

Wielomiany i wyrażenia wymierne

2

Umiejętności

Po klasie pierwszej szkoły ponadpodstawowej uczeń:

- porządkuje jednomiany i dodaje jednomiany podobne (tzn. różniące się jedynie współczynnikiem liczbowym),
- dodaje i odejmuje sumy algebraiczne, dokonując przy tym redukcji wyrazów podobnych,
- mnoży sumy algebraiczne przez jednomiany i dodaje wyrażenia powstałe w wyniku mnożenia sum algebraicznych przez jednomiany,
- mnoży dwumian przez dwumian, dokonując redukcji wyrazów podobnych,
- sprawdza, czy dana liczba jest rozwiązaniem równania (stopnia pierwszego, drugiego lub trzeciego) z jedną niewiadomą,
- rozwiązuje metodą równań równoważnych równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą,
- rozwiązuje równania, które po prostych przekształceniach wyrażen algebraicznych sprowadzają się do równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą,
- rozwiązuje zadania tekstowe za pomocą równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą,
- przekształca proste wzory, aby wyznaczyć w nich zadaną wielkość.

Po tym dziale uczeń:

- zapisuje wielomiany o danych współczynnikach, porządkuje wielomiany i określa ich stopnie,
- oblicza wartość wielomianu dla danych argumentów,
- dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany,
- przekształca wielomiany, stosując wzory skróconego mnożenia,
- sprawdza, czy dana liczba jest pierwiastkiem wielomianu,
- odczytuje pierwiastki wielomianu z jego postaci iloczynowej,
- rozkłada wielomiany na czynniki z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia oraz metodą podstawiania i grupowania wyrazów,
- dzieli pisemnie wielomian przez dwumian,
- stosuje w zadaniach twierdzenie Bézouta i schemat Hornera,
- określa dziedzinę wyrażen wymiernych,
- wykonuje działania na wyrażeniach wymiernych,
- rozwiązuje równania wymierne prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych,
- wyznacza ze wzoru jedną zmienną w zależności od innych zmiennych.

Uwagi metodyczne

Na początku warto przypomnieć uczniom pojęcia: wyrażenie algebraiczne, suma algebraiczna, wyrazy sumy algebraicznej, współczynniki i zapisywanie różnych zależności w postaci wyrażen algebraicznych.

Uczniowie nie powinni mieć z tymi pojęciami większych trudności, gdyż zostały one dość dokładnie omówione w szkole podstawowej. Następnie należy się skoncentrować na określeniu funkcji wielomianowej.

1. Określenie funkcji wielomianowej

Umiejętności:

- stosowanie określenia wielomianu stopnia n jednej zmiennej

Przypomnijmy: skończoną sumę jednomianów nazywamy **sumą algebraiczną** lub **wielomianem**.

Składniki takiej sumy nazywamy jej **wyrazami**.

Przykładami sum algebraicznych są:

$$x + y, 3x^2 + 2x - 1, xy + x^3yt - 5y - 4, x^5 - \sqrt{7}z$$

Jednomian to pojedyncza zmienna lub liczba, lub ich iloczyn, np.:
3, $2x$, $\sqrt{5}xy$, $-x^3yz$, $\frac{3}{11}xyt^8$

Zajmiemy się teraz badaniem własności funkcji określanych za pomocą wielomianów. Jedną z liter występujących w wielomianie we wzorze funkcji (najczęściej x) wyróżnimy jako zmienną niezależną. Pozostałe litery będą oznaczały współczynniki. Zauważmy, że ogólne wzory funkcji liniowej i funkcji kwadratowej zmiennej x mają podobną strukturę:

$$f(x) = ax + b$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Gdybyśmy chcieli podać ogólny wzór funkcji – analogiczny do wymienionych – ale ze zmienną x w trzeciej potęgze, to zadanie nie byłoby trudne. Szukany wzór ma postać:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Następny, ze zmienną x w czwartej potęgze, to:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

Postępowanie to można kontynuować. W przypadku funkcji, w której x występuje w wyższej potęgze (np. dziesiątej), wypisanie wszystkich wyrazów może być uciążliwe. Radzimy sobie wówczas w ten sposób, że np. w wielomianie

$$f(x) = ax^{10} + bx^9 + cx^8 + dx^7 + ex^6 + fx^5 + gx^4 + hx^3 + ix^2 + jx + k$$

zamiast kilku środkowych wyrazów wpisujemy wielokropek:

$$f(x) = ax^{10} + bx^9 + cx^8 + \dots + ix^2 + jx + k$$

Z poważniejszym problemem spotkalibyśmy się natomiast podczas zapisywania ogólnego wzoru funkcji tego typu ze zmienną x na przykład w 30. potęgze. Zabrakłoby bowiem liter alfabetu na oznaczenie wszystkich współczynników. Dlatego przyjęto

ZZ i KPU

temat 2.1

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.1

**Generator**
testów i sprawdzianów

inny sposób oznaczania tych liczb. Współczynniki przy kolejnych potęgach x oznaczone są jedną, ustaloną literą, ale opatrzoną numerem zgodnym ze stopniem potęgi, np. $a_{10}x^{10}$, a_5x^5 . Funkcję, w której najwyższą potęgą x jest 4, zapiszemy zatem ogólnie:

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Możemy używać dowolnej litery na oznaczenie współczynników, uwzględniając to, że litery x, y, t, z tradycyjnie oznaczają zmienne, np.:

$$f(x) = b_5x^5 + b_4x^4 + \dots + b_1x + b_0$$

$$g(t) = d_6t^6 + d_5t^5 + \dots + d_1t + d_0$$

Przykład 1 ◀ zad. 1.2

Funkcja $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ dla $a_3 = -2$, $a_2 = 0$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_0 = 5$ ma wzór:

$$f(x) = -2x^3 + \frac{1}{2}x + 5$$

Definicja

Funkcją wielomianową (wielomianem) stopnia n zmiennej x ($x \in \mathbf{R}$) nazywamy funkcję postaci

$$W(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

gdzie:

- n jest ustaloną dodatnią liczbą naturalną,
- $a_n \neq 0$,
- współczynniki $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi.

Ponadto przyjmujemy, że funkcja stała $W(x) = c$ ($c \neq 0$) jest **wielomianem stopnia 0**, a funkcja $W(x) = 0$ (stałe równa 0) jest **wielomianem zerowym** i nie ma stopnia.

Zgodnie z przyjętą definicją powiemy, że funkcja kwadratowa jest wielomianem stopnia drugiego, funkcja liniowa ze współczynnikiem przy x różnym od zera – wielomianem stopnia pierwszego, funkcja stała, ale różna od zera – wielomianem stopnia zerowego. Wiemy już, że wykresami wielomianu zerowego oraz wielomianów stopnia zerowego i pierwszego są proste, a wykresami wielomianów stopnia drugiego – parabole. Wykresy wielomianów jednej zmiennej wyższych stopni są bardziej skomplikowane.

Słowa „wielomian” będziemy używali w tym podręczniku w dwóch znaczeniach. Nie powinno to prowadzić do nieporozumień, gdyż z kontekstu będzie wynikało, czy chodzi o sumę algebraiczną czy o funkcję.

◀1.2. Dane są wszystkie współczynniki wielomianu. Zapisz ten wielomian w postaci $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Określ jego stopień.

a) $a_5 = 7$, $a_4 = 1$, $a_3 = 2$, $a_2 = -5$, $a_1 = 2$, $a_0 = -1$

b) $a_3 = 2$, $a_2 = -5$, $a_1 = -1$, $a_0 = 11$

c) $a_5 = -\frac{1}{2}$, $a_4 = a_3 = 0$, $a_2 = a_1 = a_0 = 1$

d) $a_3 = a_2 = a_1 = -\sqrt{2}$, $a_0 = 0$

Odp.: a) $7x^5 + x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1$, stopień wielomianu: 5

b) $2x^3 - 5x^2 - x + 11$, stopień wielomianu: 3

c) $-\frac{1}{2}x^5 + x^2 + x + 1$, stopień wielomianu: 5

d) $-\sqrt{2}x^3 - \sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}x$, stopień wielomianu: 3

◀1.3. Wypisz wszystkie współczynniki oraz określ stopień podanego wielomianu.

a) $T(x) = -5x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 1$

b) $Q(x) = -4x^4 + 6x^2 - 7x + 2$

c) $P(x) = \sqrt{2}x - 1$

d) $M(x) = \frac{1}{13}x^{10} + \frac{1}{12}x^5 + 2$

e) $K(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x + 5$

f) $H(x) = 5\sqrt{2}$

Odpo.: a) $a_4 = -5$, $a_3 = 3$, $a_2 = 2$,

$a_1 = -1$, $a_0 = 1$,

stopień wielomianu: 4

b) $a_4 = -4$, $a_3 = 0$, $a_2 = 2$,

$a_1 = -7$, $a_0 = 2$,

stopień wielomianu: 4

c) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_0 = -1$,

stopień wielomianu: 1

d) $a_{10} = \frac{1}{13}$, $a_9 = a_8 = a_7 = a_6 = 0$,

$a_5 = \frac{1}{12}$, $a_4 = a_3 = a_2 = a_1 = 0$,

$a_0 = 2$,

stopień wielomianu: 10

e) $a_3 = \frac{1}{4}$, $a_2 = 0$, $a_1 = -3$,

$a_0 = 5$,

stopień wielomianu: 3

f) $a_0 = 5\sqrt{2}$,

stopień wielomianu: 0

Przykład 2 ◀ zad. 1.3

Określmy stopień podanego wielomianu i wypiszemy jego współczynniki.

a) $W(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 5$

b) $P(x) = x^4 - \frac{1}{2}x + \sqrt{2}$

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia takie jak w definicji, czyli

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

a) $W(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 5$

Stopień wielomianu W jest równy 3; $a_3 = 4$, $a_2 = -2$, $a_1 = 3$, $a_0 = -5$.

b) $P(x) = x^4 - \frac{1}{2}x + \sqrt{2}$

Stopień wielomianu P jest równy 4; $a_4 = 1$, $a_3 = a_2 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_0 = \sqrt{2}$.

Definicja

Jednomianem stopnia n zmiennej x ($x \in \mathbf{R}$) nazywamy jednomian postaci ax^n , gdzie n jest ustaloną dodatnią liczbą naturalną oraz współczynnik $a \neq 0$.

Jednomian postaci c ($c \neq 0$) nazywamy **jednomianem stopnia zero**, a jednomian 0 (stałe równy 0) jest **jednomianem zerowym** i nie ma stopnia.

Zauważmy, że funkcja $f(x) = 0$ (stałe równa 0) jest zarówno funkcją liniową, jak i wielomianem zerowym oraz jednomianem zerowym.

Przykład 3

$3x^5$ – jednomian stopnia piątego zmiennej x ,

$-\frac{1}{3}t$ – jednomian stopnia pierwszego zmiennej t ,

$(3 - \sqrt{5})x^{11}$ – jednomian stopnia jedenastego zmiennej x .

$2x^{-3}$ nie jest jednomianem, ponieważ $-3 \notin \mathbf{N}$.

Jednomiany tego samego stopnia tej samej zmiennej są **jednomianami podobnymi**. Jednomiany podobne można dodawać; czynność tę nazywamy **redukcją wyrazów podobnych**. Wynikiem takiego działania jest jednomian, np.:

$$3x^5 + 4x^5 = 7x^5$$

$$-x^3 + \sqrt{3}x^3 + 5x^3 = (4 + \sqrt{3})x^3$$

$$x^7 - 3x^7 + 2x^7 = 0$$

Wielomiany tradycyjnie oznaczamy wielkimi literami z końca alfabetu W, P, Q itp.



Jeżeli jednak stopnie jednomianów są różne, to ich suma nie jest już jednomianem, lecz wielomianem, np. $2x^4 - 7x + \sqrt{2}$.

Porządkowanie wielomianu polega na dodaniu wszystkich jednomianów podobnych, a następnie napisaniu wyrazów w porządku malejącym – od najwyższej do najniższej potęgi (lub rosnącym – czyli odwrotnie).

Przykład 4 ◀ zad. 1.4

Uporządkujemy wielomian $W(x) = 3x^3 - x + 2x^2 - 2x^3 + x - 17 + x^4 + 4$, określimy jego stopień i podamy współczynniki.

Rozwiązanie

$$W(x) = \underline{3x^3} - \underline{x} + \underline{2x^2} - \underline{2x^3} + \underline{x} - 17 + \underline{x^4} + \underline{4}$$

$$W(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 - 13$$

← redukujemy wyrazy podobne

Odp.: W jest wielomianem stopnia 4.

Jego współczynnikami są liczby:

$$a_4 = 1, a_3 = 1, a_2 = 2, a_1 = 0, a_0 = -13.$$

Współczynnik a_0 nazywamy
wyrazem wolnym wielomianu.



Przykład 5

Wysokość akwarium przedstawionego na zdjęciu nie przekracza 90 cm. Znajdziemy wzór i dziedzinę funkcji V opisującej pojemność tego akwarium w zależności od x .

Rozwiązanie

Pojemność akwarium wyraża się wzorem:

$$V(x) = (x - 7)(x + 3)(x - 4)$$



Wszystkie krawędzie mają dodatnie długości, a wysokość akwarium nie przekracza 90 cm. Warunki te możemy opisać za pomocą układu nierówności:

$$\begin{cases} x - 4 \leq 90 \\ x - 4 > 0 \\ x + 3 > 0 \\ x - 7 > 0 \end{cases}$$

Zatem $7 < x \leq 94$.

Po wymnożeniu czynników i uporządkowaniu wyrazów otrzymamy wielomian stopnia trzeciego $V(x) = x^3 - 8x^2 - 5x + 84$, którego dziedziną jest przedział $(7; 94]$. W rzeczywistości trudno sobie wyobrazić akwarium, którego jeden z boków miałby długość niewiele większą od zera – dziedzina funkcji wyznaczona została wyłącznie na podstawie teoretycznych rozważań.

◀ 1.4. Uporządkuj wielomian $W(x)$, określ jego stopień i podaj współczynniki.

a) $W(x) = -x^7 - 2x^3 + x^8 - x^3 - 1 - 4x + \sqrt{2}x$

d) $W(x) = 2x^5 - 8x + 7x^7 + 2x - 8\sqrt{5} - 3x^5$

b) $W(x) = 3x^2 - 5\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} - 7x^5 + x^2 - 2\sqrt{3}x$

e) $W(x) = \sqrt{5}x^5 + 2\sqrt{2}x^2 - 3x + 4x^4 - 2\sqrt{5}x^5$

c) $W(x) = \frac{1}{2}x^6 - 2x^3 + 3 - 1\frac{1}{4}x^6 + x^3 + 2x^4$

f) $W(x) = 11x - 9x^2 + 1\frac{1}{3}x^4 + 2x^2 - x + 2$

Odp.: a) stopień wielomianu: 8, $a_8 = 1$, $a_7 = -1$, $a_6 = a_5 = a_4 = 0$, $a_3 = -3$, $a_2 = 0$, $a_1 = \sqrt{2} - 4$, $a_0 = -1$

b) stopień wielomianu: 5, $a_5 = -7$, $a_4 = a_3 = 0$, $a_2 = 4$, $a_1 = -7\sqrt{3}$, $a_0 = 2\sqrt{3}$

c) stopień wielomianu: 6, $a_6 = -\frac{3}{4}$, $a_5 = 0$, $a_4 = 2$, $a_3 = -1$, $a_2 = a_1 = 0$, $a_0 = 3$

d) stopień wielomianu: 7, $a_7 = 7$, $a_6 = 0$, $a_5 = -1$, $a_4 = a_3 = a_2 = 0$, $a_1 = -6$, $a_0 = -8\sqrt{5}$

e) stopień wielomianu: 5, $a_5 = -\sqrt{5}$, $a_4 = 4$, $a_3 = 0$, $a_2 = 2\sqrt{2}$, $a_1 = -3$, $a_0 = 0$

f) stopień wielomianu: 4, $a_4 = 1\frac{1}{3}$, $a_3 = 0$, $a_2 = -7$, $a_1 = 10$, $a_0 = 2$

Definicja

Funkcje f i g są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają identyczne dziedziny i każdemu argumentowi funkcja f przyporządkowuje taką samą wartość jak funkcja g .

Popatrzmy na dwa wielomiany W i Q :

$$W(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 3, \quad Q(x) = 2x^4 - x^3 - 2x - 3$$

i porównajmy ich wartości dla $x = 0$, $x = 1$ i $x = 2$.

$$W(0) = 0^5 + 0^4 - 3 \cdot 0^3 - 3 = -3$$

$$Q(0) = 2 \cdot 0^4 - 0^3 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$$

$$W(0) = Q(0)$$

$$W(1) = 1^5 + 1^4 - 3 \cdot 1^3 - 3 = -4$$

$$Q(1) = 2 \cdot 1^4 - 1^3 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$$

$$W(1) = Q(1)$$

$$W(2) = 2^5 + 2^4 - 3 \cdot 2^3 - 3 = 21$$

$$Q(2) = 2 \cdot 2^4 - 2^3 - 2 \cdot 2 - 3 = 17$$

$$W(2) \neq Q(2)$$

Wielomiany W i Q nie są równe, ponieważ nie przyjmują jednakowych wartości dla wszystkich argumentów.

Podamy teraz (bez dowodu) twierdzenie dotyczące wielomianów równych.

Twierdzenie

Wielomiany W i Q są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają jednakowe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej.

Jeśli więc wielomiany różnią się na przykład współczynnikami przy x^3 , to tej różnicy nie można nadrobić, dobierając odpowiednio współczynniki przy innych potęgach.

Przykład 6 ◀ zad. 1.10

Czy można dobrać współczynnik k tak, aby wielomiany W i P były równe, jeżeli

$$W(x) = x^3 - 3x^2 + x - 5 \quad \text{i} \quad P(x) = x^3 + kx^2 + kx - 5?$$

Rozwiązanie

Oba wielomiany są trzeciego stopnia i mają równe współczynniki przy x^3 oraz jednakowe wyrazy wolne. Aby zgadzały się współczynniki przy x^2 , musimy przyjąć, że

◀1.10. Czy można dobrać taką wartość m , aby wielomiany P i Q były równe? Jeśli tak, podaj tę wartość.

a) $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

$$Q(x) = x^3 - 2x^2 + mx + 1$$

b) $P(x) = x^4 + 5x^3 - mx - 7$

$$Q(x) = x^4 + mx^3 - 5x - 7$$

c) $P(x) = x^3 - mx^2 + x - 3$

$$Q(x) = mx^3 + x^2 + x - 3$$

d) $P(x) = 3(m-1)x^2 - (1-m)x + m$

$$Q(x) = 2mx^2 + 2x + m$$

e) $P(x) = x^5 - mx^4 + 5x - 1$

$$Q(x) = mx^5 + x^4 + 5x - 1$$

f) $P(x) = (2-m)x^4 - (2+m)x^3 + 2m$

$$Q(x) = (2+3m)x^4 - 2x^3 + m$$

Odp.: a) $m = 3$ b) $m = 5$ c) nie d) $m = 3$ e) nie f) $m = 0$

$k = -3$. Wówczas $P(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 5$. Wtedy jednak nie są równe współczynniki przy x .

Odp.: Nie można dobrać takiej liczby k , aby W i P były równe.

Przykład 7 ◀ zad. 1.11

Wyznamy liczby a i b tak, aby wielomiany:

$$W(x) = ax^3 - 2x^2 - 2 \text{ i } P(x) = -x^3 - 2x^2 + bx - 2$$

były równe.

Rozwiązanie

Współczynniki przy x^2 i wyrazy wolne tych wielomianów są równe, więc aby wielomiany W i P były równe, współczynniki przy x^3 i współczynniki przy x w obu wielomianach też muszą być równe.

Odp.: $a = -1$, $b = 0$

Zadania

1.1. Spośród podanych wyrażeń wybierz wszystkie wielomiany i zapisz je w zeszycie.

A. $x^3 + 2x - 1$

E. $\frac{1}{t} + 1$

B. $x - \frac{1}{2}$

F. $\sqrt{2}t^2 - \sqrt{3}t - \sqrt{5}$

C. $3x^2 + 2x^{-3}$

G. $-\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 7$

D. $\frac{1}{2}t^2 - 7t + \frac{5}{3}$

H. $\frac{\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{\sqrt{2}}{3}x^2 - 2$

1.2. Dane są wszystkie współczynniki wielomianu. Zapisz ten wielomian w postaci $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Określ jego stopień.

a) $a_5 = 7$, $a_4 = 1$, $a_3 = 2$, $a_2 = -5$, $a_1 = 2$, $a_0 = -1$

b) $a_3 = 2$, $a_2 = -5$, $a_1 = -1$, $a_0 = 11$

c) $a_5 = -\frac{1}{2}$, $a_4 = a_3 = 0$, $a_2 = a_1 = a_0 = 1$

d) $a_3 = a_2 = a_1 = -\sqrt{2}$, $a_0 = 0$

1.3. Wypisz wszystkie współczynniki oraz określ stopień podanego wielomianu.

a) $T(x) = -5x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 1$

d) $M(x) = \frac{1}{13}x^{10} + \frac{1}{12}x^5 + 2$

b) $Q(x) = -4x^4 + 6x^2 - 7x + 2$

e) $K(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x + 5$

c) $P(x) = \sqrt{2}x - 1$

f) $H(x) = 5\sqrt{2}$

◀ **1.11.** Dobierz liczby a i b tak, aby wielomiany W i R były równe.

a) $W(x) = 2x^4 - 3x^3 + ax^2 - 2x + 6$

$R(x) = 2x^4 + bx^3 - 7x^2 - 2x + 6$

b) $W(x) = x^3 + (a + 2b)x^2 + x + 1$

$R(x) = x^3 + 3x^2 + (3a + b)x + 1$

c) $W(x) = 3x^3 - 7x^2 + (3a - b)x + a + 3b - 10$

$R(x) = 3x^3 - 7x^2 + x + 3 - 2(a + b)$

d) $W(x) = 5x^3 + 2a(a - 2)x^2 - (7 - 5a)x + 8a$

$R(x) = 5x^3 + (b + 2)x^2 + (4b + 1)x$

e) $W(x) = -2ax^3 - (1 + b)x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x$

$R(x) = (b - 3)x^3 + a(a - 3)x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x$

f) $W(x) = -(2a^2 - 7a)x^3 + (1 + b)x + a + 3$

$R(x) = 3(3 - b)x^3 + a(a - 1)x + a^2 + b$

Odp.: a) $a = -7$, $b = -3$ b) $a = -\frac{1}{5}$, $b = \frac{8}{5}$ c) $a = 1$, $b = 2$ d) $a = 0$, $b = -2$

e) $a = 1$, $b = 1$ lub $a = 4$, $b = -5$ f) $a = 2$, $b = 1$

Odpowiedzi i rozwiązania

1.1. A, B, D, F, G, H

1.2. a) $7x^5 + x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1$,
stopień wielomianu: 5

b) $2x^3 - 5x^2 - x + 11$,
stopień wielomianu: 3

c) $-\frac{1}{2}x^5 + x^2 + x + 1$,
stopień wielomianu: 5

d) $-\sqrt{2}x^3 - \sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}x$,
stopień wielomianu: 3

1.3. a) $a_4 = -5$, $a_3 = 3$, $a_2 = 2$,
 $a_1 = -1$, $a_0 = 1$,
stopień wielomianu: 4

b) $a_4 = -4$, $a_3 = 0$, $a_2 = 6$,
 $a_1 = -7$, $a_0 = 2$,
stopień wielomianu: 4

c) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_0 = -1$,
stopień wielomianu: 1

d) $a_{10} = \frac{1}{13}$, $a_9 = a_8 = a_7 = a_6 = 0$,

$a_5 = \frac{1}{12}$, $a_4 = a_3 = a_2 = a_1 = 0$,
 $a_0 = 2$,
stopień wielomianu: 10

e) $a_3 = \frac{1}{4}$, $a_2 = 0$, $a_1 = -3$,
 $a_0 = 5$,
stopień wielomianu: 3

f) $a_0 = 5\sqrt{2}$,
stopień wielomianu: 0

- 1.4. a)** stopień wielomianu: 8,
 $a_8 = 1$, $a_7 = -1$, $a_6 = a_5 = a_4 = 0$,
 $a_3 = -3$, $a_2 = 0$, $a_1 = \sqrt{2} - 4$,
 $a_0 = -1$
b) stopień wielomianu: 5,
 $a_5 = -7$, $a_4 = a_3 = 0$, $a_2 = 4$,
 $a_1 = -7\sqrt{3}$, $a_0 = 2\sqrt{3}$
c) stopień wielomianu: 6,
 $a_6 = -\frac{3}{4}$, $a_5 = 0$, $a_4 = 2$, $a_3 = -1$,
 $a_2 = a_1 = 0$, $a_0 = 3$
d) stopień wielomianu: 7,
 $a_7 = 7$, $a_6 = 0$, $a_5 = -1$,
 $a_4 = a_3 = a_2 = 0$, $a_1 = -6$,
 $a_0 = -8\sqrt{5}$
e) stopień wielomianu: 5,
 $a_5 = -\sqrt{5}$, $a_4 = 4$, $a_3 = 0$,
 $a_2 = 2\sqrt{2}$, $a_1 = -3$, $a_0 = 0$
f) stopień wielomianu: 4,
 $a_4 = \frac{1}{3}$, $a_3 = 0$, $a_2 = -7$, $a_1 = 10$,
 $a_0 = 2$

- 1.5. a)** np. $5x^5 - 3x^3 + x$
b) np. $3\sqrt{7}$
c) np. $x^{100} - x^{99} + 1$
d) np. $3x^{3030} - 2x^2 + x + 3$

- 1.6. a)** np. $3x^4 + 2x + 2$
b) np. $2x^3 + x^2 + 5x$
c) np. $\sqrt{5}x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{2}$
d) np. $2x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 2x + 2$
e) np. $12x^7 + 2x^6 + 3x^5 + 4x^4 + 16x^3 + 8x^2 + 4x + 1$
f) np. $5x - 5$

- 1.7. a)** -22
b) $\sqrt{2}$
c) 0
d) -1
e) $\sqrt{2}$
f) 0

- 1.8. a)** $a_4 = 15$, $a_1 = -6$, $a_0 = -5$
b) $a_2 = -21$, $a_1 = 11$
c) $a_2 = 15$
d) $a_2 = 3(\sqrt{2} - 1)$
e) $a_2 = 3$, $a_1 = 8\sqrt{2}$
f) $a_6 = \frac{3}{4}$, $a_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_2 = 3$,
 $a_1 = 2\sqrt{2}$

1.4. Uporządkuj wielomian $W(x)$, określ jego stopień i podaj współczynniki.

- a) $W(x) = -x^7 - 2x^3 + x^8 - x^3 - 1 - 4x + \sqrt{2}x$
b) $W(x) = 3x^2 - 5\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} - 7x^5 + x^2 - 2\sqrt{3}x$
c) $W(x) = \frac{1}{2}x^6 - 2x^3 + 3 - 1\frac{1}{4}x^6 + x^3 + 2x^4$
d) $W(x) = 2x^5 - 8x + 7x^7 + 2x - 8\sqrt{5} - 3x^5$
e) $W(x) = \sqrt{5}x^5 + 2\sqrt{2}x^2 - 3x + 4x^4 - 2\sqrt{5}x^5$
f) $W(x) = 11x - 9x^2 + 1\frac{1}{3}x^4 + 2x^2 - x + 2$

1.5. Podaj przykład wielomianu stopnia n .

- a) $n = 5$ b) $n = 0$ c) $n = 100$ d) $n = 3030$

1.6. Podaj przykład wielomianu postaci $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, który jest stopnia

- a) czwartego i którego współczynniki a_1 i a_0 są równe.
b) trzeciego i którego współczynnik $a_0 = 0$.
c) drugiego i którego współczynniki są liczbami niewymiernymi.
d) piątego i którego współczynniki są liczbami parzystymi dodatnimi.
e) siódmego i którego współczynniki są różnymi dodatnimi dzielnikami liczby 48.
f) pierwszego i którego współczynniki są liczbami przeciwnymi.

1.7. Oblicz wartość wielomianu $W(x)$ dla $x = x_0$.

- a) $W(x) = 3x^7 - 25x^5 + x^3 - 1$ $x_0 = 1$
b) $W(x) = \sqrt{3}x^{15} - 17\sqrt{5}x^7 + 2x^4 - \sqrt{3}x^3 + \sqrt{2}$ $x_0 = 0$
c) $W(x) = 12x^5 + 3x^3 - 5x + 10$ $x_0 = -1$
d) $W(x) = x^4 - 2x^2 + \sqrt{3}x - 7$ $x_0 = \sqrt{3}$
e) $W(x) = x^6 - \sqrt{2}x^5 + x^4 - 2\sqrt{2}x^3 + x + 4$ $x_0 = \sqrt{2}$
f) $W(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 5\frac{1}{2}x + 1$ $x_0 = -2$

1.8. Wyznacz współczynniki wielomianu $W(x)$ tak, aby spełniony był podany warunek.

- a) $W(x) = 2x^5 - 3ax^4 + (a-1)x + 2a + 5$ $W(-1) = 14$
b) $W(x) = 6x^3 - 3(2m+1)x^2 + (3m+2)x - 4$ $W(m) = 2$
c) $W(x) = -7x^4 + (8a-1)x^2 + 3$ $W(\sqrt{2}) = 5$
d) $W(x) = -2x^3 - 3a(\sqrt{2}-1)x^2 + 2(\sqrt{2}-1)x - 4$ $W(-2) = 4(2\sqrt{2}+1)$
e) $W(x) = -3\sqrt{2}x^3 + (2a-1)x^2 + (3a+2)\sqrt{2}x + 3$ $W(\sqrt{2}) = 13$
f) $W(x) = \frac{1}{4}(a+1)x^6 + \frac{\sqrt{2}}{2}(a-1)x^3 + (2a-1)x^2 + a\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}$
 $W(-\sqrt{2}) = 6(1+\sqrt{2})$

1.9. Dla jakich wartości p wielomian $W(x)$ jest wielomianem:

I. zerowym, II. stopnia zero?

a) $W(x) = (p^2 - 1)x + p + 1$

b) $W(x) = (p^2 - 4)x + p - 2$

c) $W(x) = (p^2 - 9)x + p + 3$

1.10. Czy można dobrać taką wartość m , aby wielomiany P i Q były równe? Jeśli tak, podaj tę wartość.

a) $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ $Q(x) = x^3 - 2x^2 + mx + 1$

b) $P(x) = x^4 + 5x^3 - mx - 7$ $Q(x) = x^4 + mx^3 - 5x - 7$

c) $P(x) = x^3 - mx^2 + x - 3$ $Q(x) = mx^3 + x^2 + x - 3$

d) $P(x) = 3(m-1)x^2 - (1-m)x + m$ $Q(x) = 2mx^2 + 2x + m$

e) $P(x) = x^5 - mx^4 + 5x - 1$ $Q(x) = mx^5 + x^4 + 5x - 1$

f) $P(x) = (2-m)x^4 - (2+m)x^3 + 2m$ $Q(x) = (2+3m)x^4 - 2x^3 + m$

1.11. Dobierz liczby a i b tak, aby wielomiany W i R były równe.

a) $W(x) = 2x^4 - 3x^3 + ax^2 - 2x + 6$

$R(x) = 2x^4 + bx^3 - 7x^2 - 2x + 6$

b) $W(x) = x^3 + (a+2b)x^2 + x + 1$

$R(x) = x^3 + 3x^2 + (3a+b)x + 1$

c) $W(x) = 3x^3 - 7x^2 + (3a-b)x + a + 3b - 10$

$R(x) = 3x^3 - 7x^2 + x + 3 - 2(a+b)$

d) $W(x) = 5x^3 + 2a(a-2)x^2 - (7-5a)x + 8a$

$R(x) = 5x^3 + (b+2)x^2 + (4b+1)x$

e) $W(x) = -2ax^3 - (1+b)x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x$

$R(x) = (b-3)x^3 + a(a-3)x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x$

f) $W(x) = -(2a^2 - 7a)x^3 + (1+b)x + a + 3$

$R(x) = 3(3-b)x^3 + a(a-1)x + a^2 + b$

* **1.12.** Różne wielomiany W i Q spełniają warunki $W(0) = Q(0)$ oraz $W(1) = Q(1)$.

Podaj przykład takich wielomianów W i Q , mających

a) ten sam stopień.

b) różne stopnie.

* **1.13.** Dany wielomian $W(x)$ zapisz jako wielomian zmiennej z .

a) $W(x) = 16x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 16x + 3$ $z = 2x$

b) $W(x) = 9x^3 - 18x^2 + 15x - 1$ $z = 3x$

1.13. a) $W(x) = 16x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 16x + 3$, $z = 2x$

$W(x) = (2x)^4 - (2x)^3 + 2(2x)^2 - 8 \cdot 2x + 3$

Zatem: $W(z) = z^4 - z^3 + 2z^2 - 8z + 3$

b) $W(x) = 9x^3 - 18x^2 + 15x - 1$, $z = 3x$

$W(x) = \frac{1}{3}(3x)^3 - 2(3x)^2 + 5 \cdot 3x - 1$

Zatem: $W(z) = \frac{1}{3}z^3 - 2z^2 + 5z - 1$

1.9. a) I. $p = -1$ II. $p = 1$

b) I. $p = 2$ II. $p = -2$

c) I. $p = -3$ II. $p = 3$

1.10. a) $m = 3$ **b)** $m = 5$ **c)** nie

d) $m = 3$ **e)** nie **f)** $m = 0$

1.11. a) $a = -7$, $b = -3$

b) $a = -\frac{1}{5}$, $b = \frac{8}{5}$

c) $a = 1$, $b = 2$

d) $a = 0$, $b = -2$

e) $a = 1$, $b = 1$ lub $a = 4$, $b = -5$

f) $a = 2$, $b = 1$

1.12. a) np. $W(x) = x^5 - x + 1$,

$Q(x) = -x^5 + x + 1$

$W(0) = 1 = Q(0)$

i $W(1) = 1 = Q(1)$

b) np. $W(x) = x^2 + x$,

$Q(x) = 3x^3 - x$

$W(0) = 0 = Q(0)$

i $W(1) = 2 = Q(1)$


Prosto do matury
Prosto do matury

1. B
 2. A
 3. A
 4. P, F, P
 5. $2x^7 - 5x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}$,
stopień wielomianu: 7
 6. $a_2 = -14$, $a_1 = 12$, $a_0 = 8$
 7. $a = 5$, $b = 1$
1. Wskaż wartość wyrażenia $(2x - y)(2x + y) - 3(x - y)^2 - 2x(3y + x)$ dla $x = \sqrt{3}$ i $y = \sqrt{2}$.
A. 11 B. -11 C. -10 D. 12
 2. Jeden z wymiarów prostokąta jest równy $2x + 2y$. Obwód tego prostokąta wynosi $6x + 8y$. Jaki jest drugi wymiar prostokąta?
A. $x + 2y$ B. $3x - 2y$ C. $2x + y$ D. $2x + 3y$
 3. Wskaż wielomian, który otrzymamy po wykonaniu działań i redukcji wyrazów podobnych w wyrażeniu $3(x - 2) - [2(3x - 1) - 3]$.
A. $-1 - 3x$ B. $-3x$ C. $1 - 3x$ D. $2x - 1$
 4. Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Wyrażenie $2\sqrt{x} - 3$ nie jest wielomianem.
B. Wyrażenie $2x^3 - 3x^2 + x - \frac{1}{x} + 5$ jest wielomianem stopnia trzeciego.
C. Dla $m = 3 + \sqrt{2}$ wielomiany $P(x) = x^3 - 2\sqrt{3}x^2 + 3x + m - \sqrt{2} - 2$ i $Q(x) = x^3 - 2\sqrt{3}x^2 + (m - \sqrt{2})x + 1$ są równe.
 5. Dane są wartości wszystkich współczynników wielomianu: $a_7 = 2$, $a_6 = a_4 = 0$, $a_5 = -5$, $a_3 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = a_1 = a_0 = \sqrt{2}$. Napisz ten wielomian w postaci $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Określ jego stopień.
 6. Wyznacz współczynniki wielomianu $W(x) = x^3 + 2(3a - 1)x^2 + (a^2 - 4a)x + 2a^2$ tak, aby spełniony był warunek $W(2) = -16$.
 7. Jeżeli to możliwe, dobierz liczby a i b tak, aby wielomiany $P(x) = ax^3 - 2bx^3 + 3x^2 - 2x + 5$ i $Q(x) = 3x^3 + 3x^2 - ax + 3bx + 5$ były równe.

2. Działania w zbiorze wielomianów

Umiejętności:

- dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów jednej zmiennej

W szkole podstawowej były omawiane i ćwiczone działania dodawania, odejmowania i mnożenia wyrażeń algebraicznych. Poznane zasady zastosujemy teraz do wykonywania różnych działań na wielomianach jednej zmiennej.

Dodawanie i odejmowanie wielomianów

Definicja

Jeżeli $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
i $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$, to:

sumą wielomianów $P(x) + Q(x)$ jest wielomian

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 + b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

a **różnicą wielomianów** $P(x) - Q(x)$ jest wielomian

$$Z(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 - b_m x^m - b_{m-1} x^{m-1} - \dots - b_1 x - b_0$$

W wielomianach $W(x)$ oraz $Z(x)$ należy zredukować wyrazy podobne.

Przykład 1 ◀ zad. 2.4

Dodamy wielomiany $P(x)$ i $Q(x)$.

- a) $P(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 13$ $Q(x) = -2x^4 + x^3 - x + 8$
b) $P(x) = \sqrt{3}x^7 - 3x + 1$ $Q(x) = x^4 - \sqrt{2}x^2 + 3x - 1$
c) $P(x) = 0,7x^5 - 3,5x^3 - \sqrt{2}$ $Q(x) = -0,7x^5 + 3,5x^3 + 2$

Rozwiązanie

- a) $P(x) + Q(x) = (x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 13) + (-2x^4 + x^3 - x + 8) =$
 $= -x^4 - x^3 + 5x^2 - 8x + 21$
b) $P(x) + Q(x) = (\sqrt{3}x^7 - 3x + 1) + (x^4 - \sqrt{2}x^2 + 3x - 1) =$
 $= \sqrt{3}x^7 - 3x + 1 + x^4 - \sqrt{2}x^2 + 3x - 1 = \sqrt{3}x^7 + x^4 - \sqrt{2}x^2$
c) $P(x) + Q(x) = (0,7x^5 - 3,5x^3 - \sqrt{2}) + (-0,7x^5 + 3,5x^3 + 2) =$
 $= 0,7x^5 - 3,5x^3 - \sqrt{2} - 0,7x^5 + 3,5x^3 + 2 = 2 - \sqrt{2}$

◀2.4. Wyznacz sumę $W + Q$ i różnicę $W - Q$ wielomianów W i Q .

- a) $W(x) = x^3 - x^2 + 6x - 2$,
 $Q(x) = 2x^3 - x^2 + x + 4$
b) $W(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 1$,
 $Q(x) = -4x^3 + 2x^2 - x + 5$
c) $W(x) = -3x^4 + 2x^3 - x + 3$,
 $Q(x) = x^5 + 4x^3 + 2x - 1$
d) $W(x) = 4x^5 - 6x^3 + 11$,
 $Q(x) = 4x^5 + 6x^3 + 3$
e) $W(x) = 12x^4 - 3x + 1$,
 $Q(x) = -5x^4 + 3x^2 - 1$
f) $W(x) = \frac{1}{2}x^5 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x$,
 $Q(x) = -\frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$
g) $W(x) = 0,3x^3 - 0,7x^2 + 0,1x + 3,1$,
 $Q(x) = -2,7x^3 + 1,7x^2 - 0,9x + 2,1$
h) $W(x) = 3x^4 - 0,2x^3 - x^2 + 1,1x - 7$,
 $Q(x) = 0,8x^3 + 2x^2 - 3,9x + 1$

Odp.:

- a) $W(x) + Q(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7x + 2$,
 $W(x) - Q(x) = -x^3 + 5x - 6$
b) $W(x) + Q(x) = -x^3 - 3x^2 + 6x + 4$,
 $W(x) - Q(x) = 7x^3 - 7x^2 + 8x - 6$
c) $W(x) + Q(x) =$
 $= x^5 - 3x^4 + 6x^3 + x + 2$,
 $W(x) - Q(x) =$
 $= -x^5 - 3x^4 - 2x^3 - 3x + 4$
d) $W(x) + Q(x) = 8x^5 + 14$,
 $W(x) - Q(x) = -12x^3 + 8$
e) $W(x) + Q(x) = 7x^4 + 3x^2 - 3x$,
 $W(x) - Q(x) = 17x^4 - 3x^2 - 3x + 2$
f) $W(x) + Q(x) =$
 $= \frac{1}{2}x^5 - \frac{3}{2}x^3 - x^2 - 2x - 1$,
 $W(x) - Q(x) =$
 $= \frac{1}{2}x^5 + \frac{3}{2}x^3 + 4x^2 - 3x + 1$
g) $W(x) + Q(x) =$
 $= -2,4x^3 + x^2 - 0,8x + 5,2$,
 $W(x) - Q(x) = 3x^3 - 2,4x^2 + x + 1$
h) $W(x) + Q(x) =$
 $= 3x^4 + 0,6x^3 + x^2 - 2,8x - 6$,
 $W(x) - Q(x) = 3x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 8$

ZZ i KPU

tematy 2.2, 2.3

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.2

 **Generator**
testów i sprawdzianów

◀ 2.4. Patrz s. 69.

Przykład 2 ◀ zad. 2.4

Od wielomianu $W(x) = 3x^4 - 6x^3 + 8x^2 - x + 3$ odejmiemy wielomian $R(x) = 3x^4 - x^3 + x^2 - 12x + 1$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} W(x) - R(x) &= (3x^4 - 6x^3 + 8x^2 - x + 3) - (3x^4 - x^3 + x^2 - 12x + 1) = \\ &= 3x^4 - 6x^3 + 8x^2 - x + 3 - 3x^4 + x^3 - x^2 + 12x - 1 = -5x^3 + 7x^2 + 11x + 2 \end{aligned}$$

W przykładzie 1a suma dwóch wielomianów stopnia czwartego jest wielomianem stopnia czwartego. W przykładzie 2 różnica dwóch wielomianów stopnia czwartego jest wielomianem stopnia trzeciego. Podamy jeszcze przykład dwóch wielomianów stopnia 100, których suma jest wielomianem zerowym.

$$\begin{aligned} W(x) &= 3x^{100} - 5x^{50} + 1 & W(x) + Q(x) &= 0 \\ Q(x) &= -3x^{100} + 5x^{50} - 1 \end{aligned}$$

Twierdzenie

Wielomian będący sumą (różnicą) dwóch wielomianów W i Q ma stopień nie większy od stopnia wielomianu W i stopnia wielomianu Q ; może on być również wielomianem zerowym.

Mnożenie wielomianów

Iloczyn dwóch wielomianów jest wielomianem będącym sumą wszystkich iloczynów wyrazów jednego wielomianu przez wyrazy drugiego wielomianu. Inaczej mówiąc, aby pomnożyć jeden wielomian przez drugi, każdy wyraz pierwszego wielomianu mnożymy przez każdy wyraz drugiego wielomianu, wyniki dodajemy, a następnie redukujemy wyrazy podobne.

Przykład 3 ◀ zad. 2.5

Pomnożymy wielomiany $W(x) = x^3 - x^2 + 6x - 1$ i $Q(x) = 3x^4 - x$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} W(x) \cdot Q(x) &= (x^3 - x^2 + 6x - 1)(3x^4 - x) = \\ &= 3x^7 - x^4 - 3x^6 + x^3 + 18x^5 - 6x^2 - 3x^4 + x = \\ &= 3x^7 - 3x^6 + 18x^5 - 4x^4 + x^3 - 6x^2 + x \end{aligned}$$

Iloczyn $W \cdot Q$ jest wielomianem stopnia siódmego.

W działaniach na wielomianach obowiązują wszystkie poznane wcześniej prawa działań. W szczególności – wzór na iloczyn potęg o tych samych podstawach, np.:

$$x^3 \cdot 3x^4 = 3x^{3+4} = 3x^7$$

◀ 2.5. Wyznacz iloczyn wielomianów S i R .

a) $S(x) = 2x^2 - 3$,

$R(x) = x - 1$

b) $S(x) = -3x^2 + 5x - 1$,

$R(x) = 2x + 1$

c) $S(x) = 5x^3 - 2x + 2$,

$R(x) = x - 1$

d) $S(x) = 7x^3 + 2x^2 - 3x + 2$,

$R(x) = 3x + 2$

e) $S(x) = 2x^4 + \sqrt{2}x^2 - 1$,

$R(x) = 3x - \sqrt{2}$

f) $S(x) = -x^3 + 2x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$,

$R(x) = \sqrt{3}x + 1$

Odp.: a) $2x^3 - 2x^2 - 3x + 3$

b) $-6x^3 + 7x^2 + 3x - 1$

c) $5x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 4x - 2$

d) $21x^4 + 20x^3 - 5x^2 + 4$

e) $6x^5 - 2\sqrt{2}x^4 + 3\sqrt{2}x^3 - 2x^2 - 3x + \sqrt{2}$

f) $-\sqrt{3}x^4 + (2\sqrt{3} - 1)x^3 - 4x^2 + \sqrt{3}x + 3$

Twierdzenie

Jeżeli W i Q są niezerowymi wielomianami, to stopień wielomianu $W \cdot Q$ będącego ich iloczynem jest sumą stopni wielomianów W i Q .

Przykład 4 ◀ zad. 2.9

Dane są wielomiany: $W(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$, $P(x) = -x^2 + 2x + 8$, $Q(x) = 2x^2 - 5x$.
Wyznaczmy wielomian $2 \cdot W(x) - P(x) \cdot Q(x)$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} 2W(x) - P(x) \cdot Q(x) &= 2(x^3 - 2x^2 + x - 3) - (-x^2 + 2x + 8)(2x^2 - 5x) = \\ &= 2x^3 - 4x^2 + 2x - 6 - (-2x^4 + 5x^3 + 4x^3 - 10x^2 + 16x^2 - 40x) = \\ &= 2x^3 - 4x^2 + 2x - 6 + 2x^4 - 9x^3 - 6x^2 + 40x = 2x^4 - 7x^3 - 10x^2 + 42x - 6 \end{aligned}$$

Podsumujmy:

wielomiany możemy dodawać, odejmować i mnożyć. Wynik takich działań jest zawsze wielomianem.

Zadania

W zadaniach 2.1–2.3 oceń prawdziwość podanych zdań.

2.1. Dane są wielomiany $W(x) = 3x^7 - 2x^5 + 4x - 1$ i $P(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 1$.

- A. Stopień wielomianu $W(x) \cdot P(x)$ jest równy 10.
- B. Stopień wielomianu $W(x) - P(x)$ jest równy 7.
- C. Wyraz wolny wielomianu $W(x) \cdot P(x)$ jest równy -1 .

2.2. Dane są dwa różne wielomiany $W(x)$ i $P(x)$, każdy piątego stopnia.

- A. Wielomian $W(x) - P(x)$ może być wielomianem zerowym.
- B. Wielomian $W(x) - P(x)$ może być wielomianem stopnia 3.
- C. Wielomian $W(x) + P(x)$ może być wielomianem zerowym.

2.3. Dane są trzy różne wielomiany $W(x)$, $P(x)$ i $Q(x)$, każdy szóstego stopnia.

- A. Wielomian $W(x) + P(x) + Q(x)$ może być wielomianem stopnia czwartego.
- B. Wielomian $W(x) + P(x) - Q(x)$ może być wielomianem zerowym.
- C. Wielomian $W(x) + P(x) \cdot Q(x)$ może być wielomianem zerowym.

◀ **2.9.** Dane są wielomiany:

$$P(x) = 2x - 3,$$

$$Q(x) = x^3 - x^2 + 2x + 3,$$

$$R(x) = 3x^2 - 5x + 1.$$

Wykonaj działania.

a) $P(x) \cdot R(x) - Q(x)$

b) $2P(x) \cdot Q(x) - 3R(x)$

c) $[P(x)]^2 - Q(x)$

d) $R(x) \cdot Q(x) - [P(x)]^2$

e) $[P(x)]^2 \cdot [-R(x)] + 2Q(x)$

f) $P(x) \cdot Q(x) \cdot R(x)$

Odp.: a) $5x^3 - 18x^2 + 15x - 6$

b) $4x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 15x - 21$

c) $-x^3 + 5x^2 - 14x + 6$

d) $3x^5 - 8x^4 + 12x^3 - 6x^2 - x - 6$

e) $-12x^4 + 58x^3 - 93x^2 + 61x - 3$

f) $6x^6 - 25x^5 + 48x^4 - 40x^3 +$

$-20x^2 + 45x - 9$

Odpowiedzi i rozwiązania

2.1. P, P, P

2.2. F, P, P

2.3. P, P, F

2.4. a) $W(x) + Q(x) =$
 $= 3x^3 - 2x^2 + 7x + 2,$
 $W(x) - Q(x) = -x^3 + 5x - 6$
b) $W(x) + Q(x) = -x^3 - 3x^2 + 6x + 4,$
 $W(x) - Q(x) = 7x^3 - 7x^2 + 8x - 6$
c) $W(x) + Q(x) =$
 $= x^5 - 3x^4 + 6x^3 + x + 2,$
 $W(x) - Q(x) =$
 $= -x^5 - 3x^4 - 2x^3 - 3x + 4$
d) $W(x) + Q(x) = 8x^5 + 14,$
 $W(x) - Q(x) = -12x^3 + 8$
e) $W(x) + Q(x) = 7x^4 + 3x^2 - 3x,$
 $W(x) - Q(x) = 17x^4 - 3x^3 - 3x + 2$
f) $W(x) + Q(x) =$
 $= \frac{1}{2}x^5 - \frac{3}{2}x^3 - x^2 - 2x - 1,$
 $W(x) - Q(x) =$
 $= \frac{1}{2}x^5 + \frac{3}{2}x^3 + 4x^2 - 3x + 1$
g) $W(x) + Q(x) =$
 $= -2,4x^3 + x^2 - 0,8x + 5,2,$
 $W(x) - Q(x) = 3x^3 - 2,4x^2 + x + 1$
h) $W(x) + Q(x) =$
 $= 3x^4 + 0,6x^3 + x^2 - 2,8x - 6,$
 $W(x) - Q(x) = 3x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 8$

2.5. a) $2x^3 - 2x^2 - 3x + 3$
b) $-6x^3 + 7x^2 + 3x - 1$
c) $5x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 4x - 2$
d) $21x^4 + 20x^3 - 5x^2 + 4$
e) $6x^5 - 2\sqrt{2}x^4 + 3\sqrt{2}x^3 - 2x^2 +$
 $-3x + \sqrt{2}$
f) $-\sqrt{3}x^4 + (2\sqrt{3} - 1)x^3 - 4x^2 +$
 $+ \sqrt{3}x + 3$

2.6. a) $-2x^4 - x^3 + 12x^2 + x - 10$
b) $6x^4 + x^3 + 12x^2 - x + 6$
c) $2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 2x - 12$
d) $x^4 - 12\frac{1}{6}x^3 + 8\frac{1}{2}x^2 - 7x + 3$
e) $\sqrt{2}x^4 - 9x^3 + 2(3\sqrt{2} + 2)x^2 +$
 $-2(\sqrt{2} + 8)x + 8$
f) $-\frac{\sqrt{3}}{3}x^4 + (\sqrt{3} + 1)x^3 - 8x^2 +$
 $+ 3(\sqrt{3} + 2)x - 6\sqrt{3}$

2.4. Wyznacz sumę $W + Q$ i różnicę $W - Q$ wielomianów W i Q .

a) $W(x) = x^3 - x^2 + 6x - 2$ $Q(x) = 2x^3 - x^2 + x + 4$
b) $W(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 1$ $Q(x) = -4x^3 + 2x^2 - x + 5$
c) $W(x) = -3x^4 + 2x^3 - x + 3$ $Q(x) = x^5 + 4x^3 + 2x - 1$
d) $W(x) = 4x^5 - 6x^3 + 11$ $Q(x) = 4x^5 + 6x^3 + 3$
e) $W(x) = 12x^4 - 3x + 1$ $Q(x) = -5x^4 + 3x^2 - 1$
f) $W(x) = \frac{1}{2}x^5 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x$ $Q(x) = -\frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$
g) $W(x) = 0,3x^3 - 0,7x^2 + 0,1x + 3,1$ $Q(x) = -2,7x^3 + 1,7x^2 - 0,9x + 2,1$
h) $W(x) = 3x^4 - 0,2x^3 - x^2 + 1,1x - 7$ $Q(x) = 0,8x^3 + 2x^2 - 3,9x + 1$

2.5. Wyznacz iloczyn wielomianów S i R .

a) $S(x) = 2x^2 - 3$ $R(x) = x - 1$
b) $S(x) = -3x^2 + 5x - 1$ $R(x) = 2x + 1$
c) $S(x) = 5x^3 - 2x + 2$ $R(x) = x - 1$
d) $S(x) = 7x^3 + 2x^2 - 3x + 2$ $R(x) = 3x + 2$
e) $S(x) = 2x^4 + \sqrt{2}x^2 - 1$ $R(x) = 3x - \sqrt{2}$
f) $S(x) = -x^3 + 2x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$ $R(x) = \sqrt{3}x + 1$

2.6. Wyznacz iloczyn wielomianów S i R .

a) $S(x) = 2x^2 + 3x - 5$ $R(x) = -x^2 + x + 2$
b) $S(x) = 3x^2 - x + 2$ $R(x) = 2x^2 + x + 3$
c) $S(x) = 4x^2 + 2x - 6$ $R(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$
d) $S(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$ $R(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x + 1$
e) $S(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 4x + 2$ $R(x) = 2x^2 - \sqrt{2}x + 4$
f) $S(x) = -\sqrt{3}x^2 + 3x - 6$ $R(x) = \frac{1}{3}x^2 - x + \sqrt{3}$

2.7. Wyznacz iloczyn wielomianów S i R .

a) $S(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$ $R(x) = -2x^3 + x - 3$
b) $S(x) = -x^3 - 3x^2 + x - 1$ $R(x) = 2x^3 - x^2 + 1$
c) $S(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + 1$ $R(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x + 2$
d) $S(x) = 2x^3 + \sqrt{2}x + 1$ $R(x) = -2x^3 + x^2 - x + 1$
e) $S(x) = \sqrt{3}x^3 + \sqrt{2}x^2 - 3$ $R(x) = x^3 - 3x + \sqrt{3}$
f) $S(x) = x^3 + x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x - 1$ $R(x) = 2x^3 + \sqrt{2}x + 1$

2.7. a) $-6x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 6x^2 + x - 3$
b) $-2x^6 - 5x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 2x^2 + x - 1$
c) $x^6 + 4x^5 - \frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 4x^2 - \frac{1}{2}x + 2$
d) $-4x^6 + 2x^5 - 2(\sqrt{2} + 1)x^4 + \sqrt{2}x^3 - (\sqrt{2} - 1)x^2 + (\sqrt{2} - 1)x + 1$
e) $\sqrt{3}x^6 + \sqrt{2}x^5 - 3\sqrt{3}x^4 - 3\sqrt{2}x^3 + \sqrt{6}x^2 + 9x - 3\sqrt{3}$
f) $2x^6 + 2x^5 + (\sqrt{2} - 1)x^3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}x - 1$

2.8. Dane są wielomiany: $W(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 5$, $P(x) = 2x^2 - x + 1$, $Q(x) = 5x + 2$. Wykonaj działania.

- a) $2W(x) + 3P(x) - Q(x)$ d) $2W(x) + 3[Q(x) - 2P(x)]$
 b) $2[W(x) - P(x)] + Q(x)$ e) $5Q(x) - [W(x) + 2P(x)]$
 c) $W(x) - [P(x) + 3Q(x)]$ f) $3[W(x) - 2P(x)] - [P(x) + 3W(x)]$

2.9. Dane są wielomiany: $P(x) = 2x - 3$, $Q(x) = x^3 - x^2 + 2x + 3$, $R(x) = 3x^2 - 5x + 1$. Wykonaj działania.

- a) $P(x) \cdot R(x) - Q(x)$ d) $R(x) \cdot Q(x) - [P(x)]^2$
 b) $2P(x) \cdot Q(x) - 3R(x)$ e) $[P(x)]^2 \cdot [-R(x)] + 2Q(x)$
 c) $[P(x)]^2 - Q(x)$ f) $P(x) \cdot Q(x) \cdot R(x)$

2.10. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$. Wykonaj działania i uporządkuj wyrazy w wielomianie $Q(x) = W(2) \cdot x^3 + 3x^2 - (W(x) - x + 1) \cdot x - W(3)$.

* **2.11.** Dane są wielomiany: $W(x) = 2x - 1$, $P(x) = x^2 - 3ax + b$, $Q(x) = 2x^3 - 7x^2 + (5a + b)x - 2a$. Wyznacz a i b tak, aby dla każdej liczby rzeczywistej x zachodziła równość $W(x) \cdot P(x) = Q(x)$.

2.12. Czy można tak dobrać współczynniki a i b , aby dla każdego $x \in \mathbf{R}$ zachodziła równość $W(x) = P(x) \cdot Q(x)$?

- a) $P(x) = 2x + a$ $Q(x) = 3x^2 + bx + 1$ $W(x) = 6x^3 + x^2 - 10x + 3$
 b) $P(x) = x^2 + ax + 5$ $Q(x) = 2x^2 + bx + 1$ $W(x) = 2x^4 - 5x^3 + 14x^2 - 8x + 5$
 c) $P(x) = x^2 - 3x + a$ $Q(x) = x^2 + bx - 2$ $W(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 10$

2.13. Dane są wielomiany $W(x) = 3x^2 - ax + b$, $P(x) = 2x + 3$, $Q(x) = -6x^3 + (1 + b)x^2 - 8bx + a - b$. Wyznacz a i b tak, aby wielomian $F(x) = W(x) \cdot P(x) + Q(x)$ był wielomianem zerowym.

* **2.14.** Przedstaw wielomian $W(x) = 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 5x + 4$ w postaci iloczynu dwóch wielomianów, z których jeden jest równy $Q(x) = x^2 - x + 1$.

2.15. Podaj przykład dwóch wielomianów stopnia piątego, których suma jest wielomianem stopnia trzeciego.

2.16. Podaj przykład dwóch wielomianów stopnia trzeciego, których różnica jest wielomianem stopnia zerowego.

D * **2.17.** Dane są wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ o współczynnikach całkowitych. Wiadomo, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniony jest warunek $W(x) \cdot P(x) = x^5$. Wykaż, że $W(1) = P(1)$.

2.17. $W(1)$ jest równe sumie współczynników wielomianu $W(x)$, bo jeżeli:

$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, to $W(1) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$.

Ponieważ $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami o współczynnikach całkowitych, to $W(1)$ i $P(1)$ są liczbami całkowitymi, jako sumy liczb całkowitych.

Jeżeli $W(x) \cdot P(x) = x^5$ dla $x \in \mathbf{R}$, to $W(1) \cdot P(1) = 1$.

Jeżeli iloczyn dwóch liczb całkowitych jest równy 1, to albo $W(1) = P(1) = 1$,

albo $W(1) = P(1) = -1$, co kończy dowód.

- 2.8. a)** $-2x^3 + 10x^2 - 10x + 11$
b) $-2x^3 + 5x + 10$
c) $-x^3 - 15x - 2$
d) $-2x^3 - 8x^2 + 19x + 10$
e) $x^3 - 6x^2 + 28x + 3$
f) $-14x^2 + 7x - 7$

- 2.9. a)** $5x^3 - 18x^2 + 15x - 6$
b) $4x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 15x - 21$
c) $-x^3 + 5x^2 - 14x + 6$
d) $3x^5 - 8x^4 + 12x^3 - 6x^2 - x - 6$
e) $-12x^4 + 58x^3 - 93x^2 + 61x - 3$
f) $6x^6 - 25x^5 + 48x^4 - 40x^3 + -20x^2 + 45x - 9$

2.10. $Q(x) = -x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 11$

2.11. $a = 1$, $b = 2$

2.12. a) tak: $a = 3$, $b = -4$
b) nie **c)** nie

2.13. $a = 4$, $b = -2$

2.14. $W(x) =$
 $= (x^2 - x + 1)(2x^2 + ax + b) =$
 $= 2x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x^2 + ax + b +$
 $- 2x^3 - ax^2 - bx =$
 $= 2x^4 - (2 - a)x^3 + (b + 2 - a)x^2 +$
 $+ (a - b)x + b$
 $W(x) = 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 5x + 4$
 Zatem otrzymujemy układ

$$\begin{cases} 2 - a = 3 & (1) \\ b + 2 - a = 7 & (2) \\ a - b = -5 & (3) \\ b = 4 & (4) \end{cases}$$

(1) $a = -1$,

(4) $b = 4$

Sprawdzamy, czy $a = -1$, $b = 4$ spełniają pozostałe równania:

(2) $L = 4 + 2 + 1 = 7$,

(3) $L = -1 - 4 = -5$

Odp.:

$$W(x) = (x^2 - x + 1)(2x^2 - x + 4)$$

2.15. np. $W(x) = 3x^5$,

$$Q(x) = -3x^5 + 2x^3 - 1$$

2.16. np. $W(x) = 5x^3 - 7x^2 + 6$,
 $P(x) = 5x^3 - 7x^2 - 2$

2.18. a) $W(x) + P(x) =$
 $= (a + b - 2)x^3 + (b - a)x^2 - 4$
 st. $(W(x) + P(x)) = 3 \Leftrightarrow a + b \neq 2$
 st. $(W(x) + P(x)) = 2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (a + b = 2 \wedge a \neq b) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (a + b = 2 \wedge a \neq 1)$
 st. $(W(x) + P(x)) = 0 \Leftrightarrow a = b = 1$
b) $W(x) + P(x) =$
 $= (a+b)x^3 - (2a+b+4)x^2 + (2+a)x + 1$
 st. $(W(x) + P(x)) = 3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (a + b \neq 0)$
 st. $(W(x) + P(x)) = 2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (a + b = 0 \wedge a \neq -4)$
 st. $(W(x) + P(x)) = 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (a = -4 \wedge b = 4)$

* **2.18.** Wyznacz stopień wielomianu $W(x) + P(x)$ w zależności od a i b .

a) $W(x) = ax^3 + bx^2 + x - 3$

$P(x) = (b - 2)x^3 - ax^2 - x - 1$

b) $W(x) = (a - 1)x^3 - (b + 4)x^2 + ax - 1$

$P(x) = (b + 1)x^3 - 2ax^2 + 2x + 2$

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Dane są wielomiany $W(x) = 5x^4 + 7x^3 - x + 2$ i $P(x) = -5x^4 + 2x - 1$. Wskaż wielomian równy wielomianowi $W(x) + P(x)$.

A. $5x^4 + 12x - 3$ B. $7x^3 + x + 1$ C. $2x^4 - x + 1$ D. $7x^3 - x + 1$

2. Dane są wielomiany $W(x) = 2x^3 - x + 1$ i $V(x) = -3x^2$. Wskaż wielomian równy wielomianowi $W(x) \cdot V(x)$.

A. $-6x^6 + 3x^2 - 3$ C. $-6x^5 + 3x^3 - 3x^2$
 B. $-2x^3 - 3x^2 - x + 1$ D. $6x^5 - 3x^3 + 3x^2$

3. Wskaż iloczyn równy wielomianowi $W(x) = x^6 - 2x^3 - 3$.

A. $(x^2 + 2)(x^4 + 3)$ C. $(x^3 - 3)(x^3 + 1)$
 B. $(x^3 - 2)(x^2 + 1)$ D. $(x^3 + 1)(x^2 - 3)$

4. Dane są wielomiany $W(x) = 2x^5 - 11x^3 + x - 3$ i $P(x) = -x^8 - 2x^5 + x^2$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Stopień wielomianu $W(x) \cdot P(x)$ jest równy 40.
 B. Stopień wielomianu $W(x) - P(x)$ jest równy 8.
 C. Wyraz wolny wielomianu $W(x) \cdot P(x)$ jest równy -3.

5. Dane są wielomiany: $W(x) = 4x^3 - 2x^2 - x + 3$, $Q(x) = 8x - 5$, $R(x) = x^2 + x + 2$. Wyznacz wielomian $P(x) = 3 \cdot W(x) - 2Q(x) \cdot R(x)$.

D **6.** Dane są wielomiany:

$W(x) = 3x^3 - 4x^2 + 7x - 2$, $Q(x) = -3x + 1$, $P(x) = x^2 - x + 2$

Wykaż, że wielomian $W(x) + Q(x) \cdot P(x)$ jest wielomianem zerowym.

7. Dane są wielomiany: $P(x) = ax + 1$, $Q(x) = x^2 + bx - 4$,
 $W(x) = -4x^3 - 19x^2 + 21x - 4$. Wyznacz współczynniki a i b tak, aby dla każdej liczby rzeczywistej x zachodziła równość $W(x) = P(x) \cdot Q(x)$.

Prosto do matury

1. B

2. C

3. C

4. F, P, F

5. $-4x^3 - 12x^2 - 25x + 29$

6. $W(x) + Q(x) \cdot P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 7x - 2 + (-3x + 1)(x^2 - x + 2) =$
 $= 3x^3 - 4x^2 + 7x - 2 - 3x^3 + 3x^2 - 6x + x^2 - x + 2 = 0$

7. $a = -4$, $b = 5$

3. Wzory skróconego mnożenia

Umiejętności:

- stosowanie wzorów skróconego mnożenia: $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3+b^3 , a^3-b^3

Podnoszenie wielomianu do potęgi (o dodatnim wykładniku naturalnym) jest, podobnie jak potęgowanie liczb, innym zapisem mnożenia.

Przykład 1 ◀ zad. 3.3

Podnieśmy do trzeciej potęgi wielomian $W(x) = x^3 - 2$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}(W(x))^3 &= (x^3 - 2)^3 = (x^3 - 2)^2(x^3 - 2) = (x^6 - 4x^3 + 4)(x^3 - 2) = \\ &= x^9 - 2x^6 - 4x^6 + 8x^3 + 4x^3 - 8 = x^9 - 6x^6 + 12x^3 - 8\end{aligned}$$

Przy mnożeniu wielomianów pomocne są **wzory skróconego mnożenia**.

Twierdzenie

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

kwadrat sumy

kwadrat różnicy

różnica kwadratów

Analogiczne wzory dla potęgi o wykładniku równym 3 mają następującą postać.

Twierdzenie

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

sześcian sumy

sześcian różnicy

suma sześciątów

różnica sześciątów

Zauważmy, że w ostatnich dwóch wzorach wyrażenia $a^2 - ab + b^2$ oraz $a^2 + ab + b^2$ przypominają kwadraty różnicy oraz sumy, tylko że przy iloczynie ab nie ma współczynnika 2 (inaczej mówiąc, nie ma tam podwojonych iloczynów a przez b).

Wyrażenia te często nazywamy **niepełnymi kwadratami** różnicy (sumy) a i b .

Uwagi metodyczne

W tym temacie wprowadzamy wzory skróconego mnożenia. Opanowanie omawianych zagadnień wymaga przećwiczenia ich na wielu przykładach. Cenną umiejętnością jest zapisywanie sum algebraicznych w postaci iloczynowej, ponieważ będzie to przydatne podczas rozwiązywania równań wielomianowych.

◀ 3.3. Wykonaj potęgowanie.

a) $(2x+1)^3$, $(2x-3)^3$, $(2x-1)^3$

b) $(4x-3)^3$, $(3x-4)^3$, $(4x-1)^3$

c) $(x^2-1)^3$, $(x^2+2)^3$, $(x^2+1)^3$

d) $(2x^2-5x^3)^3$, $(3x^3-1)^3$,

$(2x^3-5)^3$

Odp.: a) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$,

$8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$,

$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

b) $64x^3 - 144x^2 + 108x - 27$,

$27x^3 - 108x^2 + 144x - 64$,

$64x^3 - 48x^2 + 12x - 1$

c) $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$,

$x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8$,

$x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$

d) $8x^6 - 60x^7 + 150x^8 - 125x^9$,

$27x^9 - 27x^6 + 9x^3 - 1$,

$8x^9 - 60x^6 + 150x^3 - 125$

ZZ i KPU

temat 2.4

Multiteka

- Sześcian sumy i sześcian różnicy dwóch wyrazów
- Trójkąt Pascala
- Trójkąt Pascala – zastosowanie

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.3

Generator
testów i sprawdzianów

3.4. Wykonaj działania.

- a) $2(x-2)^3 - (2x-1)^3$
 b) $(-3-2x)^3 + (2x+3)^3$
 c) $3(x-2)^3 - 2(2x-1)^3 + 4x(2x-1)^2$
 d) $(3x-1)^3 - 2(x+2)^3 + x(5x+1)^2$
 e) $(x^2+1)^3 - (x^3+1)^2$
 f) $\left[(x+1)^2 + (2-x)(2+x)\right]^3$
 g) $(x^2-2x)^3 - (x^2+2x)^3$
 h) $(2x^2-3x)^3 + (3x-2x^2)^3$
- Odp.: a) $-6x^3 + 18x - 15$ b) 0
 c) $3x^3 - 10x^2 + 28x - 22$
 d) $50x^3 - 29x^2 - 14x - 17$
 e) $3x^4 - 2x^3 + 3x^2$
 f) $8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$
 g) $-12x^5 - 16x^3$ h) 0

Odpowiedzi i rozwiązania

3.1. F, F, P

- 3.2. a) $x^{21}, 8y^{15}, -x^{21}, 16x^{12}$
 b) $x^2 - 8x + 16,$
 $x^2 - 2(\sqrt{2}-1)x + 3 - 2\sqrt{2},$
 $x^2 + 2(3-\sqrt{3})x + 6(2-\sqrt{3})$
 c) $18x^2 - 24x + 8, 3x^2 + 12x + 12,$
 $63x^2$

- 3.3. a) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1,$
 $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27,$
 $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$
 b) $64x^3 - 144x^2 + 108x - 27,$
 $27x^3 - 108x^2 + 144x - 64,$
 $64x^3 - 48x^2 + 12x - 1$
 c) $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1,$
 $x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8,$
 $x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$
 d) $8x^6 - 60x^7 + 150x^8 - 125x^9,$
 $27x^9 - 27x^6 + 9x^3 - 1,$
 $8x^9 - 60x^6 + 150x^3 - 125$

Wyprowadzimy dwa wzory dla potęgi o wykładniku 3, pozostałe zostawiamy jako zadanie do samodzielnego wykonania.

- $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) =$
 $= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$

Przykład 2 zad. 3.4

Wykonamy działania.

- a) $(x-2)^3$ b) $(3x^2-2x)^3$ c) $(x-2)^3 + (x+2)^3$ d) $(5-x)^3 + (x-5)^3$

Rozwiązanie

- a) $(x-2)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 - 2^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
 b) $(3x^2-2x)^3 = (3x^2)^3 - 3 \cdot (3x^2)^2 \cdot 2x + 3 \cdot 3x^2 \cdot (2x)^2 - (2x)^3 =$
 $= 27x^6 - 3 \cdot 9x^4 \cdot 2x + 9x^2 \cdot 4x^2 - 8x^3 = 27x^6 - 54x^5 + 36x^4 - 8x^3$
 c) $(x-2)^3 + (x+2)^3 = (x-2+x+2) \left[(x-2)^2 - (x-2)(x+2) + (x+2)^2 \right] =$
 $= 2x(x^2 - 4x + 4 - x^2 + 4 + x^2 + 4x + 4) = 2x(x^2 + 12) = 2x^3 + 24x$
 d) $(5-x)^3 + (x-5)^3 = [-(x-5)]^3 + (x-5)^3 = (-1)^3(x-5)^3 + (x-5)^3 =$
 $= -(x-5)^3 + (x-5)^3 = 0$

Zadania

3.1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Wyrażenie $8p^3 - 12p^2q + 6pq^2 - q^3$ można zapisać w postaci

- A. $(4p^2 + 4pq + q^2)(2p - q)$. B. $(4p - q)^3$. C. $(2p - q)^3$.

3.2. Wykonaj potęgowanie.

- a) $(x^3)^7, (2y^5)^3, (-x^7)^3, (-2x^3)^4$
 b) $(x-4)^2, (x-\sqrt{2}+1)^2, (x+3-\sqrt{3})^2$
 c) $(3\sqrt{2}x-2\sqrt{2})^2, (\sqrt{3}x+2\sqrt{3})^2, \left(2\sqrt{7}x+\frac{7x}{\sqrt{7}}\right)^2$

3.3. Wykonaj potęgowanie.

- a) $(2x+1)^3, (2x-3)^3, (2x-1)^3$ c) $(x^2-1)^3, (x^2+2)^3, (x^2+1)^3$
 b) $(4x-3)^3, (3x-4)^3, (4x-1)^3$ d) $(2x^2-5x^3)^3, (3x^3-1)^3, (2x^3-5)^3$

3.4. Wykonaj działania.

- a) $2(x-2)^3 - (2x-1)^3$ e) $(x^2+1)^3 - (x^3+1)^2$
 b) $(-3-2x)^3 + (2x+3)^3$ f) $[(x+1)^2 + (2-x)(2+x)]^3$
 c) $3(x-2)^3 - 2(2x-1)^3 + 4x(2x-1)^2$ g) $(x^2-2x)^3 - (x^2+2x)^3$
 d) $(3x-1)^3 - 2(x+2)^3 + x(5x+1)^2$ h) $(2x^2-3x)^3 + (3x-2x^2)^3$

3.5. Zastosuj wzory na sumę lub różnicę sześcianów i przekształć wielomian.

- a) $8x^3 - 27$ d) $(x-1)^3 - (x+1)^3$
 b) $125 + x^3$ e) $(2x-3)^3 + (x+3)^3$
 c) $64x^6 - x^3$ f) $(5x-3)^3 - (3x+5)^3$

3.6. Przekształć wielomian $W(x)$ do prostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla $x = x_0$.

- a) $W(x) = (x\sqrt{7}-1)(x\sqrt{7}+1) - (2x+3)^2 + 4\left(3x + \sqrt{2\frac{1}{4}}\right)$ $x_0 = \sqrt{3}$
 b) $W(x) = (\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x) - \frac{1}{2}(1-2x^2) - \left(x + \frac{1}{2}\right)$ $x_0 = 1 - \sqrt{7}$
 c) $W(x) = (2x+1)^2 - 2(x-2)^2 + 3 - 2x^2$ $x_0 = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{10}+4}$

3.7. Przekształć wielomian $W(x)$ do prostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla $x = x_0$.

- a) $W(x) = (x^2 - 5x + 3)^2 - 4(2x-1)^2 + 3x$ $x_0 = \frac{1}{2}$
 b) $W(x) = 2(x^2-4)(x^2+4) - 3(x^2-x-1)^2 - 2x(x+1)^2$ $x_0 = -\sqrt{2}$
 c) $W(x) = (2x^2-3x+1)^2 - (x^2+x-3)^2 + 2x(7x^2-6x)$ $x_0 = \sqrt{3}$

3.8. Dane są wielomiany: $W(x) = 2x + 1$, $P(x) = x + a$

i $Q(x) = 8x^4 - 4x^3 + bx^2 - 11x - 2$. Wyznacz współczynniki a i b tak, aby dla każdej liczby rzeczywistej x zachodziła równość $(W(x))^3 \cdot P(x) = Q(x)$.

* **3.9.** Wielomian $W(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$ jest kwadratem wielomianu $Q(x) = x^2 + bx + c$. Wyznacz b i c .

3.10. Oblicz.

- a) $(\sqrt{3}+1)^3$ b) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^3$ c) $(\sqrt{7}+2\sqrt{3})^3$ d) $(3-\sqrt[3]{2})^3$

D 3.11. Wykaż, że liczba $2021^3 - 2018^3$ jest podzielna przez 3. Nie korzystaj z kalkulatora.

$$\begin{aligned} 3.9. (Q(x))^2 &= (x^2 + bx + c)^2 = x^4 + b^2x^2 + c^2 + 2bx^3 + 2cx^2 + 2bcx = \\ &= x^4 + 2bx^3 + (b^2 + 2c)x^2 + 2bcx + c^2 \end{aligned}$$

$$W(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$$

$$2b = -6 \Leftrightarrow b = -3$$

$$b^2 + 2c = 13 \Rightarrow 2c = 4 \Leftrightarrow c = 2$$

$$\text{Odp.: } W(x) = (Q(x))^2 \Leftrightarrow (b = -3, c = 2)$$

3.4. a) $-6x^3 + 18x - 15$ **b)** 0

$$\text{c) } 3x^3 - 10x^2 + 28x - 22$$

$$\text{d) } 50x^3 - 29x^2 - 14x - 17$$

$$\text{e) } 3x^4 - 2x^3 + 3x^2$$

$$\text{f) } 8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$$

$$\text{g) } -12x^5 - 16x^3 \quad \text{h) } 0$$

3.5. a) $(2x-3)(4x^2+6x+9)$

$$\text{b) } (5+x)(25-5x+x^2)$$

$$\text{c) } x^3(4x-1)(16x^2+4x+1)$$

$$\text{d) } -2(3x^2+1)$$

$$\text{e) } 9x(x^2-3x+9)$$

$$\text{f) } 2(x-4)(49x^2+16x+19)$$

3.6. a) $W(x) = 3x^2 - 4$,

$$W(\sqrt{3}) = 5$$

$$\text{b) } W(x) = -x + 1,$$

$$W(1-\sqrt{7}) = \sqrt{7}$$

$$\text{c) } W(x) = 12x - 4,$$

$$W\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{10}+4}\right) =$$

$$= 2(2-4\sqrt{2}+2\sqrt{5}-\sqrt{10})$$

3.7. a) $W(x) =$

$$= x^4 - 10x^3 + 15x^2 - 11x + 5,$$

$$W\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{16}$$

$$\text{b) } W(x) = -x^4 + 4x^3 - x^2 - 8x - 35,$$

$$W(-\sqrt{2}) = -41$$

$$\text{c) } W(x) = 3x^4 + 6x^2 - 8,$$

$$W(\sqrt{3}) = 37$$

3.8. $a = -2$, $b = -18$ **3.10. a)** $10 + 6\sqrt{3}$

$$\text{b) } 11\sqrt{5} - 17\sqrt{2}$$

$$\text{c) } 43\sqrt{7} + 66\sqrt{3}$$

$$\text{d) } 25 - 27\sqrt[3]{2} + 9\sqrt[3]{4}$$

3.11. $2021^3 - 2018^3 =$

$$= (2021 - 2018)(2021^2 +$$

$$+ 2021 \cdot 2018 + 2018^2) =$$

$$= 3(2021^2 + 2021 \cdot 2018 + 2018^2)$$

$$\begin{aligned}
 3.12. \quad & 222222^3 + 33333^3 = \\
 & = (22222 + 33333)(22222^2 + \\
 & -22222 \cdot 33333 + 33333^2) = \\
 & = 5 \cdot 11111(22222^2 + \\
 & -22222 \cdot 33333 + 33333^2) = 5k, \\
 & \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}, \text{ więc} \\
 & 5 \mid (22222^3 + 33333^3).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.13. \quad & 13^6 - 11^6 = (13^3)^2 - (11^3)^2 = \\
 & = (13^3 - 11^3)(13^3 + 11^3) = \\
 & = (13 - 11)(13^2 + 13 \cdot 11 + \\
 & + 11^2)(13 + 11)(13^2 - 13 \cdot 11 + \\
 & + 11^2) = 2 \cdot 24 \cdot k, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}, \\
 & \text{więc } 48 \mid (13^6 - 11^6).
 \end{aligned}$$

3.14. Założenie: $x - y = 4$, $xy = 2$

a) Teza: $x^2 + y^2 = 20$

Dowód:

$$x - y = 4 \Rightarrow (x - y)^2 = 16$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 16$$

Zatem:

$$x^2 + y^2 = 16 + 2xy = 16 + 2 \cdot 2 = 20$$

b) Teza: $x^3 - y^3 = 88$

Dowód:

$$\begin{aligned}
 x^3 - y^3 &= (x - y)(x^2 + xy + y^2) = \\
 &= 4(20 + 2) = 88
 \end{aligned}$$

D 3.12. Wykaż, że liczba $22\,222^3 + 33\,333^3$ jest podzielna przez 5. Nie korzystaj z kalkulatora.

D 3.13. Wykaż, że liczba $13^6 - 11^6$ jest podzielna przez 48. Nie korzystaj z kalkulatora.

D * 3.14. Dane są dwie liczby rzeczywiste x i y spełniające równania $x - y = 4$ i $xy = 2$. Wykaż, że
a) $x^2 + y^2 = 20$. b) $x^3 - y^3 = 88$.

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wyrażenie $\left[\frac{(\sqrt{2}-1)^3 + 2}{2\sqrt{2}-3} \right]^2$ jest równe wyrażeniu

A. $25(\sqrt{2}+1)$. B. $5(\sqrt{2}-1)$. C. $5(1-\sqrt{2})$. D. $25(3+2\sqrt{2})$.

2. Wielomian $(2x^2 - 1)^3 - 3(x^3 - 2)^2 - 5x^2(x^4 + 1)$ jest równy wielomianowi

A. $12x^4 + 12x^3 + x^2 - 13$. C. $12x^4 - 12x^3 - x^2 + 13$.
B. $-12x^4 + 12x^3 - x^2 - 13$. D. $-12x^4 + 12x^3 + x^2 - 13$.

3. Wskaż objętość sześcianu, którego krawędź ma długość równą $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$.

A. $10 + 7\sqrt{2}$ B. $10 + 14\sqrt{2}$ C. $10 - 7\sqrt{2}$ D. $14\sqrt{2} - 10$

4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Jednomian $36x^4$ jest jednym ze składników sumy $(3x^2 + 2)^3$.
B. Jednomian $36x^4$ jest jednym ze składników sumy $(2x^2 + 3)^3$.
C. Jednomian $36x^4$ jest jednym ze składników sumy $(3x^2 + 2x)^3$.

5. Zapisz wielomian $(2x - 1)^3 + (1 - x)(3x - 2)^2$ w postaci uporządkowanej. Oblicz wartość wielomianu dla $x = -\sqrt{5}$.

6. Wiadomo, że $a + b = 3$ i $ab = 1$. Oblicz $a^3 + b^3$.

D 7. Wykaż, że liczba $29^9 - 17^9$ jest podzielna przez 12. Nie korzystaj z kalkulatora.

Prosto do matury

1. D

2. D

3. C

4. F, P, P

$$5. -x^3 + 9x^2 - 10x + 3, 48 + 15\sqrt{5}$$

6. 18

$$\begin{aligned}
 7. \quad & 29^9 - 17^9 = (29^3)^3 - (17^3)^3 = (29^3 - 17^3)(29^6 + 29^3 \cdot 17^3 + 17^6) = \\
 & = (29 - 17)(29^2 + 29 \cdot 17 + 17^2)(29^6 + 29^3 \cdot 17^3 + 17^6) = 12k, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z} \\
 & (k = (29^2 + 29 \cdot 17 + 17^2)(29^6 + 29^3 \cdot 17^3 + 17^6))
 \end{aligned}$$

$$\text{Zatem } 12 \mid (29^9 - 17^9).$$

4. Równania wielomianowe

Umiejętności:

- rozwiązywanie równań wielomianowych

Poznaliśmy już definicję pierwiastka trójmianu kwadratowego. Podobnie określamy pierwiastek dowolnego wielomianu.

Definicja

Pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ nazywamy taką liczbę a , dla której $W(a) = 0$.

Na przykład liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - 8$,

bo $W(2) = 2^3 - 8 = 0$,

a liczby 0, 1 i -1 są pierwiastkami wielomianu $P(x) = x^3 - x$,

bo $P(0) = P(1) = P(-1) = 0$.

Definicja

Równaniem wielomianowym (algebraicznym) nazywamy równanie postaci $W(x) = 0$, w którym $W(x)$ jest wielomianem. **Stopniem równania** nazywamy stopień występującego w nim wielomianu.

Na przykład równanie $x^3 - x = 0$ jest równaniem stopnia 3, a równanie $x^5 + 1 = 0$ jest równaniem stopnia 5.

Rozwiązanie równania $W(x) = 0$ oznacza znalezienie wszystkich pierwiastków wielomianu $W(x)$.

Ogólne wzory na pierwiastki wielomianów stopnia trzeciego odkrył w XVI w. włoski matematyk  **Niccolò Tartaglia**. Wzory te jednak noszą nazwę **wzorów Cardana**, od nazwiska innego włoskiego matematyka i lekarza, który w 1545 r. opublikował je (bez zgody Tartaglii) w swojej książce. Podał tam również metodę (znalezioną przez Ferrariego, który był jego uczniem) rozwiązania równania czwartego stopnia poprzez sprowadzenie go do równania stopnia trzeciego.

Nie podamy ogólnych wzorów na pierwiastki wielomianów stopni wyższych niż drugi. Dla stopni trzeciego i czwartego takie ogólne wzory istnieją, ale są bardzo skomplikowane. Udowodniono natomiast, że dla równań stopnia wyższego niż czwarty

ZZ i KPU

tematy 2.5–2.7

dlauczyciela.pl | Kartkówka 2.4

 **Generator**
testów i sprawdzianów

wzorów na pierwiastki nie ma. Tylko nieliczne typy równań wyższych stopni dają się rozwiązać w prosty sposób. W pozostałych przypadkach można szukać różnymi metodami przybliżeń pierwiastków i najczęściej, korzystając z pomocy komputerów, znajduje się je z zadaną wcześniej dokładnością.

Autorem ostatecznego rozstrzygnięcia problemu rozwiązywalności równań wielomianowych jest wybitny matematyk francuski **Évariste Galois** (1811–1832). Żył bardzo krótko, ale jego naukowe osiągnięcia wyprzedziły stan ówczesnej matematyki o kilkadziesiąt lat. Zajmował się też polityką i jako rewolucjonista trafił do więzienia. Zginął w pojedynku. Jego życie zostało opisane w książce Leopolda Infelda *Wybrańcy bogów*.



Zajmiemy się teraz szukaniem rozwiązań równań stopnia wyższego niż drugi w przypadkach, gdy cel ten można osiągnąć w stosunkowo prosty sposób. Najprościej, podobnie jak w równaniach kwadratowych, znajduje się pierwiastki równania $W(x) = 0$ wówczas, gdy wielomian W jest zapisany w postaci iloczynu czynników stopnia pierwszego.

◀4.1. Wyznacz pierwiastki wielomianu.

a) $W(x) = 2(x-7)(x+5)(0,5x-1)$

b) $W(x) = (0,02 - 0,1x)(5x-2)$

c) $W(x) = \left(1\frac{1}{2}x + 2\right)\left(3\frac{1}{3}x - 2\right)$

d) $W(x) = (x + \sqrt{2})(2\sqrt{2}x - 2)(3 + x\sqrt{3})$

e) $W(x) = 0,1x(2x-5)(3x+0,6)$

f) $W(x) = -4x^3(x+1)(x+6)^2$

Odp.: a) $-5, 2, 7$

b) $0,2; 0,4$

c) $-1\frac{1}{3}, \frac{3}{5}$

d) $-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $-\frac{1}{5}, 0, 2\frac{1}{2}$

f) $-6, -1, 0$

Przykład 1 ◀ zad. 4.1

Rozwiążemy równanie $(x-1)(x-3)(x+2) = 0$.

Rozwiązanie

Iloczyn ma wartość 0 wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden czynnik w tym iloczynie ma wartość 0. Zatem aby wyznaczyć pierwiastki równania, wystarczy znaleźć pierwiastki poszczególnych czynników. Mamy więc:

$$x-1=0 \text{ lub } x-3=0 \text{ lub } x+2=0, \text{ czyli}$$

$$x=1 \text{ lub } x=3 \text{ lub } x=-2$$

Odp.: Pierwiastkami równania są liczby: 1, 3 i -2 .

Przykład 2 ◀ zad. 4.2

Wyznamy pierwiastki wielomianu $Q(x) = x(x+3)^2$.

Rozwiązanie

$$Q(x) = 0$$

$$x(x+3)^2 = 0$$

$$x=0 \text{ lub } x=-3$$

Jeśli n jest dodatnią liczbą naturalną, to $(x-a)^n = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x=a$.

Odp.: Pierwiastkami wielomianu Q są liczby 0 i -3 .

◀4.2. Wyznacz pierwiastki wielomianu.

a) $x^2 - 5x + 6 < 0$

c) $2x < x^2$

e) $x^2 - 6x + 10 > 0$

g) $x^2 + 2x + 2 \leq 0$

b) $-2x^2 + 3x + 5 \geq 0$

d) $x^2 \leq 2$

f) $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$

h) $4x > x^2 + 4$

Odp.: a) $-1, 1, 3$ b) $-5, 3$ c) $-4, 0, 2, 3$ d) $-3, 2$ e) $-3, 3$ f) $-1\frac{1}{2}, -1, 2$ g) $-3, 2, 3$

h) $-10, -1, 3$

Przykład 3 ◀ zad. 4.3

Napiszemy wielomian, który ma dokładnie trzy pierwiastki: 7, 4 i -2.

Rozwiązanie

Najprostszym rozwiązaniem jest $W(x) = (x - 7)(x - 4)(x + 2)$, ale wielomianów spełniających warunki zadania jest nieskończenie wiele. Oto kilka innych:

$$P(x) = 3(x - 7)(x - 4)(x + 2)$$

$$T(x) = (x - 7)^2(x - 4)^3(x + 2)$$

$$Q(x) = (x - 7)(x - 4)(x + 2)(x^2 + 1)$$

$$Z(x) = \sqrt{3}(x - 7)(x - 4)^{125}(x + 2)(x^4 + 2)$$

W każdym wielomianie spełniającym warunki naszego zadania **musi** wystąpić iloczyn $(x - 7)(x - 4)(x + 2)$. Jeżeli chcemy tworzyć inne rozwiązania, to możemy:

- mnożyć iloczyn $(x - 7)(x - 4)(x + 2)$ przez dowolną liczbę różną od zera – tak jak w wielomianie P ,
- poszczególne czynniki iloczynu $(x - 7)(x - 4)(x + 2)$ podnosić do dowolnych potęg naturalnych dodatnich – tak jak w wielomianie T ,
- mnożyć iloczyn $(x - 7)(x - 4)(x + 2)$ przez czynnik, który nie ma innych pierwiastków – tak jak w wielomianie Q .

Przykład 4 ◀ zad. 4.8

Wyznamy współczynnik a_0 wielomianu $W(x) = 2x^3 - x^2 + 5x + a_0$ tak, aby jednym z pierwiastków wielomianu W była liczba -1.

Rozwiązanie

$$W(-1) = 0, \text{ zatem}$$

$$-2 - 1 - 5 + a_0 = 0 \text{ i stąd } a_0 = 8$$

Odp.: $a_0 = 8$

Rozkład wielomianu na czynniki

Wiemy już, że jeżeli wielomian W jest zapisany w postaci iloczynu czynników stopnia pierwszego, to bez problemu można rozwiązać równanie wielomianowe $W(x) = 0$. Dlatego zajmmy się teraz rozkładem wielomianu na czynniki. Nie wszystkie wielomiany można rozłożyć na czynniki liniowe. Przykładami takich nierozkładalnych wielomianów są trójmiany kwadratowe, których wyróżnik (Δ) jest ujemny, np. $x^2 + 2$, $x^2 + x + 1$.

Podamy (bez dowodu) twierdzenie dotyczące rozkładu wielomianu na czynniki.

◀ **4.3.** Napisz przykład wielomianu, którego pierwiastkami są tylko podane liczby.

a) -2, 5, 1

b) -3, -2, 0, 2

c) $0, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, 4, -\sqrt{7}$

d) $3, -1, \frac{2}{5}$

Odp.: a) np. $(x + 2)(x - 5)(x - 1)$

b) np. $(x + 3)(x + 2)^2(x - 2x)$

c) np.

$$2x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{4}\right)(x - 4)(x + \sqrt{7})$$

d) np. $5(x - 3)(x + 1)\left(x - \frac{2}{5}\right)$

◀ **4.8.** Liczby 2 i -3 są pierwiastkami wielomianu

$$W(x) = -x^3 + a_2x^2 + 5x + a_0.$$

Wyznacz współczynniki a_2 i a_0 tego wielomianu.

Odp.: $a_2 = -2, a_0 = 6$

Twierdzenie

Każdy wielomian można rozłożyć na czynniki stopnia co najwyżej drugiego.

Zatem **jedynę** wielomiany, których nie można rozłożyć na czynniki, to trójmiany kwadratowe o ujemnym wyróżniku.

Wniosek

Każdy wielomian nieparzystego stopnia ma co najmniej jeden pierwiastek.

Wielomian stopnia parzystego może nie mieć pierwiastków. Jest wówczas iloczynem wyłącznie nierozkładalnych trójmianów kwadratowych.

Tylko niektóre wielomiany stopnia wyższego niż 2 można w prosty sposób rozłożyć na czynniki. Pokażemy przykłady takich wielomianów.

◀ 4.11. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

a) $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 12x$

b) $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x$

c) $P(x) = 0,5x^3 - 2,5x^2 + 3x$

d) $P(x) = 5\pi x^4 - 10\pi x^3 - 15\pi x^2$

e) $P(x) = 0,2x^5 + 0,6x^4 - 2x^3$

f) $P(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$

Odp.: a) $P(x) = 2x(x-2)(x+3)$

b) $P(x) = x(7x^2 + 2x + 1)$

c) $P(x) = 0,5x(x-2)(x-3)$

d) $P(x) = 5\pi x^2(x+1)(x-3)$

e) $P(x) = 0,2x^3(x-2)(x+5)$

f) $P(x) = -x(x-1)(x-2)$

Przykład 5 ◀ zad. 4.11

Rozłóżmy na czynniki podany wielomian.

Rozwiązanie

a) $W(x) = x^3 - 2x^2 + x$
 $W(x) = x(x^2 - 2x + 1)$

← wspólny czynnik x wyłączamy przed nawias

← $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Odp.: $W(x) = x(x-1)^2$

b) $W(x) = 2x^4 + x^3 + 5x^2$
 $W(x) = x^2(2x^2 + x + 5)$
 $\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -39$

← wspólny czynnik x^2 wyłączamy przed nawias

← obliczamy wyróżnik Δ trójmianu kwadratowego

← $\Delta < 0$

Odp.: $W(x) = x^2(2x^2 + x + 5)$

c) $W(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x$
 $W(x) = 3x(x^2 - x - 2)$
 $x_1 = -1, x_2 = 2$
 $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$

← $\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$

← obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego

← zapisujemy trójmian w postaci iloczynowej

Odp.: $W(x) = 3x(x+1)(x-2)$

d) $W(x) = x^4 + 2x$

$$W(x) = x(x^3 + 2) \quad \leftarrow a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$x^3 + (\sqrt[3]{2})^3 = (x + \sqrt[3]{2})(x^2 - x\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$$

Odp.: $W(x) = x(x + \sqrt[3]{2})(x^2 - x\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$

Niepełny kwadrat różnicy $a^2 - ab + b^2$, o ile $a \neq 0$ i $b \neq 0$, jest wielomianem nierozkładalnym. 
Jeżeli bowiem w wyrażeniu $a^2 - ab + b^2$ literę a potraktujemy jako zmienną, natomiast b jako liczbę, to wyróżnik Δ takiego trójmianu jest ujemny, bo $\Delta = b^2 - 4b^2 = -3b^2$. Takie samo rozumowanie można przeprowadzić w wypadku niepełnego kwadratu sumy, czyli wyrażenia $a^2 + ab + b^2$.

Przyjrzyjmy się ponownie rozkładowi na czynniki wielomianu z przykładu 5c:

$$W(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x$$

Zauważmy, że można ten rozkład przedstawić w wielu postaciach, np.:

(1) $W(x) = 3x(x + 1)(x - 2)$

(2) $W(x) = x(3x + 3)(x - 2)$

(3) $W(x) = 3x(x - 2)(x + 1)$

(4) $W(x) = 3(x + 1)x(x - 2)$

które różnią się w rzeczywistości **tylko kolejnością** czynników, ewentualnie położeniem stałej (w rozkładzie (2) liczba 3 nie jest wyłączona z czynnika $3x + 3$).

Tę własność rozkładu wielomianu na czynniki formułuje się w postaci twierdzenia, które podajemy bez dowodu.

Twierdzenie

Rozkład wielomianu na czynniki jest jednoznaczny (z dokładnością do stałej wyłączonej przed nawias).

Dzięki podanym wyżej twierdzeniom mamy **gwarancję istnienia rozkładu wielomianu** na czynniki stopnia co najwyżej drugiego. Twierdzenia te nie wskazują natomiast **sposobu** postępowania prowadzącego do otrzymania takiego rozkładu. 

W dotychczasowych przykładach można było od razu skorzystać ze wzorów skróconego mnożenia lub wyłączyć wspólny czynnik ze wszystkich składników wielomianu. W następnych przykładach, aby wyłączyć czynnik, będziemy najpierw odpowiednio grupować wyrazy wielomianu.

◀ 4.12. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

- a) $W(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
 b) $W(x) = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$
 c) $W(x) = 125 + 75x + 15x^2 + x^3$
 d) $W(x) = 2x^3 + 12x^2 + 24x + 16$
 e) $W(x) = -3x^3 - 27x^2 - 81x - 81$
 f) $W(x) = -2x^3 + 3x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$

Odp.: a) $W(x) = (x - 2)^3$

b) $W(x) = (2x - 3)^3$

c) $W(x) = (5 + x)^3$

d) $W(x) = 2(x + 2)^3$

e) $W(x) = -3(x + 3)^3$

f) $W(x) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$

◀ 4.13. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

- a) $Q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$
 b) $Q(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$
 c) $Q(x) = 8x^3 - 20x^2 - 18x + 45$
 d) $Q(x) = 11\frac{1}{4}x^3 - 6\frac{3}{4}x^2 - 20x + 12$
 e) $Q(x) = 14x^3 + 2x^2 - 21x - 3$
 f) $Q(x) = 6x^3 + \sqrt{8}x^2 - 18x - 6\sqrt{2}$
 g) $Q(x) = \sqrt{3}x^3 - x^2 + \sqrt{48}x - 4$
 h) $Q(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{8}x^3 - 3x^2 + 1\frac{1}{2}x$
 i) $Q(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$
 j) $Q(x) = 8x^5 - 32x^4 + 32x^3 + x^2 - 4x + 4$
 k) $Q(x) = 9x^5 + 12x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 12x - 4$
 l) $Q(x) = x^6 - 4x^5 + 4x^4 + 4x^2 - 16x + 16$
 Odp.: a) $Q(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$
 b) $Q(x) = (x - 5)(x - 2)(x + 2)$
 c) $Q(x) = (2x - 5)(2x - 3)(2x + 3)$
 d) $Q(x) = (5x - 3)\left(\frac{1}{2}x - 2\right)\left(\frac{1}{2}x + 2\right)$
 e) $Q(x) = \frac{1}{2}(7x + 1)(2x - \sqrt{6})(2x + \sqrt{6})$
 f) $Q(x) = 2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(3x + \sqrt{2})$
 g) $Q(x) = (\sqrt{3}x - 1)(x^2 + 4)$
 h) $Q(x) = x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x - \sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}x + \sqrt{3}\right)$
 i) $Q(x) = (x + 1)^2(x - 1)(x^2 + x + 1)$
 j) $Q(x) = (x - 2)^2(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$
 k) $Q(x) = (3x + 2)^2(x - 1)(x^2 + x + 1)$
 l) $Q(x) = (x - 2)^2(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$

Przykład 6 ◀ zad. 4.12

Rozłóżmy na czynniki wielomian $W(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$.

Rozwiązanie

Popatrzmy na pierwsze dwa składniki tego wielomianu: $x^3 + 3x^2$. Jeżeli wyłączymy przed nawias x^2 , to otrzymamy $x^2(x + 3)$. W nawiasie mamy wówczas sumę identyczną jak ta, którą tworzą ostatnie dwa wyrazy wielomianu.

$$W(x) = x^2(x + 3) + x + 3$$

$$W(x) = x^2(x + 3) + 1 \cdot (x + 3)$$

← wspólny czynnik $x + 3$ wyłączamy przed nawias

$$W(x) = (x + 3)(x^2 + 1)$$

← czynnik $x^2 + 1$ jest nierozkładalny

Odp.: $W(x) = (x + 3)(x^2 + 1)$

Przykład 7 ◀ zad. 4.13

Rozłóżmy na czynniki dany wielomian $W(x)$.

Rozwiązanie

a) $W(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

$$W(x) = (x^3 - 2x^2) - (4x - 8)$$

← grupujemy wyrazy

$$W(x) = x^2(x - 2) - 4(x - 2)$$

$$W(x) = (x - 2)(x^2 - 4)$$

← korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów

$$W(x) = (x - 2)(x - 2)(x + 2)$$

Odp.: $W(x) = (x - 2)^2(x + 2)$

b) $W(x) = 7x^3 + 2x^2 - 21x - 6$

Pokażemy dwa sposoby grupowania wyrazów tego wielomianu.

I sposób

$$\begin{aligned} W(x) &= (7x^3 - 21x) + (2x^2 - 6) = 7x(x^2 - 3) + 2(x^2 - 3) = \\ &= (x^2 - 3)(7x + 2) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(7x + 2) \end{aligned}$$

II sposób

$$\begin{aligned} W(x) &= (7x^3 + 2x^2) - (21x + 6) = x^2(7x + 2) - 3(7x + 2) = \\ &= (7x + 2)(x^2 - 3) = (7x + 2)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Mamy już ostateczny rozkład wielomianu W . Można jeszcze wyłączyć przed nawias 7, aby wszystkie czynniki były zapisane w postaci wygodnej do odczytania miejsc zerowych wielomianu.

Odp.: $W(x) = 7(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})\left(x + \frac{2}{7}\right)$

Przykład 8 ◀ zad. 4.16

Rozwiążemy podane równanie, rozkładając jego lewą stronę na czynniki.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \text{a) } 5x^3 - 4x^2 - 10x + 8 &= 0 \\ (5x^3 - 10x) - (4x^2 - 8) &= 0 \\ 5x(x^2 - 2) - 4(x^2 - 2) &= 0 \\ (x^2 - 2)(5x - 4) &= 0, \text{ czyli } 5(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})\left(x - \frac{4}{5}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Odp.: } x = \sqrt{2} \text{ lub } x = -\sqrt{2} \text{ lub } x = \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x^4 + \sqrt{3}x^3 - x^2 - \sqrt{3}x &= 0 \\ x(x^3 + \sqrt{3}x^2 - x - \sqrt{3}) &= 0 \\ x[(x^3 - x) + (\sqrt{3}x^2 - \sqrt{3})] &= 0 \\ x[x(x^2 - 1) + \sqrt{3}(x^2 - 1)] &= 0 \\ x(x^2 - 1)(x + \sqrt{3}) &= 0, \text{ czyli } x(x - 1)(x + 1)(x + \sqrt{3}) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Odp.: } x = 0 \text{ lub } x = 1 \text{ lub } x = -1 \text{ lub } x = -\sqrt{3}$$

*** Przykład 9** ◀ zad. 4.18

Rozłożymy na czynniki wielomian $W(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Rozwiązanie

Wielomian $W(x)$ ma nieparzystą liczbę składników, zatem grupowanie wyrazów nie doprowadzi do wyłonienia wspólnego czynnika. Przedstawmy więc jeden z tych składników jako sumę dwóch: $3x^2 = x^2 + 2x^2$. Zatem:

$$\begin{aligned} W(x) &= x^3 - x^2 - 2x^2 + 2 \\ W(x) &= (x^3 - x^2) - (2x^2 - 2) \\ W(x) &= x^2(x - 1) - 2(x^2 - 1) \\ W(x) &= x^2(x - 1) - 2(x - 1)(x + 1) \\ W(x) &= (x - 1)[x^2 - 2(x + 1)], \text{ czyli } W(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 2) \\ \Delta &= 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 12 && \leftarrow \text{obliczamy wyróżnik i pierwiastki trójmianu kwadratowego} \\ x_1 &= 1 - \sqrt{3}, \quad x_2 = 1 + \sqrt{3} \\ W(x) &= (x - 1)(x - 1 + \sqrt{3})(x - 1 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\text{Odp.: } W(x) = (x - 1)(x - 1 + \sqrt{3})(x - 1 - \sqrt{3})$$

◀ 4.18. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

$$\begin{aligned} \text{a) } W(x) &= x^3 - 7x + 6 & \text{c) } W(x) &= x^3 - 21x - 20 \\ \text{b) } W(x) &= x^3 - 4x - 3 & \text{d) } W(x) &= x^3 - 12x + 11 \end{aligned}$$

$$\text{Odp.: a) } W(x) = x^3 - 7x + 6 = x^3 - x - 6x + 6 = x(x^2 - 1) - 6(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x - 6) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$\text{b) } W(x) = x^3 - 4x - 3 = x^3 - x - 3x - 3 = x(x^2 - 1) - 3(x + 1) = (x + 1)(x^2 - x - 3),$$

$$\text{więc } x = -1 \text{ lub } \Delta = 13, \quad x_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \quad W(x) = (x + 1)\left(x - \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)$$

$$\text{c) } W(x) = x^3 - 21x - 20 = x^3 - x - 20x - 20 = x(x^2 - 1) - 20(x + 1) = (x + 1)(x^2 - x - 20) = (x + 1)(x + 4)(x - 5)$$

$$\Delta = 81, \quad \sqrt{\Delta} = 9, \quad x_1 = \frac{1 - 9}{2} = -4, \quad x_2 = \frac{1 + 9}{2} = 5.$$

$$\text{d) } W(x) = x^3 - 12x + 11 = x^3 - x - 11x + 11 = x(x^2 - 1) - 11(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x - 11) = (x - 1)\left(x + \frac{1 + 3\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3\sqrt{5} - 1}{2}\right)$$

$$\Delta = 1 + 44 = 45, \quad \sqrt{\Delta} = 3\sqrt{5}, \quad x_1 = \frac{-1 - 3\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 + 3\sqrt{5}}{2}$$

◀ 4.16. Rozwiąż równanie.

$$\text{a) } \frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + x + 1 = 0$$

$$\text{b) } 4x^3 + 4x^2 - 25x - 25 = 0$$

$$\text{c) } \sqrt{3}x^3 - \sqrt{192} = 0$$

$$\text{d) } 2\sqrt{2}x^3 - 6\sqrt{3}x^2 + 9\sqrt{2}x - 3\sqrt{3} = 0$$

$$\text{e) } \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{27} = 0$$

$$\text{f) } x^4 + \sqrt{2}x^3 - 4x^2 - 4\sqrt{2}x = 0$$

$$\text{Odp.: a) } x = -3$$

$$\text{b) } x = -2\frac{1}{2} \text{ lub } x = -1 \text{ lub } x = 2\frac{1}{2}$$

$$\text{c) } x = 2$$

$$\text{d) } x = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{e) } x = \frac{2}{3}$$

$$\text{f) } x = -\sqrt{2} \text{ lub } x = -2 \text{ lub } x = 0 \text{ lub } x = 2$$

◀ 4.20. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

a) $W(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

b) $W(x) = x^4 - 11x^2 + 18$

c) $W(x) = x^4 + 12x^2 + 13$

d) $W(x) = -2x^4 - 12x^2 - 16$

e) $W(x) = 4x^4 - 25x^2 + 6$

f) $W(x) = -36x^4 - 65x^2 + 36$

Odp.: a) $W(x) = x^4 - 5x^2 + 4 =$

$$x^4 - x^2 - 4x^2 + 4 =$$

$$= x^2(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1) =$$

$$= (x^2 - 1)(x^2 - 4) =$$

$$(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$$

b) $W(x) = x^4 - 11x^2 + 18$

$$\Delta = 121 - 72 = 49, \sqrt{\Delta} = 7$$

$$t = x^2, t_1 = \frac{11-7}{2} = 2, t_2 = 9,$$

$$\text{więc } W(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 9) =$$

$$= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 3)(x + 3)$$

c) $W(x) = x^4 + 12x^2 - 13 =$

$$= x^4 - x^2 + 13x^2 - 13 =$$

$$= x^2(x^2 - 1) + 13(x^2 - 1) =$$

$$= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 13)$$

d) $W(x) = -2x^4 - 12x^2 - 16 =$

$$= -2(x^4 + 6x^2 + 8) =$$

$$= -2(x^2 + 2)(x^2 + 4)$$

e) $W(x) = 4x^4 - 25x^2 + 6$

$$t = x^2, \Delta = 625 - 96 = 529,$$

$$\sqrt{\Delta} = 23$$

$$t_1 = \frac{25-23}{8} = \frac{1}{4}, t_2 = 6$$

$$W(x) = 4\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)(x^2 - 6) =$$

$$= 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - \sqrt{6}) \cdot$$

$$\cdot (x + \sqrt{6})$$

f) $W(x) = -36x^4 - 65x^2 + 36$

$$x^2 = t, \Delta = 65^2 + 36^2 \cdot 4 =$$

$$= 4225 + 5184 = 9409, \sqrt{\Delta} = 97$$

$$t_1 = \frac{65-97}{-72} = \frac{-32}{-72} = \frac{4}{9},$$

$$t_2 = \frac{-162}{72} = \frac{-9}{4}, \text{ więc}$$

$$W(x) = -36\left(x^2 - \frac{4}{9}\right)\left(x^2 + \frac{9}{4}\right) =$$

$$= -36\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x^2 + \frac{9}{4}\right)$$

Metoda podstawiania

Często podczas rozkładania wielomianu na czynniki nie można skorzystać ze wzorów skróconego mnożenia, wyłączyć wspólnego czynnika ani też pogrupować wyrazów wielomianu. W niektórych sytuacjach możemy posłużyć się **metodą podstawiania**. Prześledźmy to na przykładzie.

* Przykład 10 ◀ zad. 4.20

Rozłóżmy na czynniki wielomian $W(x) = x^4 + x^2 - 20$.

Rozwiązanie

Podstawiamy $x^2 = t$. Wówczas wielomian W staje się zależny od zmiennej t i przyjmuje postać:

$$W(t) = t^2 + t - 20$$

◀ obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego zmiennej t :

$$\Delta = 81$$

$$t_1 = -5, t_2 = 4$$

◀ obliczamy jego pierwiastki

$$t^2 + t - 20 = (t + 5)(t - 4) \quad \leftarrow \text{zapisujemy trójmian w postaci iloczynowej}$$

Zatem $W(t) = (t + 5)(t - 4)$. Wracamy do podstawienia $x^2 = t$:

$$W(x) = (x^2 + 5)(x^2 - 4)$$

Czynnik $x^2 + 5$ jest nierozkładalny, a czynnik $x^2 - 4$ rozkładamy, korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów i otrzymujemy ostateczny rozkład wielomianu W na czynniki.

Odp.: $W(x) = (x^2 + 5)(x - 2)(x + 2)$

Zadania

4.1. Wyznacz pierwiastki wielomianu.

a) $W(x) = 2(x - 7)(x + 5)(0,5x - 1)$ d) $W(x) = (x + \sqrt{2})(2\sqrt{2}x - 2)(3 + x\sqrt{3})$

b) $W(x) = (0,02 - 0,1x)(5x - 2)$ e) $W(x) = 0,1x(2x - 5)(3x + 0,6)$

c) $W(x) = \left(1\frac{1}{2}x + 2\right)\left(3\frac{1}{3}x - 2\right)$ f) $W(x) = -4x^3(x + 1)(x + 6)^2$

4.2. Wyznacz pierwiastki wielomianu.

a) $Z(x) = 4(x - 3)(x^2 - 1)$ e) $Z(x) = 5(x^3 + 27)(x^2 - 9)$

b) $Z(x) = -2(x + 5)^2(x^2 - 6x + 9)$ f) $Z(x) = (2x + 3)(x^2 - x - 2)$

c) $Z(x) = 3x(x^2 - 5x + 6)(2x + 8)$ g) $Z(x) = (8x^3 - 64)(x^2 - 9)$

d) $Z(x) = (x^3 - 8)(x^2 + x - 6)$ h) $Z(x) = (2x - 6)(x^2 + 11x + 10)$

Odpowiedzi i rozwiązania

4.1. a) -5, 2, 7 b) 0,2; 0,4 c) $-1\frac{1}{3}, \frac{3}{5}$ d) $-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $-\frac{1}{5}, 0, 2\frac{1}{2}$ f) -6, -1, 0

4.2. a) -1, 1, 3 b) -5, 3 c) -4, 0, 2, 3 d) -3, 2 e) -3, 3 f) $-1\frac{1}{2}, -1, 2$ g) -3, 2, 3 h) -10, -1, 3

4.3. Napisz przykład wielomianu, którego pierwiastkami są tylko podane liczby.

- a) $-2, 5, 1$ b) $-3, -2, 0, 2$ c) $0, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, 4, -\sqrt{7}$ d) $3, -1, \frac{2}{5}$

4.4. Podaj przykłady trzech różnych wielomianów, których pierwiastkami są tylko liczby: $\sqrt{7}, 4, -2, -5$.

4.5. Napisz przykład wielomianu stopnia trzeciego, którego pierwiastkami są tylko podane liczby.

- a) $-7, -2, 1$ b) $0, 4$ c) $-3, 3$ d) 3

4.6. Podaj przykład wielomianu, którego pierwiastkami

- a) są trzy kolejne liczby nieparzyste. c) są dwie pary liczb przeciwnych.
b) są dwie liczby pierwsze. d) jest pięć kolejnych liczb całkowitych.

4.7. Podaj przykład wielomianu stopnia trzeciego, którego pierwiastkami są liczby: $-1, 3$ i 4 . Zapisz ten wielomian w postaci $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

4.8. Liczby 2 i -3 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = -x^3 + a_2x^2 + 5x + a_0$. Wyznacz współczynniki a_2 i a_0 tego wielomianu.

4.9. Podaj przykład wielomianu W , którego pierwiastkami są liczby $1, 2$ oraz 3 i który spełnia warunek $W(4) = 12$.

4.10. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

- a) $W(x) = x^3 - 2x^2$ c) $W(x) = -7x^3 + 14x^2$ e) $W(x) = -3x^3 + 27x^2$
b) $W(x) = 3x^2 - 3x$ d) $W(x) = x^3 - 4x$ f) $W(x) = -x^3 + 4x^2$

4.11. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

- a) $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 12x$ d) $P(x) = 5\pi x^4 - 10\pi x^3 - 15\pi x^2$
b) $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x$ e) $P(x) = 0,2x^5 + 0,6x^4 - 2x^3$
c) $P(x) = 0,5x^3 - 2,5x^2 + 3x$ f) $P(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$

4.12. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

- a) $W(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ d) $W(x) = 2x^3 + 12x^2 + 24x + 16$
b) $W(x) = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$ e) $W(x) = -3x^3 - 27x^2 - 81x - 81$
c) $W(x) = 125 + 75x + 15x^2 + x^3$ f) $W(x) = -2x^3 + 3x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$

4.3. a) np. $(x+2)(x-5)(x-1)$

b) np. $(x+3)(x+2)^2(x-2x)$

c) np. $2x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{4}\right)(x-4) \cdot (x + \sqrt{7})$

d) np. $5(x-3)(x+1)\left(x - \frac{2}{5}\right)$

4.4. np.:

$7(x - \sqrt{7})(x-4)(x+2)(x+5),$

$(x - \sqrt{7})^2(x-4)(x+2)(x+5),$

$(x - \sqrt{7})(x-4)^4(x+2)(x+5)^5$

4.5. a) np. $8(x+7)(x+2)(x-1)$

b) np. $x^2(x-4)$

c) np. $(x+3)(x-3)^2$

d) np. $3(x-3)^3$

4.6. a) np. $(x-3)(x-5)(x-7)$

b) np. $(x-11)(x-17)$

c) np. $(x^2-1)(x^2-8)$

d) np. $x(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$

4.7. np. $\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{5}{2}x + 6$

4.8. $a_2 = -2, a_0 = 6$

4.9. np.

$W(x) = 2(x-1)(x-2)(x-3)$

4.10. a) $W(x) = x^2(x-2)$

b) $W(x) = 3x(x-1)$

c) $W(x) = -7x^2(x-2)$

d) $W(x) = x(x+2)(x-2)$

e) $W(x) = -3x^2(x-9)$

f) $W(x) = -x^2(x-4)$

4.11. a) $P(x) = 2x(x-2)(x+3)$

b) $P(x) = x(7x^2 + 2x + 1)$

c) $P(x) = 0,5x(x-2)(x-3)$

d) $P(x) = 5\pi x^2(x+1)(x-3)$

e) $P(x) = 0,2x^3(x-2)(x+5)$

f) $P(x) = -x(x-1)(x-2)$

4.12. a) $W(x) = (x-2)^3$

b) $W(x) = (2x-3)^3$

c) $W(x) = (5+x)^3$

d) $W(x) = 2(x+2)^3$

e) $W(x) = -3(x+3)^3$

f) $W(x) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$

- 4.13. a)** $Q(x) = (x-1)(x^2+1)$
b) $Q(x) = (x-5)(x-2)(x+2)$
c) $Q(x) = (2x-5)(2x-3)(2x+3)$
d) $Q(x) = (5x-3)\left(1\frac{1}{2}x-2\right)\left(1\frac{1}{2}x+2\right)$
e) $Q(x) = \frac{1}{2}(7x+1)(2x-\sqrt{6})(2x+\sqrt{6})$
f) $Q(x) = 2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(3x+\sqrt{2})$
g) $Q(x) = (\sqrt{3}x-1)(x^2+4)$
h) $Q(x) = x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x-\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{3}\right)$
i) $Q(x) = (x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)$
j) $Q(x) = (x-2)^2(2x+1)(4x^2-2x+1)$
k) $Q(x) = (3x+2)^2(x-1)(x^2+x+1)$
l) $Q(x) = (x-2)^2(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$

- 4.15. a)** $x=0$ lub $x=-5$
b) $x=0$ lub $x=-3$
c) $x=0$ lub $x=3$
d) $x=0$ lub $x=4$
e) $x=0$ lub $x=-3$
f) $x=0$ lub $x=-7$
g) $x=-3$ lub $x=0$ lub $x=\frac{1}{2}$

- h)** $x=-\sqrt{2}$ lub $x=0$
lub $x=3\sqrt{2}$

- 4.16. a)** $x=3$

- b)** $x=-2\frac{1}{2}$ lub $x=-1$
lub $x=2\frac{1}{2}$

- c)** $x=2$

- d)** $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$

- e)** $x=\frac{2}{3}$

- f)** $x=-\sqrt{2}$ lub $x=-2$ lub $x=0$
lub $x=2$

4.13. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

- a) $Q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$
b) $Q(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$
c) $Q(x) = 8x^3 - 20x^2 - 18x + 45$
d) $Q(x) = 11\frac{1}{4}x^3 - 6\frac{3}{4}x^2 - 20x + 12$
e) $Q(x) = 14x^3 + 2x^2 - 21x - 3$
f) $Q(x) = 6x^3 + \sqrt{8}x^2 - 18x - 6\sqrt{2}$
g) $Q(x) = \sqrt{3}x^3 - x^2 + \sqrt{48}x - 4$
h) $Q(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{8}x^3 - 3x^2 + 1\frac{1}{2}x$
i) $Q(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$
j) $Q(x) = 8x^5 - 32x^4 + 32x^3 + x^2 - 4x + 4$
k) $Q(x) = 9x^5 + 12x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 12x - 4$
l) $Q(x) = x^6 - 4x^5 + 4x^4 + 4x^2 - 16x + 16$

4.14. Przerysuj tabelę. Wyznacz wielomiany, które należy wstawić w miejsce [?].

	czynnik	czynnik	czynnik	iloczyn
czynnik	[?]	[?]	[?]	$x^3 + x^2$
czynnik	[?]	[?]	[?]	$x^3 + 5x^2 + 6x$
czynnik	[?]	[?]	[?]	$x^3 - 2x^2 - 9x + 18$
iloczyn	$x^3 - 2x^2$	$x^3 + 6x^2 + 9x$	[?]	

4.15. Rozwiąż równanie.

- a) $3x^3 + 30x^2 + 75x = 0$
b) $18x + 12x^2 + 2x^3 = 0$
c) $9\pi x - 6\pi x^2 + \pi x^3 = 0$
d) $x^3 - 8x^2 + 16x = 0$
e) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 = 0$
f) $-2x^5 - 28x^4 - 98x^3 = 0$
g) $\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^2 - x = 0$
h) $\sqrt{2}x^7 - 4x^6 - 6\sqrt{2}x^5 = 0$

4.16. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + x + 1 = 0$
b) $4x^3 + 4x^2 - 25x - 25 = 0$
c) $\sqrt{3}x^3 - \sqrt{192} = 0$
d) $2\sqrt{2}x^3 - 6\sqrt{3}x^2 + 9\sqrt{2}x - 3\sqrt{3} = 0$
e) $\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{27} = 0$
f) $x^4 + \sqrt{2}x^3 - 4x^2 - 4\sqrt{2}x = 0$

4.14.

	czynnik	czynnik	czynnik	iloczyn
czynnik	x	x	$x+1$	$x^3 + x^2$
czynnik	x	$x+3$	$x+2$	$x^3 + 5x^2 + 6x$
czynnik	$x-2$	$x+3$	$x-3$	$x^3 - 2x^2 - 9x + 18$
iloczyn	$x^3 - 2x^2$	$x^3 + 6x^2 + 9x$	$x^3 - 7x - 6$	

4.17. Rozwiąż równanie.

- a) $(x-4)(x^2+x+3) + (2x-5)(x^2+x+3) = 0$
 b) $(x^2-3)(x+7) = (3-x^2)(x+1)$
 c) $(x^2+4)(x+8) = x^4-16$
 d) $(x-2)(2x+4)(2x+3) = (3-x)(x+2)(6x+9)$

* **4.18.** Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

- a) $W(x) = x^3 - 7x + 6$ c) $W(x) = x^3 - 21x - 20$
 b) $W(x) = x^3 - 4x - 3$ d) $W(x) = x^3 - 12x + 11$

* **4.19.** Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 - 13x + 12 = 0$ c) $x^3 + 2x + 3 = 0$
 b) $x^3 - 111x + 110 = 0$ d) $x^3 - 5x + 4 = 0$

* **4.20.** Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

- a) $W(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ d) $W(x) = -2x^4 - 12x^2 - 16$
 b) $W(x) = x^4 - 11x^2 + 18$ e) $W(x) = 4x^4 - 25x^2 + 6$
 c) $W(x) = x^4 + 12x^2 - 13$ f) $W(x) = -36x^4 - 65x^2 + 36$

* **4.21.** Rozwiąż równanie.

- a) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ c) $(x^2 + x - 1)^2 - 1 = 0$
 b) $(x^2 + 2x)^2 - 7(x^2 + 2x) - 8 = 0$ d) $(x^2 + 3x + 5)^2 - 2x^2 - 6x - 13 = 0$

4.22. Suma dwóch liczb naturalnych równa się 18, a suma ich sześciątów równa się 1674. Wyznacz te liczby.

4.23. Suma sześciątów trzech kolejnych liczb naturalnych jest 12 razy większa od kwadratu środkowej z nich zwiększonego o 2. Wyznacz te liczby.

4.24. Liczby 2 i -3 są pierwiastkami równania $x^3 + mx^2 - 4x + n = 0$ z niewiadomą x . Wyznacz współczynniki m i n , a następnie znajdź trzeci pierwiastek tego równania.

D * **4.25.** Wykaż, że jeżeli pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ są liczby a, b, c , to $a \cdot b \cdot c = -a_0$.

D * **4.26.** Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej nieparzystej x wartość wielomianu $W(x) = x^3 + 5x^2 - 9x - 45$ jest liczbą podzieloną przez 8.

4.22. 7 i 11

4.23. 3, 4 i 5

4.24. $m = 3, n = -12, x = -2$

4.25. $W(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

a, b, c - pierwiastki $W(x)$, czyli $W(a) = 0, W(b) = 0, W(c) = 0$

Wykorzystujemy iloczynową postać wielomianu $W(x)$:

$W(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, więc $W(x) = (x-a)(x^2 - cx - bx + bc) =$

$= x^3 - cx^2 - bx^2 + bcx - ax^2 + acx + abx - abc = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$

Zatem $a_0 = -abc \Leftrightarrow abc = -a_0$.

4.26. $W(x) = x^3 + 5x^2 - 9x - 45$

$W(x) = x^2(x+5) - 9(x+5) = (x+5)(x+3)(x-3)$

Jeżeli $x = 2k+1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, to $W(2k+1) = (2k+6)(2k+4)(2k-2) = 8(k+3)(k+2)(k-1)$

Zatem $8|W(2k+1)$.

4.17. a) $x = 3$

b) $x = -4$ lub $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$

c) $x = -3$ lub $x = 4$

d) $x = -2$ lub $x = -\frac{3}{2}$ lub $x = \frac{13}{5}$

4.18. Patrz s. 85.

4.19. a) $x^3 - 13x + 12 = 0$

$x^3 - x - 12x + 12 = 0$

$x(x^2 - 1) - 12(x - 1) = 0$

$(x-1)(x^2 + x - 12) = 0$

Odp.: $x \in \{-4, 1, 3\}$

b) $x^3 - 111x + 110 = 0$

$x^3 - x - 110x + 110 = 0$

$(x-1)(x^2 + x - 110) = 0$

Odp.: $x \in \{-11, 1, 10\}$

c) $x^3 + 2x + 3 = 0$

$x^3 - x + 3x + 3 = 0$

$x(x^2 - 1) + 3(x+1) = 0$

$(x+1)(x^2 - x + 3) = 0$

Odp.: $x = -1$

d) $x^3 - 5x + 4 = 0$

$x^3 - x - 4x + 4 = 0$

$x(x^2 - 1) - 4(x-1) = 0$

$(x-1)(x^2 + x - 4) = 0$

Odp.: $x \in \left\{ \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, 1, \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right\}$

4.20. Patrz s. 86.

4.21. a) Podstawiamy $x^2 = t > 0$.

Mamy: $t^2 - 2t - 3 = 0$,

$\Delta = 16, t_1 = -1, t_2 = 3$.

Stąd $x^2 = -1$ (sprzeczne)

lub $x^2 = 3$, czyli $x = \sqrt{3}$ lub $x = -\sqrt{3}$.

Odp.: $x \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

b) Podstawiamy $x^2 + 2x = t \geq -1$.

Mamy: $t^2 - 7t - 8 = 0$,

$\Delta = 81, t_1 = -1, t_2 = 8$. Stąd

$x^2 + 2x + 1 = 0$ lub $x^2 + 2x - 8 = 0$,

czyli $x = -1$ lub $x = 2$ lub $x = -4$.

Odp.: $x \in \{-4, -1, 2\}$

c) $(x^2 + x - 1 - 1)(x^2 + x - 1 + 1) = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$ lub $x^2 + x = 0$

Odp.: $x \in \{-2, -1, 0, 1\}$

d)

$(x^2 + 3x + 5)^2 - 2(x^2 + 3x + 5) - 3 = 0$

Podstawiamy $x^2 + 3x + 5 = t$.

Mamy: $t^2 - 2t - 3 = 0$,

$\Delta = 16, t_1 = -1, t_2 = 3$. Stąd:

$x^2 + 3x + 5 = -1$ lub $x^2 + 3x + 5 = 3$

$x^2 + 3x + 6 = 0$ lub $x^2 + 3x + 2 = 0$

$\Delta < 0$ lub $(x = -2$ lub $x = -1)$

Odp.: $x \in \{-2, -1\}$

4.27.

$$W(x) = (x-a)(x^2 - 8x + 15) = \\ = (x-a)(x-3)(x-5)$$

$$P(x) = (x-b)(x^2 - 2x - 15) = \\ = (x-b)(x+3)(x-5)$$

$$\text{Zatem } x-a = x+3$$

$$\text{oraz } x-b = x-3,$$

$$\text{stąd } a = -3 \text{ i } b = 3.$$

$$\text{Odp.: } a = -3, b = 3$$

4.28.

$$W(x) = (x-a)(x^2 - x - 6) = \\ = (x-a)(x+2)(x-3)$$

$$P(x) = (x-b)(x^2 - 4x - 12) = \\ = (x-b)(x-6)(x+2)$$

$$Q(x) = (x-c)(x^2 - 9x + 18) = \\ = (x-c)(x-6)(x-3)$$

$$W(x) = P(x) = Q(x) =$$

$$= (x+2)(x-3)(x-6),$$

$$\text{stąd } a = 6, b = 3, c = -2$$

- * **4.27.** Wyznacz takie wartości a i b , aby wielomiany $W(x) = (x-a)(x^2 - 8x + 15)$ i $P(x) = (x-b)(x^2 - 2x - 15)$ były równe.

- * **4.28.** Sprawdź, czy istnieją takie wartości a, b i c , dla których wielomiany:

$$W(x) = (x-a)(x^2 - x - 6), P(x) = (x-b)(x^2 - 4x - 12)$$

$$\text{ i } Q(x) = (x-c)(x^2 - 9x + 18) \text{ są równe.}$$

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

- 1.** Suma wszystkich pierwiastków równania $2x(x-2)(x+9)(x-11) = 0$ jest równa

A. 0. B. 4. C. 22. D. -4.

- 2.** Wskaż rozwiązania równania $x^3(3x+1)(x^3-8) = 0$.

A. -8, 0, -1 B. -8, 0, $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$, 0, 2 D. 0, $\frac{1}{3}$, 2

- 3.** Wskaż wielomian, w którego rozkładzie na czynniki występuje $x-3$.

A. $W(x) = x^3 - 3x$ C. $W(x) = 2x^5 - 18x^3$
B. $W(x) = x^4 + 9x^2$ D. $W(x) = x^6 - 9x^5$

- 4.** Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Wielomian $W(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ można zapisać w postaci iloczynu trzech czynników stopnia pierwszego.
B. Wielomian $W(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ można zapisać w postaci iloczynu trzech czynników stopnia pierwszego.
C. Wielomian $W(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ można zapisać w postaci iloczynu trzech czynników stopnia pierwszego.

- 5.** Rozłóż na czynniki stopnia pierwszego wielomian $W(x) = 2x^3 - x^2 - 3x$.

- 6.** Rozwiąż równanie $2x^3 + 3x^2 - 10x - 15 = 0$.

- 7.** Kwadrat pewnej liczby zmniejszonej o 2 jest równy sześciastemu tej liczby. Wyznacz tę liczbę.

Prosto do matury

1. B

2. C

3. C

4. F, F, P

5. $W(x) = 2x(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

6. $x = -\sqrt{5}$ lub $x = -\frac{3}{2}$ lub $x = \sqrt{5}$

7. 1

5. Dzielenie wielomianów

Umiejętności:

- dzielenie wielomianu przez dwumian $ax + b$

Ostatnim działaniem w zbiorze wielomianów, które omówimy, jest dzielenie.

Definicja

Mówimy, że wielomian $W(x)$ **jest podzielny** przez niezerowy wielomian $P(x)$, jeżeli istnieje taki wielomian $Q(x)$, że $W(x) = P(x) \cdot Q(x)$.

Wielomian $P(x)$ nazywamy **dzielnikiem** wielomianu $W(x)$, a wielomian $Q(x)$ **ilorazem** wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$.

Bezpośrednio z tej definicji wynika poniższy wniosek.

Wniosek

Jeżeli wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$, to stopień $P(x)$ nie może być wyższy od stopnia $W(x)$.

Sposób dzielenia jest bardzo podobny do dzielenia w zbiorze liczb naturalnych.

Podzielmy wielomian $2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 15x - 5$ przez wielomian $x^2 + 5$.

$$\begin{array}{r}
 2x^2 + 3x - 1 \\
 (2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 15x - 5) : (x^2 + 5) \\
 \underline{-(2x^4 + 10x^2)} \\
 3x^3 - x^2 + 15x - 5 \\
 \underline{-(3x^3 + 15x)} \\
 -x^2 - 5 \\
 \underline{-(-x^2 - 5)} \\
 0
 \end{array}$$

- sprawdzamy, przez jakie wyrażenie należy pomnożyć x^2 , aby otrzymać $2x^4$ (czyli ile razy x^2 „mieści się” w $2x^4$) i wynik, równy $2x^2$, zapisujemy nad kreską
- mnożymy $x^2 + 5$ przez $2x^2$
- od $2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 15x - 5$ odejmujemy $2x^4 + 10x^2$
- sprawdzamy, ile razy x^2 „mieści się” w wyrazie $3x^3$
- mnożymy $x^2 + 5$ przez $3x$
- od $3x^3 - x^2 + 15x - 5$ odejmujemy $3x^3 + 15x$
- sprawdzamy, ile razy x^2 „mieści się” w wyrazie $-x^2$
- mnożymy $x^2 + 5$ przez -1
- od $-x^2 - 5$ odejmujemy $-x^2 - 5$

$$2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 15x - 5 = (x^2 + 5) \cdot (2x^2 + 3x - 1)$$

ZZ i KPU

tematy 2.8, 2.9

Multiteka

- Dzielenie wielomianów
- Czy wielomian jest podzielny przez dwumian

dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 2.5

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Z własności działań na potęgach wynika, że jeżeli $W(x) = P(x) \cdot Q(x)$, to między stopniami wielomianów W , P i Q zachodzi następujący związek:

$$\text{stopień } Q = \text{stopień } W - \text{stopień } P$$

Zauważmy, że dzielenie wielomianów nie zawsze jest wykonalne. Na przykład wielomianu $x^3 - 2x^2 + 7x + 1$ nie można podzielić przez x (inaczej mówiąc – nie można wyłączyć x przed nawias z podanego wielomianu). Wyłączenie x przed nawias może być tylko częściowe:

$$x^3 - 2x^2 + 7x + 1 = x(x^2 - 2x + 7) + 1$$

Podobnie jest przy dzieleniu liczb naturalnych. Na przykład liczba 297 nie jest podzielna przez 13, bo $297 = 22 \cdot 13 + 11$. W takiej sytuacji mówimy, że można wykonać dzielenie z resztą. Wynik dzielenia 297 przez 13 to iloraz 22 i reszta 11.

Twierdzenie

Jeżeli $W(x)$ i $P(x)$ są niezerowymi wielomianami oraz stopień $P(x)$ nie jest większy od stopnia $W(x)$, to istnieją takie dwa wielomiany $Q(x)$ i $R(x)$, że:

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

przy czym:

- stopień $Q = \text{stopień } W - \text{stopień } P$,
- stopień R jest mniejszy od stopnia P albo R jest wielomianem zerowym.

Jeżeli R jest wielomianem zerowym, to wielomian W jest **podzielny** przez wielomian P .

Przykład 1 zad. 5.3

Podzielimy wielomian $2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 18x - 1$ przez wielomian $x^2 + 5$.

Rozwiązanie

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 3x - 1 \\ \underline{2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 18x - 1} : (x^2 + 5) \\ -(2x^4 + 10x^2) \\ \hline 3x^3 - x^2 + 18x - 1 \\ -(3x^3 + 15x) \\ \hline -x^2 + 3x - 1 \\ -(-x^2 - 5) \\ \hline 3x + 4 \end{array}$$

Dzielenie można kontynuować, dopóki stopień wielomianu pod kreską nie stanie się mniejszy niż stopień dzielnika.

← kończymy dzielenie, ponieważ stopień reszty jest mniejszy od stopnia dzielnika

◀ 5.3. Wykonaj dzielenie wielomianów.

- a) $(x^3 + 3x^2 - 8x + 10) : (x^2 - 2x + 2)$
 b) $(x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 6) : (x^2 - x - 2)$
 c) $(x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6) : (x^2 - 2x - 3)$
 d) $(x^5 + x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 7x + 2) : (x^3 + 2x^2 - 3x + 1)$

Odp.: a) $x + 5$ b) $x^2 - 3$ c) $x^2 + 3x + 2$ d) $x^2 - x + 2$

Łatwo można sprawdzić, że:

$$2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 18x - 1 = (x^2 + 5) \cdot (2x^2 + 3x - 1) + (3x + 4)$$

Odp.: Wynikiem dzielenia wielomianów jest iloraz $2x^2 + 3x - 1$ i reszta $3x + 4$.

Przykład 2 ◀ zad. 5.7, 5.8

Wyznamy wielomian $W(x)$, który przy dzieleniu przez $x^3 - 2x + 1$ daje iloraz równy $2x^2 + x$ i resztę równą $x^2 - 3x + 5$.

Rozwiązanie

Z podanych informacji wynika, że szukany wielomian W ma postać:

$$W(x) = (x^3 - 2x + 1) \cdot (2x^2 + x) + x^2 - 3x + 5$$

Po wykonaniu działań, redukcji wyrazów podobnych i uporządkowaniu składników otrzymujemy końcową odpowiedź.

Odp.: $W(x) = 2x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x + 5$

Podzielność wielomianu przez dwumian

Dwumianem nazywamy wielomian stopnia pierwszego. Przyjmijmy, że wielomian $W(x)$ jest stopnia co najmniej drugiego. Podczas dzielenia wielomianu W przez dwumian postaci $x - a$ wyznaczamy takie wielomiany Q i R , że:

$$W(x) = (x - a)Q(x) + R(x)$$

Dzielnik jest stopnia pierwszego, więc reszta jest zawsze albo liczbą różną od zera (czyli wielomianem stopnia zero), albo zerem (czyli wielomianem zerowym). Inaczej mówiąc, nie występuje w niej zmienna x . Dlatego możemy wprowadzić ogólny zapis:

$$W(x) = (x - a)Q(x) + R$$

Czynność dzielenia zakończy się, gdy w słupku pod kreską zostanie liczba, np.:

$$\begin{array}{r} \frac{x^2 + 5x + 8}{(x^3 + 3x^2 - 2x + 1) : (x - 2)} \\ - (x^3 - 2x^2) \\ \hline 5x^2 - 2x + 1 \\ - (5x^2 - 10x) \\ \hline 8x + 1 \\ - (8x - 16) \\ \hline 17 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \frac{-x^2 - x + 1}{(-x^3 - 4x^2 - 2x + 3) : (x + 3)} \\ - (-x^3 - 3x^2) \\ \hline -x^2 - 2x + 3 \\ - (-x^2 - 3x) \\ \hline x + 3 \\ - (x + 3) \\ \hline 0 \end{array}$$

Mamy zatem $x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = (x - 2) \cdot (x^2 + 5x + 8) + 17$

oraz $-x^3 - 4x^2 - 2x + 3 = (x + 3) \cdot (-x^2 - x + 1)$.

◀5.7. Wyznacz wielomian, który przy dzieleniu przez $2x + 1$ daje iloraz $x^2 + 2x - 3$ i resztę 5.

Odp.: $2x^3 + 5x^2 - 4x + 2$

◀5.8. Wyznacz wielomian, który przy dzieleniu przez $x^2 - 5x + 2$ daje iloraz $3x^2 - x + 1$ i resztę $2x - 8$.

Odp.: $3x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 5x - 6$

◀5.12. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu W przez dwumian P . Nie wykonuj dzielenia.

a) $W(x) = 2x^3 - 7x^2 + x - 11$,
 $P(x) = x - 1$

b) $W(x) = x^4 + 3x^3 + 5x + 1$,
 $P(x) = x + 2$

c) $W(x) = x^{100} - 2x^{50} + 50$,
 $P(x) = x + 1$

d) $W(x) = x^{1000} - x^{999}$,
 $P(x) = x - 2$

Odp.: a) -15

b) -17

c) 49

d) 2^{999}

Zauważmy, że jeżeli obliczymy wartość wielomianu $W(x) = (x - a)Q(x) + R$ dla $x = a$, to otrzymamy równość:

$$W(a) = (a - a)Q(a) + R,$$

czyli $W(a) = R$.

Wniosek

Jeżeli $W(x) = (x - a)Q(x) + R$, to $W(a) = R$.

Zatem, aby obliczyć resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - a$, nie trzeba wykonywać dzielenia – wystarczy obliczyć wartość wielomianu W dla $x = a$.

Przykład 3 ◀ zad. 5.12

Obliczymy resztę R z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $P(x)$.

Rozwiązanie

a) $W(x) = 3x^4 - 4x^3 + x - 12$, $P(x) = x - 2$
 $R = W(2)$ i $W(2) = 3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 + 2 - 12 = 6$

Odp.: $R = 6$

b) $W(x) = x^4 - x^2 + 20$, $P(x) = x - \sqrt{3}$
 $R = W(\sqrt{3})$ i $W(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^4 - (\sqrt{3})^2 + 20 = 26$

Odp.: $R = 26$

c) $W(x) = 3x^6 - x^4 - 5x^2 - 10$, $P(x) = x + \sqrt{2}$
 $R = W(-\sqrt{2})$
 $W(-\sqrt{2}) = 3(-\sqrt{2})^6 - (-\sqrt{2})^4 - 5(-\sqrt{2})^2 - 10 = 24 - 4 - 10 - 10 = 0$

W tym wypadku wielomian W jest podzielny przez dwumian $x + \sqrt{2}$.

Odp.: $R = 0$

Wróćmy do zapisu: $W(x) = (x - a)Q(x) + R$.

Z równości $W(a) = R$ wynikają następujące wnioski:

- Jeżeli a jest pierwiastkiem wielomianu W (czyli $W(a) = 0$), to $R = 0$, co oznacza, że wielomian W jest podzielny przez dwumian $x - a$.
- Jeżeli wielomian W jest podzielny przez dwumian $x - a$ (czyli $R = 0$), to $W(a) = 0$, co oznacza, że a jest pierwiastkiem wielomianu W .

Obydwa te wnioski zapiszemy krótko w postaci jednego twierdzenia.

Twierdzenie

Twierdzenie Bézouta

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Jest to jedno z ważniejszych twierdzeń o wielomianach. Nosi nazwę twierdzenia Bézouta od nazwiska XVIII-wiecznego matematyka francuskiego, choć znane i stosowane było wcześniej.

Przykład 4 ◀ zad. 5.13

Sprawdźmy, nie wykonując dzielenia, czy wielomian W jest podzielny przez dwumian P .

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \text{a) } W(x) &= \frac{1}{3}x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x - 3, \quad P(x) = x - 3 \\ W(3) &= \frac{1}{3} \cdot 3^4 - 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 - 3 = 27 - 27 + 18 - 15 - 3 = 0 \\ W(3) &= 0 \end{aligned}$$

Odp.: Wielomian W jest podzielny przez $x - 3$.

$$\begin{aligned} \text{b) } W(x) &= 5x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x + 1, \quad P(x) = x + 1 \\ W(-1) &= 5 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 + \frac{1}{2} \cdot (-1) + 1 = -5 - 1 - \frac{1}{2} + 1 = -5\frac{1}{2} \\ W(-1) &\neq 0 \end{aligned}$$

Odp.: Wielomian W nie jest podzielny przez $x + 1$.

Przykład 5 ◀ zad. 5.14

Obliczmy, dla jakich wartości współczynnika m wielomian $W(x) = x^4 + mx^3 + 3x^2 - 5x - 2$ jest podzielny przez dwumian $x - 2$.

Rozwiązanie

Aby wielomian W był podzielny przez dwumian $x - 2$, musi zachodzić równość $W(2) = 0$.

$$\begin{aligned} W(2) &= 2^4 + m \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 2 = 16 + 8m \\ 16 + 8m &= 0, \quad \text{stąd } m = -2 \end{aligned}$$

Odp.: Wielomian W jest podzielny przez $x - 2$ dla $m = -2$.

◀ 5.14. Dla jakich wartości m wielomian W jest podzielny przez dwumian Q ?

$$\begin{aligned} \text{a) } W(x) &= 3x^3 - 5x^2 + x + m & Q(x) &= x - 1 \\ \text{b) } W(x) &= x^3 + 3x^2 + mx + 4 & Q(x) &= x + 4 \\ \text{c) } W(x) &= mx^4 - 4x^3 - 23x^2 - x - 6 & Q(x) &= x + 2 \\ \text{d) } W(x) &= 9x^3 - 3x^2 + mx - 2 & Q(x) &= x - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Odp.: a) $m = 1$ b) $m = -3$ c) $m = 4$ d) $m = 1$

◀ 5.13. Wykaż, że wielomian W jest podzielny przez dwumian P . Nie wykonuj dzielenia.

$$\begin{aligned} \text{a) } W(x) &= x^3 - 2x^2 + 5x - 4, & P(x) &= x - 1 \\ \text{b) } W(x) &= -x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 6, & P(x) &= x + 3 \\ \text{c) } W(x) &= 3x^3 + x^2 - 16x + 4, & P(x) &= x - 2 \\ \text{d) } W(x) &= 8x^4 - 2x^3 + x^2 - 1, & P(x) &= x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Odp.: a) $W(1) = 1 - 2 + 5 - 4 = 0$, więc $P(x)|W(x)$
b) $W(-3) = -81 + 54 + 36 - 3 - 6 = 90 - 90 = 0$, więc $P(x)|W(x)$
c) $W(2) = 24 + 4 - 32 + 4 = 0$, więc $P(x)|W(x)$
d) $W\left(-\frac{1}{2}\right) = 8 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1 = 0$, więc $P(x)|W(x)$

Odpowiedzi i rozwiązania

5.1. P, F, P

- 5.2. a) $x^2 + 3x - 4$
 b) $x^3 - x^2 - 5x - 3$
 c) $5x^3 + x^2 - 4x + 1$
 d) $3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x - 2$

- 5.3. a) $x + 5$
 b) $x^2 - 3$
 c) $x^2 + 3x + 2$
 d) $x^2 - x + 2$

5.4. $x + 1, x^2 + x + 1,$
 $x^3 + x^2 + x + 1, x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

- 5.5. a) $W(x) =$
 $= (x + 1)(3x^2 + 2x) + 7$
 b) $W(x) =$
 $= (x^2 + x + 3)(x - 3) + x + 8$
 c) $W(x) = (x^2 - 3x - 1)(2x + 5) + 2$
 d) $W(x) =$
 $= (x^2 + x + 3)(2x^2 - x + 1) - 10x$

5.6. wielomianem stopnia drugiego, pierwszego, zerowego lub wielomianem zerowym

Zadania

5.1. Dane są wielomiany $W(x), P(x), Q(x)$ i $R(x)$ takie, że $W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$. Stopień wielomianu W jest równy 10, stopień wielomianu P jest równy 4, a stopień wielomianu R jest równy 5. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Stopień wielomianu Q jest równy 6.
 B. Wielomian R jest resztą z dzielenia W przez P .
 C. Wielomian R jest resztą z dzielenia W przez Q .

5.2. Podziel wielomian przez dwumian.

- a) $(x^3 + 2x^2 - 7x + 4) : (x - 1)$
 b) $(x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6) : (x + 2)$
 c) $(10x^4 + 17x^3 - 5x^2 - 10x + 3) : (2x + 3)$
 d) $(3x^5 - 7x^4 - 11x^3 + 16x^2 - 5x + 6) : (x - 3)$

5.3. Wykonaj dzielenie wielomianów.

- a) $(x^3 + 3x^2 - 8x + 10) : (x^2 - 2x + 2)$
 b) $(x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 6) : (x^2 - x - 2)$
 c) $(x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6) : (x^2 - 2x - 3)$
 d) $(x^5 + x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 7x + 2) : (x^3 + 2x^2 - 3x + 1)$

5.4. Podziel każdy z wielomianów $x^2 - 1, x^3 - 1, x^4 - 1, x^5 - 1$ przez dwumian $x - 1$.

5.5. Wykonaj dzielenie wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$. Zapisz wielomian $W(x)$ jako $P(x) \cdot Q(x) + R(x)$, przy czym R oznacza resztę z dzielenia W przez P . Określ stopnie wielomianów W, P, Q i R .

- | | |
|---|-----------------------|
| a) $W(x) = 3x^3 + 5x^2 + 2x + 7$ | $P(x) = x + 1$ |
| b) $W(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ | $P(x) = x^2 + x + 3$ |
| c) $W(x) = 2x^3 - x^2 - 17x - 3$ | $P(x) = x^2 - 3x - 1$ |
| d) $W(x) = 2x^4 + x^3 + 6x^2 - 12x + 3$ | $P(x) = x^2 + x + 3$ |

5.6. Którego stopnia wielomianem może być reszta, która powstanie w wyniku dzielenia wielomianu stopnia siódmego przez wielomian stopnia trzeciego?

5.7. Wyznacz wielomian, który przy dzieleniu przez $2x + 1$ daje iloraz $x^2 + 2x - 3$ i resztę 5.

5.8. Wyznacz wielomian, który przy dzieleniu przez $x^2 - 5x + 2$ daje iloraz $3x^2 - x + 1$ i resztę $2x - 8$.

5.9. Podaj przykład wielomianu stopnia czwartego, który przy dzieleniu przez $5x^2 + 4x - 3$ daje resztę $x - 4$.

5.10. Podaj przykład wielomianu stopnia trzeciego podzielonego przez dwumian $x - 2$.

5.11. Podaj przykład wielomianu stopnia trzeciego podzielonego przez dwumiany $x + 1$ i $x - 4$.

5.12. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu W przez dwumian P . Nie wykonuj dzielenia.

a) $W(x) = 2x^3 - 7x^2 + x - 11$ $P(x) = x - 1$

b) $W(x) = x^4 + 3x^3 + 5x + 1$ $P(x) = x + 2$

c) $W(x) = x^{100} - 2x^{50} + 50$ $P(x) = x + 1$

d) $W(x) = x^{1000} - x^{999}$ $P(x) = x - 2$

D 5.13. Wykaż, że wielomian W jest podzielny przez dwumian P . Nie wykonuj dzielenia.

a) $W(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 4$ $P(x) = x - 1$

b) $W(x) = -x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 6$ $P(x) = x + 3$

c) $W(x) = 3x^3 + x^2 - 16x + 4$ $P(x) = x - 2$

d) $W(x) = 8x^4 - 2x^3 + x^2 - 1$ $P(x) = x + \frac{1}{2}$

5.14. Dla jakich wartości m wielomian W jest podzielny przez dwumian Q ?

a) $W(x) = 3x^3 - 5x^2 + x + m$ $Q(x) = x - 1$

b) $W(x) = x^3 + 3x^2 + mx + 4$ $Q(x) = x + 4$

c) $W(x) = mx^4 - 4x^3 - 23x^2 - x - 6$ $Q(x) = x + 2$

d) $W(x) = 9x^3 - 3x^2 + mx - 2$ $Q(x) = x - \frac{2}{3}$

5.15. Dla jakich wartości m reszta z dzielenia wielomianu W przez Q jest równa R ?

a) $W(x) = x^3 - (8 + m)x^2 + (2m + 11)x + 5m$ $Q(x) = x - 1$ $R = -2$

b) $W(x) = 2x^4 - (2m - 1)x^3 - (m - 1)x^2 + \frac{1}{2}mx - 5$ $Q(x) = x + 2$ $R = 1$

c) $W(x) = -x^3 + (m - 2)x^2 - (2m - 3)x + 2m + 2$ $Q(x) = x - 3$ $R = -9$

d) $W(x) = (m - 1)x^3 + 3mx^2 - (m + 2)x - 2m$ $Q(x) = x + 5$ $R = -6$

5.7. $2x^3 + 5x^2 - 4x + 2$

5.8. $3x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 5x - 6$

5.9. np. $5x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 3x - 1$

5.10. np. $x^3 + x^2 - 2x - 8$

5.11. np. $x^3 + 2x^2 - 19x - 20$

5.12. a) -15 b) -17 c) 49
d) 2^{999}

5.13. a) $W(1) = 1 - 2 + 5 - 4 = 0$,
więc $P(x)|W(x)$

b) $W(-3) = -81 + 54 + 36 - 3 - 6 =$
 $= 90 - 90 = 0$, więc $P(x)|W(x)$

c) $W(2) = 24 + 4 - 32 + 4 = 0$,
więc $P(x)|W(x)$

d) $W\left(\frac{-1}{2}\right) = 8 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 =$
 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1 = 0$,
więc $P(x)|W(x)$

5.14. a) $m = 1$ b) $m = -3$

c) $m = 4$ d) $m = 1$

5.15. a) $m = -1$ b) $m = -2$

c) $m = 5$ d) $m = 3$

5.16. $a = -2$ lub $a = 2$

5.17. $W(1) = 4iW(-2) = 13$
 $W(1) = 2 + a + b + 1 = a + b + 3$
 $W(-2) = -16 + 4a - 2b + 1 = 4a - 2b - 15$
 Zatem: $\begin{cases} 2a + 2b + 6 = 8 \\ 4a - 2b - 15 = 13 \end{cases}$
 stąd $6a - 9 = 21$, $a = 5$
 $5 + b + 3 = 4$, $b = -4$
Odp.: $a = 5$, $b = -4$

5.16. Dla jakich wartości współczynnika a reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^4 - 7$ przez $P(x) = x + a$ jest równa 9?

* **5.17.** Dla jakich wartości współczynników a i b reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1$ przez wielomian $x - 1$ jest równa 4, a reszta z dzielenia wielomianu W przez wielomian $x + 2$ jest równa 13?

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

- Wskaż iloraz z dzielenia wielomianu $x^3 + 2x^2 - x + 6$ przez $x + 3$.
 A. $x^2 + x + 2$ B. $x^2 + x - 2$ C. $x^2 - x + 2$ D. $x^2 - x - 2$
 - Wskaż wielomian, który przy dzieleniu przez $x^2 - 3$ daje iloraz $x + 2$ i resztę 1.
 A. $x^3 + 2x^2 + 3x - 5$ C. $x^3 - 2x^2 + 3x - 5$
 B. $x^3 + 2x^2 - 3x - 5$ D. $x^3 - 2x^2 - 3x - 5$
 - Wskaż resztę z dzielenia wielomianu $x^7 - 5x^3 + 4$ przez dwumian $x + 1$.
 A. 0 B. 3 C. 8 D. 10
 - Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.
 Oceń prawdziwość podanych zdań.
 A. Wielomian W jest podzielny przez $x - 3$.
 B. Wielomian W jest podzielny przez $x^2 - 1$.
 C. Wielomian W ma trzy pierwiastki.
 - Podziel wielomian $W(x) = 9x^4 - 37x^2 + 4$ przez dwumian $3x + 1$.
 - Wyznacz wielomian $W(x)$, który przy dzieleniu przez $P(x) = -x^3 + x^2 - x - 2$ daje iloraz $Q(x) = x^2 + x - 1$ i resztę $R(x) = x - 2$.
- D** 7. Wykaż, że wielomian $W(x) = x^4 - 15x^2 + 10x + 24$ jest podzielny przez każdy z dwumianów: $x - 2$, $x - 3$, $x + 1$, $x + 4$.

Prosto do matury

- C
- B
- C
- P, P, P
- $3x^3 - x^2 - 12x + 4$
- $W(x) = -x^5 + x^3 - 4x^2$
- $W(x) = x^4 - 15x^2 + 10x + 24$
 $W(2) = 16 - 60 + 20 + 24 = 0$, $W(3) = 81 - 135 + 30 + 24 = 0$, $W(-1) = 1 - 15 - 10 + 24 = 0$,
 $W(-4) = 256 - 240 - 40 + 24 = 0$
 Zatem wielomian $W(x)$ jest podzielny przez każdy z wielomianów: $x - 2$, $x - 3$, $x + 1$,
 $x + 4$, więc $W(x) = (x - 2)(x - 3)(x + 1)(x + 4)$.

6. Zastosowanie twierdzenia Bézouta

Umiejętności:

- stosowanie twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$
- stosowanie twierdzenia o pierwiastkach całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych

Schemat Hornera

Dzielenie wielomianu przez wielomian zawsze można wykonywać według algorytmu opisanego wcześniej. Ponieważ jednak dzielenie wielomianu przez dwumian $x - a$ ma szczególne znaczenie, podamy szybki sposób na znalezienie ilorazu i reszty w takim działaniu.

Prześledźmy na przykładzie dzielenia

$(2x^3 + 5x^2 - 24x - 13) : (x - 3)$, skąd biorą się współczynniki w ilorazie.

Z twierdzenia o dzieleniu wielomianów z resztą wynika następująca równość:

$$2x^3 + 5x^2 - 24x - 13 = (x - 3) \cdot (ax^2 + bx + c) + R$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 11x + 9 \\ (2x^3 + 5x^2 - 24x - 13) : (x - 3) \\ -(2x^3 - 6x^2) \\ \hline 11x^2 - 24x - 13 \\ -(11x^2 - 33x) \\ \hline 9x - 13 \\ -(9x - 27) \\ \hline 14 \end{array}$$

Znalezienie wyniku dzielenia polega na wyznaczeniu współczynników a , b , c oraz reszty R :

$$2x^3 + 5x^2 - 24x - 13 = ax^3 - 3ax^2 + bx^2 - 3bx + cx - 3c + R$$

$$2x^3 + 5x^2 - 24x - 13 = ax^3 + (b - 3a)x^2 + (c - 3b)x + R - 3c$$

Z twierdzenia o wielomianach równych otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2 = a \\ 5 = b - 3a \\ -24 = c - 3b \\ -13 = R - 3c \end{cases}, \text{ zatem } \begin{cases} a = 2 \\ b = 3a + 5 \\ c = 3b - 24 \\ R = 3c - 13 \end{cases} \quad (*)$$

Umieścimy teraz w tabeli współczynniki wielomianu $2x^3 + 5x^2 - 24x - 13$, miejsce zerowe dzielnika (czyli liczbę 3), współczynniki a , b , c oraz resztę R w następujący sposób:

	2	5	-24	-13
3	a	b	c	R

ZZ i KPU

tematy 2.9, 2.10

Multiteka

- Schemat Hornera
- Pierwiastki całkowite wielomianu

dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 2.6

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Z równań tworzących układ (*) odczytujemy sposób wyznaczania liczb a , b , c i R w tabeli:

- liczba a : przepisujemy stojącą nad nią w tabeli liczbę 2,
- liczba b : mnożymy stojącą po jej lewej stronie liczbę a przez 3 i dodajemy stojącą nad nią liczbę 5,
- liczba c : mnożymy stojącą po jej lewej stronie liczbę b przez 3 i dodajemy stojącą nad nią liczbę -24 ,
- liczba R : mnożymy stojącą po jej lewej stronie liczbę c przez 3 i dodajemy stojącą nad nią liczbę -13 .

Można to przedstawić graficznie:

		2	5	-24	-13
		↓	↓	↓	↓
		2	11	9	14
3					

W ten sposób możemy znaleźć iloraz i resztę z dzielenia wielomianu dowolnego stopnia przez dwumian $x - a$. Opisany sposób postępowania nosi nazwę **schematu Hornera**.

Przykład 1

Wyznamy iloraz i resztę z dzielenia wielomianu $x^4 + 3x^3 - 5x + 4$ przez dwumian $x + 2$. Skorzystamy ze schematu Hornera.

Rozwiązanie

Zwróćmy uwagę, że współczynnik przy x^2 jest równy 0.

$$x^4 + 3x^3 - 5x + 4 = 1 \cdot x^4 + 3 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + (-5) \cdot x + 4$$

Miejszem zerowym dwumianu $x + 2$ jest liczba -2 .

		1	3	0	-5	4
		↓	↓	↓	↓	↓
		1	1	-2	-1	6
-2						

Wielomian otrzymany w wyniku dzielenia jest stopnia trzeciego. Jego współczynniki odczytujemy z tabeli. Ostatnia liczba jest resztą z dzielenia.

Odp.: Iloraz to $x^3 + x^2 - 2x - 1$, reszta jest równa 6.

Przykład 2

◀ zad. 6.2

Wyznamy iloraz i resztę z dzielenia $(x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 11x - 12) : (x - 4)$.

◀6.2. Zastosuj schemat Hornera i wykonaj dzielenie.

a) $(x^3 - 3x^2 + 5x - 3) : (x - 1)$

b) $(2x^3 - 7x^2 - 3x + 6) : (x + 1)$

c) $(-3x^3 + x^2 - 2x - 32) : (x + 2)$

d) $(x^3 - 23x - 10) : (x - 5)$

e) $(x^4 - 3x^2 + 15x - 9) : (x + 3)$

f) $(x^5 + 32) : (x + 2)$

Odp.: a) $x^2 - 2x + 3$

b) $2x^2 - 9x + 6$

c) $-3x^2 + 7x - 16$

d) $x^2 + 5x + 2$

e) $x^3 - 3x^2 + 6x - 3$

f) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$

Rozwiązanie

		1	-4	-2	11	-12
		↓	↘	↓	↘	↓
4	1	0	-2	3	0	

Iloraz to $x^3 + 0 \cdot x^2 - 2x + 3$, czyli $x^3 - 2x + 3$.

Reszta jest równa 0, czyli $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 11x - 12 = (x - 4)(x^3 - 2x + 3)$.

Odp.: Ilorazem jest $x^3 - 2x + 3$, reszta jest równa 0.

Wykorzystanie twierdzenia Bézouta w rozwiązywaniu równań

Pokażemy przykłady zastosowania twierdzenia Bézouta do rozwiązywania równań.

Przykład 3 ◀ zad. 6.3

Wiadomo, że liczba -4 jest jednym z rozwiązań równania $x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$. Wyznamy pozostałe rozwiązania tego równania.

Rozwiązanie

Wielomian $W(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ trudno jest rozłożyć na czynniki metodą grupowania wyrazów i wyłączania przed nawias. Wiemy jednak, że $W(-4) = 0$. Z twierdzenia Bézouta wynika, że W jest podzielny przez $x + 4$. Skorzystamy ze schematu Hornera i wykonamy to dzielenie.

	1	1	-10	8
-4	1	-3	2	0

Zatem $W(x) = (x + 4)(x^2 - 3x + 2)$.

Równanie możemy więc zapisać w postaci iloczynowej.

$$(x + 4)(x^2 - 3x + 2) = 0 \quad \leftarrow \text{rozwiązujemy równanie } x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Delta = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

Odp.: Pierwiastkami równania są liczby: $-4, 1$ i 2 .

Jak widać, znalezienie jednego rozwiązania równania pozwala wykonać dzielenie, a poszukiwanie pierwiastków sprowadza się do rozwiązywania równania stopnia niższego o jeden. Równanie stopnia trzeciego możemy więc łatwo rozwiązać, gdy znamy jego jeden pierwiastek, równanie stopnia czwartego, gdy znamy dwa pierwiastki itd. Problem polega na tym, jak znaleźć choćby jedno rozwiązanie równania wielomianowego.

◀6.3. Wiadomo, że r jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Wyznamy pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

a) $W(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6, \quad r = -2$

b) $W(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6, \quad r = 3$

c) $W(x) = 2x^3 - 11x^2 + 4x + 5, \quad r = 5$

d) $W(x) = 4x^3 - 27x + 27, \quad r = -3$

Odp.: a) $-3, 1$

b) $-2, \frac{1}{2}$

c) $-\frac{1}{2}, 1$

d) $\frac{3}{2}$

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $2x^3 - 10x^2 + 13x - 3 = 0$.

Rozwiązanie

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, nie widać prostej możliwości zastosowania metody rozkładu na czynniki lewej strony równania. Tym razem nie mamy podanego żadnego pierwiastka naszego równania.

Gdyby pierwiastkiem była pewna liczba całkowita a , to prawdziwa byłaby równość:

$$2a^3 - 10a^2 + 13a - 3 = 0$$

Możemy ją zapisać w innej postaci:

$$2a^3 - 10a^2 + 13a = 3, \text{ czyli } a(2a^2 - 10a + 13) = 3$$

Wszystkie współczynniki wyrażenia w nawiasie są całkowite. Gdy a jest również liczbą całkowitą, to po lewej stronie znaku równości mamy iloczyn dwóch liczb całkowitych: a oraz $(2a^2 - 10a + 13)$. Oznacza to, że każda z tych liczb musi być dzielnikiem liczby 3, stojącej po drugiej stronie znaku równości. Stąd już prosty wniosek: rozwiązania równania, będące liczbami całkowitymi, mogą należeć wyłącznie do zbioru całkowitych dzielników liczby 3, czyli $\{1, -1, 3, -3\}$.

Teraz podstawiamy do równania kolejne liczby z tego zbioru i sprawdzamy, czy któraś z nich jest jego rozwiązaniem:

- gdy $x = 1$, to $2 \cdot 1 - 10 \cdot 1 + 13 - 3 = 2 \neq 0$, więc 1 nie jest rozwiązaniem równania,
- gdy $x = -1$, to $-2 - 10 - 13 - 3 \neq 0$,
- gdy $x = 3$, to $2 \cdot 27 - 10 \cdot 9 + 13 \cdot 3 - 3 = 0$.

Zatem liczba 3 jest pierwiastkiem równania.

Wykonujemy dzielenie $2x^3 - 10x^2 + 13x - 3$ przez dwumian $x - 3$.

	2	-10	13	-3
3	2	-4	1	0

Mamy więc $(x - 3)(2x^2 - 4x + 1) = 0$.

Z rozwiązania równania kwadratowego $2x^2 - 4x + 1 = 0$ otrzymujemy następujące pierwiastki:

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \text{ lub } x_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

Odp.: Równanie $2x^3 - 10x^2 + 13x - 3 = 0$ ma pierwiastki: 3, $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ i $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$.

Całkowite pierwiastki wielomianu o współczynnikach całkowitych

Udowodnimy twierdzenie o całkowitych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Twierdzenie

Jeżeli liczba całkowita p jest pierwiastkiem wielomianu W , którego wszystkie współczynniki są liczbami całkowitymi, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego tego wielomianu.

Założenie

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$p, a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ są liczbami całkowitymi

$$W(p) = 0.$$

Teza

Liczba p jest dzielnikiem liczby a_0 .

Dowód

Dowód twierdzenia jest powtórzeniem rozumowania z przykładu 4.

Jeżeli liczba całkowita p jest pierwiastkiem równania:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

to

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

Zapiszmy tę równość w innej postaci:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p = -a_0$$

czyli

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \dots + a_2 p + a_1) = -a_0$$

Zgodnie z założeniem wszystkie współczynniki $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ są liczbami całkowitymi, zatem lewa strona równości jest iloczynem dwóch liczb całkowitych:

$$p \text{ oraz } (a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \dots + a_2 p + a_1)$$

Każda z nich jest więc dzielnikiem stojącej po prawej stronie liczby całkowitej $-a_0$. Oznacza to, że liczba p jest dzielnikiem liczby a_0 .

Koniec dowodu

◀ 6.8. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$
 b) $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$
 c) $x^3 - 2x^2 - 6x - 8 = 0$
 d) $3x^3 - 6x^2 - 27 = 0$

Odp.: a) $x = 1$ lub $x = 2$ b) $x = -3$ lub $x = 2$ c) $x = 4$ d) $x = 3$

◀ 6.9. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$
 b) $x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 0$
 c) $x^3 + x^2 - 3x - 2 = 0$
 d) $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 6x + 13\frac{1}{3} = 0$

Odp.: a) $x = 1$ lub $x = 3$ lub $x = 4$ b) $x = -2$ lub $x = -1$ lub $x = 5$ c) $x = -2$ lub $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ lub $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ d) $x = -4$ lub $x = 2$ lub $x = 5$ ◀ 6.11. Jednym z rozwiązań podanego równania z niewiadomą x jest liczba r .Wyznacz m i rozwiąż to równanie.

- a) $mx^3 - (m+1)x^2 - 9(x-2) = 0$,
 $r = 2$
 b) $x^3 + 7mx^2 - 2(5m-2)x + 8m = 0$,
 $r = 2$
 c) $(m-1)x^3 + x^2 - (m+2)x - 2m = 0$,
 $r = -1$
 d) $\frac{1}{2}mx^3 + (4+m)x^2 +$
 $-(3m-1)x - 2m = 0$, $r = 4$

Odp.: a) $m = 1$, $x = -3$ lub $x = 2$
 lub $x = 3$ b) $m = -1$, $x = 1$ lub $x = 2$
 lub $x = 4$ c) $m = 2$, $x = -2$ lub $x = -1$
 lub $x = 2$ d) $m = -2$, $x = -1$ lub $x = 4$ 

Przykład 5 ◀ zad. 6.8, 6.9

Rozwiążemy równanie $\frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x = 0$.

Rozwiązanie

Mnożymy obie strony równania przez 2, aby dostać równanie o współczynnikach całkowitych.

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 - x^2 - 6x &= 0 \\ x(x^3 - 2x^2 - x - 6) &= 0 \end{aligned}$$

Zatem $x = 0$ lub $x^3 - 2x^2 - x - 6 = 0$.W drugim równaniu szukamy całkowitych pierwiastków w zbiorze $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$. Po sprawdzeniu, że pierwiastkiem jest 3 i wykonaniu odpowiedniego dzielenia mamy:

$$x^3 - 2x^2 - x - 6 = (x-3)(x^2 + x + 2)$$

Równanie $x^4 - 2x^3 - x^2 - 6x = 0$ możemy więc zapisać w postaci:

$$x(x-3)(x^2 + x + 2) = 0$$

czyli dane początkowo równanie ma postać $\frac{1}{2}x(x-3)(x^2 + x + 2) = 0$.Trójmian w ostatnim nawiasie jest nierozkładalny ($\Delta = -7$).

Odp.: Rozwiązaniami równania są liczby 0 i 3.

Gdy współczynniki równania są liczbami wymiernymi, wystarczy pomnożyć obydwie jego strony przez NWW mianowników, aby otrzymać równoważne równanie o współczynnikach całkowitych. Jeżeli więc dane na początku równanie ma pierwiastki całkowite, to są one dzielnikami wyrazu wolnego nowo powstałego wielomianu.

Przykład 6 ◀ zad. 6.11

Liczby 2 i 3 są pierwiastkami równania $2x^3 + mx^2 - 13x + k = 0$ z niewiadomą x . Wyznamy współczynniki m i k oraz obliczymy trzeci pierwiastek równania.

Rozwiązanie

Jeżeli 2 i 3 są pierwiastkami równania $2x^3 + mx^2 - 13x + k = 0$, to po podstawieniu do tego równania każdej z tych liczb w miejsce niewiadomej x otrzymamy równość.

Czyli:

$$2 \cdot 2^3 + m \cdot 2^2 - 13 \cdot 2 + k = 0 \quad \text{ i } \quad 2 \cdot 3^3 + m \cdot 3^2 - 13 \cdot 3 + k = 0$$

Mamy zatem układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi m i k .

$$\begin{cases} 16 + 4m - 26 + k = 0 \\ 54 + 9m - 39 + k = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4m + k = 10 \\ 9m + k = -15 \end{cases}$$

Rozwiązujemy ten układ, np. metodą przeciwnych współczynników, i otrzymujemy $m = -5$ i $k = 30$. Początkowe równanie ma zatem postać $2x^3 - 5x^2 - 13x + 30 = 0$.

Aby znaleźć jego trzeci pierwiastek, możemy rozłożyć wielomian $2x^3 - 5x^2 - 13x + 30$ na czynniki za pomocą dzielenia:

- przez iloczyn $(x - 2)(x - 3)$, czyli $\frac{2x + 5}{(2x^3 - 5x^2 - 13x + 30) : (x^2 - 5x + 6)}$ trójmian $x^2 - 5x + 6$, lub
- kolejno, z użyciem schematu Hornera, $-(2x^3 - 10x^2 + 12x)$ przez czynniki $(x - 2)$ i $(x - 3)$.

Otrzymujemy następującą postać iloczynową równania:

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 25x + 30 \\ -(5x^2 - 25x + 30) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(x - 2)(x - 3)(2x + 5) = 0$$

Trzecim pierwiastkiem równania jest zatem liczba $-\frac{5}{2}$.

Odp.: $m = -5$, $k = 30$, trzecim pierwiastkiem równania jest $-\frac{5}{2}$.

Liczba pierwiastków wielomianu stopnia n

Każdy wielomian W można rozłożyć na czynniki stopnia co najwyżej drugiego. Zastanówmy się, jakie czynniki mogą występować w postaci iloczynowej wielomianu stopnia wyższego niż dwa. Rozważmy wielomiany czwartego i piątego stopnia.

Jeżeli $W(x)$ jest stopnia czwartego, to może być iloczynem:

- czterech czynników liniowych, np. $W(x) = 3(x - 3)(x - 2)(x + \sqrt{7})(x + 1)$,
- dwóch czynników liniowych i jednego nierozkładalnego czynnika kwadratowego, np. $W(x) = (5x - 8)(x - 4)(x^2 + 1)$,
- dwóch nierozkładalnych czynników kwadratowych, np. $W(x) = (5x^2 + 2)(x^2 + 1)$.

Jeżeli $W(x)$ jest stopnia piątego, to może być iloczynem:

- pięciu czynników liniowych, np. $W(x) = 3(x - 3)(x - 2)(x + \sqrt{7})(x - \frac{3}{7})(x + 4)$,
- trzech czynników liniowych i jednego nierozkładalnego czynnika kwadratowego, np. $W(x) = 3(x - 3)(x - 2)(x + \sqrt{7})(5x^2 - x + 1)$,
- czynnika liniowego i dwóch nierozkładalnych czynników kwadratowych, np. $W(x) = (x + 9)(5x^2 + 8)(x^2 + 1)$.

Zauważmy, że każdy wielomian może mieć **co najwyżej** tyle czynników liniowych, ile wynosi jego stopień, oraz że w rozkładzie wielomianu stopnia nieparzystego musi wystąpić przynajmniej jeden czynnik liniowy. Może się zdarzyć, że wielomian stopnia parzystego jest iloczynem wyłącznie nierozkładalnych trójmianów kwadratowych. Zatem z twierdzenia o rozkładzie wielomianu na czynniki oraz własności działań na wielomianach wynika następujący wniosek.

Wniosek

Wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.

Wniosek ten informuje o maksymalnej liczbie **różnych** pierwiastków, której nie należy utożsamiać z liczbą liniowych czynników w rozkładzie. Na przykład wielomian:

- $W(x) = (x - 2)^5$ jest stopnia piątego, rozkłada się na pięć czynników liniowych, ale ma tylko jeden pierwiastek – jest nim liczba 2,
- $Q(x) = (x - 2)^3(x + 1)^4(x - \sqrt{2})(x^2 + 6)$ jest stopnia dziesiątego, ma w rozkładzie osiem czynników liniowych, ale tylko trzy pierwiastki: 2, -1 , $\sqrt{2}$.

Zadania

Odpowiedzi i rozwiązania

6.1. P, P, P

- 6.2. a) $x^2 - 2x + 3$
 b) $2x^2 - 9x + 6$
 c) $-3x^2 + 7x - 16$
 d) $x^2 + 5x + 2$
 e) $x^3 - 3x^2 + 6x - 3$
 f) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$

- 6.3. a) $-3, 1$
 b) $-2, \frac{1}{2}$
 c) $-\frac{1}{2}, 1$
 d) $\frac{3}{2}$

6.4. $-3, 3$

6.5. $\frac{3 - \sqrt{13}}{2}, \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$

6.1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Każdy wielomian stopnia piątego

A. jest podzielny przez pewien dwumian.

B. ma co najmniej jeden pierwiastek.

C. ma co najwyżej pięć pierwiastków.

6.2. Zastosuj schemat Hornera i wykonaj dzielenie.

- a) $(x^3 - 3x^2 + 5x - 3) : (x - 1)$ d) $(x^3 - 23x - 10) : (x - 5)$
 b) $(2x^3 - 7x^2 - 3x + 6) : (x + 1)$ e) $(x^4 - 3x^2 + 15x - 9) : (x + 3)$
 c) $(-3x^3 + x^2 - 2x - 32) : (x + 2)$ f) $(x^5 + 32) : (x + 2)$

6.3. Wiadomo, że r jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

- a) $W(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ $r = -2$
 b) $W(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ $r = 3$
 c) $W(x) = 2x^3 - 11x^2 + 4x + 5$ $r = 5$
 d) $W(x) = 4x^3 - 27x + 27$ $r = -3$

6.4. Liczby 1 i -2 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$. Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

6.5. Liczby $\frac{5 - \sqrt{33}}{2}$ i $\frac{5 + \sqrt{33}}{2}$ są pierwiastkami wielomianu

$W(x) = x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 11x + 2$. Wyznacz jego pozostałe pierwiastki.

6.6. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 - 3x + 2 = 0$ d) $(2x - 1)(x + 3)(x - 2) - 2(x^2 + 6) = 0$
 b) $x^3 + 9x - 10 = 0$ e) $(x - 4)(-3x^2 - x - 16) - 60 = 0$
 c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ f) $(x^2 - 5)(x + 5) - 3(x - 2)(x^2 + 4) + 7 = 0$

6.7. Pierwiastkami równania $3(2x - 7)(9x + 4)(x - 15) = 0$ są liczby $15, \frac{7}{2}, -\frac{4}{9}$.

Skorzystaj z tego przykładu i podaj przykład równania wielomianowego o współczynnikach całkowitych, którego rozwiązaniami są podane liczby.

- a) $-3, -2, \frac{1}{2}, 1$ b) $-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ c) $-1, 0, \frac{2}{3}, 2$ d) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, 7$

6.8. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ c) $x^3 - 2x^2 - 6x - 8 = 0$
 b) $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$ d) $3x^3 - 6x^2 - 27 = 0$

6.9. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$ c) $x^3 + x^2 - 3x - 2 = 0$
 b) $x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 0$ d) $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 6x + 13\frac{1}{3} = 0$

6.10. Rozwiąż równanie.

- a) $x^4 + 11x^3 + 31x^2 + 21x = 0$ d) $x^4 - 4x^3 - 18x^2 - 20x - 7 = 0$
 b) $x^4 - 2x^3 - 15x^2 + 32x - 16 = 0$ e) $x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 11x - 5 = 0$
 c) $x^4 + 7x^3 + 8x^2 - 28x - 48 = 0$ f) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$

6.11. Jednym z rozwiązań podanego równania z niewiadomą x jest liczba r .

Wyznacz m i rozwiąż to równanie.

- a) $mx^3 - (m + 1)x^2 - 9(x - 2) = 0$ $r = 2$
 b) $x^3 + 7mx^2 - 2(5m - 2)x + 8m = 0$ $r = 2$
 c) $(m - 1)x^3 + x^2 - (m + 2)x - 2m = 0$ $r = -1$
 d) $\frac{1}{2}mx^3 + (4 + m)x^2 - (3m - 1)x - 2m = 0$ $r = 4$

- * **6.12.** Dla jakich wartości k pierwiastkami równania $x^3 + (k^2 - 7)x^2 - (k + 4)x - 2 = 0$ są liczby 1 i -2?

6.13. Jakie całkowite wartości może przyjąć współczynnik m , jeśli wiadomo, że równanie $x^3 + (m - 2)x - 3 = 0$ ma pierwiastek całkowity?

6.14. Jakie całkowite wartości może przyjąć współczynnik a , jeżeli wiadomo, że wielomian $ax^4 - 3x + 1$ ma pierwiastek całkowity?

6.12. $x^3 + (k^2 - 7)x^2 - (k + 4)x - 2 = 0$

$$\begin{cases} 1 + k^2 - 7 - k - 4 - 2 = 0 \\ -8 + 4k^2 - 28 + 2k + 8 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - k - 12 = 0 \\ 4k^2 + 2k - 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - k - 12 = 0 \Leftrightarrow k \in \{-3, 4\} \\ 2k^2 + k - 15 = 0 \Leftrightarrow k \in \left\{-3, \frac{5}{2}\right\} \Rightarrow k = -3 \end{cases}$$

Odp.: $k = -3$

6.13. $m \in \{-8, -6, -2, 4\}$

6.14. $a = -4$ lub $a = 2$

6.6. a) $x = -2$ lub $x = 1$

b) $x = 1$

c) $x = -3$ lub $x = -1$ lub $x = 1$ lub $x = 3$

d) $x = -2$ lub $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 3$

e) $x = \frac{2}{3}$ lub $x = 1$ lub $x = 2$

f) $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 2$ lub $x = 3$

6.7. a) np.

$(x + 3)(x + 2)(2x - 1)(x - 1) = 0$

b) np. $(x + 1)(3x - 1)(6x - 3) = 0$

c) np. $x(x + 1)(3x - 2)(x - 2) = 0$

d) np. $(4x - 2)(10x - 4)(x - 7) = 0$

6.8. a) $x = 1$ lub $x = 2$

b) $x = -3$ lub $x = 2$

c) $x = 4$

d) $x = 3$

6.9. a) $x = 1$ lub $x = 3$ lub $x = 4$

b) $x = -2$ lub $x = -1$ lub $x = 5$

c) $x = -2$ lub $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

lub $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

d) $x = -4$ lub $x = 2$ lub $x = 5$

6.10. a) $x = -7$ lub $x = -3$

lub $x = -1$ lub $x = 0$

b) $x = -4$ lub $x = 1$

lub $x = 4$

c) $x = -4$ lub $x = -3$ lub $x = -2$ lub $x = 2$

d) $x = -1$ lub $x = 7$

e) $x = -1$ lub $x = 5$

lub $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ lub $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

f) $x = -1$ lub $x = 2$

6.11. a) $m = 1, x = -3$ lub $x = 2$

lub $x = 3$

b) $m = -1, x = 1$ lub $x = 2$

lub $x = 4$

c) $m = 2, x = -2$ lub $x = -1$

lub $x = 2$

d) $m = -2, x = -1$ lub $x = 4$

6.15. $W(x) = x^3 + px^2 + 56x + q$;

$0 < x_1 < x_2 < x_3$;

$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 2 : 4$

Zatem $x_2 = 2x_1$, $x_3 = 4x_1$.

$W(x) =$

$= (x - x_1)(x - 2x_1)(x - 4x_1) =$

$= (x^2 - 2x_1x - x_1x + 2x_1^2)(x - 4x_1) =$

$= x^3 - 4x_1x^2 - 2x_1x^2 + 8x_1^2x +$

$-x_1x^2 + 4x_1^2x + 2x_1^2x - 8x_1^3 =$

$= x^3 - 7x_1x^2 + 14x_1^2x - 8x_1^3$

$x^3 + px^2 + 56x + q =$

$= x^3 - 7x_1x^2 + 14x_1^2x - 8x_1^3 \Leftrightarrow$

$p = -7x_1 \wedge 56 = 14x_1^2$

i $q = -8x_1^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p = -7x_1 \wedge x_1^2 = 4$ i $q = -8x_1^3$

$(x_1 > 0)$. Zatem $x_1 = 2$, $p = -14$,

$q = -64$, $x_2 = 2x_1 = 4$,

$x_3 = 4x_1 = 8$.

Odp.: $x \in \{2, 4, 8\}$

$(W(2) = W(4) = W(8))$

6.16. $W(x) =$

$x[x^2 - (m+1)x + m]$ $x = 0$

lub $x = 1$ lub $x = 2$, więc

$x^2 - (m+1)x + m =$

$= (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$. Stąd

$m = 2$ (bo $-m-1 = -3$, $m = 2$)

Odp.: $m = 2$

6.17. $W(x) =$

$(x+6)[x^2 - (m-4)x - 4m]$

Pierwiastkami $W(x)$ są liczby:

$-6, 4, 2$ lub $-8, 6, 4$,

lub $-10, 8, 6$

1. $(x+4)(x+2) = x^2 + 6x + 8 =$

$= x^2 + (4-m)x - 4m$

$(4-m = 6$ i $-4m = 8) \Rightarrow m = -2$

2. $(x+8)(x+4) = x^2 + 12x + 32 =$

$= x^2 + (4-m)x - 4m$

$(4-m = 12$ i $-4m = 32) \Rightarrow$

$\Rightarrow m = -8$

3. $(x+10)(x+8) = x^2 + 18x + 80 =$

$= x^2 + (4-m)x - 4m$

$(4-m = 18$ i $-4m = 80) -$

warunki sprzeczne

Odp.: $m \in \{-8, 2\}$

* **6.15.** Pierwiastki wielomianu $W(x) = x^3 + px^2 + 56x + q$ są dodatnie i pozostają w stosunku $1 : 2 : 4$. Znajdź te pierwiastki.

* **6.16.** Dla jakich wartości m pierwiastki wielomianu $W(x) = x[x^2 - (m+1)x + m]$ są trzema kolejnymi liczbami naturalnymi?

* **6.17.** Dla jakich wartości m wielomian $W(x) = (x+6)[x^2 - (m-4)x - 4m]$ ma trzy pierwiastki będące kolejnymi liczbami parzystymi mniejszymi od zera?

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż wielomian, przez który podzielny jest wielomian $x^5 + x + 2$.

A. $x - 2$

B. $x - 1$

C. $x + 1$

D. $x + 2$

2. Wielomian $x^3 - 3x + m$ jest podzielny przez $x - 2$. Wskaż liczbę m .

A. -14

B. -2

C. 2

D. 14

3. Wyraz wolny pewnego wielomianu o współczynnikach całkowitych jest równy 48. Która liczba nie może być pierwiastkiem tego wielomianu?

A. 4

B. 9

C. 48

D. -6

4. Dany jest wielomian $W(x) = 3x^3 - 2x^2 - 12x + 8$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Wielomian W ma trzy różne pierwiastki całkowite.

B. Wielomian W ma co najwyżej jeden pierwiastek ujemny.

C. Suma wszystkich pierwiastków wielomianu W jest liczbą dodatnią.

5. Rozwiąż równanie $x^3 - 7x - 6 = 0$.

6. Dla jakiej wartości współczynnika a równania $(x-a)(2x^2 + 5x - 3) = 0$

i $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = 0$ mają ten sam zbiór rozwiązań?

7. Liczby $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ i $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ są pierwiastkami równania $x^4 - x^3 - 5x^2 + 2x + 6 = 0$.

Wyznacz pozostałe pierwiastki tego równania.

Prosto do matury

1. C

2. B

3. B

4. F, P, P

5. $x = -1$ lub $x = -2$ lub $x = 3$

6. $a = 1$

7. $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$

7. Wyrażenia wymierne

Umiejętności:

- wykonywanie działań na wielomianach wielu zmiennych
- wyznaczanie dziedziny wyrażenia wymiernego z jedną zmienną
- rozszerzanie i skracanie wyrażenia wymiernego
- sprowadzanie wyrażen wymiernych do wspólnego mianownika

Wielomiany wielu zmiennych

Do tej pory zajmowaliśmy się przede wszystkim jednomianami i wielomianami jednej zmiennej. W szczególności określony został stopień takiego jednomianu oraz wielomianu. Definicję tę można rozszerzyć. Zaczniemy od określenia stopnia jednomianu dwóch zmiennych.

Definicja

Jeżeli jednomian zmiennych x, z jest postaci $ax^n z^m$ i $a \neq 0$ jest ustaloną liczbą rzeczywistą, zwaną współczynnikiem jednomianu, a wykładniki n oraz m są ustalonymi liczbami naturalnymi, to **stopniem jednomianu** jest liczba $n+m$.

Podobnie definiujemy stopień jednomianu trzech i więcej zmiennych. Na przykład jednomian $-2\sqrt{3}z^3 y^4$ jest stopnia siódmego ($3+4=7$), a jednomian $-t^2 xz$ jest stopnia czwartego.

Aby obliczyć wartość jednomianu dla danych wartości zmiennych, podstawiamy je do wyrażenia w miejsce odpowiednich liter. Na przykład jednomian $-3x^2 y$ dla $x = -1$ i $y = 2$ przyjmuje wartość $-3 \cdot (-1)^2 \cdot 2 = -6$.

Jednomiany różniące się co najwyżej współczynnikami nazywamy **podobnymi**.

Definicja

Stopniem wielomianu (sumy algebraicznej) nazywamy największy ze stopni jednomianów będących jego składnikami po redukcji wyrazów podobnych.

Przykład 1 ◀ zad. 7.4

- a) Wielomian $-2x^3 y^2 + x^2 y^3 - 3x + y^4 + 3$ zmiennych x, y jest sumą pięciu jednomianów, z których pierwsze dwa są stopnia piątego, trzeci – stopnia pierwszego, czwarty – stopnia czwartego, a piąty – stopnia zerowego. Zatem wielomian ten jest stopnia piątego.

◀ 7.4. Określ stopień podanego wielomianu.

- a) $a^2 bc - 2ab + 3bc^2$
 b) $7x^2 y - 5x^4 y^2 + 10y^9 - 3$
 c) $-4x^3 t - 6tv + \sqrt{7}x^6 x^4 - 11xvst$
 d) $x^3 zy + x^2 z^2 y + xz^2 y^2 + xz^3 y + xzy^3 + x^2 zy^2$
 Odp.: a) 4 b) 9 c) 10 d) 5

ZZ i KPU

temat 3.4

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.7

 **Generator**
testów i sprawdzianów

◀ 7.7. Wykonaj działania, a następnie przeprowadź redukcję wyrazów podobnych.

a) $(x-y)(x+y) - (x^2 - xy - y^2)$

b) $(x+2y)^2 - (x-y)^2 - 2xy$

c) $(x-xy+3)(2xy+y+1)$

d) $(xy+1)^3 - x(3y^2+x) + (x-y)(x+y)$

e) $2xy+3x^2-2(x^2+7xy-y^2)+10xy-2y^2$

f) $3x^2+2y^2 - (2x^2y-2xy-4xy^2) - (2xy+7x^2y)+9x^2y-2y^2$

g) $7(xy-y^2)+2(xy-x^2)+5xy+3(x^2-5xy)+7y^2$

h) $2x^2-y^2-3(2xy-x^2-y^2)+2(x^2y-x^2)-(y^2+2x^2y)+6xy$

i) $(2x-y)(2x+y) - 3(xy-y^2+x^2) - 2y^2$

j) $(x-y)^2 - 3(x+y)(x-y) + 2(x^2+xy)$

k) $(x-y+2)(x+y-1) - 2x(x+y) - y(y-x) + x^2 + 2y^2$

l) $2(x-x^2y) - (x-y-2)^2 - 4(x-y) + 2(x^2y-xy) + y^2$

Odp.: a) xy
b) $3y^2+4xy$
c) $2x^2y-2x^2y^2-xy^2+6xy+3y+x+3$
d) $x^3y^3+3x^2y^2+3xy-3xy^2-y^2+1$
e) x^2-2xy
f) $3x^2+4xy^2$
g) x^2-xy
h) $3x^2+y^2$
i) x^2-3xy
j) $4y^2$
k) $x+3y-xy-2$
l) $2x-x^2-4$

Odp.: a) xy

b) $3y^2+4xy$

c) $2x^2y-2x^2y^2-xy^2+6xy+3y+x+3$

d) $x^3y^3+3x^2y^2+3xy-3xy^2-y^2+1$

e) x^2-2xy

f) $3x^2+4xy^2$

g) x^2-xy

h) $3x^2+y^2$

i) x^2-3xy

j) $4y^2$

k) $x+3y-xy-2$

l) $2x-x^2-4$

b) Wielomian $2-t^2wx-wx^7+twx$ zmiennych t, w, x jest stopnia ósmego.

Przykład 2 ◀ zad. 7.7

Wykonamy wskazane działania i zredukujemy wyrazy podobne.

Rozwiązanie

a) $(w-t)(w+t) - (w^2-3) = w^2-t^2-w^2+3 = 3-t^2$

b) $xy^2-2x^2y-2xy+3-y(xy-4x-1) = xy^2-2x^2y-2xy+3-xy^2+4xy+y = -2x^2y+2xy+y+3$

Przykład 3 ◀ zad. 7.9

Rozłożymy na czynniki podany wielomian.

Rozwiązanie

a) $3x^2+xy-6x-2y = (3x^2-6x) + (xy-2y) = 3x(x-2) + y(x-2) = (x-2)(3x+y)$

b) $9x^2z^6-4y^4 = (3xz^3-2y^2)(3xz^3+2y^2)$

Wyrażenia wymierne

Wśród wyrażeń algebraicznych istotną rolę odgrywają wyrażenia postaci $\frac{W}{Q}$, gdzie

W oraz Q są wielomianami i Q nie jest wielomianem zerowym. Nazywamy je **wyrażeniami wymiernymi**. Swoją budową przypominają liczby wymierne. Każdy wielomian jest również wyrażeniem wymiernym.

Za pomocą wyrażeń wymiernych zapisujemy różne wzory i zależności w opisie zjawisk fizycznych lub chemicznych.

Przykład 4 ◀ zad. 7.11

Martyna miała w baku samochodu m litrów benzyny. Siedem dni jeździła tą samą trasą długości a km, spalając średnio p litrów benzyny na kilometr. Jaka część początkowego zapasu benzyny została w baku po upływie tego tygodnia?

Rozwiązanie

$$ap$$

◀— dzienne zużycie benzyny

$$7ap$$

◀— tygodniowe zużycie benzyny

$$m-7ap$$

◀— tyle litrów benzyny zostało w baku po tygodniu

$$\frac{m-7ap}{m}$$

◀— taka część początkowego zapasu benzyny pozostała w baku po tygodniu

Odp.: $\frac{m-7ap}{m}$

◀ 7.9. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $2x^2+4xy+2y^2$

d) $25x^2-10xy+y^2-4x^2y^2$

b) $4x-4y-6x^2+6y^2$

e) $x^2-8xy+15y^2$

c) $16-x^2-6xy-9y^2$

f) $y^2+10xy+16x^2$

Odp.: a) $2(x+y)^2$ b) $2(x-y)(2-3x-3y)$ c) $(4-x-3y)(4+x+3y)$

d) $(5x-y-2xy)(5x-y+2xy)$ e) $(x-5y)(x-3y)$ f) $(y+2x)(y+8x)$

◀ 7.11. Katarzyna Kangur dostała 1 marca pensję w wysokości k złotych. Po pierwszym tygodniu tego miesiąca zostało jej s złotych. Jaką część pensji wydała przez pierwszy tydzień marca?

Odp.: $\frac{k-s}{k}$

Napisanie założeń do danego wyrażenia wymiernego jest tym samym, co określenie jego **dziedziny**. Dla wyrażenia wymiernego jednej zmiennej jest nią podzbiór zbioru liczb rzeczywistych, dla wyrażenia wymiernego dwóch zmiennych – zbiór par liczb, dla wyrażenia wymiernego trzech zmiennych – zbiór trójek liczb itd. Prześledźmy to na przykładach.

Przykład 5

Napiszemy założenia dla podanych wyrażeń wymiernych.

a) $\frac{x+8}{4-x^2}$

Założenie: $4-x^2 \neq 0$, czyli $x \neq -2$ i $x \neq 2$

Dziedziną tego wyrażenia wymiernego jest zbiór $\mathbf{R} - \{-2, 2\}$.

b) $\frac{2x+y}{y-x}$

Założenie: $y-x \neq 0$, czyli $y \neq x$

Dziedziną tego wyrażenia wymiernego jest zbiór par różnych liczb rzeczywistych.

Dwa wyrażenia wymierne **są równe** wtedy i tylko wtedy, gdy mają identyczne dziedziny i dla dowolnych argumentów wartości tych wyrażeń są równe. Na przykład wyrażenia $\frac{x^2}{x}$ oraz x nie są równe. Dziedziną pierwszego jest zbiór $\mathbf{R} - \{0\}$, a drugiego zbiór $\mathbf{R}$. Natomiast wyrażenia $\frac{x}{x^2}$ i $\frac{1}{x}$ są równe – każde z nich ma dziedzinę $\mathbf{R} - \{0\}$ i dla wszystkich $x \neq 0$ zachodzi równość $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$.

Działania na wyrażeniach wymiernych są bardzo podobne do działań na ułamkach. Zanim zajmiemy się dodawaniem, odejmowaniem, mnożeniem i dzieleniem wyrażeń wymiernych, powtórzmy, jak się je skraca, rozszerza i sprowadza do wspólnego mianownika.

Skracanie wyrażenia wymiernego polega na podzieleniu licznika i mianownika przez to samo, różne od zera, wyrażenie. Aby wyrażenie po skróceniu było równe danemu wyrażeniu, najpierw określamy jego dziedzinę.

Przyjmujemy to jako zasadę – wszystkie założenia dotyczące danego wyrażenia wymiernego robimy, zanim zaczniemy wykonywać na nim jakiekolwiek działania.

◀ 7.17. Skróć wyrażenie wymierne, jeżeli to możliwe. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{1-a}{a-1}, \frac{3a-6b}{a^2-2ab}, \frac{2a^2-3ab}{2ab-3b^2}, \frac{4x^2-9y^2}{2x^3+3x^2y}$

b) $\frac{2x-1}{2-4x}, \frac{x^4-2x^2+1}{x^3-x}, \frac{x^2-2x-8}{2x^2+3x-2}$

c) $\frac{x^2-4x+4}{3x^2-12x+12}, \frac{x^3+27}{3x^4-17x^3+10x^2}, \frac{x^2-6x+18}{6x^2-34x+20}$

d) $\frac{x^5-x^3-27x^2+27}{x^4-3x^3-x^2+3x}, \frac{x^3-3x^2+6x-4}{x^3+8}$

Odp.: a) $-1, a \neq 1; \frac{3}{a}, a \neq 0, a \neq 2b; \frac{a}{b}, b \neq 0, b \neq \frac{2}{3}a; \frac{2x-3y}{x^2}, x \neq 0, x \neq -\frac{3}{2}y$

b) $-\frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{2}; \frac{x^2-1}{x}, x \neq 0, x \neq 1, x \neq -1; \frac{x-4}{2x-1}, x \neq -2, x \neq \frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{3}, x \neq 2; \frac{x^2}{2}, x \neq \frac{2}{3}, x \neq 5; \frac{x+3}{2}, x \in \mathbf{R}$

d) $\frac{x^2+3x+9}{x}, x \neq -1, x \neq 0, x \neq 1, x \neq 3; \frac{x-1}{x+2}, x \neq -2$

◀ 7.18. Zastąp [?] odpowiednim wyrażeniem, aby rozszerzyć wyrażenie wymierne. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{x}{x-1} = \frac{[?]}{5x^2-5x}$

b) $\frac{x}{x-1} = \frac{[?]}{5x^2-5}$

c) $\frac{x}{x-1} = \frac{[?]}{x^3-1}$

d) $\frac{x}{x-1} = \frac{[?]}{2x^2-4x+2}$

Odp.: a) $5x^2, x \neq 0, x \neq 1$

b) $5x^2+5x, x \neq -1, x \neq 1$

c) $x^3+x^2+x, x \neq 1$

d) $2x^2-2x, x \neq 1$

Przykład 6 ◀ zad. 7.17

Skróćmy podane wyrażenia.

Rozwiązanie

a) $\frac{2ab^2}{4a^2} = \frac{b^2}{2a}, a \neq 0$

b) $\frac{xy^4z^2}{x^4y^2z^2} = \frac{y^2}{x^3}, xyz \neq 0$

c) $\frac{x^2+2x}{x^2-3x} = \frac{x(x+2)}{x(x-3)} = \frac{x+2}{x-3}, x \neq 0 \text{ i } x \neq 3$

d) $\frac{x^3-p^3}{x^2-p^2} = \frac{(x-p)(x^2+xp+p^2)}{(x-p)(x+p)} = \frac{x^2+xp+p^2}{x+p}, x \neq p \text{ i } x \neq -p$

e) $\frac{x^2-x-6}{x^2+7x+10} = \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x+5)} = \frac{x-3}{x+5}, x \neq -2 \text{ i } x \neq -5$

f) $\frac{x^3+8}{2x^2+x-6} = \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{2(x+2)(x-\frac{3}{2})} = \frac{x^2-2x+4}{2x-3}, x \neq -2 \text{ i } x \neq \frac{3}{2}$

Zauważmy, że jeśli w liczniku i mianowniku wyrażenia występują sumy algebraiczne (przykłady c–f), to skrócenie takiego wyrażenia jest możliwe dopiero po przedstawieniu każdej z tych sum w postaci iloczynowej.

Aby dodać (odjąć) dwa wyrażenia wymierne, trzeba najpierw sprowadzić je do wspólnego mianownika. To zadanie często wymaga **rozszerzenia** ułamka, czyli pomnożenia licznika i mianownika przez to samo, różne od zera, wyrażenie.

Przykład 7 ◀ zad. 7.18

Dane jest wyrażenie wymierne $\frac{x+2}{x-3}$ o dziedzinie $\mathbf{R} - \{3\}$. Rozszerzenie tego wyrażenia przez wielomian P może oznaczać zmianę dziedziny wyrażenia – poprzez dodatkowe wykluczenie wszystkich miejsc zerowych P .

Poniżej przedstawiamy trzy różne rozszerzenia wyrażenia $\frac{x+2}{x-3}$.

• $\frac{x+2}{x-3} = \frac{x(x+2)}{x(x-3)} \quad \text{dla } x \in \mathbf{R} - \{0, 3\}$

• $\frac{x+2}{x-3} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-3)} \quad \text{dla } x \in \mathbf{R} - \{1, 3\}$

• $\frac{x+2}{x-3} = \frac{(x^2+5)(x+2)}{(x^2+5)(x-3)} \quad \text{dla } x \in \mathbf{R} - \{3\}$

Sprowadzanie wyrażeń wymiernych do wspólnego mianownika

Wyrażenia wymierne sprowadzamy do wspólnego mianownika na tej samej zasadzie co ułamki. Wyjaśnimy to na przykładach.

Przykład 8 ◀ zad. 7.19

Sprowadzimy do wspólnego mianownika podane wyrażenia.

Rozwiązanie

$$a) \frac{x+1}{x+2} \text{ i } \frac{2x}{x-2}$$

Pierwszy ułamek wymaga założenia, że $x \neq -2$, a drugi, że $x \neq 2$.

Wielomiany w mianownikach nie mają wspólnych czynników. Nie można ich też rozłożyć. Wspólnym mianownikiem może być w tym przypadku iloczyn $(x+2)(x-2)$. Znając wspólny mianownik, rozszerzamy ułamki:

$$\frac{x+1}{x+2} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2 - x - 2}{(x+2)(x-2)} \quad \text{przy założeniu, że } x \neq -2 \text{ i } x \neq 2$$

$$\frac{2x}{x-2} = \frac{2x(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x^2 + 4x}{(x-2)(x+2)} \quad \text{przy założeniu, że } x \neq -2 \text{ i } x \neq 2$$

Zazwyczaj wygodnie jest zostawić wspólny mianownik w postaci iloczynu. Jest to przydatne zwłaszcza przy dalszych przekształceniach wyrażeń.

$$b) \frac{2}{x-3} \text{ i } \frac{x+1}{2x^2-18}$$

Mianownika pierwszego wyrażenia nie można zapisać prościej, zakładamy tylko, że $x \neq 3$. Natomiast wielomian z mianownika drugiego wyrażenia można rozłożyć:

$$2x^2 - 18 = 2(x^2 - 9) = 2(x-3)(x+3)$$

Okazuje się, że pierwszy mianownik jest dzielnikiem drugiego mianownika, podobnie jak np. w ułamkach $\frac{2}{7}$ i $\frac{3}{28}$. Wspólnym mianownikiem może więc być $2(x-3)(x+3)$, przy założeniu, że $x \neq 3$ i $x \neq -3$.

Wyrażenie $\frac{x+1}{2x^2-18}$ nie zmienia się, natomiast pierwsze będzie równe:

$$\frac{2 \cdot 2(x+3)}{2(x-3)(x+3)} = \frac{4x+12}{2(x-3)(x+3)}$$

◀7.19. Sprowadź wyrażenia do wspólnego mianownika. Podaj odpowiednie założenia.

$$a) \frac{x+2}{2x-4}, \frac{x+1}{3x-6}$$

$$b) \frac{x-1}{2x^2-12x+18}, \frac{5}{x-3}$$

$$c) \frac{x^2-1}{5x^2+10x+5}, \frac{x-3}{2x^2-x-3}$$

$$d) \frac{1}{x^2-1}, \frac{2}{x^2-x}, \frac{3}{x^3+x^2}$$

$$e) \frac{x}{3x^2-12}, \frac{2x}{2x^2+8x+8}$$

$$f) \frac{x}{x^3-1}, \frac{2x}{x^2-1}, \frac{3x}{x^3+1}$$

$$\text{Odp.: a) } \frac{3x+6}{6(x-2)}, \frac{2x+2}{6(x-2)}, x \neq 2$$

$$b) \frac{x-1}{2(x-3)^2}, \frac{10x-30}{2(x-3)^2}, x \neq 3$$

$$c) \frac{2x^2-5x+3}{5(x+1)(2x-3)}, \frac{5x-15}{5(x+1)(2x-3)}, x \neq -1, x \neq \frac{1}{2}$$

$$d) \frac{x^2}{x^2(x^2-1)}, \frac{2x^2+2x}{x^2(x^2-1)}, \frac{3x-3}{x^2(x^2-1)}, x \neq -1, x \neq 0, x \neq 1$$

$$e) \frac{4x+8}{6(x+2)^2(x-2)}, \frac{15x-30}{6(x+2)^2(x-2)}, x \neq -2, x \neq 2$$

$$f) \frac{x(x^3+1)}{(x^3-1)(x^3+1)}, \frac{2x(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{(x^3-1)(x^3+1)}, \frac{3x(x^3-1)}{(x^3-1)(x^3+1)}, x \neq -1, x \neq 1$$

Odpowiedzi i rozwiązania

7.1. F, P, P

7.2. F, F, F

7.3. a) 3 b) 9 c) 4 d) 7

7.4. a) 4 b) 9 c) 10 d) 5

7.5. a) $xy^3 - x^2y + 5xy - 4x + 1$

b) 0

c) $2abc + 3$ d) x^2yz^2 e) $x^2y - xy$ f) $3xy - 2x^2ytz^2$

7.6. a) 43 b) -33 c) 3 d) 29

Zadania

7.1. Dany jest wielomian $x^2y^4 - 2xy - \sqrt{3}x^2y$ zmiennych x i y .

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Stopień tego wielomianu jest równy 8.

B. Stopień tego wielomianu jest równy 6.

C. Wartość tego wielomianu dla $x = \sqrt{2}$ i $y = -\sqrt{3}$ jest równa $2(12 + \sqrt{6})$.7.2. Dane jest wyrażenie wymierne $\frac{x^3 + 8}{2x^2 + x - 6}$. Oceń prawdziwość podanych zdań.A. Dziedzina tego wyrażenia jest zbiór $\mathbf{R}$.B. Wartość tego wyrażenia jest równa 0 dla $x = -2$.C. Wyrażenia $\frac{x^3 + 8}{2x^2 + x - 6}$ oraz $\frac{x^2 - 2x + 4}{2x - 3}$ są równe.

7.3. Określ stopień podanego jednomianu.

a) $4xyz$ b) $x^2y^3v^4$ c) $\sqrt{3}y^2xt$ d) $-6xyt^4z$

7.4. Określ stopień podanego wielomianu.

a) $a^2bc - 2ab + 3bc^2$ b) $7x^2y - 5x^4y^2 + 10y^9 - 3$ c) $-4x^3t - 6tv + \sqrt{7}x^6x^4 - 11xvst$ d) $x^3zy + x^2z^2y + xz^2y^2 + xz^3y + xzy^3 + x^2zy^2$

7.5. Wykonaj redukcję wyrazów podobnych.

a) $2xy^3 - 3x^2y + 5xy - xy^3 + 2x^2y - 4x + 1$ b) $xy^2 - 2x^2y + 5xy^2 + 7x^2y - 3xy^2 - 4x^2y - 2xy^2 - x^2y - xy^2$ c) $abc + a^2b - 2bc + 3abc + 5 - a^2b + 3bc - 2abc - bc - 2$ d) $-1\frac{1}{3}x^2y^2z^2 + 2\frac{1}{2}x^2yz^2 - \frac{2}{3}x^2y^2z^2 - 1\frac{1}{2}x^2yz^2 + 2x^2y^2z^2$ e) $-3x^2y + 2xy^2 - 5xy + x^2y - 2xy^2 + 2xy + 3x^2y + 2xy$ f) $2\sqrt{2}xy^2tz - 3x^2ytz^2 - \sqrt{2}xy^2tz + 3xy - \sqrt{2}xy^2tz + x^2ytz^2$

7.6. Oblicz wartość wielomianu dla podanych wartości zmiennych.

a) $2x^2y - 3xy + 1$ $x = -2, y = 3$ b) $2xyz^4 - 3z^2 + xy - 9$ $x = 1, y = -2, z = \sqrt{2}$ c) $-4x^3 + 2y^2 - 4xy + x$ $x = -1, y = -2$ d) $10 - ab + \frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{4}b^2$ $a = 4, b = -2$

7.7. Wykonaj działania, a następnie przeprowadź redukcję wyrazów podobnych.

- a) $(x - y)(x + y) - (x^2 - xy - y^2)$
- b) $(x + 2y)^2 - (x - y)^2 - 2xy$
- c) $(x - xy + 3)(2xy + y + 1)$
- d) $(xy + 1)^3 - x(3y^2 + x) + (x - y)(x + y)$
- e) $2xy + 3x^2 - 2(x^2 + 7xy - y^2) + 10xy - 2y^2$
- f) $3x^2 + 2y^2 - (2x^2y - 2xy - 4xy^2) - (2xy + 7x^2y) + 9x^2y - 2y^2$
- g) $7(xy - y^2) + 2(xy - x^2) + 5xy + 3(x^2 - 5xy) + 7y^2$
- h) $2x^2 - y^2 - 3(2xy - x^2 - y^2) + 2(x^2y - x^2) - (y^2 + 2x^2y) + 6xy$
- i) $(2x - y)(2x + y) - 3(xy - y^2 + x^2) - 2y^2$
- j) $(x - y)^2 - 3(x + y)(x - y) + 2(x^2 + xy)$
- k) $(x - y + 2)(x + y - 1) - 2x(x + y) - y(y - x) + x^2 + 2y^2$
- l) $2(x - x^2y) - (x - y - 2)^2 - 4(x - y) + 2(x^2y - xy) + y^2$

7.8. Wykonaj działania, przeprowadź redukcję wyrazów podobnych, a następnie oblicz wartość wielomianu dla podanych wartości zmiennych.

- a) $(x + 3y)(x - 3y) + (x + 2y)^2 - (2x^2 - 5y^2)$ $x = \sqrt{8}$ i $y = \sqrt{2}$
- b) $(x + 2y)(x - 2y) - 4x(x - y) + (x - 2y)^2 + 4xy$ $x = 0,5$ i $y = -0,5$
- c) $3x[5xy^2(x - 1) + 2y(3x^2y - 2xy) - 3xy^2(4x - 3)] + 2x^3y^2$ $x = -1$ i $y = 3$

7.9. Rozłóż wielomian na czynniki.

- a) $2x^2 + 4xy + 2y^2$
- b) $4x - 4y - 6x^2 + 6y^2$
- c) $16 - x^2 - 6xy - 9y^2$
- d) $25x^2 - 10xy + y^2 - 4x^2y^2$
- e) $x^2 - 8xy + 15y^2$
- f) $y^2 + 10xy + 16x^2$

D 7.10. Wykaż, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność $4x^2 + 4xy + y^2 + 1 > 0$.

7.11. Katarzyna Kangur dostała 1 marca pensję w wysokości k złotych. Po pierwszym tygodniu tego miesiąca zostało jej s złotych. Jaką część pensji wydała przez pierwszy tydzień marca?

7.12. Rysiek przeznaczył na pomalowanie płotu a dni. Z zaplanowaną wydajnością malował b dni. Jaką część pracy ma jeszcze do wykonania?

7.7. a) xy

b) $3y^2 + 4xy$

c) $2x^2y - 2x^2y^2 - xy^2 + 6xy + 3y + x + 3$

d) $x^3y^3 + 3x^2y^2 + 3xy - 3xy^2 - y^2 + 1$

e) $x^2 - 2xy$

f) $3x^2 + 4xy^2$

g) $x^2 - xy$

h) $3x^2 + y^2$

i) $x^2 - 3xy$

j) $4y^2$

k) $x + 3y - xy - 2$

l) $2x - x^2 - 4$

7.8. a) $4xy$, 16

b) $-2x^2 + 4xy$, $-1,5$

c) $-x^3y^2$, 9

7.9. a) $2(x + y)^2$

b) $2(x - y)(2 - 3x - 3y)$

c) $(4 - x - 3y)(4 + x + 3y)$

d) $(5x - y - 2xy)(5x - y + 2xy)$

e) $(x - 5y)(x - 3y)$

f) $(y + 2x)(y + 8x)$

7.11. $\frac{k-s}{k}$

7.12. $\frac{a-b}{a}$

7.10. Założenie: $x, y \in \mathbf{R}$

Teza: $4x^2 + 4xy + y^2 + 1 > 0$

Dowód:

$4x^2 + 4xy + y^2 + 1 = (2x + y)^2 + 1 > 0$, bo $(2x + y)^2 \geq 0$ dla $x, y \in \mathbf{R}$

7.13. s – liczba sadzonek, jaką powinna dokupić pani Zenobia
 $(m - t)$ – liczba drzewek, jaką pani Zenobia posadziła na powierzchni a hektarów

$\frac{m-t}{a}$ – liczba drzewek

posadzonych na jednym hektarze uprawy

$(t + s)$ – liczba drzewek, jaką pani Zenobia posadzi na powierzchni b hektarów

$\frac{t+s}{b}$ – liczba drzewek posadzonych na jednym hektarze uprawy

$$\frac{m-t}{a} = \frac{t+s}{b} \quad mb - tb = at + as$$

$$\text{Zatem } s = \frac{mb - at - bt}{a}.$$

Odp.: Pani Zenobia powinna dokupić $\frac{mb - at - bt}{a}$ sadzonek.

7.14. o $\frac{k}{24}$ zł

7.15. $\frac{x}{x+y}$

7.16. $\frac{nk-r}{n}$ zł

7.17. a) $-1, a \neq 1; \frac{3}{a}, a \neq 0, a \neq 2b; \frac{a}{b}, b \neq 0, b \neq \frac{2}{3}a; \frac{2x-3y}{x^2},$

$x \neq 0, x \neq -\frac{3}{2}y$

b) $-\frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{2}; \frac{x^2-1}{x}, x \neq 0,$

$x \neq 1, x \neq -1; \frac{x-4}{2x-1}, x \neq -2,$

$x \neq \frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{3}, x \neq 2; \frac{x^2}{2}, x \neq \frac{2}{3}, x \neq 5;$

$\frac{x+3}{2}, x \in \mathbf{R}$

d) $\frac{x^2+3x+9}{x}, x \neq -1, x \neq 0,$

$x \neq 1, x \neq 3; \frac{x-1}{x+2}, x \neq -2$

7.18. a) $5x^2, x \neq 0, x \neq 1$

b) $5x^2 + 5x, x \neq -1, x \neq 1$

c) $x^3 + x^2 + x, x \neq 1$

d) $2x^2 - 2x, x \neq 1$

7.13. Zenobia Żubr przeznaczyła teren o powierzchni a hektarów na uprawę choiniek. Z zakupionych m sadzonek zostało jej jeszcze t drzewek. Do terenu uprawy dołączyła więc b ha, ale wówczas zabrakło jej sadzonek. Ile sadzonek powinna dokupić?

7.14. Ośmioro sąsiadów postanowiło kupić wspólną kosiarkę do trawy za k złotych. Dwóch z nich wycofało się z umowy. O ile złotych wzrosła składka każdego z pozostałych sąsiadów?

7.15. Pewna drużyna piłki nożnej wygrała x meczów i przegrała y meczów. Jaką częścią liczby rozegranych meczów są mecze wygrane?

7.16. Hilary Pajęczek handluje drożdżówkami, które kupuje w piekarni. Jednego dnia sprzedał n sztuk po k złotych i zarobił na tym r złotych. Jaka była cena jednej drożdżówki w piekarni?

7.17. Skróć wyrażenie wymierne, jeżeli to możliwe. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{1-a}{a-1}, \frac{3a-6b}{a^2-2ab}, \frac{2a^2-3ab}{2ab-3b^2}, \frac{4x^2-9y^2}{2x^3+3x^2y}$

b) $\frac{2x-1}{2-4x}, \frac{x^4-2x^2+1}{x^3-x}, \frac{x^2-2x-8}{2x^2+3x-2}$

c) $\frac{x^2-4x+4}{3x^2-12x+12}, \frac{3x^4-17x^3+10x^2}{6x^2-34x+20}, \frac{x^3+27}{2x^2-6x+18}$

d) $\frac{x^5-x^3-27x^2+27}{x^4-3x^3-x^2+3x}, \frac{x^3-3x^2+6x-4}{x^3+8}$

7.18. Zastąp $?$ odpowiednim wyrażeniem, aby rozszerzyć wyrażenie wymierne. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{x}{x-1} = \frac{?}{5x^2-5x}$

c) $\frac{x}{x-1} = \frac{?}{x^3-1}$

b) $\frac{x}{x-1} = \frac{?}{5x^2-5}$

d) $\frac{x}{x-1} = \frac{?}{2x^2-4x+2}$

7.19. Sprowadź wyrażenia do wspólnego mianownika. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{x+2}{2x-4}, \frac{x+1}{3x-6}$

d) $\frac{1}{x^2-1}, \frac{2}{x^2-x}, \frac{3}{x^3+x^2}$

b) $\frac{x-1}{2x^2-12x+18}, \frac{5}{x-3}$

e) $\frac{2}{3x^2-12}, \frac{5}{2x^2+8x+8}$

c) $\frac{x^2-1}{5x^2+10x+5}, \frac{x-3}{2x^2-x-3}$

f) $\frac{x}{x^3-1}, \frac{2x}{x^2-1}, \frac{3x}{x^3+1}$

7.19. a) $\frac{3x+6}{6(x-2)}, \frac{2x+2}{6(x-2)}, x \neq 2$

b) $\frac{x-1}{2(x-3)^2}, \frac{10x-30}{2(x-3)^2}, x \neq 3$

c) $\frac{2x^2-5x+3}{5(x+1)(2x-3)}, \frac{5x-15}{5(x+1)(2x-3)}, x \neq -1, x \neq \frac{1}{2}$

d) $\frac{x^2}{x^2(x^2-1)}, \frac{2x^2+2x}{x^2(x^2-1)}, \frac{3x-3}{x^2(x^2-1)}, x \neq -1, x \neq 0, x \neq 1$

e) $\frac{4x+8}{6(x+2)^2(x-2)}, \frac{15x-30}{6(x+2)^2(x-2)}, x \neq -2, x \neq 2$

f) $\frac{x(x^3+1)}{(x^3-1)(x^3+1)}, \frac{2x(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{(x^3-1)(x^3+1)}, \frac{3x(x^3-1)}{(x^3-1)(x^3+1)}, x \neq -1, x \neq 1$



7.20. Wyznacz takie dodatnie liczby naturalne x i y , dla których wartość wielomianu $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y$ jest równa 24.

D * **7.21.** Wykaż, że jedyną parą dodatnich liczb naturalnych x i y , dla których wartość wielomianu $4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1$ wynosi 9, jest para (1, 2).

* **7.22.** Znajdź takie dodatnie liczby naturalne x i y , dla których wartość wielomianu $x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3$ jest równa 512.

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż stopień wielomianu $z^9 - (\sqrt{3})^3 z^8 w + w^9 z$ zmiennych w i z .

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

2. W wielomianie $8xyz - 2x^2yz + 11x^2yz - 4xyz + 5xyz^2 - 9x^2yz$ przeprowadzono redukcję wyrazów podobnych. Wskaż wynik tego działania.

- A. $x^2yz + 5xyz^2$ C. $4xyz - x^2yz + 5xyz^2$
B. $4xyz$ D. $4xyz + 5xyz^2$

3. Ułamek $\frac{2x}{x+1}$ rozszerzono tak, że jego mianownikiem jest teraz wyrażenie $x^3 + 1$. Wskaż licznik otrzymanego ułamka.

- A. $2x^3 + 2x^2 + 2$ C. $2x^3 - 2x^2 + 2x$
B. $2x^2 + x$ D. $2x^2 + 2x$

4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Wartość wyrażenia $(2x - y)(2x + y) - 3(x - y)^2 - 2x(3y + x)$ dla $x = \sqrt{3}$ i $y = \sqrt{2}$

- A. jest liczbą całkowitą. B. jest równa 11. C. jest liczbą ujemną.

5. Skróć wyrażenie wymierne $\frac{6x^2 + 5x - 6}{4x^2 - 9}$. Podaj odpowiednie założenia.

6. W klasie Joli m dziewcząt waży w sumie s kg, a średnia waga c chłopców jest równa p kg. Jaka jest średnia waga ucznia tej klasy?

D **7.** Wykaż, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność $x^2 + 2xy + 2y^2 + 4y + 4 \geq 0$.

Prosto do matury

1. C

2. D

3. C

4. P, F, P

5. $\frac{3x-2}{2x-3}$, $x \neq -1\frac{1}{2}$, $x \neq 1\frac{1}{2}$

6. $\frac{s+pc}{m+c}$ kg

7. Założenie: $x, y \in \mathbb{R}$ Teza: $x^2 + 2xy + 2y^2 + 4y + 4 \geq 0$

Dowód: $x^2 + 2xy + 2y^2 + 4y + 4 = (x^2 + 2xy + y^2) + (y^2 + 4y + 4) = (x + y)^2 + (y + 2)^2 \geq 0$,

bo $(x + y)^2 \geq 0$, $(y + 2)^2 \geq 0$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y .

7.20. $x = 1, y = 3$ lub $x = 2, y = 2$
lub $x = 3, y = 1$

7.21. $4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1 = 9$

$$(2x + y)^2 - 2(2x + y) = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x + y)(2x + y - 2) = 8$$

Zatem jeśli $x, y \in \mathbb{N}_+$, to jedyną możliwością spełnienia równania jest: $2x + y = 4$.

$$(2x + y - 2 = 2, 4 \cdot 2 = 8), \text{ czyli } y = 4 - 2x; x, y \in \mathbb{N}_+$$

$$(x \geq 1 \text{ i } 4 - 2x \geq 1) \Leftrightarrow (x \geq 1$$

$$\text{ i } x \leq \frac{3}{2}) \Rightarrow x = 1. \text{ Stąd } y = 2.$$

Zatem jedyna para liczb naturalnych dodatnich, dla których wartość wielomianu $W(x, y) =$

$$= 4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1$$

jest równa 9, to para (1, 2).

7.22. $x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3 = 512$,

$$x, y \in \mathbb{N}_+ \quad (x + 3y)^3 = 512, \quad 512 = 8^3$$

$$\text{Stąd: } x + 3y = 8 \Leftrightarrow x = 8 - 3y$$

$$(y \geq 1 \text{ i } 8 - 3y \geq 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y \geq 1 \text{ i } y < \frac{7}{3})$$

$$y = 1 \Rightarrow x = 5; y = 2 \Rightarrow x = 2$$

Odp.: $(x, y) \in \{(2, 2), (5, 1)\}$

Pojedynek na równania trzeciego stopnia

Problem równań trzeciego stopnia trapił uczonych co najmniej od czasów Archimedesesa. Dopiero w XVI w. odkryto metodę ich rozwiązywania, a wiąże się z tym pełna dramaturgii historia.

Dwaj główni bohaterowie



Niccolò Tartaglia [czyt. tartalja] (1500?–1557), włoski matematyk, pochodzący z bardzo biednej rodziny. Samouk. Naprawdę nazywał się Fontana, ale posługiwał się przydomkiem Tartaglia (po włosku „jąkała”), gdyż na skutek ran gardła

odniesionych w dzieciństwie miał kłopoty z mówieniem. Nauczyciel matematyki, autor pierwszych matematycznych książek o artylerii i fortyfikacjach.



Gerolamo Cardano (1501–1576), włoski matematyk, lekarz, filozof, profesor uniwersytetu w Bolonii. Pochodzący z bogatej rodziny,

przyjaciół Leonarda da Vinci, autor ponad 200 dzieł.



Dramat w siedmiu aktach



Prolog

Scipio del Ferro, profesor Uniwersytetu w Bolonii, zna sposób rozwiązywania równań typu $x^3 + px = q$ i na łożu śmierci przekazuje go swojemu uczniowi. **Antonio Maria Fior** wykorzystuje tę wiedzę do wygrywania **pojedynków naukowych**.

W XVI w. we Włoszech popularne były pojedynki naukowe. Polegały one na rozwiązywaniu w określonym czasie zestawu zadań przekazanych przez przeciwnika. Ten, kto rozwiązał więcej zadań, wygrywał. Zdobywał nagrodę finansową, zwiększał swój prestiż i zyskiwał mecenasów. Między innymi dlatego naukowcy nie dzielili się swoimi odkryciami, ale strzegli ich bardzo pilnie i przekazywali co najwyżej swoim uczniom.

I

W 1525 r. Fior wyzywa na pojedynek **Tartaglię**, słyszy bowiem pogłoski, że ten odniósł sukces na polu równań sześciennych.

II

Tartaglia wyzwanie przyjmuje. Podczas pracy nad zadaniami odkrywa ogólną metodę rozwiązywania równań $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$, $x^3 + px^2 = q$. Wszystkie zadania przeciwnika sprowadzają się do pierwszego równania, więc nie sprawiają Tartaglii żadnego problemu. Fior natomiast nie radzi sobie z dwoma pozostałymi typami równań. Tartaglia wygrywa pojedynek.

W tamtych czasach współczynniki równania i rozwiązania miały być liczbami dodatnimi, dlatego $x^3 + px = q$ było traktowane jak równanie innego typu niż $x^3 = px + q$. Nie stosowano zapisów symbolicznych i nie używano znaków +, -, = ani pojęcia niewiadomej.

III

O odkryciu Tartaglii dowiaduje się **Gerolamo Cardano**. Próbuje namówić Tartaglię, by podzielił się z nim wiedzą. Ten długo odmawia, ale w końcu ulega i w 1539 r. przekazuje Cardanowi metodę rozwiązywania równań $x^3 + px = q$ i $x^3 = px + q$. Cardano przysięga dochować tajemnicy, a Tartaglia nie podaje rozwiązań wprost, ale szyfruje je w wierszu. Cardano ma kłopoty z odszyfrowaniem wiersza i musi prosić Tartaglię o pomoc.

IV

Cardano pracuje nad dziełem *Ars magna*. Pomaga mu w tym jego uczeń, Ludovico Ferrari. Ferrari znajduje metodę rozwiązywania równań czwartego stopnia.

V

W 1545 r. Cardano wydaje książkę *Ars magna*, a w niej opisuje m.in. metodę Tartaglii. Oczywiście nie szyfrem, tylko wprost. Rozpoczyna się batalia Tartaglii o prawo do odkrycia.

VI

Cardano nie odpowiada na oskarżenia Tartaglii. Zamiast tego Ferrari wyzywa Tartaglię na pojedynek naukowy.

VII

Pojedynek odbywa się w 1548 r., Tartaglia go przegrywa.



Epilog

Dzisiaj metodę szukania pierwiastków równania trzeciego stopnia opracowaną przez Tartaglię nazywamy **wzorami Cardano**.

8. Działania na wyrażeniach wymiernych

Umiejętności:

- dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie wyrażen wymiernych

Dodawanie i odejmowanie wyrażen wymiernych

Zasady wykonywania tych działań są takie same jak przy dodawaniu i odejmowaniu liczb wymiernych zapisanych w postaci ułamków. Jeżeli dwa wyrażenia wymierne mają identyczne mianowniki, to – aby je dodać – dodajemy wyrażenia w ich licznikach (mianownik pozostaje bez zmian):

$$\frac{W}{Q} + \frac{P}{Q} = \frac{W+P}{Q}, \text{ przy założeniu, że } Q \neq 0$$

Aby natomiast od pierwszego wyrażenia wymiernego odjąć drugie o identycznym mianowniku, należy od wyrażenia w pierwszym liczniku odjąć wyrażenie w drugim liczniku (mianownik pozostaje bez zmian):

$$\frac{W}{Q} - \frac{P}{Q} = \frac{W-P}{Q}, \text{ przy założeniu, że } Q \neq 0$$

Prześledźmy na przykładach dodawanie i odejmowanie wyrażen wymiernych.

Przykład 1 ◀ zad. 8.2

Wykonamy dodawanie $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}$.

Rozwiązanie

Zakładamy, że $x \neq -1$ i $x \neq 2$.

Przekształcamy składniki sumy tak, aby były wyrażeniami o identycznych mianownikach. Wspólnym mianownikiem jest iloczyn $(x+1)(x-2)$.

$$\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} = \frac{2(x-2)}{(x+1)(x-2)} + \frac{3(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{2x-4+3x+3}{(x+1)(x-2)} = \frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}$$

Odp.: $\frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}$, $x \neq -1$ i $x \neq 2$

Przykład 2 ◀ zad. 8.3

Wykonamy odejmowanie $\frac{x+1}{2x-3} - \frac{x-2}{3-2x}$.

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{-(b-a)} = -\frac{1}{b-a} \quad \left(\left(\right) \right)$$

◀8.2. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{x+1}{2x+3} + \frac{x+2}{2x+3}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{3x}$

c) $\frac{x-2}{3x+3} + \frac{2x+1}{2x+2}$

d) $\frac{2x}{x-5} + \frac{5-x}{x}$

Odp.: a) 1, $x \neq -\frac{3}{2}$

b) $\frac{x+5}{3x}$, $x \neq 0$

c) $\frac{8x-1}{6(x+1)}$, $x \neq -1$

d) $\frac{x^2+10x-25}{x(x-5)}$, $x \neq 0$, $x \neq 5$

ZZ i KPU

tematy 3.5, 3.6

dlanauuczyciela.pl | Kartkówka 2.8

Generator
testów i sprawdzianów

◀8.3. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+2}$

b) $\frac{1}{x-7} - \frac{5}{x+4}$

c) $\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1}$

d) $\frac{10x+1}{6x^2} - \frac{3}{2x}$

Odp.: a) $\frac{x+4}{(x+1)(x+2)}$, $x \neq -2$, $x \neq -1$ b) $\frac{-4x+39}{(x-7)(x+4)}$, $x \neq -4$, $x \neq 7$

c) $\frac{8x}{4x^2-1}$, $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq -\frac{1}{2}$ d) $\frac{x+1}{6x^2}$, $x \neq 0$

Rozwiązanie

Mianowniki różnią się tylko znakiem: $3 - 2x = -(2x - 3)$.

Zatem:

$$\frac{x+1}{2x-3} - \frac{x-2}{3-2x} = \frac{x+1}{2x-3} + \frac{x-2}{2x-3} = \frac{2x-1}{2x-3}, \text{ przy założeniu, że } x \neq \frac{3}{2}$$

Odp.: $\frac{2x-1}{2x-3}, x \neq \frac{3}{2}$

Przykład 3 ◀ zad. 8.4

Wykonamy odejmowanie $\frac{x+1}{x^2-4} - \frac{x}{x^2+4x+4}$.

Rozwiązanie

$$\frac{x+1}{x^2-4} - \frac{x}{x^2+4x+4} = \frac{x+1}{(x+2)(x-2)} - \frac{x}{(x+2)^2}$$

Zakładamy, że $x \neq -2$ i $x \neq 2$.

$$\begin{aligned} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)^2(x-2)} - \frac{x(x-2)}{(x+2)^2(x-2)} &= \leftarrow \text{sprowadzamy wyrażenia do wspólnego mianownika} \\ = \frac{(x^2+2x+x+2) - (x^2-2x)}{(x+2)^2(x-2)} &= \frac{x^2+3x+2-x^2+2x}{(x+2)^2(x-2)} = \frac{5x+2}{(x+2)^2(x-2)} \end{aligned}$$

Odp.: $\frac{5x+2}{(x+2)^2(x-2)}, x \neq -2 \text{ i } x \neq 2$

Przykład 4 ◀ zad. 8.5

Wykonamy działania $\frac{x+3}{2x-4} + \frac{x+2}{4x} - \frac{x^2-1}{x^2-2x}$.

Rozwiązanie

$$\frac{x+3}{2x-4} + \frac{x+2}{4x} - \frac{x^2-1}{x^2-2x} = \frac{x+3}{2(x-2)} + \frac{x+2}{4x} - \frac{x^2-1}{x(x-2)}$$

Zakładamy, że $x \neq 0$ i $x \neq 2$.

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{2(x-2)} + \frac{x+2}{4x} - \frac{x^2-1}{x(x-2)} &= \leftarrow \text{jako wspólny mianownik przyjmujemy } 4x(x-2) \\ = \frac{(x+3) \cdot 2x}{4x(x-2)} + \frac{(x+2)(x-2)}{4x(x-2)} - \frac{(x^2-1) \cdot 4}{4x(x-2)} &= \frac{(2x^2+6x) + (x^2-4) - (4x^2-4)}{4x(x-2)} = \\ = \frac{-x^2+6x}{4x(x-2)} &= \leftarrow \text{wyłączamy } x \text{ przed nawias w liczniku i skracamy ułamek} \\ = \frac{x(-x+6)}{4x(x-2)} = \frac{-x+6}{4(x-2)} \end{aligned}$$

Odp.: $\frac{-x+6}{4(x-2)}, x \neq 0 \text{ i } x \neq 2$

◀8.5. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{x}{2x+2} - \frac{x-1}{3x-3} + 1$

b) $\frac{8x}{2x-1} - \frac{6x}{2x+1} - 1$

c) $\frac{2x}{x^2+x} - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{5x}$

d) $\frac{4-x}{x+1} - \frac{1-2x}{x-1} + \frac{5-x^2}{x^2-1}$

e) $\frac{4-5x}{5x-3} + \frac{5x^2-23x+12}{25x^2-9} - \frac{x-4}{5x+3} + 1$

f) $\frac{2x-1}{x^2+2x} - \frac{2x}{x-3} + \frac{x^3+7x-3}{x^3-x^2-6x}$

g) $\frac{x}{x^2-6x-16} - \frac{x-3}{x^2-8x} + \frac{x+4}{4x^2+8x}$

h) $\frac{3}{x^3+1} + \frac{2}{2x^2-2x+2} - \frac{1}{x^2-1}$

i) $\frac{3}{4x^2-10x+4} + \frac{2}{1-4x^2} - \frac{1}{4x^2-12x+8}$

j) $\frac{x+2}{2x^2-7x+3} - \frac{2x+1}{2x^2+5x-3} + \frac{x^2-14}{2x^3-x^2-18x+9}$

Odp.: a) $\frac{7x+4}{6(x+1)}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$ b) $\frac{14x+1}{4x^2-1}, x \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ c) $\frac{14x^2-x-5}{5x^2(x+1)}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 0\}$ d) $\frac{6x}{x^2-1}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$

e) $\frac{1}{5x-3}, x \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right\}$ f) $\frac{-x}{x-3}, x \in \mathbf{R} - \{-2, 0, 3\}$ g) $\frac{x^2-8}{4x(x-8)(x+2)}, x \in \mathbf{R} - \{-2, 0, 8\}$

h) $\frac{4x-5}{(x+1)(x-1)(x^2-x+1)}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$ i) $\frac{18x-21}{4(2x-1)(2x+1)(x-2)(x-1)}, x \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ j) $\frac{5}{x^2-9}, x \in \mathbf{R} - \left\{-3, \frac{1}{2}, 3\right\}$

◀8.4. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{2x}{x-3} + \frac{7}{3-x}$

b) $\frac{x+5}{3x-1} + \frac{2-4x}{1-3x}$

c) $\frac{x+3}{2x-7} + \frac{x+2}{7-2x}$

d) $\frac{1}{3x-1} - \frac{2}{3-9x}$

e) $\frac{x+1}{x^2-2x+1} + \frac{3}{4x-4}$

f) $\frac{2x+1}{3x^2-12} - \frac{x-1}{2x^2+4x}$

g) $\frac{x-2}{x^2-6x+9} + \frac{x+2}{9-x^2}$

h) $\frac{2x-8}{x^2-8x+16} - \frac{3x-16}{2x^2-32}$

Odp.: a) $\frac{2x-7}{x-3}, x \neq 3$

b) $\frac{5x+3}{3x-1}, x \neq \frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{2x-7}, x \neq \frac{1}{2}$

d) $\frac{5}{3(3x-1)}, x \neq \frac{1}{3}$

e) $\frac{7x+1}{4(x-1)^2}, x \neq 1$

f) $\frac{x^2+11x-6}{6x(x-2)(x+2)},$

$x \in \mathbf{R} - \{-2, 0, 2\}$

g) $\frac{2x}{(x+3)(x-3)^2}, x \in \mathbf{R} - \{-3, 3\}$

h) $\frac{x+32}{2(x-4)(x+4)}, x \in \mathbf{R} - \{-4, 4\}$

Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

Mnożenie ułamków jest na ogół prostsze niż ich dodawanie. Wystarczy pomnożyć licznik przez licznik oraz mianownik przez mianownik. Dzielenie ułamka $\frac{a}{b}$ przez ułamek $\frac{c}{d}$ zastępujemy mnożeniem $\frac{a}{b}$ przez odwrotność dzielnika, czyli przez ułamek $\frac{d}{c}$. Wyniki tych operacji można ewentualnie jeszcze skrócić. W wypadku wyrażeń wymiernych jest podobnie, musimy tylko pamiętać o zrobieniu odpowiednich założeń.

$$\frac{W}{Q} \cdot \frac{T}{P} = \frac{W \cdot T}{Q \cdot P}, \text{ przy założeniu, że } Q \neq 0 \text{ i } P \neq 0$$

$$\frac{W}{Q} : \frac{T}{P} = \frac{W}{Q} \cdot \frac{P}{T} = \frac{W \cdot P}{Q \cdot T}, \text{ przy założeniu, że } Q \neq 0, P \neq 0 \text{ i } T \neq 0$$

◀8.7. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

- a) $\frac{x-1}{2x+4} \cdot \frac{x+2}{3x}$
 b) $\frac{5x-3}{3x+6} \cdot \frac{x^2+2x}{10x-6}$
 c) $\frac{2x^2-x}{x-1} \cdot \frac{1-x}{3x}$
 d) $\frac{3x-5}{x^2+3x} \cdot \frac{2x^2-7x}{6x-10}$
 e) $\frac{x^2+x-2}{2x^2+5x-3} \cdot \frac{x^2+4x+3}{x-1} \cdot \frac{2x-1}{x^2-4}$
 f) $\frac{x^2-9}{x^2-3x+2} \cdot \frac{x^2-2x}{x^2+2x-3} \cdot \frac{x^2-x}{x^2}$

Odp.: a) $\frac{x-1}{6x}, x \in \mathbb{R} - \{-2, 0\}$

- b) $\frac{x}{6}, x \in \mathbb{R} - \left\{-2, \frac{3}{5}\right\}$
 c) $\frac{1-2x}{3}, x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$
 d) $\frac{2x-7}{2(x+3)}, x \in \mathbb{R} - \left\{-3, 0, 1\frac{2}{3}\right\}$
 e) $\frac{x+1}{x-2}, x \in \mathbb{R} - \left\{-3, -2, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$
 f) $\frac{x-3}{x-1}, x \in \mathbb{R} - \{-3, 0, 1, 2\}$

◀8.8. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

- a) $\frac{2x}{x-5} : \frac{10x-10}{5x-25}$
 b) $\frac{4x^2-9}{2x^2-3x} : \frac{15+10x}{3x^2}$
 c) $\frac{x^3-8}{x^3+8} : \frac{4x-8}{4x+8}$
 d) $\frac{x^2+x-6}{x+5} : \frac{x-2}{x^2+2x-15}$

Odp.: a) $\frac{x}{x-1}, x \neq 1, x \neq 5$

b) $\frac{3x}{5}, x \neq -\frac{3}{2}, x \neq 0, x \neq \frac{3}{2}$

c) $\frac{x^2+2x+4}{x^2-2x+4}, x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

d) $x^2-9, x \neq -5, x \neq 2, x \neq 3$

Przykład 5 ◀ zad. 8.7

Wykonamy mnożenie $\frac{x^2+2x}{x^2-1} \cdot \frac{x-1}{x+2}$.

Rozwiązanie

$$\frac{x^2+2x}{x^2-1} \cdot \frac{x-1}{x+2} =$$

$$= \frac{x(x+2)}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{x-1}{x+2} =$$

$$= \frac{x}{x+1}$$

◀ poszczególne wielomiany rozkładamy, jeśli to możliwe, na czynniki

◀ zapisujemy założenia: $x \neq -1, x \neq 1, x \neq -2$

Odp.: $\frac{x}{x+1}, x \neq -1, x \neq 1, x \neq -2$

Przykład 6 ◀ zad. 8.8

Wykonamy dzielenie $\frac{5x-3}{x^2+5x+6} : \frac{3-5x}{x^2+4x+4}$.

Rozwiązanie

$$\frac{5x-3}{x^2+5x+6} : \frac{3-5x}{x^2+4x+4} =$$

$$= \frac{5x-3}{(x+2)(x+3)} : \frac{3-5x}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{5x-3}{(x+2)(x+3)} \cdot \frac{(x+2)^2}{3-5x} =$$

$$= \frac{-(3-5x)(x+2)}{(x+3)(3-5x)} = -\frac{x+2}{x+3}$$

◀ rozkładamy trójmiany kwadratowe na czynniki

◀ zapisujemy założenia: $x \neq -3, x \neq -2, x \neq \frac{3}{5}$

◀ mnożymy przez odwrotność

◀ skracamy ułamek

Odp.: $-\frac{x+2}{x+3}, x \neq -3, x \neq -2, x \neq \frac{3}{5}$

Przykład 7

Wykonamy działania $\frac{x^2 - 12x + 36}{4x^2 - 16} \cdot \frac{6x - 18}{2x^2 - 12x} : \frac{x - 3}{x^2 + 2x}$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 - 12x + 36}{4x^2 - 16} \cdot \frac{6x - 18}{2x^2 - 12x} : \frac{x - 3}{x^2 + 2x} = \\ & = \frac{(x - 6)^2}{4(x + 2)(x - 2)} \cdot \frac{6(x - 3)}{2x(x - 6)} \cdot \frac{x(x + 2)}{x - 3} = \quad \leftarrow \text{założenie: } x \in \mathbb{R} - \{-2, 0, 2, 3, 6\} \\ & = \frac{3(x - 6)}{4(x - 2)} \end{aligned}$$

Odp.: $\frac{3(x - 6)}{4(x - 2)}$, $x \in \mathbb{R} - \{-2, 0, 2, 3, 6\}$

Przykład 8 ◀ zad. 8.10

Wykonamy działania $\left(\frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{x^2 - x}\right) : \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)(x^3 - 1)$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{x^2 - x}\right) : \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)(x^3 - 1) = \\ & = \left(\frac{1}{x(x + 1)} + \frac{1}{x(x - 1)}\right) : \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)(x^3 - 1) = \quad \leftarrow \text{wykonujemy działania} \\ & \quad \text{w nawiasach przy} \\ & \quad \text{założeniu, że} \\ & \quad x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \\ & = \frac{x - 1 + x + 1}{x(x + 1)(x - 1)} : \frac{x^2 + x + 1}{x^2}(x^3 - 1) = \\ & = \frac{2x}{x(x + 1)(x - 1)} \cdot \frac{x^2}{x^2 + x + 1} \cdot (x - 1)(x^2 + x + 1) = \frac{2x^2}{x + 1} \end{aligned}$$

Odp.: $\frac{2x^2}{x + 1}$, $x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

Zadania

8.1. Dane jest wyrażenie $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} \cdot \frac{x + 2}{x - 2}$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Dziedzina tego wyrażenia jest zbiór $\mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$.

B. Wartość tego wyrażenia dla $x = 1$ jest równa 3.

C. Wyrażenia $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} \cdot \frac{x + 2}{x - 2}$ oraz $\frac{x + 2}{x}$ są równe.

◀ **8.10.** Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

- a) $\left(\frac{3}{x^2 + x - 2} + \frac{1}{x^2 + 3x + 2}\right) : \left(\frac{x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x + 2}\right)$
 b) $\left[\left(\frac{x + 2}{4x^2 + 4x + 1} + \frac{x + 2}{4x^2 - 1}\right) \cdot \frac{4x + 2}{3x^2 + 6x} - \frac{4}{2x - 1}\right] \cdot (4x + 2)$
 c) $\left(\frac{x + 1}{3x - 3} - \frac{4}{3x^2 - 3} - \frac{x + 10}{3x + 3}\right) \cdot \frac{x^2 + 2x + 1}{7}$
 d) $\left[\left(\frac{5x}{1 - 5x} + \frac{3x}{5x + 1}\right) : \frac{15x + 12}{1 - 10x + 25x^2}\right] \cdot \frac{3}{5x - 1}$

Odp.: a) 2, $x \in \mathbb{R} - \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 1\right\}$ b) $\frac{-8(6x + 1)}{3(2x - 1)}$, $x \in \mathbb{R} - \left\{-2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$

c) $\frac{-x - 1}{3}$, $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ d) $\frac{-2x}{5x + 1}$, $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right\}$

Odpowiedzi i rozwiązania

8.1. P, P, F

8.2. a) $1, x \neq -\frac{3}{2}$

b) $\frac{x+5}{3x}, x \neq 0$

c) $\frac{8x-1}{6(x+1)}, x \neq -1$

d) $\frac{x^2+10x-25}{x(x-5)}, x \neq 0, x \neq 5$

8.3. a) $\frac{x+4}{(x+1)(x+2)}, x \neq -2, x \neq -1$

b) $\frac{-4x+39}{(x-7)(x+4)}, x \neq -4, x \neq 7$

c) $\frac{8x}{4x^2-1}, x \neq \frac{1}{2}, x \neq -\frac{1}{2}$

d) $\frac{x+1}{6x^2}, x \neq 0$

8.4. a) $\frac{2x-7}{x-3}, x \neq 3$

b) $\frac{5x+3}{3x-1}, x \neq \frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{2x-7}, x \neq 3\frac{1}{2}$

d) $\frac{5}{3(3x-1)}, x \neq \frac{1}{3}$

e) $\frac{7x+1}{4(x-1)^2}, x \neq 1$

f) $\frac{x^2+11x-6}{6x(x-2)(x+2)}, x \in \mathbf{R} - \{-2, 0, 2\}$

g) $\frac{2x}{(x+3)(x-3)^2}, x \in \mathbf{R} - \{-3, 3\}$

h) $\frac{x+32}{2(x-4)(x+4)}, x \in \mathbf{R} - \{-4, 4\}$

8.5. a) $\frac{7x+4}{6(x+1)}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$

b) $\frac{14x+1}{4x^2-1}, x \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

c) $\frac{14x^2-x-5}{5x^2(x+1)}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 0\}$

d) $\frac{6x}{x^2-1}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$

e) $\frac{1}{5x-3}, x \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right\}$

f) $\frac{-x}{x-3}, x \in \mathbf{R} - \{-2, 0, 3\}$

g) $\frac{x^2-8}{4x(x-8)(x+2)}, x \in \mathbf{R} - \{-2, 0, 8\}$

h) $\frac{4x-5}{(x+1)(x-1)(x^2-x+1)}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$

i) $\frac{18x-21}{4(2x-1)(2x+1)(x-2)(x-1)}, x \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$

j) $\frac{5}{x^2-9}, x \in \mathbf{R} - \left\{-3, \frac{1}{2}, 3\right\}$

8.2. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{x+1}{2x+3} + \frac{x+2}{2x+3}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{3x}$

c) $\frac{x-2}{3x+3} + \frac{2x+1}{2x+2}$

d) $\frac{2x}{x-5} + \frac{5-x}{x}$

8.3. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+2}$

b) $\frac{1}{x-7} - \frac{5}{x+4}$

c) $\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1}$

d) $\frac{10x+1}{6x^2} - \frac{3}{2x}$

8.4. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{2x}{x-3} + \frac{7}{3-x}$

b) $\frac{x+5}{3x-1} + \frac{2-4x}{1-3x}$

c) $\frac{x+3}{2x-7} + \frac{x+2}{7-2x}$

d) $\frac{1}{3x-1} - \frac{2}{3-9x}$

e) $\frac{x+1}{x^2-2x+1} + \frac{3}{4x-4}$

f) $\frac{2x+1}{3x^2-12} - \frac{x-1}{2x^2+4x}$

g) $\frac{x-2}{x^2-6x+9} + \frac{x+2}{9-x^2}$

h) $\frac{2x-8}{x^2-8x+16} - \frac{3x-16}{2x^2-32}$

8.5. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{x}{2x+2} - \frac{x-1}{3x-3} + 1$

b) $\frac{8x}{2x-1} - \frac{6x}{2x+1} - 1$

c) $\frac{2x}{x^2+x} - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{5x}$

d) $\frac{4-x}{x+1} - \frac{1-2x}{x-1} + \frac{5-x^2}{x^2-1}$

e) $\frac{4-5x}{5x-3} + \frac{5x^2-23x+12}{25x^2-9} - \frac{x-4}{5x+3} + 1$

f) $\frac{2x-1}{x^2+2x} - \frac{2x}{x-3} + \frac{x^3+7x-3}{x^3-x^2-6x}$

g) $\frac{x}{x^2-6x-16} - \frac{x-3}{x^2-8x} + \frac{x+4}{4x^2+8x}$

h) $\frac{3}{x^3+1} + \frac{2}{2x^2-2x+2} - \frac{1}{x^2-1}$

i) $\frac{3}{4x^2-10x+4} + \frac{2}{1-4x^2} - \frac{1}{4x^2-12x+8}$

j) $\frac{x+2}{2x^2-7x+3} - \frac{2x+1}{2x^2+5x-3} + \frac{x^2-14}{2x^3-x^2-18x+9}$

* 8.6. Wyznacz takie wartości a i b , aby podane wyrażenia były równe.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{a}{x-2} - \frac{b}{x+2} \quad \text{i} \quad \frac{7x-2}{x^2-4} & \text{c)} \frac{a}{x-5} - \frac{ax+b}{3x+1} \quad \text{i} \quad \frac{2(x^2-9x+4)}{3x^2-14x-5} \\ \text{b)} \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+2} \quad \text{i} \quad \frac{3x+1}{x^2-x-6} & \text{d)} \frac{ax-a}{(x^2-4)(x-1)} + 2b \quad \text{i} \quad \frac{2x^3-2x^2-3x+3}{x^3-x^2-4x+4} \end{array}$$

8.7. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{x-1}{2x+4} \cdot \frac{x+2}{3x} & \text{d)} \frac{3x-5}{x^2+3x} \cdot \frac{2x^2-7x}{6x-10} \\ \text{b)} \frac{5x-3}{3x+6} \cdot \frac{x^2+2x}{10x-6} & \text{e)} \frac{x^2+x-2}{2x^2+5x-3} \cdot \frac{x^2+4x+3}{x-1} \cdot \frac{2x-1}{x^2-4} \\ \text{c)} \frac{2x^2-x}{x-1} \cdot \frac{1-x}{3x} & \text{f)} \frac{x^2-9}{x^2-3x+2} \cdot \frac{x^2-2x}{x^2+2x-3} \cdot \frac{x^2-x}{x^2} \end{array}$$

8.8. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{2x}{x-5} : \frac{10x-10}{5x-25} & \text{c)} \frac{x^3-8}{x^3+8} : \frac{4x-8}{4x+8} \\ \text{b)} \frac{4x^2-9}{2x^2-3x} : \frac{15+10x}{3x^2} & \text{d)} \frac{x^2+x-6}{x+5} : \frac{x-2}{x^2+2x-15} \end{array}$$

8.9. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \left(4 + \frac{3x^2}{1-x^2}\right) : \left(2 - \frac{x}{x+1}\right) & \text{c)} \left(\frac{x-3}{4x+6} - \frac{x-2}{6x+9}\right) \cdot \left(\frac{x+3}{3x-15} + \frac{2x+1}{4x-20}\right) \\ \text{b)} \left(3x - \frac{6}{3-x}\right) : \left(\frac{2}{x^2-3x} + 1\right) & \text{d)} \left(\frac{x^2+x}{x^2+4x-5} - \frac{x^2-x}{x^2+6x+5}\right) : \left(\frac{2}{x^2-1} + 2\right) \end{array}$$

8.10. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \left(\frac{3}{x^2+x-2} + \frac{1}{x^2+3x+2}\right) : \left(\frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x+2}\right) & \\ \text{b)} \left[\left(\frac{x+2}{4x^2+4x+1} + \frac{x+2}{4x^2-1}\right) \cdot \frac{4x+2}{3x^2+6x} - \frac{4}{2x-1}\right] \cdot (4x+2) & \\ \text{c)} \left(\frac{x+1}{3x-3} - \frac{4}{3x^2-3} - \frac{x+10}{3x+3}\right) \cdot \frac{x^2+2x+1}{7} & \\ \text{d)} \left[\left(\frac{5x}{1-5x} + \frac{3x}{5x+1}\right) : \frac{15x+12}{1-10x+25x^2}\right] \cdot \frac{3}{5x-1} & \end{array}$$

8.11. Niech $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Który znak: $=$ czy $\neq$ należy wstawić w miejsce $?$, aby otrzymać zależność prawdziwą?

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} \quad ? \quad 1 & \text{c)} \frac{y}{x} : \frac{x}{2y} \quad ? \quad \frac{1}{2} & \text{e)} \frac{x}{y} + 1 \quad ? \quad \frac{x+y}{y} \\ \text{b)} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \quad ? \quad 1 & \text{d)} \frac{x-y}{y} \quad ? \quad \frac{x}{y} - 1 & \text{f)} \frac{2x}{y} - \frac{1}{x} \quad ? \quad \frac{2x^2-y}{xy} \end{array}$$

$$\text{8.6. a)} \frac{a(x+2)-b(x-2)}{x^2-4} = \frac{ax+2a-bx+2b}{x^2-4} = \frac{(a-b)x+2(a+b)}{x^2-4} = \frac{7x-2}{x^2-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=7 \\ a+b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow a=3, b=-4$$

$$\text{b)} \frac{a(x+2)+b(x-3)}{x^2-x-6} = \frac{ax+2a+bx-3b}{x^2-x-6} = \frac{(a+b)x+2a-3b}{x^2-x-6} = \frac{3x+1}{x^2-x-6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ 2a-3b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+3b=9 \\ 2a-3b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=2, b=1$$

$$\text{c)} \frac{a}{x-5} - \frac{ax+b}{3x+1} = \frac{3ax+a-(ax+b)(x-5)}{3x^2-14x-5} = \frac{-ax^2+8ax-bx+a+5b}{3x^2-14x-5} = \frac{2x^2-18x+8}{3x^2-14x-5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=-2 \text{ i } \begin{cases} 8a-b=-18 \\ a+5b=8 \end{cases} \Rightarrow a=-2, b=2$$

$$\text{d)} \frac{ax-a+2b(x^3-x^2-4x+4)}{x^3-x^2-4x+4} = \frac{2bx^3-2bx^2+(a-8b)x+8b-a}{x^3-x^2-4x+4} = \frac{2x^3-2x^2-3x+3}{x^3-x^2-4x+4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b=1 \text{ i } 8b-a=3 \Leftrightarrow a=5, b=1$$

$$\text{8.7. a)} \frac{x-1}{6x}, x \in \mathbb{R} - \{-2, 0\}$$

$$\text{b)} \frac{x}{6}, x \in \mathbb{R} - \left\{-2, \frac{3}{5}\right\}$$

$$\text{c)} \frac{1-2x}{3}, x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

$$\text{d)} \frac{2x-7}{2(x+3)}, x \in \mathbb{R} - \left\{-3, 0, 1\frac{2}{3}\right\}$$

$$\text{e)} \frac{x+1}{x-2}, x \in \mathbb{R} - \left\{-3, -2, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$$

$$\text{f)} \frac{x-3}{x-1}, x \in \mathbb{R} - \{-3, 0, 1, 2\}$$

$$\text{8.8. a)} \frac{x}{x-1}, x \neq 1, x \neq 5$$

$$\text{b)} \frac{3x}{5}, x \neq -\frac{3}{2}, x \neq 0, x \neq \frac{3}{2}$$

$$\text{c)} \frac{x^2+2x+4}{x^2-2x+4}, x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

$$\text{d)} x^2-9, x \neq -5, x \neq 2, x \neq 3$$

$$\text{8.9. a)} \frac{x-2}{x-1}, x \in \mathbb{R} - \{-2, -1, 1\}$$

$$\text{b)} 3x, x \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\text{c)} \frac{5}{72}, x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}, 5\right\}$$

$$\text{d)} \frac{2}{x+5}, x \in \mathbb{R} - \{-5, -1, 0, 1\}$$

$$\text{8.10. a)} 2, x \in \mathbb{R} - \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 1\right\}$$

$$\text{b)} \frac{-8(6x+1)}{3(2x-1)},$$

$$x \in \mathbb{R} - \left\{-2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$$

$$\text{c)} \frac{-x-1}{3}, x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$$\text{d)} \frac{-2x}{5x+1}, x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right\}$$

$$\text{8.11. a)} =$$

$$\text{b)} \neq$$

$$\text{c)} \neq$$

$$\text{d)} =$$

$$\text{e)} =$$

$$\text{f)} =$$

* **8.12.** Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

$$\text{a) } \frac{\frac{x+1}{2x-4} + \frac{x-5}{6x-12}}{\frac{x+2}{3x-6} - \frac{x+1}{4x-8}}$$

$$\text{b) } \frac{\frac{x^2+10x+21}{x^2+8x+7} - 1}{\frac{x^2-4x-21}{x^2-6x-7} - 1}$$

$$\text{c) } \frac{x}{x + \frac{x}{x+1}}$$

$$\text{d) } \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x-1}}}$$

* **8.13.** Wykonaj działania $\left(\frac{2}{x^2-ax-6a^2} - \frac{1}{x^2-2ax-3a^2}\right)(x^2+3ax+2a^2)$.
Podaj odpowiednie założenia.

Prosto do matury



Prosto do matury

- D
- B
- B
- P, F, P
5. $\frac{x+2}{12(x+1)}$, $x \neq -1$, $x \neq 1$
6. $\frac{x-1}{x+4}$, $x \neq -4$, $x \neq -3$, $x \neq 4$
7. 6 , $x \neq -1$, $x \neq 0$, $x \neq 1$
1. Wskaż wynik działania i odpowiednie założenia dla wyrażenia $\frac{x}{x+2} - \frac{x+2}{x+9}$.
 A. $\frac{5x-4}{(x+2)(x+9)}$, $x \neq 9$, $x \neq 2$ C. $\frac{13x+4}{(x+2)(x+9)}$, $x \neq -9$, $x \neq -2$
 B. $\frac{2x^2+13x+4}{(x+2)(x+9)}$, $x \neq -9$, $x \neq -2$ D. $\frac{5x-4}{(x+2)(x+9)}$, $x \neq -9$, $x \neq -2$
2. Wskaż wszystkie założenia potrzebne do wykonania działań $\frac{x-4}{3x+9} \cdot \frac{x-1}{5x-10}$.
 A. $x \neq -3$ C. $x \neq 1$
 B. $x \neq -3$, $x \neq 2$ D. $x \neq -3$, $x \neq 2$, $x \neq 1$, $x \neq 4$
3. Wynikiem działania $\frac{x^2-y^2}{4x^2y} : \frac{x+y}{xy}$ przy założeniu, że $xy \neq 0$, $x+y \neq 0$, jest
 A. $\frac{(x^2-y^2)(x+y)}{4x^3y}$ B. $\frac{x-y}{4x}$ C. $\frac{x-y}{4}$ D. $\frac{x-y}{4x^3y}$
4. Oceń prawdziwość podanych zdań.
 Wartość wyrażenia $\frac{x^2}{x^2-y^2} : \frac{x^3-x^2y}{x^2-2xy+y^2}$ dla $x = \frac{1}{9}$ i $y = \frac{2}{9}$
 A. jest liczbą całkowitą. B. jest równa 2. C. jest liczbą pierwszą.
5. Wykonaj działania $\frac{x}{4x+4} + \frac{x+1}{6x-6} - \frac{x^2+1}{3x^2-3}$. Podaj odpowiednie założenia.
6. Wykonaj działania $\frac{x^2+2x-3}{x^2-16} : \frac{x^2+6x+9}{x^2-x-12}$. Podaj odpowiednie założenia.
7. Wykonaj działania $\left[\left(1 + \frac{x-2}{x}\right) \cdot \left(\frac{2}{x-1} + 2\right) - \frac{4}{x+1}\right] \cdot \frac{3x+3}{2x}$.
Podaj odpowiednie założenia.

$$\text{8.12. a) } \frac{\frac{x+1}{2(x-2)} + \frac{x-5}{6(x-2)}}{\frac{x+2}{3(x-2)} - \frac{x+1}{4(x-2)}} = \frac{3x+3+x-5}{6(x-2)} \cdot \frac{12(x-2)}{4x+8-3x-3} = \frac{2(4x-2)}{x+5}, x \in \mathbb{R} - \{-5, 2\}$$

$$\text{b) } \frac{\frac{(x+3)(x+7)}{(x+1)(x+7)} - 1}{\frac{(x+3)(x-7)}{(x+1)(x-7)} - 1} = \frac{\frac{x+3}{x+1} - 1}{\frac{x+3}{x+1} - 1} = 1, x \in \mathbb{R} - \{-7, 1, 7\}$$

$$\text{d) } \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x-1}}} = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x-2}} = \frac{1}{\frac{x-2-x+1}{x-2}} = \frac{x-2}{-1} = 2-x, x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

$$\text{c) } \frac{x}{x + \frac{x}{x+1}} = \frac{x}{\frac{x^2+2x}{x+1}} = \frac{x(x+1)}{x(x+2)} = \frac{x+1}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2, 1, 0\}$$

$$\begin{aligned} \text{8.13. } & \left(\frac{2}{x^2-ax-6a^2} - \frac{1}{x^2-2ax-3a^2}\right) \cdot (x^2+3ax+2a^2) = \left(\frac{2}{(x-3a)(x+2a)} - \frac{1}{(x-3a)(x+a)}\right) (x+a)(x+2a) = \\ & = \frac{2x+2a-x-2a}{(x+a)(x+2a)(x-3a)} (x+a)(x+2a) = \frac{x}{x-3a}; \text{ dla } x \neq -2a, x \neq -a, x \neq 3a \end{aligned}$$

9. Równania wymierne

Umiejętności:

- rozwiązywanie równań wymiernych

Równanie postaci $\frac{W(x)}{Q(x)} = 0$, w którym W i Q są wielomianami zmiennej x i Q nie jest wielomianem zerowym, nazywamy **równaniem wymiernym** z niewiadomą x . Wszystkie pierwiastki wielomianu W , które należą do dziedziny, czyli spełniają założenie $Q(x) \neq 0$, są rozwiązaniami równania.

Przykład 1

- a) Równanie $\frac{x-3}{x+2} = 0$ jest równaniem wymiernym o dziedzinie równej $\mathbf{R} - \{-2\}$. Jego rozwiązaniem jest liczba 3.
- b) Równanie $\frac{x-1}{x^2-3x+2} = 0$ jest równaniem wymiernym o dziedzinie równej $\mathbf{R} - \{1, 2\}$. Pierwiastek wielomianu $W(x) = x - 1$ nie należy do dziedziny, zatem równanie to nie ma rozwiązania.

Przykład 2

Dziedziną równania $\frac{1}{x} = 3$ jest zbiór $\mathbf{R} - \{0\}$. Aby rozwiązać to równanie, nie musimy przekształcać go do postaci $\frac{W(x)}{Q(x)} = 0$. Jeżeli bowiem pomnożymy obydwie strony równania przez x , to otrzymamy $1 = 3x$, stąd $x = \frac{1}{3}$.

Jeżeli w równaniu wymiernym mamy sumę kilku wyrażeń, to na ogół, po wyznaczeniu dziedziny, mnożymy obydwie strony równania przez wspólny mianownik wszystkich składników. Po rozwiązaniu otrzymanego w ten sposób równania wielomianowego musimy sprawdzić, które z jego pierwiastków należą do dziedziny równania wymiernego.

Przykład 3 ◀ zad. 9.3 a, 9.6 e, f

Rozwiążemy podane równanie.

Rozwiązanie

a) $\frac{2x+1}{x-4} = 5$, $D = \mathbf{R} - \{4\}$

$$2x + 1 = 5(x - 4), \text{ stąd } x = 7 \text{ i } 7 \in D$$

Odp.: $x = 7$

◀ 9.3. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2x+1}{x-2} = 3$

Odp.: a) $x = 7$

◀ 9.6. Rozwiąż równanie.

e) $\frac{x-2}{x-3} + \frac{x^2}{x-6} - \frac{x^2-7x+9}{x^2-9x+18} = 0$

f) $\frac{x+2}{x+1} - \frac{x-4}{x-3} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-2x-3} + 1$

Odp.: e) $x = -1$ lub $x = 1$

f) $x = 0$

ZZ i KPU

tematy 3.7, 3.8, 3.11, 3.12

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.9

Generator
testów i sprawdzianów

$$\text{b) } \frac{x}{x+2} - \frac{18}{(x-1)(x+2)} + \frac{x+5}{x-1} = 0$$

$$D = \mathbf{R} - \{1, -2\}$$

Obydwe strony równania mnożymy przez $(x-1)(x+2)$, czyli przez wspólny mianownik wszystkich wyrażen wymiernych.

$$x(x-1) - 18 + (x+5)(x+2) = 0$$

$$2x^2 + 6x - 8 = 0$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

Pierwiastkami tego równania są $x_1 = 1$ i $x_2 = -4$.

$x_1 \notin D$, więc rozwiązaniem równania wymiernego jest tylko drugi pierwiastek.

$$\text{Odp.: } x = -4$$

$$\text{c) } \frac{x+7}{x-4} + \frac{x-7}{x-2} = \frac{22}{x^2-6x+8} \quad \leftarrow \text{rozkładamy wielomian w mianowniku na czynniki}$$

$$\frac{x+7}{x-4} + \frac{x-7}{x-2} = \frac{22}{(x-4)(x-2)}$$

$$D = \mathbf{R} - \{4, 2\}$$

$$(x+7)(x-2) + (x-7)(x-4) - 22 = 0$$

Po wykonaniu działań, uporządkowaniu i podzieleniu obydwu stron równania przez 2 otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$x^2 - 3x - 4 = 0,$$

którego pierwiastkami są $x_1 = -1 \in D$, $x_2 = 4 \notin D$.

$$\text{Odp.: } x = -1$$

◀9.7. Wyznacz ze wzoru podaną zmienną. Zakładamy, że wszystkie zmienne przyjmują tylko takie wartości, dla których odpowiednie działania są wykonalne.

$$\text{a) } F = G \cdot \frac{Mm}{r^2}, \quad M$$

$$\text{b) } B = \frac{mg}{I \cdot l}, \quad I$$

$$\text{c) } \left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT, \quad p$$

$$\text{d) } \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}, \quad R$$

$$\text{e) } k = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right), \quad R$$

$$\text{f) } E = \frac{mv^2}{2} + mgh, \quad m$$

$$\text{Odp.: a) } M = \frac{Fr^2}{Gm}$$

$$\text{b) } I = \frac{mg}{Bl}$$

$$\text{c) } p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

$$\text{d) } R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\text{e) } R = \frac{qr}{4\pi\epsilon kr + q}$$

$$\text{f) } m = \frac{2E}{2gh + v^2}$$

Przykład 4 ◀ zad. 9.7

Ze wzoru $a_1 + a_2 = \frac{nE}{ni_1 + i_2}$ wyznaczmy podaną zmienną. Zakładamy, że zmienne przyjmują tylko takie wartości, dla których odpowiednie działania są wykonalne.

Rozwiązanie

a) zmienna E

$$a_1 + a_2 = \frac{nE}{ni_1 + i_2}$$

◀ obydwe strony równania mnożymy przez $ni_1 + i_2$

$$(a_1 + a_2) \cdot (ni_1 + i_2) = nE$$

◀ obydwe strony równania dzielimy przez n

$$\text{Odp.: } E = \frac{(a_1 + a_2) \cdot (ni_1 + i_2)}{n}$$

b) zmienna i_2

$$a_1 + a_2 = \frac{nE}{ni_1 + i_2}$$

← obydwie strony równania mnożymy przez $ni_1 + i_2$
i dzielimy przez $a_1 + a_2$

$$ni_1 + i_2 = \frac{nE}{a_1 + a_2}$$

← przenosimy ni_1 na drugą stronę

$$\text{Odp.: } i_2 = \frac{nE}{a_1 + a_2} - ni_1$$

c) zmienna n

$$a_1 + a_2 = \frac{nE}{ni_1 + i_2}$$

← obydwie strony równania mnożymy przez $ni_1 + i_2$

$$(a_1 + a_2) \cdot (ni_1 + i_2) = nE$$

← mnożymy przez wyraz ze zmienną n

$$ni_1(a_1 + a_2) + i_2(a_1 + a_2) = nE$$

← przenosimy wyrazy ze zmienną n na jedną stronę

$$nE - ni_1(a_1 + a_2) = i_2(a_1 + a_2)$$

← wyłączamy n przed nawias

$$n[E - i_1(a_1 + a_2)] = i_2(a_1 + a_2)$$

$$\text{Odp.: } n = \frac{i_2(a_1 + a_2)}{E - i_1(a_1 + a_2)}$$

**Przykład 5** ◀ zad. 9.11

Samochód przejechał w pewnym czasie 210 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością o 10 km/h większą, to czas przejazdu skróciłby się o pół godziny. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten samochód.

Rozwiązanie

Korzystamy ze związku $t = \frac{s}{v}$ między drogą, prędkością i czasem.

t – czas przejazdu (w godzinach)

v – średnia prędkość (w km/h)

$s = 210$ km

$\frac{210}{v}$ wyraża czas przejazdu z prędkością, o której mowa w zadaniu

$\frac{210}{v + 10}$ wyraża czas przejazdu ze zwiększoną prędkością

Z treści zadania wynika, że:

$$\frac{210}{v} = \frac{210}{v + 10} + \frac{1}{2}$$

Po pomnożeniu obydwu stron równania przez mianowniki i uporządkowaniu wyrazów otrzymujemy równanie:

$$v^2 + 10v - 4200 = 0,$$

którego pierwiastkami są liczby: $v_1 = -70$, $v_2 = 60$. Zgodnie z treścią zadania $v > 0$, zatem rozwiązaniem jest tylko druga liczba.

Odp.: Samochód jechał ze średnią prędkością 60 km/h.

$$\begin{aligned} s &= v \cdot t \\ v &= \frac{s}{t} \\ t &= \frac{s}{v} \end{aligned}$$

◀ **9.11.** Kierowca samochodu obliczył, że zdąży dojechać w ciągu 2 godzin na konferencję, jeżeli będzie jechał ze średnią prędkością 55 km/h. Niestety przez pierwsze 20 minut jechał z prędkością tylko 45 km/h. Z jaką średnią prędkością musi pokonać resztę trasy, żeby przyjechać na czas?

Odp.: 57 km/h

◀9.15. Na szczyt góry wywożą narciarzy trzy wyciągi – gondolowy, krzesełkowy i orczykowy. Gondole wywożą grupę 1200 narciarzy w czasie o 2 godziny krótszym niż wyciąg krzesełkowy oraz 3 razy szybciej niż orczyk. Jeżeli wszystkie wyciągi są czynne, to grupa 1200 narciarzy wjeżdża na szczyt w czasie 2 godzin. Ilu narciarzy wywozi na szczyt w ciągu godziny każdy z wyciągów?

Odp.: x – liczba narciarzy, jaką w ciągu godziny wywozi na szczyt wyciąg gondolowy;

$\frac{1200}{x}$ – liczba godzin pracy gondoli przy wywożeniu 1200 osób;

$\frac{1200}{x} + 2 = \frac{1200 + 2x}{x}$ –

liczba godzin pracy wyciągu krzesełkowego przy wywożeniu 1200 osób;

$\frac{1200}{x} \cdot 3$ – liczba godzin pracy

wyciągu orczykowego przy wywożeniu 1200 osób.

Celem jest zawieszenie na szczyt 1200 osób, więc ustalamy, jaką część pracy wykona każdy z wyciągów w ciągu godziny.

I tak: gondole $\frac{x}{1200}$, krzesełka

$\frac{x}{1200 + 2x}$, orczyk $\frac{x}{3600}$.

Jeżeli wszystkie wyciągi są czynne, to grupa narciarzy wjeżdża na szczyt w czasie 2 godzin. W ciągu jednej godziny wyciągi wykonują połowę pracy. Zatem

$$\frac{x}{1200} + \frac{x}{1200 + 2x} + \frac{x}{3600} = \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{N}_+$$

$$\frac{x}{600} + \frac{x}{600 + x} + \frac{x}{1800} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{600} + \frac{1800}{600 + x} = 1 - \frac{x}{600 + x}$$

$$\frac{4x}{1800} = \frac{600}{600 + x} \Leftrightarrow \frac{x}{400} = \frac{600}{600 + x}$$

$$x^2 + 600x - 270000 = 0, \quad x \in \mathbb{N}_+$$

$$\Delta = 360000 + 1080000 = 1440000, \quad \sqrt{\Delta} = 1200$$

$$x_1 = \frac{-600 - 1200}{2} \notin \mathbb{N}_+, \quad x_2 = \frac{-600 + 1200}{2} = 300$$

Gondole wywożą na szczyt 1200 narciarzy w ciągu 4 godzin, a wyciąg krzesełkowy wywiezie 1200 narciarzy w ciągu 6 godzin.

Zatem w ciągu godziny wyciąg krzesełkowy wywiezie 200 narciarzy, a orczyk – 100 narciarzy (bo jedzie trzy razy wolniej niż gondole).

Odp.: Wyciąg gondolowy wywiezie w ciągu godziny 300, krzesełkowy – 200, a orczykowy – 100 narciarzy.

* Przykład 6 ◀ zad. 9.15

Pani Zenobia Żubr zatrudniła do przycinania drzewek owocowych pracowników trzech firm ogrodniczych. Gdyby podpisała umowę tylko z firmą P, to praca zostałaby wykonana w czasie o 5 dni dłuższym, niż przewidywała to oferta firmy K. Natomiast firma N przycięłaby drzewka w czasie o 2 dni dłuższym niż podwojony czas pracy firm K i P łącznie. Ile dni zajęłaby praca każdej z firm pracującej osobno, jeżeli wspólnie wykonały pracę w ciągu 2 dni?



Rozwiązanie

Zakładamy, że każda z firm wykonuje swoją dzienną normę bez zmian (bez takiego założenia zadania nie można rozwiązać). Oznaczmy:

x – liczba dni pracy w ofercie firmy K. Zatem $x > 0$.

Wówczas:

$x + 5$ to liczba dni pracy w ofercie firmy P,

$2(x + x + 5) + 2$ to liczba dni pracy w ofercie firmy N.

Zatem w ciągu jednego dnia firmy wykonują część pracy równą:

$$\frac{1}{x} \quad \text{– norma firmy K,}$$

$$\frac{1}{x + 5} \quad \text{– norma firmy P,}$$

$$\frac{1}{4(x + 3)} \quad \text{– norma firmy N.}$$

Przycięcie wszystkich drzewek zajęło pracownikom trzech firm pracującym wspólnie 2 dni, czyli w ciągu jednego dnia wykonali połowę pracy. Zatem:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 5} + \frac{1}{4(x + 3)} = \frac{1}{2}$$

W kolejnych przekształceniach otrzymujemy:

$$4(x + 5)(x + 3) + 4x(x + 3) + x(x + 5) = 2x(x + 5)(x + 3)$$

$$4(x^2 + 8x + 15) + 4x^2 + 12x + x^2 + 5x - 2x(x^2 + 8x + 15) = 0$$

$$2x^3 + 7x^2 - 19x - 60 = 0, \quad \text{czyli } (x - 3)(2x^2 + 13x + 20) = 0$$

Obydwa pierwiastki trójmianu kwadratowego $2x^2 + 13x + 20$ są ujemne, więc jedynym rozwiązaniem zadania jest $x = 3$.

Odp.: Firma K przycięłaby drzewka w 3 dni, firma P w 8 dni, firma N w 24 dni.

Zadania

9.1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Wiadomo, że $na + x = \frac{x}{y}$ oraz $naxy \neq 0$. Zatem

A. $y = \frac{na + x}{x}$. B. $a = \frac{x(1 - y)}{ny}$. C. $n = \frac{x - yx}{ay}$.

9.2. Jeden robotnik wykonuje pewną pracę w x dni, drugi tę samą pracę wykonuje w y dni. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Obaj robotnicy, pracując wspólnie, wykonają tę pracę w ciągu

A. $\frac{x+y}{xy}$ dni. B. $\frac{1}{x+y}$ dni. C. $\frac{xy}{x+y}$ dni.

9.3. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2x+1}{x-2} = 3$ c) $\frac{-x+3}{4x-5} = \frac{2}{3}$ e) $\frac{2x-3}{x^2-4x+4} = -1$
 b) $\frac{3x-2}{2x+1} = -2$ d) $\frac{3x-5}{-6x+7} = -\frac{1}{2}$ f) $\frac{4x+6}{2x^2+x-3} = 4$

9.4. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2x-1}{x-1} = \frac{x+3}{1-x}$ d) $\frac{x+2}{x+4} = \frac{x^2+5x-10}{x^2+x-12}$ g) $\frac{x+1}{x+5} - \frac{2x+3}{4x+11} = 0$
 b) $\frac{7-x}{x+3} = \frac{x-2}{x+7}$ e) $\frac{2x+1}{3x-1} - \frac{6x}{5x-1} = 0$ h) $\frac{x^2+2x+2}{x^2+3x+2} = \frac{x+2}{x+3}$
 c) $\frac{3x-1}{5-x} - \frac{x}{x-2} = 0$ f) $\frac{x-1}{x+3} = \frac{2x-1}{4x+3}$ i) $\frac{2x^2+x-3}{x^2-3x-10} = \frac{2x+3}{x-5}$

9.5. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{4}{x+3} - \frac{3}{x+1} = \frac{2x-5}{x^2+4x+3}$ d) $\frac{x-1}{x-3} + \frac{x+10}{x-4} + \frac{2}{x^2-7x+12} = 0$
 b) $\frac{x-3}{x-1} + \frac{x+2}{x-4} = \frac{18}{x^2-5x+4}$ e) $\frac{1}{x} - \frac{3}{2x-4} = \frac{x^2+2x-4}{2x^2-4x}$
 c) $\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{6}{x^2-1}$ f) $\frac{x}{x-2} + \frac{x+11}{x-3} + \frac{2}{x^2-5x+6} = 0$

9.6. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{3x+11}{x^2-x-20} + 2 = \frac{2x-2}{x+4}$ d) $\frac{4}{x^2-6x+5} + \frac{x-6}{x-5} = \frac{x}{x-1} - 1$
 b) $\frac{x-1}{x-5} - \frac{2}{x^2-11x+30} = \frac{x}{x-6}$ e) $\frac{x-2}{x-3} + \frac{x^2}{x-6} - \frac{x^2-7x+9}{x^2-9x+18} = 0$
 c) $5 - \frac{x-1}{x+2} = \frac{6}{x^2+6x+8} + \frac{4x+11}{x+4}$ f) $\frac{x+2}{x+1} - \frac{x-4}{x-3} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-2x-3} + 1$

Odpowiedzi i rozwiązania

9.1. F, P, P

9.2. F, F, P

9.3. a) $x = 7$
 b) $x = 0$
 c) $x = \frac{19}{11}$
 d) brak rozwiązań
 e) $x = 1$
 f) $x = \frac{3}{2}$

9.4. a) $x = -\frac{2}{3}$
 b) $x = -5\frac{1}{2}$ lub $x = 5$
 c) $x = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$ lub $x = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$
 d) $x = \frac{2}{3}$
 e) $x = \frac{1}{8}$ lub $x = 1$
 f) $x = 0$ lub $x = 3$
 g) $x = -2$ lub $x = 1$
 h) brak rozwiązań
 i) $x = -\frac{3}{2}$

9.5. a) $x = 0$
 b) $x = -1$
 c) brak rozwiązań
 d) $x = -4$
 e) $x = -3$
 f) $x = -5$

9.6. a) $x = 3$
 b) $x = 2$
 c) brak rozwiązań
 d) $x = 3$
 e) $x = -1$ lub $x = 1$
 f) $x = 0$

9.7. a) $M = \frac{Fr^2}{Gm}$

b) $I = \frac{mg}{Bl}$

c) $p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$

d) $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

e) $R = \frac{qr}{4\pi\epsilon kr + q}$

f) $m = \frac{2E}{2gh + v^2}$

9.8. 4 zł

9.9. 15 szklanek

9.10. 8 dni

9.11. 57 km/h

9.12. 96 km

9.13. 78 km/h

9.14. 295 km

9.7. Wyznacz ze wzoru podaną zmienną. Zakładamy, że wszystkie zmienne przyjmują tylko takie wartości, dla których odpowiednie działania są wykonalne.

a) $F = G \cdot \frac{Mm}{r^2}$

M

d) $\frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}$

R

b) $B = \frac{mg}{I \cdot l}$

I

e) $k = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$

R

c) $\left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = RT$

p

f) $E = \frac{mv^2}{2} + mgh$

m

9.8. Gdy jabłka staniały o 1 zł za kg, to za 24 zł można ich było kupić o 2 kg więcej niż poprzednio. Jaka była początkowa cena 1 kilograma jabłek?

9.9. Trzy litry soku rozlano do szklanek – do każdej szklanki tyle samo. Gdyby do każdej szklanki wlało o 50 ml mniej, można by było napełnić o 5 szklanek więcej. Ile szklanek początkowo napełniono sokiem?

9.10. Ogrodnik miał przyciąć 200 drzewek owocowych w określonym terminie. Pracował systematycznie, a ponieważ udało mu się każdego dnia przyciąć o 5 drzewek więcej niż wcześniej zaplanował, skończył pracę 2 dni przed terminem. Ile dni pracował?

9.11. Kierowca samochodu obliczył, że zdąży dojechać w ciągu 2 godzin na konferencję, jeżeli będzie jechał ze średnią prędkością 55 km/h. Niestety przez pierwsze 20 minut jechał z prędkością tylko 45 km/h. Z jaką średnią prędkością musi pokonać resztę trasy, żeby przyjechać na czas?

9.12. Marcin jechał samochodem z domu do hurtowni ze średnią prędkością 60 km/h, a wracał ze średnią prędkością 40 km/h. Cały przejazd zajął mu łącznie 4 godziny. Jak daleko jest z domu Marcina do hurtowni?

9.13. Anna jechała samochodem ze stałą prędkością. W pewnym momencie wyprzedziła rowerzystę poruszającego się ze stałą prędkością 18 km/h. Następnie zatrzymała się na 10 minut. Potem jechała dalej z tą samą co poprzednio prędkością i po pewnym czasie znowu wyprzedziła tego samego rowerzystę. Z jaką prędkością jechała Anna, jeżeli między kolejnymi momentami wyprzedzania rowerzysty upłynęło 13 minut?

9.14. Pociąg osobowy wyjechał z miasta A do miasta B o godzinie 12⁴⁵ i jechał ze średnią prędkością 60 km/h. O godzinie 13³⁰ z miasta B do miasta A wyjechał pociąg pospieszny i jechał ze średnią prędkością 90 km/h. Pociągi minęły się o godzinie 15¹⁰. Jaka odległość dzieli miasta A i B?

- * **9.15.** Na szczyt góry wywożą narciarzy trzy wyciągi – gondolowy, krzesełkowy i orczykowy. Gondole wywożą grupę 1200 narciarzy w czasie o 2 godziny krótszym niż wyciąg krzesełkowy oraz 3 razy szybciej niż orczyk. Jeżeli wszystkie wyciągi są czynne, to grupa 1200 narciarzy wjeżdża na szczyt w czasie 2 godzin. Ilu narciarzy wywozi na szczyt w ciągu godziny każdy z wyciągów?

Prosto do matury


W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszyte.

- 1.** Jan podróżował przez T godzin ze średnią prędkością R km/h i przez t godzin ze średnią prędkością r km/h. Jaką miał średnią prędkość (w km/h) na całej trasie?

A. $\frac{R}{T} + \frac{r}{t}$ B. $\frac{RT + rt}{T + t}$ C. $\frac{RT + rt}{2}$ D. $\frac{Rt + rt}{R + r}$

- 2.** Wskaż równanie, które nie ma rozwiązania.

A. $\frac{1}{x-1} = 1$ B. $\frac{x-1}{x} = 2$ C. $\frac{1}{x} = x$ D. $\frac{x}{x-1} = 1$

- 3.** Wiadomo, że $m = \frac{1}{a+b}$. Ile jest równe $\frac{5}{b}$?

A. $\frac{5m}{1-ma}$ B. $\frac{5(a+m)}{1+a}$ C. $\frac{m+a}{5a}$ D. $\frac{m}{5a(1+m)}$

- 4.** Oceń prawdziwość podanych zdań.

Zbiór rozwiązań równania $\frac{x-3}{x^2-x} = \frac{3}{x} - \frac{2}{x-1}$

- A. jest dwuelementowy.
B. ma nieskończenie wiele elementów.
C. jest równy $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

- 5.** Rozwiąż równanie $\frac{x-7}{x-2} = \frac{x+3}{x+7}$.

- 6.** Rozwiąż równanie $\frac{x^2-x+2}{x^2-2x+3} = \frac{x+2}{x+1}$.

- 7.** Kwotę 3360 zł przeznaczono na premie świąteczne dla pracowników. W ostatniej chwili zdecydowano, że premię otrzyma o dwóch pracowników mniej i wtedy okazało się, że pozostali otrzymają po 40 zł więcej. Wszystkie wypłacone premie były równe. Ilu pracowników je otrzymało?

9.15. Patrz s. 130.

Prosto do matury

1. B

2. D

3. A

4. F, P, P

5. $x = -43$

6. $x = 2$

7. 12 pracowników

10. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–20 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

1. A
 2. C
 3. C
 4. D
 5. B
 6. B
 7. C
 8. B
 9. C
 10. C
1. Wskaż wartość wielomianu $3x^3 - 2x^2 + x - 1$ dla $x = -1$.
A. -7 B. -3 C. 1 D. 0
 2. Funkcja $f(x) = (p+1)x + 5$ jest wielomianem stopnia 0, gdy
A. $p = 1$. B. $p = 0$. C. $p = -1$. D. $p > 0$.
 3. Wielomian $(2x+3)^3$ zapisano w postaci sumy tak, że jeden z podanych jednomianów jest jej składnikiem. Wskaż ten jednomian.
A. $2x^3$ B. $18x^2$ C. $54x$ D. 9
 4. Wskaż liczbę równą $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^3$.
A. 1 B. $3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ C. $9\sqrt{3} + 7\sqrt{2}$ D. $9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}$
 5. Jaka jest wartość wielomianu $x^2y^4 - 2xy - \sqrt{3}x^2y$ dla $x = \sqrt{2}$ i $y = -\sqrt{3}$?
A. 0 B. $2(12 + \sqrt{6})$ C. $6\sqrt{3}$ D. -2
 6. Wskaż zbiór rozwiązań równania $x^3 - 3x + 2 = 0$.
A. $\{-1, 1, 2\}$ B. $\{-2, 1\}$ C. $\{-1, 1, -2\}$ D. $\emptyset$
 7. Ile pierwiastków ma wielomian $x^3 + 2x^2 + x$?
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
 8. Równanie $x^3 - x^2 - x + 10 = 0$
A. nie ma rozwiązań. C. ma dokładnie dwa rozwiązania.
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie. D. ma dokładnie trzy rozwiązania.
 9. Równanie $2x(x^2 - 9)(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0$
A. nie ma rozwiązań. C. ma dokładnie pięć rozwiązań.
B. ma dokładnie cztery rozwiązania. D. ma dokładnie sześć rozwiązań.
 10. Wskaż wyrażenie, które nie występuje w rozkładzie na czynniki wielomianu $W(x) = x^3 + 4x^2 - 4x - 16$.
A. $x - 2$ B. $x + 2$ C. $x - 4$ D. $x + 4$

- 11.** Wskaż resztę z dzielenia wielomianu $x^3 + 5x^2 + 5x + 3$ przez dwumian $x + 2$.
A. 5 **B.** 3 **C.** 0 **D.** -1
- 12.** Wskaż resztę z dzielenia wielomianu $x^9 + x^4 - 1$ przez dwumian $x + 1$.
A. -3 **B.** -1 **C.** 1 **D.** 3
- 13.** Dla jakiej wartości m wielomian $W(x) = x^3 - 2mx^2 + 3x - 6$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = x - 2$?
A. -2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 2
- 14.** Grzegorz zaplanował porządkowanie strychu przez a godzin. Przpracował już b godzin, $b < a$. Jaka część zaplanowanego czasu pracy mu została?
A. $a - b$ **B.** $\frac{1}{a-b}$ **C.** $\frac{a-b}{a}$ **D.** $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$
- 15.** Dla $x \neq 0$ i $y \neq 0$ wyrażenie $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ można zapisać jako
A. 0. **B.** -1. **C.** $\frac{x-y}{xy}$. **D.** $\frac{x^2-y^2}{xy}$.
- 16.** Który z ułamków jest równy sumie $\frac{r}{x} + \frac{y}{m}$? Zakładamy, że $x \neq 0$ i $m \neq 0$.
A. $\frac{ry}{xm}$ **B.** $\frac{r+y}{xm}$ **C.** $\frac{rm+xy}{x+m}$ **D.** $\frac{rm+xy}{xm}$
- 17.** Jeżeli ułamek $\frac{2x}{x+1}$ rozszerzymy tak, aby w jego mianowniku było wyrażenie $x^3 + 1$, to w liczniku otrzymamy
A. $2x^3 + 2x^2 + 2$. **C.** $2x^3 - 2x^2 + 2x$.
B. $2x^2 + x$. **D.** $2x^2 + 2x$.
- 18.** Wskaż dziedzinę wyrażenia $\frac{x}{x-1} : \frac{x+2}{x-5}$.
A. $\mathbb{R} - \{1, 5\}$ **C.** $\mathbb{R} - \{-2, 1, 5\}$
B. $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$ **D.** $\mathbb{R} - \{-2, 0, 1, 5\}$
- 19.** Wskaż liczbę rozwiązań równania $\frac{x(x-1)}{x+3} = 0$.
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3
- 20.** Wskaż równanie mające ten sam zbiór rozwiązań co równanie $\frac{x^2-1}{x-1} = 0$.
A. $(x^2 - 1)(x - 1) = 0$ **C.** $x - 1 = 0$
B. $(x^2 - 1) = 0$ **D.** $x + 1 = 0$

11. A

12. B

13. B

14. C

15. D

16. D

17. C

18. C

19. C

20. D

21. F, P, F

22. F, P, F

23. P, F, P

24. P, P, P

25. P, P, F

26. $3x^2 + 11x - 7$ 27. $m = 7$ 28. a) $Q(x) = 3x^2(\pi x^2 + 2)$ b) $Q(x) = 7x^3(2x^2 + 3)$ c) $Q(x) = 12x^4(\sqrt{2}x - \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{3})$ d) $Q(x) = 7x^6(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ e) $Q(x) = 2x(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ f) $Q(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1) \cdot (x + 1)(x^2 - x + 1)$

W zadaniach 21–25 oceń prawdziwość podanych zdań.

21. Wyrażenie $x^3 - y^3$ toA. sześćcian różnicy liczb x i y .B. różnica sześciastków liczb x i y .C. trzecia potęga różnicy liczb x i y .22. Dane są wielomiany $W(x) = \frac{1}{2}x^5 - x^3 + 11x + 3$ i $P(x) = -6x^4 + 5x^2 + x$.A. Stopień wielomianu $W(x) + P(x)$ jest równy 9.B. Stopień wielomianu $W(x) \cdot P(x)$ jest równy 9.C. Współczynnik przy najwyższej potędze wielomianu $W(x) \cdot P(x)$ jest równy 3.23. Dany jest wielomian $W(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2$.A. Wielomian $W(x)$ ma dokładnie jeden pierwiastek dodatni.B. Jedynym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ jest $x = 0$.C. Suma pierwiastków wielomianu $W(x)$ jest równa $\frac{1}{2}$.

24. Równanie wielomianowe trzeciego stopnia może mieć

A. trzy pierwiastki.

B. dwa pierwiastki.

C. jeden pierwiastek.

25. Dany jest wielomian $W(x) = 2x^3 + 2x^2 - 12x$.A. Wielomian $W(x)$ ma trzy różne pierwiastki.B. Wielomian $W(x)$ ma dokładnie jeden pierwiastek dodatni.C. Wielomian $W(x)$ ma dwa pierwiastki ujemne.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

26. Dane są wielomiany: $W(x) = 4x^4 - 16x^3 + 24x^2 + 2x - 7$, $Q(x) = 2x - 3$ i $R(x) = x^2 - x$. Wyznacz $W(x) - (Q(x))^2 \cdot R(x)$.27. Wyznacz liczbę m tak, aby reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 2x^3 - 6x^2 + mx - 1$ przez wielomian $Q(x) = x - 2$ była równa 5.

28. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

a) $Q(x) = 3\pi x^4 + 6x^2$ d) $Q(x) = 7x^8 - 21x^6$ b) $Q(x) = 14x^5 + 21x^3$ e) $Q(x) = 2x^4 - 16x$ c) $Q(x) = 24x^6 - 36x^4$ f) $Q(x) = x^6 - 1$

29. Rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne.

- a) $W(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$ d) $W(x) = -x^4 - x^2 + 2$
 b) $W(x) = 2x^4 - 10x^3 - 4x^2 + 20x$ e) $W(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$
 c) $W(x) = x^4 - 18x^2 + 81$ f) $W(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 14$

30. Liczby 2, -3 i 5 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Wyznacz współczynniki tego wielomianu.

31. Podaj przykład równania wielomianowego o współczynnikach całkowitych, którego rozwiązaniami są liczby $-2, \frac{2}{3}, \frac{1}{7}$.

32. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 - x^2 - 16x + 16 = 0$ e) $2x^3 + 3x^2 - 10x - 15 = 0$
 b) $4x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0$ f) $5x^4 - 13x^3 - 5x^2 + 13x = 0$
 c) $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$ g) $-x^3 + 5x^2 + 9x - 45 = 0$
 d) $4x^3 + x^2 - 4x - 1 = 0$ h) $2x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 20x = 0$

33. Rozwiąż równanie.

- a) $(x + \sqrt{7})(x - 2)^2 = 0$ c) $x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 14x - 5 = 0$
 b) $x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0$ d) $4x^4 - 29x^2 + 25 = 0$

34. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{3x}{x+1} = \frac{1}{2x}$ c) $\frac{x}{x^2-6x+9} - \frac{x-4}{2x-6} = 1$
 b) $\frac{3}{x+5} - \frac{1}{x-7} = \frac{2-2x}{x^2-2x-35}$ d) $\frac{2}{x^2-2x} + \frac{2}{x^2+2x} = \frac{x}{x^2-4}$

D * **35.** Wiadomo, że $a + \frac{1}{a} = 3$. Wykaż, że $a^3 + \frac{1}{a^3} = 18$.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

36. Dla jakich wartości a i b wielomiany $W(x) = (3x - 1)^3 + ax$

i $P(x) = (3x + 1)(9x^2 + bx - 1)$ są równe?

37. Znajdź wielomian, którego kwadrat równa się $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$.

38. Jednym z pierwiastków równania $(m - 1)x^3 + \frac{1}{3}mx^2 - (2m - 1)x + m - 1 = 0$ z niewiadomą x jest liczba $\frac{1}{2}$. Rozwiąż to równanie.

39. Pierwiastkami wielomianu $x^3 + ax^2 - bx - 6$ są liczby -1 oraz 3. Wyznacz współczynniki a i b . Czy ten wielomian ma inne pierwiastki?

35. Założenie: $a + \frac{1}{a} = 3$

Teza: $a^3 + \frac{1}{a^3} = 18$

Dowód:

$$a + \frac{1}{a} = 3 \Rightarrow \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 = 27 \Leftrightarrow a^3 + 3a + 3 \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^3} = 27$$

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = 27 - 3\left(a + \frac{1}{a}\right) = 27 - 3 \cdot 3 = 18$$

Zatem $a^3 + \frac{1}{a^3} = 18$.

29. a) $W(x) = (x + 3)(x - 3)(x + 2)$

b) $W(x) = 2x(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x - 5)$

c) $W(x) = (x - 3)^2(x + 3)^2$

d) $W(x) = -(x - 1)(x + 1)(x^2 + 2)$

e) $W(x) = (x - 1)(x + 3)(x - 5)$

f) $W(x) = (x + 2)(x^2 - 5x + 7)$

30. $a_2 = -4, a_1 = -11, a_0 = 30$

31. np. $(x + 2)(5x - 2)(7x - 1) = 0$

32. a) $x = -4$ lub $x = 1$ lub $x = 4$

b) $x = -1$ lub $x = \frac{1}{4}$ lub $x = 1$

c) $x = -2$ lub $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 2$

d) $x = -1$ lub $x = -\frac{1}{4}$ lub $x = 1$

e) $x = -\sqrt{5}$ lub $x = -1\frac{1}{2}$

lub $x = \sqrt{5}$

f) $x = -1$ lub $x = 0$ lub $x = 1$

lub $x = 2\frac{3}{5}$

g) $x = -3$ lub $x = 3$ lub $x = 5$

h) $x = -2$ lub $x = 0$ lub $x = 2$

lub $x = 2\frac{1}{2}$

33. a) $x = -\sqrt{7}$ lub $x = 2$

b) $x = -3$ lub $x = -1$ lub $x = 3$

c) $x = -5$ lub $x = 1$

d) $x = -2\frac{1}{2}$ lub $x = -1$ lub $x = 1$

lub $x = 2\frac{1}{2}$

34. a) $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = \frac{1}{2}$

b) brak rozwiązań

c) $x = 2$ lub $x = 5$

d) $x = 4$

36. $a = -24, b = -12$

37. $x^2 + 3x + 1$ lub $-x^2 - 3x - 1$

38. $x = -2$ lub $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 1$

39. $a = 0, b = 7$; tak, -2

40. Założenie: $n \in \mathbb{Z}$,

$$W(x) = x^3 - x$$

Teza: $6|W(n)$

Dowód:

$W(n) = n^3 - n = n(n-1)(n+1)$
Zatem $W(n)$ jest iloczynem trzech kolejnych liczb całkowitych, z których co najmniej jedna jest parzysta i dokładnie jedna jest podzielna przez 3. Wynika stąd, że iloczyn tych liczb jest liczbą podzielną przez 6.

41. 24 godziny

42. 2 godziny i 3 godziny

43. autobus; 1,5 km

44. 100 km/h

45. x – czas koszenia starą kosiarką (w godzinach);

$\left(\frac{1}{2}x - 4\right)$ godzin – czas koszenia nową kosiarką;

$$\frac{1}{2}x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 8$$

$$\frac{1}{2}x - 4 = \frac{x-8}{2}$$

W ciągu jednej godziny

stara i nowa kosiarka koszą

odpowiednio $\frac{1}{x}$ i $\frac{2}{x-8}$ trawnika,

a pracując razem, koszą w ciągu godziny $\frac{1}{6}$ trawnika.

$$\text{Stąd } \frac{1}{x} + \frac{2}{x-8} = \frac{1}{6}, \quad x > 8$$

$$\frac{x-8+2x}{x(x-8)} = \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18x - 48 = x^2 - 8x$$

$$x^2 - 26x + 48 = 0, \quad x > 8$$

$$\Delta = 26^2 - 4 \cdot 48 = 4 \cdot 169 - 4 \cdot 48 = 4 \cdot 121, \quad \sqrt{\Delta} = 22$$

$$x_1 = \frac{26-22}{2} = 2 \notin D, \quad x_2 = 24$$

$$\frac{24-8}{2} = 8$$

Odp.: Stara kosiarka kosi całą trawę w ciągu 24 godzin, nowa – w ciągu 8 godzin.

46. a) $3(x^2 - 4x) +$

$$-(x^2 - 4x)^2 + 10 = 0$$

Podstawiamy $t = x^2 - 4x$;

$$\text{wówczas } t^2 - 3t - 10 = 0,$$

$$t = -2 \text{ lub } t = 5.$$

$$x^2 - 4x = -2 \text{ lub } x^2 - 4x = 5$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \text{ lub } x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\Delta = 8, \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{lub } (x+1)(x-5) = 0$$

$$x_1 = 2 - \sqrt{2}, \quad x_2 = 2 + \sqrt{2},$$

$$x_3 = -1, \quad x_4 = 5$$

Odp.: $x \in \{-1, 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 5\}$

D * 40. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej x wartość wielomianu $W(x) = x^3 - x$ jest liczbą podzielną przez 6.

41. Członkowie klubu wysokogórskiego myją okna na zewnątrz wysokich budynków i w ten sposób zarabiają na wyprawę. Zenon, kiedy pracuje sam, myje okna na jednej ścianie budynku przez 8 godzin. Kiedy pracują wspólnie z Józefem, to praca ta zajmuje im 6 godzin. Ile godzin potrzebowaliby Józef na samodzielne umycie okien na tej ścianie?

42. Jedna drukarka drukuje cały nakład ulotek w czasie o godzinę dłuższym niż druga. Wydrukowanie wszystkich ulotek na obydwu drukarkach pracujących równocześnie zajęło 1 godzinę i 12 minut. Ile czasu drukowałyby wszystkie ulotki każda z drukarek, pracując oddzielnie?

43. Autobus miejski pokonuje odległość 7 km ze średnią prędkością 42 km/h. Po drodze zatrzymuje się na 13 przystankach – na każdym średnio 30 sekund. Jednocześnie z autobusem na tę samą trasę wyrusza rowerzysta poruszający się z prędkością 20 km/h. Który pojazd pierwszy pokona całą trasę? Jaki dystans zostanie wtedy do przejechania drugiemu pojazdowi?

44. Pociąg zatrzymany na czerwonym świetle stał 20 minut. Następnie przejechał 100 km z prędkością o 20 km/h większą od zaplanowanej, dzięki czemu zmniejszył opóźnienie do 5 minut. Z jaką prędkością przejechał te 100 km?

* 45. Właściciel ośrodka wypoczynkowego kupił nową kosiarkę. Można za jej pomocą skosić trawę na terenie całego ośrodka w czasie o 4 godziny krótszym niż połowa czasu pracy starej kosiarki. Jeżeli obydwie kosiarki pracują równocześnie, to cała trawa jest skoszona po upływie 6 godzin. Ile czasu kosi całą trawę każda z kosiarek osobno?

* 46. Rozwiąż równanie.

a) $3(x^2 - 4x) - (x^2 - 4x)^2 + 10 = 0$

b) $(x^4 - 5x^2 + 2)^2 - 14(x^4 - 5x^2 + 2) = 32$

* 47. Zapisz w prostszej postaci podane wyrażenie.

a) $\sqrt{(x^2 + 9y^2)^2 - 81y^4} : \sqrt{x^2 + 18y^2}$ b) $\sqrt[4]{\left(x^2 + \frac{9}{x^2}\right)^2 + 12\left(x^2 + \frac{9}{x^2}\right) + 36}$

46. b) $(x^4 - 5x^2 + 2)^2 - 14(x^4 - 5x^2 + 2) = 32$

Podstawiamy $t = x^4 - 5x^2 + 2$; wówczas $t^2 - 14t - 32 = 0$. $t = -2$ lub $t = 16$

$$x^4 - 5x^2 + 2 = -2 \text{ lub } x^4 - 5x^2 + 2 = 16$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \text{ lub } x^4 - 5x^2 - 14 = 0$$

$$x^2 = 1 \vee x^2 = 4 \text{ lub } x^2 = 7 \vee x^2 = -2 - \text{sprzeczność}$$

Odp.: $x \in \{-\sqrt{7}, 2, -1, 1, 2, \sqrt{7}\}$

47. a) $\sqrt{x^4 + 18x^2y^2 + 81y^4 - 81y^4} : \sqrt{x^2 + 18y^2} = \frac{\sqrt{x^2(x^2 + 18y^2)}}{\sqrt{x^2 + 18y^2}} = \sqrt{x^2} = |x|$

b) $\sqrt[4]{\left(x^2 + \frac{9}{x^2}\right)^2 + 12\left(x^2 + \frac{9}{x^2}\right) + 36} = \sqrt[4]{\left(x^2 + \frac{9}{x^2} + 6\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{9}{x^2} + 6} =$
 $= \sqrt{x^2 + 6 + \left(\frac{3}{x}\right)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{3}{x}\right)^2} = \left|x + \frac{3}{x}\right| = \frac{x^2 + 3}{|x|}$