

4 Funkcje

U osób wyczynowo uprawiających sport regularnie przeprowadza się specjalistyczne badania lekarskie.

Elektrokardiografię wykonuje się za pomocą przyrządu, który odbiera i wzmacnia impulsy elektryczne. Jako wynik badania otrzymujemy elektrokardiogram – wykres funkcji napięcia elektrycznego, wytworzonego na skutek skurczu mięśnia sercowego, w zależności od czasu.



Prawidłowa czynność serca



Zaburzenie rytmu serca



Multibook

- W zwolnionym tempie
- Kartezjański układ współrzędnych
- Niewiarygodna siła mrówek
- Liczba Erdosa

Uczeń:

- stosuje pojęcia: funkcja, argument, dziedzina, wartość funkcji, miejsce zerowe funkcji,
- rozpoznaje wśród danych przyporządkowań te, które opisują funkcje,
- podaje miejsca zerowe funkcji,
- opisuje funkcję różnymi sposobami: za pomocą grafu, tabeli, opisu słownego,
- odczytuje wartość funkcji dla danego argumentu,
- odczytuje argumenty, dla których funkcja przyjmuje określoną wartość.

4.1. Pojęcie funkcji

Przykład 1

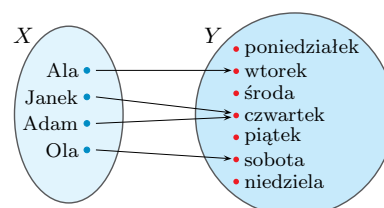
W szkolnym turnieju piłki nożnej wzięło udział pięć drużyn: A , B , C , D i E . Grano systemem każdy z każdym. Za zwycięstwo przyznawano 3 pkt, za remis 1 pkt, a za przegraną 0 pkt. Najmniejsza możliwa do zdobycia liczba punktów to 0, a największa to 12. Każdej drużynie przyporządkowano sumę zdobytych punktów – wyniki turnieju przedstawiono w tabeli.

Drużyna	A	B	C	D	E
Zdobyte punkty	3	7	8	1	8



Przykład 2

Na przedstawionym obok grafie każdej z czterech osób przyporządkowano dzień tygodnia, w którym dana osoba się urodziła. Zbiór osób oznaczono literą X , a zbiór dni tygodnia – literą Y .

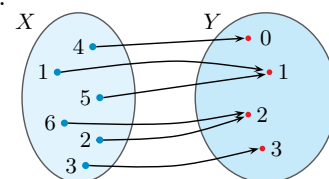


Omówione powyżej przyporządkowania są przykładami **funkcji**. W każdym z nich są wskazane dwa zbiory, często oznaczane przez X i Y , oraz określony sposób przyporządkowania elementom zbioru X elementów zbioru Y – można to zrobić np. za pomocą tabeli, grafu lub opisu słownego.

Przykład 3

Każdej liczbie ze zbioru $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ przyporządkowano jej resztę z dzielenia przez 4. Zbiór możliwych reszt oznaczono literą Y . Przyporządkowanie to przedstawiono za pomocą tabeli i grafu.

Liczba	1	2	3	4	5	6
Reszta	1	2	3	0	1	2

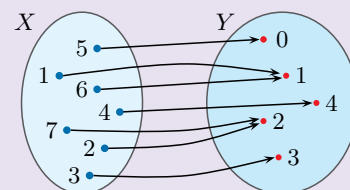


Ćwiczenie 1

Każdej liczbie ze zbioru $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ przyporządkowano liczbę ze zbioru $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ będącą jej resztą z dzielenia przez 5. Przedstaw to przyporządkowanie za pomocą tabeli i grafu.

Ćwiczenie 1

Liczba	1	2	3	4	5	6	7
Reszta	1	2	3	4	0	1	2



Multibook

- Czy podane przyporządkowanie jest funkcją

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.1

Generator
testów i sprawdzianów

Definicja

Funkcją ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi $x \in X$ odpowiada dokładnie jeden element $y \in Y$.

Zbiór X nazywamy **dziedzina** funkcji, a jego elementy **argumentami**.

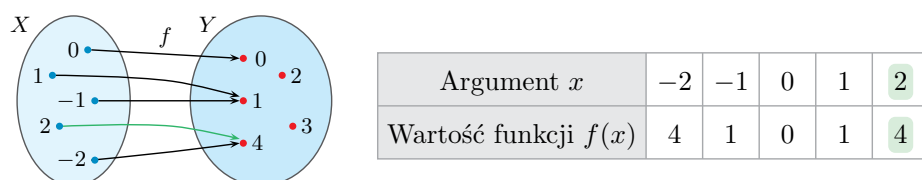
Zbiór Y nazywamy **przeciwdziedzina** funkcji. Jeśli element zbioru Y jest przyporządkowany jakiemuś elementowi zbioru X , to nazywamy go **wartością funkcji**.

Funkcje zwykle oznaczamy małymi literami, na przykład f, g, h .

Mówiąc o funkcji f ze zbioru X w zbiór Y , używamy zapisu $f: X \rightarrow Y$, a wartość, jaką funkcja f przyjmuje dla argumentu x , oznaczamy przez $f(x)$.

Przykład 4

Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ i $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Funkcję f ze zbioru X w zbiór Y , która każdej liczbie przyporządkowuje jej kwadrat, określono za pomocą grafu i tabeli.



Zwróć uwagę na to, że liczby 2 i 3 należą do przeciwdziedziny funkcji f , ale nie są wartościami tej funkcji.

Funkcja f dla argumentu $x = 2$ przyjmuje wartość $y = 4$, co zapisujemy „ $f(2) = 4$ ” i czytamy: „ f od 2 jest równe 4”.

Wartość $y = 4$ funkcja f przyjmuje również dla argumentu $x = -2$, zatem $f(-2) = 4$.

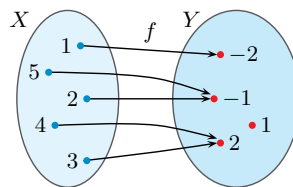
Ćwiczenie 2

Dane są zbiory $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $Y = \{-2, -1, 1, 2\}$ oraz funkcja $f: X \rightarrow Y$ przedstawiona za pomocą grafu.

a) Podaj wartości funkcji f dla argumentów parzystych.

b) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 2, a dla jakich – wartość 1?

c) Przedstaw funkcję f za pomocą tabeli.



Ćwiczenie 2

a) $f(2) = -1, f(4) = 2$

b) $f(x) = 2$ dla $x \in \{3, 4\}$

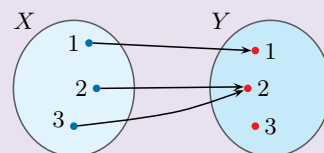
Nie istnieje argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 1.

c)

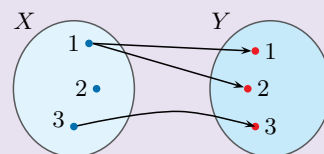
x	1	2	3	4	5
$f(x)$	-2	-1	2	2	-1

Komentarz

Ponieważ uczniom trudno jest zrozumieć definicję funkcji, należy poświęcić odpowiednią ilość czasu na jej dokładne wytłumaczenie. Warto podać uczniom kilka przykładów funkcji z życia codziennego, a także wskazać relacje, które nie są funkcjami. Szczególnie ważne jest podkreślenie faktu, że **każdemu** argumentowi przyporządkowana jest **dokładnie jedna** wartość.



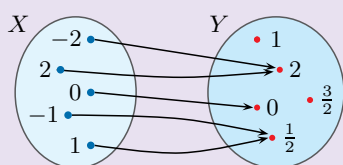
To przyporządkowanie jest funkcją.



To przyporządkowanie nie jest funkcją.

Przykłady przyporządkowań, które nie są funkcjami omawiamy w przykładzie 5.

Ćwiczenie 3



x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Wartościami funkcji nie są 1 i $\frac{3}{2}$.
Wartości przyjmowane dla dwóch argumentów: $\frac{1}{2}$ i 2.

Ćwiczenie 4

- $x = 3$
- $x \in \{0, 1, 5\}$
- $x = 2$
- dla żadnych

Ćwiczenie 3

Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ i $Y = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$. Funkcja $f: X \rightarrow Y$ przyporządkowuje każdemu argumentowi połowę jego kwadratu. Przedstaw tę funkcję za pomocą grafu i tabeli. Które elementy zbioru Y nie są wartościami funkcji f ? Które wartości są przyjmowane dla więcej niż jednego argumentu?

Ćwiczenie 4

Funkcję $f: \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \rightarrow \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ przedstawiono za pomocą tabeli.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	1	-2	0	2	1	3	3	3	4

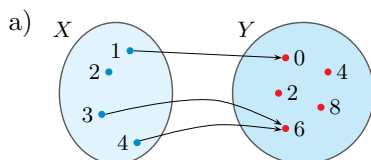
Dla których argumentów zachodzi równość:

- $f(x) = 0$,
- $f(x) = 1$,
- $f(x) = -2$,
- $f(x) = -1$?

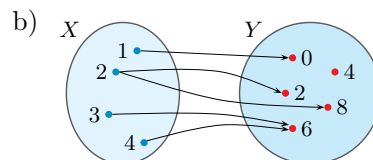
Zauważmy, że zgodnie z definicją przyporządkowanie jest funkcją ze zbioru X w zbiór Y , jeżeli **każdemu** elementowi zbioru X przyporządkowany jest **dokładnie jeden** element zbioru Y .

Przykład 5

Uzasadnij, że na poniższym grafie nie przedstawiono funkcji ze zbioru X w zbiór Y .



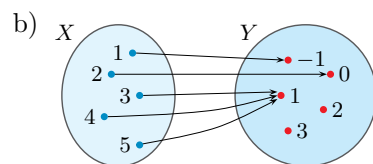
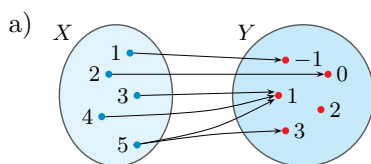
Liczbę 2 należącą do zbioru X nie przyporządkowano żadnego elementu zbioru Y . Zatem graf nie przedstawia funkcji ze zbioru X w zbiór Y .



Liczbę 2 należącą do zbioru X przyporządkowano dwa elementy zbioru Y . Zatem graf nie przedstawia funkcji ze zbioru X w zbiór Y .

Ćwiczenie 5

Czy na poniższym grafie przedstawiono funkcję ze zbioru X w zbiór Y ? Jeśli tak, to podaj argument, dla którego funkcja ta przyjmuje wartość 0.



Ćwiczenie 5

- Nie, liczbę 5 przyporządkowano dwa elementy ze zbioru Y .
- Tak, funkcja przyjmuje wartość 0 dla argumentu 2.

Definicja

Miejscem zerowym funkcji f nazywamy taki argument x , dla którego:

$$f(x) = 0$$

Przykład 6

Funkcja $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$ przedstawiona za pomocą tabeli ma dwa miejsca zerowe: -1 i 2 .

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	0	4	3	0

Ćwiczenie 6

Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $X = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ przyporządkowuje:

- a) liczbę o 2 mniejszą, c) kwadrat tej liczby pomniejszony o 1,
b) liczbę o 3 większą, d) sześcian tej liczby pomniejszony o 8.

Przedstaw za pomocą tabeli funkcję f i podaj jej miejsca zerowe.

Zadania

1. Funkcję $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ przedstawiono za pomocą tabeli. Przedstaw tę funkcję za pomocą grafu i podaj jej miejsca zerowe.

a)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	2	0	2	3

b)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	0	1	2	3

2. Funkcja $f: \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ została podana w postaci tabeli. Przedstaw ją za pomocą grafu oraz opisu słownego. Dla ilu argumentów przyjmuje ona wartości nieparzyste?

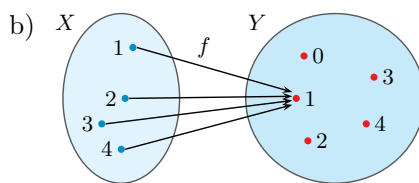
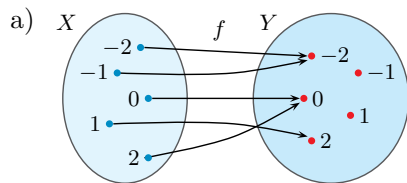
a)

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	2	3	4	5

b)

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	1	0	1	2	3

3. Funkcję $f: X \rightarrow Y$ przedstawiono w postaci grafu. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli i podaj jej miejsca zerowe.



2. a) Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ przyporządkowuje liczbę o 2 większą. Funkcja przyjmuje wartości nieparzyste dla trzech argumentów.
b) Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ przyporządkowuje jej wartość bezwzględną. Funkcja przyjmuje wartości nieparzyste dla trzech argumentów.

3. a) Miejsca zerowe: 0 i 2.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	-2	0	2	0

- b) Nie ma miejsc zerowych.

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	1	1	1

Ćwiczenie 6

- a) Miejsca zerowe: 2.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-2	-1	0	1

- b) Nie ma miejsc zerowych.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	3	4	5	6

- c) Miejsca zerowe: -1 i 1 .

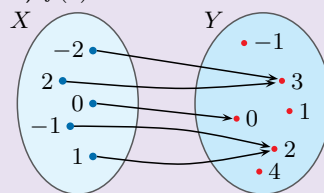
x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	-1	0	3	8

- d) Miejsca zerowe: 2.

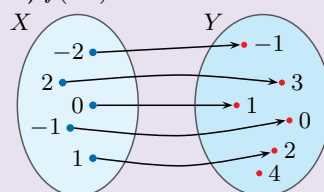
x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-9	-8	-7	0	19

Odpowiedzi do zadań

1. a) $f(0) = 0$



- b) $f(-1) = 0$



4. a)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

b) Wartościami funkcji f nie są: 2, 3, 5.

1 i 4 są przyjmowane dla dwóch argumentów.

5. a) Dziedzina funkcji f :

$$X = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

Funkcja f każdej liczbie ze zbioru X przyporządkowuje liczbę o 3 mniejszą. Wartości dodatnie przyjmuje ona dla jednego argumentu.

b) Dziedzina funkcji f :

$$X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

Funkcja f każdej liczbie ze zbioru X przyporządkowuje liczbę do niej przeciwną.

Wartości dodatnie przyjmuje ona dla trzech argumentów.

6. wartości ujemne dla: -1, 0, 1, dwa miejsca zerowe: -2, 2

7. a) Pierwiastek kwadratowy z liczby 2 nie jest liczbą wymierną, czyli liczbie 2 nie jest przyporządkowana żadna wartość ze zbioru Y . Zatem to przyporządkowanie nie jest funkcją.

b) Pierwiastek kwadratowy z liczby -1 nie jest liczbą rzeczywistą, czyli liczbie -1 nie jest przyporządkowana żadna wartość ze zbioru Y . Zatem to przyporządkowanie nie jest funkcją.

4. Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ oraz $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Funkcja $f: X \rightarrow Y$ każdemu argumentowi przyporządkowuje jego kwadrat.

a) Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli i grafu.

b) Które elementy zbioru Y nie są wartościami funkcji f ? Które wartości są przyjmowane dla więcej niż jednego argumentu?

5. Funkcja f została podana w postaci tabeli. Określ jej dziedzinę, a następnie przedstaw tę funkcję za pomocą grafu oraz opisu słownego. Dla ilu argumentów przyjmuje ona wartości dodatnie?

a)

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-4	-3	-2	-1	0	1

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	2	1	0	-1	-2

6. Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ przyporządkowuje jej kwadrat pomniejszony o 4. Dla których argumentów funkcja ta przyjmuje wartości ujemne? Czy ma ona miejsca zerowe?

D 7. Rozważmy przyporządkowanie, w którym danej liczbie odpowiada jej pierwiastek kwadratowy. Uzasadnij, że to przyporządkowanie nie jest funkcją ze zbioru X w zbiór Y dla:

a) $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $Y = \mathbb{Q}$,

b) $X = \{-1, 0, 1, 2\}$, $Y = \mathbb{R}$.

8. Funkcja f każdej dwucyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje jej resztę z dzielenia przez n . Ile miejsc zerowych ma funkcja f ?

a) $n = 2$

b) $n = 4$

c) $n = 5$

d) $n = 10$

9. Funkcja f każdej dwucyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje sumę jej cyfr, np. $f(24) = 6$.

a) Podaj wszystkie wartości, które może przyjmować funkcja f .

b) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 3, a dla jakich 7?

10. Funkcja f każdej trzycyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje sumę jej cyfr, np. $f(234) = 9$.

a) Podaj wszystkie wartości, które może przyjmować funkcja f .

b) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 2, a dla jakich 3?

11. Funkcja f każdej trzycyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje iloczyn jej cyfr, np. $f(213) = 6$.

a) Ile miejsc zerowych ma funkcja f ?

b) Dla ilu argumentów funkcja f przyjmuje wartość 8?

8. a) Liczba dwucyfrowa m podzielna przez 2 ma postać $m = 2k$, gdzie $5 \leq k \leq 49$, zatem jest 45 takich liczb.

b) Liczba dwucyfrowa m podzielna przez 4 ma postać $m = 4k$, gdzie $3 \leq k \leq 24$, zatem są 22 takie liczby.

c) 18 d) 9

9. a) $\{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 18\}$

b) $f(x) = 3$ dla $x \in \{12, 21, 30\}$, $f(x) = 7$ dla $x \in \{16, 25, 34, 43, 52, 61, 70\}$

10. a) $\{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 27\}$

b) $f(x) = 2$ dla $x \in \{101, 110, 200\}$, $f(x) = 3$ dla $x \in \{102, 111, 120, 201, 210, 300\}$

11. a) 171

b) $f(x) = 8$ dla $x \in \{118, 124, 142, 181, 222, 214, 241, 412, 421, 811\}$, zatem funkcja f przyjmuje wartość 8 dla dziesięciu argumentów.

Układ współrzędnych

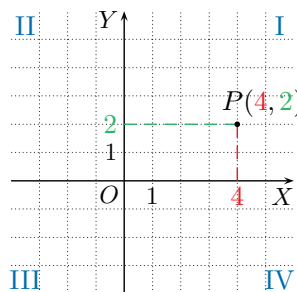
Prostokątny układ współrzędnych (lub krótko: układ współrzędnych) to układ dwóch prostopadłych osi liczbowych o wspólnym początku. Oś pozioma nazywana jest osią OX lub **osią odciętych**, a oś pionowa to oś OY lub inaczej **oś rzędnych**.

Każdy punkt płaszczyzny jest w układzie współrzędnych jednoznacznie określony przez parę liczb zwanych **współrzędnymi**. Na przykład punktowi P na rysunku obok odpowiadają współrzędne $(4, 2)$.

Układ współrzędnych dzieli płaszczyznę na **ćwiartki**, które oznaczamy cyframi rzymskimi. Punkt P należy do I ćwiartki układu. Kolejne numerujemy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Punkty leżące na osiach układu nie należą do żadnej ćwiartki.

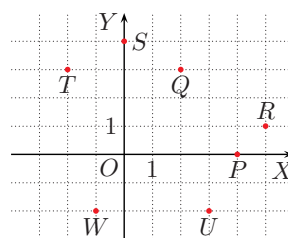
Prostokątny układ współrzędnych nazywany jest również **kartezjańskim układem współrzędnych** na cześć francuskiego matematyka, fizyka i filozofa René Descartes'a [czyt. rene dekart] (1596–1650), zwanego w Polsce Kartezjuszem.



1. Odczytaj współrzędne punktów P, Q, R, S, T, U, W (rysunek obok).

2. Podaj, w której ćwiartce układu współrzędnych położony jest punkt:

- a) $A(-3, 6)$, c) $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$,
b) $B(4, -11)$, d) $D(-50, -60)$.



3. Naskicuj układ współrzędnych, a następnie zaznacz w nim punkty:

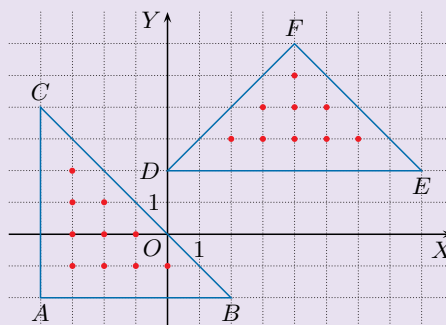
$A(0, 5), B(-2, 4), C(-1, -4), D(6, 1\frac{1}{2}), E(-2, 0), F(3, -3)$

4. Naskicuj prostokąt $ABCD$. Ile punktów kratowych leży wewnątrz tego prostokąta?

- a) $A(1, -1), B(4, -1), C(4, 3), D(1, 3)$
b) $A(-4, -2), B(5, -2), C(5, 4), D(-4, 4)$

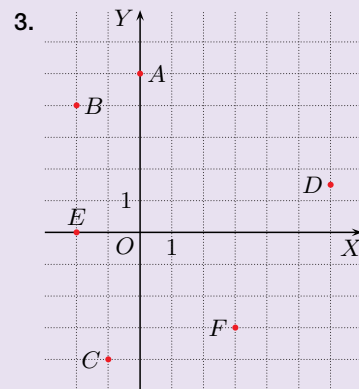
Punktami kratowymi nazywamy punkty, których obie współrzędne są liczbami całkowitymi.

5. Dane są trójkąt T_1 o wierzchołkach $A(-4, -2), B(2, -2)$ i $C(-4, 4)$ oraz trójkąt T_2 o wierzchołkach $D(0, 2), E(8, 2)$ i $F(4, 6)$. Do wnętrza którego z tych trójkątów należy więcej punktów kratowych i o ile?

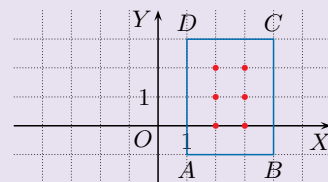


1. $P(4, 0), Q(2, 3), R(5, 1), S(0, 4), T(-2, 3), U(3, -2), W(-1, -2)$

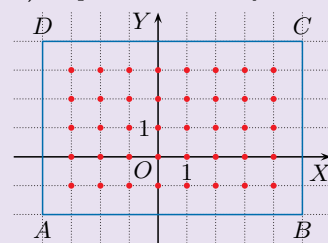
2. a) II
b) IV
c) I
d) III



4. a) 6 punktów kratowych



b) 40 punktów kratowych



Uczeń:

- szkicuje wykres funkcji o podanej dziedzinie,
- przedstawia funkcję za pomocą wzoru,
- szkicuje wykres funkcji określonej nieskomplikowanym wzorem, w tym prostą,
- oblicza wartość funkcji dla danego argumentu.

4.2. Szkicowanie wykresu funkcji (1)

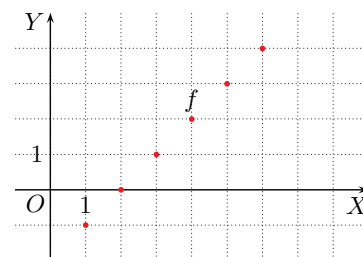
Funkcję, której argumenty i wartości są liczbami, nazywamy **funkcją liczbową**. W dalszym ciągu rozdziału będziemy rozpatrywać tylko takie funkcje. Jednym ze sposobów przedstawienia funkcji liczbowej jest wykres.

Przykład 1

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi liczbę o 2 mniejszą. Poniżej tę funkcję przedstawiono za pomocą tabeli oraz wykresu.

x	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	-1	0	1	2	3	4

Do wykresu funkcji f należą punkty o współrzędnych (x, y) , gdzie x jest argumentem, a y – wartością funkcji. Są to punkty: $(1, -1)$, $(2, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 2)$, $(5, 3)$ i $(6, 4)$.

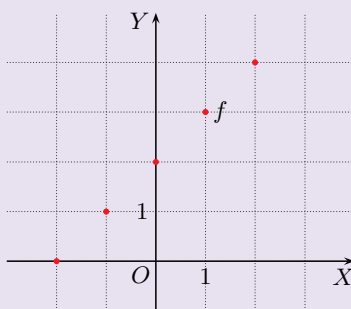


Definicja

Wykresem funkcji $f: X \rightarrow Y$ w układzie współrzędnych nazywamy zbiór wszystkich takich punktów (x, y) , że $x \in X$ oraz $y = f(x)$.

Ćwiczenie 1

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	1	2	3	4



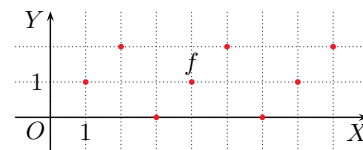
Ćwiczenie 1

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi liczbę o 2 większą. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli oraz wykresu.

Przykład 2

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi jego resztę z dzielenia przez 3. Poniżej tę funkcję przedstawiono za pomocą tabeli oraz wykresu.

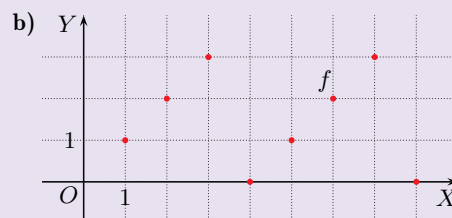
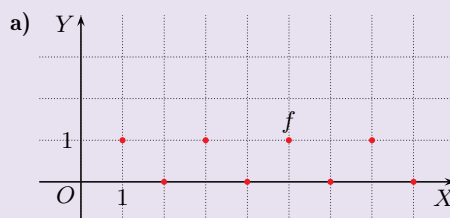
x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1	2	0	1	2	0	1	2



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji, która każdej liczbie ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ przyporządkowuje jej resztę z dzielenia przez: a) 2, b) 4.

Ćwiczenie 2



Multibook

- Czy podany rysunek przedstawia wykres funkcji
- Sposoby opisu funkcji

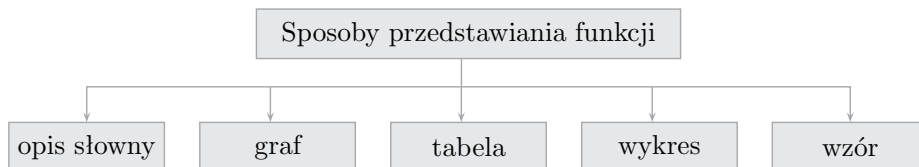
dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.2

Generator
testów i sprawdzianów

Często możliwe jest określenie funkcji za pomocą wzoru. Na przykład:

Opis słowny	Dziedzina	Wzór
Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi x liczbę o 3 większą.	$\mathbb{R}$	$f(x) = x + 3$
Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi x jego połowę powiększoną o 1.	$(-\infty; 2]$	$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$
Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi x jego kwadrat.	$[1; \infty)$	$f(x) = x^2$

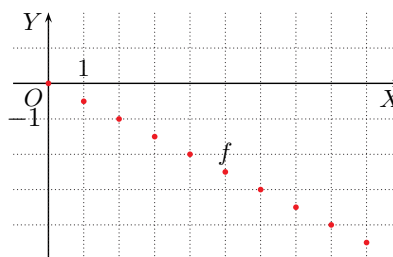
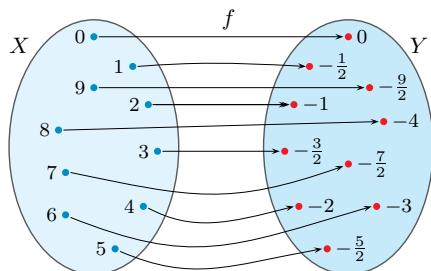
Uwaga. Wzór funkcji $f(x) = x + 3$ możemy zapisać też w postaci $y = x + 3$.



Przykład 3

Funkcja f każdej jednocyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje liczbę przeciwną do jej połowy. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli, grafu i wykresu. Podaj jej wzór.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2	$-\frac{5}{2}$	-3	$-\frac{7}{2}$	-4	$-\frac{9}{2}$



Funkcję f można określić wzorem $f(x) = -\frac{1}{2}x$, gdzie dziedziną jest zbiór $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

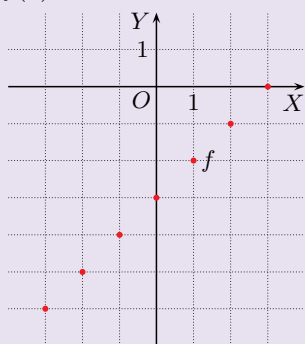
Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres oraz podaj wzór funkcji f , która każdej liczbie należącej do zbioru $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ przyporządkowuje:

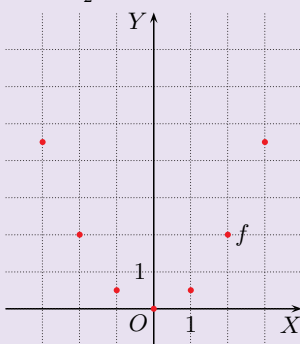
- a) liczbę o 3 mniejszą, b) połowę kwadratu tej liczby.

Ćwiczenie 3

a) $f(x) = x - 3$



b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$



Przed naszkicowaniem wykresu funkcji należy zwrócić uwagę na jej dziedzinę.

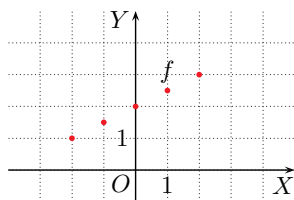
Przykład 4

Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy trzech różnych funkcji określonych tym samym wzorem, ale których dziedzinami są kolejno:

I. zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

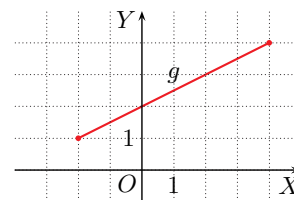
II. przedział $[-2; 4]$

III. przedział $(-2; 4)$



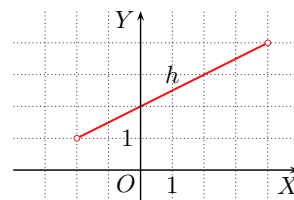
$$f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$$



$$g: [-2; 4] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x + 2$$



$$h: (-2; 4) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

- Wykresem funkcji f (rysunek I) jest pięć punktów.
- Wykresem funkcji g (rysunek II) jest odcinek łączący punkty $(-2, 1)$ i $(4, 4)$ – jego końce zaznaczono pełnymi kółkami.
- Na rysunku III puste kółka w punktach $(-2, 1)$ i $(4, 4)$ oznaczają, że punkty te nie należą do wykresu funkcji h (ponieważ liczby -2 i 4 nie należą do dziedziny tej funkcji).

Jeśli dziedziną funkcji $f(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, jest przedział domknięty $[x_1; x_2]$, to wykresem tej funkcji jest odcinek. Aby go naszkicować, wystarczy obliczyć wartości $f(x_1)$ i $f(x_2)$. Jeśli dziedziną funkcji f jest przedział otwarty, to jej wykresem jest odcinek bez swoich końców.

Przykład 5

Naszkicuj wykres funkcji $f: [-2; 6] \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

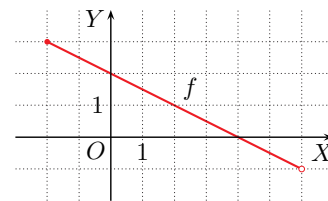
Obliczamy wartość funkcji dla $x = -2$:

$$f(-2) = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + 2 = 3$$

Obliczamy wartość wyrażenia $-\frac{1}{2}x + 2$ dla $x = 6$:

$$-\frac{1}{2} \cdot 6 + 2 = -1$$

Wykresem funkcji f jest odcinek łączący punkty $(-2, 3)$ i $(6, -1)$ bez końca w punkcie $(6, -1)$.



Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

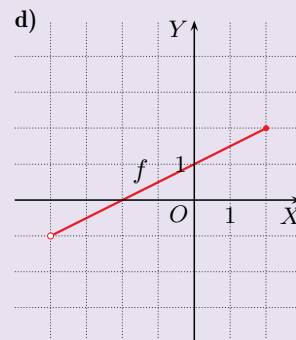
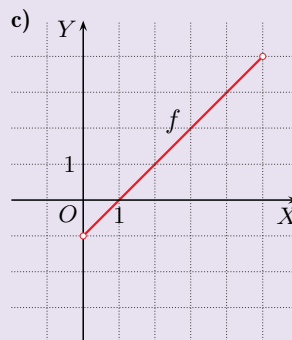
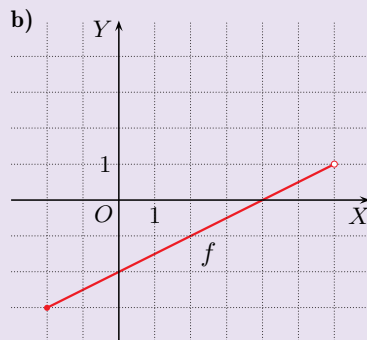
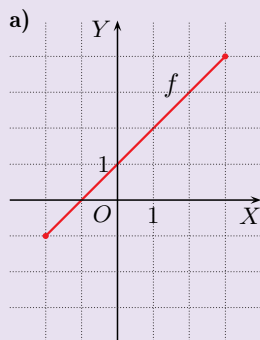
a) $D = [-2; 3]$, $f(x) = x + 1$

c) $D = (0; 5)$, $f(x) = x - 1$

b) $D = [-2; 6]$, $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$

d) $D = (-4; 2]$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

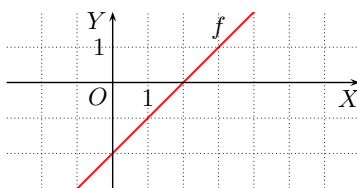
Ćwiczenie 4



Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ wykresem funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = ax + b$ jest prosta. Takie funkcje będą szczegółowo omawiane w następnym rozdziale.

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = x - 2$.

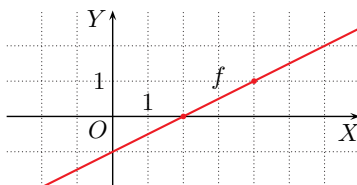
Aby naszkicować wykres tej funkcji, wystarczy obliczyć jej wartości dla dwóch dowolnych argumentów (dlaczego?), zaznaczyć odpowiednie punkty i poprowadzić przez nie prostą.



Przykład 6

Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

Obliczamy wartości funkcji f dla dwóch dowolnych argumentów, np. dla $x = 2$ i $x = 4$: $f(2) = 0$, $f(4) = 1$. Do wykresu funkcji f należą punkty $(2, 0)$ oraz $(4, 1)$. Szkicujemy prostą przechodzącą przez te punkty.



Ćwiczenie 5

Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem:

- a) $f(x) = 2x$, b) $f(x) = -x$, c) $f(x) = x - 1$, d) $f(x) = -2x + 2$.

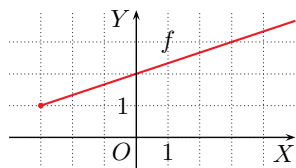
Przykład 7

Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji określonych tym samym wzorem, ale których dziedzinami są kolejno:

I. przedział $[-3; \infty)$

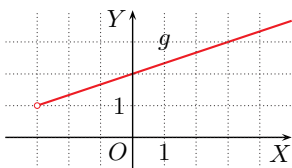
II. przedział $(-3; \infty)$

III. przedział $(-\infty; 3]$



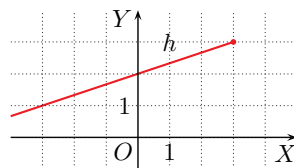
$f: [-3; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{3}x + 2$$



$g: (-3; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{1}{3}x + 2$$



$h: (-\infty; 3] \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(x) = \frac{1}{3}x + 2$$

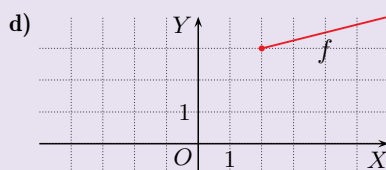
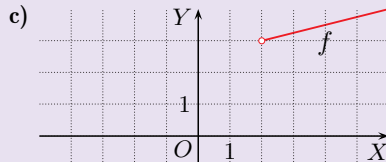
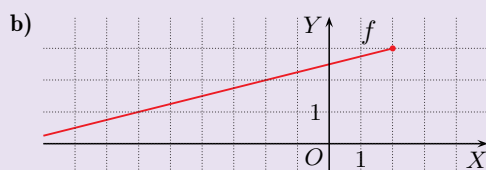
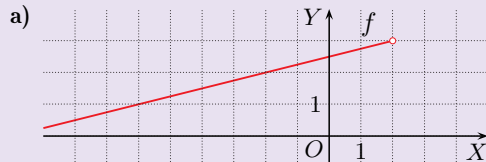
Wykresami funkcji f i h są półproste domknięte (z początkiem). Wykresem funkcji g jest półprosta otwarta (bez początku).

Ćwiczenie 6

Naszkicuj wykres funkcji $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{2}$.

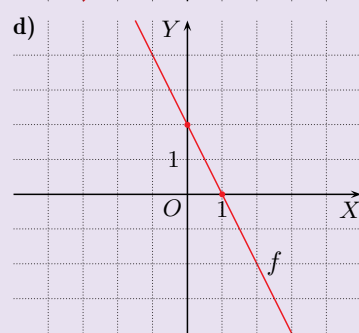
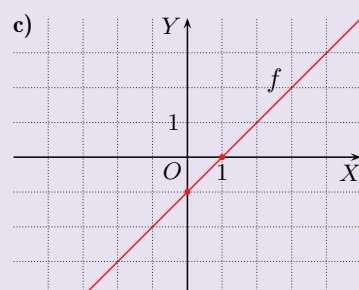
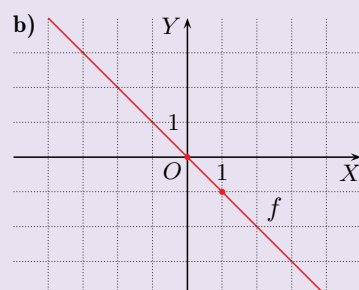
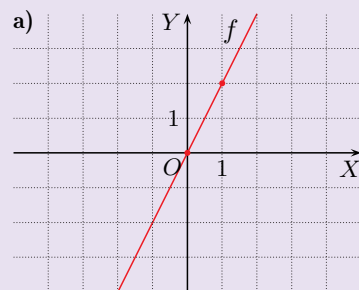
- a) $D = (-\infty; 2)$ b) $D = (-\infty; 2]$ c) $D = (2; \infty)$ d) $D = [2; \infty)$

Ćwiczenie 6

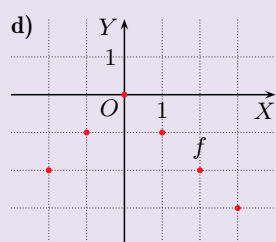
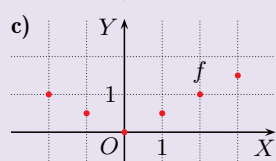
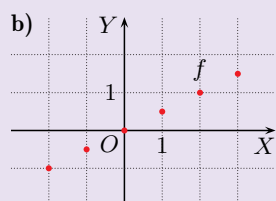
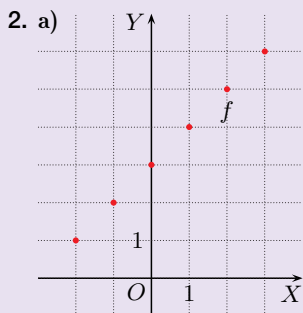


Przez dowolne dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta.

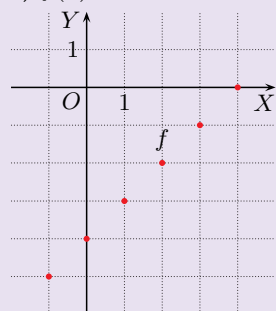
Ćwiczenie 5



Odpowiedzi do zadań



3. a) $f(x) = x - 4$



b) $f(x) = 2x$

c) $f(x) = -x + 4$

d) $f(x) = 2x - 1$

Zadania

1. Naskicuj wykres funkcji $f: \{-1, 0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$, która każdej liczbie z dziedziny przyporządkowuje:

a) liczbę o 1 mniejszą,

c) jej wartość bezwzględną,

b) liczbę przeciwną,

d) jej kwadrat.

2. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli i naskicuj jej wykres.

a) $f(x) = x + 3$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x$

c) $f(x) = |\frac{1}{2}x|$

d) $f(x) = -|x|$

3. Funkcja f podana została za pomocą tabeli. Naskicuj wykres tej funkcji i spróbuj odgadnąć wzór, którym mogłaby być określona.

a)

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-5	-4	-3	-2	-1	0

c)

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	5	4	3	2	1

b)

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	-1	0	1	2	3	4

d)

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	-2	-1	0	1	2	3

4. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = x + 1$, której dziedziną jest przedział:

a) $[0; 4]$,

b) $[-2; 3]$,

c) $[1; \infty)$,

d) $(-\infty; 2]$.

5. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = -x + 3$, której dziedziną jest przedział:

a) $(0; 4]$,

b) $(-3; 2)$,

c) $(0; \infty)$,

d) $(-\infty; -1)$.

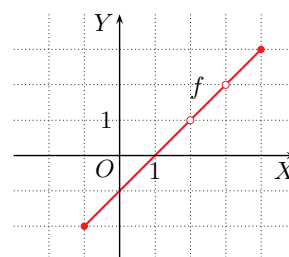
6. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = x - 1$, gdzie $D = [-1; 4] \setminus \{2, 3\}$. Naskicuj wykres funkcji $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ określonej tym samym wzorem.

a) $D_g = [-3; 0] \cup (2; 4)$

c) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$

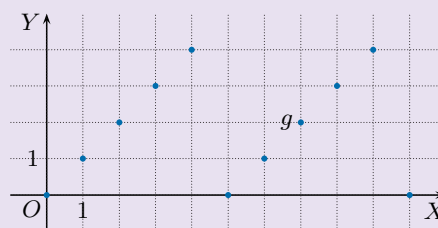
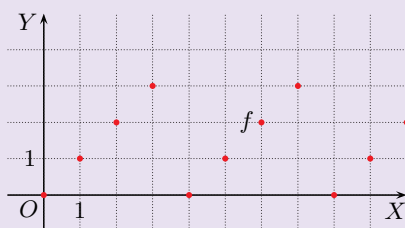
b) $D_g = (-2; 5) \setminus \{4\}$

d) $D_g = (0; \infty) \setminus \{3\}$



7. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej jej resztę z dzielenia przez 4, a funkcja g jej resztę z dzielenia przez 5. Naskicuj wykresy tych funkcji. Dla ilu liczb naturalnych mniejszych od 25 funkcje f i g przyjmują te same wartości?

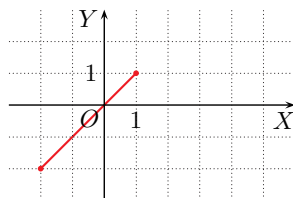
7. Jeśli $x < 25$, to $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{0, 1, 2, 3, 20, 21, 22, 23\}$, zatem zachodzi to dla ośmiu argumentów.



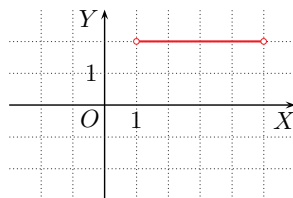
4.3. Szkicowanie wykresu funkcji (2)

Przykład 1

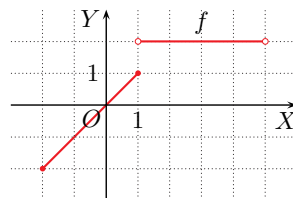
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in [-2; 1] \\ 2 & \text{dla } x \in (1; 5) \end{cases}$ Zauważ, że dziedziną funkcji f jest przedział $[-2; 5]$.



Fragment wykresu funkcji f dla $x \in [-2; 1]$



Fragment wykresu funkcji f dla $x \in (1; 5]$



Wykres funkcji f

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in [-2; 1] \\ 2 & \text{dla } x \in (1; 4) \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-3; -1) \\ -x & \text{dla } x \in [-1; 4) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in [-4; -2] \\ x & \text{dla } x \in (-2; 3] \end{cases}$

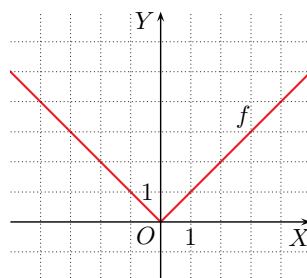
d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ 3 & \text{dla } x \in [1; \infty) \end{cases}$

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej za pomocą wzoru $f(x) = |x|$.

W tabeli podano wartości funkcji f dla **wybranych** argumentów. Tabele taką nazywamy **tabelą wartości funkcji**.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	3	2	1	0	1	2	3



Wzór tej funkcji można zapisać w postaci: $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ x & \text{dla } x \in [0; \infty) \end{cases}$

Ćwiczenie 2

Sporządź tabelę wartości funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dla całkowitych argumentów x , takich że $|x| \leq 3$. Naszkicuj wykres tej funkcji i zapisz jej wzór bez użycia symbolu wartości bezwzględnej.

a) $f(x) = |2x|$ b) $f(x) = |3x|$ c) $f(x) = |\frac{1}{2}x|$ d) $f(x) = -|x|$

Ćwiczenie 2

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	4	2	0	2	4	6

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ 2x & \text{dla } x \in [0; \infty) \end{cases}$$

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	6	3	0	3	6	9

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ 3x & \text{dla } x \in [0; \infty) \end{cases}$$

c)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ \frac{1}{2}x & \text{dla } x \in [0; \infty) \end{cases}$$

d)

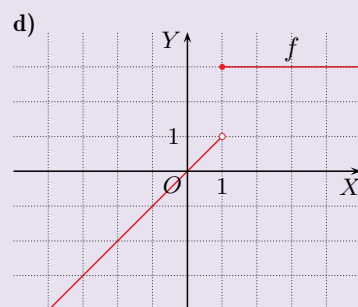
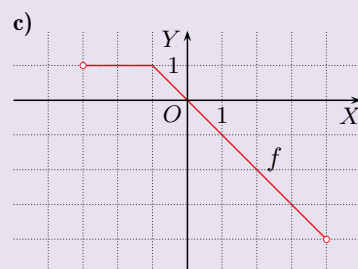
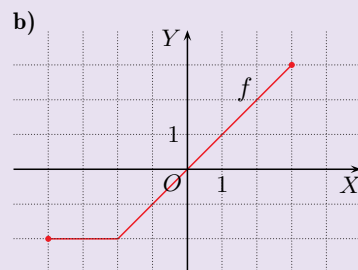
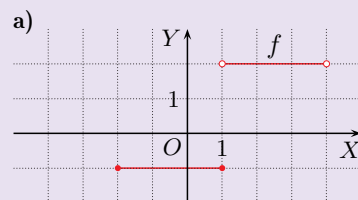
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-2	-1	0	-1	-2	-3

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ -x & \text{dla } x \in [0; \infty) \end{cases}$$

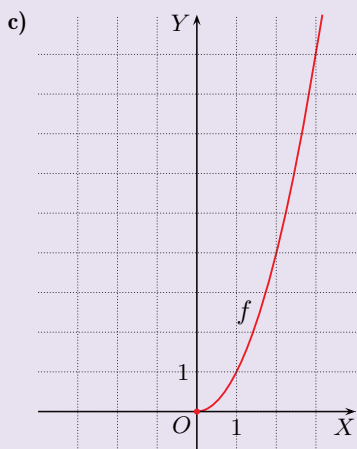
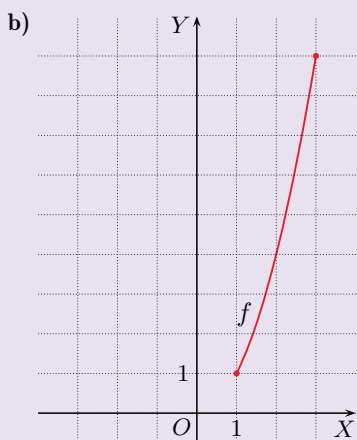
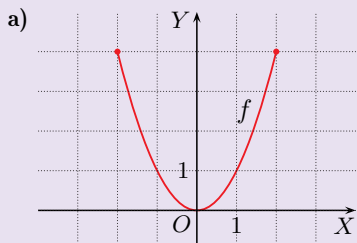
Uczeń:

- szkicuje wykres funkcji określonej nieskomplikowanym wzorem, w tym parabolę, hiperbolę,
- szkicuje wykres funkcji określonej różnymi wzorami w różnych przedziałach,
- sprawdza, czy dany punkt należy do wykresu funkcji,
- określa, czy dana krzywa jest wykresem funkcji,
- oblicza wartość funkcji dla danego argumentu.

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 3.



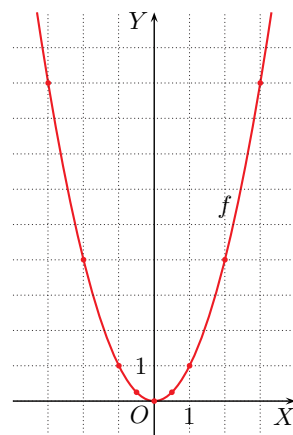
Przykład 3

Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej za pomocą wzoru $f(x) = x^2$.

Aby naszkicować wykres funkcji $f(x) = x^2$, sporządzamy tabelę jej wartości dla wybranych argumentów.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9

Wyznaczone punkty zaznaczamy w układzie współrzędnych i łączymy je krzywą, jak na rysunku – w ten sposób otrzymujemy wykres funkcji f .



Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji danej wzorem $f(x) = x^2$, o podanej dziedzinie D .

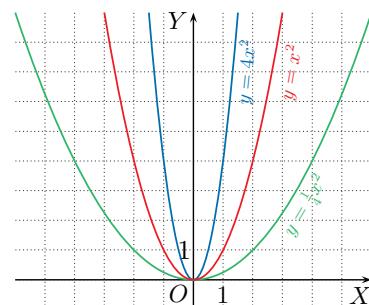
a) $D = [-2; 2]$

b) $D = [1; 3]$

c) $D = [0; \infty)$

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = x^2$, $y = 4x^2$.

Dziedziną każdej z tych funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.



Ćwiczenie 4

Sporządź tabelę wartości funkcji f dla podanych argumentów.

a) $f(x) = 4x^2$, $x \in \{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$

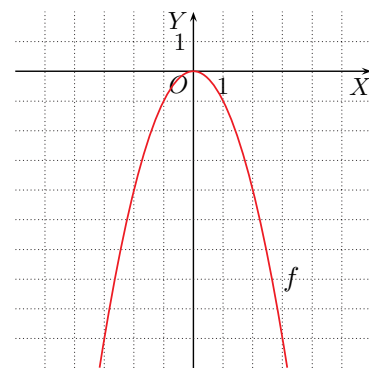
b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, $x \in \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$

Ćwiczenie 5

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej za pomocą wzoru $f(x) = -x^2$.

a) Sporządź tabelę wartości tej funkcji dla $x \in \{-3, -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$.

b) Naszkicuj wykres funkcji $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ określonej za pomocą wzoru $g(x) = -x^2$, o dziedzinie $D = [-1; 2]$.



Ćwiczenie 4

a)

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	16	4	1	0	1	4	16

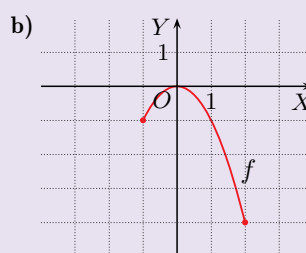
b)

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$f(x)$	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4

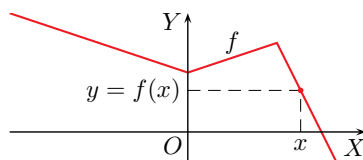
Ćwiczenie 5

a)

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	-9	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4	-9



Z wykresu funkcji można czasem odczytać wartość, jaką przyjmuje ona dla danego argumentu. Zauważmy, że dla argumentu x istnieje dokładnie jedna wartość y taka, że punkt (x, y) należy do wykresu funkcji f .

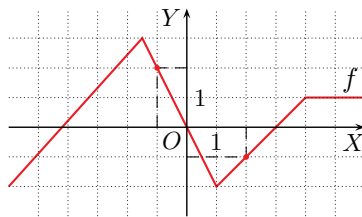


Przykład 4

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Odczytaj z niego wartości funkcji dla argumentów $x = -1$ oraz $x = 2$.

Dla $x = -1$ odczytujemy $f(-1) = 2$.

Dla $x = 2$ odczytujemy $f(2) = -1$.



Ćwiczenie 6

Wykresem funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest prosta przechodząca przez punkty A i B . Naskicuj ten wykres i odczytaj z niego wartości funkcji dla $x = 1$ i dla $x = 7$.

a) $A(-3, -1)$, $B(5, 3)$

b) $A(3, 0)$, $B(5, -3)$

Ćwiczenie 7

Naskicuj wykres funkcji f . Podaj jej wartości dla $x = 1$ oraz $x = 3$.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in (-\infty; -2] \\ x & \text{dla } x \in (-2; 4) \\ 4 & \text{dla } x \in [4; \infty) \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2] \\ -x & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 3 & \text{dla } x \in [2; \infty) \end{cases}$$

Czasami dokładne odczytanie wartości funkcji z wykresu może być trudne lub niemożliwe, ale możemy ją obliczyć, gdy znamy wzór funkcji.

Przykład 5

Oblicz wartości funkcji $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = 5x^2 - 6x$ i $h(x) = x^3 - 1$ dla argumentu $x = 2$. Czy punkt $P(2, 7)$ należy do wykresu którejś z tych funkcji?

Obliczamy wartości funkcji dla $x = 2$:

$$f(2) = 2^2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$g(2) = 5 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 = 20 - 12 = 8 \neq 7$$

$$h(2) = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$$

Punkt o danych współrzędnych należy do wykresu funkcji $y = f(x)$, jeśli po wstawieniu jego współrzędnych odpowiednio na miejsce x i y do wzoru funkcji otrzymamy równość prawdziwą.

Zatem punkt P należy do wykresu funkcji f oraz do wykresu funkcji h .

Ćwiczenie 8

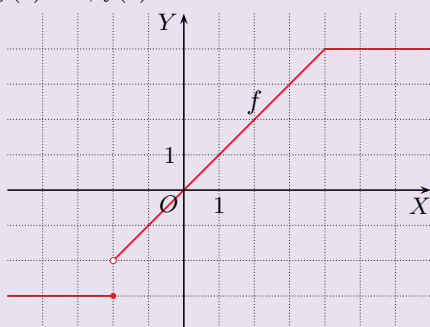
Sprawdź, czy punkt P należy do wykresu funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

a) $f(x) = 3x^2 + 1$, $P(-2, -11)$

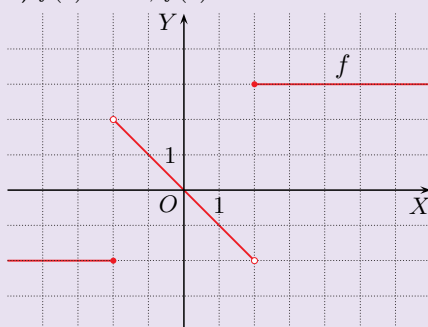
b) $f(x) = -2x^2 - x$, $P(-\frac{1}{2}, 0)$

Ćwiczenie 7

a) $f(1) = 1$, $f(3) = 3$

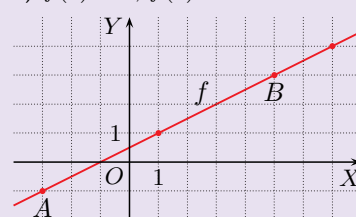


b) $f(1) = -1$, $f(3) = 3$

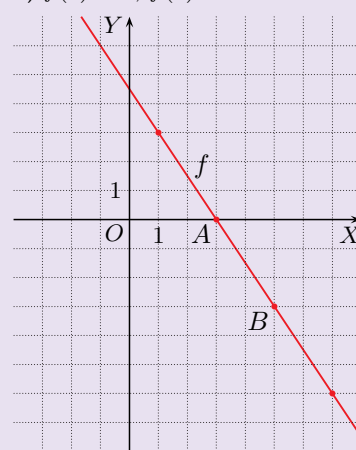


Ćwiczenie 6

a) $f(1) = 1$, $f(7) = 4$



b) $f(1) = 3$, $f(7) = -6$



Ćwiczenie 8

a) $f(-2) = 13 \neq -11$, nie należy

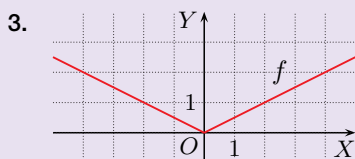
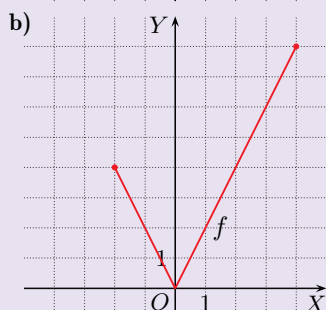
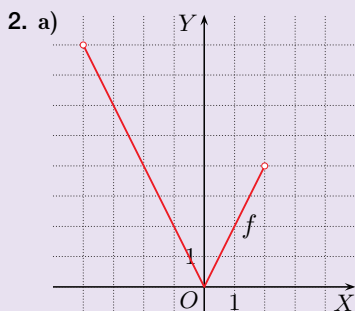
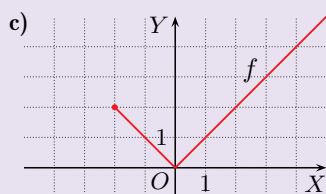
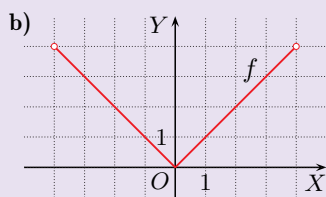
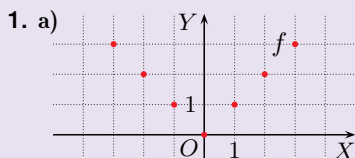
b) $f(-\frac{1}{2}) = 0$, należy

Ćwiczenie 9

a), c) Nie, gdyż istnieją proste równoległe do osi OY (np. prosta $x = 1$), które przecinają krzywą w dwóch punktach.

b) Tak. Każda prosta równoległa do osi OY przecina wykres tylko w jednym punkcie.

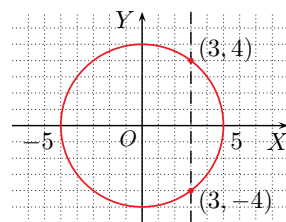
Odpowiedzi do zadań



Funkcja każdemu argumentowi x przyporządkowuje tylko jedną wartość y , więc do wykresu funkcji nie mogą należeć dwa punkty o tej samej odciętej.

Przykład 6

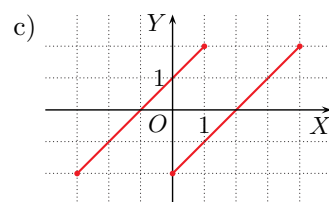
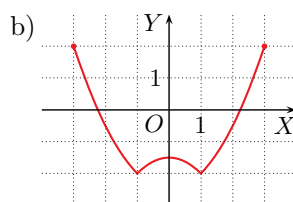
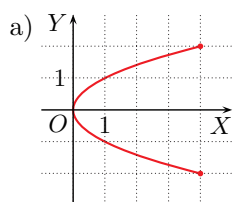
Okrąg (rysunek obok) nie jest wykresem funkcji, gdyż można wskazać takie liczby x , którym odpowiadają dwie różne wartości y_1, y_2 , np. dla $x = 3$ mamy $y_1 = -4$ i $y_2 = 4$. Jest to sprzeczne z definicją funkcji.



Żadna prosta pionowa (równoległa do osi OY) nie przecina wykresu funkcji w więcej niż jednym punkcie.

Ćwiczenie 9

Czy na rysunku przedstawiono wykres funkcji? Odpowiedz uzasadnij.



Zadania

- Naszkicuj wykres funkcji danej wzorem $f(x) = |x|$ o podanej dziedzinie D .
a) $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ b) $D = (-4; 4)$ c) $D = [-2; \infty)$

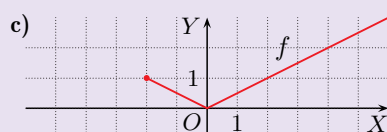
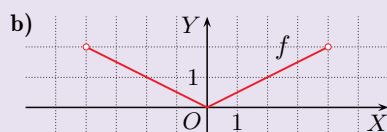
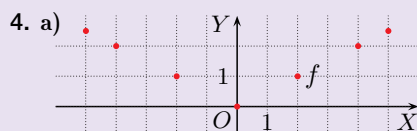
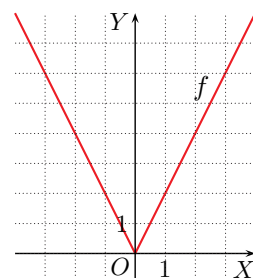
- Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej za pomocą wzoru $f(x) = |2x|$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = |2x|$ o podanej dziedzinie D .

- a) $D = (-4; 2)$ b) $D = [-2, 4]$

- Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej za pomocą wzoru $f(x) = \left|\frac{1}{2}x\right|$.

- Naszkicuj wykres funkcji określonej za pomocą wzoru $f(x) = \left|\frac{1}{2}x\right|$ o podanej dziedzinie D .

- a) $D = \{-5, -4, -2, 0, 2, 4, 5\}$ b) $D = (-4; 4)$ c) $D = [-2; \infty)$



Czy wiesz, że...

Szwajcarski matematyk Leonhard Euler [czyt. ojler] (1707–1783) jako pierwszy do opisu wartości funkcji używał oznaczenia $f(x)$. Podana przez nas definicja funkcji została sformułowana dopiero w połowie XIX wieku przez niemieckiego matematyka Petera G.L. Dirichleta (1805–1859).

5. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej wartości dla $x = -4$ oraz dla $x = 4$.

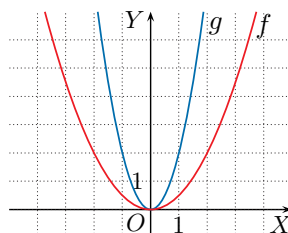
a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty; 0] \\ 2x & \text{dla } x \in (0; \infty) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |x| & \text{dla } x \in [-2; \infty) \end{cases}$

6. Naszkicuj wykres funkcji $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = -x^2$.

a) $D = (-2; 3)$ b) $D = [-2; 3]$ c) $D = (-3; 2)$ d) $D = [-3; 2]$

7. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ oraz $g(x) = 2x^2$.

- a) Który spośród punktów $P(1, 2)$, $Q(4, 8)$, $R(-2, 8)$, $S(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ należy do wykresu funkcji g ?
b) Podaj pięć punktów o obu współrzędnych całkowitych należących do wykresu funkcji f .



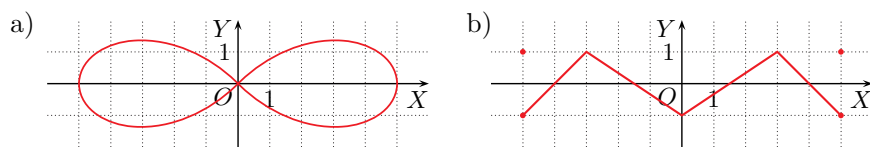
8. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej wartości dla $x = -3$ oraz dla $x = 2$.

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; 1] \\ x & \text{dla } x \in (1; 4] \\ 4 & \text{dla } x \in (4; \infty) \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \in (-\infty; -3] \\ -x & \text{dla } x \in (-3; 2] \\ 2 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$
b) $f(x) = \begin{cases} -4 & \text{dla } x \in (-\infty; -2] \\ 2x & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 1 & \text{dla } x \in [2; \infty) \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -3] \\ |x| & \text{dla } x \in [-3; 3] \\ 3 & \text{dla } x \in (3; \infty) \end{cases}$

9. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Który z punktów $P(-1, -5)$, $Q(2, -9)$ należy do wykresu tej funkcji?

a) $f(x) = -\frac{3}{2}x - 6$ b) $f(x) = -4x^2 + x$ c) $f(x) = x^3 - 4x^2$

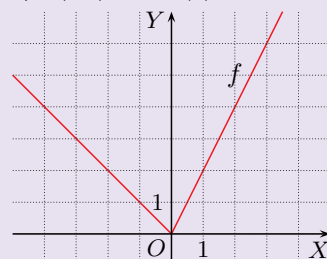
10. Czy na rysunku przedstawiono wykres funkcji? Odpowiedź uzasadnij.



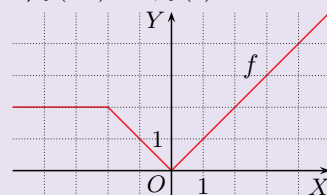
9. a) Q
b) P
c) P

10. a) Nie, gdyż istnieją proste równoległe do osi OY, które przecinają krzywą w dwóch punktach.
b) Nie, bo argumentom -5 i 5 przyporządkowane są dwie wartości.

5. a) $f(-4) = 4$, $f(4) = 8$



- b) $f(-4) = 2$, $f(4) = 4$



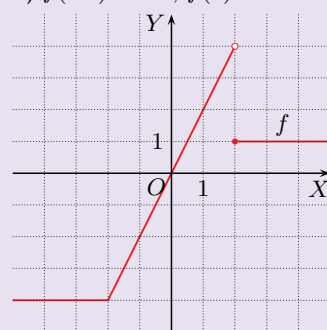
7. a) P, R, S

- b) np. $(-4, 8)$, $(-2, 2)$, $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(4, 8)$

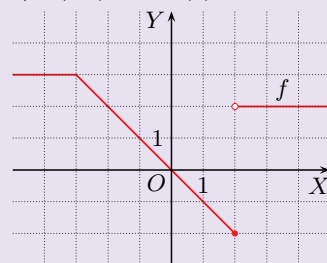
8. a) $f(-3) = 1$, $f(2) = 2$



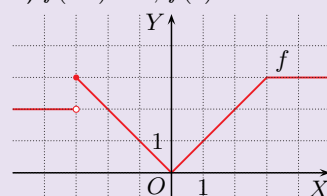
- b) $f(-3) = -4$, $f(2) = 1$



- c) $f(-3) = 3$, $f(2) = -2$



- d) $f(-3) = 3$, $f(2) = 2$



Uczeń:

- stosuje pojęcie funkcji monotonicznej (rosnącej, malejącej, stałej, nierosnącej, niemalejącej),
- na podstawie wykresu funkcji określa jej monotoniczność,
- rysuje wykres funkcji o podanych kryteriach monotoniczności,
- bada na podstawie definicji monotoniczność funkcji określonej wzorem.

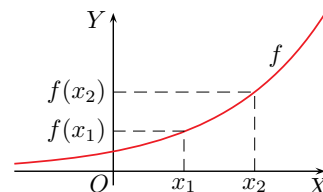
4.4. Monotoniczność funkcji

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji f . Zauważ, że większemu argumentowi odpowiada większa wartość funkcji.

Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **rosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) < f(x_2)$$



Uwaga. Warunek z definicji można też zapisać: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

D Przykład 1

Wykaż, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$ jest rosnąca.

Założmy, że $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ są dowolnymi argumentami, takimi że $x_1 < x_2$.

Wówczas $f(x_1) = \frac{1}{2}x_1 - 4$ oraz $f(x_2) = \frac{1}{2}x_2 - 4$.

$$f(x_2) - f(x_1) = \left(\frac{1}{2}x_2 - 4\right) - \left(\frac{1}{2}x_1 - 4\right) = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) > 0$$

ponieważ na podstawie założenia $x_2 - x_1 > 0$.

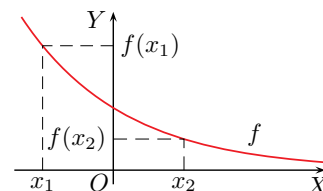
Oznacza to, że funkcja f jest rosnąca.

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji f . Zauważ, że większemu argumentowi odpowiada mniejsza wartość funkcji.

Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **malejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) > f(x_2)$$



Uwaga. Warunek z definicji można też zapisać: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_2) - f(x_1) < 0$.

D Przykład 2

Wykaż, że funkcja $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = \frac{4}{x}$ jest malejąca.

Założmy, że $x_1, x_2 \in (0; \infty)$ są dowolnymi argumentami, takimi że $x_1 < x_2$.

Wówczas $f(x_1) = \frac{4}{x_1}$ oraz $f(x_2) = \frac{4}{x_2}$.

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{4}{x_2} - \frac{4}{x_1} = \frac{4x_1 - 4x_2}{x_1 x_2} = \frac{4(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} < 0$$

ponieważ na podstawie założenia $x_1 x_2 > 0$ oraz $x_1 - x_2 < 0$.

Oznacza to, że funkcja f jest malejąca.

Ćwiczenie 1

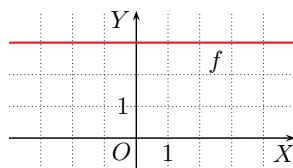
Uzasadnij, że:

- a) funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = -2x + 6$ jest malejąca,
 b) funkcja $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = -\frac{4}{x}$ jest rosnąca,
 c) funkcja $f: (-\infty; 0) \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = -\frac{2}{x}$ jest rosnąca.

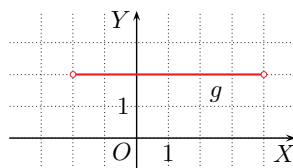
Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **stałą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ prawdziwa jest równość: $f(x_1) = f(x_2)$.

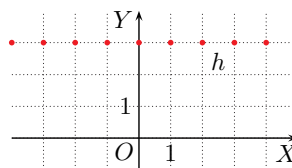
Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy funkcji stałych.



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3$



$g: (-2; 4) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2$

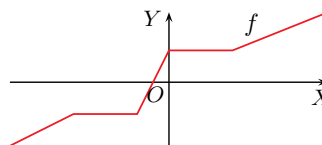


$h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 3$

Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **niemalejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

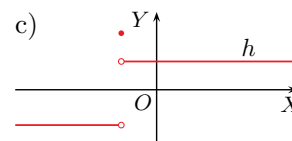
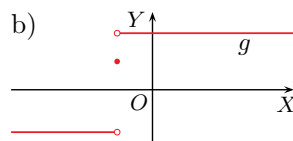
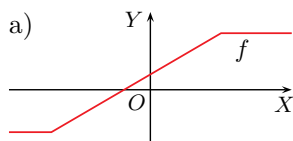
jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) \leq f(x_2)$



Przykład funkcji niemalejącej

Ćwiczenie 2

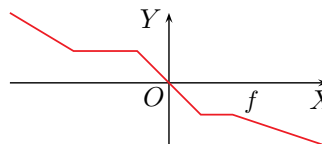
Czy na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji niemalejącej?



Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **nierosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) \geq f(x_2)$



Przykład funkcji nierosnącej

Ćwiczenie 1

a) Zakładamy, że $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ oraz $x_1 < x_2$. Wówczas:

$$\begin{aligned} 2x_1 &< 2x_2 \\ -2x_1 &> -2x_2 \\ -2x_1 + 6 &> -2x_2 + 6 \end{aligned}$$

Zatem $f(x_1) > f(x_2)$, czyli funkcja jest malejąca.

b) Zakładamy, że $x_1, x_2 \in (0; \infty)$ oraz $x_1 < x_2$. Wówczas:

$$-4x_1 > -4x_2 \quad / : x_1 \cdot x_2$$

Ponieważ $x_1 \cdot x_2 > 0$:

$$-\frac{4}{x_2} > -\frac{4}{x_1}$$

Zatem $f(x_1) < f(x_2)$, czyli funkcja jest rosnąca.

c) Zakładamy, że $x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$ oraz $x_1 < x_2$. Wówczas:

$$-2x_1 > -2x_2 \quad / : x_1 \cdot x_2$$

Ponieważ $x_1 \cdot x_2 > 0$:

$$-\frac{2}{x_2} > -\frac{2}{x_1}$$

Zatem $f(x_1) < f(x_2)$, czyli funkcja jest rosnąca.

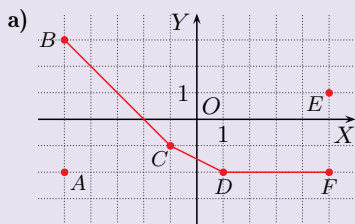
Ćwiczenie 2

a) tak

b) tak

c) nie

Ćwiczenie 3

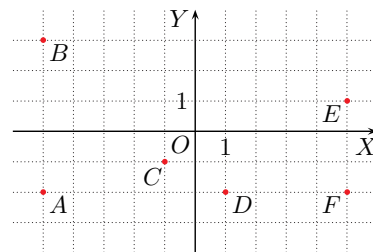


b) nie

Ćwiczenie 3

a) Naskicuj wykres funkcji nierosnącej $f: [-5; 5] \rightarrow \mathbb{R}$, tak aby należały do niego cztery spośród punktów A–F.

b) Czy można naskicować wykres funkcji niemalejącej $f: [-5; 5] \rightarrow \mathbb{R}$, tak aby należały do niego cztery spośród punktów A–F?



Każda funkcja malejąca jest funkcją nierosnącą, a każda funkcja rosnąca jest funkcją niemalejącą.

Funkcja stała jest zarówno funkcją niemalejącą, jak i nierosnącą.

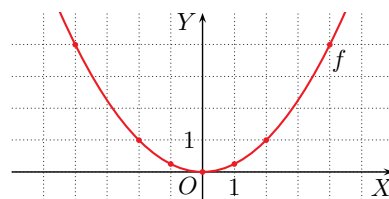
Definicja

Funkcje rosnące, malejące, nierosnące, niemalejące i stałe nazywamy funkcjami **monotonicznymi**.

Przykład 3

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{4}x^2$.

Funkcja f rozpatrywana w całej swojej dziedzinie nie jest monotoniczna. Jest to funkcja **przedziałami monotoniczna**.



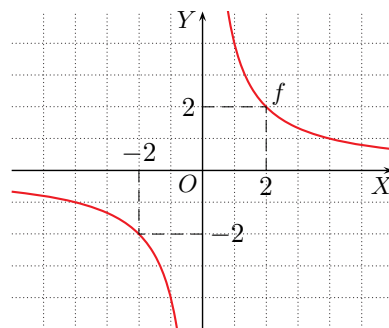
W przedziale $(-\infty; 0]$ funkcja f maleje, a w przedziale $[0; \infty)$ – rośnie. Przedziały te nazywamy przedziałami monotoniczności tej funkcji.

Przykład 4

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: (-\infty; 0) \cup (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = \frac{4}{x}$. Funkcja ta jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$.

Jednak funkcja f nie jest funkcją malejącą w zbiorze $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Na przykład dla pary argumentów -2 i 2 mamy:

$$-2 < 2 \text{ i } f(-2) = -2 < f(2) = 2$$

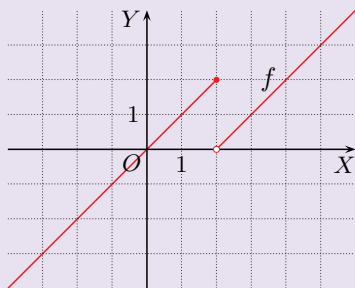


Ćwiczenie 4

Naskicuj wykres funkcji, która jest przedziałami rosnąca, ale nie jest funkcją monotoniczną.

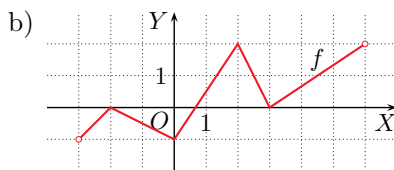
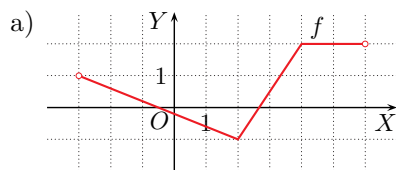
Ćwiczenie 4

Przykładowa odpowiedź.

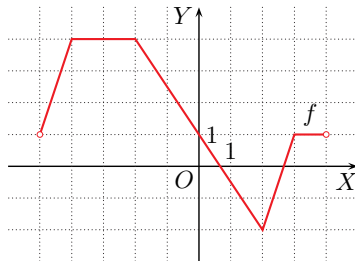


Zadania

1. Dany jest wykres funkcji $f: (-3; 6) \rightarrow \mathbb{R}$. Podaj przedziały monotoniczności tej funkcji.



2. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: (-5; 4) \rightarrow \mathbb{R}$. Podaj jej przedziały monotoniczności. Które z poniższych zdań są prawdziwe?

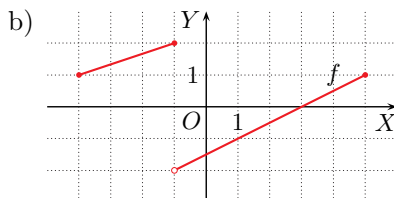
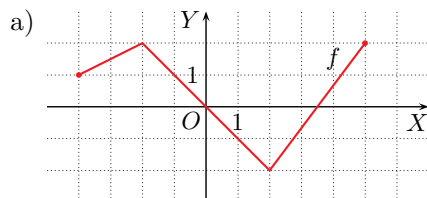


- A. Funkcja f jest nierosnąca w $[-4; 2]$.
B. Funkcja f jest niemalejąca w $(-5; -2]$.
C. Funkcja f jest niemalejąca w $[2; 4]$.

3. Naskicuj wykres funkcji $f: (-5; 6) \rightarrow \mathbb{R}$ spełniającej warunki:

- a) f rośnie w $(-5; -1]$ i w $[3; 6)$ oraz maleje w $[-1; 3]$,
b) f jest stała w $[0; 4]$, rośnie w $[4; 5]$, maleje w $(-5; 0]$ i w $[5; 6)$.

- D** 4. Dany jest wykres funkcji $f: [-4; 5] \rightarrow \mathbb{R}$. Uzasadnij, że funkcja ta nie jest monotoniczna. Podaj przedziały monotoniczności tej funkcji.



- D** 5. Przeczytaj podany w ramce przykład. Wykaż, że funkcja:

- a) $f: (-\infty; 0] \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = 6x^2 + 1$ jest malejąca,
b) $f: (-\infty; 0) \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = \frac{3}{x^2} - 2$ jest rosnąca,
c) $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = -8x^2 + 6$ jest malejąca.

Wykaż, że funkcja $f: [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ jest rosnąca.

Niech $x_1, x_2 \in [0; \infty)$ oraz $x_1 < x_2$.

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

$x_2 - x_1 > 0$ oraz $x_2 + x_1 > 0$, zatem $f(x_2) - f(x_1) > 0$, czyli $f(x_2) > f(x_1)$. Oznacza to, że funkcja f jest rosnąca.

5. a) Niech $x_1, x_2 \in (-\infty; 0]$ oraz $x_1 < x_2$.

$$f(x_2) - f(x_1) = 6x_2^2 + 1 - 6x_1^2 - 1 = 6(x_2^2 - x_1^2) = 6(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

$x_2 - x_1 > 0$ i $x_2 + x_1 < 0$, zatem $f(x_2) - f(x_1) < 0$, czyli $f(x_2) < f(x_1)$.

Oznacza to, że funkcja f jest malejąca.

- b) Niech $x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$ oraz $x_1 < x_2$.

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{3}{x_2^2} - 2 - \frac{3}{x_1^2} + 2 = \frac{3(x_1^2 - x_2^2)}{x_2^2 x_1^2} = \frac{3}{(x_2 x_1)^2} (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

$(x_1 x_2)^2 > 0$, $x_1 - x_2 < 0$ i $x_2 + x_1 < 0$, zatem $f(x_2) - f(x_1) > 0$, czyli $f(x_2) > f(x_1)$.

Oznacza to, że funkcja f jest rosnąca.

- c) Niech $x_1, x_2 \in (0; \infty)$ oraz $x_1 < x_2$.

$$f(x_2) - f(x_1) = -8x_2^2 + 6 + 8x_1^2 - 6 = 8(x_1^2 - x_2^2) = 8(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

$x_1 - x_2 < 0$ i $x_2 + x_1 > 0$, zatem $f(x_2) - f(x_1) < 0$, czyli $f(x_2) < f(x_1)$.

Oznacza to, że funkcja f jest malejąca.

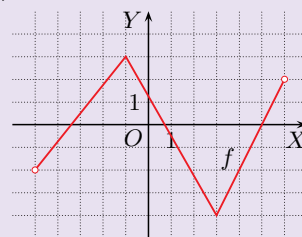
Odpowiedzi do zadań

1. a) Funkcja f maleje w $(-3; 2]$, jest stała w $[4; 6)$, rośnie w $[2; 4]$.

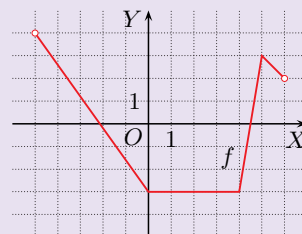
- b) Funkcja f maleje w $[-2; 0]$ i w $[2; 3]$, rośnie w $(-3; -2]$, $[0; 2]$ i w $[3; 6)$.

2. Funkcja f maleje w $[-2; 2]$, jest stała w $[-4; -2]$ i w $[3; 4]$ rośnie w $(-5; -4]$ i w $[2; 3]$. Wszystkie zdania są prawdziwe.

3. a) Przykładowa odpowiedź.



- b) Przykładowa odpowiedź.

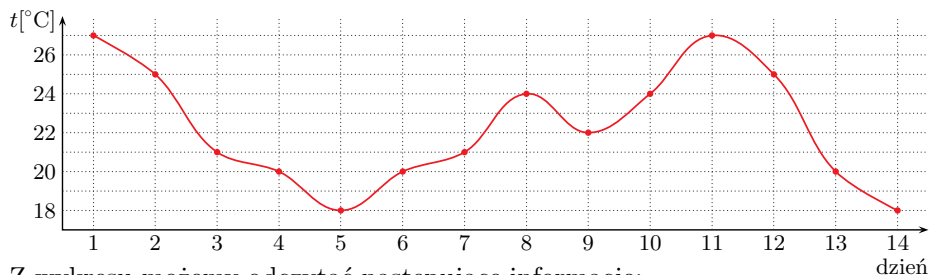


4. a) Funkcja f maleje w $[-2; 2]$, rośnie w $[-4; -2]$ i w $[2; 5]$, nie jest więc monotoniczna.

- b) Funkcja f rośnie w $[-4; -1]$ i w $(-1; 5]$, ale nie jest funkcją rosnącą, gdyż dla pary argumentów $-1, 1$ mamy: $-1 < 1$ oraz $f(-1) > f(1)$.

Wykorzystanie wykresu do prezentacji informacji

Na poniższym wykresie przedstawiono zmiany temperatury powietrza w pewnym mieście w dwóch pierwszych tygodniach sierpnia podane przez jeden z serwisów meteorologicznych. Temperaturę mierzono każdego dnia w południe. Otrzymane punkty wykresu zwyczajowo łączy się krzywą ilustrującą ciągły proces zmiany temperatury.



Z wykresu możemy odczytać następujące informacje:

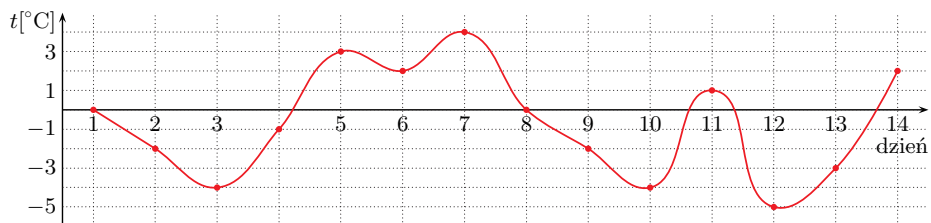
- najwyższa temperatura odnotowana w tym okresie to 27°C (1 i 11 sierpnia),
- najniższa temperatura odnotowana w tym okresie to 18°C (5 i 14 sierpnia).

1. a) A: -5°C , 12 stycznia,
B: -7°C , 10 stycznia
b) A: 4°C , 7 stycznia,
B: 1°C , 2, 3, 14 stycznia
c) A: 2–4, 9, 10, 12,
13 stycznia,
B: 2–12 stycznia

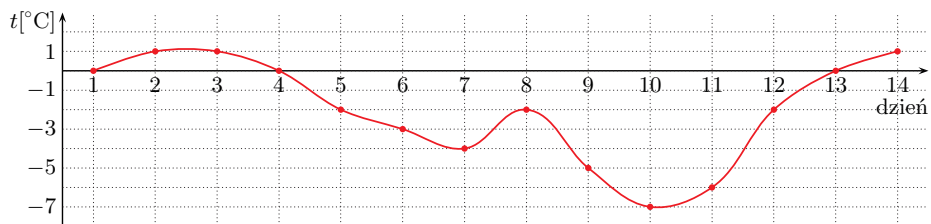
1. Na poniższych wykresach przedstawiono zmiany temperatury powietrza w miastach A i B w pierwszych dwóch tygodniach stycznia. Dla każdego miasta odczytaj z wykresu:

- a) najniższą temperaturę i podaj dni, w których była ona odnotowana,
b) najwyższą temperaturę i podaj dni, w których była ona odnotowana,
c) dni, w których temperatura była ujemna.

Miasto A



Miasto B



4.5. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (1)

■ Odczytywanie dziedziny funkcji

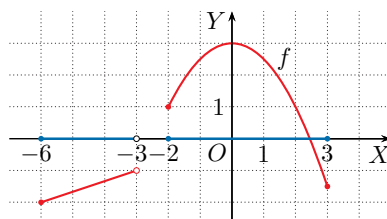
Dziedzina funkcji $y = f(x)$ to zbiór wszystkich argumentów x , dla których funkcja jest określona. Dziedzinę funkcji f oznaczamy przez D lub D_f .

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f . Jej dziedziną jest zbiór:

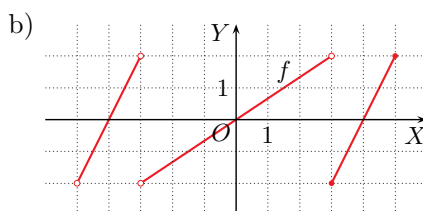
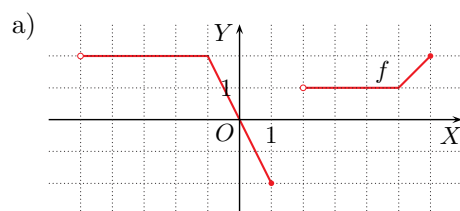
$$D = [-6; -3) \cup [-2; 3]$$

Na rysunku został on zaznaczony na osi OX kolorem niebieskim.



Ćwiczenie 1

Z wykresu funkcji f odczytaj jej dziedzinę.



■ Odczytywanie zbioru wartości funkcji

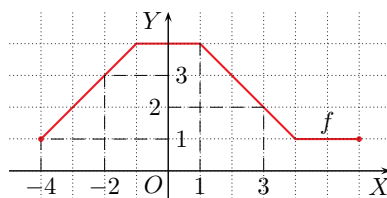
Z wykresu funkcji można odczytać nie tylko wartość, jaką ta funkcja przyjmuje dla danego argumentu, lecz także zbiór wszystkich liczb, które są wartościami tej funkcji. Zbiór ten nazywamy **zbiorem wartości** funkcji.

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: [-4; 6] \rightarrow \mathbb{R}$. Odczytaj z niego $f(-4)$, $f(-2)$, $f(1)$ i $f(3)$ oraz zbiór wartości funkcji f .

Z wykresu odczytujemy wartości funkcji: $f(-4) = 1$, $f(-2) = 3$, $f(1) = 4$ i $f(3) = 2$.

Wartościami funkcji f są wszystkie liczby y spełniające warunek $1 \leq y \leq 4$. Zatem zbiorem wartości funkcji f jest przedział $[1; 4]$.



Uczeń:

- stosuje pojęcia: zbiór wartości funkcji, największa i najmniejsza wartość funkcji,
- odczytuje z wykresu funkcji jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne, argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie, maksymalne przedziały monotoniczności funkcji, najmniejszą i największą wartość funkcji oraz argumenty, dla których te wartości są przyjmowane.

Ćwiczenie 1

a) $D = (-5; 1] \cup (2; 6]$

b) $D = (-5; -3) \cup (-3; 5]$

Definicja

Zbiór wartości funkcji $f: D \rightarrow Y$ to zbiór tych wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje taki argument $x \in D$, że $f(x) = y$.

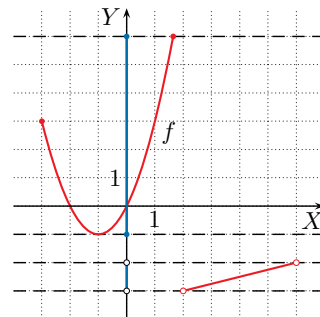
Zbiór wartości funkcji f oznaczamy przez $f(D)$ lub $f(D_f)$.

Przykład 3

Z wykresu funkcji f odczytaj jej zbiór wartości.

Przy odczytywaniu zbioru wartości funkcji wygodnie jest poprowadzić odpowiednie proste poziome (równoległe do osi OX).

Zbiór wartości $f(D) = (-3; -2) \cup [-1; 6]$ został zaznaczony na osi OY kolorem niebieskim.



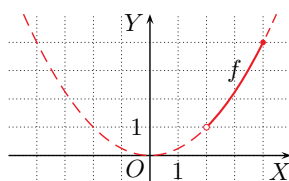
Ćwiczenie 2

- a) $f(D) = (1; 4]$
- b) $f(D) = [0; 4)$
- c) $f(D) = [0; \infty)$

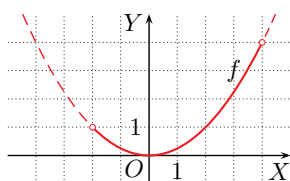
Ćwiczenie 2

Linia ciągłą narysowano wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ o dziedzinie D . Odczytaj z wykresu zbiór wartości funkcji f .

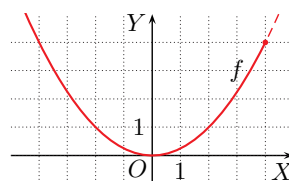
a) $D = (2; 4]$



b) $D = (-2; 4)$



c) $D = (-\infty; 4]$



Ćwiczenie 3

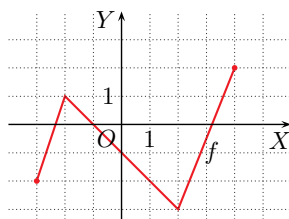
Funkcja f przyjmuje największą wartość 2 dla $x = 4$.

Funkcja g nie przyjmuje wartości największej.

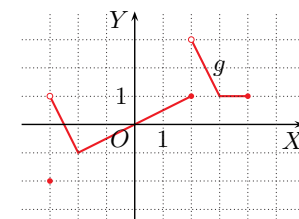
Funkcja h przyjmuje największą wartość 3 dla $x = 3$.

Ćwiczenie 3

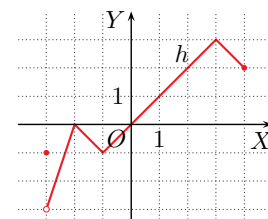
Na rysunkach przedstawiono wykresy funkcji f , g i h określonych w przedziale $[-3; 4]$. Najmniejsze wartości każdej z tych funkcji podano pod wykresami. Odczytaj ich największe wartości. Dla jakich argumentów są one przyjmowane?



Najmniejsza wartość funkcji f jest równa -3 . Jest ona przyjmowana dla $x = 2$.



Najmniejsza wartość funkcji g jest równa -2 . Jest ona przyjmowana dla $x = -3$.



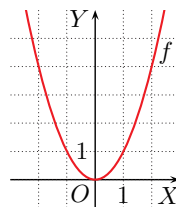
Funkcja h nie przyjmuje najmniejszej wartości.

Przykład 4

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = x^2$ o dziedzinie $D = \mathbb{R}$.

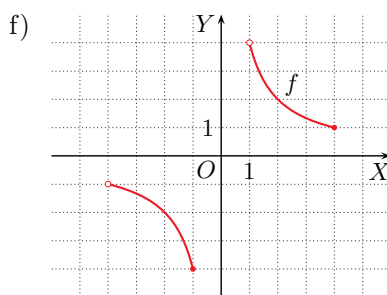
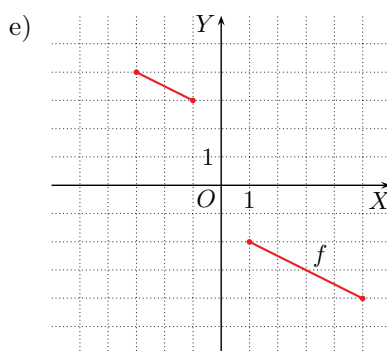
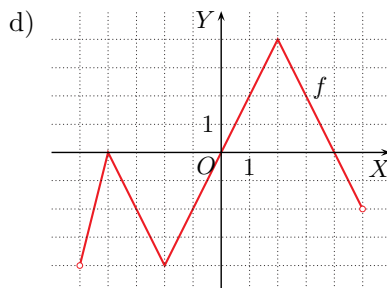
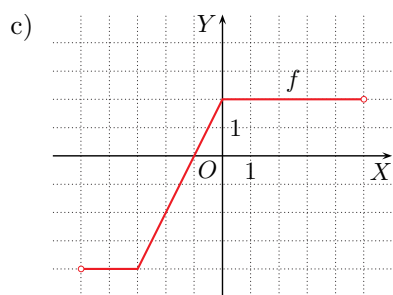
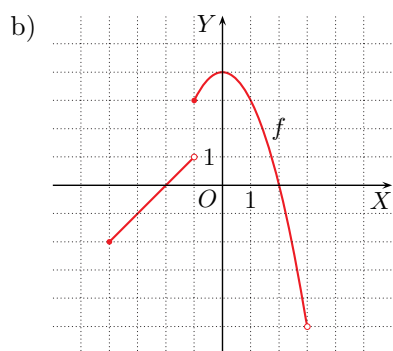
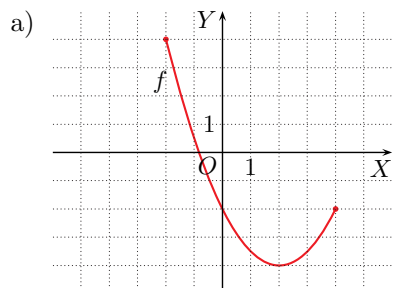
Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $[0; \infty)$.

Najmniejsza wartość funkcji f , równa 0, jest przyjmowana dla $x = 0$. Funkcja f nie przyjmuje wartości największej.



Zadania

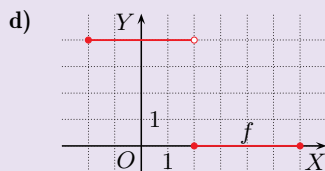
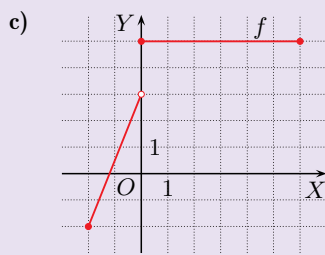
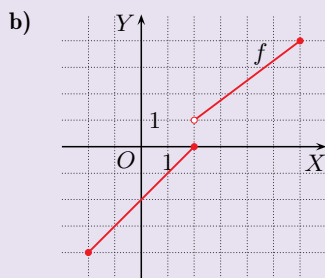
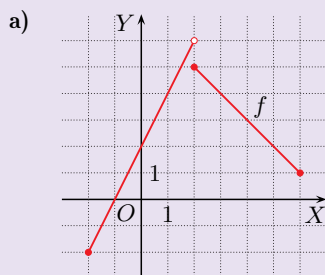
1. Odczytaj z wykresu funkcji f jej dziedzinę, zbiór wartości, najmniejszą wartość i największą wartość oraz argumenty, dla których są one przyjmowane.



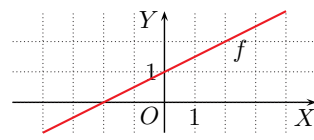
Odpowiedzi do zadań

1. a) $D = [-2; 4]$,
 $f(D) = [-4; 4]$,
 $f_{\min} = -4$ dla $x = 2$,
 $f_{\max} = 4$ dla $x = -2$
b) $D = [-4; 3]$,
 $f(D) = (-5; 4]$,
nie przyjmuje wartości najmniejszej,
 $f_{\max} = 4$ dla $x = 0$
c) $D = (-5; 5]$,
 $f(D) = [-4; 2]$,
 $f_{\min} = -4$ dla $x \in (-5; -3]$,
 $f_{\max} = 2$ dla $x \in [0; 5]$
d) $D = (-5; 5]$,
 $f(D) = [-4; 4]$,
 $f_{\min} = -4$ dla $x = -2$,
 $f_{\max} = 4$ dla $x = 2$
e) $D = [-3; -1] \cup [1; 5]$,
 $f(D) = [-4; -2] \cup [3; 4]$,
 $f_{\min} = -4$ dla $x = 5$,
 $f_{\max} = 4$ dla $x = -3$
f) $D = (-4; -1] \cup (1; 4]$,
 $f(D) = [-4; -1) \cup [1; 4)$,
 $f_{\min} = -4$ dla $x = -1$,
nie przyjmuje wartości największej

2. a) $f(D) = [-1; 3]$
 b) $f(D) = [-1; 0] \cup [1; 3]$
 c) $f(D) = [-1; 1) \cup (2; 3]$
 3. a) $f(D) = [1; 6]$
 b) $f(D) = [1; 3] \cup [4; 5]$
 c) $f(D) = [1; 2] \cup [5; 6]$
 4. a) $D = (\frac{1}{2}; 4]$
 b) $D = (1; 3) \cup (3; \infty)$
 c) $D = (2; 3) \cup \{\frac{7}{2}\}$
 d) $D = \{2, 3, \frac{7}{2}\}$
 5. a) $f_{\min} = -1$ dla $x = -1$,
 $f_{\max} = 2$ dla $x = -4$
 b) $f_{\min} = -2$ dla $x = 0$,
 nie przyjmuje wartości
 największej
 c) $f_{\min} = -2$ dla $x = 0$,
 nie przyjmuje wartości
 największej
 6. Przykładowe odpowiedzi.

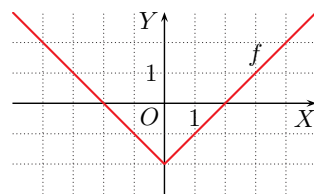


2. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Podaj zbiór wartości funkcji, której dziedziną jest zbiór D , określonej tym samym wzorem.



- a) $D = [-4; 4]$ b) $D = [-4; -2] \cup [0; 4]$ c) $D = [-4; 0] \cup (2; 4]$
 3. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ o dziedzinie D . Odczytaj z wykresu zbiór wartości tej funkcji.
 a) $D = [-4; 6]$ b) $D = [-4; 0] \cup [2; 4]$ c) $D = [-4; -2] \cup [4; 6]$
 4. Podany zbiór jest zbiorem wartości funkcji $f(x) = 2x - 4$. Określ dziedzinę tej funkcji.
 a) $(-3; 4]$ b) $(-2; 2) \cup (2; \infty)$ c) $(0; 2) \cup \{3\}$ d) $\{0, 2, 3\}$

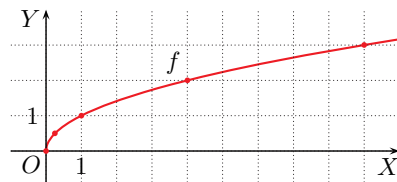
5. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = |x| - 2$. Dla funkcji $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ określonej tym samym wzorem podaj wartości największą i najmniejszą oraz argumenty, dla których są one przyjmowane.



- a) $D = [-4; -1]$ b) $D = [-3; 4]$ c) $D = [-2; \infty)$
 6. Naskicuj wykres dowolnej funkcji $f: [-2; 6] \rightarrow \mathbb{R}$, której zbiór wartości jest równy:
 a) $[-2; 6)$, b) $[-4; 0] \cup (1; 4]$, c) $[-2; 3) \cup \{5\}$, d) $\{0, 4\}$.

7. Aby naskicować wykres funkcji $f: [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = \sqrt{x}$, sporządzono tabelę wartości tej funkcji dla wybranych argumentów.

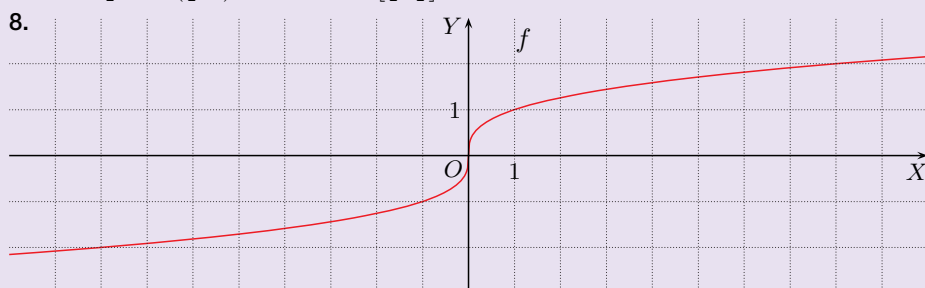
x	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3



Odczytaj z wykresu, jakie wartości funkcja f przyjmuje dla:

- a) $x \in (0; \frac{1}{4}]$, b) $x \in (\frac{1}{4}; 1)$, c) $x \in [4; 9]$, d) $x \in [2\frac{1}{4}; 6\frac{1}{4}]$.
 8. Na podstawie odpowiedniej tabeli wartości funkcji naskicuj wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Jakie wartości funkcja f przyjmuje dla argumentów z przedziału:

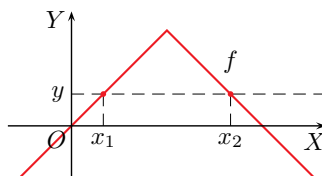
7. a) $(0; \frac{1}{2}]$ b) $(\frac{1}{2}; 1)$ c) $[2; 3]$ d) $[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}]$



- a) $[0; 1]$ b) $(0; 2)$ c) $[-2; 1]$ d) $(-2; \infty)$

4.6. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (2)

Na podstawie wykresu funkcji możemy podać argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość. Zwróć uwagę na to, że funkcja f , której wykres przedstawiono obok, przyjmuje wskazaną wartość y dla dwóch argumentów: x_1 i x_2 .



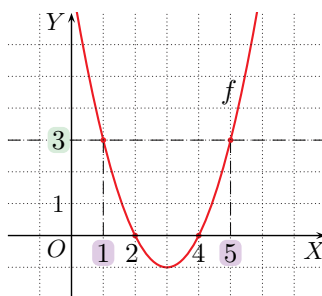
Przykład 1

Dany jest wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Odczytaj, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 3 oraz podaj jej miejsca zerowe.

Rysujemy prostą $y = 3$. Przecina ona wykres funkcji w punktach $(1, 3)$ i $(5, 3)$.

Zatem funkcja f przyjmuje wartość równą 3 dla $x = 1$ i $x = 5$.

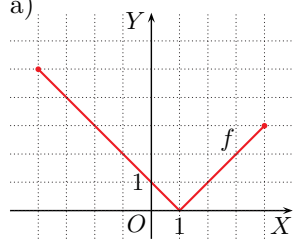
Miejscami zerowymi tej funkcji są liczby 2 i 4.



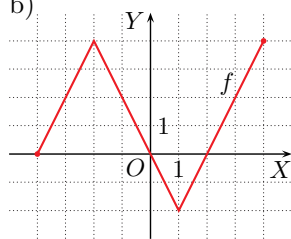
Ćwiczenie 1

Na podstawie wykresu funkcji $f: [-4; 4] \rightarrow \mathbb{R}$ podaj jej miejsca zerowe oraz te argumenty x , dla których spełnione jest równanie $f(x) = 2$.

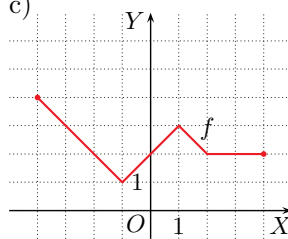
a)



b)



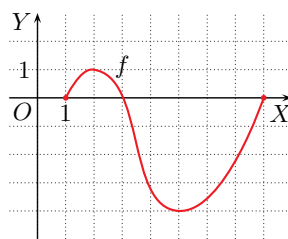
c)



Przykład 2

Dany jest wykres funkcji $f: [1; 8] \rightarrow \mathbb{R}$. Odczytujemy z niego:

- równanie $f(x) = 0$ jest spełnione dla $x = 1$, $x = 3$, $x = 8$,
- nierówność $f(x) > 0$ zachodzi dla $x \in (1; 3)$,
- nierówność $f(x) \leq 0$ zachodzi dla $x \in \{1\} \cup [3; 8]$.



Uczeń:

- odczytuje z wykresu rozwiązania równań i nierówności.

Ćwiczenie 1

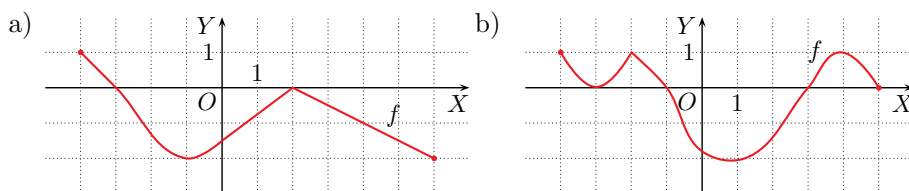
- a) $f(x) = 0$ dla $x = 1$,
 $f(x) = 2$ dla $x \in \{-1, 3\}$
- b) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-4, 0, 2\}$,
 $f(x) = 2$ dla $x \in \{-3, -1, 3\}$
- c) brak miejsc zerowych,
 $f(x) = 2$ dla $x \in \{-2, 0\} \cup [2; 4]$

Ćwiczenie 2

- a) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, 2\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in [-4; -3)$,
 $f(x) \leq 0$ dla $x \in [-3; 6]$
- b) $f(x) = 0$ dla
 $x \in \{-3, -1, 3, 5\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in [-4; -3) \cup$
 $\cup (-3; -1) \cup (3; 5)$,
 $f(x) \leq 0$ dla
 $x \in [-1; 3] \cup \{-3, 5\}$

Ćwiczenie 2

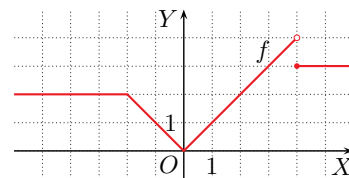
Z wykresu funkcji f odczytaj jej miejsca zerowe, zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ oraz nierówności $f(x) \leq 0$.



Przykład 3

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |x| & \text{dla } x \in [-2; 4) \\ 3 & \text{dla } x \in [4; \infty) \end{cases}$$



Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 2$ oraz nierówności $f(x) \geq 2$.

Nierówność $f(x) > 2$ zachodzi dla $x \in (2; \infty)$, a nierówność $f(x) \geq 2$ zachodzi dla $x \in (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$.

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Odczytaj z niego:

- rozwiązanie równania $f(x) = 3$ i zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 3$,
- rozwiązanie równania $f(x) = 1$ i zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq 1$.

a) $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{dla } x \in (-\infty; -5) \\ |x| & \text{dla } x \in [-5; 3) \\ 1 & \text{dla } x \in [3; \infty) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ |x| & \text{dla } x \in [-1; 1] \\ 3 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$

Przykład 4

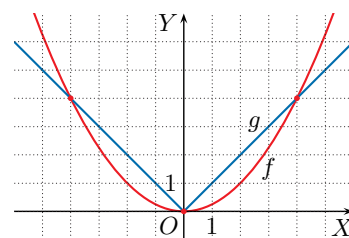
Rozwiąż graficznie równanie $\frac{1}{4}x^2 = |x|$ oraz nierówność $\frac{1}{4}x^2 < |x|$.

W jednym układzie współrzędnych szkicujemy wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ i $g(x) = |x|$.

Z wykresów odczytujemy:

$$\frac{1}{4}x^2 = |x| \text{ dla } x = -4, x = 0, x = 4,$$

$$\frac{1}{4}x^2 < |x| \text{ dla } x \in (-4; 0) \cup (0; 4).$$



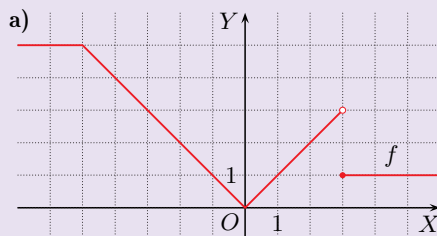
Ćwiczenie 4

Odczytaj z wykresów funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ i $g(x) = |x|$ z przykładu 4. zbiór rozwiązań nierówności $\frac{1}{4}x^2 \geq |x|$.

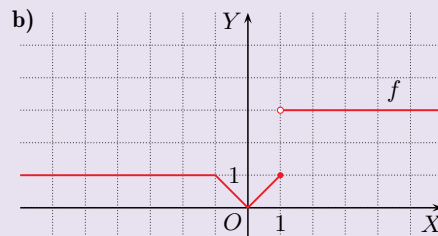
Ćwiczenie 4

$$x \in (-\infty; -4] \cup \{0\} \cup [4; \infty)$$

Ćwiczenie 3



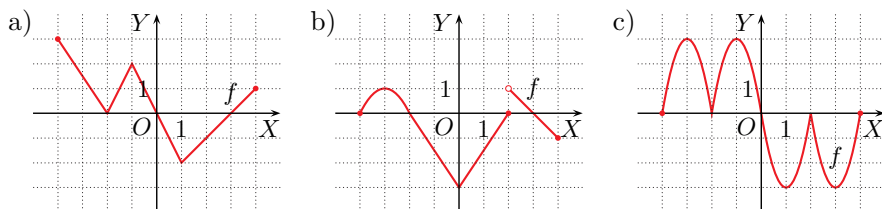
$f(x) = 3$ dla $x = -3$,
 $f(x) > 3$ dla $x \in (-\infty; -3)$,
 $f(x) = 1$ dla $x \in \{-1, 1\} \cup [3; \infty)$,
 $f(x) \leq 1$ dla $x \in [-1; 1] \cup [3; \infty)$



$f(x) = 3$ dla $x \in (1; \infty)$,
nie przyjmuje wartości większych od 3,
 $f(x) = 1$ dla $x \in (-\infty; -1] \cup \{1\}$,
 $f(x) \leq 1$ dla $x \in (-\infty; 1]$

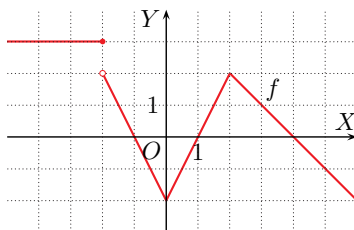
Zadania

1. Z wykresu funkcji $f: [-4; 4] \rightarrow \mathbb{R}$ odczytaj jej miejsca zerowe oraz zbiory rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ i $f(x) \geq 0$.



2. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Odczytaj z wykresu:

- a) rozwiązanie równania $f(x) = 0$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 0$,
b) rozwiązanie równania $f(x) = 2$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 2$,
c) rozwiązanie równania $f(x) = 3$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq 3$.

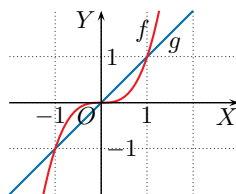


3. Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a następnie odczytaj z niego rozwiązanie równania $f(x) = 1$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 1$.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} 4 & \text{dla } x \in (-\infty; -4) \\ |x| & \text{dla } x \in [-4; 1) \\ 3 & \text{dla } x \in [1; \infty) \end{cases} & \text{c) } f(x) &= \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -2] \\ |2x| & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 2 & \text{dla } x \in [2; \infty) \end{cases} \\ \text{b) } f(x) &= \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -4) \\ |x| & \text{dla } x \in [-4; 2) \\ 4 & \text{dla } x \in [2; \infty) \end{cases} & \text{d) } f(x) &= \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |2x| & \text{dla } x \in [-2; 1] \\ 1 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases} \end{aligned}$$

4. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = x^3$ i $g(x) = x$. Odczytaj z wykresów:

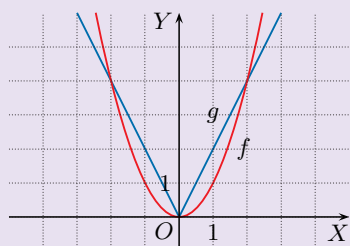
- a) rozwiązanie równania $x^3 = x$,
b) zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < g(x)$,
c) zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq g(x)$.



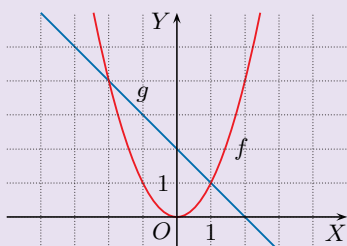
- 5.* a) Rozwiąż graficznie równanie $x^2 = |2x|$ i nierówność $x^2 < |2x|$.
b) Rozwiąż graficznie równanie $x^2 = 2 - x$ i nierówność $x^2 \geq 2 - x$.

4. a) $x \in \{-1, 0, 1\}$ b) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$ c) $x \in [-1; 0] \cup [1; \infty)$

5. a) $f(x) = x^2$, $g(x) = |2x|$ b) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2 - x$



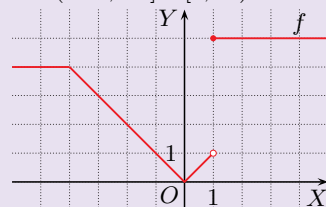
$$\begin{aligned} x^2 &= |2x| \text{ dla } x \in \{-2, 0, 2\}, \\ x^2 &< |2x| \text{ dla } x \in (-2; 0) \cup (0; 2) \end{aligned}$$



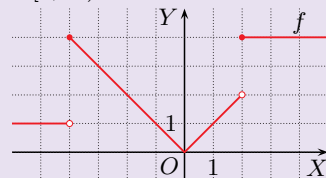
$$\begin{aligned} x^2 &= 2 - x \text{ dla } x \in \{-2, 1\}, \\ x^2 &\geq 2 - x \text{ dla } x \in (-\infty; -2] \cup [1; \infty) \end{aligned}$$

Odpowiedzi do zadań

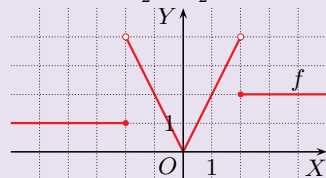
1. a) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-2, 0, 3\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in [-4; -2) \cup (-2; 0) \cup (3; 4]$,
 $f(x) \geq 0$ dla $x \in [-4; 0] \cup [3; 4]$
b) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-4, -2, 2, 3\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in (-4; -2) \cup (2; 3)$,
 $f(x) \geq 0$ dla $x \in [-4; -2] \cup [2; 3]$
c) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in (-4; -2) \cup (-2; 0)$,
 $f(x) \geq 0$ dla $x \in [-4; 0] \cup \{2, 4\}$
2. a) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-1, 1, 4\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup (1; 4)$
b) $f(x) = 2$ dla $x = 2$,
 $f(x) \geq 2$ dla $x \in (-\infty; -2] \cup \{2\}$
c) $f(x) = 3$ dla $x \in (-\infty; -2]$,
 $f(x) \leq 3$ dla $x \in \mathbb{R}$
3. a) $f(x) = 1$ dla $x = -1$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$



- b) $f(x) = 1$ dla $x \in (-\infty; -4) \cup \{-1, 1\}$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$



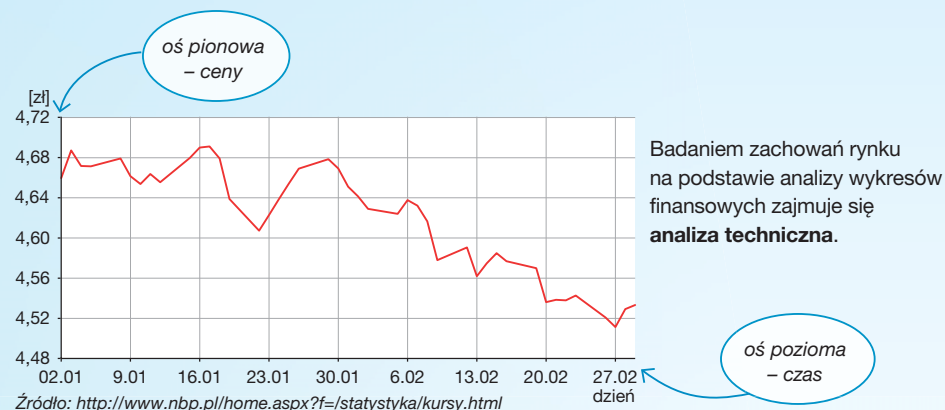
- c) $f(x) = 1$ dla $x \in (-\infty; -2] \cup \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}; \infty)$



- d) $f(x) = 1$ dla $x \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \cup (1; \infty)$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in [-2; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}; \infty)$

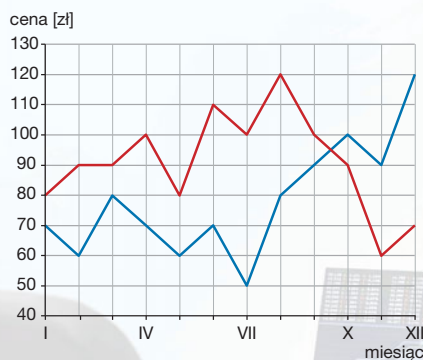
Wykresy jako nośnik informacji finansowych

Wiele informacji finansowych jest prezentowanych w postaci wykresów. Poniżej przedstawiono zmiany kursu franka szwajcarskiego w stosunku do złotego w okresie od 2 stycznia do 29 lutego 2024 r. Taki wykres składa się z punktów odpowiadających kursom franka w kolejnych dniach – zwyczajowo łączy się je odcinkami. Poprawia to czytelność wykresu.



1 Na rysunku przedstawiono ceny akcji spółki X (kolor czerwony) i spółki Y (kolor niebieski) na koniec kolejnych miesięcy 2023 roku.

- Jaki jest największy możliwy zysk przy zakupie i sprzedaży po 3 miesiącach jednej akcji spółki X, a jaki – spółki Y?
- Jaka jest największa możliwa strata przy zakupie i sprzedaży po 5 miesiącach jednej akcji spółki X, a jaka – spółki Y?

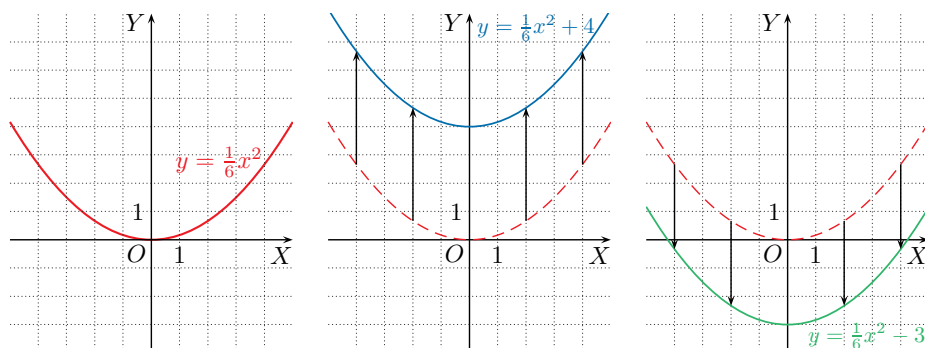


- Spółka X – zysk od maja do sierpnia: $120 - 80 = 40$ [zł]
Spółka Y – zysk od lipca do października: $100 - 50 = 50$ [zł]
 - Spółka X – strata od czerwca do listopada: $110 - 60 = 50$ [zł]
Spółka Y – strata od lutego do lipca: $60 - 50 = 10$ [zł]

4.7. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OY

Przykład 1

Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji $y = \frac{1}{6}x^2$, $y = \frac{1}{6}x^2 + 4$ oraz $y = \frac{1}{6}x^2 - 3$.



Wykresy funkcji $y = \frac{1}{6}x^2 + 4$ i $y = \frac{1}{6}x^2 - 3$ można otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \frac{1}{6}x^2$ wzdłuż osi OY o odpowiednią liczbę jednostek.

Twierdzenie

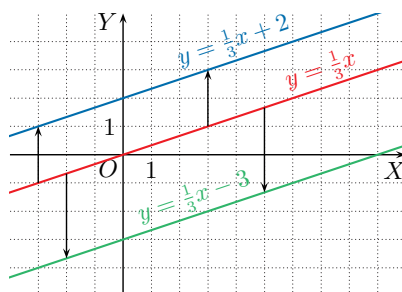
Wykres funkcji $y = f(x) + q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek w górę wzdłuż osi OY.

Wykres funkcji $y = f(x) - q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek w dół wzdłuż osi OY.

Przykład 2

Jeśli przesuniemy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x$ o 2 jednostki w górę, to otrzymamy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x + 2$.

Jeśli przesuniemy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x$ o 3 jednostki w dół, to otrzymamy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x - 3$.



Ćwiczenie 1

Stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji $y = |x|$, naszkicuj wykres i podaj zbiór wartości funkcji:

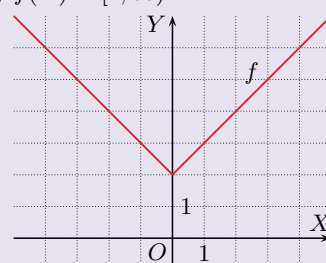
- a) $y = |x| + 2$, b) $y = |x| - 2$, c) $y = |x| - 3$, d) $y = |x| + \frac{1}{2}$.

Uczeń:

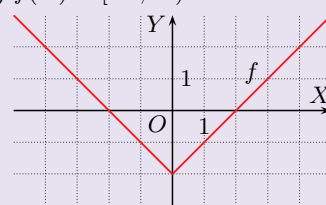
- rysuje wykresy funkcji:
- $y = f(x) + q$ dla $q > 0$ oraz
- $y = f(x) - q$ dla $q > 0$.

Ćwiczenie 1

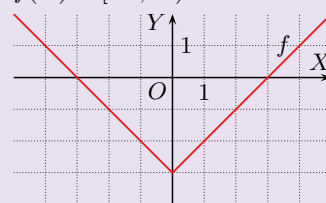
- a) $f(D) = [2; \infty)$



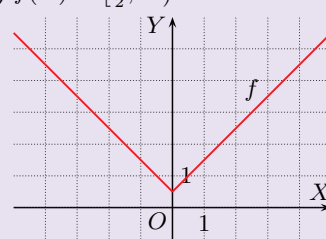
- b) $f(D) = [-2; \infty)$



- c) $f(D) = [-3; \infty)$



- d) $f(D) = [\frac{1}{2}; \infty)$



Multibook

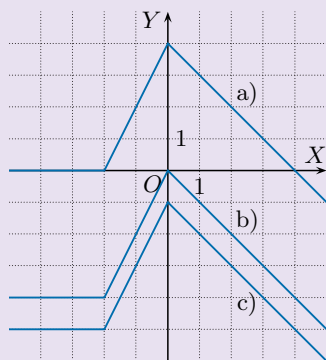
- Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi OY

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.7

Generator
testów i sprawdzianów

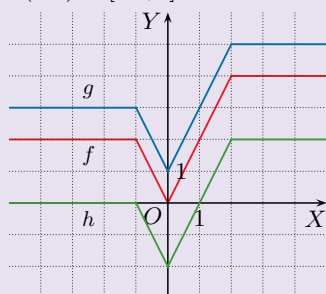
Odpowiedzi do zadań

1.

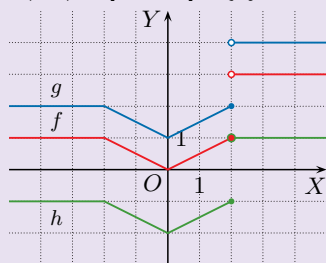


- a) $g(D) = (-\infty; 4]$
 b) $g(D) = (-\infty; 0]$
 c) $g(D) = (-\infty; -1]$

2. a) $f(D_f) = [0; 4]$,
 $g(D_g) = [1; 5]$,
 $h(D_h) = [-2; 2]$



- b) $f(D_f) = [0; 1] \cup \{3\}$,
 $g(D_g) = [1; 2] \cup \{4\}$,
 $h(D_h) = [-2; -1] \cup \{1\}$

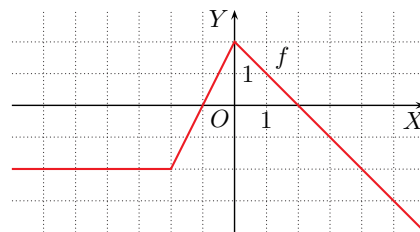


3. a) $a = 1$ b) $a = -4$
 4. a) $a = 5$ b) $a = -4$
 5. $g(x) = x^2 + 1$, $h(x) = x^2 - 4$

Zadania

1. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$.
 Naskicuj wykres funkcji g i podaj jej zbiór wartości.

- a) $g(x) = f(x) + 2$
 b) $g(x) = f(x) - 2$
 c) $g(x) = f(x) - 3$



2. Naskicuj wykres funkcji f , a następnie wykresy funkcji $g(x) = f(x) + 1$ oraz $h(x) = f(x) - 2$. Podaj zbiory wartości funkcji f , g i h .

$$a) f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ |2x| & \text{dla } x \in [-1; 2] \\ 4 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |\frac{1}{2}x| & \text{dla } x \in [-2; 2] \\ 3 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$$

3. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = |x|$, a następnie naskicuj wykres funkcji $g(x) = |x| + a$ oraz podaj wartość parametru a w przypadku, gdy:

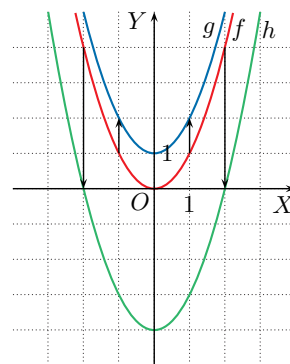
- a) zbiorem wartości funkcji g jest przedział $[1; \infty)$,
 b) miejscami zerowymi funkcji g są liczby -4 i 4 .

4. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x \in [-3; 3] \\ 3 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \cup [3; \infty) \end{cases}$

Naskicuj wykresy funkcji f oraz funkcji $g(x) = f(x) + a$ takiej, że podane równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie.

- a) $g(x) = 5$ b) $g(x) = -4$

5. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = x^2$ oraz wykresy funkcji g i h . Podaj wzory funkcji g i h .



6. Naskicuj wykres funkcji $y = x^2$, a następnie wykres funkcji f . Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ dla $m \in \{-3, -1, 2\}$.

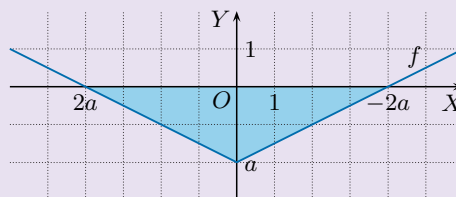
- a) $f(x) = x^2 + 2$ c) $f(x) = x^2 - 3$
 b) $f(x) = x^2 - 1$ d) $f(x) = x^2 - 9$

7. Dla jakiej wartości współczynnika a wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{2}|x| + a$ wraz z osią OX ograniczają trójkąt o polu równym: a) 8, b) 98?

6. a) 0 dla $m \in \{-3, -1\}$, 1 dla $m = 2$
 b) 0 dla $m = -3$, 1 dla $m = -1$, 2 dla $m = 2$
 c) 1 dla $m = -3$, 2 dla $m \in \{-1, 2\}$
 d) 2 dla $m \in \{-3, -1, 2\}$

7. $\frac{1}{2}|x| + a = 0$
 $|x| = -2a$
 $x = -2a$ lub $x = 2a$
 Zatem $P = 2a^2$ i $a < 0$.

- a) $a = -2$
 b) $a = -7$



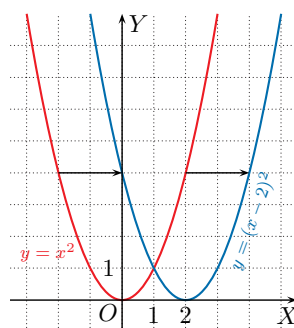
4.8. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OX

Przykład 1

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $y = x^2$ oraz $y = (x - 2)^2$ naszkicowane na podstawie odpowiednich tabel wartości funkcji.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (x - 2)^2$	9	4	1	0	1	4	9

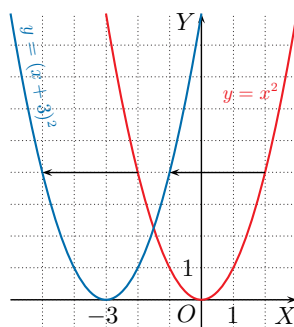


Zauważmy, że wykres funkcji $y = (x - 2)^2$ możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi OX.

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $y = x^2$ oraz $y = (x + 3)^2$ naszkicowane na podstawie odpowiednich tabel wartości funkcji.

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$y = (x + 3)^2$	9	4	1	0	1	4	9



Zauważmy, że wykres funkcji $y = (x + 3)^2$ możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ o 3 jednostki w lewo wzdłuż osi OX.

Twierdzenie

Wykres funkcji $y = f(x - p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek w prawo wzdłuż osi OX.

Wykres funkcji $y = f(x + p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek w lewo wzdłuż osi OX.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji g , stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = |x|$. Podaj miejsce zerowe funkcji g .

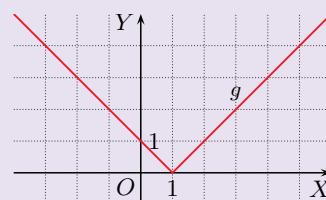
- a) $g(x) = |x - 1|$ c) $g(x) = |x + 3|$
 b) $g(x) = |x + 2|$ d) $g(x) = |x - 4|$

Uczeń:

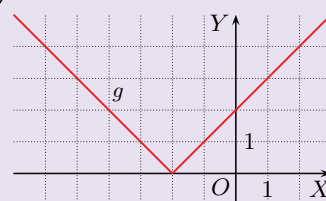
- rysuje wykresy funkcji:
 $y = f(x - p)$ dla $p > 0$ oraz
 $y = f(x + p)$ dla $p > 0$.

Ćwiczenie 1

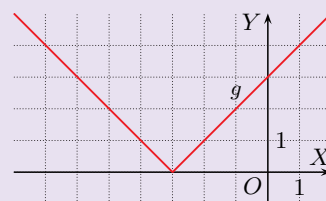
a) $x = 1$



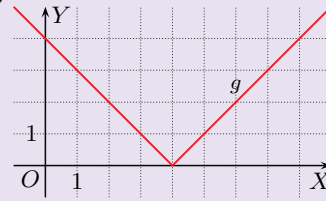
b) $x = -2$



c) $x = -3$



d) $x = 4$



Multibook

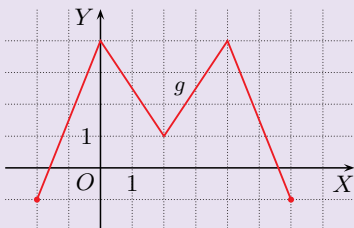
- Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi OX

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.8

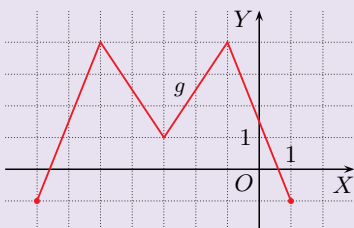
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

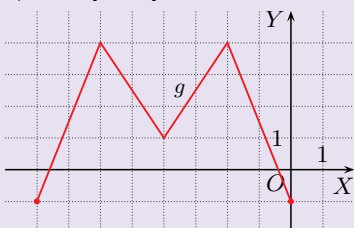
a) $D = [-2; 6]$



b) $D = [-7; 1]$

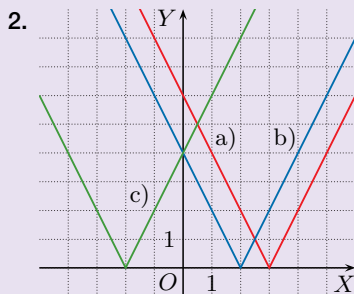


c) $D = [-8; 0]$



Odpowiedzi do zadań

1. a) $g(1) = 0$
b) $g(-1) = 0$
c) $g(-2) = 0$



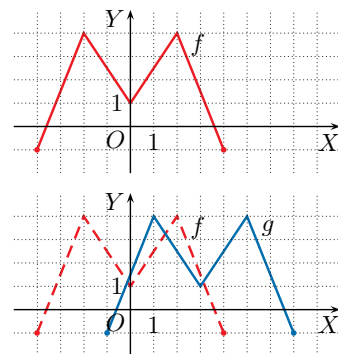
3. a) $[-2; 5]$ b) $[-1; 6]$
c) $[-5; 2]$ d) $[-6; 1]$

Przykład 3

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: [-4; 4] \rightarrow \mathbb{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x - 3)$ i podaj jej dziedzinę.

Wykres funkcji $g(x) = f(x - 3)$ otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $y = f(x)$ o 3 jednostki w prawo.

Dziedziną funkcji g jest przedział $[-1; 7]$.



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji g , stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji f z przykładu 3. Podaj dziedzinę funkcji g .

- a) $g(x) = f(x - 2)$ b) $g(x) = f(x + 3)$ c) $g(x) = f(x + 4)$

Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = x^2$, a następnie stosując odpowiednie przesunięcie, naszkicuj wykres funkcji g . Podaj jej miejsca zerowe.

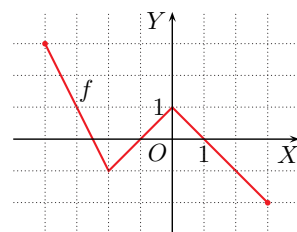
- a) $g(x) = (x - 1)^2$ b) $g(x) = (x + 1)^2$ c) $g(x) = (x + 2)^2$

2. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |2x|$, a następnie stosując odpowiednie przesunięcie, naszkicuj wykres funkcji g .

- a) $g(x) = |2(x - 3)|$ b) $g(x) = |2(x - 2)|$ c) $g(x) = |2(x + 2)|$

3. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: [-4; 3] \rightarrow \mathbb{R}$. Naszkicuj wykres funkcji g i podaj jej dziedzinę.

- a) $g(x) = f(x - 2)$ c) $g(x) = f(x + 1)$
b) $g(x) = f(x - 3)$ d) $g(x) = f(x + 2)$



4. Miejscami zerowymi funkcji $f(x) = x^3 - 4x$ są liczby $-2, 0, 2$. Podaj miejsca zerowe funkcji g .

- a) $g(x) = (x - 3)^3 - 4(x - 3)$ b) $g(x) = (x + 5)^3 - 4(x + 5)$

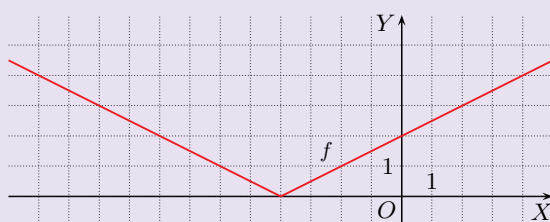
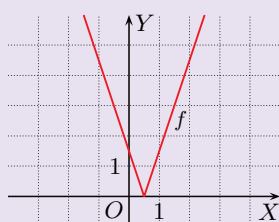
5. Dla jakiej wartości współczynnika a liczba x_0 jest miejscem zerowym funkcji f ? Naszkicuj wykres funkcji f .

- a) $f(x) = |3x + a|$, $x_0 = \frac{1}{2}$ b) $f(x) = |\frac{1}{2}x + a|$, $x_0 = -4$

4. Aby otrzymać wykres funkcji g , przesuwamy wykres funkcji f :

- a) o 3 jednostki w prawo, zatem miejscami zerowymi funkcji g są liczby: 1, 3, 5.
b) o 5 jednostek w lewo, zatem miejscami zerowymi funkcji g są liczby: $-7, -5, -3$.

5. a) $f(\frac{1}{2}) = 0$, skąd: $a = -\frac{3}{2}$, $f(x) = |3x - \frac{3}{2}| = 3|x - \frac{1}{2}|$. b) $f(-4) = 0$, czyli $|\frac{1}{2} \cdot (-4) + a| = 0$ i stąd $a = 2$, $f(x) = |\frac{1}{2}x + 2| = \frac{1}{2}|x + 4|$.

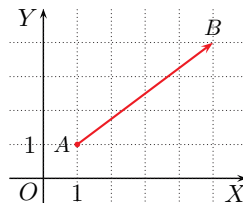


4.9. Wektory w układzie współrzędnych

Intuicyjnie **wektor** to odcinek z wyróżnionym **początkiem** i **końcem**, często rysowany jako strzałka. Wektor o początku A i końcu B oznaczamy $\overrightarrow{AB}$.

Wektor $\overrightarrow{AB}$ (rysunek obok) możemy określić, podając współrzędne początku wektora $A(1,1)$ i współrzędne jego końca $B(5,4)$.

Punkt A będący początkiem wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywamy też **punktem zaczepienia** wektora, a o wektorze $\overrightarrow{AB}$ mówimy, że jest zaczepiony w punkcie A .



Ćwiczenie 1

Narysuj wektor $\overrightarrow{AB}$.

- a) $A(-3, 2)$, $B(4, -1)$ b) $A(2, 2)$, $B(-1, 5)$ c) $A(6, 3)$, $B(6, -1)$

Definicja

Dane są punkty $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$. Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ określamy wzorem:

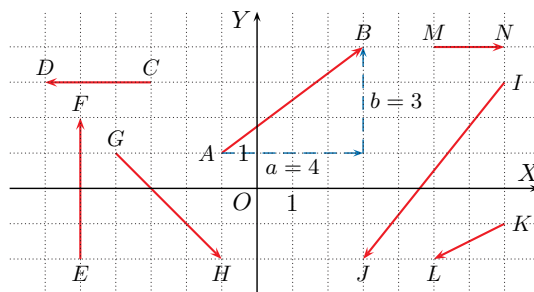
$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Przykład 1

Na rysunku obok:

$$\overrightarrow{AB} = [4, 3], \quad \overrightarrow{CD} = [-3, 0],$$

$$\overrightarrow{EF} = [0, 4], \quad \overrightarrow{KL} = [-2, -1].$$



Ćwiczenie 2

Zapisz współrzędne wektorów $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{MN}$ przedstawionych na rysunku obok.

Ćwiczenie 3

Zaznacz w układzie współrzędnych punkty $A(-2, 3)$, $B(3, 4)$, $C(6, 3)$, $D(3, 1)$, $E(-2, -2)$. Podaj współrzędne wektorów:

- a) $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{BE}$, b) $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AE}$, c) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$, d) $\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{DA}$.

Wektor $\overrightarrow{BA}$ nazywamy **wektorem przeciwnym** do wektora $\overrightarrow{AB}$.

Ćwiczenie 4

Podaj współrzędne wektora przeciwnego do wektora $\overrightarrow{AB}$.

- a) $A(2, 1)$, $B(3, 7)$ b) $A(5\frac{1}{4}, -2)$, $B(-3\frac{1}{2}, 6\frac{2}{3})$

Ćwiczenie 4

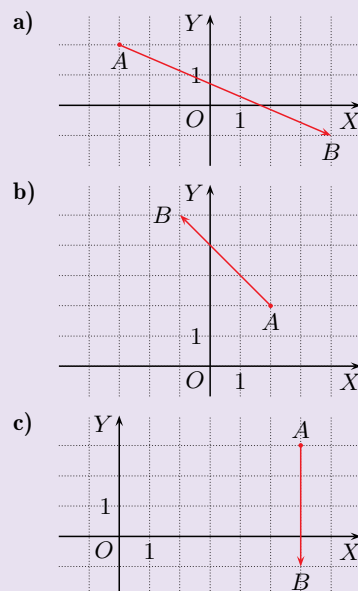
- a) $\overrightarrow{AB} = [1, 6]$, wektor przeciwny $\overrightarrow{BA} = [-1, -6]$

- b) $\overrightarrow{AB} = [-8\frac{3}{4}, 8\frac{2}{3}]$, wektor przeciwny $\overrightarrow{BA} = [8\frac{3}{4}, -8\frac{2}{3}]$

Uczeń:

- posługuje się pojęciem wektora i wektora przeciwnego,
- oblicza współrzędne wektora,
- wyznacza współrzędne początku lub końca wektora, mając dane współrzędne wektora i współrzędne jednego z punktów,
- znajduje obraz figury w przesunięciu o dany wektor.

Ćwiczenie 1

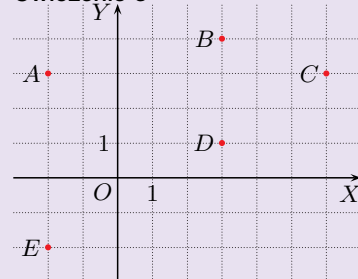


Ćwiczenie 2

$$\overrightarrow{GH} = [3, -3], \quad \overrightarrow{IJ} = [-4, -5],$$

$$\overrightarrow{MN} = [2, 0]$$

Ćwiczenie 3



- a) $\overrightarrow{BC} = [3, -1]$, $\overrightarrow{BE} = [-5, -6]$

- b) $\overrightarrow{AC} = [8, 0]$, $\overrightarrow{AE} = [0, -5]$

- c) $\overrightarrow{AB} = [5, 1]$, $\overrightarrow{BA} = [-5, -1]$

- d) $\overrightarrow{BD} = [0, -3]$, $\overrightarrow{DA} = [-5, 2]$

Multibook

- Wektor – podstawowe własności

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.9

Generator
testów i sprawdzianów

Zauważ, że jeśli wektor $\overrightarrow{AB}$ ma współrzędne $[a, b]$, to wektor $\overrightarrow{BA}$ ma współrzędne $[-a, -b]$. Zapisujemy to: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

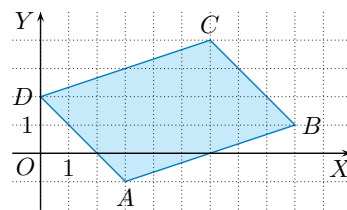
Ćwiczenie 5

- a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = [6, 2]$,
 $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} = [-6, -2]$
b) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = [-3, 3]$,
 $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} = [3, -3]$

Ćwiczenie 5

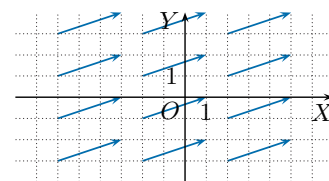
Dany jest równoległobok $ABCD$ (rysunek obok). Podaj współrzędne wektorów:

- a) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CD}$,
b) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$.



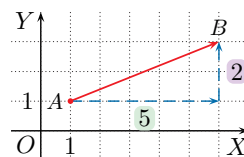
Aby określić **wektor zaczepiony**, podajemy współrzędne jego początku i końca. Rozważamy również **wektor swobodny**, dla którego podajemy wyłącznie jego współrzędne $[a, b]$. Wektory swobodne oznaczamy zwykle $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Uwaga. Tam, gdzie nie prowadzi to do nieporozumień, zamiast „wektor swobodny” czy „wektor zaczepiony” mówimy po prostu „wektor”.



Wszystkie wektory na rysunku reprezentują wektor swobodny $\vec{u} = [3, 1]$.

Wektory są wygodnym sposobem opisu przesunięcia w układzie współrzędnych. Zauważmy, że przesunięcie o wektor $\overrightarrow{AB}$ (rysunek obok) oznacza przesunięcie o 5 jednostek w prawo i o 2 jednostki w górę. Zapisujemy to następująco: $\overrightarrow{AB} = [5, 2]$.



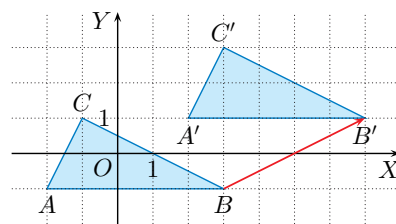
Twierdzenie

W przesunięciu o wektor $[a, b]$:

- współrzędna a określa, o ile jednostek nastąpiło przesunięcie w poziomie (wzdłuż osi OX) **w prawo**, jeśli $a > 0$, lub **w lewo**, jeśli $a < 0$;
- współrzędna b określa, o ile jednostek nastąpiło przesunięcie w pionie (wzdłuż osi OY) **w górę**, jeśli $b > 0$, lub **w dół**, jeśli $b < 0$.

Przykład 2

Trójkąt $A'B'C'$ (rysunek obok) otrzymano przez przesunięcie trójkąta ABC o wektor $\vec{v} = [4, 2]$. Zauważ, że jeśli znamy współrzędne punktów A , B , C i wektor $\vec{v}$, to możemy wyznaczyć współrzędne punktów A' , B' , C' .

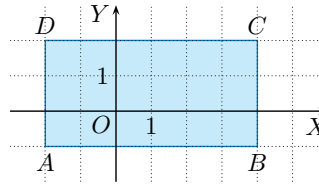


Figurę F' otrzymaną w wyniku przesunięcia figury F o wektor $\vec{v}$ nazywamy **obrazem** figury F w przesunięciu o wektor $\vec{v}$.

Ćwiczenie 6

Prostokąt $ABCD$ (rysunek obok) przesunięto o wektor $\vec{v}$ i otrzymano prostokąt $A'B'C'D'$. Oblicz pole części wspólnej tych prostokątów.

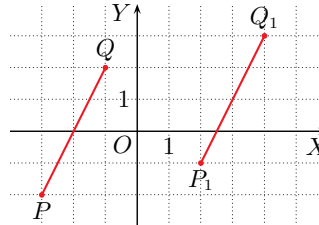
- a) $\vec{v} = [-3, 2]$ b) $\vec{v} = [4\frac{1}{2}, -1]$



Zadania

- Wyznacz współrzędne punktu B , mając dane punkt A i wektor $\vec{AB}$.
 - $A(-3, 5)$, $\vec{AB} = [9, 0]$
 - $A(2, 2)$, $\vec{AB} = [-5, -2]$
 - $A(\frac{5}{2}, 2)$, $\vec{AB} = [3, -\frac{3}{2}]$
 - $A(4, -1)$, $\vec{AB} = [-5\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- Wyznacz współrzędne punktu A , mając dane punkt B i wektor $\vec{AB}$.
 - $B(0, 4)$, $\vec{AB} = [3, 4]$
 - $B(-2, 3)$, $\vec{AB} = [-3, 2]$
 - $B(-1, 2)$, $\vec{AB} = [14, -15]$
 - $B(1, 4)$, $\vec{AB} = [-22, -28]$
- Sprawdź, czy podana para liczb to współrzędne wektora przeciwnego do wektora $\vec{AB}$ lub wektora $\vec{CD}$.
 - $[7\frac{1}{2}, 6]$, $A(8, 4)$, $B(\frac{1}{2}, -2)$, $C(3\frac{1}{2}, -2\frac{1}{4})$, $D(-4, 3\frac{3}{4})$
 - $[-3, 2\frac{1}{6}]$, $A(-2\frac{1}{6}, 2\frac{1}{2})$, $B(\frac{5}{6}, -\frac{1}{3})$, $C(\sqrt{3}, 2\frac{1}{6})$, $D(\frac{6}{3-\sqrt{3}}, 0)$

- O jaki wektor należy przesunąć odcinek PQ , aby otrzymać odcinek P_1Q_1 ?
 - Narysuj obraz odcinka PQ w przesunięciu o wektor $[2, -2]$.
 - Narysuj obraz odcinka PQ w przesunięciu o wektor $[-2, 1]$.



- Trójkąt $A_1B_1C_1$ otrzymujemy, przesuwając trójkąt ABC o wektor $\vec{v}$. Oblicz pole części wspólnej tych trójkątów.
 - $A(-5, -3)$, $B(4, -3)$, $C(1, 3)$, $\vec{v} = [-2, 1]$
 - $A(-4, -3)$, $B(5, 3)$, $C(-1, 6)$, $\vec{v} = [-5, -1]$

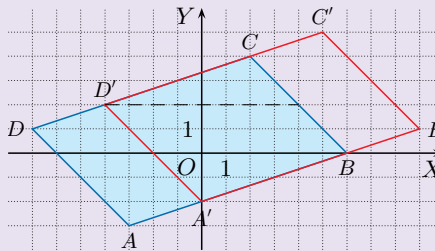
- Dane są współrzędne jednego z wierzchołków równoległoboku $ABCD$: $C(2, 4)$. Wiadomo, że $\vec{BC} = [-4, 4]$, $\vec{DC} = [9, 3]$. Wyznacz współrzędne wierzchołków A , B i D . Oblicz pole części wspólnej równoległoboku $ABCD$ i jego obrazu w przesunięciu o wektor $\vec{v} = [3, 1]$.

- $\vec{BC} = [-4, 4]$ oraz $C(2, 4)$, zatem punkt B ma współrzędne $(2+4, 4-4) = (6, 0)$. $\vec{DC} = [9, 3]$ oraz $C(2, 4)$, zatem punkt D ma współrzędne $(2-9, 4-3) = (-7, 1)$. $\vec{AD} = \vec{BC} = [-4, 4]$, zatem punkt A ma współrzędne $(-7+4, 1-4) = (-3, -3)$. Częścią wspólną obu równoległoboków jest równoległobok $A'BCD'$.

Równoległobok ten możemy podzielić na dwa trójkąty o podstawie 8 i wysokości 2 oraz równoległobok o podstawie 8 i wysokości 2. Zatem jego pole:

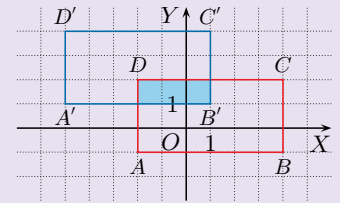
$$P = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 + 8 \cdot 2 = 32$$

Uwaga. Pole to można też obliczyć ze wzoru Picka (s. 69): $P = 27 + \frac{1}{2} \cdot 12 - 1 = 32$

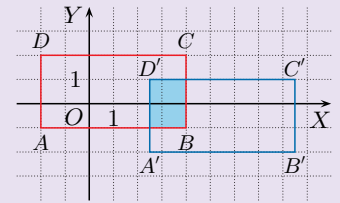


Ćwiczenie 6

- a) $P = 3$

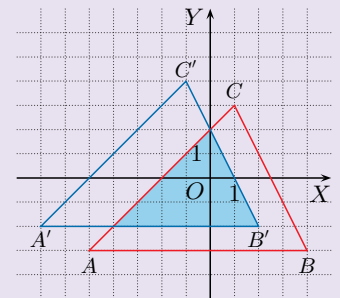


- b) $P = 3$

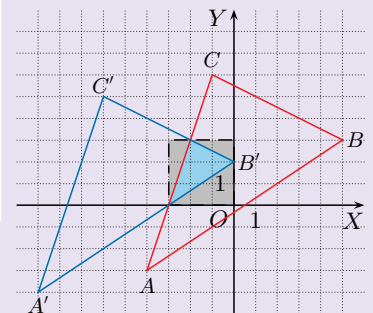


Odpowiedzi do zadań

- $B(6, 5)$
 - $B(-3, 0)$
 - $B(5\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
 - $B(-1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
- $A(-3, 0)$
 - $A(1, 1)$
 - $A(-15, 17)$
 - $A(23, 32)$
- do $\vec{AB}$
 - do $\vec{CD}$
- $[5, 1]$
- $P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$



$$\text{b) } P = 3 \cdot 3 - \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3\right) = 3\frac{1}{2}$$



Uczeń:

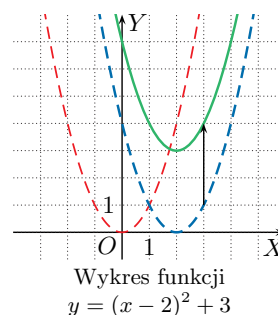
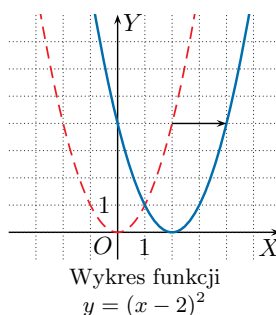
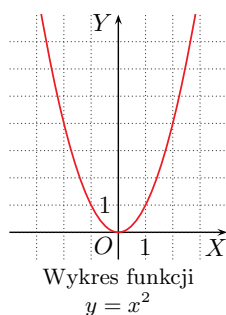
- szkicuje wykres funkcji $y = f(x - p) + q$,
- zapisuje wzór funkcji otrzymanej w wyniku danego przesunięcia.

4.10. Przesuwanie wykresu o wektor

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $y = (x - 2)^2 + 3$.

Wykres funkcji $y = x^2$ przesuwamy najpierw o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi OX , a następnie otrzymany wykres przesuwamy o 3 jednostki w górę wzdłuż osi OY .

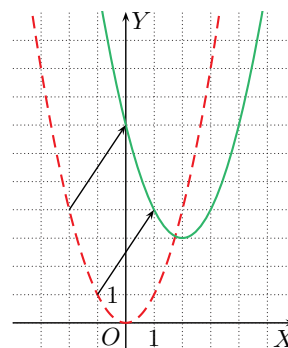


Zauważ, że wykres funkcji $y = (x - 2)^2 + 3$ możemy otrzymać, przesuwając wykres funkcji $y = x^2$ jednocześnie o 2 jednostki w prawo i o 3 jednostki w górę (rysunek obok). Mówimy, że wykres funkcji został przesunięty o wektor $[2, 3]$ – wektor ten nazywamy **wektorem przesunięcia**.

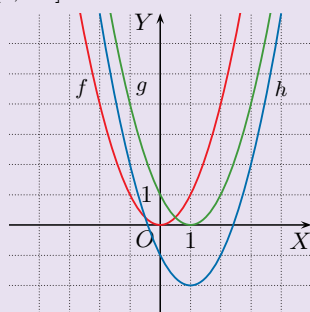
Ćwiczenie 1

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = x^2$ oraz g i h . O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji h ?

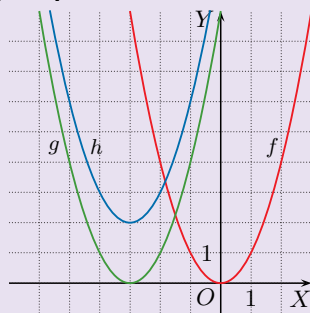
- a) $g(x) = (x - 1)^2$, $h(x) = (x - 1)^2 - 2$ b) $g(x) = (x + 3)^2$, $h(x) = (x + 3)^2 + 2$

**Ćwiczenie 1**

- a) $[1, -2]$



- b) $[-3, 2]$

**Twierdzenie**

Wykres funkcji $y = f(x - p) + q$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $[p, q]$.

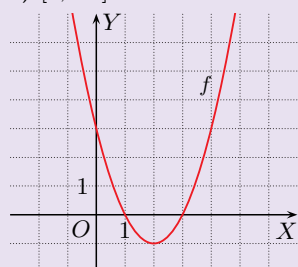
Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f , przesuwając wykres funkcji $y = x^2$ o odpowiedni wektor. Podaj ten wektor.

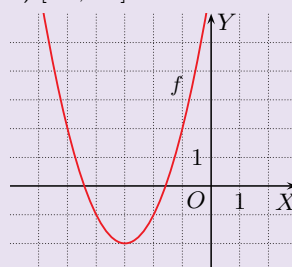
- a) $f(x) = (x - 2)^2 - 1$ b) $f(x) = (x + 3)^2 - 2$ c) $f(x) = (x + 1)^2 + 1$

Ćwiczenie 2

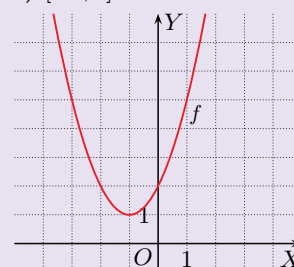
- a) $[2, -1]$



- b) $[-3, -2]$

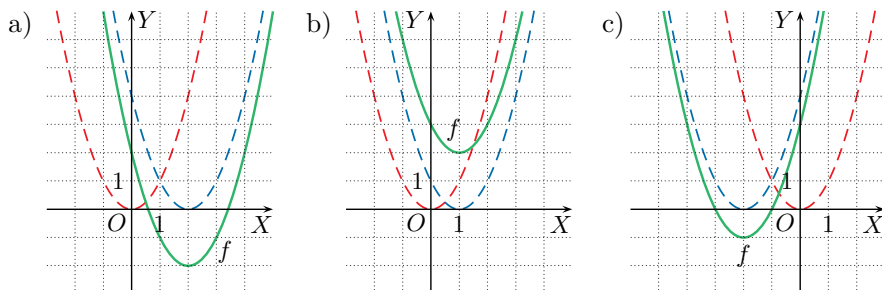


- c) $[-1, 1]$



Zadania

1. Wykres funkcji f otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$. Podaj wzór funkcji f oraz wektor przesunięcia.

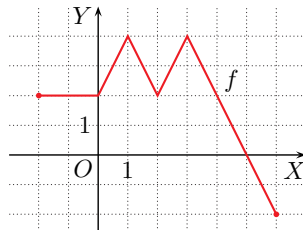


2. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj jej miejsca zerowe i zbiór wartości.

a) $f(x) = |x + 2| + 3$ b) $f(x) = |x - 2| - 3$ c) $f(x) = |x + 1| - 2$

3. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji f i g .

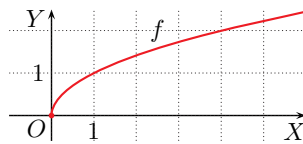
a) $f(x) = |2x| - 2$, $g(x) = |x - 1| + 1$
 b) $f(x) = |2x + 2| + 1$, $g(x) = |x - 2| + 1$



4. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: [-2; 6] \rightarrow \mathbb{R}$. Naskicuj wykres funkcji g , odczytaj jej dziedzinę i zbiór wartości. Podaj zbiór rozwiązań nierówności $g(x) \leq 0$.

a) $g(x) = f(x + 2) - 2$ b) $g(x) = f(x - 1) + 2$ c) $g(x) = f(x - 2) - 4$

5. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = \sqrt{x}$. Naskicuj wykres funkcji g . Podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.



a) $g(x) = \sqrt{x - 1} + 3$ b) $g(x) = \sqrt{x + 4} - 2$ c) $g(x) = \sqrt{x + 1} - 1$

6. Dziedziną funkcji f jest przedział $[-7; -1]$, a zbiorem wartości przedział $[5; 8]$. Wykres funkcji g powstał przez przesunięcie wykresu funkcji f o wektor $\vec{v}$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji g .

a) $\vec{v} = [2, 3]$ b) $\vec{v} = [-3, -5]$ c) $\vec{v} = [-6\frac{1}{3}, 13\frac{2}{3}]$

7. Wykres funkcji g otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji f danej wzorem $f(x) = |x + 2| - 3$. Wyznacz wektor przesunięcia.

a) $g(x) = |x - 3|$ b) $g(x) = |x| + 1$ c) $g(x) = |x + 3| - 4$

4. a) $D_g = [-4; 4]$, $g(D_g) = [-4; 2]$, $g(x) \leq 0$ dla $x \in [-4; -2] \cup \{0\} \cup [2; 4]$

b) $D_g = [-1; 7]$, $g(D_g) = [0; 6]$, $g(x) \leq 0$ dla $x = 7$

c) $D_g = [0; 8]$, $g(D_g) = [-6; 0]$, $g(x) \leq 0$ dla $x \in [0; 8]$

5. a) $D_g = [1; \infty)$, $g(D_g) = [3; \infty)$

b) $D_g = [-4; \infty)$, $g(D_g) = [-2; \infty)$

c) $D_g = [-1; \infty)$, $g(D_g) = [-1; \infty)$

6. a) $D_g = [-5; 1]$, $g(D_g) = [8; 11]$

b) $D_g = [-10; -4]$, $g(D_g) = [0; 3]$

c) $D_g = [-13\frac{1}{3}; -7\frac{1}{3}]$, $g(D_g) = [18\frac{2}{3}; 21\frac{2}{3}]$

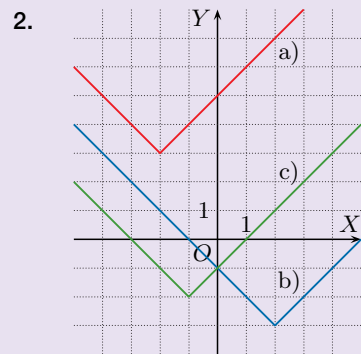
7. a) $g(x) = f(x - 5) + 3$, zatem wektor przesunięcia: $[5, 3]$

b) $g(x) = f(x - 2) + 4$, zatem wektor przesunięcia: $[2, 4]$

c) $g(x) = f(x + 1) - 1$, zatem wektor przesunięcia: $[-1, -1]$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $f(x) = (x - 2)^2 - 2$, $[2, -2]$
 b) $f(x) = (x - 1)^2 + 2$, $[1, 2]$
 c) $f(x) = (x + 2)^2 - 1$, $[-2, -1]$



a) brak miejsc zerowych,
 $f(D) = [3; \infty)$

b) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-1, 5\}$,
 $f(D) = [-3; \infty)$

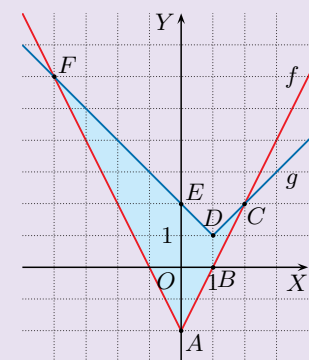
c) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, 1\}$,
 $f(D) = [-2; \infty)$

3. a) Pole trójkąta AEF:
 $P_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$

Pole trapezu ABDE:
 $P_2 = \frac{1}{2}(1 + 4) \cdot 1 = 2,5$

Pole trójkąta BCD:
 $P_3 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0,5$

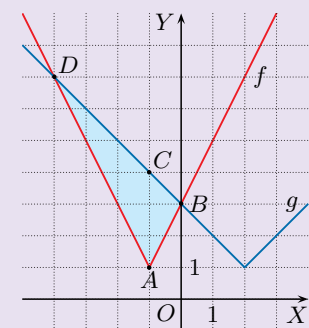
$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 11$$



- b) Pole trójkąta ABC:
 $P_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = 1,5$

Pole trójkąta ACD:
 $P_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4,5$

$$P = P_1 + P_2 = 6$$

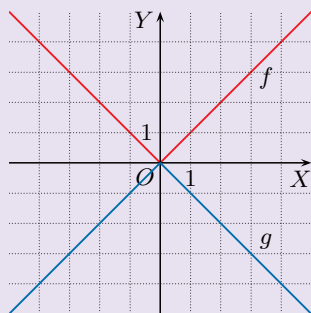


Uczeń:

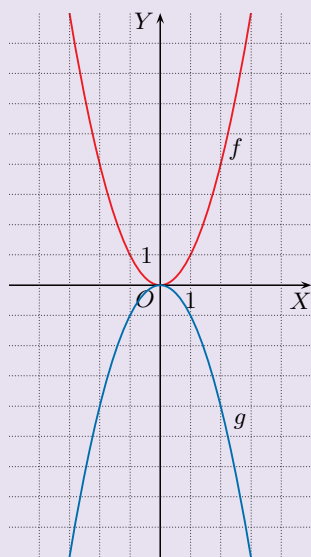
- szkicuje wykres funkcji $y = -f(x)$ na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$,
- szkicuje wykres funkcji $y = f(-x)$ na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$.

Ćwiczenie 2

- a) $f(D) = [0; \infty)$,
 $g(D) = (-\infty; 0]$



- b) $f(D) = [0; \infty)$,
 $g(D) = (-\infty; 0]$



4.11. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi układu współrzędnych

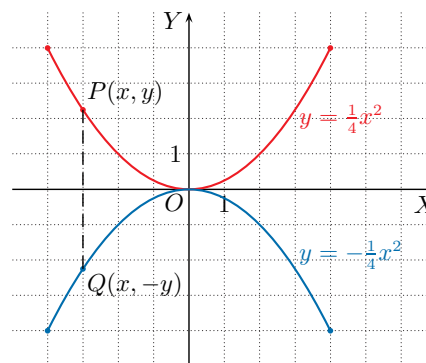
Przykład 1

Naszkicuj wykresy funkcji $y = \frac{1}{4}x^2$ i $y = -\frac{1}{4}x^2$ określonych dla $x \in [-4; 4]$.

W tabeli obok podano wartości tych funkcji dla wybranych argumentów.

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$y = \frac{1}{4}x^2$	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4
$y = -\frac{1}{4}x^2$	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4

Dla porównania wykresy tych funkcji narysowano w jednym układzie współrzędnych. Zauważmy, że wykresy funkcji $y = \frac{1}{4}x^2$ i $y = -\frac{1}{4}x^2$ są symetryczne względem osi OX – punktowi $P(x, y)$, należącemu do wykresu funkcji $y = \frac{1}{4}x^2$, odpowiada punkt $Q(x, -y)$, należący do wykresu funkcji $y = -\frac{1}{4}x^2$.



Twierdzenie

Wykres funkcji $y = -f(x)$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX .

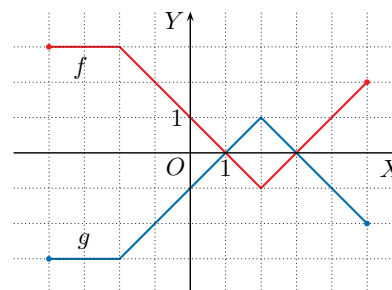
Ćwiczenie 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f oraz wykres funkcji:

$$g(x) = -f(x)$$

Dla każdej z tych funkcji podaj:

- a) jej dziedzinę i zbiór wartości,
 b) przedziały, w których jest ona rosnąca.



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykresy funkcji f i g oraz podaj ich zbiory wartości.

- a) $f(x) = |x|$ i $g(x) = -|x|$ b) $f(x) = x^2$ i $g(x) = -x^2$

Ćwiczenie 1

- a) $D_f = D_g = [-4; 5]$,

$$f(D_f) = [-1; 3],$$

$$g(D_g) = [-3; 1]$$

- b) f rośnie w $[2; 5]$,

$$g \text{ rośnie w } [-2; 2]$$

Multibook

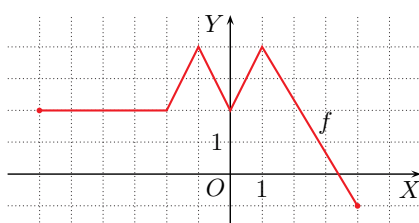
- Przekształcanie wykresu funkcji przez symetrię względem osi OX
- Przekształcanie wykresu funkcji przez symetrię względem osi OY
- Przekształcania wykresów funkcji

dla nauczyciel.pl | Kartkówka 4.11

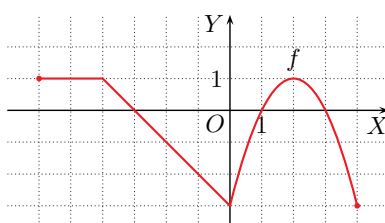
Ćwiczenie 3

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji $f: [-6; 4] \rightarrow \mathbb{R}$. Naskicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj zbiory wartości funkcji f i g .

a)

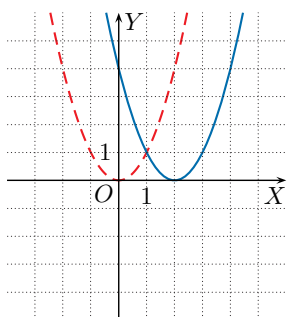


b)



Przykład 2

Naskicuj wykres funkcji $f(x) = x^2$, a następnie kolejno wykresy funkcji: $g(x) = f(x-2)$, $h(x) = f(x-2) - 4$, $k(x) = -[f(x-2) - 4]$.

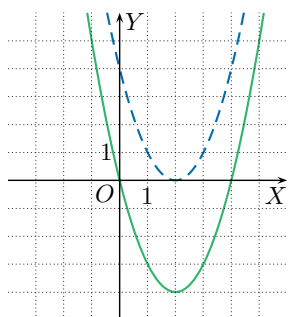


Linia przerywaną zaznaczono wykres funkcji:

$$f(x) = x^2$$

linia ciągłą – wykres funkcji:

$$g(x) = (x-2)^2$$

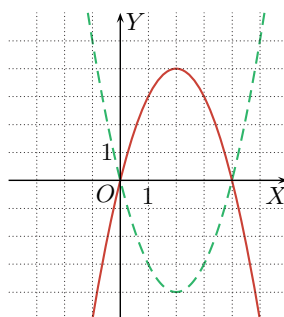


Linia przerywaną zaznaczono wykres funkcji:

$$g(x) = (x-2)^2$$

linia ciągłą – wykres funkcji:

$$h(x) = (x-2)^2 - 4$$



Linia przerywaną zaznaczono wykres funkcji:

$$h(x) = (x-2)^2 - 4$$

linia ciągłą – wykres funkcji:

$$k(x) = -[(x-2)^2 - 4]$$

Ćwiczenie 4

Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ 2 & \text{dla } x \in [2; \infty) \end{cases}$, a następnie kolejno wykresy podanych funkcji.

a) $g(x) = f(x) - 3$, $h(x) = f(x-2) - 3$, $k(x) = -[f(x-2) - 3]$

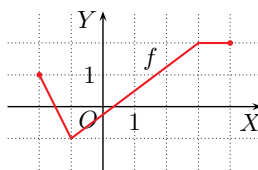
b) $g(x) = f(x+3)$, $h(x) = f(x+3) + 1$, $k(x) = -[f(x+3) + 1]$

Ćwiczenie 5

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f . Naskicuj wykres funkcji g .

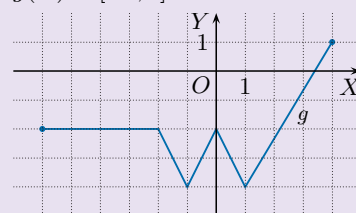
a) $g(x) = -f(x-1)$

b) $g(x) = -f(x+2)$

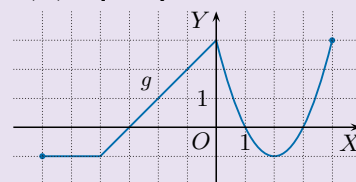


Ćwiczenie 3

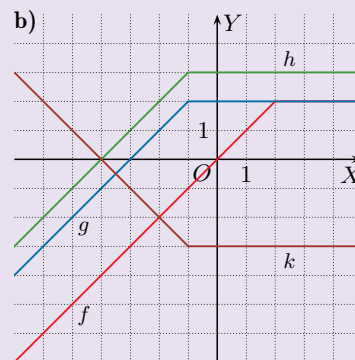
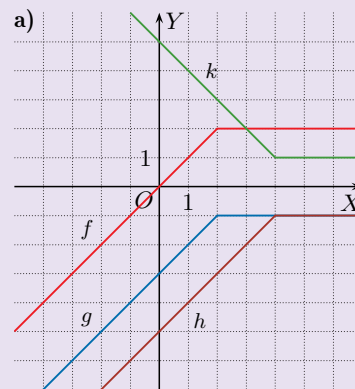
a) $f(D) = [-1; 4]$,
 $g(D) = [-4; 1]$



b) $f(D) = [-3; 1]$,
 $g(D) = [-1; 3]$

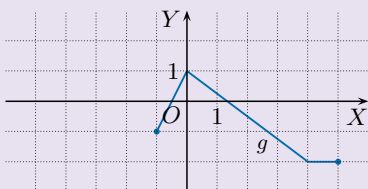


Ćwiczenie 4

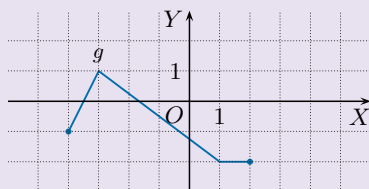


Ćwiczenie 5

a)



b)



Przykład 3

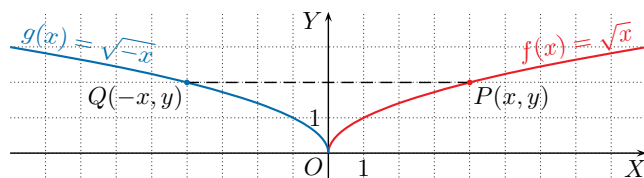
Naszkicuj wykres funkcji $f: [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ danej za pomocą wzoru $f(x) = \sqrt{x}$ oraz wykres funkcji $g: (-\infty; 0] \rightarrow \mathbb{R}$ danej za pomocą wzoru $g(x) = \sqrt{-x}$.

Zauważmy, że:

$$g(-4) = f(4) = 2$$

$$g(-1) = f(1) = 1$$

$$g(-\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$$



Wykresy funkcji f i g są symetryczne względem osi OY – punktowi $P(x, y)$, należącemu do wykresu funkcji f , odpowiada punkt $Q(-x, y)$, należący do wykresu funkcji g .

Twierdzenie

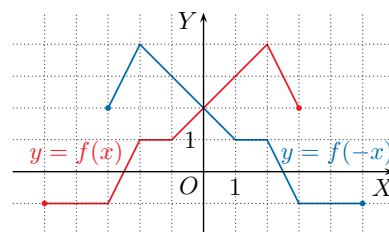
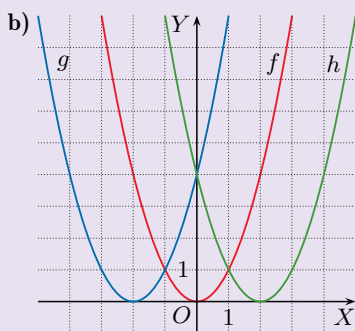
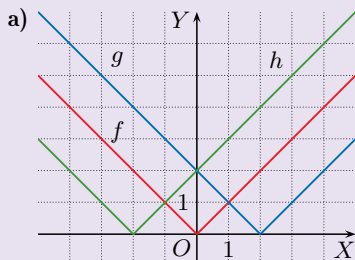
Wykres funkcji $y = f(-x)$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OY .

Przykład 4

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $y = f(x)$ oraz $y = f(-x)$.

Zwróć uwagę na to, że dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest przedział $[-5; 3]$, a dziedziną funkcji $y = f(-x)$ jest przedział $[-3; 5]$.

Funkcje $y = f(x)$ i $y = f(-x)$ mają ten sam zbiór wartości.

**Ćwiczenie 6****Ćwiczenie 6**

Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie kolejno wykresy funkcji g i h .

a) $f(x) = |x|$, $g(x) = f(x - 2)$, $h(x) = f(-x - 2)$

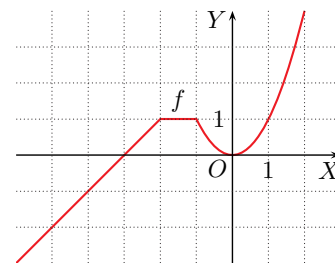
b) $f(x) = x^2$, $g(x) = f(x + 2)$, $h(x) = f(-x + 2)$

Ćwiczenie 7

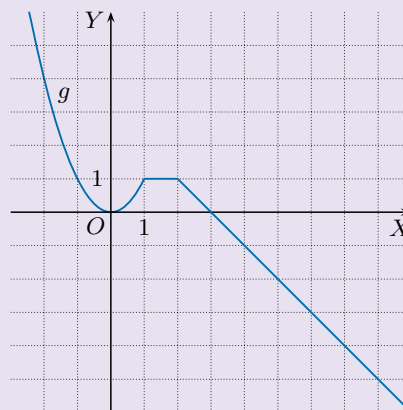
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ 1 & \text{dla } x \in [-2; -1] \\ x^2 & \text{dla } x \in (-1; \infty) \end{cases}$$

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$ i podaj jej wzór.

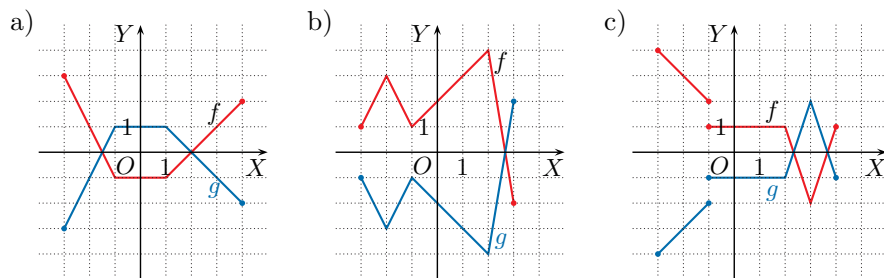
**Ćwiczenie 7**

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ 1 & \text{dla } x \in [1; 2] \\ -x + 3 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$$



Zadania

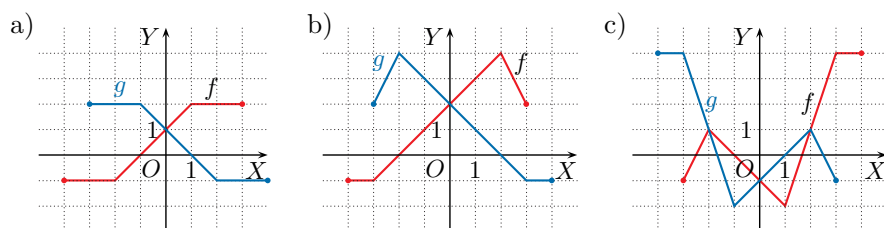
1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$ oraz podaj zbiory wartości funkcji f i g .



2. Naszkicuj wykresy funkcji f i $g(x) = -f(x)$. Podaj punkty wspólne tych wykresów.

a) $f(x) = |x| - 1$ c) $f(x) = |x - 2|$ e) $f(x) = \left|\frac{1}{2}x\right| - 2$
 b) $f(x) = |x| + 2$ d) $f(x) = |x + 2|$ f) $f(x) = |2x| + 1$

3. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji f . Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$ oraz podaj dziedziny funkcji f i g .

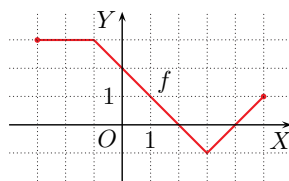


4. Naszkicuj wykresy funkcji f oraz funkcji $g(x) = -f(x)$ i $h(x) = -f(-x)$. Podaj wzory funkcji g i h .

a) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x < -2 \\ x & \text{dla } -2 \leq x \leq 3 \\ 3 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x < -1 \\ |x| & \text{dla } -1 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

5. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f . Naszkicuj wykres funkcji g oraz podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.

a) $g(x) = f(-x)$ c) $g(x) = f(-x-2)+1$
 b) $g(x) = f(-x+2)$ d) $g(x) = -f(-x+1)$



4. a) $g(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ -x & \text{dla } x \in [-2; 3] \\ -3 & \text{dla } x \in (3; \infty) \end{cases}$
 $h(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \\ x & \text{dla } x \in [-3; 2] \\ 2 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -|x| & \text{dla } x \in [-1; 2] \\ -3 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$
 $h(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ -|x| & \text{dla } x \in [-2; 1] \\ x - 2 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$

5. a) $D_g = [-5; 3]$, $g(D_g) = [-1; 3]$
 b) $D_g = [-3; 5]$, $g(D_g) = [-1; 3]$
 c) $D_g = [-7; 1]$, $g(D_g) = [0; 4]$
 d) $D_g = [-4; 4]$, $g(D_g) = [-3; 1]$

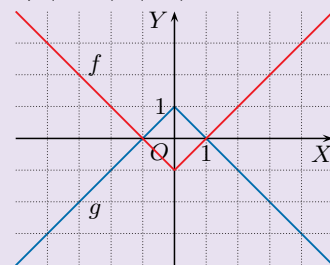
Warto zauważyć, że w zadaniu 5. mamy złożenie symetrii i przesunięcia:

b) $g(x) = f(-x+2) = f(-(x-2))$
 c) $g(x) = f(-x-2)+1 = f(-(x+2))+1$
 d) $g(x) = -f(-x+1) = -f(-(x-1))$

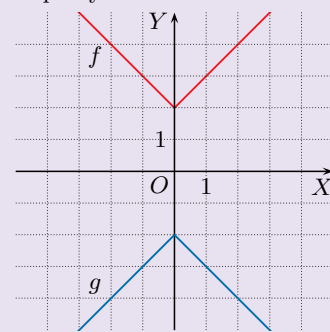
Odpowiedzi do zadań

1. a) $f(D_f) = [-1; 3]$, $g(D_g) = [-3; 1]$
 b) $f(D_f) = [-2; 4]$, $g(D_g) = [-4; 2]$
 c) $f(D_f) = [-2; 1] \cup (2; 4]$, $g(D_g) = [-4; -2] \cup [-1; 2]$

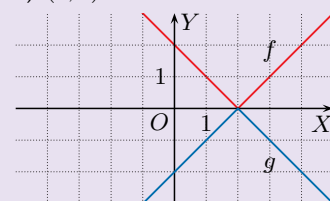
2. a) $(-1, 0)$, $(1, 0)$



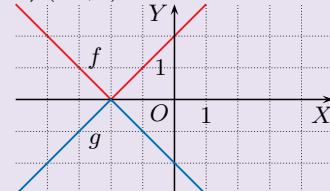
- b) Nie mają punktów wspólnych.



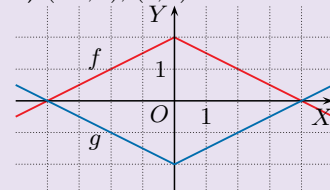
- c) $(2, 0)$



- d) $(-2, 0)$



- e) $(-4, 0)$, $(4, 0)$



- f) Nie mają punktów wspólnych.

3. a) $D_f = [-4; 3]$, $D_g = [-3; 4]$
 b) $D_f = [-4; 3]$, $D_g = [-3; 4]$
 c) $D_f = [-3; 4]$, $D_g = [-4; 3]$



Uczeń:

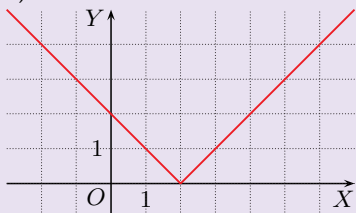
R

- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = |f(x)|$ i $y = f(|x|)$,
- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykres funkcji będący efektem wykonania kilku operacji.

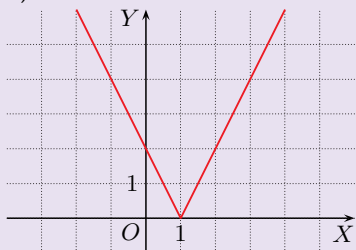
Ćwiczenie 1

wykresy $y = |f(x)|$

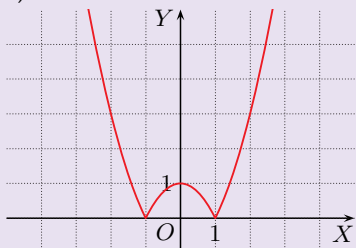
a)



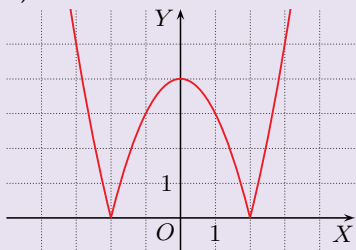
b)



c)



d)



Multibook

- Przekształcenia wykresów funkcji z wartością bezwzględną

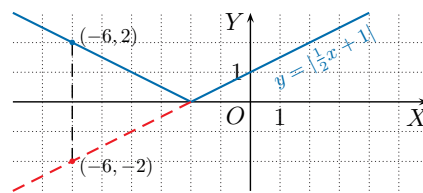
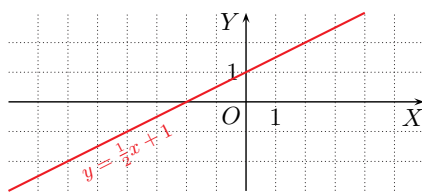
dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.12

Generator
testów i sprawdzianów

4.12. Inne przekształcenia wykresu

Przykład 1

Poniżej przedstawiono wykresy funkcji $y = \frac{1}{2}x + 1$ i $y = |\frac{1}{2}x + 1|$.



Zauważ, że punktowi $(-6, -2)$, należącemu do wykresu funkcji $y = \frac{1}{2}x + 1$, odpowiada położony symetrycznie względem osi OX punkt $(-6, 2)$, należący do wykresu funkcji $y = |\frac{1}{2}x + 1|$.

Twierdzenie

Wykres funkcji $y = |f(x)|$ otrzymujemy przez odbicie symetryczne względem osi OX tej części wykresu funkcji f , która znajduje się pod osią OX . Pozostałej części wykresu nie zmieniamy.

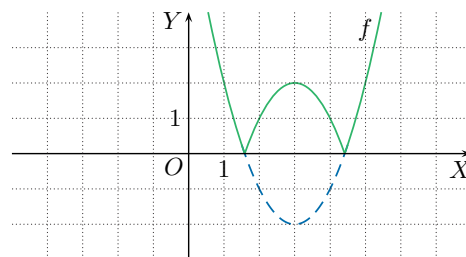
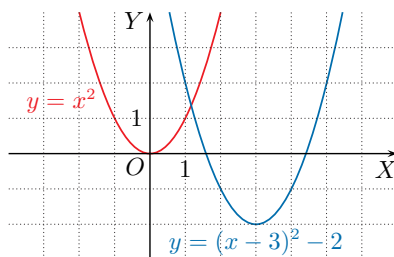
Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = |f(x)|$.

- a) $f(x) = x - 2$ b) $f(x) = -2x + 2$ c) $f(x) = x^2 - 1$ d) $f(x) = -x^2 + 4$

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |(x - 3)^2 - 2|$.



Po przesunięciu wykresu funkcji $y = x^2$ o wektor $[3, -2]$ otrzymamy wykres funkcji $y = (x - 3)^2 - 2$.

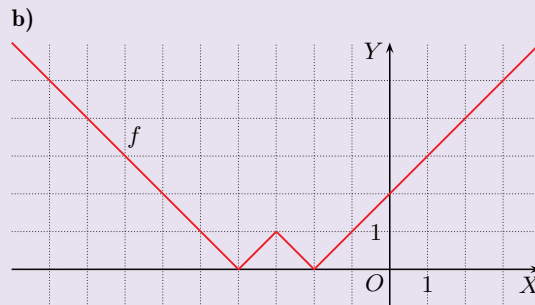
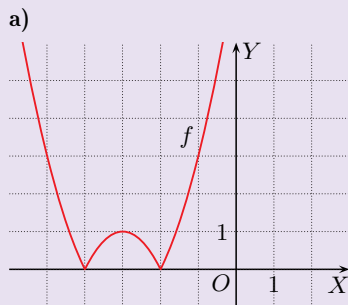
Następnie odbijamy symetrycznie względem osi OX fragment wykresu funkcji $y = (x - 3)^2 - 2$, który znajduje się pod osią OX , i otrzymujemy wykres funkcji $f(x) = |(x - 3)^2 - 2|$.

Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f .

- a) $f(x) = |(x + 3)^2 - 1|$ b) $f(x) = ||x + 3| - 1|$ c) $f(x) = ||x| - 2|$

Ćwiczenie 2





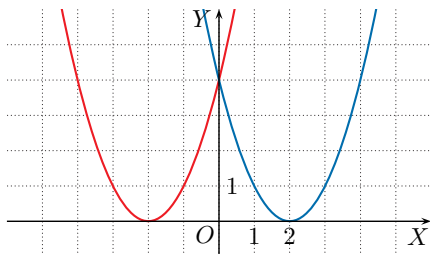
Przykład 3

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = (|x| - 2)^2$.

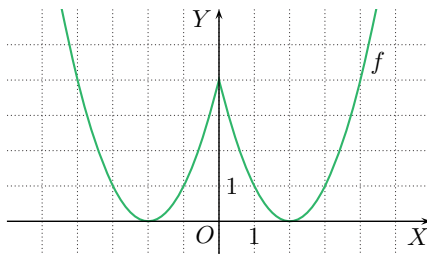
Skorzystamy z tego, że:

$$(|x| - 2)^2 = \begin{cases} (-x - 2)^2 & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ (x - 2)^2 & \text{dla } x \in [0; \infty) \end{cases}$$

Zauważ, że
 $(-x - 2)^2 = (x + 2)^2$.

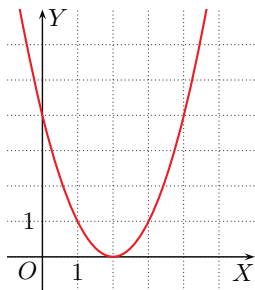


W jednym układzie współrzędnych szkicujemy wykresy funkcji $y = (x + 2)^2$ oraz $y = (x - 2)^2$.

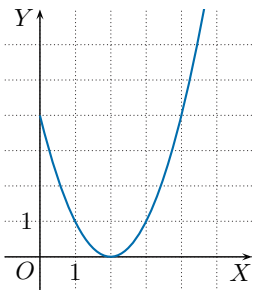


Odpowiednie fragmenty tych wykresów tworzą wykres funkcji $f(x) = (|x| - 2)^2$.

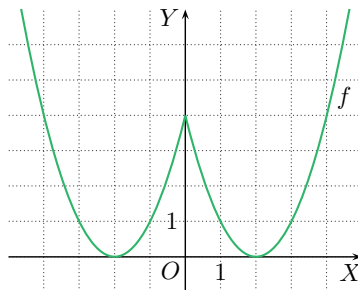
Zauważmy, że wykres funkcji $f(x) = (|x| - 2)^2$ możemy też otrzymać w opisany poniżej sposób.



Szkicujemy wykres funkcji $y = (x - 2)^2$.



Dla $x \geq 0$ wykresy funkcji f i $y = (x - 2)^2$ się pokrywają.



Wykres funkcji $f(x) = (|x| - 2)^2$ jest symetryczny względem osi OY .

Twierdzenie

Wykres funkcji $y = f(|x|)$ otrzymujemy w następujący sposób: szkicujemy część wykresu funkcji f dla $x \geq 0$ (gdzie $x \in D_f$), a następnie tę część odbijamy symetrycznie względem osi OY .

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f .

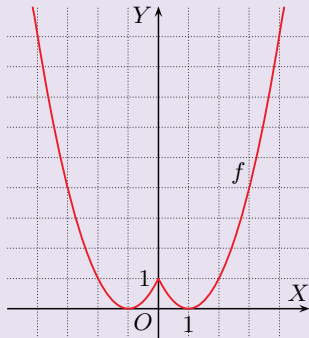
a) $f(x) = (|x| - 1)^2$

b) $f(x) = (|x| + 1)^2$

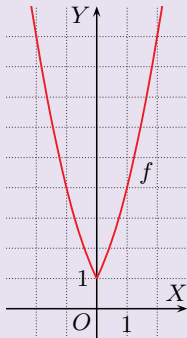
c) $f(x) = (|x| - 3)^2$

Ćwiczenie 3

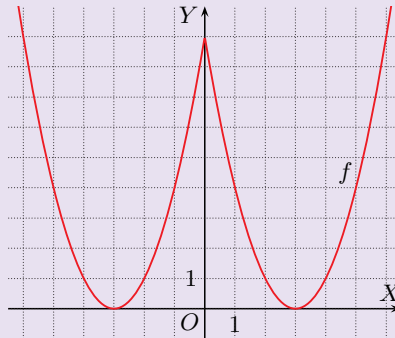
a)



b)



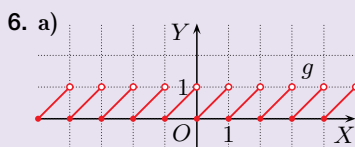
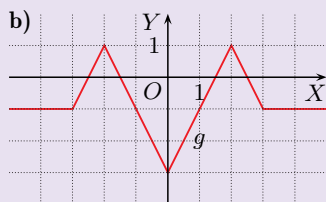
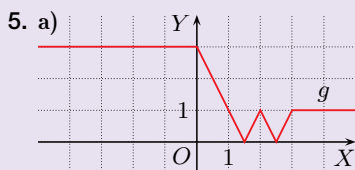
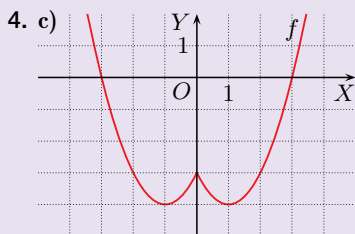
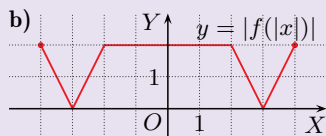
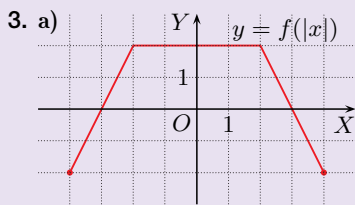
c)





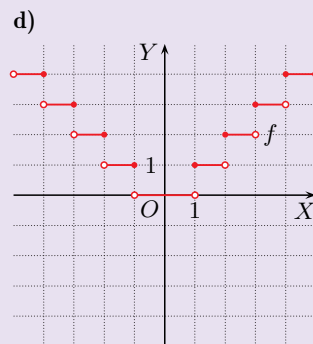
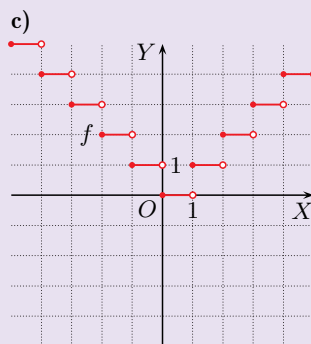
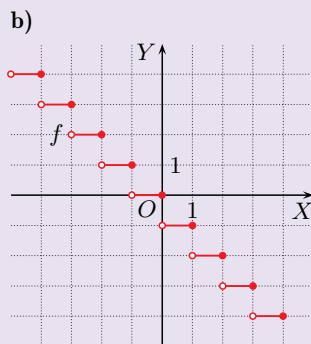
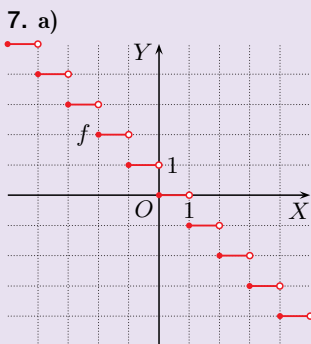
Odpowiedzi do zadań

2. a) 10 b) 6 c) 4



b) $x \in \{\frac{1}{2}k : k \in \mathbb{Z}_-\} \cup [0; \infty)$

$\mathbb{Z}_-$ – zbiór liczb całkowitych ujemnych. Warto upewnić się, że uczniowie dobrze rozumieją ten zapis.



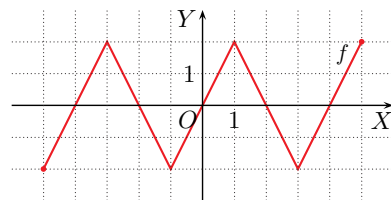
Zadania

1. Naskicuj wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = |f(x)|$.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ b) $f(x) = 2|x| - 2$ c) $f(x) = -2|x| + 2$

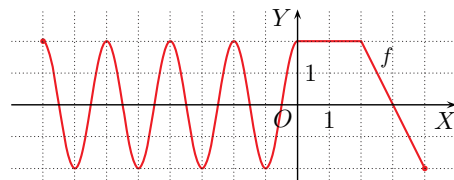
2. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: [-5; 5] \rightarrow \mathbb{R}$. Naskicuj wykres funkcji g i podaj liczbę rozwiązań równania $g(x) = 1$.

a) $g(x) = |f(x)|$ c) $g(x) = f(-|x|)$
b) $g(x) = f(|x|)$



3. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: [-8; 4] \rightarrow \mathbb{R}$. Naskicuj wykres funkcji:

a) $y = f(|x|)$, b) $y = |f(|x|)|$.

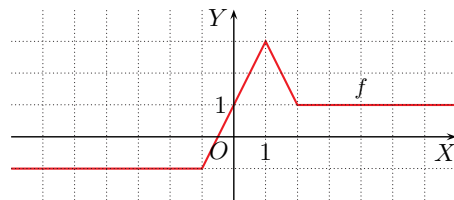


4. Naskicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = (|x| - 3)^2 - 4$ b) $f(x) = (|x| + 2)^2$ c) $f(x) = (1 - |x|)^2 - 4$

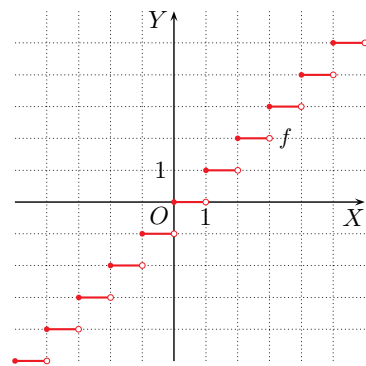
5. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Naskicuj wykres funkcji g .

a) $g(x) = |f(x - 1) - 2|$
b) $g(x) = f(|x| - 1) - 2$



6. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = [x]$, gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x (np. $[-3\frac{1}{2}] = -4$, $[-3] = -3$, $[0, 22] = 0$, $[3, 7] = 3$).

a) Naskicuj wykres funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $g(x) = x - [x]$.
b) Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $g(|x|) = g(x)$?



7. Naskicuj wykres funkcji f .

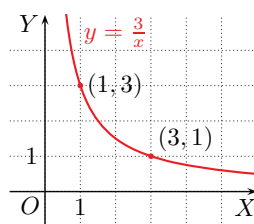
a) $f(x) = -[x]$ b) $f(x) = [-x]$ c) $f(x) = |[x]|$ d) $f(x) = \lceil x \rceil$

4.13. Proporcjonalność odwrotna

Przykład 1

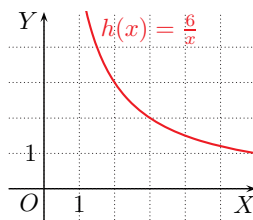
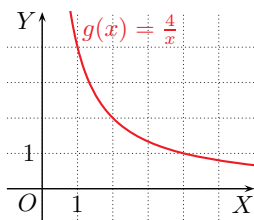
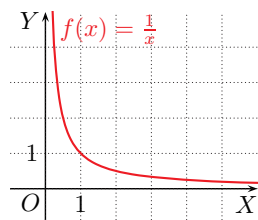
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = \frac{3}{x}$, gdzie $x > 0$. Zwróć uwagę na to, że jeśli punkt (x, y) należy do wykresu tej funkcji, to jego współrzędne spełniają zależność $x \cdot y = 3$.

Jedynymi punktami o współrzędnych całkowitych należącymi do wykresu tej funkcji są punkty $(1, 3)$ i $(3, 1)$.



Ćwiczenie 1

Funkcje f , g i h , których wykresy przedstawiono poniżej, określone są dla $x > 0$. Podaj punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu każdej z nich.



Definicja

Funkcję postaci $y = \frac{a}{x}$, gdzie $x > 0$ oraz $a \in \mathbb{R}_+$, nazywamy **proporcjonalnością odwrotną**. Wielkości x i y nazywamy **odwrotnie proporcjonalnymi**, a stałą a – **współczynnikiem proporcjonalności** odwrotnej.

Jeśli wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne, to ich iloczyn jest stały. Wzór proporcjonalności odwrotnej możemy również zapisać w postaci $x \cdot y = a$.

Czy wiesz, że...

Dwie masy m_1 i m_2 umieszczone na równoważni w odległościach r_1 i r_2 od punktu podparcia znajdują się w równowadze, jeśli zachodzi równość:

$$m_1 \cdot r_1 = m_2 \cdot r_2$$

Oznacza to, że masa i jej odległość od punktu podparcia są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi. Odkrycie tego prawa (zwanego też zasadą dźwigni) zawdzięczamy Archimedesowi (ok. 287 r. p.n.e. – ok. 212 r. p.n.e.).



Uczeń:

- wyznacza współczynnik proporcjonalności odwrotnej,
- szkicuje wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a > 0$ i $x > 0$,
- stosuje proporcjonalność odwrotną do rozwiązywania zadań dotyczących np. drogi, prędkości i czasu.

Ćwiczenie 1

f : $(1, 1)$,

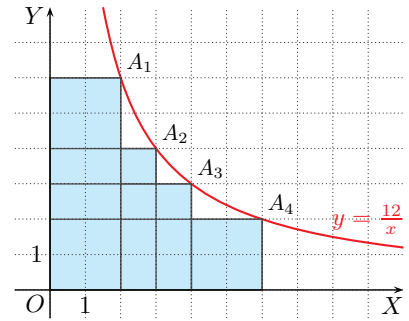
g : $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$,

h : $(1, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$

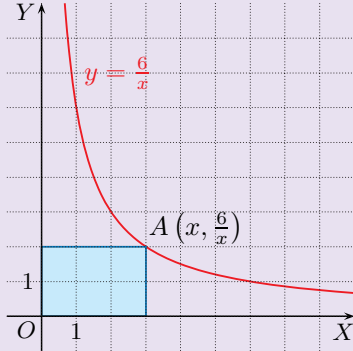
Przykładem wielkości odwrotnie proporcjonalnych są długości x i y boków prostokąta o ustalonym polu P . Zachodzi wówczas zależność $x \cdot y = P$.

Przykład 2

Rozpatrzmy prostokąty, każdy o polu równym 12 i dwóch bokach x , y zawartych w osiach układu współrzędnych (rysunek obok). Wierzchołki A_1 , A_2 , A_3 i A_4 tych prostokątów łączymy krzywą, która jest wykresem funkcji $y = \frac{12}{x}$, gdzie $x > 0$. Ich współrzędne (x, y) spełniają zależność $x \cdot y = 12$.



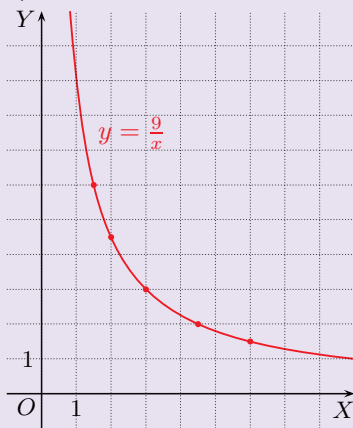
Ćwiczenie 2



Pole prostokąta $P = x \cdot \frac{6}{x} = 6$, czyli pole jest stałe i nie zależy od wyboru wierzchołka.

Ćwiczenie 3

b)



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{6}{x}$, gdzie $x > 0$, i narysuj prostokąt, którego jeden z wierzchołków należy do wykresu tej funkcji, a dwa boki zawierają się w osiach układu współrzędnych. Ile jest równe pole tego prostokąta? Czy odpowiedź zależy od wyboru wierzchołka należącego do wykresu funkcji f ?

Zauważ, że jeśli wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne, to wraz ze wzrostem jednej z nich druga proporcjonalnie maleje.

Przykład 3

W tabeli podano, ile kilogramów winogron możemy kupić za 24 zł w zależności od ceny za jeden kilogram.

x – cena [zł]	4	5	6	8	12
y – masa [kg]	6	4,8	4	3	2

Wraz ze wzrostem ceny za kilogram x proporcjonalnie maleje liczba kilogramów winogron y , które możemy kupić za 24 zł.

Wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne: $y = \frac{24}{x}$.

Ćwiczenie 3

Na zakup jabłek przeznaczono kwotę 9 zł. Niech x oznacza cenę za kilogram, a y – liczbę kilogramów jabłek, które możemy kupić.

x [zł]	1,5	2	3	4,5	6
y [kg]	6	4,5	3	2	1,5

a) Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

b) W układzie współrzędnych zaznacz punkty odpowiadające wartościom z tabeli i korzystając z nich, naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{9}{x}$, gdzie $x > 0$.

Zadania

1. Wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij. Podaj wzór tej proporcjonalności i naskicuj jej wykres.

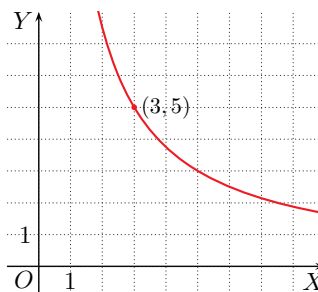
a)

x	1	2	2,5	4	5
y	8	4	3,2	2	1,6

b)

x	1	2	2,5	4	5
y	10	5	4	2,5	2

2. Pewną stałą kwotę k zł przeznaczono na zakup śliwek. Na wykresie przedstawiono zależność między ceną x w złotych za kilogram a liczbą kilogramów y , które można w tej cenie kupić.



a) Podaj wartość k .

b) Przedstaw za pomocą tabeli zależność między x i y dla $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3. Naskicuj wykres funkcji $y = f(x)$, gdzie $x > 0$. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do wykresu tej funkcji?

a) $f(x) = \frac{2}{x}$

b) $f(x) = \frac{5}{x}$

c) $f(x) = \frac{8}{x}$

d) $f(x) = \frac{18}{x}$

4. Rozważmy n -kąty foremne o obwodzie równym 12. Sporządź odpowiednią tabelę i naskicuj wykres funkcji opisującej zależność długości boku n -kąta od liczby jego boków dla $n \leq 12$. Podaj dziedzinę tej funkcji.

Czas t potrzebny do przebycia drogi s ze średnią prędkością v wyraża się wzorem $t = \frac{s}{v}$.

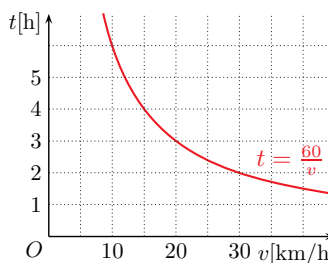
5. Rowerzysta ma do przebycia dystans 60 km. Na wykresie przedstawiono zależność czasu jego jazdy od średniej prędkości. Ile czasu zajmie rowerzyście pokonanie całego dystansu, jeśli będzie jechał z prędkością:

a) 15 km/h,

c) 24 km/h,

b) 18 km/h,

d) 25 km/h?



6. Samochód ma do przebycia trasę 240 km. Dobierz odpowiednio jednostki na ośiach układu współrzędnych i naskicuj wykres zależności między średnią prędkością samochodu a czasem podróży.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $y = \frac{8}{x}$, $x > 0$

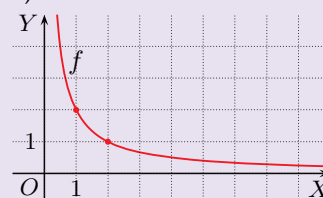
b) $y = \frac{10}{x}$, $x > 0$

2. a) $k = 15$

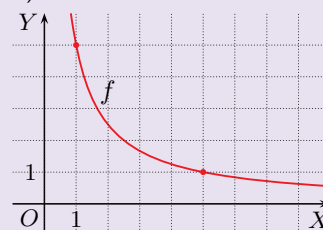
b)

x	1	2	3	4	5	6
y	15	7,5	5	3,75	3	2,5

3. a) 2



- b) 2



- c) 4 d) 6

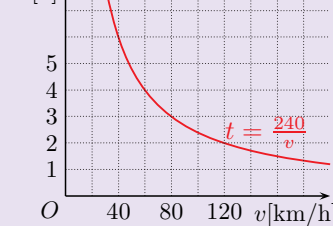
5. a) 4 h

b) 3 h 20 min

c) 2,5 h

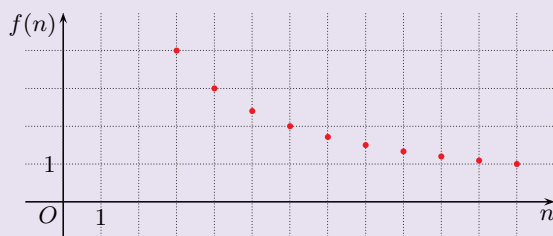
d) 2 h 24 min

6. t[h]



4. n – liczba boków, $f(n)$ – długość boku, $D = \{n \in \mathbb{N} : 3 \leq n \leq 12\}$

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(n)$	4	3	2,4	2	$\frac{12}{7}$	1,5	$\frac{4}{3}$	1,2	$\frac{12}{11}$	1

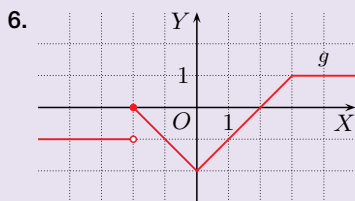




Powtórzenie

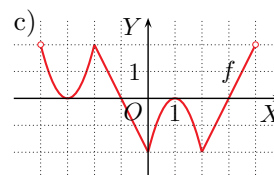
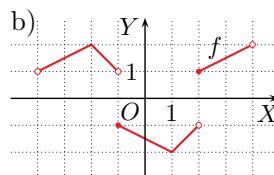
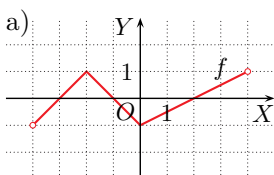
Zestaw I

- $f_{\min} = 0, f_{\max} = 81$
 - 12 dla 4 argumentów,
16 dla 3 argumentów
 - 65
- $f(X) = \{-1, 0, 2, 3\}$
 - $f(X) = [-1; \infty)$
 - $f(X) = [0; 3]$
- f rośnie w $(-4; -2]$
i w $[0; 4)$, maleje w $[-2; 0]$,
 $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, -1, 2\}$,
 $f(x) > 0$ dla
 $x \in (-3; -1) \cup (2; 4)$
 - f rośnie w $(-4; -2]$
i w $[1; 4)$, maleje w $[-2; 1]$,
 f nie przyjmuje wartości 0,
 $f(x) > 0$ dla
 $x \in (-4; -1) \cup [2; 4)$
 - f rośnie w $[-3; -2]$,
w $[0; 1]$ i w $[2; 4)$,
maleje w $(-4; -3]$, w $[-2; 0]$
i w $[1; 2]$, $f(x) = 0$ dla
 $x \in \{-3, -1, 1, 3\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in (-4; -3) \cup$
 $\cup (-3; -1) \cup (3; 4)$
- Wektor przesunięcia:
 - $[2, -1]$
 - $[-3, 2]$
 - $[-1, -3]$



- $g(x) = 0$ dla $x \in \{-2, 2\}$,
 $g(x) < 0$ dla
 $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2)$
- $g(x) = 1$ dla $x \in [3; \infty)$,
 $g(x) \leq 1$ dla $x \in \mathbb{R}$
- $g(x) = -1$ dla
 $x \in (-\infty; -2) \cup \{-1, 1\}$,
 $g(x) \leq -1$ dla
 $x \in (-\infty; -2) \cup [-1; 1]$

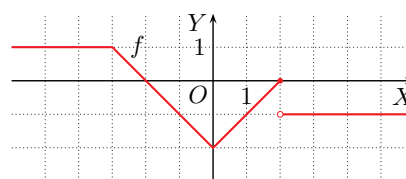
- Funkcja f przyporządkowuje każdej dwucyfrowej liczbie naturalnej iloczyn jej cyfr.
 - Jaka jest najmniejsza wartość funkcji f , a jaka największa?
 - Dla ilu argumentów funkcja f przyjmuje wartość 12, a dla ilu 16?
 - Dla ilu argumentów funkcja f przyjmuje wartości parzyste?
- Naszkicuj wykres funkcji $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = |x| - 1$. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.
 - $X = \{-4, -1, 0, 1, 3\}$
 - $X = (-\infty; 2)$
 - $X = [-3; -1] \cup [2; 4)$
- Dany jest wykres funkcji $f: (-4; 4) \rightarrow \mathbb{R}$. Podaj przedziały monotoniczności, miejsca zerowe i zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.



- Naszkicuj wykres funkcji f , przesuając wykres funkcji $y = \frac{1}{2}|x|$ o wektor.
 - $f(x) = \frac{1}{2}|x - 2| - 1$
 - $f(x) = \frac{1}{2}|x + 3| + 2$
 - $f(x) = \frac{1}{2}|x + 1| - 3$
- Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji f i g .
 - $f(x) = |2x| - 1, g(x) = |x + 2|$
 - $f(x) = -\frac{1}{2}|x|, g(x) = |x + 3| - 6$

6. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem:

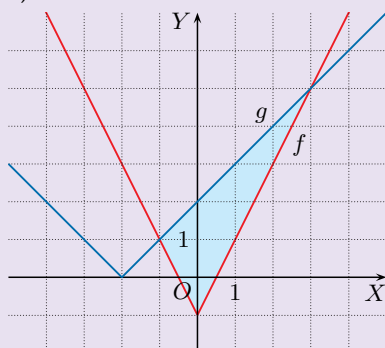
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \\ |x| - 2 & \text{dla } x \in [-3; 2] \\ -1 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$$



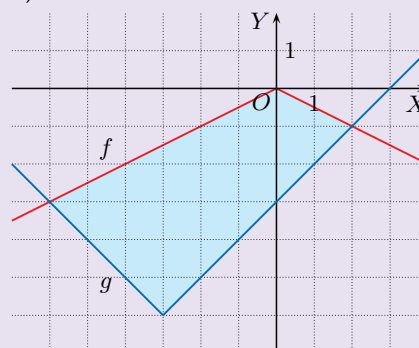
Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$. Podaj jej wzór, a następnie odczytaj z wykresu rozwiązanie:

- równania $g(x) = 0$ i zbiór rozwiązań nierówności $g(x) < 0$,
- równania $g(x) = 1$ i zbiór rozwiązań nierówności $g(x) \leq 1$,
- równania $g(x) = -1$ i zbiór rozwiązań nierówności $g(x) \leq -1$.

5. a) $P = 6$



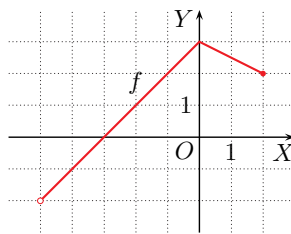
- b) $P = 21$



Zestaw II

1. Dziedziną funkcji f (rysunek obok) jest przedział $(-5; 2]$. Podaj dziedzinę i naskicuj wykres funkcji g .

a) $g(x) = f(x-3)$ c) $g(x) = -f(x+2)$
 b) $g(x) = f(2-x)$ d) $g(x) = -f(1-x)$



2. Podaj wzór i naskicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Odczytaj z wykresu zbiór wartości i przedziały monotoniczności funkcji g .

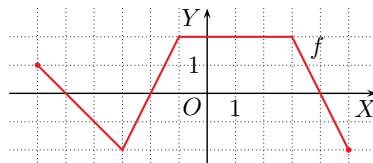
a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ |x| & \text{dla } x \in [-1; 3] \\ 3 & \text{dla } x \in (3; \infty) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ -x^2 & \text{dla } x \in [-2; 1] \\ -5 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$

3. Liczby $-1, -\frac{1}{2}, 3$ są miejscami zerowymi funkcji $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$. Podaj wzór i miejsca zerowe funkcji g .

a) $g(x) = f(-x)$ b) $g(x) = f(x+1)$ c) $g(x) = f(1-x)$

4. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: [-6; 5] \rightarrow \mathbb{R}$. Naskicuj wykres funkcji g i podaj jej miejsca zerowe.

a) $g(x) = -f(-x)$ b) $g(x) = -|f(x)|$

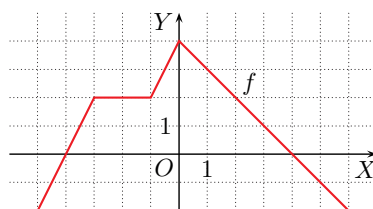


5. Naskicuj wykres funkcji f . Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie, a dla jakich – trzy rozwiązania?

a) $f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{dla } x < -2 \\ |x| & \text{dla } -2 \leq x \leq 4 \\ 8-x & \text{dla } x > 4 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x+6 & \text{dla } x < -2 \\ x^2 & \text{dla } -2 \leq x \leq 2 \\ x+2 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

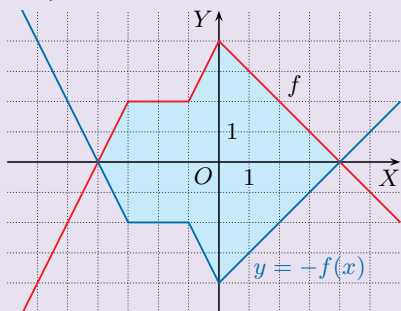
6. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji:

a) $y = f(x)$ i $y = -f(x)$,
 b) $y = f(-x)$ i $y = |x|$.

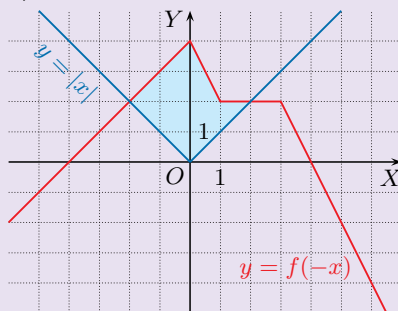


7. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $x > 0$ oraz $a \in \mathbb{R}$, przechodzi przez punkt $(\frac{5}{2}, \frac{28}{5})$. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do wykresu funkcji f ? Naskicuj wykres tej funkcji.

6. a) $P = 32$

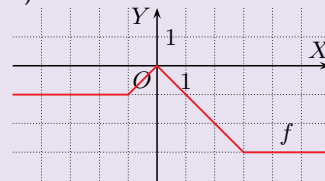


- b) $P = 7$



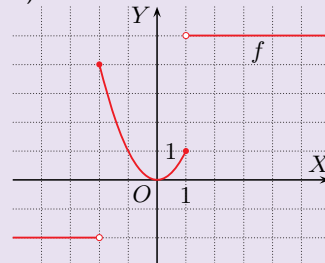
1. a) $D_g = (-2; 5]$
 b) $D_g = [0; 7)$
 c) $D_g = (-7; 0]$
 d) $D_g = [-1; 6)$

2. a)



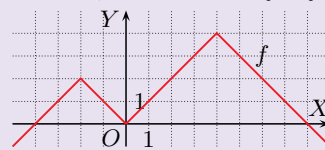
$g(D_g) = [-3; 0]$,
 stała w $(-\infty; -1]$ i w $[3; \infty)$,
 rośnie w $[-1; 0]$,
 maleje w $[0; 3]$

- b)

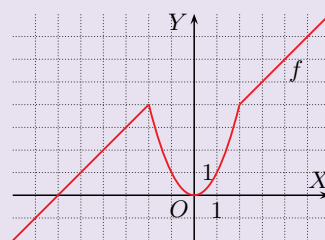


$g(D_g) = \{-2\} \cup [0; 4] \cup \{5\}$,
 stała w $(-\infty; -2)$ i w $(1; \infty)$,
 rośnie w $[0; 1]$,
 maleje w $[-2; 0]$

3. a) $g(x) = -2x^3 - 3x^2 + 8x - 3$,
 miejsca zerowe: $-3, \frac{1}{2}, 1$
 b) $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$,
 miejsca zerowe: $-2, -\frac{3}{2}, 2$
 c) $g(x) = -2x^3 + 3x^2 + 8x - 12$,
 miejsca zerowe: $-2, \frac{3}{2}, 2$
 4. a) Miejsca zerowe: $-4, 2, 5$
 b) Miejsca zerowe: $-5, -2, 4$
 5. a) 1 rozwiązanie dla $m = 4$,
 3 rozwiązania dla $m \in \{0, 2\}$



- b) 1 rozwiązanie dla
 $m \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$,
 3 rozwiązania dla $m \in (0; 4)$



7. 4 punkty; $f(x) = \frac{14}{x}$



Zadania z kontekstem realistycznym

Odpowiedzi do zadań

1. a) $240 : 3 = 80$ [km/h]

b) $2 \cdot 240 : (5 + 3) = 60$ [km/h]

2. a) Długość całej drogi:

$$2 \cdot 280 = 560 \text{ [km]}$$

$$\text{Czas: } 2 + 2 + 4 = 8 \text{ [h]}$$

Średnia prędkość:

$$560 : 8 = 70 \text{ [km/h]}$$

b) Czas:

$$11\frac{1}{2} - 3 - 1 - 2 - 2 = 3\frac{1}{2} \text{ [h]}$$

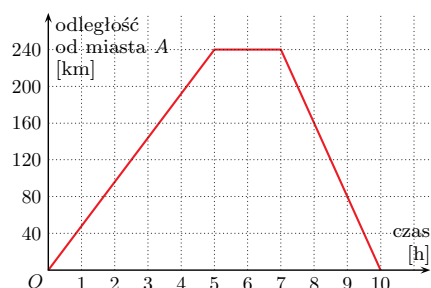
Średnia prędkość:

$$280 : 3\frac{1}{2} = 80 \text{ [km/h]}$$

1. Przejazd samochodem z miasta A do odległego o 240 km miasta B i z powrotem zajął (razem z dwugodzinnym postojem) 10 godzin. Korzystając z wykresu obok, podaj średnią prędkość przejazdu:

a) z miasta B do miasta A ,

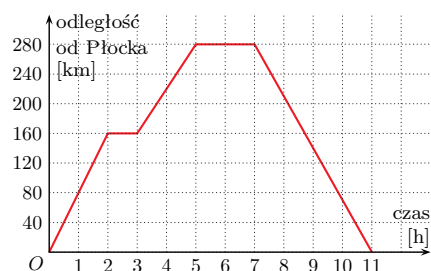
b) całej trasy bez postoju.



2. Na wykresie poniżej przedstawiono, jak zmieniała się odległość samochodu od Płocka podczas jazdy na trasie Płock–Gdańsk–Płock.

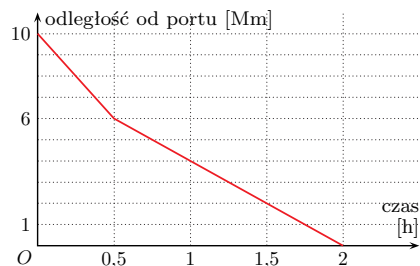
a) Oblicz średnią prędkość samochodu bez uwzględniania postojów.

b) Jaka byłaby średnia prędkość na trasie z Gdańska do Płocka, gdyby postój w Gdańsku przedłużył się o godzinę, a cała wyprawa trwałaby $11\frac{1}{2}$ godziny?

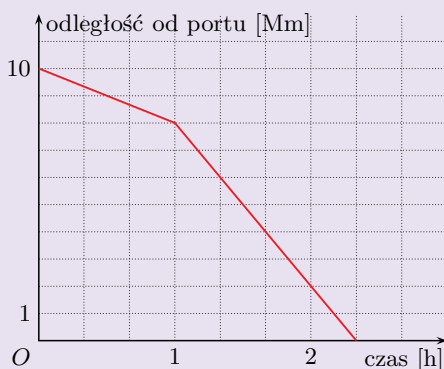


3. Jacht znajdujący się w odległości 10 mil morskich od portu płynął w jego kierunku z prędkością 8 węzłów. Po półgodzinie wiatr osłabł, a prędkość jachtu spadła o połowę. Na wykresie obok pokazano, jak zmieniała się odległość jachtu od portu w zależności od czasu.

Inny jacht, będący 10 mil morskich od portu, płynął w jego kierunku przez godzinę z prędkością 2 węzłów, a następnie – z prędkością 6 węzłów. Naszkicuj wykres przedstawiający zmiany odległości tego jachtu od portu w zależności od czasu. Po jakim czasie dotarł on do portu?



3. Jacht dotarł do portu po 2 godzinach 20 minutach.



**Przykład 1**

Ile miejsc zerowych ma funkcja f ?

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ \frac{1}{2}x + 3 & \text{dla } x \in [-2; 2) \\ -2x + 8 & \text{dla } x \in [2; \infty) \end{cases}$$

A. zero

B. jedno

C. dwa

D. trzy

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na różne sposoby.

• Miejsca zerowe funkcji f możemy wyznaczyć, rozwiązując równania:

$$-2x - 2 = 0, \text{ skąd } x = -1, \text{ ale } -1 \notin (-\infty; -2)$$

$$\frac{1}{2}x + 3 = 0, \text{ skąd } x = -6, \text{ ale } -6 \notin [-2; 2)$$

$$-2x + 8 = 0, \text{ skąd } x = 4 \in [2; \infty)$$

Liczby -1 i -6 nie są miejscami zerowymi funkcji f , jedynym jej miejscem zerowym jest liczba 4 .

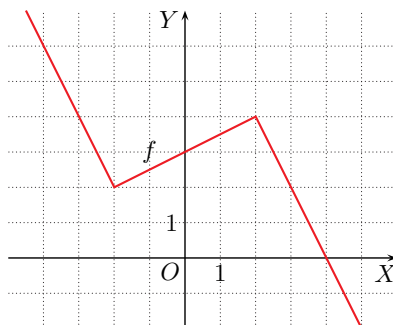
Zatem funkcja f ma jedno miejsce zerowe.

• Możemy też naszkicować wykres funkcji f i odczytać z niego liczbę jej miejsc zerowych.

Odpowiedź: B

→ Zadanie 6, str. 216

→ Zadanie 19, str. 219

**Przykład 2**

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: [-2; 6] \rightarrow \mathbb{R}$. Suma miejsc zerowych funkcji $g(x) = f(-x)$ jest równa

A. -2 B. -4 C. -6 D. -8

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na różne sposoby.

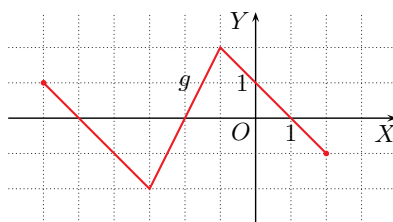
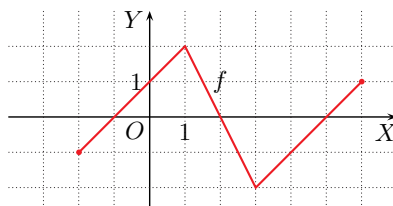
• Miejscami zerowymi funkcji f są liczby: $-1, 2, 5$. Zatem miejscami zerowymi funkcji g są liczby: $1, -2, -5$. Ich suma jest równa -6 .

• Możemy też naszkicować wykres funkcji g i odczytać z niego jej miejsca zerowe. Są to liczby: $-5, -2$ i 1 . Ich suma jest równa -6 .

Odpowiedź: C

→ Zadanie 9, str. 217

→ Zadanie 20, str. 219





1. $f(129) = f(4 \cdot 32 + 1) = 1$

A. $f(29) = 1$

B. $f(59) = 3$

C. $f(89) = 1$

D. $f(149) = 1$

2. A. $y = x^2 + \frac{9}{4} > 0$

B. $y = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{27}{8} < 0$

C. $y = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 0$

3. A. $y = \sqrt{-2+2} = 0$

B. $y = (-2)^2 - 2 = 2 \neq 0$

4. $f(x) = x + |x|$

A. $f(-2) = 0$

W zadaniach 1–10 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej jej resztę z dzielenia przez 4. Niech $a = f(129)$. Wówczas

A. $a > f(29)$

B. $a = f(59)$

C. $a < f(89)$

D. $a = f(149)$

Zadanie 2 (0–1)

Liczba $-\frac{3}{2}$ jest miejscem zerowym funkcji danej wzorem

A. $y = x^2 + \frac{9}{4}$

B. $y = x^3 - \frac{27}{8}$

C. $y = \frac{3}{2} - \frac{2}{3}x^2$

D. $y = \frac{3}{2} - \frac{4}{9}x^3$

Zadanie 3 (0–1)

Liczba -2 nie jest miejscem zerowym funkcji danej wzorem

A. $y = \sqrt{x+2}$

B. $y = x^2 - 2$

C. $y = x^3 + 8$

D. $y = \frac{2}{x} + 1$

Zadanie 4 (0–1)

Do wykresu funkcji $f(x) = x + \sqrt{x^2}$ należy punkt

A. $A(-2, 0)$

B. $B(4, 6)$

C. $C(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

D. $D(-4, -8)$

Zadanie 5 (0–1)

Do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{3}(x-1)^2$ należy punkt

A. $(-2\sqrt{3}, -13\sqrt{3})$

C. $(-2\sqrt{3}, -13\sqrt{3} + 12)$

B. $(2\sqrt{3}, 13\sqrt{3})$

D. $(2\sqrt{3}, 13\sqrt{3} - 12)$

Zadanie 6 (0–1) → Przykład 1, str. 215

Ile miejsc zerowych ma funkcja f ?

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{dla } x \in (-\infty; 4) \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{dla } x \in [4; \infty) \end{cases}$$

A. zero

B. jedno

C. dwa

D. trzy

Zadanie 7 (0–1)

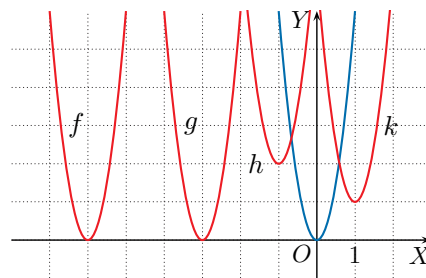
Wykresy funkcji f , g , h , k otrzymano przez odpowiednie przesunięcia wykresu funkcji $y = 6x^2$. Zatem

A. $f(x) = 6(x^2 - 12x + 36)$

B. $g(x) = 6(x^2 + 6x + 9)$

C. $h(x) = 6(x^2 - 2x + 1) + 2$

D. $k(x) = 6(x^2 - 1) + 1$



5. $f(x) = \sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{3}$

A. $f(-2\sqrt{3}) = 13\sqrt{3} + 12 \neq -13\sqrt{3}$

B. $f(2\sqrt{3}) = 13\sqrt{3} - 12 \neq 13\sqrt{3}$

C. $f(-2\sqrt{3}) = 13\sqrt{3} + 12 \neq -13\sqrt{3} + 12$

D. $f(2\sqrt{3}) = 13\sqrt{3} - 12$

6. $|x| - 2 = 0$ dla $x \in \{-2, 2\}$

$\frac{1}{2}x + 2 = 0$ dla $x = -4 \notin [4; \infty)$

7. A. $f(x) = 6(x+6)^2 = 6(x^2 + 12x + 36)$

B. $g(x) = 6(x+3)^2 = 6(x^2 + 6x + 9)$

**Zadanie 8 (0-1)**

Jeśli $D_f = [-5; 3]$, to dziedziną funkcji $g(x) = f(x - 1) + 2$ jest zbiór

- A. $[-2; 6]$ B. $[-3; 5]$ C. $[-4; 4]$ D. $[-6; 2]$

Zadanie 9 (0-1) → Przykład 2, str. 215

Funkcja f ma pięć miejsc zerowych: $-5, -3, -1, 0, 2$. Wynika stąd, że suma miejsc zerowych funkcji $y = -f(-x)$ jest równa

- A. -9 B. -7 C. 7 D. 9

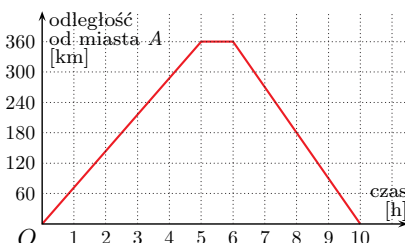
Zadanie 10 (0-1)

Do wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ należy punkt $(-\sqrt{3}, -\frac{3}{2})$. Zatem do tego wykresu należy również punkt

- A. $(\sqrt{3}, -\frac{9}{4})$ B. $(\sqrt{3}, \frac{3}{2})$ C. $(-3, -\frac{3}{2})$ D. $(-3, -\frac{9}{2})$

Zadanie 11 (0-1)

Przejazd samochodem z miasta A do odległego o 360 km miasta B i z powrotem zajął (razem z godzinnym postojem) 10 godzin. Na wykresie obok przedstawiono, jak zmieniała się w tym czasie odległość od miasta A.



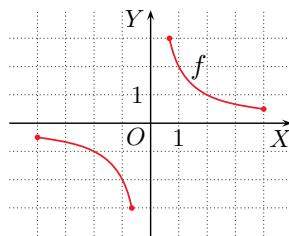
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Średnia prędkość przejazdu z miasta A do miasta B wynosiła 90 km/h.	P	F
Średnia prędkość na całej trasie (bez postoju) wynosiła 72 km/h.	P	F

Zadanie 12 (0-1)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{2}{x}$, której dziedziną jest zbiór $D = [-4; -\frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}; 4]$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



Do zbioru wartości funkcji f należy siedem liczb całkowitych.	P	F
Funkcja f jest funkcją malejącą.	P	F

8. $D_f = [-5; 3]$,

$g(x) = f(x - 1) + 2$

Wykres funkcji f przesuwamy o 1 jednostkę w prawo, więc

$D_g = [-5 + 1; 3 + 1] = [-4; 4]$.

9. Miejsca zerowe: $-2, 0, 1, 3, 5$.

10. $f(-\sqrt{3}) = a(-\sqrt{3})^2 = 3a$

$3a = -\frac{3}{2}$, skąd $a = -\frac{1}{2}$

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2$

$f(\sqrt{3}) = -\frac{1}{2}(\sqrt{3})^2 = -\frac{3}{2}$

$f(-3) = -\frac{1}{2}(-3)^2 = -\frac{9}{2}$

11. Średnia prędkość przejazdu z miasta A do miasta B:

$\frac{360}{5} = 72$ [km/h]

Średnia prędkość przejazdu na całej trasie bez postoju:

$\frac{720}{9} = 80$ [km/h]

12. Do zbioru wartości funkcji należą następujące liczby całkowite: $-3, -2, -1, 1, 2, 3$.

Jest ich tylko 6.

Funkcja nie jest malejąca, bo $-2 < 2$, ale $f(-2) < f(2)$.



13. A. $f(-1) = 1 - 1 = 0$ – należy
 B. $f(1) = 1 - 1 = 0$ – należy
 C. $0 \notin D_f$ – nie należy
 D. $f(-2) = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$ – należy
 E. $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - 4 = -\frac{15}{4}$ – należy
 F. $f(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{16} - 16 = -\frac{255}{4}$ – należy
 G. $f(\sqrt{2}) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ – należy
 H. $f(-\sqrt{2}) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ – należy
 I. $f(-\sqrt{2}) \neq -\frac{3}{2}$ – nie należy

14. Wykres funkcji f przesuwamy o 2 jednostki w lewo. Zatem $D_g = [-4 - 2; 2 - 2] = [-6; 0]$.

15.1. $[-3; -1] \cup [1; 4]$

- 15.2. Funkcja f jest rosnąca w przedziale $[-2; 0]$ oraz w przedziale $[3; 4]$. Najdłuższym przedziałem, w którym funkcja jest rosnąca, jest $[-2; 0]$.

Zadanie 13 (0-2)

Funkcja $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$ jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych różnych od zera.

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Do wykresu funkcji f nie należy punkt

- A. $(-1, 0)$ D. $(-2, \frac{15}{4})$ G. $(\sqrt{2}, \frac{3}{2})$
 B. $(1, 0)$ E. $(\frac{1}{2}, -\frac{15}{4})$ H. $(-\sqrt{2}, \frac{3}{2})$
 C. $(0, 1)$ F. $(-\frac{1}{4}, -\frac{255}{16})$ I. $(-\sqrt{2}, -\frac{3}{2})$

Zadanie 14 (0-1)

Dziedzina funkcji f jest przedział $[-4; 2]$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Dziedzina funkcji $g(x) = f(x + 2)$ jest przedział

A.	$[-6; 0]$,	ponieważ wykres funkcji g otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji f o 2 jednostki	1.	do góry.
B.	$[-2; 4]$,		2.	w prawo.
			3.	w lewo.

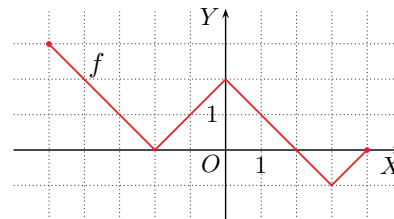
Zadanie 15

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: [-5; 4] \rightarrow \mathbb{R}$.

Zadanie 15.1 (0-1)

Uzupełnij zdanie tak, aby było prawdziwe.

Zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) \leq 1$ jest $?$.



Zadanie 15.2 (0-1)

Uzupełnij zdanie tak, aby było prawdziwe.

Najdłuższym przedziałem, w którym funkcja f jest rosnąca, jest $?$.

Zadanie 16 (0-1)

Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = \begin{cases} -3x + 5 & \text{dla } x < 2 \\ -5x + 3 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$

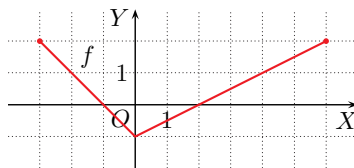
16. $-3x + 5 = 0$ dla $x = \frac{5}{3} \in (-\infty; 2)$
 $-5x + 3 = 0$ dla $x = \frac{3}{5} \notin (2; \infty)$
 Miejsce zerowe funkcji: $x = \frac{5}{3}$.

**Zadanie 17 (0-2)**

Funkcja f określona na zbiorze liczb rzeczywistych jest funkcją nierosnącą, a punkty $(-6, 4)$, $(-3, 2)$, $(1, 2)$ i $(4, -5)$ należą do jej wykresu. Wyznacz wartość $f(-2\sqrt{2})$.

Zadanie 18 (0-2)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: [-3; 6] \rightarrow \mathbb{R}$. Podaj dziedzinę funkcji $g(x) = f(-x)$ i naszkicuj jej wykres.

**Zadanie 19 (0-2) → Przykład 1, str. 215**

Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{dla } x < -1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{dla } -1 \leq x \leq 3 \\ x-2 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$

Zadanie 20 (0-3) → Przykład 2, str. 215

Miejscami zerowymi funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są liczby -3 , 2 i 4 . Wyznacz sumę miejsc zerowych funkcji $g(x) = f(-x+6)$.

Zadanie 21 (0-4)

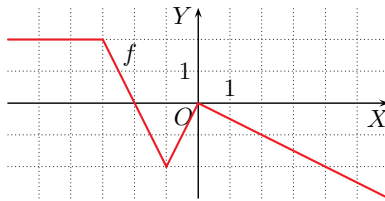
Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = 2x + 2$. Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = -f(x)$ i $h(x) = f(x-4)$. Oblicz pole obszaru ograniczonego osią OX i wykresami funkcji g i h .

Zadanie 22 (0-4)

Zbiór X jest zbiorem liczb naturalnych mniejszych od 12. Funkcja f każdej liczbie ze zbioru X przyporządkowuje resztę z dzielenia przez 4. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x) - 1$ i podaj jej miejsca zerowe.

Zadanie 23 (0-4)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj przedziały monotoniczności funkcji g i odczytaj zbiór rozwiązań nierówności $g(x) \leq 0$.

**□ Zadanie 24 (0-1)**

Podstawą trójkąta równoramiennego jest odcinek o końcach $(0, 0)$ i $(a, 0)$, gdzie $a > 0$. Trzeci wierzchołek trójkąta należy do wykresu funkcji $y = \frac{4}{x}$, gdzie $x > 0$. Uzasadnij, że pole tego trójkąta nie zależy od wyboru parametru a .

24. Pierwsza współrzędna wierzchołka:

$$x = \frac{a}{2}$$

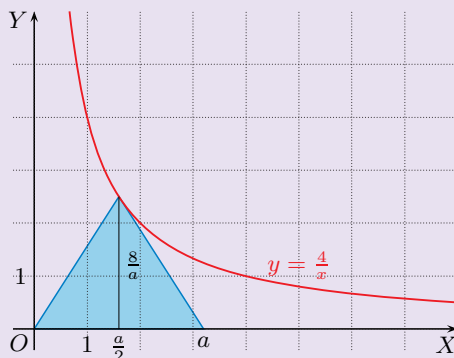
druga współrzędna:

$$y = \frac{4}{\frac{a}{2}} = \frac{8}{a}$$

Pole trójkąta:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{8}{a} = 4$$

zatem pole jest stałe i nie zależy od wyboru parametru a .

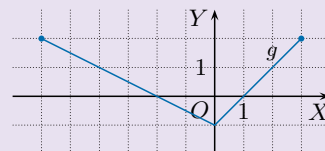


17. $f(x) = 2$ dla $x \in [-3; 1]$

$$-2\sqrt{2} \approx -2,83 \in [-3; 1],$$

wiec $f(-2\sqrt{2}) = 2$.

18. $D = [-6; 3]$



19. $-x - 2 = 0$ dla

$$x = -2 \in (-\infty; -1)$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \text{ dla } x = 1 \in [-1; 3]$$

$$x - 2 = 0 \text{ dla } x = 2 \notin (3; \infty)$$

Miejsca zerowe funkcji: -2 , 1 .

20. Miejsca zerowe funkcji g :

$$-x + 6 = -3, x = 9,$$

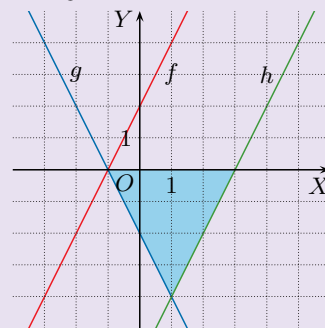
$$-x + 6 = 2, x = 4,$$

$$-x + 6 = 4, x = 2.$$

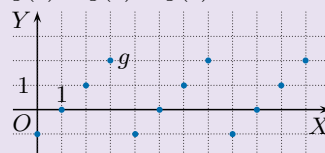
Suma miejsc zerowych:

$$9 + 4 + 2 = 15.$$

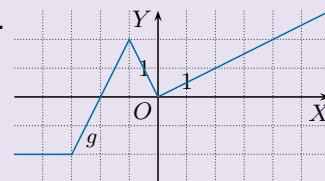
21. $P = 8$



22. $g(1) = g(5) = g(9) = 0$



23.



Funkcja g :

jest stała w $(-\infty; -3]$,

rośnie w $[-3; -1]$ i w $[0; \infty)$,

maleje w $[-1; 0]$,

$g(x) \leq 0$ dla

$$x \in (-\infty; -2] \cup \{0\}$$

1. Miejsca zerowe funkcji g :

$$-2 + 3\sqrt{2} \text{ i } 3\sqrt{2}$$

Suma miejsc zerowych:

$$6\sqrt{2} - 2$$

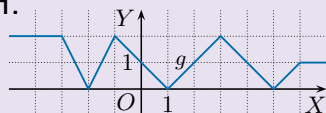
2. $x \in (-4 + \sqrt{3}; 8 - \sqrt{3})$

3. $x - a + 9 = x - 8$ i $-12 + b = 7$

$a = 17$ i $b = 19$, czyli

$$[a, b] = [17, 19]$$

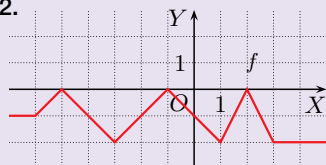
4.1.



$$g(x) \geq 2 \text{ dla}$$

$$x \in (-\infty; -3] \cup \{-1, 3\}$$

4.2.



$$x \in \{-3, 1\} \cup [3; \infty)$$

5.

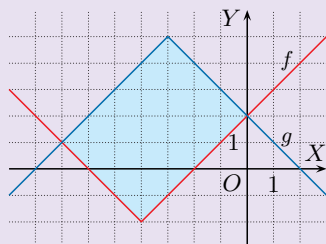
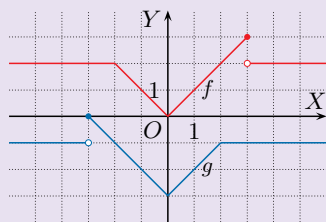


Figura ograniczona wykresami funkcji f i g jest prostokątem o bokach długości: $3\sqrt{2}$ i $4\sqrt{2}$. Pole tego prostokąta: $P = 3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 24$.

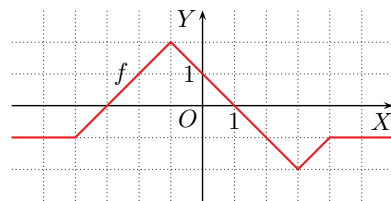
6. $g(x) = -1$ dla $x \in (-\infty; -3) \cup \{-2\} \cup [2; \infty)$



Zadanie 1 (0-2)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Oblicz sumę miejsc zerowych funkcji:

$$g(x) = f(x - 3\sqrt{2}) - 1$$



Zadanie 2 (0-2)

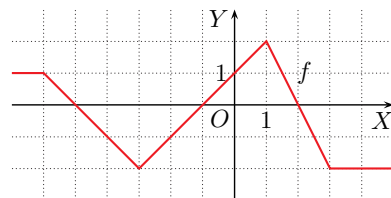
Wykres funkcji g otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $f(x) = |x - 2| - 6$ o wektor $\vec{v} = [0, \sqrt{3}]$. Dla jakich argumentów funkcja g przyjmuje wartości ujemne?

Zadanie 3 (0-2)

Wykres funkcji $g(x) = 6(x - 8)^2 + 7$ otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $f(x) = 6(x + 9)^2 - 12$ o wektor $[a, b]$. Wyznacz ten wektor.

Zadanie 4

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



Zadanie 4.1 (0-3)

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = |f(-x)|$.

Podaj rozwiązanie nierówności $g(x) \geq 2$.

Zadanie 4.2 (0-2)

Naszkicuj wykres funkcji $h(x) = -|f(x)|$. Rozwiąż równanie $h(x) = -2$.

Zadanie 5 (0-3)

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

$$f(x) = |x + 4| - 2 \text{ i } g(x) = -|x + 3| + 5$$

Oblicz pole figury ograniczonej tymi wykresami.

Zadanie 6 (0-4)

Naszkicuj wykresy funkcji f oraz $g(x) = f(-x) - 3$. Podaj rozwiązanie równania $g(x) = -1$.

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x \in [-2; 3] \\ 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \cup (3; \infty) \end{cases}$$

Zadanie 7 (0-4)

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = 2|x| - 2$ i $g(x) = (|x| - 1)^2$. Podaj rozwiązanie nierówności $2|x| - 2 \leq (|x| - 1)^2$.

7. $x \in (-\infty; -3] \cup [-1; 1] \cup [3; \infty)$

