

NOWA
MATeMATyka

Podręcznik Nauczyciela

2

LICEUM • TECHNIKUM • ZAKRES PODSTAWOWY

NOWA MATEMATyka

Podręcznik Nauczyciela 2 został przygotowany do podręcznika autorstwa Wojciecha Babiańskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej, Grzegorza Janochy, Doroty Ponczek, *NOWA MATEMATyka 2* dopuszczonego do użytku szkolnego i wpisanego do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w szkołach ponadpodstawowych w zakresie podstawowym (971/2/2025/z1).

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl

Wykorzystywanie treści niniejszego Utworu, w jakiegokolwiek formie lub w jakimkolwiek procesie, do celów eksploracji tekstu i danych, uczenia maszynowego, rozwoju i/lub szkolenia i/lub wzbogacania sztucznej inteligencji jakiegokolwiek rodzaju jest surowo zabronione.



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2025

ISBN 978-83-267-5309-1

W publikacji zamieszczono strony z podręcznika *NOWA MATEMATyka* dla klasy 2 szkoły ponadpodstawowej w zakresie podstawowym.

© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2025

Autor komentarzy i rozwiązań zadań: Barbara Jedynak, Jacek Klisowski.

Redakcja merytoryczna: Anna Drążek, Beata Zając.

Redakcja językowa: Paulina Szulim.

Opieka graficzna: Maciej Galiński, Marcin Oleksak.

Projekt graficzny: Ewa Kaletyn.

Projekt okładki: Maciej Galiński.

Rysunki merytoryczne: Lech Chańko.

Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko.

Zdjęcie na okładce: Getty Images/Moment/Andriy Onufriyenko.

Zdjęcia: BE&W: Alamy Stock Photo/FirePhoto s. 125, Forum: Gonzales Photo/Inaki Esnaola s. 9, Getty Images:

Connect Images s. 59, iStock/Getty Images Plus/Davel5957 s. 39 (Gateway Arch), Moment/shunli zhao s. 39 (łańcuch), Moment/Roberto Molola/Sysaworld s. 87, Shutterstock: Daniel Prudek s. 108, Direk Yiamsaensuk s. 145, iD1974 s. 199, Lech Chańko s. 53, M.C. Escher's "Symmetry Drawing E25" © 2025 The M.C. Escher Company-The Netherlands. All rights reserved. www.mcescher.com s. 173.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w publikacji.

Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Druk i oprawa: Drukarnia Orthdruk

NOWA MATEMATYKA

2 PODRĘCZNIK • LICEUM • TECHNIKUM
ZAKRES PODSTAWOWY

WOJCIECH BABIAŃSKI
LECH CHAŃKO
JOANNA CZARNOWSKA
GRZEGORZ JANOCHA
DOROTA PONCZEK

**nowa
era** *Twoje mocne strony*

NOWA MATeMATyka

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w zakresie podstawowym, na podstawie opinii rzeczoznawców:

dr. hab. Gustawa Trelińskiego, dr. Jacka Stańdo, mgr Teresy Kosyry-Cieślak.

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa

Rok dopuszczenia: 2025

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 971/2/2025/z1

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum (2024)* autorstwa Agnieszki Kamińskiej i Doroty Ponczek.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujemy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl

Wykorzystywanie treści niniejszego Utworu, w jakiegokolwiek formie lub w jakimkolwiek procesie, do celów eksploracji tekstu i danych, uczenia maszynowego, rozwoju i/lub szkolenia i/lub wzbogacania sztucznej inteligencji jakiegokolwiek rodzaju jest surowo zabronione.



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2025
ISBN 978-83-267-5278-0

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Elżbieta Bagińska-Stawiarz, Urszula Cielniak, Ewa Kowalik, Katarzyna Radziwińska, Renata Sawicka, Agnieszka Trzpił-Gajek, Beata Zajac

Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak

Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski, Barbara Sasim-Leciejewska

Redakcja językowa: Paulina Szulim

Opieka graficzna: Maciej Galiński, Marcin Oleksak

Projekt graficzny: Marek Błoszko, Ewa Kaletyn, Piotr Stopczyński

Projekt okładki: Maciej Galiński

Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska

Rysunki merytoryczne: Lech Chańko

Opracowanie graficzne infografik: Lech Chańko, Enzo di Giacomo, Ewa Sowulewska, Aleksandra Szpunar, Alicja Skupin-Podwojewska

Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Druk i oprawa: Quad/Graphics Europe Sp. z o.o.

Spis treści

► 1. Funkcja kwadratowa

1.1. Wykres funkcji $f(x) = ax^2$	10
Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi układu współrzędnych – przypomnij sobie	13
1.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ wzdłuż osi OY i osi OX	14
Wzory skróconego mnożenia – przypomnij sobie	17
1.3. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej (1)	18
Obliczanie wartości trójmianu kwadratowego – przypomnij sobie	22
1.4. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej (2)	23
1.5. Równania kwadratowe (1)	26
1.6. Równania kwadratowe (2)	29
1.7. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej (1)	33
1.8. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej (2)	36
1.9. Nierówności kwadratowe	40
1.10. Funkcja kwadratowa – zastosowania (1)	44
1.11. Funkcja kwadratowa – zastosowania (2)	47
Powtórzenie	51
Sposób na zadanie	54
Przed obowiązkową maturą z matematyki	55

► 2. Wielomiany

2.1. Stopień i współczynniki wielomianu	60
2.2. Dodawanie i odejmowanie wielomianów	63
2.3. Mnożenie wielomianów	67
2.4. Równania wielomianowe (1)	70
Rozkład trójmianu kwadratowego na czynniki – przypomnij sobie	73
2.5. Równania wielomianowe (2)	74
2.6. Wielomiany – zastosowania	77
Powtórzenie	79
Sposób na zadanie	82
Przed obowiązkową maturą z matematyki	83

► 3. Funkcje wymierne

Proporcjonalność odwrotna – przypomnij sobie	88
3.1. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$	89
3.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ wzdłuż osi OY i osi OX	92

3.3. Wyrażenia wymierne i funkcje wymierne	97
Działania na liczbach wymiernych – przypomnij sobie	100
3.4. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych	101
3.5. Równania wymierne	104
3.6. Równania z wartością bezwzględną	109
3.7. Wyrażenia wymierne – zastosowania (1)	112
3.8. Wyrażenia wymierne – zastosowania (2)	115
Powtórzenie	117
Sposób na zadanie	120
Przed obowiązkową maturą z matematyki	121
► 4. Trygonometria	
4.1. Trójkąty prostokątne	126
4.2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego	131
4.3. Trygonometria – zastosowania	134
4.4. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych	138
4.5. Związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego	141
4.6. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego (1)	146
4.7. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego (2)	150
Pole trójkąta prostokątnego – przypomnij sobie	153
4.8. Pole trójkąta	154
Czworokąty wypukłe – przypomnij sobie	158
4.9. Pola czworokątów (1)	159
4.10. Pola czworokątów (2)	162
Powtórzenie	165
Sposób na zadanie	168
Przed obowiązkową maturą z matematyki	169
► 5. Planimetria	
5.1. Okrąg	174
5.2. Koło	177
5.3. Wzajemne położenie okręgu i prostej	180
5.4. Kąty w okręgu (1)	184
5.5. Kąty w okręgu (2)	188
5.6. Okrąg opisany na trójkącie	191
5.7. Okrąg wpisany w trójkąt	195
5.8. Wielokąty foremne	200
Wykorzystanie funkcji trygonometrycznych – przypomnij sobie	203
5.9. Twierdzenie cosinusów (1)	204

5.10. Twierdzenie cosinusów (2)	207
Powtórzenie	210
Sposób na zadanie	213
Przed obowiązkową maturą z matematyki	214
Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań	218
Indeks	249
Tablice wartości funkcji trygonometrycznych	251
Wybrane wzory i twierdzenia matematyczne	252

Odpowiedzi do poleceń i rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

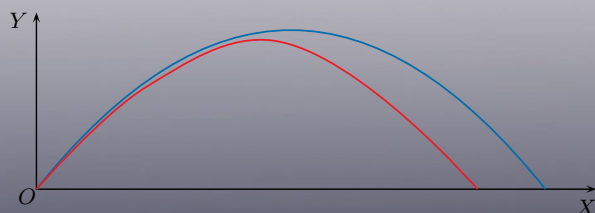
-  Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.
-  Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu warto skorzystać z kalkulatora, oraz tematów ze wszystkimi takimi zadaniami.

Sekcja *Przypomnij sobie* zawiera nieobowiązkowe powtórzenie przydatnych wiadomości przed wybranymi lekcjami.

-  Oznaczenie zadań, do których są przygotowane rozwiązania w postaci filmu. Zadania te umieszczono również w *Kartach pracy ucznia* wraz z kodami QR, które prowadzą do rozwiązań prezentowanych przez youtubera z kanału Matma z pasją. W *Kartach pracy ucznia* obok zadań cytowanych z podręcznika znajdują się też zadania bliźniacze do samodzielnego rozwiązania.

1 Funkcja kwadratowa

Jeśli pominie się opór powietrza, można przyjąć, że tor lotu piłki rzuconej pod kątem ostrym do poziomu lub pocisku wystrzelonego pod takim kątem jest fragmentem paraboli (kolor niebieski na rysunku). Jednak opór powietrza sprawia, że tor ten ma kształt **krzywej balistycznej** (kolor czerwony na rysunku).



Uczeń:

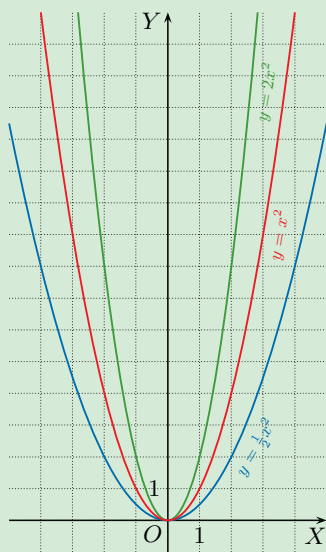
- szkicuje wykres funkcji $f(x) = ax^2$,
- podaje własności funkcji $f(x) = ax^2$,
- stosuje własności funkcji $f(x) = ax^2$ do rozwiązywania zadań.

Ćwiczenie 1

np. $(-3, 9)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

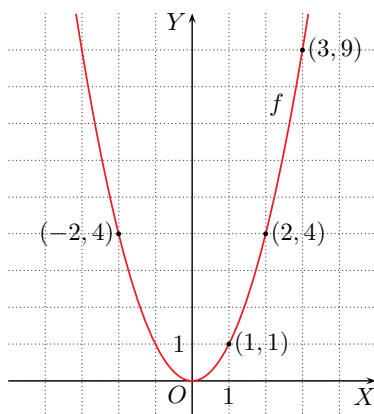
Ćwiczenie 2

x	-2	-1	0	1	2
$f_1(x)$	4	1	0	1	4
$f_2(x)$	8	2	0	2	8
$f_3(x)$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2



1.1. Wykres funkcji $f(x) = ax^2$

Na poniższym rysunku przedstawiono **parabolę**, która jest wykresem funkcji $f(x) = x^2$. Jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, a zbiorem wartości – przedział $[0; \infty)$. Z wykresu możemy odczytać następujące własności:



- **ramiona** paraboli są skierowane do góry,
- oś OY jest **osią symetrii** paraboli,
- punkt $(0, 0)$ jest **wierzchołkiem** paraboli,
- funkcja f jest **malejąca** w przedziale $(-\infty; 0]$ oraz **rosnąca** w przedziale $[0; \infty)$,
- dla $x = 0$ funkcja f przyjmuje **wartość najmniejszą** równą zero, natomiast dla każdego $x \neq 0$ prawdziwa jest nierówność $f(x) > 0$,
- funkcja f nie przyjmuje **wartości największej**.

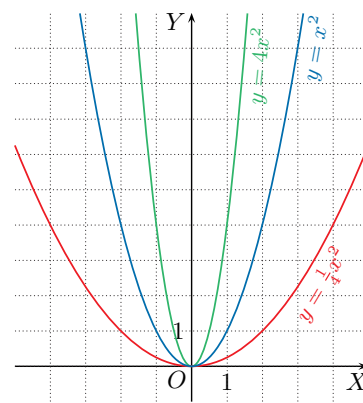
Ćwiczenie 1

Na powyższym rysunku podano współrzędne czterech punktów należących do wykresu funkcji $f(x) = x^2$. Podaj współrzędne czterech innych punktów należących do tego wykresu.

Ćwiczenie 2

Sporządź tabele wartości funkcji $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 2x^2$ i $f_3(x) = \frac{1}{2}x^2$ oraz w jednym układzie współrzędnych naszkicuj ich wykresy, łącząc punkty wykresu odpowiednią krzywą (patrz wyżej).

Parabole $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = x^2$, $y = 4x^2$ zostały dla porównania naszkicowane w jednym układzie współrzędnych. Zwróć uwagę na zależność między współczynnikiem a w równaniu paraboli $y = ax^2$ i rozchyleniem ramion tej paraboli.



Ćwiczenie 3

Czy punkt P należy do paraboli $y = 4x^2$?

- a) $P(-\frac{1}{4}, 1)$ c) $P(\frac{1}{2}, 1)$
b) $P(4, 32)$ d) $P(-2, 16)$

Ćwiczenie 3

- a) $4 \cdot (-\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{4} \neq 1$ – nie należy
b) $4 \cdot 4^2 = 64 \neq 32$ – nie należy
c) $4 \cdot (\frac{1}{2})^2 = 1$ – należy
d) $4 \cdot (-2)^2 = 16$ – należy

Komentarz

Warto zwrócić uwagę uczniów na to, że gdy funkcja ma nieskończoną dziedzinę, nie jesteśmy w stanie narysować całego wykresu funkcji – rysujemy tylko jego fragment. Jednak aby nie wydłużać poleceń, używamy w takich sytuacjach określenia „wykres”.

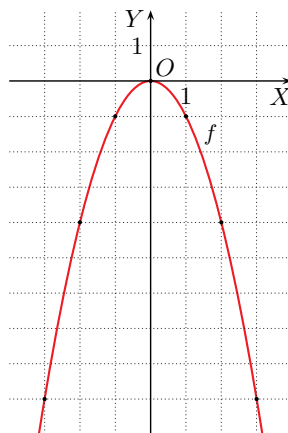
Multibook

- Wykres funkcji kwadratowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.1

Generator
testów i sprawdzianów

Na rysunku obok przedstawiono parabolę, która jest wykresem funkcji $f(x) = -x^2$. Jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, a zbiorem wartości – przedział $(-\infty; 0]$. Zwróć uwagę na to, że ramiona tej paraboli są skierowane w dół.



Ćwiczenie 4

a) Podaj przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = -x^2$.

b) Podaj równanie osi symetrii i współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = -x^2$.

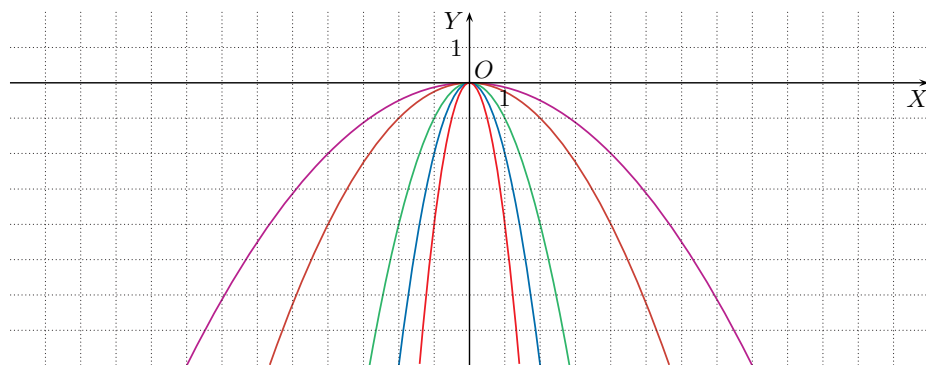
Ćwiczenie 5

Na rysunku poniżej przedstawiono wykresy funkcji:

$$f_1(x) = -x^2, f_2(x) = -2x^2, f_3(x) = -4x^2, f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2 \text{ i } f_5(x) = -\frac{1}{8}x^2$$

a) Dopasuj do każdej funkcji odpowiedni wykres.

b) Dla każdej spośród funkcji f_2 , f_4 i f_5 podaj po cztery punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do jej wykresu.



Wartość współczynnika a we wzorze funkcji $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$, decyduje o tym, czy ramiona paraboli będącej jej wykresem skierowane są do góry (gdy $a > 0$), czy w dół (gdy $a < 0$), oraz o tym, jak bardzo są rozchylone.

Ćwiczenie 6

Do wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ należy punkt P . Naszkicuj ten wykres i podaj pięć punktów o obu współrzędnych całkowitych, które do niego należą.

a) $P(2, -2)$ b) $P(\frac{1}{2}, -1)$ c) $P(-1, 3)$ d) $P(\sqrt{3}, -1)$

Ćwiczenie 4

a) rośnie w $(-\infty; 0]$,
maleje w $[0; \infty)$

b) oś symetrii: $x = 0$,
wierzchołek: $(0, 0)$

Ćwiczenie 5

a) f_1 – zielony, f_2 – niebieski,
 f_3 – czerwony, f_4 – brązowy,
 f_5 – fioletowy

b) f_2 : $(-1, -2)$, $(0, 0)$, $(1, -2)$,
 $(2, -8)$,

f_4 : $(-2, -1)$, $(0, 0)$, $(2, -1)$,
 $(4, -4)$,

f_5 : $(-4, -2)$, $(0, 0)$, $(4, -2)$,
 $(8, -8)$

Ćwiczenie 6

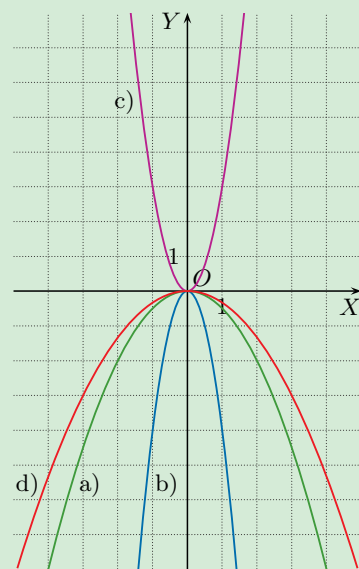
Wzory funkcji i przykładowe punkty:

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$, $(-4, -8)$,
 $(-2, -2)$, $(0, 0)$, $(2, -2)$, $(4, -8)$

b) $f(x) = -4x^2$, $(-2, -16)$,
 $(-1, -4)$, $(0, 0)$, $(1, -4)$, $(2, -16)$

c) $f(x) = 3x^2$, $(-2, 12)$,
 $(-1, 3)$, $(0, 0)$, $(1, 3)$, $(2, 12)$

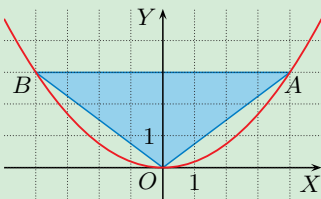
d) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2$, $(-6, -12)$,
 $(-3, -3)$, $(0, 0)$, $(3, -3)$, $(6, -12)$



Zadania

Odpowiedzi do zadań

1. a) $f(D) = [0; 9]$
 b) $f(D) = [0; 9]$
 c), d) $f(D) = [-9; 0]$
 e) $f(D) = (-8; 0]$
 f) $f(D) = [0; 4]$
 g) $f(D) = [0; 12]$
 h) $f(D) = [-8; -2]$
2. A: $y = x^2$,
 B: $y = \frac{1}{2}x^2$,
 C: $y = \frac{1}{4}x^2$,
 D: $y = \frac{1}{8}x^2$,
 E: $y = \frac{1}{16}x^2$
3. a) $y = x^2$
 b) $y = -\frac{1}{3}x^2$
4. a) $a \cdot 1^2 = 6$, zatem $a = 6$
 b) $a \cdot 2^2 = 8$, zatem $a = 2$
 c) $a \cdot (-4)^2 = 8$, zatem $a = 0,5$
 d) $a \cdot (-8)^2 = 48$, zatem $a = 0,75$
5. $P_{AOB} = \frac{1}{2}|2x| \cdot 3 = 12$, zatem $|x| = 4$, czyli do paraboli należą punkty: $A(4, 3)$ i $B(-4, 3)$ (lub $A(-4, 3)$ i $B(4, 3)$).
 Równanie paraboli: $y = \frac{3}{16}x^2$.

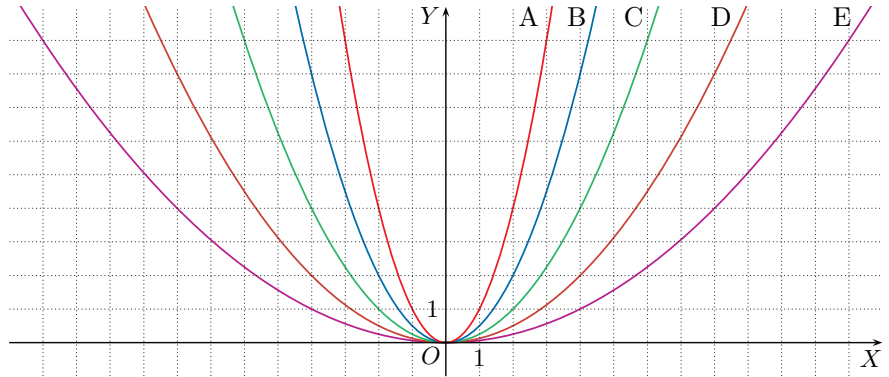


6. a) $f(x) = x^2$
 b) $f(x) = 2x^2$
 c) $f(x) = -4x^2$
 d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

1. Naszkicuj wykres funkcji f o dziedzinie D . Podaj zbiór wartości tej funkcji.

- | | |
|-------------------------------|--|
| a) $f(x) = x^2, D = [-3; 3]$ | e) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2, D = (-2; 4)$ |
| b) $f(x) = x^2, D = [0; 3]$ | f) $f(x) = \frac{1}{4}x^2, D = [-4; 2]$ |
| c) $f(x) = -x^2, D = (-3; 3]$ | g) $f(x) = 3x^2, D = (-1; 2)$ |
| d) $f(x) = -x^2, D = [-3; 1]$ | h) $f(x) = -2x^2, D = [1; 2]$ |

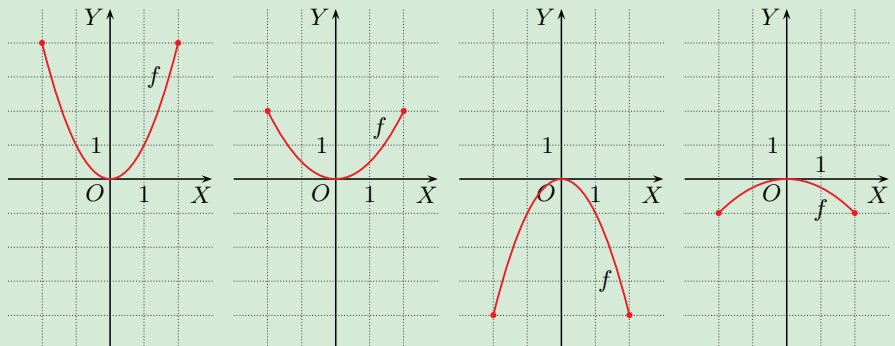
2. Dopasuj do równań $y = x^2, y = \frac{1}{2}x^2, y = \frac{1}{8}x^2$ odpowiednie parabole spośród A–E. Podaj równania pozostałych parabol.



3. Dla której spośród trzech podanych funkcji odległość od osi OX punktu o odciętej $x = 1$ należącego do wykresu tej funkcji jest najmniejsza?
 a) $y = x^2, y = 4x^2, y = -6x^2$ b) $y = -\frac{1}{3}x^2, y = 3x^2, y = 2\sqrt{3}x^2$
4. Dla jakiej wartości współczynnika a punkt Q należy do paraboli $y = ax^2$?
 a) $Q(1, 6)$ b) $Q(2, 8)$ c) $Q(-4, 8)$ d) $Q(-8, 48)$
5. Punkty $O(0, 0), A(x, 3)$ i $B(-x, 3)$ należą do paraboli $y = ax^2$. Pole trójkąta AOB jest równe 12. Naszkicuj tę parabolę.

Sprawdź się

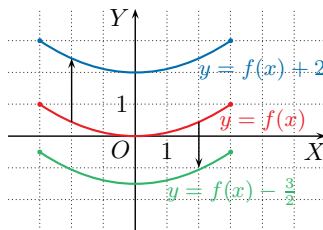
6. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = ax^2$, do którego należy punkt P .
 a) $P(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ b) $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ c) $P(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ d) $P(-\sqrt{3}, \frac{3}{2})$
7. Naszkicuj wykres funkcji f o dziedzinie $D = [-2; 2]$. Podaj zbiór wartości tej funkcji.
 a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ c) $f(x) = -x^2$ d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$
7. a) $f(D) = [0; 4]$ b) $f(D) = [0; 2]$ c) $f(D) = [-4; 0]$ d) $f(D) = [-1; 0]$



Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi układu współrzędnych

• Wykres funkcji $y = f(x) + q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji f o q jednostek w górę wzdłuż osi OY .

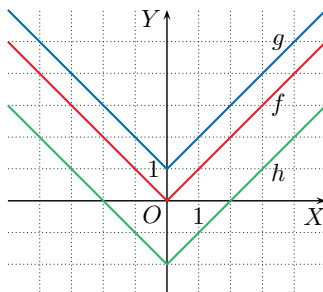
• Wykres funkcji $y = f(x) - q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji f o q jednostek w dół wzdłuż osi OY .



1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = |x|$ oraz wykresy funkcji g i h , które otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji f wzdłuż osi OY .

a) Podaj wzory funkcji g i h oraz ich zbiory wartości.

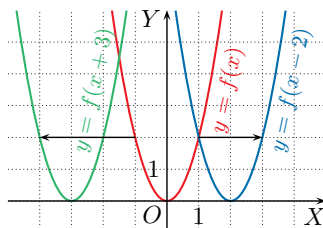
b) Naskicuj wykresy funkcji $k(x) = |x| + 2$, $l(x) = |x| - 3$ i podaj ich zbiory wartości.



2. Naskicuj wykresy funkcji $f(x) = 2x$, $g(x) = 2x + 1$ i $h(x) = 2x - 3$. Dla każdej funkcji wyznacz punkt, w którym jej wykres przecina oś OY .

• Wykres funkcji $y = f(x - p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji f o p jednostek w prawo wzdłuż osi OX .

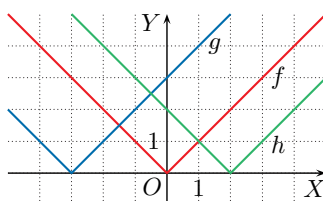
• Wykres funkcji $y = f(x + p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji f o p jednostek w lewo wzdłuż osi OX .



3. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = |x|$ oraz wykresy funkcji g i h , które otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji f wzdłuż osi OX .

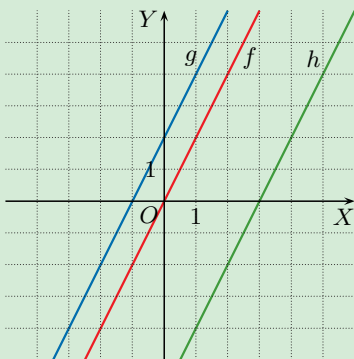
a) Podaj wzory funkcji g i h oraz ich zbiory wartości.

b) Naskicuj wykresy funkcji $k(x) = |x - 3|$ oraz $l(x) = |x + 1|$ i podaj ich miejsca zerowe.

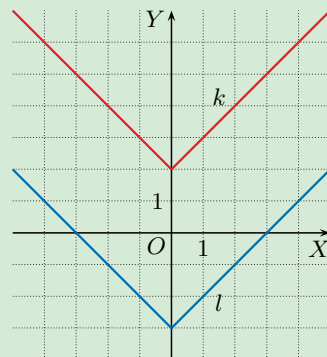


4. Naskicuj wykresy funkcji $f(x) = 2x$, $g(x) = 2(x + 1)$ i $h(x) = 2(x - 3)$. Dla każdej funkcji wyznacz punkt, w którym jej wykres przecina oś OX .

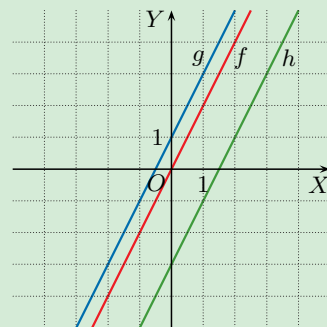
4. $f: (0, 0)$, $g: (-1, 0)$, $h: (3, 0)$



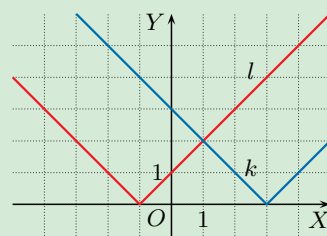
1. a) $g(x) = |x| + 1$,
 $h(x) = |x| - 2$,
 $g(D) = [1; \infty)$,
 $h(D) = [-2; \infty)$
 b) $k(D) = [2; \infty)$,
 $l(D) = [-3; \infty)$



2. $f: (0, 0)$, $g: (0, 1)$, $h: (0, -3)$



3. a) $g(x) = |x + 3|$,
 $h(x) = |x - 2|$,
 $g(D) = h(D) = [0; \infty)$
 b) $k: x = 3$, $l: x = -1$

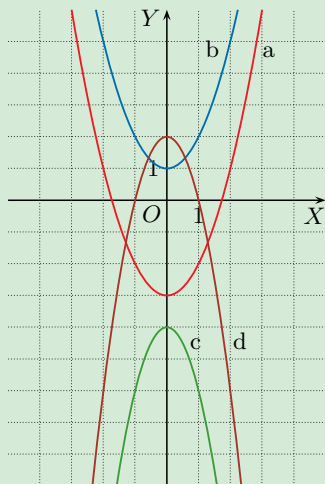


Uczeń:

- szkicuje wykresy funkcji:
 $f(x) = ax^2 + q$,
 $f(x) = a(x-p)^2$,
 $f(x) = a(x-p)^2 + q$
i podaje ich własności,
- stosuje własności funkcji:
 $f(x) = ax^2 + q$,
 $f(x) = a(x-p)^2$,
 $f(x) = a(x-p)^2 + q$
do rozwiązywania zadań.

Ćwiczenie 1

- a) $f(D) = [-3; \infty)$
- b) $f(D) = [1; \infty)$
- c) $f(D) = (-\infty; -4]$
- d) $f(D) = (-\infty; 2]$



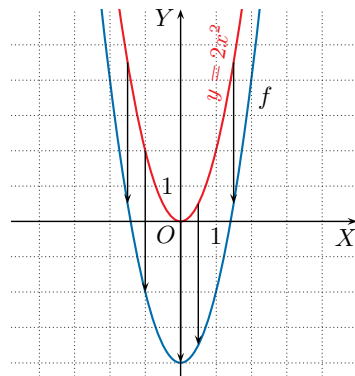
Ćwiczenie 2

- a) maleje w $(-\infty; -3]$, rośnie w $[-3; \infty)$
- b) maleje w $(-\infty; 1]$, rośnie w $[1; \infty)$
- c) rośnie w $(-\infty; -2]$, maleje w $[-2; \infty)$
- d) rośnie w $(-\infty; 2]$, maleje w $[2; \infty)$

1.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ wzdłuż osi OY i osi OX

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = 2x^2 - 4$ otrzymamy, przesuwając parabolę $y = 2x^2$ o 4 jednostki w dół (rysunek obok).



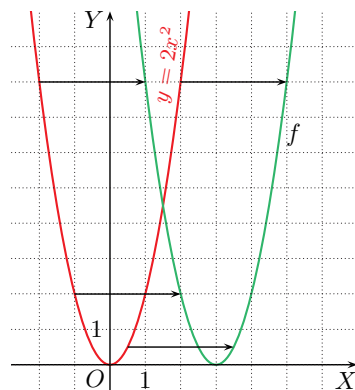
Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f i określ jej zbiór wartości.

- a) $f(x) = x^2 - 3$
- c) $f(x) = -2x^2 - 4$
- b) $f(x) = x^2 + 1$
- d) $f(x) = -2x^2 + 2$

Przykład 2

Wykres funkcji $f(x) = 2(x-3)^2$ otrzymamy, przesuwając parabolę $y = 2x^2$ o 3 jednostki w prawo (rysunek obok).



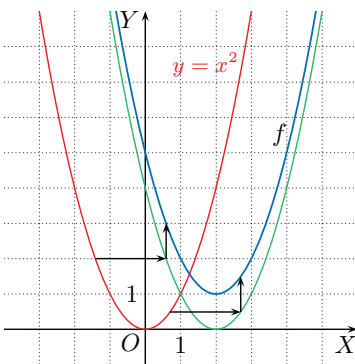
Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej przedziały monotoniczności.

- a) $f(x) = (x+3)^2$
- c) $f(x) = -2(x+2)^2$
- b) $f(x) = (x-1)^2$
- d) $f(x) = -2(x-2)^2$

Przykład 3

Wykres funkcji $f(x) = (x-2)^2 + 1$ otrzymamy, przesuwając parabolę $y = x^2$ o 2 jednostki w prawo, a następnie o 1 jednostkę w górę (rysunek obok).



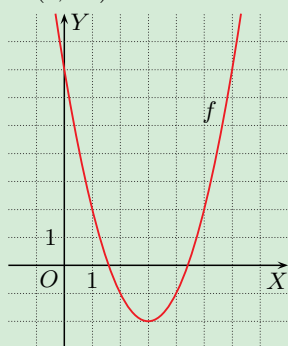
Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj współrzędne wierzchołka otrzymanej paraboli.

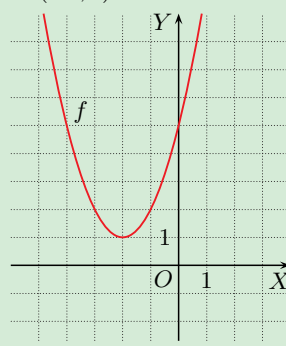
- a) $f(x) = (x-3)^2 - 2$
- b) $f(x) = (x+2)^2 + 1$

Ćwiczenie 3

- a) $W(3, -2)$



- b) $W(-2, 1)$



Multibook

- Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi OY
- Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi OX
- Postać kanoniczna funkcji kwadratowej
- Wykres funkcji kwadratowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.2

Generator
testów i sprawdzianów

Twierdzenie

Wykresem funkcji $f(x) = a(x-p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$, jest parabola o wierzchołku w punkcie (p, q) . Jej osią symetrii jest prosta $x = p$.

Ćwiczenie 4

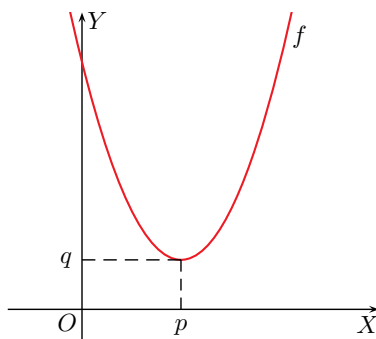
Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f . W jaki sposób należy przesunąć parabolę daną wzorem $y = 2x^2$, aby otrzymać wykres funkcji f ?

a) $f(x) = 2(x+6)^2 - 3$

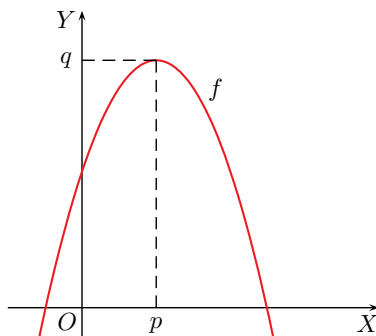
b) $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$

Poniższe własności funkcji $f(x) = a(x-p)^2 + q$ zależą od współczynnika a .

$a > 0$
• ramiona paraboli są skierowane do góry • dla $x = p$ funkcja osiąga wartość najmniejszą $y = q$ • funkcja maleje w przedziale $(-\infty; p]$ • funkcja rośnie w przedziale $[p; \infty)$ • zbiorem wartości funkcji jest przedział $[q; \infty)$



$a < 0$
• ramiona paraboli są skierowane w dół • dla $x = p$ funkcja osiąga wartość największą $y = q$ • funkcja rośnie w przedziale $(-\infty; p]$ • funkcja maleje w przedziale $[p; \infty)$ • zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-\infty; q]$



Ćwiczenie 5

Podaj przedziały monotoniczności i zbiór wartości funkcji f oraz współrzędne wierzchołka paraboli będącej jej wykresem. Naszkicuj tę parabolę.

a) $f(x) = 2(x-3)^2 - 4$

c) $f(x) = -(x+4)^2 - 1$

b) $f(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2 + 2$

d) $f(x) = -\frac{1}{4}(x-1)^2 + 3$

Ćwiczenie 5

a) maleje w $(-\infty; 3]$, rośnie w $[3; \infty)$,
 $f(D) = [-4; \infty)$, $W(3, -4)$

b) maleje w $(-\infty; -2]$, rośnie w $[-2; \infty)$,
 $f(D) = [2; \infty)$, $W(-2, 2)$

c) rośnie w $(-\infty; -4]$, maleje w $[-4; \infty)$,
 $f(D) = (-\infty; -1]$, $W(-4, -1)$

d) rośnie w $(-\infty; 1]$, maleje w $[1; \infty)$,
 $f(D) = (-\infty; 3]$, $W(1, 3)$

Ćwiczenie 4

a) $W(-6, -3)$, 6 jednostek w lewo i 3 jednostki w dół

b) $f(x) = 2(x^2 - 2x + 1) = 2(x-1)^2$, $W(1, 0)$, jedną jednostkę w prawo

Komentarz

Warto przypomnieć uczniom, że funkcja kwadratowa nie jest monotoniczna w swojej dziedzinie – jest **przedziałami monotoniczna**.

Należy również podkreślić zależność między współczynnikiem p a przedziałami monotoniczności funkcji oraz między współczynnikiem q a zbiorem wartości funkcji.

Odpowiedzi do zadań

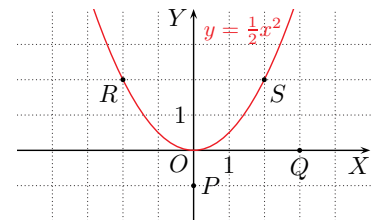
1. a) $g(x) = (x-3)^2$,
rośnie w $[3; \infty)$,
maleje w $(-\infty; 3]$
b) $g(x) = (x+2)^2$,
rośnie w $[-2; \infty)$,
maleje w $(-\infty; -2]$
2. a) $g(x) = -(x+2)^2 + 3$
b) $g(x) = -(x-1)^2 - 2$
3. a) $W(0, 2)$, $x = 0$
b) $W(0, -4)$, $x = 0$
c) $W(2, 0)$, $x = 2$
d) $W(-1, 0)$, $x = -1$
e) $W(1, -4)$, $x = 1$
f) $W(-3, 1)$, $x = -3$
4. a) $f(D) = (-\infty; 4]$
b) $f(D) = (-\infty; -1]$
c) $f(D) = (-\infty; 1]$
d) $f(D) = (-\infty; 1]$
e) $f(D) = [1; \infty)$
f) $f(D) = [-8; \infty)$
g) $f(D) = [-2; \infty)$
h) $f(D) = (-\infty; 4]$
i) $f(D) = [-4; \infty)$
5. a) $f(D) = [-6; \infty)$,
maleje w $(-\infty; 0]$,
rośnie w $[0; \infty)$, $W(0, -6)$
b) $f(D) = [0; \infty)$,
maleje w $(-\infty; 4]$,
rośnie w $[4; \infty)$, $W(4, 0)$
c) $f(D) = [5; \infty)$,
maleje w $(-\infty; -2]$,
rośnie w $[-2; \infty)$, $W(-2, 5)$
d) $f(D) = (-\infty; 9]$,
rośnie w $(-\infty; 0]$,
maleje w $[0; \infty)$, $W(0, 9)$
e) $f(D) = (-\infty; 0]$,
rośnie w $(-\infty; -8]$,
maleje w $[-8; \infty)$, $W(-8, 0)$
f) $f(D) = (-\infty; -2]$,
rośnie w $(-\infty; 3]$,
maleje w $[3; \infty)$, $W(3, -2)$
g) $f(D) = [1; \infty)$,
maleje w $(-\infty; 2]$,
rośnie w $[2; \infty)$, $W(2, 1)$
h) $f(D) = (-\infty; 4]$,
rośnie w $(-\infty; 1]$,
maleje w $[1; \infty)$, $W(1, 4)$
i) $f(D) = [-\sqrt{2}; \infty)$,
maleje w $(-\infty; -3]$,
rośnie w $[-3; \infty)$,
 $W(-3, -\sqrt{2})$

Zadania

1. Wykres funkcji f otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$:
a) o 3 jednostki w prawo, b) o 2 jednostki w lewo.
Podaj wzór funkcji f , jej przedziały monotoniczności i naskicuj jej wykres.
2. Wykres funkcji f otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $y = -x^2$:
a) o 2 jednostki w lewo i 3 jednostki w górę,
b) o 1 jednostkę w prawo i 2 jednostki w dół.
Podaj wzór funkcji f i naskicuj jej wykres.
3. Naskicuj parabolę o podanym wzorze. Wyznacz współrzędne jej wierzchołka oraz równanie jej osi symetrii.
a) $y = x^2 + 2$ c) $y = (x-2)^2$ e) $y = (x-1)^2 - 4$
b) $y = x^2 - 4$ d) $y = (x+1)^2$ f) $y = (x+3)^2 + 1$
4. Naskicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.
a) $f(x) = -x^2 + 4$ d) $f(x) = -2(x-2)^2 + 1$ g) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$
b) $f(x) = -(x-2)^2 - 1$ e) $f(x) = 2(x-2)^2 + 1$ h) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$
c) $f(x) = -(x+3)^2 + 1$ f) $f(x) = 2(x+1)^2 - 8$ i) $f(x) = 2x^2 - 4$

Sprawdź się

5. Podaj zbiór wartości funkcji f , jej przedziały monotoniczności i współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji.
a) $f(x) = 3x^2 - 6$ d) $f(x) = -5x^2 + 9$ g) $f(x) = (2-x)^2 + 1$
b) $f(x) = 3(x-4)^2$ e) $f(x) = -5(x+8)^2$ h) $f(x) = 4 - \frac{2}{3}(x-1)^2$
c) $f(x) = 3(x+2)^2 + 5$ f) $f(x) = -5(x-3)^2 - 2$ i) $f(x) = (3+x)^2 - \sqrt{2}$
6. Wykresem funkcji f jest parabola otrzymana przez przesunięcie paraboli $y = \frac{1}{2}x^2$ (rysunek obok). Podaj wzór funkcji f przy założeniu, że wierzchołkiem jej wykresu jest punkt:
a) P , b) Q , c) R , d) S .
7. Naskicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.
a) $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$ c) $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$ e) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$
b) $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 4$ d) $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$ f) $f(x) = -2x^2 - 1$



6. a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$
b) $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2$
c) $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 2$
d) $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$
7. a) $f(D) = [2; \infty)$
b) $f(D) = [-4; \infty)$
c) $f(D) = [-2; \infty)$
d) $f(D) = [3; \infty)$
e) $f(D) = (-\infty; 2]$
f) $f(D) = (-\infty; -1]$

Wzory skróconego mnożenia

- D** 1. Uzasadnij podane obok wzory. W tym celu wykonaj mnożenie $(a+b)(a+b)$ oraz $(a-b)(a-b)$.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{kwadrat sumy}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{kwadrat różnicy}$$

2. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.
- a) $(x+1)^2$ c) $(x+3)^2$ e) $(x-1)^2$ g) $(x-4)^2$
 b) $(x+2)^2$ d) $(x+6)^2$ f) $(x-2)^2$ h) $(x-5)^2$
3. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.
- a) $(x+\frac{1}{2})^2$ c) $(x+\frac{2}{3})^2$ e) $(x-\frac{1}{2})^2$ g) $(x-\frac{3}{4})^2$
 b) $(x+\frac{1}{4})^2$ d) $(x+\frac{3}{2})^2$ f) $(x-\frac{1}{3})^2$ h) $(x-\frac{4}{3})^2$
4. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.
- a) $(2x+1)^2$ c) $(3x+2)^2$ e) $(2x-1)^2$ g) $(3x-5)^2$
 b) $(2x+3)^2$ d) $(3x+4)^2$ f) $(3x-1)^2$ h) $(4x-3)^2$
5. Wyznacz liczbę a , dla której wyrażenie $(x+a)^2$ jest równe podanej sumie algebraicznej.
- a) $x^2 + 4x + 4$ c) $x^2 + 10x + 25$ e) $x^2 + x + \frac{1}{4}$
 b) $x^2 + 8x + 16$ d) $x^2 + 16x + 64$ f) $x^2 + 3x + \frac{9}{4}$
6. Wyznacz liczbę a , dla której wyrażenie $(x-a)^2$ jest równe podanej sumie algebraicznej.
- a) $x^2 - 2x + 1$ c) $x^2 - 14x + 49$ e) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$
 b) $x^2 - 6x + 9$ d) $x^2 - 20x + 100$ f) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$

- D** 7. Uzasadnij podany obok wzór.

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad \text{różnica kwadratów}$$

8. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.
- a) $(x-2)(x+2)$ c) $(x+4)(4-x)$ e) $(2x-1)(2x+1)$
 b) $(x-3)(x+3)$ d) $(x+8)(x-8)$ f) $(2+3x)(3x-2)$
9. Przedstaw podaną sumę algebraiczną w postaci iloczynu $(x-a)(x+a)$ dla pewnej liczby a .
- a) $x^2 - 25$ b) $x^2 - 49$ c) $x^2 - 2$ d) $x^2 - \frac{1}{36}$

7. $(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$

8. a) $x^2 - 4$
 b) $x^2 - 9$
 c) $16 - x^2$
 d) $x^2 - 64$
 e) $4x^2 - 1$
 f) $9x^2 - 4$
9. a) $(x-5)(x+5)$
 b) $(x-7)(x+7)$
 c) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$
 d) $(x-\frac{1}{6})(x+\frac{1}{6})$

1. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 $(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

2. a) $x^2 + 2x + 1$
 b) $x^2 + 4x + 4$
 c) $x^2 + 6x + 9$
 d) $x^2 + 12x + 36$
 e) $x^2 - 2x + 1$
 f) $x^2 - 4x + 4$
 g) $x^2 - 8x + 16$
 h) $x^2 - 10x + 25$

3. a) $x^2 + x + \frac{1}{4}$
 b) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$
 c) $x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{16}{9}$
 d) $x^2 + 3x + \frac{9}{4}$
 e) $x^2 - x + \frac{1}{4}$
 f) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$
 g) $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$
 h) $x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9}$

4. a) $4x^2 + 4x + 1$
 b) $4x^2 + 12x + 9$
 c) $9x^2 + 12x + 4$
 d) $9x^2 + 24x + 16$
 e) $4x^2 - 4x + 1$
 f) $9x^2 - 6x + 1$
 g) $9x^2 - 30x + 25$
 h) $16x^2 - 24x + 9$

5. a) $a = 2$
 b) $a = 4$
 c) $a = 5$
 d) $a = 8$
 e) $a = \frac{1}{2}$
 f) $a = \frac{3}{2}$

6. a) $a = 1$
 b) $a = 3$
 c) $a = 7$
 d) $a = 10$
 e) $a = \frac{1}{3}$
 f) $a = \frac{1}{4}$

Multibook

- Kwadrat sumy
- Kwadrat różnicy
- Różnica kwadratów

dlaNauczyciela.pl | Kartkówka

Generator
testów i sprawdzianów

Uczeń:

- oblicza wyróżnik trójmianu kwadratowego,
- oblicza współrzędne wierzchołka paraboli,
- przekształca postać ogólną funkcji kwadratowej do postaci kanonicznej (z zastosowaniem uzupełniania do kwadratu lub wzoru na współrzędne wierzchołka paraboli) i szkicuje wykres tej funkcji,
- wyznacza współczynnik występujący we wzorze funkcji kwadratowej, gdy dane są współrzędne punktu, który należy do wykresu tej funkcji,
- przekształca postać kanoniczną funkcji kwadratowej do postaci ogólnej,
- wyprowadza wzory na współrzędne wierzchołka paraboli.

Ćwiczenie 1

- a) $y = -2(x^2 - 6x + 9) + 6 = -2x^2 + 12x - 12$
- b) $y = -\frac{1}{2}(x^2 + x + \frac{1}{4}) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$
- c) $y = 3(x^2 - 10x + 25) + 9 = 3x^2 - 30x + 84$

1.3. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej (1)

Definicja

Postać:

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ gdzie } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

nazywamy **postacią ogólną** funkcji kwadratowej.

Postać:

$$y = a(x - p)^2 + q, \text{ gdzie } a, p, q \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

nazywamy **postacią kanoniczną** funkcji kwadratowej.

Funkcję kwadratową nazywamy też **trójmianem kwadratowym**.

Ćwiczenie 1

Przeczytaj przykłady w ramce pokazujące, w jaki sposób przejść od postaci kanonicznej funkcji kwadratowej do postaci ogólnej.

- | | |
|-------------------------------------|---|
| • $y = 3(x - 4)^2 - 7 =$ | Postać kanoniczna |
| $= 3(x^2 - 8x + 16) - 7 =$ | Korzystamy ze wzoru $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. |
| $= 3x^2 - 24x + 41$ | Postać ogólna |
| • $y = -4(x + \frac{1}{2})^2 + 1 =$ | Postać kanoniczna |
| $= -4(x^2 + x + \frac{1}{4}) + 1 =$ | Korzystamy ze wzoru $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. |
| $= -4x^2 - 4x$ | Postać ogólna |

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej.

a) $y = -2(x - 3)^2 + 6$ b) $y = -\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$ c) $y = 3(x - 5)^2 + 9$

Aby przejść od postaci ogólnej funkcji kwadratowej do postaci kanonicznej, należy zastosować uzupełnienie do kwadratu.

Przykład 1

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci kanonicznej.

a) $y = x^2 + 6x + 10 =$	Postać ogólna
$= x^2 + 2 \cdot 3x + 10 =$	Współczynnik 6 zapisujemy jako $2 \cdot 3$.
$= x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 - 9 + 10 =$	Dodajemy $9 = 3^2$, czyli uzupełniamy wyrażenie $x^2 + 2 \cdot 3x$ do kwadratu, i odejmujemy 9.
$= (x + 3)^2 - 9 + 10 =$	Korzystamy ze wzoru $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
$= (x + 3)^2 + 1$	Postać kanoniczna

Multibook

- Postać ogólna funkcji kwadratowej
- Postać kanoniczna funkcji kwadratowej
- Wykres funkcji kwadratowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.3



$$b) y = x^2 - x - 2 =$$

$$= x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x - 2 =$$

$$= x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 =$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 =$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

Postać ogólna

Współczynnik -1 zapisujemy jako $-2 \cdot \frac{1}{2}$.

Dodajemy i odejmujemy $\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Korzystamy ze wzoru
 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Postać kanoniczna

Ćwiczenie 2

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci kanonicznej. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji.

$$a) y = x^2 + 6x + 6$$

$$c) y = x^2 - 6x - 2$$

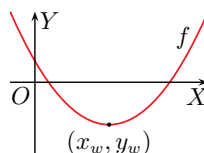
$$e) y = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

$$b) y = x^2 + 4x + 8$$

$$d) y = x^2 - 8x + 1$$

$$f) y = x^2 - 3x + 1$$

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = a(x-p)^2 + q$ jest parabola o wierzchołku (p, q) . Współrzędne wierzchołka paraboli oznaczamy także (x_w, y_w) .



Twierdzenie

Parabola $y = ax^2 + bx + c$ ma wierzchołek w punkcie o współrzędnych:

$$x_w = -\frac{b}{2a}, \quad y_w = -\frac{\Delta}{4a}, \quad \text{gdzie } \Delta = b^2 - 4ac, a \neq 0$$

Wyrażenie Δ nazywamy **wyróżnikiem** trójmianu kwadratowego.

Dowód

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x\right) + c = \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

Jest to postać kanoniczna funkcji $y = a(x-p)^2 + q$ dla $p = -\frac{b}{2a}$ i $q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, zatem $x_w = -\frac{b}{2a}$, $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$.

Przykład 2

Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego $y = -x^2 + 5x - 2$.

Współczynniki trójmianu: $a = -1$, $b = 5$ i $c = -2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = 25 - 8 = 17$$

Ćwiczenie 3

Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego.

$$a) y = x^2 + 3x + 1$$

$$c) y = x^2 - 4x + 4$$

$$e) y = -2x^2 + 4$$

$$b) y = 2x^2 + 4x + 1$$

$$d) y = -2x^2 + 6x - 6$$

$$f) y = 2x^2 - 3x$$

Ćwiczenie 3

$$a) \Delta = 5$$

$$b) \Delta = 8$$

$$c) \Delta = 0$$

$$d) \Delta = -12$$

$$e) \Delta = 32$$

$$f) \Delta = 9$$

Ćwiczenie 2

$$\begin{aligned} a) y &= x^2 + 6x + 6 = \\ &= x^2 + 2 \cdot 3x + 9 - 9 + 6 = \\ &= (x+3)^2 - 3, \end{aligned}$$

$$W(-3, -3)$$

$$\begin{aligned} b) y &= x^2 + 4x + 8 = \\ &= x^2 + 2 \cdot 2x + 4 - 4 + 8 = \\ &= (x+2)^2 + 4, \end{aligned}$$

$$W(-2, 4)$$

$$\begin{aligned} c) y &= x^2 - 6x - 2 = \\ &= x^2 - 2 \cdot 3x + 9 - 9 - 2 = \\ &= (x-3)^2 - 11, \end{aligned}$$

$$W(3, -11)$$

$$\begin{aligned} d) y &= x^2 - 8x + 1 = \\ &= x^2 - 2 \cdot 4x + 16 - 16 + 1 = \\ &= (x-4)^2 - 15, \end{aligned}$$

$$W(4, -15)$$

$$\begin{aligned} e) y &= x^2 + x + \frac{1}{4} = \\ &= x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

$$W\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\begin{aligned} f) y &= x^2 - 3x + 1 = \\ &= x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 1 = \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}, \end{aligned}$$

$$W\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$$

Ćwiczenie 4

- a) $W(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$, $y = 4(x + \frac{3}{4})^2 + \frac{3}{4}$
b) $W(1, 3)$, $y = -2(x - 1)^2 + 3$
c) $W(1, \frac{1}{2})$, $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{2}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $y = x^2 - x + 4\frac{1}{4}$
b) $y = -x^2 + 8x - 19$
c) $y = 2x^2 - 12x + 19$
d) $y = -3x^2 - 12x - 16$
e) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$
f) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$
2. $W_f(-1, 1)$, $W_g(3, -2)$, $W_h(4, 2)$,
 $f(x) = 2(x + 1)^2 + 1 = 2x^2 + 4x + 3$,
 $g(x) = 2(x - 3)^2 - 2 = 2x^2 - 12x + 16$,
 $h(x) = 2(x - 4)^2 + 2 = 2x^2 - 16x + 34$

Przykład 3

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji $y = 2x^2 - 6x + 1$, a następnie zapisz tę funkcję w postaci kanonicznej.

Współczynniki trójmianu: $a = 2$, $b = -6$ i $c = 1$.

$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 36 - 8 = 28$$
$$y_w = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{28}{8} = -\frac{7}{2}$$

Zatem wierzchołkiem paraboli jest punkt o współrzędnych $(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2})$.

Postać kanoniczna: $y = 2(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{7}{2}$.

Ćwiczenie 4

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem podanej funkcji, a następnie zapisz tę funkcję w postaci kanonicznej.

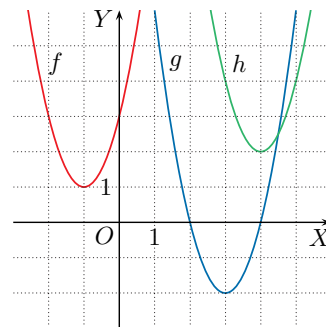
- a) $y = 4x^2 + 6x + 3$ b) $y = -2x^2 + 4x + 1$ c) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

Zadania

1. Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej.

- a) $y = (x - \frac{1}{2})^2 + 4$ c) $y = 2(x - 3)^2 + 1$ e) $y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$
b) $y = -(x - 4)^2 - 3$ d) $y = -3(x + 2)^2 - 4$ f) $y = -\frac{1}{3}(x - 3)^2 + 4$

2. Wykresy funkcji kwadratowych f , g i h (rysunek obok) otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = 2x^2$. Odczytaj z rysunku współrzędne wierzchołków otrzymanych parabol. Podaj wzór każdej z funkcji f , g i h w postaciach kanonicznej i ogólnej.



3. Zapisz w postaciach kanonicznej oraz ogólnej wzór funkcji g , której wykres otrzymamy po przesunięciu wykresu funkcji:

- a) $f(x) = 3x^2$ o 3 jednostki w prawo i 2 jednostki w dół,
b) $f(x) = -4x^2$ o 5 jednostek w lewo i 100 jednostek w górę.

4. Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego.

- a) $y = -2x^2 + 5x + 7$ c) $y = -2x^2 + 3x - 1$ e) $y = \frac{1}{2}x^2 + 6x - 3$
b) $y = 2x^2 + 3x + 2$ d) $y = 4x^2 - 12x + 9$ f) $y = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 5$

3. a) $g(x) = 3(x - 3)^2 - 2 = 3x^2 - 18x + 25$

b) $g(x) = -4(x + 5)^2 + 100 = -4x^2 - 40x$

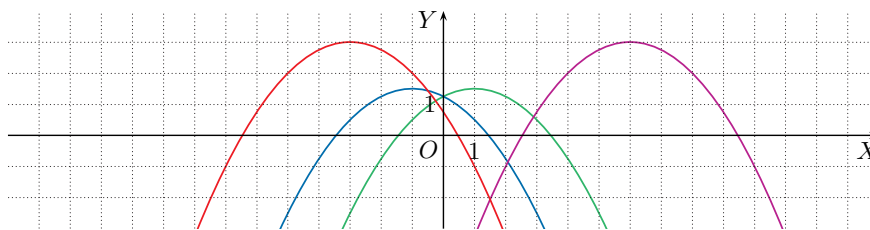
4. a) 81 b) -7 c) 1 d) 0 e) 42 f) -11

5. Oblicz wyróżnik trójkątnu kwadratowego. Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tego trójkątnu.
- a) $y = x^2 + 4x - 3$ c) $y = 2x^2 + 4x - 5$ e) $y = 3x^2 - 2x + \frac{1}{2}$
b) $y = -x^2 + 6x - 1$ d) $y = -3x^2 + 6x - 2$ f) $y = -\frac{3}{4}x^2 + x + 1$
6. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f , a następnie przedstaw tę funkcję w postaci kanonicznej.
- a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ c) $f(x) = -4x^2 + 8x + 1$ e) $f(x) = x^2 - x$
b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$ d) $f(x) = 2x^2 + 8x - 7$ f) $f(x) = -2x^2 + 6x$
7. Do wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = 2x^2 - 4x + c$ należy punkt P . Oblicz współczynnik c i zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.
- a) $P(0, 1)$ b) $P(0, -2)$ c) $P(1, 4)$ d) $P(2, 2)$ e) $P(-2, -4)$

8. Na poniższym rysunku przedstawiono wykresy funkcji:

$$f_1(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}, \quad f_2(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4},$$

$$f_3(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 6, \quad f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$$



- a) Zapisz wzór każdej funkcji w postaci kanonicznej.
b) Dopasuj do każdej funkcji odpowiedni wykres.

Sprawdź się

9. Oblicz wyróżnik trójkątnu kwadratowego.
- a) $y = x^2 - 3x - 4$ b) $y = 3x^2 + 5x + 2$ c) $y = -x^2 - 4x + 1$
10. Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli.
- a) $y = 4x^2 - 8x + 1$ c) $y = x^2 + 6x - 10$ e) $y = x^2 + x$
b) $y = -4x^2 + 6x + 2$ d) $y = -x^2 - 3x + 2$ f) $y = -2x^2 - 3x$
11. Przedstaw funkcję kwadratową w postaci kanonicznej.
- a) $y = x^2 - 4x - 2$ c) $y = -3x^2 + 5x - \frac{1}{2}$ e) $y = 8x^2 - x$
b) $y = 2x^2 - 8x + 1$ d) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ f) $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$
11. a) $y = (x - 2)^2 - 6$
b) $y = 2(x - 2)^2 - 7$
c) $y = -3(x - \frac{5}{6})^2 + \frac{19}{12}$
d) $y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 3$
e) $y = 8(x - \frac{1}{16})^2 - \frac{1}{32}$
f) $y = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 1$

5. a) $\Delta = 28, W(-2, -7)$
b) $\Delta = 32, W(3, 8)$
c) $\Delta = 56, W(-1, -7)$
d) $\Delta = 12, W(1, 1)$
e) $\Delta = -2, W(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$
f) $\Delta = 4, W(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$
6. a) $W(-1, 2), f(x) = (x + 1)^2 + 2$
b) $W(4, 0), f(x) = \frac{1}{2}(x - 4)^2$
c) $W(1, 5), f(x) = -4(x - 1)^2 + 5$
d) $W(-2, -15), f(x) = 2(x + 2)^2 - 15$
e) $W(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}), f(x) = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$
f) $W(1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}), f(x) = -2(x - 1\frac{1}{2})^2 + 4\frac{1}{2}$
7. a) $c = 1, f(x) = 2(x - 1)^2 - 1$
b) $c = -2, f(x) = 2(x - 1)^2 - 4$
c) $c = 6, f(x) = 2(x - 1)^2 + 4$
d) $c = 2, f(x) = 2(x - 1)^2$
e) $c = -20, f(x) = 2(x - 1)^2 - 22$
8. a) $f_1(x) = -\frac{1}{4}(x - 1)^2 + \frac{3}{2},$
 $f_2(x) = -\frac{1}{4}(x + 1)^2 + \frac{3}{2},$
 $f_3(x) = -\frac{1}{4}(x - 6)^2 + 3,$
 $f_4(x) = -\frac{1}{4}(x + 3)^2 + 3$
b) f_1 - zielony, f_2 - niebieski,
 f_3 - fioletowy, f_4 - czerwony

9. a) 25 b) 1 c) 20

10. a) $W(1, -3)$
b) $W(\frac{3}{4}, \frac{17}{4})$
c) $W(-3, -19)$
d) $W(-\frac{3}{2}, \frac{17}{4})$
e) $W(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$
f) $W(-\frac{3}{4}, \frac{9}{8})$

Odpowiedzi do zadań

1. a) 4, 12
b) $4\frac{1}{2}$, 13
c) -17, -34
2. a) $5, 2\frac{3}{4}$
b) -5, $-\frac{1}{2}$
c) 3, $-1\frac{1}{8}$
3. a) $g(-2) = -17$,
 $f(-2) = -15$,
 $h(-2) = -7$
b) $g(-2) = -10\frac{1}{2}$,
 $h(-2) = -10\frac{1}{2}$, $f(-2) = -8$
4. a) $c = 7$
b) $c = 20$
c) $c = -5\sqrt{2}$
5. A: $f(-1) = 2 - \sqrt{2} \neq 2 - 3\sqrt{2}$
B: $f(-\sqrt{2}) = 6 - 2\sqrt{2} \neq 10 - 2\sqrt{2}$
C: $f(-2) = 8$
D: $f(1 + \sqrt{2}) = 4 + \sqrt{2}$
E: $f(\sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2} \neq 8 - 2\sqrt{2}$
Zatem nie należą punkty:
A, B, E.

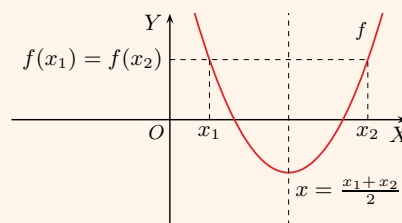
Obliczanie wartości trójkianu kwadratowego

1. Oblicz wartość wyrażenia dla $x = -2$ i dla $x = -3$.
a) $x^2 - 3x - 6$ b) $2x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ c) $-3x^2 + 2x - 1$
2. Oblicz wartość wyrażenia dla $x = -\frac{1}{2}$ i dla $x = \frac{1}{4}$.
a) $4x^2 - 2x + 3$ b) $-8x^2 + 4x - 1$ c) $-2x^2 - 6x + \frac{1}{2}$
3. Oblicz wartości funkcji f , g , h dla argumentu $x = -2$ i uporządkuj je od najmniejszej do największej.
a) $f(x) = -x^2 + 6x + 1$, $g(x) = 2x^2 + 10x - 5$, $h(x) = -3x^2 - \frac{1}{2}x + 4$
b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 7$, $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - 8$, $h(x) = -\frac{17}{8}x^2 - x - 4$
4. Oblicz współczynnik c funkcji $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + c$, która spełnia warunek:
a) $f(-2) = 9$, b) $f(4) = -2$, c) $f(-2\sqrt{2}) = -6$.
5. Sprawdź, które spośród punktów:
 $A(-1, 2 - 3\sqrt{2})$, $B(-\sqrt{2}, 10 - 2\sqrt{2})$, $C(-2, 8)$,
 $D(1 + \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2})$, $E(\sqrt{2}, 8 - 2\sqrt{2})$
nie należą do wykresu funkcji $f(x) = 2x^2 - \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}$.

Czy wiesz, że...

Jeśli dla dwóch różnych argumentów x_1, x_2 funkcja kwadratowa przyjmuje tę samą wartość, to oś symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji jest prostą określoną za pomocą równania:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$



6. Sprawdź, czy $f(-3) = f(1)$. Podaj równanie osi symetrii paraboli będącej wykresem funkcji f oraz współrzędne wierzchołka tej paraboli.
a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 1$ b) $f(x) = -2x^2 - 4x + 2$
7. Oblicz $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$ i $f(2)$. Podaj równanie osi symetrii oraz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f .
a) $f(x) = x^2 - x - 2$ c) $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$
b) $f(x) = 2x^2 - 6x - 2$ d) $f(x) = -6x^2 - 6x + 8$
8. a) $f(-3) = f(1)$, zatem oś symetrii: $x = -1$, a wierzchołek: $W(-1, -\frac{3}{2})$.
b) $f(-3) = f(1)$, zatem oś symetrii: $x = -1$, a wierzchołek: $W(-1, 4)$.
9. a) $f(-2) = 4$, $f(-1) = 0$, $f(1) = -2$, $f(2) = 0$, zatem oś symetrii: $x = \frac{1}{2}$,
a wierzchołek: $W(\frac{1}{2}, -2\frac{1}{4})$.
b) $f(-2) = 18$, $f(-1) = 6$, $f(1) = -6$, $f(2) = -6$, zatem oś symetrii: $x = \frac{3}{2}$,
a wierzchołek: $W(\frac{3}{2}, -\frac{13}{2})$.
c) $f(-2) = -24$, $f(-1) = -12$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, zatem oś symetrii: $x = \frac{3}{2}$,
a wierzchołek: $W(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.
d) $f(-2) = -4$, $f(-1) = 8$, $f(1) = -4$, $f(2) = -28$, zatem oś symetrii: $x = -\frac{1}{2}$,
a wierzchołek: $W(-\frac{1}{2}, \frac{19}{2})$.

1.4. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej (2)

Przykład 1

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli $y = -x^2 + 6x - 5$. Naskicuj tę parabolę.

$a = -1$, $b = 6$, $c = -5$, zatem:

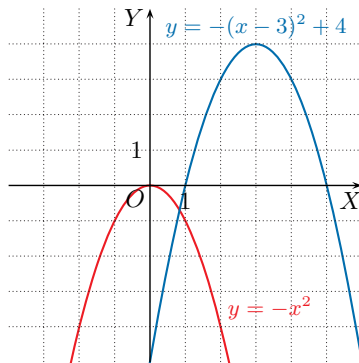
$$x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = 16$$

$$y_w = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-16}{-4} = 4$$

Trójmian kwadratowy zapisujemy w postaci kanonicznej: $y = -(x - 3)^2 + 4$.

Szukaną parabolę otrzymujemy w wyniku przesunięcia paraboli $y = -x^2$ o 3 jednostki w prawo i 4 jednostki w górę.



Ćwiczenie 1

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli, a następnie przedstaw trójmian kwadratowy w postaci kanonicznej. Naskicuj tę parabolę.

a) $y = x^2 + 4x + 1$ c) $y = 2x^2 + 4x + 2$ e) $y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$

b) $y = -x^2 + 2x - 3$ d) $y = -2x^2 - 8x - 5$ f) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$

Zauważmy, że jeśli wyznaczymy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f , to jego drugą współrzędną możemy obliczyć, korzystając z tego, że $y_w = f(x_w)$.

Ćwiczenie 2

Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji:

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 1$$

$$a = -2, b = 8, \text{ więc } x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot (-2)} = 2.$$

$$\text{Współrzędna } y_w = f(x_w) = f(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 1 = 7.$$

Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(2, 7)$.

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f .

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ b) $f(x) = -x^2 - 3x + 4$ c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 10$

Ćwiczenie 2

a) $W(1, 1)$ b) $W(-1\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4})$ c) $W(2, 9)$

Komentarz

Warto zwrócić uwagę uczniów na ćwiczenie 2., ponieważ zastosowany w nim sposób wyznaczenia drugiej współrzędnej wierzchołka paraboli y_w w wielu przykładach jest dużo szybszy niż korzystanie ze wzoru: $y_w = \frac{-\Delta}{4a}$.

Uczeń:

- oblicza współrzędne wierzchołka paraboli, podaje równanie jej osi symetrii,
- przekształca postać ogólną funkcji kwadratowej do postaci kanonicznej (z zastosowaniem uzupełniania do kwadratu lub wzoru na współrzędne wierzchołka paraboli) i szkicuje wykres tej funkcji,
- wyznacza wzór ogólny funkcji kwadratowej, gdy dane są współrzędne wierzchołka i innego punktu jej wykresu.

Ćwiczenie 1

- a) $W(-2, -3)$, $y = (x + 2)^2 - 3$
b) $W(1, -2)$, $y = -(x - 1)^2 - 2$
c) $W(-1, 0)$, $y = 2(x + 1)^2$
d) $W(-2, 3)$, $y = -2(x + 2)^2 + 3$
e) $W(-1, -1)$, $y = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 1$
f) $W(-2, 5)$, $y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 5$

Multibook

- Postać ogólna funkcji kwadratowej
- Postać kanoniczna funkcji kwadratowej
- Wykres funkcji kwadratowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.4

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

- a) $-\frac{b}{2 \cdot 1} = 2$, więc $b = -4$
b) $-\frac{b}{2 \cdot (-1)} = 4$, więc $b = 8$
c) $-\frac{b}{2 \cdot 2} = -1$, więc $b = 4$
d) $-\frac{b}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = -6$, więc $b = -6$

Ćwiczenie 4

- a) $f(x) = -(x-2)^2 + 2 = -x^2 + 4x - 2$
b) $f(x) = -2(x-4)^2 = -2x^2 + 16x - 32$
c) $f(x) = 2(x+1)^2 - 6 = 2x^2 + 4x - 4$

Ćwiczenie 5

- a) $f(x) = a(x-2)^2$
 $a \cdot (0-2)^2 = 2$, więc $a = \frac{1}{2}$
postać kanoniczna: $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$,
postać ogólna: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$,
 $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$, $c = 2$
b) $f(x) = a(x+1)^2 - 1$
 $a \cdot (0+1)^2 - 1 = 0$, więc $a = 1$
postać kanoniczna: $f(x) = (x+1)^2 - 1$,
postać ogólna: $f(x) = x^2 + 2x$,
 $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$

Przykład 2

Prosta $x = 1$ jest osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = 3x^2 + bx - 4$. Oblicz współczynnik b .

Ośią symetrii paraboli jest prosta $x = -\frac{b}{2a}$, zatem $-\frac{b}{2 \cdot 3} = 1$. Stąd $b = -6$.

Ćwiczenie 3

Prosta l jest osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f . Oblicz współczynnik b .

- a) $f(x) = x^2 + bx + 4$, $l: x = 2$ c) $f(x) = 2x^2 + bx - 1$, $l: x = -1$
b) $f(x) = -x^2 + bx - 3$, $l: x = 4$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx - 7$, $l: x = -6$

Przykład 3

Wykresem funkcji f jest parabola o wierzchołku $(3, -2)$. Punkt $P(4, 1)$ należy do tej paraboli. Zapisz wzór funkcji f w postaciach kanonicznej i ogólnej.

Wzór funkcji zapisujemy w postaci kanonicznej:

$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$

gdzie punkt (p, q) jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji f :

$$f(x) = a(x-3)^2 - 2 \quad \text{Wierzchołkiem paraboli jest punkt } (3, -2).$$

Podstawiamy współrzędne punktu P do powyższego wzoru: $1 = a(4-3)^2 - 2$, czyli $a = 3$. Zatem otrzymujemy postać kanoniczną funkcji:

$$f(x) = 3(x-3)^2 - 2$$

Następnie wyznaczamy postać ogólną:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x-3)^2 - 2 = 3(x^2 - 6x + 9) - 2 = \\ &= 3x^2 - 18x + 27 - 2 = 3x^2 - 18x + 25 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 4

Wykresem funkcji f jest parabola o wierzchołku w punkcie W . Punkt P należy do tej paraboli. Zapisz wzór funkcji f w postaciach kanonicznej i ogólnej.

- a) $P(3, 1)$, $W(2, 2)$ b) $P(3, -2)$, $W(4, 0)$ c) $P(-2, -4)$, $W(-1, -6)$

Ćwiczenie 5

Do paraboli $y = ax^2 + bx + c$ należy punkt P , a wierzchołkiem tej paraboli jest punkt W . Oblicz współczynniki a , b , c .

- a) $P(0, 2)$, $W(2, 0)$ c) $P(3, 1)$, $W(0, 3)$ e) $P(2, 1)$, $W(1, 2)$
b) $P(0, 0)$, $W(-1, -1)$ d) $P(-2, 0)$, $W(-1, 3)$ f) $P(1, 2)$, $W(2, 4)$

- c) $f(x) = a(x-0)^2 + 3$
 $a \cdot (3-0)^2 + 3 = 1$, więc $a = -\frac{2}{9}$
postać kanoniczna i ogólna:
 $f(x) = -\frac{2}{9}x^2 + 3$,
 $a = -\frac{2}{9}$, $b = 0$, $c = 3$
d) $f(x) = a(x+1)^2 + 3$
 $a \cdot (-2+1)^2 + 3 = 0$, więc $a = -3$
postać kanoniczna:
 $f(x) = -3(x+1)^2 + 3$,
postać ogólna: $f(x) = -3x^2 - 6x$,
 $a = -3$, $b = -6$, $c = 0$

- e) $f(x) = a(x-1)^2 + 2$
 $a \cdot (2-1)^2 + 2 = 1$, więc $a = -1$
postać kanoniczna:
 $f(x) = -(x-1)^2 + 2$,
postać ogólna: $f(x) = -x^2 + 2x + 1$,
 $a = -1$, $b = 2$, $c = 1$
f) $f(x) = a(x-2)^2 + 4$
 $a \cdot (1-2)^2 + 4 = 2$, więc $a = -2$
postać kanoniczna:
 $f(x) = -2(x-2)^2 + 4$,
postać ogólna: $f(x) = -2x^2 + 8x - 4$,
 $a = -2$, $b = 8$, $c = -4$

Zadania

- Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Naskicuj jej wykres, podaj przedziały monotoniczności i zbiór wartości.
a) $f(x) = x^2 - 6x + 2$ c) $f(x) = 2x^2 + 8x + 4$ e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9$
b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ d) $f(x) = -2x^2 + 2x$ f) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x - 1$
- Wykresem funkcji kwadratowej $y = ax^2 + 6x - 8$ jest parabola o wierzchołku, którego pierwsza współrzędna jest równa x_w . Zapisz wzór tej funkcji w postaci kanonicznej.
a) $x_w = -3$ c) $x_w = -6$ e) $x_w = \frac{3}{2}$
b) $x_w = 3$ d) $x_w = 12$ f) $x_w = -\frac{3}{2}$
- Punkt W jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej $y = x^2 + bx + c$. Oblicz współczynniki b i c .
a) $W(2, 4)$ c) $W(\frac{1}{2}, -1)$ e) $W(10, 0)$
b) $W(-1, -3)$ d) $W(0, 3)$ f) $W(-4, 4)$
- Wykres funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ jest symetryczny względem prostej l i przecina oś OY w punkcie P . Oblicz współczynniki b i c . Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.
a) $l: x = 1, P(0, 1)$ b) $l: x = -4, P(0, 2)$ c) $l: x = 3, P(0, -6)$
- Punkty $A(0, -2)$ i $B(1, 1)$ należą do paraboli będącej wykresem funkcji f . Wyznacz wzór tej funkcji przy założeniu, że wierzchołkiem tej paraboli jest punkt: a) A , b) B .
- Wykres funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ jest parabolą o wierzchołku w punkcie (p, q) . Uzasadnij, że $b = -2p$ i $c = p^2 + q$.

Sprawdź się

- Przedstaw funkcję f w postaci kanonicznej, a następnie naskicuj jej wykres, przesuując odpowiednio parabolę $y = x^2$ lub parabolę $y = -x^2$.
a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ c) $f(x) = x^2 + 2x$ e) $f(x) = x^2 - 6x + 8$
b) $f(x) = x^2 + 2x + 4$ d) $f(x) = -x^2 + 4x$ f) $f(x) = -x^2 + 8x - 8$
- Do paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f należy punkt P , a wierzchołkiem tej paraboli jest punkt W . Wyznacz wzór tej funkcji.
a) $P(2, 5), W(1, 4)$ b) $P(-3, 6), W(-2, 3)$ c) $P(-4, -8), W(-3, -4)$
- a) $f(x) = 3x^2 - 2$
b) $f(x) = -3(x - 1)^2 + 1$
- $f(x) = (x - p)^2 + q = x^2 - 2px + p^2 + q$, czyli $b = -2p$ oraz $c = p^2 + q$.
- a) $f(x) = (x + 1)^2$
b) $f(x) = (x + 1)^2 + 3$
c) $f(x) = (x + 1)^2 - 1$
d) $f(x) = -(x - 2)^2 + 4$
e) $f(x) = (x - 3)^2 - 1$
f) $f(x) = -(x - 4)^2 + 8$
- a) $f(x) = (x - 1)^2 + 4$
b) $f(x) = 3(x + 2)^2 + 3$
c) $f(x) = -4(x + 3)^2 - 4$

Odpowiedzi do zadań

- a) $f(x) = (x - 3)^2 - 7$,
rośnie w $[3; \infty)$,
maleje w $(-\infty; 3]$,
 $f(D) = [-7; \infty)$
b) $f(x) = (x + 1)^2 - 4$,
maleje w $(-\infty; -1]$,
rośnie w $[-1; \infty)$,
 $f(D) = [-4; \infty)$
c) $f(x) = 2(x + 2)^2 - 4$,
rośnie w $[-2; \infty)$,
maleje w $(-\infty; -2]$,
 $f(D) = [-4; \infty)$
d) $f(x) = -2(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$,
rośnie w $(-\infty; \frac{1}{2}]$,
maleje w $[\frac{1}{2}; \infty)$,
 $f(D) = (-\infty; \frac{1}{2}]$
e) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 4)^2 + 1$,
rośnie w $[4; \infty)$,
maleje w $(-\infty; 4]$,
 $f(D) = [1; \infty)$
f) $f(x) = -\frac{1}{4}(x + 2)^2$,
rośnie w $(-\infty; -2]$,
maleje w $[-2; \infty)$,
 $f(D) = (-\infty; 0]$
- a) $y = (x + 3)^2 - 17$
b) $y = -(x - 3)^2 + 1$
c) $y = \frac{1}{2}(x + 6)^2 - 26$
d) $y = -\frac{1}{4}(x - 12)^2 + 28$
e) $y = -2(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{7}{2}$
f) $y = 2(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{2}$
- a) $b = -4, c = 8$
b) $b = 2, c = -2$
c) $b = -1, c = -\frac{3}{4}$
d) $b = 0, c = 3$
e) $b = -20, c = 100$
f) $b = 8, c = 20$
- a) $b = -2, c = 1$,
 $f(x) = (x - 1)^2$
b) $b = 8, c = 2$,
 $f(x) = (x + 4)^2 - 14$
c) $b = -6, c = -6$,
 $f(x) = (x - 3)^2 - 15$
d) $b = 1, c = -4$,
 $f(x) = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{17}{4}$

Uczeń:

- stosuje wzory skróconego mnożenia oraz metodę wyłączania wspólnego czynnika przed nawias do przedstawiania wyrażenia w postaci iloczynu,
- rozwiązuje równanie kwadratowe przez rozkład na czynniki,
- interpretuje geometrycznie rozwiązanie równania kwadratowego,
- wyznacza algebraicznie współrzędne punktów przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych.

Ćwiczenie 1

Równanie kwadratowe może mieć 2 rozwiązania, 1 rozwiązanie lub 0 rozwiązań.

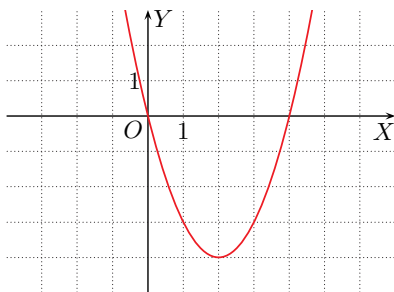
1.5. Równania kwadratowe (1)

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji i odczytaj z niego miejsca zerowe tej funkcji.

a) $y = x^2 - 4x$

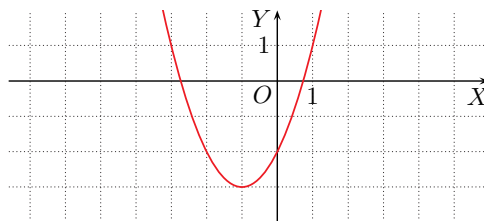
Po przekształceniu do postaci kanonicznej mamy: $y = (x - 2)^2 - 4$.



Z wykresu można odczytać miejsca zerowe: $x = 0$ i $x = 4$.

b) $y = x^2 + 2x - 2$

Po przekształceniu do postaci kanonicznej mamy: $y = (x + 1)^2 - 3$.

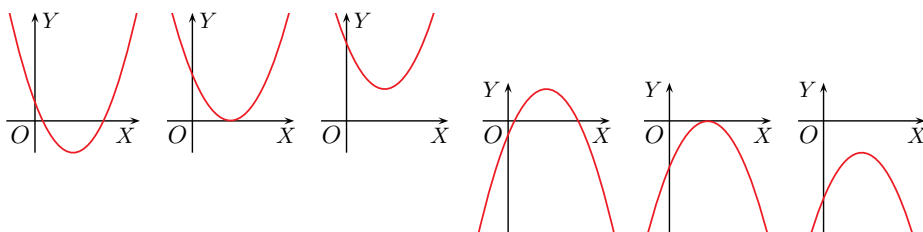


Z wykresu można odczytać tylko przybliżone wartości miejsc zerowych. Wyznaczenie ich dokładnych wartości wymaga rozwiązania równania $x^2 + 2x - 2 = 0$.

Rozwiązania równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) to miejsca zerowe funkcji $y = ax^2 + bx + c$.

Ćwiczenie 1

Na poniższych rysunkach przedstawiono możliwe położenia wykresu funkcji kwadratowej względem osi OX . Ile rozwiązań może mieć równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$?



Rozwiązanie równania z niewiadomą x polega na wyznaczeniu wszystkich wartości x , dla których to równanie jest spełnione. Zbiór tych x nazywamy **zbiorem rozwiązań równania**.

Rozwiązania równania nazywane są również jego **pierwiastkami**.

Multibook

- Wykres funkcji kwadratowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.5

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 2

Podaj zbiór rozwiązań równania $4x^2 - 8x = 0$.

Lewą stronę równania rozkładamy na czynniki:

$$4x(x - 2) = 0$$

czyli $x = 0$ lub $x - 2 = 0$, zatem $x = 0$ lub $x = 2$.

Zbiorem rozwiązań równania jest zbiór $\{0, 2\}$.

Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a \cdot b = 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = 0 \text{ lub } b = 0.$$

Ćwiczenie 2

Podaj zbiór rozwiązań równania.

a) $3x^2 + 6x = 0$ b) $7x - 3x^2 = 0$ c) $2x^2 = 5x$ d) $8x = \frac{1}{2}x^2$

W niektórych przykładach przy rozkładzie trójmianu kwadratowego na czynniki liniowe możemy skorzystać ze wzorów skróconego mnożenia.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $4x^2 - 9 = 0$.

Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów: $4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$.

$$(2x + 3)(2x - 3) = 0$$

$$2x + 3 = 0 \text{ lub } 2x - 3 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \text{ lub } x = \frac{3}{2}$$

Rozwiązaniami równania są liczby $-\frac{3}{2}$ i $\frac{3}{2}$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $16x^2 - 25 = 0$ b) $100x^2 - 9 = 0$ c) $4x^2 - 121 = 0$ d) $\frac{9}{4}x^2 - 4 = 0$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy: $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$.

$$(x - 2)^2 = 0, \text{ czyli } x - 2 = 0$$

Zatem liczba 2 jest jedynym pierwiastkiem tego równania.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

a) $x^2 + 8x + 16 = 0$ c) $4x^2 + 4x + 1 = 0$ e) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$
 b) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ d) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ f) $3x^2 + 9 = 2x^2 - 6x$

Ćwiczenie 4

a) $(x + 4)^2 = 0, x = -4$ e) $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0 / \cdot 4$ f) $x^2 + 6x + 9 = 0$
 $(x - \frac{1}{2})^2 = 0, x = \frac{1}{2}$ $x^2 - 4x + 4 = 0$ $(x + 3)^2 = 0$
 c) $(2x + 1)^2 = 0, x = -\frac{1}{2}$ $(x - 2)^2 = 0$ $x = -3$
 d) $(2x - 3)^2 = 0, x = \frac{3}{2}$ $x = 2$

Ćwiczenie 2

a) $\{-2, 0\}$

b) $\{0, \frac{7}{3}\}$

c) $\{0, \frac{5}{2}\}$

d) $\{0, 16\}$

Ćwiczenie 3

a) $x = -\frac{5}{4}$ lub $x = \frac{5}{4}$

b) $x = -\frac{3}{10}$ lub $x = \frac{3}{10}$

c) $x = -\frac{11}{2}$ lub $x = \frac{11}{2}$

d) $x = -\frac{4}{3}$ lub $x = \frac{4}{3}$

Ćwiczenie 5

- a) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$
b) sprzeczne
c) $x = -\frac{\sqrt{10}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$
d) sprzeczne

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = 0$ lub $x = 6$
b) $x = -\frac{1}{27}$ lub $x = 0$
c) $x = 0$ lub $x = \frac{1}{6}$
d) $x = -\frac{1}{9}$ lub $x = 0$
e) $x = 0$ lub $x = 2$
f) $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $x = 0$
2. a) $x = -\frac{9}{10}$ lub $x = \frac{9}{10}$
b) $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = \frac{2}{3}$
c) $x = -5$
d) $x = 8$
e) $x = 12$
f) $x = -\frac{1}{3}$
g) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
h) $x = 2$
i) $x = 6$
3. a) $(0, 0)$, $(4, 0)$
b) $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -12)$
c) $(0, 12)$, nie przecina osi OX
d) $(0, 0)$, $(-\frac{1}{225}, 0)$
e) $(0, 4)$, nie przecina osi OX
f) $(-\frac{1}{15}, 0)$, $(\frac{1}{15}, 0)$, $(0, -4)$
4. a) 2 b) -4 c) 3
5. a) $x = 0$, $x = 1$
b) $x = -3$, $x = 0$
c) $x = \frac{1}{3}$
d) $x = 6$
e) $x = 4$
f) $x = 2$
6. a) 2 b) 0 c) 2

Przykład 5

a) Rozwiąż równanie $4x^2 - 7 = 0$.

$$\begin{aligned}4x^2 &= 7 : 4 \\x^2 &= \frac{7}{4} \\x &= -\sqrt{\frac{7}{4}} \text{ lub } x = \sqrt{\frac{7}{4}}\end{aligned}$$

Rozwiązania równania: $-\frac{\sqrt{7}}{2}$ i $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż równanie.

- a) $6x^2 - 18 = 0$ b) $x^2 + 4 = 0$ c) $\frac{4}{5}x^2 - 2 = 0$ d) $4x^2 + 1 = 0$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

- a) $-7x^2 + 42x = 0$ c) $36x^2 = 6x$ e) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{8}x = 0$
b) $9x^2 + \frac{1}{3}x = 0$ d) $2x + 18x^2 = 0$ f) $\sqrt{3}x = -3x^2$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $100x^2 - 81 = 0$ d) $x^2 + 64 = 16x$ g) $x^2 = (1 - x)(1 + x)$
b) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9} = 0$ e) $24x - x^2 = 144$ h) $\frac{1}{2}x(6 - x) = 2 + x$
c) $x^2 + 10x + 25 = 0$ f) $1 + 9x^2 + 6x = 0$ i) $(x - 3)(x - 2) = 7x - 30$

▶ 3. Wyznacz punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych.

- a) $y = 3x^2 - 12x$ c) $y = 3x^2 + 12$ e) $y = 900x^2 + 4$
b) $y = 3x^2 - 12$ d) $y = 900x^2 + 4x$ f) $y = 900x^2 - 4$

4. Wyznacz wspólne miejsca zerowe funkcji f i g .

- a) $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = x^2 - 4x + 4$
b) $f(x) = x^2 + 4x$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 8$
c) $f(x) = \frac{1}{9}x^2 - 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$

Sprawdź się

5. Rozwiąż równanie.

- a) $1 - x^2 = 1 - x$ c) $1 - 6x = -9x^2$ e) $x(x + 1) = 9x - 16$
b) $4 - x = \frac{1}{3}x^2 + 4$ d) $x^2 = 12x - 36$ f) $(2 - x)x = 4 - 2x$

6. Ile rozwiązań ma równanie?

- a) $54x^2 - 6x = 0$ b) $54x^2 + 6 = 0$ c) $54x^2 - 6 = 0$

1.6. Równania kwadratowe (2)

Przykład 1

Rozwiąż równanie $4x^2 + 20x + 25 = 0$.

Korzystamy ze wzoru $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$(2x + 5)^2 = 0$$

$$2x + 5 = 0$$

Równanie ma jeden pierwiastek: $x = -\frac{5}{2}$.

Czy wiesz, że...

Równania kwadratowe były rozwiązywane już przez starożytnych Babilończyków około 1800 r. p.n.e. Świadczą o tym zachowane gliniane tabliczki z pismem klinowym.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $9x^2 - 12x + 4 = 0$ b) $25x^2 + 40x + 16 = 0$ c) $4x^2 - 28x + 49 = 0$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $4x^2 - 20x + 27 = 0$.

$$(2x - 5)^2 - 25 + 27 = 0$$

Zauważ, że:

$$(2x - 5)^2 - 25 = 4x^2 - 20x.$$

$$(2x - 5)^2 = -2$$

Równanie to jest sprzeczne, gdyż $(2x - 5)^2 \geq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

D Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że podane równanie jest sprzeczne.

a) $x^2 - 2x + 2 = 0$ b) $x^2 + 6x + 12 = 0$ c) $4x^2 + 4x + 5 = 0$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $4x^2 - 20x + 23 = 0$.

$$(2x - 5)^2 - 25 + 23 = 0$$

Zauważ, że:

$$(2x - 5)^2 - 25 = 4x^2 - 20x.$$

$$(2x - 5)^2 = 2$$

$$2x - 5 = -\sqrt{2} \quad \text{lub} \quad 2x - 5 = \sqrt{2}$$

$$2x = 5 - \sqrt{2} \quad \text{lub} \quad 2x = 5 + \sqrt{2}$$

Równanie ma dwa pierwiastki: $x = \frac{5 - \sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{5 + \sqrt{2}}{2}$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$ b) $x^2 + 6x + 8 = 0$ c) $x^2 + 6x + 7 = 0$

Ćwiczenie 3

a) $(x - 1)^2 = 4$

$$x - 1 = -2 \quad \text{lub} \quad x - 1 = 2$$

$$x = -1 \quad \text{lub} \quad x = 3$$

b) $(x + 3)^2 = 1$

$$x + 3 = -1 \quad \text{lub} \quad x + 3 = 1$$

$$x = -4 \quad \text{lub} \quad x = -2$$

c) $(x + 3)^2 = 2$

$$x + 3 = -\sqrt{2} \quad \text{lub} \quad x + 3 = \sqrt{2}$$

$$x = -3 - \sqrt{2} \quad \text{lub} \quad x = -3 + \sqrt{2}$$

Uczeń:

- stosuje wzory skróconego mnożenia do przedstawiania wyrażenia w postaci iloczynu,
- określa liczbę pierwiastków równania kwadratowego w zależności od znaku wyróżnika,
- rozwiązuje równania kwadratowe, korzystając z poznanych wzorów na pierwiastki,
- interpretuje geometrycznie rozwiązania równania kwadratowego w zależności od wartości współczynnika a i wartości wyróżnika.

Ćwiczenie 1

a) $(3x - 2)^2 = 0$

$$x = \frac{2}{3}$$

b) $(5x + 4)^2 = 0$

$$x = -\frac{4}{5}$$

c) $(2x - 7)^2 = 0$

$$x = \frac{7}{2}$$

Ćwiczenie 2

a) $(x - 1)^2 = -1$

Równanie to jest sprzeczne, gdyż $(x - 1)^2 \geq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

b) $(x + 3)^2 = -3$

Równanie to jest sprzeczne, gdyż $(x + 3)^2 \geq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

c) $(2x + 1)^2 = -4$

Równanie to jest sprzeczne, gdyż $(2x + 1)^2 \geq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

Multibook

- Wykres funkcji kwadratowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.6

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Postępując tak jak w przykładach 1–3, możemy rozwiązać dowolne równanie kwadratowe. Zwykle korzystamy jednak ze wzorów podanych w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie

Rozważmy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$.

- Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma **dwa** pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{gdzie } \Delta = b^2 - 4ac$$

- Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma **jeden** pierwiastek:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

- Jeśli $\Delta < 0$, to równanie **nie ma** pierwiastków (jest sprzeczne).

Dowód

Zapiszmy trójmian w postaci kanonicznej: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

Stąd $ax^2 + bx + c = 0$, gdy $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$, co oznacza, że:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

- Jeśli $\Delta < 0$, to powyższe równanie jest sprzeczne.
- Jeśli $\Delta = 0$, to otrzymujemy równanie:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

Jego rozwiązaniem jest liczba $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

- Jeśli $\Delta > 0$, to otrzymujemy:

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{lub} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Rozwiązaniami równania są liczby $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

W przypadku, gdy $\Delta = 0$, pierwiastek $x_0 = -\frac{b}{2a}$ nazywamy **pierwiastkiem podwójnym** (zauważ, że dla $\Delta = 0$ ze wzorów: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ otrzymujemy $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$).

Ćwiczenie 4

Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego i podaj liczbę rozwiązań równania.

- | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|--|
| a) $x^2 + 8x + 15 = 0$ | d) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ | g) $-3x^2 + \sqrt{2}x - \frac{1}{3} = 0$ |
| b) $x^2 - 4x + 6 = 0$ | e) $\frac{9}{5}x^2 - 6x + 5 = 0$ | h) $\sqrt{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$ |
| c) $5x^2 + 5x - \frac{1}{2} = 0$ | f) $-x^2 + 4x - 7 = 0$ | i) $4\sqrt{2}x^2 + 3x = 0$ |

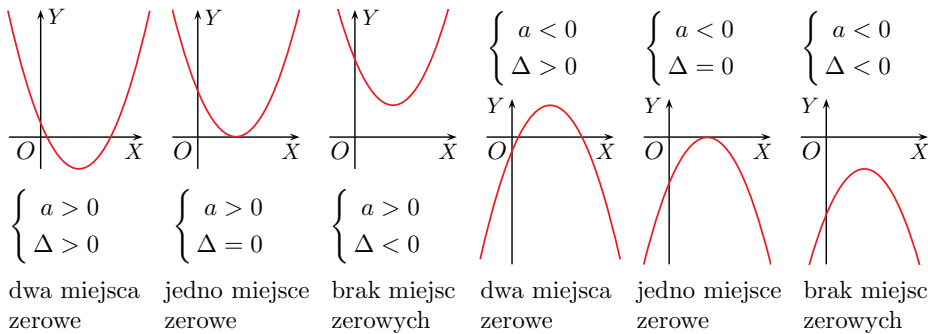
Ćwiczenie 4

- $\Delta = 4 > 0$, 2 rozwiązania
- $\Delta = -8 < 0$, 0 rozwiązań
- $\Delta = 35 > 0$, 2 rozwiązania
- $\Delta = 49 > 0$, 2 rozwiązania
- $\Delta = 0$, 1 rozwiązanie
- $\Delta = -12 < 0$, 0 rozwiązań
- $\Delta = -2 < 0$, 0 rozwiązań
- $\Delta = \frac{25}{4} - 4\sqrt{2} > 0$, 2 rozwiązania
- $\Delta = 9 > 0$, 2 rozwiązania

Interpretacja geometryczna równania kwadratowego

Rozwiązania równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ są miejscami zerowymi funkcji $y = ax^2 + bx + c$. Są one zatem odciętymi punktów przecięcia odpowiedniej paraboli z osią OX .

Poniżej przedstawiono możliwe położenia paraboli $y = ax^2 + bx + c$ względem osi OX w zależności od współczynnika a i wyróżnika Δ .



Przykład 4

Rozwiąż równanie.

a) $3x^2 - 4x - 2 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 16 + 24 = 40$. Ponieważ $\Delta > 0$, równanie ma dwa pierwiastki.

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2\sqrt{10}}{6} = \frac{2 - \sqrt{10}}{3}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2\sqrt{10}}{6} = \frac{2 + \sqrt{10}}{3}$$

b) $4x^2 + 6x + \frac{9}{4} = 0$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 4 \cdot \frac{9}{4} = 36 - 36 = 0$, równanie ma zatem jeden pierwiastek podwójny.

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

c) $7x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2 = 9 - 56 = -47 < 0$, więc równanie jest sprzeczne.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 + 7x + 3 = 0$

d) $28x^2 - 4x + \frac{1}{7} = 0$

g) $-3x^2 + 2x - 3 = 0$

b) $4x^2 - x - 5 = 0$

e) $-x^2 + 6x + 1 = 0$

h) $6x^2 - 2x - 1 = 0$

c) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

f) $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 = 0$

i) $2x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$

Ćwiczenie 5

a) $\Delta = 25, x_1 = -3, x_2 = -\frac{1}{2}$

b) $\Delta = 81, x_1 = -1, x_2 = \frac{5}{4}$

c) $\Delta = 49, x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 2$

d) $\Delta = 0, x_0 = \frac{1}{14}$

e) $\Delta = 40, x_1 = 3 - \sqrt{10}, x_2 = 3 + \sqrt{10}$

f) $\Delta = 6, x_1 = 2 - \sqrt{6}, x_2 = 2 + \sqrt{6}$

g) $\Delta = -32$, brak rozwiązań

h) $\Delta = 28, x_1 = \frac{1 - \sqrt{7}}{6}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{7}}{6}$

i) $\Delta = -1,75$, brak rozwiązań

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = 7$
 b) $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 3$
 c) $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -\frac{1}{3}$
 d) sprzeczne
 e) $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 1$
 f) $x_0 = -\frac{3}{2}$
 g) sprzeczne
 h) $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 1$
 i) $x_0 = \frac{2}{3}$
2. a) $x_1 = -3, x_2 = -\frac{1}{2}$
 b) $x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = 2$
 c) $x_0 = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$
 d) $x_1 = \frac{-1-\sqrt{19}}{3}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{19}}{3}$
 e) $x_1 = \frac{-1-\sqrt{11}}{5}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{11}}{5}$
 f), g) sprzeczne
 h) $x_1 = \frac{3-\sqrt{37}}{2}, x_2 = \frac{3+\sqrt{37}}{2}$
 i) $x_1 = \frac{7-\sqrt{37}}{6}, x_2 = \frac{7+\sqrt{37}}{6}$
3. a) $(0, -1), (-1, 0), (\frac{1}{3}, 0)$
 b) $(0, 3), (-\frac{\sqrt{3}+3}{2}, 0), (\frac{\sqrt{3}-3}{2}, 0)$
 c) $(0, 3), (-\frac{3}{4}, 0), (1, 0)$
 d) $(0, 12), (-6, 0)$
 e) $(0, 5)$
 f) $(0, 1), (-2\sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 0)$
4. a) $x_1 = -2, x_2 = \frac{1}{2}$
 b) $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{5}$
 c) $x_1 = 5 - \sqrt{13}, x_2 = 5 + \sqrt{13}$
 d) $x_1 = 6, x_2 = 12$
 e) $x_1 = \frac{7-\sqrt{37}}{2}, x_2 = \frac{7+\sqrt{37}}{2}$
 f) sprzeczne
5. a) 2 b) 0

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 - 9x - 35 = 0$	d) $5x^2 - 6x + 6 = 0$	g) $\frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0$
b) $4x^2 - 13x + 3 = 0$	e) $-2x^2 + 5x - 3 = 0$	h) $x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$
c) $-6x^2 + 13x + 5 = 0$	f) $4x^2 + 12x + 9 = 0$	i) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{9} = 0$
2. Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 + 3 = -7x$	d) $-2x - 3x^2 + 6 = 0$	g) $4(x^2 + 5) = x$
b) $x + 10 = 3x^2$	e) $5x^2 = 2 - 2x$	h) $x^2 + x = 4x + 7$
c) $16x^2 + 24\sqrt{2}x = -18$	f) $5x^2 = 8x - 5$	i) $3x^2 + 1 = 7x$
3. Wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych.

a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$	d) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 4x + 12$
b) $f(x) = 2x^2 + 6x + 3$	e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$
c) $f(x) = -4x^2 + x + 3$	f) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}x + 1$
4. Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 - 7x + 3 = (2x - 1)^2$	d) $(\frac{1}{2}x - 3)(x + 2) = (5 - x)(6 - x)$
b) $6x^2 + 7x + 2 = (2 - 3x)(3x + 2)$	e) $(x - 3)(x + 5) = (2x + 3)(x - 4)$
c) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 9 = (x - 3)(x - 5)$	f) $(4x - 1)(x - 4) = (3x + 2)(x - 7)$
5. Wyznacz liczbę rozwiązań równania.

a) $(\sqrt{2} - 1)x^2 + 2x + 2 = 0$	b) $13x^2 - (2\sqrt{3} - 1)x + \frac{1}{8} = 0$
-------------------------------------	---

Sprawdź się

6. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 4x + 4 = 0$	c) $-4x^2 + 6x - 1 = 0$	e) $\frac{1}{4}x^2 + 3x + 8 = 0$
b) $x^2 - 4x + 7 = 0$	d) $-4x^2 + 6x - 3 = 0$	f) $\frac{1}{4}x^2 + 3x - 8 = 0$
7. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f .

a) $f(x) = x^2 + 2x - 15$	b) $f(x) = 3 + 5x - 2x^2$
---------------------------	---------------------------
8. Rozwiąż równanie.

a) $x(x - 5) = 2x(x - 1)$	c) $\frac{x^2 - 5x + 4}{5} = \frac{1 - 3x}{2}$
b) $2(1 - 5x) = (1 - x)^2$	d) $\frac{(x + 1)^2}{3} = \frac{(x + 2)^2 - 2}{2}$
6. a) $x_0 = 2$
 b) sprzeczne
 c) $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{4}, x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$
 d) sprzeczne
 e) $x_1 = -8, x_2 = -4$
 f) $x_1 = -6 - 2\sqrt{17}, x_2 = -6 + 2\sqrt{17}$
7. a) $-5, 3$ b) $-\frac{1}{2}, 3$
8. a) $x_1 = -3, x_2 = 0$
 b) $x_1 = -4 - \sqrt{17}, x_2 = -4 + \sqrt{17}$
 c) $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = -1$
 d) $x_1 = -4 - 2\sqrt{3}, x_2 = -4 + 2\sqrt{3}$

1.7. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej (1)

Definicja

Postać $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **postacią iloczynową** funkcji kwadratowej.

Przedstawienie wzoru funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej nazywamy również **rozkładem na czynniki liniowe**. Rozkład na czynniki liniowe można zapisać na różne sposoby, np.:

$$\begin{aligned} y &= (3x + 2)(x - 7) = && \text{Czynniki liniowe: } 3x + 2 \text{ i } x - 7. \\ &= 3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 7) && \text{Czynniki liniowe: } x + \frac{2}{3} \text{ i } x - 7. \end{aligned}$$

Aby przejść od postaci iloczynowej do ogólnej, wystarczy wykonać mnożenie. Na przykład dla trójkianu $y = 2(x - 3)(x + 5)$ mamy:

$$y = 2(x - 3)(x + 5) = 2(x^2 + 5x - 3x - 15) = 2x^2 + 4x - 30$$

Ćwiczenie 1

Przedstaw trójkian kwadratowy w postaci ogólnej.

$$\text{a) } y = -\frac{1}{3}(x + 3)(x - 9) \quad \text{b) } y = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) \quad \text{c) } y = \frac{1}{6}x(x + 2)$$

Liczby x_1 i x_2 występujące w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ są miejscami zerowymi (pierwiastkami) trójkianu kwadratowego, czyli pierwiastkami równania $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

Przykład 1

Postać ogólna	Postać iloczynowa	Czynniki liniowe	Pierwiastki
$y = x^2 - 9x + 14$	$y = (x - 2)(x - 7)$	$x - 2$ i $x - 7$	$x_1 = 2$ i $x_2 = 7$
$y = 4x^2 + 4x + 1$	$y = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$	$x + \frac{1}{2}$ (czynnik podwójny)	$x_0 = -\frac{1}{2}$ (pierwiastek podwójny)
$y = 2x^2 + 6$	nie można rozłożyć na czynniki liniowe		brak pierwiastków

Ćwiczenie 2

Odczytaj czynniki liniowe i podaj pierwiastki trójkianu kwadratowego.

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= 4(x - 3)(x - 5) & \text{c) } y &= -(x + 4)(x + 8) & \text{e) } y &= -3(x - 2)^2 \\ \text{b) } y &= \frac{1}{4}(x - 2)(x + 6) & \text{d) } y &= 8x(x - 9) & \text{f) } y &= 13(x + 7)^2 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

- a) czynniki liniowe: $x - 3$ i $x - 5$
pierwiastki: $x_1 = 3$ i $x_2 = 5$
b) czynniki liniowe: $x - 2$ i $x + 6$
pierwiastki: $x_1 = 2$ i $x_2 = -6$
c) czynniki liniowe: $x + 4$ i $x + 8$
pierwiastki: $x_1 = -4$ i $x_2 = -8$
d) czynniki liniowe: x i $x - 9$
pierwiastki: $x_1 = 0$ i $x_2 = 9$
e) czynniki liniowe: $x - 2$ (podwójny)
pierwiastki: $x = 2$ (podwójny)
f) czynniki liniowe: $x + 7$ (podwójny)
pierwiastek: $x = -7$ (podwójny)

Uczeń:

- definiuje postać iloczynową funkcji kwadratowej i warunek jej istnienia,
- zapisuje wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej,
- odczytuje wartości pierwiastków trójkianu podanego w postaci iloczynowej,
- przekształca postać iloczynową funkcji kwadratowej do postaci ogólnej.

Ćwiczenie 1

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 9 \\ \text{b) } y &= 4x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{2}{3} \\ \text{c) } y &= \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x \end{aligned}$$

Multibook

- Postać ogólna funkcji kwadratowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.7

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

- a) $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{3}$
b) $x_1 = 1 - \sqrt{3}$, $x_2 = -1 + \sqrt{2}$

Ćwiczenie 4

- a) $y = 5x(x - \frac{3}{5})$
b) $y = 16(x - \frac{1}{4})(x + \frac{1}{4})$
c) $y = 9(x - \frac{2\sqrt{2}}{3})(x + \frac{2\sqrt{2}}{3})$

Ćwiczenie 3

Podaj pierwiastki trójmianu kwadratowego.

- a) $y = -2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3})$ b) $y = (x - 1 + \sqrt{3})(x + 1 - \sqrt{2})$

Ćwiczenie 4

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej.

- a) $y = 5x^2 - 3x$ b) $y = 16x^2 - 1$ c) $y = 9x^2 - 8$

Twierdzenie

Dany jest trójmian kwadratowy $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

- Jeśli $\Delta > 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta = 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 jest pierwiastkiem podwójnym tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta < 0$, to trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe.

Przykład 2

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

- a) $y = 2x^2 + 5x - 3$

$\Delta = 25 + 24 = 49$, $\sqrt{\Delta} = 7$, zatem:

$$x_1 = \frac{-5-7}{4} = -3, \quad x_2 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$$

Postać iloczynowa: $y = 2(x + 3)(x - \frac{1}{2})$.

- b) $y = x^2 - 2x - 1$

$\Delta = 4 + 4 = 8$, $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$, zatem:

$$x_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}, \quad x_2 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

Postać iloczynowa: $y = (x - (1 - \sqrt{2}))(x - (1 + \sqrt{2}))$, którą możemy zapisać: $y = (x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2})$.

- c) $y = -2x^2 + x - 4$

$\Delta = 1 - 32 = -31 < 0$, więc trójmian nie ma pierwiastków i nie można go rozłożyć na czynniki liniowe.

Ćwiczenie 5

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

- a) $y = x^2 - 8x + 15$ d) $y = 12x^2 + 11x + 2$ g) $y = 2x^2 - 3x + 4$
b) $y = x^2 + 3x - 28$ e) $y = -2x^2 - 2x + 24$ h) $y = x^2 - 2x - 2$
c) $y = 3x^2 - 7x + 2$ f) $y = -4x^2 + 3x + 1$ i) $y = 2x^2 - 2x - 1$

Ćwiczenie 5

- a) $\Delta = 4$, $y = (x - 3)(x - 5)$

- b) $\Delta = 121$, $y = (x + 7)(x - 4)$

- c) $\Delta = 25$, $y = 3(x - \frac{1}{3})(x - 2)$

- d) $\Delta = 25$, $y = 12(x + \frac{2}{3})(x + \frac{1}{4})$

- e) $\Delta = 196$, $y = -2(x - 3)(x + 4)$

- f) $\Delta = 25$, $y = -4(x + \frac{1}{4})(x - 1)$

- g) $\Delta = -23 < 0$, zatem trójmian nie ma pierwiastków i nie można zapisać go w postaci iloczynowej.

- h) $\Delta = 12$, $y = (x + \sqrt{3} - 1)(x - \sqrt{3} - 1)$

- i) $\Delta = 12$, $y = 2(x - \frac{1-\sqrt{3}}{2})(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2})$

Zadania

1. Podaj pierwiastki trójkątnika kwadratowego i zapisz go w postaci ogólnej.
 - a) $y = (x + 10)(x - 20)$ d) $y = (2x - 4)(2x - 1)$ g) $y = -x(x + 3)$
 - b) $y = 6(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})$ e) $y = (2x + 1)(3x + 1)$ h) $y = \frac{1}{2}x(2x - 1)$
 - c) $y = 2(x + 3)(3x - 4)$ f) $y = (5x - 2)(4x - 3)$ i) $y = (7 - 3x)x$
2. Przedstaw trójkątnik kwadratowy w postaci iloczynowej.
 - a) $y = x^2 - x - 6$ d) $y = -2x^2 + 4x - 1$ g) $y = 3x^2 - 10x - 8$
 - b) $y = -x^2 + x + 6$ e) $y = 3x^2 - 7x + 4$ h) $y = x^2 - 2x + \frac{1}{2}$
 - c) $y = 2x^2 - 3x - 2$ f) $y = -4x^2 + 2x + 1$ i) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 7$
3. Przedstaw funkcję f w postaci iloczynowej. Podaj jej miejsca zerowe.
 - a) $f(x) = 4x^2 - 1$ c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x$ e) $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$
 - b) $f(x) = 9x^2 - 16$ d) $f(x) = 6x - 9x^2$ f) $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$
-  4. a) Uzasadnij, że trójkątnik kwadratowy $y = \sqrt{2}x^2 + (3 - \sqrt{2})x + \frac{1}{4}$ można przedstawić w postaci iloczynowej.
 b) Uzasadnij, że trójkątniku kwadratowego $y = \sqrt{3}x^2 + (3 - \sqrt{3})x + \frac{1}{2}$ nie można przedstawić w postaci iloczynowej.
5. Przedstaw funkcję f w postaciach iloczynowej i kanonicznej. Naskicuj parabolę, która jest wykresem tej funkcji.
 - a) $f(x) = -x^2 - 4x$ c) $f(x) = 2x^2 + 2x$ e) $f(x) = -x^2 - 4x - 3$
 - b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2}$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ f) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - 1$

Sprawdź się

6. Oblicz pierwiastki trójkątnika kwadratowego i zapisz go w postaci iloczynowej.
 - a) $y = x^2 - 5x - 6$ c) $y = -6x^2 - 7x + 3$ e) $y = (x - 2)^2 - 4$
 - b) $y = 2x^2 - 8x + 6$ d) $y = -x^2 + 4x - 4$ f) $y = -2(x - 2)^2 + 2$
7. Przedstaw trójkątnik kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.
 - a) $y = x^2 + \sqrt{3}x - 6$ b) $y = \sqrt{3}x^2 + 6x$ c) $y = \sqrt{3}x^2 + 9$
8. Znajdź punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych.
 - a) $y = x(x + 6)$ c) $y = (x + 2)(x - 4)$ e) $y = -(2x + 4)(6x - 3)$
 - b) $y = -\frac{1}{2}x(x - 3)$ d) $y = (x - 6)(x + \frac{1}{2})$ f) $y = (2x - 3)(4x + 5)$
5. a) $f(x) = -x(x + 4) = -(x + 2)^2 + 4$
 b) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)(x + 5) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 2$
 c) $f(x) = 2x(x + 1) = 2(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}$
 d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)(x - 2) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$
 e) $f(x) = -(x + 1)(x + 3) = -(x + 2)^2 + 1$
 f) $f(x) = \frac{1}{4}(x + 1)(x - 4) = \frac{1}{4}(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{16}$
6. a) $x_1 = -1, x_2 = 6, y = (x - 6)(x + 1)$
 b) $x_1 = 1, x_2 = 3, y = 2(x - 1)(x - 3)$
 c) $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = \frac{1}{3}, y = -6(x + \frac{3}{2})(x - \frac{1}{3})$
 d) $x_0 = 2, y = -(x - 2)^2$
 e) $x_1 = 0, x_2 = 4, y = x(x - 4)$
 f) $x_1 = 1, x_2 = 3, y = -2(x - 1)(x - 3)$
7. a) $y = (x + 2\sqrt{3})(x - \sqrt{3})$
 b) $y = \sqrt{3}x(x + 2\sqrt{3})$
 c) nie ma postaci iloczynowej
8. a) $(-6, 0), (0, 0)$
 b) $(0, 0), (3, 0)$
 c) $(-2, 0), (4, 0), (0, -8)$
 d) $(-\frac{1}{2}, 0), (6, 0), (0, -3)$
 e) $(-2, 0), (\frac{1}{2}, 0), (0, 12)$
 f) $(-\frac{5}{4}, 0), (\frac{3}{2}, 0), (0, -15)$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x_1 = -10, x_2 = 20,$
 $y = x^2 - 10x - 200$
 b) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{2},$
 $y = 6x^2 - 5x + 1$
 c) $x_1 = -3, x_2 = \frac{4}{3},$
 $y = 6x^2 + 10x - 24$
 d) $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2,$
 $y = 4x^2 - 10x + 4$
 e) $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{3},$
 $y = 6x^2 + 5x + 1$
 f) $x_1 = \frac{2}{5}, x_2 = \frac{3}{4},$
 $y = 20x^2 - 23x + 6$
 g) $x = -3, x = 0,$
 $y = -x^2 - 3x$
 h) $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, y = x^2 - \frac{1}{2}x$
 i) $x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{3},$
 $y = -3x^2 + 7x$
2. a) $y = (x - 3)(x + 2)$
 b) $y = -(x - 3)(x + 2)$
 c) $y = 2(x + \frac{1}{2})(x - 2)$
 d) $y = -2(x - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot (x - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$
 e) $y = 3(x - 1)(x - \frac{4}{3})$
 f) $y = -4(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{4}) \cdot (x - \frac{1 - \sqrt{5}}{4})$
 g) $y = 3(x - 4)(x + \frac{2}{3})$
 h) $y = (x - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot (x - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$
 i) $y = -\frac{1}{4}(x + 2)(x - 14)$
3. a) $f(x) = 4(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}),$
 $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$
 b) $f(x) = 9(x + \frac{4}{3})(x - \frac{4}{3}),$
 $x_1 = -\frac{4}{3}, x_2 = \frac{4}{3}$
 c) $f(x) = \frac{1}{3}x(x + \frac{1}{2}),$
 $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 0$
 d) $f(x) = -9x(x - \frac{2}{3}),$
 $x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}$
 e) $f(x) = 9(x + \frac{1}{3})^2,$
 $x_0 = -\frac{1}{3}$
 f) $f(x) = 4(x - \frac{3}{2})^2, x_0 = \frac{3}{2}$
4. a) $\Delta = (3 - \sqrt{2})^2 - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{4} = 11 - 7\sqrt{2} = \sqrt{121} - \sqrt{98} > 0,$ zatem trójkątnik ma dwa pierwiastki, czyli można przedstawić go w postaci iloczynowej.
 b) $\Delta = (3 - \sqrt{3})^2 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 12 - 8\sqrt{3} = 4(\sqrt{9} - \sqrt{12}) < 0,$ zatem trójkątnik nie ma pierwiastków, czyli nie można przedstawić go w postaci iloczynowej.

Uczeń:

- wykorzystuje postać iloczynową funkcji kwadratowej do rozwiązywania zadań o różnym stopniu trudności,
- zapisuje w każdej z trzech możliwych postaci wzór funkcji kwadratowej, której wykres przedstawiono na rysunku.

Ćwiczenie 1

- a) $y = (x - 3)(x - 5) = x^2 - 8x + 15$,
 $b = -8$, $c = 15$
- b) $y = (x - 4)(x + 3) = x^2 - x - 12$,
 $b = -1$, $c = -12$
- c) $y = (x + 5)(x + 2) = x^2 + 7x + 10$,
 $b = 7$, $c = 10$
- d) $y = (x + 2)(x - \frac{1}{2}) = x^2 + \frac{3}{2}x - 1$,
 $b = \frac{3}{2}$, $c = -1$
- e) $y = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = x^2 - 3$,
 $b = 0$, $c = -3$

Ćwiczenie 2

- a) $x = 3$, $W(3, -9)$
- b) $x = 5$, $W(5, 25)$
- c) $x = -2$, $W(-2, -8)$
- d) $x = \frac{1}{2}$, $W(\frac{1}{2}, 24\frac{1}{2})$
- e) $x = \frac{1}{2}$, $W(\frac{1}{2}, -4)$
- f) $x = \frac{3}{4}$, $W(\frac{3}{4}, 4)$

1.8. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej (2)

Przykład 1

Oblicz współczynniki b i c trójmianu kwadratowego $y = x^2 + bx + c$, którego pierwiastkami są liczby -4 i 2 .

Trójmian zapisujemy w postaci iloczynowej, a następnie przekształcamy ją do postaci ogólnej: $y = (x + 4)(x - 2) = x^2 - 2x + 4x - 8 = x^2 + 2x - 8$.

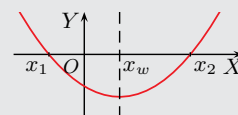
Wynika stąd, że $b = 2$ i $c = -8$.

Ćwiczenie 1

Oblicz współczynniki b i c trójmianu kwadratowego $y = x^2 + bx + c$, którego pierwiastkami są podane liczby.

- a) 3 i 5 b) 4 i -3 c) -5 i -2 d) -2 i $\frac{1}{2}$ e) $\sqrt{3}$ i $-\sqrt{3}$

Znajomość miejsc zerowych x_1 , x_2 funkcji kwadratowej pozwala wyznaczyć oś symetrii paraboli i współrzędną x_w jej wierzchołka, gdyż $x_w = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

**Przykład 2**

Wyznacz równanie osi symetrii oraz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = 2(x - 1)(x - 5)$.

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby $x_1 = 1$ i $x_2 = 5$, zatem współrzędna wierzchołka $x_w = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + 5}{2} = 3$.

Ośią symetrii paraboli jest prosta $x = 3$. Wyznaczamy rzędną wierzchołka:

$$y_w = f(x_w) = f(3) = 2(3 - 1)(3 - 5) = -8$$

Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(3, -8)$.

Ćwiczenie 2

Wyznacz równanie osi symetrii paraboli oraz współrzędne jej wierzchołka.

- a) $y = x(x - 6)$ c) $y = \frac{1}{2}(x + 6)(x - 2)$ e) $y = (2x + 1)(2x - 3)$
b) $y = -x(x - 10)$ d) $y = -2(x + 3)(x - 4)$ f) $y = (4x - 1)(5 - 4x)$

Ćwiczenie 3

Miejsca zerowe funkcji $f(x) = \frac{1}{2}(x - x_1)(x - x_2)$ spełniają podane warunki. Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f .

- a) $x_2 = 2x_1$, $x_1 + x_2 = 6$ b) $x_2 = 3x_1$, $x_1 + x_2 = -12$

Ćwiczenie 3

- a) $x_w = \frac{x_1 + x_2}{2} = 3$

$3x_1 = 6$, czyli $x_1 = 2$ oraz $x_2 = 4$

Zatem $f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)(x - 4)$

$$y_w = f(x_w) = f(3) = \frac{1}{2}(3 - 2)(3 - 4) = -\frac{1}{2}$$

Wierzchołek paraboli: $W(3, -\frac{1}{2})$.

- b) $x_w = \frac{x_1 + x_2}{2} = -6$

$4x_1 = -12$, czyli $x_1 = -3$ oraz $x_2 = -9$

Zatem $f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)(x + 9)$

$$y_w = f(x_w) = f(-6) = \frac{1}{2}(-6 + 3)(-6 + 9) = -\frac{9}{2}$$

Wierzchołek paraboli: $W(-6, -\frac{9}{2})$

Multibook

- Krzywa łańcuchowa i krzywa balistyczna

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.8

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 3

Wyznacz trójmian kwadratowy, którego pierwiastkami są liczby 2 i 4, a zbiorem wartości jest przedział $[-2; \infty)$.

Trójmian zapisujemy w postaci iloczynowej: $y = a(x - 2)(x - 4)$.

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka paraboli: $x_w = \frac{2+4}{2} = 3$; zbiorem wartości funkcji jest przedział $[-2; \infty)$, zatem $y_w = -2$.

Podstawiamy $x = 3$ i $y = -2$ do wzoru $y = a(x - 2)(x - 4)$ i otrzymujemy $-2 = a(3 - 2)(3 - 4)$, więc $a = 2$. Zatem trójmian ma postać $y = 2(x - 2)(x - 4)$.

Ćwiczenie 4

Wyznacz trójmian kwadratowy o pierwiastkach x_1, x_2 i zbiorze wartości Y .

- a) $x_1 = -1, x_2 = 3, Y = [-4; \infty)$ c) $x_1 = -8, x_2 = 2, Y = (-\infty; 10]$
b) $x_1 = -4, x_2 = 0, Y = (-\infty; 2]$ d) $x_1 = 0, x_2 = 6, Y = [-6; \infty)$

Przykład 4

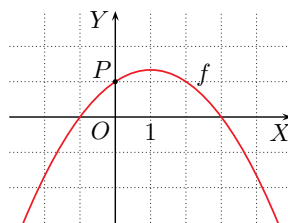
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji kwadratowej f . Zapisz wzór tej funkcji w postaci iloczynowej.

Miejscami zerowymi tej funkcji są liczby $x_1 = -1$ oraz $x_2 = 3$, zatem jej wzór można zapisać w postaci iloczynowej $f(x) = a(x + 1)(x - 3)$.

Do wzoru funkcji podstawiamy współrzędne punktu $P(0, 1)$ i otrzymujemy równanie:

$$1 = a(0 + 1)(0 - 3)$$

Stąd $a = -\frac{1}{3}$, zatem postać iloczynowa funkcji: $f(x) = -\frac{1}{3}(x + 1)(x - 3)$.



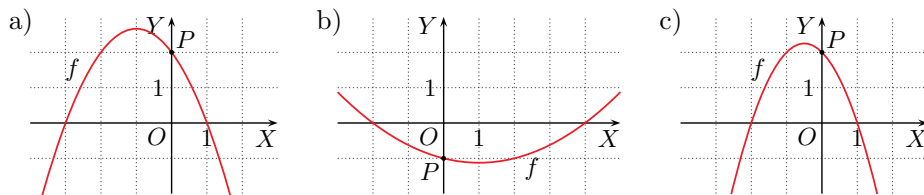
Ćwiczenie 5

Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f są liczby -1 oraz 3 . Do wykresu tej funkcji należy punkt P . Wyznacz wzór funkcji f w postaci iloczynowej.

- a) $P(1, -2)$ b) $P(2, 3)$ c) $P(-3, -2)$

Ćwiczenie 6

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji kwadratowej f . Zapisz wzór tej funkcji w postaci iloczynowej.



Ćwiczenie 6

- a) Miejsca zerowe funkcji f : $x_1 = -3, x_2 = 1$, zatem $f(x) = a(x + 3)(x - 1)$.
 $f(0) = -3a = 2$, skąd $a = -\frac{2}{3}$, czyli $f(x) = -\frac{2}{3}(x + 3)(x - 1)$.
b) Miejsca zerowe funkcji f : $x_1 = -2, x_2 = 4$, zatem $f(x) = a(x + 2)(x - 4)$.
 $f(0) = -8a = -1$, skąd $a = \frac{1}{8}$, czyli $f(x) = \frac{1}{8}(x + 2)(x - 4)$.
c) Miejsca zerowe funkcji f : $x_1 = -2, x_2 = 1$, zatem $f(x) = a(x + 2)(x - 1)$.
 $f(0) = -2a = 2$, skąd $a = -1$, czyli $f(x) = -(x + 2)(x - 1)$.

Ćwiczenie 4

a) $y = a(x + 1)(x - 3)$

Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli:

$$x_w = \frac{-1+3}{2} = 1, y_w = -4$$

Zatem $a(1 + 1)(1 - 3) = -4$, czyli $a = 1$.

Postać iloczynowa:

$$y = (x + 1)(x - 3)$$

Postać ogólna: $y = x^2 - 2x - 3$

b) $y = ax(x + 4)$

Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli:

$$x_w = \frac{-4+0}{2} = -2, y_w = 2$$

Zatem $a(-2)(-2 + 4) = 2$, czyli $a = -\frac{1}{2}$.

Postać iloczynowa:

$$y = -\frac{1}{2}x(x + 4)$$

Postać ogólna: $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$

c) $y = -\frac{2}{5}(x + 8)(x - 2) =$
 $= -\frac{2}{5}x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{32}{5}$

d) $y = \frac{2}{3}x(x - 6) =$
 $= \frac{2}{3}x^2 - 4x$

Ćwiczenie 5

a) $f(x) = a(x + 1)(x - 3)$
 $f(1) = -4a = -2$, stąd $a = \frac{1}{2}$,
czyli $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 3)$

b) $f(x) = a(x + 1)(x - 3)$
 $f(2) = -3a = 3$, stąd $a = -1$,
czyli $f(x) = -(x + 1)(x - 3)$

c) $f(x) = a(x + 1)(x - 3)$
 $f(-3) = 12a = -2$, stąd $a = -\frac{1}{6}$,
czyli $f(x) = -\frac{1}{6}(x + 1)(x - 3)$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $f(x) = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$
 b) $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-3) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$
 c) $f(x) = -x(x+4) = -x^2 - 4x$

2. a) $y = 2(x-1)(x-4) = 2x^2 - 10x + 8$
 b) $y = \frac{1}{2}(x+6)(x-2) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$
 c) $y = -(x-2)(x+5) = -x^2 - 3x + 10$
 d) $y = -3(x-1)(x-3) = -3x^2 + 12x - 9$

3. a) $x = 1$,
 $f(x) = (x-1)(x-5)$,
 $f(x) = (x-3)^2 - 4$
 b) $x = 0$, $f(x) = -\frac{1}{2}x(x+4)$,
 $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2$
 c) $x = 5$,
 $f(x) = \frac{1}{3}(x+1)(x-5)$,
 $f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2 - 3$

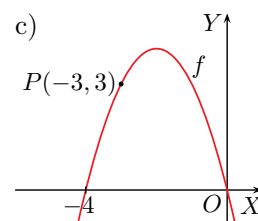
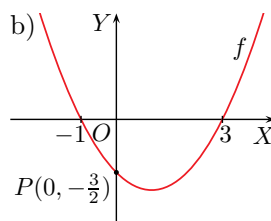
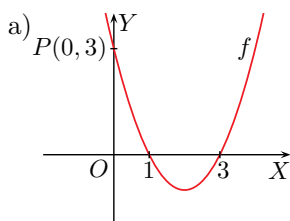
4. a) $f(x) = 2x^2 + 8x + 6 = 2(x+2)^2 - 2$
 b) $f(x) = 2x^2 - 4x = 2(x-1)^2 - 2$
 c) $f(x) = 2x^2 - 20x + 42 = 2(x-5)^2 - 8$

5. a) $(0, 0)$, $(-6, 0)$, $W(-3, 9)$
 b) $(1, 0)$, $(5, 0)$, $(0, 5)$,
 $W(3, -4)$
 c) $(-3, 0)$, $(1, 0)$, $(0, \frac{3}{2})$,
 $W(-1, 2)$

6. a) $y = a(x+2)(x-4)$
 Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli:
 $x_w = \frac{-2+4}{2} = 1$, $y_w = -6$
 Zatem $a(1+2)(1-4) = -6$,
 czyli $a = \frac{2}{3}$.
 Postać ogólna:
 $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{16}{3}$
 Postać iloczynowa:
 $y = \frac{2}{3}(x+2)(x-4)$
 Postać kanoniczna:
 $y = \frac{2}{3}(x-1)^2 - 6$

Zadania

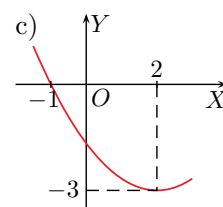
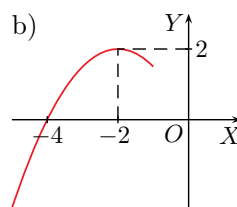
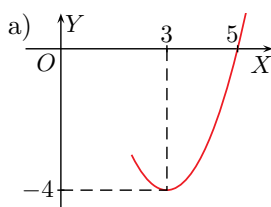
1. Na rysunku przedstawiono parabolę, która jest wykresem funkcji kwadratowej f . Wyznacz wzór tej funkcji w postaciach iloczynowej i ogólnej.



2. Wyznacz w postaciach iloczynowej i ogólnej równanie paraboli przechodzącej przez punkty A , B i C .

a) $A(1, 0)$, $B(4, 0)$, $C(3, -4)$ c) $A(-5, 0)$, $B(-3, 10)$, $C(2, 0)$
 b) $A(-6, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, -6)$ d) $A(0, -9)$, $B(1, 0)$, $C(3, 0)$

3. Na rysunku przedstawiono fragment paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej f . Znajdź miejsce zerowe tej funkcji niezaznaczone na rysunku. Wyznacz wzór funkcji f w postaciach iloczynowej i kanonicznej.



4. Wykres funkcji f można otrzymać przez przesunięcie paraboli $y = 2x^2$. Wyznacz wzór funkcji f w postaciach ogólnej i kanonicznej przy założeniu, że jej miejscami zerowymi są liczby: a) -3 i -1 , b) 0 i 2 , c) 3 i 7 .

Sprawdź się

5. Znajdź punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych oraz wyznacz współrzędne jej wierzchołka. Naszkicuj tę parabolę.

a) $y = -x(x+6)$ b) $y = (x-1)(x-5)$ c) $y = -\frac{1}{2}(x+3)(x-1)$

6. Wyznacz trójmian kwadratowy o pierwiastkach x_1, x_2 i zbiorze wartości Y . Odpowiedź podaj w każdej z postaci wymienionych w ramce.

a) $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, $Y = [-6; \infty)$
 b) $x_1 = -6$, $x_2 = 0$, $Y = (-\infty; 8]$
 c) $x_1 = 1$, $x_2 = 7$, $Y = (-\infty; 2]$

Postać ogólna: $y = ax^2 + bx + c$
 Postać kanoniczna: $y = a(x-p)^2 + q$
 Postać iloczynowa: $y = a(x-x_1)(x-x_2)$

b) $y = a(x+6)x$
 Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli:

$x_w = \frac{-6+0}{2} = -3$, $y_w = 8$
 Zatem $a(-3+6)(-3) = 8$,
 czyli $a = -\frac{8}{9}$.
 Postać ogólna: $y = -\frac{8}{9}x^2 - \frac{16}{3}x$
 Postać iloczynowa: $y = -\frac{8}{9}(x+6)x$
 Postać kanoniczna:
 $y = -\frac{8}{9}(x+3)^2 + 8$

c) $y = a(x-1)(x-7)$
 Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli:

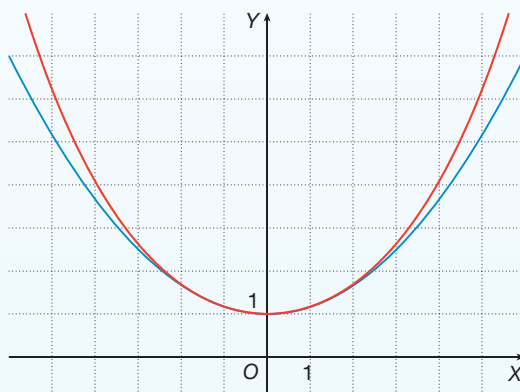
$x_w = \frac{1+7}{2} = 4$, $y_w = 2$
 Zatem $a(4-1)(4-7) = 2$, czyli $a = -\frac{2}{9}$.
 Postać ogólna: $y = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{16}{9}x - \frac{14}{9}$
 Postać iloczynowa: $y = -\frac{2}{9}(x-1)(x-7)$
 Postać kanoniczna: $y = -\frac{2}{9}(x-4)^2 + 2$

Krzywa łańcuchowa

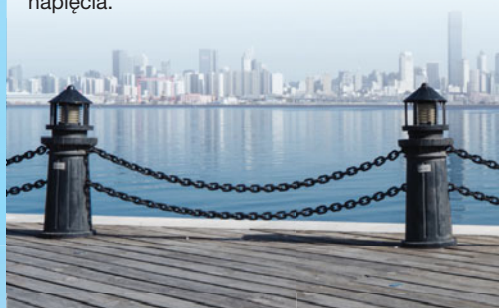
Wiszący, zamocowany na końcach łańcuch przyjmuje kształt przypominający parabolę. W 1638 r. opisywał to już Galileusz, włoski fizyk i astronom.

W drugiej połowie XVII w. wykazano, że jest to inna krzywa, zwana **krzywą łańcuchową** lub *catenarią* [czyt. katenarią], od łacińskiego słowa *catena* [czyt. katena] oznaczającego łańcuch.

Na rysunku obok przedstawiono **krzywą łańcuchową** (kolor czerwony) oraz **parabolę** (kolor niebieski), która dla wartości argumentów bliskich 0 jest bardzo dobrym przybliżeniem tej krzywej łańcuchowej.



Kształt krzywej łańcuchowej przyjmują wiszące łańcuchy, liny lub przewody wysokiego napięcia.



Krzywa ta jest wykorzystywana w architekturze. Na zdjęciu monument Gateway Arch w Saint Louis w Stanach Zjednoczonych.



- 1 Skorzystaj z dostępnych źródeł i znajdź inne przykłady wykorzystania krzywej łańcuchowej w architekturze.

Uczeń:

- wyjaśnia związek między rozwiązaniem nierówności kwadratowej a znakiem wartości odpowiedniego trójmianu kwadratowego,
- rozwiązuje nierówność kwadratową,
- wykorzystuje nierówności kwadratowe do rozwiązywania zadań o różnym stopniu trudności, w szczególności wyznacza dziedzinę funkcji, w której wzorze występuje pierwiastek kwadratowy,
- zaznacza na osi liczbowej iloczyn, sumę i różnicę zbiorów rozwiązań dwóch nierówności kwadratowych.

Komentarz

Po omówieniu przykładów 1. i 2. warto zaproponować uczniom, aby przeanalizowali je ponownie i ułożyli plan rozwiązywania nierówności kwadratowych. Przykładowy algorytm:

1. Obliczenie pierwiastków równania.
2. Zaznaczenie miejsc zerowych na osi.
3. Naszkicowanie wykresu.
4. Odczytanie z wykresu rozwiązania nierówności.

Komentarz

Dużym ułatwieniem przy odczytywaniu zbiorów rozwiązań nierówności jest zaznaczenie na szkicu wykresu znaków „+” i „-” (jak na rysunkach w przykładzie 2.).

1.9. Nierówności kwadratowe

Jeśli mamy wykres funkcji kwadratowej i znamy jej miejsca zerowe, możemy wyznaczyć zbiór rozwiązań odpowiedniej nierówności kwadratowej.

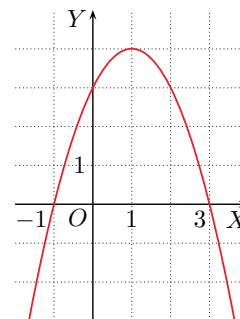
Przykład 1

Dany jest wykres funkcji $y = -x^2 + 2x + 3$. Rozwiąż nierówność $-x^2 + 2x + 3 > 0$.

Z wykresu odczytujemy, że:

$$-x^2 + 2x + 3 > 0 \text{ dla } x \in (-1; 3)$$

Uwaga. Zauważ, że do rozwiązania nierówności kwadratowej nie potrzebujemy dokładnego wykresu odpowiedniej funkcji. Wystarczy znajomość jej miejsc zerowych i informacja o tym, czy ramiona paraboli, będącej wykresem tej funkcji, są skierowane do góry, czy w dół.



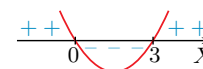
Przykład 2

a) Rozwiąż nierówność $2x^2 - 6x > 0$.

W celu wyznaczenia miejsc zerowych funkcji $y = 2x^2 - 6x$ rozwiązujemy równanie $2x^2 - 6x = 0$, czyli $2x(x - 3) = 0$. Zatem $x = 0$ lub $x = 3$.

Rozwiązania równania zaznaczamy na osi OX . Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych do góry (współczynnik przy x^2 jest dodatni), przechodzącą przez zaznaczone punkty. Ze szkicu wykresu odczytujemy:

$$2x^2 - 6x > 0 \text{ dla } x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$$



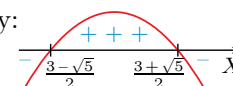
b) Rozwiąż nierówność $-x^2 + 3x - 1 \geq 0$.

Rozwiązujemy równanie $-x^2 + 3x - 1 = 0$.

$$\Delta = 9 - 4 = 5, \text{ zatem } x_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{-2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Rozwiązania równania zaznaczamy na osi OX . Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół (współczynnik przy x^2 jest ujemny), przechodzącą przez zaznaczone punkty. Ze szkicu wykresu odczytujemy:

$$-x^2 + 3x - 1 \geq 0 \text{ dla } x \in \left[\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right]$$



Ćwiczenie 1

Rozwiąż nierówność.

a) $3x^2 - 2x - 1 \geq 0$

b) $2x^2 + x - 1 \leq 0$

c) $-x^2 + 2x + 4 > 0$

Ćwiczenie 1

a) $x \in (-\infty; -\frac{1}{3}] \cup [1; \infty)$

b) $x \in [-1; \frac{1}{2}]$

c) $x \in (1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5})$

Multibook

- Nierówność kwadratowa

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.9

Generator
testów i sprawdzianów

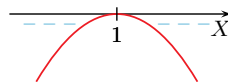
Przykład 3

Rozwiąż nierówność $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$.

Rozwiązujemy równanie $-x^2 + 2x - 1 = 0$, czyli $-(x - 1)^2 = 0$. Zatem $x = 1$ (jest to pierwiastek podwójny). Rozwiązanie równania zaznaczamy na osi OX i szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół.

Ze szkicu wykresu odczytujemy:

$$-x^2 + 2x - 1 \geq 0 \text{ dla } x = 1$$



Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność.

a) $-x^2 + 2x - 1 \leq 0$

b) $-x^2 + 2x - 1 < 0$

c) $-x^2 + 2x - 1 > 0$

Ćwiczenie 2

a) $x \in \mathbb{R}$

b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

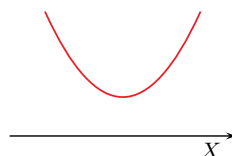
c) sprzeczna

Przykład 4

a) Rozwiąż nierówność $5x^2 - 3x + 2 < 0$.

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = -31 < 0$$

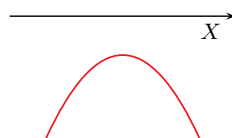
Równanie $5x^2 - 3x + 2 = 0$ nie ma pierwiastków oraz współczynnik przy x^2 jest dodatni. Parabola znajduje się zatem nad osią OX , a to oznacza, że nierówność jest sprzeczna.



b) Rozwiąż nierówność $-3x^2 + 2x - 1 < 0$.

$$\Delta = 4 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1) = -8 < 0$$

Równanie $-3x^2 + 2x - 1 = 0$ nie ma pierwiastków oraz współczynnik przy x^2 jest ujemny. Parabola znajduje się zatem pod osią OX , a to oznacza, że nierówność jest prawdziwa dla dowolnego x , czyli $x \in \mathbb{R}$.



Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

a) $4x^2 + 2x + 1 > 0$

b) $x^2 + x + 3 < 0$

c) $-2x^2 + \sqrt{2}x - 1 \leq 0$

Ćwiczenie 3

a) $\Delta = -12 < 0$, $a = 4 > 0$,
zatem $x \in \mathbb{R}$

b) $\Delta = -11 < 0$, $a = 1 > 0$,
zatem nierówność jest sprzeczna

c) $\Delta = -6 < 0$, $a = -2 < 0$,
zatem $x \in \mathbb{R}$

Przykład 5

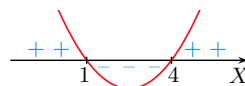
Rozwiąż nierówność $2(2 - x) < -x(x - 3)$.

$$4 - 2x < -x^2 + 3x$$

$$x^2 - 5x + 4 < 0$$

Wykonujemy mnożenie.
Przenosimy wszystkie wyrazy
na lewą stronę nierówności.

Rozwiązujemy równanie $x^2 - 5x + 4 = 0$ i otrzymujemy $x = 1$ lub $x = 4$. Szkicujemy parabolę i odczytujemy, że nierówność jest spełniona dla $x \in (1; 4)$.



Ćwiczenie 4

- a) $2x^2 + x - 3 \leq 0$, $x \in [-\frac{3}{2}; 1]$
b) $2x^2 - 2x - 1 > 0$,
 $x \in (-\infty; \frac{1-\sqrt{3}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \infty)$
c) $x^2 - 4x + 25 > 0$, $x \in \mathbb{R}$
d) $x^2 - 2x + 1 > 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
e) $5x^2 - 2x < 0$, $x \in (0; \frac{2}{5})$
f) $2x^2 - 5x - 3 \leq 0$, $x \in [-\frac{1}{2}; 3]$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x \in (-\infty; -5) \cup (5; \infty)$
b) $x \in [-4; 4]$
c) $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}; \infty)$
d) $x \in (-\infty; -2] \cup [3; \infty)$
e) $x \in [-1; 4]$
f) $x \in (-1; 5)$
g) $x \in [-\frac{1}{2}; 5]$
h) $x \in (-\infty; -3) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
i) sprzeczna
j) $x \in (-\infty; -\frac{4}{3}) \cup (\frac{2}{3}; \infty)$
k) $x \in [-2; 8]$
l) sprzeczna
2. a) $x \in [-6; 6]$, trzynaście
b) $x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$, nieskończenie wiele
c) $x \in [-2; 2\frac{1}{2}]$, pięć
d) $x \in (-2; 1)$, dwie
3. a) $x \in [3 - \sqrt{6}; 3 + \sqrt{6}]$; 1, 2, 3, 4, 5
b) $x \in [\frac{3-2\sqrt{6}}{3}; \frac{3+2\sqrt{6}}{3}]$; 0, 1, 2
c) $x \in [\frac{-1-\sqrt{31}}{2}; \frac{-1+\sqrt{31}}{2}]$; -3, -2, -1, 0, 1, 2
4. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$
b) $x \in \mathbb{R}$
c) $x \in (-\infty; -5] \cup [\frac{1}{3}; \infty)$
d) $x \in \mathbb{R}$
e) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{9}\}$
f) $x \in (-\infty; -4] \cup [\frac{1}{2}; \infty)$
g) sprzeczna
h) $x = \frac{3}{2}$
i) sprzeczna

Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

- a) $x - x^2 \leq 3 - 3x^2$ c) $(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3})^2 > \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$ e) $(2x+1)^2 + (x-3)^2 < 10$
b) $-x(2-x) > 1 - x^2$ d) $2 - x^2 < (2-x)^2$ f) $3x - (1-x)^2 \geq x^2 - 4$

Rozwiązywanie nierówności kwadratowej składa się z kolejnych etapów:

- rozwiązanie odpowiedniego równania,
- naszkicowanie odpowiedniej paraboli,
- odczytanie z rysunku rozwiązania nierówności,
- zapisanie odpowiedzi.

Zadania

1. Rozwiąż nierówność.

- a) $x^2 > 25$ d) $x^2 - x \geq 6$ g) $9x + 5 \geq 2x^2$ j) $6x^2 - x > 12$
b) $x^2 \leq 16$ e) $x^2 - 4 \leq 3x$ h) $2x^2 + 5x > 3$ k) $3x + 8 \geq \frac{1}{2}x^2$
c) $4x^2 \geq 9$ f) $4x + 5 > x^2$ i) $3x^2 + 1 < x$ l) $\frac{2}{3}x^2 + 6 \leq x$

2. Ile liczb całkowitych spełnia podaną nierówność?

- a) $9 - \frac{1}{4}x^2 \geq 0$ b) $\frac{1}{3}x^2 > x$ c) $2x^2 - 10 \leq x$ d) $2 - x > x^2$

3. Wyznacz wszystkie liczby całkowite spełniające podaną nierówność.

- a) $x^2 - 6x + 3 \leq 0$ b) $-3x^2 + 6x + 5 > 0$ c) $2x^2 + 2x - 15 < 0$

4. Rozwiąż nierówność.

- a) $-2x^2 + 6x - \frac{9}{2} < 0$ d) $x^2 + 2x + 2 > 0$ g) $2x^2 - x + \frac{1}{2} \leq 0$
b) $-3x^2 + 2x - \frac{1}{3} \leq 0$ e) $-9x^2 + 2x - \frac{1}{9} < 0$ h) $-4x^2 + 12x - 9 \geq 0$
c) $3x^2 + 14x - 5 \geq 0$ f) $-2x^2 - 7x + 4 \leq 0$ i) $x^2 + x + 1 < 0$

5. a) Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = x^2 - 6x + 5$ przyjmuje wartości większe od 5, a dla jakich mniejsze od -3?

- b) Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = x^2 - 8x + 15$ przyjmuje wartości należące do przedziału $(3; 8)$?

6. Rozwiąż nierówność.

- a) $(2x-2)(x-3) < (x-3)(x-4)$ d) $(2x-2)^2 \geq (3x-2)(x-3)$
b) $(3x-1)(x+2) \geq (x-3)(2x-1)$ e) $2x^2 - 3x + 4 \geq -(x-1)^2 - 6$
c) $(4x-1)(4-x) \leq (2-3x)(x+1)$ f) $(2x+3)^2 - 9 < 8 - (3-x)^2$

5. a) $f(x) > 5$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (6; \infty)$, $f(x) < -3$ dla $x \in (2; 4)$

- b) $x \in (1; 2) \cup (6; 7)$

6. a) $x^2 - x - 6 < 0$, $x \in (-2; 3)$

- b) $x^2 + 12x - 5 \geq 0$,

$$x \in (-\infty; -6 - \sqrt{41}] \cup [-6 + \sqrt{41}; \infty)$$

- c) $x^2 - 18x + 6 \geq 0$,

$$x \in (-\infty; 9 - 5\sqrt{3}] \cup [9 + 5\sqrt{3}; \infty)$$

- d) $x^2 + 3x - 2 \geq 0$,

$$x \in (-\infty; \frac{-3-\sqrt{17}}{2}] \cup [\frac{-3+\sqrt{17}}{2}; \infty)$$

- e) $3x^2 - 5x + 11 \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$

- f) $5x^2 + 6x + 1 < 0$, $x \in (-1; -\frac{1}{5})$

7. Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości większe niż funkcja $g(x) = x^2 - 2x + 3$.
- a) $f(x) = 2x^2 - x + 1$ b) $f(x) = 3x^2 - x$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x$
8. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{x(x-4)}$.

Dziedziną funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wzór funkcji ma sens. We wzorze funkcji f występuje pierwiastek, zatem wyrażenie pod nim musi być nieujemne:

$$x(x-4) \geq 0$$

Nierówność ta zachodzi dla $x \in (-\infty; 0] \cup [4; \infty)$.

Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-\infty; 0] \cup [4; \infty)$.

Wyznacz dziedzinę funkcji f .

- a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$
 b) $f(x) = \sqrt{8 - x^2}$ e) $f(x) = \sqrt{6x^2 - 7x - 5}$
 c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{3}x - 24}$

9. Dane są zbiory A i B . Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$ i $A \setminus B$, gdy:

- a) A – zbiór rozwiązań nierówności $x^2 - 4x + 1 \leq 0$,
 B – zbiór rozwiązań nierówności $3x - x^2 \geq 0$,
 b) A – zbiór rozwiązań nierówności $x^2 - 5x + 6 > 0$,
 B – zbiór rozwiązań nierówności $x^2 - 5x + 4 < 0$.

Sprawdź się

10. Rozwiąż nierówność.

- a) $x^2 \leq 8$ d) $2 > -x^2$ g) $x^2 + 4x - 21 \geq 0$
 b) $x^2 > 9$ e) $x^2 \leq 4x - 4$ h) $-x^2 + 2x + 15 > 0$
 c) $x^2 \geq x$ f) $6x > -x^2 - 9$ i) $6x^2 - x - 1 < 0$

11. Które dzielniki całkowite liczby 12 spełniają podaną nierówność?

- a) $x^2 - 2x + 4 \leq 0$ c) $-2x^2 + 3x + 1 > 0$ e) $2x^2 - 1 > 1 - 3x$
 b) $x^2 - 4x + 9 > 0$ d) $-x^2 + 4x + 1 \leq 0$ f) $1 - x \leq x^2$

12. Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości większe niż funkcja $g(x) = x + 4$.

- a) $f(x) = x^2 + 5x + 7$ b) $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$ c) $f(x) = 4x^2 + x + 3$

11. a) żaden

b) wszystkie

c) 1

d) $-12, -6, -4, -3, -2, -1, 6, 12$

e) $-12, -6, -4, -3, 1, 2, 3, 4, 6, 12$

f) $-12, -6, -4, -3, -2, 1, 2, 3, 4, 6, 12$

12. a) $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; \infty)$

b) $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (2; \infty)$

c) $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$

7. $f(x) > g(x)$

a) $x^2 + x - 2 > 0$,
 $(-\infty; -2) \cup (1; \infty)$

b) $2x^2 + x - 3 > 0$,
 $(-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (1; \infty)$

c) $x^2 + 8x + 6 < 0$,
 $(-4 - \sqrt{10}; -4 + \sqrt{10})$

8. a) $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$

b) $[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$

c) $\mathbb{R}$

d) $(-\infty; -1] \cup [4; \infty)$

e) $(-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{5}{3}; \infty)$

f) $(-\infty; -4\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}; \infty)$

9. a) $A = [2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}]$,

$B = [0; 3]$,

$A \cup B = [0; 2 + \sqrt{3}]$,

$A \cap B = [2 - \sqrt{3}; 3]$,

$A \setminus B = (3; 2 + \sqrt{3}]$

b) $A = (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$,

$B = (1; 4)$,

$A \cup B = \mathbb{R}$,

$A \cap B = (1; 2) \cup (3; 4)$,

$A \setminus B = (-\infty; 1] \cup [4; \infty)$

10. a) $x \in [-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$

b) $x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$

c) $x \in (-\infty; 0] \cup [1; \infty)$

d) $x \in \mathbb{R}$

e) $x = 2$

f) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

g) $x \in (-\infty; -7] \cup [3; \infty)$

h) $x \in (-3; 5)$

i) $x \in (-\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$

Uczeń:

- stosuje pojęcia najmniejszej i największej wartości funkcji,
- wyznacza wartości najmniejszą i największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym,
- stosuje własności funkcji kwadratowej do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych.

Ćwiczenie 1

Liczby oznaczamy przez p i q , wtedy:

a) $q = 38 - p$

$$p \cdot q = f(p) = p(38 - p) = -p^2 + 38p$$

$$p_w = 19, f(p_w) = 361$$

Największa wartość iloczynu liczb p i q jest równa 361.

b) $q = \frac{1}{2} - p$

$$p \cdot q = f(p) = -p^2 + \frac{1}{2}p$$

$$p_w = \frac{1}{4}, f(p_w) = \frac{1}{16}$$

Największa wartość iloczynu liczb p i q jest równa $\frac{1}{16}$.

c) $q = \sqrt{2} - p$

$$p \cdot q = f(p) = -p^2 + \sqrt{2}p$$

$$p_w = \frac{\sqrt{2}}{2}, f(p_w) = \frac{1}{2}$$

Największa wartość iloczynu liczb p i q jest równa $\frac{1}{2}$.

1.10. Funkcja kwadratowa – zastosowania (1)

Przykład 1

Suma liczb p i q jest równa 12. Oblicz największą wartość iloczynu tych liczb.

$$p + q = 12, \text{ zatem } q = 12 - p.$$

$$\text{Iloczyn tych liczb to } p \cdot q = p(12 - p) = 12p - p^2 = -p^2 + 12p.$$

Wyznaczamy wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji danej wzorem:

$$f(p) = -p^2 + 12p \quad \text{Wykresem funkcji } f \text{ jest parabola o ramionach skierowanych w dół.}$$

$$p_w = -\frac{b}{2a} = \frac{-12}{-2} = 6, \quad f(p_w) = -6^2 + 12 \cdot 6 = -36 + 72 = 36$$

Największa wartość iloczynu liczb p i q jest równa 36 (dla $p = q = 6$).

Ćwiczenie 1

Oblicz największą wartość iloczynu dwóch liczb, których suma jest równa:

a) 38,

b) $\frac{1}{2}$,

c) $\sqrt{2}$.

Ćwiczenie 2

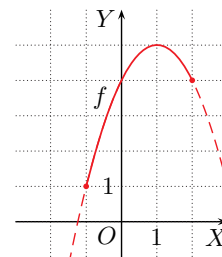
Suma liczby p i podwojonej liczby q jest równa 36. Oblicz największą wartość iloczynu liczb p i q .

Przykład 2

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ w przedziale $[-1; 2]$.

Obliczamy wartości funkcji f na końcach przedziału: $f(-1) = 1$ oraz $f(2) = 4$.

Wierzchołek paraboli ma współrzędne: $x_w = -\frac{b}{2a} = 1$, $y_w = f(1) = 5$. Ponieważ $x_w \in [-1; 2]$ oraz ramiona paraboli są skierowane w dół, największa wartość funkcji w tym przedziale jest równa 5. Wartość najmniejsza jest przyjmowana dla $x = -1$ i wynosi 1.



Aby wyznaczyć najmniejszą lub największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ w przedziale $[p_1; p_2]$, należy obliczyć $f(p_1)$ i $f(p_2)$. Jeśli x_w (pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji) należy do przedziału $[p_1; p_2]$, to obliczamy również $y_w = f(x_w)$. Najmniejsza spośród tych wartości jest najmniejszą wartością funkcji w danym przedziale, a największa – największą wartością.

Ćwiczenie 2

$$p + 2q = 36, \text{ zatem } p = 36 - 2q$$

$$p \cdot q = f(q) = (36 - 2q)q = -2q^2 + 36q$$

$$q_w = 9, f(q_w) = 162$$

Największa wartość iloczynu liczb p i q jest równa 162.

Multibook

- Problem optymalizacyjny – powierzchnia boczna pudełka
- Problem optymalizacyjny – powierzchnia prostopadłościanu

dla nauczyciel.pl | Kartkówka 1.10

Generator
testów i sprawdzianów

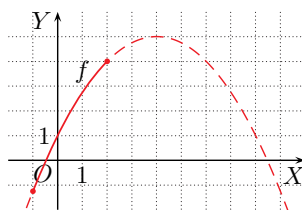
Przykład 3

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1$ w przedziale $[-1; 2]$.

Obliczamy kolejno:

- $f(-1) = -\frac{5}{4}$ oraz $f(2) = 4$
- $x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-\frac{1}{2}} = 4 \notin [-1; 2]$

Zatem wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f przyjmowane są na końcach przedziału $[-1; 2]$, czyli są to odpowiednio $-\frac{5}{4}$ i 4.



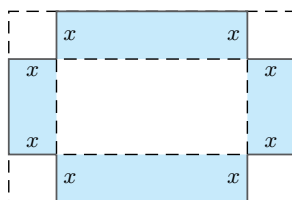
Ćwiczenie 3

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.

- a) $f(x) = x^2 + 4x + 8, [-3; 1]$ c) $f(x) = -x^2 + 4x - 6, [-1; 3]$
b) $f(x) = -2x^2 - 4x - 1, [0; 4]$ d) $f(x) = 2x^2 + 2x - 3, [-2; 1]$

Przykład 4

Z prostokątnego arkusza tektury o bokach 60 cm i 40 cm wycinamy w rogach kwadraty tak, aby po odpowiednim sklejeniu pozostałej części otrzymać otwarte pudełko. Jaka powinna być długość boków wycinanych kwadratów, aby pole powierzchni bocznej pudełka było największe? Oblicz to pole.



Pole powierzchni bocznej pudełka w zależności od długości boków wyciętych kwadratów opisuje funkcja:

$$P(x) = 2(40 - 2x) \cdot x + 2(60 - 2x) \cdot x = -8x^2 + 200x$$

Określamy dziedzinę funkcji P : $D = (0; 20)$.

$$x > 0, 2x < 40, 2x < 60$$

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka paraboli $y = -8x^2 + 200x$:

$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{200}{-16} = 12,5, \quad y_w = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{40000}{-32} = 1250$$

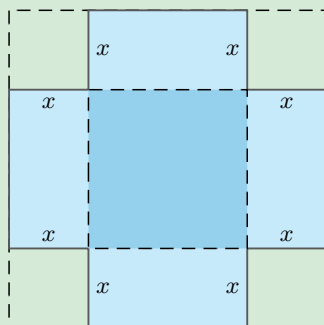
Ponieważ $x_w \in (0; 20)$ oraz ramiona paraboli są skierowane w dół, największa wartość funkcji P jest przyjmowana dla x_w .

Pudełko ma zatem największe pole powierzchni bocznej, jeśli długość boków wyciętych kwadratów jest równa 12,5 cm. Pole to jest równe 1250 cm^2 .

Ćwiczenie 4

Z kwadratowego arkusza tektury o polu 1600 cm^2 wycinamy w rogach kwadraty tak, aby po odpowiednim sklejeniu pozostałej części otrzymać otwarte pudełko. Jaka powinna być długość boków wycinanych kwadratów, aby pole powierzchni bocznej pudełka było największe? Oblicz to pole.

Ćwiczenie 4



Długość boku kwadratowego arkusza wynosi 40 cm.

Pole powierzchni bocznej pudełka opisuje funkcja:

$$P(x) = 4(40 - 2x)x = -8x^2 + 160x, \quad x \in (0; 20)$$

Funkcja P przyjmuje największą wartość w wierzchołku paraboli będącej jej wykresem, czyli dla:

$$x_w = \frac{-160}{-16} = 10$$

Wartość ta jest równa:

$$f(10) = -800 + 1600 = 800$$

Boki wycinanych kwadratów mają długość 10 cm, a pole powierzchni bocznej wynosi 800 cm^2 .

Ćwiczenie 3

- a) $x_w = -2 \in [-3; 1]$,
 $y_w = f(x_w) = 4$ – wartość najmniejsza,
 $f(-3) = 5$,
 $f(1) = 13$ – wartość największa
b) $x_w = -1 \notin [0; 4]$,
 $f(0) = -1$ – wartość największa,
 $f(4) = -49$ – wartość najmniejsza
c) $x_w = 2 \in [-1; 3]$,
 $y_w = f(x_w) = -2$ – wartość największa,
 $f(-1) = -11$ – wartość najmniejsza,
 $f(3) = -3$
d) $x_w = -\frac{1}{2} \in [-2; 1]$,
 $y_w = f(x_w) = -\frac{7}{2}$ – wartość najmniejsza,
 $f(-2) = 1$ – wartość największa,
 $f(1) = 1$ – wartość największa

Odpowiedzi do zadań

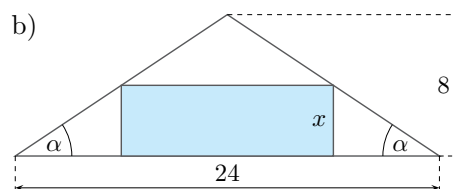
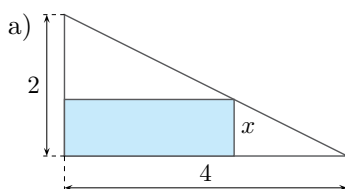
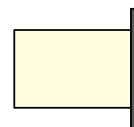
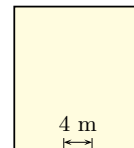
- a) najmniejsze:
 $f(0) = f(4) = -1$, $g(0) = -3$,
 największe: $f(2) = 3$,
 $g(4) = 9$
 b) najmniejsze: $f(-4) = -33$,
 $g(-1) = -\frac{7}{2}$,
 największe: $f(2) = 3$,
 $g(6) = 21$
- a) 8
 b) 32
- Oznaczmy boki ogródka przez x i y , wówczas:
 $2(x + y) = 84$, czyli $y = 42 - x$
 Pole ogródka opisuje funkcja:
 $P(x) = x(42 - x)$,
 $D_P = (4; 42)$
 Funkcja P przyjmuje największą wartość dla $x = 21$.
 Wtedy $y = 42 - 21 = 21$.
 Wymiary ogródka o największej powierzchni: $21 \text{ m} \times 21 \text{ m}$.
- $7 \text{ m} \times 14 \text{ m}$
- $3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$

Komentarz

Samodzielne układanie zadań, które potem rozwiązujemy, to ważna umiejętność budująca głębsze zrozumienie przeróżnych pojęć. Warto zatem polecić takie ćwiczenie uczniom – mogą je wykonać samodzielnie lub w parach. W parach mogą rozwiązywać nawzajem swoje zadania. Jeśli będzie więcej czasu, można również zaproponować układanie zadań w grupach.

Zadania

- Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ oraz funkcji $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 3$ w przedziale: a) $[0; 4]$, b) $[-4; 6]$.
- Suma długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa 8.
 a) Wyznacz największe pole takiego trójkąta.
 b) Wyznacz najmniejszą wartość kwadratu długości przeciwprostokątnej takiego trójkąta.
- Trzeba ogrodzić prostokątną rabatę kwiatową o jak największej powierzchni, przy czym nie będzie ona grodzona na jednym boku na odcinku 4 m (rysunek obok). Wiadomo, że potrzeba do tego 80 m bieżących siatki ogrodzeniowej. Jakie wymiary ma ta rabata?
- Taras przylega jednym z boków do ściany domu (rysunek obok). Wiadomo, że na ogrodzenie tego tarasu potrzeba 28 m bieżących paneli osłonowych i że jego powierzchnia jest największa z możliwych. Jakie wymiary ma ten taras?
- Podstawą prostopadłościanu o wysokości 5 cm jest prostokąt o obwodzie 12 cm. Jakie powinny być wymiary podstawy tego prostopadłościanu, aby jego pole powierzchni całkowitej było największe?
- Wyraż pole prostokąta przedstawionego na rysunku jako funkcję zmiennej x . Podaj wymiary prostokąta o największym polu.

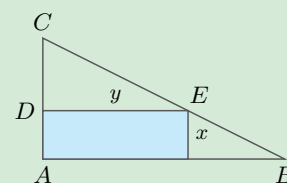


Sprawdź się

- Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale.
 a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$, $[0; 3]$ b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$, $[-6; 3]$
- Pan Adam kupił prostokątną działkę budowlaną. Na jej ogrodzenie potrzebuje 240 m bieżących siatki ogrodzeniowej. Wiadomo, że działka ma powierzchnię największą z możliwych. Jakie wymiary ma ta działka?
- a) Z podobieństwa trójkątów ABC i DEC : $\frac{y}{4} = \frac{2-x}{2}$,
 czyli $y = 4 - 2x$, gdzie $x \in (0; 2)$.
 Zatem pole prostokąta opisuje funkcja:

$$P(x) = -2x^2 + 4x$$

 Funkcja P przyjmuje największą wartość w wierzchołku paraboli będącej jej wykresem, czyli dla $x_w = 1$. Zatem prostokąt o największym polu ma wymiary 1×2 .
 b) $P(x) = -3x^2 + 24x$, $x \in (0; 8)$, 12×4
- a) najmniejsza: 1, największa: 9
 b) najmniejsza: -2, największa: 10
- $60 \text{ m} \times 60 \text{ m}$



1.11. Funkcja kwadratowa – zastosowania (2)

Przykład 1

Prostokątny trawnik ma powierzchnię 209 m^2 . Oblicz wymiary tego trawnika w przypadku, gdy różnią się one o 8 m .

Oznaczmy długość krótszego boku trawnika przez x ($x > 0$). Otrzymujemy równanie:

$$\begin{aligned}x(x + 8) &= 209 \\x^2 + 8x - 209 &= 0 \\ \Delta &= 64 + 836 = 900, \sqrt{\Delta} = 30 \\x_1 &= \frac{-8-30}{2} < 0, \quad x_2 = \frac{-8+30}{2} = 11\end{aligned}$$

Pierwsze rozwiązanie odrzucamy, ponieważ nie spełnia warunków zadania. Zatem trawnik ma wymiary $11 \text{ m} \times 19 \text{ m}$.

Ćwiczenie 1

Prostokątny trawnik ma powierzchnię 216 m^2 . Oblicz wymiary tego trawnika w przypadku, gdy różnią się one o: a) 6 m , b) 15 m .

Przykład 2

Wokół prostokątnego trawnika o wymiarach $12 \text{ m} \times 6 \text{ m}$ ma zostać ułożony pas kostki brukowej o szerokości $x \text{ m}$ oraz powierzchni 63 m^2 (rysunek obok). Oblicz x .

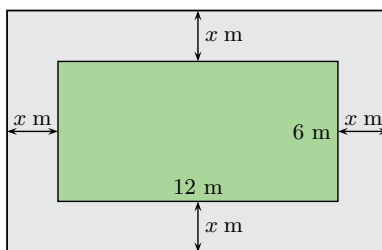
Powierzchnia pokryta kostką jest równa różnicy pól większego i mniejszego prostokąta:

$$(12 + 2x)(6 + 2x) - 12 \cdot 6 = 72 + 24x + 12x + 4x^2 - 72 = 4x^2 + 36x, \quad x > 0$$

Otrzymujemy równanie:

$$\begin{aligned}4x^2 + 36x &= 63 \\4x^2 + 36x - 63 &= 0 \\ \Delta &= 1296 + 1008 = 2304, \sqrt{\Delta} = 48 \\x_1 &= \frac{-36-48}{8} < 0, \quad x_2 = \frac{-36+48}{8} = 1,5\end{aligned}$$

Pierwsze rozwiązanie odrzucamy, ponieważ nie spełnia warunków zadania. Zatem szerokość pasa jest równa $1,5 \text{ m}$.



Uczeń:

- przeprowadza analizę zadania i zapisuje odpowiednie równanie, nierówność lub wzór funkcji kwadratowej opisujące daną zależność,
- znajduje rozwiązanie, które spełnia warunki zadania,
- przeprowadza analizę wyniku i podaje odpowiedź,
- rozwiązuje zadania tekstowe o podwyższonym stopniu trudności dotyczące funkcji kwadratowej.

Ćwiczenie 1

a) Wymiary trawnika:

$x, x + 6$, gdzie $x > 0$.

$$\begin{aligned}x(x + 6) &= 216 \\x^2 + 6x - 216 &= 0\end{aligned}$$

$$\Delta = 36 + 864 = 900$$

$$x = \frac{-6+30}{2} = 12 \text{ lub}$$

$$x = \frac{-6-30}{2} < 0$$

Zatem trawnik ma wymiary $12 \text{ m} \times 18 \text{ m}$.

b) Wymiary trawnika:

$x, x + 15$, gdzie $x > 0$.

$$\begin{aligned}x(x + 15) &= 216 \\x^2 + 15x - 216 &= 0\end{aligned}$$

$$\Delta = 225 + 864 = 1089$$

$$\sqrt{\Delta} = 33$$

$$x = \frac{-15+33}{2} = 9 \text{ lub}$$

$$x = \frac{-15-33}{2} < 0$$

Zatem trawnik ma wymiary $9 \text{ m} \times 24 \text{ m}$.

Ćwiczenie 2

$$(4 + 2x)(8 + 2x) - 4 \cdot 8 = 45$$

$$4x^2 + 24x - 45 = 0$$

$$\Delta = 576 + 720 = 1296$$

$$\sqrt{\Delta} = 36$$

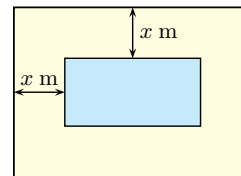
$$x = \frac{-24+36}{8} = 1,5 \text{ lub}$$

$$x = \frac{-24-36}{8} < 0$$

Szerokość pasa wynosi 1,5 m.

Ćwiczenie 2

Wokół basenu o wymiarach $4 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ wyłożono kafełkami pas o szerokości $x \text{ m}$ oraz powierzchni 45 m^2 (rysunek obok). Jaka jest szerokość tego pasa?



Przykład 3

Firma produkująca zabawki oszacowała roczną wielkość sprzedaży lalek na s sztuk w zależności od ceny $x \text{ zł}$ za sztukę (tabela poniżej). Okazało się, że jest to zależność liniowa $s(x) = -40x + 3600$.

Cena x w zł	40	50	60	70	80	90
Liczba lalek s	2000	1600	1200	800	400	0

Koszt wyprodukowania jednej lalki wynosi 20 zł. Ustal taką cenę za jedną lalkę, aby roczny zysk firmy był największy. Jaka będzie wtedy wielkość sprzedaży i jaki zysk?

Zysk ze sprzedaży jednej lalki, gdy kosztuje ona $x \text{ zł}$, jest równy $(x - 20) \text{ zł}$ (przyjmujemy, że $x \geq 20$). Określmy funkcję z opisującą roczny zysk ze sprzedaży s lalek dla ceny $x \text{ zł}$ za lalkę:

$$\begin{aligned} z(x) &= s(x) \cdot (x - 20) = (-40x + 3600)(x - 20) = \\ &= -40x^2 + 4400x - 72\,000, \text{ gdzie } x \in [20; 90] \end{aligned}$$

Funkcja z największą wartość przyjmuje w wierzchołku odpowiedniej paraboli:

$$x_w = -\frac{4400}{-80} = 55$$

Zatem zysk będzie największy dla ceny $x = 55 \text{ zł}$.

Wielkość sprzedaży będzie wówczas równa:

$$s(55) = -40 \cdot 55 + 3600 = 1400$$

a roczny zysk będzie wynosił:

$$z_{\max} = z(55) = 1400 \cdot (55 - 20) = 1400 \cdot 35 = 49\,000 \text{ [zł]}$$

Ćwiczenie 3

Koszt wyprodukowania jednego pluszowego misia wynosi 10 zł. Dla ceny 15 zł za misia wielkość sprzedaży wynosi 1000 sztuk rocznie. Każdorazowe podniesienie ceny o 1 zł powoduje spadek sprzedaży o 50 sztuk w ciągu roku.

a) Wyznacz wzór funkcji kwadratowej opisującej roczny zysk w zależności od ceny $x \text{ zł}$ za sztukę.

b) Ustal taką cenę za jednego misia, aby roczny zysk firmy był największy. Jaka będzie wtedy wielkość sprzedaży i jaki zysk?

Ćwiczenie 3

a) Niech x oznacza cenę za jednego misia. Wielkość sprzedaży opisuje funkcja:

$$s(x) = 1000 - 50(x - 15) = -50x + 1750, \text{ gdzie } x \in [15; 35]$$

zysk = sprzedaż $\cdot$ (cena za sztukę - koszt jednej sztuki)

$$z(x) = (-50x + 1750) \cdot (x - 10) = -50x^2 + 2250x - 17\,500, \text{ gdzie } x \in [10; 35]$$

b) Funkcja z przyjmuje największą wartość w wierzchołku paraboli będącej jej wykresem, czyli dla:

$$x_w = \frac{-2250}{-100} = 22,5$$

Zatem cenę misia należy ustalić na 22,50 zł. Wtedy wielkość sprzedaży to 625 sztuk, a zysk 7812,50 zł.

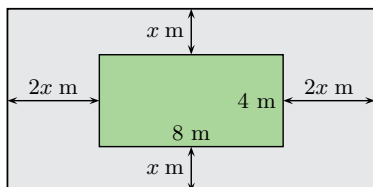
Ćwiczenie 4

Sklep z odzieżą sportową sprzedaje dziennie 16 bluz dresowych. Zysk ze sprzedaży jednej sztuki wynosi 40 zł. Właściciel sklepu przewiduje, że każde obniżenie ceny o 5 zł spowoduje wzrost sprzedaży o 4 sztuki dziennie. O ile powinien on obniżyć cenę, aby mieć największy zysk?

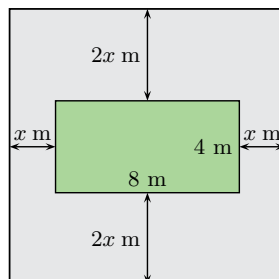
Zadania

- Plac zabaw ma kształt prostokąta o wymiarach $12\text{ m} \times 18\text{ m}$. Szerokość placu zwiększono o $x\text{ m}$, a długość o $2x\text{ m}$. Powierzchnia placu wzrosła wówczas o 144 m^2 . Oblicz x .
- Reprodukcję obrazu o powierzchni P oprawiono w prostokątną ramę o wymiarach zewnętrznych $x \times y$. Oblicz szerokość tej ramy, gdy:
 - $P = 2400\text{ cm}^2$, $x = 80\text{ cm}$, $y = 60\text{ cm}$,
 - $P = 2700\text{ cm}^2$, $x = 75\text{ cm}$, $y = 55\text{ cm}$.
- Wokół prostokątnego trawnika o wymiarach $4\text{ m} \times 8\text{ m}$ ma zostać ułożona kostka brukowa. Projektant przedstawił dwie propozycje: A i B (rysunki poniżej). Dla każdej z tych propozycji oblicz x .

Propozycja A
obszar pokryty kostką – 66 m^2



Propozycja B
obszar pokryty kostką – 78 m^2



- Dany jest prostokąt o wymiarach $21\text{ cm} \times 4\text{ cm}$. Jego długość i szerokość zwiększono o $x\text{ cm}$. Dla jakiej wartości x przekątna nowego prostokąta ma długość 25 cm ?
- Dany jest prostokąt o wymiarach $3\text{ cm} \times 10\text{ cm}$. Jego długość i szerokość zwiększono o $x\text{ cm}$. Dla jakich wartości x przekątna nowego prostokąta ma długość większą od 13 cm ?
- Szerokość pokoju jest o 2 m mniejsza od jego długości. Jakie wymiary może mieć ten pokój, jeśli przekątna podłogi jest niekrótsza niż 6 m i nie dłuższa niż 10 m ?

- Niech x oznacza szerokość pokoju, gdzie $x > 0$, wówczas:
 $6^2 \leq x^2 + (x + 2)^2 \leq 10^2$, czyli
 $(\sqrt{17} - 1)\text{ m} \leq x \leq 6\text{ m}$.

Ćwiczenie 4

Niech x oznacza, ile razy należy obniżyć cenę o 5 zł ,
 $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Zysk opisuje funkcja:

$$z(x) = (16 + 4x)(40 - 5x) = -20(x + 4)(x - 8)$$

Funkcja z przyjmuje największą wartość dla:

$$x_w = \frac{-4+8}{2} = 2$$

zatem cenę należy obniżyć o 10 zł .

Odpowiedzi do zadań

- $(12+x)(18+2x) = 12 \cdot 18 + 144$
 $x = 3$
- a – szerokość ramy
 - $(80 - 2a)(60 - 2a) = 2400$,
gdzie $a \in (0; 30)$
 $a = 10\text{ cm}$
 - $(75 - 2a)(55 - 2a) = 2700$,
gdzie $a \in (0; 27,5)$
 $a = \frac{65-20\sqrt{7}}{2} \approx 6\text{ [cm]}$
- Propozycja A:
 $(8 + 4x)(4 + 2x) = 32 + 66$
 $x = 1,5\text{ m}$
Propozycja B:
 $(8 + 2x)(4 + 4x) = 32 + 78$
 $x = 1,5\text{ m}$
- $(21 + x)^2 + (4 + x)^2 = 25^2$
 $x = 3$
- $(3 + x)^2 + (10 + x)^2 > 13^2$
 $x > 2$

7. Niech $x - 7$, x , $x + 2$ będą długościami boków trójkąta. Wówczas:

$$(x - 7)^2 + x^2 = (x + 2)^2, \quad x > 7$$

Zatem $x = 15$,
czyli $Ob = 40$ cm.

8. $P(x) = 8 \cdot 10 - 2 \cdot \frac{1}{2}(8 - x) \cdot (10 - x) = 18x - x^2$,

$$x \in (0; 8]$$

$$P(x) \geq 0,4 \cdot 8 \cdot 10$$

$$x^2 - 18x + 32 \leq 0$$

$$x \in [2; 8]$$

9. $400 \cdot \frac{100-p}{100} \cdot \frac{100-p}{100} = 289$,

$$p \leq 100$$

$$p = 15$$

11. a) Miejscami zerowymi są liczby 0 i 12, zatem parabola ma równanie postaci:

$$y = ax(x - 12)$$

Po podstawieniu współrzędnych wierzchołka (6, 4) do równania paraboli otrzymujemy $a = -\frac{1}{9}$.

$$\text{Zatem } y = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x.$$

- b) Miejscami zerowymi są liczby -6 i 6, zatem:

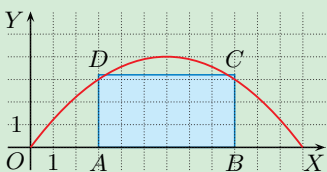
$$y = a(x - 6)(x + 6) = a(x^2 - 36).$$

Współrzędne wierzchołka:

$$(0, 4), \text{ czyli } a = -\frac{1}{9}.$$

$$\text{Zatem } y = -\frac{1}{9}x^2 + 4x.$$

12.



Prostokąt $ABCD$ na rysunku jest schematycznym przedstawieniem barki.

Punkt D ma współrzędne (3, 3, 1).

Parabola przedstawiająca most jest wykresem funkcji:

$$f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$$

Zauważmy, że:

$$f(3) = 3 < 3,1$$

czyli barka nie przeplynie pod mostem.

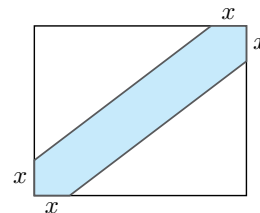
13. Niech x oznacza szerokość ramki. Wówczas:

$$(6 + 2x)(9 + 2x) - 6 \cdot 9 = 6 \cdot 9, \quad x > 0$$

$$x = 1,5 \text{ [cm]}$$

7. Bok BC trójkąta prostokątnego ABC jest o 2 cm krótszy od boku AB i o 7 cm dłuższy od boku AC . Oblicz obwód tego trójkąta.

8. Boki prostokąta mają długości 8 i 10 (rysunek obok). Dla jakich wartości x zacieniony obszar stanowi co najmniej 40% powierzchni prostokąta?



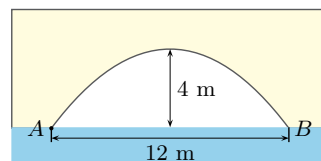
9. Powierzchnia stawu wynosiła 400 m². Przez dwa kolejne lata, na skutek suszy, powierzchnia stawu się zmniejszała – w każdym roku o $p\%$. Po upływie dwóch lat staw miał powierzchnię 289 m². Oblicz p .

10. Wykaż, że istnieje tylko jeden trójkąt prostokątny, którego boki mają długości równe kolejnym liczbom:

a) naturalnym,

b) parzystym.

11. Łuk przęsła mostu ma kształt paraboli (rysunek obok). Korzystając z wymiarów podanych na rysunku, znajdź równanie tej paraboli. Przyjmij, że początek układu współrzędnych znajduje się:



a) w punkcie A ,

b) w środku odcinka AB .

12. Czy pod mostem opisanym w zadaniu 11. przeplynie barka o szerokości 6 m, która po załadowaniu wystaje 3,1 m ponad powierzchnię wody? Przyjmij, że przekrojem poprzecznym barki jest prostokąt.

Sprawdź się

13. Zdjęcie o wymiarach 6 cm $\times$ 9 cm oprawiono w prostokątną ramkę o stałej szerokości. Powierzchnia obramowania jest równa powierzchni zdjęcia. Oblicz szerokość obramowania.

14. Trawnik ma kształt trójkąta prostokątnego. Oblicz obwód i pole tego trawnika przy założeniu, że długości jego boków wyrażone w metrach są równe:

a) x , $x + 7$, $x + 8$,

b) x , $x + 1$, $x - 17$.

15. Ogrodnik ma dwie kwadratowe działki, z których jedna ma pole powierzchni 2,25 razy większe niż druga. Do ogrodzenia większej działki potrzebuje on o 40 m więcej siatki niż do ogrodzenia mniejszej. Ile metrów siatki potrzebuje do ogrodzenia obu działek?

10. a) Długości boków trójkąta: n , $n + 1$, $n + 2$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.

$$n^2 + (n + 1)^2 = (n + 2)^2$$

$$n^2 - 2n - 3 = 0$$

$$(n - 3)(n + 1) = 0$$

$$n = 3 \text{ lub } n = -1 \notin \mathbb{N}_+$$

Zatem istnieje tylko jeden taki trójkąt.

Jego boki mają długości: 3, 4 i 5.

14. a) $x = 5$, $Ob = 30$ m, $P = 30$ m²

b) $x = 24$, $Ob = 56$ m, $P = 84$ m²

15. 200 m

- b) Długości boków trójkąta: $2n$, $2n + 2$, $2n + 4$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.

$$4n^2 + (2n + 2)^2 = (2n + 4)^2$$

$$4n^2 + 4(n + 1)^2 = 4(n + 2)^2$$

$$n^2 + (n + 1)^2 = (n + 2)^2$$

Z podpunktu a) mamy $n = 3$.

Zatem istnieje tylko jeden taki trójkąt.

Jego boki mają długości: 6, 8 i 10.



Powtórzenie

Zestaw I

- Przedstaw funkcję f w postaci kanonicznej i naszkicuj jej wykres.
a) $f(x) = x^2 + 4$ c) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ e) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$
b) $f(x) = -x^2 - 2x$ d) $f(x) = x^2 - 6x + 5$ f) $f(x) = -x^2 - 6x - 1$
- Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f są liczby x_1 i x_2 , a do jej wykresu należy punkt P . Zapisz wzór tej funkcji w postaci kanonicznej.
a) $x_1 = 1, x_2 = 3, P(0, -4)$ b) $x_1 = -2, x_2 = 4, P(2, 4)$
- Rozwiąż równanie.
a) $x^2 - 49 = 0$ c) $9x^2 - 1 = 0$ e) $4x^2 - 81 = 0$
b) $x^2 - 144 = 0$ d) $36x^2 - 1 = 0$ f) $25x^2 - 36 = 0$
- Rozwiąż równanie.
a) $x^2 - 50 = 0$ c) $3x^2 - 24 = 0$ e) $27x^2 - 18 = 0$
b) $2x^2 - 7 = 0$ d) $28x^2 - 14 = 0$ f) $9x^2 + 4 = 0$
- Znajdź miejsca zerowe funkcji f . Wyznacz równanie osi symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji.
a) $f(x) = x^2 - 8x$ c) $f(x) = 2x^2 - 3x$ e) $f(x) = x^2 + 14x + 49$
b) $f(x) = x^2 + 6x$ d) $f(x) = 2x + 6x^2$ f) $f(x) = 16x^2 + 8x + 1$
- Rozwiąż równanie.
a) $x^2 + 4x - 21 = 0$ d) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ g) $2x^2 - 3x - 1 = 0$
b) $6 - x - x^2 = 0$ e) $-6x^2 - 7x + 5 = 0$ h) $3x^2 + 5x + 1 = 0$
c) $x - x^2 + 12 = 0$ f) $\frac{9}{4}x^2 - 12x + 16 = 0$ i) $-x^2 + 3\sqrt{2}x - 5 = 0$
- Rozwiąż równanie.
a) $(x - 3)^2 = (2x - 1)(x - 3)$ c) $9x^2 - (2x - 1)^2 = 0$
b) $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(3x - 4)$ d) $4x^2 = (1 - x)^2$
- Wyznacz punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych oraz współrzędne jej wierzchołka. Naszkicuj tę parabolę.
a) $y = x^2 + 4x$ c) $y = 2x^2 - 8x$ e) $y = -x^2 + 2x + 8$
b) $y = -x^2 + 2x$ d) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ f) $y = x^2 + 6x + 8$
- a) $x = -2$ lub $x = 3$
b) $x = -2$ lub $x = 3$
c) $x = -1$ lub $x = \frac{1}{5}$
d) $x = -1$ lub $x = \frac{1}{3}$
- a) $(0, 0), (-4, 0), W(-2, -4)$
b) $(0, 0), (2, 0), W(1, 1)$
c) $(0, 0), (4, 0), W(2, -8)$
d) $(-2, 0), (2, 0), (0, 1), W(0, 1)$
e) $(0, 8), (-2, 0), (4, 0), W(1, 9)$
f) $(0, 8), (-4, 0), (-2, 0), W(-3, -1)$

Odpowiedzi do zadań

- a) $f(x) = x^2 + 4$
b) $f(x) = -(x + 1)^2 + 1$
c) $f(x) = (x + 1)^2 - 2$
d) $f(x) = (x - 3)^2 - 4$
e) $f(x) = -(x - 2)^2 + 1$
f) $f(x) = -(x + 3)^2 + 8$
- a) $f(x) = -\frac{4}{3}(x - 2)^2 + \frac{4}{3}$
b) $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{9}{2}$
- a) $x = -7$ lub $x = 7$
b) $x = -12$ lub $x = 12$
c) $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = \frac{1}{3}$
d) $x = -\frac{1}{6}$ lub $x = \frac{1}{6}$
e) $x = -\frac{9}{2}$ lub $x = \frac{9}{2}$
f) $x = -\frac{6}{5}$ lub $x = \frac{6}{5}$
- a) $x = -5\sqrt{2}$ lub $x = 5\sqrt{2}$
b) $x = -\frac{1}{2}\sqrt{14}$ lub $x = \frac{1}{2}\sqrt{14}$
c) $x = -2\sqrt{2}$ lub $x = 2\sqrt{2}$
d) $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ lub $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
e) $x = -\frac{1}{3}\sqrt{6}$ lub $x = \frac{1}{3}\sqrt{6}$
f) sprzeczne
- a) $x = 0, x = 8$,
oś symetrii: $x = 4$
b) $x = -6, x = 0$,
oś symetrii: $x = -3$
c) $x = 0, x = \frac{3}{2}$,
oś symetrii: $x = \frac{3}{4}$
d) $x = -\frac{1}{3}, x = 0$,
oś symetrii: $x = -\frac{1}{6}$
e) $x = -7$,
oś symetrii: $x = -7$
f) $x = -\frac{1}{4}$,
oś symetrii: $x = -\frac{1}{4}$
- a) $x = -7$ lub $x = 3$
b) $x = -3$ lub $x = 2$
c) $x = -3$ lub $x = 4$
d) $x = -3$ lub $x = \frac{1}{2}$
e) $x = -\frac{5}{3}$ lub $x = \frac{1}{2}$
f) $x = \frac{8}{3}$
g) $x = \frac{3-\sqrt{17}}{4}$ lub $x = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$
h) $x = \frac{-5-\sqrt{13}}{6}$ lub
 $x = \frac{-5+\sqrt{13}}{6}$
i) sprzeczne

9. a) $f(D) = [-16; \infty)$,
rosnąca w $[4; \infty)$,
malejąca w $(-\infty; 4]$
b) $f(D) = (-\infty; 9]$,
rosnąca w $(-\infty; 3]$,
malejąca w $[3; \infty)$
c) $f(D) = [-5; \infty)$,
rosnąca w $[-1; \infty)$,
malejąca w $(-\infty; -1]$
d) $f(D) = (-\infty; 3]$,
rosnąca w $(-\infty; \frac{1}{2}]$,
malejąca w $[\frac{1}{2}; \infty)$
e) $f(D) = (-\infty; 19]$,
rosnąca w $(-\infty; -3]$,
malejąca w $[-3; \infty)$
f) $f(D) = [-8; \infty)$,
rosnąca w $[-6; \infty)$,
malejąca w $(-\infty; -6]$
10. a) $x = 2 - 2\sqrt{2}$, $x = 2 + 2\sqrt{2}$
b) $x = -1 - \sqrt{2}$, $x = -1 + \sqrt{2}$
c) $x = 0$, $x = 4$
d) $x = 3 - \sqrt{3}$, $x = 3 + \sqrt{3}$

Zestaw II

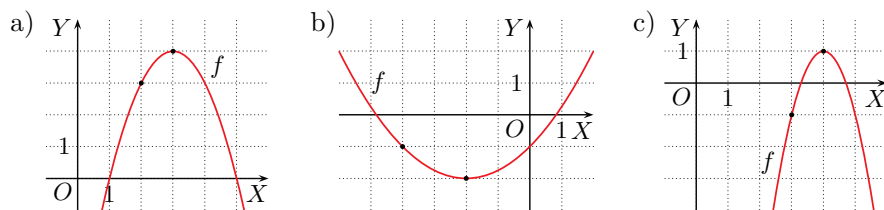
1. a) $f(x) = 2x(x - 3)$
b) $f(x) = \frac{1}{3}x(x + 6)$
c) $f(x) = -(x + 5)(x - 3)$
d) $f(x) = 2(x + 2)(x - 1)$
e) $f(x) = 3(x - \frac{1}{3})(x - 3)$
f) $f(x) = -2(x + \frac{1}{2})(x - 2)$
2. a) $x = 7$, $f(x) = -(x - 5)^2 + 4$
b) $x = -9$,
 $f(x) = \frac{1}{6}(x + 3)^2 - 6$
c) $x = -2$,
 $f(x) = -\frac{8}{25}(x - \frac{1}{2})^2 + 2$
d) $x = -\frac{1}{2}$,
 $f(x) = -\frac{96}{49}(x - \frac{5}{4})^2 + 6$
3. a) $x \in (-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup [\frac{\sqrt{3}}{3}; \infty)$
b) $x \in (-2; 2)$
c) $x \in (-3; 4)$
d) $x \in (-\infty; -5] \cup [1; \infty)$
e) $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
f) $x \in [-3\frac{1}{2}; 2]$
4. a) $x \in [-1; 5]$
b) $x \in (-\infty; -\frac{5+\sqrt{17}}{4}) \cup$
 $\cup (\frac{-5+\sqrt{17}}{4}; \infty)$
c) $x \in (-\infty; -\frac{1}{3}] \cup [5; \infty)$
d) $x = 6$
e) $x \in (-\frac{1+2\sqrt{2}}{7}; \frac{-1+2\sqrt{2}}{7})$
f) $x \in [\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}]$
g) $x \in (-\infty; -3) \cup (0; \infty)$
h) $x \in (-4 - \sqrt{17}; -4 + \sqrt{17})$
i) $x \in [-\frac{3}{2}; -1]$

9. Wyznacz zbiór wartości funkcji f oraz jej przedziały monotoniczności.
a) $f(x) = x^2 - 8x$ c) $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$ e) $f(x) = -2x^2 - 12x + 1$
b) $f(x) = 6x - x^2$ d) $f(x) = -4x^2 + 4x + 2$ f) $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + 2x - 2$
10. Do wykresu funkcji f należy punkt P . Wyznacz miejsca zerowe tej funkcji oraz naszkicuj jej wykres.
a) $f(x) = a(x - 2)^2 - 4$, $P(4, -2)$ c) $f(x) = a(x - 2)^2 - 2$, $P(6, 6)$
b) $f(x) = a(x + 1)^2 + 2$, $P(-3, -2)$ d) $f(x) = a(x - 3)^2 + 6$, $P(1, -2)$

Zestaw II

1. Przedstaw funkcję f w postaci iloczynowej.
a) $f(x) = 2x^2 - 6x$ c) $f(x) = -x^2 - 2x + 15$ e) $f(x) = 3x^2 - 10x + 3$
b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x$ d) $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$ f) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$
2. Liczba 3 jest miejscem zerowym funkcji kwadratowej f . Punkt P jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem tej funkcji. Wyznacz jej drugie miejsce zerowe. Zapisz jej wzór w postaci kanonicznej.
a) $P(5, 4)$ b) $P(-3, -6)$ c) $P(\frac{1}{2}, 2)$ d) $P(\frac{5}{4}, 6)$
3. Rozwiąż nierówność.
a) $3x^2 - 1 \geq 0$ c) $x^2 < x + 12$ e) $4x^2 + 4x > 3$
b) $4 - x^2 > 0$ d) $x^2 \geq 5 - 4x$ f) $3x \leq 14 - 2x^2$
4. Rozwiąż nierówność.
a) $x^2 - 4x - 5 \leq 0$ d) $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 \leq 0$ g) $x(x - 5) < 2x(x - 1)$
b) $2x^2 + 5x + 1 > 0$ e) $7x^2 + 2x < 1$ h) $2(1 - 5x) > (1 - x)^2$
c) $3x^2 - 14x - 5 \geq 0$ f) $-3x^2 + x + 1 \geq 0$ i) $\frac{1}{5}(x^2 + 4) \leq \frac{1}{2}(1 - x)$
5. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną spełniającą podaną nierówność.
a) $x^2 + 120 \leq 22x$ c) $10x - 23 > x^2$ e) $x^2 - 12x + 33 \leq 0$
b) $\frac{1}{6}x^2 - 2x + \frac{2}{3} \leq 0$ d) $-3x^2 + 6x > 2$ f) $x^2 - 6x < -3 - x^2$
6. Ile liczb całkowitych spełnia podaną nierówność?
a) $(2x + 3)^2 \leq (x - 3)^2$ b) $(1 - \frac{1}{2}x)^2 > (\frac{3}{2}x - 5)^2$
7. Zaznacz na osi liczbowej zbiory $X \cup Y$, $X \cap Y$ i $X \setminus Y$, gdzie:
 X - zbiór rozwiązań nierówności $x^2 - x - 6 \leq 0$,
 Y - zbiór rozwiązań nierówności $-x^2 \leq 4x + 2$.
5. a) 10, $x \in [10; 12]$ 7. $X = [-2; 3]$,
b) 1, $x \in [6 - 4\sqrt{2}; 6 + 4\sqrt{2}]$ $Y = (-\infty; -2 - \sqrt{2}] \cup [-2 + \sqrt{2}; \infty)$,
c) 4, $x \in (5 - \sqrt{2}; 5 + \sqrt{2})$ $X \cup Y = (-\infty; -2 - \sqrt{2}] \cup [-2; \infty)$,
d) 1, $x \in (\frac{3-\sqrt{3}}{3}; \frac{3+\sqrt{3}}{3})$ $X \cap Y = [-2 + \sqrt{2}; 3]$,
e) 5, $x \in [6 - \sqrt{3}; 6 + \sqrt{3}]$ $X \setminus Y = [-2; -2 + \sqrt{2})$
f) 1, $x \in (\frac{3-\sqrt{3}}{2}; \frac{3+\sqrt{3}}{2})$
6. a) $x \in [-6; 0]$, siedem liczb całkowitych spełnia tę nierówność.
b) $x \in (3; 4)$, żadna liczba całkowita nie spełnia tej nierówności.

8. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji kwadratowej f . Zapisz w postaci kanonicznej wzór tej funkcji. Rozwiąż nierówność $f(x) \geq 0$.



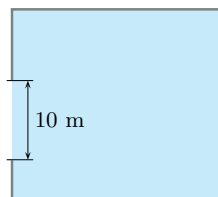
9. Naszkicuj wykres funkcji f . Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale.

- a) $f(x) = 2x^2 + 4x$, $[-2; 1]$ c) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $[0; 2]$
b) $f(x) = -x^2 + 2x$, $[0; 4]$ d) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$, $[-2; 2]$

10. Dla jakich wartości a i b suma $a^2 + b^2$ przyjmuje wartość najmniejszą, jeśli:

- a) $a + b = 4$, b) $a - b = 3$, c) $2a + b = 1$?

11. Trzeba ogrodzić prostokątny plac, przy czym nie będzie on grodzony na jednym boku na odcinku 10 m (rysunek obok). Wiadomo, że na ogrodzenie tego placu potrzeba 240 m bieżących siatki ogrodzeniowej i że jego powierzchnia jest największa z możliwych. Jakie wymiary ma ten plac?



12. W sklepie zostaje codziennie sprzedanych 40 sztuk pewnego towaru. Zysk przypadający na jedną sztukę tego towaru wynosi 240 zł.

a) Ekspert A twierdzi, że obniżenie ceny o x zł spowoduje wzrost dziennej sprzedaży tego towaru o x sztuk. O ile należy obniżyć cenę, aby zysk był największy? O ile zwiększy się wtedy zysk?

b) Ekspert B twierdzi, że podniesienie ceny o $(20 \cdot x)$ zł spowoduje spadek dziennej sprzedaży tego towaru o x sztuk. O ile należy podnieść cenę, aby zysk był największy? O ile zwiększy się wtedy zysk?

13. Zdjęcie w kształcie prostokąta o bokach p dm i q dm oprawiono w ramę o szerokości x dm (rysunek obok). Pole powierzchni zdjęcia wraz z ramą jest równe P dm². Oblicz szerokość ramy.



- a) $p = 3$, $q = 5$, $P = 29,25$
b) $p = 4$, $q = 6$, $P = 35$

11. Oznaczmy boki ogródka przez x , y .

Wówczas: $2(x + y) - 10 = 240$, czyli $y = 125 - x$.

Pole ogródka opisuje funkcja $P(x) = x(125 - x)$, $x \in (0; 125)$.

Funkcja P przyjmuje największą wartość dla $x = 62,5$. Wtedy $y = 125 - 62,5 = 62,5$.

Wymiary ogródka o największej powierzchni: $62,5 \text{ m} \times 62,5 \text{ m}$.

12. a) Zysk opisuje funkcja $z(x) = (240 - x)(40 + x)$, $x \in \{0, 1, 2, \dots, 240\}$.

Funkcja z przyjmuje największą wartość dla $x_w = \frac{240-40}{2} = 100$, zatem cenę należy obniżyć o 100 zł.

Wzrost zysku: $z(100) - z(0) = 19600 - 9600 = 10000$ [zł].

b) $z(x) = (240 + 20x)(40 - x)$, $x \in \{0, 1, 2, \dots, 40\}$

$x_w = \frac{40-12}{2} = 14$, zatem cenę należy podnieść o $20 \cdot 14 = 280$ [zł].

Wzrost zysku: $z(14) - z(0) = 13520 - 9600 = 3920$ [zł].

8. a) Wierzchołek paraboli ma współrzędne $W(3, 4)$, zatem $f(x) = a(x - 3)^2 + 4$.

$f(2) = a + 4 = 3$, więc $a = -1$, czyli $f(x) = -(x - 3)^2 + 4$.

$$-(x - 3)^2 + 4 \geq 0$$

$$(x - 3)^2 \leq 4$$

$$-2 \leq x - 3 \leq 2$$

$$x \in [1; 5]$$

- b) Wierzchołek paraboli ma współrzędne $W(-2, -2)$, zatem $f(x) = a(x + 2)^2 - 2$.

$f(-4) = 4a - 2 = -1$, więc $a = \frac{1}{4}$, czyli

$$f(x) = \frac{1}{4}(x + 2)^2 - 2.$$

$$\frac{1}{4}(x + 2)^2 - 2 \geq 0$$

$$(x + 2)^2 \geq 8$$

$$(x + 2)^2 \geq (2\sqrt{2})^2$$

$$x + 2 \leq -2\sqrt{2} \text{ lub } x + 2 \geq 2\sqrt{2}$$

$$x \in (-\infty; -2\sqrt{2} - 2] \cup$$

$$[2\sqrt{2} - 2; \infty)$$

$$\text{c) } f(x) = -2(x - 4)^2 + 1, \\ x \in \left[4 - \frac{\sqrt{2}}{2}; 4 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

9. a) najmniejsza: $f(-1) = -2$, największa: $f(1) = 6$

b) najmniejsza: $f(4) = -8$, największa: $f(1) = 1$

c) najmniejsza: $f(0) = 1$, największa: $f(2) = 9$

d) najmniejsza: $f(-2) = -12$, największa: $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}$

10. a) $a = b = 2$

$$\text{b) } a = \frac{3}{2}, b = -\frac{3}{2}$$

$$\text{c) } a = \frac{2}{5}, b = \frac{1}{5}$$

13. a) 0,75 dm

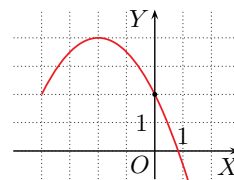
b) 0,5 dm



Jeśli w zadaniu należy wyznaczyć wzór funkcji kwadratowej, ale nie jest powiedziane, czy chodzi o postać ogólną, kanoniczną czy iloczynową, możemy wybrać taką, która jest dla nas najwygodniejsza.

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono fragment paraboli będącej wykresem funkcji f . Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $(-2, 4)$. Wyznacz wzór funkcji f . Ile liczb całkowitych spełnia nierówność $f(x) \geq \frac{1}{2}x + 2$?



Wzór funkcji f zapisujemy w postaci kanonicznej. Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(-2, 4)$, więc:

$$f(x) = a(x + 2)^2 + 4$$

Z rysunku odczytujemy, że do wykresu funkcji f należy punkt $(0, 2)$, zatem $2 = a(0 + 2)^2 + 4$ i stąd $a = -\frac{1}{2}$, czyli $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 4$.

Rozwiązujemy nierówność:

$$-\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 4 \geq \frac{1}{2}x + 2 \quad / \cdot (-2)$$

$$x^2 + 4x + 4 - 8 \leq -x - 4$$

$$x^2 + 5x \leq 0$$

$$x(x + 5) \leq 0$$

Zatem $x \in [-5; 0]$, czyli nierówność tę spełnia sześć liczb całkowitych.

Odpowiedź: $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 4$; sześć liczb

→ Zadanie 20, str. 58

D Przykład 2

Obwód prostokąta jest równy 14, a jeden z jego boków ma długość x . Wyznacz wzór funkcji opisującej pole tego prostokąta w zależności od x i podaj jej dziedzinę. Uzasadnij, że jeśli ten prostokąt nie jest kwadratem, to jego pole jest mniejsze od $12\frac{1}{4}$.

Długość drugiego boku prostokąta oznaczmy przez y . Wtedy $2x + 2y = 14$, czyli $y = 7 - x$. Pole tego prostokąta opisuje funkcja kwadratowa, której wzór zapisujemy w postaci iloczynowej, a następnie przekształcamy go do postaci ogólnej:

$$P(x) = x \cdot (7 - x) = -x^2 + 7x, \text{ gdzie } x \in (0; 7)$$

Wykresem funkcji P jest fragment paraboli o ramionach skierowanych w dół i wierzchołku w punkcie o odciętej $x_w = -\frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$. Obliczamy rzędną wierzchołka:

$$P\left(\frac{7}{2}\right) = -\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 7 \cdot \frac{7}{2} = \frac{-49}{4} + \frac{49}{2} = \frac{49}{4} = 12\frac{1}{4}$$

Funkcja P przyjmuje wartość $12\frac{1}{4}$ dla $x = y = \frac{7}{2}$, czyli gdy prostokąt jest kwadratem. Zatem dla prostokąta niebędącego kwadratem pole jest mniejsze od $12\frac{1}{4}$.

→ Zadanie 21, str. 58



W zadaniach 1–9 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Przedział $(-\infty; -2]$ jest zbiorem wartości funkcji

- A. $y = x^2 + 2$ B. $y = x^2 - 2$ C. $y = -x^2 + 2$ **D. $y = -x^2 - 2$**

Zadanie 2 (0–1)

Dwa różne pierwiastki dodatnie ma równanie

- A. $x^2 - 4x + 5 = 0$ C. $x^2 - 5x + 6 = 0$
B. $x^2 - 3x - 4 = 0$ D. $x^2 + 5x - 6 = 0$

Zadanie 3 (0–1)

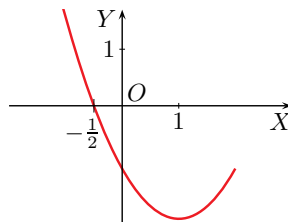
Pierwiastkami równania $2x^2 + bx + c = 0$ są liczby -3 i 4 , zatem

- A. $b = -1$ i $c = -12$ C. $b = 2$ i $c = -24$
B. $b = -2$ i $c = -24$ D. $b = 1$ i $c = -12$

Zadanie 4 (0–1)

Na rysunku obok przedstawiono fragment paraboli, której wierzchołkiem jest punkt $(1, -2)$. Drugim miejscem zerowym funkcji, której wykresem jest ta parabola, jest liczba

- A. $1\frac{1}{2}$ B. 2 **C. $2\frac{1}{2}$** D. 3

**Zadanie 5 (0–1)**

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $2x^2 > 3$ jest

- A. $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ C. $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \infty\right)$
B. $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \infty\right)$ D. $\left(-\infty; -\frac{3\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}; \infty\right)$

Zadanie 6 (0–1)

Jednym z pierwiastków równania $4x^2 + 4x + \sqrt{2} - \frac{1}{2} = 0$ jest liczba

- A. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$** B. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $-\sqrt{2}$ D. $-2\sqrt{2}$

Zadanie 7 (0–1)

Największa wartość funkcji $f(x) = 2x^2 + 4x$ w przedziale $[1; 2]$ jest równa

- A. 16** B. 4 C. 3 D. 0

Zadanie 8 (0–1)

Pole prostokątnej działki, której jeden bok jest o 2 m dłuższy od drugiego boku, wynosi 288 m^2 . Obwód tej działki jest równy

- A. 64 m **B. 68 m** C. 72 m D. 76 m

8. Niech x oznacza krótszy bok działki. Wówczas:

$$x(x+2) = 288, x > 0$$

$$x^2 + 2x - 288 = 0$$

$$(x+18)(x-16) = 0$$

$$x = 16$$

$$Ob = 68 \text{ [m]}$$

2. A. $\Delta < 0$

B. $\Delta = 0$

C. $x_1 = 2, x_2 = 3$

D. $x_1 = -6, x_2 = 1$

3. $2(x+3)(x-4) =$
 $= 2(x^2 - x - 12) =$
 $= 2x^2 - 2x - 24$
zatem $b = -2, c = -24$

4. $x_1 = -\frac{1}{2}, x_w = 1,$
 $\frac{x_1 + x_2}{2} = x_w,$
zatem $x_2 = 2\frac{1}{2}$

5. $x^2 - \frac{3}{2} > 0$
 $x^2 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 > 0$
 $x^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 > 0$
 $x^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 > 0$
 $\left(x - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) > 0$

6. $4\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{4}{2\sqrt{2}} + \sqrt{2} - \frac{1}{2} =$
 $= 4 \cdot \frac{1}{8} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - \frac{1}{2} = 0$



9. $(4+x)(8+x) = 96, x > 0$

$$x^2 + 12x + 32 = 96$$

$$x^2 + 12x - 64 = 0$$

$$\Delta = 144 + 256 = 400$$

$$\sqrt{\Delta} = 20$$

$$x_1 = \frac{-12-20}{2} < 0, \text{ sprzeczne}$$

$$\text{z założeniem}$$

$$x_2 = \frac{-12+20}{2} = 4$$

Długości boków prostokąta P_2 : 8 i 12.

Długość przekątnej:

$$d = \sqrt{8^2 + 12^2} =$$

$$= \sqrt{4^2(2^2 + 3^2)} =$$

$$= 4\sqrt{4+9} = 4\sqrt{13} \text{ [cm]}$$

10. $x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{11}{4}$

$$y_w = f\left(\frac{11}{4}\right) =$$

$$= \frac{121}{16} - \frac{121}{8} + \frac{173}{16} =$$

$$= -\frac{121}{16} + \frac{173}{16} = \frac{52}{16} = \frac{13}{4}$$

11. $x \in (-4\sqrt{17}; \sqrt{17})$

Nierówność spełnia liczba -1 .

Liczby dodatnie spełniające nierówność: 1, 2, 3, 4.

12. $x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$

Najmniejsza wartość funkcji:

$$f(1) = -\sqrt{2} - 4.$$

$$[-2; 0]: f(0) = -4$$

$$[2; 4]:$$

$$f(2) = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 4 = -4,$$

$$f(4) = 16\sqrt{2} - 8\sqrt{2} - 4 > 0$$

$$[0; 6]: -6 < f(1)$$

Zadanie 9 (0-1)

Boki prostokąta P_1 o wymiarach $4 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$ wydłużono o $x \text{ cm}$ i uzyskano prostokąt P_2 o polu równym 96 cm^2 . Przekątna prostokąta P_2 ma długość równą

A. $3\sqrt{10} \text{ cm}$

B. $4\sqrt{10} \text{ cm}$

C. $3\sqrt{13} \text{ cm}$

D. $4\sqrt{13} \text{ cm}$

Zadanie 10 (0-2)

Punkt P jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji danej wzorem $f(x) = x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{173}{16}$.

Każdemu rozpoczętemu zdaniu przyporządkuj właściwe dokończenie. Wpisz obok rozpoczętych zdań w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–E.

Numer zadania	Zdanie do uzupełnienia	Dokończenie zdania
10.1	Odcięta punktu P jest równa	E
10.2	Rzędna punktu P jest równa	D

A. $6\frac{1}{4}$

B. $5\frac{1}{4}$

C. $4\frac{3}{4}$

D. $3\frac{1}{4}$

E. $2\frac{3}{4}$

Zadanie 11 (0-1)

Dana jest nierówność $(x - \sqrt{17})(x + 4\sqrt{17}) \leq 0$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Nierówności tej nie spełnia żadna liczba całkowita ujemna.	P	F
Nierówność ta jest spełniona przez 5 liczb całkowitych dodatnich.	P	F

Zadanie 12 (0-2)

Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2}x - 4$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale

$[-2; 0]$ jest równa -2 .	P	F
$[2; 4]$ jest równa -4 .	P	F
$[0; 2]$ jest równa -6 .	P	F

**Zadanie 13 (0-2)**

Dana jest funkcja $f(x) = (2x - 6)^2 - 2$.

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

1. Wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji f jest punkt

- A.** (3, -2) **B.** (3, 2) **C.** (6, -2) **D.** (-6, -2)

2. Parabola będąca wykresem funkcji f przecina oś rzędnych w punkcie

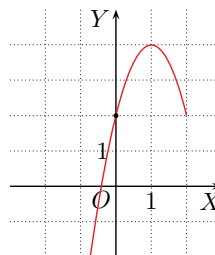
- E.** (0, 34) **F.** (0, -18) **G.** (0, -38) **H.** (0, -2)

Zadanie 14 (0-1)

Na rysunku obok przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej f . Oznaczmy przez x_1 , x_2 miejsca zerowe funkcji f , a przez x_w odciętą wierzchołka paraboli będącej jej wykresem.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Suma miejsc zerowych funkcji f jest równa



A.	2,	ponieważ	1.	$x_w = 2(x_1 + x_2)$.
			2.	$x_w = x_1 + x_2$.
B.	1,		3.	$x_w = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Zadanie 15

Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = -4(x + \frac{1}{2})(x - \frac{5}{2})$.

Zadanie 15.1 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie $(0, -5)$.	P	F
Wykres funkcji f ma wierzchołek w punkcie $(-2, 5)$.	P	F

Zadanie 15.2 (0-1)

Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 0$.

Zadanie 16 (0-2)

Rozwiąż równanie $3x(x + 3) = (x + 3)^2$.

13. $f(x) = 4(x - 3)^2 - 2$

15.1. $f(0) = -4 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{5}{2} = 5$

$x_w = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}}{2} = 1$

15.2. $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{5}{2}; \infty)$

16. $x = -3, x = \frac{3}{2}$



17. $x \in (-\infty; -4] \cup [\frac{1}{2}; \infty)$

18. $(x+1)(2x+3-5+x) \leq 0$
 $(x+1)(3x-2) \leq 0$
 $(x+1)(x-\frac{2}{3}) \leq 0$
 $x \in [-1; \frac{2}{3}]$

19. $x_w = \frac{-3+5}{2} = 1$
 $f(x_w) = 2 \cdot 4 \cdot (-4) = -32$

20. Zapisujemy wzór funkcji w postaci kanonicznej:
 $f(x) = a(x-3)^2 - 1$,
 $f(1) = 4a - 1 = 0$, skąd $a = \frac{1}{4}$.
 Zatem $f(x) = \frac{1}{4}(x-3)^2 - 1$.
 Rozwiązujemy nierówność:
 $\frac{1}{4}(x-3)^2 - 1 \leq -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$
 $\frac{1}{4}(x^2 - 6x + 9) - 1 \leq -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$
 $\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - 1 \leq -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$
 $\frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{4} - \frac{5}{4} \leq 0$
 $\frac{1}{4}x^2 + 1 \leq 0$

Nierówność jest sprzeczna.

21. Długość drugiej przekątnej rombu: $10\frac{1}{2} - x$.

Pole rombu:

$P(x) = \frac{1}{2}x(10\frac{1}{2} - x)$,
 gdzie $x \in (0; 10\frac{1}{2})$.

Miejsca zerowe funkcji P :

$x_1 = 0$, $x_2 = \frac{21}{2}$.

$x_w = \frac{21}{4}$

$f(x_w) = \frac{21}{8}(\frac{21}{2} - \frac{21}{4}) = \frac{441}{32}$

Parabola ma ramiona skierowane w dół, zatem największą wartość przyjmuje w wierzchołku.

Zadanie 17 (0-2)

Rozwiąż nierówność $2x^2 + 7x \geq 4$.

Zadanie 18 (0-2)

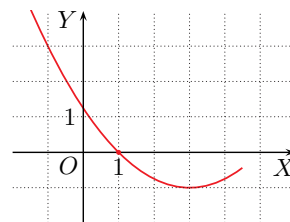
Rozwiąż nierówność $(x+1)(2x+3) \leq (x+1)(5-x)$.

Zadanie 19 (0-2)

Oblicz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = 2(x+3)(x-5)$.

D Zadanie 20 (0-4) → Przykład 1, str. 54

Na rysunku obok przedstawiono fragment paraboli będącej wykresem funkcji f . Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $(3, -1)$. Wyznacz wzór funkcji f i uzasadnij, że żadna liczba niewymierna nie spełnia nierówności $f(x) \leq -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$.

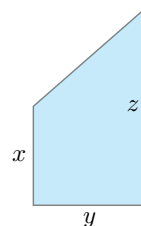


D Zadanie 21 (0-4) → Przykład 2, str. 54

Jedna z przekątnych rombu ma długość x , a suma długości obu przekątnych jest równa $10\frac{1}{2}$. Wyznacz wzór funkcji opisującej pole tego rombu w zależności od x . Podaj jej dziedzinę. Uzasadnij, że dla dowolnego całkowitego argumentu funkcja ta przyjmuje wartość mniejszą od $\frac{441}{32}$.

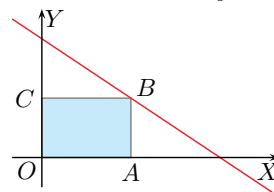
D Zadanie 22 (0-4)

Boki trapezu prostokątnego przedstawionego na rysunku obok spełniają warunki: $x + y + z = 18$ oraz $z = 2x$. Uzasadnij, że jeśli taki trapez ma największe możliwe pole, to jego obwód jest nie mniejszy od 27.



Zadanie 23 (0-4)

Rozpatrujemy prostokąty położone w I ćwiartce układu współrzędnych. Trzy wierzchołki tych prostokątów leżą na osiach układu współrzędnych, a czwarty leży na prostej $y = -\frac{2}{3}x + 4$ (rysunek obok).



- Podaj wzór opisujący pole prostokąta w zależności od współrzędnej x_0 punktu A.
- Który spośród tych prostokątów ma największe pole? Podaj współrzędne jego wierzchołków.

22. $z = 2x$ i $y = 18 - x - z = 18 - 3x$

Pole trapezu: $P(x) = \frac{1}{2}(x+z)y = \frac{9}{2}x(6-x)$, gdzie $x \in (0; 6)$.

Funkcja P największą wartość przyjmuje dla $x_w = \frac{6+0}{2} = 3$, stąd $y = 9$, $z = 6$.

Długość czwartego boku trapezu: $u \geq y = 9$, więc obwód trapezu:

$$x + y + z + u = 18 + u \geq 18 + 9 = 27$$

23. a) Długości boków prostokąta: x_0 i $y_0 = -\frac{2}{3}x_0 + 4$.

Pole prostokąta: $P(x_0) = x_0 \cdot y_0 = -\frac{2}{3}x_0^2 + 4x_0$, gdzie $x_0 \in (0; 6)$

b) Największa wartość funkcji P jest osiągnięta dla $x_0 = 3$, stąd $y_0 = 2$.

Współrzędne wierzchołków: $O(0, 0)$, $A(3, 0)$, $B(3, 2)$ i $C(0, 2)$