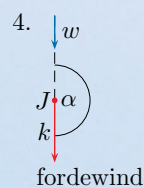
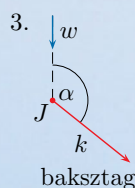
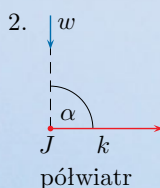
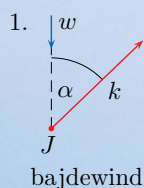


6 Planimetria

Jednym z pojęć omawianych w tym rozdziale jest pojęcie kąta. W żeglarskim od kąta między kierunkiem wiatru a kursem jachtu zależy ustawienie żagli. Na poniższych rysunkach podano nazwy kursów jachtu względem wiatru (strzałka w oznacza kierunek wiatru, punkt J – położenie jachtu, a strzałka k – kurs obrany przez jacht).

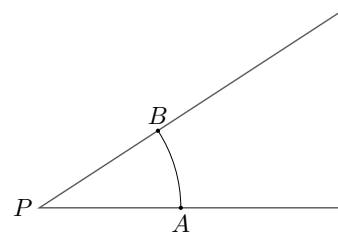


Multibook

- Ułamki w starożytnym Egipcie
- Geometria euklidesowa
- Płatek śniegu Kocha

Kąty

Kąt to jeden z dwóch obszarów płaszczyzny wyznaczony przez dwie półproste (zwane **ramionami kąta**) o wspólnym początku (zwanym **wierzchołkiem kąta**) wraz z tymi półprostymi.

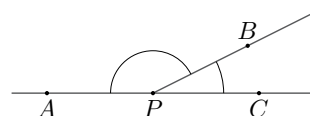


Mięgę kąta APB oznaczamy $|\sphericalangle APB|$.

Kąt wypukły ma mięgę mniejszą od 180° lub równą 180° . Kąt o mierze większej od 180° nazywamy **wklęsłym**.

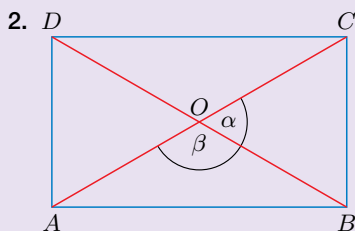
Dwa kąty wypukłe nazywamy **przyległymi**, gdy mają wspólne ramie, a ich pozostałe ramiona dopełniają się do prostej.

Kąty APB i BPC na rysunku obok są przyległe.



Odpowiedzi do zadań

1. a) 60° , 120°
b) 45° , 135°
c) 30° , 150°
d) 75° , 105°



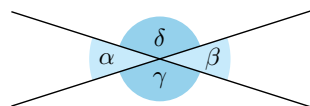
Punkt przecięcia przekątnych prostokąta dzieli je na połowy, zatem:

$$|OC| = \frac{1}{2}|AC| = |OB|$$

Podobnie $|OB| = |CB|$, trójkąt OBC jest więc równoboczny. Zatem $\alpha = 60^\circ$. Kąty α i β są kątami przyległymi, więc $\beta = 180^\circ - \alpha = 120^\circ$.

1. Wyznacz miary kątów przyległych, których stosunek miar jest równy:
a) 1:2, b) 1:3, c) 1:5, d) 5:7.

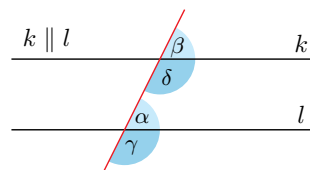
Dwie przecinające się proste tworzą dwie pary **kątów wierzchołkowych** α i β oraz γ i δ (rysunek obok). Zachodzą równości $\alpha = \beta$ oraz $\gamma = \delta$.



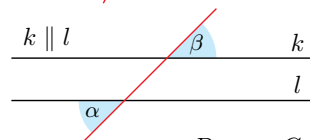
2. Przekątna prostokąta jest dwa razy dłuższa od jego krótszego boku. Wyznacz miary kątów wierzchołkowych utworzonych przez proste zawierające przekątne tego prostokąta.

Para prostych równoległych przeciętych trzecią prostą wyznacza **kąty odpowiadające** o równych miarach.

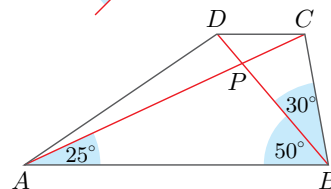
Na przykład na rysunku obok $\alpha = \beta$ i $\gamma = \delta$.



- D** 3. Na rysunku obok zaznaczono **kąty naprzemianległe** i oznaczono je α i β . Uzasadnij, że kąty te mają równe miary.



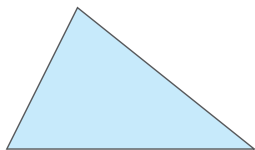
4. Punkt P jest punktem przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$ (rysunek obok). Wyznacz miary kątów trójkąta CDP oraz trójkąta CBP .



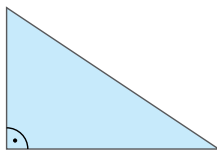
3. Kąty γ i β są kątami odpowiadającymi, więc $\gamma = \beta$. Kąty α i γ są kątami wierzchołkowymi, więc $\alpha = \gamma$. Zatem $\alpha = \beta$.
4. $|\sphericalangle PCD| = |\sphericalangle PAB| = 25^\circ$ – kąty naprzemianległe.
 $|\sphericalangle PDC| = |\sphericalangle ABP| = 50^\circ$ – kąty naprzemianległe.
 $|\sphericalangle DPC| = 180^\circ - |\sphericalangle ABP| - |\sphericalangle ABP| = 105^\circ$ – suma kątów trójkąta równa 180° .
 $|\sphericalangle BPC| = 180^\circ - |\sphericalangle DPC| = 75^\circ$ – kąty przyległe.
 $|\sphericalangle PCB| = 180^\circ - 30^\circ - |\sphericalangle BPC| = 75^\circ$ – suma kątów trójkąta równa 180° .
 $\triangle CDP$: 25° , 50° , 105° ,
 $\triangle CBP$: 30° , 75° , 75°

6.1. Miary kątów w trójkącie

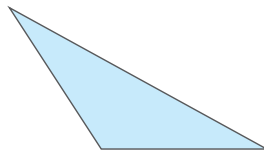
Przypomnijmy, że **trójkąt** to figura wyznaczona przez trzy punkty nieleżące na jednej prostej. Każdy z tych punktów jest **wierzchołkiem** trójkąta, a odcinki łączące wierzchołki nazywamy **bokami**. Trójkąty można klasyfikować ze względu na ich kąty.



Trójkąt ostrokątny ma wszystkie kąty ostre. (Kąt ostry to kąt o mierze mniejszej od 90°).



Trójkąt prostokątny ma jeden kąt prosty. (Kąt prosty to kąt o mierze równej 90°).



Trójkąt rozwartokątny ma jeden kąt rozwarty. (Kąt rozwarty to kąt o mierze większej od 90° i mniejszej od 180°).

Twierdzenie

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180° .

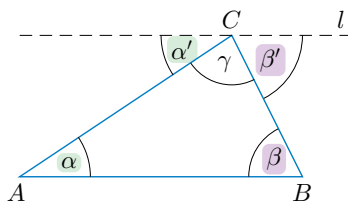
Dowód

Rozpatrzmy trójkąt ostrokątny ABC (rysunek obok). Rysujemy pomocniczą prostą l równoległą do boku AB , przechodzącą przez wierzchołek C . Kąty α i α' są równe (jako kąty naprzemianległe). Również kąty β i β' są równe (jako kąty naprzemianległe).

Zatem $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma$.

Ponadto $\alpha' + \beta' + \gamma = 180^\circ$, więc również:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$



Zauważmy, że powyższe rozumowanie jest takie samo dla trójkąta rozwartokątnego czy prostokątnego. Udowodniliśmy w ten sposób, że suma miar kątów wewnętrznych w dowolnym trójkącie jest równa 180° .

Uwaga. Tam, gdzie nie powoduje to nieporozumień, będziemy zamiennie używać określeń „kąt” i „miara kąta”.

Ćwiczenie 1

- D** a) Wykaż, że trójkąt ABC , w którym kąt B jest dwa razy większy od kąta A , a kąt C jest trzy razy większy od kąta A , jest trójkątem prostokątnym.
b) Stosunek miar kątów trójkąta jest jak 1:4:5. Podaj miary tych kątów.

Ćwiczenie 1

a) Z założenia mamy: $|\sphericalangle A| = \alpha$, $|\sphericalangle B| = 2\alpha$, $|\sphericalangle C| = 3\alpha$.

$$\begin{aligned}\alpha + 2\alpha + 3\alpha &= 180^\circ \\ \alpha &= 30^\circ\end{aligned}$$

Zatem kąty trójkąta ABC są równe: 30° , 60° , 90° , czyli jest on prostokątny.

b) Kąty trójkąta są równe: α , 4α , 5α .

$$\begin{aligned}\alpha + 4\alpha + 5\alpha &= 180^\circ \\ \alpha &= 18^\circ\end{aligned}$$

Zatem kąty te są równe: 18° , 72° , 90° .

Uczeń:

- klasyfikuje trójkąty ze względu na miary ich kątów,
- stosuje twierdzenie o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta do rozwiązywania zadań,
- oblicza sumę miar kątów wewnętrznych n -kąta,
- przeprowadza dowód twierdzenia o sumie miar kątów w trójkącie,
- przeprowadza dowód twierdzenia o mierze kąta zewnętrznego trójkąta.

Multibook

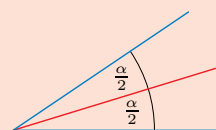
- Rodzaje kątów
- Kąty odpowiadające i kąty naprzemianległe
- Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta
- Kąty wierzchołkowe i kąty przyległe

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 6.1

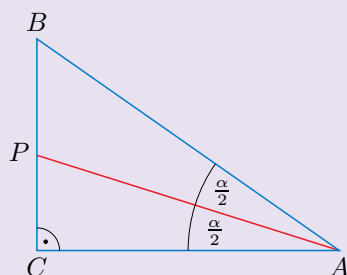
Generator
testów i sprawdzianów

Definicja

Dwusieczną kąta nazywamy półprostą o początku w wierzchołku kąta, dzielącą ten kąt na dwa kąty o równych miarach.



Ćwiczenie 2



- a) $15^\circ, 60^\circ, 105^\circ$
b) $17,5^\circ, 55^\circ, 107,5^\circ$

Ćwiczenie 3

Trójkąt AEO: $16^\circ, 128^\circ, 36^\circ$
Trójkąt EBO: $52^\circ, 54^\circ, 74^\circ$
Trójkąt BFO: $54^\circ, 56^\circ, 70^\circ$
Trójkąt FCO: $124^\circ, 20^\circ, 36^\circ$
Trójkąt CGO: $20^\circ, 86^\circ, 74^\circ$
Trójkąt GAO: $94^\circ, 16^\circ, 70^\circ$

Przykład 1

Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC o kącie prostym przy wierzchołku B (rysunek poniżej). Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie P . Oblicz miarę kąta APC .

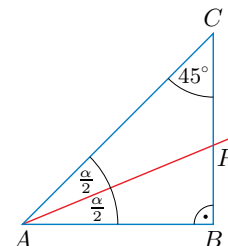
Trójkąt ABC jest prostokątny równoramienny, więc:

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BCA| = 45^\circ$$

Stąd:

$$|\sphericalangle CAP| = \frac{1}{2} \cdot 45^\circ = 22,5^\circ$$

Zatem $|\sphericalangle APC| = 180^\circ - (45^\circ + 22,5^\circ) = 112,5^\circ$.

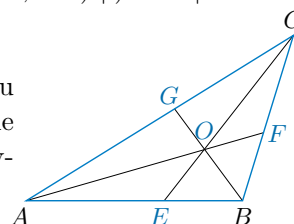


Ćwiczenie 2

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C . Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie P . Oblicz miary kątów trójkąta APB w przypadku, gdy: a) $|\sphericalangle BAC| = 30^\circ$, b) $|\sphericalangle BAC| = 35^\circ$.

Ćwiczenie 3

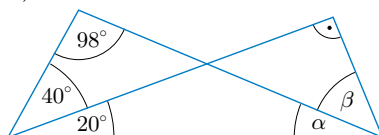
Miary kątów CAB i CBA trójkąta ABC na rysunku obok są odpowiednio równe 32° i 108° . Dwusieczne kątów tego trójkąta dzielą go na sześć trójkątów. Wyznacz miary kątów tych trójkątów.



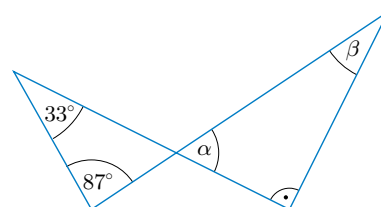
Zadania

1. Wyznacz miary kątów α i β .

a)



b)

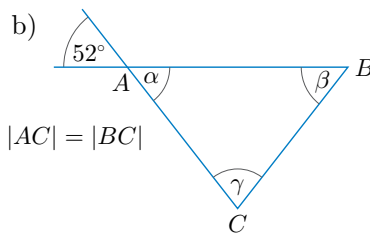
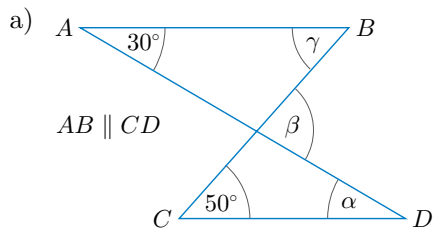


2. Stosunek miar dwóch kątów trójkąta wynosi $2:3$, a miara trzeciego kąta jest o 26° większa od miary najmniejszego kąta. Wyznacz miary kątów tego trójkąta.

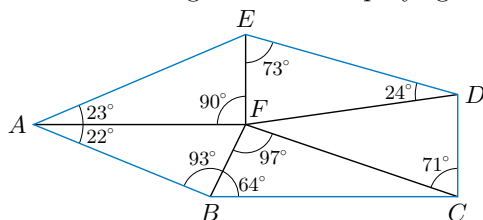
Odpowiedzi do zadań

1. a) $\alpha = 22^\circ, \beta = 48^\circ$
b) $\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ$
2. 2α – najmniejszy kąt
 $2\alpha + 3\alpha + (2\alpha + 26^\circ) = 180^\circ$
 $\alpha = 22^\circ$
Kąty trójkąta są równe $44^\circ, 66^\circ, 70^\circ$.

3. Wyznacz miary kątów α , β i γ .



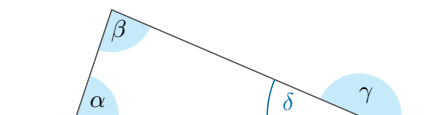
4. Do wykonania pomiarów geodezyjnych wykorzystuje się metodę zwaną **triangulacją**. Polega ona na podzieleniu mierzonego obszaru na przylegające do siebie trójkąty, czyli utworzeniu tak zwanej siatki triangulacyjnej. Oblicz brakujące miary kątów narysowanego obok fragmentu siatki triangulacyjnej.



5. Dany jest trójkąt równoramienny ABC o ramionach AC i BC oraz kącie między nimi 40° . Oblicz miary kątów trójkątów powstałych z podzielenia trójkąta ABC dwusieczną kąta: a) ACB , b) CAB .
6. Miary kątów przyległych różnią się o 32° . Wyznacz te miary.

- ☐ 7. Uzasadnij, że dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe.

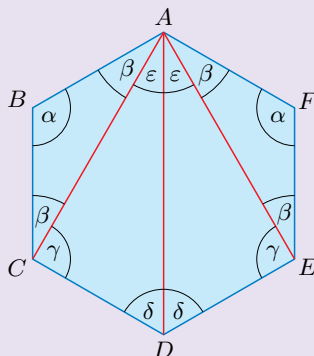
- ☐ 8. Wykaż, że miara kąta zewnętrznego γ trójkąta (rysunek obok) jest równa sumie miar kątów wewnętrznych α i β .



- ☐ 9. Wykaż, że suma miar kątów wewnętrznych czworokąta jest równa 360° .
Wskazówka. Podziel czworokąt przekątną na dwa trójkąty.

10. Ile wynosi suma miar kątów wewnętrznych:
a) pięciokąta, b) sześciokąta, c) n -kąta?
11. Suma miar kątów wewnętrznych pewnego wielokąta jest równa 1440° . Ile boków ma ten wielokąt?
12. Przekątne sześciokąta foremnego poprowadzone z jednego z jego wierzchołków podzieliły go na cztery trójkąty. Wyznacz miary kątów tych trójkątów.

12. $\alpha = 120^\circ$ – kąt wewnętrzny sześciokąta foremnego
Trójkąt ABC jest równoramienny, więc:
 $\beta = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 30^\circ$
 $\gamma = 120^\circ - \beta = 90^\circ$
 $\delta = \frac{1}{2}\alpha = 60^\circ$
 $\varepsilon = 180^\circ - (\gamma + \delta) = 30^\circ$



3. a) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 80^\circ$, $\gamma = 50^\circ$

- b) $\alpha = 52^\circ$, $\beta = 52^\circ$, $\gamma = 76^\circ$

4. $|\angle AEF| = 67^\circ$,
 $|\angle AFB| = 65^\circ$,
 $|\angle BCF| = 19^\circ$,
 $|\angle EFD| = 83^\circ$,
 $|\angle DFC| = 25^\circ$,
 $|\angle CDF| = 84^\circ$

5. a) oba trójkąty: 20° , 70° , 90°

- b) $\triangle ABE$: 35° , 70° , 75° ,

- $\triangle AEC$: 35° , 40° , 105°

6. α , $\alpha + 32^\circ$ – miary kątów przyległych

$$\alpha + \alpha + 32^\circ = 180^\circ$$

$$2\alpha = 148^\circ$$

$$\alpha = 74^\circ, \alpha + 32^\circ = 106^\circ$$

7. Niech α , β będą kątami przyległymi, czyli $\alpha + \beta = 180^\circ$. Dwusieczna kąta α dzieli ten kąt na dwa kąty o miarach $\frac{\alpha}{2}$. Dwusieczna kąta β dzieli ten kąt na dwa kąty o miarach $\frac{\beta}{2}$. Stąd kąt między dwusiecznymi ma miarę:

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$$

Zatem dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe.

8. Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180° , zatem $\delta = 180^\circ - \alpha - \beta$ oraz $\gamma = 180^\circ - \delta =$
 $= 180^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta) =$
 $= \alpha + \beta$

9. Dowolny czworokąt możemy podzielić na dwa trójkąty. Suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie jest równa 180° . Zatem suma miar kątów wewnętrznych w czworokącie jest równa 360° .

10. a) 540°

- b) 720°

- c) $(n - 2) \cdot 180^\circ$

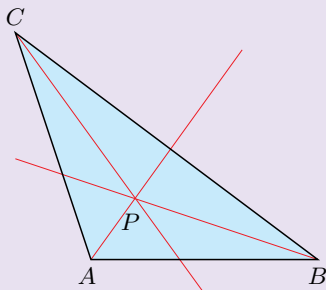
11. Niech n – liczba boków.

$$(n - 2) \cdot 180^\circ = 1440^\circ$$

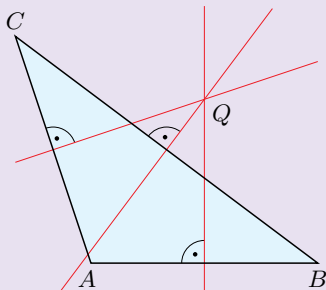
$$n = 10$$

Trójkąt rozwartokątny

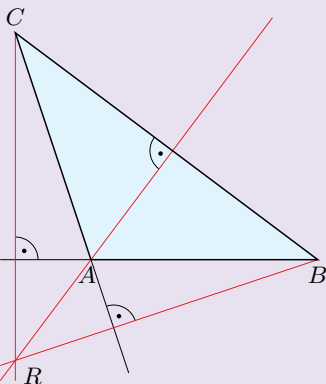
Punkt przecięcia dwusiecznych



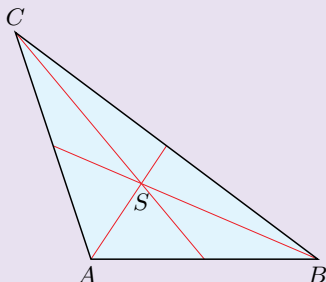
Punkt przecięcia symetralnych boków



Ortocentrum trójkąta



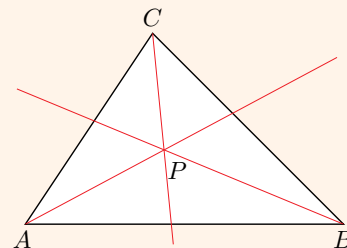
Barycentrum trójkąta



Punkty specjalne w trójkącie

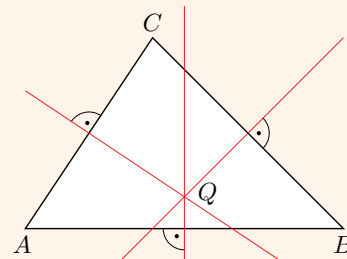
Dwusieczną kąta nazywamy półprostą o początku w wierzchołku kąta dzielącą ten kąt na dwa kąty o równych miarach.

Dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



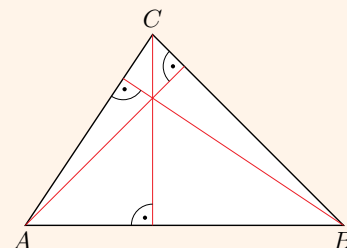
Symetralną odcinka nazywamy prostą prostopadłą do tego odcinka przechodzącą przez jego środek.

Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



Wysokością trójkąta nazywamy odcinek prostopadły do boku trójkąta łączący ten bok (lub jego przedłużenie) z przeciwnym wierzchołkiem.

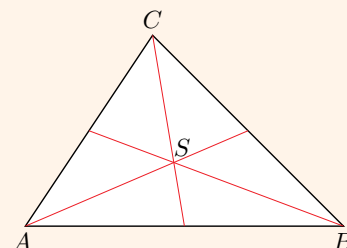
Proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



Punkt przecięcia wysokości trójkąta nazywamy **ortocentrum trójkąta**.

Środkową trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

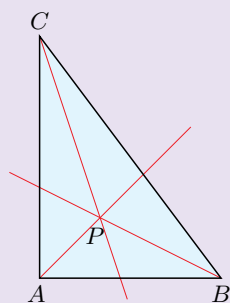
Środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



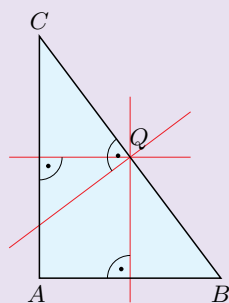
Punkt przecięcia środkowych trójkąta nazywamy **środkiem ciężkości** lub **barycentrum trójkąta**. Punkt ten dzieli każdą ze środkowych w stosunku 2 : 1, gdy liczymy od wierzchołka.

Trójkąt prostokątny

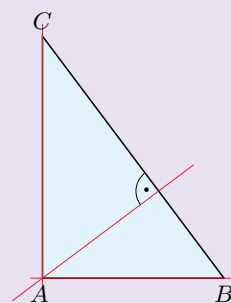
Punkt przecięcia dwusiecznych



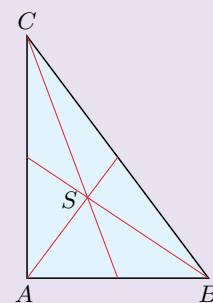
Punkt przecięcia symetralnych boków



Ortocentrum trójkąta ($R = A$)



Barycentrum trójkąta



6.2. Trójkąty przystające

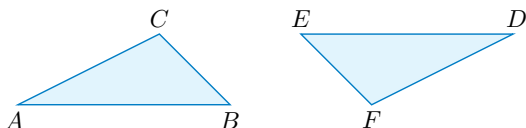
Figury **przystające** to, intuicyjnie, figury tego samego kształtu i wielkości. Dwa wielokąty są **przystające**, jeśli ich odpowiednie boki i odpowiednie kąty są równe.

Na tej lekcji omówimy przystawanie trójkątów.

Długość odcinka AB będziemy oznaczać $|AB|$.

Ćwiczenie 1

Trójkąty przedstawione na poniższym rysunku są przystające. Wskaż pary równych boków i równych kątów.



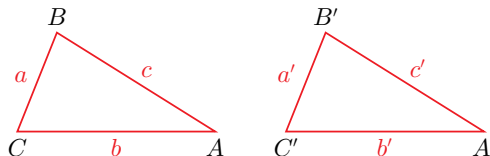
Do stwierdzenia, że trójkąty są przystające, nie jest konieczne porównanie aż 6 par wielkości (3 par kątów i 3 par boków). Przypomnijmy twierdzenia pozwalające wnioskować o przystawaniu trójkątów zwane **cechami przystawania trójkątów**.

Cecha BBB

Jeśli trzy boki jednego trójkąta są równe odpowiednim trzem bokom drugiego trójkąta, to trójkąty te są przystające.

Jeśli $a = a'$, $b = b'$ i $c = c'$,
to trójkąty ABC i $A'B'C'$ są
przystające, co zapisujemy:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

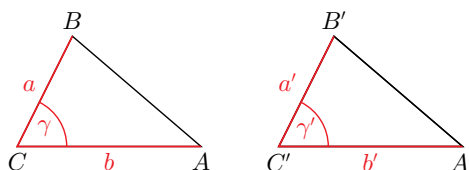


Cecha BKB

Jeśli dwa boki i kąt zawarty między nimi w jednym trójkącie są równe odpowiednim dwóm bokom i kątowi zawartemu między nimi w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.

Jeśli $a = a'$, $b = b'$ i $\gamma = \gamma'$, to:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$



Uczeń:

- podaje definicję trójkątów przystających oraz cechy przystawania trójkątów,
- wskazuje trójkąty przystające,
- stosuje nierówność trójkąta do rozwiązywania zadań,
- stosuje cechy przystawania trójkątów w zadaniach na dowodzenie.

Ćwiczenie 1

$$|AB| = |DE|,$$

$$|AC| = |DF|,$$

$$|BC| = |EF|,$$

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle EDF|,$$

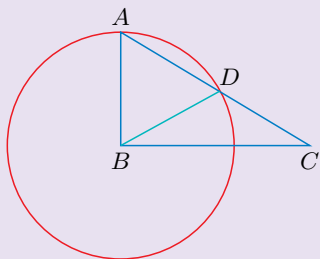
$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF|,$$

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle DFE|$$

Ćwiczenie 2

a) Nie muszą być przystające, ponieważ mimo równych kątów odpowiednie boki mogą mieć różne długości. Na przykład: dwa trójkąty równoboczne, każdy o różnej długości boku. Miary wszystkich kątów obydwu trójkątów są równe 60° , ale trójkąty nie są przystające.

b) Nie. Weźmy okrąg o środku w punkcie B i promieniu $|BA|$.



Trójkąty ACB i DCB mają jedną parę równych kątów: $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DCB|$ oraz dwie pary równych boków: wspólny bok BC i $|BA| = |BD|$, jako promienie okręgu. Trójkąty ABC i DBC nie są przystające.

Ćwiczenie 3

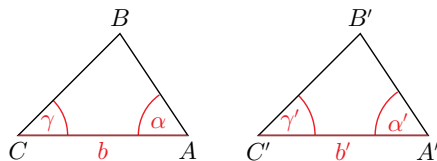
- KBK
- BKB
- KBK

Cecha KBK

Jeśli bok i dwa leżące przy nim kąty w jednym trójkącie są równe odpowiedniemu bokowi i dwóm leżącym przy nim kątom w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.

Jeśli $b = b'$, $\alpha = \alpha'$ i $\gamma = \gamma'$, to:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$



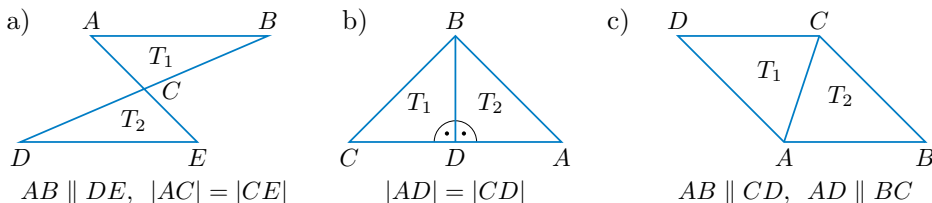
Ćwiczenie 2

Czy przystające są trójkąty, o których wiadomo, że:

- trzy kąty jednego z nich są równe trzem kątom drugiego,
- mają jedną parę równych kątów i dwie pary równych boków?

Ćwiczenie 3

Podaj cechę przystawania, na podstawie której można stwierdzić, że trójkąty T_1 i T_2 są przystające.



Przykład 1

Uzasadnij, że dowolny punkt symetralnej odcinka jest równo oddalony od końców tego odcinka.

Rozpatrzmy odcinek AB o środku S i jego symetralną l .

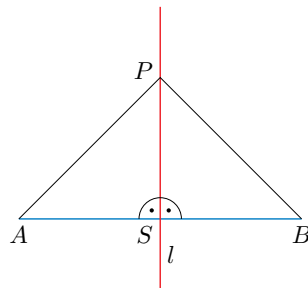
Niech P będzie dowolnym punktem symetralnej.

Jeśli $P = S$, to $|AP| = |BP|$.

Założmy teraz, że $P \neq S$.

Korzystając z cechy BKB, stwierdzamy, że trójkąty ASP i BSP są przystające (uzasadnij).

Zatem zachodzi równość $|AP| = |BP|$.

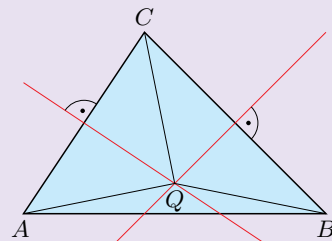


Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że symetralne boków dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

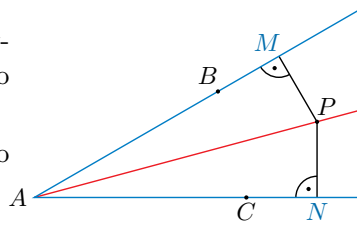
Ćwiczenie 4

Rozpatrzmy trójkąt ABC . Niech Q będzie punktem przecięcia symetralnych boków AC i BC , wówczas $|AQ| = |CQ|$ oraz $|BQ| = |CQ|$. Stąd $|AQ| = |BQ|$, co oznacza, że punkt Q jest równo oddalony od punktów A i B , czyli leży na symetralnej boku AB . Zatem wszystkie symetralne boków trójkąta przecinają się w punkcie Q .



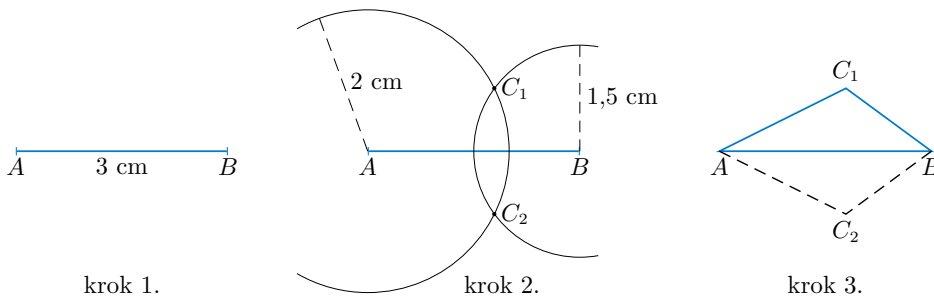
Ćwiczenie 5

- a) Półprosta AP jest dwusieczną kąta BAC (rysunek obok). Uzasadnij, że punkt P jest równo oddalony od ramion tego kąta.
- b) Uzasadnij, że dwusieczne kątów dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



Przykład 2

Skonstruuj (narysuj za pomocą cyrkla i linijki) trójkąt o bokach długości 1,5 cm, 2 cm i 3 cm.



W kroku 2. z punktów A i B zataczamy łuki okręgów, które przecinają się w punkcie C_1 oraz w punkcie C_2 . W wyniku tej konstrukcji otrzymaliśmy dwa trójkąty spełniające podany warunek: $\triangle ABC_1$ i $\triangle ABC_2$.

Zauważmy, że nie z każdych trzech odcinków można zbudować trójkąt. Mówi o tym poniższe twierdzenie.

Nierówność trójkąta

Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a + b > c$$

gdzie c jest długością najdłuższego odcinka.

Ćwiczenie 6

Czy boki trójkąta mogą mieć długości:

- a) 2, 2, $\sqrt{7}$, b) 7, 8, $\sqrt{225}$, c) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, d) 1, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}$?

Ćwiczenie 7

Na ile sposobów można zbudować trójkąt, jeżeli są do dyspozycji dwa odcinki długości 2 cm, trzy odcinki długości 3 cm i dwa odcinki długości 5 cm?

Ćwiczenie 7

Na sześć sposobów:

- 2 dm, 2 dm, 3 dm;
2 dm, 3 dm, 3 dm;
2 dm, 5 dm, 5 dm;
3 dm, 3 dm, 3 dm;
3 dm, 3 dm, 5 dm;
3 dm, 5 dm, 5 dm.

Ćwiczenie 5

- a) Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Dwusieczna kąta dzieli ten kąt na dwa kąty o równych miarach:

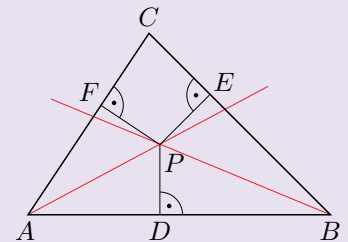
$$|\angle MAP| = |\angle NAP|$$

Stąd:

$$|\angle APM| = 90^\circ - |\angle MAP| = 90^\circ - |\angle NAP| = |\angle APN|$$

Bok AP jest wspólnym bokiem trójkątów AMP i ANP . Zatem na podstawie cechy KBK trójkąty AMP i ANP są przystające, czyli $|PM| = |PN|$.

- b) Rozpatrzmy trójkąt ABC .



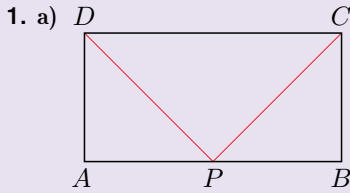
Niech P będzie punktem przecięcia dwusiecznych kątów A i B .

Korzystając z punktu a), mamy: $|PD| = |PF|$ oraz $|PD| = |PE|$. Stąd $|PF| = |PE|$, co oznacza, że punkt P leży na dwusiecznej kąta C . Zatem wszystkie dwusieczne kątów dowolnego trójkąta przecinają się w punkcie P .

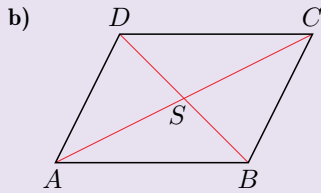
Ćwiczenie 6

- a) tak, $2 + 2 > \sqrt{7}$
b) nie, $7 + 8 = 15 = \sqrt{225}$
c) nie, $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$
d) tak,
 $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} > \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Odpowiedzi do zadań



Punkt P jest środkiem boku AB , czyli $|AP| = |BP|$.
 Ponadto $|AD| = |BC|$ oraz:
 $|\sphericalangle PAD| = |\sphericalangle PBC| = 90^\circ$
 Zatem na podstawie cechy BKB: $\triangle APD \equiv \triangle BPC$.



$|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle SCD|$ oraz
 $|\sphericalangle SBA| = |\sphericalangle SDC|$, gdyż są to kąty naprzemianległe.
 Ponadto $|AB| = |CD|$, czyli z cechy KBK wynika:

$$\triangle ABS \equiv \triangle CDS$$

Zatem $|AS| = |CS|$ oraz $|BS| = |DS|$, co oznacza, że punkt przecięcia przekątnych równoległoboku dzieli je na połowy.

4. Na podstawie cechy BKB:

$$\triangle BQA \equiv \triangle BPC$$

czyli $|\sphericalangle BAQ| = |\sphericalangle BCP|$.

$$|\sphericalangle ASP| = |\sphericalangle CSP|$$

(kąty wierzchołkowe), zatem:

$$|\sphericalangle APS| = |\sphericalangle CQS|$$

Ponadto $|AP| = |CQ|$, zatem z cechy KBK:

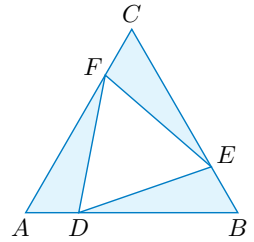
$$\triangle APS \equiv \triangle CQS$$

6. $|\sphericalangle SPQ| = |\sphericalangle PSB| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle SQP| = |\sphericalangle QSA| = \alpha$ (kąty naprzemianległe), czyli trójkąt PSQ jest równoramienny. Stąd $|PS| = |QS|$, z założenia $|SB| = |SA|$. Na mocy cechy BKB: $\triangle PSB \equiv \triangle QSA$, czyli $|\sphericalangle PBS| = |\sphericalangle QAS| = \beta$ oraz $|PB| = |QA|$.
 $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle QAD| = 90^\circ - \beta$ oraz $|CB| = |DA|$.
 Zatem na podstawie cechy BKB: $\triangle PBC \equiv \triangle QAD$, czyli $|PC| = |QD|$.

Zadania

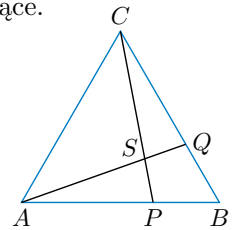
- D** 1. a) W prostokącie $ABCD$ punkt P jest środkiem boku AB . Uzasadnij, że trójkąty APD i BPC są przystające.

b) Uzasadnij, że punkt przecięcia przekątnych równoległoboku dzieli je na połowy.



- D** 2. Trójkąt ABC jest równoboczny (rysunek obok). Odcinki AD , BE i CF mają równe długości. Uzasadnij, że trójkąt DEF też jest równoboczny.

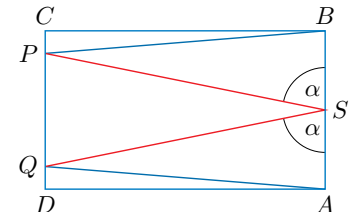
- D** 3. Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C . Środkowe AP i BQ tego trójkąta przecinają się w punkcie O . Uzasadnij, że trójkąty AOQ i BOP są przystające.



- D** 4. W trójkącie równobocznym ABC (rysunek obok) na bokach AB i BC wybrano odpowiednio punkty P i Q tak, że $|AP| = 2|BP|$ i $|CQ| = 2|BQ|$. Odcinki AQ i CP przecinają się w punkcie S . Uzasadnij, że trójkąty APS i CQS są przystające.

- D** 5. W czworokącie wypukłym $ABCD$ dwie pary boków są równe: $|AB| = |BC|$ oraz $|CD| = |DA|$. Przekątne AC i BD tego czworokąta przecinają się w punkcie O . Uzasadnij, że trójkąt AOB jest przystający do trójkąta COB oraz że trójkąt AOD jest przystający do trójkąta COD .

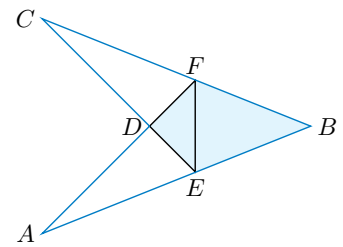
- D** 6. Kula bilardowa odbija się od bandy stołu bilardowego pod takim samym kątem, pod jakim w nią uderzyła (kątem α na rysunku). Kula przebyła drogę z P do S i z S do Q , gdzie S jest środkiem bandy AB . Uzasadnij, że $|PC| = |QD|$.



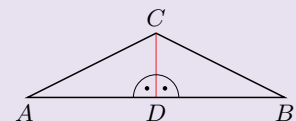
- D** 7. Uzasadnij, że jeśli wysokość trójkąta zawiera się w dwusiecznej kąta tego trójkąta, to trójkąt ten jest równoramienny.

- D** 8. W czworokącie $ABCD$ (rysunek obok) kąty EFB i FEB są równe oraz $|AE| = |CF|$. Uzasadnij, że:

- a) trójkąty BAF i BCE są przystające,
 b) czworokąt $DEBF$ ma dwie pary boków równych.



7. $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle BDC| = 90^\circ$ oraz $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BCD|$. Stąd na podstawie cechy KBK trójkąty DAC i DBC są przystające. Zatem $|AC| = |BC|$, czyli trójkąt ABC jest równoramienny.



8. a) $|\sphericalangle EFB| = |\sphericalangle FEB|$, czyli $\triangle FBE$ jest równoramienny, stąd $|FB| = |EB|$. Z założenia $|AE| = |CF|$, czyli $|BA| = |BC|$. Trójkąty BAF i BCE mają wspólny kąt przy wierzchołku B . Zatem na podstawie cechy BKB: $\triangle BAF \equiv \triangle BCE$.

b) $\triangle BAF \equiv \triangle BCE$, czyli $|\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle FCD|$.

$|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle CDF| = \beta$ (kąty wierzchołkowe), stąd $|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle CFD|$, ponadto z założenia $|AE| = |CF|$, czyli na podstawie cechy KBK: $\triangle AED \equiv \triangle CFD$. Stąd $|DE| = |DF|$.

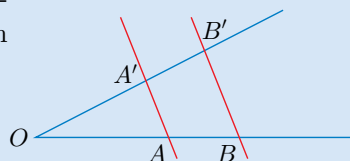
W podpunkcie a) wykazaliśmy, że $|EB| = |FB|$. Zatem czworokąt $DEBF$ ma dwie pary boków równych.

6.3. Twierdzenie Talesa

Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta AOA' są przecięte dwiema prostymi równoległymi AA' i BB' , to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu tego kąta są proporcjonalne do długości odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu:

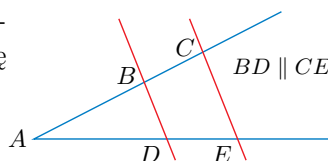
$$\frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|A'B'|}{|AB|} \quad \text{oraz} \quad \frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OB|}$$



Ćwiczenie 1

a) Długość którego odcinka (rysunek obok) należy wstawić w miejsce $?$, aby otrzymać proporcję prawdziwą?

$$\frac{?}{|AE|} = \frac{|AB|}{|AD|}, \quad \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{?}{|DE|}$$



b) Oblicz długość odcinka AD dla $|AB| = 3,6$, $|AC| = 5,4$, $|DE| = 1,2$.

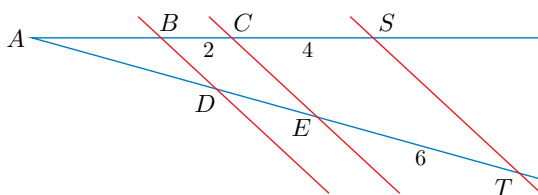
Ćwiczenie 2

Proste BD , CE i ST (rysunek obok) są równoległe.

D a) Uzasadnij, że:

$$\frac{|BC|}{|DE|} = \frac{|CS|}{|ET|}$$

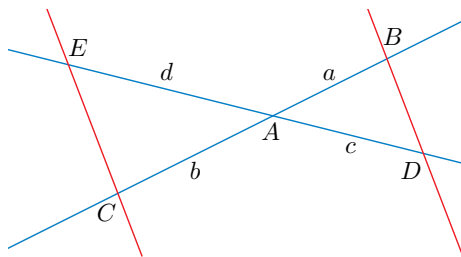
b) Wiadomo, że $|AS| = 10$. Oblicz długości odcinków AD i DE .



Zauważmy, że równość $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ zachodzi również w sytuacji przedstawionej na rysunku poniżej ($BD \parallel CE$).

Ćwiczenie 3

Proste BD i CE są równoległe (rysunek obok) oraz $a = 3,6$, $b = 4,8$, $c = 4,5$. Oblicz długość odcinka ED .



Uczeń:

- podaje twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa,
- wykorzystuje twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa do rozwiązywania zadań,
- wykorzystuje twierdzenie Talesa do podziału odcinka w danym stosunku,
- przeprowadza dowód twierdzenia Talesa,
- przeprowadza dowody twierdzeń z zastosowaniem twierdzenia Talesa.

Ćwiczenie 1

a) $\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|AB|}{|AD|}$, $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|DE|}$

b) $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|BC|}$

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|AC| - |AB|}$$

Stąd $|AD| = 2,4$.

Ćwiczenie 2

a) Z twierdzenia Talesa:

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DE|}, \quad \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|}$$

oraz $\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|CS|}{|ET|}$

Stąd $\frac{|BC|}{|DE|} = \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|CS|}{|ET|}$

b) $|DE| = 3$, $|AD| = 6$

Ćwiczenie 3

$$\frac{3,6}{4,5} = \frac{4,8}{d}, \quad \text{skąd } d = 6.$$

$$|ED| = d + c = 10,5$$

Multibook

- Dowód twierdzenia Talesa z wykorzystaniem pól trójkątów
- Dowód twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 6.3

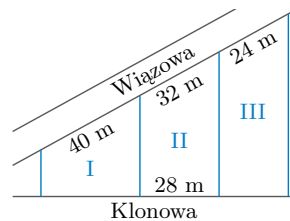
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 4

działka I: 35 m, działka III: 21 m

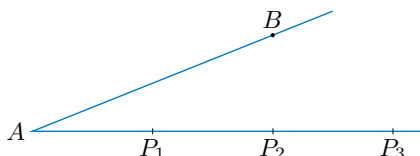
Ćwiczenie 4

Każda z trzech działek budowlanych położonych między ulicami Klonową i Wiązową ma kształt trapezu (rysunek obok). Dla działek I i III oblicz długości boków przylegających do ulicy Klonowej.

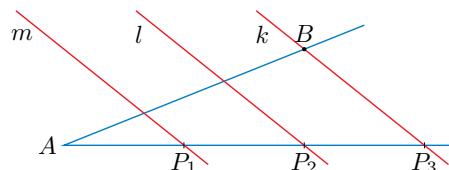


Przykład 1

Za pomocą cyrkla i linijki podzielić dany odcinek AB na trzy równe części.



Odcinek AB umieszczamy na jednym ramieniu kąta. Na drugim ramieniu odmierzymy trzy odcinki tej samej (dowolnej) długości. Są to odcinki AP_1 , P_1P_2 i P_2P_3 .



Przez punkt P_3 i B prowadzimy prostą (prosta k), następnie konstruujemy dwie proste równoległe do prostej k przechodzące przez punkty P_2 i P_1 (proste l i m). Patrz str. 305.

Zgodnie z twierdzeniem Talesa odcinki wyznaczone na ramionach kąta przez proste równoległe są proporcjonalne, więc opisana konstrukcja prowadzi do podziału odcinka AB na trzy równe części.

Ćwiczenie 5

a), b) Analogicznie jak w przykładzie 1 odkładamy a) 5 b) 7 równych odcinków.

c) Analogicznie jak w przykładzie 1 odkładamy 9 równych odcinków. Jeżeli pierwsze 4 części oznaczmy jako odcinek AC , a pozostałe 5 – jako odcinek CB , to odcinek AB będzie podzielony punktem C w stosunku 4:5.

Ćwiczenie 5

Jak za pomocą cyrkla i linijki podzielić dany odcinek:

a) na 5 równych części, b) na 7 równych części, c) w stosunku 4:5?

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa – mówi ono, że z proporcji odpowiednich odcinków wynika równoległość prostych.

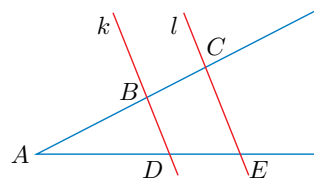
Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

Jeżeli odcinki wyznaczone przez dwie proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta, to te proste są równoległe.

Ćwiczenie 6

a) Podaj przykłady proporcji, z których wynika równoległość prostych k i l (rysunek obok).

b) Uzasadnij, że jeśli $|AB| = 2,4$, $|AC| = 3,6$, $|AD| = 2,8$ i $|DE| = 1,4$, to proste BD i CE są równoległe.



Ćwiczenie 6

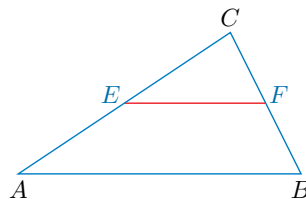
a) np. $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|}$, $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DE|}$, $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CE|}$

b) $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{2,4}{2,8} = \frac{6}{7}$, $\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{3,6}{2,8+1,4} = \frac{6}{7}$, czyli $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|}$.

Zatem z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa proste BD i CE są równoległe.

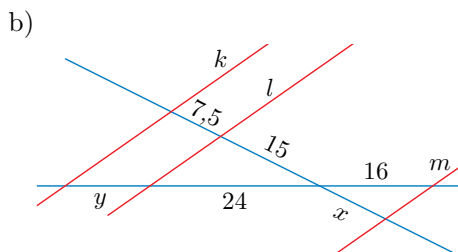
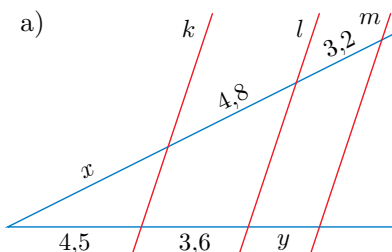
Ćwiczenie 7

Wykaż, że w dowolnym trójkącie odcinek łączący środki dwóch boków jest równoległy do trzeciego boku (rysunek obok).



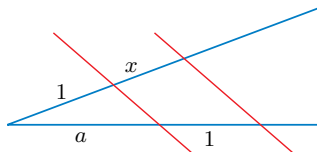
Zadania

1. Proste k , l i m na rysunku są równoległe. Oblicz długości x i y .

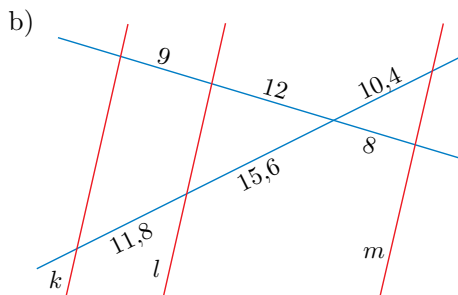
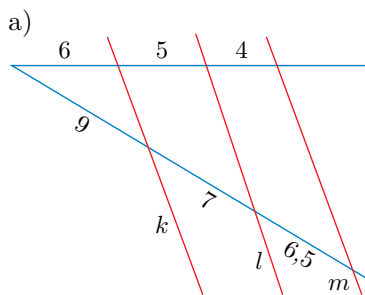


2. Dany jest trapez $ABCD$ o ramionach $|AD| = 9$ cm, $|BC| = 12$ cm. Na ramieniu AD wybrano punkty P i Q takie, że $|AQ| = 7$ cm i $|DP| = 5$ cm. Oblicz długości odcinków, na jakie proste równoległe do podstaw trapezu i przechodzące przez punkty P i Q podzieliły ramię BC .

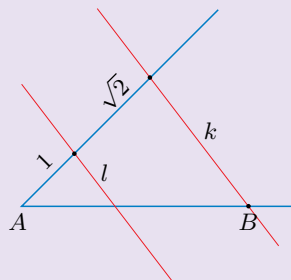
3. Na rysunku pokazano, jak – mając dane odcinki o długościach 1 i a – skonstruować odcinek o długości $x = \frac{1}{a}$. Opisz, jak – mając dane odcinki o długościach 1 i a – skonstruować odcinki o długościach a^2 i a^3 .



4. Opisz, jak podzielić konstrukcyjnie dany odcinek w stosunku $1 : \sqrt{2}$.
5. Sprawdź, które z prostych k , l i m są równoległe.



4. Konstruujemy kwadrat o boku 1 (konstrukcja prostej prostopadłej – patrz s. 305). Jego przekątna ma długość $\sqrt{2}$. Następnie odcinek AB umieszczamy na jednym ramieniu kąta. Na drugim ramieniu odmierzymy odcinki o długościach 1 i $\sqrt{2}$. Przez końce obu odcinków prowadzimy prostą k i konstruujemy prostą l równoległą do k (rysunek obok). Prosta l dzieli odcinek AB w stosunku $1 : \sqrt{2}$.



Ćwiczenie 7

Niech punkt E będzie środkiem boku AC , a punkt F – środkiem boku BC .

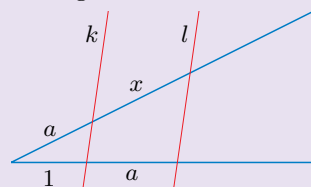
$\frac{|CE|}{|CA|} = \frac{|CF|}{|CB|} = \frac{1}{2}$, zatem na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa mamy: $EF \parallel AB$.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = 6$, $y = 2,4$
b) $x = 10$, $y = 12$

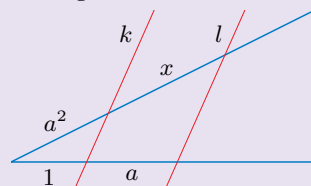
2. $5\frac{1}{3}$ cm, 4 cm, $2\frac{2}{3}$ cm

3. Konstrukcja odcinka o długości a^2 .



Jeżeli $k \parallel l$, to $\frac{a}{1} = \frac{x}{a}$, czyli $x = a^2$.

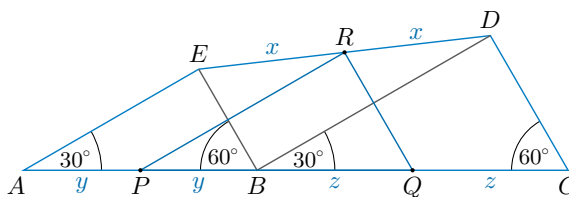
Konstrukcja odcinka o długości a^3 .



Jeżeli $k \parallel l$, to $\frac{a^2}{1} = \frac{x}{a}$, czyli $x = a^3$.

5. a) k i m
b) l i m

6. Punkty P, Q i R są środkami odcinków AB, BC i DE (rysunek poniżej).

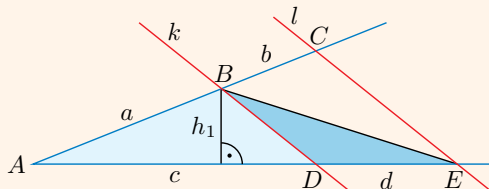


- a) Wykaż, że trójkąt PQR jest prostokątny.
b) Dane są $|AB| = 6$ i $|CD| = 4$. Oblicz obwody trójkątów BDE i PQR .

Czy wiesz, że...

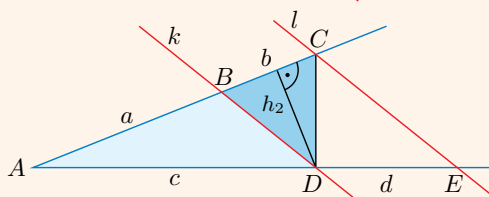
Najstarszy zachowany dowód twierdzenia Talesa to dowód autorstwa Euklidesa przedstawiony poniżej.

Zakładamy, że proste k i l są równoległe (rysunek poniżej).



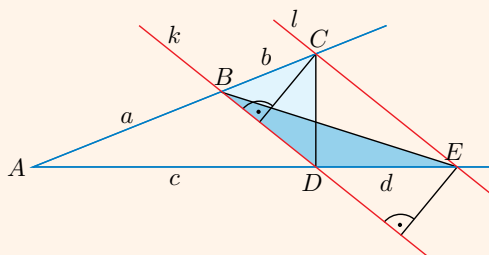
Trójkąty ADB i DEB mają wspólną wysokość h_1 , zatem:

$$\frac{P_{ADB}}{P_{DEB}} = \frac{\frac{1}{2}ch_1}{\frac{1}{2}dh_1} = \frac{c}{d}$$



Trójkąty ADB i CBD mają wspólną wysokość h_2 , zatem:

$$\frac{P_{ADB}}{P_{CBD}} = \frac{\frac{1}{2}ah_2}{\frac{1}{2}bh_2} = \frac{a}{b}$$



Trójkąty DEB i CBD mają wspólną podstawę BD oraz tę samą wysokość (gdyż proste k i l są równoległe). Zatem:

$$P_{DEB} = P_{CBD}$$

Zatem otrzymujemy $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ lub równoważnie $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

$$7. \frac{P_{AEB}}{P_{DEB}} = \frac{\frac{1}{2}(c+d)h_1}{\frac{1}{2}dh_1} = \frac{c+d}{d}$$

$$\frac{P_{ADC}}{P_{CBD}} = \frac{\frac{1}{2}(a+b)h_2}{\frac{1}{2}bh_2} = \frac{a+b}{b}$$

Z równości pól:

$$P_{DEB} = P_{CBD}$$

otrzymujemy:

$$P_{AEB} = P_{ADB} + P_{DEB} =$$

$$= P_{ADB} + P_{CBD} =$$

$$= P_{ADC}$$

Stąd:

$$\frac{c+d}{d} = \frac{a+b}{b}$$

czyli:

$$\frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d}$$

Zatem z równości $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ wynika, że $\frac{a}{c} = \frac{a+b}{c+d}$.

7. Skorzystaj z oznaczeń na rysunku powyżej i uzasadnij, że z równości $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ wynika równość $\frac{a}{c} = \frac{a+b}{c+d}$.

6. a) $\frac{x}{2x} = \frac{y}{2y} = \frac{z}{2z} = \frac{1}{2}$, zatem na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa mamy: $AE \parallel PR \parallel BD$ oraz $CD \parallel QR \parallel BE$.

$\angle RPQ = 30^\circ$, gdyż jest to kąt odpowiadający kątowi EAB , oraz $\angle RQP = 60^\circ$, ponieważ jest to kąt odpowiadający kątowi DCB , zatem $\angle RPQ = 90^\circ$. Zatem trójkąt PQR jest prostokątny.

- b) Zauważmy, że: $|BE| = \frac{1}{2}|AB| = 3$ oraz $|BC| = 2|DC| = 8$. Obliczamy długość odcinka BD : $|BD| = \frac{1}{2}|BC|\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

Zatem $Ob_{\triangle BCD} = 12 + 4\sqrt{3}$. Zauważmy, że trójkąty PQR i BCD są podobne w skali $\frac{7}{8}$, skąd:

$$Ob_{\triangle PQR} = \frac{7}{8}(12 + 4\sqrt{3}) = \frac{7}{2}(3 + \sqrt{3})$$

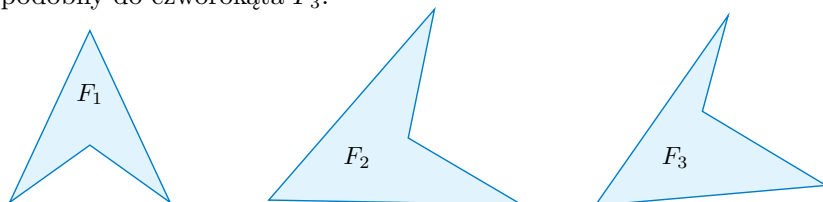
Na mocy twierdzenia Pitagorasa: $|ED| = \sqrt{3^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{57}$.

Zatem $Ob_{\triangle BDE} = 3 + 4\sqrt{3} + \sqrt{57}$.

6.4. Wielokąty podobne

Dwie figury geometryczne są **podobne**, jeśli są tego samego kształtu, lecz niekoniecznie tej samej wielkości. Na przykład podobne są dwa dowolne koła, dwa dowolne kwadraty czy trójkąty równoboczne.

Na rysunku poniżej podobne są czworokąty F_1 i F_2 . Żaden z nich nie jest podobny do czworokąta F_3 .



Definicja

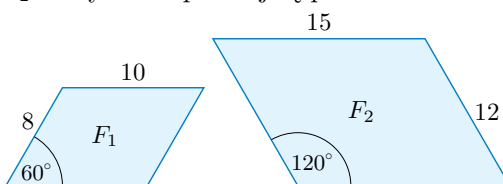
Dwa wielokąty są **podobne**, jeśli ich odpowiednie kąty są równe, a odpowiednie boki proporcjonalne.

Jeśli figury F_1 i F_2 są podobne, to piszemy $F_1 \sim F_2$.

Przykład 1

Uzasadnij, że równoległoboki F_1 i F_2 na rysunku poniżej są podobne.

Długości boków równoległoboków F_1 i F_2 są proporcjonalne, ponieważ $\frac{15}{10} = \frac{12}{8}$, a ich odpowiednie kąty są równe. Zatem $F_1 \sim F_2$.



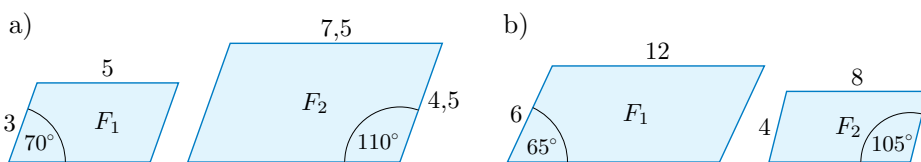
Ćwiczenie 1

Dany jest prostokąt P_1 o bokach $a = 2,4$ i $b = 1,8$. Sprawdź, czy prostokąt ten jest podobny do prostokąta P_2 o bokach c i d .

- a) $c = 3,6$, $d = 2,7$ b) $c = 4$, $d = 6$ c) $c = 54$, $d = 72$

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy równoległoboki F_1 i F_2 są podobne.



Ćwiczenie 2

- a) tak, $\frac{7,5}{5} = \frac{4,5}{3}$ oraz $180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$
b) nie, $180^\circ - 65^\circ \neq 105^\circ$

Uczeń:

- wyjaśnia pojęcie figur podobnych,
- oblicza długości boków w wielokątach podobnych,
- wykorzystuje zależności między obwodami wielokątów podobnych a skalą podobieństwa do rozwiązywania zadań,
- udowadnia elementarne własności wielokątów podobnych.

Ćwiczenie 1

- $\frac{a}{b} = \frac{2,4}{1,8} = \frac{4}{3}$
a) tak, $\frac{c}{d} = \frac{3,6}{2,7} = \frac{4}{3}$
b) nie, $\frac{d}{c} = \frac{6}{4} \neq \frac{4}{3}$
c) tak, $\frac{d}{c} = \frac{72}{54} = \frac{4}{3}$

Multibook

• Figury podobne

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 6.4

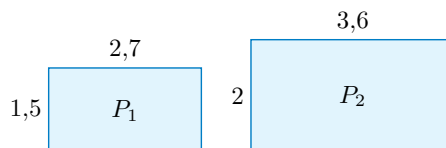
Generator
testów i sprawdzianów

Definicja

Dla wielokątów podobnych stosunek długości odcinków jednego wielokąta do długości odpowiadających im odcinków drugiego wielokąta nazywamy **skala podobieństwa** (zwykle oznaczamy ją literą k).

Przykład 2

Prostokąty P_1 i P_2 (rysunek obok) są podobne. Podaj skalę podobieństwa prostokąta P_2 do prostokąta P_1 oraz prostokąta P_1 do prostokąta P_2 .



Skala podobieństwa prostokąta P_2 do prostokąta P_1 jest równa:

$$k_1 = \frac{2}{1,5} = \frac{4}{3}$$

Zauważ, że również $\frac{3,6}{2,7} = \frac{4}{3}$.

Skala podobieństwa prostokąta P_1 do prostokąta P_2 jest równa:

$$k_2 = \frac{1,5}{2} = \frac{3}{4}$$

Zauważ, że skale podobieństwa k_1 i k_2 są liczbami odwrotnymi.

Zwróć uwagę, że jeśli figury F_1 i F_2 są przystające, to są podobne, a ich skala podobieństwa jest równa 1.

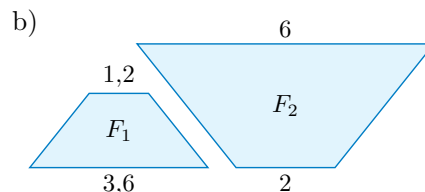
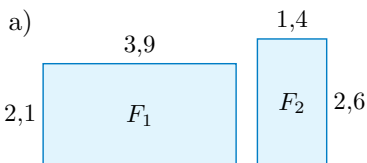
Ćwiczenie 3

a) F_2 do F_1 : $\frac{2}{3}$, F_1 do F_2 : $\frac{3}{2}$

b) F_2 do F_1 : $\frac{5}{3}$, F_1 do F_2 : $\frac{3}{5}$

Ćwiczenie 3

Figury F_1 i F_2 są podobne. Podaj skalę podobieństwa figury F_2 do figury F_1 oraz skalę podobieństwa figury F_1 do figury F_2 .



Przykład 3

Dane są prostokąty P_1 o bokach $a_1 = 5$ i $b_1 = 8$ oraz podobny do niego P_2 o krótszym boku $a_2 = 15$. Oblicz długość drugiego boku prostokąta P_2 .

Oznaczmy przez b_2 długość szukanego boku. Prostokąty są podobne, zatem:

$$\frac{b_2}{8} = \frac{15}{5} \quad \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2}{a_1}$$

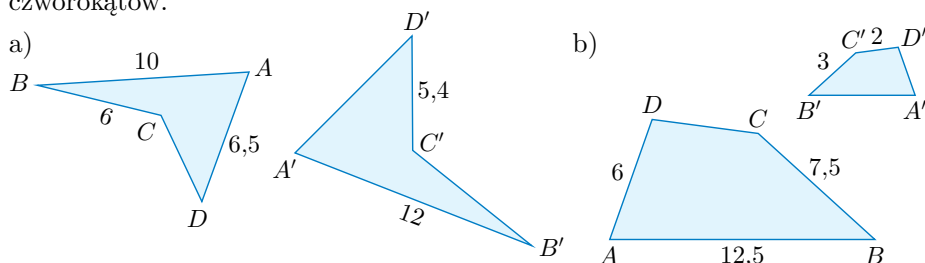
Stąd $\frac{b_2}{8} = 3$, czyli $b_2 = 24$.

Długość boku b_2 można też wyznaczyć, obliczając najpierw skalę podobieństwa. Skala podobieństwa k prostokąta P_2 do prostokąta P_1 jest równa 3, co oznacza, że:

$$b_2 = k \cdot 8 = 3 \cdot 8 = 24$$

Ćwiczenie 4

Czworokąty $ABCD$ i $A'B'C'D'$ są podobne. Oblicz skalę podobieństwa czworokąta $ABCD$ do czworokąta $A'B'C'D'$ oraz brakujące długości boków tych czworokątów.



Ćwiczenie 5

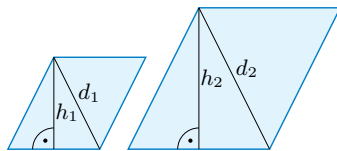
Przeczytaj informację w ramce, a następnie wyznacz szukane wielkości.

Dany jest równoległobok $ABCD$ o bokach długości 6 cm i 12 cm. Jego krótsza przekątna tworzy z jego krótszym bokiem kąt prosty. Równoległobok $A'B'C'D'$ jest podobny do równoległoboku $ABCD$, a jego krótsza przekątna ma długość $9\sqrt{3}$ cm.

- Oblicz obwód równoległoboku $A'B'C'D'$.
- Oblicz wysokości obu równoległoboków.

Jeśli dwa wielokąty są podobne w skali k , to proporcjonalne są nie tylko ich boki, lecz także inne odpowiadające sobie odcinki, na przykład wysokości czy przekątne.

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{d_1}{d_2} = k$$



Zadania

- Oblicz skalę podobieństwa kwadratu K_1 o boku 5 cm do kwadratu K_2 :
 - o przekątnej $8\sqrt{2}$ cm,
 - o obwodzie 40 cm.
 - Trapez o podstawach długości 4 cm i 9 cm podzielono prostą równoległą do podstaw na dwa trapezy podobne. Oblicz skalę podobieństwa otrzymanych trapezów.
 - Dany jest prostokąt P o bokach długości 12 cm i 8 cm. Oblicz obwód prostokąta P' w przypadku, gdy skala podobieństwa prostokąta:
 - P' do P jest równa 3,
 - P do P' jest równa 2.
- D** 4. Uzasadnij, że dwa prostokąty są podobne, gdy stosunek długości do szerokości jest w obu prostokątach taki sam.

- $Ob' = 40 \cdot 3 = 120$ [cm]
 - $Ob' = 40 \cdot \frac{1}{2} = 20$ [cm]
- W prostokątach wszystkie kąty mają miarę 90° , więc warunek równości odpowiednich kątów jest spełniony. Do wykazania pozostała proporcjonalność odpowiednich boków. Rozważmy dwa prostokąty o bokach odpowiednio: a, b i a', b' . Z założenia $\frac{a}{b} = k$ oraz $\frac{a'}{b'} = k$, czyli $a = bk$ oraz $a' = b'k$, stąd $\frac{a}{a'} = \frac{bk}{b'k} = \frac{b}{b'}$. Zatem prostokąty te są podobne.

Komentarz

Warto zwrócić uwagę uczniom na to, że zwyczajowo pojęcia wysokości i promienia są utożsamiane z ich długościami, dlatego nie używamy zwrotów „długość wysokości” ani „długość promienia”.

Ćwiczenie 4

- $k = \frac{5}{6}$, $|CD| = 4,5$, $|A'D'| = 7,8$, $|B'C'| = 7,2$
- $k = 2,5$, $|CD| = 5$, $|A'B'| = 5$, $|A'D'| = 2,4$

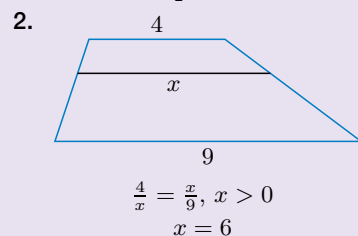
Ćwiczenie 5

Krótsza przekątna równoległoboku $ABCD$: $d = 6\sqrt{3}$, stąd skala podobieństwa $A'B'C'D'$ do $ABCD$ wynosi: $k = \frac{3}{2}$.

- $Ob_{ABCD} = 36$ cm, czyli $Ob_{A'B'C'D'} = 36 \cdot \frac{3}{2} = 54$ [cm]
- Niech krótsza przekątna równoległoboku $ABCD$ łączy wierzchołki B i D , wówczas pole trójkąta ABD :
 $P_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3}$,
 czyli $h_1 = 3\sqrt{3}$ cm.
 $P_{ABCD} = 36\sqrt{3} = 6 \cdot h_2$
 Stąd druga wysokość $h_2 = 6\sqrt{3}$ cm.
 Wysokości $A'B'C'D'$:
 $h'_1 = 3\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$ [cm],
 $h'_2 = 6\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = 9\sqrt{3}$ [cm].

Odpowiedzi do zadań

- Bok K_2 ma długość 8 cm, czyli skala podobieństwa K_1 do K_2 : $k = \frac{5}{8}$.
 - Bok K_2 ma długość 10 cm, czyli skala podobieństwa K_1 do K_2 : $k = \frac{1}{2}$.

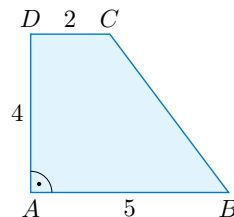


Zatem skala podobieństwa:
 $k = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

5. a) Długość boku mniejszego rombu: $a_1 = 10$
 Obwody rombów: $Ob_1 = 40$,
 $Ob_2 = \frac{5}{2} \cdot 40 = 100$
 b) Bok rombu $ABCD$:
 $a = 13$, czyli $Ob_{ABCD} = 52$
 Skala podobieństwa rombów:
 $k = \frac{78}{52} = \frac{3}{2}$
6. $|CB| = 5$, $Ob_{ABCD} = 16$
 Skala podobieństwa $A'B'C'D'$ do $ABCD$: $k = \frac{24}{16} = 1,5$
 Długości boków trapezu $A'B'C'D'$: 3; 6; 7,5; 7,5
7. $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot h$,
 czyli $h = 7,2$ cm
 $h' = 7,2 \cdot \frac{25}{24} = 7,5$ [cm]
 $Ob_{ABC} = 36$ cm
 Suma obwodów:
 $36 + \frac{25}{24} \cdot 36 = 73,5$ [cm]
8. $\begin{cases} a_1 = a_2\sqrt{2} \\ a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{2} = 2 \\ a_1 = 2\sqrt{2} - 2 \\ a_2 = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$
 Suma obwodów: $4\sqrt{2}$
9. $|AC| = 16$, czyli $|AB| = 8\sqrt{3}$
 $Ob_{ABCD} = 16 + 16\sqrt{3}$
 Skala podobieństwa:
 $k = \frac{20(1+\sqrt{3})}{16(1+\sqrt{3})} = 1,25$
10. $x > 4$, więc $x + 5 > 6$
 Z podobieństwa prostokątów:
 $\frac{x}{x+5} = \frac{4}{6}$, czyli $x = 10$.
 Zatem suma obwodów tych prostokątów jest równa:
 $28 + 42 = 70$

5. a) Dwa romby są podobne w skali $k = \frac{5}{2}$. Długości przekątnych mniejszego z nich są równe 12 i 16. Oblicz obwód każdego z tych rombów.
 b) Przekątne rombu $ABCD$ mają długości 10 i 24. Obwód podobnego do niego rombu $A'B'C'D'$ jest równy 78. Oblicz skalę podobieństwa większego rombu do mniejszego.

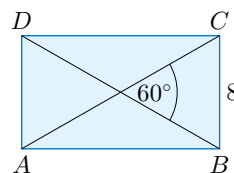
6. Trapez $A'B'C'D'$ o obwodzie równym 24 jest podobny do trapezu prostokątnego $ABCD$ (rysunek obok). Oblicz długości boków trapezu $A'B'C'D'$.



7. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o bokach długości 9 cm, 12 cm i 15 cm. Trójkąt $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC w skali $k = \frac{25}{24}$. Oblicz wysokość opuszczoną na przeciwprostokątną w każdym z tych trójkątów oraz sumę ich obwodów.

8. Dwa kwadraty o przekątnych długości d_1 i d_2 są podobne w skali $k = \sqrt{2}$ oraz wiadomo, że $d_1 + d_2 = 2$. Oblicz sumę obwodów tych kwadratów.

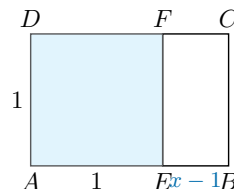
9. Prostokąt $A'B'C'D'$ jest podobny do prostokąta $ABCD$ (rysunek obok). Obwód prostokąta $A'B'C'D'$ jest równy $20 + 20\sqrt{3}$. Oblicz skalę podobieństwa tych figur.



- D** 10. Prostokąt o bokach długości x i 4, gdzie $x > 4$, jest podobny do prostokąta o bokach długości 6 i $x + 5$. Uzasadnij, że suma obwodów tych prostokątów jest równa 70.

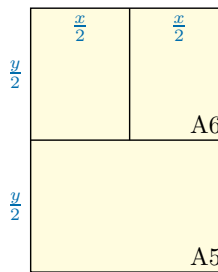
- D** 11. Dany jest prostokąt $ABCD$ o bokach długości $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i 1 (rysunek obok). Uzasadnij, że po odcięciu od tego prostokąta kwadratu o boku 1 otrzymamy prostokąt $BCFE$ podobny do prostokąta $ABCD$.

Uwaga. Liczba $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ nosi nazwę **złotej liczby**.



- 12.** Arkusz papieru formatu A4 jest prostokątem, który po złożeniu na pół daje dwa arkusze formatu A5 będące prostokątami podobnymi do wyjściowego prostokąta.

- a) Jaki jest stosunek długości boków arkusza A4?
 b) Krótszy bok arkusza A4 ma długość 21 cm. Jaką długość ma dłuższy bok? Odpowiedź podaj w zaokrągleniu z dokładnością do 1 mm.
 c) Jakie są wymiary arkusza A5, a jakie – arkusza A6?



11. W prostokątach wszystkie kąty mają miarę 90° , czyli warunek równości odpowiednich kątów jest spełniony. Do wykazania pozostała proporcjonalność odpowiednich boków.

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{|AD|}{|BE|} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Zatem $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BE|}$, czyli prostokąty $ABCD$ i $BCFE$ są podobne.

12. a) $\frac{y}{x} = \frac{x}{y}$, skąd $\frac{y^2}{x^2} = 2$, czyli $\frac{y}{x} = \sqrt{2}$.
 Zatem stosunek długości boków wynosi $\sqrt{2} : 1$.
 b) $\frac{y}{21} = \sqrt{2}$, czyli $y = 21\sqrt{2}$ cm ≈ 297 mm.
 c) Arkusz A5: 21 cm $\times$ 14,8 cm, arkusz A6: 10,5 cm $\times$ 14,8 cm

6.5. Trójkąty podobne

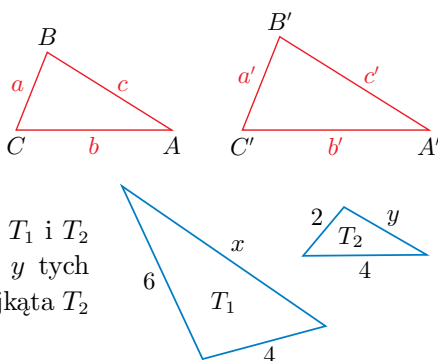
Aby ustalić podobieństwo trójkątów, nie musimy sprawdzać równości wszystkich kątów i proporcjonalności wszystkich boków. Możemy skorzystać z twierdzeń znanych jako **cechy podobieństwa trójkątów**.

Cecha BBB

Jeśli trzy boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich trzech boków drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

Jeśli $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, to trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne, co zapisujemy:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



Ćwiczenie 1

Przedstawione na rysunku obok trójkąty T_1 i T_2 są podobne. Oblicz długości boków x i y tych trójkątów. Podaj skalę podobieństwa trójkąta T_2 do trójkąta T_1 .

Ćwiczenie 2

Dane są długości boków dwóch trójkątów. Czy te trójkąty są podobne?

a) 6, 8, 12 oraz 9, 12, 18

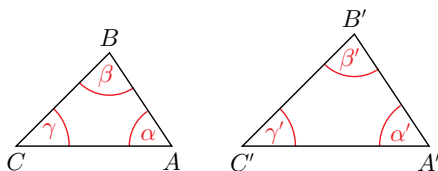
b) $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$ oraz 9, 15, 20

Cecha KKK

Jeśli kąty jednego trójkąta są równe kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

Jeśli $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ oraz $\gamma = \gamma'$, to:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



Ćwiczenie 3

a) Uzasadnij, że jeśli dwa kąty jednego trójkąta są równe dwóm kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

b) Uzasadnij, że trójkąt prostokątny, w którym jeden z kątów ma miarę 27° , jest podobny do trójkąta prostokątnego, w którym jeden z kątów ma miarę 63° .

Ćwiczenie 3

a) Dwa kąty jednego trójkąta są równe dwóm kątom drugiego trójkąta. Niech miary tych kątów będą równe α i β .

Wówczas trzeci kąt pierwszego trójkąta jest równy $180^\circ - (\alpha + \beta)$ oraz trzeci kąt drugiego trójkąta jest równy $180^\circ - (\alpha + \beta)$, czyli kąty te również są równe. Na mocy cechy KKK trójkąty te są podobne.

b) Miary kątów pierwszego trójkąta: 27° , 90° , $90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$

Miary kątów drugiego trójkąta: 63° , 90° , $90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$

Na mocy cechy KKK trójkąty te są podobne.

Uczeń:

- podaje cechy podobieństwa trójkątów,
- sprawdza, czy dane trójkąty są podobne,
- oblicza długości boków trójkąta podobnego do danego w danej skali,
- układa odpowiednią proporcję, aby wyznaczyć długości brakujących boków trójkątów podobnych,
- wykorzystuje podobieństwo trójkątów do rozwiązywania zadań, uzasadnia podobieństwo trójkątów, stosując cechy podobieństwa.

Ćwiczenie 1

$4 < 6 < x$ oraz $2 < y < 4$, zatem:

$$\frac{4}{2} = \frac{6}{y} = \frac{x}{4}$$

czyli $x = 8$, $y = 3$.

Skala jest równa $\frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 2

a) $\frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{12}{18}$, zatem trójkąty są podobne.

b) $\frac{1\frac{1}{2}}{9} \neq \frac{3\frac{1}{2}}{20}$, zatem trójkąty nie są podobne.

Multibook

- Wyznaczanie wysokości budynków z wykorzystaniem podobieństwa trójkątów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 6.5



Ćwiczenie 4

Niech a_1, b_1, a_2, b_2 będą przyprostokątnymi odpowiednio trójkątów T_1 i T_2 .

Z założenia $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ wynika, że:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

Trójkąty T_1 i T_2 są prostokątne, czyli kąt między przyprostokątnymi w każdym z trójkątów ma miarę 90° . Zatem na mocy cechy BKB: $T_1 \sim T_2$.

Ćwiczenie 5

a) Kąty między przyprostokątnymi są równe oraz równe są stosunki odpowiednich boków:

$$\frac{3,75}{5} = \frac{9}{12}$$

więc na podstawie cechy BKB:

$$T_1 \sim T_2$$

Skala podobieństwa: $k = \frac{3}{4}$.

b) Przyprostokątne trójkąta T_1 : $\sqrt{3}$ i $\sqrt{6}$.

Przyprostokątne trójkąta T_2 : 3 i $3\sqrt{2}$.

Kąty między przyprostokątnymi są równe oraz równe są stosunki odpowiednich boków:

$$\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

więc na mocy cechy BKB:

$$T_1 \sim T_2$$

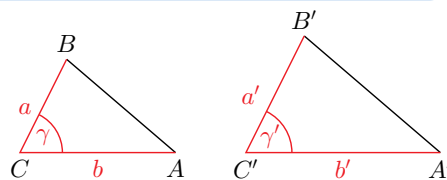
Skala podobieństwa: $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Cecha BKB

Jeśli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta i kąty zawarte między tymi bokami są równe, to trójkąty te są podobne.

Jeśli $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ oraz $\gamma = \gamma'$, to:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



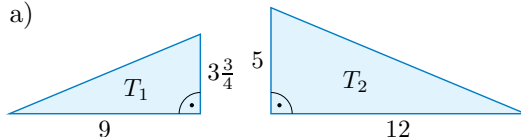
Ćwiczenie 4

Dane są trójkąty prostokątne T_1 i T_2 . Uzasadnij, że jeśli stosunek długości przyprostokątnych trójkąta T_1 równa się stosunkowi długości przyprostokątnych trójkąta T_2 , to trójkąty te są podobne.

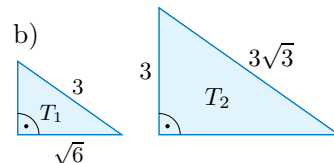
Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że trójkąty T_1 i T_2 są podobne. Podaj skalę podobieństwa trójkąta T_1 do trójkąta T_2 .

a)

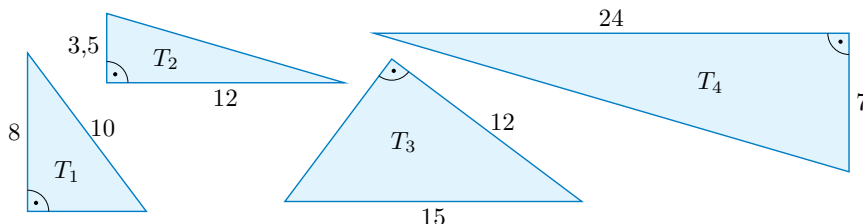


b)



Zadania

1. Wśród trójkątów przedstawionych na rysunku wskaż pary trójkątów podobnych. Dla każdej pary podaj skalę podobieństwa.

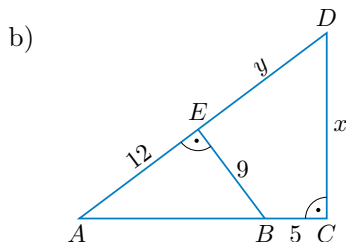
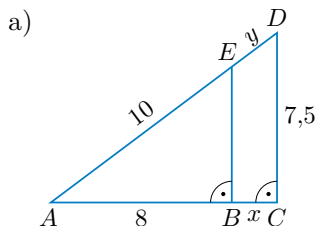


2. a) Dany jest trójkąt ABC o bokach długości 6, 8, 12. Długość najdłuższego boku trójkąta $A'B'C'$ jest równa 16 oraz $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Jaka jest skala podobieństwa trójkąta $A'B'C'$ do trójkąta ABC ? Oblicz obwód trójkąta $A'B'C'$.
- b) Trójkąt ABC , którego obwód jest równy 55, jest podobny do trójkąta o bokach długości 4, 8, 10. Oblicz długości boków trójkąta ABC .

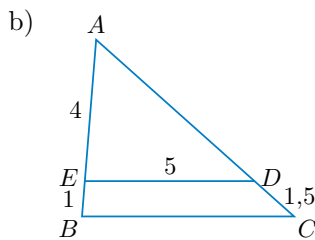
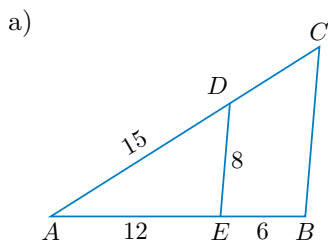
Odpowiedzi do zadań

1. T_1 i T_3 , $k_1 = \frac{2}{3}$; T_2 i T_4 , $k_2 = \frac{1}{2}$
2. a) Skala podobieństwa: $k = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$
 $Ob = k(6 + 8 + 12) = \frac{4}{3} \cdot 26 = 34\frac{2}{3}$
- b) Skala podobieństwa: $k = \frac{55}{4 + 8 + 10} = \frac{5}{2}$
Długości boków: $\frac{5}{2} \cdot 4 = 10$, $\frac{5}{2} \cdot 8 = 20$, $\frac{5}{2} \cdot 10 = 25$

3. Korzystając z podobieństwa odpowiednich trójkątów, oblicz długości odcinków x i y .



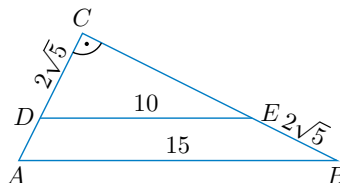
4. Odcinki ED i BC są równoległe. Oblicz obwód trójkąta ABC .



5. a) Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych równych 12 i 16 jest podobny do trójkąta o obwodzie równym 6. Oblicz długości przeciwprostokątnych obu trójkątów.
b) Trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej równej 100 jest podobny do trójkąta o przyprostokątnych 12 i 3,5. Oblicz obwody obu trójkątów.

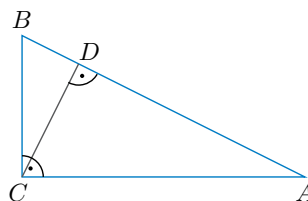
- D** 6. Uzasadnij, że $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ (rysunek obok). Oblicz:

- a) skalę podobieństwa tych trójkątów,
b) obwody tych trójkątów.



7. a) Wypisz pary trójkątów podobnych (rysunek poniżej). Dla każdej pary podaj odpowiednią cechę podobieństwa.

- b) W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 3 i 4 poprowadzono wysokość z wierzchołka kąta prostego. Oblicz długości odcinków, na jakie ta wysokość podzieliła przeciwprostokątną.



8. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, w którym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną na dwa odcinki o długościach 2 cm i 8 cm.

6. $|CE| = \sqrt{10^2 - (2\sqrt{5})^2} = 4\sqrt{5}$, więc $|CB| = 6\sqrt{5}$ i $|AC| = \sqrt{15^2 - (6\sqrt{5})^2} = 3\sqrt{5}$.

$\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{3}{2}$ oraz kąt C jest wspólny dla obu trójkątów, zatem na mocy cechy BKB: $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.

- a) $k = \frac{3}{2}$ b) $Ob_{ABC} = 15 + 9\sqrt{5}$, $Ob_{DEC} = 10 + 6\sqrt{5}$

7. a) Niech $|\angle CAD| = \alpha$, wówczas: $|\angle CBA| = 90^\circ - \alpha$, $|\angle BCD| = \alpha$, $|\angle ACD| = 90^\circ - \alpha$.

Zatem na mocy cechy KKK:

$$\triangle ABC \sim \triangle CBD, \triangle ABC \sim \triangle ACD, \triangle CBD \sim \triangle ACD$$

- b) $|BC| = 3$, $|CA| = 4$, czyli $|AB| = 5$

$\triangle ABC \sim \triangle CBD$, stąd $\frac{|BD|}{3} = \frac{3}{5}$, czyli $|BD| = 1,8$

$\triangle ABC \sim \triangle ACD$, stąd $\frac{|DA|}{4} = \frac{4}{5}$, czyli $|DA| = 3,2$

3. a) $x = 2$, $y = 2,5$

- b) $x = 15$, $y = 13$

4. a) Na mocy cechy KKK trójkąty ABC i AED są podobne w skali $k = \frac{12+6}{12} = \frac{3}{2}$, więc:

$$Ob_{ABC} = \frac{3}{2}(12 + 8 + 15) = 52,5$$

- b) $|AD| = 6$; $|BC| = 6,25$;
 $Ob = 18,75$

5. a) 20, $2\frac{1}{2}$

- b) 224, 28

8. Na podstawie zadania 7:

$$\frac{2}{|BC|} = \frac{|BC|}{10}$$

czyli:

$$|BC| = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

Ponadto:

$$\frac{8}{|CA|} = \frac{|CA|}{10}$$

czyli:

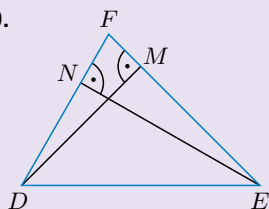
$$|CA| = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

Pole trójkąta:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} = 20 \text{ [cm}^2\text{]}$$

9. 10,8 m

10.



Niech $\alpha = |\angle DFE|$.

Oba trójkąty są prostokątne i mają wspólny kąt α , zatem mają równe kąty. Na mocy cechy KKK otrzymujemy:

$\triangle FEN \sim \triangle FDM$.

11. a) $\frac{|CF|}{|CA|} = \frac{1}{2} = \frac{|CE|}{|CB|}$ oraz

$|\angle ACB| = |\angle FCE|$, zatem na mocy cechy BKB mamy:

$\triangle ABC \sim \triangle FEC$, czyli:

$$|FE| = \frac{1}{2}|AB|$$

Analogicznie pokazujemy, że:

$$|FG| = \frac{1}{2}|BC|$$

$$|GE| = \frac{1}{2}|AC|$$

Zatem na mocy cechy BBB mamy: $\triangle ABC \sim \triangle EFG$.

$$\text{b) } |AG| = |GB| = |FE| = \frac{1}{2}|AB|$$

$$|FG| = |EB| = |CE| = \frac{1}{2}|CB|$$

$$|AF| = |GE| = |FC| = \frac{1}{2}|AC|$$

Zatem trójkąty: T_1, T_2, T_3 i T_4 są przystające na mocy cechy BBB.

13. a) $|\angle AOB| = |\angle COD|$ jako kąty wierzchołkowe

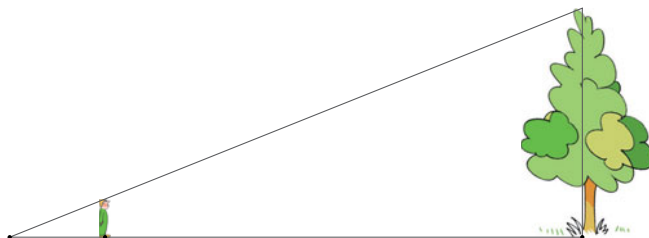
$|\angle BAO| = |\angle DCO|$ jako kąty naprzemianległe

$|\angle ABO| = |\angle CDO|$ jako kąty naprzemianległe

Na mocy cechy KKK mamy: $\triangle ABO \sim \triangle CDO$.

$$\text{b) } 2 \text{ cm}, P_{\triangle ABO} = 16 \text{ cm}^2, P_{\triangle CDO} = 4 \text{ cm}^2$$

9. Aby obliczyć wysokość drzewa, uczeń o wzroście 180 cm ustawił się tak, że koniec jego cienia o długości 4,5 m pokrył się z końcem cienia drzewa. Okazało się, że uczeń stanął w odległości 22,5 m od drzewa. Oblicz wysokość drzewa.

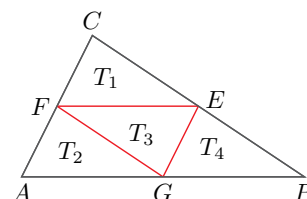


D 10. W trójkącie ostrokatnym DEF poprowadzono wysokości DM i EN . Wykaż, że trójkąty FEN i FDM są podobne.

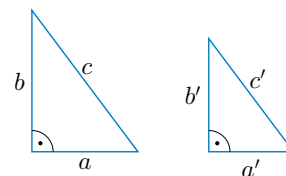
D 11. W trójkącie ABC połączono odcinkami punkty będące środkami boków (rysunek obok).

a) Wykaż, że trójkąty ABC i EFG są podobne.

b) Wykaż, że trójkąty T_1, T_2, T_3 i T_4 są przystające.



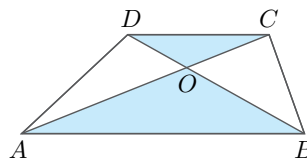
D 12. Uzasadnij, że jeśli stosunek długości przeciwprostokątnych trójkątów prostokątnych jest równy stosunkowi długości odpowiednich przyprostokątnych, tj. $\frac{c}{c'} = \frac{a}{a'}$ lub $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$, to trójkąty te są podobne.



13. W trapezie o podstawach AB i CD przekątne przecinają się w punkcie O (rysunek obok).

D a) Uzasadnij, że trójkąty ABO i CDO są podobne.

b) Przyjmij, że wysokość trapezu wynosi 6 cm, a długości podstaw AB i CD są równe odpowiednio 8 cm i 4 cm. Jaka jest odległość punktu O od krótszej podstawy? Oblicz pola trójkątów ABO i CDO .



D 14. a) Dany jest trapez o podstawie AB i przekątnych AC i BD . Wykaż, że jeśli przekątne trapezu przecinają się w punkcie O , to pola trójkątów AOD i BOC są równe.

b) Dłuższa podstawa trapezu ma długość 10 cm. Punkt przecięcia przekątnych tego trapezu jest odległy o 5 cm od jego dłuższej podstawy i o 3 cm od krótszej. Oblicz pola trójkątów, na które przekątne dzielą ten trapez.

12. $\frac{c}{c'} = \frac{a}{a'} = k$, gdzie $k > 0$, czyli $c = kc'$ oraz $a = ka'$. Z twierdzenia Pitagorasa:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{k^2(c')^2 - k^2(a')^2} = k\sqrt{(c')^2 - (a')^2} = kb'$$

czyli $\frac{b}{b'} = k$.

Na mocy cechy BBB trójkąty te są podobne.

Analogicznie wykazujemy podobieństwo trójkątów, gdy $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$.

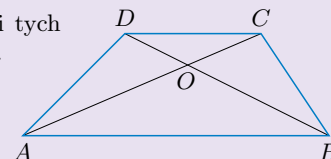
14. a) Zauważmy, że $P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABD}$, gdyż wysokości tych trójkątów opuszczone na wspólny bok AB są równe.

$$P_{\triangle BOC} = P_{\triangle ABC} - P_{\triangle ABO}$$

$$P_{\triangle AOD} = P_{\triangle ABD} - P_{\triangle ABO}$$

Zatem $P_{\triangle BOC} = P_{\triangle AOD}$.

b) 25 cm², 15 cm², 15 cm², 9 cm²



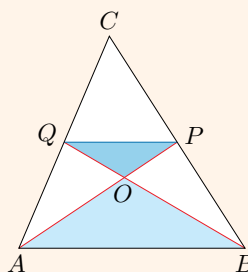
Proste i odcinki pomocnicze

Przeprowadzając dowody w geometrii, często dorysowujemy pomocnicze odcinki lub proste.

- D 1.** Udowodnij, że środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą ze środkowych w stosunku 2:1, gdy liczymy od wierzchołka. Przeczytaj początek dowodu w ramce i podaj wskazane uzasadnienia.

Rozpatrzmy środkowe AP i BQ dowolnego trójkąta ABC . Niech punkt O będzie punktem ich przecięcia. Rysujemy pomocniczy odcinek PQ . Uzasadnij kolejno, że:

- odcinek PQ jest równoległy do odcinka AB ,
- trójkąty ABO i PQO są podobne,
- punkt O dzieli każdą ze środkowych AP i BQ w stosunku 2:1, gdy liczymy od wierzchołka.



Przeprowadź analogiczne rozumowanie dla środkowych poprowadzonych z wierzchołków A i C , a następnie uzasadnij, że wszystkie środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

- D 2.** Udowodnij, że proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Przeczytaj dowód w ramce i podaj wskazane uzasadnienia.

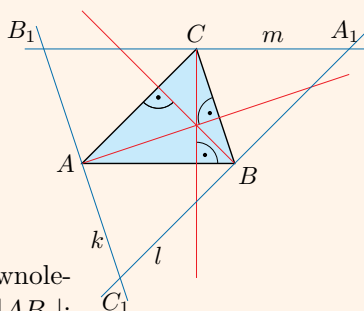
Rozpatrzmy dowolny trójkąt ABC . Rysujemy proste równoległe do kolejnych boków trójkąta i przechodzące przez odpowiednie wierzchołki:

- $k \parallel BC$ oraz $A \in k$,
- $l \parallel AC$ oraz $B \in l$,
- $m \parallel AB$ oraz $C \in m$.

Proste k, l, m przecinają się parami. Odpowiednie punkty przecięcia oznaczono na rysunku przez A_1, B_1, C_1 .

Uzasadnij kolejno, że:

- czworokąty $ABCB_1$ i AC_1BC są równoległobokami (skąd wynika, że $|AC_1| = |AB_1|$; analogicznie $|BC_1| = |BA_1|$ i $|CA_1| = |CB_1|$),
- punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta $A_1B_1C_1$ jest punktem przecięcia prostych zawierających wysokości trójkąta ABC .



- 2. ■** Bok B_1C jest zawarty w prostej m , która jest równoległa do boku AB . Bok AB_1 jest zawarty w prostej k , która jest równoległa do boku BC . Zatem czworokąt $ABCB_1$ jest równoległobokiem. Bok C_1B jest zawarty w prostej l , która jest równoległa do boku AC . Bok C_1A jest zawarty w prostej k , która jest równoległa do boku BC . Zatem czworokąt AC_1BC jest równoległobokiem.
- Wysokości trójkąta ABC są zawarte w symetralnych boków trójkąta $A_1B_1C_1$. Dla dowolnego trójkąta symetralne jego boków przecinają się w jednym punkcie (ćwiczenie 4, s. 280), zatem wysokości trójkąta ABC również przecinają się w jednym punkcie.

- 1. ■** Z założenia $|CQ| = |QA|$ i $|CP| = |PB|$, stąd:

$$\frac{|CQ|}{|CP|} = \frac{|QA|}{|PB|}$$

Na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa odcinki PQ i AB są równoległe.

- $|\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle POQ|$ (kąty wierzchołkowe)
- $|\sphericalangle OAB| = |\sphericalangle OPQ|$ (kąty naprzemianległe)
- $|\sphericalangle OBA| = |\sphericalangle OQP|$ (kąty naprzemianległe)

Na mocy cechy KKK:

$$\triangle ABO \sim \triangle PQO$$

- Z założenia $\frac{|CA|}{|CQ|} = \frac{2}{1}$.

$\triangle ABC \sim \triangle QPC$, więc:

$$\frac{|AB|}{|QP|} = \frac{|CA|}{|CQ|} = \frac{2}{1}$$

$\triangle ABO \sim \triangle PQO$, zatem:

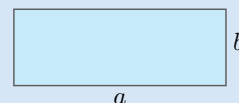
$$\frac{|AO|}{|PO|} = \frac{|BO|}{|QO|} = \frac{|AB|}{|QP|} = \frac{2}{1}$$

Analogiczne rozumowanie prowadzimy dla środkowych poprowadzonych z wierzchołków A i C . Punkt przecięcia tych środkowych również dzieli każdą z nich w stosunku 2:1 (licząc od wierzchołka trójkąta). Zatem punkt O należy do wszystkich trzech środkowych trójkąta ABC .

Pola czworokątów

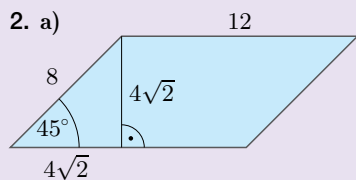
Pole prostokąta o bokach długości a , b wyraża się wzorem:

$$P = ab$$



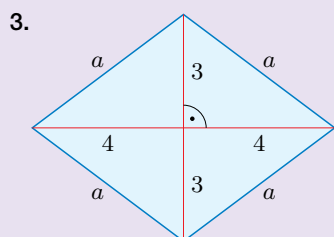
Odpowiedzi do zadań

1. a) $3x$, $5x$ – długości boków
 $2(3x + 5x) = 48$, stąd $x = 3$
 $P = 3x \cdot 5x = 15x^2 = 15 \cdot 9 = 135$ [cm²]
 b) $x = 6$ i $xy = 72$, stąd
 $y = \frac{72}{6} = 12$
 $Ob = 2(6 + 12) = 36$ [cm]



$$P = 12 \cdot 4\sqrt{2} = 48\sqrt{2}$$
 [cm²]

- b) x , $2x$ – długości boków równoległoboku
 h_1 , h_2 – wysokości równoległoboku
 $2(x + 2x) = 54$, stąd $x = 9$
 $x \cdot h_1 = 2x \cdot h_2 = 81$, stąd
 $h_1 = \frac{81}{x} = 9$ [cm],
 $h_2 = \frac{81}{2x} = 4,5$ [cm]

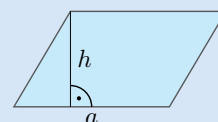


$$P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$$
 [cm²]

$$a = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$
 [cm]

Pole równoległoboku jest równe iloczynowi długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

$$P = ah$$

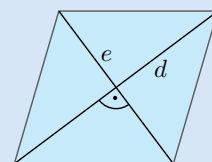


2. a) Oblicz pole równoległoboku o bokach długości 8 cm i 12 cm, którego kąt ostry ma miarę 45°.
 b) Stosunek długości boków równoległoboku jest równy 1:2, jego obwód wynosi 54 cm, a pole jest równe 80 cm². Oblicz obie jego wysokości.

Przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym w punkcie, który dzieli je na połowy.

Pole rombu o przekątnych długości d , e wyraża się wzorem:

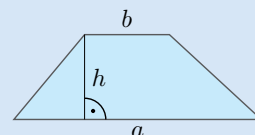
$$P = \frac{1}{2}de$$



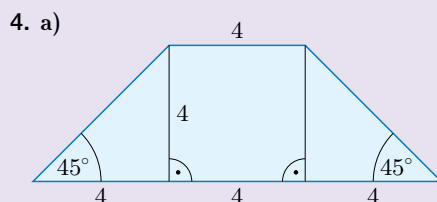
3. Oblicz pole i długość boku rombu o przekątnych długości 6 cm i 8 cm.

Pole trapezu o podstawach długości a , b i wysokości h wyraża się wzorem:

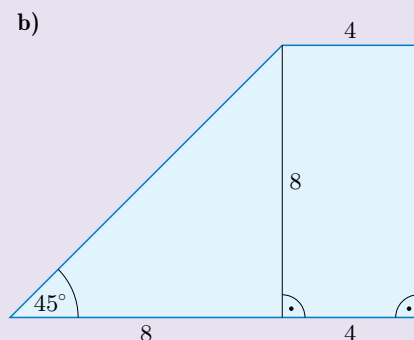
$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



4. Dany jest trapez o podstawach długości 4 cm i 12 cm, którego kąt ostry ma miarę 45°. Oblicz pole tego trapezu w przypadku, gdy jest on:
 a) równoramienny, b) prostokątny.



$$P = \frac{12+4}{2} \cdot 4 = 32$$
 [cm²]



$$P = \frac{12+4}{2} \cdot 8 = 64$$
 [cm²]

6.6. Pola wielokątów podobnych

Przykład 1

Bok jednego kwadratu jest o 20% dłuższy od boku drugiego kwadratu. Jaka jest skala podobieństwa tych kwadratów? Ile wynosi stosunek ich pól?

Niech bok pierwszego kwadratu ma długość a , wówczas bok drugiego z nich ma długość $a + 20\% a = 120\% a = \frac{6}{5}a$.

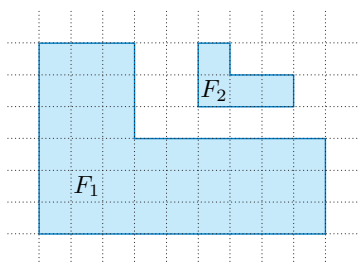
Zatem skala podobieństwa $k = \frac{6}{5}$.

Pola kwadratów są odpowiednio równe a^2 i $\frac{36}{25}a^2$, zatem stosunek ich pól jest równy $\frac{36}{25}$. Zauważmy, że $\frac{36}{25} = k^2$.

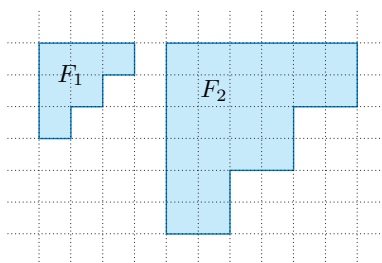
Ćwiczenie 1

Na rysunku przedstawiono wielokąty podobne F_1 i F_2 . Podaj skalę podobieństwa i oblicz stosunek pola figury F_2 do pola figury F_1 .

a)



b)



Przykład 2

Trójkąt T_2 jest podobny do trójkąta T_1 w skali k . Uzasadnij, że stosunek pola trójkąta T_2 do pola trójkąta T_1 jest równy k^2 .

Pole trójkąta T_1 : $P_1 = \frac{1}{2}a_1h_1$.

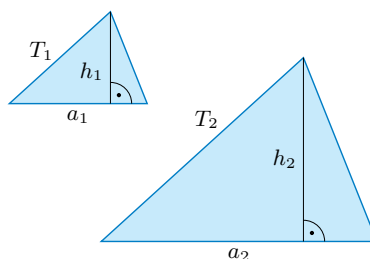
Dla trójkąta T_2 mamy:

$$a_2 = k \cdot a_1, \quad h_2 = k \cdot h_1.$$

Stąd pole trójkąta T_2 :

$$P_2 = \frac{1}{2}a_2h_2 = \frac{1}{2}(k \cdot a_1)(k \cdot h_1) = \frac{1}{2}k^2 \cdot a_1h_1.$$

$$\text{Zatem } \frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{1}{2}k^2 a_1 h_1}{\frac{1}{2} a_1 h_1} = k^2.$$



Ćwiczenie 2

Prostokąt P_2 jest podobny do prostokąta P_1 w skali k . Uzasadnij, że stosunek pola prostokąta P_2 do pola prostokąta P_1 jest równy k^2 .

Ćwiczenie 2

Pole prostokąta P_1 : a_1b_1 .

Boki prostokąta P_2 :

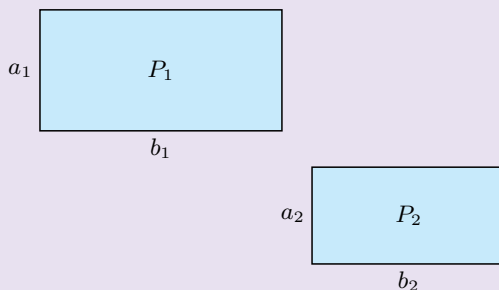
$$a_2 = k \cdot a_1, \quad b_2 = k \cdot b_1$$

Stąd pole trójkąta P_2 :

$$a_2b_2 = (k \cdot a_1)(k \cdot b_1) = k^2 \cdot a_1b_1$$

Zatem stosunek pól:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{k^2 a_1 b_1}{a_1 b_1} = k^2$$



Uczeń:

- wykorzystuje zależności między polami wielokątów podobnych a skalą podobieństwa do rozwiązywania zadań.

Ćwiczenie 1

a) $k = \frac{1}{3}, \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{9}$

b) $k = 2, \frac{P_2}{P_1} = 4$

Multibook

- Skala podobieństwa
- Fraktale

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 6.6

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

a) $k^2 = \frac{P_1}{P_2} = \frac{0,81P_2}{P_2} = 0,81$,
zatem $k = 0,9$.

b) $k^2 = \frac{P_1}{P_2} = \frac{2,25P_2}{P_2} = 2,25$,
zatem $k = 1,5$.

Ćwiczenie 4

Pole trapezu T_1 : $P_1 = 24 \text{ cm}^2$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}, \text{ zatem } k = \frac{1}{2}.$$

Drugie ramię trapezu T_1 ma długość $2\sqrt{5} \text{ cm}$.

$$Ob_1 = (16 + 2\sqrt{5}) \text{ cm},$$

$$Ob_2 = (8 + \sqrt{5}) \text{ cm}$$

Ćwiczenie 5

a) $\frac{3200}{4} = 800$, zatem skala planu: 1:800.

b) $x^2 = (1,875)^2 + (2,5)^2$
 $x = 3,125$

Obwód działki na planie:

$$5,875 + 2,5 + 4 + 3,125 = 15,5 \text{ [cm]}$$

Obwód działki w rzeczywistości:

$$15,5 \text{ cm} \cdot 800 = 12400 \text{ cm} = 124 \text{ m}$$

Potrzebna siatka ma długość:

$$124 - 1,5 = 122,5 < 125 \text{ [m]}$$

c) $P = 9 \text{ cm}^2 \cdot 800^2 = 5760000 \text{ cm}^2 = 576 \text{ m}^2$

Twierdzenie

Jeśli skala podobieństwa figur podobnych równa się k , to stosunek ich pól jest równy k^2 .

Ćwiczenie 3

Dane są dwa kwadraty, przy czym pole jednego z nich jest:

a) o 19% mniejsze od pola drugiego, b) o 125% większe od pola drugiego.

Jaka jest skala podobieństwa tych kwadratów?

Ćwiczenie 4

Dany jest trapez prostokątny T_1 o podstawach długości 5 cm i 7 cm oraz wysokości równej 4 cm. Pole trapezu T_2 podobnego do trapezu T_1 jest równe 6 cm^2 . Oblicz skalę podobieństwa trapezu T_2 do trapezu T_1 oraz ich obwody.

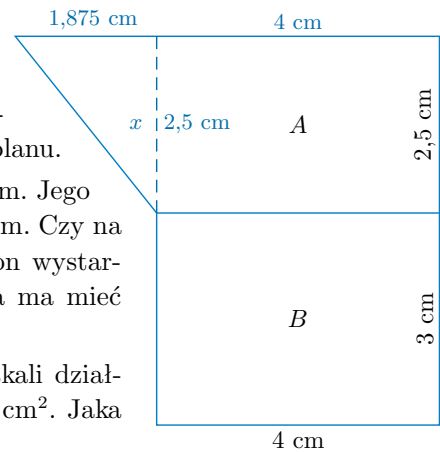
Ćwiczenie 5

Na rysunku obok przedstawiono plan sąsiadujących działek budowlanych.

a) Działka B jest prostokątem o wymiarach $32 \text{ m} \times 24 \text{ m}$. Wyznacz skalę tego planu.

b) Działka A jest trapezem prostokątnym. Jego najdłuższy bok ma na planie długość 6 cm. Czy na ogrodzenie działki A ze wszystkich stron wystarczy 125 m bieżących siatki, jeśli furtka ma mieć szerokość 1,5 m?

c) Na planie wykonanym w tej samej skali działka C jest kwadratem o polu równym 9 cm^2 . Jaka jest powierzchnia tej działki?



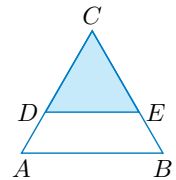
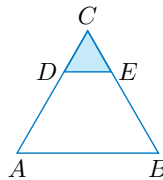
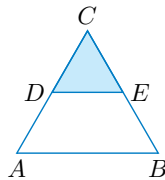
Ćwiczenie 6

Dany jest trójkąt równoboczny ABC , którego bok ma długość 12 cm. Odcinek DE jest równoległy do boku AB , a pole trójkąta DEC jest równe P . Wyznacz stosunek długości odcinków DC do AC i oblicz obwód trapezu $ABED$.

a) $P = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$

b) $P = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$

c) $P = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$



Ćwiczenie 6

$$P_{ABC} = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

a) $k = \frac{1}{2}$, $|DE| = |AD| = |BE| = 6 \text{ cm}$, $Ob = 30 \text{ cm}$

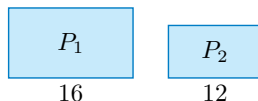
b) $k = \frac{1}{3}$, $|DE| = 4 \text{ cm}$, $|AD| = |BE| = 8 \text{ cm}$, $Ob = 32 \text{ cm}$

c) $k = \frac{2}{3}$, $|DE| = 8 \text{ cm}$, $|AD| = |BE| = 4 \text{ cm}$, $Ob = 28 \text{ cm}$

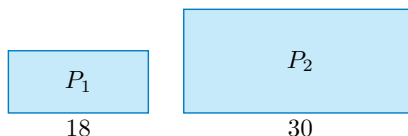
Zadania

1. Prostokąty P_1 i P_2 są podobne, przy czym pole prostokąta P_1 jest równe 144 cm^2 . Oblicz skalę podobieństwa prostokąta P_2 do prostokąta P_1 oraz pole prostokąta P_2 .

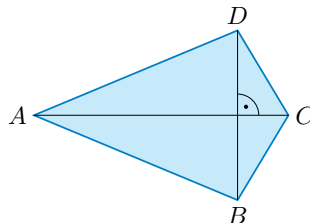
a)



b)



2. Prostokąt o bokach długości 6 cm i 12 cm jest podobny do prostokąta o obwodzie 60 cm. Oblicz pole większego prostokąta.
3. a) Trójkąt prostokątny T_2 jest podobny do trójkąta T_1 w skali $k = \frac{2}{3}$. Pole trójkąta T_1 jest równe 45 cm^2 , a jedna z przyprostokątnych trójkąta T_2 ma długość 10 cm. Oblicz obwód trójkąta T_2 .
- b) Romb R_2 jest podobny do rombu R_1 w skali $k = 3$. Pole rombu R_2 jest równe 648 cm^2 , a jedna z przekątnych rombu R_1 ma długość 6 cm. Oblicz obwód każdego z tych rombów.
4. Dany jest równoległobok R_1 , którego boki mają długości 4 cm i 6 cm. Jedna z przekątnych tego równoległoboku jest prostopadła do jego krótszych boków. Równoległobok R_2 o polu $200\sqrt{5} \text{ cm}^2$ jest podobny do równoległoboku R_1 . Oblicz obwód równoległoboku R_2 .
5. a) Suma pól dwóch figur podobnych jest równa 340 dm^2 , a ich skala podobieństwa $k = 4$. Oblicz pole każdej z tych figur.
- b) Suma pól dwóch trójkątów prostokątnych równoramiennych jest równa 180 cm^2 , a ich skala podobieństwa $k = 3$. Oblicz obwód każdego z tych trójkątów.
6. Przekątne deltoidu $ABCD$ mają długości: $|AC| = 15 \text{ cm}$ i $|BD| = 10 \text{ cm}$. Oblicz pole powierzchni latawca mającego kształt deltoidu podobnego do deltoidu $ABCD$ przy założeniu, że wymiary latawca są czterokrotnie większe.
7. Wielokąt F_1 jest podobny do wielokąta F_2 w skali $\frac{3}{4}$. Stosunek pól wielokątów podobnych F_2 i F_3 jest równy $\frac{4}{9}$. Oblicz skalę podobieństwa wielokąta F_3 do F_1 .

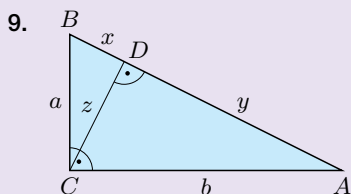


5. a) $P_1 + P_2 = 340$ i $\frac{P_1}{P_2} = 4^2$, stąd $P_1 = 320 [\text{dm}^2]$, $P_2 = 20 [\text{dm}^2]$.
- b) $P_1 + P_2 = 180$ i $\frac{P_1}{P_2} = 3^2$, stąd $P_1 = 162 [\text{cm}^2]$, $P_2 = 18 [\text{cm}^2]$.
- Długość przyprostokątnej większego trójkąta: $\frac{1}{2} \cdot a^2 = 162$, czyli $a = 18 \text{ cm}$.
- Długość przeciwprostokątnej większego trójkąta: $c = 18\sqrt{2} \text{ cm}$.
- Obwód większego trójkąta: $Ob_1 = (36 + 18\sqrt{2}) \text{ cm}$.
- Obwód mniejszego trójkąta: $Ob_2 = (12 + 6\sqrt{2}) \text{ cm}$.
6. Pole latawca: $P = \frac{60 \cdot 40}{2} = 1200 [\text{cm}^2]$
7. $\frac{F_1}{F_2} = \frac{3}{4}$, czyli $F_1 = \frac{3}{4}F_2$
- $\frac{F_3}{F_2} = \frac{3}{2}$, czyli $F_3 = \frac{3}{2}F_2$
- $\frac{F_3}{F_1} = \frac{\frac{3}{2}F_2}{\frac{3}{4}F_2} = 2$

Odpowiedzi do zadań

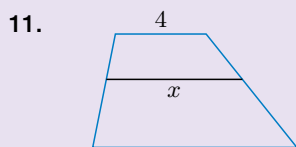
1. a) $k = 0,75$, $P = 81 \text{ cm}^2$
b) $k = \frac{5}{3}$, $P = 400 \text{ cm}^2$
2. 200 cm^2
3. a) Pole trójkąta T_2 :
 $P_2 = (\frac{2}{3})^2 \cdot 45 = 20 [\text{cm}^2]$
Długość drugiej przyprostokątnej: $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot b = 20$, czyli $b = 4 \text{ cm}$.
Długość przeciwprostokątnej:
 $c = \sqrt{10^2 + 4^2} = 2\sqrt{29} [\text{cm}]$
Obwód trójkąta T_2 :
 $Ob = (14 + 2\sqrt{29}) \text{ cm}$
- b) Pole rombu R_1 :
 $P_1 = (\frac{1}{3})^2 \cdot 648 = 72 [\text{cm}^2]$
Długość drugiej przekątnej rombu R_1 :
 $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot d = 72$, czyli $d = 24 \text{ cm}$
Długość boku rombu R_1 :
 $a = \sqrt{3^2 + 12^2} = 3\sqrt{17} [\text{cm}]$
Obwód rombu R_1 :
 $Ob_1 = 12\sqrt{17} \text{ cm}$
Obwód rombu R_2 :
 $Ob_2 = 36\sqrt{17} \text{ cm}$
4. Obwód równoległoboku R_1 :
 $Ob_1 = 20 \text{ cm}$
Długość krótszej przekątnej równoległoboku R_1 :
 $d = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5} [\text{cm}]$
Pole równoległoboku R_1 :
 $P_1 = 4 \cdot 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5} [\text{cm}^2]$
 $\frac{P_2}{P_1} = \frac{200\sqrt{5}}{8\sqrt{5}} = 25$
Skala podobieństwa R_2 do R_1 :
 $k = 5$
Obwód równoległoboku R_2 :
 $Ob_2 = 100 \text{ cm}$

8. $P_2 = 1,44P_1$ i $P_3 = 2,25P_1$,
czyli $\frac{P_3}{P_2} = \frac{2,25}{1,44}$
Skala podobieństwa prostokątów P_3 do P_2 : $k = \frac{1,5}{1,2} = 1,25$
Wymiary prostokąta P_3 :
 $30 \text{ cm} \times 45 \text{ cm}$



$$\frac{y}{z} = \frac{z}{x} = 2, \text{ czyli } y = 2z, \\ x = \frac{z}{2} \\ x + y = 15, \text{ czyli } z = 6 \text{ cm}, \\ x = 3 \text{ cm}, y = 12 \text{ cm} \\ a = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5} \text{ [cm]} \\ b = \sqrt{12^2 + 6^2} = 6\sqrt{5} \text{ [cm]} \\ Ob = (15 + 9\sqrt{5}) \text{ cm}$$

10. Skala podobieństwa $\triangle ABP$ do $\triangle CDP$: $k = \frac{3}{2}$, $h_{ABP} = 6$ i $h_{CDP} = 4$.



$$x = 6 \text{ cm}, k = \frac{2}{3} \\ \text{Pole mniejszego trapezu:} \\ P_1 = 10 \text{ cm}^2 \\ \text{Pole większego trapezu:} \\ P_2 = 22,5 \text{ cm}^2$$

12. Wysokość wyjściowego trapezu: $h = 25 \text{ m}$. Niech $x > 0$ będzie długością odcinka dzielącego działkę. Wówczas:
 $\frac{32}{x} = \frac{x}{50}$, czyli $x = 40 \text{ m}$.
Skala podobieństwa nowych działek: $k = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$, czyli prosta podzieliła wysokość wyjściowego trapezu na odcinki o długościach: $11\frac{1}{5} \text{ m}$ i $13\frac{8}{9} \text{ m}$.
Pole mniejszej działki: 400 m^2
Pole większej działki: 625 m^2

13. $\triangle ABP \sim \triangle CDP$ (cecha KKK), niech $k > 0$ będzie ich skalą podobieństwa.

$$\frac{S_1}{S_2} = k^2, \text{ czyli } \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}} = k, \text{ stąd } \sqrt{S_1 S_2} = k S_2 \\ S_3 = \frac{1}{2} \cdot kx \cdot h_3 \text{ i } S_2 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot h_3, \text{ czyli } S_3 = k S_2 \\ S_4 = \frac{1}{2} \cdot ky \cdot h_4 \text{ i } S_2 = \frac{1}{2} \cdot y \cdot h_4, \text{ czyli } S_4 = k S_2 \\ S_3 = S_4 = k S_2 = \sqrt{S_1 S_2} \\ \text{Pole trapezu } ABCD: \\ S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$$

14. Czworokąt o bokach długości: a, b, a, b nie musi być prostokątem – może być równoległobokiem. Dlatego w geodezji przeprowadza się dodatkowe pomiary, np. przekątnej, zwane pomiarami kontrolnymi. Pomiary te pozwalają sprawdzić, jaka faktycznie figura została wytyczona. a) około $10,82 \text{ m}$ b) 7 m^3

8. Trzy odbitki zdjęć mają kształt podobnych prostokątów P_1 , P_2 i P_3 . Pole prostokąta P_2 jest o 44% większe od pola prostokąta P_1 , a pole prostokąta P_3 jest o 125% większe od pola prostokąta P_1 . Wymiary prostokąta P_2 są równe $24 \text{ cm} \times 36 \text{ cm}$. Oblicz wymiary prostokąta P_3 .

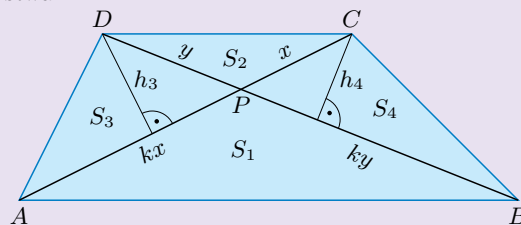
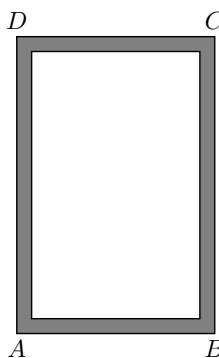


9. W trójkącie prostokątnym ABC , którego przeciwprostokątna AB ma długość 15 cm , poprowadzono wysokość CD . Stosunek pól trójkątów ADC i BCD jest równy 4 . Oblicz obwód trójkąta ABC .
10. Przekątne trapezu o podstawach AB i CD oraz wysokości równej 10 przecinają się w punkcie P . Stosunek pola trójkąta ABP do pola trójkąta CDP jest równy $\frac{9}{4}$. Oblicz odległości punktu P od podstaw trapezu.
11. Trapez o wysokości równej 5 cm i podstawach długości 4 cm i 9 cm podzielono prostą równoległą do podstaw na dwa trapezy podobne. Oblicz pole każdego z trapezów otrzymanych w wyniku tego podziału.
12. Działka budowlana o powierzchni 1025 m^2 ma kształt trapezu o podstawach 32 m i 50 m . Działkę tę podzielono prostą równoległą do podstaw trapezu na dwie działki będące trapezami podobnymi. Oblicz pole każdej z nowo powstałych działek.

- D** 13. Przekątne trapezu o podstawach AB i CD przecinają się w punkcie P . Pole trójkąta ABP jest równe S_1 , a pole trójkąta DCP jest równe S_2 . Uzasadnij, że pole tego trapezu jest równe $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$.

14. Według projektu zewnętrzny obrys fundamentów domu jest prostokątem (rysunek obok). Przed rozpoczęciem wykopu kierownik budowy nakazał wykonanie pomiaru nie tylko długości boków, lecz także długości przekątnych. Jak sądzisz, dlaczego?

- a) W projekcie budynku wykonanym w skali $1:50$ $|AB| = 12 \text{ cm}$, $|BC| = 18 \text{ cm}$. Ile powinien wynieść wynik pomiaru przekątnych w terenie?
- b) Fundamenty mają mieć głębokość $0,5 \text{ m}$ oraz grubość $0,5 \text{ m}$. Ile m^3 betonu potrzeba na ich wykonanie?



Fraktale

Fraktal to figura geometryczna cechująca się samopodobieństwem – dowolnie małe części tej figury są podobne do całości.

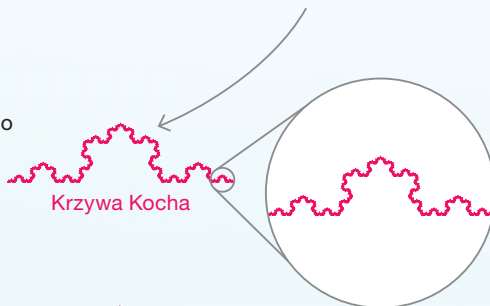
Krzywa Kocha i śnieżynka Kocha

Przykładem fraktala jest **krzywa Kocha** (jej konstrukcję opisał w 1904 r. szwedzki matematyk Helge von Koch). Oto kolejne etapy jej powstawania.



Na każdym kolejnym etapie konstrukcji krzywej Kocha jej długość powiększa się o $\frac{1}{3}$ długości krzywej z poprzedniego etapu. Jeśli zatem długość początkowego odcinka jest równa 1, to kolejne krzywe mają długości:

$$1, \frac{4}{3}, \left(\frac{4}{3}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \dots$$



Jeżeli konstrukcję krzywej przeprowadzimy na bokach trójkąta równobocznego, otrzymamy figurę nazywaną **śnieżynką Kocha**.

Śnieżynka Kocha ma skończone pole, chociaż jest ograniczona przez krzywą o nieskończonej długości.



SAMOPODOBIENSTWO

Powiększając dowolnie mały fragment krzywej Kocha, otrzymamy jej idealną kopię.

Trójkąt Sierpińskiego

Innym przykładem fraktala jest **trójkąt Sierpińskiego**. Konstrukcję, w której z trójkąta równobocznego wycina się kolejne trójkąty równoboczne, przedstawił w 1915 r. polski matematyk Wacław Sierpiński.



1. Czy potrafisz obliczyć pole ostatniej z pokazanych figur, jeśli pole wyjściowego trójkąta jest równe 1?

1. $\frac{27}{64}$



Uczeń:

- wykorzystuje twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie do rozwiązywania zadań,
- przeprowadza dowód twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie oraz inne dowody, stosując twierdzenie o dwusiecznej.

$|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle APB|$ (kąty odpowiadające)
 $|\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle CBP|$ (kąty naprzemianległe)

Ćwiczenie 1

a) Niech x, y będą odcinkami, na jakie dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną.

$$x + y = 13 \text{ i } \frac{x}{y} = \frac{5}{12}$$

$$x = 3\frac{14}{17}, y = 9\frac{3}{17}$$

b) Długości przyprostokątnych: 1 i $\sqrt{3}$. Dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości: $3 - \sqrt{3}$ i $\sqrt{3} - 1$. Dwusieczna kąta 60° dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ i $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Dwusieczna kąta 30° dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości: $4 - 2\sqrt{3}$ i $2\sqrt{3} - 3$.

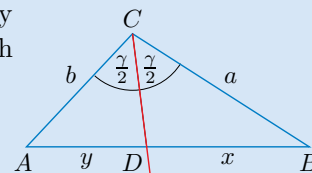
6.7. Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

Korzystając z twierdzenia Talesa, możemy udowodnić poniższe twierdzenie.

Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

Dwusieczna kąta w trójkącie dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalne do pozostałych boków trójkąta:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$



Dowód

Wyznaczamy półprostą AC oraz prostą l równoległą do dwusiecznej CD przechodzącą przez punkt B . Punkt przecięcia półprostej AC z prostą l oznaczamy przez P .

Proste CD i BP są równoległe, więc:

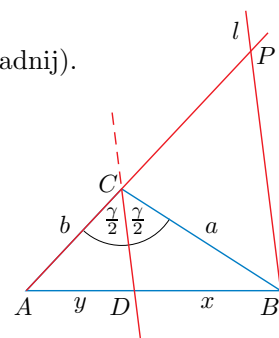
$|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle APB|$ oraz $|\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle CBP|$ (uzasadnij).

Oznacza to, że trójkąt BPC jest równoramienny i $|CP| = |CB| = a$.

Z twierdzenia Talesa dla kąta CAD otrzymujemy:

$$\frac{|DB|}{|AD|} = \frac{|CP|}{|AC|}$$

$$\text{zatem } \frac{x}{y} = \frac{a}{b}.$$



Ćwiczenie 1

- Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 5 i 12. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczna kąta prostego tego trójkąta dzieli jego przeciwprostokątną.
- Przeciwprostokątna trójkąta o kątach 30° , 60° , 90° ma długość 2. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczne kątów dzielą boki tego trójkąta.
- Dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego na odcinki długości $\frac{15}{7}$ i $\frac{20}{7}$. Oblicz obwód tego trójkąta.
- Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma miarę $22,5^\circ$, a dłuższa przyprostokątna ma długość równą 1. Oblicz długość krótszej przyprostokątnej tego trójkąta.

c) Niech a, b będą przyprostokątnymi trójkąta.

Przeciwprostokątna jest równa $\frac{15}{7} + \frac{20}{7} = 5$.

$a^2 + b^2 = 25$ i $a : b = \frac{15}{7} : \frac{20}{7} = \frac{3}{4}$, czyli $a = 3$, $b = 4$. Zatem $Ob = 12$.

d) Rozważmy $\triangle ABC$, niech $|BC| = x$, $|CD| = y$, $|DE| = z$. Wówczas:

$|BD| = |BC| = x$ ($\triangle BCD$ równoramienny)

$|BE| = |CE| = y + z$ ($\triangle CEB$ równoramienny)

$|AE| = |BE| = y + z$ ($\triangle AEC$ równoramienny)

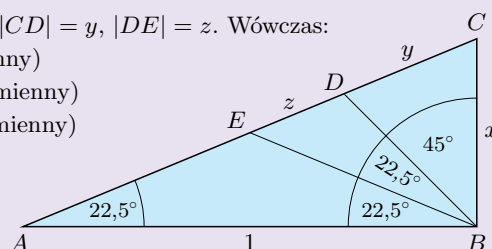
Z twierdzenia o dwusiecznej kąta:

dla $\triangle ABC$ mamy: $\frac{x}{1} = \frac{y}{y+2z}$,

dla $\triangle ADB$ mamy: $\frac{x}{1} = \frac{z}{y+z}$.

$$\frac{y}{y+2z} = \frac{z}{y+z}, \text{ skąd } y = \sqrt{2}z$$

$$\text{Zatem } x = \frac{z}{y+z} = \frac{z}{\sqrt{2}z+z} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$$



dla nauczyciel.pl | Kartkówka 6.7

Generator
testów i sprawdzianów



Zadania

- Dany jest trójkąt ABC o bokach $|BC| = a$, $|AC| = b$ i $|AB| = c$. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczna kąta ACB dzieli bok AB , dla:
 - $a = 2$, $b = 6$, $c = 5$,
 - $a = 6$, $b = 10$, $c = 12$.
- Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC , którego przeciwprostokątna AB ma długość $\sqrt{2}$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC w punkcie P . Oblicz obwody trójkątów BCP i BAP .

D 3. Dany jest trójkąt ABC o bokach długości $|BC| = a$, $|AC| = b$ i $|AB| = c$. Uzasadnij, że dwusieczna kąta ACB dzieli bok AB na odcinki długości $\frac{ac}{a+b}$ i $\frac{bc}{a+b}$.

D 4. Przeczytaj podany poniżej dowód twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie. W miejscach oznaczonych **?** podaj brakujące uzasadnienia.

Odcinek CD jest zawarty w dwusiecznej kąta ACB , a CG jest wysokością trójkąta opuszczoną z wierzchołka C .

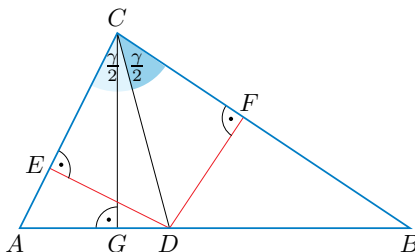
Stąd $\frac{P_{\triangle DBC}}{P_{\triangle ADC}} = \frac{|DB|}{|AD|}$. **?**

Odcinki DE i DF mają równe długości. **?**

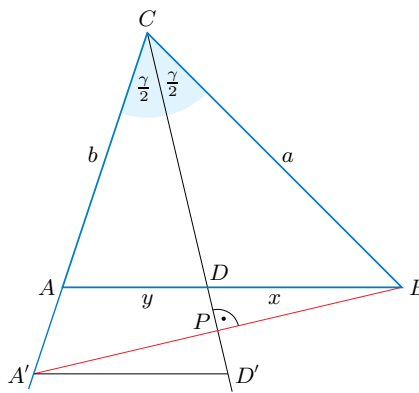
Zatem:

$$\frac{P_{\triangle DBC}}{P_{\triangle ADC}} = \frac{|BC|}{|AC|} \quad \text{?}$$

Czyli prawdziwa jest proporcja $\frac{|DB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AC|}$.



- D** 5. W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczną CD kąta γ (rysunek obok). Punkt A' leży na półprostej CA , odcinek $A'B$ jest prostopadły do dwusiecznej CD i przecina ją w punkcie P , a odcinek $A'D'$ jest równoległy do odcinka AD . Uzasadnij, że trójkąty $A'D'P$ i BDP są przystające, a trójkąty $A'D'C$ i ADC są podobne. Korzystając z równości $|A'C| = a$, uzasadnij prawdziwość proporcji $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$.



- $\triangle CPA' \equiv \triangle CPB$ na mocy cechy KBK ($|\sphericalangle A'CP| = |\sphericalangle BCP| = \frac{\gamma}{2}$, $|\sphericalangle CPA'| = |\sphericalangle CPB| = 90^\circ$ oraz $|CP|$ jest bokiem wspólnym $\triangle CPA'$ i $\triangle CPB$), więc $|A'P| = |PB|$
 $|\sphericalangle D'PA'| = |\sphericalangle DPB| = 90^\circ$ (kąty wierzchołkowe)
 $|\sphericalangle PA'D'| = |\sphericalangle PBD|$ (kąty naprzemianległe)
 Zatem na mocy cechy KBK: $\triangle A'D'P \equiv \triangle BDP$.
 $|\sphericalangle A'CD'| = |\sphericalangle ACD| = \frac{\gamma}{2}$, $|\sphericalangle CA'D'| = |\sphericalangle CAD|$ (kąty odpowiadające)
 oraz $|\sphericalangle CD'A'| = |\sphericalangle CDA|$ (kąty odpowiadające), więc na mocy cechy KKK:
 $\triangle A'D'C \sim \triangle ADC$
 $\triangle A'D'P \equiv \triangle BDP$, czyli $|A'D'| = x$.
 Z podobieństwa trójkątów $A'D'C$ i ADC mamy: $\frac{|A'D'|}{|AD|} = \frac{|A'C|}{|AC|}$, czyli $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$.

Odpowiedzi do zadań

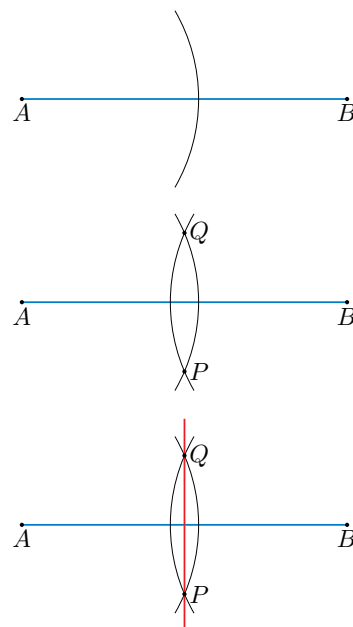
- x, y – odcinki, na które dwusieczna podzieliła bok AB .
 - $\begin{cases} x + y = 5 \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{6} \end{cases}$
 $x = 1,25$; $y = 3,75$
 - $\begin{cases} x + y = 12 \\ \frac{x}{y} = \frac{6}{10} \end{cases}$
 $x = 4,5$; $y = 7,5$
- $|AC| = |BC| = 1$
 $\begin{cases} |CP| + |PA| = 1 \\ \frac{|PA|}{|CP|} = \frac{\sqrt{2}}{1} \end{cases}$
 $|CP| = \sqrt{2} - 1$, $|PA| = 2 - \sqrt{2}$
 $|PB| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$
 $Ob_{BCP} = \sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$
 $Ob_{BAP} = 2 + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$
- Niech P będzie punktem przecięcia boku AB z dwusieczną kąta ACB . Wówczas:
 $\frac{|PB|}{|AP|} = \frac{a}{b}$ i $|AP| + |PB| = c$
 $|PB| = \frac{a}{b}|AP|$, czyli:
 $|AP| + |PB| = \frac{b+a}{b}|AP| = c$
 Zatem $|AP| = \frac{bc}{a+b}$ oraz
 $|PB| = \frac{a}{b} \cdot \frac{bc}{a+b} = \frac{ac}{a+b}$.
- $\frac{P_{\triangle DBC}}{P_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2}|DB| \cdot |CG|}{\frac{1}{2}|AD| \cdot |CG|} = \frac{|DB|}{|AD|}$
 $\triangle CDE \equiv \triangle CDF$ na mocy cechy KBK, gdyż:
 $|\sphericalangle ECD| = |\sphericalangle FCD| = \frac{\gamma}{2}$,
 $|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle FDC| = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$
 oraz $|CD|$ jest bokiem wspólnym trójkątów CDE i CDF
 $\frac{P_{\triangle DBC}}{P_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2}|BC| \cdot |DF|}{\frac{1}{2}|AC| \cdot |DE|} = \frac{|BC|}{|AC|}$

Problemy konstrukcyjne

Klasyczne konstrukcje wykonuje się tylko za pomocą cyrkla i linijki. Oto niektóre z nich.

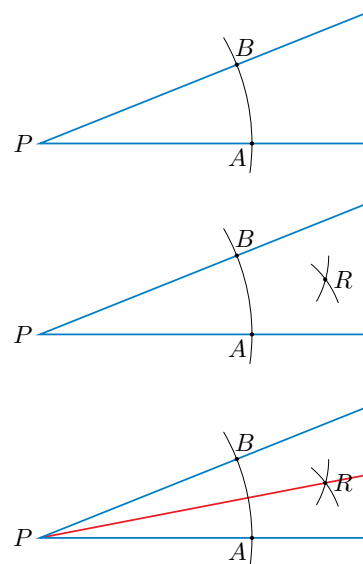
Konstrukcja symetralnej odcinka

1. Z jednego końca danego odcinka rysujemy łuk okręgu o promieniu dłuższym od połowy odcinka.
2. Z drugiego końca tego odcinka rysujemy łuk okręgu o takim samym promieniu. Punkty przecięcia łuków oznaczamy przez P i Q .
3. Rysujemy prostą PQ – jest ona symetralną odcinka AB , ponieważ odcinki PQ i AB są przekątnymi rombu $APBQ$.



Konstrukcja dwusiecznej kąta

1. Z wierzchołka danego kąta rysujemy łuk okręgu przecinający ramiona tego kąta. Punkty przecięcia oznaczamy przez A i B .
2. Wewnątrz kąta rysujemy łuki okręgów o środkach w punktach A i B oraz takich samych promieniach. Punkt przecięcia tych łuków oznaczamy przez R .
3. Rysujemy półprostą PR – jest ona dwusieczną kąta APB , ponieważ trójkąty PAR i PBR są przystające (cecha BBB).

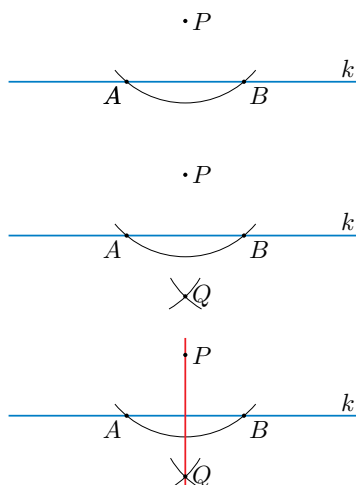


Multibook

- Konstrukcja symetralnej odcinka
- Konstrukcja dwusiecznej kąta
- Konstrukcja kąta o mierze 30°

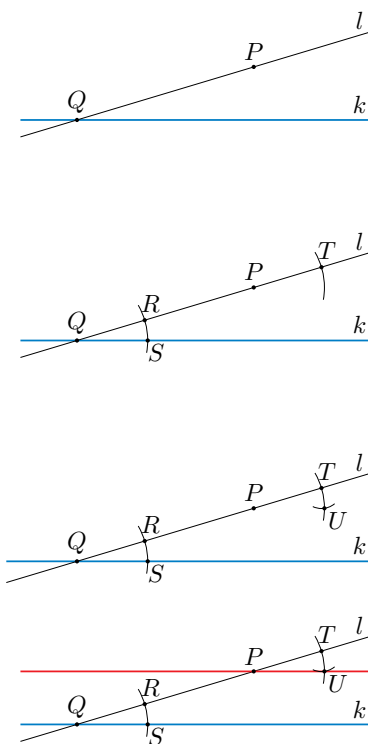
■ Konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej i przechodzącej przez dany punkt nieleżący na tej prostej

1. Z danego punktu P rysujemy łuk okręgu przecinający daną prostą k . Punkty przecięcia oznaczamy przez A i B .
2. Z punktów A i B rysujemy przecinające się łuki okręgów o promieniu $|AP|$. Punkt przecięcia tych łuków oznaczamy przez Q .
3. Rysujemy prostą PQ – jest ona prostopadła do prostej k , ponieważ odcinki PQ i AB są przekątnymi rombu $APBQ$.



■ Konstrukcja prostej równoległej do danej prostej i przechodzącej przez dany punkt

1. Rysujemy dowolną prostą l nierównoległą do danej prostej k i przechodzącą przez dany punkt P . Punkt przecięcia prostej l z prostą k oznaczamy przez Q .
2. Rysujemy łuki okręgów o środkach w punktach P i Q oraz takich samych promieniach. Punkty przecięcia tych łuków z prostą l oznaczamy odpowiednio przez T i R . Punkt przecięcia łuku o środku w punkcie Q z prostą k oznaczamy przez S .
3. Rysujemy łuk okręgu o środku w punkcie T i promieniu $|RS|$. Punkt przecięcia tego łuku z łukiem o środku w punkcie P oznaczamy przez U .
4. Rysujemy prostą PU – jest ona równoległa do prostej k , ponieważ kąt TPU jest przystający do kąta RQS .



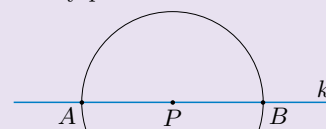
Można zaproponować uczniom następujące zadania konstrukcyjne.

Zadanie 1

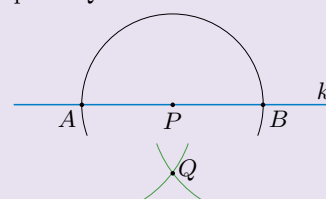
Dana jest prosta k i leżący na niej punkt P . Skonstruuj prostą prostopadłą do prostej k i przechodzącą przez punkt P .

Rozwiązanie

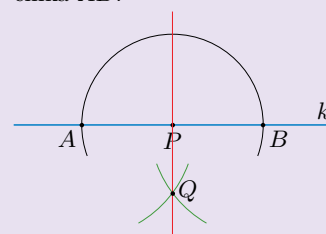
1. Z danego punktu P rysujemy łuk okręgu przecinający prostą k . Punkty przecięcia oznaczamy przez A i B .



2. Z punktów A i B rysujemy przecinające się łuki okręgów o promieniu $r > |AP|$. Punkt przecięcia łuków oznaczamy przez Q .



3. Rysujemy prostą PQ – jest ona prostopadła do prostej k , ponieważ jest symetralną odcinka AB .



Zadanie 2

Mając dany trójkąt, skonstruuj punkt przecięcia jego:

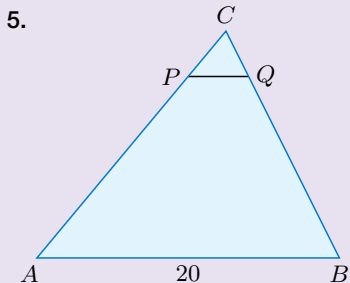
- a) symetralnych, b) dwusiecznych, c) wysokości.

Rozwiązanie

- a) Konstruujemy symetralne dwóch boków trójkąta i wyznaczamy punkt ich przecięcia.
- b) Konstruujemy dwusieczne dwóch kątów wewnętrznych trójkąta i wyznaczamy punkt ich przecięcia.
- c) Konstruujemy proste prostopadłe do dwóch boków trójkąta przechodzące przez wierzchołki przeciwległe do tych boków. Proste te zawierają wysokości trójkąta. Wyznaczamy punkt ich przecięcia.

Odpowiedzi do zadań

- $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$
 - $20^\circ, 60^\circ, 100^\circ$
 - $15^\circ, 67^\circ 30', 97^\circ 30'$
- $50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$
- a), b), d) tak c) nie
- Obwód T_1 : 14 cm, czyli $k = \frac{35}{14}$.
Długości boków: 10 cm, 12,5 cm, 12,5 cm.
 - Wysokość T_1 : $h = \sqrt{21}$ cm.
Pole T_1 : $P_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{21} = 2\sqrt{21}$ [cm²],
czyli $k^2 = \frac{4\sqrt{21}}{2\sqrt{21}} = 2$,
stad $k = \sqrt{2}$.
Długości boków: $4\sqrt{2}$ cm, $5\sqrt{2}$ cm, $5\sqrt{2}$ cm.



Oznaczmy:

$$|AP| = 4x, |PC| = x \\ |BQ| = 4y, |QC| = y$$

Korzystamy z podobieństwa trójkątów ABC i PQC (cecha BKB):

$$\frac{x}{5x} = \frac{|PQ|}{20}$$

$$\text{czyli } |PQ| = 4 \text{ dm.}$$

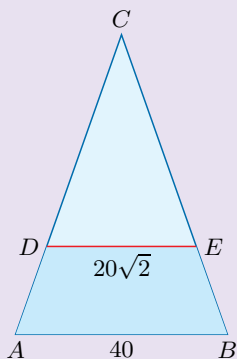
Skala podobieństwa trójkątów PQC i ABC jest równa $\frac{1}{5}$, zatem:

$$\frac{P_{\triangle PQC}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{P_{\triangle PQC}}{50} =$$

$$= k^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$\text{czyli } P_{\triangle PQC} = 2 \text{ dm}^2.$$

- $Ob_{DEC} = 80\sqrt{2} \approx 113$ [m]
 $Ob_{ABED} = 160 - 40\sqrt{2} \approx$
 ≈ 103 [m]

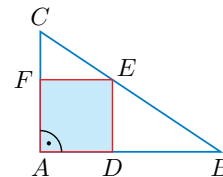


Powtórzenie

Zestaw I

- Wyznacz miary kątów trójkąta o podanym stosunku tych miar.
 - 1:2:3
 - 1:3:5
 - 2:9:13
- Kąty między boki trójkąta ostrokatnego a wysokościami poprowadzonymi z wierzchołków należących do tego boku mają miary 40° i 20° . Wyznacz miary kątów tego trójkąta.
- Dane są długości boków dwóch trójkątów. Czy trójkąty te są podobne?
 - 15, 18, 24 oraz 20, 24, 32
 - 1,2; 1,4; 1,8 oraz 1,8; 2,1; 2,8
 - 4, 8, 10 oraz 6, 3, 7,5
 - 20, 25, 30 oraz 6, 9, 7,5
- Trójkąt T_1 o bokach 5 cm, 5 cm i 4 cm jest podobny do trójkąta T_2 . Oblicz długości boków trójkąta T_2 w przypadku, gdy:
 - jego obwód jest równy 35 cm,
 - jego pole jest równe $4\sqrt{21}$ cm².

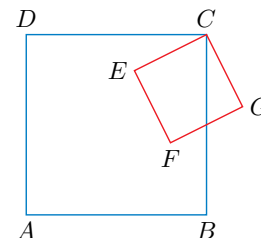
- W trójkącie ABC o polu 50 dm² bok AB ma długość 20 dm. Punkt P leży na boku AC i $|CP| = \frac{1}{5}|AC|$. Punkt Q leży na boku BC i $|CQ| = \frac{1}{5}|BC|$. Oblicz długość odcinka PQ i pole trójkąta CPQ .



- Przyprostokątne trójkąta ABC (rysunek obok) mają długości 10 i 15. Oblicz pole kwadratu $ADEF$.

- Dany jest trójkąt o bokach 4 cm, 6 cm i 8 cm. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczne kątów tego trójkąta dzielą jego przeciwległe boki.

- D** 8. Punkt C jest wspólnym wierzchołkiem kwadratów $ABCD$ i $CEFG$ (rysunek obok). Wykaż, że pola trójkątów DEC i CBG są równe.



- Działkę budowlaną w kształcie trójkąta o bokach długości 60 m, 60 m i 40 m podzielono na dwie części o równych polach płotem równoległym do boku długości 40 m. Oblicz z dokładnością do 1 m obwód każdej z nowo powstałych działek.

- Oznaczmy bok kwadratu przez x , wówczas z podobieństwa trójkątów FEC i ABC (cecha KKK) mamy:

$$\frac{10}{15} = \frac{10-x}{x}$$

skąd $x = 6$, zatem pole kwadratu $P = 36$.

- 3,2 cm, 4,8 cm; $1\frac{5}{7}$ cm, $2\frac{2}{7}$ cm; 2 cm, 4 cm

- Niech $|\sphericalangle DCE| = \alpha$, czyli $|\sphericalangle ECB| = 90^\circ - \alpha$. Wówczas:

$$|\sphericalangle BCG| = |\sphericalangle ECG| - |\sphericalangle ECB| = \alpha$$

$$\text{zatem } |\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle BCG|.$$

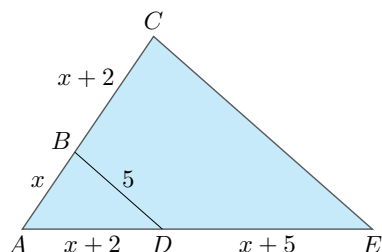
$|CE| = |CG|$ oraz $|DC| = |BC|$ zatem na mocy cechy BKB: $\triangle DEC \equiv \triangle BGC$, czyli ich pola są równe.

Zestaw II

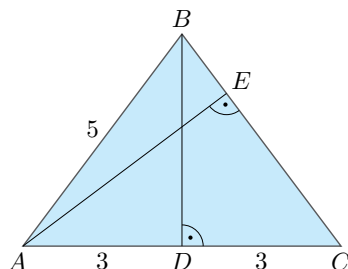
- D** 1. a) Wykaż, że dowolne dwa prostokąty, w których przekątne przecinają się pod tym samym kątem α , są podobne.
b) Wykaż, że jeśli prostokąt o bokach x i y jest podobny do prostokąta o bokach odpowiednio $x+1$ i $y+1$, to prostokąty te są kwadratami.

2. Oblicz obwód trójkąta AEC .

a) $BD \parallel CE$



b)



3. Suma obwodów dwóch figur podobnych jest równa 260 cm, a ich skala podobieństwa $k = \frac{5}{8}$. Oblicz obwód każdej z tych figur.
4. Figury F_1 i F_2 są podobne w skali 1:2, a figury F_2 i F_3 są podobne w skali 1:3. Suma pól figur F_1 , F_2 i F_3 jest równa 410 dm². Oblicz pole każdej z tych figur.

- D** 5. Wykaż, że w trapezie niebędącym równoległobokiem odcinek łączący środki:

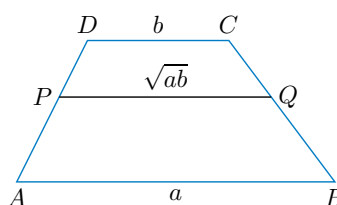
- a) ramion trapezu jest równoległy do jego podstaw (rozpatrz kąt otrzymany przez przedłużenie ramion trapezu),
b)* przekątnych trapezu jest równoległy do jego podstaw.

- D** 6. W rombie $ABCD$ połączono środki kolejnych boków i otrzymano czworokąt $A'B'C'D'$. Uzasadnij, że czworokąt ten jest prostokątem o polu dwa razy mniejszym od pola rombu.

- D** 7. W trapezie $ABCD$ o podstawach a i b (rysunek obok) poprowadzono odcinek PQ o długości $\sqrt{ab}$ równoległy do podstaw trapezu. Uzasadnij, że:

a) $\frac{|AP|}{|PD|} = \frac{|AB|}{|PQ|}$,

- b) trapezy $ABQP$ i $PQCD$ są podobne.



7. a) Na mocy cechy KKK: $\triangle ABE \sim \triangle PQE \sim \triangle DCE$. Stąd:

$$\frac{|ED|}{|ED|+|PD|} = \frac{b}{\sqrt{ab}}, \text{ czyli } |ED| = \frac{b|PD|}{\sqrt{ab}-b}$$

$$\frac{|ED|}{|ED|+|PD|+|AP|} = \frac{b}{a}, \text{ czyli } |ED| = \frac{b|PD|+b|AP|}{a-b}$$

$$\text{Zatem } \frac{b|PD|}{\sqrt{ab}-b} = \frac{b|PD|+b|AP|}{a-b}. \text{ Przekształcamy}$$

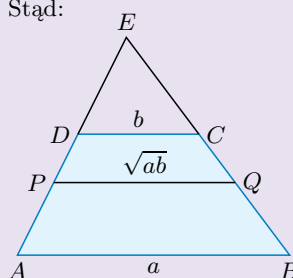
$$\text{równanie do postaci } \frac{|AP|}{|PD|} = \frac{a-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}-b}.$$

Usuujemy niewymierność z mianownika

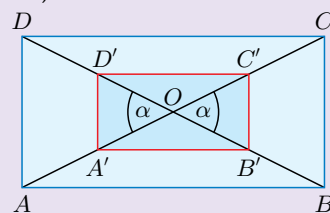
$$\frac{|AP|}{|PD|} = \frac{\sqrt{ab}}{b} = \frac{a}{\sqrt{ab}} = \frac{|AB|}{|PQ|}$$

Analogicznie wykazujemy równość $\frac{|BQ|}{|QC|} = \frac{|AB|}{|PQ|}$.

- b) Odpowiednie kąty trapezów są równe (jako kąty odpowiadające). Z poprzedniego podpunktu: $\frac{|AP|}{|PD|} = \frac{|PQ|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|PQ|} = \frac{|BQ|}{|QC|}$, czyli trapezy $ABQP$ i $PQCD$ są podobne.



1. a)



Kąty w prostokątach są równe, czyli do wykazania pozostała proporcjonalność odpowiednich boków.

$\triangle AOD \sim \triangle A'OD'$ (cecha KKK), stąd $\frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|A'D'|}{|AD|}$

$\triangle AOB \sim \triangle A'OB'$ (cecha KKK), stąd $\frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|A'B'|}{|AB|}$

Zatem

$$\frac{|A'D'|}{|AD|} = \frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|A'B'|}{|AB|},$$

co oznacza, że odpowiednie boki prostokątów są proporcjonalne, czyli prostokąty $ABCD$ i $A'B'C'D'$

są podobne.

- b) Prostokąty są podobne, zatem:

$$\frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+1}$$

$$xy + x = xy + y$$

$$x = y$$

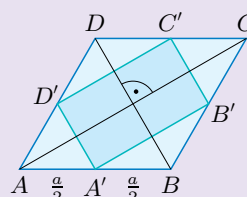
Również $x+1 = y+1$, czyli prostokąty są kwadratami.

2. a) 37,5 b) 14,4

3. a) 100 cm, 160 cm

4. 10 dm², 40 dm², 360 dm²

- 6.



$\frac{|AA'|}{|AD'|} = \frac{|A'B'|}{|D'D'|}$, zatem na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa $A'D' \parallel BD$. Analogicznie wykazujemy równoległość $B'C'$ do BD oraz $A'B'$ i $D'C'$ do AC .

Przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym, zatem kolejne boki w czworokącie $A'B'C'D'$ są do siebie prostopadłe – jest to więc prostokąt.

$$\frac{|A'B'|}{|AC|} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

czyli $|A'B'| = \frac{|AC|}{2}$ oraz

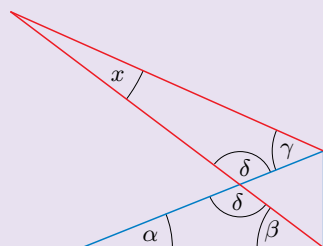
$$\frac{|B'C'|}{|BD|} = \frac{1}{2}, \text{ czyli } |B'C'| = \frac{|BD|}{2}$$

$$P_{A'B'C'D'} = |A'B'| \cdot |B'C'| = \frac{|AC|}{2} \cdot \frac{|BD|}{2} = \frac{1}{2} P_{ABCD}$$



Odpowiedzi do zadań

1.



$$\delta = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 59^\circ = 121^\circ$$

$$x = 180^\circ - (\gamma + \delta) = 180^\circ - 167^\circ = 13^\circ$$

2. a – bok kwadratu

Wszystkie trójkąty z czerwonym brzegiem są przystające, ich podstawa jest równa $\frac{1}{2}a$, a wysokość a . Zatem podstawa i wysokość dużego trójkąta są równe $3a$. Stosunek sumy pól kwadratów do pola trójkąta:

$$\frac{3a^2}{\frac{1}{2} \cdot 9a^2} = \frac{2}{3}$$

3. 3,5 cm

4. 58 m

5. Bok kwadratu na planie ma długość 9 cm. Zatem długość boku działki jest równa:

$$9 \cdot 450 = 4050 \text{ [cm]}$$

Obwód działki jest równy:

$$4 \cdot 40,5 = 162 \text{ [m]}$$

Zatem na jej ogrodzenie potrzeba 158 m siatki.

6. a) Wszystkie pomalowane trójkąty są prostokątne oraz ich kąty ostre są kątami wierzchołkowymi, zatem trójkąty te są podobne na mocy cechy KKK.

b) Suma pól trójkątów niebieskich jest równa różnicy pola kwadratu i pola białego ośmiokąta. Tak samo jest dla trójkątów fioletowych.

7. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach a, b oraz wysokości h . Niech $EG \parallel AB$ będzie odcinkiem dzielącym ten trapez na dwa trapezy o równych polach, $|EG| = x$. Ponadto $HC \parallel AD$ oraz y jest wysokością trapezu $EGCD$.

Z zależności $P_{ABCD} = 2P_{EGCD}$ otrzymujemy równanie: $(a + b)h = 2(x + b)y$

Z podobieństwa trójkątów HBC i FCG otrzymujemy: $\frac{a-b}{h} = \frac{x-b}{y}$

Powyższe równania mnożymy stronami i otrzymujemy $a^2 - b^2 = 2x^2 - 2b^2$, skąd:

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

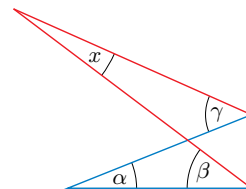
Niech c będzie długością odcinka równoległego do podstaw trapezu dzielącego go na dwa trapezy podobne. Wówczas $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$, skąd $c = \sqrt{ab}$. Zatem:

$$x \geq c$$

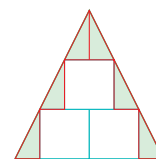
Równość zachodzi w przypadku, gdy trapez jest równoległobokiem.

Zadania z kontekstem realistycznym

1. Geodeta miał zmierzyć w terenie kąt oznaczony na rysunku obok przez x . Ze względu na ukształtowanie terenu okazało się to niemożliwe, więc zmierzył kąty α, β i γ i otrzymał $\alpha = 22^\circ, \beta = 37^\circ, \gamma = 46^\circ$. Ile wynosi miara kąta x ?

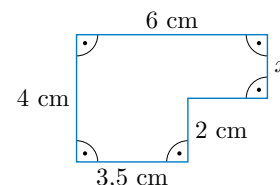


2. Na trawniku mającym kształt trójkąta równoramiennego wytyczono trzy jednakowej wielkości rabaty kwiatowe, każda w kształcie kwadratu (rysunek obok). Oblicz, jaką część powierzchni trawnika zajmują rabaty.



3. Na mapie sporządzonej w skali 1 : 700 000 odległość między miejscowościami A i B jest równa 4 cm. Oblicz odległość między tymi miejscowościami na mapie w skali 1 : 800 000.

4. Na rysunku przedstawiono plan ogrodu w pewnej skali. Wiadomo, że fragment płotu biegnący wzdłuż odcinka x ma długość 6 m. Jaka jest długość płotu postawionego wokół tego ogrodu, jeżeli na wejście pozostawiono 2 m?

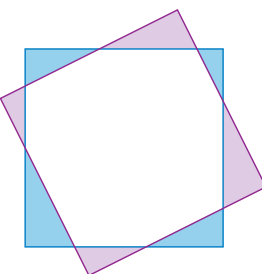


5. Na planie w skali 1:450 kwadratowa działka ma pole równe 81 cm^2 . Ile siatki potrzeba na ogrodzenie tej działki, jeżeli brama ma mieć długość 4 m?

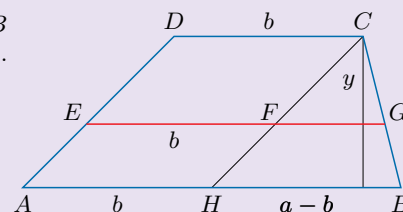
6. Jaś położył dwie jednakowe kwadratowe kartki tak jak na rysunku obok, a następnie część trójkątów pomalował na niebiesko, a część na fioletowo.

a) Uzasadnij, że wszystkie pomalowane trójkąty są podobne.

b) Uzasadnij, że na pomalowanie trójkątów niebieskich potrzebował tyle samo farby, co na pomalowanie trójkątów fioletowych.



7. Działkę budowlaną mającą kształt trapezu podzielono płotem równoległym do podstaw trapezu na dwie działki o równych polach. Czy długość płotu dzielącego nowo powstałe działki jest większa od długości płotu równoległego do podstaw trapezu dzielącego te działki na dwa trapezy podobne?





Przedstawiając dowód, należy precyzyjnie uzasadnić każdy krok rozumowania. Można to zrobić tak jak w przykładzie 1. lub w postaci dowodu dwukolumnowego, który jest zapisany w tabeli (przykład 2.).

Przykład 1

Dane są kwadrat $ABCD$ i równoległobok $EFBA$ (rysunek obok). Udowodnij, że trójkąty ADE i BCF są przystające.

Niech kąt ostry równoległoboku ma miarę α . Wówczas $|\angle CBF| = 90^\circ + \alpha$. Suma miar kątów przy jednym boku równoległoboku jest równa 180° , więc:

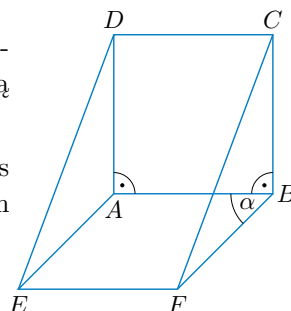
$$|\angle BAE| = 180^\circ - \alpha$$

Stąd:

$$|\angle DAE| = 360^\circ - (|\angle BAE| + |\angle BAD|) = 360^\circ - (180^\circ - \alpha + 90^\circ) = 90^\circ + \alpha$$

czyli $|\angle DAE| = |\angle CBF|$. Jednocześnie $|AD| = |BC|$ (boki kwadratu) oraz $|AE| = |BF|$ (przeciwnie boki równoległoboku).

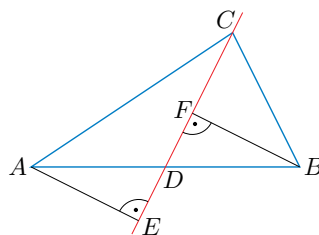
Na podstawie cechy BKB wnioskujemy, że $\triangle ADE \equiv \triangle BCF$.



→ Zadanie 13, str. 312

Przykład 2

Prosta zawierająca środkową trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C przecina bok AB w punkcie D . Punkty E i F leżą na prostej CD , przy czym $AE \perp CD$ oraz $BF \perp CD$ (rysunek obok). Udowodnij, że trójkąty ADE i BDF są przystające.



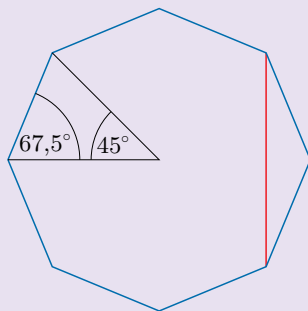
Dowód przedstawimy w dwukolumnowej tabeli.

W jednej kolumnie zapisujemy kolejne stwierdzenia, a w drugiej – ich uzasadnienia. Pozwala to uporządkować całe rozumowanie.

Stwierdzenie	Uzasadnienie
$ AD = BD $	Punkt D jest środkiem boku AB .
$ \angle ADE = \angle BDF $	Są to kąty wierzchołkowe.
$ \angle AED = \angle BFD $	Są to kąty proste.
$ \angle DAE = \angle DBF $	Trójkąty ADE i BDF mają dwa kąty równe, więc wszystkie ich kąty są równe.
$\triangle ADE \equiv \triangle BDF$	Na podstawie cechy KBK przystawiania trójkątów.

→ Zadanie 13, str. 312

1.



2. $y = 66^\circ$, $x = 40^\circ$

3. $\begin{cases} Ob_1 + Ob_2 = 340 \\ \frac{Ob_1}{Ob_2} = \frac{7}{10} \end{cases}$
 $Ob_1 = 140$ cm, $Ob_2 = 200$ cm

4. $P_{ABC} = 30$ cm²,
 $Ob_{ABC} = 30$ cm
 Skala podobieństwa
 $\triangle AED$ do $\triangle ABC$: $k = \frac{2}{5}$
 $Ob_{AED} = 12$ cm

W zadaniach 1–8 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

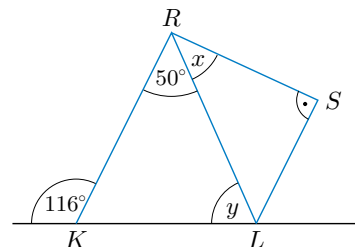
Przekątna ośmiokąta foremnego dzieli go na siedmiokąt i trójkąt równoramienny. Miara kąta ostrego tego trójkąta jest równa

- A. $22,5^\circ$ C. $26,5^\circ$
 B. $24,5^\circ$ D. $28,5^\circ$

Zadanie 2 (0–1)

Na rysunku obok $RK \parallel SL$. Suma miar kątów x i y jest równa

- A. 104° C. 106°
 B. 105° D. 110°



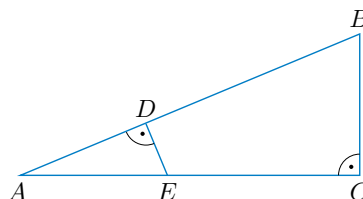
Zadanie 3 (0–1)

Suma obwodów dwóch figur podobnych jest równa 340 cm, a ich skala podobieństwa $k = \frac{7}{10}$. Różnica obwodów tych figur wynosi

- A. 60 cm B. 65 cm C. 75 cm D. 80 cm

Zadanie 4 (0–1)

Przyprostokątne trójkąta ABC (rysunek poniżej) mają długości 5 cm i 12 cm. Ile wynosi obwód trójkąta AED , jeśli jego pole jest równe 4,8 cm²?



- A. 6 cm B. 8 cm C. 10 cm D. 12 cm

Zadanie 5 (0–1)

Jeżeli prostokąt P_1 o bokach długości 9 cm i 12 cm jest podobny do prostokąta P_2 o przekątnej długości 20 cm, to

- A. obwód prostokąta P_2 jest równy 54 cm.
 B. pole prostokąta P_2 jest równe 200 cm².
 C. pole prostokąta P_2 jest o 64 cm² większe od pola prostokąta P_1 .
 D. stosunek pola prostokąta P_1 do pola prostokąta P_2 jest równy 9:16.

5. Przekątna prostokąta P_1 ma długość:

$$\sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15 \text{ [cm]}$$

zatem skala podobieństwa prostokąta P_1 do P_2 jest równa $\frac{3}{4}$.

Prostokąt P_1 : $P = 108$ cm², $Ob = 42$ cm.

Prostokąt P_2 : $P = 192$ cm², $Ob = 56$ cm.

Zadanie 6 (0–1)

Na boku AB trójkąta ABC wybrano punkt P , a na boku AC – punkt Q tak, że $PQ \parallel BC$. Jeśli $|AB| = 4,5$ cm, $|AC| = 5$ cm, $|AQ| = 2$ cm i $|BC| = 3$ cm, to obwód trójkąta APQ jest równy

- A. 5 cm B. 6 cm C. 6,5 cm D. 7 cm

Zadanie 7 (0–1)

Prostokąt P_1 o bokach długości 7 cm i 24 cm jest podobny do prostokąta P_2 , którego pole jest równe 42 cm^2 . Długość przekątnej prostokąta P_2 wynosi

- A. 6,25 cm B. 12,5 cm C. 14,5 cm D. 25 cm

Zadanie 8 (0–1)

Dany jest trójkąt ABC . Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie P takim, że $|BP| = |AP| + 1$ cm. Ponadto $|AC| = 4$ cm oraz $|BC| = 6$ cm. Obwód trójkąta ABC wynosi

- A. 15 cm B. 14,5 cm C. 12,5 cm D. 12 cm

Zadanie 9 (0–2)

Dwa boki trójkąta mają długości 4 cm i 8 cm.

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Długość trzeciego boku tego trójkąta nie może być równa

- A. $3\sqrt{2}$ cm E. $(7 + 2\sqrt{5})$ cm
B. $2\sqrt{3}$ cm F. $(8 + 2\sqrt{3})$ cm
C. $(3 + \sqrt{2})$ cm G. $(9 + 2\sqrt{2})$ cm
D. $(2 + \sqrt{5})$ cm H. $(10 + 2\sqrt{2})$ cm

Zadanie 10 (0–1)

Trójkąty T_1 i T_2 są podobne. Najkrótszy bok trójkąta T_1 ma długość 4,5 cm, a najkrótszy bok trójkąta T_2 ma długość 7,5 cm.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Jeśli pole trójkąta T_1 jest równe 27 cm^2 , to pole trójkąta T_2 jest równe 75 cm^2 .	P	F
Jeśli pole trójkąta T_2 jest równe 25 cm^2 , to pole trójkąta T_1 jest równe 9 cm^2 .	P	F

6. Trójkąty APQ i ABC są podobne (cecha KKK) w skali $\frac{2}{5}$.

$$Ob_{APQ} = \frac{2}{5} \cdot (4,5 + 5 + 3) = 5 \text{ [cm]}$$

7. k – skala podobieństwa prostokąta P_2 do prostokąta P_1
 k^2 – stosunek pól tych prostokątów

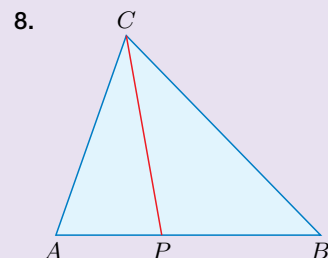
d_1 – długość przekątnej prostokąta P_1

d_2 – długość przekątnej prostokąta P_2

$$k^2 = \frac{42}{7 \cdot 24} = \frac{1}{4}, \text{ więc } k = \frac{1}{2}$$

$$d_1 = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25 \text{ [cm]}$$

$$d_2 = k \cdot d_1 = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12,5 \text{ [cm]}$$



Z twierdzenia o dwusiecznej:

$$\frac{|BP|}{|AP|} = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{|AP|+1}{|AP|} = \frac{3}{2}$$

$$2|AP| + 2 = 3|AP|$$

$$|AP| = 2$$

Stąd $|AP| = 2$ cm,

$|BP| = 3$ cm, $|AB| = 5$ cm,

czyli $Ob = 15$ cm.

9. x – długość trzeciego boku w cm

$$8 - 4 < x < 8 + 4, \text{ czyli:}$$

$$4 < x < 12$$

A. $4 < 3\sqrt{2} < 12$

B. $2\sqrt{3} < 4$

C. $4 < 3 + \sqrt{2} < 12$

D. $4 < 2 + \sqrt{5} < 12$

E. $4 < 7 + 2\sqrt{5} < 12$

F. $4 < 8 + 2\sqrt{3} < 12$

G. $4 < 9 + 2\sqrt{2} < 12$

H. $10 + 2\sqrt{2} > 12$

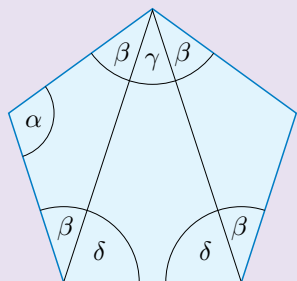
10. k – skala podobieństwa trójkąta T_2 do trójkąta T_1

$$k = \frac{7,5}{4,5} = \frac{5}{3}, \frac{P_2}{P_1} = k^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

$$\text{Jeżeli } P_1 = 27 \text{ cm}^2, \text{ to } P_2 = k^2 \cdot P_1 = \frac{25}{9} \cdot 27 = 75 \text{ [cm}^2\text{]}.$$

$$\text{Jeżeli } P_2 = 25 \text{ cm}^2, \text{ to } P_1 = \frac{P_2}{k^2} = 25 \cdot \frac{9}{25} = 9 \text{ [cm}^2\text{]}.$$

11.



Suma miar kątów wewnętrznych pięciokąta wynosi:

$$3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$$

czyli:

$$\alpha = 540^\circ : 5 = 108^\circ$$

Wówczas:

$$\beta = \frac{1}{2}(180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ$$

$$\gamma = 108^\circ - 2\beta = 36^\circ$$

$$\delta = 108^\circ - \beta = 72^\circ$$

12. $\frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AB|}{|DE|}$, czyli $\frac{|BC|}{2} = \frac{6}{4,8}$,

więc $|BC| = \frac{12}{4,8} = 2,5$

$\frac{|PD|}{|PA|} = \frac{|DE|}{|AB|}$, czyli $\frac{|PD|}{4} = \frac{4,8}{6}$,

więc $|PD| = \frac{4,8 \cdot 4}{6} = 3,2$

13. Oznaczmy punkt przecięcia CE i DF przez G oraz kąt $|\angle BCE| = \alpha$.

Wówczas $|\angle GCD| = 90^\circ - \alpha$.

$|\angle DGC| = 90^\circ$, więc:

$$|\angle GDC| = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$$

Ponadto $|CD| = |BC|$ oraz

$$|\angle FCD| = 90^\circ = |\angle EBC|.$$

Na mocy cechy KBK:

$$\triangle CDF \equiv \triangle BCE.$$

Zadanie 11 (0-1)

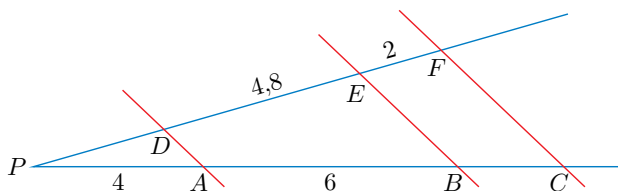
Przekątne poprowadzone z jednego wierzchołka pięciokąta foremnego podzieliły ten pięciokąt na trzy trójkąty.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Jeden z tych trójkątów ma kąty o miarach $30^\circ, 75^\circ, 75^\circ$.	P	F
Dwa z tych trójkątów mają kąty o miarach $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$.	P	F

Zadanie 12 (0-2)

Proste AD , BE i CF są równoległe (rysunek poniżej).



Każdemu rozpoczętemu zdaniu przyporządkuj właściwe dokończenie. Wpisz obok rozpoczętych zdań w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–E.

Numer zadania	Zdanie do uzupełnienia	Dokończenie zdania
12.1	Odcinek BC ma długość równą	A
12.2	Odcinek PD ma długość równą	C

A. 2,5

B. 2,8

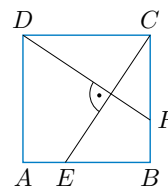
C. 3,2

D. 3,6

E. 3,8

D Zadanie 13 (0-2) → Przykłady 1 i 2, str. 309

Na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$ wybrano odpowiednie punkty E i F takie, że $CE \perp DF$ (rysunek obok). Uzasadnij, że trójkąty BCE i CDF są przystające.



Zadanie 14

Przekątne rombu $ABCD$ mają długości 12 cm i 16 cm.

Zadanie 14.1 (0-2)

Punkt P jest punktem przecięcia przekątnych rombu $ABCD$. Oblicz długości odcinków, na które dwusieczna kąta APB dzieli bok rombu.

Zadanie 14.2 (0-2)

Romb $EFGH$ o polu równym 150 cm^2 jest podobny do rombu $ABCD$. Oblicz obwód rombu $EFGH$.

14.1. $|AB| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

Z twierdzenia o dwusiecznej otrzymujemy:

$$\frac{|AS|}{|BS|} = \frac{|AP|}{|BP|} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{|AS|}{10 - |AS|} = \frac{3}{4}$$

$$4|AS| = 30 - 3|AS|$$

$$|AS| = \frac{30}{7}$$

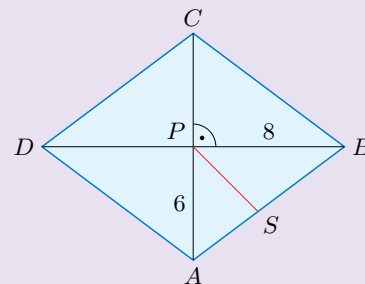
Zatem $|AS| = 4\frac{2}{7} \text{ cm}$ oraz $|BS| = 5\frac{5}{7} \text{ cm}$.

14.2. $P_{ABCD} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| = 96 \text{ cm}^2$

$$Ob_{ABCD} = 4|AB| = 40 \text{ cm}$$

k – skala podobieństwa rombu $EFGH$ do rombu $ABCD$

$$k^2 = \frac{P_{EFGH}}{P_{ABCD}} = \frac{150}{96} = \frac{25}{16}, \text{ więc } k = \frac{5}{4}, Ob_{EFGH} = k \cdot Ob_{ABCD} = \frac{5}{4} \cdot 40 = 50 [\text{cm}].$$

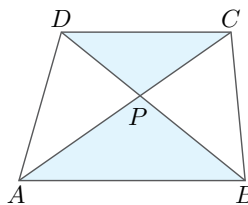


**Zadanie 15 (0–1)**

Dany jest trapez $ABCD$ (rysunek obok). Podstawy trapezu mają długości $|AB| = 16$ cm, $|CD| = 12$ cm, a pole trójkąta ABP jest równe 48 cm².

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

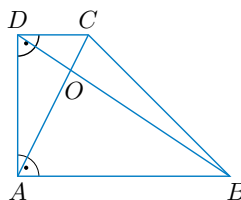
Pole trójkąta CDP jest równe



A.	36 cm ² ,	ponieważ skala podobieństwa trójkąta CDP do trójkąta ABP jest równa	1.	$\frac{3}{4}$.
B.	27 cm ² ,		2.	$\frac{9}{16}$.
			3.	$\frac{16}{9}$.

Zadanie 16 (0–4)

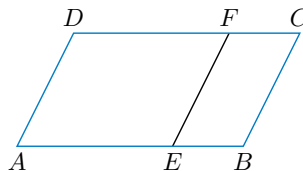
W trapezie prostokątnym (rysunek obok) dane są długości podstaw $|AB| = 6$ i $|CD| = 2$ oraz ramienia $|AD| = 4$. Punkt O jest punktem przecięcia przekątnych tego trapezu. Oblicz obwód trójkąta AOB .

**Zadanie 17 (0–4)**

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach $|AB| = 40$ cm i $|CD| = 25$ cm i ramionach długości 12 cm i 9 cm. Przedłużenia ramion tego trapezu przecinają się w punkcie P . Oblicz obwód trójkąta ABP .

D Zadanie 18 (0–4)

Dany jest równoległobok $ABCD$ o bokach $|AB| = a$ i $|BC| = b$. Czworokąt $EBCF$ jest równoległobokiem podobnym do równoległoboku $ABCD$. Wykaż, że obwód czworokąta $AEFD$ jest równy $\frac{2a^2 - 2b^2 + 2ab}{a}$.

**Zadanie 19 (0–4)**

Dany jest trójkąt równoramienny o ramieniu długości 6 cm i kącie przy podstawie równym 30° . Oblicz odległości punktu przecięcia prostych zawierających wysokości tego trójkąta od jego wierzchołków.

Wskazówka. Proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

D Zadanie 20 (0–4)

Uzasadnij, że suma długości środkowych trójkąta o obwodzie L jest mniejsza od $\frac{3}{2}L$.

20. Z założenia: $2x + 2y + 2z = L$.

Z nierówności trójkąta:

$$a < y + 2x$$

$$a < y + 2z$$

$$b < z + 2x$$

$$b < z + 2y$$

$$c < x + 2y$$

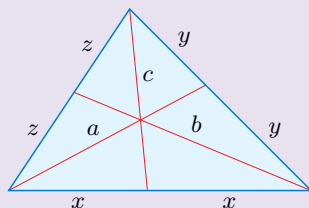
$$c < x + 2z$$

Dodajemy nierówności stronami:

$$2(a + b + c) < 3(2x + 2y + 2z)$$

Zatem:

$$a + b + c < \frac{3}{2}(2x + 2y + 2z) = \frac{3}{2}L$$



15. Skala podobieństwa trójkąta CDP do trójkąta ABP :

$$k = \frac{|CD|}{|AB|} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

Stosunek pól trójkątów:

$$\frac{P_{CDP}}{P_{ABP}} = k^2 = \frac{9}{16}$$

Zatem:

$$P_{CDP} = k^2 \cdot P_{ABP} = \frac{9}{16} \cdot 48 = 27 \text{ [cm}^2\text{]}$$

16. $\triangle AOB \sim \triangle COD$

(cecha KKK)

Skala podobieństwa $\triangle AOB$ do $\triangle COD$ jest równa 3:1

$$|AC| = 2\sqrt{5}, \text{ czyli}$$

$$|AO| = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

$$|BD| = 2\sqrt{13}, \text{ czyli}$$

$$|BO| = \frac{3}{2}\sqrt{13}$$

$$Ob = 6 + \frac{3}{2}(\sqrt{5} + \sqrt{13})$$

17. $\triangle ABP \sim \triangle DCP$

(cecha KKK)

$$\frac{|AP| - 9}{|AP|} = \frac{25}{40}$$

$$\text{czyli } |AP| = 24 \text{ cm}$$

$$\frac{|BP| - 12}{|BP|} = \frac{25}{40}$$

$$\text{czyli } |PC| = 32 \text{ cm}$$

$$Ob_{ABP} = 96 \text{ cm}$$

18. $\frac{|EB|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AB|}$, czyli:

$$|EB| = \frac{|BC|^2}{|AB|} = \frac{b^2}{a}$$

$$\text{Stąd } |AE| = |DF| = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a}, |EF| = |AD| = b.$$

$$Ob_{AEFD} = \frac{2a^2 - 2b^2}{a} + 2b$$

19. 6 cm, $6\sqrt{3}$ cm, $6\sqrt{3}$ cm

Odpowiedzi do zadań

1. $|AB| = 10$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot |CP|,$$

czyli $|CP| = 4,8$

$$|AP| = \sqrt{8^2 - (4,8)^2} = 6,4$$

Skala podobieństwa $\triangle APQ$ do $\triangle ABC$: $k = \frac{6,4}{10} = 0,64$, więc stosunek pól tych trójkątów jest równy k^2 , czyli 0,4096.

2.1. $\triangle ACB \sim \triangle APQ$

(cecha KKK)

$$\frac{P_{APQ}}{P_{ACB}} = \frac{1}{2}, \text{ czyli skala podobieństwa } \triangle APQ \text{ do } \triangle ACB:$$

$$k = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Ob_{ACB} = 6 + 2\sqrt{5} \text{ m, czyli}$$

$$Ob_{APQ} = 3\sqrt{2} + \sqrt{10}$$

2.2. $4 - \frac{2}{3}\sqrt{10}$

3. $|PC| = 6,4$; $|PF| = 7,6$

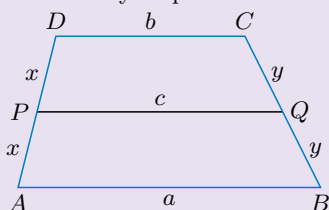
Z twierdzenia Talesa:

$$\frac{|PD|}{6,4} = \frac{7,8}{10,4}, \text{ czyli } |PD| = 4,8$$

$$\text{oraz } \frac{|PE|}{7,6} = \frac{7,8}{10,4},$$

$$\text{czyli } |PE| = 5,7.$$

4. Rozważmy trapez:



Z podobieństwa trapezów $ABQP$ i $PQCD$:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b} = \frac{x}{y} = 1,$$

$$\text{czyli } a = c = b.$$

Stąd odległość między ramionami AD i BC jest stała, co oznacza, że ramiona te są równoległe. Zatem trapez $ABCD$ jest równoległobokiem.

5. Niech x będzie długością odcinka dzielącego trapez.

Wówczas skala podobieństwa trapezów: $k = \frac{x}{a} = \frac{2a}{x}$.

$$\text{Stąd } x = a\sqrt{2}, \text{ czyli } k = \sqrt{2}.$$

Pole wyjściowego trapezu:

$$P = \frac{3a^2}{2}$$

Niech P_1 i P_2 będą polami powstałych trapezów, wówczas:

$$\begin{cases} P_1 + P_2 = \frac{3a^2}{2} \\ \frac{P_1}{P_2} = 2 \end{cases}$$

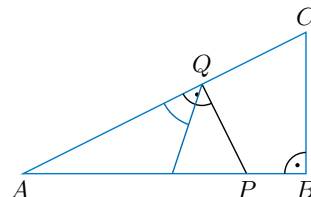
$$P_1 = a^2, P_2 = \frac{a^2}{2}$$

Zadanie 1 (0-2)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym $|AC| = 8$ i $|BC| = 6$, a kąt prosty znajduje się przy wierzchołku C . Odcinek CP jest wysokością trójkąta ABC , a odcinek PQ jest wysokością trójkąta CPA . Oblicz stosunek pola trójkąta APQ do pola trójkąta ABC .

Zadanie 2

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o prostokątnych długościach $|AB| = 4$ i $|BC| = 2$ (rysunek obok). Odcinek PQ dzieli ten trójkąt na dwie figury o równych polach.



Zadanie 2.1 (0-2)

Oblicz obwód trójkąta APQ .

Zadanie 2.2 (0-2)

Dwusieczna kąta AQP przecina odcinek AB w punkcie D . Oblicz długość odcinka DB .

Zadanie 3 (0-2)

Dany jest trapez $ABCD$ o dłuższej podstawie AB . Na ramieniu AD wybrano punkt E , a na ramieniu BC punkt F w taki sposób, że odcinek EF jest równoległy do podstaw trapezu oraz $|BF| = 2,8$ i $|CF| = 1,2$. Przedłużenia ramion trapezu przecinają się w punkcie P takim, że $|PA| = 7,8$ i $|PB| = 10,4$. Oblicz długości odcinków PD i PE .

D Zadanie 4 (0-4)

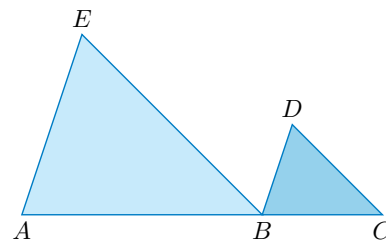
Uzasadnij, że jeśli odcinek łączący środki ramion trapezu dzieli go na dwa trapezy podobne, to trapez ten jest równoległobokiem.

D Zadanie 5 (0-4)

Trapez prostokątny o podstawach długości a i $2a$ oraz krótszym ramieniu równym a podzielono odcinkiem równoległym do podstaw na dwa trapezy podobne. Uzasadnij, że pola tych trapezów są równe $\frac{a^2}{2}$ i a^2 .

D Zadanie 6 (0-6)

Punkty A, B, C (rysunek obok) są współliniowe oraz $AE \parallel BD$ i $BE \parallel CD$. Pola trójkątów ABE i BCD są równe odpowiednio S_1 i S_2 . Udowodnij, że pole trójkąta BDE jest równe $\sqrt{S_1 \cdot S_2}$.



6. $\triangle ABE \sim \triangle BCD \sim \triangle ACF$ (cecha KKK).

Niech k będzie skalą podobieństwa $\triangle ABE$ do $\triangle BCD$. Z założenia $AE \parallel BD$ oraz $BE \parallel CD$, czyli boki czworokąta $EBDF$ leżą na prostych parami równoległych – zatem jest to równoległobok.

Ponadto $\triangle EBD \equiv \triangle DFE$ (cecha KBK).

$$\frac{S_1}{S_2} = k^2, \text{ czyli } k = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}} = \frac{\sqrt{S_1 S_2}}{S_2}$$

Pole $\triangle ACF$: $P = S_1 + S_2 + 2S_3$, ale także:

$$P = \frac{1}{2}(a + ka)(h + kh) = \frac{1}{2}ah(k + 1)^2 =$$

$$= S_2(k + 1)^2 = S_2 \left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{2\sqrt{S_1 S_2}}{S_2} + 1 \right) = S_1 + 2\sqrt{S_1 S_2} + S_2$$

$$\text{Zatem } S_3 = \sqrt{S_1 S_2}.$$

