dany jest wektor  $\vec{u} = [x, y]$ . Uzasadnij, że  $|\alpha \vec{u}| = |\alpha| \cdot |\vec{u}|$ .

8. Dany jest wektor  $\vec{u} = [-3, 4]$ . Wyznacz wektor  $\vec{v}$ , który ma ten sam kierunek i zwrot co wektor  $\vec{u}$ , jeśli:

- a)  $|\vec{v}| = 20$ , b)  $|\vec{v}| = 8$ .

9. Dany jest wektor  $\vec{u} = [3, -1]$ . Wyznacz wektor  $\vec{v}$ , który ma ten sam kierunek co wektor  $\vec{u}$ , ale przeciwny zwrot, jeśli:

- a)  $|\vec{v}| = 20$ , b)  $|\vec{v}| = 3$ .

10. Dany jest niezerowy wektor  $\vec{u} = [x, y]$ .

- D** Wykaż, że wektor  $[\frac{x}{|\vec{u}|}, \frac{y}{|\vec{u}|}]$  jest wektorem jednostkowym.

Wektor, którego długość jest równa 1, nazywamy **wektorem jednostkowym**.

11. Wyznacz wektor jednostkowy równoległy do wektora  $\vec{u}$ .

- a)  $\vec{u} = [-8, 6]$  b)  $\vec{u} = [1, 1]$

12. Dane są wektory  $\vec{u} = [1, 2]$  i  $\vec{v} = [3, -1]$ . Wyznacz wartości parametrów  $\alpha$  i  $\beta$ , dla których prawdziwa jest poniższa równość.

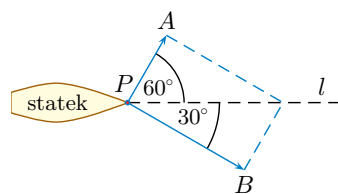
- a)  $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = [-1, 5]$  c)  $\alpha \vec{u} - \beta \vec{v} = [-3, 2\frac{1}{2}]$   
b)  $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = [3, -4]$  d)  $\alpha \vec{u} - \beta \vec{v} = [-1, -23]$

13. Wyznacz wartość parametru  $m$ , dla której  $2\vec{u} + 3\vec{v} - m\vec{w} = \vec{0}$ .

- a)  $\vec{u} = [1, 3], \vec{v} = [-4, 2], \vec{w} = [-5, 6]$   
b)  $\vec{u} = [4, 2], \vec{v} = [-6, 9], \vec{w} = [-3, \frac{3}{2}]$

14. Statek holowany jest przez dwa holowniki.

- D** Jeden z nich ciągnie ten statek z siłą o wartości  $F$  w kierunku  $PA$ . Uzasadnij, że jeżeli drugi holownik – ciągnący statek w kierunku  $PB$  – użyje siły o wartości  $\sqrt{3}F$ , to statek ten będzie poruszał się wzdłuż prostej  $l$ .



10.  $\vec{u} = [x, y]$ , zatem  $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

$$\left| \left[ \frac{x}{|\vec{u}|}, \frac{y}{|\vec{u}|} \right] \right| = \sqrt{\frac{x^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{y^2}{|\vec{u}|^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{|\vec{u}|^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{u}|} = 1$$

Czyli wektor ten jest jednostkowy.

11. a)  $|\vec{u}| = 10$ , zatem  $\alpha = -\frac{1}{10}$  lub  $\alpha = \frac{1}{10}$ , czyli  $\vec{v} = [\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}]$   
lub  $\vec{v} = [-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}]$ .

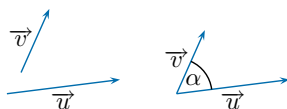
- b)  $|\vec{u}| = \sqrt{2}$ , zatem  $\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  lub  $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , czyli  $\vec{v} = [-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$   
lub  $\vec{v} = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ .

## Iloczyn skalarny wektorów

**Iloczyn skalarny** dwóch niezerowych wektorów jest liczbą równą iloczynowi długości tych wektorów i cosinusa kąta między nimi:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

Jeśli jeden z wektorów jest wektorem zerowym, przyjmuje się, że ich iloczyn skalarny jest równy zero.



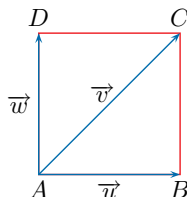
Kątem między wektorami  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$  jest kąt wypukły, w którego wierzchołku leży początek obu tych wektorów oraz wektory te wyznaczają ramiona kąta.

### Przykład 1

Dane są kwadrat  $ABCD$  o boku długości 1 oraz wektory  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  i  $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ . Oblicz  $\vec{u} \circ \vec{v}$  oraz  $\vec{u} \circ \vec{w}$ .

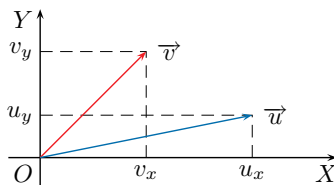
$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 45^\circ = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\vec{u} \circ \vec{w} = |\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$



Niezerowe wektory  $\vec{u}$  i  $\vec{w}$  są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy  $\vec{u} \circ \vec{w} = 0$ .

Iloczyn skalarny wektorów możemy wyrazić za pomocą współrzędnych tych wektorów.



Dla dowolnych wektorów  $\vec{u} = [u_x, u_y]$  i  $\vec{v} = [v_x, v_y]$  zachodzi związek:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y$$

- D** 1. Udowodnij powyższe twierdzenie, korzystając ze wzoru na cosinus różnicy kątów.

### Przykład 2

Oblicz miarę kąta między wektorami  $\vec{u} = [4, 2]$  i  $\vec{v} = [-3, 1]$ .

$$|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}, \quad |\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = \sqrt{20} \cdot \sqrt{10} \cos \alpha = 10\sqrt{2} \cos \alpha$$

jednocześnie:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y = 4 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 = -10$$

Otrzymujemy równość:  $10\sqrt{2} \cos \alpha = -10$ , czyli  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , skąd  $\alpha = 135^\circ$ .

2. Oblicz miarę kąta między wektorami  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$ .

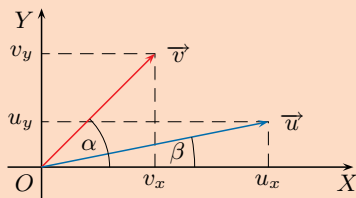
a)  $\vec{u} = [4, 2]$ ,  $\vec{v} = [2, 6]$

c)  $\vec{u} = [-\sqrt{3}, -1]$ ,  $\vec{v} = [2, 2\sqrt{3}]$

b)  $\vec{u} = [3, 9]$ ,  $\vec{v} = [-3, 1]$

d)  $\vec{u} = [1 - \sqrt{5}, 1]$ ,  $\vec{v} = [1 + \sqrt{5}, 4]$

1. Oznaczmy kąty  $\alpha$  i  $\beta$  jak na rysunku.



$$\begin{aligned} \vec{u} \circ \vec{v} &= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha - \beta) = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot (\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta) = \\ &= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \left( \frac{v_x}{|\vec{v}|} \cdot \frac{u_x}{|\vec{u}|} + \frac{v_y}{|\vec{v}|} \cdot \frac{u_y}{|\vec{u}|} \right) = v_x u_x + v_y u_y \end{aligned}$$

2. a)  $\vec{u} \circ \vec{v} = 8 + 12 = 20$

$$\vec{u} \circ \vec{v} = \sqrt{20} \cdot \sqrt{40} \cos \alpha = 20\sqrt{2} \cos \alpha = 20$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ czyli } \alpha = 45^\circ$$

b)  $\vec{u} \circ \vec{v} = -9 + 9 = 0$   
 $\alpha = 90^\circ$

c)  $\vec{u} \circ \vec{v} = -2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = -4\sqrt{3}$

$$\vec{u} \circ \vec{v} = 2 \cdot 4 \cos \alpha = 8 \cos \alpha = -4\sqrt{3}$$

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ czyli } \alpha = 150^\circ$$

d)  $\vec{u} \circ \vec{v} = -4 + 4 = 0$   
 $\alpha = 90^\circ$

### Uczeń:

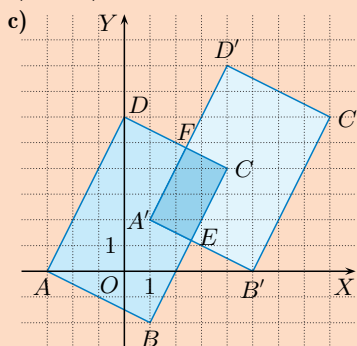
- stosuje działania na wektorach do badania współliniowości punktów,
- stosuje działania na wektorach do podziału odcinka,
- stosuje wektory w zadaniach z geometrii analitycznej,
- wykorzystuje działania na wektorach w zadaniach na dowodzenie.

### Ćwiczenie 1

- a)  $P = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$   
b)  $P = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$

### Ćwiczenie 2

- a) 20 b) 5



Wyznaczamy punkt wspólny prostych  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$  i  $y = 2x - 4$  – jest to punkt  $E(\frac{13}{5}, \frac{6}{5})$ .

Wyznaczamy punkt wspólny prostych  $y = -\frac{1}{2}x + 6$  i  $y = 2x$  – jest to punkt  $F(\frac{12}{5}, \frac{24}{5})$ .

Zatem:

$$|EC| = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

$$|FC| = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

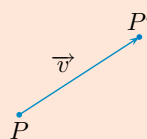
$$\text{czyli pole } P = \frac{7\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{28}{5}.$$

### Ćwiczenie 3

$$8(\pi - 2)$$

## \*2.10. Wektory – zastosowania

**Przesunięciem** (lub translacją) o wektor  $\vec{v}$  nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi  $P$  płaszczyzny przyporządkowuje taki punkt  $P'$ , że  $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$ . Mówimy, że punkt  $P'$  jest **obrazem** punktu  $P$  w przesunięciu o wektor  $\vec{v}$ .

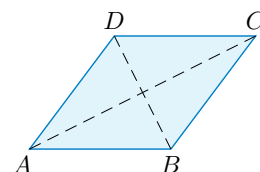


Obrazem punktu  $P(x, y)$  w przesunięciu o wektor  $\vec{v} = [a, b]$  jest punkt  $P'(x+a, y+b)$ .

### Ćwiczenie 1

Dany jest romb  $ABCD$  o polu równym 4 (rysunek obok). Romb  $A'B'C'D'$  otrzymujemy przez przesunięcie rombu  $ABCD$  o wektor  $\vec{v}$ . Oblicz pole figury będącej częścią wspólną obu rombów, jeśli:

- a)  $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ , b)  $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ .



### Ćwiczenie 2

Dany jest prostokąt  $F$  o wierzchołkach  $A(-3, 0)$ ,  $B(1, -2)$ ,  $C(4, 4)$  i  $D(0, 6)$ . Prostokąt  $F_1$  jest obrazem prostokąta  $F$  w przesunięciu o wektor  $\vec{v}$ . Oblicz pole części wspólnej obu prostokątów.

- a)  $\vec{v} = [1, 2]$  b)  $\vec{v} = [0, -5]$  c)  $\vec{v} = [4, 2]$

### Ćwiczenie 3

Koło  $K_2$  jest obrazem koła  $K_1$  o środku w punkcie  $(0, 0)$  i promieniu  $r = 4$  w przesunięciu o wektor  $\vec{v} = [4, 4]$ . Oblicz pole części wspólnej tych kół.

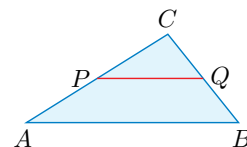
### D Przykład 1

Dany jest trójkąt  $ABC$  (rysunek obok). Punkt  $P$  jest środkiem boku  $AC$ , a punkt  $Q$  – środkiem boku  $BC$ . Udowodnij, że  $PQ \parallel AB$  oraz  $|PQ| = \frac{1}{2}|AB|$ .

Wektor  $\overrightarrow{PQ}$  zapisujemy jako sumę:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

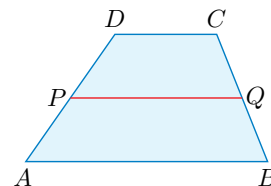
Oznacza to, że  $PQ \parallel AB$  oraz  $|PQ| = \frac{1}{2}|AB|$ .



### D Ćwiczenie 4

Udowodnij, że odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do podstaw trapezu, a długość tego odcinka jest średnią arytmetyczną długości podstaw.

**Wskazówka.** Zauważ, że  $\overrightarrow{DC} = \alpha\overrightarrow{AB}$  dla pewnej stałej  $\alpha$ .



### Ćwiczenie 4

Zauważmy, że  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CQ}$  oraz  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ}$ .

Dodajemy równości stronami i korzystamy z tego, że  $\overrightarrow{PD} = -\overrightarrow{PA}$  oraz  $\overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{BQ}$ :

$$2\overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PA}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{BQ})$$

$$2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$$

Wektory  $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{DC}$  są równoległe i mają ten sam zwrot, zatem wektor  $\overrightarrow{PQ}$  jest równoległy do  $\overrightarrow{AB}$  oraz:

$$|PQ| = \frac{1}{2}(|AB| + |DC|)$$

### Multiteka

- Wektor – podstawowe własności
- Działania na wektorach

dla [nauczyciela.pl](http://nauczyciela.pl) | Kartkówka 2.10



### Przykład 2

Sprawdź, czy punkty  $A(-4, -5)$ ,  $B(2, -1)$  i  $C(26, 15)$  są współliniowe.

Wyznaczamy współrzędne wektorów  $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{AC}$ :

$$\overrightarrow{AB} = [2 - (-4), -1 - (-5)] = [6, 4], \quad \overrightarrow{AC} = [26 - (-4), 15 - (-5)] = [30, 20]$$

Zauważmy, że  $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AB}$ , zatem punkty  $A$ ,  $B$  i  $C$  są współliniowe.

### Ćwiczenie 5

Sprawdź, czy punkty  $P$ ,  $Q$  i  $R$  są współliniowe.

- a)  $P(2, -1)$ ,  $Q(-2, 4)$ ,  $R(10, -11)$       b)  $P(-5, 2)$ ,  $Q(13, 8)$ ,  $R(19, 10)$

### Przykład 3

Dane są współrzędne wierzchołków  $A(-1, 3)$ ,  $B(-3, 2)$  i  $C(3, 1)$  równoległoboku  $ABCD$ .

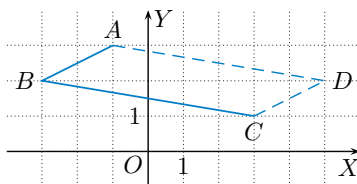
Wyznacz współrzędne wierzchołka  $D$ .

Zauważmy, że  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .

Wyznaczamy wektor  $\overrightarrow{BC}$ :

$$\overrightarrow{BC} = [3 - (-3), 1 - 2] = [6, -1]$$

Wierzchołek  $D$  jest obrazem punktu  $A$  w przesunięciu o wektor  $\overrightarrow{AD}$ , zatem  $D(-1 + 6, 3 - 1)$ , czyli  $D(5, 2)$ .



### Ćwiczenie 6

Punkty  $P$ ,  $Q$  i  $R$  są kolejno środkami boków  $AB$ ,  $BC$  i  $CD$  równoległoboku  $ABCD$ . Wyznacz współrzędne wierzchołków tego równoległoboku, jeśli:

- a)  $B(3, 3)$ ,  $P(5, 1)$ ,  $Q(-1, 2)$ ,      c)  $\overrightarrow{BA} = [-5, 5]$ ,  $\overrightarrow{BC} = [2, 4]$ ,  $Q(3, -1)$ ,  
b)  $P(2, 0)$ ,  $Q(7, 4)$ ,  $R(4, 4)$ ,      d)  $\overrightarrow{AB} = [8, 2]$ ,  $Q(7, 2)$ ,  $R(6, 4)$ .

### Zadania

- D** 1. Dane są punkty  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  oraz  $S(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ . Wykaż, że:

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

2. Wyznacz wektor  $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ , a następnie współrzędne punktów  $P$  i  $Q$  dzielących odcinek  $AB$  na trzy równe części.

- a)  $A(-3, -2)$ ,  $B(3, 1)$       b)  $A(-10, 6)$ ,  $B(8, -6)$       c)  $A(1, -1)$ ,  $B(2, 1)$

3. Wyznacz współrzędne końców odcinka  $AB$ , jeśli wiadomo, że punkty:

- a)  $P(2, 1)$  i  $Q(5, 4)$  dzielą go na trzy równe części,  
b)  $P(4, -2)$ ,  $Q(3, 1)$  i  $R(2, 4)$  dzielą go na cztery równe części.

1.  $\overrightarrow{AS} = [\frac{x_1+x_2}{2} - x_1, \frac{y_1+y_2}{2} - y_1] = [\frac{x_2-x_1}{2}, \frac{y_2-y_1}{2}] = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{SB} = [x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}, y_2 - \frac{y_1+y_2}{2}] = [\frac{x_2-x_1}{2}, \frac{y_2-y_1}{2}] = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{Zatem } \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

3. a) I sposób

$$\frac{x_A+5}{2} = 2 \text{ i } \frac{y_A+4}{2} = 1, \text{ } A(-1, -2)$$

$$\frac{x_B+2}{2} = 5 \text{ i } \frac{y_B+1}{2} = 4, \text{ } B(8, 7)$$

II sposób

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PQ} = [3, 3] = [2 - x_A, 1 - y_A], \text{ czyli } A(-1, -2)$$

$$\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PQ} = [3, 3], \text{ czyli } B(8, 7)$$

b)  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PQ} = [-1, 3]$ , czyli  $A(5, -5)$

$$\overrightarrow{RB} = \overrightarrow{QR} = [-1, 3], \text{ czyli } B(1, 7)$$

### Ćwiczenie 5

a)  $\overrightarrow{PQ} = [-4, 5]$ ,

$$\overrightarrow{PR} = [8, -10] = -2\overrightarrow{PQ},$$

zatem punkty są współliniowe.

b)  $\overrightarrow{PQ} = [18, 6]$ ,

$$\overrightarrow{PR} = [24, 8] = \frac{4}{3}\overrightarrow{PQ},$$

zatem punkty są współliniowe.

### Ćwiczenie 6

a)  $\frac{x_A+3}{2} = 5$  i  $\frac{y_A+3}{2} = 1$ ,

$$A(7, -1)$$

$$\frac{x_C+3}{2} = -1 \text{ i } \frac{y_C+3}{2} = 2, \text{ } C(-5, 1)$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = [4, -4] =$$

$$[x_D + 5, y_D - 1], \text{ czyli } D(-1, -3)$$

b)  $\overrightarrow{QC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} = [1, 2]$ ,

$$\text{czyli } C(8, 6)$$

$$\overrightarrow{QB} = -\overrightarrow{QC} = [-1, -2],$$

$$\text{czyli } B(6, 2)$$

$$\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BP} = [-8, -4],$$

$$\text{czyli } A(-2, -2)$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = [-8, -4],$$

$$\text{czyli } D(0, 2)$$

c)  $\overrightarrow{QC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = [1, 2] =$

$$[x_C - 3, y_C + 1], \text{ czyli } C(4, 1)$$

$$\overrightarrow{BC} = [2, 4], \text{ czyli } B(2, -3)$$

$$\overrightarrow{BA} = [-5, 5], \text{ czyli } A(-3, 2)$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = [-5, 5],$$

$$\text{czyli } D(-1, 6)$$

d)  $\overrightarrow{RC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = [4, 1]$ ,

$$\text{czyli } C(10, 5)$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = [8, 2] =$$

$$[10 - x_D, 5 - y_D], \text{ czyli } D(2, 3)$$

$$\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{CQ} = [-3, -3],$$

$$\text{czyli } B(4, -1)$$

$$\overrightarrow{AB} = [8, 2], \text{ czyli } A(-4, -3)$$

### Odpowiedzi do zadań

2. a)  $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = [2, 1]$ ,  $P(-1, -1)$ ,  $Q(1, 0)$

b)  $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = [6, -4]$ ,  $P(-4, 2)$ ,  $Q(2, -2)$

c)  $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ ,  $P(1\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ ,  $Q(1\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

4. a)  $P(0, 1)$  lub  $P(2, -2)$   
 b)  $A(12, -15\frac{1}{2})$   
 lub  $A(19, -26)$

5. a)  $C(6, 3)$ ,  $D(0, 1)$   
 b)  $A(4, -1)$ ,  $B(2, 3)$ ,  
 $C(-6, 3)$ ,  $D(-4, -1)$

6.  $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$ ,  $y = -x - 2$ ,  
 $y = -4x - 11$

7. a)  $A(-3, -2)$ ,  $B(3, 1)$   
 b)  $A(10, 15)$ ,  $B(14, 11)$

8.  $C(-1, 2)$

9. Niech  $P$  będzie punktem przecięcia przekątnych. Wówczas:

a)  $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4} \cdot [5, 2] = [ \frac{15}{4}, \frac{3}{2} ]$ , czyli  $P(\frac{7}{4}, \frac{7}{2})$

b)  $D(2, 5)$ ,  $B(7, 5)$ ,  
 $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3} \cdot [6, 3] = [2, 1]$ , czyli  $C(4, 6)$

11. Środek ciężkości jest punktem przecięcia środkowych, czyli  $S(1, 2)$ .

Niech  $A = (1, -2)$  oraz  $D(x_D, y_D)$  – środek boku  $BC$ . Wówczas:

$$\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = [0, 4],$$

czyli  $\overrightarrow{AD} = [0, 6]$  i  $D(1, 4)$ .

Szukane wierzchołki:

$B(x_B, -x_B + 3)$ ,  $C(x_C, 2)$

Punkt  $D$  jest środkiem

boku  $BC$ , stąd  $\frac{x_B + x_C}{2} = 1$

oraz  $\frac{-x_B + 3 + 2}{2} = 4$ ,

czyli  $x_B = -3$  i  $x_C = 5$ .

Zatem  $B(-3, 6)$ ,  $C(5, 2)$ .

4. a) Dane są punkty  $A(-4, 7)$  i  $B(6, -8)$ . Wyznacz współrzędne punktu  $P$ , który dzieli odcinek  $AB$  w stosunku 2:3. Rozpatrz dwa przypadki.

b) Punkt  $P(3, -2)$  dzieli odcinek  $AB$  w stosunku 3:4. Wyznacz współrzędne punktu  $A$ , jeśli  $B(-9, 16)$ . Rozpatrz dwa przypadki.

5. a) Punkty  $A(-2, -3)$  i  $B(4, -1)$  są wierzchołkami równoległoboku  $ABCD$ . Punkt  $P(2, 0)$  jest punktem przecięcia przekątnych tego równoległoboku. Wyznacz współrzędne wierzchołków  $C$  i  $D$ .

b) Punkt  $P(3, 1)$  jest środkiem boku  $AB$  równoległoboku  $ABCD$ . Jego przekątne przecinają się w punkcie  $S(-1, 1)$ . Wyznacz współrzędne wierzchołków tego równoległoboku, jeśli  $\overrightarrow{CD} = [2, -4]$ .

6. Dane są wektory  $\overrightarrow{AC} = [12, 3]$ ,  $\overrightarrow{BC} = [9, 9]$  oraz punkt  $A(-5, 3)$ . Wyznacz równania prostych, w których są zawarte wysokości trójkąta  $ABC$ .

7. a) Dane są wektor  $\overrightarrow{AB} = [6, 3]$  oraz punkt  $C(1, 6)$ . Punkt  $S(2, 3\frac{1}{2})$  jest środkiem odcinka  $BC$ . Wyznacz współrzędne wierzchołków  $A$  i  $B$  trójkąta  $ABC$ .

b) Dane są wektory  $\overrightarrow{AB} = [4, -4]$ ,  $\overrightarrow{CD} = [6, 6]$  oraz punkt  $C(6, 7)$  będący wierzchołkiem trójkąta równoramiennego  $ABC$  o podstawie  $AB$  i wysokości  $CD$ . Wyznacz współrzędne wierzchołków  $A$  i  $B$  tego trójkąta.

8. Podstawa  $AB$  trapezu  $ABCD$  jest dwa razy dłuższa od podstawy  $CD$ . Wyznacz współrzędne wierzchołka  $C$ , jeśli  $A(4, -5)$ ,  $B(8, 1)$ ,  $D(-3, -1)$ .

- \*9. Podstawa  $AB$  trapezu  $ABCD$  jest trzy razy dłuższa od podstawy  $CD$ . Wyznacz współrzędne:

a) punktu przecięcia przekątnych tego trapezu, jeśli  $A(-2, 2)$  i  $C(3, 4)$ ,

b) wierzchołków  $B$ ,  $C$  i  $D$ , jeśli  $A(1, 2)$ ,  $\overrightarrow{AD} = [1, 3]$  i  $\overrightarrow{DB} = [5, 0]$ .

- \*10. a) Udowodnij, że współrzędne środka ciężkości trójkąta o wierzchołkach  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  i  $C(x_3, y_3)$  wyrażają się wzorami:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

b) Dane są wierzchołki  $A(-1, 0)$  i  $B(2, 5)$  trójkąta  $ABC$ . Wyznacz współrzędne wierzchołka  $C$  i oblicz pole tego trójkąta, jeśli jego środek ciężkości ma współrzędne  $(-1, 2)$ .

- \*11. Dane są równania prostych zawierających dwie środkowe trójkąta:  $y = 2$  i  $y = -x + 3$  oraz jeden z jego wierzchołków:  $(1, -2)$ . Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

10. a) Niech  $S(x, y)$  – środek ciężkości,  $D$  – środek boku  $AB$ ,  $D = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$ .

$$\frac{|DS|}{|DC|} = \frac{1}{3}, \text{ więc } \overrightarrow{DS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}[x_3 - \frac{x_1 + x_2}{2}, y_3 - \frac{y_1 + y_2}{2}]$$

$$\text{Zatem } x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3}{3} - \frac{x_1 + x_2}{6} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_3}{3} - \frac{y_1 + y_2}{6} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

b)  $\frac{-1 + 2 + x_C}{3} = -1$  i  $\frac{0 + 5 + y_C}{3} = 2$ , czyli  $C(-4, 1)$

Pole trójkąta obliczamy ze wzoru:

$$P = \frac{1}{2}|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2|$$

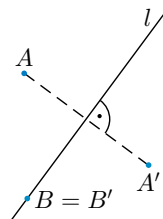
Zatem  $P = 9$ .

## 2.11. Symetria osiowa

Założmy, że punkt  $A$  nie należy do prostej  $l$ .

Punkt  $A'$  nazywamy **punktem symetrycznym** do punktu  $A$  **względem prostej  $l$** , jeżeli punkty  $A$  i  $A'$  leżą na prostej prostopadłej do prostej  $l$  i środek odcinka  $AA'$  należy do prostej  $l$  (prosta  $l$  jest symetralną odcinka  $AA'$ ).

Punktem symetrycznym względem prostej  $l$  do punktu należącego do tej prostej jest ten sam punkt (patrz punkt  $B$  na rysunku obok).

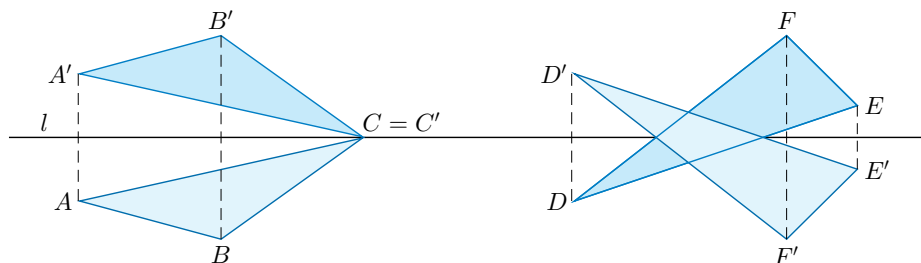


### Definicja

**Symetrią osiową** względem prostej  $l$  (lub symetrią względem prostej  $l$ ) nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje punkt do niego symetryczny względem prostej  $l$ .

Prostą  $l$  nazywamy **osią symetrii**.

Na rysunku poniżej przedstawiono trójkąty  $ABC$  i  $DEF$  oraz ich obrazy w symetrii osiowej względem prostej  $l$  – odpowiednio trójkąty  $A'B'C'$  i  $D'E'F'$ .



Odległość między obrazami dwóch punktów w symetrii osiowej jest równa odległości między tymi punktami (mówimy, że symetria osiowa jest przekształceniem, które nie zmienia odległości między punktami). Zatem obrazem dowolnej figury w symetrii osiowej jest figura do niej przystająca. Na przykład obrazem trójkąta jest trójkąt do niego przystający, a obrazem okręgu jest okrąg o takim samym promieniu.

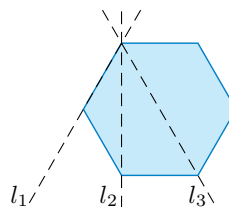
### Ćwiczenie 1

Narysuj w zeszycie sześciokąt foremny, a następnie jego obraz w symetrii względem prostej (rysunek obok):

a)  $l_1$ ,

b)  $l_2$ ,

c)  $l_3$ .

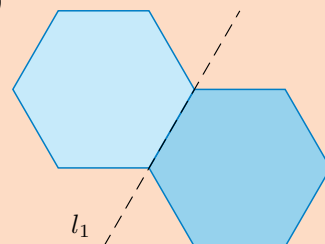


### Uczeń:

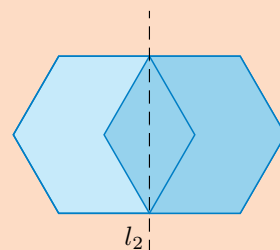
- wskazuje figury osiowo symetryczne i podaje liczbę ich osi symetrii,
- znajduje współrzędne punktu położonego symetrycznie do danego punktu względem osi układu współrzędnych,
- szkicuje obraz wielokąta w symetrii względem jednej z osi układu współrzędnych i podaje współrzędne jego wierzchołków,
- wyznacza równanie okręgu symetrycznego do danego okręgu względem jednej z osi układu współrzędnych lub prostej o danym równaniu,
- stosuje własności symetrii osiowej w zadaniach.

### Ćwiczenie 1

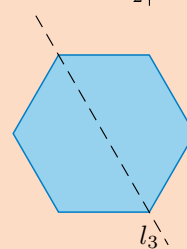
a)



b)



c)



### Multiteka

- Symetria
- Symetria osiowa
- Symetria względem osi układu współrzędnych
- Przekształcenia na płaszczyźnie

dla [nauczyciela.pl](http://nauczyciela.pl) | Kartkówka 2.11

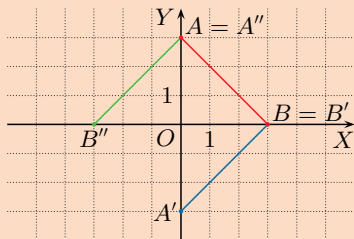
**Generator**  
testów i sprawdzianów

### Ćwiczenie 2

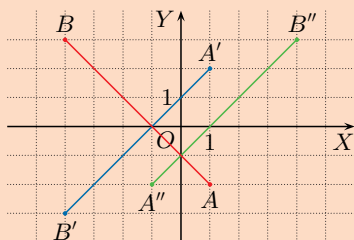
kwadrat: 4,  
trójkąt równoboczny: 3,  
prostokąt: 2,  
koło: nieskończenie wiele

### Ćwiczenie 3

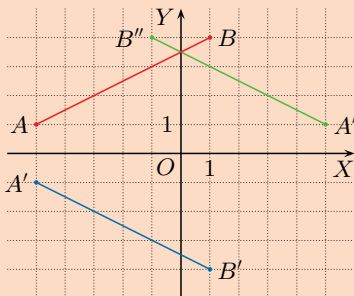
a)  $A'(0, -3)$ ,  $B'(3, 0)$ ,  $A''(0, 3)$ ,  
 $B''(-3, 0)$



b)  $A'(1, 2)$ ,  $B'(-4, -3)$ ,  
 $A''(-1, -2)$ ,  $B''(4, 3)$



c)  $A'(-5, -1)$ ,  $B'(1, -4)$ ,  
 $A''(5, 1)$ ,  $B''(-1, 4)$



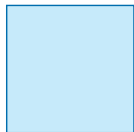
### Ćwiczenie 5

a)  $A'(-2, -1)$ ,  $B'(2, 3)$ ,  
 $C'(4, 1)$ ,  $D'(0, -3)$   
b)  $A''(2, 1)$ ,  $B''(-2, -3)$ ,  
 $C''(-4, -1)$ ,  $D''(0, 3)$

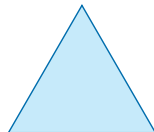
Figura jest **osiowosymetryczna**, jeśli jest ona swoim własnym obrazem w symetrii względem pewnej prostej  $l$ . Prosta  $l$  nazywamy wówczas **osią symetrii** tej figury.

### Ćwiczenie 2

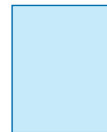
Podaj, ile osi symetrii mają poniższe figury.



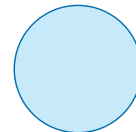
kwadrat



trójkąt równoboczny



prostokąt

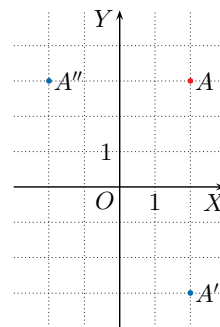


koło

### ■ Symetria względem osi układu współrzędnych

#### Przykład 1

Obrazem punktu  $A(2, 3)$  w symetrii względem osi  $OX$  jest punkt  $A'(2, -3)$ . Obrazem punktu  $A(2, 3)$  w symetrii względem osi  $OY$  jest punkt  $A''(-2, 3)$ .



Punktem symetrycznym do punktu  $P(x, y)$  względem osi  $OX$  układu współrzędnych jest punkt  $P'(x, -y)$ .

Punktem symetrycznym do punktu  $P(x, y)$  względem osi  $OY$  układu współrzędnych jest punkt  $P''(-x, y)$ .

### Ćwiczenie 3

Podaj współrzędne końców odcinka  $A'B'$  symetrycznego do odcinka  $AB$  względem osi  $OX$  oraz odcinka  $A''B''$  symetrycznego do odcinka  $AB$  względem osi  $OY$ . Narysuj w jednym układzie współrzędnych odcinki  $AB$ ,  $A'B'$  i  $A''B''$ .

a)  $A(0, 3)$ ,  $B(3, 0)$       b)  $A(1, -2)$ ,  $B(-4, 3)$       c)  $A(-5, 1)$ ,  $B(1, 4)$

### Ćwiczenie 4

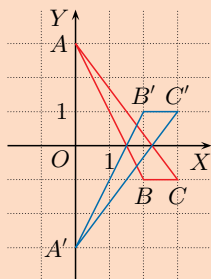
Dany jest trójkąt  $ABC$ , gdzie  $A(0, 3)$ ,  $B(2, -1)$ ,  $C(3, -1)$ . Narysuj ten trójkąt oraz jego obraz w symetrii względem: a) osi  $OX$ , b) osi  $OY$ .

### Ćwiczenie 5

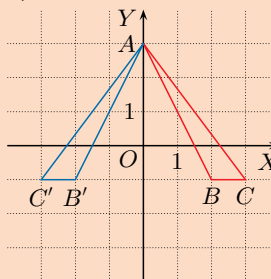
Dane są punkty  $A(-2, 1)$ ,  $B(2, -3)$ ,  $C(4, -1)$  i  $D(0, 3)$ . Podaj współrzędne wierzchołków prostokąta będącego obrazem prostokąta  $ABCD$  w symetrii względem: a) osi  $OX$ , b) osi  $OY$ .

### Ćwiczenie 4

a)



b)  $A' = A$

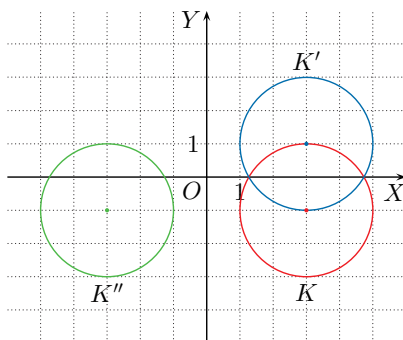


### Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono okrąg  $K$  dany równaniem  $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$ .

Okrąg  $K'$  jest symetryczny do okręgu  $K$  względem osi  $OX$  (okręgi te mają równe promienie, a ich środki są symetryczne względem osi  $OX$ ).

Okrąg  $K''$  jest symetryczny do okręgu  $K$  względem osi  $OY$  (okręgi te mają równe promienie, a ich środki są symetryczne względem osi  $OY$ ).



### Ćwiczenie 6

Podaj równania okręgów  $K'$  i  $K''$  z powyższego przykładu.

### Ćwiczenie 7

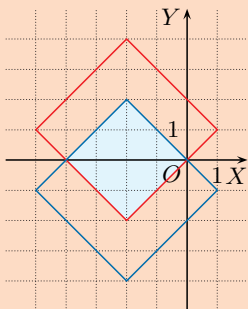
Podaj równanie okręgu  $K'$  symetrycznego do okręgu  $K$  względem osi  $OX$  oraz okręgu  $K''$  symetrycznego do okręgu  $K$  względem osi  $OY$ .

- a)  $K: (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$       c)  $K: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$   
 b)  $K: (x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 13$       d)  $K: x^2 + y^2 + 2x + 12y - 12 = 0$

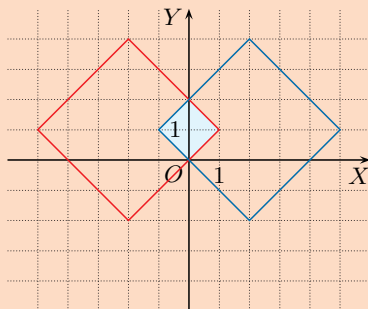
### Zadania

- Sprawdź, czy odcinki  $AB$  i  $A'B'$  są symetryczne względem osi  $OX$  lub osi  $OY$ .  
 a)  $A(-2, 1)$ ,  $B(3, -2)$ ,  $A'(-2, -1)$ ,  $B'(3, 2)$   
 b)  $A(-3, 4)$ ,  $B(-1, -2)$ ,  $A'(3, 4)$ ,  $B'(1, -2)$   
 c)  $A(-4, -3)$ ,  $B(2, 2)$ ,  $A'(-4, 3)$ ,  $B'(-2, 2)$   
 d)  $A(-2, 0)$ ,  $B(0, 4)$ ,  $A'(2, 0)$ ,  $B'(0, -4)$
- Narysuj w jednym układzie współrzędnych trójkąt symetryczny do trójkąta  $ABC$  względem osi  $OX$  oraz trójkąt symetryczny do trójkąta  $ABC$  względem osi  $OY$ .  
 a)  $A(-1, 2)$ ,  $B(5, 3)$ ,  $C(2, 5)$       c)  $A(-3, 2)$ ,  $B(0, -3)$ ,  $C(3, 2)$   
 b)  $A(-3, 0)$ ,  $B(-2, -5)$ ,  $C(0, 3)$       d)  $A(-3, -1)$ ,  $B(9, -2)$ ,  $C(2, 1)$
- Oblicz pole części wspólnej kwadratu  $K$  o wierzchołkach  $(-5, 1)$ ,  $(-2, -2)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(-2, 4)$  oraz kwadratu symetrycznego do kwadratu  $K$  względem:  
 a) osi  $OX$ ,      b) osi  $OY$ .

3. a)  $P = 8$



b)  $P = 2$



### Ćwiczenie 6

$$K': (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4,$$

$$K'': (x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

### Ćwiczenie 7

a)  $K': (x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 16,$

$$K'': (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

b)  $K': (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 13,$

$$K'': (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 13$$

c)  $K': x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0,$

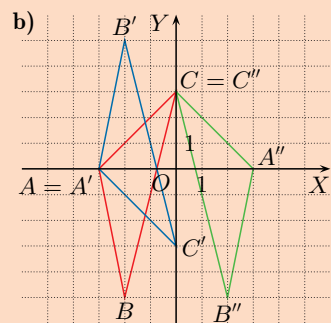
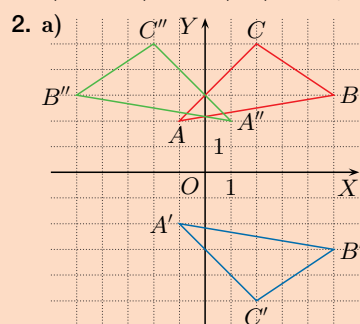
$$K'': x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12 = 0$$

d)  $K': x^2 + y^2 + 2x - 12y - 12 = 0,$

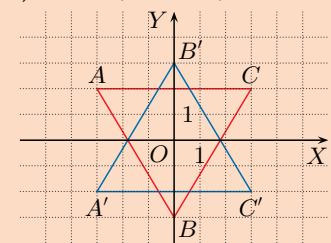
$$K'': x^2 + y^2 - 2x + 12y - 12 = 0$$

### Odpowiedzi do zadań

1. a)  $OX$  b)  $OY$  c), d) nie są



c)  $A'' = C$ ,  $B'' = B$ ,  $C'' = A$



4. a)  $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$ , należy  
 b)  $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 41$ , nie należy  
 c)  $(x+3)^2 + y^2 = 4$ , należy  
 d)  $(x+1)^2 + (y+4)^2 = 40$ , należy

4. Wyznacz równanie okręgu  $K'$  symetrycznego do okręgu  $K$  względem osi  $OX$ . Sprawdź, czy punkt  $P(-3, 2)$  należy do okręgu  $K'$ .  
 a)  $K: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$       c)  $K: (x+3)^2 + y^2 = 4$   
 b)  $K: (x-2)^2 + (y+2)^2 = 41$       d)  $K: (x+1)^2 + (y-4)^2 = 40$
5. Wyznacz równanie okręgu  $K'$  symetrycznego do okręgu  $K$  względem osi  $OY$ . Oblicz pole rombu, którego wierzchołkami są środki okręgów  $K$  i  $K'$  oraz punkty wspólne tych okręgów.  
 a)  $K: x^2 + y^2 + 6x - 2y - 3 = 0$       b)  $K: x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$
6. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Dany jest okrąg  $K$  o środku w punkcie  $S(4, 2)$  i promieniu  $r = \sqrt{5}$ . Wyznacz równanie okręgu  $K'$  symetrycznego do okręgu  $K$  względem prostej  $l: y = 3x$ .

Niech  $m: y = ax + b$  będzie prostą przechodzącą przez punkt  $S$  oraz  $m \perp l$ . Zatem  $a = -\frac{1}{3}$  oraz:

$$m: y = -\frac{1}{3}x + b$$

Do równania prostej  $m$  podstawiamy współrzędne punktu  $S(4, 2)$  i otrzymujemy:

$$m: y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$$

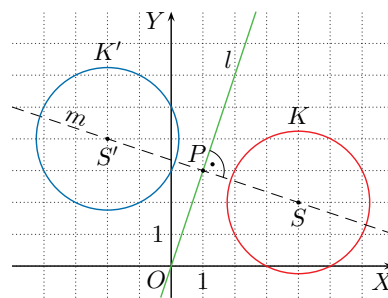
Niech  $P$  będzie punktem przecięcia prostych  $l$  i  $m$ . Jego współrzędne spełniają układ równań:

$$\begin{cases} y = 3x \\ y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3} \end{cases}$$

Zatem  $P(1, 3)$ .

Współrzędne punktu  $S'$  – środka okręgu  $K'$  – wyznaczamy, korzystając z tego, że punkt  $P$  jest środkiem odcinka  $S'S$ . Otrzymujemy  $S'(-2, 4)$ .

Ponieważ okrąg  $K'$  ma ten sam promień co okrąg  $K$ , jego równanie ma postać  $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 5$ .

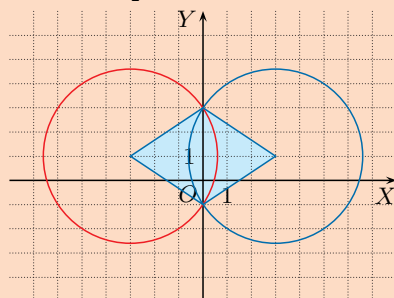


6. a)  $S(5, 2)$ ,  $m: y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ ,  
 zatem  $P(3, 3)$ ,  $S'(1, 4)$   
 Równanie okręgu:  
 $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 2$   
 b)  $K: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 16$   
 $m: y = 3x - 9$ , zatem  
 $P(\frac{29}{10}, -\frac{3}{10})$ ,  $S'(\frac{9}{5}, -\frac{18}{5})$ .  
 Równanie okręgu:  
 $(x-\frac{9}{5})^2 + (y+\frac{18}{5})^2 = 16$   
 c)  $K: (x-5)^2 + (y-4)^2 = 16$   
 $m: y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$ ,  
 zatem  $P(3, 1)$ ,  $S'(1, -2)$ .  
 Równanie okręgu:  
 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$

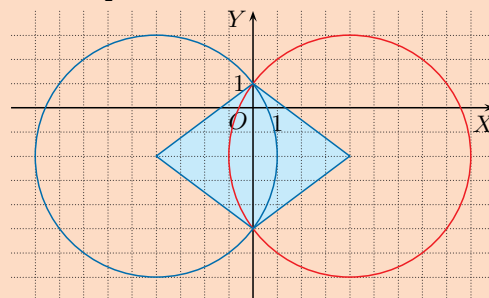
Wyznacz równanie okręgu symetrycznego do okręgu  $K$  względem prostej  $l$ .

- a)  $K: (x-5)^2 + (y-2)^2 = 2$ ,  $l: y = 2x - 3$   
 b)  $K: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 9 = 0$ ,  $l: x + 3y - 2 = 0$   
 c)  $K: x^2 + y^2 - 10x - 8y + 25 = 0$ ,  $l: 2x + 3y - 9 = 0$

5. a)  $P = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12$



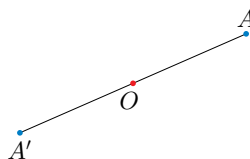
b)  $P = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$



## 2.12. Symetria środkowa

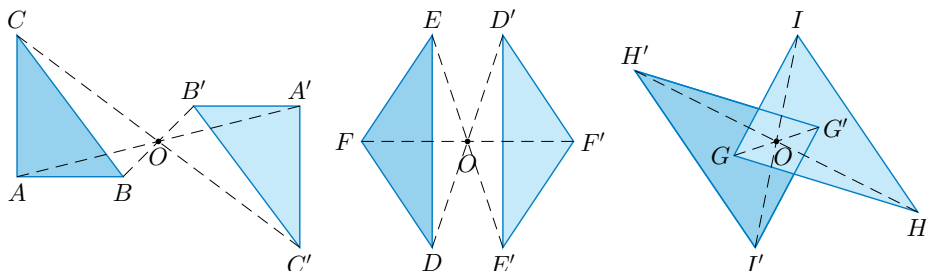
Punkt  $A'$  nazywamy **punktem symetrycznym** do punktu  $A$  **względem punktu  $O$**  ( $A \neq O$ ), jeżeli punkt  $O$  jest środkiem odcinka łączącego punkty  $A$  i  $A'$ .

Punktem symetrycznym do  $O$  jest on sam.



**Symetrią środkową** względem punktu  $O$  (lub symetrią względem punktu  $O$ ) nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje punkt do niego symetryczny względem punktu  $O$ . Punkt  $O$  nazywamy **środkiem symetrii**.

Na rysunkach poniżej przedstawiono trójkąty  $ABC$ ,  $DEF$  i  $GHI$  oraz ich obrazy w symetrii środkowej względem punktu  $O$ .



Symetria środkowa jest przekształceniem, które nie zmienia odległości między punktami. Zatem obrazem dowolnej figury w symetrii środkowej jest figura do niej przystająca.

### Ćwiczenie 1

Narysuj trójkąt równoboczny  $ABC$ , a następnie przekształć go symetrycznie względem:

- jednego z jego wierzchołków,
- środką jednego z jego boków,
- punktu przecięcia jego dwusiecznych,
- punktu leżącego na zewnątrz niego.

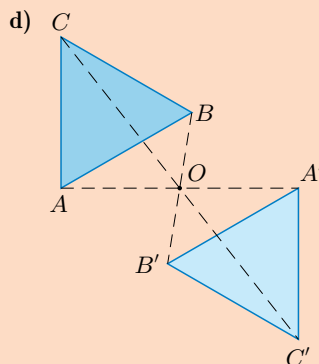
Figurę nazywamy **środkowosymetryczną**, jeśli istnieje taki punkt  $O$ , że figura ta jest swoim własnym obrazem w symetrii względem tego punktu. Punkt  $O$  nazywamy wówczas **środkiem symetrii** tej figury.

### Ćwiczenie 2

Która z wymienionych figur ma środek symetrii: trójkąt, równoległobok, prostą, kwadrat, odcinek, półprosta?

### Ćwiczenie 2

równoległobok (punkt przecięcia przekątnych),  
prosta (każdy punkt tej prostej),  
kwadrat (punkt przecięcia przekątnych),  
odcinek (środek tego odcinka)

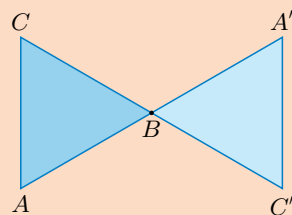


### Uczeń:

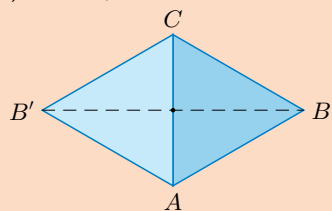
- wskazuje figury środkowosymetryczne,
- znajduje współrzędne punktu położonego symetrycznie do danego punktu względem początku układu współrzędnych,
- szkicuje obraz wielokąta w symetrii względem początku układu współrzędnych i podaje współrzędne jego wierzchołków,
- podaje równanie okręgu symetrycznego do danego okręgu względem początku układu współrzędnych,
- stosuje w zadaniach własności symetrii środkowej.

### Ćwiczenie 1

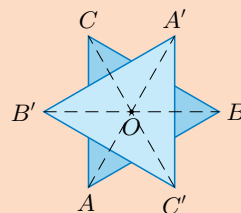
- a)  $B' = B$



- b)  $A' = C$ ,  $C' = A$



- c)



### Multiteka

- Symetria środkowa
- Symetria środkowa w układzie współrzędnych

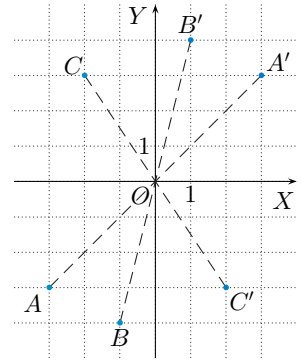
dla [nauczyciela.pl](http://nauczyciela.pl) | Kartkówka 2.12

**Generator**  
testów i sprawdzianów

## ■ Symetria względem początku układu współrzędnych

### Przykład 1

Punktami symetrycznymi do punktów  $A(-3, -3)$ ,  $B(-1, -4)$  i  $C(-2, 3)$  względem początku układu współrzędnych są odpowiednio punkty  $A'(3, 3)$ ,  $B'(1, 4)$  i  $C'(2, -3)$ .



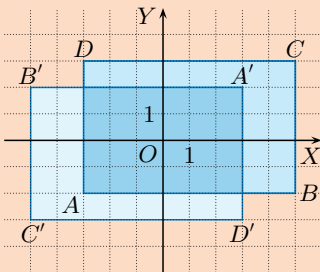
Punktem symetrycznym do punktu  $P(x, y)$  względem początku układu współrzędnych jest punkt  $P'(-x, -y)$ .

### Ćwiczenie 3

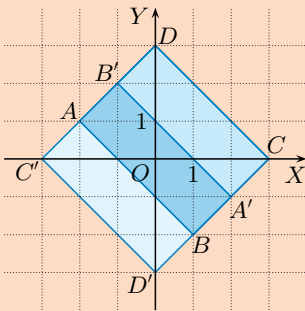
- a)  $A'(-3, 2)$ ,  $B'(2, 1)$ ,  $C'(1, -4)$   
 b)  $A'(-2, 2)$ ,  $B'(-1, -3)$ ,  $C'(3, -1)$

### Ćwiczenie 4

- a)  $P = 6 \cdot 4 = 24$



- b)  $P = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6$



### Ćwiczenie 3

Trójkąt  $A'B'C'$  jest symetryczny do trójkąta  $ABC$  względem początku układu współrzędnych. Podaj współrzędne wierzchołków trójkąta  $A'B'C'$ .

- a)  $A(3, -2)$ ,  $B(-2, -1)$ ,  $C(-1, 4)$       b)  $A(2, -2)$ ,  $B(1, 3)$ ,  $C(-3, 1)$

### Ćwiczenie 4

Prostokąty  $ABCD$  i  $A'B'C'D'$  są symetryczne względem początku układu współrzędnych. Oblicz pole części wspólnej tych prostokątów.

- a)  $A(-3, -2)$ ,  $B(5, -2)$ ,  $C(5, 3)$ ,  $D(-3, 3)$   
 b)  $A(-2, 1)$ ,  $B(1, -2)$ ,  $C(3, 0)$ ,  $D(0, 3)$

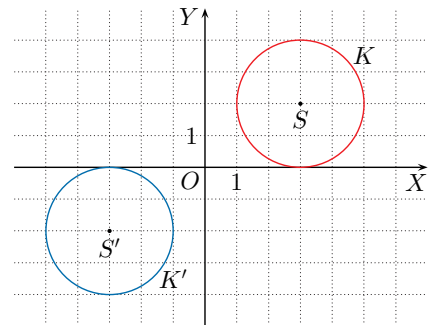
### Przykład 2

Wyznacz równanie okręgu  $K'$  symetrycznego względem początku układu współrzędnych do okręgu  $K: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$ . Narysuj te okręgi.

Środkiem okręgu  $K$  jest punkt  $S(3, 2)$ , a jego promień  $r = 2$ .

Zatem środkiem okręgu  $K'$  jest punkt symetryczny do  $S$  względem początku układu współrzędnych, czyli  $S'(-3, -2)$ , a jego promień  $r' = 2$ .

Oznacza to, że okrąg  $K'$  jest dany równaniem  $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$ .

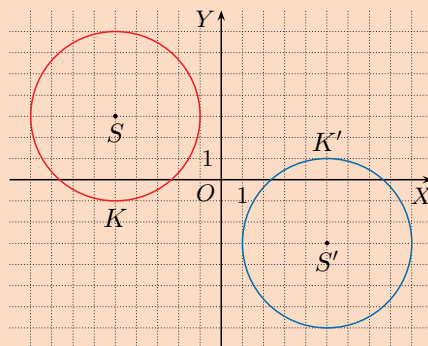


### Ćwiczenie 5

Wyznacz równanie okręgu  $K'$  symetrycznego względem początku układu współrzędnych do okręgu  $K: (x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$ . Narysuj te okręgi.

### Ćwiczenie 5

$$(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 16$$



### Ćwiczenie 6

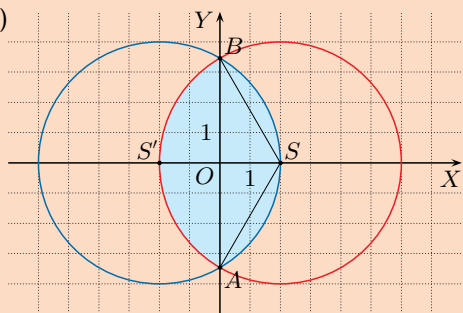
Wyznacz równanie okręgu  $K'$  symetrycznego względem początku układu współrzędnych do okręgu  $K$ . Narysuj te okręgi.

- a)  $K: x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$       c)  $K: x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$   
 b)  $K: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$       d)  $K: x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

### Zadania

- Punkt  $A'$  położony jest symetrycznie do punktu  $A$  względem początku układu współrzędnych. Oblicz długość odcinka  $AA'$ , jeśli wiadomo, że:  
 a)  $A(3, 4)$ ,      b)  $A(-1, 4)$ ,      c)  $A(-6, -8)$ ,      d)  $A(a, a)$ .
- Narysuj w układzie współrzędnych prostokąt  $ABCD$  i znajdź jego obraz w symetrii względem początku układu współrzędnych.  
 a)  $A(1, 1)$ ,  $B(4, 1)$ ,  $C(4, 3)$ ,  $D(1, 3)$   
 b)  $A(-3, -1)$ ,  $B(1, -1)$ ,  $C(1, 2)$ ,  $D(-3, 2)$
- Równoległobok  $A'B'C'D'$  jest obrazem równoległoboku  $ABCD$  (rysunek obok) w symetrii względem punktu  $O$ . Oblicz pole części wspólnej tych równoległoboków.
- Okrąg  $K'$  jest obrazem okręgu  $K$  w symetrii względem osi  $OX$ , a okrąg  $K''$  jest obrazem okręgu  $K'$  w symetrii względem osi  $OY$ . Uzasadnij, że okrąg  $K''$  jest obrazem okręgu  $K$  w symetrii względem początku układu współrzędnych.
- Wyznacz punkty wspólne okręgu  $K$  oraz jego obrazu w symetrii względem początku układu współrzędnych.  
 a)  $K: (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 10$       c)  $K: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$   
 b)  $K: (x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 34$       d)  $K: (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 26$
- Okrąg  $K'$  jest obrazem okręgu  $K$  w symetrii względem początku układu współrzędnych. Oblicz pole części wspólnej kół przez nie ograniczonych.  
 a)  $K: x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$       c)  $K: x^2 + y^2 - 6\sqrt{3}x - 9 = 0$   
 b)  $K: x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$       d)  $K: x^2 + y^2 - 6\sqrt{3}x - 6\sqrt{3}y - 18 = 0$
- Okrąg  $K: (x+2)^2 + (y-4)^2 = r^2$  i okrąg  $K'$  będący jego obrazem w symetrii względem początku układu współrzędnych są styczne zewnętrznie. Podaj równania wspólnych stycznych tych okręgów.

6. b)



$$A(0, -2\sqrt{3}), B(0, 2\sqrt{3})$$

$\angle OSA = 60^\circ$ , więc  $\angle ASB = 120^\circ$

$$P = 2 \cdot \left( \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2 \right) = 8 \left( \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} \right)$$

c)  $A(0, -3)$ ,  $B(0, 3)$ ,  
 $\triangle ABS$  jest równoboczny, więc  
 $\angle ASB = 60^\circ$ .

$$P = 6(2\pi - 3\sqrt{3})$$

d)  $A(3, -3)$ ,  $B(-3, 3)$ ,  
 $P = 12(2\pi - 3\sqrt{3})$

7. Środki okręgów:  $S(-2, 4)$ ,  
 $S'(2, -4)$

Punkt styczności:  $O(0, 0)$

$$\text{Promień: } r = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

$$\text{Prosta } SS': y = -2x$$

$$\text{Styczne do okręgów: } y = \frac{1}{2}x$$

$$y = -2x - 10, y = -2x + 10$$

### Ćwiczenie 6

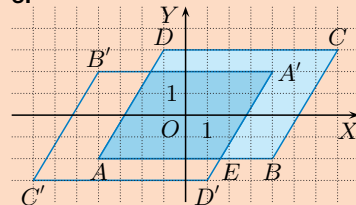
- a)  $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$   
 b)  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$   
 c)  $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$   
 d)  $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$

### Odpowiedzi do zadań

1. a) 10    b)  $2\sqrt{17}$

c) 20    d)  $2\sqrt{2}|a|$

3.



$$\text{Prosta } A'D': y = \frac{5}{3}x - \frac{14}{3}$$

$$\text{Prosta } AB: y = -2$$

Wyznaczamy pierwszą współrzędną punktu  $E$ :

$$\frac{5}{3}x - \frac{14}{3} = -2$$

czyli  $x = \frac{8}{5}$ .

$$\text{Zatem } |AE| = 4 + \frac{8}{5} = \frac{28}{5}.$$

Pole części wspólnej:

$$P = |AE| \cdot 4 = 22,4$$

4. Niech:

$$K: (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Wówczas:

$$K': (x - a)^2 + (y + b)^2 = r^2,$$

$$K'': (x + a)^2 + (y + b)^2 = r^2$$

Jednocześnie okrąg  $K_O$  symetryczny do okręgu  $K$  w symetrii względem początku układu współrzędnych ma promień  $r$  i środek  $S_O(-a, -b)$ ,

czyli  $K_O$  ma równanie:

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = r^2$$

Zatem  $K_O = K''$ .

5. a)  $(-1, -1)$ ,  $(1, 1)$

b)  $(-1, -4)$ ,  $(1, 4)$

c)  $(-1, 2)$ ,  $(1, -2)$

d)  $(-3, -2)$ ,  $(3, 2)$

6. a)  $P = 8(\pi - 2)$

## 2.13. Zagadnienia uzupełniające

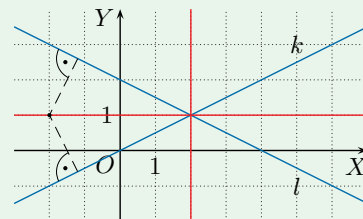
### ■ Zbiory punktów o danej własności

#### Przykład 1

Punkty równo odległe od dwóch przecinających się prostych leżą na dwusiecznych kątów utworzonych przez te proste.

Na rysunku obok przedstawiono proste:

$$k: y = \frac{1}{2}x \quad \text{ i } \quad l: y = -\frac{1}{2}x + 2$$



Proste  $k$  i  $l$  przecinają się w punkcie  $(2, 1)$ , zatem zbiór punktów równo odległych od tych prostych jest sumą dwóch prostych:  $x = 2$  oraz  $y = 1$ .

#### Odpowiedzi do zadań

1. a)  $x = -\frac{7}{4}, y = \frac{3}{2}$
- b)  $y = x + 2, y = -x + 4$
- c)  $y = -\sqrt{3}x, y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$
- d)  $y = -1$

1. Wyznacz zbiór punktów równo odległych od prostych  $k$  i  $l$ .

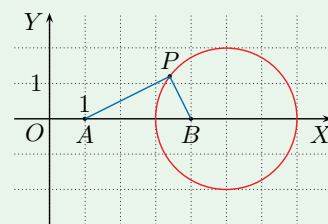
- a)  $k: y = 2x + 5, l: y = -2x - 2$       c)  $k: y = 0, l: y = \sqrt{3}x$
- b)  $k: y = 3, l: x = 1$       d)  $k: y = -3, l: y = 1$

#### Przykład 2

Wyznacz zbiór punktów, których odległość od punktu  $A(1, 0)$  jest dwa razy większa od odległości od punktu  $B(4, 0)$ .

Niech  $P(x, y)$  będzie punktem, takim że  $|PA| = 2|PB|$ . Wówczas:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} &= 2\sqrt{(x-4)^2 + y^2} \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 &= 4x^2 - 32x + 64 + 4y^2 \\ -3x^2 - 3y^2 + 30x - 63 &= 0 \quad / : (-3) \\ x^2 + y^2 - 10x + 21 &= 0 \\ (x^2 - 10x + 25) - 25 + y^2 + 21 &= 0 \\ (x-5)^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$



Zatem szukanym zbiorem punktów jest okrąg o środku  $(5, 0)$  i promieniu 2.

2. Wyznacz zbiór punktów, których odległość od punktu:

- a)  $A(0, 0)$  jest dwa razy większa od odległości od punktu  $B(6, 0)$ ,
- b)  $A(-2, 0)$  jest dwa razy większa od odległości od punktu  $B(4, 0)$ ,
- c)  $A(0, 1)$  jest trzy razy większa od odległości od punktu  $B(0, -3)$ .

2. a)  $P(x, y)$  i  $|PA| = 2|PB|$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= 2\sqrt{(x-6)^2 + y^2} \\ (x-8)^2 + y^2 &= 16 \end{aligned}$$

- b)  $P(x, y)$  i  $|PA| = 2|PB|$

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+2)^2 + y^2} &= 2\sqrt{(x-4)^2 + y^2} \\ (x-6)^2 + y^2 &= 16 \end{aligned}$$

- c)  $P(x, y)$  i  $|PA| = 3|PB|$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + (y-1)^2} &= 3\sqrt{x^2 + (y+3)^2} \\ x^2 + (y + \frac{7}{2})^2 &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

#### Multiteka

- Jednokładność
- Figury podobne
- Skala podobieństwa

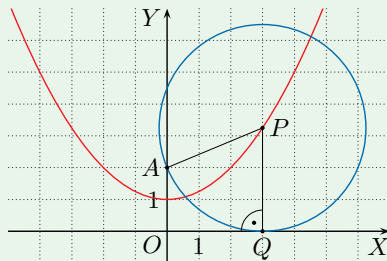
### Przykład 3

Wyznacz zbiór środków okręgów stycznych do osi  $OX$  i przechodzących przez punkt  $A(0, 2)$ .

Niech punkt  $P(x, y)$  będzie środkiem okręgu spełniającego warunki zadania, a  $Q(x, 0)$  – punktem styczności tego okręgu z osią  $OX$ .

Wówczas:

$$\begin{aligned} |PA| &= |PQ| \\ \sqrt{x^2 + (y-2)^2} &= y \quad y > 0 \\ x^2 + y^2 - 4y + 4 &= y^2 \\ 4y &= x^2 + 4 \\ y &= \frac{1}{4}x^2 + 1 \end{aligned}$$



Zatem szukanym zbiorem punktów jest parabola  $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ .

3. Wyznacz zbiór środków okręgów przechodzących przez punkt:  
a)  $A(0, 4)$  i stycznych do osi  $OX$ ,      b)  $A(6, 0)$  i stycznych do osi  $OY$ .

### Przykład 4

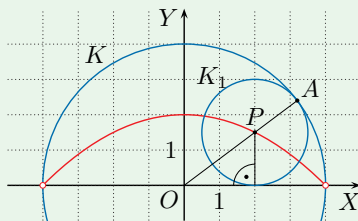
Wyznacz zbiór punktów o dodatniej rzędnej będących środkami okręgów stycznych wewnątrz do okręgu  $K: x^2 + y^2 = 16$  i stycznych do osi  $OX$ .

Niech punkt  $P(x, y)$  będzie środkiem okręgu  $K_1$  spełniającego warunki zadania. Promień tego okręgu jest równy  $y$  i spełnia warunek  $y \in (0; 2)$ . Niech  $A$  będzie punktem styczności okręgów  $K$  i  $K_1$ .

Wówczas  $|OP| = 4 - |PA| = 4 - y$  oraz  $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , zatem otrzymujemy równanie:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= 4 - y \quad 4 - y > 0 \\ x^2 + y^2 &= 16 - 8y + y^2 \\ 8y &= -x^2 + 16 \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy równanie paraboli  $y = -\frac{1}{8}x^2 + 2$ , zatem szukanym zbiorem punktów jest jej fragment dla  $x \in (-4; 4)$ .



4. Wyznacz zbiór punktów o dodatniej odciętej będących środkami okręgów stycznych wewnątrz do okręgu  $x^2 + y^2 = 4$  i stycznych do osi  $OY$ .

4. Niech  $P(x, y)$  będzie środkiem okręgu  $K_1$  spełniającego warunki zadania.

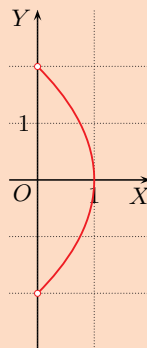
Promień tego okręgu jest równy  $x$  i spełnia warunek  $x \in (0; 1)$ .

Niech  $A$  będzie punktem styczności okręgów  $K$  i  $K_1$ .

Wówczas  $|OP| = 2 - |PA| = 2 - x$  oraz  $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 - x$$

$$x = -\frac{1}{4}y^2 + 1, \text{ gdzie } y \in (-2; 2)$$



3. Niech punkt  $P(x, y)$  będzie środkiem okręgu spełniającego warunki zadania.

a) Niech  $Q(x, 0)$  będzie punktem styczności tego okręgu z osią  $OX$ .

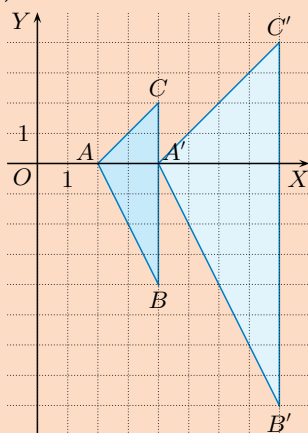
$$\begin{aligned} |PA| &= |PQ| \\ \sqrt{x^2 + (y-4)^2} &= y, \quad y > 0 \\ y &= \frac{1}{8}x^2 + 2 \end{aligned}$$

b) Niech  $Q(0, y)$  będzie punktem styczności tego okręgu z osią  $OY$ .

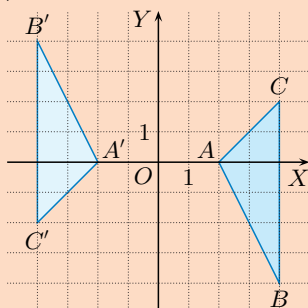
$$\begin{aligned} |PA| &= |PQ| \\ \sqrt{(x-6)^2 + y^2} &= x, \quad x > 0 \\ x &= \frac{1}{12}y^2 + 3 \end{aligned}$$

5. a)  $|A'B'| = \sqrt{5}$   
 b)  $|A'B'| = 2\sqrt{5}$   
 c)  $|A'B'| = \sqrt{5}$   
 d)  $|A'B'| = 6\sqrt{5}$

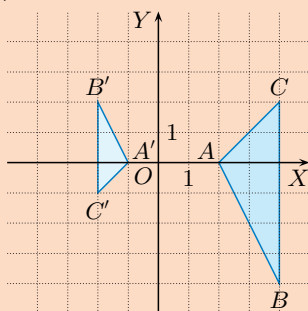
6. a)  $P = 24$



- b)  $P = 6$



- c)  $P = 1,5$

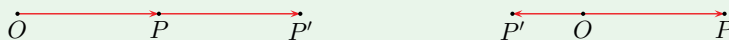


- d)  $P = 54$

## Jednokładność

**Jednokładnością** o środku  $O$  i skali  $k \neq 0$  nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi  $P$  płaszczyzny przyporządkowuje punkt  $P'$  taki, że:

$$\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$$



Punkt  $P'$  jest obrazem punktu  $P$

w jednokładności o środku  $O$  i skali 2.

Punkt  $P'$  jest obrazem punktu  $P$  w jed-

nokładności o środku  $O$  i skali  $-\frac{1}{2}$ .

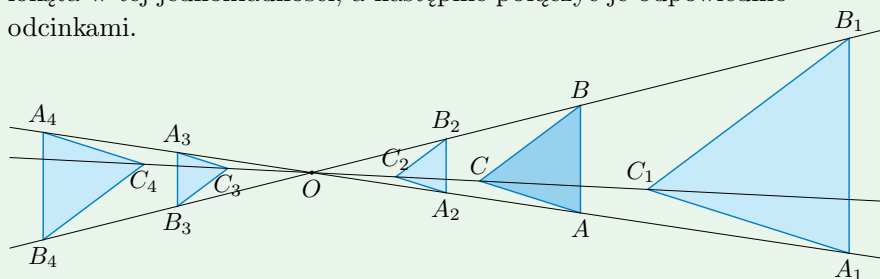
Obrazem odcinka  $AB$  w jednokładności o skali  $k$  jest odcinek  $A'B'$  równoległy do odcinka  $AB$  taki, że  $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$ .

5. Dany jest odcinek  $AB$ , gdzie  $A(4, -2)$ ,  $B(2, 2)$ . Narysuj obraz odcinka  $AB$  w jednokładności o środku  $O(0, 0)$  i skali  $k$ . Oblicz długość otrzymanego odcinka, jeśli:

- a)  $k = \frac{1}{2}$ ,      b)  $k = -1$ ,      c)  $k = -\frac{1}{2}$ ,      d)  $k = 3$ .

Figury  $F_1$  i  $F_2$  nazywamy **jednokładnymi**, jeżeli istnieje jednokładność przekształcająca figurę  $F_1$  na figurę  $F_2$ .

Aby narysować obraz dowolnego wielokąta w jednokładności o środku  $O$  i skali  $k$ , wystarczy znaleźć obrazy wszystkich wierzchołków danego wielokąta w tej jednokładności, a następnie połączyć je odpowiednio odcinkami.



Każdy z trójkątów:  $A_1B_1C_1$ ,  $A_2B_2C_2$ ,  $A_3B_3C_3$  i  $A_4B_4C_4$  jest obrazem trójkąta  $ABC$  w jednokładności o środku  $O$  i skali, odpowiednio,  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = \frac{1}{2}$ ,  $k_3 = -\frac{1}{2}$  i  $k_4 = -1$ .

6. Dane są punkty  $A(2, 0)$ ,  $B(4, -4)$  i  $C(4, 2)$ . Narysuj trójkąt  $A'B'C'$  będący obrazem trójkąta  $ABC$  w jednokładności o środku  $O(0, 0)$  i skali  $k$ . Oblicz pole trójkąta  $A'B'C'$ .

- a)  $k = 2$       b)  $k = -1$       c)  $k = -\frac{1}{2}$       d)  $k = 3$

Jeśli skala jednokładności dwóch figur jest równa  $k$ , to skala ich podobieństwa jest równa  $|k|$ .

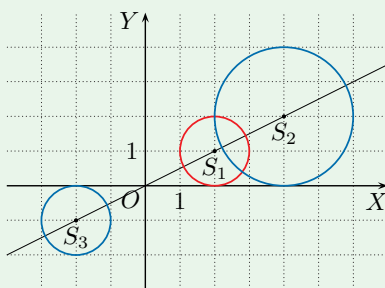
Obrazem okręgu o środku w punkcie  $S_1$  i promieniu  $r_1$  w jednokładności o środku w punkcie  $O$  i skali  $k$  jest okrąg o środku w punkcie  $S_2$  takim, że  $\overrightarrow{OS_2} = k \cdot \overrightarrow{OS_1}$ , i promieniu  $r_2$  takim, że  $r_2 = |k| \cdot r_1$ .

Na rysunku przedstawiono okrąg  $K_1$  o środku  $S_1(2, 1)$  i promieniu  $r_1 = 1$ .

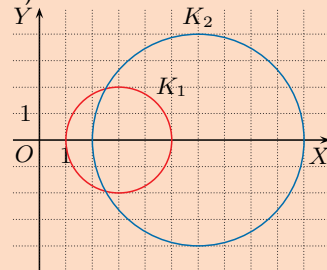
■ Obrazem okręgu  $K_1$  w jednokładności o środku  $O$  i skali  $k = 2$  jest okrąg  $K_2$  o środku  $S_2(4, 2)$  i promieniu  $r_2 = 2$ .

■ Obrazem okręgu  $K_1$  w jednokładności o środku  $O$  i skali  $k = -1$  jest okrąg  $K_3$  o środku  $S_3(-2, -1)$  i promieniu  $r_3 = 1$ .

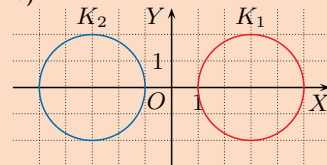
Zauważmy, że jednokładność o skali  $k = -1$  jest symetrią środkową.



7. a)



b)



7. Narysuj okrąg  $K_2$  będący obrazem okręgu  $K_1: (x-3)^2 + y^2 = 4$  w jednokładności o środku  $O(0, 0)$  i skali:

a)  $k = 2$ ,                      b)  $k = -1$ ,                      c)  $k = -2$ .

8. Dany jest okrąg  $K_1$  o równaniu  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ . Okrąg  $K_2$  jest obrazem okręgu  $K_1$  w jednokładności o środku w punkcie  $P$  i skali  $k$ . Podaj równanie okręgu  $K_2$ .

a)  $P(0, 0)$ ,  $k = 2$                       b)  $P(4, 2)$ ,  $k = 3$                       c)  $P(2, -4)$ ,  $k = -\frac{1}{2}$

9. Okrąg  $K_2$  o równaniu  $x^2 - 4x + y^2 - 4y = 0$  jest obrazem w pewnej jednokładności okręgu  $K_1$  o równaniu  $x^2 + 2x + y^2 + 2y = 0$ . Wyznacz środek tej jednokładności oraz podaj jej skalę. Rozpatrz dwa przypadki.

10. Okrąg  $K_2$  o równaniu  $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$  jest obrazem okręgu  $K_1$  o promieniu 1 w jednokładności o środku w punkcie  $P(3, -1)$ . Wyznacz równanie okręgu  $K_1$ . Rozpatrz dwa przypadki.

\*11. Okrąg  $K_1$  o środku w punkcie  $(4, -2)$  jest styczny do osi  $OX$ . Okrąg ten przekształcono przez jednokładność o skali  $k = -\frac{3}{2}$  i środku w punkcie  $P$  należącym do prostej  $x + 2y = 0$ . W ten sposób otrzymano okrąg  $K_2$ . Podaj równanie okręgu  $K_2$ , jeśli jest on styczny do osi: a)  $OX$ , b)  $OY$ .

8. a)  $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 16$

b)  $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 36$

c)  $(x-2)^2 + (y+\frac{13}{2})^2 = 1$

9.  $K_2: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$ ,  
czyli  $S_2(2, 2)$  i  $r_2 = 2\sqrt{2}$   
 $K_1: (x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$ ,  
czyli  $S_1(-1, -1)$  i  $r_1 = \sqrt{2}$   
Zatem  $k = -2$  lub  $k = 2$ .

Niech  $O(x, y)$  będzie  
środkiem jednokładności.

Dla  $k = -2$ :

$$\overrightarrow{OS_2} = -2\overrightarrow{OS_1}$$

$$\begin{aligned} [2-x, 2-y] &= \\ &= -2[-1-x, -1-y], \\ \text{czyli } O(0, 0). \end{aligned}$$

Dla  $k = 2$ :

$$\overrightarrow{OS_2} = 2\overrightarrow{OS_1}$$

$$\begin{aligned} [2-x, 2-y] &= \\ &= 2[-1-x, -1-y], \\ \text{czyli } O(-4, -4). \end{aligned}$$

10.  $(x-3)^2 + y^2 = 1$  lub  $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 1$

11. Środek jednokładności należy do prostej  $x + 2y = 0$ , czyli  $P(x_p, -\frac{1}{2}x_p)$ .

Okrąg  $K_1$  jest styczny do osi  $OX$ , zatem  $r_1 = 2$ .

Skala jednokładności  $k = -\frac{3}{2}$ , stąd  $r_2 = 3$  oraz  $\overrightarrow{PS_2} = -\frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{PS_1}$ .

a) Okrąg  $K_2$  jest styczny do osi  $OX$ , czyli  $S_2(x_2, 3)$ .

$$[x_2 - x_p, 3 + \frac{1}{2}x_p] = -\frac{3}{2} [4 - x_p, -2 + \frac{1}{2}x_p], \text{ czyli } P(0, 0) \text{ i } S_2(-6, 3)$$

Zatem  $K_2: (x+6)^2 + (y-3)^2 = 9$ .

b)  $K_2$  jest styczny do osi  $OY$ , czyli  $S_2(-3, y_2)$ .

$$[-3 - x_p, y_2 + \frac{1}{2}x_p] = -\frac{3}{2} [4 - x_p, -2 + \frac{1}{2}x_p], \text{ czyli } P(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}) \text{ i } S_2(-3, \frac{3}{2})$$

Zatem  $K_2: (x+3)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = 9$ .

## Odpowiedzi do zadań

- $|AB| = 5$ ,  $|BC| = 10$ ,  $|AC| = 15$ ; współliniowe
  - $|AB| = 8\sqrt{5}$ ,  $|BC| = 4\sqrt{5}$ ,  $|AC| = 4\sqrt{5}$ ; współliniowe
  - $|AB| = 10$ ,  $|BC| = 10$ ,  $|AC| = 14\sqrt{2}$ ; niewspółliniowe
  - $|AB| = 6\sqrt{2}$ ,  $|BC| = 3\sqrt{2}$ ,  $|AC| = 9\sqrt{2}$ ; współliniowe
- równoramienny i prostokątny
  - prostokątny
- a) Obliczamy długości boków trójkąta:

$$|AB| = |BC| = 2\sqrt{10}$$

$$|AC| = 4\sqrt{5}$$

Dwa boki mają tę samą długość, czyli trójkąt jest równoramienny. Zauważmy, że:

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$

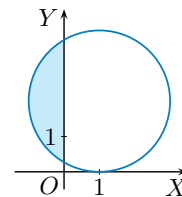
zatem na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa trójkąt jest prostokątny. Środek okręgu opisanego to środek przeciwprostokątnej, czyli punkt  $(4, 4)$ .

- $(-4, 4)$
- $|AD| = 5$ ,  $|AE| = \sqrt{5}$
- $\left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}, -3 - \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$ ,  
 $\left(1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}, -3 + \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$
  - $y = \frac{1}{2}x - 2$ ,  $y = -\frac{9}{2}x + 8$
- $(x+4)^2 + y^2 = 25$ ,  
 $(1, 0)$ ,  $(-9, 0)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(0, -3)$
  - $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$ ,  
 $(-2, 0)$ ,  $(6, 0)$ ,  $(0, 3 - \sqrt{21})$ ,  
 $(0, 3 + \sqrt{21})$
  - $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$ ,  
 $(-2\sqrt{3} - 1, 0)$ ,  $(2\sqrt{3} - 1, 0)$ ,  
 $(0, 2 - \sqrt{15})$ ,  $(0, 2 + \sqrt{15})$
  - $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 1$ ,  
 brak punktów wspólnych z osiami układu współrzędnych
- $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$
  - $(0, 2 - \sqrt{3})$ ,  $(0, 2 + \sqrt{3})$
  - $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$

# Zestawy powtórzeniowe

## Zestaw I

- Oblicz długości odcinków  $AB$ ,  $BC$  i  $AC$ . Czy punkty  $A$ ,  $B$  i  $C$  są współliniowe?
  - $A(-4, 5)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $C(8, -4)$
  - $A(-4, -12)$ ,  $B(2, -4)$ ,  $C(10, 2)$
  - $A(13, 5)$ ,  $B(-3, -3)$ ,  $C(5, 1)$
  - $A(-2\sqrt{2}, 8)$ ,  $B(0, 0)$ ,  $C(\sqrt{2}, -4)$
- Sprawdź, czy trójkąt  $ABC$  jest równoramienny lub prostokątny.
  - $A(-3, 1)$ ,  $B(3, -3)$ ,  $C(1, 7)$
  - $A(-3, 4)$ ,  $B(10, -2)$ ,  $C(5, 8)$
- Wykaż, że trójkąt  $ABC$  jest prostokątny oraz równoramienny. Wyznacz współrzędne środka okręgu opisanego na tym trójkącie.
  - $A(0, 6)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $C(8, 2)$
  - $A(-7, -2)$ ,  $B(2, 1)$ ,  $C(-1, 10)$
- Kwadrat, którego jeden z wierzchołków ma współrzędne  $(1, -4)$ , ma obwód równy  $8\sqrt{5}$ . Punkt przecięcia przekątnych tego kwadratu należy do prostej  $y = x - 1$ , a współrzędne tego punktu są liczbami ujemnymi. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków kwadratu.
- W trójkącie o wierzchołkach  $A(2, -1)$ ,  $B(1, 2)$  i  $C(-3, 4)$  poprowadzono środkową  $AD$  i wysokość  $AE$ . Oblicz ich długości.
- Na prostej przechodzącej przez punkty  $A(1, -3)$  i  $B(6, 7)$  wyznacz punkty, których odległość od punktu  $A$  jest równa 2.
  - Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt  $A(2, -1)$ , równo oddalonej od punktów  $B(2, 4)$  i  $C(0, 3)$ .
- Podaj równanie okręgu o środku  $S$  i promieniu  $r$ . Narysuj ten okrąg. Wyznacz jego punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych.
  - $S(-4, 0)$ ,  $r = 5$
  - $S(-1, 2)$ ,  $r = 4$
  - $S(2, 3)$ ,  $r = 5$
  - $S(-3, -4)$ ,  $r = 1$
- Do okręgu o środku  $(1, 2)$  należy punkt  $(3, 2)$ .
  - Wyznacz równanie tego okręgu.
  - Wyznacz współrzędne punktów, w których okrąg ten przecina oś  $OY$ .
  - Oblicz pole zacieniowanego obszaru (rysunek obok).



- Długość boku kwadratu:  $a = 2\sqrt{5}$ , długość przekątnej:  $a\sqrt{2} = 2\sqrt{10}$   
 Punkt przecięcia przekątnych:  $P(x_p, x_p - 1)$ ,  $|AP| = \sqrt{10}$ , gdzie  $A(1, -4)$   

$$\sqrt{(x_p - 1)^2 + (x_p + 3)^2} = \sqrt{10}$$

$$x_p = -2 \text{ lub } x_p = 0$$
 Zatem  $P(-2, -3)$ . Ponadto  $\frac{1+x_p}{2} = -2$  i  $\frac{-4+y_p}{2} = -3$ , czyli  $C(-5, -2)$ .  
 Prosta  $BD$  jest prostopadła do prostej  $AC$  i przechodzi przez punkt  $P$ .  
 $a_{AC} = \frac{-2+4}{-5-1} = -\frac{1}{3}$ , czyli  $a_{BD} = 3$   
 Prosta  $BD$ :  $y = 3x + 3$ . Wierzchołki  $B$  i  $D$  są punktami przecięcia prostej  $BD$  i okręgu o środku w  $P$  i promieniu długości  $r = \sqrt{10}$ :  

$$\begin{cases} y = 3x + 3 \\ (x+2)^2 + (y+3)^2 = 10 \end{cases}$$
 Zatem:  $B(-1, 0)$ ,  $C(-3, -6)$ .



9. Okrąg o środku w punkcie  $K_1$  jest styczny do prostej  $l$ , a okrąg o środku w punkcie  $K_2$  jest styczny do prostej  $k$ . Oblicz promienie tych okręgów oraz odległość między ich środkami. Określ wzajemne położenie tych okręgów.
- a)  $K_1(-1, 4)$ ,  $l: x = 1$ ,  $K_2(1, 4)$ ,  $k: x = 3$   
 b)  $K_1(-3, -3)$ ,  $l: y = -2$ ,  $K_2(-3, -4)$ ,  $k: y = -6$
10. Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie nie opisuje okręgu?  
 a)  $x^2 + y^2 - 4x + 2y = m^2 - 9$       b)  $x^2 + y^2 - 2mx + 4y = m^2 + m - 7$
11. Dla jakich wartości parametru  $m$  okręgi  $K_1$  i  $K_2$  są styczne zewnętrznie?  
 a)  $K_1: x^2 + y^2 + 2x + 2y = m^2 - 2$ ,  $K_2: x^2 + y^2 - 4x - 6y = 4m^2 - 13$   
 b)  $K_1: x^2 + y^2 + 6x - 4y = m^2 - 13$ ,  $K_2: x^2 + y^2 - 2x - 4y = m^2 + 2m - 4$
12. Dla jakich wartości parametru  $m$  okręgi  $K_1$  i  $K_2$  mają tylko jeden punkt wspólny?  
 a)  $K_1: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ ,  $K_2: x^2 + y^2 + 6x - 2y + 10 - m = 0$   
 b)  $K_1: x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ ,  $K_2: x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 - \frac{m}{4} = 0$

## ■ Zestaw II

1. Wyznacz współrzędne punktu przecięcia symetralnych trójkąta  $ABC$ . Podaj równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.  
 a)  $A(0, 0)$ ,  $B(4, -4)$ ,  $C(4, 8)$       b)  $A(-2, -2)$ ,  $B(6, -2)$ ,  $C(2, 6)$
2. Punkt  $P$  leży na prostej  $l$ , a jego odległość od prostej  $y = -x + 2$  jest równa  $4\sqrt{2}$ . Wyznacz współrzędne punktu  $P$ .  
 a)  $l: y = x + 2$       b)  $l: y = \frac{5}{3}x - 6$
3. Jeden z boków kwadratu opisanego na okręgu o środku w punkcie  $P$  jest zawarty w prostej  $k$ . Wyznacz równania prostych zawierających pozostałe boki tego kwadratu.  
 a)  $P(-2, 1)$ ,  $k: y = 3x - 3$       b)  $P(3, 1)$ ,  $k: y = -\frac{3}{4}x + 10$
4. Oblicz odległość między prostą  $l_1: y = -x + b_1$  a prostą  $l_2: y = -x + b_2$ , jeśli wiadomo, że pierwsza z nich jest odległa od punktu  $(0, 0)$  o 2, a druga – o 6 oraz  $b_1, b_2 > 0$ . Wyznacz równania tych prostych.
5. Dla jakich wartości parametru  $m$  trójkąt  $ABC$  ma pole równe 24?  
 a)  $A(-1, 1)$ ,  $B(3, -3)$ ,  $C(m, m)$       b)  $A(-4, -6)$ ,  $B(8, 6)$ ,  $C(m, 6 - m)$

5. a) Bok trójkąta:  $|AB| = 4\sqrt{2}$

Wyznaczamy pole:  $P = \frac{1}{2}|AB|h = 24$  i otrzymujemy  $h = 6\sqrt{2}$ .

Jednocześnie  $h$  jest odległością punktu  $C$  od prostej  $AB: x + y = 0$ , zatem:

$$d_C = \frac{|m+m|}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

$$|2m| = 12$$

$$m = -6 \text{ lub } m = 6$$

- b)  $m = 2$  lub  $m = 6$

9. a)  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 2$ ,  $|K_1K_2| = 2$ , przecinają się  
 b)  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 2$ ,  $|K_1K_2| = 1$ , styczne wewnętrznie
10. a)  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = m^2 - 4$   
 $m^2 - 4 \leq 0$  dla  $m \in \langle -2; 2 \rangle$   
 b)  $(x-m)^2 + (y+2)^2 = 2m^2 + m - 3$   
 $2m^2 + m - 3 \leq 0$  dla  $m \in \langle -\frac{3}{2}; 1 \rangle$
11. a)  $K_1: (x+1)^2 + (y+1)^2 = m^2$ , czyli  $S_1(-1, -1)$  i  $r_1 = |m|$   
 $K_2: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4m^2$ , czyli  $S_2(2, 3)$  i  $r_2 = 2|m|$   
 $|S_1S_2| = 5 = 3|m|$   
 Zatem  $m = -\frac{5}{3}$  lub  $m = \frac{5}{3}$ .  
 b)  $K_1: (x+3)^2 + (y-2)^2 = m^2$ , czyli  $S_1(-3, 2)$  i  $r_1 = |m|$   
 $K_2: (x-1)^2 + (y-2)^2 = (m+1)^2$ , czyli  $S_2(1, 2)$  i  $r_2 = |m+1|$   
 $|S_1S_2| = 4 = |m| + |m+1|$   
 Zatem  $m = -\frac{5}{2}$  lub  $m = \frac{3}{2}$ .
12. a)  $m = 9$ ,  $m = 49$   
 b)  $m = 64$ ,  $m = 144$

## Zestaw II

1. a)  $(6, 2)$ ,  $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 40$   
 b)  $(2, 1)$ ,  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$
2. a)  $P(4, 6)$  lub  $P(-4, -2)$   
 b)  $P(0, -6)$  lub  $P(6, 4)$
3. a)  $y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$ ,  $y = -\frac{1}{3}x - 3$ ,  $y = 3x + 17$   
 b)  $y = -\frac{3}{4}x - 3\frac{1}{2}$ ,  $y = \frac{4}{3}x + 6$ ,  $y = \frac{4}{3}x - 12$
4.  $d = 4$ ,  $l_1: y = -x + 2\sqrt{2}$ ,  $l_2: y = -x + 6\sqrt{2}$

6. a) Niech  $S(x, -x)$  będzie środkiem okręgu. Odległości  $S$  od prostych są równe, zatem:

$$\frac{|2x+2|}{\sqrt{2}} = \frac{|2x+6|}{\sqrt{2}}$$

$$x = -2, \text{ czyli } S(-2, 2)$$

$$\text{Promień okręgu: } r = \sqrt{2}$$

$$\text{Równanie okręgu:}$$

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 2$$

$$\text{b) } (x-2)^2 + (y+2)^2 = 20$$

7. a)  $(2, -5), (8, 1), (-4, 7)$   
lub  $(2, -5), (8, 1), (6, -3)$

$$\text{b) } (-6, 1), \left(\frac{36}{5}, -\frac{7}{5}\right), (6, 7)$$

$$\text{lub } (-6, 1), (0, -5), (6, 7)$$

8.  $A(3, -1), B(2, 0), C(-2, -4),$   
 $(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{5}{2})^2 = \frac{17}{2}$

9. Punkty wspólne okręgów:

$$A(-2, -2), B(-1, -1)$$

$$\text{Prosta } AB: x + y = 0$$

$$\text{Odległość punktu } P \text{ od}$$

$$\text{prostej } AB: \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

10.  $O_1: (x+6)^2 + y^2 = 4$ , czyli  
 $S_1(-6, 0), r_1 = 2$   
 $O_2: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ ,  
czyli  $S_2(2, 2), r_2 = 2$   
 $r_1 = r_2$

Zatem okrąg  $O_1$  jest obrazem  $O_2$  w symetrii środkowej względem punktu  $S$ , który jest środkiem symetrii odcinka  $S_1S_2$ , czyli  $S(-2, 1)$ .

11. a)  $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 16$   
b)  $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$   
c)  $(x-5)^2 + (y+6)^2 = 16$   
d)  $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 16$

12. a)  $y = -\frac{1}{3}x + 5, y = -\frac{1}{3}x - \frac{25}{3}$   
b) Styczne do okręgu przechodzą przez punkt  $A$ , czyli są postaci  $ax - y - 3a - 4 = 0$ . Styczne są oddalone od środka  $S(3, 1)$  o  $\sqrt{5}$ , czyli:

$$\frac{|3a-1-3a-4|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{5}$$

$$a = -2 \text{ lub } a = 2$$

$$\text{Równania stycznych:}$$

$$y = -2x + 2 \text{ lub } y = 2x - 10$$

$$\text{Punkty styczności: } P(1, 0)$$

$$\text{i } Q(5, 0)$$

$$\text{Zatem } |PQ| = 4.$$

13.  $m = 4$

6. Oblicz promień okręgu stycznego jednocześnie do prostych  $k$  i  $l$ . Wyznacz równanie tego okręgu, jeśli jego środek leży na prostej  $y = -x$ .

$$\text{a) } k: y = x + 2, l: y = x + 6$$

$$\text{b) } k: y = \frac{1}{2}x + 2, l: y = \frac{1}{2}x - 8$$

7. Trójkąt równoramienny jest wpisany w okrąg  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 50$ . Oblicz współrzędne wierzchołków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że:

$$\text{a) jego podstawa jest zawarta w prostej } y = x - 7,$$

$$\text{b) jedno z jego ramion jest zawarte w prostej } y = \frac{1}{2}x + 4.$$

8. Bok  $AB$  trójkąta  $ABC$  zawiera się w prostej  $x + y - 2 = 0$ , a bok  $AC$  - w prostej  $3x - 5y - 14 = 0$ . Punkt  $S(0, -2)$  jest środkiem boku  $BC$ . Oblicz współrzędne wierzchołków tego trójkąta oraz wyznacz równanie okręgu opisanego na nim.

9. Oblicz odległość punktu  $P(0, -3)$  od prostej, do której należą punkty wspólne okręgów  $x^2 + 4x + y^2 + 2y + 4 = 0$  oraz  $x^2 + 2x + y^2 + 4y + 4 = 0$ .

10. Uzasadnij, że w pewnej symetrii środkowej okrąg  $x^2 + y^2 + 12x + 32 = 0$  jest obrazem okręgu  $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ . Wyznacz środek tej symetrii.

11. Wyznacz równanie okręgu symetrycznego do okręgu  $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$  względem:

$$\text{a) osi } OX, \quad \text{b) osi } OY, \quad \text{c) prostej } y = x - 3, \quad \text{d) prostej } y = -2x + 6.$$

12. a) Wyznacz równania stycznych do okręgu  $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 35 = 0$ , prostopadłych do prostej  $3x - y = 0$ .

$$\text{b) Przez punkt } A(3, -4) \text{ poprowadzono styczne do okręgu o środku } S(3, 1) \text{ i promieniu } \sqrt{5}. \text{ Oblicz długość odcinka łączącego punkty styczności.}$$

13. Dla jakiej wartości parametru  $m$  równanie  $x^2 + y^2 - 2mx + 3m = 0$  opisuje okrąg styczny do prostej  $x = 2$ ?

14. Oblicz pole części wspólnej trójkąta  $ABC$  i jego obrazu w przesunięciu o wektor  $\vec{v} = [-4, 1]$ .

$$\text{a) } A(-4, 0), B(4, 0), C(0, 4)$$

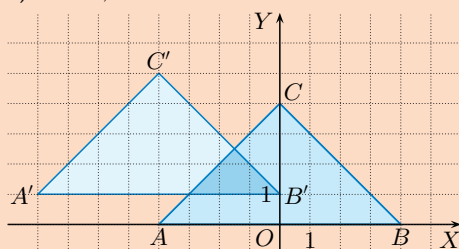
$$\text{b) } A(-3, 0), B(3, 0), C(0, 3\sqrt{3})$$

15. Punkty  $P$  i  $Q$  są środkami boków odpowiednio  $AB$  i  $AC$  trójkąta  $ABC$ . Wyznacz równanie prostej zawierającej bok  $AC$ , jeśli:

$$\text{a) } A(-4, 1), P(-1, -\frac{1}{2}), \vec{CB} = [1, -8],$$

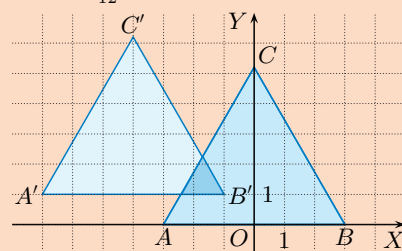
$$\text{b) } P(1, 3), \vec{AP} = [4, 2], \vec{PQ} = [-3, 1].$$

14. a)  $P = 2,25$



15. a)  $\vec{AP} = [3, -\frac{3}{2}]$ , czyli  $B(2, -2)$   
 $\vec{BC} = [-1, 8]$ , czyli  $C(1, 6)$   
Prosta  $AC$ :  $y = x + 5$

$$\text{b) } P = \frac{13}{12}\sqrt{3} - 1$$



- b)  $\vec{PA} = [-4, -2]$ , czyli  $A(-3, 1)$   
 $Q(-2, 4)$   
Prosta  $AC$  pokrywa się z prostą  
 $AQ$ :  $y = 3x + 10$ .

**Przykład**

Dla jakich wartości parametru  $m$  okrąg  $(x-2)^2 + (y-m)^2 = 5$  jest styczny do prostej  $y = 2x - 1$ ?

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

**I sposób**

Okrąg jest styczny do prostej, gdy układ równań:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ (x-2)^2 + (y-m)^2 = 5 \end{cases}$$

ma jedno rozwiązanie.

Przekształcamy drugie równanie i otrzymujemy:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2my + m^2 - 1 = 0$$

Podstawiamy  $y = 2x - 1$ :

$$x^2 + (2x-1)^2 - 4x - 2m(2x-1) + m^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + 4x^2 - 4x + 1 - 4x - 4mx + 2m + m^2 - 1 = 0$$

$$5x^2 - 4(m+2)x + m(m+2) = 0$$

$$\Delta = 16(m+2)^2 - 20m(m+2) = -4m^2 + 24m + 64 = -4(m+2)(m-8)$$

Układ równań ma jedno rozwiązanie, gdy  $\Delta = 0$ , czyli dla  $m \in \{-2, 8\}$ .

**II sposób**

Okrąg jest styczny do prostej, gdy odległość jego środka od tej prostej jest równa promieniowi okręgu.

Środkiem okręgu jest punkt  $S(2, m)$ , a jego promień  $r = \sqrt{5}$ .

Równanie prostej zapisujemy w postaci ogólnej:

$$2x - y - 1 = 0$$

Odległość punktu  $S$  od prostej  $2x - y - 1 = 0$ :

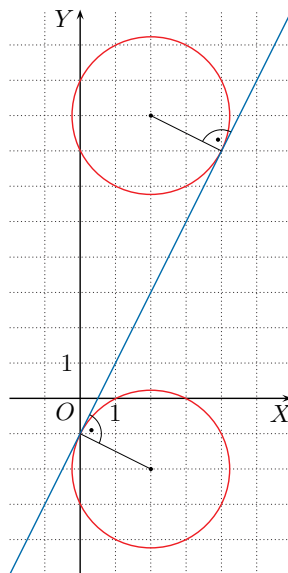
$$\frac{|2 \cdot 2 - 1 \cdot m - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|3 - m|}{\sqrt{5}}$$

Rozwiązujemy równanie:  $\frac{|3-m|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

$$|3 - m| = 5$$

$$3 - m = 5 \quad \text{lub} \quad 3 - m = -5$$

$$m = -2 \quad \text{lub} \quad m = 8$$



**Odpowiedź:** Dany okrąg jest styczny do prostej  $y = 2x - 1$  dla  $m \in \{-2, 8\}$ .



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszytce. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Obwód równoległoboku:

$$Ob = 2(|AB| + |BC|) = 2(4 + 4\sqrt{2}) = 8 + 8\sqrt{2}$$

Zauważmy, że  $8\sqrt{2} = \sqrt{128}$  oraz  $11^2 < 128 < 12^2$ , czyli  $11 < 8\sqrt{2} < 12$ .

Zatem  $8 + 8\sqrt{2} \in (19; 20)$ .

2. A.  $|S_1S_2| = 3\sqrt{2}$

B.  $|S_1S_2| = \sqrt{2}$

C.  $|S_1S_2| = 5 = 3 + 2$

D.  $|S_1S_2| = \sqrt{5}$

3. Niech  $d$  – odległość punktu  $S$  od prostej  $AB$ ,  $r = \sqrt{10}$ .

Okrąg ma 2 punkty wspólne z prostą, gdy  $d < r$ .

A.  $d = \sqrt{\frac{196}{17}} > \sqrt{10}$

B.  $d = \sqrt{\frac{441}{65}} < \sqrt{10}$

C.  $d = \sqrt{10} = r$

D.  $d = \sqrt{10} = r$

6. Równanie okręgu:

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$$

zatem środkiem okręgu jest punkt  $(-3, 1)$ .

Środek okręgu będącego obrazem w przesunięciu o wektor  $[5, -4]$  ma współrzędne:

$$(-3+5, 1-4) = (2, -3)$$

Zatem równanie obrazu:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$$

czyli:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$$

1. Punkty  $A(-3, 2)$ ,  $B(1, 2)$ ,  $C(5, 6)$  i  $D(1, 6)$  są wierzchołkami równoległoboku  $ABCD$ . Jego obwód jest liczbą należącą do przedziału:

A.  $(13; 16)$ ,

C.  $(19; 22)$ ,

B.  $(16; 19)$ ,

D.  $(22; 25)$ .

2. Dany jest okrąg o środku w punkcie  $S_1$  i promieniu 3 oraz okrąg o środku w punkcie  $S_2$  i promieniu 2. Okręgi te mają jeden punkt wspólny, jeśli:

A.  $S_1(1, 2)$ ,  $S_2(4, 5)$ ,

C.  $S_1(-6, 2)$ ,  $S_2(-2, -1)$ ,

B.  $S_1(2, 1)$ ,  $S_2(3, 2)$ ,

D.  $S_1(-4, -3)$ ,  $S_2(-2, -2)$ .

3. Okrąg o środku w punkcie  $S(-1, 2)$  i promieniu  $\sqrt{10}$  ma dwa punkty wspólne z prostą  $AB$ , gdy:

A.  $A(-3, -2)$ ,  $B(1, -1)$ ,

C.  $A(0, 5)$ ,  $B(3, 4)$ ,

B.  $A(-2, -5)$ ,  $B(2, 2)$ ,

D.  $A(2, 1)$ ,  $B(4, 7)$ .

4. Punkty  $A(-3, 7)$ ,  $B(17, -3)$  i  $C(13, 5)$  są wierzchołkami równoległoboku  $ABCD$ . Wierzchołek  $D$  ma współrzędne:

A.  $(-7, 15)$ ,

C.  $(-4, 8)$ ,

B.  $(-4, 10)$ ,

D.  $(-20, 10)$ .

5. Punkty  $A(-4, -4)$ ,  $B(6, -4)$  i  $C(14, 2)$  są wierzchołkami rombu  $ABCD$ . Okrąg wpisany w ten romb dany jest równaniem:

A.  $x^2 - 8x + y^2 + 2y + 1 = 0$ ,

C.  $x^2 + y^2 - 10x + 2y - 10 = 0$ ,

B.  $x^2 - 8x + y^2 + 2y + 8 = 0$ ,

D.  $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0$ .

6. Obrazem okręgu  $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$  w przesunięciu o wektor  $\vec{v} = [5, -4]$  jest okrąg:

A.  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 4 = 0$ ,

C.  $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 9 = 0$ ,

B.  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$ ,

D.  $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 4 = 0$ .

7. Żaba, wykonując skok, przesuwa się o wektor  $\vec{u} = [3, 1]$  lub  $\vec{v} = [-1, 2]$ . Na początku znajdowała się w punkcie  $P(-2, -3)$ . Wszystkie punkty, w których może znaleźć się żaba po wykonaniu trzech skoków, leżą na prostej danej równaniem:

A.  $y = 3x + 1$ ,

C.  $y = -x + 2$ ,

B.  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ ,

D.  $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$ .

7. Możliwe wektory przesunięć w trzech skokach:

$$3\vec{u} = 3[3, 1] = [9, 3]$$

$$2\vec{u} + \vec{v} = 2[3, 1] + [-1, 2] = [5, 4]$$

$$\vec{u} + 2\vec{v} = [3, 1] + 2[-1, 2] = [1, 5]$$

$$3\vec{v} = 3[-1, 2] = [-3, 6]$$

Zatem po wykonaniu trzech skoków żaba znajdzie się w jednym z punktów:

$$P_1(-2+9, -3+3) = (7, 0)$$

$$P_2(-2+5, -3+4) = (3, 1)$$

$$P_3(-2+1, -3+5) = (-1, 2)$$

$$P_4(-2-3, -3+6) = (-5, 3)$$

$$\text{Równanie prostej } P_1P_2: y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$$

Punkty  $P_3$  oraz  $P_4$  również należą do tej prostej.



## ■ Zadania krótkiej odpowiedzi

### Zadanie 1 (2 pkt)

Dane są punkty  $A(-5, 1)$ ,  $B(-3, 5)$ ,  $C(5, -1)$  i  $D(11, -3)$ . Oblicz odległość między środkami odcinków  $AB$  i  $CD$ .

### Zadanie 2 (2 pkt)

Oblicz odległość punktu  $P(1, 6)$  od prostej  $y = \frac{3}{4}x - 1$ .

### Zadanie 3 (2 pkt)

Wyznacz równanie okręgu o środku  $S(4, 1)$  stycznego do prostej  $y = -2$ .

### Zadanie 4 (2 pkt)

Podaj równanie okręgu  $K'$  symetrycznego do okręgu  $K: (x-4)^2 + (y+3)^2 = 4$  względem osi  $OX$ . Oblicz odległość między środkami tych okręgów.

## ■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

### D Zadanie 5 (5 pkt)

Uzasadnij, że czworokąt o kolejnych wierzchołkach  $A(-2, -1)$ ,  $B(4, 1)$ ,  $C(6, 7)$  i  $D(0, 5)$  jest rombem. Oblicz jego pole i wysokość.

### Zadanie 6 (4 pkt)

Punkty  $A(4, 2)$  i  $B(1, 6)$  są wierzchołkami równoległoboku  $ABCD$ , którego przekątne przecinają się w punkcie  $S(0, 3)$ . Wyznacz równanie symetralnej boku  $CD$ .

### D Zadanie 7 (3 pkt)

Uzasadnij, że okręgi dane równaniami:

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5 \quad \text{ i } \quad (x-1)^2 + (y+3)^2 = 20$$

są styczne zewnętrznie.

### Zadanie 8 (5 pkt)

W okrąg  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$  wpisano trójkąt prostokątny równoramienny  $ABC$  o kącie prostym przy wierzchołku  $C(-1, -3)$ . Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

### Zadanie 9 (4 pkt)

Okrąg  $K'$  jest obrazem okręgu  $K: (x+3)^2 + (y-1)^2 = 17\frac{7}{9}$  w symetrii względem początku układu współrzędnych. Podaj równanie okręgu  $K'$  i wyznacz współrzędne punktów, w których przecina go prosta przechodząca przez środki tych okręgów.

8.  $S(2, 1)$ ,  $r = 5$ ,  $\sphericalangle ACB = 90^\circ$  i  $|AC| = |BC|$ , więc bok  $AB$  jest średnicą okręgu i jest prostopadły do  $CS$ .

$$a_{CS} = \frac{4}{3}, a_{AB} = -\frac{3}{4}, \text{ prosta } AB: y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25 \end{cases}$$

Zatem  $A(6, -2)$ ,  $B(-2, 4)$ .

9.  $K': (x-3)^2 + (y+1)^2 = 17\frac{7}{9}$

Prosta przechodząca przez  $S(-3, 1)$  i  $S'(3, -1)$ :  $y = -\frac{1}{3}x$

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y+1)^2 = 17\frac{7}{9} \\ y = -\frac{1}{3}x \end{cases}$$

Punkty przecięcia:  $(-1, \frac{1}{3})$ ,  $(7, -\frac{7}{3})$

## Odpowiedzi do zadań

- Środek odcinka  $AB$ :  $(-4, 3)$   
Środek odcinka  $CD$ :  $(8, -2)$   
Odległość między środkami: 13
- 5
- $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 9$
- $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$ ,  $d = 6$
- $|AB| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$   
 $|BC| = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$   
 $|CD| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$   
 $|DA| = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$   
 $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$ ,  
więc czworokąt  $ABCD$  jest rombem.  
 $|AC| = 8\sqrt{2}$  i  $|BD| = 4\sqrt{2}$ ,  
czyli pole:  
 $P = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 32$   
 $P = |AB| \cdot h = 2\sqrt{10} \cdot h = 32$ ,  
czyli wysokość  $h = \frac{8\sqrt{10}}{5}$
- $C(-4, 4)$ ,  $D(-1, 0)$   
Środek boku  $CD$ :  $P(-\frac{5}{2}, 2)$   
Symetralna boku  $CD$  jest do niego prostopadła i przechodzi przez punkt  $P$ .  
 $a_{CD} = -\frac{4}{3}$ , czyli symetralna boku  $CD$  ma równanie:  
 $y = \frac{3}{4}x + \frac{31}{8}$
- Środki okręgów:  $S_1(4, 3)$  i  $S_2(1, -3)$   
Promienie okręgów:  $r_1 = \sqrt{5}$  i  $r_2 = 2\sqrt{5}$   
 $|S_1S_2| = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5} = r_1 + r_2$   
Zatem okręgi są styczne zewnętrznie.

**Odpowiedzi do zadań**

1. Niech  $S$  będzie środkiem przekątnej  $AC$ , czyli  $S(1, 0)$ .

Stąd  $|AS| = \sqrt{10}$  oraz  
 $|AS|^2 + |BS|^2 = 5^2$ , czyli  
 $|BS| = \sqrt{15}$ .

Pole rombu:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2|AS| \cdot 2|BS| = 10\sqrt{6} \approx 24,4949$$

Należy zakodować: 244.

2. Niech  $S$  będzie środkiem okręgu, wówczas  $S(x_s, -x_s)$  oraz:

$$(x - x_s)^2 + (y + x_s)^2 = r^2$$

$$(4 - x_s)^2 + x_s^2 = (2 - x_s)^2 + (2 + x_s)^2$$

$$x_s = 1, S = (1, -1)$$

Zatem:

$$r = |AS| = \sqrt{10} \approx 3,162$$

Należy zakodować: 316.

3.  $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$ , czyli  $r = 2$

Niech  $a$  będzie długością boku trójkąta równobocznego.

Wówczas:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = r = 2, \text{ czyli } a = 2\sqrt{3}$$

$$\text{Zatem } Ob = 6\sqrt{3} \approx 10,3923.$$

Należy zakodować: 392.

4.  $4\sqrt{2}$

5. Środek ciężkości:  $S_c(\frac{1}{3}, \frac{10}{3})$

Środek okręgu opisanego:

$$S_o(\frac{7}{8}, \frac{31}{8})$$

$$|S_c S_o| = \sqrt{\frac{169}{288}} = \frac{13}{24}\sqrt{2}$$

6.  $(x - m)^2 + (y - 1)^2 = 68$ , czyli  $S(m, 1)$  i  $r = 2\sqrt{17}$

Odległość środka okręgu od prostej:

$$d = \frac{|4m+1-3|}{\sqrt{4^2+1^2}} = \frac{|4m-2|}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{|4m-2|}{\sqrt{17}} < 2\sqrt{17}$$

$$m \in (-8; 9)$$

7.  $(-1, -2)$ ,  $(5, 4)$ ,  $(-1, 6)$ ,  
 $(-3, 4)$

W zadaniach 1–3 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

**Zadanie 1 (2 pkt)**

Punkty  $A(-2, -1)$  i  $C(4, 1)$  są wierzchołkami rombu  $ABCD$  o boku długości 5. Oblicz pole tego rombu. Zakoduj trzy pierwsze cyfry rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

**Zadanie 2 (2 pkt)**

Środek okręgu przechodzącego przez punkty  $A(4, 0)$  i  $B(2, 2)$  leży na prostej  $y = -x$ . Oblicz promień tego okręgu. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

**Zadanie 3 (2 pkt)**

Oblicz obwód trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg dany równaniem  $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$ . Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

**Zadanie 4 (5 pkt)**

Dłuższa podstawa trapezu równoramiennego wpisanego w okrąg o równaniu  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 45 = 0$  jest średnicą tego okręgu. Oblicz wysokość tego trapezu, jeśli wiadomo, że jedno z jego ramion leży na prostej  $y = 3x - 15$ .

**Zadanie 5 (6 pkt)**

Punkty  $A(-2, 3)$ ,  $B(0, 1)$  i  $C(3, 6)$  są wierzchołkami trójkąta  $ABC$ . Oblicz odległość środka ciężkości tego trójkąta od środka okręgu na nim opisanego.

**Zadanie 6 (4 pkt)**

Dla jakiej wartości parametru  $m$  okrąg  $x^2 + y^2 - 2mx - 2y + m^2 - 67 = 0$  ma dwa punkty wspólne z prostą  $y = -4x + 3$ ?

**Zadanie 7 (4 pkt)**

W okrąg o równaniu  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 15 = 0$  wpisano trapez. Jego dłuższa podstawa jest zawarta w prostej  $x - y = 1$ . Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trapezu, jeśli wiadomo, że jego wysokość jest równa  $4\sqrt{2}$ .

**Zadanie 8 (4 pkt)**

Dane są wierzchołki  $B(10, 5)$  i  $D(1, 5)$  trapezu  $ABCD$ , którego podstawa  $AB$  jest trzy razy dłuższa od podstawy  $CD$  oraz  $\vec{AB} = [12, 6]$ . Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trapezu. Wyznacz wektor, którego początkiem jest środek ramienia  $AD$ , a końcem środek ramienia  $BC$ .

**Zadanie 9 (5 pkt)**

Dla jakiej wartości parametru  $m$  pole trójkąta o wierzchołkach  $A(0, -3)$ ,  $B(2, 1)$  i  $C(m, m^2 + 1)$  jest najmniejsze?

8.  $\vec{BA} = [-12, -6]$ , czyli  $A(-2, -1)$

$$\vec{DC} = \frac{1}{3}\vec{AB} = [4, 2], \text{ czyli } C(5, 7)$$

$$\text{Środek ramienia } AD: M(-\frac{1}{2}, 2)$$

$$\text{Środek ramienia } BC: N(\frac{15}{2}, 6)$$

$$\text{Wektor łączący środki ramion: } \vec{MN} = [8, 4]$$

9. Korzystamy ze wzoru:

$$P = \frac{1}{2} |x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - x_A y_C - x_B y_A - x_C y_B|$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot |2m^2 - 4m + 8| = |m^2 - 2m + 4| = (m - 1)^2 + 3$$

Najmniejsza wartość funkcji  $P(m) = (m - 1)^2 + 3$  jest przyjmowana w wierzchołku paraboli, czyli dla  $m = 1$ .