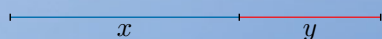


2 Język matematyki

Wieża CN Tower w Toronto jest najwyższą budowlą na zachodniej półkuli. Stosunek jej wysokości (553,33 m) do wysokości, na której znajduje się kosz wieży (342 m), wynosi około 1,618. Jest to przybliżenie liczby zwanej **złotą liczbą** lub **złotym stosunkiem**. O odcinku mówimy, że został podzielony w złotym stosunku, jeśli stosunek dłuższej części do krótszej jest równy stosunkowi całego odcinka do dłuższej części: $\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$.



Dokładna wartość złotego stosunku wynosi $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



Uczeń:

- posługuje się pojęciami: zbiór, podzbiór, zbiór pusty, zbiór skończony, zbiór nieskończony,
- wymienia elementy danego zbioru oraz elementy do niego nienależące,
- opisuje słownie i symbolicznie dany zbiór,
- określa relację zawierania zbiorów,
- wypisuje podzbiory danego zbioru.

Komentarz 1

W matematyce zbiór jest pojęciem pierwotnym, tzn. takim, którego nie definiujemy. Intuicyjnie opisujemy zbiór jako grupę nieuporządkowanych obiektów.

Inne pojęcia pierwotne to na przykład: punkt i prosta.

Komentarz 2

Zbiór pusty jest zbiorem skończonym.

Ćwiczenie 1

- a) jest
- b) nie jest
- c) jest
- d) nie jest
- e) nie jest
- f) jest

2.1. Zbiory

Zgodnie z tradycją zbiory oznaczamy wielkimi literami. Aby opisać zbiór, należy określić, jakie są jego **elementy**. Można to zrobić słownie lub (jeśli to możliwe) wypisać jego elementy, np.:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ – zbiór liczb naturalnych

$A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ – zbiór naturalnych dzielników liczby 20

Zbiór, który ma skończoną liczbę elementów, nazywamy **zbiorem skończonym**. Zbiór, do którego należy nieskończenie wiele elementów, nazywamy **zbiorem nieskończonym**.

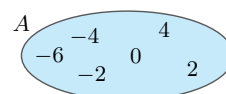
Aby zapisać, że element należy do zbioru, używamy symbolu $\in$, np. $7 \in \mathbb{N}$, aby zapisać, że element nie należy do zbioru – symbolu $\notin$, np. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Zbiór, do którego nie należy żaden element, nazywamy **zbiorem pustym** i oznaczamy symbolem $\emptyset$.

Ćwiczenie 1

Na diagramie przedstawiono zbiór A . Określ, czy zdanie jest prawdziwe.

- a) $2 \in A$
- c) $\sqrt{16} \in A$
- e) $-6 \notin A$
- b) $1 \in A$
- d) $\sqrt{9} \in A$
- f) $6 \notin A$



Jeszcze innym sposobem opisanie zbioru jest podanie warunku, jaki muszą spełniać jego elementy. Na przykład zapis $B = \{n \in \mathbb{N} : n^2 \leq 16\}$ oznacza, że $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Przykład 1

Opis słowny zbioru	Wypisanie elementów	Zapis symboliczny
A jest zbiorem tych liczb całkowitych, których kwadraty są równe 4.	$A = \{-2, 2\}$	$A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 4\}$
B jest zbiorem tych liczb naturalnych, których kwadraty są mniejsze od 30.	$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	$B = \{n \in \mathbb{N} : n^2 < 30\}$

Ćwiczenie 2

Wypisz wszystkie elementy zbiorów D , E i F oraz podaj ich zapis symboliczny.

D – zbiór tych liczb naturalnych, których kwadraty są mniejsze od 5

E – zbiór tych liczb całkowitych, których kwadraty są mniejsze od 5

F – zbiór tych liczb rzeczywistych, których kwadraty są równe 5

Ćwiczenie 2

$D = \{0, 1, 2\} = \{n \in \mathbb{N} : n^2 < 5\}$,

$E = \{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 5\}$,

$F = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 5\}$

Multibook

- Zbiory liczbowe

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.1



Definicja

Dwa zbiory są **równe** wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same elementy.

Ćwiczenie 3

Które spośród zbiorów A , B i C są równe?

- a) $A = \{-6, -3, 0, 3, 6\}$, $B = \{-6, -3, 0, 3, 6, 8\}$, $C = \{0, 3, -3, 6, -6\}$
b) $A = \{-3, -2, -1, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}: x^2 \leq 15\}$, C – zbiór tych liczb całkowitych, których kwadraty są mniejsze od 10

Każda liczba naturalna jest liczbą całkowitą. Mówimy, że zbiór liczb naturalnych jest podzbiorem zbioru liczb całkowitych.

Definicja

Zbiór A jest **podzbiorem** zbioru B , jeśli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B . Mówimy też, że zbiór A jest zawarty w zbiorze B .

Zapisujemy to: $A \subset B$.

Zapis $A \not\subset B$ oznacza, że A nie jest podzbiorem zbioru B .

Uwaga. Dla dowolnego zbioru A zachodzą zależności: $A \subset A$ i $\emptyset \subset A$.

Jeśli $A \subset B$ i $B \subset A$, to zbiory A i B są równe: $A = B$.

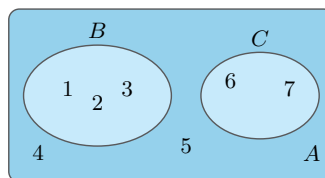
Przykład 2

Na diagramie obok przedstawiono zbiory:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{6, 7\}$.

Miedzy tymi zbiorami zachodzą zależności:

$$B \subset A \text{ i } C \subset A$$



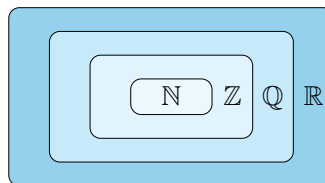
Ćwiczenie 4

Czy prawdziwa jest któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$?

- a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
b) $A = \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}: x^2 < 20\}$
c) A – zbiór dzielników liczby 40, B – zbiór dzielników liczby 60

Zwróćmy uwagę, że dla poznanych dotychczas zbiorów liczbowych zachodzą zależności:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że: a) $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$, b) $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}$.

Ćwiczenie 4

- a) $B \subset A$
b) $A \subset B$, bo $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
c) Odpowiedź nie zależy od tego, czy rozpatrujemy dzielniki naturalne, czy całkowite. Rozpatrzmy dzielniki naturalne.
 $A = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$,
 $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$,
żadna zależność $A \subset B$ i $B \subset A$ nie jest prawdziwa.

Ćwiczenie 5

- a) Ujemne liczby całkowite nie należą do zbioru liczb naturalnych.
b) Nie wszystkie liczby rzeczywiste należą do zbioru liczb wymiernych, np. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Ćwiczenie 3

a) $A = C$

b) $B = C$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$,
 $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$,
 $A \subset B$
b) $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$,
 $B = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$, nie
2. a) $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$
b) $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$
c) $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$,
 $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$
3. $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c, e\}$,
 $\{a, b, d, e\}$, $\{a, c, d, e\}$,
 $\{b, c, d, e\}$
4. a) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$
b) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17,$
 $19, 21, 23\}$

Zadania

1. Określ zbiory A i B , wypisując wszystkie ich elementy. Czy zachodzi któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$?
a) A – zbiór naturalnych dzielników liczby 12,
 B – zbiór naturalnych dzielników liczby 24
b) A – zbiór naturalnych dzielników liczby 42,
 B – zbiór naturalnych dzielników liczby 45
2. Wypisz wszystkie dwuelementowe podzbiory zbioru A .
a) $A = \{0, 1, 2\}$ b) $A = \{a, b, c\}$ c) $A = \{1, 2, 3, 4\}$
3. Wypisz wszystkie czteroelementowe podzbiory zbioru $\{a, b, c, d, e\}$.
4. Wypisz elementy zbioru X , do którego należą tylko nieparzyste liczby naturalne takie, że ich:
a) kwadrat jest mniejszy od 180, b) pierwiastek jest mniejszy od 5.

Czy wiesz, że...

Słowo „zbiór” w języku potocznym jest używane w wielu sytuacjach. Na przykład zbiorami nazywa się różnorodne kolekcje gromadzone przez hobbystów czy też kolekcje dzieł sztuki. *Wazon z irysami na żółtym tle* – obraz Vincenta van Gogha, należy do zbiorów Muzeum van Gogha w Amsterdamie.

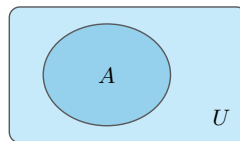


Sprawdź się

- D** 5. Czy zbiory A i B mają tyle samo elementów? Uzasadnij, że $A \not\subset B$.
- a) A – zbiór dzielników liczby 6, B – zbiór dzielników liczby 15
 - b) A – zbiór dzielników liczby 18, B – zbiór dzielników liczby 30
 - c) A – zbiór dzielników liczby 36, B – zbiór dzielników liczby 48
6. Wypisz wszystkie trzelementowe podzbiory zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$.
7. Wypisz trzelementowe podzbiory zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, dla których:
- a) suma wszystkich elementów jest większa od 7,
 - b) iloczyn wszystkich elementów jest równy 0.
5. Odpowiedź na pytanie nie zależy od tego, czy rozpatrujemy dzielniki naturalne, czy całkowite. We wszystkich podpunktach wypiszemy dzielniki naturalne.
- a) tak, $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{1, 3, 5, 15\}$, 4 elementy
 - b) nie, $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, 6 elementów, $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, 8 elementów
 - c) nie, $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$, 9 elementów,
 $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$, 10 elementów
6. $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$
7. a) $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$
b) $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 1, 4\}$, $\{0, 2, 3\}$, $\{0, 2, 4\}$, $\{0, 3, 4\}$

2.2. Działania na zbiorach

Na zamieszczonym obok diagramie U oznacza zbiór wszystkich rozpatrywanych elementów i jest nazywany **przestrzenią**. Gdy mówimy o liczbach, to przestrzenią jest zwykle zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

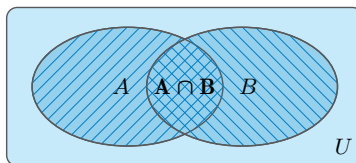


Definicja

Iloczynem (częścią wspólną) zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą jednocześnie do obu tych zbiorów. Iloczyn zbiorów A i B oznaczamy $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ i } x \in B\}$$

Na zamieszczonym obok diagramie iloczyn zbiorów A i B jest przedstawiony jako obszar podwójnie zakreskowany.



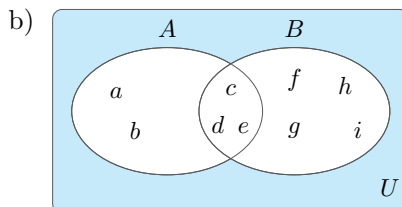
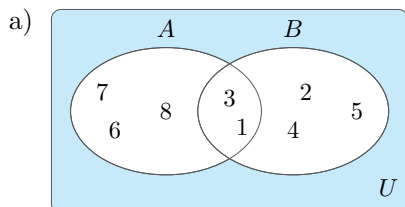
Przykład 1

Niech $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Tylko liczby 2 i 4 należą do obu zbiorów jednocześnie, zatem:

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

Ćwiczenie 1

Na podstawie diagramu podaj elementy zbiorów A , B oraz $A \cap B$.



Ćwiczenie 2

Wyznacz iloczyn zbiorów A i B .

- a) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
 b) $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$, $B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
 c) $A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}\}$, $B = \{\frac{10}{100}, \frac{20}{100}, \frac{30}{100}, \frac{40}{100}, \frac{50}{100}\}$

Uczeń:

- posługuje się pojęciami: iloczyn, suma oraz różnica zbiorów,
- wyznacza iloczyn, sumę oraz różnicę danych zbiorów,
- przedstawia na diagramie zbiór, który jest wynikiem działań na trzech dowolnych zbiorach,
- wyznacza dopełnienie zbioru.

Komentarz

Iloczyn zbiorów jest nazywany również przekrojem zbiorów.

Ćwiczenie 1

- a) $A = \{1, 3, 6, 7, 8\}$,
 $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
 $A \cap B = \{1, 3\}$
 b) $A = \{a, b, c, d, e\}$,
 $B = \{c, d, e, f, g, h, i\}$,
 $A \cap B = \{c, d, e\}$

Ćwiczenie 2

- a) $\{3, 5\}$
 b) $\{0, 6, 12, 18\}$
 c) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\}$

Multibook

- Różnica zbiorów – rozwiązanie zadania
- Działania na dwóch zbiorach (1)
- Działania na dwóch zbiorach (2)
- Działania na trzech zbiorach (1)
- Działania na trzech zbiorach (2)
- Działania na zbiorach – rozwiązanie zadania

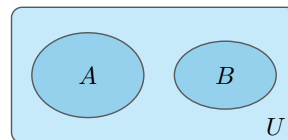
dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.2

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

- a) Zbiory X i Y są rozłączne.
b) Zbiory X i Y nie są rozłączne.

Zbiory A i B nazywamy **rozłącznymi**, gdy nie mają wspólnych elementów, czyli gdy $A \cap B = \emptyset$. Na zamieszczonym obok diagramie przedstawiono rozłączne zbiory A i B .



Ćwiczenie 3

Czy zbiory X i Y są rozłączne?

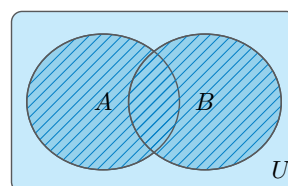
- a) X – zbiór liczb parzystych, Y – zbiór liczb nieparzystych
b) X – zbiór liczb parzystych, Y – zbiór liczb podzielnych przez 5

Definicja

Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą do co najmniej jednego ze zbiorów A lub B . Sumę zbiorów A i B oznaczamy $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ lub } x \in B\}$$

Na zamieszczonym obok diagramie suma zbiorów A i B jest przedstawiona jako obszar zakreskowany.



Przykład 2

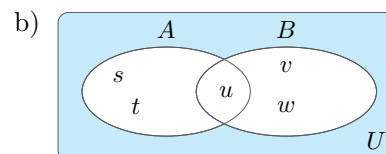
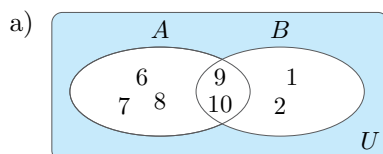
Jeśli $A = \{2, 3, 4\}$ i $B = \{1, 3, 5, 7\}$, to
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$.

Ćwiczenie 4

- a) $A \cup B = \{1, 2, 6, 7, 8, 9, 10\}$
b) $A \cup B = \{s, t, u, v, w\}$

Ćwiczenie 4

Na podstawie diagramu podaj elementy sumy zbiorów A i B .



Ćwiczenie 5

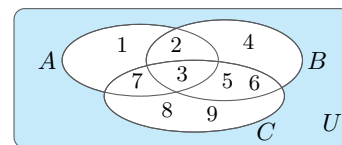
Wyznacz sumę zbiorów A i B .

- a) $A = \{5, 10, 15, 20, 25\}$, $B = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
b) A – zbiór dzielników liczby 6, B – zbiór dzielników liczby 8
c) A – zbiór liczb parzystych, B – zbiór liczb nieparzystych

Ćwiczenie 6

Korzystając z diagramu, wyznacz zbiory:

- a) $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cup B \cup C$,
b) $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$.



Ćwiczenie 5

- a) $A \cup B = \{5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 25\}$
b) $A = \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$, $B = \{-1, 1, -2, 2, -4, 4, -8, 8\}$,
 $A \cup B = \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -6, 6, -8, 8\}$
c) $A \cup B = \mathbb{Z}$

Ćwiczenie 6

- a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
 $A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
 $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
 $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
b) $A \cap B = \{2, 3\}$, $A \cap C = \{3, 7\}$,
 $B \cap C = \{3, 5, 6\}$, $A \cap B \cap C = \{3\}$

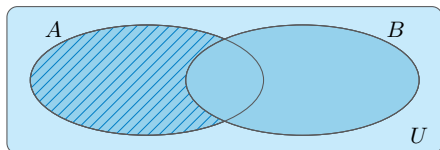
Definicja

Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B . Różnicę zbiorów A i B oznaczamy $A \setminus B$.

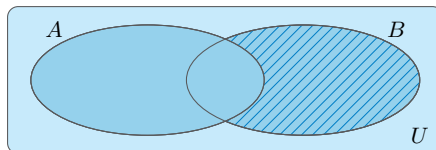
$$A \setminus B = \{x: x \in A \text{ i } x \notin B\}$$

Obszary zakreskowane na poniższych diagramach przedstawiają:

zbiór $A \setminus B$,

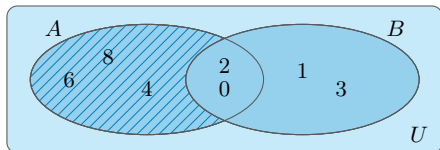


zbiór $B \setminus A$.

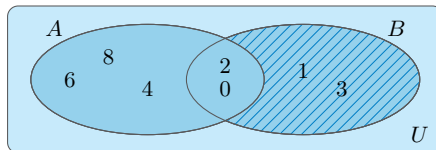


Przykład 3

Dane są zbiór $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ i zbiór $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Wyznacz zbiory $A \setminus B$ oraz $B \setminus A$.



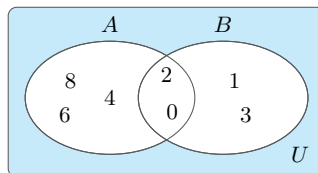
$$A \setminus B = \{4, 6, 8\}$$



$$B \setminus A = \{1, 3\}$$

Ćwiczenie 7

Dane są zbiory $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ – zbiór liczb parzystych mniejszych od 9 i $B = \{0, 1, 2, 3\}$ – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 4. Wyznacz zbiory $A \setminus B$ i $B \setminus A$.



Ćwiczenie 8

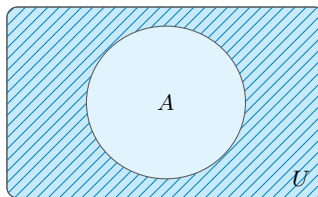
Dla podanych zbiorów A i B wyznacz zbiory $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

- a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ b) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Szczególnym przypadkiem różnicy zbiorów jest **dopełnienie zbioru**, które oznaczamy przez A' i definiujemy jako różnicę całej przestrzeni i zbioru A :

$$A' = U \setminus A = \{x \in U: x \notin A\}$$

Obszar zakreskowany na diagramie to zbiór A' .



Ćwiczenie 7

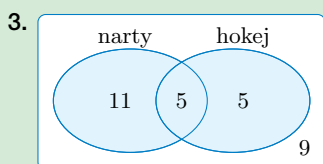
$$A \setminus B = \{4, 6, 8\}, B \setminus A = \{1, 3\}$$

Ćwiczenie 8

- a) $A \setminus B = \{1\}$, $B \setminus A = \{4, 5\}$
b) $A \setminus B = \{7\}$, $B \setminus A = \{0, 2, 4\}$

Odpowiedzi do zadań

1. $A \cup B = \{k, l, m, n, o, p, q, r, s\}$,
 $A \cap B = \{n, o\}$,
 $A \setminus B = \{k, l, m\}$,
 $B \setminus A = \{p, q, r, s\}$
2. a) $A \cup B = \{a, c, d, e, f, g\}$,
 $A \cap B = \{e, g\}$,
 $A \setminus B = \{a, c\}$,
 $B \setminus A = \{d, f\}$
 b) $A \cup B = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
 $A \cap B = \{5, 7\}$,
 $A \setminus B = \{1, 9\}$,
 $B \setminus A = \{4, 6, 8\}$



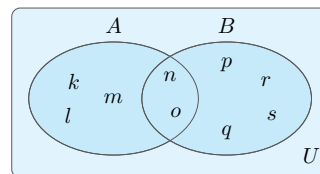
Dziewięciu uczniów nie uprawia żadnego z wymienionych sportów.

4. a) II
 b) III
 c) I

5. a) $A \cap B$, $B \setminus A$
 b) $A \setminus B$, $B \setminus A$

Zadania

1. Na diagramie przedstawiono zbiory A i B . Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

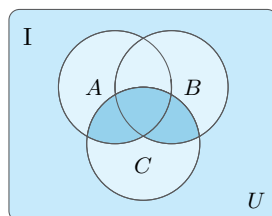


2. Dla podanych zbiorów A i B wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

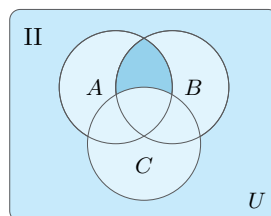
- a) $A = \{a, c, e, g\}$, $B = \{d, e, f, g\}$
- b) $A = \{1, 5, 7, 9\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

3. W pewnej 30-osobowej klasie 16 uczniów jeździ na nartach, a 10 – gra w hokeja. Wiadomo, że połowa uczniów grających w hokeja jeździ na nartach. Ilu uczniów nie uprawia żadnego z wymienionych sportów?

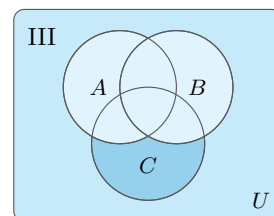
4. Na którym z poniższych diagramów ciemnoniebieski obszar odpowiada podanemu zbiorowi?



a) $(A \cap B) \setminus C$



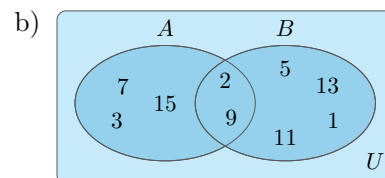
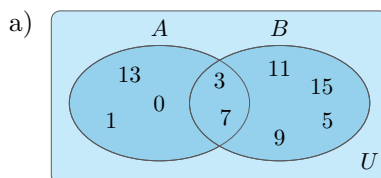
b) $C \setminus (A \cup B)$



c) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

Sprawdź się

5. Na diagramie przedstawiono zbiory A i B . Do których ze zbiorów $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ należą tylko liczby nieparzyste?



6. Dane są zbiory: A – zbiór spółgłosek w słowie *arytmetyka*, B – zbiór spółgłosek w słowie *geometria* oraz C – zbiór spółgłosek w słowie *algebra*. Wyznacz zbiór:

- a) $A \cap B$, c) $B \setminus A$, e) $B \setminus C$, g) $A \cap B \cap C$,
 b) $A \setminus B$, d) $B \cap C$, f) $C \setminus B$, h) $A \cup B \cup C$.

6. $A = \{k, m, r, t\}$, $B = \{g, m, r, t\}$, $C = \{b, g, l, r\}$

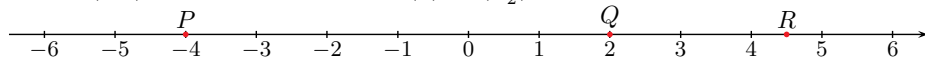
- a) $A \cap B = \{m, r, t\}$
 b) $A \setminus B = \{k\}$
 c) $B \setminus A = \{g\}$
 d) $B \cap C = \{g, r\}$
 e) $B \setminus C = \{m, t\}$
 f) $C \setminus B = \{b, l\}$
 g) $A \cap B \cap C = \{r\}$
 h) $A \cup B \cup C = \{b, g, k, l, m, r, t\}$

Oś liczbowa

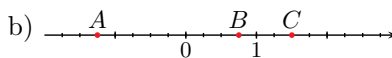
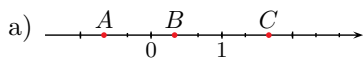
Oś liczbowa to prosta, na której wyróżniono punkt zerowy (początek osi), zwrot oraz przynajmniej jeden punkt wskazujący na jednostkę.

Każdej liczbie rzeczywistej odpowiada dokładnie jeden punkt na osi liczbowej. Każdemu punktowi na osi liczbowej przyporządkowana jest dokładnie jedna liczba zwana **współrzędną** tego punktu.

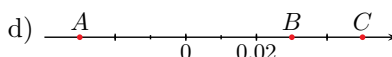
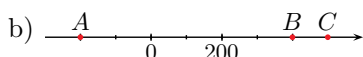
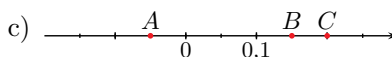
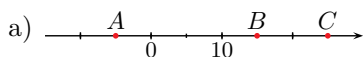
Na poniższej osi liczbowej punkt P odpowiada liczbie -4 , co możemy zapisać jako $P(-4)$. Pozostałe punkty: $Q(2)$, $R(4\frac{1}{2})$.



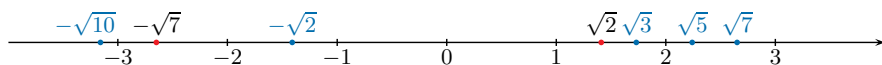
1. Odczytaj współrzędne punktów zaznaczonych na osi liczbowej.



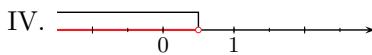
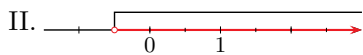
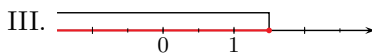
2. Odczytaj współrzędne punktów zaznaczonych na osi liczbowej.



3. Na osi liczbowej zaznaczono przybliżone położenie punktów odpowiadających liczbom $-\sqrt{7}$ oraz $\sqrt{2}$. Przerysuj tę oś do zeszytu i zaznacz na niej przybliżone położenia punktów odpowiadających liczbom $-\sqrt{10}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$.



4. Na którym z poniższych rysunków zaznaczono zbiór tych liczb x , które spełniają podany warunek?



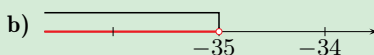
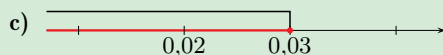
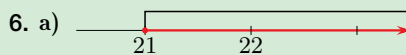
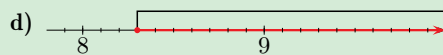
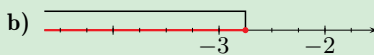
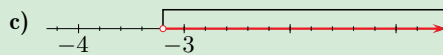
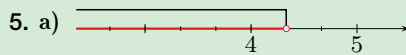
- a) $x < \frac{1}{2}$ b) $x \leq \frac{3}{2}$ c) $x > -\frac{1}{2}$ d) $x \geq -\frac{1}{2}$

5. Zaznacz na osi liczbowej zbiór tych liczb x , które spełniają warunek:

- a) $x < 4\frac{1}{3}$, b) $x \leq -2\frac{3}{4}$, c) $x > -3\frac{1}{5}$, d) $x \geq 8,3$.

6. Zaznacz na osi liczbowej zbiór tych liczb x , które spełniają warunek:

- a) $x \geq 21$, b) $x < -35$, c) $x \leq 0,03$, d) $x > -3\frac{1}{6}$.



Odpowiedzi do zadań

1. a) $A(-\frac{2}{3})$, $B(\frac{1}{3})$, $C(1\frac{2}{3})$
b) $A(-1\frac{1}{4})$, $B(\frac{3}{4})$, $C(1\frac{1}{2})$
2. a) $A(-5)$, $B(15)$, $C(25)$
b) $A(-200)$, $B(400)$, $C(500)$
c) $A(-0,05)$, $B(0,15)$, $C(0,2)$
d) $A(-0,03)$, $B(0,03)$, $C(0,05)$
4. a) IV
b) III
c) II
d) I

Uczeń:

- rozróżnia pojęcia: przedział otwarty, domknięty, lewostronnie domknięty, prawostronnie domknięty, ograniczony, nieograniczony,
- zapisuje przedział i zaznacza go na osi liczbowej,
- odczytuje i zapisuje symbolem przedział zaznaczony na osi liczbowej,
- wyznacza przedział opisany podanymi nierównościami,
- wymienia liczby należące do przedziału, spełniające podane warunki.

Komentarz 1

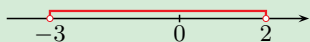
Przedział liczbowy jest podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.

Komentarz 2

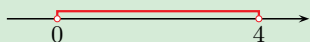
Warto uświadomić uczniom różnicę między zbiorem skończonym i ograniczonym. Przedziały liczbowe są zbiorami nieskończonymi.

Ćwiczenie 1

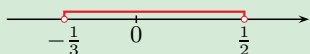
a) $-3 < x < 2$



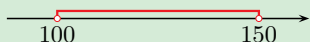
b) $0 < x < 4$



c) $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$



d) $100 < x < 150$



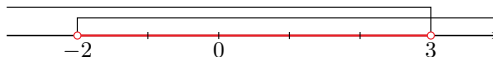
2.3. Przedziały

■ Przedziały ograniczone

Przykład 1

Zaznacz na osi liczbowej zbiór tych liczb x , które spełniają jednocześnie dwa warunki (dwie nierówności): $x > -2$ i $x < 3$.

Liczby, które spełniają obie nierówności jednocześnie, muszą być większe od -2 i mniejsze od 3 , co możemy też zapisać symbolicznie za pomocą podwójnej nierówności: $-2 < x < 3$. Na osi liczbowej zbiór ten przedstawiamy następująco:

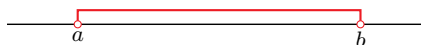


Liczby -2 i 3 nie należą do zbioru. Na osi zaznaczamy je pustymi kółkami. Ten zbiór nazywamy **przedziałem otwartym** od -2 do 3 , co symbolicznie zapisujemy $(-2; 3)$. Liczby -2 i 3 nazywamy **końcami przedziału**.

Podając, które liczby x spełniają obie nierówności, piszemy: $x \in (-2; 3)$.

Nazwa zbioru	Oznaczenie	Warunek, jaki spełniają liczby x należące do zbioru	Ilustracja graficzna
przedział otwarty	$(a; b)$	$a < x < b$	

Uwaga. Przedział otwarty $(a; b)$ często zaznacza się na osi liczbowej następująco:



Ćwiczenie 1

Zapisz nierówności, które są spełnione przez liczby należące do podanego przedziału. Zaznacz ten przedział na osi liczbowej.

a) $(-3; 2)$

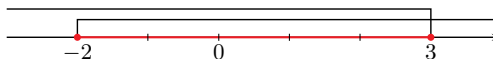
b) $(0; 4)$

c) $(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$

d) $(100; 150)$

Przykład 2

Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek: $-2 \leq x \leq 3$.



Liczby -2 i 3 należą do zbioru, dlatego na osi końce przedziałów zaznaczamy zamalowanymi kółkami. Ten zbiór nazywamy **przedziałem obustronnie domkniętym** od -2 do 3 i zapisujemy symbolicznie $[-2; 3]$.

Jeśli do przedziału należy tylko jego lewy koniec, to taki przedział nazywamy **lewostronnie domkniętym**, a jeśli należy do niego tylko jego prawy koniec – to **prawostronnie domkniętym**.

Nazwa zbioru	Oznaczenie	Warunek, jaki spełniają liczby x należące do zbioru	Ilustracja graficzna
przedział domknięty	$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	
przedział lewostronnie domknięty	$[a; b)$	$a \leq x < b$	
przedział prawostronnie domknięty	$(a; b]$	$a < x \leq b$	

Długością każdego z przedziałów $(a; b)$, $(a; b]$, $[a; b)$, $[a; b]$ nazywamy liczbę: $b - a$.

Ćwiczenie 2

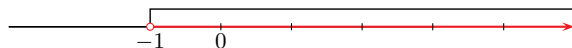
Zapisz nierówności, które są spełnione przez liczby należące do podanego przedziału. Zaznacz ten przedział na osi liczbowej. Podaj, ile liczb całkowitych należy do tego przedziału.

- a) $[-1; 4]$ b) $[\frac{3}{2}; 5)$ c) $(-2; -\frac{1}{2}]$ d) $[-60; 40]$

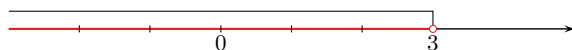
■ Przedziały nieograniczone

Przykład 3

a) Zbiór liczb spełniających nierówność $x > -1$ nazywamy **przedziałem lewostronnie otwartym** od -1 do ∞ i zapisujemy symbolicznie $(-1; \infty)$.

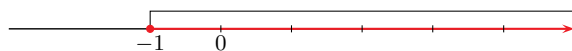


b) Zbiór liczb spełniających nierówność $x < 3$ nazywamy **przedziałem prawostronnie otwartym** od $-\infty$ do 3 i zapisujemy symbolicznie $(-\infty; 3)$.

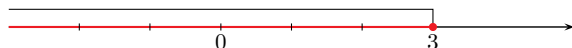


Przykład 4

a) Zbiór liczb spełniających nierówność $x \geq -1$ nazywamy **przedziałem lewostronnie domkniętym** od -1 do ∞ i zapisujemy symbolicznie $[-1; \infty)$.



b) Zbiór liczb spełniających nierówność $x \leq 3$ nazywamy **przedziałem prawostronnie domkniętym** od $-\infty$ do 3 i zapisujemy symbolicznie $(-\infty; 3]$.



Uwaga. Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ możemy zapisać jako przedział $(-\infty; \infty)$.

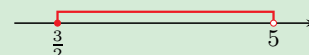
Ćwiczenie 2

a) $-1 \leq x \leq 4$



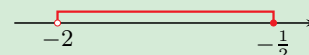
6 liczb całkowitych

b) $\frac{3}{2} \leq x < 5$



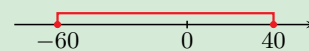
3 liczby całkowite

c) $-2 < x \leq -\frac{1}{2}$



1 liczba całkowita

d) $-60 \leq x \leq 40$



101 liczb całkowitych

Ćwiczenie 3

Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

Nazwa zbioru	Oznaczenie	Warunek, jaki spełniają liczby x należące do zbioru	Ilustracja graficzna
przedział otwarty	$(a; \infty)$	$x > a$	
przedział lewostronnie domknięty	$[a; \infty)$	$x \geq a$	
przedział prawostronnie domknięty	$(-\infty; b]$	$x \leq b$	
przedział otwarty	$(-\infty; b)$	$x < b$	

Zadania

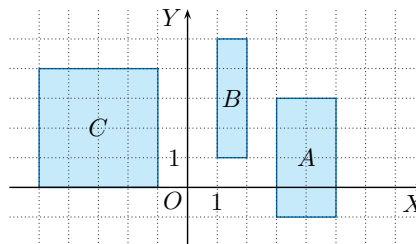
Odpowiedzi do zadań

- $[-7; 0]$
 - $(\frac{1}{2}; 9)$
 - $[\frac{1}{4}; \sqrt{2}]$
 - $(-\frac{13}{3}; 5]$
 - $[2\frac{1}{4}; \infty)$
 - $(-3; \infty)$
 - $(-\infty; -\frac{1}{3}]$
 - $(-\infty; 27]$
- $(-7; 2], -7 < x \leq 2$
 - $[-50; 20], -50 \leq x \leq 20$
 - $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}), \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$
 - $[3, 14; \pi), 3, 14 \leq x < \pi$
 - $(-\infty; 10), x < 10$
 - $(\sqrt{2}; \infty), x > \sqrt{2}$
 - $[-\frac{1}{4}; \infty), x \geq -\frac{1}{4}$
 - $(-\infty; 2\pi), x < 2\pi$

- Zapisz jako przedział zbiór liczb spełniających podany warunek. Zaznacz ten przedział na osi liczbowej.
 - $-7 \leq x \leq 0$
 - $\frac{1}{4} \leq x < \sqrt{2}$
 - $x \geq 2\frac{1}{4}$
 - $x \leq -\frac{1}{3}$
- Zapisz symbolicznie przedział zaznaczony na osi liczbowej i podaj warunek, jaki muszą spełniać liczby należące do tego przedziału.
 -
 -
 -
 -
- Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór wszystkich:
 - liczb dodatnich, których odległość od zera jest mniejsza od 4,
 - liczb ujemnych, których odległość od zera jest nie większa niż 4,
 - liczb nieujemnych, których odległość od zera jest większa od $2\frac{1}{2}$,
 - liczb niedodatnich, których odległość od zera jest nie mniejsza niż $\sqrt{2}$.
- Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór, do którego należą liczby odległe:
 - od liczby 1 o mniej niż 2,
 - od liczby -1 o mniej niż 3,
 - od liczby 3 o nie więcej niż 2,
 - od liczby $-\frac{1}{4}$ o nie więcej niż $\frac{3}{2}$.

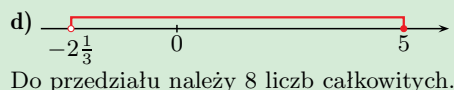
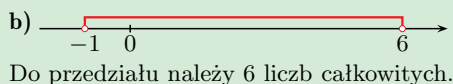
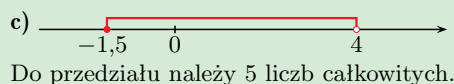
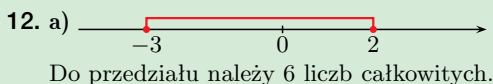
- $(0; 4)$
 - $[-4; 0)$
 - $(2\frac{1}{2}; \infty)$
 - $(-\infty; -\sqrt{2}]$
- $(-1; 3)$
 - $(-4; 2)$
 - $[1; 5]$
 - $[-\frac{7}{4}; \frac{5}{4}]$

5. Wypisz wszystkie liczby całkowite należące do podanego przedziału.
 a) $[-1; 4)$ b) $(0; 6)$ c) $[-\frac{2}{3}; \frac{5}{2}]$ d) $[-\frac{25}{4}; -2]$
6. Ile liczb całkowitych x spełnia podany warunek?
 a) $\sqrt{x} \in [1; 2]$ b) $\sqrt{x} \in [2; 3]$ c) $\sqrt[3]{x} \in (1; 2)$ d) $\sqrt[3]{x} \in [-2; 0)$
7. Sprawdź, czy zachodzi któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$.
 a) $A = (-1; 2]$, $B = [-1; 3)$ c) $A = (-\frac{7}{8}; \frac{15}{8})$, $B = [-\frac{6}{7}; \frac{13}{7}]$
 b) $A = (-\infty; 7)$, $B = (2; 7]$ d) $A = (\frac{22}{7}; 7)$, $B = (\pi; \sqrt{50})$
8. Określ najdłuższy przedział domknięty, którego końce są liczbami całkowitymi i który jest zawarty w podanym przedziale.
 a) $(-2\frac{1}{2}; 5]$ b) $(-\pi; 6)$ c) $[-3\frac{3}{4}; 2\frac{3}{4}]$ d) $[-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$
9. Wskaż na osi liczbowej liczbę jednakowo odległą od końców przedziału:
 a) $[-3; 1]$, b) $[-2; 3]$, c) $[\sqrt{2}; 4\sqrt{2}]$, d) $[1\frac{1}{4}; 2\frac{3}{4}]$.
10. Dla jakich wartości parametru p przedziały $[p; p+1]$ oraz $[2p; 2p+1]$ mają dokładnie jeden punkt wspólny?
11. Współrzędne (x, y) punktów należących do prostokąta A (rysunek obok) spełniają warunki: $x \in [3; 5]$ i $y \in [-1; 3]$. Zapisz warunki, jakie spełniają punkty należące do:
 a) prostokąta B ,
 b) kwadratu C .



Sprawdź się

12. Zaznacz na osi liczbowej podany przedział. Ile liczb całkowitych należy do tego przedziału?
 a) $[-3; 2]$ b) $(-1; 6)$ c) $[-1\frac{1}{2}; 4]$ d) $(-2\frac{1}{3}; 5]$
13. Zapisz nierówności, które są spełnione przez liczby x należące do podanego przedziału. Ile liczb całkowitych podzielnych przez 3 należy do tego przedziału?
 a) $[-3; 5]$ b) $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ c) $[-\frac{7}{3}; \frac{4}{3}]$ d) $(-\pi; 2\pi)$
14. Które spośród liczb $-\frac{8}{3}$, $-2\frac{3}{4}$, $3\frac{2}{5}$, π należą do podanego przedziału?
 a) $(-2\frac{2}{3}; 3\frac{2}{3}]$ b) $[-2\frac{2}{3}; 3, 4)$ c) $[-2; 3, 14]$ d) $(-2\frac{1}{2}; 3\frac{1}{4})$



5. a) $-1, 0, 1, 2, 3$
 b) $1, 2, 3, 4, 5$
 c) $0, 1, 2$
 d) $-6, -5, -4, -3, -2$
6. a) $1 \leq \sqrt{x} \leq 2$, czyli $1 \leq x \leq 4$, zatem warunek spełniają 4 liczby całkowite.
 b) $2 \leq \sqrt{x} \leq 3$, czyli $4 \leq x \leq 9$, zatem warunek spełnia 6 liczb całkowitych.
 c) $1 < \sqrt[3]{x} < 2$, czyli $1 < x < 8$, zatem warunek spełnia 6 liczb całkowitych.
 d) $-2 \leq \sqrt[3]{x} < 0$, czyli $-8 \leq x < 0$, zatem warunek spełnia 8 liczb całkowitych.
7. a) $A \subset B$
 b) Nie zachodzi żadna z tych zależności.
 c) $B \subset A$
 d) $A \subset B$
8. a) $[-2; 5]$
 b) $[-3; 5]$
 c) $[-3; 2]$
 d) $[-1; 1]$
9. a) $\frac{-3+1}{2} = -1$
 b) $\frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$
 c) $\frac{\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$
 d) $\frac{1\frac{1}{4}+2\frac{3}{4}}{2} = 2$
10. $p+1 = 2p$ lub $2p+1 = p$, czyli $p = -1$ lub $p = 1$
11. a) $x \in [1; 2]$ i $y \in [1; 5]$
 b) $x \in [-5; -1]$ i $y \in [0; 4]$
13. a) $-3 \leq x \leq 5; 3$
 b) $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}; 1$
 c) $-\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}; 1$
 d) $-\pi < x < 2\pi; 4$
14. a) $3\frac{2}{5}, \pi$
 b) $-\frac{8}{3}, \pi$
 c) żadna
 d) π

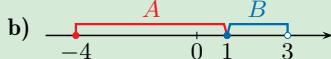
Uczeń:

- wyznacza iloczyn, sumę i różnicę przedziałów oraz zaznacza je na osi liczbowej,
- wyznacza iloczyn, sumę i różnicę różnych zbiorów liczbowych oraz zapisuje je symbolicznie.

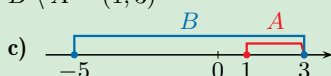
Ćwiczenie 1



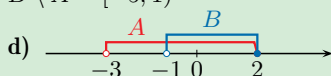
$$\begin{aligned}A \cup B &= (1; 6), \\A \cap B &= (2; 4), \\A \setminus B &= (1; 2), \\B \setminus A &= (4; 6)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}A \cup B &= [-4; 3], \\A \cap B &= \{1\}, \\A \setminus B &= [-4; 1), \\B \setminus A &= (1; 3]\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}A \cup B &= [-5; 3], \\A \cap B &= [1; 3], \\A \setminus B &= \emptyset, \\B \setminus A &= [-5; 1)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}A \cup B &= (-3; 2], \\A \cap B &= (-1; 2], \\A \setminus B &= (-3; -1], \\B \setminus A &= \emptyset\end{aligned}$$

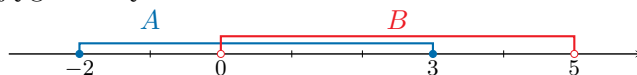
2.4. Działania na przedziałach

Przedziały to podzbiory zbioru liczb rzeczywistych. Można wykonywać na nich działania: $\cup, \cap, \setminus$.

Przykład 1

Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ dla $A = [-2; 3]$ i $B = (0; 5)$.

Kiedy wykonujemy działania na przedziałach, wygodnie jest posługiwać się ich ilustracją graficzną.



$A \cup B = [-2; 5)$	Sumie przedziałów A i B odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona co najmniej jednym kolorem.
$A \cap B = (0; 3]$	Ilościowi przedziałów A i B odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona dwoma kolorami.
$A \setminus B = [-2; 0]$	Różnicy $A \setminus B$ odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona tylko kolorem niebieskim.
$B \setminus A = (3; 5)$	Różnicy $B \setminus A$ odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona tylko kolorem czerwonym.

Uwaga. Wykonując działania na przedziałach, zwróć szczególną uwagę na ich końce. Na osi liczbowej używamy pustego kółka, gdy liczba odpowiadająca temu punktowi nie należy do zbioru, a kółka zamalowanego – gdy należy.

Ćwiczenie 1

Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

a) $A = (1; 4)$, $B = (2; 6)$

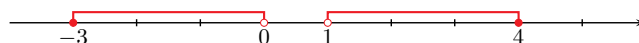
c) $A = [1; 3]$, $B = [-5; 3]$

b) $A = [-4; 1]$, $B = [1; 3]$

d) $A = (-3; 2]$, $B = (-1; 2]$

Przykład 2

Zbiór X zaznaczony na osi liczbowej jest sumą przedziałów $[-3; 0]$ i $(1; 4]$.



$$X = [-3; 0] \cup (1; 4]$$

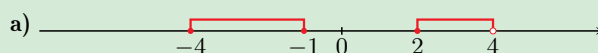
Ćwiczenie 2

Zaznacz na osi liczbowej zbiór X .

a) $X = [-4; -1] \cup [2; 4]$

b) $X = [-6; -5] \cup (-3; 2) \cup [4; \infty)$

Ćwiczenie 2



Multibook

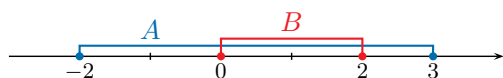
- Działania na przedziałach

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.4

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 3

Dane są zbiory $A = [-2; 3]$ i $B = [0; 2]$. Wyznacz zbiór $A \setminus B$.



Różnicą zbiorów A i B jest suma przedziałów.

$$A \setminus B = [-2; 0) \cup (2; 3]$$

Ćwiczenie 3

Wyznacz zbiór $A \setminus B$.

a) $A = [-5; 4]$, $B = (-3; -1)$

c) $A = [-3; \infty)$, $B = [-1; 2]$

b) $A = [-3; 5)$, $B = [2; \frac{5}{2}]$

d) $A = \mathbb{R}$, $B = [-3; 1]$

Zadania

1. Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

a) $A = (-3; 0)$, $B = [-1; 4]$

d) $A = (-\infty; 2]$, $B = [0; 2]$

b) $A = (-4; 2]$, $B = [-\frac{1}{2}; 3]$

e) $A = [-1; 2]$, $B = [2; \infty)$

c) $A = [-5; 4]$, $B = (-2; 0]$

f) $A = (-\infty; 6)$, $B = [-3; \infty)$

2. Zaznacz zbiór X na osi liczbowej.

a) $X = (-1; 3) \cup \{5\}$

b) $X = [0; 2] \cup \{3, 4\}$

c) $X = \{1\} \cup (3; 5]$

3. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz jako sumę przedziałów podany zbiór.

a) $\mathbb{R} \setminus (-2; 3)$

b) $\mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$

c) $\mathbb{R} \setminus (0; 10]$

d) $\mathbb{R} \setminus [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

4. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B , a następnie wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

a) $A = (-3; 1) \cup (3; 6)$, $B = (0; 4)$

b) $A = [0; 7]$, $B = (1; 3) \cup [8; 9]$

Sprawdź się

5. Zaznacz zbiór X na osi liczbowej.

a) $X = (-4; 0) \cup (2; 4)$

c) $X = [-2; 0] \cup [1; 2] \cup [4; 6]$

b) $X = [-3; 1] \cup [2; 5]$

d) $X = (-3; -1) \cup (0; 2] \cup [3; 6)$

6. Niech $A = (-5; 3)$, $B = (-7; 4)$. Ile liczb całkowitych należy do zbioru:

a) $A \cup B$,

b) $A \cap B$,

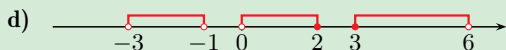
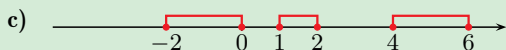
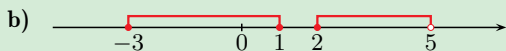
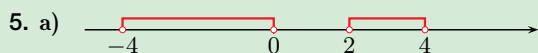
c) $A \setminus B$,

d) $B \setminus A$?

7. Który ze zbiorów $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ jest zbiorem pustym?

a) $A = [0; 4]$, $B = (0; 4)$

b) $A = [1; 3]$, $B = (3; 6]$



6. a) $A \cup B = (-7; 4)$

10 liczb całkowitych

b) $A \cap B = (-5; 3)$

7 liczb całkowitych

c) $A \setminus B = \emptyset$

d) $B \setminus A = (-7; -5] \cup [3; 4)$

3 liczby całkowite

7. a) $B \setminus A$

b) $A \cap B$

Ćwiczenie 3

a) $A \setminus B = [-5; -3] \cup [-1; 4]$

b) $A \setminus B = [-3; 2) \cup [\frac{5}{2}; 5]$

c) $A \setminus B = [-3; -1) \cup [2; \infty)$

d) $A \setminus B = (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $A \cup B = (-3; 4)$,

$A \cap B = [-1; 0]$,

$A \setminus B = (-3; -1)$,

$B \setminus A = [0; 4)$

b) $A \cup B = (-4; 3)$,

$A \cap B = [-\frac{1}{2}; 2]$,

$A \setminus B = (-4; -\frac{1}{2})$,

$B \setminus A = (2; 3)$

c) $A \cup B = [-5; 4]$,

$A \cap B = (-2; 0]$,

$A \setminus B = [-5; -2] \cup (0; 4]$,

$B \setminus A = \emptyset$

d) $A \cup B = (-\infty; 2]$,

$A \cap B = [0; 2]$,

$A \setminus B = (-\infty; 0) \cup \{2\}$,

$B \setminus A = \emptyset$

e) $A \cup B = [-1; \infty)$,

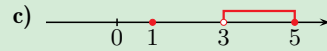
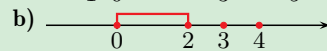
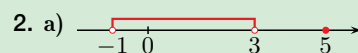
$A \cap B = \{2\}$, $A \setminus B = [-1; 2)$,

$B \setminus A = (2; \infty)$

f) $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = [-3; 6)$,

$A \setminus B = (-\infty; -3)$,

$B \setminus A = [6; \infty)$



3. a) $(-\infty; -2] \cup [3; \infty)$

b) $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$

c) $(-\infty; 0] \cup (10; \infty)$

d) $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup [\sqrt{2}; \infty)$

4. a) $A \cup B = (-3; 6)$,

$A \cap B = (0; 1) \cup (3; 4)$,

$A \setminus B = (-3; 0] \cup [4; 6)$,

$B \setminus A = [1; 3]$

b) $A \cup B = [0; 7] \cup [8; 9]$,

$A \cap B = (1; 3)$,

$A \setminus B = [0; 1] \cup [3; 7]$,

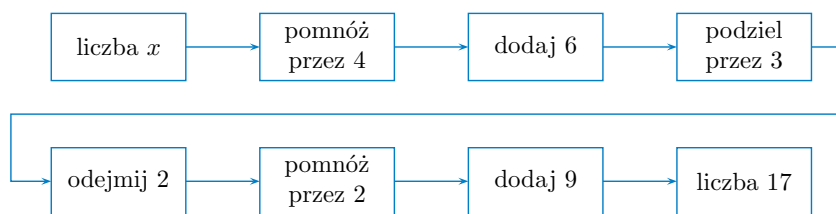
$B \setminus A = [8; 9]$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $20 - 5 \cdot (-2) =$
 $= 4 - 13 \cdot (-2)$
 $20 + 10 = 4 + 26$
 $30 = 30$
 Zatem $p = -2$ spełnia podane równanie.
- b) $3 \cdot (-5) - (1 + 5 \cdot (-5)) =$
 $= \frac{1}{2} \cdot (-5) + 14$
 $-15 - (-24) = -2,5 + 14$
 $9 \neq 11,5$
 Zatem $p = -5$ nie spełnia podanego równania.
2. a) $x = \frac{5}{2}$
 b) $x = -\frac{1}{3}$
 c) $x = -6$
 d) $x = -1$
3. a) $x = 4$
 b) $x = -\frac{2}{3}$
 c) $x = -1$
 d) $x = \frac{9}{4}$
4. a) $x = \frac{1}{3}; -x + \frac{1}{x} = 2\frac{2}{3}$
 b) $x = -\frac{1}{4}; -x + \frac{1}{x} = -3\frac{3}{4}$
 c) $x = -3; -x + \frac{1}{x} = 2\frac{2}{3}$
 d) $x = \frac{1}{2}; -x + \frac{1}{x} = 1\frac{1}{2}$
5. a) $x = 2$
 b) $x = -2$
 c) $x = \frac{17}{28}$
 d) $x = -4$
 e) $x = \frac{7}{2}$
 f) $x = 2$
7. $((4x + 6) : 3 - 2) \cdot 2 + 9 = 17$
 $x = 3$

Rozwiązywanie równań

1. Sprawdź, czy liczba p spełnia podane równanie.
 - a) $20 - 5x = 4 - 13x, p = -2$
 - b) $3x - (1 + 5x) = \frac{1}{2}x + 14, p = -5$
2. Rozwiąż równanie.
 - a) $2x + 4 = 9$
 - c) $4x + 3 = 2x - 9$
 - b) $-3x + 6 = 7$
 - d) $x - 6 = 5x - 2$
3. Rozwiąż równanie.
 - a) $\frac{4x-1}{3} = 5$
 - c) $\frac{6x+1}{5} = x$
 - b) $\frac{2-3x}{4} = 1$
 - d) $3 - x = \frac{2x-3}{2}$
4. Liczba x jest rozwiązaniem podanego równania. Oblicz sumę liczby przeciwnej i liczby odwrotnej do x .
 - a) $\frac{3x-5}{2} + 3 = \frac{3x+5}{6}$
 - c) $\frac{x+4}{2} - \frac{-2x-5}{6} = \frac{0,5x+2,5}{3}$
 - b) $\frac{4x+1}{5} = 2 - \frac{4-8x}{3}$
 - d) $\frac{5-4x}{4} - \frac{6x-1}{3} = \frac{4x-1}{12}$
5. Rozwiąż równanie.
 - a) $3(2x - 7) - (7x - 13) = -10$
 - d) $3x = x - (1 - (x - 3))$
 - b) $-2(-27 - 3x) = -3(2x - 10)$
 - e) $5x - (2x + (3 - x)) = 11$
 - c) $6 - 2(2x - \frac{1}{2}) = 4x - 2(\frac{3}{4} - 3x)$
 - f) $1 - (x - (x - (x - 1))) = 0$
6. Sprawdź, czy równanie jest **tożsamościowe** (spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą), czy **sprzeczne** (niespełnione przez żadną liczbę rzeczywistą).
 - a) $3x - 6 = 1 - (7 - 3x)$
 - c) $\frac{3}{2}(4x - 6) = \frac{2}{3}(9x - 6)$
 - b) $4 - (3 + 2x) = 5 - (2x + 6)$
 - d) $\frac{1}{2}(8 - \frac{1}{2}x) = 4 - \frac{1}{4}x$
7. Począwszy od liczby x , wykonano kolejno ciąg operacji. Wyznacz liczbę x .



6. a) $3x - 6 = 1 - 7 + 3x$
 $3x - 3x = -6 + 6$
 $0 = 0$
 Zatem jest to równanie tożsamościowe.
- b) $4 - 3 - 2x = 5 - 2x - 6$
 $-2x + 2x = -1 - 1$
 $0 = -2$
 Zatem jest to równanie sprzeczne.
- c) $6x - 9 = 6x - 4$
 $6x - 6x = -4 + 9$
 $0 = 5$
 Zatem jest to równanie sprzeczne.
- d) $4 - \frac{1}{4}x = 4 - \frac{1}{4}x$
 $-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x = 4 - 4$
 $0 = 0$
 Zatem jest to równanie tożsamościowe.

Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a) } 2x - 3 &= 9 \\ 2x - 3 &= 9 / + 3 \\ 2x &= 12 / : 2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Rozwiązaniem jest liczba 6.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x+6}{2} &= 5 \\ \frac{x+6}{2} &= 5 / \cdot 2 \\ x + 6 &= 10 / - 6 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Rozwiązaniem jest liczba 4.

2.5. Rozwiązywanie nierówności

Warunek $ax + b > c$, gdzie x jest niewiadomą, nazywamy **nierównością**.

Mówimy, że **liczba spełnia nierówność**, jeśli po podstawieniu jej na miejsce niewiadomej otrzymujemy nierówność prawdziwą. Na przykład liczba 7 spełnia nierówność $x + 1 > 5$, bo $7 + 1 > 5$. Rozwiązanie nierówności polega na wyznaczeniu zbioru wszystkich liczb, które ją spełniają.

Ćwiczenie 1

Sprawdź, czy podana liczba spełnia nierówność $\frac{1}{2}x - 2 < 1$.

- a) 2 b) 4 c) 6 d) 8

Przykład 1

a) Rozwiąż nierówność $x + 3 > 7$.

$$x + 3 > 7$$

$$x + 3 - 3 > 7 - 3$$

$$x > 4 \quad \text{Nierówność jest prawdziwa dla } x \in (4; \infty).$$

b) Rozwiąż nierówność $x - 4 \leq 5$.

$$x - 4 \leq 5$$

$$x - 4 + 4 \leq 5 + 4$$

$$x \leq 9 \quad \text{Nierówność jest prawdziwa dla } x \in (-\infty; 9].$$

Zauważ, że dodanie tej samej liczby do obu stron nierówności lub jej odjęcie od obu stron odpowiada czynności przeniesienia tej liczby na drugą stronę nierówności z przeciwnym znakiem.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność. Podaj najmniejszą liczbę naturalną spełniającą tę nierówność.

- a) $x + 309 < 273$ b) $x - \frac{1}{2} \geq 2\frac{1}{3}$ c) $x - \frac{1}{4} \leq -5\frac{1}{2}$ d) $2x - 3 > x + 17$

Definicja

Dwie nierówności nazywamy **równoważnymi**, jeśli mają one ten sam zbiór rozwiązań.

Ćwiczenie 3

Czy podane nierówności są równoważne?

- a) $x - 13 < 56$, $x + 26 > 95$ b) $x + \frac{1}{4} \geq \frac{2}{3}$, $x + \frac{1}{12} \geq \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 3

a) Dla pierwszej nierówności mamy $x < 69$, a dla drugiej $x > 69$, czyli nierówności nie są równoważne.

b) Dla obydwu nierówności otrzymujemy $x \geq \frac{5}{12}$, czyli są równoważne.

Uczeń:

- sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem nierówności,
- rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym nierówności spreczne i tożsamościowe,
- zapisuje zbiór rozwiązań nierówności w postaci przedziału,
- stosuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym.

Ćwiczenie 1

- a) spełnia
b) spełnia
c) nie spełnia
d) nie spełnia

Ćwiczenie 2

- a) $x < -36$
Nie istnieje liczba naturalna spełniająca tę nierówność.
b) $x \geq 2\frac{5}{6}$, liczba 3
c) $x \leq -5\frac{1}{4}$
Nie istnieje liczba naturalna spełniająca tę nierówność.
d) $x > 20$, liczba 21

Twierdzenie

Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę dodatnią, to otrzymamy nierówność równoważną.

Przykład 2

Rozwiąż nierówność $6x + 5 < 17$.

$$6x + 5 < 17$$

Od obu stron nierówności odejmujemy 5.

$$6x < 12 \quad / : 6$$

Obie strony nierówności dzielimy przez 6.

$$x < 2$$

Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

a) $3x + 7 \leq 34$

b) $\frac{3}{4}x - 1 > \frac{1}{3}$

c) $0,1x + 1 < -\frac{1}{2}$

d) $5x - 7 \geq 3x + 5$

Twierdzenie

Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę ujemną, to po zmianie zwrotu nierówności otrzymamy nierówność równoważną.

Przykład 3

a) Rozwiąż nierówność $-\frac{1}{3}x > 5$.

$$-\frac{1}{3}x > 5 \quad / \cdot (-3)$$

Obie strony nierówności mnożymy przez -3 .

$$x < -15$$

Zmieniamy zwrot nierówności.

Zwróć uwagę na to, że zamiast mnożyć obie strony nierówności przez liczbę ujemną (-3), można je pomnożyć przez 3 i przenieść odpowiednie wyrazy na drugą stronę nierówności.

b) Rozwiąż nierówność $-6x - 4 \leq -13$.

$$-6x - 4 \leq -13$$

Do obu stron nierówności dodajemy 4.

$$-6x \leq -9 \quad / : (-6)$$

Obie strony nierówności dzielimy przez -6 .

$$x \geq \frac{3}{2}$$

Zmieniamy zwrot nierówności.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań tej nierówności.

a) $-3x - 7 < 2$

c) $3(x - 1) \geq x + 5$

e) $\frac{x-3}{2} < \frac{x+2}{3}$

b) $-\frac{2}{3}x + 1 \leq 5$

d) $2(x + \frac{1}{4}) > \frac{1}{2}x + 4$

f) $\frac{2-x}{5} \leq \frac{x+1}{2}$

Ćwiczenie 5

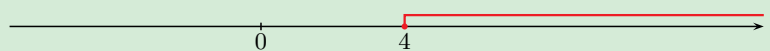
a) $x > -3$



b) $x \geq -6$



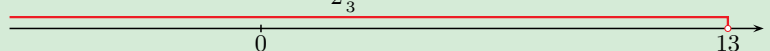
c) $x \geq 4$



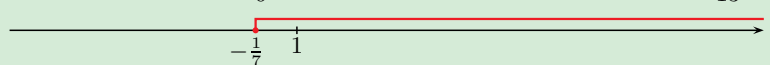
d) $x > 2\frac{1}{3}$



e) $x < 13$



f) $x \geq -\frac{1}{7}$



Ćwiczenie 4

a) $x \leq 9$

b) $x > \frac{16}{9}$

c) $x < -15$

d) $x \geq 6$

Definicja

Nierówność, która nie jest spełniona przez żadną liczbę rzeczywistą, nazywamy **nierównością sprzeczną**.

Nierówność, która jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą, nazywamy **nierównością tożsamościową**.

Przykład 4

Rozwiąż nierówność.

$$\text{a) } \frac{1-3x}{6} < -\frac{1}{2}x$$

$$\frac{1-3x}{6} < -\frac{1}{2}x \quad / \cdot 6$$

$$1-3x < -3x$$

$$1 < 0 \quad \text{sprzeczność}$$

Nierówność jest spreczna.

$$\text{b) } \frac{5x-2}{5} \geq x-2$$

$$\frac{5x-2}{5} \geq x-2 \quad / \cdot 5$$

$$5x-2 \geq 5x-10$$

$$-2 \geq -10 \quad \text{tożsamość}$$

Nierówność jest tożsamościowa.

Ćwiczenie 6

Sprawdź, czy podana nierówność jest tożsamościowa, czy spreczna.

$$\text{a) } 3(2 - \frac{1}{6}x) \geq -0,5x + 1$$

$$\text{d) } \frac{4-3x}{3} \geq \frac{2-5x}{5} + 5$$

$$\text{b) } -\frac{2}{3}(3x-2) > \frac{1}{2}(3-4x)$$

$$\text{e) } \frac{x-3}{2} < \frac{2x+1}{3} - \frac{x-2}{6}$$

$$\text{c) } \frac{x-2}{2} < \frac{3x-4}{6} - 1$$

$$\text{f) } \frac{x+3}{2} - \frac{x-3}{4} \geq \frac{1}{4}x - 3$$

Zadania

1. Zapisz w postaci przedziału zbiór liczb spełniających poniższy warunek (klamra oznacza, że obie nierówności mają być jednocześnie spełnione).

$$\text{a) } \begin{cases} x+9 \geq 13 \\ 2x-6 < 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x+6 > -9 \\ 1-x \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} -2x+3 \leq 4 \\ 5-4x \geq 1 \end{cases}$$

2. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór liczb, które jednocześnie spełniają obie podane nierówności. Podaj najmniejszą i największą liczbę całkowitą należącą do tego przedziału.

$$\text{a) } 2x+20 > 8 \text{ i } 5 < 1-x$$

$$\text{c) } 2x+3 < 7 \text{ i } 3-4x \leq 19$$

$$\text{b) } 2x+3 > 2 \text{ i } 4x < 3$$

$$\text{d) } 3x+9 > -7 \text{ i } -3x > 4x+21$$

3. Które spośród liczb $a = 1 - \sqrt{2}$, $b = \sqrt{5} - 1$, $c = \pi + 2$ spełniają nierówność:

$$\text{a) } \frac{3}{4}x - \frac{2}{3} > x + \frac{1}{2},$$

$$\text{c) } \frac{3x-2}{5} \geq \frac{x+1}{3},$$

$$\text{e) } \frac{3x+2}{-5} < 3-x,$$

$$\text{b) } \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x \leq \frac{3}{8}x - \frac{1}{6},$$

$$\text{d) } \frac{2x+7}{3} > \frac{6-x}{2},$$

$$\text{f) } -3(x+3) > \frac{x-5}{-2}?$$

3. a) $x < -4\frac{2}{3}$, żadna liczba
b) $x \geq 4$, liczba c
c) $x \geq 2\frac{3}{4}$, liczba c
d) $x > \frac{4}{7}$, liczby b i c
e) $x < 8\frac{1}{2}$, liczby a , b i c
f) $x < -4\frac{3}{5}$, żadna liczba

Ćwiczenie 6

- a) tożsamościowa
b) spreczna
c) spreczna
d) spreczna
e) tożsamościowa
f) tożsamościowa

Odpowiedzi do zadań

1. a) $[4; 5)$
b) $(-5; -2]$
c) $[-\frac{1}{2}; 1]$
2. a) $(-6; -4)$, -5
b) $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4})$, 0
c) $[-4; 2)$, -4 , 1
d) $(-\frac{16}{3}; -3)$, -5 , -4

4. a) $x > \frac{15}{8}$
 b) $x \geq 2$
 c) $x \leq \frac{25}{4}$
 d) $x > \frac{28}{33}$
 e) $x \geq \frac{11}{8}$
 f) $x < \frac{19}{3}$
5. a) $x < \frac{5\sqrt{3}}{3}$
 b) $x > 6\sqrt{2}$
 c) $x > \frac{4\sqrt{5}}{5}$
6. a) $0 \leq 3(2n - 11) < 21$
 $5,5 \leq n < 9$
 $n \in \{6, 7, 8\}$
 Warto zwrócić uczniom uwagę na założenie, że otrzymana liczba ma być liczbą naturalną.
- b) $4(3k + 7) > 2$
 $k > -2\frac{1}{6}$
 $k \in \{-2, -1\}$
- c) $\frac{1}{2}m - \frac{1}{3}(m - 2) < 3$
 $m < 14$
 $m \in \{0, 1, 2, \dots, 13\}$
7. a) $38 < 8 \cdot 3 + 4k < 46$
 $k \in \mathbb{N}_+$
 $3,5 < k < 5,5$
 $k \in \{4, 5\}$
- b) $40 < 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3k < 68$
 $k \in \mathbb{N}_+$
 $1\frac{5}{6} < k < 4\frac{1}{6}$
 $k \in \{2, 3, 4\}$
8. a) $x > -1$
 b) $x \leq -\frac{1}{2}$
 c) $x < 4$
 d) $x \geq -3$
 e) $x \geq -18$
 f) $x < \frac{5}{7}$
9. a) 3, 4
 b) 3, 4
 c) wszystkie
 d) -4, -3, -2, -1

4. Rozwiąż nierówność.

- a) $2 - \frac{x+3}{3} < \frac{2x-3}{2}$ d) $\frac{3x+1}{4} - \frac{6-2x}{5} > -\frac{1}{20} - \frac{x-1}{2}$
 b) $\frac{2-x}{2} - \frac{2x-1}{3} \leq 1 - x$ e) $-\frac{1}{6}x - \frac{2x-5}{4} \geq 3 - \frac{8x-3}{3}$
 c) $\frac{x+4}{12} + 1 \geq \frac{x}{6} - \frac{3-x}{4}$ f) $\frac{x-1}{3} - \frac{2x-1}{6} < \frac{1}{2} - \frac{x-3}{5}$

5. Rozwiąż nierówność.

- a) $\sqrt{3}x - 6 < 9 - 2\sqrt{3}x$ b) $\sqrt{2}x + 4 < \sqrt{8}x - 8$ c) $\sqrt{5}x < \frac{5\sqrt{5}}{3}x - 2\frac{2}{3}$

6. a) Jeśli podwoimy liczbę naturalną n , od otrzymanego iloczynu odejmiemy 11, a uzyskaną różnicę pomnożymy przez 3, to otrzymamy liczbę naturalną mniejszą od 21. Podaj możliwe wartości n .

b) Jeśli potroimy całkowitą liczbę ujemną k , do otrzymanego iloczynu dodamy 7, a następnie otrzymaną sumę pomnożymy przez 4, to otrzymamy liczbę większą od 2. Podaj możliwe wartości k .

c) Jeśli od połowy liczby naturalnej m odejmiemy trzecią część liczby m pomniejszonej o 2, to otrzymamy liczbę mniejszą od 3. Podaj możliwe wartości m .

7. Wysokość prostopadłościanu jest równa k , a jego podstawą jest kwadrat o boku 3. Jakie wartości całkowite może przyjmować k przy założeniu, że:

a) suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu jest większa od 38 i mniejsza od 46,

b) pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest większe od 40 i mniejsze od 68?

Sprawdź się

8. Rozwiąż nierówność.

- a) $3 - x < 4$ c) $3 + \frac{1}{2}x > \frac{3}{2}x - 1$ e) $\frac{2}{3}x + 1 \geq \frac{1}{2}x - 2$
 b) $6x \geq 1 + 8x$ d) $1 - \frac{2}{3}x \leq 8 + \frac{5}{3}x$ f) $2,5x - \frac{1}{4} < \frac{3}{4}x + 1$

9. Które liczby ze zbioru $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ spełniają nierówność?

- a) $x - (2x - 3) < 2(x - 1,5)$
 b) $1 - (0,6 - 0,3x) \leq x - 0,1(4x + 5)$
 c) $0,3(x - 0,3) - 0,4(0,4x - 3) \geq -0,25$
 d) $2(x - 1) - 3(2x + 1) > -x - \frac{1}{2}(6 - 4x)$

10. Zapisz w postaci przedziału zbiór rozwiązań nierówności.

- a) $\frac{x-3}{6} \leq \frac{x-4}{4}$ b) $3 - \frac{x-2}{4} > \frac{2x+1}{2}$ c) $\frac{x+3}{2} - \frac{x+3}{3} \leq \frac{x+3}{4}$

10. a) $\frac{x-3}{6} \leq \frac{x-4}{4} / \cdot 12$

$2x - 6 \leq 3x - 12$, stąd $x \geq 6$, czyli $x \in [6; \infty)$

b) $3 - \frac{x-2}{4} > \frac{2x+1}{2} / \cdot 4$

$12x - x + 2 > 4x + 2$, stąd $x < 2\frac{2}{5}$, czyli $x \in (-\infty; 2\frac{2}{5})$

c) $\frac{x+3}{2} - \frac{x+3}{3} \leq \frac{x+3}{4} / \cdot 12$

$6x + 18 - 4x - 12 \leq 3x + 9$, stąd $x \geq -3$, czyli $x \in [-3; \infty)$

Sumy algebraiczne. Redukcja wyrazów podobnych

Jednomianem nazywamy wyrażenie, które jest liczbą, zmienną, zapisaną za pomocą litery, lub iloczynem liczb i zmiennych, na przykład:

$$7, 8x, -4xy, \frac{1}{3}x^3y^2$$

1. Pomnóż jednomiany:

- a) $9x^2$ i $2xy^2$, c) $-\frac{1}{2}xyz^2$ i $8x^2z$,
b) $4x^2y^2$ i $\frac{1}{2}xy^4$, d) $-8x^3y^2z$ i $8xy^2z^3$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x \cdot 8xy^2 &= 4x^2y^2 \\ 6x^2y \cdot 2x^3y^2 &= 12x^5y^3\end{aligned}$$

2. Pomnóż podany jednomian przez $-12a^2b$.

- a) $4a^2$ b) $\frac{1}{4}ab^4$ c) $-2abc$ d) $-\frac{3}{4}b^2c^3$

3. Długość krawędzi sześcianu jest równa $3pq^2$. Zapisz za pomocą jednomianów pole powierzchni całkowitej tego sześcianu oraz jego objętość.

Wyrażenie algebraiczne będące sumą lub różnicą jednomianów nazywamy **sumą algebraiczną**.

Poszczególne składniki sumy algebraicznej, czyli poszczególne składające się na nią jednomiany, nazywamy **wyrazami sumy algebraicznej**.

O wyrazach sumy algebraicznej, które różnią się co najwyżej współczynnikiem liczbowym, mówimy, że są **podobne**, na przykład:

$$2x^3 \text{ i } 8x^3 \text{ lub } 6x^2yz \text{ i } \frac{1}{2}x^2yz$$

4. Wskaż wyrazy podobne w podanej sumie algebraicznej.

- a) $6x^2 + 6x - 4x^2$ b) $xy^3 + x^3y - \frac{1}{2}x^3y$ c) $2x^2y - 3xy^2 + 9x^2y + xy^2$

Wyrazy podobne możemy dodawać (lub odejmować). Dodawanie (lub odejmowanie) wyrazów podobnych nazywamy **redukcją wyrazów podobnych**.

$$\begin{aligned}8x^3 - 5x^3 &= 3x^3 \\ 9x^2y + 4x^2y &= 13x^2y \\ 3xyz^3 - \frac{1}{2}xyz^3 &= 2\frac{1}{2}xyz^3\end{aligned}$$

5. Zredukuj wyrazy podobne.

- a) $8x^3 - 4xy - 9x^3 + 2xy$ c) $x^2yz - 3xz^3 + 6x^2yz$
b) $6x^4y + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^3 - 3x^4y$ d) $4xy^3 + 2xz^3 - \frac{1}{2}xy^3$

6. Opuść nawiasy i zredukuj wyrazy podobne.

- a) $(2x^3 - 6x^2) - (4x^3 - 2x^2)$ c) $x^3 - (x^2y - (4x^3 - 2x^2y))$
b) $-(4x^2y + xy^2) - (6xy^2 - x^2y)$ d) $-2xy^4 - (-2x^2 - (x^2 - 3xy^4))$

6. a) $-2x^3 - 4x^2$
b) $-3x^2y - 7xy^2$
c) $5x^3 - 3x^2y$
d) $-5xy^4 + 3x^2$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $18x^3y^2$
b) $2x^3y^6$
c) $-4x^3yz^3$
d) $-64x^4y^4z^4$
2. a) $-48a^4b$
b) $-3a^3b^5$
c) $24a^3b^2c$
d) $9a^2b^3c^3$
3. $P_c = 54p^2q^4$, $V = 27p^3q^6$

4. a) $6x^2$ i $-4x^2$
b) x^3y i $-\frac{1}{2}x^3y$
c) $2x^2y$ i $9x^2y$
oraz $-3xy^2$ i xy^2

5. a) $-x^3 - 2xy$
b) $3x^4y + \frac{1}{4}x^3$
c) $7x^2yz - 3xz^3$
d) $3\frac{1}{2}xy^3 + 2xz^3$

Uczeń:

- mnoży wskazany wielomian przez sumę algebraiczną i redukuje wyrazy podobne,
- zapisuje iloczyn w postaci sumy algebraicznej,
- przekształca wzory na pola wielokątów,
- stosuje mnożenie jednomianów przez sumy algebraiczne do dowodzenia, że wartość danego wyrażenia nie zależy od występujących w nim zmiennych.

Ćwiczenie 1

- a) 133
b) 204
c) 357
d) 418

Ćwiczenie 2

- a) $24x^5 - 2x^3$
b) $2x^5 + \frac{1}{2}x^4$
c) $x^3y^3 - 3x^4y^2$
d) $x^3y^4 - \frac{1}{2}x^4y^5$
e) $x^3yz - 6x^2yz^2 + xyz^4$
f) $2x^5y^3z - 4x^3y^2z^3 + \frac{1}{2}x^2y^2z^2$

Ćwiczenie 3

- a) $-8x^3 + 11x^2 - x$
b) $-2x^5 - 20x^4$
c) $-3x^2 - xy + 9y^2$
d) $8x^3y - 22x^2y^2 - 24xy^2$

2.6. Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian

Przykład 1

Iloczyn liczb $17 \cdot 9$ możemy obliczyć w następujący sposób:

$$17 \cdot 9 = (10 + 7) \cdot 9 = 10 \cdot 9 + 7 \cdot 9 = 90 + 63 = 153$$

Ćwiczenie 1

Oblicz.

- a) $19 \cdot 7$ b) $12 \cdot 17$ c) $21 \cdot 17$ d) $22 \cdot 19$

Aby pomnożyć sumę algebraiczną przez jednomian, należy każdy wyraz sumy pomnożyć przez ten jednomian i zapisać sumę otrzymanych iloczynów.

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Przykład 2

Pomnóż sumę algebraiczną przez jednomian.

- a) $(2x^2 - 6x + 7) \cdot x^3 = 2x^5 - 6x^4 + 7x^3$
b) $2xy(x^2 + 2y + 3x^2y) = 2x^3y + 4xy^2 + 6x^3y^2$

Ćwiczenie 2

Pomnóż sumę algebraiczną przez jednomian.

- a) $4x^2(6x^3 - \frac{1}{2}x)$ c) $x^2y(xy^2 - 3x^2y)$ e) $(x^2 - 6xz + z^3) \cdot xyz$
b) $\frac{1}{4}x^3(8x^2 + 2x)$ d) $(x^2y - \frac{1}{2}x^3y^2) \cdot xy^3$ f) $x^2y^2z(2x^3y - 4xz^2 + \frac{1}{2}z)$

Przykład 3

Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

- a) $-2x(6x - 2y - 1) - 6y(-2x + 2y) = -12x^2 + 4xy + 2x + 12xy - 12y^2 = -12x^2 + 16xy + 2x - 12y^2$
b) $(4x - 3y) \cdot 2z - (6x - 2y)(-2z) = 8xz - 6yz + 12xz - 4yz = 20xz - 10yz$

Ćwiczenie 3

Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

- a) $x(4x^2 - 7x - 1) - 6x^2(2x - 3)$ c) $x(-3x + 5y) - (2x - 3y) \cdot 3y$
b) $3x^3(2x^2 - 8x) + 4x(-2x^4 + x^3)$ d) $2x^2y(4x - 2y) + 6xy^2(-3x - 4)$

Multibook

- Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.6

Generator
testów i sprawdzianów

D Przykład 4

Wykaż, że wartość wyrażenia $6x^3(2x^2 - 6x + \frac{1}{2}) - 2x(6x^4 - 18x^3 + \frac{3}{2}x^2)$ nie zależy od wartości zmiennej x .

$$6x^3(2x^2 - 6x + \frac{1}{2}) - 2x(6x^4 - 18x^3 + \frac{3}{2}x^2) = \\ = 12x^5 - 36x^4 + 3x^3 - 12x^5 + 36x^4 - 3x^3 = 0$$

Zatem wartość tego wyrażenia nie zależy od wartości zmiennej x .

D Ćwiczenie 4

Wykaż, że wartość podanego wyrażenia nie zależy od wartości zmiennych x i y .

a) $6xy(8x^2 - 3x + y) - 2y(24x^3 - 9x^2) - 6xy^2 + 8$

b) $\frac{1}{2}xy^2(3x^2 - 4x + 6) - \frac{1}{4}x^2y(6xy - 8y) - 3xy^2 - 1$

Zadania

1. Wykonaj mnożenie.

a) $x^3(6x^2 - 8x + 3)$

c) $(3x^2 + 2x - 4)x^2$

b) $-2x^4(2x^2 - 4x + 1)$

d) $-2x^3(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2)$

2. Wykonaj mnożenie.

a) $xy(3x^2 - 2xy + y)$

d) $\sqrt{2}x^4(\sqrt{8}xy + y^2)$

b) $3xy^2(-2x^2y - 2x + y^2)$

e) $(x^2y - xy + xy^2)x^2y$

c) $-\frac{1}{2}x^2(4x^2y - 2xy^2)$

f) $2\sqrt{3}xy^3(\sqrt{3}x^2y^2 - \frac{1}{2}x^3y)$

3. Wykonaj mnożenie.

a) $a(a - 4)a^2$

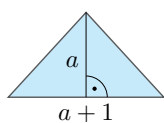
c) $3a^2b(2a^2 - 8ab^2)b^3$

b) $2a^3(a^2 - 3a) \cdot 4a$

d) $\frac{1}{2}ab^2(4a^2b - 6b) \cdot \frac{1}{2}a^2b$

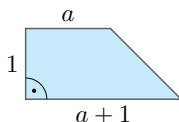
4. Dopasuj do figury wzór na jej pole.

A.



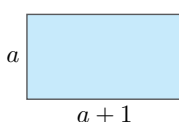
I. $2a^2 + a$

B.



II. $a^2 + a$

C.



III. $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a$

D.



IV. $a + \frac{1}{2}$

5. Wyznacz jednomian, przez który należy pomnożyć sumę algebraiczną $2x^2 - 3xy + 6y$, aby otrzymać podane wyrażenie.

a) $6x^3 - 9x^2y + 18xy$

c) $8x^3y - 12x^2y^2 + 24xy^2$

b) $-4x^4 + 6x^3y - 12x^2y$

d) $-12x^3y^2 + 18x^2y^3 - 36xy^3$

Ćwiczenie 4

a) $6xy(8x^2 - 3x + y) - 2y(24x^3 - 9x^2) - 6xy^2 + 8 = \\ = 48x^3y - 18x^2y + 6xy^2 - 48x^3y + 18x^2y - 6xy^2 + 8 = 8$

b) $\frac{1}{2}xy^2(3x^2 - 4x + 6) - \frac{1}{4}x^2y(6xy - 8y) - 3xy^2 - 1 = \\ = \frac{3}{2}x^3y^2 - 2x^2y^2 + 3xy^2 - \frac{3}{2}x^3y^2 + 2x^2y^2 - 3xy^2 - 1 = -1$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $6x^5 - 8x^4 + 3x^3$

b) $-4x^6 + 8x^5 - 2x^4$

c) $3x^4 + 2x^3 - 4x^2$

d) $-\frac{1}{2}x^5 + x^4 + 4x^3$

2. a) $3x^3y - 2x^2y^2 + xy^2$

b) $-6x^3y^3 - 6x^2y^2 + 3xy^4$

c) $-2x^4y + x^3y^2$

d) $4x^5y + \sqrt{2}x^4y^2$

e) $x^4y^2 - x^3y^2 + x^3y^3$

f) $6x^3y^5 - \sqrt{3}x^4y^4$

3. a) $a^4 - 4a^3$

b) $8a^6 - 24a^5$

c) $6a^4b^4 - 24a^3b^6$

d) $a^5b^4 - \frac{3}{2}a^3b^4$

4. A – III, B – IV, C – II, D – I

5. a) $3x$

b) $-2x^2$

c) $4xy$

d) $-6xy^2$

6. a) $-4x^4 + 11x^3$
 b) $-4x^4 - 3x^3 + x^2$
 c) $10x^5 - 20x^3$
 d) $-6x^3 - 6x^2 + 10x$
 e) $-\frac{1}{2}x^4 + 5x^2$
 f) $3\sqrt{2}x^4 - 4\sqrt{6}x^2$

7. a) $-\frac{23}{8}x^2y^3 + xy^3$
 b) $-x^4y^2 + x^4y^3 + 2x^3y^3$
 c) $\frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{3}{4}x^2y - \frac{1}{2}xy$

Komentarz

Można zapytać uczniów o to, jakie warunki musi spełniać x , aby istniały wielokąty o podanych długościach boków.

10. a) 117
 b) 156
 c) 255
 d) 425
11. a) $6x^5 - 4x^2$
 b) $x^5 - 2x^4$
 c) $3x^5 - 3x^4 + 12x^3$
 d) $18x^5 + 9x^4 - 54x^3$
 e) $2x^6 - 4x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2$
 f) $2x^5 - 4x^3$
12. a) $2x^3y^2$
 b) $13x^4y^2 - 3x^2y^2 - 2x^2y$
 c) $4\frac{1}{2}x^2y^2$
 d) $3x^3y + 2x^2y - xz + 3yz$
 e) $x^4yz - 2x^2yz^2 + xyz^2$
 f) $6x^3yz^2 + 2x^3y^2z - 10y^2z^2$

6. Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

- a) $x^2(2x^2 - x) - 6x(x^3 - 2x^2)$
 b) $2x(x^3 + \frac{1}{2}x) - 3x(2x^3 + x^2)$
 c) $8x^3(x^2 - 2) + \frac{1}{2}x(4x^4 - 8x^2)$
 d) $2x(3x - 4) - 6x(x^2 + 2x - 3)$
 e) $-\frac{1}{2}x^2(x^2 - 2x + 6) - 2x(\frac{1}{2}x^2 - 4x)$
 f) $\sqrt{6}x^3(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) + \sqrt{3}x(2x^2 - 4\sqrt{2}x)$

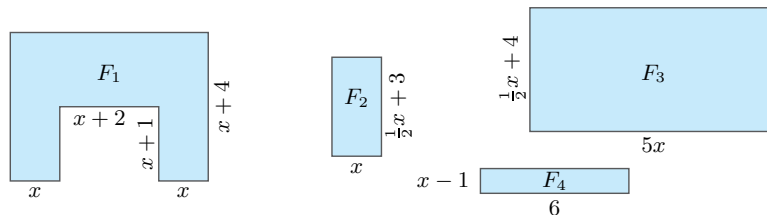
7. Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

- a) $xy^2(2x - 3xy + y) + \frac{1}{4}x^2y(\frac{1}{2}y^2 - 8y)$
 b) $-\frac{1}{2}x^3y(xy - 2xy^2) - \frac{1}{8}xy^2(4x^3 - 16x^2y)$
 c) $-\frac{1}{4}x^2y(-2x + y) - \frac{3}{4}y(x^2 - x^2y) - \frac{1}{2}(x^3y + xy)$

- D** 8. Wykaż, że wartość podanego wyrażenia nie zależy od wartości zmiennej x .

- a) $4x^2(x^2 - \frac{3}{2}x + 1) - 3x(\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 1) - 4(x^2 - \frac{3}{4}x - 8)$
 b) $\sqrt{15}x(2\sqrt{3}x^2 - 6\sqrt{5}x - \sqrt{10}) - 2\sqrt{5}x^2(3x - 3\sqrt{15}) + \sqrt{6}(5x - 1)$

- D** 9. Uzasadnij, że suma pól figur F_1 i F_2 równa się różnicy pól figur F_3 i F_4 .



Sprawdź się

10. Oblicz.

- a) $9 \cdot 13$ b) $13 \cdot 12$ c) $17 \cdot 15$ d) $17 \cdot 25$

11. Wykonaj mnożenie.

- a) $x^2(6x^3 - 4)$ c) $3x^2(x^3 - x^2 + 4x)$ e) $\frac{1}{2}x^2(4x^4 - 8x^2 + x + 5)$
 b) $2x^3(\frac{1}{2}x^2 - x)$ d) $9x^3(2x^2 + x - 6)$ f) $\sqrt{2}x^2(\sqrt{2}x^3 - 2\sqrt{2}x)$

12. Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

- a) $xy(4x^2y - 6x) - 2x^2(xy^2 - 3y)$ d) $x(2x^2y - 4xy - z) + y(x^3 + 6x^2 + 3z)$
 b) $3x^2y(5x^2y - y) - y(2x^4y + 2x^2)$ e) $x^2yz(x^2 + 2z) - xz^2(4xy - y)$
 c) $\frac{1}{2}xy^2(8x - \frac{1}{4}) + y(\frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{8}xy)$ f) $2yz^2(3x^3 - y) + 2y^2z(x^3 - 4z)$

8. a) $4x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 4x^4 + 6x^3 - 3x - 4x^2 + 3x + 32 = 32$

$$\begin{aligned} \text{b) } & 2\sqrt{45}x^3 - 6\sqrt{75}x^2 - \sqrt{150}x - 6\sqrt{5}x^3 + 6\sqrt{75}x^2 + 5\sqrt{6}x - \sqrt{6} = \\ & = 2\sqrt{9 \cdot 5}x^3 - 6\sqrt{5 \cdot 3}x^2 - \sqrt{25 \cdot 6}x + 5\sqrt{6}x - \sqrt{6} = \\ & = 6\sqrt{5}x^3 - 6\sqrt{5}x^2 - 5\sqrt{6}x + 5\sqrt{6}x - \sqrt{6} = -\sqrt{6} \end{aligned}$$

9. $P_1 = x(x + 4) + x(x + 4) + (x + 2)(x + 4 - x - 1) = 2x^2 + 11x + 6$

$$P_2 = x(\frac{1}{2}x + 3) = \frac{1}{2}x^2 + 3x$$

$$P_3 = 5x(\frac{1}{2}x + 4) = \frac{5}{2}x^2 + 20x$$

$$P_4 = 6(x - 1) = 6x - 6$$

$$P_1 + P_2 = 2x^2 + 11x + 6 + \frac{1}{2}x^2 + 3x = \frac{5}{2}x^2 + 14x + 6$$

$$P_3 - P_4 = \frac{5}{2}x^2 + 20x - 6x + 6 = \frac{5}{2}x^2 + 14x + 6$$

Zatem $P_1 + P_2 = P_3 - P_4$, co należało udowodnić.

2.7. Wylączenie jednomianu przed nawias

Jeżeli wśród poszczególnych wyrazów sumy występują jednakowe czynniki, można wyłączyć je przed nawias – czasami ułatwia to obliczenia.

Przykład 1

Oblicz sumę $7 \cdot 49 + 7 \cdot 51$.

Wylączamy przed nawias liczbę 7:

$$7 \cdot 49 + 7 \cdot 51 = 7 \cdot (49 + 51) = 7 \cdot 100 = 700$$

Korzystamy z własności działań:
 $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
zwanej **rozdzielnością mnożenia**
względem dodawania.

Ćwiczenie 1

Oblicz w pamięci.

a) $2 \cdot 183 + 2 \cdot 17$

c) $3 \cdot 251 + 3 \cdot 249$

e) $228 \cdot 12 + 172 \cdot 12$

b) $9 \cdot 27 + 9 \cdot 23$

d) $6 \cdot 378 + 6 \cdot 222$

f) $19 \cdot 116 + 84 \cdot 19$

Zauważmy, że wspólny czynnik można wyłączyć przed nawias również w sumach algebraicznych.

Przykład 2

Dana jest suma algebraiczna $6x^3 + 12x^2$. Wylącz przed nawias wspólny czynnik.

• Wylączamy przed nawias 6: $6x^3 + 12x^2 = 6(x^3 + 2x^2)$

• Wylączamy przed nawias $6x$: $6x^3 + 12x^2 = 6x(x^2 + 2x)$

• Wylączamy przed nawias $6x^2$: $6x^3 + 12x^2 = 6x^2(x + 2)$

• Wylączamy przed nawias $12x^2$: $6x^3 + 12x^2 = 12x^2\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$

To, jaki czynnik wylączymy przed nawias, zależy od konkretnego zadania.

Wylączenie wspólnego czynnika przed nawias jest czynnością odwrotną do mnożenia jednomianu przez sumę algebraiczną.

$$a \cdot b + a \cdot c \Rightarrow a(b + c)$$

Ćwiczenie 2

Wylącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $5x + 5y$

c) $9x - 27y^2$

e) $39y^2 - 26z$

g) $-48p + 36q^2$

b) $4b - 8a$

d) $-6x^2 + 18y^2$

f) $-11a^3 + 22b^2$

h) $75xy^3 - 125$

Ćwiczenie 2

a) $5(x + y)$

c) $9(x - 3y^2)$

e) $13(3y^2 - 2z)$

g) $-12(4p - 3q^2)$

b) $4(b - 2a)$

d) $-6(x^2 - 3y^2)$

f) $-11(a^3 - 2b^2)$

h) $25(3xy^3 - 5)$

Uczeń:

- wylacza wskazany jednomian przed nawias,
- zapisuje wyrażenia algebraiczne w postaci iloczynu,
- stosuje metodę wylaczania jednomianu przed nawias do dowodzenia podzielności liczb.

Ćwiczenie 1

a) $2 \cdot (183 + 17) = 400$

b) $9 \cdot (27 + 23) = 450$

c) $3 \cdot (251 + 249) = 1500$

d) $6 \cdot (378 + 222) = 3600$

e) $12 \cdot (228 + 172) = 4800$

f) $19 \cdot (116 + 84) = 3800$

Ćwiczenie 3

- a) $x(4x + y)$
- b) $2x(x^2 - 6y)$
- c) $xy(3 - z)$
- d) $6pq(1 + 3p)$
- e) $a^2b(1 + 3b - a)$
- f) $x^2y^2(4 - 5x + 2y)$

Ćwiczenie 4

- a) $4x^2(2x - 9)$
- b) $7y^2(1 - 2y^2)$
- c) $5x^2(x + 2y)$
- d) $5a(4x - 3y)$
- e) $4b(2a + 3c)$
- f) $2xy(2 + 3x)$
- g) $2a^2b(a + 2 - 2b)$
- h) $3p^2q^2(7p - 9q + 1)$
- i) $6xy(8x + 3y - 2xy)$

Odpowiedzi do zadań

- 1. a) 400
b) 4000
c) 5000
d) 3700
e) 1000
f) 300
- 2. a) $ab(a + b^2)$
b) $xy^2(x^2 - y)$
c) $3a^2(3ab^2 - c^2)$
d) $4y^3(x^4y + 2z)$
e) $3a^2b(ab - 2)$
f) $2x^2y^3(3y + 4x)$
- 3. a) $xyz(x + y + z)$
b) $xyz^2(x + yz - x^2)$
c) $2x^2y(x - 2y + 3z)$
d) $3x^3y^2(4xy + 2y - 3x^2)$

Ćwiczenie 3

Wyłącz wskazany jednomian przed nawias.

- a) $4x^2 + xy$, x
- c) $3xy - xyz$, xy
- e) $a^2b + 3a^2b^2 - a^3b$, a^2b
- b) $2x^3 - 12xy$, $2x$
- d) $6pq + 18p^2q$, $6pq$
- f) $4x^2y^2 - 5x^3y^2 + 2x^2y^3$, x^2y^2

Przed nawias wyłączamy zwykle **czynnik liczbowy** oraz **wszystkie możliwe zmienne w jak najwyższych potęgach**. Na przykład:

$$27x^3y^2 + 18x^2y^3 = 9x^2y^2(3x + 2y)$$

Ćwiczenie 4

Wyłącz przed nawias czynnik liczbowy oraz wszystkie możliwe zmienne w jak najwyższych potęgach.

- a) $8x^3 - 36x^2$
- d) $20ax - 15ay$
- g) $2a^3b + 4a^2b - 4a^2b^2$
- b) $7y^2 - 14y^4$
- e) $8ab + 12bc$
- h) $21p^3q^2 - 27p^2q^3 + 3p^2q^2$
- c) $5x^3 + 10x^2y$
- f) $4xy + 6x^2y$
- i) $48x^2y + 18xy^2 - 12x^2y^2$

Zadania

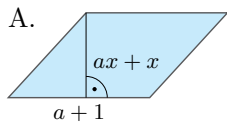
- 1. Oblicz.
 - a) $4 \cdot 49 + 4 \cdot 51$
 - c) $113 \cdot 25 + 87 \cdot 25$
 - e) $10 \cdot 17 + 10 \cdot 33 + 50 \cdot 10$
 - b) $40 \cdot 47 + 40 \cdot 53$
 - d) $63 \cdot 37 + 37 \cdot 37$
 - f) $15 \cdot 17 + 15 \cdot 2 + 15$
- 2. Wyłącz podany czynnik przed nawias.
 - a) $a^2b + ab^3$, ab
 - c) $9a^3b^2 - 3a^2c^2$, $3a^2$
 - e) $3a^3b^2 - 6a^2b$, $3a^2b$
 - b) $x^3y^2 - xy^3$, xy^2
 - d) $4x^4y^4 + 8y^3z$, $4y^3$
 - f) $6x^2y^4 + 8x^3y^3$, $2x^2y^3$
- 3. Zapisz podaną sumę algebraiczną w postaci iloczynu, wyłączając przed nawias wskazany jednomian.
 - a) $x^2yz + xy^2z + xyz^2$, xyz
 - c) $2x^3y - 4x^2y^2 + 6x^2yz$, $2x^2y$
 - b) $x^2yz^2 + xy^2z^3 - x^3yz^2$, xyz^2
 - d) $12x^4y^3 + 6x^3y^3 - 9x^5y^2$, $3x^3y^2$
- 4. Przepisz do zeszytu i uzupełnij odpowiednimi jednomianami.
 - a) $27y^4 + 36y^3 - 54y^2 = 9y^2(3y^2 + \boxed{?} + \boxed{?})$
 - b) $3ab(3a + b + \boxed{?}) = 9a^2b + \boxed{?} + 6ab$
 - c) $12t^4 - 9t^3 + 3t^2 = \boxed{?} \cdot (\boxed{?} - 3t + 1)$
- 5. Wiadomo, że $a + b = 15$. Oblicz wartość podanego wyrażenia.
 - a) $-3a - 3b$
 - b) $2(a + b) - 4a - 4b$
 - c) $a(a + b) + b(a + b)$

- 4. a) $4y - 6$
b) $3ab(3a + b + 2) = 9a^2b + 3ab^2 + 6ab$
c) $3t^2(4t^2 - 3t + 1)$
- 5. a) $-3(a + b) = -45$
b) $2(a + b) - 4(a + b) = -2(a + b) = -30$
c) $(a + b)(a + b) = 225$

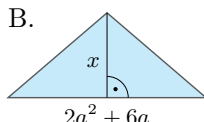
6. Wiadomo, że $6x + 9y = 12$. Oblicz wartość podanego wyrażenia.

- a) $60x + 90y$ b) $12x + 18y$ c) $2x + 3y$ d) $x + \frac{3}{2}y$

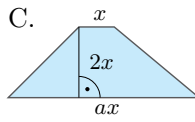
7. Dopasuj do figury wyrażenie opisujące jej pole.



I. $ax(a+3)$



II. $x^2(a+1)$



III. $x(a+1)^2$

D 8. Przeczytaj podane obok uzasadnienie stwierdzenia, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3. Następnie uzasadnij, że:

- a) suma pięciu kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 5,
b) suma trzech kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 6,
c) suma trzech kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 3.

Niech $n, n+1$ i $n+2$ będą kolejnymi liczbami naturalnymi. Ich suma S jest równa:

$$n + (n+1) + (n+2) = 3n+3 = 3(n+1)$$

Suma S została przedstawiona w postaci iloczynu, którego jednym z czynników jest liczba 3, a drugim liczba naturalna $n+1$. Zatem S jest podzielna przez 3.

D 9. Uzasadnij, że jeśli dwie liczby naturalne są podzielne przez 3, to suma ich kwadratów jest podzielna przez 9.

D 10. Uzasadnij, że suma dowolnej liczby dwucyfrowej i liczby powstałej z przedstawienia cyfr tej liczby jest podzielna przez 11 (np. $23 + 32 = 55$, a liczba 55 jest podzielna przez 11).

Sprawdź się

11. Wyłącz przed nawias czynnik liczbowy oraz zmienną x w jak najwyższej potędze.

- a) $9x^3 - 6x^2 + 15x$ b) $18x^4 + 24x^3 - 12x^2$ c) $8x^5 - 16x^4 + 12x^6$

12. Wyłącz przed nawias czynnik $3x^2$ lub $2xy^2$.

- a) $9x^3 + 3x^2y^2$ c) $6x^2y^2 - 2xy^2$ e) $6x^3y^3 - 6x^4y^4 + 12xy^2$
b) $3x^4y^2 - 6x^2y$ d) $8xy^5 + 12x^2y^4$ f) $6x^4y^2 + 6x^3y^2 - 18x^4y$

13. Wyłącz przed nawias czynnik liczbowy oraz wszystkie możliwe zmienne w jak najwyższej potędze.

- a) $9x^4y^3 - 12y^5$ b) $8a^2b^2 + 4a^3b^4$ c) $8p^3q^3 + 4p^4q^4 - 6p^2q^3$

8. a) Niech $n, n+1, n+2, n+3$ i $n+4$ będą kolejnymi liczbami naturalnymi.

$$S = n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n+10 = 5(n+2)$$

Suma S jest iloczynem liczby 5 i liczby naturalnej $n+2$. Zatem S jest podzielna przez 5.

b) Rozważmy trzy kolejne liczby parzyste: $2x, 2x+2, 2x+4, x \in \mathbb{Z}$.

$$S = 2x + (2x+2) + (2x+4) = 6x+6 = 6(x+1)$$

Suma S jest iloczynem liczby 6 i liczby całkowitej $x+1$. Zatem S jest podzielna przez 6.

c) Rozważmy trzy kolejne liczby nieparzyste: $2x+1, 2x+3, 2x+5, x \in \mathbb{Z}$.

$$S = (2x+1) + (2x+3) + (2x+5) = 6x+9 = 3(2x+3)$$

Suma S jest iloczynem liczby 3 i liczby całkowitej $2x+3$. Zatem S jest podzielna przez 3.

6. a) $10(6x + 9y) = 120$

b) $2(6x + 9y) = 24$

c) $\frac{1}{3}(6x + 9y) = 4$

d) $\frac{1}{6}(6x + 9y) = 2$

7. I – C, II – A, III – B

9. Rozważmy dwie liczby podzielne przez 3: $3x$ i $3y$, gdzie $x, y \in \mathbb{Z}$.

Suma S kwadratów tych liczb:

$$S = (3x)^2 + (3y)^2 = 9x^2 + 9y^2 = 9(x^2 + y^2)$$

Suma S jest iloczynem liczby 9 i liczby całkowitej $x^2 + y^2$.

10. Niech x i y będą kolejno liczbą jednościami i dziesiątkami dowolnej liczby dwucyfrowej.

Wówczas liczba ta ma postać: $10y + x$, a liczba powstała z przedstawienia jej cyfr:

$$10x + y$$

Suma tych liczb:

$$(10y + x) + (10x + y) = 11y + 11x = 11(x + y)$$

czyli jest to liczba podzielna przez 11.

11. a) $3x(3x^2 - 2x + 5)$

b) $6x^2(3x^2 + 4x - 2)$

c) $4x^4(2x - 4 + 3x^2)$

12. a) $3x^2(3x + y^2)$

b) $3x^2(x^2y^2 - 2y)$

c) $2xy^2(3x - 1)$

d) $2xy^2(4y^3 + 6xy^2)$

e) $2xy^2(3x^2y - 3x^3y^2 + 6)$

f) $3x^2(2x^2y^2 + 2xy^2 - 6x^2y)$

13. a) $3y^3(3x^4 - 4y^2)$

b) $4a^2b^2(2 + ab^2)$

c) $2p^2q^3(4p + 2p^2q - 3)$

Uczeń:

- mnoży sumy algebraiczne,
- przekształca wyrażenia algebraiczne, uwzględniając kolejność wykonywania działań,
- wykonuje działania na liczbach postaci $a + b\sqrt{c}$,
- wykorzystuje wyrażenia algebraiczne do opisu zależności,
- dowodzi podzielności liczb,
- rozwiązuje równania i nierówności.

Ćwiczenie 1

- $x^2 + 7x + 12$
- $p^2 - pq + 6p - 6q$
- $-2p^2 - pq + q^2$
- $6x^2 + 20x + 6$
- $3a^2 + 7ab - 6b^2$
- $8a^2 - 8ab + \frac{3}{2}b^2$

2.8. Mnożenie sum algebraicznych

Prostokąt narysowany obok ma boki długości $a + b$ i $c + d$, zatem jego pole jest równe $(a + b) \cdot (c + d)$. Pole tego prostokąta możemy również obliczyć, sumując pola czterech mniejszych prostokątów:

$$ac + ad + bc + bd$$

Mamy zatem równość:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

c	ac	bc
d	ad	bd
	a	b

Aby pomnożyć dwie sumy algebraiczne, należy każdy wyraz jednej sumy pomnożyć przez każdy wyraz drugiej sumy i zapisać sumę otrzymanych iloczynów.

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Uwaga. W zapisie iloczynu sum algebraicznych możemy pominąć znak mnożenia między nawiasami.

Przykład 1

a) Wykonaj mnożenie $(x + 3)(x + 5)$. Zredukuj wyrazy podobne.

$$(x + 3)(x + 5) = x \cdot x + x \cdot 5 + 3 \cdot x + 3 \cdot 5 = x^2 + 8x + 15$$

Każdy wyraz jednej sumy mnożymy przez każdy wyraz drugiej sumy.

b) Wykonaj mnożenie $(a + 4b)(a - b)$. Zredukuj wyrazy podobne.

$$(a + 4b)(a - b) = a^2 - ab + 4ab - 4b^2 = a^2 + 3ab - 4b^2$$

Ćwiczenie 1

Wykonaj mnożenie. Zredukuj wyrazy podobne.

a) $(x + 4)(x + 3)$

c) $(p + q)(q - 2p)$

e) $(a + 3b)(3a - 2b)$

b) $(p + 6)(p - q)$

d) $(3x + 1)(2x + 6)$

f) $(2a - \frac{1}{2}b)(4a - 3b)$

Przykład 2

Wykonaj mnożenie $(x - 3)(x^2 + x - 2)$.

Zauważmy, że nie ma znaczenia, w jakiej kolejności wykonamy mnożenie danych sum algebraicznych.

$$(x - 3)(x^2 + x - 2) = x^3 + x^2 - 2x - 3x^2 - 3x + 6 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$(x^2 + x - 2)(x - 3) = x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x - 2x + 6 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

Multibook

- Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian
- Mnożenie sum algebraicznych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.8

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

Wykonaj mnożenie.

- a) $(x-1)(x^2+x-2)$ c) $(x+y-4)(x-y)$ e) $(x-y+2)(x+y-3)$
b) $(x+3)(2x^2-x+3)$ d) $(2x-y+6)(x+3y)$ f) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

Przykład 3

Wyznacz objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok. Zapisz otrzymane wyrażenie w jak najprostszej postaci.

Aby wyznaczyć objętość prostopadłościanu, mnożymy przez siebie wyrażenia opisujące długości sąsiednich krawędzi jego podstawy i wysokość:

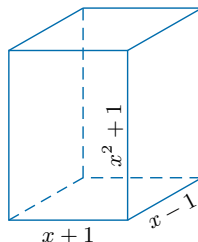
$$V = (x+1)(x-1)(x^2+1)$$

$$\begin{aligned} & ((x+1)(x-1))(x^2+1) = \\ & = (x^2-x+x-1)(x^2+1) = \\ & = (x^2-1)(x^2+1) = \\ & = x^4+x^2-x^2-1 = x^4-1 \end{aligned}$$

Mnożymy dwie dowolnie wybrane sumy i w otrzymanym wyrażeniu redukujemy wyrazy podobne.

Mnożymy dwie sumy i ponownie redukujemy wyrazy podobne.

Zatem objętość tego prostopadłościanu wyraża się wzorem $V = x^4 - 1$.



Ćwiczenie 2

- a) $x^3 - 3x + 2$
b) $2x^3 + 5x^2 + 9$
c) $x^2 - 4x + 4y - y^2$
d) $2x^2 + 6x + 5xy + 18y - 3y^2$
e) $x^2 - x + 5y - y^2 - 6$
f) $x^4 + x^2 + 1$

Komentarz

Warto zwrócić uczniom uwagę na to, że prostopadłościan o podanych wymiarach istnieje dla $x > 1$.

Ćwiczenie 3

Wyznacz objętość prostopadłościanu o podanych wymiarach. Zapisz otrzymane wyrażenie w jak najprostszej postaci.

- a) $x+2$, $x-2$, x^2+2 b) $x-2$, x^2-1 , x^2+1

Przykład 4

- a) Oblicz $(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-1)$.

Postępujemy analogicznie jak w przypadku mnożenia sum algebraicznych.

$$(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-1) = (\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2 = 3 + \sqrt{3} - 2 = 1 + \sqrt{3}$$

- b) Oblicz $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2}) &= 2(\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - (\sqrt{2})^2 = \\ &= 6 - \sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 2 = 4 + \sqrt{6} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-1)$ c) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-2\sqrt{2})$ e) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)$
b) $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-3)$ d) $(2\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+3\sqrt{2})$ f) $(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

Ćwiczenie 3

- a) $V = (x+2)(x-2)(x^2+2) = x^4 - 2x^2 - 8$
b) $V = (x-2)(x^2-1)(x^2+1) = x^5 - 2x^4 - x + 2$

Ćwiczenie 4

- a) $2\sqrt{2}-1$ c) $7-3\sqrt{6}$ e) $5+2\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$
b) $11-5\sqrt{5}$ d) $16+7\sqrt{10}$ f) $-5+2\sqrt{6}-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

D Przykład 5

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba S jest podzielna przez 5.

$$S = (4n - 1)(n - 2) + (4 - n)(2 - n)$$

Przekształcamy wyrażenie opisujące liczbę S :

$$\begin{aligned} S &= (4n - 1)(n - 2) + (4 - n)(2 - n) = && \text{Mnożymy sumy algebraiczne.} \\ &= 4n^2 - 8n - n + 2 + 8 - 4n - 2n + n^2 = && \text{Redukujemy wyrazy podobne.} \\ &= 5n^2 - 15n + 10 = && \text{Wylączamy liczbę 5 przed nawias.} \\ &= 5(n^2 - 3n + 2) \end{aligned}$$

Liczbę S przedstawiliśmy w postaci iloczynu, którego jednym z czynników jest liczba 5, a drugim liczba $n^2 - 3n + 2$. Liczba $n^2 - 3n + 2$ jest całkowita, ponieważ jest sumą liczb całkowitych. Zatem S jest podzielna przez 5.

D Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba postaci:

- $(2n - 3)(n + 4) + (n - 3)(n + 2) - n$ jest podzielna przez 3,
- $(3n - 4)(2n - 5) - (2n - 1)(5 - 2n)$ jest podzielna przez 5,
- $(6n - 3)(n + 4) - (3n - 2)(2n - 1)$ jest podzielna przez 7.

Przykład 6

a) Rozwiąż równanie $(x - 1)(x + 3) = x^2$.

$$\begin{aligned} (x - 1)(x + 3) &= x^2 && \text{Mnożymy sumy algebraiczne i przenosimy } x^2 \\ x^2 + 3x - x - 3 - x^2 &= 0 && \text{na lewą stronę równania ze zmienionym znakiem.} \\ 2x &= 3 \quad / : 2 && \text{Redukujemy wyrazy podobne.} \\ x &= 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Rozwiąż nierówność $(2x + 1)(2x + 5) + x \leq (4x - 1)(x + 3)$.

$$\begin{aligned} (2x + 1)(2x + 5) + x &\leq (4x - 1)(x + 3) \\ 4x^2 + 10x + 2x + 5 + x &\leq 4x^2 + 12x - x - 3 \\ 4x^2 + 10x + 2x + x - 4x^2 - 12x + x &\leq -3 - 5 && \text{Przenosimy ze zmienionym znakiem} \\ 2x &\leq -8 \quad / : 2 && \text{wyrażenia zawierające niewiadomą} \\ x &\leq -4 && \text{na lewą stronę nierówności,} \\ &&& \text{a liczby na prawą stronę.} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 6

Rozwiąż równanie lub nierówność.

- $(x + 2)(x - 5) = x^2$
- $(x + 3)(1 - 2x) + 2x^2 = 0$
- $3x^2 - (x + 1)(3x + 2) = 0$
- $(x + 4)(x - 1) < x(x + 2) + 2x - 1$
- $(2x + 3)(3x - 1) + 4 > (6x - 2)(x + 1)$
- $(1 - x)(2x + 3) \leq -2(x + 1)(x - 2) - 2$

Ćwiczenie 6

- $x^2 - 3x - 10 = x^2$,
 $x = -\frac{10}{3}$
- $x - 2x^2 + 3 - 6x + 2x^2 = 0$,
 $x = \frac{3}{5}$
- $3x^2 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$,
 $x = -\frac{2}{5}$
- $x^2 + 3x - 4 < x^2 + 4x - 1$,
 $x > -3$
- $6x^2 + 7x - 3 + 4 > 6x^2 + 4x - 2$,
 $x > -1$
- $3 - 2x^2 - x \leq -2x^2 + 2x + 2$,
 $x \geq \frac{1}{3}$

Ćwiczenie 5

- $2n^2 + 8n - 3n - 12 + n^2 + 2n - 3n - 6 - n = 3n^2 + 3n - 18 = 3(n^2 + n - 6)$,
czyli jest to liczba podzielna przez 3.
- $6n^2 - 15n - 8n + 20 - 10n + 4n^2 + 5 - 2n = 10n^2 - 35n + 25 = 5(2n^2 - 7n + 5)$,
czyli jest to liczba podzielna przez 5.
- $6n^2 + 24n - 3n - 12 - 6n^2 + 3n + 4n - 2 = 28n - 14 = 7(4n - 2)$,
czyli jest to liczba podzielna przez 7.

Zadania

- Wykonaj mnożenie.
a) $(2a + b)(a - 1)$ c) $(-2a + b)(6a - 2)$ e) $(2a + b^2)(a - 2b)$
b) $(3a - 2b)(2b + 3)$ d) $(3 + 4a)(-2b - 1)$ f) $(a^2 - 3b)(2b - 3a)$
 - Wykonaj mnożenie.
a) $(x + 2y + 3)(x - 2)$ c) $(x^2 + y)(x + y + 2)$ e) $2x(x - 2y)(3 + y)$
b) $(2x - y + 1)(2x - 3)$ d) $(x - y)(x^2 - 2x + 1)$ f) $-4x(2x - y)(2x + y)$
 - Uprość wyrażenie.
a) $(a + 3)(a - 4) + (a - 3)(a + 4)$ c) $3y^2 - 2x(x + 2y) - (x - y)(2x + y)$
b) $(2a - b)(a + 3b) - (a - 4b)(2a + b)$ d) $2x^2 + 3(x(x + 2) - x(x - 3))$
 - Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla $x = -0,5$.
a) $(x + 2)(6(x + 4) - 5(x + 6))$ b) $-2(x^4 + x^2) + x^3(x + 1) + (x^2 - 2)(x^2 + 3)$
 - Dany jest prostokąt o bokach długości a i $a + 2$.
a) Przedstaw wzór na pole tego prostokąta w postaci sumy algebraicznej.
b) Krótszy bok tego prostokąta przedłużono o 1, a dłuższy skrócono o 1, w wyniku czego powstał kwadrat. Wyznacz różnicę między polem kwadratu a polem prostokąta.
 - a) Dany jest kwadrat o boku długości $x + 3$. O ile zmniejszy się pole tej figury, gdy jeden jej bok zmniejszymy o 2, a drugi o 1?
b) Dany jest trójkąt o podstawie równej $a + 3$ i wysokości opuszczonej na tę podstawę równej $a + 4$. O ile zwiększy się pole trójkąta, gdy tę wysokość zwiększymy o 2?
c) Dany jest prostokąt o bokach długości $x + 4$ i $2x + 3$. O ile zwiększy się pole tego prostokąta, jeśli jeden z jego boków zwiększymy o 2, a drugi o 1? Rozpatrz dwa przypadki.
 - Oblicz.
a) $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(4\sqrt{3} - 8\sqrt{2})$ c) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (4 - \sqrt{6})$
b) $(2\sqrt{5} - 4\sqrt{2})(2\sqrt{2} + \sqrt{5})$ d) $(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})(2\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (6 - 3\sqrt{15})$
- D 8.** Uzasadnij, że dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$ wartość wyrażenia jest nieujemna.
- a) $(3x - 6)(4x - 2) - (6x + 3)(2x - 6)$
b) $(3x - 2)(2x - 1) - (5x - 2)(x - 1)$

- 6. a)** Pole kwadratu: $(x + 3)(x + 3) = x^2 + 6x + 9$
Pole prostokąta: $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$
Różnica pól: $3x + 7$
b) Pole trójkąta: $\frac{1}{2}(a + 3)(a + 4) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{7}{2}a + 6$
Pole nowego trójkąta: $\frac{1}{2}(a + 3)(a + 6) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{9}{2}a + 9$
Różnica pól: $a + 3$
c) Pole prostokąta: $(x + 4)(2x + 3) = 2x^2 + 11x + 12$
I przypadek:
Pole nowego prostokąta: $(x + 6)(2x + 4) = 2x^2 + 16x + 24$, różnica pól: $5x + 12$.
II przypadek:
Pole nowego prostokąta: $(x + 5)(2x + 5) = 2x^2 + 15x + 25$, różnica pól: $4x + 13$.
Pole zwiększy się o $5x + 12$ lub $4x + 13$.

Odpowiedzi do zadań

- a) $2a^2 - 2a + ab - b$
b) $6ab + 9a - 4b^2 - 6b$
c) $-12a^2 + 4a + 6ab - 2b$
d) $-4a - 8ab - 6b - 3$
e) $2a^2 - 4ab + ab^2 - 2b^3$
f) $-3a^3 + 2a^2b + 9ab - 6b^2$
- a) $x^2 + x + 2xy - 4y - 6$
b) $4x^2 - 4x - 2xy + 3y - 3$
c) $x^3 + x^2y + 2x^2 + xy + y^2 + 2y$
d) $x^3 - x^2y - 2x^2 + 2xy + x - y$
e) $2x^2y + 6x^2 - 12xy - 4xy^2$
f) $-16x^3 + 4xy^2$
- a) $2a^2 - 24$
b) $12ab + b^2$
c) $4y^2 - 4x^2 - 3xy$
d) $2x^2 + 15x$
- a) $x^2 - 4x - 12, -9,75$
b) $x^3 - x^2 - 6, -6,375$
- a) Pole prostokąta:
 $P = a(a + 2) = a^2 + 2a$
b) Pole kwadratu:
 $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$
Różnica pól:
 $a^2 + 2a + 1 - a^2 - 2a = 1$
- a) -20
b) -6
c) -4
d) 10
- a) $12x^2 - 6x - 24x + 12 + -(12x^2 - 36x + 6x - 18) = 30 \geq 0$
b) $6x^2 - 3x - 4x + 2 + -(5x^2 - 5x - 2x + 2) = x^2 \geq 0$
dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$

9. a) $x = -10$

b) $x = 4$

c) $x = -\frac{1}{2}$

d) $x = \frac{1}{2}$

10. a) $x \geq \frac{3}{2}$

b) $x < -\frac{6}{5}$

c) $x \geq \frac{5}{8}$

d) $x < \frac{1}{2}$

11. a) 3

b) 10

c) 0

12. a) Pola prostokątów:

$$P_1 = (2x + 30)(x + 20) = 2x^2 + 70x + 600 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_2 = (2x + 10)(x + 10) = 2x^2 + 30x + 100 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Różnica pól:

$$P_1 - P_2 = 40x + 500 = 900, \text{ czyli } x = 10 \text{ cm.}$$

Obwody prostokątów:

$$Ob_1 = 160 \text{ cm}$$

$$Ob_2 = 100 \text{ cm}$$

b) Pola prostokątów:

$$P_1 = (6 - x)(2x - 5) = -2x^2 + 17x - 30 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_2 = (x + 5)(2x - 1) = 2x^2 + 9x - 5 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Suma pól:

$$P_1 + P_2 = 26x - 35 = 69,$$

czyli $x = 4 \text{ cm}$, stąd

$$P_1 = 6 \text{ cm}^2 \text{ oraz } P_2 = 63 \text{ cm}^2.$$

Różnica pól:

$$P_2 - P_1 = 63 - 6 = 57 \text{ [cm}^2\text{]}$$

9. Rozwiąż równanie.

a) $(x + 2)(x - 3) = x^2 + 4$

c) $(x - 2)(x - 5) = (x + 3)(x + 6)$

b) $(x - 4)(x + 6) = x(x - 4)$

d) $(2x + 1)(x + 3) = (x - 4)(2x - 3)$

10. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - (x + 3)(x - 3) \leq 6x$

c) $(2x - 1)(3x - 1) - (3x - 2)(2x - 3) \geq 0$

b) $(4 - x)(2x + 3) + 2x^2 < 6$

d) $(4 - 6x)(2x + 1) + (4x - 5)(3x - 1) > x$

11. Ile liczb naturalnych spełnia podaną nierówność?

a) $(3x + 1)(2 - x) + x(3x - 5) \geq x$

b) $2x^2 - (2x + 1)(x - 3) > 6x - 7$

c) $(3x + 3)(2x - 1) + 4x < 6(x + 2)(x - 1) + 9$

12. a) Dane są dwa prostokąty: P_1 o wymiarach $(2x + 30) \text{ cm} \times (x + 20) \text{ cm}$ oraz P_2 o wymiarach $(2x + 10) \text{ cm} \times (x + 10) \text{ cm}$. Różnica pól prostokątów P_1 i P_2 jest równa 900 cm^2 . Oblicz obwody tych prostokątów.

b) Dane są dwa prostokąty o wymiarach $(6 - x) \text{ cm} \times (2x - 5) \text{ cm}$ oraz $(x + 5) \text{ cm} \times (2x - 1) \text{ cm}$. Suma ich pól jest równa 69 cm^2 . Oblicz różnicę między polami większego i mniejszego prostokąta.

13. Dane są prostokąt o wymiarach $(4x + 1) \text{ cm} \times (x + 3) \text{ cm}$ oraz kwadrat o boku $(2x + 7) \text{ cm}$. Pole kwadratu jest o 91 cm^2 większe od pola prostokąta. Oblicz różnicę między obwodami kwadratu i prostokąta.

Sprawdź się

14. Uprość wyrażenie.

a) $(3k + 5)(4k - 2) + 2(5 - 7k)$

c) $(2k - l)(5k + l) - (4k + l)(k - l)$

b) $(3 - l)(4 - l) - (6 - l)(1 - l)$

d) $3k(8k - 2l) - (6k + l)(4k - l)$

15. Rozwiąż równanie lub nierówność.

a) $(3x - 4)(2x - 1) = (6x + 2)(x - 1)$

b) $(9x + 1)(2x - 1) = (1 - 6x)(1 - 3x)$

c) $9x^2 - (3 - 4x)(3 - 2x) < x(x - 9)$

d) $(x + 1\frac{1}{2})(2x + 1) \geq (2x + \frac{1}{2})(x - 1) + 6x$

D16. Uzasadnij, że jeśli n jest liczbą całkowitą, to liczba postaci:

a) $(3n + 2)(1 - 2n) + (2 - 5n)(2n - 3) - 2n$ jest podzielna przez 4,

b) $(5n - 8)(4n + 1) - (2n - 5)(9n - 2) + n(4n + 2)$ jest podzielna przez 6.

13. Pole kwadratu: $P_k = (2x + 7)(2x + 7) = 4x^2 + 28x + 49 \text{ [cm}^2\text{]}$

$$\text{Pole prostokąta: } P_p = (4x + 1)(x + 3) = 4x^2 + 13x + 3 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Różnica pól:

$$P_k - P_p = 15x + 46 = 91, \text{ czyli } x = 3 \text{ cm, stąd } Ob_k = 52 \text{ cm oraz } Ob_p = 38 \text{ cm.}$$

$$\text{Różnica obwodów: } Ob_k - Ob_p = 52 - 38 = 14 \text{ [cm]}$$

14. a) $12k^2$ b) 6 c) $6k^2$ d) $l^2 - 4kl$

15. a) $x = \frac{6}{7}$ b) $x = 1$ c) $x < \frac{1}{3}$ d) $x \leq 4$

16. a) $(3n + 2)(1 - 2n) + (2 - 5n)(2n - 3) - 2n = -16n^2 + 16n - 4 = 4(-4n^2 + 4n - 1)$

$$\text{b) } (5n - 8)(4n + 1) - (2n - 5)(9n - 2) + n(4n + 2) = 6n^2 + 24n - 18 = 6(n^2 + 4n - 3)$$

2.9. Wzory skróconego mnożenia

Kwadrat sumy i kwadrat różnicy

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b :

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 && \text{kwadrat sumy} \\(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 && \text{kwadrat różnicy}\end{aligned}$$

Wzory na kwadrat sumy i kwadrat różnicy można zilustrować następująco:

$$\begin{aligned}(\bigcirc + \square)^2 &= \bigcirc^2 + 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2 \\(\bigcirc - \square)^2 &= \bigcirc^2 - 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2\end{aligned}$$

D Ćwiczenie 1

Wykaż, że dla dowolnych liczb a i b prawdziwe są podane wyżej wzory.

Przykład 1

- a) $(x + 5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$
- b) $(x - 4)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
- c) $(3x + 2)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$
- d) $(2x - 5)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$

Ćwiczenie 2

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- a) $(x + 1)^2$
- c) $(x - 3)^2$
- e) $(2x + 1)^2$
- g) $(4x - 1)^2$
- b) $(x + 2)^2$
- d) $(x - 5)^2$
- f) $(\frac{1}{2}x + 2)^2$
- h) $(2x - \frac{1}{2})^2$

Przykład 2

- a) $(x + 4y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4y + (4y)^2 = x^2 + 8xy + 16y^2$
- b) $(2x - 3y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

Ćwiczenie 3

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- a) $(x + 2y)^2$
- c) $(3x + 2y)^2$
- e) $(x - \frac{1}{2}y)^2$
- g) $(2x - \frac{1}{4}y)^2$
- b) $(2x - y)^2$
- d) $(3x - 4y)^2$
- f) $(3x + \frac{1}{2}y)^2$
- h) $(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y)^2$

Ćwiczenie 3

- a) $x^2 + 4xy + 4y^2$
- b) $4x^2 - 4xy + y^2$
- c) $9x^2 + 12xy + 4y^2$
- d) $9x^2 - 24xy + 16y^2$
- e) $x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2$
- f) $9x^2 + 3xy + \frac{1}{4}y^2$
- g) $4x^2 - xy + \frac{1}{16}y^2$
- h) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{9}y^2$

Uczeń:

- stosuje odpowiedni wzór skróconego mnożenia do wyznaczania kwadratu sumy lub różnicy oraz różnicy kwadratów,
- przekształca wyrażenie algebraiczne z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia,
- stosuje wzory skróconego mnożenia do wykonywania działań na liczbach postaci $a + b\sqrt{c}$,
- wyprowadza wzory skróconego mnożenia,
- stosuje wzory skróconego mnożenia do dowodzenia własności liczb.

Komentarz

Uczniowie czasami popełniają błąd, zapominając o podwojonym iloczynie we wzorze na kwadrat sumy lub różnicy. Należy zwrócić uwagę na to, że $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ jedynie wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$.

Ćwiczenie 1

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) = \\&= a^2 + ab + ba + b^2 = \\&= a^2 + 2ab + b^2 \\(a - b)^2 &= (a - b)(a - b) = \\&= a^2 - ab - ba + b^2 = \\&= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

- a) $x^2 + 2x + 1$
- b) $x^2 + 4x + 4$
- c) $x^2 - 6x + 9$
- d) $x^2 - 10x + 25$
- e) $4x^2 + 4x + 1$
- f) $\frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$
- g) $16x^2 - 8x + 1$
- h) $4x^2 - 2x + \frac{1}{4}$

Multibook

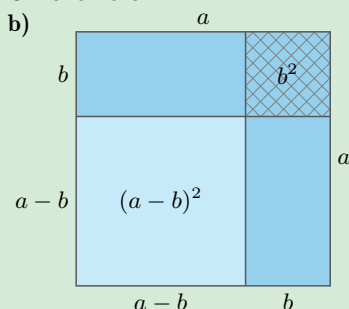
- Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian
- Mnożenie sum algebraicznych
- Kwadrat sumy
- Kwadrat różnicy
- Różnica kwadratów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.9

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 4

- a) $8 + 2\sqrt{7}$
 b) $14 - 6\sqrt{5}$
 c) $39 - 12\sqrt{3}$
 d) $21 + 8\sqrt{5}$
 e) $5 + 2\sqrt{6}$
 f) $12 - 2\sqrt{35}$
 g) $21 + 6\sqrt{10}$
 h) $6\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}$

Ćwiczenie 5**Ćwiczenie 6**

$$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Komentarz

Należy zwrócić uczniom uwagę na to, że:

$$(x+y)(y-x) \neq x^2 - y^2$$

Ćwiczenie 7

- a) $x^2 - 9$
 b) $x^2 - 49$
 c) $4x^2 - 16$
 d) $25x^2 - 36$
 e) $9x^2 - 16y^2$
 f) $9y^2 - \frac{1}{4}x^2$

Przykład 3

- a) $(\sqrt{5} + 2)^2 = (\sqrt{5})^2 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 + 2^2 = 5 + 4\sqrt{5} + 4 = 9 + 4\sqrt{5}$
 b) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{6})^2 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 6 + 2\sqrt{12} + 2 = 8 + 4\sqrt{3}$
 c) $(\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{6})^2 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 6 - 2\sqrt{18} + 3 = 9 - 6\sqrt{2}$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $(\sqrt{7} + 1)^2$ c) $(6 - \sqrt{3})^2$ e) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ g) $(\sqrt{6} + \sqrt{15})^2$
 b) $(\sqrt{5} - 3)^2$ d) $(4 + \sqrt{5})^2$ f) $(\sqrt{7} - \sqrt{5})^2$ h) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{6}\right)^2$

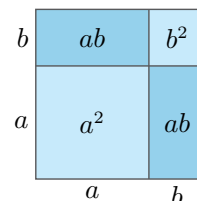
Ćwiczenie 5

a) Wyjaśnij, dlaczego rysunek przedstawiony obok jest interpretacją geometryczną wzoru:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

b) Podaj analogiczną interpretację geometryczną wzoru:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

**Różnica kwadratów****Twierdzenie**

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b :

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad \text{różnica kwadratów}$$

Ćwiczenie 6

Wykaż, że dla dowolnych liczb a i b prawdziwy jest podany wyżej wzór.

Przykład 4

- a) $(x - 6)(x + 6) = x^2 - 6^2 = x^2 - 36$
 b) $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$
 c) $(2x - 3y)(2x + 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$
 d) $(y + 2x)(2x - y) = (2x + y)(2x - y) = (2x)^2 - y^2 = 4x^2 - y^2$

Ćwiczenie 7

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- a) $(x - 3)(x + 3)$ c) $(2x - 4)(2x + 4)$ e) $(3x - 4y)(3x + 4y)$
 b) $(x + 7)(x - 7)$ d) $(6 + 5x)(5x - 6)$ f) $\left(\frac{1}{2}x + 3y\right)\left(3y - \frac{1}{2}x\right)$

Przykład 5

$$(7 - \sqrt{3})(7 + \sqrt{3}) = 49 - 3 = 46$$

Ten przykład rozwiązany za pomocą kalkulatora wyglądałby następująco:

$$\begin{aligned}(7 - \sqrt{3})(7 + \sqrt{3}) &\approx (7 - 1,732050808)(7 + 1,732050808) = \\ &= 5,267949192 \cdot 8,732050808 \approx 46\end{aligned}$$

Ćwiczenie 8

Oblicz.

- a) $(5 - \sqrt{7})(5 + \sqrt{7})$ d) $\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ g) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
 b) $(6 + \sqrt{3})(6 - \sqrt{3})$ e) $(2\sqrt{3} + \frac{1}{2})(2\sqrt{3} - \frac{1}{2})$ h) $(\sqrt{2} + \sqrt{6})(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
 c) $(\sqrt{5} + 1)(1 - \sqrt{5})$ f) $(2\sqrt{2} - 3)(3 + 2\sqrt{2})$ i) $\left(\sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Przykład 6

Oblicz wartość wyrażenia $(x - 1)(x + 1) + (x + 1)^2$ dla $x = \sqrt{5}$.

$$(x - 1)(x + 1) + (x + 1)^2 = x^2 - 1 + x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 2x$$

Wartość tego wyrażenia dla $x = \sqrt{5}$ jest równa $2(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} = 10 + 2\sqrt{5}$.

Ćwiczenie 9

Oblicz wartość wyrażenia:

- a) $(x + 2)(x - 2) - (x + 4)^2$ dla $x = \sqrt{5}$,
 b) $(3x - 1)(3x + 1) + (3x - 1)^2$ dla $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
 c) $(2x + 3)(2x - 3) - (2x + 1)^2$ dla $x = -\sqrt{6}$,
 d) $(1 - 4x)(4x + 1) + (4x - 3)^2$ dla $x = -2\sqrt{3}$.

Zadania

1. Uprość podane wyrażenie.

- a) $(x - 3)(x + 3) + (2 + x)(2 - x)$
 b) $(x + \frac{3}{2})(x - \frac{3}{2}) - (x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$
 c) $(y + 3x)(3x - y) - (x - 5y)(x + 5y)$
 d) $(2x - y)(2x + y) + (3x + 2y)(3x - 2y)$

2. Oblicz wartość wyrażenia:

- a) $(x + 1)(x - 1) + (x + 2)(x - 2) - (x + 3)(x - 3)$ dla $x = \sqrt{3}$,
 b) $(1 - 2x)(1 + 2x) + (1 - 3x)(1 + 3x) - (1 - 4x)(4x + 1)$ dla $x = \sqrt{5}$,
 c) $(2x - 1)^2 - (2x - 1)(1 + 2x) - (2x + 1)^2$ dla $x = \sqrt{2}$.

Ćwiczenie 9

a) $(x + 2)(x - 2) - (x + 4)^2 = x^2 - 4 - x^2 - 8x - 16 = -8x - 20$

Dla $x = \sqrt{5}$ otrzymujemy $-8x - 20 = -8\sqrt{5} - 20$.

b) $(3x - 1)(3x + 1) + (3x - 1)^2 = 9x^2 - 1 + 9x^2 - 6x + 1 = 18x^2 - 6x$

Dla $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ otrzymujemy $18x^2 - 6x = 18 \cdot \frac{1}{2} - 3\sqrt{2} = 9 - 3\sqrt{2}$.

c) $(2x + 3)(2x - 3) - (2x + 1)^2 = 4x^2 - 9 - 4x^2 - 4x - 1 = -4x - 10$

Dla $x = -\sqrt{6}$ otrzymujemy $-4x - 10 = 4\sqrt{6} - 10$.

d) $(1 - 4x)(4x + 1) + (4x - 3)^2 = 1 - 16x^2 + 16x^2 - 24x + 9 = -24x + 10$

Dla $x = -2\sqrt{3}$ otrzymujemy $-24x + 10 = 48\sqrt{3} + 10$.

Komentarz

Można poprosić uczniów o skomentowanie tego rozwiązania.

Ćwiczenie 8

- a) 18
 b) 33
 c) -4
 d) $-1\frac{7}{18}$
 e) $11\frac{3}{4}$
 f) -1
 g) -1
 h) 4
 i) 4,5

Odpowiedzi do zadań

1. a) -5
 b) -2
 c) $8x^2 + 24y^2$
 d) $13x^2 - 5y^2$
2. a) $x^2 + 4$; 7
 b) $3x^2 + 1$; 16
 c) $-4x^2 - 8x + 1$; $-7 - 8\sqrt{2}$

3. a) 6

b) $-3 + 2\sqrt{3}$

c) 10

d) $12 - 2\sqrt{30}$

4. a) 1

b) 1

c) 2

d) 2

5. a) $66 + 36\sqrt{2}$

b) $78 - 24\sqrt{3}$

c) $48 + 24\sqrt{3}$

6. a) 14

b) $12 - \sqrt{2} + 3\sqrt{10}$

7. a) $-18y^2 + 12xy;$

$-18\sqrt{10} - 42$

b) $2(x+y)(x-y); 16\sqrt{3}$

c) $96 - 12\sqrt{5}$

d) 0

8. Niech $n \in \mathbb{N}$.

a) $(n+1)^2 - n^2 =$

$= n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$

– liczba tej postaci jest nieparzysta.

b) Iloczyn dwóch liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą.

c) $(n + \frac{1}{2})^2 - (n - \frac{1}{2})^2 =$

$= n^2 + n + \frac{1}{4} - n^2 + n - \frac{1}{4} =$

$= 2n$ – liczba tej postaci jest parzysta.

d) $n^3 - n = n(n^2 - 1) =$

$= n(n-1)(n+1) =$

$= (n-1)n(n+1)$

Otrzymaliśmy iloczyn kolejnych trzech liczb naturalnych, zatem dokładnie jedna z nich jest podzielna przez 3 i co najmniej jedna jest podzielna przez 2. To z kolei oznacza, że cały iloczyn jest podzielny przez 6.

3. Oblicz.

a) $(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2$

c) $(4 - \sqrt{5})(4 + \sqrt{5}) - (\sqrt{5} - 2)(2 + \sqrt{5})$

b) $(\sqrt{3} - 1)^2 - (2 - \sqrt{3})^2$

d) $(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5}) + (\sqrt{6} - \sqrt{5})^2$

4. Oblicz.

a) $\sqrt{\sqrt{2} + 1} \cdot \sqrt{\sqrt{2} - 1}$

b) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$

c) $\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$

d) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\sqrt{5} - 2} \cdot \sqrt{\sqrt{5} + 2} = \\ & = \sqrt{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} = \\ & = \sqrt{5 - 4} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

5. Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi a .

a) $a = 3 + \sqrt{2}$

b) $a = 2\sqrt{3} - 1$

c) $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

6. Oblicz obwód trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b .

a) $a = 4 - \sqrt{2}, b = 4 + \sqrt{2}$

b) $a = 8 + \sqrt{2}, b = 4 - 2\sqrt{2}$

7. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $(2x + 3y)(2x - 3y) - (2x - 3y)^2$ dla $x = \sqrt{\sqrt{10} - 3}, y = \sqrt{\sqrt{10} + 3}$,

b) $(\sqrt{3}x - y)^2 - (x - \sqrt{3}y)^2$ dla $x = \sqrt{6} + \sqrt{2}, y = \sqrt{6} - \sqrt{2}$,

c) $(\sqrt{2}x - \sqrt{3}y)^2 - (\sqrt{2}x - \sqrt{5}y)(\sqrt{2}x + \sqrt{5}y)$ dla $x = \sqrt{5} - 4, y = \sqrt{6}$,

d) $(x^2 - 4y^2)^2 - (4y^2 - x^2)^2$ dla $x = \frac{1}{\sqrt{2}-1}, y = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

D 8. Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba:

a) $(n+1)^2 - n^2$ jest nieparzysta,

c) $(n + \frac{1}{2})^2 - (n - \frac{1}{2})^2$ jest parzysta,

b) $(2n+1)^2$ jest nieparzysta,

d) $n^3 - n$ jest podzielna przez 6.

Sprawdź się

9. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(7 - x)^2$

c) $(2x + 4)^2$

e) $(\frac{1}{4}x + 8)^2$

g) $(0,5x + 0,4)^2$

b) $(x + \frac{1}{2})^2$

d) $(3x + 8)^2$

f) $(\frac{2}{3}x - 6)^2$

h) $(0,1x - 2,5)^2$

10. Oblicz.

a) $(3 + \sqrt{2})^2$

c) $(4 - 3\sqrt{2})^2$

e) $(2\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$

g) $(\sqrt{8} - \frac{\sqrt{2}}{2})^2$

b) $(1 - \sqrt{5})^2$

d) $(2\sqrt{7} + 3)^2$

f) $(\sqrt{6} - 2\sqrt{3})^2$

h) $(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3})^2$

11. Oblicz.

a) $(\sqrt{7} - 1)(1 + \sqrt{7})$

b) $(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})$

c) $(\sqrt{2} - \sqrt{6})(\sqrt{2} + \sqrt{6})$

9. a) $49 - 14x + x^2$

b) $x^2 + x + \frac{1}{4}$

c) $4x^2 + 16x + 16$

d) $9x^2 + 48x + 64$

e) $\frac{1}{16}x^2 + 4x + 64$

f) $\frac{4}{9}x^2 - 8x + 36$

g) $0,25x^2 + 0,4x + 0,16$

h) $0,01x^2 - 0,5x + 6,25$

10. a) $11 + 6\sqrt{2}$

b) $6 - 2\sqrt{5}$

c) $34 - 24\sqrt{2}$

d) $37 + 12\sqrt{7}$

e) $23 + 4\sqrt{15}$

f) $18 - 12\sqrt{2}$

g) 4,5

h) $3,5 + \sqrt{6}$

11. a) 6

b) 6

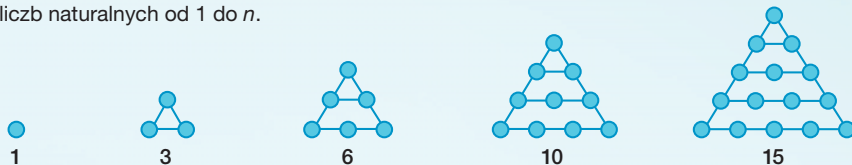
c) -4

Liczby wielokątne

Liczby wielokątne badali już w VI wieku p.n.e. starożytni Grecy. Ich nazwę wyjaśniono na poniższych rysunkach.

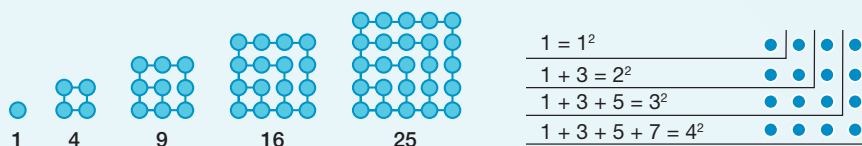
Liczby trójkątne

Liczby 1, 3, 6, 10, 15, to kolejne liczby trójkątne. Zauważ, że n -ta liczba trójkątna to suma liczb naturalnych od 1 do n .



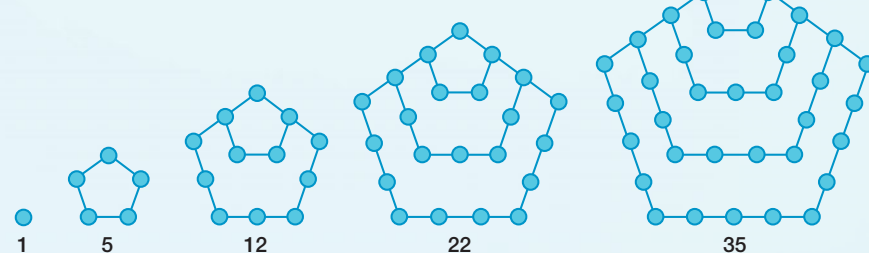
Wzór na n -tą liczbę trójkątną ma postać $\frac{n(n+1)}{2}$.

Liczby kwadratowe



- 1 Zauważ, że n -ta liczba kwadratowa jest sumą n początkowych liczb nieparzystych (rysunek po prawej). Ile jest równa suma dwudziestu początkowych liczb nieparzystych?
- 2 Wykaż, że dla $n > 1$ n -ta liczba kwadratowa jest sumą dwóch kolejnych liczb trójkątnych.

Liczby pięciokątne

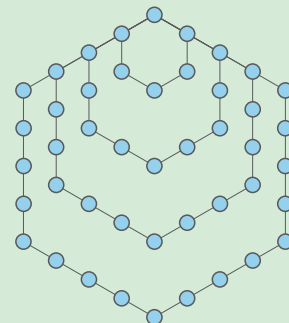
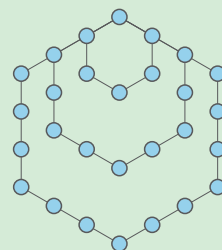
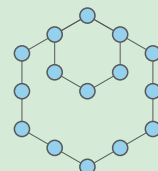
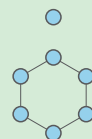


- 3 Korzystając z podanego obok wzoru, oblicz szóstą liczbę pięciokątną.
- 4 Oblicz pięć kolejnych liczb sześciokątnych. Podaj ich ilustrację graficzną.

n -ta liczba r -kątna wyraża się wzorem:

$$(r-2) \cdot \frac{n(n-1)}{2} + n$$

1. 400
3. 51
4. 1, 6, 15, 28, 45



2. Niech $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}(n+1)(n+n+2) = \frac{1}{2}(n+1)(2n+2) = (n+1)(n+1) = (n+1)^2 \text{ – jest to liczba kwadratowa}$$

Twierdzenie Diofantosa

Jeżeli liczbę trójkątną pomnożymy przez osiem i powiększymy o jeden, to otrzymamy liczbę kwadratową.

Dowód

Niech $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{2}n(n+1) \cdot 8 + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$$

– jest to liczba kwadratowa

Uczeń:

- stosuje przekształcenia algebraiczne do rozwiązywania równań oraz nierówności,
- usuwa niewymierność z mianownika ułamka,
- stosuje wzory skróconego mnożenia do dowodzenia twierdzeń.

Ćwiczenie 1

- a) $\frac{6-\sqrt{2}}{34}$
 b) $\frac{8\sqrt{2}-2\sqrt{10}}{11}$
 c) $-4-3\sqrt{2}$
 d) $\frac{7-3\sqrt{3}}{4}$
 e) $\frac{\sqrt{15}-3}{2}$

Ćwiczenie 2

- a) $x = 3$
 b) $x = 1$
 c) $x = 5$

Ćwiczenie 3

- a) $x > -1$
 b) $x \leq -\frac{1}{2}$
 c) $x > \frac{1}{9}$
 d) $x \leq 2$

2.10. Zastosowanie przekształceń algebraicznych

Wzór na różnicę kwadratów: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ można zastosować do usuwania niewymierności z mianownika.

Przykład 1

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{5}{\sqrt{2}-1} &= \frac{5}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{5\sqrt{2}+5}{2-1} = 5\sqrt{2}+5 \\ \text{b)} \quad \frac{6}{3+\sqrt{3}} &= \frac{6}{3+\sqrt{3}} \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{6(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{6(3-\sqrt{3})}{6} = 3-\sqrt{3} \\ \text{c)} \quad \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} &= \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 1

Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{1}{6+\sqrt{2}}$ b) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+4}$ c) $\frac{2}{4-3\sqrt{2}}$ d) $\frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

Wzory skróconego mnożenia wykorzystujemy do rozwiązywania równań i nierówności.

Ćwiczenie 2

Przeczytaj podany obok przykład.
Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - (2-x)^2 = 8$
 b) $(3x+1)^2 - 9x^2 = 7$
 c) $(x+1)^2 - (x+1)(x-1) = 12$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

a) $4x^2 - (2x+1)^2 < 3$ c) $(2x+1)(2x-1) > 4x^2 - 9x$
 b) $(3-x)^2 \geq x^2 + 12$ d) $2 - (2x-1)^2 \leq (3-2x)(2x+3)$

Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} (x-4)(x+4) - (x-3)^2 &= 17 \\ x^2 - 16 - (x^2 - 6x + 9) &= 17 \\ x^2 - 16 - x^2 + 6x - 9 &= 17 \\ 6x - 25 &= 17 \\ 6x &= 42 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Przykład 2

Dla jakich wartości x wyrażenie $x^2 + 4x + 4$ przyjmuje wartość równą 0?

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$$

Zatem $x^2 + 4x + 4 = 0$, gdy $(x+2)^2 = 0$, czyli $x = -2$.

Multibook

- Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian
- Mnożenie sum algebraicznych
- Kwadrat sumy
- Kwadrat różnicy
- Różnica kwadratów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.10

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 4

Dla jakich wartości x podane wyrażenie przyjmuje wartość równą 0?

- a) $x^2 + 8x + 16$ d) $4x^2 - 4x + 1$ g) $4x^2 + 12x + 9$
b) $x^2 - 6x + 9$ e) $25x^2 + 10x + 1$ h) $9x^2 + 12x + 4$
c) $x^2 + 10x + 25$ f) $16x^2 + 8x + 1$ i) $9x^2 - 3x + \frac{1}{4}$

Przykład 3

a) Rozwiąż równanie $(x + 3)^2 = 6x$.

$$\begin{aligned}x^2 + 6x + 9 &= 6x \\x^2 &= -9\end{aligned}$$

Kwadrat liczby rzeczywistej
nie może być liczbą ujemną.

Zatem równanie jest sprzeczne – nie jest spełnione przez żadną liczbę $x \in \mathbb{R}$.

b) Rozwiąż nierówność $(2x - 1)^2 < 4x(x - 1)$.

$$\begin{aligned}4x^2 - 4x + 1 &< 4x^2 - 4x \\1 &< 0\end{aligned}$$

Zatem nierówność jest sprzeczna – nie jest spełniona przez żadną liczbę $x \in \mathbb{R}$.

Przykład 4

a) Rozwiąż równanie $(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = 12x$.

$$\begin{aligned}x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 6x + 9) &= 12x \\12x &= 12x\end{aligned}$$

Zatem równanie jest tożsamościowe – jest spełnione przez każdą liczbę $x \in \mathbb{R}$.

b) Rozwiąż nierówność $(x - 2)(x + 2) + 5 > 0$.

$$\begin{aligned}x^2 - 4 + 5 &> 0 \\x^2 &> -1\end{aligned}$$

Kwadrat liczby rzeczywistej
zawsze jest większy od liczby
ujemnej.

Zatem nierówność jest tożsamościowa – spełniona przez każdą liczbę $x \in \mathbb{R}$.

Ćwiczenie 5

Sprawdź, czy równanie jest tożsamościowe lub sprzeczne.

- a) $(6 - x)^2 - (2 - x)^2 = -8x$ c) $(x - 4)^2 + 4x = (x - 2)^2 + 12$
b) $(3x + 1)^2 - (1 - 3x)^2 = 12x$ d) $(x - 3)^2 + 14x = 2x^2 - (x - 4)^2$

Ćwiczenie 6

Sprawdź, czy nierówność jest tożsamościowa lub sprzeczna.

- a) $(x + 1)^2 - 2 \leq (x - 1)(1 + x) + 2x$ c) $6x - (3x - 1)^2 \geq (2x + 3)^2$
b) $(2 - x)^2 - (4 - x)^2 \geq 4x - 8$ d) $(2x + 3)^2 - 30 < 8x^2 - (2x - 3)^2$

Ćwiczenie 5

a) $36 - 12x + x^2 - 4 + 4x - x^2 = -8x$
 $32 = 0$

Równanie jest sprzeczne.

b) $9x^2 + 6x + 1 - 1 + 6x - 9x^2 = 12x$
 $0 = 0$

Równanie jest tożsamościowe.

c) $x^2 - 8x + 16 + 4x = x^2 - 4x + 4 + 12$
 $0 = 0$

Równanie jest tożsamościowe.

d) $x^2 - 6x + 9 + 14x = 2x^2 - x^2 + 8x - 16$
 $9 = -16$

Równanie jest sprzeczne.

Ćwiczenie 6

a) $x^2 + 2x + 1 - 2 \leq x^2 - 1 + 2x$
 $0 \leq 0$

Nierówność jest tożsamościowa.

b) $4 - 4x + x^2 - 16 + 8x - x^2 \geq 4x - 8$
 $4x - 16 \geq 10$
 $-16 \geq 10$

Nierówność jest sprzeczna.

c) $6x - 9x^2 + 6x - 1 \geq 4x^2 + 12x + 9$
 $-13x^2 \geq 10$
 $x^2 \leq -\frac{10}{13}$

Nierówność jest sprzeczna.

d) Nierówność jest tożsamościowa.

Ćwiczenie 4

- a) $(x + 4)^2 = 0$ dla $x = -4$
b) $(x - 3)^2 = 0$ dla $x = 3$
a) $(x + 5)^2 = 0$ dla $x = -5$
d) $(2x - 1)^2 = 0$ dla $x = \frac{1}{2}$
e) $(5x + 1)^2 = 0$ dla $x = -\frac{1}{5}$
f) $(4x + 1)^2 = 0$ dla $x = -\frac{1}{4}$
g) $(2x + 3)^2 = 0$ dla $x = -\frac{3}{2}$
h) $(3x + 2)^2 = 0$ dla $x = -\frac{2}{3}$
i) $(3x - \frac{1}{2})^2 = 0$ dla $x = \frac{1}{6}$

Odpowiedzi do zadań

- $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, tak
 - $\frac{3+\sqrt{2}}{7}$, tak
 - $3\sqrt{5}-6$, tak
 - $-\frac{4\sqrt{2}+2}{7}$, nie
 - $4\sqrt{3}-6$, tak
 - $12\sqrt{2}+16$, nie
 - $\sqrt{6}+\sqrt{5}$, nie
 - $2\sqrt{5}-2\sqrt{3}$, tak
 - $2\sqrt{7}+2\sqrt{2}$, nie
 - $\sqrt{6}-2$, tak
 - $-\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{5}$, nie
 - $\frac{1+2\sqrt{2}}{7}$, tak
- $x = \frac{1}{4}$
 - $x = 1,3$
 - $x \in \mathbb{R}$
 - sprzeczne
 - $x = 18$
 - $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $x \leq \frac{9}{4}$
 - $x \in \mathbb{R}$
 - $x \leq \frac{4}{3}$
 - $x \geq -\frac{17}{4}$
- $(0; \frac{3}{2})$
 - $(-5; 2]$
 - $(\frac{1}{8}; \frac{8}{3})$
 - $(\frac{3}{2}; 5]$
- $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 - $2 + \sqrt{3}$
 - $4 + 2\sqrt{2}$
 - $2\sqrt{2} - \sqrt{6}$
 - $7 + 4\sqrt{3}$
- $x \leq -\frac{5}{2}$
 - $x < 5$
 - $x \leq \frac{2}{3}$
 - $x < \frac{17}{3}$

Zadania

- Usuń niewymierność z mianownika. Czy podana liczba należy do przedziału $(0; 4)$?
 - $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$
 - $\frac{1}{3-\sqrt{2}}$
 - $\frac{3}{2+\sqrt{5}}$
 - $\frac{2}{1-2\sqrt{2}}$
 - $\frac{6}{3+2\sqrt{3}}$
 - $\frac{8}{3\sqrt{2}-4}$
 - $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$
 - $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$
 - $\frac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$
 - $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
 - $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$
 - $\frac{1+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$
- Rozwiąż równanie.
 - $(x-5)(x+5) = x^2 - 100x$
 - $(3-x)^2 - (x+\frac{1}{3})^2 = \frac{2}{9}$
 - $4(\frac{1}{2}x-3)^2 = (6-x)^2$
 - $4(x+2)^2 - (2x-1)^2 = 20x + 10$
 - $(6+\frac{1}{3}x)(-\frac{1}{3}x+6) + (\frac{1}{3}x-4)^2 = 4$
 - $(-4x-3)(4x-3) + 8(1-\sqrt{2}x)^2 = 1$
- Rozwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań.
 - $4(x-3)^2 - (2x-5)^2 \geq 2$
 - $9(\frac{2}{3}x-1)^2 > (1-2x)^2 - 8x$
 - $-9(2-x)^2 - (1-3x)(3x+1) \leq 11$
 - $(\frac{1}{4}x+2)^2 + 14(1-\frac{1}{2}x)(1+\frac{1}{2}x) \geq 0$
- Wyznacz przedział będący zbiorem liczb spełniających obie nierówności.
 - $$\begin{cases} (x+1)^2 > x^2 + 1 \\ (x-1)^2 < (2-x)^2 \end{cases}$$
 - $$\begin{cases} (2x+5)(5-2x) + (2x-3)^2 - 2 > 0 \\ (x-\frac{1}{2})^2 - 4 < x - (2-x)(2+x) \end{cases}$$
 - $$\begin{cases} \frac{x-3}{4} < \frac{x+1}{2} \\ (2x-3)^2 \leq (5-2x)^2 \end{cases}$$
 - $$\begin{cases} x - \frac{4x-2}{3} \geq x - 6 \\ 1 - (2x-1)(1+2x) < -2x - (2x-1)^2 \end{cases}$$

Sprawdź się

- Usuń niewymierność z mianownika.
 - $\frac{1}{\sqrt{2}}$
 - $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$
 - $\frac{4}{2-\sqrt{2}}$
 - $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+2}$
 - $\frac{3+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3}$
- Rozwiąż równanie.
 - $(x-1)^2 - (x+2)^2 = 6$
 - $(3-x)^2 + (2x+1)^2 = 5x^2$
 - $x^2 - (x-4)(4+x) = 2$
 - $(\frac{x}{2}+3)(\frac{x}{2}-3) = (\frac{x}{2}-1)^2$
- Rozwiąż nierówność.
 - $(x+3)^2 - (x+2)^2 \leq 0$
 - $(4-x)^2 + (2+x)^2 > 2x^2$
 - $9x^2 + (2+3x)(2-3x) \geq 6x$
 - $(\frac{3}{2}x-4)(\frac{3}{2}x+4) < (\frac{3}{2}x-1)^2$
- $$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 - (x^2 + 4x + 4) &= 6 \\ -6x - 3 &= 6 \\ x &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$
 - $$\begin{aligned} 9 - 6x + x^2 + 4x^2 + 4x + 1^2 &= 5x^2 \\ -2x &= -10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$
 - $$\begin{aligned} x^2 - (x^2 - 16) &= 2 \\ 16 &= 2 \end{aligned}$$

równanie sprzeczne
 - $$\begin{aligned} \frac{x^2}{4} - 9 &= \frac{x^2}{4} - x + 1 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

2.11. Wartość bezwzględna

Definicja

Liczbę $|a|$ określoną za pomocą wzoru:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

nazywamy **wartością bezwzględną** liczby a .

Oznaczenie $|a|$ wprowadził Karl Weierstrass [czyt. wajersztras] w 1841 r.

Zwróć uwagę, że $|a|$ jest zawsze liczbą nieujemną: $|a| \geq 0$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$.

Uczeń:

- oblicza wartość bezwzględną danej liczby,
- upraszcza wyrażenia z wartością bezwzględną,
- rozwiązuje elementarne równania i nierówności z wartością bezwzględną, stosując interpretację geometryczną.

Przykład 1

a) $|3,5| = 3,5$ b) $|-3,5| = -(-3,5) = 3,5$ c) $|0| = 0$ d) $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$

Przykład 2

a) $|\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$, gdyż $\sqrt{5} - 2 > 0$.
b) $|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$, gdyż $1 - \sqrt{2} < 0$.

Ćwiczenie 1

Podaj wartość bezwzględną liczby.

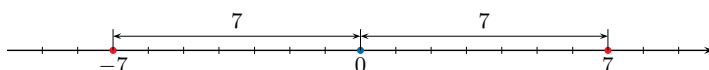
a) 5 b) -5 c) $\sqrt{3} - 1$ d) $\sqrt{3} - 3$ e) $4 - 3\sqrt{2}$ f) $5 - 2\sqrt{5}$

Ćwiczenie 1

- a) 5
b) 5
c) $\sqrt{3} - 1$
d) $3 - \sqrt{3}$
e) $3\sqrt{2} - 4$
f) $5 - 2\sqrt{5}$

Interpretacja geometryczna wartości bezwzględnej

Wartość bezwzględna liczby x to jej odległość na osi liczbowej od liczby 0.



Liczby -7 i 7 leżą w tej samej odległości od 0 na osi liczbowej i mają tę samą wartość bezwzględną, równą 7.

$$|-7| = 7 \quad \text{ i } \quad |7| = 7$$

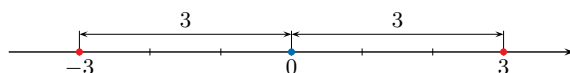
Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$:

$$|-a| = |a|$$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $|x| = 3$.

Ponieważ zgodnie z interpretacją geometryczną wartość bezwzględna liczby x jest równa jej odległości na osi liczbowej od 0, jedynymi liczbami spełniającymi równanie są -3 oraz 3 .



Ćwiczenie 2

- a) $x = -2$ lub $x = 2$
b) $x = -10$ lub $x = 10$
c) $x = 0$
d) brak rozwiązań

Ćwiczenie 3

- a) x b) y c) x

Ćwiczenie 4

- a) $|\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}$
b) $|4 - 2\sqrt{3}| = 4 - 2\sqrt{3}$
c) $|2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

Ćwiczenie 2

Podaj, dla jakich wartości x spełnione jest równanie:

- a) $|x| = 2$, b) $|x| = 10$, c) $|x| = 0$, d) $|x| = -3$.

Ćwiczenie 3

Która z liczb x , y ma większą wartość bezwzględną?

- a) $x = 7$, $y = -6$ b) $x = -10$, $y = -12$ c) $x = -8$, $y = 0$

Przypomnijmy, że:

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Na przykład: $\sqrt{5^2} = |5| = 5$ oraz $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$.

Ćwiczenie 4

Oblicz.

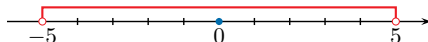
- a) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$ b) $\sqrt{(4 - 2\sqrt{3})^2}$ c) $\sqrt{(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2}$

Korzystając z interpretacji geometrycznej, możemy rozwiązywać niektóre nierówności z wartością bezwzględną.

Przykład 4

- a) Rozwiąż nierówność $|x| < 5$.

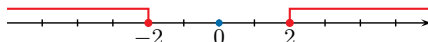
Zaznaczamy na osi liczbowej zbiór tych liczb x , których odległość od 0 jest mniejsza od 5.



Nierówność jest spełniona przez $-5 < x < 5$, zatem $x \in (-5; 5)$.

- b) Rozwiąż nierówność $|x| \geq 2$.

Zaznaczamy na osi liczbowej zbiór tych liczb x , których odległość od 0 jest większa lub równa 2.



Nierówność jest spełniona przez $x \leq -2$ oraz przez $x \geq 2$, zatem:

$$x \in (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$$

Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność i zaznacz na osi liczbowej jej zbiór rozwiązań.

- a) $|x| < 8$ b) $|x| \leq 4$ c) $|x| > 3$ d) $|x| \geq \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 5

- a) $x \in (-8; 8)$
b) $x \in [-4; 4]$
c) $x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$
d) $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}; \infty)$

Ćwiczenie 6

Rozwiąż nierówność.

- a) $|x| \geq 0$ b) $|x| \leq 0$ c) $|x| > 0$ d) $|x| < 0$

Zadania

1. Oblicz.

- a) $|2\frac{1}{2}| + |-2\frac{1}{2}|$ c) $|-0,5| + |-0,25| - |0,75|$ e) $1 + |1 - \sqrt{2}|$
b) $|7\frac{1}{4}| - |-7\frac{1}{4}|$ d) $2|-\frac{3}{4}| - 3|\frac{1}{8}| + 4|-\frac{5}{16}|$ f) $\sqrt{3} - |2 - \sqrt{3}|$

2. Oblicz $x + |x|$ oraz $x - 2|x|$.

- a) $x = 5$ b) $x = -3$ c) $x = 2 - \sqrt{6}$ d) $x = 3\sqrt{2} - 4$

3. Wyznacz liczby spełniające równanie.

- a) $2|x| = 8$ c) $\frac{2}{3}|x| = 4$ e) $3|x| + 6 = 7$ g) $3 - 2|x| = 1$
b) $\frac{1}{2}|x| = 7$ d) $-3|x| = -\frac{3}{4}$ f) $\frac{1}{2}|x| - 1 = 3$ h) $9 - \frac{3}{4}|x| = 6$

4. Która nierówność jest tożsamościowa, a która sprzeczna?

- a) $|x| > -7$, $|x| < -7$ b) $|x| \geq -3$, $|x| \leq -3$

5. Które spośród liczb -3 , 3 , $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$ spełniają podany warunek?

- a) $|x| < 3$ b) $|x| < 2$ c) $|x| \geq 1$ d) $|x| \geq 3$

6. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz jako sumę przedziałów zbiór liczb x , które jednocześnie spełniają obie podane nierówności.

- a) $|x| \leq 3$ i $|x| \geq 1$ b) $|x| < 5$ i $|x| > 2$ c) $|x| \leq 4$ i $|x| > 3\frac{1}{2}$

Sprawdź się

7. Oblicz.

- a) $\sqrt{(\sqrt{7} - 3)^2}$ b) $\sqrt{(2\sqrt{2} - 3)^2}$ c) $\sqrt{(3\sqrt{2} - 4)^2}$

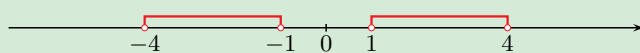
8. Rozwiąż równanie.

- a) $3|x| = 2$ b) $-\frac{3}{2}|x| = -6$ c) $\frac{1}{4}|x| - \frac{1}{2} = 2\frac{3}{4}$ d) $|x| + 2 = 1, (9)$

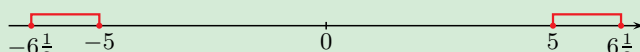
9. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci sumy przedziałów zbiór rozwiązań podanej nierówności.

- a) $1 < |x| < 4$ b) $5 \leq |x| \leq 6\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2} \leq |x| < 3$ d) $\frac{5}{2} \leq |x| \leq \frac{9}{2}$

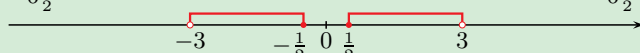
9. a) $(-4; -1) \cup (1; 4)$



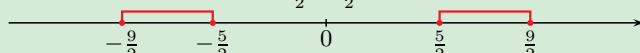
b) $[-6\frac{1}{2}; -5] \cup [5; 6\frac{1}{2}]$



c) $(-3; -\frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{2}; 3)$



d) $[-\frac{9}{2}; -\frac{5}{2}] \cup [\frac{5}{2}; \frac{9}{2}]$



Ćwiczenie 6

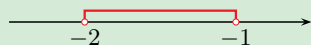
- a) $x \in \mathbb{R}$
b) $x = 0$
c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
d) sprzeczna

Odpowiedzi do zadań

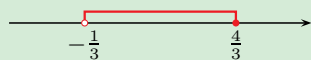
1. a) 5 b) 0 c) 0 d) $\frac{19}{8}$
e) $\sqrt{2}$ f) $2\sqrt{3} - 2$
2. a) $x + |x| = 10$, $x - 2|x| = -5$
b) $x + |x| = 0$, $x - 2|x| = -9$
c) $x + |x| = 0$,
 $x - 2|x| = 6 - 3\sqrt{6}$
d) $x + |x| = 6\sqrt{2} - 8$,
 $x - 2|x| = 4 - 3\sqrt{2}$
3. a) $x = -4$, $x = 4$
b) $x = -14$, $x = 14$
c) $x = -6$, $x = 6$
d) $x = -\frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{4}$
e) $x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{3}$
f) $x = -8$, $x = 8$
g) $x = -1$, $x = 1$
h) $x = -4$, $x = 4$
4. a) $|x| > -7$ dla $x \in \mathbb{R}$,
 $|x| < -7$ dla $x \in \emptyset$
b) $|x| \geq -3$ dla $x \in \mathbb{R}$,
 $|x| \leq -3$ dla $x \in \emptyset$
5. a) $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$
b) $1 - \sqrt{2}$
c) -3 , $1 + \sqrt{2}$, 3
d) -3 , 3
6. a) $[-3; -1] \cup [1; 3]$
b) $(-5; -2) \cup (2; 5)$
c) $[-4; -3\frac{1}{2}] \cup (3\frac{1}{2}; 4]$
7. a) $|\sqrt{7} - 3| = 3 - \sqrt{7}$
b) $|2\sqrt{2} - 3| = 3 - 2\sqrt{2}$
c) $|3\sqrt{2} - 4| = 3\sqrt{2} - 4$
8. a) $x = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{2}{3}$
b) $x = -4$, $x = 4$
c) $x = -13$, $x = 13$
d) $x = 0$

Odpowiedzi do zadań

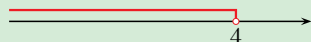
1. a) $(-2; -1)$



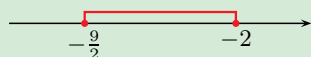
b) $(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}]$



c) $(-\infty; 4)$



d) $[-\frac{9}{2}; -2]$



2. a) $x \leq 3\frac{1}{3}$

b) $x > -1$

c) $x > -5$

d) $x < \frac{1}{3}$

e) $x \leq 5$

f) $x < 6$

3. a) $2x^2 + 6x + 5$

b) $2x^2 + 2x + 13$

c) $-16x$

d) $-4x + 8$

e) $8x^2 - 16x + 10$

f) $-5x^2 + 10x$

4. a) $2x^2 - 29$

b) 15

c) $5x^2 + 9$

d) -6

5. a) $2 - 2x; -2\sqrt{3}$

b) $12x - 12; 12\sqrt{3}$

6. a) 22

b) $8\sqrt{3}$

c) $6 - 8\sqrt{3}$

d) 26

7. a) $2 + 2\sqrt{3}$

b) $4 + 2\sqrt{3}$

c) $-2 - \sqrt{3}$

d) $3 - \sqrt{3}$

8. a) -1

b) $-9 + 4\sqrt{5}$

c) 18

Powtórzenie

Zestaw I

1. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz jako przedział zbiór liczb jednocześnie spełniających obie nierówności.

a) $3x + 14 > 8$ i $5 < 1 - 4x$

c) $4x + 3 < 19$ i $21 - 2x \geq 7$

b) $3x + 2 > 1$ i $3x \leq 4$

d) $2x + 7 \geq -2$ i $-4x \geq 3x + 14$

2. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{3}{4}x \leq \frac{5}{2}$

c) $\frac{x-3}{4} < \frac{x+1}{2}$

e) $x - \frac{4x-2}{3} \geq x - 6$

b) $\frac{1-x}{2} < 1$

d) $\frac{x}{3} - \frac{1-x}{6} < 0$

f) $\frac{x-\frac{1}{3}}{2} - \frac{x-\frac{1}{2}}{3} < 1$

3. Zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x+1)^2 + (x+2)^2$

c) $(x-4)^2 - (x+4)^2$

e) $(2x-1)^2 + (2x-3)^2$

b) $(x+3)^2 + (x-2)^2$

d) $(x-3)^2 - (x-1)^2$

f) $(2x+1)^2 - (3x-1)^2$

4. Uprość wyrażenie.

a) $(x-2)(x+2) + (x+5)(x-5)$

c) $(5-2x)(5+2x) - (3x+4)(4-3x)$

b) $(x-1)(x+1) - (x-4)(x+4)$

d) $(\frac{1}{2}-x)(x+\frac{1}{2}) + (x+\frac{5}{2})(x-\frac{5}{2})$

5. Oblicz wartość wyrażenia dla $x = \sqrt{3} + 1$.

a) $(x-1)^2 - (x-1)(x+1)$

b) $(x+3)^2 - (x-3)^2 - 12$

6. Oblicz.

a) $(\sqrt{2}+3)^2 + (\sqrt{2}-3)^2$

c) $(2\sqrt{3}-1)^2 - (\sqrt{3}+2)^2$

b) $(2+\sqrt{3})^2 - (2-\sqrt{3})^2$

d) $(2\sqrt{3}-1)^2 + (2\sqrt{3}+1)^2$

7. Zapisz podaną liczbę w postaci $a+b\sqrt{3}$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi.

a) $\frac{4}{\sqrt{3}-1}$

b) $\frac{2}{2-\sqrt{3}}$

c) $\frac{2}{2\sqrt{3}-4}$

d) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

8. Dla liczb $x = 2 - \sqrt{5}$ i $y = 2 + \sqrt{5}$ oblicz:

a) iloczyn x i y ,

b) iloraz x i y ,

c) sumę kwadratów x i y .

9. Zapisz podane wyrażenie jako kwadrat sumy lub kwadrat różnicy. Dla jakich wartości x wyrażenie to przyjmuje wartość równą 0?

a) $x^2 + 10x + 25$

c) $9x^2 - 6x + 1$

e) $9x^2 + 12x + 4$

b) $x^2 - 16x + 64$

d) $16x^2 + 8x + 1$

f) $\frac{1}{4}x^2 + x + 1$

9. a) $(x+5)^2, x = -5$

b) $(x-8)^2, x = 8$

c) $(3x-1)^2, x = \frac{1}{3}$

d) $(4x+1)^2, x = -\frac{1}{4}$

e) $(3x+2)^2, x = -\frac{2}{3}$

f) $(\frac{1}{2}x+1)^2, x = -2$

Zestaw II

1. Wyznacz zbiory $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

- a) $A = [-1; 4]$, $B = (2; 5)$ d) $A = (-\infty; 0]$, $B = [0; 4]$
 b) $A = [2; 7]$, $B = (3; 5]$ e) $A = (-\infty; -1)$, $B = (-2; 4)$
 c) $A = [-4; 2]$, $B = [2; 9)$ f) $A = (2; \infty)$, $B = [0; 5)$

2. Ile liczb całkowitych spełnia jednocześnie obie nierówności?

a) $\begin{cases} 2x + 3 \geq 4x - 5 \\ 2 - x \leq -(1 - 2x) \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 < \frac{1}{3}x + 2 \\ -\frac{2}{3}x - 1 > \frac{1}{3} - x \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x-1}{4} \leq 1 \\ \frac{1}{6}x > -1 - \frac{x}{3} \end{cases}$

3. Rozwiąż równanie.

a) $(x+2)(2-x) = 6x - x^2$ c) $(x+3)^2 = (x-5)(x+5)$
 b) $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 5 = (\frac{1}{2}x - 4)(\frac{1}{2}x + 4)$ d) $(x - \frac{1}{2})^2 = x^2 - \frac{1}{2}$

4. Wyznacz liczbę całkowitą n tak, aby rozwiązanie równania należało do przedziału $(n; n+2)$.

a) $(x+2)^2 - (x-2)^2 = 56$ c) $(x-3)(x+3) + (4-x)(4+x) = 2x$
 b) $(x-3)^2 - (4-x)^2 = 13$ d) $(2x-1)(1+2x) - (2x-1)^2 = 6$

5. Rozwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej otrzymany zbiór rozwiązań.

a) $9(x+1)^2 - (3x-1)^2 \geq -4$ c) $4(3+x)^2 - (2x-1)(2x+1) \leq 13$
 b) $4(\frac{1}{2}x - 2)^2 < (1-x)^2 + 7$ d) $(2-3x)(3x+2) > 3 - (3x-1)^2$

6. Podaj najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą nierówność.

a) $(x-1)^2 - (x+1)^2 \leq 28$ c) $(x-2)(2+x) + (4-x)(4+x) \leq 3x$
 b) $(x+2)^2 - (3-x)^2 > 5$ d) $(3x-1)^2 - (3x+1)(3x-1) < 20$

7. Sprawdź, czy liczba p jest liczbą wymierną.

a) $p = (3 - \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2} - 3)^2$ b) $p = (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$

D 8. Uzasadnij, że liczba q jest liczbą wymierną.

a) $q = \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ b) $q = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}+3}$ c) $q = \frac{1}{3+\sqrt{5}} + \frac{5}{5-\sqrt{5}}$

9. Wymień wszystkie liczby całkowite x spełniające podany warunek.

a) $|x| \leq 4$ b) $0 < |x| < 3$ c) $2 \leq |x| \leq 4$

10. Oblicz wartość podanego wyrażenia dla $x = -2\frac{1}{2}$.

a) $||x| - 3| - \frac{1}{2}$ b) $|1 - |x|| + \frac{1}{2}$ c) $||x| - 6| - |x|$

8. a) $q = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} - \frac{\sqrt{2}+1}{2+1} = \sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}+1}{3} = -2$

b) $q = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} + \frac{6\sqrt{3}-18}{3-9} = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 3 = 5$

c) $q = \frac{3-\sqrt{5}}{9-5} + \frac{5(5+\sqrt{5})}{25-5} = \frac{3-\sqrt{5}}{4} + \frac{5+\sqrt{5}}{4} = 2$

9. a) $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$

b) $-2, -1, 1, 2$

c) $-4, -3, -2, 2, 3, 4$

10. a) 0 b) 2 c) 1

1. a) $A \cap B = (2; 4]$,
 $A \cup B = [-1; 5]$,
 $A \setminus B = [-1; 2]$, $B \setminus A = (4; 5)$
 b) $A \cap B = (3; 5]$,
 $A \cup B = [2; 7]$,
 $A \setminus B = [2; 3] \cup (5; 7)$, $B \setminus A = \emptyset$
 c) $A \cap B = \{2\}$,
 $A \cup B = [-4; 9]$,
 $A \setminus B = [-4; 2)$, $B \setminus A = (2; 9)$
 d) $A \cap B = \{0\}$,
 $A \cup B = (-\infty; 4]$,
 $A \setminus B = (-\infty; 0)$,
 $B \setminus A = (0; 4]$
 e) $A \cap B = (-2; -1)$,
 $A \cup B = (-\infty; 4]$,
 $A \setminus B = (-\infty; -2]$,
 $B \setminus A = [-1; 4)$
 f) $A \cap B = (2; 5)$,
 $A \cup B = [0; \infty)$,
 $A \setminus B = [5; \infty)$, $B \setminus A = [0; 2]$

2. a) $x \in [1; 4]$, 4

b) $x \in (4; 6)$, 1

c) $x \in (-2; 1\frac{2}{3}]$, 3

3. a) $x = \frac{2}{3}$

b) $x = 7$

c) $x = -\frac{17}{3}$

d) $x = \frac{3}{4}$

4. a) $x = 7$, $n = 6$

b) $x = 10$, $n = 9$

c) $x = 3\frac{1}{2}$, $n = 2$ lub $n = 3$

d) $x = 2$, $n = 1$

5. a) $x \geq -\frac{1}{2}$

b) $x > \frac{4}{3}$

c) $x \leq -1$

d) $x < \frac{1}{3}$

6. a) -7

b) 2

c) 4

d) -2

7. a) $p = 28 - 18\sqrt{2}$, nie jest

b) $p = 16$, jest

**D Przykład 1**

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 3 sumy kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych jest równa 2.

Rozpatrzmy trzy kolejne liczby naturalne: n , $n + 1$, $n + 2$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Suma kwadratów tych liczb:

$$\begin{aligned} S &= n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = \\ &= n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = \\ &= 3n^2 + 6n + 5 = 3(n^2 + 2n + 1) + 2 \end{aligned}$$

Ponieważ $n^2 + 2n + 1$ jest liczbą naturalną, reszta z dzielenia S przez 3 jest równa 2.

- Zauważ, że aby wykazać, że reszta z dzielenia liczby S przez 3 jest równa 2, przedstawiliśmy tę liczbę w postaci $3k + 2$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.
- Konieczne jest rozumowanie dotyczące dowolnych kolejnych trzech liczb naturalnych, bo sprawdzenie dla konkretnych liczb naturalnych, np.:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14 = 3 \cdot 4 + 2$$

czy:

$$11^2 + 12^2 + 13^2 = 121 + 144 + 169 = 434 = 3 \cdot 144 + 2$$

nie jest wystarczającym uzasadnieniem.

→ Zadanie 25, str. 110

D Przykład 2

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 4 sumy kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych jest równa 3.

Trzy kolejne liczby nieparzyste można zapisać w postaci $2n + 1$, $2n + 3$, $2n + 5$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$. Rozpatrywaną sumę oznaczamy przez S .

$$\begin{aligned} S &= (2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 + (2n + 5)^2 = \\ &= (4n^2 + 4n + 1) + (4n^2 + 12n + 9) + (4n^2 + 20n + 25) = \\ &= 12n^2 + 36n + 35 = 4(3n^2 + 9n + 8) + 3 \end{aligned}$$

Ponieważ $3n^2 + 9n + 8$ jest liczbą całkowitą, reszta z dzielenia S przez 4 jest równa 3.

- Zauważ, że aby wykazać, że reszta z dzielenia liczby S przez 4 jest równa 3, liczbę S przedstawiliśmy w postaci $4k + 3$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- Konieczne jest rozumowanie dotyczące dowolnych kolejnych trzech liczb nieparzystych, bo sprawdzenie dla konkretnych liczb nieparzystych, np.:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 = 1 + 9 + 25 = 35 = 4 \cdot 8 + 3$$

czy:

$$(-7)^2 + (-5)^2 + (-3)^2 = 49 + 25 + 9 = 83 = 4 \cdot 20 + 3$$

nie jest wystarczającym uzasadnieniem.

→ Zadanie 25, str. 110



W zadaniach 1–9 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

A jest zbiorem kwadratów liczb naturalnych, a B – zbiorem ich sześciątów. Ile liczb mniejszych od 200 należy do zbioru $B \setminus A$?

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 0

Zadanie 2 (0–1)

$A = (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}) \cap \mathbb{Z}$ jest zbiorem

- A. siedmioelementowym. C. czteroelementowym.
B. sześćelementowym. D. pustym.

Zadanie 3 (0–1)

Zbiór $\mathbb{R} \setminus (-1; 1)$ można zapisać w postaci

- A. $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$ C. $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$
B. $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ D. $\{-1, 1\}$

Zadanie 4 (0–1)

Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x}{2} + 2 < \frac{x}{3}$ jest przedział

- A. $(-\infty; 12)$ B. $(-\infty; -12)$ C. $(-12; \infty)$ D. $(12; \infty)$

Zadanie 5 (0–1)

Zbiór wszystkich liczb spełniających jednocześnie dwie nierówności $1 - x \geq 2$ i $2x + 4 > -6$ można zapisać w postaci przedziału

- A. $(-5; -1]$ B. $(-5; -1)$ C. $[-5; -1]$ D. $(-\infty; -5)$

Zadanie 6 (0–1)

Dla dowolnych liczb a i b zachodzi równość

- A. $(a - 2b)^2 = a^2 - 4b^2$ C. $(a - 2b)^2 = a^2 - 2ab + 4b^2$
B. $(a - 2b)^2 = a^2 + 4b^2$ D. $(a - 2b)^2 = a^2 - 4ab + 4b^2$

Zadanie 7 (0–1)

Dla dowolnej liczby x wyrażenie $\frac{x^2}{9} - \frac{2}{3}x + 1$ jest równe

- A. $(-\frac{x}{3} + 1)^2$ B. $(-\frac{x}{3} - 1)^2$ C. $(-\frac{x}{3} - 3)^2$ D. $(\frac{2}{3}x - 1)^2$

Zadanie 8 (0–1)

Ułamek $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$ jest równy

- A. $1 + \sqrt{2}$ B. $-1 - \sqrt{2}$ C. $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{1+\sqrt{3}}{3-2\sqrt{2}}$

Zadanie 9 (0–1)

Liczba $|\sqrt{3} - 4|$ należy do przedziału

- A. $(-\infty; 0)$ B. $[0; 2,3)$ C. $[2,3; 4)$ D. $[4; \infty)$

8. $\frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-2} = \frac{1+\sqrt{2}}{-1} = -1 - \sqrt{2}$

9. $|\sqrt{3} - 4| \approx 2,27$

1. $A = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, \dots\}$
 $B = \{1, 8, 27, 64, 125, 216, \dots\}$
 $B \setminus A = \{8, 27, 125, 216, \dots\}$
Do zbioru $B \setminus A$ należą trzy liczby mniejsze od 200.
2. $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

4. $3x + 12 < 2x$
 $x < -12$
 $x \in (-\infty; -12)$

5. $1 - x \geq 2$ i $2x + 4 > -6$
 $-x \geq 1$ i $2x > -10$
 $x \leq -1$ i $x > -5$
 $x \in (-5; -1]$

**Zadanie 10**

Dane są liczby $a = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ i $b = (\sqrt{3} + 1)^2$.

Zadanie 10.1 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Obie podane liczby są niewymierne.	P	F
Liczba b jest większa od liczby a .	P	F

Zadanie 10.2 (0-1)

Uzupełnij zdanie.

Największą liczbą całkowitą mniejszą od b jest liczba ?.

Zadanie 11 (0-1)

Dana jest nierówność $(x - 3)^2 - (x - 1)^2 \geq -2$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Podaną nierówność spełnia nieskończenie wiele liczb naturalnych.	P	F
Liczba $x = 2\sqrt{3}$ spełnia tę nierówność.	P	F

Zadanie 12 (0-1)

Dane jest wyrażenie $(x - \frac{1}{2}y)^2 - (x + \frac{1}{2}y)^2$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y podane wyrażenie jest równe

A.	$-\frac{1}{2}xy,$	ponieważ	1.	$(x - \frac{1}{2}y)^2 = x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2$ oraz $(x + \frac{1}{2}y)^2 = x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2.$
B.	$-xy,$		2.	$(x - \frac{1}{2}y)^2 = x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2$ oraz $(x + \frac{1}{2}y)^2 = x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2.$
C.	$-2xy,$		3.	$(x - \frac{1}{2}y)^2 = x^2 - 2xy + \frac{1}{4}y^2$ oraz $(x + \frac{1}{2}y)^2 = x^2 + 2xy + \frac{1}{4}y^2.$

Zadanie 13 (0-2)

Oblicz wartość wyrażenia $(x - 4y)^2 - (4y + x)^2$ dla $x = \frac{1}{4}$ i $y = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

$$10.1. a = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(4 + 2\sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3})} = \sqrt{16 - 12} = \sqrt{4} = 2 - \text{liczba wymierna}$$

$$b = (\sqrt{3} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 4 + 2\sqrt{3} - \text{liczba niewymierna większa od liczby } a$$

$$12. (x - \frac{1}{2}y)^2 - (x + \frac{1}{2}y)^2 = x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 - (x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2) = x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 - x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{4}y^2 = -2xy$$

13. Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów i otrzymujemy:

$$(x - 4y)^2 - (4y + x)^2 = -16xy$$

$$-16xy = -16 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = -\sqrt{3}$$

10.2. 7

$$11. (x - 3)^2 - (x - 1)^2 = \\ = (x - 3 - x + 1)(x - 3 + x - 1) = \\ = -2(2x - 4) \\ -2(2x - 4) \geq -2 \\ 2x - 4 \leq 1 \\ x \leq 2\frac{1}{2}$$

Nierówność spełniają tylko trzy liczby naturalne: 0, 1, 2.

$$2\sqrt{3} = \sqrt{12} > \sqrt{9} = 3 > 2\frac{1}{2}$$

Liczba $2\sqrt{3}$ nie spełnia tej nierówności.

**Zadanie 14 (0-2)**

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Liczba $(2\sqrt{6}a - \sqrt{2})^2$ jest całkowita dla

A. $a = \sqrt{6}$

C. $a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

E. $a = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - 8$

B. $a = \frac{\sqrt{6}}{2}$

D. $a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

F. $a = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{3}$

Zadanie 15 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Dla dowolnych liczb p, q , jeśli $p < q$, to $p^2 < q^2$.	P	F
Dla dowolnych różnych od zera liczb p, q , jeśli $p < q$, to $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$.	P	F

Zadanie 16 (0-1)

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Suma $|3 - 2\sqrt{3}| + |4\sqrt{3} - 7|$ jest równa

A.	$4 - 2\sqrt{3}$,	ponieważ	1.	$3 - 2\sqrt{3} > 0$ i $4\sqrt{3} - 7 > 0$.
B.	$6\sqrt{3} - 10$,		2.	$3 - 2\sqrt{3} < 0$ i $4\sqrt{3} - 7 < 0$.
			3.	$3 - 2\sqrt{3} < 0$ i $4\sqrt{3} - 7 > 0$.

Zadanie 17 (0-2)

Dane są liczby $a = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ i $b = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$.

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

1. Iloczyn ab jest równy

A. 1

B. 2

C. $2\sqrt{6}$

D. 5

2. Iloczyn $(b + a)(b - a)$ jest równy

E. $4\sqrt{6}$

F. $10 - 4\sqrt{6}$

G. $10 + 4\sqrt{6}$

H. $-4\sqrt{6}$

Zadanie 18 (0-2)

Zapisz w postaci przedziału zbiór rozwiązań nierówności:

$$(3 - 2x)^2 \leq (2x - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 2x)$$

Zadanie 19 (0-2)

Podaj liczby naturalne spełniające nierówność $(4x + 3)^2 - (4x - 3)^2 \leq 100$.

$$17. ab = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{(5 - 2\sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6})} = \sqrt{5^2 - (2\sqrt{6})^2} = \sqrt{25 - 24} = 1$$

$$(b + a)(b - a) = b^2 - a^2 = (\sqrt{5 + 2\sqrt{6}})^2 - (\sqrt{5 - 2\sqrt{6}})^2 = 5 + 2\sqrt{6} - 5 + 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$$

$$18. (3 - 2x)^2 \leq (2x - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 2x) \\ 9 - 12x + 4x^2 \leq (2x - \sqrt{3})(2x + \sqrt{3})$$

$$9 - 12x + 4x^2 \leq 4x^2 - 3$$

$$-12x \leq -12$$

$$x \geq 1$$

Zbiór rozwiązań nierówności: $[1; \infty)$.

19. Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów:

$$(4x + 3 - 4x + 3)(4x + 3 + 4x - 3) \leq 100$$

$$6 \cdot 8x \leq 100$$

$$x \leq 2\frac{1}{12}$$

Liczby naturalne spełniające tę nierówność: 0, 1, 2.

$$14. (2\sqrt{6}a - \sqrt{2})^2 =$$

$$= 24a^2 - 8\sqrt{3}a + 2$$

$$A. 24 \cdot 6 - 8\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} + 2 =$$

$$= 24 \cdot 6 + 2 - 24\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$B. 24 \cdot \frac{6}{4} - 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} + 2 =$$

$$= 36 + 2 - 12\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$C. 24 \cdot \frac{27}{4} - 8\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 =$$

$$= 6 \cdot 27 - 36 + 2 \in \mathbb{Z}$$

$$D. 24 \cdot \frac{8}{9} - 8\sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} + 2 =$$

$$= 24 \cdot \frac{8}{9} + 2 - \frac{16}{3}\sqrt{6} \notin \mathbb{Z}$$

$$E. a = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - 8 =$$

$$= 6 - 2\sqrt{12} + 2 - 8 =$$

$$= -2\sqrt{12} = -4\sqrt{3}$$

$$24 \cdot 48 - 8\sqrt{3} \cdot (-4\sqrt{3}) + 2 =$$

$$= 24 \cdot 48 + 32 \cdot 3 + 2 \in \mathbb{Z}$$

15. Dla $p = -1$ oraz $q = 0$ zachodzi nierówność $p < q$ oraz nie zachodzi nierówność $p^2 < q^2$.

Dla $p = 1$ oraz $q = 2$ zachodzi nierówność $p < q$ oraz nie zachodzi nierówność $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$.

16. $3 - 2\sqrt{3} = \sqrt{9} - \sqrt{12} < 0$, więc

$$|3 - 2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3} - 3$$

$$4\sqrt{3} - 7 = \sqrt{48} - \sqrt{49} < 0,$$

$$\text{więc } |4\sqrt{3} - 7| = 7 - 4\sqrt{3}$$

$$\text{Zatem } |3 - 2\sqrt{3}| + |4\sqrt{3} - 7| =$$

$$= 2\sqrt{3} - 3 + 7 - 4\sqrt{3} = 4 - 2\sqrt{3}.$$



20. $\sqrt{2}x - 3\sqrt{2} < 6 - x$

$$x(\sqrt{2} + 1) < 6 + 3\sqrt{2}$$

$$x < \frac{6 + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} =$$

$$= \frac{3(2 + \sqrt{2})}{\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} =$$

$$= \frac{3(2\sqrt{2} - 2 + 2 - \sqrt{2})}{2 - 1} = 3\sqrt{2},$$

więc $x < 3\sqrt{2}$. Ponieważ:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{18} < \sqrt{25} = 5$$

więc $3\sqrt{2} < 5$.

Ponadto $3\sqrt{2} > 4$.

Zatem daną nierówność spełniają cztery liczby naturalne dodatnie: 1, 2, 3, 4.

21. $|10 - 10\sqrt{10}| = 10(\sqrt{10} - 1)$

$$\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{\frac{100}{9}}$$

$$3 < \sqrt{10} < \frac{10}{3}$$

$$2 < \sqrt{10} - 1 < \frac{7}{3}$$

$$20 < 10(\sqrt{10} - 1) < \frac{70}{3}$$

$$20 < 10(\sqrt{10} - 1) < 23\frac{1}{3}$$

Zatem $n = 5$.

22. $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} \approx 3,7$

$$x \in (-9; -2 - \sqrt{3}] \cup [2 + \sqrt{3}; 9)$$

Warunek ten spełnia 10 liczb całkowitych.

24. Rozważmy dwie kolejne liczby nieparzyste: $2n + 1$ i $2n + 3$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.

Wówczas różnica:

$$(2n + 3)^2 - (2n + 1)^2 =$$

$$= 4n^2 + 12n + 9 - 4n^2 - 4n - 1 =$$

$$= 8n + 8 = 8(n + 1)$$

jest podzielna przez 8.

27. $(2 - \sqrt{2})x \geq 2$

$$x \geq \frac{2}{2 - \sqrt{2}} \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2(2 + \sqrt{2})}{4 - 2} = 2 + \sqrt{2}$$

$$x \in [2 + \sqrt{2}; \infty)$$

$$2 + \sqrt{2} < 2 + 1,5 = \frac{7}{2}$$

$$(\frac{7}{2}; \infty) \subset [2 + \sqrt{2}; \infty)$$

Zatem każda liczba

$$x \in (\frac{7}{2}; \infty)$$

spełnia tę nierówność.

28. $x \in (-3; 2]$



29. $x \in [\frac{1}{2}; 4\frac{1}{2}]$

Obie nierówności spełniają cztery liczby całkowite: 1, 2, 3, 4.

D Zadanie 20 (0-3)

Uzasadnij, że nierówność $\sqrt{2}x - 3\sqrt{2} < 6 - x$ spełniają cztery liczby naturalne dodatnie.

Zadanie 21 (0-2)

Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną n spełniającą nierówność:

$$n^2 \geq |10 - 10\sqrt{10}|$$

Zadanie 22 (0-2)

Ile liczb całkowitych x spełnia warunek $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} \leq |x| < 9$?

D Zadanie 23 (0-2)

Uzasadnij, że dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$ liczba $(3k - 1)^2 + (3k + 1)^2 + (3k + 2)^2 - 3k^2$ jest podzielna przez 6.

D Zadanie 24 (0-2)

Uzasadnij, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.

D Zadanie 25 (0-4) → Przykład 1 i 2, str. 106

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 8 sumy kwadratów czterech kolejnych liczb nieparzystych jest równa 4.

Zadanie 26 (0-4)

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} : \frac{a \cdot b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ dla $a = 3 + \sqrt{2}$ i $b = 3 - \sqrt{2}$.

D Zadanie 27 (0-3)

Uzasadnij, że każda liczba z przedziału $(\frac{7}{2}; \infty)$ spełnia nierówność:

$$\sqrt{2}x + 2 \leq 2x$$

Zadanie 28 (0-4)

Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających jednocześnie obie nierówności.

$$\begin{cases} \frac{1-x}{2} < \frac{5-x}{4} \\ (2x-1)^2 \geq (2x-3)(2x+3) + 2 \end{cases}$$

Zadanie 29 (0-4)

Ile jest liczb całkowitych spełniających jednocześnie obie nierówności?

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x - (\frac{1}{8} - \frac{1}{2}x) \geq x - \frac{5}{4} \\ (2-x)^2 \leq (x+1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 23. (3k-1)^2 + (3k+1)^2 + (3k+2)^2 - 3k^2 &= \\ &= 9k^2 - 6k + 1 + 9k^2 + 6k + 1 + 9k^2 + 12k + 4 - 3k^2 = \\ &= 24k^2 + 12k + 6 = 6(4k^2 + 2k + 1) \end{aligned}$$

Zatem jest to liczba podzielna przez 6.

25. Cztery kolejne liczby nieparzyste: $2n + 1$, $2n + 3$, $2n + 5$, $2n + 7$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$.

$$S = (2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 + (2n + 5)^2 + (2n + 7)^2 =$$

$$= 16n^2 + 64n + 84 = 8(2n^2 + 8n + 10) + 4$$

Ponieważ $2n^2 + 8n + 10$ jest liczbą całkowitą, reszta z dzielenia S przez 8 jest równa 4.

$$26. \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} : \frac{a \cdot b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{ab} = \frac{a - b}{(a - b)ab} = \frac{1}{ab}$$

$$\frac{1}{(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})} = \frac{1}{7}$$