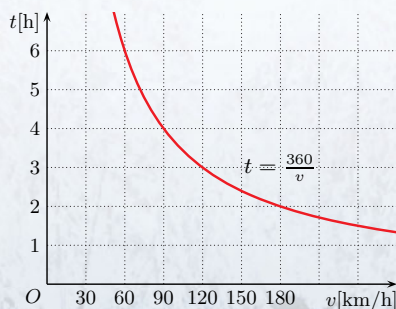


3 Funkcje wymierne

Czas potrzebny na przebycie pewnej ustalonej odległości jest tym krótszy, im większa jest prędkość, z jaką się poruszamy. Na wykresie obok przedstawiono zależność między prędkością a czasem potrzebnym na pokonanie odległości 360 km. Prędkość i czas (potrzebny do przebycia określonej drogi) to wielkości odwrotnie proporcjonalne.



Proporcjonalność odwrotna

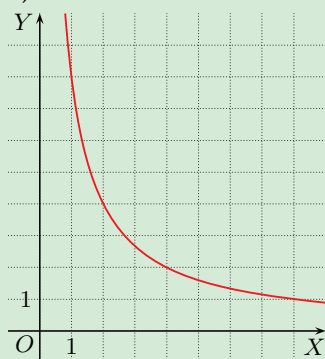
Funkcję postaci $y = \frac{a}{x}$, gdzie $x > 0$ oraz $a \in \mathbb{R}_+$, nazywamy **proporcjonalnością odwrotną**. Wielkości x i y nazywamy **odwrotnie proporcjonalnymi**, a stałą a – **współczynnikiem proporcjonalności**.

$$a = xy$$

Odpowiedzi do zadań

1. $a = 18, y = \frac{18}{x}$

2. b)



3. a) $y = \frac{18}{x}$

b) $y = \frac{4}{x}$

c) $y = \frac{9}{4x}$

d) $y = \frac{1}{x}$

4. a) g

b) f

c) h

d) g

e) g

f) h

1. Wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne. Podaj współczynnik tej proporcjonalności i jej wzór. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

x	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	6	9	10	18
y	36	18	9	6	4,5	3	2	1,8	1

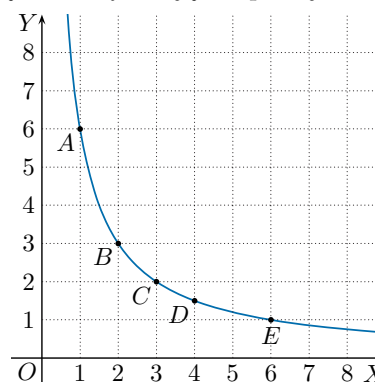
2. Niech x oznacza cenę w złotych za kilogram gruszek, a y – liczbę kupionych kilogramów tych owoców.

a) Na zakup gruszek przeznaczono 6 zł. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres zależności y od x . Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

	A	B	C	D	E
x [zł]	1	2	3	4	6
y [kg]	6	3	2	1,5	1

b) Na zakup gruszek przeznaczono 8 zł. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij. Naszkicuj wykres zależności y od x .

x [zł]	1	2	3	4	5
y [kg]	8	4	$2\frac{2}{3}$	2	$1\frac{3}{5}$



3. Podaj wzór proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{a}{x}$, do której wykresu należy punkt: a) $(3, 6)$, b) $(\frac{1}{2}, 8)$, c) $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, d) $(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$.

4. Na rysunku przedstawiono wykresy proporcjonalności odwrotnych: $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{2}{x}$, $h(x) = \frac{4}{x}$. Do którego z tych wykresów należy podany punkt?

a) $(3, \frac{2}{3})$

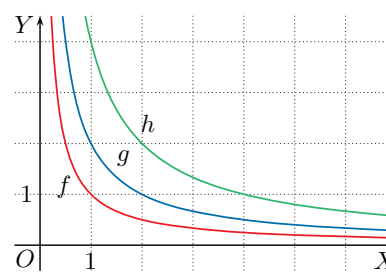
d) $(\frac{8}{3}, \frac{3}{4})$

b) $(\frac{5}{3}, \frac{3}{5})$

e) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

c) $(\frac{4}{3}, 3)$

f) $(2, 5, 1, 6)$



3.1. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \frac{1}{x}$ – jest ona określona dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sporządzamy tabelę wartości funkcji f , a następnie łączymy wyznaczone punkty krzywą jak na rysunku poniżej.

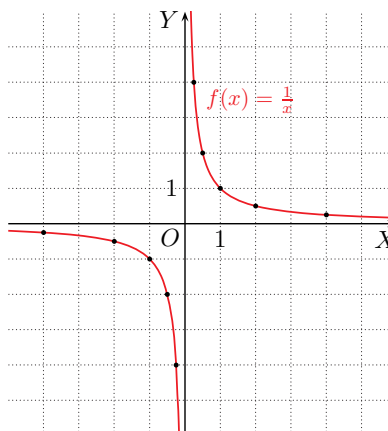
x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$, oraz każdą krzywą powstałą z tego wykresu przez przesunięcie nazywamy **hiperbolą**.

Własności funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$:

- dla $x < 0$ funkcja f przyjmuje wartości ujemne, natomiast dla $x > 0$ – przyjmuje wartości dodatnie,
- funkcja f nie ma miejsc zerowych,
- funkcja f jest **malejąca w przedziałach** $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$.

Uwaga. Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ **nie jest** malejąca w zbiorze $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.



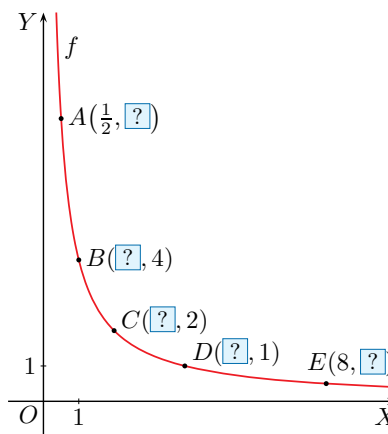
Hiperbola składa się z dwóch gałęzi.

Zauważmy, że każda z gałęzi wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ „zbliza się” do prostej poziomej $y = 0$ oraz „zbliza się” do prostej pionowej $x = 0$. O takich prostych mówimy, że są **asymptotami** wykresu funkcji – odpowiednio **asymptotą poziomą** i **asymptotą pionową**.

Ćwiczenie 1

Na rysunku obok przedstawiono jedną gałąź hiperboli $f(x) = \frac{4}{x}$.

- Podaj brakujące współrzędne punktów A , B , C , D i E .
- Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj obie gałęzie tej hiperboli.



Ćwiczenie 2

Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj wykres funkcji f .

- $f(x) = \frac{2}{x}$
- $f(x) = \frac{3}{x}$
- $f(x) = \frac{8}{x}$

Ćwiczenie 2

a)

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$

b)

x	-6	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	3	6
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	-1	-3	-6	6	3	1	$\frac{1}{2}$

c)

x	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
$f(x)$	-1	-2	-4	-8	8	4	2	1

Uczeń:

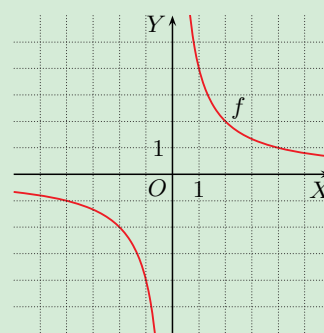
- szkicuje wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, podaje jej własności (dziedzinę, zbiór wartości, przedziały monotoniczności) oraz wyznacza równania asymptot jej wykresu,
- szkicuje wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ w podanym zbiorze,
- wyznacza współczynnik a tak, aby funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$ spełniała podane warunki.

Ćwiczenie 1

- $A(\frac{1}{2}, 8)$, $B(1, 4)$, $C(2, 2)$, $D(4, 1)$, $E(8, \frac{1}{2})$

x	-8	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-8

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$



Multibook

- Wykres proporcjonalności odwrotnej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.1

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

- a) $f(1) = \frac{1}{2}$, $g(1) = 2$, $h(1) = 4$, $k(1) = 6$
 b) czerwony – f , niebieski – g ,
 zielony – h , fioletowy – k
 c) $A - k$, $B - g$, $C - f$, $D - g$,
 $E - h$

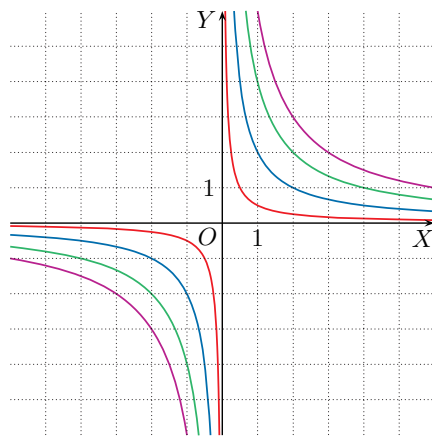
Ćwiczenie 3

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{2x}, \quad g(x) = \frac{2}{x},$$

$$h(x) = \frac{4}{x}, \quad k(x) = \frac{6}{x}.$$

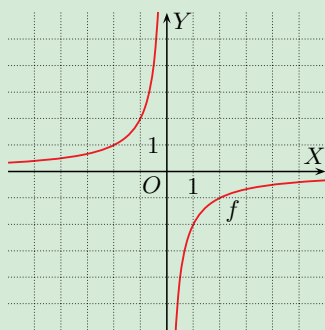
- a) Oblicz wartości każdej z tych funkcji dla $x = 1$.
 b) Dobierz wzór do każdego wykresu.
 c) Do których hiperbol należą punkty:
 $A(2, 3)$, $B(\frac{2}{3}, 3)$, $C(4, \frac{1}{8})$,
 $D(-4, -\frac{1}{2})$, $E(-\frac{2}{3}, -6)$?



Ćwiczenie 4

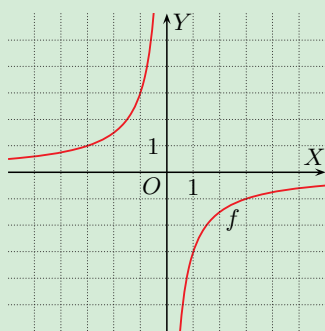
a)

x	-4	-2	-1	1	2	4
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	1	2	-2	-1	$-\frac{1}{2}$



b)

x	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	3
$f(x)$	1	3	6	-6	-3	-1

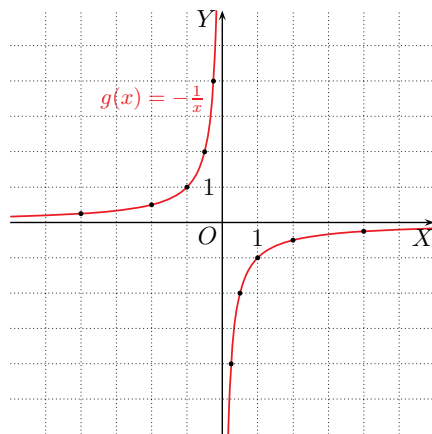


Aby naszkicować wykres funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sporządzamy tabelę wartości funkcji g , a następnie łączymy wyznaczone punkty odpowiednią krzywą. Na rysunku poniżej przedstawiono hiperbolę otrzymaną w ten sposób.

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$

Własności funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$:

- dla $x < 0$ funkcja g przyjmuje wartości dodatnie, natomiast dla $x > 0$ – przyjmuje wartości ujemne,
- funkcja g nie ma miejsc zerowych,
- funkcja g jest **rosnąca w przedziałach** $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$, ale nie jest funkcją rosnącą w swojej dziedzinie,
- prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą, a prosta $x = 0$ – asymptotą pionową wykresu funkcji g .



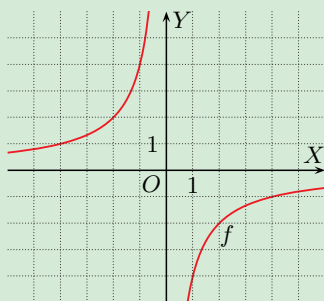
Ćwiczenie 4

Sporządź odpowiednią tabelę wartości funkcji i naszkicuj hiperbolę, która jest wykresem funkcji g .

a) $g(x) = -\frac{2}{x}$ b) $g(x) = -\frac{3}{x}$ c) $g(x) = -\frac{4}{x}$ d) $g(x) = -\frac{0,5}{x}$

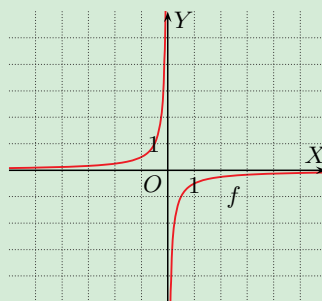
c)

x	-4	-2	-1	1	2	4
$f(x)$	1	2	4	-4	-2	-1



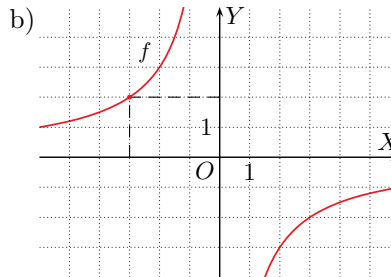
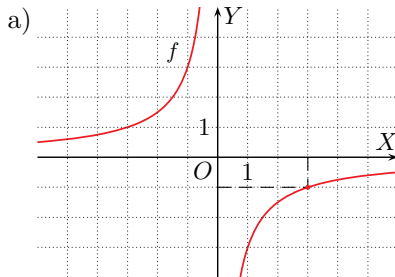
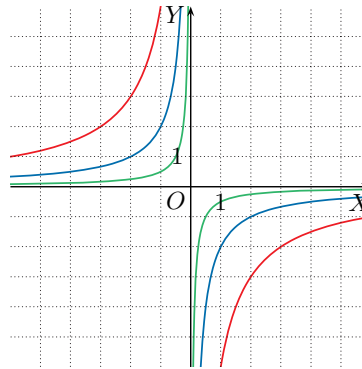
d)

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$



Zadania

- 1. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$, której dziedziną jest zbiór D . Podaj zbiór wartości tej funkcji.
- a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ b) $D = (-\infty; -1)$ c) $D = [2; 8]$
2. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj jej wartość najmniejszą i wartość największą w przedziale $[1; 2]$.
- a) $f(x) = \frac{6}{x}$ b) $f(x) = -\frac{4}{x}$ c) $f(x) = \frac{1}{2x}$ d) $f(x) = -\frac{5}{x}$
3. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji:
 $f(x) = -\frac{6}{x}$, $g(x) = -\frac{2}{x}$, $h(x) = -\frac{1}{2x}$
- a) Dobierz wzór do każdego wykresu.
 b) Które spośród punktów $P(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $Q(-\frac{1}{2}, 4)$ i $R(3\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ należą do wykresu funkcji g ?
4. Podaj sześć punktów o obu współrzędnych całkowitych należących do wykresu funkcji $f(x) = -\frac{6}{x}$.
5. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$. Oblicz a . Znajdź współrzędne punktu, w którym hiperbola przecina prostą $y = -3$. Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od -3 .

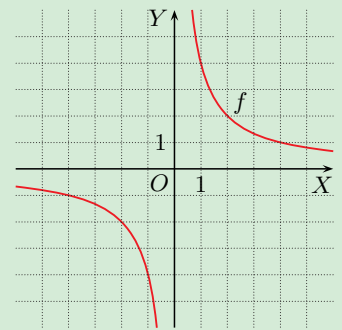


Sprawdź się

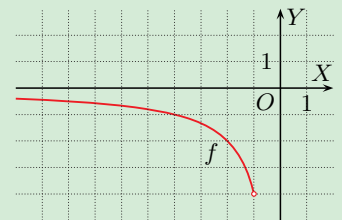
6. Do wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ należy punkt P . Naskicuj ten wykres.
- a) $P(4, \frac{1}{2})$ b) $P(-\frac{1}{9}, -3)$ c) $P(8, -\frac{1}{2})$ d) $P(-\frac{1}{8}, 16)$
7. Dla jakiej wartości współczynnika a punkt P należy do hiperboli $y = \frac{a}{x}$?
- a) $P(-1, 8)$ b) $P(4, -16)$ c) $P(-\frac{1}{7}, 2)$ d) $P(-5, -25)$
5. a) $a = -3$, $P(1, -3)$, $f(x) > -3$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$
 b) $a = -6$, $P(2, -3)$, $f(x) > -3$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$
6. a) $f(x) = \frac{2}{x}$
 b) $f(x) = \frac{1}{3x}$
 c) $f(x) = -\frac{4}{x}$
 d) $f(x) = -\frac{2}{x}$
7. a) $a = -8$
 b) $a = -64$
 c) $a = -\frac{2}{7}$
 d) $a = 125$

Odpowiedzi do zadań

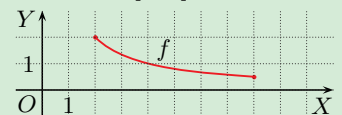
1. a) $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



- b) $f(D) = (-4; 0)$



- c) $f(D) = [\frac{1}{2}; 2]$



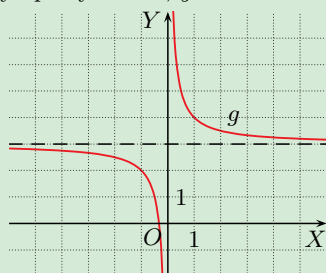
2. a) wartość najmniejsza: 3, wartość największa: 6
 b) wartość najmniejsza: -4, wartość największa: -2
 c) wartość najmniejsza: $\frac{1}{4}$, wartość największa: $\frac{1}{2}$
 d) wartość najmniejsza: -5, wartość największa: $-\frac{5}{2}$
3. a) czerwony – f , niebieski – g , zielony – h
 b) P, Q
4. np. $(-6, 1)$, $(-3, 2)$, $(-2, 3)$, $(-1, 6)$, $(1, -6)$, $(2, -3)$

Uczeń:

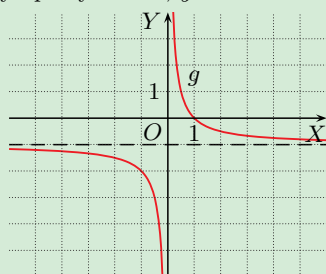
- dobiera wzór funkcji do jej wykresu,
- sprawdza, czy punkt należy do wykresu danej funkcji,
- szkicuje wykres funkcji $y = \frac{a}{x-p} + q$, podaje jej własności oraz wyznacza równania asymptot jej wykresu,
- wyznacza wzór funkcji spełniającej podane warunki.

Ćwiczenie 1

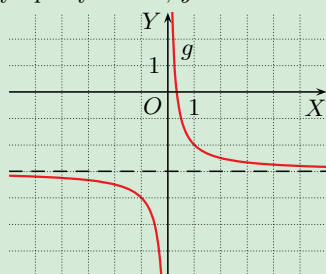
a) $g(D) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

asymptoty: $x = 0, y = 3$ 

b) $g(D) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

asymptoty: $x = 0, y = -1$ 

c) $g(D) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

asymptoty: $x = 0, y = -3$ 

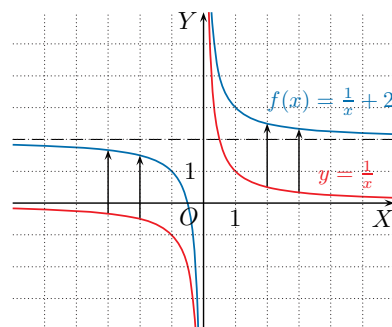
3.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ wzdłuż osi OY i osi OX

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $y = \frac{1}{x}$ o 2 jednostki w górę (rysunek obok).

Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór $(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$.

Prosta $y = 2$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f , a prosta $x = 0$ – jego asymptotą pionową.



Przypomnijmy, że:

- wykres funkcji $y = f(x) + q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek w górę wzdłuż osi OY,
- wykres funkcji $y = f(x) - q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek w dół wzdłuż osi OY.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$, a następnie, stosując odpowiednie przesunięcie, naszkicuj wykres funkcji g . Podaj zbiór wartości funkcji g oraz równania asymptot jej wykresu.

a) $g(x) = \frac{1}{x} + 3$

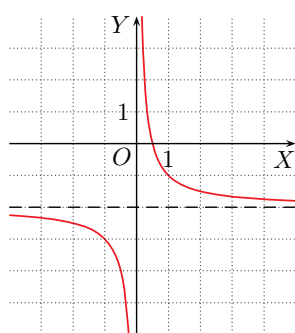
b) $g(x) = \frac{1}{x} - 1$

c) $g(x) = \frac{1}{x} - 3$

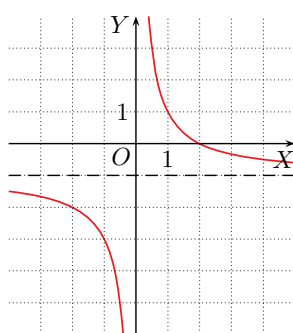
Ćwiczenie 2

Poniżej przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \frac{2}{x} - 2$, $g(x) = \frac{2}{x} - 1$ oraz $h(x) = \frac{1}{x} - 2$. Dopasuj wzór każdej z tych funkcji do odpowiedniego wykresu.

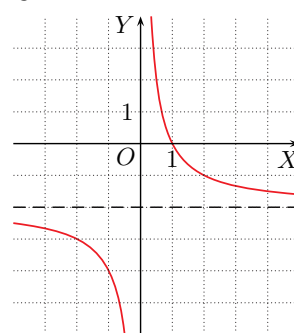
A.



B.



C.

**Ćwiczenie 2**

A – h , B – g , C – f

Multibook

- Wykres funkcji wymiernej
- Kreator wykresów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.2

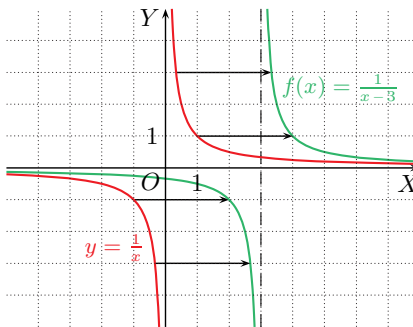
Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 2

Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x-3}$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $y = \frac{1}{x}$ o 3 jednostki w prawo (rysunek obok).

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Prosta $x = 3$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji f , a prosta $y = 0$ – jego asymptotą poziomą.



Przypomnijmy, że wykres funkcji $y = f(x-p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek w prawo wzdłuż osi OX .

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj dziedzinę i przedziały monotoniczności tej funkcji oraz równania asymptot jej wykresu.

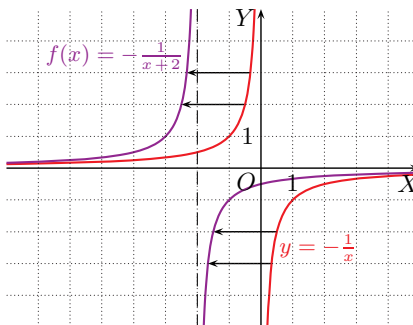
a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{2}{x-4}$ c) $f(x) = \frac{-1}{x-1}$ d) $f(x) = \frac{-2}{x-2}$

Przykład 3

Wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{x+2}$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $y = -\frac{1}{x}$ o 2 jednostki w lewo (rysunek obok).

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Asymptotą pionową jej wykresu jest prosta $x = -2$, a asymptotą poziomą – prosta $y = 0$.



Przypomnijmy, że wykres funkcji $y = f(x+p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek w lewo wzdłuż osi OX .

Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj dziedzinę i przedziały monotoniczności tej funkcji oraz równania asymptot jej wykresu.

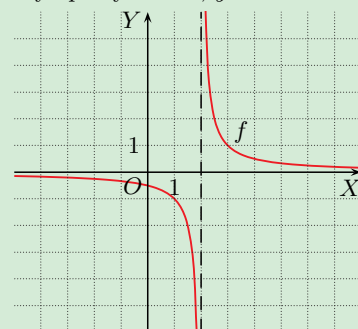
a) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{4}{x+4}$ e) $f(x) = -\frac{2}{x+3}$
b) $f(x) = \frac{3}{x+2}$ d) $f(x) = -\frac{1}{x+1}$ f) $f(x) = -\frac{4}{x+4}$

Ćwiczenie 4

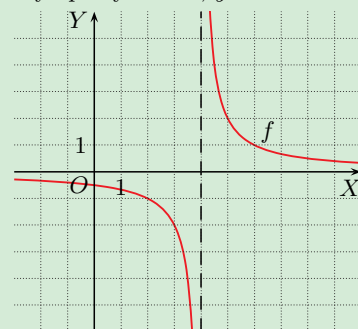
- a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, maleje w $(-\infty; -2)$ i w $(-2; \infty)$, asymptoty: $x = -2$, $y = 0$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, maleje w $(-\infty; -2)$ i w $(-2; \infty)$, asymptoty: $x = -2$, $y = 0$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$, maleje w $(-\infty; -4)$ i w $(-4; \infty)$, asymptoty: $x = -4$, $y = 0$
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, rośnie w $(-\infty; -1)$ i w $(-1; \infty)$, asymptoty: $x = -1$, $y = 0$
e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, rośnie w $(-\infty; -3)$ i w $(-3; \infty)$, asymptoty: $x = -3$, $y = 0$
f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$, rośnie w $(-\infty; -4)$ i w $(-4; \infty)$, asymptoty: $x = -4$, $y = 0$

Ćwiczenie 3

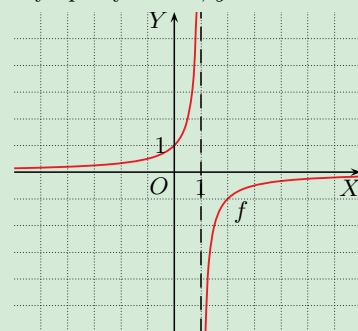
- a) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$,
maleje w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$,
asymptoty: $x = 2$, $y = 0$



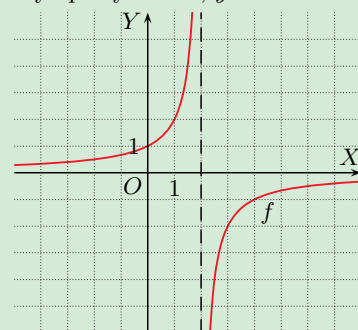
- b) $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$,
maleje w $(-\infty; 4)$ i w $(4; \infty)$,
asymptoty: $x = 4$, $y = 0$



- c) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$,
rośnie w $(-\infty; 1)$ i w $(1; \infty)$,
asymptoty: $x = 1$, $y = 0$

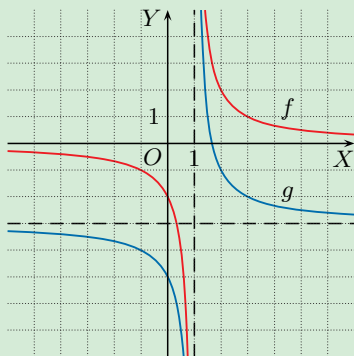


- d) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$,
rośnie w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$,
asymptoty: $x = 2$, $y = 0$

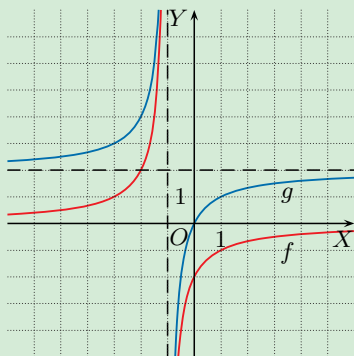


Ćwiczenie 5

- a) $D_f = D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$,
 $f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
 $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$,
 asymptoty wykresu funkcji f :
 $x = 1, y = 0$,
 asymptoty wykresu funkcji g :
 $x = 1, y = -3$



- b) $D_f = D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
 $f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
 $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$,
 asymptoty wykresu funkcji f :
 $x = -1, y = 0$,
 asymptoty wykresu funkcji g :
 $x = -1, y = 2$



Przykład 4

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{2}{x-3}$, a następnie wykres funkcji:

$$g(x) = \frac{2}{x-3} + 2$$

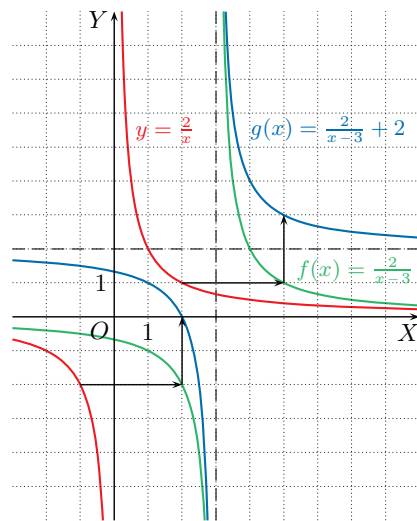
Podaj ich dziedziny i zbiory wartości oraz równania asymptot ich wykresów.

Wykres funkcji $f(x) = \frac{2}{x-3}$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $y = \frac{2}{x}$ o 3 jednostki w prawo (rysunek obok).

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, a zbiorem wartości $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Asymptotą pionową jej wykresu jest prosta $x = 3$, a asymptotą poziomą – prosta $y = 0$.

Wykres funkcji $g(x) = \frac{2}{x-3} + 2$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji f o 2 jednostki w górę.

Dziedziną funkcji g jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, a zbiorem wartości $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Asymptotą pionową jej wykresu jest prosta $x = 3$, a asymptotą poziomą – prosta $y = 2$.



Ćwiczenie 5

Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji g . Podaj ich dziedziny i zbiory wartości oraz równania asymptot ich wykresów.

- a) $f(x) = \frac{2}{x-1}$, $g(x) = \frac{2}{x-1} - 3$ b) $f(x) = -\frac{2}{x+1}$, $g(x) = -\frac{2}{x+1} + 2$

Zadania

1. Wykres funkcji g otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji:

- a) $f(x) = \frac{2}{x}$ o 2 jednostki w górę, b) $f(x) = -\frac{4}{x}$ o 2 jednostki w dół.

Naszkicuj wykresy funkcji f i g . Podaj wzór funkcji g , jej dziedzinę, zbiór wartości i równania asymptot jej wykresu.

2. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj zbiór wartości tej funkcji oraz równania asymptot jej wykresu.

- a) $f(x) = \frac{2}{x} - 1$ c) $f(x) = 1 + \frac{4}{x}$ e) $f(x) = \frac{6}{x} - 3$
 b) $f(x) = \frac{3}{x} - 2$ d) $f(x) = 3 - \frac{2}{x}$ f) $f(x) = -\frac{4}{x} + 1$

3. Sprawdź, czy punkt P należy do wykresu funkcji f .

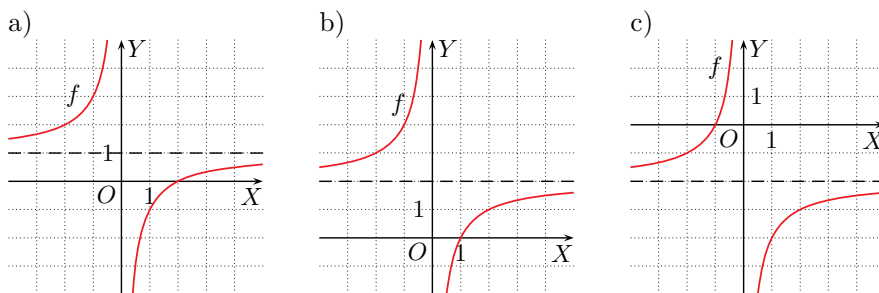
- a) $f(x) = \frac{6}{x-4}$, $P(2, -4)$ b) $f(x) = \frac{-2}{x+4}$, $P(-6, -1)$

Odpowiedzi do zadań

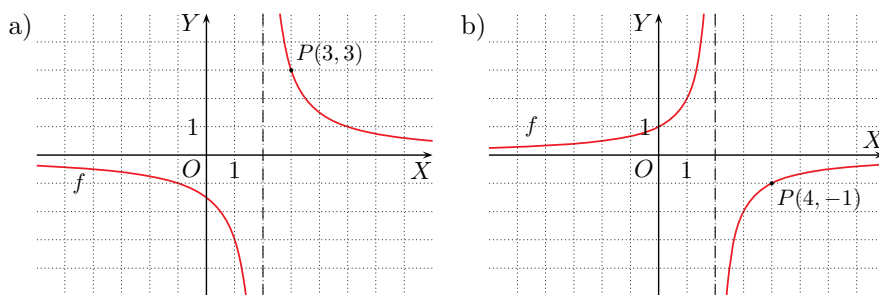
1. a) $g(x) = \frac{2}{x} + 2$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, asymptoty: $x = 0$, $y = 2$
 b) $g(x) = -\frac{4}{x} - 2$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, asymptoty: $x = 0$, $y = -2$
2. a) $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, asymptoty: $x = 0$, $y = -1$
 b) $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, asymptoty: $x = 0$, $y = -2$
 c) $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, asymptoty: $x = 0$, $y = 1$
 d) $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, asymptoty: $x = 0$, $y = 3$
 e) $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, asymptoty: $x = 0$, $y = -3$
 f) $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, asymptoty: $x = 0$, $y = 1$
3. a) $f(2) = -3$, nie należy
 b) $f(-6) = 1$, nie należy

4. Wykres funkcji g otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji:
- a) $f(x) = \frac{3}{x}$ o 1 jednostkę w lewo, c) $f(x) = -\frac{2}{x}$ o 3 jednostki w prawo,
b) $f(x) = \frac{4}{x}$ o 3 jednostki w lewo, d) $f(x) = -\frac{1}{x}$ o 2 jednostki w prawo.
- Naszkicuj wykresy funkcji f i g . Podaj wzór funkcji g , jej dziedzinę, zbiór wartości i równania asymptot jej wykresu.

5. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = -\frac{2}{x} + a$. Podaj wartość współczynnika a oraz wszystkie punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji f .



6. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x-2}$. Podaj wartość współczynnika a i oblicz $f(\frac{1}{2})$ oraz $f(-4)$.



7. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji g . Podaj równania asymptot tych wykresów.

a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $g(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ b) $f(x) = \frac{4}{x+1}$, $g(x) = \frac{4}{x+1} - 2$

8. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj liczbę punktów o obu współrzędnych całkowitych należących do tego wykresu.

a) $f(x) = \frac{4}{x-1} - 3$ c) $f(x) = \frac{6}{x-2} + 1$ e) $f(x) = -\frac{1}{x+2} - 2$
b) $f(x) = \frac{2}{x+3} - 1$ d) $f(x) = \frac{3}{x+1} + 3$ f) $f(x) = \frac{-2}{x-4} + 2$

8. Do wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x+b} + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{Z}$, należy tyle punktów o obu współrzędnych całkowitych, ile dzielników całkowitych ma liczba a .

- a) 6 punktów: $(-3, -4)$, $(-1, -5)$, $(0, -7)$, $(2, 1)$, $(3, -1)$, $(5, -2)$
b) 4 punkty: $(-5, -2)$, $(-4, -3)$, $(-2, 1)$, $(-1, 0)$
c) 8 punktów: $(-4, 0)$, $(-1, -1)$, $(0, -2)$, $(1, -5)$, $(3, 7)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(8, 2)$
d) 4 punkty: $(-4, 2)$, $(-2, 0)$, $(0, 6)$, $(2, 4)$
e) 2 punkty: $(-3, -1)$, $(-1, -3)$
f) 4 punkty: $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(5, 0)$, $(6, 1)$

4. a) $g(x) = \frac{3}{x+1}$,
 $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
 $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
asymptoty: $x = -1$, $y = 0$

b) $g(x) = \frac{4}{x+3}$,
 $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$,
 $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
asymptoty: $x = -3$, $y = 0$

c) $g(x) = -\frac{2}{x-3}$,
 $D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$,
 $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
asymptoty: $x = 3$, $y = 0$

d) $g(x) = -\frac{1}{x-2}$,
 $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$,
 $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
asymptoty: $x = 2$, $y = 0$

5. a) $a = 1$, $(-2, 2)$, $(-1, 3)$,
 $(1, -1)$, $(2, 0)$

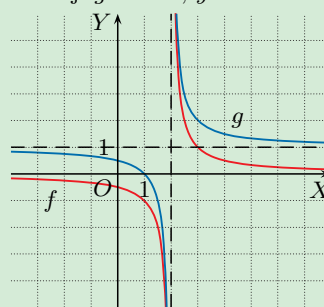
b) $a = 2$, $(-2, 3)$, $(-1, 4)$,
 $(1, 0)$, $(2, 1)$

c) $a = -2$, $(-2, -1)$, $(-1, 0)$,
 $(1, -4)$, $(2, -3)$

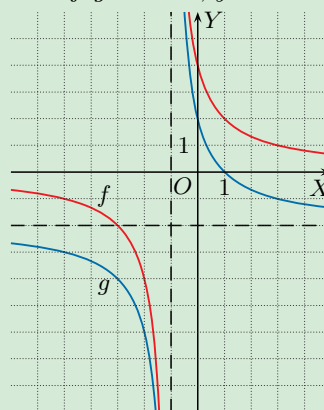
6. a) $f(x) = \frac{3}{x-2}$, $f(\frac{1}{2}) = -2$,
 $f(-4) = -\frac{1}{2}$

b) $f(x) = \frac{-2}{x-2}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{3}$,
 $f(-4) = \frac{1}{3}$

7. a) asymptoty wykresu funkcji f : $x = 2$, $y = 0$,
asymptoty wykresu funkcji g : $x = 2$, $y = 1$

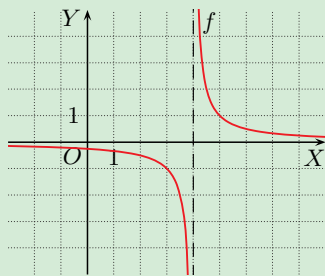


- b) asymptoty wykresu funkcji f : $x = -1$, $y = 0$,
asymptoty wykresu funkcji g : $x = -1$, $y = -2$

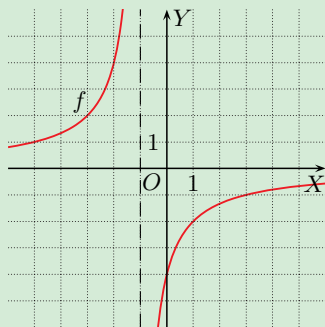


9. A – g, B – k, C – f, D – h

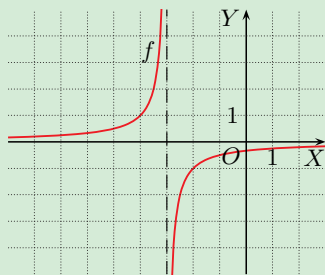
10. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$,
maleje w $(-\infty; 4)$ i w $(4; \infty)$,
asymptoty: $x = 4$, $y = 0$



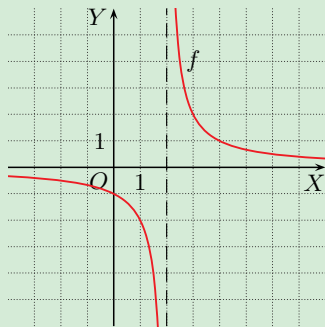
- b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, rośnie
w $(-\infty; -1)$ i w $(-1; \infty)$,
asymptoty: $x = -1$, $y = 0$



- c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, rośnie
w $(-\infty; -3)$ i w $(-3; \infty)$,
asymptoty: $x = -3$, $y = 0$



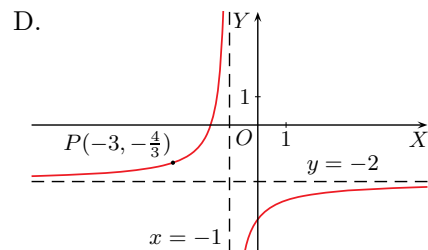
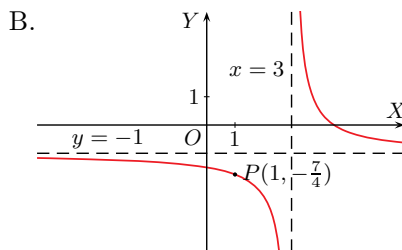
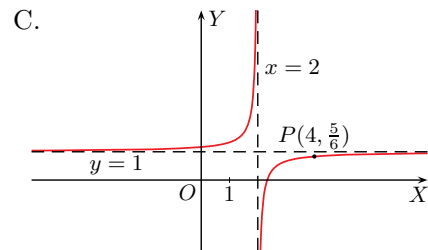
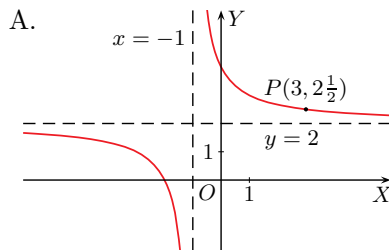
- d) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, maleje
w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$,
asymptoty: $x = 2$, $y = 0$



9. Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy funkcji:

$$f(x) = \frac{-\frac{1}{3}}{x-2} + 1, g(x) = \frac{2}{x+1} + 2, h(x) = \frac{-\frac{4}{3}}{x+1} - 2, k(x) = \frac{\frac{3}{2}}{x-3} - 1$$

Do każdego wykresu dopasuj odpowiedni wzór funkcji.



Sprawdź się

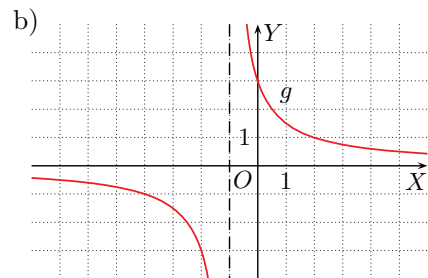
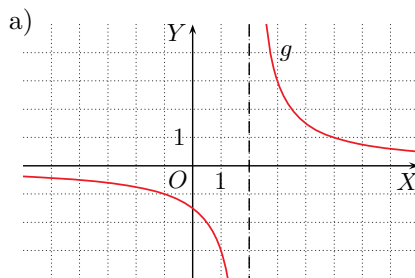
10. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej dziedzinę i przedziały monotoniczności oraz równania asymptot jej wykresu.

a) $f(x) = \frac{1}{x-4}$ b) $f(x) = \frac{-4}{x+1}$ c) $f(x) = \frac{-1}{x+3}$ d) $f(x) = \frac{2}{x-2}$

11. Do wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{x} + q$ należy punkt P . Naszkicuj wykres tej funkcji i podaj jej zbiór wartości.

a) $P(1, 6)$ b) $P(2, -3)$ c) $P(-4, -4)$ d) $P(-\frac{1}{2}, 5)$

12. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji g , który otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{3}{x}$ wzdłuż osi OX . Podaj wzór funkcji g , jej przedziały monotoniczności oraz równania asymptot jej wykresu.



11. a) $f(x) = \frac{4}{x} + 2$, $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
b) $f(x) = \frac{4}{x} - 5$, $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$
c) $f(x) = \frac{4}{x} - 3$, $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
d) $f(x) = \frac{4}{x} + 13$, $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{13\}$

12. a) $g(x) = \frac{3}{x-2}$, maleje w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$, asymptoty: $x = 2$, $y = 0$
b) $g(x) = \frac{3}{x+1}$, maleje w $(-\infty; -1)$ i w $(-1; \infty)$, asymptoty: $x = -1$, $y = 0$

3.3. Wyrażenia wymierne i funkcje wymierne

Wyrażenie wymierne to ułamek, którego licznik i mianownik są wielomianami, np. $\frac{6x+4}{2}$, $\frac{7}{x}$, $\frac{x^2+3}{x-4}$, $\frac{\sqrt{2}x}{x^2-1}$, $\frac{x^2-4}{x^2+1}$.

Dziedziną wyrażenia wymiernego jest zbiór tych wszystkich liczb, dla których wyrażenie ma sens liczbowy. Należy zatem pamiętać, że miejsca zerowe mianownika nie należą do dziedziny wyrażenia wymiernego.

Przykład 1

Podaj dziedzinę wyrażenia $\frac{2x^2-6x+5}{2x+8}$.

$2x+8=0$ dla $x=-4$, więc dziedziną wyrażenia jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

Ćwiczenie 1

Podaj dziedzinę wyrażenia.

- a) $-\frac{3}{4x}$ b) $\frac{\sqrt{6}x+2}{x-5}$ c) $\frac{x-3}{2x+6}$ d) $\frac{-x^2+9}{-2x+7}$

Ćwiczenie 2

Podaj dziedzinę wyrażenia. Oblicz jego wartości dla $x=1$ oraz $x=-1$.

- a) $\frac{x+1}{x}$ b) $\frac{2x+4}{x-3}$ c) $\frac{4x}{x^2-9}$ d) $\frac{x+3}{x^2+\sqrt{3}}$

Aby uprościć wyrażenie wymierne, rozkładamy wielomiany w liczniku i mianowniku na czynniki. Należy jednak pamiętać, że dziedziną wyrażenia uproszczonego jest dziedzina wyrażenia przed uproszczeniem.

Przykład 2

Podaj dziedzinę wyrażenia $\frac{x^3-2x^2}{x^2-4}$, a następnie je uprość.

Dziedziną wyrażenia jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

$$\frac{x^3-2x^2}{x^2-4} = \frac{x^2(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2}{x+2}$$

Ćwiczenie 3

Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość.

- a) $\frac{x^2-9}{3-x}$ c) $\frac{2x^2+10x}{x^2-25}$ e) $\frac{x^2-1}{x^4-x^3}$ g) $\frac{x^3-3x^2}{x^2-6x+9}$
b) $\frac{3x^2-6x}{x-2}$ d) $\frac{x^3+4x}{x^2+4}$ f) $\frac{4-x^2}{x^2-2x}$ h) $\frac{x^2+4x+4}{x^4-16}$
i) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $\frac{x+2}{(x-2)(x^2+4)}$

Uczeń:

- wyznacza dziedzinę wyrażenia wymiernego,
- oblicza wartość wyrażenia wymiernego dla danej wartości zmiennej,
- upraszcza wyrażenia wymierne,
- wyznacza dziedzinę funkcji wymiernej,
- określa dziedzinę funkcji, w której wzorze występuje ułamek lub pierwiastek kwadratowy.

Ćwiczenie 1

- a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{7}{2}\}$

Ćwiczenie 2

- a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
dla $x=1$: 2, dla $x=-1$: 0
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$,
dla $x=1$: -3, dla $x=-1$: $-\frac{1}{2}$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$,
dla $x=1$: $-\frac{1}{2}$, dla $x=-1$: $\frac{1}{2}$
d) $D = \mathbb{R}$, dla $x=1$: $2(\sqrt{3}-1)$,
dla $x=-1$: $\sqrt{3}-1$

Ćwiczenie 3

- a) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $-x-3$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $3x$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$, $\frac{2x}{x-5}$
d) $D = \mathbb{R}$, x
e) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $\frac{x+1}{x^3}$
f) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, $-\frac{x+2}{x}$
g) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $\frac{x^2}{x-3}$
h) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $\frac{x+2}{(x-2)(x^2+4)}$

Multibook

- Wykres funkcji wymiernej
- Kreator wykresów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.3

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Dziedzina naturalną funkcji nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wzór funkcji ma sens liczbowy.

Jeżeli mamy wyznaczyć dziedzinę funkcji i nie są podane dodatkowe warunki, które ma ona spełniać, to zadanie to polega właśnie na wyznaczeniu dziedziny naturalnej tej funkcji.

Definicja

Funkcją wymierną nazywamy funkcję postaci $f(x) = \frac{v(x)}{w(x)}$, gdzie v i w są wielomianami (w nie jest wielomianem zerowym). Dziedziną takiej funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x , dla których $w(x) \neq 0$.

Przykład 3

a) Funkcja dana wzorem $f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 4}{x}$ jest funkcją wymierną. Jej dziedziną jest zbiór $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Funkcja dana wzorem $g(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 - 9}$ jest funkcją wymierną. Jej dziedziną jest zbiór $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

Ćwiczenie 4

- a) $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$, $f(0) = 2$,
 $f(-1) = \frac{6}{5}$, $f(1) = 2$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $f(0) = -1$,
 $f(-1) = f(1) = -\frac{5}{3}$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(0) = 1$,
 $f(-1) = \frac{1}{3}$, $f(1) = 5$

Określ dziedzinę funkcji f . Oblicz $f(0)$, $f(-1)$ i $f(1)$.

a) $f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x - 4}$ b) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$ c) $f(x) = \frac{x + 4}{x^2 - 4x + 4}$

Przykład 4

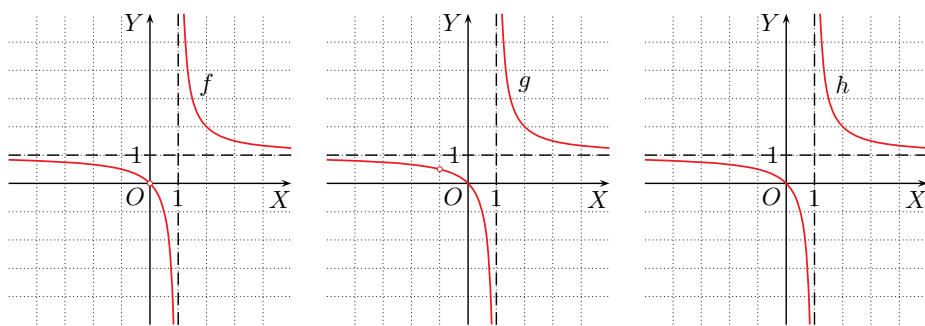
Określ dziedziny funkcji f i g , a następnie uprość ich wzory.

$f(x) = \frac{x^2}{x(x-1)}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, wzór po uproszczeniu: $f(x) = \frac{x}{x-1}$

$g(x) = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, wzór po uproszczeniu: $g(x) = \frac{x}{x-1}$

$h(x) = \frac{x(x-1)}{(x-1)^2}$, $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, wzór po uproszczeniu: $h(x) = \frac{x}{x-1}$

Zwróć uwagę na to, że f , g i h to różne funkcje, gdyż mają różne dziedziny.



Ćwiczenie 5

Określ dziedzinę funkcji f i uprość jej wzór.

a) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x}$ b) $f(x) = \frac{x^2+4x}{x+4}$ c) $f(x) = \frac{x^3-4x}{x}$ d) $f(x) = \frac{4x-4}{x^2-x}$

Zadania

1. Czy liczba 2 należy do dziedziny wyrażenia?

a) $\frac{x-2}{x+2}$ b) $\frac{2}{4x-8}$ c) $\frac{2x-4}{x^2-4}$ d) $\frac{x^2-2x}{x^2+4}$

2. Podaj dziedzinę wyrażenia.

a) $\frac{-3x^2+1}{x-1}$ c) $\frac{5x-\sqrt{19}}{3x+9}$ e) $\frac{6x+8}{x^2-16}$ g) $\frac{3x^2-12}{9x^2-1}$
b) $\frac{3x^2-6x}{2x-6}$ d) $\frac{5x^4-2x}{2x+5}$ f) $\frac{x^2+3x}{x^2-2}$ h) $\frac{x^3-\sqrt{3}}{4x^2-9}$

3. Rozłóż mianownik wyrażenia na czynniki i podaj dziedzinę tego wyrażenia.

a) $\frac{19x^4+8x^3-6}{x^2-3x}$ d) $\frac{4x^3+2x+1}{2x^2-7x+6}$ g) $\frac{-x^3+2x-7}{x^3+9x}$
b) $\frac{6x^2-5x+1}{2x^2+5x}$ e) $\frac{8x^3+4x+1}{x^3-2x^2}$ h) $\frac{5x^3-x^2+2}{x^3-9x}$
c) $\frac{6x-9}{x^2+5x+6}$ f) $\frac{2x^3-4x^2-x}{x^3+9x^2}$ i) $\frac{9x^2-6x+1}{x^3-6x^2+9x}$

4. Podaj dziedzinę funkcji f . Oblicz $f(-3)$, $f(1)$ i $f(3)$.

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2-4}$ e) $f(x) = \frac{x^2+21}{x^2-3}$
b) $f(x) = \frac{x^2-3x}{3x-1}$ d) $f(x) = \frac{6x}{x^2+9}$ f) $f(x) = \frac{x^3+3x^2}{x^2-4}$

Sprawdź się

5. Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość. Oblicz jego wartości dla $x = \frac{1}{2}$ oraz dla $x = -\frac{3}{2}$.

a) $\frac{72}{18x}$ c) $\frac{4x+8}{x+2}$ e) $\frac{x^2+x}{2x}$ g) $\frac{x^2-9}{x-3}$
b) $\frac{16x}{2x^2}$ d) $\frac{x-5}{2x-10}$ f) $\frac{x^2-\frac{1}{2}x}{x}$ h) $\frac{2x+6}{x^2-9}$

6. Podaj dziedzinę funkcji f , a następnie uprość jej wzór.

a) $f(x) = \frac{x^2+4x}{x^2-16}$ d) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-6x+9}$ g) $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2-1}$
b) $f(x) = \frac{4x-2}{4x^2-1}$ e) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^3-4x}$ h) $f(x) = \frac{x^3-9x}{x^2+3x}$
c) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$ f) $f(x) = \frac{2x^2+6x}{x^3-9x}$ i) $f(x) = \frac{x^2-8x+16}{x^2-16}$

5. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\frac{4}{x}$, dla $x = \frac{1}{2}$: 8, dla $x = -\frac{3}{2}$: $-2\frac{2}{3}$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\frac{8}{x}$, dla $x = \frac{1}{2}$: 16, dla $x = -\frac{3}{2}$: $-\frac{16}{3}$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, 4, dla $x = \frac{1}{2}$ i $x = -\frac{3}{2}$: 4
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$, $\frac{1}{2}$, dla $x = \frac{1}{2}$ i $x = -\frac{3}{2}$: $\frac{1}{2}$
e) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\frac{x+1}{2}$, dla $x = \frac{1}{2}$: $\frac{3}{4}$, dla $x = -\frac{3}{2}$: $-\frac{1}{4}$
f) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x - \frac{1}{2}$, dla $x = \frac{1}{2}$: 0, dla $x = -\frac{3}{2}$: -2
g) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $x+3$, dla $x = \frac{1}{2}$: $3\frac{1}{2}$, dla $x = -\frac{3}{2}$: $1\frac{1}{2}$
h) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, $\frac{2}{x-3}$, dla $x = \frac{1}{2}$: $-\frac{4}{5}$, dla $x = -\frac{3}{2}$: $-\frac{4}{9}$

6. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$, $f(x) = \frac{x}{x-4}$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$, $f(x) = \frac{2}{2x+1}$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$
e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, $f(x) = \frac{1}{x-2}$
f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$, $f(x) = \frac{2}{x-3}$
g) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$
h) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$, $f(x) = x-3$
i) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$, $f(x) = \frac{x-4}{x+4}$

Ćwiczenie 5

- a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = x+2$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$, $f(x) = x$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = x^2-4$
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $f(x) = \frac{4}{x}$

Odpowiedzi do zadań

1. a), d) tak b), c) nie

2. a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

c) $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$

d) $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}\}$

e) $\mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$

f) $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

g) $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$

h) $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$

3. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}, 0\}$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}, 2\}$

e) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-9, 0\}$

g) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

h) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$

i) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$

4. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$,

$f(-3) = -8$, $f(1) = 0$,

$f(3) = \frac{8}{5}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$, $f(-3) = -\frac{9}{5}$,

$f(1) = -1$, $f(3) = 0$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$,

$f(-3) = \frac{3}{5}$, $f(1) = -1$,

$f(3) = 3$

d) $D = \mathbb{R}$, $f(-3) = -1$,

$f(1) = \frac{3}{5}$, $f(3) = 1$

e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$,

$f(-3) = 5$, $f(1) = -11$,

$f(3) = 5$

f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$,

$f(-3) = 0$, $f(1) = -\frac{4}{3}$,

$f(3) = \frac{54}{5}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) 1 b) $\frac{8}{9}$
c) $\frac{4}{15}$ d) $4\frac{4}{5}$
e) -8 f) 36
g) $-1\frac{1}{4}$ h) $-1\frac{1}{2}$
2. a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{2}{25}$
c) $\frac{9}{20}$ d) $\frac{7}{3}$
3. a) 2
b) $4\frac{7}{12}$
c) $\frac{25}{36}$
d) $-\frac{1}{18}$
e) $\frac{59}{75}$
f) $-\frac{1}{60}$
4. a) $m = -\frac{1}{6}$
b) $m = \frac{7}{20}$
c) $m = -\frac{11}{24}$
d) $m = -1$
e) $m = 1\frac{1}{8}$
f) $m = 14\frac{4}{5}$
5. a) $p = \frac{54}{5} = 10\frac{4}{5} \approx 11$
b) $p = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2} \approx 11$
c) $p = -147$
d) $p = \frac{14}{15} \approx 1$
6. a) $p = 12; 11$
b) $p = 16,5; 16$
c) $p = \frac{1}{9}; 0$
d) $p = 1,9; 1$
e) $p = 3,6; 3$
f) $p = 4\frac{1}{16}; 4$
7. a) $x = \frac{19}{15}$
b) $x = \frac{5}{18}$
c) $x = \frac{17}{10}$
d) $x = \frac{7}{3}$
e) $x = -1$
f) $x = \frac{1}{2}$

Przypomnij sobie

Działania na liczbach wymiernych

1. Oblicz.
a) $\frac{36}{32} \cdot \frac{24}{27}$ c) $\frac{12}{25} : \frac{18}{10}$ e) $3\frac{3}{5} \cdot (-2\frac{2}{9})$ g) $(-1\frac{3}{4}) : 1\frac{2}{5}$
b) $\frac{72}{78} \cdot \frac{52}{54}$ d) $\frac{48}{14} : \frac{40}{56}$ f) $(-5\frac{1}{3}) \cdot (-6\frac{3}{4})$ h) $6\frac{2}{3} : (-4\frac{4}{9})$
2. Oblicz.
a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{18} \cdot \frac{10}{21}$ b) $\frac{3}{16} \cdot \frac{32}{35} \cdot \frac{7}{15}$ c) $\frac{33}{8} \cdot \frac{22}{45} \cdot \frac{27}{121}$ d) $\frac{25}{27} \cdot \frac{49}{20} \cdot \frac{36}{35}$
3. Oblicz.
a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$ c) $\frac{5}{12} + \frac{5}{18}$ e) $\frac{3}{5} + \frac{4}{15} - \frac{2}{25}$
b) $1\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2\frac{3}{4}$ d) $\frac{11}{45} - \frac{9}{30}$ f) $\frac{5}{12} - \frac{2}{15} - \frac{3}{10}$
4. Dla jakiej wartości parametru m wartość wyrażenia jest równa 0?
a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + m$ c) $1\frac{1}{3} - 2\frac{1}{4} - 2m$ e) $1\frac{1}{2} - \frac{2}{3}m - 0,75$
b) $\frac{2}{5} - \frac{3}{4} + m$ d) $3\frac{1}{2} - 1\frac{1}{6} + \frac{7}{3}m$ f) $0,125m - \frac{3}{5} - 1\frac{1}{4}$
5. Zaokrąglij liczbę p do liczby całkowitej.
a) $p = (\frac{6}{5} - 0,75) : (\frac{1}{6} - 0,125)$ c) $p = (8 - (-2\frac{1}{2})) : (1\frac{4}{5} : \frac{14}{15} - 2)$
b) $p = (2\frac{1}{6} - \frac{11}{4}) : (2\frac{1}{9} - \frac{13}{6})$ d) $p = \frac{1}{3}(2\frac{1}{3} - 3\frac{1}{2}) : (\frac{5}{12} - \frac{5}{6})$
6. Podaj największą liczbę całkowitą mniejszą od liczby p .
a) $p = 4\frac{2}{5} : (\frac{7}{15} - \frac{1}{10})$ c) $p = \frac{1\frac{1}{2} - \frac{5}{3} + \frac{1}{4}}{1\frac{1}{6} - \frac{5}{12}}$ e) $p = \frac{\frac{4}{5} + 2\frac{1}{10} - \frac{1}{2}}{0,6 - \frac{2}{15} + \frac{1}{5}}$
b) $p = 1\frac{3}{8} : (\frac{5}{4} - \frac{7}{6})$ d) $p = \frac{1\frac{1}{4} - 2\frac{1}{8} - 1,5}{-\frac{1}{12} - 1\frac{1}{6}}$ f) $p = \frac{3\frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{6} - \frac{5}{18} + 1}$
7. Rozwiąż równanie.
a) $x - \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$ c) $1\frac{1}{5} + x = 2\frac{9}{10}$ e) $\frac{1}{2} - \frac{1}{18}x = \frac{5}{9}$
b) $x + \frac{5}{9} = \frac{5}{6}$ d) $2\frac{3}{7} - x = \frac{2}{21}$ f) $1\frac{3}{4} + 1\frac{5}{6}x = 2\frac{2}{3}$
8. Oblicz sumę, różnicę, iloczyn i iloraz liczb x i y spełniających warunki:
 $(\frac{3}{4} - \frac{5}{6})x = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$ i $(\frac{7}{5} - \frac{3}{2})(\frac{1}{2} - y) = -\frac{8}{5}$
9. a) Suma dwóch liczb jest równa 1530 i wiadomo, że pierwsza z nich stanowi $\frac{13}{17}$ drugiej. Znajdź te liczby.
b) Suma trzech liczb jest równa 134 i wiadomo, że pierwsza z nich stanowi $\frac{15}{16}$ drugiej, a druga $\frac{4}{9}$ trzeciej. Znajdź te liczby.

8. $x = 2, y = -\frac{3}{4}, x + y = \frac{5}{4}, x - y = \frac{11}{4}, xy = -\frac{3}{2}, \frac{x}{y} = -\frac{8}{3}$

9. a) Niech $x, \frac{13}{17}x$ - szukane liczby.

$$x + \frac{13}{17}x = 1530$$

Szukane liczby to: 663 i 867.

b) Niech $\frac{15}{16} \cdot \frac{4}{9}x, \frac{4}{9}x, x$ - szukane liczby.

$$\frac{15}{16} \cdot \frac{4}{9}x + \frac{15}{16} \cdot \frac{4}{9}x + x = 134$$

Szukane liczby to: 30, 32 i 72.

3.4. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

Przykład 1

Wykonaj mnożenie $\frac{4x^2-1}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{2x-1}$.

Zakładamy, że $x^2-9 \neq 0$ i $2x-1 \neq 0$, zatem $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, \frac{1}{2}, 3\}$.

$$\frac{4x^2-1}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{2x-1} = \frac{1(2x-1)(2x+1)(x-3)^1}{1(x-3)(x+3)(2x-1)^1} = \frac{2x+1}{x+3}$$

Ćwiczenie 1

Wykonaj mnożenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{4x-12}{x+2} \cdot \frac{2x+4}{2x-6}$

c) $\frac{-x^2+5x}{2x+1} \cdot \frac{4x^2-1}{x^2}$

e) $\frac{(x-2)^2}{x^2+4x+4} \cdot \frac{2+x}{x^2-4}$

b) $\frac{3-x}{x} \cdot \frac{2x+6}{x^2-9}$

d) $\frac{x^2-9}{x^2-4} \cdot \frac{0,5x+1}{9-3x}$

f) $\frac{3x^2-x^3}{2x-6} \cdot \frac{x^2+2x+1}{x^4-x^2}$

Przykład 2

Wykonaj dzielenie $\frac{2}{x+4} : \frac{10}{3x+12}$.

Zakładamy, że $x+4 \neq 0$ i $3x+12 \neq 0$, zatem $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

$$\frac{2}{x+4} : \frac{10}{3x+12} = \frac{2^1}{x+4} \cdot \frac{3(x+4)^1}{10 \cdot 5} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

dla $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$

Ćwiczenie 2

Wykonaj dzielenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{6}{x-2} : \frac{3}{4x-8}$

c) $\frac{-6}{3-2x} : \frac{9}{4x-6}$

e) $\frac{7}{5x+35} : \frac{-35}{x+7}$

b) $\frac{-5}{2x+1} : \frac{10}{6x+3}$

d) $\frac{16}{3x+1} : \frac{12}{9x+3}$

f) $\frac{25}{6x+9} : \frac{15}{4x+6}$

Przykład 3

Wykonaj dzielenie $\frac{x^2+2x}{x^2-1} : \frac{x+2}{x^2-x}$.

Zakładamy, że $x^2-1 \neq 0$, $x+2 \neq 0$ i $x^2-x \neq 0$, zatem $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1\}$.

$$\frac{x^2+2x}{x^2-1} : \frac{x+2}{x^2-x} = \frac{x^2+2x}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-x}{x+2} = \frac{x(x+2)^1}{1(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x(x-1)^1}{x+2} = \frac{x^2}{x+1}$$

Ćwiczenie 3

Wykonaj dzielenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{2x-6}{x} : \frac{x-3}{4x^2}$

b) $\frac{x^2-4}{x+1} : \frac{x+2}{x^2-1}$

c) $\frac{2x}{x^2-9} : \frac{6x^2}{x^2-6x+9}$

Ćwiczenie 3

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}, \frac{2x-6}{x} : \frac{x-3}{4x^2} = \frac{2(x-3)}{x} \cdot \frac{4x^2}{x-3} = 8x$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}, \frac{x^2-4}{x+1} : \frac{x+2}{x^2-1} = \frac{(x-2)(x+2)}{x+1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{x+2} = (x-2)(x-1)$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}, \frac{2x}{x^2-9} : \frac{6x^2}{x^2-6x+9} = \frac{2x}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{(x-3)^2}{6x^2} = \frac{x-3}{3x(x+3)}$

Uczeń:

- wyznacza dziedziny iloczynu oraz ilorazu wyrażeń wymiernych,
- mnoży wyrażenia wymierne i podaje ich iloczyn w najprostszej postaci,
- dzieli wyrażenia wymierne i podaje ich iloraz w najprostszej postaci.

Komentarz

Pojęcia mnożenia i dzielenia wyrażeń wymiernych warto wyjaśnić uczniom na przykładach i poprzez opis słowny. Podczas wykonywania działań uczniowie często zapominają o dziedzinie. Dlatego warto przypilnować ich, aby zaczęli od wyznaczenia dziedziny. Przy dzieleniu wyrażeń wymiernych uczniowie często zapominają o założeniu, że licznik drugiego wyrażenia musi być różny od zera.

Ćwiczenie 1

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}, 4$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}, -\frac{2}{x}$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}, -\frac{(2x-1)(x-5)}{x}$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 3\}, -\frac{x+3}{6(x-2)}$

e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, \frac{x-2}{(x+2)^2}$

f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1, 3\}, -\frac{x+1}{2(x-1)}$

Ćwiczenie 2

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}, 8$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}, -\frac{3}{2}$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}, \frac{4}{3}$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}, 4$

e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-7\}, -\frac{1}{25}$

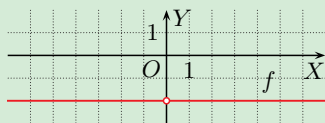
f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}, \frac{10}{9}$

Ćwiczenie 4

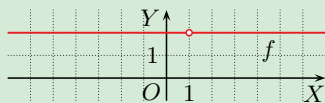
- a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 5\}, \frac{x+5}{x+1}$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}, \frac{(x+1)(x-2)}{x+2}$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, -3, 0, 3\}, \frac{x+3}{x(x-3)}$

Ćwiczenie 5

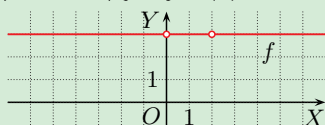
- a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) = -2$



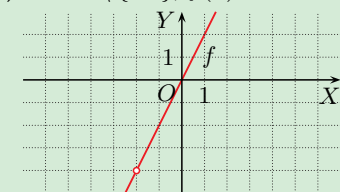
- b) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) = 2$



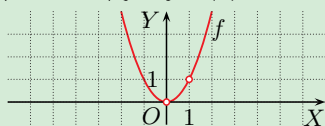
- c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}, f(x) = 3$



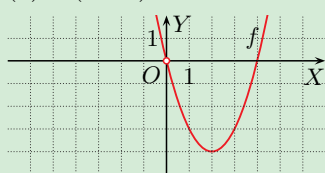
- d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}, f(x) = 2x$



- e) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, f(x) = x^2$



- f) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) = (x-2)^2 - 4$



Odpowiedzi do zadań

1. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, 2x - 4$
 b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}, \frac{8}{x+4}$
 c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}, \frac{x}{x+3}$
 d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-6, 0\}, \frac{2x-12}{x}$
 e) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}, 3x + \frac{3}{2}$
 f) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\}, \frac{4}{3x-2}$

Ćwiczenie 4

Wykonaj dzielenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

- a) $\frac{x^2-25}{x^2+2x+1} : \frac{x-5}{x+1}$ b) $\frac{x^2-4}{x-1} : \frac{x^2+4x+4}{x^2-1}$ c) $\frac{x+4}{x^2-6x+9} : \frac{x^2+4x}{x^2-9}$

Przykład 4

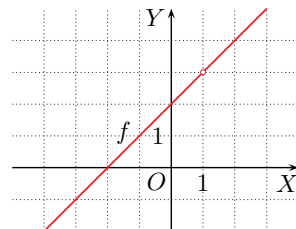
Podaj dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{2x+4}{x-1}$ i naskicuj jej wykres.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Upraszczamy wzór funkcji f :

$$f(x) = \frac{2x+4}{x-1} : \frac{2}{x-1} = \frac{1 \cdot 2(x+2)}{1 \cdot x-1} \cdot \frac{x-1}{2 \cdot 1} = x+2$$

Wykresem funkcji f jest prosta bez punktu o współrzędnych (1, 3).



Ćwiczenie 5

Wyznacz dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres.

- a) $f(x) = \frac{-2}{\frac{1}{x}}$ b) $f(x) = \frac{3x-6}{\frac{x}{x-2}}$ c) $f(x) = \frac{\frac{x^2-x}{x-1}}{\frac{1}{x}}$
 d) $f(x) = \frac{\frac{6}{x-1}}{\frac{3}{x-1}}$ e) $f(x) = \frac{\frac{4x}{x+2}}{\frac{x+2}{2}}$ f) $f(x) = \frac{\frac{2x-8}{x}}{\frac{2}{x^2}}$

Zadania

1. Wykonaj mnożenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

- a) $\frac{14}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{7}$ b) $\frac{24}{x^2-16} \cdot \frac{x-4}{3}$ c) $\frac{x^2}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{x}$ d) $\frac{2x}{x+6} \cdot \frac{x^2-36}{x^2}$ e) $\frac{4x^2-1}{4} \cdot \frac{6}{2x-1}$ f) $\frac{3x+2}{3} \cdot \frac{12}{9x^2-4}$

2. Dane są wyrażenia A i B . Wyznacz dziedzinę wyrażeń A , B oraz $A \cdot B$.

- a) $A = \frac{x^2-2}{x^2-9x}, B = \frac{x^2+4x}{x^2+2x}$ b) $A = \frac{6x-5}{x^3-4x}, B = \frac{5x-6}{x^3-4x^2+4x}$
 c) $A = \frac{4x^2-1}{x^2-4}, B = \frac{9x-x^3}{4x-x^3}$ d) $A = \frac{5x^2-2x+4}{x^2-2x+1}, B = \frac{3x^2-2x+5}{x^2+x-2}$

3. Wykonaj mnożenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

- a) $\frac{x-2}{x^2} \cdot \frac{3x}{2x-4}$ b) $\frac{3x+4,5}{x-1} \cdot \frac{1-x}{x+1,5}$ c) $\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x^3+x^2}{x^4-1}$ d) $\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-1} \cdot \frac{(x+1)^2}{2x-1}$ e) $\frac{x^2-16}{6-3x} \cdot \frac{x^2}{4x+8}$ f) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-4x+4} \cdot \frac{4-x^2}{x^2-1}$ g) $\frac{x^2-4}{3-x} \cdot \frac{3x-9}{x^4}$ h) $\frac{x^2-4}{x^3+3x^2} \cdot \frac{x^4-9x^2}{x^2+2x}$ i) $\frac{x^2+6x+9}{x^2+3x} \cdot \frac{x^2}{x^2-9}$

2. a) $D_A = \mathbb{R} \setminus \{0, 9\}, D_B = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}, D_{A \cdot B} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 9\}$
 b) $D_A = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, D_B = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}, D_{A \cdot B} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$
 c) $D_A = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}, D_B = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}, D_{A \cdot B} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$
 d) $D_A = \mathbb{R} \setminus \{1\}, D_B = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}, D_{A \cdot B} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

3. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}, \frac{3}{2x}$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, 1\}, -3$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}, -\frac{3}{x^2}$
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}$
 e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, \frac{1}{2}, 1\}, \frac{x+1}{2(x-1)}$
 f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0\}, \frac{(x-2)(x-3)}{x}$
 g) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, -\frac{x^2}{3}$
 h) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}, -\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$
 i) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}, \frac{x}{x-3}$

4. Wykonaj mnożenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{x^2+6x+9}{2x^2-8} \cdot \frac{x^3-2x^2}{x^2+3x}$ b) $\frac{x^2-16}{x+1} \cdot \frac{1-x^2}{x+4}$ c) $\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1} \cdot \frac{x+2}{x^2-1}$

5. Wykonaj dzielenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{8}{2x-9} : \frac{7}{4x-18}$ c) $\frac{18}{2x-6} : \frac{-3}{4x-12}$ e) $\frac{9x}{2x+4} : \frac{6}{x+2}$
 b) $\frac{-8}{3x-2} : \frac{2}{9x-6}$ d) $\frac{-6}{3-2x} : \frac{9}{4x-6}$ f) $\frac{10x^2}{x-5} : \frac{5}{10-2x}$

6. Wykonaj dzielenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{3x-3}{4x} : \frac{x-1}{6x}$ c) $\frac{10x+2}{x^2} : \frac{5x+1}{x}$ e) $\frac{x^3}{6x-2} : \frac{2x}{1-3x}$
 b) $\frac{2x+4}{x-3} : \frac{3-x}{x+2}$ d) $\frac{6-4x}{(1-x)^2} : \frac{2x-3}{x-1}$ f) $\frac{x+1}{(x+2)^2} : \frac{x^2-1}{x^2-4}$

7. Uprość wyrażenie.

a) $\frac{\frac{x^2+2x+1}{x-3}}{\frac{x+1}{x^2-9}}$ b) $\frac{\frac{x^2+8x+16}{6x-9}}{\frac{x^3-16x}{6x-4x^2}}$ c) $\frac{\frac{4x^2-1}{x^2+4x+4}}{\frac{4x^2-4x+1}{x^2-4}}$

8. Pole prostokąta wyraża się wzorem $P = \frac{6}{x^2-4}$, a długość jednego z jego boków jest równa $\frac{2}{x-2}$, gdzie $x > 2$. Wyznacz długość drugiego boku tego prostokąta.

9. Dany jest prostokąt o bokach a , b i polu P . Przerysuj do zeszytu tabelę przedstawioną obok i ją uzupełnij.

a	b	P
$\frac{x+1}{x^2+1}$	$\frac{1}{x+1}$	$\frac{1}{x^2+1}, x > -1$
$\frac{6}{x^2+4}$	$\frac{x+2}{2}$	$\frac{3x+6}{x^2+4}, x > -2$
$\frac{4}{x-3}$	$\frac{x^2+2}{x+3}$	$\frac{4x^2+8}{x^2-9}, x > 3$

Sprawdź się

10. Wykonaj mnożenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{1}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{2x}$ b) $\frac{x}{x^2+5x} \cdot \frac{x^2-25}{x+2}$ c) $\frac{4x^2-1}{x^2} \cdot \frac{x}{2x^2+x}$

11. Wykonaj dzielenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{x^2-6x}{x+3} : \frac{x}{x+2}$ b) $\frac{x}{6-x} : \frac{x^2+x}{x^2-36}$ c) $\frac{x^2-1}{x^2+x} : \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$

12. Uzasadnij, że podane wyrażenie przyjmuje stałą wartość dla tych x , dla których jest określone.

a) $\frac{4x}{x+2} \cdot \frac{2x^2+4x}{x^2}$ b) $\frac{4-x^2}{x-2} \cdot \frac{6x}{x^2+2x}$ c) $\frac{(x-1)^2}{1-x^2} \cdot \frac{x+1}{x-1}$

10. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}, \frac{x-3}{2x}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-5, -2, 0\}, \frac{x-5}{x+2}$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}, \frac{2x-1}{x^2}$

11. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0\}, \frac{(x+2)(x-6)}{x+3}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-6, -1, 0, 6\}, -\frac{x+6}{x+1}$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}, \frac{x^2+1}{x^2-x}$

12. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}, \frac{4x}{x+2} \cdot \frac{2x(x+2)}{x^2} = 8$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}, \frac{(2-x)(2+x)}{-(2-x)} \cdot \frac{6x}{x(x+2)} = -6$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{(x-1)^2}{-(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x+1}{x-1} = -1$

4. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0, 2\},$

$\frac{x(x+3)}{2(x+2)}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, -1\},$
 $-x^2+5x-4 = -(x-1)(x-4)$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)^3}$

5. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{9}{2}\}, \frac{16}{7}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}, -12$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}, -12$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}, \frac{4}{3}$

e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}, \frac{3}{4}x$

f) $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}, -4x^2$

6. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \frac{9}{2}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}, -\frac{2(x+2)^2}{(x-3)^2}$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{5}, 0\}, \frac{2}{x}$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{3}{2}\}, -\frac{2}{x-1}$

e) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{3}\}, -\frac{x^2}{4}$

f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1, 2\},$

$\frac{x-2}{(x+2)(x-1)}$

7. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 3\},$

$(x+1)(x+3)$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, \frac{3}{2}, 4\},$

$-\frac{2(x+4)}{3(x-4)}$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, \frac{1}{2}, 2\},$

$\frac{(2x+1)(x-2)}{(x+2)(2x-1)}$

8. $\frac{6}{x^2-4} : \frac{2}{x-2} = \frac{6}{(x-2)(x+2)} \cdot$

$\cdot \frac{x-2}{2} = \frac{3}{x+2}$

Uczeń:

- rozwiązuje równania wymierne typu $\frac{u(x)}{w(x)} = 0$, podaje i uwzględnia odpowiednie założenia,
- rozwiązuje równania wymierne, stosując własności proporcji, i podaje odpowiednie założenia.

Ćwiczenie 1

- a) $x = -4$
b) $x = \frac{1}{3}$
c) $x = -\frac{1}{2}$
d) $x = \frac{3}{2}$

Komentarz

Kolejne etapy rozwiązywania równania wymiernego $\frac{u(x)}{w(x)} = 0$ warto omówić bardziej szczegółowo i zaproponować uczniom, aby rozszerzyli ten plan własnymi słowami. To pozwoli im na powtórzenie i lepsze zapamiętanie materiału.

Ćwiczenie 2

- a) Zakładamy, że $x \neq -2$.

$$\begin{aligned}\frac{\frac{3}{2}x+3}{x+2} &= 0 \quad / \cdot \frac{2}{3} \\ \frac{x+2}{x+2} &= 0 \\ 1 &= 0\end{aligned}$$

Równanie jest sprzeczne.

- b) Zakładamy, że $x \neq \frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned}\frac{-3x+\frac{9}{2}}{2x-3} &= 0 \quad / \cdot \frac{2}{3} \\ \frac{-2x+3}{2x-3} &= 0 \\ -1 &= 0\end{aligned}$$

Równanie jest sprzeczne.

3.5. Równania wymierne

Przykład 1

Rozwiąż równanie $\frac{-2x+8}{x-3} = 0$.

Zakładamy, że $x-3 \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. W wyznaczonej dziedzinie wyjściowe równanie jest równoważne równaniu:

$$\begin{aligned}-2x+8 &= 0 && \text{Przyrównujemy licznik wyrażenia do zera.} \\ x &= 4\end{aligned}$$

Liczba 4 spełnia założenie, więc jest rozwiązaniem równania.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x+4}{x+2} = 0$ b) $\frac{6x-2}{x} = 0$ c) $\frac{4x+2}{2x-4} = 0$ d) $\frac{2x-3}{2x+1} = 0$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $\frac{\frac{3}{2}x-6}{x-4} = 0$.

Zakładamy, że $x-4 \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}x-6 &= 0 && \text{Przyrównujemy licznik wyrażenia do zera.} \\ \frac{3}{2}x &= 6 \quad / \cdot \frac{2}{3} \\ x &= 4\end{aligned}$$

Równanie jest sprzeczne, ponieważ liczba 4 nie spełnia założenia.

D Ćwiczenie 2

Wykaż, że podane równanie jest sprzeczne.

a) $\frac{\frac{3}{2}x+3}{x+2} = 0$ b) $\frac{-3x+\frac{9}{2}}{2x-3} = 0$

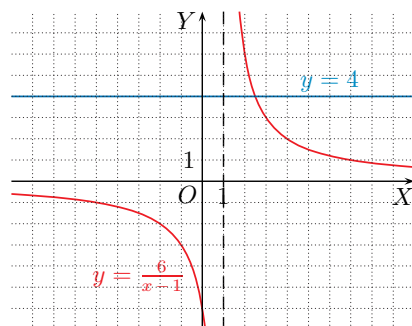
Przykład 3

Rozwiąż równanie $\frac{6}{x-1} = 4$.

Zakładamy, że $x-1 \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned}\frac{6}{x-1} &= 4 \quad / \cdot (x-1) \\ 6 &= 4x-4 \\ 10 &= 4x \\ x &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Liczba $\frac{5}{2}$ spełnia założenie, więc jest rozwiązaniem równania.



Hiperbola $y = \frac{6}{x-1}$ i prosta $y = 4$ przecinają się w punkcie o odciętej $\frac{5}{2}$.

Multibook

- Kreator wykresów
- Równania wymierne

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.5

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{6}{x+1} = 4$ c) $\frac{3}{-2x+7} = 1$ e) $\frac{7x+6}{1-3x} = -4$ g) $\frac{x-5}{3x+1} - 2 = 0$
 b) $\frac{3x+2}{x} = 5$ d) $\frac{2x}{x-1} = 3$ f) $\frac{4-2x}{4-x} = -2$ h) $\frac{2x+4}{x-1} + 4 = 0$

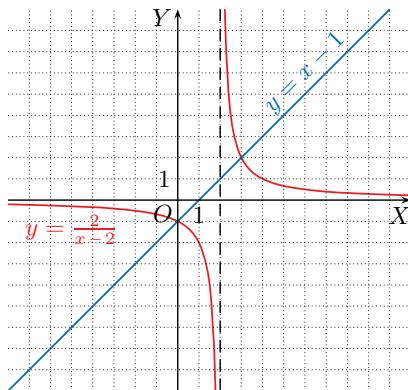
Przykład 4

Rozwiąż równanie $\frac{2}{x-2} = x - 1$.

Zakładamy, że $x-2 \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-2} &= x - 1 \quad / \cdot (x-2) \\ 2 &= (x-1)(x-2) \\ 2 &= x^2 - 3x + 2 \\ x^2 - 3x &= 0 \\ x(x-3) &= 0 \\ x &= 0 \text{ lub } x = 3 \end{aligned}$$

Liczby 0 i 3 spełniają założenie, więc są rozwiązaniami równania.



Hiperbola $y = \frac{2}{x-2}$ i prosta $y = x - 1$ przecinają się w punktach o odciętych 0 oraz 3.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{2}{x} = x + 1$ c) $\frac{4}{x+3} = x + 3$ e) $\frac{6}{x} - 5 = x$ g) $\frac{3}{x+2} = x$
 b) $-\frac{1}{x} = x + 2$ d) $\frac{9}{6-x} = x$ f) $\frac{8}{x} + x = -6$ h) $-\frac{6}{x-3} = 2x + 1$

Przykład 5

Rozwiąż równanie $\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-2}$.

Zakładamy, że $x+1 \neq 0$ i $x-2 \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

Przekształcamy równanie równoważnie przez pomnożenie „na krzyż”.

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+1} &= \frac{3}{x-2} \\ 2(x-2) &= 3(x+1) \\ 2x - 4 &= 3x + 3 \\ x &= -7 \end{aligned}$$

Liczba -7 spełnia założenie, więc jest rozwiązaniem równania.

Dla $b \neq 0$ i $d \neq 0$ równość:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

jest równoważna równości:

$$ad = bc$$

Mnożenie „na krzyż” jest tym samym co pomnożenie obu stron równania przez iloczyn mianowników:

$$(x+1)(x-2)$$

Ćwiczenie 3

- a) $x = \frac{1}{2}$
 b) $x = 1$
 c) $x = 2$
 d) $x = 3$
 e) $x = 2$
 f) $x = 3$
 g) Zakładamy, że $x \neq -\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} \frac{x-5}{3x+1} &= 2 \quad / \cdot (3x+1) \\ x-5 &= 2(3x+1) \\ 5x &= -7 \\ x &= -\frac{7}{5} \end{aligned}$$

 h) Zakładamy, że $x \neq 1$.

$$\begin{aligned} \frac{2x+4}{x-1} &= -4 \quad / \cdot (x-1) \\ 2x+4 &= -4x+4 \\ 6x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 4

- a) $x = -2, x = 1$
 b) $x = -1$
 c) $x = -5, x = -1$
 d) $x = 3$
 e) $x = -6, x = 1$
 f) $x = -4, x = -2$
 g) $x = -3, x = 1$
 h) $x = 1, x = \frac{3}{2}$

Ćwiczenie 5

- a) $x = -8$
b) $x = -\frac{1}{4}$
c) $x = 4$

Ćwiczenie 6

- a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{5}{2}\}$
 $5(2x - 5) = (x + 1)(x - 1)$
 $10x - 25 = x^2 - 1$
 $x^2 - 10x + 24 = 0$
 $\Delta = 4$
 $x_1 = \frac{10-2}{2} = 4, x_2 = \frac{10+2}{2} = 6$
b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}\}$
 $(x + 5)(x + 1) = 2x + 1$
 $x^2 + 6x + 5 = 2x + 1$
 $x^2 + 4x + 4 = 0$
 $(x + 2)^2 = 0$
 $x = -2$
c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 8\}$
 $\frac{x-1}{x} = \frac{2(x-1)}{x-8}$

Zauważamy, że $x = 1$ jest rozwiązaniem równania. Dalej zakładamy, że $x \neq 1$, dzielimy obie strony równania przez $x - 1$ i otrzymujemy równanie:

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x-8}$$
$$x - 8 = 2x$$
$$x = -8$$

Rozwiązaniami równania są liczby -8 i 1 .

- d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$
 $x(2x - 2) = (x - 4)(x + 3)$
 $2x^2 - 2x = x^2 - x - 12$
 $x^2 - x + 12 = 0$
 $\Delta = 1 - 48 < 0$

Równanie jest sprzeczne.

- e) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-6, -3\}$
 $x(x + 6) = 6(x + 3)$
 $x^2 + 6x = 6x + 18$
 $x^2 - 18 = 0$
 $(x + 3\sqrt{2})(x - 3\sqrt{2}) = 0$
 $x = -3\sqrt{2}, x = 3\sqrt{2}$
f) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -7\}$
 $2x(x + 1) = x(x - 7)$
 $2x^2 + 2x = x^2 - 7x$
 $x^2 + 9x = 0$
 $x(x + 9) = 0$
 $x = -9, x = 0$

Ćwiczenie 5

Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{7}{x+1} = \frac{3}{x+5}$ b) $\frac{-2}{x-1} = \frac{4}{2x+3}$ c) $\frac{x}{x-2} = \frac{x+2}{x-1}$

Przykład 6

Rozwiąż równanie $\frac{x+4}{2x+1} - \frac{5}{x+2} = 0$.

Zakładamy, że $2x + 1 \neq 0$ i $x + 2 \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -\frac{1}{2}\}$.

$$\frac{x+4}{2x+1} = \frac{5}{x+2}$$
$$(x+4)(x+2) = 5(2x+1)$$
$$x^2 + 6x + 8 = 10x + 5$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 16 - 12 = 4, \sqrt{\Delta} = 2$$
$$x_1 = \frac{4-2}{2} = 1, x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$$

Przenosimy $\frac{5}{x+2}$ na drugą stronę równania. Mnożymy „na krzyż”.

Liczby 1 i 3 spełniają założenie, więc są rozwiązaniami równania.

Ćwiczenie 6

Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{5}{x-1} = \frac{x+1}{2x-5}$ c) $\frac{x-1}{x} = \frac{2x-2}{x-8}$ e) $\frac{x}{x+3} = \frac{6}{x+6}$
b) $\frac{x+5}{2x+1} = \frac{1}{x+1}$ d) $\frac{2x-2}{x-4} = \frac{x+3}{x}$ f) $\frac{2x}{x-7} = \frac{x}{x+1}$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{5}{x} = 4$ c) $\frac{-7}{x-1} = 8$ e) $\frac{x}{2x+1} = 1$ g) $\frac{x+2}{x+5} = 0$
b) $\frac{-6}{x} = -\frac{1}{2}$ d) $\frac{6}{x+4} = -3$ f) $\frac{-6x}{2x-5} = 2$ h) $\frac{3x-15}{x-5} = 0$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{2x}{x-3} - 1 = 0$ c) $\frac{x-2}{2x+1} + 6 = 5$ e) $\frac{5x+4}{2x-1} - 3 = 0$
b) $\frac{3x}{x+2} + 4 = 0$ d) $\frac{2x-1}{x-1} - 3 = 1$ f) $\frac{1}{2} - \frac{4x-2}{3-2x} = 0$

3. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{4}{x} = \frac{3}{2+x}$ c) $\frac{x}{x-1} = \frac{x+2}{x}$ e) $\frac{x-3}{2x} - \frac{x-2}{2x+1} = 0$
b) $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-3} = 0$ d) $\frac{x-3}{x-2} = \frac{x+3}{x+2}$ f) $\frac{3x-2}{x+1} + \frac{1-3x}{x-3} = 0$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = \frac{5}{4}$ 2. a) $x = -3$ 3. a) $x = -8$
b) $x = 12$ b) $x = -\frac{8}{7}$ b) $x = 8$
c) $x = \frac{1}{8}$ c) $x = \frac{1}{3}$ c) $x = 2$
d) $x = -6$ d) $x = \frac{3}{2}$ d) $x = 0$
e) $x = -1$ e) $x = 7$ e) $x = -3$
f) $x = 1$ f) $x = \frac{7}{10}$ f) $x = \frac{7}{13}$
g) $x = -2$
h) sprzeczne

4. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x}{-3} = \frac{-5}{x+2}$

c) $x + 1 = \frac{2-2x}{x-1}$

e) $\frac{6x-4}{2-3x} = -2x$

b) $x = \frac{5x+3}{2x}$

d) $\frac{2x-2}{x+2} = \frac{x}{x-1}$

f) $6x + 1 = \frac{2}{x}$

5. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x+1}{x} = \frac{x+1}{2x+1}$

c) $\frac{x+4}{2x-1} - \frac{1}{x} = 0$

e) $\frac{8-2x}{x-1} + \frac{x-3}{x-4} = 0$

b) $\frac{4}{x} + \frac{x}{x+1} = 0$

d) $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x}{x+1} = 0$

f) $\frac{2-x}{x-1} - \frac{x-1}{x+2} = 0$

6. Które z podanych równań nie mają rozwiązań, a które mają nieskończenie wiele rozwiązań?

I. $\frac{3x-3}{x-1} = 2$ II. $\frac{6x-2}{3x-1} = 2$ III. $\frac{1-4x}{8x-2} = -0,5$ IV. $\frac{3x+9}{10x+30} = 0,3$

7. Rozwiąż równanie A. Które spośród rozwiązań równania A są rozwiązaniami równania B?

a) A: $2x(x-4) = 0$, B: $\frac{2x(x-4)}{2x-8} = 0$

b) A: $(3x+12)x = 0$, B: $\frac{(3x+12)x}{x+4} = 0$

c) A: $3x(x+2) = 0$, B: $\frac{3x(x+2)}{2x-6} = 0$

d) A: $-x(6x+9) = 0$, B: $\frac{-x(6+9x)}{(3x+2)x} = 0$

Sprawdź się

8. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x-7}{x+3} = 0$

b) $\frac{7x+21}{x-3} = 0$

c) $\frac{-3x+9}{x-6} = 0$

9. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{4}{x+1} = 3$

c) $\frac{5}{x+3} = 3$

e) $\frac{3}{2x+1} = 5$

b) $\frac{-6}{x-2} = 2$

d) $\frac{2}{x-4} = -1$

f) $\frac{-2}{3x-2} = 3$

10. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{4x+5}{2x} = 4$

c) $x = \frac{7x-4}{2x-2}$

e) $\frac{2x+7}{x+1} = x-1$

b) $\frac{15}{x} = x-2$

d) $x+2 = \frac{2-2x}{x}$

f) $\frac{6x+2}{-1-3x} = -2x-2$

11. Ile rozwiązań ma podane równanie?

a) $\frac{x+1}{x} = \frac{2x+2}{x-1}$

c) $\frac{6}{x} = \frac{3x}{x-2}$

e) $\frac{3-x}{2x-1} = \frac{2x-6}{2-4x}$

b) $\frac{4}{x} + \frac{4-3x}{x-1} = 0$

d) $\frac{x-1}{x+2} = \frac{x+1}{3x+1}$

f) $\frac{2x-1}{x-1} = \frac{6x-3}{x-1}$

11. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$$(x+1)(x-1) = x(2x+2)$$

$$x^2 - 1 = 2x^2 + 2x$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

Równanie ma jedno rozwiązanie.

b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$$4(x-1) = x(3x-4)$$

$$4x - 4 = 3x^2 - 4x$$

$$3x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$\Delta = 16 > 0$$

Równanie ma dwa rozwiązania.

c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

$$6(x-2) = 3x^2$$

$$2(x-2) = x^2$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\Delta = -12 < 0$$

Równanie nie ma rozwiązań.

d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -\frac{1}{3}\}$

$$(x-1)(3x+1) = (x+2)(x+1)$$

$$3x^2 - 2x - 1 = x^2 + 3x + 2$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$\Delta = 49 > 0$$

Równanie ma dwa rozwiązania.

e) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

$$\frac{3-x}{2x-1} = \frac{-2(3-x)}{-2(2x-1)}$$

$$\frac{3-x}{2x-1} = \frac{3-x}{2x-1}$$

Równanie jest tożsamościowe, czyli ma nieskończenie wiele rozwiązań.

f) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Obie strony równania mnożymy przez $(x-1)$ i otrzymujemy równanie liniowe, które ma jedno rozwiązanie.

4. a) $x = -5, x = 3$

b) $x = -\frac{1}{2}, x = 3$

c) $x = -3$

d) $x = 3 - \sqrt{7}, x = 3 + \sqrt{7}$

e) $x = 1$

f) $x = -\frac{2}{3}, x = \frac{1}{2}$

5. a) $x = -1$

b) $x = -2$

c) $x = -1$

d) $x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $x = 6 - \sqrt{7}, x = 6 + \sqrt{7}$

f) $x = \frac{1-\sqrt{7}}{2}, x = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$

6. Nie ma rozwiązań: I; mają nieskończenie wiele rozwiązań: II, III, IV.

7. a), b) $x = 0$

c) $x = -2, x = 0$

d) żadne

8. a) $x = 7$

b) $x = -3$

c) $x = 3$

9. a) $x = \frac{1}{3}$

b) $x = -1$

c) $x = -\frac{4}{3}$

d) $x = 2$

e) $x = -\frac{1}{5}$

f) $x = \frac{4}{9}$

10. a) $x = \frac{5}{4}$

b) $x = -3, x = 5$

c) $x = \frac{1}{2}, x = 4$

d) $x = -2 - \sqrt{6}, x = -2 + \sqrt{6}$

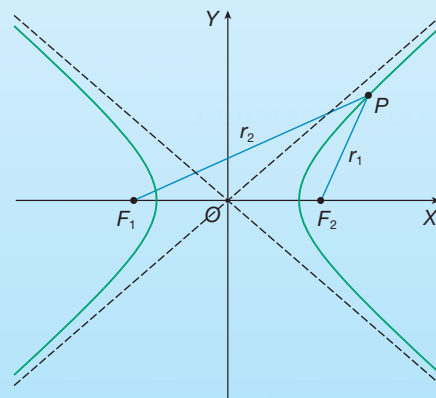
e) $x = -2, x = 4$

f) $x = 0$

Hiperbola i hiperboloida

Ogólna definicja mówi, że hiperbola to zbiór tych wszystkich punktów P na płaszczyźnie, dla których wartość bezwzględna różnicy odległości od dwóch konkretnych punktów F_1 i F_2 , zwanych ogniskami, jest stała:

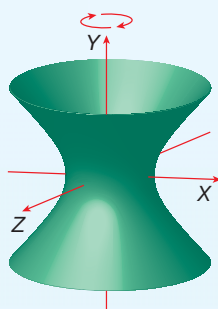
$$|r_1 - r_2| = \text{const.}$$



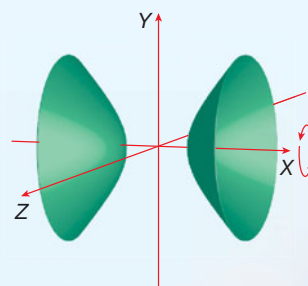
Obrót hiperboli

Hiperboloida to powierzchnia zakreślona w wyniku obrotu hiperboli wokół jej osi symetrii w przestrzeni trójwymiarowej.

Po obrocie pokazanej wyżej hiperboli wokół osi OY powstanie **hiperboloida jednopowłokowa**.



Po obrocie tej hiperboli wokół osi OX otrzymujemy **hiperboloidę dwupowłokową**.



Chłodnie kominowe

Chłodnie kominowe mają najczęściej kształt hiperboloidy jednopowłokowej. Pozwala to na oszczędne zużycie materiałów konstrukcyjnych. Mimo znacznych rozmiarów (wysokość chłodni przekracza zwykle 120 m, a średnica podstawy chłodni – 90 m) grubość żelbetowego płaszcza w najcieńszych miejscach wynosi zaledwie 12–18 cm. Taki kształt chłodni zwiększa również ich odporność na zginanie.

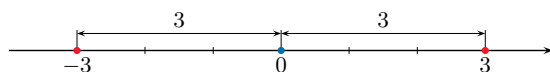


3.6. Równania z wartością bezwzględną

Przypomnijmy, że interpretacją geometryczną wartości bezwzględnej liczby a jest jej odległość na osi liczbowej od 0.

Przykład 1

Zaznacz na osi liczbowej liczby spełniające warunek $|x| = 3$.



$|x| = 3$ dla $x = -3$ oraz dla $x = 3$.

Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$:

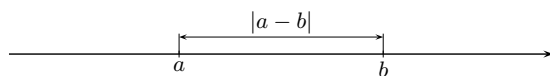
$$|-a| = |a|$$

Ćwiczenie 1

Zaznacz na osi liczbowej liczby spełniające warunek:

- a) $|x| = 1$, b) $|x| = 4$, c) $|x| = 0$.

Zauważmy, że odległość na osi liczbowej między liczbami a i b jest równa $|a - b|$.



Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$:

$$|a - b| = |b - a|$$

Odległość między liczbami a i b na osi liczbowej jest taka sama jak odległość między liczbami b i a .

Ćwiczenie 2

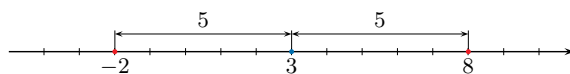
Zaznacz na osi liczbowej liczby a i b . Sprawdź, czy $|a - b| = |b - a|$.

- a) $a = 2, b = 5$ b) $a = -5, b = -1$ c) $a = -2, b = 3$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $|x - 3| = 5$.

Szukamy na osi liczbowej takich liczb x , których odległość od 3 wynosi 5.



Zatem $x = -2$ lub $x = 8$.

Sprawdzenie:

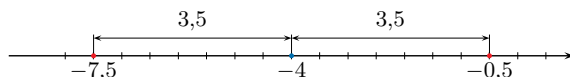
dla $x = -2$: $|-2 - 3| = |-5| = 5$,

dla $x = 8$: $|8 - 3| = |5| = 5$.

Przykład 3

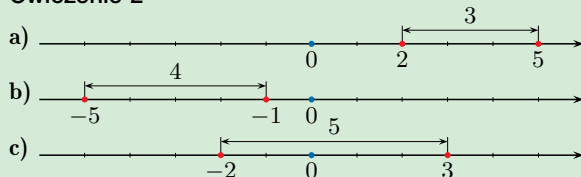
Rozwiąż równanie $|x + 4| = 3,5$.

Równanie zapisujemy w postaci: $|x - (-4)| = 3,5$ i szukamy na osi liczbowej takich liczb x , których odległość od -4 wynosi 3,5.



Zatem $x = -7,5$ lub $x = -0,5$ (sprawdź).

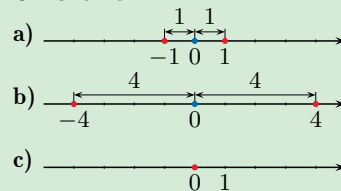
Ćwiczenie 2



Uczeń:

- rozwiązuje równania postaci $|x - a| = b$, wykorzystując odległość między liczbami na osi liczbowej,
- stosuje własności wartości bezwzględnej do rozwiązywania równań typu $|ax + b| = c$.

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 3

- a) $x = -1$ lub $x = 5$
- b) $x = 0,5$ lub $x = 7,5$
- c) $x = -8$ lub $x = -4$
- d) $x = -\frac{3}{2}$ lub $x = -\frac{1}{2}$
- e) $x = 5$ lub $x = 7$
- f) $x = -7$ lub $x = 1$
- g) $x = -\frac{3}{4}$ lub $x = \frac{1}{4}$
- h) $x = -2 - \sqrt{3}$ lub $x = -2 + \sqrt{3}$

Ćwiczenie 4

- a), d) sprzeczne
- b) $x = 5$
- c) $x = -9$

Ćwiczenie 5

- a) $x = \frac{1}{5}$ lub $x = 1$
- b) $x = 0$ lub $x = 1$
- c) $x = -1$ lub $x = -\frac{1}{9}$
- d) $x = -2$ lub $x = \frac{2}{3}$
- e) $x = -15$ lub $x = 3$
- f) $x = 4$ lub $x = 8$
- g) $x = \frac{25}{7}$ lub $x = 5$
- h) $x = -4$ lub $x = -\frac{8}{3}$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

- a) $|x - 2| = 3$
- c) $|x + 6| = 2$
- e) $|6 - x| = 1$
- g) $|x + \frac{1}{4}| = \frac{1}{2}$
- b) $|x - 4| = 3,5$
- d) $|x + 1| = \frac{1}{2}$
- f) $|3 + x| = 4$
- h) $|2 + x| = \sqrt{3}$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x - 4| = -2$.

Wartość bezwzględna dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemna, zatem równanie jest sprzeczne.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

- a) $|x + 1| = -1$
- b) $|x - 5| = 0$
- c) $|x + 9| = 0$
- d) $|x - 2| = 1 - \sqrt{2}$

Przykład 5

a) Rozwiąż równanie $|x - 1| = 6$.

$$\begin{aligned}x - 1 &= -6 \quad \text{lub} \quad x - 1 = 6 \\x &= -5 \quad \text{lub} \quad x = 7\end{aligned}$$

Jeśli $a > 0$, to $|x| = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = -a$ lub $x = a$.

Rozwiązaniami równania są liczby -5 i 7 .

b) Rozwiąż równanie $|3x - 4| = 2$.

$$\begin{aligned}3x - 4 &= -2 \quad \text{lub} \quad 3x - 4 = 2 \\3x &= 2 \quad \text{lub} \quad 3x = 6 \\x &= \frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x = 2\end{aligned}$$

Rozwiązaniami równania są liczby $\frac{2}{3}$ i 2 .

Ćwiczenie 5

Rozwiąż równanie.

- a) $|5x - 3| = 2$
- c) $|9x + 5| = 4$
- e) $|\frac{2}{3}x + 4| = 6$
- g) $|6 - \frac{7}{5}x| = 1$
- b) $|2x - 1| = 1$
- d) $|3x + 2| = 4$
- f) $|\frac{1}{2}x - 3| = 1$
- h) $|5 + \frac{3}{2}x| = 1$

Przykład 6

Rozwiąż równanie $|x - 5| + 2|x - 5| = 12$.

$$\begin{aligned}3|x - 5| &= 12 \quad / : 3 \\|x - 5| &= 4 \\x - 5 &= -4 \quad \text{lub} \quad x - 5 = 4 \\x &= 1 \quad \text{lub} \quad x = 9\end{aligned}$$

Rozwiązaniami równania są liczby 1 i 9 .

Przykład 7Rozwiąż równanie $|2x - 4| + |x - 2| = 12$.

$$\begin{aligned}
2|x - 2| + |x - 2| &= 12 \\
3|x - 2| &= 12 \quad / : 3 \\
|x - 2| &= 4 \\
x - 2 &= -4 \quad \text{lub} \quad x - 2 = 4 \\
x &= -2 \quad \text{lub} \quad x = 6
\end{aligned}$$

Rozwiązaniami równania są liczby -2 i 6 .**Ćwiczenie 6**

Rozwiąż równanie.

- a) $|x - 3| + |2x - 6| = 9$ c) $|4x - 8| + |2 - x| = 5$
b) $|3x - 6| - |x - 2| = 8$ d) $|5x - 20| - |2x - 8| = 15$

Zadania**1.** Rozwiąż równanie, korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej.

- a) $|x - 5| = 1$ c) $|x + 6| = 4$ e) $|x - \frac{1}{3}| = \frac{1}{6}$ g) $|7 - x| = \frac{1}{2}$
b) $|x - 8| = 9$ d) $|x + 9| = 2$ f) $|x + \frac{1}{4}| = \frac{3}{8}$ h) $|\frac{1}{3} + x| = \frac{2}{3}$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $|3x + 1| = 5$ c) $|\frac{3}{5}x + 1| = 2$ e) $|4x + 5| = 0$ g) $|3x + 5| = 2$
b) $|2x - 3| = 1$ d) $|2 - \frac{2}{3}x| = 3$ f) $|3x - 6| = 4$ h) $|x + \sqrt{3}| = \sqrt{3}$

 **3.** Rozwiąż równanie.

- a) $|4x + 6| + |6x + 9| = 10$ c) $|x - 6| + |4x - 24| + |2x - 12| = 7$
b) $|11x - 33| - |2x - 6| = 27$ d) $|6x + 4| - |3x + 2| + |9x + 6| = 8$

Sprawdź się**4.** Rozwiąż równanie.

- a) $|x - 3| = 7$ c) $|2x - 8| = 4$ e) $|\frac{1}{2}x - 1| = 3$ g) $|10 - x| = 4$
b) $|x + 2| = 6$ d) $|4x + 2| = 6$ f) $|\frac{2}{3}x + 4| = 2$ h) $|1 - 3x| = 6$

5. Rozwiąż równanie.

- a) $|x - 1| + |3x - 3| = 16$ c) $|9x + 18| - |7x + 14| = 10$
b) $|6x - 9| + |4x - 6| = 20$ d) $|6x + 10| + |9x + 15| = 25$

- 5. a)** $x = -3, x = 5$
b) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{7}{2}$
c) $x = -7$ lub $x = 3$
d) $x = -\frac{10}{3}$ lub $x = 0$

Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

Ćwiczenie 6

- a)** $3|x - 3| = 9$,
 $x = 0$ lub $x = 6$
b) $2|x - 2| = 8$,
 $x = -2$ lub $x = 6$
c) $5|x - 2| = 5$,
 $x = 1$ lub $x = 3$
d) $3|x - 4| = 15$,
 $x = -1$ lub $x = 9$

Odpowiedzi do zadań

- 1. a)** $x = 4$ lub $x = 6$
b) $x = -1$ lub $x = 17$
c) $x = -10$ lub $x = -2$
d) $x = -11$ lub $x = -7$
e) $x = \frac{1}{6}$ lub $x = \frac{1}{2}$
f) $x = -\frac{5}{8}$ lub $x = \frac{1}{8}$
g) $x = 6\frac{1}{2}$ lub $x = 7\frac{1}{2}$
h) $x = -1$ lub $x = \frac{1}{3}$
2. a) $x = -2$ lub $x = \frac{4}{3}$
b) $x = 1$ lub $x = 2$
c) $x = -5$ lub $x = \frac{5}{3}$
d) $x = -\frac{3}{2}$ lub $x = \frac{15}{2}$
e) $x = -\frac{5}{4}$
f) $x = \frac{2}{3}$ lub $x = \frac{10}{3}$
g) $x = -\frac{7}{3}$ lub $x = -1$
h) $x = -2\sqrt{3}$ lub $x = 0$
3. a) $x = -\frac{5}{2}$ lub $x = -\frac{1}{2}$
b) $x = 0$ lub $x = 6$
c) $x = 5$ lub $x = 7$
d) $x = -\frac{4}{3}$ lub $x = 0$
4. a) $x = -4$ lub $x = 10$
b) $x = -8$ lub $x = 4$
c) $x = 2$ lub $x = 6$
d) $x = -2$ lub $x = 1$
e) $x = -4$ lub $x = 8$
f) $x = -9$ lub $x = -3$
g) $x = 6$ lub $x = 14$
h) $x = -\frac{5}{3}$ lub $x = \frac{7}{3}$

Uczeń:

- wykorzystuje wyrażenia wymierne do rozwiązywania zadań tekstowych (także osadzonych w kontekście praktycznym).

Ćwiczenie 1

a) $\frac{10+20}{x+30} = \frac{10}{x}$,

gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-30, 0\}$

$x = 15$

Zatem szukany ułamek to $\frac{10}{15}$.

b) $2 \cdot \frac{x-2}{x} = \frac{x-2+9}{x+5}$,

gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 0\}$

$x^2 - x - 20 = 0$

$x = -4$ lub $x = 5$

Nieskracalny ułamek: $\frac{3}{5}$.

c) Niech $x, x+3$

($x > 0$) – szukane liczby.

$\frac{x}{x+3} = \frac{75}{100}$, gdzie $x \neq -3$,

$x = 9$

Zatem szukane liczby to 9 i 12.

3.7. Wyrażenia wymierne – zastosowania (1)

Przykład 1

Licznik pewnego ułamka jest równy 6. Jeśli licznik tego ułamka zmniejszymy o 2, a mianownik o 3, to wartość ułamka się nie zmienia. Jaki to ułamek?

Szukany ułamek możemy zapisać w postaci $\frac{6}{x}$, wówczas nowy ułamek będzie miał postać $\frac{6-2}{x-3}$, czyli $\frac{4}{x-3}$. Otrzymujemy więc równanie:

$$\frac{6}{x} = \frac{4}{x-3}, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$$

$$6(x-3) = 4x$$

$$x = 9$$

Zatem szukany ułamek to $\frac{6}{9}$.

Ćwiczenie 1

a) Licznik pewnego ułamka jest równy 10. Jeśli licznik tego ułamka zwiększymy o 20, a mianownik o 30, to wartość ułamka się nie zmienia. Jaki to ułamek?

b) Licznik pewnego ułamka nieskracalnego jest o 2 mniejszy od jego mianownika. Jeśli licznik tego ułamka zwiększymy o 9, a mianownik o 5, to wartość ułamka wzrośnie dwukrotnie. Wyznacz ten ułamek.

c) Dane są dwie liczby dodatnie. Jedna z tych liczb jest o 3 mniejsza od drugiej, a ich stosunek jest jak 75 do 100. Wyznacz te liczby.

Przykład 2

Jeden bok prostokąta jest o 4 cm dłuższy od boku pewnego kwadratu, a drugi bok jest o 2 cm krótszy od boku tego kwadratu. Stosunek długości boków tego prostokąta jest równy 2:1. Oblicz jego obwód.

Oznaczmy przez x długość boku kwadratu. Prostokąt ma wówczas boki długości $x+4$ i $x-2$. Zatem:

$$\frac{x+4}{x-2} = 2, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{2\}$$

czyli $x+4 = 2x-4$. Stąd $x = 8$ cm, a obwód prostokąta jest równy 36 cm.

Ćwiczenie 2

a) Obwód kwadratu jest równy 52 cm. Jeden bok tego kwadratu wydłużono o x cm, a drugi skrócono o x cm i otrzymano prostokąt, w którym stosunek długości boków jest równy 4:3. Oblicz pole tego prostokąta.

b) Pole kwadratu jest równe 324 cm^2 . Jeden bok tego kwadratu wydłużono o $(x+1)$ cm, a drugi – o $2x$ cm i otrzymano prostokąt, w którym stosunek długości boków jest równy 5:6. Oblicz obwód tego prostokąta.

Ćwiczenie 2

a) Długość boku kwadratu: $\frac{52}{4} = 13$ [cm], długości boków prostokąta: $(13-x)$, $(13+x)$, gdzie $x \in (0; 13)$.

$$\frac{13+x}{13-x} = \frac{4}{3}, \text{ skąd otrzymujemy } x = \frac{13}{7}$$

$$\text{Pole prostokąta: } P = (13 - \frac{13}{7})(13 + \frac{13}{7}) = 169 - \frac{169}{49} = 165\frac{27}{49} [\text{cm}^2]$$

b) Długość boku kwadratu: $\sqrt{324} = 18$ [cm], długości boków prostokąta: $18 + (x+1)$, $18 + 2x$, $x > 0$.

1° Jeśli $x+1 > 2x$, to $\frac{18+2x}{19+x} = \frac{5}{6}$, gdzie $x > 0$, stąd sprzeczność.

2° Jeśli $x+1 < 2x$, to $\frac{19+x}{18+2x} = \frac{5}{6}$, gdzie $x > 0$, stąd $x = 6$.

$$\text{Obwód prostokąta: } Ob = 2(18+7) + 2(18+12) = 110 [\text{cm}].$$

Przykład 3

Robert kupił kilka kilogramów jabłek w cenie x zł/kg i zapłacił 26 zł oraz kupił taką samą liczbę kilogramów gruszek, droższych o 2 zł/kg, i zapłacił 34 zł. Ile kosztuje kilogram jabłek, a ile – gruszek?

Liczba kupionych kilogramów jabłek jest równa $\frac{26}{x}$, a liczba kupionych kilogramów gruszek: $\frac{34}{x+2}$. Zatem:

$$\begin{aligned}\frac{26}{x} &= \frac{34}{x+2}, \text{ gdzie } x \in (0; \infty) \\ 26x + 52 &= 34x \\ 8x &= 52 \\ x &= 6,5\end{aligned}$$

Kilogram jabłek kosztuje 6,50 zł, a kilogram gruszek 8,50 zł.

Ćwiczenie 3

a) Ola kupiła cukierki A w cenie x zł/kg i zapłaciła 24 zł. Ala kupiła taką samą ilość cukierków B , droższych o 4 zł/kg, i zapłaciła 30 zł. Ile kosztuje kilogram cukierków A , a ile – cukierków B ?

b) Cena winogron to obecnie x zł/kg. Tydzień temu, kiedy winogrona były o 4 zł/kg droższe, Tomek wydał na ich zakup 20 zł. Gdyby obecna cena spadła o 1 zł/kg, to taką samą ilość winogron można by kupić za 12 zł. Jaka jest obecna cena winogron?

Przykład 4

Za osiem lat stosunek wieku Ali i jej o 4 lata młodszej siostry będzie wynosił 6:5. Ile lat ma Ala, a ile – jej siostra?

Oznaczmy przez x wiek Ali w latach, wówczas jej siostra ma $(x - 4)$ lata. Za 8 lat będą one miały odpowiednio $(x + 8)$ lat i $(x + 4)$ lata. Zatem:

$$\begin{aligned}\frac{x+8}{x+4} &= \frac{6}{5}, \text{ gdzie } x \in (4; \infty) \\ 5x + 40 &= 6x + 24 \\ x &= 16\end{aligned}$$

Ala ma 16 lat, a jej siostra ma 12 lat.

Ćwiczenie 4

a) Mama Bartka jest o 6 lat młodsza od jego taty. Stosunek wieku mamy i taty jest jak 8 do 9. Ile lat ma mama Bartka, a ile – jego tata?

b) Wujek Stefana jest o 4 lata starszy od jego cioci. Stosunek podwojonego wieku wujka do wieku cioci jest równy 20:9. Ile lat ma wujek, a ile – ciocia?

Ćwiczenie 4

a) Niech x – wiek mamy, $(x + 6)$ – wiek taty.

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+6} &= \frac{8}{9}, \text{ gdzie } x > 0 \\ x &= 48\end{aligned}$$

Mama ma 48 lat, a tata 54 lata.

b) Niech x – wiek cioci, $(x + 4)$ – wiek wujka.

$$\begin{aligned}\frac{2(x+4)}{x} &= \frac{20}{9}, \text{ gdzie } x > 0 \\ x &= 36\end{aligned}$$

Ciocia ma 36 lat, a wujek 40 lat.

Ćwiczenie 3

a) $\frac{30}{x+4} = \frac{24}{x}$, gdzie $x > 0$,
 $x = 16$

Cukierki A kosztują 16 zł/kg.
Cukierki B kosztują 20 zł/kg.

b) $\frac{20}{x+4} = \frac{12}{x-1}$, gdzie $x > 1$,
 $x = 8,5$

Winogrona kosztują 8,50 zł/kg.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\frac{x+6}{2x+5} = \frac{2}{3}$, gdzie $x > 0$
 $x = 8$

$Ob = 48 \text{ cm}$

b) Różnica obwodów:

$$2(x + 2x) = 6x$$

I przypadek

$$\frac{30+x}{18+2x} = \frac{5}{9}, \text{ gdzie } x > 0$$

$$x = 180$$

II przypadek

$$\frac{30+x}{18+2x} = \frac{9}{5}, \text{ gdzie } x > 0$$

$$x = -\frac{12}{13} \text{ – sprzeczne}$$

III przypadek

$$\frac{30+2x}{18+x} = \frac{5}{9}, \text{ gdzie } x > 0$$

W tym przypadku sprzeczność można zauważyć bez obliczeń. Wiemy, że:

$$30 > 18 \text{ i } 2x > x, \text{ zatem}$$

$$30 + 2x > 18 + x, \text{ ale } 5 < 9.$$

IV przypadek

$$\frac{30+2x}{18+x} = \frac{9}{5}, \text{ gdzie } x > 0$$

$$x = 12$$

Zatem obwód zwiększył się o 72 cm lub o 1080 cm.

2. 512 cm^3

3. 15 zł/kg

4. a) Niech x – szukana liczba lat.

$$\frac{25+x}{13+x} = \frac{3}{2}, \text{ gdzie } x > 0$$

$$x = 11$$

b) Niech x – wiek babci,
 $(x + 8)$ – wiek dziadka.

$$\frac{x-34}{x+8-34} = \frac{2}{3}, \text{ gdzie } x > 34$$

$$x = 50$$

Babcia ma 50 lat,
a dziadek 58 lat.

5. a) $\frac{x+6+11}{x+11} = \frac{4}{3}$

$$x = 7$$

Szukany ułamek to $\frac{13}{7}$.

b) $\frac{x+10}{x+3+10} = \frac{2x}{x+3}, x > 0$

$$x^2 + 13x - 30 = 0, \Delta = 17^2$$

$$x_1 = \frac{-13-17}{2} < 0, x_2 = 2$$

Szukany ułamek to $\frac{2}{5}$.

Zadania

1. a) Boki prostokąta mają długości $x \text{ cm}$ i $2x \text{ cm}$. Gdyby jego krótszy bok wydłużyć o 6 cm, a dłuższy – o 5 cm, to stosunek długości boków byłby równy 2 : 3. Oblicz obwód tego prostokąta.

b) Dany jest prostokąt o bokach 30 cm i 18 cm. Jeden z tych boków wydłużono o $x \text{ cm}$, a drugi – o $2x \text{ cm}$ i otrzymano prostokąt, w którym stosunek długości boków jest równy 5 : 9. O ile zwiększył się obwód tego prostokąta? Rozpatrz wszystkie przypadki.

2. Dane są sześcian o krawędzi $x \text{ cm}$ oraz prostopadłościan o krawędziach $(x + 1) \text{ cm}$, $(x + 2) \text{ cm}$ i $(x + 3) \text{ cm}$. Stosunek sumy długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu do sumy długości wszystkich krawędzi sześcianu jest równy 5 : 4. Oblicz objętość sześcianu.

3. Cena wiśni dwa dni temu była o 3 zł/kg niższa niż dziś. Dwa dni temu pani Ala wydała na zakup wiśni 45 zł. Aby kupić dziś tyle samo tych owoców, musiałaby wydać o 9 zł więcej. Jaka była cena wiśni dwa dni temu?

4. a) Magda ma 25 lat, a jej młodsza siostra – 13 lat. Za ile lat stosunek wieku Magdy i jej siostry będzie równy $\frac{3}{2}$?

b) Babcia Krysi jest o 8 lat młodsza od jej dziadka. Stosunek wieku babci do wieku dziadka 34 lata temu był jak 2 do 3. Ile lat ma babcia?

Sprawdź się

5. a) Licznik pewnego ułamka jest o 6 większy od jego mianownika. Jeśli licznik i mianownik zwiększymy o 11, to otrzymamy ułamek równy $\frac{4}{3}$. Znajdź wyjściowy ułamek.

b) Licznik pewnego ułamka jest liczbą dodatnią i jest o 3 mniejszy od jego mianownika. Jeśli licznik i mianownik zwiększymy o 10, to otrzymamy ułamek dwa razy większy. Znajdź wyjściowy ułamek.

6. a) Boki prostokąta mają długości $x \text{ cm}$ i $(x + 4) \text{ cm}$. Jeśli oba boki skrócimy o 4 cm, to stosunek ich długości będzie równy 3 : 5. Oblicz obwód tego prostokąta.

b) Dany jest prostokąt o bokach 32 cm i 51 cm. Jego krótszy bok skrócono o $x \text{ cm}$, a dłuższy bok – o $3x \text{ cm}$ i otrzymano prostokąt, w którym stosunek długości boków jest równy 3 : 4. O ile zmniejszył się obwód prostokąta? Rozpatrz dwa przypadki.

6. a) $\frac{x-4}{x+4-4} = \frac{3}{5}$, gdzie $x > 4$
 $x = 10$

Boki prostokąta: 10 cm i 14 cm. Obwód prostokąta: 48 cm.

b) Różnica obwodów: $2 \cdot (x + 3x) = 8x$.

I przypadek

$$\frac{32-x}{51-3x} = \frac{3}{4}, \text{ gdzie } x \in (0; 17)$$

$$x = 5$$

II przypadek

$$\frac{32-x}{51-3x} = \frac{4}{3}, \text{ gdzie } x \in (0; 17)$$

$$x = 12$$

Zatem obwód zmniejszył się o 40 cm lub o 96 cm.

3.8. Wyrażenia wymierne – zastosowania (2)

Przykład 1

Dwa samochody wyruszyły jednocześnie z Malborka. Każdy jechał ze stałą prędkością. Po pewnym czasie pierwszy znajdował się w odległości 320 km, a drugi – 240 km od tego miasta. Prędkość drugiego samochodu była o 20 km/h mniejsza od prędkości pierwszego. Oblicz prędkości obu samochodów.

Oznaczmy przez v_1 i v_2 prędkości samochodów. Wówczas:

$$\frac{320}{v_1} = \frac{240}{v_1 - 20} \quad \text{Korzystamy ze wzoru } t = \frac{s}{v},$$

gdzie t – czas, s – droga.

$$320(v_1 - 20) = 240v_1$$

Stąd $v_1 = 80$ oraz $v_2 = 80 - 20 = 60$.

Prędkości samochodów wynosiły odpowiednio 80 km/h i 60 km/h.

Ćwiczenie 1

a) Samochód jadący z prędkością v pokonał odległość 195 km. Samochód jadący z prędkością o 20 km/h większą pokonał w tym samym czasie 260 km. Oblicz prędkości obu samochodów.

b) Pociąg ekspresowy na trasie długości 360 km jechał z prędkością o 30 km/h większą niż pociąg osobowy i pokonał tę trasę w czasie równym 0,75 czasu przejazdu pociągu osobowego. Oblicz prędkości obu pociągów.

Przykład 2

Piotrek potrzebuje 4 godzin na pomalowanie płotu wokół domu. Adam tę samą pracę wykonałby w ciągu 8 godzin. Ile czasu zajęłoby im pomalowanie płotu, gdyby pracowali razem, każdy w swoim tempie?

Oznaczmy przez w pracę, którą należy wykonać. Wówczas:

$\frac{1}{4}w$ – praca wykonana przez Piotra w ciągu godziny,

$\frac{1}{8}w$ – praca wykonana przez Adama w ciągu godziny,

$\frac{1}{4}w + \frac{1}{8}w = \frac{3}{8}w$ – praca wykonana wspólnie w ciągu godziny.

Z tego wynika, że na wspólne wykonanie pracy chłopcy potrzebowaliby:

$$w : \frac{3}{8}w = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ [h]}$$

czyli 2 godzin i 40 minut.

Ćwiczenie 2

Artur potrzebuje 10 godzin na pomalowanie pokoju, a Darek zrobiłby to w ciągu 6 godzin. Ile czasu zajęłoby im pomalowanie pokoju, gdyby pracowali razem, każdy w swoim tempie?

Ćwiczenie 2

$\frac{w}{10}$ – praca wykonana przez Artura w ciągu godziny

$\frac{w}{6}$ – praca wykonana przez Darka w ciągu godziny

$\frac{w}{10} + \frac{w}{6} = \frac{4}{15}w$ – praca wykonana wspólnie w ciągu godziny

$w : \frac{4}{15}w = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} \text{ [h]}$

Razem malowaliby 3 godziny i 45 minut.

Uczeń:

– wykorzystuje wielkości odwrotnie proporcjonalne do rozwiązywania zadań tekstowych dotyczących związku między drogą, prędkością i czasem.

Ćwiczenie 1

a) $\frac{195}{v} = \frac{260}{v+20}$
 $v = 60$

Średnie prędkości samochodów wynosiły odpowiednio 60 km/h i 80 km/h.

b) Niech v – średnia prędkość pociągu osobowego,
 $(v + 30)$ – średnia prędkość pociągu ekspresowego.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{360}{v} = \frac{360}{v+30}, v > 0$$

$$\frac{3}{4v} = \frac{1}{v+30}$$

$$3(v + 30) = 4v$$

$$v = 90$$

Średnie prędkości pociągów ekspresowego i osobowego wynosiły odpowiednio 120 km/h i 90 km/h.

Odpowiedzi do zadań

1. Niech v – średnia prędkość drugiego samochodu,
 $(v + 30)$ – średnia prędkość pierwszego samochodu.

$$\frac{\frac{3}{5} \cdot 350}{v+30} = \frac{\frac{2}{5} \cdot 350}{v}$$

$$v = 60$$

Średnie prędkości samochodów wynosiły odpowiednio 90 km/h i 60 km/h.

2. Niech v – średnia prędkość drugiego pociągu,
 $(v + 10)$ – średnia prędkość pierwszego pociągu.

$$\frac{270}{v+10} = \frac{510-270}{v}$$

$$v = 80$$

Średnie prędkości pociągów wynosiły odpowiednio 90 km/h i 80 km/h.

3. Niech v , $v + 5$ – średnie prędkości rowerzystów.

$$\frac{3 \cdot 12}{v} = \frac{4 \cdot 12}{v+5}, v > 0$$

$$v = 15$$

Średnie prędkości rowerzystów wynoszą odpowiednio 15 km/h i 20 km/h.

4. $\frac{\frac{1}{2}w}{6} = \frac{w}{12}$ – praca wykonana przez pierwszą koparkę w ciągu godziny

$\frac{\frac{1}{2}w}{9} = \frac{w}{18}$ – praca wykonana przez drugą koparkę w ciągu godziny

$\frac{w}{12} + \frac{w}{18} = \frac{5}{36}w$ – praca wykonana wspólnie w ciągu godziny

$$w : \frac{5}{36}w = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5} \text{ [h]}$$

Obie koparki potrzebują 7 godzin i 12 minut.

5. $\frac{w}{10}$ – praca wykonana przez pompę A w ciągu godziny
 $\frac{w}{6}$ – praca wykonana przez pompę B w ciągu godziny
 $\frac{w}{10} + \frac{w}{6} = \frac{4}{15}w$ – praca wykonana wspólnie w ciągu godziny

$$w : \frac{4}{15}w = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} \text{ [h]}$$

Obie pompy potrzebują 3 godzin i 45 minut.

Zadania

1. Droga między miastami A i B ma 350 km. Z tych miast wyruszyły jednocześnie naprzeciw siebie dwa samochody i jechały ze stałymi prędkościami. Pierwszy z nich jechał z prędkością o 30 km/h większą niż drugi. Samochody minęły się, gdy pierwszy pokonał $\frac{3}{5}$ trasy między miastami. Oblicz prędkości obu samochodów.

2. Trasa kolejowa z miasta A do miasta B ma 510 km. Z tych miast wyruszyły jednocześnie naprzeciw siebie dwa pociągi i jechały ze stałymi prędkościami. Prędkość pierwszego była o 10 km/h większa niż prędkość drugiego. Pociągi spotkały się w odległości 270 km od miasta A. Oblicz prędkości obu pociągów.

3. Trasa rowerowa wokół jeziora ma długość 12 km. Dwóch rowerzystów wyruszyło jednocześnie z tego samego miejsca i okrążyło jezioro w tym samym kierunku w stałym tempie. Prędkość jednego z nich była o 5 km/h mniejsza niż prędkość drugiego. Do ponownego spotkania rowerzystów doszło, gdy szybszy z nich wykonał 4 okrążenia jeziora, a wolniejszy – 3. Oblicz prędkości obu rowerzystów.

4. Pierwsza koparka wykonała połowę wykopu w ciągu 6 godzin, resztę wykopu wykonała druga koparka w ciągu 9 godzin. Ile czasu zajęłoby wykonanie wykopu, gdyby obie koparki pracowały jednocześnie, każda w swoim tempie?

5. W tabeli podano, ile czasu potrzeba na wypompowanie wody ze zbiornika przy wykorzystaniu pompy A lub B. Ile czasu zajmie wypompowanie wody, jeśli wykorzystamy jednocześnie obie pompy?

Pompa A	10 godzin
Pompa B	6 godzin

Sprawdź się

6. Droga między miastami A i B ma 210 km. Z tych miast wyjechały jednocześnie naprzeciw siebie dwa samochody. Każdy z nich jechał ze stałą prędkością, przy czym jeden jechał o 15 km/h szybciej niż drugi. Minęły się one w odległości 90 km od miasta A. Oblicz prędkość każdego z nich.

7. Rodzice Roberta mają na działce truskawki. Zebranie truskawek zajęłoby Robertowi 4 godziny, a jego młodszemu bratu – 6 godzin. Ile czasu zajmie im zbiór truskawek, jeśli będą pracować razem, każdy w swoim tempie?

6. Niech v , $(v + 15)$ – średnie prędkości samochodów.

$$\frac{90}{v} = \frac{120}{v+15}, v > 0$$

$$v = 45$$

Średnie prędkości samochodów wynoszą odpowiednio 45 km/h i 60 km/h.

7. $\frac{w}{4} + \frac{w}{6} = \frac{5}{12}w$

$$w : \frac{5}{12}w = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

Razem będą pracować 2 godziny i 24 minuty.

Powtórzenie

Zestaw I

1. Do wykresu proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{a}{x}$ należy punkt A . Podaj wzór tej proporcjonalności oraz współrzędne trzech innych punktów należących do jej wykresu.

a) $A(3, 8)$ b) $A(\frac{1}{2}, 4)$ c) $A(7, \frac{1}{28})$ d) $A(27, \frac{1}{9})$

2. Oblicz wartości funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ dla:

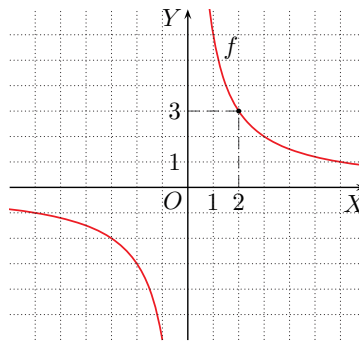
a) $x \in \{-4, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\}$, $a = -2$, c) $x \in \{-9, \frac{9}{10}, 1\frac{1}{2}\}$, $a = 1\frac{1}{5}$,
b) $x \in \{-2, -1, \frac{1}{4}\}$, $a = \frac{1}{2}$, d) $x \in \{\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{8}, \sqrt{2} - 1\}$, $a = \sqrt{2} + 1$.

3. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$. Oblicz a .

a) Które spośród punktów: $P(-8, -\frac{3}{4})$, $Q(\frac{1}{2}, 12)$, $R(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ należą do wykresu funkcji f ?

b) Odczytaj z wykresu rozwiązanie nierówności $f(x) > -3$.

c) Odczytaj z wykresu rozwiązanie nierówności $f(x) \leq 3$.



4. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -\frac{5}{x}$, której dziedziną jest zbiór D . Podaj zbiór wartości tej funkcji.

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ b) $D = (-\infty; -1)$ c) $D = [1; 5]$ d) $D = [-1; 1] \setminus \{0\}$

5. Naszkicuj wykresy funkcji f i g . Podaj dziedzinę funkcji g i równania asymptot jej wykresu.

a) $f(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = \frac{4}{x} + 3$ c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x-4}$
b) $f(x) = -\frac{3}{x}$, $g(x) = -\frac{3}{x} - 2$ d) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $g(x) = -\frac{1}{x+2}$

6. Naszkicuj wykresy funkcji f , g i h . Podaj dziedzinę i zbiór wartości każdej z tych funkcji.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = \frac{2}{x-1}$, $h(x) = \frac{2}{x-1} + 1$
b) $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = \frac{3}{x+1}$, $h(x) = \frac{3}{x+1} - 1$
c) $f(x) = -\frac{2}{x}$, $g(x) = -\frac{2}{x+2}$, $h(x) = -\frac{2}{x+2} + 3$

6. a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $h(D_h) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $h(D_h) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $h(D_h) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $y = \frac{24}{x}$,
np. $(1, 24)$, $(4, 6)$, $(8, 3)$
b) $y = \frac{2}{x}$,
np. $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(4, \frac{1}{2})$
c) $y = \frac{1}{4x}$,
np. $(1, \frac{1}{4})$, $(\frac{1}{4}, 1)$, $(2, \frac{1}{8})$
d) $y = \frac{3}{x}$,
np. $(1, 3)$, $(3, 1)$, $(6, \frac{1}{2})$
2. a) $f(-4) = \frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{2}) = 4$,
 $f(\frac{2}{3}) = -3$
b) $f(-2) = -\frac{1}{4}$, $f(-1) = -\frac{1}{2}$,
 $f(\frac{1}{4}) = 2$
c) $f(-9) = -\frac{2}{15}$, $f(\frac{9}{10}) = 1\frac{1}{3}$,
 $f(1\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}$
d) $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2 + \sqrt{2}$,
 $f(\sqrt{8}) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$,
 $f(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} + 3$
3. a) $a = 6$
a) P, Q
b) $x \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$
c) $x \in (-\infty; 0) \cup [2; \infty)$
4. a) $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
b) $f(D) = (0; 5)$
c) $f(D) = [-5; -1]$
d) $f(D) = (-\infty; -5] \cup [5; \infty)$
5. a) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x = 0$, $y = 3$
b) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
 $x = 0$, $y = -2$
c) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{4\}$, $x = 4$, $y = 0$
d) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$,
 $x = -2$, $y = 0$

Multibook

- Kreator wykresów
- Wykres funkcji wymiernej
- Równania wymierne

7. a) $(2, -\frac{1}{2})$, $f(x) = \frac{1}{x}$,
 $g(x) = -\frac{1}{x}$
 b) $(1, -2)$, $f(x) = \frac{2}{x}$,
 $g(x) = -\frac{2}{x}$
 c) $(1, 3)$, $f(x) = -\frac{3}{x}$,
 $g(x) = \frac{3}{x}$
 d) $(2, -3)$, $f(x) = \frac{6}{x}$,
 $g(x) = -\frac{6}{x}$

8. a) 0
 b) 0, 2
 c) -2, 3
 d) -1, 0, 2

9. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$,
 $f(-3) = 3$, $f(1) = \frac{1}{3}$,
 $f(3) = \frac{5}{3}$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$,
 $f(-3) = 5$, $f(1) = -11$,
 $f(3) = 5$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$,
 $f(-3) = -\frac{1}{14}$, $f(1) = \frac{1}{2}$,
 $f(3) = \frac{1}{10}$
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$,
 $f(-3) = \frac{5}{3}$, $f(1) = \frac{3}{5}$,
 $f(3) = \frac{1}{3}$

10. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$, $\frac{3}{4}$
 b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$, $\frac{3}{2}x$
 c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}, 0\}$, $\frac{12}{x(x+1)}$
 d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, $\frac{3}{2}x$
 e) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$, $6x$
 f) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$,
 $(x+2)(x-1)$

11. a) $\frac{5}{3}$
 b) 9

Zestaw II

1. a) $x = \frac{1}{2}$
 b) $x = -\frac{1}{2}$
 c) $x = \frac{3}{2}$
 d) sprzeczne
 e) $x = 4$
 f) $x = -\frac{2}{3}$
 g) sprzeczne
 h) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$

7. Prosta równoległa do osi OY przecina wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ w podanym punkcie P . W jakim punkcie ta prosta przecina wykres funkcji $g(x) = -\frac{a}{x}$?
 Podaj wzory i naszkicuj wykresy funkcji f i g .

- a) $P(2, \frac{1}{2})$ b) $P(1, 2)$ c) $P(1, -3)$ d) $P(2, 3)$

8. Które spośród liczb $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ nie należą do dziedziny wyrażenia?

- a) $\frac{16x^2 + x + 5}{x^3 - 9x^2}$ b) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^4 - 4x^3 + 4x^2}$ c) $\frac{x^5 - 3x^4 + x}{x^2 - x - 6}$ d) $\frac{2x^4 - 16x^3 + 9}{x^3 - x^2 - 2x}$

9. Wyznacz dziedzinę funkcji f . Oblicz $f(-3)$, $f(1)$ i $f(3)$.

- a) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$ c) $f(x) = \frac{x + 0,5}{4x^2 - 1}$
 b) $f(x) = \frac{x^2 + 21}{x^2 - 3}$ d) $f(x) = \frac{3x^2 - 6x}{4x^2 - 9}$

10. Wykonaj działania. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

- a) $\frac{x-4}{4x} \cdot \frac{6x}{2x-8}$ c) $\frac{6}{x^2(2x+1)} \cdot \frac{x(4x+2)}{x+1}$ e) $\frac{x^2}{x+2} : \frac{\frac{1}{2}x}{3x+6}$
 b) $\frac{x^2}{x-3} \cdot \frac{3x-9}{2x}$ d) $\frac{x^2-9}{x-3} \cdot \frac{3x}{2x+6}$ f) $\frac{x^2-4}{x+1} : \frac{x-2}{x^2-1}$

11. Wyznacz pole trapezu o podstawach a , b i wysokości h ($x > 0$).

- a) $a = 3x$, $b = x + 2$, $h = \frac{5}{6x+3}$
 b) $a = x^2 + 4x$, $b = 2x^2 + 8x$, $h = \frac{6}{x^2 + 4x}$

Zestaw II

1. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{6x-3}{x-3} = 0$ c) $\frac{\frac{2}{3}x-1}{x-\frac{1}{3}} = 0$ e) $\frac{\frac{3}{4}x-6}{\frac{3}{4}x+6} = 0$ g) $\frac{6-4x}{2x-3} = 0$
 b) $\frac{2x+1}{4x+1} = 0$ d) $\frac{x-\frac{2}{3}}{6x-4} = 0$ f) $\frac{12x+8}{\frac{3}{2}x+4} = 0$ h) $\frac{3-2x}{\frac{3}{2}-x} = 2$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{4}{x+3} = -2$ c) $\frac{x}{x-1} = 2$ e) $\frac{x+1}{3-x} = 1$ g) $\frac{-1}{x} - 4 = x$
 b) $\frac{7}{2x-1} = 5$ d) $\frac{-2x}{x+5} = -3$ f) $\frac{2x-7}{x} = -5$ h) $\frac{6}{x} + 5 = x$

3. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{-4}{x+2} = 4x$ d) $-\frac{x}{x+2} = x$ g) $x - 1 = \frac{x+4}{x-2}$
 b) $\frac{x}{x+1} = x$ e) $\frac{x}{x-4} = x - 3$ h) $2x+1 = \frac{6-8x}{4x-3}$
 c) $\frac{x^2}{x-4} = x$ f) $\frac{2x+10}{x+5} = x - 2$ i) $4x - 4 = -\frac{1}{x}$

2. a) $x = -5$

- b) $x = \frac{6}{5}$
 c) $x = 2$
 d) $x = -15$
 e) $x = 1$
 f) $x = 1$
 g) $x = -2 - \sqrt{3}$, $x = -2 + \sqrt{3}$
 h) $x = -1$, $x = 6$

3. a) $x = -1$

- b) $x = 0$
 c) $x = 0$
 d) $x = -3$, $x = 0$
 e) $x = 2$, $x = 6$
 f) $x = 4$
 g) $x = 2 - \sqrt{6}$, $x = 2 + \sqrt{6}$
 h) $x = -\frac{3}{2}$
 i) $x = \frac{1}{2}$

4. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{5x-2}{5x} = \frac{x-1}{x+1}$

d) $\frac{x-1}{x+2} = \frac{2-x}{x+1}$

g) $\frac{2x}{5x+10} = \frac{-3}{x-4}$

b) $\frac{2x}{x+4} = \frac{6x+2}{3x+6}$

e) $\frac{x+4}{x-2} = \frac{2x-4}{x+2}$

h) $\frac{2x+5}{x-1} = \frac{1}{x+1}$

c) $\frac{2x-5}{2x+1} = \frac{x-1}{x+3}$

f) $\frac{x-3}{1-x} = \frac{x+6}{x+2}$

i) $\frac{2x+1}{x-9} = \frac{3}{x-3}$

5. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2x-7}{x-3} - \frac{2x-6}{x+1} = 0$

b) $\frac{x-9}{x-5} - \frac{3x}{3x-4} = 0$

6. Rozwiąż równanie dla $a = 0$ oraz dla $a = 1$.

a) $\frac{x+8}{2x} = a$

b) $\frac{x+9}{2-x} = a$

c) $\frac{4x-4}{x} = ax$

d) $\frac{ax+2}{x+1} = x$

7. Wyznacz ze wzoru podaną zmienną.

a) $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$, b

c) $P = \pi r^2 + \pi r l$, l

e) $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, r

b) $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$, h

d) $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, h

f) $V = \frac{4}{3} \pi r^3$, r

8. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x} - 1$. Wyznacz współrzędne punktów, w których wykres funkcji f przecina prostą $y = 2$ oraz prostą $y = x$.

a) $a = 2$

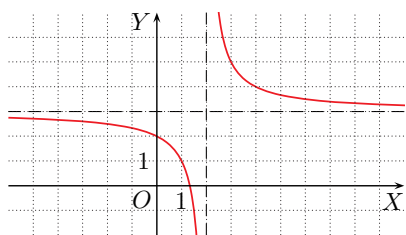
b) $a = -1$

c) $a = 1$

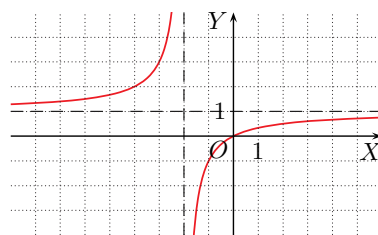
d) $a = -2$

9. Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \frac{-2}{x+2} + 1$ oraz $g(x) = \frac{2}{x-2} + 3$.

A.



B.



a) Dopasuj wzór do wykresu. Podaj miejsca zerowe funkcji f i g .

b) Rozwiąż równania $g(x) = x$ oraz $f(x) = -x$.

10. Rozwiąż równanie.

a) $|x-8| = 3$

c) $|x+6| - 2 = 0$

e) $6 - |x+6| = 0$

b) $|x - \frac{1}{2}| = \frac{1}{4}$

d) $|x-9| - 9 = 0$

f) $4 + |x-1| = 0$

11. Rozwiąż równanie.

a) $|2x-6| = 4$

c) $|4-2x| = 7$

e) $|x-3| + |3x-9| = 8$

b) $|4x+8| = 2$

d) $|-4x-1| = 9$

f) $|6x+3| - |4x+2| = 4$

8. a) z prostą $y = 2$: $(\frac{2}{3}, 2)$; z prostą $y = x$: $(1, 1)$, $(-2, -2)$

b) z prostą $y = 2$: $(-\frac{1}{3}, 2)$; z prostą $y = x$: brak

c) z prostą $y = 2$: $(\frac{1}{3}, 2)$; z prostą $y = x$: $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$, $(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$

d) z prostą $y = 2$: $(-\frac{2}{3}, 2)$; z prostą $y = x$: brak

9. a) $A - g, \frac{4}{3}$; $B - f, 0$

b) $g(x) = x$ dla $x = 1, x = 4$,

$f(x) = -x$ dla $x = -3, x = 0$

4. a) $x = \frac{1}{4}$

b) $x = -\frac{4}{7}$

c) $x = 7$

d) $x = -\frac{\sqrt{10}}{2}, x = \frac{\sqrt{10}}{2}$

e) $x = 0, x = 14$

f) $x = -1 - \sqrt{7}, x = -1 + \sqrt{7}$

g), h), i) sprzeczne

5. a) $x = \frac{25}{7}$

b) $x = \frac{9}{4}$

6. a) $x = -8$ dla $a = 0$,

$x = 8$ dla $a = 1$

b) $x = -9$ dla $a = 0$,

$x = -3\frac{1}{2}$ dla $a = 1$

c) $x = 1$ dla $a = 0$,

$x = 2$ dla $a = 1$

d) $x = -2, x = 1$ dla $a = 0$,

$x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$ dla $a = 1$

7. a) $b = \frac{2P}{h} - a$

b) $h = \frac{2P}{a+b}$

c) $l = \frac{P - \pi r^2}{\pi r}$

d) $h = \frac{3V}{\pi r^2}$

e) $r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$

f) $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

10. a) $x = 5, x = 11$

b) $x = \frac{1}{4}, x = \frac{3}{4}$

c) $x = -8, x = -4$

d) $x = 0, x = 18$

e) $x = -12, x = 0$

f) sprzeczne

11. a) $x = 1, x = 5$

b) $x = -\frac{5}{2}, x = -\frac{3}{2}$

c) $x = -\frac{3}{2}, x = \frac{11}{2}$

d) $x = -\frac{5}{2}, x = 2$

e) $x = 1, x = 5$

f) $x = -\frac{5}{2}, x = \frac{3}{2}$

**Przykład**

Z miasta A do oddalonego o 640 km miasta B wyruszył samochód jadący ze średnią prędkością v km/h. Równocześnie z miasta B tą samą drogą wyruszył samochód do miasta A ze średnią prędkością o 20 km/h większą. Samochody te minęły się w odległości 280 km od miasta A . Oblicz średnie prędkości obu samochodów.

Aby rozwiązać to zadanie, można ułożyć i rozwiązać równanie wymierne lub układ równań.

I sposób

Korzystamy z zależności $t = \frac{s}{v}$, gdzie t – czas, s – droga, a v – prędkość.

Pierwszy samochód, jadąc z prędkością v km/h, do momentu minięcia z drugim samochodem przejechał 280 km. Zatem otrzymujemy równość $t = \frac{280}{v}$.

Drugi samochód, jadąc z prędkością $(v + 20)$ km/h, w tym samym czasie przejechał $640 - 280 = 360$ [km]. Zatem otrzymujemy równość $t = \frac{360}{v + 20}$.

Rozwiązujemy równanie wymierne:

$$\begin{aligned}\frac{280}{v} &= \frac{360}{v + 20} \\ 360v &= 280(v + 20) \\ 360v &= 280v + 5600 \\ 80v &= 5600 \\ v &= 70\end{aligned}$$

II sposób

Korzystamy z zależności $s = v \cdot t$, gdzie s – droga, v – prędkość, a t – czas.

Pierwszy samochód, jadąc z prędkością v km/h, pokonał w czasie t drogę 280 km. Zatem $280 = v \cdot t$.

Drugi samochód, jadąc z prędkością $(v + 20)$ km/h, pokonał w tym samym czasie drogę $640 - 280 = 360$ [km]. Zatem $360 = (v + 20) \cdot t$.

Podstawiamy $vt = 280$ i otrzymujemy:

$$\begin{aligned}360 &= 280 + 20t \\ 20t &= 80 \\ t &= 4\end{aligned}$$

Podstawiamy $t = 4$ do pierwszego równania i otrzymujemy $v = 70$.

Odpowiedź: Średnie prędkości samochodów wynosiły 70 km/h i 90 km/h.

→ Zadanie 23, str. 124



W zadaniach 1–10, 13.2 i 15.2 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Liczba 3 jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = \frac{-4}{x-p} + q$ dla

- A. $p = -3, q = 0$ C. $p = 4, q = -3$
 B. $p = 2, q = -1$ D. $p = 1, q = 2$

Zadanie 2 (0–1)

Funkcją rosnącą w każdym z przedziałów $(-\infty; -2)$ i $(-2; \infty)$ jest funkcja

- A. $f(x) = \frac{1-\sqrt{2}}{x+2}$ B. $f(x) = \frac{6}{x+2}$ C. $f(x) = \frac{2-\sqrt{3}}{x+2}$ D. $f(x) = \frac{-2+\sqrt{5}}{x+2}$

Zadanie 3 (0–1)

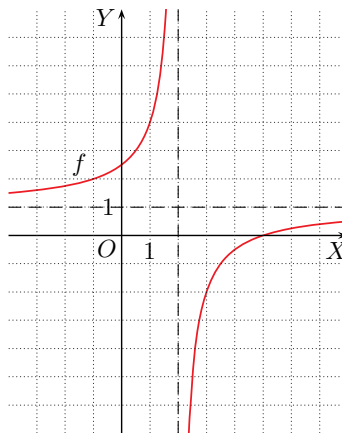
Miejsce zerowe funkcji $f(x) = \frac{a}{x+b} + 1$, której wykres przedstawiono na rysunku obok, jest równe 5. Zatem

- A. $a = 2$ i $b = 2$ C. $a = 3$ i $b = -2$
 B. $a = -2$ i $b = 2$ D. $a = -3$ i $b = -2$

Zadanie 4 (0–1)

Punkty $P(1, 2)$ i $Q(3, 4)$ należą do wykresu funkcji

- A. $f(x) = \frac{3}{x-2} - 1$ C. $f(x) = \frac{-3}{x-4} + 1$
 B. $f(x) = \frac{-3}{x-2} + 1$ D. $f(x) = \frac{2}{x+3} - 1$

**Zadanie 5 (0–1)**

Jeśli $\frac{a(n+1)}{n+2} - \frac{n-2}{n-1} = 0$, to

- A. $a = \frac{(n-2)(n+1)}{(n+2)(n-1)}$ B. $a = \frac{(n+2)(n-1)}{(n-2)(n+1)}$ C. $a = \frac{n^2+4}{n^2+1}$ D. $a = \frac{n^2-4}{n^2-1}$

Zadanie 6 (0–1)

Rozwiązaniem równania $\frac{x+2}{x+3} = \frac{x+4}{x+1}$ jest liczba

- A. $-\frac{7}{2}$ B. $-\frac{5}{2}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

Zadanie 7 (0–1)

Liczby -5 i 1 są rozwiązaniami równania

- A. $\frac{8-8x}{x-1} = x-3$ C. $\frac{6x+30}{x+5} = x+5$
 B. $\frac{2-6x}{x+1} = x-3$ D. $\frac{x+5}{x+1} = x+5$

7. A. Liczba 1 nie należy do dziedziny wyrażenia $\frac{8-8x}{x-1}$.

B. Liczba -5 jest rozwiązaniem równania, gdyż:

$$\frac{2-6 \cdot (-5)}{-5+1} = -5-3$$

$$\frac{32}{-4} = -8$$

$$-8 = -8$$

Liczba 1 jest rozwiązaniem równania, gdyż:

$$\frac{2-6 \cdot 1}{1+1} = 1-3$$

$$\frac{-4}{2} = -2$$

$$-2 = -2$$

2. Funkcja $f(x) = \frac{a}{x+2}$ rośnie w każdym z przedziałów $(-\infty; -2)$ i $(-2; \infty)$ dla $a < 0$.

3. Asymptotą pionową wykresu funkcji f jest prosta $x = 2$, więc $b = -2$.
 Dla $a = 3$ mamy $f(5) > 0$, zatem $a = -3$.

$$5. \frac{a(n+1)}{n+2} = \frac{n-2}{n-1} \Big/ \cdot \frac{(n+2)}{n+1}$$

$$a = \frac{(n-2)(n+2)}{(n-1)(n+1)} = \frac{n^2-4}{n^2-1}$$

$$6. x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1\}$$

$$(x+2)(x+1) = (x+3)(x+4)$$

$$x^2 + 3x + 2 = x^2 + 7x + 12$$

$$-4x = 10$$

$$x = -\frac{5}{2}$$



8. $f(3) = \frac{a}{3} = 1$, więc $a = 3$.
Z wykresu funkcji g odczytujemy jej współczynnik kierunkowy: $b = \frac{1}{3}$.

9. $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$
 $x(x-1) = 2(x+1)$
 $x^2 - x = 2x + 2$
 $x^2 - 3x - 2 = 0$
 $\Delta = 9 + 8 = 17 = 0$
 $\sqrt{\Delta} = \sqrt{17}$
 $x_1 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}, x_2 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$

10. $\frac{\frac{2}{3}x-3}{x-2} = 0, x \neq 2$
 $\frac{2}{3}x - 3 = 0$
 $x = \frac{9}{2} = a$
 $\frac{\frac{3}{2}x-2}{x-3} = 0, x \neq 3$
 $\frac{3}{2}x - 2 = 0$
 $x = \frac{4}{3} = b$
 $a + b = \frac{9}{2} + \frac{4}{3} = \frac{27+8}{6} = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}$

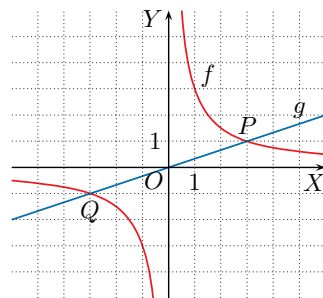
11. $F = \frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{x+2}{x-2}$
 $G = \frac{(x-3)^2}{(x+3)(x-3)} = \frac{x-3}{x+3}$

12. Rozwiązania równania:
 $x = -3\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$

Zadanie 8 (0-1)

Wykresy funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ i $g(x) = bx$ przecinają się w punktach $P(3, 1)$ i $Q(-3, -1)$ (rysunek obok). Wynika stąd, że $a + b$ jest równe

- A. $-2\frac{2}{3}$ B. 0 C. $3\frac{1}{3}$ D. 6



Zadanie 9 (0-1)

Jednym z rozwiązań równania $\frac{x-1}{x+1} = \frac{2}{x}$ jest

- A. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{3-\sqrt{11}}{2}$ C. $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ D. $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$

Zadanie 10 (0-1)

Liczba a jest rozwiązaniem równania $\frac{\frac{2}{3}x-3}{x-2} = 0$, a liczba b jest rozwiązaniem równania $\frac{\frac{3}{2}x-2}{x-3} = 0$. Suma liczb a i b jest równa

- A. $5\frac{5}{6}$ B. $5\frac{2}{3}$ C. $5\frac{1}{2}$ D. 5

Zadanie 11 (0-1)

Dane są dwa wyrażenia wymierne F i G określone dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 2, 3\}$.

$$F = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4}, G = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$$

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz odpowiedź 1., 2. albo 3.

Iloczyn $F \cdot G$ jest równy

A.	$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 6},$	a iloraz $\frac{F}{G}$ jest równy	1.	$\frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + 5x + 6}.$
			2.	$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6}.$
			3.	$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 5x + 6}.$
B.	$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 + x + 6},$			

Zadanie 12 (0-1)

Dane jest równanie $|x + \sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wszystkie rozwiązania tego równania

są liczbami niewymiernymi.	P	F
należą do przedziału $(-2; 2)$.	P	F

**Zadanie 13**

Dane są dwa wyrażenia wymierne P i Q określone dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3, 4\}$.

$$P = \frac{x+4}{9-x^2}, \quad Q = \frac{x^2-3x}{x-4}$$

Zadanie 13.1 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Dla $x = -\frac{9}{2}$ oba wyrażenia przyjmują wartości dodatnie.	P	F
Dla $x = \frac{9}{2}$ oba wyrażenia przyjmują wartości ujemne.	P	F

Zadanie 13.2 (0-1)

Iloczyn wyrażeń P i Q zapisano w postaci $\frac{-x^2+kx}{(x+3)(x-4)}$, gdzie k jest liczbą rzeczywistą. Wynika stąd, że

- A. $k = -6$ B. $k = -4$ C. $k = 4$ D. $k = 6$

Zadanie 14 (0-2)

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Dla argumentu równego -2 wartość równą -1 przyjmuje funkcja

- A. $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ C. $f(x) = \frac{-3x+2}{x+4}$ E. $f(x) = \frac{-2x-1}{-2x+3}$
 B. $f(x) = \frac{x+4}{2x+2}$ D. $f(x) = \frac{-3x-1}{2x-5}$ F. $f(x) = \frac{x-4}{-4x-2}$

Zadanie 15

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{\sqrt{2}-2x}{\sqrt{2x}-2}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}\}$.

Zadanie 15.1 (0-2)

Wpisz obok rozpoczętych zdań w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–E.

Funkcja f dla $x = \sqrt{2} - 1$ przyjmuje wartość równą	D
Funkcja f dla $x = \sqrt{2} + 1$ przyjmuje wartość równą	A

- A. $-1 - \sqrt{2}$ B. $-2 + \sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $1 - \sqrt{2}$ E. $2 + \sqrt{2}$

Zadanie 15.2 (0-1)

Wykres funkcji f przecina osie układu współrzędnych w punktach $(a, 0)$ i $(0, b)$.

Iloczyn ab jest równy

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} 13.2. P \cdot Q &= \\ &= \frac{-x-4}{(x+3)(x-3)} \cdot \frac{x(x-3)}{x-4} = \\ &= \frac{-x^2-4x}{(x+3)(x-4)} \end{aligned}$$

$$15. f(x) = \frac{1-\sqrt{2}x}{x-\sqrt{2}}$$

$$15.2. f(a) = \frac{1-\sqrt{2}a}{a-\sqrt{2}} = 0 \text{ dla } a = \frac{1}{\sqrt{2}}, f(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$16. \frac{a}{2\sqrt{5}-3} = 2\sqrt{5} + 3$$

$$a = (2\sqrt{5}-3)(2\sqrt{5}+3) =$$

$$= 4 \cdot 5 - 9 = 11$$

$$17. x = 0, x = 2 - 2\sqrt{3}$$

18. Prosta $x = 2$ jest asymptotą poziomą funkcji f , zatem $b = 2$.

18.1. Funkcja f maleje w przedziale $[\frac{1}{2}; 6]$, zatem jej najmniejsza wartość w tym przedziale jest równa:

$$f(6) = \frac{3}{12} + 2 = 2\frac{1}{4}$$

$$18.2. x = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}, x = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$19. x = \sqrt{2}$$

20. Do wykresu funkcji f należy tyle punktów o obu współrzędnych całkowitych, ile liczba 4 ma dzielników całkowitych.

Dzielniki całkowite liczby 4: $-4, -2, -1, 1, 2, 4$.

$$21. x \in (-1, \infty)$$

Przypadek 1.

Krótszy bok drugiego prostokąta ma długość $2x + 2$.

Wówczas:

$$\frac{x}{x+4} = \frac{2x+2}{x+4}$$

$$x = 2x + 2$$

$$x = -2$$

Sprzeczne z założeniem.

Przypadek 2.

Krótszy bok drugiego prostokąta ma długość $x + 4$.

Wówczas:

$$\frac{x}{x+4} = \frac{x+4}{2x+2}$$

$$x(2x+2) = (x+4)^2$$

$$2x^2 + 2x = x^2 + 8x + 16$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$\Delta = 36 + 64 = 100$$

$$x = -2 \text{ lub } x = 8$$

Założenie spełnia tylko $x = 8$.

Suma pól prostokątów:

$$8 \cdot 12 + 12 \cdot 18 = 12 \cdot 26 =$$

$$= 312 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Zadanie 16 (0-2)

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Do jej wykresu należy punkt $(2\sqrt{5}-3, 2\sqrt{5}+3)$. Oblicz a .

Zadanie 17 (0-2)

Rozwiąż równanie $|x-1+\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1$.

Zadanie 18

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{3}{2x} + b$.

Zadanie 18.1 (0-2)

Oblicz najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $[\frac{1}{2}; 6]$.

Zadanie 18.2 (0-2)

Rozwiąż równanie $f(x) = x$.

Zadanie 19 (0-2)

Rozwiąż równanie $\frac{x}{\sqrt{2x-4}} = \frac{1}{x-2\sqrt{2}}$.

D Zadanie 20 (0-3)

Uzasadnij, że do wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{x} + 1$ należy dokładnie sześć punktów o obu współrzędnych całkowitych.

Zadanie 21 (0-4)

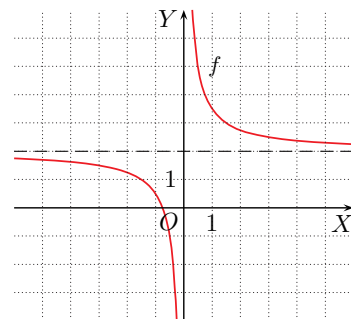
Dane są dwa prostokąty: jeden o bokach x cm i $(x+4)$ cm oraz drugi o bokach $(x+4)$ cm i $(2x+2)$ cm. Stosunek długości krótszego boku do dłuższego boku dla obu prostokątów jest taki sam. Oblicz sumę pól tych prostokątów.

Zadanie 22 (0-4)

Pierwszą połowę trasy pociąg przebył z prędkością v , a drugą połowę – z prędkością dwa razy mniejszą. Cała trasa ma długość 140 km. Wyznacz wzór opisujący zależność między czasem t , w jakim pociąg przebył całą trasę, a prędkością v . Oblicz t dla $v = 120$ km/h.

Zadanie 23 (0-4) → Przykład, str. 120

Kajakarz płynie po stojącej wodzie z prędkością 10 km/h. Gdy płynął z prądem rzeki, pokonał trasę o 50% dłuższą, niż byłby w stanie pokonać w tym samym czasie, gdyby płynął pod prąd. Oblicz prędkość prądu rzeki.



$$22. t(v) = \frac{70}{v} + \frac{70}{\frac{v}{2}} = \frac{210}{v}, v > 0$$

$$t(120) = \frac{210}{120} = 1\frac{45}{60}$$

$$t = 1 \text{ h } 45 \text{ min}$$

23. Oznaczmy przez v prędkość prądu rzeki. Wówczas:

$$10 + v = 1,5(10 - v)$$

$$10 + v = 15 - 1,5v$$

$$2,5v = 5$$

$$v = 2 \text{ km/h}$$