

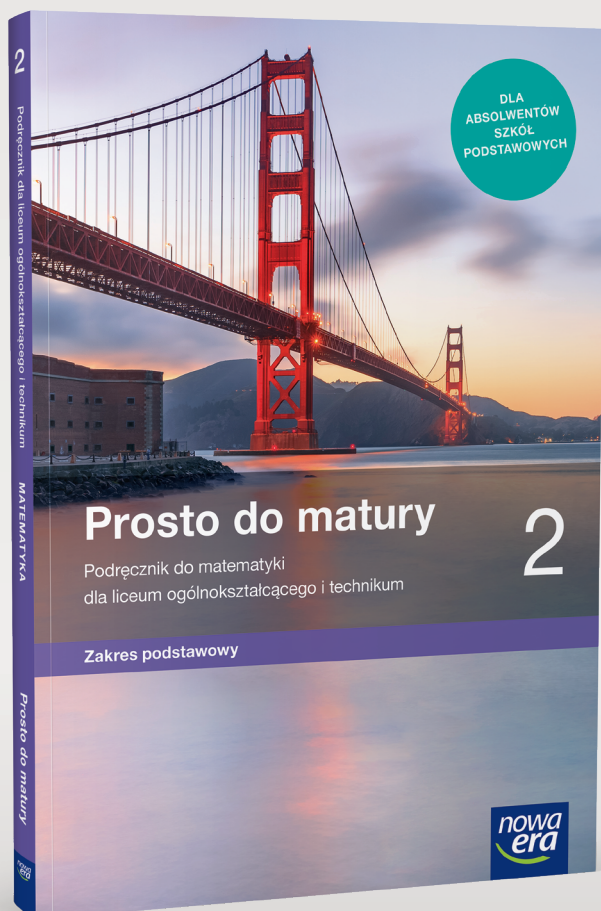
Prosto do matury

Podręcznik Nauczyciela

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

2

Zakres podstawowy



Podręcznik Nauczyciela zawiera:

- podręcznik ucznia
- odpowiedzi do wszystkich zadań
- rozwiązania trudniejszych zadań
- odnośniki do Multiteki – zasobów multimedialnych do lekcji
- komentarze merytoryczne

Program nauczania i inne materiały dydaktyczne są dostępne w portalu

dlanauczyciela.pl

Prosto do matury

Podręcznik Nauczyciela

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

2

Zakres podstawowy

Prosto do matury

Podręcznik Nauczyciela 2 został przygotowany do podręcznika autorstwa Macieja Antka, Krzysztofa Belki i Piotra Grabowskiego *Prosto do matury 2* dopuszczonego do użytku szkolnego i wpisanego do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w szkołach ponadpodstawowych w zakresie podstawowym (1008/2/2020).

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2020
ISBN 978-83-267-4006-0

W publikacji zamieszczono strony z podręcznika *Prosto do matury* dla klasy 2 szkoły ponadpodstawowej w zakresie podstawowym.

© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2020

Autorzy komentarzy merytorycznych: Maciej Antek, Piotr Grabowski.

Autorzy rozwiązań zadań: Jacek Klisowski, Ewa Muszyńska.

Koordynacja prac: Anna Dubiel.

Redakcja merytoryczna: Anna Drażek.

Redakcja językowa: Anna Lisiecka.

Korekta językowa: Anna Wesołowska.

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler.

Opieka graficzna: Ewa Kaletyn.

Projekt graficzny: Klaudia Jarocka.

Projekt okładki: Maciej Galiński.

Rysunki: Andrzej Oziebło.

Realizacja projektu graficznego: Skład systemem T_EX. BOP sc.

Realizacja projektu okładki: Ultra.

Fotografia na okładce: Getty Images/Moment/joe daniel price.

Fotografie: BE&W: Alamy Stock Photo – CPA Media Pte Ltd s. 300 (Galileusz), Pictorial Press Ltd s. 118 (Tartaglia), Science History Images s. 118 (Cardano), The Picture Art Collection s. 80; East News: Joanna Gajcy s. 39; Getty Images: Moment – PATSTOCK s. 190, wellsie82 s. 252, Moment Open/Photo by Vincent Ting s. 221, Stone/GK Hart/Vikki Hart s. 63; Indigo: agefotostock/Luis Castañeda s. 139, Alamy Stock Photo – Juergen Nowak s. 196–197, Pictorial Press Ltd s. 300 (dzieło Napiera), Danita Delimont Agency/Paul Souders/DanitaDelimont.com s. 7; Shutterstock: Adam Gryko s. 130, Africa Studio s. 300 (pióro), blackzheep s. 301 (tablet), David Pereiras s. 59, dvide s. 301 (suwak logarytmiczny), Paladin12 s. 300–301 (stara kartka), Slava Gerj s. 118–119 (szkiełko Weneckie), Tatiana Popova s. 247, theshots.co s. 246, Tito Wong s. 277, travis manley s. 116, Vitaly Korovin s. 119 (stara kartka).

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w publikacji. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Spis treści

Podręcznik Prosto do matury z materiałami dydaktycznymi	1
1. Zastosowania funkcji kwadratowej.....	7
2. Wielomiany i wyrażenia wymierne	59
3. Planimetria	139
4. Funkcje trygonometryczne.....	221
5. Funkcje wykładnicze i logarytmiczne	277
Skorowidz	316

Legenda

Podczas pracy z podręcznikiem PDM dodatkowo można korzystać z publikacji z serii **MATeMATyka: Zbiór zadań (ZZ)** i **Karty pracy ucznia (KPU)**. Odnośniki 1.10, 1.11 oznaczają numery odpowiednich tematów w tych publikacjach.

Multiteka – tu zamieszczamy tytuły zasobów zgromadzonych w Multitece, pomocnych w przeprowadzeniu konkretnych lekcji.

Materiały sprawdzające wiedzę są zgromadzone w dwóch miejscach:

- w portalu dlaNauczyciela.pl – gotowe kartkówki, klasówki i sprawdziany,
- w Genaratorze – narzędziu z bogatą bazą zadań do tworzenia własnych kartkówek, klasówek i sprawdzianów, a także z propozycjami gotowych tego typu materiałów.

ZZ i KPU

tematy 1.10, 1.11

Multiteka

- Problem optymalizacyjny – powierzchnia boczna pudełka
- Problem optymalizacyjny – powierzchnia prostopadłościanu

dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 1.2



Generator
testów i sprawdzianów

Maciej Antek
Krzysztof Belka
Piotr Grabowski

Prosto do matury

Podręcznik do matematyki
dla liceum ogólnokształcącego i technikum

2

Zakres podstawowy



Twoje mocne strony

Prosto do matury

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:

mgr. Zbigniewa Bobińskiego, dr Marii Borowskiej i dr Katarzyny Kozłowskiej.

Zakres kształcenia: podstawowy

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa (liceum ogólnokształcące i technikum)

Rok dopuszczenia: 2020

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 1008/2/2020

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Piotra Grabowskiego.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2020
ISBN 978-83-267-3893-7

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Magdalena Spalińska, Anna Dubiel
Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak

Konsultacje merytoryczne: Ewa Muszyńska

Redakcja językowa: Marta Zuchowicz

Korekta językowa: Anna Wesołowska

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler

Opieka graficzna: Ewa Kaletyn

Projekt graficzny: Sławomir Włodarczyk, Ewa Kaletyn, Diana Gawronkiewicz/Podpunkt

Projekt okładki: Maciej Galiński, Ewa Kaletyn

Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska

Rysunki merytoryczne: Andrzej Oziębło

Ilustracje: Wojciech Sendal

Opracowanie graficzne infografik: Marek Błoszko, Aleksandra Szpunar

Ilustracje na infografikach: Elżbieta Buczkowska, Natalia Helman, Ewa Sowulewska, Aleksandra Szpunar

Realizacja projektu graficznego: BOP s.c.

Fotografia na okładce: Getty Images/Moment/joe daniel price.

Fotografie: BE&W: Alamy Stock Photo – CPA Media Pie Ltd s. 300 (Galleus), Pictorial Press Ltd s. 118 (Tartaglia), Science History Images s. 118 (Cardano), The Picture Art Collection s. 80, East News, Joanna Gajcy s. 39, Getty Images: Moment – PATSTOCK s. 190, wellise82 s. 252, Moment Open/Photo by Vincent Ting s. 221, Stone/GK Hart/Viki Hart s. 63, Indigo: agefotostock/Luis Castañeda s. 139, Alamy Stock Photo – Juergen Nowak s. 196–197, Pictorial Press Ltd s. 300 (dzieło Nappera), Danita Delmont Agency/Paul Souders/DanitaDelmont.com s. 7, Shutterstock: Adam Gryko s. 130, Africa Studio s. 300 (pióro), blacksheep s. 301 (tablett), David Pereiras s. 59, dvande s. 301 (suwak logarytmiczny), Paladin12 s. 300–301 (stara kartka), Slava Gerj s. 118–119 (szkiełko Weneckie), Tatiana Popova s. 247, theshots.co s. 246, Tito Wong s. 277, travis manley s. 116, Vitaly Korovin s. 119 (stara kartka).

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Druk i oprawa: Techgraf, Łańcut

Spis treści

Wstęp	5
Wykaz używanych oznaczeń matematycznych	6

Dział 1. Zastosowania funkcji kwadratowej

1. Warto powtórzyć – własności funkcji, funkcja kwadratowa	8
2. Wartość największa i wartość najmniejsza funkcji kwadratowej	12
3. Miejsca zerowe funkcji kwadratowej	22
4. Nierówności kwadratowe	30
5. Zadania prowadzące do równań kwadratowych	36
6. Własności funkcji kwadratowej – podsumowanie	43
7. Powtórzenie	52

Dział 2. Wielomiany i wyrażenia wymierne

1. Określenie funkcji wielomianowej	60
2. Działania w zbiorze wielomianów	69
3. Wzory skróconego mnożenia	75
4. Równania wielomianowe	79
5. Dzielenie wielomianów	91
6. Zastosowanie twierdzenia Bézouta	99
7. Wyrażenia wymierne	109
8. Działania na wyrażeniach wymiernych	120
9. Równania wymierne	127
10. Powtórzenie	134

Dział 3. Planimetria

1. Wstęp do planimetrii	140
2. Okręgi i proste	149
3. Kąty w kole	162
4. Twierdzenie Talesa	178
5. Podobieństwo	187
6. Trójkąty podobne	198
7. Powtórzenie	213

Dział 4. Funkcje trygonometryczne

1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego	222
2. Związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego	233
3. Warto powtórzyć – pola i obwody figur	240

4. Zastosowania funkcji trygonometrycznych	248
5. Funkcje trygonometryczne kąta rozwartego	255
6. Własności funkcji trygonometrycznych	265
7. Powtórzenie	271

Dział 5. Funkcje wykładnicze i logarytmiczne

1. Warto powtórzyć – potęgi	278
2. Funkcja wykładnicza	280
3. Warto powtórzyć – logarytmy	289
4. Własności logarytmów	292
5. Funkcja logarytmiczna. Zastosowania logarytmów	302
6. Powtórzenie	309

Odpowiedzi	316
------------	-----

Skorowidz	342
-----------	-----

Tablica wartości logarytmów dziesiętnych liczb od 1 do 9,9	343
--	-----

Tablica wartości funkcji trygonometrycznych	344
---	-----

Wstęp

Podręcznik *Prosto do matury* dla klasy drugiej jest dostosowany do podstawy programowej obowiązującej w liceum od września 2019 r. i obejmuje treści z zakresu podstawowego.

Książka zawiera ponad tysiąc zadań do samodzielnego rozwiązania. To wystarczy do gruntownego przećwiczenia umiejętności nabytych podczas lekcji. Zadania trudniejsze oznaczono  lub , zadania typu „Wykaż...” poprzedzono znakiem , natomiast te zadania, do których rozwiązania przydatny jest kalkulator – znakiem .

Podręcznik dostosowany jest do samodzielnej nauki, co może być cenne na przykład w razie nieobecności w szkole. Wprowadzane pojęcia ilustrujemy przykładami rozwiązanych zadań. W zrozumieniu materiału bardzo pomogą kolorowe rysunki merytoryczne. Wybrane rozwiązane zadania typu maturalnego zostały oznaczone znakiem .

Po każdym rozdziale proponujemy zestaw siedmiu zadań zatytułowanych *Prosto do matury*. Warto, by po omówieniu każdego rozdziału uczniowie próbowali rozwiązywać je samodzielnie. Będzie to sprawdzianem umiejętności potrzebnych na maturze.

Uwaga! W zadaniach testowych, w których należy wybrać jedną odpowiedź spośród czterech podanych, wybrana odpowiedź nie musi być jedynym rozwiązaniem postawionego problemu.

Odpowiedzi do pytań, poleceń, rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Autorzy

Wykaz używanych oznaczeń matematycznych

$x \in A$; $x \notin A$	x należy do zbioru A ; x nie należy do zbioru A
$\{a, b, c\}$	zbiór, którego elementami są a, b, c
$\mathbf{N, Z, Q, R}$	zbiór liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych, rzeczywistych
$\emptyset$	zbiór pusty
$A \subset B$	zbiór A jest podzbiorem zbioru B
$A \cap B$	część wspólna (iloczyn) zbiorów A i B
$A \cup B$	suma zbiorów A i B
$A - B$	różnica zbiorów A i B
$\sqrt[n]{a}$	pierwiastek stopnia n z liczby a
$\log_a b$	logarytm przy podstawie a liczby b
$\log b$	logarytm przy podstawie 10 liczby b
$a < b$ ($a > b$)	liczba a jest mniejsza (większa) od liczby b
$a \leq b$	liczba a jest nie większa, tzn. równa lub mniejsza od liczby b
$a \geq b$	liczba a jest nie mniejsza, tzn. równa lub większa od liczby b
$(a; b)$	przedział otwarty, zbiór liczb większych od a i mniejszych od b
$\langle a; b \rangle$	przedział domknięty (zamknięty)
$\langle a; b \rangle$	przedział lewostronnie domknięty
$\langle a; b \rangle$	przedział prawostronnie domknięty
$ a $	wartość bezwzględna liczby a
$f(x)$	wartość funkcji f dla argumentu x
D	dziedzina funkcji
ZW	zbiór wartości funkcji
$o(S, r)$	okrąg o środku S i promieniu r
$k(S, r)$	koło o środku S i promieniu r
P	pole figury
obw	obwód figury
$A = (a, b)$	punkt A o współrzędnych a (tzw. odcięta) i b (tzw. rzędna)
AB	odcinek o końcach A i B
$ AB $	długość odcinka AB
$a \parallel b$	prosta a jest równoległa do prostej b
$a \perp b$	prosta a jest prostopadła do prostej b
$\sphericalangle ABC$	kąt o wierzchołku B i ramionach: półprostej BA i półprostej BC
$\triangle ABC$	trójkąt ABC
Δ	delta; wyróżnik trójmianu kwadratowego
$\sin \alpha$	sinus kąta α
$\cos \alpha$	cosinus kąta α
$\operatorname{tg} \alpha$	tangens kąta α
$F_1 \equiv F_2$	figura F_1 jest przystająca do figury F_2
$F_1 \sim F_2$	figura F_1 jest podobna do figury F_2

Zastosowania funkcji kwadratowej

1

Umiejętności

Po klasie pierwszej szkoły ponadpodstawowej uczeń:

- rysuje wykres funkcji $f(x) = ax^2$ i podaje jej własności,
- interpretuje współczynnik a funkcji $y = ax^2$,
- rysuje wykres funkcji kwadratowej zapisanej w postaci kanonicznej,
- określa własności (zbiór wartości, przedziały monotoniczności, wartość ekstremalną) funkcji kwadratowej na podstawie jej postaci kanonicznej,
- podaje wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej na podstawie informacji o jej wykresie,
- przekształca wzór funkcji kwadratowej z postaci kanonicznej do ogólnej, i odwrotnie,
- interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej,
- oblicza współrzędne wierzchołka paraboli,
- podaje wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej na podstawie informacji o jej wykresie.

Po tym dziale uczeń:

- wyznacza wartości funkcji kwadratowej: największą i najmniejszą w podanym przedziale,
- rozwiązuje równania kwadratowe niepełne ($ax^2 + bx = 0$, $ax^2 + c = 0$) metodą rozkładu na czynniki,
- określa liczbę pierwiastków równania kwadratowego na podstawie znaku wyróżnika,
- rozwiązuje równania kwadratowe za pomocą wzorów na pierwiastki,
- sprowadza funkcję kwadratową do postaci iloczynowej i odczytuje miejsca zerowe tej funkcji,
- rozwiązuje nierówności kwadratowe zapisane w postaci iloczynowej i ogólnej,
- rozwiązuje graficznie i rachunkowo układy równań prowadzące do równań kwadratowych,
- wyznacza punkty wspólne paraboli i prostej,
- rysuje wykresy funkcji kwadratowych i opisuje ich własności,
- znajduje brakujące współczynniki funkcji kwadratowej na podstawie różnych informacji o jej wykresie.

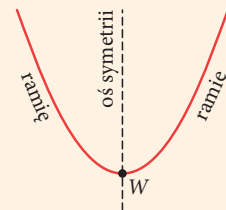
Uwagi metodyczne

Tematy „Warto powtórzyć” obejmują treści zawarte w programie pierwszej klasy szkoły ponadpodstawowej, których powtórzenie jest niezbędne do opanowania omawianych zagadnień. To od nauczyciela zależy, czy przeznaczy na te treści oddzielne lekcje, omówi je z grupą uczniów na zajęciach wyrównawczych, czy zada je jako pracę domową.

1. Warto powtórzyć – własności funkcji, funkcja kwadratowa

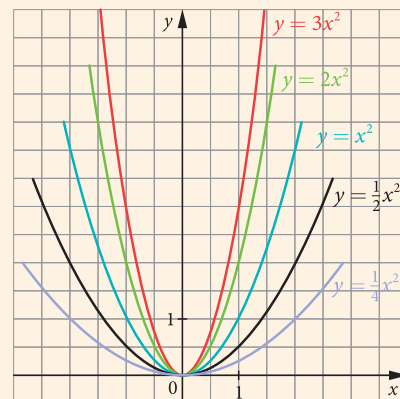
Parabola o równaniu $y = x^2$ jest wykresem funkcji $f(x) = x^2$. W dalszych rozważaniach tych zapisów na ogół nie będziemy rozróżniać.

Parabola ma dwa **ramiona** oraz **wierzchołek**, czyli punkt przecięcia paraboli z jej osią symetrii (na rysunku oznaczony literą W).



Własności funkcji $f(x) = ax^2$ dla $a > 0$:

- zbiorem wartości jest przedział $\langle 0; \infty \rangle$,
- funkcja ma wartość najmniejszą równą 0 dla $x = 0$,
funkcja nie ma wartości największej,
- miejscem zerowym jest $x = 0$,
- $f(x) > 0$ dla $x \neq 0$, więc wykres znajduje się w I oraz II ćwiartce układu współrzędnych,
- w przedziale $(-\infty; 0)$ funkcja jest malejąca, w przedziale $\langle 0; \infty \rangle$ jest rosnąca, zatem funkcja nie jest monotoniczna,
- osią symetrii wykresu jest oś y ,
- równanie $f(x) = m$:
dla $m < 0$ nie ma rozwiązań,
dla $m = 0$ ma jedno rozwiązanie,
dla $m > 0$ ma dwa rozwiązania.



Wykres funkcji $y = -ax^2$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = ax^2$ względem osi x .

Wierzchołkiem każdej paraboli o równaniu $y = ax^2$, $a \neq 0$, jest początek układu współrzędnych.

Definicja

Funkcję $f(x) = a(x - p)^2 + q$, $a \neq 0$ i $x \in \mathbf{R}$, nazywamy funkcją kwadratową zmiennej x w postaci kanonicznej.

Parabola o równaniu $y = a(x - p)^2 + q$, $a \neq 0$, ma taki sam kształt jak parabola $y = ax^2$, a jej wierzchołkiem jest punkt $W = (p, q)$.

Przykład 1

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku $W = (3, -1)$ przechodząca przez punkt $P = (1, 7)$. Napiszemy wzór tej funkcji w postaci kanonicznej.

Rozwiązanie

Wiemy, że $W = (3, -1)$, zatem do postaci kanonicznej $f(x) = a(x - p)^2 + q$ podstawiamy $p = 3$, $q = -1$.

$$f(x) = a(x - 3)^2 - 1$$

$$7 = a(1 - 3)^2 - 1$$

← punkt P należy do wykresu funkcji

$$8 = 4a, \text{ więc } a = 2$$

Odp.: $f(x) = 2(x - 3)^2 - 1$

Definicja

Funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ i $x \in \mathbf{R}$, nazywamy funkcją kwadratową zmiennej x w postaci ogólnej.

Twierdzenie

- Postacią kanoniczną funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, jest:

$$f(x) = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

Wyrażenie $\Delta = b^2 - 4ac$ nazywamy wyróżnikiem funkcji kwadratowej.

- Wierzchołek paraboli o równaniu $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, ma współrzędne:

$$x_w = \frac{-b}{2a}, \quad y_w = \frac{-\Delta}{4a}$$

Przykład 2

Wyznamy współrzędne wierzchołka oraz równanie osi symetrii wykresu funkcji $f(x) = 3x^2 + 30x + 73$.

Rozwiązanie

Wykresem funkcji jest parabola. Aby rozwiązać zadanie, przekształcimy wzór funkcji dany w postaci ogólnej $f(x) = 3x^2 + 30x + 73$ do postaci kanonicznej.

Uwagi metodyczne

Zadania z tematu „Warto powtórzyć” pozwalają utrwalić umiejętność odczytywania własności funkcji na podstawie jej wykresu oraz wzoru. Dzięki temu uczniowie będą mogli sobie przypomnieć takie pojęcia jak: dziedzina, zbiór wartości, wartość największa i wartość najmniejsza, miejsca zerowe, zbiory rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ i $f(x) < 0$, przedziały monotoniczności oraz liczba rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m . Jeżeli uczniowie nie pamiętają potrzebnych definicji ani ich geometrycznej interpretacji, polećmy im, aby w domu **samodzielnie** powtórzyli materiał z odpowiednich fragmentów podręcznika. Nie uczmy wszystkiego od początku (nawet w bardzo słabej klasie)! Jest to generalna uwaga, ponieważ często uczniowie oczekują lub wręcz się domagają ponownego wykładu na temat treści, które już dawno powinni opanować. Jeżeli będziemy ulegać takim żądaniom, nie wdrożymy uczniów do samodzielnej pracy.

I sposób

Stosujemy metodę nazywaną dopełnianiem do kwadratu.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 30x + 73 &= 3(x^2 + 10x) + 73 = 3\left[(x^2 + 2 \cdot 5x + 25) - 25\right] + 73 = \\ &= 3\left[(x + 5)^2 - 25\right] + 73 = 3(x + 5)^2 - 75 + 73 = 3(x + 5)^2 - 2 \end{aligned}$$

Zatem $f(x) = 3(x + 5)^2 - 2$,

czyli $x_w = -5$, $y_w = -2$, a osią symetrii wykresu jest prosta $x = -5$.

II sposób

Korzystamy ze wzorów podanych w twierdzeniu. Mamy $a = 3$, $b = 30$, $c = 73$.

$$x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{-30}{6} = -5$$

Aby obliczyć y_w , albo wyznaczamy wartość $\Delta = b^2 - 4ac = 900 - 12 \cdot 73 = 24$

i wówczas $y_w = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-24}{4 \cdot 3} = -2$,

albo znajdujemy $y_w = f(x_w) = f(-5) = 3 \cdot 25 - 150 + 73 = -2$.

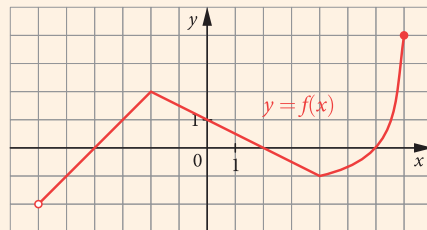
Odp.: Ośią symetrii paraboli, która jest wykresem tej funkcji, jest prosta $x = -5$, wierzchołek paraboli ma współrzędne $(-5, -2)$.

Zadania

1.1. Dane są zbiór $A = \left\{-1, 0, \frac{3}{2}, 5\right\}$ i funkcja $f(x) = \frac{2x}{x-5}$. Oblicz wartość funkcji f dla tych liczb ze zbioru A , które należą do dziedziny funkcji f .

1.2. Odczytaj z wykresu funkcji f :

- dziedzinę D i zbiór wartości ZW ,
- wartości największą i najmniejszą,
- miejsca zerowe,
- przedziały monotoniczności,
- zbiory rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ i $f(x) < 0$,
- liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m .



1.3. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest przedział $\langle 0; 10 \rangle$, a zbiorem wartości przedział $\langle -3; 5 \rangle$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji $y = f(x - 2) - 1$.

1.4. Funkcja $y = f(x)$ przyjmuje wartość największą równą 4 dla $x = 3$ i przyjmuje wartość najmniejszą równą -11 dla $x = -6$. Podaj wartość największą oraz wartość najmniejszą funkcji $f(x + 5) + 3$ oraz argumenty, dla których funkcja je przyjmuje.

Odpowiedzi i rozwiązania

1.1. $f(-1) = \frac{1}{3}$, $f(0) = 0$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{6}{7}$

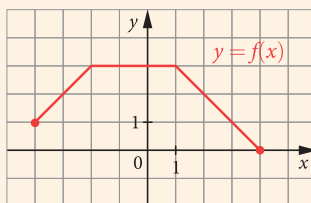
1.2. $D = (-6; 7)$, $ZW = (-2; 4)$; wartość największa: 4 dla $x = 7$, brak wartości najmniejszej; miejsca zerowe: $-4, 2, 6$; $f(x) > 0$ dla $x \in (-4; 2) \cup (6; 7)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-6; -4) \cup (2; 6)$; funkcja rosnąca w każdym z przedziałów $(-6; -2)$ i $(4; 7)$, malejąca w przedziale $(-2; 4)$; $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2) \cup (4; \infty)$, 1 rozwiązanie dla $m \in (-2; -1) \cup (2; 4)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{-1, 2\}$, 3 rozwiązania dla $m \in (-1; 2)$

1.3. $D = \langle 2; 12 \rangle$, $ZW = \langle -4; 4 \rangle$

1.4. wartość największa: 7 dla $x = -2$, wartość najmniejsza: -8 dla $x = -11$

1.5. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$. Sporządź wykres funkcji $y = g(x)$.

- a) $g(x) = -f(x)$ d) $g(x) = f(x - 3) + 2$
 b) $g(x) = f(x) - 1$ e) $g(x) = f(-x) - 3$
 c) $g(x) = f(x + 4)$ f) $g(x) = -f(-x)$



1.6. Przedstaw podane wyrażenie w postaci iloczynu. Wykorzystaj wzory skróconego mnożenia.

- a) $(b - 3)^2 - 1$ b) $p^2 - 4p + 4 - s^2$ c) $w^2 - 4z^2 + 12z - 9$

1.7. Wyznacz dziedzinę funkcji f .

- a) $f(x) = \sqrt{3x - 6}$ b) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{1-x}}$ c) $f(x) = \frac{\sqrt{2x+4}}{\sqrt{6-2x}}$

1.8. Podaj zbiór wartości i określ przedziały monotoniczności funkcji f .

- a) $f(x) = (x - 2)^2 + 3$ c) $f(x) = \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{8}$
 b) $f(x) = -(x + 1)^2 - 11$ d) $f(x) = -\sqrt{5}(x + \sqrt{3})^2$

1.9. Wykresem funkcji kwadratowej $y = f(x)$ jest parabola o wierzchołku w punkcie $W = (-3, 1)$ przechodząca przez punkt $A = (1, 5)$. Napisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej i w postaci ogólnej.

1.10. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f .

- a) $f(x) = x^2 - 8x + 6$ c) $f(x) = -9x^2 - 6x + 2$
 b) $f(x) = -x^2 - x$ d) $f(x) = 0,25x^2 + 0,5x + 0,75$

1.11. O funkcji kwadratowej f wiadomo, że:

- jej zbiorem wartości jest przedział $(-\infty; 3]$,
- osią symetrii wykresu jest prosta o równaniu $x = 2$,
- wykres przecina oś rzędnych w punkcie $(0, 1)$.

Napisz wzór tej funkcji w postaci ogólnej.

1.12. Narysuj wykres funkcji.

- a) $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 2$ b) $f(x) = 2(x - 1)^2 - 4$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2}$

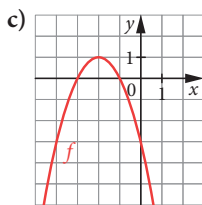
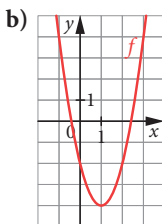
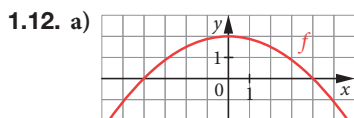
1.13. Dla jakiej wartości m równanie ma jedno rozwiązanie?

- a) $57x^2 - 11 = m$ b) $7(x + 11)^2 + 32 = m$ c) $-3x^2 - x + 1 = m$

1.14. Do wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + bx + c$ należą punkty $K = (-3, -8)$ oraz $M = (6, 19)$. Wyznacz współczynniki b i c .

- 1.10. a)** $W = (4, -10)$ **b)** $W = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ **c)** $W = \left(-\frac{1}{3}, 3\right)$ **d)** $W = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$

1.11. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$

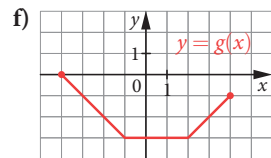
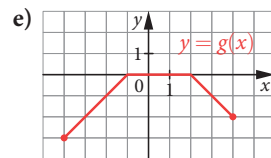
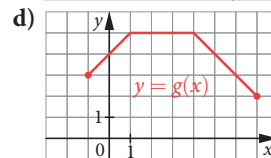
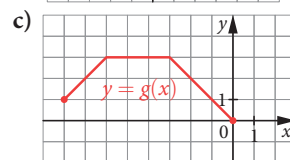
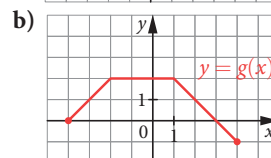
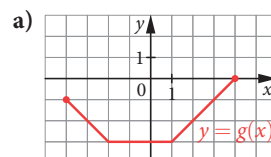


- 1.13. a)** $m = -11$ **b)** $m = 32$

c) $m = \frac{13}{12}$

1.14. $b = 2, c = -5$

1.5.



1.6. a) $(b - 4)(b - 2)$

b) $(p - s - 2)(p + s - 2)$

c) $(w - 2z + 3)(w + 2z - 3)$

1.7. a) $D = \langle 2; \infty \rangle$

b) $D = (-\infty; 1)$ **c)** $D = \langle -2; 3 \rangle$

1.8. a) $ZW = \langle 3; \infty \rangle$,

malejąca w przedziale $(-\infty; 2)$,
rosnąca w przedziale $\langle 2; \infty \rangle$

b) $ZW = (-\infty; -11)$,

rosnąca w przedziale $(-\infty; -1)$,
malejąca w przedziale $\langle -1; \infty \rangle$

c) $ZW = \left\langle \frac{3}{8}; \infty \right\rangle$,

malejąca w przedziale $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$,

rosnąca w przedziale $\left\langle \frac{1}{2}; \infty \right\rangle$

d) $ZW = (-\infty; 0)$,

rosnąca w przedziale $(-\infty; -\sqrt{3})$,
malejąca w przedziale $\langle -\sqrt{3}; \infty \rangle$

1.9. $f(x) = \frac{1}{4}(x + 3)^2 + 1 =$
 $= \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{13}{4}$

Uwagi metodyczne

Proponujemy przeznaczyć aż cztery godziny lecyjne na szukanie wartości największej i wartości najmniejszej funkcji kwadratowej, czyli tzw. wielkości ekstremalnych. Ten temat jest ważny ze względu na szerokie zastosowanie praktyczne, co pokazujemy w przykładach i zadaniach.

◀ **2.1.** Oblicz, na jaką wysokość wzniesie się piłka tenisowa odbita rakietą pionowo z wysokości 1 m, z prędkością początkową 20 m/s. Skorzystaj ze wzoru podanego w przykładzie 1.

Odp.: 21 m

2. Wartość największa i wartość najmniejsza funkcji kwadratowej

Umiejętności:

- odczytywanie wartości największej i wartości najmniejszej funkcji kwadratowej określonej w przedziale domkniętym

Przykład 1 ◀ zad. 2.1

Kowboje na Dzikim Zachodzie popisywali się strzelaniem do rzuconej pionowo w górę monety. Sekret tej sztuki polegał na tym, by trafić monetę w momencie, gdy była w najwyższym punkcie i przez chwilę jak gdyby zatrzymywała się w powietrzu. Z fizyki wiadomo, że ruch monety w górę jest jednostajnie opóźniony, a osiąganą przez nią wysokość (jeśli pominiemy opór powietrza) obliczymy ze wzoru:

$$h(t) = h_0 + v_0 \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Przyjmijmy, że: $h_0 = 1$ m – wysokość, z jakiej wyrzucona była moneta,

$v_0 = 6$ m/s – prędkość początkowa monety,

$g = 10$ m/s² – przyspieszenie ziemskie.

Wtedy, po podstawieniu danych i uporządkowaniu wzoru, mamy:

$$h(t) = -5t^2 + 6t + 1$$

Obliczymy, po jakim czasie moneta osiągnie największą wysokość i jaka ona będzie.

Dziedziną funkcji jest (mierzony w sekundach) czas trwania eksperymentu, czyli przedział od $t = 0$ do $t = t_k$ – chwili, w której moneta znajdzie się na ziemi.

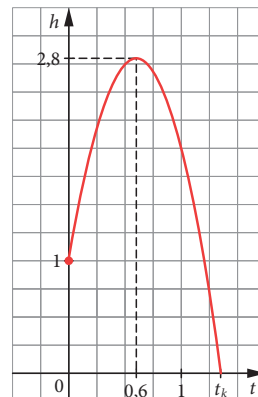
Wykresem funkcji jest parabola skierowana ramionami do dołu.

Znajdźmy współrzędne (t_w, h_w) wierzchołka.

$$t_w = \frac{-6}{-10} = 0,6$$

$$h_w = h(t_w) = h(0,6) = -5(0,6)^2 + 6 \cdot 0,6 + 1 = 2,8$$

Moneta osiągnie najwyższe położenie równe 2,8 m po upływie 0,6 s.



ZZ i KPU

tematy 1.10, 1.11

Multiteka

- Problem optymalizacyjny – powierzchnia boczna pudełka
- Problem optymalizacyjny – powierzchnia prostopadłościanu

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.2

Generator
testów i sprawdzianów

Istotnym zastosowaniem matematyki jest rozwiązywanie problemów dotyczących **optymalizacji**. Funkcje opisujące rzeczywistość są na ogół bardzo skomplikowane, ale spróbujemy zilustrować to zagadnienie za pomocą uproszczonego modelu.

Jednym z zadań konstruktora mostu jest pogodzenie sprzecznych warunków – jak najlepszej jakości materiałów i jak najniższych kosztów budowy. Ponadto przyszli użytkownicy chcą, aby most się nie zawalił i stał wiele lat. Wszystkie te uwarunkowania są powiązane. Załóżmy, że konstruktorowi udało się przedstawić koszty budowy jako funkcję rodzaju materiałów. Aby wyznaczyć dziedzinę, musiał uwzględnić zadaną wytrzymałość planowanego mostu. Teraz powinien znaleźć argument, dla którego funkcja osiąga wartość najmniejszą. Jeśli natomiast wyznaczył funkcję opisującą wytrzymałość w zależności od materiałów, to w dziedzinie uzależnionej od kosztów musi szukać argumentu, dla którego wartość jest największa.

Funkcja kwadratowa jest jedną z tych funkcji, dla których zadanie wyznaczenia wartości największej lub najmniejszej (tzw. **wielkości ekstremalnych**) przy ustalonej dziedzinie jest proste.

Kowboje, rzecz jasna, nie wykonywali takich obliczeń jak w przykładzie 1 – swoje umiejętności nabywali dzięki praktyce. Również starożytni Rzymianie, którzy zbudowali jedne z najdłuższych istniejących mostów, nie potrzebowali do tego badania funkcji. My jednak, żeby choć trochę zbliżyć się do aktualnych zastosowań matematyki, zajmmy się znajdowaniem wartości ekstremalnych różnych funkcji kwadratowych.

Przykład 2 ◀ zad. 2.2

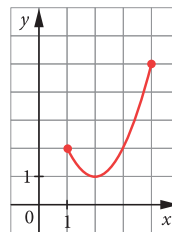
Poszukamy wartości największej i wartości najmniejszej funkcji $f(x) = x^2 - 4x + 5$ określonej w różnych dziedzinach D oraz wskażemy argumenty, dla których te wartości są przyjmowane.

Rozwiązanie

a) $D = \langle 1; 4 \rangle$

Wykres funkcji jest fragmentem paraboli o wierzchołku (x_w, y_w) . Wartości ekstremalne funkcja może przyjąć albo dla argumentu x_w , albo na końcach przedziału $\langle 1; 4 \rangle$. Współrzędne wierzchołka to $x_w = 2$ i $y_w = f(2) = 1$. Natomiast $f(1) = 2$ i $f(4) = 5$.

Najmniejszą wartością funkcji jest zatem 1, funkcja przyjmuje ją dla $x = 2$; największą wartość, równą 5, funkcja przyjmuje dla $x = 4$.



◀2.2. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji w podanym przedziale. Podaj argumenty, dla których te wartości są przyjmowane.

- a) $f(x) = 2x^2 - 16x + 25$ $\langle 2; 5 \rangle$
- b) $f(x) = -3x^2 + 6x + 6$ $\langle -1; 2 \rangle$
- c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 7$ $\langle -8; -6 \rangle$
- d) $f(x) = -x^2 + 4x - 9$ $\langle -1; 3 \rangle$
- e) $f(x) = x^2 - 6x + 8$ $\langle 1; 5 \rangle$
- f) $f(x) = -x^2 - 2x + 2$ $\langle -3; \infty \rangle$

Odp.: a) wartość najmniejsza: -7 dla $x = 4$, wartość największa: 1 dla $x = 2$

b) wartość najmniejsza: -3 dla $x = -1$, wartość największa: 9 dla $x = 1$

c) wartość najmniejsza: 1 dla $x = -6$, wartość największa: 7 dla $x = -8$

d) wartość najmniejsza: -14 dla $x = -1$, wartość największa: -5 dla $x = 2$

e) wartość najmniejsza: -1 dla $x = 3$, wartość największa: 3 dla $x = 1$ lub $x = 5$

f) brak wartości najmniejszej, wartość największa: 3 dla $x = -1$

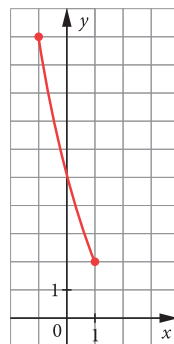
b) $D = \langle -1; 1 \rangle$

Teraz $x_w \notin D$.

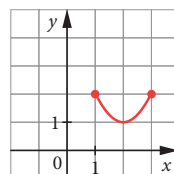
Obliczymy wartości funkcji na końcach dziedziny.

$$f(-1) = 10$$

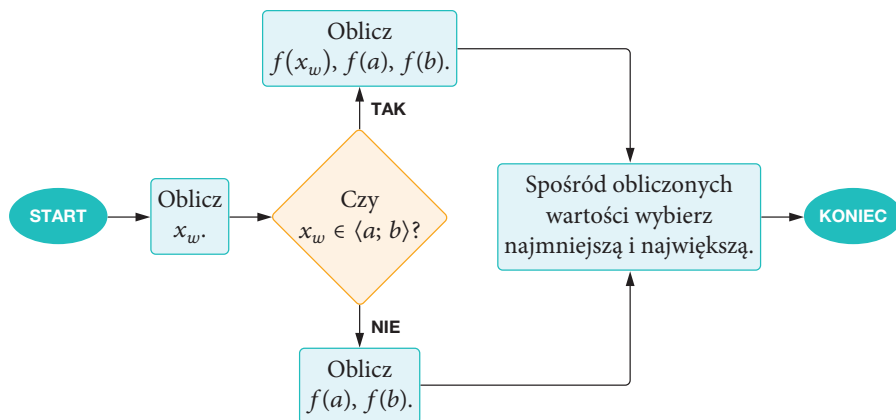
$$f(1) = 2$$

Najmniejszą wartością funkcji jest liczba 2, przyjmowana dla argumentu $x = 1$.Największą wartość, równą 10, funkcja przyjmuje dla $x = -1$.

c) $D = \langle 1; 3 \rangle$

Dla takiej dziedziny $x_w \in D$ oraz $f(1) = 2$ i $f(3) = 2$.Najmniejszą wartością funkcji jest liczba 1, przyjmowana dla $x = 2$. Natomiast wartość największą, równą 2, funkcja przyjmuje dla dwóch argumentów: $x = 1$ oraz $x = 3$.

Jeżeli ograniczymy dziedzinę funkcji kwadratowej $y = f(x)$ do przedziału domkniętego $\langle a; b \rangle$, to przyjmie ona swoje wartości – największą i najmniejszą – albo na końcach przedziału, albo dla x_w . Metodę znajdowania tych wartości można przedstawić w postaci schematu.

**Przykład 3** ◀ zad. 2.3

Znajdziemy wartość największą i wartość najmniejszą funkcji $g(x) = x^2 - 6x + 5$ o dziedzinie $D = (1; 4)$.

◀2.3. Wyznacz wartość największą i wartość najmniejszą funkcji $y = f(x)$ w podanej dziedzinie D , o ile funkcja przyjmuje te wartości.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 3$ $D = (-2; 1)$

b) $f(x) = -x^2 - 6x + 5$ $D = (-4; 1)$

c) $f(x) = 3x^2 + 12x - 7$ $D = (-4; 0)$

d) $f(x) = -x^2 + 4x + 122$ $D = (-5; 2)$

Odp.: a) brak wartości największej i wartości najmniejszej

b) wartość największa: 14 dla $x = -3$, brak wartości najmniejszejc) wartość najmniejsza: -19 dla $x = -2$, brak wartości największej

d) brak wartości największej i wartości najmniejszej

Rozwiązanie

Parabola $y = x^2 - 6x + 5$ ma wierzchołek w punkcie $W = (x_w, y_w)$.

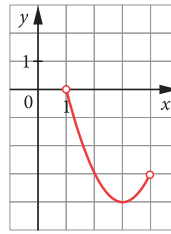
$$x_w = 3, \text{ zatem } x_w \in D$$

$$y_w = g(3) = -4$$

Punkty $(1, 0)$ oraz $(4, -3)$ nie należą do wykresu funkcji, ponieważ $1 \notin D$ i $4 \notin D$.

Funkcja maleje w przedziale $(1; 3)$ i rośnie w przedziale $(3; 4)$, więc $y = -4$ jest najmniejszą wartością funkcji.

Odp.: Najmniejszą wartość $y = -4$ funkcja przyjmuje dla $x = 3$. Natomiast wartości największej funkcja nie ma.

**Przykład 4** ◀ zad. 2.7

Liczbę 50 przedstawimy w postaci sumy dwóch takich składników, których iloczyn jest największy.

Rozwiązanie

Oznaczmy szukane składniki literami t, p ; mamy więc $50 = t + p$. Iloczyn tp tych składników możemy wyrazić za pomocą jednej zmiennej:

$$50 = t + p, \text{ czyli } t = 50 - p, \text{ zatem } tp = p(50 - p)$$

Interesuje nas, dla jakich wartości p funkcja $f(p) = p(50 - p)$ przyjmuje wartość największą.

$$f(p) = -p^2 + 50p$$

$$D = \mathbf{R} \quad \leftarrow \text{z treści zadania nie wynikają żadne ograniczenia dotyczące dziedziny}$$

Z własności funkcji $f(p) = -p^2 + 50p$ wynika, że przyjmuje ona wartość największą dla p_w .

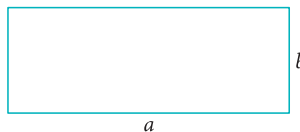
$$p_w = 25$$

Drugi składnik sumy jest równy $t = 50 - p$, czyli $t = 25$.

Odp.: Iloczyn jest największy, gdy składnikami sumy są liczby 25 i 25.

Przykład 5 ◀ zad. 2.16

Z drutu długości 20 cm budujemy prostokątną ramkę. Zbadamy pole tworzonego prostokąta jako funkcję długości jednego z jego boków. Sprawdzimy, czy wśród tak powstających prostokątów jest taki, który ma największe pole.



◀ 2.16. Prostokąt T ma boki długości 16 cm i 10 cm. Rozważamy prostokąty o bokach: dłuższym o x cm od krótszego boku prostokąta T oraz krótszym o x cm od dłuższego boku T . Dla jakiej wartości x pole nowego prostokąta będzie największe?

Odp.: $x = 3$

Uwagi metodyczne

Bardzo proste zadanie z przykładu 5. warto wykorzystać do przedstawienia problemu w praktyce, zwłaszcza do wyznaczenia dziedziny badanej funkcji. Można poprosić uczniów o przyniesienie giętkiego drutu długości 20 cm, aby mogli na lekcji tworzyć z niego różne prostokąty. Odpowiedź na pytanie o zakres zmienności jednego z boków powinna być wówczas dużo łatwiejsza. Tu mała dygresja. Mamy być może inne (niż większość autorów) zdanie na temat pokazywania zastosowań matematyki w szkolnych podręcznikach. Starannie wystrzegamy się podawania wymyślonych, sztucznych przykładów. Wolimy obejść się bez nich i na przykład ekstrema badać na mniejszej liczbie zadań tekstowych. Autentyczne zastosowania matematyki wydają się nam o wiele za trudne, aby ćwiczyć je w szkole, nawet ponadpodstawowej.

Rozwiązanie

Pole prostokąta o bokach a, b wyraża się wzorem $P = a \cdot b$, zatem zależy od dwóch zmiennych – długości dwóch sąsiednich boków.

Z treści zadania wiemy jednak, że $2a + 2b = 20$. Możemy więc uzależnić jedną zmienną od drugiej, np. $a = 10 - b$.

Wówczas, po podstawieniu ostatniej równości do wzoru na pole prostokąta, otrzymamy zależność pola tylko od jednej zmiennej.

$$P(b) = (10 - b) \cdot b$$

$$P(b) = -b^2 + 10b$$

Zastanówmy się, jaka jest dziedzina tej funkcji.

Długości obydwu boków muszą być liczbami dodatnimi:

$$b > 0 \text{ i } a = 10 - b > 0$$

Zatem $b \in (0; 10)$ i ten przedział jest dziedziną D .

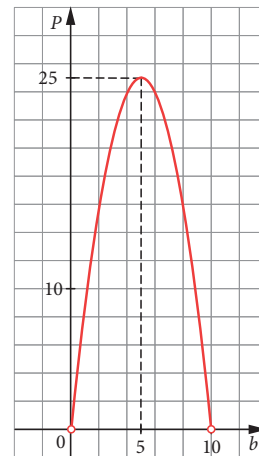
Oznaczmy jako b_w pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji P .

$$b_w = 5 \in (0; 10)$$

$$P(5) = -25 + 50 = 25$$

Funkcja P ma wartość największą, gdy $b = 5$.

Wówczas $a = 10 - 5 = 5$.



Punkty $(0, 0)$ oraz $(10, 0)$ nie należą do wykresu, ponieważ 0 oraz 10 nie należą do dziedziny funkcji. Interpretacja geometryczna tego faktu jest następująca: gdyby b było równe 0, to zamiast prostokątnej ramki mielibyśmy dwa „sklejone” odcinki, każdy długości 10; jeżeli z kolei mielibyśmy $b = 10$, to sytuacja byłaby analogiczna – odcinek a miałby długość 0 i znów z prostokąta zrobiłby się odcinek. W jednym i drugim wypadku pole takiej „ramki” jest równe 0.

Odp.: Ze wszystkich prostokątów o obwodzie 20 cm największe pole ma kwadrat o boku 5 cm.

Przykład 6 ◀ zad. 2.18, 2.19

Grupa studentów planuje wyjazd do Francji na narty. Autokar, który chcą wynająć, zabiera maksymalnie 40 pasażerów. Najwyższą ceną, jaką każdy z uczestników może zapłacić za przejazd, jest 450 zł. Właścicielka autokaru zgadza się go wynająć po 450 zł od osoby, jeżeli pojedzie co najmniej 20 osób. Przedstawiciel grupy uzgadnia z nią, że jeżeli zbierze więcej niż 20 chętnych na wyjazd, to przy każdej kolejnej osobie cena wynajmu będzie mniejsza o 10 zł dla każdego uczestnika. Zatem, jeżeli pojedzie tylko 20 osób, to właścicielka autokaru otrzyma $20 \cdot 450 \text{ zł} = 9000 \text{ zł}$, jeżeli 21 osób, to $21 \cdot 440 \text{ zł} = 9240 \text{ zł}$ itd.

◀ **2.18.** Fotograf zrobił zdjęcie klasie liczącej 33 uczniów. Cenę zdjęcia określił następująco: jeżeli odbitkę zamówi nie więcej niż 10 osób, to cena będzie równa 8 zł. Zamówienie zdjęcia przez każdą następną osobę spowoduje, że każdy zamawiający będzie płacić o 10 groszy mniej. Zakładając, że zrobienie odbitki kosztuje fotografa 1 zł, oblicz, przy jakiej liczbie zamówień jego zysk będzie największy. Ile ten zysk będzie równy?

Odp.: Zysk będzie największy, gdy wszyscy zamówią zdjęcia; wyniesie 155 zł 10 gr.

Jeżeli x oznacza liczbę uczestników, o którą zwiększy się 20-osobowa grupa, to:

$20 + x$ jest liczbą wyjeżdżających studentów,

$450 - 10x$ jest ceną przejazdu dla każdego z nich,

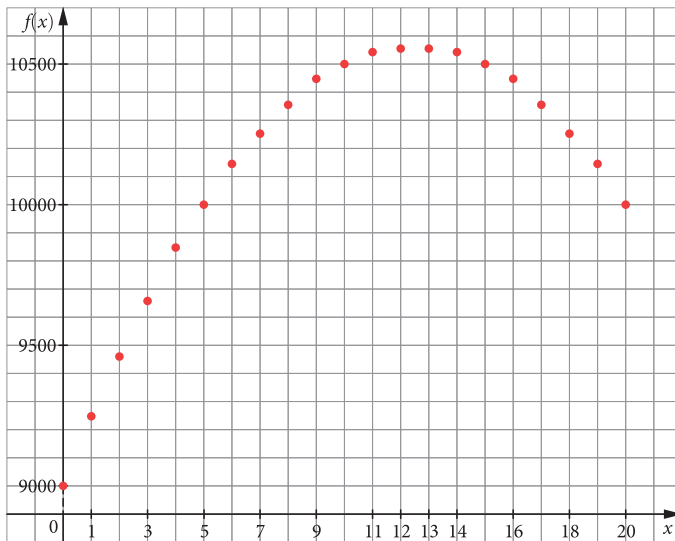
a właścicielka autokaru otrzyma:

$(20 + x)(450 - 10x)$ zł za jego wynajęcie.

Przyjmijmy, że $f(x) = (20 + x)(450 - 10x)$, gdzie $x \in \{0, 1, 2, \dots, 20\}$, i poszukajmy odpowiedzi na następujące pytania:

- Jaka liczba uczestników wyjazdu zapewni właścicielce autokaru najwyższą kwotę?
- Jaką maksymalną kwotę może otrzymać?
- Czy umowa ze studentami jest dla właścicielki korzystna?

Narysujmy wykres funkcji f .



Wartość największą funkcja f osiąga dla $x_w = 12,5$. Ta liczba nie należy do dziedziny, więc na pierwsze pytanie otrzymujemy dwie odpowiedzi.

Właścicielka autokaru otrzyma najwięcej pieniędzy dla $x = 12$ lub $x = 13$, czyli gdy autokarem będzie jechało 32 lub 33 uczestników.

Ta maksymalna kwota to:

$$32 \cdot 330 \text{ zł} = 10\,560 \text{ zł} \text{ (albo } 33 \cdot 320 \text{ zł} = 10\,560 \text{ zł)}$$

Zauważmy, że $f(0) = 9000$, a $f(20) = 40 \cdot 250 = 10\,000$.

Zatem umowa ze studentami jest dla właścicielki korzystna niezależnie od liczby dodatkowych pasażerów.

◀ **2.19.** Autokary wycieczkowe pokonują trasę z Luksoru do Hurghady w strzeżonym przez wojsko konwoju, w którym nie może być więcej niż 40 pojazdów. Najmniejsza łączna kwota, którą wszyscy jadący muszą zapłacić, jest równa 6000 \$. Jeżeli konwój jest złożony z 30 autokarów, to przejazd kosztuje po 200 \$ od jednego pojazdu. Z każdym dołączonym autokarem cena spada o 5 \$ od jednego pojazdu. Jak liczna grupa autokarów jest dla konwojentów najkorzystniejsza?

Odp.: 35 autokarów

**Przykład 7**

Kajetan, kierownik wyprawy w Himalaje, zatrudniał tragarzy do niesienia bagażu. Umówił się z 10 osobami, że każda z nich otrzyma 800 dolarów za wykonaną pracę. Ładunek okazał się na tyle ciężki, że tragarze zaprotestowali. Trzeba było zatrudnić dodatkowe osoby. Według nowej umowy każdy tragarz miał otrzymywać o 40 dolarów mniej przy zwiększanej o każdą następną osobę liczbie zatrudnionych. Ostatecznie okazało się, że trzeba było zapłacić najmniej korzystną dla wyprawy kwotę. Jaką łączną liczbę tragarzy przyjął Kajetan?

Rozwiązanie

Jeżeli przez x oznaczymy liczbę dodatkowo zatrudnionych tragarzy, to:

$10 + x$ jest liczbą wszystkich zatrudnionych,

$800 - 40x$ jest zarobkiem każdego z nich.

Koszt wynajęcia tragarzy jest więc równy $(10 + x)(800 - 40x)$ dolarów. Zmienna x musi spełniać dwa warunki:

- $x \geq 0$
- $800 - 40x > 0$ ← zarobek każdego tragarza musi być większy od zera

Zatem dziedziną funkcji $f(x) = 40(10 + x)(20 - x)$ jest zbiór liczb naturalnych z przedziału $(0; 20)$.

Wartość największą funkcja f przyjmuje dla:

$$x_w = 5$$

Koszt niesienia bagażu był najwyższy przy pięciu dodatkowo przyjętych tragarzach, czyli Kajetan zatrudnił ich w sumie piętnastu i zapłacił:

$$f(15) = 15 \cdot 600 = 9000 \text{ (dolarów)}$$

Odp.: 15 tragarzy.

Zadania**Odpowiedzi i rozwiązania****2.1.** 21 m

2.1. Oblicz, na jaką wysokość wzniesie się piłka tenisowa odbita rakieta pionowo z wysokości 1 m, z prędkością początkową 20 m/s. Skorzystaj ze wzoru podanego w przykładzie 1.

2.2. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji w podanym przedziale. Podaj argumenty, dla których te wartości są przyjmowane.

- | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|---------------------------|------------------------------|
| a) $f(x) = 2x^2 - 16x + 25$ | $\langle 2; 5 \rangle$ | d) $f(x) = -x^2 + 4x - 9$ | $\langle -1; 3 \rangle$ |
| b) $f(x) = -3x^2 + 6x + 6$ | $\langle -1; 2 \rangle$ | e) $f(x) = x^2 - 6x + 8$ | $\langle 1; 5 \rangle$ |
| c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 7$ | $\langle -8; -6 \rangle$ | f) $f(x) = -x^2 - 2x + 2$ | $\langle -3; \infty \rangle$ |

2.2. a) wartość najmniejsza: -7 dla $x = 4$, wartość największa: 1 dla $x = 2$

b) wartość najmniejsza: -3 dla $x = -1$, wartość największa: 9 dla $x = 1$

c) wartość najmniejsza: 1 dla $x = -6$, wartość największa: 7 dla $x = -8$

d) wartość najmniejsza: -14 dla $x = -1$, wartość największa: -5 dla $x = 2$

e) wartość najmniejsza: -1 dla $x = 3$, wartość największa: 3 dla $x = 1$ lub $x = 5$

f) brak wartości najmniejszej, wartość największa: 3 dla $x = -1$

2.3. Wyznacz wartość największą i wartość najmniejszą funkcji $y = f(x)$ w podanej dziedzinie D , o ile funkcja przyjmuje te wartości.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 3$ $D = (-2; 1)$

b) $f(x) = -x^2 - 6x + 5$ $D = (-4; 1)$

c) $f(x) = 3x^2 + 12x - 7$ $D = (-4; 0)$

d) $f(x) = -x^2 + 4x + 122$ $D = (-5; 2)$

2.4. Wyznacz współczynniki a, b, c funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, która przyjmuje wartość najmniejszą równą -7 dla $x = 4$, a jej wykres przecina oś y w punkcie $(0, 25)$.

2.5. Wykresem funkcji kwadratowej $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ jest parabola o wierzchołku $W = (-4, -1)$. Oblicz b i c .

2.6. Wykresem funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ jest parabola przechodząca przez punkty $(-3, -3)$ i $(0, -9)$. Wierzchołek paraboli jest punktem, którego pierwsza współrzędna jest równa -2 . Wyznacz współczynniki a, b i c .

2.7. Liczbę 100 przedstaw w postaci sumy dwóch takich składników, których iloczyn jest największy.

2.8. Liczbę 30 rozłóż na sumę takich dwóch składników, których suma kwadratów jest najmniejsza.

2.9. Oblicz największy iloczyn takich dwóch liczb, których suma jest równa

a) 22. b) 50. c) m .

2.10. Jaką najmniejszą wartość może przyjąć iloczyn dwóch liczb rzeczywistych różniących się o 10?

2.11. Liczbę 6 rozłóż na sumę takich trzech składników, by pierwszy był dwa razy większy od drugiego i by suma kwadratów wszystkich trzech składników była możliwie najmniejsza.

2.12. Liczbę 24 rozłóż na sumę takich czterech składników, by pierwszy był większy od drugiego o 1, drugi był większy od trzeciego o 1 i by suma kwadratów wszystkich czterech składników była możliwie najmniejsza.

* **2.13.** Liczbę a rozłóż na sumę takich dwóch składników, aby suma kwadratu pierwszego składnika i połowy kwadratu drugiego składnika była możliwie najmniejsza.

2.13. $a = x + y$, czyli $y = a - x$

$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 = x^2 + \frac{1}{2}(a - x)^2 = x^2 + \frac{1}{2}(a^2 - 2ax + x^2) = \frac{3}{2}x^2 - ax + \frac{1}{2}a^2$$

Suma $x^2 + \frac{1}{2}y^2$ jest możliwie najmniejsza, gdy funkcja $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - ax + \frac{1}{2}a^2$ przyjmuje wartość najmniejszą, czyli gdy:

$$x = x_w = \frac{-(-a)}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{a}{3}; \text{ wówczas } y = \frac{2}{3}a.$$

$$\text{Odp.: } a = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}a$$

2.3. a) brak wartości największej i wartości najmniejszej

b) wartość największa: 14 dla $x = -3$, brak wartości najmniejszej

c) wartość najmniejsza: -19 dla $x = -2$, brak wartości największej

d) brak wartości największej i wartości najmniejszej

2.4. $a = 2, b = -16, c = 25$

2.5. $b = 4, c = 7$

2.6. $a = -2, b = -8, c = -9$

2.7. $100 = 50 + 50$

2.8. $30 = 15 + 15$

2.9. a) 121 **b)** 625 **c)** $\frac{1}{4}m^2$

2.10. -25

2.11. $6 = \frac{18}{7} + \frac{9}{7} + \frac{15}{7}$

2.12. $24 = 7 + 6 + 5 + 6$

D

2.15. -36 2.16. $x = 3$

2.17. 27 lub 28 osób

2.18. Zysk będzie największy, gdy wszyscy zamówią zdjęcia; wyniesie 155 zł 10 gr.

2.19. 35 autokarów

2.20. 12 zł; 72 osób

2.21. boisko o wymiarach $10\text{ m} \times 15\text{ m}$ podzielone w połowie dłuższego boku

2.14. Wykaż, że 16 jest największą wartością iloczynu dwóch liczb, których suma wynosi 8.

2.15. Jaką najmniejszą wartość może przyjąć iloczyn dwóch liczb rzeczywistych należących do przedziału $(-40; 40)$ i różniących się o 12?

2.16. Prostokąt T ma boki długości 16 cm i 10 cm. Rozważamy prostokąty o bokach: dłuższym o x cm od krótszego boku prostokąta T oraz krótszym o x cm od dłuższego boku T . Dla jakiej wartości x pole nowego prostokąta będzie największe?

2.17. Bilet wstępu do muzeum kosztuje 20 zł. Przygotowano specjalną ofertę dla grup liczących powyżej 15 osób. Grupa 16-osobowa płaci 19,50 zł za jeden bilet, grupa 17-osobowa płaci 19 zł za jeden bilet, grupa 18-osobowa płaci 18,50 zł za jeden bilet itd. Grupy nie mogą być liczniejsze niż 35 osób. Jak liczna grupa zapłaci najwięcej za bilety?

2.18. Fotograf zrobił zdjęcie klasie liczącej 33 uczniów. Cenę zdjęcia określił następująco: jeżeli odbitkę zamówi nie więcej niż 10 osób, to cena będzie równa 8 zł. Zamówienie zdjęcia przez każdą następną osobę spowoduje, że każdy zamawiający będzie płacić o 10 groszy mniej. Zakładając, że zrobienie odbitki kosztuje fotografa 1 zł, oblicz, przy jakiej liczbie zamówień jego zysk będzie największy. Ile ten zysk będzie równy?

2.19. Autokary wycieczkowe pokonują trasę z Luksoru do Hurgady w strzeżonym przez wojsko konwoju, w którym nie może być więcej niż 40 pojazdów. Najmniejsza łączna kwota, którą wszyscy jadący muszą zapłacić, jest równa 6000 \$. Jeżeli konwój jest złożony z 30 autokarów, to przejazd kosztuje po 200 \$ od jednego pojazdu. Z każdym dołączonym autokarem cena spada o 5 \$ od jednego pojazdu. Jak liczna grupa autokarów jest dla konwojentów najkorzystniejsza?

2.20. Samorząd szkolny postanowił zorganizować dyskotekę dla uczniów sześciu klas. Na podstawie przeprowadzonej ankiety organizatorzy oszacowali, że przy cenie biletu wynoszącej 9 zł z każdej klasy przyjdzie 15 osób. Każdorazowe zwiększenie ceny biletu o złotówkę spowoduje, że z każdej klasy przyjdzie o 1 osobę mniej. Jaką cenę powinni ustalić, aby suma ze sprzedaży biletów była największa? Ilu osób należy się wówczas spodziewać?

2.21. Dysponujemy farbą w ilości wystarczającej do namalowania na placu 60 m linii. Za pomocą tej linii mamy wyznaczyć prostokątne, przedzielone na połowy boisko. Jaką długość i szerokość powinno mieć to boisko, aby jego powierzchnia była możliwie największa? W obliczeniach pomin wymiary malowanej linii.

$$2.14. \quad x + y = 8, \text{ czyli } y = 8 - x \\ xy = x(8 - x)$$

Największą wartością iloczynu xy jest więc największa wartość funkcji $f(x) = -x^2 + 8x$. Funkcja f przyjmuje wartość największą dla $x = x_w = \frac{-8}{-2} = 4$ i $f(4) = 4 \cdot (8 - 4) = 16$. Zatem 16 jest największą wartością iloczynu dwóch liczb, których suma jest równa 8.

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszyte.

1. W którym z podanych przedziałów funkcja $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$ przyjmuje wartość najmniejszą?

- A. $(-2; -1)$ B. $(-1; 0)$ C. $(0; 1)$ D. $(1; 2)$

2. Która z podanych funkcji przyjmuje wartość największą w przedziale $(5; 6)$?

- A. $y = 3x^2 - 32x + 1$ C. $y = 3x^2 - 38x + 1$
 B. $y = -3x^2 + 32x + 1$ D. $y = -3x^2 - 38x + 1$

3. W przedziale $(-4; 2)$ funkcja $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

- A. przyjmuje wartość najmniejszą równą -2 .
 B. przyjmuje wartość najmniejszą równą 2 .
 C. przyjmuje wartość najmniejszą równą 4 .
 D. nie przyjmuje wartości najmniejszej.

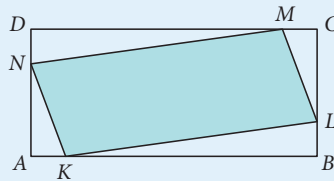
4. Funkcja kwadratowa określona jest wzorem $f(x) = -3x^2 + 12x - 5$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. W przedziale $\langle 0; 3 \rangle$ funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą równą -5 .
 B. W przedziale $\langle 1; 10 \rangle$ funkcja f przyjmuje wartość największą równą 4 .
 C. W przedziale $\langle -1; 5 \rangle$ funkcja f przyjmuje wartość największą równą 7 .

5. Wyznacz wartości: najmniejszą oraz największą funkcji $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 8x + 2$ w przedziale $\langle 0; 10 \rangle$.

6. Prostokąt $ABCD$ ma boki długości $|AB| = 36$ cm i $|BC| = 16$ cm. Punkty K, L, M, N położone są na bokach prostokąta $ABCD$ w taki sposób, że $|AK| = |BL| = |CM| = |DN| = a$ cm. Dla jakiej wartości a pole czworokąta $KLMN$ jest najmniejsze?



7. Założenie sieci monitoringowej w osiedlu domów jednorodzinnych kosztuje 240 zł od każdego abonenta, pod warunkiem, że umowę z operatorem podpisze co najmniej pięciu chętnych. Z każdym dodatkowo włączonym w sieć domem cena za instalowania maleje o 20 zł. Jaka liczba domów, w których zakładany będzie monitoring, jest najbardziej korzystna dla operatora? Jaką najniższą opłatę mogą uiścić abonenci przy maksymalnym zysku operatora?

Prosto do matury

1. C

2. B

3. D

4. P, F, P

5. wartość najmniejsza: -22 dla $x = 6$, wartość największa: 2 dla $x = 0$

6. $a = 13$

7. 8 lub 9 domów, w przypadku 9 domów po 160 zł od abonenta

Uwagi metodyczne

Bardzo ważną umiejętnością jest odczytywanie miejsc zerowych z postaci iloczynowej wielomianu, dlatego radzimy przećwiczyć je na różnych przykładach, od trójmianu $(x-3)(x+2)$ po $-3(2x+1)(\sqrt{3}-5x)$.

Od razu warto pokazać uczniom, jak się określa znak współczynnika przy najwyższej potęgę x . Będzie to później bardzo pomocne przy rozwiązywaniu nierówności.

Unikniemy w ten sposób sytuacji, w której uczniowie rozwiązywaliby nierówności kwadratowe „na okrągło”, tzn. przekształcali trójmian z postaci iloczynowej do ogólnej po to, aby zastosować wzory na pierwiastki.

Konsekwentnie trzymamy się definicji dotyczącej liczby pierwiastków – funkcja kwadratowa ma albo dwa miejsca zerowe, albo jedno miejsce zerowe, albo nie ma miejsc zerowych. Nie wprowadzamy pojęcia „dwa identyczne” (przy wyróżniku równym zero).

3. Miejsca zerowe funkcji kwadratowej

Umiejętności:

- rozwiązywanie równań kwadratowych z jedną niewiadomą
- zapisywanie funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej

Zajmiemy się teraz wyznaczaniem miejsc zerowych funkcji kwadratowej.

Zauważmy, że czynność ta to nic innego jak rozwiązywanie **równania kwadratowego** $ax^2 + bx + c = 0$. Rozwiązania równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, nazywamy **pierwiastkami** tego równania.

Przykład 1 ◀ zad. 3.1, 3.2

Rozwiążemy podane równanie.

- a) $(x-7)(x+5) = 0$ e) $x^2 - 4 = 0$ e) $x^2 - 6x + 9 = 0$
 b) $(2x-1)(x+\sqrt{2}) = 0$ d) $x^2 - 3x = 0$ f) $x^2 + 1 = 0$

Rozwiązanie

- a) Równanie $(x-7)(x+5) = 0$ można zastąpić dwoma równaniami: $x-7 = 0$ lub $x+5 = 0$.
 Zatem $x = 7$ lub $x = -5$.

$a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$.

- b) Podobnie w równaniu $(2x-1)(x+\sqrt{2}) = 0$ mamy $2x-1 = 0$ lub $x+\sqrt{2} = 0$, czyli pierwiastkami równania są liczby $\frac{1}{2}$ oraz $-\sqrt{2}$.

- c) Lewą stronę równania możemy rozłożyć na czynniki: $(x-2)(x+2) = 0$.
 Mamy więc $x-2 = 0$ lub $x+2 = 0$.
 Pierwiastkami równania są liczby 2 oraz -2.

Wzory skróconego mnożenia:

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ różnica kwadratów
 $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ kwadrat różnicy
 $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ kwadrat sumy

- d) W równaniu $x^2 - 3x = 0$ możemy wyłączyć x przed nawias. Otrzymujemy iloczyn $x(x-3) = 0$. Zatem $x = 0$ lub $x = 3$.
 e) Możemy skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia i zapisać podane równanie w postaci $(x-3)^2 = 0$. Jedynym pierwiastkiem równania jest więc liczba 3.
 f) W równaniu $x^2 + 1 = 0$ wartość wyrażenia po lewej stronie jest dodatnia dla każdego $x \in \mathbf{R}$. Równanie nie ma pierwiastków.

ZZ i KPU

tematy 1.3–1.6

Multiteka

- Wykres funkcji kwadratowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.3

Generator
testów i sprawdzianów

◀ 3.1. Rozłóż lewą stronę równania na czynniki i rozwiąż to równanie.

- a) $x^2 - 81 = 0$ e) $x^2 + x = 0$ e) $2x^2 + x = 0$
 b) $x^2 - 5 = 0$ d) $x^2 - 2x = 0$ f) $-6x^2 + 7x = 0$
 Odp.: a) $x = -9$ lub $x = 9$ b) $x = -\sqrt{5}$ lub $x = \sqrt{5}$ c) $x = -1$ lub $x = 0$
 d) $x = 0$ lub $x = 2$ e) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 0$ f) $x = 0$ lub $x = \frac{7}{6}$

◀ 3.2. Rozłóż lewą stronę równania na czynniki i rozwiąż to równanie.

- a) $x^2 - 2x + 1 = 0$ c) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$ e) $25x^2 - 20x + 4 = 0$
 b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ d) $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 = 0$ f) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

Odp.: a) $x = 1$ b) $x = -\frac{1}{3}$ c) $x = \sqrt{2}$ d) $x = 4$ e) $x = \frac{2}{5}$ f) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Funkcja kwadratowa może nie mieć miejsc zerowych, mieć jedno miejsce zerowe lub dwa miejsca zerowe. Zbadamy, od czego zależy wystąpienie każdej z tych sytuacji oraz wyprowadzimy wzory pozwalające obliczyć miejsca zerowe. W tym celu zapiszemy funkcję kwadratową $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) w postaci iloczynu. Najpierw sprowadzamy funkcję do postaci kanonicznej i wyłączamy a przed nawias:

$$f(x) = a \left[\left(x - \frac{-b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right]$$

Dalsze postępowanie zależy od znaku Δ – wyróżnika trójmianu kwadratowego.

- I. Jeżeli $\Delta > 0$, to określony jest $\sqrt{\Delta}$, więc wyrażenie w nawiasie kwadratowym możemy zapisać jako różnicę kwadratów i rozłożyć na czynniki. Przeprowadzimy rozumowanie równoległe – na konkretnym przykładzie oraz na ogólnych danych.

$f(x) = 3x^2 + 7x + 3, \Delta = 13$	$f(x) = ax^2 + bx + c, \Delta > 0$
Zapisujemy funkcję w postaci kanonicznej i wyłączamy a przed nawias.	
$f(x) = 3 \left(x - \frac{-7}{6} \right)^2 + \frac{-13}{12}$	$f(x) = a \left(x - \frac{-b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$
$f(x) = 3 \left[\left(x - \frac{-7}{6} \right)^2 - \frac{13}{36} \right]$	$f(x) = a \left[\left(x - \frac{-b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$
Zapisujemy wyrażenie w nawiasie kwadratowym w postaci różnicy kwadratów.	
$f(x) = 3 \left[\left(x - \frac{-7}{6} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{13}}{6} \right)^2 \right]$	$f(x) = a \left[\left(x - \frac{-b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right]$
Rozkładamy różnicę kwadratów na iloczyn.	
$f(x) = 3 \left[\left(x - \frac{-7}{6} \right) - \frac{\sqrt{13}}{6} \right] \left[\left(x - \frac{-7}{6} \right) + \frac{\sqrt{13}}{6} \right]$	$f(x) = a \left[\left(x - \frac{-b}{2a} \right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right] \left[\left(x - \frac{-b}{2a} \right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right]$
$f(x) = 3 \left[x - \frac{-7}{6} - \frac{\sqrt{13}}{6} \right] \left[x - \frac{-7}{6} + \frac{\sqrt{13}}{6} \right]$	$f(x) = a \left[x - \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right] \left[x - \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right]$
$f(x) = 3 \left(x - \frac{-7 + \sqrt{13}}{6} \right) \left(x - \frac{-7 - \sqrt{13}}{6} \right)$	$f(x) = a \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$
Korzystamy z twierdzenia: $a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$.	
$x - \frac{-7 + \sqrt{13}}{6} = 0$ lub $x - \frac{-7 - \sqrt{13}}{6} = 0$	$x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 0$ lub $x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 0$
Ostatecznie otrzymujemy pierwiastki równania kwadratowego.	
$x = \frac{-7 + \sqrt{13}}{6}$ lub $x = \frac{-7 - \sqrt{13}}{6}$	$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ lub $x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

II. Jeżeli $\Delta = 0$, to $f(x) = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2$, zatem jedynym miejscem zerowym funkcji jest $x = \frac{-b}{2a}$ (zob. przykład 1e).

III. Jeżeli $\Delta < 0$, to $\frac{-\Delta}{4a^2}$ jest liczbą dodatnią. Wyrażenie $\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}$ jest dodatnie dla każdej wartości x (zob. przykład 1f). Funkcja nie ma miejsc zerowych.

Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$:

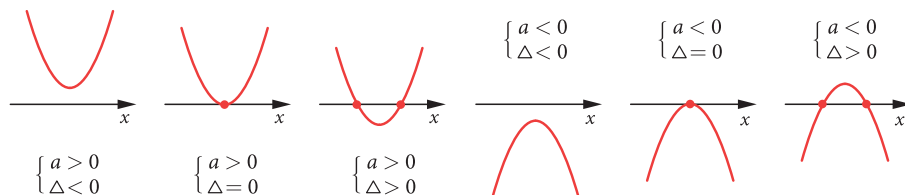
- **nie ma** pierwiastków wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta < 0$,
- ma **jeden** pierwiastek wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta = 0$; wówczas $x_0 = \frac{-b}{2a}$,
- ma **dwa** pierwiastki wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$; wówczas

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ oraz } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

W dalszych przykładach i zadaniach stosujemy oznaczenia współczynników przyjęte w treści twierdzenia.

Interpretacja graficzna

Na rysunkach przedstawione są możliwe położenia paraboli $y = ax^2 + bx + c$ względem osi x w zależności od znaków współczynnika a oraz wyróżnika Δ .



Przykład 2 ◀ zad. 3.4, 3.5

Rozwiążemy podane równanie.

Rozwiązanie

a) $2x^2 - x + 1 = 0$

Współczynniki trójmianu po lewej stronie to $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -7$$

Ponieważ $\Delta < 0$, równanie nie ma rozwiązań.

◀ 3.4. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 + 8x + 7 = 0$

c) $16x^2 + 24x + 9 = 0$

e) $x^2 + x - 1 = 0$

b) $x^2 - 10x + 9 = 0$

d) $3x^2 + x - 4 = 0$

f) $x^2 - 4x - 1 = 0$

Odp.: a) $x = -7$ lub $x = -1$ b) $x = 1$ lub $x = 9$ c) $x = -\frac{3}{4}$ d) $x = -\frac{4}{3}$ lub $x = 1$

e) $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ lub $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ f) $x = 2 - \sqrt{5}$ lub $x = 2 + \sqrt{5}$

b) $3x^2 + 2\sqrt{15}x = -5$ ← porządkujemy równanie

$$3x^2 + 2\sqrt{15}x + 5 = 0$$

Współczynniki trójmianu to $a = 3$, $b = 2\sqrt{15}$, $c = 5$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{15})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 15 - 4 \cdot 15 = 0$$

Ponieważ $\Delta = 0$, jedynym rozwiązaniem równania jest liczba:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2\sqrt{15}}{2 \cdot 3} = -\frac{\sqrt{15}}{3}$$

Zauważmy, że jeżeli $\Delta = 0$,
to $x_1 = x_2 = x_0 = \frac{-b}{2a}$.

c) $x^2 + 3x - 10 = 0$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49$$

Ponieważ $\Delta > 0$, równanie ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 7}{2} = -5$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 7}{2} = 2$$

Sposób oznaczania pierwiastków równania $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) symbolami x_1 oraz x_2 jest tradycyjnie przyjęty. Nieistotne jest, czy oznaczmy $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ symbolem x_1 czy x_2 (czy wprowadzimy jeszcze inne oznaczenie).

d) $7x^2 - x - 1 = 0$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 7 \cdot (-1) = 29$$

Ponieważ $\Delta > 0$, równanie ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{29}}{14}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{29}}{14}$$

e) $2x^2 + 3x + 1 = 0$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$x_1 = \frac{-3 + 1}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 - 1}{4} = -1$$

Z wyprowadzenia wzorów na pierwiastki równania kwadratowego wynika poniższy wniosek.

Wniosek

Funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, można zapisać w postaci iloczynowej, gdy $\Delta \geq 0$, a mianowicie:

- jeżeli $\Delta = 0$, to $f(x) = a(x - x_0)^2$ i $x_0 = -\frac{b}{2a}$,
- jeżeli $\Delta > 0$, to $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ i $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

3.5. Rozwiąż równanie.

a) $-6x^2 + x - 2 = 0$

c) $6x^2 - 5x + 1 = 0$

e) $4x^2 - 12x + 1 = 0$

b) $x^2 - 4x + 7 = 0$

d) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

f) $-4x^2 + 9x - 9 = 0$

Odp.: a) brak rozwiązań b) brak rozwiązań c) $x = \frac{1}{3}$ lub $x = \frac{1}{2}$ d) $x = -2$ lub $x = \frac{1}{2}$

e) $x = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}$ f) brak rozwiązań

◀3.11. Jeżeli to możliwe, zapisz funkcję f w postaci iloczynowej.

- a) $f(x) = x^2 - 3x$
 b) $f(x) = 9x^2 - 1$
 c) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$
 d) $f(x) = -6x^2 + x + 2$
 e) $f(x) = x^2 - 2x - 4$
 f) $f(x) = 12x^2 - 12x + 3$

Odp.: a) $f(x) = x(x - 3)$

b) $f(x) = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$

c) $f(x) = 2(x + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

d) $f(x) = -6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

e) $f(x) = (x - 1 - \sqrt{5}) \cdot (x - 1 + \sqrt{5})$

f) $f(x) = 12\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

◀3.12. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = \frac{5x}{x^2 - 5x}$

b) $f(x) = \frac{5}{-x^2 - 2x + 3}$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x + 2}$

d) $f(x) = \frac{x - 4}{x^2 + 10x - 6}$

Odp.: a) $D = \mathbb{R} - \{0, 5\}$

b) $D = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$

c) $D = \mathbb{R}$

d) $D = \mathbb{R} - \{-5 - \sqrt{31}, -5 + \sqrt{31}\}$

Przykład 3 ◀ zad. 3.11

Zapiszemy podaną funkcję w postaci iloczynowej (jeżeli to możliwe).

Rozwiązanie

a) $f(x) = -3x^2 + x + 2$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot (-3) \cdot 2 = 25$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 5}{-6} = -\frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 5}{-6} = 1$$

Odp.: $f(x) = -3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 1)$

Podczas sprowadzania wzoru funkcji kwadratowej do postaci iloczynowej należy pamiętać o zapisaniu współczynnika a przed nawiasami.

b) $f(x) = 2x^2 - x + 4$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -31 < 0$$

Odp.: Funkcja f nie ma postaci iloczynowej.

c) $f(x) = 3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2$

$$\Delta = 24 - 24 = 0, \quad x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Odp.: $f(x) = 3\left(x - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$

Przykład 4 ◀ zad. 3.12

Wyznamy dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 8x - 33}$.

Rozwiązanie

Do licznika ułamka w miejsce zmiennej x możemy podstawiać dowolną liczbę rzeczywistą. Natomiast w mianowniku nie możemy otrzymać zera: $x^2 - 8x - 33 \neq 0$. Zatem pierwiastki równania $x^2 - 8x - 33 = 0$ nie należą do dziedziny funkcji f .

$$\Delta = 64 + 132 = 196, \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 + 14}{2} = 11, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 - 14}{2} = -3$$

Dziedzinę funkcji f tworzą liczby rzeczywiste oprócz liczb 11 i -3.

Odp.: $x \in \mathbb{R} - \{-3, 11\}$

Przykład 5 ◀ zad. 3.13

Zapiszemy w postaci ogólnej funkcję kwadratową $f(x) = ax^2 + bx + c$, o której wiadomo, że ma współczynnik $a = -1$ oraz miejsca zerowe $x_1 = 1 - \sqrt{3}$, $x_2 = 1 + \sqrt{3}$.

◀3.13. Dane są miejsca zerowe funkcji kwadratowej f oraz jej współczynnik a .

Zapisz tę funkcję w postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$.

a) $a = 1$ $x_1 = -9$ $x_2 = 2$

b) $a = -2$ $x_1 = -\sqrt{3}$ $x_2 = \sqrt{3}$

c) $a = 3 - 2\sqrt{2}$ $x_0 = -0,2$

d) $a = 1$ $x_1 = 1 - \sqrt{7}$ $x_2 = 1 + \sqrt{7}$

Odp.: a) $f(x) = x^2 + 7x - 18$

b) $f(x) = -2x^2 + 6$

c) $f(x) = (3 - 2\sqrt{2})x^2 + \frac{2(3 - 2\sqrt{2})}{5}x + \frac{3 - 2\sqrt{2}}{25}$

d) $f(x) = x^2 - 2x - 6$

Rozwiązanie

Zaczynamy od podstawienia danych wielkości do postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2), \text{ czyli } f(x) = -(x - 1 + \sqrt{3})(x - 1 - \sqrt{3})$$

Zauważmy, że jeśli weźmiemy w nawias wyrażenie $x - 1$, to możemy zastosować wzory skróconego mnożenia.

$$f(x) = -((x - 1) + \sqrt{3})((x - 1) - \sqrt{3}) \quad \leftarrow \text{wzór na różnicę kwadratów}$$

$$f(x) = -((x - 1)^2 - 3) \quad \leftarrow \text{wzór na kwadrat różnicy}$$

$$f(x) = -(x^2 - 2x + 1 - 3) \text{ i ostatecznie } f(x) = -x^2 + 2x + 2$$

Odp.: $f(x) = -x^2 + 2x + 2$

Zadania

3.1. Rozłóż lewą stronę równania na czynniki i rozwiąż to równanie.

- a) $x^2 - 81 = 0$ c) $x^2 + x = 0$ e) $2x^2 + x = 0$
 b) $x^2 - 5 = 0$ d) $x^2 - 2x = 0$ f) $-6x^2 + 7x = 0$

3.2. Rozłóż lewą stronę równania na czynniki i rozwiąż to równanie.

- a) $x^2 - 2x + 1 = 0$ c) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$ e) $25x^2 - 20x + 4 = 0$
 b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ d) $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 = 0$ f) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

3.3. Wykorzystaj postać iloczynową równania i odczytaj jego pierwiastki.

- a) $(x - 3)(x + 5) = 0$ d) $-2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 3) = 0$
 b) $3\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + \pi) = 0$ e) $2(x + 4)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$
 c) $-4x(x + 3\sqrt{2}) = 0$ f) $3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + \sqrt{2}) = 0$

3.4. Rozwiąż równanie.

- a) $x^2 + 8x + 7 = 0$ c) $16x^2 + 24x + 9 = 0$ e) $x^2 + x - 1 = 0$
 b) $x^2 - 10x + 9 = 0$ d) $3x^2 + x - 4 = 0$ f) $x^2 - 4x - 1 = 0$

3.5. Rozwiąż równanie.

- a) $-6x^2 + x - 2 = 0$ c) $6x^2 - 5x + 1 = 0$ e) $4x^2 - 12x + 1 = 0$
 b) $x^2 - 4x + 7 = 0$ d) $2x^2 + 3x - 2 = 0$ f) $-4x^2 + 9x - 9 = 0$

3.6. Dla jakich argumentów funkcja $y = f(x)$ przyjmuje podane wartości?

- a) $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ 1, -2, 3 b) $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$ -3, -1, 2

- 3.5. a)** brak rozwiązań **b)** brak rozwiązań **c)** $x = \frac{1}{3}$ lub $x = \frac{1}{2}$ **d)** $x = -2$ lub $x = \frac{1}{2}$

- e)** $x = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}$ **f)** brak rozwiązań

3.6. a) $f(x) = 1$ dla $x = -2$ lub $x = 0$, $f(x) = -2$ dla $x = -3$ lub $x = 1$, funkcja nie przyjmuje wartości 3

b) $f(x) = -3$ dla $x = 2$, $f(x) = -1$ dla $x = 1$ lub $x = 3$, $f(x) = 2$ dla $x = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2}$ lub $x = 2 + \frac{\sqrt{10}}{2}$

Odpowiedzi i rozwiązania

3.1. a) $x = -9$ lub $x = 9$

b) $x = -\sqrt{5}$ lub $x = \sqrt{5}$

c) $x = -1$ lub $x = 0$

d) $x = 0$ lub $x = 2$

e) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 0$

f) $x = 0$ lub $x = \frac{7}{6}$

3.2. a) $x = 1$ **b)** $x = -\frac{1}{3}$

c) $x = \sqrt{2}$ **d)** $x = 4$

e) $x = \frac{2}{5}$ **f)** $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3.3. a) $x = -5$ lub $x = 3$

b) $x = -\pi$ lub $x = \frac{1}{2}$

c) $x = -3\sqrt{2}$ lub $x = 0$

d) $x = -3$ lub $x = \frac{5}{2}$

e) $x = -4$ lub $x = \frac{1}{2}$

f) $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \frac{1}{3}$

3.4. a) $x = -7$ lub $x = -1$

b) $x = 1$ lub $x = 9$

c) $x = -\frac{3}{4}$

d) $x = -\frac{4}{3}$ lub $x = 1$

e) $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ lub $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

f) $x = 2 - \sqrt{5}$ lub $x = 2 + \sqrt{5}$

3.7. a) dwa b) jeden c) zero
d) dwa e) zero f) jeden

3.8. a) 18 lub -18 b) 9 c) $-\frac{1}{36}$
d) $\frac{1}{64}$ lub 0

3.9. a) jedno b) zero c) dwa
d) zero lub jedno lub dwa

3.10. a) $x = \frac{2}{5}$ lub $x = 1$
b) $x = 1$ lub $x = 2\frac{7}{8}$
c) $x = 1\frac{2}{3}$ lub $x = 2$
d) $x = -1$ lub $x = 2\frac{1}{3}$

3.11. a) $f(x) = x(x-3)$
b) $f(x) = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$
c) $f(x) = 2(x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$
d) $f(x) = -6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$
e) $f(x) = (x-1-\sqrt{5}) \cdot (x-1+\sqrt{5})$
f) $f(x) = 12\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

3.12. a) $D = \mathbf{R} - \{0, 5\}$
b) $D = \mathbf{R} - \{-3, 1\}$
c) $D = \mathbf{R}$
d) $D = \mathbf{R} - \{-5 - \sqrt{31}, -5 + \sqrt{31}\}$

3.13. a) $f(x) = x^2 + 7x - 18$
b) $f(x) = -2x^2 + 6$
c) $f(x) = (3 - 2\sqrt{2})x^2 + \frac{2(3 - 2\sqrt{2})}{5}x + \frac{3 - 2\sqrt{2}}{25}$
d) $f(x) = x^2 - 2x - 6$

3.7. Bez rozwiązywania równania podaj liczbę jego pierwiastków.

a) $3x^2 - 5x + 1 = 0$ d) $5x^2 + x - 1 = 0$
b) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ e) $-2x^2 + 5x - 8 = 0$
c) $7x^2 - 3x + 10 = 0$ f) $-4x^2 + 20x - 25 = 0$

3.8. Jaką liczbę należy wpisać w miejsce $?$, aby otrzymane równanie miało tylko jedno rozwiązanie?

a) $x^2 - ?x + 81 = 0$ c) $-9x^2 + x + ? = 0$
b) $x^2 - 6x + ? = 0$ d) $?x^2 - x + 16 = 0$

3.9. Współczynniki a, p i q funkcji $f(x) = a(x-p)^2 + q$ spełniają podane warunki. Podaj liczbę miejsc zerowych tej funkcji.

a) $a > 0, q = 0, p \in \mathbf{R}$ c) $a < 0, q > 0, p \in \mathbf{R}$
b) $a > 0, q > 0, p \in \mathbf{R}$ d) $a < 0, p > 0, q \in \mathbf{R}$

3.10. Rozwiąż równanie.

a) $(3x-5)(2x+1) + (7x-5)^2 = -2$
b) $(1-5x)(x-2) - (2+3x)(2-3x) = 7(2x-3)^2 + 2x$
c) $4\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 - 3(x-2)(3x+2) = (7-x)^2 - 16$
d) $11(3x^2+3) - 11 = 4(x+5)^2 - (1-2x)^2$

3.11. Jeżeli to możliwe, zapisz funkcję f w postaci iloczynowej.

a) $f(x) = x^2 - 3x$ d) $f(x) = -6x^2 + x + 2$
b) $f(x) = 9x^2 - 1$ e) $f(x) = x^2 - 2x - 4$
c) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ f) $f(x) = 12x^2 - 12x + 3$

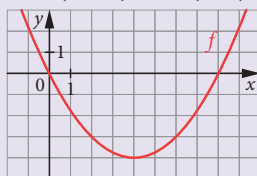
3.12. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = \frac{5x}{x^2 - 5x}$ c) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x + 2}$
b) $f(x) = \frac{5}{-x^2 - 2x + 3}$ d) $f(x) = \frac{x - 4}{x^2 + 10x - 6}$

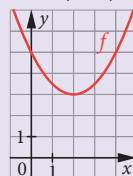
3.13. Dane są miejsca zerowe funkcji kwadratowej f oraz jej współczynnik a . Zapisz tę funkcję w postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$.

a) $a = 1$ $x_1 = -9$ $x_2 = 2$
b) $a = -2$ $x_1 = -\sqrt{3}$ $x_2 = \sqrt{3}$
c) $a = 3 - 2\sqrt{2}$ $x_0 = -0,2$
d) $a = 1$ $x_1 = 1 - \sqrt{7}$ $x_2 = 1 + \sqrt{7}$

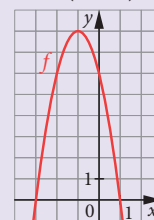
3.14. a) miejsca zerowe: 0, 8;
 $W = (4, -4), P = (0, 0)$



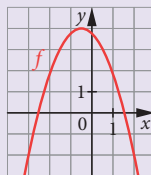
b) brak miejsc zerowych;
 $W = (2, 3), P = (0, 5)$



c) miejsca zerowe: -3, 1;
 $W = (-1, 8), P = (0, 6)$



d) miejsca zerowe: $-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}$;
 $W = \left(-\frac{1}{2}, 4\right), P = \left(0, 3\frac{3}{4}\right)$



3.14. Dany jest wzór funkcji kwadratowej f . Wyznacz miejsca zerowe tej funkcji. Oblicz współrzędne wierzchołka W paraboli będącej wykresem funkcji f oraz punktu P przecięcia paraboli z osią y . Naszkicuj ten wykres.

- a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x$ c) $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$
 b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ d) $f(x) = -x^2 - x + \frac{15}{4}$

3.15. Pierwiastkami równania kwadratowego $x^2 + bx + c = 0$ są liczby przeciwne do pierwiastków równania $x^2 - 7x + 5 = 0$. Wyznacz b i c .

* **3.16.** Rozwiąż równanie.

- a) $|x^2 - 4| = 3$ c) $|x^2 - 5x| = 6$ e) $|x^2 + 4x + 2| = 2$
 b) $|3 - 2x^2| = 1$ d) $|2x^2 + x| = 1$ f) $|x^2 + x - 2| = 4$

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

- Wskaż rozwiązania równania $2x^2 - x - 1 = 0$.
 A. $-\frac{1}{2}$ i 1 B. $\frac{1}{2}$ i -1 C. -1 i 2 D. 1 i -2
- Wskaż funkcję, której nie można zapisać w postaci iloczynowej.
 A. $f(x) = 3x^2 - x$ C. $h(x) = -3x^2 - x - 10$
 B. $g(x) = 3x^2 - x - 10$ D. $k(x) = -3x^2 + 10$
- Równanie $3x^2 - 2x - 1 = 0$
 A. nie ma pierwiastków. C. ma dwa pierwiastki o różnych znakach.
 B. ma dwa pierwiastki całkowite. D. ma dwa pierwiastki ujemne.
- Dana jest funkcja $f(x) = 2x^2 + x - 4$. Oceń prawdziwość podanych zdań.
 A. Wyróżnik funkcji f jest liczbą niewymierną.
 B. Funkcję f można zapisać w postaci iloczynowej.
 C. Równanie $f(x) = 0$ ma dwa rozwiązania.
- Rozwiąż równanie $(2x - 1)^2 - (3x - 5)^2 = (x + 1)(5 - x) + 1$.
- Zapisz funkcję $f(x) = 2x^2 - 6x - 8$ w postaciach: kanonicznej oraz iloczynowej.
- Pierwiastkami równania $x^2 + bx + c = 0$ są liczby $\frac{2 - \sqrt{3}}{4}$ i $\frac{2 + \sqrt{3}}{4}$. Wyznacz b i c .

Prosto do matury

- A
- C
- C
- F, P, P
- $x = 2\frac{1}{2}$ lub $x = 3$
- $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{2}$, $f(x) = 2(x + 1)(x - 4)$
- $b = -1$, $c = \frac{1}{16}$

3.15. $b = 7$, $c = 5$

3.16. a) $|x^2 - 4| = 3$

$$x^2 - 4 = 3 \text{ lub } x^2 - 4 = -3 \\ x^2 = 7 \text{ lub } x^2 = 1$$

Odp.: $x = -\sqrt{7}$ lub $x = -1$,
 lub $x = 1$, lub $x = \sqrt{7}$

b) $|3 - 2x^2| = 1$

$$3 - 2x^2 = 1 \text{ lub } 3 - 2x^2 = -1 \\ 2x^2 = 2 \text{ lub } 2x^2 = 4 \\ x^2 = 1 \text{ lub } x^2 = 2$$

Odp.: $x = -\sqrt{2}$ lub $x = -1$,
 lub $x = 1$, lub $x = \sqrt{2}$

c) $|x^2 - 5x| = 6$

$$x^2 - 5x = 6 \text{ lub } x^2 - 5x = -6 \\ x^2 - 5x - 6 = 0 \text{ lub } x^2 - 5x + 6 = 0 \\ \Delta_1 = 25 + 24 = 49 \quad \Delta_2 = 25 - 24 = 1 \\ \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

Odp.: $x = -1$ lub $x = 2$,
 lub $x = 3$, lub $x = 6$

d) $|2x^2 + x| = 1$

$$2x^2 + x = 1 \text{ lub } 2x^2 + x = -1 \\ 2x^2 + x - 1 = 0 \text{ lub } 2x^2 + x + 1 = 0 \\ \Delta_1 = 1 + 8 = 9, \quad x_1 = \frac{-1 - 3}{4} = -1, \\ x_2 = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2} \\ \Delta_2 = 1 - 8 < 0, \text{ brak pierwiastków}$$

Odp.: $x = -1$ lub $x = \frac{1}{2}$

e) $|x^2 + 4x + 2| = 2$

$$x^2 + 4x + 2 = 2 \\ \text{lub } x^2 + 4x + 2 = -2 \\ x^2 + 4x = 0 \text{ lub } x^2 + 4x + 4 = 0 \\ x(x + 4) = 0 \text{ lub } (x + 2)^2 = 0 \\ x_1 = 0, \quad x_2 = -4, \quad x_3 = -2$$

Odp.: $x = -4$ lub $x = -2$,
 lub $x = 0$

f) $|x^2 + x - 2| = 4$

$$x^2 + x - 2 = 4 \text{ lub } x^2 + x - 2 = -4 \\ x^2 + x - 6 = 0 \text{ lub } x^2 + x + 2 = 0 \\ \Delta_1 = 25, \quad x_1 = \frac{-1 - 5}{2} = -3, \\ x_2 = \frac{-1 + 5}{2} = 2$$

$\Delta_2 < 0$, brak pierwiastków

Odp.: $x = -3$ lub $x = 2$

Uwagi metodyczne

Radzimy rozwiązywać nierówności tylko za pomocą wykresu.

Ćwiczyliśmy wcześniej przez tyle czasu odczytywanie znaku wartości funkcji z jej wykresu po to, aby obecnie móc tę umiejętność wykorzystać.

Oczywiście do rozwiązania nierówności potrzebny jest tylko szkic wykresu, więc nie tracimy czasu na dokładne rysunki.

◀4.1. Naszkicuj wykres funkcji $y = f(x)$ i odczytaj z wykresu, dla jakich x spełniona jest nierówność $f(x) > 0$, a dla jakich $f(x) < 0$.

a) $f(x) = -x^2 + 1$

b) $f(x) = x^2 + 4x$

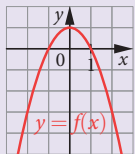
c) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

d) $f(x) = -x^2 + 10x - 25$

e) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$

f) $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$

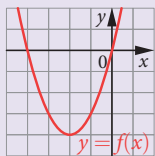
Odp.: a) $f(x) > 0$ dla $x \in (-1; 1)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$



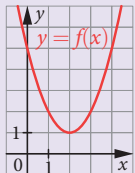
b) $f(x) > 0$

dla $x \in (-\infty; -4) \cup (0; \infty)$,

$f(x) < 0$ dla $x \in (-4; 0)$



c) $f(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$,
 nierówność $f(x) < 0$
 nie ma rozwiązań



4. Nierówności kwadratowe

Umiejętności:

- rozwiązywanie nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą

Rozwiązanie **nierówności kwadratowej**, czyli nierówności postaci $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$ lub $ax^2 + bx + c \leq 0$, dla $a \neq 0$, jest tym samym zadaniem co odczytanie z wykresu funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ zbioru rozwiązań nierówności $f(x) > 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) < 0$ lub $f(x) \leq 0$.

Przykład 1 ◀ zad. 4.1

Naszkicujemy wykres funkcji $y = f(x)$ i odczytamy z niego, dla jakich x spełniona jest nierówność $f(x) > 0$, a dla jakich $f(x) < 0$.

Rozwiązanie

a) $f(x) = x^2 - 3x$

$f(x) = x(x - 3)$ ← zapisujemy funkcję w postaci iloczynowej

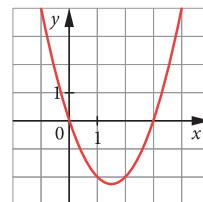
$x_1 = 0, x_2 = 3$ ← wyznaczamy miejsca zerowe

Rysujemy parabolę, pamiętając o tym, że gdy współczynnik przy x^2 jest dodatni, jej ramiona są skierowane do góry.

Z wykresu odczytujemy:

$f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$

$f(x) < 0$ dla $x \in (0; 3)$



b) $f(x) = -x^2 + 4$

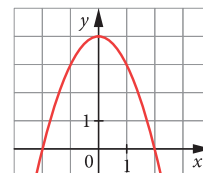
$f(x) = -(x^2 - 4)$

$f(x) = -(x - 2)(x + 2)$

$x_1 = 2, x_2 = -2$

$f(x) > 0$ dla $x \in (-2; 2)$

$f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$



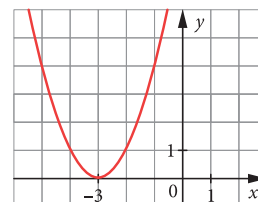
c) $f(x) = x^2 + 6x + 9$

$f(x) = (x + 3)^2$

$x_0 = -3$

$f(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$

Funkcja nie przyjmuje wartości ujemnych, zatem
 nierówność $f(x) < 0$ nie ma rozwiązań.

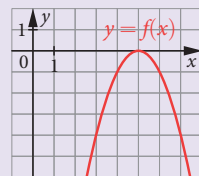


4.1. Odp.:

d) nierówność $f(x) > 0$

nie ma rozwiązań,

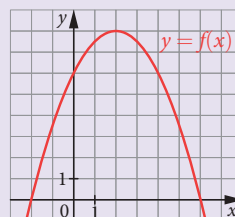
$f(x) < 0$ dla $x \in \mathbb{R} - \{5\}$



e) $f(x) > 0$ dla $x \in (-2; 6)$,

$f(x) < 0$

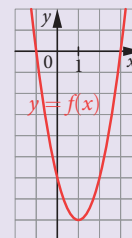
dla $x \in (-\infty; -2) \cup (6; \infty)$



f) $f(x) > 0$

dla $x \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$,

$f(x) < 0$ dla $x \in (-1; 3)$



ZZ i KPU

temat 1.7

Multiteka

- Nierówność kwadratowa

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.4

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 2 ◀ zad. 4.2–4.4

Rozwiążemy podaną nierówność.

Rozwiązanie

a) $x^2 + 6x \leq 7$

Najpierw porządkujemy nierówność tak, aby po jednej stronie otrzymać trójmian kwadratowy, a po drugiej zero.

$$x^2 + 6x - 7 \leq 0$$

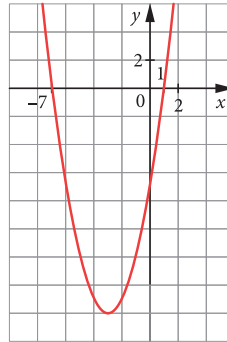
◀ obliczamy pierwiastki

$$\Delta = 36 + 28 = 64$$

$$x_1 = 1, x_2 = -7$$

Rysujemy parabolę $y = x^2 + 6x - 7$ i odczytujemy rozwiązanie nierówności.

Odp.: $x^2 + 6x \leq 7$ dla $x \in \langle -7; 1 \rangle$

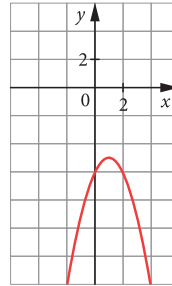


b) $2x - 6 > x^2$

$$-x^2 + 2x - 6 > 0$$

$$\Delta = 4 - 24 = -20$$

$\Delta < 0$, więc funkcja $f(x) = -x^2 + 2x - 6$ nie ma miejsc zerowych. Poza tym parabola $y = -x^2 + 2x - 6$ ma ramiona skierowane do dołu, zatem cała znajduje się poniżej osi x .

Odp.: Nierówność $2x - 6 > x^2$ nie ma rozwiązań.

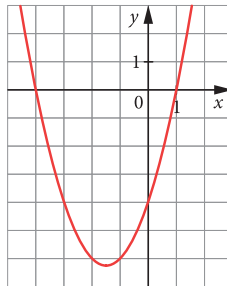
c) $(x + 4)(x - 1) \geq 0$

Z postaci iloczynowej odczytujemy pierwiastki:

$$x_1 = -4, x_2 = 1$$

Rysujemy parabolę $y = (x + 4)(x - 1)$.

Odp.: $(x + 4)(x - 1) \geq 0$ dla $x \in (-\infty; -4] \cup [1; \infty)$

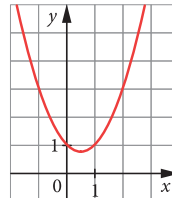


d) $x^2 - x + 1 > 0$

$$\Delta = 1 - 4 = -3$$

$\Delta < 0$, więc wykres funkcji $f(x) = x^2 - x + 1$ nie przecina osi x . Poza tym parabola ma ramiona skierowane do góry, zatem znajduje się powyżej osi x . Nierówność jest spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą.

Odp.: $x^2 - x + 1 > 0$ dla $x \in \mathbf{R}$

**◀4.2. Rozwiąż nierówność.**

a) $x^2 - 5x + 6 < 0$

b) $-2x^2 + 3x + 5 \geq 0$

c) $2x < x^2$

d) $x^2 \leq 2$

e) $x^2 - 6x + 10 > 0$

f) $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$

g) $x^2 + 2x + 2 \leq 0$

h) $4x > x^2 + 4$

Odp.: a) $x \in (2; 3)$

b) $x \in \left\langle -1; 2\frac{1}{2} \right\rangle$

c) $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$

d) $x \in \left\langle -\sqrt{2}; \sqrt{2} \right\rangle$

e) $x \in \mathbf{R}$

f) $x = 1$

g) brak rozwiązań

h) brak rozwiązań

◀4.3. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 6x + 8 > 0$

b) $2x^2 + 5x < 3$

c) $-3x^2 + 8x - 4 \geq 0$

d) $9x^2 + 16 < 0$

e) $6x^2 \leq x + 2$

f) $4x^2 + 2x + 1 > 0$

g) $(x - 2)^2 \geq 4$

h) $5x^2 + 2x - 3 > 0$

Odp.: a) $x \in (-\infty; 2) \cup (4; \infty)$

b) $x \in \left(-3; \frac{1}{2}\right)$

c) $x \in \left\langle \frac{2}{3}; 2 \right\rangle$

d) brak rozwiązań

e) $x \in \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{2}{3} \right\rangle$

f) $x \in \mathbf{R}$

g) $x \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$

h) $x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{5}; \infty\right)$

◀4.4. Rozwiąż nierówność.

a) $(x + 1)(x - 3) \geq 0$

b) $(3 - 2x)(x + 5) \leq 0$

c) $(\sqrt{2} - x)(x + 7) > 0$

d) $(3 - x)(2 - x) \leq 0$

e) $x(2x - 8) < 0$

f) $(3x - 2\sqrt{2})(x + 5) \geq 0$

Odp.: a) $x \in (-\infty; -1] \cup [3; \infty)$

b) $x \in (-\infty; -5] \cup \left[\frac{3}{2}; \infty\right)$

c) $x \in (-7; \sqrt{2})$

d) $x \in (2; 3)$

e) $x \in (0; 4)$

f) $x \in (-\infty; -5] \cup \left\langle \frac{2\sqrt{2}}{3}; \infty \right\rangle$

Zauważmy, że nie musimy dokładnie rysować paraboli, aby rozwiązać nierówność kwadratową. Aby zrobić szkic rysunku, z którego odczytamy zbiór rozwiązań, wystarczy zaznaczenie miejsc zerowych na osi x oraz informacja o zwrocie ramion paraboli. W szczególności nie ma potrzeby znajdowania współrzędnych wierzchołka.

e) $(2 - 3x)(x + 3) > 0$

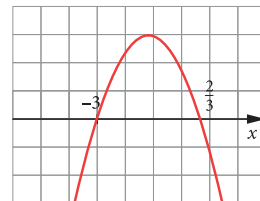
Miejscami zerowymi są: $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -3$. Tym razem jednak wyrażenie po lewej stronie nierówności nie jest trójmianem kwadratowym zapisanym w postaci $a(x - x_1)(x - x_2)$.

Aby taką postać otrzymać, trzeba z pierwszego nawiasu wyłączyć współczynnik stojący przy x , czyli -3 .

$$-3\left(-\frac{2}{3} + x\right)(x + 3) > 0$$

$$-3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x + 3) > 0$$

Współczynnik przy x^2 jest ujemny, zatem ramiona paraboli są skierowane do dołu.



Odp.: $(2 - 3x)(x + 3) > 0$ dla $x \in \left(-3; \frac{2}{3}\right)$

W ostatnim przykładzie czynność wyłączania przed nawias liczby -3 była potrzebna w zasadzie tylko do zauważenia, że współczynnik a trójmianu kwadratowego jest ujemny. Zwykle podczas rozwiązywania nierówności kwadratowej nie ma potrzeby zapisywania trójmianu w postaci iloczynowej. Aby zrobić odpowiedni wykres, potrzebujemy trzech informacji:

- ile pierwiastków ma trójmian,
- jakie to są liczby,
- jaki jest znak współczynnika przy x^2 .

Jeżeli trójmian kwadratowy jest zapisany jako iloczyn dwóch wyrażeń liniowych, to aby otrzymać współczynnik a przy x^2 , mnożymy współczynniki stojące przy x , np.:

- w iloczynie $(4x - 1)(5x + 2)$ mamy $a = 4 \cdot 5 = 20$,
- w iloczynie $(3 - x)(2x + 7)$ jest $a = (-1) \cdot 2 = -2$,
- w iloczynie $(\sqrt{2}x + 3)(3 - 4x)$ jest $a = \sqrt{2} \cdot (-4) = -4\sqrt{2}$.

Jeżeli w iloczynie występuje jeszcze czynnik liczbowy, to oczywiście należy go uwzględnić, np.:

- w iloczynie $-2(3 - 7x)\left(1 - \frac{3}{2}x\right)$ jest $a = (-2) \cdot (-7) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -21$.

Przykład 3 ◀ zad. 4.11

Wyznaczmy dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{42 - x - x^2} - 3x + 7$.

Rozwiązanie

Argumenty funkcji f spełniają dwa warunki:

$$x^2 + 2x - 3 \geq 0 \text{ i } 42 - x - x^2 \geq 0 \quad \leftarrow \text{wyrażenia pod pierwiastkami są nieujemne}$$

Rozwiążemy każdą z nierówności oddzielnie, część wspólna obydwu zbiorów rozwiązań jest szukaną dziedziną funkcji.

• $x^2 + 2x - 3 \geq 0$

$$\Delta = 4 + 12 = 16, \quad x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3, \quad x_2 = \frac{-2+4}{2} = 1$$

$$(x+3)(x-1) \geq 0 \quad \leftarrow \text{pierwiastki trójmianu: } -3, 1, \text{ ramiona paraboli skierowane w górę}$$

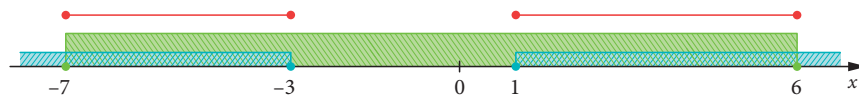
$$x \in (-\infty; -3] \cup [1; \infty)$$

• $42 - x - x^2 \geq 0$

$$\Delta = 1 + 168 = 169, \quad x_1 = \frac{1-13}{-2} = 6, \quad x_2 = \frac{1+13}{-2} = -7$$

$$-(x-6)(x+7) \geq 0 \quad \leftarrow \text{pierwiastki trójmianu: } 6, -7, \text{ ramiona paraboli skierowane w dół}$$

$$x \in \langle -7; 6 \rangle$$



Odczytujemy część wspólną obu zbiorów rozwiązań zaznaczonych na osi liczbowej:

$$x \in \langle -7; -3 \rangle \cup \langle 1; 6 \rangle$$

Odp.: Dziedziną funkcji f jest zbiór $\langle -7; -3 \rangle \cup \langle 1; 6 \rangle$.

Zadania

4.1. Naskicuj wykres funkcji $y = f(x)$ i odczytaj z wykresu, dla jakich x spełniona jest nierówność $f(x) > 0$, a dla jakich $f(x) < 0$.

a) $f(x) = -x^2 + 1$ c) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ e) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$

b) $f(x) = x^2 + 4x$ d) $f(x) = -x^2 + 10x - 25$ f) $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$

4.2. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 5x + 6 < 0$ c) $2x < x^2$ e) $x^2 - 6x + 10 > 0$ g) $x^2 + 2x + 2 \leq 0$
 b) $-2x^2 + 3x + 5 \geq 0$ d) $x^2 \leq 2$ f) $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$ h) $4x > x^2 + 4$

◀4.11. Wyznacz dziedzinę funkcji f .

a) $f(x) = \sqrt{9x^2 - 1}$

b) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$

c) $f(x) = \sqrt{15 + 2x - x^2} + \sqrt{1 - x}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 2x}$

Odp.:

a) $D = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; \infty\right)$

b) $D = (-\infty; -1) \cup \left\langle -\frac{1}{3}; \infty\right)$

c) $D = \langle -3; 1 \rangle$

d) $D = (-\infty; -1) \cup \langle 2; \infty)$

4.1. Patrz s. 30.

4.2. a) $x \in (2; 3)$

b) $x \in \left\langle -1; 2\frac{1}{2} \right\rangle$

c) $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$

d) $x \in \langle -\sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle$

e) $x \in \mathbf{R}$

f) $x = 1$

g) brak rozwiązań

h) brak rozwiązań

4.3. a) $x \in (-\infty; 2) \cup (4; \infty)$

b) $x \in \left(-3; \frac{1}{2}\right)$

c) $x \in \left\langle \frac{2}{3}; 2 \right\rangle$

d) brak rozwiązań

e) $x \in \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{2}{3} \right\rangle$

f) $x \in \mathbf{R}$

g) $x \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$

h) $x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{5}; \infty\right)$

4.4. a) $x \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$

b) $x \in (-\infty; -5) \cup \left\langle \frac{3}{2}; \infty \right\rangle$

c) $x \in (-7; \sqrt{2})$

d) $x \in (2; 3)$

e) $x \in (0; 4)$

f) $x \in (-\infty; -5) \cup \left\langle \frac{2\sqrt{2}}{3}; \infty \right\rangle$

4.5. a) np. $-x^2 + 8x - 15 > 0$

b) np. $x^2 - 2x - 3 > 0$

c) np. $-2x^2 - 18x > 0$

d) Nie ma takiej nierówności.

e) np. $3x^2 - 13x - 10 > 0$

f) np. $4x^2 - 81 > 0$

4.6. a) $x \in (-\infty; -2) \cup (3; \infty)$

b) $x = 7$

c) $x \in (1; 2)$

d) brak rozwiązań

e) $x \in (-1; 4)$

f) $x \in \left(-\frac{2}{3}; \frac{13}{17}\right)$

g) $x \in \left\langle \frac{17}{8}; \frac{9}{4} \right\rangle$

h) $x \in \left(-\infty; \frac{1}{11}\right) \cup \left(\frac{6}{5}; \infty\right)$

4.7. $x \in \{0, 1, 2, 3\}$

4.8. $a < -1$ lub $a > -\frac{1}{3}$

4.10. $x \in (0; 3)$

4.3. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 6x + 8 > 0$

b) $2x^2 + 5x < 3$

c) $-3x^2 + 8x - 4 \geq 0$

d) $9x^2 + 16 < 0$

e) $6x^2 \leq x + 2$

f) $4x^2 + 2x + 1 > 0$

g) $(x-2)^2 \geq 4$

h) $5x^2 + 2x - 3 > 0$

4.4. Rozwiąż nierówność.

a) $(x+1)(x-3) \geq 0$ c) $(\sqrt{2}-x)(x+7) > 0$ e) $x(2x-8) < 0$

b) $(3-2x)(x+5) \leq 0$ d) $(3-x)(2-x) \leq 0$ f) $(3x-2\sqrt{2})(x+5) \geq 0$

4.5. Podaj przykład nierówności kwadratowej postaci $ax^2 + bx + c > 0$, której zbiór rozwiązań tworzą wszystkie liczby x spełniające podany warunek.

a) $x \in (3; 5)$

c) $x \in (-9; 0)$

e) $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup (5; \infty)$

b) $x \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$

d) $x = 2$

f) $x \in \left(-\infty; -\frac{9}{2}\right) \cup \left(\frac{9}{2}; \infty\right)$

4.6. Rozwiąż nierówność.

a) $2(x+1)^2 - (x-3)^2 \geq 11x - 1$

e) $(x-4)(2x+5) < (x-4)(2-x)$

b) $(x-2)^2 + 5 \leq 5(2x-8)$

f) $(3x+2)(5x-1) > (11x-7)(6x+4)$

c) $(x+3)(3-x) > 3(x-2)^2 + 5$

g) $(8x-17)^2 \leq 8x-17$

d) $\left(\frac{x-4}{2}\right)^2 - \left(\frac{6-x}{2}\right)^2 > (x-3)^2$

h) $(5x-6)^2 > (6-5x)(5+6x)$

4.7. Wyznacz wszystkie całkowite rozwiązania nierówności $3x^2 - 9x - 2 < 0$.4.8. Punkt $M = (a, b)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = 3x^2 + 4x + 6$. Jaki warunek musi spełniać a , aby współrzędna b była większa od 5?4.9. Dane są funkcje $y = f(x)$ i $y = g(x)$. Sporządź wykresy obu funkcji w jednym układzie współrzędnych i odczytaj rozwiązania nierówności lub równania:

I. $f(x) > g(x)$,

II. $f(x) < g(x)$,

III. $f(x) = g(x)$.

Rozwiąż nierówność $f(x) > g(x)$ sposobem rachunkowym.

a) $f(x) = x^2 - 4$ $g(x) = x - 2$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 9\frac{1}{2}$ $g(x) = -1$

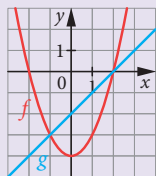
b) $f(x) = 3 - 2x - x^2$ $g(x) = 3 - 2x$ d) $f(x) = -2x^2 - 4x + 2$ $g(x) = -2x - 2$

4.10. Wyznacz dodatnie wartości zmiennej x , dla których wartości funkcji $g(x) = 3x^2 - 6$ są nie większe od wartości funkcji $f(x) = 2x^2 + 3$.

4.9. a) I. $x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$

II. $x \in (-1; 2)$

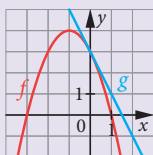
III. $x \in \{-1, 2\}$



b) I. brak rozwiązań

II. $x \in \mathbf{R} - \{0\}$

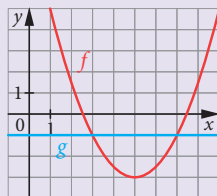
III. $x = 0$



c) I. $x \in (-\infty; 3) \cup (7; \infty)$

II. $x \in (3; 7)$

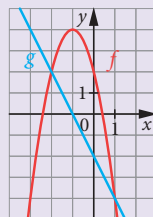
III. $x \in \{3, 7\}$



d) I. $x \in (-2; 1)$

II. $x \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$

III. $x \in \{-2, 1\}$



4.11. Wyznacz dziedzinę funkcji f .

a) $f(x) = \sqrt{9x^2 - 1}$

c) $f(x) = \sqrt{15 + 2x - x^2} + \sqrt{1 - x}$

b) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 2x}$

4.12. Rozwiąż układ nierówności.

a) $\begin{cases} x^2 + 3x < 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0 \\ 3x > x^2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + 11x + 18 < 0 \\ 4x^2 > 81 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x^2 + 2x + 35 \geq 0 \\ 3x + 9 \geq 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x^2 - 13x + 6 \leq 0 \\ 3x^2 - 16x + 20 > 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} (11x - 5)(17x - 4) \geq 0 \\ (3x - 2)(2x + 3) \leq 5 \end{cases}$

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż rozwiązanie nierówności $-x^2 + x + 6 < 0$.

A. $x \in (-3; 2)$

C. $x \in (-2; 3)$

B. $x \in (-\infty; -3) \cup (2; \infty)$

D. $x \in (-\infty; -2) \cup (3; \infty)$

2. Która z podanych nierówności nie ma rozwiązań?

A. $5x^2 - 7x + 2 \leq 0$

C. $-5x^2 - 2 \leq 0$

B. $7x^2 - 5x + 2 \leq 0$

D. $8x^2 - 8x + 2 \leq 0$

3. Która z podanych nierówności jest prawdziwa dla wszystkich liczb z przedziału $\langle -3; 5 \rangle$?

A. $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

C. $-x^2 + x + 30 > 0$

B. $x^2 - x - 20 < 0$

D. $25x^2 - 10x + 1 > 0$

4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Nierówność $3x^2 - 5x + 4 > 0$ jest prawdziwa dla $x \in \mathbf{R}$.

B. Nierówność $-100x^2 - 60x - 9 < 0$ jest prawdziwa dla $x \in \mathbf{R}$.

C. Dokładnie jedna liczba rzeczywista spełnia nierówność $\frac{1}{4}x^2 + 1 \leq x$.

5. Rozwiąż nierówność $2x^2 - x + 1 > 0$.

6. Wyznacz wszystkie rozwiązania nierówności $-\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1 > 0$ będące liczbami całkowitymi.

7. Rozwiąż nierówność $(3 - \pi)(2x - 3)(\sqrt{2} + x) < 0$.

4.11.

a) $D = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left\langle \frac{1}{3}; \infty \right\rangle$

b) $D = (-\infty; -1) \cup \left\langle -\frac{1}{3}; \infty \right\rangle$

c) $D = \langle -3; 1 \rangle$

d) $D = (-\infty; -1) \cup \langle 2; \infty \rangle$

4.12. a) $x \in (-2; 0)$

b) $x \in \langle -3; 7 \rangle$

c) $x \in (0; 2)$

d) $x \in \left\langle \frac{1}{2}; 2 \right\rangle \cup \left(3\frac{1}{3}; 6 \right)$

e) $x \in \left(-9; -\frac{9}{2}\right)$

f) $x \in \left\langle -\frac{11}{6}; \frac{4}{17} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{11}; 1 \right\rangle$

Prosto do matury

1. D

2. B

3. C

4. P, F, P

5. $x \in \mathbf{R}$

6. $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

7. $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup \left(1\frac{1}{2}; \infty\right)$

5. Zadania prowadzące do równań kwadratowych

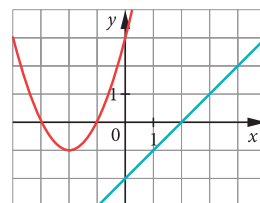
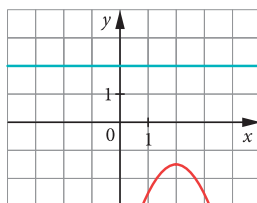
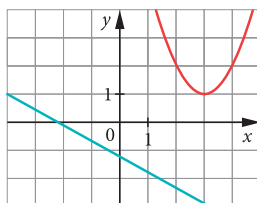
Umiejętności:

- rozwiązywanie układów równań prowadzących do równań kwadratowych
- wykorzystywanie własności funkcji kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym)

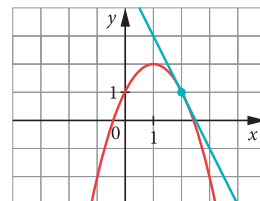
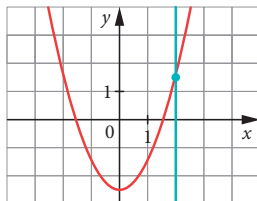
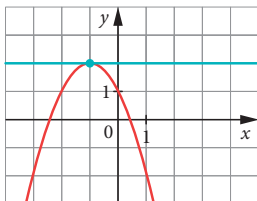
Punkty przecięcia paraboli i prostej

Wykresem równania $y = ax^2 + bx + c$ (jeżeli $a \neq 0$) jest parabola. Wykresem równania $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ (jeżeli a_1 i b_1 nie są jednocześnie równe 0) jest prosta. Ile punktów wspólnych mogą mieć prosta i parabola? Z własności geometrycznych tych figur wynika, że są trzy możliwości.

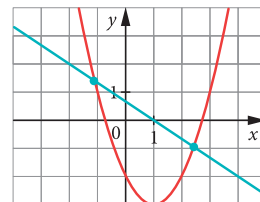
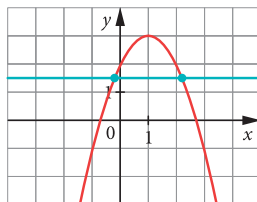
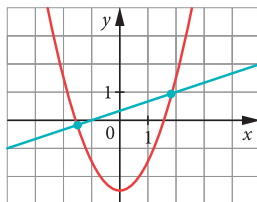
I. Prosta nie ma punktów wspólnych z parabolą, np.:



II. Prosta ma jeden punkt wspólny z parabolą, np.:



III. Prosta ma dwa punkty wspólne z parabolą, np.:



ZZ i KPU

tematy 1.9–1.11

Multiteka

• Układy równań

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.5

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 1 ◀ zad. 5.2, 5.3

Wyznamy współrzędne punktów przecięcia paraboli i prostej, rozwiązując rachunkowo układ równań, a następnie przedstawimy ilustrację geometryczną zadania.

Rozwiązanie

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ x + 2 = x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x + 2 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$$

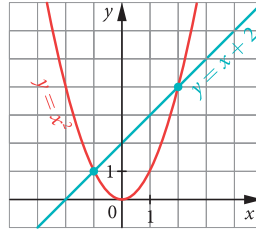
Równanie $x^2 - x - 2 = 0$ jest równaniem kwadratowym, które ma dwa pierwiastki ($\Delta = 9$):

$$x_1 = -1 \text{ oraz } x_2 = 2$$

Zatem rozwiązaniem układu są dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Każda z nich jest parą współrzędnych punktu przecięcia prostej $y = x + 2$ z parabolą $y = x^2$. Mamy zatem dwa takie punkty: $(-1, 1)$ oraz $(2, 4)$.



$$\text{b) } \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ 4x + y + 3 = 0 \end{cases}$$

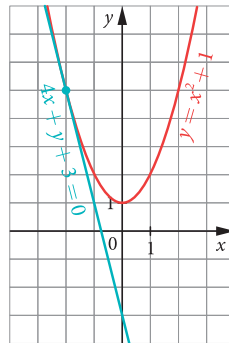
$$\begin{cases} y = -4x - 3 \\ x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -4x - 3 \\ (x + 2)^2 = 0 \end{cases}$$

Równanie kwadratowe ma jeden pierwiastek $x = -2$, więc rozwiązaniem układu jest jedna para liczb.

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$$

Prosta i parabola mają jeden punkt wspólny: $(-2, 5)$.



Układ równań, z których jedno jest równaniem prostej, a drugie – paraboli, zawsze możemy przekształcić do układu składającego się z równania liniowego z dwiema niewiadomymi i równania kwadratowego z jedną niewiadomą. W konsekwencji dany układ równań może mieć dwa rozwiązania albo jedno rozwiązanie, albo może nie mieć rozwiązań – w zależności od liczby pierwiastków równania kwadratowego.

◀ **5.2.** Dane są funkcje $y = f(x)$ i $y = g(x)$. Sporządź wykresy obydwu funkcji w jednym układzie współrzędnych i odczytaj z rysunku rozwiązanie równania $f(x) = g(x)$. Otrzymane wyniki sprawdź metodą rachunkową.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$,
 $g(x) = -2x + 6$

b) $f(x) = 3x^2 + 2$, $g(x) = 5$

c) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$,
 $g(x) = 2x + 1$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$,
 $g(x) = -x - 2$

Odp.: a) $x = 1$ lub $x = 3$

b) $x = -1$ lub $x = 1$

c) $x = 1$ lub $x = 2$

d) $x = 0$ lub $x = -6$

◀ **5.3.** Rozwiąż algebraicznie układ równań. Przedstaw ilustrację graficzną rozwiązania.

a) $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = -3x - 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = -2x^2 - 1 \\ y = 4x + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6 \\ y = x - 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = -2x^2 + 8x - 4 \\ y = 2 \end{cases}$

Odp.: a) brak rozwiązań

b) $x = -1$, $y = -3$

c) $x = 0$, $y = -6$ lub $x = 6$, $y = 0$

d) $x = 1$, $y = 2$ lub $x = 3$, $y = 2$

◀5.10. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb parzystych jest równa 56. Wyznacz te liczby.

Odp.: 2, 4, 6 lub -6, -4, -2.

Wskazówka: Oznacz szukane liczby: $2(a-1)$, $2a$, $2(a+1)$.

◀5.12. Pole prostokąta jest równe $17,68 \text{ cm}^2$, a różnica długości jego boków wynosi 1,8 cm. Wyznacz długości boków tego prostokąta.

Odp.: 5,2 cm i 3,4 cm

Zadania tekstowe prowadzące do równań kwadratowych

Wiele zadań tekstowych prowadzi do równań kwadratowych lub opisanych wyżej układów równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe. Taka sytuacja występuje też często w zagadnieniach z fizyki.

Przykład 2 ◀ zad. 5.10

Suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych wynosi 371. Wyznamy te liczby.

Rozwiązanie

Zauważmy, że trzy kolejne liczby nieparzyste możemy zapisać jako $2n+1$, $2n+3$ i $2n+5$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$. Otrzymujemy zatem równanie:

$$(2n+1)^2 + (2n+3)^2 + (2n+5)^2 = 371$$

$$4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 12n + 9 + 4n^2 + 20n + 25 = 371$$

$$12n^2 + 36n - 336 = 0, \text{ czyli } n^2 + 3n - 28 = 0$$

$$\Delta = 121, \quad n_1 = -7, \quad n_2 = 4$$

Oba rozwiązania są liczbami całkowitymi, więc zadanie ma dwa rozwiązania. Po podstawieniu -7 oraz 4 w miejsce n otrzymujemy dwa zestawy liczb będące rozwiązaniami zadania.

Odp.: Szukane liczby to: -13, -11 i -9 lub 9, 11 i 13.

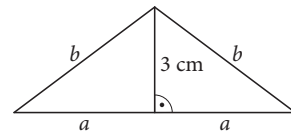
Przykład 3 ◀ zad. 5.12

W trójkącie równoramiennym o obwodzie 18 cm wysokość poprowadzona do podstawy ma 3 cm. Obliczmy długości boków tego trójkąta.

Rozwiązanie

W trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę dzieli ją na odcinki równej długości.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z treści zadania wiemy, że $2a + 2b = 18$. Ponadto na mocy twierdzenia Pitagorasa w każdym z powstałych trójkątów prostokątnych jest $a^2 + 3^2 = b^2$. Mamy zatem do rozwiązania układ równań:

$$\begin{cases} a^2 + 3^2 = b^2 \\ 2a + 2b = 18 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} a^2 + 9 = b^2 \\ a + b = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 9 = (9-a)^2 \\ b = 9-a \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + 9 = 81 - 18a + a^2 \\ b = 9-a \end{cases} \quad \begin{cases} 18a = 72 \\ b = 9-a \end{cases} \quad \begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases}$$

Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami długości boków trójkąta wynoszą odpowiednio 8 cm, 5 cm, 5 cm.

Odp.: 8 cm, 5 cm, 5 cm

Przykład 4 ◀ zad. 5.16

Na dziedzińcu zamku w Niedzicy znajduje się studnia o głębokości 60 m, wykuta w litej skale. Obliczmy, ile czasu spada kamień wrzucony do tej studni z prędkością początkową 10 m/s. Wynik podamy z dokładnością do 0,1 s.

Rozwiązanie

Użyjemy wzoru na drogę przebytą przez ciało w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$$s(t) = v_0 t + \frac{gt^2}{2},$$

w którym s oznacza drogę przebytą przez kamień (w metrach), t – czas spadania (w sekundach), v_0 – prędkość początkową (w m/s), zaś $g = 10 \text{ m/s}^2$ to przyspieszenie ziemskie.

Otrzymujemy równanie: $10t + 5t^2 = 60$, dla $t > 0$.

$$5t^2 + 10t - 60 = 0$$

$$t^2 + 2t - 12 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}, \quad t_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{13}}{2} = -1 - \sqrt{13}, \quad t_2 = -1 + \sqrt{13}$$

Tylko druga liczba jest dodatnia, zatem rozwiązaniem zadania jest $-1 + \sqrt{13} \approx 2,6$.

Odp.: Kamień spada 2,6 sekundy.



◀5.16. Do studni opuszczono kamień i po upływie 3,5 s usłyszano plusk. Oblicz przybliżoną głębokość studni. Przyjmij, że prędkość dźwięku w powietrzu wynosi 340 m/s.

Odp.: Przyjmujemy, że kamień spadał do studni w czasie t (sekund) z prędkością początkową $v_0 = 0 \text{ (m/s)}$; przyspieszenie ziemskie $g \approx 10 \text{ m/s}^2$. Wzór na drogę przebytą przez ciało w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$$s = s(t) = v_0 t + \frac{gt^2}{2}. \quad \text{Zatem}$$

$s = 5t^2$ jest głębokością studni (w metrach).

Odległość s dźwięk przebywa w czasie $\frac{s}{340}$ sekund, więc od momentu opuszczenia kamienia do chwili usłyszenia pluku minęło $t + \frac{s}{340}$ sekund. Aby obliczyć czas spadania kamienia, należy zatem wyznaczyć dodatnie rozwiązania

$$\text{równania } t + \frac{5t^2}{340} = 3,5.$$

$$\frac{1}{68}t^2 + t - \frac{7}{2} = 0$$

$$\frac{1}{2}t^2 + 34t - 119 = 0$$

$$\Delta = 34^2 + 2 \cdot 119 = 1394 \approx 37,34^2$$

$$t_1 = \frac{-34 - 37,34}{2 \cdot \frac{1}{2}} < 0,$$

$$t_2 \approx -34 + 37,34 = 3,34$$

Czas spadania kamienia wynosi ok. 3,34 s, zatem głębokość studni jest równa (w przybliżeniu):

$$s = 5t^2 \approx 55,778 \approx 56 \text{ (m)}.$$

Odp.: 56 m

Odpowiedzi i rozwiązania

5.1. P, F, P

Zadania

5.1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

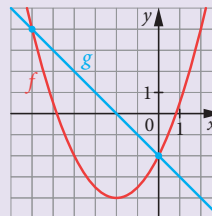
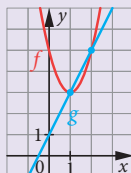
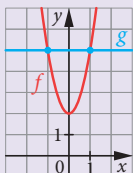
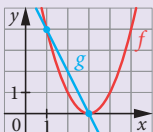
Układ równań $\begin{cases} y = -x^2 - 4x - 1 \\ y = 2x + 8 \end{cases}$

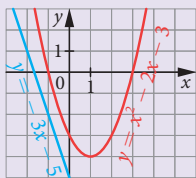
- A. ma dokładnie jedno rozwiązanie.
B. ma dokładnie dwa rozwiązania.
C. jest spełniony przez parę liczb $(-3, 2)$.

5.2. Dane są funkcje $y = f(x)$ i $y = g(x)$. Sporządź wykresy obydwu funkcji w jednym układzie współrzędnych i odczytaj z rysunku rozwiązanie równania $f(x) = g(x)$. Otrzymane wyniki sprawdź metodą rachunkową.

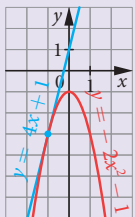
- a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ $g(x) = -2x + 6$ c) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ $g(x) = 2x + 1$
b) $f(x) = 3x^2 + 2$ $g(x) = 5$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$ $g(x) = -x - 2$

5.2. a) $x = 1$ lub $x = 3$ **b)** $x = -1$ lub $x = 1$ **c)** $x = 1$ lub $x = 2$ **d)** $x = 0$ lub $x = -6$

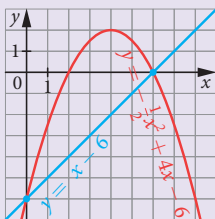


5.3. a) brak rozwiązań

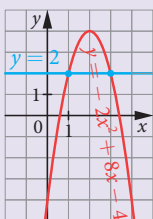
b) $x = -1, y = -3$



c) $x = 0, y = -6$ lub $x = 6, y = 0$



d) $x = 1, y = 2$ lub $x = 3, y = 2$



5.5. a) np. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$

b) np. $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 \\ y = -x - 2 \end{cases}$

c) np. $\begin{cases} y = -x^2 - 4x - 5 \\ y = x - 1 \end{cases}$

d) np. $\begin{cases} y = -2x^2 - 4x + 2 \\ y = -2x - 2 \end{cases}$

5.6. np. $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 1 \\ y = 4x - 10 \end{cases}$

5.7. a) np. $\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2\frac{1}{3} \\ y = -2x + 5 \end{cases}$

b) np. $\begin{cases} y = x^2 + 10x + 22 \\ y = 2x + 6 \end{cases}$

lub $\begin{cases} y = x^2 - 18 \\ x = -4 \end{cases}$

5.8. a) $\left(-2, \frac{1}{2}\right), (0, 0), (4, 2)$

b) 3

5.3. Rozwiąż algebraicznie układ równań. Przedstaw ilustrację graficzną rozwiązania.

a) $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = -3x - 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6 \\ y = x - 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = -2x^2 - 1 \\ y = 4x + 1 \end{cases}$

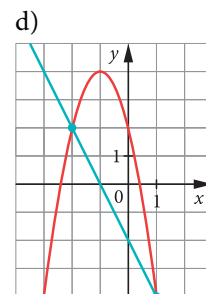
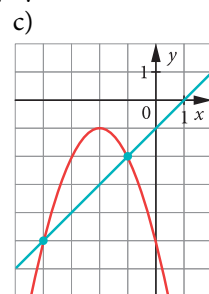
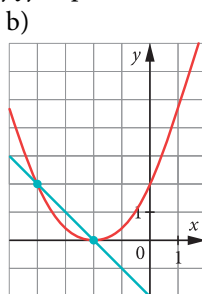
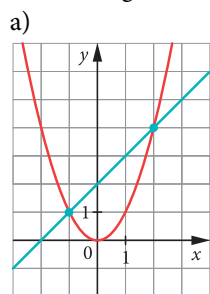
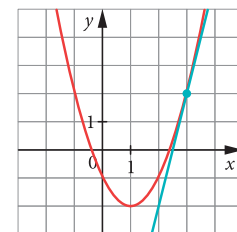
d) $\begin{cases} y = -2x^2 + 8x - 4 \\ y = 2 \end{cases}$

5.4. Rozwiąż graficznie układ równań. Otrzymane wyniki sprawdź metodą rachunkową.

a) $\begin{cases} y = -2x^2 - 4x + 2 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 2 \\ y + 7 = 0 \end{cases}$

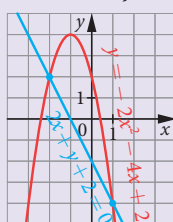
c) $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 9 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$

5.5. W układzie współrzędnych narysowane są parabola i prosta. Napisz układ równań, którego ilustracją jest przedstawiony rysunek.**5.6.** W układzie współrzędnych narysowane są parabola i prosta. Napisz układ równań, którego ilustracją jest przedstawiony obok rysunek. Sprawdź rachunkowo, że ten układ ma tylko jedno rozwiązanie.*** 5.7.** Podaj przykład układu równań, który opisuje parabolę i prostąa) o dwóch wspólnych punktach $(1, 3)$ i $(4, -3)$.b) o jednym wspólnym punkcie $(-4, -2)$.**5.8.** Trójkąt wpisano w parabolę $y = \frac{1}{8}x^2$ w ten sposób, że jeden z jego wierzchołków jest wierzchołkiem paraboli, a dwa pozostałe wierzchołki są punktami przecięcia tej paraboli prostą $y = \frac{1}{4}x + 1$.

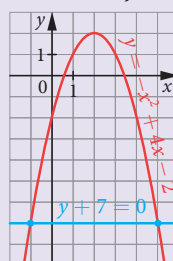
a) Wyznacz wierzchołki trójkąta.

b) Oblicz pole trójkąta.

5.4. a) $x = -2, y = 2$
lub $x = 1, y = -4$



b) $x = -1, y = -7$
lub $x = 5, y = -7$



c) $x = 2, y = 1$
lub $x = 6, y = 9$



- 5.9.** Liczby $x_1 = 5 + \sqrt{23}$ i $x_2 = 5 - \sqrt{23}$ są pierwiastkami równania $x^2 - (p^2 + q^2)x + p + q = 0$ z niewiadomą x . Wyznacz p i q .
- 5.10.** Suma kwadratów trzech kolejnych liczb parzystych jest równa 56. Wyznacz te liczby.
- 5.11.** Suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych jest równa 974. Wyznacz te liczby.
- 5.12.** Pole prostokąta jest równe $17,68 \text{ cm}^2$, a różnica długości jego boków wynosi $1,8 \text{ cm}$. Wyznacz długości boków tego prostokąta.
- 5.13.** Obwód rombu jest równy 116 cm , a różnica długości jego przekątnych równa się 2 cm . Oblicz długości przekątnych rombu.
- 5.14.** Przeciwprostokątna pewnego trójkąta prostokątnego jest dłuższa od jednej przyprostokątnej o 2 cm , a od drugiej o 25 cm . Wyznacz obwód tego trójkąta.
- 5.15.** Jeżeli do iloczynu dwóch liczb dodamy mniejszą z liczb, to otrzymamy 60 . Jeżeli do tego iloczynu dodamy większą z nich, to otrzymamy 63 . Jakie to liczby?
- * **5.16.** Do studni opuszczono kamień i po upływie $3,5 \text{ s}$ usłyszano plusk. Oblicz przybliżoną głębokość studni. Przyjmij, że prędkość dźwięku w powietrzu wynosi 340 m/s .
- * **5.17.** Ile boków ma wielokąt wypukły, który ma 90 przekątnych?
- * **5.18.** Dwa wielokąty wypukłe mają razem 28 boków i 158 przekątnych. Ile boków ma każdy z tych wielokątów?
- * **5.19.** Suma kwadratów trzech kolejnych liczb parzystych niepodzielnych przez 4 wynosi 1004 . Wyznacz te liczby.
- * **5.20.** Suma kwadratu wieku ojca i kwadratu wieku syna wynosi 2570 . Za 4 lata iloczyn wieku ojca i wieku syna będzie o 280 większy niż jest obecnie. Ile lat ma teraz ojciec, a ile syn?

5.20. x – obecny wiek syna (w latach)

y – obecny wiek ojca (w latach), $x < y$; $x, y \in \mathbb{N}_+$

$$(1) \quad x^2 + y^2 = 2570$$

$(x + 4)$ – wiek syna za 4 lata (w latach), $(y + 4)$ – wiek ojca za 4 lata (w latach)

$$(2) \quad (x + 4)(y + 4) = 280 + xy$$

$$16 + xy + 4x + 4y = 280 + xy \Leftrightarrow 4x + 4y = 264 \mid : 4$$

$$\begin{cases} x + y = 66 & (2) \\ x^2 + y^2 = 2570 & (1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 66 - x \\ x^2 + (66 - x)^2 = 2570 \end{cases}$$

$x > 0$ i $66 - x > x$, stąd $x > 0$ i $x < 33$. Zatem $D = (0; 33) \cap \mathbb{N}$.

$$(1) \quad 2x^2 - 132x + 66^2 - 2570 = 0 \mid : 2$$

$$x^2 - 66x + 893 = 0$$

$$\Delta = 66^2 - 4 \cdot 893 = 4 \cdot 33^2 - 4 \cdot 893 = 4 \cdot (1089 - 893) = 4 \cdot 196, \quad \sqrt{\Delta} = 2 \cdot 14 = 28$$

$$x_1 = \frac{66 - 28}{2} = \frac{38}{2} = 19, \quad x_2 = \frac{66 + 28}{2} = \frac{94}{2} = 47 \notin D, \quad x = 19 \Rightarrow y = 47$$

Odp.: Obecnie syn ma 19 lat, a ojciec 47 lat.

$$\mathbf{5.9.} \quad p = 3, q = -1 \text{ lub } p = -1, q = 3$$

$$\mathbf{5.10.} \quad 2, 4, 6 \text{ lub } -6, -4, -2.$$

Wskazówka: Oznacz szukane liczby: $2(a - 1)$, $2a$, $2(a + 1)$.

$$\mathbf{5.11.} \quad 17, 18, 19$$

$$\mathbf{5.12.} \quad 5,2 \text{ cm i } 3,4 \text{ cm}$$

$$\mathbf{5.13.} \quad 40 \text{ cm i } 42 \text{ cm}$$

$$\mathbf{5.14.} \quad 84 \text{ cm}$$

$$\mathbf{5.15.} \quad 6 \text{ i } 9 \text{ lub } -10 \text{ i } -7$$

$$\mathbf{5.16.} \quad \text{Patrz s. 39}$$

$$\mathbf{5.17.} \quad \text{Liczba przekątnych } n\text{-kąta wypukłego jest równa } \frac{n(n-3)}{2}.$$

$$\frac{n(n-3)}{2} = 90 \Leftrightarrow n^2 \cdot 3n - 180 = 0,$$

$$D = \mathbb{N}_+ - \{1, 2\}$$

$$\Delta = 9 + 720 = 729, \quad \sqrt{\Delta} = 27$$

$$n_1 = \frac{3-27}{2} = -12 \notin D,$$

$$n_2 = \frac{3+27}{2} = 15$$

Odp.: Wielokąt ma 15 boków.

5.18. n, k – liczby wierzchołków wielokątów wypukłych

$$\begin{cases} n + k = 28, & (1) \\ \frac{n(n-3)}{2} + \frac{k(k-3)}{2} = 158, & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad k = 28 - n, \quad (n \geq 3 \wedge 28 - n \geq 3) \Rightarrow \Rightarrow n \in \{3, 25\} \cap \mathbb{N}$$

Podstawiamy $k = 28 - n$ do (2):

$$n(n-3) + (28-n)(28-n-3) = 316$$

$$n^2 - 3n + 784 - 28n - 84 - 28n +$$

$$n^2 + 3n - 316 = 0$$

$$2n^2 - 56n + 384 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 28n + 192 = 0$$

$$D = \{3, 4, 5, \dots, 25\}$$

$$\Delta = 28^2 - 4 \cdot 192 = 4^2 \cdot 7^2 - 4^2 \cdot 48 = 4^2,$$

$$\sqrt{\Delta} = 4$$

$$n_1 = \frac{28-4}{2} = 12, \quad n_2 = \frac{28+4}{2} = 16$$

$$n = 12 \Rightarrow k = 16;$$

$$n = 16 \Rightarrow k = 12$$

Odp.: Te wielokąty to dwunastokąt i szesnastokąt.

5.19. Liczba parzysta niepodzielna przez 4 ma postać $2 \cdot (2k + 1)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Trzy kolejne liczby parzyste niepodzielne przez 4 to: $2(2k - 1)$, $2(2k + 1)$, $2(2k + 3)$

Stąd otrzymujemy równanie:

$$4(2k-1)^2 + 4(2k+1)^2 + 4(2k+3)^2 = 1004$$

$$k_1 = \frac{-1-9}{2} = -5, \quad k_2 = \frac{-1+9}{2} = 4$$

$$k = -5 \Rightarrow 2(2k-1) = -22,$$

$$2(2k+1) = -18, \quad 2(2k+3) = -14$$

$$k = 4 \Rightarrow 2(2k-1) = 14,$$

$$2(2k+1) = 18, \quad 2(2k+3) = 22$$

Odp.: Szukane liczby to: $-22, -18, -14$ lub $14, 18, 22$.



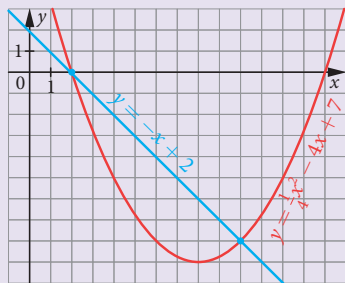
Prosto do matury

1. D

2. B

3. D

4. $x = 2, y = 0$
lub $x = 10, y = -8$

5. $y = x^2 + 4x + 3$

6. 23, 25, 27 lub -27, -25, -23

7. 52

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

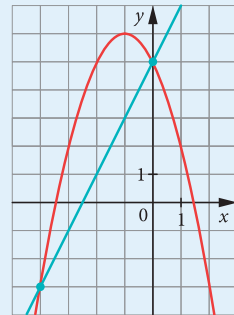
1. Na rysunku przedstawiona jest graficzna ilustracja układu równań. Który to układ?

A. $\begin{cases} y = -x^2 - 2x + 5 \\ y = x + 5 \end{cases}$

B. $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$

C. $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ 2x + 5 = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} y = -x^2 - 2x + 5 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$



2. Dany jest układ równań $\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ 9x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$. Wskaż zdanie prawdziwe.

A. Ten układ równań nie ma rozwiązań.

B. Ten układ równań ma co najmniej jedno rozwiązanie.

C. Rozwiązaniami tego układu równań są pary liczb naturalnych.

D. Rozwiązaniem tego układu równań jest $\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$.

3. Suma dwóch liczb jest równa 1, a suma kwadratów tych liczb pomniejszonych o 3 wynosi 5. Który układ równań opisuje tę sytuację?

A. $\begin{cases} a + b = 1 \\ a^2 + b^2 - 3 = 5 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a + b = 1 \\ (a + b - 3)^2 = 5 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a + b = 1 \\ (a - 3 + b - 3)^2 = 5 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a + b = 1 \\ (a - 3)^2 + (b - 3)^2 = 5 \end{cases}$

4. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - 4x + 7 \\ y = -x + 2 \end{cases}$.

Przedstaw interpretację graficzną rozwiązania.

5. Do równania prostej $y = 2x + 3$ dopisz równanie takiej paraboli $y = x^2 + bx + c$, aby prosta i parabola przecinały się w punktach $(-2, -1)$ i $(0, 3)$.

6. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych nieparzystych wynosi 1883. Wyznacz te liczby.

7. W liczbie dwucyfrowej cyfra dziesiątek jest o 3 większa od cyfry jedności. Iloczyn tej liczby i sumy jej cyfr jest równy 364. Jaka to liczba?

6. Własności funkcji kwadratowej – podsumowanie

Umiejętności:

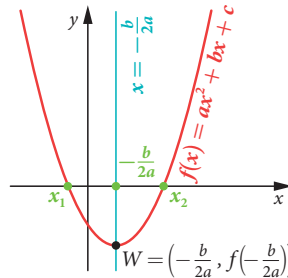
- szkicowanie wykresu funkcji kwadratowej na podstawie jej wzoru
- wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie jej własności lub wykresu
- szkicowanie wykresu funkcji określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami
- odczytywanie własności funkcji z jej wykresu

Przypomnijmy – jeżeli $f(x) = ax^2 + bx + c$ i $a \neq 0$, to:

- $x_w = -\frac{b}{2a}$ ← pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli
- $x = -\frac{b}{2a}$ ← równanie osi symetrii paraboli

Jeżeli ponadto $\Delta \geq 0$, to można pokazać, że:

- $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$ ← średnia arytmetyczna miejsc zerowych



Przykład 1 ◀ zad. 6.1

Narysujemy wykres i opiszemy własności funkcji $f(x) = x^2 + 4x + 3$.

Rozwiązanie

Najpierw obliczamy wielkości przydatne przy rysowaniu wykresu:

- miejsca zerowe funkcji,
- współrzędne (x_w, y_w) wierzchołka paraboli,
- współrzędne punktu przecięcia paraboli z osią y .

$$\Delta = 16 - 12 = 4$$

$$x_1 = -1, x_2 = -3$$

$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2, \quad y_w = f(x_w) = f(-2) = 4 - 8 + 3 = -1$$

Parabola będąca wykresem funkcji f przecina oś y w punkcie $(0, 3)$, ma ramiona skierowane do góry oraz kształt taki, jak parabola o równaniu $y = x^2$ (bo we wzorze funkcji współczynnik przy x^2 jest równy 1).

Jeżeli $0 \in D$, to punkt $(0, f(0))$ należy do wykresu funkcji $y = f(x)$.
Dla funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest to punkt $(0, c)$.

6.1. Odp.: b) $D = \mathbf{R}$, $ZW = (-\infty; -1)$; brak miejsc zerowych; $f(x) < 0$ dla $x \in \mathbf{R}$; funkcja rosnąca w przedziale $(-\infty; 2)$, malejąca w przedziale $(2; \infty)$; wartość największa: -1 dla $x = 2$, brak wartości najmniejszej; $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m > -1$, 1 rozwiązanie dla $m = -1$, 2 rozwiązania dla $m < -1$

c) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \langle -8; \infty)$; miejsca zerowe: $-6, 2$; $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -6) \cup (2; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-6; 2)$; funkcja malejąca w przedziale $(-\infty; -2)$, rosnąca w przedziale $\langle -2; \infty)$; wartość najmniejsza: -8 dla $x = -2$, brak wartości największej; $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m < -8$, 1 rozwiązanie dla $m = -8$, 2 rozwiązania dla $m > -8$

d) $D = \mathbf{R}$, $ZW = (-\infty; 0)$; miejsce zerowe: -3 ; $f(x) < 0$ dla $x \in \mathbf{R} - \{-3\}$; funkcja rosnąca w przedziale $(-\infty; -3)$, malejąca w przedziale $\langle -3; \infty)$; wartość największa: 0 dla $x = -3$, brak wartości najmniejszej; $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m > 0$, 1 rozwiązanie dla $m = 0$, 2 rozwiązania dla $m < 0$

Uwagi metodyczne

W podstawie programowej kształcenia w zakresie podstawowym nie są przewidziane wzory Viète'a oraz ich zastosowanie do rozwiązywania zadań z parametrem. Dlatego wszystkie zamieszczone w podręczniku zadania można rozwiązać bez użycia tych wzorów, najczęściej tylko na podstawie prawidłowej interpretacji rysunku.

◀ **6.1.** Sporządź wykres funkcji f i opisz jej własności: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, przedziały monotoniczności, wartości największe (najmniejsze) funkcji i argumenty, dla których funkcja je przyjmuje, oraz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m .

a) $f(x) = 2x^2 - 4x$

b) $f(x) = -x^2 + 4x - 5$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$

d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$

Odp.: Wykresy – patrz s. 48.

a) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \langle -2; \infty)$; miejsca zerowe: 0, 2; $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (0; 2)$; funkcja malejąca w przedziale $(-\infty; 1)$, rosnąca w przedziale $\langle 1; \infty)$; wartość najmniejsza: -2 dla $x = 1$, brak wartości największej; $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m < -2$, 1 rozwiązanie dla $m = -2$, 2 rozwiązania dla $m > -2$

ZZ i KPU

tematy 1.1, 1.2

Multiteka

- Wykres funkcji kwadratowej
- Parabola – właściwości i zastosowanie

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.6

Generator
testów i sprawdzianów

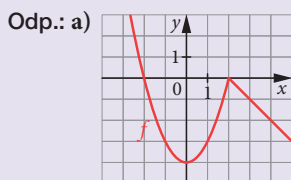
◀6.2. Sporządź wykres funkcji f i opisz jej własności: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, przedziały monotoniczności, wartości największe (najmniejsze) funkcji i argumenty, dla których funkcja przyjmuje, oraz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m .

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{dla } x \leq 2 \\ -x + 2 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

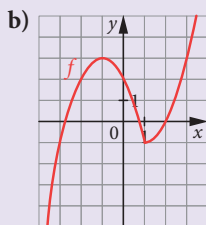
b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{dla } x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 7 & \text{dla } x \leq -1 \\ x + 3 & \text{dla } -1 < x < 2 \\ -x^2 + 6x - 3 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$

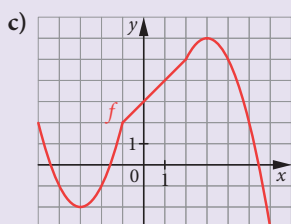
d) $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{dla } x \leq -1 \\ x^2 - 2x - 1 & \text{dla } -1 < x < 3 \\ -2x + 8 & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$



$D = \mathbf{R}$, $ZW = \mathbf{R}$; miejsca zerowe: $-2, 2$; $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -2)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-2; 2) \cup (2; \infty)$; funkcja malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$ i $(2; \infty)$, rosnąca w przedziale $(0; 2)$; brak wartości najmniejszej i wartości największej; $f(x) = m$ ma: 1 rozwiązanie dla $m \in (-\infty; -4) \cup (0; \infty)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{-4, 0\}$, 3 rozwiązania dla $m \in (-4; 0)$



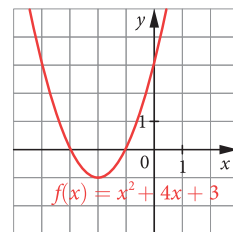
$D = \mathbf{R}$, $ZW = \mathbf{R}$; miejsca zerowe: $-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}, 2$; $f(x) > 0$ dla $x \in (-1 - \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}) \cup (2; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -1 - \sqrt{3}) \cup (-1 + \sqrt{3}; 2)$; funkcja rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -1)$ i $(1; \infty)$, malejąca w przedziale $(-1; 1)$; brak wartości najmniejszej i wartości największej; $f(x) = m$ ma: 1 rozwiązanie dla $m \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{-1, 3\}$, 3 rozwiązania dla $m \in (-1; 3)$



$D = \mathbf{R}$, $ZW = \mathbf{R}$; miejsca zerowe: $-3 - \sqrt{2}, -3 + \sqrt{2}, 3 + \sqrt{6}$; $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -3 - \sqrt{2}) \cup (-3 + \sqrt{2}; 3 + \sqrt{6})$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-3 - \sqrt{2}; -3 + \sqrt{2}) \cup (3 + \sqrt{6}; \infty)$; funkcja malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -3)$ i $(3; \infty)$, rosnąca w przedziale $(-3; 3)$; brak wartości najmniejszej i wartości największej; $f(x) = m$ ma: 1 rozwiązanie dla $m \in (-\infty; -2) \cup (6; \infty)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{-2, 6\}$, 3 rozwiązania dla $m \in (-2; 6)$

Na podstawie narysowanego wykresu opisujemy własności funkcji f :

- dziedziną jest zbiór $\mathbf{R}$,
- zbiorem wartości jest przedział $\langle -1; \infty \rangle$,
- funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą -1 dla $x = -2$ i nie przyjmuje wartości największej,
- miejscami zerowymi funkcji są argumenty $x_1 = -1, x_2 = -3$,
- $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-3; -1)$,
- oś symetrii wykresu jest prosta $x = -2$,
- funkcja nie jest monotoniczna, natomiast:
w przedziale $(-\infty; -2)$ funkcja jest malejąca,
w przedziale $(-2; \infty)$ funkcja jest rosnąca,
- równanie $f(x) = m$:
dla $m < -1$ nie ma rozwiązań,
dla $m = -1$ ma jedno rozwiązanie,
dla $m > -1$ ma dwa rozwiązania.



Przykład 2 ◀ zad. 6.2

Narysujemy wykres i opiszemy własności funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6 & \text{dla } x \in (2; 7) \end{cases}$$

Rozwiązanie

Wykres funkcji f jest sumą fragmentów dwóch parabol.

Pierwsza z nich, o równaniu $y = x^2 - 4$, ma wierzchołek o współrzędnych $(0, -4)$ i przecina oś x w punktach o pierwszych współrzędnych $x = -2$ oraz $x = 2$.

Do wykresu funkcji f wybieramy te punkty pierwszej paraboli, których pierwsze współrzędne spełniają warunek $x \in (-\infty; 2)$, w tym punkt $(2, 0)$.

Druga parabola, o równaniu $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$, ma wierzchołek o współrzędnych $(4, 2)$. Pierwsze współrzędne punktów przecięcia tej paraboli z osią x są rozwiązaniami równania $-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6 = 0$. Są to liczby $x_1 = 2$ oraz $x_2 = 6$.

Do wykresu funkcji f wybieramy te punkty drugiej paraboli, których pierwsze współrzędne spełniają warunek $x \in (2; 7)$.

Wartość wyrażenia $-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$ dla $x = 2$ jest równa 0, czyli jest równa wartości funkcji f w punkcie 2. Zatem w punkcie o współrzędnych $(2, 0)$ fragment wykresu funkcji $y = x^2 - 4$ przechodzi we fragment wykresu funkcji $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$.

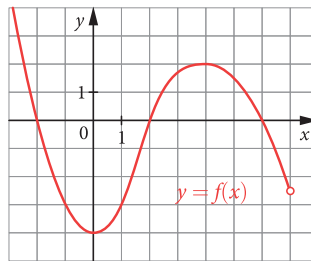
Obliczamy jeszcze wartość wyrażenia $-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$ dla $x = 7$.

$$-\frac{1}{2} \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 - 6 = -\frac{49}{2} + 22 = -2\frac{1}{2}$$

Skoro $7 \notin D$, to punkt $(7, -2\frac{1}{2})$ będzie na wykresie zaznaczony pustym kółeczkiem.

Odczytujemy z wykresu własności funkcji:

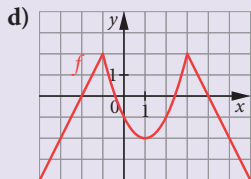
- dziedziną jest zbiór $(-\infty; 7)$,
- zbiorem wartości jest przedział $\langle -4; \infty \rangle$,
- funkcja ma wartość najmniejszą równą -4 dla $x = 0$ i nie ma wartości największej,
- miejscami zerowymi funkcji są argumenty:
 $x = -2$, $x = 2$, $x = 6$,
- $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup (2; 6)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-2; 2) \cup (6; 7)$,
- funkcja nie jest monotoniczna, natomiast:
w przedziale $(-\infty; 0)$ jest malejąca,
w przedziale $\langle 0; 4 \rangle$ jest rosnąca,
w przedziale $\langle 4; 7 \rangle$ jest malejąca,
- równanie $f(x) = m$:
dla $m < -4$ nie ma rozwiązań,
dla $m = -4$ oraz dla $m > 2$ ma jedno rozwiązanie,
dla $m \in (-4; -2\frac{1}{2}) \cup \{2\}$ ma dwa rozwiązania,
dla $m \in (-2\frac{1}{2}; 2)$ ma trzy rozwiązania.



Przykład 3 ◀ zad. 6.2

Narysujemy wykres i opiszemy własności funkcji

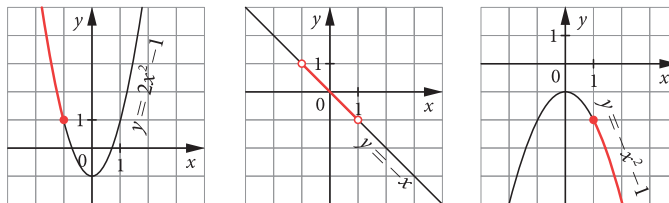
$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -x & \text{dla } x \in (-1; 1) \\ -x^2 - 1 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty \rangle \end{cases}$$



$D = \mathbf{R}$, $ZW = (-\infty; 2)$; miejsca zerowe: -2 , $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$, 4 ;
 $f(x) > 0$ dla $x \in (-2; 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}; 4)$, $f(x) < 0$
dla $x \in (-\infty; -2) \cup (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}) \cup (4; \infty)$; funkcja
rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -1)$ i $\langle 1; 3 \rangle$, malejąca
w każdym z przedziałów $\langle -1; 1 \rangle$ i $\langle 3; \infty \rangle$; brak wartości
najmniejszej, wartość największa: 2 dla $x = -1$ i $x = 3$;
 $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (2; \infty)$, 2 rozwiązania dla
 $m \in (-\infty; -2) \cup \{2\}$, 3 rozwiązania dla $m = -2$, 4 rozwiązania
dla $m \in (-2; 2)$

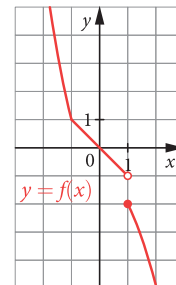
Rozwiązanie

Z trzech wykresów poszczególnych funkcji wybieramy odpowiednie fragmenty.



Rysujemy wykres funkcji f (obrazowo mówiąc, sklejony z wybranych fragmentów) i na jego podstawie opisujemy własności funkcji:

- dziedziną jest zbiór $\mathbf{R}$,
- zbiorem wartości jest zbiór $(-\infty; -2) \cup (-1; \infty)$,
- funkcja nie ma wartości najmniejszej i nie ma wartości największej,
- miejscem zerowym funkcji jest argument $x = 0$,
- $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 0)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (0; \infty)$,
- funkcja jest malejąca,
- równanie $f(x) = m$:
dla $m \in (-\infty; -2) \cup (-1; \infty)$ ma jedno rozwiązanie,
dla $m \in (-2; -1)$ nie ma rozwiązań.



◀6.9. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ ma wierzchołek w punkcie $(4, 6)$ i przechodzi przez punkt $(1, 3)$. Wyznacz współczynniki a, b, c .

Odp.: $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{8}{3}$, $c = \frac{2}{3}$

Przykład 4 ◀ zad. 6.9

Wykres funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest parabolą o wierzchołku $W = (-2, 4)$ przechodzącą przez punkt $P = (-3, 3)$. Wyznamy wzór tej funkcji.

Rozwiązanie

I sposób

Najpierw wyznaczamy postać kanoniczną danej funkcji. Znamy współrzędne wierzchołka paraboli, więc do obliczenia pozostaje tylko współczynnik a .

$$f(x) = a(x + 2)^2 + 4$$

Podstawiamy do wzoru współrzędne punktu $P = (-3, 3)$.

$$3 = a(-3 + 2)^2 + 4$$

Zatem $a = -1$ i $f(x) = -(x + 2)^2 + 4$.

Przekształcamy wzór funkcji do postaci ogólnej: $f(x) = -x^2 - 4x$.

II sposób

Podane własności funkcji możemy zapisać w postaci układu równań.

Jeżeli wykres funkcji $y = ax^2 + bx + c$ jest parabolą, to $a \neq 0$.

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -2 \\ f(-2) = 4 \\ f(-3) = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{pierwsza współrzędna wierzchołka } W \\ \leftarrow \text{druga współrzędna wierzchołka } W \\ \leftarrow \text{punkt } P = (-3, 3) \text{ należy do wykresu } f \end{array}$$

$$\begin{cases} b = 4a \\ 4a - 2b + c = 4 \\ 9a - 3b + c = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 4a \\ 4a - 8a + c = 4 \\ 9a - 12a + c = 3 \end{cases} \quad \leftarrow \text{podstawiamy } 4a \text{ w miejsce } b \text{ w drugim i trzecim równaniu}$$

$$\begin{cases} b = 4a \\ -4a + c = 4 \\ -3a + c = 3 \end{cases}$$

Ostatnie dwa równania tworzą układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi. Po rozwiązaniu tego układu (np. metodą przeciwnych współczynników) otrzymujemy $a = -1$ i $c = 0$. Zatem $b = -4$, a wzór funkcji ma postać $f(x) = -x^2 - 4x$.

Odp.: $f(x) = -x^2 - 4x$

Przykład 5 ◀ zad. 6.15

Wykres funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ przechodzi przez punkty $A = (1, -2)$, $B = (0, -5)$ i $C = (-2, -5)$. Wyznamy wzór tej funkcji.

Rozwiązanie

$$\begin{cases} -2 = a + b + c \\ -5 = c \\ -5 = 4a - 2b + c \end{cases} \quad \leftarrow \text{punkty } A, B, C \text{ należą do wykresu funkcji } f(x) = ax^2 + bx + c$$

Układ trzech równań z trzema niewiadomymi rozwiążemy metodą podstawiania.

$$\begin{cases} c = -5 \\ a + b - 5 = -2 \\ 4a - 2b - 5 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -5 \\ a + b = 3 \\ 4a - 2b = 0 \end{cases}$$

Stąd $a = 1$ i $b = 2$.

Odp.: $f(x) = x^2 + 2x - 5$

◀ 6.15. Wykres funkcji

$f(x) = ax^2 + bx + c$ przechodzi przez punkty A, B, C . Wyznam współczynniki a, b, c .

a) $A = (0, 1)$, $B = (-1, -1)$, $C = (2, 11)$

b) $A = (1, -4)$, $B = (2, -3)$, $C = (-1, 0)$

c) $A = (-2, -3)$, $B = (-1, -1)$, $C = (1, 3)$

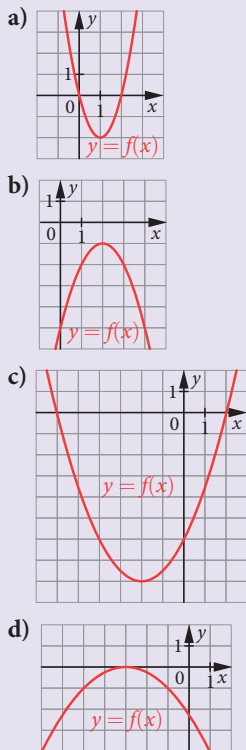
Odp.: a) $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$

b) $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$

c) $a = 0$, $b = 2$, $c = 1$

Odpowiedzi i rozwiązania

6.1. Własności funkcji
– patrz s. 43.



6.2. Patrz s. 44.

Zadania

6.1. Sporządź wykres funkcji f i opisz jej własności: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, przedziały monotoniczności, wartości największe (najmniejsze) funkcji i argumenty, dla których funkcja je przyjmuje, oraz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m .

a) $f(x) = 2x^2 - 4x$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$

b) $f(x) = -x^2 + 4x - 5$

d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$

6.2. Sporządź wykres funkcji f i opisz jej własności: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, przedziały monotoniczności, wartości największe (najmniejsze) funkcji i argumenty, dla których funkcja je przyjmuje, oraz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m .

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{dla } x \leq 2 \\ -x + 2 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{dla } x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 7 & \text{dla } x \leq -1 \\ x + 3 & \text{dla } -1 < x < 2 \\ -x^2 + 6x - 3 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{dla } x \leq -1 \\ x^2 - 2x - 1 & \text{dla } -1 < x < 3 \\ -2x + 8 & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$

6.3. Sporządź wykres funkcji i odczytaj z wykresu rozwiązanie podanej nierówności.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{dla } x < 1 \\ x - 1 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases} \quad f(x) < 8$

b) $g(x) = \begin{cases} -2x^2 + 8x - 4 & \text{dla } x \leq 3 \\ 2x - 4 & \text{dla } x > 3 \end{cases} \quad g(x) > 2$

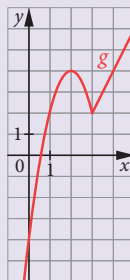
c) $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty) \\ -2x^2 + 8x + 1 & \text{dla } x \in (0; 4) \end{cases} \quad h(x) \leq 7$

d) $k(x) = \begin{cases} 2x^2 + 8x + 4 & \text{dla } x \geq 0 \\ -x^2 + 2x + 4 & \text{dla } x < 0 \end{cases} \quad -4 < k(x) < 4$

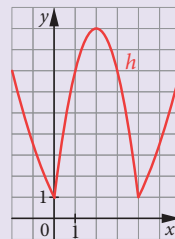
6.3. a) $x \in (-1; 9)$



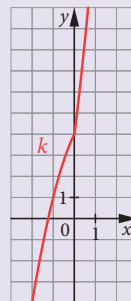
b) $x \in (1; 3) \cup (3; \infty)$



c) $x \in \langle -2; 1 \rangle \cup \langle 3; 6 \rangle$



d) $x \in (-2; 0)$



6.4. Sporządź wykres funkcji $y = f(x)$. Odczytaj z wykresu liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m .

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 2 & \text{dla } x < 0 \\ -x^2 + 4x & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -3x^2 - 18x - 21 & \text{dla } x \leq -2 \\ \frac{1}{2}x + 4 & \text{dla } x > -2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x + 4 & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty) \\ -2x^2 + 4x + 4 & \text{dla } x \in \langle 0; 2 \rangle \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 3 & \text{dla } x \leq -1 \\ 2x + 2 & \text{dla } -1 < x < 1 \\ 3x^2 - 12x + 13 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$

6.5. Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = 4x^2 + bx + c$ jest parabola przechodząca przez punkty $A = (0, 2)$ i $B = (-1, 14)$. Wyznacz współczynniki b i c w równaniu paraboli.

6.6. Ośią symetrii paraboli $y = ax^2 + bx - 4$ przechodzącej przez punkt $A = (-2, 4)$ jest prosta $x = -3$. Wyznacz współczynniki a i b w równaniu paraboli.

6.7. Wierzchołkiem paraboli $y = -3x^2 + bx + c$ jest punkt $B = (1, 0)$. Wyznacz współczynniki b i c w równaniu paraboli.

6.8. Parabola, której wierzchołek leży na osi y , przechodzi przez punkty $A = (2, 1)$ i $B = (-4, 7)$. Wyznacz równanie tej paraboli.

6.9. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ ma wierzchołek w punkcie $(4, 6)$ i przechodzi przez punkt $(1, 3)$. Wyznacz współczynniki a, b, c .

6.10. Funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$ przyjmuje wartość najmniejszą równą 2 dla $x = 2$. Parabola będąca wykresem tej funkcji przechodzi przez punkt $(4, 6)$. Wyznacz współczynniki a, b, c .

6.11. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ przechodzi przez punkty $(1, -2)$ i $(0, 1)$. Jej ośią symetrii jest prosta $x = 2$. Wyznacz współczynniki a, b, c .

6.5. $b = -8, c = 2$

6.6. $a = -1, b = -6$

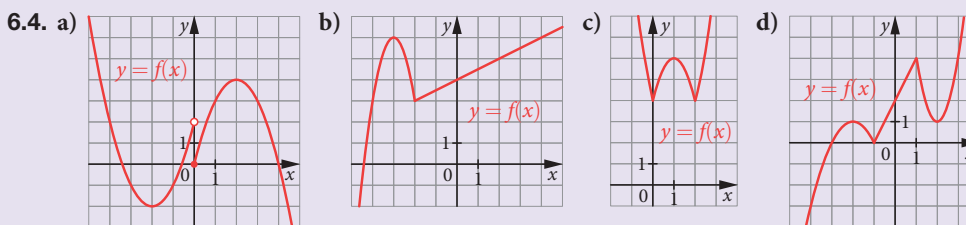
6.7. $b = 6, c = -3$

6.8. $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$

6.9. $a = -\frac{1}{3}, b = \frac{8}{3}, c = \frac{2}{3}$

6.10. $a = 1, b = -4, c = 6$

6.11. $a = 1, b = -4, c = 1$



Liczba rozwiązań równania

	zero	jedno	dwa	trzy	cztery
a)	–	$m \in (-\infty; -2) \cup (4; \infty)$	$m \in \{-2, 4\}$	$m \in (-2; 0) \cup \langle 2; 4 \rangle$	$m \in \langle 0; 2 \rangle$
b)	–	$m \in (-\infty; 3) \cup (6; \infty)$	$m \in \{3, 6\}$	$m \in (3; 6)$	–
c)	$m \in (-\infty; 4)$	–	$m \in (6; \infty) \cup \{4\}$	$m = 6$	$m \in (4; 6)$
d)	–	$m \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$	$m \in \{0, 4\}$	$m \in (0; 4)$	–

6.12. a) $f(x) = -(x+2)^2 + 4$

b) $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 3$

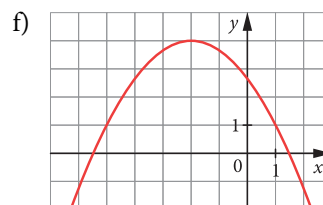
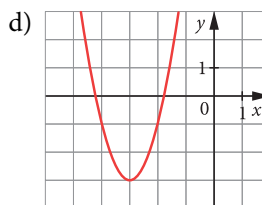
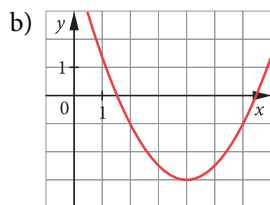
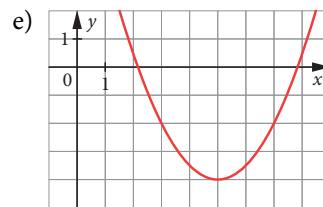
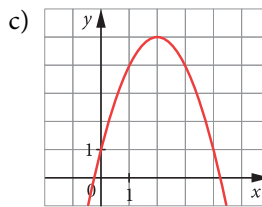
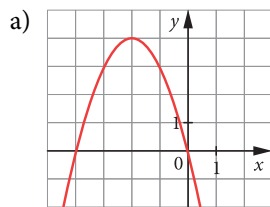
c) $f(x) = -(x-2)^2 + 5$

d) $f(x) = 2(x+3)^2 - 3$

e) $f(x) = \frac{1}{2}(x-5)^2 - 4$

f) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2\frac{2}{3}$

6.12. Podaj wzór funkcji kwadratowej f , której wykres przedstawiono na rysunku.



6.13. a) $b = 2$, $c = -3$

b) $b = -6$, $c = 5$

6.14. $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{6}{5}$, $c = -4$

6.15. a) $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$

b) $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$

c) $a = 0$, $b = 2$, $c = 1$

6.13. Wyznacz współczynniki b i c funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ o podanych własnościach.

a) Jej miejscami zerowymi są liczby -3 i 1 .

b) Jej wykres przecina oś y w punkcie $(0, 5)$, a liczba 5 jest miejscem zerowym.

6.14. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

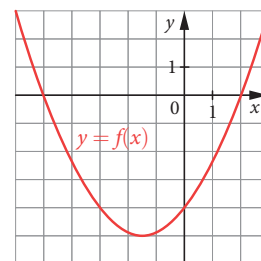
Wyznacz współczynniki a , b , c .

6.15. Wykres funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ przechodzi przez punkty A , B , C . Wyznacz współczynniki a , b , c .

a) $A = (0, 1)$ $B = (-1, -1)$ $C = (2, 11)$

b) $A = (1, -4)$ $B = (2, -3)$ $C = (-1, 0)$

c) $A = (-2, -3)$ $B = (-1, -1)$ $C = (1, 3)$



D

6.16. Wykaż, że funkcja kwadratowa, której wykres przechodzi przez punkty $K = (-5, 10)$, $L = (-3, 5)$, $M = (3, 2)$, nie ma miejsc zerowych.

6.16. $f(x) = ax^2 + bx + c$, $K(-5, 10)$, $L(-3, 5)$, $M(3, 2)$

$$\left(9a - \frac{3}{2} + c = 2\right) + \left(25a + \frac{5}{2} + c = 10\right) = (16a - 4 = -8) \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$(9a - 3b + c = 5) + (9a + 3b + c = 2) = (-6b = 3) \Leftrightarrow b = -0,5$$

Stąd:

$$c = 2 + \frac{3}{2} - \frac{9}{4} = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

Zatem $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$, $\Delta = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = -1 < 0$, więc funkcja nie ma miejsc zerowych.

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytcie.

1. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + 2x$. Wskaż równanie, które nie ma rozwiązań.

- A. $f(x) = 1$ B. $f(x) = -1$ C. $-f(x) = 2$ D. $f(-x) = 0$

2. Która z podanych funkcji kwadratowych nie jest zapisana ani w postaci kanonicznej, ani ogólnej, ani iloczynowej?

- A. $f(x) = 2x(x - 3)$ C. $f(x) = x(x - 2) + 1$
B. $f(x) = x^2 - 2x$ D. $f(x) = \frac{1}{3}(x - 5)^2$

3. Wskaż zbiór trzech punktów, przez które nie może przechodzić jedna parabola będąca wykresem funkcji kwadratowej.

- A. (0, 0), (1, 1), (2, 0) C. (0, 0), (1, 1), (2, 2)
B. (0, 0), (1, 100), (2, 0) D. (0, 0), (1, 1), (2, -1)

4. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $f(x) = a(x - p)^2 + q$ są liczby 3 i 7. Wyznacz wartości współczynników a , p oraz q , a następnie oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. $a > 0$ B. $p = 5$ C. $q = -4$

5. Do wykresu funkcji kwadratowej f należą punkty: $(-1, 5)$, $(3, 1)$ i $(5, 2)$. Wyznacz wzór tej funkcji.

6. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej f jest przedział $\langle -2; \infty \rangle$. Ośią symetrii jej wykresu jest prosta $x = 3$. Wykres przecina oś y w punkcie o drugiej współrzędnej 1. Zapisz wzór tej funkcji w postaci ogólnej.

7. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej są liczby -4 i 2 , a jej wykres przecina oś y w punkcie o drugiej współrzędnej -1 . Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

Prosto do matury

1. C

2. C

3. C

4. F, P, F

5. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{4}$

6. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 1$

7. $ZW = \left\langle -1\frac{1}{8}; \infty \right\rangle$

7. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–16 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

1. B
1. Wskaż postać iloczynową trójmianu kwadratowego $-9 + 6x - x^2$.
A. $(-3 + x)^2$
B. $-(x - 3)^2$
C. $-(x + 3)^2$
D. Ten trójmian nie ma postaci iloczynowej.
2. B
2. Wskaż miejsca zerowe funkcji $f(x) = \sqrt{2}(x - \sqrt{2})(x + 1)$.
A. 2, $-\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$, -1 C. $-\sqrt{2}$, 1 D. $\sqrt{2}$, 1
3. B
3. Dla jakiego argumentu funkcja $f(x) = x^2 + 2x$ przyjmuje w przedziale $\langle -4; 1 \rangle$ największą wartość?
A. $x = -1$ B. $x = -4$ C. $x = 1$ D. $x = 1$ lub $x = -3$
4. D
4. Jakie wartości może przyjmować współczynnik k w równaniu paraboli $y = x^2 - kx$, aby nie miała ona punktów wspólnych z osią x ?
A. $k < 0$ C. $k \geq 1$
B. $k = 0$ D. Nie istnieje takie k .
5. A
5. Dana jest funkcja $f(x) = -x^2 + 4x$ o dziedzinie $D = \langle 1; 4 \rangle$ i cztery zdania dotyczące tej funkcji.
I. Funkcja f przyjmuje wartość największą dla $x = 2$.
II. Funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą dla $x = 4$.
III. Funkcja f nie przyjmuje wartości największej.
IV. Funkcja f nie przyjmuje wartości najmniejszej.
Które zdania są prawdziwe?
A. tylko I i IV B. tylko I i II C. tylko II i III D. tylko III i IV
6. D
6. Równanie $x^2 + 5 = 9$
A. nie ma pierwiastków.
B. ma dwa dodatnie pierwiastki.
C. ma dwa ujemne pierwiastki.
D. ma dwa pierwiastki o przeciwnych znakach.

7. Wskaż postać iloczynową funkcji $f(x) = -(x-3)^2 + 1$.

A. $f(x) = (x+2)(x+4)$

C. $f(x) = (x-2)(x-4)$

B. $f(x) = -(x-2)(x-4)$

D. Ta funkcja nie ma postaci iloczynowej.

7. B

8. Postać iloczynowa funkcji $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 3x - 2\sqrt{2}$ to

A. $f(x) = (\sqrt{2}x - 4)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

B. $f(x) = (\sqrt{2}x - 4)(\sqrt{2}x + 1)$.

C. $f(x) = \sqrt{2}(x-2)(x+1)$.

D. $f(x) = \sqrt{2}\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

8. A

9. Miejscami zerowymi funkcji $f(x) = ax^2 + bx + \frac{5}{2}$ są liczby $x = -1$ oraz $x = -5$. Ile są równe współczynniki tej funkcji?

A. $a = 1$, $b = -4$

C. $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$

B. $a = -2$, $b = \frac{7}{2}$

D. $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$

9. D

10. Wskaż nierówność prawdziwą dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$.

A. $3(x-2)^2 - 1 \leq 0$

C. $-0,4(x+3)^2 - 0,5 < 0$

B. $-5(x+2)^2 + 3 > 0$

D. $7(x-11)^2 + 2 \leq 0$

10. C

11. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $3x^2 + 5x - 2 \leq 0$.

A. $\mathbb{R}$

C. $\left\langle -2; \frac{1}{3} \right\rangle$

B. Ta nierówność nie ma rozwiązań.

D. $\left\langle -2; \frac{1}{3} \right\rangle$

11. D

12. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $-\frac{3}{7}\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{3}{5}\right) > 0$.

A. $\left(-\frac{3}{5}; \frac{2}{3}\right)$

C. $\left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$

B. $\left(-\frac{2}{3}; \frac{3}{5}\right)$

D. $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{5}; \infty\right)$

12. B

13. O funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ wiadomo, że ma dwa ujemne miejsca zerowe oraz że $f(0) = -1$. Jakie znaki mają współczynniki a , b i c ?

A. Jest za mało danych, żeby to określić.

B. $a < 0$ i $b < 0$ i $c < 0$

C. $a > 0$ i $b > 0$ i $c < 0$

D. $a < 0$ i $b < 0$ i $c > 0$

13. B

14. C

14. Parabola $y = m - x^2$ przecina oś x w punktach $x = 2$ oraz $x = -2$. Jaka wartość ma współczynnik m ?

A. $m = 2$

C. $m = 4$

B. $m = 1$

D. Nie istnieje takie m .

15. D

15. Wskaż układ równań, który ma dwa rozwiązania.

A.
$$\begin{cases} y = 1 \\ y = -(x-2)^2 - 3 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} y = -3 \\ y = (x+5)^2 - 3 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} y = x \\ y = (x+2)^2 + 3 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} y = x \\ y = -(x+1)^2 - 1 \end{cases}$$

16. B

16. Wskaż układ równań, który ma jedno rozwiązanie.

A.
$$\begin{cases} y = -2x - 2 \\ y = (x-1)^2 - 2 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} y = -2x \\ y = (x-1)^2 - 2 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} y = -2x - 1 \\ y = (x-1)^2 - 2 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = (x-1)^2 - 2 \end{cases}$$

W zadaniach 17–22 oceń prawdziwość podanych zdań.

17. P, P, P

17. Jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest liczba 2. Wierzchołek paraboli będącej wykresem tej funkcji ma współrzędne (5, 3). Wynika z tego, że

A. drugim miejscem zerowym funkcji f jest liczba 8.B. $a < 0$.C. $c < 0$.

18. F, P, F

18. Funkcja $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{dla } x < 0 \\ x^2 - 2x & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$

A. jest rosnąca.

B. ma trzy miejsca zerowe.

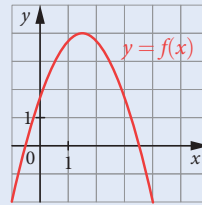
C. przyjmuje wartość najmniejszą dla $x = 1$.

19. P, P, F

19. Parabola będąca wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ przecina oś y w punkcie (0, -6), a jej wierzchołek ma współrzędne (-2, 7). Wynika z tego, że

A. $a < 0$.B. $b < 0$.C. $\Delta < 0$.

20. Funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$, której wykres jest dany na rysunku obok, ma miejsca zerowe x_1, x_2 . Na podstawie wykresu można wywnioskować, że



A. $a < 0$ i $c > 0$ i $x_1 \cdot x_2 < 0$.

B. $a < 0$ i $b > 0$.

C. $b > 0$ i $c > 0$ i $\Delta \geq 0$.

21. Dana jest funkcja $f(x) = -2(x+7)^2 + 3$.

A. W przedziale $(-\infty; 7)$ funkcja f jest rosnąca.

B. W przedziale $\langle 7; \infty)$ funkcja f jest malejąca.

C. Prosta $x = -7$ jest osią symetrii wykresu funkcji f .

22. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \leq -1 \\ 2 - x^2 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$.

A. Równanie $f(x) = m$ ma dla dowolnej wartości m co najmniej jedno rozwiązanie.

B. Dla $m \in (1; 2)$ równanie $f(x) = m$ ma trzy rozwiązania.

C. Równanie $f(x) = m$ ma dwa rozwiązania tylko dla $m = 1$.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

23. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale i podaj argumenty, dla których te wartości są przyjmowane.

a) $f(x) = x^2 - 10x + 22$ $\langle 3; 6 \rangle$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ $\langle -4; 0 \rangle$

c) $f(x) = 3x^2 + x - 2$ $\left\langle -\frac{1}{4}; \frac{1}{6} \right\rangle$

d) $f(x) = -\sqrt{2}x^2 - x + 3$ $\langle -2; -1 \rangle$

24. Jeżeli to możliwe, zapisz funkcję f w postaci iloczynowej.

a) $f(x) = 25x^2 - 1$ d) $f(x) = x^2 - 4x - 1$

b) $f(x) = 9x^2 + x$ e) $f(x) = -x^2 + 5x - 7$

c) $f(x) = 9x^2 + 4$ f) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$

25. Funkcję kwadratową f daną w postaci ogólnej, kanonicznej lub iloczynowej zapisz w pozostałych możliwych postaciach.

a) $f(x) = 2x^2 + 12x + 10$ c) $f(x) = -3(x-2)(x+1)$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-6)^2 - 1$ d) $f(x) = 5x^2 - 15x$

23.

	Wartość największa	Wartość najmniejsza
a)	1 dla $x = 3$	-3 dla $x = 5$
b)	6 dla $x = 0$	-10 dla $x = -4$
c)	$-\frac{7}{4}$ dla $x = \frac{1}{6}$	$-\frac{25}{12}$ dla $x = -\frac{1}{6}$
d)	$4 - \sqrt{2}$ dla $x = -1$	$5 - 4\sqrt{2}$ dla $x = -2$

20. P, P, P

21. F, P, P

22. P, P, F

24. a) $f(x) = 25\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x + \frac{1}{5}\right)$

b) $f(x) = x(9x + 1)$

c) brak postaci iloczynowej

d) $f(x) = (x - 2 - \sqrt{5})(x - 2 + \sqrt{5})$

e) brak postaci iloczynowej

f) $f(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 2)$

25. a) $f(x) = 2(x+3)^2 - 8$,
 $f(x) = 2(x+5)(x+1)$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 19$,
brak postaci iloczynowej

c) $f(x) = -3x^2 + 3x + 6$,
 $f(x) = -3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 6\frac{3}{4}$

d) $f(x) = 5\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 11\frac{1}{4}$,
 $f(x) = 5x(x-3)$

26. a) $x = 1$ lub $x = \frac{2}{3}$

b) $x = \frac{-2 - \sqrt{10}}{2}$ lub $x = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2}$

c) $x = \frac{2\sqrt{5}}{3}$

d) $x = 2^{16}$ lub $x = 2^{17}$

e) brak rozwiązań

f) $x = 1$ lub $x = 3^{20}$

27. a) $x \in (-9; 9)$

b) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$

c) $x \in \left\langle -4; \frac{1}{2} \right\rangle$

d) $x = \sqrt{2}$

e) $x \in (3; 8)$

f) $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (2; \infty)$

g) $x \in \mathbf{R}$

h) $x \in (-\infty; -5\sqrt{2}) \cup (3\sqrt{2}; \infty)$

28. $f(x) = \frac{1}{9}(x-2)(x-8)$

29. a) $f(x) = x^2 - 3x$

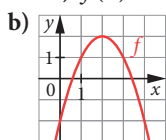
b) brak rozwiązań

30. a) $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$

b) wartość największa: 4 dla $x = 1$,
wartość najmniejsza: 0 dla $x = 3$

c) $f(x) = -(x+1)(x-3)$

31. a) $f(x) = -(x-2)^2 + 2$



c) $x \in (-\infty; -2) \cup (6; \infty)$

d) $f(x) =$

$= -(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})$

32. $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

26. Rozwiąż równanie.

a) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

b) $-2x^2 - 4x + 3 = 0$

c) $9x^2 - 12\sqrt{5}x + 20 = 0$

d) $x^2 - 3 \cdot 2^{16}x + 2^{33} = 0$

e) $2^{11}x^2 - 3^5x + 2^{17} = 0$

f) $x^2 - (3^{20} + 1)x + 3^{20} = 0$

27. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 < 81$

b) $x^2 + x > 0$

c) $-2(x+4)\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 0$

d) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 \leq 0$

e) $x^2 - 11x + 24 < 0$

f) $x + 6 \leq 2x^2$

g) $-8x^2 + 13x - 6 < 0$

h) $-3x^2 - 6\sqrt{2}x + 90 < 0$

28. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej są liczby 2 i 8, a wykres tej funkcji przechodzi przez punkt $(-1, 3)$. Wyznacz wzór tej funkcji w postaci iloczynowej.

29. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej iloczyn tej liczby i liczby o 3 od niej mniejszej.

a) Podaj wzór funkcji f .

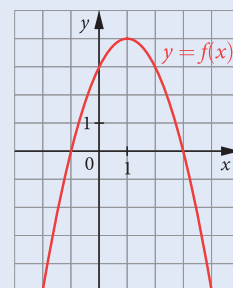
b) Zbadaj, ile rozwiązań ma równanie $f(x) + 3 = 0$.

30. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f . Na podstawie tego wykresu

a) rozwiąż nierówność $f(x) < 3$.

b) podaj wartości: największą i najmniejszą funkcji f w przedziale $\langle 0; 3 \rangle$.

c) wyznacz wzór funkcji f w postaci iloczynowej.



Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

31. Dana jest funkcja $f(x) = -x^2 + 4x - 2$.

a) Przedstaw funkcję f w postaci kanonicznej.

b) Naskicuj wykres funkcji f .

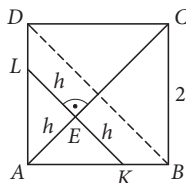
c) Określ, dla jakich argumentów wartości funkcji są mniejsze od -14 .

d) Przedstaw funkcję f w postaci iloczynowej.

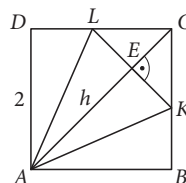
32. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f są liczby -2 i 4 , a zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $(-\infty; 3)$. Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej.

40. Przedstawmy treść zadania na rysunkach. Niech $h = |AE|$:

$0 < h \leq \sqrt{2}$
 $P_{\triangle AKL} = h^2$



lub

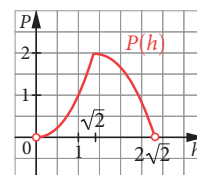


$\sqrt{2} < h < 2\sqrt{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow |EC| = |EK| = |EL| =$
 $= 2\sqrt{2} - h$
 $P_{\triangle AKL} = h(2\sqrt{2} - h)$

$P(h)$ – funkcja przedstawiająca pole $\triangle AKL$ w zależności od h

$$P(h) = \begin{cases} h^2 & \text{gdy } h \in (0, \sqrt{2}) \\ -h^2 + 2\sqrt{2}h & \text{gdy } h \in (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) \end{cases}$$

Jej wykres:



Największe pole jest dla $h = \sqrt{2}$.

33. Wyznacz miejsca zerowe funkcji kwadratowej f . Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji oraz punktu P przecięcia paraboli z osią y . Naszkicuj ten wykres.

a) $f(x) = -x^2 - 6x - 5$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$

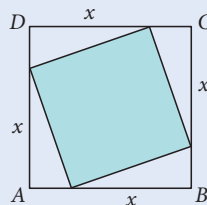
34. Rozłóż liczbę 11 na sumę takich trzech składników, że drugi jest o 3 większy od połowy pierwszego, a suma kwadratów wszystkich trzech składników jest możliwie najmniejsza.

35. Sklep kupuje w hurtowni buty po 80 zł za parę i sprzedaje średnio 30 par miesięcznie po 120 zł za parę. Zaobserwowano, że każda kolejna obniżka ceny pary butów o 1 zł zwiększa sprzedaż miesięczną o 1 parę. Jaką cenę butów powinien ustalić sprzedawca, aby jego zysk miesięczny był największy?

36. W prostokącie o wymiarach $a \text{ cm} \times b \text{ cm}$ jeden bok zwiększono o $x \text{ cm}$, a drugi zmniejszono o $x \text{ cm}$. Dla jakiej wartości x pole otrzymanego prostokąta będzie największe?

37. Suma długości boku trójkąta i wysokości opuszczonej na ten bok wynosi 10 cm. Ile centymetrów powinien mierzyć bok, a ile wysokość, aby pole takiego trójkąta było największe?

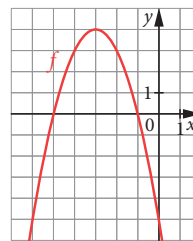
- D 38.** Bok kwadratu $ABCD$ jest równy a . Na każdym z boków tego kwadratu odłożono odcinek o długości x (jak na rysunku). Wykaż, że pole pokolorowanego obszaru jest najmniejsze, gdy $x = \frac{a}{2}$.



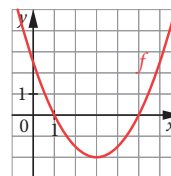
- * **39.** Suma obwodów kwadratu i prostokąta o stosunku boków 2 : 1 wynosi 12. Jaką najmniejszą wartość może przyjąć suma pól tych figur?
- * **40.** W kwadrat $ABCD$ o boku 2 wpisano trójkąt równoramienny AKL w taki sposób, że wysokość trójkąta zawarta jest w przekątnej AC . Zapisz pole tego trójkąta jako funkcję jego wysokości h . Narysuj wykres tej funkcji. Wyznacz wysokość trójkąta o największym polu.

41. Grupa uczniów zorganizowała turniej. Każdy z uczestników rozegrał z każdym z pozostałych uczestników 2 partie. Rozegrano 72 partie. Ilu uczniów wzięło udział w turnieju?

33. a) miejsca zerowe: $-5, -1$;
 $W = (-3, 4)$, $P = (0, -5)$



b) miejsca zerowe: $1, 5$;
 $W = (3, -2)$, $P = (0, \frac{5}{2})$



34. $11 = 3 + \frac{9}{2} + \frac{7}{2}$

35. 115 zł

36. $x = \frac{|a-b|}{2} \text{ cm}$

37. bok: 5 cm, wysokość: 5 cm

38. $P(x) = a^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}x(a-x)$,

$D = (0; a)$

$P = P(x) = a^2 - 2ax + 2x^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$

Pole obszaru P jest najmniejsze, gdy funkcja $P(x)$ przyjmuje najmniejszą wartość, czyli gdy

$x = \frac{2a}{4} = \frac{a}{2}$.

40. Patrz s. 56.

41. 9 uczniów

39. x – długość boku kwadratu, y – długość krótszego boku prostokąta, $x > 0$, $y > 0$

$4x + 6y = 12 \Leftrightarrow 2$, więc $y = 2 - \frac{2}{3}x$

$(x > 0 \wedge 2 - \frac{2}{3}x > 0) \Rightarrow (x \in (0; 3))$

$P_k + P_p = P(x) = x^2 + 2y^2 = x^2 + 2\left(2 - \frac{2}{3}x\right)^2$

$P(x) = \frac{17}{9}x^2 - \frac{16}{3}x + 8$, $D = (0; 3)$

Suma pól tych figur jest najmniejsza, gdy: $x = \frac{\frac{16}{3}}{\frac{34}{9}} = \frac{16}{3} \cdot \frac{9}{34} = \frac{24}{17}$; wówczas $y = 2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{24}{17} = \frac{18}{17}$

Najmniejsza i największa wartość sumy tych figur jest równa:

$\frac{24}{17} \cdot \frac{24}{17} + 2 \cdot \frac{18}{17} \cdot \frac{18}{17} = \frac{576 + 648}{17^2} = \frac{1224}{17 \cdot 17} = \frac{72 \cdot 17}{17 \cdot 17} = \frac{72}{17}$

Odp.: $4\frac{4}{17}$ – najmniejsza wartość sumy pól tych figur.

42. 22, 24, 33

43. $a = 80$ lub $a = 20$

44. $m = 8\frac{3}{4}$

45. $p = 2$, $q = -2$

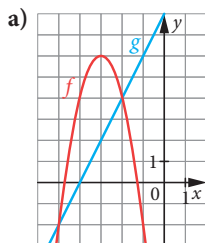
46. a) np. $x^2 - 2x - 1 = 0$

b) np. $x^2 - 6x + 2 = 0$

47. a) -1, 1, 3

b) brak

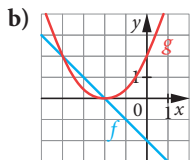
48.



I. $x \in (-5; -2)$

II. $x \in (-\infty; -5) \cup (-2; \infty)$

III. $x \in \{-5, -2\}$

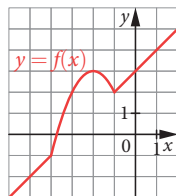


I. $x \in (-4; -2)$

II. $x \in (-\infty; -4) \cup (-2; \infty)$

III. $x \in \{-4, -2\}$

49.



1 rozwiązanie dla

$m \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$,

2 rozwiązania dla $m = 2$ lub

$m = 3$,

3 rozwiązania dla $m \in (2; 3)$

42. Dane są trzy liczby naturalne takie, że największa z nich stanowi 150% najmniejszej, a trzecia liczba jest o 2 większa od najmniejszej. Suma kwadratów wszystkich trzech liczb jest równa 2149. Wyznacz te liczby.

43. Jeśli liczbę a zmniejszymy o $a\%$, otrzymamy 16. Wyznacz liczbę a .

44. Dla jakiej wartości m zbiorem wartości funkcji $f(x) = 3x^2 + 15x + m$ jest przedział $(-10; \infty)$?

45. Funkcja $f(x) = 2(x - p)^2 + q$ przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x \in (1; 3)$. Wyznacz p i q .

46. Ułóż równanie kwadratowe o całkowitych współczynnikach, którego jednym z pierwiastków jest podana liczba.

a) $1 - \sqrt{2}$

b) $3 + \sqrt{7}$

47. Wyznacz (jeśli istnieją) miejsca zerowe funkcji.

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{dla } x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 12x + 19 & \text{dla } x < -2 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{dla } -2 \leq x \leq 0 \\ 2x^2 + 4x + 3 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

48. Dane są funkcje $y = f(x)$ i $y = g(x)$. Sporządź wykresy obu funkcji w jednym układzie współrzędnych i odczytaj z rysunku rozwiązania nierówności lub równania:

I. $f(x) > g(x)$,

II. $f(x) < g(x)$,

III. $f(x) = g(x)$.

Rozwiąż nierówność $f(x) > g(x)$ sposobem rachunkowym.

a) $f(x) = -2x^2 - 12x - 12$

$g(x) = 2x + 8$

b) $f(x) = -x - 2$

$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$

49. Narysuj wykres funkcji

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2)^2 + 3 & \text{dla } x \in \langle -4; -1 \rangle \\ x+3 & \text{dla } x \in (-\infty; -4) \cup (-1; \infty) \end{cases}$$

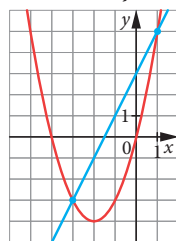
Odczytaj z wykresu liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m .

50. Rozwiąż układ równań. Przedstaw ilustrację graficzną rozwiązania.

$$a) \begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

50. a) $x = -3$, $y = -3$ lub $x = 1$, $y = 5$



b) $x = 3$, $y = 1$

