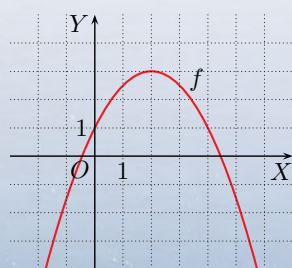
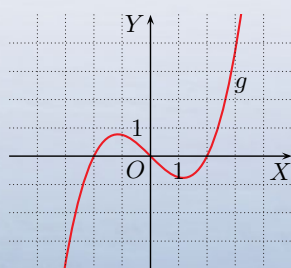


2 Wielomiany

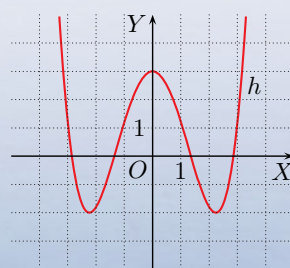
Omawiane w tym rozdziale funkcje, zwane wielomianami, służą do opisu wielu zjawisk. Za pomocą wielomianu można opisać na przykład zależność między liczbą obrotów na minutę silnika łodzi motorowej a jej prędkością. Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy przykładowych wielomianów.



$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$$



$$g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$$



$$h(x) = \frac{1}{5}x^4 - 2x^2 + 3$$



Uczeń:

- rozróżnia wielomian, podaje przykład wielomianu, określa jego stopień i podaje wartości jego współczynników,
- zapisuje wielomian określonego stopnia o danych współczynnikach,
- zapisuje wielomian w sposób uporządkowany,
- oblicza wartość wielomianu dla danego argumentu,
- wyznacza brakujące współrzędne punktu należącego do wykresu danego wielomianu,
- sprawdza, czy dany punkt należy do wykresu danego wielomianu,
- wyznacza współczynniki wielomianu spełniającego dane warunki.

Ćwiczenie 1

- a) tak, stopnia 7
- b) tak, stopnia 1
- c), d) nie
- e) tak, stopnia 3

2.1. Stopień i współczynniki wielomianu

Definicja

Jednomianem stopnia n nazywamy funkcję $y = ax^n$, gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}_+$.

Jednomianem stopnia 0 jest funkcja stała $y = a$, gdzie $a \neq 0$.

Funkcja $y = 0$ jest **jednomianem zerowym**, którego stopnia nie określamy.

Liczbę a nazywamy **współczynnikiem** jednomianu.

Ćwiczenie 1

Czy poniższa funkcja jest jednomianem? Jeśli tak, to podaj jego stopień.

- a) $y = -5x^7$ b) $y = \frac{x}{4}$ c) $y = \frac{4}{x}$ d) $y = 6\sqrt{x}$ e) $y = \sqrt{2}x^3$

Sumę dwóch jednomianów różnych stopni nazywamy **dwumianem**, np.:

$$y = x^3 + 2x$$

dwumian trzeciego stopnia

$$y = 5x^4 + 1$$

dwumian czwartego stopnia

Sumę trzech jednomianów różnych stopni nazywamy **trójmianem**, np.:

$$y = x^2 + 2x + 1$$

trójmian drugiego stopnia (kwadratowy)

$$y = 5x^6 - 2x^2 + 4$$

trójmian szóstego stopnia

Ogólnie sumę jednomianów nazywamy **wielomianem**, np.:

$$y = 6x^8 - 9x^6 + 2x^3 - x^2$$

wielomian ósmego stopnia

Zwróć uwagę na to, że **stopniem wielomianu** jest najwyższy stopień spośród stopni występujących w nim jednomianów. Wielomian jest zapisany w sposób uporządkowany, gdy jednomiany, których jest sumą, są ustawione kolejno – od jednomianu najwyższego stopnia do jednomianu najniższego stopnia.

Definicja

Funkcję zmiennej rzeczywistej x daną wzorem:

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

gdzie $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_+$, nazywamy **wielomianem** stopnia n .

Jednomian w stopnia 0 nazywamy też **wielomianem stopnia 0**.

Jednomian zerowy ($w \equiv 0$) nazywamy też **wielomianem zerowym**.

Jednomiany występujące w wielomianie nazywamy też jego **wyrazami**.

Liczby $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ nazywamy **współczynniki** wielomianu.

Współczynnik a_0 nazywamy **wyrazem wolnym**.

Stopień wielomianu w oznaczamy przez $\text{st}(w)$.

Zauważ, że – zgodnie z definicją – wielomianem jest zarówno funkcja liniowa, jak i funkcja kwadratowa.

Ćwiczenie 2

Uporządkuj wielomian w i podaj jego stopień.

- a) $w(x) = x + x^3 + x^5 - 1 - x^2 - x^4$ c) $w(x) = 3x^4 - 2 + 6x - x^2 + x^7 + 2x^8$
b) $w(x) = 2x^6 - x^3 + 3x^4 - x - 3x^5$ d) $w(x) = 5 - 2x + 2x^{10} - x^6 + 3x^2$

Przykład 1

Wypisz współczynniki wielomianu $w(x) = 5x^4 - 2x^2 + \frac{1}{3}x + 1$ i podaj jego stopień.

Współczynniki wielomianu: $a_4 = 5$, $a_3 = 0$, $a_2 = -2$, $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_0 = 1$, stopień wielomianu: $\text{st}(w) = 4$.

Ćwiczenie 3

Wypisz współczynniki wielomianu w i podaj jego stopień.

- a) $w(x) = -2x^5 + x$ b) $w(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^5 + x^6 + x^2 + 1$ c) $w(x) = 2^{10}$

Ćwiczenie 4

Zapisz wielomian czwartego stopnia, dla którego:

- a) $a_4 = a_2 = a_0 = -3$, $a_3 = a_1 = 0$, b) $a_n = (-1)^n$ dla $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Przykład 2

Oblicz wartości wielomianu $w(x) = 3x^4 - 5x^3 - 7$ dla $x = 2$, $x = -2$ i $x = 0$.

$$w(2) = 3 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^3 - 7 = 3 \cdot 16 - 5 \cdot 8 - 7 = 48 - 40 - 7 = 1$$

$$w(-2) = 3 \cdot (-2)^4 - 5 \cdot (-2)^3 - 7 = 3 \cdot 16 - 5 \cdot (-8) - 7 = 48 + 40 - 7 = 81$$

$$w(0) = 3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 - 7 = -7$$

Zauważ, że wartość $w(0)$ jest równa wyrazowi wolnemu wielomianu w .

Ćwiczenie 5

Oblicz wartości wielomianu w dla $x = 0$, $x = 2$ i $x = -2$.

- a) $w(x) = 2x^3 - x^2 + x - 4$ c) $w(x) = x^5 - x^2 + 3x - 2$
b) $w(x) = x^4 + 2x^3 - 6x + 1$ d) $w(x) = -x^6 + 2x^3 - x + 3$

Ćwiczenie 6

Oblicz wartości wielomianu w dla $x = \frac{1}{2}$ i $x = -\frac{1}{2}$.

- a) $w(x) = -4x^3 - 2x^2 - 6x + 3$ b) $w(x) = 32x^4 - 8x^3 - 2x + \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 5

- a) $w(0) = -4$, $w(2) = 10$, $w(-2) = -26$
b) $w(0) = 1$, $w(2) = 21$, $w(-2) = 13$
c) $w(0) = -2$, $w(2) = 32$, $w(-2) = -44$
d) $w(0) = 3$, $w(2) = -47$, $w(-2) = -75$

Ćwiczenie 6

- a) $w(-\frac{1}{2}) = 6$, $w(\frac{1}{2}) = -1$
b) $w(-\frac{1}{2}) = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$, $w(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 2

- a) $w(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$,
 $\text{st}(w) = 5$
b) $w(x) = 2x^6 - 3x^5 + 3x^4 +$
 $-x^3 - x$, $\text{st}(w) = 6$
c) $w(x) = 2x^8 + x^7 + 3x^4 - x^2 +$
 $+6x - 2$, $\text{st}(w) = 8$
d) $w(x) = 2x^{10} - x^6 + 3x^2 - 2x + 5$,
 $\text{st}(w) = 10$

Ćwiczenie 3

- a) $a_5 = -2$, $a_4 = a_3 = a_2 = 0$,
 $a_1 = 1$, $a_0 = 0$, $\text{st}(w) = 5$
b) $a_6 = 1$, $a_5 = -\frac{1}{2}$, $a_4 = 1$,
 $a_3 = 0$, $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, $a_0 = 1$,
 $\text{st}(w) = 6$
c) $a_0 = 2^{10}$, $\text{st}(w) = 0$

Ćwiczenie 4

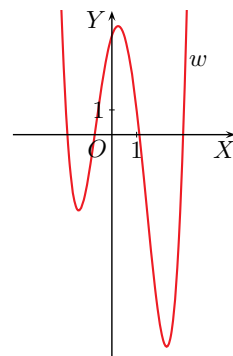
- a) $w(x) = -3x^4 - 3x^2 - 3$
b) $w(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

Odpowiedzi do zadań

1. x a) $v(x) = x^3 - 6x^2 + 4$,
 $a_3 = 1$, $a_2 = -6$, $a_1 = 0$,
 $a_0 = 4$
 b) $w(x) = -6x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x - 1$,
 $a_5 = -6$, $a_4 = 4$, $a_3 = -3$,
 $a_2 = 0$, $a_1 = 2$, $a_0 = -1$,
 $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = -4$
3. a) $w(0) = -3$, $w(2) = 21$,
 $w(-2) = -19$, $w(\frac{1}{2}) = -3\frac{3}{8}$
 b) $w(0) = 2$, $w(2) = -20$,
 $w(-2) = 32$, $w(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$
 c) $w(0) = -4$, $w(2) = -6$,
 $w(-2) = -34$, $w(\frac{1}{2}) = -3\frac{3}{8}$
 d) $w(0) = -10$, $w(2) = 6$,
 $w(-2) = -58$, $w(\frac{1}{2}) = -11\frac{7}{16}$
4. $a = 1$, $b = -2$, $c = -8$, $d = 4$
5. a) punkt Q ,
 $u(-2) = -17 \neq 7$, $u(2) = -5$
 b) punkt P ,
 $u(\frac{1}{2}) = 2$,
 $u(-\frac{1}{2}) = -2 \neq -1$
6. a) $w(1) = a + 1 + 1 = 3$, $a = 1$
 b) $w(3) = 81 - 9 + a = 0$,
 $a = -72$
 c) $w(-4) = -64 + 16a + 3 = 3$,
 $a = 4$
 d) $w(2) = 16a + 10 = -6$,
 $a = -1$
7. a) $\begin{cases} 3 + a - b + 2 = 4 \\ -24 + 4a + 2b + 2 = 20 \end{cases}$
 $a = 6\frac{2}{3}$, $b = 7\frac{2}{3}$
 b) $\begin{cases} 81 - 27a + 9b + 2 = 11 \\ 1 + a + b + 2 = 7 \end{cases}$
 $a = 3$, $b = 1$
8. a) B , C b) A
9. a) $a = 3$ b) $a = 3$

Zadania

1. Dane są wielomiany $u(x) = 2x^3 - 6x^2 + 0,1x^4$, $v(x) = -6x^2 + 4 + x^3$,
 $w(x) = 2x + 4x^4 - 3x^3 - 6x^5 - 1$. Wskaż wśród nich wielomian:
 a) stopnia trzeciego; uporządkuj go i podaj współczynniki a_3 , a_2 , a_1 i a_0 ,
 b) stopnia piątego; uporządkuj go, podaj współczynniki a_5 , a_4 , a_3 , a_2 , a_1
 i a_0 oraz oblicz ich sumę.
-  2. Uzasadnij, że suma współczynników dowolnego wielomianu w jest równa $w(1)$.
3. Oblicz wartości wielomianu w dla $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$ i $x = \frac{1}{2}$.
 a) $w(x) = 3x^3 + x^2 - 2x - 3$ c) $w(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 4$
 b) $w(x) = -2x^3 + x^2 - 5x + 2$ d) $w(x) = -x^4 + 5x^3 - 4x - 10$
4. Punkty $P(1, a)$, $Q(-1, b)$, $R(2, c)$, $S(3, d)$ należą do wykresu wielomianu $w(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 3x + 4$ (rysunek obok). Oblicz współrzędne a , b , c i d .
5. Które spośród punktów P , Q należą do wykresu wielomianu u ?
 a) $u(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 1$, $P(-2, 7)$, $Q(2, -5)$
 b) $u(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{1}{2}$, $P(\frac{1}{2}, 2)$, $Q(-\frac{1}{2}, -1)$
6. Oblicz współczynnik a wielomianu w .
 a) $w(x) = ax^2 + x + 1$, $w(1) = 3$ c) $w(x) = x^3 + ax^2 + 3$, $w(-4) = 3$
 b) $w(x) = 3x^3 - x^2 + a$, $w(3) = 0$ d) $w(x) = ax^4 + 4x + 2$, $w(2) = -6$
-  7. Oblicz współczynniki a i b wielomianu w .
 a) $w(x) = -3x^3 + ax^2 + bx + 2$, $w(-1) = 4$, $w(2) = 20$
 b) $w(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 2$, $w(-3) = 11$, $w(1) = 7$



Sprawdź się

8. Które spośród punktów $A(1, 1)$, $B(2, -45)$, $C(-1, -3)$ należą do wykresu wielomianu w ?
 a) $w(x) = -3x^3 - 8x^2 + 3x + 5$ b) $w(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 - 3$
9. Oblicz współczynnik a wielomianu w .
 a) $w(x) = x^2 - ax + 3$, $w(2) = 1$ b) $w(x) = 2ax^4 - ax^3 - 5$, $w(-1) = 4$

2. Niech $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Wtedy:

$$\begin{aligned} w(1) &= a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 = \\ &= a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0 \end{aligned}$$

co należało uzasadnić.

2.2. Dodawanie i odejmowanie wielomianów

Aby wyznaczyć sumę wielomianów, dodajemy wyrazy podobne występujące w tych wielomianach. Suma wielomianów jest wielomianem.

Przykład 1

Wyznacz sumę wielomianów:

$$u(x) = 2x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 5 \quad \text{ i } \quad w(x) = -3x^3 + 2x^2 - x$$

$$\begin{aligned} u(x) + w(x) &= (2x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 5) + (-3x^3 + 2x^2 - x) = \\ &= 2x^4 + \underline{9x^3} - \underline{6x^2} + \underline{3x} - 5 - \underline{3x^3} + \underline{2x^2} - \underline{x} = \\ &= 2x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 2x - 5 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 1

Wyznacz sumę wielomianów u i w . Podaj stopień wielomianu u , wielomianu w oraz stopień ich sumy.

a) $u(x) = 17x^4 - 14x^2 + 7x - 5$, $w(x) = 6x^3 + 11x^2 - 5x + 5$

b) $u(x) = 9x^5 - 13x^3 + 10x^2 - 2$, $w(x) = -9x^5 + 6x^4 - 12x^2 + 7$

Ćwiczenie 2

Podaj przykłady wielomianów u i w takich, że $\text{st}(u) = 4$, $\text{st}(w) = 4$ oraz:

a) $\text{st}(u + w) = 4$, c) $\text{st}(u + w) = 2$, e) $\text{st}(u + w) = 0$.

b) $\text{st}(u + w) = 3$, d) $\text{st}(u + w) = 1$,

Twierdzenie

Jeśli wielomiany u , w oraz $u + w$ są niezerowe i $\text{st}(u) \leq \text{st}(w)$, to:

$$\text{st}(u + w) \leq \text{st}(w)$$

Przykład 2

Wyznacz sumę wielomianów $u(x) = 8x^3 + 5x^2 - 7x$ i $w(x) = -8x^3 - 5x^2 + 7x$.

$$u(x) + w(x) = 8x^3 + 5x^2 - 7x - 8x^3 - 5x^2 + 7x = 0$$

Zatem suma $u + w$ jest wielomianem zerowym.

Ćwiczenie 3

Dany jest wielomian $u(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Co można powiedzieć o współczynnikach wielomianu w , jeśli $u + w$ jest wielomianem zerowym?

Ćwiczenie 3

Współczynniki wielomianu w są liczbami przeciwnymi do odpowiednich współczynników wielomianu u , tzn.:

$$w(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \dots - a_2 x^2 - a_1 x - a_0$$

Uczeń:

- wyznacza sumę i różnicę wielomianów,
- określa stopnie sumy i różnicy wielomianów,
- szkicuje wykres wielomianu będącego sumą jednomianów stopni pierwszego i drugiego,
- odczytuje informacje z danego wykresu wielomianu,
- wyznacza sumę i różnicę wielomianów wielu zmiennych,
- stosuje wielomian do opisanie np. pola powierzchni prostopadłościanu i określa dziedzinę tego wielomianu,
- oblicza wartość wielomianu dwóch (trzech) zmiennych dla danych argumentów.

Komentarz

Warto sprawdzić, czy wszyscy uczniowie rozumieją pojęcia sumy i różnicy wielomianów.

Ćwiczenie 1

a) $u(x) + w(x) = 17x^4 + 6x^3 + -3x^2 + 2x$, $\text{st}(u) = 4$,
 $\text{st}(w) = 3$, $\text{st}(u + w) = 4$

b) $u(x) + w(x) = 6x^4 - 13x^3 + -2x^2 + 5$, $\text{st}(u) = 5$,
 $\text{st}(w) = 5$, $\text{st}(u + w) = 4$

Ćwiczenie 2

a) np. $u(x) = x^4 + 1$, $w(x) = x^4$

b) np. $u(x) = -x^4 + 1$,
 $w(x) = x^4 + x^3$

c) np. $u(x) = -x^4 - x + 1$,
 $w(x) = x^4 + x^2$

d) np. $u(x) = -x^4 + 1$,
 $w(x) = x^4 + x + 1$

e) np. $u(x) = -x^4 + 1$,
 $w(x) = x^4 + 1$

Aby wyznaczyć różnicę wielomianów, odejmujemy od wyrazów pierwszego wielomianu odpowiednie wyrazy podobne drugiego wielomianu. Różnica wielomianów jest wielomianem.

Przykład 3

Dane są wielomiany $u(x) = 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3$ i $w(x) = 4x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x$. Wyznacz różnicę $u - w$.

$$\begin{aligned} u(x) - w(x) &= (6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3) - (4x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x) = \\ &= \underline{6x^4} - \underline{3x^3} + \underline{2x^2} - 3 - \underline{4x^4} - \underline{2x^3} + \underline{x^2} + 5x = \\ &= 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$

Zmieniamy znaki współczynników wielomianu w .

Ćwiczenie 4

a) $u(x) - w(x) = 5x^9 + 4x^8 + 10x^4 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, $\text{st}(u) = 9$, $\text{st}(w) = 8$, $\text{st}(u - w) = 9$

b) $u(x) - w(x) = \frac{2}{5}x^4 + -\frac{1}{2}x^2 + 1$, $\text{st}(u) = 6$, $\text{st}(w) = 6$, $\text{st}(u - w) = 4$

Ćwiczenie 4

Wyznacz różnicę $u - w$. Podaj stopnie wielomianów u , w i $u - w$.

a) $u(x) = 5x^9 + 2x^8 + 4x^4 + 2x + 1$, $w(x) = -2x^8 - 6x^4 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

b) $u(x) = \frac{3}{4}x^6 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{3}{8}x^2 + 1$, $w(x) = 0,75x^6 - 0,2x^4 + 0,125x^2$

Przykład 4

Dane są wielomiany $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 1$ i $g(x) = 5x^4 + x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x$. Wyznacz wielomian $h(x) = 3f(x) - 2g(x)$.

$$\begin{aligned} h(x) &= 3(3x^4 - 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 1) - 2(5x^4 + x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x) = \\ &= \underline{9x^4} - \underline{6x^3} - \underline{x^2} + 3 - \underline{10x^4} - \underline{2x^3} + \underline{4x^2} - 3x = \\ &= -x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 3x + 3 \end{aligned}$$

Mnożymy każdy wyraz wielomianu f przez 3 i każdy wyraz wielomianu g przez -2 .

Ćwiczenie 5

a) $h(x) = -10x^6 + 8x^4 + 7$, $h(-1) = 5$

b) $h(x) = -14x^4 - 15x^2 + 4$, $h(-1) = -25$

Ćwiczenie 5

Wyznacz wielomian $h(x) = 3f(x) - 4g(x)$. Oblicz $h(-1)$.

a) $f(x) = -2x^6 + 4x^3 - 8x + 5$, $g(x) = x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 6x + 2$

b) $f(x) = 2x^5 - 6x^4 - x^2 + 4x$, $g(x) = 1,5x^5 - x^4 + 3x^2 + 3x - 1$

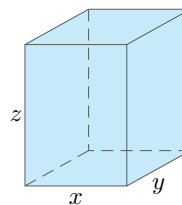
Oprócz wielomianów jednej zmiennej rozpatruje się również **wielomiany wielu zmiennych**, np.:

$u(x, y) = 3x^4y^2 - 7x^2y^3 - xy - 2y^4$ jest wielomianem dwóch zmiennych,

$w(x, y, z) = 9xy^2z + 4x^2y^3z^3 + 6yz$ jest wielomianem trzech zmiennych.

Przykład 5

$P(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$ dla $x, y, z > 0$ jest wielomianem trzech zmiennych opisującym pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach długości x , y , z (rysunek obok). Objętość tego prostopadłościanu opisuje wielomian trzech zmiennych $V(x, y, z) = xyz$.



Wyrazy wielomianu wielu zmiennych są **podobne**, gdy odpowiednie zmienne występują w nich w tych samych potęgach. Wyrazami podobnymi są na przykład $4x^3y^2$ i $6x^3y^2$. Aby wyznaczyć sumę (różnicę) wielomianów wielu zmiennych, należy dodać (odjąć) wyrazy podobne tych wielomianów.

Przykład 6

a) Wyznacz sumę $u + w$ wielomianów u i w .

$$u(x, y) = 3x^2y + 6xy^2 - 4xy, \quad w(x, y) = 5xy^3 + 4x^2y + xy + 2$$

$$\begin{aligned} u(x, y) + w(x, y) &= \underline{3x^2y} + 6xy^2 - \underline{4xy} + 5xy^3 + \underline{4x^2y} + \underline{xy} + 2 = \\ &= 7x^2y + 5xy^3 + 6xy^2 - 3xy + 2 \end{aligned}$$

b) Wyznacz różnicę $u - w$ wielomianów u i w .

$$u(x, y, z) = 5x^2y^2z^2 - 4xyz^2, \quad w(x, y, z) = 5x^2y^2z - 3xyz^2 + 2yz^2$$

$$\begin{aligned} u(x, y, z) - w(x, y, z) &= 5x^2y^2z^2 - \underline{4xyz^2} - 5x^2y^2z + \underline{3xyz^2} - 2yz^2 = \\ &= 5x^2y^2z^2 - 5x^2y^2z - xyz^2 - 2yz^2 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 6

Wyznacz sumę $u + w$ i różnicę $u - w$ wielomianów u i w .

a) $u(x, y) = 4x^3y^2 - 3x^2y^2 + 2xy + 2, \quad w(x, y) = 3x^2y^3 - 6x^2y^2 - 6xy - 3$

b) $u(x, y) = 2x^4y + 3x^3y - 2xy^2 + 1, \quad w(x, y) = 3x^3y + 4xy^2 - x + 4$

c) $u(x, y, z) = 4xy^2z^3 - 6x^2y^2z - xyz^3, \quad w(x, y, z) = xy^2z^3 + 6x^2yz^2 + 2xyz^3$

d) $u(x, y, z) = 8x^2y + 6xz^2 - 4y^2z - yz^2, \quad w(x, y, z) = 8xz^2 + 4y^2z - 3yz^2 + z^3$

Zadania

1. Wyznacz sumę $f + g$ oraz różnicę $f - g$ wielomianów f i g .

a) $f(x) = \frac{3}{4}x^6 - 2x^4 + \frac{5}{4}x^2 + 4, \quad g(x) = \frac{1}{4}x^6 + 2x^4 + x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 2x + 2$

b) $f(x) = -2x^2 + 4x - x^6 + 2, \quad g(x) = -5x + 3x^2 + x^6 - 3x^5$

c) $f(x) = 3x^4 + 2x^7 - 5 + 4x, \quad g(x) = -3x + x^5 - 2x^7 + 2$

2. Wyznacz wielomiany $w(x) = 2f(x) - 3g(x)$ oraz $u(x) = 2g(x) - 3f(x)$. Podaj stopień oraz sumę współczynników każdego z tych wielomianów.

a) $f(x) = x^5 + 2x^2 + 3, \quad g(x) = -2x^4 + 3x^2 + 2$

b) $f(x) = 3x^5 + 6x^3 - 9x, \quad g(x) = 2x^5 + 4x^3 - 4x^2$

3. Co można powiedzieć o stopniu sumy wielomianów p i q ?

a) $\text{st}(p) = 5, \text{st}(q) = 4$

b) $\text{st}(p) = 5, \text{st}(q) = 5$

2. a) $w(x) = 2x^5 + 6x^4 - 5x^2, \text{st}(w) = 5, S_w = 3,$

$u(x) = -3x^5 - 4x^4 - 5, \text{st}(u) = 5, S_u = -12$

b) $w(x) = 12x^2 - 18x, \text{st}(w) = 2, S_w = -6,$

$u(x) = -5x^5 - 10x^3 - 8x^2 + 27x, \text{st}(u) = 5, S_u = 4$

3. a) $\text{st}(p + q) = 5$

b) $\text{st}(p + q) \leq 5$ lub $p + q \equiv 0$

Ćwiczenie 6

a) $u(x, y) + w(x, y) =$
 $= 4x^3y^2 + 3x^2y^3 - 9x^2y^2 - 4xy - 1,$

$u(x, y) - w(x, y) =$
 $= 4x^3y^2 - 3x^2y^3 + 3x^2y^2 + 8xy + 5$

b) $u(x, y) + w(x, y) =$
 $= 2x^4y + 6x^3y + 2xy^2 - x + 5$

$u(x, y) - w(x, y) =$
 $= 2x^4y - 6xy^2 + x - 3$

c) $u(x, y, z) + w(x, y, z) =$
 $= 5xy^2z^3 - 6x^2y^2z + 6x^2yz^2 +$
 $+ xyz^3,$

$u(x, y, z) - w(x, y, z) =$
 $= 3xy^2z^3 - 6x^2y^2z - 6x^2yz^2 +$
 $- 3xyz^3$

d) $u(x, y, z) + w(x, y, z) =$
 $= 8x^2y + 14xz^2 - 4yz^2 + z^3,$
 $u(x, y, z) - w(x, y, z) =$
 $= 8x^2y - 2xz^2 - 8y^2z + 2yz^2 - z^3$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $f(x) + g(x) = x^6 + x^3 +$
 $+ x^2 - 2x + 6,$

$f(x) - g(x) = \frac{1}{2}x^6 - 4x^4 +$
 $- x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 2$

b) $f(x) + g(x) = -3x^5 + x^2 +$
 $- x + 2,$

$f(x) - g(x) = -2x^6 + 3x^5 +$
 $- 5x^2 + 9x + 2$

c) $f(x) + g(x) = x^5 + 3x^4 +$
 $+ x - 3,$

$f(x) - g(x) = 4x^7 - x^5 + 3x^4 +$
 $+ 7x - 7$

4. a) $\text{st}(u+w) = 6$ dla $a \neq 0$,
 $\text{st}(u+w) = 4$ dla $a = 0$
 b) $\text{st}(u+w) = 5$ dla $a \neq -6$,
 $\text{st}(u+w) = 1$ dla $a = -6$

5. a) $u(x, y) + w(x, y) =$
 $= \frac{3}{2}x^3y - \frac{2}{3}x^2y - 2xy^2,$
 $u(x, y) - w(x, y) =$
 $= \frac{1}{2}x^3y + \frac{4}{3}x^2y - 4xy^2,$
 $(u+w)(-2, 3) = -8,$
 $(u-w)(-2, 3) = 76$
 b) $u(x, y) + w(x, y) =$
 $= \frac{5}{12}xy^3 - \frac{2}{3}x^2y^2 - \frac{1}{2}x^2y,$
 $u(x, y) - w(x, y) =$
 $= \frac{1}{12}xy^3 + \frac{4}{3}x^2y^2 - \frac{3}{2}x^2y,$
 $(u+w)(-2, 3) = -52,5,$
 $(u-w)(-2, 3) = 25,5$

6. $P_1(x, y) = 2xy,$
 $P_2(x, y) = x^2 + y^2,$
 $P_3(x, y) = -x^2 + \frac{1}{2}xy + y^2$
 $P(x, y) = 2xy + (x^2 + y^2) +$
 $+ (x+y)(y-x) + \frac{1}{2}xy =$
 $= \frac{5}{2}xy + 2y^2$

7. a) dla $P: w(x, y, z) = 1,$
 dla $Q: w(x, y, z) = 3,$
 czyli dla Q
 b) dla $P: w(x, y, z) = 3,$
 dla $Q: w(x, y, z) = -1,$
 czyli dla P
 c) dla $P: w(x, y, z) = 2,$
 dla $Q: w(x, y, z) = \frac{1}{3},$
 czyli dla P

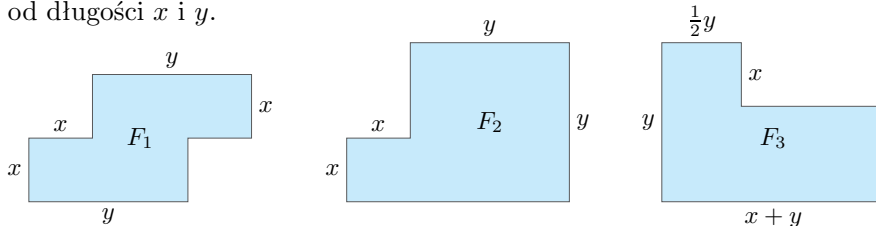
4. Określ stopień wielomianu $u + w$ w zależności od współczynnika a .

a) $u(x) = 2x^4 - 3x + 6, w(x) = ax^6 + 5x^2 + 4$
 b) $u(x) = 3x^6 - ax^5 + 2x^2 - x, w(x) = -3x^6 - 6x^5 - 2x^2 + 9$

5. Wyznacz sumę $u + w$ oraz różnicę $u - w$ wielomianów u i w . Oblicz wartości sumy i różnicy dla $x = -2$ i $y = 3$.

a) $u(x, y) = \frac{1}{3}x^2y - 3xy^2 + x^3y, w(x, y) = \frac{1}{2}x^3y - x^2y + xy^2$
 b) $u(x, y) = \frac{1}{4}xy^3 + \frac{1}{3}x^2y^2 - x^2y, w(x, y) = \frac{1}{6}xy^3 - x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2y$

6. Wyznacz wielomian P opisujący sumę pól figur F_1, F_2 i F_3 w zależności od długości x i y .



7. Dla której trójki liczb, P czy Q , wartość wielomianu w jest większa?

a) $w(x, y, z) = 2x^2yz - 4xyz^2 + 5xy^2 - 6z$
 b) $w(x, y, z) = 2x^6y^3 + x^5y^2z - 3xy^3z^5 + x$
 c) $w(x, y, z) = \frac{1}{3}yz^5 - \frac{1}{2}xyz^2 + \frac{5}{6}x^2y^4z + 1$
 $P \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \quad Q \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$

8. Wyznacz wielomian $v(x, y, z) = 2u(x, y, z) - 3w(x, y, z)$.

a) $u(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2yz^2 + \frac{3}{2}x^2yz - xyz^2, w(x, y, z) = \frac{2}{3}x^2yz^2 - x^2yz + xyz$
 b) $u(x, y, z) = 2x^3y^2z - xy^2z^2 + xyz, w(x, y, z) = 3xyz^2 - xyz - 2yz^2$

Sprawdź się

9. Dane są wielomiany $u(x) = 4x^3 + 2x^2 - 1$ i $w(x) = 2x^3 - x^2 + 1,5$. Wyznacz wielomian v .

a) $v(x) = u(x) + 3w(x)$ b) $v(x) = 2u(x) - w(x)$

10. Wyznacz wielomian $v(x) = u(x) - 2w(x)$. Oblicz $v(1)$, $v(-1)$ i $v(-2)$.

a) $u(x) = -3x^4 + 2x^2, w(x) = x^4 - 1,5x^2 + 3x$
 b) $u(x) = 8x^3 - 2x^2 + x, w(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x$

11. Oblicz wartości wielomianów $w + u$ oraz $w - u$ dla $x = -2$ i $y = 3$.

a) $w(x, y) = \frac{1}{3}x^2y^3 - 3xy^2 + x^3y, u(x, y) = \frac{2}{3}x^2y^3 + 3xy^2 + x$
 b) $w(x, y) = x^5 - \frac{1}{4}x^2y^3 - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{4}xy^4, u(x, y) = -\frac{3}{4}x^2y^3 + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{4}xy^4$

8. a) $v(x, y, z) = -x^2yz^2 + 6x^2yz - 2xyz^2 - 3xyz$

b) $v(x, y, z) = 4x^3y^2z - 2xy^2z^2 - 9xyz^2 + 5xyz + 6yz^2$

9. a) $v(x) = 10x^3 - x^2 + 3,5$

b) $v(x) = 6x^3 + 5x^2 - 3,5$

10. a) $v(x) = -5x^4 + 5x^2 - 6x, v(1) = -6, v(-1) = 6, v(-2) = -48$

b) $v(x) = \frac{1}{2}x, v(1) = \frac{1}{2}, v(-1) = -\frac{1}{2}, v(-2) = -1$

11. a) $(w+u)(-2, 3) = 82, (w-u)(-2, 3) = 50$

b) $(w+u)(-2, 3) = -140, (w-u)(-2, 3) = 121$

2.3. Mnożenie wielomianów

Aby wyznaczyć iloczyn wielomianów, mnożymy każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu. Iloczyn wielomianów jest wielomianem.

Przykład 1

Wyznacz iloczyn wielomianów $u(x) = 2x - 3$ i $v(x) = x^2 - 2x + 2$.

$$\begin{aligned}u(x) \cdot v(x) &= (2x - 3) \cdot (x^2 - 2x + 2) = 2x(x^2 - 2x + 2) - 3(x^2 - 2x + 2) = \\&= 2x^3 - \underline{4x^2} + \underline{4x} - \underline{3x^2} + \underline{6x} - 6 = \\&= 2x^3 - 7x^2 + 10x - 6\end{aligned}$$

W wyniku pomnożenia wielomianu stopnia pierwszego przez wielomian stopnia drugiego otrzymaliśmy wielomian stopnia trzeciego.

Twierdzenie

Iloczyn wielomianów stopnia m i stopnia n jest wielomianem stopnia $m + n$.

$$\text{st}(w \cdot v) = \text{st}(w) + \text{st}(v)$$

Ćwiczenie 1

Wyznacz iloczyn wielomianów u i w . Podaj stopień otrzymanego wielomianu.

a) $u(x) = x^3$, $w(x) = x^4 + 2x^2 - x - 1$ c) $u(x) = x - 1$, $w(x) = x^2 + x + 1$

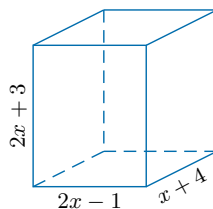
b) $u(x) = x^2 - 1$, $w(x) = x^5 - x + 1$ d) $u(x) = 5 - 3x + x^2$, $w(x) = x^2 - 1$

Przykład 2

Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok.

Długości krawędzi prostopadłościanu są liczbami dodatnimi, zatem zakładamy, że:

$$\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x + 4 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \end{cases} \quad \text{czyli } x > \frac{1}{2}$$



Objętość tego prostopadłościanu wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned}V(x) &= (2x - 1)(x + 4)(2x + 3) = (2x^2 + 8x - x - 4)(2x + 3) = \\&= (2x^2 + 7x - 4)(2x + 3) = 4x^3 + 6x^2 + 14x^2 + 21x - 8x - 12\end{aligned}$$

$V(x) = 4x^3 + 20x^2 + 13x - 12$ opisuje objętość prostopadłościanu dla $x > \frac{1}{2}$.

Uczeń:

- określa stopień iloczynu wielomianów bez wykonywania mnożenia,
- wyznacza iloczyn danych wielomianów,
- podaje współczynnik przy najwyższej potędze oraz wyraz wolny iloczynu wielomianów bez wykonywania mnożenia wielomianów,
- wyznacza iloczyn wielomianów wielu zmiennych.

Ćwiczenie 1

a) $u(x) \cdot w(x) =$
 $= x^7 + 2x^5 - x^4 - x^3,$
 $\text{st}(u \cdot w) = 7$

b) $u(x) \cdot w(x) =$
 $= x^7 - x^5 - x^3 + x^2 + x - 1,$
 $\text{st}(u \cdot w) = 7$

c) $u(x) \cdot w(x) = x^3 - 1,$
 $\text{st}(u \cdot w) = 3$

d) $u(x) \cdot w(x) =$
 $= x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x - 5,$
 $\text{st}(u \cdot w) = 4$

Ćwiczenie 2

- a) $V(x) = x^3 - x$, $x > 1$
b) $V(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$,
 $x > -1$
c) $V(x) = 2x^3 + 4x^2 - \frac{1}{2}x - 1$,
 $x > \frac{1}{2}$
d) $V(x) = x^4 + 6x^3 - 54x - 81$,
 $x > 3$

Ćwiczenie 3

- a) $-4x^4 + 2x^3y - 2x^3 + 6x^2y^2 + x^2y - 3xy^3$
b) $3x^3y^3 - 2x^3y + 6x^2y^3 - 3x^2y + -3xy^3 + 4xy - y$
c) $4x^4y^3 - 12x^4y^2 + 3x^3y^4 + -11x^3y^3 + 10x^3y^2 + 3x^2y^3 + -2x^2y^2$

Ćwiczenie 2

Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący objętość prostopadłościanu o krawędziach długości a , b , c .

- a) $a = x - 1$, $b = x + 1$, $c = x$ c) $a = 2x + 1$, $b = \frac{1}{2}x + 1$, $c = 2x - 1$
b) $a = x + 1$, $b = x + 2$, $c = x + 3$ d) $a = x + 3$, $b = x + 3$, $c = x^2 - 9$

Mnożenie wielomianów wielu zmiennych przebiega analogicznie do mnożenia wielomianów jednej zmiennej. Aby wyznaczyć iloczyn wielomianów wielu zmiennych, mnożymy każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu.

Przykład 3

Wyznacz iloczyn wielomianów $u(x, y) = x^2 - 2y$ i $w(x, y) = 2x^2 + y^2 - 3y$.

$$\begin{aligned} u(x, y) \cdot w(x, y) &= (x^2 - 2y) \cdot (2x^2 + y^2 - 3y) = \\ &= x^2(2x^2 + y^2 - 3y) - 2y(2x^2 + y^2 - 3y) = \\ &= 2x^4 + x^2y^2 - \underline{3x^2y} - \underline{4x^2y} - 2y^3 + 6y^2 = \\ &= 2x^4 + x^2y^2 - 7x^2y - 2y^3 + 6y^2 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

Wyznacz iloczyn wielomianów u i w .

- a) $u(x, y) = xy - 2x^2$, $w(x, y) = 2x^2 - 3y^2 + x$
b) $u(x, y) = 3xy^2 - 2x + 1$, $w(x, y) = x^2y + 2xy - y$
c) $u(x, y) = 4x^2y + 3xy^2 - 2xy$, $w(x, y) = x^2y^2 - 3x^2y + xy$

Ćwiczenie 4

Wyznacz iloczyn wielomianów u i w .

- a) $u(x, y, z) = x^2y + x^2z + yz$, $w(x, y, z) = 2xyz - yz$
b) $u(x, y, z) = 3xyz - 4xz^2 + y^2z$, $w(x, y, z) = x^2y - xy^2 + 2z$
c) $u(x, y, z) = xy^2z^2 + 2xyz^2 - xyz$, $w(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$

Zadania

1. Wyznacz iloczyn. Podaj współczynnik przy najwyższej potędze otrzymanego wielomianu oraz jego wyraz wolny.

- a) $(2x - 1)(x^3 - 3x^2 + 7x)$ d) $(6 - 3x^2 - 2x^3)(x^3 - 4x + 1)$
b) $(x^2 + 2)(4x^2 - 3x + 4)$ e) $(2x^3 + \frac{1}{2}x + 1)(x^2 - x - \frac{1}{4})$
c) $(x^2 - x)(2x^4 - x + 1)$ f) $(2 - \sqrt{2}x^2 - x^4)(\sqrt{2} + x + 4x^2)$

Ćwiczenie 4

- a) $2x^3y^2z + 2x^3yz^2 - x^2y^2z - x^2yz^2 + 2xy^2z^2 - y^2z^2$
b) $3x^3y^2z - 4x^3yz^2 - 2x^2y^3z + 4x^2y^2z^2 - xy^4z + 6xyz^2 - 8xz^3 + 2y^2z^2$
c) $x^3y^2z^2 + 2x^3yz^2 - x^3yz + 2xy^4z^2 + 4xy^3z^2 - 2xy^3z + 3xy^2z^4 + 6xyz^4 - 3xyz^3$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $2x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 7x$, $a_4 = 2$, $a_0 = 0$
b) $4x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 6x + 8$, $a_4 = 4$, $a_0 = 8$
c) $2x^6 - 2x^5 - x^3 + 2x^2 - x$, $a_6 = 2$, $a_0 = 0$
d) $-2x^6 - 3x^5 + 8x^4 + 16x^3 - 3x^2 - 24x + 6$, $a_6 = -2$, $a_0 = 6$
e) $2x^5 - 2x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{8}x - \frac{1}{4}$, $a_5 = 2$, $a_0 = -\frac{1}{4}$
f) $-4x^6 - x^5 - 5\sqrt{2}x^4 - \sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 2x + 2\sqrt{2}$, $a_6 = -4$, $a_0 = 2\sqrt{2}$

2. Podaj stopień wielomianu w , współczynnik przy najwyższej potędze oraz jego wyraz wolny bez wykonywania mnożenia wielomianów.
- a) $w(x) = (x-1)(1-x+x^2)$ d) $w(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$
b) $w(x) = (3x-2)(2x^2-x+3)$ e) $w(x) = (1-2x)(1+x)(3x^2+2)$
c) $w(x) = (1-x^2)(1-x^2+4x^3)$ f) $w(x) = (4x^2+1)(1-x^2)(6-3x)$
3. Wyznacz wielomian $v(x) = [w(x)]^2$ i podaj jego stopień.
- a) $w(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ b) $w(x) = 2x^2 + x - 4$
4. Wyznacz wielomiany $f(x) = u(x) \cdot w(x)$ oraz $g(x) = [u(x)]^2 - w(x)$.
- a) $u(x) = x^2 + 3x - 1$, $w(x) = x^4 - 6x^3 - 2x^2$
b) $u(x) = x^4 - x^2 + 1$, $w(x) = -6x^3 + 2x^2 - 1$
c) $u(x) = x^3 - x^2 + x + 1$, $w(x) = 3x^2 - 2x + 1$
5. Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach a , b , c .
- a) $a = x + 1$, $b = x + 2$, $c = 2x - 4$ b) $a = x^2 + 4$, $b = x + 2$, $c = x^2 - 1$
6. Wyznacz wielomian $v(x, y) = [u(x, y)]^2 - 2w(x, y)$.
- a) $u(x, y) = 2x^2 - xy$, $w(x, y) = 6x^3y^2 - 3x^2y^2 + y^4$
b) $u(x, y) = 3x^2y + 2xy^2$, $w(x, y) = 2x^4y^4 + 4x^4y^2 + 3x^3y^3 - xy^4$
7. Wyznacz iloczyn.
- a) $(2x^2y + 3xy^2)(x - y - 4)$ c) $(x + y)(x^2 + y^2)(x^3 + y^3)$
b) $(2x - 3y)(2x^2 + 6xy + 3y^2)$ d) $(x + y)(x - 2y)(x - xy + y^2)$

Sprawdź się

8. Wyznacz iloczyn. Oblicz jego wartości dla $x \in \{-1, 0, 1\}$.
- a) $4x^2(2x^5 - 3x^2)$ c) $(x + 4)(x^2 - x)$ e) $(x - 2)(x^2 - 3x + 1)$
b) $-9x^3(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x)$ d) $(x^2 - 3)(2x^4 - x)$ f) $(3x + \frac{1}{2})(2x^3 - 4x - 6)$
9. Wykonaj działania. Uporządkuj otrzymany wielomian.
- a) $x(x^2 - 1) + 4(x^2 - 2)(x + 1)$ c) $(x^2 + 4)(2 - x)^2 - x^2(x^2 + 2x + 3)$
b) $(2x + 2)(x^2 - 3) - (x^2 + 1)x$ d) $x(x - 3)(x - 2)^2 - x(x + 4)(x - 5)$
10. Wyznacz iloczyn.
- a) $(x - 2y)(y - 2z)(z - 2x)$ c) $(2x - y)(3y + 2z)(2x + y)(3y - 2z)$
b) $(x + y + z)(x - y - z)$ d) $(x + xy + xyz)(1 + x - yz)$
8. a) $8x^7 - 12x^4$; $-20, 0, -4$
b) $-6x^5 + 3x^4$; $9, 0, -3$
c) $x^3 + 3x^2 - 4x$; $6, 0, 0$
d) $2x^6 - 6x^4 - x^3 + 3x$; $-6, 0, -2$
e) $x^3 - 5x^2 + 7x - 2$; $-15, -2, 1$
f) $6x^4 + x^3 - 12x^2 - 20x - 3$; $10, -3, -28$
9. a) $5x^3 + 4x^2 - 9x - 8$ b) $x^3 + 2x^2 - 7x - 6$
c) $-6x^3 + 5x^2 - 16x + 16$ d) $x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 8x$
10. a) $-2x^2y + 4xy^2 - 2xz^2 - 2y^2z + 4yz^2 + 4x^2z - 7xyz$
b) $x^2 - y^2 - 2yz - z^2$
c) $36x^2y^2 - 16x^2z^2 - 9y^4 + 4y^2z^2$
d) $x^2 + x^2y + x^2yz + x + xy - xy^2z - xy^2z^2$

2. a) $\text{st}(w) = 3$, $a_3 = 1$, $a_0 = -1$
b) $\text{st}(w) = 3$, $a_3 = 6$, $a_0 = -6$
c) $\text{st}(w) = 5$, $a_5 = -4$, $a_0 = 1$
d) $\text{st}(w) = 3$, $a_3 = 1$, $a_0 = -6$
e) $\text{st}(w) = 4$, $a_4 = -6$, $a_0 = 2$
f) $\text{st}(w) = 5$, $a_5 = 12$, $a_0 = 6$
3. a) $v(x) = x^6 - 8x^5 + 16x^4 + 6x^3 - 24x^2 + 9$, $\text{st}(v) = 6$
b) $v(x) = 4x^4 + 4x^3 - 15x^2 + -8x + 16$, $\text{st}(v) = 4$
4. a) $f(x) = x^6 - 3x^5 - 21x^4 + 2x^2$,
 $g(x) = 12x^3 + 9x^2 - 6x + 1$
b) $f(x) = -6x^7 + 2x^6 + 6x^5 + -3x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 1$,
 $g(x) = x^8 - 2x^6 + 3x^4 + 6x^3 + -4x^2 + 2$
c) $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 6x^3 + -x + 1$,
 $g(x) = x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^2 + 4x$
5. a) $P(x) = 10x^2 + 2x - 20$, $x > 2$
b) $P(x) = 2x^4 + 4x^3 + 14x^2 + 6x + 4$,
 $x \in (-2; -1) \cup (1; \infty)$
6. a) $v(x, y) = 4x^4 - 12x^3y^2 + -4x^3y + 7x^2y^2 - 2y^4$
b) $v(x, y) = -4x^4y^4 + x^4y^2 + 6x^3y^3 + 4x^2y^4 + 2xy^4$
7. a) $2x^3y + x^2y^2 - 8x^2y - 3xy^3 + -12xy^2$
b) $4x^3 + 6x^2y - 12xy^2 - 9y^3$
c) $x^6 + x^5y + x^4y^2 + 2x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6$
d) $-x^3y + x^3 + 2x^2y^2 - x^2y + +xy^3 - 2xy^2 - 2y^4$

Uczeń:

- rozwiązuje równania wielomianowe zapisane w postaci iloczynu,
- rozwiązuje równania wielomianowe, stosując własności potęg.

Ćwiczenie 1

- a) $x^3 = 8$
 $x = 2$
 b) $x^3 = -27$
 $x = -3$
 c) $x^3 = \frac{1}{8}$
 $x = \frac{1}{2}$
 d) $x^3 = -\frac{8}{27}$
 $x = -\frac{2}{3}$
 e) $x^3 = 0,125$
 $x = -0,5$
 f) $x^3 = 64$
 $x = 4$

2.4. Równania wielomianowe (1)

Równanie postaci $w(x) = 0$, gdzie w jest wielomianem, nazywamy **równaniem wielomianowym** z niewiadomą x .

Przykład 1

a) Rozwiąż równanie $2x^3 - 250 = 0$.

$$2x^3 = 250 \quad / : 2$$

$$x^3 = 125$$

Jedyną liczbą spełniającą równanie jest $\sqrt[3]{125}$, czyli $x = 5$.

b) Rozwiąż równanie $5x^3 + 40 = 0$.

$$5x^3 = -40 \quad / : 5$$

$$x^3 = -8$$

Jedyną liczbą spełniającą równanie jest $\sqrt[3]{-8}$, czyli $x = -2$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $7x^3 - 56 = 0$

c) $8x^3 - 1 = 0$

e) $5x^3 + 0,625 = 0$

b) $2x^3 + 54 = 0$

d) $27x^3 + 8 = 0$

f) $3x^3 - 192 = 0$

Jeśli wielomian w jest przedstawiony w postaci iloczynowej, to możemy łatwo wyznaczyć jego **pierwiastki**, czyli takie argumenty x , dla których jest spełnione równanie $w(x) = 0$. Pierwiastki te nazywamy **rozwiązaniami równania**.

Przykład 2

a) Wyznacz pierwiastki wielomianu $w(x) = 6x^2(x - 3)$.

Aby wyznaczyć pierwiastki wielomianu w (czyli jego miejsca zerowe), rozwiązujemy równanie:

$$6x^2(x - 3) = 0$$

$$x^2 = 0 \quad \text{lub} \quad x - 3 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad x = 3$$

Pierwiastkami wielomianu w są liczby 0 i 3.

b) Wyznacz pierwiastki wielomianu $w(x) = \frac{1}{3}(x - 1)(2x + 1)$.

$$\frac{1}{3}(x - 1)(2x + 1) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{lub} \quad 2x + 1 = 0$$

$$x = 1 \quad \text{lub} \quad x = -\frac{1}{2}$$

Pierwiastkami wielomianu w są liczby $-\frac{1}{2}$ i 1.

$a \cdot b = 0$ wtedy
i tylko wtedy, gdy
 $a = 0$ lub $b = 0$.

Ćwiczenie 2

Wyznacz pierwiastki wielomianu w .

- a) $w(x) = 3x^2(x + 6)$ c) $w(x) = x^2(3x - 4)$ e) $w(x) = (x + 4)(x - 6)$
b) $w(x) = 6x^2(2x - 5)$ d) $w(x) = 2x^3(5x + 1)$ f) $w(x) = (3x - 2)(2x + 3)$

Przykład 3

a) Rozwiąż równanie $x(x + 2)(x - 3) = 0$.

Korzystamy z własności podanej obok i otrzymujemy:

$$x = 0 \text{ lub } x + 2 = 0 \text{ lub } x - 3 = 0.$$

$a \cdot b \cdot c = 0$ wtedy i tylko wtedy,
gdy $a = 0$ lub $b = 0$ lub $c = 0$.

Zatem równanie ma trzy rozwiązania: -2 , 0 i 3 .

b) Rozwiąż równanie $(\frac{1}{3}x - 1)(x + 2)(2x - 1) = 0$.

$$\frac{1}{3}x - 1 = 0 \text{ lub } x + 2 = 0 \text{ lub } 2x - 1 = 0$$

$$x = 3 \text{ lub } x = -2 \text{ lub } x = \frac{1}{2}$$

Zatem równanie ma trzy rozwiązania: -2 , $\frac{1}{2}$ i 3 .

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

- a) $x(x - 2)(x - 4) = 0$ d) $(x + 1)(x + 9)(3x - 1) = 0$
b) $x(x - 5)(x + 6) = 0$ e) $(x - 9)(2x + 1)(2x - 3) = 0$
c) $x(x + 1)(2x + 6) = 0$ f) $(4x + 1)(6x - 9)(2x - 8) = 0$

Rozwiązanie równania możemy podać na dwa sposoby: wymieniając liczby, które spełniają to równanie, lub podając **zbiór rozwiązań** (czyli zbiór liczb spełniających to równanie).

Przykład 4

Wyznacz zbiór rozwiązań równania $2x^2(\frac{1}{3}x - 2)(3x + 2)(x - 6) = 0$.

$$x^2 = 0 \text{ lub } \frac{1}{3}x - 2 = 0 \text{ lub } 3x + 2 = 0 \text{ lub } x - 6 = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = 6 \text{ lub } x = -\frac{2}{3} \text{ lub } x = 6$$

Zatem równanie ma trzy rozwiązania: $-\frac{2}{3}$, 0 , 6 .

Zbiorem rozwiązań równania jest zbiór $\{-\frac{2}{3}, 0, 6\}$.

Ćwiczenie 4

Wyznacz zbiór rozwiązań równania.

- a) $5x(x - 3)(x + 6)(x + 8) = 0$ c) $(\frac{1}{4}x + 3)(\frac{1}{2}x - 3)(2x - 7)(x + 6) = 0$
b) $x^2(x + 7)(2x - 9)(2x + 5) = 0$ d) $(\frac{3}{4}x - 6)(\frac{2}{3}x + 8)(x + 3)(\frac{1}{5}x - 2) = 0$

Ćwiczenie 2

- a) $x = -6, x = 0$
b) $x = 0, x = \frac{5}{2}$
c) $x = 0, x = \frac{4}{3}$
d) $x = -\frac{1}{5}, x = 0$
e) $x = -4, x = 6$
f) $x = -\frac{3}{2}, x = \frac{2}{3}$

Ćwiczenie 3

- a) $x = 0, x = 2, x = 4$
b) $x = -6, x = 0, x = 5$
c) $x = -3, x = -1, x = 0$
d) $x = -9, x = -1, x = \frac{1}{3}$
e) $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{3}{2}, x = 9$
f) $x = -\frac{1}{4}, x = \frac{3}{2}, x = 4$

Ćwiczenie 4

- a) $\{-8, -6, 0, 3\}$
b) $\{-7, -\frac{5}{2}, 0, \frac{9}{2}\}$
c) $\{-12, -6, \frac{7}{2}, 6\}$
d) $\{-12, -3, 8, 10\}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = 2$
b) $x = \frac{1}{4}$
c) $x = -5$
d) $x = -\frac{1}{3}$
e) $x = 10$
f) $x = \frac{4}{5}$
2. a) $x = 4$
b) $x = 3$
c) $x = -2$
d) $x = -6$
3. a) $x = -6, x = 0$
b) $x = 0, x = \frac{1}{7}$
c) $x = -8, x = 0, x = 2$
d) $x = 0, x = \frac{1}{3}$
e) $x = -\frac{1}{4}, x = 0, x = \frac{1}{5}$
f) $x = -\frac{2}{3}, x = 0$
4. a) $x = 1, x = 2, x = 5$
b) $x = -6, x = -1, x = -\frac{1}{4}$
c) $x = -9, x = \frac{2}{5}, x = \frac{5}{2}$
d) $x = -4, x = 0, x = 2, x = 3$
e) $x = -6, x = \frac{1}{6}, x = \frac{1}{2}, x = 5$
f) $x = -4, x = -\frac{3}{4}, x = \frac{4}{3}$
5. a) $\{1, 2, 4\}$
b) $\{-3, \frac{5}{2}, 6\}$
c) $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\}$
d) $\{-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\}$
6. a) 0, 3
b) 0, $\frac{2}{3}$
7. a) $x = -4, x = \frac{1}{2}, x = 3$
b) $x = -3, x = \frac{3}{5}$
c) $x = -15, x = \frac{3}{2}$
d) $x = -8, x = 0, x = 12$
e) $x = -1, x = 0, x = 3, x = 9$
f) $x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = \frac{1}{4}, x = \frac{1}{2}$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.
a) $3x^3 + 27 = 51$ c) $2x^3 + 300 = 50$ e) $0,01x^3 + x = 10 + x$
b) $64x^3 + 7 = 8$ d) $27x^3 + 9 = 8$ f) $125x^3 + x^2 = x^2 + 64$
 2. Rozwiąż równanie.
a) $x(x^2 + 2) = 2(x + 32)$ c) $x(x^2 - 4) = -4(x + 2)$
b) $3(9 + x^2) = x^2(x + 3)$ d) $x^2(x + 6) = 6(x^2 - 36)$
 - ▶ 3. Rozwiąż równanie.
a) $4x^2(x + 6) = 0$ d) $x(x - \frac{1}{3})(3x - 1) = 0$
b) $\frac{1}{3}x^3(7x - 1) = 0$ e) $\frac{2}{5}x^2(x - \frac{1}{5})(x + \frac{1}{4}) = 0$
c) $x(x + 8)(x - 2) = 0$ f) $x^4(x + \frac{2}{3})(3x + 2) = 0$
 4. Rozwiąż równanie.
a) $(x - 1)(x - 2)(x - 5) = 0$ d) $x(x + 4)(x - 3)(x - 2) = 0$
b) $(x + 1)(x + 6)(4x + 1) = 0$ e) $(x - 5)(6x - 1)(2x - 1)(x + 6) = 0$
c) $(x + 9)(2x - 5)(5x - 2) = 0$ f) $(4x + 3)(3x - 4)(x + 4)(6x - 8) = 0$
 5. Wyznacz zbiór rozwiązań równania.
a) $(x - 4)(x - 2)(x - 1) = 0$ c) $(3x - 1)(3x - 5)(2x - \frac{1}{2}) = 0$
b) $(x - 6)(x + 3)(2x - 5) = 0$ d) $(\frac{2}{3}x - 1)(\frac{3}{2}x + 1)(2 + 3x) = 0$
 6. Podaj liczby spełniające jednocześnie oba równania.
a) $\begin{cases} x(x + 4)(x - 3) = 0 \\ x(3 - x)(x - 4) = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2(x - \frac{1}{4})(x - \frac{2}{3}) = 0 \\ x^2(4x + 1)(6x - 4) = 0 \end{cases}$
- ## Sprawdź się
7. Rozwiąż równanie.
a) $(x - 3)(x + 4)(6x - 3) = 0$ d) $x(\frac{2}{3}x - 8)(\frac{3}{4}x + 6)(x + 8) = 0$
b) $(x + 3)(5x - 3)(2x + 6) = 0$ e) $x^2(x - 9)(2x - 6)(x + 1) = 0$
c) $(2x - 3)(6 - 4x)(\frac{1}{3}x + 5) = 0$ f) $\frac{2}{5}x(4x - 1)(6x + 3)(8x - 4) = 0$
 8. Oblicz sumę rozwiązań równania.
a) $x(8x + 6)(\frac{1}{2}x - 3) = 0$ b) $(3x - 1)(\frac{2}{3}x - 8)(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}) = 0$
 8. a) $0 + (-\frac{3}{4}) + 6 = 5\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{3} + 12 + \frac{2}{3} = 13$

Rozkład trójkianu kwadratowego na czynniki

1. Zapisz jako iloczyn dwóch czynników liniowych.

- a) $x^2 + 8x$ c) $4x^2 + 28x$ e) $9x^2 + 6x$
b) $x^2 - \frac{3}{2}x$ d) $6x^2 - 18x$ f) $12x^2 - 18x$

$$x^2 + 6x = x(x + 6)$$

$$2x^2 - 18x = 2x(x - 9)$$

2. Rozłóż na czynniki liniowe, korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów.

- a) $x^2 - 36$ b) $x^2 - \frac{1}{4}$ c) $4x^2 - 9$ d) $9x^2 - 49$

3. Oblicz pierwiastki trójkianu kwadratowego i zapisz go w postaci iloczynowej.

- a) $y = x^2 - 3x + 2$ d) $y = x^2 + 5x + 6$
b) $y = x^2 - 9x + 8$ e) $y = x^2 + 2x - 3$
c) $y = x^2 + 5x + 4$ f) $y = x^2 - 4x - 5$

$$y = x^2 - 5x + 4$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9, \sqrt{\Delta} = 3$$

$$x_1 = \frac{5-3}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{5+3}{2} = 4$$

$$y = (x - 1)(x - 4)$$

4. Oblicz pierwiastki trójkianu kwadratowego i zapisz go w postaci iloczynowej.

- a) $y = 2x^2 + 5x - 3$ d) $y = 3x^2 + 7x + 2$
b) $y = 2x^2 + 7x + 5$ e) $y = 3x^2 + 7x - 6$
c) $y = 2x^2 + 5x + 3$ f) $y = 6x^2 + 7x + 2$

$$y = 2x^2 - 5x - 3$$

$$\Delta = 25 + 24 = 49, \sqrt{\Delta} = 7$$

$$x_1 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{5+7}{4} = 3$$

$$y = 2(x + \frac{1}{2})(x - 3)$$

5. Oblicz pierwiastki trójkianu kwadratowego i zapisz go w postaci iloczynowej.

- a) $y = x^2 - 4x + 1$ d) $y = 2x^2 + x - 2$
b) $y = x^2 + 4x + 2$ e) $y = 2x^2 - 2x - 1$
c) $y = x^2 - 6x + 2$ f) $y = 3x^2 + 2x - 2$

$$y = x^2 - 2x - 1$$

$$\Delta = 4 + 4 = 8, \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$$

$$x_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

$$y = (x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2})$$

D 6. Uzasadnij, że trójkianu kwadratowego nie można rozłożyć na czynniki liniowe.

- a) $y = x^2 - x + 1$ d) $y = x^2 + 1$
b) $y = x^2 - 3x + 3$ e) $y = x^2 + 4$
c) $y = x^2 + 4x + 5$ f) $y = 4x^2 + 1$

$$y = x^2 + 2x + 2$$

$$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$$

Zatem trójkianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe.

7. Przedstaw trójkian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeżeli jest to możliwe.

- a) $y = x^2 - 9x + 18$ d) $y = 2x^2 - 5x - 3$ g) $y = x^2 - 3x - 3$
b) $y = x^2 - 6x + 12$ e) $y = 3x^2 + 11x - 4$ h) $y = -2x^2 + x - 2$
c) $y = -x^2 + 3x - 6$ f) $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$ i) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 6x - 27$

5. a) $x_1 = 2 - \sqrt{3}, x_2 = 2 + \sqrt{3}, y = (x - 2 + \sqrt{3})(x - 2 - \sqrt{3})$
b) $x_1 = -2 - \sqrt{2}, x_2 = -2 + \sqrt{2}, y = (x + 2 + \sqrt{2})(x + 2 - \sqrt{2})$
c) $x_1 = 3 - \sqrt{7}, x_2 = 3 + \sqrt{7}, y = (x - 3 + \sqrt{7})(x - 3 - \sqrt{7})$
d) $x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}, y = 2(x + \frac{1+\sqrt{17}}{4})(x + \frac{1-\sqrt{17}}{4})$
e) $x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}, y = 2(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2})(x - \frac{1-\sqrt{3}}{2})$
f) $x_1 = \frac{-1-\sqrt{7}}{3}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{7}}{3}, y = 3(x + \frac{1+\sqrt{7}}{3})(x + \frac{1-\sqrt{7}}{3})$

1. a) $x(x + 8)$
b) $x(x - \frac{3}{2})$
c) $4x(x + 7)$
d) $6x(x - 3)$
e) $9x(x + \frac{2}{3})$
f) $12x(x - \frac{3}{2})$

2. a) $(x - 6)(x + 6)$
b) $(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$
c) $4(x - \frac{3}{2})(x + \frac{3}{2})$
d) $9(x - \frac{7}{3})(x + \frac{7}{3})$

3. a) $y = (x - 1)(x - 2)$
b) $y = (x - 1)(x - 8)$
c) $y = (x + 1)(x + 4)$
d) $y = (x + 2)(x + 3)$
e) $y = (x - 1)(x + 3)$
f) $y = (x + 1)(x - 5)$

4. a) $y = 2(x + 3)(x - \frac{1}{2})$
b) $y = 2(x + 1)(x + \frac{5}{2})$
c) $y = 2(x + 1)(x + \frac{3}{2})$
d) $y = 3(x + 2)(x + \frac{1}{3})$
e) $y = 3(x + 3)(x - \frac{2}{3})$
f) $y = 6(x + \frac{2}{3})(x + \frac{1}{2})$

6. a) $\Delta = 1 - 4 < 0$
b) $\Delta = 9 - 12 < 0$
c) $\Delta = 16 - 20 < 0$
d) $\Delta = 0 - 4 < 0$
e) $\Delta = 0 - 16 < 0$
f) $\Delta = 0 - 16 < 0$

7. a) $y = (x - 3)(x - 6)$
b), c), h) nie ma postaci iloczynowej
d) $y = 2(x + \frac{1}{2})(x - 3)$
e) $y = 3(x + 4)(x - \frac{1}{3})$
f) $y = \frac{1}{4}(x + 4)^2$
g) $y = (x - \frac{3+\sqrt{21}}{2})(x - \frac{3-\sqrt{21}}{2})$
i) $y = -\frac{1}{3}(x - 9)^2$

Uczeń:

– rozwiązuje równania wielomianowe.

2.5. Równania wielomianowe (2)

Przykład 1

a) Rozwiąż równanie $x^3 - 4x^2 = 0$.

$$\begin{aligned}x^2(x - 4) &= 0 \\x^2 = 0 \text{ lub } x - 4 &= 0 \\x = 0 \text{ lub } x &= 4\end{aligned}$$

Wielomian $x^3 - 4x^2$ zapisujemy w postaci iloczynowej – wyłączamy x^2 przed nawias.

Zatem równanie ma dwa rozwiązania: 0 i 4.

b) Rozwiąż równanie $x^3 - 4x = 0$.

$$\begin{aligned}x(x^2 - 4) &= 0 \\x = 0 \text{ lub } x^2 - 4 &= 0\end{aligned}$$

Wyłączamy x przed nawias.

Równość $x^2 - 4 = 0$ zachodzi, gdy $x = -2$ lub $x = 2$.

Zatem równanie ma trzy rozwiązania: -2 , 0 i 2 .

c) Rozwiąż równanie $x^3 + 9x = 0$.

$$\begin{aligned}x(x^2 + 9) &= 0 \\x = 0 \text{ lub } x^2 + 9 &= 0\end{aligned}$$

Wyłączamy x przed nawias.

Równanie $x^2 + 9 = 0$ jest sprzeczne.

Zatem jedynym rozwiązaniem wyjściowego równania jest liczba 0.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $x(x^2 + 8) = 0$

$$x = 0$$

b) $x(x^2 + 64) = 0$

$$x = 0$$

c) $x(x^2 - \frac{1}{4}) = 0$

$$x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = \frac{1}{2}$$

d) $x^3(x + 2) = 0$

$$x = -2, x = 0$$

e) $x(x^2 - 36) = 0$

$$x = -6, x = 0, x = 6$$

f) $x^3(x^2 + 4) = 0$

$$x = 0$$

a) $x^3 + 8x = 0$

c) $4x^3 - x = 0$

e) $x^3 = 36x$

b) $x^3 + 64x = 0$

d) $2x^4 + 4x^3 = 0$

f) $x^5 = -4x^3$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $(x^2 + x)(x - 4) = 0$.

$$\begin{aligned}x(x + 1)(x - 4) &= 0 \\x = 0 \text{ lub } x + 1 = 0 \text{ lub } x - 4 &= 0\end{aligned}$$

Wyłączamy x przed nawias.

Zatem równanie ma trzy rozwiązania: -1 , 0 i 4 .

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

a) $(x^2 + 2x)(x - 1) = 0$

d) $(4x^2 - 8x)(x + 5) = 0$

b) $(x^2 - 3x)(x + 6) = 0$

e) $(x + 4)(x^2 + 3x) = 0$

c) $(2x^2 + x)(x - 3) = 0$

f) $(2x - 1)(x^2 - 2x) = 0$

Ćwiczenie 2

a) $x = -2, x = 0, x = 1$

b) $x = -6, x = 0, x = 3$

c) $x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = 3$

d) $x = -5, x = 0, x = 2$

e) $x = -4, x = -3, x = 0$

f) $x = 0, x = \frac{1}{2}, x = 2$

Przykład 3

a) Rozwiąż równanie $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$.

$$x(x^2 - 6x + 9) = 0 \quad \text{Wyłączamy } x \text{ przed nawias.}$$

$$x(x - 3)^2 = 0 \quad \text{Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy.}$$

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad x = 3$$

Rozwiązaniami równania są więc liczby 0 i 3.

b) Rozwiąż równanie $x^3 - 2x^2 - 15x = 0$.

$$x(x^2 - 2x - 15) = 0 \quad \text{Wyłączamy } x \text{ przed nawias.}$$

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad x^2 - 2x - 15 = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$\Delta = 4 + 60 = 64, \quad \sqrt{\Delta} = 8$$

$$x_1 = \frac{2-8}{2} = -3, \quad x_2 = \frac{2+8}{2} = 5$$

Zatem wyjściowe równanie ma trzy rozwiązania: -3, 0 i 5.

c) Rozwiąż równanie $5x^3 + 4x^2 + 4x = 0$.

$$x(5x^2 + 4x + 4) = 0 \quad \text{Wyłączamy } x \text{ przed nawias.}$$

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad 5x^2 + 4x + 4 = 0 \quad \Delta = 16 - 80 = -64 < 0$$

Równanie kwadratowe jest sprzeczne ($\Delta < 0$), zatem jedynym rozwiązaniem wyjściowego równania jest liczba 0.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $x^3 + 4x^2 + 4x = 0$

c) $8x^4 + 8x^3 + 2x^2 = 0$

e) $4x^5 - 9x^3 = 0$

b) $3x^5 + 6x^4 + 3x^3 = 0$

d) $3x^5 - 27x^3 = 0$

f) $\frac{1}{2}x^6 = \frac{1}{8}x^4$

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$

c) $-2x^4 + 9x^3 + 5x^2 = 0$

e) $2x^2 - 3x = x - x^3$

b) $3x^3 + 4x^2 + x = 0$

d) $4x^5 - 3x^4 + 2x^3 = 0$

f) $2x^6 - x^5 = x^5 + x^4$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $2x^3 = 4x^2$

c) $x^4 = -27x^3$

e) $x^5 + 16x = 0$

b) $x^5 = 9x^3$

d) $x^5 = 8x^4$

f) $4x^6 + 25x^4 = 0$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = 0, x = 2$

b) $x = -3, x = 0, x = 3$

c) $x = -27, x = 0$

d) $x = 0, x = 8$

e) $x = 0$

f) $x = 0$

Ćwiczenie 3

a) $x(x + 2)^2 = 0$

$x = -2, x = 0$

b) $3x^3(x + 1)^2 = 0$

$x = -1, x = 0$

c) $2x^2(2x + 1)^2 = 0$

$x = -\frac{1}{2}, x = 0$

d) $3x^3(x^2 - 9) = 0$

$x^3(x + 3)(x - 3) = 0$

$x = -3, x = 0, x = 3$

e) $4x^3(x^2 - \frac{9}{4}) = 0$

$x^3(x + \frac{3}{2})(x - \frac{3}{2}) = 0$

$x = -\frac{3}{2}, x = 0, x = \frac{3}{2}$

f) $x^4(x^2 - \frac{1}{4}) = 0$

$x^4(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = 0$

$x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 4

a) $x(x^2 - 7x + 12) = 0, \Delta = 1,$

$x = 0 \text{ lub } x = 3 \text{ lub } x = 4$

b) $x(3x^2 + 4x + 1) = 0, \Delta = 4,$

$x = -1 \text{ lub } x = -\frac{1}{3} \text{ lub } x = 0$

c) $-x^2(2x^2 - 9x - 5) = 0,$

$\Delta = 121,$

$x = -\frac{1}{2} \text{ lub } x = 0 \text{ lub } x = 5$

d) $x^3(4x^2 - 3x + 2) = 0,$

$\Delta = -23 < 0, x = 0$

e) $x(x^2 + 2x - 4) = 0, \Delta = 20,$

$x = -1 - \sqrt{5} \text{ lub } x = 0 \text{ lub}$

$x = -1 + \sqrt{5}$

f) $x^4(2x^2 - 2x - 1) = 0, \Delta = 12,$

$x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \text{ lub } x = 0 \text{ lub}$

$x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

2. a) $x = 0, x = 1, x = 2$
 b) $x = -5, x = -1, x = 0$
 c) $x = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}, x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, x = 0$
 d) $x = 1 - \sqrt{2}, x = 0, x = 1 + \sqrt{2}$
 e) $x = 0, x = 3$
 f) $x = 0$
3. a) $x = 0, x = 2, x = 5$
 b) $x = -2, x = 0, x = 5$
 c) $x = -3, x = 0, x = 4$
 d) $x = -3, x = 0, x = 5$
 e) $x = 0, x = 4$
 f) $x = 0$
4. a) $x = 0, x = 1, x = 5$
 b) $x = -4, x = -2, x = 0$
 c) $x = -4, x = 0, x = 6$
 d) $x = 0, x = 6$
 e) $x = -\frac{3}{2}, x = 0, x = \frac{1}{2}$
 f) $x = -\frac{2}{3}, x = 0, x = \frac{1}{4}$
5. a) $x = 0, x = 4$
 b) $x = -3, x = 0$
 c) $x = 0, x = 2$
 d) $x = -\frac{1}{6}, x = 0$
 e) $x = 0, x = 5$
 f) $x = 0, x = \frac{4}{3}$
6. a) $x = 0, x = 4$
 b) $x = -\frac{1}{4}, x = 0$
 c) $x = -2, x = 0, x = 1$
 d) $x = -1, x = 0, x = 6$
 e) $x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = \frac{1}{2}$
 f) $x = 0, x = \frac{1}{4}, x = \frac{1}{3}$
7. a) $-3, -1$
 b) $-4, -\frac{1}{2}, 4$
8. a) $x = -2, x = 0, x = 1$
 b) $x = -1, x = 0, x = 3$
 c) $x = -1, x = 0, x = 3$
 d) $x = -6, x = 0, x = 1$
9. a) $\frac{1}{3}$
 b) $\frac{-3+\sqrt{19}}{2}$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $x(x^2 - 3x + 2) = 0$ c) $x(x^2 + 3x + 1) = 0$ e) $x^2(\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3) = 0$
 b) $x^2(x^2 + 6x + 5) = 0$ d) $x^3(x^2 - 2x - 1) = 0$ f) $x^2(\frac{9}{2}x^2 + 3x + 2) = 0$

3. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 - 7x^2 + 10x = 0$ c) $x^3 - x^2 = 12x$ e) $16x = 8x^2 - x^3$
 b) $x^3 - 3x^2 - 10x = 0$ d) $x^3 - 15x = 2x^2$ f) $10x = 3x^2 - x^3$

4. Rozwiąż równanie.

- a) $x^4 - 6x^3 + 5x^2 = 0$ d) $x^4 - 12x^3 + 36x^2 = 0$
 b) $x^4 + 6x^3 + 8x^2 = 0$ e) $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 = 0$
 c) $x^4 - 2x^3 - 24x^2 = 0$ f) $12x^4 + 5x^3 - 2x^2 = 0$

5. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{1}{4}x^3 - x^2 = 0$ c) $x^4 - 2x^3 = 0$ e) $2x^5 - 10x^4 = 0$
 b) $3x^3 + 9x^2 = 0$ d) $6x^4 + x^3 = 0$ f) $3x^6 - 4x^5 = 0$

6. Rozwiąż równanie.

- a) $x(x^2 - 4x) = 0$ d) $(x^2 + x)(x - 6) = 0$
 b) $x(4x^2 + x) = 0$ e) $(2x^2 - x)(2x + 1) = 0$
 c) $(x^2 - x)(x + 2) = 0$ f) $(4x^2 - x)(6x - 2) = 0$

► 7. Podaj liczby spełniające jednocześnie oba równania.

- a) $(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 0, (x^2 - 1)(x^2 - 9) = 0$
 b) $(x - 4)(2x + 1)(2x + 8) = 0, (4x^2 - 1)(x^2 - 16) = 0$

Sprawdź się

8. Rozwiąż równanie.

- a) $(x^2 - x)(x + 2) = 0$ c) $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$
 b) $(x^2 + x)(x - 3) = 0$ d) $x^3 + 5x^2 - 6x = 0$

9. Wyznacz największą liczbę spełniającą równanie.

- a) $9x^3 - 6x^2 + x = 0$ b) $2x^3 + 6x^2 - 5x = 0$

10. Ile rozwiązań równania należy do podanego przedziału?

- a) $x^3 - 16x = 0, [-2; 6]$ d) $4x - x^3 = 0, (-2; 4)$
 b) $x^3 - 25x = 0, [-3; 5]$ e) $4x + x^3 = 0, (-4; 0]$
 c) $x^3 - 3x = 0, (-\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$ f) $x^3 - 6x = 30x, (-8; 8]$

10. a) $x = -4, x = 0, x = 4$; dwa rozwiązania
 b) $x = -5, x = 0, x = 5$; jedno rozwiązanie
 c) $x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$; jedno rozwiązanie
 d) $x = -2, x = 0, x = 2$; dwa rozwiązania
 e) $x = 0$; jedno rozwiązanie
 f) $x = -6, x = 0, x = 6$; trzy rozwiązania

2.6. Wielomiany – zastosowania

Przykład 1

Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku x dm. Suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu jest równa 40 dm.

a) Wyznacz wielomian opisujący objętość tego prostopadłościanu w zależności od x . Określ dziedzinę tej funkcji.

Oznaczmy przez h wysokość prostopadłościanu w dm (rysunek obok). Wówczas $4h + 8x = 40$, czyli $h = 10 - 2x$.

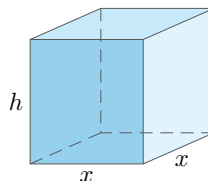
Objętość prostopadłościanu:

$$V(x) = x^2(10 - 2x) = 2x^2(5 - x)$$

gdzie $x > 0$ oraz $10 - 2x > 0$, czyli $x \in (0; 5)$.

b) Dla jakiego $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ objętość tego prostopadłościanu jest największa?

$V(1) = 8$, $V(2) = 24$, $V(3) = 36$, $V(4) = 32$, zatem spośród podanych argumentów objętość prostopadłościanu jest największa dla $x = 3$.



Ćwiczenie 1

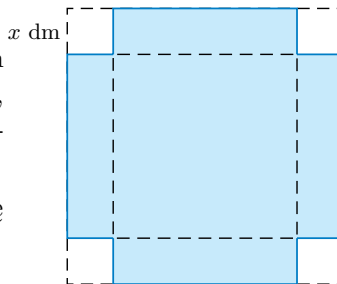
Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o bokach x dm i $2x$ dm. Suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu jest równa 48 dm.

a) Wyznacz wielomian opisujący objętość tego prostopadłościanu w zależności od x . Określ dziedzinę tej funkcji.

b) Dla jakiego $x \in \{1, 2, 3\}$ objętość tego prostopadłościanu jest największa?

Ćwiczenie 2

Z kwadratowego arkusza kartonu o boku 12 dm wycięto w narożnikach kwadraty o bokach x dm, a następnie sklejono go i otrzymano otwarte pudełko (rysunek obok).



D a) Uzasadnij, że objętość tego pudełka wyraża się za pomocą wzoru:

$$V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x, \text{ gdzie } x \in (0; 6)$$

b) Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tabelę wartości funkcji V dla wybranych argumentów x .

x	1	2	3	4	5
$V(x)$	100	128	108	64	20

c) Jaka jest objętość tego pudełka, gdy ma ono kształt sześcianu?

Uczeń:

- opisuje wielomianem zależności dane w zadaniu i wyznacza dziedzinę tego wielomianu,
- rozwiązuje zadania tekstowe, wykorzystując działania na wielomianach i równania wielomianowe.

Ćwiczenie 1

a) Suma długości krawędzi podstaw: $12x$ dm.

Suma długości krawędzi bocznych: $48 - 12x$ dm, zatem krawędź boczna ma długość $12 - 3x$.

Pole podstawy: $P = 2x^2$ dm².

Objętość prostopadłościanu:

$$V = 2x^2(12 - 3x) = 6x^2(4 - x), \text{ gdzie } x \in (0; 4).$$

$$\text{b) } V(1) = 18 \text{ dm}^3,$$

$$V(2) = 48 \text{ dm}^3,$$

$$V(3) = 54 \text{ dm}^3$$

Śród podanych argumentów objętość prostopadłościanu jest największa dla $x = 3$.

Ćwiczenie 2

a) $P_p = (12 - 2x)^2$, $h = x$, zatem:
 $V(x) = (12 - 2x)^2 x = 4x^3 - 48x^2 + 144x$, gdzie $x \in (0; 6)$.

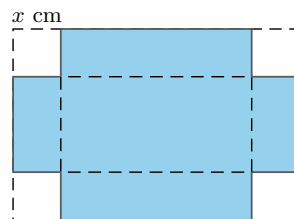
c) Pudełko ma kształt sześcianu, gdy $x = 4$. Jego objętość jest wówczas równa $V(4) = 64 \text{ dm}^3$.

Odpowiedzi do zadań

1. a) Objętość pudełka:
 $V(x) = (40 - 2x)(30 - 2x)x = 4x^3 - 140x^2 + 1200x$,
 gdzie $x \in (0; 15)$
 b) $x \approx 6$ cm,
 $V(6) \approx 3024$ cm³
 Wymiary:
 28 cm $\times$ 18 cm $\times$ 6 cm
 c) $V(10) = 2000$,
 $V(2,5) = 2187,5$,
 czyli $V(10) < V(2,5)$; nie jest
2. a) Oznaczmy wysokość dachu przez h . Wówczas $h = 5 - x$, gdzie $x \in (0; 5)$.
 Pole podstawy graniastosłupa:
 $P_p = 2x \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (5 - x) = 2x^2 + 5x - x^2 = x(x + 5)$
 Wysokość graniastosłupa (długość podłogi):
 $h = (16 - 2x)$ dm
 $V(x) = x(x + 5)(16 - 2x) = -2x^3 + 6x^2 + 80x$,
 gdzie $x \in (0; 5)$
 b) 4,8 dm $\times$ 11,2 dm

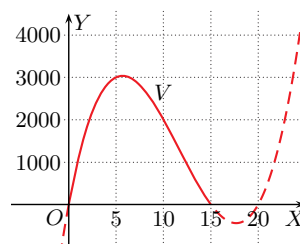
Zadania

1. Z prostokątnego arkusza kartonu o wymiarach 30 cm $\times$ 40 cm wycięto w narożnikach kwadraty o bokach długości x cm, a następnie sklejono go i otrzymano otwarte pudełko (rysunek obok).



- a) Wyznacz wzór funkcji V opisującej objętość otrzymanego pudełka w zależności od x . Określ dziedzinę tej funkcji.

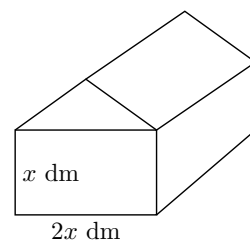
- b) Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji V . Na podstawie tego wykresu podaj przybliżone wymiary pudełka o największej objętości.



- c) Sprawdź, czy spełniona jest nierówność:

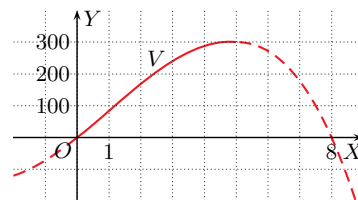
$$V(10) > V(2,5)$$

2. Domek dla lalek ma kształt graniastosłupa prostego (rysunek obok). Wysokość tego domku w najwyższym punkcie wynosi 5 dm. Jego podłoga ma kształt prostokąta o obwodzie 32 dm.



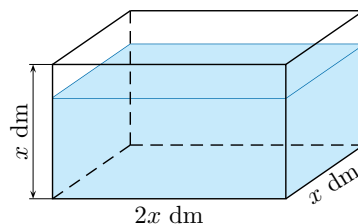
- a) Uzasadnij, że objętość tego domku wyraża się za pomocą wzoru $V(x) = -2x^3 + 6x^2 + 80x$, gdzie $x \in (0; 5)$.

- b) Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji V . Korzystając z wykresu, podaj przybliżone wymiary podstawy domku, którego objętość jest równa 200 dm³.



Sprawdź się

3. Do akwarium o wymiarach podanych na rysunku wlewo wodę do wysokości $(x - 0,5)$ dm.



- a) Wyznacz wzór opisujący, ile litrów wody znajduje się w akwarium w zależności od x . Określ dziedzinę tej funkcji.

- b) Ile litrów wody znajduje się w akwarium, jeśli wiadomo, że jego dno ma kształt prostokąta o polu równym 32 dm²?

3. a) $V = 2x^2(x - 0,5) = 2x^3 - x^2$, gdzie $x > 0,5$
 b) $P_p = 2x^2 = 32$, zatem $x = 4$.
 $V(4) = 2 \cdot 64 - 16 = 112$ [l]



Powtórzenie

Zestaw I

1. Zredukuj wyrazy podobne wielomianu w . Oblicz jego wartość dla $x = -2$.

a) $w(x) = 2x^2 - x^4 + 8x^3 + 3x^4 - 7 - 2x^4 - 5x^3$

b) $w(x) = \frac{1}{2}x^5 + x^4 - \frac{1}{3}x^5 + 2x - x^4 - \frac{1}{6}x^5 + 3$

2. Wyznacz sumę wielomianów v i w . Oblicz jej wartość dla $x = 2$.

a) $v(x) = \frac{2}{3}x^4 + 2x - 1$, $w(x) = \sqrt{2\frac{7}{9}}x^4 + x^2 - 3x$

b) $v(x) = \frac{3}{\sqrt{3}}x^3 - x^2 + 2$, $w(x) = -\sqrt{3}x^3 + 3x^2 - 1$

3. Oblicz wartości wielomianu w dla $x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{4}$ i $x = \frac{1}{4}$.

a) $w(x) = 4x^2 - 8x$ b) $w(x) = -8x^3 + 2x$ c) $w(x) = 16x^4 - x^2$

4. Sprawdź, czy dla wielomianu $w(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ spełniony jest podany warunek.

a) Wartość wielomianu w dla $x = 2$ jest większa od 5.

b) Wartość wielomianu w dla $x = -3$ jest nie mniejsza niż -70 .

c) Wartość wielomianu w dla $x = -4$ jest nie większa niż -12^2 .

5. Wyznacz iloczyn.

a) $(2x^3 - x^2)(x^2 + 3x)$

c) $(x^3 - 2x^2 + x)(-2x^2 + 6x)$

b) $(4x^5 - x^4)(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2)$

d) $(2x^4 + x^3 - 3x^2)(x^2 - 3x + 1)$

6. Dane są wielomiany $w(x) = x^3 - 1$ i $p(x) = 2x^2 + 4x + 1$. Wyznacz wielomian u i podaj jego stopień.

a) $u(x) = 2w(x) + (1 - x)p(x)$

b) $u(x) = [w(x)]^2 - \frac{x^4}{2} \cdot p(x)$

7. Podaj sumę współczynników wielomianu u .

a) $u(x) = (2x^2 - 1)^2 - (2x - 1)^2$

c) $u(x) = (x^2 - 2)^2 - (x - 2)^2$

b) $u(x) = (x^2 + 8)(\sqrt{8} - x)(x + 2\sqrt{2})$

d) $u(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

8. Która z liczb -3 , -1 , 1 spełnia podane równanie?

a) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

c) $6x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$

b) $x^3 + 8x^2 + 17x + 6 = 0$

d) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$

9. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 + 64 = 0$

c) $2x^3 - 128 = 0$

e) $128x^3 - 54 = 0$

b) $8x^3 - 27 = 0$

d) $5x^3 + 135 = 0$

f) $162x^3 + 48 = 0$

9. a) $x = -4$

b) $x = \frac{3}{2}$

c) $x = 4$

d) $x = -3$

e) $x = \frac{3}{4}$

f) $x = -\frac{2}{3}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $w(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7$,

$w(-2) = -23$

b) $w(x) = 2x + 3$, $w(-2) = -1$

2. a) $(v + w)(x) =$

$= \frac{7}{3}x^4 + x^2 - x - 1$,

$(v + w)(2) = 38\frac{1}{3}$

b) $(v + w)(x) = 2x^2 + 1$,

$(v + w)(2) = 9$

3. a) $w(-\frac{1}{2}) = 5$, $w(-\frac{1}{4}) = 2\frac{1}{4}$,

$w(\frac{1}{4}) = -1\frac{3}{4}$

b) $w(-\frac{1}{2}) = 0$,

$w(-\frac{1}{4}) = -\frac{3}{8}$, $w(\frac{1}{4}) = \frac{3}{8}$

c) $w(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$,

$w(-\frac{1}{4}) = w(\frac{1}{4}) = 0$

4. a) $w(2) = 8 - 16 + 6 - 1 =$

$= -3 < 5$

b) $w(-3) = -27 - 36 - 9 - 1 =$

$-73 < -70$

c) $w(-4) = -64 - 64 - 12 +$

$-1 = -141 > -144$

5. a) $2x^5 + 5x^4 - 3x^3$

b) $2x^8 - 8\frac{1}{2}x^7 + 2x^6$

c) $-2x^5 + 10x^4 - 14x^3 + 6x^2$

d) $2x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 3x^2$

6. a) $u(x) = -2x^2 + 3x - 1$,

$\text{st}(u) = 2$

b) $u(x) = -2x^5 - \frac{1}{2}x^4 +$

$-2x^3 + 1$, $\text{st}(u) = 5$

7. a) $u(1) = 0$

b) $u(1) = 63$

c) $u(1) = 0$

d) $u(1) = 3$

8. a) 1

b) -3

c) -1

d) wszystkie

10. a) $x = -7, x = 0, x = 9$
 b) $x = -\frac{2}{5}, x = 0, x = \frac{1}{2}$
 c) $x = -3, x = -\frac{1}{4}, x = 2$
 d) $x = -5, x = 2, x = 4$
11. a) $x = -1, x = 0, x = 2$;
 $x = -1, x = 0$
 b) $x = -\frac{3}{2}, x = 0, x = 6$;
 $x = 0$
 c) $x = -\frac{1}{2}, x = -\frac{1}{3}, x = 0$;
 wszystkie
 d) $x = -\frac{3}{2}, x = 0, x = \frac{2}{3}$;
 $x = 0, x = \frac{2}{3}$

Zestaw II

1. a) $x = -4, x = 0, x = 4$
 b) $x = 0$
 c) $x = 0$
 d) $x = -1, x = 0$
 e) $x = 0, x = 2$
 f) $x = 0, x = \frac{1}{2}$
2. a) $x = -6, x = 0$
 b) $x = 0, x = 3$
 c) $x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = \frac{1}{2}$
 d) $x = -\frac{1}{2}, x = 0$
 e) $x = 0, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 f) $x = -2, x = 0, x = 2$
3. a) $x = 0, x = 1, x = 4$
 b) $x = -7, x = 0, x = 3$
 c) $x = -\frac{3}{2}, x = 0, x = 1$
 d) $x = 0$
4. a) $x = 0, x = 2, x = 4$
 b) $x = -2, x = 0, x = 6$
 c) $x = -\frac{1}{4}, x = 0, x = 2$
 d) $x = -\frac{2+\sqrt{2}}{2}, x = 0$,
 $x = \frac{-2+\sqrt{2}}{2}$

10. Rozwiąż równanie.

- a) $6x(x+7)(x-9) = 0$ c) $(x-2)(x+3)(4x+1) = 0$
 b) $\frac{1}{4}x(2x-1)(5x+2) = 0$ d) $(x+5)(x-4)(2x-4) = 0$

11. Rozwiąż równanie. Wypisz pierwiastki tego równania spełniające warunek $|x| < \sqrt{2}$.

- a) $x(x-2)(x+1) = 0$ c) $x(2x+1)(3x+1) = 0$
 b) $x(x+\frac{3}{2})(x-6) = 0$ d) $x(3x-2)(2x+3) = 0$

Zestaw II

1. Rozwiąż równanie.

- a) $x(x^2 - 16) = 0$ c) $x(4x^2 + 1) = 0$ e) $x(x^2 - 4x + 4) = 0$
 b) $x(x^2 + 16) = 0$ d) $x(x^2 + 2x + 1) = 0$ f) $x(4x^2 - 4x + 1) = 0$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 + 6x^2 = 0$ c) $4x^3 - x = 0$ e) $\sqrt{2}x^6 = x^5$
 b) $3x^4 - 81x = 0$ d) $8x^5 + x^2 = 0$ f) $\frac{\sqrt{2}}{4}x^3 - \sqrt{2}x = 0$

3. Rozwiąż równanie.

- a) $x(x^2 - 5x + 4) = 0$ c) $x^2(2x^2 + x - 3) = 0$
 b) $x(x^2 + 4x - 21) = 0$ d) $x^2(4x^2 + 3x + 1) = 0$

4. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 - 6x^2 + 8x = 0$ c) $4x^4 - 7x^3 - 2x^2 = 0$
 b) $x^3 - 4x^2 - 12x = 0$ d) $2x^4 + 4x^3 + x^2 = 0$

5. Rozwiąż równanie. Wypisz pierwiastki tego równania spełniające warunek $|x| > 2$.

- a) $(x^2 - x)(x - 3) = 0$ d) $(x - \frac{1}{2})(x^2 + 4x) = 0$
 b) $(x^2 - 6x)(2x + 3) = 0$ e) $(5x - 1)(2x^2 - 4x) = 0$
 c) $(x^2 + 3x)(3x + 8) = 0$ f) $(3x + 6)(x - 3x^2) = 0$

6. Czy dla $m = 2$ liczba a jest pierwiastkiem podanego równania?

- a) $-3x^3 + 2x^2 + mx - 3 = 0, a = -1$
 b) $x^3 + (2m - 1)x^2 - 3x + 7 = 0, a = 2$
 c) $-x^3 + mx^2 - mx + 5 = 0, a = 3$
 d) $x^3 + 3x^2 + (m^2 - 2m)x - 4 = 0, a = -2$

5. a) $x = 0, x = 1, x = 3; x = 3$

b) $x = -\frac{3}{2}, x = 0, x = 6; x = 6$

c) $x = -3, x = -\frac{8}{3}, x = 0; x = -3, x = -\frac{8}{3}$

d) $x = -4, x = 0, x = \frac{1}{2}; x = -4$

e) $x = 0, x = \frac{1}{5}, x = 2$; żaden

f) $x = -2, x = 0, x = \frac{1}{3}$; żaden

6. a) $-3 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = 3 + 2 - 2 - 3 = 0$; jest

b) $2^3 + 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 7 = 8 + 12 - 6 + 7 \neq 0$; nie jest

c) $-3^3 + 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + 5 = -27 + 18 - 6 + 5 \neq 0$; nie jest

d) $(-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + 0 \cdot (-2) - 4 = -8 + 12 - 4 = 0$; jest

7. Zbiór A jest zbiorem miejsc zerowych wielomianu u , zbiór B – zbiorem miejsc zerowych wielomianu v , zbiór C – zbiorem miejsc zerowych wielomianu w . Wyznacz zbiór $(A \cup B) \setminus C$.

- a) $u(x) = x^3 - x^2$, $v(x) = x^3 + 2x^2$, $w(x) = x^3 - 4x$
b) $u(x) = x^4 - 3x^2$, $v(x) = x^4 + 9x^2$, $w(x) = \frac{1}{3}x^4 + 9x^3$

8. Wyznacz ujemne rozwiązania równania.

- a) $(x^2 - 4)(x + 4) = 0$ d) $(4x^2 - 1)(9x^2 - 4) = 0$
b) $(x^2 + 8)(x^2 - 9) = 0$ e) $(x^3 - 8)(x^2 - 5) = 0$
c) $(x^2 - 2)(x^2 - 3) = 0$ f) $(x^3 + 1)(x^3 + 8) = 0$

9. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 + x = 2x^2$ e) $2x^5 = 2x^4 + 12x^3$ i) $x^3 + 4x = -5x^2$
b) $3x^3 + 2x = -x^2$ f) $10x^4 + x^3 = 2x^2$ j) $-\frac{1}{2}x^4 + x^3 = \frac{1}{2}x^2$
c) $x^3 = 4x^2 + 5x$ g) $9x^6 + 6x^5 + x^4 = 0$ k) $\frac{1}{6}x^3 + 2x^2 = -6x$
d) $6x^2 + 9x = 3x^3$ h) $x^5 + 4x^4 = 12x^3$ l) $\frac{x^4}{2} + x^2 = \sqrt{2}x^3$

10. Dany jest wielomian w , dla którego $w(-1) = 4$ i $w(0) = 3$. Oblicz a i b .

- a) $w(x) = x^3 + (a - b)x^2 - 4x + \frac{b}{2}$ b) $w(x) = -ax^3 + 3x^2 + a - 6b$

11. Podaj przykład wielomianu czwartego stopnia, którego jedynymi pierwiastkami są podane liczby.

- a) -2 i 2 b) $-\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$ c) $1, 2, 3$

12. Rozwiąż równanie.

- a) $3x^5 = \frac{x^7 + 3x^6}{6}$ b) $\frac{20x^4 + x^2}{8} = \frac{x^4 - 2x^3}{2}$ c) $\frac{x^4 - 4x^3}{2} = \frac{x^5 - 6x^3}{3}$

13. Wyznacz wielomian $v(x, y) = 3u(x, y) - 2w(x, y)$. Oblicz wartość tego wielomianu dla $x = \frac{1}{2}$ i $y = -2$.

- a) $u(x, y) = 2x^2y - 6xy^2 + 4x^2y^3$, $w(x, y) = 3x^2y - 2xy^2 + 4x^2y^3$
b) $u(x, y) = \frac{2}{3}xy - \frac{1}{6}xy^3 + y^4$, $w(x, y) = -\frac{1}{4}xy + xy^3 + \frac{3}{2}y^4$

14. Wyznacz wielomian $v(x, y) = 4u(x, y) - (w(x, y))^2$.

- a) $u(x, y) = 2x^2y^2$, $w(x, y) = 2x^2 + 2y^2$
b) $u(x, y) = -\frac{1}{2}x^2y^2$, $w(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - y^2$

15. Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości x, y, z oraz prostopadłościan o krawędziach długości $x + 1, y + 2, z + 3$. Podaj wielomian opisujący sumę pól powierzchni całkowitych tych prostopadłościanów. Określ dziedzinę tej funkcji.

7. a) $A = \{0, 1\}$, $B = \{-2, 0\}$,
 $C = \{-2, 0, 2\}$
 $A \cup B \setminus C = \{1\}$
b) $A = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$,
 $B = \{0\}$, $C = \{-27, 0\}$
 $A \cup B \setminus C = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

8. a) $x = -4$, $x = -2$
b) $x = -\sqrt{3}$
c) $x = -\sqrt{3}$, $x = -\sqrt{2}$
d) $x = -\frac{2}{3}$, $x = -\frac{1}{2}$
e) $x = -\sqrt{5}$
f) $x = -2$, $x = -1$

9. a) $x = 0$, $x = 1$
b) $x = 0$
c) $x = -1$, $x = 0$, $x = 5$
d) $x = -1$, $x = 0$, $x = 3$
e) $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$
f) $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$, $x = \frac{2}{5}$
g) $x = -\frac{1}{3}$, $x = 0$
h) $x = -6$, $x = 0$, $x = 2$
i) $x = -4$, $x = -1$, $x = 0$
j) $x = 0$, $x = 1$
k) $x = -6$, $x = 0$
l) $x = 0$, $x = \sqrt{2}$

10. a) $w(0) = \frac{b}{2} = 3$, zatem $b = 6$
 $w(-1) = -1 + (a - 6) + 4 + 3 =$
 $= a = 4$
b) $w(-1) = a + 3 + a - 6b = 4$,
zatem $2a - 6b = 1$
 $w(0) = a - 6b = 3$
Otrzymaliśmy układ równań:

$$\begin{cases} 2a - 6b = 1 \\ a - 6b = 3 \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest
para liczb: $a = -2$, $b = -\frac{5}{6}$

11. Na przykład:

- a) $(x - 2)^2(x + 2)^2$
b) $(x^2 - 2)^2$
c) $(x - 1)^2(x - 2)(x - 3)$

12. a) $x = -6$, $x = 0$, $x = 3$

b) $x = -\frac{1}{4}$, $x = 0$

c) $x = 0$, $x = \frac{3}{2}$

13. a) $v(x, y) = 4x^2y^3 - 14xy^2$, $v(\frac{1}{2}, -2) = -36$

b) $v(x, y) = -\frac{5}{2}xy^3 + \frac{5}{2}xy$, $v(\frac{1}{2}, -2) = \frac{15}{2}$

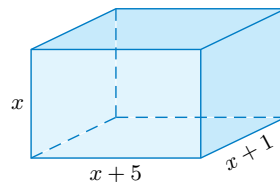
14. a) $v(x, y) = -4x^4 - 4y^4$

b) $v(x, y) = -x^2y^2 - \frac{1}{4}x^4 - y^4$

15. $P(x, y, z) = 4xy + 4xz + 4yz + 10x + 8y + 6z + 22$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$

**Przykład 1**

Dla jakiej wartości x objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok jest dwa razy większa od objętości sześcianu o krawędzi x ?



Objętość tego prostopadłościanu:

$$V_p(x) = x(x+1)(x+5) = x^3 + 6x^2 + 5x, \text{ gdzie } x > 0.$$

Objętość sześcianu o krawędzi x :

$$V_s(x) = x^3, \text{ gdzie } x > 0$$

Z zależności $V_p = 2V_s$ otrzymujemy:

$$x^3 + 6x^2 + 5x = 2x^3$$

$$x^3 - 6x^2 - 5x = 0$$

$$x(x^2 - 6x - 5) = 0$$

Zatem $x = 0$ (sprzeczne z założeniem) lub:

$$x^2 - 6x - 5 = 0$$

$$\Delta = 36 + 20 = 56, \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{14}$$

$$x_1 = \frac{6 - 2\sqrt{14}}{2} = 3 - \sqrt{14} < 0 \quad \text{sprzeczne z założeniem}$$

$$x_2 = \frac{6 + 2\sqrt{14}}{2} = 3 + \sqrt{14}$$

Zakładamy, że:

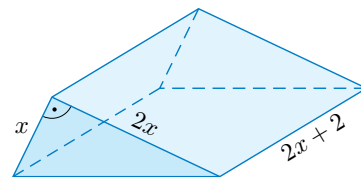
$$\begin{cases} x > 0 \\ x + 5 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \text{ czyli } x > 0.$$

Odpowiedź: $x = 3 + \sqrt{14}$

→ Zadanie 24, str. 86

Przykład 2

Dla jakiej wartości x objętość graniastosłupa przedstawionego na rysunku obok jest cztery razy większa od objętości sześcianu o krawędzi x ?



Objętość tego graniastosłupa:

$$V_g(x) = \frac{1}{2}x \cdot 2x(2x+2) = 2x^3 + 2x^2, \text{ gdzie } x > 0.$$

Objętość sześcianu o krawędzi x : $V_s(x) = x^3$, gdzie $x > 0$.

Z zależności $V_g = 4V_s$ otrzymujemy:

$$2x^3 + 2x^2 = 4x^3$$

$$2x^3 - 2x^2 = 0$$

$$2x^2(x - 1) = 0$$

Zatem $x = 0$ (sprzeczne z założeniem) lub $x = 1$.

Zakładamy, że:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2x > 0 \\ 2x + 2 > 0 \end{cases} \text{ czyli } x > 0.$$

Odpowiedź: $x = 1$

→ Zadanie 24, str. 86



W zadaniach 1–8 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Wielomian $w(x) = -2x^4 + ax^2 + 2x - 4$ spełnia warunek $w(\sqrt{2}) = -w(-\sqrt{2})$.

Wynika stąd, że

- A. $a = 6$ B. $a = 4$ C. $a = 2$ D. $a = -2$

Zadanie 2 (0–1)

Dany jest wielomian $w(x) = (2 - x)(\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1)^2$. Współczynnik przy najwyższej potędze tego wielomianu jest równy

- A. $-8\sqrt{2}$ B. $-2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $8\sqrt{2}$

Zadanie 3 (0–1)

Wyrażenie $(4x^2 + 1 + 2x)(4x^2 + 1 - 2x)$ jest równe

- A. $16x^4 + 4x^3 + 1$ C. $16x^4 + 4x^2 + 1$
B. $16x^4 - 4x^3 + 1$ D. $16x^4 - 4x^2 + 1$

Zadanie 4 (0–1)

Która para punktów należy do wykresu funkcji $w(x) = x^3 - x^2 + 6$?

- A. $A_1(-1, 4), A_2(1, 6)$ C. $C_1(1, 6), C_2(-2, 2)$
B. $B_1(2, 8), B_2(-2, 6)$ D. $D_1(-2, 6), D_2(2, 10)$

Zadanie 5 (0–1)

Dany jest prostopadłościan o krawędziach $x - 4$, $x + 4$, $x^2 - 4$, gdzie $x > 4$. Objętość tego prostopadłościanu jest opisana wzorem

- A. $V(x) = x^4 - 16$ C. $V(x) = x^4 - 16x^2 + 16$
B. $V(x) = x^4 - 64$ D. $V(x) = x^4 - 20x^2 + 64$

Zadanie 6 (0–1)

Wszystkie rozwiązania równania $x(2x + 4)(2x - 5) = 0$ należą do przedziału

- A. $[-5; 1\frac{2}{3}]$ B. $[-3\frac{2}{3}; 2]$ C. $[-3; 2\frac{2}{3}]$ D. $[-1\frac{2}{3}; 6]$

Zadanie 7 (0–1)

Liczby -3 , 1 są jedynymi pierwiastkami równania

- A. $x^3 + 2x^2 = 3x$ C. $(x - 1)^2(x^2 + 6x + 9) = 0$
B. $x(x^2 + x - 3) = 0$ D. $(x^2 - 1)(x + 3)^2 = 0$

Zadanie 8 (0–1)

Wartość wielomianu $w(x, y, z) = 6x^2yz - 8xy^2z$ dla $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$ i $z = -2$ jest równa

- A. $-3\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $3\frac{1}{2}$

1. $w(\sqrt{2}) = -12 + 2\sqrt{2} + 2a$
 $-w(-\sqrt{2}) = 12 + 2\sqrt{2} - 2a$
 $a = 6$

2. Współczynnik przy najwyższej potędze pierwszego czynnika jest równy -1 , drugiego $\sqrt{2}$, a trzeciego 2 , zatem:
 $-1 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 = -2\sqrt{2}$

3. $((4x^2 + 1) + 2x) \cdot ((4x^2 + 1) - 2x) =$
 $= (4x^2 + 1)^2 - (2x)^2 =$
 $= 16x^4 + 8x^2 + 1 - 4x^2 =$
 $= 16x^4 + 4x^2 + 1$

5. $V(x) = (x-4)(x+4)(x^2-4) =$
 $= (x^2-16)(x^2-4) =$
 $= x^4 - 20x^2 + 64$

6. Rozwiązania równania:
 $x = -2, x = 0, x = 2\frac{1}{2}$.

7. A. $x(x^2 + 2x - 3) = 0$
B. $(x + 1)(x - 1)(x + 3) = 0$
C. $(x - 1)^2(x + 3)^2 = 0$
D. $(x + 1)(x - 1)(x + 3)^2 = 0$

**Zadanie 9 (0-1)**

Dane jest równanie $x(x+3)(x-2) = 0$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Podane równanie ma trzy różne pierwiastki.	P	F
Iloczyn niezerowych pierwiastków tego równania jest równy 6.	P	F

Zadanie 10 (0-1)

Niech $x = -2a$ oraz $y = 3b$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz odpowiedź 1., 2. albo 3.

Wyrażenie $x^2 - y^2$ jest równe

A.	$(2a - 3b)(2a + 3b),$	a wyrażenie $xy(x - y)$ jest równe	1.	$12a^2b - 18a^2.$
B.	$(2a - 3b)(-2a + 3b),$		2.	$18ab^2 - 12a^2.$
			3.	$12a^2b + 18ab^2.$

Zadanie 11 (0-2)

Dany jest wielomian $w(x, y) = -2xy^2 - xy^3 + x^2y$.

Każdemu rozpoczętemu zdaniu przyporządkuj właściwe dokończenie. Wpisz obok rozpoczętych zdań w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–E.

Numer zadania	Zdanie do uzupełnienia	Dokończenie zdania
11.1	Wartość $w(2, -2)$ jest równa	B
11.2	Wartość $w(-2, 2)$ jest równa	E

A. -16

B. -8

C. 16

D. 32

E. 40

Zadanie 12 (0-1)

Dany jest wielomian $w(x) = 2x^4 - \sqrt{2}x^3 - x^2$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wartość wielomianu w dla $-\sqrt{2}$ jest równa 2.	P	F
Wartość wielomianu w dla $2\sqrt{2}$ jest równa 8.	P	F

$$12. w(-\sqrt{2}) = 2 \cdot 4 - \sqrt{2}(-2\sqrt{2}) - 2 = 8 + 4 - 2 = 10$$

$$w(2\sqrt{2}) = 2 \cdot 64 - \sqrt{2}(16\sqrt{2}) - 8 = 128 - 32 - 8 = 88$$

**Zadanie 13**

Dany jest wielomian $w(x) = 2x^3 + m^2x^2 - 6x + 9$, gdzie $m \in \mathbb{R}$.

Zadanie 13.1 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Jeśli $m = -1$, to

dla $x = -2$ wielomian w przyjmuje wartość równą 9.	P	F
dla $x = -\frac{3}{2}$ wielomian w przyjmuje wartość większą od 13.	P	F

Zadanie 13.2 (0-2)

Rozwiąż równanie $w(x) - 6mx = (mx - 3)^2$.

Zadanie 14

Dany jest wielomian $w(x) = (x^2 + x + 1)(x - 3) + 3$.

Zadanie 14.1 (0-1)

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz odpowiedź 1., 2. albo 3.

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x wielomian w można zapisać w postaci

A.	$w(x) = x^3 - 2x^2 - 2x,$	a jego wartość dla $x = -1$ jest równa	1.	0.
B.	$w(x) = x^3 - 2x^2 - 3x,$		2.	-1.
			3.	-2.

D Zadanie 14.2 (0-1)

Uzasadnij, że $w(\sqrt{2})$ jest liczbą całkowitą.

Zadanie 15

Dany jest wielomian $w(x) = x(x^2 - 4x + c)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$.

D Zadanie 15.1 (0-1)

Uzasadnij, że dla $c = 0$ suma pierwiastków tego wielomianu jest większa od sumy pierwiastków dla $c = 4$.

Zadanie 15.2 (0-1)

Wyznacz pierwiastki wielomianu w dla $c = -12$.

Zadanie 16 (0-2)

Oblicz średnią arytmetyczną pierwiastków wielomianu:

$$w(x) = x(2x - 1)(3x - 1)(6x - 1)$$

$$13.1. w(x) = 2x^3 + x^2 - 6x + 9$$

$$w(-2) = -16 + 4 + 12 + 9 = 9$$

$$w\left(-\frac{3}{2}\right) =$$

$$= -\frac{27}{4} + \frac{9}{4} + 9 + 9 =$$

$$= -4\frac{1}{2} + 18 = 13\frac{1}{2} > 13$$

$$13.2. 2x^3 + m^2x^2 - 6x + 9 - 6mx =$$

$$= m^2x^2 - 6mx + 9$$

$$2x^3 - 6x = 0 : 2$$

$$x^3 - 3x = 0$$

$$x(x^2 - 3) = 0$$

$$x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$$

$$x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$$

$$14.2. w(\sqrt{2}) =$$

$$= (2 + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 3) + 3 =$$

$$= (\sqrt{2} + 3)(\sqrt{2} - 3) + 3 =$$

$$= 2 - 9 + 3 = -4$$

$$15.1. w_0(x) = x(x^2 - 4x) =$$

$$= x^2(x - 4)$$

Suma pierwiastków: 4.

$$w_4(x) = x(x^2 - 4x + 4) =$$

$$= x(x - 2)^2$$

Suma pierwiastków: 2.

$$15.2. w(x) = x(x^2 - 4x - 12)$$

$$\Delta = 16 + 48 = 64 = 8^2$$

$$x_1 = \frac{4-8}{2} = -2,$$

$$x_2 = \frac{4+8}{2} = 6$$

Pierwiastki wielomianu w :

-2, 0, 6.

$$16. \frac{1}{4}$$



$$17. \frac{3}{4}x = -48 \quad / \cdot \frac{4}{3}$$

$$x^3 = -64$$

$$x^3 = -4$$

$$18. p = 0 + 1 + \frac{9}{16}$$

$$p = \frac{25}{16}$$

$$\sqrt{p} = \frac{5}{4}$$

$$19. \text{Jeden pierwiastek: } x = -4.$$

20. Pierwiastki wielomianu w :
 $0, -6, \frac{20}{3}, \frac{15}{2}$
 Pierwiastki całkowite wielomianu w o wartości bezwzględnej mniejszej od 7:
 $0, -6$.

$$21. w(x) = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{7}{2}\right)^2$$

$$21.1. x = \frac{1}{2}, x = \frac{7}{2}$$

$$21.2. w\left(\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{7}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 4 = 1$$

$$w\left(\frac{9}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{9}{2} - \frac{7}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 1 = 1$$

$$22.2. \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 =$$

$$= \frac{1}{4}n^2(n^2 + 2n + 1) =$$

$$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$$

Jedną z liczb $n, n+1$ jest parzysta, zatem $\frac{1}{2}n(n+1)$ jest liczbą naturalną.

D Zadanie 17 (0-2)

Uzasadnij, że rozwiązaniem równania $0,75x^3 + 48 = 0$ jest liczba wymierna.

Zadanie 18 (0-2)

Oblicz $\sqrt{p}$, gdy p jest sumą pierwiastków równania $x(x-1)(16x-9) = 0$.

Zadanie 19 (0-2)

Ile wspólnych pierwiastków mają poniższe równania?

$$x^2 + x - 12 = 0 \quad \text{i} \quad (x+4)(x^2 + 8x) = 0$$

Zadanie 20 (0-2)

Które liczby całkowite o wartości bezwzględnej mniejszej od 7 są pierwiastkami wielomianu $w(x) = x\left(\frac{2}{3}x + 4\right)\left(\frac{3}{4}x - 5\right)\left(\frac{4}{5}x + 6\right)$?

Zadanie 21

Dany jest wielomian $w(x) = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\right)(x^2 - 7x + 12\frac{1}{4})$.

Zadanie 21.1 (0-2)

Wyznacz pierwiastki wielomianu w .

D Zadanie 21.2 (0-2)

Uzasadnij, że dla argumentów $1\frac{1}{2}$ i $4\frac{1}{2}$ wielomian w przyjmuje tę samą wartość.

Zadanie 22

Sumę sześciąt kolejnych liczb naturalnych można wyrazić wzorem:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

Zadanie 22.1 (0-1)

Sprawdź prawdziwość powyższego wzoru dla $n = 4$.

D Zadanie 22.2 (0-3)

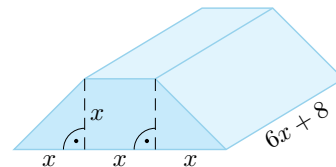
Korzystając z powyższego wzoru, uzasadnij, że suma sześciąt kolejnych liczb naturalnych od 1 do n jest kwadratem pewnej liczby naturalnej.

D Zadanie 23 (0-4)

Uzasadnij, że objętość prostopadłościanu o krawędziach $x-2, x, x+4$ jest opisana za pomocą wzoru $V(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$, gdzie $x > 2$. Sprawdź, czy dla $x = 2\sqrt{2}$ objętość tego prostopadłościanu jest liczbą wymierną.

Zadanie 24 (0-2) → Przykłady 1 i 2, str. 82

Objętość graniastósłupa przedstawionego na rysunku obok jest równa objętości sześcianu o krawędzi $3x$. Oblicz x .



$$23. V(2\sqrt{2}) = 16\sqrt{2} + 16 - 16\sqrt{2} = 16$$

$$24. \text{Pole podstawy graniastósłupa: } P_p = \frac{3x+x}{2} \cdot x = 2x^2, \text{ gdzie } x > 0.$$

$$\text{Objętość graniastósłupa: } V_g(x) = 2x^2(6x+8) = 12x^3 + 16x^2, \text{ gdzie } x > 0.$$

$$\text{Objętość sześcianu o krawędzi } x: V_s(x) = 27x^3, \text{ gdzie } x > 0.$$

Z zależności $V_g = V_s$ otrzymujemy:

$$12x^3 + 16x^2 = 27x^3$$

$$15x^3 - 16x^2 = 0$$

$$15x^2\left(x - \frac{16}{15}\right) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = \frac{16}{15}$$

Rozwiązanie $x = 0$ jest sprzeczne z założeniem, zatem $x = \frac{16}{15}$.