

Równania i nierówności

2

Umiejętności

Po szkole podstawowej uczeń:

- sprawdza, czy dana liczba jest rozwiązaniem równania (pierwszego, drugiego lub trzeciego stopnia) z jedną niewiadomą,
- rozwiązuje równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą metodą równań równoważnych,
- rozwiązuje równania, które po prostych przekształceniach algebraicznych, są równaniami pierwszego stopnia z jedną niewiadomą,
- przedstawia część wielkości jako procent tej wielkości,
- oblicza liczbę a równą p procent danej liczby b ,
- oblicza, jaki procent danej liczby b stanowi liczba a ,
- oblicza liczbę b , której p procent jest równe a ,
- stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, również w przypadkach wielokrotnych podwyżek lub obniżek danej wielkości,
- rozwiązuje zadania tekstowe za pomocą równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym z obliczeniami procentowymi,
- przekształca proste wzory, aby wyznaczyć zadaną wielkość we wzorach geometrycznych (np. pól figur) i fizycznych (np. dotyczących prędkości, drogi i czasu),
- zaznacza na osi liczbowej zbiory liczb spełniających warunek taki, jak $x \geq 1,5$ lub $x < -\frac{4}{7}$.

Po tym dziale uczeń:

- rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia i zaznacza zbiory ich rozwiązań na osi liczbowej,
- sprawdza, czy dana liczba jest rozwiązaniem nierówności pierwszego stopnia,
- rozwiązuje zadania tekstowe z zastosowaniem nierówności pierwszego stopnia,
- zaznacza przedziały liczbowe na osi liczbowej,
- wyznacza część wspólną, sumę i różnicę zbiorów skończonych oraz przedziałów liczbowych,
- wykorzystuje własności wartości bezwzględnej do algebraicznego rozwiązywania równań (nierówności) z wartością bezwzględną typu: $|x - a| = b$, $|x - a| < b$, $|x - a| > b$,
- sprawdza, czy dana para liczb jest rozwiązaniem układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi,
- rozwiązuje układ dwóch równań liniowych metodami podstawiania i przeciwnych współczynników,
- rozpoznaje układy: oznaczony, nieoznaczony i sprzeczny,
- rozwiązuje zadania tekstowe z zastosowaniem układu dwóch równań liniowych.

1. Warto powtórzyć – rozwiązywanie równań liniowych z jedną niewiadomą

Definicja

Równanie, które można zapisać w postaci $ax + b = 0$, gdzie x jest niewiadomą, a i b są liczbami danymi, nazywamy **równaniem liniowym** z jedną niewiadomą.

Liczby a i b występujące w zapisie $ax + b = 0$ nazywamy **współczynnikami** równania liniowego.

Aby **rozwiązać równanie liniowe** z jedną niewiadomą (inaczej: znaleźć liczbę, która **spełnia** to równanie), można:

- do obu jego stron dodać tę samą liczbę albo to samo wyrażenie liniowe z jedną zmienną;
- od obu jego stron odjąć tę samą liczbę albo to samo wyrażenie liniowe z jedną zmienną;
- obie jego strony pomnożyć przez tę samą liczbę różną od zera;
- obie jego strony podzielić przez tę samą liczbę różną od zera.

Po wykonaniu dowolnej z wymienionych czynności otrzymamy **równanie równoważne**, czyli mające identyczny zbiór rozwiązań z równaniem danym na początku – przed przekształceniami.

◀ 1.4. Rozwiąż równanie.

a) $5x - 2 = 3$

b) $2x + 11 = 5$

c) $7x - 8 = 13$

d) $4x - 3 = 2x + 7$

e) $9x + 1 = 4x - 9$

f) $2x + 3(x - 4) = 4x - 5$

Odp.: a) 1 b) -3 c) 3 d) 5

e) -2 f) 7

Przykład 1 ◀ zad. 1.4

Rozwiążemy podane równania, komentując równoważne przekształcenia.

Rozwiązanie

a) $x - 4 = 0$

$$x - 4 + 4 = 4$$

$$x = 4$$

← do obu stron równania dodajemy 4

b) $2x + 1 = 7$

$$2x + 1 - 1 = 7 - 1$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

← od obu stron równania odejmujemy 1

← obie strony równania dzielimy przez 2

c) $-3x = 15 - 6x$
 $-3x + 6x = 15 - 6x + 6x$ ← do obu stron równania dodajemy $6x$
 $3x = 15$ ← obie strony równania dzielimy przez 3
 $x = 5$

d) $5x + 2\sqrt{5} = 3 - \sqrt{7}x$ ← do obu stron równania dodajemy $\sqrt{7}x - 2\sqrt{5}$
 $5x + 2\sqrt{5} + \sqrt{7}x - 2\sqrt{5} = 3 - \sqrt{7}x + \sqrt{7}x - 2\sqrt{5}$
 $5x + \sqrt{7}x = 3 - 2\sqrt{5}$ ← wyłączamy x przed nawias
 $x(5 + \sqrt{7}) = 3 - 2\sqrt{5}$ ← obie strony równania dzielimy przez $5 + \sqrt{7}$
 $x = \frac{3 - 2\sqrt{5}}{5 + \sqrt{7}}$

Dodawanie do obu stron równania tej samej liczby (wyrażenia) potocznie nazywamy **przenoszeniem tej liczby** (wyrażenia) na drugą stronę równania ze zmienionym znakiem. Podobnie – odejmowanie od obu stron równania tej samej liczby (wyrażenia) potocznie nazywamy **przenoszeniem tej liczby** (wyrażenia) na drugą stronę równania ze zmienionym znakiem.

Przykład 2 ◀ zad. 1.6

Rozwiążemy podane równania.

Rozwiązanie

a) $2(x - \sqrt{3}) + 1 = 2x$ ← wykonujemy działania po lewej stronie równania
 $2x - 2\sqrt{3} + 1 = 2x$ ← przenosimy wyrazy z niewiadomą na lewą,
a liczby na prawą stronę znaku równości
 $2x - 2x = 2\sqrt{3} - 1$ ← redukujemy wyrazy podobne
 $0 = 2\sqrt{3} - 1$ ← sprzeczność

Odp.: Równanie jest sprzeczne, czyli nie ma rozwiązań.

b) $3(2 - x) + 4x = 2 - x$
 $6 - 3x + 4x + x = 2$
 $2x = 2 - 6$
 $2x = -4$
 $x = -2$

Odp.: Równanie ma jedno rozwiązanie: $x = -2$.

c) $3x + 2(\sqrt{2} + 2) = 1 + 2\sqrt{2} + 3(x + 1)$
 $3x + 2\sqrt{2} + 4 = 1 + 2\sqrt{2} + 3x + 3$
 $3x - 3x = 4 + 2\sqrt{2} - 4 - 2\sqrt{2}$
 $0 = 0$ ← tożsamość (prawda dla każdego x)

Odp.: Równanie jest tożsamościowe, czyli każda liczba jest jego rozwiązaniem: $x \in \mathbf{R}$.

◀ 1.6. Rozwiąż równanie.

a) $6x + 2(x - 7) + 5 = 8x - 11$
b) $x - (7 - 4x) = 3(x - 5) + 8$
c) $4(2x - 1) - 7 = 2(4x - 6) + 1$
d) $3(2x - 1) + 2(3x + 5) = 4(2x + 8) - 2(3 - 2x)$
e) $3(3x + 5) + 5(3 - 5x) = 4(6 - 4x) + 6$
f) $\frac{1}{5}(5 - 10x) + 0,2(10 + 5x) = \frac{1}{2} - 2(x - 3)$

Odp.: a) brak rozwiązań b) 0
c) $x \in \mathbf{R}$ d) brak rozwiązań
e) $x \in \mathbf{R}$ f) 3,5

◀ 1.9. Patrz s. 105.

Odpowiedzi i rozwiązania

1.1. F, P, P

1.2. P, F, P

1.3. F, P, F

1.4. a) 1 b) -3 c) 3 d) 5
e) -2 f) 7**Przykład 3** ◀ zad. 1.9Rozwiążemy równanie $(2x + 1)^2 - (x - 3)^2 = (2x + 1)(2x - 1) - x^2 + 3$.**Rozwiązanie**

Stosujemy wzory skróconego mnożenia: kwadrat sumy, kwadrat różnicy po lewej stronie równania; różnica kwadratów po prawej stronie równania.

$$\begin{aligned} (4x^2 + 4x + 1) - (x^2 - 6x + 9) &= (4x^2 - 1) - x^2 + 3 \\ 4x^2 + 4x + 1 - x^2 + 6x - 9 &= 4x^2 - 1 - x^2 + 3 \\ 10x &= 10, \text{ stąd } x = 1 \end{aligned}$$

Odp.: $x = 1$ **Zadania****1.1.** Oceń prawdziwość podanych zdań.

Podane równania są równoważne:

A. $\frac{3}{4}x = \frac{4}{3}, \quad \frac{4}{3}x = \frac{3}{4}$.

B. $4(x + 1) - 12 = 4, \quad 2(x - 3) - 3 = x - 6$.

C. $\sqrt{3}(x + 5) = 2\sqrt{27}x, \quad 2\sqrt{27}x + \sqrt{3} = \sqrt{3}(x + 6)$.

1.2. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Podane równania są równoważne:

A. $5x + \sqrt{3} = 2(\sqrt{3} + x), \quad \sqrt{3}x + 2 = 3$.

B. $2(x + 7) - 7(x + 1) = 3(x + 5), \quad \frac{5(x + 1)}{7} + \frac{x - 1}{2} = 17$.

C. $\frac{x + 3}{2} - \frac{x - 1}{3} = 1\frac{1}{2}, \quad \frac{2x + 5}{4} = \frac{2x - 5}{2} + 4\frac{3}{4}$.

1.3. Liczba a spełnia równanie $x + \frac{3x - 8}{4} + \frac{x - 10}{6} = 4$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Liczba a spełnia równanie $x + 3(x - 1) = 2(x + 5) - 7$.

B. Liczba a spełnia równanie $\frac{x + 2}{2} = \frac{x + 5}{3}$.

C. Liczba a spełnia równanie $x(2x - 3) + 1 = 2(x - 3)(x + 4)$.

1.4. Rozwiąż równanie.

a) $5x - 2 = 3$

c) $7x - 8 = 13$

e) $9x + 1 = 4x - 9$

b) $2x + 11 = 5$

d) $4x - 3 = 2x + 7$

f) $2x + 3(x - 4) = 4x - 5$

1.5. Rozwiąż równanie.

- a) $12 - (3x + 5) = 5x - (2x - 1)$
 b) $7(x + 3) - 3(x - 1) = 5(x + 3)$
 c) $5 - 2(x - 1) + \frac{1}{2}(2x - 4) = 5(x - 3) + 8$
 d) $\frac{1}{2} + 2(3 - 2x) + 3(1 - x) = 5\frac{1}{2} - 2x$
 e) $3\left(x - \frac{2}{3}\right) - \frac{3}{4}(12 - 4x) = \frac{1}{2}(2x - 12)$
 f) $5\left(x - \frac{1}{6}\right) - 2\left(x + \frac{5}{6}\right) = 6 + 5\left(x - \frac{1}{2}\right)$

1.6. Rozwiąż równanie.

- a) $6x + 2(x - 7) + 5 = 8x - 11$
 b) $x - (7 - 4x) = 3(x - 5) + 8$
 c) $4(2x - 1) - 7 = 2(4x - 6) + 1$
 d) $3(2x - 1) + 2(3x + 5) = 4(2x + 8) - 2(3 - 2x)$
 e) $3(3x + 5) + 5(3 - 5x) = 4(6 - 4x) + 6$
 f) $\frac{1}{5}(5 - 10x) + 0,2(10 + 5x) = \frac{1}{2} - 2(x - 3)$

1.7. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{5-x}{5} = \frac{x+3}{15}$
 b) $\frac{8x-1}{6} = \frac{x-2}{3} + \frac{1}{2}(2x+1)$
 c) $\frac{4x-8}{3} = 6(x+2)$
 d) $2 - \frac{7-x}{3} = \frac{3x+2}{5} - 1$
 e) $3\left(\frac{x+5}{6} - \frac{3x+1}{2}\right) + 11 = 4(1-x)$
 f) $\frac{5x-1}{3} + \frac{7-x}{2} = 2\left(3 + \frac{x}{2}\right)$

1.8. W równaniu $3(x+1) - 2(x-3) = \boxed{?}$ zastąp $\boxed{?}$ takim wyrażeniem, aby otrzymane równanie

- a) było tożsamościowe.
 b) było sprzeczne.
 c) miało rozwiązanie równe 2.

1.9. Rozwiąż równanie.

- a) $(x-1)(x+6) - (x-2)^2 = 2(3x+4)$
 b) $x(2x+1) = 4(x-2) + 2(x+2)^2$
 c) $(7-2x)^2 - (x+1)(x-5) = 3(x-3)^2 + 3$
 d) $5(x+1)^2 - 3(x+4)^2 - 1 = 2(x+5)^2 - 6(7x+5)$
 e) $(3x-2)^2 - (2x+1)^2 = (2x+1)(2x-1) + x^2 - 12$
 f) $(2x-3)(2x+3) + 5(x-1)^2 = (3x-2)(3x-2)$

1.5. a) 1 b) 9 c) 2 d) 0,8

e) 1 f) -3

1.6. a) brak rozwiązań b) 0

c) $x \in \mathbf{R}$ d) brak rozwiązań

e) $x \in \mathbf{R}$ f) 3,5

1.7. a) 3 b) $x \in \mathbf{R}$ c) $-3\frac{1}{7}$

d) 1 e) brak rozwiązań f) 17

1.8. a) np. $x+9$ b) np. $\frac{1}{2}(2x-6)$

c) np. $3x+5$

1.9. a) 6 b) 0 c) 4 d) 8 e) 1

f) 4

Uwagi metodyczne

Po przypomnieniu równań liniowych wprowadzamy nierówności liniowe. Należy założyć, że uczniowie nie słyszeli o nierównościach liniowych i zmianie zwrotu na przeciwny. Wyjaśniając te zagadnienia w podręczniku, odwołujemy się do intuicyjnego pojęcia „uporządkowania liczb na osi liczbowej”.

2. Nierówności pierwszego stopnia

Umiejętności:

- rozwiązywanie nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą
- sprawdzanie, czy dana liczba jest rozwiązaniem nierówności

Jedną z podstawowych operacji w matematyce jest porównywanie liczb. Na przykład nierówności $2 < 3$, $-5 < 0$, $4 \leq 5$, $\sqrt{11} > 3$ są prawdziwe, a nierówności $1 > 1$, $\sqrt{1,0002} < 1$ są fałszywe.

Znak $\leq$ oznacza „mniejsze lub równe”. Zatem nierówność $4 \leq 5$ jest prawdziwa, podobnie jak nierówność $4 \leq 4$.

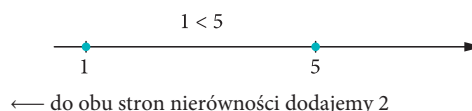
Jeżeli do obu stron nierówności dodamy (lub od obu stron odejmiemy) tę samą liczbę, to otrzymane sumy (różnice) zachowają uporządkowanie na osi liczbowej.

Na przykład:

- $1 < 5$

$$1 + 2 < 5 + 2$$

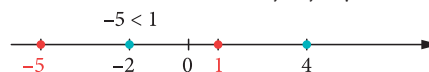
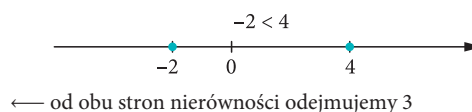
$$3 < 7$$



- $-2 < 4$

$$-2 - 3 < 4 - 3$$

$$-5 < 1$$

**Wniosek**

- Do obu stron nierówności możemy dodać tę samą liczbę.
 - Od obu stron nierówności możemy odjąć tę samą liczbę.
- Po wykonaniu tych działań **zwrot nierówności się nie zmienia**.

Jeżeli pomnożymy dwie liczby przez 2, to otrzymane iloczyny zachowają uporządkowanie na osi liczbowej.

Na przykład:

- $-1 < 2$

$$(-1) \cdot 2 < 2 \cdot 2$$

$$-2 < 4$$

← obie strony nierówności mnożymy przez 2

ZZ i KPU

temat 2.5

Multiteka

- Nierówność liniowa

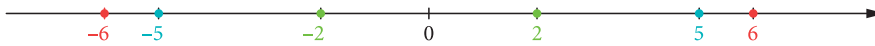
dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.2

Generator
testów i sprawdzianów

- $3 < 4$
 $3 \cdot 2 < 4 \cdot 2$ ← obie strony nierówności mnożymy przez 2
 $6 < 8$
- $-3 < -1$
 $(-3) \cdot 2 < (-1) \cdot 2$ ← obie strony nierówności mnożymy przez 2
 $-6 < -2$

Zwrot nierówności nie zmienia się przy mnożeniu obu jej stron przez dowolną liczbę dodatnią.

Kiedy mnożymy liczbę przez -1 , otrzymujemy liczbę do niej przeciwną. Na osi liczbowej ilustracją tego działania jest symetria środkowa względem punktu 0.



Po wykonaniu takiej symetrii dwie liczby zmieniają kolejność występowania na osi, np.:

- $2 < 5$, a po symetrii $-5 < -2$, co można zapisać również w postaci $-2 > -5$,
- $-2 < 5$, po symetrii $-5 < 2$, czyli $2 > -5$,
- $-6 < -2$, po symetrii $2 < 6$, czyli $6 > 2$.

Tę obserwację krótko podsumujemy: kiedy mnożymy obie strony nierówności przez -1 , musimy zmienić jej zwrot.

Mnożenie stron nierówności przez dowolną liczbę ujemną, np. przez -7 , możemy wykonać w dwóch etapach. Najpierw mnożymy przez -1 , a następnie przez 7. Przy pierwszej czynności zmienimy zwrot nierówności na przeciwny, drugie mnożenie zwrotu już nie zmieni.

Zauważmy jeszcze, że dzielenie można zastąpić mnożeniem przez odwrotność dzielnika, więc opisane wyżej własności dotyczą również dzielenia.

Wniosek

- Obie strony nierówności możemy pomnożyć (podzielić) przez tę samą liczbę **dodatnią**. Po wykonaniu takiego działania **zwrot nierówności się nie zmienia**.
- Obie strony nierówności możemy pomnożyć (podzielić) przez tę samą liczbę **ujemną**. Po wykonaniu takiego działania **zwrot nierówności zmieni się na przeciwny**.

Zajmiemy się teraz sytuacją, gdy po jednej lub po obu stronach znaków $>$, $<$, $\leq$, $\geq$ pojawiają się niewiadome.

Przykład 1

Bartek miał banknot 20-złotowy. Kupił kilka batoników po 2 zł każdy. Kasjerka wydała mu ponad 12 zł reszty.

- Ile batoników mógł kupić Bartek?
- Jaki warunek spełnia niewiadoma liczba x batoników?

Rozwiązanie

- Jeżeli Bartek otrzymał ponad 12 zł reszty, to za batoniki zapłacił mniej niż 8 zł. Mógł zatem kupić co najwyżej 3 batoniki.
- Warunek podany w przykładzie można zapisać w postaci nierówności:
 $20 - x \cdot 2 > 12$.

Nauczmy się teraz rozwiązywać takie nierówności.

Dwa wyrażenia algebraiczne połączone znakiem $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ nazywamy nierównością algebraiczną. Przykłady nierówności algebraicznych:

Nierówności, w których występuje znak $<$ lub $>$, nazywamy **ostrymi**.
 Nierówności, w których występuje znak $\leq$ lub $\geq$, nazywamy **nieostrymi**.

$$5x - 7 < 6 - 2x, \quad 4\frac{1}{2} - 2x \geq 3y, \quad 4z - 3 \leq 5, \quad 9 - 2x^2 \geq 7$$

Nierówność z niewiadomą x , którą można przedstawić w jednej z postaci $ax + b > 0$ lub $ax + b \geq 0$, gdzie $a, b \in \mathbf{R}$, nazywamy **nierównością liniową** z jedną niewiadomą. Jeśli dodatkowo założymy, że $a \neq 0$, to nierówność taką nazywamy nierównością pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.

Mówimy, że **liczba spełnia nierówność** (jest rozwiązaniem nierówności), jeżeli po podstawieniu tej liczby w miejsce niewiadomej otrzymamy nierówność prawdziwą.

Na przykład liczba 1 spełnia nierówność $5x - 7 < 6 - 2x$, bo nierówność $5 \cdot 1 - 7 < 6 - 2 \cdot 1$, czyli $-2 < 4$, jest prawdziwa, natomiast liczba 2 tej nierówności nie spełnia, bo nierówność $5 \cdot 2 - 7 < 6 - 2 \cdot 2$, czyli $3 < 2$, jest fałszywa.

Rozwiązanie nierówności liniowej polega na wskazaniu **zbioru wszystkich liczb**, które tę nierówność spełniają. Często przedstawiamy ten zbiór na osi liczbowej.

Z rozważań przedstawionych na początku tematu wynika, że aby rozwiązać nierówność, można:

- do obu jej stron dodać tę samą liczbę albo to samo wyrażenie liniowe z jedną zmienną; od obu jej stron odjąć tę samą liczbę albo to samo wyrażenie liniowe z jedną zmienną;
- obie jej strony pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę dodatnią, pozostawiając bez zmiany zwrot nierówności;
- obie jej strony pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę ujemną, zmieniając równocześnie zwrot nierówności na przeciwny.

Po wykonaniu dowolnej z wymienionych czynności otrzymamy **nierówność równoważną**, czyli mającą identyczny zbiór rozwiązań z nierównością początkową, od której rozpoczynaliśmy rozwiązywanie zadania.

Definicja

Dwie nierówności nazywamy **równoważnymi**, gdy mają ten sam zbiór rozwiązań.

Sposób rozwiązywania nierówności pokażemy na przykładach. Zaczniemy od najprostszego zadania.

Przykład 2 ◀ zad. 2.6 a–d

Zaznaczmy na osi liczbowej zbiór rozwiązań podanej nierówności.

a) $x > 1$



Puste kółeczko oznacza, że liczba 1 nie spełnia nierówności, czyli **nie należy** do zbioru rozwiązań. Zbiór rozwiązań nierówności tworzą wszystkie liczby większe od 1.

b) $x \leq 4$



Zamalowane kółeczko oznacza, że liczba 4 spełnia nierówność, czyli **należy** do zbioru rozwiązań. Zbiór rozwiązań nierówności tworzą: liczba 4 i wszystkie liczby od niej mniejsze.

Przykład 3 ◀ zad. 2.6 e–j

Rozwiążemy podaną nierówność i zaznaczmy zbiór jej rozwiązań na osi liczbowej.

Dodawanie (odejmowanie) tej samej liczby do (od) obu stron nierówności potocznie nazywamy (podobnie jak przy wykonywaniu takich samych operacji na równaniach) **przenoszeniem liczby z przeciwnym znakiem na drugą stronę**.

◀ 2.6. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności.

e) $x - 4 > 0$

h) $2x - 13 > 3x - 15$

f) $2x + 4 \geq 6$

i) $3(x + 2) > 2(x + 1) + 4$

g) $7x - 15 \leq -1$

j) $2(x - 3) \leq x - 4$

Odp.: e) $x > 4$ f) $x \geq 1$ g) $x \leq 2$ h) $x < 2$ i) $x > 0$ j) $x \leq 2$

◀ 2.6. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności.

a) $x > -3$

b) $x < 5$

c) $x \geq 2$

d) $x \leq -1$

Rozwiązanie

a) $x - 4 < 7$

$$x - 4 + 4 < 7 + 4$$

$$x < 11$$

Odp.: $x < 11$

← do obu stron nierówności dodajemy 4



b) $20 - x \cdot 2 > 12$

$$-2x > 12 - 20$$

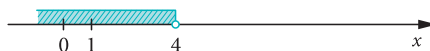
$$-2x > -8$$

$$x < 4$$

Odp.: $x < 4$

← przenosimy liczbę 20 z przeciwnym znakiem na drugą stronę

← wykonujemy odejmowanie po prawej stronie

← dzielimy obie strony nierówności przez -2 , zmieniamy zwrot

c) $\frac{x-6}{2} + x(x+2) \leq (x+3)^2 + 2$

← mnożymy obie strony nierówności przez 2

$$x - 6 + 2x(x + 2) \leq 2(x^2 + 6x + 9) + 4$$

← wykonujemy działania po obu stronach

$$x - 6 + 2x^2 + 4x \leq 2x^2 + 12x + 18 + 4$$

$$5x - 6 + 2x^2 \leq 2x^2 + 12x + 22$$

$$5x + 2x^2 - 2x^2 - 12x \leq 22 + 6$$

$$-7x \leq 28$$

← obie strony nierówności dzielimy przez -7 , zmieniamy zwrot

$$x \geq -4$$



Odp.: $x \geq -4$

d) $2(x + 1) < 2x - 2$

$$2x + 2 < 2x - 2$$

$$2x - 2x < -2 - 2$$

$$0 < -4$$

Otrzymana nierówność jest fałszywa. Żadna liczba rzeczywista nie spełnia podanej nierówności algebraicznej.

Odp.: Nierówność nie ma rozwiązań.

e) $5x - 2 > 5(x - 1) + 1$

$$5x - 2 > 5x - 5 + 1$$

$$5x - 5x > -4 + 2$$

$$0 > -2$$

Otrzymana nierówność jest prawdziwa. Każda liczba rzeczywista spełnia podaną nierówność algebraiczną.

Odp.: Zbiorem rozwiązań nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych.

Zadania

2.1. Wymień liczby ze zbioru $A = \{-3, -2, 0, 1, 3, 7\}$ spełniające nierówność.

- a) $x < 1$ b) $x > 0$ c) $x \geq 3$ d) $x \leq -2$

2.2. Dana jest nierówność $0 \cdot (x + 3) < 5$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Dla $x = -2$ nierówność jest prawdziwa.
 B. Dla $x = 11$ nierówność jest fałszywa.
 C. Nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej.

2.3. Sprawdź, czy liczba 2 należy do zbioru rozwiązań podanej nierówności.

- a) $4(x-1)(x+1) > (2x-1)^2 + 3$ c) $7x - 0,25 \leq (x+8)^2 - 4x$
 b) $3 - (3x+2) \leq \frac{x-5}{2}$ d) $\frac{4-x}{2} \leq \frac{3x-2}{4}$

2.4. Sprawdź, czy liczba -5 należy do zbioru rozwiązań podanej nierówności.

- a) $5\left(x - 1\frac{1}{2}\right) \geq 6\frac{1}{2} - 2x$ c) $7x + 5\frac{1}{4} < 3x - 2,75$
 b) $6(x-1) - 1\frac{1}{3} \leq 3x + 1\frac{2}{3}$ d) $(x+5)^2 - x^2 > 15 - 2x$

2.5. Wskaż największą liczbą całkowitą należącą do zbioru rozwiązań nierówności

$$\frac{x}{2} \geq \frac{2x}{3} + \frac{1}{4}.$$

- A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

2.6. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności.

- a) $x > -3$ f) $2x + 4 \geq 6$
 b) $x < 5$ g) $7x - 15 \leq -1$
 c) $x \geq 2$ h) $2x - 13 > 3x - 15$
 d) $x \leq -1$ i) $3(x+2) > 2(x+1) + 4$
 e) $x - 4 > 0$ j) $2(x-3) \leq x - 4$

2.7. Rozwiąż nierówność.

- a) $3x - 1 > 2$ e) $2x - 3 < x + 5$
 b) $7x + 12 \geq -2$ f) $4(x-1) > 3(x-2)$
 c) $5x - 17 \leq 3$ g) $3(2x+1) + 5x < 2(3x+2) - 11$
 d) $2x + 1\frac{1}{2} > 7,5$ h) $6(1-x) + 2(x+1) > 10 - 5x$

Odpowiedzi i rozwiązania

2.1. a) $-3, -2, 0$ b) $1, 3, 7$
 c) $3, 7$ d) $-3, -2$

2.2. P, F, P

2.3. a) nie b) tak c) tak
 d) tak

2.4. a) nie b) tak c) tak
 d) nie

2.5. A

2.6. e) $x > 4$ f) $x \geq 1$ g) $x \leq 2$
 h) $x < 2$ i) $x > 0$ j) $x \leq 2$

2.7. a) $x > 1$ b) $x \geq -2$
 c) $x \leq 4$ d) $x > 3$ e) $x < 8$
 f) $x > -2$ g) $x < -2$ h) $x > 2$

2.8. a) $x > -3$ **b)** $x \geq 4$

c) $x > 4$ **d)** $x < 2$ **e)** $x > 0$

f) $x < -\frac{4}{5}$ **g)** $x > -25$

h) $x \geq 2\frac{2}{3}$ **i)** $x \geq 6$ **j)** $x \geq -3\frac{13}{20}$

2.9. a) $x \geq 4$ **b)** $x > 1$

c) $x \geq -1$ **d)** $x > 2$ **e)** $x < 0$

f) $x \leq 8$ **g)** $x > -1\frac{1}{4}$ **h)** $x \geq 3$

2.10. a) $x < 2\frac{3}{4}$ **b)** $x < 2$

c) $x \geq 0$ **d)** $x \geq -2$

2.11. $x < \frac{1}{3}; -8$

2.12. $x > -\frac{1}{5}; -1$

2.13. $x \leq -1\frac{2}{5}; -2$

2.8. Rozwiąż nierówność.

a) $8 - 3(3x + 1) < 5(3 - x) + 2$

b) $5(x - 1) - 4 \geq 3(x + 1) - 2(x - 2)$

c) $(x - 3)(x + 2) > (x - 6)(x - 7)$

d) $\frac{2x - 4}{4} > x - 2$

e) $\frac{3x - 2}{2} - 1 < \frac{2}{3}(2x - 3) + x$

f) $\frac{x + 2}{3} - (1 - x) < \frac{x - 2}{2}$

g) $\frac{3(x + 1)}{2} - 7x < 4 - 5(x - 2)$

h) $1 + x - \frac{5x - 2}{4} \geq \frac{7 - 2x}{2}$

i) $2,5 - x - \frac{2x - 7}{2} \leq 1 + \frac{2 - 5x}{4}$

j) $\frac{1 - 4x}{3} + x + 2 \geq -2(x + 2) + \frac{1}{4}$

2.9. Rozwiąż nierówność i przedstaw zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

a) $(x - 3)(x + 2) \geq (x - 6)(x - 7)$

b) $(x - 3)^2 - 2(x - 1)(x + 1) < 4 - (1 - x)^2$

c) $9(x - 1)(x + 1) + 6 \leq (3x + 2)^2 - 5x$

d) $(2x - 1)^2 - (x + 1)^2 > 3x(x - 5) + 18$

e) $(x + 1)^2 < (x - 1)^2$

f) $(x + 1)^2 - 5(x - 2) \geq (x + \sqrt{13})(x - \sqrt{13})$

g) $(2x - 1)^2 - 1 + 5(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2) < 4x^2$

h) $3 - (2x - 5)(5 + 2x) \leq 1 - (2x - 3)^2$

2.10. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{(x - 3)(x + 3)}{3} - \frac{(x - 4)^2}{2} < -\frac{1}{6}x^2$

b) $(x - 2)^2 + 1 > \frac{x - 8}{3} - (1 - x)(1 + x)$

c) $1 - (3x - 2)^2 \geq \frac{x - 36}{3} - 9(x + 1)(x - 1)$

d) $(x + 2)^2 - \frac{2x - 1}{3} \geq (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) - \frac{1}{3}$

2.11. Rozwiąż nierówność $2x - \frac{(3x - 2)(3x + 2)}{3} > 3 - 3(x - 1)^2$. Sprawdź, które z liczb: $1\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{5}$, -8 należą do zbioru rozwiązań tej nierówności.

2.12. Rozwiąż nierówność $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) + 3(x - 1)^2 - 5 < -x - \frac{1}{2}(8 - 8x^2)$ i podaj największą liczbę całkowitą, która tej nierówności nie spełnia.

2.13. Rozwiąż nierówność $-3(x - 3)^2 + \left(-3x + 3\frac{1}{2}\right)^2 \geq 6(x + 1)^2 + 0,25$ i podaj największą liczbę całkowitą, która tę nierówność spełnia.

- D 2.14.** Wykaż, że każda liczba mniejsza od -2 spełnia nierówność

$$(3x - 8)(x - 4) - \frac{(5 - 2x)^2 - 11}{2} > 2(x + 5)^2 - (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}).$$

- 2.15.** Wyznacz wszystkie liczby naturalne spełniające podaną nierówność.

$$\frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{2} \geq 2(x+2) - 5$$

- 2.16.** Ile czekoladek znajduje się w pudełku, jeżeli w pięciu takich pudełkach jest mniej niż 111 czekoladek, a w siedmiu jest ich więcej niż 151?

- 2.17.** Samochodem dostawczym można przewozić 1200 kg towaru. Po załadowaniu cukru okazało się, że samochód został wypełniony w 55% ładowności. Ile co najwyżej 10,5-kilogramowych worków z mąką można wstawić, aby nie przekroczyć dopuszczalnej ładowności?

- * **2.18.** Suma dwóch kolejnych liczb naturalnych nieparzystych nie przekracza 16. Wyznacz wszystkie pary takich liczb.
- * **2.19.** Różnica między kwadratem liczby naturalnej parzystej i kwadratem następnej liczby naturalnej parzystej jest większa od liczby -36 . Wyznacz wszystkie pary takich liczb.

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

- Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $-2x < 12$.
A. $x < -6$ B. $x \leq -6$ C. $x > -6$ D. $x \geq -6$
- Która nierówność nie ma rozwiązań?
A. $x + 3 < x + 5$ B. $x - 3 < x - 5$ C. $3x < 2x$ D. $3x \leq 2x$
- Która liczba nie należy do zbioru rozwiązań nierówności $5(3-x)+1 > 2(x-6)+4$?
A. -4 B. -2 C. 2 D. 4
- Rozwiąż nierówność $2(3x+5) - 3(11-5x) \geq 4(-7+4x)$.
- Rozwiąż nierówność $(4x-3)(3x+5) + 3x \leq (2x+4)(6x-5)$.
- Rozwiąż nierówność $x - \frac{(2x-3)(2x+3)}{2} \geq \frac{1}{2} - 2(x-3)^2$. Podaj najmniejszą liczbę naturalną, która tej nierówności nie spełnia.
- Rozwiąż nierówność $\frac{x+2}{4} + (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) + 1 < (x+2)^2 - \frac{4x-1}{3}$. Podaj wszystkie liczby całkowite ujemne spełniające tę nierówność.

2.14. $(3x - 8)(x - 4) - \frac{(5 - 2x)^2 - 11}{2} > 2(x + 5)^2 - (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$

$$3x^2 - 12x - 8x + 32 - \frac{25 - 20x + 4x^2 - 11}{2} > 2(x^2 + 10x + 25) - (x^2 - 5)$$

$$3x^2 - 20x + 32 - 7 + 10x - 2x^2 > 2x^2 + 20x + 50 - x^2 + 5$$

$$-30x > 30$$

$$x < -1$$

Tę nierówność spełnia każda liczba mniejsza od -1 , spełnia ją zatem każda liczba mniejsza od -2 .

2.15. 0 i 1

2.16. 22

2.17. 51

2.18. 7 i 9, 5 i 7, 3 i 5, 1 i 3

2.19. Dwie kolejne liczby naturalne parzyste mają postacie $2n$ i $2n+2$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Po rozwiązaniu nierówności $(2n)^2 - (2n+2)^2 > -36$ otrzymujemy $n < 4$. Szukane liczby to: 0 i 2, 2 i 4, 4 i 6 lub 6 i 8.

Prosto do matury

- C
- B
- D
- $x \geq -1$
- brak rozwiązań
- $x \leq 2; 3$
- $x > -2; -1$

3. Przedziały liczbowe

Umiejętności:

- rozwiązywanie układów nierówności
- posługiwanie się pojęciem przedziału liczbowego
- zaznaczanie przedziałów na osi liczbowej

Zadanie polegające na szukaniu wspólnych rozwiązań kilku nierówności nazywamy rozwiązywaniem układu tych nierówności. Mówimy, że **liczba spełnia układ nierówności**, jeżeli należy do zbioru rozwiązań każdej nierówności danego układu.

Rozwiązanie układu nierówności polega na wskazaniu **zbioru wszystkich liczb**, które ten układ spełniają. Często przedstawiamy ten zbiór na osi liczbowej.

Sposób rozwiązywania układu nierówności pokażemy na przykładach.

Zacznijmy od najprostszego zadania.

Przykład 1 ◀ zad. 3.2

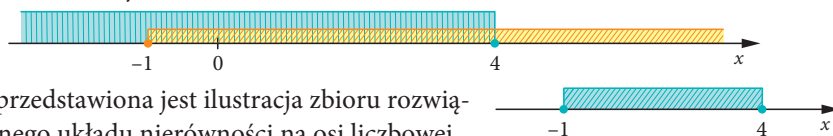
Przedstawimy na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb spełniających następujący układ nierówności:

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

◀ klamra oznacza, że obie nierówności muszą być spełnione równocześnie

Rozwiązanie

Wygodnie jest zacząć od zaznaczenia zbiorów rozwiązań poszczególnych nierówności na osi liczbowej.



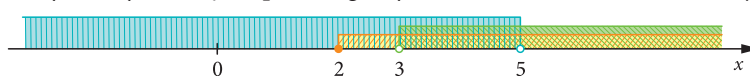
Obok przedstawiona jest ilustracja zbioru rozwiązań danego układu nierówności na osi liczbowej.

Przykład 2 ◀ zad. 3.3

Rozwiążemy układ nierówności $\begin{cases} x > 3 \\ x \geq 2 \\ x < 5 \end{cases}$

Rozwiązanie

Zaznaczamy zbiory rozwiązań poszczególnych nierówności na osi liczbowej.



Z rysunku odczytujemy, że każdą z trzech nierówności spełniają liczby większe od 3 i jednocześnie mniejsze od 5. Zatem $x > 3$ i $x < 5$.

◀ 3.2. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań układu nierówności.

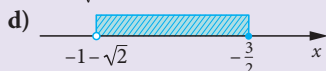
a) $\begin{cases} x \geq 2 \\ x < 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x > -3 \\ x \geq 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \leq 1 \\ x > -\sqrt{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \leq -\frac{3}{2} \\ x \geq -1 - \sqrt{2} \end{cases}$

Odp.:



ZZ i KPU

temat 2.3

Multiteka

- Działania na przedziałach

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.3

Generator
testów i sprawdzianów

◀ 3.3. Rozwiąż układ nierówności.

a) $\begin{cases} x > -2 \\ x \geq -3 \\ x < 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq 0 \\ x > -2 \end{cases}$

Odp.: a) $x \in (-2; 1)$ b) $\langle 0; 4 \rangle$

Obok przedstawiona jest ilustracja zbioru rozwiązań na osi liczbowej.



Układ nierówności $\begin{cases} x > 3 \\ x < 5 \end{cases}$ możemy zapisać w postaci **podwójnej nierówności**:

$$3 < x < 5$$

W ostatnim zapisie obowiązuje zasada, że zwroty obu nierówności są zgodne.

Przypomnijmy, że zbiór B jest **podzbiorem zbioru** A ($B \subset A$), jeżeli każdy element zbioru B jest także elementem zbioru A .

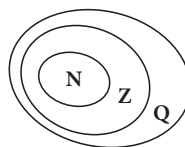
Przykład 3

Pozналиście następujące podzbiory zbioru liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$:

$\mathbf{N}$ – zbiór liczb naturalnych,

$\mathbf{Z}$ – zbiór liczb całkowitych,

$\mathbf{Q}$ – zbiór liczb wymiernych.



Zdanie $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ ilustruje prostą obserwację, że każda liczba naturalna jest liczbą całkowitą, a każda liczba całkowita jest liczbą wymierną.

Pewne podzbiory zbioru liczb rzeczywistych nazywamy **przedziałami liczbowymi**.

W poniższych definicjach zakładamy, że a i b oznaczają liczby rzeczywiste oraz $a < b$.

Definicja

Przedziałem otwartym $(a; b)$ nazywamy zbiór liczb rzeczywistych x spełniających podwójną nierówność $a < x < b$.



Definicja

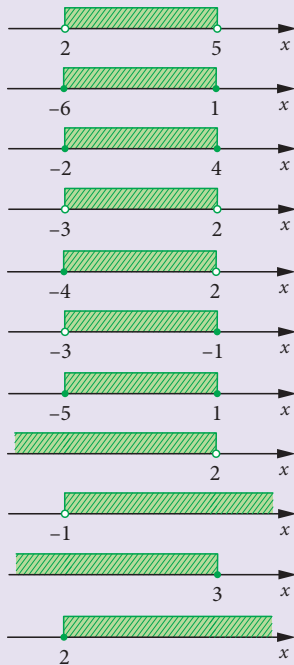
Przedziałem domkniętym $[a; b]$ nazywamy zbiór liczb rzeczywistych x spełniających podwójną nierówność $a \leq x \leq b$.



◀3.4. Zaznacz na osi liczbowej podane przedziały.

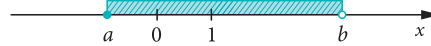
$(2; 5)$, $\langle -6; 1 \rangle$, $\langle -2; 4 \rangle$, $\langle -3; 2 \rangle$,
 $\langle -4; 2 \rangle$, $\langle -3; -1 \rangle$, $\langle -5; 1 \rangle$,
 $(-\infty; 2)$, $(-1; \infty)$, $(-\infty; 3)$,
 $(2; \infty)$

Odp.:



Definicja

Przedziałem lewostronnie domkniętym $\langle a; b \rangle$ nazywamy zbiór liczb rzeczywistych x spełniających podwójną nierówność $a \leq x < b$.



Definicja

Przedziałem prawostronnie domkniętym $(a; b]$ nazywamy zbiór liczb rzeczywistych x spełniających podwójną nierówność $a < x \leq b$.



Do zapisania zbioru rozwiązań pojedynczej nierówności wprowadzamy następujące oznaczenia przedziałów:

- $x > a$ $(a; \infty)$
- $x < a$ $(-\infty; a)$
- $x \geq a$ $\langle a; \infty)$
- $x \leq a$ $(-\infty; a]$

Zapis $(a; \infty)$ czytamy: „przedział otwarty od a do nieskończoności”. Podobnie zapis $(-\infty; a)$ czytamy „przedział otwarty od minus nieskończoności do a ”.

Symbol ∞ **nie oznacza** żadnej liczby.



Przykład 4 ◀ zad. 3.4

Zaznaczymy na osi liczbowej przedział

- a) $\langle -1; 4 \rangle$ b) $(-\infty; 3)$ c) $\langle 0; 2\sqrt{2} \rangle$ d) $\left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$.

Rozwiązanie

- a) $\langle -1; 4 \rangle$
- b) $(-\infty; 3)$

c) $\langle 0; 2\sqrt{2} \rangle$

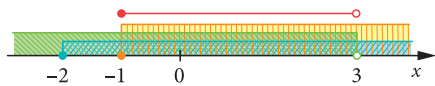


d) $\left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$

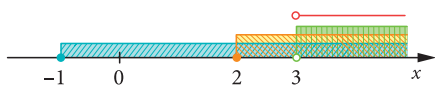
**Przykład 5** ◀ zad. 3.5

Zapiszemy zbiór rozwiązań układu nierówności w postaci przedziału liczbowego (jeżeli to możliwe).

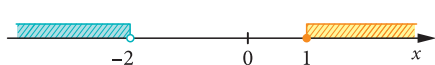
a)
$$\begin{cases} x < 3 \\ x \geq -2 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Odp.: $x \in \langle -1; 3 \rangle$

b)
$$\begin{cases} x > 3 \\ x \geq 2 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Odp.: $x \in (3; \infty)$

c)
$$\begin{cases} x < -2 \\ x \geq 1 \end{cases}$$



Odp.: Ten układ nierówności nie ma rozwiązania.

Przykład 6 ◀ zad. 3.11

Zaznaczmy na osi liczbowej zbiór rozwiązań podwójnej nierówności

$$x - 2 \leq 3x + 4 \leq 2x + 8$$

i zapiszemy go w postaci przedziału.

Rozwiązanie

$$\begin{cases} x - 2 \leq 3x + 4 \\ 3x + 4 \leq 2x + 8 \end{cases}$$

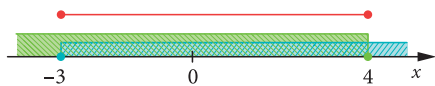
◀ nierówność podwójną zapisujemy w postaci układu

$$\begin{cases} x - 3x \leq 4 + 2 \\ 3x - 2x \leq 8 - 4 \end{cases}$$

◀ rozwiązujemy każdą z nierówności

$$\begin{cases} -2x \leq 6 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

Odp.: $x \in \langle -3; 4 \rangle$

◀ 3.5. Podaj zbiór rozwiązań układu nierówności w postaci przedziału.

a)
$$\begin{cases} 2x - 3 < -5 \\ 3x - 2 < 7 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - 6 < x + 4 \\ x - 2 \geq 10 - 3x \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3x - 5 \geq 2x + 1 \\ x + 1 \geq 2x - 3 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 6x + 2 > 0 \\ 4x - 8 < 0 \end{cases}$$

Odp.: a) $(-\infty; -1)$ b) $\langle 3; 10 \rangle$ c) brak rozwiązań d) $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$

◀ 3.11. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań podwójnej nierówności i zapisz go w postaci przedziału.

a) $2 < x + 3 < 6$

b) $-1 \leq 2x + 3 < 3$

c) $x + 3 \leq 2x + 1 \leq x + 7$

d) $3 \leq x + 1 < 9$

e) $-3 < 2 - x < 5$

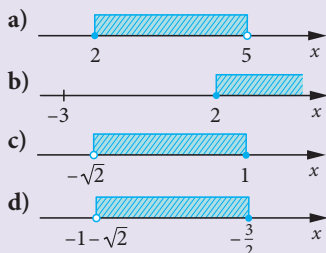
f) $x - 2 \leq 3x + 4 < 2x + 8$

Odp.: a) $(-1; 3)$ b) $\langle -2; 0 \rangle$ c) $(2; 6)$ d) $\langle 2; 8 \rangle$ e) $(-3; 5)$ f) $\langle -3; 4 \rangle$

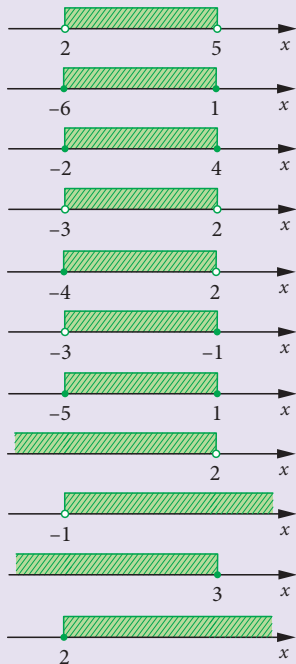
Odpowiedzi i rozwiązania

3.1. F, P, P

3.2.

3.3. a) $x \in (-2; 1)$ b) $\langle 0; 4 \rangle$

3.4.



3.5. a) $(-\infty; -1)$ b) $\langle 3; 10 \rangle$
 c) brak rozwiązań d) $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$

3.6. a) 0, 1, 2, 3, 4 b) 0, 1

3.7. a) -3, -2, -1, 0, 1, 2
 b) 0, 1, 2

Zadania

3.1. Dany jest przedział $(-5; 3)$. Oceń prawdziwość podanych zdań.A. Przedział ten jest zbiorem rozwiązań układu nierówności $\begin{cases} x \leq 3 \\ -x > -5 \end{cases}$.

B. Do tego przedziału należy 8 liczb całkowitych.

C. Przedział ten jest zbiorem rozwiązań nierówności $-3 \leq -x < 5$.

3.2. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań układu nierówności.

a) $\begin{cases} x \geq 2 \\ x < 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \leq 1 \\ x > -\sqrt{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x > -3 \\ x \geq 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \leq -\frac{3}{2} \\ x \geq -1 - \sqrt{2} \end{cases}$

3.3. Rozwiąż układ nierówności.

a) $\begin{cases} x > -2 \\ x \geq -3 \\ x < 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq 0 \\ x > -2 \end{cases}$

3.4. Zaznacz na osi liczbowej podane przedziały.

$(2; 5)$, $\langle -6; 1 \rangle$, $\langle -2; 4 \rangle$, $\langle -3; 2 \rangle$, $\langle -4; 2 \rangle$, $\langle -3; -1 \rangle$, $\langle -5; 1 \rangle$,
 $(-\infty; 2)$, $(-1; \infty)$, $(-\infty; 3)$, $\langle 2; \infty \rangle$

3.5. Podaj zbiór rozwiązań układu nierówności w postaci przedziału (jeżeli to możliwe).

a) $\begin{cases} 2x - 3 < -5 \\ 3x - 2 < 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 5 \geq 2x + 1 \\ x + 1 \geq 2x - 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 6 < x + 4 \\ x - 2 \geq 10 - 3x \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x + 2 > 0 \\ 4x - 8 < 0 \end{cases}$

3.6. Wyznacz wszystkie liczby naturalne spełniające układ nierówności.

a) $\begin{cases} 2x + 5 > 1 \\ 3x - 2 < 13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x - 2 < 6 \\ 5x + 2 \geq -3 \end{cases}$

3.7. Wyznacz wszystkie liczby całkowite spełniające układ nierówności.

a) $\begin{cases} 3x - 8 < 0 \\ 2x + 6 \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 5 < 0 \\ 3x + 1 > 0 \end{cases}$

3.8. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań układu nierówności i zapisz ten zbiór w postaci przedziału (jeżeli to możliwe).

a)
$$\begin{cases} 2(7-x) + 1 \geq 3 - 4(x-2) \\ 6(x+2) - 5x < 3x + 10 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 9(x+1) - 7(x+1) > 3(x+2) + 1 \\ \frac{1}{2}(x-2) + 5 \geq 4 - 1\frac{1}{2}x \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \frac{x-2}{3} > \frac{3-x}{5} - 1 \\ (3x-1)^2 - 1 \leq 3(x-2)^2 + 6(x^2+3) \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} (5-x)^2 + 3(x-1)^2 < (2x+1)(2x-1) - 3 \\ 2(x-3)^2 - (4-x)^2 < 5 + (x+1)^2 \end{cases}$$

3.9. Znajdź największą liczbę x spełniającą podany układ warunków.

a) $\frac{2x+1}{3} - \frac{3x-1}{2} > 1$ i x jest liczbą całkowitą.

b) $\frac{7x+1}{9} - \frac{4x-5}{5} > 1$ i x jest liczbą naturalną.

3.10. Znajdź najmniejszą liczbę x spełniającą podany układ warunków.

a) $2(3x-1) - 7 > 4x+5$ i x jest liczbą nieparzystą.

b) $\frac{1}{2}(x-4) - (3-1,5x) < 6$ i x jest liczbą naturalną.

3.11. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań podwójnej nierówności i zapisz go w postaci przedziału.

a) $2 < x+3 < 6$

d) $3 \leq x+1 < 9$

b) $-1 \leq 2x+3 < 3$

e) $-3 < 2-x < 5$

c) $x+3 \leq 2x+1 \leq x+7$

f) $x-2 \leq 3x+4 < 2x+8$

3.12. Zbadaj, czy zachodzi któryś ze związków: $A \subset B$, $B \subset A$, $A = B$.

a) $A = \{a, b, c\}$

$B = \{b, c, d\}$

b) $A = \{x, y, z\}$

$B = \emptyset$

c) $A = \{x: x \in \mathbf{N} \text{ i } x > 0\}$

$B = \{y: y \in \mathbf{R} \text{ i } y > 0\}$

d) $A = \{x: x \in \mathbf{R} \text{ i } x > 2\}$

$B = (3; \infty)$

e) $A = \langle -5; 2,5 \rangle$

$B = (-\infty; \sqrt{7})$

f) $A = \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{-8}; \infty\right)$

$B = \left(\log_9 \frac{1}{9}; \infty\right)$

3.8. a) $(1; \infty)$ **b)** brak rozwiązań

c) $\left(\frac{1}{2}; 5\right)$ **d)** $(2; \infty)$

3.9. a) -1 **b)** 4

3.10. a) 9 **b)** 0

3.11. a) $(-1; 3)$ **b)** $\langle -2; 0 \rangle$

c) $(2; 6)$ **d)** $\langle 2; 8 \rangle$ **e)** $(-3; 5)$

f) $\langle -3; 4 \rangle$

3.12. a) żaden **b)** $B \subset A$

c) $A \subset B$ **d)** $B \subset A$ **e)** $A \subset B$

f) $A = B$



Prosto do matury

Prosto do matury

1. D

2. B

3. B

4. $\left(-1\frac{1}{2}; 2\right)$

5. 0, 1, 2

6. $\left(-\infty; 1\frac{6}{13}\right)$

7. $n - 7 \leq 3n + 4 < 3 - n$
 $n - 7 \leq 3n + 4$ i $3n + 4 < 3 - n$
 $-2n \leq 11$ i $4n < -1$
 $n \geq -5\frac{1}{2}$ i $n < -\frac{1}{4}$
 $n \in \left(-5\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$

W otrzymanym przedziale nie ma liczb naturalnych, więc nie istnieje liczba naturalna spełniająca daną nierówność.

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż przedział, który jest zbiorem rozwiązań układu nierówności.

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x > 0 \end{cases}$$

A. $(0; 3)$ B. $\langle 0; 3 \rangle$ C. $\langle 0; 3 \rangle$ D. $(0; 3)$ 2. Ile liczb całkowitych należy do przedziału $(-2; 3)$?A. 4 C. 6
B. 5 D. nieskończenie wiele3. Wskaż układ nierówności, którego zbiorem rozwiązań jest przedział $\langle -5; 2 \rangle$.A. $\begin{cases} x \geq -5 \\ -x \geq -2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x \geq -5 \\ -x > -2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} -x \leq 5 \\ -x \geq -2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} -x < 5 \\ -x \geq -2 \end{cases}$

4. Podaj zbiór rozwiązań układu nierówności w postaci przedziału.

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x < \frac{1}{2} \\ 17x + 20 > 27x \end{cases}$$

5. Wyznacz wszystkie liczby całkowite spełniające układ nierówności.

$$\begin{cases} 5x + 3 > 0 \\ 7 - 2x \geq 0 \\ 11 - 4x > 0 \end{cases}$$

6. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań układu nierówności:

$$\begin{cases} \frac{2x-5}{3} < \frac{5-3x}{2} - 1 \\ (2x-3)^2 \geq 10 - (5-2x)(5+2x) \end{cases}$$

i zapisz ten zbiór w postaci przedziału.

D 7. Wykaż, że nie istnieje rozwiązanie podwójnej nierówności:

$$n - 7 \leq 3n + 4 < 3 - n$$

gdzie n oznacza liczbę naturalną.

4. Działania na zbiorach

Umiejętności:

- wykonywanie działań na zbiorach (suma, część wspólna, różnica zbiorów)
- stosowanie symboli działań na zbiorach

Zdefiniujemy trzy działania na zbiorach. Omawiane przykłady dotyczą zbiorów liczbowych, ale wprowadzane definicje stosuje się nie tylko w matematyce.

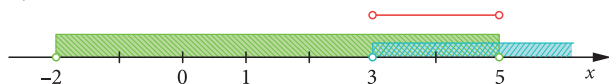
Część wspólna (iloczyn) zbiorów

Przykład 1

Rozwiążemy układ nierówności $\begin{cases} -2 < x < 5 \\ x > 3 \end{cases}$, zaznaczając odpowiednie przedziały na osi liczbowej.

Rozwiązanie

Zbiorem rozwiązań pierwszej nierówności jest przedział liczbowy $(-2; 5)$, a drugiej – przedział $(3; \infty)$.



Do zbioru rozwiązań układu należą wszystkie liczby spełniające pierwszą i drugą nierówność jednocześnie, a więc takie, które są elementami obydwu przedziałów. Tworzą one przedział liczbowy $(3; 5)$.

Odp.: $x \in (3; 5)$

Definicja

Częścią wspólną lub **iloczynem** zbiorów A i B nazywamy zbiór utworzony ze wszystkich elementów, które należą jednocześnie do zbioru A i do zbioru B . Część wspólną zbiorów A i B oznaczamy $A \cap B$.

Przykład 2 ◀ zad. 4.5

Wyznamy część wspólną podanych zbiorów A i B .

a) A jest zbiorem liczb całkowitych podzielnych przez 3, B jest zbiorem liczb całkowitych podzielnych przez 2.

Część wspólna $A \cap B$ jest zbiorem liczb całkowitych podzielnych przez 3 i przez 2, czyli zbiorem liczb całkowitych podzielnych przez 6.

◀ 4.5. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B , a następnie wyznacz zbiór $A \cap B$.

a) $A = \langle -5; 2 \rangle$, $B = \langle -1; 4 \rangle$

b) $A = \langle -\infty; 3 \rangle$, $B = \langle 0; 5 \rangle$

c) $A = \langle -5; 3 \rangle$, $B = \langle 3; 6 \rangle$

d) $A = \langle -\infty; 5 \rangle$, $B = \langle 2; \infty \rangle$

e) $A = \langle -5; -2 \rangle$, $B = \langle 1; 3 \rangle$

f) $A = \langle -\infty; 8 \rangle$, $B = \langle 8; 10 \rangle$

Odp.: a) $\langle -1; 2 \rangle$ b) $\langle 0; 3 \rangle$ c) $\emptyset$

d) $\langle 2; 5 \rangle$ e) $\emptyset$ f) $\{8\}$

ZZ i KPU

tematy 2.1, 2.2, 2.4

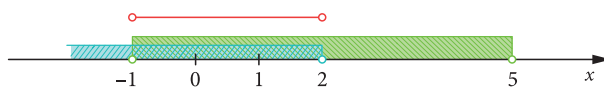
Multiteka

- Różnica zbiorów
- Różnica zbiorów – rozwiązanie zadania
- Działania na dwóch zbiorach (1)
- Działania na dwóch zbiorach (2)
- Działania na trzech zbiorach (1)
- Działania na trzech zbiorach (2)

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.4

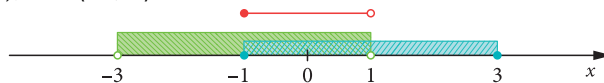
b) $A = (-\infty; 2)$, $B = (-1; 5)$

Obydwa zbiory zaznaczamy na osi liczbowej.



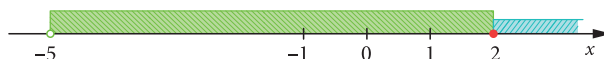
Do zbioru $A \cap B$ należą liczby x spełniające nierówność $-1 < x < 2$, czyli $(-\infty; 2) \cap (-1; 5) = (-1; 2)$.

c) $A = (-3; 1)$, $B = (-1; 3)$



$$(-3; 1) \cap (-1; 3) = (-1; 1)$$

d) $A = (-5; 2)$, $B = \langle 2; \infty)$



Jedyną liczbą należącą do przedziału A i do przedziału B jest 2.

Zbiór $A \cap B$ jest jednoelementowy: $(-\infty; 2) \cap \langle 2; \infty) = \{2\}$.

e) $A = (-2; 1)$, $B = \langle 2; \infty)$



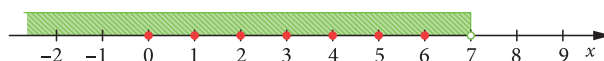
Nie ma liczby, która należałaby jednocześnie do przedziału A i do przedziału B .

Zatem częścią wspólną tych zbiorów jest zbiór pusty.

$$(-2; 1) \cap \langle 2; \infty) = \emptyset$$

Jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to mówimy, że zbiory A oraz B są **rozłączne**.

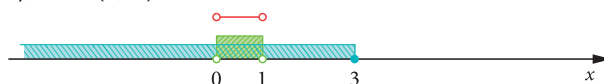
f) $A = (-\infty; 7)$, $B = \mathbf{N}$



W nawiasach kłamrowych wypisujemy wszystkie elementy wyznaczonego zbioru.

$$(-\infty; 7) \cap \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

g) $A = (-\infty; 3)$, $B = (0; 1)$



$$A \cap B = (0; 1) = B$$

Jeżeli $A \cap B = B$, to zbiór B jest podzbiorem zbioru A .

Suma zbiorów

Przykład 3

Wyznaczymy zbiór X liczb naturalnych mniejszych od 20 podzielnych przez 3 lub przez 4.

Rozwiązanie

Jeżeli $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ jest zbiorem liczb naturalnych mniejszych od 20 podzielnych przez 3, a $B = \{0, 4, 8, 12, 16\}$ – odpowiednio zbiorem liczb podzielnych przez 4, to szukany zbiór $X = \{0, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18\}$ nazwiemy sumą zbiorów A oraz B .

Definicja

Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór utworzony ze wszystkich elementów, które należą przynajmniej do jednego z nich, czyli do zbioru A lub do zbioru B . Sumę zbiorów A i B oznaczamy $A \cup B$.

Przykład 4

◀ zad. 4.8

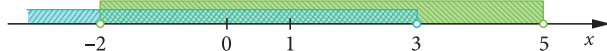
Wyznaczymy sumę zbiorów A i B .

a) $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$, czyli A jest zbiorem liczb naturalnych parzystych i mniejszych od 20;

$B = \{0, 5, 10, 15\}$, czyli B jest zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez 5 i mniejszych od 20.

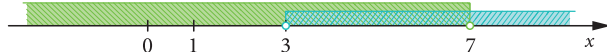
$$A \cup B = \{0, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$$

b) $A = (-\infty; 3)$, $B = (-2; 5)$



$$A \cup B = (-\infty; 5)$$

c) $A = (-\infty; 7)$, $B = (3; \infty)$



$$A \cup B = \mathbb{R}$$

d) $A = \langle -3; 1 \rangle$, $B = \langle 2; 5 \rangle$



$$A \cup B = \langle -3; 1 \rangle \cup \langle 2; 5 \rangle$$

W tym wypadku suma $A \cup B$ nie jest przedziałem liczbowym, ponieważ zbiory A oraz B są rozłączne.

◀ 4.8. Wyznacz sumę zbiorów $A \cup B$.

a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

i $B = \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$

b) $A = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$

i $B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\right\}$

c) A jest zbiorem liczb naturalnych mniejszych od 5, B jest zbiorem nieparzystych liczb naturalnych, spełniających nierówność $3x - 1 < 20$.

d) A jest zbiorem wielokrotności liczby 5, B jest zbiorem wielokrotności liczby 10.

Odp.:

a) $A \cup B = \{-3, -2, -\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}, 2, 3\}$

b) $A \cup B = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\right\}$

c) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

d) $A \cup B = A$

◀4.9. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B , a następnie wyznacz zbiór $A \cup B$.

- a) $A = (-\infty; 3)$, $B = (3; 5)$
 b) $A = (-3; 2)$, $B = (2; 4)$
 c) $A = (-\infty; 1)$, $B = (-3; \infty)$
 d) $A = (-3; \infty)$, $B = (0; \infty)$
 e) $A = (2; 7)$, $B = (-3; 2)$
 f) $A = (-2; 2)$, $B = (-5, 5)$

Odp.: a) $A \cup B = (-\infty; 5)$
 b) $A \cup B = (-3; 4)$ c) $A \cup B = \mathbb{R}$
 d) $A \cup B = A$ e) $A \cup B = (-3; 7)$
 f) $A \cup B = B$

◀4.13. Wyznacz różnice zbiorów $A - B$ i $B - A$.

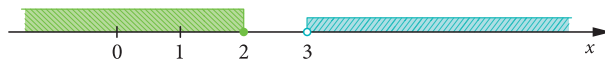
- a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
 $B = \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$
 b) $A = \{-2, 0, 2\}$, $B = \{-1, 1, 3\}$
 c) $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}\}$,
 $B = \{1, 2\}$
 d) $A = \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$,
 $B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$
 e) A jest zbiorem dzielników całkowitych liczby 18,
 $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 81\}$
 f) $A = \{0, 3, 6, 9\}$,
 $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 3\}$

Odp.: a) $A - B = \{-3, -2, 0, 2, 3\}$,
 $B - A = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
 b) $A - B = A$, $B - A = B$
 c) $A - B = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$,
 $B - A = \emptyset$ d) $A - B = \{3, 6, 9\}$,
 $B - A = \{1, 4, 7\}$
 e) $A - B = \{-18, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 18\}$, $B - A = \emptyset$
 f) $A - B = \{6, 9\}$,
 $B - A = \{-1, 1, 2\}$

Przykład 5 ◀ zad. 4.9

Zaznaczmy na osi zbiór liczb spełniających następujący warunek: $x \leq 2$ lub $x > 3$.

Rozwiązanie



Szukanym zbiorem jest suma przedziałów $(-\infty; 2] \cup (3; \infty)$.

Różnica zbiorów

Przykład 6

Zaznaczmy na osi liczbowej zbiór rozwiązań podanego układu dwóch nierówności.

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$$



Warunki $x \in (-1; \infty)$ i $x \neq 3$ możemy zapisać w postaci $x \in (-1; 3) \cup (3; \infty)$.

Inaczej mówiąc, ze zbioru $(-1; \infty)$ została wykluczona jedna liczba.

Definicja

Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór utworzony ze wszystkich elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B .

Różnicę zbiorów A i B oznaczamy $A - B$.

Zbiór określony w przykładzie 6 możemy zapisać również w postaci $(-1; \infty) - \{3\}$.

Przykład 7 ◀ zad. 4.13

Wyznaczmy różnice zbiorów $A - B$ oraz $B - A$.

- a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

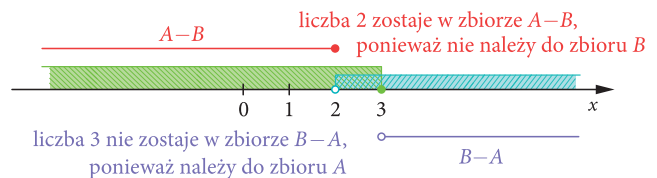
$$A - B = \{1, 3, 5\}$$

$$B - A = \{8, 10\}$$

- b) $A = (-\infty; 3)$,
 $B = (2; \infty)$

$$A - B = (-\infty; 2]$$

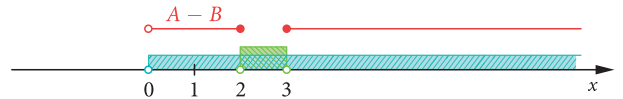
$$B - A = (3; \infty)$$



- c) $A = (0; \infty)$, $B = (2; 3)$

$$A - B = (0; 2] \cup (3; \infty)$$

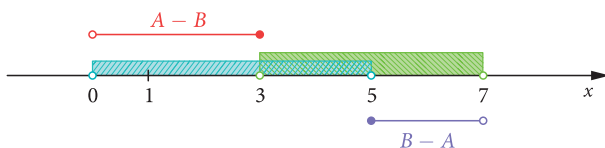
$$B - A = \emptyset$$



d) $A = (0; 5), B = (3; 7)$

$A - B = (0; 3)$

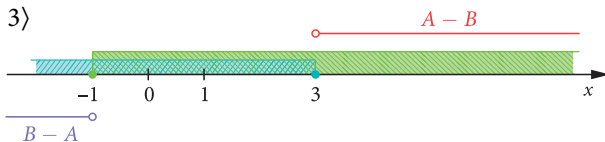
$B - A = (5; 7)$



e) $A = \langle -1; \infty), B = (-\infty; 3)$

$A - B = (3; \infty)$

$B - A = (-\infty; -1)$

**Przykład 8** ◀ zad. 4.15

D oznacza zbiór liczb, które możemy podstawiać do wyrażenia w miejsce litery x , aby obliczyć wartość tego wyrażenia dla danej liczby.

Dla każdego z podanych wyrażenń wyznaczmy zbiór D , korzystając z założeń określających wykonalność działań.

Wyrażenie	Założenie	Zbiór D
$x + 1$	niepotrzebne	$\mathbf{R}$
$\frac{1}{x}$	$x \neq 0$	$\mathbf{R} - \{0\}$
$\sqrt{x}$	$x \geq 0$	$\langle 0; \infty)$
$\frac{3}{2-x}$	$2-x \neq 0$	$\mathbf{R} - \{2\}$
$\frac{x+1}{x+5}$	$x+5 \neq 0$	$\mathbf{R} - \{-5\}$
$\sqrt{x} + \frac{3}{x-2}$	$x \geq 0$ i $x-2 \neq 0$	$\langle 0; \infty) - \{2\}$
$\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x-3}$	$x+1 \neq 0$ i $x-3 \neq 0$	$\mathbf{R} - \{-1, 3\}$
$\frac{x^2+5x+7}{3}$	niepotrzebne	$\mathbf{R}$

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

4.1. Wskaż różnicę zbiorów $\langle -2; 6) - \langle 3; 8)$.

A. $\langle -2; 3)$

B. $\langle -2; 3)$

C. $\langle 3; 6)$

D. $\emptyset$

Odpowiedzi i rozwiązania

4.1. B

◀ **4.15.** Niech D oznacza zbiór liczb, które możemy podstawiać do wyrażenia w miejsce litery x . Podaj założenia określające wykonalność działań w wyrażeniu. Wyznacz zbiór D , korzystając z podanych założeń.

a) $\frac{3}{x}$

b) $\frac{1}{x-5}$

c) $\frac{x+1}{x-7}$

d) $\sqrt{x-4}$

e) $\frac{x-3}{5}$

f) $\frac{5}{x+1} - \frac{7}{x+2}$

g) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+3}$

h) $\sqrt{x-3} + 3\sqrt{3}$

i) $\sqrt{1-x} + \frac{7}{x-4}$

j) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$

k) $\frac{x+5}{2} + \frac{x+2}{5}$

l) $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$

m) $\frac{x+1}{x-3} + \frac{x}{\sqrt{x-5}}$

n) $\sqrt{x+2} + \frac{1}{\sqrt{3-x}}$

o) $\sqrt{(x-3)^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2}}$

Odp.: a) $x \neq 0, D = \mathbf{R} - \{0\}$

b) $x \neq 5, D = \mathbf{R} - \{5\}$

c) $x \neq 7, D = \mathbf{R} - \{7\}$

d) $x \geq 4, D = \langle 4; \infty)$

e) $D = \mathbf{R}$

f) $x \neq -1$ i $x \neq -2,$

$D = \mathbf{R} - \{-2, -1\}$

g) $x \neq 0$ i $x \neq 2$ i $x \neq -3,$

$D = \mathbf{R} - \{-3, 0, 2\}$

h) $x \geq 3, D = \langle 3; \infty)$

i) $x \leq 1$ i $x \neq 4, D = (-\infty; 1)$

j) $x \neq 0$ i $x \neq 1$ i $x \neq 2,$

$D = \mathbf{R} - \{0, 1, 2\}$

k) $D = \mathbf{R}$

l) $x > 2, D = (2; \infty)$

m) $x \neq 3$ i $x > 5, D = (5; \infty)$

n) $x \geq -2$ i $x < 3, D = \langle -2; 3)$

o) $x \neq 0, D = \mathbf{R} - \{0\}$

4.2. C

4.3. D

4.4. P, F, P

4.5. a) $\langle -1; 2 \rangle$ b) $\langle 0; 3 \rangle$ c) $\emptyset$
 d) $\langle 2; 5 \rangle$ e) $\emptyset$ f) $\{8\}$

4.6. a) $-3, -2, -1, 0, 2, 3$
 b) $1, 2, 3, 4$ c) $0, 1, 2$

4.7. a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,
 $B = \{0, 5, 10, 15\}$, $A \cap B = \{0\}$
 b) $A = \{13, 26, 39, 52, 65, 78, 91\}$,
 $B = \{1, 2, 4, 13, 26, 52\}$,
 $A \cap B = \{13, 26, 52\}$
 c) $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{-3, -2,$
 $-1, 0, 1, \dots, 11, 12\}$, $A \cap B = \{4, 5,$
 $6, 7, 8\}$ d) $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13,$
 $17, 19\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,
 $A \cap B = \{2, 3, 5\}$

4.8. a) $A \cup B = \{-3, -2, -\sqrt{2}, -1,$
 $0, 1, \sqrt{2}, 2, 3\}$
 b) $A \cup B = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\right\}$
 c) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
 d) $A \cup B = A$

4.9. a) $A \cup B = (-\infty; 5)$
 b) $A \cup B = (-3; 4)$
 c) $A \cup B = \mathbf{R}$
 d) $A \cup B = A$
 e) $A \cup B = \langle -3; 7 \rangle$
 f) $A \cup B = B$

4.2. Wskaż iloczyn zbiorów $\langle 2; 6 \rangle \cap \langle 3; 8 \rangle$.

A. $\langle 2; 3 \rangle$ B. $\langle 2; 3 \rangle$ C. $\langle 3; 6 \rangle$ D. $\emptyset$

4.3. Wskaż sumę zbiorów $\langle 2; 6 \rangle \cup \langle -3; 8 \rangle$.

A. $\langle 6; 8 \rangle$ B. $\langle -2; 3 \rangle$ C. $\langle -3; 6 \rangle$ D. $\langle -3; 8 \rangle$

4.4. Niech A i B będą niepustymi zbiorami. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $A \cup \emptyset = A$
 B. $A \cap \emptyset = A$
 C. Zbiór A jest podzbiorem zbioru B . Zatem $A \cap B = A$.

4.5. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B , a następnie wyznacz zbiór $A \cap B$.

a) $A = \langle -5; 2 \rangle$, $B = \langle -1; 4 \rangle$ d) $A = (-\infty; 5)$, $B = (2; \infty)$
 b) $A = (-\infty; 3)$, $B = \langle 0; 5 \rangle$ e) $A = (-5; -2)$, $B = \langle 1; 3 \rangle$
 c) $A = \langle -5; 3 \rangle$, $B = (3; 6)$ f) $A = (-\infty; 8)$, $B = \langle 8; 10 \rangle$

4.6. Wymień wszystkie elementy zbioru.

a) $\mathbf{Z} \cap \langle -\pi; \pi \rangle$ b) $\mathbf{Z} \cap (0; 3\sqrt{2})$ c) $\mathbf{N} \cap (-\infty; \sqrt{9} - 1)$

4.7. Wyznacz elementy zbiorów: A , B oraz $A \cap B$.

a) $A = \{x \in \mathbf{N} \text{ i } x \leq \sqrt{17}\}$, $B = \{x: x = 5n \text{ i } x < 18 \text{ i } n \in \mathbf{N}\}$
 b) A jest zbiorem dwucyfrowych wielokrotności liczby 13, B jest zbiorem naturalnych dzielników liczby 52.
 c) $A = \{x \in \mathbf{N} \text{ i } 4 \leq x \leq 8\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} \text{ i } -3 \leq x \leq 12\}$
 d) A jest zbiorem liczb pierwszych mniejszych od 20, $B = \{x \in \mathbf{N} \text{ i } 3x - 1 \leq 14\}$.

4.8. Wyznacz sumę zbiorów $A \cup B$.

a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ i $B = \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$
 b) $A = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$ i $B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\right\}$
 c) A jest zbiorem liczb naturalnych mniejszych od 5, B jest zbiorem nieparzystych liczb naturalnych, spełniających nierówność $3x - 1 < 20$.
 d) A jest zbiorem wielokrotności liczby 5, B jest zbiorem wielokrotności liczby 10.

4.9. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B , a następnie wyznacz zbiór $A \cup B$.

a) $A = (-\infty; 3)$, $B = (3; 5)$ d) $A = (-3; \infty)$, $B = (0; \infty)$
 b) $A = (-3; 2)$, $B = \langle 2; 4 \rangle$ e) $A = (2; 7)$, $B = \langle -3; 2 \rangle$
 c) $A = (-\infty; 1)$, $B = (-3; \infty)$ f) $A = \langle -2; 2 \rangle$, $B = (-5, 5)$

4.10. Dane są zbiory $A = \{1, 3, 5, 9, 11\}$, $B = \{2, 5, 7, 9, 11\}$,
 $C = \{3, 7, 9, 11, 13\}$. Zapisz podany zbiór, używając nazw zbiorów A, B, C oraz
symboli $\cup, \cap$.

- a) $\{5, 9, 11\}$ c) $\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ e) $\{3, 9, 11\}$
b) $\{9, 11\}$ d) $\{7, 9, 11\}$ f) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$

4.11. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających podane warunki i zapisz go
w postaci sumy przedziałów.

- a) $3x - 1 < 2$ lub $x + 3 > 4$ c) $-1 < x < 3$ lub $x > 5$
b) $x + 5 \leq 3$ lub $x > 4 - x$ d) $-3 \leq x < 2$ lub $5 < x \leq 7$

4.12. Podaj elementy zbioru A i zbioru B , a następnie wyznacz zbiór $A \cup B$.

- a) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 2x - 5 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 7x - 2 = 26\}$
b) $A = \{x: x = 2n \mid n \in \mathbf{N} \text{ i } x < 10\}$, B to zbiór liczb pierwszych mniejszych od 11
c) $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid -3 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} \mid -7 < x \leq 2\}$
d) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \leq \sqrt{37}\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x \leq 2\sqrt{3}\}$

4.13. Wyznacz różnice zbiorów $A - B$ i $B - A$.

- a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$
b) $A = \{-2, 0, 2\}$, $B = \{-1, 1, 3\}$
c) $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}\}$, $B = \{1, 2\}$
d) $A = \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$, $B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$
e) A jest zbiorem dzielników całkowitych liczby 18, $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 = 81\}$
f) $A = \{0, 3, 6, 9\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid -1 \leq x \leq 3\}$

* **4.14.** Jakie warunki powinny spełniać zbiory A i B , aby równość była prawdziwa?

- a) $A \cup B = A$ c) $A \cup B = A \cap B$ e) $A - B = A$
b) $A \cap B = A$ d) $A - B = \emptyset$ f) $A - B = A \cup B$

4.15. Niech D oznacza zbiór liczb, które możemy podstawiać do wyrażenia w miejsce litery x . Podaj założenia określające wykonalność działań w wyrażeniu. Wyznacz zbiór D , korzystając z podanych założeń.

- a) $\frac{3}{x}$ f) $\frac{5}{x+1} - \frac{7}{x+2}$ k) $\frac{x+5}{2} + \frac{x+2}{5}$
b) $\frac{1}{x-5}$ g) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+3}$ l) $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$
c) $\frac{x+1}{x-7}$ h) $\sqrt{x-3} + 3\sqrt{3}$ m) $\frac{x+1}{x-3} + \frac{x}{\sqrt{x-5}}$
d) $\sqrt{x-4}$ i) $\sqrt{1-x} + \frac{7}{x-4}$ n) $\sqrt{x+2} + \frac{1}{\sqrt{3-x}}$
e) $\frac{x-3}{5}$ j) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ o) $\sqrt{(x-3)^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2}}$

Rozwiązanie zadania możesz zapisać w postaci tabeli (zob. przykład 8 s. 125).

- 4.15. a)** $x \neq 0$, $D = \mathbf{R} - \{0\}$ **b)** $x \neq 5$, $D = \mathbf{R} - \{5\}$ **c)** $x \neq 7$, $D = \mathbf{R} - \{7\}$ **d)** $x \geq 4$,
 $D = \langle 4; \infty \rangle$ **e)** $D = \mathbf{R}$ **f)** $x \neq -1$ i $x \neq -2$, $D = \mathbf{R} - \{-2, -1\}$ **g)** $x \neq 0$ i $x \neq 2$
i $x \neq -3$, $D = \mathbf{R} - \{-3, 0, 2\}$ **h)** $x \geq 3$, $D = \langle 3; \infty \rangle$ **i)** $x \leq 1$ i $x \neq 4$, $D = (-\infty; 1)$
j) $x \neq 0$ i $x \neq 1$ i $x \neq 2$, $D = \mathbf{R} - \{0, 1, 2\}$ **k)** $D = \mathbf{R}$ **l)** $x > 2$, $D = (2; \infty)$ **m)** $x \neq 3$
i $x > 5$, $D = (5; \infty)$ **n)** $x \geq -2$ i $x < 3$, $D = \langle -2; 3 \rangle$ **o)** $x \neq 0$, $D = \mathbf{R} - \{0\}$

- 4.10. a)** $A \cap B$ **b)** $A \cap B \cap C$
c) $A \cup B \cup C$ **d)** $B \cap C$ **e)** $A \cap C$
f) $A \cup C$

- 4.11. a)** $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$
b) $(-\infty; -2) \cup (2; \infty)$
c) $(-1; 3) \cup (5; \infty)$
d) $\langle -3; 2 \rangle \cup (5; 7)$

- 4.12. a)** $A = \{0, 1, 2\}$,
 $B = \{4\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 4\}$
b) $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$,
 $B = \{2, 3, 5, 7\}$,
 $A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
c) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$,
 $B = \{0, 1, 2\}$,
 $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
d) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
 $B = \{0, 1, 2, 3\}$, $A \cup B = A$

- 4.13. a)** $A - B = \{-3, -2, 0, 2, 3\}$,
 $B - A = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
b) $A - B = A$, $B - A = B$
c) $A - B = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$, $B - A = \emptyset$
d) $A - B = \{3, 6, 9\}$, $B - A = \{1, 4, 7\}$
e) $A - B = \{-18, -6, -3, -2,$
 $-1, 1, 2, 3, 6, 18\}$, $B - A = \emptyset$
f) $A - B = \{6, 9\}$, $B - A = \{-1, 1, 2\}$

- 4.14. a)** $B \subset A$ **b)** $A \subset B$
c) $A = B$ **d)** $A \subset B$ **e)** $A \cap B = \emptyset$
f) $B = \emptyset$

5. Wartość bezwzględna liczby

Umiejętności:

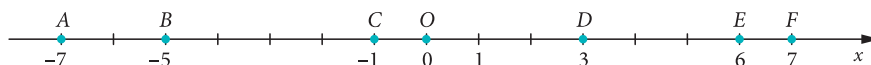
- stosowanie algebraicznej i geometrycznej interpretacji wartości bezwzględnej

Definicja

Wartością bezwzględną liczby nazywamy odległość odpowiadającego jej punktu na osi liczbowej od punktu o współrzędnej 0 mierzoną w odcinkach jednostkowych. Wartość bezwzględną liczby a oznaczamy $|a|$.

Przykład 1

Każdemu punktowi osi liczbowej odpowiada dokładnie jedna współrzędna, a każdej liczbie odpowiada dokładnie jeden punkt na osi. Znajdziemy odległość kilku z nich od punktu O .



$$|AO| = 7 \quad |BO| = 5 \quad |CO| = 1 \quad |DO| = 3 \quad |EO| = 6 \quad |FO| = 7$$

Zatem zgodnie z definicją:

$$|-7| = 7 \quad |-5| = 5 \quad |-1| = 1 \quad |3| = 3 \quad |6| = 6 \quad |7| = 7$$

Jeżeli liczba a jest nieujemna, to jest równa swojej wartości bezwzględnej.

Jeżeli a jest liczbą ujemną, to jej wartość bezwzględna jest liczbą do niej przeciwną.

$$|a| = a \quad \text{dla } a \geq 0$$

$$|a| = -a \quad \text{dla } a < 0$$

Często spotykany jest następujący zapis definicji wartości bezwzględnej liczby:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

W tym wypadku klamerek nie oznacza układu, czyli spełnienia obydwu warunków równocześnie.

Przykład 2

a) $|-5,3| = 5,3$

b) $|0| = 0$

c) $\left|\frac{3}{7}\right| = \frac{3}{7}$

Wprost z definicji wynikają następujące własności wartości bezwzględnej:

- $|a| = |-a|$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $|a| \geq 0 \quad \text{dla } a \in \mathbf{R}$

ZZ i KPU

temat 2.10

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.5

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 3

Przekształćmy podane wyrażenie, korzystając z własności wartości bezwzględnej.

- a) $|6| = |-6| = 6$ $\leftarrow |a| = |-a|$
 b) $|2x| = |2| \cdot |x| = 2|x|$ $\leftarrow |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
 c) $|x^2(x+1)| = |x^2| \cdot |x+1| = x^2|x+1|$ $\leftarrow x^2 \geq 0$ dla $x \in \mathbf{R}$
 d) $\left|\frac{xy}{5}\right| = \frac{|xy|}{|5|} = \frac{|xy|}{5}$ $\leftarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Przykład 4 zad. 5.5

Zapiszemy podaną liczbę bez używania znaku wartości bezwzględnej.

- a) $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$ $\leftarrow \sqrt{2} > 1$, więc $\sqrt{2} - 1 > 0$
 b) $|-2 + \sqrt{29}| = |\sqrt{29} - 2| = \sqrt{29} - 2$ $\leftarrow \sqrt{29} > 2$
 c) $|\sqrt{35} - 7| = |7 - \sqrt{35}| = 7 - \sqrt{35}$ $\leftarrow 7 > \sqrt{35}$
 d) $|-5 - \sqrt{3}| = |5 + \sqrt{3}| = 5 + \sqrt{3}$
 e) $\left|\frac{\pi - 4}{5 - \pi}\right| = \frac{|\pi - 4|}{|5 - \pi|} = \frac{-\pi + 4}{5 - \pi} = \frac{4 - \pi}{5 - \pi}$ $\leftarrow \pi < 4$ i $5 > \pi$
 f) $|4 - \sqrt{15}| + |4 - \sqrt{17}| =$ $\leftarrow \sqrt{15} < 4$ i $\sqrt{17} > 4$
 $= 4 - \sqrt{15} + (-4 + \sqrt{17}) = \sqrt{17} - \sqrt{15}$

Z własności $|a| = |-a|$ wynika równość $|a - b| = |b - a|$.

Pojęcie wartości bezwzględnej można wykorzystać przy obliczaniu pierwiastków kwadratowych. Przypomnijmy, że pierwiastkiem kwadratowym z nieujemnej liczby a nazywamy taką nieujemną liczbę b , która podniesiona do kwadratu jest równa a .

Zauważmy, że $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$ oraz $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.

Wniosek

$$\sqrt{a^2} = |a| \text{ dla } a \in \mathbf{R}$$

Zatem: $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = |1 - \sqrt{2}| = -1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$

$$\sqrt{(4 - \pi)^2} = |4 - \pi| = 4 - \pi$$

$$\sqrt{(-\sqrt{3} - 2\sqrt{2})^2} = |-\sqrt{3} - 2\sqrt{2}| = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$

Własność tę mają wszystkie pierwiastki parzystego stopnia, czyli

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$$

dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych n i $a \in \mathbf{R}$.

5.5. Zapisz liczbę bez używania symbolu wartości bezwzględnej. Nie korzystaj z kalkulatora.

- a) $|3 - \sqrt{2}|$
 b) $\left|5\frac{1}{2} - \frac{11}{2}\right|$
 c) $\left|\frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} + 2}\right|$
 d) $\left|\frac{2 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} + 2}\right|$
 e) $|3\sqrt{7} - 5\sqrt{3}|$
 f) $|2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}|$

Odp.: a) $3 - \sqrt{2}$ b) 0 c) $7 - 4\sqrt{3}$
 d) $9 - 4\sqrt{5}$ e) $5\sqrt{3} - 3\sqrt{7}$
 f) $3\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$

◀5.10. Zapisz podane wyrażenie bez użycia symbolu pierwiastka.

a) $\sqrt{(x+7)^2}$

b) $\sqrt{(3-x)^2}$

c) $\sqrt{(x-y+2z)^2}$

d) $\sqrt{x^2-2x+1}$

e) $\sqrt{9x^2+6x+1}$

f) $\sqrt{25y^2-10y+1}$

g) $\sqrt{4-20x+25x^2}$

h) $\sqrt{y^2-2\sqrt{2}y+2}$

Odp.: a) $|x+7|$ b) $|3-x|$ c) $|x-y+2z|$ d) $|x-1|$ e) $|3x+1|$ f) $|5y-1|$ g) $|2-5x|$ h) $|y-\sqrt{2}|$

◀5.3. Wskaż liczbę równą liczbie

$\sqrt{4-2\sqrt{3}}.$

A. $\sqrt{3}-1$

B. $1-\sqrt{3}$

C. $2-\sqrt{3}$

D. $\sqrt{3}-2$

Odp.: A

Przykład 5 ◀ zad. 5.10

Zapiszemy podane wyrażenie bez użycia symbolu pierwiastka.

Rozwiązanie

a) $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$

b) $\sqrt{(x+5)^2} = |x+5|$

c) $\sqrt{9-6x+x^2} = \sqrt{(3-x)^2} = |3-x|$ ◀ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

d) $\sqrt{4x^2+4x+1} = \sqrt{(2x+1)^2} = |2x+1|$ ◀ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Zauważmy, że w podanych przykładach musimy zostawić na końcu znak wartości bezwzględnej, ponieważ pierwiastek kwadratowy nie może mieć wartości ujemnej, a zmienna x może przyjmować różne wartości.

Przykład 6 ◀ zad. 5.3

Wiadomo, że w zadaniu jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Mamy wskazać liczbę równą liczbie $\sqrt{8-2\sqrt{7}}$.

A. $2-\sqrt{7}$

B. $\sqrt{7}-2$

C. $1-\sqrt{7}$

D. $\sqrt{7}-1$

Rozwiązanie

Liczby podane w punktach A, B, C, D nie mają zewnętrznego pierwiastka. Możemy się zatem spodziewać, że $8-2\sqrt{7}$ jest kwadratem jednej z tych liczb.

I sposób

Podnosimy do kwadratu liczby podane w odpowiedziach i sprawdzamy, czy mogą być rozwiązaniem zadania.

A. $(2-\sqrt{7})^2 = 4-4\sqrt{7}+7 \neq 8-2\sqrt{7}$

B. Nie musimy sprawdzać, bo różni się od punktu A tylko znakiem, czyli kwadraty tych liczb są równe.

C. $(1-\sqrt{7})^2 = 1-2\sqrt{7}+7 = 8-2\sqrt{7}$, ale

D. $(\sqrt{7}-1)^2 = 8-2\sqrt{7}$

Zatem która z odpowiedzi jest poprawna: C czy D?

Korzystamy teraz z definicji pierwiastka kwadratowego, którego wartość nie może być ujemna. Ponieważ $1-\sqrt{7} < 0$, więc poprawną odpowiedzią jest D.

II sposób

Jeżeli liczba $8 - 2\sqrt{7}$ jest kwadratem jakiejś liczby, to staramy się ją do takiej postaci doprowadzić.

$$\sqrt{8 - 2\sqrt{7}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{7} + 1} = \sqrt{(\sqrt{7})^2 - 2\sqrt{7} + 1^2} = \sqrt{(\sqrt{7} - 1)^2} = |\sqrt{7} - 1|$$

$$\sqrt{7} - 1 > 0, \text{ zatem } |\sqrt{7} - 1| = \sqrt{7} - 1$$

Odp.: D

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszyte.

5.1. Wskaż liczbę równą $||1 - 2| - 3|$.

- A. 0 B. 2 C. 4 D. 6

5.2. Wskaż równość, która zachodzi dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

- A. $\sqrt{x^2} = x$ B. $\sqrt{(-x)^2} = -|x|$ C. $\sqrt{(-x)^2} = -x$ D. $\sqrt{x^2} = |-x|$

5.3. Wskaż liczbę równą liczbie $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.

- A. $\sqrt{3} - 1$ B. $1 - \sqrt{3}$ C. $2 - \sqrt{3}$ D. $\sqrt{3} - 2$

5.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Równość $|x| = -x$ nie zachodzi dla żadnej liczby x , bo wartość bezwzględna nie może być ujemna.
 B. Równość $|x| = -x$ zachodzi tylko dla liczby $x = 0$.
 C. Równość $|x| = -x$ zachodzi tylko dla liczb x nie większych od 0.

5.5. Zapisz liczbę bez używania symbolu wartości bezwzględnej. Nie korzystaj z kalkulatora.

- a) $|3 - \sqrt{2}|$ c) $\left| \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} + 2} \right|$ e) $|3\sqrt{7} - 5\sqrt{3}|$
 b) $\left| 5\frac{1}{2} - \frac{11}{2} \right|$ d) $\left| \frac{2 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} + 2} \right|$ f) $|2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}|$

5.6. Oblicz.

- a) $|-3| - |-1 - 5| \cdot |(-3) \cdot (-2)|$ c) $|3 - |2 - 5||$
 b) $|-2 + |2 - |3 - 5||$ d) $|1 - |1 - |1 - 4||$

Odpowiedzi i rozwiązania

5.1. B

5.2. D

5.3. A

5.4. F, F, P

5.5. a) $3 - \sqrt{2}$ b) 0 c) $7 - 4\sqrt{3}$
 d) $9 - 4\sqrt{5}$ e) $5\sqrt{3} - 3\sqrt{7}$
 f) $3\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$

5.6. a) -33 b) 2 c) 0 d) 1

5.7. a) 7 **b)** 4 **c)** $5\sqrt{5}$ **d)** 5
e) 2 **f)** 8 **g)** 3 **h)** 2

5.8. a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2$
b) $2\sqrt{3} + \sqrt{5} - 5$
c) $\sqrt{10} + \sqrt{17} - \sqrt{47}$
d) $3 + \sqrt{50} - \sqrt{99}$

5.9. a) 1 **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** 2 **d)** 1

5.10. a) $|x + 7|$ **b)** $|3 - x|$
c) $|x - y + 2z|$ **d)** $|x - 1|$
e) $|3x + 1|$ **f)** $|5y - 1|$ **g)** $|2 - 5x|$
h) $|y - \sqrt{2}|$

5.11. a) $\sqrt{7} - 2$ **b)** $3 - \sqrt{2}$ **c)** -1
d) -4 **e)** 4 **f)** $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$

5.12. a) $2 - \sqrt{3}$
b) $-3 + \sqrt{10}$
c) $-1 + \sqrt{3}$
d) $-1 + \sqrt{2}$
e) $3 - \sqrt{3}$
f) $3 - \sqrt{7}$

f) $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}} =$
 $= \sqrt{9 - 2 \cdot 3\sqrt{7} + 7} = \sqrt{(3 - \sqrt{7})^2} =$
 $= |3 - \sqrt{7}| = 3 - \sqrt{7}$

5.7. Oblicz.

a) $\left|3,5 + 2\frac{7}{8}\right| + \left|2\frac{7}{8} - 3\frac{1}{2}\right|$
b) $|\sqrt{3} - 5| + |\sqrt{3} - 1|$
c) $|8 + 3\sqrt{5}| - |2\sqrt{5} - 8|$
d) $\left|2,5 + 1\frac{7}{8}\right| + \left|\frac{15}{8} - \frac{5}{2}\right|$

e) $|2\sqrt{5} - 3| - 5|\sqrt{5} - 2| + |5 - 3\sqrt{5}|$
f) $|2 - 2\sqrt{3}| \cdot |2 + 2\sqrt{3}|$
g) $|\sqrt{7} - 2| \cdot |-\sqrt{7} - 2|$
h) $|5 - 3\sqrt{3}| \cdot |5 + 3\sqrt{3}|$

5.8. Zapisz liczbę bez używania symbolu wartości bezwzględnej. Nie korzystaj z kalkulatora.

a) $|\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2|$ c) $|\sqrt{10} + \sqrt{17} - \sqrt{47}|$
b) $|5 - 2\sqrt{3} - \sqrt{5}|$ d) $|\sqrt{99} - 3 - \sqrt{50}|$

5.9. Oblicz.

a) $\left|\frac{11 - \sqrt{13}}{\sqrt{13} - 11}\right|$ b) $\frac{|3 - \sqrt{15}|}{|\sqrt{30} - 3\sqrt{2}|}$ c) $\left|\frac{2 - 4\sqrt{6}}{2\sqrt{6} - 1}\right|$ d) $\left|\frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1}\right|$

5.10. Zapisz podane wyrażenie bez użycia symbolu pierwiastka.

a) $\sqrt{(x + 7)^2}$ e) $\sqrt{9x^2 + 6x + 1}$
b) $\sqrt{(3 - x)^2}$ f) $\sqrt{25y^2 - 10y + 1}$
c) $\sqrt{(x - y + 2z)^2}$ g) $\sqrt{4 - 20x + 25x^2}$
d) $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$ h) $\sqrt{y^2 - 2\sqrt{2}y + 2}$

5.11. Oblicz.

a) $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$ d) $\sqrt{(1 - \sqrt{7})^2} - \sqrt{(\sqrt{7} + 3)^2}$
b) $\sqrt{(3 - \sqrt{2})^2}$ e) $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5} - 3}{\sqrt{5} - 2}\right)^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2}$
c) $\sqrt{(5 - 2\sqrt{3})^2} - 2\sqrt{(\sqrt{3} - 3)^2}$ f) $\sqrt{(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})^2}$

*** 5.12. Zapisz liczbę w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie $a, b \in \mathbf{Z}$ i $c \in \mathbf{N}$.**

a) $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}$ c) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ e) $\sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$
b) $\sqrt{(3 - \sqrt{10})^2}$ d) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ f) $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}}$

D * 5.13. Udowodnij, że wyrażenie:

$$\sqrt{25n^2 + 10\sqrt{3}n + 3} - \sqrt{9n^2 + 6\sqrt{3}n + 3}$$

przyjmuje wartości naturalne parzyste dla każdej naturalnej liczby n .

*** 5.14.** Zapisz liczbę $|\sqrt{7} + \sqrt{11} - 6|$ bez używania symbolu wartości bezwzględnej. Nie korzystaj z kalkulatora.

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż liczbę równą $||2 - 3| - 4|$.

- A. 1 B. 3 C. 5 D. 9

2. Wskaż równość, która zachodzi dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

- A. $\sqrt{x^2} = -x$ C. $\sqrt{(-x)^2} = |x|$
 B. $\sqrt{(-x)^2} = x$ D. $\sqrt{x^2} = -|x|$

3. Wskaż liczbę równą liczbie $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$.

- A. $2 - \sqrt{5}$ C. $\sqrt{5} - 1$
 B. $1 - \sqrt{5}$ D. $\sqrt{5} - 2$

4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Równość $|x| = x$ zachodzi tylko dla liczb dodatnich.
 B. Równość $|x| = -x$ zachodzi tylko dla liczb ujemnych.
 C. Równość $|x| = x$ zachodzi tylko dla liczb x nie mniejszych od 0.

5. Oblicz $|-5,3 + 7 \cdot |-4,7 + 3,8|| + |1 - |1 - |1 - 2|||$.

6. Oblicz $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| + |\sqrt{18} - 2\sqrt{3}| + |0,25\sqrt{32} - 0,5\sqrt{12}|$.

D 7. Udowodnij, że liczba $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}$ jest całkowita.

5.13. Wskazówka:

$$\sqrt{(a \pm b)^2} = |a \pm b|$$

5.14. Załóżmy, że $\sqrt{7} + \sqrt{11} > 6$. Wtedy $7 + 2\sqrt{77} + 11 > 36$, czyli $\sqrt{77} > 9$, zatem $77 > 81$. Ta nierówność jest fałszywa, zatem $|\sqrt{7} + \sqrt{11} - 6| = 6 - \sqrt{7} - \sqrt{11}$.

Prosto do matury

1. B

2. C

3. C

4. F, F, P

5. 2

6. $3\sqrt{2}$

7. $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} = |3 - \sqrt{2}| + |2 + \sqrt{2}| = 5$

6. Interpretacja geometryczna wartości bezwzględnej

Umiejętności:

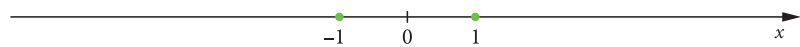
- wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej i jej interpretacji geometrycznej
- zaznaczanie na osi liczbowej zbiorów opisanych za pomocą równań i nierówności typu: $|x - a| = b$, $|x - a| < b$, $|x - a| > b$

Wartość bezwzględna mierzy odległość liczby od zera.

Przykład 1 zad. 6.3

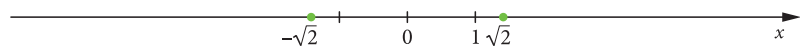
Zaznaczmy na osi liczbowej punkty, których współrzędne x spełniają podane równanie.

a) $|x| = 4$

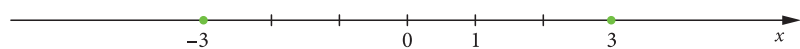


Są dwie liczby oddalone od zera o jedną jednostkę: 1 oraz -1.

b) $|x| = \sqrt{2}$



c) $2|x| + 1 = 7$, czyli $|x| = 3$.

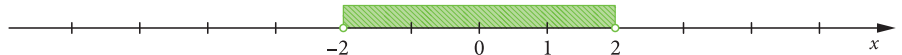


Przykład 2 zad. 6.5

Zaznaczmy na osi liczbowej punkty, których współrzędne x spełniają podaną nierówność.

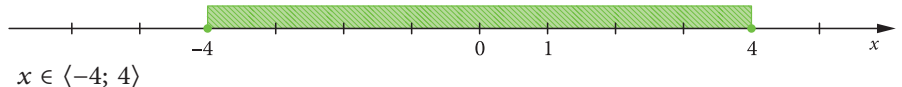
a) $|x| < 2$

Nierówność opisuje wszystkie punkty, których odległość od punktu 0 jest mniejsza od 2.



Są to punkty o współrzędnych większych od -2 i równocześnie mniejszych od 2. Zatem $x \in (-2; 2)$.

b) $|x| \leq 4$



$x \in [-4; 4]$

◀6.3. Zaznacz na osi liczbowej wszystkie punkty, których współrzędne x spełniają podane równanie.

a) $|x| = 4$

b) $|x| = 2\frac{2}{3}$

c) $|x| - \sqrt{3} = 0$

d) $4 - |x| = 4$

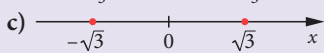
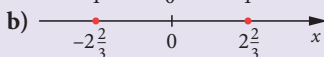
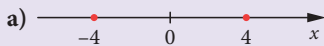
e) $1 - |x| = 4$

f) $2|x| - 1 = 3$

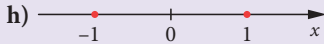
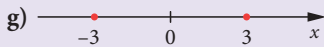
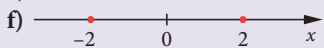
g) $5 + 3|x| = 14$

h) $9 - 5|x| = 4$

Odp.:



e) brak



ZZ i KPU

temat 2.10

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.6

Generator
testów i sprawdzianów

◀6.5. Zaznacz na osi liczbowej wszystkie punkty, których współrzędna x spełnia podaną nierówność.

a) $|x| < 5$

b) $|x| > 7$

c) $|x| \leq 2$

d) $-2|x| < 0$

e) $2 + |x| > 5$

f) $|x| - 2 \leq -2$

g) $11 - 4|x| < 3$

h) $\frac{1}{2}|x| - 2 < 3,5|x| - 5$

Odp.:



c) $|x| > 3$

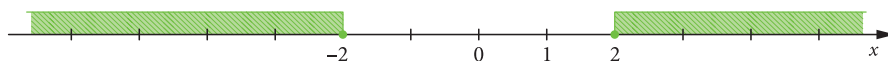
Nierówność określa wszystkie punkty, których odległość od punktu 0 jest większa od 3.



Są to punkty o współrzędnych mniejszych od -3 lub większych od 3 .

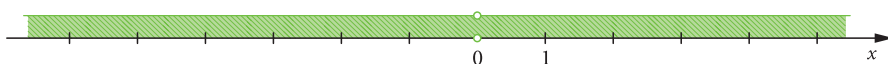
Zatem $x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$.

d) $|x| \geq 2$



$x \in (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$

e) $|x| > 0$



Tylko liczba 0 nie spełnia tej nierówności: $x \in \mathbf{R} - \{0\}$.

f) $|x| > -2$

Wartość bezwzględna każdej liczby jest nieujemna, zatem także większa od -2 , więc każda liczba rzeczywista x spełnia tę nierówność: $x \in \mathbf{R}$.

g) $|x| < -1$

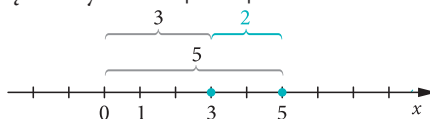
Wartość bezwzględna każdej liczby jest nieujemna, więc ta nierówność nie ma rozwiązań.

Przykład 3

Sprawdźmy, jaką interpretację geometryczną ma wyrażenie $|a - b|$.

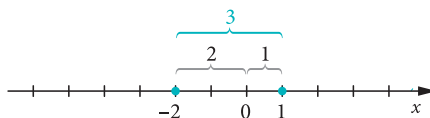
a) $a = 5, b = 3$

$$|5 - 3| = |2| = 2$$



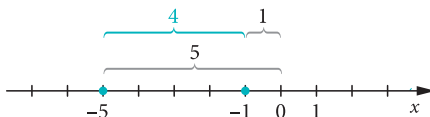
b) $a = -2, b = 1$

$$|-2 - 1| = |-3| = 3$$



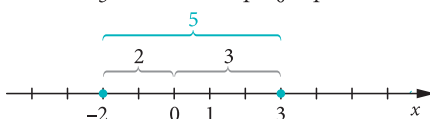
c) $a = -5, b = -1$

$$|-5 - (-1)| = |-5 + 1| = |-4| = 4$$



d) $a = 3, b = -2$

$$|3 - (-2)| = |3 + 2| = |5| = 5$$



Twierdzenie

Odległość między punktami odpowiadającymi na osi liczbom a i b wyraża się wzorem:

$$|a - b|$$

Dowód tego twierdzenia zostawiamy do samodzielnego przeprowadzenia.

◀6.15. Oblicz długość odcinka AB , którego końce $A = (a)$ i $B = (b)$ leżą na osi liczbowej oraz

- a) $a = 3$, $b = -5$.
 b) $a = -1$, $b = -7$.
 c) $a = 9$, $b = 2$.
 d) $a = -\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3}$.
 e) $a = 2\sqrt{5}$, $b = -7\sqrt{5}$.
 f) $a = 1 + 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3} + 5$.
 g) $a = 2 - \sqrt{2}$, $b = 1 + \sqrt{2}$.
 h) $a = 3 - 2\sqrt{5}$, $b = 2 - \sqrt{5}$.

Odp.: a) $|AB| = 8$

b) $|AB| = 6$

c) $|AB| = 7$

d) $|AB| = 3\sqrt{3}$

e) $|AB| = 9\sqrt{5}$

f) $|AB| = 4$

g) $|AB| = 2\sqrt{2} - 1$

h) $|AB| = \sqrt{5} - 1$

◀6.8. Rozwiąż równanie.

a) $|x - 1| = 5$

b) $|x + 2| = 3$

c) $\left|5\frac{1}{3} - x\right| = 2\frac{2}{3}$

d) $|x + 7| = 7$

e) $|x - 2| = -1$

f) $|11 + x| = 3$

Odp.: a) $x = -4$ lub $x = 6$

b) $x = -5$ lub $x = 1$

c) $x = 2\frac{2}{3}$ lub $x = 8$

d) $x = -14$ lub $x = 0$

e) brak rozwiązań

f) $x = -14$ lub $x = -8$

Przykład 4 ◀ zad. 6.15

Obliczmy długość odcinka AB , jeżeli punkty $A = (a)$ i $B = (b)$ leżą na osi liczbowej.

a) $a = 2 - \sqrt{2}$ i $b = 1 + \sqrt{2}$

b) $a = -3$ i $b = -8 + \sqrt{2}$

Rozwiązanie

a) $|AB| = |a - b| = \left| (2 - \sqrt{2}) - (1 + \sqrt{2}) \right| = \left| 2 - \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} \right| = \left| 1 - 2\sqrt{2} \right| = 2\sqrt{2} - 1$

Odp.: $|AB| = 2\sqrt{2} - 1$

b) $|AB| = |a - b| = \left| -3 - (-8 + \sqrt{2}) \right| = \left| -3 + 8 - \sqrt{2} \right| = \left| 5 - \sqrt{2} \right| = 5 - \sqrt{2}$

Odp.: $|AB| = 5 - \sqrt{2}$

Fakt, że odległość między punktami odpowiadającymi na osi liczbom a i b wyraża się wzorem $|a - b|$, wykorzystamy do rozwiązywania prostych równań i nierówności z wartością bezwzględną.

Przykład 5 ◀ zad. 6.8

Rozwiążemy graficznie równanie.

a) $|x - 2| = 3$

b) $|x + 3| = 2$

c) $|1 - x| = 4$

Rozwiązanie

a) $|x - 2| = 3$

Szukamy na osi punktów x , których odległość od liczby 2 jest równa 3.



Rozwiązaniami są liczby -1 oraz 5 .

Sprawdźmy: $|-1 - 2| = |-3| = 3$, $|5 - 2| = |3| = 3$.

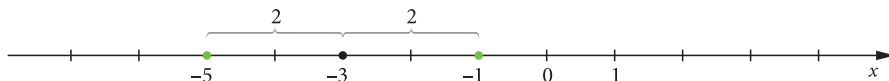
Odp.: $x = -1$ lub $x = 5$

b) $|x + 3| = 2$

Zapiszmy to równanie w takiej postaci, aby można było wykorzystać geometryczną interpretację wyrażenia $|a - b|$.

$|x - (-3)| = 2$

Szukamy punktów x , których odległość od punktu -3 jest równa 2.



Odp.: $x = -5$ lub $x = -1$

c) $|1 - x| = 4$

$|x - 1| = 4$

$\leftarrow |a - b| = |b - a|$



Odp.: $x = -3$ lub $x = 5$

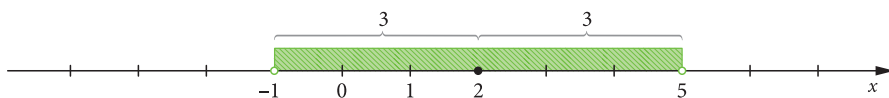
Przykład 6 zad. 6.10

Rozwiążemy graficznie podaną nierówność.

Rozwiązanie

a) $|x - 2| < 3$

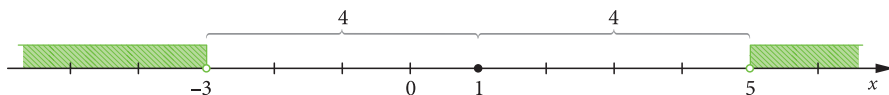
Szukamy punktów x , których odległość od punktu 2 jest mniejsza od 3. Zbiorem rozwiązań jest przedział otwarty $(-1; 5)$.



Odp.: $x \in (-1; 5)$

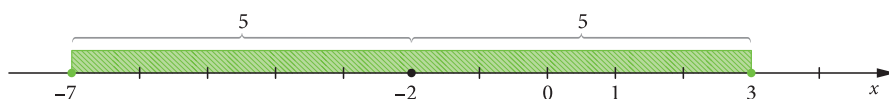
b) $|x - 1| > 4$

Szukamy punktów, których odległość od punktu 1 jest większa od 4.



Odp.: $x \in (-\infty; -3) \cup (5; \infty)$

c) $|x + 2| \leq 5$, czyli $|x - (-2)| \leq 5$



Odp.: $x \in [-7; 3]$

6.10. Rozwiąż nierówność.

a) $|x + 7| \leq 4$

b) $|x - 5| > 3$

c) $|x - 5| + 1 < 5$

d) $1 - |x + 6| \leq 4$

e) $|4 - x| + 3 > 3$

f) $3(2 - |x + 9|) > 7$

g) $2 + 3|x - 5| \geq -1$

h) $15 \geq 3(|x - 11| + 5)$

Odp.: a) $x \in [-11; -3]$

b) $x \in (-\infty; 2) \cup (8; \infty)$

c) $x \in (1; 9)$

d) $x \in \mathbb{R}$

e) $x \in \mathbb{R} - \{4\}$

f) brak rozwiązań

g) $x \in \mathbb{R}$

h) $x = 11$

◀6.11. Przedstaw w postaci $|x - a| < b$ lub $|x - a| \leq b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest podany przedział liczbowy.

- a) $(-3; 7)$
 b) $\langle 6; 14 \rangle$
 c) $\langle -10; 0 \rangle$
 d) $\langle -5; -1 \rangle$

Odp.: a) $|x - 2| < 5$

- b) $|x - 10| \leq 4$ c) $|x + 5| \leq 5$
 d) $|x + 3| \leq 2$

◀6.12. Przedstaw w postaci $|x - a| > b$ lub $|x - a| \geq b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest podana suma przedziałów liczbowych.

- a) $(-\infty; 7) \cup (11; \infty)$
 b) $(-\infty; -2) \cup \langle 8; \infty)$
 c) $(-\infty; -7) \cup \langle -1; \infty)$
 d) $(-\infty; -15) \cup (13; \infty)$

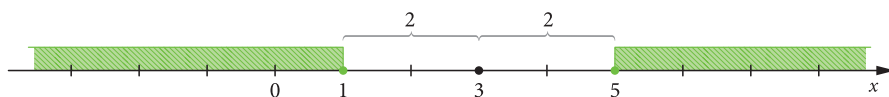
Odp.: a) $|x - 9| > 2$ b) $|x - 3| \geq 5$
 c) $|x + 4| \geq 3$ d) $|x + 1| > 14$

◀6.14. Rozwiąż układ nierówności.

- a) $\begin{cases} \sqrt{x^2} > 4 \\ |x + 2| < 5 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} \sqrt{x^2} \leq 5 \\ \sqrt{x^2} > 3 \end{cases}$
 c) $\begin{cases} \sqrt{4x^2 - 4x + 1} < 7 \\ |x - 2| \geq 1 \end{cases}$
 d) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 10x + 25} < 3 \\ |x - 2| < 10 \end{cases}$

Odp.: a) $x \in (-7; -4)$
 b) $x \in \langle -5; -3 \rangle \cup \langle 3; 5 \rangle$
 c) $x \in (-3; 1) \cup \langle 3; 4 \rangle$
 d) $x \in (-8; -2)$

d) $|3 - x| \geq 2$, czyli $|x - 3| \geq 2$

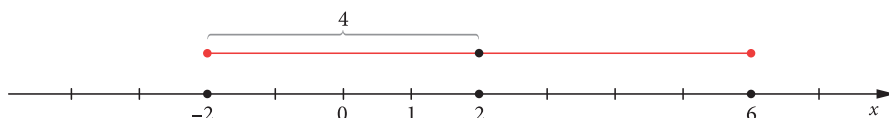


Odp.: $x \in (-\infty; 1] \cup [5; \infty)$

Przykład 7 ◀ zad. 6.11

Zapiszemy w postaci $|x - a| \leq b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest przedział $\langle -2; 6 \rangle$.

Rozwiązanie



Odległość między końcami przedziału $\langle -2; 6 \rangle$ jest równa 8. Punktem oddalonym od -2 i od 6 o połowę tej odległości, czyli o 4 , jest punkt odpowiadający liczbie 2 . Zatem $a = 2$, $b = 4$.

Odp.: $|x - 2| \leq 4$

Przykład 8 ◀ zad. 6.12

Zapiszemy w postaci $|x - a| > b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest suma przedziałów $(-\infty; -4) \cup (6; \infty)$.

Rozwiązanie

Środkiem odcinka o końcach w punktach -4 oraz 6 jest punkt 1 , a jego odległość od -4 oraz od 6 wynosi 5 . Zatem $a = 1$, $b = 5$.

Odp.: $|x - 1| > 5$

Środkiem odcinka o końcach w punktach a i b jest na osi punkt $\frac{a+b}{2}$.

Przykład 9 ◀ zad. 6.14

Rozwiążemy układ nierówności $\begin{cases} \sqrt{x^2} > 4 \\ |x - 2| < 5 \end{cases}$.

Rozwiązanie

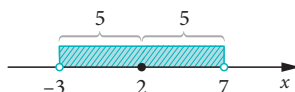
Rozwiązujemy pierwszą nierówność:

$\sqrt{x^2} > 4$, czyli $|x| > 4$, więc $x \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$

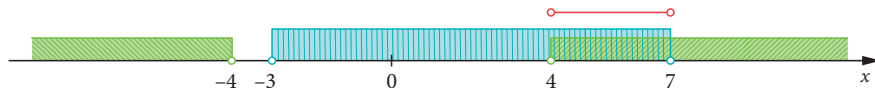


Rozwiązujemy drugą nierówność $|x - 2| < 5$.

Szukamy punktów x , których odległość od punktu 2 jest mniejsza od 5. Zbiorem rozwiązań drugiej nierówności jest przedział otwarty $(-3; 7)$.



Z rysunku odczytujemy, które wartości x spełniają obydwie nierówności:



Odp.: $x \in (4; 7)$

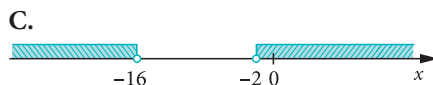
Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.2 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytach.

6.1. Wskaż przedział będący zbiorem rozwiązań nierówności $|x - 4| < 2$.

- A. $(-2; 2)$ B. $(0; 2)$ C. $(-\infty; 6)$ D. $(2; 6)$

6.2. Wskaż rysunek, na którym przedstawiono zbiór rozwiązań nierówności $|x + 9| > 7$.



6.3. Zaznacz na osi liczbowej wszystkie punkty, których współrzędne x spełniają podane równanie.

- a) $|x| = 4$ c) $|x| - \sqrt{3} = 0$ e) $1 - |x| = 4$ g) $5 + 3|x| = 14$
 b) $|x| = 2\frac{2}{3}$ d) $4 - |x| = 4$ f) $2|x| - 1 = 3$ h) $9 - 5|x| = 4$

6.4. Rozwiąż równanie.

- a) $|x| = 6$ e) $3(|x| - 2) = \sqrt{2}$
 b) $12|x| = 60$ f) $\sqrt{6}(|x| + \sqrt{3}) = 3\sqrt{2}$
 c) $3|x| - 1 = 5$ g) $2(1 - |x|) = 1$
 d) $2|x| + 5\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$ h) $3 - 5|x| = |x| - 9$

6.4. a) $x = -6$ lub $x = 6$

b) $x = -5$ lub $x = 5$

c) $x = -2$ lub $x = 2$

d) brak rozwiązań

e) $x = -2 - \frac{\sqrt{2}}{3}$ lub $x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{3}$

f) $x = 0$

g) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$

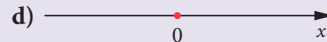
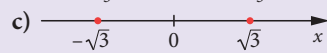
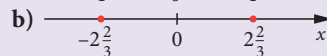
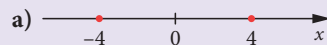
h) $x = -2$ lub $x = 2$

Odpowiedzi i rozwiązania

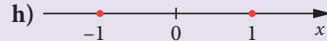
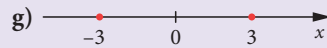
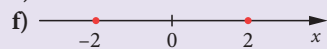
6.1. D

6.2. C

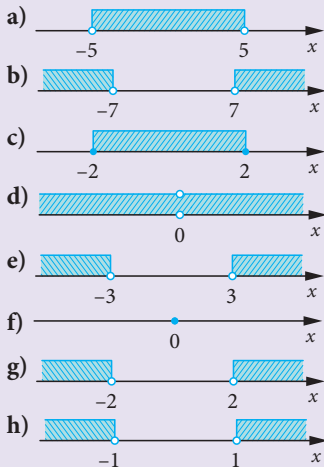
6.3.



e) brak



6.5.

6.6. a) $x \in (-9; 9)$ b) $x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$ c) $x \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$ d) $x \in \mathbb{R}$ e) $x = 0$

f) brak rozwiązań

6.7. a) Odległość punktów

 $A = (x)$ leżących na osi liczbowej od punktu $B = (4)$ na tej osi jest równa 7. b) Odległość punktów $A = (x)$ leżących na osi liczbowej od punktu $B = (-2)$ na tej osi jest równa 1.6.8. a) $x = -4$ lub $x = 6$ b) $x = -5$ lub $x = 1$ c) $x = 2\frac{2}{3}$ lub $x = 8$ d) $x = -14$ lub $x = 0$

e) brak rozwiązań

f) $x = -14$ lub $x = -8$

6.9. a) Odległość punktów

 $A = (x)$ leżących na osi liczbowej od punktu $B = (2)$ na tej osi jest mniejsza od 1.b) Odległość punktów $A = (x)$ leżących na osi liczbowej od punktu $B = (-3)$ na tej osi jest mniejsza lub równa 2.c) Odległość punktów $A = (x)$ leżących na osi liczbowej od punktu $B = (5)$ na tej osi jest większa lub równa 1.d) Odległość punktów $A = (x)$ leżących na osi liczbowej od punktu $B = (-\sqrt{2})$ na tej osi jest większa od 3.6.5. Zaznacz na osi liczbowej wszystkie punkty, których współrzędna x spełnia podaną nierówność.

a) $|x| < 5$

b) $|x| > 7$

c) $|x| \leq 2$

d) $-2|x| < 0$

e) $2 + |x| > 5$

f) $|x| - 2 \leq -2$

g) $11 - 4|x| < 3$

h) $\frac{1}{2}|x| - 2 < 3,5|x| - 5$

6.6. Rozwiąż nierówność.

a) $|x| - 3 < 6$

b) $3|x| + 2 > 11$

c) $9 - 2|x| \leq 1$

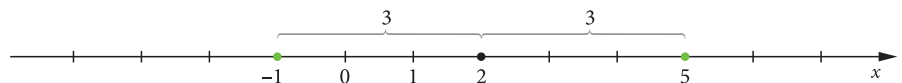
d) $6 - 3|x| \leq 11$

e) $3 - 2(7 - 2|x|) \leq -11$

f) $5 + 3|x| \leq 1$

6.7. Opisz równanie według wzoru, a następnie zilustruj odpowiednim rysunkiem.

- Równanie $|x - 2| = 3$ oznacza, że odległość punktów $A = (x)$ leżących na osi liczbowej od punktu $B = (2)$ na tej osi jest równa 3.



a) $|x - 4| = 7$

b) $|x + 2| = 1$

6.8. Rozwiąż równanie.

a) $|x - 1| = 5$

b) $|x + 2| = 3$

c) $\left|5\frac{1}{3} - x\right| = 2\frac{2}{3}$

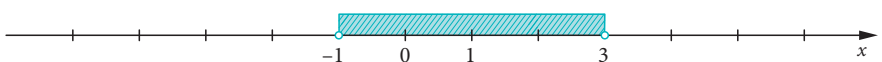
d) $|x + 7| = 7$

e) $|x - 2| = -1$

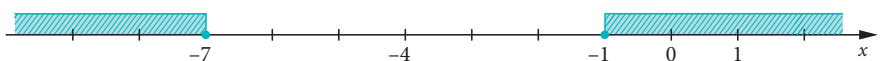
f) $|11 + x| = 3$

6.9. Opisz nierówność według wzoru, a następnie zilustruj odpowiednim rysunkiem.

- Nierówność $|x - 1| < 2$ oznacza, że odległość punktów $A = (x)$ leżących na osi liczbowej od punktu $B = (1)$ na tej osi jest mniejsza od 2.



- Nierówność $|x + 4| \geq 3$ oznacza, że odległość punktów $A = (x)$ leżących na osi liczbowej od punktu $B = (-4)$ na tej osi jest większa lub równa 3.



a) $|x - 2| < 1$

b) $|x + 3| \leq 2$

c) $|x - 5| \geq 1$

d) $|x + \sqrt{2}| > 3$

6.10. Rozwiąż nierówność.

- a) $|x + 7| \leq 4$ e) $|4 - x| + 3 > 3$
 b) $|x - 5| > 3$ f) $3(2 - |x + 9|) > 7$
 c) $|x - 5| + 1 < 5$ g) $2 + 3|x - 5| \geq -1$
 d) $1 - |x + 6| \leq 4$ h) $15 \geq 3(|x - 11| + 5)$

6.11. Przedstaw w postaci $|x - a| < b$ lub $|x - a| \leq b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest podany przedział liczbowy.

- a) $(-3; 7)$ b) $\langle 6; 14 \rangle$ c) $\langle -10; 0 \rangle$ d) $\langle -5; -1 \rangle$

6.12. Przedstaw w postaci $|x - a| > b$ lub $|x - a| \geq b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest podana suma przedziałów liczbowych.

- a) $(-\infty; 7) \cup (11; \infty)$ c) $(-\infty; -7) \cup (-1; \infty)$
 b) $(-\infty; -2) \cup \langle 8; \infty \rangle$ d) $(-\infty; -15) \cup (13; \infty)$

6.13. Rozwiąż układ nierówności.

- a) $\begin{cases} |x| > 2 \\ |x - 2| < 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} |x| > 3 \\ |x + 1| \leq 3 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} |x| \leq 5 \\ |x + 1| > 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} |x - 5| < 15 \\ |x - 8| > 1 \end{cases}$
 c) $\begin{cases} |x - 1| < 3 \\ |x - 2| \geq 1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} |x - 4| \geq 1 \\ |x - 3| \leq 2 \end{cases}$
 d) $\begin{cases} |x + 1| \leq 3 \\ |x - 1| \leq 3 \end{cases}$ h) $\begin{cases} |x - 5| < 1 \\ |x + 1| \leq 5 \end{cases}$

6.14. Rozwiąż układ nierówności.

- a) $\begin{cases} \sqrt{x^2} > 4 \\ |x + 2| < 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \sqrt{4x^2 - 4x + 1} < 7 \\ |x - 2| \geq 1 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} \sqrt{x^2} \leq 5 \\ \sqrt{x^2} > 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 10x + 25} < 3 \\ |x - 2| < 10 \end{cases}$

6.15. Oblicz długość odcinka AB , którego końce $A = (a)$ i $B = (b)$ leżą na osi liczbowej oraz

- a) $a = 3, b = -5.$ e) $a = 2\sqrt{5}, b = -7\sqrt{5}.$
 b) $a = -1, b = -7.$ f) $a = 1 + 2\sqrt{3}, b = 2\sqrt{3} + 5.$
 c) $a = 9, b = 2.$ g) $a = 2 - \sqrt{2}, b = 1 + \sqrt{2}.$
 d) $a = -\sqrt{3}, b = 2\sqrt{3}.$ h) $a = 3 - 2\sqrt{5}, b = 2 - \sqrt{5}.$

6.10. a) $x \in \langle -11; -3 \rangle$

b) $x \in (-\infty; 2) \cup (8; \infty)$

c) $x \in (1; 9)$ **d)** $x \in \mathbf{R}$

e) $x \in \mathbf{R} - \{4\}$ **f)** brak rozwiązań

g) $x \in \mathbf{R}$ **h)** $x = 11$

6.11. a) $|x - 2| < 5$

b) $|x - 10| \leq 4$ **c)** $|x + 5| \leq 5$

d) $|x + 3| \leq 2$

6.12. a) $|x - 9| > 2$ **b)** $|x - 3| \geq 5$

c) $|x + 4| \geq 3$ **d)** $|x + 1| > 14$

6.13. a) $x \in (2; 5)$

b) $x \in \langle -5; -3 \rangle \cup (1; 5)$

c) $x \in (-2; 1) \cup \langle 3; 4 \rangle$

d) $x \in \langle -2; 2 \rangle$ **e)** $x \in \langle -4; -3 \rangle$

f) $x \in (-10; 7) \cup (9; 20)$

g) $x \in (1; 3) \cup \{5\}$

h) brak rozwiązań

6.14. a) $x \in (-7; -4)$

b) $x \in \langle -5; -3 \rangle \cup (3; 5)$

c) $x \in (-3; 1) \cup \langle 3; 4 \rangle$

d) $x \in (-8; -2)$

6.15. a) $|AB| = 8$ **b)** $|AB| = 6$

c) $|AB| = 7$ **d)** $|AB| = 3\sqrt{3}$

e) $|AB| = 9\sqrt{5}$ **f)** $|AB| = 4$

g) $|AB| = 2\sqrt{2} - 1$

h) $|AB| = \sqrt{5} - 1$

6.16. Rozwiązaniami równania $|x + 5,4| = 6,8$ są liczby $-12,2$ i $1,4$. Można sprawdzić, że spełniają one nierówność $|x - 3,9| \geq 1,4$.

6.17. $7 - 5\sqrt{2} = \sqrt{49} - \sqrt{50} < 0$

6.18. Rozwiązaniami równania są liczby $\sqrt{7} - \sqrt{11}$ i $\sqrt{7} + \sqrt{11}$. Ich iloczyn jest równy $(\sqrt{7} - \sqrt{11})(\sqrt{7} - \sqrt{11}) = 7 - 11 = -4$.

Prosto do matury

1. C

2. D

3. C

4. F, F, P

5. $x \in (-\infty; -5) \cup (9; \infty)$

6. $x \in (5; 7)$

7. $|x - 6| < 8$

6.16. Udowodnij, że wszystkie rozwiązania równania $|x + 5,4| = 6,8$ należą do zbioru rozwiązań nierówności $|x - 3,9| \geq 2,5$.

6.17. Udowodnij, że równanie $|x + 3\sqrt{5}| = 7 - 5\sqrt{2}$ jest sprzeczne (czyli nie ma rozwiązań).

6.18. Udowodnij, że iloczyn rozwiązań równania $|x - \sqrt{7}| = \sqrt{11}$ jest liczbą całkowitą.

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Na rysunku przedstawiono zbiór rozwiązań jednej z poniższych nierówności. Wskaż tę nierówność.



- A. $|x + 2| \leq 3$ B. $|x + 3| \leq 2$ C. $|x - 2| \leq 3$ D. $|x - 3| \leq 2$

2. Wskaż równanie, którego rozwiązaniami są dwie liczby ujemne.

- A. $|x - 11| = 13$ B. $|x + 11| = 13$ C. $|x - 13| = 11$ D. $|x + 13| = 11$

3. Wskaż nierówność tożsamościową.

- A. $|x + 7| > 0$ B. $|x + 7| \geq 7$ C. $|x + 7| \geq -7$ D. $|x + 7| \leq 7$

4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Zbiór rozwiązań nierówności $|x + 7| < 2$ jest zbiorem wszystkich liczb, których odległość od liczby 7 jest równa 2.
 B. Do zbioru rozwiązań nierówności $|x + 7| < 2$ należy 5 liczb całkowitych.
 C. Zbiorem rozwiązań nierówności $|x + 7| < 2$ jest przedział $(-9; -5)$.

5. Rozwiąż nierówność $10 < 2|x - 2| - 4$.

6. Przedstaw w postaci przedziału zbiór rozwiązań układu nierówności $\begin{cases} |x| > 5 \\ |x - 3| < 4 \end{cases}$.

7. Przedstaw w postaci $|x - a| < b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest przedział $(-2; 14)$.

* 7. Równania i nierówności z wartością bezwzględną

Umiejętności:

- rozwiązywanie równań i nierówności z wartością bezwzględną

Podczas rozwiązywania równań lub nierówności typu $|x - b| = a$, $|x - b| < a$, $|x - b| > a$ korzystaliśmy bezpośrednio z geometrycznej interpretacji wartości bezwzględnej. Prześledźmy na przykładach, jak można rozwiązać podobne zadanie, jeżeli wyrażenie pod znakiem wartości bezwzględnej jest bardziej skomplikowane.

Przykład 1 ◀ zad. 7.5

Rozwiążemy równanie $|2x - 5| = 7$.

Rozwiązanie

Zadanie rozwiążemy na dwa sposoby. W pierwszym skorzystamy z geometrycznej interpretacji wartości bezwzględnej, w drugim – bezpośrednio z jej definicji.

I sposób

$$|2x - 5| = 7$$

← przekształcamy równanie do postaci $|x - b| = a$

$$\left| 2\left(x - \frac{5}{2}\right) \right| = 7$$

$$2\left|x - \frac{5}{2}\right| = 7, \text{ stąd } \left|x - \frac{5}{2}\right| = \frac{7}{2}$$

Wyznaczamy liczby, które na osi liczbowej są oddalone od $\frac{5}{2}$ o $\frac{7}{2}$.

$$x = \frac{5}{2} - \frac{7}{2} \text{ lub } x = \frac{5}{2} + \frac{7}{2}$$

$$x = -1 \text{ lub } x = 6$$

II sposób

Zauważmy, że $|w| = 7$ tylko wówczas, gdy $w = 7$ lub $w = -7$. Zatem:

$$|2x - 5| = 7$$

← przyjmujemy $w = 2x - 5$

$$2x - 5 = 7 \text{ lub } 2x - 5 = -7$$

$$2x = 12 \text{ lub } 2x = -2$$

$$x = 6 \text{ lub } x = -1$$

Druga metoda rozwiązywania równania okazała się w tym wypadku prostsza.

Odp.: $x = -1$ lub $x = 6$

◀ 7.5. Rozwiąż równanie.

a) $|6x - 5| = 11$

b) $|2 - 5x| = 6$

c) $|3x - 7| = 8$

d) $|2x - \sqrt{3}| = 3\sqrt{3}$

e) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 5$

f) $\frac{1}{7}\sqrt{9x^2 + 12x + 4} = 2$

Odp.: a) $x = -1$ lub $x = 2\frac{2}{3}$

b) $x = -\frac{4}{5}$ lub $x = 1\frac{3}{5}$

c) $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = 5$

d) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = 2\sqrt{3}$

e) $x = -2$ lub $x = 3$

f) $x = -5\frac{1}{3}$ lub $x = 4$

ZZ i KPU

temat 2.10

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.7

 **Generator**
testów i sprawdzianów

◀ 7.6. Rozwiąż nierówność.

b) $\left|2 - \frac{1}{5}x\right| > 1$

d) $|11 - 5x| \geq 4$

Odp.: b) $x \in (-\infty; 5) \cup (15; \infty)$

d) $x \in \left(-\infty; 1\frac{2}{5}\right) \cup (3; \infty)$

◀ 7.6. Rozwiąż nierówność.

a) $|3x - 5| \leq 2$

c) $|7x - 5| < 2$

Odp.: a) $x \in \left[1; 2\frac{1}{3}\right]$

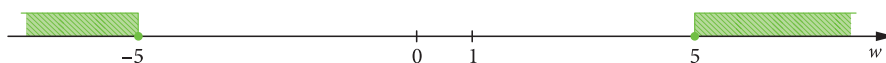
c) $x \in \left(\frac{3}{7}; 1\right)$

Przykład 2 ◀ zad. 7.6 b, dRozwiążemy nierówność $|3 - 2x| \geq 5$.**Rozwiązanie**

Tę nierówność można, podobnie jak równanie z przykładu 1, przekształcić do postaci $|x - a| \geq b$ i rozwiązywać tak, jak w poprzednim rozdziale. Prostsze wydaje się jednak inne postępowanie.

Zauważmy, że $|w| \geq 5$ tylko wtedy, gdy zajdzie jedna z dwóch możliwości:

$$w \leq -5 \text{ lub } w \geq 5$$



Zatem:

$$|3 - 2x| \geq 5$$

← przyjmujemy $w = 3 - 2x$

$$3 - 2x \leq -5 \text{ lub } 3 - 2x \geq 5$$

$$-2x \leq -8 \text{ lub } -2x \geq 2$$

$$x \geq 4 \text{ lub } x \leq -1$$

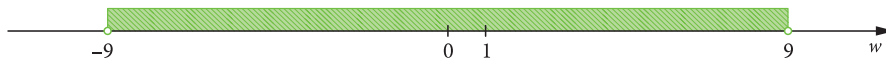
Rozwiązaniem nierówności $|3 - 2x| \geq 5$ jest każda liczba należąca do przedziału $(-\infty; -1]$ albo do przedziału $[4; \infty)$.

Odp.: $x \in (-\infty; -1] \cup [4; \infty)$

Przykład 3 ◀ zad. 7.6 a, cRozwiążemy nierówność $|2x + 3| < 9$.**Rozwiązanie**

Zauważmy, że $|w| < 9$ tylko wtedy, gdy spełniona jest podwójna nierówność:

$$-9 < w < 9$$



Zatem:

$$|2x + 3| < 9$$

← przyjmujemy $w = 2x + 3$

$$-9 < 2x + 3 < 9$$

← nierówność podwójną zapisujemy w postaci układu nierówności

$$\begin{cases} 2x + 3 < 9 \\ 2x + 3 > -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x < 6 \\ 2x > -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x < 6 \\ 2x > -12 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} x < 3 \\ x > -6 \end{cases}$$

Rozwiązaniem nierówności $|2x + 3| < 9$ jest każda liczba spełniająca warunek $-6 < x < 3$.

Odp.: $x \in (-6; 3)$

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $||x - 3| - 2| = 5$.

Rozwiązanie

Wartość bezwzględna wyrażenia $|x - 3| - 2$ jest równa 5, więc:

$$|x - 3| - 2 = 5 \text{ lub } |x - 3| - 2 = -5, \text{ czyli}$$

$$|x - 3| = 7 \text{ lub } |x - 3| = -3$$

Drugie równanie jest sprzeczne (wartość bezwzględna żadnej liczby nie jest równa -3), rozwiążemy więc tylko pierwsze.

$$x - 3 = 7 \text{ lub } x - 3 = -7$$

$$x = 10 \text{ lub } x = -4$$

Równanie $||x - 3| - 2| = 5$ ma dwa rozwiązania.

Odp.: $x = 10$ lub $x = -4$

Przykład 5 ◀ zad. 7.8

Rozwiążemy równanie $||2x + 4| - 3| = 1$.

Rozwiązanie

$$|2x + 4| - 3 = 1 \quad \text{lub} \quad |2x + 4| - 3 = -1$$

$$|2x + 4| = 4 \quad \text{lub} \quad |2x + 4| = 2$$

$$2x + 4 = 4 \text{ lub } 2x + 4 = -4 \quad \text{lub} \quad 2x + 4 = 2 \text{ lub } 2x + 4 = -2$$

$$x = 0 \text{ lub } x = -4 \quad \text{lub} \quad x = -1 \text{ lub } x = -3$$

Równanie $||2x + 4| - 3| = 1$ ma cztery rozwiązania.

Odp.: $x = 0$ lub $x = -4$, lub $x = -1$, lub $x = -3$.

Przykład 6 ◀ zad. 7.11 a, b

Rozwiążemy nierówność $||x + 2| - 3| < 7$.

Rozwiązanie

$$||x + 2| - 3| < 7 \text{ tylko wtedy, gdy } -7 < |x + 2| - 3 < 7$$

$$\begin{cases} |x + 2| - 3 < 7 \\ |x + 2| - 3 > -7 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} |x + 2| < 10 \\ |x + 2| > -4 \end{cases}$$

Nierówność $|x + 2| > -4$ jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej, więc do rozwiązania zostaje tylko nierówność $|x + 2| < 10$.

$$-10 < x + 2 < 10, \text{ stąd } -12 < x < 8$$

Odp.: $x \in (-12; 8)$

◀ 7.11. Rozwiąż nierówność.

a) $||x - 7| + 1| < 6$

b) $|2|3 - x| - 6| \leq 2$

Odp.: a) $x \in (2; 12)$ b) $x \in \langle -1; 1 \rangle \cup \langle 5; 7 \rangle$

◀ 7.8. Rozwiąż równanie.

a) $||x + 3| + 5| = 7$

b) $||x + 3| - \sqrt{7}| = \pi$

c) $||x + 5| - 2| = 1$

d) $|3\sqrt{2} - |\sqrt{2}x - 1|| = 2\sqrt{3}$

e) $|9 - \sqrt{49 - 14x + x^2}| = 6$

f) $|4 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 2x + 1}| = 7$

Odp.: a) $x = -5$ lub $x = -1$

b) $x = -\pi - 3 - \sqrt{7}$ lub

$x = \pi - 3 + \sqrt{7}$

c) $x = -8$ lub $x = -6$ lub $x = -4$ lub $x = -2$

d) $x = \frac{6 - 2\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ lub

$x = \frac{-6 + 2\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ lub

$x = \frac{6 + 2\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ lub

$x = \frac{-6 - 2\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$

e) $x = -8$ lub $x = 4$ lub $x = 10$ lub $x = 22$

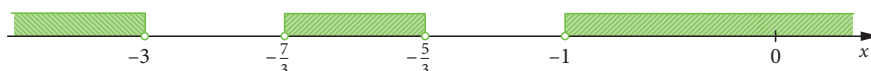
f) $x = -23$ lub $x = 21$

◀ 7.11. Patrz s. 147.

* **Przykład 7** ◀ zad. 7.11 c, dRozwiążemy nierówność $|2 - |3x + 6|| > 1$.

Rozwiązanie

$$\begin{array}{ll}
 2 - |3x + 6| > 1 & \text{lub} \quad 2 - |3x + 6| < -1 \\
 -|3x + 6| > -1 & \text{lub} \quad -|3x + 6| < -3 \\
 |3x + 6| < 1 & \text{lub} \quad |3x + 6| > 3 \\
 -1 < 3x + 6 < 1 & \text{lub} \quad 3x + 6 > 3 \text{ lub } 3x + 6 < -3 \\
 -7 < 3x < -5 & \text{lub} \quad 3x > -3 \text{ lub } 3x < -9 \\
 -\frac{7}{3} < x < -\frac{5}{3} & \text{lub} \quad x > -1 \text{ lub } x < -3 \\
 x \in \left(-\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}\right) & \text{lub} \quad x \in (-1; \infty) \text{ lub } x \in (-\infty; -3)
 \end{array}$$



$$\text{Odp.: } x \in (-\infty; -3) \cup \left(-\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}\right) \cup (-1; \infty)$$

* **Przykład 8** ◀ zad. 7.16Rozwiążemy równanie $|3x - 7| = |5 + 2x|$.

Rozwiązanie

Rozwiązaniaми tego równania są tylko takie wartości x , dla których wyrażenia $3x - 7$ oraz $5 + 2x$ są albo liczbami równymi, albo liczbami przeciwnymi. Zatem:

$$3x - 7 = 5 + 2x \text{ lub } 3x - 7 = -5 - 2x$$

$$\text{Stąd: } x = 12 \text{ lub } 5x = 2.$$

$$\text{Odp.: } x = 12 \text{ lub } x = \frac{2}{5}$$

$|a| = |b|$ wtedy i tylko wtedy, gdy
 $a = b$ lub $a = -b$.

Zadania

W każdym z zadań 7.1–7.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

7.1. Wskaż rozwiązania równania $|2x - 3| = 7$.

- A. 5, -2 B. 1, 2 C. -1, 5 D. -2, 3

7.2. Wskaż równanie, które nie jest spełnione przez wszystkie liczby rzeczywiste.

- A. $|x| \cdot |x| = x^2$ B. $|x| + |x| = |2x|$ C. $|x| - x = 0$ D. $|x| + |x| = 2\sqrt{x^2}$

Odpowiedzi i rozwiązania

7.1. A

7.2. C

7.3. Wskaż równość prawdziwą.

- A. $|\pi - 3,14| = 0$ C. $|\pi - 3,14| = 3,14 - \pi$
 B. $|\pi - 3,14| = \pi - 3,14$ D. $|-3,14 - \pi| = \pi - 3,14$

7.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Wszystkie rozwiązania równania $|2x - 1| = |x + 7|$ to

- A. $x = 6$. B. $x = 2$ lub $x = 6$. C. $x = -2$ lub $x = 6$.

7.5. Rozwiąż równanie.

- a) $|6x - 5| = 11$ c) $|3x - 7| = 8$ e) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 5$
 b) $|2 - 5x| = 6$ d) $|2x - \sqrt{3}| = 3\sqrt{3}$ f) $\frac{1}{7}\sqrt{9x^2 + 12x + 4} = 2$

7.6. Rozwiąż nierówność.

- a) $|3x - 5| \leq 2$ c) $|7x - 5| < 2$ e) $9 - \sqrt{9x^2 + 36x + 36} < 0$
 b) $\left|2 - \frac{1}{5}x\right| > 1$ d) $|11 - 5x| \geq 4$ f) $\sqrt{1 - 14x + 49x^2} < 13$

7.7. Rozwiąż nierówność.

- a) $1 - |6 - 3x| \geq 1$ c) $5 + \left|3\frac{1}{5}x - 7\right| < 1$
 b) $|x - \sqrt{5} + 1| > 0$ d) $9 > 6 - |2x - 8|$

7.8. Rozwiąż równanie.

- a) $||x + 3| + 5| = 7$ d) $|3\sqrt{2} - |\sqrt{2}x - 1|| = 2\sqrt{3}$
 b) $||x + 3| - \sqrt{7}| = \pi$ e) $|9 - \sqrt{49 - 14x + x^2}| = 6$
 c) $||x + 5| - 2| = 1$ f) $\left|4 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 2x + 1}\right| = 7$

D 7.9. Wykaż, że równanie $||x + 3| - 5| - 2| + 1 = 0$ nie ma rozwiązań.

D 7.10. Wykaż, że równanie $|x - 1| + |2x + 3| + |4 - x| + |x| = 0$ nie ma rozwiązań.

7.11. Rozwiąż nierówność.

- a) $||x - 7| + 1| < 6$ d) $||5x + 2| - 3| \geq 4$
 b) $|2|3 - x| - 6| \leq 2$ e) $|\sqrt{0,16x^2 - 4x + 25} - 2| < 3$
 c) $\left|7 - \left|\frac{1}{2}x - 2\right|\right| > 3$ f) $7 - |3 - 2|11 - 3x|| < 2$

7.9. $||x + 3| - 5| - 2| + 1 > 0$ dla $x \in \mathbf{R}$

7.10. $|x - 1| > 0$ dla $x \neq 1$, $|2x + 3| > 0$ dla $x \neq -\frac{3}{2}$, $|4 - x| > 0$ dla $x \neq 4$ i $|x| > 0$ dla $x \neq 0$, więc $|x - 1| + |2x + 3| + |4 - x| + |x| > 0$ dla $x \in \mathbf{R}$.

7.11. a) $x \in (2; 12)$ **b)** $x \in (-1; 1) \cup \langle 5; 7 \rangle$ **c)** $x \in (-\infty; -16) \cup (-4; 12) \cup (24; \infty)$

d) $x \in \left(-\infty; -1\frac{4}{5}\right) \cup \langle 1; \infty \rangle$ **e)** $x \in (0; 25)$ **f)** $x \in \left(-\infty; 2\frac{1}{3}\right) \cup (5; \infty)$

7.3. B

7.4. F, F, F

7.5. a) $x = -1$ lub $x = 2\frac{2}{3}$

b) $x = -\frac{4}{5}$ lub $x = 1\frac{3}{5}$

c) $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = 5$

d) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = 2\sqrt{3}$

e) $x = -2$ lub $x = 3$

f) $x = -5\frac{1}{3}$ lub $x = 4$

7.6. a) $x \in \left\langle 1; 2\frac{1}{3} \right\rangle$

b) $x \in (-\infty; 5) \cup (15; \infty)$

c) $x \in \left(\frac{3}{7}; 1\right)$

d) $x \in \left(-\infty; 1\frac{2}{5}\right) \cup \langle 3; \infty \rangle$

e) $x \in (-\infty; -5) \cup (1; \infty)$

f) $x \in \left(-1\frac{5}{7}; 2\right)$

7.7. a) $x = 2$ **b)** $x \in \mathbf{R} - \{\sqrt{5} - 1\}$

c) brak rozwiązań **d)** $x \in \mathbf{R}$

7.8. a) $x = -5$ lub $x = -1$

b) $x = -\pi - 3 - \sqrt{7}$ lub

$x = \pi - 3 + \sqrt{7}$

c) $x = -8$ lub $x = -6$ lub $x = -4$

lub $x = -2$

d) $x = \frac{6 - 2\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ lub

$x = \frac{-6 + 2\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ lub

$x = \frac{6 + 2\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ lub

$x = \frac{-6 - 2\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$

e) $x = -8$ lub $x = 4$ lub $x = 10$

lub $x = 22$

f) $x = -23$ lub $x = 21$

7.12. D

7.13. 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

7.14. 3, 4, 5

7.15. spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą: I, brak rozwiązań: III

7.16. a) $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 2$ b) $x = -5 - 3\sqrt{3}$ lub $x = 5 - 3\sqrt{3}$ c) $x = \frac{\pi - 1 + \sqrt{3}}{5}$ lub $x = \pi - 1 - \sqrt{3}$ d) $x = -5 - 2\sqrt{6}$ lub $x = 5 - 2\sqrt{6}$

Prosto do matury

1. D

2. C

3. D

4. $x = -2\frac{2}{3}$ lub $x = 6$ 5. $x \in \left(-3\frac{1}{2}; 4\right)$ 6. $x = -9$ lub $x = -1$ 7. $x \in (-1; 1) \cup (1; 3)$ 7.12. Na rysunku przedstawiono zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność $|2x - 6| \leq 12$. Wskaż wielkość m .A. $m = 2$ B. $m = 18$ C. $m = 5$ D. $m = 9$ 7.13. Wyznacz wszystkie liczby naturalne spełniające nierówność $|x - 7| < 4$.7.14. Wyznacz wszystkie liczby naturalne spełniające układ $\begin{cases} |x| > 2 \\ |x - 3| \leq 2 \end{cases}$.

7.15. Wśród podanych nierówności jedna jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą, a jedna nie ma rozwiązań. Wskaż te nierówności.

I. $||x - 5| + 2| + 3 \geq 0$ III. $||2x + 3| - 5| + 1 < 0$ II. $||5x - 1| - 3| - 2 \geq 0$ IV. $||3x + 2| + 1| - 5 < 0$

* 7.16. Rozwiąż równanie.

a) $|x + 1| = 3|x - 1|$ c) $|3x - \pi + 1| = |\sqrt{3} - 2x|$ b) $|\sqrt{3} + 2x| = |1 - \sqrt{3}x|$ d) $\sqrt{2x^2 - 2\sqrt{6}x + 3} = \sqrt{3x^2 + 2\sqrt{6}x + 2}$

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż równość, która zachodzi dla każdego $x \in \mathbf{R}$.A. $|x| \cdot |-x| = -x^2$ B. $|x| + x = 0$ C. $|x| - x = 0$ D. $|x| \cdot |-x| = x^2$

2. Wskaż równość prawdziwą.

A. $|3,14 - \pi| = 0$ C. $|3,14 - \pi| = \pi - 3,14$ B. $|\pi - 3,14| = 3,14 - \pi$ D. $|-3,14 - \pi| = 2\pi$ 3. Wskaż wszystkie rozwiązania równania $|2x + 1| = |x + 8|$.A. $x = 7$ B. $x = 3$ lub $x = 7$ C. $x = -3$ D. $x = -3$ lub $x = 7$ 4. Rozwiąż równanie $|3x - 5| = 13$.5. Rozwiąż nierówność $|1 - 4x| < 15$.6. Rozwiąż równanie $|1 - |x + 5|| = 3$.7. Rozwiąż nierówność $|1 - |1 - x|| < 1$.

8. Warto powtórzyć – obliczenia procentowe

Podział różnych całości na części, opisywanie i porównywanie ich wielkości jest jedną z najczęściej stosowanych operacji matematycznych. Od wieków stosuje się na świecie jednolity sposób podziału: całość dzielimy na sto równych części. Każdą z nich nazywamy procentem.

Definicja

Procentem nazywamy setną część całości.

1 procent (1%) pewnej **wielkości** to $\frac{1}{100}$ tej wielkości.

$$1\% \cdot w = \frac{1}{100} \cdot w$$

Procent danej liczby

Jeżeli obliczamy $p\%$ jakiejś wielkości w , to w równaniu

$$p\% \cdot w = a$$

niewiadomą jest wartość a .

Nazwa „procent” pochodzi od łacińskiego wyrażenia *pro centum*, tzn. „na sto”. Polskim odpowiednikiem tego wyrażenia jest „odsetek”.

Przykład 1 ◀ zad. 8.8

Karton mleka o wadze 250 g zawiera 3,2% tłuszczu. Obliczmy, ile gramów tłuszczu zawiera mleko z tego kartonu.

Rozwiązanie

$$3,2\% \cdot 250 = 3,2 \cdot \frac{1}{100} \cdot 250 = 8.$$

% to symboliczny zapis ułamka $\frac{1}{100}$.

Odp.: W tym mleku znajduje się 8 g tłuszczu.

Liczba na podstawie danego jej procentu

Jeżeli obliczamy wielkość w , wiedząc, że jej $p\%$ wynosi a , to w równaniu

$$p\% \cdot w = a$$

niewiadomą jest wartość w .

Przykład 2 ◀ zad. 8.13

Ola kupiła w sklepie muzycznym płytę CD za 48 zł, co stanowiło 20% jej oszczędności. Ile złotych oszczędności miała Ola przed zakupem płyty?

Uwagi metodyczne

Przypominamy zagadnienia dotyczące procentów, znane uczniom ze szkoły podstawowej. Bardziej zaawansowanym wystarczy szybkie przypomnienie pojęć, ale w słabszych klasach, ze względu na praktyczne zastosowanie procentów, materiał należy przećwiczyć.

W podręczniku konsekwentnie zamieniamy procent na ułamek $\frac{1}{100}$, przy czym procent nie występuje samodzielnie – zawsze jest setną częścią jakiejś wielkości. Przy takim zapisie główne typy obliczeń procentowych sprowadzają się do rozwiązywania

$$\text{równania: } p \cdot \frac{1}{100} \cdot w = a,$$

w którym zmieniają się tylko niewiadome. Jest to sprawdzona metoda obliczania procentów, łatwa do przyswojenia nawet dla najsłabszych uczniów.

◀ 8.8. Oblicz.

- a) 12% z grupy 300 osób
- b) 14% ze 150 cm³
- c) 36% z 250 g
- d) 55% ze 120 zł
- e) 12% z 25 l
- f) 96% z 2 godzin i 5 minut

Odp.: a) 36 osób b) 21 cm³
c) 90 g d) 66 zł e) 3 l f) 2 h

◀ 8.13. Oblicz wielkość w , wiedząc, że jej

- a) 7% wynosi 0,14 kg.
- b) 26% wynosi 83,2 t.
- c) 36% wynosi 1,8 h.
- d) 22% wynosi 3 km i 80 m.
- e) 15% jest równe 75 zł.
- f) 125% jest równe 75°.

Odp.: a) $w = 2$ kg b) $w = 320$ t
c) $w = 5$ h d) $w = 14$ km
e) $w = 500$ zł f) $w = 60^\circ$

◀8.17. Oblicz, jakim procentem wielkości w jest wielkość a .

- a) $w = 60$ kg, $a = 12$ kg
 b) $w = 2,4$ km, $a = 3,24$ km
 c) $w = 3$ h, $a = 20$ min
 d) $w = 11$ h, $a = 1$ h 6 min
 e) $w = 42$ zł, $a = 2$ zł 10 gr
 f) $w = 2,2$ km, $a = 1210$ m

Odp.: a) 20% b) 135% c) $11\frac{1}{9}\%$
 d) 10% e) 5% f) 55%

◀8.10. Pewną liczbę zwiększono o 40% i otrzymano 56. Jaka to liczba?

Odp.: 40

Rozwiązanie

$$20\% \cdot w = 48, \text{ czyli } 20 \cdot \frac{1}{100} \cdot w = 48, \text{ stąd } w = 240$$

Odp.: Ola miała 240 zł oszczędności.

Część pewnej wielkości jako procent

Jeżeli obliczamy, jakim procentem wielkości w jest dana jej część a , to w równaniu

$$p\% \cdot w = a$$

niewiadomą jest liczba procent p .

Przykład 3 ◀ zad. 8.17

Powierzchnia Ziemi wynosi 510,2 mln km², z czego 361,1 mln km² zajmują oceany. Jaki procent całej powierzchni Ziemi zajmują oceany?

Rozwiązanie

$$p\% \cdot 510,2 = 361,1$$

$$p \cdot \frac{1}{100} \cdot 510,2 = 361,1$$

$$p = \frac{361,1 \cdot 100}{510,2} \approx 70,8$$

We wszystkich przykładach zamieniliśmy symbol procentu (%) na ułamek $\frac{1}{100}$.
 Całą operację można zapisać krócej, np. $3\% \cdot 15 = 0,03 \cdot 15 = 0,45$.

Odp.: Oceany zajmują ok. 70,8% powierzchni Ziemi.

Porównywanie z użyciem procentów

Zajmiemy się rozwiązywaniem zadań, w których jedna wielkość jest o jakiś procent większa (lub mniejsza) od drugiej.

Przykład 4 ◀ zad. 8.10

Pierwszy odcinek pewnego programu obejrzało 1,6 mln widzów. Po miesiącu oglądalność tego programu wzrosła o 20%. Ile osób oglądało wtedy ten program?

Rozwiązanie

Analiza zadania:

1,6 ← liczba widzów przed miesiącem (w mln)

$20\% \cdot 1,6$ ← o tyle wzrosła oglądalność (w mln)

$1,6 + 20\% \cdot 1,6$ ← liczba widzów po miesiącu (w mln)

$$1,6 + 20\% \cdot 1,6 = 1,6 + 0,20 \cdot 1,6 = 1,6 + 0,32 = 1,92$$

Odp.: Po miesiącu program oglądało 1,92 mln widzów.

Przykład 5 ◀ zad. 8.9

W 1990 r. zakłady przemysłowe w Polsce wyemitowały do środowiska 1150 tys. ton zanieczyszczeń pyłowych. W roku 1997 emisja ta została zmniejszona o 72% w stosunku do roku 1990. Ile zanieczyszczeń wyemitowano w 1997 r.?

Rozwiązanie

Analiza zadania:

$$\begin{array}{ll}
 1150 & \leftarrow \text{emisja w roku 1990 (w tys. ton)} \\
 72\% \cdot 1150 & \leftarrow \text{o tyle ograniczono emisję (w tys. ton)} \\
 1150 - 72\% \cdot 1150 & \leftarrow \text{emisja w roku 1997 (w tys. ton)} \\
 1150 - 72\% \cdot 1150 = 1150 - 0,72 \cdot 1150 = 1150 - 828 = 322
 \end{array}$$

Odp.: W 1997 roku emisja zanieczyszczeń pyłowych wynosiła 322 tys. ton.

Jeżeli porównujemy dwie wielkości, np. 3 zł i 9 zł, to: 3 zł jest **o 6 zł mniejsze** od 9 zł oraz 9 zł jest **o 6 zł większe** od 3 zł.

Jeżeli pytamy, o ile procent jedna z wielkości jest mniejsza (większa) od drugiej, to odpowiedzi są różne: 3 zł jest **o 66,7% mniejsze** od 9 zł, natomiast 9 zł jest **o 200% większe** od 3 zł.

Przykład 6 ◀ zad. 8.25

Porównamy zarobki dwóch przyjaciół – Andrzeja i Jana. Andrzej zarabia 2900 zł, a Jan 3600 zł.

- O ile procent więcej od Andrzeja zarabia Jan?
- O ile procent mniej od Jana zarabia Andrzej?

Rozwiązanie

a) Wielkością podstawową, z którą porównujemy, jest w tym przypadku **pensja Andrzeja**. Zatem problem, który mamy rozwiązać, możemy zapisać symbolicznie:

$$\text{pensja Jana} = \text{pensja Andrzeja} + p\% \cdot \text{pensja Andrzeja}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy równanie z niewiadomą p :

$$3600 = 2900 + p\% \cdot 2900$$

$$700 = p \cdot \frac{1}{100} \cdot 2900$$

$$p = \frac{700}{29} \approx 24,1$$

Odp.: Jan zarabia o ok. 24,1% więcej od Andrzeja.

◀ **8.25.** Porcja budyniu waniliowego (1 szklanka) ma 400 kcal, a mały baton czekoladowy (20 g) – 108 kcal. O ile procent więcej kcal ma porcja budyniu od batona? O ile procent mniej kcal niż duży baton (40 g) ma średnie jabłko, które ma 75 kcal? Podaj wyniki z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

Odp.: o 270,4%, o 65,3%

◀ **8.9.** Jedna bluzka kosztuje 80 zł, a druga jest o 10% tańsza. Ile kosztuje druga bluzka?

Odp.: 72 zł

Uwagi metodyczne

W podręczniku sporo miejsca poświęcamy zadaniom, w których trzeba odpowiedzieć na pytanie: *O ile procent więcej?* To chyba najtrudniejsze zadania.

Z błędnymi rozwiązaniami często spotykamy się również poza szkołą, m.in. w mediach. Jest to zaskakujące; zazwyczaj nikomu nie sprawia kłopotu odpowiedź na pytanie: *Ile wynosi cena książki droższej o 60% od innej książki, kosztującej 20 zł?*, a odpowiedź na pytanie: *O ile procent cena jednej z książek jest wyższa (niższa) od ceny drugiej książki?* – zwykle wywołuje zakłopotanie.

Na początku lekcji poświęconej temu tematowi warto zadać pytanie testujące:

W grupie jest 20 chłopców i 10 dziewcząt. O ile procent mniej jest dziewcząt? O ile procent więcej jest chłopców?

Nie mieliśmy możliwości przeprowadzenia badania statystycznego, ale jesteśmy przekonani, że znaczący odsetek badanych odpowie błędnie przynajmniej na jedno z tych pytań.

◀ 8.26. Zosia ma o 25% więcej pocztówek niż Marta. O ile procent mniej pocztówek ma Marta?

Odp.: o 20%

b) Kiedy chcemy obliczyć, o ile procent mniej zarabia Andrzej, wielkością, z którą porównujemy, jest **pensja Jana**. Zatem symbolicznie zapiszemy:

$$\text{pensja Andrzeja} = \text{pensja Jana} - p\% \cdot \text{pensja Jana}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy następujące równanie:

$$2900 = 3600 - p\% \cdot 3600$$

$$-700 = -p \cdot \frac{1}{100} \cdot 3600$$

$$p = \frac{700}{36} \approx 19,4$$

Odp.: Andrzej zarabia o ok. 19,4% mniej od Jana.

Powszechnie używany zwrot „o a procent większe” często jest źle stosowany bądź rozumiany. Prześledźmy to na przykładzie.

Przykład 7 ◀ zad. 8.26

W sondażu przedwyborczym okazało się, że na partię AACH ma zamiar głosować 55% uprawnionych, a na partię OUCH – reszta, czyli 45% uprawnionych. Czy partia AACH ma elektorat o 10% większy od elektoratu partii OUCH? Obliczmy, o ile procent większy jest elektorat partii AACH od elektoratu partii OUCH, a o ile procent mniejszy od elektoratu partii AACH jest elektorat partii OUCH.

Rozwiązanie

Przez u oznaczmy liczbę wszystkich uprawnionych do głosowania.

$$55\%u \quad \leftarrow \text{liczba zwolenników partii AACH}$$

$$45\%u \quad \leftarrow \text{liczba zwolenników partii OUCH}$$

$$0,55u = 0,45u + x\% \cdot 0,45u \quad \leftarrow \text{partia AACH ma o } x\% \text{ zwolenników więcej niż OUCH}$$

$$55u - 45u = x \cdot 45u \quad \leftarrow \text{obie strony równania mnożymy przez 100}$$

$$10u = \frac{x}{100} \cdot 45u$$

$$\frac{10}{45} = \frac{x}{100}, \text{ stąd } x \approx 22$$

$$0,45u = 0,55u - y\% \cdot 0,55u \quad \leftarrow \text{partia OUCH ma o } y\% \text{ zwolenników mniej niż AACH}$$

$$45u - 55u = -y\% \cdot 55u \quad \leftarrow \text{obie strony równania mnożymy przez 100}$$

$$-10u = -\frac{y}{100} \cdot 55u$$

$$\frac{10}{55} = \frac{y}{100}, \text{ stąd } y \approx 18$$

Odp.: Partia AACH ma o 22% więcej zwolenników niż partia OUCH, partia OUCH ma o 18% mniej zwolenników niż partia AACH.

Zastosowanie procentów w zadaniach tekstowych

Przykład 8 ◀ zad. 8.19

Pan Karol wygrał 200 000 zł w teleturnieju „Wielkie nadzieje”. Musiał zapłacić 10% podatku od swojej wygranej. Połowę kwoty, która pozostała po zapłaceniu podatku, podzielił równo pomiędzy trzy schroniska dla zwierząt. Każde z nich musiało jeszcze zapłacić 5% podatku od darowizny. Ile pieniędzy pozostanie każdemu z obdarowanych schronisk?

Rozwiązanie

$$10\% \cdot 200\,000 = 10 \cdot \frac{1}{100} \cdot 200\,000 = 20\,000 \quad \leftarrow \text{podatek zapłacony przez pana Karola (w zł)}$$

Pozostało mu 180 000 zł.

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 180\,000 = 30\,000 \quad \leftarrow \text{kwota dla każdego ze schronisk (w zł)}$$

Schronisko musi zapłacić 5% podatku.

$$5\% \cdot 30\,000 = 5 \cdot \frac{1}{100} \cdot 30\,000 = 1500 \quad \leftarrow \text{podatek od darowizny (w zł)}$$

$$30\,000 - 1500 = 28\,500$$

Odp.: Każdemu ze schronisk pozostanie 28 500 zł.

Przykład 9 ◀ zad. 8.36

Naczynie o pojemności 1 litra jest napełnione 80-procentowym roztworem pewnej soli. Ile roztworu należy odlać, aby po dolaniu w to miejsce wody otrzymać roztwór 50-procentowy?

Rozwiązanie

Z treści zadania wynika, że w naczyniu mamy 0,8 l soli i 0,2 l wody. Aby nowy roztwór był 50-procentowy, powinien zawierać 0,5 l soli. Zatem musimy odlać tyle roztworu, aby pozbyć się 0,3 l soli. W jakiej ilości x obecnego roztworu jest 0,3 l soli?

$$0,3 = 80\% \cdot x$$

$$0,3 = 80 \cdot \frac{1}{100} \cdot x$$

$$x = 0,3 \cdot \frac{100}{80}$$

$$x = \frac{3}{8} = 0,375$$

Odp.: Należy odlać 0,375 l roztworu.

◀ **8.19.** Sławomir Żuczek, znany powieściopisarz, ma otrzymać za swoje najnowsze dzieło wynagrodzenie w wysokości 8% przychodu wydawcy. Przychód ten jest równy 75% kwoty, którą płaci nabywca książki (25% pochłaniają marża księgarni i koszty dystrybucji). Egzemplarz książki kosztuje 21 zł. Ile zarobi Sławomir Żuczek, jeżeli
a) jego nową powieść kupi 1300 osób?
b) jego nową powieść kupi 30 000 osób?
c) książka okaże się bestsellerem i kupi ją co najmniej 100 000 osób?

Odp.: **a)** 1638 zł **b)** 37 800 zł
c) co najmniej 126 000 zł

◀ **8.36.** Stężenie pewnego roztworu wodnego soli wynosi 5%. Ile kilogramów czystej wody należy dolać do 40 kg tego roztworu, aby stężenie soli w otrzymanej mieszaninie wynosiło 2%?

Odp.: 60 kg

- ◀ **8.40.** Tosia i Tomek zdawali egzamin testowy z matematyki. Tomek rozwiązał poprawnie 74% zadań, wynik Tosi był lepszy o 14 punktów procentowych.
- a)** O ile procent więcej zadań rozwiązała Tosia od Tomka? Podaj wynik z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.
- b)** Test składał się z 50 zadań. Ile zadań rozwiązała poprawnie Tosia, a ile Tomek?
- Odp.: a)** o 18,9% **b)** Tosia: 44, Tomek: 37

Punkty procentowe

Czasami wygodnie jest posłużyć się różnicą procentów. Wówczas używamy pojęcia **punkty procentowe**.

Przykład 10 ◀ zad. 8.40

W ciągu doby Maciek przeznacz średnio 30% czasu na sen, 40% na naukę, a 5% na sport. Przesypia zatem $30\% \cdot 24 \text{ h} = 7,2 \text{ h}$, uczy się $40\% \cdot 24 \text{ h} = 9,6 \text{ h}$, trenuje $5\% \cdot 24 \text{ h} = 1,2 \text{ h}$, a pozostałą część doby wypełniają mu różne inne czynności. Porównamy w tabeli punkty procentowe i procenty związane z tymi samymi wielkościami.

O ile punktów procentowych więcej (mniej)?	O ile procent więcej (mniej)?
a) $40\% - 30\% = 10\%$ Maciek przeznacz o 10 punktów procentowych więcej czasu na naukę niż na sen.	a) $\frac{40 - 30}{30} \cdot 100 \approx 33$ Nauka zajmuje Maćkowi ok. 33% więcej czasu niż sen.
b) $40\% - 5\% = 35\%$ Maciek przeznacz o 35 punktów procentowych więcej czasu na naukę niż na trening.	b) $\frac{40 - 5}{5} \cdot 100 = 700$ Nauka zajmuje Maćkowi o 700% więcej czasu niż trening.
c) $30\% - 5\% = 25\%$ Maciek przeznacz o 25 punktów procentowych mniej czasu na trening niż na sen.	c) $\frac{30 - 5}{30} \cdot 100 \approx 83$ Trening zajmuje Maćkowi ok. 83% mniej czasu niż sen.
d) $30\% - 5\% = 25\%$ Maciek przeznacz o 25 punktów procentowych więcej czasu na sen niż na trening.	d) $\frac{30 - 5}{5} \cdot 100 = 500$ Sen zajmuje Maćkowi o 500% więcej czasu niż trening.

Wykorzystując pojęcie omówione w ostatnim przykładzie, powiemy więc, że partia AACH (w przykładzie 7) ma o 10 punktów procentowych większe poparcie, że czas nauki Maćka jest o 35 punktów procentowych dłuższy od czasu treningu itd. W języku potocznym, a zwłaszcza w mediach, stosuje się jeszcze krótsze komunikaty:

- Partia AACH ma 10-punktową przewagę nad partią OOCCH!
- Zanotowano 3-punktowy wzrost inflacji.
- Stopy procentowe obniżono o 1 punkt.
- Aż o 5 punktów zmalała przewaga pana TEGO nad panem TAMTYM.

Zadania

Podczas rozwiązywania poniższych zadań możesz używać kalkulatora.

8.1. Buty przed obniżką o 30% kosztowały 150 zł. Ile kosztują obecnie?

- A. 45 zł B. 105 zł C. 115 zł D. 120 zł

8.2. Wskaż liczbę, która po zwiększeniu o 20% jest równa 60.

- A. 40 B. 48 C. 50 D. 72

8.3. Dziesięć lat temu Pyrki liczyły 1500 mieszkańców, a obecnie mieszka w nich 4,5 tys. osób. O ile procent wzrosła liczba pyrkowian?

- A. o 75% B. o 120% C. o 300% D. o 200%

8.4. Bezrobocie w pewnym kraju wynosi 10%. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Jeżeli bezrobocie spadnie o 2 punkty procentowe, to będzie wynosić 8%.
B. Jeżeli bezrobocie wzrośnie o 3%, to będzie wynosić 13%.
C. Jeżeli bezrobocie spadnie o 5%, to będzie wynosić 9,5%.

8.5. Pierwsza rata, która stanowi 9% ceny nart, jest równa 189 zł. Ile kosztują narty?

- A. 1901 zł B. 1890 zł C. 2100 zł D. 2109 zł

8.6. Liczby a i c są dodatnie. Liczba b stanowi 28% liczby a oraz 16% liczby c . Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. $c = 175\%a$ B. $c = 1,4a$ C. $a = \frac{4}{7}c$ D. $a = 0,16c$

8.7. Cenę roweru obniżono o 20%, a po miesiącu nową cenę obniżono jeszcze o 30%. O ile procent zmniejszyła się cena roweru w wyniku obu obniżek?

- A. o 50% B. o 44% C. o 56% D. o 60%

8.8. Oblicz.

- a) 12% z grupy 300 osób d) 55% ze 120 zł
b) 14% ze 150 cm³ e) 12% z 25 l
c) 36% z 250 g f) 96% z 2 godzin i 5 minut

8.9. Jedna bluzka kosztuje 80 zł, a druga jest o 10% tańsza. Ile kosztuje druga bluzka?

8.10. Pewną liczbę zwiększono o 40% i otrzymano 56. Jaka to liczba?

8.11. Sprzedawca obniżył cenę roweru z 600 do 580 zł. O ile procent staniał rower?

Odpowiedzi i rozwiązania

8.1. B

8.2. C

8.3. D

8.4. P, F, P

8.5. C

8.6. P, F, P, F

8.7. B

8.8. a) 36 osób b) 21 cm³
c) 90 g d) 66 zł e) 3 l f) 2 h

8.9. 72 zł

8.10. 40

8.11. o $3\frac{1}{3}\%$

8.12. podatek: 147,20 zł,
cena z VAT: 787,20 zł

8.13. a) $w = 2$ kg b) $w = 320$ t
c) $w = 5$ h d) $w = 14$ km
e) $w = 500$ zł f) $w = 60^\circ$

8.14. 180

8.15. z 400 kg

8.16. 27,3 kg

8.17. a) 20% b) 135% c) $11\frac{1}{9}\%$
d) 10% e) 5% f) 55%

8.18. 6,98%

8.19. a) 1638 zł b) 37 800 zł
c) co najmniej 126 000 zł

8.12. Rower kosztuje w hurtowni 640 zł. Sprzedawca dolicza do tej ceny podatek VAT w wysokości 23% ceny z hurtowni. Ile złotych wynosi podatek VAT i ile musimy zapłacić za rower?

8.13. Oblicz wielkość w , wiedząc, że jej

- | | |
|-----------------------|---------------------------------|
| a) 7% wynosi 0,14 kg. | d) 22% wynosi 3 km i 80 m. |
| b) 26% wynosi 83,2 t. | e) 15% jest równe 75 zł. |
| c) 36% wynosi 1,8 h. | f) 125% jest równe 75° . |

8.14. Na wystawie psów rasowych najliczniejszą grupę tworzyło 21 jamników. Stanowiły one aż $11\frac{2}{3}\%$ wszystkich kandydatów do medali zgłoszonych na wystawę. Jak liczna reprezentacja psów była oceniana na tej wystawie?

8.15. Woda morska zawiera 5% soli. Z ilu kilogramów tej wody otrzymamy 20 kg soli?

8.16. Podczas procesu palenia kawa traci 12% swojej masy. Ile świeżej kawy potrzeba, aby otrzymać 24 kg kawy palonej? Podaj wynik z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

8.17. Oblicz, jakim procentem wielkości w jest wielkość a .

- | | |
|--------------------------------|----------------------------------|
| a) $w = 60$ kg, $a = 12$ kg | d) $w = 11$ h, $a = 1$ h 6 min |
| b) $w = 2,4$ km, $a = 3,24$ km | e) $w = 42$ zł, $a = 2$ zł 10 gr |
| c) $w = 3$ h, $a = 20$ min | f) $w = 2,2$ km, $a = 1210$ m |

8.18. Lądy na Ziemi zajmują obszar $149,1$ mln km^2 , a Europa – $10,4$ mln km^2 . Jaki procent powierzchni lądów zajmuje Europa? Podaj wynik z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

8.19. Sławomir Żuczek, znany powieściopisarz, ma otrzymać za swoje najnowsze dzieło wynagrodzenie w wysokości 8% przychodu wydawcy. Przychód ten jest równy 75% kwoty, którą płaci nabywca książki (25% pochłaniają marża księgarni i koszty dystrybucji). Egzemplarz książki kosztuje 21 zł. Ile zarobi Sławomir Żuczek, jeżeli

- jego nową powieść kupi 1300 osób?
- jego nową powieść kupi 30 000 osób?
- książka okaże się bestsellerem i kupi ją co najmniej 100 000 osób?

VAT – skrót pochodzi od angielskich słów *value added tax*, czyli podatek od wartości dodanej – jest to podatek doliczany do cen towarów i usług płatnych.

8.20. Załóżmy, że 30 mln Polaków jest uprawnionych do głosowania w wyborach do sejmu. Pewną partię poparło w wyborach 40% głosujących. Frekwencja wynosiła 60%. Ile procent Polaków głosowało na kandydatów tej partii, jeżeli przyjmiemy, że Polska ma 40 mln obywateli?

8.20. 18%

8.21. Bilet do cyrku kosztuje 15 zł. Przy zakupie trzech biletów przysługuje 10% zniżki, a przy zakupie czterech 15% zniżki. O ile złotych więcej trzeba zapłacić za cztery niż za trzy bilety?

8.21. 10,50 zł

8.22. Jurek ma 182 cm wzrostu, a jego młodszy brat Bartek 168 cm. O ile procent Bartek jest niższy od Jurka? Podaj wynik z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

8.22. o 7,69%

8.23. Długość granicy Polski wynosi 3511 km, w tym granica morska jest równa 440 km, a granica wzdłuż rzek 1295 km. Oblicz, o ile procent granica lądowa jest dłuższa od granicy wzdłuż rzek. Podaj wynik z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

8.23. o 137,14%

8.24. Na początku roku szkolnego 12 uczniów z 30-osobowej klasy umiało grać w siatkówkę. Pod koniec roku w siatkówkę grało już 20 osób.

8.24. a) o $66\frac{2}{3}\%$ b) o $44\frac{4}{9}\%$

a) O ile procent wzrosła liczba uczniów umiejących grać w siatkówkę?

b) O ile procent zmalała liczba uczniów nieumiejących grać w siatkówkę?

8.25. Porcja budyniu waniliowego (1 szklanka) ma 400 kcal, a mały baton czekoladowy (20 g) – 108 kcal. O ile procent więcej kcal ma porcja budyniu od batona? O ile procent mniej kcal niż duży baton (40 g) ma średnie jabłko, które ma 75 kcal? Podaj wyniki z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

8.25. o 270,4%, o 65,3%

8.26. Zosia ma o 25% więcej pocztówek niż Marta. O ile procent mniej pocztówek ma Marta?

8.26. o 20%

8.27. Cena towaru po dwukrotnej obniżce o ten sam procent spadła z 50 zł do 40 zł 50 gr. O ile procent obniżono cenę za każdym razem?

8.27. 10%

8.28. Hurtownik podnosił cenę jabłek dwukrotnie w jednym tygodniu, pierwszy raz o 10%, a drugi raz o 5%. Po obu tych podwyżkach jeden kg jabłek sprzedawanych przez tę hurtownię kosztuje 4,62 zł. Oblicz cenę jednego kg jabłek przed omawianymi podwyżkami.

8.28. 4 zł

8.29. 1500 zł

8.30. a) o 19,7% b) o 16,4%

8.31. w pierwszym

8.32. o 8,3%

8.33. czesne: 231,50 zł,
czyli o 7,4% mniej

8.34. o 25% w stosunku do
czerwca

8.35. 300 zł

8.36. 60 kg

8.29. Wzrost kursu dolara w stosunku do złotego spowodował podwyżkę ceny importowanych telewizorów o 5%. Ponieważ nowa cena była zbyt wysoka, postanowiono obniżyć ją o 8% i ustalono cenę promocyjną równą 1449 zł. Oblicz pierwotną cenę jednego telewizora.

8.30. Największą głębokość na Ziemi jest Rów Mariański znajdujący się w Oceanie Spokojnym. Jego głębokość wynosi 11 034 m. Natomiast najgłębszy na Atlantyku Rów Portorykański ma 9220 m głębokości.

a) O ile procent głębszy jest Rów Mariański od Rowu Portorykańskiego?

b) O ile procent płytszy jest Rów Portorykański od Rowu Mariańskiego?

Podaj wyniki z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

8.31. W dwóch sklepach wprowadzono obniżkę identycznych cen tego samego towaru. W pierwszym obniżono ceny o 5%, a po tygodniu o 15%, w drugim zaś dokonano dwóch 10-procentowych obniżek. W którym sklepie ostateczna cena tego samego towaru była niższa?

8.32. Sprzedawca sprzedaje zegarki pewnej firmy z 20-procentową marżą (czyli o 20% drożej od ceny hurtowej). W promocji obniżył marżę do 10%. O ile procent staniały zegarki? Podaj wynik z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

8.33. W liceum społecznym ogłoszono, że miesięczne czesne będzie wynosiło 250 zł. Po przyjęciu uczniów do klas pierwszych okazało się, że liczba wszystkich uczniów w szkole jest o 8% większa od planowanej wcześniej. O ile procent można obniżyć wysokość czesnego tak, aby kwota wpływająca co miesiąc do szkoły nie uległa zmianie? Oblicz czesne po obniżce. Podaj wyniki w złotych z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

8.34. Julka systematycznie co miesiąc przejeżdża rowerem pewien stały dystans. W czerwcu przejechała o 20% mniej niż zwykle. O ile procent powinna zwiększyć swój dystans w lipcu, aby powrócić do poprzedniej średniej?

8.35. Na wiosnę w sklepie z obuwiem dwukrotnie przeprowadzono 20-procentową obniżkę cen butów zimowych. Po tych dwóch obniżkach buty kosztowały 192 zł. Ile kosztowały takie buty w sezonie zimowym?

8.36. Stężenie pewnego roztworu wodnego soli wynosi 5%. Ile kilogramów czystej wody należy dolać do 40 kg tego roztworu, aby stężenie soli w otrzymanej mieszaninie wynosiło 2%?

8.37. Z naczynia zawierającego 10 litrów 3-procentowego wodnego roztworu soli odlano połowę zawartości. Następnie dolano do naczynia 5 litrów wody. Iluprocentowy roztwór otrzymano?

8.38. Zmieszano 2,5 litra 30-procentowego kwasu solnego z 2 litrami 45-procentowego kwasu solnego. Oblicz stężenie procentowe otrzymanej mieszaniny.

8.39. Oprocentowanie kredytu wzrosło w ciągu roku dwukrotnie, za każdym razem o 1,3 punktu procentowego, i wynosi obecnie 6,1%. O ile punktów procentowych wzrosło łącznie oprocentowanie w tym czasie?

8.40. Tosia i Tomek zdawali egzamin testowy z matematyki. Tomek rozwiązał poprawnie 74% zadań, wynik Tosi był lepszy o 14 punktów procentowych.

a) O ile procent więcej zadań rozwiązała Tosia od Tomka? Podaj wynik z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

b) Test składał się z 50 zadań. Ile zadań rozwiązała poprawnie Tosia, a ile Tomek?

8.41. Łądy leżące na wysokości powyżej 5000 m n.p.m. zajmują 1,4 mln km² powierzchni Ziemi, co stanowi ok. 1% powierzchni wszystkich łądów. Depresje zajmują powierzchnię o 0,5 punktu procentowego mniejszą.

a) Jaki procent powierzchni łądów zajmują depresje?

b) Jaka jest powierzchnia depresji?

c) O ile procent większa jest powierzchnia łądów leżących powyżej 5000 m n.p.m. od powierzchni depresji?

8.42. Powietrze zawiera 78% azotu, 20,9% tlenu, 0,9% argonu i niewielkie ilości innych gazów.

a) O ile punktów procentowych większa jest w powietrzu zawartość azotu niż tlenu?

b) O ile procent większa jest w powietrzu zawartość azotu niż tlenu?

c) O ile procent większa jest w powietrzu zawartość tlenu niż argonu?

d) O ile procent mniejsza jest w powietrzu zawartość argonu niż azotu?

Dla punktów b–d podaj wyniki z dokładnością do liczby całkowitej.

8.43. Wzrost inflacji o 50% oznaczałby jej wzrost o 10 punktów procentowych. Ile wynosi inflacja?

8.44. Poparcie dla kandydata na urząd burmistrza wynosiło w styczniu 25%, a w kwietniu wzrosło do 33%. Kandydat chwali się, że poparcie dla niego zwiększyło się w tym czasie o ponad 30%. Czy ma rację?

D 8.45. Liczba a jest o 60% mniejsza od liczby b . Wykaż, że liczba b jest o 150% większa od liczby a .

8.37. roztwór 1,5-procentowy

8.38. $36\frac{2}{3}\%$

8.39. 2,6 punktu procentowego

8.40. a) o 18,9%

b) Tosia: 44, Tomek: 37

8.41. a) ok. 0,5%

b) ok. 0,7 mln km²

c) o ok. 100%

8.42. a) o 57,1 punktu

procentowego b) o 273%

c) o 2222% d) o 99%

8.43. 20%

8.44. tak

8.45. Jeśli

$$a = b - 0,6b = 0,4b = \frac{2}{5}b, \text{ to}$$

$$b = \frac{5}{2}a = a + 1,5a.$$

9. Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi – wprowadzenie

Umiejętności:

- rozpoznawanie równania liniowego z dwiema niewiadomymi
- sprawdzanie, czy dana para liczb jest rozwiązaniem równania liniowego z dwiema niewiadomymi
- rozpoznawanie układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi
- sprawdzanie, czy dana para liczb jest rozwiązaniem układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Równanie liniowe z dwiema niewiadomymi

Definicja

Równanie postaci $ax + by = c$, w którym niewiadome x i y występują w pierwszej (liniowej) potęgze, a , b i c są liczbami danymi oraz a i b nie są jednocześnie równe zero, nazywamy **równaniem liniowym z dwiema niewiadomymi**.

Przykładami równań tej postaci są:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 7 \\ -\sqrt{5}x + 4y &= 0,27(13) \\ 2x &= 9 \\ -y &= 7\sqrt{3} \end{aligned}$$

Odpowiedź na pytanie, czy równanie $2x = 9$ jest równaniem postaci $ax + by = c$, gdzie $a = 2$, $b = 0$ i $c = 9$, czy jest równaniem liniowym z jedną niewiadomą, odczytujemy z kontekstu. Czasem dla podkreślenia jednoznaczności będziemy zapisywać takie równanie w postaci $2x + 0y = 9$.

Jeżeli do równania z dwiema niewiadomymi podstawimy parę liczb w miejsce odpowiednich niewiadomych i otrzymamy równość, to mówimy, że ta para liczb spełnia to równanie. Każdą parę liczb spełniającą dane równanie nazywamy **rozwiązaniem tego równania**.

Przykład 1 ◀ zad. 9.6

Znajdziemy kilka rozwiązań równania $5x - 2y = 4$.

Rozwiązanie

- $5 \cdot 2 - 2y = 4$ ← wstawiamy do równania $x = 2$ (czyli liczbę 2 w miejsce x)
 - $-2y = 4 - 10$
 - $y = 3$
- Rozwiązaniem równania jest para liczb $x = 2$ i $y = 3$.

ZZ i KPU

temat 3.1

Multiteka

- Układ równań – rozwiązanie zadania
- Układy równań liniowych – liczba rozwiązań

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.9

Generator
testów i sprawdzianów

◀ 9.6. Znajdź trzy pary liczb (x, y) , które spełniają podane równanie.

- a) $x - y = 0$
b) $0x + y = 9$
c) $x + 0y = 11$
d) $5x + 3y = 8$

Odp.: a) np. $(2, 2)$, $(-5, -5)$, $(0, 0)$ b) np. $(-1, 9)$, $(3, 9)$, $(7, 9)$

c) np. $(11, 3)$, $(11, -7)$, $(11, 105)$ d) np. $(1, 1)$, $(\frac{8}{5}, 0)$, $(0, 2\frac{2}{3})$

- $5 \cdot \sqrt{2} - 2y = 4$ $\leftarrow$ wstawiamy do równania $x = \sqrt{2}$
 $-2y = -5\sqrt{2} + 4$
 $y = \frac{5}{2}\sqrt{2} - 2$
 Rozwiązaniem równania jest para liczb $x = \sqrt{2}$ i $y = \frac{5}{2}\sqrt{2} - 2$.

- $5x - 2 \cdot 0 = 4$ $\leftarrow$ wstawiamy do równania $y = 0$
 $x = \frac{4}{5}$
 Rozwiązaniem równania jest para liczb $x = \frac{4}{5}$ i $y = 0$.

Jest nieskończenie wiele par liczb spełniających równanie $5x - 2y = 4$.

Przykład 2 $\leftarrow$ zad. 9.5

Sprawdźmy, która z par liczb: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ jest rozwiązaniem równania $x - y = 5$.

Rozwiązanie

- (1, 4)
 $1 - 4 = -3 \neq 5$ $\leftarrow$ wstawiamy do równania $x = 1$ i $y = 4$

Odp.: Para liczb $x = 1$ i $y = 4$ nie jest rozwiązaniem tego równania.

- (2, -3)
 $2 - (-3) = 5$ $\leftarrow$ wstawiamy do równania $x = 2$ i $y = -3$

Odp.: Para liczb $x = 2$ i $y = -3$ jest rozwiązaniem tego równania.

Rozwiązania równania liniowego z dwiema niewiadomymi zapisujemy w różnych postaciach. Jedną z nich jest zapis:

$$x = x_0 \text{ i } y = y_0$$

Druga możliwość to zapis z klamerką:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

i kolejna – zapis w postaci uporządkowanej pary liczb:

$$(x_0, y_0)$$

Zauważmy, że kolejność liczb w zapisie takiej pary ma znaczenie. Na przykład para (2, 3) jest rozwiązaniem równania $5x - 2y = 4$, natomiast para liczb (3, 2) nie jest rozwiązaniem tego równania.

◀9.5. Sprawdź, która z wymienionych par liczb jest rozwiązaniem równania.

a) $2x - y = 3$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = 10 \\ y = -17 \end{cases}$$

b) $3x + 2y = 10$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 8 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = -10 \\ y = 7 \end{cases}$$

Odp.: a) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 8 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

◀9.7. Znajdź trzy pary liczb całkowitych (x, y) , które spełniają podane równanie.

- a) $x - y = 7$
 b) $2x + y = 5$
 c) $-x + 7y = 12$
 d) $3x + 5y = 20$

Odp.:

- a) np. $(1, -6)$, $(5, -2)$, $(0, -7)$
 b) np. $(2, 1)$, $(3, -1)$, $(0, 5)$
 c) np. $(-12, 0)$, $(-5, 1)$, $(2, 2)$
 d) np. $(0, 4)$, $(5, 1)$, $(-5, 7)$

Przykład 3 ◀ zad. 9.7

Podamy przykłady pięciu par liczb całkowitych spełniających dane równanie.

a) $x + 3y = 7$

b) $-4x + 2y = 12$

Rozwiązanie

a) $x + 3y = 7$

◀ z równania wyznaczamy jedną niewiadomą, np. x

$x = 7 - 3y$

Wynika stąd, że rozwiązaniami są pary liczb postaci $(7 - 3y, y)$, gdzie y jest dowolną liczbą rzeczywistą, a $x = 7 - 3y$. Zatem przykładami takich par są: $(7, 0)$, $(4, 1)$, $(10, -1)$, $(1, 2)$, $(-2, 3)$.

b) $-4x + 2y = 12$

◀ obie strony równania dzielimy przez 2

$-2x + y = 6$

◀ z równania wyznaczamy jedną niewiadomą, np. y

$y = 6 + 2x$

Wynika stąd, że rozwiązaniami są pary liczb postaci $(x, 6 + 2x)$, gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą, a $y = 6 + 2x$. Zatem przykładami takich par są: $(0, 6)$, $(1, 8)$, $(-1, 4)$, $(-2, 2)$, $(2, 10)$.

Odp.: a) np.: $(7, 0)$, $(4, 1)$, $(10, -1)$, $(1, 2)$, $(-2, 3)$

b) np.: $(0, 6)$, $(1, 8)$, $(-1, 4)$, $(-2, 2)$, $(2, 10)$

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Zadania tekstowe, z którymi zetknęliście się do tej pory, można było rozwiązać albo w pamięci, albo rozwiązując równanie liniowe z jedną niewiadomą.

Często wygodniejszą formą rozwiązywania zadania jest wprowadzenie kilku niewiadomych. Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 4

W szkółce leśnej posadzono w sumie 100 sadzonek świerka i modrzewia. Po określonym czasie okazało się, że do rozsady nie nadaje się $\frac{1}{6}$ sadzonek świerka i $\frac{1}{8}$ sadzonek modrzewia. Po ich odrzuceniu do rozsadzenia pozostało 86 sadzonek. Sprawdźmy, ile sadzonek świerka i ile modrzewia posadzono na początku w szkółce.

Rozwiązanie

Oznaczmy:

x – początkowa liczba sadzonek świerka

y – początkowa liczba sadzonek modrzewia

$\frac{1}{6}x$ – liczba odrzuconych sadzonek świerka

$\frac{1}{8}y$ – liczba odrzuconych sadzonek modrzewia

Na podstawie treści zadania wiemy, że:

$$x + y = 100 \quad \leftarrow \text{posadzono w sumie 100 sadzonek}$$

oraz

$$100 - \left(\frac{x}{6} + \frac{y}{8} \right) = 86 \quad \leftarrow \text{po odrzuceniu wszystkich niedobrych zostało 86}$$

Zauważmy, że jest wiele par liczb spełniających jedno z równań. Na przykład po podstawieniu $x = 60$ i $y = 40$ otrzymamy:

$$60 + 40 = 100, \text{ ale } 100 - \left(\frac{60}{6} + \frac{40}{8} \right) = 100 - (10 + 5) = 85 \neq 86$$

Z kolei po podstawieniu $x = 24$ i $y = 80$ otrzymamy:

$$100 - \left(\frac{24}{6} + \frac{80}{8} \right) = 100 - (4 + 10) = 86, \text{ ale } 24 + 80 = 104 \neq 100$$

Zadanie, które mamy rozwiązać, polega na znalezieniu takich par liczb $x = x_0$ i $y = y_0$, które będą spełniały wszystkie założenia podane w treści, czyli jedno i drugie równanie. Inaczej mówiąc, mamy do rozwiązania **układ równań**:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 100 - \left(\frac{x}{6} + \frac{y}{8} \right) = 86 \end{cases}$$

Jedyną parą liczb spełniającą ten układ równań jest $x = 36$ i $y = 64$. Sprawdźmy:

$$\begin{cases} 36 + 64 = 100 \\ 100 - \left(\frac{36}{6} + \frac{64}{8} \right) = 100 - (6 + 8) = 86 \end{cases}$$

Metodami rozwiązywania układów równań oraz wyjaśnieniem, dlaczego poszukiwanym rozwiązaniem tego układu jest tylko jedna para liczb, zajmiemy się w następnych tematach podręcznika.

Odp.: W szkółce posadzono 36 sadzonek świerka i 64 sadzonki modrzewia.

Przyjrzyjmy się ponownie układowi równań:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 100 - \left(\frac{x}{6} + \frac{y}{8} \right) = 86 \end{cases}$$

Drugie równanie przekształcimy równoważnie do prostszej postaci.

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ -\left(\frac{x}{6} + \frac{y}{8} \right) = 86 - 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 14 \end{cases} \quad \leftarrow \text{obie strony równania mnożymy przez 24}$$

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 4x + 3y = 336 \end{cases}$$

Zatem każde z równań układu jest równaniem liniowym z dwiema niewiadomymi.

◀9.8. Sprawdź, czy podana para liczb spełnia układ równań.

a) $\begin{cases} 6x + 5y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad (-3, 4)$

b) $\begin{cases} 7x - 2 = 2y \\ x - y = 1 \end{cases} \quad (0, -1)$

c) $\begin{cases} 2y - 3 = x \\ 2x + y = -1 \end{cases} \quad (3, 3)$

d) $\begin{cases} 2(x - 1) = 3y \\ x = 1 - y \end{cases} \quad (2, 0)$

e) $\begin{cases} 5x + y = 3 \\ 7x - 4y = -3 \end{cases} \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

f) $\begin{cases} x + y = \frac{1}{2} \\ x - y = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$

Odp.: a) tak b) tak c) nie
d) nie e) tak f) nie

Układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi zapisujemy najczęściej w postaci:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

przy czym litery x i y oznaczają niewiadome, natomiast $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi dodatkowo warunki: liczby a_1, b_1 nie są jednocześnie równe zero i liczby a_2, b_2 nie są jednocześnie równe zero.

Przykład 5 ◀ zad. 9.8

Sprawdźmy, czy podana para liczb spełnia układ równań $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 6x + 5y = 3 \end{cases}$.

a) $(2, -3)$

b) $(1, 1)$

c) $(-2, 3)$

Rozwiązanie

a) Do każdego z równań układu podstawiamy $x = 2$ i $y = -3$:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = 4 - 9 = -5 \neq 5 \\ 6 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) = 12 - 15 = -3 \neq 3 \end{cases}$$

Odp.: Para $(2, -3)$ nie spełnia podanego układu równań.

b) Do każdego z równań układu podstawiamy $x = 1$ i $y = 1$:

$$\begin{cases} 2 + 3 = 5 \\ 6 + 5 = 11 \neq 3 \end{cases}$$

Odp.: Para $(1, 1)$ nie spełnia podanego układu równań.

c) Do każdego z równań układu podstawiamy $x = -2$ i $y = 3$:

$$\begin{cases} -4 + 9 = 5 \\ -12 + 15 = 3 \end{cases}$$

Odp.: Para $(-2, 3)$ spełnia podany układ równań.

Przykład 6 ◀ zad. 9.11

Dany jest układ równań $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 5 \\ 3x + 2y = 30 \end{cases}$.

Sprawdźmy, czy pary $(0, 15)$, $(-2, 3)$, $(2, 12)$ należą do zbioru jego rozwiązań.

Rozwiązanie

$$\begin{cases} 0 + \frac{15}{3} = 5 \\ 0 + 30 = 30 \end{cases} \quad \leftarrow \text{podstawiamy } x = 0 \text{ i } y = 15$$

Para $(0, 15)$ spełnia ten układ równań.

◀9.11. Dany jest układ równań $\begin{cases} 2x - y = -\log_2 2 \\ 4x + 2 = 2y \end{cases}$.

a) Wykaż, że pary $(3, 7)$ i $(-1, -1)$ są rozwiązaniami tego układu.

b) Podaj przykład dwóch innych rozwiązań tego układu oraz jeden przykład pary niebędącej jego rozwiązaniem.

Odp.: a) Do każdego z równań układu podstawiamy $x = 3$ i $y = 7$.

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 - 7 = 6 - 7 = -1 = -\log_2 2 \\ 4 \cdot 3 + 2 = 12 + 2 = 14 = 2 \cdot 7 \end{cases}$$

Do każdego z równań układu podstawiamy $x = -1$ i $y = -1$.

$$\begin{cases} 2 \cdot (-1) - (-1) = -2 + 1 = -1 = -\log_2 2 \\ 4 \cdot (-1) + 2 = -4 + 2 = -2 = 2 \cdot (-1) \end{cases}$$

b) Każde równanie można przekształcić do postaci $y = 2x + 1$.

Przykłady innych rozwiązań: $(1, 3)$, $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3} + 1)$

Przykład pary niebędącej rozwiązaniem: $(2, 4)$

$$\begin{cases} -\frac{2}{2} + \frac{3}{3} = -1 + 1 = 0 \neq 5 \\ -6 + 6 = 0 \neq 30 \end{cases} \quad \leftarrow \text{podstawiamy } x = -2 \text{ i } y = 3$$

Para $(-2, 3)$ nie spełnia tego układu równań.

$$\begin{cases} \frac{2}{2} + \frac{12}{3} = 1 + 4 = 5 \\ 6 + 24 = 30 \end{cases} \quad \leftarrow \text{podstawiamy } x = 2 \text{ i } y = 12$$

Para $(2, 12)$ spełnia ten układ równań.

Odp.: Pary $(0, 15)$ i $(2, 12)$ należą do zbioru rozwiązań tego układu, natomiast para $(-2, 3)$ nie należy do tego zbioru.

Wniosek

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi może mieć więcej niż jedno rozwiązanie.

Zadania

W każdym z zadań 9.1–9.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytcie.

9.1. Wskaż parę liczb spełniającą równanie $3x - 5y = 15$.

- A. $(0, 3)$ B. $(-5, 0)$ C. $(0, -3)$ D. $(3, -1)$

9.2. Wskaż parę liczb, która nie spełnia równania $6x - 2y = -12$.

- A. $(0, 6)$ B. $(-1, 3)$ C. $(-1, 5)$ D. $(-2, 0)$

9.3. Wskaż parę liczb spełniającą układ równań $\begin{cases} 5x + 3y = -12 \\ x + y = -2 \end{cases}$.

- A. $(-4, 2)$ B. $(-3, 1)$ C. $(-5, 3)$ D. $(3, -5)$

9.4. Dane jest równanie liniowe z dwiema niewiadomymi $6x - y = 7$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Para $(1, -1)$ jest rozwiązaniem tego równania.
 B. Rozwiązaniami tego równania są uporządkowane pary liczb.
 C. To równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Odpowiedzi i rozwiązania

9.1. C

9.2. C

9.3. B

9.4. P, P, P

9.5. a) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 8 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

9.6. a) np. (2, 2), (-5, -5), (0, 0)

b) np. (-1, 9), (3, 9), (7, 9)

c) np. (11, 3), (11, -7), (11, 105)

d) np. (1, 1), $(\frac{8}{5}, 0)$, $(0, 2\frac{2}{3})$

9.7. a) np. (1, -6), (5, -2), (0, -7)

b) np. (2, 1), (3, -1), (0, 5)

c) np. (-12, 0), (-5, 1), (2, 2)

d) np. (0, 4), (5, 1), (-5, 7)

9.8. a) tak b) tak c) nie

d) nie e) tak f) nie

9.9. a) tak b) tak c) nie

d) tak e) nie f) tak

9.10. a) np. $x + y = 5$

b) np. $x - y = -2$

c) np. $2x - y = -6$

d) np. $-x + 2y = -4$

e) np. $-7x + y = 0$

f) np. $x + 5y = 0$

9.5. Sprawdź, która z wymienionych par liczb jest rozwiązaniem równania.

a) $2x - y = 3$ $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = 10 \\ y = -17 \end{cases}$

b) $3x + 2y = 10$ $\begin{cases} x = -2 \\ y = 8 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = -10 \\ y = 7 \end{cases}$

9.6. Znajdź trzy pary liczb (x, y) , które spełniają podane równanie.

a) $x - y = 0$ b) $0x + y = 9$ c) $x + 0y = 11$ d) $5x + 3y = 8$

9.7. Znajdź trzy pary liczb całkowitych (x, y) , które spełniają podane równanie.

a) $x - y = 7$ b) $2x + y = 5$ c) $-x + 7y = 12$ * d) $3x + 5y = 20$

9.8. Sprawdź, czy podana para liczb spełnia układ równań.

a) $\begin{cases} 6x + 5y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ (-3, 4) d) $\begin{cases} 2(x - 1) = 3y \\ x = 1 - y \end{cases}$ (2, 0)

b) $\begin{cases} 7x - 2 = 2y \\ x - y = 1 \end{cases}$ (0, -1) e) $\begin{cases} 5x + y = 3 \\ 7x - 4y = -3 \end{cases}$ $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$

c) $\begin{cases} 2y - 3 = x \\ 2x + y = -1 \end{cases}$ (3, 3) f) $\begin{cases} x + y = \frac{1}{2} \\ x - y = \frac{1}{3} \end{cases}$ $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$

9.9. Sprawdź, czy para (1, 2) jest rozwiązaniem podanego układu równań.

a) $\begin{cases} 2x - 5y = -8 \\ x + y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 6x + 3y = 12 \\ x - y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + \sqrt{2}y = 2\sqrt{2} - 1 \\ x + 5y = 11 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 10^{10}x + 10^{10}y = 3 \cdot 10^{10} \\ 2 \cdot 10^{20}x - 10^{15}y = 2 \cdot 10^5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{5}x + 2\sqrt{5}y = 5\sqrt{5} \\ 2\sqrt{3}x + \sqrt{7}y = 2\sqrt{10} \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2^{11}x + 2^{10}y = 2^{12} \\ 3^{-2}x + 3^{-1}y = 7 \cdot 3^{-2} \end{cases}$

9.10. Do danego równania dopisz drugie równanie tak, aby otrzymany układ był spełniony przez podaną obok parę liczb.

a) $2x + y = 7$ (2, 3) d) $4x + 3y = 5$ (2, -1)

b) $x + y = 10$ (4, 6) e) $-13x + 2y = -1$ (-1, -7)

c) $-x + 5y = 3$ (-3, 0) f) $117x - 119y = 0$ (0, 0)

9.11. Dany jest układ równań $\begin{cases} 2x - y = -\log_2 2 \\ 4x + 2 = 2y \end{cases}$.

a) Wykaż, że pary (3, 7) i (-1, -1) są rozwiązaniami tego układu.

b) Podaj przykład dwóch innych rozwiązań tego układu oraz jeden przykład pary niebędącej jego rozwiązaniem.

9.11. a) Do każdego z równań układu podstawiamy $x = 3$ i $y = 7$.

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 - 7 = 6 - 7 = -1 = -\log_2 2 \\ 4 \cdot 3 + 2 = 12 + 2 = 14 = 2 \cdot 7 \end{cases}$$

Do każdego z równań układu podstawiamy $x = -1$ i $y = -1$.

$$\begin{cases} 2 \cdot (-1) - (-1) = -2 + 1 = -1 = -\log_2 2 \\ 4 \cdot (-1) + 2 = -4 + 2 = -2 = 2 \cdot (-1) \end{cases}$$

b) Każde równanie można przekształcić do postaci $y = 2x + 1$.

Przykłady innych rozwiązań: (1, 3), $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3} + 1)$

Przykład pary niebędącej rozwiązaniem: (2, 4)

9.12. Wyznacz taką wartość m , aby para liczb $(-3, 5)$ była rozwiązaniem równania $2x + my = 9$.

D 9.13. Udowodnij, że para liczb $(2^{101}, 2^{102})$ jest rozwiązaniem podanego układu równań.

$$\begin{cases} 2x + y = 2^{103} \\ \log_2 x - \log_2 y = -1 \end{cases}$$

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż równanie, którego nie spełnia para liczb $(-4, -5)$.

- A. $x - y = 1$ B. $3x - 4y = 8$ C. $-2x - 3y = 7$ D. $2x + y = -13$

2. Wskaż parę liczb, która spełnia równanie $3x - 5y = 1$.

- A. $(\frac{4}{7}, \frac{1}{7})$ B. $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ C. $(-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$ D. $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$

3. Wskaż układ równań, który spełnia para liczb $(2, -3)$.

- A. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 3y = -7 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 5x - y = 7 \\ -x - y = 1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 5x + 4y = -2 \\ -4x - 5y = 7 \end{cases}$

4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Para liczb $(\frac{11 + \sqrt{2}}{4}, \frac{6 - \sqrt{2}}{6})$ spełnia równanie $4x + 6y = 17$.

B. Istnieje para liczb całkowitych spełniająca równanie $4x + 6y = 17$.

C. Istnieje para liczb wymiernych spełniająca równanie $4x + 6y = 17$.

5. Podaj parę liczb ujemnych spełniającą równanie $2x - 3y = 1$.

6. Sprawdź, czy para liczb $(2\sqrt{3}, -\sqrt{6})$ jest rozwiązaniem równania $\sqrt{6}x + \sqrt{3}y = 3\sqrt{2}$.

7. Wyznacz taką wartość m , aby para liczb $(8, -11)$ była rozwiązaniem równania $mx + 3y = 7$.

9.12. $m = 3$

Prosto do matury

1. C

2. A

3. D

4. P, F, P

5. np. $x = -1, y = -1$

6. tak

7. $m = 5$

9.13. Do każdego z równań układu podstawiamy $x = 2^{101}$ i $y = 2^{102}$.

$$\begin{cases} 2 \cdot 2^{101} + 2^{102} = 2 \cdot 2^{102} = 2^{103} \\ \log_2 2^{101} - \log_2 2^{102} = 101 - 102 = -1 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest para $(2^{101}, 2^{102})$.

10. Rozwiązywanie układu równań liniowych

Umiejętności:

- rozwiązywanie układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą podstawiania
- rozwiązywanie układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą przeciwnych współczynników

W tym temacie omówimy dwie algebraiczne metody rozwiązywania układów równań, trzecią – geometryczną – poznacie później.

Każda z podanych niżej metod polega na zastępowaniu danego układu równań innym, równoważnym mu i jednocześnie prostszym układem, z którego można już odczytać rozwiązania. Pokażemy to na przykładach.

Metoda podstawiania

◀ **10.1.** Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ y = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 7y = 2 \\ x = 2y \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 4y = 15 \\ y = -2x \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + 4y = -2 \\ -2x + 6y = 10 \end{cases}$

Odp.: a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = -3 \\ y = 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

Przykład 1 ◀ zad. 10.1

Rozwiążemy metodą podstawiania układ równań $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 5y = 14 \end{cases}$.

Rozwiązanie

Krok 1: Z pierwszego równania wyznaczamy zmienną y i podstawiamy do drugiego równania.

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ 3x - 5(-2x + 5) = 14 \end{cases}$$

Krok 2: W drugim równaniu wykonujemy przekształcenia.

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ 3x + 10x - 25 = 14 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} y = -2x + 5 \\ 13x = 39 \end{cases}$$

Krok 3: Z drugiego równania, które jest już równaniem z jedną niewiadomą, obliczamy x .

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ x = 3 \end{cases}$$

Krok 4: Obliczoną wartość x podstawiamy do pierwszego równania i obliczamy y .

$$\begin{cases} y = -2 \cdot 3 + 5 \\ x = 3 \\ x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Odp.: Jedynym rozwiązaniem układu jest para liczb $(3, -1)$.

ZZ i KPU

tematy 1.10, 3.2–3.5

Multiteka

- Procenty – rozwiązywanie zadania „od końca”
- Obliczanie wysokości odsetek na lokacie
- Układ równań – rozwiązanie zadania
- Układy równań liniowych – liczba rozwiązań

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.10

Przykład 2

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$ metodą podstawiania.

Rozwiązanie

Krok 1: $\begin{cases} x = 2y - 3 \\ 2(2y - 3) - 4y = 1 \end{cases}$ $\leftarrow$ z pierwszego równania wyznaczamy zmienną x i podstawiamy ją do drugiego równania

Krok 2: $\begin{cases} x = 2y - 3 \\ 4y - 6 - 4y = 1 \\ x = 2y - 3 \\ -6 = 1 \end{cases}$ $\leftarrow$ wykonujemy działania

Drugiego równania nie spełnia żadna liczba, zatem układ równań także nie ma rozwiązań.

Odp.: Układ równań nie ma rozwiązań.

Przykład 3

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} -6x + 2y = -8 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$ metodą podstawiania.

Rozwiązanie

Krok 1: $\begin{cases} -6x + 2(3x - 4) = -8 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$ $\leftarrow$ z drugiego równania wyznaczamy y

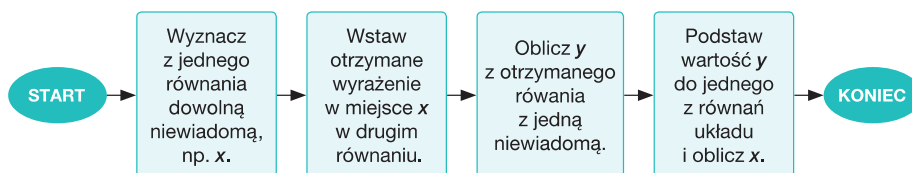
Krok 2: $\begin{cases} -6x + 6x - 8 = -8 \\ y = 3x - 4 \\ 0 = 0 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$ $\leftarrow$ wykonujemy działania

Pierwsze równanie jest spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą.

Rozwiązaniem układu jest każda para liczb spełniająca drugie równanie, np. $(0, -4)$, $(1, -1)$, $(-2, -10)$. Takich par liczb jest nieskończenie wiele.

Odp.: Układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań (x, y) ; są nimi pary liczb spełniające równanie $y = 3x - 4$.

Metodę podstawiania, stosowaną do rozwiązywania układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi, można przedstawić w postaci następującego schematu.



◀10.3. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} x - 5y = 2 \\ 2x + 5y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 3y = -18 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 4y = -10 \\ 3x + 4y = -15 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x - 3y = 3 \\ x - 3y = -6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 7y = 4 \\ 2x + y = -8 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 7x - 3y = 4 \\ 2y + 7x = 9 \end{cases}$

Odp.: a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Metoda przeciwnych współczynników

W tej metodzie będziemy wykorzystywać jedno z podstawowych praw arytmetyki, które mówi, że:

$$\text{jeżeli } a = b \text{ i } c = d, \text{ to } a + c = b + d$$

Rozwiążmy tą metodą poprzednio opisane przykłady.

Przykład 4 ◀ zad. 10.3

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 5y = 14 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

Rozwiązanie

Chcemy mieć w obydwu równaniach przy jednej z niewiadomych współczynniki będące liczbami przeciwnymi. W tym wypadku najłatwiej jest pomnożyć obydwie strony pierwszego równania przez 5.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 5y = 14 \end{cases} \quad | \cdot 5, \text{ stąd } \begin{cases} 10x + 5y = 25 \\ 3x - 5y = 14 \end{cases}$$

Jeśli dodamy równania stronami, to otrzymamy:

$$(10x + 5y) + (3x - 5y) = 25 + 14, \text{ czyli } 13x = 39$$

W ten sposób wyeliminowaliśmy niewiadomą y , czyli otrzymaliśmy równanie z jedną niewiadomą x . Mamy więc nowy układ równań:

$$\begin{cases} 13x = 39 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \quad \leftarrow \text{przepisujemy którekolwiek z początkowych równań}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ 6 + y = 5 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Odp.: Jedynym rozwiązaniem układu jest para liczb $(3, -1)$.

Przykład 5

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

Rozwiązanie

$$\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases} \quad | \cdot 2 \quad \leftarrow \text{obydwe strony pierwszego równania mnożymy przez 2}$$

$$\begin{cases} -2x + 4y = 6 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases} \quad \leftarrow \text{dodajemy równania stronami i jedno przepisujemy bez zmian}$$

$$\begin{cases} 0 = 7 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

Z otrzymanej sprzeczności w pierwszym równaniu wnioskujemy, że układ nie ma rozwiązań.

Odp.: Układ równań nie ma rozwiązań.

Przykład 6

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} -6x + 2y = -8 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

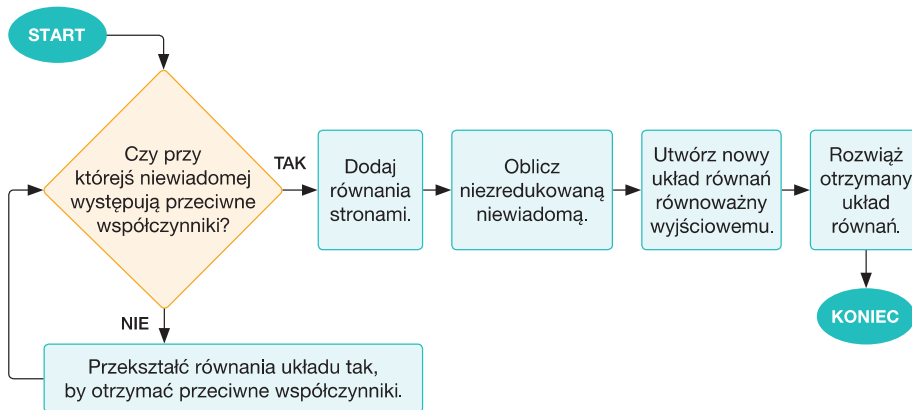
Rozwiązanie

$$\begin{cases} -6x + 2y = -8 \\ 3x - y = 4 \end{cases} \quad | \cdot 2 \quad \begin{cases} -6x + 2y = -8 \\ 6x - 2y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Drugie równanie w ostatnim układzie jest spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą, więc układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Odp.: Układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań (x, y) ; są nimi pary liczb spełniające równanie $3x - y = 4$.

Metodę przeciwnych współczynników, stosowaną do rozwiązywania układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi, można przedstawić w postaci schematu.



Czasem wygodnie jest stosować metodę przeciwnych współczynników do kolejnego wyznaczania niewiadomych.

Przykład 7 ◀ zad. 10.5

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} 7x + 5y = 1 \\ 3x - 9y = 4 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

Rozwiązanie

Aby doprowadzić do przeciwnych współczynników, np. przy zmiennej y , musimy w tym wypadku pomnożyć obydwa równania przez odpowiednie liczby.

$$\begin{cases} 7x + 5y = 1 & | \cdot 9 \\ 3x - 9y = 4 & | \cdot 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 63x + 45y = 9 \\ 15x - 45y = 20 \end{cases} \quad \begin{cases} 78x = 29 \\ 3x - 9y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{29}{78} \\ 3x - 9y = 4 \end{cases}$$

◀ 10.5. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x + 5y = 4 \\ -5x - 2y = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 7x - 3y = 2 \\ 4x - 5y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 2y = -9 \\ 4x + 5y = -9 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 5x + 3y = 8 \\ 7x - 2y = 7 \end{cases}$

Odp.: a) $\begin{cases} x = 2\frac{5}{13} \\ y = 1\frac{1}{13} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = -1\frac{10}{13} \\ y = 2\frac{12}{13} \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = \frac{7}{23} \\ y = \frac{1}{23} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 1\frac{3}{26} \\ y = \frac{19}{26} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = -2\frac{17}{23} \\ y = \frac{9}{23} \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = 1\frac{6}{31} \\ y = \frac{21}{31} \end{cases}$

Gdybyśmy chcieli teraz podstawić wyznaczone $x = \frac{29}{78}$ do drugiego równania i obliczyć wartość y , przekształcenia byłyby kłopotliwymi działaniami na ułamkach. Dlatego wygodniej będzie powrócić do pierwotnej postaci układu i ponownie zastosować metodę przeciwnych współczynników – tym razem w celu wyznaczenia niewiadomej y .

$$\begin{cases} 7x + 5y = 1 & | \cdot 3 \\ 3x - 9y = 4 & | \cdot (-7) \end{cases} \quad \begin{cases} 21x + 15y = 3 \\ -21x + 63y = -28 \end{cases} \quad \begin{cases} 78y = -25 \\ 3x - 9y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{25}{78} \\ 3x - 9y = 4 \end{cases}$$

Parą liczb spełniającą układ równań jest zatem $x = \frac{29}{78}$ oraz $y = -\frac{25}{78}$.

Odp.: Rozwiązaniem układu jest para liczb $\left(\frac{29}{78}, -\frac{25}{78}\right)$.

Podobnie jak układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi definiuje się układy równań z większą liczbą niewiadomych, z których każda jest w pierwszej potęgze. Najogólniej – mówimy o układach n równań liniowych z n niewiadomymi ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$). Pokażemy na przykładzie, jak można rozwiązywać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi.

Przykład 8 ◀ zad. 10.9

Rozwiążemy układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi.

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 7 \\ 3x + 3y + 2z = 1 \\ x - 3y + 5z = 4 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Na początku korzystamy z metody podstawiania. Z dowolnie wybranego równania wyznaczamy jedną z niewiadomych za pomocą pozostałych i wstawiamy otrzymane wyrażenie do pozostałych dwóch równań zamiast tej niewiadomej.

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y = 7 - 2x + 3z \\ 3x + 3(7 - 2x + 3z) + 2z = 1 \\ x - 3(7 - 2x + 3z) + 5z = 4 \end{cases} && \leftarrow \text{porządkujemy drugie i trzecie równanie} \\ &\begin{cases} y = 7 - 2x + 3z \\ 3x + 21 - 6x + 9z + 2z = 1 \\ x - 21 + 6x - 9z + 5z = 4 \end{cases} \\ &\begin{cases} y = 7 - 2x + 3z \\ -3x + 11z = -20 \\ 7x - 4z = 25 \end{cases} \end{aligned}$$

◀10.9. Rozwiąż układ równań.

$$\text{a)} \begin{cases} x + y = 2 \\ 10x - y + 3z = 7 \\ x - y - 3z = -11 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} 7x - 5y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 5 \\ 5x - 3y - z = -5 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} 5x - y + 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = -4 \\ -x + 5y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} 2x + y - 3z = 7 \\ 3x + 3y + 2z = -5 \\ x - 3y + 5z = 4 \end{cases}$$

$$\text{Odp.: a)} \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{d)} \begin{cases} x = 2\frac{41}{65} \\ y = -3\frac{1}{5} \\ z = -1\frac{42}{65} \end{cases}$$

Drugie i trzecie równanie tworzą układ równań z dwiema niewiadomymi, który rozwiążemy metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} -3x + 11z = -20 & | \cdot 7 \\ 7x - 4z = 25 & | \cdot 3 \\ \hline -21x + 77z = -140 \\ 21x - 12z = 75 \end{cases}$$

Stąd, po dodaniu równań stronami, otrzymujemy:

$$65z = -65$$

$$z = -1$$

← podstawiamy do równania $7x - 4z = 25$

$$7x = 25 - 4$$

$$x = 3$$

← podstawiamy obliczone niewiadome do równania

$$y = 7 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = -2$$

$$y = 7 - 2x + 3z$$

Odp.: Rozwiązaniem układu jest trójka liczb: $x = 3$, $y = -2$ i $z = -1$.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie, którego uzasadnienie poznacie w IV dziale tego podręcznika (zob. przykład 1 s. 349).

Twierdzenie

Układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi:

- ma dokładnie jedno rozwiązanie
- albo
- nie ma rozwiązań,
- albo
- ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Zgodnie z tym przyjmujemy następującą definicję:

Definicja

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy układem:

- **oznaczonym**, jeżeli ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- **sprzecznym**, jeżeli nie ma rozwiązań,
- **nieoznaczonym**, jeżeli ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Zatem układ równań rozwiązywany w przykładzie 1 jest układem oznaczonym, w przykładzie 2 – układem sprzecznym, a w przykładzie 3 – układem nieoznaczonym.

◀10.17. Dany jest układ równań liniowych z niewiadomymi x i y , w którym m oznacza liczbę.

$$\begin{cases} 5x + my = 7 \\ 5x + y = 3 \end{cases}$$

Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Dla $m = -1$ układ jest oznaczony.
- B. Dla $m = 0$ układ jest oznaczony.
- C. Dla $m = 1$ układ jest sprzeczny.

Odp.: P, P, P



Przykład 9 ◀ zad. 10.17

Dany jest układ równań $\begin{cases} x + my = 3 \\ mx + 4y = 6 \end{cases}$, w którym m oznacza liczbę, a x i y są niewiadomymi. Ocenimy prawdziwość podanych zdań.

- A. Dla $m = 2$ dany układ jest nieoznaczony.
- B. Dla $m = 0$ rozwiązaniem układu jest para liczb dodatnich.
- C. Dla $m = -2$ dany układ jest sprzeczny.

Rozwiązanie

A. Podstawiamy do układu równań $m = 2$:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$$

Drugie równanie jest równoważne równaniu pierwszemu (powstało przez pomnożenie obu stron pierwszego przez 2), a zatem każde z nich ma identyczny zbiór rozwiązań. Równanie liniowe z dwiema niewiadomymi $x + 2y = 3$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, każde z nich jest równocześnie rozwiązaniem układu, zatem pierwsze zdanie jest prawdziwe.

B. Podstawiamy do układu równań $m = 0$:

$$\begin{cases} x = 3 \\ 4y = 6 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} x = 3 > 0 \\ y = \frac{3}{2} > 0 \end{cases}$$

Drugie zdanie jest prawdziwe.

C. Podstawiamy do układu równań $m = -2$:

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2x + 4y = 6 \end{cases} \quad \leftarrow \text{dzielimy obie strony drugiego równania przez } -2$$

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 6 \\ x - 2y = -3 \end{cases} \quad \leftarrow \text{odejmujemy równania stronami i jedno przepisujemy bez zmian}$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że trzecie zdanie również jest prawdziwe.

Odp.: A, B, C – zdania są prawdziwe.

Zastosowanie układów równań

W szkole podstawowej rozwiązywaliście zadania tekstowe za pomocą równań z jedną niewiadomą. Zajmiemy się teraz takimi zadaniami, które wygodnie jest rozwiązać, używając układów równań liniowych.

Przykład 10 ◀ zad. 10.18

Zapiszemy podane informacje w postaci układów równań.

- a) Suma dwóch liczb równa się 22, a ich różnica wynosi 8. Niewiadomymi są te liczby.

Rozwiązanie

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

x – pierwsza liczba

y – druga liczba

Informacje podane w zadaniu można opisać dwoma równaniami:

$$x + y = 22 \quad \leftarrow \text{suma tych liczb równa się 22}$$

$$x - y = 8 \quad \leftarrow \text{różnica tych liczb wynosi 8}$$

Liczby mają spełniać obydwa warunki zadania, inaczej mówiąc – spełniać obydwa równania, zatem szukany układ równań ma postać:

$$\begin{cases} x + y = 22 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

- b) Aby odnowić pokój, pani Małgorzata kupiła 4 puszki farby kolorowej przeznaczonej do pomalowania ścian i 2 puszki farby białej do pomalowania sufitu. Za wszystko zapłaciła 669,76 zł. Po przeanalizowaniu ulotek informacyjnych doszła do wniosku, że musi jeszcze dokupić 2 puszki farby kolorowej i 2 białej. Tymczasem ceny farb wzrosły odpowiednio: o 3 zł – puszka kolorowej i o 1,50 zł – puszka białej, więc za drugi zakup pani Małgorzata zapłaciła 408,78 zł. Niewiadomymi są ceny farb przed podwyżką.

Rozwiązanie

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

x – cena puszki farby kolorowej przed podwyżką

y – cena puszki farby białej przed podwyżką

$x + 3$ – cena puszki farby kolorowej po podwyżce

$y + 1,50$ – cena puszki farby białej po podwyżce

$$4x + 2y = 669,76 \quad \leftarrow \text{kwota za 4 puszki farby kolorowej i 2 puszki białej przed podwyżką}$$

$$2(x + 3) + 2(y + 1,5) = 408,78 \quad \leftarrow \text{kwota za 2 puszki farby kolorowej i 2 puszki białej po podwyżce cen}$$

Zatem układ równań ma postać:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 669,76 \\ 2(x + 3) + 2(y + 1,5) = 408,78 \end{cases}$$

◀10.18. Utwórz układ równań opisujący przedstawioną sytuację.

- a) Liczba x jest o 12 większa od liczby y . Średnia arytmetyczna liczb x i y jest równa 11.
b) Suma liczby x i potrojonej wartości liczby y jest równa 20, a różnica podwojonej wartości liczby x i liczby y wynosi 19.
c) Po dodaniu 30% liczby x do liczby y otrzymamy 84, natomiast po odjęciu 10% liczby y od liczby x otrzymamy 74.
d) Liczba x jest o 5 większa od liczby y , a iloraz liczby x przez 4 jest o 4 mniejszy od ilorazu liczby y przez 3.

Odp.: a) $\begin{cases} x = y + 12 \\ \frac{x + y}{2} = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = 20 \\ 2x - y = 19 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 0,3x + y = 84 \\ x - 0,1y = 74 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = y + 5 \\ \frac{x}{4} + 4 = \frac{y}{3} \end{cases}$

◀10.19. Liczba x jest o 4 większa od liczby y . Średnia arytmetyczna liczb x i y jest równa 19. Wyznacz te liczby.

Odp.: $\begin{cases} x = 21 \\ y = 17 \end{cases}$

◀10.29. Stopiono dwa kawałki metalu. Jeden z nich zawierał 80% srebra, a drugi 87,5% srebra. Otrzymano 20 g stopu zawierającego 83% srebra. Jaką masę miał każdy ze stopionych kawałków?

Odp.: 12 g i 8 g

Przykład 11 ◀ zad. 10.19

Suma 20% pierwszej liczby i 15% drugiej liczby jest równa 120, a suma 12% pierwszej liczby i 25% drugiej liczby jest równa 136. Wyznaczymy te liczby.

Rozwiązanie

Wprowadzamy oznaczenia:

x – pierwsza liczba

y – druga liczba

Wówczas warunki zadania można opisać następującymi równaniami:

$$20\%x + 15\%y = 120$$

$$12\%x + 25\%y = 136$$

Zamieniamy procenty na liczby.

$$0,2x + 0,15y = 120$$

$$0,12x + 0,25y = 136$$

$$p\% \text{ liczby } a = \frac{p}{100} \cdot a \quad \left(\left(\left(\right) \right) \right)$$

Rozwiążemy teraz układ tych równań. Wykorzystamy metodę przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} 0,2x + 0,15y = 120 \\ 0,12x + 0,25y = 136 \end{cases} \quad | \cdot (-0,6) \quad , \quad \text{stad} \quad \begin{cases} -0,12x - 0,09y = -72 \\ 0,12x + 0,25y = 136 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,16y = 64 \\ 0,12x + 0,25y = 136 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 400 \\ 0,12x + 100 = 136 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 400 \\ 0,12x = 36 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 400 \\ x = 300 \end{cases}$$

Odp.: Pierwsza liczba jest równa 300, a druga 400.

Przykład 12 ◀ zad. 10.29

W dwóch naczyniach znajduje się roztwór kwasu. W pierwszym naczyniu jest roztwór o stężeniu 3%, a w drugim 8%. Ile litrów roztworu z każdego naczynia należy przelać do trzeciego, aby otrzymać 2 litry roztworu o stężeniu 5%?

Rozwiązanie

Niech x oznacza potrzebną liczbę litrów roztworu 3%. Wówczas

$3\%x$ oznacza liczbę litrów czystego kwasu pobranego z pierwszego naczynia.

Podobnie, jeśli y oznacza potrzebną liczbę litrów roztworu 8%, to

$8\%y$ oznacza liczbę litrów czystego kwasu pobranego z drugiego naczynia.

Pierwsze równanie wyraża objętość całego otrzymanego roztworu:

$$x + y = 2$$

Drugie równanie opisuje liczbę litrów czystego kwasu w otrzymanym roztworze:

$$3\%x + 8\%y = 5\% \cdot 2$$

Po zamianie procentów na liczby drugie równanie przyjmie następującą postać:

$$0,03x + 0,08y = 0,05 \cdot 2$$

Otrzymany układ równań rozwiążemy metodą podstawiania.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 0,03x + 0,08y = 0,1 \end{cases} \quad | \cdot 100, \text{ stąd } \begin{cases} y = 2 - x \\ 3x + 8y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 - x \\ 3x + 8(2 - x) = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 - x \\ 3x + 16 - 8x = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1,2 \\ y = 0,8 \end{cases}$$

Odp.: Należy wziąć 1,2 litra roztworu 3% i 0,8 litra roztworu 8%.

Przykład 13 ◀ zad. 10.28

Linia kolejowa łącząca miejscowości A i B prowadzi przez przełęcz górską. Pociąg wjeżdża na przełęcz ze średnią prędkością 40 km/h, a zjeżdża z niej ze średnią prędkością 80 km/h. Podróż z A do B trwa 2 h, a podróż powrotna trwa 1 h 45 min. Ile kilometrów liczy linia kolejowa łącząca te miejscowości?

Rozwiązanie

Wprowadzamy oznaczenia:

s_1 – droga z miejscowości A do przełęcz

s_2 – droga z miejscowości B do przełęcz

Tradycyjnie literą v oznaczamy prędkość, a literą t – czas.

Wiadomo, że $v = \frac{s}{t}$, czyli $t = \frac{s}{v}$. Jeśli dodamy czasy przejazdu pociągu na dwóch fragmentach trasy (pod górę i z góry), otrzymamy łączny czas przejazdu z jednej do drugiej miejscowości.

$$\frac{s_1}{40} + \frac{s_2}{80} = 2 \quad \leftarrow \text{łączny czas przejazdu z A do B}$$

$$\frac{s_2}{40} + \frac{s_1}{80} = 1\frac{3}{4} \quad \leftarrow \text{łączny czas przejazdu z B do A}$$

Otrzymany układ równań rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} \frac{s_1}{40} + \frac{s_2}{80} = 2 \\ \frac{s_1}{80} + \frac{s_2}{40} = 1\frac{3}{4} \end{cases} \quad | \cdot 80, \text{ stąd } \begin{cases} 2s_1 + s_2 = 160 \\ -2s_1 - 4s_2 = -280 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2s_1 + s_2 = 160 \\ -3s_2 = -120 \end{cases} \quad \begin{cases} s_2 = 40 \\ 2s_1 + 40 = 160 \end{cases} \quad \begin{cases} s_1 = 60 \\ s_2 = 40 \end{cases}$$

Zatem cała droga jest równa $s_1 + s_2 = 100$.

Odp.: Linia kolejowa łącząca miejscowości A i B ma długość 100 km.



◀10.28. Monika dojeżdża do szkoły pociągiem o 7^{00} . Potem po 5 minutach czekania wsiada do tramwaju i jest przed szkołą o 7^{50} . Pociąg jedzie ze średnią prędkością 50 km/h, a tramwaj – 20 km/h. Oblicz, ile czasu Monika jedzie pociągiem, a ile tramwajem, jeśli wiadomo, że łącznie przebywa drogę 30 km.

Odp.: pociągiem: 30 minut, tramwajem: 15 minut

Zwróćmy uwagę na dodatkowy problem związany z praktycznym wykorzystaniem matematyki. Często współczynniki równań są podawane w postaci przybliżeń dziesiętnych (np. wtedy, gdy są danymi notowanymi podczas jakichś doświadczeń). Należy wówczas bardzo uważać, gdyż nawet niewielkie zmiany ich wielkości na skutek zaokrągleń mogą znacząco zmienić końcowe rozwiązanie układu.

Przykład 14

Porównajmy współczynniki trzech układów równań:

$$\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 2,4x - 7,201y = 11,999 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3y = 5 \\ 2,4x - 7,201y = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3y = 5 \\ 2,399x - 7,2y = 12,001 \end{cases}$$

Różnice w zastosowanych przybliżeniach są bardzo małe, tymczasem rozwiązania bardzo się różnią: pierwszy układ spełnia para (8, 1), drugi – (5, 0), a trzeci – (–1, –2).

Odpowiedzi i rozwiązania

10.1. a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = -3 \\ y = 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

10.2. a) nieskończenie wiele par liczb (x, y) spełniających równanie

$3x - y = 5$ b) $\begin{cases} x = 0,5 \\ y = 1,5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 1\frac{1}{3} \\ y = -1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$

10.3. a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Zadania

10.1. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 4y = 15 \\ y = -2x \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ y = -3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 7y = 2 \\ x = 2y \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + 4y = -2 \\ -2x + 6y = 10 \end{cases}$

10.2. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -1,5x + 0,5y = -2,5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x = 5y + 2 \\ 2x + 7y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 3y = -2 \\ 7x + 7y = 14 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2y = 6x - 5 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x = 3 - 5y \\ 18x + 7y = 17 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 14x + 3y = 4 \\ 2x - 6 = 5y \end{cases}$

10.3. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} x - 5y = 2 \\ 2x + 5y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x - 3y = 3 \\ x - 3y = -6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 3y = -18 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 7y = 4 \\ 2x + y = -8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 4y = -10 \\ 3x + 4y = -15 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 7x - 3y = 4 \\ 2y + 7x = 9 \end{cases}$

10.4. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 5x + 6y = 5 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 9x + 6y = 1 \\ 12x + 8y = 3 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} -2x + 3y = 8 \\ 26x - 39y = 104 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 6x - 4y = 3 \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 5y = 4 \end{cases} & \text{g)} \begin{cases} 7x - 3y = 7 \\ 3\frac{1}{2}x - 2y = 7 \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} 4x + 5y = 0,2 \\ 5x - 4y = 2,3 \end{cases} & \text{h)} \begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 3x + 4y = -6 \end{cases} \end{array}$$

10.5. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 3x - 2y = -9 \\ 4x + 5y = -9 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 7x - 3y = 2 \\ 4x - 5y = 1 \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} 6x + 5y = 4 \\ -5x - 2y = 3 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 5x + 3y = 8 \\ 7x - 2y = 7 \end{cases} \end{array}$$

10.6. Rozwiąż układ równań.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 1,5 - (x - y) = 0,5(y - x) + 2 \\ 2y - 4 = 4x \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \frac{3x - y}{2} - \frac{x + y}{4} = 4 \\ \frac{x - y}{2} - \frac{x + 5y}{5} = 5 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} x + y = 0 \\ \frac{x + 2}{4} - \frac{y - 3}{3} = \frac{1}{4} \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 7x - 3y = \frac{-5(x + y)}{2} - \frac{5y - 25x}{3} \\ 3\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y = 0 \end{cases} \end{array}$$

10.7. Rozwiąż układ równań.

$$\begin{array}{l} \text{a)} \begin{cases} (x - 3)^2 - (y - 1)^2 = x^2 - 4x - (y + 2)(y - 2) \\ 3x - 6y = 15 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} (x + 1)^2 + y^2 - 8 = (y - 2)^2 + (x + 3)(x - 3) \\ -3x + y - 4 = 0 \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} (x - 2)^2 + (x + y)(y - x) = y(y - 1) \\ \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{4} = 0,25(x + 2y) + 1 \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} (x - 2)^2 - (y - 1)^2 = (x - y)(x + y) + 4 \\ 2(x - y) + y^2 = (y - 2\sqrt{2})(y + 2\sqrt{2}) \end{cases} \end{array}$$

10.4. a) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ **b)** brak rozwiązań

c) $\begin{cases} x = -7 \\ y = 5 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x = 0,3 \\ y = -0,2 \end{cases}$

e) brak rozwiązań **f)** $\begin{cases} x = -1,5 \\ y = -3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x = -2 \\ y = -7 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$

10.5. a) $\begin{cases} x = 2\frac{5}{13} \\ y = 1\frac{1}{13} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = 1\frac{3}{26} \\ y = \frac{19}{26} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = -1\frac{10}{13} \\ y = 2\frac{12}{13} \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x = -2\frac{17}{23} \\ y = \frac{9}{23} \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = \frac{7}{23} \\ y = \frac{1}{23} \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x = 1\frac{6}{31} \\ y = \frac{21}{31} \end{cases}$

10.6. a) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = -2\frac{1}{7} \\ y = 2\frac{1}{7} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x = 1\frac{4}{11} \\ y = -3\frac{2}{33} \end{cases}$

d) nieskończenie wiele par liczb (x, y) spełniających równanie $x + y = 0$

10.7. a) $\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x = 3,5 \\ y = 7,5 \end{cases}$

10.8. a) $\begin{cases} x = 19 \\ y = -15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

10.9. a) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 2\frac{41}{65} \\ y = -3\frac{1}{5} \\ z = -1\frac{42}{65} \end{cases}$

10.10. a) np. 2

b) np. 0

c) np. $-10y, 1$

d) $5y$

e) np. $12x, -2y, 1$

f) np. 0

10.11. a) np. $2x, -2y, 6$

b) $-3y, -5$

c) $6y, 4$

d) $-2,8y, 2,4$

10.12. a) jedno

b) nieskończenie wiele

c) brak

d) nieskończenie wiele

10.8. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} 2(x-y)^2 - 3(x+1) = 2(x-y)(x+y) + 4y(1-x+y) \\ \frac{x+y}{4} = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{x-y-2}{4} = 1\frac{1}{4}y \\ 2(x-3) + 3(x+y) = -3 \end{cases}$

10.9. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 10x - y + 3z = 7 \\ x - y - 3z = -11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - y + 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = -4 \\ -x + 5y + 2z = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x - 5y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 5 \\ 5x - 3y - z = -5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y - 3z = 7 \\ 3x + 3y + 2z = -5 \\ x - 3y + 5z = 4 \end{cases}$

10.10. Jakie wyrażenia można wstawić w miejsce $?$, aby otrzymać układ sprzeczny?

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = ? \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 6x + ? = ? \end{cases}$

e) $\begin{cases} 6x - y = 1 \\ ? + ? = ? \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = ? \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 10y = 7 \\ x + ? = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - y = 100 \\ y - x = ? \end{cases}$

10.11. Jakie wyrażenia można wstawić w miejsce $?$, aby otrzymać układ nieoznaczony?

a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ ? + ? = ? \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 3y = 2 \\ -2x + ? = ? \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -2x + ? = ? \end{cases}$

d) $\begin{cases} 0,3x - 2,1y = 1,8 \\ 0,4x + ? = ? \end{cases}$

10.12. Podaj liczbę rozwiązań układu równań.

a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2(x-3) + 3(y-1) = 1 \\ 4(x-3) + 6(y-1) = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2 = 7y \\ 1\frac{1}{2}x - 3\frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5(x+2) - (2y+1) = 6 \\ 1\frac{2}{3}(x+2) - \frac{1}{3}(2y+1) = 2 \end{cases}$

10.13. Jakie wyrażenie można wstawić w miejsce $?$, aby otrzymać układ:

- I. oznaczony,
II. sprzeczny,
III. nieoznaczony?

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + ? = ? \end{cases}$ b) $\begin{cases} -3x + 10y = 4 \\ ? + ? = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x - 5y = 11 \\ ? + ? = ? \end{cases}$ d) $\begin{cases} 7x - 12y = -5 \\ ? + ? = ? \end{cases}$

D 10.14. Wykaż, że układ równań $\begin{cases} 2(1-x) = 4(y-1) + 3 \\ 4(2y-1) = 2(1-2x) - 2 \end{cases}$ jest sprzeczny.

D 10.15. Wykaż, że układ równań $\begin{cases} 8(x-1) + 6(y+2) = 2 \\ 4(x+2) = 10 - 3(y+1) \end{cases}$ jest nieoznaczony.

10.16. Z równań:

- I. $\frac{1}{2}x - y + 2 = 0$
II. $x + 4 = 2y$
III. $2x - 4y = -4$
IV. $x + 2y = 8$

ułoż trzy układy dwóch równań: oznaczony, nieznaczony oraz sprzeczny. Rozwiąż ułożone układy równań, aby uzasadnić odpowiedź.

10.17. Dany jest układ równań liniowych z niewiadomymi x i y , w którym m oznacza liczbę.

$$\begin{cases} 5x + my = 7 \\ 5x + y = 3 \end{cases}$$

Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Dla $m = -1$ układ jest oznaczony.
B. Dla $m = 0$ układ jest oznaczony.
C. Dla $m = 1$ układ jest sprzeczny.

10.18. Utwórz układ równań opisujący przedstawioną sytuację.

- a) Liczba x jest o 12 większa od liczby y . Średnia arytmetyczna liczb x i y jest równa 11.
b) Suma liczby x i potrojonej wartości liczby y jest równa 20, a różnica podwojonej wartości liczby x i liczby y wynosi 19.
c) Po dodaniu 30% liczby x do liczby y otrzymamy 84, natomiast po odjęciu 10% liczby y od liczby x otrzymamy 74.
d) Liczba x jest o 5 większa od liczby y , a iloraz liczby x przez 4 jest o 4 mniejszy od ilorazu liczby y przez 3.

- 10.13. d)** np.: I. $x + y = 2$,
II. $14x - 24y = -2$,
III. $3,5x - 6y = -2,5$

10.14. Przekształcamy równoważnie każde z równań układu.

$$\begin{cases} 2(1-x) = 4(y-1) + 3 \\ 4(2y-1) = 2(1-2x) - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 - 2x = 4y - 4 + 3 \\ 8y - 4 = 2 - 4x - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 4y = -3 \\ 4x + 8y = 4 \quad | : (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 4y = -3 \\ -2x - 4y = -2 \end{cases}$$

Zatem ten układ równań jest sprzeczny.

10.15. Przekształcamy równoważnie każde z równań układu.

$$\begin{cases} 8(x-1) + 6(y+2) = 2 \\ 4(x+2) = 10 - 3(y+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x - 8 + 6y + 12 = 2 \\ 4x + 8 = 10 - 3y - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x + 6y = -2 \\ 4x + 3y = -1 \quad | \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x + 6y = -2 \\ 8x + 6y = -2 \end{cases}$$

Zatem ten układ równań jest nieoznaczony.

10.16. I i II: nieoznaczony,
I i III oraz II i III: sprzeczne,
IV z pozostałymi: oznaczone;
rozwiązania układów IV i I oraz

$$\text{IV i II} - \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}, \quad \text{IV i III} - \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

10.17. P, P, P

10.18. a) $\begin{cases} x = y + 12 \\ \frac{x+y}{2} = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = 20 \\ 2x - y = 19 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 0,3x + y = 84 \\ x - 0,1y = 74 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = y + 5 \\ \frac{x}{4} + 4 = \frac{y}{3} \end{cases}$

10.19.
$$\begin{cases} x = 21 \\ y = 17 \end{cases}$$

10.20. 25 dwuzłotówek
i 15 pięciozłotówek

10.21. Staszek: 43 km,
Jurek: 37 km

10.22. jogurt: 2,50 zł, serek: 5,20 zł

10.23. 20 zł i 14 zł

10.24. kromka chleba: 30 kcal,
szklanka mleka: 122 kcal

10.25. 20 dziewcząt i 20 chłopców

10.26. wystarczy ($k = 10$ zł,
 $m = 15$ zł)

10.19. Liczba x jest o 4 większa od liczby y . Średnia arytmetyczna liczb x i y jest równa 19. Wyznacz te liczby.

10.20. Hania ma w skarbonce 125 zł w monetach o nominałach 2 zł i 5 zł. Monet pięciozłotowych jest o 10 mniej niż dwuzłotowych. Ile jest w skarbonce monet dwuzłotowych, a ile pięciozłotowych?

10.21. Staszek i Jurek porównali dystans, jaki przejechali w ciągu tygodnia rowerami. W sumie pokonali 80 km. Gdyby Staszek przejechał 4 km mniej, a Jurek 2 km więcej, to obaj przejechaliby tyle samo. Ile km przejechał Staszek, a ile Jurek?

10.22. Za 5 opakowań jogurtu owocowego i cztery opakowania serka koziego Anna zapłaciła 33,30 zł. W tym samym sklepie za 6 opakowań identycznego jogurtu i 2 opakowania takiego samego serka koziego Grzegorz zapłacił 25,40 zł. Jaka była cena jogurtu, a jaka serka?

10.23. Marcin zdał wszystkie egzaminy w sesji zimowej i chciał zaprosić 3 koleżanki i 3 kolegów z grupy do klubu studenckiego. Aby wyrównać proporcje między liczbą studentów i liczbą studentek odwiedzających ten klub, zachęcano dziewczęta niższą ceną biletów. Marcin za bilety dla wszystkich zapłaciłby 122 zł, uznał jednak, że absolutnie nie może wydać na imprezę więcej niż 120 zł. Postanowił zmienić plany. Zaprosił tylko najbliższego przyjaciela, ale za to aż 5 koleżanek. Teraz miał zapłacić tylko 110 zł. Jaka jest cena biletów każdego rodzaju?

10.24. Michał ważył za dużo, więc zaczął zwracać uwagę na to, co je. Na podwieczorek, zamiast dwóch drożdżówek, przygotował sobie 3 kromki chleba graham i 2 szklanki mleka. Kiedy jednak zjrzał do tabeli wartości kalorycznych, przekonał się, że jego podwieczorek to aż 334 kcal. Zredukował go więc do 2 kromek chleba i 1 szklanki mleka. Rezultat był lepszy – tylko 182 kcal. Uspokojony zabrał się do jedzenia. Jaka jest wartość kaloryczna jednej kromki chleba, a jaka jednej szklanki mleka?

10.25. W grupie uczniów, którzy zapisali się na wycieczkę, liczba chłopców stanowiła 75% liczby dziewcząt. Gdy do tej grupy dodatkowo zapisało się pięciu chłopców, liczba chłopców była równa liczbie dziewcząt. Ile dziewcząt i ilu chłopców wybrało się na wycieczkę?

10.26. Zosia, Krysia i Piotrek wybrali się na kiermasz książki, mając na zakupy po 70 zł. Zosia kupiła dwa komiksy po k zł oraz trzy lektury po m zł i otrzymała 5 zł reszty. Krysia na cztery lektury po m zł oraz jeden komiks w cenie k zł wydała całą sumę. Czy Piotrkowi wystarczy pieniędzy na cztery komiksy po k zł i dwie lektury po m zł? Zapisz obliczenia i odpowiedź.

- 10.27.** Monika dojeżdża do szkoły pociągiem, a potem tramwajem. Za oba bilety miesięczne płaci razem 153 zł 60 gr. Bilet kolejowy jest o 40% droższy od tramwajowego. Oblicz, ile kosztuje każdy z biletów.
- 10.28.** Monika dojeżdża do szkoły pociągiem o 7^{00} . Potem po 5 minutach czekania wsiada do tramwaju i jest przed szkołą o 7^{50} . Łącznie przebywa drogę 30 km. Pociąg jedzie ze średnią prędkością 50 km/h, a tramwaj – 20 km/h. Oblicz, ile czasu Monika jedzie pociągiem, a ile tramwajem.
- 10.29.** Stopiono dwa kawałki metalu. Jeden z nich zawierał 80% srebra, a drugi 87,5% srebra. Otrzymano 20 g stopu zawierającego 83% srebra. Jaką masę miał każdy ze stopionych kawałków?
- 10.30.** Pole prostokąta nie zmieni się, jeśli jego dłuższy bok zmniejszymy o 4 cm, a krótszy zwiększymy o 4 cm. Pole to nie zmieni się również, jeśli dłuższy bok prostokąta zwiększymy o 4 cm, a krótszy zmniejszymy o 2 cm. Oblicz długości boków prostokąta.
- 10.31.** W dwóch sadach posadzono drzewka owocowe. W drugim sadzie było o 15 drzewek więcej niż w pierwszym. Po roku liczba drzewek w każdym sadzie wzrosła o $\frac{1}{3}$ i wtedy okazało się, że w obydwu sadach razem jest 1700 drzewek. Ile drzewek było w każdym sadzie na początku?
- * **10.32.** Ktoś zapytał znajomego, ile ma lat. Zapytany odpowiedział: „Kiedy ja byłem w twoim wieku, ty się dopiero urodziłeś; za pięć lat będziemy mieć razem dwa razy tyle lat, ile mieliśmy 5 lat temu”. Ile lat ma każdy z nich?
- * **10.33.** Statek pokonuje dystans 90 km, płynąc z prądem rzeki w czasie 6 godzin, a z powrotem w czasie 10 godzin. Oblicz prędkość prądu rzeki i prędkość własną statku przy założeniu, że statek płynie w obie strony z taką samą prędkością własną.
- * **10.34.** Stacje A i B łączy linia kolejowa o długości 240 km. O godzinie 8^{00} z A do B wyjechał pociąg osobowy, a o godzinie 8^{48} z B do A wyjechał pociąg pospieszny. Pociągi te minęły się o godzinie 9^{48} . Gdyby pociąg pospieszny wyjechał o godzinie 8^{00} , a osobowy o godzinie 8^{48} , to pociągi minęłyby się o godzinie 9^{40} . O której godzinie minęłyby się te pociągi, gdyby oba wyjechały o godzinie 8^{00} ? Zakładamy, że we wszystkich podanych sytuacjach średnie prędkości pociągów się nie zmieniają.

10.27. kolejowy: 89 zł 60 gr,
tramwajowy: 64 zł

10.28. pociągiem: 30 minut,
tramwajem: 15 minut

10.29. 12 g i 8 g

10.30. 12 cm i 8 cm

10.31. 630 i 645

10.32. Niech x i y oznaczają wiek obu znajomych. Wtedy

$$\begin{cases} y = 2x \\ (x+5) + (y+5) = 2((x-5) + (y-5)) \end{cases}$$

Znajomi mają 10 lat i 20 lat.

10.33. $v_p = 3$ km/h

i $v_s = 12$ km/h.

Wskazówka: Niech v_p oznacza prędkość prądu, a v_s – prędkość własną statku (w km/h). Wówczas

$$\begin{cases} v_s + v_p = \frac{90}{6} \\ v_s - v_p = \frac{90}{10} \end{cases}$$

10.34. 9^{20} . Wskazówka: Niech v_1 oznacza średnią prędkość pociągu osobowego, a v_2 – średnią prędkość pociągu pospiesznego (w km/h).

Wówczas, jeśli czas przejazdu wyrazimy w godzinach, mamy:

$$\begin{cases} v_1 \cdot 1\frac{48}{60} + v_2 \cdot 1 = 240 \\ v_1 \cdot \frac{52}{60} + v_2 \cdot 1\frac{40}{60} = 240 \end{cases} \quad \text{Stąd } v_1 = 75 \text{ km/h i } v_2 = 105 \text{ km/h.}$$

Po rozwiązaniu równania $75t + 105t = 240$ otrzymujemy $t = 1\frac{1}{3}$.



Prosto do matury

Prosto do matury

1. D
2. C
3. B
4. 75 dziewcząt i 65 chłopców
5. $x = -2$, $y = -2$
6. czereśnie: 7,50 zł, truskawki: 5,20 zł
1. Wskaż parę liczb spełniającą układ równań $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 7y = -11 \end{cases}$.
- A. (1, 1) B. (-1, 2) C. (-1, 3) D. (1, 2)
2. Wskaż parę liczb, która nie spełnia układu równań $\begin{cases} x - 2\sqrt{2}y = -3 \\ -3\sqrt{2}x + 12y = 9\sqrt{2} \end{cases}$.
- A. $(2\sqrt{2} - 3, 1)$ B. $(-3, 0)$ C. $(-1, 5)$ D. $(1, \sqrt{2})$
3. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 5x + my = -12 \\ x + y = -2 \end{cases}$ z niewiadomymi x i y jest para liczb $(-3, 1)$. Wskaż wartość współczynnika m .
- A. $m = -3$ B. $m = 3$ C. $m = -1$ D. $m = 2$
4. W konkursie historycznym startowało 140 uczniów. Do drugiego etapu zakwalifikowało się 38 osób, czyli $\frac{1}{3}$ startujących dziewcząt i $\frac{1}{5}$ startujących chłopców. Ile dziewcząt i ilu chłopców brało udział w tym konkursie?
5. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} \frac{x-y}{3} - \frac{x+y}{2} = 2 \\ (x+2)(y-4) = (x-1)(y+2) \end{cases}$.
6. Właściciel sklepu z owocami kupił na giełdzie truskawki i czereśnie. Cena hurtowa kilograma czereśni była o 2 zł wyższa niż cena hurtowa kilograma truskawek. Właściciel sklepu ustalił cenę sprzedaży czereśni o 25% wyższą od ceny hurtowej, a cenę sprzedaży truskawek – o 30% wyższą od ceny hurtowej. Za pół kilograma czereśni i kilogram truskawek klient zapłacił w sklepie 8,95 zł. Oblicz cenę kilograma czereśni i kilograma truskawek w tym sklepie.
- D 7. Wykaż, że układ równań $\begin{cases} 3(x+1) - 4(y-1) = 2 \\ 3(x-1) + 2(1-2y) = -6 \end{cases}$ jest nieoznaczony. Podaj trzy przykłady par liczb spełniających ten układ.

7. Przekształcamy równoważnie każde z równań układu.

$$\begin{cases} 3(x+1) - 4(y-1) = 2 \\ 3(x-1) + 2(1-2y) = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 3 - 4y + 4 = 2 \\ 3x - 3 + 2 - 4y = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = -5 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases}$$

Zatem ten układ równań jest nieoznaczony.

Przykład par liczb spełniających ten układ: $(-\frac{5}{3}, 0)$, $(1, 2)$, $(-3, 1)$

11. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–22 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

- Wskaż przedział, do którego należy rozwiązanie równania $x(x-3)-15 = x(x+2)$.
A. $(-8; -5)$ B. $(-5; -3)$ C. $(-3; 5)$ D. $(-4; -2)$
- Która z liczb nie należy do zbioru rozwiązań nierówności $-2x \geq -7$?
A. -4 B. $-3,5$ C. $3,5$ D. 4
- Wskaż nierówność, która ma ten sam zbiór rozwiązań co nierówność $-2x > 0$.
A. $x > 0$ B. $x < 0$ C. $x > 2$ D. $x < 2$
- Która nierówność nie ma rozwiązań?
A. $x - 2 < x + \log_2 8$ C. $x + \sqrt{27} \leq x + \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$
B. $3x < 2x$ D. $x + \log 0,01 < x - 3$
- Wskaż nierówność, która ma inny zbiór rozwiązań niż nierówność $6 \leq -3x$.
A. $2 \leq -x$ B. $x \leq -2$ C. $x \geq -2$ D. $3x \leq -6$
- Ile jest liczb całkowitych w przedziale $\langle -1,1; 15,2 \rangle$?
A. 17 C. 15
B. 16 D. nieskończenie wiele
- Który z przedziałów jest zbiorem rozwiązań układu nierówności $\begin{cases} x > -2 \\ -x \geq -5 \end{cases}$?
A. $\langle -2; 5 \rangle$ C. $\langle -2; \infty \rangle$
B. $(-2; 5)$ D. Układ nie ma rozwiązań.
- Wskaż przedział, do którego nie należy żadna liczba podzielna przez 3.
A. $(7; 10)$ B. $(300; 303)$ C. $(101; 102)$ D. $\langle 3; \infty \rangle$
- Wskaż układ nierówności, którego zbiorem rozwiązań jest przedział $\langle -1; 3 \rangle$.
A. $\begin{cases} x \geq -1 \\ -x \geq -3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x \geq -1 \\ -x > -3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} -x \leq 1 \\ -x \geq -3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} -x < 1 \\ -x \geq -3 \end{cases}$
- W jakiej postaci można zapisać $a\%$ liczby b ?
A. $100ab$ B. $\frac{ab}{100}$ C. $\frac{100a}{b}$ D. $\frac{a}{100b}$

Odpowiedzi i rozwiązania

1. D

2. D

3. B

4. D

5. C

6. A

7. B

8. B

9. B

10. B

11. A

11. Wskaż nierówność, która opisuje przedział zaznaczony na osi liczbowej.



- A. $|x - 5| < 13$ B. $|x - 5| > 13$ C. $|x - 13| < 5$ D. $|x - 13| > 5$

12. C

12. Wskaż nierówność, która opisuje zaznaczoną na osi liczbowej sumę przedziałów.



- A. $|x - 7| \geq 3$ B. $|x - 7| \leq 3$ C. $|x - 3| \geq 7$ D. $|x - 3| > 7$

13. D

13. Wskaż nierówność, którą spełnia liczba $\pi + 1$.

- A. $|x - 1| > 5$ B. $|x - 1| < 2$ C. $|x + \log 10| \leq 4$ D. $|x - 3^{-1}| > 3$

14. C

14. Wskaż liczbę, która spełnia równanie $|3x - 5| = 4x - 8$.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

15. D

15. Wskaż równanie, które ma niepusty zbiór rozwiązań.

- A. $||x + 1| + 3| = 0$ B. $||x - 3| + 2| = 1$ C. $||x - 2| + 3| = 2$ D. $||x + 5| + 3| = 3$

16. A

16. Wskaż równanie, którego rozwiązaniami są dwie liczby ujemne.

- A. $|x + 19| = 17$ B. $|x - 19| = 17$ C. $|x + 17| = 19$ D. $|x - 17| = 19$

17. C

17. Punkty $A = (2\sqrt{5})$ i $B = (-3\sqrt{5})$ leżą na osi liczbowej. Wskaż długość odcinka AB .

- A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{5} + 5$ C. $5\sqrt{5}$ D. 10

18. D

18. Wskaż wartość m , dla której para liczb $(-2, 1)$ jest rozwiązaniem równania $(m - 1)x + 2m - 2y = 3x - (m + 1)y$.

- A. $m = 4,5$ B. $m = 0$ C. $m = -5$ D. $m = -7$

19. B

19. Wskaż parę liczb, która jest rozwiązaniem układu
$$\begin{cases} \sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y = 5\sqrt{2} \\ 3x - \sqrt{3}y = 6 + \sqrt{3} \end{cases}$$

- A. $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ B. $(2, -1)$ C. $(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$ D. $(3\sqrt{2}, -1)$

20. B

20. Wskaż parę liczb, która nie jest rozwiązaniem układu
$$\begin{cases} \frac{4}{5}x - \frac{8}{7}y = 12 \\ -x + \frac{10}{7}y = -15 \end{cases}$$

- A. $(15, 0)$ B. $(1, 4)$ C. $(\frac{95}{7}, -1)$ D. $(0, -\frac{21}{2})$

21. Wskaż wartość m , dla której układ równań $\begin{cases} 4x - my = 2 \\ 2x + y = \sqrt{7} - 2 \end{cases}$ jest sprzeczny.
- A. $m = -4$ B. $m = 2$ C. $m = 4$ D. $m = -2$

21. D

22. Wskaż wartość m , dla której układ równań $\begin{cases} 6x - 4y = 14 \\ mx + 6y = -21 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.
- A. $m = -4$ B. $m = 4$ C. $m = -9$ D. $m = 9$

22. C

W zadaniach 23–30 oceń prawdziwość podanych zdań.

23. X oznacza zbiór rozwiązań nierówności $3x + 4(x + 1) > 17 - 3(x + 1)$. Zatem
- A. X jest zbiorem liczb ujemnych.
 B. najmniejszą liczbą całkowitą należącą do X jest 2.
 C. X jest zbiorem liczb większych od 1.

23. F, P, P

24. Dany jest przedział $(-4; 7)$.
- A. Przedział ten jest zbiorem rozwiązań układu nierówności $\begin{cases} x \leq 7 \\ -x > -4 \end{cases}$.
 B. Do tego przedziału należy 11 liczb całkowitych.
 C. Przedział ten jest zbiorem rozwiązań nierówności $-7 \leq -x < 4$.

24. F, P, P

25. Równanie $||x| - 7| = 2$ ma
- A. co najmniej dwa rozwiązania.
 B. dokładnie cztery rozwiązania.
 C. wszystkie rozwiązania mniejsze od 10.

25. P, P, P

26. Równanie $|x + 3| + 5 = 0$ jest
- A. spełnione przez liczby -8 oraz 2 .
 B. spełnione przez liczby -2 oraz 8 .
 C. sprzeczne.

26. F, F, P

27. Wartość wyrażenia $|x + 5|$ jest równa wartości wyrażenia $x + 5$
- A. dla każdej liczby x .
 B. dla każdej liczby x z przedziału $(-\infty; -5)$.
 C. dla każdej liczby x z przedziału $(-5; \infty)$.

27. F, F, P

28. Dane jest równanie liniowe z dwiema niewiadomymi $3x - y = 11$.
- A. Para $(-1, 7)$ jest rozwiązaniem tego równania.
 B. Para $(5, 4)$ jest rozwiązaniem tego równania.
 C. Równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań.

28. F, P, P

29. F, P, F

30. F, F, P

31. $x = -1\frac{5}{12}$

32. $x > -9,5$

33. 0, 1, 2, 3, 4

34. $x \geq -2,8, -3$

35. a) $\langle 0; 3 \rangle$ b) $\langle -5; 0 \rangle \cup \langle 2; 3 \rangle$
c) $\langle 2; \infty \rangle$ d) $\langle -7; -5 \rangle$

36. a) $x = -7$ lub $x = 7$

b) $x = -13$

c) $x = 6$ lub $x = 12$

d) $x = -5$ lub $x = -3$

e) brak rozwiązań

f) $x = -1,5$ lub $x = 3,5$

37. a) $x \in (-\infty; -5) \cup (5; \infty)$

b) $x \in (4; 16)$

c) $x \in (-\infty; -7) \cup \langle 3; \infty \rangle$

d) $x \in \mathbb{R}$

e) brak rozwiązań

f) $\langle -14; 8 \rangle$

38. a) $|x - 4| \leq 8$

b) $|x + 6| \leq 3$

c) $|x - \sqrt{2}| \leq \sqrt{2}$

d) $\left|x - \frac{7}{2}\right| \leq 2$

29. Dany jest układ równań $\begin{cases} 8x - 3y = -44 \\ -5x + y = 24 \end{cases}$.

A. Rozwiązaniem tego układu jest para $(-3, 7)$.

B. Rozwiązaniem tego układu jest para liczb przeciwnych.

C. Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

30. Dany jest układ równań $\begin{cases} 4x - 2y = -2 \\ -x + y = 4 \end{cases}$.

A. Ten układ jest sprzeczny.

B. Rozwiązaniem tego układu jest para liczb ujemnych.

C. Rozwiązaniem tego układu jest para liczb dodatnich.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

31. Rozwiąż równanie $\frac{3x^2 - 1}{2} - \frac{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{3} = (x + 3)^2 + \frac{x^2}{6}$.

32. Rozwiąż nierówność $2(x - 5) - 3(4x - 1) < 4(3 - 2x)$. Zaznacz zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

33. Podaj wszystkie liczby naturalne, które spełniają podaną nierówność.

$$x - \frac{x - 7}{3} \geq 1\frac{1}{2} - \frac{1 - 2x}{2}$$

34. Rozwiąż nierówność $\frac{(2 - x)(3 - 5x)}{6} - 1 \leq \frac{(2x - 1)^2}{3} - \frac{(x - 2)(x + 2)}{2}$. Podaj największą liczbę całkowitą, która nie spełnia tej nierówności.35. Dane są zbiory $A = \langle -5; 3 \rangle$, $B = (-7; 0)$, $C = (2; \infty)$. Wykonaj podane działania na zbiorach i zapisz wynik w postaci przedziału lub sumy przedziałów liczbowych.a) $A - B$ b) $A \cap (B \cup C)$ c) $C - (A \cap B)$ d) $(B \cap C) \cup (B - A)$

36. Rozwiąż równanie.

a) $|x| - 7 = 0$

c) $|x - 9| = 3$

e) $2 \cdot |3 - x| + 5 = 0$

b) $|x + 13| = 0$

d) $|x + 4| - 1 = 0$

f) $\frac{3}{5}|1 - x| - \frac{1}{2} = 1$

37. Rozwiąż nierówność.

a) $5 - |x| < 0$

c) $|x + 2| \geq 5$

e) $17 + |3 - x| < 0$

b) $|x - 10| < 6$

d) $|x + 4| + 7 > 0$

f) $11 - |3 + x| \geq 0$

38. Przedstaw w postaci $|x - a| \leq b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest podany przedział liczbowy.

a) $\langle -4; 12 \rangle$

b) $\langle -9; -3 \rangle$

c) $\langle 0; 2\sqrt{2} \rangle$

d) $\left\langle \frac{3}{2}; \frac{11}{2} \right\rangle$

39. Przedstaw w postaci $|x - a| > b$ lub $|x - a| \geq b$ nierówność, której zbiór rozwiązań jest przedstawiony na rysunku.



40. Rozwiąż równanie $||x - 8| - 2| = 10$.

41. Rozwiąż nierówność $|5 - |x + 3|| > 2$.

42. Rozwiąż równanie $\sqrt{25x^2 - 40x + 16} = 6$.

* 43. Rozwiąż równanie $\sqrt{9x^2 - 12x + 4} = \sqrt{4x^2 + 12x + 9}$.

D 44. Wykaż, że liczba $(|\sqrt{24} - 3\sqrt{3}| + |\sqrt{6} - \sqrt{12}| - |\sqrt{75} - \sqrt{54}|)^2$ jest całkowita.

D 45. Wykaż, że liczba $\sqrt{29 - 12\sqrt{5}} - 2\sqrt{5}$ jest całkowita.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

46. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań układu nierówności:

$$\begin{cases} 2(x - 3) > 3(1 + 2x) \\ 5x - 13 \leq -(5 - 7x) \end{cases}$$

i zapisz ten zbiór w postaci przedziału.

D 47. Wykaż, że wszystkie rozwiązania równania $|x + \frac{1}{2}| = 4\frac{1}{2}$ należą do zbioru rozwiązań nierówności $|x + 2,5| > 0,5$.

48. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} 5x + 3y = \sqrt{2} \\ 7x + 4y = \sqrt{8} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 28x + 35y = -4 \\ 12x + 15y = -16 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 5y = 8\sqrt{2} - 7\sqrt{3} \\ 2x + y = \sqrt{2} + 4\sqrt{3} \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3^7x + 2 \cdot 3^{10}y = 3^{10} \\ 3^{-10}x - 3^{-7}y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x + 21y = 2 \\ 15x + 14y = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 16x + 4y = 2^{15} \\ 8x - y = 2^{12} \end{cases}$

D 49. Wykaż, że układ równań $\begin{cases} (x - 2)(x + 3) - (x - 4)(x + 4) = 2(3 - y) \\ (x + 2)^2 - x(x + 3) = (y - 2)^2 - y(y - 2) \end{cases}$ jest sprzeczny.

D 50. Wykaż, że układ równań $\begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ 3(x - y) + 2(x + y) = 7 - 3y \end{cases}$ jest nieoznaczony.

49. Przekształcamy równoważnie każde z równań układu.

$$\begin{cases} (x - 2)(x + 3) - (x - 4)(x + 4) = 2(3 - y) \\ (x + 2)^2 - x(x + 3) = y(y - 2)^2 - y(y - 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 2x - 6 - x^2 + 16 = 6 - 2y \\ x^2 + 4x + 4 - x^2 - 3x = y^2 - 4y + 4 - y^2 + 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 2x - 6 - x^2 + 16 = 6 - 2y \\ x^2 + 4x + 4 - x^2 - 3x = y^2 - 4y + 4 - y^2 + 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \text{ . Zatem ten układ równań jest sprzeczny.}$$

50. Przekształcamy równoważnie każde z równań układu.

$$\begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ 3(x - y) + 2(x + y) = 7 - 3y \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ 3x - 3y + 2x + 2y = 7 - 3y \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ 5x + 2y = 7 \end{cases}$$

Zatem ten układ równań jest nieoznaczony.

39. $|x - 1| \geq 5$

40. $x = -4$ lub $x = 20$

41. $x \in (-\infty; -10) \cup (-6; 0) \cup (4; \infty)$

42. $x = -\frac{2}{5}$ lub $x = 2$

43. $x = -\frac{1}{5}$ lub $x = 5$

$$\begin{aligned} 44. & \left(|\sqrt{24} - 3\sqrt{3}| + |\sqrt{6} - \sqrt{12}| - |\sqrt{75} - \sqrt{54}| \right)^2 = \left(\sqrt{27} - \sqrt{24} + \right. \\ & \left. + \sqrt{12} - \sqrt{6} - (\sqrt{75} - \sqrt{54}) \right)^2 = \\ & = \left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - \right. \\ & \left. + 5\sqrt{3} + 2\sqrt{6} \right)^2 = (-\sqrt{6})^2 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45. & \sqrt{29 - 12\sqrt{5}} - 2\sqrt{5} = \\ & \sqrt{(3 - 2\sqrt{5})^2} - 2\sqrt{5} = |3 - 2\sqrt{5}| - \\ & + 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 3 - 2\sqrt{5} = -3 \end{aligned}$$

$$46. \left\langle -4; -2\frac{1}{4} \right\rangle$$

47. Wyznaczamy rozwiązania równania $|x + \frac{1}{2}| = 4\frac{1}{2}$.

$$x + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2} \text{ lub } x + \frac{1}{2} = -4\frac{1}{2}$$

$$x = 4 \text{ lub } x = -5$$

Sprawdzamy, czy rozwiązania równania spełniają nierówność $|x + 2,5| > 0,5$.

$$|4 + 2,5| = 6,5 > 0,5$$

$$|-5 + 2,5| = |-2,5| = 2,5 > 0,5$$

Zatem rozwiązania równania należą do zbioru rozwiązań nierówności.

48. a) $x = 2\sqrt{2}, y = -3\sqrt{2}$

b) $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}, y = -\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

c) $x = -\frac{1}{33}, y = \frac{8}{77}$

d) brak rozwiązań

e) $x = 9, y = \frac{1}{3}$

f) $x = 2^{10}, y = 2^{12}$

51. a) $x = 1, y = 2$

b) $x = 4, y = 3$

52. 2,40 zł, 0,35 zł

53. 200 i 300

54. 40 dag pierwszej i 100 dag drugiej

55. $A = 37$

56. $A = 531$ lub $A = 612$

57. 360 i 100

58. 14 080 zł, strata 29,6%

59. 240

60. Zebra: 41%, Lis: 29%,
Lew: 18%, Wielbłąd: 12%

51. Rozwiąż układ równań.

$$\text{a) } \begin{cases} (x+5)(y+4) = (x+3)(y+7) \\ (2x+1)(5y+2) = 2y(5x+4) \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{2x-y}{3} + \frac{y-1}{2} = \frac{1}{4}x + 1\frac{2}{3} \\ \frac{3x-4y}{4} + \frac{4x-2y-1}{3} = 3 \end{cases}$$

52. 3 chleby i 8 bułek kosztują 10 zł, a 5 chlebów i 4 bułki kosztują 13,40 zł. Jaka jest cena chleba, a jaka bułki?

53. Suma 3% pewnej liczby i 10% drugiej jest równa 36, a suma 8% pierwszej liczby i 5% drugiej jest równa 31. Wyznacz te liczby.

54. Pierwsza mieszanka ziół zawiera 5% majeranku, a druga 40% majeranku. Ile należy wziąć każdej z mieszanek, aby otrzymać 140 dag mieszanki o zawartości 30% majeranku?

55. Suma cyfr liczby dwucyfrowej A jest równa 10. Jeżeli przestawimy w niej cyfry, to otrzymamy liczbę o 36 większą od A . Znajdź A .56. Suma cyfr liczby trzycyfrowej A jest równa 9. Jeżeli zamienimy miejscami cyfrę setek i cyfrę jedności, to otrzymamy liczbę o 396 mniejszą od liczby A . Znajdź A .57. Na dwóch powierzchniach doświadczalnych posadzono 460 sadzonek. Po pewnym czasie okazało się, że do dalszych doświadczeń nie nadaje się $\frac{3}{4}$ sadzonek z pierwszej powierzchni doświadczalnej i $\frac{3}{5}$ sadzonek z drugiej powierzchni doświadczalnej. Po odrzuceniu nieodpowiednich na obydwu powierzchniach łącznie pozostało 130 sadzonek. Oblicz, ile sadzonek posadzono na każdej powierzchni doświadczalnej.

58. Pan Raczek zainwestował na giełdzie 20 000 zł. Podzielił swój kapitał w stosunku 1 : 4. Za mniejszą część kupił akcje firmy A, a za resztę akcje firmy B. Po roku akcje firmy A podrożały o 12%, natomiast akcje firmy B staniały o 40%. Pan Raczek sprzedał wszystkie akcje i postanowił zainwestować w dzieła sztuki. Jaką kwotą wtedy dysponował? Ile procent pieniędzy stracił?

59. W pewnym technikum $\frac{3}{4}$ liczby maturzystów będzie zdawać na wyższe uczelnie państwowe, $\frac{1}{6}$ zamierza studiować na prywatnych uczelniach, a pozostałe 20 osób chce po skończeniu szkoły pójść do pracy. Ilu maturzystów jest w tym technikum?

60. W wyborach na prezydenta zoo startowało 4 kandydatów. Okazało się, że:

- Lew uzyskał poparcie o 6 punktów procentowych większe niż Wielbłąd,
- Zebra uzyskała 12-punktową przewagę nad Lisem,
- Lew i Wielbłąd uzyskali razem poparcie o 40 punktów procentowych mniejsze niż Zebra i Lis.

Podaj (w procentach) wynik głosowania.