

NOWA
MATeMATyka

Nowość
EDYCJA 2024

Podręcznik Nauczyciela

1

LICEUM • TECHNIKUM • ZAKRES PODSTAWOWY I ROZSZERZONY



ZMIANY
W PODSTAWACH
2024



oznaczenia
usuniętych
treści

Podręcznik Nauczyciela zawiera:

- podręcznik ucznia z oznaczeniami treści, które od września 2024 r. nie są już wymagane ✂
- odpowiedzi do wszystkich ćwiczeń i zadań
- rozwiązania trudniejszych zadań
- odnośniki do Multibooka
- komentarze merytoryczne

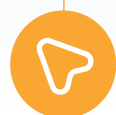
Program nauczania i inne materiały
dydaktyczne są dostępne w portalu:

dlanauczyciela.pl

nowa
era

Elektroniczna wersja podręcznika uczniowskiego wzbogacona o zasoby cyfrowe. Kreatory wykresów, animacje, plansze interaktywne ułatwiają wprowadzanie nowych pojęć i zagadnień.

Pobierz aplikację i zacieka swych uczniów



1. Potwierdź w koncie Moja Nowa Era, że uczysz z serii NOWA MATeMATyka.



2. Pobierz aplikację *Multibook – matematyka* ze strony dlanauczyciela.pl i zainstaluj ją na swoim komputerze.



3. Zaloguj się w aplikacji danymi z konta Moja Nowa Era.



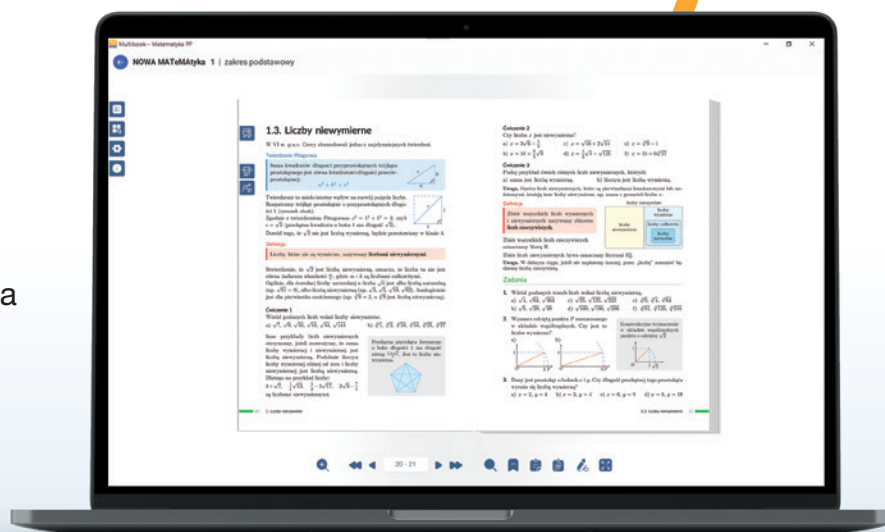
4. Wyświetlaj podręczniki i zasoby na tablicy lub monitorze interaktywnym.



Dodawaj własne notatki i linki.



Powiększaj zadania z podręcznika.



NOWA
MATeMATyka

Podręcznik Nauczyciela

1

LICEUM • TECHNIKUM • ZAKRES PODSTAWOWY I ROZSZERZONY

NOWA MATEMATyka

Podręcznik Nauczyciela 1 został przygotowany do podręcznika autorstwa Wojciecha Babińskiego, Lecha Chańko, Jerzego Janowicza, Doroty Ponczek, Ewy Szmytkiewicz, Karoliny Wej
NOWA MATEMATyka 1 dopuszczonego do użytku szkolnego i wpisanego do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w szkołach ponadpodstawowych w zakresie podstawowym i rozszerzonym (988/1/2024/z1).

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujemy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl

Wykorzystywanie treści niniejszego Utworu, w jakiegokolwiek formie lub w jakimkolwiek procesie, do celów eksploracji tekstu i danych, uczenia maszynowego, rozwoju i/lub szkolenia i/lub wzbogacania sztucznej inteligencji jakiegokolwiek rodzaju jest surowo zabronione.



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2024
ISBN 978-83-267-5154-7

W publikacji zamieszczono strony z podręcznika *NOWA MATEMATyka* dla klasy 1 szkoły ponadpodstawowej w zakresie podstawowym i rozszerzonym.

© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2024

Autor komentarzy i rozwiązań zadań: Barbara Jedynak, Jacek Klisowski.

Redakcja merytoryczna: Anna Drażek, Beata Zajęc.

Redakcja językowa: Paulina Szulim.

Opieka graficzna: Maciej Galiński, Marcin Oleksak.

Projekt graficzny: Ewa Kaletyn.

Projekt okładki: Maciej Galiński.

Rysunki merytoryczne: Lech Chańko.

Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko.

Zdjęcie na okładce: Shutterstock/Vink Fan.

Zdjęcia: Archiwum NE s. 41 (Merkury, Ziemia, Jowisz); BE&W: Alamy Stock Photo - Alvey&Towers Picture Library s. 149, Bruce Leighty - Sports Images s. 164, Science History Images s. 38; Getty Images: Alexander Hassenstein/Staff s. 342 (pchnięcie kulą), E+/Deerpilot s. 63, E+/mbirdy s. 273, iStock/Getty Images Plus - GeorgiosArt s. 71, westphalia s. 51, Moment - George Pachantouris s. 123, Rob Kroenert s. 315; Shutterstock: Africa Studio s. 192, Alex-505 s. 143 (10 centów), Amanda Carden s. 41 (Słońce), Bojan Pavlukovic s. 17, ch123 s. 301, Delpixel s. 146 (łódź na rzece), Gertjan Hooijer s. 342 (gaszenie pożaru na statku), Inger Eriksen s. 243, Jonathan Larsen s. 332 (radioteleskopy), Juice Dash s. 163, Kurt Kleemann s. 332 (reflektor), Lukas Gajda s. 221, mexrix s. 342 (morze - tło), Nadia Korol s. 148, Potapov Alexander s. 98, rs00l s. 143 (5 centów), Tongsaï s. 146 (kuter), Tony Baggett s. 143 (25 centów); Lech Chańko s. 9, 24, 214, 300.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w publikacji. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Druk i oprawa: Drukarnia Orthdruk

NOWA MATeMATyka

1 PODRĘCZNIK • LICEUM • TECHNIKUM
ZAKRES PODSTAWOWY I ROZSZERZONY

WOJCIECH BABIAŃSKI
LECH CHAŃKO
JERZY JANOWICZ
DOROTA PONCZEK
EWA SZMYTKIEWICZ
KAROLINA WEJ

**nowa
era** *Twoje mocne strony*

NOWA MATeMATyka

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w zakresie podstawowym i rozszerzonym, na podstawie opinii rzeczoznawców:

dr. hab. Edwarda Tutaja, mgr. Tadeusza Marczewskiego, dr hab. Anny Cegieli.

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa

Rok dopuszczenia: 2024

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 988/1/2024/z1

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum (2024)* autorstwa Agnieszki Kamińskiej i Doroty Ponczek.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl

Wykorzystywanie treści niniejszego Utworu, w jakiegokolwiek formie lub w jakimkolwiek procesie, do celów eksploracji tekstu i danych, uczenia maszynowego, rozwoju i/lub szkolenia i/lub wzbogacania sztucznej inteligencji jakiegokolwiek rodzaju jest surowo zabronione.



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2024

ISBN 978-83-267-5018-2

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Ewa Kowalik, Katarzyna Radziwińska

Współpraca redakcyjna: Urszula Cielniak

Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak

Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski, Barbara Sasim-Leciejewska

Redakcja językowa: Dorota Rzeszewska

Opieka graficzna: Maciej Galiński, Marcin Oleksak

Projekt graficzny: Marek Błoszko, Ewa Kaletyn, Piotr Stopczyński

Projekt okładki: Maciej Galiński

Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska

Rysunki merytoryczne: Lech Chańko

Ilustracje: Krzysztof Mrawiński

Opracowanie graficzne infografik: Marek Błoszko, Aleksandra Szpunar, Alicja Skupin-Podwojewska

Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Druk i oprawa: Quad/Graphics Europe Sp. z o.o.

Spis treści

► 1. Liczby rzeczywiste

Cechy podzielności liczb – przypomnij sobie	10
1.1. Liczby naturalne	11
Liczby pierwsze – dowiedz się więcej	15
Działania na liczbach całkowitych i ułamkach zwykłych – przypomnij sobie ..	16
1.2. Liczby całkowite. Liczby wymierne	17
1.3. Liczby niewymierne	20
1.4. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej	24
1.5. Pierwiastek kwadratowy	28
1.6. Pierwiastek sześcienny. Pierwiastek n -tego stopnia	31
1.7. Potęga o wykładniku całkowitym	35
Liczby Fermata – dowiedz się więcej	38
1.8. Notacja wykładnicza	39
1.9. Potęga o wykładniku wymiernym	42
1.10. Logarytm i jego własności	45
1.11. Procenty (1)	48
1.12. Procenty (2)	51
Powtórzenie	53
Zadania z kontekstem realistycznym	56
Sposób na zadanie	57
Przed obowiązkową maturą z matematyki	58
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	62

► 2. Język matematyki

2.1. Zbiory	64
2.2. Działania na zbiorach	66
Iloczyn kartezjański zbiorów. Punkty kratowe – dowiedz się więcej	71
Oś liczbowa – przypomnij sobie	72
2.3. Przedziały	73
2.4. Działania na przedziałach	77
Rozwiązywanie równań – przypomnij sobie	80
2.5. Rozwiązywanie nierówności	81
Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian – przypomnij sobie	85
2.6. Wyłączanie jednomianu przed nawias	86
2.7. Mnożenie sum algebraicznych	89
2.8. Wzory skróconego mnożenia	94
2.9. Zastosowanie przekształceń algebraicznych	99

Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia w dowodach – dowiedz się więcej	102
2.10. Wartość bezwzględna	103
Zastosowanie wartości bezwzględnej w dowodach – dowiedz się więcej	106
2.11. Własności wartości bezwzględnej	107
Logika matematyczna – dowiedz się więcej	110
Powtórzenie	114
Zadania z kontekstem realistycznym	116
Sposób na zadanie	117
Przed obowiązkową maturą z matematyki	118
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	122
▶ 3. Układy równań	
Wykorzystanie równań do rozwiązywania zadań – przypomnij sobie	124
3.1. Co to jest układ równań	125
3.2. Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania	128
3.3. Rozwiązywanie układów równań metodą przeciwnych współczynników	134
Układy trzech równań z trzema niewiadomymi – dowiedz się więcej	140
3.4. Układy równań – zadania tekstowe (1)	141
3.5. Układy równań – zadania tekstowe (2)	145
Rozwiązywanie układów równań metodą wyznacznikową – dowiedz się więcej	150
Metoda eliminacji Gaussa – dowiedz się więcej	152
Powtórzenie	154
Zadania z kontekstem realistycznym	156
Sposób na zadanie	157
Przed obowiązkową maturą z matematyki	158
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	162
▶ 4. Funkcje	
4.1. Pojęcie funkcji	164
Układ współrzędnych – przypomnij sobie	169
4.2. Szkicowanie wykresu funkcji (1)	170
4.3. Szkicowanie wykresu funkcji (2)	175
4.4. Monotoniczność funkcji	180
Wykorzystanie wykresu do prezentacji informacji – przypomnij sobie	184
4.5. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (1)	185
4.6. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (2)	189
4.7. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OY	193
4.8. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OX	195
4.9. Wektory w układzie współrzędnych	197

4.10. Przesuwanie wykresu o wektor	200
 4.11. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi układu współrzędnych	202
  4.12. Inne przekształcenia wykresu	206
4.13. Proporcjonalność odwrotna	209
Powtórzenie	212
Zadania z kontekstem realistycznym	214
Sposób na zadanie	215
Przed obowiązkową maturą z matematyki	216
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	220
► 5. Funkcja liniowa	
Punkty kratowe należące do prostej – <i>przypomnij sobie</i>	222
5.1. Wykres funkcji liniowej	223
5.2. Własności funkcji liniowej	228
5.3. Równanie prostej na płaszczyźnie	233
Płaszczyzna w trójwymiarowym układzie współrzędnych – <i>dowiedz się więcej</i>	237
5.4. Współczynnik kierunkowy prostej	238
5.5. Warunek prostokątności prostych	244
5.6. Interpretacja geometryczna układu równań liniowych	248
  5.7. Układy nierówności liniowych	252
Programowanie liniowe – <i>dowiedz się więcej</i>	255
 5.8. Równania i nierówności liniowe z parametrami	256
5.9. Funkcja liniowa – zastosowania	259
Postać parametryczna równania prostej – <i>dowiedz się więcej</i>	262
Powtórzenie	264
Zadania z kontekstem realistycznym	266
Sposób na zadanie	267
Przed obowiązkową maturą z matematyki	268
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	272
► 6. Planimetria	
Kąty – <i>przypomnij sobie</i>	274
6.1. Miary kątów w trójkącie	275
Punkty specjalne w trójkącie	278
6.2. Trójkąty przystające	279
6.3. Twierdzenie Talesa	283
6.4. Wielokąty podobne	287
6.5. Trójkąty podobne	291
Proste i odcinki pomocnicze – <i>dowiedz się więcej</i>	295



Pola czworokątów – przypomnij sobie	296
6.6. Pola wielokątów podobnych	297
6.7. Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie	302
Problemy konstrukcyjne	304
Powtórzenie	306
Zadania z kontekstem realistycznym	308
Sposób na zadanie	309
Przed obowiązkową maturą z matematyki	310
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	314
▶ 7. Funkcja kwadratowa	
7.1. Wykres funkcji $f(x) = ax^2$	316
7.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ o wektor	319
Obliczanie wartości trójmianu kwadratowego – przypomnij sobie	322
7.3. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej	323
7.4. Równania kwadratowe (1)	328
Parabola – dowiedz się więcej	331
7.5. Równania kwadratowe (2)	333
Szkicowanie paraboli – dowiedz się więcej	337
7.6. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej	338
7.7. Nierówności kwadratowe	343
Powtórzenie	346
Zadania z kontekstem realistycznym	348
Sposób na zadanie	349
Przed obowiązkową maturą z matematyki	350
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	353
Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań	354
Indeks	396
Wybrane wzory i twierdzenia matematyczne	400

Odpowiedzi do poleceń i rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Fioletowym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.

R Temat w całości obowiązujący w zakresie rozszerzonym.

7. Zadania, których numery oznaczono kolorem niebieskim, nie należą do głównego toku lekcji, są mniej typowe lub trudniejsze.

D Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.



Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu należy skorzystać z kalkulatora.

1 Liczby rzeczywiste

Podstawowe dane holownika „Stefan” przedstawionego na zdjęciu: długość 28,74 m, szerokość 6,53 m, zanurzenie 2,6 m, prędkość maksymalna 10 węzłów. Prędkość statków morskich podaje się w węzłach, czyli w milach morskich na godzinę. Jedna mila morska (Mm) to przybliżona długość takiego łuku południka, który jest wyznaczony przez 1 minutę kątową (1/60 stopnia). Południk jest w przybliżeniu półokręgiem o długości 20 000 km. Zatem:

$$1 \text{ Mm} \approx \frac{20\,000 \text{ km}}{180 \cdot 60} \approx 1,851852 \text{ km}$$

Otrzymany wynik zaokrągla się do pełnych metrów, czyli przyjmuje się, że $1 \text{ Mm} = 1852 \text{ m}$.



Multibook

- Liczby pierwsze i szyfry
- System dwójkowy w komunikacji pozaziemskej
- Pojawienie się symbolu zera
- System dwójkowy
- Ile waży internet
- Wielkie twierdzenie Fermata
- Cykady wieloletnie i liczby pierwsze
- Liczba Grahama
- Rozwój matematyki w Chinach
- Ułamki w starożytnym Egipcie
- Indie – zasady Brahmagupty

Cechy podzielności liczb

Twierdzenie

Liczba naturalna jest podzielna przez:

- 2, gdy ostatnią jej cyfrą jest jedna z cyfr 0, 2, 4, 6, 8;
- 3, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3;
- 4, gdy jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4;
- 5, gdy ostatnią jej cyfrą jest 0 lub 5;
- 9, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9.

Odpowiedzi do zadań

1. a) 3, 5
b) 2, 3, 9
c) 2, 5
d) 2, 3
2. a), c) nie
b), d) tak
3. a) 0, 4, 8
b) 2, 6
c) 1, 3, 5, 7, 9
d) 0, 4, 8
4. a) 2, 5, 8
b) 1, 4, 7
c) 0, 3, 6, 9
d) nie ma takiej cyfry
5. a), d) tak
b), c) nie
6. a) 6, 12
b) 6, 15
c) przez żadną
d) 6
7. a) $a = 6$
b) $a = 0$ lub $a = 6$
c) $a = 2$ lub $a = 6$
d) $a = 6$
1. Przez które z liczb 2, 3, 5, 9 jest podzielna liczba:
a) 653 925, b) 574 038, c) 946 030, d) 749 298?
2. Czy liczba n jest podzielna przez 4?
a) $n = 63\,874$ b) $n = 58\,052$ c) $n = 35\,406$ d) $n = 47\,796$
3. Jaką cyfrę można podstawić za a , aby dana liczba była podzielna przez 4?
a) $684\,56a$ b) $23\,53a$ c) $21\,5a6$ d) $35\,7aa$
4. Jaką cyfrę można podstawić za a , aby dana liczba była podzielna przez 3?
a) $333\,3a4$ b) $64a\,871$ c) $434\,a4a$ d) $5aa\,6a3$
5. Wyszukaj w dostępnych źródłach cechę podzielności liczby naturalnej przez 8. Sprawdź, czy liczba x jest podzielna przez 8.
a) $x = 713\,592$ b) $x = 639\,044$ c) $x = 480\,658$ d) $x = 817\,296$
6. Przeczytaj przykład obok i podaj przez które z liczb 6, 12, 15 jest podzielna liczba:
a) 775 584, c) 894 665,
b) 868 470, d) 501 474.

Liczba 69 222 jest podzielna przez 2 i przez 3, ale nie jest podzielna przez 4. Zatem liczba ta jest podzielna przez 6, ale nie jest podzielna przez 12.

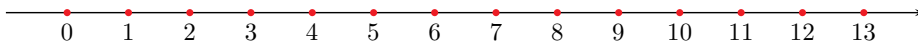
7. Dana jest liczba siedmiocyfrowa $3\,150\,57a$, gdzie a oznacza cyfrę jedności. Wyznacz tę liczbę przy założeniu, że jest ona podzielna przez:
a) 9, b) 6, c) 4, d) 8.
8. Nie wykonując dzielenia, ustal, przez które spośród liczb 15, 45, 75 jest podzielna liczba:
a) 1155, b) 9825, c) 5165, d) 8235.

8. Liczba naturalna jest podzielna przez 45, gdy jest podzielna przez 5 i 9.

Liczba naturalna jest podzielna przez 75, gdy jest podzielna przez 3 i 25, czyli gdy suma cyfr jest podzielna przez 3, a jej ostatnimi cyframi są: 00 lub 25, lub 50, lub 75.

- a) 15
- b) 15, 75
- c) przez żadną
- d) 15, 45

1.1. Liczby naturalne



Liczb naturalnych: 0, 1, 2, 3, ... jest nieskończenie wiele. Dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje następna liczba naturalna: $n + 1$. Na przykład po milionie następuje milion jeden, potem milion dwa, milion trzy, a po trylionie (liczba zapisywana jako jedynka z 18 zerami) – trylion jeden itd.

Zbiór wszystkich liczb naturalnych oznaczamy literą $\mathbb{N}$.

Definicja

Niech m i n będą liczbami naturalnymi oraz $m \neq 0$. Liczbę m nazywamy **dzielnikiem** liczby n , gdy istnieje taka liczba naturalna k , że $n = m \cdot k$.

Jeśli liczba m jest dzielnikiem liczby n , to mówimy, że liczba n jest **podzielna** przez liczbę m lub że liczba n jest **wielokrotnością** liczby m .

Zauważ, że:

- liczba 1 jest dzielnikiem każdej liczby naturalnej,
- liczba 0 nie jest dzielnikiem żadnej liczby,
- każda dodatnia liczba naturalna jest dzielnikiem liczby 0.

Przykład 1

Wymień dzielniki liczby 54.

Liczba 54 ma następujące dzielniki: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54.

Ćwiczenie 1

Wymień dzielniki liczby:

- a) 12, b) 28, c) 36, d) 48.

Podzielność liczb naturalnych zapisujemy w następujący sposób:

- zapis $3 \mid n$ czytamy: 3 dzieli n lub inaczej: liczba n jest podzielna przez 3,
- zapis $7 \nmid n$ czytamy: 7 nie dzieli n lub inaczej: liczba n nie jest podzielna przez 7.

Niech n będzie liczbą naturalną.

Jeśli $2 \mid n$, to liczbę n nazywamy **parzystą**.

Jeśli $2 \nmid n$, to liczbę n nazywamy **nieparzystą**.

Liczbę **parzystą** możemy zapisać w postaci $2k$, a **nieparzystą** – w postaci $2k + 1$, gdzie k jest liczbą naturalną.

Uczeń:

- podaje przykłady liczb pierwszych, liczb parzystych i nieparzystych,
- podaje dzielniki danej liczby naturalnej,
- przedstawia liczbę naturalną w postaci iloczynu liczb pierwszych,
- oblicza NWD i NWW dwóch liczb naturalnych,
- przeprowadza dowody twierdzeń dotyczących podzielności liczb.

Komentarz

Czasem przyjmuje się, że najmniejszą liczbą naturalną jest liczba 1. Warto zwrócić uwagę na to, że jest to kwestia umowy.

Ćwiczenie 1

- a) 1, 2, 3, 4, 6, 12
b) 1, 2, 4, 7, 14, 28
c) 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
d) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

Multibook

- Dzielenie z resztą
- Spirala Ulama
- Algorytm Euklidesa
- Zbiory liczbowe
- Sito Eratostenesa

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.1

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

- a) Tak, suma cyfr tej liczby jest równa 15, więc jest ona podzielna przez 3.
b) Nie, $111 = 11 \cdot 10 + 1$.
c) Tak, liczba jest podzielna przez 5, ale suma cyfr tej liczby wynosi 14, więc liczba nie jest podzielna przez 3, a tym samym nie jest podzielna przez 15.
d) Nie, $4949 : 7 = 707$.

Komentarz

Cechy podzielności przez 2, 3, 5 i 9 przypominane są na s. 14.

Ćwiczenie 3

- a) $26 = 3 \cdot 8 + 2$
b) $76 = 3 \cdot 25 + 1$
c) $108 = 3 \cdot 36$
d) $127 = 3 \cdot 42 + 1$
e) $713 = 3 \cdot 237 + 2$

Ćwiczenie 4

- a) $3 = 4 \cdot 0 + 3$
b) $49 = 4 \cdot 12 + 1$
c) $79 = 4 \cdot 19 + 3$
d) $126 = 4 \cdot 31 + 2$
e) $492 = 4 \cdot 123$

Między liczbami 1 i 100 jest 25 liczb pierwszych: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Komentarz

Warto zwrócić uwagę uczniów na to, że liczba 2 jest jedyną parzystą liczbą pierwszą.

Ćwiczenie 2

Czy podane stwierdzenie jest prawdziwe?

- a) $3 \mid 323\,232$ b) $11 \mid 111$ c) $15 \nmid 2345$ d) $7 \nmid 4949$

Zamiast mówić, że liczba 3 jest dzielnikiem liczby 45, możemy też powiedzieć, że liczba 45 **dzieli się** przez 3 **bez reszty**. $45 : 3 = 15$ reszta 0

W wyniku podzielenia liczby 47 przez 3, otrzymujemy $47 : \text{3} = 15$ reszta 2

Oznacza to, że liczbę 47 możemy przedstawić w postaci $47 = \text{3} \cdot 15 + \text{2}$.

Ćwiczenie 3

Zapisz liczbę w postaci $3k$, $3k + 1$ lub $3k + 2$, gdzie k jest liczbą naturalną.

- a) 26 b) 76 c) 108 d) 127 e) 713

Ćwiczenie 4

Zapisz liczbę w postaci $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$ lub $4k + 3$, gdzie k jest liczbą naturalną.

- a) 3 b) 49 c) 79 d) 126 e) 492

Definicja

Liczbę naturalną, która ma dokładnie dwa dzielniki (1 i samą siebie), nazywamy **liczbą pierwszą**. Każdą liczbę naturalną większą od 1, która nie jest liczbą pierwszą, nazywamy **liczbą złożoną**.

Liczbami pierwszymi są na przykład liczby 7 i 37.

Zwróć uwagę na to, że liczb 0 i 1 nie zaliczamy ani do liczb pierwszych, ani do złożonych (jakie są dzielniki liczby 1, a jakie liczby 0?).

Grecki matematyk Euklides (żyjący na przełomie IV i III w. p.n.e.) udowodnił, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Ćwiczenie 5

Podaj wszystkie liczby pierwsze:

- a) parzyste,
b) mniejsze od 20,
c) większe od 20 i mniejsze od 50,
d) większe od 50 i mniejsze od 100.

Liczby pierwsze między 100 a 1000:

101	179	263	353	443	547	641	739	839	947
103	181	269	359	449	557	643	743	853	953
107	191	271	367	457	563	647	751	857	967
109	193	277	373	461	569	653	757	859	971
113	197	281	379	463	571	659	761	863	977
127	199	283	383	467	577	661	769	877	983
131	211	293	389	479	587	673	773	881	991
137	223	307	397	487	593	677	787	883	997
139	227	311	401	491	599	683	797	887	
149	229	313	409	499	601	691	809	907	
151	233	317	419	503	607	701	811	911	
157	239	331	421	509	613	709	821	919	
163	241	337	431	521	617	719	823	929	
167	251	347	433	523	619	727	827	937	
173	257	349	439	541	631	733	829	941	

Ćwiczenie 5

- a) 2
b) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19
c) 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47
d) 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Rozkład liczby naturalnej na czynniki jest przedstawieniem tej liczby w postaci iloczynu liczb naturalnych większych od 1. Na przykład liczbę 52 można rozłożyć na czynniki następująco:

$$52 = 2 \cdot 26, \quad 52 = 4 \cdot 13, \quad 52 = 2 \cdot 2 \cdot 13$$

Ostatni z tych rozkładów jest rozkładem na czynniki będące liczbami pierwszymi. Mówimy krótko, że jest to **rozkład na czynniki pierwsze**.

Uwaga. Zauważmy, że $2 \cdot 2 \cdot 13$ jest tym samym rozkładem co np. $2 \cdot 13 \cdot 2$.

Twierdzenie

Każdą liczbę złożoną można rozłożyć na czynniki pierwsze. Istnieje dokładnie jeden taki rozkład (z dokładnością do kolejności czynników).

Rozkład na czynniki pierwsze liczby złożonej odbywa się zwykle w kilku krokach. Na przykład dla liczby 150 mamy:

$$150 = 3 \cdot 50 = 3 \cdot 2 \cdot 25 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

Rozkład możemy też zapisać tak, jak podano obok.

$$\begin{array}{r|l} 150 & 3 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Ćwiczenie 6

Podaj rozkłady na czynniki pierwsze liczb 99, 720, 770, 1024, 1323.

Praktycznym zastosowaniem rozkładu na czynniki pierwsze jest wyznaczanie **najmniejszej wspólnej wielokrotności** dwóch liczb – NWW oraz **największego wspólnego dzielnika** – NWD.

Przykład 2

Korzystając z podanych obok rozkładów na czynniki pierwsze liczb 120 i 54, otrzymujemy:

$$\text{NWW}(120, 54) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 1080$$

$$\text{NWD}(120, 54) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Ćwiczenie 7

Oblicz $\text{NWD}(x, y)$ oraz $\text{NWW}(x, y)$.

a) $x = 18, y = 30$

c) $x = 24, y = 72$

e) $x = 84, y = 105$

b) $x = 15, y = 50$

d) $x = 144, y = 192$

f) $x = 196, y = 420$

Ćwiczenie 8

Dane są dwie liczby x i y takie, że żaden czynnik występujący w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby x nie występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby y . Wyznacz $\text{NWD}(x, y)$ i $\text{NWW}(x, y)$.

Ćwiczenie 8

$$\text{NWD}(x, y) = 1, \quad \text{NWW}(x, y) = x \cdot y$$

Komentarz

Liczby, o których jest mowa w ćwiczeniu 8 nazywamy **liczbami względnie pierwszymi**.

Dla $x, y, a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zachodzą następujące własności:

1) $\text{NWD}(x, y) = \text{NWD}(y, x)$

2) $\text{NWW}(x, y) = \text{NWW}(y, x)$

3) $\text{NWD}(a \cdot x, a \cdot y) = a \cdot \text{NWD}(x, y)$

4) $\text{NWD}(x, y) \cdot \text{NWW}(x, y) = x \cdot y$

Komentarz

Liczba 1 na podstawie definicji nie jest liczbą pierwszą. Taką definicję liczb pierwszych przyjęto między innymi po to, by zapewnić jednoznaczność rozkładu liczby na czynniki pierwsze. Gdyby przyjąć, że 1 jest liczbą pierwszą, mielibyśmy dwa możliwe rozkłady na czynniki pierwsze. Na przykład dla liczby 15 byłoby $15 = 3 \cdot 5$ oraz $15 = 1 \cdot 3 \cdot 5$.

Ćwiczenie 6

$$99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$$

$$720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$770 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$

$$1024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$1323 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$$

Ćwiczenie 7

a) $\text{NWD}(18, 30) = 6,$

$$\text{NWW}(18, 30) = 90$$

b) $\text{NWD}(15, 50) = 5,$

$$\text{NWW}(15, 50) = 150$$

c) $\text{NWD}(24, 72) = 24,$

$$\text{NWW}(24, 72) = 72$$

d) $\text{NWD}(144, 192) = 48,$

$$\text{NWW}(144, 192) = 576$$

e) $\text{NWD}(84, 105) = 21,$

$$\text{NWW}(84, 105) = 420$$

f) $\text{NWD}(196, 420) = 28,$

$$\text{NWW}(196, 420) = 2940$$

Odpowiedzi do zadań

- a) 41 b) 26
c) 23 d) 19
- a) $5 \cdot 7 + 4$
b) $5 \cdot 12 + 2$
c) $5 \cdot 31 + 1$
d) $5 \cdot 55 + 0$
- a) nie, $46 = 6 \cdot 7 + 4$
b) tak, $74 = 6 \cdot 12 + 2$
c) tak, $147 = 6 \cdot 24 + 3$
d) nie, $276 = 6 \cdot 46$
- a) $6n + 9$
b) $6n + 3$
c) $6n - 9$
d) $12n + 15$
- a) $\frac{2^3 \cdot 3^4 \cdot 7^3}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^3} = 2 \cdot 3 = 6$
b) $\frac{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 17}{2 \cdot 3^3 \cdot 17} = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 150$
c) $\frac{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3}{3^4 \cdot 5 \cdot 7} = 5 \cdot 7^2 = 245$
d) $\frac{2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7}{3 \cdot 5^2} = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$

- a) 24 b) 120 c) 23

Zadania

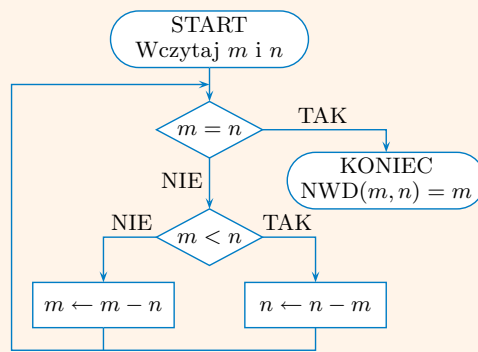
- Ile jest liczb naturalnych mniejszych od 201 i podzielnych przez:
a) 5, b) 8, c) 9, d) 11?
- Przedstaw liczbę n w postaci $5k + r$, gdzie k jest liczbą naturalną, natomiast r jest jedną z liczb 0, 1, 2, 3, 4.
a) $n = 39$ b) $n = 62$ c) $n = 156$ d) $n = 275$
- Czy liczbę n można przedstawić w postaci $6k + r$, gdzie k jest liczbą naturalną, a r jest jedną z liczb 1, 2, 3?
a) $n = 46$ b) $n = 74$ c) $n = 147$ d) $n = 276$
- Wyznacz sumę trzech kolejnych liczb nieparzystych, z których pierwszą jest podana liczba, a n jest liczbą naturalną.
a) $2n + 1$ b) $2n - 1, n > 0$ c) $2n - 5, n > 2$ d) $4n + 3$
- Uzasadnij, że iloczyn:
a) trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 6,
b) trzech kolejnych liczb parzystych jest podzielny przez 48,
c) czterech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 24.

- Oblicz wartość $\frac{NWW(x,y)}{NWD(x,y)}$ dla:

- $x = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3, y = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^3,$
- $x = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 17, y = 2 \cdot 3^4 \cdot 17,$
- $x = 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7, y = 3^4 \cdot 5 \cdot 7^3,$
- $x = 2 \cdot 3 \cdot 5^3, y = 3 \cdot 5^2 \cdot 7.$

Czy wiesz, że...

Największy wspólny dzielnik liczb naturalnych można obliczyć, korzystając z opisanego przez Euklidesa w „Elementach” algorytmu, który przedstawiono obok. Wykorzystuje on fakt, że dzielnik liczb naturalnych m i n jest również dzielnikiem różnicy tych liczb.



- Korzystając z algorytmu Euklidesa, oblicz NWD liczb:
a) 48, 72, b) 360, 600, c) 253, 69.

- a) Liczba jest podzielna przez 6, jeżeli jest podzielna jednocześnie przez 2 i 3. Wśród trzech kolejnych liczb naturalnych dokładnie jedna jest podzielna przez 3 i co najmniej jedna jest podzielna przez 2. Zatem iloczyn tych liczb jest podzielny przez 6.

- Rozważmy trzy kolejne liczby parzyste: $2n, 2n+2, 2n+4$, gdzie n jest liczbą naturalną. Wówczas:

$$2n(2n+2)(2n+4) = 8 \cdot n(n+1)(n+2)$$

Wyrażenie $n(n+1)(n+2)$ jest iloczynem trzech kolejnych liczb naturalnych. Iloczyn ten jest podzielny przez 6 (co wykazaliśmy w punkcie a). Zatem liczba $2n(2n+2)(2n+4)$ jest podzielna przez $8 \cdot 6 = 48$, co było do uzasadnienia.

- Wśród czterech kolejnych liczb naturalnych:

- co najmniej jedna jest podzielna przez 3,
 - dokładnie dwie są parzyste, przy czym jedna z nich jest podzielna przez 4.
- Zatem iloczyn tych liczb jest podzielny przez $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$.

Liczby pierwsze

- Liczba 31415926535897932384626433832795028841 zestawiona z 38 początkowych cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby π jest liczbą pierwszą.
- Duże liczby pierwsze są stosowane przy tworzeniu szyfrów.
- Największa znana liczba pierwsza (znaleziona w grudniu 2018 roku) jest równa $2^{82589933} - 1$, a jej zapis dziesiętny ma 24 862 048 cyfr. Wielkich liczb pierwszych poszukuje się pośród liczb specjalnej postaci, na przykład $2^p - 1$ (tak zwanych liczb Mersenne'a), gdzie p jest liczbą pierwszą.
- Do tej pory nie udało się rozwiązać wielu problemów dotyczących liczb pierwszych. Na przykład nie wiadomo, czy istnieje nieskończenie wiele bliźniaczych liczb pierwszych (bliźniaczymi nazywamy liczby pierwsze różniące się od siebie o 2, np. 3 i 5, 17 i 19 czy też 9 999 971 i 9 999 973).
- Nierozstrzygnięta również pozostaje hipoteza Goldbacha: „Każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych”.

1. W kwadracie magicznym sumy liczb w każdym wierszu, w każdej kolumnie i wzdłuż obu przekątnych są sobie równe (oznaczymy tę sumę literą S). Przerysuj do zeszytu i uzupełnij przedstawiony obok kwadrat magiczny składający się z liczb pierwszych dla $S = 1077$.

569	59	449
239	359	479
269	659	149

Sito Eratostenesa to jedna z metod wyszukiwania kolejnych liczb pierwszych. Zastosujemy ją do wyszukania liczb pierwszych wśród liczb: 2, 3, ..., 24. Zaczynamy od wypisania wszystkich tych liczb, następnie zaznaczamy liczbę 2 – najmniejszą liczbę pierwszą i wykreślamy jej wszystkie wielokrotności:

②, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, 9, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, ~~14~~, 15, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, 21, ~~22~~, 23, ~~24~~

Najmniejsza niewykreślona liczba jest kolejną liczbą pierwszą – jest nią 3. Zaznaczamy ją i wśród pozostałych niewykreślonych liczb wykreślamy wszystkie jej wielokrotności:

②, ③, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, ~~21~~, ~~22~~, 23, ~~24~~

Powyższą procedurę powtarzamy dla kolejnych liczb pierwszych tak długo, aż wszystkie liczby będą albo zaznaczone jako pierwsze, albo wykreślone.

②, ③, ~~4~~, ⑤, ~~6~~, ⑦, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, ⑪, ~~12~~, ⑬, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, ⑰, ~~18~~, ⑲, ~~20~~, ~~21~~, ~~22~~, ⑳, ~~24~~

- D** 2. Stosując sito Eratostenesa, wyznacz wszystkie liczby pierwsze mniejsze od 100. Uzasadnij, że po wykreśleniu wielokrotności liczby 7 wszystkie niewykreślone liczby będą pierwsze.

Odpowiedzi do zadań

2. ②, ③, ~~4~~, ⑤, ~~6~~, ⑦, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, ⑪, ~~12~~, ⑬, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, ⑰, ~~18~~, ⑲, ~~20~~, ~~21~~, ~~22~~, ⑳, ~~24~~, ~~25~~, ~~26~~, ~~27~~, ~~28~~, ⑳, ~~30~~, ⑳, ~~32~~, ~~33~~, ~~34~~, ~~35~~, ~~36~~, ⑳, ~~38~~, ~~39~~, ~~40~~, ⑳, ~~42~~, ⑳, ~~44~~, ~~45~~, ~~46~~, ⑳, ~~48~~, ~~49~~, ~~50~~, ~~51~~, ~~52~~, ⑳, ~~54~~, ~~55~~, ~~56~~, ~~57~~, ~~58~~, ⑳, ~~60~~, ⑳, ~~62~~, ~~63~~, ~~64~~, ~~65~~, ~~66~~, ⑳, ~~68~~, ~~69~~, ~~70~~, ⑳, ~~72~~, ⑳, ~~74~~, ~~75~~, ~~76~~, ~~77~~, ~~78~~, ⑳, ~~80~~, ~~81~~, ~~82~~, ⑳, ~~84~~, ~~85~~, ~~86~~, ~~87~~, ~~88~~, ⑳, ~~90~~, ~~91~~, ~~92~~, ~~93~~, ~~94~~, ~~95~~, ⑳, ~~97~~, ~~98~~, ~~99~~
- Liczby pierwsze: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Gdyby któraś z niewykreślonych liczb była złożona, to dwa z jej czynników pierwszych musiałyby być równe co najmniej 11, co oznaczałoby, że jest równa co najmniej 121. Jest to niemożliwe, więc zostały same liczby pierwsze.

Multibook

• Sito Eratostenesa

Odpowiedzi do zadań

1. a) 0 b) 42
c) 12 d) 5
e) 191 f) -170
2. a) -104 b) 80
c) $3\frac{4}{5}$ d) -33
3. a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{10}{3}$ c) $\frac{31}{7}$
d) $\frac{70}{11}$ e) $\frac{86}{15}$
4. a) $3\frac{2}{3}$ b) $4\frac{1}{4}$ c) $2\frac{5}{8}$
d) $3\frac{5}{9}$ e) $1\frac{24}{25}$
5. a) 1 b) $3\frac{2}{3}$ c) $2\frac{2}{3}$
d) $4\frac{1}{2}$ e) $2\frac{4}{5}$ f) 4
g) $-1\frac{7}{9}$ h) $-1\frac{7}{25}$
6. a) 4 b) $1\frac{4}{7}$
c) $2\frac{10}{11}$ d) $-1\frac{1}{15}$
7. a) $1\frac{1}{5}$ b) $3\frac{1}{3}$ c) $-6\frac{2}{3}$
d) $-5\frac{2}{5}$ e) 20 f) 40
g) $7\frac{1}{2}$ h) 33

Działania na liczbach całkowitych i ułamkach zwykłych

1. Oblicz.

a) $4 - (6 - (12 - 10))$	d) $-9 + ((14 - 6) - (7 - 13))$
b) $6 - 2((8 - 19) - 7)$	e) $-6(-2 \cdot 9 - 17) - 19$
c) $8 - (4 + (-12 - (-4)))$	f) $13(5 - 19) - 3(9 - 13)$
2. Oblicz.

a) $4((13 - 17) - 6(19 - 11)) : 2$	c) $-12 : (4 - 19) - (17 - 8) : (9 - 12)$
b) $8((15 - 3) : 2 + 32 : (-4 + 12))$	d) $(42 : (-6 - 8))((-5 - 17) : (5 - 7))$
3. Zamień liczbę mieszaną na ułamek zwykły.

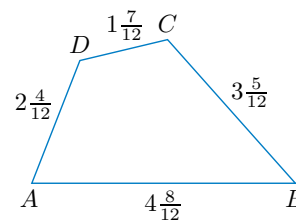
$$2\frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{11}{4}$$
4. Zamień ułamek zwykły na liczbę mieszaną.

$$\frac{19}{5} = \frac{15 + 4}{5} = 3\frac{4}{5}$$
5. Oblicz. Wynik podaj w postaci liczby całkowitej lub mieszanej.

a) $\frac{2}{5} + \frac{3}{5}$	c) $\frac{5}{6} + \frac{11}{6}$	e) $\frac{17}{5} - \frac{3}{5}$	g) $\frac{7}{9} - \frac{23}{9}$
b) $\frac{7}{3} + \frac{4}{3}$	d) $\frac{13}{8} + \frac{23}{8}$	f) $\frac{19}{4} - \frac{3}{4}$	h) $\frac{29}{25} - \frac{61}{25}$
6. Oblicz. Wynik podaj w postaci liczby całkowitej lub mieszanej.

a) $\frac{13}{4} + \frac{17}{4} - \frac{5}{4} - \frac{9}{4}$	c) $\frac{21}{11} - \frac{8}{11} - \frac{13}{11} + \frac{32}{11}$
b) $\frac{25}{7} - \frac{19}{7} + \frac{8}{7} - \frac{3}{7}$	d) $\frac{8}{15} - \frac{26}{15} + \frac{4}{15} - \frac{2}{15}$
7. Oblicz. Wynik podaj w postaci liczby całkowitej lub mieszanej.

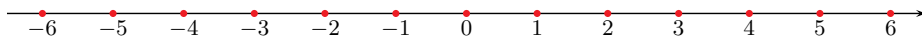
a) $\frac{3}{5} \cdot 2$	c) $\frac{5}{6} \cdot (-8)$	e) $\frac{5}{6} \cdot 24$	g) $1\frac{1}{4} \cdot 6$
b) $\frac{2}{3} \cdot 5$	d) $\frac{9}{10} \cdot (-6)$	f) $\frac{8}{9} \cdot 45$	h) $3\frac{2}{3} \cdot 9$
8. Dany jest czworokąt $ABCD$ (rysunek obok).



- a) Oblicz długość boku kwadratu, którego obwód jest równy obwodowi tego czworokąta.
- b) Stosunek długości boków prostokąta jest równy 2 : 1, a jego obwód jest równy obwodowi czworokąta $ABCD$. Oblicz pole tego prostokąta.

8. a) $Ob_{ABCD} = 4\frac{8}{12} + 3\frac{5}{12} + 1\frac{7}{12} + 2\frac{4}{12} = 10\frac{24}{12} = 12$
bok kwadratu: $a = 12 : 4 = 3$
- b) x – długość krótszego boku prostokąta,
 $2x$ – długość dłuższego boku prostokąta,
 $6x = 12$, czyli $x = 2$
Długości boków prostokąta: 2 i 4, zatem $P = 2 \cdot 4 = 8$.

1.2. Liczby całkowite. Liczby wymierne



Liczby całkowite to liczby naturalne dodatnie: 1, 2, 3, 4, ..., liczby do nich przeciwne: $-1, -2, -3, -4, \dots$ oraz liczba 0.

Zbiór wszystkich liczb całkowitych będziemy oznaczać literą $\mathbb{Z}$.

Zera oraz liczb ujemnych używano w Indiach już w drugiej połowie I tysiąclecia n.e. W Europie przyjęły się dopiero kilkaset lat później. Współcześnie ideę osi liczbowej z zerem i liczbami ujemnymi widzimy np. w termometrze zaokrąglonym, a reguły rachunkowe dotyczące liczb ujemnych są przedmiotem ćwiczeń w szkole podstawowej.



Ćwiczenie 1

Oblicz w pamięci.

- a) $42 - 78$ c) $-240 \cdot (-3)$ e) $7 \cdot (-4) - 2 \cdot (-3) \cdot (-5)$
b) $-47 - (-63)$ d) $-342 + (-139)$ f) $(-16) \cdot (-2) - (-54) : (-9)$

Działania występujące w powyższym ćwiczeniu: dodawanie, odejmowanie oraz mnożenie są zawsze wykonalne w zbiorze liczb całkowitych. Inaczej jest w dzieleniu, gdyż wynik dzielenia liczb całkowitych nie zawsze jest liczbą całkowitą. Na przykład wynik dzielenia $(-3) : (-2) = \frac{3}{2}$ nie jest liczbą całkowitą.

Definicja

Liczby, które można zapisać jako iloraz $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi ($n \neq 0$), nazywamy **liczbami wymiernymi**.

Zbiór wszystkich liczb wymiernych oznaczamy literą $\mathbb{Q}$.

Zwróć uwagę na to, że każda liczba całkowita jest liczbą wymierną (dlaczego?).

Ułamki zazwyczaj przedstawiamy w możliwie najprostszej postaci, a więc w postaci **nieskracalnej**, np.:

$$\frac{180}{480} = \frac{18 \cdot \cancel{10}^1}{48 \cdot \cancel{10}^1} = \frac{18}{48} = \frac{3 \cdot \cancel{6}^1}{8 \cdot \cancel{6}^1} = \frac{3}{8} \quad \text{Ułamek } \frac{3}{8} \text{ jest nieskracalny.}$$

Po doprowadzeniu ułamka do postaci nieskracalnej otrzymujemy ułamek, którego licznik i mianownik to liczby **względnie pierwsze** (nie mają żadnych wspólnych dzielników całkowitych z wyjątkiem liczb 1 i -1).

Uwaga. Określenia **dzielnik** używamy również w odniesieniu do liczb całkowitych, np. liczba -6 ma następujące dzielniki: 1, -1 , 2, -2 , 3, -3 , 6, -6 .

Komentarz

Warto porozmawiać z uczniami o dzielnikach naturalnych i całkowitych.

Uczeń:

- rozpoznaje liczby całkowite i liczby wymierne wśród podanych liczb,
- podaje przykłady liczb całkowitych i wymiernych,
- odczytuje z osi liczbowej współrzędną danego punktu oraz zaznacza punkt o podanej współrzędnej na osi liczbowej,
- wykonuje działania na liczbach wymiernych.

Ćwiczenie 1

- a) -36
b) 16
c) 720
d) -481
e) -58
f) 26

Multibook

- Zbiory liczbowe

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.2

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

- a) $x = y = \frac{3}{8}$
b) $x = y = \frac{5}{9}$
c) $x = \frac{21}{39}, y = \frac{21}{41}, x \neq y$

Ćwiczenie 3

- a) $\frac{5}{12} - \frac{7}{18} = \frac{90}{12 \cdot 18} - \frac{84}{12 \cdot 18} = \frac{6}{12 \cdot 18} = \frac{1}{36}$
b) $\frac{5}{12} - \frac{7}{18} = \frac{15}{36} - \frac{14}{36} = \frac{1}{36}$

Ćwiczenie 4

- a) $-2\frac{13}{24}$
b) $\frac{11}{12}$
c) $3\frac{13}{18}$
d) $2\frac{55}{72}$

Ćwiczenie 5

- a) $2\frac{1}{4}$
b) $-\frac{2}{3}$
c) $-2\frac{7}{9}$
d) 5

Odpowiedzi do zadań

1. a) $A = 10\frac{1}{5}, B = 11\frac{4}{5}, C = 12\frac{1}{5}$
b) $D = -3\frac{3}{7}, E = -1\frac{5}{7}, F = \frac{6}{7}$
c) $G = 2\frac{1}{15}, H = 6\frac{1}{15}, I = 8\frac{11}{15}$
d) $J = -\frac{8}{11}, K = \frac{4}{11}, L = 2\frac{6}{11}$
2. a) $-\frac{17}{30}$ b) $6\frac{5}{24}$
c) 1 d) $-1\frac{5}{12}$
e) $3\frac{2}{15}$ f) $-\frac{31}{48}$
g) $4\frac{1}{24}$ h) $-2\frac{3}{5}$ i) $\frac{7}{60}$
3. a) 14 b) $-2\frac{3}{5}$ c) 8

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy ułamki x i y są równe.

- a) $x = \frac{27}{72}, y = \frac{36}{96}$ b) $x = \frac{60}{108}, y = \frac{75}{135}$ c) $x = \frac{84}{156}, y = \frac{126}{246}$

Czasami trzeba ułamek **rozszerzyć**, na przykład wtedy, gdy chcemy dodać lub odjąć dwa ułamki o różnych mianownikach.

Ćwiczenie 3

Oblicz różnicę $\frac{5}{12} - \frac{7}{18}$, biorąc jako wspólny mianownik ułamków:

- a) iloczyn liczb 12 i 18,
b) NWW(12, 18).

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $1\frac{5}{12} - \frac{9}{8} - 2\frac{5}{6}$ c) $2\frac{2}{9} - 3\frac{5}{6} + 5\frac{1}{3}$
b) $6\frac{3}{4} - 2\frac{2}{3} - 3\frac{1}{6}$ d) $2\frac{2}{9} + 1\frac{5}{12} - \frac{7}{8}$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

- a) $-2\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{27}{28}\right)$ b) $-3\frac{3}{8} : 5\frac{1}{16}$ c) $-1\frac{1}{7} \cdot 1\frac{11}{24} : \frac{3}{5}$ d) $3\frac{1}{2} - 3\frac{1}{6} : \left(-2\frac{1}{9}\right)$

Działania na liczbach wymiernych

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad b \neq 0, d \neq 0$$

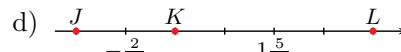
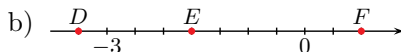
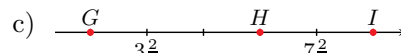
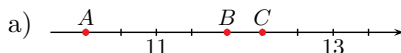
$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} \quad b \neq 0, d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad b \neq 0, d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$$

Zadania

1. Podaj liczby odpowiadające punktom zaznaczonym na osi liczbowej.



2. Oblicz.

- a) $1\frac{3}{5} - 2\frac{1}{6}$ d) $\frac{7}{6} + \left(-\frac{5}{4} - \frac{4}{3}\right)$ g) $1\frac{5}{8} - \left(-2\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)$
b) $3\frac{3}{8} + 2\frac{5}{6}$ e) $- \left(-2\frac{2}{3}\right) + \frac{7}{15}$ h) $1\frac{2}{5} - 3\frac{7}{8} - \frac{1}{8}$
c) $\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)$ f) $-1\frac{9}{16} + \frac{11}{12}$ i) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)$

3. Oblicz wartość podanego wyrażenia dla $x = 1\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{4}, z = -\frac{3}{8}$.

- a) $\frac{x-y}{y-z}$ b) $\frac{x+y-z}{y+z}$ c) $\frac{x-y+2z}{x+y+3z}$

4. Uporządkuj liczby x, y, z w kolejności rosnącej.

$$\text{a) } x = \frac{1 - \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{8} - \frac{8}{7}}, y = 2\frac{3}{5} \cdot 4\frac{6}{11} \cdot 3\frac{5}{13} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right), z = \frac{24}{11} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\frac{3}{4} \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right)$$

$$\text{b) } x = \frac{2\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{2} - 22}{6 - (-5)} + 1\frac{3}{4}, y = \frac{\frac{6}{11} - \frac{15}{45}}{\frac{11}{3} - 2\frac{1}{2}} \cdot 2\frac{3}{4}, z = 2 - \frac{8 - \frac{1}{2}}{12 + \frac{1}{2}}$$

5. Oblicz.

$$\text{a) } \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{5}}{\frac{2}{5} - \frac{1}{2}} + \left(3\frac{2}{17} - 4\frac{6}{13}\right) \cdot \left(\frac{5}{4} - 1\frac{1}{4}\right)$$

$$\text{e) } \frac{3}{5} - \left(\frac{7}{5} \cdot \frac{5}{14} - \frac{9}{10 \cdot 3^2}\right) : \left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$\text{b) } \frac{2}{3} - \left[\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{(-2)^2} - \frac{(-2)^2}{5}\right] : \left(-1\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{f) } \frac{5\frac{3}{4} - 8\frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2} - \frac{2}{3} : \left(-\frac{4}{27}\right)$$

$$\text{c) } \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{5}{3} - \frac{5}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8} : \frac{5}{8}\right)$$

$$\text{g) } \frac{4}{5} : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{2}{3} - \left(\frac{3}{8} - 1\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$\text{d) } \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right) : \left(\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2\right) \quad \text{h) } \left(\left(-1\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-1\frac{1}{3}\right)^2\right) : 4\frac{1}{4}$$

D 6. Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt o bokach długości x, y i z .

$$\text{a) } x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right), y = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right), z = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)^2$$

$$\text{b) } x = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}}, y = \frac{2\frac{1}{5} - \frac{1}{4}}{2\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}, z = \frac{1\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1\frac{2}{3} + \frac{1}{4}}$$

7. **Ułamek egipski** to ułamek postaci $\frac{1}{n}$, gdzie n jest liczbą naturalną dodatnią. Przeczytaj informację obok i przedstaw podany ułamek jako sumę różnych ułamków egipskich.

$$\text{a) } \frac{2}{11}$$

$$\text{b) } \frac{2}{17}$$

$$\text{c) } \frac{2}{31}$$

Czy wiesz, że...

Każdy ułamek postaci $\frac{2}{n}$, gdzie n jest liczbą nieparzystą, można przedstawić jako sumę:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

dla: $a = \frac{n+1}{2}, b = \frac{n(n+1)}{2}$

D 8. Uzasadnij wzór $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$, gdzie n jest liczbą naturalną dodatnią, a następnie oblicz:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10}$$

9. Woda płynąca jednocześnie z kranów A, B i C może napęlnić basen w ciągu 6 godzin. Woda płynąca tylko z kranu A napęlnia w ciągu godziny $\frac{1}{12}$ basenu, a tylko z kranu B – $\frac{1}{15}$ basenu. Ile czasu trwałoby napęlnianie basenu wodą płynącą tylko z kranu C ?

10. Woda płynąca z kranu A napęlnia zbiornik w ciągu 6 godzin. Aby napęlnić ten sam zbiornik wodą płynącą tylko z kranu B , potrzeba 9 godzin. Ile czasu zajmie napęlnienie zbiornika, jeśli kran B odkręcono 4 godziny po odkręceniu kranu A ?

9. W ciągu godziny woda z kranu C napęlnia:

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{15} = \frac{10}{60} - \frac{5}{60} - \frac{4}{60} = \frac{1}{60}$$

basenu. Zatem napęlnienie basenu wodą płynącą tylko z kranu C trwałoby 60 godzin.

10. Kran A napęlnia w ciągu jednej godziny $\frac{1}{6}$ zbiornika, czyli po 4 h będzie napęlnione $\frac{2}{3}$ zbiornika. Do napęlnienia pozostanie $\frac{1}{3}$ zbiornika.

W ciągu jednej godziny woda płynąca jednocześnie z kranów A i B napęlni $\frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$ zbiornika.

$\frac{5}{18}x = \frac{1}{3}$, gdzie x – liczba godzin potrzebnych do napęlnienia $\frac{1}{3}$ zbiornika.

$$x = \frac{6}{5} = 1,2$$

Napęlnienie zbiornika zajmie $4 + 1,2 = 5,2$ [h], czyli 5 godzin 12 minut.

4. a) $x = -3\frac{1}{2}, y = -10, z = -12$, zatem $z < y < x$
b) $x = 1\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = 1\frac{2}{5}$, zatem $y < z < x$

5. a) $-8\frac{2}{3}$ b) $\frac{8}{15}$

c) $-\frac{1}{20}$ d) $1\frac{1}{8}$

e) $2\frac{2}{5}$ f) -42

g) $1\frac{1}{24}$ h) $\frac{1}{9}$

6. **Nierówność trójkąta:** z trzech odcinków można zbudować trójkąt, jeżeli suma długości krótszych odcinków jest większa od długości najdłuższego odcinka.

$$\text{a) } x = \frac{5}{24} = \frac{30}{144},$$

$$y = \frac{5}{12} = \frac{60}{144},$$

$$z = \frac{5}{144}$$

$$x + z = \frac{35}{144} < \frac{60}{144} = y$$

Zatem nie istnieje trójkąt o bokach długości x, y i z .

$$\text{b) } x = 2\frac{1}{2},$$

$$y = \frac{13}{15} < 1,$$

$$z = \frac{22}{23} < 1$$

$$y + z < 2 < 2,5 = x$$

Zatem nie istnieje trójkąt o bokach długości x, y i z .

$$\text{7. a) } \frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$$

$$\text{b) } \frac{2}{17} = \frac{1}{9} + \frac{1}{153}$$

$$\text{c) } \frac{2}{31} = \frac{1}{16} + \frac{1}{496}$$

$$\text{8. } \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}, \text{ co było do uzasadnienia.}$$

Suma:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \\ & + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \\ & + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \\ & + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \\ & + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

Uczeń:

- wskazuje liczby niewymierne wśród podanych liczb,
- konstruuje odcinki o długościach niewymiernych,
- zaznacza na osi liczbowej punkt odpowiadający liczbie niewymiernej,
- szacuje wartości liczb niewymiernych,
- wykazuje, dobierając odpowiednio przykłady, że suma, różnica, iloczyn oraz iloraz liczb niewymiernych nie muszą być liczbami niewymiernymi,
- dowodzi niewymierności liczb, np. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, oraz liczb będących iloczynem lub sumą liczby wymiernej i niewymiernej.

Ćwiczenie 1

- a) $\sqrt{7}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{44}$
b) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{25}$

Multibook

- Dowody twierdzenia Pitagorasa
- Zastosowania twierdzenia Pitagorasa
- Odległość do widnokręgu – zastosowanie twierdzenia Pitagorasa
- Obalenie twierdzenia przez podanie kontrprzykładu
- Zbiory liczbowe
- Liczba π
- Spirala Teodorosa

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.3



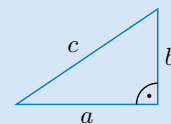
1.3. Liczby niewymierne

W VI w. p.n.e. Grecy sformułowali jedno z najsłynniejszych twierdzeń.

Twierdzenie Pitagorasa

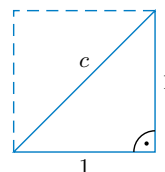
Suma kwadratów długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Twierdzenie to miało istotny wpływ na rozwój pojęcia liczby. Rozpatrzmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 1 (rysunek obok).

Zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa: $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, czyli $c = \sqrt{2}$ (przekątna kwadratu o boku 1 ma długość $\sqrt{2}$).



Okazało się, że nie istnieje liczba wymierna, której kwadrat jest równy 2.

Definicja

Liczby, które nie są wymierne, nazywamy **liczbami niewymiernymi**.

Stwierdzenie, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, oznacza, że liczba ta nie jest równa żadnemu ułamkowi $\frac{m}{k}$, gdzie m i k są liczbami całkowitymi.

Ogólnie, dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $\sqrt{n}$ jest albo liczbą naturalną (gdy jest kwadratem liczby naturalnej, np. $\sqrt{81} = 9$), albo liczbą niewymierną. Np. $\sqrt{82}$ nie jest liczbą naturalną, gdyż $9 = \sqrt{81} < \sqrt{82} < \sqrt{100} = 10$, jest więc liczbą niewymierną. Analogicznie jest dla pierwiastka sześciennego (np. $\sqrt[3]{8} = 2$, a $\sqrt[3]{9}$ jest liczbą niewymierną).

Ćwiczenie 1

Wśród podanych liczb wskaż liczby niewymierne.

- a) $\sqrt{7}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{44}$, $\sqrt{144}$ b) $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{25}$, $\sqrt[3]{27}$

W dowodzie niewymierności liczby $\sqrt{2}$ wykorzystamy następujący fakt: jeśli liczba 2 jest dzielnikiem liczby n , to w rozkładzie liczby n^2 na czynniki pierwsze występuje ona parzystą liczbę razy, np.:

$$18^2 = 18 \cdot 18 = (2 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 3) = \underbrace{2 \cdot 2}_{\text{dwukrotnie}} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$
$$56^2 = 56 \cdot 56 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{sześciokrotnie}} \cdot 7 \cdot 7$$

Komentarz

Warto zwrócić uwagę uczniów na intuicyjnie zrozumiały fakt, że im większa jest liczba, tym większa jest wartość pierwiastka tej liczby. Dowód tego faktu uczniowie poznają w kolejnych latach.

Dowód niewymierności liczby $\sqrt{2}$

Przypuśćmy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną, czyli istnieje ułamek $\frac{m}{k}$ (gdzie m i k są liczbami całkowitymi, $k \neq 0$) taki, że:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{k}, \text{ czyli } 2 = \frac{m^2}{k^2} \\ \text{wtedy } 2k^2 = m^2$$

Zauważmy, że ostatnia równość nie może zachodzić, gdyż oznaczałaby ona, że w rozkładzie na czynniki pierwsze liczba 2 występuje parzystą liczbę razy po stronie prawej i nieparzystą liczbę razy po stronie lewej. Otrzymaliśmy sprzeczność, a więc przypuszczenie, że $\sqrt{2}$ można wyrazić jako ułamek $\frac{m}{k}$, było fałszywe (z prawdy nie może wynikać fałsz). Zatem $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Dowód niewymierności $\sqrt{2}$ jest **dowodem przez sprowadzenie do sprzeczności** (*reductio ad absurdum*). Ten sposób rozumowania polega na wykazaniu, że przyjęcie prawdziwości jakiegoś zdania prowadzi do sprzeczności. Zatem musi być prawdziwe zdanie przeciwne.

Inne przykłady liczb niewymiernych otrzymamy, jeżeli zauważymy, że suma liczby wymiernej i niewymiernej jest liczbą niewymierną. Podobnie iloczyn liczby wymiernej różnej od zera i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną. Dlatego na przykład liczby:

$3 + \sqrt{7}$, $\frac{1}{5}\sqrt{13}$, $\frac{1}{2} - 2\sqrt{17}$, $2\sqrt{3} - \frac{7}{3}$
są liczbami niewymiernymi.

Ćwiczenie 2

Czy liczba x jest niewymierna?

- a) $x = 3\sqrt{6} - \frac{1}{3}$ c) $x = \sqrt{16} + 2\sqrt{14}$ e) $x = \sqrt[3]{9} - 1$
b) $x = 10 + \frac{2}{3}\sqrt{9}$ d) $x = \frac{1}{2}\sqrt{4} - \sqrt{121}$ f) $x = 15 + 6\sqrt[3]{27}$

Ćwiczenie 3

Podaj przykład dwóch różnych liczb niewymiernych, których:

- a) suma jest liczbą wymierną, b) iloczyn jest liczbą wymierną.

Uwaga. Oprócz liczb niewymiernych, które są pierwiastkami kwadratowymi lub sześciennymi, istnieją inne liczby niewymierne, np. znana z geometrii liczba π .

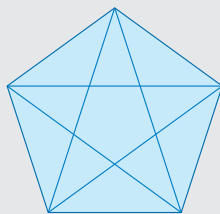
Ćwiczenie 2

- a) jest
b) nie jest, $x = 12$
c) jest, $x = 4 + 2\sqrt{14}$
d) nie jest, $x = -10$
e) jest
f) nie jest, $x = 33$

Ćwiczenie 3

- a) np. $\sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$
b) np. $\sqrt{3}$, $\sqrt{27}$

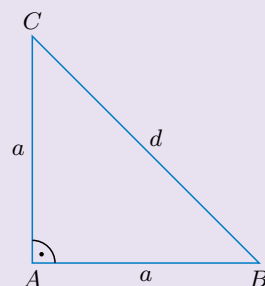
Przekątna pięciokąta foremnego o boku długości 1 ma długość równą $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Jest to liczba niewymierna.



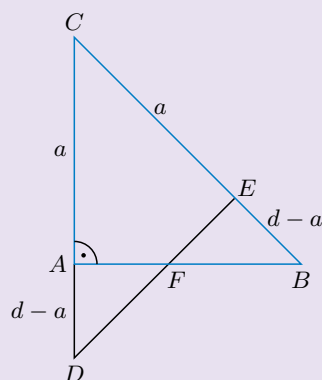
Niewymierność liczby $\sqrt{2}$ można udowodnić geometrycznie.

Przypuśćmy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną, czyli istnieją liczby $d, a \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{d}{a} = \sqrt{2}$ i są to najmniejsze liczby naturalne o tej własności (czyli ułamek $\frac{d}{a}$ jest nieskracalny).

Rozważmy prostokątny trójkąt równoramienny ABC o przyprostokątnych a i przeciwprostokątnej d .



Odcinek CA przedłużamy do odcinka CD o długości d . Wówczas $|AD| = d - a$.



Na przeciwprostokątnej zaznaczmy punkt E taki, że $|CE| = a$, czyli $|EB| = d - a$.

Punkt przecięcia odcinków AB i DE oznaczamy przez F . Zauważmy, że trójkąty DAF i FEB są równoramiennymi trójkątami prostokątnymi o przyprostokątnych $d - a$.

Z faktu, że $|AF| = d - a$ wynika, że:

$$|FB| = a - (d - a) = 2a - d$$

Trójkąty DAF i FEB są podobne do trójkąta ABC , czyli:

$$\sqrt{2} = \frac{d}{a} = \frac{2a - d}{d - a}$$

ale $2a - d < d$ oraz $d - a < a$, co przeczy założeniu, że liczby d i a są najmniejszymi liczbami naturalnymi spełniającymi warunek $\sqrt{2} = \frac{d}{a}$. Zatem $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\sqrt{164}$ b) $\sqrt{29}$
c) $\sqrt{125}$ d) $\sqrt{286}$
e) $\sqrt[3]{4}$ f) $\sqrt[3]{81}$

2. a) $\sqrt{5}$, nie
b) $\sqrt{10}$, nie

3. Niech d oznacza długość przekątnej.

- a) $d = 2\sqrt{5}$, nie
b) $d = 5$, tak
c) $d = 10$, tak
d) $d = 2\sqrt{41}$, nie

4. a) p, q lub p, r
b) q, r
c) q, s
d) q, s

5. a), c), e) jest
b), d), f) nie jest

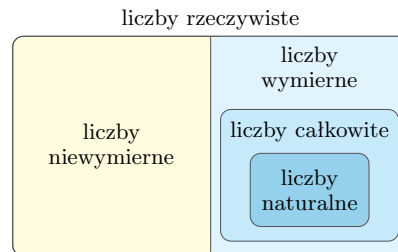
Definicja

Zbiór wszystkich liczb wymiernych i niewymiernych nazywamy zbiorem **liczb rzeczywistych**.

Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych oznaczamy literą $\mathbb{R}$.

Zbiór liczb niewymiernych bywa oznaczany literami $\mathbb{I}\mathbb{Q}$.

Uwaga. W dalszym ciągu, jeżeli nie napiszemy inaczej, przez „liczbę” rozumieć będziemy liczbę rzeczywistą.

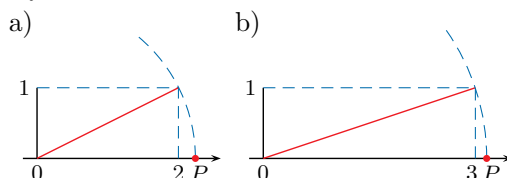


Zadania

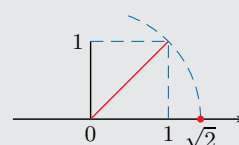
1. Wśród podanych trzech liczb wskaż liczbę niewymierną.

- a) $\sqrt{4}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{164}$ c) $\sqrt{25}$, $\sqrt{125}$, $\sqrt{225}$ e) $\sqrt[3]{0}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{64}$
b) $\sqrt{9}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{49}$ d) $\sqrt{169}$, $\sqrt{196}$, $\sqrt{286}$ f) $\sqrt[3]{81}$, $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{216}$

2. Wyznacz współrzędną punktu P zaznaczonego na osi liczbowej. Czy jest to liczba wymierna?



Konstrukcyjne wyznaczenie na osi liczbowej punktu o współrzędnej $\sqrt{2}$



3. Dany jest prostokąt o bokach x i y . Czy długość przekątnej tego prostokąta wyraża się liczbą wymierną?

- a) $x = 2$, $y = 4$ b) $x = 3$, $y = 4$ c) $x = 6$, $y = 8$ d) $x = 8$, $y = 10$

4. Dane są liczby niewymierne $p = 3 - 2\sqrt{3}$, $q = 2\sqrt{3}$, $r = 2\sqrt{3} - 7$, $s = 7\sqrt{3}$. Wybierz dwie spośród tych liczb tak, aby:

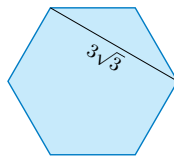
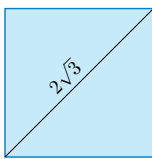
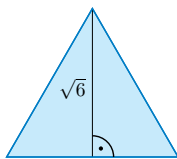
- a) ich suma była liczbą wymierną, c) ich iloczyn był liczbą wymierną,
b) ich różnica była liczbą wymierną, d) ich iloraz był liczbą wymierną.

5. Korzystając z podanych przybliżeń, sprawdź, czy nierówność jest prawdziwa (nie używaj kalkulatora).

- a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 3$ c) $2\sqrt{2} + \sqrt{5} > 5$ e) $4 - 2\sqrt{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\sqrt{5} + \sqrt{3} > 4$ d) $\sqrt{5} - \sqrt{3} < \frac{1}{2}$ f) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{2} < \sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &\approx 1,414 \\ \sqrt{3} &\approx 1,732 \\ \sqrt{5} &\approx 2,236\end{aligned}$$

6. Na rysunkach przedstawiono trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny. Obwód którego z tych wielokątów wyraża się liczbą wymierną?



- D** 7. Przeprowadzając rozumowanie analogiczne do dowodu niewymierności liczby $\sqrt{2}$, udowodnij, że liczba x jest niewymierna.

- a) $x = \sqrt{3}$ b) $x = \sqrt{5}$ c) $x = \sqrt{6}$

- D** 8. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Iloczyn dowolnej liczby niewymiernej x i liczby całkowitej $k \neq 0$ jest liczbą niewymierną.

Dowód. Załóżmy – przeciwnie – że istnieją liczba niewymierna x oraz liczba całkowita $k \neq 0$ takie, że iloczyn $k \cdot x$ jest liczbą wymierną. Oznacza to, że istnieją liczby całkowite m i n ($n \neq 0$) takie, że $k \cdot x = \frac{m}{n}$. Wówczas $x = \frac{m}{k \cdot n}$, z czego wynika, że x jest liczbą wymierną. Otrzymaliśmy sprzeczność, a zatem iloczyn $k \cdot x$ jest liczbą niewymierną.

Udowodnij, że:

- a) iloczyn dowolnej liczby niewymiernej x i liczby wymiernej $w \neq 0$ jest liczbą niewymierną,
b) suma dowolnej liczby niewymiernej x i liczby wymiernej w jest liczbą niewymierną.

- 9.** Przeczytaj podane obok twierdzenie. Podaj przykład liczby niewymiernej x takiej, że:

- a) $1 < x < 2$, b) $0,01 < x < 0,02$, c) $5,001 < x < 5,002$.

Między dwiema różnymi liczbami rzeczywistymi na osi liczbowej znajdują się liczby niewymierne.

- D** 10. Uzasadnij, że jeśli przekątna sześcianu ma długość 3, to jego pole powierzchni wyraża się liczbą wymierną, a objętość – liczbą niewymierną.

- D** 11. Uzasadnij, że wśród dzielników liczby 12 są takie liczby a, b, c , że długość przekątnej prostopadłościanu o krawędziach długości a, b, c jest liczbą wymierną.

9. a) np. $\sqrt{2}$
b) np. $0,01\sqrt{2}$
c) np. $5 + 0,001\sqrt{2}$

10. Niech a będzie krawędzią sześcianu. Wówczas przekątna sześcianu ma długość $a\sqrt{3} = 3$, skąd $a = \sqrt{3}$. Obliczamy pole powierzchni i objętość sześcianu:
 $P_c = 6a^2 = 18$ – jest to liczba wymierna,
 $V = a^3 = 3\sqrt{3}$ – jest to liczba niewymierna.

11. Przekątna prostopadłościanu o krawędziach: a, b, c ma długość $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
Dzielniki liczby 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12.
Niech $a = 2, b = 3, c = 6$, wówczas $d = \sqrt{49} = 7$ – jest to liczba wymierna.
Inne trójki liczb, dla których d jest liczbą wymierną to: 3, 4, 12 oraz 4, 6, 12.

6. obwód trójkąta: $6\sqrt{2}$,
obwód kwadratu: $4\sqrt{6}$,
obwód sześciokąta: 18 – liczba wymierna.

8. a) Załóżmy – przeciwnie – że istnieją liczba niewymierna x oraz liczba wymierna:
 $w = \frac{a}{b} \neq 0$ ($a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$)
takie, że iloczyn $w \cdot x$ jest liczbą wymierną. Oznacza to, że istnieją liczby całkowite m i n takie, że:

$$w \cdot x = \frac{m}{n}, n \neq 0$$

Wówczas:

$$x = \frac{m \cdot b}{n \cdot a}$$

skąd wynika, że x jest liczbą wymierną. Otrzymaliśmy sprzeczność, a zatem iloczyn $w \cdot x$ jest liczbą niewymierną.

- b) Załóżmy – przeciwnie – że istnieją liczba niewymierna x oraz liczba wymierna:

$w = \frac{a}{b} \neq 0$ ($a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$)
takie, że suma $w + x$ jest liczbą wymierną. Oznacza to, że istnieją liczby całkowite m i n takie, że:

$$w + x = \frac{m}{n}, n \neq 0$$

Wówczas:

$$x = \frac{m}{n} - \frac{a}{b} = \frac{mb - na}{nb}$$

skąd wynika, że x jest liczbą wymierną. Otrzymaliśmy sprzeczność, a zatem suma $w + x$ jest liczbą niewymierną.

Uczeń:

- wskazuje liczby wymierne oraz niewymierne wśród liczb podanych w postaci dziesiętnej,
- wyznacza rozwinięcia dziesiętne ułamków zwykłych,
- wyznacza n -tą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego okresowego danej liczby,
- zamienia skończone rozwinięcia dziesiętne na ułamki zwykłe,
- przedstawia ułamki dziesiętne okresowe w postaci ułamków zwykłych,
- zaokrągla liczbę z podaną dokładnością,
- oblicza błąd przybliżenia danej liczby.

Komentarz

Warto zwrócić uczniom uwagę na to, że liczbę w postaci dziesiętnej okresowej można zapisać na kilka sposobów, np.:

$$\begin{aligned}1,393939 \dots &= 1,(39) = \\ &= 1,3(93) = \\ &= 1,(3939)\end{aligned}$$

Jednak zwykle taką liczbę zapisujemy z jak najkrótszym okresem.

Ćwiczenie 1

- a) 0,35
- b) 0,44
- c) 2,08
- d) 2,86
- e) 0,032
- f) 0,068

1.4. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej

Ułamki o mianownikach 10, 100, 1000, ... (czyli mianownikach będących potęgami liczby 10) nazywamy **ułamkami dziesiętnymi**. Mogą one być zapisane na dwa sposoby: $\frac{15}{100} = 0,15$; $\frac{37}{1000} = 0,037$; $5\frac{7}{10} = 5,7$.

Zapis po prawej stronie powyższych równości nazywamy **rozwinięciem dziesiętnym** lub **postacią dziesiętną** liczby. Aby uzyskać postać dziesiętną liczby wymiernej, wykonujemy dzielenie. Na przykład dla liczby $\frac{13}{4}$ otrzymamy:

$$\frac{13}{4} = 13 : 4 = 3,25$$

Dla liczby $\frac{1}{6}$ w wyniku dzielenia otrzymamy:

$$\frac{1}{6} = 0,166666666\dots$$

Takie rozwinięcie zapisujemy w następujący sposób:

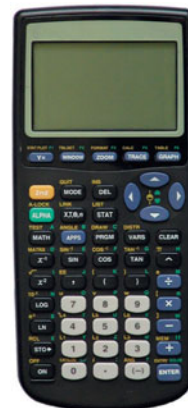
$$\frac{1}{6} = 0,1(6)$$

Dla liczby $\frac{4}{7}$ w wyniku dzielenia otrzymamy:

$$\frac{4}{7} = 0,571428571428571428\dots$$

co zapiszemy $\frac{4}{7} = 0,(571428)$.

Nawias w rozwinięciu dziesiętnym oznacza powtarzanie się nieskończenie wiele razy zapisanej w nim grupy cyfr. Taką najkrótszą powtarzającą się grupę cyfr nazywamy **okresem**, a rozwinięcie dziesiętne możemy też nazwać **okresowym**. Liczbę cyfr występujących w okresie nazywamy **długością okresu**.



Przy obliczeniach na liczbach podanych w postaci dziesiętnej wygodnie jest korzystać z kalkulatora.

Ćwiczenie 1

Przeczytaj podany w ramce przykład, a następnie przedstaw liczbę w postaci dziesiętnej.

- a) $\frac{7}{20}$
- c) $\frac{52}{25}$
- e) $\frac{4}{125}$
- b) $\frac{11}{25}$
- d) $\frac{143}{50}$
- f) $\frac{17}{250}$

Przedstaw liczbę $\frac{6}{25}$ w postaci dziesiętnej.

$$\frac{6}{25} = \frac{6}{25} \cdot \frac{4}{4} = \frac{24}{100} = 0,24$$

Ćwiczenie 2

Jaka cyfra znajduje się na dziesiątym, a jaka na dwudziestym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby?

- a) 0,(1234)
- b) 5,(732)
- c) 2,6(435)
- d) 0,32(1410)

Ćwiczenie 2

- a) dziesiąte miejsce: 2, dwudzieste miejsce: 4
- b) dziesiąte miejsce: 7, dwudzieste miejsce: 3
- c) dziesiąte miejsce: 5, dwudzieste miejsce: 4
- d) dziesiąte miejsce: 0, dwudzieste miejsce: 4

Multibook

- Złota proporcja

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.4

Generator
testów i sprawdzianów

W tabeli poniżej podano długości okresów rozwinięć dziesiętnych nieskracalnego ułamka $\frac{m}{n}$ dla wybranych wartości n .

n	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
długość okresu	6	2	6	16	18	22	28	15	3	5

Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że jeśli ułamek $\frac{m}{n}$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi oraz $n \neq 0$, ma rozwinięcie dziesiętne okresowe, to długość okresu jest mniejsza od n .

Wskazówka. Liczba różnych reszt z dzielenia liczby m przez liczbę n jest mniejsza od n .

Twierdzenie

Każdą liczbę wymierną można zapisać w postaci dziesiętnej skończonej lub nieskończonej okresowej.

Każde rozwinięcie dziesiętne okresowe przedstawia liczbę wymierną.

Uwaga. Rozwinięcia dziesiętne nieskończone nieokresowe przedstawiają liczby niewymierne, np. 0,101001000100001...

Ćwiczenie 4

Wskaż liczby, które mają rozwinięcia dziesiętne nieskończone nieokresowe.

- a) $\sqrt{8}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{\frac{16}{9}}$ b) $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$, $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$

■ Przybliżenia. Reguła zaokrąglania

Mówimy, że liczba x jest **przybliżeniem** liczby a z dokładnością do d , jeśli liczby a i x różnią się o nie więcej niż d . Na przykład liczba 1,414 jest przybliżeniem liczby $\sqrt{2}$ z dokładnością do 0,001.

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356237$$

Ćwiczenie 5

Podaj przybliżenie liczby $\sqrt{2}$ z dokładnością do:

- a) 0,1, b) 0,01, c) 0,0001, d) 0,00001.

Do przybliżenia liczby zapisanej w postaci dziesiętnej zwykle stosujemy **regułę zaokrąglania**, która polega na odrzuceniu końcowych cyfr tej liczby i zastąpieniu ich zerami, przy czym:

- jeżeli pierwszą z odrzuconych cyfr jest 0, 1, 2, 3, 4, to ostatnią z zachowanych cyfr pozostawiamy bez zmian;
- jeżeli pierwszą z odrzuconych cyfr jest 5, 6, 7, 8, 9, to ostatnią z zachowanych cyfr zwiększamy o jeden.

Ćwiczenie 3

Aby znaleźć rozwinięcie dziesiętne liczby $\frac{m}{n}$, dzielimy pisemnie liczbę m przez n . Podczas wyznaczania kolejnych cyfr okresu otrzymujemy reszty mniejsze od n , czyli może ich być maksymalnie $n - 1$. Wiemy, że ułamek $\frac{m}{n}$ jest okresowy, więc pojawienie się którejś z reszt ponownie pociągnie za sobą powtórzenie się okresu. Zatem długość okresu jest mniejsza od n .

Ćwiczenie 4

- a) $\sqrt{8}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$
b) $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{16}$

Ćwiczenie 5

- a) 1,4
b) 1,41
c) 1,4142
d) 1,41421

Ćwiczenie 6

- a) 21
- b) 20
- c) 0
- d) 1
- e) 2

Ćwiczenie 7

- a) 7,8952, 9,9963, 5,9039
- b) 7,895, 9,996, 5,904
- c), d) 7,9, 10, 5,9

Ćwiczenie 8

- a) 3,141593; z nadmiarem
- b) 3,14159; z niedomiarem
- c) 3,1416; z nadmiarem
- d) 3,142; z nadmiarem
- e) 3,14; z niedomiarem

Odpowiedzi do zadań

- 1. a) 0,(7)
- b) 0,01(6)
- c) 0,00(3)
- d) 0,00(5)
- e) 0,3(6)

Przykład 1

Zaokrągleniem liczby 6,9874 do:

- trzech miejsc po przecinku jest liczba 6,987,
- dwóch miejsc po przecinku – liczba 6,99,
- jednego miejsca po przecinku – liczba 7.

Zaokrągleniem liczby nazywamy jej przybliżenie zgodne z regułą zaokrąglania.

Ćwiczenie 6

Zaokrąglaj do liczby całkowitej.

- a) 20,9813 b) 19,901 c) 0,401 d) 1,099 e) 2,49957

Ćwiczenie 7

Podaj zaokrąglenia liczb $x = 7,89517$, $y = 9,99625$ i $z = 5,90394$ do n miejsc po przecinku dla: a) $n = 4$, b) $n = 3$, c) $n = 2$, d) $n = 1$.

Jeżeli przybliżenie liczby jest mniejsze od tej liczby, to mówimy o przybliżeniu z **niedomiarem**. Natomiast jeżeli przybliżenie liczby jest od niej większe, to mówimy o przybliżeniu z **nadmiarem**.

Czy wiesz, że...

W 2002 r. Yasumasa Kanada wyznaczył za pomocą komputera liczbę π z dokładnością do ponad biliona cyfr po przecinku. W praktyce wystarczają znacznie mniej dokładne przybliżenia.

3,141592653589793238462643383279502
88419716939937510582097494459230781
64062862089986280348253421170679821
48086513282306647093844609550582231
72535940812848111745028410270193852
1105596446229489549303819644288109
75665933446128475648233786783165271
20190914564856692346034861045432664

Ćwiczenie 8

Podaj zaokrąglenie liczby π z dokładnością do n miejsc po przecinku. Czy jest to przybliżenie z nadmiarem, czy z niedomiarem?

- a) $n = 6$ b) $n = 5$ c) $n = 4$ d) $n = 3$ e) $n = 2$

Zadania

- 1. Na podstawie podanych obok informacji znajdź rozwinięcie dziesiętne podanej liczby.

- a) $\frac{7}{9}$ b) $\frac{1}{60}$ c) $\frac{1}{300}$ d) $\frac{5}{900}$ e) $\frac{11}{30}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= 0,33333333\dots \\ \frac{1}{6} &= 0,16666666\dots \\ \frac{1}{9} &= 0,11111111\dots\end{aligned}$$

- 2. Jaka cyfra znajduje się na dwudziestym czwartym, a jaka na setnym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby: a) $\frac{2}{7}$, b) $\frac{5}{7}$?

- 2. a) na 24. miejscu: 4, na 100. miejscu: 7
b) na 24. miejscu: 5, na 100. miejscu: 2

3. Liczba o rozwinięciu dziesiętnym okresowym $7,19(1ab693)$ ma na jedenastym miejscu po przecinku cyfrę 3, a na dwudziestym drugim – cyfrę 6. Wyznacz cyfry a i b tego rozwinięcia.

4. Na podstawie podanego obok twierdzenia odpowiedz, czy rozwinięcie dziesiętne ułamka jest skończone czy okresowe.

a) $\frac{633}{320}$ b) $\frac{137}{480}$ c) $\frac{6561}{22\,400}$ d) $\frac{11\,111}{51\,200}$

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Przedstaw liczbę $0,(12)$ w postaci ułamka zwykłego.

$$\begin{aligned} x &= 0,121212\dots \\ 100x &= 12,121212\dots && \text{Obie strony równania mnożymy przez 100, aby przecinek} \\ &&& \text{znalazł się za pierwszym wystąpieniem okresu.} \\ 100x &= 12 + x \\ 99x &= 12 \\ x &= \frac{12}{99} = \frac{4}{33} \end{aligned}$$

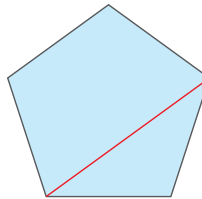
Przedstaw liczbę w postaci ułamka zwykłego.

a) $0,(36)$ b) $3,(72)$ c) $-6,(24)$ d) $0,(9)$ e) $41,7(9)$ f) $2,1(52)$

6. Liczby $x = 0,(6)$ i $y = 4,(36)$ przedstaw w postaci ułamków zwykłych, a następnie oblicz: a) $x + y$, b) $x^2 - y$, c) $x + \frac{1}{y}$.

7. Liczba o rozwinięciu dziesiętnym okresowym $0,(1x2y3)$ ma na dwudziestym trzecim miejscu po przecinku cyfrę dwukrotnie większą od cyfry znajdującej się na miejscu dwudziestym drugim i trzykrotnie mniejszą od cyfry znajdującej się na miejscu dwudziestym czwartym. Wyznacz cyfry x i y .

8. Pięciokąt foremny o boku 1 ma przekątną o długości $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180$. Liczba $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ jest nazywana **złotą liczbą** (patrz str. 63). Jej coraz dokładniejszymi przybliżeniami są ułamki tworzone w następujący sposób: jako pierwszy bierzemy dowolny ułamek $\frac{a}{b}$, gdzie a, b są liczbami naturalnymi oraz $a > b > 0$. Następny ma wówczas postać $\frac{a+b}{a}$, a każdy kolejny powstaje z poprzedniego w analogiczny sposób. Na przykład, jeśli weźmiemy $a = 5$ i $b = 4$, to otrzymamy $\frac{5}{4}, \frac{9}{5}, \frac{14}{9}$ itd. Wyznacz pierwszych osiem takich ułamków i sprawdź, które z nich przybliżają złotą liczbę z dokładnością do 0,005.



8. Pierwsze osiem ułamków:

$$\frac{5}{4} = 1,2500$$

$$\frac{9}{5} = 1,8000$$

$$\frac{14}{9} \approx 1,5556$$

$$\frac{23}{14} \approx 1,6429$$

$$\frac{37}{23} \approx 1,6087$$

$$\frac{60}{37} \approx 1,6216$$

$$\frac{97}{60} \approx 1,6167$$

$$\frac{157}{97} \approx 1,6186$$

Przybliżenia z dokładnością do 0,005: $\frac{60}{37}, \frac{97}{60}, \frac{157}{97}$.

3. $a = 6, b = 3$

4. Wszystkie podane ułamki są nieskracalne.

a) $320 = 2^6 \cdot 5$, zatem rozwinięcie jest skończone.

b) $480 = 3 \cdot 160$, zatem rozwinięcie jest okresowe.

c) $22\,400 = 7 \cdot 3\,200$, zatem rozwinięcie jest okresowe.

d) $51\,200 = 2^{11} \cdot 5^2$, zatem rozwinięcie jest skończone.

5. a) $\frac{4}{11}$

b) $\frac{41}{11}$

c) $-\frac{206}{33}$

d) 1

e) $\frac{209}{5}$

f) $\frac{2131}{990}$

6. $x = \frac{2}{3}, y = \frac{48}{11}$

a) $x + y = 5\frac{1}{33}$

b) $x^2 - y = -3\frac{91}{99}$

c) $x + \frac{1}{y} = \frac{43}{48}$

7. Długość okresu wynosi 5 oraz:

$$22 = 4 \cdot 5 + 2$$

$$23 = 4 \cdot 5 + 3$$

$$24 = 4 \cdot 5 + 4$$

Zatem na miejscach: 22., 23.

i 24. znajdują się odpowiednio cyfry: $x, 2, y$.

Stąd $2 = 2x$ oraz $2 = \frac{1}{3}y$, czyli $x = 1$ i $y = 6$.

Uczeń:

- oblicza wartość pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej,
- wyłącza czynnik przed znak pierwiastka kwadratowego,
- wyznacza wartości wyrażeń arytmetycznych zawierających pierwiastki kwadratowe, stosując prawa działań na pierwiastkach,
- usuwa niewymierność z mianownika, gdy w mianowniku występuje wyrażenie $a\sqrt{b}$, oraz szacuje przybliżoną wartość takich wyrażeń.

Komentarz

Warto zadać uczniom następujące pytanie:

Wiemy, że $\sqrt{a} \geq 0$ dla dowolnej liczby nieujemnej a . Czy może być prawdziwa równość:

$$\sqrt{9x^2} = -3x?$$

Odpowiedź: tak, dla $x \leq 0$.

Ćwiczenie 1

- a) 12
- b) 15
- c) 18
- d) 25
- e) 50
- f) 90
- g) 1,1
- h) 1,9
- i) 2,1

Ćwiczenie 2

- a) 3
- b) 3
- c) 9
- d) 1,2
- e) $\sqrt{3}$

1.5. Pierwiastek kwadratowy

Przypomnijmy definicję pierwiastka kwadratowego.

Definicja

Pierwiastkiem kwadratowym (pierwiastkiem drugiego stopnia) z liczby nieujemnej a nazywamy liczbę nieujemną b , której kwadrat jest równy a .

$$\sqrt{a} = b, \text{ gdy } b^2 = a \text{ i } b \geq 0$$

Przykład 1

$$\sqrt{36} = 6, \text{ ponieważ } 6^2 = 36.$$

$$\sqrt{0,16} = 0,4, \text{ ponieważ } 0,4^2 = 0,16.$$

$$\sqrt{0} = 0, \text{ ponieważ } 0^2 = 0.$$

Zwróć uwagę na to, że $\sqrt{36}$ nie jest równy -6 , ponieważ umówiliśmy się, że pierwiastek kwadratowy jest liczbą nieujemną, aby uniknąć sytuacji, w której $\sqrt{36}$ oznaczałby dwie różne liczby.

Ćwiczenie 1

Zapisz w postaci liczby wymiernej.

a) $\sqrt{144}$

d) $\sqrt{625}$

g) $\sqrt{1,21}$

b) $\sqrt{225}$

e) $\sqrt{2500}$

h) $\sqrt{3,61}$

c) $\sqrt{324}$

f) $\sqrt{8100}$

i) $\sqrt{4,41}$

Prawdziwa jest następująca własność:

Dla dowolnej liczby rzeczywistej:

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

$$\text{Stąd } \sqrt{5^2} = 5 \text{ oraz } \sqrt{(-5)^2} = -(-5) = 5.$$

Ćwiczenie 2

Podaj wartość, korzystając z powyższej własności.

a) $\sqrt{3^2}$

b) $\sqrt{(-3)^2}$

c) $\sqrt{(-9)^2}$

d) $\sqrt{(-1,2)^2}$

e) $\sqrt{(-\sqrt{3})^2}$

Wyznaczenie pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej odpowiada wyznaczeniu długości boku kwadratu, gdy znamy jego pole ($P = a^2$, więc $a = \sqrt{P}$).

Ćwiczenie 3

Oblicz obwód kwadratu o polu: a) $3,24 \text{ cm}^2$, b) 1024 cm^2 .

Ćwiczenie 3

a) bok kwadratu: $1,8 \text{ cm}$, obwód: $7,2 \text{ cm}$

b) bok kwadratu: 32 cm , obwód: 128 cm

$$11^2 = 121$$

$$12^2 = 144$$

$$13^2 = 169$$

$$14^2 = 196$$

$$15^2 = 225$$

$$16^2 = 256$$

$$17^2 = 289$$

$$18^2 = 324$$

$$19^2 = 361$$

$$20^2 = 400$$

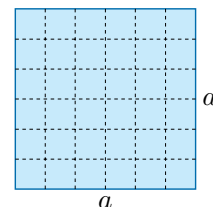
$$21^2 = 441$$

$$22^2 = 484$$

$$23^2 = 529$$

$$24^2 = 576$$

$$25^2 = 625$$



Multibook

• Spirala Teodorosa

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.5

Generator
testów i sprawdzianów

Przy odpowiednich założeniach (jakich?) prawdziwe są podane obok wzory.

Przykład 2

$$a) \sqrt{49 \cdot 144} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{144} = 7 \cdot 12 = 84$$

$$b) \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

$$a) \sqrt{4 \cdot 81}, \sqrt{25 \cdot 0,36}, \sqrt{0,09 \cdot 361}$$

$$c) \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}, \sqrt{6} \cdot \sqrt{1,5}, \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$$

$$b) \sqrt{\frac{121}{144}}, \sqrt{\frac{361}{400}}, \sqrt{\frac{576}{625}}$$

$$d) \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}, \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{14}}{\sqrt{35}}$$

Zadania

1. Oblicz.

$$a) \sqrt{121} + \sqrt{49} - \sqrt{225}$$

$$d) \sqrt{3,61} - \sqrt{1,21} - \sqrt{0,09}$$

$$b) \sqrt{196} - \sqrt{169} - \sqrt{144}$$

$$e) \sqrt{\frac{81}{400}} + \sqrt{\frac{9}{100}} - \sqrt{\frac{64}{25}}$$

$$c) \sqrt{0,25} + \sqrt{1,44} + \sqrt{6,25}$$

$$f) \sqrt{3\frac{6}{25}} - \sqrt{2\frac{1}{4}} + \sqrt{1\frac{7}{9}}$$

D 2. Uzasadnij, że:

$$a) \sqrt{1\frac{9}{16}} \neq \sqrt{1} + \sqrt{\frac{9}{16}}, \quad b) \sqrt{2\frac{1}{4}} \neq \sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}, \quad c) \sqrt{4\frac{1}{9}} \neq \sqrt{4} + \sqrt{\frac{1}{9}}.$$

3. Podaj wszystkie liczby naturalne leżące na osi między liczbami:

$$a) \sqrt{2} \text{ i } \sqrt{33},$$

$$b) \sqrt{10} \text{ i } \sqrt{140},$$

$$c) \sqrt{80} \text{ i } \sqrt{300}.$$

4. Wylącz czynnik przed pierwiastek.

$$a) \sqrt{18}$$

$$c) \sqrt{48}$$

$$e) \sqrt{108}$$

$$g) \sqrt{392}$$

$$\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

$$b) \sqrt{24}$$

$$d) \sqrt{96}$$

$$f) \sqrt{252}$$

$$h) \sqrt{450}$$

5. Zapisz liczbę w postaci $a\sqrt{2}$.

$$a) 4\sqrt{2} + \sqrt{8}$$

$$c) \sqrt{18} + \sqrt{98}$$

$$e) \sqrt{18} + \sqrt{72} + \sqrt{242}$$

$$b) \sqrt{32} - 3\sqrt{2}$$

$$d) \sqrt{200} - \sqrt{50}$$

$$f) \sqrt{800} + \sqrt{242} - \sqrt{162}$$

6. Zapisz liczbę w postaci $a\sqrt{b}$.

$$a) 7\sqrt{5} + \sqrt{20}$$

$$c) \sqrt{12} + \sqrt{75}$$

$$e) 0,2\sqrt{50} + 0,8\sqrt{72} - 0,3\sqrt{32}$$

$$b) \sqrt{48} - \sqrt{27}$$

$$d) \sqrt{45} - \sqrt{125}$$

$$f) 3\sqrt{20} - \frac{1}{3}\sqrt{45} - 5\sqrt{180}$$

$$2. a) \sqrt{1\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}, \quad \sqrt{1} + \sqrt{\frac{9}{16}} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \neq \frac{5}{4}$$

$$\text{Zatem } \sqrt{1\frac{9}{16}} \neq \sqrt{1} + \sqrt{\frac{9}{16}}.$$

$$b) \sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}, \quad \sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{2} + \frac{1}{2} \neq \frac{3}{2}$$

$$\text{Zatem } \sqrt{2\frac{1}{4}} \neq \sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}.$$

$$c) \sqrt{4\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{37}{9}}, \quad \sqrt{4} + \sqrt{\frac{1}{9}} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = \sqrt{\frac{49}{9}} \neq \sqrt{\frac{37}{9}}$$

$$\text{Zatem } \sqrt{4\frac{1}{9}} \neq \sqrt{4} + \sqrt{\frac{1}{9}}.$$

Pierwiastek iloczynu

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Pierwiastek ilorazu

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Założenia do wzorów:

– dla pierwiastka iloczynu:

$$a \geq 0 \text{ i } b \geq 0$$

– dla pierwiastka ilorazu:

$$a \geq 0 \text{ i } b > 0$$

Ćwiczenie 4

$$a) 18, 3, 5, 7$$

$$b) \frac{11}{12}, \frac{19}{20}, \frac{24}{25}$$

$$c) 4, 3, 10$$

$$d) 3, \frac{1}{2}, 2$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) 3

$$b) -11$$

$$c) 4,2$$

$$d) 0,5$$

$$e) -\frac{17}{20}$$

$$f) 1\frac{19}{30}$$

3. a) 2, 3, 4, 5

$$b) 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$$

$$c) 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17$$

$$4. a) 3\sqrt{2} \quad b) 2\sqrt{6}$$

$$c) 4\sqrt{3} \quad d) 4\sqrt{6}$$

$$e) 6\sqrt{3} \quad f) 6\sqrt{7}$$

$$g) 14\sqrt{2} \quad h) 15\sqrt{2}$$

$$5. a) 6\sqrt{2} \quad b) \sqrt{2}$$

$$c) 10\sqrt{2} \quad d) 5\sqrt{2}$$

$$e) 20\sqrt{2} \quad f) 22\sqrt{2}$$

$$6. a) 9\sqrt{5} \quad b) \sqrt{3}$$

$$c) 7\sqrt{3} \quad d) -2\sqrt{5}$$

$$e) 4,6\sqrt{2} \quad f) -25\sqrt{5}$$

7. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 c) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ d) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
 e) $\frac{\sqrt{10}}{6}$ f) $\frac{\sqrt{15}}{25}$

8. a) $4\sqrt{2} + 1 \approx 6,6$
 b) $\frac{3}{2}(\sqrt{2} - 1) \approx 0,6$
 c) $\frac{5}{4}(1 - \sqrt{2}) \approx -0,5$
 d) $\frac{1}{4}(10 + 3\sqrt{2}) \approx 3,55$

9. a) 6 b) 16
 c) 20 d) 30
 e) 42 f) 30
 g) 120 h) 120

10. a) 30 b) $\frac{35}{4}\sqrt{6}$
 c) 2,2 d) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

11. a) $6 + 18\sqrt{2}$
 b) $12\sqrt{3} - 30$
 c) $\frac{7}{2}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3} - \sqrt{6}$
 d) $5\sqrt{2} + 4\sqrt{5} - 1$

12. a) 15
 b) $6\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$
 c) 16

13. a) $z = \sqrt{x^2 + y^2} = 5\sqrt{2}$,
 $Ob = 12\sqrt{2}$, $P = 12$
 b) $z = 10\sqrt{3}$, $Ob = 24\sqrt{3}$,
 $P = 72$
 c) $z = 3\sqrt{10}$,
 $Ob = 5(\sqrt{10} + \sqrt{2})$,
 $P = 10\sqrt{5}$

7. Usuń niewymierność z mianownika, postępując tak jak w przykładzie.

- a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ e) $\frac{5}{3\sqrt{10}}$
 b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ f) $\frac{3}{5\sqrt{15}}$

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

8. Usuń niewymierność z mianownika. Podaj przybliżoną wartość wyrażenia (przyjmij $\sqrt{2} \approx 1,4$).

- a) $\frac{8 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{6 - 3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ c) $\frac{5\sqrt{2} - 10}{4\sqrt{2}}$ d) $\frac{5\sqrt{2} + 3}{2\sqrt{2}}$

9. Oblicz.

- a) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ c) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{40}$ e) $\sqrt{28} \cdot \sqrt{63}$ g) $\sqrt{30} \cdot \sqrt{480}$
 b) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{8}$ d) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$ f) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{20}$ h) $\sqrt{80} \cdot \sqrt{180}$

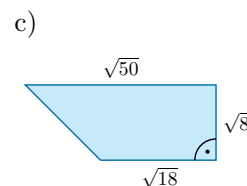
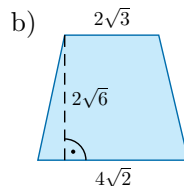
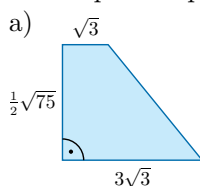
10. Oblicz.

- a) $\frac{\sqrt{54} \cdot \sqrt{350}}{\sqrt{21}}$ b) $\frac{\sqrt{98} \cdot \sqrt{375}}{\sqrt{80}}$ c) $\frac{\sqrt{52} \cdot \sqrt{363}}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{130}}$ d) $\frac{\sqrt{48} \cdot \sqrt{162}}{\sqrt{72} \cdot \sqrt{135}}$

11. Wykonaj działania.

- a) $2\sqrt{3}(\sqrt{27} + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{3})$ c) $\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$
 b) $3\sqrt{2}(2\sqrt{6} - 4\sqrt{8} + \sqrt{18})$ d) $\sqrt{10}(\sqrt{5} + 2\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{45} - \sqrt{20}}{\sqrt{5}}$

12. Oblicz pole trapezu.

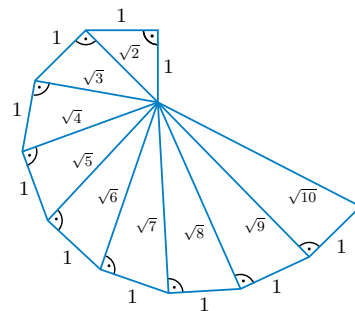


13. Oblicz obwód i pole trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości x i y .

- a) $x = 3\sqrt{2}$, $y = 4\sqrt{2}$ b) $x = 2\sqrt{27}$, $y = 4\sqrt{12}$ c) $x = 2\sqrt{10}$, $y = \sqrt{50}$

14. Na rysunku obok przedstawiono spiralę Teodorosa. Pokazuje ona, jak konstrukcyjnie wyznaczyć odcinek o długości $\sqrt{n}$, gdzie $n > 1$ jest liczbą naturalną, gdy dany jest odcinek o długości 1. Opisz, jak za pomocą cyrkla i linijki skonstruować odcinek o długości:

- a) $\sqrt{17}$, b) $\sqrt{38}$.



14. W obu przypadkach można wykorzystać spiralę Teodorosa lub postąpić, jak opisano poniżej.

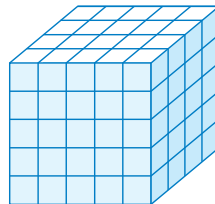
- a) Skonstruować trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 1 i 4. Przeciwnoprostokątna tego trójkąta ma długość $\sqrt{17}$.
 b) Najpierw skonstruować trójkąt prostokątny równoramienny o przyprostokątnych długości 1. W ten sposób otrzymamy przeciwprostokątną o długości $\sqrt{2}$. Następnie skonstruować trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości $\sqrt{2}$ i 6. Przeciwnoprostokątna otrzymanego trójkąta będzie miała długość $\sqrt{38}$.

1.6. Pierwiastek sześcienny.

Pierwiastek n -tego stopnia

■ Pierwiastek sześcienny z liczby nieujemnej

Rozpatrzmy zagadnienie polegające na wyznaczeniu długości krawędzi sześcianu o danej objętości V . Na przykład długość krawędzi sześcianu o objętości $V = 125 \text{ cm}^3$ jest równa 5 cm, bo $5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 125 \text{ cm}^3$. Zapisujemy to następująco $\sqrt[3]{125} = 5$. Mówimy, że liczba 5 jest pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby 125.



Definicja

Pierwiastkiem sześciennym (pierwiastkiem trzeciego stopnia) z liczby nieujemnej a nazywamy liczbę b , która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa a .

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ gdy } b^3 = a$$

Przykład 1

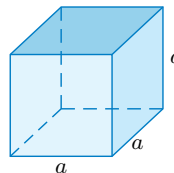
Podaj pierwiastek trzeciego stopnia i uzasadnij odpowiedź.

- a) $\sqrt[3]{8} = 2$, ponieważ $2^3 = 8$. c) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$, ponieważ $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$.
b) $\sqrt[3]{0} = 0$, ponieważ $0^3 = 0$. d) $\sqrt[3]{0,216} = 0,6$, ponieważ $0,6^3 = 0,216$.

Przykład 2

Oblicz długość krawędzi sześcianu o objętości 27.

Objętość V sześcianu o krawędzi długości a jest równa a^3 , więc $a = \sqrt[3]{V}$, czyli $a = \sqrt[3]{27} = 3$.



Ćwiczenie 1

Oblicz długość krawędzi sześcianu o objętości V .

- a) $V = 1$ b) $V = 64$ c) $V = 216$ d) $V = 8000$

Ćwiczenie 2

Podaj wartość, korzystając z informacji podanych obok.

- a) $\sqrt[3]{512}$ c) $\sqrt[3]{1331}$ e) $\sqrt[3]{1,331}$
b) $\sqrt[3]{\frac{1}{729}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{8}{729}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{729}{1331}}$

$$\begin{aligned} 7^3 &= 343 \\ 8^3 &= 512 \\ 9^3 &= 729 \\ 11^3 &= 1331 \end{aligned}$$

Uczeń:

- oblicza wartość pierwiastka trzeciego stopnia z liczby nieujemnej,
- oblicza wartość pierwiastka dowolnego stopnia,
- wyłącza czynnik przed znak pierwiastka,
- włącza czynnik pod znak pierwiastka,
- porównuje liczby zapisane za pomocą pierwiastków,
- wyznacza wartości wyrażeń arytmetycznych zawierających pierwiastki, stosując prawa działań na pierwiastkach,
- usuwa niewymierność z mianownika ułamka, gdy w mianowniku występuje $\sqrt[3]{a}$.

Ćwiczenie 1

- a) 1
b) 4
c) 6
d) 20

Ćwiczenie 2

- a) 8
b) $\frac{1}{9}$
c) 11
d) $\frac{2}{9}$
e) 1,1
f) $\frac{9}{11}$

Obliczanie pierwiastka trzeciego stopnia jest działaniem odwrotnym do podnoszenia do trzeciej potęgi.

Na przykład $\sqrt[3]{11^3} = 11$ oraz $(\sqrt[3]{9})^3 = 9$.

$$\sqrt[3]{a^3} = a$$

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a$$

W obliczeniach wykorzystujemy podane poniżej wzory na pierwiastek sześcienny iloczynu i pierwiastek sześcienny ilorazu. Są one analogiczne do wzorów dla pierwiastka kwadratowego (podaj potrzebne założenia).

Przykład 3

a) $\sqrt[3]{0,001 \cdot 343} = \sqrt[3]{0,001} \cdot \sqrt[3]{343} = 0,1 \cdot 7 = 0,7$

b) $\frac{\sqrt[3]{686}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{686}{2}} = \sqrt[3]{343} = 7$

Pierwiastek iloczynu

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

Pierwiastek ilorazu

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

Ćwiczenie 3

- a) 6
b) 5
c) $\sqrt[3]{4 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 49} = 2 \cdot 7 = 14$
d) 2
e) $\frac{3}{4} - \frac{5}{6} = -\frac{1}{12}$
f) $2\frac{1}{3}$

Ćwiczenie 4

- a) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$
b) $\frac{4}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4\sqrt[3]{2}}{2} = 2\sqrt[3]{2}$
c) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{25}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$ c) $\sqrt[3]{28} \cdot \sqrt[3]{98}$ e) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} - \sqrt[3]{\frac{125}{216}}$

b) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$ d) $\frac{\sqrt[3]{56}}{\sqrt[3]{7}}$ f) $\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}} + \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$

Ćwiczenie 4

Przeanalizuj przykład w ramce. Na jego podstawie usuń niewymierność z mianownika podanego ułamka.

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{4}}$ c) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2 \cdot 4}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

Pierwiastek sześcienny z liczby rzeczywistej

W przeciwieństwie do definicji pierwiastka kwadratowego definicję pierwiastka sześciennego można rozszerzyć na liczby ujemne.

Na przykład: $\sqrt[3]{-1} = -1$, bo $(-1)^3 = -1$; $\sqrt[3]{-8} = -2$, bo $(-2)^3 = -8$.

Definicja

Pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby rzeczywistej a nazywamy taką liczbę b , która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa a .

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ gdy } b^3 = a$$

Ćwiczenie 5

Zapisz w postaci liczby wymiernej.

a) $\sqrt[3]{-27}$ b) $\sqrt[3]{-64}$ c) $\sqrt[3]{-125}$ d) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$ e) $\sqrt[3]{-\frac{27}{1000}}$

Ćwiczenie 5

- a) -3
b) -4
c) -5
d) $-\frac{1}{3}$
e) $-\frac{3}{10}$

Pierwiastek n -tego stopnia

Ogólnie dla pierwiastka n -tego stopnia mamy następujące definicje:

Jeśli n jest liczbą parzystą, to dla dowolnej liczby nieujemnej a :

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b \geq 0 \text{ i } b^n = a$$

Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to dla dowolnej liczby rzeczywistej a :

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b^n = a$$

Uwaga. Dla pierwiastka 2. stopnia zamiast pisać $\sqrt[2]{a}$ stosujemy zapis $\sqrt{a}$.

Ćwiczenie 6

Zapisz w postaci liczby wymiernej.

- a) $\sqrt[4]{81}$ c) $\sqrt[4]{0,0016}$ e) $\sqrt[6]{729}$
b) $\sqrt[5]{-32}$ d) $\sqrt[5]{-0,00001}$ f) $\sqrt[7]{-128}$

$$\sqrt[8]{256} = 2, \text{ bo } 2^8 = 256.$$

$$\sqrt[9]{-512} = -2, \text{ bo } (-2)^9 = 512.$$

Zadania

1. Zapisz w postaci liczby wymiernej.

- a) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ e) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$ g) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$
b) $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{125}{216}}$ h) $\sqrt[3]{12\frac{19}{27}}$

2. Oblicz.

- a) $\sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{8}$ c) $\sqrt[3]{1000} + \sqrt[3]{27}$ e) $\sqrt[3]{0,125} + \sqrt[3]{0,001}$
b) $\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{64}$ d) $\sqrt[3]{512} - \sqrt[3]{216}$ f) $\sqrt[3]{0,027} + \sqrt[3]{0,008}$

3. Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

- a) $\sqrt[3]{32}$ c) $\sqrt[3]{135}$ e) $\sqrt[3]{108}$
b) $\sqrt[3]{250}$ d) $\sqrt[3]{375}$ f) $\sqrt[3]{120}$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{500} &= \sqrt[3]{125 \cdot 4} = \\ &= \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{4} = 5\sqrt[3]{4}\end{aligned}$$

4. Włącz czynnik pod pierwiastek.

- a) $2\sqrt[3]{3}$ c) $3\sqrt[3]{3}$ e) $4\sqrt[3]{10}$
b) $3\sqrt[3]{2}$ d) $6\sqrt[3]{2}$ f) $6\sqrt[3]{5}$

$$\begin{aligned}3\sqrt[3]{6} &= \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{6} = \\ &= \sqrt[3]{27 \cdot 6} = \sqrt[3]{162}\end{aligned}$$

5. Sprawdź, czy podana równość jest prawdziwa.

- a) $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{2,25}$ b) $\frac{2\sqrt[3]{5}}{5\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{0,08}$ c) $\frac{5\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{2\frac{7}{9}}$

6. Która z podanych liczb jest większa: x czy y ?

- a) $x = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}}, y = \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ c) $x = \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{729}}, y = \sqrt[3]{\frac{135}{320}}$
b) $x = \frac{\sqrt[3]{1000}}{\sqrt[3]{27}}, y = \sqrt[3]{\frac{3000}{81}}$ d) $x = \frac{\sqrt[3]{0,064}}{\sqrt[3]{0,125}}, y = \frac{\sqrt[3]{0,081}}{\sqrt[3]{0,192}}$

5. Wszystkie równości są prawdziwe.

- a) $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{27 \cdot 2}{8 \cdot 3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}} = \sqrt[3]{2,25}$
b) $\frac{2\sqrt[3]{5}}{5\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 5}{125 \cdot 4}} = \sqrt[3]{\frac{2}{25}} = \sqrt[3]{0,08}$
c) $\frac{5\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{125 \cdot 3}{27 \cdot 5}} = \sqrt[3]{\frac{25}{9}} = \sqrt[3]{2\frac{7}{9}}$

6. a) $x = \frac{5}{4} < y = \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$

b) $x = y$

c) $x = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} < y = \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

d) $x = \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{4}{5} = 0,8 > y = \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4} = 0,75$

Ćwiczenie 6

- a) 3 b) -2
c) 0,2 d) -0,1
e) 3 f) -2

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{5}$
e) $\frac{3}{10}$ f) $\frac{5}{6}$
g) $\frac{4}{3}$ h) $\frac{7}{3}$

2. a) 7 b) 1
c) 13 d) 2
e) 0,6 f) 0,5

3. a) $2\sqrt[3]{4}$ b) $5\sqrt[3]{2}$
c) $3\sqrt[3]{5}$ d) $5\sqrt[3]{3}$
e) $3\sqrt[3]{4}$ f) $2\sqrt[3]{15}$

4. a) $\sqrt[3]{24}$ b) $\sqrt[3]{54}$
c) $\sqrt[3]{81}$ d) $\sqrt[3]{432}$
e) $\sqrt[3]{640}$ f) $\sqrt[3]{1080}$

8. a) 8 cm b) 20 cm
 9. V – objętość sześcianu,
 $h = 3\sqrt[3]{V}$ – wysokość wieży
 a) $V = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 16 =$
 $= 2 \cdot 4^3 \text{ [cm}^3\text{]}$
 $h = 3 \cdot 4\sqrt[3]{2} = 12\sqrt[3]{2} \text{ [cm]}$
 b) $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 25 \cdot 7,5 \cdot 8 =$
 $= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5^3 \cdot 2^3 = 5^3 \text{ [cm}^3\text{]}$
 $h = 15 \text{ cm}$

10. a) $\sqrt[4]{162}$
 b) $\sqrt[4]{2500}$
 c) $\sqrt[5]{2048}$
 d) $\sqrt[6]{10000}$

11. a) 14 b) 9
 c) -10 d) 4
 e) 0,6 f) 2,1
 g) $1\frac{1}{4}$ h) 12

12. a) 25 b) $\frac{3}{5}$
 c) 9 d) $\frac{7}{3}$

13. a) -20 b) -0,1
 c) $-\frac{5}{4}$ d) -1,5

14. a) 1 b) 0,3
 c) $\frac{14}{15}$ d) -1
 e) -2,4 f) 4

15. $xyz = 0$, gdyż:
 a) $z = 0$,
 b) $z = 0$,

D 7. Uzasadnij, że podana liczba jest liczbą naturalną.

- a) $\sqrt[3]{3^3 + 4^3 + 5^3}$ c) $\sqrt[3]{14^2 - 13^2}$ e) $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18}$
 b) $\sqrt[3]{1^3 + 6^3 + 8^3}$ d) $\sqrt[3]{11^2 + \sqrt[3]{64}}$ f) $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{72}$

8. Objętość prostopadłościanu o wymiarach $x \text{ cm} \times y \text{ cm} \times z \text{ cm}$ jest równa objętości pewnego sześcianu. Oblicz długość krawędzi tego sześcianu.

- a) $x = 4, y = 4, z = 32$ b) $x = 16, y = 20, z = 25$

9. Z trzech sześciennych klocków zbudowano wieżę. Jej objętość jest równa objętości prostopadłościanu o podanych wymiarach. Oblicz wysokość tej wieży.

- a) $4 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$ b) $6,25 \text{ cm} \times 7,5 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$

10. Włącz czynnik pod pierwiastek.

- a) $3\sqrt[4]{2}$ b) $5\sqrt[4]{4}$ c) $4\sqrt[5]{2}$ d) $10\sqrt[6]{0,01}$

$$\begin{aligned} 2\sqrt[10]{5} &= \sqrt[10]{2^{10}} \cdot \sqrt[10]{5} = \\ &= \sqrt[10]{2^{10} \cdot 5} = \sqrt[10]{5120} \end{aligned}$$

11. Oblicz.

- a) $\sqrt[4]{16} + \sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{256} + \sqrt[4]{625}$ e) $2\sqrt[4]{\frac{81}{16}} - 3\sqrt[4]{\frac{256}{625}}$
 b) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{10000}$ f) $6\sqrt[4]{0,0625} - 3\sqrt[4]{0,0081}$
 c) $\sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{16} - \frac{\sqrt[6]{1000}}{\sqrt[6]{0,001}} - \sqrt[5]{32}$ g) $\sqrt[6]{64} - \sqrt[6]{\frac{1}{64}} - \sqrt[3]{\frac{1}{64}}$
 d) $\sqrt[8]{8} \cdot \sqrt[8]{32} - \sqrt[10]{1024} + \sqrt[5]{1024}$ h) $\sqrt[6]{1000000} + \sqrt[8]{256}$

12. Oblicz.

- a) $\sqrt[4]{250} \cdot \sqrt[4]{40} + \sqrt[4]{375} \cdot \sqrt[4]{135}$ c) $\sqrt[5]{405} \cdot \sqrt[5]{1875} - \sqrt[5]{108} \cdot \sqrt[5]{72}$
 b) $\sqrt[4]{\frac{243}{500}} \cdot \sqrt[4]{\frac{64}{15}} - \sqrt[4]{\frac{63}{50}} \cdot \sqrt[4]{\frac{18}{175}}$ d) $\sqrt[5]{\frac{275}{108}} \cdot \sqrt[5]{\frac{500}{99}} + \sqrt[5]{\frac{56}{135}} \cdot \sqrt[5]{\frac{20}{63}}$

13. Zapisz w postaci liczby wymiernej.

- a) $\sqrt[3]{-8000}$ b) $\sqrt[3]{-0,001}$ c) $\sqrt[3]{-\frac{125}{64}}$ d) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$

14. Oblicz.

- a) $2\sqrt[3]{-1} - \sqrt[3]{-27}$ c) $\sqrt[3]{\frac{-8}{125}} - \sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}$ e) $\frac{\sqrt[3]{-16}}{5\sqrt[3]{2}} - \frac{\sqrt[3]{-72}}{\sqrt[3]{-9}}$
 b) $-\sqrt[3]{\frac{-64}{125}} + \sqrt[3]{-0,125}$ d) $\frac{\sqrt[3]{-9} \cdot \sqrt[3]{-9}}{\sqrt[3]{-3}} - \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{-3}}$ f) $\frac{\sqrt[5]{-128}}{\sqrt[5]{-4}} + \frac{\sqrt[5]{-128}}{\sqrt[5]{-1}}$

D 15. Uzasadnij, że iloczyn xyz równa się zero.

- a) $x = \sqrt[5]{-32} - \sqrt[4]{16}, y = \sqrt[7]{1} - 2\sqrt[6]{1}, z = \sqrt[10]{1024} + 2\sqrt[9]{-1}$
 b) $x = \sqrt[5]{32} - \sqrt[4]{81}, y = \sqrt[5]{-32} - \sqrt[4]{81}, z = \sqrt[5]{-1} + \sqrt[4]{1}$

7. a) $\sqrt[3]{27 + 64 + 125} = \sqrt[3]{216} = 6$
 b) $\sqrt[3]{1 + 216 + 512} = \sqrt[3]{729} = 9$
 c) $\sqrt[3]{196 - 169} = \sqrt[3]{27} = 3$
 d) $\sqrt[3]{121 + 4} = \sqrt[3]{125} = 5$
 e) $\sqrt[3]{3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 9} = \sqrt[3]{27 \cdot 8} = 3 \cdot 2 = 6$
 f) $\sqrt[3]{8 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 9} = \sqrt[3]{8 \cdot 8 \cdot 27} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

1.7. Potęga o wykładniku całkowitym

Przykład 1

Założmy, że mamy parę królików oraz że liczba królików podwaja się co pół roku. Ile królików będziemy mieli po 5 latach?

$$2 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{10 \text{ półrocznych okresów}} = 2^{11} = 2048$$

Przypomnijmy definicję potęgi o wykładniku naturalnym.

Definicja

Dla liczby naturalnej $n > 1$ potęgą a^n nazywamy iloczyn n czynników równych liczbie a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

↑
podstawa potęgi

↑
wykładnik potęgi

n czynników

Przyjmujemy również, że: $a^1 = a$ oraz $a^0 = 1$ dla $a \neq 0$.

Nie definiujemy wartości 0^0 .

Przykład 2

- a) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$
 b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$
 c) $(-3)^1 = -3$
 d) $16^0 = 1$

Ćwiczenie 1

Oblicz.

- a) $9^2, 9^3, 9^4$
 b) $\left(\frac{3}{4}\right)^2, \left(\frac{3}{4}\right)^3, \left(\frac{3}{4}\right)^4$
 c) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2, \left(-\frac{2}{5}\right)^3, \left(-\frac{2}{5}\right)^4$

Ćwiczenie 2

Uporządkuj liczby w kolejności rosnącej.

$$(-2)^0, (-2)^4, (-2)^9, (-3)^4, (-3)^9$$

Ćwiczenie 2

$$(-3)^9 < (-2)^9 < (-2)^0 < (-2)^4 = 2^4 < 3^4 = (-3)^4$$

Uczeń:

- oblicza wartość potęgi liczby o wykładniku naturalnym i całkowitym ujemnym,
- porządkuje liczby zapisane w postaci potęg, korzystając z własności potęg,
- stosuje prawa działań na potęgach do obliczania wartości wyrażeń,
- stosuje prawa działań na potęgach do upraszczania wyrażeń algebraicznych,
- porównuje liczby zapisane w postaci potęg.

Komentarz

Aby ułatwić uczniom zrozumienie potęg o wykładniku 0 zapisujemy potęgę a^n jako iloczyn liczby 1 i n czynników równych liczbie a . Wówczas:

$$a^n = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

n czynników

W szczególności:

$$\begin{aligned} a^3 &= 1 \cdot a \cdot a \cdot a, \\ a^2 &= 1 \cdot a \cdot a, \\ a^1 &= 1 \cdot a = a, \\ a^0 &= 1, \text{ gdy } a \neq 0. \end{aligned}$$

Dla $n \neq 0$ mamy $0^n = 0$.

Gdyby w powyższych przykładach nie istniały założenia: $n \neq 0$ i $a \neq 0$, wówczas $0^0 = 1$ i $0^0 = 0$ jednocześnie, co prowadzi do sprzeczności. Zatem wartość 0^0 nie jest definiowana.

Ćwiczenie 1

- a) 81, 729, 6561
 b) $\frac{9}{16}, \frac{27}{64}, \frac{81}{256}$
 c) $\frac{4}{25}, -\frac{8}{125}, \frac{16}{625}$

Przydatna jest umiejętność rozpoznawania niektórych potęg liczb: 2, 3, 4, 5.

n	2 ⁿ	3 ⁿ	4 ⁿ	5 ⁿ
1	2	3	4	5
2	4	9	16	25
3	8	27	64	125
4	16	81	256	625
5	32	243	1024	
6	64	729		
7	128			
8	256			
9	512			
10	1024			

Możemy również określić potęgę o wykładniku całkowitym ujemnym.

Definicja

Dla liczby naturalnej $n \geq 1$ i dla liczby $a \neq 0$ przyjmujemy, że:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Przykład 3

$$a) 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$b) 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$c) \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$$

Ćwiczenie 3

$$a) \frac{1}{16} \quad b) \frac{1}{64}$$

$$c) \frac{1}{9} \quad d) -\frac{1}{27}$$

$$e) 4 \quad f) 32$$

$$g) \frac{9}{4} \quad h) \frac{81}{16}$$

$$i) 25 \quad j) -125$$

Ćwiczenie 4

$$a) \text{ tak} \quad b) \text{ tak}$$

$$c) \text{ nie}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

$$a) 4^{-2} \quad c) (-3)^{-2} \quad e) \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \quad g) \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} \quad i) 0,2^{-2}$$

$$b) 4^{-3} \quad d) (-3)^{-3} \quad f) \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \quad h) \left(-\frac{2}{3}\right)^{-4} \quad j) (-0,2)^{-3}$$

Ćwiczenie 4

Czy podane liczby są równe?

$$a) \left(\frac{5}{7}\right)^{-3}, \left(\frac{7}{5}\right)^3 \quad b) \left(-\frac{4}{9}\right)^6, \left(\frac{9}{4}\right)^{-6} \quad c) \left(-\frac{3}{5}\right)^{-5}, \left(\frac{5}{3}\right)^5$$

Do obliczania wartości wyrażeń, w których występują potęgi o wykładnikach całkowitych, możemy wykorzystywać prawa analogiczne do praw działań na potęgach o wykładnikach naturalnych.

Twierdzenie

Dla liczb całkowitych m, n oraz różnych od 0 liczb rzeczywistych a i b :

$$\begin{aligned} \blacksquare a^m \cdot a^n &= a^{m+n} & \blacksquare a^n \cdot b^n &= (ab)^n & \blacksquare (a^m)^n &= a^{m \cdot n} \\ \blacksquare \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} & \blacksquare \frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n \end{aligned}$$

Ćwiczenie 5

$$a) 27 \quad b) \frac{1}{1024}$$

$$c) \frac{1}{1024} \quad d) \frac{1}{256}$$

$$e) 25 \quad f) 1024$$

$$g) 32 \quad h) 1024$$

$$i) \frac{27}{4} \quad j) 400$$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

$$a) 3^9 \cdot 3^{-6} \quad c) (2^5)^{-2} \quad e) 5^{-9} : 5^{-11} \quad g) 6^5 : 3^5 \quad i) 6^3 \cdot 2^{-5}$$

$$b) 0,5^3 \cdot 0,5^7 \quad d) (0,25^{-1})^{-4} \quad f) 4 : 4^{-4} \quad h) 10^{10} : 5^{10} \quad j) 10^4 \cdot 5^{-2}$$

Ćwiczenie 6

Podaj konieczne założenia i uprość wyrażenie.

$$a) (x^2 \cdot x^6) : x^4 \quad b) (x^7 : x^2) : x^{-1} \quad c) (x^2 y)^{-1} \cdot x^3 \quad d) (x^{-2} y^3)^{-2} : y^{-3}$$

Ćwiczenie 6

$$a) x^4, x \neq 0$$

$$b) x^6, x \neq 0$$

$$c) \frac{x}{y}, x, y \neq 0$$

$$d) \frac{x^4}{y^3}, x, y \neq 0$$

Zadania

- Oblicz.
 - $(-2)^5, (-2)^{-5}, 2^{-5}$
 - $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}, \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}, \left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$
 - $(\sqrt{3})^4, (\sqrt{3})^{-2}, (\sqrt{3})^{-6}$
 - $(\sqrt{2})^6, (\sqrt{2})^7, (\sqrt{2})^{-8}$
- Zapisz liczbę w postaci 2^m , gdzie m jest liczbą całkowitą.
 - $2^3 \cdot 4^6$
 - $4^{-5} \cdot 8^2$
 - $64^2 : 32^{-3}$
 - $(16^{-2} : 4^{-8}) \cdot 8^4$
- Zapisz podane liczby w postaci potęg o tej samej podstawie.
 - $16, \frac{1}{64}, 8^3, (\sqrt{2})^4, 1024^2$
 - $\frac{1}{81}, 27, 9^{-2}, (\sqrt{3})^6, 81^{-5}$
 - $0,001, 100^5, \left(\frac{1}{100}\right)^{-4}, \left(\frac{1}{0,1}\right)^{-6}$
 - $25^{-3}, \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}, \left(\frac{1}{125}\right)^4, 625^{-5}$
- Oblicz.
 - $(-2\sqrt{3})^{-3}$
 - $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{-4}$
 - $\left(-\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^{-3}$
 - $((-3\sqrt{2})^{-1})^{-2}$
- Oblicz.
 - $5^{-3} \cdot 2^{-3}$
 - $8^{-4} \cdot 4^4$
 - $\left(2\frac{3}{7}\right)^5 : \left(\frac{17}{14}\right)^5$
 - $(-0,2)^{-8} : 5^8$
 - $0,2^{-5} \cdot 5^{-5}$
 - $18^{-3} : 6^{-3}$
 - $1,3^{-2} : 0,1^{-2}$
 - $(-1,2)^{-5} : \left(\frac{6}{5}\right)^{-5}$
- Oblicz.
 - $\left(\frac{6}{5}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{-4}$
 - $\left(\frac{2}{21}\right)^{-3} \cdot 15^{-3} \cdot 7^{-3}$
 - $0,4^3 \cdot \left(\frac{5}{16}\right)^3 : 4^{-3}$
- Która z liczb jest większa: x czy y ?
 - $x = 2^4 \cdot 4^{-2}, y = 4^{-4} : 8^{-2}$
 - $x = (2^{-4} : 2^{-6})^{-1}, y = (2^{-4} \cdot 2^{-3})^{-1}$
- Oblicz.
 - $\frac{2^{-2}}{3^{-3}} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2$
 - $\frac{6^0 + 0^6}{6^{-1}} + (4^6 - 16^3)$
 - $\left(0,5 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{-6} - 2 \cdot 16^4\right) : 7^3$
 - $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^{-2}$
 - $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}\right) : 6^{-2}$
 - $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} : \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-4}$
- Podaj konieczne założenia i uprość wyrażenie, a następnie oblicz jego wartość dla podanej wartości x .
 - $(x^{-3})^{-2} + (x^{-1})^{-6}, x = -2$
 - $\left(\left((x^{-3})^2 : x^{-4}\right) : x^0\right)^{-2}, x = 5$
 - $\left((x^4)^{-3}\right)^{-2} : \left((x^2)^{-2}\right)^{-3}, x = 1$
 - $\left((x^3)^6 + (x^{-2})^{-9}\right) : (x^{-5})^{-3}, x = \frac{3}{2}$

Odpowiedzi do zadań

- $-32, -\frac{1}{32}, \frac{1}{32}$
 - $9, -27, 81$
 - $9, \frac{1}{3}, \frac{1}{27}$
 - $8, 8\sqrt{2}, \frac{1}{16}$
- 2^{15}
 - 2^{-4}
 - 2^{27}
 - 2^{20}
- $2^4, 2^{-6}, 2^9, 2^2, 2^{20}$
 - $3^{-4}, 3^3, 3^{-4}, 3^3, 3^{-20}$
 - $10^{-3}, 10^{10}, 10^8, 10^{-6}$
 - $5^{-6}, 5^2, 5^{-12}, 5^{-20}$
- $-\frac{\sqrt{3}}{72}$
 - $\frac{4}{81}$
 - $-40\sqrt{5}$
 - 18
- $0,001$
 - 1
 - $\frac{1}{16}$
 - $\frac{1}{27}$
 - 32
 - $\frac{1}{169}$
 - 1
 - -1
- $\frac{35}{36}$
 - $0,001$
 - $\frac{1}{8}$
- x
 - y
- $1\frac{1}{3}$
 - $\frac{16}{81}$
 - 6
 - $3\frac{3}{8}$
 - 0
 - $\frac{8}{125}$
- $x \neq 0$
 - $2x^6; 128$
 - $x^{12}; 1$
 - $x^4; 625$
 - $2x^3; \frac{27}{4}$

1. $170 = 2 \cdot 5 \cdot 17$, jest
 $200 = 2^3 \cdot 5^2$, nie jest
 $204 = 2^2 \cdot 3 \cdot 17$, jest
 $1020 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$, jest
2. Carl Friedrich Gauss przywiązywał dużą wagę do znalezionego przez siebie dowodu na to, że konstrukcja 17-kąta foremnego jest możliwa. W swojej ostatniej woli przekazał, aby na jego grobie nie było żadnych napisów, tylko wyryty w kamieniu 17-kąt foremny. Ostatecznie napisy umieszczono, ale nie zapomniano też o 17-kącie. Jego kształt ma obelisk stojący na grobie. (Źródło: Marek Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, WSiP, Warszawa 1994)

Poniższa konstrukcja 17-kąta foremnego została przedstawiona już po śmierci Gaussa.

1. Rysujemy okrąg o środku w punkcie O .
2. Rysujemy średnicę AB .
3. Konstruujemy symetralną do średnicy AB . Symetralna ta przecina okrąg w punktach C_1 i C_2 .
4. Wyznaczamy na odcinku OC_1 taki punkt D , że:
 $|OD| = \frac{1}{4}|OC_1|$
5. Rysujemy prostą DB .
6. Wyznaczamy na odcinku OB taki punkt E , że:
 $|\sphericalangle ODE| = \frac{1}{4}|\sphericalangle ODB|$
7. Wyznaczamy na odcinku AO taki punkt F , że:
 $|\sphericalangle FDE| = 45^\circ$
8. Rysujemy okrąg o średnicy FB . Punkt przecięcia tego okręgu z odcinkiem OC_1 oznaczamy przez G .

Liczby Fermata

Pierre de Fermat (1607–1665) – francuski matematyk, z zawodu prawnik. Większości swoich prac nie opublikował. Tak zwane **wielkie twierdzenie Fermata** (opublikowane dopiero po jego śmierci, w 1670 r.) mówi, że nie istnieją liczby naturalne dodatnie x, y, z, n takie, że $x^n + y^n = z^n$ dla $n > 2$. Twierdzenie to zostało udowodnione dopiero w 1995 r. Innym pojęciem związanym z jego nazwiskiem są liczby $F_k = 2^{2^k} + 1$, gdzie k jest liczbą naturalną, nazywane **liczbami Fermata**. Pięć początkowych liczb Fermata:

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$$

$$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

$$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$$

$$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$$

$$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65\,537$$

Fermat przypuszczał, że wszystkie liczby $F_k = 2^{2^k} + 1$ są pierwsze, ale w 1732 r. **Leonhard Euler** [czyt. ojler] wykazał, że $F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417$, czyli jest liczbą złożoną. Do dziś nie wiadomo, czy którakolwiek z liczb Fermata oprócz F_0, F_1, F_2, F_3 i F_4 jest liczbą pierwszą. Poniższe twierdzenie, udowodnione przez **Carla Friedricha Gaussa**, podaje związek między liczbami pierwszymi Fermata a wielokątami foremnymi.

Twierdzenie

Za pomocą cyrkla i linijki można skonstruować n -ką foremny wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n jest: potęgą dwójki lub liczbą pierwszą Fermata pomnożoną przez 2^k , lub iloczynem różnych liczb pierwszych Fermata i liczby 2^k , gdzie k jest dowolną liczbą naturalną.

W tabeli obok podano liczby naturalne mniejsze od 100, dla których można skonstruować n -ką foremny.

1. Sprawdź, czy jest możliwe skonstruowanie za pomocą cyrkla i linijki n -kąta foremnego, gdy n równe jest 170, 200, 204, 1020.
2. Znajdź informacje o konstrukcji 17-kąta foremnego (możliwość takiej konstrukcji wykazał C.F. Gauss w 1796 r.).

3 = 3	30 = 2 · 3 · 5
4 = 2 ²	32 = 2 ⁵
5 = 5	34 = 2 · 17
6 = 2 · 3	40 = 2 ³ · 5
8 = 2 ³	48 = 2 ⁴ · 3
10 = 2 · 5	51 = 3 · 17
12 = 2 ² · 3	60 = 2 ² · 3 · 5
15 = 3 · 5	64 = 2 ⁶
16 = 2 ⁴	68 = 2 ² · 17
17 = 17	80 = 2 ⁴ · 5
20 = 2 ² · 5	85 = 5 · 17
24 = 2 ³ · 3	96 = 2 ⁵ · 3

9. Rysujemy okrąg o środku w punkcie E i promieniu $|EG|$. Punkty przecięcia tego okręgu ze średnicą AB oznaczamy przez M i N .
10. Rysujemy proste prostopadłe do średnicy AB w punktach M i N . Punkty przecięcia tych prostych z łukiem AC_1B oznaczamy odpowiednio przez W_1 i W_3 .
11. Punkty W_1 i W_3 są odpowiednio pierwszym i trzecim wierzchołkiem 17-kąta foremnego.
12. Konstruujemy dwusieczną kąta W_1OW_3 . Przecięcie dwusiecznej z wyjściowym okręgiem wyznacza wierzchołek W_2 .
13. Wyznaczamy pozostałe wierzchołki 17-kąta foremnego poprzez odłożenie na okręgu odcinka W_1W_2 .



1.8. Notacja wykładnicza

Przy zapisywaniu bardzo dużych i bardzo małych liczb wygodnie jest posługiwać się notacją wykładniczą (inaczej zwaną notacją naukową).

Definicja

Liczbę dodatnią a możemy przedstawić w postaci iloczynu:

$$a = x \cdot 10^n$$

gdzie x jest liczbą spełniającą warunki $1 \leq x < 10$, a n – liczbą całkowitą.

Takie przedstawienie liczby nazywamy **notacją wykładniczą**.

Przykład 1

a) $326\,000\,000\,000 = 3,26 \cdot 10^{11}$
↑ 11 cyfr

b) $0,000000097 = 9,7 \cdot 10^{-7}$
↑ 7 cyfr

Ćwiczenie 1

Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

- a) 5 020 000 000 000 000 000 000 000 ton (masa Syriusza)
b) 0,00027 mm (wielkość wirusa ospy)
c) 0,000 000 000 000 000 000 000 000 029 9 kg (masa cząsteczki wody)
d) 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 910 956 kg (masa elektronu)

Ćwiczenie 2

Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

- a) 6 320 000 c) 43,728 e) 0,00065 g) 0,100324
b) 109 000 000 d) 8765,2 f) 0,00302 h) 0,000001

Ćwiczenie 3

Zapisz liczbę w postaci dziesiętnej.

- a) $8,62 \cdot 10^4$ b) $7,89 \cdot 10^{-4}$ c) $8,34 \cdot 10^{-5}$ d) $6,02 \cdot 10^0$

Ćwiczenie 4

Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej i w postaci dziesiętnej.

- a) $(3,4 \cdot 10^7) \cdot (4 \cdot 10^{-5})$
b) $(1,4 \cdot 10^3) \cdot (8 \cdot 10^2)$
c) $(4,8 \cdot 10^{-1}) : (1,6 \cdot 10^{-3})$
d) $(7,2 \cdot 10^{-3}) : (1,2 \cdot 10^{-2})$

Oblicz.

$$(5,2 \cdot 10^9) \cdot (0,5 \cdot 10^{-7}) = 5,2 \cdot 0,5 \cdot 10^{9-7} = 2,6 \cdot 10^2 = 260$$

Uczeń:

- zapisuje i odczytuje liczby w notacji wykładniczej,
- wykonuje działania na liczbach zapisanych w notacji wykładniczej.

Ćwiczenie 1

- a) $5,02 \cdot 10^{27}$ ton
b) $2,7 \cdot 10^{-4}$ mm
c) $2,99 \cdot 10^{-26}$ kg
d) $9,10956 \cdot 10^{-31}$ kg

Ćwiczenie 2

- a) $6,32 \cdot 10^6$
b) $1,09 \cdot 10^8$
c) $4,3728 \cdot 10^1$
d) $8,7652 \cdot 10^3$
e) $6,5 \cdot 10^{-4}$
f) $3,02 \cdot 10^{-3}$
g) $1,00324 \cdot 10^{-1}$
h) $1 \cdot 10^{-6}$

Ćwiczenie 3

- a) 86200
b) 0,000789
c) 0,0000834
d) 6,02

Ćwiczenie 4

- a) $1,36 \cdot 10^3 = 1360$
b) $1,12 \cdot 10^6 = 1\,120\,000$
c) $3 \cdot 10^2 = 300$
d) $6 \cdot 10^{-1} = 0,6$

Zadania

Odpowiedzi do zadań

1. a) $2 \cdot 10^4 = 20000$
 b) $9 \cdot 10^{10} = 90000000000$
 c) $3 \cdot 10^{12} = 3000000000000$
 d) $1,6 \cdot 10^{11} = 160000000000$
2. a) $9,6 \cdot 10^9$
 b) $6 \cdot 10^{-13}$
 c) $1,02 \cdot 10^0$
 d) $1,2 \cdot 10^0$

1. Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej i w postaci dziesiętnej.
 a) $2\,100\,000\,000 : 105\,000$ c) $51\,000\,000\,000 : 0,017$
 b) $243\,000\,000\,000 : 2,7$ d) $102\,400\,000\,000 : 0,64$
2. Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej.
 a) $\frac{(3,2 \cdot 10^{-12}) \cdot (1,2 \cdot 10^4)}{4 \cdot 10^{-18}}$ c) $\frac{(3,4 \cdot 10^{-15}) \cdot (7,5 \cdot 10^{-16})}{2,5 \cdot 10^{-30}}$
 b) $\frac{(5,2 \cdot 10^8) \cdot (1,5 \cdot 10^{-3})}{1,3 \cdot 10^{18}}$ d) $\frac{(4,8 \cdot 10^{18}) \cdot (1,8 \cdot 10^{-10})}{(6 \cdot 10^{-8}) \cdot (1,2 \cdot 10^{16})}$
3. W tabeli podano wybrane prędkości, stosując zapis dziesiętny i notację wykładniczą. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tę tabelę.

	v [m/s] (zapis dziesiętny)	v [m/s] (notacja wykładnicza)
Rosnący włos	0,0000000046	$4,6 \cdot 10^{-9}$
Szybki ślimak	0,00194	$1,94 \cdot 10^{-3}$
Sprinter	10	$1 \cdot 10^1$
Ziemia wokół Słońca	29 600	$2,96 \cdot 10^4$
Światło w próżni	299 792 458	$2,99792458 \cdot 10^8$



4. Prędkość światła wynosi w przybliżeniu 300 000 km/s. Odległość, jaką przebywa światło w ciągu roku (365 dni), nazywamy rokiem świetlnym. Oblicz, ile kilometrów ma rok świetlny i przedstaw podane niżej wielkości w kilometrach. Odpowiedź zapisz w notacji wykładniczej.

Odległość z Ziemi wyrażona w jednostkach świetlnych		w kilometrach
Księżyc	1,3 sekundy świetlnej	$3,9 \cdot 10^5$
Słońce	8 minut 19 sekund świetlnych	$1,5 \cdot 10^8$
Pluton	5,5 godziny świetlnej	$5,9 \cdot 10^9$
Gwiazda Polarna	około 430 lat świetlnych	$4,1 \cdot 10^{15}$
środek Galaktyki	około 28 000 lat świetlnych	$2,6 \cdot 10^{17}$
najbliższe kwazary	około 1,5 mld lat świetlnych	$1,4 \cdot 10^{22}$



5. Największą prędkość, z jaką kiedykolwiek podróżował człowiek, osiągnęła załoga misji Apollo 10 – niemal 40 000 km/h. Oblicz, ile czasu zajęłoby pokonanie z taką prędkością odległości dzielącej nas od Gwiazdy Polarnej. Odpowiedź podaj, stosując zapis dziesiętny i notację wykładniczą.

4. $1 \text{ rok świetlny} = 300\,000 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 9,4608 \cdot 10^{12} \text{ [km]}$
5. $\frac{430 \cdot 9,4608 \cdot 10^{12} \text{ km}}{40\,000 \text{ km/h}} = 101\,703\,600\,000 \text{ h} \approx 1,017 \cdot 10^{11} \text{ h}$
 $\frac{430 \cdot 300\,000 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600}{40\,000} : (24 \cdot 365) = 11\,771\,250 \text{ [lat]} \approx 1,17 \cdot 10^7 \text{ [lat]}$

Nazwy wielkich liczb

Bilion amerykański czy bilion europejski

Dlaczego europejski miliard to amerykański bilion,
a europejski bilion to amerykański trylion?

Amerykańskie nazewnictwo wielkich liczb odnosi się do zapisu 10^{3n+3} i łączy łacińskie przedrostki: *bi-* ($n = 2$), *tri-* ($n = 3$) itd. z końcówką *-lion*.

Europejskie nazewnictwo pokazuje wielokrotność miliona lub miliarda i do łacińskiego przedrostka dodaje, odpowiednio: *-lion* lub *-liard*.

Amerykański matematyk Edward Kasner wprowadził nazwę googol, oznaczająca 10^{100} .

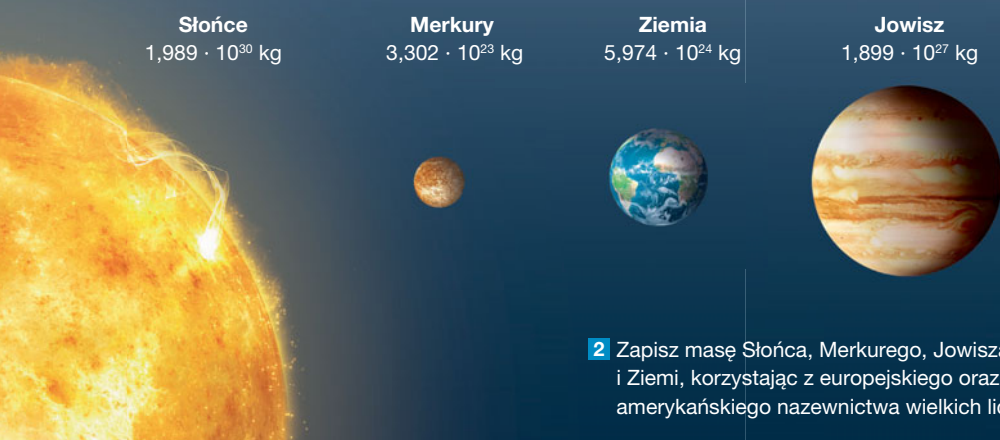
1 googol = 10 000 000 000 000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000

- 1** Wyszukaj w internecie informacje o liczbach googol i googolplex.

Potęga 10	Nazwa europejska	Nazwa amerykańska
9	miliard	bilion
12	bilion	trylion
15	biliard	kwadrylion
18	trylion	kwintylion
21	tryliard	seksstylion
24	kwadrylion	septylion
27	kwadryliard	oktylion
30	kwintylion	nonylion
33	kwintyliard	decylio
36	seksstylion	undecylio
39	seksstyliard	duodecylio
42	septylion	tridecylio
45	septyliard	kwatuordecylio
48	oktylion	kwindecylio
51	oktyliard	seksdecylio
54	nonylion	septendecylio

Słońce i planety

Poniżej podano masę: najmniejszej z planet w naszym systemie planetarnym – Merkurego, największej – Jowisza, a także Ziemi i Słońca (na rysunku nie zachowano skali). Masa Słońca stanowi 99,89% masy Układu Słonecznego.



- 2** Zapisz masę Słońca, Merkurego, Jowisza i Ziemi, korzystając z europejskiego oraz amerykańskiego nazewnictwa wielkich liczb.

2. Nazewnictwo europejskie:
Słońce – 1,989 kwintylionów kg,
Merkury – 330,2 tryliardów kg,
Jowisz – 1,899 kwadryliardów kg,
Ziemia – 5,974 kwadrylionów kg

- Nazewnictwo amerykańskie:
Słońce – 1,989 nonylijonów kg,
Merkury – 330,2 sekstylijonów kg,
Jowisz – 1,899 oktylijonów kg,
Ziemia – 5,974 septylijonów kg

Uczeń:

- zapisuje pierwiastek n -tego stopnia w postaci potęgi o wykładniku $\frac{1}{n}$,
- oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych,
- zapisuje daną liczbę w postaci potęgi o wykładniku wymiernym,
- upraszcza wyrażenia, stosując prawa działań na potęgach.

Ćwiczenie 1

- a) 2
b) 4
c) 9
d) 2
e) 3
f) 3

Ćwiczenie 2

- a) 8
b) 9
c) 16
d) 8
e) 729
f) 32
g) $\frac{1}{25}$
h) 27
i) 32
j) $\frac{9}{4}$

1.9. Potęga o wykładniku wymiernym

Definicja

Dla dowolnej liczby $a \geq 0$ i liczby naturalnej $n > 1$ przyjmujemy:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Przykład 1

Oblicz.

a) $49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$ b) $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$ c) $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $16^{\frac{1}{2}}$ c) $81^{\frac{1}{2}}$ d) $8^{\frac{1}{3}}$ e) $27^{\frac{1}{3}}$ f) $81^{\frac{1}{4}}$

Potęga o wykładniku wymiernym $\frac{m}{n}$ definiujemy następująco:

Definicja

Dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m przyjmujemy:

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Przykład 2

Oblicz.

a) $9^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27$ b) $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ c) $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $4^{\frac{3}{2}}$ c) $8^{\frac{4}{3}}$ e) $81^{1,5}$ g) $125^{-\frac{2}{3}}$ i) $(\frac{1}{4})^{-2,5}$
b) $27^{\frac{2}{3}}$ d) $32^{\frac{3}{5}}$ f) $4^{2,5}$ h) $(\frac{1}{81})^{-\frac{3}{4}}$ j) $(\frac{8}{27})^{-\frac{2}{3}}$

D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m zachodzi równość $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $(\sqrt{10})^6$ c) $\sqrt[3]{125^2}$ e) $(\sqrt[8]{625})^2$ g) $(\sqrt[3]{\sqrt{27}})^2$ i) $(\sqrt{\sqrt[3]{49}})^3$
b) $\sqrt{4^{10}}$ d) $\sqrt[5]{32^3}$ f) $\sqrt{\sqrt{81}}$ h) $\sqrt[3]{\sqrt{4^3}}$ j) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{16^6}}$

Ćwiczenie 3

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{[(\sqrt[n]{a})^n]^m} = \sqrt[n]{[(\sqrt[n]{a})^m]^n} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Ćwiczenie 4

a) 1000 b) 1024 c) 25 d) 8
e) 5 f) 3 g) 3 h) 2 i) 7 j) 4

Prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych są analogiczne do praw działań na potęgach o wykładnikach całkowitych.

Przykład 3

Oblicz.

a) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 3^2 = 9$

b) $6^{\frac{4}{3}} : 6^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}} = 6^1 = 6$

Dla liczb wymiernych x, y oraz dodatnich liczb rzeczywistych a i b :

■ $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

■ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

■ $a^x \cdot b^x = (ab)^x$

■ $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

■ $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}$ b) $5^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{\frac{5}{3}}$ c) $4^{\frac{9}{2}} : 4^{\frac{5}{2}}$ d) $2^{7,5} : 2^{2,5}$ e) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}}$

Przykład 4

Oblicz.

a) $8^{\frac{5}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{2}} = (8 \cdot 2)^{\frac{5}{2}} = 16^{\frac{5}{2}} = (16^{\frac{1}{2}})^5 = 4^5 = 1024$

b) $10^{\frac{3}{2}} : 5^{\frac{3}{2}} = (10 : 5)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = (2^{\frac{1}{2}})^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$

c) $80^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = (16 \cdot 5)^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = (\sqrt[4]{16})^3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5 = 40$

Ćwiczenie 6

Oblicz.

a) $12^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$ b) $12^{\frac{5}{2}} : 3^{\frac{5}{2}}$ c) $24^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}$ d) $9^{\frac{4}{3}} : 24^{\frac{2}{3}}$ e) $375^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$

Ćwiczenie 7

Oblicz.

a) $\left(9^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{10}{3}}$ b) $\left(8^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{9}}$ c) $\left(125^{\frac{2}{3}}\right)^{0,75}$ d) $\left(\left(\frac{4}{9}\right)^{-2,5}\right)^{-0,6}$ e) $\left(32^{\frac{28}{25}}\right)^{-\frac{5}{7}}$

Obliczając przybliżone wartości potęg o wykładniku wymiernym, możemy skorzystać z odpowiedniego kalkulatora (przykładowe wyniki zostały przedstawione obok).

$10^{0,3} \approx 1,995262315$

$10^{0,45} \approx 2,818382931$

$10^{0,625} \approx 4,216965034$

Ćwiczenie 8

Korzystając z powyższych przybliżeń, podaj z dokładnością do czterech miejsc po przecinku przybliżoną wartość potęgi:

a) $10^{2,3}$, b) $10^{3,45}$, c) $10^{\frac{13}{8}}$, d) $10^{-1,7}$.

Ćwiczenie 8

a) $10^2 \cdot 10^{0,3} \approx 199,5262$

b) $10^3 \cdot 10^{0,45} \approx 2818,3829$

c) $10^1 \cdot 10^{0,625} \approx 42,1697$

d) $10^{0,3} : 10^2 \approx 0,0200$

Ćwiczenie 5

a) 4 b) 125 c) 16

d) 32 e) $\sqrt[3]{3}$

Ćwiczenie 6

a) $36^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{36})^3 = 216$

b) $4^{\frac{5}{2}} = 32$

c) $8^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 4 \cdot 3 = 12$

d) $(3^2)^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} = 3^{\frac{6}{3}} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} = 3^2 \cdot (\sqrt[3]{8})^{-2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

e) $125^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 5 \cdot 3 = 15$

Ćwiczenie 7

a) $9^2 = 81$

b) $8^{\frac{2}{3}} = 4$

c) $125^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{5}$

d) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{27}$

e) $32^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{16}$

Na dalszym etapie nauki rozszerzymy pojęcie potęgi na potęgę o wykładniku rzeczywistym, czyli także niewymiernym, np. $2^{\sqrt{3}}$, $10^{\sqrt{2}}$.

W tabeli obok przedstawiono kilka przybliżeń liczby $10^{\sqrt{2}}$.

Uwaga. $\sqrt{2} \approx 1,414213562$

$10^{1,4}$	$\approx 25,118864315$
$10^{1,41}$	$\approx 25,703957828$
$10^{1,414}$	$\approx 25,941793621$
$10^{1,414213562}$	$\approx 25,954553497$
$10^{\sqrt{2}}$	$\approx 25,954553519$

Zadania

Odpowiedzi do zadań

- a) $2^{\frac{1}{2}}$ b) $2^{\frac{1}{3}}$ c) $2^{-\frac{1}{2}}$
d) $2^{\frac{2}{3}}$ e) $2^{\frac{9}{2}}$ f) $2^{\frac{10}{3}}$
g) $2^{\frac{3}{2}}$ h) $2^{\frac{4}{3}}$
- a) $7^{\frac{3}{2}}$ b) $7^{\frac{2}{3}}$ c) $7^{-\frac{1}{2}}$
d) $7^{-\frac{1}{3}}$ e) $7^{-\frac{3}{2}}$ f) $7^{-\frac{3}{5}}$
g) $7^{\frac{5}{2}}$ h) $7^{\frac{6}{5}}$
- a) 27 b) 25 c) $\frac{1}{16}$
d) $\frac{1}{9}$ e) $\frac{1}{12}$ f) 8
g) 10 h) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- a) 0,008 b) 2,5 c) 0,09
d) 125 e) 32 f) 0,008
g) $411\frac{127}{243}$ h) 0,008
- a) 16 b) $\frac{1}{3}$ c) 1 d) 64
- a) $2^{\frac{1}{4}}$ b) $5^{\frac{1}{6}}$ c) $5^{\frac{3}{8}}$
d) $2^{\frac{5}{6}}$ e) $3^{\frac{1}{6}}$ f) $3^{\frac{1}{12}}$
g) $2^{\frac{4}{3}}$ h) $3^{\frac{7}{6}}$ i) $2^{\frac{2}{3}}$
j) 18^1 k) $2^{-\frac{1}{2}}$ l) $3^{\frac{7}{8}}$

- Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 2.
a) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{0,5}$ e) $\sqrt{512}$ g) $2\sqrt{2}$
b) $\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[3]{4}$ f) $\sqrt[3]{1024}$ h) $2\sqrt[3]{2}$
- Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 7.
a) $\sqrt{7^3}$ c) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ e) $\sqrt{\frac{1}{7^3}}$ g) $49\sqrt{7}$
b) $\sqrt[3]{7^2}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$ f) $\frac{1}{\sqrt[5]{7^3}}$ h) $7\sqrt[5]{7}$
- Oblicz.
a) $9^{\frac{3}{2}}$ c) $8^{-\frac{4}{3}}$ e) $144^{-0,5}$ g) $10\,000^{0,25}$
b) $125^{\frac{2}{3}}$ d) $27^{-\frac{2}{3}}$ f) $16^{0,75}$ h) $81^{-0,125}$
- Oblicz.
a) $0,04^{\frac{3}{2}}$ c) $0,027^{\frac{2}{3}}$ e) $0,0625^{-\frac{5}{4}}$ g) $0,0081^{-1,25}$
b) $0,16^{-\frac{1}{2}}$ d) $0,0016^{-\frac{3}{4}}$ f) $0,00032^{\frac{3}{4}}$ h) $0,00000256^{0,375}$
- Oblicz.
a) $2^2 \cdot 8^{\frac{2}{3}}$ b) $3^3 \cdot 27^{-\frac{4}{3}}$ c) $0,008^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{125}$ d) $0,0256^{\frac{3}{4}} \cdot (\sqrt[3]{10})^9$
- Zapisz podaną liczbę w postaci a^x , gdzie a jest liczbą naturalną, natomiast x – liczbą wymierną.
a) $\sqrt{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$ g) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{2}$ j) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{4}{3}} \cdot 6^{\frac{2}{3}}$
b) $\sqrt[3]{5^{\frac{1}{2}}}$ e) $\sqrt{3} : \sqrt[3]{3}$ h) $9^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} : \sqrt{3}$ k) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{27} : 6^{\frac{3}{4}}$
c) $\sqrt[4]{5^{\frac{3}{2}}}$ f) $\sqrt[3]{3} : \sqrt[4]{3}$ i) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{3}{2}} : 8^{\frac{2}{3}}$ l) $3^{\frac{1}{8}} \cdot 12^{\frac{3}{4}} : \sqrt{8}$
- Która liczba jest większa: x czy y ?
a) $x = 3 \cdot 1024^{-0,1}$, $y = 2^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{2}{3}} : \sqrt{2}$ b) $x = (\frac{2}{5})^{-3} : \sqrt[6]{\frac{125}{8}}$, $y = \sqrt[6]{36^3}$

- a) $x = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
 $y = 2^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}} : 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} < 1,5$, gdyż $(\sqrt{2})^2 < (\frac{3}{2})^2$
Zatem $x > y$.
b) $x = (\frac{5}{2})^3 : ((\frac{5}{2})^3)^{\frac{1}{6}} = (\frac{5}{2})^{\frac{5}{2}} > 2,5^2 = 6,25$
 $y = 36^{\frac{3}{6}} = 36^{\frac{1}{2}} = 6$
Zatem $x > y$.

1.10. Logarytm i jego własności

Definicja

Logarytmem o podstawie 10 (logarytmem dziesiętnym) z dodatniej liczby b nazywamy liczbę x taką, że $10^x = b$. Piszemy wówczas $\log b = x$.

Przykład 1

- a) $\log 1000 = 3$, ponieważ $10^3 = 1000$.
b) $\log 0,1 = -1$, ponieważ $10^{-1} = 0,1$.
c) $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$, ponieważ $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$.

Pytanie o $\log b$ to pytanie o to, do jakiej potęgi należy podnieść 10, aby otrzymać liczbę b .

Ćwiczenie 1

Oblicz.

- a) $\log 10$ b) $\log 100$ c) $\log 100\,000$ d) $\log 0,01$ e) $\log \sqrt[3]{10}$

Rozpatruje się też logarytmy o innych podstawach. Na przykład logarytmem o podstawie 2 z dodatniej liczby b jest taka liczba x , że $2^x = b$. Piszemy wówczas $\log_2 b = x$.

Przykład 2

- a) $\log_2 8 = 3$, ponieważ $2^3 = 8$.
b) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$, ponieważ $2^{-4} = \frac{1}{16}$.
c) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$, ponieważ $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$.

Pytanie o $\log_2 b$ to pytanie o to, do jakiej potęgi należy podnieść 2, aby otrzymać liczbę b .

Ćwiczenie 2

Oblicz.

- a) $\log_2 16$ b) $\log_2 1024$ c) $\log_2 \frac{1}{2}$ d) $\log_2 \frac{1}{8}$ e) $\log_2 \sqrt{2}$

Definicja

Niech a i b będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$. **Logarytm** o podstawie a z liczby b to wykładnik potęgi, do jakiej należy podnieść podstawę a , aby otrzymać liczbę b .

$$\log_a b = x, \text{ gdy } a^x = b$$

Przykład 3

- a) $\log_3 9 = 2$, ponieważ $3^2 = 9$.
b) $\log_5 125 = 3$, ponieważ $5^3 = 125$.
c) $\log_{25} 625 = 2$, ponieważ $25^2 = 625$.

$\log_a b = x$

liczba logarytmowana

logarytm

podstawa logarytmu

Uczeń:

- oblicza logarytm danej liczby,
- stosuje równości wynikające z definicji logarytmu do obliczeń,
- wyznacza podstawę logarytmu, gdy dana jest wartość logarytmu, podaje odpowiednie założenia dla podstawy logarytmu oraz liczby logarytmowanej,
- stosuje twierdzenia o logarytmie iloczynu, ilorazu oraz potęgi do obliczania wartości wyrażeń z logarytmami,
- stosuje twierdzenie o logarytmie iloczynu, ilorazu i potęgi do uzasadniania równości wyrażeń,
- uzasadnia podstawowe własności logarytmów.

Ćwiczenie 1

- a) 1
b) 2
c) 5
d) -2
e) $\frac{1}{3}$

Ćwiczenie 2

- a) 4
b) 10
c) -1
d) -3
e) $\frac{1}{2}$

Multibook

- Logarytmy

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.10

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

- a) 1
b) 4
c) $\frac{1}{2}$
d) 3
e) -2
f) $\frac{1}{4}$

Ćwiczenie 4

Dla dowolnej liczby dodatniej $a \neq 1$:
 $a^0 = 1$, zatem z definicji logarytmu $\log_a 1 = 0$,
 $a^1 = a$, zatem z definicji logarytmu $\log_a a = 1$.

Ćwiczenie 3

Oblicz.

- a) $\log_3 3$ b) $\log_3 81$ c) $\log_3 \sqrt{3}$ d) $\log_3 27$ e) $\log_3 \frac{1}{9}$ f) $\log_3 \sqrt[4]{3}$

D Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby dodatniej a różnej od 1 zachodzą podane obok własności.

$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$

Czy wiesz, że...

Pojęcie logarytmu wprowadził ponad 400 lat temu szkocki matematyk John Napier (1550–1617), a logarytmy dziesiętne zdefiniował Anglik Henry Briggs (1561–1630) – opublikował on tablice takich logarytmów.

W obliczeniach są wykorzystywane następujące własności logarytmów (ich dokładne omówienie i dowody zostaną przedstawione w dalszym toku nauki).

Twierdzenie

Jeśli a, b, c są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$ i $p \in \mathbb{R}$, to:

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c \quad \text{logarytm iloczynu}$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \quad \text{logarytm ilorazu}$$

$$\log_a b^p = p \log_a b \quad \text{logarytm potęgi}$$

Przykład 4

$$\text{a) } \log_2(256 \cdot 1024) = \log_2 256 + \log_2 1024 = 8 + 10 = 18$$

$$\text{b) } \log_2 16\sqrt{2} = \log_2 16 + \log_2 \sqrt{2} = 4 + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Ćwiczenie 5

Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm iloczynu.

$$\text{a) } \log_2(64 \cdot 256) \quad \text{b) } \log_5(125 \cdot 625) \quad \text{c) } \log_5 5\sqrt{5} \quad \text{d) } \log_2 8\sqrt[3]{2} \quad \text{e) } \log_3 9\sqrt[4]{3}$$

Przykład 5

$$\text{a) } \log_2 \frac{0,25}{32} = \log_2 0,25 - \log_2 32 = -2 - 5 = -7$$

$$\text{b) } \log_3 \frac{81}{\sqrt{3}} = \log_3 81 - \log_3 \sqrt{3} = 4 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$$

Ćwiczenie 6

Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm ilorazu.

$$\text{a) } \log_2 \frac{0,5}{64} \quad \text{b) } \log_2 \frac{1024}{0,125} \quad \text{c) } \log_2 \frac{\sqrt{2}}{8} \quad \text{d) } \log_5 \frac{625}{\sqrt{5}} \quad \text{e) } \log_3 \frac{243}{\sqrt[4]{3}}$$

Ćwiczenie 5

$$\text{a) } \log_2 64 + \log_2 256 = 6 + 8 = 14$$

$$\text{b) } \log_5 125 + \log_5 625 = 3 + 4 = 7$$

$$\text{c) } \log_5 5 + \log_5 \sqrt{5} = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$$\text{d) } \log_2 8 + \log_2 \sqrt[3]{2} = 3 + \frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$$

$$\text{e) } \log_3 9 + \log_3 \sqrt[4]{3} = 2 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

Ćwiczenie 6

$$\text{a) } \log_2 0,5 - \log_2 64 = -1 - 6 = -7$$

$$\text{b) } \log_2 1024 - \log_2 \frac{1}{8} = 10 - (-3) = 13$$

$$\text{c) } \log_2 \sqrt{2} - \log_2 8 = \frac{1}{2} - 3 = -2\frac{1}{2}$$

$$\text{d) } \log_5 625 - \log_5 \sqrt{5} = 4 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$$

$$\text{e) } \log_3 243 - \log_3 \sqrt[4]{3} = 5 - \frac{1}{4} = 4\frac{3}{4}$$

Ćwiczenie 7

Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm potęgi.

- a) $\log_2 4^{10}$ b) $\log_2 32^4$ c) $\log_3 9^6$ d) $\log_3 81^{-4}$

$$\begin{aligned}\log_2 8^5 &= 5 \log_2 8 = \\ &= 5 \cdot 3 = \\ &= 15\end{aligned}$$

Zadania

1. Oblicz.

- a) $\log_2 512$ b) $\log_2 2$ c) $\log_2 \frac{1}{32}$ d) $\log_2 \sqrt[5]{2}$ e) $\log_2 \sqrt{8}$

2. Oblicz.

- a) $\log_3 1$ b) $\log_3 243$ c) $\log_3 \frac{1}{3}$ d) $\log_3 3\sqrt{3}$ e) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{27}}$

3. Oblicz.

- a) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ b) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ c) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$ $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$, bo $(\frac{1}{3})^{-3} = 27$.

4. Sprawdź prawdziwość równości $\log_2 x + \log_2 y = \log_2 xy$ dla podanych wartości x i y .

- a) $x = 4, y = 16$ b) $x = 8, y = \frac{1}{4}$ c) $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{8}$

5. Sprawdź prawdziwość równości $\log_3 x - \log_3 y = \log_3 \frac{x}{y}$ dla podanych wartości x i y .

- a) $x = 27, y = 3$ b) $x = 81, y = 9$ c) $x = 3, y = \sqrt{3}$

6. Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm iloczynu.

- a) $\log_4 2 + \log_4 8$ b) $\log_6 2 + \log_6 3$ c) $\log_2 12 + \log_2 \frac{2}{3}$

D 7. Uzasadnij poniższą równość.

- a) $\log 15 + \log 12 - 2 = \log \frac{9}{5}$ b) $\log_2 54 - \log_2 3 = 2 \log_2 \sqrt{3} + \log_2 6$

8. W karcie wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych na egzamin maturalny z biologii, chemii i fizyki znajduje się tablica przybliżonych wartości logarytmów dziesiętnych. Korzystając z zamieszczonego fragmentu tablicy, podaj przybliżone wartości:

- a) $\log 0,03, \log 0,3, \log 3$,
b) $\log 0,054, \log 0,0054, \log 5,4$,
c) $\log 3 + \log 9, \log 8 - \log 2$.

x	$\log x$	x	$\log x$	x	$\log x$
0,01	-2,000	0,26	-0,585	0,51	-0,292
0,02	-1,699	0,27	-0,569	0,52	-0,284
0,03	-1,523	0,28	-0,553	0,53	-0,276
0,04	-1,398	0,29	-0,538	0,54	-0,268
0,05	-1,301	0,30	-0,523	0,55	-0,260
0,06	-1,222	0,31	-0,509	0,56	-0,252
0,07	-1,155	0,32	-0,495	0,57	-0,244

7. a) $\log 15 + \log 12 - 2 = \log 15 + \log 12 - \log 100 = \log \frac{15 \cdot 12}{100} = \log \frac{9}{5}$

b) $\log_2 54 - \log_2 3 = \log_2 \frac{54}{3} = \log_2 18$

$2 \log_2 \sqrt{3} + \log_2 6 = \log_2 3 + \log_2 6 = \log_2 18$

Zatem $\log_2 54 - \log_2 3 = 2 \log_2 \sqrt{3} + \log_2 6$.

Ćwiczenie 7

- a) 20
b) 20
c) 12
d) -16

Odpowiedzi do zadań

1. a) 9
b) 1
c) -5
d) $\frac{1}{5}$
e) $\frac{3}{2}$
2. a) 0
b) 5
c) -1
d) $\frac{3}{2}$
e) $-\frac{3}{2}$
3. a) -1
b) 2
c) 4
4. a) $2 + 4 = 6$
b) $3 - 2 = 1$
c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$
5. a) $3 - 1 = 2$
b) $4 - 2 = 2$
c) $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
6. a) 2
b) 1
c) 3
8. a) -1,523, -0,523, 0,477
b) -1,268, -2,268, 0,732
c) 1,431, 0,602

Uczeń:

- oblicza procent danej liczby,
- wyjaśnia pojęcia procentu i punktu procentowego,
- oblicza, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba,
- wyznacza liczbę, gdy dany jest jej procent,
- zmniejsza i zwiększa liczbę o dany procent,
- stosuje obliczenia procentowe w zadaniach praktycznych.

Ćwiczenie 1

- a) 6, 30, 150, 450
b) 5, 20, 100, 300

Ćwiczenie 2

- a) 100 b) 320 c) 60
d) 12 e) 72 f) 42

Ćwiczenie 3

Czapka – 27 zł, rękawice – 39 zł,
razem 66 zł.

Ćwiczenie 4

Cena nart po obniżce:
marcowej –
 $0,8 \cdot 0,7 \cdot 825 = 462$ [zł],
o 50% – $0,5 \cdot 825 = 412,50$ [zł]

Ćwiczenie 5

Cena kajaka po dwóch zmianach:
 $1,15 \cdot 1,2 \cdot 1000 = 1380$ [zł].
Cena wzrosła o 38% w stosunku
do ceny początkowej.

1.11. Procenty (1)

■ Obliczanie procentu danej liczby

Należy pamiętać, że procenty zawsze odnoszą się do jakiejś całości (wielkości ustalonej).

$$1\%w = \frac{1}{100}w = 0,01w, \quad 15\%w = \frac{15}{100}w = 0,15w, \quad 240\%w = \frac{240}{100}w = 2,4w$$

Ćwiczenie 1

Oblicz:

- a) 1%, 5%, 25%, 75% liczby 600, b) 2%, 8%, 40%, 120% liczby 250.

Ćwiczenie 2

Oblicz:

- a) 20% liczby 500, c) 15% liczby 400, e) 150% liczby 48,
b) 40% liczby 800, d) 80% liczby 15, f) 210% liczby 20.

Ćwiczenie 3

Karolina kupiła czapkę i rękawice po obniżce
(w tabeli podano ceny przed obniżką i wysokość obniżki). Oblicz, ile zapłaciła.

Produkt	Cena	Obniżka
czapka	45 zł	o 40%
rękawice	60 zł	o 35%

Warto zauważyć, że wielokrotnej zmiany wartości o pewien procent nie można zastąpić jednorazową zmianą o sumę procentów każdej ze zmian.

Ćwiczenie 4

W styczniu narty kosztowały 825 zł. W lutym ich cenę obniżono o 30%, a w marcu – o dalsze 20%. Ile trzeba było zapłacić za narty po marcowej obniżce? Ile kosztowałyby te narty, gdyby ich cenę od razu obniżono o 50%?

Ćwiczenie 5

Cena kajaka wynosiła 1000 zł. Cenę podniesiono najpierw o 20%, a następnie o 15%. Ile kosztuje kajak po tych zmianach? O ile procent wzrosła cena kajaka w stosunku do ceny początkowej?

Ćwiczenie 6

Po dwukrotnej obniżce ceny pewnego towaru o $p\%$ jego cena spadła o $x\%$. Oblicz p dla:

- a) $x = 19$, b) $x = 36$, c) $x = 51$.

Ćwiczenie 6

Niech c oznacza cenę towaru przed obniżką.

$$\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 \cdot c = \left(1 - \frac{x}{100}\right) \cdot c$$

$$\text{a) } \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = 1 - \frac{19}{100}$$

$$\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = \frac{81}{100}$$

$$1 - \frac{p}{100} = \frac{9}{10}$$

$$p = 10$$

$$\text{b) } \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = 1 - \frac{36}{100}$$

$$p = 20$$

$$\text{c) } \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = 1 - \frac{51}{100}$$

$$p = 30$$

Multibook

- Procenty – rozwiązywanie zadania „od końca”

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.11

 **Generator**
testów i sprawdzianów

W niektórych sytuacjach wykorzystuje się dziesiątą część procentu, czyli promil.

1 promil (1‰) danej wielkości to 0,001 tej wielkości.

Ćwiczenie 7

Oblicz:

- a) 2‰ liczby 300, c) 50‰ liczby 100, e) 0,2‰ liczby 1800,
b) 8‰ liczby 1400, d) 5‰ liczby 1000, f) 5,5‰ liczby 180.

■ Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba

Przykład 1

Za jedną akcję firmy *X* tydzień temu trzeba było zapłacić 25 zł, a dzisiaj – o 2,25 zł więcej. O ile procent podrożały akcje?

$$\frac{2,25}{25} \cdot 100\% = 9\%$$

Akcje podrożały o 9%.

Ćwiczenie 8

W tabeli podano ceny jednej akcji firmy *Y* i firmy *Z* w lutym i w marcu. Oblicz, o ile procent podrożały akcje każdej z tych firm.

Firma	Luty	Marzec
<i>Y</i>	18 zł	24,30 zł
<i>Z</i>	24 zł	27 zł

Ćwiczenie 9

Oblicz, jakim procentem liczby x jest liczba y oraz jakim procentem liczby y jest liczba x .

- a) $x = 100$, $y = 50$ b) $x = 50$, $y = 40$ c) $x = 10$, $y = 16$

■ Wyznaczanie liczby, gdy dany jest jej procent

Przykład 2

W tabeli podano ceny zestawów rondli po obniżce oraz wysokość obniżki. Oblicz cenę dużego zestawu przed obniżką.

Oznaczmy przez x cenę dużego zestawu przed obniżką. Obecna cena stanowi 85% ceny x :

$$\frac{85}{100}x = 272 \text{ i stąd } x = 272 \cdot \frac{100}{85} = 320 \text{ [zł]}.$$

Zestaw	Obniżka	Cena
duży	o 15%	272 zł
średni	o 24%	190 zł
mały	o 32%	85 zł

Ćwiczenie 10

Oblicz cenę średniego i cenę małego zestawu rondli z przykładu 2 przed obniżką.

Ćwiczenie 10

Cena średniego zestawu: 250 zł,
cena małego zestawu: 125 zł.

Ćwiczenie 7

- a) 0,6
b) 11,2
c) 5
d) 5
e) 0,36
f) 0,99

Ćwiczenie 8

Firma *Y*: o 35%,
firma *Z*: o 12,5%.

Ćwiczenie 9

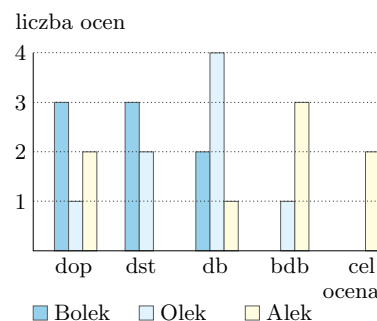
- a) $y = 50\%x$, $x = 200\%y$
b) $y = 80\%x$, $x = 125\%y$
c) $y = 160\%x$, $x = 62,5\%y$

Odpowiedzi do zadań

- 160,4
 - 4,5
 - 0,004
- Niech c oznacza cenę wyjściową sukni, a x – liczbę procent, o jaką należałoby podnieść cenę.
 - $0,5c \left(1 + \frac{x}{100}\right) = c$, skąd $x = 100$
 - $0,75c \left(1 + \frac{x}{100}\right) = c$, skąd $x = 33\frac{1}{3}$
 - $0,64c \left(1 + \frac{x}{100}\right) = c$, skąd $x = 56,25$
- Niech c – cena wyjściowa towaru, x – liczba procent, o jaką należałoby obniżyć cenę.
 - $1,25 \cdot 1,25c \left(1 - \frac{x}{100}\right) = c$
 $x = 36$
 - $1,5 \cdot 1,5c \left(1 - \frac{x}{100}\right) = c$
 $x = 55,5$
- 2376 zł
 - 2250 zł
 - 2160 zł
- 62,5%
 - 75%
- I kwartał: 2500000 zł, III kwartał: 3000000 zł, IV kwartał: 2400000 zł,
 - I kwartał: 1500000 zł, II kwartał: 2250000 zł, III kwartał: 1800000 zł

Zadania

- Oblicz: a) 401% liczby 40, b) 15‰ liczby 300, c) 2‰ liczby 2.
- Cenę sukni ślubnej obniżono o $p\%$. O ile procent należałoby podnieść nową cenę, aby suknia kosztowała tyle samo, ile przed obniżką?
 - $p = 50$
 - $p = 25$
 - $p = 36$
- Cenę pewnego towaru podniesiono dwukrotnie o $p\%$. O ile procent należałoby obniżyć jego cenę, aby towar ten kosztował tyle, ile na początku?
 - $p = 25$
 - $p = 50$
- Wycieczka do Londynu kosztuje 2400 zł. Jaka byłaby cena tej wycieczki:
 - gdyby najpierw podniesiono ją o 10%, a następnie obniżono o 10%,
 - gdyby najpierw obniżono ją o 25%, a następnie podniesiono o 25%,
 - gdyby najpierw obniżono ją o 25%, a następnie podniesiono o 20%?
- Na diagramie obok przedstawiono liczbę poszczególnych ocen, jakie bracia Bolek, Olek i Alek otrzymali na koniec pierwszego semestru.
 - Ile procent ocen Olka to oceny dobre i bardzo dobre?
 - Ile procent wszystkich ocen braci stanowią oceny lepsze od oceny dopuszczającej?
- Firma A w II kwartale miała obroty o 50% większe niż w I kwartale. W III kwartale jej obroty spadły o 20%, a w IV – o kolejne 20%. Oblicz, jakie były obroty firmy A w pozostałych kwartałach w przypadku, gdy wyniosły: a) w II kwartale 3 750 000 zł, b) w IV kwartale 1 440 000 zł.
- Cena brutto komputera jest równa cenie netto plus 23% podatku VAT.
 - Cena netto komputera jest równa 2200 zł. Oblicz jego cenę brutto. Ile procent ceny brutto stanowi podatek VAT?
 - Cena brutto komputera jest równa 3198 zł. Oblicz jego cenę netto. Ile procent ceny brutto stanowi cena netto?
 - Podatek VAT doliczony do ceny netto komputera wyniósł 483 zł. Jaka jest cena brutto tego komputera? Ile byłaby równa cena brutto tego komputera, gdyby jego cena netto została podniesiona o 200 zł?



- Cena brutto: $1,23 \cdot 2200 = 2706$ [zł]
 $\frac{0,23 \cdot 2200}{1,23 \cdot 2200} \approx 0,187$
 Podatek stanowi około 18,7% ceny brutto.
 - Cena netto: $3198 : 1,23 = 2600$ [zł]
 $\frac{1}{1,23} \approx 0,813$
 Cena netto stanowi około 81,3% ceny brutto.
 - Cena netto: $483 : 0,23 = 2100$ [zł]
 Cena brutto: $1,23 \cdot 2100 = 2583$ [zł]
 Cena brutto po podniesieniu ceny netto: $1,23 \cdot 2300 = 2829$ [zł]

1.12. Procenty (2)

Przykład 1

W tabeli przedstawiono procentowy udział Chińskiej Republiki Ludowej, Republiki Południowej Afryki i Stanów Zjednoczonych w światowym wydobyciu złota w latach 2008 i 2022.

Kraj	2008 rok	2022 rok
ChRL	12,2%	10,6%
RPA	9,8%	3,5%
USA	9,9%	5,5%

Źródło: www.goldsheetlinks.com/production,
en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_gold_production

Zauważmy, że udział USA w światowym wydobyciu złota spadł prawie o połowę. Można też powiedzieć, że spadł on dokładnie o 4,4 punktu procentowego. Udział RPA spadł w tym czasie o 6,3 punktu procentowego.



Przykład 2

Sondaż przeprowadzony we wrześniu pokazał, że partię X popiera 12% wyborców. W październiku poparcie dla partii X deklarowało 18% wyborców.

Można powiedzieć, że poparcie dla partii X wzrosło o 6 punktów procentowych lub że liczba osób popierających tę partię wzrosła o 50%.

Ćwiczenie 1

W tabeli przedstawiono wyniki sondażu, w którym pytano o poparcie dla partii Y oraz partii Z.

Partia	Luty	Marzec
Y	16%	20%
Z	10%	8%

a) O ile punktów procentowych wzrosło poparcie dla partii Y? O ile procent wzrosła liczba osób popierających partię Y?

b) O ile punktów procentowych zmalało poparcie dla partii Z? O ile procent zmalała liczba osób popierających partię Z?

Ćwiczenie 2

W tabeli podano wysokość oprocentowania lokat w bankach A i B w latach 2023 i 2024. Jak zmieniło się oprocentowanie w każdym z tych banków? Odpowiedź podaj w punktach procentowych.

Bank	2023	2024
A	4,3%	5,8%
B	5,4%	4,2%

Ćwiczenie 2

W banku A wzrosło o 1,5 punktu procentowego, w banku B zmalało o 1,2 punktu procentowego.

Uczeń:

- stosuje obliczenia procentowe w zadaniach praktycznych dotyczących płac, podatków, rozliczeń bankowych.

Ćwiczenie 1

- a) poparcie o 4 punkty procentowe, liczba osób o 25%
- b) poparcie o 2 punkty procentowe, liczba osób o 20%

Ćwiczenie 3

- a) 5100 zł
- b) 5175 zł
- c) 5200 zł

Odpowiedzi do zadań

1. $K_A = 8000(1 + 0,043) = 8344$ [zł]
 $K_B = 8000(1 + 0,043 + 0,015) = 8464$ [zł]
 $K_B - K_A = 120$ zł
Zarobiłaby o 120 zł więcej.
2. Niech r_A , r_B – oprocentowania odpowiednio w bankach A i B .
 $3000r_A + 45 = 3000r_B$
 $r_A + 0,015 = r_B$
W banku B oprocentowanie było wyższe o 1,5 punktu procentowego.
3. Odsetki wyniosą:
 $0,04 \cdot 7500 = 300$ [zł]
a) $7500 + 300 = 7800$ [zł]
b) **I sposób**
Podatek od odsetek będzie równy $0,2 \cdot 300 = 60$ [zł]
Tomek odbierze po roku:
 $7500 + 300 - 60 = 7740$ [zł]
II sposób
Po zapłaceniu podatku oprocentowanie wyniesie:
 $0,8 \cdot 4\% = 3,2\%$
Tomek odbierze po roku:
 $7500(1 + 0,032) = 7740$ [zł]
4. $5000(1 + 0,05 \cdot 0,8) = 5200$ [zł]
Darek nie uzyska potrzebnej kwoty.

Ćwiczenie 3

Kapitał 5000 zł złożono w banku na roczną lokatę oprocentowaną w wysokości r w skali roku. Podaj wielkość kapitału po roku.

- a) $r = 2\%$
- b) $r = 3,5\%$
- c) $r = 4\%$

Kapitał w wysokości k złożony na rok przy oprocentowaniu rocznym w wysokości $r\%$ wynosi po roku $k(1 + \frac{r}{100})$.

Zadania

1. Dorota wpłaciła 8000 zł do banku A na lokatę roczną oprocentowaną 4,3% w skali roku. O ile więcej zarobiłaby, gdyby wpłaciła tę samą kwotę do banku B , w którym oprocentowanie lokaty rocznej jest o 1,5 punktu procentowego wyższe niż w banku A ?
 2. Połowę z 6000 zł złożono na lokatę roczną w banku A , a drugą połowę – w banku B . Odsetki uzyskane po roku w banku B były o 45 zł wyższe niż odsetki w banku A . O ile punktów procentowych było wyższe oprocentowanie lokaty w banku B od oprocentowania lokaty w banku A ?
 3. Tomek złożył w banku 7500 zł na lokatę roczną oprocentowaną 4% w skali roku. Oblicz, jaką kwotę odbierze po roku w przypadku, gdy od odsetek:
a) nie jest pobierany podatek,
b) jest pobierany podatek w wysokości 20%.
Uwaga. W Polsce podatek od odsetek wynosi 19%, jednak w zadaniach, dla uproszczenia obliczeń, przyjmujemy, że jest to 20%.
 4. Darek chciałby za rok wydać na remont 5250 zł. Czy uzyska potrzebną kwotę, jeśli złoży 5000 zł na lokacie rocznej oprocentowanej 5% w skali roku, a od naliczanych odsetek jest pobierany podatek w wysokości 20%?
 5. Krysia wpłaciła do banku pewną kwotę na lokatę roczną oprocentowaną 4% w skali roku. Od dopisanych odsetek został pobrany podatek w wysokości 20%. Jaką kwotę:
a) odebrała po roku, jeśli do banku wpłaciła 2250 zł,
b) wpłaciła, jeśli po roku odebrała z banku 2580 zł?
 6. Kwotę 12 000 zł podzielono na dwie części. Jedną część wpłacono do banku A na lokatę roczną oprocentowaną 3% w skali roku. Drugą część wpłacono do banku B na lokatę roczną oprocentowaną 3,5% w skali roku. W obu bankach od dopisanych odsetek został pobrany podatek w wysokości 20%. Po roku z obu banków odebrano łącznie 12 300 zł. Jaką kwotę wpłacono do banku A ?
5. a) $2250(1 + 0,04 \cdot 0,8) = 2322$ [zł]
Krysia odebrała 2322 zł.
b) Niech K oznacza kwotę wpłaconą do banku.
 $K(1 + 0,04 \cdot 0,8) = 2580$
 $K = 2500$ [zł]
Krysia wpłaciła 2500 zł.
 6. Niech x oznacza kwotę wpłaconą do banku A .
 $0,8 \cdot 0,03x + 0,8 \cdot 0,035(12000 - x) = 300$
 $x = 9000$
Do banku A wpłacono 9000 zł.

Powtórzenie

Zestaw I

- Jaka jest największa liczba trzycyfrowa podzielna przez:
a) 5, b) 6, c) 7, d) 15, e) 45?
- Wyznacz liczbę przeciwną do podanej liczby.
a) $23 : (-7\frac{2}{3}) - \frac{324}{243}$ c) $(-6\frac{2}{3}) : (-7\frac{1}{7}) - \sqrt{\frac{169}{225}}$ e) $3\frac{3}{4} : \frac{3}{10} - (-1\frac{1}{6}) : \frac{7}{5}$
b) $(-2\frac{3}{5}) \cdot 3\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ d) $-12 \cdot 3\frac{7}{15} + 3\frac{1}{2} : 5$ f) $4\frac{3}{4} : (\frac{3}{4} - 2\frac{1}{3}) - \frac{1}{2}$
- Wśród poniższych liczb wskaż liczbę niewymierną i podaj największą liczbę całkowitą od niej mniejszą.
a) $4 - \frac{\sqrt{12}}{3}$, $14 - \sqrt{196}$, $2\sqrt{16} - \sqrt{36}$ c) $\frac{\sqrt{49}}{3} + \frac{\sqrt[3]{729}}{4}$, $\sqrt{81} + \sqrt[3]{81}$
b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$, $\sqrt{1\frac{4}{25}}$, $\sqrt{12} \cdot \sqrt{75}$ d) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{49}$, $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{125}$
- Wyznacz liczbę odwrotną do podanej liczby.
a) $\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{15}$ c) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{40}$ e) $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{512}}$ g) $\sqrt{1\frac{9}{16}} : \sqrt{\frac{225}{256}}$
b) $\sqrt{5\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}}$ d) $\sqrt[3]{75} \cdot \sqrt[3]{45}$ f) $\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{192}}$ h) $\sqrt{1\frac{1}{2}} : \sqrt{1\frac{5}{27}}$
- Oblicz.
a) $\sqrt[3]{\frac{(-2)^3}{125}}$ c) $\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt[3]{\frac{125}{64}}$ e) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{15}} \cdot \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{9}}$ g) $\sqrt[3]{0,8} : \sqrt[3]{1\frac{9}{16}}$
b) $\sqrt[3]{\frac{(-2)^6}{(-3)^3}}$ d) $\frac{\sqrt{121} - \sqrt[3]{125}}{\sqrt{144} - \sqrt[3]{216}}$ f) $\sqrt[3]{2\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{20}}$ h) $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} : \sqrt[3]{1,44}$
- a) Oblicz iloraz sumy liczb $x = 2 - \sqrt{5}$ i $y = 4 - \sqrt{5}$ oraz ich różnicę.
b) Oblicz sześcian różnicy liczb $x = 1 - 6\sqrt[3]{3}$ i $y = 0, (9) - \sqrt[3]{3}$.
c) Oblicz różnicę odwrotności kwadratów liczb $x = \frac{\sqrt{2}}{9}$ i $y = 0, (2) \cdot \sqrt{3}$.
- Podaj liczbę naturalną n spełniającą nierówności:
a) $n < 2\sqrt{3} < n + 1$, b) $n - 1 < 5\sqrt{5} < n$, c) $n < \sqrt{35} < n + 1$.
- Oblicz. Wynik podaj w notacji wykładniczej.
a) $\frac{7,2 \cdot 10^{18} \cdot 4,9 \cdot 10^7}{5,6 \cdot 10^{32}}$ c) $4\,410\,000\,000 : 0,021$ e) $0,000000216 : 360\,000$
b) $\frac{1,44 \cdot 10^{11} \cdot 5,4 \cdot 10^{23}}{1,8 \cdot 10^5 \cdot 3,6 \cdot 10^8}$ d) $10\,240 : 0,00000008$ f) $0,00000000008 : 2,5$

Odpowiedzi do zadań

- a) 995 b) 996
c) 994 d) 990
e) 990
- a) $4\frac{1}{3}$ b) 8
c) $-\frac{1}{15}$ d) 40,9
e) $-13\frac{1}{3}$ f) $3\frac{1}{2}$
- a) $4 - \frac{\sqrt{12}}{3}$, 2
b) $\sqrt{1\frac{4}{25}}$, 1
c) $\sqrt{81} + \sqrt[3]{81}$, 13
d) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{125}$, 8
- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{7}$
c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{1}{15}$
e) 2 f) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
g) $\frac{3}{4}$ h) $\frac{8}{9}$
- a) $-\frac{2}{5}$ b) $-1\frac{1}{3}$
c) 0 d) 1
e) $\frac{2}{3}$ f) $\frac{1}{2}$
g) $\frac{4}{5}$ h) $\frac{5}{6}$
- a) $-3 + \sqrt{5}$
b) -375
c) $\frac{135}{4}$
- a) 3 b) 12 c) 5
- a) $6,3 \cdot 10^{-7}$
b) $1,2 \cdot 10^{21}$
c) $2,1 \cdot 10^{11}$
d) $1,28 \cdot 10^{11}$
e) $6 \cdot 10^{-13}$
f) $3,2 \cdot 10^{-11}$

9. a) $a = 6, b = 4, c = 5, d = 3$
 $d < b < c < a$
 b) $a = 3, b = -3, c = -3,$
 $d = -2$
 $b = c < d < a$

10. a) $0,8 \cdot 1\frac{7}{8} = 1\frac{1}{2}$
 b) $0,8 \cdot \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$
 c) $0,8 \cdot \frac{6}{5} = \frac{24}{25}$
 d) $0,8 \cdot \frac{55}{64} = \frac{11}{16}$

11. a) Zmniejszyło się o 36%.
 b) Zmniejszyło się o 1%.

12. Niech x – liczba członków klubu 3 lata temu, wówczas:
 $1,2x$ – liczba członków 2 lata temu,
 $1,2 \cdot 1,2x = 1,44x$ – liczba członków rok temu.

$$1,44x = 216$$

$$x = 150$$

Trzy lata temu w klubie było 150 członków.

13. odsetki w banku A: $\frac{p}{100} \cdot 3000$
 odsetki w banku B: $\frac{p+2}{100} \cdot 4000$
 $\frac{p}{100} \cdot 3000 + \frac{p+2}{100} \cdot 4000 = 360$
 $p = 4$

Oprocentowanie w banku A wynosiło 4%.

14. a) 100,2 b) 500,8

Zestaw II

1. Najwięcej dzielników ma liczba c , a najmniej liczba e .

2. a) 4 b) $\frac{1}{3}$
 c) $2\frac{17}{32}$ d) $6\frac{1}{4}$
 e) 64 f) $\frac{1}{243}$

3. a), c) jest
 b) nie jest

9. Uporządkuj liczby a, b, c i d od najmniejszej do największej.

- a) $a = \log_2 64, b = \log_3 81, c = \log_4 1024, d = \log_5 125$
 b) $a = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}, b = \log_{\frac{1}{3}} 27, c = \log_{\frac{1}{4}} 64, d = \log_{\frac{1}{5}} 25$

10. Wyznacz liczbę o 20% mniejszą od podanej liczby.

- a) $\frac{(3\frac{1}{4} - 1,5) \cdot (-2\frac{1}{8} + \frac{1}{4})}{(2,25 - 3\frac{1}{2}) : \frac{2}{3} + \frac{1}{8}}$ c) $\frac{-48 : 0,6 + 1\frac{2}{3} \cdot 45 - 1\frac{5}{7} : 1\frac{1}{14}}{1\frac{1}{3} \cdot (-2\frac{2}{5}) + (\frac{2}{5} - 5\frac{1}{5}) \cdot 0,5}$
 b) $\frac{(1\frac{1}{6} - \frac{7}{9}) : (1\frac{1}{3} - \frac{1}{6})}{(\frac{1}{7} - \frac{1}{3}) \cdot 0,35 - 1\frac{2}{3} : (-2\frac{1}{2})}$ d) $\frac{0,3(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (\frac{2}{3} - \frac{1}{6}) : 0,75}{(\frac{3}{4} - 1\frac{1}{3}) \cdot (-0,8) + 1,44 : 2\frac{2}{5}}$

11. O ile procent zmieniło się pole prostokąta, jeśli:

- a) oba boki skrócono o 20%,
 b) jeden bok skrócono o 10%, a drugi wydłużono o 10%?

12. Liczba członków pewnego klubu golfowego wzrastała przez ostatnie trzy lata o 20% rocznie. Ilu członków liczył ten klub trzy lata temu, jeśli rok temu należało do niego 216 osób?

13. Kwotę 3000 zł wpłacono do banku A na lokatę oprocentowaną $p\%$ w skali roku. Kwotę 4000 zł wpłacono do banku B, w którym oprocentowanie jest o 2 punkty procentowe wyższe. Po roku odsetki uzyskane łącznie w obu bankach wyniosły 360 zł. Oblicz p .

14. Wyznacz liczbę:

- a) o 2‰ większą od 100, b) o 1,6‰ większą od 500.

Zestaw II

1. Która z liczb a, b, c, d, e ma najwięcej dzielników, a która najmniej?

$$a = 12 \quad b = 50 \quad c = 60 \quad d = 110 \quad e = 123$$

2. Oblicz.

- a) $\frac{4^{-6} \cdot 4^5}{4^{-2}}$ c) $(\frac{3}{2})^{-6} \cdot (\frac{3}{2})^2 \cdot \frac{9^4}{8^3}$ e) $2^{-5} \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}})^{-4} \cdot (\sqrt{8})^6$
 b) $(\frac{1}{3})^{-4} \cdot \frac{3^{-3}}{3^2}$ d) $10^4 \cdot (\frac{4}{5})^{-3} \cdot (5^5)^{-1}$ f) $\frac{(\sqrt{3})^8}{(\sqrt{27})^{-2}} \cdot (3^4 : 3^{-2})^{-2}$

3. Sprawdź, czy podana liczba jest całkowita.

- a) $\frac{3\frac{1}{2} \cdot (2\frac{2}{3} - 1\frac{5}{12}) - \frac{5}{8}}{3\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot 8\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3}$ b) $\frac{3,74 \cdot (2,34 + 3,86)}{1,759 + 0,35 \cdot 8,26}$ c) $\frac{3,6 \cdot (2\frac{1}{4} + 3\frac{2}{3}) - 2,3}{1,32 \cdot (4\frac{3}{11} - 2\frac{7}{11}) + 7,34}$

D 4. Uzasadnij, że nierówność zachodzi dla dowolnej liczby rzeczywistej x .

$$\text{a) } \sqrt[3]{\frac{125x^6}{64}} - \sqrt{\frac{9x^4}{8}} \geq 0 \quad \text{b) } \sqrt[3]{\frac{64x^{12}}{27}} - \sqrt{0,01x^8} \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}x^4$$

5. Liczby $x = 0,8(3)$ i $y = 1,(3)$ zapisz jako ułamki zwykłe i oblicz:

$$\text{a) } \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad \text{b) } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}, \quad \text{c) } \frac{1}{x} + y^2, \quad \text{d) } x^2 - \frac{1}{y^2}.$$

6. Podaj potrzebne założenia i uprość wyrażenie.

$$\text{a) } \frac{x^5 \cdot x^{-7}}{(x^2)^3} \quad \text{b) } \left(\frac{-6y^0 \cdot y^{-1}}{y^{-3}} \right)^2 \quad \text{c) } \left(\frac{3z^2}{y^{-3}} \right)^2 - \frac{z^3 y^4}{z^{-1} y^{-2}} \quad \text{d) } \frac{s^2 t - t^3}{\frac{1}{s^{-2}} - \frac{1}{t^{-2}}}$$

7. Oblicz wartość wyrażenia:

$$\text{a) } (5x^2 y^2)^3 : (25x^8 y^4) \text{ dla } x = \sqrt{2}, y = \sqrt{8},$$

$$\text{b) } (8x^{-3} y)^3 : (4x^{-4} y^2)^3 \text{ dla } x = \sqrt[3]{12}, y = 4\sqrt{3},$$

$$\text{c) } \frac{(x^2 y^3)^2 \cdot (-3x^3 y^2)^3}{(-xy^2)^5} \text{ dla } x = \sqrt{3}, y = \frac{1}{9},$$

$$\text{d) } \frac{(x^2 y^{-1})^{-2} (-xy^{-2})^2}{(x^3 y^4)^{-1}} \text{ dla } x = \sqrt[4]{2}, y = \sqrt[8]{8}.$$

8. Oblicz $u + v + w$. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

$$\text{a) } u = \frac{14m^2 t - 35mt^2 + 28mt^2}{7mt}, \quad v = \frac{9m^2 t^2 - 21m^2 t}{3m^2 t}, \quad w = \frac{m^2 t^2 + 0,5mt^3}{-2mt^2}$$

$$\text{b) } u = \frac{64x^4 y^2 - 60x^3 y^2}{-4x^3 y^2}, \quad v = \frac{60xy^3 - 85x^2 y^3}{5xy^3}, \quad w = \frac{11x^3 y + 3x^2 y}{-x^2 y}$$

9. Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej.

$$\text{a) } \frac{(2,4 \cdot 10^3) \cdot (7 \cdot 10^{13})}{(6 \cdot 10^6) \cdot (3,5 \cdot 10^4)} \quad \text{c) } \frac{(1,2 \cdot 10^8) \cdot (5,1 \cdot 10^{-5})}{(1,7 \cdot 10^{-7}) \cdot (4,8 \cdot 10^7)}$$

$$\text{b) } \frac{(25 \cdot 10^{-2}) \cdot (6 \cdot 10^{-6})}{(1,5 \cdot 10^{11}) \cdot (5 \cdot 10^{-9})} \quad \text{d) } 0,00015 : 0,0006$$

D 10. Liczba k jest sumą pięciu kolejnych liczb nieparzystych. Uzasadnij, że $\frac{k}{5}$ jest liczbą całkowitą.

11. Największy wspólny dzielnik dwucyfrowej liczby x i liczby 48 jest równy 8. Ile może być równa liczba x ?

D 12. Uzasadnij, że jeśli jeden bok prostokąta ma długość równą 1, a drugi – równą n , gdzie n jest liczbą naturalną, to długość przekątnej tego prostokąta jest liczbą niewymierną.

D 13. Uzasadnij, że dla dwóch kolejnych liczb całkowitych m i $m + 1$ można wskazać liczbę niewymierną c taką, że $m < c < m + 1$.

12. Niech d oznacza długość przekątnej.

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa: $d^2 = n^2 + 1$. Zatem: $d = \sqrt{n^2 + 1}$.

Liczba $n^2 + 1$ nie jest kwadratem liczby naturalnej, bo różnica między kwadratami kolejnych liczb naturalnych dodatnich jest większa od 1 (liczby n^2 i $n^2 + 1$ są kolejnymi liczbami naturalnymi dodatnimi).

Zatem liczba $\sqrt{n^2 + 1}$ jest niewymierna.

13. Niech $c = \frac{\sqrt{2}}{2} + m$. Wówczas:

$$m < \frac{\sqrt{2}}{2} + m < m + 1,$$

$$\text{bo } 0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$$

Zatem między dowolnymi dwiema kolejnymi liczbami całkowitymi znajduje się liczba niewymierna.

$$\text{4. a) } \sqrt[3]{\frac{125x^6}{64}} - \sqrt{\frac{9x^4}{8}} = \frac{5x^2}{4} - \frac{3x^2}{2\sqrt{2}} = \frac{5x^2}{4} - \frac{3\sqrt{2}x^2}{4} =$$

$$= (5 - 3\sqrt{2}) \frac{x^2}{4} \geq 0,$$

ponieważ:

$$5 - 3\sqrt{2} = \sqrt{25} - \sqrt{18} > 0.$$

$$\text{b) } L = \sqrt[3]{\frac{64x^{12}}{27}} - \sqrt{0,01x^8} =$$

$$= \frac{4x^4}{3} - \frac{x^4}{10} = \frac{37}{30}x^4$$

$$P = \frac{2\sqrt{3}x^4}{3} = \frac{20\sqrt{3}}{30}x^4$$

Zatem $L \geq P$, ponieważ:

$$37 = \sqrt{1369} > \sqrt{1200} =$$

$$= 20\sqrt{3}.$$

$$\text{5. } x = \frac{5}{6}, y = \frac{4}{3}$$

$$\text{a) } 1\frac{19}{20} \quad \text{b) } 2\frac{1}{400}$$

$$\text{c) } 2\frac{44}{45} \quad \text{d) } \frac{19}{144}$$

$$\text{6. a) } x^{-8}, x \neq 0$$

$$\text{b) } 36y^4, y \neq 0$$

$$\text{c) } 8z^4 y^6, y \neq 0, z \neq 0$$

$$\text{d) } t, s \neq 0, t \neq 0, s \neq t, s \neq -t$$

$$\text{7. a) } 20 \quad \text{b) } \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{c) } 27 \quad \text{d) } 2$$

$$\text{8. a) } 1\frac{1}{2}m + 6\frac{3}{4}t - 12, m \neq 0, t \neq 0$$

$$\text{b) } -44x + 24, x \neq 0, y \neq 0$$

$$\text{9. a) } 8 \cdot 10^5 \quad \text{b) } 2 \cdot 10^{-9}$$

$$\text{c) } 7,5 \cdot 10^2 \quad \text{d) } 2,5 \cdot 10^{-1}$$

10. Rozważmy pięć kolejnych liczb nieparzystych: $2n + 1, 2n + 3, 2n + 5, 2n + 7, 2n + 9$.

Wówczas:

$$k = 2n + 1 + 2n + 3 + 2n + 5 + 2n + 7 + 2n + 9 = 10n + 25 = 5(2n + 5)$$

Zatem jest to liczba podzielna przez 5, co oznacza, że $\frac{k}{5}$ jest liczbą całkowitą.

11. $x = 40$ lub $x = 56$ lub $x = 88$



Zadania z kontekstem realistycznym

Odpowiedzi do zadań

1. Liczba mieszkańców każdego piętra jest największym wspólnym dzielnikiem podanych trzech liczb. W rozkładzie na czynniki pierwsze otrzymujemy:

$$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$$

$$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$\text{Zatem } \text{NWD}(420, 462, 504) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42.$$

Liczba pięter I wieżowca:

$$420 : 42 = 10.$$

Liczba pięter II wieżowca:

$$462 : 42 = 11.$$

Liczba pięter III wieżowca:

$$504 : 42 = 12.$$

2. $6 \cdot 10^8$ w ciągu sekundy
 $6 \cdot 10^8 \cdot 3600$ w ciągu godziny
 $6 \cdot 36 \cdot 10^{10} \cdot 24$ w ciągu doby
 $6 \cdot 36 \cdot 24 \cdot 10^{10} \cdot 365,25$
 w ciągu roku (uwzględniamy lata przestępne)

$$6 \cdot 36 \cdot 24 \cdot 365,25 \cdot 10^{10} =$$

$$= 1893456 \cdot 10^{10} =$$

$$= 1,893456 \cdot 10^{16}$$

$$\text{Zatem } \frac{1,49 \cdot 10^{27}}{1,893456 \cdot 10^{16}} \approx$$

$$\approx 0,787 \cdot 10^{11} = 7,87 \cdot 10^{10}$$

3. a) Cena brutto:

$$140 \cdot 1,23 = 172,20 \text{ [zł]}$$

$$\frac{32,2}{172,2} \cdot 100\% \approx 18,7\%$$

b) Podatek VAT:

$$151,20 - 140 = 11,20 \text{ [zł]}$$

Stawka procentowa podatku

$$\text{VAT: } \frac{11,2}{140} \cdot 100\% = 8\%$$

Obliczamy, o ile procent cena netto jest mniejsza od ceny brutto:

$$\frac{11,2}{151,2} \cdot 100\% \approx 7,4\%$$

c) Cena brutto:

$$1,05 \cdot 140 = 147 \text{ [zł]}$$

Obliczamy, o ile procent zmalałaby cena brutto po zmianie stawki procentowej podatku VAT:

$$\frac{172,2 - 147}{172,2} \cdot 100\% \approx 14,6\%$$

- W trzech wieżowcach, z których żaden nie ma więcej niż 15 pięter, na parterze są lokale użytkowe, a na piętrach – mieszkania. Na każdym piętrze każdego z budynków mieszka tyle samo osób, a mieszkańców w tych budynkach jest odpowiednio 420, 462 i 504. Ile pięter ma każdy z wieżowców?
- W każdej sekundzie około 600 milionów ton wodoru zawartego w Słońcu ulega zamianie w hel na skutek reakcji termojądrowej. Przyjmując, że Słońce zawiera około $1,49 \cdot 10^{27}$ ton wodoru, oszacuj, po ilu latach zapas wodoru zawartego w Słońcu uległby wyczerpaniu, gdyby tempo reakcji się nie zmieniło.
- Cena netto pewnego towaru wynosi 140 zł. Podatek VAT od tego towaru jest równy 23%.

Cena brutto składa się z ceny netto powiększonej o podatek VAT.

 - Oblicz cenę brutto tego towaru. Jaki procent ceny brutto stanowi podatek VAT?
 - Przy jakiej stawce podatku VAT cena brutto tego towaru wynosiłaby 151,20 zł? O ile procent cena netto byłaby wtedy mniejsza od ceny brutto?
 - O ile procent zmalałaby cena brutto tego towaru, gdyby obecną stawkę podatku VAT zmniejszono do 5%?
- Pan Kowalski ulokował 5000 zł na lokacie oprocentowanej 5,05% w skali roku. Pan Nowak wpłacił taką samą kwotę na lokatę półroczną. Po 6 miesiącach otrzymał tę kwotę powiększoną o 2,5%. Ulokował te pieniądze ponownie na tej samej lokacie półrocznej. Który z nich po roku oszczędzania zgromadził większy kapitał?
- Klient wpłacił w banku 4000 zł na lokatę roczną oprocentowaną 4% w skali roku. Po pierwszym roku oszczędzania całą kwotę wraz z odsetkami ulokował ponownie na tych samych warunkach. Tak samo postąpił po drugim roku oszczędzania. Jaki kapitał zgromadził po 3 latach? O ile mniejsze byłyby jego oszczędności, gdyby co roku ponownie wpłacał na lokatę 4000 zł wypłacone z poprzedniej lokaty, a odsetki gromadził poza lokatą?
- Pan Antoni zainwestował na giełdzie papierów wartościowych pewną kwotę pieniędzy. Po roku stan jego rachunku zwiększył się o 5%, w drugim roku zmniejszył się o 4,5%, w trzecim wzrósł o 6%. Po trzech latach stan jego rachunku wyniósł 2125,83 zł. Ustal, jaką kwotę zainwestował pan Antoni.

4. Pan Kowalski:

$$5000 \cdot 5,05\% = 252,50 \text{ [zł]}$$

$$5000 + 252,50 = 5252,50 \text{ [zł]}$$

Pan Nowak:

$$5000 \cdot 2,5\% = 125 \text{ [zł]}$$

$$5000 + 125 = 5125 \text{ [zł]}$$

$$5125 \cdot 2,5\% = 128,125 \text{ [zł]}$$

$$5125 + 128,125 = 5253,125 \text{ [zł]}$$

Większy kapitał zgromadził pan Nowak.

5. Wersja z odsetkami dodawanymi do kapitału co roku:

$$4000 \cdot 0,04 = 160 \text{ [zł]} - \text{odsetki po 1. roku}$$

$$4160 \cdot 0,04 = 166,40 \text{ [zł]} - \text{odsetki po 2. roku}$$

$$4326,4 \cdot 0,04 \approx 173,06 \text{ [zł]} - \text{odsetki po 3. roku}$$

Kapitał po 3 latach: 4499,46 zł

Wersja z odsetkami wypłacanymi:

$$4000 + 3 \cdot 4000 \cdot 0,04 = 4000 + 3 \cdot 160 = 4480 \text{ [zł]}$$

$$\text{Różnica wynosi: } 4499,46 - 4480 = 19,46 \text{ [zł]}$$

**Przykład 1**

Ile jest liczb dwucyfrowych dodatnich, których reszta z dzielenia przez 7 jest równa 3?

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

- Liczb spełniających warunki zadania nie jest dużo, można je zatem wszystkie wypisać: 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73, 80, 87, 94 – jest ich 13.
- Zauważmy, że najmniejszą liczbą dwucyfrową spełniającą podany warunek jest 10, a największą 94. Wszystkie te liczby można zapisać w postaci $7n + 3$, gdzie $1 \leq n \leq 13$, zatem jest 13 takich liczb.

Odpowiedź: 13

→ Zadanie 20, str. 61

Przykład 2

Ile jest liczb czterocyfrowych dodatnich, które są podzielne przez 3 i przez 5?

Zauważmy, że liczby podzielne przez 3 i przez 5 to liczby podzielne przez 15. Najmniejszą liczbą czterocyfrową podzielną przez 15 jest 1005, a największą 9990. Liczb spełniających warunki zadania jest zbyt dużo, aby je wszystkie wypisać.

$$1005 = 15 \cdot 67, 1020 = 15 \cdot 68, 1035 = 15 \cdot 69, \dots, 9990 = 15 \cdot 666$$

Każdą z tych liczb możemy zapisać w postaci $15 \cdot n$, gdzie $67 \leq n \leq 666$. Zatem takich liczb jest $666 - 67 + 1 = 600$.

Odpowiedź: 600

→ Zadanie 21, str. 61

Przykład 3

Ile jest liczb trzycyfrowych dodatnich, które są podzielne przez 5 lub przez 6?

Rozpatrujemy liczby trzycyfrowe podzielne przez 5: 100, 105, 110, ..., 995. Najmniejszą z nich jest 100, a największą 995. Liczby trzycyfrowe podzielne przez 5 można zapisać w postaci $100 + 5n$, gdzie $0 \leq n \leq 179$, zatem takich liczb jest 180.

Rozpatrujemy liczby trzycyfrowe podzielne przez 6: 102, 108, 114, ..., 996. Najmniejszą z nich jest 102, a największą 996. Liczby trzycyfrowe podzielne przez 6 można zapisać w postaci $102 + 6n$, gdzie $0 \leq n \leq 149$, zatem takich liczb jest 150.

Zauważmy, że dwa razy zostały policzone liczby podzielne przez 30 (są one podzielne zarówno przez 5, jak i przez 6).

Liczby trzycyfrowe podzielne przez 30 można zapisać w postaci $120 + 30n$, gdzie $0 \leq n \leq 29$, takich liczb jest więc 30.

Zatem liczb podzielnych przez 5 lub przez 6 jest: $180 + 150 - 30 = 300$.

Odpowiedź: 300

→ Zadanie 22, str. 61

6. x – kwota zainwestowana przez pana Antoniego

$1,05x$ – stan rachunku po roku

$1,05x - 0,045 \cdot 1,05x = 1,00275x$ – stan rachunku po drugim roku

$1,00275x + 0,06 \cdot 1,00275x = 1,062915x$ – stan rachunku po trzecim roku

2125,83 zł – stan rachunku po trzecim roku

$1,062915x = 2125,83$, stąd $x = 2000$ zł



W zadaniach 1–12 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Liczbą podzielną przez 15 jest

- A. 9 720 279 B. 2 220 205 C. 22 222 220 D. 23 420 340

Zadanie 2 (0–1)

Liczbą odwrotną do $\frac{0,25 - \sqrt{\frac{9}{16}}}{-3^2 : 3}$ jest

- A. 6 B. 4 C. -4 D. -6

Zadanie 3 (0–1)

Najmniejszą liczbą całkowitą większą od $6 - 2\pi$ jest

- A. -1 B. 0 C. 1 D. -2

Zadanie 4 (0–1)

Liczbą wymierną jest

- A. $\frac{2\sqrt{6} - \sqrt{16}}{2}$ B. $\frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{\sqrt{25} + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ D. $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{54}}$

Zadanie 5 (0–1)

Ułamek $\frac{\sqrt[3]{-16} \cdot \sqrt[3]{-16}}{\sqrt[3]{-4}}$ jest równy

- A. $\frac{-16}{\sqrt[3]{-4}}$ B. $\frac{16}{\sqrt[3]{-4}}$ C. -4 D. 4

Zadanie 6 (0–1)

Ułamek $\frac{5^5 \cdot 3 + 2 \cdot 5^5}{5^6 \cdot 5^2}$ jest równy

- A. 5^6 B. $15 + 2 \cdot 5^5$ C. 25 D. 5^7

Zadanie 7 (0–1)

Liczba $\log_8 4$ jest równa

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

Zadanie 8 (0–1)

Cena ulgowego karnetu na basen stanowi 60% ceny karnetu normalnego. Karnet ulgowy kosztuje 60 zł. Za karnet normalny trzeba zapłacić

- A. 84 zł B. 100 zł C. 360 zł D. 36 zł

Zadanie 9 (0–1)

Oprocentowanie lokaty terminowej było równe 4%. Po roku bank podwyższył oprocentowanie do 5%. Oprocentowanie lokaty wzrosło

- A. o 20%. B. o 25%. C. o 40%. D. o 75%.

$$2. \frac{0,25 - \sqrt{\frac{9}{16}}}{-3^2 : 3} = \frac{0,25 - \frac{3}{4}}{-3} = \frac{-\frac{1}{2}}{-3} = \frac{1}{6}$$

$$4. \begin{aligned} \text{A. } \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{16}}{2} &= \sqrt{6} - 2 \notin \mathbb{Q} \\ \text{B. } \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} &= \sqrt{3} - 1 \notin \mathbb{Q} \\ \text{C. } \frac{\sqrt{25} + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} &= \sqrt{5} + 1 \notin \mathbb{Q} \\ \text{D. } \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{54}} &= \sqrt{\frac{6}{54}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

$$5. \frac{\sqrt[3]{-16} \cdot \sqrt[3]{-16}}{\sqrt[3]{-4}} = \sqrt[3]{4 \cdot (-16)} = -4$$

$$6. \frac{5^5 \cdot 3 + 2 \cdot 5^5}{5^6 \cdot 5^2} = \frac{5^5 \cdot 5}{5^8} = \frac{5^6}{5^8} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$$

$$7. \begin{aligned} \text{A. } 8^{\frac{1}{2}} &= 2\sqrt{2} \\ \text{B. } 8^{\frac{1}{3}} &= 2 \\ \text{C. } 8^{\frac{2}{3}} &= (\sqrt[3]{8})^2 = 4 \end{aligned}$$

$$8. \begin{aligned} \text{Niech } x &\text{ – cena normalnego karnetu na basen.} \\ 0,6x &= 60 \text{ [zł]} \\ \text{Zatem } x &= 100 \text{ zł.} \end{aligned}$$

$$9. \frac{0,05 - 0,04}{0,04} \cdot 100\% = 25\%$$

**Zadanie 10 (0-1)**Suma $2^{15} + 2^{15} + 2^{15} + 2^{15}$ jest równa

- A. 2^{60} B. 8^{15} C. 2^{18} **D. 2^{17}**

Zadanie 11 (0-1)Iloczyn liczb $6,4 \cdot 10^8$ i $8,5 \cdot 10^{-3}$ jest równy

- A. $5,44 \cdot 10^5$ B. $0,544 \cdot 10^6$ **C. $5,44 \cdot 10^6$** D. $5,44 \cdot 10^7$

Zadanie 12 (0-1)Liczba b jest o 20% mniejsza od liczby a , zaś liczba c jest o 20% większa od liczby b . Zatem

- A. $a = \frac{4}{5}c$ B. $a = c$ C. $a = \frac{13}{12}c$ **D. $a = 1\frac{1}{24}c$**

Zadanie 13 (0-1)Dana jest liczba $\left(2 \cdot \left(-3\frac{1}{3}\right) - 7 : 4\frac{1}{5}\right) : \frac{-2\frac{1}{8} + 0,625 \cdot \frac{4}{5}}{-2 + 1\frac{1}{9} \cdot (-6)}$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Podana liczba to liczba całkowita ujemna.	P	F
Podana liczba to liczba wymierna nieujemna.	P	F

Zadanie 14 (0-2)Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Liczbą wymierną jest

- A. $\sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ **E. $\sqrt{12}(\sqrt{48} + \sqrt{27})$**
 B. $\sqrt{6}(\sqrt{6} + \sqrt{18})$ **F. $\sqrt{12}(\sqrt{54} + \sqrt{24})$**
C. $\sqrt{8}(\sqrt{18} + \sqrt{50})$ **G. $\sqrt{18}(\sqrt{32} + \sqrt{24})$**
 D. $\sqrt{8}(\sqrt{36} + \sqrt{25})$ **H. $\sqrt{18}(\sqrt{25} + \sqrt{49})$**

Zadanie 15 (0-2)Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Wartość 2 przyjmuje wyrażenie

- A. $\log_2 1 + \log_2 1$ **E. $\log_4 4 + \log_4 2$**
 B. $\log_2 4 + \log_2 4$ **F. $\log_2 8 + \log_4 2$**
 C. $\log_2 4 - \log_2 2$ **G. $\log_4 4 - \log_4 2$**
D. $\log_2 8 - \log_2 2$ **H. $\log_4 8 + \log_4 2$**

$$10. 2^{15} + 2^{15} + 2^{15} + 2^{15} = 4 \cdot 2^{15} = 2^2 \cdot 2^{15} = 2^{17}$$

$$11. 6,4 \cdot 10^8 \cdot 8,5 \cdot 10^{-3} = 6,4 \cdot 8,5 \cdot 10^5 = 54,4 \cdot 10^5 = 5,44 \cdot 10^6$$

$$12. b = 0,8a, c = 1,2b, \text{ stąd } c = 1,2 \cdot 0,8a = 0,96a = \frac{96}{100}a, \text{ zatem: } a = \frac{100}{96}c = \frac{25}{24}c = 1\frac{1}{24}c$$

$$15. \begin{aligned} & \text{A. } \log_2 1 + \log_2 1 = 0 \\ & \text{B. } \log_2 4 + \log_2 4 = 2 + 2 = 4 \\ & \text{C. } \log_2 4 - \log_2 2 = 2 - 1 = 1 \\ & \text{D. } \log_2 8 - \log_2 2 = 3 - 1 = 2 \\ & \text{E. } \log_4 4 + \log_4 2 = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} \\ & \text{F. } \log_2 8 + \log_4 2 = 3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} \\ & \text{G. } \log_4 4 - \log_4 2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ & \text{H. } \log_4 8 + \log_4 2 = \log_4 16 = 2 \end{aligned}$$

$$13. \left(2 \cdot \left(-3\frac{1}{3}\right) - 7 : 4\frac{1}{5}\right) : \frac{-2\frac{1}{8} + 0,625 \cdot \frac{4}{5}}{-2 + 1\frac{1}{9} \cdot (-6)} = \left(2 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) - 7 \cdot \frac{5}{21}\right) \cdot \frac{-2 + \frac{10}{9} \cdot (-6)}{-2 + \frac{1}{9} \cdot (-6)} = \left(-\frac{20}{3} - \frac{5}{3}\right) \cdot \frac{-2 - \frac{20}{3}}{-2 - \frac{20}{3}} = -\frac{25}{3} \cdot \frac{-26}{3} \cdot \left(-\frac{8}{13}\right) = -\frac{25}{3} \cdot \frac{16}{3} = -\frac{400}{9} = -44\frac{4}{9}$$

$$14. \begin{aligned} \text{A. } & \sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{18} + \sqrt{12} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \\ \text{B. } & \sqrt{6}(\sqrt{6} + \sqrt{18}) = 6(1 + \sqrt{3}) \notin \mathbb{Q} \\ \text{C. } & \sqrt{8}(\sqrt{18} + \sqrt{50}) = \sqrt{8}(3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}) = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2}(3 + 5) = 4 \cdot 8 = 32 \in \mathbb{Q} \\ \text{D. } & \sqrt{8}(\sqrt{36} + \sqrt{25}) = \sqrt{8}(6 + 5) = 22\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \\ \text{E. } & \sqrt{12}(\sqrt{48} + \sqrt{27}) = 2\sqrt{3}(4\sqrt{3} + 3\sqrt{3}) = 2(4 \cdot 3 + 3 \cdot 3) = 42 \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$



16.1. $\sqrt{11} \in \mathbb{IQ}_+$,
 $\sqrt[3]{64} = 4 \in \mathbb{Q}_+$,
 $\sqrt[3]{(-17)^3} = -17 \in \mathbb{Q}_-$,
 $\sqrt{121} = 11 \in \mathbb{Q}_+$,
 $\sqrt{8} \in \mathbb{IQ}_+$,
 $\sqrt{\frac{169}{9}} = \frac{13}{3} \in \mathbb{IQ}_+$,
 $\sqrt{(-2)^2} = 2 \in \mathbb{IQ}_+$.

16.2. Dwie najmniejsze liczby to -17 i 2 , ich suma jest równa -15 .

17. Ponieważ $x < -1$, więc liczba $x + 1 < 0$. Liczba y jest ujemna, zatem iloczyn xy jest dodatni.

Zadanie 16

Dane są liczby $\sqrt{11}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{(-17)^3}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{\frac{169}{9}}$, $\sqrt{(-2)^2}$.

Zadanie 16.1 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Dokładnie dwie spośród podanych liczb są ujemne.	P	F
Dokładnie dwie spośród podanych liczb są niewymierne.	P	F

Zadanie 16.2 (0-1)

Uzupełnij zdanie tak, aby było prawdziwe.

Suma dwóch najmniejszych liczb spośród podanych jest równa ?.

Zadanie 17 (0-1)

Dane są liczby x i y spełniające warunki: $x < -1$ oraz $x < y < 0$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Iloczyn liczby o 1 większej od x i liczby y jest

A.	dodatni,	ponieważ	1.	jeden z czynników jest równy zero.
B.	równy zero,		2.	czynniki są różnych znaków.
C.	ujemny,		3.	oba czynniki są ujemne.

Zadanie 18

Dane są liczby $a = 6 - 3\sqrt{48}$ i $b = 8 + 2\sqrt{108}$.

Zadanie 18.1 (0-1)

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3. Suma liczb a i b jest liczbą

A.	wymierną,	ponieważ	1.	suma liczb niewymiernych jest liczbą niewymierną.
B.	niewymierną,		2.	suma liczb wymiernych jest liczbą wymierną.
			3.	suma tych liczb jest równa 14.

Zadanie 18.2 (0-1)

Iloczyn liczb a i b jest równy

A. $24(16 + \sqrt{3})$ **B.** $-24(16 + \sqrt{3})$ **C.** $-24(16 - \sqrt{3})$ **D.** $24(16 - \sqrt{3})$

$$18.1. a + b = 6 - 3\sqrt{48} + 8 + 2\sqrt{108} = 14 - 3\sqrt{16 \cdot 3} + 2\sqrt{36 \cdot 3} = 14 - 12\sqrt{3} + 12\sqrt{3} = 14$$

$$18.2. ab = (6 - 3\sqrt{48}) \cdot (8 + 2\sqrt{108}) = 3(2 - 4\sqrt{3}) \cdot 2(4 + 6\sqrt{3}) = \\ = 6 \cdot 2(1 - 2\sqrt{3}) \cdot 2(2 + 3\sqrt{3}) = 24(1 - 2\sqrt{3})(2 + 3\sqrt{3}) = \\ = 24(2 + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 18) = -24(16 + \sqrt{3})$$

**Zadanie 19 (0-2)**

Określ znak iloczynu liczb $a = \frac{13}{5} - 2, (5)$ oraz $b = \sqrt{2} - 1, (4)$.

Zadanie 20 (0-2) → Przykład 1, str. 57

Ile jest dodatnich liczb dwucyfrowych, których reszta z dzielenia przez 6 jest równa 2?

Zadanie 21 (0-3) → Przykład 2, str. 57

Ile jest dodatnich liczb trzycyfrowych, które są podzielne przez 3 i przez 4?

Zadanie 22 (0-4) → Przykład 3, str. 57

Ile jest dodatnich liczb trzycyfrowych, które są podzielne przez 4 lub przez 5?

Zadanie 23

Dany jest trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości $2\sqrt{27}$ i $4\sqrt{12}$.

Zadanie 23.1 (0-2)

Oblicz obwód tego trójkąta.

Zadanie 23.2 (0-2)

Kwadrat o boku a ma pole równe polu tego trójkąta. Oblicz a .

Zadanie 24 (0-2)

Cena brutto kurtki zimowej wynosiła 307,50 zł. Na cenę tę składała się cena netto oraz 23% podatku VAT. Cena kurtki została obniżona i po obniżce podatek VAT wynosił 51,75 zł. O ile zmniejszyła się cena netto tej kurtki?

Zadanie 25 (0-2)

Cenę towaru obniżono o 60%, a następnie podniesiono o $p\%$ i w ten sposób otrzymano cenę sprzed obniżki. Wyznacz p .

Zadanie 26 (0-4)

Dane są liczby $x = (\frac{3}{5} - \frac{2}{15}) : (\frac{11}{20} - 0,2)$ i $y = (0,5 \cdot 3)^{-2} \cdot 2^3 \cdot 3^{-1}$. O ile procent liczba x jest większa od liczby y ?

Zadanie 27 (0-4)

Woda płynąca jednocześnie z kranów A , B i C może napełnić basen w ciągu 4 godzin. Woda płynąca tylko z kranu A napełnia w ciągu godziny $\frac{1}{10}$ basenu, a tylko z kranu B – $\frac{1}{12}$ basenu. Ile czasu trwałoby napełnianie basenu wodą płynącą tylko z kranu C ?

D Zadanie 28 (0-4)

Uzasadnij, że jeśli $a = 45$, $b = (2 - \sqrt{5})(1 - 2\sqrt{5})$ i $c = (-2 + \sqrt{5})(11 + 2\sqrt{5})$, to liczba $\frac{\sqrt{a}}{b+c}$ jest liczbą wymierną.

27. Oznaczmy przez b objętość wody w pełnym basenie, a przez x – liczbę godzin potrzebnych do napełnienia basenu wodą z kranu C . Wówczas ilość wody wlanej do basenu w ciągu jednej godziny:

- z kranu A jest równa $\frac{1}{10}b$,
- z kranu B jest równa $\frac{1}{12}b$,
- z kranu C jest równa $\frac{1}{x}b$.

Zatem:

$$\frac{b}{x} = \frac{15}{60} - \frac{6}{60} - \frac{5}{60} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$$

$$x = 15 \text{ h}$$

Czyli napełnienie basenu wodą tylko z kranu C trwałoby 15 h.

28. $b = 12 - 5\sqrt{5}$, $c = 7\sqrt{5} - 12$, $b + c = 2\sqrt{5}$

$\frac{\sqrt{a}}{b+c} = \frac{\sqrt{45}}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{2}$ zatem jest to liczba wymierna.

$$19. a = \frac{13}{5} - 2, (5) =$$

$$= 2,6 - 2, (5) > 0$$

$$b = \sqrt{2} - 1, (4) < 0$$

Zatem $ab < 0$.

20. Jest 15 takich liczb: 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50, 56, 62, 68, 74, 80, 86, 92, 98.

21. 75

22. Liczby podzielne przez 4: 100, 104, 108, ..., 996. Czyli jest ich 225.

Liczby podzielne przez 5: 100, 105, 110, ..., 995. Czyli jest ich 180.

Liczby podzielne przez 20: 100, 120, 140, ..., 980. Czyli jest ich 45.

Zatem liczb trzycyfrowych podzielnych przez 4 lub przez 5 jest:

$$225 + 180 - 45 = 360$$

23.1. $24\sqrt{3}$

23.2. $6\sqrt{2}$

24. Cena netto:

$$307,50 : 1,23 = 250 \text{ [zł]}$$

Cena netto po obniżce:

$$51,75 : 0,23 = 225 \text{ [zł]}$$

$$250 - 225 = 25 \text{ [zł]}$$

25. Niech x – wyjściowa cena, $0,4x$ – cena po obniżce o 60%.
 $(1 + \frac{p}{100}) \cdot 0,4x$ – cena po podwyżce o $p\%$

$$x \cdot 0,4 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = x$$

$$1 + \frac{p}{100} = 2,5$$

$$\frac{p}{100} = 1,5$$

$$p = 150$$

26. $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{32}{27}$

$$\text{I sposób: } \frac{\frac{4}{3} - \frac{32}{27}}{\frac{32}{27}} = 0,125$$

Liczba x jest o 12,5% większa od liczby y .

II sposób:

$$x = \frac{4}{3} = \frac{9}{8} \cdot \frac{32}{27} = \frac{9}{8}y = 1,125y,$$

zatem liczba x jest o 12,5% większa od liczby y .



Odpowiedzi do zadań

- $x = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 13$,
 $y = 3 \cdot 5^3 \cdot 11^2 \cdot 13^2$
 $\frac{y}{x} = \frac{3 \cdot 5^3 \cdot 11^2 \cdot 13^2}{3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 13} = \frac{13}{3 \cdot 7} = \frac{13}{21} \approx 0,62$
- Wyrażenie upraszczamy:
 $\left(\frac{y}{x}\right)^4 = \left(\frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}\right)^4 = \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^4 = 2^{-\frac{4}{3}} = 0,25$
- $1, (54) = \frac{17}{11}$
- $120 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, czyli liczba jest podzielna przez 120, jeżeli jest podzielna jednocześnie przez: 3, 5 i 8.
 Wśród pięciu kolejnych liczb naturalnych:
 - dokładnie jedna jest podzielna przez 5,
 - co najmniej jedna jest podzielna przez 3,
 - co najmniej dwie są podzielne przez 2, przy czym jedna z nich jest podzielna przez 4.
 Zatem iloczyn tych liczb jest podzielny przez 120.
- Dzielnikiem liczby $7^{11} \cdot 11^7$ jest liczba postaci $7^x \cdot 11^y$, gdzie x i y są liczbami naturalnymi oraz $0 \leq x \leq 11$ i $0 \leq y \leq 7$. Liczba x jest jedną z dwunastu liczb, a y – jedną z ośmiu. Zatem $7^{11} \cdot 11^7$ ma $12 \cdot 8 = 96$ różnych dzielników.
- Długość $a\sqrt{3}$ jest liczbą wymierną, czyli liczbę a możemy zapisać w postaci $a = m\sqrt{3}$, gdzie m jest liczbą wymierną. Zatem liczba:
 $a\sqrt{2} = m\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = m\sqrt{6}$
 jest niewymierna, ponieważ iloczyn liczby wymiernej różnej od 0 i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną.
- Rozważmy trzy kolejne liczby naturalne:
 $n = \log_3 a$, $n + 1 = \log_3 b$,
 $n + 2 = \log_3 c$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.
 Wówczas $a = 3^n$, $b = 3^{n+1}$,
 $c = 3^{n+2}$. Zatem:
 $a + b + c = 3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} = 3^n + 3 \cdot 3^n + 9 \cdot 3^n = 13 \cdot 3^n$
 czyli jest to liczba podzielna przez 13.

Zadanie 1 (0–2)

Dane są liczby $a = 3 \cdot 5^3 \cdot 11^2$, $b = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13$ i $c = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13^2$. Liczba x jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb a i b , a liczba y – najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb a i c . Wyznacz zaokrąglenie ilorazu $\frac{y}{x}$ z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Zadanie 2 (0–2)

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{x^{-1}y^4 \cdot (x^{-1}y)^3}{(x^2y^{-1})^{-1}x^2y^2}$ dla $x = \sqrt[3]{4}$ i $y = \sqrt[6]{2}$.

Zadanie 3 (0–2)

Liczbę $1,(54)$ zapisz jako ułamek nieskracalny $\frac{m}{n}$.

D Zadanie 4 (0–3)

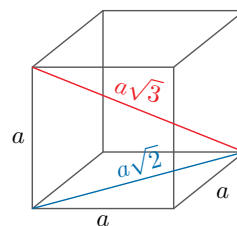
Wykaż, że iloczyn pięciu kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 120.

D Zadanie 5 (0–3)

Uzasadnij, że liczba $7^{11} \cdot 11^7$ ma 96 różnych dzielników.

D Zadanie 6 (0–3)

Przekątna sześcianu o krawędzi a ma długość $a\sqrt{3}$, a przekątna jego podstawy ma długość $a\sqrt{2}$. Uzasadnij, że jeśli długość przekątnej sześcianu jest liczbą wymierną, to długość przekątnej podstawy jest liczbą niewymierną.



D Zadanie 7 (0–3)

Logarytmy o podstawie 3 liczb a , b i c są kolejnymi liczbami naturalnymi. Uzasadnij, że liczba $a + b + c$ jest podzielna przez 13.

D Zadanie 8 (0–3)

Uzasadnij, że jeśli $a\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną różną od 0, to a jest liczbą niewymierną.

Zadanie 9

Z cyfr 1, 2, 3 i 4 utworzono wszystkie możliwe liczby czterocyfrowe o niepowtarzających się cyfrach.

D Zadanie 9.1 (0–2)

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 9 każdej z tych liczb jest równa 1.

D Zadanie 9.2 (0–2)

Uzasadnij, że żadna taka liczba nie jest sumą trzech spośród tych liczb.

Wskazówka. Możesz skorzystać z tego, że reszta z dzielenia przez 9 każdej z takich liczb jest równa 1.

8. Liczba $a\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną różną od zera, czyli istnieje ułamek $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi różnymi od 0 takimi, że $a\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, czyli $2a^2 = \frac{m^2}{n^2}$. Stąd $2a^2 \cdot n^2 = m^2$, co oznacza, że przy rozkładzie na czynniki pierwsze liczba 2 występuje parzystą liczbę razy po stronie prawej. Zatem by równość była prawdziwa, liczba 2 musi również wystąpić parzystą liczbę razy po lewej stronie. Co oznacza, że a jest liczbą niewymierną.

9.1. Niech n będzie liczbą spełniającą warunki zadania. Jeśli cyfrę jedności tej liczby zmniejszymy o 1, to otrzymamy liczbę $n - 1$ – jej suma cyfr jest równa 9. Zatem $9|(n - 1)$, więc reszta z dzielenia n przez 9 jest równa 1.

9.2. Niech m , n , p będą liczbami spełniającymi warunki zadania. Wówczas reszta z dzielenia każdej z tych liczb przez 9 jest równa 1, czyli reszta z dzielenia liczby $m + n + p$ jest równa 3. Oznacza to, że żadna liczba spełniająca warunki zadania nie jest sumą trzech takich liczb.