

Figury na płaszczyźnie

6

Umiejętności

Po szkole podstawowej uczeń:

- rozpoznaje kąty: proste, ostre, rozwarte, wierzchołkowe i przyległe oraz korzysta z ich własności,
- rozpoznaje i nazywa trójkąty: ostrokątne, prostokątne, rozwartokątne, równoboczne i równoramienne,
- konstruuje trójkąt o danych trzech bokach i ustala możliwość zbudowania trójkąta na podstawie nierówności trójkąta,
- stosuje twierdzenie o sumie kątów wewnętrznych trójkąta,
- stosuje własności kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku i trapezu,
- rozpoznaje figury osiowosymetryczne i wskazuje osie symetrii figur,
- korzysta z własności prostych równoległych, w szczególności stosuje równość kątów odpowiadających i naprzemianległych,
- stosuje cechy przystawiania trójkątów,
- stosuje w sytuacjach praktycznych twierdzenie Pitagorasa (bez twierdzenia odwrotnego),
- przeprowadza proste dowody geometryczne,
- rozróżnia wielokąty foremne wśród innych wielokątów,
- stosuje wzory na pole: trójkąta, prostokąta, kwadratu, równoległoboku, rombu, trapezu, także do wyznaczania długości odcinków.

Po tym dziale uczeń:

- odróżnia figury wypukłe od figur niewypukłych,
- stosuje w zadaniach: twierdzenie o liczbie przekątnych w wielokącie, własności kątów w trójkącie i wielokącie, nierówność trójkąta,
- wskazuje figury przystające,
- dowodzi przystawiania dwóch trójkątów na podstawie odpowiedniej cechy.

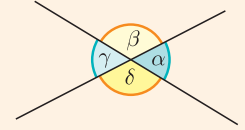
Uwagi metodyczne

Na poprzednich etapach nauki uczniowie zajmowali się geometrią wielokrotnie, więc zazwyczaj swobodnie operują pojęciami z tej dziedziny.

1. Warto powtórzyć – kąty i ich własności

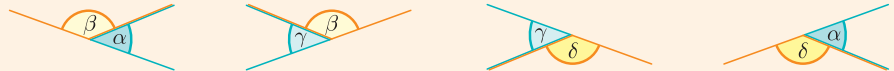
Kąty, które mają równe miary, nazywamy **kątami równymi**. Najczęściej zamiast pisać „kąt o mierze α ”, będziemy używać krótszej formy „kąt równy α ”.

Para przecinających się prostych wyznacza cztery kąty wypukłe, na rysunku oznaczone: α , β , γ , δ .



Wśród tych czterech kątów wyróżniamy pary kątów o szczególnych własnościach.

- Pary **kątów przyległych**, czyli takich, które mają jedno ramię wspólne.



Kąty przyległe tworzą razem kąt półpełny.

- Pary **kątów wierzchołkowych**, czyli takich, które mają wspólny tylko wierzchołek.



Kąty wierzchołkowe są równe.

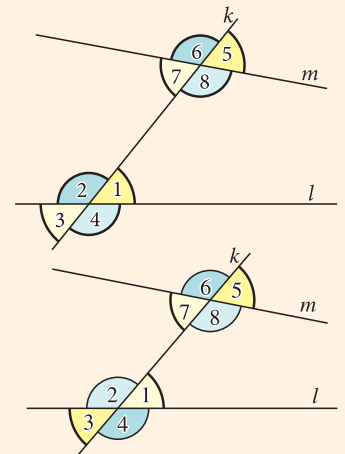
Jeżeli prosta k przecina proste l i m , to można mówić też o innych parach kątów.

- Kąty 1 i 5, 2 i 6, 3 i 7, 4 i 8 nazywane są kątami **odpowiadającymi** (zaznaczono je na rysunku tymi samymi kolorami).

Kąty odpowiadające leżą po tej samej stronie prostej k .

- Kąty 1 i 7, 2 i 8, 3 i 5, 4 i 6 nazywane są kątami **naprzemianległymi** (zaznaczono je na rysunku tymi samymi kolorami).

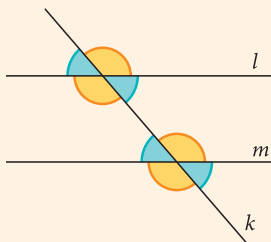
Kąty naprzemianległe leżą po przeciwnych stronach prostej k .



Twierdzenie

Jeżeli prosta k przecina parę równoległych prostych l i m , to utworzone w ten sposób kąty odpowiadające są równe i kąty naprzemianległe są równe.

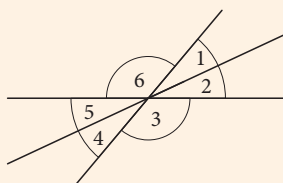
Jeżeli prosta k wyznacza z prostymi l i m jednakowe kąty odpowiadające lub naprzemianległe, to proste l i m są równoległe.

**Zadania**

W każdym z zadań 1.1–1.4 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1.1. Trzy proste przecinają się w jednym punkcie w taki sposób, że $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4$, tak jak na rysunku. Ile wynosi suma miar kątów $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4$?

- A. Nie można tego stwierdzić. C. 120°
B. 180° D. 90°



1.2. Kąt α jest cztery razy mniejszy od kąta do niego przyległego. Wskaż miarę kąta α .

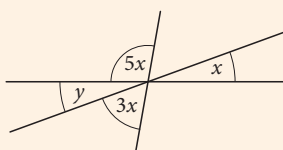
- A. 76° B. 45° C. 36° D. 30°

1.3. Połowa kąta α jest równa 15° . Wskaż miarę kąta przyległego do kąta α .

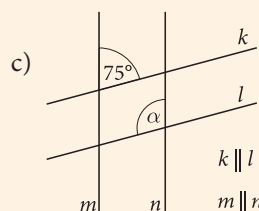
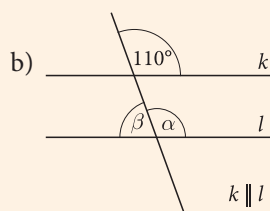
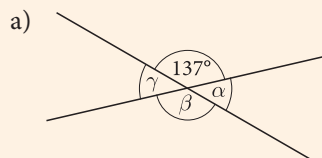
- A. $7,5^\circ$ B. 30° C. 75° D. 150°

1.4. Wskaż miarę kąta y na podstawie informacji podanych na rysunku obok.

- A. 30° B. 15° C. 20° D. 10°



1.5. Wyznacz kąty α , β i γ .

**Odpowiedzi i rozwiązania**

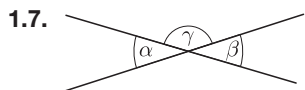
1.1. B

1.2. C

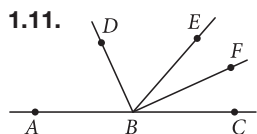
1.3. D

1.4. C

1.5. a) $\alpha = 43^\circ$, $\beta = 137^\circ$, $\gamma = 43^\circ$
b) $\alpha = 110^\circ$, $\beta = 70^\circ$ c) $\alpha = 105^\circ$

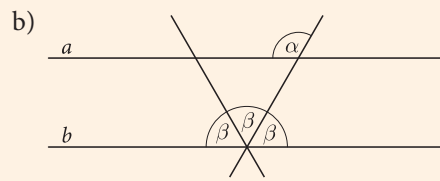
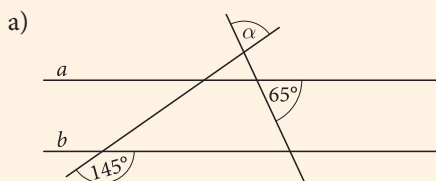
1.6. a) $\alpha = 80^\circ$ b) $\alpha = 120^\circ$ 

Niech α, β będą kątami wierzchołkowymi. Wtedy $\alpha + \gamma = 180^\circ = \beta + \gamma$, więc $\alpha = \beta$.

1.8. a) $\alpha = 30^\circ$ b) $\alpha = 15^\circ$ 1.9. $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3 = 20^\circ$, $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4 = 70^\circ$ 1.10. a) $\alpha = 4\frac{1}{2} \cdot 30^\circ = 135^\circ$ b) $\alpha = 1\frac{2}{3} \cdot 30^\circ = 50^\circ$ c) $\alpha = 4\frac{1}{6} \cdot 30^\circ = 125^\circ$ d) $\alpha = 5\frac{1}{6} \cdot 30^\circ = 155^\circ$ 

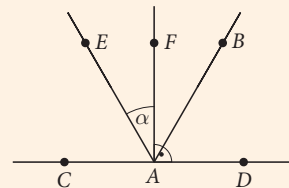
Założmy, że kąty ABE i EBC są przyległe, a półproste BD i BF to ich dwusieczne. Wtedy:
 $\sphericalangle DBF = \sphericalangle DBE + \sphericalangle EBF =$
 $= \frac{1}{2}\sphericalangle ABE + \frac{1}{2}\sphericalangle EBC =$
 $= \frac{1}{2}(\sphericalangle ABE + \sphericalangle EBC) =$
 $= \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$, więc półproste BD i BF są prostopadłe.

1.12. 5 razy

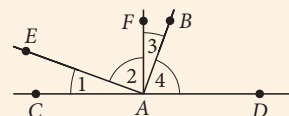
1.13. 124° 1.14. a) tak b) nie c) nie
d) tak1.6. Wyznacz kąt α , wiedząc, że $a \parallel b$.

D 1.7. Wykaż, że kąty wierzchołkowe są równe.

- * 1.8. Wyznacz kąt α położony jak na rysunku. Zakładamy, że półprosta AE jest dwusieczną kąta CAB oraz
- a) kąt CAB jest o 60° większy od kąta BAD .
 b) kąt CAB jest 5 razy większy od kąta BAD .

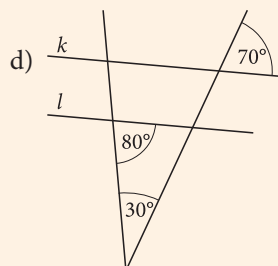
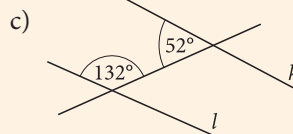
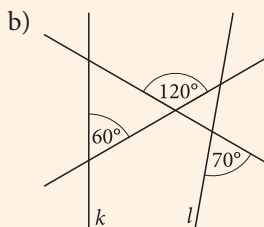
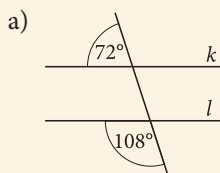


- * 1.9. Na rysunku obok kąt CAB jest o 40° większy od kąta BAD , $AF \perp AD$ oraz $AE \perp AB$. Wyznacz wszystkie kąty zaznaczone na rysunku.



- * 1.10. Jaki kąt wypukły tworzą wskazówki zegara o podanej godzinie?
 a) 13^{30} b) 14^{20} c) 5^{50} d) 7^{10}

D 1.11. Wykaż, że dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe.

1.12. Dwa kąty przyległe różnią się o 120° . Ile razy miara jednego jest większa od miary drugiego z tych kątów?1.13. Jeden z kątów wierzchołkowych jest o 12° większy od sumy dwóch kątów przyległych do drugiego z nich. Wyznacz ten kąt.D 1.14. Czy proste k i l są równoległe? Odpowiedź uzasadnij.

2. Wielokąty i ich własności

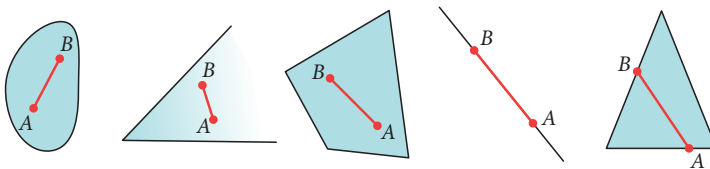
Umiejętności:

- odróżnianie figur wypukłych od niewypukłych
- stosowanie twierdzenia o liczbie przekątnych w wielokącie
- stosowanie twierdzenia o kątach w trójkącie i wielokącie

Definicja

Figurę nazywamy **wypukłą** wtedy, gdy każde dwa punkty należące do niej łączy odcinek zawierający się całkowicie w tej figurze.

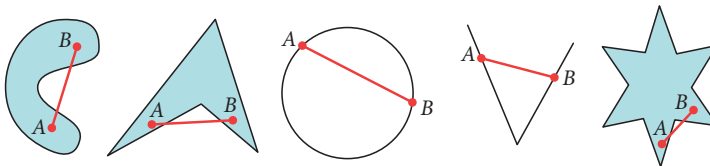
Przykłady figur wypukłych.



Figurami wypukłymi są kąty o takiej mierze α , że $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ lub $\alpha = 360^\circ$.

Figura jest **niewypukła**, gdy istnieją takie punkty A i B należące do niej, że odcinek AB nie zawiera się w tej figurze.

Przykłady figur niewypukłych.



Miara α kąta niewypukłego (inaczej: wklęsłego) spełnia nierówność $180^\circ < \alpha < 360^\circ$.

Brzeg wielokąta wypukłego jest sumą skończonej liczby odcinków, tzw. **boków** wielokąta, z których żadne dwa nie są zawarte w jednej prostej. Końce boków nazywamy **wierzchołkami** wielokąta.

Każdy wielokąt ma tyle samo boków co wierzchołków. Jeżeli wielokąt ma n wierzchołków, to nazywamy go n -kątem.

ZZ i KPU

temat 6.1

Multiteka

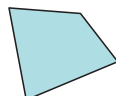
- Rodzaje kątów
- Kąty odpowiadające i kąty naprzemianległe
- Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta
- Kąty wierzchołkowe i kąty przyległe
- Suma miar kątów wewnętrznych w wielokącie

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 6.2

Przypomnijmy niektóre ze znanych wielokątów wypukłych.



trójkąt



czworokąt



kwadrat



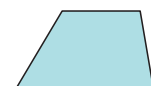
prostokąt



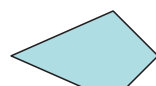
romb



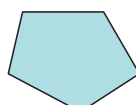
równoległobok



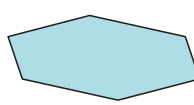
trapez



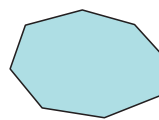
deltoid



pięciokąt



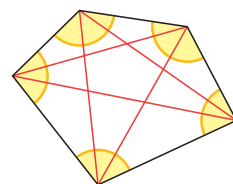
sześciokąt



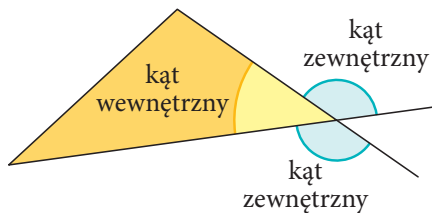
ośmiokąt

Przekątną wielokąta nazywamy odcinek łączący dwa wierzchołki niebędące końcami jednego boku.

Na rysunku zaznaczono wszystkie przekątne oraz **kąty wewnętrzne** pięciokąta wypukłego.



Kątem zewnętrznym wielokąta wypukłego nazywamy kąt przyległy do kąta wewnętrznego.



Zamiast „kąt wewnętrzny” wielokąta wypukłego mówimy krótko: „kąt” wielokąta wypukłego.

◀ 2.7. Oblicz liczbę przekątnych wypukłego wielokąta o n wierzchołkach.

- a) $n = 7$ c) $n = 15$
b) $n = 10$ d) $n = 100$

Odp.: a) 14 b) 35 c) 90
d) 4850

Przykład 1 ◀ zad. 2.7

Obliczmy, ile przekątnych ma

- a) pięciokąt wypukły. b) dwudziestokąt wypukły. c) n -kąt wypukły.

Rozwiązanie

- a) Wszystkie przekątne pięciokąta zostały zaznaczone na jednym z poprzednich rysunków i można je policzyć. Pięciokąt wypukły ma 5 przekątnych.

◀2.11. Zbadaj, czy można zbudować trójkąt z odcinków o podanych długościach.

- a) 37 cm, 19 cm i 22 cm
 b) $\sqrt{8}$ cm, $\sqrt{18}$ cm i $\sqrt{32}$ cm
 c) $(1+\sqrt{3})$ cm, 4 cm i $(3-\sqrt{3})$ cm
 d) $\frac{2}{7}$ cm, $\frac{1}{6}$ cm i $\frac{2}{3}$ cm

Odp.: a) tak b) tak c) nie
 d) nie

Przykład 3 ◀ zad. 2.11

Zbadamy, czy można zbudować trójkąt z odcinków o długości 1,4 cm, 2,7 cm i 4,4 cm.

Rozwiązanie

Długości odcinków, z których mamy zbudować trójkąt, muszą spełnić nierówność trójkąta. Znamy długości wszystkich trzech odcinków, zatem wystarczy sprawdzić, czy suma dwóch krótszych jest większa od najdłuższego.

$$1,4 + 2,7 = 4,1 < 4,4$$

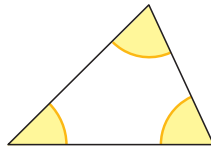
Warunek trójkąta nie jest spełniony.

Odp.: Z odcinków o podanych długościach nie można zbudować trójkąta.

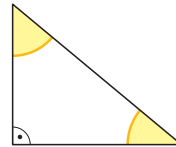
Nierówność trójkąta

W trójkącie suma długości każdych dwóch boków jest większa od długości trzeciego boku.

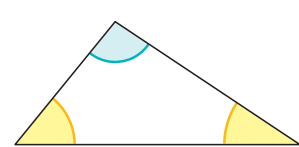
Przypomnijmy najważniejsze pojęcia związane z trójkątami, wprowadzone w szkole podstawowej.



trójkąt ostrokątny
wszystkie kąty ostre



trójkąt prostokątny
jeden kąt prosty



trójkąt rozwartokątny
jeden kąt rozwarty

Symetralna boku trójkąta jest prostą prostopadłą do tego boku, przechodzącą przez jego środek.

Dwusieczna kąta w trójkącie jest półprostą o początku w wierzchołku tego kąta, dzielącą ten kąt na równe kąty.

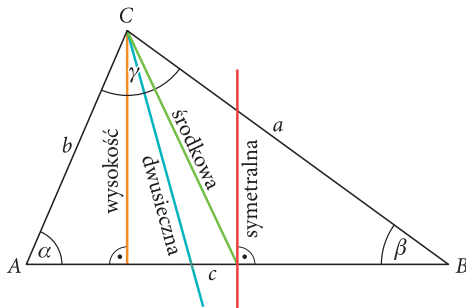
Wysokość trójkąta to odcinek prostopadły do boku trójkąta, łączący ten bok lub jego przedłużenie z przeciwległym wierzchołkiem.

Wprowadzimy jeszcze jedną definicję.

Definicja

Środkowa boku trójkąta nazywamy odcinek łączący środek boku z przeciwległym wierzchołkiem.

Na rysunku prezentujemy wymienione pojęcia oraz pokazujemy sposób oznaczania wierzchołków, boków i kątów trójkąta, z którego najczęściej będziemy korzystać w tym podręczniku.



Używamy w tym podręczniku zwrotów: „dwusieczna jest równa 5” zamiast „długość odcinka wyciętego z dwusiecznej przez brzeg trójkąta jest równa 5”, podobnie „wysokość równa 3”, a nie „długość wysokości równa 3”, trójkąty mają „równe środkowe” zamiast trójkąty mają „środkowe równej długości” itd.

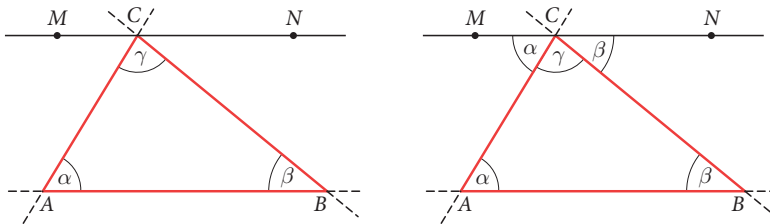
Jedno z podstawowych twierdzeń o trójkątach wraz z dowodem poznaliście podczas nauki w szkole podstawowej. Przypomnijmy je.

Twierdzenie

Suma miar kątów trójkąta wynosi 180° .

Dowód

Poprowadźmy przez wierzchołek C prostą równoległą do boku AB.
Suma kątów $\sphericalangle ACM$, $\sphericalangle BCN$ i γ jest równa 180° .

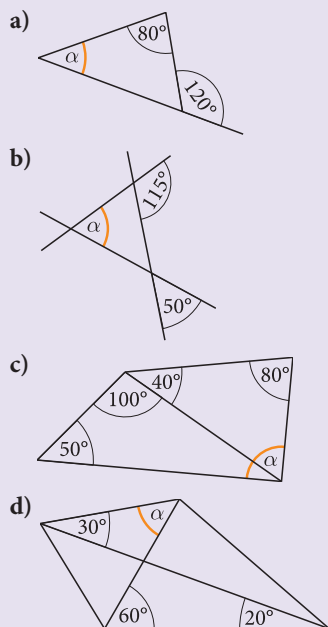


Ponieważ

$$\left. \begin{aligned} \sphericalangle ACM &= \sphericalangle CAB = \alpha \\ \sphericalangle BCN &= \sphericalangle CBA = \beta \end{aligned} \right\} \leftarrow \text{są to pary kątów naprzemianległych}$$

więc $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Koniec dowodu

2.15. Wyznacz kąt α .

Odp.: a) $\alpha = 40^\circ$ b) $\alpha = 65^\circ$
 c) $\alpha = 90^\circ$ d) $\alpha = 50^\circ$

Odpowiedzi i rozwiązania

2.1. P, F, F

2.2. A, D

Przykład 4 zad. 2.15

Wyznamy kąt α .

Rozwiązanie

a) Kąt α jest trzecim kątem trójkąta o pozostałych kątach 35° i 40° . Zatem jest równy $180^\circ - 35^\circ - 40^\circ = 105^\circ$.

b) Kąt przyległy do kąta α ma $180^\circ - 50^\circ - 80^\circ = 50^\circ$. Zatem kąt α ma $180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.

c) Wyznamy najpierw kąty β i γ . Kąt β jest przyległy do kąta 80° , ma więc 100° . Kąt γ jest trzecim kątem trójkąta o kątach 40° i 100° , zatem jest równy $180^\circ - 40^\circ - 100^\circ = 40^\circ$.

Kąt α jest przyległy do kąta 40° , więc ma 140° .

Obliczenia z punktu b w powyższym przykładzie można łatwo uogólnić.

Wniosek

Kąt zewnętrzny trójkąta jest równy sumie nieprzyległych do niego kątów trójkąta.

Zadania

2.1. Z koła usunięto punkt należący do jego brzegu (okręgu).

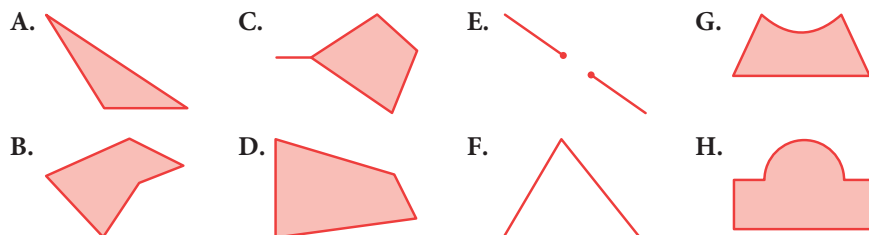
Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Otrzymana figura jest wypukła.

B. Otrzymana figura jest niewypukła.

C. Nie można stwierdzić, czy otrzymana figura jest wypukła czy niewypukła.

2.2. Wskaż figury wypukłe.



2.3. Z koła usunięto środek. Czy otrzymana figura jest wypukła?

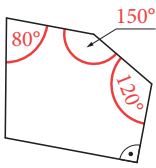
2.4. Z czworokąta wypukłego usuń jeden punkt, tak aby otrzymana figura była nadal wypukła. Ile jest możliwości rozwiązania zadania?

2.5. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Prosta może mieć z pięciokątem wypukłym

- A. dokładnie jeden punkt wspólny.
- B. dokładnie dwa punkty wspólne.
- C. nieskończenie wiele punktów wspólnych.

2.6. Zaznacz kąty zewnętrzne wielokąta i oblicz ich miary.

a)  b) trapez



Odcinki równe często oznaczamy na rysunku małymi kresczkami.

2.7. Oblicz liczbę przekątnych wypukłego wielokąta o n wierzchołkach.

- a) $n = 7$
- b) $n = 10$
- c) $n = 15$
- d) $n = 100$

2.8. Które wielokąty mają tyle samo przekątnych co boków?

2.9. W którym wielokącie przekątnych jest

- a) dwa razy więcej niż boków?
- b) trzy razy więcej niż boków?
- c) pięć razy więcej niż boków?

2.10. Na płaszczyźnie dane są cztery różne punkty. Ile można zbudować trójkątów o wierzchołkach w tych punktach? Rozważ różne przypadki.

2.11. Zbadaj, czy można zbudować trójkąt z odcinków o podanych długościach.

- a) 37 cm, 19 cm i 22 cm
- b) $\sqrt{8}$ cm, $\sqrt{18}$ cm i $\sqrt{32}$ cm
- c) $(1 + \sqrt{3})$ cm, 4 cm i $(3 - \sqrt{3})$ cm
- d) $\frac{2}{7}$ cm, $\frac{1}{6}$ cm i $\frac{2}{3}$ cm

2.12. W trójkącie równoramiennym dane są długości boków AB i AC . Wyznacz długość trzeciego boku. Rozpatrz różne przypadki.

- a) $|AB| = 2$, $|AC| = 3$
- b) $|AB| = 2$, $|AC| = 5$

* **2.13.** Dla jakich wartości m z odcinków o długościach $m-2$, $2m-1$, $10-m$ można zbudować trójkąt?

2.3. nie

2.4. 4

2.5. P, F, P

2.6. a) 90° , 60° , 30° , 100° , 80°

b) 150° , 150° , 30° , 30°

2.7. a) 14 b) 35 c) 90 d) 4850

2.8. pięciokąt

2.9. a) w siedmiokącie

b) w dziewięciokącie

c) w trzynastokącie

2.10. 0, 3 lub 4

2.11. a) tak b) tak c) nie
d) nie

2.12. a) $|BC| = 2$ lub $|BC| = 3$
b) $|BC| = 5$

2.13. Długość odcinka jest liczbą dodatnią, więc $m \in (2; 10)$. Stosujemy nierówność trójkąta i otrzymujemy układ nierówności

$$\begin{cases} m-2+2m-1 > 10-m \\ m-2+10-m > 2m-1, \text{ czyli} \\ 2m-1+10-m > m-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m > 3\frac{1}{4} \\ m < 4\frac{1}{2} \end{cases} \text{ . Zatem trójkąt}$$

można zbudować wtedy, gdy

$$m \in \left(3\frac{1}{4}; 4\frac{1}{2}\right).$$

2.14. $\alpha + \beta_1 + \delta_1 = 180^\circ$ – suma kątów trójkąta ABD
 $\gamma + \beta_2 + \delta_2 = 180^\circ$ – suma kątów trójkąta BCD
 Zatem suma kątów czworokąta $ABCD$ jest równa

$$\alpha + (\beta_1 + \beta_2) + \gamma + (\delta_1 + \delta_2) = (\alpha + \beta_1 + \delta_1) + (\gamma + \beta_2 + \delta_2) = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ.$$

- 2.15.** a) $\alpha = 40^\circ$ b) $\alpha = 65^\circ$
 c) $\alpha = 90^\circ$ d) $\alpha = 50^\circ$

- 2.16.** a) $\alpha = 20^\circ$ b) $\alpha = 35^\circ$
 c) $\alpha = 110^\circ$ d) $\alpha = 31^\circ$

2.17. $60^\circ, 80^\circ$

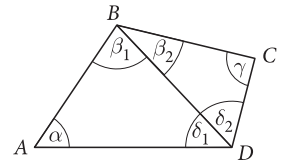
2.18. $40^\circ, 70^\circ, 70^\circ$

2.19. 135°

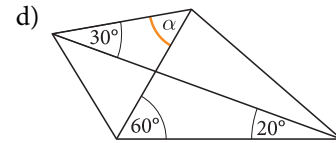
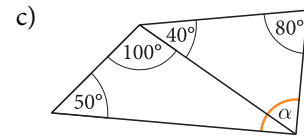
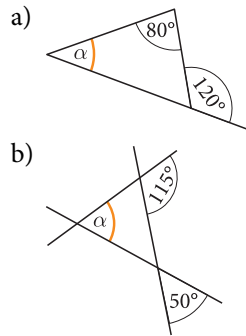
2.20. $60^\circ, 50^\circ, 100^\circ, 150^\circ$

2.21. a) 5 b) 6 c) 8 d) 14

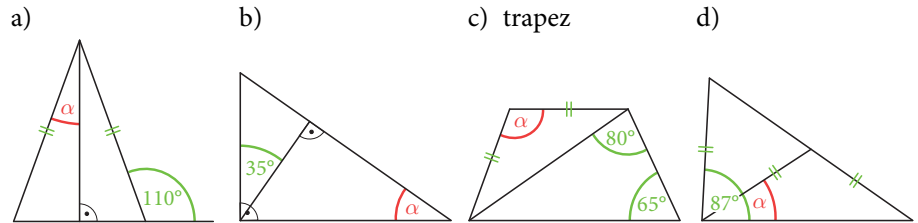
2.14. Korzystając z rysunku, wykaż, że suma kątów czworokąta wypukłego jest równa 360° .



2.15. Wyznacz kąt α .



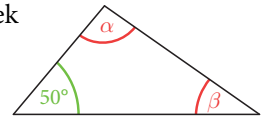
2.16. Wyznacz kąt α .



2.17. Jeden z kątów trójkąta ma 40° , a miary dwóch pozostałych są w stosunku $3 : 4$. Wyznacz te kąty.

2.18. Jeden z kątów zewnętrznych trójkąta ma 140° , a dwa kąty wewnętrzne nieprzyległe do niego są równe. Wyznacz kąty trójkąta.

2.19. Kąty α i β w trójkącie (zob. rysunek) spełniają warunek $\alpha - \beta = 40^\circ$. Wyznacz miarę kąta przyległego do β .

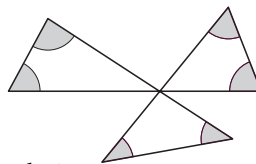


2.20. W czworokącie wypukłym $ABCD$ kąt A ma miarę 60° , a $\sphericalangle B : \sphericalangle C : \sphericalangle D = 1 : 2 : 3$. Wyznacz kąty tego czworokąta.

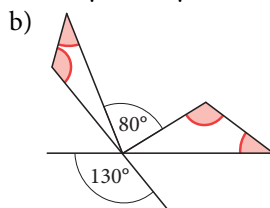
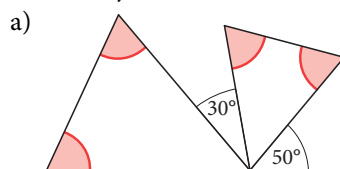
2.21. Wyznacz liczbę boków wielokąta wypukłego, jeżeli suma miar jego kątów jest równa
 a) 540° . b) 720° . c) 1080° . d) 2160° .

2.22. W wypukłym pięciokącie miary trzech kątów pozostają w stosunku $5 : 6 : 7$, a suma dwóch pozostałych kątów jest równa 90° . Oblicz miarę największego kąta tego pięciokąta.

* **2.23.** Ile jest równa suma miar kątów zaznaczonych na rysunku?



* **2.24.** Ile jest równa suma miar kątów zaznaczonych na rysunku?



Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż liczbę przekątnych dziewiętnastokąta wypukłego.

- A. 74 B. 190 C. 304 D. 152

2. Wskaż miarę kąta α .

- A. 100° C. 120°
B. 110° D. 130°



3. Wskaż liczbę boków wielokąta, który ma 27 przekątnych.

- A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Istnieje trójkąt, którego największy kąt ma miarę 70° .
B. Istnieje trójkąt, którego najmniejszy kąt ma miarę 65° .
C. Istnieje trójkąt, w którym suma miar największego i najmniejszego kąta wynosi 80° .

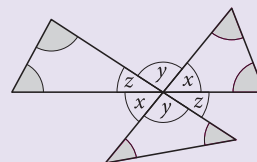
5. Jeden z kątów trójkąta ma miarę o 25° mniejszą od miary drugiego kąta i dwukrotnie większą od miary trzeciego kąta. Wyznacz miary kątów tego trójkąta.

6. Suma miar dwóch kątów czworokąta wypukłego jest równa 100° , a różnica dwóch pozostałych 20° . Jaką miarę ma największy kąt tego czworokąta?

7. Ile przekątnych ma wielokąt wypukły, jeżeli suma jego kątów jest równa 900° ?

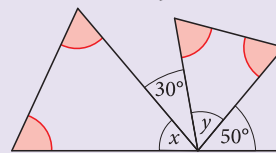
2.22. 175°

2.23. Na rysunku taką samą literą oznaczyliśmy kąty wierzchołkowe, które są równe.

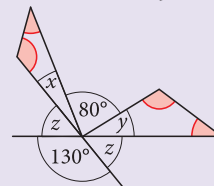


$2(x + y + z) = 360^\circ$,
więc $x + y + z = 180^\circ$. Szukana suma to suma miar kątów trzech trójkątów zmniejszona o $x + y + z$. Jest ona równa $3 \cdot 180^\circ - 180^\circ = 360^\circ$.

2.24. a) $x + y =$
 $= 180^\circ - (30^\circ + 50^\circ) = 100^\circ$,
więc szukana suma jest równa $2 \cdot 180^\circ - (x + y) = 260^\circ$.



b) $z + 130^\circ = 180^\circ$, więc $z = 50^\circ$.
 $x + y = 180^\circ - (80^\circ + z) =$
 $= 180^\circ - (80^\circ + 50^\circ) = 50^\circ$,
więc szukana suma jest równa $2 \cdot 180^\circ - (x + y) = 310^\circ$.



Prosto do matury

1. D
2. B
3. C
4. P, F, F
5. 62° , 87° , 31°
6. 140°
7. 14

Wielokąty foremne

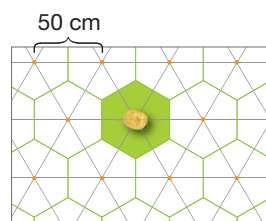
Wielokątów foremnych nie odkrył matematyk, zrobiła to natura – przyjrzyj się chociażby plastrowi miodu czy płatkom śniegu. Matematyk może jednak poszukać praktycznego zastosowania własności tych figur w rozmaitych dziedzinach życia codziennego, rzemiosła, sztuki, techniki.

Matematyka i sadzenie ziemniaków

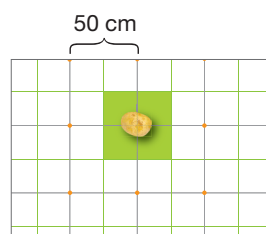
Wykorzystajmy wiedzę matematyczną do sadzenia roślin, np. ziemniaków. Załóżmy, że głównym warunkiem jest posadzenie ich w równej odległości od siebie, np. co 50 cm. Na danej powierzchni chcemy posadzić jak najwięcej ziemniaków. Jak to zrobić?

Jedynymi wielokątami foremnymi, na które można podzielić płaszczyznę bez strat, są trójkąt foremny, kwadrat i sześciokąt foremny. Wszystkie rośliny mają mieć tyle samo miejsca wokoło, więc posadźmy je w wierzchołkach tych figur.

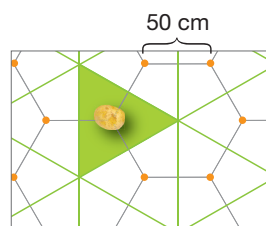
Oto co otrzymamy.



Na zielono zaznaczono pole przypadające na jedną roślinkę. Jeśli posadzimy ziemniaki w wierzchołkach trójkąta, pole to będzie równe $1250\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

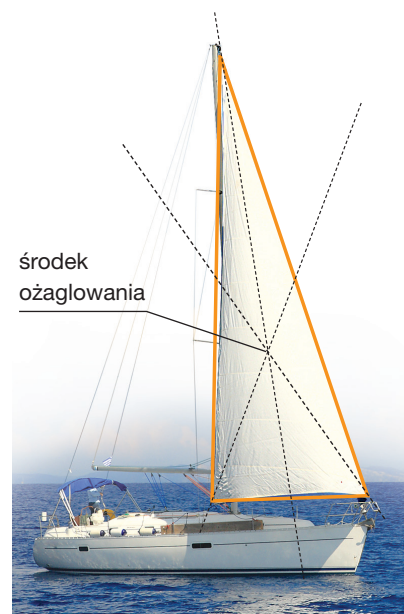


Jeśli zastosujemy kwadrat, do dyspozycji pojedynczej roślinki będzie kwadrat o polu 2500 cm^2 .



W przypadku sześciokąta jest to trójkąt równoboczny o polu $1875\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

W którym układzie najlepiej sadzić ziemniaki?

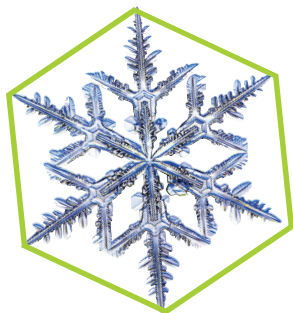


Środek ożaglowania

Czy wiesz, że żagłówka może się poruszać w dowolnym kierunku z wyjątkiem kierunku pod wiatr lub prawie pod wiatr? W teorii żeglowania jednym z elementów związanych z tym zjawiskiem jest środek ożaglowania. Jeżeli żagiel ma kształt trójkąta, to środek ożaglowania jest **punktem przecięcia środkowych** tego trójkąta.

Wielokąty foremne w przyrodzie

Kształty wielokąta foremnego łatwo odnaleźć w tworach i zjawiskach przyrodniczych.



Płatki śniegu – najrozmaitsze sześciokąty foremne.

Trzykrotka Andersona (trójpłatkowa) – trójkąt foremny.



Rozgwiazda – pięciokąt foremny.

Pszczoły gromadzą miód w plastrach zbudowanych z sześciokątnych komórek woskowych. Taki ich kształt pozwala na optymalne wykorzystanie przestrzeni ula. Sześciokąt foremny ma mniejszy obwód niż obwód kwadratu i trójkąta równobocznego o tym samym polu, dzięki czemu pszczoły zużywają mniej wosku na budowę plastra.



3. Figury przystające

Umiejętności:

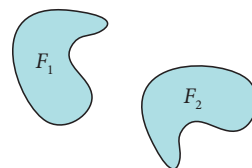
- odróżnianie figur przystających
- stosowanie cech przystawiania figur
- dowodzenie przystawiania trójkątów

O przystawianiu figur uczyliście się w szkole podstawowej. Przypomnijmy, że jeżeli na płaszczyźnie mamy dwie figury, to mówimy, że są one **przystające**, gdy jedną z nich możemy nałożyć na drugą.

Czynność nakładania można wykonać za pomocą kalki.

Nakładamy kalkę na figurę F_1 , dokładnie ją przerysowujemy, a następnie przekalkowany obraz przykładamy do figury F_2 . Jeżeli wszystkie punkty figury F_2 i kalki figury F_1 się pokrywają, to F_1 i F_2 są przystające.

Zauważmy jeszcze, że obrazek na kalce możemy przesuwając na płaszczyźnie oraz odwracać na drugą stronę.



Przykład 1

- Dwie litery „a” w wyrazie „przystawanie” są przystające.
- Napisy **bo** i **od** są przystające.
- Jeżeli spojrzymy w lustrze na zegarek elektroniczny wskazujący godzinę 20:28, to odczytamy dość nietypową godzinę:



Te cyfry i ich lustrzane odbicie to figury przystające.

Jeżeli figura F_1 jest przystająca do figury F_2 , to fakt ten zapisujemy: $F_1 \equiv F_2$.

Zauważmy, że figury przystające mają następujące własności:

- $F_1 \equiv F_1$ ← każda figura przystaje do siebie samej
- Jeżeli $F_1 \equiv F_2$, to $F_2 \equiv F_1$. ← jeżeli F_1 przystaje do F_2 , to F_2 przystaje do F_1
- Jeżeli $F_1 \equiv F_2$ i $F_2 \equiv F_3$, to $F_1 \equiv F_3$. ← jeżeli F_1 przystaje do F_2 i F_2 przystaje do F_3 , to F_1 przystaje do F_3

Ostatnia własność, ważna ze względu na zastosowania praktyczne, nazywana jest **przechodnością**.

ZZ i KPU

temat 6.2

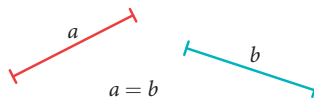
dlanauczyciela.pl | Kartkówka 6.3

Generator
testów i sprawdzianów

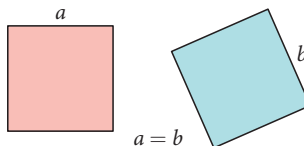
Nakładanie jednej figury na drugą jest zadaniem dosyć skomplikowanym. W praktyce aby stwierdzić, czy figury są przystające, posługujemy się pewnymi twierdzeniami, zwanymi **cechami przystawania figur**. Oto kilka z nich:

O figurach przystających często mówimy, że są równe.

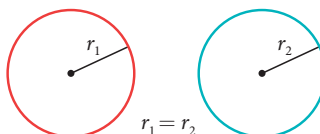
- Dwa odcinki są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy mają tę samą długość.



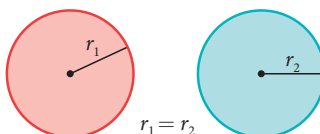
- Dwa kwadraty są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy bok jednego jest równy bokowi drugiego.



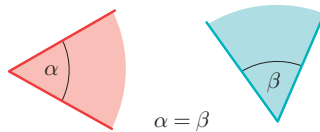
- Dwa okręgi są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe promienie.



- Dwa koła są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe promienie.



- Dwa kąty są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe miary (rozwartość).



Cechy przystawania trójkątów

Cechy przystawania trójkątów wyróżnimy w postaci oddzielnego twierdzenia, którego dowód pominiemy.

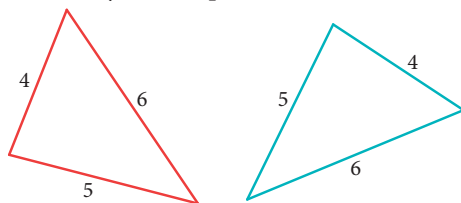
Twierdzenie

Cechy przystawania trójkątów

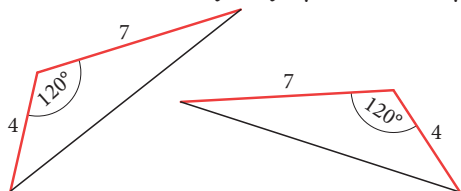
- I. Jeżeli dwa trójkąty mają boki odpowiednio równe, to są przystające.
- II. Jeżeli dwa trójkąty mają dwa boki i kąt między nimi zawarty odpowiednio równe, to są przystające.
- III. Jeżeli dwa trójkąty mają bok i dwa kąty do niego przylegające odpowiednio równe, to są przystające.

Tradycyjnie oznaczać będziemy kolejne cechy przystawania trójkątów:

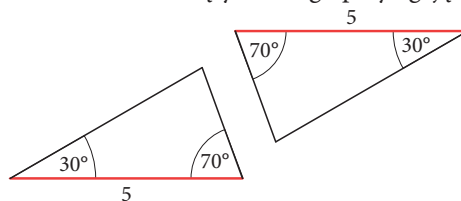
- **bbb** – trzy boki odpowiednio równe,



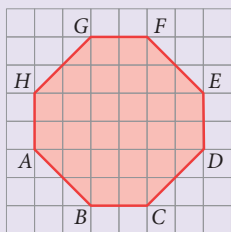
- **bkb** – dwa boki i kąt między nimi zawarty odpowiednio równe,



- **kbk** – bok i dwa kąty do niego przylegające odpowiednio równe.



◀3.5. Które boki narysowanego niżej wielokąta są równe?



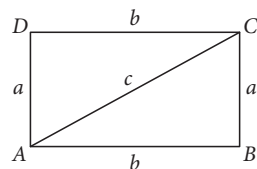
Odp.: $|AB| = |CD| = |EF| = |GH|$,
 $|BC| = |DE| = |FG| = |HA|$

Przykład 2 ◀ zad. 3.5

Przekątna dzieli prostokąt na dwa trójkąty przystające:

$$\triangle ADC \equiv \triangle CBA.$$

Można to stwierdzić, zauważając na przykład, że trójkąty te mają trzy pary równych boków.



Przykład 3 ◀ zad. 3.12

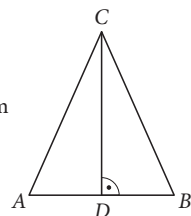
Wykażemy, że wysokość opuszczona na podstawę trójkąta równoramiennego dzieli go na dwa trójkąty przystające.

Dowód

$$\begin{aligned} |AC| &= |BC| && \leftarrow \text{trójkąt jest równoramienny} \\ \sphericalangle DAC &= \sphericalangle DBC && \leftarrow \text{kąty przy podstawie w trójkącie równoramiennym} \\ \sphericalangle ACD &= \sphericalangle DCB && \leftarrow \text{jako dopełnienie do } 180^\circ \end{aligned}$$

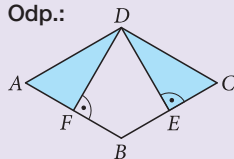
Zatem na mocy cechy kbk $\triangle ADC \equiv \triangle BDC$.

Koniec dowodu



◀3.12. Z wierzchołka kąta rozwartego rombu poprowadzono dwie wysokości. Wykaż, że otrzymane trójkąty są przystające.

Odp.:



Zakładamy, że $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$, $\sphericalangle ADC > 90^\circ$, $DF \perp AB$ i $DE \perp BC$.

$\sphericalangle DAF = \sphericalangle DCE$ – jako przeciwległe kąty rombu.

$$\sphericalangle ADF = 90^\circ - \sphericalangle DAF = 90^\circ - \sphericalangle DCE = \sphericalangle CDE$$

$$|AB| = |CD|$$

Zatem – na mocy cechy kbk – trójkąty AFD i CED są przystające.

Wniosek

W trójkącie równoramiennym, w którym $|AC| = |BC|$, dwusieczna kąta C oraz środkowa i wysokość poprowadzone z wierzchołka C zawierają się w jednej prostej, będącej osią symetrii podstawy, inaczej – w symetralnej boku AB .

Przykład 4 ◀ zad. 3.14

W trójkącie równoramiennym, w którym $|AC| = |BC|$, poprowadzono (tak jak na rysunku) środkowe AD i BE . Udowodnimy, że $\triangle ABE \equiv \triangle BAD$.

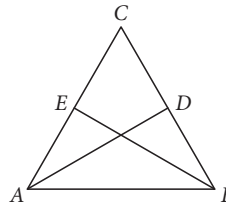
Dowód

E jest środkiem boku AC , D jest środkiem boku BC .

$ AE = BD $	← połowy równych boków trójkąta równoramiennego
$\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA$	← równe kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego
AB	← wspólny bok tych trójkątów

Trójkąty ABE i BAD mają równe dwie pary boków i równe kąty między nimi zawarte. Są więc przystające na mocy cechy bkb.

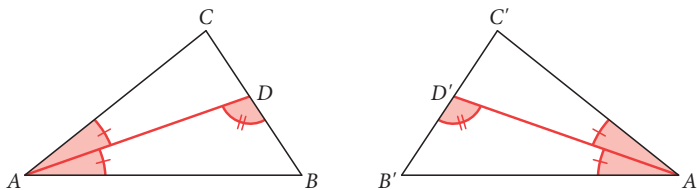
Koniec dowodu



Przykład 5 ◀ zad. 3.16

W trójkątach ABC oraz $A'B'C'$ poprowadzono dwusieczne AD i $A'D'$. Wiemy, że $|AD| = |A'D'|$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle A'D'B'$. Udowodnimy, że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ są przystające.

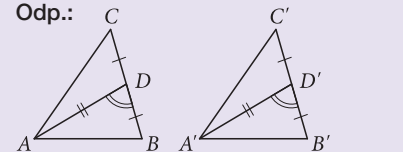
Dowód



Wykażemy najpierw, że przystające są trójkąty ABD i $A'B'D'$. Wykorzystamy następnie równości między bokami i kątami tych trójkątów do osiągnięcia celu, czyli udowodnienia przystawiania dużych trójkątów.

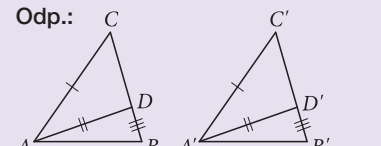
◀3.14. W trójkątach ABC oraz $A'B'C'$ poprowadzono środkowe AD i $A'D'$. Wiadomo, że $|BC| = |B'C'|$, $|AD| = |A'D'|$ i $\sphericalangle ADB = \sphericalangle A'D'B'$. Udowodnij, że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ są przystające.

Odp.:


 $|AD| = |A'D'|$, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle A'D'B'$
i $|BD| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}|B'C'| = |B'D'|$,
więc – na mocy cechy bkb –
trójkąty ABD i $A'B'D'$ są
przystające. Wynika z tego, że
 $|AB| = |A'B'|$ i $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$. Poza
tym $|BC| = |B'C'|$, więc – na
mocy cechy bkb – trójkąty ABC
i $A'B'C'$ są przystające.

◀3.16. W trójkątach ABC oraz $A'B'C'$, w których $|AC| = |A'C'|$ oraz $|BC| = |B'C'|$ poprowadzono do boków BC i $B'C'$ odcinki AD i $A'D'$. Wiadomo, że $|AD| = |A'D'|$ oraz $|BD| = |B'D'|$. Udowodnij, że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ są przystające.

Odp.:


Założenia: (1) $|AC| = |A'C'|$,
(2) $|BC| = |B'C'|$,
(3) $|AD| = |A'D'|$, $|BD| = |B'D'|$.
Z równości
 $|CD| = |BC| - |BD| =$
 $= |B'C'| - |B'D'| = |C'D'|$
oraz z (1) i (3), na mocy cechy
bbb, trójkąty ADC i $A'D'C'$ są
przystające. Zatem $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$.
Ponadto $|AC| = |A'C'|$
i $|BC| = |B'C'|$, więc – na mocy
cechy bkb – trójkąty ABC i $A'B'C'$
są przystające.

Z założeń w treści zadania wiemy, że: $|AD| = |A'D'|$, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle A'D'B'$.

Ponieważ AD i $A'D'$ są dwusiecznymi kątów oraz $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, więc:

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle D'A'B'$$

jako połówki kątów równych. Trójkąty ABD i $A'B'D'$ mają odpowiednio równe – bok i dwa kąty do niego przylegające, są więc przystające na mocy cechy kbk.

Przyjrzyjmy się teraz trójkątom ABC oraz $A'B'C'$.

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A'$$

← założenia zadania

$$\sphericalangle B = \sphericalangle B'$$

← jako odpowiednie kąty w przystających trójkątach ABD i $A'B'D'$

$$|AB| = |A'B'|$$

← jako odpowiednie boki w przystających trójkątach ABD i $A'B'D'$

Trójkąty ABC i $A'B'C'$ mają więc odpowiednio równe – bok i dwa kąty do niego przylegające, a zatem na mocy cechy kbk są przystające.

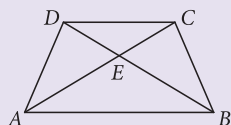
Koniec dowodu

Zadania

Odpowiedzi i rozwiązania

3.1. F, F, P

3.2.



$$\triangle ABC \equiv \triangle BAD,$$

$$\triangle AED \equiv \triangle BEC,$$

$$\triangle ACD \equiv \triangle BDC$$

3.3. A, B, C, E

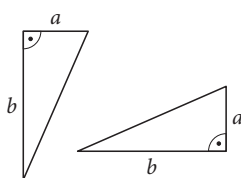
3.1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Dwa czworokąty wypukłe są przystające, kiedy mają boki odpowiednio równe.
- B. Dwa trójkąty są przystające, kiedy mają dwa boki i jeden kąt odpowiednio równe.
- C. Dwa trójkąty prostokątne są przystające, kiedy mają odpowiednie przyprostokątne równe.

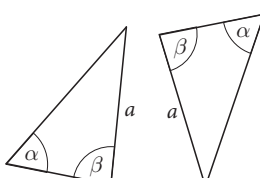
3.2. W trapezie równoramiennym poprowadzono przekątną. Wśród powstałych trójkątów wskaż trójkąty przystające.

3.3. Na których rysunkach są przedstawione trójkąty przystające?

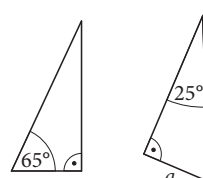
A.



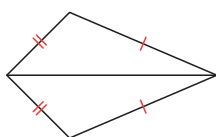
C.



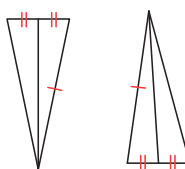
E.



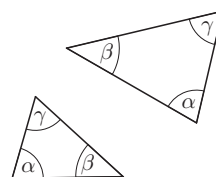
B.



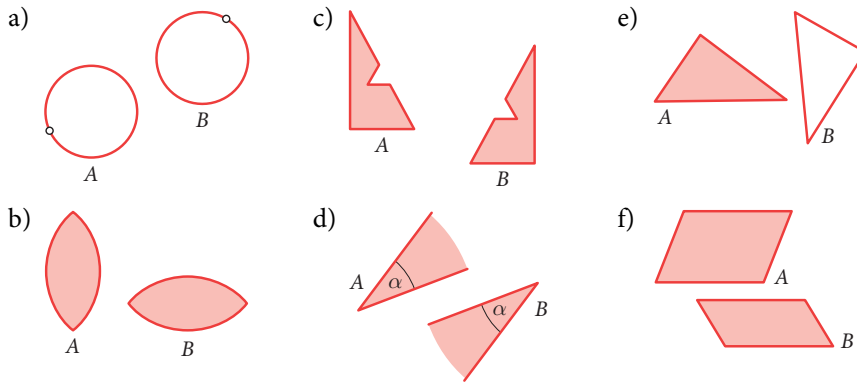
D.



F.



3.4. Czy figury A i B są przystające?

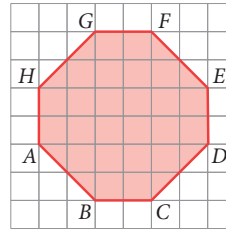


3.5. Które boki narysowanego obok wielokąta są równe?

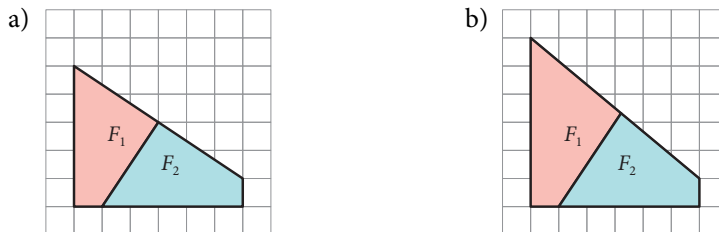
3.6. Kiedy dwa prostokąty są przystające?

3.7. Czy podane figury są przystające?

- a) dwie półproste
- b) dwie proste
- c) dwie półpłaszczyzny

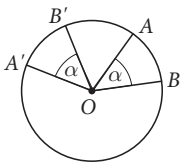


3.8. Czy figury F_1 i F_2 są przystające?

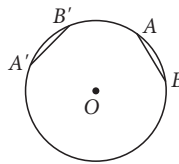


3.9. Punkt O jest środkiem okręgu na rysunku 1. Wykaż, że trójkąty AOB oraz $A'O'B'$ są przystające.

3.10. Punkt O jest środkiem okręgu na rysunku 2. Wiemy, że $|AB| = |A'B'|$. Wykaż, że trójkąty AOB oraz $A'O'B'$ są przystające.



Rys. 1.



Rys. 2.

3.10. $|OA| = |OA'|$ i $|OB| = |OB'|$ – jako promienie okręgu, $|AB| = |A'B'|$ – z założenia. Zatem – na mocy cechy bbb – trójkąty AOB i $A'O'B'$ są przystające.

3.4. a)–d) – tak, e), f) – nie

3.5. $|AB| = |CD| = |EF| = |GH|$,
 $|BC| = |DE| = |FG| = |HA|$

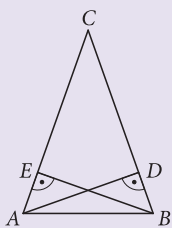
3.6. Kiedy pary boków przy jednym wierzchołku są odpowiednio równe.

3.7. a) tak b) tak c) tak

3.8. a) tak b) nie

3.9. $|OA| = |OA'|$ i $|OB| = |OB'|$ – jako promienie okręgu,
 $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A'O'B'$ – z założenia. Zatem – na mocy cechy bkb – trójkąty AOB i $A'O'B'$ są przystające.

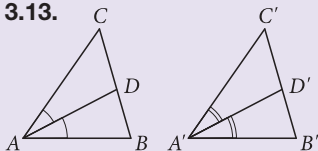
3.11.



Założenia: $|AC| = |BC|$,
 $AD \perp BC$ i $BE \perp AC$.
 $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BAE$ – jako równe
 kąty przy podstawie trójkąta
 równoramiennego.
 $\sphericalangle BAD = 90^\circ - \sphericalangle ABD =$
 $= 90^\circ - \sphericalangle BAE = \sphericalangle ABE$
 Bok AB jest wspólny dla obu
 trójkątów. Zatem – na mocy
 cechy kbk – trójkąty ADB i BEA
 są przystające.

3.12. Patrz s. 410.

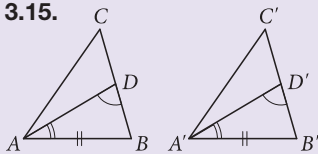
3.13.



$|AD| = |A'D'|$,
 $\sphericalangle DAB = \frac{1}{2}\sphericalangle A = \frac{1}{2}\sphericalangle A' =$
 $= \sphericalangle D'A'B'$ i $|AB| = |A'B'|$,
 więc $\triangle ADB \equiv \triangle A'D'B'$
 (cecha kbk). Wynika z tego,
 że $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$. Ponadto
 $|AB| = |A'B'|$ i $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, więc
 $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (cecha kbk).

3.14. Patrz s. 411.

3.15.



Założenia: (1) $|BC| = |B'C'|$,
 (2) $|AD| = |A'D'|$,
 (3) $\sphericalangle ADB = \sphericalangle A'D'B'$,
 $AD, A'D'$ – środkowe
 Z równości $|BD| = \frac{1}{2}|BC| =$
 $= \frac{1}{2}|B'C'| = |B'D'|$ oraz
 założeń (2) i (3) wnioskujemy,
 na mocy cechy kbk, że trójkąty
 ABD i $A'B'D'$ są przystające.
 Wynika z tego, że $|AB| = |A'B'|$
 i $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$. Z tych równości
 i założenia (1) wynika, że – na
 mocy cechy kbk – trójkąty ABC
 i $A'B'C'$ są przystające.

3.16. Patrz s. 411.

D

3.11. W trójkącie równoramiennym ABC , w którym $|AC| = |BC|$, poprowadzono wysokości AD i BE . Wykaż, że trójkąty ADB i BEA są przystające.

D

3.12. Z wierzchołka kąta rozwartego rombu poprowadzono dwie wysokości. Wykaż, że otrzymane trójkąty są przystające.

D

3.13. W trójkątach ABC oraz $A'B'C'$ poprowadzono dwusieczne AD i $A'D'$. Wiadomo, że $|AB| = |A'B'|$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ i $|AD| = |A'D'|$. Udowodnij, że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ są przystające.

D

3.14. W trójkątach ABC oraz $A'B'C'$ poprowadzono środkowe AD i $A'D'$. Wiadomo, że $|BC| = |B'C'|$, $|AD| = |A'D'|$ i $\sphericalangle ADB = \sphericalangle A'D'B'$. Udowodnij, że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ są przystające.

D

3.15. W trójkątach ABC oraz $A'B'C'$ poprowadzono środkowe AD i $A'D'$. Wiadomo, że $|AB| = |A'B'|$, $\sphericalangle DAB = \sphericalangle D'A'B'$ i $\sphericalangle ADB = \sphericalangle A'D'B'$. Udowodnij, że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ są przystające.

D

3.16. W trójkątach ABC oraz $A'B'C'$, w których $|AC| = |A'C'|$ oraz $|BC| = |B'C'|$ poprowadzono do boków BC i $B'C'$ odcinki AD i $A'D'$. Wiadomo, że $|AD| = |A'D'|$ oraz $|BD| = |B'D'|$. Udowodnij, że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ są przystające.

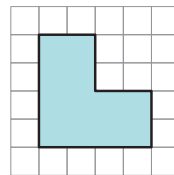
D

3.17. W trójkątach ABC oraz $A'B'C'$ poprowadzono dwusieczne AD i $A'D'$. Wiadomo, że $|AD| = |A'D'|$, $\sphericalangle ADC = \sphericalangle A'D'C'$ i $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$. Udowodnij, że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ są przystające.

D

3.18. W trójkątach ABC oraz $A'B'C'$ poprowadzono środkowe AD i $A'D'$. Wiadomo, że $|CD| = |C'D'|$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$ oraz $\sphericalangle ADB = \sphericalangle A'D'B'$. Udowodnij, że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ są przystające.

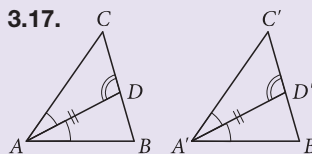
* 3.19. Podziel figurę pokazaną na rysunku obok na cztery figury przystające.



D

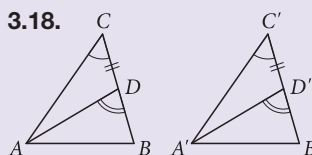
* 3.20. W trójkątach ABC oraz $A'B'C'$ poprowadzono środkowe AD i $A'D'$. Wiadomo, że $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$ i $|AD| = |A'D'|$. Udowodnij, że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ są przystające.

3.17.



Założenia: (1) $|AD| = |A'D'|$, (2) $\sphericalangle ADC = \sphericalangle A'D'C'$,
 (3) $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $AD, A'D'$ – dwusieczne
 Z równości $\sphericalangle CAD = \frac{1}{2}\sphericalangle A = \frac{1}{2}\sphericalangle A' = \sphericalangle C'A'D'$ oraz
 założeń (1) i (2) wnioskujemy, na mocy cechy kbk, że
 trójkąty ADC i $A'D'C'$ są przystające. Z tego wynika, że $|AC| = |A'C'|$ i $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$. Z tych
 równości i założenia (3) wynika, na mocy cechy kbk, że trójkąty ABC i $A'B'C'$ są przystające.

3.18.



Założenia: (1) $|CD| = |C'D'|$, (2) $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$,
 (3) $\sphericalangle ADB = \sphericalangle A'D'B'$, $AD, A'D'$ – środkowe
 Z równości $\sphericalangle ADC = 180^\circ - \sphericalangle ADB = 180^\circ - \sphericalangle A'D'B' =$
 $= \sphericalangle A'D'C'$ oraz założeń (1) i (2) wnioskujemy, na
 mocy cechy kbk, że trójkąty ADC i $A'D'C'$ są przystające.
 Wynika z tego, że $|AC| = |A'C'|$. Z (1) wynika, że $|CB| = 2|CD| = 2|C'D'| = |C'B'|$. Z tych
 równości i założenia (2) wynika, na mocy cechy kbk, że trójkąty ABC i $A'B'C'$ są przystające.

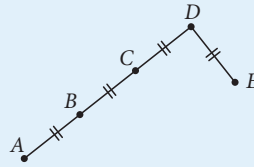
Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszyte.

1. Na rysunku zaznaczono odcinki tej samej długości. Wskaż liczbę par odcinków równych, których końcami są zaznaczone punkty.

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

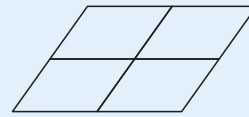


2. W sześciokącie foremnym $ABCDEF$ poprowadzono wszystkie przekątne z wierzchołka A oraz przekątną BF . Ile par trójkątów przystających otrzymano? Rozważamy wszystkie trójkąty, w których przynajmniej jednym bokiem jest przekątna.

- A. 4 B. 6 C. 7 D. 8

3. W równoległoboku poprowadzono odcinki łączące środki jego przeciwległych boków. Wskaż liczbę par równoległoboków przystających.

- A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

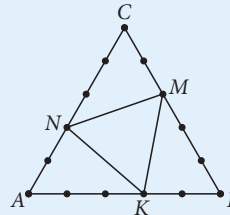


4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

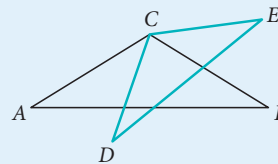
- A. Dwa trapezy są przystające, kiedy mają boki odpowiednio równe.
B. Dwa sześciokąty foremne są przystające, kiedy mają równe boki.
C. Dwa pięciokąty wypukłe są przystające, kiedy mają boki odpowiednio równe.

D 5. W rombie $ABCD$ połączono wierzchołek B ze środkiem P boku AD oraz ze środkiem Q boku DC . Wykaż, że trójkąty ABP oraz BCQ są przystające.

D 6. Każdy z boków trójkąta równobocznego ABC podzielono na 5 równych części, jak na rysunku. Wykaż, że trójkąt KMN jest równoboczny.



D 7. Trójkąty ABC i DEC są równoramienne oraz $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCE$. Wykaż, że $|AD| = |EB|$.



Prosto do matury

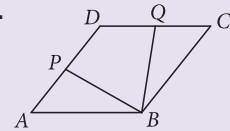
1. C

2. A

3. C

4. P, P, F

5.

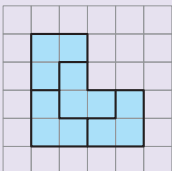


$|AB| = |CB|$, $\sphericalangle BAP = \sphericalangle BCQ$ – jako przeciwległe kąty rombu,
 $|AP| = \frac{1}{2}|AD| = \frac{1}{2}|CD| = |CQ|$.
Zatem – na mocy cechy kbk – trójkąty ABP oraz BCQ są przystające.

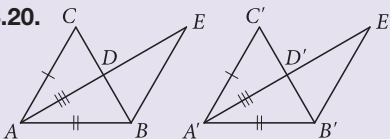
6. $|AK| = |BM| = |CN| = \frac{3}{5}|AB|$,
 $\sphericalangle NAK = \sphericalangle KBM = \sphericalangle MCN} = 60^\circ$,
 $|AN| = |BK| = |CM|$
Zatem – na mocy cechy kbk – trójkąty NAK , KBM i MCN są przystające. Z tego wynika, że $|NK| = |KM| = |MN|$, co oznacza, że trójkąt NKM jest równoboczny.

7. Założenia: $|AC| = |BC|$ i $|DC| = |EC|$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCE}$.
 $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ACB - \sphericalangle DCB = \sphericalangle DCE - \sphericalangle DCB = \sphericalangle BCE}$
Zatem – na mocy cechy kbk – trójkąty ACD i BCE są przystające, a z tego wynika, że $|AD| = |BE|$.

3.19.



3.20.



Na półprostych AD i $A'D'$ obieramy punkty E i E' takie, że $|AD| = |DE|$ i $|A'D'| = |D'E'|$. $|DB| = |DC|$, $\sphericalangle BDE = \sphericalangle CDA$ (kąty wierzchołkowe) i $|DE| = |DA|$, więc $\triangle BDE \equiv \triangle CDA$ (cecha kbk), a z tego wynika, że $\sphericalangle BED = \sphericalangle CAD$ i $|BE| = |CA|$.
Analogicznie pokazujemy, że $\sphericalangle B'E'D' = \sphericalangle C'A'D'}$ i $|B'E'| = |C'A'|$.

$|AE| = 2|AD| = 2|A'D'| = |A'E'|$, $|BE| = |CA| = |C'A'| = |B'E'|$, $|AB| = |A'B'|$, więc $\triangle ABE \equiv \triangle A'B'E'}$ (cecha bbb).

Z tego wynika, że $\sphericalangle BAE = \sphericalangle B'A'E'}$, $\sphericalangle BED = \sphericalangle B'E'D'}$, więc $\sphericalangle CAD = \sphericalangle BED = \sphericalangle B'E'D' = \sphericalangle C'A'D'}$.

Zatem $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAE + \sphericalangle CAD = \sphericalangle B'A'E' + \sphericalangle C'A'D' = \sphericalangle B'A'C'}$. Z tego oraz z równości $|AB| = |A'B'|$ i $|AC| = |A'C'|$ wynika, że $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'}$ (cecha kbk).

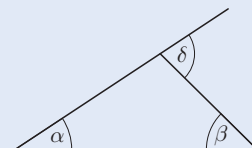
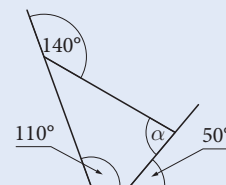
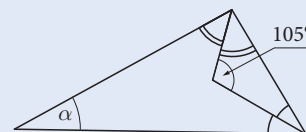
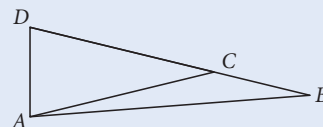
4. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–24 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytcie.

Odpowiedzi i rozwiązania

1. D
2. C
 1. W trójkącie ABC kąt zewnętrzny przy wierzchołku B jest równy 150° , a stosunek miar kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych wynosi $1 : 2$. Trójkąt ABC jest
 - A. równoramienny.
 - B. równoboczny.
 - C. prostokątny.
 - D. rozwartokątny.
 2. Porównaj kąty BDA i BAD , wiedząc, że $|AC| = |DC|$.
 - A. $\sphericalangle BDA > \sphericalangle BAD$
 - B. $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BAD$
 - C. $\sphericalangle BDA < \sphericalangle BAD$
 - D. Nie można porównać kątów BDA i BAD .
3. C
4. B
5. B
6. B
7. A
8. B
 3. Wskaż miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego, który ma 9 przekątnych.
 - A. 60°
 - B. 108°
 - C. 120°
 - D. 140°
 4. Wskaż miarę kąta α . Skorzystaj z rysunku.
 - A. Jest za mało danych, żeby podać miarę kąta α .
 - B. 30°
 - C. 45°
 - D. 75°
 5. Kajtki leżą 70 km od Maniek. Grajki są oddalone od Maniek o 40 km. Wskaż najkrótszą z możliwych odległości między Kajtkami a Grajkami.
 - A. 110 km
 - B. 30 km
 - C. $\sqrt{70^2 + 40^2}$ km
 - D. 10 km
 6. Wskaż miarę kąta α . Skorzystaj z rysunku obok.
 - A. 70°
 - B. 80°
 - C. 90°
 - D. 100°
 7. Ile jest równy kąt wypukły utworzony przez wskazówki zegara o godzinie 10^{20} ?
 - A. 170°
 - B. 165°
 - C. 150°
 - D. 180°
 8. Jaka zależność zachodzi między kątami δ i $\alpha + \beta$?
 - A. $\delta > \alpha + \beta$
 - B. $\delta = \alpha + \beta$
 - C. $\delta < \alpha + \beta$
 - D. Jest za mało danych, żeby porównać kąty δ i $\alpha + \beta$.
 9. Kąt α jest trzy razy większy od kąta do niego przyległego. Wskaż miarę kąta α .
 - A. 76°
 - B. 45°
 - C. 135°
 - D. 120°



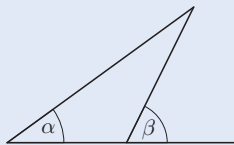
10. W sześciokącie wypukłym jeden z kątów wewnętrznych ma 120° . Ile jest równa suma miar pozostałych pięciu kątów wewnętrznych tego sześciokąta?

- A. 820° C. 600°
B. 580° D. Nie można tego obliczyć.

11. Porównaj miary kątów α i β zaznaczonych na rysunku.

- A. $\alpha > \beta$
B. $\alpha = \beta$
C. $\alpha < \beta$

D. Jest za mało danych, żeby porównać miary tych kątów.



12. W trójkącie ABC mamy $\sphericalangle C = 70^\circ$, a dwusieczne kątów A i B przecinają się w punkcie P . Jaką miarę ma kąt APB ?

- A. 130° B. 120° C. 110° D. 125°

13. Trzy punkty leżące na jednej prostej wyznaczają na niej

- A. 2 odcinki i 6 półprostych. C. 3 odcinki i 2 półproste.
B. 3 odcinki i 6 półprostych. D. 3 odcinki i 9 półprostych.

14. Połowa miary kąta przyległego do kąta α jest równa 15° . Wskaż miarę kąta α .

- A. $7,5^\circ$ B. 30° C. 75° D. 150°

15. Wspólna część dwóch trójkątów nie może być

- A. siedmiokątem. B. sześciokątem. C. pięciokątem. D. trójkątem.

16. W trójkącie ABC kąt A jest równy 32° , kąt $C = 80^\circ$. Dwusieczna kąta B przecina bok CA w punkcie D . Wskaż miarę kąta BDA .

- A. 110° B. 112° C. 114° D. 116°

17. W trapezie $ABCD$ ($AB \parallel CD$) kąt DAB jest równy 72° . Wskaż miarę kąta DCA .

- A. 72° C. 126°
B. 108° D. Jest za mało danych, żeby to obliczyć.

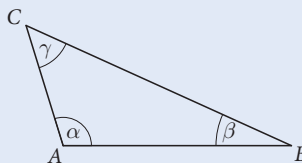
18. W trójkącie ABC punkt D leży na boku AC , punkt E – na boku BC tak, że $|DC| = |BE|$ oraz $|AD| > |CE|$. Która z wymienionych poniżej nierówności jest zawsze prawdziwa?

- A. $|DC| < |DB|$ B. $|BC| > |AC|$ C. $|BC| < |CA|$ D. $|AB| < |AC|$

19. W trójkącie ABC prawdziwe są nierówności:

$\alpha > \gamma$ i $\beta < \gamma$. Wynika stąd, że

- A. $\beta > \alpha$. C. $\gamma = \alpha - \beta$.
B. $\beta = \alpha + \gamma$. D. $\beta < \alpha$.



10. C

11. C

12. D

13. B

14. D

15. A

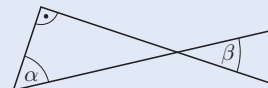
16. C

17. D

18. C

19. D

- 20. C**
- 20.** W trójkącie ABC , w którym $|CA| = |CB|$, wybrano punkt D na ramieniu AC i punkt E na ramieniu BC tak, że $|CE| > |DC|$. Wynika stąd, że
 A. $|AE| = |DE|$. B. $|AD| > |AB|$. C. $|EB| < |DA|$. D. $|BE| < |DC|$.
- 21. D**
- 21.** W czworokącie $ABCD$ dane są miary kątów: $\sphericalangle B = 90^\circ$ i $\sphericalangle D = 100^\circ$. Zatem
 A. $\sphericalangle A < \sphericalangle C$. C. $\sphericalangle A = \sphericalangle C$.
 B. $\sphericalangle A > \sphericalangle C$. D. jest za mało danych, żeby porównać miary kątów A i C .
- 22. A**
- 22.** W trójkącie ABC , w którym $|CA| = |CB|$, punkt D leży na przedłużeniu podstawy AB tak, że $|AD| = |AB| + |BD|$. Wynika stąd, że
 A. $|CD| > |AC|$. B. $|BD| > |CD|$. C. $|AB| > |BD|$. D. $|BC| > |DC|$.
- 23. D**
- 23.** Siedem identycznych kwadratów ustawionych jeden obok drugiego tworzy prostokąt o obwodzie 96 cm. Wskaż obwód jednego kwadratu.
 A. $13\frac{5}{7}$ cm B. $27\frac{3}{7}$ cm C. 31 cm D. 24 cm
- 24. C**
- 24.** Punkt C leży na odcinku AB . Który z wymienionych warunków nigdy nie jest spełniony?
 A. $|AC| > |BC|$ C. $|AC| + |CB| > |AB|$
 B. $|BC| > |AC|$ D. $|BC| - |AC| > 0$
- W zadaniach 25–30 oceń prawdziwość podanych zdań.**
- 25. P, P, F**
- 25.** Trójkąt można zbudować z odcinków o długościach
 A. 8, 6, 4. B. 11, 7, 6. C. 12, 17, 5.
- 26. F, P, P**
- 26.** W trójkącie ABC kąt A jest równy kątowi B . Punkt P jest różnym od końców punktem odcinka AB . Wynika stąd, że
 A. $|AC| \geq |AB|$. B. $|AC| > |CP|$. C. $|AP| + |PC| \geq |AC|$.
- 27. F, P, F**
- 27.** n -kąt wypukły ma 12 przekątnych. Wynika stąd, że
 A. $n = 6$. B. taki wielokąt nie istnieje. C. $n = 8$.
- 28. P, F, F**
- 28.** Suma miar trzech spośród czterech kątów utworzonych przez dwie przecinające się proste jest równa 310° .
 A. Kąty utworzone przez te proste mają miary 50° , 130° , 50° , 130° .
 B. Kąty utworzone przez te proste mają miary 70° , 170° , 70° , 170° .
 C. Nie można wyznaczyć kątów utworzonych przez te proste.
- 29. F, P, F**
- 29.** Na rysunku zaznaczone są kąty α i β oraz kąt prosty.

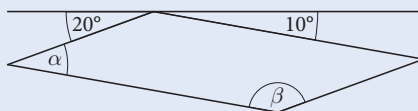


30. Narysowanym czworokątem jest równoległobok.

A. $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$

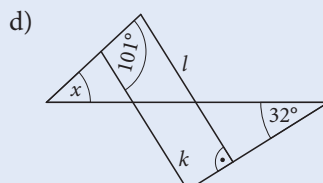
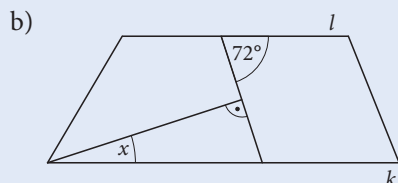
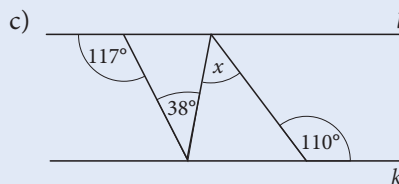
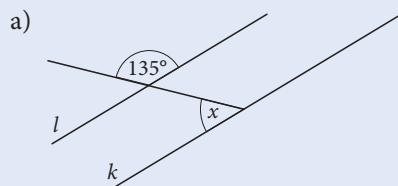
B. Nie można obliczyć miar kątów α i β .

C. $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 150^\circ$



Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

31. Wyznacz miarę kąta x , wiedząc, że proste k i l są równoległe.



32. Stosunek miar kątów przyległych wynosi $2 : 3$. Oblicz te kąty.

33. Kąt α jest siedem razy większy od kąta do niego przyległego. Oblicz kąt α .

34. Oblicz liczbę boków wielokąta foremnego o podanym kącie wewnętrznym α .

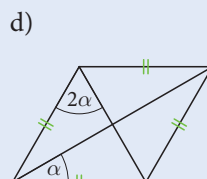
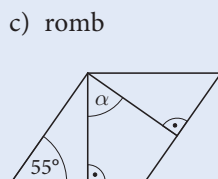
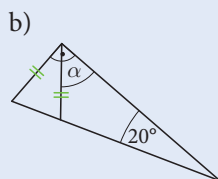
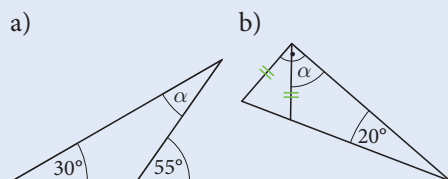
a) $\alpha = 156^\circ$

b) $\alpha = 168^\circ$

35. Dwa boki trójkąta są równe 2 cm i 5 cm. Ile jest takich trójkątów, w których długość trzeciego boku wyraża się również całkowitą liczbą centymetrów?

36. Sprawdź, czy z odcinków o długościach 2^{15} , 2^{16} , 2^{17} można zbudować trójkąt.

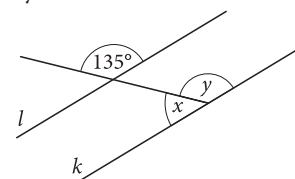
37. Wyznacz miarę kąta α .



30. F, F, P

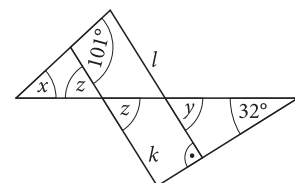
31. a) 45° **b)** 18°

c) Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z własności kąta zewnętrznego trójkąta mamy $117^\circ = 38^\circ + z$, więc $z = 79^\circ$. Proste k i l są równoległe, więc $z + x = 110^\circ$ (kąty naprzemianległe), zatem $x = 110^\circ - z = 31^\circ$.

d) Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Proste k i l są równoległe, więc $z = y$ (kąty naprzemianległe), czyli $z = 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$.

Z własności kąta zewnętrznego trójkąta mamy $101^\circ = x + z$, więc $x = 101^\circ - z = 43^\circ$.

32. 72° , 108°

33. $\alpha = 157,5^\circ$

34. a) 15 **b)** 30

35. 3

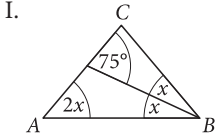
36. Nie można.

37. a) 25° **b)** 50° **c)** 55°
d) 30°

38. $20^\circ, 60^\circ, 100^\circ$

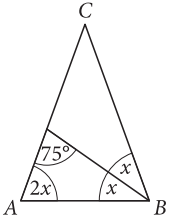
39. Rozpatrzmy dwa przypadki.

I.



$$2x + x = 75^\circ, \text{ więc } 2x = 50^\circ, \\ \sphericalangle C = 180^\circ - 2 \cdot 50^\circ = 80^\circ.$$

II.



$$2x + x = 180^\circ - 75^\circ, \text{ więc } 2x = 70^\circ, \\ \sphericalangle C = 180^\circ - 2 \cdot 70^\circ = 40^\circ.$$

Zatem trójkąt ABC ma kąty:
 $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$ lub $70^\circ, 70^\circ, 40^\circ$.

40. $58^\circ, 87^\circ$ 41. 80° 42. $70^\circ, 70^\circ, 40^\circ$ 43. $18^\circ, 72^\circ$ 44. $22,5^\circ, 67,5^\circ$ 45. $60^\circ, 120^\circ$

46. $\sphericalangle A = 65^\circ, \sphericalangle B = 30^\circ,$
 $\sphericalangle C = 150^\circ, \sphericalangle D = 115^\circ$

47. tak

48. Załóżmy, że w czworokącie ABCD mamy: $|AD| = |DC| = |CB|$ i $|AB| = |AC| = |BD|$. Oznaczmy:

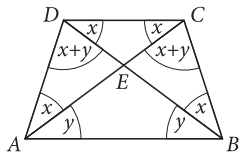
$x = \sphericalangle CAD, y = \sphericalangle CAB$.

Trójkąty DCB i ADC są równoramienne i przystające (cecha bbb), więc

$$\sphericalangle DBC = \sphericalangle BDC = \sphericalangle ACD = \\ = \sphericalangle CAD = x. \text{ Trójkąty ABD}$$

i BAC są równoramienne i przystające (cecha bbb), więc

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle BAC = y \\ \text{ i } \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = \sphericalangle BDA = \\ = \sphericalangle BAD = x + y.$$



$\sphericalangle AEB = \sphericalangle DEC$ (kąty wierzchołkowe),

czyli $180^\circ - 2y = 180^\circ - 2x$, więc
 $y = x$. Suma kątów trójkąta ABC

jest równa $2x + 3y = 5x = 180^\circ$,

więc $x = 36^\circ$. Stąd mamy

$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = x + y = 2x = 72^\circ,$
 $\sphericalangle BCD = \sphericalangle CDA = 2x + y = 3x =$
 $= 108^\circ$, czyli miary kątów danego
 czworokąta są równe: $72^\circ, 72^\circ,$
 $108^\circ, 108^\circ$.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

38. Miara jednego z kątów trójkąta jest trzy razy większa od miary drugiego, a ich suma jest o 20° mniejsza od miary trzeciego. Oblicz miary kątów tego trójkąta.

39. W trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) dwusieczna kąta B tworzy z bokiem AC kąt 75° . Oblicz miary kątów tego trójkąta.

40. Jeden z kątów trójkąta ma 35° , a miary dwóch pozostałych są w stosunku 2 : 3. Wyznacz miary tych kątów.

41. Dwusieczne kątów A i B trójkąta ABC przecinają się w punkcie P. Kąt APB ma miarę 130° . Oblicz miarę kąta C trójkąta ABC.

42. Jeden z kątów zewnętrznych trójkąta ma 140° , a dwa kąty wewnętrzne nieprzyległe do niego są równe. Wyznacz miary kątów trójkąta.

43. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych jest cztery razy większy od drugiego. Wyznacz miary kątów ostrych tego trójkąta.

44. W trójkącie prostokątnym ABC, w którym $\sphericalangle C = 90^\circ$, poprowadzono dwusieczną CD. Oblicz miary kątów ostrych trójkąta ABC, jeżeli wiadomo, że $|CD| = |AC|$.

45. Oblicz miary kątów utworzonych przez dwie środkowe trójkąta równobocznego.

46. W trapezie ABCD ($AB \parallel DC$) kąt przy wierzchołku D ma miarę o 50° większą od miary kąta przy wierzchołku A, a stosunek miar kątów przy wierzchołkach B i C wynosi 1 : 5. Oblicz miary kątów trapezu.

47. W wielokącie wypukłym ABCDEF miary kątów są kolejno równe: $125^\circ, 139^\circ, 120^\circ, 101^\circ, 112^\circ, 123^\circ$. Sprawdź, czy istnieje para boków równoległych tego wielokąta.

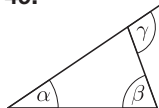
* 48. W czworokącie wypukłym trzy boki są równe, a czwarty bok jest równy każdej z przekątnych figury. Oblicz miary kątów tego czworokąta.

D 49. Wykaż, że kąt zewnętrzny trójkąta jest większy od każdego z kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych.

D 50. W równoległoboku ABCD poprowadzono dwusieczne kątów A i B. Wykaż, że dwusieczne te są prostopadłe.

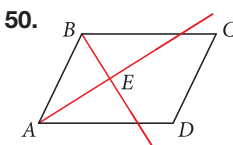
D 51. Dany jest kwadrat ABCD o boku 7. Na bokach AB, BC, CD i DA wybrano takie punkty P, Q, R, S, że $|AP| = |BQ| = |CR| = |DS| = \sqrt{13}$. Wykaż, że czworokąt PQRS jest kwadratem.

49.



α, β – kąty wewnętrzne, γ – kąt zewnętrzny trójkąta. Z równości $\gamma = \alpha + \beta$ wynika, że $\gamma > \alpha$ i $\gamma > \beta$, bo $\alpha > 0^\circ$ i $\beta > 0^\circ$.

50.



AE, BE – dwusieczne kątów A i B, więc $\sphericalangle EAB + \sphericalangle EBA =$

$$= \frac{1}{2} \sphericalangle BAD + \frac{1}{2} \sphericalangle ABC = \frac{1}{2} (\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ,$$

bo $AD \parallel BC$. Stąd mamy: $\sphericalangle AEB = 180^\circ - (\sphericalangle EAB + \sphericalangle EBA) =$
 $= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, co oznacza, że $AE \perp BE$.

51. $|AP| = |BQ| = |CR| = |DS| = \sqrt{13}$, $\sphericalangle SAP = \sphericalangle PBQ = \sphericalangle QCR = \sphericalangle RDS = 90^\circ$,
 $|SA| = |PB| = |QC| = |RD| = 7 - \sqrt{13}$, więc na mocy cechy kkb trójkąty SAP, PBQ, QCR i RDS są przystające. Z tego wynika, że $|SP| = |PQ| = |QR| = |RS|$ oraz $\sphericalangle BPQ = \sphericalangle ASP$.
 Zatem $\sphericalangle SPQ = 180^\circ - (\sphericalangle APS + \sphericalangle BPQ) = 180^\circ - (\sphericalangle APS + \sphericalangle ASP) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.
 Czworokąt PQRS jest więc rombem o jednym kącie prostym, a zatem jest kwadratem.

Skorowidz

Argument funkcji 192

Cechy podzielności 31

— przystawania trójkątów 409–411

Działania na potęgach 61, 80

dziedzina funkcji 192

Funkcja 192

— liniowa 309

— malejąca 240

— monotoniczna 241

— niemalejąca 240

— nierosnąca 241

— rosnąca 240

Hiperbola 254

Iloczyn (część wspólna) zbiorów 121

Liczba niewymierna 39, 44

— pierwsza 31

— wymierna 39, 44

— złożona 31

liczby względnie pierwsze 35

logarytm 86

— dziesiętny 89

Metoda podstawiania 168

— przeciwnych współczynników 170

miejsce zerowe funkcji 231

Nierówność liniowa 108

— nieostra 108

— ostra 108

Okres rozwinięcia dziesiętnego 41

Parabola 364

podzbiór 11, 115

pojęcie pierwotne 8

postać kanoniczna funkcji kwadratowej 373, 380

— ogólna funkcji kwadratowej 379

przedziały liczbowe 115, 116

przybliżenie z nadmiarem 45

— z niedomiarem 45

Równanie kierunkowe prostej 318, 336

— ogólne prostej 336

różnica zbiorów 124

Sposoby określania funkcji 193–195

suma zbiorów 123

Środkowa boku trójkąta 400

Teza 9

trójmian kwadratowy 379

Układ równań liniowych 164

— — — nieoznaczony 173, 344

— — — oznaczony 173, 344

— — — sprzeczny 173, 344

Wartość bezwzględna liczby 128, 129

— funkcji 192

wielkości odwrotnie proporcjonalne 249

— wprost proporcjonalne 300

wierzchołek paraboli 365, 373, 380

własności logarytmu 88

współczynnik kierunkowy 303, 320

— proporcjonalności 301

wyróżnik funkcji kwadratowej 380

wzory skróconego mnożenia 21–24

Założenie 9

zbiory rozłączne 122

zbiór 9

— liczb całkowitych 13

— — naturalnych 12

— nieskończony 10

— pusty 11

— skończony 10

— wartości funkcji 204