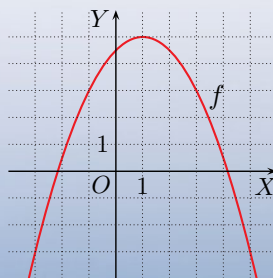


7 Funkcja kwadratowa

Funkcję postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) nazywamy **funkcją kwadratową** lub **trójmianem kwadratowym**. Wykres funkcji kwadratowej nazywamy **parabolą**. Mówimy „parabola określona równaniem $y = ax^2 + bx + c$ ” lub krótko: „parabola $y = ax^2 + bx + c$ ”.

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji kwadratowej $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{9}{2}$.



Swobodnie wisząca zamocowana na końcach lina przyjmuje kształt krzywej łańcuchowej. Natomiast liny podtrzymujące most wiszący mają kształt zbliżony do paraboli (na zdjęciu most Golden Gate w San Francisco).

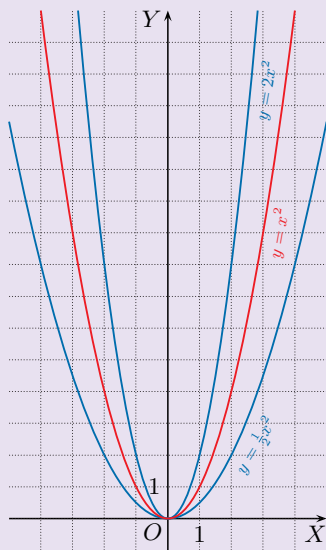


Uczeń:

- szkicuje wykres funkcji $f(x) = ax^2$,
- podaje własności funkcji $f(x) = ax^2$,
- stosuje własności funkcji $f(x) = ax^2$ do rozwiązywania zadań.

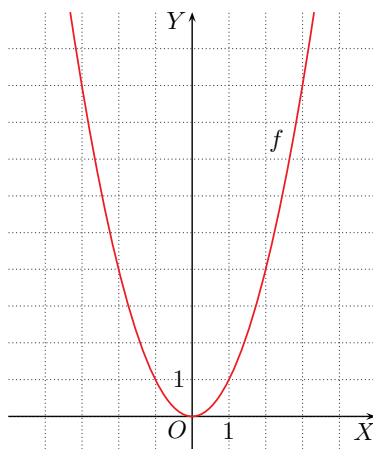
Ćwiczenie 1

x	-2	-1	0	1	2
$f_1(x)$	4	1	0	1	4
$f_2(x)$	8	2	0	2	8
$f_3(x)$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2



7.1. Wykres funkcji $f(x) = ax^2$

Na rysunku poniżej przedstawiono **parabolę**, która jest wykresem funkcji $f(x) = x^2$. Jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, a zbiorem wartości – przedział $[0; \infty)$. Z wykresu możemy odczytać następujące własności:

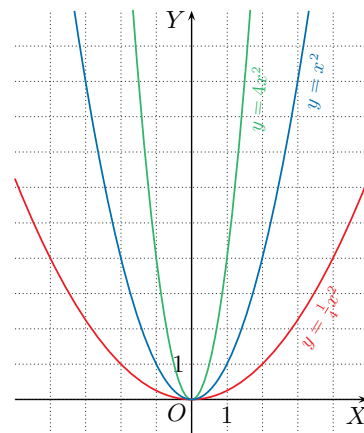


- **ramiona** paraboli są skierowane do góry,
- oś OY jest **osią symetrii** paraboli,
- punkt $(0, 0)$ jest **wierzchołkiem** paraboli,
- funkcja f jest **malejąca** w przedziale $(-\infty; 0]$ oraz **rosnąca** w przedziale $[0; \infty)$,
- dla $x = 0$ funkcja f przyjmuje **wartość najmniejszą** równą zero, natomiast dla każdego $x \neq 0$ prawdziwa jest nierówność $f(x) > 0$,
- funkcja f nie przyjmuje **wartości największej**.

Ćwiczenie 1

Sporządź odpowiednie tabele wartości funkcji i naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 2x^2$ i $f_3(x) = \frac{1}{2}x^2$, łącząc punkty wykresu odpowiednią krzywą (patrz wyżej).

Parabole $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = x^2$, $y = 4x^2$ zostały dla porównania naszkicowane w jednym układzie współrzędnych. Zwróć uwagę na zależność między współczynnikiem a w równaniu paraboli $y = ax^2$ i rozchyleniem ramion tej paraboli.



Ćwiczenie 2

Czy punkt P należy do paraboli $y = 4x^2$?

- a) $P(-\frac{1}{4}, 1)$ c) $P(\frac{1}{2}, 1)$
b) $P(4, 32)$ d) $P(-2, 16)$

Ćwiczenie 3

Dla jakiej wartości współczynnika a punkt Q należy do paraboli $y = ax^2$?

- a) $Q(1, 6)$ b) $Q(2, 8)$ c) $Q(-4, 8)$ d) $Q(-8, 48)$

Ćwiczenie 2

- a) $4 \cdot (-\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{4} \neq 1$ – nie należy
b) $4 \cdot 4^2 = 64 \neq 32$ – nie należy
c) $4 \cdot (\frac{1}{2})^2 = 1$ – należy
d) $4 \cdot (-2)^2 = 16$ – należy

Ćwiczenie 3

- a) $a \cdot 1^2 = 6$, zatem $a = 6$
b) $a \cdot 2^2 = 8$, zatem $a = 2$
c) $a \cdot (-4)^2 = 8$, zatem $a = 0,5$
d) $a \cdot (-8)^2 = 48$, zatem $a = 0,75$

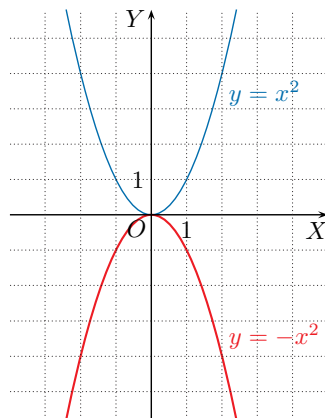
Multibook

- Wykres funkcji kwadratowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 7.1

Generator
testów i sprawdzianów

Wykres funkcji $y = -x^2$ można otrzymać, odbijając symetrycznie względem osi OX wykres funkcji $y = x^2$. Zwróć uwagę na to, że ramiona paraboli będącej wykresem funkcji $y = -x^2$ są skierowane w dół.



Ćwiczenie 4

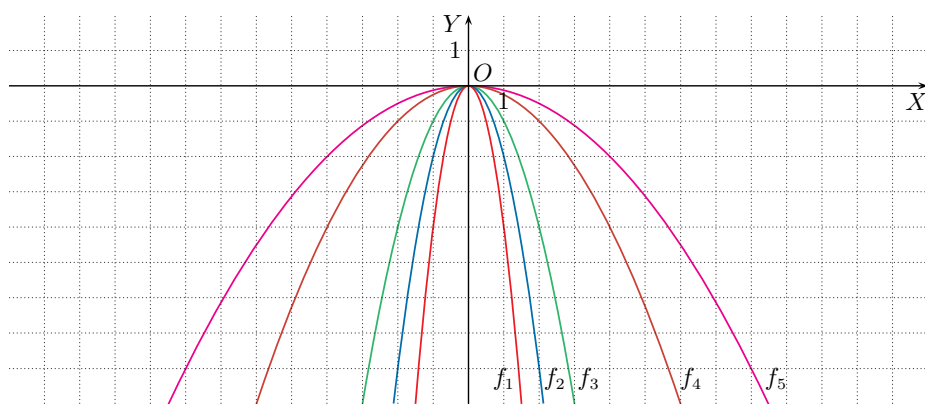
- Podaj przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = -x^2$.
- Podaj równanie osi symetrii i współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = -x^2$.

Ćwiczenie 4

- rośnie w $(-\infty; 0]$, maleje w $[0; \infty)$
- oś symetrii: $x = 0$, wierzchołek: $(0, 0)$

Ćwiczenie 5

Wykresy funkcji f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 (rysunek poniżej) otrzymano, odbijając symetrycznie względem osi OX wykresy funkcji $y = \frac{1}{8}x^2, y = \frac{1}{4}x^2, y = x^2, y = 2x^2, y = 4x^2$. Podaj wzory funkcji f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 .



Ćwiczenie 5

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -4x^2, \\ f_2(x) &= -2x^2, \\ f_3(x) &= -x^2, \\ f_4(x) &= -\frac{1}{4}x^2, \\ f_5(x) &= -\frac{1}{8}x^2 \end{aligned}$$

Wartość współczynnika a we wzorze funkcji $f(x) = ax^2, a \neq 0$, decyduje o tym, czy ramiona paraboli będącej jej wykresem skierowane są do góry (gdy $a > 0$) czy w dół (gdy $a < 0$) oraz o tym, jak bardzo są rozchylone.

Ćwiczenie 6

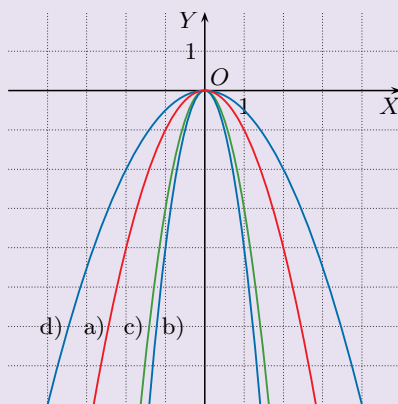
Do wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ należy punkt P . Naszkicuj ten wykres i podaj pięć punktów o obu współrzędnych całkowitych, które do niego należą.

- $P(2, -4)$
- $P(\frac{1}{2}, -1)$
- $P(-\sqrt{2}, -6)$
- $P(-2\sqrt{2}, -4)$

Ćwiczenie 6

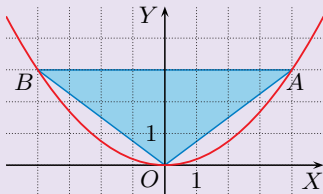
Wzory funkcji i przykładowe punkty:

- $f(x) = -x^2, (-2, -4), (-1, -1), (0, 0), (1, -1), (2, -4)$
- $f(x) = -4x^2, (-2, -16), (-1, -4), (0, 0), (1, -4), (2, -16)$
- $f(x) = -3x^2, (-2, -12), (-1, -3), (0, 0), (1, -3), (2, -12)$
- $f(x) = -\frac{1}{2}x^2, (-4, -8), (-2, -2), (0, 0), (2, -2), (4, -8)$



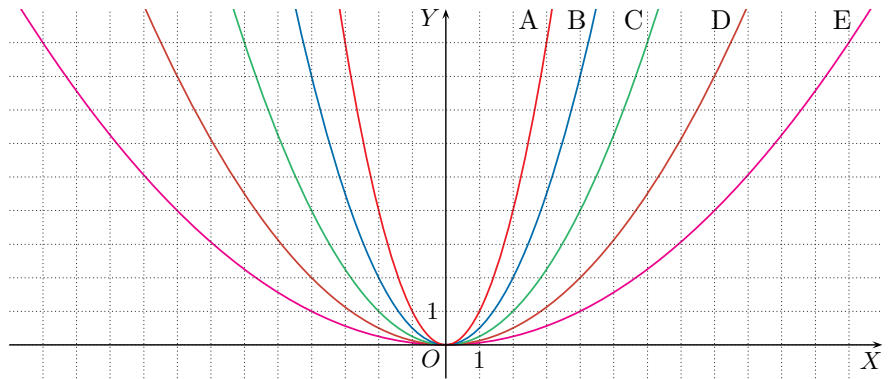
Odpowiedzi do zadań

- $f(D) = (-8; 0]$
 - $f(D) = [0; 4]$
 - $f(D) = [0; 12]$
 - $f(D) = [-8; -2]$
- $y = x^2$,
 - $y = \frac{1}{2}x^2$,
 - $y = \frac{1}{4}x^2$,
 - $y = \frac{1}{8}x^2$,
 - $y = \frac{1}{16}x^2$
- $y = x^2$
 - $y = \sqrt{2}x^2$
 - $y = -\frac{1}{3}x^2$
 - $y = -3x^2$
- $\frac{2}{3}$
 - 10
- Z warunków zadania:
 $A(-x, 4), B(x, 4)$
 oraz:
 $|x| = \frac{1}{2}|AB|$
 Po podstawieniu współrzędnych punktu A do równania paraboli otrzymujemy:
 $a(\frac{1}{2}|AB|)^2 = 4$
 i stąd $a = \frac{16}{|AB|^2}$.
 - $a = \frac{16}{2^2} = 4$
 - $a = \frac{16}{8^2} = \frac{1}{4}$
 - $a = \frac{16}{(\frac{1}{2})^2} = 64$
 - $a = \frac{16}{(2\sqrt{2})^2} = 2$
- $P_{AOB} = \frac{1}{2}|2x| \cdot 3 = 12$, zatem $|x| = 4$, czyli do paraboli należą punkty: $A(4, 3)$ i $B(-4, 3)$ (lub $A(-4, 3)$ i $B(4, 3)$).
 Równanie paraboli ma postać: $y = \frac{3}{16}x^2$.



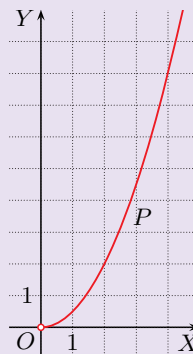
Zadania

- Naszkicuj wykres funkcji f o dziedzinie D . Podaj zbiór wartości tej funkcji.
 - $f(x) = -\frac{1}{2}x^2, D = (-2; 4)$
 - $f(x) = \frac{1}{4}x^2, D = [-4; 2]$
 - $f(x) = 3x^2, D = (-1; 2)$
 - $f(x) = -2x^2, D = [1; 2]$
- Dopasuj do równań $y = x^2, y = \frac{1}{2}x^2, y = \frac{1}{8}x^2$ odpowiednie parabole spośród A–E. Podaj równania pozostałych parabol.

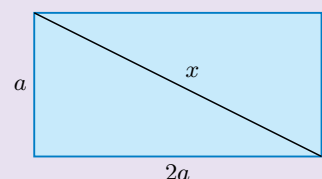


- Dla której spośród trzech podanych funkcji odległość od osi OX punktu o odciętej $x = 1$ należącego do jej wykresu jest najmniejsza?
 - $y = x^2, y = 4x^2, y = -6x^2$
 - $y = \frac{3}{2}x^2, y = \sqrt{2}x^2, y = 2x^2$
 - $y = -\frac{1}{3}x^2, y = 3x^2, y = 2\sqrt{3}x^2$
 - $y = -3x^2, y = \pi x^2, y = 3,14x^2$
- Punkty $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$ należą do paraboli $y = ax^2$. Oblicz odległość punktu Q od osi OX dla podanych współrzędnych punktów P i Q .
 - $x_1 = 3, y_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = -2$
 - $x_1 = -2\sqrt{2}, y_1 = 20, x_2 = 2$
- Prosta $y = 4$ przecina parabolę $y = ax^2$ w punktach A i B . Oblicz a dla:
 - $|AB| = 2$,
 - $|AB| = 8$,
 - $|AB| = \frac{1}{2}$,
 - $|AB| = 2\sqrt{2}$.
- Punkty $O(0, 0), A(x, 3)$ i $B(-x, 3)$ należą do paraboli $y = ax^2$. Pole trójkąta AOB jest równe 12. Naszkicuj tę parabolę.
- Podaj dziedzinę i wzór funkcji opisującej pole kwadratowej działki budowlanej w zależności od długości jej przekątnej x . Naszkicuj jej wykres.
 - Prostokątną działkę budowlaną można podzielić na dwa kwadraty. Podaj dziedzinę i wzór funkcji opisującej pole tej działki w zależności od długości przekątnej x tej działki.

- Oznaczmy bok działki przez a . Wówczas:
 $x = a\sqrt{2}$, czyli $a = \frac{x}{\sqrt{2}}$.
 $P(x) = \frac{1}{2}x^2, D = (0; \infty)$



- Oznaczmy boki działki przez a i $2a$.



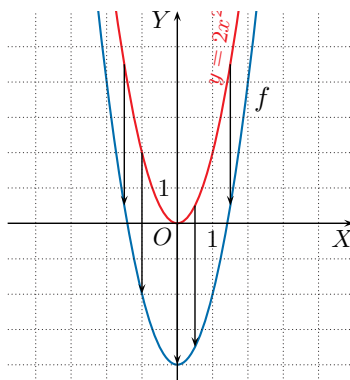
Wówczas $x^2 = 4a^2 + a^2 = 5a^2$,
 czyli $a^2 = \frac{1}{5}x^2$.
 $P(x) = 2a^2 = \frac{2}{5}x^2, D = (0; \infty)$

7.2. Przesunięcie wykresu funkcji

$f(x) = ax^2$ o wektor

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = 2x^2 - 4$ otrzymamy, przesuwając parabolę $y = 2x^2$ o 4 jednostki w dół, czyli o wektor $\vec{u} = [0, -4]$ (rysunek obok).



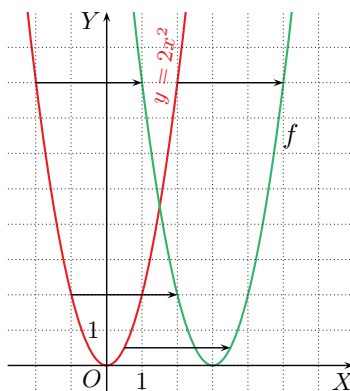
Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f i określ jej zbiór wartości.

- a) $f(x) = x^2 - 3$ c) $f(x) = -2x^2 - 4$
b) $f(x) = x^2 + 1$ d) $f(x) = -2x^2 + 2$

Przykład 2

Wykres funkcji $f(x) = 2(x-3)^2$ otrzymamy, przesuwając parabolę $y = 2x^2$ o 3 jednostki w prawo, czyli o wektor $\vec{u} = [3, 0]$ (rysunek obok).



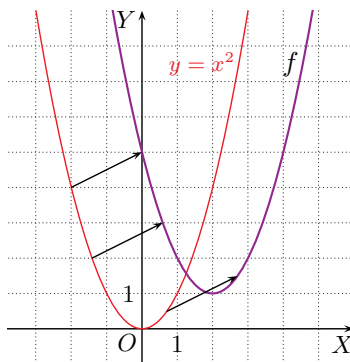
Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej przedziały monotoniczności.

- a) $f(x) = (x+3)^2$ c) $f(x) = -2(x+2)^2$
b) $f(x) = (x-1)^2$ d) $f(x) = -2(x-2)^2$

Przykład 3

Wykres funkcji $f(x) = (x-2)^2 + 1$ otrzymamy, przesuwając parabolę $y = x^2$ o 2 jednostki w prawo, a następnie o 1 jednostkę w górę, lub bezpośrednio o wektor $\vec{u} = [2, 1]$.

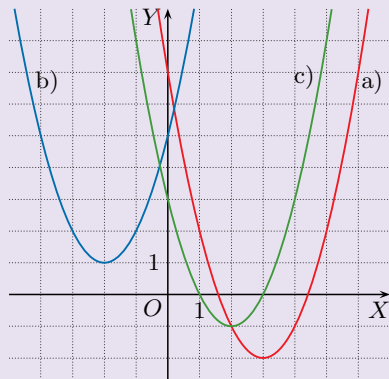


Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f .

- a) $f(x) = (x-3)^2 - 2$
b) $f(x) = (x+2)^2 + 1$
c) $f(x) = (x-2)^2 - 1$

Ćwiczenie 3

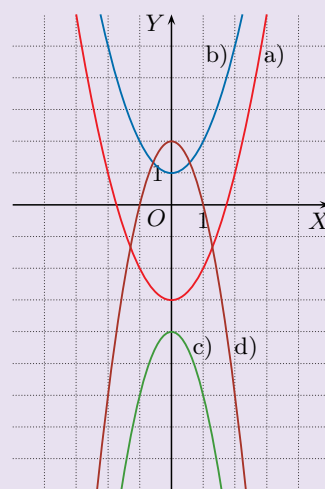


Uczeń:

- podaje wzór funkcji kwadratowej otrzymanej w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ o wektor,
- szkicuje wykresy funkcji postaci $f(x) = a(x-p)^2 + q$ i podaje ich własności,
- stosuje własności funkcji $f(x) = a(x-p)^2 + q$ do rozwiązywania zadań.

Ćwiczenie 1

- a) $f(D) = [-3; \infty)$
b) $f(D) = [1; \infty)$
c) $f(D) = (-\infty; -4]$
d) $f(D) = (-\infty; 2]$



Ćwiczenie 2

- a) maleje w $(-\infty; -3]$, rośnie w $[-3; \infty)$
b) maleje w $(-\infty; 1]$, rośnie w $[1; \infty)$
c) rośnie w $(-\infty; -2]$, maleje w $[-2; \infty)$
d) rośnie w $(-\infty; 2]$, maleje w $[2; \infty)$

Ćwiczenie 4

- a) $[-6, -3]$
b) $[1, 0]$

Komentarz

Warto przypomnieć uczniom, że funkcja kwadratowa nie jest monotoniczna w swojej dziedzinie – jest **przedziałami monotoniczna** (patrz przykład 3 ze str. 182).

Należy również podkreślić zależność między współczynnikiem p a przedziałami monotoniczności funkcji oraz między współczynnikiem q a zbiorem wartości funkcji.

Wykres funkcji $f(x) = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$, otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = ax^2$ o wektor $[p, q]$.

Wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji f jest punkt (p, q) . Jej osią symetrii jest prosta $x = p$.

Ćwiczenie 4

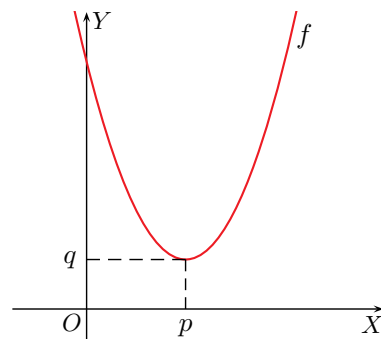
O jaki wektor należy przesunąć parabolę $y = 2x^2$, aby otrzymać wykres podanej funkcji?

a) $f(x) = 2(x + 6)^2 - 3$

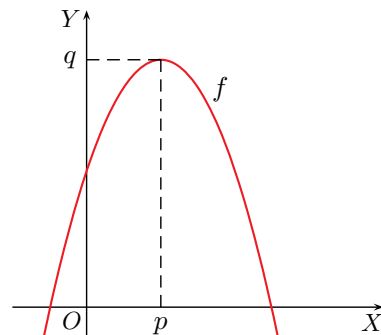
b) $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$

Poniższe własności funkcji $f(x) = a(x - p)^2 + q$ zależą od współczynnika a .

$a > 0$
• ramiona paraboli są skierowane do góry • dla $x = p$ funkcja osiąga wartość najmniejszą $y = q$ • funkcja maleje w przedziale $(-\infty; p]$ • funkcja rośnie w przedziale $[p; \infty)$ • zbiorem wartości funkcji jest przedział $[q; \infty)$



$a < 0$
• ramiona paraboli są skierowane w dół • dla $x = p$ funkcja osiąga wartość największą $y = q$ • funkcja rośnie w przedziale $(-\infty; p]$ • funkcja maleje w przedziale $[p; \infty)$ • zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-\infty; q]$



Ćwiczenie 5

Podaj przedziały monotoniczności i zbiór wartości funkcji f oraz współrzędne wierzchołka paraboli będącej jej wykresem. Naszkicuj tę parabolę.

a) $f(x) = 2(x - 3)^2 - 4$

c) $f(x) = -(x + 4)^2 - 1$

b) $f(x) = \frac{1}{4}(x + 2)^2 + 2$

d) $f(x) = -\frac{1}{4}(x - 1)^2 + 3$

Ćwiczenie 5

a) maleje w $(-\infty; 3]$, rośnie w $[3; \infty)$,
 $f(D) = [-4; \infty)$, $W(3, -4)$

b) maleje w $(-\infty; -2]$, rośnie w $[-2; \infty)$,
 $f(D) = [2; \infty)$, $W(-2, 2)$

c) rośnie w $(-\infty; -4]$, maleje w $[-4; \infty)$,
 $f(D) = (-\infty; -1]$, $W(-4, -1)$

d) rośnie w $(-\infty; 1]$, maleje w $[1; \infty)$,
 $f(D) = (-\infty; 3]$, $W(1, 3)$

Zadania

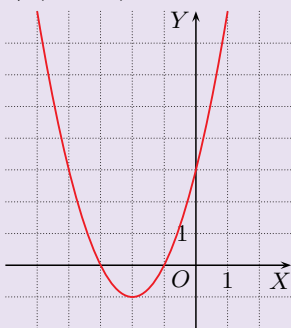
- Wykres funkcji $f(x) = x^2$ przesuń o wektor $\vec{u}$. Następnie podaj wzór otrzymanej funkcji oraz jej przedziały monotoniczności.
 a) $\vec{u} = [1, 2]$ b) $\vec{u} = [1, -2]$ c) $\vec{u} = [-3, -2]$ d) $\vec{u} = [-2, -4]$
- Naszkicuj parabolę, którą otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = -x^2$ o wektor $\vec{u}$. Podaj współrzędne jej wierzchołka i równanie jej osi symetrii.
 a) $\vec{u} = [-2, 4]$ b) $\vec{u} = [-3, -1]$ c) $\vec{u} = [2, 2]$ d) $\vec{u} = [3, -1]$
- Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.
 a) $f(x) = 2(x-1)^2 - 4$ c) $f(x) = -2(x+3)^2 + 2$
 b) $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 1$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 4$
- Wykres funkcji g powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji f o wektor $\vec{u}$. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

Wzór funkcji f	Wektor $\vec{u}$	Wzór funkcji g
$f(x) = 5x^2 - 3$	$\vec{u} = [-1, 5]$	$g(x) = 5(x+1)^2 + 2$
$f(x) = 4x^2$	$\vec{u} = [-2, 3]$	$g(x) = 4(x+2)^2 + 3$
$f(x) = \frac{5}{2}x^2 - 10$	$\vec{u} = [7, -3]$	$g(x) = \frac{5}{2}(x-7)^2 - 13$
$f(x) = 2(x-5)^2 + 3$	$\vec{u} = [4, -6]$	$g(x) = 2(x-9)^2 - 3$

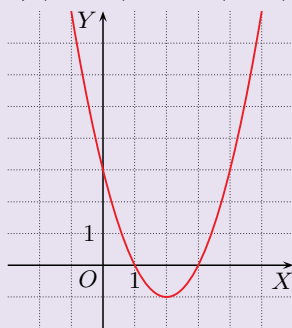
- Punkty F i G są wierzchołkami parabol będących wykresami funkcji f i g . Wyznacz współrzędne wektora $\vec{FG}$ i naszkicuj obie parabole.
 a) $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 1$, $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$
 b) $f(x) = 4 - 2(x+1)^2$, $g(x) = 2 - 2(x+3)^2$
 c) $f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$, $g(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^2 - 1$
 d) $f(x) = 2 - \frac{1}{2}(x+1)^2$, $g(x) = -1 - \frac{1}{2}(x-3)^2$
- Do wykresu funkcji $f(x) = ax^2 + q$ należy punkt $P(-1, 2)$. Zbiorem wartości funkcji f jest podany przedział. Wyznacz wzór tej funkcji.
 a) $[1; \infty)$ b) $[0; \infty)$ c) $(-\infty; 3]$ d) $(-\infty; 6]$
- Do paraboli $y = (x-p)^2 - 1$ należą punkty A i B . Oblicz wartość współczynnika p i naszkicuj tę parabolę.
 a) $A(-4, 3)$, $B(0, 3)$ b) $A(-1, 8)$, $B(5, 8)$

- Zauważmy, że punkty A i B mają równe rzędne.

a) $(-4-p)^2 - 1 = p^2 - 1$, $p = -2$



b) $(-1-p)^2 - 1 = (5-p)^2 - 1$, $p = 2$



Odpowiedzi do zadań

- $y = (x-1)^2 + 2$, maleje w $(-\infty; 1]$, rośnie w $[1; \infty)$
 - $y = (x-1)^2 - 2$, maleje w $(-\infty; 1]$, rośnie w $[1; \infty)$
 - $y = (x+3)^2 - 2$, maleje w $(-\infty; -3]$, rośnie w $[-3; \infty)$
 - $y = (x+2)^2 - 4$, maleje w $(-\infty; -2]$, rośnie w $[-2; \infty)$
- $W(-2, 4)$, $x = -2$
 - $W(-3, -1)$, $x = -3$
 - $W(2, 2)$, $x = 2$
 - $W(3, -1)$, $x = 3$
- $f(D) = [-4; \infty)$
 - $f(D) = [1; \infty)$
 - $f(D) = (-\infty; 2]$
 - $f(D) = (-\infty; 4]$
- $\vec{FG} = [4, 3]$
 - $\vec{FG} = [-2, -2]$
 - $\vec{FG} = [-3, -5]$
 - $\vec{FG} = [4, -3]$
- $f(x) = x^2 + 1$
 - $f(x) = 2x^2$
 - $f(x) = -x^2 + 3$
 - $f(x) = -4x^2 + 6$

Odpowiedzi do zadań

1. a) 4, 12
b) $4\frac{1}{2}$, 13
c) -17, -34
2. a) $5, 2\frac{3}{4}$
b) -5, $-\frac{1}{2}$
c) 3, $-1\frac{1}{8}$
3. a) $g(-2) = -17$,
 $f(-2) = -15$,
 $h(-2) = -7$
b) $g(-2) = -10\frac{1}{2}$,
 $h(-2) = -10\frac{1}{2}$, $f(-2) = -8$
4. a) $c = 7$
b) $c = 20$
c) $c = -5\sqrt{2}$
5. A: $f(-1) = 2 - \sqrt{2} \neq 2 - 3\sqrt{2}$
B: $f(-\sqrt{2}) = 6 - 2\sqrt{2} \neq 10 - 2\sqrt{2}$
C: $f(-2) = 8$
D: $f(1 + \sqrt{2}) = 4 + \sqrt{2}$
E: $f(\sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2} \neq 8 - 2\sqrt{2}$
Zatem nie należą punkty:
A, B, E.

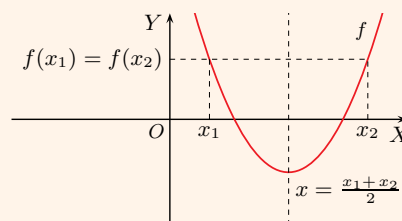
Obliczanie wartości trójkianu kwadratowego

1. Oblicz wartość wyrażenia dla $x = -2$ i dla $x = -3$.
a) $x^2 - 3x - 6$ b) $2x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ c) $-3x^2 + 2x - 1$
2. Oblicz wartość wyrażenia dla $x = -\frac{1}{2}$ i dla $x = \frac{1}{4}$.
a) $4x^2 - 2x + 3$ b) $-8x^2 + 4x - 1$ c) $-2x^2 - 6x + \frac{1}{2}$
3. Oblicz wartości funkcji f , g , h dla argumentu $x = -2$ i uporządkuj je od najmniejszej do największej.
a) $f(x) = -x^2 + 6x + 1$, $g(x) = 2x^2 + 10x - 5$, $h(x) = -3x^2 - \frac{1}{2}x + 4$
b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 7$, $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - 8$, $h(x) = -\frac{17}{8}x^2 - x - 4$
4. Oblicz współczynnik c funkcji $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + c$, która spełnia warunek:
a) $f(-2) = 9$, b) $f(4) = -2$, c) $f(-2\sqrt{2}) = -6$.
5. Sprawdź, które spośród punktów:
 $A(-1, 2 - 3\sqrt{2})$, $B(-\sqrt{2}, 10 - 2\sqrt{2})$, $C(-2, 8)$,
 $D(1 + \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2})$, $E(\sqrt{2}, 8 - 2\sqrt{2})$
nie należą do wykresu funkcji $f(x) = 2x^2 - \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}$.

Czy wiesz, że...

Jeśli dla dwóch różnych argumentów x_1, x_2 funkcja kwadratowa przyjmuje tę samą wartość, to oś symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji jest prostą określoną za pomocą równania:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$



6. Sprawdź, czy $f(-3) = f(1)$. Podaj równanie osi symetrii paraboli będącej wykresem funkcji f oraz współrzędne wierzchołka tej paraboli.
a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 1$ b) $f(x) = -2x^2 - 4x + 2$
7. Oblicz $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$ i $f(2)$. Podaj równanie osi symetrii oraz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f .
a) $f(x) = x^2 - x - 2$ c) $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$
b) $f(x) = 2x^2 - 6x - 2$ d) $f(x) = -6x^2 - 6x + 8$
8. a) $f(-3) = f(1)$, zatem oś symetrii: $x = -1$, a wierzchołek: $W(-1, -\frac{3}{2})$.
b) $f(-3) = f(1)$, zatem oś symetrii: $x = -1$, a wierzchołek: $W(-1, 4)$.
9. a) $f(-2) = 4$, $f(-1) = 0$, $f(1) = -2$, $f(2) = 0$, zatem oś symetrii: $x = \frac{1}{2}$, a wierzchołek: $W(\frac{1}{2}, -2\frac{1}{4})$.
b) $f(-2) = 18$, $f(-1) = 6$, $f(1) = -6$, $f(2) = -6$, zatem oś symetrii: $x = \frac{3}{2}$, a wierzchołek: $W(\frac{3}{2}, -\frac{13}{2})$.
c) $f(-2) = -24$, $f(-1) = -12$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, zatem oś symetrii: $x = \frac{3}{2}$, a wierzchołek: $W(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.
d) $f(-2) = -4$, $f(-1) = 8$, $f(1) = -4$, $f(2) = -28$, zatem oś symetrii: $x = -\frac{1}{2}$, a wierzchołek: $W(-\frac{1}{2}, \frac{19}{2})$.

7.3. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej

Definicja

Postać: $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
nazywamy **postacią ogólną** funkcji kwadratowej.

Postać: $y = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a, p, q \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
nazywamy **postacią kanoniczną** funkcji kwadratowej.

Funkcję kwadratową nazywamy też **trójmianem kwadratowym**.

Ćwiczenie 1

Przeczytaj przykłady w ramce pokazujące, w jaki sposób przejść od postaci kanonicznej funkcji kwadratowej do postaci ogólnej.

- | | |
|-------------------------------------|---|
| • $y = 3(x - 4)^2 - 7 =$ | Postać kanoniczna |
| $= 3(x^2 - 8x + 16) - 7 =$ | Korzystamy ze wzoru $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. |
| $= 3x^2 - 24x + 41$ | Postać ogólna |
| • $y = -4(x + \frac{1}{2})^2 + 1 =$ | Postać kanoniczna |
| $= -4(x^2 + x + \frac{1}{4}) + 1 =$ | Korzystamy ze wzoru $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. |
| $= -4x^2 - 4x$ | Postać ogólna |

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej.

a) $y = -2(x - 3)^2 + 6$ b) $y = -\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$ c) $y = 3(x - 5)^2 + 9$

Przejście od postaci ogólnej funkcji kwadratowej do postaci kanonicznej wymaga zastosowania uzupełniania do kwadratu.

Przykład 1

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci kanonicznej.

a) $y = x^2 - 10x + 27 =$ Postać ogólna
 $= x^2 - 2 \cdot 5x + 27 =$ Współczynnik -10 zapisujemy jako $-2 \cdot 5$.
 $= x^2 - 2 \cdot 5x + 25 - 25 + 27 =$ Dodajemy i odejmujemy $25 = 5^2$,
czyli uzupełniamy do kwadratu.
 $= (x - 5)^2 - 25 + 27 =$ Korzystamy ze wzoru $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
 $= (x - 5)^2 + 2$ Postać kanoniczna

Uczeń:

- podaje wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej i kanonicznej,
- oblicza wyróżnik trójmianu kwadratowego,
- oblicza współrzędne wierzchołka paraboli, podaje równanie jej osi symetrii,
- przekształca postać ogólną funkcji kwadratowej do postaci kanonicznej (z zastosowaniem uzupełniania do kwadratu lub wzoru na współrzędne wierzchołka paraboli) i szkicuje jej wykres,
- przekształca postać kanoniczną funkcji kwadratowej do postaci ogólnej,
- wyznacza wzór ogólny funkcji kwadratowej, mając dane współrzędne wierzchołka i innego punktu jej wykresu,
- wyprowadza wzory na współrzędne wierzchołka paraboli.

Ćwiczenie 1

a) $y = -2(x^2 - 6x + 9) + 6 =$
 $= -2x^2 + 12x - 12$
b) $y = -\frac{1}{2}(x^2 + x + \frac{1}{4}) + \frac{1}{2} =$
 $= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$
c) $y = 3(x^2 - 10x + 25) + 9 =$
 $= 3x^2 - 30x + 84$

Multibook

- Postać ogólna funkcji kwadratowej
- Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 7.3

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad y &= x^2 - 8x + 6 = \\ &= x^2 - 2 \cdot 4x + 16 - 16 + 6 = \\ &= (x - 4)^2 - 10, \end{aligned}$$

$$W(4, -10)$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad y &= x^2 + 4x + 8 = \\ &= x^2 + 2 \cdot 2x + 4 - 4 + 8 = \\ &= (x + 2)^2 + 4, \end{aligned}$$

$$W(-2, 4)$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad y &= x^2 - 6x - 2 = \\ &= x^2 - 2 \cdot 3x + 9 - 9 - 2 = \\ &= (x - 3)^2 - 11, \end{aligned}$$

$$W(3, -11)$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad y &= x^2 - 3x + 1 = \\ &= x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 1 = \\ &= (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}, \end{aligned}$$

$$W(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad y &= x^2 + x + \frac{1}{4} = \\ &= x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = \\ &= (x + \frac{1}{2})^2, \end{aligned}$$

$$W(-\frac{1}{2}, 0)$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad y &= x^2 - x - 2 = \\ &= x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2 = \\ &= (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}, \end{aligned}$$

$$W(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$$

Ćwiczenie 3

$$\text{a)} \ 5 \quad \text{b)} \ 8 \quad \text{c)} \ 0$$

$$\text{d)} \ -12 \quad \text{e)} \ 12 \quad \text{f)} \ 4$$

$$\text{b)} \ y = x^2 + 5x + 3 =$$

$$= x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + 3 =$$

$$= x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + (\frac{5}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2 + 3 =$$

$$= (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} + 3 =$$

$$= (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{13}{4}$$

Postać ogólna

Współczynnik 5 zapisujemy jako $2 \cdot \frac{5}{2}$.

Dodajemy i odejmujemy $(\frac{5}{2})^2$.

Korzystamy ze wzoru
 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Postać kanoniczna

Ćwiczenie 2

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci kanonicznej. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji.

$$\text{a)} \ y = x^2 - 8x + 6$$

$$\text{c)} \ y = x^2 - 6x - 2$$

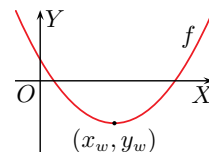
$$\text{e)} \ y = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

$$\text{b)} \ y = x^2 + 4x + 8$$

$$\text{d)} \ y = x^2 - 3x + 1$$

$$\text{f)} \ y = x^2 - x - 2$$

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = a(x-p)^2 + q$ jest parabola o wierzchołku (p, q) . Współrzędne wierzchołka paraboli oznaczamy także (x_w, y_w) .



Twierdzenie

Parabola $y = ax^2 + bx + c$ ma wierzchołek w punkcie o współrzędnych:

$$x_w = -\frac{b}{2a}, \quad y_w = -\frac{\Delta}{4a}, \quad \text{gdzie } \Delta = b^2 - 4ac, \ a \neq 0$$

Wyrażenie Δ nazywamy **wyróżnikiem** trójmianu kwadratowego.

Dowód

$$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x) + c =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Jest to postać kanoniczna funkcji $y = a(x-p)^2 + q$ dla $p = -\frac{b}{2a}$ i $q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, zatem $x_w = -\frac{b}{2a}$, $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$.

Ćwiczenie 3

Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego.

$$\text{a)} \ y = x^2 + 3x + 1$$

$$\text{c)} \ y = x^2 - 4x + 4$$

$$\text{e)} \ y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$$

$$\text{b)} \ y = 2x^2 + 4x + 1$$

$$\text{d)} \ y = -2x^2 + 6x - 6$$

$$\text{f)} \ y = 2x^2 - \sqrt{2}x - \frac{1}{4}$$

Ćwiczenie 4

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli.

$$\text{a)} \ y = 4x^2 + 6x + 3$$

$$\text{b)} \ y = -2x^2 + 4x + 1$$

$$\text{c)} \ y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$$

Ćwiczenie 4

$$\text{a)} \ \Delta = -12, \ W(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$$

$$\text{b)} \ \Delta = 24, \ W(1, 3)$$

$$\text{c)} \ \Delta = -1, \ W(1, \frac{1}{2})$$

Zauważmy, że jeśli wyznaczymy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f , to jego drugą współrzędną możemy obliczyć, korzystając z tego, że $y_w = f(x_w)$.

Przykład 2

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji:

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 1$$

Współczynniki $a = -2$, $b = 8$, więc $x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot (-2)} = 2$.

Współrzędna $y_w = f(x_w) = f(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 1 = 7$.

Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(2, 7)$.

Ćwiczenie 5

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f , korzystając z tego, że $y_w = f(x_w)$.

- a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 10$
b) $f(x) = -x^2 - 3x + 4$ d) $f(x) = 3x^2 + 6x - 10$

Zadania

1. Przedstaw trójmian kwadratowy f w postaci ogólnej i oblicz jego wyróżnik.

- a) $f(x) = (x - \frac{1}{2})^2 - 3$ d) $f(x) = -3(x + 2)^2 + 8$
b) $f(x) = -(x - 4)^2 + 5$ e) $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$
c) $f(x) = 2(x - 3)^2 - 14$ f) $f(x) = \frac{2}{3}(x - 3)^2 - 9$

2. Korzystając ze wzorów $x_w = -\frac{b}{2a}$ i $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$, wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f . Przedstaw funkcję f w postaci kanonicznej.

- a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ d) $f(x) = -4x^2 + 8x + 1$ g) $f(x) = x^2 - x$
b) $f(x) = x^2 - 4x - 2$ e) $f(x) = 2x^2 + 8x - 7$ h) $f(x) = -2x^2 + 6x$
c) $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ f) $f(x) = -2x^2 - 6x + 2$ i) $f(x) = 3x^2 - 8$

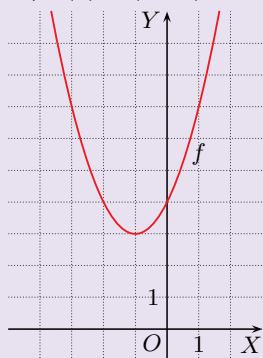
3. Korzystając ze wzorów $x_w = -\frac{b}{2a}$ i $y_w = f(x_w)$, wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f .

- a) $f(x) = 2x^2 + 6x - 3$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 4$ c) $f(x) = -3x^2 - 6x$

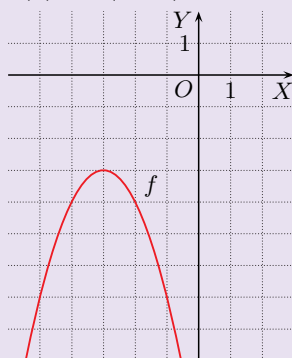
4. Przedstaw funkcję f w postaci kanonicznej. Naskicuj wykres funkcji f , stosując odpowiednie przesunięcie paraboli $y = x^2$ lub $y = -x^2$.

- a) $f(x) = x^2 + 2x + 4$ b) $f(x) = -x^2 - 6x - 12$ c) $f(x) = -x^2 + 4x$

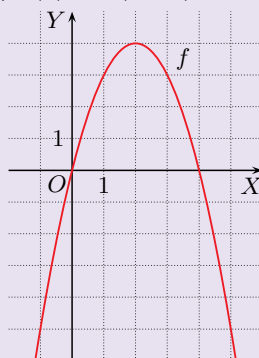
4. a) $f(x) = (x + 1)^2 + 3$



b) $f(x) = -(x + 3)^2 - 3$



c) $f(x) = -(x - 2)^2 + 4$



Komentarz

Warto zwrócić uwagę uczniów na przykład 2, ponieważ zastosowany w nim sposób wyznaczania drugiej współrzędnej wierzchołka paraboli y_w w wielu przypadkach jest dużo szybszy niż korzystanie ze wzoru:

$$y_w = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Ćwiczenie 5

- a) $W(1, 1)$
b) $W(-1\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4})$
c) $W(2, 9)$
d) $W(-1, -13)$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $f(x) = x^2 - x - 2\frac{3}{4}$, $\Delta = 12$
b) $f(x) = -x^2 + 8x - 11$, $\Delta = 20$
c) $f(x) = 2x^2 - 12x + 4$, $\Delta = 112$
d) $f(x) = -3x^2 - 12x - 4$, $\Delta = 96$
e) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$, $\Delta = 4$
f) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4x - 3$, $\Delta = 24$
2. a) $f(x) = (x + 1)^2 + 2$, $W(-1, 2)$
b) $f(x) = (x - 2)^2 - 6$, $W(2, -6)$
c) $f(x) = -(x + 1)^2 + 2$, $W(-1, 2)$
d) $f(x) = -4(x - 1)^2 + 5$, $W(1, 5)$
e) $f(x) = 2(x + 2)^2 - 15$, $W(-2, -15)$
f) $f(x) = -2(x + \frac{3}{2})^2 + \frac{13}{2}$, $W(-\frac{3}{2}, \frac{13}{2})$
g) $f(x) = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$, $W(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$
h) $f(x) = -2(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{2}$, $W(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$
i) $f(x) = 3x^2 - 8$, $W(0, -8)$
3. a) $W(-\frac{3}{2}, -\frac{15}{2})$
b) $W(1, \frac{7}{2})$
c) $W(-1, 3)$

5. a) $a = 1$ oraz $-\frac{b}{2a} = 2$,
zatem $b = -4$.
b) $a = -1$ oraz $-\frac{b}{2a} = 4$,
zatem $b = 8$.
c) $a = 2$ oraz $-\frac{b}{2a} = -1$,
zatem $b = 4$.
d) $a = -\frac{1}{2}$ oraz
 $-\frac{b}{2a} = -6$, zatem $b = -6$.

6. a) $b = 4$ oraz $-\frac{b}{2a} = 2$, zatem
 $a = -1$, $f(x) = -(x-2)^2 + 1$
b) $b = 6$ oraz $-\frac{b}{2a} = 1$, zatem
 $a = -3$, $f(x) = -3(x-1)^2 + 5$
c) $b = 2$ oraz $-\frac{b}{2a} = -4$,
zatem $a = \frac{1}{4}$,
 $f(x) = \frac{1}{4}(x+4)^2 + 1$
d) $b = -6$ oraz $-\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}$,
zatem $a = -2$,
 $f(x) = -2(x + \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{2}$
7. a) $b = -4$, $c = 8$
b) $b = 2$, $c = -2$
c) $b = -1$, $c = -\frac{3}{4}$
d) $b = -20$, $c = 100$

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Prosta $x = 3$ jest osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + 5$. Oblicz współczynnik b .

Ośią symetrii jest prosta $x = -\frac{b}{2a}$, zatem $-\frac{b}{2a} = 3$, skąd:
$$b = -6a = -6 \cdot \frac{1}{2} = -3$$

Prosta l jest osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f . Oblicz współczynnik b .

- a) $f(x) = x^2 + bx + 4$, $l: x = 2$ c) $f(x) = 2x^2 + bx - 1$, $l: x = -1$
b) $f(x) = -x^2 + bx - 3$, $l: x = 4$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx - 7$, $l: x = -6$

6. Wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f leży na prostej l . Oblicz współczynnik a . Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

- a) $f(x) = ax^2 + 4x - 3$, $l: x = 2$ c) $f(x) = ax^2 + 2x + 5$, $l: x = -4$
b) $f(x) = ax^2 + 6x + 2$, $l: x = 1$ d) $f(x) = ax^2 - 6x - 1$, $l: x = -\frac{3}{2}$

7. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Oblicz współczynniki b i c funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + bx + c$, której wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie $(3, -2)$.

Ze wzoru $x_w = -\frac{b}{2a}$ otrzymujemy:

$$-\frac{b}{2 \cdot 1} = 3, \text{ skąd } b = -6.$$

Zatem $f(x) = x^2 - 6x + c$. Podstawiamy współrzędne punktu $(3, -2)$ do wzoru funkcji i otrzymujemy równość:

$$-2 = 3^2 - 6 \cdot 3 + c, \text{ skąd } c = 7.$$

Szukane współczynniki: $b = -6$ i $c = 7$.

Oblicz współczynniki b i c funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + bx + c$, której wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie W .

- a) $W(2, 4)$ b) $W(-1, -3)$ c) $W(\frac{1}{2}, -1)$ d) $W(10, 0)$

8. Wyznacz współczynniki a i c funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + 6x + c$, której wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie W . Zapisz wzór tej funkcji w postaci kanonicznej.

- a) $W(-1, 2)$ b) $W(6, -3)$ c) $W(2, 4)$ d) $W(-\frac{3}{2}, -1)$

8. a) $-\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2a} = -1$, zatem $a = 3$.
 $2 = 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + c$, więc $c = 5$.
 $f(x) = 3(x+1)^2 + 2$
b) $a = -\frac{1}{2}$, $c = -21$, $f(x) = -\frac{1}{2}(x-6)^2 - 3$
c) $a = -\frac{3}{2}$, $c = -2$, $f(x) = -\frac{3}{2}(x-2)^2 + 4$
d) $a = 2$, $c = \frac{7}{2}$, $f(x) = 2(x + \frac{3}{2})^2 - 1$

Czy wiesz, że...

Dla dowolnych dwóch punktów płaszczyzny (nie leżących na prostej pionowej) istnieje nieskończenie wiele parabol opisanych za pomocą równania $y = ax^2 + bx + c$ przechodzących przez te punkty (rysunek obok).

Przez trzy niewspółliniowe punkty (z których żadne dwa nie leżą na prostej pionowej) przechodzi dokładnie jedna parabola $y = ax^2 + bx + c$.

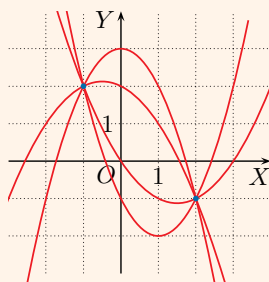
Jeśli mamy dane współrzędne tych punktów, to możemy obliczyć współczynniki a , b i c . W tym celu rozwiązujemy odpowiedni układ równań.

Na przykład, aby wyznaczyć równanie paraboli $y = ax^2 + bx + c$ przechodzącej przez punkty $A(-1, 0)$, $B(1, -4)$ i $C(4, 5)$, rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 0 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = -4 \\ a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 5 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań jest trójka liczb: $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$, zatem szukana parabola jest dana równaniem $y = x^2 - 2x - 3$.

Uwaga. Jeżeli mamy dany wierzchołek paraboli, to do wyznaczenia jej równania wystarczy znajomość jeszcze jednego należącego do niej punktu.



9. Do paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ należy punkt P , a wierzchołkiem tej paraboli jest punkt W . Oblicz współczynniki a , b , c .

- a) $P(0, 2)$, $W(2, 0)$ c) $P(3, 1)$, $W(0, 3)$ e) $P(2, 1)$, $W(1, 2)$
b) $P(0, 0)$, $W(-1, -1)$ d) $P(-2, 0)$, $W(-1, 3)$ f) $P(1, 2)$, $W(2, 4)$

10. Wyznacz równanie paraboli, o której wiadomo, że przecina osie układu współrzędnych w punktach A , B i C . Naszkicuj tę parabolę.

- a) $A(0, 3)$, $B(1, 0)$, $C(3, 0)$ b) $A(0, 6)$, $B(-6, 0)$, $C(2, 0)$

11. Wyznacz równanie paraboli przechodzącej przez punkty A , B , C .

- a) $A(-3, 1)$, $B(0, 4)$, $C(1, 1)$ c) $A(-5, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(1, -3)$
b) $A(-4, 1)$, $B(-3, -2)$, $C(1, -2)$ d) $A(-4, 2)$, $B(2, -1)$, $C(4, -6)$

- 12.* O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać parabolę przechodzącą przez punkty $A(-2, 0)$ i $B(2, 4)$?

- a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = -x^2$

10. a) $y = x^2 - 4x + 3$

b) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

11. a) $y = -x^2 - 2x + 4$

b) $y = \frac{3}{5}x^2 + \frac{6}{5}x - \frac{19}{5}$

c) $y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{9}{2}$

d) $y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 2$

12. a) $y = x^2 + bx + c$:

$$\begin{cases} 0 = (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \\ 4 = 2^2 + b \cdot 2 + c \end{cases}$$

$b = 1$, $c = -2$

$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$, $q = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4}$

Wektor przesunięcia: $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right]$.

b) $b = 1$, $c = 6$,

$p = \frac{1}{2}$, $q = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 6 = \frac{25}{4}$

Wektor przesunięcia: $\left[\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right]$.

9. a) $f(x) = a(x - 2)^2$

Punkt $P(0, 2)$ należy do paraboli, czyli:

$$2 = a(0 - 2)^2$$

skąd $a = \frac{1}{2}$.

$$f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2,$$

zatem $b = -2$, $c = 2$.

b) $f(x) = a(x + 1)^2 - 1$

Punkt $P(0, 0)$ należy do paraboli, czyli:

$$0 = a(0 + 1)^2 - 1$$

skąd $a = 1$.

$$f(x) = (x + 1)^2 - 1 = x^2 + 2x,$$

zatem $b = 2$, $c = 0$.

c) $f(x) = ax^2 + 3$

Punkt $P(3, 1)$ należy do paraboli, czyli:

$$1 = a \cdot 3^2 + 3$$

skąd $a = -\frac{2}{9}$.

$$f(x) = -\frac{2}{9}x^2 + 3,$$

zatem $b = 0$, $c = 3$.

d) $f(x) = a(x + 1)^2 + 3$

Punkt $P(-2, 0)$ należy do paraboli, czyli:

$$0 = a(-2 + 1)^2 + 3$$

skąd $a = -3$.

$$f(x) = -3(x + 1)^2 + 3 = -3x^2 - 6x,$$

zatem $b = -6$, $c = 0$.

e) $f(x) = a(x - 1)^2 + 2$

$$1 = a(2 - 1)^2 + 2, \text{ skąd } a = -1.$$

$$f(x) = -(x - 1)^2 + 2 =$$

$$= -x^2 + 2x + 1$$

zatem $b = 2$, $c = 1$.

f) $f(x) = a(x - 2)^2 + 4$

$$2 = a(1 - 2)^2 + 4, \text{ skąd } a = -2.$$

$$f(x) = -2(x - 2)^2 + 4 =$$

$$= -2x^2 + 8x - 4$$

zatem $b = 8$, $c = -4$.

Uczeń:

- stosuje wzory skróconego mnożenia oraz zasadę wyłączania wspólnego czynnika przed nawias do przedstawiania wyrażenia w postaci iloczynu,
- rozwiązuje równanie kwadratowe przez rozkład na czynniki,
- interpretuje geometrycznie rozwiązywanie równania kwadratowego,
- rozwiązuje równania kwadratowe z wartością bezwzględną.

Ćwiczenie 1

Równanie kwadratowe może mieć 2 rozwiązania, 1 rozwiązanie lub 0 rozwiązań.

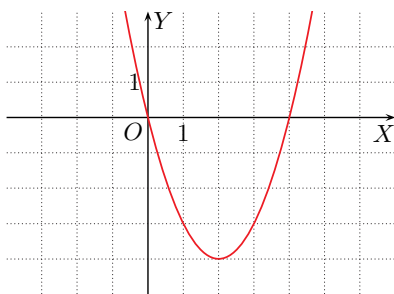
7.4. Równania kwadratowe (1)

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji i odczytaj z niego miejsca zerowe tej funkcji.

a) $y = x^2 - 4x$

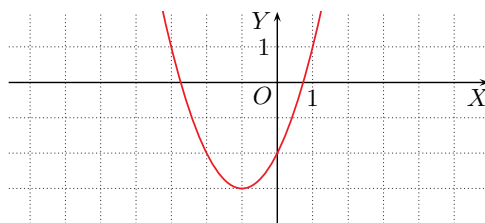
Po przekształceniu do postaci kanonicznej mamy: $y = (x - 2)^2 - 4$.



Z wykresu można odczytać miejsca zerowe: $x = 0$ i $x = 4$.

b) $y = x^2 + 2x - 2$

Po przekształceniu do postaci kanonicznej mamy: $y = (x + 1)^2 - 3$.

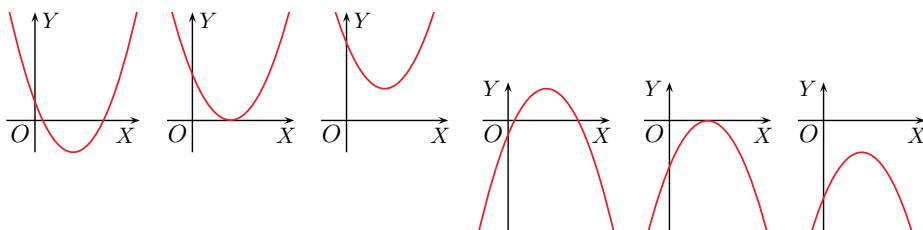


Z wykresu można odczytać tylko przybliżone wartości miejsc zerowych. Wyznaczenie ich dokładnych wartości wymaga rozwiązania równania $x^2 + 2x - 2 = 0$.

Rozwiązania równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) to miejsca zerowe funkcji $y = ax^2 + bx + c$.

Ćwiczenie 1

Na rysunkach poniżej przedstawiono możliwe położenia wykresu funkcji kwadratowej względem osi OX . Ile rozwiązań może mieć równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$?



Rozwiązanie równania z niewiadomą x polega na wyznaczeniu wszystkich wartości x , dla których to równanie jest spełnione. Zbiór tych x nazywamy **zbiorem rozwiązań równania**. Rozwiązania równania nazywane są również jego **pierwiastkami**.

Multibook

- Parabola – właściwości i zastosowanie

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 7.4

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 2

Podaj zbiór rozwiązań równania $4x^2 - 8x = 0$.

Lewą stronę równania rozkładamy na czynniki:

$$4x(x - 2) = 0$$

czyli $x = 0$ lub $x - 2 = 0$, zatem $x = 0$ lub $x = 2$.

Zbiorem rozwiązań równania jest zbiór $\{0, 2\}$.

Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a \cdot b = 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = 0 \text{ lub } b = 0.$$

Ćwiczenie 2

Podaj zbiór rozwiązań równania.

a) $3x^2 + 6x = 0$

b) $7x - 3x^2 = 0$

c) $2x^2 = 5x$

d) $8x = \frac{1}{2}x^2$

W niektórych przykładach przy rozkładzie trójmianu kwadratowego na czynniki możemy skorzystać ze wzorów skróconego mnożenia.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $4x^2 - 9 = 0$.

Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów: $4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$.

$$(2x + 3)(2x - 3) = 0$$

$$2x + 3 = 0 \text{ lub } 2x - 3 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \text{ lub } x = \frac{3}{2}$$

Rozwiązaniem równania są liczby $-\frac{3}{2}$ i $\frac{3}{2}$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $16x^2 - 25 = 0$

b) $4 - 100x^2 = 0$

c) $4x^2 - 121 = 0$

d) $\frac{9}{49}x^2 - 81 = 0$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy: $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$.

$$(x - 2)^2 = 0, \text{ czyli } x - 2 = 0$$

Zatem liczba 2 jest jedynym pierwiastkiem tego równania.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

a) $x^2 + 8x + 16 = 0$

c) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

e) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$

b) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

d) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

f) $3x^2 + 9 = x^2 - 6\sqrt{2}x$

Ćwiczenie 4

a) $(x + 4)^2 = 0, x = -4$

e) $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0 / \cdot 4$

f) $2x^2 + 6\sqrt{2}x + 9 = 0$

b) $(x - \frac{1}{2})^2 = 0, x = \frac{1}{2}$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$(\sqrt{2}x + 3)^2 = 0$

c) $(2x + 1)^2 = 0, x = -\frac{1}{2}$

$(x - 2)^2 = 0$

$x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$

d) $(2x - 3)^2 = 0, x = \frac{3}{2}$

$x = 2$

Ćwiczenie 2

a) $\{-2, 0\}$

b) $\{0, \frac{7}{3}\}$

c) $\{0, \frac{5}{2}\}$

d) $\{0, 16\}$

Ćwiczenie 3

a) $x = -\frac{5}{4}$ lub $x = \frac{5}{4}$

b) $x = -\frac{1}{5}$ lub $x = \frac{1}{5}$

c) $x = -\frac{11}{2}$ lub $x = \frac{11}{2}$

d) $x = -21$ lub $x = 21$

Ćwiczenie 5

- a) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$
b) sprzeczne
c) $x = -\frac{\sqrt{10}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$
d) sprzeczne

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = 0$ lub $x = 6$
b) $x = -\frac{1}{27}$ lub $x = 0$
c) $x = 0$ lub $x = \frac{1}{6}$
d) $x = -\frac{1}{9}$ lub $x = 0$
e) $x = 0$ lub $x = 2$
f) $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $x = 0$
2. a) $x = -\frac{9}{10}$ lub $x = \frac{9}{10}$
b) $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = \frac{2}{3}$
c) $x = -5$ d) $x = 8$
e) $x = 12$ f) $x = -\frac{1}{3}$
g) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
h) $x = 2$ i) $x = 6$
3. a) $(0, 0)$, $(4, 0)$
b) $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -12)$
c) $(0, 12)$, nie przecina osi OX
d) $(0, 0)$, $(-\frac{1}{225}, 0)$
e) $(0, 4)$, nie przecina osi OX
f) $(-\frac{1}{15}, 0)$, $(\frac{1}{15}, 0)$, $(0, -4)$
4. a) 2 b) -4 c) 3
6. a) $x = -2$ lub $x = 2$
b) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = -1$
lub $x = 1$ lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$
d) Jeżeli $x \in (-\infty; 0)$,
to $x^2 = -x$, czyli $x = -1$.
Jeżeli $x \in [0; \infty)$, to
 $x^2 = x$, czyli $x = 0$ lub
 $x = 1$.
Zatem ostatecznie: $x = -1$
lub $x = 0$ lub $x = 1$.

Przykład 5

a) Rozwiąż równanie $\frac{11}{3}x^2 - 7 = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{11}{3}x^2 &= 7 / \cdot \frac{3}{11} \\ x^2 &= \frac{21}{11} \\ x &= -\sqrt{\frac{21}{11}} \text{ lub } x = \sqrt{\frac{21}{11}}\end{aligned}$$

b) Rozwiąż równanie $2x^2 + 9 = 0$.

Zauważmy, że $2x^2 + 9 \geq 9$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, więc $2x^2 + 9$ nie może być równe zero.

Zatem równanie jest sprzeczne.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż równanie.

- a) $6x^2 - 18 = 0$ b) $x^2 + 4 = 0$ c) $\frac{4}{5}x^2 - 2 = 0$ d) $4x^2 + 1 = 0$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

- a) $-7x^2 + 42x = 0$ c) $36x^2 = 6x$ e) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{8}x = 0$
b) $9x^2 + \frac{1}{3}x = 0$ d) $2x + 18x^2 = 0$ f) $\sqrt{3}x = -3x^2$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $100x^2 - 81 = 0$ d) $x^2 + 64 = 16x$ g) $x^2 = (1-x)(1+x)$
b) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9} = 0$ e) $24x - x^2 = 144$ h) $\frac{1}{2}x(6-x) = 2+x$
c) $x^2 + 10x + 25 = 0$ f) $1 + 9x^2 + 6x = 0$ i) $(x-3)(x-2) = 7x-30$

3. Wyznacz punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych.

- a) $y = 3x^2 - 12x$ c) $y = 3x^2 + 12$ e) $y = 900x^2 + 4$
b) $y = 3x^2 - 12$ d) $y = 900x^2 + 4x$ f) $y = 900x^2 - 4$

4. Wyznacz wspólne miejsca zerowe funkcji f i g .

- a) $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = x^2 - 4x + 4$
b) $f(x) = x^2 + 4x$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 8$
c) $f(x) = \frac{1}{9}x^2 - 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$

5. Podaj zbiór rozwiązań równania.

- a) $(2x+3)^2 = (x-3)^2$ c) $(16x^2 - 8x + 1)(9x^2 - 4) = 0$
b) $(1 - \frac{1}{2}x)^2 = (\frac{3}{2}x - 5)^2$ d) $(\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9)(1 - 2x^2) = 0$

6. Rozwiąż równanie.

- a) $|x^2 - 1| = 3$ b) $|4x^2 - 3| = 1$ c) $|2x^2 - 6| = 0$ d) $x^2 = |x|$

5. a) $(2x+3)^2 - (x-3)^2 = 0$

$$(2x+3-x+3)(2x+3+x-3) = 0$$

$$3x(x+6) = 0$$

$$x \in \{-6, 0\}$$

b) $(1 - \frac{1}{2}x)^2 - (\frac{3}{2}x - 5)^2 = 0$

$$(1 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x + 5)(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x - 5) = 0$$

$$(6 - 2x)(x - 4) = 0$$

$$x \in \{3, 4\}$$

c) $(4x-1)^2(3x-2)(3x+2) = 0$

$$x \in \{-\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}\}$$

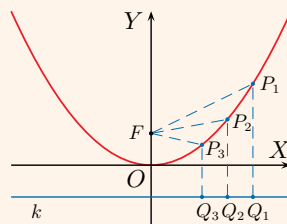
d) $(\frac{1}{2}x+3)^2(x^2 - \frac{1}{2}) = 0$

$$x \in \left\{-6, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

Parabola

Parabola jest zbiorem punktów płaszczyzny równo odległych od ustalonej prostej k (zwanej **kierownicą**) i ustalonego punktu F (zwanego **ogniskiem**). Na rysunku obok mamy:

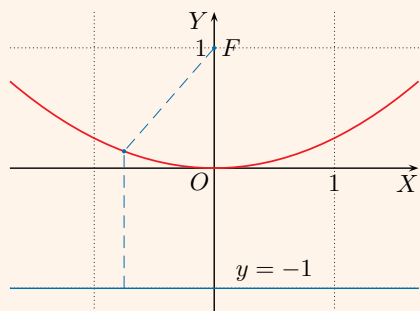
$$|P_1F| = |P_1Q_1|, |P_2F| = |P_2Q_2|, |P_3F| = |P_3Q_3|$$



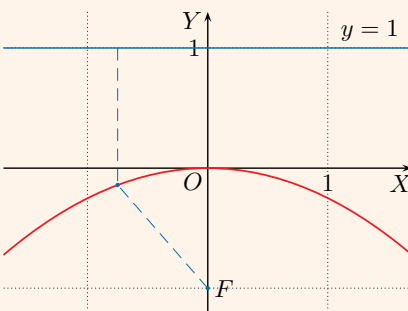
Parabola, która jest zbiorem punktów równo odległych od prostej $y = -p$ i punktu $F(0, p)$, jest określona za pomocą równania $y = \frac{1}{4p}x^2$.

Przykład 1

Parabola $y = \frac{1}{4}x^2$ ma kierownicę daną równaniem $y = -1$ i ognisko $F(0, 1)$.



Parabola $y = -\frac{1}{4}x^2$ ma kierownicę daną równaniem $y = 1$ i ognisko $F(0, -1)$.



Parabola $y = x^2$ ma kierownicę daną równaniem $y = -\frac{1}{4}$ i ognisko $F(0, \frac{1}{4})$.

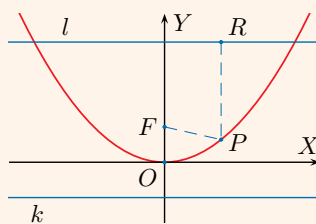
1. Podaj równanie paraboli, która jest zbiorem punktów równo odległych od prostej k i punktu F .

a) $k: y = -\frac{1}{2}, F(0, \frac{1}{2})$ b) $k: y = \frac{1}{2}, F(0, -\frac{1}{2})$ c) $k: y = -\frac{1}{6}, F(0, \frac{1}{6})$

2. Wyznacz równanie kierownicy i współrzędne ogniska podanej paraboli.

a) $y = -x^2$ b) $y = 2x^2$ c) $y = -2x^2$ d) $y = \frac{1}{8}x^2$

- D** 3. Dana jest parabola o ognisku F i kierownicy k . Prosta l jest równoległa do kierownicy i leży powyżej wierzchołka paraboli. Uzasadnij, że dla dowolnego punktu P należącego do paraboli suma odległości tego punktu od ogniska i od prostej l jest stała.



3. Niech P' będzie rzutem punktu P na prostą k . Wówczas:

$$|PR| = |P'R| - |PP'|$$

Zatem:

$$|PF| + |PR| = |PF| + |P'R| - |PP'| = |P'R|$$

ponieważ $|PF| = |PP'|$.

Czyli suma odległości punktu P od ogniska i prostej l jest równa odległości między prostymi k i l , więc jest stała.

1. a) $y = \frac{1}{2}x^2$

b) $y = -\frac{1}{2}x^2$

c) $y = \frac{3}{2}x^2$

2. a) $y = \frac{1}{4}, F(0, -\frac{1}{4})$

b) $y = -\frac{1}{8}, F(0, \frac{1}{8})$

c) $y = \frac{1}{8}, F(0, -\frac{1}{8})$

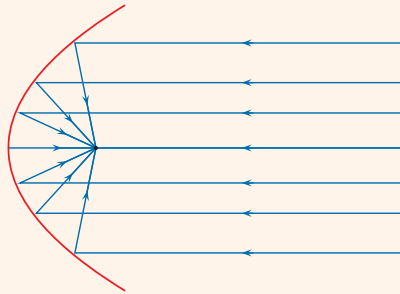
d) $y = -2, F(0, 2)$



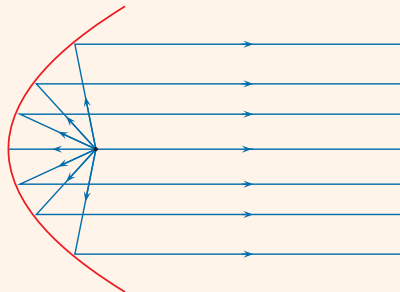
4. Skonstruuj parabolę zgodnie z podanym niżej opisem.

- Narysuj kierownicę i prostą do niej prostopadłą – oś symetrii paraboli.
- Na osi symetrii wybierz punkt F – ognisko paraboli i zaznacz wierzchołek paraboli w połowie odległości między ogniskiem a kierownicą.
- Po tej samej stronie wierzchołka, po której znajduje się ognisko, narysuj kilka prostych równoległych do kierownicy.
- Odmierz cyrklem odległość każdej z narysowanych prostych od kierownicy, a następnie narysuj łuk okręgu o środku w punkcie F i promieniu równym tej odległości – punkty przecięcia łuku z daną prostą należą do paraboli.

Promienie równoległe padające na zwierciadło o parabolicznym kształcie po odbiciu skupiają się w jednym punkcie – ognisku paraboli. Zjawisko to wykorzystuje się w telewizyjnych antenach satelitarnych i radioteleskopach, w których odbiornik umieszcza się w ognisku, aby uzyskać silny sygnał.



Natomiast promienie wychodzące z żarówki umieszczonej w ognisku zwierciadła parabolicznego po odbiciu są równoległe. Zjawisko to jest wykorzystywane na przykład w reflektorach samochodowych.



7.5. Równania kwadratowe (2)

Przykład 1

Rozwiąż równanie $4x^2 + 20x + 25 = 0$.

Korzystamy ze wzoru $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$(2x + 5)^2 = 0$$

$$2x + 5 = 0$$

Równanie ma jeden pierwiastek: $x = -\frac{5}{2}$.

Czy wiesz, że...

Równania kwadratowe były rozwiązywane już przez starożytnych Babilończyków około 1800 r. p.n.e. Świadczą o tym zachowane gliniane tabliczki z pismem klinowym.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $9x^2 - 12x + 4 = 0$ b) $25x^2 + 40x + 16 = 0$ c) $4x^2 - 28x + 49 = 0$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $4x^2 - 20x + 27 = 0$.

$$(2x - 5)^2 - 25 + 27 = 0$$

Zauważ, że:

$$(2x - 5)^2 - 25 = 4x^2 - 20x.$$

$$(2x - 5)^2 = -2$$

Równanie to jest sprzeczne, gdyż $(2x - 5)^2 \geq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że podane równanie jest sprzeczne.

a) $x^2 - 2x + 2 = 0$ b) $x^2 + 6x + 12 = 0$ c) $4x^2 + 4x + 5 = 0$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $4x^2 - 20x + 23 = 0$.

$$(2x - 5)^2 - 25 + 23 = 0$$

Zauważ, że:

$$(2x - 5)^2 - 25 = 4x^2 - 20x.$$

$$(2x - 5)^2 = 2$$

$$2x - 5 = -\sqrt{2} \quad \text{lub} \quad 2x - 5 = \sqrt{2}$$

$$2x = 5 - \sqrt{2} \quad \text{lub} \quad 2x = 5 + \sqrt{2}$$

Równanie ma dwa pierwiastki: $x = \frac{5 - \sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{5 + \sqrt{2}}{2}$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$ b) $x^2 + 6x + 8 = 0$ c) $x^2 + 6x + 7 = 0$

Ćwiczenie 3

a) $(x - 1)^2 = 4$

$$x - 1 = -2 \quad \text{lub} \quad x - 1 = 2$$

$$x = -1 \quad \text{lub} \quad x = 3$$

b) $(x + 3)^2 = 1$

$$x + 3 = -1 \quad \text{lub} \quad x + 3 = 1$$

$$x = -4 \quad \text{lub} \quad x = -2$$

c) $(x + 3)^2 = 2$

$$x + 3 = -\sqrt{2} \quad \text{lub} \quad x + 3 = \sqrt{2}$$

$$x = -3 - \sqrt{2} \quad \text{lub} \quad x = -3 + \sqrt{2}$$

Uczeń:

- stosuje wzory skróconego mnożenia do przedstawiania wyrażenia w postaci iloczynu,
- rozwiązuje równania kwadratowe, korzystając z poznanych wzorów,
- interpretuje geometrycznie rozwiązania równania kwadratowego,
- stosuje poznane wzory przy szkicowaniu wykresu funkcji kwadratowej,
- rozwiązuje równania kwadratowe z wartością bezwzględną.

Ćwiczenie 1

a) $(3x - 2)^2 = 0$

$$x = \frac{2}{3}$$

b) $(5x + 4)^2 = 0$

$$x = -\frac{4}{5}$$

c) $(2x - 7)^2 = 0$

$$x = \frac{7}{2}$$

Ćwiczenie 2

a) $(x - 1)^2 = -1$

Równanie to jest sprzeczne, gdyż $(x - 1)^2 \geq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

b) $(x + 3)^2 = -3$

Równanie to jest sprzeczne, gdyż $(x + 3)^2 \geq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

c) $(2x + 1)^2 = -4$

Równanie to jest sprzeczne, gdyż $(2x + 1)^2 \geq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

Postępując tak jak w przykładach 1–3, możemy rozwiązać dowolne równanie kwadratowe. Zwykle korzystamy jednak ze wzorów podanych w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie

Rozważmy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$.

1. Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma **dwa** pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma **jeden** pierwiastek:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

3. Jeśli $\Delta < 0$, to równanie **nie ma** pierwiastków.

Dowód

Zapiszmy trójmian w postaci kanonicznej: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

Stąd $ax^2 + bx + c = 0$, gdy $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$, co oznacza, że:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

• Jeśli $\Delta < 0$, to powyższe równanie jest sprzeczne.

• Jeśli $\Delta = 0$, to otrzymujemy równanie:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

Jego rozwiązaniem jest liczba $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

• Jeśli $\Delta > 0$, to otrzymujemy:

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{lub} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Rozwiązaniami równania są liczby $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

W przypadku, gdy $\Delta = 0$, pierwiastek $x_0 = -\frac{b}{2a}$ nazywamy **pierwiastkiem podwójnym** (zauważ, że dla $\Delta = 0$ ze wzorów: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, otrzymujemy $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$).

Ćwiczenie 4

Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego i podaj liczbę rozwiązań równania.

- | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|--|
| a) $x^2 + 8x + 15 = 0$ | d) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ | g) $-3x^2 + \sqrt{2}x - \frac{1}{3} = 0$ |
| b) $x^2 - 4x + 6 = 0$ | e) $\frac{9}{5}x^2 - 6x + 5 = 0$ | h) $\sqrt{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$ |
| c) $5x^2 + 5x - \frac{1}{2} = 0$ | f) $-x^2 + 4x - 7 = 0$ | i) $4\sqrt{2}x^2 + 3x = 0$ |

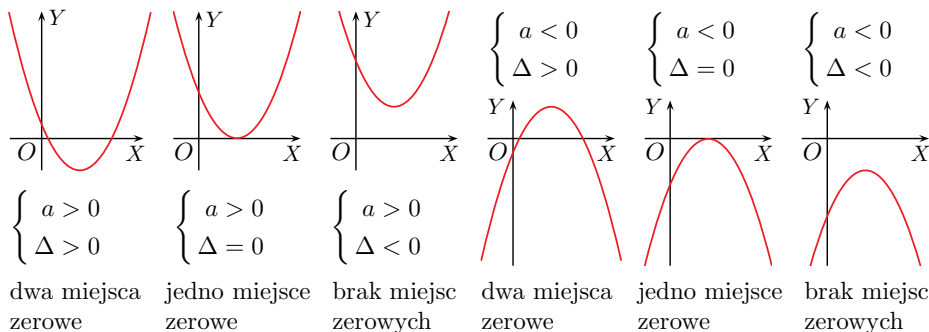
Ćwiczenie 4

- $\Delta = 4 > 0$, 2 rozwiązania
- $\Delta = -8 < 0$, 0 rozwiązań
- $\Delta = 35 > 0$, 2 rozwiązania
- $\Delta = 49 > 0$, 2 rozwiązania
- $\Delta = 0$, 1 rozwiązanie
- $\Delta = -12 < 0$, 0 rozwiązań
- $\Delta = -2 < 0$, 0 rozwiązań
- $\Delta = \frac{25}{4} - 4\sqrt{2} > 0$, 2 rozwiązania
- $\Delta = 9 > 0$, 2 rozwiązania

Interpretacja geometryczna równania kwadratowego

Rozwiązania równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ są miejscami zerowymi funkcji $y = ax^2 + bx + c$. Są one zatem odciętymi punktów przecięcia odpowiedniej paraboli z osią OX .

Poniżej przedstawiono możliwe położenia paraboli $y = ax^2 + bx + c$ względem osi OX w zależności od współczynnika a i wyróżnika Δ .



Przykład 4

Rozwiąż równanie.

a) $3x^2 - 4x - 2 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 16 + 24 = 40$. Ponieważ $\Delta > 0$, równanie ma dwa pierwiastki.

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2\sqrt{10}}{6} = \frac{2 - \sqrt{10}}{3}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2\sqrt{10}}{6} = \frac{2 + \sqrt{10}}{3}$$

b) $4x^2 + 6x + \frac{9}{4} = 0$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 4 \cdot \frac{9}{4} = 36 - 36 = 0$, równanie ma zatem jeden pierwiastek podwójny.

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

c) $7x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2 = 9 - 56 = -47 < 0$, więc równanie jest sprzeczne.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 + 7x + 3 = 0$

d) $28x^2 - 4x + \frac{1}{7} = 0$

g) $-3x^2 + 2x - 3 = 0$

b) $4x^2 - x - 5 = 0$

e) $-x^2 + 6x + 1 = 0$

h) $6x^2 - 2x - 1 = 0$

c) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

f) $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 = 0$

i) $2x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$

Ćwiczenie 5

a) $\Delta = 25$, $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{1}{2}$

b) $\Delta = 81$, $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{5}{4}$

c) $\Delta = 49$, $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 2$

d) $\Delta = 0$, $x_0 = \frac{1}{14}$

e) $\Delta = 40$, $x_1 = 3 - \sqrt{10}$, $x_2 = 3 + \sqrt{10}$

f) $\Delta = 6$, $x_1 = 2 - \sqrt{6}$, $x_2 = 2 + \sqrt{6}$

g) $\Delta = -32$, brak rozwiązań

h) $\Delta = 28$, $x_1 = \frac{1 - \sqrt{7}}{6}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{7}}{6}$

i) $\Delta = -1,75$, brak rozwiązań

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = 7$
 b) $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 3$
 c) $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -\frac{1}{3}$
 d) sprzeczne
 e) $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 1$
 f) $x_0 = -\frac{3}{2}$
 g) sprzeczne
 h) $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 1$
 i) $x_0 = \frac{2}{3}$
2. a) $x_1 = -3, x_2 = -\frac{1}{2}$
 b) $x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = 2$
 c) $x_0 = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$
 d) $x_1 = \frac{-1+\sqrt{19}}{3}, x_2 = \frac{-1-\sqrt{19}}{3}$
 e) $x_1 = \frac{-1-\sqrt{11}}{5}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{11}}{5}$
 f), g) sprzeczne
 h) $x_1 = \frac{3-\sqrt{37}}{2}, x_2 = \frac{3+\sqrt{37}}{2}$
 i) $x_1 = \frac{7-\sqrt{37}}{6}, x_2 = \frac{7+\sqrt{37}}{6}$
3. a) $(0, -1), (-1, 0), (\frac{1}{3}, 0)$
 b) $(0, 3), (-\frac{\sqrt{3}+3}{2}, 0), (\frac{\sqrt{3}-3}{2}, 0)$
 c) $(0, 3), (1, 0), (-\frac{3}{4}, 0)$
 d) $(0, 12), (-6, 0)$ e) $(0, 5)$
 f) $(0, 1), (\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0)$
4. a) $x_1 = -2, x_2 = \frac{1}{2}$
 b) $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{5}$
 c) $x_1 = 5 - \sqrt{13}, x_2 = 5 + \sqrt{13}$
 d) $x_1 = 6, x_2 = 12$
 e) $x_1 = \frac{7-\sqrt{37}}{2}, x_2 = \frac{7+\sqrt{37}}{2}$
 f) sprzeczne
5. a) $\Delta = 12 - 8\sqrt{2} = 8(1,5 - \sqrt{2}) > 0$,
 2 rozwiązania
 b) $\Delta = \frac{13}{2} - 4\sqrt{3} = 4(\frac{13}{8} - \sqrt{3}) = 4(1,625 - \sqrt{3}) < 0$,
 brak rozwiązań
7. a) $x^2 - 2x = 1$
 lub $x^2 - 2x = -1$
 $x = 1 - \sqrt{2}$
 lub $x = 1 + \sqrt{2}$ lub $x = 1$
 b) $x = -2 - \sqrt{7}$
 lub $x = -2 + \sqrt{7}$ lub $x = -1$
 lub $x = -3$
8. a) $x^2 + x = x^2 - 2$
 lub $x^2 + x = -(x^2 - 2)$
 $x = -2$ lub $x = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$
 lub $x = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$
 b) $x = 0$ lub $x = \frac{2}{3}$
 c) $x = -2$ lub $x = 1$
 d) $x = -1 - 2\sqrt{2}$
 lub $x = -1 + 2\sqrt{2}$
 lub $x = -1$ lub $x = 1$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 - 9x - 35 = 0$	d) $5x^2 - 6x + 6 = 0$	g) $\frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0$
b) $4x^2 - 13x + 3 = 0$	e) $-2x^2 + 5x - 3 = 0$	h) $x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$
c) $-6x^2 + 13x + 5 = 0$	f) $4x^2 + 12x + 9 = 0$	i) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{9} = 0$
2. Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 + 3 = -7x$	d) $-2x - 3x^2 + 6 = 0$	g) $11(x^2 + 5) = x$
b) $x + 10 = 3x^2$	e) $5x^2 = 2 - 2x$	h) $x^2 + x = 4x + 7$
c) $16x^2 + 24\sqrt{2}x = -18$	f) $5x^2 = 8x - 5$	i) $3x^2 + 1 = 7x$
3. Wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych.

a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$	d) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 4x + 12$
b) $f(x) = 2x^2 + 6x + 3$	e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$
c) $f(x) = -4x^2 + x + 3$	f) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}x + 1$
4. Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 - 7x + 3 = (2x - 1)^2$	d) $(\frac{1}{2}x - 3)(x + 2) = (5 - x)(6 - x)$
b) $6x^2 + 7x + 2 = (2 - 3x)(3x + 2)$	e) $(x - 3)(x + 5) = (2x + 3)(x - 4)$
c) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 9 = (x - 3)(x - 5)$	f) $(4x - 1)(x - 4) = (3x + 2)(x - 7)$
5. Wyznacz liczbę rozwiązań równania.

a) $(\sqrt{2} - 1)x^2 + 2x + 2 = 0$	b) $13x^2 - (2\sqrt{3} - 1)x + \frac{1}{8} = 0$
-------------------------------------	---
6. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f, g i h .

a) $f(x) = 2x^2 - 8x + 5, g(x) = 2(x - \frac{1}{4})^2 - 8(x - \frac{1}{4}) + 5,$ $h(x) = 2(x - \frac{\sqrt{6}}{2})^2 - 8(x - \frac{\sqrt{6}}{2}) + 5$
b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 6, g(x) = -\frac{1}{2}(x + \frac{7}{2})^2 + 4(x + \frac{7}{2}) + 6,$ $h(x) = -\frac{1}{2}(x + 2\sqrt{7})^2 + 4(x + 2\sqrt{7}) + 6$
7. Rozwiąż równanie.

a) $ x^2 - 2x = 1$	b) $ x^2 + 4x = 3$
---------------------	---------------------
8. Rozwiąż równanie.

a) $ x^2 + x = x^2 - 2 $	c) $ x^2 - 1 = x^2 + 2x - 3 $
b) $ x^2 - x = 2x^2 - x $	d) $ x - 3 = x^2 + x - 4 $
6. a) $f(x) = 0$ dla $x = 2 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ lub $x = 2 + \frac{\sqrt{6}}{2}$
 Zauważmy, że $g(x) = f(x - \frac{1}{4})$, czyli $g(x) = 0$, gdy $f(x - \frac{1}{4}) = 0$.
 Zatem $g(x) = 0$ dla $x = \frac{1}{4} + 2 - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{9}{4} - \frac{\sqrt{6}}{2}$ lub $x = \frac{1}{4} + 2 + \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{9}{4} + \frac{\sqrt{6}}{2}$.
 Zauważmy, że $h(x) = f(x - \frac{\sqrt{6}}{2})$, czyli $h(x) = 0$, gdy $f(x - \frac{\sqrt{6}}{2}) = 0$.
 Zatem $h(x) = 0$ dla $x = \frac{\sqrt{6}}{2} + 2 - \frac{\sqrt{6}}{2} = 2$ lub $x = \frac{\sqrt{6}}{2} + 2 + \frac{\sqrt{6}}{2} = 2 + \sqrt{6}$.
 b) $f(x) = 0$ dla $x = 4 - 2\sqrt{7}$ lub $x = 4 + 2\sqrt{7}$
 $g(x) = 0$ dla $x = \frac{1}{2} - 2\sqrt{7}$ lub $x = \frac{1}{2} + 2\sqrt{7}$
 $h(x) = 0$ dla $x = 4 - 4\sqrt{7}$ lub $x = 4$

Szkicowanie paraboli

Aby naszkicować parabolę będącą wykresem funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, można wykorzystać postać kanoniczną funkcji f lub postąpić zgodnie z następującą instrukcją.

- Podaj punkt, w którym parabola przecina oś OY . Jest to punkt $(0, c)$.
- Wyznacz (jeśli istnieją) punkty, w których parabola przecina oś OX . Są to punkty $(x_1, 0)$ i $(x_2, 0)$, gdzie $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Wyznacz wierzchołek paraboli $W(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$.
- Aby uzyskać dokładniejszy szkic, wyznacz kilka dodatkowych punktów należących do paraboli (można wykorzystać fakt, że prosta $x = -\frac{b}{2a}$ jest osią symetrii paraboli).
- Połącz otrzymane punkty odpowiednią krzywą.

Przykład

Naszkicuj parabolę będącą wykresem funkcji $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

- Parabola przecina oś OY w punkcie $(0, -3)$.

- Rozwiązujemy równanie $x^2 - 2x - 3 = 0$.

$$\Delta = 16, \text{ stąd } x_1 = \frac{2-4}{2} = -1, x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

Parabola przecina oś OX w punktach $(-1, 0)$ i $(3, 0)$.

- Wyznaczamy wierzchołek paraboli.

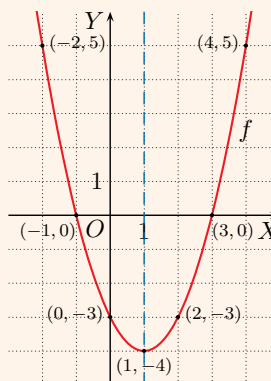
$$x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_w = f(-\frac{b}{2a}) = f(1) = 1 - 2 - 3 = -4$$

Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(1, -4)$.

- Wyznaczamy inne punkty należące do paraboli. $f(-2) = 5$, czyli do paraboli należy punkt $(-2, 5)$. Prosta $x = 1$ jest osią symetrii paraboli, więc należą do niej także punkty $(4, 5)$ i $(2, -3)$.

- Szkicujemy parabolę.



1. Naszkicuj parabolę będącą wykresem funkcji f .

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

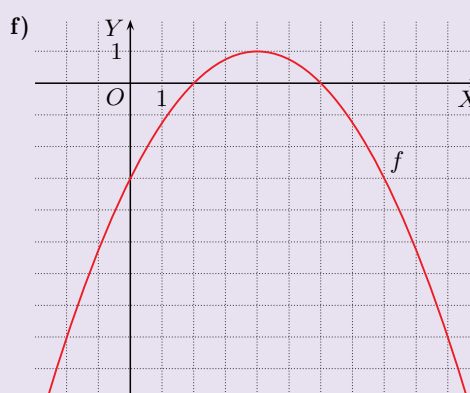
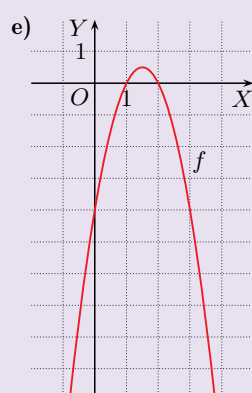
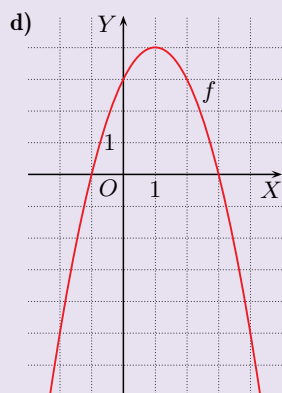
b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

c) $f(x) = 2x^2 + 8x + 6$

d) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

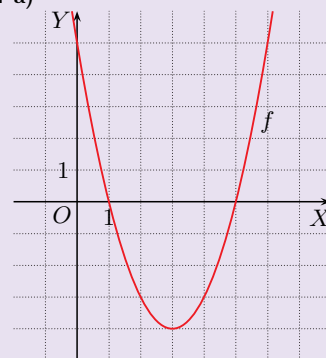
e) $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$

f) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3$

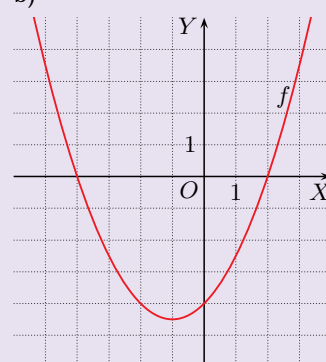


Odpowiedzi do zadań

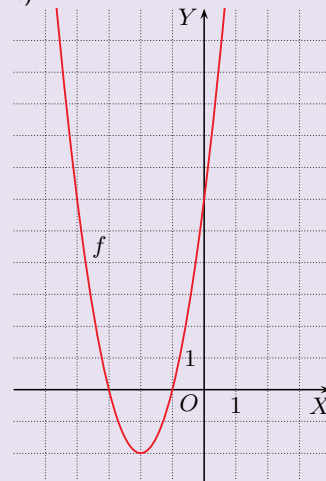
1. a)



b)



c)



Uczeń:

- definiuje postać iloczynową funkcji kwadratowej i warunek jej istnienia,
- zapisuje funkcję kwadratową w postaci iloczynowej,
- odczytuje wartości pierwiastków trójkątnu podanego w postaci iloczynowej,
- przekształca postać iloczynową funkcji kwadratowej do postaci ogólnej,
- wykorzystuje postać iloczynową funkcji kwadratowej do rozwiązywania zadań.

Ćwiczenie 1

- a) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 9$
b) $y = 4x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{2}{3}$
c) $y = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x$

7.6. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

Definicja

Postać $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **postacią iloczynową** funkcji kwadratowej.

Przedstawienie wzoru funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej nazywamy również **rozkładem na czynniki liniowe**. Rozkład na czynniki liniowe można zapisać na różne sposoby, np.:

$$\begin{aligned} y &= (3x + 2)(x - 7) = && \text{Czynniki liniowe: } 3x + 2 \text{ i } x - 7 \\ &= 3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 7) && \text{Czynniki liniowe: } x + \frac{2}{3} \text{ i } x - 7 \end{aligned}$$

Aby przejść od postaci iloczynowej do ogólnej, wystarczy wykonać mnożenie.

Na przykład dla trójkątnu $y = 2(x - 3)(x + 5)$ mamy:

$$y = 2(x - 3)(x + 5) = 2(x^2 + 5x - 3x - 15) = 2x^2 + 4x - 30$$

Ćwiczenie 1

Przedstaw trójkątn kwadratowy w postaci ogólnej.

a) $y = -\frac{1}{3}(x + 3)(x - 9)$ b) $y = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$ c) $y = \frac{1}{6}x(x + 2)$

Liczby x_1 i x_2 występujące w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ są miejscami zerowymi (pierwiastkami) trójkątnu kwadratowego, czyli pierwiastkami równania $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

Przykład 1

Postać ogólna	Postać iloczynowa	Czynniki liniowe	Pierwiastki
$y = x^2 - 9x + 14$	$y = (x - 2)(x - 7)$	$x - 2$ i $x - 7$	$x_1 = 2$ i $x_2 = 7$
$y = 4x^2 + 4x + 1$	$y = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$	$x + \frac{1}{2}$ (czynnik podwójny)	$x = -\frac{1}{2}$ (pierwiastek podwójny)
$y = 2x^2 + 6$	nie można rozłożyć na czynniki liniowe		brak pierwiastków

Ćwiczenie 2

Odczytaj czynniki liniowe i podaj pierwiastki trójkątnu kwadratowego.

a) $y = 4(x - 3)(x - 5)$ c) $y = -(x + 4)(x + 8)$ e) $y = -3(x - 2)^2$
b) $y = \frac{1}{4}(x - 2)(x + 6)$ d) $y = 8x(x - 9)$ f) $y = 13(x + 7)^2$

Ćwiczenie 2

- a) czynniki liniowe: $x - 3$ i $x - 5$
pierwiastki: $x_1 = 3$ i $x_2 = 5$
b) czynniki liniowe: $x - 2$ i $x + 6$
pierwiastki: $x_1 = 2$ i $x_2 = -6$
c) czynniki liniowe: $x + 4$ i $x + 8$
pierwiastki: $x_1 = -4$ i $x_2 = -8$
d) czynniki liniowe: x i $x - 9$
pierwiastki: $x_1 = 0$ i $x_2 = 9$
e) czynniki liniowe: $x - 2$ (podwójny)
pierwiastki: $x = 2$ (podwójny)
f) czynniki liniowe: $x + 7$ (podwójny)
pierwiastek: $x = -7$ (podwójny)

Twierdzenie

Dany jest trójmian kwadratowy $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

- Jeśli $\Delta > 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta = 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 jest pierwiastkiem podwójnym tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta < 0$, to trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe.

Przykład 2

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

a) $y = 2x^2 + 5x - 3$

$\Delta = 25 + 24 = 49$, $\sqrt{\Delta} = 7$, zatem:

$$x_1 = \frac{-5-7}{4} = -3, \quad x_2 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$$

Postać iloczynowa: $y = 2(x + 3)(x - \frac{1}{2})$.

b) $y = x^2 - 2x - 1$

$\Delta = 4 + 4 = 8$, $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$, zatem:

$$x_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}, \quad x_2 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

Postać iloczynowa: $y = (x - (1 - \sqrt{2}))(x - (1 + \sqrt{2}))$, którą możemy zapisać: $y = (x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2})$.

c) $y = -2x^2 + x - 4$

$\Delta = 1 - 32 = -31 < 0$, więc trójmian nie ma pierwiastków i nie można go rozłożyć na czynniki liniowe.

Ćwiczenie 3

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

a) $y = x^2 - 8x + 15$

d) $y = 12x^2 + 11x + 2$

g) $y = 2x^2 - 3x + 4$

b) $y = x^2 + 3x - 28$

e) $y = -2x^2 - 2x + 24$

h) $y = x^2 - 2x - 2$

c) $y = 3x^2 - 7x + 2$

f) $y = -4x^2 + 3x + 1$

i) $y = 2x^2 - 2x - 1$

Zadania

1. Podaj pierwiastki trójmianu kwadratowego.

a) $y = -(x - 3)(x - 13)$

d) $y = -2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3})$

b) $y = 2(x - 2)(x + 5)$

e) $y = -2(x + 1)(x + 1 - \sqrt{2})$

c) $y = \frac{1}{3}(x + 15)(x + 9)$

f) $y = (x + 2 - \sqrt{3})(x - 3 + \sqrt{2})$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x_1 = 3, x_2 = 13$

b) $x_1 = 2, x_2 = -5$

c) $x_1 = -15, x_2 = -9$

d) $x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{3}$

e) $x_1 = -1, x_2 = \sqrt{2} - 1$

f) $x_1 = \sqrt{3} - 2, x_2 = 3 - \sqrt{2}$

Ćwiczenie 3

a) $\Delta = 4, y = (x - 3)(x - 5)$

b) $\Delta = 121, y = (x + 7)(x - 4)$

c) $\Delta = 25, y = 3(x - \frac{1}{3})(x - 2)$

d) $\Delta = 25, y = 12(x + \frac{2}{3})(x + \frac{1}{4})$

e) $\Delta = 196, y = -2(x - 3)(x + 4)$

f) $\Delta = 25, y = -4(x + \frac{1}{4})(x - 1)$

g) $\Delta = -23 < 0$. Trójmian nie ma pierwiastków i nie można zapisać go w postaci iloczynowej.

h) $\Delta = 12, y = (x + \sqrt{3} - 1)(x - \sqrt{3} - 1)$

i) $\Delta = 12, y = 2(x - \frac{1-\sqrt{3}}{2})(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2})$

2. a) $\Delta = 25$, $y = 2(x + \frac{1}{2})(x - 2)$
 b) $\Delta = 25$, $y = -(x - 3)(x + 2)$
 c) $\Delta = 49$, $y = 4(x - 1)(x + \frac{3}{4})$
 d) $\Delta = 13$,
 $y = 3(x - \frac{5 - \sqrt{13}}{6})(x - \frac{5 + \sqrt{13}}{6})$
 e) $\Delta < 0$,
 nie ma postaci iloczynowej
 f) $\Delta = 27$,
 $y = (x - \sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})$
 g) $y = -2(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$
 h) $y = \frac{1}{3}x(x + \frac{1}{2})$
 i) nie ma postaci iloczynowej

3. a) $b = -8$, $c = 15$
 b) $b = 5$, $c = -36$
 c) $b = -7\frac{1}{3}$, $c = 2\frac{1}{3}$
 d) $b = \frac{11}{35}$, $c = -\frac{6}{35}$
 e) $b = 5$, $c = 0$
 f) $b = 0$, $c = -3$
 g) $b = -(1 + 2\sqrt{2})$,
 $c = 2 + \sqrt{2}$
 h) $b = -2$, $c = -6$

4. a) $x = 3$, $W(3, -9)$
 b) $x = -2$, $W(-2, -8)$
 c) $x = \frac{1}{2}$, $W(\frac{1}{2}, -4)$
 5. a) $(0, 0)$, $(-6, 0)$, $W(-3, 9)$
 b) $(1, 0)$, $(5, 0)$, $(0, 5)$,
 $W(3, -4)$
 c) $(-3, 0)$, $(1, 0)$, $(0, \frac{3}{2})$,
 $W(-1, 2)$

6. a) $y = a(x + 1)(x - 3)$
 Obliczamy współrzędne
 wierzchołka paraboli:
 $x_w = \frac{-1+3}{2} = 1$, $y_w = -4$.
 Zatem $a(1 + 1)(1 - 3) = -4$,
 czyli $a = 1$.

Postać iloczynowa:
 $y = (x + 1)(x - 3)$

Postać ogólna:
 $y = x^2 - 2x - 3$

Postać kanoniczna:
 $y = (x - 1)^2 - 4$

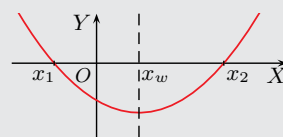
2. Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

a) $y = 2x^2 - 3x - 2$ d) $y = 3x^2 - 5x + 1$ g) $y = 10 - 2x^2$
 b) $y = -x^2 + x + 6$ e) $y = -4x^2 + 2x - 1$ h) $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x$
 c) $y = 4x^2 - x - 3$ f) $y = x^2 + \sqrt{3}x - 6$ i) $y = 6x^2 + 9$

3. Oblicz współczynniki b i c trójmianu kwadratowego $y = x^2 + bx + c$ o podanych pierwiastkach.

a) 3 i 5 c) $\frac{1}{3}$ i 7 e) -5 i 0 g) $\sqrt{2}$ i $1 + \sqrt{2}$
 b) 4 i -9 d) $\frac{2}{7}$ i $-\frac{3}{5}$ f) $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$ h) $1 + \sqrt{7}$ i $1 - \sqrt{7}$

Znajomość miejsc zerowych x_1, x_2 funkcji kwadratowej pozwala wyznaczyć oś symetrii paraboli i współrzędną x_w jej wierzchołka, gdyż $x_w = \frac{x_1 + x_2}{2}$.



4. Wyznacz równanie osi symetrii paraboli oraz współrzędne jej wierzchołka.

a) $y = x(x - 6)$ b) $y = \frac{1}{2}(x + 6)(x - 2)$ c) $y = (2x + 1)(2x - 3)$

5. Znajdź punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych oraz wyznacz współrzędne jej wierzchołka. Naskicuj tę parabolę.

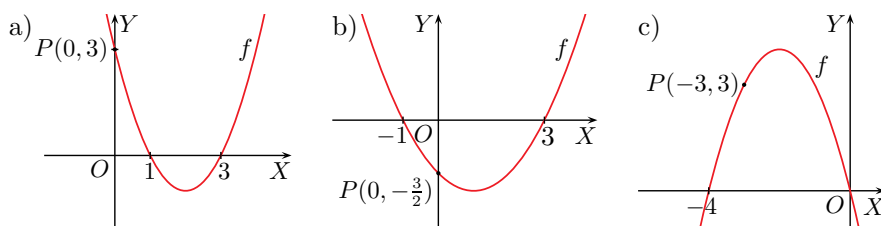
a) $y = -x(x + 6)$ b) $y = (x - 1)(x - 5)$ c) $y = -\frac{1}{2}(x + 3)(x - 1)$

6. Wyznacz trójmian kwadratowy o pierwiastkach x_1, x_2 i zbiorze wartości W . Odpowiedź podaj w jednej z wymienionych poniżej postaci.

a) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $W = [-4; \infty)$
 b) $x_1 = -4$, $x_2 = 0$, $W = (-\infty; 2]$
 c) $x_1 = -8$, $x_2 = 2$, $W = (-\infty; 10]$
 d) $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $W = [-6; \infty)$

Postać ogólna: $y = ax^2 + bx + c$
 Postać kanoniczna: $y = a(x - p)^2 + q$
 Postać iloczynowa: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

7. Na rysunku przedstawiono parabolę, która jest wykresem funkcji kwadratowej f . Wyznacz wzór tej funkcji w postaciach iloczynowej i ogólnej.



6. b) $y = ax(x + 4)$

Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli: $x_w = \frac{-4+0}{2} = -2$, $y_w = 2$.

Zatem $a(-2)(-2 + 4) = 2$, czyli $a = -\frac{1}{2}$.

Postać iloczynowa: $y = -\frac{1}{2}x(x + 4)$

Postać ogólna: $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$

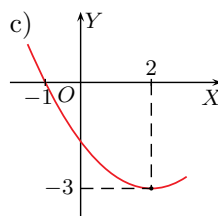
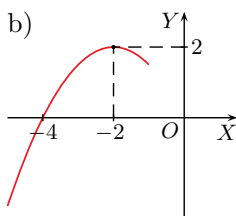
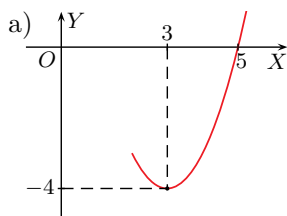
Postać kanoniczna: $y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 2$

c) $y = -\frac{2}{5}(x + 8)(x - 2) = -\frac{2}{5}x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{32}{5} = -\frac{2}{5}(x + 3)^2 + 10$

d) $y = \frac{2}{3}x(x - 6) = \frac{2}{3}x^2 - 4x = \frac{2}{3}(x - 3)^2 - 6$

7. a) $f(x) = (x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$
 b) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 3) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$
 c) $f(x) = -x(x + 4) = -x^2 - 4x$

8. Na rysunku przedstawiono fragment paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej f . Znajdź miejsce zerowe tej funkcji niezaznaczone na rysunku. Wyznacz wzór funkcji f w postaciach iloczynowej i kanonicznej.

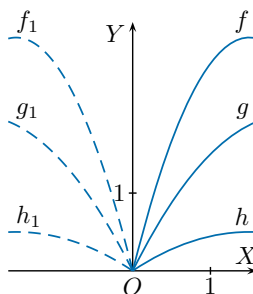


9. a) Parabola będąca wykresem trójmianu kwadratowego ma wierzchołek w punkcie $(-2, 4)$. Jeden pierwiastek trójmianu jest o dwa większy od drugiego. Wyznacz ten trójmian.
b) Parabola będąca wykresem trójmianu kwadratowego ma wierzchołek w punkcie $(4, 2)$. Jeden pierwiastek trójmianu jest trzy razy większy od drugiego. Wyznacz ten trójmian.

10. Krople wody tryskające z fontanny poruszają się po torach opisanych za pomocą wzorów:

$$f(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 4x, \quad g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x, \\ h(x) = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{2}{3}x$$

Parabole f_1, g_1, h_1 są symetryczne odpowiednio do parabol f, g i h względem osi OY . Podaj równania parabol f_1, g_1, h_1 w postaciach kanonicznej i iloczynowej.



11. Oblicz współczynniki b i c trójmianu kwadratowego $y = x^2 + bx + c$, którego pierwiastki są dwukrotnie większe od pierwiastków podanego trójmianu.

a) $y = x^2 - 4x + 3$ b) $y = x^2 - 3\sqrt{2}x + 4$ c) $y = x^2 - 4x + 2$

12. O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji $y = \frac{1}{2}x^2$, aby otrzymać wykres trójmianu kwadratowego, którego pierwiastkami są podane liczby.

a) 1 i 5 b) -6 i 2 c) $3 - \sqrt{2}$ i $3 + \sqrt{2}$

- D** 13. Trójmian kwadratowy $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, ma postać kanoniczną:

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Wykaż, że jeśli $\Delta \geq 0$, to trójmian można zapisać w postaci iloczynowej.

Uwaga. Jest to dowód twierdzenia ze str. 339.

12. a) Wzór trójmianu, którego pierwiastkami są liczby 1 i 5, ma postać:

$$y = \frac{1}{2}(x-1)(x-5)$$

Obliczamy współrzędne paraboli:

$$x_w = \frac{1+5}{2} = 3, \quad y_w = \frac{1}{2}(3-1)(3-5) = -2$$

Zatem wykres funkcji $y = \frac{1}{2}x^2$ należy przesunąć o wektor $[3, -2]$.

b) $[-2, -8]$

c) $[3, -1]$

13. $\Delta \geq 0$, zatem trójmian kwadratowy $y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ można zapisać

$$\text{w postaci: } y = a \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = a \left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \\ = a(x-x_1)(x-x_2)$$

8. a) $x = 1$,
 $f(x) = (x-1)(x-5)$,
 $f(x) = (x-3)^2 - 4$
b) $x = 0$, $f(x) = -\frac{1}{2}x(x+4)$,
 $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2$
c) $x = 5$,
 $f(x) = \frac{1}{3}(x+1)(x-5)$,
 $f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2 - 3$
9. Niech x_1, x_2 będą pierwiastkami.

a) Z założenia $x_2 = x_1 + 2$, wówczas: $\frac{x_1 + (x_1 + 2)}{2} = -2$, czyli $x_1 = -3$, stąd $x_2 = -1$.

Do równania

$y = a(x+3)(x+1)$ podstawiamy współrzędne wierzchołka i otrzymujemy $a = -4$.

Trójmian ma postać:

$$y = -4(x+3)(x+1) = -4x^2 - 16x - 12$$

b) $x_2 = 3x_1$, $\frac{x_1 + 3x_1}{2} = 4$, czyli $x_1 = 2$, stąd $x_2 = 6$.

$$a(4-2)(4-6) = 2$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

Trójmian ma postać:

$$y = -\frac{1}{2}(x-2)(x-6) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$$

10. $f_1(x) = -\frac{4}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 3 = -\frac{4}{3}x(x+3)$,
 $g_1(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2 = -\frac{1}{2}x(x+4)$,
 $h_1(x) = -\frac{2}{9}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = -\frac{2}{9}x(x+3)$

11. a) $y = x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$

Zatem szukany trójmian:

$$y = (x-6)(x-2) = x^2 - 8x + 12,$$

czyli $b = -8$, $c = 12$.

b) $b = -6\sqrt{2}$, $c = 16$

c) $b = -8$, $c = 8$

Rzut ukośny

Tory rzuconej piłki, ukośnie skierowanego strumienia wody czy lawy wyrzuconej z wulkanu to fragmenty paraboli (jeżeli pominie się opór powietrza).

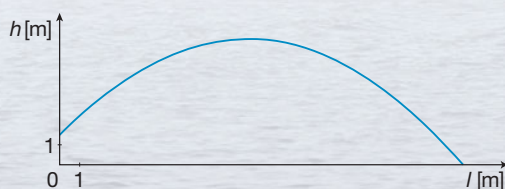


Portowa straż pożarna

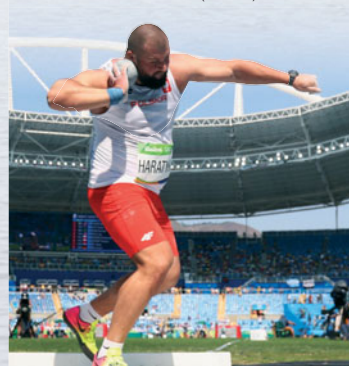
Ruch wody wystrzelwanej z armatek statku gaśniczego pod dużym ciśnieniem jest przykładem rzutu ukośnego. Umożliwia to zwalczanie pożarów na jednostkach pływających i na obszarach portowo-stoczniowych z bezpiecznej odległości.

Pchnięcie kulą

Rysunek pokazuje tor lotu kuli pchniętej przez zawodnika podczas zawodów w pchnięciu kulą (h – wysokość, l – odległość). Tor lotu kuli jest fragmentem paraboli $y = ax^2 + bx + c$, której wierzchołek ma współrzędne $(10, 6\frac{1}{2})$ i która przechodzi przez punkt $(0, 1\frac{1}{2})$.



- 1 Wyznacz równanie paraboli.
- 2 Czy zawodnik uzyskał wynik powyżej 20 m?



1. $f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + x + \frac{3}{2}$
2. $f(20) = \frac{3}{2} > 0$, zatem zawodnik uzyskał wynik powyżej 20 m.

7.7. Nierówności kwadratowe

Jeśli mamy wykres funkcji kwadratowej i znamy jej miejsca zerowe, możemy wyznaczyć zbiór rozwiązań odpowiedniej nierówności kwadratowej.

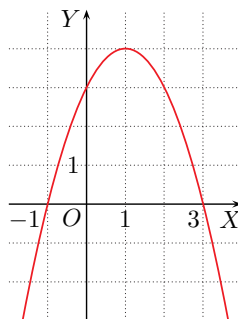
Przykład 1

Dany jest wykres funkcji $y = -x^2 + 2x + 3$. Rozwiąż nierówność $-x^2 + 2x + 3 > 0$.

Z wykresu odczytujemy, że:

$$-x^2 + 2x + 3 > 0 \text{ dla } x \in (-1; 3)$$

Uwaga. Zauważ, że do rozwiązania nierówności kwadratowej nie potrzebujemy dokładnego wykresu odpowiedniej funkcji. Wystarczy znajomość jej miejsc zerowych i informacja o tym, czy ramiona paraboli, będącej wykresem tej funkcji, są skierowane do góry czy do dół.



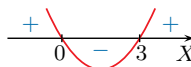
Przykład 2

a) Rozwiąż nierówność $2x^2 - 6x > 0$.

W celu wyznaczenia miejsc zerowych funkcji $y = 2x^2 - 6x$ rozwiązujemy równanie $2x^2 - 6x = 0$, czyli $2x(x - 3) = 0$. Zatem $x = 0$ lub $x = 3$.

Rozwiązania równania zaznaczamy na osi OX . Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych do góry (współczynnik przy x^2 jest dodatni), przechodzącą przez zaznaczone punkty. Ze szkicu wykresu odczytujemy:

$$2x^2 - 6x > 0 \text{ dla } x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$$



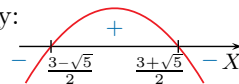
b) Rozwiąż nierówność $-x^2 + 3x - 1 \geq 0$.

Rozwiązujemy równanie $-x^2 + 3x - 1 = 0$.

$$\Delta = 9 - 4 = 5, \text{ zatem } x_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{-2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Rozwiązania równania zaznaczamy na osi OX . Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół (współczynnik przy x^2 jest ujemny), przechodzącą przez zaznaczone punkty. Ze szkicu wykresu odczytujemy:

$$-x^2 + 3x - 1 \geq 0 \text{ dla } x \in \left[\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right]$$



Ćwiczenie 1

Rozwiąż nierówność.

a) $3x^2 - 2x - 1 \geq 0$

b) $2x^2 + x - 1 \leq 0$

c) $-x^2 + 2x + 4 > 0$

Ćwiczenie 1

a) $x \in (-\infty; -\frac{1}{3}] \cup [1; \infty)$

b) $x \in [-1; \frac{1}{2}]$

c) $x \in (1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5})$

Uczeń:

- rozumie związek między rozwiązaniem nierówności kwadratowej a znakiem wartości odpowiedniego trójmianu kwadratowego,
- rozwiązuje nierówność kwadratową,
- wyznacza na osi liczbowej iloczyn, sumę i różnicę zbiorów rozwiązań kilku nierówności kwadratowych.

Komentarz

Dużym ułatwieniem przy odczytywaniu zbiorów rozwiązań nierówności jest zaznaczenie na szkicu wykresu znaków „+” i „-” (jak na rysunkach w przykładzie 2).

Multibook

- Nierówność kwadratowa

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 7.7

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

- a) $x \in \mathbb{R}$
- b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- c) sprzeczna

Ćwiczenie 3

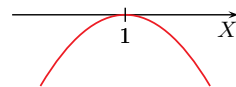
- a) $\Delta = -12 < 0$, $a = 4 > 0$,
zatem $x \in \mathbb{R}$
- b) $\Delta = -11 < 0$, $a = 1 > 0$,
zatem nierówność jest sprzeczna
- c) $\Delta = -6 < 0$, $a = -2 < 0$,
zatem $x \in \mathbb{R}$

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$.

Rozwiązujemy równanie $-x^2 + 2x - 1 = 0$, czyli $-(x-1)^2 = 0$. Zatem $x = 1$ (jest to pierwiastek podwójny). Rozwiązanie równania zaznaczamy na osi OX i szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół.

Ze szkicu wykresu odczytujemy: $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$ dla $x = 1$.



Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność.

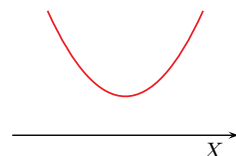
- a) $-x^2 + 2x - 1 \leq 0$
- b) $-x^2 + 2x - 1 < 0$
- c) $-x^2 + 2x - 1 > 0$

Przykład 4

a) Rozwiąż nierówność $5x^2 - 3x + 2 < 0$.

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = -31 < 0$$

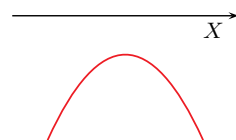
Równanie $5x^2 - 3x + 2 = 0$ nie ma pierwiastków oraz współczynnik przy x^2 jest dodatni. Parabola znajduje się zatem nad osią OX , a to oznacza, że nierówność jest sprzeczna.



b) Rozwiąż nierówność $-3x^2 + 2x - 1 < 0$.

$$\Delta = 4 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1) = -8 < 0$$

Równanie $-3x^2 + 2x - 1 = 0$ nie ma pierwiastków oraz współczynnik przy x^2 jest ujemny. Parabola znajduje się zatem pod osią OX , a to oznacza, że nierówność jest prawdziwa dla dowolnego x , czyli $x \in \mathbb{R}$.



Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

- a) $4x^2 + 2x + 1 > 0$
- b) $x^2 + x + 3 < 0$
- c) $-2x^2 + \sqrt{2}x - 1 \leq 0$

Przykład 5

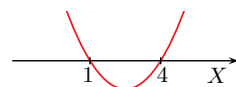
Rozwiąż nierówność $2(2-x) < -x(x-3)$.

$$4 - 2x < -x^2 + 3x$$

$$x^2 - 5x + 4 < 0$$

Wykonujemy mnożenie.
Przenosimy wszystkie wyrazy
na lewą stronę nierówności.

Rozwiązujemy równanie $x^2 - 5x + 4 = 0$ i otrzymujemy $x = 1$ lub $x = 4$. Szkicujemy parabolę i odczytujemy, że nierówność jest spełniona dla $x \in (1; 4)$.



Zadania

1. Rozwiąż nierówność.

- a) $x^2 > 25$ d) $x^2 - x \geq 6$ g) $9x + 5 \geq 2x^2$ j) $6x^2 - x > 12$
 b) $x^2 \leq 16$ e) $x^2 - 4 \leq 3x$ h) $2x^2 + 5x > 3$ k) $3x + 8 \geq \frac{1}{2}x^2$
 c) $4x^2 \geq 9$ f) $4x + 5 > x^2$ i) $3x^2 + 1 < x$ l) $\frac{2}{3}x^2 + 6 \leq x$

2. Ile liczb całkowitych spełnia podaną nierówność?

- a) $9 - \frac{1}{4}x^2 \geq 0$ b) $\frac{1}{3}x^2 > x$ c) $2x^2 - 10 \leq x$ d) $2 - x > x^2$

3. Rozwiąż nierówność.

- a) $-2x^2 + 6x - \frac{9}{2} < 0$ c) $x^2 + 2x + 2 > 0$ e) $2x^2 - x + \frac{1}{2} \leq 0$
 b) $-3x^2 + 2x - \frac{1}{3} \leq 0$ d) $-9x^2 + 2x - \frac{1}{9} < 0$ f) $-4x^2 + 12x - 9 \geq 0$

4. Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości większe niż funkcja $g(x) = x^2 - 2x + 3$.

- a) $f(x) = 2x^2 - x + 1$ b) $f(x) = 3x^2 - x$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x$

5. Rozwiąż nierówność.

- a) $(2x - 2)(x - 3) < (x - 3)(x - 4)$ d) $(2x - 2)^2 \geq (3x - 2)(x - 3)$
 b) $(3x - 1)(x + 2) \geq (x - 3)(2x - 1)$ e) $2x^2 - 3x + 4 \geq -(x - 1)^2 - 6$
 c) $(4x - 1)(4 - x) \leq (2 - 3x)(x + 1)$ f) $(2x + 3)^2 - 9 < 8 - (3 - x)^2$

6. Dane są zbiory A i B . Zaznacz na osi liczbowej zbiory $A \cup B$, $A \cap B$ i $A \setminus B$.

- a) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - x - 6 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}: -x^2 \leq 4x\}$
 b) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + \frac{7}{2}x - 2 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - x + \frac{1}{4} \leq 0\}$

7. Wyznacz dziedzinę funkcji f .

- a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{4 - x^2}$
 b) $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 5x + 3}$ d) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 1} - \sqrt{9 - 4x^2}$

8. Boki prostokąta mają długości równe $x - 1$ i $2x + 3$. Podaj wzór funkcji $y = P(x)$ opisującej pole tego prostokąta i określ jej dziedzinę. Dla jakich wartości x pole tego prostokąta jest:

- a) mniejsze od 7, b) większe od 18?

9. Rozwiąż nierówność.

- a) $x^2 - 4|x| \geq 0$ b) $x^2 + 2|x| < 3$ c) $2x^2 - 5|x| \geq 3$

7. a) $x^2 - 3x - 4 \geq 0$,

$$D = (-\infty; -1] \cup [4; \infty)$$

$$b) -2x^2 + 5x + 3 \geq 0, D = [-\frac{1}{2}; 3]$$

$$c) \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 4 - x^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty) \\ x \in [-2; 2] \end{cases}$$

$$D = [-2; -1] \cup [1; 2]$$

$$d) \begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ 9 - 4x^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}; \infty) \\ x \in [-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}] \end{cases}$$

$$D = [-\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{2}]$$

$$8. P(x) = (x-1)(2x+3), D = (1; \infty)$$

$$a) x \in (1; 2) \quad b) x \in (3; \infty)$$

9. a) Dla $x < 0$ mamy: $x^2 + 4x \geq 0$,

$$\text{czyli } x \in (-\infty; -4] \cup [0; \infty).$$

Z założenia $x < 0$, zatem $x \in (-\infty; -4]$.

Dla $x \geq 0$ mamy: $x^2 - 4x \geq 0$,

$$\text{czyli } x \in (-\infty; 0] \cup [4; \infty).$$

Z założenia $x \geq 0$, zatem $x \in \{0\} \cup [4; \infty)$.

Ostatecznie: $x \in (-\infty; -4] \cup \{0\} \cup [4; \infty)$.

$$b) x \in (-1; 1)$$

$$c) x \in (-\infty; -3] \cup [3; \infty)$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x \in (-\infty; -5) \cup (5; \infty)$

$$b) x \in [-4; 4]$$

$$c) x \in (-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}; \infty)$$

$$d) x \in (-\infty; -2] \cup [3; \infty)$$

$$e) x \in [-1; 4] \quad f) x \in (-1; 5)$$

$$g) x \in [-\frac{1}{2}; 5]$$

$$h) x \in (-\infty; -3) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$$

i) sprzeczna

$$j) x \in (-\infty; -\frac{4}{3}) \cup (\frac{3}{2}; \infty)$$

$$k) x \in [-2; 8] \quad l) \text{ sprzeczna}$$

2. a) $x \in [-6; 6]$, trzynaście

b) $x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$, nieskończenie wiele

c) $x \in [-2; 2\frac{1}{2}]$, pięć

d) $x \in (-2; 1)$, dwie

3. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$ b) $x \in \mathbb{R}$

c) $x \in \mathbb{R}$ d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{9}\}$

e) sprzeczna f) $x = \frac{3}{2}$

4. a) $x \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$

b) $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (1; \infty)$

c) $x \in (-4 - \sqrt{10}; -4 + \sqrt{10})$

5. a) $x \in (-2; 3)$

$$b) x \in (-\infty; -6 - \sqrt{41}] \cup [-6 + \sqrt{41}; \infty)$$

$$c) x \in (-\infty; 9 - 5\sqrt{3}] \cup [9 + 5\sqrt{3}; \infty)$$

$$d) x \in \left(-\infty; \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}; \infty\right)$$

$$e) x \in \mathbb{R} \quad f) x \in (-1; -\frac{1}{5})$$

6. a) $A = [-2; 3]$,

$$B = (-\infty; -4] \cup [0; \infty),$$

$$A \cup B = (-\infty; -4] \cup [-2; \infty),$$

$$A \cap B = [0; 3], A \setminus B = [-2; 0)$$

$$b) A = (-\infty; -4) \cup (\frac{1}{2}; \infty),$$

$$B = \{\frac{1}{2}\},$$

$$A \cup B = (-\infty; -4) \cup [\frac{1}{2}; \infty),$$

$$A \cap B = \emptyset, A \setminus B = A$$

Odpowiedzi do zadań

- $f(D) = [-\sqrt{2}; \infty)$,
maleje w $(-\infty; 0]$,
rośnie w $[0; \infty)$
 - $f(D) = (-\infty; 9]$,
rośnie w $(-\infty; 3]$,
maleje w $[3; \infty)$
 - $f(D) = [-9; \infty)$,
maleje w $(-\infty; 4]$,
rośnie w $[4; \infty)$
 - $f(D) = (-\infty; 9]$,
rośnie w $(-\infty; 2]$,
maleje w $[2; \infty)$
 - $f(D) = (-\infty; 3]$,
rośnie w $(-\infty; 3]$,
maleje w $[3; \infty)$
 - $f(D) = [-\frac{3}{32}; \infty)$,
maleje w $(-\infty; -\frac{3}{4}]$,
rośnie w $[-\frac{3}{4}; \infty)$
- $(0, 0), (4, 0), W(2, -4)$
 - $(0, 0), (2, 0), W(1, 1)$
 - $(0, 8), (-2, 0), (4, 0), W(1, 9)$
 - $(0, 8), (-2, 0), (-4, 0), W(-3, -1)$
 - $(0, 2), (\frac{1}{2}, 0), (2, 0), W(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8})$
 - $(0, -6), (3, 0), (1, 0), W(2, 2)$
- $x_1 = -7, x_2 = 3$
 - $x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = \frac{1}{2}$
 - $x_0 = \frac{8}{3}$ d) sprzeczne
 - $x_1 = \frac{-5-\sqrt{13}}{6}, x_2 = \frac{-5+\sqrt{13}}{6}$
 - $x_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$
- $x_0 = -\frac{10}{7}$
 - $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = 4$
 - $x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$
 - $x_0 = -2$ e) $x_0 = 10$
 - sprzeczne
 - $x_1 = -2 - \sqrt{14}, x_2 = -2 + \sqrt{14}$
 - sprzeczne
- $x \in (-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{\sqrt{3}}{3}; \infty)$
 - $x \in (-\infty; -3] \cup [0; \infty)$
 - $x \in (10 - 6\sqrt{2}; 10 + 6\sqrt{2})$
 - $x \in \mathbb{R}$
 - $x \in (-\infty; -\frac{1}{4}] \cup [2; \infty)$
 - $x \in (-\frac{2}{3}; 1)$
 - $x \in (-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{3}}{2}; \infty)$
 - $x \in [12 - 3\sqrt{15}; 12 + 3\sqrt{15}]$

Powtórzenie

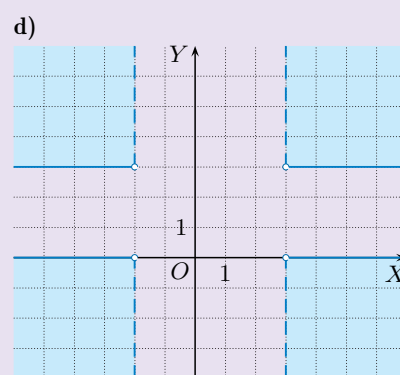
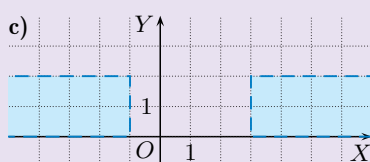
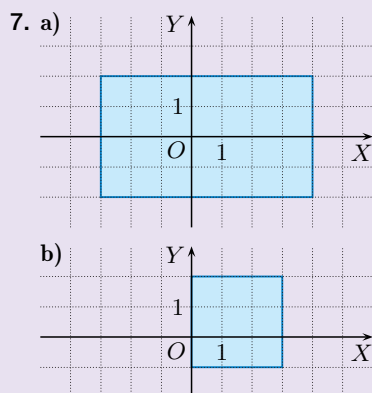
Zestaw I

- Wyznacz zbiór wartości oraz przedziały monotoniczności funkcji f .
 - $f(x) = x^2 - \sqrt{2}$
 - $f(x) = x^2 - 8x + 7$
 - $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$
 - $f(x) = -x^2 + 6x$
 - $f(x) = -x^2 + 4x + 5$
 - $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x$
- Wyznacz punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych oraz współrzędne jej wierzchołka. Naskicuj tę parabolę.
 - $y = x^2 - 4x$
 - $y = -x^2 + 2x + 8$
 - $y = 2x^2 - 5x + 2$
 - $y = -x^2 + 2x$
 - $y = x^2 + 6x + 8$
 - $y = -2x^2 + 8x - 6$
- Rozwiąż równanie.
 - $x^2 + 4x - 21 = 0$
 - $\frac{9}{4}x^2 - 12x + 16 = 0$
 - $3x^2 + 5x + 1 = 0$
 - $-6x^2 - 7x + 5 = 0$
 - $-x^2 + 3\sqrt{2}x - 5 = 0$
 - $2x^2 - 3x - 1 = 0$
- Rozwiąż równanie.
 - $49x^2 + 140x + 100 = 0$
 - $x^2 + 6x + 9 = (2x - 1)^2$
 - $3x^2 + 2x + 1 = 3x + 4x^2 - 3$
 - $4 - \frac{1}{4}x^2 - 3x = x^2 + 2x + 9$
 - $(2x - 4)(x - 10) = (x + 6)(x - 10)$
 - $x(3 - x) = (2x + 1)(x + 2) - 1$
 - $(x - 1)(x + 2) = (2x - 3)(x + 4)$
 - $(2x - 1)^2 = (3 - x)(x - 6)$
- Rozwiąż nierówność.
 - $3x^2 - 1 \geq 0$
 - $-4x^2 \leq 12x$
 - $\frac{1}{4}x^2 - 5x + 7 < 0$
 - $6x^2 + 3 > 2x$
 - $x^2 - 3x(x - 1) \leq 2(x - 1)(x + 1) - 4x$
 - $7 - x(5x + 2) > 3 - x(4 - x)$
 - $2x^4 + x^2 - 3 \geq (1 - 2x^2)(3 - x^2)$
 - $(2 - 3x)^2 - 6(3x - 1) \leq -(1 - 4x)(2x - 1)$
- Wykresem funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ jest parabola o wierzchołku w punkcie W . Wyznacz współczynniki b i c oraz zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.
 - $W(0, 1)$
 - $W(1, 3)$
 - $W(-2, 2)$
 - $W(4, -1)$
- Wyznacz współczynnik b tak, aby podany przedział był zbiorem wartości funkcji $f(x) = 2x^2 + bx + 1$.
 - $[-1; \infty)$
 - $[0; \infty)$
 - $[2; \infty)$
 - $[\frac{1}{2}; \infty)$
- $b = 0, c = 1, f(x) = x^2 + 1$
 - $b = -2, c = 4, f(x) = (x - 1)^2 + 3$
 - $b = 4, c = 6, f(x) = (x + 2)^2 + 2$
 - $b = -8, c = 15, f(x) = (x - 4)^2 - 1$
- Wyznaczamy drugą współrzędną wierzchołka: $\Delta = b^2 - 8$ i wtedy $y_w = \frac{8-b^2}{8}$.
 - $\frac{8-b^2}{8} = -1$, czyli $b = -4$ lub $b = 4$.
 - $\frac{8-b^2}{8} = 0$, czyli $b = -2\sqrt{2}$ lub $b = 2\sqrt{2}$.
 - $\frac{8-b^2}{8} = 2$, czyli $b^2 = -8$, zatem nie ma takiego b .
 - $\frac{8-b^2}{8} = \frac{1}{2}$, czyli $b = -2$ lub $b = 2$.

Zestaw II

- Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f , o której wiadomo, że:
 - przyjmuje ona największą wartość równą 2, a jej miejscami zerowymi są liczby -1 i 3 ,
 - jej zbiorem wartości jest przedział $[-5; \infty)$, a miejscami zerowymi są liczby -3 i 7 ,
 - przyjmuje ona najmniejszą wartość równą 0, a do jej wykresu należą punkty $(2, 5)$ i $(4, 5)$.
- Wyznacz wzór funkcji kwadratowej, o której wiadomo, że jej wykresem jest parabola o wierzchołku $W(2, 4)$ przechodząca przez punkt P .
 - $P(4, 0)$
 - $P(-1, 7)$
 - $P(6, 10)$
- Punkt W jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f , a liczba 3 jest miejscem zerowym tej funkcji. Wyznacz jej drugie miejsce zerowe.
 - $W(5, 4)$
 - $W(-3, -6)$
 - $W(\frac{1}{2}, 2)$
 - $W(\frac{5}{4}, 6)$
- Rozwiąż równanie.
 - $(x - 3)^2 = (2x - 1)(x - 3)$
 - $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(3x - 4)$
 - $16 - (3x - 1)^2 = 0$
 - $9x^2 - (2x - 1)^2 = 0$
 - $4x^2 = (1 - x)^2$
 - $(2x + 1)^2 = (4x + 5)^2$
- Rozwiąż układ nierówności.
 - $$\begin{cases} (3x + 1)(x - 2) > 0 \\ 4x^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$
 - $$\begin{cases} x(2 - 3x) \geq -3(x + 2) \\ 25 - 9x^2 < 0 \end{cases}$$
- Wyznacz współczynniki a, b, c trójmianu kwadratowego $y = ax^2 + bx + c$, do którego wykresu należą podane punkty.
 - $A(0, 2), B(1, 0), C(-1, 0)$
 - $A(0, 4), B(1, 3), C(2, 0)$
 - $A(3, 0), B(2, 4), C(4, 4)$
 - $A(1, 2), B(3, 2), C(4, -4)$

Przedstaw ten trójmian w postaci iloczynowej.
- Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów (x, y) spełniających podane warunki.
 - $x^2 \leq x + 12$ i $y^2 \leq 4$
 - $x^2 \leq 3x$ i $y^2 - y \leq 2$
 - $x^2 - 2x > 3$ i $y^2 < 2y$
 - $x^2 - x > 6$ i $y^2 \geq 3y$



- a) $x_w = 1$
 Podstawiamy $W(1, 2)$ do równania $y = a(x + 1)(x - 3)$ i otrzymujemy $a = -\frac{1}{2}$.

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)(x - 3) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$$
- b) $f(x) = \frac{1}{5}(x + 3)(x - 7) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{21}{5}$
- c) $f(x) = 5(x - 3)^2 = 5x^2 - 30x + 45$
- a) $y = -(x - 2)^2 + 4$
- b) $y = \frac{1}{3}(x - 2)^2 + 4$
- c) $y = \frac{3}{8}(x - 2)^2 + 4$
- a) $x = 7$
- b) $x = -9$
- c) $x = -2$
- d) $x = -\frac{1}{2}$
- a) $x_1 = -2, x_2 = 3$
- b) $x_1 = -2, x_2 = 3$
- c) $x_1 = -1, x_2 = \frac{5}{3}$
- d) $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{5}$
- e) $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{3}$
- f) $x_1 = -2, x_2 = -1$
- a) $x \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (2; \infty)$
 i $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$,
 czyli $x \in [-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3})$
- b) $x \in [\frac{5 - \sqrt{97}}{6}; \frac{5 + \sqrt{97}}{6}]$
 i $x \in (-\infty; -\frac{5}{3}) \cup (\frac{5}{3}; \infty)$,
 czyli $x \in (\frac{5}{3}; \frac{5 + \sqrt{97}}{6}]$
- a) $a = -2, b = 0, c = 2$,
 $y = -2(x - 1)(x + 1)$
- b) $a = -1, b = 0, c = 4$,
 $y = -(x - 2)(x + 2)$
- c) $a = 4, b = -24, c = 36$,
 $y = 4(x - 3)^2$
- d) $a = -2, b = 8, c = -4$,
 $y = -2(x - 2 - \sqrt{2})(x - 2 + \sqrt{2})$



Odpowiedzi do zadań

1. a) $-4,9t^2 + 49 \geq 0, t \geq 0$

$$4,9t^2 \leq 49$$

$$t^2 \leq 10$$

$$t \in [-\sqrt{10}; \sqrt{10}], t \geq 0$$

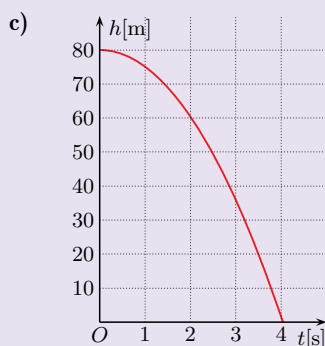
Dziedziną funkcji h jest zbiór $[0; \sqrt{10}]$.

$$h(t) = 0 \text{ dla } t = \sqrt{10}$$

b) 1 sekundę przed końcem spadania kula była na wysokości:

$$\begin{aligned} h(\sqrt{10} - 1) &= \\ &= -4,9(\sqrt{10} - 1)^2 + 49 = \\ &= -4,9(11 - 2\sqrt{10}) + 49 = \\ &= 9,8\sqrt{10} - 4,9 \approx 26 \end{aligned}$$

W ostatniej sekundzie kula przebyła około 26 m.



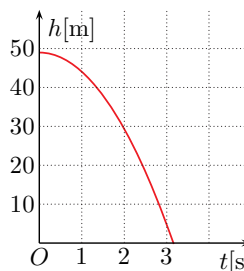
Zadania z kontekstem realistycznym

1. W *Rozmowach i dowodzeniach matematycznych* z 1638 r. Galileusz analizował funkcję opisującą ruch spadającego ciała. Znałe jest jego doświadczenie, podczas którego z wieży w Pizie z wysokości 49 m zrzucił metalowe kule. Jeśli pominiemy opór powietrza, to odległość od ziemi h kuli upuszczonej swobodnie z wysokości 49 m, w zależności od czasu t , można opisać za pomocą wzoru $h(t) = -4,9t^2 + 49$.

a) Przerysuj tabelę wartości funkcji h do zeszytu i uzupełnij ją. Znajdź miejsca zerowe i określ dziedzinę tej funkcji.

$t[s]$	0	1	2	3
$h[m]$	49	44,1	29,4	4,9

b) Na rysunku przedstawiono wykres funkcji h będący fragmentem paraboli. Ile metrów przebyła kula w ostatniej sekundzie?



c) Naszkicuj wykres funkcji $k(t) = -4,9t^2 + 80$ opisującej odległość od ziemi k (w metrach) kuli upuszczonej swobodnie z wysokości 80 m, gdzie czas t liczony jest w sekundach.

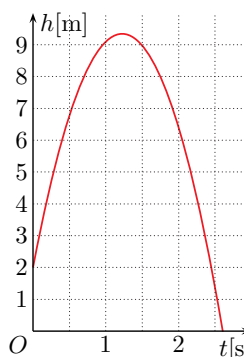
2. Janek wyrzucił piłkę pionowo do góry z prędkością 12 m/s. W momencie rzutu piłka znajdowała się 2 m nad ziemią. Zależność wysokości piłki nad ziemią od czasu można wyrazić wzorem:

$$h(t) = -4,9t^2 + 12t + 2$$

Wykres funkcji h przedstawiono na rysunku.

a) Odczytaj z wykresu przybliżoną wysokość, jaką osiągnęła piłka. Jaka jest długość drogi, którą przebyła piłka?

b) Jak sądzisz, kiedy piłka poruszała się z większą prędkością – w chwili $t = 1$ s czy $t = 2$ s?



3. Z wysokości 5 m wypuszczono z łuku strzałę pionowo do góry z prędkością początkową 50 m/s. Wysokość strzały nad ziemią (w metrach) opisuje wzór $h(t) = 5 + 50t - 5t^2$, gdzie t jest czasem lotu strzały (w sekundach). Po ilu sekundach od momentu wypuszczenia z łuku strzała:

a) ponownie osiągnie wysokość, z jakiej ją wypuszczono,

b) osiągnie największą wysokość?

2. a) $h \approx 9,3$ m, około 16,6 m

b) Prędkość piłki od momentu rzucenia do osiągnięcia maksymalnej wysokości malała aż do wartości 0, po czym zaczęła rosnąć. Na danej wysokości prędkości w czasie wznoszenia i w czasie opadania były równe co do wartości (ale przeciwnie skierowane). Dlatego dla $t = 2$ s piłka poruszała się z większą prędkością.

3. a) $5 + 50t - 5t^2 = 5$

$$t(t - 10) = 0$$

$$t = 10 \text{ s}$$

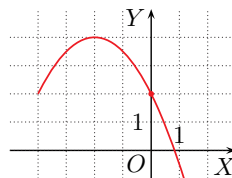
b) $h(0) = h(10)$, zatem osią symetrii paraboli jest prosta $t = 5$. Oznacza to, że funkcja h największą wartość przyjmuje dla $t = 5$. Strzała osiągnie największą wysokość po 5 s.



Jeśli w zadaniu mamy do wyznaczenia wzór funkcji kwadratowej, ale nie jest powiedziane, czy chodzi o postać ogólną, kanoniczną czy iloczynową, możemy wybrać taką, która jest dla nas najwygodniejsza.

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono fragment paraboli będącej wykresem funkcji f . Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $(-2, 4)$. Wyznacz wzór funkcji f . Ile liczb całkowitych spełnia nierówność $f(x) \geq \frac{1}{2}x + 2$?



Wzór funkcji f zapisujemy w postaci kanonicznej. Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(-2, 4)$, więc:

$$f(x) = a(x + 2)^2 + 4$$

Z rysunku odczytujemy, że do wykresu funkcji f należy punkt $(0, 2)$, zatem $2 = a(0 + 2)^2 + 4$ i stąd $a = -\frac{1}{2}$, czyli $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 4$.

Rozwiązujemy nierówność:

$$-\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 4 \geq \frac{1}{2}x + 2 \quad / \cdot (-2)$$

$$x^2 + 4x + 4 - 8 \leq -x - 4$$

$$x^2 + 5x \leq 0$$

$$x(x + 5) \leq 0$$

Zatem $x \in [-5; 0]$, czyli nierówność tę spełnia sześć liczb całkowitych.

Odpowiedź: $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 4$; sześć liczb

→ Zadanie 22, str. 352

D Przykład 2

Obwód prostokąta jest równy 14, a jeden z jego boków ma długość x . Wyznacz wzór funkcji opisującej pole tego prostokąta w zależności od x i podaj jej dziedzinę. Uzasadnij, że jeśli ten prostokąt nie jest kwadratem, to jego pole jest mniejsze od $12\frac{1}{4}$.

Długość drugiego boku prostokąta oznaczmy przez y . Wtedy $2x + 2y = 14$, czyli $y = 7 - x$. Pole tego prostokąta opisuje funkcja kwadratowa, której wzór zapisujemy w postaci iloczynowej, a następnie przekształcamy go do postaci ogólnej:

$$P(x) = x \cdot (7 - x) = -x^2 + 7x, \text{ gdzie } x \in (0; 7)$$

Wykresem funkcji P jest fragment paraboli o ramionach skierowanych w dół i wierzchołku w punkcie o odciętej $x_w = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$. Obliczamy rzędną wierzchołka:

$$P\left(\frac{7}{2}\right) = -\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 7 \cdot \frac{7}{2} = \frac{-49}{4} + \frac{49}{2} = \frac{49}{4} = 12\frac{1}{4}$$

Funkcja P przyjmuje wartość $12\frac{1}{4}$ dla $x = y = \frac{7}{2}$, czyli gdy prostokąt jest kwadratem. Zatem dla prostokąta niebędącego kwadratem pole jest mniejsze od $12\frac{1}{4}$.

→ Zadanie 23, str. 352

dla nauczyciela.pl | Klasówka 7

dla nauczyciela.pl | Sprawdzian II

dla nauczyciela.pl | Sprawdzian
na koniec roku

Generator
testów i sprawdzianów



1. A. $f(x_w) = 1 \neq -10$
B. $f(x_w) = -8 \neq 0$
C. $f(x_w) = -10$
2. $x_w = -\frac{b}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,
czyli $b = -4$
3. Ramiona paraboli są skierowane w dół, gdy współczynnik przy x^2 jest ujemny. Jest tak tylko w C i D.
C. $f(x) < 0$ dla $x \in \mathbb{R}$
D. $f(-1) = 7 - \sqrt{2} > 0$, więc wierzchołek paraboli znajduje się nad osią OX .
4. A. $\Delta = 12 - 8\sqrt{3} = \sqrt{144} - \sqrt{192} < 0$
B. $\Delta = 12 - 8\sqrt{3} < 0$
C. $\Delta = 18 - 8\sqrt{3} = \sqrt{324} - \sqrt{192} > 0$
5.
$$\begin{cases} 100 + 5b + c = 0 \\ 36 - 3b + c = 0 \end{cases}$$
$$\frac{64 + 8b = 0}{b = -8}$$
6. $y = 6(x + 4)(x + 2)$,
 $x_w = \frac{-4-2}{2} = -3$,
 $y_w = 6(-3 + 4)(-3 + 2) = -6$
8. A. $x \in (-\infty; -1] \cup [\frac{11}{2}; \infty)$
B. $x \in (-\infty; -1] \cup [\frac{9}{2}; \infty)$
C. $x \in (-\infty; -1] \cup [\frac{7}{2}; \infty)$
D. $x \in (-\infty; -1] \cup [\frac{5}{2}; \infty)$

W zadaniach 1–9 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Przedział $[-10; \infty)$ jest zbiorem wartości funkcji

- A. $f(x) = 4x^2 - 12x + 10$ C. $f(x) = 4x^2 - 12x - 1$
B. $f(x) = 4x^2 - 12x + 1$ D. $f(x) = 4x^2 - 12x - 10$

Zadanie 2 (0–1)

Prosta $x = \sqrt{2}$ jest osią symetrii wykresu funkcji

- A. $f(x) = \sqrt{2}x^2 + 2x - 1$ C. $f(x) = \sqrt{2}x^2 + 4x - 1$
B. $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 2x + 1$ D. $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 4x + 1$

Zadanie 3 (0–1)

Wykresem funkcji f jest parabola o ramionach skierowanych w dół i wierzchołku położonym nad osią OX , gdy

- A. $f(x) = (2 - \sqrt{2})x^2 - 6$ C. $f(x) = (1 - \sqrt{2})x^2 - 6$
B. $f(x) = (2 - \sqrt{2})x^2 - 6x$ D. $f(x) = (1 - \sqrt{2})x^2 - 6x$

Zadanie 4 (0–1)

Dwa różne pierwiastki ma równanie

- A. $2x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$ C. $2x^2 - 3\sqrt{2}x + \sqrt{3} = 0$
B. $2x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$ D. $2x^2 + 3\sqrt{2}x + 2\sqrt{3} = 0$

Zadanie 5 (0–1)

Miejscami zerowymi funkcji $y = 4x^2 + bx + c$ są liczby 5 i -3 , zatem

- A. $b = -8$ i $c = -60$ C. $b = 2$ i $c = -8$
B. $b = -2$ i $c = -15$ D. $b = 4$ i $c = -30$

Zadanie 6 (0–1)

Wierzchołkiem paraboli danej równaniem $y = (2x + 8)(3x + 6)$ jest punkt

- A. $(-3, -6)$ B. $(-3, 6)$ C. $(3, -6)$ D. $(3, 6)$

Zadanie 7 (0–1)

Zbiór liczb rzeczywistych jest zbiorem rozwiązań nierówności

- A. $5x^2 + 4x \geq 0$ C. $9x^2 + 30x - 25 \geq 0$
B. $-4x^2 - 1 < 0$ D. $-2x^2 + 24x - 48 < 0$

Zadanie 8 (0–1)

Liczba π należy do zbioru rozwiązań nierówności

- A. $2x^2 - 9x - 11 \geq 0$ C. $2x^2 - 5x - 7 \geq 0$
B. $2x^2 - 7x - 9 \geq 0$ D. $2x^2 - 3x - 5 \geq 0$

**Zadanie 9 (0–1)**

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $2x^2 > 3$ jest

A. $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

C. $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \infty\right)$

B. $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \infty\right)$

D. $\left(-\infty; -\frac{3\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}; \infty\right)$

Zadanie 10 (0–2)

Punkt P jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji danej wzorem $f(x) = x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{173}{16}$.

Każdemu rozpoczętemu zdaniu przyporządkuj właściwe dokończenie. Wpisz obok rozpoczętych zdań w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–E.

Numer zadania	Zdanie do uzupełnienia	Dokończenie zdania
10.1	Odcięta punktu P jest równa	E
10.2	Rzędna punktu P jest równa	D

A. $6\frac{1}{4}$

B. $5\frac{1}{4}$

C. $4\frac{3}{4}$

D. $3\frac{1}{4}$

E. $2\frac{3}{4}$

Zadanie 11 (0–1)

Dana jest nierówność $(x - \sqrt{17})(x + 4\sqrt{17}) \leq 0$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Nierówności tej nie spełnia żadna liczba całkowita ujemna.	P	F
Nierówność ta jest spełniona przez 5 liczb całkowitych dodatnich.	P	F

Zadanie 12 (0–1)

Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 4\sqrt{3}x + 9$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz 1., 2. albo 3.

Postać kanoniczna funkcji f to

A.	$(x - 1)^2 - 4 - 2\sqrt{3},$	a jej postać iloczynowa to	1.	$(x - \sqrt{3})(x + 3\sqrt{3}).$
B.	$(x - 2\sqrt{3})^2 - 3,$		2.	$(x - \sqrt{3})(x - 3\sqrt{3}).$
			3.	$(x + \sqrt{3})(x - 3\sqrt{3}).$

9. $x^2 - \frac{3}{2} > 0$

$$x^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 > 0$$

$$\left(x + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) > 0$$

10. $x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}
 y_w &= f(x_w) = f\left(\frac{11}{4}\right) = \\
 &= \frac{121}{16} - \frac{121}{8} + \frac{173}{16} = \\
 &= -\frac{121}{16} + \frac{173}{16} = \frac{52}{16} = \\
 &= \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

11. $x \in [-4\sqrt{17}; \sqrt{17}]$

Liczby całkowite dodatnie spełniające tę nierówność: 1, 2, 3, 4.

12. $x^2 - 4\sqrt{3}x + 9 = (x^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3}x + 12) - 12 + 9 = (x - 2\sqrt{3})^2 - 3$



13. $x = -3, x = \frac{3}{2}$

14. $x \in (-\infty; -4] \cup [\frac{1}{2}; \infty)$

15. $x_1 = -\sqrt{3} - 1, x_2 = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

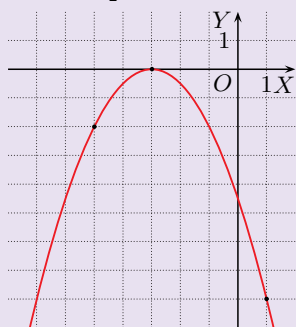
16. $(x+1)(3x-2) \leq 0$
 $x \in [-1; \frac{2}{3}]$

17. $f(x) = x^2 - 6x = x(x-6),$
 $x_w = 3$
Funkcja f maleje w $(-\infty; 3]$,
rośnie w $[3; \infty)$.

18. $x_w = \frac{-3+5}{2} = 1, f(1) = -32$

19. $y = \frac{1}{4}(x-4)^2$

20. $g(x) = -\frac{1}{2}(x+3)^2$

Wartość największa: 0,
wartość najmniejsza: -8.

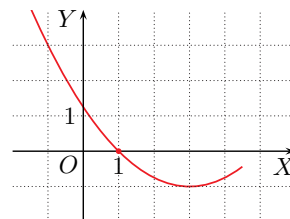
21. $x^2 + 4x \leq 0$ dla $x \in [-4; 0]$
 $x^2 - 4 > 0$ dla
 $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$
Stąd $x \in [-4; -2)$.
Liczby całkowite spełniające
jednocześnie obie nierówności
to -4 i -3.

22. Podstawiamy współrzędne
punktu $(1, 0)$ do wzoru
 $f(x) = a(x-3)^2 - 1$.
Otrzymujemy $a = \frac{1}{4}$,
czyli $f(x) = \frac{1}{4}(x-3)^2 - 1$.
 $\frac{1}{4}(x-3)^2 - 1 \leq -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$
 $\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4} \leq -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$
 $x^2 \leq 0$, więc jedyną liczbą
spełniającą nierówność jest
liczba wymierna $x = 0$.

Zadanie 13 (0-2)Rozwiąż równanie $3x(x+3) = (x+3)^2$.**Zadanie 14 (0-2)**Rozwiąż nierówność $2x^2 + 7x \geq 4$.**Zadanie 15 (0-2)**Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = (\sqrt{3}-1)x^2 + 3x + \sqrt{3} + 1$.**Zadanie 16 (0-2)**Rozwiąż nierówność $(x+1)(2x+3) \leq (x+1)(5-x)$.**Zadanie 17 (0-2)**Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = -6x + x^2$.**Zadanie 18 (0-2)**Oblicz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = 2(x+3)(x-5)$.**Zadanie 19 (0-2)**Zapisz w postaci iloczynowej trójmian kwadratowy $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$.**Zadanie 20 (0-4)**Wykres funkcji g otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ o trzy jednostki w lewo. Naszkicuj wykres funkcji g i odczytaj z niego najmniejszą i największą wartość tej funkcji w przedziale $[-5; 1]$.**Zadanie 21 (0-4)**

Podaj wszystkie liczby całkowite spełniające jednocześnie obie nierówności:

$$x^2 + 4x \leq 0 \text{ i } x^2 - 4 > 0$$

D Zadanie 22 (0-4) → Przykład 1, str. 349Na rysunku obok przedstawiono fragment paraboli będącej wykresem funkcji f . Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $(3, -1)$. Wyznacz wzór funkcji f i uzasadnij, że żadna liczba niewymierna nie spełnia nierówności $f(x) \leq -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$.**D Zadanie 23 (0-4) → Przykład 2, str. 349**Jedna z przekątnych rombu ma długość x , a suma długości obu przekątnych jest równa $10\frac{1}{2}$. Wyznacz wzór funkcji opisującej pole tego rombu w zależności od x . Podaj jej dziedzinę. Uzasadnij, że dla dowolnego całkowitego argumentu x funkcja ta przyjmuje wartość mniejszą od $\frac{441}{32}$.

23. Przekątne rombu mają długości: x i $10\frac{1}{2} - x$.

Stąd pole rombu jest opisane wzorem $P(x) = \frac{1}{2}x(10\frac{1}{2} - x)$.Wyznaczamy dziedzinę funkcji: $x > 0$ oraz $10\frac{1}{2} - x > 0$, czyli $D = (0; 10\frac{1}{2})$.Ramiona paraboli $P(x)$ skierowane są ku dołowi, czyli wartość największą osiągnięta jest w wierzchołku.

$$x_w = \frac{0+10\frac{1}{2}}{2} = 5\frac{1}{4}$$

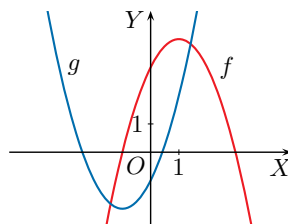
$$P(5\frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{21}{4} (10\frac{1}{2} - 5\frac{1}{4}) = \frac{21}{8} \cdot \frac{21}{4} = \frac{441}{32}$$

Wartość największa $\frac{441}{32}$ przyjmowana jest tylko dla x_w . Zatem dla dowolnej całkowitej wartości x należącej do dziedziny funkcja ta przyjmuje wartość mniejszą od $\frac{441}{32}$.

**Zadanie 1 (0-2)**

Wyznacz najmniejszy pierwiastek równania:

$$(x^2 - 11x - 26)(2x^2 + 7x + 4) = 0$$

Zadanie 2 (0-2)Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych spełniających jednocześnie obie nierówności $x^2 - 14x - 32 > 0$ i $x^2 - 23x \leq 0$.**Zadanie 3**Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie paraboli $y = x^2 - 8x - 11$ o wektor $[p, q]$.**Zadanie 3.1 (0-2)**Wyznacz liczbę q , dla której zbiorem wartości funkcji f jest przedział $[-7; \infty)$.**Zadanie 3.2 (0-2)**Wyznacz miejsca zerowe funkcji f dla $p = 3\sqrt{3}$ i $q = 0$.**Zadanie 4 (0-2)**Liczba -5 jest jednym z miejsc zerowych funkcji f , której wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie $(-3, 1)$. Po przesunięciu wykresu funkcji f o wektor $[0, p]$ otrzymujemy wykres funkcji g , dla której jednym z miejsc zerowych jest liczba 4. Wyznacz liczbę p .**Zadanie 5 (0-4)**Funkcje $f(x) = 2x^2 - 11x + 15$ i $g(x) = x^2 + bx + c$ mają te same miejsca zerowe. Oblicz wartości współczynników b i c .**Zadanie 6 (0-4)**Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$. Podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \geq 3$.**Zadanie 7 (0-4)**Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ i $g(x) = ax^2 + bx - 1$. Parabola będąca wykresem funkcji g ma wierzchołek w punkcie $(-1, -2)$. Podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \cdot g(x) < 0$.**Zadanie 8 (0-4)**Dane są funkcje $f(x) = -x^2 + 4|x| + 1$ i $g(x) = x + 1$. Rozwiąż graficznie nierówność $f(x) \leq g(x)$.

7. $g(x) = ax^2 + bx - 1 = a(x+1)^2 - 2$, stąd $a = 1$ oraz $b = 2$, czyli $g(x) = x^2 + 2x - 1$.
Miejsca zerowe funkcji $f(x)$: $-1, 3$.
Miejsca zerowe funkcji $g(x)$: $-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}$.

Iloczyn dwóch wartości jest ujemny, jeżeli jedna z nich jest ujemna, a druga dodatnia. Zatem na podstawie rysunku:
 $f(x) \cdot g(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -1 - \sqrt{2}) \cup (-1; -1 + \sqrt{2}) \cup (3; \infty)$.

8. $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x + 1 & \text{dla } x < 0 \\ -x^2 + 4x + 1 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$
 $f(x) \leq g(x)$ dla
 $x \in (-\infty; -5] \cup \{0\} \cup [3; \infty)$

Odpowiedzi do zadań

1. Pierwiastki równania:

$$\frac{-7 - \sqrt{17}}{4}, -2, \frac{-7 + \sqrt{17}}{4}, 13$$

Najmniejszy pierwiastek:
 $\frac{-7 - \sqrt{17}}{4}$

2. $x^2 - 14x - 32 > 0$

$$\text{dla } x \in (-\infty; -2) \cup (16; \infty)$$

$$x^2 - 23x \leq 0 \text{ dla } x \in [0; 23]$$

$$\text{Stąd } x \in (16; 23]$$

$$S = 17 + 18 + 19 + \dots + 23 = 140$$

- 3.1. $q = 20$

- 3.2. $x = 4, x = 4 + 6\sqrt{3}$

4. $f(x) = -\frac{1}{4}(x+3)^2 + 1$

$$g(x) = -\frac{1}{4}(x+3)^2 + 1 + p$$

$$0 = -\frac{1}{4}(4+3)^2 + 1 + p$$

$$p = \frac{45}{4}$$

5. Miejsca zerowe funkcji f :
 $\frac{5}{2}$ i 3 .

$$g(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)(x - 3) = x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{15}{2}$$

$$b = -\frac{11}{2} = -5\frac{1}{2}, c = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$$

6. Dla $x^2 - 2x - 3 < 0$,

$$\text{czyli dla } x \in (-1; 3)$$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3.$$

$$\text{Dla } x^2 - 2x - 3 \geq 0, \text{ czyli dla } x \in (-\infty; -1] \cup [3; \infty)$$

$$f(x) = x^2 - 2x - 3.$$

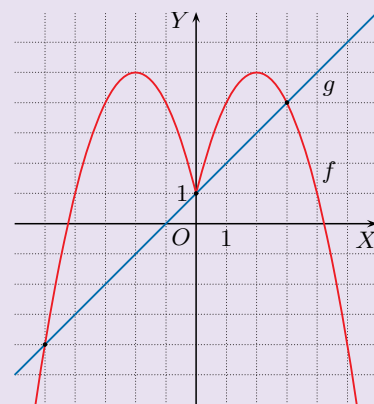
$$-x^2 + 2x + 3 \geq 3 \text{ dla } x \in [0; 2]$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 3 \text{ dla}$$

$$x \in (-\infty; 1 - \sqrt{7}] \cup [1 + \sqrt{7}; \infty)$$

$$\text{Zatem } f(x) \geq 3 \text{ dla}$$

$$x \in (-\infty; 1 - \sqrt{7}] \cup [0; 2] \cup [1 + \sqrt{7}; \infty)$$



Indeks

- algorytm Euklidesa 14
- alternatywa zdań 111
- Archimedes 209
- argumenty funkcji 165

- barycentrum trójkąta 278
- Briggs Henry 46

- Cantor Georg 79
- cechy
 - podobieństwa trójkątów 291, 292
 - podzielności liczb 10
 - przystawiania trójkątów 279, 280
- cena
 - brutto 56
 - netto 56

- ćwiartki układu współrzędnych 169

- Descartes René (Kartezjusz) 71, 169
- diagramy Venna 69
- Dirichlet Peter G.L. 179
- długość
 - okresu 24
 - przedziału 74
- dopełnienie zbioru 68
- dowód
 - niewymierności liczby $\sqrt{2}$ 21
 - przez sprowadzenie do sprzeczności 21
 - twierdzenia
 - o dwusiecznej kąta w trójkącie 302
 - o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta 275
 - Talesa 286
- dwusieczna kąta 276, 278
- działania na potęgach 36, 43
- dziedzina funkcji 165, 185
- dzielnik 11, 17

- element zbioru 64
- Euklides 12, 14, 286
- Euler Leonhard 38, 179

- Fermat Pierre de 38
- figury podobne 287
- figury przystające 279
- fraktale 301
- funkcja 164, 165
 - kwadratowa 315
 - liczbowa 170
 - liniowa 223
 - malejąca 180, 229
 - monotoniczna 182
 - niemalejąca 181
 - nierosnąca 181
 - przedziałami monotoniczna 182
 - rosnąca 180, 229
 - stała 181, 229

- Gauss Carl Friedrich 38
- googol 41

- iloczyn
 - kartezjański zbiorów 71
 - zbiorów 66
- implikacja zdań 112

- kartezjański układ współrzędnych 169
- Kartezjusz (René Descartes) 71, 169
- Kasner Edward 41
- kąt 274
 - wklęsły 274
 - wypukły 274
- kąty
 - naprzemianległe 274
 - odpowiadające 274
 - przyległe 274
 - wierzchołkowe 274
- kierownica paraboli 331
- Koch Helge von 301
- koniunkcja zdań 111
- konstrukcja
 - dwusiecznej kąta 304
 - prostej prostopadłej 305
 - prostej równoległej 305
 - symetralnej odcinka 304
- krawędź półpłaszczyzny 252
- krzywa Kocha 301
- kwadrat różnicy 94
- kwadrat sumy 94

liczba
 logarytmowana 45
 π 26
 liczby
 całkowite 17, 22
 Fermata 38
 kwadratowe 98
 Mersenne'a 15
 naturalne 11, 22
 nieparzyste 11
 niewymierne 20, 22
 parzyste 11
 pierwsze 12, 15
 pięciokątne 98
 rzeczywiste 22
 trójkątne 98
 wielokątne 98
 wymierne 17, 22
 względnie pierwsze 17
 złożone 12
 logarytm 45
 dziesiętny 45
 iloczynu 46
 ilorazu 46
 potęgi 46
 logika matematyczna 110
 macierz 152
 metoda
 eliminacji Gaussa 152
 podstawiania 128, 137
 przeciwnych współczynników 134, 137
 wyznacznikowa 150
 miejsce zerowe funkcji 167
 liniowej 228
 mnożenie sumy algebraicznej
 przez jednomian 85
 najmniejsza wspólna wielokrotność 13
 największy wspólny dzielnik 13
 Napier John 46
 następnik implikacji 112
 nazwy wielkich liczb 41
 negacja zdania 110
 nierówność
 nieostre 81
 ostre 81
 równoważne 81, 82
 nierówność 81
 sprzeczna 83
 tożsamościowa 83
 trójkąta 281
 notacja wykładnicza 39
 obraz figury 199
 odbicie symetryczne wykresu funkcji 202, 204
 ognisko paraboli 331
 okres 24
 długość 24
 ortocentrum trójkąta 278
 oś
 liczbowa 72
 odciętych 169
 rzędnych 169
 symetrii paraboli 320, 340
 para uporządkowana 71
 parabola 315, 316, 331, 337
 pęk prostych 226
 pierwiastek
 iloczynu 29, 32
 ilorazu 29, 32
 kwadratowy (drugiego stopnia) 28, 33
 n -tego stopnia 33
 podwójny równania kwadratowego 334
 sześcienny (trzeciego stopnia) 31, 32
 pierwiastki równania kwadratowego 328, 334
 płaszczyzna w trójwymiarowym układzie współrzędnych 237
 podstawa
 logarytmu 45
 potęgi 35
 podzbiór zbioru 64
 podzielność liczb 11
 pole
 prostokąta 296
 rombu 296
 równoległoboku 296
 trapezu 296
 trójkąta 251
 poprzednik implikacji 112
 postać
 dziesiętna liczby 24
 iloczynowa funkcji kwadratowej 338, 339

- postać
 - kanoniczna funkcji kwadratowej 323
 - ogólna funkcji kwadratowej 323
 - parametryczna równania prostej 262, 263
- potęga o wykładniku
 - naturalnym 35
 - całkowitym ujemnym 36
 - wymiernym 42
- półpłaszczyzna 252
 - domknięta 252
 - otwarta 252
- prawa
 - De Morgana 68, 113
 - rachunku zdań 113
- procent 48
- programowanie liniowe 255
- promil 49
- proporcjonalność
 - odwrotna 209
 - prosta 230
- proste
 - prostopadłe 244, 247
 - równoległe 224, 236
- prostokątny układ współrzędnych 169
- przeciwdziedzina 165
- przedział
 - domknięty 74
 - lewostronnie domknięty 74
 - lewostronnie otwarty 74
 - obustronnie domknięty 73
 - otwarty 73, 74
 - prawostronnie domknięty 74
 - prawostronnie otwarty 74
- przekątna pięciokąta foremnego 21
- przestrzeń 66
- przesunięcie wykresu funkcji 193, 195, 200
- przybliżenie 25
 - z nadmiarem 26
 - z niedomiarem 26
- punkt
 - procentowy 51
 - zaczepienia wektora 197
- punkty kratowe 71, 169, 222
- ramiona kąta 274
- reguła zaokrąglania 25
- rozkład
 - liczby na czynniki pierwsze 13
 - na czynniki liniowe funkcji kwadratowej 338
- rozwiązania równania kwadratowego 328
- rozwiązanie układu równań 126
- rozwiniecie dziesiętne liczby 24
- równanie
 - kierunkowe prostej 233
 - odcinkowe prostej 236
 - ogólne prostej 234
 - sprzeczne 80
 - tożsamościowe 80
 - z dwiema niewiadomymi 125
- równoważne układy równań 129
- równoważność zdań 112
- różnica
 - kwadratów 95
 - zbiorów 68
- Sierpiński Wacław 301
- sito Eratostenesa 15
- skala
 - mapy 232
 - podobieństwa 288
- spirala Teodorosa 30
- sposoby przedstawiania funkcji 171
- stężenie procentowe 145
- stosunek pól figur podobnych 298
- suma zbiorów 67
- symetralna odcinka 278
- symetryczne odbicie wykresu funkcji 202, 204
- śnieżyńska Kocha 301
- środek
 - ciężkości trójkąta 278
 - pęku prostych 226
- środkowa trójkąta 278
- tabela wartości funkcji 175
- triangulacja 277
- trójkąt 275
 - ostrokątny 275
 - prostokątny 275
 - rozwartokątny 275

trójkąt Sierpińskiego 301
 trójmian kwadratowy 315, 323
 twierdzenie
 odwrotne do twierdzenia Talesa 284
 o dwusiecznej kąta w trójkącie 302
 Picka 71
 Pitagorasa 20
 Talesa 283
 wielkie Fermata 38
 układ
 dwóch równań z dwiema
 niewiadomymi 126
 równań nieoznaczony 132, 248
 równań oznaczony 132, 248
 równań liniowych 132
 równań sprzeczny 132, 248
 trzech równań z trzema
 niewiadomymi 140
 ułamek
 dziesiętny 24
 egipski 19
 nieskracalny 17, 27
 Venn John 69
 wartość
 bezwzględna liczby 103, 107, 108
 interpretacja geometryczna 103, 107
 funkcji 165
 Weierstrass Karl 103
 wektor 197
 przeciwny 197
 swobodny 198
 zaczepiony 198
 wielkości
 odwrotnie proporcjonalne 209
 wprost proporcjonalne 230
 wielkie twierdzenie Fermata 38
 wielokąty
 podobne 287
 przystające 279
 wielokrotność 11
 wierzchołek
 kąta 274
 paraboli 320, 337
 współczynnik
 kierunkowy prostej 224, 238
 interpretacja 239, 240
 proporcjonalności 209, 230
 współrzędna punktu 72
 współrzędne
 punktu 169
 wektora 197, 198
 wierzchołka paraboli 320, 324, 325
 wykładnik potęgi 35
 wykres funkcji 170
 liniowej 223
 wyrazy podobne 85
 wyróżnik trójmianu kwadratowego 324
 wysokość trójkąta 278
 wzory Cramera 150
 wzór funkcji 171
 zaokrąglenie 26
 zbiory
 rozłączne 67
 równe 64
 zbiór
 Cantora 79
 liczb całkowitych 17, 22
 liczb naturalnych 11, 22
 liczb niewymiernych 22
 liczb rzeczywistych 22
 liczb wymiernych 17, 22
 nieskończony 64
 pusty 64
 skończony 64
 wartości funkcji 185, 186
 złota liczba 27, 63, 101, 290
 złoty stosunek 63
 zwierciadło paraboliczne 332

Wzory skróconego mnożenia

Dla $a, b \in \mathbb{R}$:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Wartość bezwzględna

Dla $a \in \mathbb{R}$:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{jeśli } a \geq 0 \\ -a & \text{jeśli } a < 0 \end{cases}$$

$$|-a| = |a|$$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$ i $b \neq 0$:

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

Pierwiastek kwadratowy

Dla $a \geq 0$:

$$\sqrt{a} = b, \text{ gdy } b^2 = a \text{ i } b \geq 0$$

Dla $a \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

Dla $a, b \geq 0$:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Dla $a \geq 0$ i $b > 0$:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Pierwiastek n -tego stopnia

Dla $a \geq 0$ i parzystego n :

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b \geq 0 \text{ i } b^n = a$$

Dla $a \in \mathbb{R}$ i nieparzystego n :

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b^n = a$$

Potęgi i pierwiastki

Dla $a > 0, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+$:

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Dla $a, b > 0, x, y \in \mathbb{Q}$:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

Logarytmy

Dla $a, b > 0, a \neq 1$:

$$\log_a b = x, \text{ gdy } a^x = b$$

Dla $a, b, c > 0, a \neq 1, p \in \mathbb{R}$:

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^p = p \log_a b$$

Równanie prostej

$$\bullet \text{ Równanie kierunkowe: } y = ax + b$$

$$\bullet \text{ Równanie ogólne: } Ax + By + C = 0, \text{ gdzie } A \neq 0 \text{ lub } B \neq 0$$

$$\bullet \text{ Równanie prostej o współczynniku kierunkowym } a \text{ przechodzącej przez punkt } (x_1, y_1): y - y_1 = a(x - x_1)$$

Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są:

$$\bullet \text{ równoległe, gdy } a_1 = a_2,$$

$$\bullet \text{ prostopadłe, gdy } a_1 \cdot a_2 = -1.$$

Współczynnik kierunkowy prostej:

$$y = ax + b$$

przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , gdzie $x_1 \neq x_2$:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Równanie kwadratowe

- Wyróżnik równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Pierwiastki równania kwadratowego:

- Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma dwa pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma jeden pierwiastek (podwójny):

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

- Jeśli $\Delta < 0$, to równanie nie ma pierwiastków.

Wzór funkcji kwadratowej

- Postać ogólna:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

Współrzędne wierzchołka paraboli:

$$(p, q) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

- Postać kanonicza:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q, \quad a \neq 0$$

- Postać iloczynowa:

– jeśli $\Delta > 0$, to:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2), \quad a \neq 0,$$

gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami,

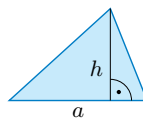
– jeśli $\Delta = 0$, to $f(x) = a(x - x_0)^2$,
gdzie x_0 jest pierwiastkiem,

– jeśli $\Delta < 0$, to funkcja nie ma postaci iloczynowej.

Pola trójkątów i czworokątów

- Trójkąt

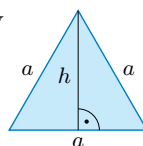
$$P = \frac{1}{2}ah$$



- Trójkąt równoboczny

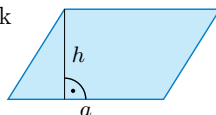
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$



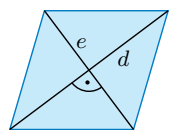
- Równoległobok

$$P = ah$$



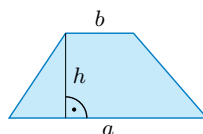
- Romb

$$P = \frac{1}{2}de$$



- Trapez

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

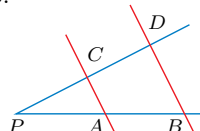


Twierdzenie Talesa

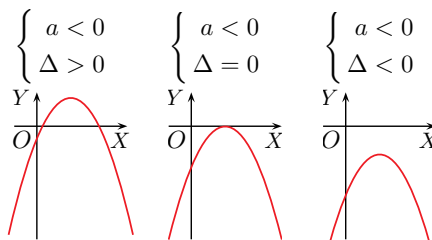
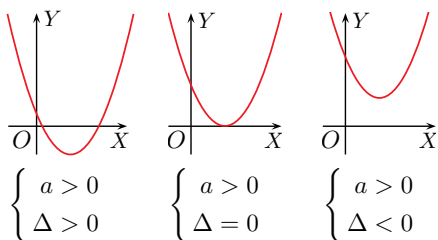
Jeśli $AC \parallel BD$, to:

$$\frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|AB|}$$

$$\frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|PD|}{|PB|}$$



Położenie paraboli względem osi OX



Notatki

Notatki

Notatki

Notatki

Notatki

Notatki

Notatki

Portal dla nauczyciela

Źródło wartościowych i rzetelnie opracowanych pomocy dydaktycznych, ułatwiających przygotowanie i prowadzenie lekcji. Materiały są czytelnie podzielone na kategorie, co pozwala zaoszczędzić czas potrzebny na przygotowanie zajęć.



ponad
200 000
użytkowników



- gotowe zadania i testy
- aplikacja Ondorio do automatycznego sprawdzania testów i kartkówek

Multibook **NOWOŚĆ!**

- podręcznik multimedialny dla nauczyciela
- atrakcyjne materiały cyfrowe do wyświetlania na lekcji

e-booki

- elektroniczna wersja podręcznika ucznia

Dokumentacja nauczyciela

- programy nauczania
- rozkłady materiału
- plany wynikowe
- podręczniki nauczyciela

Sprawdzanie wiedzy

- kartkówki
- klasówki
- sprawdziany



**MOJA
NOWA ERA**

- jedno konto do wszystkich portali Nowej Ery
- łatwa aktualizacja danych w profilu użytkownika z automatycznie modyfikowanym dostępem do zasobów
- szybki dostęp do zasobów szkolnych
- personalizowany panel wiadomości

Pamiętaj o corocznej aktualizacji danych!

moja.nowaera.pl

Generator

testów i sprawdzianów

Przygotuj
sprawdzian
w kilka minut

Wygodna i prosta aplikacja do tworzenia materiałów sprawdzających wiedzę. Zawiera setki zadań, w tym typu maturalnego.

Nowość – filtr pozwalający wyszukać zadania, które **od września 2024 r.** wykraczają poza wymagania uszczuplonej podstawy programowej.



1. Wejdź na stronę generator.dlanauczyciela.pl i zaloguj się przez konto Moja Nowa Era. Jeśli jeszcze nie masz konta – załóż je.



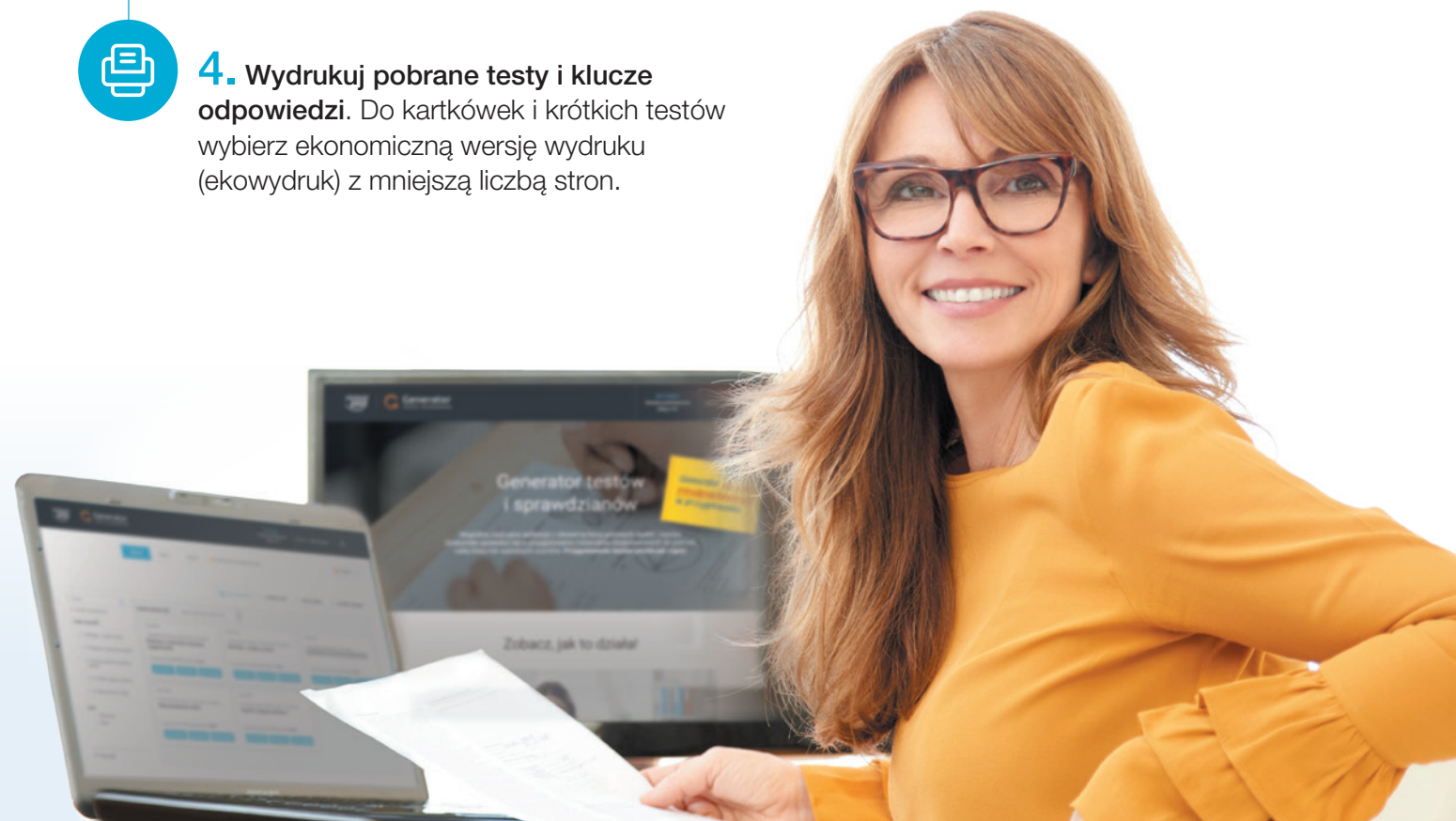
2. Pobierz gotową kartkówkę do lekcji, klasówkę do działu, sprawdzian semestralny lub roczny dla 4 grup. Edytuj materiały testujące, aby je dostosować do potrzeb swoich i uczniów.



3. Samodzielnie twórz materiały testujące. Skorzystaj z gotowych zadań lub dodaj własne. Wszystkie gotowe zadania zostały przygotowane w 4 równoważnych wersjach. Możesz utworzyć nawet 8 grup testów. Wszystkie zadania zawierają odpowiedź, punktację i orientacyjny czas potrzebny uczniom na rozwiązanie.



4. Wydrukuj pobrane testy i klucze odpowiedzi. Do kartkówek i krótkich testów wybierz ekonomiczną wersję wydruku (ekowydruk) z mniejszą liczbą stron.

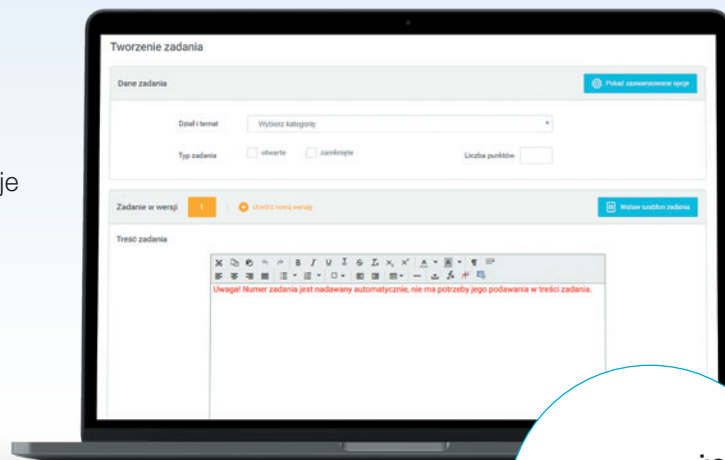


Jak w prosty sposób dodać własne zadanie lub utworzyć własny test?



Dodaj zadanie do Bazy zadań

- **Wybierz typ zadania i wpisz jego treść.** Możesz korzystać z edytora równań, wstawić ilustrację i od razu utworzyć wersje dla kolejnych grup.
- **Wybierz dział lub temat,** którego będzie dotyczyło zadanie.
- **Określ liczbę punktów oraz czas** potrzebny uczniom na rozwiązanie. Następnie zapisz zadanie.

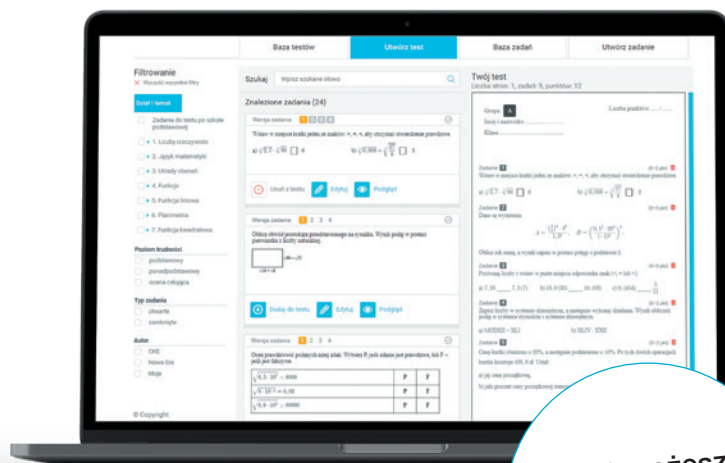


Zadanie możesz przygotować w 8 wersjach.



Dodaj test do Bazy testów

- **Wybieraj zadania** i dodawaj je do testu. Tak utworzysz grupę A.
- **Zmieniaj kolejność** zadań w teście. Jeśli potrzeba, dodaj miejsce na odpowiedź.
- **Przejdź do tworzenia grup** – możesz utworzyć ich nawet 8. Klucz odpowiedzi wygeneruje się automatycznie.



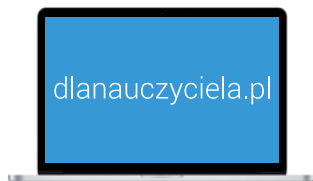
Test możesz przygotować dla 8 grup.



Zapisz zadanie lub test

Do utworzonych i zapisanych w bazie zadań i testów masz zawsze dostęp po zalogowaniu się na stronie generator.dlanauczyciela.pl.

Dla nauczyciela



**Wartościowe pomoce
dydaktyczne, m.in.:**

- dokumentacja nauczyciela,
- kartkówki, klasówki, sprawdziany,
- Multibook,
- podręcznik nauczyciela.

🖱️ dlanauczyciela.pl



NOWOŚĆ

**Multibook – doskonała
pomoc w prowadzeniu
lekcji**

Elektroniczna wersja podręcznika uczniowskiego wzbogacona o zasoby cyfrowe. Kreatory wykresów, animacje, plansze interaktywne ułatwiają wprowadzanie nowych pojęć i zagadnień.

🖱️ dlanauczyciela.pl



**Generator testów
i sprawdzianów –
wygodna aplikacja do
tworzenia materiałów
sprawdzających wiedzę**

- Zawiera ponad 900 zadań skorelowanych z podręcznikiem, każde w 4 wersjach.
- Umożliwia tworzenie własnych testów, sprawdzianów i kartkówek.
- Pozwala edytować istniejące zadania i dodawać własne.

🖱️ generator.dlanauczyciela.pl



**Program diagnoza
PRZED MATURĄ**

W formie próbnego egzaminu pomaga sprawdzić poziom opanowania przez uczniów wiadomości i umiejętności określonych w podstawie programowej.

🖱️ matura-diagnoza.nowaera.pl

Dla ucznia



Maturalne karty pracy ze zbiorem zadań

Nowość na rynku wydawnictw matematycznych. Publikacja umożliwia zarówno ćwiczenie świeżo zdobytych umiejętności, jak i ich utrwalanie z myślą o przygotowaniach do matury z matematyki.

🖱️ sklep.nowaera.pl