



4 Przykłady dowodów w matematyce

Pitagorasowi (VI/V w. p.n.e.) przypisuje się autorstwo pierwszego dowodu twierdzenia nazwanego jego imieniem. Uczony nie pozostawił jednak po sobie żadnych pism. Dowód twierdzenia Pitagorasa przedstawił Euklides (IV/III w. p.n.e.) w *Elementach* – dziele podsumowującym stan wiedzy matematycznej starożytnej Grecji. Składa się ono z trzynastu ksiąg. Księgi I–IV i VI poświęcone są geometrii płaszczyzny, księgi V i VII–X – arytmetyce, a księgi XI–XIII – geometrii przestrzeni. W księdze IX znajduje się dowód istnienia nieskończenie wielu liczb pierwszych. W tym podręczniku przedstawiono go na str. 181. Powyżej pokazano fragment fresku Rafaela Santi *Szkola ateńska* przedstawiający Pitagorasa.

Multiteka

• Dowód za milion dolarów

Uczeń:

- dowodzi własności liczb całkowitych, zapisanych za pomocą potęg lub wyrażeń algebraicznych, np. podzielności,
- przeprowadza dowód nie wprost, np. dotyczący liczb pierwszych.

Ćwiczenie 1

Założmy, że $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ oraz ich suma jest liczbą nieparzystą.

I przypadek

Wszystkie trzy liczby są nieparzyste. Wówczas dla pewnych $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$:

$$n_1 = 2k_1 + 1, n_2 = 2k_2 + 1, n_3 = 2k_3 + 1$$

Zatem:

$$\begin{aligned} n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= (2k_1 + 1)^2 + (2k_2 + 1)^2 + (2k_3 + 1)^2 \\ &= 4k_1^2 + 4k_2^2 + 4k_3^2 + 4k_1 + 4k_2 + 4k_3 + 3 \\ &= 2(2k_1^2 + 2k_2^2 + 2k_3^2 + 2k_1 + 2k_2 + 2k_3 + 1) + 1, \end{aligned}$$

gdzie $2k_1^2 + 2k_2^2 + 2k_3^2 + 2k_1 + 2k_2 + 2k_3 + 1 \in \mathbb{N}$

Oznacza to, że $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$ jest liczbą nieparzystą.

II przypadek

Jedna z liczb jest nieparzysta, a dwie pozostałe są parzyste.

Wówczas dla pewnych liczb

$$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$$

$$n_1 = 2k_1 + 1, n_2 = 2k_2, n_3 = 2k_3$$

Zatem:

$$\begin{aligned} n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= (2k_1 + 1)^2 + (2k_2)^2 + (2k_3)^2 \\ &= 4k_1^2 + 4k_2^2 + 4k_3^2 + 4k_1 + 1 \\ &= 2(2k_1^2 + 2k_2^2 + 2k_3^2 + 2k_1) + 1, \end{aligned}$$

gdzie $2k_1^2 + 2k_2^2 + 2k_3^2 + 2k_1 \in \mathbb{N}$

Oznacza to, że $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$ jest liczbą nieparzystą.

4.1. Dowody w algebrze (1)

Przykład 1

Wykaż, że jeśli suma dwóch liczb naturalnych jest nieparzysta, to iloczyn tych liczb jest parzysty.

Założmy, że n_1 i n_2 są liczbami naturalnymi takimi, że suma $n_1 + n_2$ jest liczbą nieparzystą. Wówczas jedna z liczb (możemy przyjąć, że n_1) jest liczbą parzystą, a druga – nieparzystą (uzasadnij).

Zatem dla pewnych $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$: $n_1 = 2k_1$ oraz $n_2 = 2k_2 + 1$. Czyli:

$$n_1 \cdot n_2 = 2k_1 \cdot (2k_2 + 1) = 2(2k_1k_2 + k_1), \text{ gdzie } 2k_1k_2 + k_1 \in \mathbb{N}$$

Oznacza to, że iloczyn $n_1 \cdot n_2$ jest liczbą parzystą.

Zdanie postaci „jeśli p , to q ” nazywamy **implikacją**, p – **poprzednikiem** implikacji, a q – **następnikiem** implikacji.

Twierdzenia w matematyce często można sformułować w postaci implikacji. Poprzednik implikacji nazywamy założeniem, a następnik – tezą twierdzenia. Wykazanie prawdziwości takiego twierdzenia polega na wykazaniu prawdziwości tezy przy założeniu prawdziwości założenia.

Ćwiczenie 1

Wykaż, że jeśli suma trzech liczb naturalnych jest nieparzysta, to suma ich kwadratów jest nieparzysta.

Przykład 2

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^2(n^2 - 1)$ jest podzielna przez 12.

Zauważmy, że $n^2(n^2 - 1) = n(n - 1)n(n + 1)$. Wśród dowolnych dwóch kolejnych liczb całkowitych znajduje się liczba podzielna przez 2, a wśród trzech – liczba podzielna przez 3. Oznacza to, że liczba:

- $n(n - 1)$ jest podzielna przez 2,
- $n(n + 1)$ jest podzielna przez 2,
- $(n - 1)n(n + 1)$ jest podzielna przez 3.

Zatem liczba $n^2(n^2 - 1)$ jest podzielna przez 4 oraz przez 3, jest więc podzielna przez 12.

Ćwiczenie 2

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba:

- a) $n(n^4 - 1)$ jest podzielna przez 6, b) $n^6 - 2n^4 + n^2$ jest podzielna przez 36.

Ćwiczenie 2

a) Zauważmy, że $n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)$.

Wśród dowolnych dwóch kolejnych liczb całkowitych znajduje się liczba podzielna przez 2, a wśród trzech – liczba podzielna przez 3. Zatem liczba $n(n^4 - 1)$ jest podzielna przez 2 oraz przez 3, jest więc podzielna przez 6.

b) Zauważmy, że $n^6 - 2n^4 + n^2 = n^2(n^4 - 2n^2 + 1) = n^2(n^2 - 1)^2 = [(n - 1)n(n + 1)]^2$. Wśród dowolnych dwóch kolejnych liczb całkowitych znajduje się liczba podzielna przez 2, a wśród trzech – liczba podzielna przez 3. Zatem liczba $(n - 1)n(n + 1)$ jest podzielna przez 2 oraz przez 3, jest więc podzielna przez 6, a jej kwadrat jest podzielny przez 36. Oznacza to, że liczba $n^6 - 2n^4 + n^2$ jest podzielna przez 36.

Ćwiczenie 3

- a) Udowodnij, że iloczyn pięciu kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 120.
b) Udowodnij, że suma sześciątów trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3.

Przykład 3

Wykaż, że liczba $17^8 - 6^8$ jest podzielna przez 11 i przez 23.

Korzystamy ze wzorów skróconego mnożenia i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 17^8 - 6^8 &= (17^4 - 6^4)(17^4 + 6^4) = (17^2 - 6^2)(17^2 + 6^2)(17^4 + 6^4) = \\ &= (17 - 6)(17 + 6)(17^2 + 6^2)(17^4 + 6^4) = \\ &= 11 \cdot 23 \cdot (17^2 + 6^2)(17^4 + 6^4) \end{aligned} \quad (17^2 + 6^2)(17^4 + 6^4) \in \mathbb{N}$$

Zatem liczba $17^8 - 6^8$ jest podzielna przez 11 i przez 23.

Ćwiczenie 4

- a) Wykaż, że liczba $7^{77} - 6 \cdot 7^{76} + 12 \cdot 7^{75}$ jest podzielna przez 19.
b) Wykaż, że liczba $32^{32} - 5^{64}$ jest podzielna przez 7.

Przykład 4

Wykaż, że reszta z dzielenia liczby pierwszej większej od 3 przez 6 jest równa 1 lub 5.

Każdą liczbę naturalną n można zapisać w jednej z postaci: $6k$, $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$, $6k+5$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Liczby postaci $6k$, $6k+2$, $6k+4$ są podzielne przez 2, a liczba postaci $6k+3$ jest podzielna przez 3. Zatem jeśli liczba n jest pierwsza i różna od 2 i 3, to ma postać $6k+1$ lub $6k+5$.

Ćwiczenie 5

- a) Reszta z dzielenia liczby naturalnej n przez 6 jest równa 5. Wykaż, że reszta z dzielenia liczby n^2 przez 6 jest równa 1.
b) Reszta z dzielenia każdej z liczb naturalnych n_1 , n_2 i n_3 przez 6 jest równa 4. Wykaż, że suma kwadratów tych liczb jest podzielna przez 12.

Zadania

- Dane są dwie liczby naturalne, obie podzielne przez 3.
 - Udowodnij, że różnica kwadratów tych liczb jest podzielna przez 9.
 - Udowodnij, że suma sześciątów tych liczb jest podzielna przez 27.
- Wykaż, że iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych, z których pierwsza jest parzysta, jest podzielny przez 24.

Ćwiczenie 5

- a) Liczbę n można zapisać w postaci $n = 6k + 5$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.
 $n^2 = (6k + 5)^2 = 36k^2 + 60k + 25 = 6(6k^2 + 10k + 4) + 1$, gdzie $6k^2 + 10k + 4 \in \mathbb{N}$.
Zatem reszta z dzielenia n^2 przez 6 jest równa 1.
b) Liczby n_1, n_2, n_3 można zapisać w postaci $n_1 = 6k_1 + 4$, $n_2 = 6k_2 + 4$, $n_3 = 6k_3 + 4$ dla pewnych $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$. Wówczas:
 $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = (6k_1 + 4)^2 + (6k_2 + 4)^2 + (6k_3 + 4)^2 =$
 $= 36k_1^2 + 36k_2^2 + 36k_3^2 + 48k_1 + 48k_2 + 48k_3 + 48 =$
 $= 12(3k_1^2 + 3k_2^2 + 3k_3^2 + 4k_1 + 4k_2 + 4k_3 + 4)$, gdzie $3k_1^2 + 3k_2^2 + 3k_3^2 + 4k_1 + 4k_2 + 4k_3 + 4 \in \mathbb{N}$.
Zatem liczba $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$ jest podzielna przez 12.

Ćwiczenie 3

a) Wśród dowolnych pięciu kolejnych liczb naturalnych znajduje się jedna liczba podzielna przez 5, co najmniej jedna liczba podzielna przez 4, co najmniej jedna liczba podzielna przez 3 i co najmniej jedna liczba podzielna przez 2, która nie dzieli się przez 4. Zatem iloczyn tych liczb jest podzielny przez $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

b) Niech $n-1$, n , $n+1$ będą kolejnymi liczbami naturalnymi. Wówczas:

$$\begin{aligned} (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 &= \\ &= n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + \\ &+ 3n^2 + 3n + 1 = \\ &= 3n^3 + 6n = 3(n^3 + 2n), \end{aligned}$$

gdzie $n^3 + 2n \in \mathbb{N}$

Oznacza to, że liczba:

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$$

jest podzielna przez 3.

Ćwiczenie 4

a) Korzystamy z własności potęg i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 7^{77} - 6 \cdot 7^{76} + 12 \cdot 7^{75} &= \\ &= 7^{75} (7^2 - 6 \cdot 7 + 12) = \\ &= 7^{75} (49 - 42 + 12) = 7^{75} \cdot 19 \end{aligned}$$

Zatem liczba

$$7^{77} - 6 \cdot 7^{76} + 12 \cdot 7^{75}$$

jest podzielna przez 19.

b) Pięciokrotnie korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów:

$$\begin{aligned} 32^{32} - (5^2)^{32} &= \\ &= (32 - 25)(32 + 25) \cdot \\ &\cdot (32^2 + 25^2)(32^4 + 25^4) \cdot \\ &\cdot (32^8 + 25^8)(32^{16} + 25^{16}) = \\ &= 7(32 + 25)(32^2 + 25^2) \cdot \\ &\cdot (32^4 + 25^4)(32^8 + 25^8) \cdot \\ &\cdot (32^{16} + 25^{16}) \end{aligned}$$

Zatem liczba $32^{32} - 5^{64}$ jest podzielna przez 7.

Odpowiedzi do zadań

2. Wśród trzech kolejnych liczb naturalnych znajduje się jedna liczba podzielna przez 3. Z założenia pierwsza liczba jest parzysta, więc trzecia liczba jest również parzysta, ponadto jedna z tych liczb jest podzielna przez 2 i nie jest podzielna przez 4, a druga jest podzielna przez 4. Zatem iloczyn tych trzech liczb jest podzielny przez $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$.

3. a) Liczby n_1, n_2, n_3 można zapisać w postaci:

$$n_1 = 3k_1 + 2$$

$$n_2 = 3k_2 + 2$$

$$n_3 = 3k_3 + 2$$

dla pewnych $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$.

Wówczas:

$$n_1 + n_2 + n_3 = (3k_1 + 2) +$$

$$+ (3k_2 + 2) + (3k_3 + 2) =$$

$$= 3k_1 + 3k_2 + 3k_3 + 6 =$$

$$= 3(k_1 + k_2 + k_3 + 2)$$

Zatem $n_1 + n_2 + n_3$ jest liczbą podzielną przez 3.

4. a) $3^{n+1} + 3^n + 3^{n-1} =$
 $= 3^{n-1} (3^2 + 3 + 1) =$
 $= 3^{n-1} \cdot 13$

Zatem liczba ta jest podzielna przez 13.

b) $8^{2n-1} + 4^{3n-1} =$

$$= (2^3)^{2n-1} + (2^2)^{3n-1} =$$

$$= 2^{6n-3} + 2^{6n-2} =$$

$$= 2^{6n-6+3} + 2^{6n-6+4} =$$

$$= 2^{6n-6} (2^3 + 2^4) =$$

$$= 2^{6n-6} \cdot 24$$

5. a) $\frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} =$
 $= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} =$

$$= \frac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{4} =$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{[n(n+1)]^2}{4}$$

Liczba $n(n+1)$ jest parzysta, więc $[n(n+1)]^2$ jest liczbą podzielną przez 4, co oznacza, że iloraz $\frac{[n(n+1)]^2}{4}$ jest liczbą naturalną.

b) $\frac{n^3}{8} - \frac{n}{8} = \frac{1}{8}(n-1)n(n+1)$

6. a) $n = 5k + 4, k \in \mathbb{N}$

$$n^2 - 1 = (5k + 4)^2 - 1 =$$

$$= 25k^2 + 40k + 16 - 1 =$$

$$= 5(5k^2 + 8k + 3)$$

Zatem liczba ta jest podzielna przez 5.

7. a) Liczba naturalna n nie jest podzielna przez 3, więc dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ jest postaci $3k + 1$ lub $3k + 2$.

I przypadek

$$n^2 = (3k + 1)^2 =$$

$$= 3(3k^2 + 2k) + 1$$

Zatem reszta z dzielenia n^2 przez 3 jest równa 1.

II przypadek

$$n^2 = (3k + 2)^2 =$$

$$= 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$$

Zatem reszta z dzielenia n^2 przez 3 jest równa 1.

3. a) Dane są trzy liczby naturalne takie, że reszta z dzielenia każdej z nich przez 3 jest równa 2. Udowodnij, że suma tych liczb jest podzielna przez 3.

b) Dane są trzy liczby naturalne takie, że reszta z dzielenia każdej z nich przez 6 jest równa 4. Udowodnij, że suma tych liczb jest podzielna przez 6.

4. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 0$:

a) liczba $3^{n+1} + 3^n + 3^{n-1}$ jest podzielna przez 13,

b) liczba $8^{2n-1} + 4^{3n-1}$ jest podzielna przez 24.

5. a) Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $\frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$ jest naturalna.

b) Wykaż, że dla każdej nieparzystej liczby naturalnej n liczba $\frac{n^3}{8} - \frac{n}{8}$ jest naturalna.

6. a) Udowodnij, że jeśli reszta z dzielenia liczby naturalnej n przez 5 jest równa 4, to liczba $n^2 - 1$ jest podzielna przez 5.

b) Udowodnij, że jeśli liczba naturalna n nie jest podzielna przez 5, to jedna z liczb $n^2 - 1$ lub $n^2 + 1$ jest podzielna przez 5.

7. a) Wykaż, że jeśli liczba naturalna n nie jest podzielna przez 3, to reszta z dzielenia liczby n^2 przez 3 jest równa 1.

b) Wykaż, że suma kwadratów trzech liczb naturalnych niepodzielnych przez 3 jest podzielna przez 3.

8. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wykaż, że dla żadnej liczby naturalnej n liczba $n^2 + 2$ nie jest podzielna przez 4.

Jeśli n jest liczbą parzystą, to $n = 2k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Wówczas $n^2 + 2 = (2k)^2 + 2 = 4k^2 + 2$, co oznacza, że reszta z dzielenia $n^2 + 2$ przez 4 jest równa 2.

Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to $n = 2k + 1$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Wówczas $n^2 + 2 = (2k + 1)^2 + 2 = 4k^2 + 4k + 3 = 4(k^2 + k) + 3$, co oznacza, że reszta z dzielenia $n^2 + 2$ przez 4 jest równa 3.

Zatem liczba $n^2 + 2$ nie jest podzielna przez 4.

Wykaż, że dla żadnej liczby naturalnej n liczba:

a) $n^2 + 6n + 2$ nie jest podzielna przez 4,

b) $n^2 + n + 2$ nie jest podzielna przez 3.

8. a) Jeśli n jest liczbą parzystą, to $n = 2k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Wówczas:

$$n^2 + 6n + 2 = (2k)^2 + 6 \cdot 2k + 2 = 4(k^2 + 3k) + 2$$

Oznacza to, że reszta z dzielenia $n^2 + 6n + 2$ przez 4 jest równa 2.

Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to $n = 2k + 1$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Wówczas:

$$n^2 + 6n + 2 = (2k + 1)^2 + 6(2k + 1) + 2 = 4(k^2 + 4k + 2) + 1$$

Oznacza to, że reszta z dzielenia $n^2 + 6n + 2$ przez 4 jest równa 1.

Zatem liczba $n^2 + 6n + 2$ nie jest podzielna przez 4.

b) Liczbę naturalną n dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ można zapisać w jednej z trzech postaci: $n = 3k, n = 3k + 1, n = 3k + 2$. Wówczas:

$$n^2 + n + 2 = 3(3k^2 + k) + 2 \text{ lub } n^2 + n + 2 = 3(3k^2 + 3k + 1) + 1$$

$$\text{lub } n^2 + n + 2 = 3(3k^2 + 5k + 2) + 2$$

Zatem liczba $n^2 + n + 2$ nie jest podzielna przez 3.

Dowód nie wprost

Dowód **nie wprost** polega na założeniu, że dowodzona teza jest nieprawdziwa, a następnie pokazaniu, że prowadzi to do sprzeczności. Poniżej przedstawiamy przykład takiego dowodu.

Twierdzenie

Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

Dowód

Założmy, że liczb pierwszych jest skończenie wiele. Niech $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ będą wszystkimi liczbami pierwszymi ustawionymi w kolejności rosnącej (czyli $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$ itd.). Rozpatrzmy liczbę:

$$M = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n + 1$$

Liczba M jest większa od każdej z liczb $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ oraz jest albo liczbą pierwszą, albo złożoną.

Jeżeli M jest liczbą pierwszą, to liczby $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ nie są wszystkimi liczbami pierwszymi.

Jeżeli M jest liczbą złożoną, to można ją przedstawić jako iloczyn czynników będących liczbami pierwszymi. Zauważmy, że w rozkładzie liczby M na czynniki nie może wystąpić żadna spośród liczb $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, gdyż przy dzieleniu przez p_k ($k \leq n$) otrzymujemy resztę równą 1. Zatem liczba M ma dzielnik pierwszy różny od każdej z liczb:

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$$

Oznacza to, że zarówno wtedy, gdy liczba M jest pierwsza, jak i wtedy, gdy jest złożona, istnieje liczba pierwsza większa od każdej z liczb:

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$$

Zatem nie jest prawdą, że liczb pierwszych jest skończenie wiele.

Powyższe twierdzenie podał i udowodnił Euklides (ok. 365–ok. 300 r. p.n.e.).

- *1. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 3$ istnieje liczba pierwsza p taka, że:

$$n < p < n!$$

Wskazówka. Rozpatrz liczbę $n! - 1$.



II dowód nie wprost

Założmy przeciwnie, że istnieje liczba naturalna $n \geq 3$ taka, że każda liczba naturalna $k \in (n; n!)$ jest złożona. Rozpatrzmy $k = n! - 1$. Ponieważ jest to liczba złożona, więc można ją rozłożyć na czynniki pierwsze, ale każdy z nich musi być większy od n i mniejszy od $n! - 1$. Sprzeczność.

III dowód

Niech $n > 2$. Dla dowolnej liczby naturalnej $k \in (2; n)$: $k|n! \wedge k \nmid (n! - 1)$.

Zatem albo $n! - 1$ jest liczbą pierwszą, albo istnieje liczba pierwsza $p > n$ taka, że $p|(n! - 1)$.

1. I dowód nie wprost

Niech n będzie liczbą naturalną większą lub równą 3.

Założmy, że p jest dowolną liczbą pierwszą mniejszą lub równą n , która jest dzielnikiem liczby $n! - 1$ (co spełnia założone warunki: $n \geq p$ i $p < n!$).

Liczby $n! - 1$ oraz $n!$ są względnie pierwsze, co oznacza, że nie mają żadnych wspólnych dzielników naturalnych poza liczbą 1.

Zatem liczba p nie może być dzielnikiem liczby $n!$, czyli nie może być mniejsza lub równa n , ponieważ każda liczba naturalna mniejsza lub równa n jest dzielnikiem liczby $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Prowadzi to do sprzeczności, zatem dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 3$ istnieje liczba pierwsza p taka, że:

$$n < p < n!$$

Uczeń:

- stosuje metodę równoważnego przekształcania tezy do uzasadnienia własności wyrażeń algebraicznych,
- dowodzi prawdziwości nierówności, wykorzystując zależność między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną.

Ćwiczenie 1

a) Niech a i b będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $ab > 0$.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad / \cdot ab$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$(a - b)^2 \geq 0$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych, zatem nierówność:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

zachodzi dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbf{R}$ takich, że $ab > 0$.

b) Niech a i b będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $ab < 0$.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2 \quad / \cdot ab$$

$$a^2 + b^2 \geq -2ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 0$$

$$(a + b)^2 \geq 0$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych, zatem nierówność:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$$

zachodzi dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbf{R}$ takich, że $ab < 0$.

Ćwiczenie 2

a) Niech a i b będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

$$a^2 \geq 4b(a - b)$$

$$a^2 - 4ab + 4b^2 \geq 0$$

$$(a - 2b)^2 \geq 0$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych, zatem nierówność $a^2 \geq 4b(a - b)$ zachodzi dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbf{R}$.

4.2. Dowody w algebrze (2)

Aby zapisać, że dwie nierówności są równoważne, będziemy używać symbolu $\Leftrightarrow$ [czyt. „wtedy i tylko wtedy”].

Przykład 1

Udowodnij, że nierówność $a^2 + b^2 \geq 2ab$ jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b .

Przekształcamy nierówność równoważnie:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$$

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia.

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych $a, b \in \mathbf{R}$, zatem również nierówność $a^2 + b^2 \geq 2ab$ zachodzi dla dowolnych $a, b \in \mathbf{R}$.

Przykład 2

Wykaż, że dla dowolnych liczb nieujemnych a i b prawdziwa jest nierówność $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (czyli że średnia arytmetyczna liczb nieujemnych jest nie mniejsza od ich średniej geometrycznej).

Założmy, że a i b są liczbami nieujemnymi.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$$

Dla dowolnych nieujemnych α i β nierówności $\alpha \geq \beta$ i $\alpha^2 \geq \beta^2$ są równoważne.

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia.

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych liczb nieujemnych a i b , zatem także nierówność $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ zachodzi dla dowolnych liczb nieujemnych a i b .

Ćwiczenie 1

a) Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b takich, że $ab > 0$, prawdziwa jest nierówność $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

b) Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b takich, że $ab < 0$, prawdziwa jest nierówność $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$.

Ćwiczenie 2

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność:

a) $a^2 \geq 4b(a - b)$,

b) $a(6b - 7a) \leq 2(b - a)(b + a)$.

b) Niech a i b będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

$$a(6b - 7a) \leq 2(b - a)(b + a)$$

$$6ab - 7a^2 \leq 2b^2 - 2a^2$$

$$5a^2 - 6ab + 2b^2 \geq 0$$

$$(2a - b)^2 + (a - b)^2 \geq 0$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych, zatem nierówność:

$$a(6b - 7a) \leq 2(b - a)(b + a)$$

zachodzi dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbf{R}$.

Przykład 3

Wykaż, że równanie $x^4 - 3x^2 - 4x + 8 = 0$ nie ma pierwiastków.

$$\begin{aligned}x^4 - 3x^2 - 4x + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 4 + x^2 - 4x + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 + (x - 2)^2 &= 0\end{aligned}$$

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia.

Rozpatrzmy składniki otrzymanej sumy: $(x^2 - 2)^2$ i $(x - 2)^2$. Zauważmy, że:

- $(x^2 - 2)^2 \geq 0$ i $(x - 2)^2 \geq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$,
- nie istnieje takie x , dla którego jednocześnie $(x^2 - 2)^2 = 0$ i $(x - 2)^2 = 0$ (pierwszy składnik przyjmuje wartość 0 dla $x = -\sqrt{2}$ oraz dla $x = \sqrt{2}$, a drugi składnik – dla $x = 2$).

Zatem równanie $x^4 - 3x^2 - 4x + 8 = 0$ nie ma pierwiastków.

Ćwiczenie 3

Udowodnij, że podana nierówność jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej x .

a) $x^4 - 2x + 2 > x^2 + 4x - 8$ b) $x^4 - 4x^2 + 5 > 4x - 12$

Przykład 4

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność:

$$5x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 1 \geq 0$$

Przekształcamy wyrażenie po lewej stronie nierówności:

$$5x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 1 = x^2 + 2xy + y^2 + 4x^2 - 4x + 1 = (x + y)^2 + (2x - 1)^2$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzą nierówności $(x + y)^2 \geq 0$ oraz $(2x - 1)^2 \geq 0$, więc nierówność jest zawsze prawdziwa.

Ćwiczenie 4

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność:

a) $x^2 + 10y^2 + 9 \geq 6y(x + 1)$, b) $3x^2 + y^2 - 2xy \geq 2x - \frac{1}{2}$.

Zadania

1. Wykaż, że dla dowolnej liczby $x > 0$ prawdziwa jest nierówność:

a) $x + \frac{4}{x} \geq 4$, b) $4 + \frac{1}{x} \geq \frac{4}{\sqrt{x}}$, c) $\frac{1}{x^5} + \frac{9}{x} \geq \frac{6}{x^3}$.

2. Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb a i b prawdziwa jest nierówność:

a) $\frac{(a+b)^2}{ab} \geq 4$, b) $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$, c) $\frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

2. $ab > 0$

a) $\frac{(a+b)^2}{ab} \geq 4 / \cdot ab$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$(a - b)^2 \geq 0$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, więc także

$$\text{nierówność } \frac{(a+b)^2}{ab} \geq 4$$

jest prawdziwa.

b) $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b / \cdot ab$

$$a^3 + b^3 \geq (a + b)ab$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) +$$

$$-(a + b)ab \geq 0$$

$$(a + b)(a - b)^2 \geq 0$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, więc także

nierówność

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$$

jest prawdziwa.

c) $\frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

$$\frac{4}{a+b} \leq \frac{a+b}{ab} / \cdot ab(a+b)$$

$$4ab \leq (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$(a - b)^2 \geq 0$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, więc także

$$\text{nierówność } \frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

jest prawdziwa.

Ćwiczenie 3

b) $x^4 - 4x^2 + 5 > 4x - 12$

$$x^4 - 8x^2 + 16 + 4x^2 - 4x + 1 > 0$$

$$(x^2 - 4)^2 + (2x - 1)^2 > 0$$

$(x^2 - 4)^2 \geq 0$ i $(2x - 1)^2 \geq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$ oraz nie istnieje takie x , dla którego jednocześnie $(x^2 - 4)^2 = 0$ i $(2x - 1)^2 = 0$.

Zatem nierówność:

$$x^4 - 4x^2 + 5 > 4x - 12$$

jest prawdziwa dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$.

Ćwiczenie 4

b) $3x^2 + y^2 - 2xy - 2x + \frac{1}{2} =$

$$= x^2 - 2xy + y^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}(4x^2 - 4x + 1) =$$

$$= (x - y)^2 + \frac{1}{2}(2x - 1)^2 \geq 0 \text{ dla}$$

dowolnych $xy \in \mathbf{R}$, więc

$$3x^2 + y^2 - 2xy \geq 2x - \frac{1}{2}$$

Odpowiedzi do zadań

1. $x > 0$

a) $x + \frac{4}{x} \geq 4 / \cdot x$

$$x^2 + 4 \geq 4x$$

$$x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$(x - 2)^2 \geq 0$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, więc także nierówność $x + \frac{4}{x} \geq 4$ jest prawdziwa.

b) $4 + \frac{1}{x} \geq \frac{4}{\sqrt{x}} / \cdot x$

$$4x + 1 \geq 4\sqrt{x}$$

$$4x - 4\sqrt{x} + 1 \geq 0$$

$$(2\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, więc także nierówność $4 + \frac{1}{x} \geq \frac{4}{\sqrt{x}}$ jest prawdziwa.

c) $\frac{1}{x^5} + \frac{9}{x} \geq \frac{6}{x^3} / \cdot x^5$

$$1 + 9x^4 \geq 6x^2$$

$$9x^4 - 6x^2 + 1 \geq 0$$

$$(3x^2 - 1)^2 \geq 0$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, więc także nierówność $\frac{1}{x^5} + \frac{9}{x} \geq \frac{6}{x^3}$ jest prawdziwa.

3. a) Nierówność równoważna:
 $(x+y)^2 + 2(x-2)^2 \geq 0$
 b) $x^2 + xy + y^2 + 4x + 6 > 0$
 $(\frac{1}{2}x+y)^2 + \frac{3}{4}(x+\frac{8}{3})^2 + \frac{2}{3} > 0$
 $(\frac{1}{2}x+y)^2 \geq 0$ i $(x+\frac{8}{3})^2 \geq 0$
 dla $x, y \in \mathbf{R}$ oraz $\frac{2}{3} > 0$
4. a) $x^2 + y^2 - xy - x - y + 1 \geq 0/ \cdot 2$
 $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 2 \geq 0$
 $(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$
 $(x-y)^2 \geq 0$,
 $(x-1)^2 \geq 0$ i $(y-1)^2 \geq 0$
 dla $xy \in \mathbf{R}$
 Zatem nierówność:
 $x^2 + y^2 - x(y+1) \geq y-1$
 jest prawdziwa dla dowolnych
 $x, y \in \mathbf{R}$.
- b) Nierówność równoważna:
 $(x-y)^2 + 2(xy-1)^2 \geq 0$
5. $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, $a+b = \frac{1}{2}$
 a) $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{1}{16}$
 b) Korzystamy z podpunktu a):
 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab} =$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{ab} \geq \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$
 c) $\frac{1}{2ab} - 4a \geq 6 + 4b$
 $\frac{1}{2ab} - 4(a+b) \geq 6$
 Korzystamy z podpunktu b):
 $\frac{1}{2ab} - 4(a+b) =$
 $= \frac{1}{2ab} - 4 \cdot \frac{1}{2} \geq 8 - 2 = 6$
6. a) $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, $ab = 4$
 $a+b \geq 2\sqrt{ab} = 2 \cdot \sqrt{4} = 4$
 b) $a^3 + b^3 \geq ab$,
 ale $b = 1 - a$, skąd:
 $a^3 + (1-a)^3 \geq a(1-a)$
 $4a^2 - 4a + 1 \geq 0$
 $(2a-1)^2 \geq 0$
7. Korzystamy z nierówności:
 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$
 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$
 a) $a, b > 0$, $ab = 16$
 $(1+a)(1+b) =$
 $= 1 + a + b + ab \geq$
 $\geq 1 + 2\sqrt{16} + 16 = 25$
8. a) $b^2(a+1) \leq a^2(b+1)$
 $a^2 - b^2 + a^2b - b^2a \geq 0$
 $(a-b)(a+b) + ab(a-b) \geq 0$
 $(a-b)(a+b+ab) \geq 0$

3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność:
 a) $(x-y)^2 + 2x^2 + 8 \geq 4x(2-y)$,
 b) $(x+2)(x+3) + 1 > (1-y)(x+y+1)$.
4. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność:
 a) $x^2 + y^2 - x(y+1) \geq y-1$, b) $2x^2y^2 + x^2 + y^2 \geq 6xy - 2$.
5. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b takich, że $a+b = \frac{1}{2}$, prawdziwa jest podana nierówność. Skorzystaj z zależności między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną dwóch liczb.
 a) $ab \leq \frac{1}{16}$ b) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 8$ c) $\frac{1}{2ab} - 4a \geq 6 + 4b$
6. a) Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b takich, że $ab = 4$, prawdziwa jest nierówność $a+b \geq 4$.
 b) Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b takich, że $a+b = 1$, prawdziwa jest nierówność $a^3 + b^3 \geq ab$.
7. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b takich, że:
 a) $ab = 16$, prawdziwa jest nierówność $(1+a)(1+b) \geq 25$,
 b) $ab = \frac{1}{4}$, prawdziwa jest nierówność $4(1+a)(1+b) \geq 9$.
8. a) Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b takich, że $a \geq b > 0$, prawdziwa jest nierówność $b^2(a+1) \leq a^2(b+1)$.
 b) Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \neq 0$ i $b \neq 0$ takich, że $a^2 + b^2 = 1$, prawdziwa jest nierówność $(1 + \frac{1}{a^2})(1 + \frac{1}{b^2}) \geq 9$.
- *9. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a , b i przeciwprostokątnej c . Wykaż, że $a+b \leq \sqrt{2}c$.

W dowodzie skorzystamy z tego, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b zachodzi nierówność $2ab \leq a^2 + b^2$ oraz z twierdzenia Pitagorasa.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + (a^2 + b^2) + b^2 = 2(a^2 + b^2) = 2c^2$$

$a+b > 0$ oraz $\sqrt{2}c > 0$, zatem otrzymujemy $a+b \leq \sqrt{2}c$.

Dany jest prostopadłościan o krawędziach a , b , c i przekątnej d . Wykaż, że $a+b+c \leq \sqrt{3}d$.

8. b) $a^2 + b^2 = 1$, $(1 + \frac{1}{a^2})(1 + \frac{1}{b^2}) \geq 9 \Leftrightarrow \frac{a^2+1}{a^2} \cdot \frac{b^2+1}{b^2} \geq 9$
 Mnożymy obie strony nierówności przez $a^2b^2 > 0$ i mamy $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 \geq 9a^2b^2$.
 Z założenia $a^2 + b^2 = 1$, czyli $b^2 = 1 - a^2$. Zatem:
 $a^2(1 - a^2) + 1 + 1 \geq 9a^2(1 - a^2) \Leftrightarrow a^2 - a^4 + 2 \geq 9a^2 - 9a^4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 8a^4 - 8a^2 + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 4a^4 - 4a^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2a^2 - 1)^2 \geq 0$
9. $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \leq$
 $\leq a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) + (b^2 + c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) = 3d^2$
 $a+b+c > 0$ oraz $\sqrt{3}d > 0$, zatem otrzymujemy $a+b+c \leq \sqrt{3}d$.

4.3. Dowody w geometrii (1)

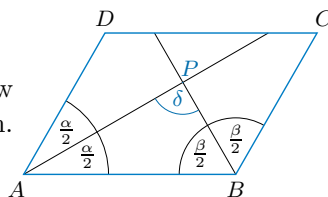
Ćwiczenie 1

Udowodnij, że suma miar kątów trójkąta jest równa 180° .

Gdy przedstawiamy dowód twierdzenia, często korzystamy z twierdzeń już udowodnionych. W dowodach twierdzeń w ćwiczeniach 2. i 3. można skorzystać z twierdzenia udowodnionego w ćwiczeniu 1.

Ćwiczenie 2

Udowodnij, że dwusieczne dwóch sąsiednich kątów równoległoboku przecinają się pod kątem prostym.



Ćwiczenie 3

Udowodnij, że jeśli środek okręgu opisanego na trójkącie jest środkiem jednego z jego boków, to trójkąt ten jest prostokątny.

W dowodzie przedstawionym w poniższym przykładzie korzystamy z twierdzeń nazywanych cechami przystawiania trójkątów (przypomnij ich treść).

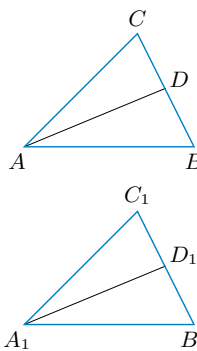
Przykład 1

W trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ (rysunek obok) poprowadzono dwusieczne odpowiednio AD i A_1D_1 . Wykaż, że jeśli $|AB| = |A_1B_1|$, $|AD| = |A_1D_1|$ oraz $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C_1A_1B_1$, to $|AC| = |A_1C_1|$.

$|AB| = |A_1B_1|$, $|AD| = |A_1D_1|$ oraz $\sphericalangle BAD = \sphericalangle B_1A_1D_1$, więc na podstawie cechy BKB trójkąty ABD i $A_1B_1D_1$ są przystające ($\triangle ABD \equiv \triangle A_1B_1D_1$).

Stąd $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1$.

Z powyższego wniosku i założeń $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C_1A_1B_1$ oraz $|AB| = |A_1B_1|$, na podstawie cechy KBK, otrzymujemy: $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$. Zatem $|AC| = |A_1C_1|$.



Ćwiczenie 4

Środkowe AD i A_1D_1 poprowadzone odpowiednio w trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ mają równe długości. Wykaż, że jeśli:

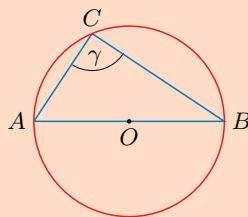
- $|AB| = |A_1B_1|$ oraz $|BC| = |B_1C_1|$, to $|AC| = |A_1C_1|$,
- $\sphericalangle CAD = \sphericalangle C_1A_1D_1$ oraz $\sphericalangle ADB = \sphericalangle A_1D_1B_1$, to $|AB| = |A_1B_1|$.

Ćwiczenie 3

Niech punkt O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , czyli środkiem boku AB . Wówczas kąt γ jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku co kąt środkowy AOB :

$$\gamma = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$$

Zatem trójkąt ABC jest prostokątny.



Ćwiczenie 4

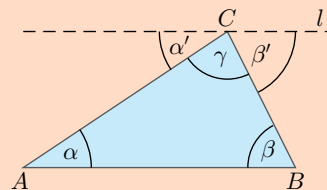
Patrz str. 186.

Uczeń:

- podaje założenie i tezę twierdzenia geometrycznego,
- wykorzystuje przystawianie trójkątów do uzasadniania własności wielokątów,
- wykorzystuje własności figur płaskich do dowodzenia twierdzeń.

Ćwiczenie 1

Rysujemy pomocniczą prostą l równoległą do boku AB i przechodzącą przez wierzchołek C .



Kąty α i α' są równe (są to kąty naprzemianległe). Również kąty β i β' są równe (jako kąty naprzemianległe). Zatem:

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma$$

$\alpha' + \beta' + \gamma = 180^\circ$, więc również: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Ćwiczenie 2

W równoległoboku suma miar kątów leżących przy tym samym boku wynosi 180° , czyli:

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$$

Niech P będzie punktem przecięcia dwusiecznych równoległoboku $ABCD$. Suma miar kątów trójkąta ABP jest równa 180° , więc:

$$\begin{aligned} \delta &= 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \\ &= 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \\ &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \end{aligned}$$

Uzasadnienie przystawiania trójkątów FDE i GAE

Zauważmy, że:

$$\sphericalangle FDE = \sphericalangle GAE = 90^\circ$$

oraz:

$$\sphericalangle FED = \sphericalangle GEA,$$

ponieważ są to kąty wierzchołkowe.

Ponadto $|DE| = |EA|$, więc na podstawie cechy KBK trójkąty FDE i GAE są przystające.

Ćwiczenie 5

Na podstawie cechy BBB trójkąty ACD i CAB są przystające, więc ich pola są równe:

$$\frac{1}{2}|AC| \cdot |DM| = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BN|$$

Stąd $|DM| = |BN|$ oraz:

$$P_{ADP} = \frac{1}{2}|AP| \cdot |DM| =$$

$$= \frac{1}{2}|AP| \cdot |BN| = P_{ABP},$$

co należało wykazać.

Przykład 2

Środkowa CD trójkąta ABC zawiera się w dwusiecznej kąta ACB (rysunek obok). Wykaż, że trójkąty ADC i BDC są przystające.

Trójkąty ADC i BDC mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka C i równe podstawy, zatem:

$$P_{\triangle ADC} = P_{\triangle BDC}$$

Wyznaczamy te pola:

$$P_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |CD| \cdot \sin \alpha$$

$$P_{\triangle BDC} = \frac{1}{2}|BC| \cdot |CD| \cdot \sin \alpha$$

i otrzymujemy $|AC| = |BC|$. Trójkąty ADC i BDC mają odpowiednie boki tej samej długości, zatem na podstawie cechy BBB są przystające.

Zwróćmy uwagę, że z udowodnionego w przykładzie 2. twierdzenia wynika, że jeśli środkowa trójkąta zawiera się w dwusiecznej jednego z jego kątów, to jest ona wysokością tego trójkąta.

W niektórych dowodach geometrycznych potrzebne jest poprowadzenie dodatkowych prostych lub odcinków.

Przykład 3

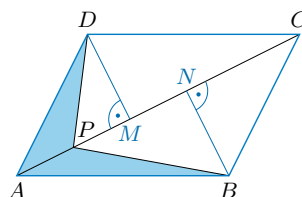
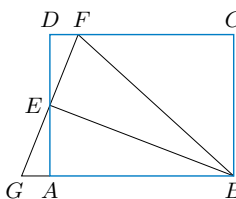
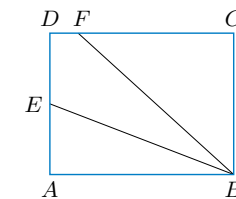
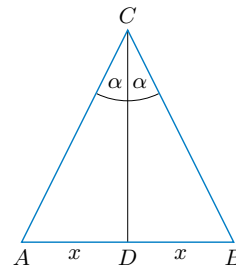
Punkt E jest środkiem boku AD prostokąta $ABCD$. Na boku DC obrano taki punkt F , że $\sphericalangle ABE = \sphericalangle FBE$. Wykaż, że kąt FEB jest prosty.

Odcinek FE przedłużamy do przecięcia z prostą AB w punkcie G . Trójkąty FDE i GAE są przystające (uzasadnij), stąd $|EF| = |EG|$. Odcinek EB jest więc środkową trójkąta FBG , a ponieważ zawiera się w dwusiecznej kąta FBG , jest też wysokością tego trójkąta. Zatem kąt FEB jest prosty.

Ćwiczenie 5

Punkt P należy do przekątnej AC równoległoboku $ABCD$ (rysunek obok). Wykaż, że pola trójkątów ADP i ABP są równe.

Wskazówka. Narysuj wysokość trójkąta ACD opuszczoną z wierzchołka D oraz wysokość trójkąta ACB opuszczoną z wierzchołka B i wykaż, że wysokości te są równe.



Ćwiczenie 4 (ze str. 185)

a) $|AB| = |A_1B_1|$, $|AD| = |A_1D_1|$ oraz $|BC| = |B_1C_1|$, czyli $\frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}|B_1C_1|$, co oznacza, że: $|BD| = |DC| = |B_1D_1| = |D_1C_1|$, więc na podstawie cechy BBB trójkąty ABD i $A_1B_1D_1$ są przystające.

Stąd $\sphericalangle ABD = \sphericalangle A_1B_1D_1$, zatem $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1$.

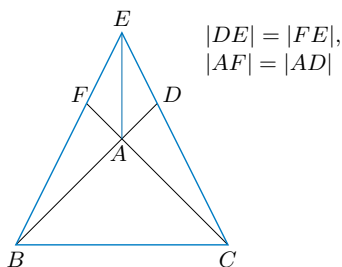
Z powyższego wniosku i założeń $|AB| = |A_1B_1|$ oraz $|BC| = |B_1C_1|$, na podstawie cechy BKB, wynika, że trójkąty ABC i $A_1B_1C_1$ są przystające.

Zatem $|AC| = |A_1C_1|$.

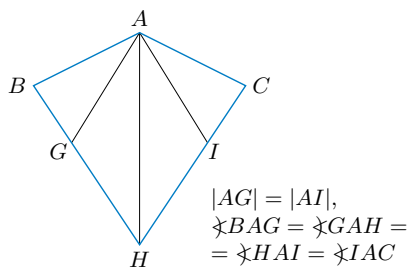
Zadania

1. Korzystając z podanych informacji, wykaż, że $|AB| = |AC|$.

a)

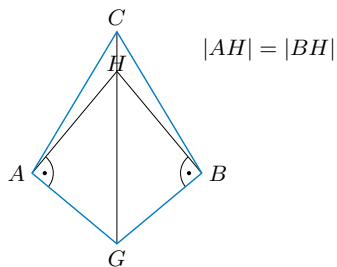


b)

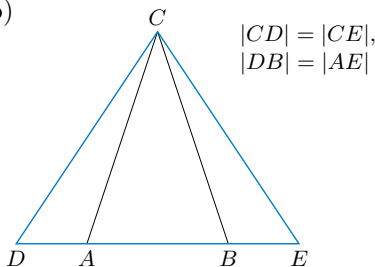


2. Korzystając z podanych informacji, wykaż, że trójkąt ABC jest równoramienny.

a)

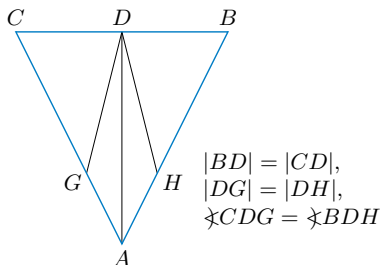


b)

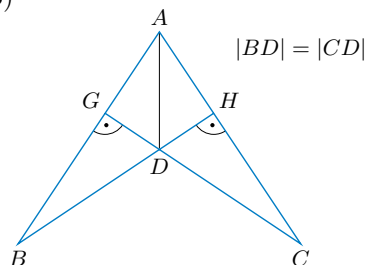


3. Korzystając z podanych informacji, wykaż, że odcinek AD zawiera się w dwusiecznej kąta BAC .

a)



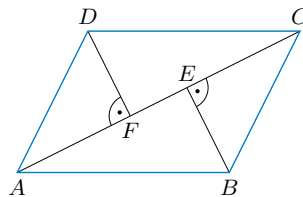
b)



4. Dany jest czworokąt $ABCD$ (rysunek obok).

a) Wykaż, że $|AB| = |DC|$, jeśli wiadomo, że $|AF| = |CE|$ oraz $\sphericalangle FAD = \sphericalangle ECB$.

b) Wykaż, że $|AD| = |BC|$, jeśli wiadomo, że $|BE| = |DF|$ oraz $AB \parallel CD$.



4. a) Na podstawie cechy KBK: $\triangle AFD \equiv \triangle CEB$. Stąd $|AD| = |CB|$.

Na podstawie cechy BKB: $\triangle DAC \equiv \triangle BCA$. Zatem $|AB| = |CD|$.

b) Kąty BAC i DCA są równe, gdyż są naprzemianległe. Ponadto $\sphericalangle BEA = \sphericalangle DFC = 90^\circ$, czyli $\sphericalangle EBA = \sphericalangle FDC$.

Zatem na podstawie cechy KBK: $\triangle ABE \equiv \triangle CDF$.

Stąd $|AB| = |CD|$. Trójkąty ABC i CDA mają wspólny bok oraz $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA$, więc na podstawie cechy BKB trójkąty te są przystające. Zatem $|AD| = |BC|$.

Odpowiedzi do zadań

1. a) Trójkąty AFE i ADE są przystające na podstawie cechy BBB. Zatem $\sphericalangle AFE = \sphericalangle ADE$.

Na podstawie cechy KBK:

$\triangle CEF \equiv \triangle BED$,

czyli $|DB| = |FC|$.

Zatem $|AB| = |AC|$.

b) Trójkąty GAH i IAH mają wspólny bok AH , a także $\sphericalangle GAH = \sphericalangle HAI$ oraz $|AG| = |AI|$, więc na podstawie cechy BKB trójkąty te są przystające. Zatem:

$\sphericalangle AHG = \sphericalangle AHI$

Ponadto:

$\sphericalangle BAG = \sphericalangle IAC = \sphericalangle GAH$,

czyli $\sphericalangle BAH = \sphericalangle HAC$.

Na podstawie cechy KBK trójkąty BAH i CAH są przystające i stąd:

$|AB| = |AC|$.

2. a) Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $|AG| = |BG|$.

Na podstawie cechy BBB:

$\triangle GAH \equiv \triangle GBH$

Zatem $\sphericalangle AGH = \sphericalangle BGH$. Na podstawie cechy BKB:

$\triangle AGC \equiv \triangle BGC$

Zatem $|AC| = |BC|$, co oznacza, że trójkąt ABC jest równoramienny.

b) Trójkąt DEC jest równoramienny, więc:

$\sphericalangle CDB = \sphericalangle CEA$

Zatem na podstawie cechy BKB: $\triangle CDB \equiv \triangle CEA$.

Stąd $|BC| = |AC|$, co oznacza, że trójkąt ABC jest równoramienny.

3. a) Na podstawie cechy BKB:

$\triangle BDH \equiv \triangle CDG$, więc

$\sphericalangle HBD = \sphericalangle GCD$. Zatem

$\triangle BAC$ jest równoramienny:

$|BA| = |CA|$. Ponadto

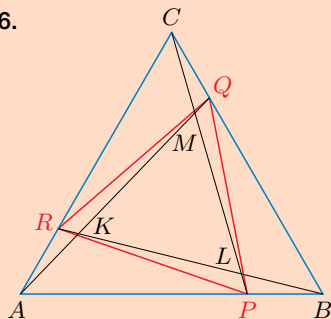
$|BD| = |CD|$, więc na podstawie cechy BKB:

$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$

Zatem $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD$, co

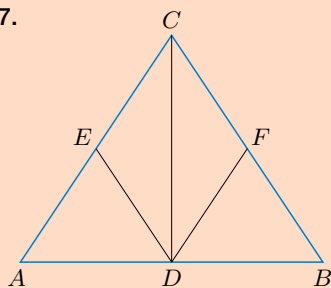
oznacza, że prosta AD jest dwusieczną kąta BAC .

6.



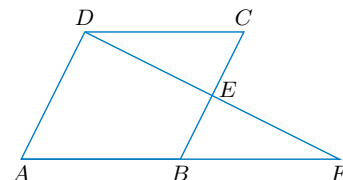
Na podstawie cechy BKB:
 $\triangle APR \equiv \triangle BQP \equiv \triangle CRQ$
 Zatem:
 $|RP| = |PQ| = |QR|$,
 czyli trójkąt PQR jest równoboczny.
 Na podstawie cechy BKB:
 $\triangle APC \equiv \triangle BQA \equiv \triangle CRB$,
 więc:
 $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BAQ = \sphericalangle CBR$
 oraz:
 $\sphericalangle APC = \sphericalangle BQA = \sphericalangle CRB$
 Zatem:
 $\sphericalangle AMP = \sphericalangle BKQ = \sphericalangle CLR$
 Z równości odpowiednich kątów wierzchołkowych otrzymujemy:
 $\sphericalangle KML = \sphericalangle MKL = \sphericalangle KLM$,
 czyli trójkąt KLM jest równoboczny.

7.



Na podstawie cechy BKB:
 $\triangle DAE \sim \triangle BAC$,
 więc $|DE| = \frac{1}{2}|BC|$
 Na podstawie cechy BKB:
 $\triangle DBF \sim \triangle ABC$,
 więc $|DF| = \frac{1}{2}|AC|$
 Z założenia $|DE| = |DF|$,
 więc $|BC| = |AC|$. Zatem trójkąt ABC jest równoramienny.

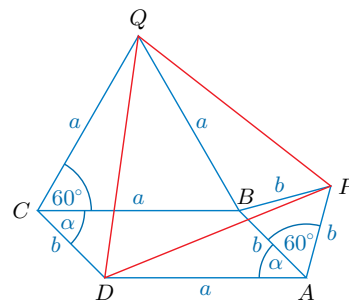
5. Dany jest równoległobok $ABCD$ (rysunek obok). Punkt E jest środkiem boku BC , a punkt F – punktem przecięcia prostych AB i DE . Wykaż, że pola trójkąta AFD i równoległoboku $ABCD$ są równe.



6. Na bokach AB , BC i AC trójkąta równobocznego ABC obrano odpowiednio punkty P , Q i R tak, że $|AP| = |BQ| = |CR|$. Wykaż, że trójkąt PQR jest równoboczny oraz że punkty przecięcia odcinków AQ , BR i CP są wierzchołkami trójkąta równobocznego.
7. W trójkącie ABC poprowadzono środkową CD , a z punktu D poprowadzono środkowe trójkątów ADC i CDB : odpowiednio DE i DF . Wykaż, że jeśli $|DE| = |DF|$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

8. Dany jest równoległobok $ABCD$ o kącie ostrym przy wierzchołku A . Na półprostych AB i CB obrano odpowiednio punkty E i F takie, że $|CB| = |CE|$ oraz $|AB| = |AF|$. Wykaż, że $\triangle DAF \equiv \triangle ECD$.

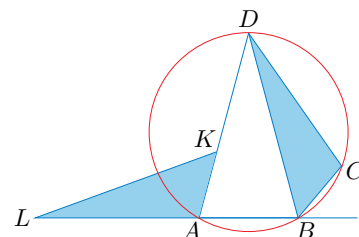
9. Na zewnątrz równoległoboku $ABCD$ (rysunek obok) obrano punkty P i Q tak, że trójkąty BAP i CBQ są równoboczne. Wykaż, że trójkąt PQD jest równoboczny.



10. Dany jest trapez $ABCD$. Punkt P jest środkiem ramienia AD . Udowodnij, że pole trójkąta BPC jest dwa razy mniejsze od pola trapezu $ABCD$.

11. Punkty P , Q , R i S są środkami boków trapezu równoramiennego. Wykaż, że czworokąt $PQRS$ jest rombem.

12. Dany jest czworokąt $ABCD$, na którym opisano okrąg. Na boku AD tego czworokąta obrano punkt K taki, że $|AK| = |BC|$, a na prostej AB – punkt L taki, że $|AL| = |DC|$ (rysunek obok). Wykaż, że trójkąty LAK i DCB są przystające oraz że prosta AC jest równoległa do prostej KL .



9. $\sphericalangle ABC = 180^\circ - \alpha$ oraz $\sphericalangle ABP = \sphericalangle CBQ = 60^\circ$,
 stąd $\sphericalangle PBQ = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ + \alpha = \sphericalangle DCQ$
 Zatem na podstawie cechy BKB: $\triangle PBQ \equiv \triangle DCQ \equiv \triangle PAD$,
 stąd $|PQ| = |QD| = |DP|$, czyli $\triangle PQD$ jest równoboczny.

12. Okrąg jest opisany na czworokącie $ABCD$, więc:

$$\sphericalangle BCD = 180^\circ - \sphericalangle BAD = \sphericalangle KAL$$

Zatem na podstawie cechy BKB:

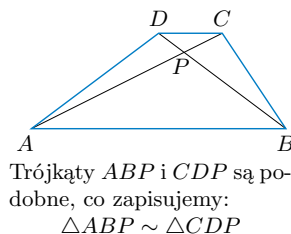
$$\triangle LAK \equiv \triangle DCB$$

Stąd $\sphericalangle CDB = \sphericalangle ALK$. Ponadto $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CAB$ (kąty wpisane oparte na tym samym łuku), czyli $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ALK$. Są to kąty odpowiadające, czyli proste KL i AC są równoległe.

4.4. Dowody w geometrii (2)

Ćwiczenie 1

- a) Przypomnij cechy podobieństwa trójkątów.
 b) Dany jest trapez $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie P (rysunek obok). Podaj cechę, na podstawie której można uzasadnić podobieństwo trójkątów ABP i CDP .

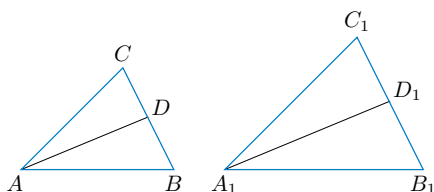


Przykład 1

W trójkątach podobnych ABC i $A_1B_1C_1$ poprowadzono środkowe AD i A_1D_1 . Wykaż, że długości tych środkowych są proporcjonalne do długości boków trójkątów.

Korzystamy z podobieństwa trójkątów ABC i $A_1B_1C_1$:

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{\frac{1}{2}|BC|}{\frac{1}{2}|B_1C_1|} = \frac{|BD|}{|B_1D_1|}$$



Ponadto kąty ABD i $A_1B_1D_1$ są równe, więc na podstawie cechy BKB trójkąty ABD i $A_1B_1D_1$ są podobne. Zatem:

$$\frac{|AD|}{|A_1D_1|} = \frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|}$$

Ćwiczenie 2

Boki AB , BC i AC trójkąta ABC są proporcjonalne odpowiednio do boków A_1B_1 , B_1C_1 i A_1C_1 trójkąta $A_1B_1C_1$.

- a) W trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ poprowadzono dwusieczne kątów BAC i $B_1A_1C_1$. Przecięły one boki BC i B_1C_1 odpowiednio w punktach D i D_1 . Wykaż, że długości odcinków AD i A_1D_1 są proporcjonalne do długości boków trójkątów.

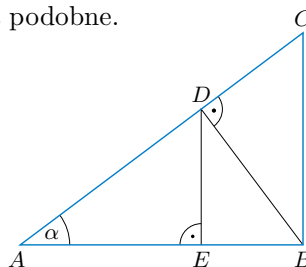
- b) Symetralna boku AB przecina boki trójkąta ABC w punktach P i Q , a symetralna boku A_1B_1 przecina boki trójkąta $A_1B_1C_1$ odpowiednio w punktach P_1 i Q_1 . Wykaż, że trójkąty APQ i $A_1P_1Q_1$ są podobne.

Ćwiczenie 3

Dany jest trójkąt prostokątny ABC (rysunek obok).

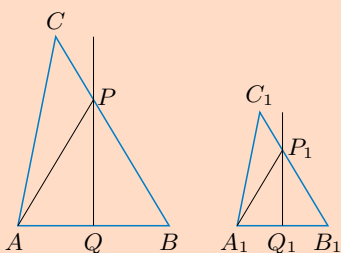
Wykaż, że stosunek pól trójkątów:

- a) BDC i ABC jest równy $\sin^2 \alpha$,
 b) AED i ABC jest równy $\cos^4 \alpha$.



II przypadek

Punkt P leży na boku BC .



$\angle BQP = \angle B_1Q_1P_1 = 90^\circ$ oraz z założenia $\angle CBA = \angle C_1B_1A_1$, więc $\angle BPQ = \angle B_1P_1Q_1$.

Stąd na podstawie cechy KKK:

$$\triangle BPQ \sim \triangle B_1P_1Q_1$$

$$\text{Zatem } \frac{|PQ|}{|P_1Q_1|} = \frac{|QB|}{|Q_1B_1|}.$$

Z założenia $|QB| = |AQ|$ oraz $|Q_1B_1| = |A_1Q_1|$, więc:

$$\frac{|PQ|}{|P_1Q_1|} = \frac{|AQ|}{|A_1Q_1|}$$

Zatem na podstawie cechy BKB:

$$\triangle APQ \sim \triangle A_1P_1Q_1$$

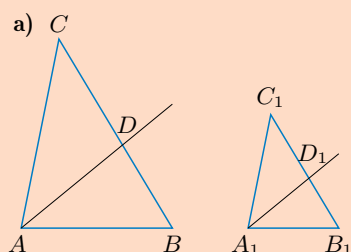
Uczeń:

- podaje założenie i tezę twierdzenia geometrycznego,
- wykorzystuje podobieństwo trójkątów do uzasadniania własności wielokątów,
- dowodzi własności odcinków w trójkącie prostokątnym,
- wykorzystuje własności figur płaskich do dowodzenia twierdzeń.

Ćwiczenie 2

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|},$$

czyli $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$



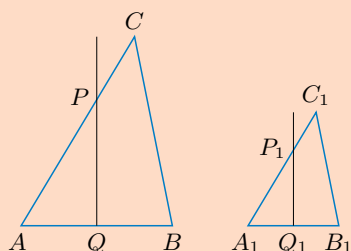
$$\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \angle B_1A_1C_1 = \angle B_1A_1D_1,$$

więc na podstawie cechy KKK trójkąty ABD i $A_1B_1D_1$ są podobne. Zatem:

$$\frac{|AD|}{|A_1D_1|} = \frac{|AB|}{|A_1B_1|}$$

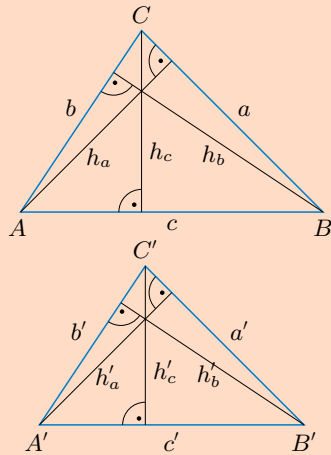
b) I przypadek

Punkt P leży na boku AC .



$\angle AQP = \angle A_1Q_1P_1 = 90^\circ$ oraz $\angle CAB = \angle C_1A_1B_1$, więc $\angle APQ = \angle A_1P_1Q_1$. Zatem na podstawie cechy KKK: $\triangle APQ \sim \triangle A_1P_1Q_1$.

Ćwiczenie 4



Z założenia $\frac{h_a}{h'_a} = \frac{h_b}{h'_b} = \frac{h_c}{h'_c}$.

$$P = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$

$$P' = \frac{1}{2} a' \cdot h'_a$$

Stąd:

$$\frac{a}{a'} = \frac{2P}{h_a} : \frac{2P'}{h'_a} = \frac{P}{P'} \cdot \frac{h'_a}{h_a} = \frac{P}{P'} \cdot \frac{h'_b}{h_b} = \frac{b'}{b}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{2P}{h_a} : \frac{2P'}{h'_a} = \frac{P}{P'} \cdot \frac{h'_a}{h_a} = \frac{P}{P'} \cdot \frac{h'_c}{h_c} = \frac{c'}{c}$$

$$\frac{b}{b'} = \frac{2P}{h_b} : \frac{2P'}{h'_b} = \frac{P}{P'} \cdot \frac{h'_b}{h_b} = \frac{P}{P'} \cdot \frac{h'_c}{h_c} = \frac{c'}{c}$$

Zatem na podstawie cechy BBB trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne.

Ćwiczenie 5

a) $P_{ABC} = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} (x+y)h$,

stąd $h = \frac{ab}{x+y}$

b) $\triangle ADC \sim \triangle CDB$ (cecha KKK), stąd:

$$\frac{h}{x} = \frac{y}{h}, \text{ czyli } h^2 = xy,$$

zatem $h = \sqrt{xy}$

c) $\triangle ABC \sim \triangle BCD$ (cecha KKK), stąd:

$$\frac{a}{x+y} = \frac{x}{a}, \text{ czyli } a^2 = x(x+y),$$

zatem $a = \sqrt{x(x+y)}$

d) $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ (cecha KKK), stąd:

$$\frac{b}{x+y} = \frac{y}{b}, \text{ czyli } b^2 = y(x+y),$$

zatem $b = \sqrt{y(x+y)}$

Przykład 2

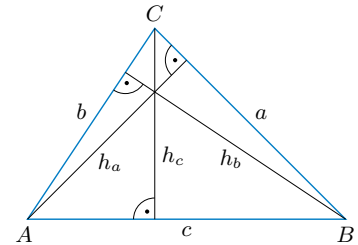
Udowodnij, że wysokości trójkąta są odwrotnie proporcjonalne do długości boków, na które je opuszczono.

Rozpatrzmy trójkąt o bokach a, b i c oraz wysokościach h_a, h_b i h_c (rysunek obok). Wówczas pole trójkąta ABC :

$$P = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b$$

Stąd $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$.

Analogicznie $\frac{h_a}{h_c} = \frac{c}{a}$ oraz $\frac{h_b}{h_c} = \frac{c}{b}$.



Ćwiczenie 4

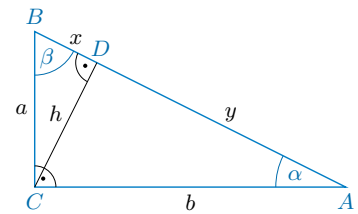
Udowodnij, że jeśli wysokości jednego trójkąta są proporcjonalne do wysokości drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

Ćwiczenie 5

Na rysunku przedstawiono trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a, b i przeciwprostokątnej długości $x+y$, gdzie x i y są długościami odcinków, na które wysokość h podzieliła przeciwprostokątną. Udowodnij, że:

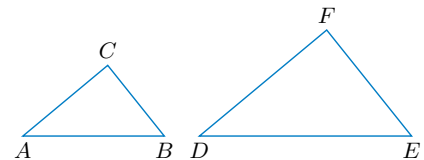
a) $h = \frac{ab}{x+y},$ c) $a = \sqrt{x(x+y)},$

b) $h = \sqrt{xy},$ d) $b = \sqrt{y(x+y)}.$

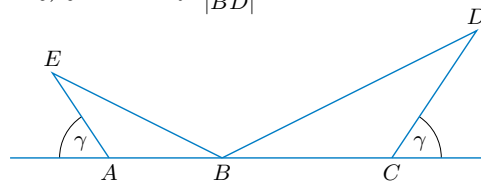


Zadania

1. Boki trójkąta ABC są równoległe do odpowiednich boków trójkąta DEF (rysunek obok). Udowodnij, że trójkąty te są podobne.



2. Wykaż, że jeśli $\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|CB|}$, to stosunek obwodów trójkątów ABE i CBD (rysunek poniżej) jest równy $\frac{|BE|}{|BD|}$.



Odpowiedzi do zadań

1. Z równoległości odpowiednich boków wynika, że $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle FDE$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DFE$.

Zatem na podstawie cechy KKK: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

2. $\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|CB|}$, skąd $\frac{|AE|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|CB|}$

Ponadto $\sphericalangle EAB = \sphericalangle DCB$, więc na podstawie cechy BKB:

$$\triangle ABE \sim \triangle CBD$$

$$\frac{|AE|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|CB|} = \frac{|BE|}{|BD|} = k,$$

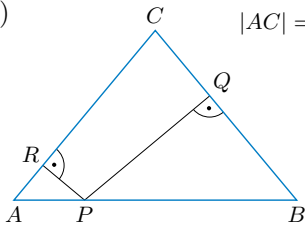
gdzie k jest skalą podobieństwa trójkątów.

$$\frac{Ob_{ABE}}{Ob_{CBD}} = \frac{|AB|+|BE|+|AE|}{|CB|+|BD|+|DC|} = \frac{k|CB|+k|BD|+k|DC|}{|CB|+|BD|+|DC|} = \frac{k(|CB|+|BD|+|DC|)}{|CB|+|BD|+|DC|} = k = \frac{|BE|}{|BD|}$$

3. Wewnątrz trójkąta ABC obrano punkt P tak, że $\sphericalangle CAP = \sphericalangle CBP$. Wykaż, że $\triangle APL \sim \triangle BPK$ oraz $\triangle APB \sim \triangle KLP$, gdzie punkty K i L są punktami przecięcia prostych AP i BP odpowiednio z bokami BC i AC .

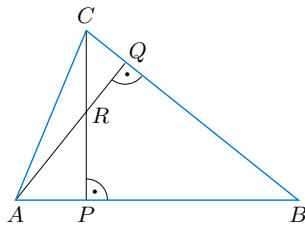
4. Korzystając z podanych informacji, wykaż, że $x = y$.

a) $|AC| = |BC|$



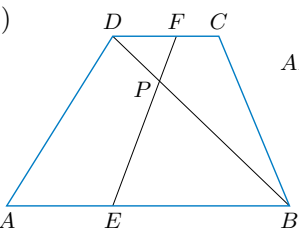
$$x = |AR| \cdot |PQ|, y = |PR| \cdot |BQ|$$

c)



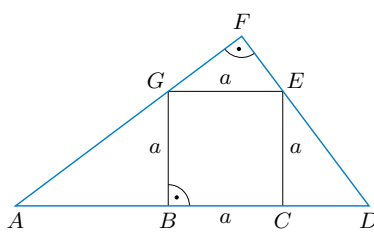
$$x = |AR| \cdot |QR|, y = |PR| \cdot |CR|$$

b) $AB \parallel DC$



$$x = |FD| \cdot |PB|, y = |EB| \cdot |PD|$$

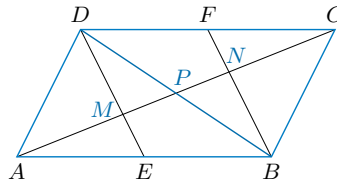
d)



$$x = a^2, y = |AB| \cdot |CD|$$

5. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC oraz $\sphericalangle ACM = \sphericalangle ABC$. Wykaż, że $|AB| = \sqrt{2} \cdot |AC|$.

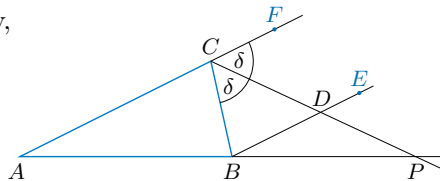
6. Punkty E i F są środkami boków AB i DC równoległoboku $ABCD$. Wykaż, że odcinki DE i FB dzielą przekątną AC na trzy odcinki równej długości.



7. Dany jest trójkąt ABC . Punkt P jest punktem przecięcia prostej będącej przedłużeniem boku AB i dwusiecznej kąta zewnętrznego trójkąta (rysunek poniżej). Odcinek BD jest równoległy do odcinka AC . Wykaż, że:

- a) trójkąt BCD jest równoramienny,

b) $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|BP|}$.



6. Przekątne w równoległoboku przecinają się w połowie, stąd $|BP| = |PD|$ i $|AP| = |PC| = \frac{1}{2}|AC|$.

AP i DE są środkowymi w $\triangle ABD$, więc dzielą się w stosunku 2:1, czyli:

$$|AM| = \frac{2}{3}|AP| = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{3}|AC|$$

Analogicznie w $\triangle CDB$ środkowe BF i CP dzielą się w stosunku 2:1, czyli:

$$|NC| = \frac{2}{3}|PC| = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{3}|AC|$$

$$|MN| = |AC| - |AM| - |NC| = |AC| - \frac{1}{3}|AC| - \frac{1}{3}|AC| = \frac{1}{3}|AC| = |AM| = |NC|$$

7. a) $\sphericalangle EDP = \sphericalangle FCD = \delta$ (kąty odpowiadające), $\sphericalangle BDC = \sphericalangle PDE = \delta$ (kąty wierzchołkowe). Stąd $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BCD$, zatem $\triangle BDC$ jest równoramienny oraz $|BD| = |BC|$.

b) $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BDP$ (kąty odpowiadające), $\sphericalangle CAP = \sphericalangle DBP$ (kąty odpowiadające), $\sphericalangle APC = \sphericalangle BPD$ (ten sam kąt). Zatem $\triangle APC \sim \triangle BPD$, stąd $\frac{|AC|}{|BD|} = \frac{|AP|}{|BP|}$.

4. a) Trójkąt ABC jest równoramienny.

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA$$

$$\sphericalangle ARP = \sphericalangle BQP = 90^\circ,$$

$$\text{więc } \sphericalangle RPA = \sphericalangle QPB$$

Zatem na podstawie cechy

$$\text{KKK: } \triangle APR \sim \triangle BPQ$$

Stąd:

$$\frac{|AR|}{|BQ|} = \frac{|PR|}{|PQ|}$$

$$|AR| \cdot |PQ| = |PR| \cdot |BQ|,$$

czyli $x = y$.

b) $\sphericalangle EBP = \sphericalangle FDP$,

$$\sphericalangle BEP = \sphericalangle DFP \text{ (kąty}$$

$$\text{naprzemianległe) oraz}$$

$$\sphericalangle EPB = \sphericalangle FPD \text{ (kąty}$$

$$\text{wierzchołkowe)}$$

$$\triangle EPB \sim \triangle FPD \text{ (cecha KKK)}$$

$$\text{Zatem } \frac{|FD|}{|EB|} = \frac{|PD|}{|PB|}, \text{ więc}$$

$$|FD| \cdot |PB| = |EB| \cdot |PD|,$$

czyli $x = y$.

c) $\sphericalangle ARP = \sphericalangle CRQ$ (kąty wierzchołkowe)

$$\triangle APR \sim \triangle CQR \text{ (cecha KKK)}$$

$$\text{Zatem } \frac{|AR|}{|CR|} = \frac{|PR|}{|QR|}, \text{ więc}$$

$$|AR| \cdot |QR| = |PR| \cdot |CR|,$$

czyli $x = y$.

d) $\sphericalangle ABG = \sphericalangle ECD = 90^\circ$

$$\sphericalangle AGB = \sphericalangle ADF = \sphericalangle CDE$$

Trójkąty ABG i ECD są podobne (na podstawie cechy KKK).

$$\text{Zatem } \frac{|AB|}{a} = \frac{a}{|CD|}, \text{ więc}$$

$$a^2 = |AB| \cdot |CD|, \text{ czyli } x = y.$$

5. $|AM| = \frac{1}{2}|AB|$

$$\text{Niech } \sphericalangle BAC = \alpha,$$

$$\sphericalangle ACM = \sphericalangle ABC = \beta.$$

Wówczas:

$$\sphericalangle AMC = 180^\circ - \alpha - \beta, \text{ stąd}$$

$$\sphericalangle BMC = \alpha + \beta, \text{ czyli}$$

$$\sphericalangle BCM = 180^\circ - \alpha - 2\beta.$$

Stąd:

$$\sphericalangle ACB = 180^\circ - \alpha - \beta =$$

$$= \sphericalangle AMC$$

Zatem trójkąty ABC , ACM

są podobne (na podstawie cechy KKK). Wówczas:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AM|},$$

$$\text{stąd } |AC|^2 = |AB| \cdot |AM| =$$

$$= \frac{1}{2}|AB|^2,$$

$$\text{czyli } |AB|^2 = 2|AC|^2,$$

$$\text{zatem } |AB| = \sqrt{2}|AC|.$$

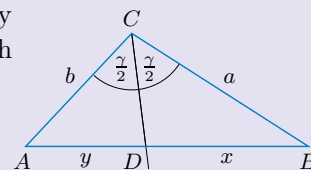
Różne dowody twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie

Poniższe twierdzenie zostało przedstawione w klasie pierwszej.

Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

Dwusieczna kąta w trójkącie dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalne do pozostałych boków trójkąta:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$



Dowód 1

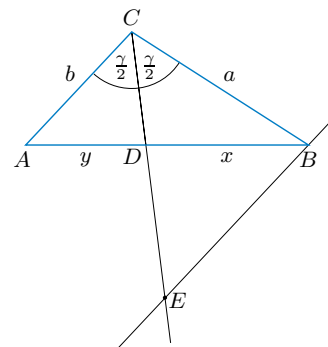
Prowadzimy prostą równoległą do boku AC trójkąta ABC i przechodzącą przez wierzchołek B aż do przecięcia z dwusieczną CD kąta ACB . Punkt przecięcia oznaczamy przez E .

Kąty ACE i CEB są naprzemianległe, zatem $\sphericalangle CEB = \frac{\gamma}{2}$.

$\sphericalangle CEB = \sphericalangle ECB$, więc trójkąt BCE jest równoramienny, zatem $|EB| = |BC| = a$.

Na podstawie cechy KKK trójkąty ADC i BDE są podobne, zatem:

$$\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|BE|}{|AC|}, \text{ czyli } \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$



Dowód 2

Niech $\delta = \sphericalangle ADC$.

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta ADC otrzymujemy:

$$\frac{y}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{b}{\sin \delta}$$

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta BDC otrzymujemy:

$$\frac{x}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{a}{\sin(180^\circ - \delta)}$$

Zauważmy, że $\sin(180^\circ - \delta) = \sin \delta$, zatem:

$$\frac{y}{b} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \delta} = \frac{x}{a}$$

skąd otrzymujemy:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

