

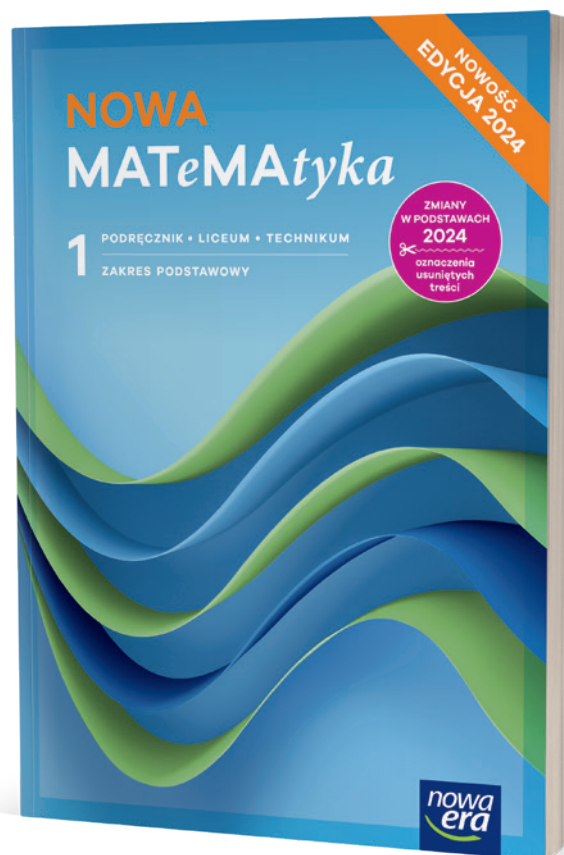
NOWA
MATeMATyka

Podręcznik Nauczyciela

LICEUM • TECHNIKUM • ZAKRES PODSTAWOWY

Nowość
EDYCJA 2024

1



ZMIANY
W PODSTAWACH
2024



oznaczenia
usuniętych
treści

Podręcznik Nauczyciela zawiera:

- podręcznik ucznia z oznaczeniami treści, które od września 2024 r. nie są już wymagane ✂
- odpowiedzi do wszystkich ćwiczeń i zadań
- rozwiązania trudniejszych zadań
- odnośniki do Multibooka
- komentarze merytoryczne

Program nauczania i inne materiały
dydaktyczne są dostępne w portalu:

dlanauczyciela.pl

nowa
era

Elektroniczna wersja podręcznika uczniowskiego wzbogacona o zasoby cyfrowe. Kreatory wykresów, animacje, plansze interaktywne ułatwiają wprowadzanie nowych pojęć i zagadnień.

Pobierz aplikację i zacieka swych uczniów



1. Potwierdź w koncie Moja Nowa Era, że uczysz z serii NOWA MATeMATyka.



2. Pobierz aplikację *Multibook – matematyka* ze strony dlanauczyciela.pl i zainstaluj ją na swoim komputerze.



3. Zaloguj się w aplikacji danymi z konta Moja Nowa Era.



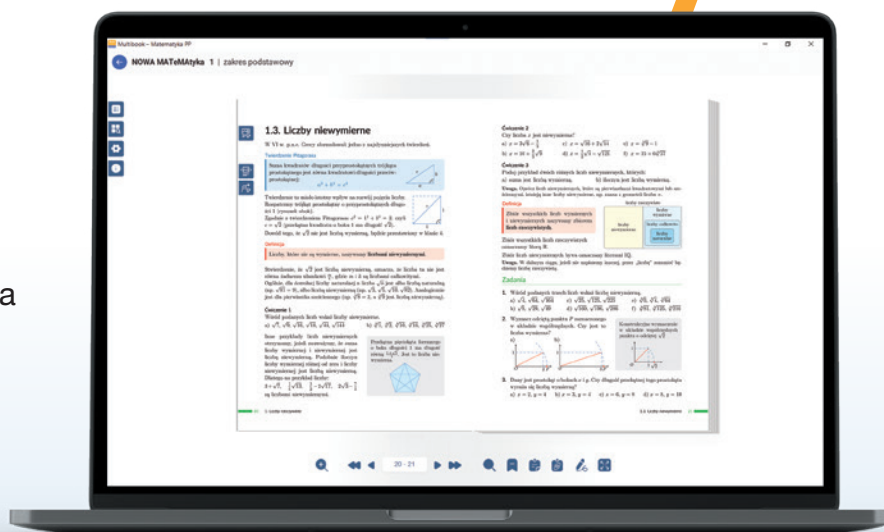
4. Wyświetlaj podręczniki i zasoby na tablicy lub monitorze interaktywnym.



Dodawaj własne notatki i linki.



Powiększaj zadania z podręcznika.



NOWA
MATeMATyka

Podręcznik Nauczyciela

1

LICEUM • TECHNIKUM • ZAKRES PODSTAWOWY

NOWA MATeMATyka

Podręcznik Nauczyciela 1 został przygotowany do podręcznika autorstwa Wojciecha Babińskiego, Lecha Chańko, Jerzego Janowicza, Doroty Ponczek, Ewy Szmytkiewicz, Karoliny Wej *NOWA MATeMATyka 1* dopuszczonego do użytku szkolnego i wpisanego do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w szkołach ponadpodstawowych w zakresie podstawowym (971/1/2024/z1).

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl

Wykorzystywanie treści niniejszego Utworu, w jakiegokolwiek formie lub w jakimkolwiek procesie, do celów eksploracji tekstu i danych, uczenia maszynowego, rozwoju i/lub szkolenia i/lub wzbogacania sztucznej inteligencji jakiegokolwiek rodzaju jest surowo zabronione.



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2024

ISBN 978-83-267-5153-0

W publikacji zamieszczono strony z podręcznika *NOWA MATeMATyka* dla klasy 1 szkoły ponadpodstawowej w zakresie podstawowym.

© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2024

Autor komentarzy i rozwiązań zadań: Barbara Jedynak, Jacek Klisowski.

Redakcja merytoryczna: Anna Drążek, Beata Zając.

Redakcja językowa: Paulina Szulim.

Opieka graficzna: Maciej Galiński, Marcin Oleksak.

Projekt graficzny: Ewa Kaletyn.

Projekt okładki: Maciej Galiński.

Rysunki merytoryczne: Lech Chańko.

Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko.

Zdjęcie na okładce: Shutterstock/Vink Fan.

Zdjęcia: Archiwum NE s. 41 (Merkury, Ziemia, Jowisz), s. 64; BE&W: Alamy Stock Photo - Alvey&Towers Picture Library s. 136, Bruce Leighty - Sports Images s. 146; Getty Images: E+/Deeplilot s. 61, E+/mbirdy s. 241, Moment/George Pachantouris s. 111; Shutterstock: Africa Studio s. 174, Alex-505 s. 130 (10 centów), Amanda Carden s. 41 (Słońce), Bojan Pavukovic s. 16, ch123 s. 268, Delpixel s. 133 (łódź na rzece), Inger Eriksen s. 221, Juice Dash s. 145, Lukas Gajda s. 199, Nadia Korol s. 135, Potapov Alexander s. 97, rsooli s. 130 (5 centów), Tongsai s. 133 (kuter), Tony Baggett s. 130 (25 centów); Lech Chańko s. 9, 24, 267.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w publikacji. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Druk i oprawa: Techgraf, Łańcut

NOWA MATeMATyka

1 PODRĘCZNIK • LICEUM • TECHNIKUM
ZAKRES PODSTAWOWY

WOJCIECH BABIAŃSKI
LECH CHAŃKO
JERZY JANOWICZ
DOROTA PONCZEK
EWA SZMYTKIEWICZ
KAROLINA WEJ

**nowa
era** *Twoje mocne strony*

NOWA MATeMATyka

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w zakresie podstawowym, na podstawie opinii rzeczoznawców:

dr. hab. Gustawa Trelińskiego, dr. Jacka Stańdo, mgr Teresy Kosyry-Cieślak.

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa

Rok dopuszczenia: 2024

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 971/1/2024/z1

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* (2024) autorstwa Agnieszki Kamińskiej i Doroty Ponczek.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujemy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl

Wykorzystywanie treści niniejszego Utworu, w jakiegokolwiek formie lub w jakimkolwiek procesie, do celów eksploracji tekstu i danych, uczenia maszynowego, rozwoju i/lub szkolenia i/lub wzbogacania sztucznej inteligencji jakiegokolwiek rodzaju jest surowo zabronione.



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2024

ISBN 978-83-267-5019-9

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Ewa Kowalik, Katarzyna Radziwińska

Współpraca redakcyjna: Urszula Cielniak

Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak

Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski, Barbara Sasim-Leciejewska

Redakcja językowa: Marta Zuchowicz

Opieka graficzna: Maciej Galiński, Marcin Oleksak

Projekt graficzny: Marek Błoszko, Ewa Kaletyn, Piotr Stopczyński

Projekt okładki: Maciej Galiński

Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska

Rysunki merytoryczne: Lech Chańko

Ilustracje: Krzysztof Mrawiński

Opracowanie graficzne infografik: Marek Błoszko, Aleksandra Szpunar, Alicja Skupin-Podwojewska

Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Druk i oprawa: Quad/Graphics Europe Sp. z o.o.

Spis treści

► 1. Liczby rzeczywiste

Cechy podzielności liczb – przypomnij sobie	10
1.1. Liczby naturalne	11
Działania na liczbach całkowitych i ułamkach zwykłych – przypomnij sobie ..	15
1.2. Liczby całkowite. Liczby wymierne	16
Pierwiastek kwadratowy i pierwiastek sześcienny – przypomnij sobie	19
1.3. Liczby niewymierne	20
Działania na ułamkach dziesiętnych i ułamkach zwykłych – przypomnij sobie ..	23
1.4. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej	24
1.5. Pierwiastek kwadratowy	28
1.6. Pierwiastek sześcienny. Pierwiastek n -tego stopnia	31
1.7. Potęga o wykładniku naturalnym	35
1.8. Potęga o wykładniku całkowitym. Notacja wykładnicza	37
1.9. Potęga o wykładniku wymiernym	42
1.10. Logarytm i jego własności	45
1.11. Procenty	48
Powtórzenie	53
Sposób na zadanie	56
Przed obowiązkową maturą z matematyki	57

► 2. Język matematyki

2.1. Zbiory	62
2.2. Działania na zbiorach	65
Oś liczbowa – przypomnij sobie	69
2.3. Przedziały	70
2.4. Działania na przedziałach	74
Rozwiązywanie równań – przypomnij sobie	76
2.5. Rozwiązywanie nierówności	77
Sumy algebraiczne. Redukcja wyrazów podobnych – przypomnij sobie	81
2.6. Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian	82
2.7. Wyłączanie jednomianu przed nawias	85
2.8. Mnożenie sum algebraicznych	88
2.9. Wzory skróconego mnożenia	93
2.10. Zastosowanie przekształceń algebraicznych	98
2.11. Wartość bezwzględna	101
Powtórzenie	104



Sposób na zadanie	106
Przed obowiązkową maturą z matematyki	107

► 3. Układy równań

Wykorzystanie równań do rozwiązywania zadań – przypomnij sobie	112
3.1. Co to jest układ równań	113
3.2. Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania	116
3.3. Rozwiązywanie układów równań metodą przeciwnych współczynników	122
3.4. Układy równań – zadania tekstowe (1)	128
3.5. Układy równań – zadania tekstowe (2)	132
Powtórzenie	137
Sposób na zadanie	140
Przed obowiązkową maturą z matematyki	141

► 4. Funkcje

4.1. Pojęcie funkcji	146
Układ współrzędnych – przypomnij sobie	151
4.2. Szkicowanie wykresu funkcji (1)	152
4.3. Szkicowanie wykresu funkcji (2)	157
4.4. Monotoniczność funkcji	162
Wykorzystanie wykresu do prezentacji informacji – przypomnij sobie	166
4.5. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (1)	167
4.6. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (2)	171
4.7. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OY	175
4.8. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OX	177
4.9. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi OX	181
4.10. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi OY	185
4.11. Proporcjonalność odwrotna	188
Powtórzenie	191
Sposób na zadanie	194
Przed obowiązkową maturą z matematyki	195

► 5. Funkcja liniowa

Punkty kratowe należące do prostej – przypomnij sobie	200
5.1. Wykres funkcji liniowej (1)	201
5.2. Wykres funkcji liniowej (2)	205
5.3. Własności funkcji liniowej	208
5.4. Równanie prostej na płaszczyźnie	213
5.5. Współczynnik kierunkowy prostej	217



5.6. Warunek prostokątności prostych	222
Układy równań – przypomnij sobie	226
5.7. Interpretacja geometryczna układu równań liniowych	227
5.8. Funkcja liniowa – zastosowania	231
Powtórzenie	234
Sposób na zadanie	236
Przed obowiązkową maturą z matematyki	237
► 6. Planimetria	
Kąty – przypomnij sobie	242
6.1. Miary kątów w trójkącie	243
6.2. Trójkąty przystające	246
6.3. Twierdzenie Talesa	251
6.4. Wielokąty podobne	255
6.5. Trójkąty podobne	259
Pola czworokątów – przypomnij sobie	263
6.6. Pola wielokątów podobnych	264
 6.7. Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie	269
Problemy konstrukcyjne	271
Powtórzenie	273
Sposób na zadanie	275
Przed obowiązkową maturą z matematyki	276
Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań	280
Indeks	315
Wybrane wzory i twierdzenia matematyczne	318

Odpowiedzi do poleceń i rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

 Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.

 Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu należy skorzystać z kalkulatora.

1 Liczby rzeczywiste

Podstawowe dane holownika „Stefan” przedstawionego na zdjęciu: długość 28,74 m, szerokość 6,53 m, zanurzenie 2,6 m, prędkość maksymalna 10 węzłów. Prędkość statków morskich podaje się w węzłach, czyli w milach morskich na godzinę. Jedna mila morska (Mm) to przybliżona długość takiego łuku południka, który jest wyznaczony przez 1 minutę kątową (1/60 stopnia). Południk jest w przybliżeniu półokręgiem o długości 20 000 km. Zatem:

$$1 \text{ Mm} \approx \frac{20\,000 \text{ km}}{180 \cdot 60} \approx 1,851852 \text{ km}$$

Otrzymany wynik zaokrągla się do pełnych metrów, czyli przyjmuje się, że $1 \text{ Mm} = 1852 \text{ m}$.



Cechy podzielności liczb

Twierdzenie

Liczba naturalna jest podzielna przez:

- 2, gdy ostatnią jej cyfrą jest jedna z cyfr 0, 2, 4, 6, 8;
- 3, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3;
- 4, gdy jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4;
- 5, gdy ostatnią jej cyfrą jest 0 lub 5;
- 9, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9.

Odpowiedzi do zadań

1. a) 3, 5
b) 2, 3, 9
c) 2, 5
d) 2, 3
2. a), c) nie
b), d) tak
3. a) 0, 4, 8
b) 2, 6
c) 1, 3, 5, 7, 9
d) 0, 4, 8
4. a) 2, 5, 8
b) 1, 4, 7
c) 0, 3, 6, 9
d) nie ma takiej cyfry
5. a), d) tak
b), c) nie
6. a) 6, 12
b) 6, 15
c) przez żadną
d) 6
7. a) $a = 6$
b) $a = 0$ lub $a = 6$
c) $a = 2$ lub $a = 6$
d) $a = 6$

1. Przez które z liczb 2, 3, 5, 9 jest podzielna liczba:
a) 653 925, b) 574 038, c) 946 030, d) 749 298?
2. Czy liczba n jest podzielna przez 4?
a) $n = 63\,874$ b) $n = 58\,052$ c) $n = 35\,406$ d) $n = 47\,796$
3. Jaką cyfrę można podstawić za a , aby dana liczba była podzielna przez 4?
a) 684 56a b) 23 53a c) 21 5a6 d) 35 7aa
4. Jaką cyfrę można podstawić za a , aby dana liczba była podzielna przez 3?
a) 333 3a4 b) 64a 871 c) 434 a4a d) 5aa 6a3
5. Wyszukaj w dostępnych źródłach cechę podzielności liczby naturalnej przez 8. Sprawdź, czy liczba x jest podzielna przez 8.
a) $x = 713\,592$ b) $x = 639\,044$ c) $x = 480\,658$ d) $x = 817\,296$
6. Przeczytaj przykład obok i podaj przez które z liczb 6, 12, 15 jest podzielna liczba:
a) 775 584, c) 894 665,
b) 868 470, d) 501 474.
7. Dana jest liczba siedmiocyfrowa 3 150 57a, gdzie a oznacza cyfrę jedności. Wyznacz tę liczbę przy założeniu, że jest ona podzielna przez:
a) 9, b) 6, c) 4, d) 8.
8. Nie wykonując dzielenia, ustal, przez które spośród liczb 15, 45, 75 jest podzielna liczba:
a) 1155, b) 9825, c) 5165, d) 8235.

Liczba 69 222 jest podzielna przez 2 i przez 3, ale nie jest podzielna przez 4. Zatem liczba ta jest podzielna przez 6, ale nie jest podzielna przez 12.

8. Liczba naturalna jest podzielna przez 45, gdy jest podzielna przez 5 i 9.

Liczba naturalna jest podzielna przez 75, gdy jest podzielna przez 3 i 25, czyli gdy suma cyfr jest podzielna przez 3, a jej ostatnimi cyframi są: 00 lub 25, lub 50, lub 75.

- a) 15
- b) 15, 75
- c) przez żadną
- d) 15, 45

1.1. Liczby naturalne



Liczb naturalnych: 0, 1, 2, 3, ... jest nieskończenie wiele. Dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje następna liczba naturalna: $n + 1$. Na przykład po milionie następuje milion jeden, potem milion dwa, milion trzy, a po trylionie (liczba zapisywana jako jedynka z 18 zerami) – trylion jeden itd.

Zbiór wszystkich liczb naturalnych oznaczamy literą $\mathbb{N}$.

Definicja

Niech m i n będą liczbami naturalnymi oraz $m \neq 0$. Liczbę m nazywamy **dzielnikiem** liczby n , gdy istnieje taka liczba naturalna k , że $n = m \cdot k$.

Jeśli liczba m jest dzielnikiem liczby n , to mówimy, że liczba n jest **podzielna** przez liczbę m lub że liczba n jest **wielokrotnością** liczby m .

Zauważ, że:

- liczba 1 jest dzielnikiem każdej liczby naturalnej,
- liczba 0 nie jest dzielnikiem żadnej liczby,
- każda dodatnia liczba naturalna jest dzielnikiem liczby 0.

Przykład 1

Wymień dzielniki liczby 54.

Liczba 54 ma następujące dzielniki: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54.

Ćwiczenie 1

Wymień dzielniki liczby:

- a) 12, b) 28, c) 36, d) 48.

Podzielność liczb naturalnych zapisujemy w następujący sposób:

- zapis $3 | n$ czytamy: 3 dzieli n lub inaczej: liczba n jest podzielna przez 3,
- zapis $7 \nmid n$ czytamy: 7 nie dzieli n lub inaczej: liczba n nie jest podzielna przez 7.

Niech n będzie liczbą naturalną.

Jeśli $2 | n$, to liczbę n nazywamy **parzystą**.

Jeśli $2 \nmid n$, to liczbę n nazywamy **nieparzystą**.

Liczbę **parzystą** możemy zapisać w postaci $2k$, a **nieparzystą** – w postaci $2k + 1$, gdzie k jest liczbą naturalną.

Uczeń:

- podaje przykłady liczb pierwszych, liczb parzystych i nieparzystych,
- podaje dzielniki danej liczby naturalnej,
- przedstawia liczbę naturalną w postaci iloczynu liczb pierwszych,
- oblicza NWD i NWW dwóch liczb naturalnych,
- przeprowadza proste dowody twierdzeń dotyczących podzielności liczb.

Komentarz

Czasem przyjmuje się, że najmniejszą liczbą naturalną jest liczba 1. Warto zwrócić uwagę na to, że jest to kwestia umowy.

Ćwiczenie 1

- a) 1, 2, 3, 4, 6, 12
b) 1, 2, 4, 7, 14, 28
c) 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
d) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

Multibook

• Zbiory liczbowe

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.1



Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

- a) Tak, suma cyfr tej liczby jest równa 15, więc jest ona podzielna przez 3.
b) Nie, $111 = 11 \cdot 10 + 1$.
c) Tak, liczba jest podzielna przez 5, ale suma cyfr tej liczby wynosi 14, więc liczba nie jest podzielna przez 3, a tym samym nie jest podzielna przez 15.
d) Nie, $4949 : 7 = 707$.

Komentarz

Cechy podzielności przez 2, 3, 5 i 9 przypominane są na str. 10.

Ćwiczenie 3

- a) $26 = 3 \cdot 8 + 2$
b) $76 = 3 \cdot 25 + 1$
c) $108 = 3 \cdot 36$
d) $127 = 3 \cdot 42 + 1$
e) $713 = 3 \cdot 237 + 2$

Ćwiczenie 4

- a) $3 = 4 \cdot 0 + 3$
b) $49 = 4 \cdot 12 + 1$
c) $79 = 4 \cdot 19 + 3$
d) $126 = 4 \cdot 31 + 2$
e) $492 = 4 \cdot 123$

Między liczbami 1 i 100 jest 25 liczb pierwszych: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Komentarz

Warto zwrócić uwagę uczniów na to, że liczba 2 jest jedyną parzystą liczbą pierwszą.

Ćwiczenie 2

Czy podane stwierdzenie jest prawdziwe?

- a) $3 \mid 323\,232$ b) $11 \mid 111$ c) $15 \nmid 2345$ d) $7 \nmid 4949$

Zamiast mówić, że liczba 3 jest dzielnikiem liczby 45, możemy też powiedzieć, że liczba 45 **dzieli się** przez 3 **bez reszty**. $45 : 3 = 15$ reszta 0

W wyniku podzielenia liczby 47 przez 3, otrzymujemy $47 : 3 = 15$ reszta 2. 15 i resztę 2.

Oznacza to, że liczbę 47 możemy przedstawić w postaci $47 = 3 \cdot 15 + 2$.

Ćwiczenie 3

Zapisz liczbę w postaci $3k$, $3k + 1$ lub $3k + 2$, gdzie k jest liczbą naturalną.

- a) 26 b) 76 c) 108 d) 127 e) 713

Ćwiczenie 4

Zapisz liczbę w postaci $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$ lub $4k + 3$, gdzie k jest liczbą naturalną.

- a) 3 b) 49 c) 79 d) 126 e) 492

Definicja

Liczbę naturalną, która ma dokładnie dwa dzielniki (1 i samą siebie), nazywamy **liczbą pierwszą**. Każdą liczbę naturalną większą od 1, która nie jest liczbą pierwszą, nazywamy **liczbą złożoną**.

Liczbami pierwszymi są na przykład liczby 7 i 37.

Zwróć uwagę na to, że liczb 0 i 1 nie zaliczamy ani do liczb pierwszych, ani do złożonych (jakie są dzielniki liczby 1, a jakie liczby 0?).

Grecki matematyk Euklides (żyjący na przełomie IV i III w. p.n.e.) udowodnił, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Ćwiczenie 5

Podaj wszystkie liczby pierwsze:

- a) parzyste,
b) mniejsze od 20,
c) większe od 20 i mniejsze od 50,
d) większe od 50 i mniejsze od 100.

Liczby pierwsze między 100 a 1000:

101	179	263	353	443	547	641	739	839	947
103	181	269	359	449	557	643	743	853	953
107	191	271	367	457	563	647	751	857	967
109	193	277	373	461	569	653	757	859	971
113	197	281	379	463	571	659	761	863	977
127	199	283	383	467	577	661	769	877	983
131	211	293	389	479	587	673	773	881	991
137	223	307	397	487	593	677	787	883	997
139	227	311	401	491	599	683	797	887	
149	229	313	409	499	601	691	809	907	
151	233	317	419	503	607	701	811	911	
157	239	331	421	509	613	709	821	919	
163	241	337	431	521	617	719	823	929	
167	251	347	433	523	619	727	827	937	
173	257	349	439	541	631	733	829	941	

Ćwiczenie 5

- a) 2
b) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19
c) 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47
d) 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Rozkład liczby naturalnej na czynniki jest przedstawieniem tej liczby w postaci iloczynu liczb naturalnych większych od 1. Na przykład liczbę 52 można rozłożyć na czynniki następująco:

$$52 = 2 \cdot 26, \quad 52 = 4 \cdot 13, \quad 52 = 2 \cdot 2 \cdot 13$$

Ostatni z tych rozkładów jest rozkładem na czynniki będące liczbami pierwszymi. Mówimy krótko, że jest to **rozkład na czynniki pierwsze**.

Uwaga. Zauważmy, że $2 \cdot 2 \cdot 13$ jest tym samym rozkładem co np. $2 \cdot 13 \cdot 2$.

Twierdzenie

Każdą liczbę złożoną można rozłożyć na czynniki pierwsze. Istnieje dokładnie jeden taki rozkład (z dokładnością do kolejności czynników).

Rozkład na czynniki pierwsze liczby złożonej odbywa się zwykle w kilku krokach. Na przykład dla liczby 150 mamy:

$$150 = 3 \cdot 50 = 3 \cdot 2 \cdot 25 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

Rozkład możemy też zapisać tak, jak podano obok.

$$\begin{array}{r|l} 150 & 3 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Ćwiczenie 6

Podaj rozkłady na czynniki pierwsze liczb 99, 720, 770, 1024, 1323.

Praktycznym zastosowaniem rozkładu na czynniki pierwsze jest wyznaczanie **najmniejszej wspólnej wielokrotności** dwóch liczb – NWW oraz **największego wspólnego dzielnika** – NWD.

Przykład 2

Korzystając z podanych obok rozkładów na czynniki pierwsze liczb 120 i 54, otrzymujemy:

$$\text{NWW}(120, 54) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 1080$$

$$\text{NWD}(120, 54) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Ćwiczenie 7

Oblicz $\text{NWD}(x, y)$ oraz $\text{NWW}(x, y)$.

a) $x = 18, y = 30$

c) $x = 24, y = 72$

e) $x = 84, y = 105$

b) $x = 15, y = 50$

d) $x = 144, y = 192$

f) $x = 196, y = 420$

Ćwiczenie 8

Dane są dwie liczby x i y takie, że żaden czynnik występujący w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby x nie występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby y . Wyznacz $\text{NWD}(x, y)$ i $\text{NWW}(x, y)$.

Ćwiczenie 8

$$\text{NWD}(x, y) = 1, \quad \text{NWW}(x, y) = x \cdot y$$

Komentarz

Liczby, o których jest mowa w ćwiczeniu 8 nazywamy **liczbami względnie pierwszymi**.

Dla $x, y, a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zachodzą następujące własności:

1) $\text{NWD}(x, y) = \text{NWD}(y, x)$

2) $\text{NWW}(x, y) = \text{NWW}(y, x)$

3) $\text{NWD}(a \cdot x, a \cdot y) = a \cdot \text{NWD}(x, y)$

4) $\text{NWD}(x, y) \cdot \text{NWW}(x, y) = x \cdot y$

Komentarz

Liczba 1 na podstawie definicji nie jest liczbą pierwszą. Taką definicję liczb pierwszych przyjęto między innymi po to, by zapewnić jednoznaczność rozkładu liczby na czynniki pierwsze. Gdyby przyjąć, że 1 jest liczbą pierwszą, mielibyśmy dwa możliwe rozkłady na czynniki pierwsze. Na przykład dla liczby 15 byłoby $15 = 3 \cdot 5$ oraz $15 = 1 \cdot 3 \cdot 5$.

Ćwiczenie 6

$$99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$$

$$720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$770 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$

$$1024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$1323 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$$

Ćwiczenie 7

a) $\text{NWD}(18, 30) = 6,$

$$\text{NWW}(18, 30) = 90$$

b) $\text{NWD}(15, 50) = 5,$

$$\text{NWW}(15, 50) = 150$$

c) $\text{NWD}(24, 72) = 24,$

$$\text{NWW}(24, 72) = 72$$

d) $\text{NWD}(144, 192) = 48,$

$$\text{NWW}(144, 192) = 576$$

e) $\text{NWD}(84, 105) = 21,$

$$\text{NWW}(84, 105) = 420$$

f) $\text{NWD}(196, 420) = 28,$

$$\text{NWW}(196, 420) = 2940$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) 2, 4 b) 2, 3, 6 c) 3, 9
d) 2, 3, 4, 6, 12
e) 2, 3, 4, 6, 9, 12
2. a) 41 b) 26 c) 23 d) 19
3. a) $5 \cdot 7 + 4$ b) $5 \cdot 12 + 2$
c) $5 \cdot 31 + 1$ d) $5 \cdot 55 + 0$
4. a) nie, $46 = 6 \cdot 7 + 4$
b) tak, $74 = 6 \cdot 12 + 2$
c) tak, $147 = 6 \cdot 24 + 3$
d) nie, $276 = 6 \cdot 46$
5. a) $6n + 9$ b) $6n + 3$
c) $6n - 9$ d) $12n + 15$
6. a) Rozważmy trzy kolejne liczby naturalne podzielne przez 3: $3n, 3n + 3, 3n + 6$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Wówczas:
 $3n + (3n + 3) + (3n + 6) = 9n + 9 = 9(n + 1)$
czyli jest to liczba podzielna przez 9.
b) Rozważmy cztery kolejne liczby nieparzyste: $2n + 1, 2n + 3, 2n + 5, 2n + 7$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Wówczas:
 $(2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) + (2n + 7) = 8n + 16 = 8(n + 2)$
czyli jest to liczba podzielna przez 8.
c) Rozważmy pięć kolejnych liczb parzystych:
 $2n, 2n + 2, 2n + 4, 2n + 6, 2n + 8$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.
Wówczas:
 $2n + (2n + 2) + (2n + 4) + (2n + 6) + (2n + 8) = 10n + 20 = 10(n + 2)$
czyli jest to liczba podzielna przez 10, co było do uzasadnienia.
8. a) 6 b) 4 c) 2 d) 9 e) 12
9. a) 9 reszta 3 b) 25 reszta 0
c) 18 reszta 1 d) 184 reszta 2
e) 540 reszta 1
10. a) $\text{NWD}(24, 40) = 8$, $\text{NWW}(24, 40) = 120$
b) $\text{NWD}(36, 45) = 9$, $\text{NWW}(36, 45) = 180$
c) $\text{NWD}(48, 72) = 24$, $\text{NWW}(48, 72) = 144$
d) $\text{NWD}(54, 96) = 6$, $\text{NWW}(54, 96) = 864$
e) $\text{NWD}(112, 144) = 16$, $\text{NWW}(112, 144) = 1008$
f) $\text{NWD}(105, 150) = 15$, $\text{NWW}(105, 150) = 1050$

Zadania

1. Które spośród liczb 2, 3, 4, 6, 9, 12 są dzielnikami podanej liczby?
a) 256 b) 294 c) 405 d) 588 e) 648
2. Ile jest liczb naturalnych mniejszych od 201 i podzielnych przez:
a) 5, b) 8, c) 9, d) 11?
3. Przedstaw liczbę n w postaci $5k + r$, gdzie k jest liczbą naturalną, natomiast r jest jedną z liczb 0, 1, 2, 3, 4.
a) $n = 39$ b) $n = 62$ c) $n = 156$ d) $n = 275$
4. Czy liczbę n można przedstawić w postaci $6k + r$, gdzie k jest liczbą naturalną, a r jest jedną z liczb 1, 2, 3?
a) $n = 46$ b) $n = 74$ c) $n = 147$ d) $n = 276$
5. Wyznacz sumę trzech kolejnych liczb nieparzystych, z których pierwszą jest podana liczba, a n jest liczbą naturalną.
a) $2n + 1$ b) $2n - 1, n > 0$ c) $2n - 5, n > 2$ d) $4n + 3$
- D 6. Uzasadnij, że suma:
a) trzech kolejnych liczb podzielnych przez 3 jest podzielna przez 9,
b) czterech kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8,
c) pięciu kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 10.
- D 7. Uzasadnij, że iloczyn:
a) trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 6,
b) trzech kolejnych liczb parzystych jest podzielny przez 48.

Sprawdź się

8. Ile dzielników ma liczba n ?
a) $n = 12$ b) $n = 27$ c) $n = 29$ d) $n = 36$ e) $n = 60$
9. Wykonaj dzielenie z resztą.
a) $75 : 8$ b) $75 : 3$ c) $109 : 6$ d) $738 : 4$ e) $3241 : 6$
10. Oblicz $\text{NWD}(x, y)$ oraz $\text{NWW}(x, y)$.
a) $x = 24, y = 40$ c) $x = 48, y = 72$ e) $x = 112, y = 144$
b) $x = 36, y = 45$ d) $x = 54, y = 96$ f) $x = 105, y = 150$
7. a) Liczba jest podzielna przez 6, jeżeli jest podzielna jednocześnie przez 2 i 3. Wśród trzech kolejnych liczb naturalnych dokładnie jedna jest podzielna przez 3 i co najmniej jedna jest podzielna przez 2. Zatem iloczyn tych liczb jest podzielny przez 6.
b) Rozważmy trzy kolejne liczby parzyste: $2n, 2n + 2, 2n + 4$, gdzie n jest liczbą naturalną. Wówczas:
$$2n(2n + 2)(2n + 4) = 8 \cdot n(n + 1)(n + 2)$$

Wyrażenie $n(n + 1)(n + 2)$ jest iloczynem trzech kolejnych liczb naturalnych. Iloczyn ten jest podzielny przez 6 (co wykazaliśmy w punkcie a). Zatem liczba:
$$2n(2n + 2)(2n + 4)$$

jest podzielna przez $8 \cdot 6 = 48$, co było do uzasadnienia.

Działania na liczbach całkowitych i ułamkach zwykłych
1. Oblicz.

- a) $4 - (6 - (12 - 10))$ d) $-9 + ((14 - 6) - (7 - 13))$
 b) $6 - 2((8 - 19) - 7)$ e) $-6(-2 \cdot 9 - 17) - 19$
 c) $8 - (4 + (-12 - (-4)))$ f) $13(5 - 19) - 3(9 - 13)$

2. Oblicz.

- a) $4((13 - 17) - 6(19 - 11)) : 2$ c) $-12 : (4 - 19) - (17 - 8) : (9 - 12)$
 b) $8((15 - 3) : 2 + 32 : (-4 + 12))$ d) $(42 : (-6 - 8))((-5 - 17) : (5 - 7))$

3. Zamień liczbę mieszaną na ułamek zwykły.

- a) $1\frac{2}{3}$ b) $3\frac{1}{3}$ c) $4\frac{3}{7}$ d) $6\frac{4}{11}$ e) $5\frac{11}{15}$

$$2\frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{11}{4}$$

4. Zamień ułamek zwykły na liczbę mieszaną.

- a) $\frac{11}{3}$ b) $\frac{17}{4}$ c) $\frac{21}{8}$ d) $\frac{32}{9}$ e) $\frac{49}{25}$

$$\frac{19}{5} = \frac{15 + 4}{5} = 3\frac{4}{5}$$

5. Oblicz. Wynik podaj w postaci liczby całkowitej lub mieszanej.

- a) $\frac{2}{5} + \frac{3}{5}$ c) $\frac{5}{6} + \frac{11}{6}$ e) $\frac{17}{5} - \frac{3}{5}$ g) $\frac{7}{9} - \frac{23}{9}$
 b) $\frac{7}{3} + \frac{4}{3}$ d) $\frac{13}{8} + \frac{23}{8}$ f) $\frac{19}{4} - \frac{3}{4}$ h) $\frac{29}{25} - \frac{61}{25}$

6. Oblicz. Wynik podaj w postaci liczby całkowitej lub mieszanej.

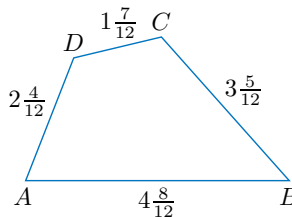
- a) $\frac{13}{4} + \frac{17}{4} - \frac{5}{4} - \frac{9}{4}$ c) $\frac{21}{11} - \frac{8}{11} - \frac{13}{11} + \frac{32}{11}$
 b) $\frac{25}{7} - \frac{19}{7} + \frac{8}{7} - \frac{3}{7}$ d) $\frac{8}{15} - \frac{26}{15} + \frac{4}{15} - \frac{2}{15}$

7. Oblicz. Wynik podaj w postaci liczby całkowitej lub mieszanej.

- a) $\frac{3}{5} \cdot 2$ c) $\frac{5}{6} \cdot (-8)$ e) $\frac{5}{6} \cdot 24$ g) $1\frac{1}{4} \cdot 6$
 b) $\frac{2}{3} \cdot 5$ d) $\frac{9}{10} \cdot (-6)$ f) $\frac{8}{9} \cdot 45$ h) $3\frac{2}{3} \cdot 9$

8. Dany jest czworokąt ABCD (rysunek obok).

- a) Oblicz długość boku kwadratu, którego obwód jest równy obwodowi tego czworokąta.
 b) Stosunek długości boków prostokąta jest równy 2 : 1, a jego obwód jest równy obwodowi czworokąta ABCD. Oblicz pole tego prostokąta.


8. a) $Ob_{ABCD} = 4\frac{8}{12} + 3\frac{5}{12} + 1\frac{7}{12} + 2\frac{4}{12} = 10\frac{24}{12} = 12$

 bok kwadratu: $a = 12 : 4 = 3$
b) x – długość krótszego boku prostokąta,
 $2x$ – długość dłuższego boku prostokąta,
 $6x = 12$, czyli $x = 2$
Długości boków prostokąta: 2 i 4, zatem $P = 2 \cdot 4 = 8$.
Odpowiedzi do zadań
1. a) 0 b) 42
c) 12 d) 5
e) 191 f) -170
2. a) -104 b) 80
c) $3\frac{4}{5}$ d) -33
3. a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{10}{3}$ c) $\frac{31}{7}$
d) $\frac{70}{11}$ e) $\frac{86}{15}$
4. a) $3\frac{2}{3}$ b) $4\frac{1}{4}$ c) $2\frac{5}{8}$
d) $3\frac{5}{9}$ e) $1\frac{24}{25}$
5. a) 1 b) $3\frac{2}{3}$ c) $2\frac{2}{3}$
d) $4\frac{1}{2}$ e) $2\frac{4}{5}$ f) 4
g) $-1\frac{7}{9}$ h) $-1\frac{7}{25}$
6. a) 4 b) $1\frac{4}{7}$
c) $2\frac{10}{11}$ d) $-1\frac{1}{15}$
7. a) $1\frac{1}{5}$ b) $3\frac{1}{3}$ c) $-6\frac{2}{3}$
d) $-5\frac{2}{5}$ e) 20 f) 40
g) $7\frac{1}{2}$ h) 33

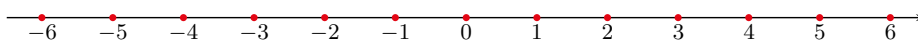
Uczeń:

- rozpoznaje liczby całkowite i liczby wymierne wśród podanych liczb,
- podaje przykłady liczb całkowitych i wymiernych,
- odczytuje z osi liczbowej współrzędną danego punktu oraz zaznacza punkt o podanej współrzędnej na osi liczbowej,
- wykonuje działania na liczbach wymiernych.

Ćwiczenie 1

- a) -36
- b) 16
- c) 720
- d) -481
- e) -58
- f) 26

1.2. Liczby całkowite. Liczby wymierne



Liczby całkowite to liczby naturalne dodatnie: $1, 2, 3, 4, \dots$, liczby do nich przeciwne: $-1, -2, -3, -4, \dots$ oraz liczba 0 .

Zbiór wszystkich liczb całkowitych będziemy oznaczać literą $\mathbb{Z}$.

Zera oraz liczb ujemnych używano w Indiach już w drugiej połowie I tysiąclecia n.e. W Europie przyjęły się dopiero kilkaset lat później. Współcześnie ideę osi liczbowej z zerem i liczbami ujemnymi widzimy np. w termometrze zaokrąglonym, a reguły rachunkowe dotyczące liczb ujemnych są przedmiotem ćwiczeń w szkole podstawowej.



Ćwiczenie 1

Oblicz w pamięci.

- a) $42 - 78$
- b) $-47 - (-63)$
- c) $-240 \cdot (-3)$
- d) $-342 + (-139)$
- e) $7 \cdot (-4) - 2 \cdot (-3) \cdot (-5)$
- f) $(-16) \cdot (-2) - (-54) : (-9)$

Działania występujące w powyższym ćwiczeniu: dodawanie, odejmowanie oraz mnożenie są zawsze wykonalne w zbiorze liczb całkowitych. Inaczej jest w dzieleniu, gdyż wynik dzielenia liczb całkowitych nie zawsze jest liczbą całkowitą. Na przykład wynik dzielenia $(-3) : (-2) = \frac{3}{2}$ nie jest liczbą całkowitą.

Definicja

Liczby, które można zapisać jako iloraz $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi ($n \neq 0$), nazywamy **liczbami wymiernymi**.

Zbiór wszystkich liczb wymiernych oznaczamy literą $\mathbb{Q}$.

Zwróć uwagę na to, że każda liczba całkowita jest liczbą wymierną (dlaczego?).

Ułamki zazwyczaj przedstawiamy w możliwie najprostszej postaci, a więc w postaci **nieskracalnej**, np.:

$$\frac{180}{480} = \frac{18 \cdot 10^1}{48 \cdot 10^1} = \frac{18}{48} = \frac{3 \cdot 6^1}{8 \cdot 6^1} = \frac{3}{8} \quad \text{Ułamek } \frac{3}{8} \text{ jest nieskracalny.}$$

Po doprowadzeniu ułamka do postaci nieskracalnej otrzymujemy ułamek, którego licznik i mianownik to liczby **względnie pierwsze** (nie mają żadnych wspólnych dzielników całkowitych z wyjątkiem liczb 1 i -1).

Uwaga. Określenia **dzielnik** używamy również w odniesieniu do liczb całkowitych, np. liczba -6 ma następujące dzielniki: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$.

Komentarz

Warto porozmawiać z uczniami o dzielnikach naturalnych i całkowitych.

Multibook

- Zbiory liczbowe

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.2

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy ułamki x i y są równe.

a) $x = \frac{27}{72}, y = \frac{36}{96}$ b) $x = \frac{60}{108}, y = \frac{75}{135}$ c) $x = \frac{84}{156}, y = \frac{126}{246}$

Czasami trzeba ułamek **rozszerzyć**, na przykład wtedy, gdy chcemy dodać lub odjąć dwa ułamki o różnych mianownikach.

Ćwiczenie 3

Oblicz różnicę $\frac{5}{12} - \frac{7}{18}$, biorąc jako wspólny mianownik ułamków:

- a) iloczyn liczb 12 i 18,
b) NWW(12, 18).

Działania na liczbach wymiernych

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad b \neq 0, d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} \quad b \neq 0, d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad b \neq 0, d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $1\frac{5}{12} - \frac{9}{8} - 2\frac{5}{6}$ c) $2\frac{2}{9} - 3\frac{5}{6} + 5\frac{1}{3}$
b) $6\frac{3}{4} - 2\frac{2}{3} - 3\frac{1}{6}$ d) $2\frac{2}{9} + 1\frac{5}{12} - \frac{7}{8}$

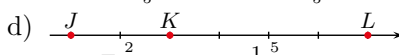
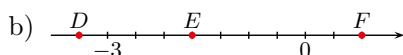
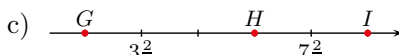
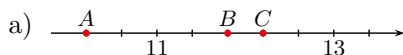
Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) $-2\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{27}{28}\right)$ b) $-3\frac{3}{8} : 5\frac{1}{16}$ c) $-1\frac{1}{7} \cdot 1\frac{11}{24} : \frac{3}{5}$ d) $3\frac{1}{2} - 3\frac{1}{6} : \left(-2\frac{1}{9}\right)$

Zadania

1. Podaj liczby odpowiadające punktom zaznaczonym na osi liczbowej.



2. Oblicz.

a) $1\frac{3}{5} - 2\frac{1}{6}$ d) $\frac{7}{6} + \left(-\frac{5}{4} - \frac{4}{3}\right)$ g) $1\frac{5}{8} - \left(-2\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)$
b) $3\frac{3}{8} + 2\frac{5}{6}$ e) $-(-2\frac{2}{3}) + \frac{7}{15}$ h) $1\frac{2}{5} - 3\frac{7}{8} - \frac{1}{8}$
c) $\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)$ f) $-1\frac{9}{16} + \frac{11}{12}$ i) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)$

3. Oblicz.

a) $-1\frac{2}{25} \cdot \left(-2\frac{1}{12}\right)$ b) $4\frac{1}{7} - 4\frac{1}{2} : \left(-5\frac{1}{4}\right)$ c) $-2\frac{1}{9} \cdot 1\frac{16}{19} : \frac{7}{5}$

Ćwiczenie 2

a) $x = y = \frac{3}{8}$
b) $x = y = \frac{5}{9}$
c) $x = \frac{21}{39}, y = \frac{21}{41}, x \neq y$

Ćwiczenie 3

a) $\frac{5}{12} - \frac{7}{18} = \frac{90}{12 \cdot 18} - \frac{84}{12 \cdot 18} = \frac{6}{12 \cdot 18} = \frac{1}{36}$
b) $\frac{5}{12} - \frac{7}{18} = \frac{15}{36} - \frac{14}{36} = \frac{1}{36}$

Ćwiczenie 4

a) $-2\frac{13}{24}$
b) $\frac{11}{12}$
c) $3\frac{13}{18}$
d) $2\frac{55}{72}$

Ćwiczenie 5

a) $2\frac{1}{4}$
b) $-\frac{2}{3}$
c) $-2\frac{7}{9}$
d) 5

Odpowiedzi do zadań

1. a) $A = 10\frac{1}{5}, B = 11\frac{4}{5}, C = 12\frac{1}{5}$
b) $D = -3\frac{3}{7}, E = -1\frac{5}{7}, F = \frac{6}{7}$
c) $G = 2\frac{1}{15}, H = 6\frac{1}{15}, I = 8\frac{11}{15}$
d) $J = -\frac{8}{11}, K = \frac{4}{11}, L = 2\frac{6}{11}$
2. a) $-\frac{17}{30}$ b) $6\frac{5}{24}$
c) 1 d) $-1\frac{5}{12}$
e) $3\frac{2}{15}$ f) $-\frac{31}{48}$
g) $4\frac{1}{24}$ h) $-2\frac{3}{5}$ i) $\frac{7}{60}$
3. a) $2\frac{1}{4}$ b) 5 c) $-2\frac{7}{9}$

4. a) $1\frac{1}{2}$ b) $1\frac{2}{3}$
 c) $8\frac{1}{2}$ d) $1\frac{1}{9}$
 e) $1\frac{2}{5}$ f) $1\frac{2}{7}$
 g) -2 h) -2

5. a) 14 b) $-2\frac{3}{5}$
 c) 8

6. $a = 7\frac{1}{2}$, $b = -5$, $c = -1$,
 zatem $b < c < a$.

7. **Nierówność trójkąta:** z trzech odcinków można zbudować trójkąt, jeżeli suma długości krótszych odcinków jest większa od długości najdłuższego odcinka.

$$\begin{aligned} a) \quad x &= \frac{5}{24} = \frac{30}{144}, \\ y &= \frac{5}{12} = \frac{60}{144}, \\ z &= \frac{5}{144} \\ x + z &= \frac{35}{144} < \frac{60}{144} = y \end{aligned}$$

Zatem nie istnieje trójkąt o bokach długości x , y i z .

$$\begin{aligned} b) \quad x &= 2\frac{1}{2}, \\ y &= \frac{13}{15} < 1, \\ z &= \frac{22}{23} < 1 \end{aligned}$$

$$y + z < 2 < 2,5 = x$$

Zatem nie istnieje trójkąt o bokach długości x , y i z .

8. a) $\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$
 b) $\frac{2}{17} = \frac{1}{9} + \frac{1}{153}$
 c) $\frac{2}{31} = \frac{1}{16} + \frac{1}{496}$
 9. a) $1\frac{1}{11}$ b) $2\frac{2}{3}$
 c) $\frac{24}{41}$ d) $11\frac{1}{4}$
 e) $\frac{4}{53}$ f) $-\frac{6}{199}$
 10. a) -8 b) $-15\frac{58}{65}$
 c) $8\frac{4}{15}$ d) 3
 e) $6\frac{1}{4}$ f) $\frac{9}{256}$

4. Oblicz.

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{2\frac{1}{6}}{1\frac{4}{9}} \quad & b) \quad \frac{1\frac{5}{12}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} \quad & c) \quad \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{8}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{8}} \quad & d) \quad \frac{2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \\ e) \quad \frac{3\frac{1}{2} - 2\frac{3}{4}}{2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - 2} \quad & f) \quad \frac{\frac{1}{2} - \frac{2}{5}}{\frac{1}{2} - 1\frac{1}{5}} \quad & g) \quad \frac{2\frac{1}{4} - 3\frac{1}{2}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{2}} \quad & h) \quad \frac{3\frac{1}{2} - 2\frac{3}{4}}{2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - 2} \end{aligned}$$

5. Oblicz wartość podanego wyrażenia dla $x = 1\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{4}$, $z = -\frac{3}{8}$.

$$a) \quad \frac{x-y}{y-z} \quad b) \quad \frac{x+y-z}{y+z} \quad c) \quad \frac{x-y+2z}{x+y+3z}$$

6. Uporządkuj liczby a , b , c w kolejności rosnącej.

$$a = \frac{1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{8} - \frac{3}{4}}, \quad b = 1\frac{1}{2} \cdot 4\frac{6}{11} \cdot 3\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right), \quad c = \frac{2}{11} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\frac{3}{4} \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right)$$

- D** 7. Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt o bokach długości x , y i z .

$$\begin{aligned} a) \quad x &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right), \quad y = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right), \quad z = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)^2 \\ b) \quad x &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{2}{5}}, \quad y = \frac{2\frac{1}{5} - \frac{1}{4}}{2\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}, \quad z = \frac{1\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1\frac{2}{3} + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

8. **Ułamek egipski** to ułamek postaci $\frac{1}{n}$, gdzie n jest liczbą naturalną dodatnią. Przeczytaj informację obok i przedstaw podany ułamek jako sumę różnych ułamków egipskich.

$$a) \quad \frac{2}{11} \quad b) \quad \frac{2}{17} \quad c) \quad \frac{2}{31}$$

Czy wiesz, że...

Każdy ułamek postaci $\frac{2}{n}$, gdzie n jest liczbą nieparzystą, można przedstawić jako sumę:

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \\ \text{dla:} \quad a &= \frac{n+1}{2}, \quad b = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Sprawdź się

9. Podaj liczbę odwrotną do liczby x .

$$\begin{aligned} a) \quad x &= \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \quad & b) \quad x &= \frac{5}{6} + \frac{7}{8} \quad & c) \quad x &= \frac{1}{2} + 13 - \frac{1}{4} \\ d) \quad x &= \frac{3}{4} - \frac{3}{8} \quad & e) \quad x &= \frac{8}{15} - \frac{4}{9} \quad & f) \quad x &= \frac{2}{3} - 34 + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

10. Oblicz.

$$\begin{aligned} a) \quad \left(1\frac{4}{5} - 3\frac{2}{7}\right) \cdot 5\frac{5}{13} \quad & b) \quad \left(\frac{2}{5} + 1\frac{2}{3}\right) \cdot (-2)^2 \quad & c) \quad \left(2\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)^2 \\ d) \quad 1\frac{4}{5} - 3\frac{2}{7} \cdot 5\frac{5}{13} \quad & e) \quad \left(2\frac{3}{4} - 3\frac{1}{2}\right) \cdot (-2)^2 \quad & f) \quad \left(\frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right)^2\right)^2 \end{aligned}$$

11. Oblicz.

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{5} - \frac{1}{10}} \quad & b) \quad \frac{\frac{9}{5} : \frac{3}{7} - 3\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}}{5\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{7}} \quad & c) \quad \frac{1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot 1,5}{\frac{1}{4} \cdot (-2)^2 - 3\frac{1}{7} \cdot \frac{7}{11}} \end{aligned}$$

11. a) $1\frac{3}{7}$ b) $1\frac{1}{5}$ c) $-2\frac{3}{4}$

Pierwiastek kwadratowy i pierwiastek sześcienny

1. Zapisz w postaci liczby całkowitej.

- a) $\sqrt{0}$ d) $\sqrt{9}$ g) $\sqrt{81}$
b) $\sqrt{1}$ e) $\sqrt{49}$ h) $\sqrt{100}$
c) $\sqrt{4}$ f) $\sqrt{64}$ i) $\sqrt{121}$

$$\sqrt{36} = 6, \text{ bo } 6^2 = 36$$

$$\sqrt{144} = 12, \text{ bo } 12^2 = 144$$

2. Zapisz w postaci ułamka zwykłego.

- a) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ c) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ e) $\sqrt{\frac{49}{64}}$
b) $\sqrt{\frac{1}{9}}$ d) $\sqrt{\frac{9}{4}}$ f) $\sqrt{\frac{25}{81}}$

$$\sqrt{\frac{36}{121}} = \frac{6}{11}, \text{ bo:}$$

$$\left(\frac{6}{11}\right)^2 = \frac{36}{121}$$

3. Zapisz w postaci liczby mieszanej.

- a) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ c) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$ e) $\sqrt{1\frac{11}{25}}$
b) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$ d) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$ f) $\sqrt{1\frac{13}{36}}$

$$\sqrt{1\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

4. Zapisz liczbę w postaci dziesiętnej.

- a) $\sqrt{0,01}$ c) $\sqrt{0,36}$ e) $\sqrt{1,21}$
b) $\sqrt{0,04}$ d) $\sqrt{0,81}$ f) $\sqrt{1,44}$

$$\sqrt{0,09} = 0,3, \text{ bo:}$$

$$0,3^2 = 0,09$$

5. Zapisz w postaci liczby całkowitej.

- a) $\sqrt[3]{0}$ d) $\sqrt[3]{27}$ g) $\sqrt[3]{343}$
b) $\sqrt[3]{1}$ e) $\sqrt[3]{64}$ h) $\sqrt[3]{1000}$
c) $\sqrt[3]{8}$ f) $\sqrt[3]{125}$ i) $\sqrt[3]{27\,000}$

$$\sqrt[3]{216} = 6, \text{ bo } 6^3 = 216$$

$$\sqrt[3]{8000} = 20, \text{ bo:}$$

$$20^3 = 8000$$

6. Zapisz w postaci ułamka zwykłego.

- a) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ e) $\sqrt[3]{\frac{125}{8}}$
b) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{216}{125}}$

$$\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}, \text{ bo } \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

7. Zapisz w postaci ułamka dziesiętnego.

- a) $\sqrt[3]{0,008}$ b) $\sqrt[3]{0,125}$ c) $\sqrt[3]{0,216}$

$$\sqrt[3]{0,001} = 0,1, \text{ bo:}$$

$$(0,1)^3 = 0,001$$

8. Oblicz.

- a) $\sqrt{81} - \sqrt{64} + \sqrt[3]{64}$ b) $\sqrt[3]{125} + \sqrt{25} - \sqrt{100}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) 0 b) 1
c) 2 d) 3
e) 7 f) 8
g) 9 h) 10
i) 11

2. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{2}{3}$ d) $1\frac{1}{2}$
e) $\frac{7}{8}$ f) $\frac{5}{9}$

3. a) $1\frac{1}{2}$ b) $1\frac{2}{3}$
c) $2\frac{1}{2}$ d) $2\frac{1}{3}$
e) $1\frac{1}{5}$ f) $1\frac{1}{6}$

4. a) 0,1 b) 0,2
c) 0,6 d) 0,9
e) 1,1 f) 1,2

5. a) 0 b) 1
c) 2 d) 3
e) 4 f) 5
g) 7 h) 10
i) 30

6. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{5}$
e) $2\frac{1}{2}$ f) $1\frac{1}{5}$

7. a) 0,2 b) 0,5
c) 0,6

8. a) 5 b) 0

Uczeń:

- wskazuje liczby niewymierne wśród podanych liczb,
- konstruuje odcinki o długościach niewymiernych,
- zaznacza na osi liczbowej punkt odpowiadający liczbie niewymiernej,
- szacuje wartości liczb niewymiernych,
- wykazuje, dobierając odpowiednio przykłady, że suma, różnica, iloczyn oraz iloraz liczb niewymiernych nie muszą być liczbami niewymiernymi.

Ćwiczenie 1

- a) $\sqrt{7}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{44}$
b) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{25}$

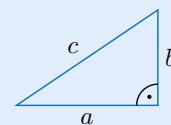
1.3. Liczby niewymierne

W VI w. p.n.e. Grecy sformułowali jedno z najsłynniejszych twierdzeń.

Twierdzenie Pitagorasa

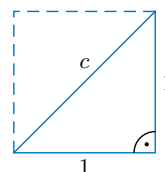
Suma kwadratów długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Twierdzenie to miało istotny wpływ na rozwój pojęcia liczby. Rozpatrzmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 1 (rysunek obok).

Zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa: $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, czyli $c = \sqrt{2}$ (przekątna kwadratu o boku 1 ma długość $\sqrt{2}$).



Dowód tego, że $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną, będzie przedstawiony w klasie 4.

Definicja

Liczby, które nie są wymierne, nazywamy **liczbami niewymiernymi**.

Stwierdzenie, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, oznacza, że liczba ta nie jest równa żadnemu ułamkowi $\frac{m}{k}$, gdzie m i k są liczbami całkowitymi.

Ogólnie, dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $\sqrt{n}$ jest albo liczbą naturalną (np. $\sqrt{81} = 9$), albo liczbą niewymierną (np. $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{82}$). Analogicznie jest dla pierwiastka sześciennego (np. $\sqrt[3]{8} = 2$, a $\sqrt[3]{9}$ jest liczbą niewymierną).

Ćwiczenie 1

Wśród podanych liczb wskaż liczby niewymierne.

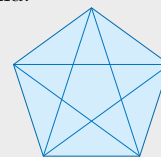
- a) $\sqrt{7}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{44}$, $\sqrt{144}$ b) $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{25}$, $\sqrt[3]{27}$

Inne przykłady liczb niewymiernych otrzymamy, jeżeli zauważymy, że suma liczby wymiernej i niewymiernej jest liczbą niewymierną. Podobnie iloczyn liczby wymiernej różnej od zera i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną. Dlatego na przykład liczby:

$$3 + \sqrt{7}, \quad \frac{1}{5}\sqrt{13}, \quad \frac{1}{2} - 2\sqrt{17}, \quad 2\sqrt{3} - \frac{7}{3}$$

są liczbami niewymiernymi.

Przekątna pięciokąta foremnego o boku długości 1 ma długość równą $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Jest to liczba niewymierna.



Multibook

- Dowody twierdzenia Pitagorasa
- Zastosowania twierdzenia Pitagorasa
- Zbiory liczbowe

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.3

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

Czy liczba x jest niewymierna?

- a) $x = 3\sqrt{6} - \frac{1}{3}$ c) $x = \sqrt{16} + 2\sqrt{14}$ e) $x = \sqrt[3]{9} - 1$
 b) $x = 10 + \frac{2}{3}\sqrt{9}$ d) $x = \frac{1}{2}\sqrt{4} - \sqrt{121}$ f) $x = 15 + 6\sqrt[3]{27}$

Ćwiczenie 3

Podaj przykład dwóch różnych liczb niewymiernych, których:

- a) suma jest liczbą wymierną, b) iloczyn jest liczbą wymierną.

Uwaga. Oprócz liczb niewymiernych, które są pierwiastkami kwadratowymi lub sześciennymi, istnieją inne liczby niewymierne, np. znana z geometrii liczba π .

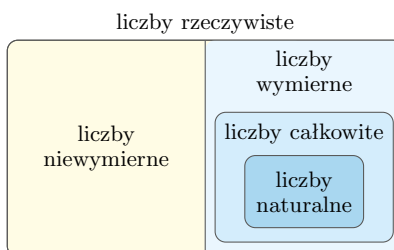
Definicja

Zbiór wszystkich liczb wymiernych i niewymiernych nazywamy zbiorem **liczb rzeczywistych**.

Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych oznaczamy literą $\mathbb{R}$.

Zbiór liczb niewymiernych bywa oznaczany literami $\mathbb{I}\mathbb{Q}$.

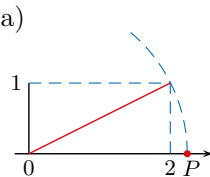
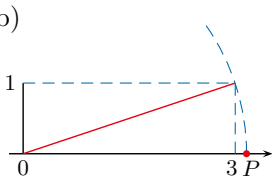
Uwaga. W dalszym ciągu, jeżeli nie napiszemy inaczej, przez „liczbę” rozumieć będziemy liczbę rzeczywistą.



Zadania

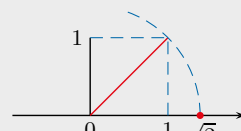
- Wśród podanych trzech liczb wskaż liczbę niewymierną.

a) $\sqrt{4}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{164}$ c) $\sqrt{25}$, $\sqrt{125}$, $\sqrt{225}$ e) $\sqrt[3]{0}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{64}$
 b) $\sqrt{9}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{49}$ d) $\sqrt{169}$, $\sqrt{196}$, $\sqrt{286}$ f) $\sqrt[3]{81}$, $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{216}$
- Wyznacz współrzędną punktu P zaznaczonego na osi liczbowej. Czy jest to liczba wymierna?

a)  b) 
- Dany jest prostokąt o bokach x i y . Czy długość przekątnej tego prostokąta wyraża się liczbą wymierną?

a) $x = 2$, $y = 4$ b) $x = 3$, $y = 4$ c) $x = 6$, $y = 8$ d) $x = 8$, $y = 10$

Konstrukcyjne wyznaczenie na osi liczbowej punktu o współrzędnej $\sqrt{2}$



Ćwiczenie 2

- a) jest
 b) nie jest, $x = 12$
 c) jest, $x = 4 + 2\sqrt{14}$
 d) nie jest, $x = -10$
 e) jest
 f) nie jest, $x = 33$

Ćwiczenie 3

- a) np. $\sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$
 b) np. $\sqrt{3}$, $\sqrt{27}$

Odpowiedzi do zadań

- a) $\sqrt{164}$
 b) $\sqrt{29}$
 c) $\sqrt{125}$
 d) $\sqrt{286}$
 e) $\sqrt[3]{4}$
 f) $\sqrt[3]{81}$
- a) $\sqrt{5}$, nie
 b) $\sqrt{10}$, nie
- Niech d oznacza długość przekątnej.

a) $d = 2\sqrt{5}$, nie
 b) $d = 5$, tak
 c) $d = 10$, tak
 d) $d = 2\sqrt{41}$, nie

4. a) $p + q = 3$ lub $p + r = -4$
 b) $q - r = 7$
 c) $qs = 42$
 d) $\frac{q}{s} = \frac{2}{7}$ lub $\frac{s}{q} = \frac{7}{2}$

5. a), c), e) jest
 b), d), f) nie jest

6. a) 11 b) 8 c) 4

7. Obwód trójkąta: $6\sqrt{2}$,
 obwód kwadratu: $4\sqrt{6}$,
 obwód sześciokąta: 18 – liczba
 wymierna

8. a) tak, $d = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$
 b) nie, $d = \sqrt{169} = 13$

9. a) $0, \sqrt{4}, \sqrt[3]{125}$
 b) $-\frac{12}{3}, -3, 0, \sqrt{4}, \sqrt[3]{125}$
 c) $-\frac{12}{3}, -3, 0, 0, 1, \sqrt{4}, \sqrt[3]{125}, 121\frac{1}{3}$
 d) $-\sqrt{3}, 2 - \sqrt{2}$

4. Dane są liczby niewymierne:

$$p = 3 - 2\sqrt{3}, \quad q = 2\sqrt{3}, \quad r = 2\sqrt{3} - 7, \quad s = 7\sqrt{3}$$

Wybierz dwie spośród tych liczb tak, aby:

- a) ich suma była liczbą wymierną, c) ich iloczyn był liczbą wymierną,
 b) ich różnica była liczbą wymierną, d) ich iloraz był liczbą wymierną.

5. Korzystając z podanych przybliżeń, sprawdź, czy nierówność jest prawdziwa (nie używaj kalkulatora).

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 3$ c) $2\sqrt{2} + \sqrt{5} > 5$ e) $4 - 2\sqrt{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

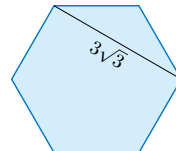
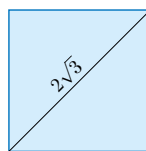
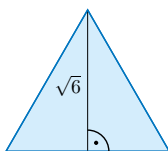
b) $\sqrt{5} + \sqrt{3} > 4$ d) $\sqrt{5} - \sqrt{3} < \frac{1}{2}$ f) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{2} < \sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &\approx 1,414 \\ \sqrt{3} &\approx 1,732 \\ \sqrt{5} &\approx 2,236\end{aligned}$$

6. Podaj największą liczbę naturalną n spełniającą nierówność ($\pi \approx 3,14$):

a) $n < 2\pi + 5$, b) $n < \pi^2 - 1$, c) $n^2 < 10\pi - 7$.

7. Na rysunkach przedstawiono trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny. Obwód którego z tych wielokątów wyraża się liczbą wymierną?

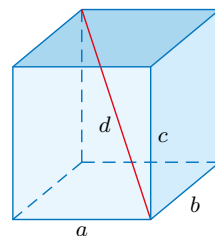


8. Długość przekątnej prostopadłościanu o wymiarach $a \times b \times c$ wyraża się wzorem:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Czy długość przekątnej prostopadłościanu o podanych krawędziach jest liczbą niewymierną?

- a) $a = 6, b = 8, c = 10$ b) $a = 3, b = 4, c = 12$



Sprawdź się

9. Wśród liczb $0, 1, -3, 0, \sqrt{4}, -\frac{12}{3}, \sqrt[3]{125}, -\sqrt{3}, 121\frac{1}{3}, 2 - \sqrt{2}$ wskaż liczby:
 a) naturalne, b) całkowite, c) wymierne, d) niewymierne.

10. Podaj liczbę naturalną n spełniającą warunek:

a) $n < \sqrt{35} < n + 1$, b) $n < 2\sqrt{3} < n + 1$, c) $n - 1 < 5\sqrt{5} < n$.

11. Czy długość przekątnej prostokąta o bokach a, b jest liczbą wymierną?

a) $a = 5, b = 12$ b) $a = 6, b = 10$ c) $a = 7, b = 24$

10. a) $5 = \sqrt{25} < \sqrt{35} < \sqrt{36} = 6$, zatem $n = 5$.

b) $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ i $3 = \sqrt{9} < \sqrt{12} < \sqrt{16} = 4$, zatem $n = 3$.

c) $5\sqrt{5} = \sqrt{125}$ i $11 = \sqrt{121} < \sqrt{125} < \sqrt{144} = 12$, zatem $n = 12$.

11. a) tak, $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

b) nie, $\sqrt{6^2 + 10^2} = \sqrt{136}$

c) tak, $\sqrt{7^2 + 24^2} = 25$

Działania na ułamkach dziesiętnych i ułamkach zwykłych

1. Oblicz.

- a) $16,29 + 12,82$ c) $-0,81 + 23,5$ e) $-41,2 - 9,86$
 b) $147,09 + 14,709$ d) $12,68 - 10,24$ f) $4,36 - (-3,8)$

2. Oblicz.

- a) $24,8 \cdot 2,1$ c) $5,32 \cdot (-5,5)$ e) $-(0,07 \cdot 0,052)$
 b) $10,5 \cdot 3,2$ d) $(-0,34) \cdot (-1,5)$ f) $-(3,2 \cdot (-0,05))$

3. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Zamień ułamek zwykły na ułamek dziesiętny, wykonując dzielenie pisemne.

a) $\frac{7}{20}$

$$\begin{array}{r} 0,35 \\ 7 : 20 \\ - 0 \\ \hline 70 \\ - 60 \\ \hline 100 \\ - 100 \\ \hline 0 \end{array}$$

b) $\frac{19}{4}$

$$\begin{array}{r} 4,75 \\ 19 : 4 \\ - 16 \\ \hline 30 \\ - 28 \\ \hline 20 \\ - 20 \\ \hline 0 \end{array}$$

Zamień ułamek zwykły na ułamek dziesiętny, wykonując dzielenie pisemne.

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{8}{5}$ c) $\frac{13}{8}$ d) $\frac{21}{8}$ e) $\frac{13}{20}$ f) $\frac{16}{25}$ g) $\frac{49}{50}$ h) $\frac{11}{125}$

4. Oblicz.

- a) $1,75 : 0,25$ c) $8,4 : 1,5$ e) $0,0525 : (-0,42)$
 b) $0,65 : 1,3$ d) $3,96 : 0,06$ f) $0,001 : (-0,000001)$

5. Oblicz.

- a) $\frac{2}{3} + 0,5 \cdot 3$ c) $(1\frac{6}{7} + 0,7) \cdot 2$ e) $\frac{30}{25} - (1,2 - 2)$
 b) $\frac{1}{5} - 4 : 0,8$ d) $(5\frac{1}{8} + 7,125) : 2$ f) $3,25 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$

6. Oblicz.

- a) $6,4 : 2\frac{2}{15} - 24,8 : \frac{4}{5}$ b) $2\frac{1}{2} + 3(6,2 + 4,8)$ c) $24,75 : \frac{3}{4} + 5\frac{1}{2} : 2\frac{3}{4}$

6. a) $6,4 : 2\frac{2}{15} - 24,8 : \frac{4}{5} = \frac{64}{10} : \frac{2}{15} - \frac{248}{10} : \frac{4}{5} = \frac{64}{10} \cdot \frac{15}{2} - \frac{248}{10} \cdot \frac{5}{4} = 3 - 31 = -28$

b) $2\frac{1}{2} + 3(6,2 + 4,8) = 2\frac{1}{2} + 3 \cdot 11 = 35\frac{1}{2}$

c) $24,75 : \frac{3}{4} + 5\frac{1}{2} : 2\frac{3}{4} = 24\frac{3}{4} : \frac{3}{4} + \frac{11}{2} : \frac{3}{4} = \frac{99}{4} : \frac{3}{4} + \frac{11}{2} : \frac{3}{4} = \frac{99}{4} \cdot \frac{4}{3} + \frac{11}{2} \cdot \frac{4}{3} = 33 + 2 = 35$

Odpowiedzi do zadań

1. a) 29,11
 b) 161,799
 c) 22,69
 d) 2,44
 e) -51,06
 f) 8,16
 2. a) 52,08
 b) 33,6
 c) -29,26
 d) 0,51
 e) -0,00364
 f) 0,16
 3. a) 0,75
 b) 1,6
 c) 1,625
 d) 2,625
 e) 0,65
 f) 0,64
 g) 0,98
 h) 0,088

4. a) 7
 b) 0,5
 c) 5,6
 d) 66
 e) -0,125
 f) -1000
 5. a) $2\frac{1}{6}$
 b) $-4\frac{4}{5}$
 c) $5\frac{4}{35}$
 d) $6\frac{1}{8}$
 e) 2
 f) $2\frac{5}{12}$

Uczeń:

- wskazuje liczby wymierne oraz niewymierne wśród liczb podanych w postaci dziesiętnej,
- wyznacza rozwinięcia dziesiętne ułamków zwykłych,
- wyznacza wskazaną cyfrę po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym okresowym danej liczby,
- zamienia skończone rozwinięcia dziesiętne na ułamki zwykłe,
- przedstawia ułamki dziesiętne okresowe w postaci ułamków zwykłych,
- zaokrągla liczbę z podaną dokładnością,
- oblicza błąd przybliżenia danej liczby oraz ocenia, czy jest to przybliżenie z nadmiarem, czy z niedomiarem.

Komentarz

Warto zwrócić uczniom uwagę na to, że liczbę w postaci dziesiętnej okresowej można zapisać na kilka sposobów, np.:

$$\begin{aligned}1,393939 \dots &= 1,(39) = \\ &= 1,3(93) = \\ &= 1,(3939)\end{aligned}$$

Jednak zwykle taką liczbę zapisujemy z jak najkrótszym okresem.

Ćwiczenie 1

- a) 0,35
- b) 0,44
- c) 2,08
- d) 2,86
- e) 0,032
- f) 0,068

1.4. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej

Ułamki o mianownikach 10, 100, 1000, ... (czyli mianownikach będących potęgami liczby 10) nazywamy **ułamkami dziesiętnymi**. Mogą one być zapisane na dwa sposoby: $\frac{15}{100} = 0,15$; $\frac{37}{1000} = 0,037$; $5\frac{7}{10} = 5,7$.

Zapis po prawej stronie powyższych równości nazywamy **rozwinięciem dziesiętnym** lub **postacią dziesiętną** liczby. Aby uzyskać postać dziesiętną liczby wymiernej, wykonujemy dzielenie. Na przykład dla liczby $\frac{13}{4}$ otrzymamy:

$$\frac{13}{4} = 13 : 4 = 3,25$$

Dla liczby $\frac{1}{6}$ w wyniku dzielenia otrzymamy:

$$\frac{1}{6} = 0,16666666\dots$$

Takie rozwinięcie zapisujemy w następujący sposób:

$$\frac{1}{6} = 0,1(6)$$

Dla liczby $\frac{4}{7}$ w wyniku dzielenia otrzymamy:

$$\frac{4}{7} = 0,571428\,571428\,571428\dots$$

co zapiszemy $\frac{4}{7} = 0,(571428)$.



Przy obliczeniach na liczbach podanych w postaci dziesiętnej wygodnie jest korzystać z kalkulatora.

Nawias w rozwinięciu dziesiętnym oznacza powtarzanie się nieskończenie wiele razy zapisanej w nim grupy cyfr. Taką najkrótszą powtarzającą się grupę cyfr nazywamy **okresem**, a rozwinięcie dziesiętne możemy też nazwać **okresowym**. Liczbę cyfr występujących w okresie nazywamy **długością okresu**.

Ćwiczenie 1

Przeczytaj podany w ramce przykład, a następnie przedstaw liczbę w postaci dziesiętnej.

- a) $\frac{7}{20}$
- c) $\frac{52}{25}$
- e) $\frac{4}{125}$
- b) $\frac{11}{25}$
- d) $\frac{143}{50}$
- f) $\frac{17}{250}$

Przedstaw liczbę $\frac{6}{25}$ w postaci dziesiętnej.

$$\frac{6}{25} = \frac{6}{25} \cdot \frac{4}{4} = \frac{24}{100} = 0,24$$

Ćwiczenie 2

Jaka cyfra znajduje się na dziesiątym, a jaka na dwudziestym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby?

- a) 0,(1234)
- b) 5,(732)
- c) 2,6(435)
- d) 0,32(1410)

Ćwiczenie 2

- a) dziesiąte miejsce: 2, dwudzieste miejsce: 4
- b) dziesiąte miejsce: 7, dwudzieste miejsce: 3
- c) dziesiąte miejsce: 5, dwudzieste miejsce: 4
- d) dziesiąte miejsce: 0, dwudzieste miejsce: 4

Ćwiczenie 3

Wykonaj dzielenie i podaj długość okresu nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego każdej z liczb $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{27}$.

Twierdzenie

Każdą liczbę wymierną można zapisać w postaci dziesiętnej skończonej lub nieskończonej okresowej.

Każde rozwinięcie dziesiętne okresowe przedstawia liczbę wymierną.

Uwaga. Rozwinięcia dziesiętne nieskończone nieokresowe przedstawiają liczby niewymierne, np. 0,101001000100001...

Ćwiczenie 4

a) Które z liczb wymiernych $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{8}$ mają rozwinięcia dziesiętne skończone, a które nieskończone?

b) Które z liczb $\sqrt{8}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{\frac{16}{9}}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$, $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$ mają rozwinięcia dziesiętne nieskończone nieokresowe?

■ Przybliżenia. Reguła zaokrąglania

Mówimy, że liczba x jest **przybliżeniem** liczby a z dokładnością do d , jeśli liczby a i x różnią się o nie więcej niż d . Na przykład liczba 1,414 jest przybliżeniem liczby $\sqrt{2}$ z dokładnością do 0,001.

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356237$$

Ćwiczenie 5

Podaj przybliżenie liczby $\sqrt{2}$ z dokładnością do:

- a) 0,1, b) 0,01, c) 0,0001, d) 0,00001.

Do przybliżenia liczby zapisanej w postaci dziesiętnej zwykle stosujemy **regułę zaokrąglania**, która polega na odrzuceniu końcowych cyfr tej liczby i zastąpieniu ich zerami, przy czym:

- jeżeli pierwszą z odrzuconych cyfr jest 0, 1, 2, 3, 4, to ostatnią z zachowanych cyfr pozostawiamy bez zmian;
- jeżeli pierwszą z odrzuconych cyfr jest 5, 6, 7, 8, 9, to ostatnią z zachowanych cyfr zwiększamy o jeden.

Przykład 1

Zaokrągleniem liczby 6,9874 do:

- trzech miejsc po przecinku jest liczba 6,987,
- dwóch miejsc po przecinku – liczba 6,99,
- jednego miejsca po przecinku – liczba 7.

Zaokrągleniem liczby nazywamy jej przybliżenie zgodne z regułą zaokrąglania.

Ćwiczenie 3

0,8(3), długość okresu: 1;
0,(428571), długość okresu: 6;
0,(27), długość okresu: 2;
0,(185), długość okresu: 3

Ćwiczenie 4

a) Rozwinięcia skończone mają liczby: $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{8}$.

Rozwinięcia nieskończone mają liczby: $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{7}$.

b) $\sqrt{8}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{16}$

Ćwiczenie 5

- a) 1,4
b) 1,41
c) 1,4142
d) 1,41421

Ćwiczenie 6

- a) 21 b) 20 c) 0
d) 1 e) 2

Ćwiczenie 7

- a) 7,8952, 9,9963, 5,9039
b) 7,895, 9,996, 5,904
c), d) 7,9, 10, 5,9

Ćwiczenie 8

- a) 3,141593; z nadmiarem
b) 3,14159; z niedomiarem
c) 3,1416; z nadmiarem
d) 3,142; z nadmiarem
e) 3,14; z niedomiarem

Odpowiedzi do zadań

1. a) 1,25 b) -6,75
c) -0,125 d) 0,375
e) 0,625 f) 1,375
g) 0,0375 h) 0,0875
2. a) 0,(7) b) 0,01(6)
c) 0,00(3) d) 0,00(5)
e) 0,3(6) f) 0,1(8)

Ćwiczenie 6

Zaokrąglaj do liczby całkowitej.

- a) 20,9813 b) 19,901 c) 0,401 d) 1,099 e) 2,49957

Ćwiczenie 7

Podaj zaokrąglenia liczb $x = 7,89517$, $y = 9,99625$ i $z = 5,90394$ do n miejsc po przecinku dla: a) $n = 4$, b) $n = 3$, c) $n = 2$, d) $n = 1$.

Jeżeli przybliżenie liczby jest mniejsze od tej liczby, to mówimy o przybliżeniu z **niedomiarem**. Natomiast jeżeli przybliżenie liczby jest od niej większe, to mówimy o przybliżeniu z **nadmiarem**.

Czy wiesz, że...

W 2002 r. Yasumasa Kanada wyznaczył za pomocą komputera liczbę π z dokładnością do ponad biliona cyfr po przecinku. W praktyce wystarczają znacznie mniej dokładne przybliżenia.

3,141592653589793238462643383279502
88419716939937510582097494459230781
64062862089986280348253421170679821
48086513282306647093844609550582231
72535940812848111745028410270193852
1105596446229489549303819644288109
75665933446128475648233786783165271
20190914564856692346034861045432664

Ćwiczenie 8

Podaj zaokrąglenie liczby π z dokładnością do n miejsc po przecinku. Czy jest to przybliżenie z nadmiarem, czy z niedomiarem?

- a) $n = 6$ b) $n = 5$ c) $n = 4$ d) $n = 3$ e) $n = 2$

Zadania

1. Znajdź postać dziesiętną liczby (nie korzystaj z kalkulatora):

- a) $\frac{5}{4}$, b) $-\frac{27}{4}$, c) $-\frac{1}{8}$, d) $\frac{3}{8}$, e) $\frac{5}{8}$, f) $\frac{11}{8}$, g) $\frac{3}{80}$, h) $\frac{7}{80}$.

2. Na podstawie podanych obok informacji znajdź rozwinięcie dziesiętne liczby:

- a) $\frac{7}{9}$, c) $\frac{1}{300}$, e) $\frac{11}{30}$,
b) $\frac{1}{60}$, d) $\frac{5}{900}$, f) $\frac{17}{90}$.

$$\frac{1}{3} = 0,33333333...$$

$$\frac{1}{6} = 0,16666666...$$

$$\frac{1}{9} = 0,11111111...$$

3. Jaka cyfra znajduje się na dwunastym, a jaka na dwudziestym piątym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby? Zaokrąglaj tę liczbę do trzech miejsc po przecinku.

- a) 1,(046) b) 0,3(25) c) 7,0(037) d) 9,(3486) e) 2,86(345)

3. a) na 12. miejscu: 6, na 25. miejscu: 0; 1,046
b) na 12. miejscu: 2, na 25. miejscu: 5; 0,325
c) na 12. miejscu: 3, na 25. miejscu: 7; 7,004
d) na 12. miejscu: 6, na 25. miejscu: 3; 9,349
e) na 12. miejscu: 3, na 25. miejscu: 4; 2,863

4. Jaka cyfra znajduje się na dwudziestym czwartym, a jaka na setnym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby: a) $\frac{2}{7}$, b) $\frac{5}{7}$?
5. Liczba o rozwinięciu dziesiętnym okresowym 7,19(1ab693) ma na jedenastym miejscu po przecinku cyfrę 3, a na dwudziestym drugim – cyfrę 6. Wyznacz cyfry a i b tego rozwinięcia.
6. Na podstawie podanego obok twierdzenia odpowiedz, czy rozwinięcie dziesiętne ułamka jest skończone czy okresowe.
- a) $\frac{633}{320}$ b) $\frac{137}{480}$ c) $\frac{6561}{22\,400}$ d) $\frac{11\,111}{51\,200}$
7. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Przedstaw liczbę 0,(12) w postaci ułamka zwykłego.

$$\begin{aligned} x &= 0,121212\dots \\ 100x &= 12,121212\dots && \text{Obie strony równania mnożymy przez 100, aby przecinek znalazł się za pierwszym wystąpieniem okresu.} \\ 100x &= 12 + x \\ 99x &= 12 \\ x &= \frac{12}{99} = \frac{4}{33} \end{aligned}$$

Przedstaw liczbę w postaci ułamka zwykłego.

- a) 0,(36) b) 3,(72) c) -6,(24) d) 0,(9) e) 41,7(9) f) 2,1(52)

8. Liczby $x = 0,(6)$ i $y = 4,(36)$ przedstaw w postaci ułamków zwykłych, a następnie oblicz: a) $x + y$, b) $x^2 - y$, c) $x + \frac{1}{y}$.

Sprawdź się

9. Przedstaw liczbę w postaci dziesiętnej (nie korzystaj z kalkulatora):
- a) $\frac{19}{4}$, c) $\frac{15}{400}$, e) $\frac{25}{8}$, g) $\frac{7}{3}$, i) $\frac{2}{9}$,
b) $\frac{7}{40}$, d) $-\frac{59}{8}$, f) $\frac{26}{3}$, h) $-\frac{58}{9}$, j) $\frac{5}{80}$.
10. Jaka cyfra znajduje się na dwudziestym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby (nie korzystaj z kalkulatora)?
- a) $\frac{5}{11}$ b) $\frac{8}{15}$ c) $\frac{11}{30}$ d) $\frac{19}{60}$ e) $\frac{7}{27}$
11. Podaj przybliżenie liczby $\sqrt{5}$ z dokładnością do n miejsc po przecinku dla: a) $n = 7$, b) $n = 5$, c) $n = 1$.

$$\sqrt{5} \approx 2,23606798$$

4. a) $\frac{2}{7} = 0,(285714)$,
na 24. miejscu: 4,
na 100. miejscu: 7
b) $\frac{5}{7} = 0,(714285)$,
na 24. miejscu: 5,
na 100. miejscu: 2
5. $a = 6$, $b = 3$
6. Wszystkie podane ułamki są nieskracalne.
- a) $320 = 2^6 \cdot 5$, zatem rozwinięcie jest skończone.
b) $480 = 3 \cdot 160$, zatem rozwinięcie jest okresowe.
c) $22\,400 = 7 \cdot 3200$, zatem rozwinięcie jest okresowe.
d) $51\,200 = 2^{11} \cdot 5^2$, zatem rozwinięcie jest skończone.
7. a) $\frac{4}{11}$
b) $\frac{41}{11}$
c) $-\frac{206}{33}$
d) 1
e) $\frac{209}{5}$
f) $\frac{2131}{990}$
8. $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{48}{11}$
a) $5\frac{1}{33}$
b) $-3\frac{91}{99}$
c) $\frac{43}{48}$
9. a) 4,75
b) 0,175
c) 0,0375
d) -7,375
e) 3,125
f) 8,(6)
g) 2,(3)
h) -6,(4)
i) 0,(2)
j) 0,0625

10. a) 5 b) 3 c) 6 d) 6 e) 5

11. a) 2,236 068 0 b) 2,236 07 c) 2,2

Uczeń:

- oblicza wartość pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej,
- wyłącza czynnik przed znak pierwiastka kwadratowego,
- włącza czynnik pod znak pierwiastka kwadratowego,
- wyznacza wartości wyrażeń arytmetycznych zawierających pierwiastki kwadratowe, stosując prawa działań na pierwiastkach,
- usuwa niewymierność z mianownika, gdy w mianowniku występuje wyrażenie $a\sqrt{b}$, oraz szacuje przybliżoną wartość takich wyrażeń.

Komentarz

Warto zadać uczniom następujące pytanie:

Wiemy, że $\sqrt{a} \geq 0$ dla dowolnej liczby nieujemnej a . Czy może być prawdziwa równość:

$$\sqrt{9x^2} = -3x?$$

Odpowiedź: tak, dla $x \leq 0$.

Ćwiczenie 1

- a) 12 b) 15
c) 18 d) 25
e) 50 f) 90
g) 1,1 h) 1,9
i) 2,1

Ćwiczenie 2

- a) 3 b) 3 c) 9
d) 1,2 e) $\sqrt{3}$

1.5. Pierwiastek kwadratowy

Przypomnijmy definicję pierwiastka kwadratowego.

Definicja

Pierwiastkiem kwadratowym (pierwiastkiem drugiego stopnia) z liczby nieujemnej a nazywamy liczbę nieujemną b , której kwadrat jest równy a .

$$\sqrt{a} = b, \text{ gdy } b^2 = a \text{ i } b \geq 0$$

Przykład 1

$$\sqrt{25} = 5, \text{ ponieważ } 5^2 = 25.$$

$$\sqrt{0,16} = 0,4, \text{ ponieważ } 0,4^2 = 0,16.$$

$$\sqrt{0} = 0, \text{ ponieważ } 0^2 = 0.$$

Zwróć uwagę na to, że $\sqrt{36}$ nie jest równy -6 , ponieważ umówiliśmy się, że pierwiastek kwadratowy jest liczbą nieujemną, aby uniknąć sytuacji, w której $\sqrt{36}$ oznaczałby dwie różne liczby.

Ćwiczenie 1

Zapisz w postaci liczby wymiernej.

- a) $\sqrt{144}$ d) $\sqrt{625}$ g) $\sqrt{1,21}$
b) $\sqrt{225}$ e) $\sqrt{2500}$ h) $\sqrt{3,61}$
c) $\sqrt{324}$ f) $\sqrt{8100}$ i) $\sqrt{4,41}$

Prawdziwa jest następująca własność:

Dla dowolnej liczby rzeczywistej:

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

$$\text{Stąd } \sqrt{5^2} = 5 \text{ oraz } \sqrt{(-5)^2} = -(-5) = 5.$$

Ćwiczenie 2

Podaj wartość, korzystając z powyższej własności.

- a) $\sqrt{3^2}$ b) $\sqrt{(-3)^2}$ c) $\sqrt{(-9)^2}$ d) $\sqrt{(-1,2)^2}$ e) $\sqrt{(-\sqrt{3})^2}$

Wyznaczenie pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej odpowiada wyznaczeniu długości boku kwadratu, gdy znamy jego pole ($P = a^2$, więc $a = \sqrt{P}$).

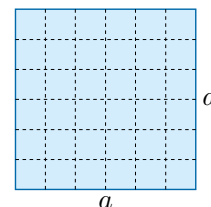
Ćwiczenie 3

Oblicz obwód kwadratu o polu: a) $3,24 \text{ cm}^2$, b) 1024 cm^2 .

Ćwiczenie 3

- a) bok kwadratu: 1,8 cm, obwód: 7,2 cm
b) bok kwadratu: 32 cm, obwód: 128 cm

$$\begin{aligned} 11^2 &= 121 \\ 12^2 &= 144 \\ 13^2 &= 169 \\ 14^2 &= 196 \\ 15^2 &= 225 \\ 16^2 &= 256 \\ 17^2 &= 289 \\ 18^2 &= 324 \\ 19^2 &= 361 \\ 20^2 &= 400 \\ 21^2 &= 441 \\ 22^2 &= 484 \\ 23^2 &= 529 \\ 24^2 &= 576 \\ 25^2 &= 625 \end{aligned}$$



Przy odpowiednich założeniach (jakich?) prawdziwe są podane obok wzory.

Przykład 2

$$a) \sqrt{49 \cdot 144} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{144} = 7 \cdot 12 = 84$$

$$b) \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

$$a) \sqrt{4 \cdot 81}, \sqrt{25 \cdot 0,36}, \sqrt{0,09 \cdot 361}$$

$$c) \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}, \sqrt{6} \cdot \sqrt{1,5}, \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$$

$$b) \sqrt{\frac{121}{144}}, \sqrt{\frac{361}{400}}, \sqrt{\frac{576}{625}}$$

$$d) \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}, \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{14}}{\sqrt{35}}$$

Zadania

1. Oblicz.

$$a) \sqrt{121} + \sqrt{49} - \sqrt{225}$$

$$d) \sqrt{3,61} - \sqrt{1,21} - \sqrt{0,09}$$

$$b) \sqrt{196} - \sqrt{169} - \sqrt{144}$$

$$e) \sqrt{\frac{81}{400}} + \sqrt{\frac{9}{100}} - \sqrt{\frac{64}{25}}$$

$$c) \sqrt{0,25} + \sqrt{1,44} + \sqrt{6,25}$$

$$f) \sqrt{3\frac{6}{25}} - \sqrt{2\frac{1}{4}} + \sqrt{1\frac{7}{9}}$$

D 2. Uzasadnij, że:

$$a) \sqrt{1\frac{9}{16}} \neq \sqrt{1} + \sqrt{\frac{9}{16}}, \quad b) \sqrt{2\frac{1}{4}} \neq \sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}, \quad c) \sqrt{4\frac{1}{9}} \neq \sqrt{4} + \sqrt{\frac{1}{9}}.$$

3. Podaj wszystkie liczby naturalne leżące na osi między liczbami:

$$a) \sqrt{2} \text{ i } \sqrt{33},$$

$$b) \sqrt{10} \text{ i } \sqrt{140},$$

$$c) \sqrt{80} \text{ i } \sqrt{300}.$$

4. Wylącz czynnik przed pierwiastek.

$$a) \sqrt{18}$$

$$c) \sqrt{48}$$

$$e) \sqrt{108}$$

$$g) \sqrt{392}$$

$$\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

$$b) \sqrt{24}$$

$$d) \sqrt{96}$$

$$f) \sqrt{252}$$

$$h) \sqrt{450}$$

5. Zapisz liczbę w postaci $a\sqrt{2}$.

$$a) 4\sqrt{2} + \sqrt{8}$$

$$c) \sqrt{18} + \sqrt{98}$$

$$e) \sqrt{18} + \sqrt{72} + \sqrt{242}$$

$$b) \sqrt{32} - 3\sqrt{2}$$

$$d) \sqrt{200} - \sqrt{50}$$

$$f) \sqrt{800} + \sqrt{242} - \sqrt{162}$$

6. Zapisz liczbę w postaci $a\sqrt{b}$.

$$a) 7\sqrt{5} + \sqrt{20}$$

$$c) \sqrt{12} + \sqrt{75}$$

$$e) 0,2\sqrt{50} + 0,8\sqrt{72} - 0,3\sqrt{32}$$

$$b) \sqrt{48} - \sqrt{27}$$

$$d) \sqrt{45} - \sqrt{125}$$

$$f) 3\sqrt{20} - \frac{1}{3}\sqrt{45} - 5\sqrt{180}$$

$$2. a) \sqrt{1\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}, \quad \sqrt{1} + \sqrt{\frac{9}{16}} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \neq \frac{5}{4}$$

$$\text{Zatem } \sqrt{1\frac{9}{16}} \neq \sqrt{1} + \sqrt{\frac{9}{16}}.$$

$$b) \sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}, \quad \sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{2} + \frac{1}{2} \neq \frac{3}{2}$$

$$\text{Zatem } \sqrt{2\frac{1}{4}} \neq \sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}.$$

$$c) \sqrt{4\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{37}{9}}, \quad \sqrt{4} + \sqrt{\frac{1}{9}} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = \sqrt{\frac{49}{9}} \neq \sqrt{\frac{37}{9}}$$

$$\text{Zatem } \sqrt{4\frac{1}{9}} \neq \sqrt{4} + \sqrt{\frac{1}{9}}.$$

Pierwiastek iloczynu

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Pierwiastek ilorazu

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Założenia do wzorów:

– dla pierwiastka iloczynu:

$$a \geq 0 \text{ i } b \geq 0$$

– dla pierwiastka ilorazu:

$$a \geq 0 \text{ i } b > 0$$

Ćwiczenie 4

$$a) 18, 3, 5, 7$$

$$b) \frac{11}{12}, \frac{19}{20}, \frac{24}{25}$$

$$c) 4, 3, 10$$

$$d) 3, \frac{1}{2}, 2$$

Odpowiedzi do zadań

$$1. a) 3 \quad b) -11$$

$$c) 4,2 \quad d) 0,5$$

$$e) -\frac{17}{20} \quad f) 1\frac{19}{30}$$

$$3. a) 2, 3, 4, 5$$

$$b) 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$$

$$c) 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17$$

$$4. a) 3\sqrt{2} \quad b) 2\sqrt{6}$$

$$c) 4\sqrt{3} \quad d) 4\sqrt{6}$$

$$e) 6\sqrt{3} \quad f) 6\sqrt{7}$$

$$g) 14\sqrt{2} \quad h) 15\sqrt{2}$$

$$5. a) 6\sqrt{2} \quad b) \sqrt{2}$$

$$c) 10\sqrt{2} \quad d) 5\sqrt{2}$$

$$e) 20\sqrt{2} \quad f) 22\sqrt{2}$$

$$6. a) 9\sqrt{5} \quad b) \sqrt{3}$$

$$c) 7\sqrt{3} \quad d) -2\sqrt{5}$$

$$e) 4,6\sqrt{2} \quad f) -25\sqrt{5}$$

7. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 c) $\frac{\sqrt{10}}{5}$
 d) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
 e) $\frac{\sqrt{10}}{6}$
 f) $\frac{\sqrt{15}}{25}$
8. a) $4\sqrt{2} + 1 \approx 6,6$
 b) $\frac{3}{2}(\sqrt{2} - 1) \approx 0,6$
 c) $\frac{5}{4}(1 - \sqrt{2}) \approx -0,5$
 d) $\frac{1}{4}(10 + 3\sqrt{2}) \approx 3,55$
9. a) 6 b) 16
 c) 20 d) 30
 e) 42 f) 30
 g) 120 h) 120
10. a) 30
 b) $\frac{35}{4}\sqrt{6}$
 c) 2,2
 d) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
11. a) $6 + 18\sqrt{2}$
 b) $\frac{7}{2}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3} - \sqrt{6}$
12. a) 15
 b) $6\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$
 c) 16

13. a) 14
 b) 1,5
 c) $\frac{3}{4}$
 d) $\frac{7}{30}$

7. Usuń niewymierność z mianownika, postępując tak jak w przykładzie.

- a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ e) $\frac{5}{3\sqrt{10}}$
 b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ f) $\frac{3}{5\sqrt{15}}$

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

8. Usuń niewymierność z mianownika. Podaj przybliżoną wartość wyrażenia (przyjmij $\sqrt{2} \approx 1,4$).

- a) $\frac{8+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{6-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ c) $\frac{5\sqrt{2}-10}{4\sqrt{2}}$ d) $\frac{5\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}}$

9. Oblicz.

- a) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ c) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{40}$ e) $\sqrt{28} \cdot \sqrt{63}$ g) $\sqrt{30} \cdot \sqrt{480}$
 b) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{8}$ d) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$ f) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{20}$ h) $\sqrt{80} \cdot \sqrt{180}$

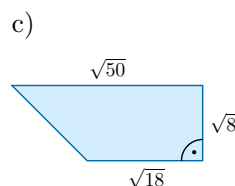
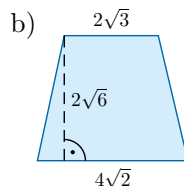
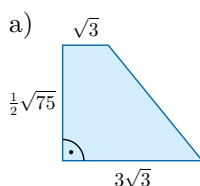
10. Oblicz.

- a) $\frac{\sqrt{54} \cdot \sqrt{350}}{\sqrt{21}}$ b) $\frac{\sqrt{98} \cdot \sqrt{375}}{\sqrt{80}}$ c) $\frac{\sqrt{52} \cdot \sqrt{363}}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{130}}$ d) $\frac{\sqrt{48} \cdot \sqrt{162}}{\sqrt{72} \cdot \sqrt{135}}$

11. Wykonaj działania.

- a) $2\sqrt{3}(\sqrt{27} + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{3})$ b) $\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$

12. Oblicz pole trapezu.



Sprawdź się

13. Oblicz.

- a) $\sqrt{81} + \sqrt{25}$ b) $\sqrt{0,49} + \sqrt{0,64}$ c) $\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{16}}$ d) $\sqrt{\frac{1}{9}} - \sqrt{\frac{1}{100}}$

14. Włącz czynnik pod pierwiastek.

- a) $5\sqrt{5}$ b) $7\sqrt{3}$ c) $9\sqrt{2}$ d) $13\sqrt{2}$ e) $\frac{1}{3}\sqrt{27}$ f) $1,5\sqrt{6}$

15. Figurę przedstawioną na rysunku obok można rozciąć na dwa kwadraty o polach 6,25 i 4,41. Oblicz obwód tej figury.



16. Prostokąt o polu P można rozciąć na dwa kwadraty. Oblicz obwód tego prostokąta.

- a) $P = 98 \text{ cm}^2$ b) $P = 6,48 \text{ cm}^2$ c) $P = \frac{1}{8} \text{ m}^2$ d) $P = \frac{1}{72} \text{ m}^2$

14. a) $\sqrt{125}$ b) $\sqrt{147}$ c) $\sqrt{162}$ d) $\sqrt{338}$ e) $\sqrt{3}$ f) $\sqrt{13,5}$

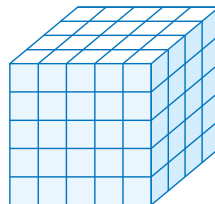
15. Bok większego kwadratu ma długość 2,5, a mniejszego – 2,1, zatem obwód figury:
 $3 \cdot 2,5 + 3 \cdot 2,1 + (2,5 - 2,1) = 14,2$

16. a) 42 cm b) 10,8 cm c) 1,5 m d) 0,5 m

1.6. Pierwiastek sześcienny. Pierwiastek n -tego stopnia

■ Pierwiastek sześcienny z liczby nieujemnej

Rozpatrzmy zagadnienie polegające na wyznaczeniu długości krawędzi sześcianu o danej objętości V . Na przykład długość krawędzi sześcianu o objętości $V = 125 \text{ cm}^3$ jest równa 5 cm, bo $5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 125 \text{ cm}^3$. Zapisujemy to następująco $\sqrt[3]{125} = 5$. Mówimy, że liczba 5 jest pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby 125.



Definicja

Pierwiastkiem sześciennym (pierwiastkiem trzeciego stopnia) z liczby nieujemnej a nazywamy liczbę b , która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa a .

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ gdy } b^3 = a$$

Przykład 1

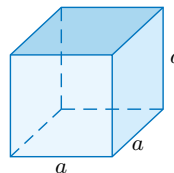
Podaj pierwiastek trzeciego stopnia i uzasadnij odpowiedź.

- a) $\sqrt[3]{8} = 2$, ponieważ $2^3 = 8$. c) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$, ponieważ $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$.
b) $\sqrt[3]{0} = 0$, ponieważ $0^3 = 0$. d) $\sqrt[3]{0,216} = 0,6$, ponieważ $0,6^3 = 0,216$.

Przykład 2

Oblicz długość krawędzi sześcianu o objętości 27.

Objętość V sześcianu o krawędzi długości a jest równa a^3 , więc $a = \sqrt[3]{V}$, czyli $a = \sqrt[3]{27} = 3$.



Ćwiczenie 1

Oblicz długość krawędzi sześcianu o objętości V .

- a) $V = 1$ b) $V = 64$ c) $V = 216$ d) $V = 8000$

Ćwiczenie 2

Podaj wartość, korzystając z informacji podanych obok.

- a) $\sqrt[3]{512}$ c) $\sqrt[3]{1331}$ e) $\sqrt[3]{1,331}$
b) $\sqrt[3]{\frac{1}{729}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{8}{729}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{729}{1331}}$

$$\begin{aligned} 7^3 &= 343 \\ 8^3 &= 512 \\ 9^3 &= 729 \\ 11^3 &= 1331 \end{aligned}$$

Uczeń:

- oblicza wartość pierwiastka trzeciego stopnia z liczby nieujemnej,
- oblicza wartość pierwiastka dowolnego stopnia,
- wyłącza czynnik przed znak pierwiastka,
- włącza czynnik pod znak pierwiastka,
- porównuje liczby zapisane za pomocą pierwiastków,
- wyznacza wartości wyrażeń arytmetycznych zawierających pierwiastki, stosując prawa działań na pierwiastkach,
- usuwa niewymierność z mianownika ułamka, gdy w mianowniku występuje $\sqrt[3]{a}$.

Ćwiczenie 1

- a) 1 b) 4
c) 6 d) 20

Ćwiczenie 2

- a) 8 b) $\frac{1}{9}$
c) 11 d) $\frac{2}{9}$
e) 1,1 f) $\frac{9}{11}$

Obliczanie pierwiastka trzeciego stopnia jest działaniem odwrotnym do podnoszenia do trzeciej potęgi.

Na przykład $\sqrt[3]{11^3} = 11$ oraz $(\sqrt[3]{9})^3 = 9$.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a^3} &= a \\ (\sqrt[3]{a})^3 &= a\end{aligned}$$

W obliczeniach wykorzystujemy podane poniżej wzory na pierwiastek sześcienny iloczynu i pierwiastek sześcienny ilorazu. Są one analogiczne do wzorów dla pierwiastka kwadratowego (podaj potrzebne założenia).

Przykład 3

a) $\sqrt[3]{0,001 \cdot 343} = \sqrt[3]{0,001} \cdot \sqrt[3]{343} = 0,1 \cdot 7 = 0,7$

b) $\frac{\sqrt[3]{686}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{686}{2}} = \sqrt[3]{343} = 7$

Pierwiastek iloczynu

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

Pierwiastek ilorazu

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

Ćwiczenie 3

a) 6 b) 5

c) $\sqrt[3]{4 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 49} = 2 \cdot 7 = 14$

d) 2 e) $\frac{3}{4} - \frac{5}{6} = -\frac{1}{12}$

f) $2\frac{1}{3}$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$

c) $\sqrt[3]{28} \cdot \sqrt[3]{98}$

e) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} - \sqrt[3]{\frac{125}{216}}$

b) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$

d) $\frac{\sqrt[3]{56}}{\sqrt[3]{7}}$

f) $\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}} + \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$

Ćwiczenie 4

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$

b) $\frac{4}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4\sqrt[3]{2}}{2} = 2\sqrt[3]{2}$

c) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{25}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$

Ćwiczenie 4

Przeanalizuj przykład w ramce. Na jego podstawie usuń niewymierność z mianownika podanego ułamka.

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{4}}$ c) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2 \cdot 4}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

Pierwiastek sześcienny z liczby rzeczywistej

W przeciwieństwie do definicji pierwiastka kwadratowego definicję pierwiastka sześciennego można rozszerzyć na liczby ujemne.

Na przykład: $\sqrt[3]{-1} = -1$, bo $(-1)^3 = -1$; $\sqrt[3]{-8} = -2$, bo $(-2)^3 = -8$.

Definicja

Pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby rzeczywistej a nazywamy taką liczbę b , która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa a .

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ gdy } b^3 = a$$

Ćwiczenie 5

Zapisz w postaci liczby wymiernej.

a) $\sqrt[3]{-27}$

b) $\sqrt[3]{-64}$

c) $\sqrt[3]{-125}$

d) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$

e) $\sqrt[3]{-\frac{27}{1000}}$

Ćwiczenie 5

a) -3 b) -4 c) -5 d) $-\frac{1}{3}$ e) $-\frac{3}{10}$

Pierwiastek n -tego stopnia

Ogólnie dla pierwiastka n -tego stopnia mamy następujące definicje:

Jeśli n jest liczbą parzystą, to dla dowolnej liczby nieujemnej a :

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b \geq 0 \text{ i } b^n = a$$

Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to dla dowolnej liczby rzeczywistej a :

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b^n = a$$

Uwaga. Dla pierwiastka 2. stopnia zamiast pisać $\sqrt[n]{a}$ stosujemy zapis $\sqrt{a}$.

Ćwiczenie 6

Zapisz w postaci liczby wymiernej.

- a) $\sqrt[4]{81}$ c) $\sqrt[4]{0,0016}$ e) $\sqrt[6]{729}$
b) $\sqrt[5]{-32}$ d) $\sqrt[5]{-0,00001}$ f) $\sqrt[7]{-128}$

$$\sqrt[8]{256} = 2, \text{ bo } 2^8 = 256.$$

$$\sqrt[9]{-512} = -2, \text{ bo } (-2)^9 = 512.$$

Zadania

1. Zapisz w postaci liczby wymiernej.

- a) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ e) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$ g) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$
b) $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{125}{216}}$ h) $\sqrt[3]{12\frac{19}{27}}$

2. Oblicz.

- a) $\sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{8}$ c) $\sqrt[3]{1000} + \sqrt[3]{27}$ e) $\sqrt[3]{0,125} + \sqrt[3]{0,001}$
b) $\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{64}$ d) $\sqrt[3]{512} - \sqrt[3]{216}$ f) $\sqrt[3]{0,027} + \sqrt[3]{0,008}$

3. Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

- a) $\sqrt[3]{32}$ c) $\sqrt[3]{135}$ e) $\sqrt[3]{108}$
b) $\sqrt[3]{250}$ d) $\sqrt[3]{375}$ f) $\sqrt[3]{120}$

$$\sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{125 \cdot 4} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{4} = 5\sqrt[3]{4}$$

4. Włącz czynnik pod pierwiastek.

- a) $2\sqrt[3]{3}$ c) $3\sqrt[3]{3}$ e) $4\sqrt[3]{10}$
b) $3\sqrt[3]{2}$ d) $6\sqrt[3]{2}$ f) $6\sqrt[3]{5}$

$$3\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{27 \cdot 6} = \sqrt[3]{162}$$

5. Sprawdź, czy podana równość jest prawdziwa.

- a) $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{2,25}$ b) $\frac{2\sqrt[3]{5}}{5\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{0,08}$ c) $\frac{5\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{2\frac{7}{9}}$

6. Która z podanych liczb jest większa: x czy y ?

- a) $x = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}}, y = \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ c) $x = \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{729}}, y = \sqrt[3]{\frac{135}{320}}$
b) $x = \frac{\sqrt[3]{1000}}{\sqrt[3]{27}}, y = \sqrt[3]{\frac{3000}{81}}$ d) $x = \frac{\sqrt[3]{0,064}}{\sqrt[3]{0,125}}, y = \frac{\sqrt[3]{0,081}}{\sqrt[3]{0,192}}$

5. Wszystkie równości są prawdziwe.

- a) $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{27 \cdot 2}{8 \cdot 3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}} = \sqrt[3]{2,25}$
b) $\frac{2\sqrt[3]{5}}{5\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 5}{125 \cdot 4}} = \sqrt[3]{\frac{2}{25}} = \sqrt[3]{0,08}$
c) $\frac{5\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{125 \cdot 3}{27 \cdot 5}} = \sqrt[3]{\frac{25}{9}} = \sqrt[3]{2\frac{7}{9}}$

6. a) $x = \frac{5}{4} < y = \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$

b) $x = y$

c) $x = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} < y = \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

d) $x = \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{4}{5} = 0,8 > y = \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4} = 0,75$

Ćwiczenie 6

- a) 3 b) -2
c) 0,2 d) -0,1
e) 3 f) -2

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{5}$
e) $\frac{3}{10}$ f) $\frac{5}{6}$
g) $\frac{4}{3}$ h) $\frac{7}{3}$

2. a) 7 b) 1
c) 13 d) 2
e) 0,6 f) 0,5

3. a) $2\sqrt[3]{4}$ b) $5\sqrt[3]{2}$
c) $3\sqrt[3]{5}$ d) $5\sqrt[3]{3}$
e) $3\sqrt[3]{4}$ f) $2\sqrt[3]{15}$

4. a) $\sqrt[3]{24}$ b) $\sqrt[3]{54}$
c) $\sqrt[3]{81}$ d) $\sqrt[3]{432}$
e) $\sqrt[3]{640}$ f) $\sqrt[3]{1080}$

7. a) 8 cm
b) 20 cm

8. V – objętość sześcianu,
 $h = 3\sqrt[3]{V}$ – wysokość wieży
a) $V = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 16 = 2 \cdot 4^3 \text{ [cm}^3\text{]}$
 $h = 3 \cdot 4\sqrt[3]{2} = 12\sqrt[3]{2} \text{ [cm]}$
b) $V = \frac{1}{3} \cdot 6,25 \cdot 7,5 \cdot 8 = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2,5^3 \cdot 2^3 = 5^3 \text{ [cm}^3\text{]}$
 $h = 15 \text{ cm}$

9. a) $\sqrt[4]{162}$
b) $\sqrt[4]{2500}$
c) $\sqrt[5]{2048}$
d) $\sqrt[6]{10000}$

10. a) 14 b) 9
c) -10 d) 0,6
e) 2,1 f) $1\frac{1}{4}$

11. a) -20 b) -0,1
c) $-\frac{5}{4}$ d) -1,5

12. a) 1 b) 0,3
c) $\frac{14}{15}$ d) -1
e) -2,4 f) 4

13. $xyz = 0$, gdyż:
a) $z = 0$,
b) $z = 0$.

14. a) -1
b) -0,2
c) 0,3

7. Objętość prostopadłościanu o wymiarach $x \text{ cm} \times y \text{ cm} \times z \text{ cm}$ jest równa objętości pewnego sześcianu. Oblicz długość krawędzi tego sześcianu.

- a) $x = 4, y = 4, z = 32$ b) $x = 16, y = 20, z = 25$

8. Z trzech sześciennych klocków zbudowano wieżę. Jej objętość jest równa objętości prostopadłościanu o podanych wymiarach. Oblicz wysokość tej wieży.

- a) $4 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$ b) $6,25 \text{ cm} \times 7,5 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$

9. Włącz czynnik pod pierwiastek.

- a) $3\sqrt[4]{2}$ b) $5\sqrt[4]{4}$ c) $4\sqrt[5]{2}$ d) $10\sqrt[6]{0,01}$

$$2\sqrt[10]{5} = \sqrt[10]{2^{10}} \cdot \sqrt[10]{5} = \sqrt[10]{2^{10} \cdot 5} = \sqrt[10]{5120}$$

10. Oblicz.

- a) $\sqrt[4]{16} + \sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{256} + \sqrt[4]{625}$ d) $2\sqrt[4]{\frac{81}{16}} - 3\sqrt[4]{\frac{256}{625}}$
b) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{10\,000}$ e) $6\sqrt[4]{0,0625} - 3\sqrt[4]{0,0081}$
c) $\sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{16} - \frac{\sqrt[6]{1000}}{\sqrt[6]{0,001}} - \sqrt[5]{32}$ f) $\sqrt[6]{64} - \sqrt[6]{\frac{1}{64}} - \sqrt[3]{\frac{1}{64}}$

11. Zapisz w postaci liczby wymiernej.

- a) $\sqrt[3]{-8000}$ b) $\sqrt[3]{-0,001}$ c) $\sqrt[3]{-\frac{125}{64}}$ d) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$

12. Oblicz.

- a) $2\sqrt[3]{-1} - \sqrt[3]{-27}$ c) $\sqrt[3]{\frac{-8}{125}} - \sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}$ e) $\frac{\sqrt[3]{-16}}{5\sqrt[3]{2}} - \frac{\sqrt[3]{-72}}{\sqrt[3]{-9}}$
b) $-\sqrt[3]{\frac{-64}{125}} + \sqrt[3]{-0,125}$ d) $\frac{\sqrt[3]{-9} \cdot \sqrt[3]{-9}}{\sqrt[3]{-3}} - \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{-3}}$ f) $\frac{\sqrt[3]{-128}}{\sqrt[3]{-4}} + \frac{\sqrt[3]{-128}}{\sqrt[3]{-1}}$

- D13.** Uzasadnij, że iloczyn xyz równa się zero.

- a) $x = \sqrt[5]{-32} - \sqrt[4]{16}, y = \sqrt[7]{1} - 2\sqrt[6]{1}, z = \sqrt[10]{1024} + 2\sqrt[9]{-1}$
b) $x = \sqrt[5]{32} - \sqrt[4]{81}, y = \sqrt[5]{-32} - \sqrt[4]{81}, z = \sqrt[5]{-1} + \sqrt[4]{1}$

Sprawdź się

14. Oblicz.

- a) $-\sqrt[3]{343} + \sqrt[3]{216}$ b) $\sqrt[3]{-0,216} + \sqrt[3]{0,064}$ c) $\sqrt[3]{0,001} - \sqrt[3]{-0,008}$

15. Która spośród liczb a, b, c, d jest najmniejsza, a która – największa?

- a) $a = \sqrt{8} \cdot \sqrt{18}, b = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{32}, c = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81}, d = \sqrt[3]{-125} \cdot \sqrt[3]{-27}$
b) $a = \sqrt{\frac{27}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}, b = \frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}, c = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}, d = \sqrt[3]{-\frac{5}{4}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{25}{2}}$

15. a) $a = 12, b = 4, c = 6, d = 15$, zatem najmniejsza jest liczba b , a największa – d .

- b) $a = 4\frac{1}{2}, b = 5, c = 2, d = 2\frac{1}{2}$, zatem najmniejsza jest liczba c , a największa – b .

1.7. Potęga o wykładniku naturalnym

Przykład 1

Założmy, że mamy parę królików oraz że liczba królików podwaja się co pół roku. Ile królików będziemy mieli po 5 latach?

$$2 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{10 \text{ półrocznych okresów}} = 2^{11} = 2048$$

Przypomnijmy definicję potęgi o wykładniku naturalnym.

Definicja

Dla liczby naturalnej $n > 1$ potęgą a^n nazywamy iloczyn n czynników równych liczbie a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

↑
podstawa potęgi

↑
wykładnik potęgi

Przyjmujemy również, że: $a^1 = a$ oraz $a^0 = 1$ dla $a \neq 0$.

Nie definiujemy wartości 0^0 .

Przykład 2

- a) $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$
 b) $(-\frac{2}{3})^3 = (-\frac{2}{3}) \cdot (-\frac{2}{3}) \cdot (-\frac{2}{3}) = -\frac{8}{27}$
 c) $(-3)^1 = -3$
 d) $16^0 = 1$

Ćwiczenie 1

Oblicz.

- a) $9^2, 9^3, 9^4$
 b) $(\frac{3}{4})^2, (\frac{3}{4})^3, (\frac{3}{4})^4$
 c) $(-\frac{2}{5})^2, (-\frac{2}{5})^3, (-\frac{2}{5})^4$

Ćwiczenie 2

Uporządkuj liczby w kolejności rosnącej.

$$(-2)^0, (-2)^4, (-2)^9, (-3)^4, (-3)^9$$

Ćwiczenie 2

$$(-3)^9 < (-2)^9 < (-2)^0 < (-2)^4 = 2^4 < 3^4 = (-3)^4$$

Uczeń:

- oblicza wartość potęgi liczby o wykładniku naturalnym,
- porządkuje liczby zapisane w postaci potęg, korzystając z własności potęg,
- stosuje prawa działań na potęgach do obliczania wartości wyrażeń,
- stosuje prawa działań na potęgach do upraszczania wyrażeń algebraicznych,
- porównuje liczby zapisane w postaci potęg.

Komentarz

Aby ułatwić uczniom zrozumienie potęg o wykładniku 0 zapisujemy potęgę a^n jako iloczyn liczby 1 i n czynników równych liczbie a . Wówczas:

$$a^n = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

W szczególności:

$$\begin{aligned} a^3 &= 1 \cdot a \cdot a \cdot a, \\ a^2 &= 1 \cdot a \cdot a, \\ a^1 &= 1 \cdot a = a, \\ a^0 &= 1, \text{ gdy } a \neq 0. \end{aligned}$$

Dla $n \neq 0$ mamy $0^n = 0$.

Gdyby w powyższych przykładach nie istniały założenia: $n \neq 0$ i $a \neq 0$, wówczas $0^0 = 1$ i $0^0 = 0$ jednocześnie, co prowadzi do sprzeczności. Zatem wartość 0^0 nie jest definiowana.

Ćwiczenie 1

a) 81, 729, 6561

b) $\frac{9}{16}, \frac{27}{64}, \frac{81}{256}$

c) $\frac{4}{25}, -\frac{8}{125}, \frac{16}{625}$

Przydatna jest umiejętność rozpoznawania niektórych potęg liczb: 2, 3, 4, 5.

n	2^n	3^n	4^n	5^n
1	2	3	4	5
2	4	9	16	25
3	8	27	64	125
4	16	81	256	625
5	32	243	1024	
6	64	729		
7	128			
8	256			
9	512			
10	1024			

Ćwiczenie 3

- a) 256
- b) 256
- c) 8
- d) 81
- e) 1 000 000
- f) 8000
- g) 32
- h) 81
- i) 64
- j) 729

Odpowiedzi do zadań

- 1. a) $\frac{1}{6^2} \cdot 6^3 = \frac{6^3}{6^2} = 6$
b) $\frac{5^5}{5^3} = 5^2 = 25$
c) $\frac{3^6}{3^4} = 3^2 = 9$
d) $(-\frac{1}{2})^2 \cdot (-\frac{1}{2})^3 \cdot (-2)^3 = \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 2)^3 = \frac{1}{4}$
e) $(-\frac{1}{2})^3 \cdot (-\frac{1}{2})^5 \cdot (-2)^5 = -\frac{1}{8} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 2)^5 = -\frac{1}{8}$
f) $-(\frac{1}{2})^6 \cdot (-2)^6 = -(\frac{1}{2} \cdot 2)^6 = -1$
- 2. a) 1024 b) 81
c) -64 d) 625
e) $\frac{1}{512}$ f) $\frac{1}{729}$
g) $\frac{64}{729}$ h) $11\frac{25}{64}$
- 3. a) $x > y$
b) $x < y$
c) $x > y$
d) $x > y$

Twierdzenie

Dla liczb naturalnych m, n oraz różnych od 0 liczb rzeczywistych a i b :

$$\begin{aligned} \blacksquare a^m \cdot a^n &= a^{m+n} & \blacksquare a^n \cdot b^n &= (ab)^n & \blacksquare (a^m)^n &= a^{m \cdot n} \\ \blacksquare \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \text{ dla } m > n & \blacksquare \frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

- a) $2^2 \cdot 2^6$
- c) $2^9 : 2^6$
- e) $2^6 \cdot 5^6$
- g) $6^5 : 3^5$
- i) $(2^2)^3$
- b) $2^3 \cdot 2^5$
- d) $3^9 : 3^5$
- f) $4^3 \cdot 5^3$
- h) $12^4 : 4^4$
- j) $(3^3)^2$

Zadania

- 1. Oblicz.
a) $(\frac{1}{6})^2 \cdot 6^3$ c) $(\frac{1}{3})^4 \cdot 3^6$ e) $(-\frac{1}{2})^8 \cdot (-2)^5$
b) $(\frac{1}{5})^3 \cdot 5^5$ d) $(-\frac{1}{2})^5 \cdot (-2)^3$ f) $(-\frac{1}{4})^3 \cdot (-2)^6$
- 2. Oblicz.
a) $(2^2)^5$ c) $((-4)^3)^1$ e) $((\frac{1}{2})^3)^3$ g) $((-\frac{2}{3})^2)^3$
b) $(3^2)^2$ d) $((-5)^2)^2$ f) $((\frac{1}{3})^3)^2$ h) $((-\frac{3}{2})^3)^2$
- 3. Porównaj liczby x i y .
a) $x = (-4)^2, y = (-\frac{1}{4})^2$ c) $x = (-\frac{1}{4})^2, y = (-\frac{1}{4})^4$
b) $x = (-\frac{1}{2})^5, y = (-\frac{1}{2})^6$ d) $x = (-\frac{2}{3})^3, y = (-\frac{3}{2})^3$
- 4. Uporządkuj liczby $(-\frac{1}{2})^5, 2^4, (-2)^5, (\frac{1}{2})^3, (-\frac{1}{2})^2, (-\frac{1}{2})^3, (-\frac{1}{2})^4$ w kolejności rosnącej.

Sprawdź się

- 5. Oblicz.
a) $2^5 \cdot 2 \cdot 2^5$ b) $3^2 \cdot 3 \cdot 3^2$ c) $(4^2 \cdot 4^3) : 4^5$ d) $(5^6 : 5^4) \cdot 5^2$
- 6. Oblicz.
a) $5^3 - (2^2)^3 - 3^0$ d) $3^3 \cdot 2^3 - 36^3 : 9^3$ g) $2^4 \cdot 5^4 + 10^3 - 10^2$
b) $(4^2)^2 - 4^3 + 4^2$ e) $(-2)^4 + (-2)^3$ h) $(3^5 \cdot 2^5) : 6^4$
c) $11^2 + 2^3 \cdot \frac{1}{2}$ f) $-2^5 + (-3)^4$ i) $(6^6 : 3^6) \cdot 5^6$
- 4. $(-2)^5 < (-\frac{1}{2})^3 < (-\frac{1}{2})^5 < (-\frac{1}{2})^4 < (\frac{1}{2})^3 < (-\frac{1}{2})^2 < 2^4$
- 5. a) 2048 b) 243 c) 1 d) 625
- 6. a) 60 b) 208 c) 125 d) 152 e) 8
f) 49 g) 10 900 h) 6 i) 1 000 000

1.8. Potęga o wykładniku całkowitym. Notacja wykładnicza

Określenie potęgi o wykładniku naturalnym możemy rozszerzyć na potęgę o wykładniku całkowitym (w szczególności ujemnym).

Definicja

Dla liczby naturalnej $n \geq 1$ i dla liczby $a \neq 0$ przyjmujemy, że:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Przykład 1

a) $3^{-1} = \frac{1}{3}$

b) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) 4^{-2}

c) $(-3)^{-2}$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

g) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$

i) $0,2^{-2}$

b) 4^{-3}

d) $(-3)^{-3}$

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

h) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$

j) $(-0,2)^{-3}$

Ćwiczenie 2

Czy podane liczby są równe?

a) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-3}$, $\left(\frac{7}{5}\right)^3$

b) $\left(-\frac{4}{9}\right)^6$, $\left(\frac{9}{4}\right)^{-6}$

c) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-5}$, $\left(\frac{5}{3}\right)^5$

Do obliczania wartości wyrażeń, w których występują potęgi o wykładnikach całkowitych, możemy wykorzystywać prawa analogiczne do praw działań na potęgach o wykładnikach naturalnych.

Twierdzenie

Dla liczb całkowitych m, n oraz różnych od 0 liczb rzeczywistych a i b :

■ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

■ $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

■ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

■ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

■ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) $3^9 \cdot 3^{-6}$

c) $(2^5)^{-2}$

e) $5^{-9} : 5^{-11}$

g) $6^5 : 3^5$

i) $6^3 \cdot 2^{-5}$

b) $0,5^3 \cdot 0,5^7$

d) $(0,25^{-1})^{-4}$

f) $4 : 4^{-4}$

h) $10^{10} : 5^{10}$

j) $10^4 \cdot 5^{-2}$

Ćwiczenie 3

a) 27 b) $\frac{1}{1024}$ c) $\frac{1}{1024}$ d) $\frac{1}{256}$ e) 25

f) 1024 g) 32 h) 1024 i) $\frac{27}{4}$ j) 400

Uczeń:

- oblicza wartość potęgi liczby o wykładniku całkowitym ujemnym,
- porządkuje liczby zapisane w postaci potęg, korzystając z własności potęg,
- stosuje prawa działań na potęgach do obliczania wartości wyrażeń,
- stosuje prawa działań na potęgach do upraszczania wyrażeń algebraicznych,
- porównuje liczby zapisane w postaci potęg o wykładniku całkowitym,
- stosuje notację wykładniczą do zapisywania bardzo dużych i małych liczb,
- liczbę w postaci wykładniczej zapisuje w postaci dziesiętnej,
- mnoży i dzieli liczby zapisane w postaci notacji wykładniczej,
- stosuje notację wykładniczą w sytuacjach praktycznych.

Ćwiczenie 1

a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{1}{64}$

c) $\frac{1}{9}$ d) $-\frac{1}{27}$

e) 4 f) 32

g) $\frac{9}{4}$ h) $\frac{81}{16}$

i) 25 j) -125

Ćwiczenie 2

a) tak b) tak

c) nie

Notacja wykładnicza

Przy zapisywaniu bardzo dużych i bardzo małych liczb wygodnie jest posługiwać się notacją wykładniczą (inaczej zwaną notacją naukową).

Definicja

Liczbę dodatnią a możemy przedstawić w postaci iloczynu:

$$a = x \cdot 10^n$$

gdzie x jest liczbą spełniającą warunki $1 \leq x < 10$, a n – liczbą całkowitą. Takie przedstawienie liczby nazywamy **notacją wykładniczą**.

Przykład 2

a) $326\,000\,000\,000 = 3,26 \cdot 10^{11}$
11 cyfr

b) $0,00000097 = 9,7 \cdot 10^{-7}$
7 cyfr

Ćwiczenie 4

- a) $5,02 \cdot 10^{27}$
- b) $2,7 \cdot 10^{-4}$
- c) $2,99 \cdot 10^{-26}$
- d) $9,10956 \cdot 10^{-31}$

Ćwiczenie 5

- a) $6,32 \cdot 10^6$
- b) $1,09 \cdot 10^8$
- c) $4,3728 \cdot 10^1$
- d) $8,7652 \cdot 10^3$
- e) $6,5 \cdot 10^{-4}$
- f) $3,02 \cdot 10^{-3}$
- g) $1,00324 \cdot 10^{-1}$
- h) $1 \cdot 10^{-6}$

Ćwiczenie 6

- a) 86 200
- b) 0,000789
- c) 0,0000834
- d) 6,02

Ćwiczenie 4

Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

- a) 5 020 000 000 000 000 000 000 000 ton (masa Syriusza)
- b) 0,00027 mm (wielkość wirusa ospy)
- c) 0,000 000 000 000 000 000 000 000 029 9 kg (masa cząsteczki wody)
- d) 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 910 956 kg (masa elektronu)

Ćwiczenie 5

Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

- a) 6 320 000 c) 43,728 e) 0,00065 g) 0,100324
- b) 109 000 000 d) 8765,2 f) 0,00302 h) 0,000001

Ćwiczenie 6

Zapisz liczbę w postaci dziesiętnej.

- a) $8,62 \cdot 10^4$ b) $7,89 \cdot 10^{-4}$ c) $8,34 \cdot 10^{-5}$ d) $6,02 \cdot 10^0$

Ćwiczenie 7

Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej i w postaci dziesiętnej.

- a) $(3,4 \cdot 10^7) \cdot (4 \cdot 10^{-5})$
- b) $(1,4 \cdot 10^3) \cdot (8 \cdot 10^2)$
- c) $(4,8 \cdot 10^{-1}) : (1,6 \cdot 10^{-3})$
- d) $(7,2 \cdot 10^{-3}) : (1,2 \cdot 10^{-2})$

Oblicz.

$$(5,2 \cdot 10^9) \cdot (0,5 \cdot 10^{-7}) = 5,2 \cdot 0,5 \cdot 10^{9-7} = 2,6 \cdot 10^2 = 260$$

Ćwiczenie 7

- a) $1,36 \cdot 10^3 = 1360$
- b) $1,12 \cdot 10^6 = 1\,120\,000$
- c) $3 \cdot 10^2 = 300$
- d) $6 \cdot 10^{-1} = 0,6$

Zadania

1. Oblicz.

a) $(-2)^5, (-2)^{-5}, 2^{-5}$

c) $(\sqrt{3})^4, (\sqrt{3})^{-2}, (\sqrt{3})^{-6}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}, \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}, \left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$

d) $(\sqrt{2})^6, (\sqrt{2})^7, (\sqrt{2})^{-8}$
2. Zapisz liczbę w postaci 2^m , gdzie m jest liczbą całkowitą.

a) $2^3 \cdot 4^6$

b) $4^{-5} \cdot 8^2$

c) $64^2 : 32^{-3}$

d) $(16^{-2} : 4^{-8}) \cdot 8^4$
3. Zapisz podane liczby w postaci potęg o tej samej podstawie.

a) $16, \frac{1}{64}, 8^3, (\sqrt{2})^4, 1024^2$

c) $0,001, 100^5, \left(\frac{1}{100}\right)^{-4}, \left(\frac{1}{0,1}\right)^{-6}$

b) $\frac{1}{81}, 27, 9^{-2}, (\sqrt{3})^6, 81^{-5}$

d) $25^{-3}, \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}, \left(\frac{1}{125}\right)^4, 625^{-5}$
4. Oblicz.

a) $(-2\sqrt{3})^{-3}$

b) $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{-4}$

c) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^{-3}$

d) $((-3\sqrt{2})^{-1})^{-2}$
5. Oblicz.

a) $5^{-3} \cdot 2^{-3}$

c) $8^{-4} \cdot 4^4$

e) $\left(2\frac{3}{7}\right)^5 : \left(\frac{17}{14}\right)^5$

g) $(-0,2)^{-8} : 5^8$

b) $0,2^{-5} \cdot 5^{-5}$

d) $18^{-3} : 6^{-3}$

f) $1,3^{-2} : 0,1^{-2}$

h) $(-1,2)^{-5} : \left(\frac{6}{5}\right)^{-5}$
6. Oblicz.

a) $\left(\frac{6}{5}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{-4}$

b) $\left(\frac{2}{21}\right)^{-3} \cdot 15^{-3} \cdot 7^{-3}$

c) $0,4^3 \cdot \left(\frac{5}{16}\right)^3 : 4^{-3}$
7. Która z liczb jest większa: x czy y ?

a) $x = 2^4 \cdot 4^{-2}, y = 4^{-4} : 8^{-2}$

b) $x = (2^{-4} : 2^{-6})^{-1}, y = (2^{-4} \cdot 2^{-3})^{-1}$
8. Oblicz.

a) $\frac{2^{-2}}{3^{-3}} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2$

c) $\frac{6^0 + 0^6}{6^{-1}} + (4^6 - 16^3)$

e) $\left(0,5 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{-6} - 2 \cdot 16^4\right) : 7^3$

b) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^{-2}$

d) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}\right) : 6^{-2}$

f) $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} : \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-4}$
9. Podaj konieczne założenia i uprość wyrażenie, a następnie oblicz jego wartość dla $a = -\frac{1}{2}$.

a) $a^3 \cdot a^5 \cdot a^{-6}$

c) $(a^4 : a^{-1}) \cdot a^{-3}$

e) $(a^{-1} \cdot a^6)^{-2} \cdot (a^{-3})^2$

b) $(a^8 \cdot a^{-3}) : a^2$

d) $(a^7 : a^{-2}) : a^{-4}$

f) $(a^5 : a^{-4})^2 : (a^{-4})^{-1}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $-32, -\frac{1}{32}, \frac{1}{32}$
b) $9, -27, 81$
c) $9, \frac{1}{3}, \frac{1}{27}$
d) $8, 8\sqrt{2}, \frac{1}{16}$
2. a) 2^{15} b) 2^{-4}
c) 2^{27} d) 2^{20}
3. a) $2^4, 2^{-6}, 2^9, 2^2, 2^{20}$
b) $3^{-4}, 3^3, 3^{-4}, 3^3, 3^{-20}$
c) $10^{-3}, 10^{10}, 10^8, 10^{-6}$
d) $5^{-6}, 5^2, 5^{-12}, 5^{-20}$
4. a) $-\frac{\sqrt{3}}{72}$ b) $\frac{4}{81}$
c) $-40\sqrt{5}$ d) 18
5. a) $0,001$ b) 1
c) $\frac{1}{16}$ d) $\frac{1}{27}$
e) 32 f) $\frac{1}{169}$
g) 1 h) -1
6. a) $\frac{35}{36}$ b) $0,001$ c) $\frac{1}{8}$
7. a) $x = 2^0, y = 2^{-2}$,
zatem $x > y$.
b) $x = 2^{-2}, y = 2^7$,
zatem $y > x$.
8. a) $1\frac{1}{3}$ b) $\frac{16}{81}$
c) 6 d) $3\frac{3}{8}$
e) 0 f) $\frac{8}{125}$

9. $a \neq 0$
a) $a^2, \frac{1}{4}$ b) $a^3, -\frac{1}{8}$
c) $a^2, \frac{1}{4}$ d) $a^{13}, -\frac{1}{8192}$
e) $a^{-16}, 65536$ f) $a^{14}, \frac{1}{16384}$

10. a) $2,73 \cdot 10^8 = 273\,000\,000$
 b) $2 \cdot 10^1 = 20$
 c) $2,42 \cdot 10^{-4} = 0,000242$
 d) $5,203 \cdot 10^2 = 520,3$
11. a) $2 \cdot 10^4 = 20\,000$
 b) $9 \cdot 10^{10} = 90\,000\,000\,000$
 c) $3 \cdot 10^{12} = 3\,000\,000\,000\,000$
 d) $1,6 \cdot 10^{11} = 160\,000\,000\,000$
12. a) $9,6 \cdot 10^9$
 b) $6 \cdot 10^{-13}$
 c) $1,02 \cdot 10^0$
 d) $1,2 \cdot 10^0$

10. Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej i w postaci dziesiętnej.
 a) $42\,000 \cdot 6500$ b) $1600 \cdot 0,0125$ c) $0,0044 \cdot 0,055$ d) $0,0605 \cdot 8600$
11. Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej i w postaci dziesiętnej.
 a) $2\,100\,000\,000 : 105\,000$ c) $51\,000\,000\,000 : 0,017$
 b) $243\,000\,000\,000 : 2,7$ d) $102\,400\,000\,000 : 0,64$
12. Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej.
 a) $\frac{(3,2 \cdot 10^{-12}) \cdot (1,2 \cdot 10^4)}{4 \cdot 10^{-18}}$ c) $\frac{(3,4 \cdot 10^{-15}) \cdot (7,5 \cdot 10^{-16})}{2,5 \cdot 10^{-30}}$
 b) $\frac{(5,2 \cdot 10^8) \cdot (1,5 \cdot 10^{-3})}{1,3 \cdot 10^{18}}$ d) $\frac{(4,8 \cdot 10^{18}) \cdot (1,8 \cdot 10^{-10})}{(6 \cdot 10^{-8}) \cdot (1,2 \cdot 10^{16})}$
13. W tabeli podano wybrane prędkości, stosując zapis dziesiętny i notację wykładniczą. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tę tabelę.

	v [m/s] (zapis dziesiętny)	v [m/s] (notacja wykładnicza)
Rosnący włos	0,0000000046	$4,6 \cdot 10^{-9}$
Szybki ślimak	0,00194	$1,94 \cdot 10^{-3}$
Ziemia wokół Słońca	29 600	$2,96 \cdot 10^4$
Światło w próżni	299 792 458	$2,99792458 \cdot 10^8$

Sprawdź się

14. a) $\frac{1}{64}, 64, -\frac{1}{64}, -\frac{1}{64}$
 b) $64, -\frac{1}{64}, -\frac{1}{64}, 64$
 c) $81, \frac{1}{81}, -81$
 d) $\frac{1}{8}, 8, -\frac{1}{8}$
15. a) 36 b) $\frac{1}{16}$
 c) 32 d) $\frac{27}{8}$
 e) $\frac{1}{125}$ f) 49
 g) $\frac{16}{9}$ h) $\frac{8}{3}$
 i) $\frac{1}{9}$ j) $\frac{1}{36}$
 k) 64 l) 64
16. $x \neq 0$
 a) $2x^6, 128$
 b) $x^{12}, 1$
 c) $x^4, 625$
 d) $2x^3, \frac{27}{4}$

14. Oblicz.
 a) $8^{-2}, (-8)^2, -8^{-2}, -\left(-\frac{1}{8}\right)^2$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}, \left(-\frac{1}{3}\right)^4, -\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$
 b) $4^3, (-4)^{-3}, -4^{-3}, -\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3}$ d) $(\sqrt{2})^{-6}, (-\sqrt{2})^6, -(-\sqrt{2})^{-6}$
15. Oblicz.
 a) $6^{-3} \cdot 6^5$ d) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$ g) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-5} : \left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$ j) $(6^{-2})^5 \cdot 6^8$
 b) $4^{-8} \cdot 4^6$ e) $5^{-10} : 5^{-7}$ h) $\left(\frac{8}{3}\right)^{-7} : \left(\frac{8}{3}\right)^{-8}$ k) $(4^{-3})^{-4} : 4^9$
 c) $0,5^{-4} \cdot 0,5^{-1}$ f) $7^{-4} : 7^{-6}$ i) $(3^6)^{-2} \cdot 3^{10}$ l) $(8^4)^{-2} : 8^{-10}$
16. Podaj konieczne założenia i uprość wyrażenie, a następnie oblicz jego wartość dla podanej wartości x .
 a) $(x^{-3})^{-2} + (x^{-1})^{-6}, x = -2$ c) $\left(\left((x^{-3})^2 : x^{-4}\right) : x^0\right)^{-2}, x = 5$
 b) $\left((x^4)^{-3}\right)^{-2} : \left((x^2)^{-2}\right)^{-3}, x = 1$ d) $\left((x^3)^6 + (x^{-2})^{-9}\right) : (x^{-5})^{-3}, x = \frac{3}{2}$

Uczeń:

- zapisuje pierwiastek n -tego stopnia w postaci potęgi o wykładniku $\frac{1}{n}$,
- oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych,
- zapisuje daną liczbę w postaci potęgi o wykładniku wymiernym,
- upraszcza wyrażenia, stosując prawa działań na potęgach,
- oblicza przybliżoną wartość potęg o wykładnikach wymiernych.

Ćwiczenie 1

- a) 2 b) 4
c) 9 d) 2
e) 3 f) 3

Ćwiczenie 2

- a) 8 b) 9
c) 16 d) 8
e) 729 f) 32
g) $\frac{1}{25}$ h) 27
i) 32 j) $\frac{9}{4}$

1.9. Potęga o wykładniku wymiernym

Definicja

Dla dowolnej liczby $a \geq 0$ i liczby naturalnej $n > 1$ przyjmujemy:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Przykład 1

Oblicz.

a) $49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$ b) $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$ c) $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $16^{\frac{1}{2}}$ c) $81^{\frac{1}{2}}$ d) $8^{\frac{1}{3}}$ e) $27^{\frac{1}{3}}$ f) $81^{\frac{1}{4}}$

Potęga o wykładniku wymiernym $\frac{m}{n}$ definiujemy następująco:

Definicja

Dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m przyjmujemy:

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Przykład 2

Oblicz.

a) $9^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27$ b) $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ c) $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $4^{\frac{3}{2}}$ c) $8^{\frac{4}{3}}$ e) $81^{1,5}$ g) $125^{-\frac{2}{3}}$ i) $(\frac{1}{4})^{-2,5}$
b) $27^{\frac{2}{3}}$ d) $32^{\frac{3}{5}}$ f) $4^{2,5}$ h) $(\frac{1}{81})^{-\frac{3}{4}}$ j) $(\frac{8}{27})^{-\frac{2}{3}}$

D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m zachodzi równość $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $(\sqrt{10})^6$ c) $\sqrt[3]{125^2}$ e) $(\sqrt[8]{625})^2$ g) $(\sqrt[3]{\sqrt{27}})^2$ i) $(\sqrt{\sqrt[3]{49}})^3$
b) $\sqrt{4^{10}}$ d) $\sqrt[5]{32^3}$ f) $\sqrt{\sqrt{81}}$ h) $\sqrt[3]{\sqrt{4^3}}$ j) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{16^6}}$

Ćwiczenie 3

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{[(\sqrt[n]{a})^n]^m} = \sqrt[n]{[(\sqrt[n]{a})^m]^n} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Ćwiczenie 4

- a) 1000 b) 1024 c) 25 d) 8
e) 5 f) 3 g) 3 h) 2 i) 7 j) 4

Prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych są analogiczne do praw działań na potęgach o wykładnikach całkowitych.

Przykład 3

Oblicz.

a) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 3^2 = 9$

b) $6^{\frac{4}{3}} : 6^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}} = 6^1 = 6$

Dla liczb wymiernych x, y oraz dodatnich liczb rzeczywistych a i b :

■ $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

■ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

■ $a^x \cdot b^x = (ab)^x$

■ $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

■ $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}$ b) $5^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{\frac{5}{3}}$ c) $4^{\frac{9}{2}} : 4^{\frac{5}{2}}$ d) $2^{7,5} : 2^{2,5}$ e) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}}$

Przykład 4

Oblicz.

a) $8^{\frac{5}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{2}} = (8 \cdot 2)^{\frac{5}{2}} = 16^{\frac{5}{2}} = \left(16^{\frac{1}{2}}\right)^5 = 4^5 = 1024$

b) $10^{\frac{3}{2}} : 5^{\frac{3}{2}} = (10 : 5)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$

c) $80^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = (16 \cdot 5)^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5 = 40$

Ćwiczenie 6

Oblicz.

a) $12^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}}$ b) $12^{\frac{5}{2}} : 3^{\frac{5}{2}}$ c) $24^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}$ d) $9^{\frac{4}{3}} : 24^{\frac{2}{3}}$ e) $375^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$

Ćwiczenie 7

Oblicz.

a) $\left(9^{\frac{5}{9}}\right)^{\frac{10}{3}}$ b) $\left(8^{\frac{2}{9}}\right)^{\frac{4}{9}}$ c) $\left(125^{\frac{2}{3}}\right)^{0,75}$ d) $\left(\left(\frac{4}{9}\right)^{-2,5}\right)^{-0,6}$ e) $\left(32^{\frac{28}{25}}\right)^{-\frac{5}{7}}$

Obliczając przybliżone wartości potęg o wykładnikach wymiernych, możemy skorzystać z odpowiedniego kalkulatora (przykładowe wyniki zostały przedstawione obok).

$10^{0,3} \approx 1,995262315$

$10^{0,45} \approx 2,818382931$

$10^{0,625} \approx 4,216965034$

Ćwiczenie 8

Korzystając z powyższych przybliżeń, podaj z dokładnością do czterech miejsc po przecinku przybliżoną wartość potęgi:

a) $10^{2,3}$, b) $10^{3,45}$, c) $10^{\frac{13}{8}}$, d) $10^{-1,7}$.

Ćwiczenie 8

a) $10^2 \cdot 10^{0,3} \approx 199,5262$

b) $10^3 \cdot 10^{0,45} \approx 2818,3829$

c) $10^1 \cdot 10^{0,625} \approx 42,1697$

d) $10^{0,3} : 10^2 \approx 0,0200$

Ćwiczenie 5

a) 4 b) 125

c) 16 d) 32

e) $\sqrt[3]{3}$

Ćwiczenie 6

a) $36^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{36})^3 = 216$

b) $4^{\frac{5}{2}} = 32$

c) $8^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 4 \cdot 3 = 12$

d) $(3^2)^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} = 3^{\frac{6}{3}} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} = 3^2 \cdot (\sqrt[3]{8})^{-2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

e) $125^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 5 \cdot 3 = 15$

Ćwiczenie 7

a) $9^2 = 81$

b) $8^{\frac{2}{3}} = 4$

c) $125^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{5}$

d) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{27}$

e) $32^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{16}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $2^{\frac{1}{2}}$ b) $2^{\frac{1}{3}}$
 c) $2^{-\frac{1}{2}}$ d) $2^{\frac{2}{3}}$
 e) $2^{\frac{9}{2}}$ f) $2^{\frac{10}{3}}$
 g) $2^{\frac{3}{2}}$ h) $2^{\frac{4}{3}}$
2. a) $7^{\frac{3}{2}}$ b) $7^{\frac{2}{3}}$
 c) $7^{-\frac{1}{2}}$ d) $7^{-\frac{1}{3}}$
 e) $7^{-\frac{3}{2}}$ f) $7^{-\frac{3}{5}}$
 g) $7^{\frac{5}{2}}$ h) $7^{\frac{6}{5}}$
3. a) 27 b) 25
 c) $\frac{1}{16}$ d) $\frac{1}{9}$
 e) $\frac{1}{12}$ f) 8
 g) 10 h) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
4. a) 0,008 b) 2,5
 c) 0,09 d) 125
 e) 32 f) 0,008
 g) $411\frac{127}{243}$ h) 0,008
5. a) $2^2 \cdot (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 \cdot 2^2 = 16$
 b) $2^4 \cdot (2^5)^{-\frac{1}{5}} = 2^4 \cdot 2^{-1} = 2^3 = 8$
 c) $3^3 \cdot (3^3)^{-\frac{4}{3}} = 3^3 \cdot 3^{-4} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
 d) $(3^3)^{\frac{2}{3}} \cdot (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^2 \cdot 3^3 = 3^5 = 243$
 e) $0,2 \cdot 5 = 1$
 f) $0,2 : (4^3)^{\frac{1}{3}} = 0,2 : 4 = 0,05$
 g) $0,4^3 \cdot 10^3 = 4^3 = 64$
 h) $(0,3^3)^{\frac{2}{3}} : (3^6)^{\frac{1}{6}} = 0,3^2 : 3 = 0,03$
6. a) $3^{\frac{1}{2}}$ b) $3^{\frac{1}{4}}$
 c) $3^{\frac{2}{3}}$ d) $3^{-\frac{1}{2}}$
 e) $3^{\frac{4}{5}}$ f) $3^{\frac{5}{3}}$
 g) $3^{\frac{3}{2}}$ h) $3^{\frac{7}{3}}$
7. a) 7 b) 4 c) 5
 d) 0 e) 1
 f) 0 g) $\frac{8}{3}$ h) 3

Zadania

1. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 2.
 a) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{0,5}$ e) $\sqrt{512}$ g) $2\sqrt{2}$
 b) $\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[3]{4}$ f) $\sqrt[3]{1024}$ h) $2\sqrt[3]{2}$
2. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 7.
 a) $\sqrt{7^3}$ c) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ e) $\sqrt{\frac{1}{7^3}}$ g) $49\sqrt{7}$
 b) $\sqrt[3]{7^2}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$ f) $\frac{1}{\sqrt[5]{7^3}}$ h) $7\sqrt[5]{7}$
3. Oblicz.
 a) $9^{\frac{3}{2}}$ c) $8^{-\frac{4}{3}}$ e) $144^{-0,5}$ g) $10\,000^{0,25}$
 b) $125^{\frac{2}{3}}$ d) $27^{-\frac{2}{3}}$ f) $16^{0,75}$ h) $81^{-0,125}$
4. Oblicz.
 a) $0,04^{\frac{3}{2}}$ c) $0,027^{\frac{2}{3}}$ e) $0,0625^{-\frac{5}{4}}$ g) $0,0081^{-1,25}$
 b) $0,16^{-\frac{1}{2}}$ d) $0,0016^{-\frac{3}{4}}$ f) $0,00032^{\frac{3}{5}}$ h) $0,00000256^{0,375}$
5. Oblicz.
 a) $2^2 \cdot 8^{\frac{2}{3}}$ c) $3^3 \cdot 27^{-\frac{4}{3}}$ e) $0,008^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{125}$ g) $0,0256^{\frac{3}{4}} \cdot (\sqrt[3]{10})^9$
 b) $2^4 : 32^{\frac{1}{5}}$ d) $27^{\frac{2}{3}} : 9^{-\frac{3}{2}}$ f) $0,04^{\frac{1}{2}} : 64^{\frac{1}{3}}$ h) $0,027^{\frac{2}{3}} : \sqrt[6]{27^2}$

Sprawdź się

6. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 3.
 a) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt[3]{9}$ e) $\sqrt[5]{81}$ g) $3\sqrt{3}$
 b) $\sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ f) $\sqrt[3]{243}$ h) $9\sqrt[3]{3}$
7. Oblicz.
 a) $25^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{1}{3}}$ c) $32^{\frac{1}{5}} + 81^{\frac{1}{4}}$ e) $4^{-\frac{1}{2}} + 8^{-\frac{1}{3}}$ g) $(\frac{9}{16})^{-\frac{1}{2}} + (\frac{27}{64})^{-\frac{1}{3}}$
 b) $49^{\frac{1}{2}} - 27^{\frac{1}{3}}$ d) $64^{\frac{1}{6}} - 16^{\frac{1}{4}}$ f) $9^{-\frac{1}{2}} - 27^{-\frac{1}{3}}$ h) $0,008^{-\frac{1}{3}} - 0,25^{-\frac{1}{2}}$
8. Oblicz.
 a) $16^{\frac{5}{4}}$ b) $64^{\frac{2}{3}}$ c) $8^{-\frac{5}{3}}$ d) $25^{-\frac{3}{2}}$ e) $81^{-\frac{3}{4}}$
9. Oblicz.
 a) $2^{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{2}$ b) $49^{\frac{1}{2}} : 49^{\frac{1}{4}}$ c) $\sqrt{7^5} \cdot 7^{-\frac{3}{2}}$ d) $9^{-\frac{3}{4}} : 27^{-\frac{3}{2}}$

8. a) 32 b) 16 c) $\frac{1}{32}$ d) $\frac{1}{125}$ e) $\frac{1}{27}$
9. a) $2^{\frac{5}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^3 = 8$
 b) $49^{\frac{1}{4}} = (49^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$
 c) $7^{\frac{5}{2}} \cdot 7^{-\frac{3}{2}} = 7^1 = 7$
 d) $(3^2)^{-\frac{3}{4}} : (3^3)^{-\frac{3}{2}} = 3^{-\frac{3}{2}} : 3^{-\frac{9}{2}} = 3^3 = 27$

1.10. Logarytm i jego własności

Definicja

Logarytmem o podstawie 10 (logarytmem dziesiętnym) z dodatniej liczby b nazywamy liczbę x taką, że $10^x = b$. Piszemy wówczas $\log b = x$.

Przykład 1

- a) $\log 1000 = 3$, ponieważ $10^3 = 1000$.
b) $\log 0,1 = -1$, ponieważ $10^{-1} = 0,1$.
c) $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$, ponieważ $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$.

Pytanie o $\log b$ to pytanie o to, do jakiej potęgi należy podnieść 10, aby otrzymać liczbę b .

Ćwiczenie 1

Oblicz.

- a) $\log 10$ b) $\log 100$ c) $\log 100\,000$ d) $\log 0,01$ e) $\log \sqrt[3]{10}$

Rozpatruje się też logarytmy o innych podstawach. Na przykład logarytmem o podstawie 2 z dodatniej liczby b jest taka liczba x , że $2^x = b$. Piszemy wówczas $\log_2 b = x$.

Przykład 2

- a) $\log_2 8 = 3$, ponieważ $2^3 = 8$.
b) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$, ponieważ $2^{-4} = \frac{1}{16}$.
c) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$, ponieważ $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$.

Pytanie o $\log_2 b$ to pytanie o to, do jakiej potęgi należy podnieść 2, aby otrzymać liczbę b .

Ćwiczenie 2

Oblicz.

- a) $\log_2 16$ b) $\log_2 1024$ c) $\log_2 \frac{1}{2}$ d) $\log_2 \frac{1}{8}$ e) $\log_2 \sqrt{2}$

Definicja

Niech a i b będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$. **Logarytm** o podstawie a z liczby b to wykładnik potęgi, do jakiej należy podnieść podstawę a , aby otrzymać liczbę b .

$$\log_a b = x, \text{ gdy } a^x = b$$

Przykład 3

- a) $\log_3 9 = 2$, ponieważ $3^2 = 9$.
b) $\log_5 125 = 3$, ponieważ $5^3 = 125$.
c) $\log_{25} 625 = 2$, ponieważ $25^2 = 625$.

$$\log_a b = x$$

liczba logarytmowana
logarytm
podstawa logarytmu

Ćwiczenie 2

- a) 4 b) 10 c) -1 d) -3 e) $\frac{1}{2}$

Uczeń:

- oblicza logarytm danej liczby,
- stosuje równości wynikające z definicji logarytmu do obliczeń,
- wyznacza podstawę logarytmu, gdy dana jest wartość logarytmu, podaje odpowiednie założenia dla podstawy logarytmu oraz liczby logarytmowanej,
- stosuje twierdzenia o logarytmie iloczynu, ilorazu oraz potęgi do obliczania wartości wyrażeń z logarytmami,
- stosuje twierdzenie o logarytmie iloczynu, ilorazu i potęgi do uzasadniania równości wyrażeń,
- uzasadnia podstawowe własności logarytmów.

Ćwiczenie 1

- a) 1 b) 2 c) 5 d) -2 e) $\frac{1}{3}$

Ćwiczenie 3

- a) 1 b) 4 c) $\frac{1}{2}$
d) 3 e) -2 f) $\frac{1}{4}$

Ćwiczenie 4

Dla dowolnej liczby dodatniej $a \neq 1$:
 $a^0 = 1$, zatem z definicji logarytmu $\log_a 1 = 0$,
 $a^1 = a$, zatem z definicji logarytmu $\log_a a = 1$.

Ćwiczenie 3

Oblicz.

- a) $\log_3 3$ b) $\log_3 81$ c) $\log_3 \sqrt{3}$ d) $\log_3 27$ e) $\log_3 \frac{1}{9}$ f) $\log_3 \sqrt[4]{3}$

D Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby dodatniej a różnej od 1 zachodzą podane obok własności.

$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$

Czy wiesz, że...

Pojęcie logarytmu wprowadził ponad 400 lat temu szkocki matematyk John Napier (1550–1617), a logarytmy dziesiętne zdefiniował Anglik Henry Briggs (1561–1630) – opublikował on tablice takich logarytmów.

W obliczeniach są wykorzystywane następujące własności logarytmów (ich dokładne omówienie i dowody zostaną przedstawione w dalszym toku nauki).

Twierdzenie

Jeśli a, b, c są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$ i $p \in \mathbb{R}$, to:

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c \quad \text{logarytm iloczynu}$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \quad \text{logarytm ilorazu}$$

$$\log_a b^p = p \log_a b \quad \text{logarytm potęgi}$$

Przykład 4

$$\text{a) } \log_2(256 \cdot 1024) = \log_2 256 + \log_2 1024 = 8 + 10 = 18$$

$$\text{b) } \log_2 16\sqrt{2} = \log_2 16 + \log_2 \sqrt{2} = 4 + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Ćwiczenie 5

Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm iloczynu.

$$\text{a) } \log_2(64 \cdot 256) \quad \text{b) } \log_5(125 \cdot 625) \quad \text{c) } \log_5 5\sqrt{5} \quad \text{d) } \log_2 8\sqrt[3]{2} \quad \text{e) } \log_3 9\sqrt[4]{3}$$

Przykład 5

$$\text{a) } \log_2 \frac{0,25}{32} = \log_2 0,25 - \log_2 32 = -2 - 5 = -7$$

$$\text{b) } \log_3 \frac{81}{\sqrt{3}} = \log_3 81 - \log_3 \sqrt{3} = 4 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$$

Ćwiczenie 6

Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm ilorazu.

$$\text{a) } \log_2 \frac{0,5}{64} \quad \text{b) } \log_2 \frac{1024}{0,125} \quad \text{c) } \log_2 \frac{\sqrt{2}}{8} \quad \text{d) } \log_5 \frac{625}{\sqrt{5}} \quad \text{e) } \log_3 \frac{243}{\sqrt[4]{3}}$$

Ćwiczenie 5

$$\text{a) } \log_2 64 + \log_2 256 = 6 + 8 = 14$$

$$\text{b) } \log_5 125 + \log_5 625 = 3 + 4 = 7$$

$$\text{c) } \log_5 5 + \log_5 \sqrt{5} = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$$\text{d) } \log_2 8 + \log_2 \sqrt[3]{2} = 3 + \frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$$

$$\text{e) } \log_3 9 + \log_3 \sqrt[4]{3} = 2 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

Ćwiczenie 6

$$\text{a) } \log_2 0,5 - \log_2 64 = -1 - 6 = -7$$

$$\text{b) } \log_2 1024 - \log_2 \frac{1}{8} = 10 - (-3) = 13$$

$$\text{c) } \log_2 \sqrt{2} - \log_2 8 = \frac{1}{2} - 3 = -2\frac{1}{2}$$

$$\text{d) } \log_5 625 - \log_5 \sqrt{5} = 4 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$$

$$\text{e) } \log_3 243 - \log_3 \sqrt[4]{3} = 5 - \frac{1}{4} = 4\frac{3}{4}$$

Ćwiczenie 7

Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm potęgi.

- a) $\log_2 4^{10}$ b) $\log_2 32^4$ c) $\log_3 9^6$ d) $\log_3 81^{-4}$

$$\begin{aligned}\log_2 8^5 &= 5 \log_2 8 = \\ &= 5 \cdot 3 = \\ &= 15\end{aligned}$$

Zadania

1. Oblicz.

- a) $\log_2 512$ b) $\log_2 2$ c) $\log_2 \frac{1}{32}$ d) $\log_2 \sqrt[5]{2}$ e) $\log_2 \sqrt{8}$

2. Oblicz.

- a) $\log_3 1$ b) $\log_3 243$ c) $\log_3 \frac{1}{3}$ d) $\log_3 3\sqrt{3}$ e) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{27}}$

3. Oblicz.

- a) $\log_{\frac{1}{2}} 2$ b) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ c) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$

$$\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3, \text{ bo } \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27.$$

4. Dla jakiej podstawy logarytmu a podana równość jest prawdziwa?

- a) $\log_a 16 = 4$ b) $\log_a 16 = 1$ c) $\log_a 16 = -1$

5. Sprawdź prawdziwość równości $\log_2 x + \log_2 y = \log_2 xy$ dla podanych wartości x i y .

- a) $x = 4, y = 16$ b) $x = 8, y = \frac{1}{4}$ c) $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{8}$

6. Sprawdź prawdziwość równości $\log_3 x - \log_3 y = \log_3 \frac{x}{y}$ dla podanych wartości x i y .

- a) $x = 27, y = 3$ b) $x = 81, y = 9$ c) $x = 3, y = \sqrt{3}$

7. Oblicz.

- a) $\log 2 + \log 5$ c) $\log 250 + \log \frac{2}{5}$ e) $\log 1250 - \log \frac{5}{4}$
b) $\log 8 + \log 125$ d) $\log 150 - \log 15$ f) $\log \frac{1}{3} - \log 3\frac{1}{3}$

Sprawdź się

8. Oblicz.

- a) $\log_2 1 + \frac{1}{2} \log_2 16$ c) $\log_4 4 - \log_4 64$ e) $\log_3 \frac{1}{9} - \log_{\frac{1}{3}} 3$
b) $\log_3 27 - \log_4 1$ d) $\log_5 125 - \log_5 \frac{1}{5}$ f) $\log_4 2 + \log_9 3$

9. Dla jakiej liczby logarytmowanej b podana równość jest prawdziwa?

- a) $\log_2 b = 5$ c) $\log_{27} b = \frac{2}{3}$ e) $\log_{\frac{1}{16}} b = -\frac{3}{4}$ g) $\log_{10} b = 6$
b) $\log_{\frac{1}{2}} b = -1$ d) $\log_7 b = 0$ f) $\log_{\sqrt{2}} b = -6$ h) $\log_8 b = -1$

Ćwiczenie 7

- a) 20 b) 20
c) 12 d) -16

Odpowiedzi do zadań

1. a) 9 b) 1 c) -5
d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{3}{2}$

2. a) 0 b) 5 c) -1
d) $\frac{3}{2}$ e) $-\frac{3}{2}$

3. a) -1 b) 2 c) 4

4. a) 2 b) 16 c) $\frac{1}{16}$

5. a) $2 + 4 = 6$
b) $3 - 2 = 1$
c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

6. a) $3 - 1 = 2$
b) $4 - 2 = 2$
c) $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

7. a) $\log 10 = 1$
b) $\log 1000 = 3$
c) $\log 100 = 2$
d) $\log 10 = 1$
e) $\log 1000 = 3$
f) $\log \frac{1}{10} = -1$

8. a) 2 b) 3 c) -2
d) 4 e) -1 f) 1

9. a) 32 b) 2 c) 9
d) 1 e) 8 f) $\frac{1}{8}$
g) 1 000 000 h) $\frac{1}{8}$

Uczeń:

- oblicza procent danej liczby,
- oblicza, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba,
- wyznacza liczbę, gdy dany jest jej procent,
- zmniejsza i zwiększa liczbę o dany procent,
- stosuje obliczenia procentowe w zadaniach praktycznych.

Ćwiczenie 1

- a) 6, 30, 150, 450
b) 5, 20, 100, 300

Ćwiczenie 2

- a) 100 b) 320 c) 60
d) 12 e) 72 f) 42

Ćwiczenie 3

Czapka – 27 zł, rękawice – 39 zł,
razem 66 zł.

1.11. Procenty

■ Obliczanie procentu danej liczby

Należy pamiętać, że procenty zawsze odnoszą się do jakiejś całości (wielkości ustalonej).

$$1\%w = \frac{1}{100}w = 0,01w, \quad 15\%w = \frac{15}{100}w = 0,15w, \quad 240\%w = \frac{240}{100}w = 2,4w$$

Przykład 1

a) Oblicz 4% liczby 300.

$$4\% \cdot 300 = \frac{4}{100} \cdot 300 = 12$$

b) Oblicz 110% liczby 600.

$$110\% \cdot 600 = 1,1 \cdot 600 = 660$$

Ćwiczenie 1

Oblicz:

- a) 1%, 5%, 25%, 75% liczby 600, b) 2%, 8%, 40%, 120% liczby 250.

Ćwiczenie 2

Oblicz:

- a) 20% liczby 500, c) 15% liczby 400, e) 150% liczby 48,
b) 40% liczby 800, d) 80% liczby 15, f) 210% liczby 20.

Przykład 2

W tabeli podano ceny owoców w pewnym sklepie przed podwyżką i wysokość podwyżki. Oblicz, ile po podwyżce trzeba było zapłacić za 2 kg gruszek i 4 kg śliwek w tym sklepie.

Owoce	Cena	Podwyżka
śliwki	8 zł/kg	o 15%
gruszki	6 zł/kg	o 20%

Cena gruszek po podwyżce: $6 \cdot 120\% = 6 \cdot 1,2 = 7,20$ [zł/kg].

Cena śliwek po podwyżce: $8 \cdot 115\% = 8 \cdot 1,15 = 9,20$ [zł/kg].

Za 2 kg gruszek i 4 kg śliwek po podwyżce trzeba było zapłacić:

$$2 \cdot 7,20 + 4 \cdot 9,20 = 14,40 + 36,80 = 51,20 \text{ [zł]}$$

Ćwiczenie 3

Karolina kupiła czapkę i rękawice po obniżce (w tabeli podano ceny przed obniżką i wysokość obniżki). Oblicz, ile zapłaciła.

Produkt	Cena	Obniżka
czapka	45 zł	o 40%
rękawice	60 zł	o 35%

Warto zauważyć, że wielokrotnej zmiany wartości o pewien procent nie można zastąpić jednorazową zmianą o sumę procentów każdej ze zmian.

Multibook

- Procenty – rozwiązywanie zadania „od końca”

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.11

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Przykład 3

Kurtka kosztowała 400 zł. Jej cenę dwukrotnie obniżono, za każdym razem o 10%. Ile kosztowała kurtka po tych obniżkach? Ile kosztowałaby ta kurtka, gdyby początkową cenę obniżono jednorazowo o 20%?

Cena kurtki po pierwszej obniżce o 10%: $400 \cdot 90\% = 400 \cdot \frac{90}{100} = 360$ [zł].

Cena kurtki po drugiej obniżce o 10%: $360 \cdot 90\% = 360 \cdot \frac{90}{100} = 324$ [zł].

Cena kurtki po jednorazowej obniżce o 20%: $400 \cdot 80\% = 400 \cdot \frac{80}{100} = 320$ [zł].

Ćwiczenie 4

W styczniu narty kosztowały 825 zł. W lutym ich cenę obniżono o 30%, a w marcu – o dalsze 20%. Ile trzeba było zapłacić za narty po marcowej obniżce? Ile kosztowałyby te narty, gdyby ich cenę od razu obniżono o 50%?

Przykład 4

Po dwukrotnej obniżce ceny pewnego towaru, za każdym razem o $p\%$, jego cena spadła o 75%. Oblicz p .

Oznaczmy przez k cenę towaru przed obniżkami. Zauważmy, że cena towaru po obniżkach wynosiła $25\%k$. Zatem:

$$k \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = \frac{25}{100} \cdot k$$
$$1 - \frac{p}{100} = \frac{5}{10}$$

Stąd $p = 50$. Zatem cenę towaru dwukrotnie obniżono o 50%.

Ćwiczenie 5

Po dwukrotnej obniżce ceny pewnego towaru o $p\%$ jego cena spadła o $x\%$. Oblicz p dla: a) $x = 19$, b) $x = 36$, c) $x = 51$.

Przykład 5

Cenę pewnego towaru obniżono o 20%. O ile procent należy podnieść tę cenę, aby otrzymać cenę początkową?

Oznaczmy przez k cenę początkową. Po obniżce o 20% cena wynosi $0,8k$. Cenę tę należy podnieść o $x\%$ tak, aby $(100\% + x\%) \cdot 0,8k = 100\%k$. Stąd:

$$100\% + x\% = \frac{100\%}{0,8} = 125\%$$

Zatem cenę należy podnieść o 25%.

Ćwiczenie 6

Cenę pewnego towaru obniżono o 60%. O ile procent należy podnieść tę cenę, aby otrzymać cenę początkową?

Ćwiczenie 6

Oznaczmy przez k cenę początkową. Po obniżce o 60% cena wynosi $0,4k$.

Cenę tę należy podnieść o $x\%$ tak, aby $(100\% + x\%) \cdot 0,4k = 100\%k$. Stąd:

$$100\% + x\% = \frac{100\%}{0,4} = 250\%$$

Zatem cenę należy podnieść o 150%.

Ćwiczenie 4

Cena nart po obniżce:

marcowej –

$$0,8 \cdot 0,7 \cdot 825 = 462 \text{ [zł]},$$

$$\text{o } 50\% - 0,5 \cdot 825 = 412,50 \text{ [zł]}$$

Ćwiczenie 5

Niech c oznacza cenę towaru przed obniżką.

$$\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 \cdot c = \left(1 - \frac{x}{100}\right) \cdot c$$

$$\text{a) } \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = 1 - \frac{19}{100} = \frac{81}{100}$$

$$1 - \frac{p}{100} = \frac{9}{10}$$

$$p = 10$$

$$\text{b) } \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = 1 - \frac{36}{100}$$

$$p = 20$$

$$\text{c) } \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = 1 - \frac{51}{100}$$

$$p = 30$$

Ćwiczenie 7

- a) 0,6 b) 11,2
c) 5 d) 5
e) 0,36 f) 0,99

Ćwiczenie 8

firma Y: o 35%,
firma Z: o 12,5%

Ćwiczenie 9

- a) $y = 50\%x$, $x = 200\%y$
b) $y = 80\%x$, $x = 125\%y$
c) $y = 160\%x$, $x = 62,5\%y$

Ćwiczenie 10

cena średniego zestawu: 250 zł,
cena małego zestawu: 125 zł

W niektórych sytuacjach wykorzystuje się dziesiątą część procentu, czyli promil.

1 promil (1‰) danej wielkości to 0,001 tej wielkości.

Ćwiczenie 7

Oblicz:

- a) 2‰ liczby 300, c) 50‰ liczby 100, e) 0,2‰ liczby 1800,
b) 8‰ liczby 1400, d) 5‰ liczby 1000, f) 5,5‰ liczby 180.

■ Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba

Przykład 6

Za jedną akcję firmy X tydzień temu trzeba było zapłacić 25 zł, a dzisiaj – o 2,25 zł więcej. O ile procent podrożały akcje?

$$\frac{2,25}{25} \cdot 100\% = 9\%$$

Akcje podrożały o 9%.

Ćwiczenie 8

W tabeli podano ceny jednej akcji firmy Y i firmy Z w lutym i w marcu. Oblicz, o ile procent podrożały akcje każdej z tych firm.

Firma	Luty	Marzec
Y	18 zł	24,30 zł
Z	24 zł	27 zł

Ćwiczenie 9

Oblicz, jakim procentem liczby x jest liczba y oraz jakim procentem liczby y jest liczba x .

- a) $x = 100$, $y = 50$ b) $x = 50$, $y = 40$ c) $x = 10$, $y = 16$

■ Wyznaczanie liczby, gdy dany jest jej procent

Przykład 7

W tabeli podano ceny zestawów rondli po obniżce oraz wysokość obniżki. Oblicz cenę dużego zestawu przed obniżką.

Oznaczmy przez x cenę dużego zestawu przed obniżką. Obecna cena stanowi 85% ceny x :

$$\frac{85}{100}x = 272 \text{ i stąd } x = 272 \cdot \frac{100}{85} = 320 \text{ [zł]}.$$

Zestaw	Obniżka	Cena
duży	o 15%	272 zł
średni	o 24%	190 zł
mały	o 32%	85 zł

Ćwiczenie 10

Oblicz cenę średniego i cenę małego zestawu rondli z przykładu 7 przed obniżką.

Zadania

- Oblicz:
a) 20% liczby 80, c) 11% liczby 40, e) 15‰ liczby 300,
b) 40% liczby 60, d) 401% liczby 40, f) 2‰ liczby 2.
 - Która liczba jest większa:
a) 12% liczby 20 czy 10% liczby 25,
b) 45% liczby 30 czy 6% liczby 250,
c) 55% liczby 200 czy 18% liczby 600,
d) 150% liczby 20 czy 5% liczby 6000?
- Czy wiesz, że...**
Słowa „procent” i „promil” pochodzą od łacińskich wyrażen: procent: *per centum* – na sto, promil: *pro mille* – na tysiąc.
- Oblicz, jakim procentem liczby 600 jest podana liczba.
a) 150 b) 1860 c) 270 d) 450
 - Oblicz, jakim procentem liczby a jest liczba b .
a) $a = 80, b = 20$ c) $a = 800, b = 44$ e) $a = 60, b = 90$
b) $a = 160, b = 12$ d) $a = 450, b = 36$ f) $a = 90, b = 342$
 - Oblicz liczbę, której:
a) 15% jest równe 30, c) 45% jest równe 900,
b) 60% jest równe 240, d) 12% jest równe 14,4.
 - Cena kajaka wynosiła 1000 zł. Cenę podniesiono najpierw o 20%, a następnie o 15%. Ile kosztuje kajak po tych zmianach? O ile procent wzrosła cena kajaka w stosunku do ceny początkowej?
 - Cenę sukni ślubnej obniżono o $p\%$. O ile procent należałoby podnieść nową cenę, aby suknia kosztowała tyle samo, ile przed obniżką?
a) $p = 50$ b) $p = 25$ c) $p = 36$
 - Cenę pewnego towaru podniesiono dwukrotnie o $p\%$. O ile procent należałoby obniżyć jego cenę, aby towar ten kosztował tyle, ile na początku?
a) $p = 25$ b) $p = 50$
 - Wycieczka do Londynu kosztuje 2400 zł. Jaka byłaby cena tej wycieczki:
a) gdyby najpierw podniesiono ją o 10%, a następnie obniżono o 10%,
b) gdyby najpierw obniżono ją o 25%, a następnie podniesiono o 25%,
c) gdyby najpierw obniżono ją o 25%, a następnie podniesiono o 20%?
 - Niech c – cena wyjściowa towaru, x – liczba procent, o jaki należałoby obniżyć cenę.
a) $1,25 \cdot 1,25c \left(1 - \frac{x}{100}\right) = c$
 $x = 36$
b) $1,5 \cdot 1,5c \left(1 - \frac{x}{100}\right) = c$
 $x = 55,5$
 - a) $1,1 \cdot 0,9 \cdot 2400 = 2376$ [zł]
b) $0,75 \cdot 1,25 \cdot 2400 = 2250$ [zł]
c) $0,75 \cdot 1,2 \cdot 2400 = 2160$ [zł]

Odpowiedzi do zadań

- a) 16 b) 24
c) 4,4 d) 160,4
e) 4,5 f) 0,004
- a) 10% liczby 25
b) 6% liczby 250
c) 55% liczby 200
d) 5% liczby 6000
- a) 25% b) 310%
c) 45% d) 75%
- a) 25% b) 7,5%
c) 5,5% d) 8%
e) 150% f) 380%
- a) 200 b) 400
c) 2000 d) 120
- Cena kajaka po dwóch zmianach:
 $1,15 \cdot 1,2 \cdot 1000 = 1380$ [zł].
Cena wzrosła o 38% w stosunku do ceny początkowej.
- Niech c oznacza cenę wyjściową sukni, a x – liczbę procent, o jaką należałoby podnieść cenę.
a) $0,5c \left(1 + \frac{x}{100}\right) = c$, skąd $x = 100$
b) $0,75c \left(1 + \frac{x}{100}\right) = c$, skąd $x = 33\frac{1}{3}$
c) $0,64c \left(1 + \frac{x}{100}\right) = c$, skąd $x = 56,25$

10. a) $\frac{5}{8} \cdot 100\% = 62,5\%$

b) $\frac{18}{24} \cdot 100\% = 75\%$

11. a) $0,55 \cdot 200 = 110$

b) $0,12 \cdot 50 = 6$

c) $0,002 \cdot 2500 = 5$

12. a) $y = 81; 162$

b) $y = \frac{4}{25}; 0,8$

c) $y = \frac{1}{8}; 1$

13. a) 10, 20, 40

b) 1, 2, 6

c) 4,5, 9, 45, 405

d) 32, 60, 180, 500

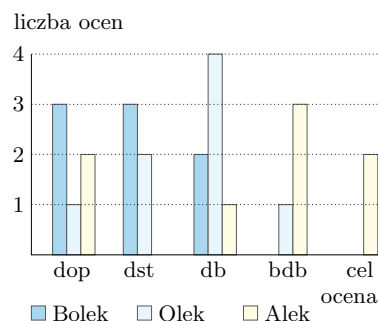
14. a) 2,4 b) 1,2 c) 8,8

15. a) 150 b) 75

10. Na diagramie obok przedstawiono liczbę poszczególnych ocen, jakie bracia Bolek, Olek i Alek otrzymali na koniec pierwszego semestru.

a) Ile procent ocen Olka to oceny dobre i bardzo dobre?

b) Ile procent wszystkich ocen braci stanowią oceny lepsze od oceny dopuszczającej?



11. Oblicz $p\%$ liczby x .

a) $x = 2^3 \cdot 5^2, p = 55$ b) $x = \sqrt[4]{16} \cdot 5^2, p = 12$ c) $x = \sqrt[3]{64} \cdot 5^4, p = 0,2$

12. Wyznacz liczbę, której $p\%$ jest równe y .

a) $y = 2^0 \cdot 3^4, p = 50$ b) $y = 2^2 \cdot 5^{-2}, p = 20$ c) $y = 2^{-1} : 2^2, p = 12,5$

Sprawdź się

13. Oblicz:

a) 5%, 10%, 20% liczby 200,

c) 3%, 6%, 30%, 270% liczby 150,

b) 2%, 4%, 12% liczby 50,

d) 8%, 15%, 45%, 125% liczby 400.

14. Oblicz:

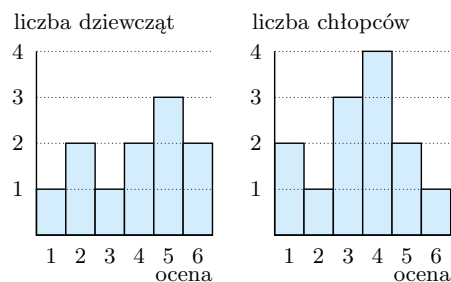
a) 4‰ liczby 600,

b) 5‰ liczby 240,

c) 16‰ liczby 550.

15. Wyznacz liczbę, której: a) 30% jest równe 45, b) 120% jest równe 90.

16. Na diagramach przedstawiono zestawienie ocen semestralnych z matematyki w pewnej klasie (z podziałem na dziewczęta i chłopców). Oblicz, ile procent uczniów otrzymało ocenę dobrą, a ile procent – ocenę pozytywną.



17. O ile procent liczba x jest większa od liczby y ? O ile procent liczba y jest mniejsza od liczby x ?

a) $x = 32, y = 20$

c) $x = 8, y = 6$

e) $x = 22, y = 4,4$

b) $x = 60, y = 48$

d) $x = 2,4, y = 0,6$

f) $x = 80, y = 25$

16. W klasie jest 24 uczniów. Ocenę dobrą otrzymało 6 uczniów, czyli 25%. Ocenę pozytywną otrzymało 21 uczniów, czyli 87,5%.

17. x większe od y o:

a) 60% b) 25% c) $33\frac{1}{3}\%$ d) 300% e) 400% f) 220%

y mniejsze od x o:

a) 37,5% b) 20% c) 25% d) 75% e) 80% f) 68,75%



Powtórzenie

Zestaw I

- Podaj wszystkie naturalne dzielniki liczby:
a) 18, b) 38, c) 40, d) 58, e) 68.
- Jaka jest największa liczba trzycyfrowa podzielna przez:
a) 5, b) 6, c) 7, d) 15, e) 45?
- Wyznacz liczbę przeciwną do podanej liczby.
a) $23 : (-7\frac{2}{3}) - \frac{324}{243}$ c) $(-6\frac{2}{3}) : (-7\frac{1}{7}) - \sqrt{\frac{169}{225}}$ e) $3\frac{3}{4} : \frac{3}{10} - (-1\frac{1}{6}) : \frac{7}{5}$
b) $(-2\frac{3}{5}) \cdot 3\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ d) $-12 \cdot 3\frac{7}{15} + 3\frac{1}{2} : 5$ f) $4\frac{3}{4} : (\frac{3}{4} - 2\frac{1}{3}) - \frac{1}{2}$
- Podaj liczbę przeciwną do liczby x i liczbę odwrotną do liczby y .
a) $x = (3\frac{1}{4} - 1,5) \cdot (-2\frac{1}{8} + \frac{1}{4})$, $y = (2,25 - 3\frac{1}{2}) : \frac{2}{3} + \frac{1}{8}$
b) $x = (1\frac{1}{6} - \frac{9}{10}) : (1\frac{1}{3} - \frac{1}{6})$, $y = (\frac{1}{7} - \frac{1}{3}) \cdot 0,35 - 1\frac{1}{3} : (-1\frac{1}{2})$
c) $x = -48 : 0,6 + 1\frac{2}{3} \cdot 54 - 1\frac{5}{7} : 1\frac{1}{14}$, $y = 1\frac{1}{3} \cdot (-3\frac{3}{5}) + (\frac{3}{5} - 2\frac{4}{15}) \cdot 0,5$
d) $x = 0,3(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (\frac{2}{3} - \frac{1}{6}) : 0,75$, $y = (\frac{3}{4} - 1\frac{1}{3}) \cdot (-0,8) + 1,44 : 2\frac{2}{5}$
- Wśród poniższych liczb wskaż liczbę niewymierną i podaj największą liczbę całkowitą od niej mniejszą.
a) $4 - \frac{\sqrt{12}}{3}$, $14 - \sqrt{196}$, $2\sqrt{16} - \sqrt{36}$ c) $\frac{\sqrt{49}}{3} + \frac{\sqrt[3]{729}}{4}$, $\sqrt{81} + \sqrt[3]{81}$
b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$, $\sqrt{1\frac{4}{25}}$, $\sqrt{12} \cdot \sqrt{75}$ d) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{49}$, $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{125}$
- Wyznacz liczbę odwrotną do podanej liczby.
a) $\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{15}$ c) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{40}$ e) $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{512}}$ g) $\sqrt{1\frac{9}{16}} : \sqrt{\frac{225}{256}}$
b) $\sqrt{5\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}}$ d) $\sqrt[3]{75} \cdot \sqrt[3]{45}$ f) $\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{192}}$ h) $\sqrt{1\frac{1}{2}} : \sqrt{1\frac{5}{27}}$
- a) Oblicz iloraz sumy liczb $x = 2 - \sqrt{5}$ oraz $y = 4 - \sqrt{5}$ i ich różnicy.
b) Oblicz sześćian różnicy liczb $x = 1 - 6\sqrt[3]{3}$ i $y = 0, (9) - \sqrt[3]{3}$.
c) Oblicz różnicę odwrotności kwadratów liczb $x = \frac{\sqrt{2}}{9}$ i $y = 0, (2) \cdot \sqrt{3}$.

D 8. Uzasadnij, że podana liczba jest wymierna.

- a) $\log_3 6 + \log_3 1,5$ c) $\log 625 + \log 16$ e) $\log_4 \frac{3}{2} + \log_4 \frac{1}{3}$
b) $\log_2 6 - \log_2 0,75$ d) $\log 175 - \log 1\frac{3}{4}$ f) $\log_2 \sqrt{18} - \log_2 3$

7. a) $\frac{2-\sqrt{5}+4-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}-(4-\sqrt{5})} = \frac{6-2\sqrt{5}}{-2} = -3 + \sqrt{5}$
b) $(1 - 6\sqrt[3]{3} - (1 - \sqrt[3]{3}))^3 = (-5\sqrt[3]{3})^3 = -375$
c) $(\frac{9}{\sqrt{2}})^2 - (\frac{9}{2\sqrt{3}})^2 = \frac{81}{2} - \frac{81}{12} = \frac{135}{4} = 33\frac{3}{4}$
8. a) $\log_3 6 + \log_3 1,5 = \log_3 9 = 2 \in \mathbb{Q}$
b) $\log_2 6 - \log_2 0,75 = \log_2 8 = 3 \in \mathbb{Q}$
c) $\log 625 + \log 16 = \log 10000 = 4 \in \mathbb{Q}$
d) $\log 175 - \log \frac{7}{4} = \log 100 = 2 \in \mathbb{Q}$
e) $\log_4 \frac{3}{2} + \log_4 \frac{1}{3} = \log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$
f) $\log_2 3\sqrt{2} - \log_2 3 = \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) 1, 2, 3, 6, 9, 18
b) 1, 2, 19, 38
c) 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40
d) 1, 2, 29, 58
e) 1, 2, 4, 17, 34, 68
2. a) 995 b) 996 c) 994
d) 990 e) 990
3. a) $4\frac{1}{3}$ b) 8 c) $-\frac{1}{15}$
d) 40,9 e) $-13\frac{1}{3}$ f) $3\frac{1}{2}$
4. a) $-x = 3\frac{9}{32}$, $\frac{1}{y} = -\frac{4}{7}$
b) $-x = -\frac{19}{21}$, $\frac{1}{y} = 1\frac{8}{37}$
c) $-x = -8,4$, $\frac{1}{y} = -\frac{30}{169}$
d) $-x = \frac{37}{60}$, $\frac{1}{y} = \frac{15}{16}$
5. a) $4 - \frac{\sqrt{12}}{3}$, 2
b) $\sqrt{1\frac{4}{25}}$, 1
c) $\sqrt{81} + \sqrt[3]{81}$, 13
d) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{125}$, 8
6. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{7}$
c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{1}{15}$
e) 2 f) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
g) $\frac{3}{4}$ h) $\frac{8}{9}$

9. a) Zmniejszyło się o 36%.
b) Zmniejszyło się o 1%.
10. Niech x – liczba członków klubu 3 lata temu, wówczas:
 $1,2x$ – liczba członków 2 lata temu,
 $1,2 \cdot 1,2x = 1,44x$ – liczba członków rok temu.

$$\begin{aligned} 1,44x &= 216 \\ x &= 150 \end{aligned}$$

Trzy lata temu w klubie było 150 członków.

11. a) $0,8 \cdot 1\frac{7}{8} = 1\frac{1}{2}$
b) $0,8 \cdot \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$
c) $0,8 \cdot \frac{6}{5} = \frac{24}{25}$
d) $0,8 \cdot \frac{55}{64} = \frac{11}{16}$

Zestaw II

1. a) 16, 17, 18
b) 26, 28, 30, 32

2. $x = \frac{1}{3}, y = \frac{4}{3}$
a) $3\frac{3}{4}$ b) $9\frac{9}{16}$
c) $4\frac{7}{9}$ d) $-\frac{65}{144}$

4. a) $a = 3\sqrt{3}$
b) $a = \frac{5\sqrt{5}}{8}$
c) $a = \frac{16}{9}$
d) $a = \frac{1}{4}$
e) $a = 144$
f) $a = 324$

9. O ile procent zmieniło się pole prostokąta, którego:

- a) oba boki skrócono o 20%,
b) jeden bok skrócono o 10%, a drugi wydłużono o 10%?

10. Liczba członków pewnego klubu golfowego wzrastała przez ostatnie trzy lata o 20% rocznie. Rok temu należało do niego 216 osób. Ilu członków liczył ten klub trzy lata temu?

11. Wyznacz liczbę o 20% mniejszą od podanej liczby.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{(3\frac{1}{4} - 1,5) \cdot (-2\frac{1}{8} + \frac{1}{4})}{(2,25 - 3\frac{1}{2}) : \frac{2}{3} + \frac{1}{8}} & \text{c)} \quad & \frac{-48 : 0,6 + 1\frac{2}{3} \cdot 45 - 1\frac{5}{7} : 1\frac{1}{14}}{1\frac{1}{3} \cdot (-2\frac{2}{5}) + (\frac{3}{5} - 5\frac{1}{5}) \cdot 0,5} \\ \text{b)} \quad & \frac{(1\frac{1}{6} - \frac{7}{9}) : (1\frac{1}{3} - \frac{1}{6})}{(\frac{1}{7} - \frac{1}{3}) \cdot 0,35 - 1\frac{2}{3} : (-2\frac{1}{2})} & \text{d)} \quad & \frac{0,3(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (\frac{2}{3} - \frac{1}{6}) : 0,75}{(\frac{3}{4} - 1\frac{1}{3}) \cdot (-0,8) + 1,44 : 2\frac{2}{5}} \end{aligned}$$

Zestaw II

1. a) Suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest o 15 większa od podwojonej największej z nich. Wyznacz te liczby.
b) Suma czterech kolejnych liczb parzystych jest o 20 większa od potrojonej największej z nich. Wyznacz te liczby.

2. Liczby $x = 0,(3)$ i $y = 1,(3)$ zapisz jako ułamki zwykłe i oblicz:

$$\text{a)} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad \text{b)} \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}, \quad \text{c)} \quad \frac{1}{x} + y^2, \quad \text{d)} \quad x^2 - \frac{1}{y^2}.$$

3. Oblicz sumę oraz iloczyn liczb x i y .

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & x = \sqrt{1\frac{9}{16}}, \quad y = \sqrt{5\frac{4}{9}} & \text{c)} \quad & x = \sqrt[3]{\frac{1}{125}}, \quad y = \sqrt[3]{3\frac{3}{8}} \\ \text{b)} \quad & x = \sqrt{\frac{28}{63}}, \quad y = \sqrt{\frac{75}{48}} & \text{d)} \quad & x = \sqrt[3]{-8}, \quad y = \sqrt[3]{-\frac{270}{640}} \end{aligned}$$

4. Wyznacz liczbę a .

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \sqrt{3} = \sqrt[3]{a} & \text{c)} \quad & \sqrt{1\frac{1}{3}} = \sqrt[4]{a} & \text{e)} \quad & 2\sqrt{3} = \sqrt[4]{a} \\ \text{b)} \quad & \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt[3]{a} & \text{d)} \quad & \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt[4]{a} & \text{f)} \quad & 3\sqrt{2} = \sqrt[4]{a} \end{aligned}$$

5. Oblicz $x - \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & x = \sqrt[3]{\frac{(-2)^3}{125}} & \text{c)} \quad & x = (\sqrt{169} - \sqrt{196})^2 & \text{e)} \quad & x = \sqrt{88 + \sqrt{144}} \\ \text{b)} \quad & x = \sqrt[3]{\frac{(-2)^6}{(-3)^3}} & \text{d)} \quad & x = ((\sqrt{225} - 10)^2)^2 & \text{f)} \quad & x = \sqrt{\sqrt{6,25} - 0,25} \end{aligned}$$

3. a) $x = \frac{5}{4}, y = \frac{7}{3}, x + y = \frac{43}{12}, xy = \frac{35}{12}$
b) $x = \frac{2}{3}, y = \frac{5}{4}, x + y = \frac{23}{12}, xy = \frac{5}{6}$
c) $x = \frac{1}{5}, y = \frac{3}{2}, x + y = 1,7, xy = 0,3$
d) $x = -2, y = -0,75, x + y = -2,75, xy = 1,5$

5. a) $x = -\frac{2}{5}, x - \frac{1}{x} = 2,1$
b) $x = -\frac{4}{3}, x - \frac{1}{x} = -\frac{7}{12}$
c) $x = 1, x - \frac{1}{x} = 0$
d) $x = 625, x - \frac{1}{x} = 624\frac{624}{625}$
e) $x = 10, x - \frac{1}{x} = 9,9$
f) $x = \frac{3}{2}, x - \frac{1}{x} = \frac{5}{6}$

6. Oblicz wartość wyrażenia $2m - 3n$, gdy:
- a) $3^m = 81$, $0,5^n = 0,125$, c) $0,5^m = 64$, $(\frac{2}{3})^n = 3,375$,
b) $6^m = 216$, $0,4^n = 2,5$, d) $(-\frac{1}{3})^m = -27$, $(-\frac{2}{5})^n = -15,625$.

7. Podaj konieczne założenia i oblicz wartość wyrażenia dla $a = \frac{3}{4}$ i $b = \frac{8}{9}$.

a) $\frac{(ab)^{-1}}{b^{-2}a^{-2}}$ b) $\frac{ab^2 \cdot (ab)^{-3}}{(a^0b^{-1})^{-1}}$ c) $\frac{(a^{-1}b^2)^{-3}a^{-2}b^5}{a^2 : (ab)^3}$

8. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x^{12}}{x^9} = 64$ c) $\frac{x^5 \cdot x^4}{(x^2)^3} = 27$ e) $\frac{(x^2)^{-3} \cdot x}{(x^{-2})^2} = \frac{2}{7}$
b) $\frac{x^7}{x^{-3}} = 1024$ d) $\frac{x^7 \cdot x^{-3}}{x^{-1}} = 32$ f) $\frac{x^{-4} \cdot x^{-7}}{(x^2)^{-4}} = \frac{1}{8}$

9. Oblicz.

a) $\frac{18^{\frac{2}{5}}}{6^{\frac{7}{5}} \cdot 9^{\frac{1}{5}}}$ b) $\frac{12^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{2}{3}}}{6^{\frac{4}{3}}}$ c) $\frac{14^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}}$ d) $\frac{20^{1,2} \cdot 24^{0,3}}{6^{1,3} \cdot 25^{0,1}}$

10. Uporządkuj liczby a , b , c i d w kolejności rosnącej.

a) $a = \log_2 64$, $b = \log_3 81$, $c = \log_4 1024$, $d = \log_5 125$
b) $a = \log_2 2\sqrt{2}$, $b = \log_3 9\sqrt[3]{3}$, $c = \log_4 32$, $d = \log_5 0,04$

11. Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej.

a) $\frac{(2,4 \cdot 10^3) \cdot (7 \cdot 10^{13})}{(6 \cdot 10^6) \cdot (3,5 \cdot 10^4)}$ c) $2\,500\,000 \cdot 0,0015$
b) $\frac{(25 \cdot 10^{-2}) \cdot (6 \cdot 10^{-6})}{(1,5 \cdot 10^{11}) \cdot (5 \cdot 10^{-9})}$ d) $420\,000\,000 : 0,003$

12. Oblicz 125% liczby x , gdzie x jest rozwiązaniem podanego równania.

a) $9 - \frac{3}{2}x = 6$ b) $3x - 7 = \frac{1}{2}x + 8$ c) $\frac{x-3}{2} = \frac{1}{6} + \frac{x-2}{3}$

13. Oblicz:

a) 6‰ liczby 400, b) 0,5‰ liczby 64, c) 20,5‰ liczby 8.

14. Wyznacz liczbę:

a) o 2‰ większą od 100, b) o 1,6‰ większą od 500.

- D 15. Uzasadnij, że jeśli $x, y, z \neq 0$ oraz $x + y^{-1} - z^{-2} = 0$, to:

a) $x = \frac{y-z^2}{yz^2}$, b) $y = \frac{z^2}{1-xz^2}$, $xz^2 \neq 1$, c) $z^2 = \frac{y}{1+xy}$, $xy \neq -1$.

- D 16. Uzasadnij, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych:

a) jest podzielna przez 3, b) parzystych jest podzielna przez 6.

16. a) Rozważmy trzy kolejne liczby naturalne: n , $n+1$, $n+2$. Wówczas:

$$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1)$$

Zatem jest to liczba podzielna przez 3.

- b) Rozważmy trzy kolejne liczby parzyste: $2n$, $2n+2$, $2n+4$. Wówczas:

$$2n + (2n+2) + (2n+4) = 6n + 6 = 6(n+1)$$

Zatem jest to liczba podzielna przez 6.

6. a) $m = 4$, $n = 3$,
 $2m - 3n = -1$
b) $m = 3$, $n = -1$,
 $2m - 3n = 9$
c) $m = -6$, $n = -3$,
 $2m - 3n = -3$
d) $m = -3$, $n = -3$,
 $2m - 3n = 3$

7. a) $ab = \frac{2}{3}$
b) $\frac{1}{(ab)^2} = \frac{9}{4}$
c) $(ab)^2 = \frac{4}{9}$

8. a) $x^3 = 64$
 $x = 4$
b) $x^{10} = 1024$
 $x = -2$, $x = 2$
c) $x^3 = 27$
 $x = 3$
d) $x^5 = 32$
 $x = 2$
e) $x^{-1} = \frac{2}{7}$
 $x = \frac{7}{2}$
f) $\frac{1}{x^3} = \frac{1}{8}$
 $x = 2$

9. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ d) $\frac{20}{3}$

10. a) $a = 6$, $b = 4$, $c = 5$, $d = 3$
zatem $d < b < c < a$
b) $a = 1\frac{1}{2}$, $b = 2\frac{1}{3}$, $c = 2\frac{1}{2}$,
 $d = -2$
zatem $d < a < b < c$

11. a) $8 \cdot 10^5$ b) $2 \cdot 10^{-9}$
c) $3,75 \cdot 10^3$ d) $1,4 \cdot 10^{11}$

12. a) $x = 2$, 125% $x = 2,5$
b) $x = 6$, 125% $x = 7,5$
c) $x = 6$, 125% $x = 7,5$

13. a) 2,4 b) 0,032 c) 0,164

14. a) 100,2 b) 500,8

15. a) $x = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{y} = \frac{y-z^2}{yz^2}$
b) $y^{-1} = \frac{1}{z^2} - x = \frac{1-xz^2}{z^2}$
Zatem: $y = \frac{z^2}{1-xz^2}$.
c) $z^{-2} = x + y^{-1} = \frac{xy+1}{y}$
Zatem: $z^2 = \frac{y}{1+xy}$.

**Przykład 1**

Ile jest liczb dwucyfrowych dodatnich, których reszta z dzielenia przez 7 jest równa 3?

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

- Liczb spełniających warunki zadania nie jest dużo, można je zatem wszystkie wypisać: 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73, 80, 87, 94 – jest ich 13.
- Zauważmy, że najmniejszą liczbą dwucyfrową spełniającą podany warunek jest 10, a największą 94. Wszystkie te liczby można zapisać w postaci $7n + 3$, gdzie $1 \leq n \leq 13$, zatem jest 13 takich liczb.

Odpowiedź: 13

→ Zadanie 20, str. 60

Przykład 2

Ile jest liczb czterocyfrowych dodatnich, które są podzielne przez 3 i przez 5?

Zauważmy, że liczby podzielne przez 3 i przez 5 to liczby podzielne przez 15. Najmniejszą liczbą czterocyfrową podzielną przez 15 jest 1005, a największą 9990. Liczb spełniających warunki zadania jest zbyt dużo, aby je wszystkie wypisać.

$$1005 = 15 \cdot 67, 1020 = 15 \cdot 68, 1035 = 15 \cdot 69, \dots, 9990 = 15 \cdot 666$$

Każdą z tych liczb możemy zapisać w postaci $15 \cdot n$, gdzie $67 \leq n \leq 666$. Zatem takich liczb jest $666 - 67 + 1 = 600$.

Odpowiedź: 600

→ Zadanie 21, str. 60

Przykład 3

Ile jest liczb trzycyfrowych dodatnich, które są podzielne przez 5 lub przez 6?

Rozpatrujemy liczby trzycyfrowe podzielne przez 5: 100, 105, 110, ..., 995. Najmniejszą z nich jest 100, a największą 995. Liczby trzycyfrowe podzielne przez 5 można zapisać w postaci $100 + 5n$, gdzie $0 \leq n \leq 179$, zatem takich liczb jest 180.

Rozpatrujemy liczby trzycyfrowe podzielne przez 6: 102, 108, 114, ..., 996. Najmniejszą z nich jest 102, a największą 996. Liczby trzycyfrowe podzielne przez 6 można zapisać w postaci $102 + 6n$, gdzie $0 \leq n \leq 149$, zatem takich liczb jest 150.

Zauważmy, że dwa razy zostały policzone liczby podzielne przez 30 (są one podzielne zarówno przez 5, jak i przez 6).

Liczby trzycyfrowe podzielne przez 30 można zapisać w postaci $120 + 30n$, gdzie $0 \leq n \leq 29$, takich liczb jest więc 30.

Zatem liczb podzielnych przez 5 lub przez 6 jest: $180 + 150 - 30 = 300$.

Odpowiedź: 300

→ Zadanie 22, str. 60



W zadaniach 1–12 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Liczbą podzieloną przez 15 jest

- A. 9 720 279 B. 2 220 205 C. 22 222 220 **D. 23 420 340**

Zadanie 2 (0–1)

Liczbą odwrotną do $\frac{0,25 - \sqrt{\frac{9}{16}}}{-3^2 : 3}$ jest

- A. 6** B. 4 C. -4 D. -6

Zadanie 3 (0–1)

Najmniejszą liczbą całkowitą większą od $6 - 2\pi$ jest

- A. -1 **B. 0** C. 1 D. -2

Zadanie 4 (0–1)

Liczbą wymierną jest

- A. $\frac{2\sqrt{6} - \sqrt{16}}{2}$ B. $\frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{\sqrt{25} + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ **D. $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{54}}$**

Zadanie 5 (0–1)

Ułamek $\frac{\sqrt[3]{-16} \cdot \sqrt[3]{-16}}{\sqrt[3]{-4}}$ jest równy

- A. $\frac{-16}{\sqrt[3]{-4}}$ B. $\frac{16}{\sqrt[3]{-4}}$ **C. -4** D. 4

Zadanie 6 (0–1)

Ułamek $\frac{5^5 \cdot 3 + 2 \cdot 5^5}{5^6 : 5^2}$ jest równy

- A. 5^6 B. $15 + 2 \cdot 5^5$ **C. 25** D. 5^7

Zadanie 7 (0–1)

Liczba $\log_8 4$ jest równa

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ **C. $\frac{2}{3}$** D. $\frac{3}{2}$

Zadanie 8 (0–1)

Cena ulgowego karnetu na basen stanowi 60% ceny karnetu normalnego. Karnet ulgowy kosztuje 60 zł. Za karnet normalny trzeba zapłacić

- A. 84 zł **B. 100 zł** C. 360 zł D. 36 zł

Zadanie 9 (0–1)

Oprocentowanie lokaty terminowej było równe 4%. Po roku bank podwyższył oprocentowanie do 5%. Oprocentowanie lokaty wzrosło

- A. o 20%. **B. o 25%.** C. o 40%. D. o 75%.

$$\begin{aligned} 2. \frac{0,25 - \sqrt{\frac{9}{16}}}{-3^2 : 3} &= \frac{0,25 - \frac{3}{4}}{-3} = \\ &= \frac{-\frac{1}{2}}{-3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \text{ A. } \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{16}}{2} &= \sqrt{6} - 2 \notin \mathbb{Q} \\ \text{ B. } \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} &= \sqrt{3} - 1 \notin \mathbb{Q} \\ \text{ C. } \frac{\sqrt{25} + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} &= \sqrt{5} + 1 \notin \mathbb{Q} \\ \text{ D. } \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{54}} &= \sqrt{\frac{6}{54}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \frac{\sqrt[3]{-16} \cdot \sqrt[3]{-16}}{\sqrt[3]{-4}} &= \\ &= \sqrt[3]{4 \cdot (-16)} = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \frac{5^5 \cdot 3 + 2 \cdot 5^5}{5^6 : 5^2} &= \frac{5^5 \cdot 5}{5^4} = \\ &= \frac{5^6}{5^4} = 5^2 = 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \text{ A. } 8^{\frac{1}{2}} &= 2\sqrt{2} \\ \text{ B. } 8^{\frac{1}{3}} &= 2 \\ \text{ C. } 8^{\frac{2}{3}} &= (\sqrt[3]{8})^2 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \text{ Niech } x &\text{ – cena normalnego} \\ &\text{ karnetu na basen.} \\ &0,6x = 60 \text{ [zł]} \\ &\text{Zatem } x = 100 \text{ zł.} \end{aligned}$$

$$9. \frac{0,05 - 0,04}{0,04} \cdot 100\% = 25\%$$



10. $2^{15} + 2^{15} + 2^{15} + 2^{15} =$
 $= 4 \cdot 2^{15} = 2^2 \cdot 2^{15} = 2^{17}$

11. $6,4 \cdot 10^8 \cdot 8,5 \cdot 10^{-3} =$
 $= 6,4 \cdot 8,5 \cdot 10^5 = 54,4 \cdot 10^5 =$
 $= 5,44 \cdot 10^6$

12. $b = 0,8a$, $c = 1,2b$, stąd
 $c = 1,2 \cdot 0,8a = 0,96a = \frac{96}{100}a$,
 zatem:
 $a = \frac{100}{96}c = \frac{25}{24}c = 1\frac{1}{24}c$

15. A. $\log_2 1 + \log_2 1 = 0$
 B. $\log_2 4 + \log_2 4 = 2 + 2 = 4$
 C. $\log_2 4 - \log_2 2 = 2 - 1 = 1$
 D. $\log_2 8 - \log_2 2 = 3 - 1 = 2$
 E. $\log_4 4 + \log_4 2 = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$
 F. $\log_2 8 + \log_4 2 = 3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$
 G. $\log_4 4 - \log_4 2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
 H. $\log_4 8 + \log_4 2 =$
 $= \log_4 16 = 2$

Zadanie 10 (0-1)

Suma $2^{15} + 2^{15} + 2^{15} + 2^{15}$ jest równa

- A. 2^{60} B. 8^{15} C. 2^{18} **D. 2^{17}**

Zadanie 11 (0-1)

Iloczyn liczb $6,4 \cdot 10^8$ i $8,5 \cdot 10^{-3}$ jest równy

- A. $5,44 \cdot 10^5$ B. $0,544 \cdot 10^6$ **C. $5,44 \cdot 10^6$** D. $5,44 \cdot 10^7$

Zadanie 12 (0-1)

Liczba b jest o 20% mniejsza od liczby a , zaś liczba c jest o 20% większa od liczby b . Zatem

- A. $a = \frac{4}{5}c$ B. $a = c$ C. $a = \frac{13}{12}c$ **D. $a = 1\frac{1}{24}c$**

Zadanie 13 (0-1)

Dana jest liczba $\left(2 \cdot \left(-3\frac{1}{3}\right) - 7 : 4\frac{1}{5}\right) : \frac{-2\frac{1}{8} + 0,625 \cdot \frac{4}{5}}{-2 + 1\frac{1}{9} \cdot (-6)}$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Podana liczba to liczba całkowita ujemna.	P	F
Podana liczba to liczba wymierna nieujemna.	P	F

Zadanie 14 (0-2)

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Liczbą wymierną jest

- A. $\sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ **E. $\sqrt{12}(\sqrt{48} + \sqrt{27})$**
 B. $\sqrt{6}(\sqrt{6} + \sqrt{18})$ **F. $\sqrt{12}(\sqrt{54} + \sqrt{24})$**
C. $\sqrt{8}(\sqrt{18} + \sqrt{50})$ **G. $\sqrt{18}(\sqrt{32} + \sqrt{24})$**
 D. $\sqrt{8}(\sqrt{36} + \sqrt{25})$ **H. $\sqrt{18}(\sqrt{25} + \sqrt{49})$**

Zadanie 15 (0-2)

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Wartość 2 przyjmuje wyrażenie

- A. $\log_2 1 + \log_2 1$ **E. $\log_4 4 + \log_4 2$**
 B. $\log_2 4 + \log_2 4$ **F. $\log_2 8 + \log_4 2$**
 C. $\log_2 4 - \log_2 2$ **G. $\log_4 4 - \log_4 2$**
D. $\log_2 8 - \log_2 2$ **H. $\log_4 8 + \log_4 2$**

13. $\left(2 \cdot \left(-3\frac{1}{3}\right) - 7 : 4\frac{1}{5}\right) : \frac{-2\frac{1}{8} + 0,625 \cdot \frac{4}{5}}{-2 + 1\frac{1}{9} \cdot (-6)} = \left(2 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) - 7 \cdot \frac{5}{21}\right) \cdot \frac{-2 + \frac{10}{9} \cdot (-6)}{-\frac{17}{9} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{5}} =$
 $= \left(-\frac{20}{3} - \frac{5}{3}\right) \cdot \frac{-2 - \frac{20}{3}}{-\frac{17}{9} + \frac{4}{9}} = -\frac{25}{3} \cdot \frac{-\frac{26}{3}}{-\frac{13}{9}} = -\frac{25}{3} \cdot \frac{26}{13} = -\frac{25}{3} \cdot 2 = -\frac{50}{3} = -16\frac{2}{3}$

14. A. $\sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{18} + \sqrt{12} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$
 B. $\sqrt{6}(\sqrt{6} + \sqrt{18}) = 6(1 + \sqrt{3}) \notin \mathbb{Q}$
 C. $\sqrt{8}(\sqrt{18} + \sqrt{50}) = \sqrt{8}(3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}) = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2}(3 + 5) = 4 \cdot 8 = 32 \in \mathbb{Q}$
 D. $\sqrt{8}(\sqrt{36} + \sqrt{25}) = \sqrt{8}(6 + 5) = 22\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
 E. $\sqrt{12}(\sqrt{48} + \sqrt{27}) = 2\sqrt{3}(4\sqrt{3} + 3\sqrt{3}) = 2(4 \cdot 3 + 3 \cdot 3) = 42 \in \mathbb{Q}$

**Zadanie 16**

Dane są liczby $\sqrt{11}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{(-17)^3}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{\frac{169}{9}}$, $\sqrt{(-2)^2}$.

Zadanie 16.1 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Dokładnie dwie spośród podanych liczb są ujemne.	P	F
Dokładnie dwie spośród podanych liczb są niewymierne.	P	F

Zadanie 16.2 (0-1)

Uzupełnij zdanie tak, aby było prawdziwe.

Suma dwóch najmniejszych liczb spośród podanych jest równa .

Zadanie 17 (0-1)

Dane są liczby x i y spełniające warunki: $x < -1$ oraz $x < y < 0$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Iloczyn liczby o 1 większej od x i liczby y jest

A.	dodatni,	ponieważ	1.	jeden z czynników jest równy zero.
B.	równy zero,		2.	czynniki są różnych znaków.
C.	ujemny,		3.	oba czynniki są ujemne.

Zadanie 18

Dane są liczby $a = 6 - 3\sqrt{48}$ i $b = 8 + 2\sqrt{108}$.

Zadanie 18.1 (0-1)

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3. Suma liczb a i b jest liczbą

A.	wymierną,	ponieważ	1.	suma liczb niewymiernych jest liczbą niewymierną.
B.	niewymierną,		2.	suma liczb wymiernych jest liczbą wymierną.
			3.	suma tych liczb jest równa 14.

Zadanie 18.2 (0-1)

Iloczyn liczb a i b jest równy

A. $24(16 + \sqrt{3})$ **B.** $-24(16 + \sqrt{3})$ **C.** $-24(16 - \sqrt{3})$ **D.** $24(16 - \sqrt{3})$

$$18.1. a + b = 6 - 3\sqrt{48} + 8 + 2\sqrt{108} = 14 - 3\sqrt{16 \cdot 3} + 2\sqrt{36 \cdot 3} = 14 - 12\sqrt{3} + 12\sqrt{3} = 14$$

$$18.2. ab = (6 - 3\sqrt{48}) \cdot (8 + 2\sqrt{108}) = 3(2 - 4\sqrt{3}) \cdot 2(4 + 6\sqrt{3}) = \\ = 6 \cdot 2(1 - 2\sqrt{3}) \cdot 2(2 + 3\sqrt{3}) = 24(1 - 2\sqrt{3})(2 + 3\sqrt{3}) = \\ = 24(2 + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 18) = -24(16 + \sqrt{3})$$

$$16.1. \sqrt{11} \in \mathbb{I}\mathbb{Q}_+, \\ \sqrt[3]{64} = 4 \in \mathbb{Q}_+, \\ \sqrt[3]{(-17)^3} = -17 \in \mathbb{Q}_-, \\ \sqrt{121} = 11 \in \mathbb{Q}_+, \\ \sqrt{8} \in \mathbb{I}\mathbb{Q}_+, \\ \sqrt{\frac{169}{9}} = \frac{13}{3} \in \mathbb{I}\mathbb{Q}_+, \\ \sqrt{(-2)^2} = 2 \in \mathbb{I}\mathbb{Q}_+.$$

16.2. Dwie najmniejsze liczby to -17 i 2 , ich suma jest równa -15 .

17. Ponieważ $x < -1$, więc liczba $x + 1 < 0$. Liczba y jest ujemna, zatem iloczyn xy jest dodatni.



$$19. a = \frac{13}{2} - 2, (5) =$$

$$= 2,6 - 2, (5) > 0$$

$$b = \sqrt{2} - 1, (4) < 0$$

Zatem $ab < 0$.

20. Jest 15 takich liczb: 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50, 56, 62, 68, 74, 80, 86, 92, 98.

21. 75

22. Liczby podzielne przez 4:
100, 104, 108, ..., 996.
Czyli jest ich 225.

Liczby podzielne przez 5:
100, 105, 110, ..., 995.
Czyli jest ich 180.

Liczby podzielne przez 20:
100, 120, 140, ..., 980.
Czyli jest ich 45.

Zatem liczb trzycyfrowych
podzielnych przez 4 lub
przez 5 jest:

$$225 + 180 - 45 = 360$$

23.1. $24\sqrt{3}$

23.2. $6\sqrt{2}$

24. Cena netto:

$$307,50 : 1,23 = 250 \text{ [zł]}$$

Cena netto po obniżce:

$$51,75 : 0,23 = 225 \text{ [zł]}$$

$$250 - 225 = 25 \text{ [zł]}$$

25. Niech x – wyjściowa cena,
 $0,4x$ – cena po obniżce o 60%.

$(1 + \frac{p}{100}) \cdot 0,4x$ – cena po
podwyżce o $p\%$

$$x \cdot 0,4 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = x$$

$$1 + \frac{p}{100} = 2,5$$

$$\frac{p}{100} = 1,5$$

$$p = 150$$

26. $x = \frac{4}{3}, y = \frac{32}{27}$

I sposób: $\frac{\frac{4}{3} - \frac{32}{27}}{\frac{32}{27}} = 0,125$

Liczba x jest o 12,5% większa
od liczby y .

II sposób:

$$x = \frac{4}{3} = \frac{9}{8} \cdot \frac{32}{27} = \frac{9}{8}y = 1,125y,$$

zatem liczba x jest o 12,5%
większa od liczby y .

Zadanie 19 (0–2)

Określ znak iloczynu liczb $a = \frac{13}{5} - 2, (5)$ oraz $b = \sqrt{2} - 1, (4)$.

Zadanie 20 (0–2) → Przykład 1, str. 56

Ile jest dodatnich liczb dwucyfrowych, których reszta z dzielenia przez 6 jest równa 2?

Zadanie 21 (0–3) → Przykład 2, str. 56

Ile jest dodatnich liczb trzycyfrowych, które są podzielne przez 3 i przez 4?

Zadanie 22 (0–4) → Przykład 3, str. 56

Ile jest dodatnich liczb trzycyfrowych, które są podzielne przez 4 lub przez 5?

Zadanie 23

Dany jest trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości $2\sqrt{27}$ i $4\sqrt{12}$.

Zadanie 23.1 (0–2)

Oblicz obwód tego trójkąta.

Zadanie 23.2 (0–2)

Kwadrat o boku a ma pole równe polu tego trójkąta. Oblicz a .

Zadanie 24 (0–2)

Cena brutto kurtki zimowej wynosiła 307,50 zł. Na cenę tę składała się cena netto oraz 23% podatku VAT. Cena kurtki została obniżona i po obniżce podatek VAT wynosił 51,75 zł. O ile zmniejszyła się cena netto tej kurtki?

Zadanie 25 (0–2)

Cenę towaru obniżono o 60%, a następnie podniesiono o $p\%$ i w ten sposób otrzymano cenę sprzed obniżki. Wyznacz p .

Zadanie 26 (0–4)

Dane są liczby $x = (\frac{3}{5} - \frac{2}{15}) : (\frac{11}{20} - 0,2)$ i $y = (0,5 \cdot 3)^{-2} \cdot 2^3 \cdot 3^{-1}$. O ile procent liczba x jest większa od liczby y ?

Zadanie 27 (0–4)

Woda płynąca jednocześnie z kranów A , B i C może napełnić basen w ciągu 4 godzin. Woda płynąca tylko z kranu A napełnia w ciągu godziny $\frac{1}{10}$ basenu, a tylko z kranu B – $\frac{1}{12}$ basenu. Ile czasu trwałoby napełnianie basenu wodą płynącą tylko z kranu C ?

D Zadanie 28 (0–4)

Uzasadnij, że jeśli $a = 45$, $b = (2 - \sqrt{5})(1 - 2\sqrt{5})$ i $c = (-2 + \sqrt{5})(11 + 2\sqrt{5})$, to liczba $\frac{\sqrt{a}}{b+c}$ jest liczbą wymierną.

27. Oznaczmy przez b objętość wody w pełnym basenie, a przez x – liczbę godzin potrzebnych do napełnienia basenu wodą z kranu C . Wówczas ilość wody wlanej do basenu w ciągu jednej godziny:

– z kranu A jest równa $\frac{1}{10}b$,

– z kranu B jest równa $\frac{1}{12}b$,

– z kranu C jest równa $\frac{1}{x}b$.

Zatem:

$$\frac{b}{10} + \frac{b}{12} + \frac{b}{x} = \frac{b}{4}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{15}{60} - \frac{6}{60} - \frac{5}{60} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$$

$$x = 15 \text{ h}$$

Czyli napełnienie basenu wodą tylko z kranu C trwałoby 15 h.

28. $b = 12 - 5\sqrt{5}$, $c = 7\sqrt{5} - 12$, $b + c = 2\sqrt{5}$

$$\frac{\sqrt{a}}{b+c} = \frac{\sqrt{45}}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{2} \text{ zatem jest to liczba wymierna.}$$