

Funkcje trygonometryczne

4

Umiejętności

Po klasie pierwszej szkoły ponadpodstawowej uczeń:

- oblicza długość okręgu i łuku okręgu,
- oblicza pola i obwody:
 - trójkątów,
 - czworokątów,
 - kół,
 - pierścieni kołowych,
- zamienia jednostki pola,
- stosuje w zadaniach twierdzenie Pitagorasa,
- korzysta z własności trójkątów i czworokątów.



Po tym dziale uczeń:

- wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych (sinus, cosinus, tangens) w trójkącie prostokątnym o danych bokach,
- oblicza długości boków i miary kątów trójkąta prostokątnego, jeżeli dane są jeden bok i wartość funkcji trygonometrycznej jednego z kątów ostrych,
- korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora),
- stosuje w zadaniach podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego i rozwartego,
- wykorzystuje funkcje trygonometryczne do obliczania pól i obwodów trójkątów i czworokątów,
- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kątów wypukłych umieszczonych w układzie współrzędnych,
- stosuje wzory redukcyjne do obliczania funkcji trygonometrycznych kątów rozwartych.

Uwagi metodyczne

Na początku definiujemy tangens kąta ostrego jako funkcję, której zastosowania w planimetrii są łatwe do pokazania.

Podkreślamy, że jest to funkcja zależna tylko od miary kąta, a nie od długości boków trójkąta.

Następnie definiujemy funkcje sinus i cosinus.

1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

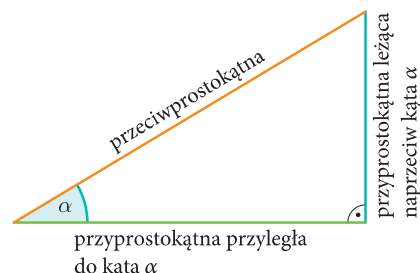
Umiejętności:

- wyznaczanie wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów ostrych w trójkącie prostokątnym
- korzystanie z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych
- obliczanie miary kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość

Popatrzmy na rysunek. Jeżeli α jest kątem ostrym w trójkącie prostokątnym, to jedno z ramion kąta α jest przyprostokątną (przyległą do kąta α), a drugie przeciwprostokątną. Naprzeciwko kąta α leży druga przyprostokątna.

Podanie miary jednego z kątów ostrych jednoznacznie określa drugi kąt ostry w tym trójkącie: jeżeli dany jest kąt α , to drugi kąt ma miarę $90^\circ - \alpha$.

Żeby jednoznacznie wyznaczyć trójkąt prostokątny, wystarczy znać jeden z jego kątów ostrych i jeden z jego boków.

**Przykład 1**

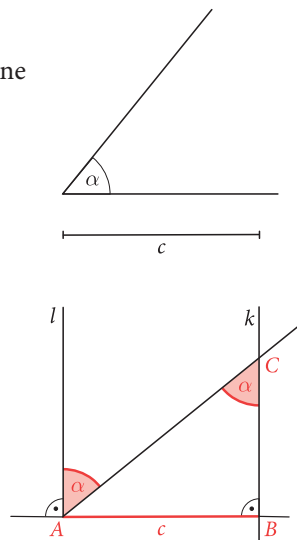
Skonstruujemy trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle B = 90^\circ$ oraz dane są: $|AB| = c$ i $\sphericalangle C = \alpha$ ($\alpha < 90^\circ$).

Rozwiązanie

Oto przykładowa konstrukcja:

- na prostej odkładamy odcinek AB ,
- z punktu B prowadzimy prostą k prostopadłą do AB ,
- z punktu A prowadzimy półprostą l prostopadłą do AB ,
- odkładamy kąt α w taki sposób, że punkt A jest jego wierzchołkiem, a półprosta l – ramieniem,
- punkt przecięcia drugiego ramienia odłożonego kąta α z prostą k jest szukanym wierzchołkiem C .

Zadanie ma zawsze jedno rozwiązanie.

**ZZ i KPU**

temat 4.2

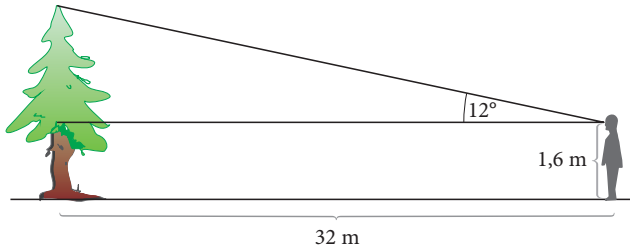
dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.1

Generator
 testów i sprawdzianów

Przykład 2

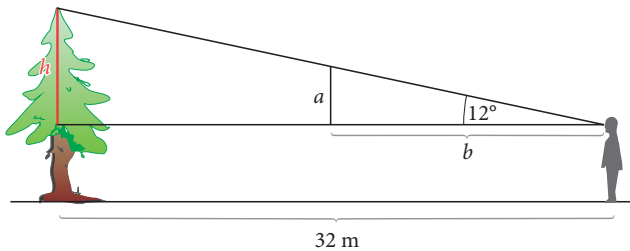
Chcemy oszacować wysokość drzewa. Mamy wyniki następujących pomiarów:

- 32 m – odległość obserwatora od drzewa,
- 12° – kąt, pod którym obserwator widzi wierzchołek drzewa (jak na rysunku),
- 1,6 m – wysokość oczu obserwatora nad ziemią.

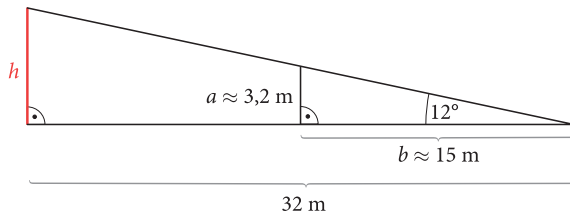
**Rozwiązanie**

Do rozwiązania problemu powinniśmy wyznaczyć wielkość h . Odcinek oznaczony na rysunku literą a został poprowadzony z pewnego przypadkowo wybranego punktu na przeciwprostokątnej. Otrzymaliśmy w ten sposób dwa trójkąty podobne, zatem:

$$\frac{h}{32} = \frac{a}{b}$$



Stosunek $\frac{a}{b}$ nie zależy od wielkości trójkąta, tylko od miary kąta i możemy go obliczyć (z zadaną dokładnością), jeśli znamy długości a i b .



Dla kąta 12° stosunek $\frac{a}{b} \approx 0,213$, a ponieważ $h = \frac{a}{b} \cdot 32$, więc $h \approx 6,816$ m.

Aby otrzymać odpowiedź na postawione na początku pytanie, do wielkości h trzeba jeszcze dodać 1,6 m.

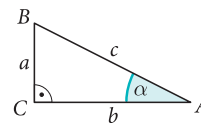
Odp.: Drzewo ma ok. 8,4 m wysokości.

Stosunek długości dwóch przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest wielkością tak ważną, że na jego określenie wprowadzono specjalną nazwę.

Definicja

W trójkącie prostokątnym, w którym α jest kątem ostrym, stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta α do długości przyprostokątnej przyległej do kąta α nazywamy **tangensem kąta α** i oznaczamy $\operatorname{tg} \alpha$.

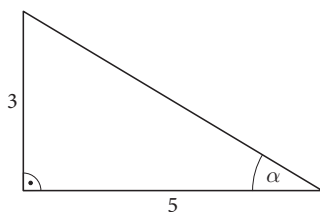
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$



Przykład 3

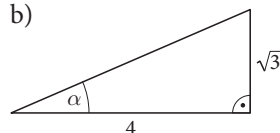
Skorzystamy z danych na rysunku i obliczymy $\operatorname{tg} \alpha$.

a)



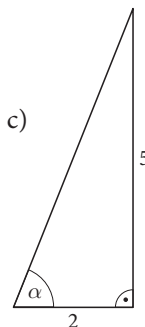
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5} = 0,6$$

b)



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

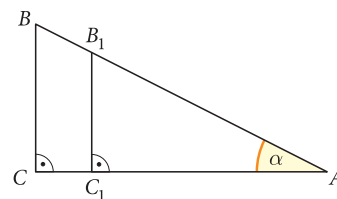
c)



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2} = 2,5$$

Przyjrzyjmy się rysunkowi. Trójkąty ABC i AB_1C_1 są podobne, więc prawdziwa jest równość:

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|B_1C_1|}{|AC_1|}$$



Wniosek

Wartość tangensa zależy tylko od miary kąta, a nie od długości boków trójkąta prostokątnego.

Każdemu kątowi ostremu została w opisany wyżej sposób przyporządkowana pewna liczba, nazywana jego tangensem. Zatem określona została funkcja, której dziedziną jest zbiór kątów ostrych, a zbiorem wartości – zbiór dodatnich liczb rzeczywistych.

Podobnie definiujemy następne funkcje.

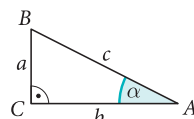
Definicja

W trójkącie prostokątnym, w którym α jest kątem ostrym:

- stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta do długości przeciwprostokątnej nazywamy **sinusem kąta** α i oznaczamy $\sin \alpha$,
- stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do długości przeciwprostokątnej nazywamy **cosinusem kąta** α i oznaczamy $\cos \alpha$.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$



Funkcje $\operatorname{tg} \alpha$, $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ nazywamy **funkcjami trygonometrycznymi**, a dział matematyki zajmujący się badaniem ich własności – trygonometrią.

Stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta nazywamy **cotangensem kąta** α i oznaczamy $\operatorname{ctg} \alpha$. Z tej funkcji nie będziemy korzystać, ponieważ łatwo można ją zastąpić tangensem. Bezpośrednio z definicji obu funkcji wynika bowiem równość:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Na końcu podręcznika znajdują się tablice wartości funkcji trygonometrycznych (zaokrąglonych do czwartego miejsca po przecinku) dla wszystkich kątów ostrych od 1° do 89° różniących się kolejno o 1° . Można z nich korzystać w dwie strony:

- dla danego kąta odczytać wartości jego trzech funkcji trygonometrycznych,
- mając daną wartość funkcji trygonometrycznej pewnego kąta, odczytać jego miarę.

- Początki trygonometrii sięgają czasów starożytnych i są ściśle związane z rozwojem astronomii, np. z szukaniem metod orientacji na otwartym morzu według widocznych ciał niebieskich oraz tworzeniem map.

Definicje, które zostały tutaj przytoczone, wprowadzono w XVI w.

- Wartości (w systemie dziesiętnym) funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych zostały obliczone z dużą dokładnością i spisane w tablicach w XV w. przez Johanna Müllera z Królewca. Korzystano z nich przy rozwiązywaniu problemów związanych z różnego typu pomiarami – przede wszystkim geodezyjnymi. Uściślona w XVII w. metoda pomiarów terenowych na podstawie tzw. triangulacji (podziału danego obszaru na trójkąty) polegała na zastąpieniu pomiarów odległościowych – kątowymi, a następnie wyznaczaniu odległości z użyciem rachunku trygonometrycznego.

Uwagi metodyczne

- Funkcji cotangens nie ma w podstawie programowej, dlatego ograniczamy się do podania krótkiej informacji na jej temat.
- Zapoznajemy uczniów z tablicami wartości funkcji trygonometrycznych i akcentujemy ich niewymierność. Warto od początku podkreślać różnice między zadaniami, w których otrzymujemy dokładny (choć często niewymierny) wynik, a zadaniami, w których wynik jest przybliżony. To również kolejna okazja do przypomnienia pojęcia przybliżenia. Trzeba uświadomić uczniom, że jeżeli na przykład mają podać obwód trójkąta z dokładnością do jednego miejsca po przecinku, to wcześniejsze obliczenia muszą wykonywać z większą dokładnością. Należy uczulić uczniów na to, że nie wystarczy odczytanie z tablic wartości funkcji z tak niewielką dokładnością. Warto zilustrować to stosownym przykładem.

◀1.3. Odczytaj z tablic wartości podanych funkcji trygonometrycznych.

a) $\sin 15^\circ$, $\sin 32^\circ$, $\cos 18^\circ$

b) $\cos 37^\circ$, $\cos 41^\circ$, $\sin 52^\circ$

c) $\sin 72^\circ$, $\sin 81^\circ$, $\cos 79^\circ$

d) $\operatorname{tg} 17^\circ$, $\operatorname{tg} 81^\circ$, $\operatorname{tg} 63^\circ$, $\operatorname{tg} 22^\circ$

Odp.: a) 0,2588, 0,5299, 0,9511

b) 0,7986, 0,7547, 0,7880

c) 0,9511, 0,9877, 0,1908

d) 0,3057, 6,3138, 1,9626, 0,4040

◀1.8. Wyznacz kąt ostry α , dla którego zachodzi podana równość.

a) $3 \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$

b) $1 + \cos \alpha = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{1}{3}(3 + \operatorname{tg} \alpha) = 1\frac{1}{3}$

Odp.: a) $\alpha = 30^\circ$ b) $\alpha = 30^\circ$

c) $\alpha = 45^\circ$

Przykład 4

Odczytamy z tablic przybliżone miary kątów rozważanych w przykładzie 3.

Rozwiązanie

a) Jeżeli $\operatorname{tg} \alpha = 0,6$, to $\alpha \approx 31^\circ$.

b) Jeżeli $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,43$, to $\alpha \approx 23^\circ$.

c) Jeżeli $\operatorname{tg} \alpha = 2,5$, to $\alpha \approx 68^\circ$.

Przykład 5 ◀ zad. 1.3

Odczytamy z tablic przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych kątów 87° i 14° .

Rozwiązanie

$$\sin 87^\circ \approx 0,9986$$

$$\cos 87^\circ \approx 0,0523$$

$$\operatorname{tg} 87^\circ \approx 19,0811$$

$$\sin 14^\circ \approx 0,2419$$

$$\cos 14^\circ \approx 0,9703$$

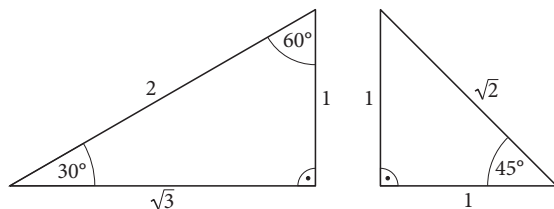
$$\operatorname{tg} 14^\circ \approx 0,2493$$

Przykład 6

Wyznamy wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30° , 45° i 60° .

Rozwiązanie

Jeżeli narysujemy połowę kwadratu i połowę trójkąta równobocznego o odpowiednio dobranych bokach, to wartości funkcji trygonometrycznych wymienionych kątów odczytamy bezpośrednio z rysunku. Zestawiamy je w tabeli.



α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Przykład 7 ◀ zad. 1.8

Znajdziemy kąt ostry α , dla którego zachodzi równość $2(1 + \cos \alpha) = \sqrt{2} + 2$.

Rozwiązanie

Rozwiązujemy równanie, w którym niewiadomą jest $\cos \alpha$.

$$2(1 + \cos \alpha) = \sqrt{2} + 2$$

← dzielimy obie strony równania przez 2

$$1 + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

← od obu stron równania odejmujemy 1

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Skoro $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, to szukany kąt ostry ma miarę 45° – zob. przykład 6.

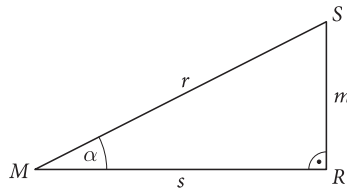
Odp.: $\alpha = 45^\circ$

Zadanie polegające na obliczeniu wszystkich nieznanych długości boków oraz miar kątów w dowolnym trójkącie nazywa się **rozwiązywaniem trójkątów**. W tym podręczniku ograniczymy się do trójkątów prostokątnych albo takich, które będzie można rozwiązać za pomocą trójkątów prostokątnych.

Uwaga: Wartości funkcji trygonometrycznych można odczytywać również z kalkulatorów naukowych.

Przykład 8 ◀ zad. 1.12

W trójkącie prostokątnym MRS dane są niektóre z wielkości oznaczonych na rysunku literami. Wyznamy pozostałe boki i kąty tego trójkąta. Wyniki zaokrąglimy: kąty – do 1 stopnia, długości boków – do dwóch miejsc po przecinku.



Rozwiązanie

a) $\alpha = 37^\circ$, $r = 5$

$$\sin 37^\circ = \frac{m}{5}$$

$$\leftarrow \sin \alpha = \frac{m}{r}$$

$$m = 5 \sin 37^\circ, \text{ więc } m \approx 3,01$$

$$\leftarrow \text{z tablic matematycznych: } \sin 37^\circ \approx 0,6018$$

$$\cos 37^\circ = \frac{s}{5}$$

$$\leftarrow \cos \alpha = \frac{s}{r}$$

$$s = 5 \cos 37^\circ \approx 3,99$$

$$\leftarrow \text{z tablic matematycznych: } \cos 37^\circ \approx 0,7986$$

$$\sphericalangle MSR = 90^\circ - \alpha = 53^\circ$$

Odp.: $\sphericalangle MSR = 53^\circ$, $m \approx 3,01$, $s \approx 3,99$

b) $\alpha = 70^\circ$, $m = 12$

$$\sin 70^\circ = \frac{12}{r}$$

$$\leftarrow \sin \alpha = \frac{m}{r}$$

$$r = \frac{12}{\sin 70^\circ} \approx \frac{12}{0,9397} \approx 12,77$$

$$\leftarrow \sin 70^\circ \approx 0,9397$$

$$s = \frac{12}{\operatorname{tg} 70^\circ} \approx \frac{12}{2,7475} \approx 4,37$$

$$\leftarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{s} \text{ i } \operatorname{tg} 70^\circ \approx 2,7475$$

$$\sphericalangle MSR = 90^\circ - \alpha = 20^\circ$$

Odp.: $\sphericalangle MSR = 20^\circ$, $r \approx 12,77$, $s \approx 4,37$

◀1.12. Wyznacz boki (wyniki zaokrąglaj do pierwszego miejsca po przecinku) i kąty trójkąta prostokątnego ABC , w którym kąt C jest prosty oraz

a) $\sphericalangle A = 48^\circ$, $|AC| = 11$.

b) $\sphericalangle B = 52^\circ$, $|AC| = 18$.

c) $\sphericalangle A = 27^\circ$, $|BC| = 12$.

d) $\sphericalangle B = 19^\circ$, $|AB| = 6,8$.

e) $\sphericalangle A = \frac{2}{3} \sphericalangle B$, $|AB| = 44$.

f) $\sphericalangle B - \sphericalangle A = 40^\circ$, $|BC| = 7$.

Odp.: a) $\sphericalangle B = 42^\circ$, $|AB| = 16,4$, $|BC| = 12,2$

b) $\sphericalangle A = 38^\circ$, $|AB| = 22,8$, $|BC| = 14,1$

c) $\sphericalangle B = 63^\circ$, $|AB| = 26,4$, $|AC| = 23,6$

d) $\sphericalangle A = 71^\circ$, $|BC| = 6,4$, $|AC| = 2,2$

e) $\sphericalangle A = 36^\circ$, $\sphericalangle B = 54^\circ$, $|AC| = 35,6$, $|BC| = 25,9$

f) $\sphericalangle A = 25^\circ$, $\sphericalangle B = 65^\circ$, $|AC| = 15,0$, $|AB| = 16,6$

◀1.16. Dana jest wartość jednej z funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α . Skonstruuj ten kąt.

- a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$
 b) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$
 c) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$
 d) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$

Odp.: Wskazówka: Przeanalizuj przykład 9 ze s. 228.

◀1.19. Oblicz sinus i cosinus kąta ostrego α , który prosta KL tworzy z osią x .

- a) $K = (0, 0)$, $L = (1, 2)$
 b) $K = (0, -1)$, $L = (3, 2)$
 c) $K = (3, 0)$, $L = (1, -3)$
 d) $K = (5, 0)$, $L = (0, -2\sqrt{6})$

Odp.: a) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

d) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$, $\cos \alpha = \frac{5}{7}$

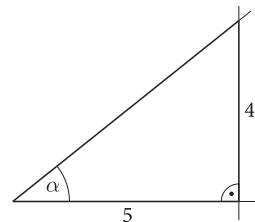
Przykład 9 ◀ zad. 1.16

Dana jest wartość jednej z funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α . Skonstruujemy ten kąt.

Rozwiązanie

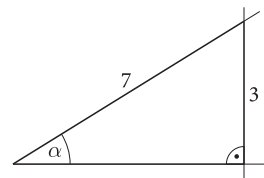
a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}$

Szukany kąt możemy traktować jak jeden z kątów ostrych w trójkącie prostokątnym. Konstruujemy więc taki trójkąt, w którym przyprostokątna leżąca naprzeciwko kąta α ma 4 jednostki, a przyprostokątna przyległa do tego kąta – 5 jednostek.



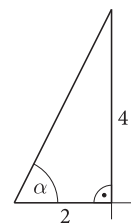
b) $\sin \alpha = \frac{3}{7}$

α jest kątem ostrym w trójkącie prostokątnym, w którym przyprostokątna leżąca naprzeciwko kąta α ma 3 jednostki, a przeciwprostokątna 7 jednostek. Konstruujemy zatem dwie proste prostopadłe. Na jednej odmierzymy przyprostokątną o długości 3 jednostek i z końcowego jej punktu prowadzimy okrąg o promieniu równym 7 jednostek do przecięcia z drugą.



c) $\operatorname{tg} \alpha = 2$

α jest kątem ostrym w trójkącie prostokątnym, w którym przyprostokątna leżąca naprzeciwko kąta α ma 2 jednostki, a przyprostokątna przyległa do tego kąta – 1 jednostkę. Konstruujemy więc taki trójkąt, w którym stosunek odpowiednich przyprostokątnych wynosi 2 (możemy przy tym skorzystać np. z równości $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2}$).



Przykład 10 ◀ zad. 1.19

Prosta przechodząca przez punkty $P = (1, 2)$ i $M = (3, 8)$ tworzy z osią x kąt ostry α . Wyznaczymy ten kąt.

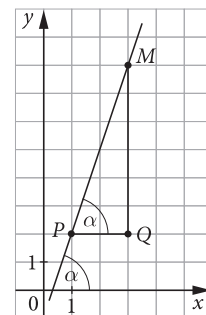
Rozwiązanie

Rysujemy pomocniczy trójkąt prostokątny PQM , w którym $\angle MPQ = \alpha$. Punkt $Q = (3, 2)$, zatem w trójkącie PQM długości przyprostokątnych wynoszą $|PQ| = 2$ i $|QM| = 6$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|QM|}{|PQ|} = 3$$

Z tablic odczytujemy miarę szukanego kąta.

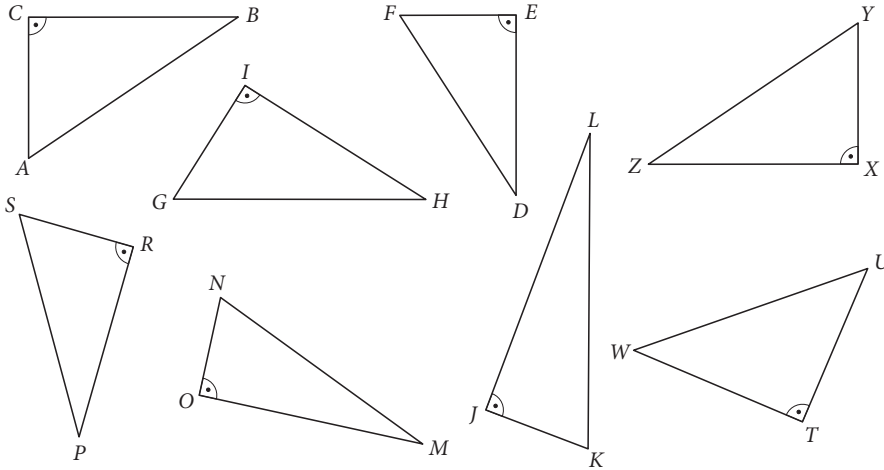
Odp.: $\alpha \approx 72^\circ$



Zadania

1.1. Na podstawie rysunku możemy zapisać, że np. $\sin \sphericalangle B = \frac{|AC|}{|AB|}$.

Stosujemy uproszczony zapis kątów wewnętrznych trójkąta o podanych wierzchołkach. Na przykład w trójkącie ABC zamiast $\sphericalangle BAC$ piszemy krótko $\sphericalangle A$, w trójkącie MPR zamiast $\sphericalangle MRP$ piszemy $\sphericalangle R$ itd.



Zapisz podobnie

- a) $\tg \sphericalangle A$, $\cos \sphericalangle B$. c) $\cos \sphericalangle K$, $\tg \sphericalangle H$. e) $\tg \sphericalangle P$, $\cos \sphericalangle W$.
b) $\sin \sphericalangle G$, $\sin \sphericalangle F$. d) $\sin \sphericalangle N$, $\cos \sphericalangle M$. f) $\tg \sphericalangle Z$, $\sin \sphericalangle Y$.

1.2. Na podstawie poprzedniego zadania zapisz każdy z podanych ułamków jako funkcję trygonometryczną wybranego kąta ostrego.

$$\frac{|BC|}{|AB|}, \frac{|FE|}{|FD|}, \frac{|IH|}{|GH|}, \frac{|JK|}{|JL|}, \frac{|OM|}{|ON|}, \frac{|RS|}{|PS|}, \frac{|WT|}{|WU|}, \frac{|XY|}{|YZ|}$$

1.3. Odczytaj z tablic wartości podanych funkcji trygonometrycznych.

- a) $\sin 15^\circ$, $\sin 32^\circ$, $\cos 18^\circ$ c) $\sin 72^\circ$, $\sin 81^\circ$, $\cos 79^\circ$
b) $\cos 37^\circ$, $\cos 41^\circ$, $\sin 52^\circ$ d) $\tg 17^\circ$, $\tg 81^\circ$, $\tg 63^\circ$, $\tg 22^\circ$

1.4. Dana jest wartość $\sin \alpha$. Odczytaj z tablic miarę kąta α z dokładnością do 1° .

- a) 0,4555 b) 0,7349 c) 0,8415 d) 0,9291

1.5. Dana jest wartość $\cos \alpha$. Odczytaj z tablic miarę kąta α z dokładnością do 1° .

- a) 0,2079 b) 0,3584 c) 0,5299 d) 0,9205

1.6. Dana jest wartość $\tg \alpha$. Odczytaj z tablic miarę kąta α z dokładnością do 1° .

- a) 0,141 b) 0,249 c) 4,705 d) 57,290

Odpowiedzi i rozwiązania

1.1. a) $\tg \sphericalangle A = \frac{|BC|}{|AC|}$,

$\cos \sphericalangle B = \frac{|BC|}{|AB|}$

b) $\sin \sphericalangle G = \frac{|HI|}{|GH|}$, $\sin \sphericalangle F = \frac{|DE|}{|DF|}$

c) $\cos \sphericalangle K = \frac{|KJ|}{|KL|}$, $\tg \sphericalangle H = \frac{|GI|}{|HI|}$

d) $\sin \sphericalangle N = \frac{|OM|}{|NM|}$,

$\cos \sphericalangle M = \frac{|OM|}{|NM|}$

e) $\tg \sphericalangle P = \frac{|SR|}{|RP|}$, $\cos \sphericalangle W = \frac{|WT|}{|WU|}$

f) $\tg \sphericalangle Z = \frac{|XY|}{|ZX|}$, $\sin \sphericalangle Y = \frac{|ZX|}{|ZY|}$

1.2. $\frac{|BC|}{|AB|} = \sin \sphericalangle A = \cos \sphericalangle B$,

$\frac{|FE|}{|FD|} = \sin \sphericalangle D = \cos \sphericalangle F$,

$\frac{|IH|}{|GH|} = \sin \sphericalangle G = \cos \sphericalangle H$,

$\frac{|JK|}{|JL|} = \tg \sphericalangle L$, $\frac{|OM|}{|ON|} = \tg \sphericalangle N$,

$\frac{|RS|}{|PS|} = \sin \sphericalangle P = \cos \sphericalangle S$,

$\frac{|WT|}{|WU|} = \sin \sphericalangle U = \cos \sphericalangle W$,

$\frac{|XY|}{|YZ|} = \sin \sphericalangle Z = \cos \sphericalangle Y$

1.3. a) 0,2588, 0,5299, 0,9511

b) 0,7986, 0,7547, 0,7880

c) 0,9511, 0,9877, 0,1908

d) 0,3057, 6,3138, 1,9626, 0,4040

1.4. a) 27° **b)** 47° **c)** 57°

d) 68°

1.5. a) 78° **b)** 69° **c)** 58°

d) 23°

1.6. a) 8° **b)** 14° **c)** 78° **d)** 89°

1.7. a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ c) $13 - 4\sqrt{3}$
d) 3

1.8. a) $\alpha = 30^\circ$
b) $\alpha = 30^\circ$
c) $\alpha = 45^\circ$

1.9. a) 48° b) 46° c) 24°
d) 53° e) 32° f) 88°

1.10. a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$
b) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos \alpha = \frac{1}{3}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$
c) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$
d) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = 2$

1.11. a) $\sin \sphericalangle A = \frac{3}{5}$, $\cos \sphericalangle A = \frac{4}{5}$,
 $\operatorname{tg} \sphericalangle A = \frac{3}{4}$
b) $\sin \sphericalangle A = \cos \sphericalangle A = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $\operatorname{tg} \sphericalangle A = 1$
c) $\sin \sphericalangle A = \frac{1}{3}$, $\cos \sphericalangle A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,
 $\operatorname{tg} \sphericalangle A = \frac{\sqrt{2}}{4}$
d) $\sin \sphericalangle A = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \sphericalangle A = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
 $\operatorname{tg} \sphericalangle A = 2$
e) $\sin \sphericalangle A = \frac{15}{17}$, $\cos \sphericalangle A = \frac{8}{17}$,
 $\operatorname{tg} \sphericalangle A = \frac{15}{8}$
f) $\sin \sphericalangle A = \frac{6}{7}$, $\cos \sphericalangle A = \frac{\sqrt{13}}{7}$,
 $\operatorname{tg} \sphericalangle A = \frac{6\sqrt{13}}{13}$

1.7. Oblicz dokładną wartość wyrażenia. Zapis $\sin^2 \alpha$ oznacza $(\sin \alpha)^2$.

a) $2 \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ - 2 \operatorname{tg} 45^\circ$ c) $\left(\frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\cos 60^\circ} - \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} \right)^2$
b) $\frac{\sin^2 45^\circ + \cos 60^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}$ d) $\frac{\sin 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ + \cos 30^\circ}{\operatorname{tg} 30^\circ}$

1.8. Wyznacz kąt ostry α , dla którego zachodzi podana równość.

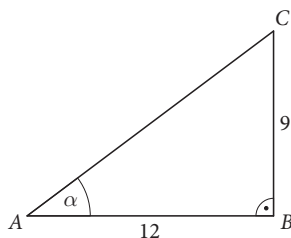
a) $3 \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ b) $1 + \cos \alpha = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{1}{3}(3 + \operatorname{tg} \alpha) = 1\frac{1}{3}$

1.9. W trójkącie prostokątnym ABC , w którym kąt C jest prosty, dane są długości dwóch boków. Odczytaj z tablic przybliżoną (z dokładnością do 1°) miarę kąta A .

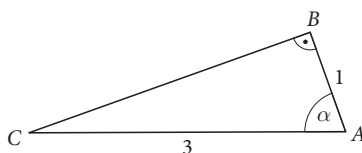
a) $|AC| = 2$, $|AB| = 3$ d) $|AC| = 6$, $|AB| = 10$
b) $|BC| = 5$, $|AB| = 7$ e) $|BC| = 2,5$, $|AB| = 4,7$
c) $|AC| = 9$, $|BC| = 4$ f) $|AC| = 0,3$, $|BC| = 8,6$

1.10. Na podstawie informacji podanych na rysunku wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α .

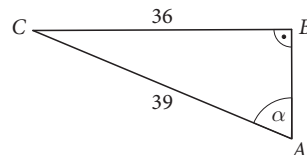
a)



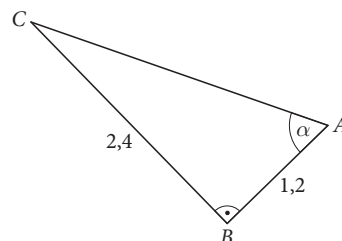
b)



c)



d)



1.11. W trójkącie prostokątnym ABC , w którym kąt C jest prosty, dane są długości dwóch boków. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta A .

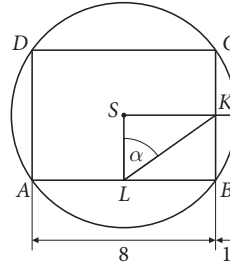
a) $|AC| = 4$, $|AB| = 5$ d) $|BC| = 10$, $|AB| = 5\sqrt{5}$
b) $|AC| = |BC| = 7$ e) $|BC| = 15$, $|AC| = 8$
c) $|AC| = 2\sqrt{2}$, $|AB| = 3$ f) $|BC| = 6$, $|AB| = 7$

1.12. Wyznacz boki (wyniki zaokrąglaj do pierwszego miejsca po przecinku) i kąty trójkąta prostokątnego ABC , w którym kąt C jest prosty oraz

- a) $\sphericalangle A = 48^\circ$, $|AC| = 11$. d) $\sphericalangle B = 19^\circ$, $|AB| = 6,8$.
 b) $\sphericalangle B = 52^\circ$, $|AC| = 18$. e) $\sphericalangle A = \frac{2}{3} \sphericalangle B$, $|AB| = 44$.
 c) $\sphericalangle A = 27^\circ$, $|BC| = 12$. f) $\sphericalangle B - \sphericalangle A = 40^\circ$, $|BC| = 7$.

1.13. W trójkącie ABC , w którym $|AC| = 10$, $|AB| = |BC| = 13$, poprowadzono wysokość BD . Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta CBD .

- * **1.14.** Wszystkie wierzchołki prostokąta $ABCD$ leżą na okręgu o środku S (zob. rysunek). Bok KS trójkąta KLS jest równoległy do AB , a bok LS tego trójkąta jest równoległy do AD . Skorzystaj z danych na rysunku i oblicz $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$.



1.15. W prostokącie $ABCD$, w którym stosunek boków $|AB| : |BC| = 2 : 3$, poprowadzono przekątną AC . Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kątów CAB i CAD .

1.16. Dana jest wartość jednej z funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α . Skonstruuj ten kąt.

- a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ b) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ c) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ d) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$

1.17. Oblicz tangens kąta ostrego α , który prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych i punkt M tworzy z osią x .

- a) $M = (2, 1)$ b) $M = (5, 3)$ c) $M = (\sqrt{2}, 1)$ d) $M = (2\sqrt{3}, \sqrt{3})$

1.18. Oblicz sinus i cosinus kąta α , którego jedno ramię pokrywa się z dodatnią półosią osi x , a drugie przechodzi przez punkt A .

- a) $A = (1, 3)$ b) $A = (12, 5)$ c) $A = (\sqrt{5}, 2)$ d) $A = (2\sqrt{2}, 1)$

1.19. Oblicz sinus i cosinus kąta ostrego α , który prosta KL tworzy z osią x .

- a) $K = (0, 0)$, $L = (1, 2)$ c) $K = (3, 0)$, $L = (1, -3)$
 b) $K = (0, -1)$, $L = (3, 2)$ d) $K = (5, 0)$, $L = (0, -2\sqrt{6})$

1.20. Wyznacz miarę kąta ostrego (z dokładnością do 1°), który prosta PQ tworzy z osią x .

- a) $P = (6, 2)$, $Q = (3, -1)$ c) $P = (3, -2)$, $Q = (6, 5)$
 b) $P = (-1, 1)$, $Q = (2, 2)$ d) $P = (-2, -3)$, $Q = (2, -1)$

1.14. Z rysunku odczytujemy, że promień okręgu jest równy 5, zatem $|KL| = 5$, $|KS| = 4$, $|LS| = 3$.

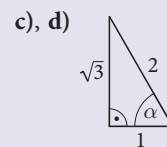
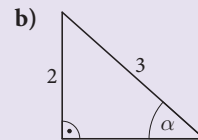
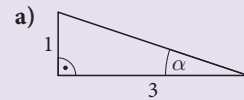
Stąd $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, więc $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{0,8 + 0,6}{0,8 - 0,6} = \frac{1,4}{0,2} = 7$.

- 1.12. a)** $\sphericalangle B = 42^\circ$, $|AB| = 16,4$, $|BC| = 12,2$
b) $\sphericalangle A = 38^\circ$, $|AB| = 22,8$, $|BC| = 14,1$
c) $\sphericalangle B = 63^\circ$, $|AB| = 26,4$, $|AC| = 23,6$
d) $\sphericalangle A = 71^\circ$, $|BC| = 6,4$, $|AC| = 2,2$
e) $\sphericalangle A = 36^\circ$, $\sphericalangle B = 54^\circ$, $|AC| = 35,6$, $|BC| = 25,9$
f) $\sphericalangle A = 25^\circ$, $\sphericalangle B = 65^\circ$, $|AC| = 15,0$, $|AB| = 16,6$

1.13. $\sin \sphericalangle CBD = \frac{5}{13}$,
 $\cos \sphericalangle CBD = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} \sphericalangle CBD = \frac{5}{12}$

1.15. $\sin \sphericalangle CAB = \cos \sphericalangle CAD = \frac{3\sqrt{13}}{13}$,
 $\operatorname{tg} \sphericalangle CAB = \frac{3}{2}$,
 $\cos \sphericalangle CAB = \sin \sphericalangle CAD = \frac{2\sqrt{13}}{13}$,
 $\operatorname{tg} \sphericalangle CAD = \frac{2}{3}$

1.16. Wskazówka: Przeanalizuj przykład 9 ze s. 228.



1.17. a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{3}{5}$ **c)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **d)** $\frac{1}{2}$

1.18. a) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$

b) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\cos \alpha = \frac{12}{13}$

c) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

d) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

1.19. a) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

d) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$, $\cos \alpha = \frac{5}{7}$

1.20. a) 45° **b)** 18° **c)** 67° **d)** 27°

- * 1.21. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o przeciwprostokątnej AB , w którym $|AC| = 24$, $|BC| = 10$. Niech $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$. Oblicz wartość wyrażenia

$$\frac{\sin \alpha + \cos \beta}{5} - \frac{1}{6} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} + \sqrt{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \beta \cdot \cos \alpha}}.$$

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

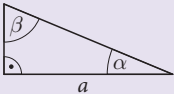
Prosto do matury

1. B

2. C

3. C

4. P, F, P

5. 

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta &= 0,6 + \frac{1}{0,6} = \frac{3}{5} + \frac{5}{3} = \\ &= \frac{9 + 25}{15} = \frac{34}{15} \end{aligned}$$

6. $1 \frac{12}{13}$

7. $\sin \sphericalangle A = \frac{4}{5}$, $\cos \sphericalangle A = \frac{3}{5}$,
 $\operatorname{tg} \sphericalangle A = \frac{4}{3}$

1. Wartość wyrażenia $\frac{4 \sin 30^\circ + 2 \operatorname{tg} 45^\circ}{\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ}$ jest równa

- A. 1. B. $1 \frac{1}{3}$. C. $\sqrt{3}$. D. 2.

2. Kąt α jest ostry i $\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \alpha = 1$. Jaką miarę ma kąt α ?

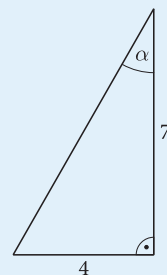
- A. 60° B. 45° C. 30° D. 15°

3. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 8 cm, a tangens kąta przyległego do niej jest równy $\frac{3}{4}$. Jaką długość ma przeciwprostokątna w tym trójkącie?

- A. 13 cm B. 12 cm C. 10 cm D. $10\sqrt{2}$ cm

4. Dany jest trójkąt prostokątny jak na rysunku obok. Oceń prawdziwość podanych zdań.

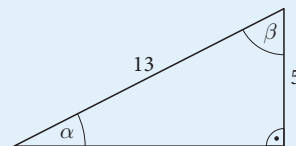
- A. $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{65}}$ B. $\cos \alpha = \frac{7}{4}$ C. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{7}$



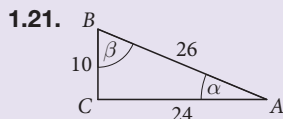
D

5. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych stanowi 60% drugiej. Wykaż, że suma tangensów kątów ostrych tego trójkąta wynosi $\frac{34}{15}$.

6. Na podstawie informacji podanych na rysunku oblicz wartość wyrażenia $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \cos \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$.



7. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta A w trójkącie ABC , którego wierzchołkami są punkty $A = (2, 3)$, $B = (5, 3)$, $C = (5, 7)$.



$$\begin{aligned} |AB| &= 26 \\ \sin \alpha &= \frac{5}{13}, \quad \cos \alpha = \frac{12}{13} \\ \sin \beta &= \frac{12}{13}, \quad \cos \beta = \frac{5}{13} \end{aligned}$$

$$\frac{\sin \alpha + \cos \beta}{5} - \frac{1}{6} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} + \sqrt{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \beta \cdot \cos \alpha}} = \frac{2}{13} - \frac{1}{6} \cdot \frac{12}{13} + \frac{5}{13} : \frac{12}{13} = \frac{2}{13} - \frac{2}{13} + \frac{5}{12} = \frac{5}{12}$$

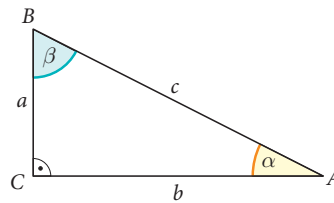
2. Związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego

Umiejętności:

- stosowanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi
- wyznaczanie wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych, jeśli znana jest wartość jednej z funkcji

Skorzystamy ze znanych związków między kątami i bokami w trójkącie prostokątnym. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Wówczas:

- $\sphericalangle C = 90^\circ$
- $\beta = 90^\circ - \alpha$
- $\alpha = 90^\circ - \beta$
- $a^2 + b^2 = c^2$ (twierdzenie Pitagorasa)
- $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$
- $\sin \beta = \frac{b}{c}$, $\cos \beta = \frac{a}{c}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$



Ponieważ $a^2 + b^2 = c^2$, prawdziwe są nierówności:

$$\begin{aligned}
 0 < a < c \text{ oraz } 0 < b < c & \leftarrow \text{przyprostokątna jest krótsza od przeciwprostokątnej} \\
 0 < \frac{a}{c} < 1 \text{ oraz } 0 < \frac{b}{c} < 1 & \leftarrow \text{po podzieleniu poprzednich nierówności stronami przez } c \\
 0 < \sin \alpha < 1 \text{ oraz } 0 < \cos \alpha < 1 & \leftarrow \text{z definicji: } \frac{a}{c} = \sin \alpha, \frac{b}{c} = \cos \alpha
 \end{aligned}$$

Wniosek

Dla każdego kąta ostrego α prawdziwe są następujące nierówności:

$$0 < \sin \alpha < 1$$

$$0 < \cos \alpha < 1$$

Tangens kąta ostrego jest ilorazem długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, zatem funkcja tangens przyjmuje wartości dodatnie. Ponadto **każda** liczba dodatnia jest tangensem pewnego kąta ostrego: jeśli $a > 0$, to a jest tangensem odpowiedniego kąta ostrego np. w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 1 i a .

ZZ i KPU

temat 4.5

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.2

Generator
testów i sprawdzianów

◀2.2. Sprawdź, czy istnieje kąt ostry α spełniający podany warunek.

a) $\cos \alpha = 7 - 11 \cos \alpha$

b) $5 + 2 \sin \alpha = 4$

c) $\sqrt{7} - 2 \sin \alpha + 3 = 9 \sin \alpha$

d) $4 + \sqrt{3} \cos \alpha = (7 + \sqrt{3}) \cos \alpha$

Odp.: Wskazówka: Oblicz wartość danej funkcji trygonometrycznej i oszacuj, czy jest dodatnia i mniejsza od 1.

a) tak b) nie c) tak d) tak

Z kolei jeśli a jest liczbą spełniającą warunek $0 < a < 1$, to istnieje trójkąt prostokątny o jednej przyprostokątnej długości a i przeciwprostokątnej długości 1. Sinus odpowiedniego kąta ostrego w tym trójkącie jest równy a . Podobnie jest dla cosinusa.

Podsumujmy:

- zbiorem wartości funkcji tangens jest przedział $(0; \infty)$,
- zbiorem wartości funkcji sinus oraz cosinus jest przedział $(0; 1)$.

Przykład 1 ◀ zad. 2.2

Sprawdźmy, czy istnieje taki kąt ostry α , dla którego

a) $3 \cos \alpha - 5 = \cos \alpha - \sqrt{3}$.

b) $3 \sin \alpha = \sqrt{2} - 2 \sin \alpha$.

Rozwiązanie

a) $3 \cos \alpha - 5 = \cos \alpha - \sqrt{3}$

$$3 \cos \alpha - \cos \alpha = 5 - \sqrt{3}$$

$$2 \cos \alpha = 5 - \sqrt{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{5 - \sqrt{3}}{2}$$

Odp.: $\frac{5 - \sqrt{3}}{2} > 1$, więc nie istnieje kąt α spełniający podany warunek.

b) $3 \sin \alpha = \sqrt{2} - 2 \sin \alpha$

$$5 \sin \alpha = \sqrt{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

Odp.: $\frac{\sqrt{2}}{5} < 1$, zatem istnieje kąt α spełniający podany warunek. Możemy taki kąt skonstruować jako jeden z kątów ostrych w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnej długości $\sqrt{2}$ i przeciwprostokątnej długości 5.

Zauważmy, że:

- $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta = \cos(90^\circ - \alpha)$
- $\cos \alpha = \frac{b}{c} = \sin \beta = \sin(90^\circ - \alpha)$

Wniosek

Jeżeli α jest kątem ostrym, to prawdziwe są następujące równości:

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

Przykład 2a) $\sin 40^\circ \approx 0,6428$, zatem $\cos 50^\circ = \cos(90^\circ - 40^\circ) \approx 0,6428$ b) $\cos 12^\circ \approx 0,9781$, zatem $\sin 78^\circ = \sin(90^\circ - 12^\circ) \approx 0,9781$ Skoro $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ i $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, to:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$$

WniosekJeżeli α jest kątem ostrym, to prawdziwa jest następująca równość:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Przykład 3 ◀ zad. 2.3Uprościmy wyrażenie $\frac{\cos \alpha + 3 \sin \alpha}{\cos \alpha} - 3 \operatorname{tg} \alpha$.**Rozwiązanie**

$$\frac{\cos \alpha + 3 \sin \alpha}{\cos \alpha} - 3 \operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} + \frac{3 \sin \alpha}{\cos \alpha} - 3 \operatorname{tg} \alpha = 1 + 3 \operatorname{tg} \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha = 1$$

Ważny związek między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta wyraża twierdzenie nazywane **jedynką trygonometryczną**.**Twierdzenie**Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwa jest równość:

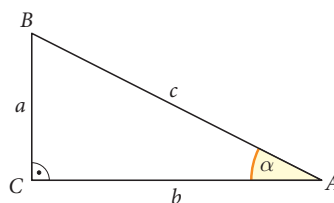
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

DowódRozważamy trójkąt prostokątny ABC o jednym z kątów ostrych α . Przyjmujemy takie same oznaczenia jak na początku tego tematu. Wówczas:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Zatem:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1 \quad \leftarrow a^2 + b^2 = c^2$$

Koniec dowodu**◀2.3.** Kąt α jest ostry. Uprość wyrażenie.a) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha - \cos(90^\circ - \alpha)$ b) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)}$

Odp.: a) 0 b) 1

◀2.4. Oblicz wartość wyrażenia bez korzystania z tablic i kalkulatora.

a) $\frac{\sin^2 73^\circ + \cos^2 73^\circ - 3}{\sin^2 26^\circ + \cos^2 26^\circ - 2}$

b) $\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ$

c) $\cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ$

d) $2 \sin 10^\circ \cos 80^\circ + 2 \sin 80^\circ \cos 10^\circ$

e) $-\sin 44^\circ \cos 46^\circ - \sin 46^\circ \cos 44^\circ$

f) $\lg 44^\circ \cdot \lg 45^\circ \cdot \lg 46^\circ$

Odp.: a) 2 b) 1 c) 1 d) 2

e) -1 f) 1

◀2.8. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α .

a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$

b) $\cos \alpha = \frac{2}{5}$

c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$

d) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Odp.: a) $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$

c) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{14}}{7}$

d) $\sin \alpha = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Przykład 4 ◀ zad. 2.4

Obliczmy wartość podanego wyrażenia.

a) $\sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ = \sin^2 35^\circ + \sin^2 (90^\circ - 35^\circ) = \sin^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ = 1$

b) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 =$
 $= \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 2$

Przykład 5 ◀ zad. 2.8

Dany jest kąt ostry α taki, że $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Wyznaczmy wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta.

Rozwiązanie

I sposób

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{9}{25} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

← funkcje trygonometryczne kąta ostrego przyjmują tylko wartości dodatnie

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$$

← $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

Jeżeli $p > 0$, to równanie $x^2 = p$ ma dwa rozwiązania: $x = \sqrt{p}$ lub $x = -\sqrt{p}$.

II sposób

Stosujemy oznaczenia jak na rysunku.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \text{ i } \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

Możemy przyjąć, że przypostrókatna przeciwległa do kąta α ma długość $a = 3$, a przeciwprostokątna ma długość $c = 5$.

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

← twierdzenie Pitagorasa

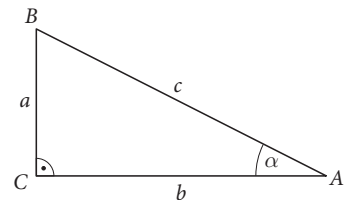
$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{4}{5}$$

← definicja cosinusa

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{3}{4}$$

← definicja tangensa

Odp.: $\cos \alpha = \frac{4}{5}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$



Zauważmy, że podanie wartości jednej funkcji trygonometrycznej kąta ostrego wyznacza trójkąt prostokątny z dokładnością do podobieństwa. Inaczej mówiąc, wszystkie trójkąty prostokątne, w których np. $\sin \alpha = p$, są podobne.

Przykład 6 ◀ zad. 2.9

Dany jest kąt ostry α taki, że $\operatorname{tg} \alpha = 3$. Wyznamy wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta.

Rozwiązanie

Przyjmujemy, że przyprostokątna przeciwległa do kąta α ma długość $a = 3$, a przyprostokątna przyległa do kąta α ma długość $b = 1$.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10} \quad \leftarrow \text{twierdzenie Pitagorasa}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \quad \leftarrow \text{definicja sinus}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \quad \leftarrow \text{definicja cosinusa}$$

$$\text{Odp.: } \sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Zadania

2.1. Kąty ostre trójkąta prostokątnego mają miary α i β . Sprawdź, czy podana zależność jest prawdziwa.

- | | |
|---|---------------------------------------|
| a) $\sin \alpha = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$ | c) $\cos \alpha - \sin \beta = 0$ |
| b) $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$ | d) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$ |

2.2. Sprawdź, czy istnieje kąt ostry α spełniający podany warunek.

- | | |
|---------------------------------------|--|
| a) $\cos \alpha = 7 - 11 \cos \alpha$ | c) $\sqrt{7} - 2 \sin \alpha + 3 = 9 \sin \alpha$ |
| b) $5 + 2 \sin \alpha = 4$ | d) $4 + \sqrt{3} \cos \alpha = (7 + \sqrt{3}) \cos \alpha$ |

2.3. Kąt α jest ostry. Uprość wyrażenie.

- | | |
|---|---|
| a) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha - \cos(90^\circ - \alpha)$ | b) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)}$ |
|---|---|

2.4. Oblicz wartość wyrażenia bez korzystania z tablic i kalkulatora.

- | | |
|--|---|
| a) $\frac{\sin^2 73^\circ + \cos^2 73^\circ - 3}{\sin^2 26^\circ + \cos^2 26^\circ - 2}$ | d) $2 \sin 10^\circ \cos 80^\circ + 2 \sin 80^\circ \cos 10^\circ$ |
| b) $\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ$ | e) $-\sin 44^\circ \cos 46^\circ - \sin 46^\circ \cos 44^\circ$ |
| c) $\cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ$ | f) $\operatorname{tg} 44^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$ |

◀ 2.9. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α .

- a) $\operatorname{tg} \alpha = 3$
 b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}$
 c) $\operatorname{tg} \alpha = 50$
 d) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$

$$\text{Odp.: a) } \sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{b) } \sin \alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}, \cos \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

$$\text{c) } \sin \alpha = \frac{50\sqrt{2501}}{2501}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{2501}}{2501}$$

$$\text{d) } \sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Odpowiedzi i rozwiązania

2.1. a) Tak. *Wskazówka:*

Przedstaw $\operatorname{tg} \alpha$ za pomocą $\sin \alpha$, $\cos \alpha$.

b) Nie. *Wskazówka:* Podnieś równość obustronnie do kwadratu.

c), d) Tak. *Wskazówka:* Zauważ, że $\beta = 90^\circ - \alpha$.

2.2. *Wskazówka:* Oblicz wartość danej funkcji trygonometrycznej i oszacuj, czy jest dodatnia i mniejsza od 1.

a) tak **b)** nie **c)** tak **d)** tak

2.3. a) 0 **b)** 1

2.4. a) 2 **b)** 1 **c)** 1 **d)** 2
e) -1 **f)** 1



2.5. $2\frac{1}{2}$

2.6. a) -1 b) 0 c) -4 d) 0

2.7. a) $4\sin\alpha \cos\alpha$
b) $\cos^2\alpha$ c) 1 d) 1

2.8. a) $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$

c) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{14}}{7}$

d) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2.9. a) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$

b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $\cos\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$

c) $\sin\alpha = \frac{50\sqrt{2501}}{2501}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2501}}{2501}$

d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2.10. $\frac{4\sqrt{7}}{3}$

2.11. $\frac{2\sqrt{5}}{9}$

2.12. $\frac{23}{25}$

2.13. $\frac{1}{3}$

2.14. $\frac{1}{8}$

2.15. $\frac{20}{41}$

2.5. Oblicz $\frac{(\sin^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ)^2 - \sin^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ}{\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ}$.

Nie korzystaj z tablic trygonometrycznych.

2.6. Kąt α jest ostry. Uprość wyrażenie.

a) $\sin^2\alpha - 2 + \cos^2\alpha$

b) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha$

c) $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) \cdot \cos^2\alpha - 5$

d) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) - \sin^2\alpha$

2.7. Kąt α jest ostry. Uprość wyrażenie.

a) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$

b) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$

c) $\frac{\sin\alpha + 3\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{3}{\operatorname{tg}\alpha}$

d) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha$

2.8. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α .

a) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$

b) $\cos\alpha = \frac{2}{5}$

c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$

d) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2.9. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α .

a) $\operatorname{tg}\alpha = 3$

b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$

c) $\operatorname{tg}\alpha = 50$

d) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$

2.10. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Oblicz wartość wyrażenia $\operatorname{tg}\alpha + \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}$.

Nie korzystaj z tablic trygonometrycznych.

2.11. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Nie korzystaj z tablic trygonometrycznych.

2.12. Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{1}{5}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$.

Nie korzystaj z tablic trygonometrycznych.

2.13. Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\cos\alpha - 2\sin\alpha}{2\cos\alpha + \sin\alpha}$.

Nie korzystaj z tablic trygonometrycznych.

2.14. Kąt α jest ostry i $\left(\frac{3}{\sin\alpha}\right)^2 + \left(\frac{3}{\cos\alpha}\right)^2 = 36$. Oblicz wartość wyrażenia

$\frac{1}{4}\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

2.15. Kąt α jest ostry i $7 - 5\operatorname{tg}\alpha = 3$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

* **2.16.** W trójkącie prostokątnym stosunek cosinusa kąta ostrego α do tangensa kąta ostrego β jest równy $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Wyznacz miary kątów α i β z dokładnością do 1° .

* **2.17.** Kąty ostre α i β trójkąta prostokątnego spełniają warunek $\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość $12\sqrt{3}$. Wyznacz długości przyprostokątnych i miary kątów α i β tego trójkąta.

D **2.18.** Wykaż, że nie istnieje kąt ostry α taki, że $\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} + \cos \alpha = 3$.

D * **2.19.** Wykaż, że odwrotność sumy tangensów kątów ostrych w trójkącie prostokątnym jest równa iloczynowi sinusów tych kątów.

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytach.

1. Jaką wartość ma wyrażenie $\frac{\sin 17^\circ}{\cos 73^\circ} + \frac{\cos 37^\circ}{\sin 53^\circ}$?

A. 1 B. 0 C. ok. 1,27 D. 2

2. Ile jest równa liczba $\sin 20^\circ \cos 70^\circ + \sin 70^\circ \cos 20^\circ$?

A. 90 B. 0,5 C. 1 D. 0

3. Wiadomo, że $\sin \alpha = \cos 27^\circ$ i α jest kątem ostrym. Jaką miarę ma kąt α ?

A. 27° B. 33° C. 153° D. 63°

4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

W trójkącie prostokątnym kąty φ i δ są ostre oraz $\varphi > \delta$. Wynika stąd, że

A. $\sin \varphi < \sin \delta$. B. $\sin \varphi < \cos \delta$. C. $\cos \varphi < \cos \delta$.

5. Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$. Wyznacz $\cos \alpha$.

D 6. W pewnym trójkącie prostokątnym iloczyn sinusów kątów ostrych jest równy $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Wykaż, że iloczyn odwrotności cosinusów kątów ostrych tego trójkąta jest równy $\sqrt{3}+1$.

7. Kąt α jest ostry i $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sqrt{2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha}$.

2.18. Założenie: $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$

Teza: $\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} + \cos \alpha \neq 3$

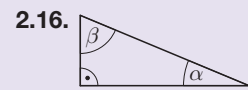
Dowód: $\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} + \cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} + \cos \alpha = \sin \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \cos \alpha = 2 \cdot \cos \alpha$

$\cos \alpha \in (0; 1) \Leftrightarrow 2 \cdot \cos \alpha \in (0; 2)$. Zatem nie istnieje kąt α taki, że $\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} + \cos \alpha = 3$.

2.19. Założenie: $\alpha + \beta = 90^\circ$; $\alpha, \beta \in (0^\circ, 90^\circ)$

Teza: $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \sin \alpha \cdot \sin \beta$

Dowód: $L = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \right)^{-1} = \left(\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \right)^{-1} =$
 $= \left(\frac{\sin \alpha \sin \alpha + \cos \alpha \cos \alpha}{\sin \beta \sin \alpha} \right)^{-1} = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta} = \sin \alpha \sin \beta = P$



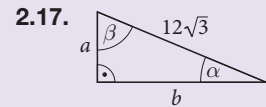
$$\frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{\sin \beta}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = 55^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ - \beta = 35^\circ$$

Odpo.: $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 55^\circ$



$$\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos \beta \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \beta = 60^\circ \\ \alpha = 30^\circ \end{cases}$$

zatem $a = 6\sqrt{3}$, $b = a\sqrt{3} = 18$

Odpo.: Przyprostokątne mają długości $6\sqrt{3}$ i 18, kąty trójkąta mają miary $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

Prosto do matury

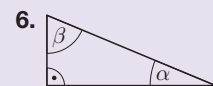
1. D

2. C

3. D

4. F, F, P

5. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$



Założenie: $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Teza: $\frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \beta} = \sqrt{3}+1$

Dowód:

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos \beta \cdot \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos \beta \cdot \cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2-1^2} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1$$

7. $\frac{3\sqrt{2}}{20}$

Uwagi metodyczne

Zanim przejdziemy do zadań dotyczących zastosowania funkcji trygonometrycznych do wyznaczania obwodów i pól figur płaskich, warto przypomnieć wzory na pola i obwody figur.

3. Warto powtórzyć – pola i obwody figur

Zamiana jednostek pola.

$$1 \text{ cm}^2 = 10 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm} = 100 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2 = 10\,000 \text{ mm}^2 = 10^4 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2 = 10^4 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ km}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2 = 100\,000\,000 \text{ dm}^2 = 10^8 \text{ dm}^2$$

1 ar zapisujemy 1 a, jest to pole kwadratu o boku 10 m.

$$1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2$$

1 hektar zapisujemy 1 ha, jest to pole kwadratu o boku 100 m.

$$1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2$$

W tym podręczniku pole figury oznaczamy literą P , a obwód figury skrótem *obw*.

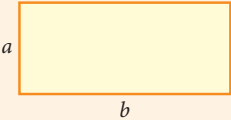
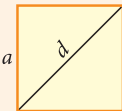
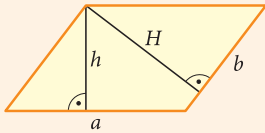
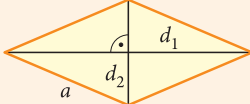
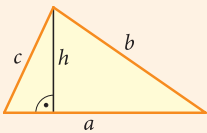
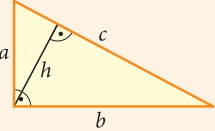
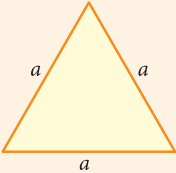
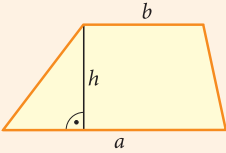
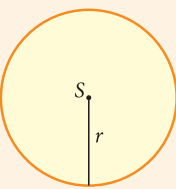
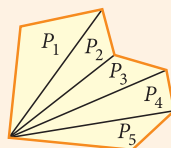
Figura	Oznaczenia	Pole	Obwód
prostokąt 	a, b – boki prostokąta	$P = ab$	$obw = 2a + 2b$
kwadrat 	a – bok kwadratu d – przekątna kwadratu	$P = a^2$ $P = \frac{1}{2}d^2$	$obw = 4a$
równoległobok 	a, b – boki nierównoległe równoległoboku h, H – wysokości równoległoboku wychodzące z jednego wierzchołka	$P = ah$ $P = bH$	$obw = 2a + 2b$
romb 	a – bok rombu d_1, d_2 – przekątne rombu	$P = \frac{1}{2}d_1d_2$	$obw = 4a$

Figura	Oznaczenia	Pole	Obwód
trójkąt 	a, b, c – boki trójkąta h – wysokość trójkąta opuszczona na bok a	$P = \frac{1}{2}ah$	$obw = a + b + c$
trójkąt prostokątny 	a, b – przyprostokątne trójkąta c – przeciwprostokątna trójkąta h – wysokość trójkąta opuszczona z wierzchołka kąta prostego	$P = \frac{1}{2}ch$ $P = \frac{1}{2}ab$	$obw = a + b + c$
trójkąt równoboczny 	a – bok trójkąta	$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$obw = 3a$
trapez 	a, b – równoległe boki (podstawy) trapezu h – wysokość trapezu	$P = \frac{1}{2}(a + b)h$	
koło 	r – promień koła	$P = \pi r^2$	$obw = 2\pi r$

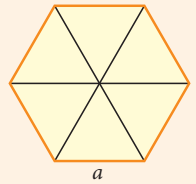
Każdy wielokąt możemy podzielić na trójkąty, które są albo rozłączne, albo mają co najwyżej wspólny odcinek. Sposobów podziału jest wiele. Pole wielokąta jest sumą pól utworzonych trójkątów.



$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$$

Z tej metody korzystamy podczas obliczania pola sześciokąta foremnego o boku a . Taki sześciokąt jest sumą sześciu trójkątów równobocznych o boku a , więc jego pole P wyraża się wzorem:

$$P = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}$$



Zauważmy, że każdy n -kąt wypukły można podzielić na $n - 2$ trójkątów. Zatem suma kątów n -kąta wypukłego jest równa $(n - 2) \cdot 180^\circ$.



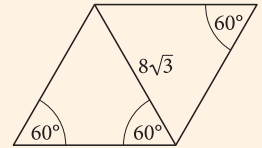
Przykład 1

Krótsza przekątna rombu ma długość $8\sqrt{3}$ cm i dzieli romb na dwa trójkąty równoboczne. Obliczmy pole tego rombu.

Rozwiązanie

Pole rombu jest sumą pól dwóch trójkątów równobocznych o bokach równych $8\sqrt{3}$ cm. Zatem:

$$P = 2 \cdot \frac{(8\sqrt{3})^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 96\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$



Odp.: Pole rombu jest równe $96\sqrt{3}$ cm².

Przykład 2

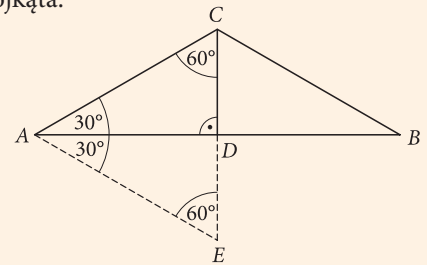
Pole trójkąta równoramiennego jest równe $3\sqrt{3}$ cm². Podstawa tworzy z ramieniem kąt 30° . Obliczmy długość podstawy tego trójkąta.

Rozwiązanie

Jeżeli odetniemy połowę trójkąta wzdłuż wysokości CD i dokleimy odciętą część do połowy AD podstawy tak jak na rysunku, to otrzymamy równoboczny trójkąt AEC o polu takim samym jak pole danego trójkąta, czyli $3\sqrt{3}$ cm². Bok a trójkąta AEC obliczymy z równania:

$$\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}, \text{ czyli } a = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

W trójkącie AEC odcinek AD jest wysokością, zatem $|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 3$ cm. Odcinek AD jest również połową szukanej podstawy, więc $|AB| = 6$ cm.



Wysokość trójkąta równobocznego o boku a jest równa $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Odp.: Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 6 cm.

Przykład 3

Obwód równoległoboku jest równy 12 cm, różnica długości sąsiednich boków wynosi 4 cm, a kąt ostry równoległoboku ma 45° . Obliczmy pole tego czworokąta.

Rozwiązanie

Jeżeli długość dłuższego boku równoległoboku oznaczmy literą x , to krótszy ma długość równą $(x - 4)$ cm, przy czym $x > 4$.

Półowa obwodu to 6 cm, zatem:

$$x + x - 4 = 6, \text{ stąd } x = 5$$

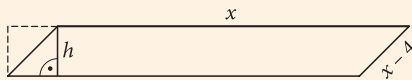
Równoległobok ma boki równe 5 cm i 1 cm.

Wysokość h poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego na dłuższy bok jest bokiem kwadratu o przekątnej 1 cm (zob. rysunek), więc:

$$h\sqrt{2} = 1, \text{ czyli } h = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$

$$P = x \cdot h = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ cm}^2$$

Odp.: Pole równoległoboku jest równe $\frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ cm}^2$.

**Zadania**

3.1. W trójkącie jeden z boków zmniejszono cztery razy. Jak należy zmienić wysokość trójkąta poprowadzoną do tego boku, aby pole nie uległo zmianie?

3.2. Przekątna kwadratu jest o 2 cm dłuższa od jego boku. Oblicz pole tego kwadratu.

3.3. Prosta poprowadzona przez wierzchołek kwadratu podzieliła go na trójkąt o polu równym 9 i trapez o polu równym 27. Oblicz obwód trapezu.

3.4. Przekątna prostokąta ma długość 6 cm i tworzy z jego bokiem kąt 60° . Oblicz obwód tego prostokąta.

3.5. Przekątne rombu mają długości 24 cm i 18 cm. Oblicz wysokość rombu.

3.6. Równoległobok ma boki o długościach 12 cm i 15 cm. Wysokość opuszczona na krótszy bok jest równa 10 cm. Oblicz wysokość opuszczoną na dłuższy bok.

Odpowiedzi i rozwiązania

3.1. Zwiększyć cztery razy.

3.2. $4(3 + 2\sqrt{2}) \text{ cm}^2$

3.3. $3(5 + \sqrt{5})$

3.4. $6(1 + \sqrt{3}) \text{ cm}$

3.5. 14,4 cm

3.6. 8 cm

3.7. $27\sqrt{3} \text{ cm}^2$

3.8. boki: $2\sqrt{3} \text{ cm}$, 6 cm , 4 cm ,
 $P = 10\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $obw = 2(7 + \sqrt{3}) \text{ cm}$

3.9. $P = 630$, $d = 25$

3.10. $18,5\pi \text{ m}^2$

3.11. największe: koło,
 najmniejsze: trójkąt

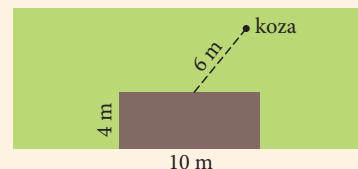
3.12. a) 39 b) 29 c) $4\frac{1}{2}\pi + 17$
 d) $34\frac{1}{2}$

3.7. Przekątne trapezu równoramiennego przecinają się pod kątem 120° i są dwusiecznymi kątów przy podstawie, a ramiona trapezu mają długość 6 cm . Oblicz pole tego czworokąta.

3.8. W trapezie prostokątnym krótsza podstawa ma długość 4 cm , a kąt rozwarty trapezu ma 120° . Dłuższa przekątna trapezu tworzy z dłuższym ramieniem kąt 30° . Oblicz długości pozostałych boków, pole i obwód trapezu.

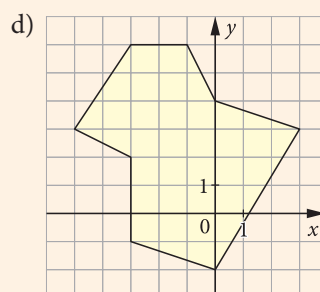
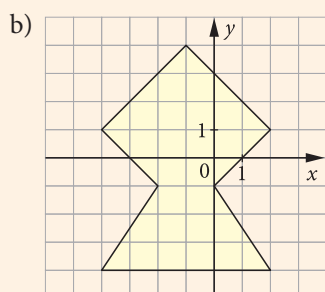
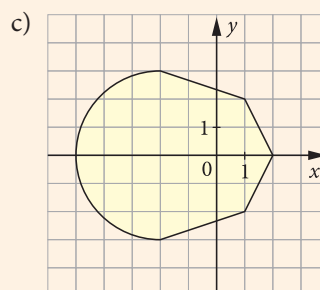
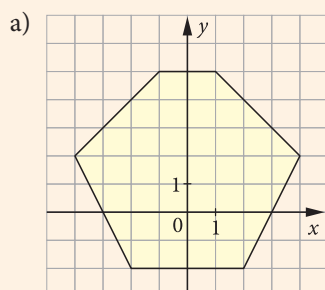
3.9. Podstawy trapezu prostokątnego mają długości 48 i 15 , a dłuższa przekątna ma długość 52 . Oblicz pole trapezu i długość d jego krótszej przekątnej.

3.10. Do środka dłuższej ściany szopy o podłodze w kształcie prostokąta $10 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ przywiązana jest koza. Sznurek, na którym jest uwiązana, ma długość 6 m (zob. rysunek). Oblicz, na jakiej powierzchni koza może się paść.

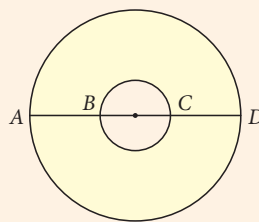


3.11. Każda z trzech figur – koło, kwadrat i trójkąt równoboczny – ma taki sam obwód, równy 10 dm . Która z tych figur ma największe pole, a która najmniejsze?

3.12. Oblicz pole zamalowanej figury.



3.13. Punkty B i C dzielą odcinek AD na trzy równe części, każda o długości 6 cm (zob. rysunek). Odcinek AD jest średnicą większego z narysowanych okręgów, a odcinek BC – średnicą mniejszego z nich. Oblicz pole zamalowanej figury.



3.14. Pole trójkąta o kątach 30° i 60° jest równe $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. Oblicz długości boków tego trójkąta.

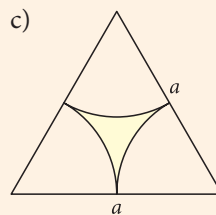
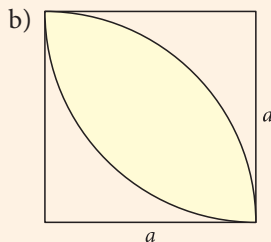
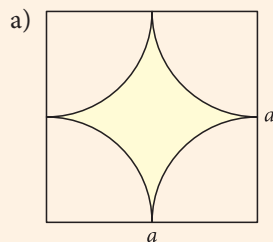
3.15. Długość jednego boku prostokąta zwiększono o 10%, a długość drugiego zmniejszono o 10%. O ile procent zmieniło się pole prostokąta?

3.16. W kole poprowadzono cięciwę długości 9 cm. Odległość prostej zawierającej tę cięciwę od środka koła jest równa 5 cm. Oblicz promień, pole i obwód koła.

* **3.17.** Oblicz pole trapezu o podstawach długości 6 i 13 oraz ramionach długości 5 i $4\sqrt{2}$.

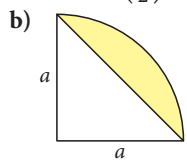
3.18. Według rzymskiej legendy, królowa fenicka Dydona uciekła ze swoimi poddanymi do Afryki. Tam kupiła od króla Jorbasa tylko tyle ziemi, ile udało się nakryć wołową skórą. Dydona pocięła skórę na wąskie paski, związała je i objęła nimi okrągłe miejsce, na którym założono potem Kartaginę. Przyjmij, że długość sznura ze związanych pasków była równa 200 m i oblicz powierzchnię tego obszaru. Zaokrąglij wynik do 1 m^2 . Przyjmij $\pi \approx 3,14$.

* **3.19.** Zamalowana figura jest ograniczona łukami okręgów o środkach w wierzchołkach danego wielokąta foremnego. Oblicz jej pole.



3.19. a) Zacięniowana figura jest różnicą kwadratu o boku a i koła o promieniu $\frac{1}{2}a$.

$$P = a^2 - \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{1}{4}\pi a^2 = \frac{1}{4}a^2(4 - \pi)$$



Pole zacięniowanej figury jest równe różnicy pól $\frac{1}{4}$ koła o promieniu a i trójkąta prostokątnego o przyprostokątnej długości a . Jest to połowa figury, której pole należy obliczyć. Zatem:

$$P = 2 \left[\frac{1}{4}\pi a^2 - \frac{1}{2}a^2 \right] = \frac{1}{2}\pi a^2 - a^2 = \frac{1}{2}a^2(\pi - 2)$$

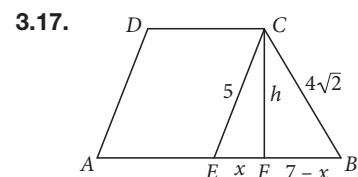
c) Pole figury $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} - \frac{1}{8}\pi a^2 = \frac{1}{8}a^2(2\sqrt{3} - \pi)$, bo figura jest różnicą trójkąta równobocznego o boku a i połowy $\left(3 \cdot \frac{1}{6}\right)$ koła o promieniu $\frac{1}{2}a$.

3.13. $72\pi \text{ cm}^2$

3.14. 3, $3\sqrt{3}$, 6

3.15. Zmniejszyło się o 1%.

3.16. promień: $\frac{\sqrt{181}}{2} \text{ cm}$,
 $P = \frac{181}{4}\pi \text{ cm}^2$, $obw = \pi\sqrt{181} \text{ cm}$



Dane: $DC \parallel AB$, $AD \parallel CE$,
 $|AD| = 5$, $|AB| = 13$, $|BC| = 4\sqrt{2}$,
 $|CD| = 6$

Czworokąt $AECD$ to równoległobok, więc boki trójkąta BCE mają długości: $|EB| = 7$,
 $|BC| = 4\sqrt{2}$, $|CE| = 5$.
Prowadzimy wysokość trapezu $h = CF$ i oznaczamy $|EF| = x$,
 $|BF| = 7 - x$.

Z twierdzenia Pitagorasa:

w trójkącie CEF : $h^2 = 25 - x^2$,

w trójkącie BCF :

$$h^2 = (4\sqrt{2})^2 - (7 - x)^2,$$

$$\text{stąd } 25 - x^2 = 32 - (7 - x)^2$$

$$25 - x^2 = 32 - 49 + 14x - x^2$$

$$14x = 42 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow h = 4$$

$$P = \frac{1}{2}(6 + 13) \cdot 4 = 38$$

Odp.: $P = 38$

3.18. 3185 m^2

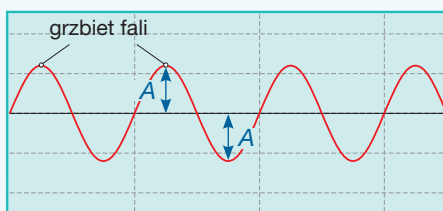
Fala sinusoidalna

Dzięki odpowiedniej aplikacji (np. phyphox) smartfon może pełnić funkcję oscyloskopu. Na ekranie telefonu widać wtedy różne krzywe, które są obrazami rejestrowanych fal dźwiękowych. W przypadku tzw. tonów czystych na ekranie zobaczymy krzywą zwaną sinusoidą.

Każdą taką sinusoidalną krzywą można opisać jako funkcję czasu wzorem: $x(t) = A \sin(2\pi ft)$, gdzie A (amplituda) i f (częstotliwość) to wielkości charakteryzujące daną falę dźwiękową.

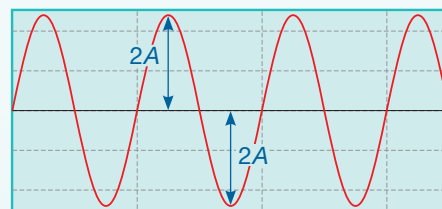
A jak amplituda

Amplituda A to maksymalna odległość od poziomej osi do grzbietu fali.



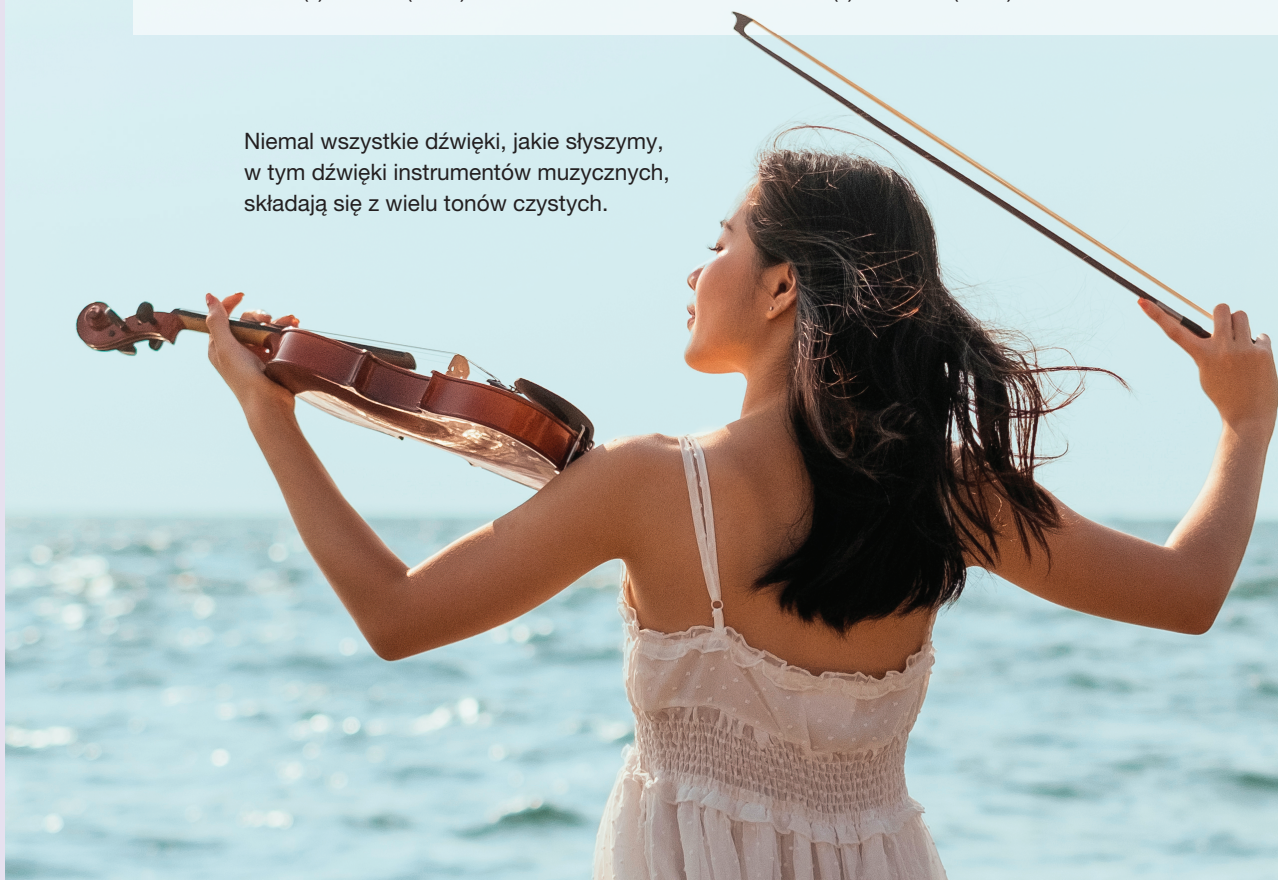
$$x(t) = A \sin(2\pi ft)$$

Jeżeli **podwoimy** amplitudę, sinusoida będzie dwukrotnie wyższa. Otrzymamy **głośniejszy dźwięk**.

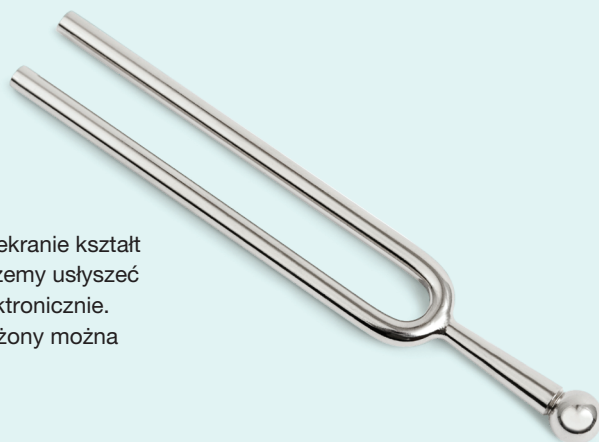


$$x(t) = 2A \sin(2\pi ft)$$

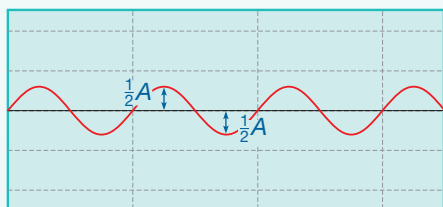
Niemal wszystkie dźwięki, jakie słyszymy, w tym dźwięki instrumentów muzycznych, składają się z wielu tonów czystych.



Nie tak łatwo zobaczyć na ekranie kształt sinusoidy. Tony czyste możemy usłyszeć w muzyce wytwarzanej elektronicznie. Dźwięk bardzo do nich zbliżony można wydobyć z kamertonu.



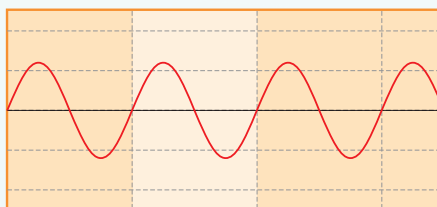
Jeżeli amplitudę **dwukrotnie zmniejszymy**, sinusoida będzie o połowę niższa, a **dźwięk cichszy**.



$$x(t) = \frac{1}{2}A \sin(2\pi f t)$$

f , czyli częstotliwość

Częstotliwość f opisuje, jak blisko siebie na ekranie oscyloskopu są kolejne grzbiety fali, czyli ile cykli fali dociera do naszego ucha w 1 sekundzie. Odbieramy to jako **wysokość dźwięku**.



$$x(t) = A \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$

Zwiększenie częstotliwości oznacza **wyższy dźwięk**.



$$x(t) = A \sin(2\pi \cdot 2f \cdot t)$$

Zmniejszenie częstotliwości sprawia, że **dźwięk jest niższy**.



$$x(t) = A \sin(2\pi \cdot \frac{1}{2}f \cdot t)$$

4. Zastosowania funkcji trygonometrycznych

Umiejętności:

- korzystanie z własności funkcji trygonometrycznych w obliczeniach geometrycznych
- korzystanie ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi

◀4.1. Wyznacz z dokładnością do 1° kąty między przekątnymi prostokąta, którego obwód jest równy 112, a różnica między długościami boków wynosi 8.

Odp.: 74° , 106°

Przykład 1 ◀ zad. 4.1

Boki prostokąta mają długości 10 i 4. Wyznamy z dokładnością do 1° miarę kąta ostrego α , pod jakim przecinają się przekątne tego prostokąta.

Rozwiązanie

Wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku.

MK jest odcinkiem prostopadłym do boku BC.

Kąt KMB ma miarę $\frac{\alpha}{2}$.

$$|BK| = 2 \text{ i } |MK| = 5$$

← przekątne prostokąta przecinają się w połowie długości

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{5} = 0,4$$

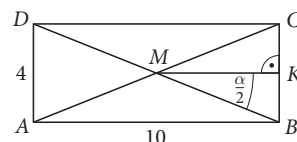
← definicja tangensa w trójkącie prostokątnym BKM

$$\frac{\alpha}{2} \approx 22^\circ$$

← z tablic trygonometrycznych

$$\sphericalangle BMC = \alpha \approx 44^\circ$$

Odp.: Przekątne tego prostokąta przecinają się pod kątem około 44° .



Przykład 2 ◀ zad. 4.5

W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 8$, $|AC| = 6$ oraz $\sphericalangle CAB = 50^\circ$. Obliczymy pole P tego trójkąta, wynik zaokrąglimy do drugiego miejsca po przecinku.

Rozwiązanie

Prowadzimy wysokość CD z wierzchołka C.

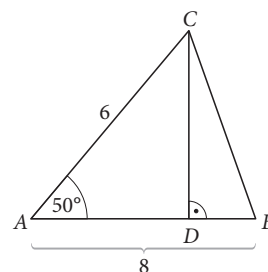
Wówczas:

$$P = \frac{|AB| \cdot |CD|}{2}$$

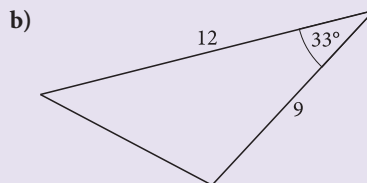
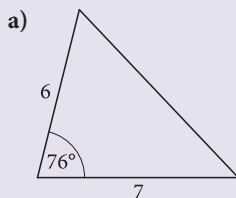
Wyznamy wysokość w trójkącie prostokątnym ADC.

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \sin \sphericalangle A$$

$$|CD| = |AC| \cdot \sin \sphericalangle A$$



◀4.5. Oblicz pole trójkąta z dokładnością do 0,1.



Odp.: a) 20,4 b) 29,4

ZZ i KPU

tematy 4.3, 4.8

Multiteka

- Zastosowanie trygonometrii – wyznaczanie położenia statku
- Zastosowanie trygonometrii – wyznaczanie wysokości obiektów
- Jak duża jest Ziemia
- Zjawisko paralaksy

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 4.4

Zatem:

$$P = \frac{|AB| \cdot |AC| \cdot \sin \angle A}{2}$$

$$P = \frac{8 \cdot 6 \cdot \sin 50^\circ}{2} \approx 24 \cdot 0,7660 = 18,384 \approx 18,38$$

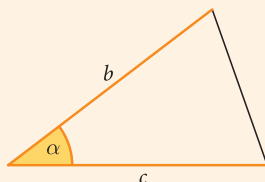
Odp.: Pole trójkąta jest równe około $18,38 \text{ cm}^2$.

Na podstawie rozwiązania przykładu 2 możemy sformułować twierdzenie.

Twierdzenie

Jeżeli kąt ostry α w trójkącie jest zawarty między bokami o długościach b i c , to pole P tego trójkąta jest równe:

$$P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$$



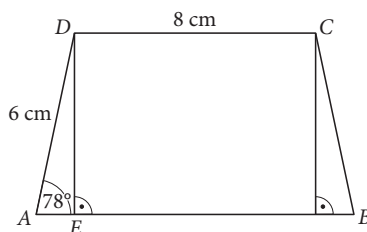
Przykład 3 ◀ zad. 4.12

Kąt ostry trapezu równoramiennego ma miarę 78° , krótsza podstawa ma długość 8 cm, a ramię 6 cm. Obliczmy pole i obwód trapezu, wyniki zaokrąglimy do pierwszego miejsca po przecinku.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

DE jest wysokością trapezu.



$$\frac{|DE|}{|AD|} = \sin 78^\circ \quad \leftarrow \text{definicja sinusa w trójkącie prostokątnym AED}$$

$$\frac{|AE|}{|AD|} = \cos 78^\circ \quad \leftarrow \text{definicja cosinusa w trójkącie prostokątnym AED}$$

$$|DE| \approx 6 \cdot 0,9781 = 5,8686$$

$$|AE| \approx 6 \cdot 0,2079 = 1,2474$$

$$|AB| = |DC| + 2 \cdot |AE| \quad \leftarrow \text{trapez równoramienny}$$

$$\text{obw} \approx 2 \cdot 8 + 2 \cdot 1,2474 + 2 \cdot 6 \approx 30,5 \text{ [cm]}$$

$$P \approx \frac{2 \cdot 8 + 2 \cdot 1,2474}{2} \cdot 5,8686 \approx 54,3 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Odp.: Obwód trapezu jest równy około 30,5 cm, a jego pole około $54,3 \text{ cm}^2$.

◀4.12. Kąt ostry trapezu równoramiennego ma miarę 52° , dłuższa podstawa ma długość 20 cm, a ramię 12 cm. Oblicz pole tego trapezu. Wynik zaokrąglaj do pierwszego miejsca po przecinku.

Odp.: $119,3 \text{ cm}^2$

◀ 4.15. Kąt wpisany w koło o promieniu 10 cm jest oparty na łuku AB i ma miarę 35° . Oblicz długość cięciwy AB . Wynik zaokrąglaj do drugiego miejsca po przecinku.

Odp.: 11,47 cm

◀ 4.21. Drabina ma 6 m długości. Aby stabilnie stała, jej kąt nachylenia do podłoża nie powinien przekraczać 65° . Czy korzystając z tej drabiny, można wejść na balkon drugiego piętra budynku, w którym jedna kondygnacja ma ok. 2,8 m wysokości?

Odp.: nie



Przykład 4 ◀ zad. 4.15

W koło o promieniu 17 cm wpisano kąt o mierze 27° . Kąt ten jest oparty na łuku AB . Obliczmy długość cięciwy AB z dokładnością do 1 mm.

Rozwiązanie

Wpisany kąt jest ostry, więc łuk AB jest mniejszy od półokręgu. Rysujemy okrąg i wpisujemy w niego kąt BCA o mierze 27° .

Prowadzimy średnicę AC' .

$$\sphericalangle BC'A = \sphericalangle BCA = 27^\circ$$

$$\sphericalangle ABC' = 90^\circ$$

$$|AC'| = 34 \text{ cm}$$

$$\frac{|AB|}{|AC'|} = \sin 27^\circ$$

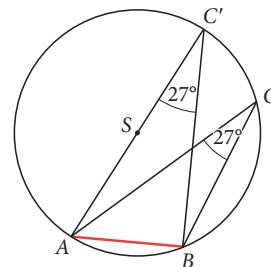
$$|AB| = 34 \cdot \sin 27^\circ, \text{ więc } |AB| \approx 34 \cdot 0,4540 = 15,436 \approx 15,4 \text{ [cm]}$$

← kąty wpisane oparte na tym samym łuku

← kąt wpisany oparty na średnicy

← z danych w treści zadania

← definicja sinusa w trójkącie prostokątnym ABC'



Odp.: Cięciwa AB ma około 15,4 cm długości.

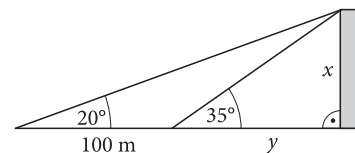
Przykład 5 ◀ zad. 4.21

Trygonometria może się również przydać, jeżeli chcemy oszacować wysokość, np. budynku. Wykonujemy trzy pomiary – zaznaczonych na rysunku kątów i odległości między ich wierzchołkami. Literami x i y oznaczamy odpowiednio szukaną wysokość i odległość budynku od wierzchołka większego z mierzonych kątów.

Otrzymujemy układ równań.

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \tan 35^\circ \\ \frac{x}{y+100} = \tan 20^\circ \end{cases} \quad \begin{cases} x = y \cdot \tan 35^\circ \\ x = (y+100) \cdot \tan 20^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \tan 35^\circ \\ y \tan 35^\circ = y \tan 20^\circ + 100 \tan 20^\circ \end{cases}$$



Do drugiego równania podstawiamy wartości tangensów i obliczamy niewiadomą y .

$$y \tan 35^\circ - y \tan 20^\circ = 100 \tan 20^\circ, \text{ czyli } y (\tan 35^\circ - \tan 20^\circ) = 100 \tan 20^\circ$$

$$y = \frac{100 \tan 20^\circ}{\tan 35^\circ - \tan 20^\circ}$$

$$y \approx 108,27$$

Po podstawieniu do pierwszego równania otrzymujemy:

$$x \approx 108,27 \cdot \tan 35^\circ \approx 108,27 \cdot 0,7002 \approx 75,8$$

Odp.: Budynek ma około 76 m wysokości.

Zadania

4.1. Wyznacz z dokładnością do 1° kąty między przekątnymi prostokąta, którego obwód jest równy 112, a różnica między długościami boków wynosi 8.

4.2. Wyznacz z dokładnością do 1° kąty równoległoboku, w którym długość jednego z boków jest równa 34 cm, a wysokość opuszczona na drugi bok ma 30 cm.

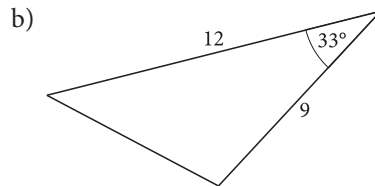
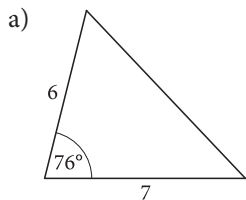
4.3. Bok rombu stanowi $\frac{\sqrt{3}}{3}$ jego przekątnej. Wyznacz kąty tego rombu.



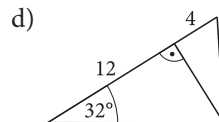
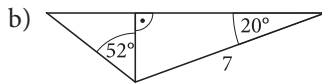
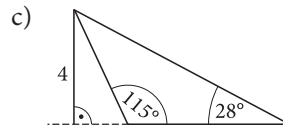
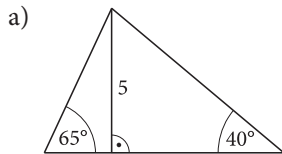
4.4. W równoramiennym trójkącie ABC , w którym $|AC| = |BC|$, kąt przy wierzchołku C ma 68° , a wysokość $|CD| = 15$ cm. Wyznacz długości boków tego trójkąta. Wyniki zaokrąglaj do pierwszego miejsca po przecinku.



4.5. Oblicz pole trójkąta z dokładnością do 0,1.



4.6. Oblicz obwód i pole trójkąta z dokładnością do 0,1.



4.7. W prostokącie, którego krótszy bok jest równy 7 cm, przekątna tworzy z dłuższym bokiem kąt $\alpha = 26^\circ$. Oblicz obwód prostokąta i długość jego przekątnej. Wynik podaj z dokładnością do 0,01 cm.



4.8. Oblicz pole rombu o boku 6 cm i kącie ostrym 80° . Wynik zaokrąglaj do pierwszego miejsca po przecinku.

Odpowiedzi i rozwiązania

4.1. $74^\circ, 106^\circ$

4.2. $62^\circ, 118^\circ, 62^\circ, 118^\circ$

4.3. $60^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$

4.4. $|AB| = 20,2$ cm,
 $|AC| = |BC| = 18,1$ cm

4.5. a) 20,4 b) 29,4

4.6. a) $obw = 21,6, P = 20,7$

b) $obw = 20,5, P = 11,5$

c) $obw = 18,6, P = 11,3$

d) $obw = 38,7, P = 60,0$

4.7. $obw = 42,71$ cm, długość przekątnej: 15,97 cm

4.8. $35,5 \text{ cm}^2$

4.9. $60^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$,
 $P = 72\sqrt{3} \text{ cm}^2$

4.10. 177,3

4.11. $192,2 \text{ cm}^2$

4.12. $119,3 \text{ cm}^2$

4.13. $|AB| = 5,7 \text{ cm}$,
 $|AC| = |BC| = 8,4 \text{ cm}$

4.14. $P = 422,0$, $obw = 120,1$,
wysokości: 21,6, 33,7, 15,1

4.15. 11,47 cm

4.17. 470 m

4.9. W rombie o boku 12 cm stosunek długości przekątnych jest równy $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Wyznacz kąty tego rombu i oblicz jego pole.

4.10. W równoległoboku o bokach 12 i 15 stosunek miar sąsiednich kątów jest taki sam jak stosunek długości sąsiednich boków. Oblicz pole równoległoboku. Wynik zaokrąglij do pierwszego miejsca po przecinku.

4.11. W trapezie równoramiennym kąt ostry ma miarę 53° , a przekątna długości 20 cm jest prostopadła do ramienia. Oblicz pole trapezu. Wynik zaokrąglij do pierwszego miejsca po przecinku.

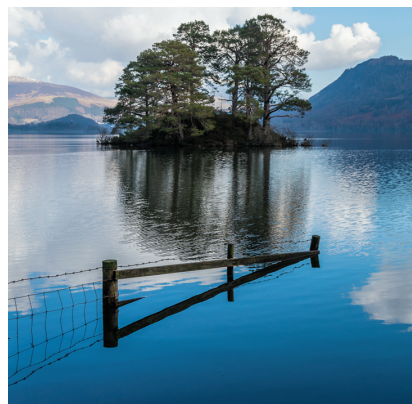
4.12. Kąt ostry trapezu równoramiennego ma miarę 52° , dłuższa podstawa ma długość 20 cm, a ramię 12 cm. Oblicz pole tego trapezu. Wynik zaokrąglij do pierwszego miejsca po przecinku.

4.13. W równoramiennym trójkącie ABC ($|AC| = |BC|$) kąty przy podstawie mają po 70° , a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 2 cm. Wyznacz długości boków tego trójkąta. Wyniki zaokrąglij do pierwszego miejsca po przecinku.

4.14. W trójkącie ABC kąt BAC jest równy 37° , $|AB| = 56$. Wysokość CD dzieli bok AB tak, że $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{5}{9}$. Oblicz pole, obwód oraz wysokości trójkąta ABC . Wyniki zaokrąglij do pierwszego miejsca po przecinku.

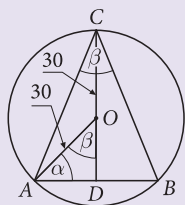
4.15. Kąt wpisany w koło o promieniu 10 cm jest oparty na łuku AB i ma miarę 35° . Oblicz długość cięciwy AB . Wynik zaokrąglij do drugiego miejsca po przecinku.

*** 4.16.** Na trójkącie równoramiennym ABC opisano okrąg o środku O . Podstawa AB tego trójkąta tworzy kąt α z promieniem OA okręgu, $|OA| = 30$ i $\cos \alpha = 0,6$. Oblicz pole i obwód trójkąta. Rozważ dwa przypadki.



4.17. Na jeziorze, dokładnie na północ od przystani, Piotrek zobaczył niewielką wyspę. Po przejściu 100 metrów na zachód, widział ją w kierunku odchylonym od północy o 12° . Jak daleko od przystani leży wyspa?

4.16. $|OA| = 30$, $\cos \alpha = 0,6$, $|OA| = |OB| = |OC|$



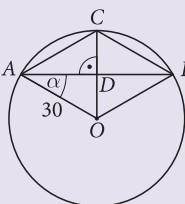
I przypadek $\frac{|AD|}{|OA|} = \cos \alpha \Leftrightarrow |AD| = 30 \cdot 0,6 = 18$, więc $|AB| = 36$

Z twierdzenia Pitagorasa: $|OD| = \sqrt{30^2 - 18^2} = \sqrt{576} = 24$

$|CD| = |OD| + |OC| = 24 + 30 = 54$

$|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 = 18^2 + 54^2 = 18^2 + (3 \cdot 18)^2 = 10 \cdot 18^2$, stąd $|AC| = 18\sqrt{10}$

$P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 54 = 972$, $obw_{ABC} = |AB| + 2|AC| = 36 + 36\sqrt{10} = 36(1 + \sqrt{10})$



II przypadek $|AD| = 18$, $|AB| = 36$, $|OD| = 24$ (obliczenia jak w I przypadku)

$|CD| = |OC| - |OD| = 30 - 24 = 6$

$|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 = 18^2 + 6^2 = (3 \cdot 6)^2 + 6^2 = 10 \cdot 6^2$, stąd $|AC| = 6\sqrt{10}$

$P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 6 = 108$, $obw_{ABC} = |AB| + 2|AC| = 36 + 12\sqrt{10} = 12(3 + \sqrt{10})$

Odp.: $P = 972$, $obw = 36(1 + \sqrt{10})$ lub $P = 108$, $obw = 12(3 + \sqrt{10})$

4.18. Na równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu równym α znajduje się ciało o ciężarze F . Działa na nie siła o wartości $F \cdot \sin \alpha$ powodująca zsuwanie się ciała po równi oraz siła $F \cdot \cos \alpha$ wywołująca nacisk ciała na równię.

- a) Oblicz siłę, z jaką naciska na równię ciało o ciężarze 1200 N leżące na równi nachylonej do poziomu pod kątem 20° .
b) Ciało o ciężarze 300 N zsuwa się z równi pod wpływem siły o wartości 120 N. Jaki jest kąt nachylenia tej równi do poziomu?

4.19. W chwili gdy helikopter przelatywał nad głową Jurka, oddalony od Jurka o 200 m Wojtek widział ten helikopter pod kątem 35° do poziomu. Na jakiej wysokości leciał helikopter?

4.20. Lądujący samolot minął początek pasa startowego na wysokości 90 m. Pilot widział wtedy koniec pasa pod kątem 2° do poziomu. Jaką długość ma pas startowy?

4.21. Drabina ma 6 m długości. Aby stabilnie stała, jej kąt nachylenia do podłoża nie powinien przekraczać 65° . Czy korzystając z tej drabiny, można wejść na balkon drugiego piętra budynku, w którym jedna kondygnacja ma ok. 2,8 m wysokości?

4.22. Państwo Mamutowie jechali na wakacje szosą, która przez dłuższy odcinek biegnie prosto bez żadnych zakrętów. W pewnej chwili spostrzegli po prawej stronie szosy pod kątem 20° do kierunku jazdy ruiny zamku, które zamierzali zwiedzić. Po przejechaniu 2 km ruiny stały się widoczne pod kątem 50° do kierunku jazdy. Prostopadle do szosy prowadzi droga dojazdowa do zabytku. Ile jeszcze metrów mieli do skrzyżowania z tą drogą? Jaka jest długość drogi dojazdowej?

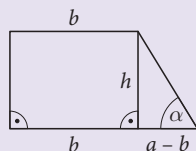
4.23. Pole rombu jest równe 40, a jego kąt ostry ma miarę 50° . Oblicz długości przekątnych rombu z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

4.24. Cięciwa AB okręgu o promieniu $r = 25$ jest bokiem prostokąta $ABCD$. Bok DC jest styczny do tego okręgu, a kąt środkowy oparty na cięciwie AB ma miarę 148° . Oblicz obwód prostokąta. Wynik zaokrąglaj do pierwszego miejsca po przecinku.

4.25. Dłuższa podstawa trapezu prostokątnego ma długość a , krótsza podstawa – długość b , a kąt ostry ma miarę α . Wykaż, że pole tego trapezu jest równe $\frac{a^2 - b^2}{2} \operatorname{tg} \alpha$.

4.26. Krótsza przekątna trapezu prostokątnego ma długość d i jest prostopadła do dłuższego ramienia. Kąt ostry trapezu ma miarę α . Wykaż, że obwód trapezu jest równy $d \left(\sin \alpha + \cos \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)$.

4.25.

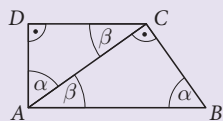


Założenie: a, b – podstawy trapezu prostokątnego, $a > b$, α – kąt ostry trapezu

Teza: $P = \frac{1}{2}(a^2 - b^2) \operatorname{tg} \alpha$

Dowód: $h = (a - b) \operatorname{tg} \alpha$, $P = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h = \frac{(a^2 - b^2)}{2} \operatorname{tg} \alpha$

4.26.



Założenie: $ABCD$ – trapez prostokątny, $|AC| = d$, $AC \perp BC$, α – kąt ostry

Teza: $\text{obwód} = d \left(\sin \alpha + \cos \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)$

Dowód: $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ (kkk)

$|AB| = \frac{d}{\sin \alpha}$, $|BC| = \frac{d}{\operatorname{tg} \alpha}$, $|AD| = d \cos \alpha$, $|CD| = d \sin \alpha$.

4.18. a) 1127,6 N b) 24°

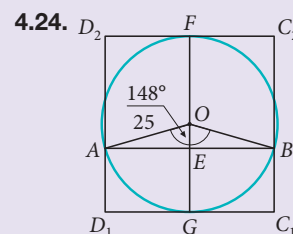
4.19. ok. 140 m

4.20. prawie 2580 m

4.21. nie

4.22. 880 m, 1050 m

4.23. 6,1 i 13,1



$|AO| = |BO| = |FO| = |GO| = r = 25$

Zadanie ma dwa rozwiązania:

prostokąty ABC_1D_1 oraz ABC_2D_2 .

$\frac{|AE|}{|AO|} = \sin 74^\circ$

$|AE| = 25 \cdot 0,9613 \approx 24,0325$

$|AB| = 48,065 \approx 48,07$

$|OE| = |AO| \cdot \cos 74^\circ \approx 25 \cdot 0,2756 = 6,89$

$ABC_1D_1: |EG| = |OG| - |OE| =$

$= 25 - 6,89 = 18,11 = |BC_1|$

$\text{obw}_{ABC_1D_1} = 2|AB| + 2|BC_1| =$

$= 2(48,07 + 18,11) = 132,36 \approx 132,4$

$ABC_2D_2: |EF| = |OF| + |OE| =$

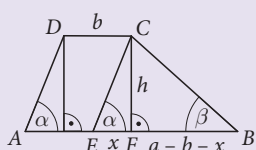
$= 25 + 6,89 = 31,89 = |BC_2|$

$\text{obw}_{ABC_2D_2} = 2|AB| + 2|BC_2| =$

$= 2(48,07 + 31,89) = 159,92 \approx 159,9$

Odp.: 132,4 lub 159,9

4.27.



Założenie: a, b – podstawy trapezu; $a > b$; α, β – kąty ostre trapezu

Teza: $P = \frac{a^2 - b^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$

Dowód: Prowadzimy $CE \parallel AD$; zatem $|BE| = a - b$.

W trójkącie BCE prowadzimy wysokość CF i oznaczamy:

$$|CF| = h, |EF| = x,$$

$$|BF| = a - b - x.$$

Wyznaczamy h z trójkątów BCF i CEF .

$$\begin{cases} \triangle BCF: h = (a - b - x) \operatorname{tg} \beta \\ \triangle CEF: h = x \operatorname{tg} \alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a - b - x) \operatorname{tg} \beta = x \operatorname{tg} \alpha$$

$$(a - b) \operatorname{tg} \beta = x(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)$$

$$x = \frac{(a - b) \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$$

$$\text{zatem } h = \frac{(a - b) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$$

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \frac{1}{2}(a + b) \cdot h = \\ &= \frac{(a + b)(a - b) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)} = \\ &= \frac{a^2 - b^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} \end{aligned}$$

D

- * 4.27. Kąty ostre przy dłuższej podstawie trapezu mają miary α i β , zaś podstawy mają długości a i b ($a > b$). Wykaż, że pole trapezu jest równe $\frac{a^2 - b^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$.

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Dwa boki trójkąta mają długości 5 cm i 8 cm, a kąt między nimi zawarty ma miarę 60° . Ile jest równe pole trójkąta?

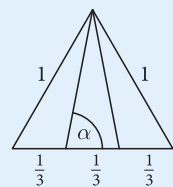
A. 20 cm^2 B. $20\sqrt{3} \text{ cm}^2$ C. $10\sqrt{3} \text{ cm}^2$ D. 10 cm^2

2. Ile wynosi pole równoległoboku o kącie ostrym 30° oraz bokach o długościach 7 cm i 10 cm?

A. $17,5 \text{ cm}^2$ B. $35\sqrt{3} \text{ cm}^2$ C. $70\sqrt{3} \text{ cm}^2$ D. 35 cm^2

3. Wskaż tangens kąta α zaznaczonego na rysunku.

A. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
B. $3\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6}$

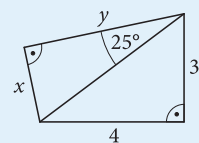


4. Podstawy trapezu równoramiennego $ABCD$ mają długości $|AB| = 12$, $|CD| = 8$, a ramiona mają długość 6. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $\sin \sphericalangle ABC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $\cos \sphericalangle ABC = \frac{3}{2}$ C. $\operatorname{tg} \sphericalangle ABC = \frac{2\sqrt{2}}{8}$



5. Wyznacz x i y z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku. Skorzystaj z informacji podanych na rysunku obok.



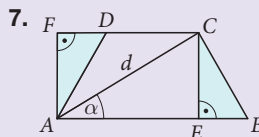
6. Wierzchołek 70-metrowego komina elektrociepłowni stojącej na płaskim terenie widać z pewnego miejsca w okolicy pod kątem 8° do poziomu. Jaka jest odległość z tego miejsca do podstawy komina? Wynik podaj z dokładnością do 10 m.

D

7. W trapezie równoramiennym przekątna o długości d tworzy z dłuższą podstawą kąt α . Wykaż, że pole trapezu jest równe $d^2 \sin \alpha \cos \alpha$.

Prosto do matury

1. C
2. D
3. B
4. P, F, F
5. $x = 2,11$, $y = 4,53$
6. 500 m



Założenie: $CD \parallel AB$, $|AD| = |BC|$, $d = |AC|$, $\sphericalangle BAC = \alpha$

Teza: $P_{ABCD} = d^2 \sin \alpha \cos \alpha$

Dowód: $\triangle BCE \equiv \triangle ADF$,

więc $P_{ABCD} = P_{AECF} = |AE| \cdot |EC|$

$|AE| = d \cos \alpha$, $|EC| = d \sin \alpha$,

stąd $P_{ABCD} = d \cos \alpha \cdot d \sin \alpha = d^2 \sin \alpha \cos \alpha$

5. Funkcje trygonometryczne kąta rozwartego

Umiejętności:

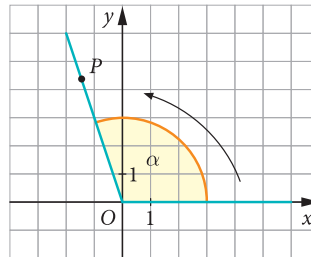
- wykorzystywanie definicji i wyznaczanie wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°
- stosowanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi
- korzystanie z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych

Funkcje trygonometrycznych używamy często podczas obliczania pól trójkątów (a więc i pól wielokątów). Z wygodnego wzoru $P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$ korzystaliśmy dotąd tylko wtedy, gdy kąt zawarty między danymi bokami trójkąta był ostry. A przecież trójkąt ma jednoznacznie określone pole również wtedy, gdy kąt między takimi bokami jest prosty lub rozwarty. Rozszerzymy zatem definicje funkcji trygonometrycznych tak, aby dotyczyły kątów o miarach od 0° do 180° .

W bardziej zaawansowanej matematyce definiuje się funkcje trygonometryczne dla dowolnego kąta.

W tym celu umieścimy kąty w układzie współrzędnych. Przyjmijemy przy tym kilka reguł.

- Wierzchołek kąta α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) jest początkiem układu współrzędnych.
- Jedno z ramion (tzw. ramię **początkowe**) kąta α pokrywa się z dodatnią półosią x . Drugie, **końcowe** ramię, które będziemy również nazywać **ramieniem wodzącym** kąta α , jest odłożone w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.
- Jeżeli wybierzemy na ramieniu wodzącym kąta α punkt P różny od początku układu O , to odcinek OP nazywać będziemy **promieniem wodzącym punktu P** . Tak samo będziemy nazywać długość odcinka OP . Zatem liczba $r = |OP|$ jest również promieniem wodzącym punktu P .



Można sobie wyobrazić, że ramię początkowe jest nieruchome, a końcowe zatacza półokrąg, wyznaczając po drodze wszystkie kąty od 0° do 180° . Stąd w nazwie słowo „wodzący”.

Uwaga: Słowa „promień”, podobnie jak w definicji okręgu, używamy tu w dwóch znaczeniach: odcinek albo jego długość. Nie prowadzi to do nieporozumień, ponieważ z kontekstu wynika, o które znaczenie chodzi.

Uwagi metodyczne

Podczas omawiania funkcji trygonometrycznych kąta rozwartego umieszczamy kąt w układzie współrzędnych i wprowadzamy tradycyjne pojęcia, takie jak: ramię początkowe i końcowe kąta oraz promień wodzący punktu na ramieniu końcowym. Dzięki takiemu ujęciu uzmysłowimy uczniom, że ograniczenie się do pierwszych dwóch ćwiartek układu jest dosyć sztuczne. Przy okazji powtarzamy związki między funkcjami trygonometrycznymi.

ZZ i KPU

tematy 4.6, 4.7

Multiteka

- Funkcje trygonometryczne kąta w układzie współrzędnych (1)
- Funkcje trygonometryczne kąta w układzie współrzędnych (2)
- Funkcje trygonometryczne kąta w układzie współrzędnych (3)
- Wzory redukcyjne

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.5

Rozszerzenie pojęcia funkcji trygonometrycznych nie powinno zmieniać ich wcześniejszych definicji. Kiedy umieścimy trójkąt prostokątny tak jak na rysunku, otrzymamy:

$$P = (a, b)$$

$$r = |OP| = c$$

Współrzędne punktu P są równocześnie długościami przyprostokątnych, zatem zgodnie z przyjętymi definicjami:

$$\sin \alpha = \frac{b}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Poniższe definicje są naturalnym rozszerzeniem tych związków.

Definicja

Sinusem kąta α nazywamy stosunek rzędnej dowolnego (różnego od wierzchołka) punktu wybranego na ramieniu wodzącym kąta do promienia wodzącego tego punktu.

Cosinusem kąta α nazywamy stosunek odciętej dowolnego (różnego od wierzchołka) punktu wybranego na ramieniu wodzącym kąta do promienia wodzącego tego punktu.

Tangensem kąta α nazywamy stosunek rzędnej dowolnego (różnego od wierzchołka) punktu wybranego na ramieniu wodzącym kąta do odciętej tego punktu, przy założeniu, że ta odcięta jest różna od zera.

Jeżeli punkt $P = (x_P, y_P)$ leży na ramieniu wodzącym kąta α , a r jest promieniem wodzącym tego punktu, to:

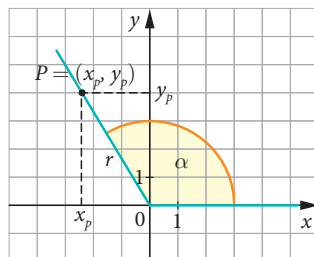
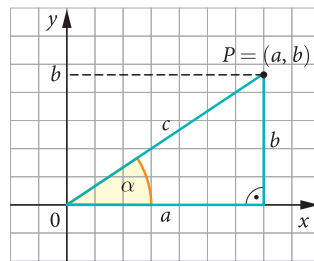
$$\sin \alpha = \frac{y_P}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_P}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_P}{x_P}$$

Ponadto, skoro $P = (x_P, y_P)$, to:

$$r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \quad \leftarrow \text{twierdzenie Pitagorasa}$$



Przykład 1 ◀ zad. 5.3

Obliczmy wartości funkcji trygonometrycznych zaznaczonego kąta.

Rozwiązanie

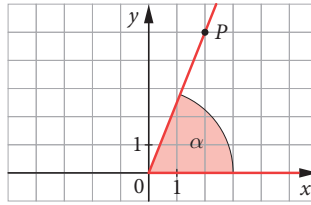
a) $P = (2, 5)$

Obliczamy promień wodzący punktu P :

$$r = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

Zatem:

$$\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}, \quad \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2}$$

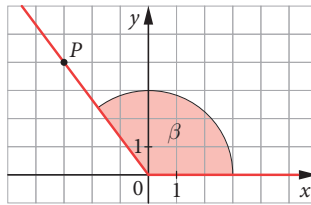


b) $P = (-3, 4)$

$$r = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Zatem:

$$\sin \beta = \frac{4}{5}, \quad \cos \beta = -\frac{3}{5}, \quad \operatorname{tg} \beta = -\frac{4}{3}$$



Zdefiniowaliśmy funkcje trygonometryczne za pomocą stosunków liczb związanych z punktem wybranym na ramieniu wodzącym. Podobnie jak w przypadku trójkąta prostokątnego wykazuje się, że wartości tych stosunków nie zależą od wyboru punktu (dowód tego faktu pominiemy). Czasem wygodnie jest wybrać punkt P tak, aby:

$$|OP| = r = 1$$

Wówczas:

$$\sin \alpha = y_P \text{ i } \cos \alpha = x_P$$

Jeżeli promień wodzący punktu P jest równy 1, to $P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$.

Przykład 2

Niech $P = (x_P, y_P)$ oznacza punkt leżący na ramieniu wodzącym kąta α oraz $r = |OP| = 1$. Obliczmy wartości funkcji $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$, gdy

- a) $\alpha = 0^\circ$. b) $\alpha = 90^\circ$. c) $\alpha = 180^\circ$.

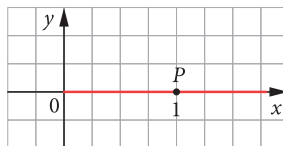
Rozwiązanie

a) $\alpha = 0^\circ$

Ramię wodzące kąta pokrywa się z dodatnią półosią x , więc $y_P = 0$, $x_P = 1$.

Zatem:

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \cos 0^\circ = 1, \quad \operatorname{tg} 0^\circ = 0$$



◀5.3. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α , którego ramię wodzące przechodzi przez podany punkt.

- a) $(3, 4)$
b) $(-1, 3)$
c) $(-4, 2)$
d) $(12, 5)$
e) $(-1, 4)$
f) $(-2, 5)$
g) $(-4, 1)$
h) $(-5, \sqrt{7})$

Odp.: a) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$$

b) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -3$

c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$

d) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\cos \alpha = \frac{12}{13}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$

e) $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -4$

f) $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{29}}{29}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{2}$

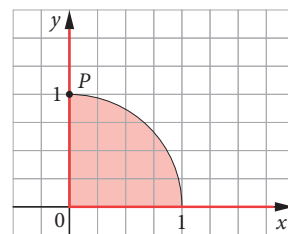
g) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $\cos \alpha = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{4}$

h) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{14}}{8}$, $\cos \alpha = -\frac{5\sqrt{2}}{8}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{5}$

b) $\alpha = 90^\circ$

Ramię wodzące kąta pokrywa się z dodatnią półosią y , zatem $y_P = 1$, $x_P = 0$. Nie istnieje tangens kąta 90° (nie jest wykonalne dzielenie przez 0), natomiast:

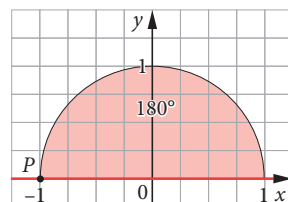
$$\sin 90^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0$$

c) $\alpha = 180^\circ$

Ramię wodzące kąta pokrywa się z ujemną półosią x , więc $y_P = 0$, $x_P = -1$.

Zatem:

$$\sin 180^\circ = 0, \quad \cos 180^\circ = -1, \quad \operatorname{tg} 180^\circ = 0$$

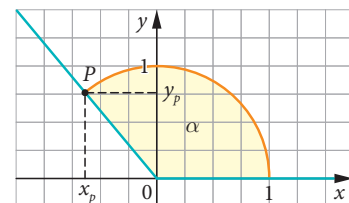


Podsumujmy:

α	0°	90°	180°
$\sin \alpha$	0	1	0
$\cos \alpha$	1	0	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	nie istnieje	0

Bezpośrednio z definicji wynika, że dla kątów rozwartych wartości tangensa i cosinusa są ujemne (bo $x_P < 0$).

α	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$
$\sin \alpha$	+	+
$\cos \alpha$	+	-
$\operatorname{tg} \alpha$	+	-



Wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta rozwartego można obliczyć za pomocą wartości odpowiednich funkcji trygonometrycznych kąta ostryego. Służą do tego tzw. **wzory redukcyjne**. Wyprowadzimy niektóre z nich.

Każdy kąt rozwarty możemy zapisać w postaci $180^\circ - \alpha$, gdzie α jest kątem ostrym. Na przykład:

- $140^\circ = 180^\circ - 40^\circ$, $\alpha = 40^\circ$
- $100^\circ = 180^\circ - 80^\circ$, $\alpha = 80^\circ$
- $175^\circ = 180^\circ - 5^\circ$, $\alpha = 5^\circ$
- $97^\circ = 180^\circ - 83^\circ$, $\alpha = 83^\circ$

Jeżeli narysujemy kąty $180^\circ - \alpha$ oraz α w układzie współrzędnych, to ich ramiona wodzące będą symetryczne względem osi y . Wynika to od razu z przystawiania odpowiednich trójkątów prostokątnych.

Wystarczy wybrać punkty P_1 i P_2 tak, aby $|OP_1| = |OP_2|$.

Wówczas $\triangle OA_1P_1 \equiv \triangle OA_2P_2$ na mocy cechy kbk ($\sphericalangle A_2OP_2 = \alpha$).

Jeżeli przyjmiemy, że $P_1 = (a, b)$, to $P_2 = (-a, b)$. $|OP_1| = |OP_2| = r$, więc:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{b}{r} = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{-a}{r} = -\frac{a}{r} = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{b}{-a} = -\frac{b}{a} = -\operatorname{tg} \alpha$$

Udowodniliśmy zatem następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Jeżeli α jest kątem ostrym, to:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

Przykład 3 ◀ zad. 5.4

Obliczmy wartości funkcji trygonometrycznych kątów 120° i 150° .

Rozwiązanie

- $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

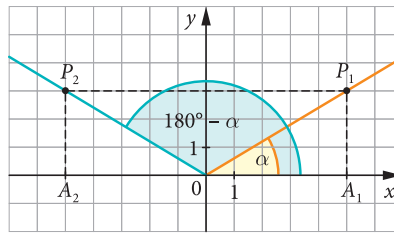
$$\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$$

- $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 150^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



◀5.4. Oblicz dokładne wartości funkcji trygonometrycznych kąta 135° . Nie korzystaj z tablic ani kalkulatora.

Odp.: $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 135^\circ = -1$

◀5.7. Dany jest tangens kąta wypukłego α . Wyznacz miarę tego kąta z dokładnością do 1° . Skorzystaj z tablic trygonometrycznych lub kalkulatora.

- a) $\operatorname{tg} \alpha = -0,9325$
 b) $\operatorname{tg} \alpha = -0,1405$
 c) $\operatorname{tg} \alpha = -1,43$
 d) $\operatorname{tg} \alpha = -4,6$

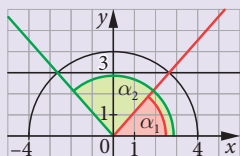
Odp.: a) 137° b) 172° c) 125°
 d) 102°

◀5.9. Skonstruuj kąt rozwarty α o podanej wartości sinusa lub cosinusa.

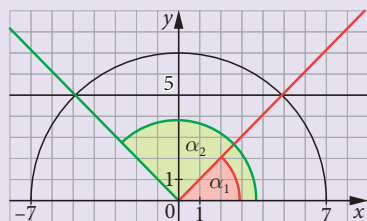
- a) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$
 b) $\sin \alpha = \frac{5}{7}$
 c) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$
 d) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$

Odp.: Wskazówka: Przeanalizuj przykład 5 ze s. 260.

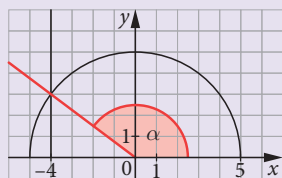
a)



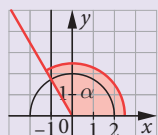
b)



c)



d)



Przykład 4 ◀ zad. 5.7

Wiemy, że $\operatorname{tg} \alpha = -5,0067$. Wyznaczymy miarę kąta α z dokładnością do 1° .

Rozwiązanie

$$\operatorname{tg} \beta = 5,0067$$

$$\beta \approx 79^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - \beta$$

$$\alpha \approx 101^\circ$$

← β – pomocniczy kąt ostry

← wartość kąta β odczytana z tablic

← $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta$

W przykładzie 2 przyjmowaliśmy, że punkt wybierany na ramieniu wodzącym kąta jest oddalony o 1 od jego wierzchołka ($r = 1$). Czasami warto postąpić inaczej.

Przykład 5 ◀ zad. 5.9, 5.10

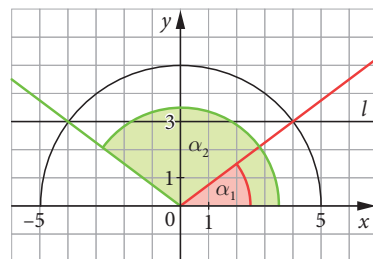
Znamy wartość jednej z funkcji trygonometrycznych kąta wypukłego α . Skonstruujemy ten kąt.

Rozwiązanie

a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$

Z definicji $\sin \alpha = \frac{y_P}{r}$. Przyjmujemy $y_P = 3$, $r = 5$ i wykonujemy konstrukcję:

- rysujemy nad osią x półokrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu $r = 5$,
- rysujemy prostą l równoległą do osi x , przechodzącą przez punkt $(0, 3)$,
- z punktu $(0, 0)$ prowadzimy półprostą przez punkt przecięcia prostej l z półokręgiem – jest ona drugim ramieniem kąta (pierwszym jest dodatnia półoś x).

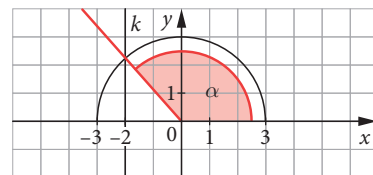


Prosta l przecina półokrąg w dwóch punktach, więc otrzymujemy dwa rozwiązania zadania: kąt α_1 oraz kąt α_2 .

b) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$

$\cos \alpha = \frac{x_P}{r}$, więc przyjmujemy $x_P = -2$ i $r = 3$, zatem:

- rysujemy nad osią x półokrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu $r = 3$,
- rysujemy prostą k równoległą do osi y , przechodzącą przez punkt $(-2, 0)$,
- z punktu $(0, 0)$ prowadzimy półprostą przez punkt przecięcia prostej k z półokręgiem.



Jedynym rozwiązaniem zadania jest kąt α .

◀5.10. Skonstruuj kąt wypukły α o podanej wartości tangensa.

a) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{7}$

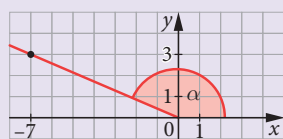
b) $\operatorname{tg} \alpha = -3$

c) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$

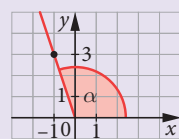
d) $\operatorname{tg} \alpha = -5$

Odp.: Wskazówka: Przeanalizuj przykład 5 ze s. 260.

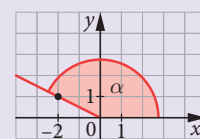
a)



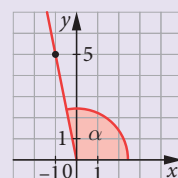
b)



c)

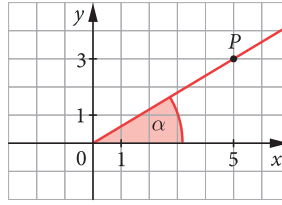


d)



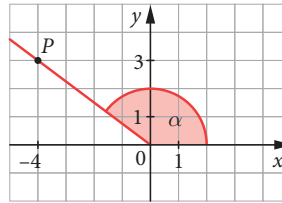
$$c) \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5}$$

Jeżeli skorzystamy z definicji tangensa ($\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_P}{x_P}$), to zauważymy, że żadaną równość spełniają albo dwie liczby dodatnie, albo dwie ujemne. Dla kąta $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ tylko pierwszy warunek może być spełniony, zatem otrzymamy jeden kąt α z ramieniem wodzącym poprowadzonym przez punkt o współrzędnych (5, 3).



$$d) \operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$$

Teraz jedna ze współrzędnych musi być dodatnia, a druga ujemna. Jedynym rozwiązaniem jest kąt α z ramieniem wodzącym poprowadzonym przez punkt o współrzędnych (-4, 3).



Na podstawie rozważań dotyczących wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych (s. 233–234) oraz przykładu 5 sformułujemy wniosek, którego dowód pomijamy.

Wniosek

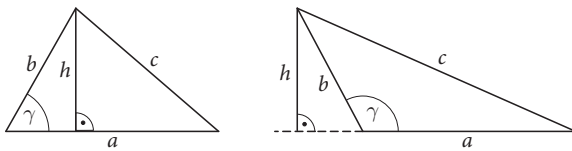
Niech $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$. Wtedy:

- dla każdego $a \in \mathbf{R} - \{0\}$ istnieje jeden kąt α taki, że $\operatorname{tg} \alpha = a$;
- $\operatorname{tg} \alpha = 0$ dla $\alpha = 0^\circ$ lub $\alpha = 180^\circ$;
- dla każdego $a \in \langle -1; 1 \rangle$ istnieje jeden kąt α taki, że $\cos \alpha = a$;
- dla każdego $a \in \langle 0; 1 \rangle$ istnieją dwa kąty α_1, α_2 takie, że $\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 = a$;
- $\sin \alpha = 1$ dla $\alpha = 90^\circ$.

Wróćmy do problemu wskazanego na początku tematu. Chcemy obliczyć pole trójkąta o znanych długościach dwóch boków i mierze kąta między tymi bokami.

Oznaczmy dane boki literami a i b oraz kąt między nimi literą γ .

Prowadzimy wysokość h z wierzchołka różnego od wierzchołka kąta γ .



Jeżeli γ jest kątem ostrym, to $h = b \cdot \sin \gamma$.

Jeżeli γ jest kątem rozwartym, to $h = b \cdot \sin(180^\circ - \gamma) = b \cdot \sin \gamma$.

◀5.11. Oblicz (z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku) pole trójkąta ABC , w którym

a) $|AB| = 16$, $|AC| = 22$,
 $\sphericalangle CAB = 140^\circ$.

b) $|BC| = 9$, $|AC| = 12$,
 $\sphericalangle BCA = 127^\circ$.

c) $|AB| = 9$, $|BC| = 12$,
 $\sphericalangle ABC = 100^\circ$.

d) $|BC| = |AC| = 16$,
 $\sphericalangle BCA = 144^\circ$.

Odp.: a) 113,13 b) 43,12

c) 53,18 d) 75,24

Odpowiedzi i rozwiązania

5.3. a) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$,

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$

b) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$,

$\operatorname{tg} \alpha = -3$

c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$

d) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\cos \alpha = \frac{12}{13}$,

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$

e) $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$,

$\operatorname{tg} \alpha = -4$

f) $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{29}}{29}$,

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{2}$

g) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $\cos \alpha = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$,

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{4}$

h) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{14}}{8}$, $\cos \alpha = -\frac{5\sqrt{2}}{8}$,

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{5}$

Po podstawieniu obliczonej wysokości do wzoru na pole trójkąta otrzymujemy:

$$P = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

czyli prawdziwy jest wzór:

$$P = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

Powiemy, że **pole trójkąta jest równe połowie iloczynu jego boków przez sinus kąta zawartego między tymi bokami**.

Przykład 6 ◀ zad. 5.11

Obliczymy pole trójkąta ABC , w którym $|AB| = 3$, $|BC| = 5$ i $\sphericalangle ABC = 133^\circ$. Wynik zaokrąglimy do drugiego miejsca po przecinku.

Rozwiązanie

$$133^\circ = 180^\circ - 47^\circ$$

$$\sin 133^\circ = \sin(180^\circ - 47^\circ) = \sin 47^\circ \approx 0,7314$$

$$P = \frac{1}{2}|AB| \cdot |BC| \cdot \sin \sphericalangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin 133^\circ = \frac{15}{2} \cdot \sin 47^\circ \approx \frac{15}{2} \cdot 0,7314 \approx 5,49$$

Odp.: Trójkąt ABC ma pole równe około 5,49.

Zadania

5.1. Narysuj w układzie współrzędnych za pomocą kątomierza kąty: 70° , 120° , 150° , 175° , przy zachowaniu reguł ze s. 255.

5.2. Narysuj w układzie współrzędnych kąt, którego ramię wodzące przechodzi przez podany punkt. Odczytaj przy użyciu kątomierza miarę tego kąta.

a) $A = (2, 3)$ b) $B = (-3, 3)$ c) $C = (-1, 5)$ d) $D = (4, 3)$

5.3. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α , którego ramię wodzące przechodzi przez podany punkt.

a) $(3, 4)$ c) $(-4, 2)$ e) $(-1, 4)$ g) $(-4, 1)$
 b) $(-1, 3)$ d) $(12, 5)$ f) $(-2, 5)$ h) $(-5, \sqrt{7})$

5.4. Oblicz dokładne wartości funkcji trygonometrycznych kąta 135° . Nie korzystaj z tablic ani kalkulatora.

5.5. Wyznacz podaną liczbę. Skorzystaj z tablic trygonometrycznych.

a) $\sin 110^\circ$ c) $\cos 172^\circ$ e) $\sin 129^\circ$ g) $\cos 160^\circ$
 b) $\operatorname{tg} 98^\circ$ d) $\operatorname{tg} 116^\circ$ f) $\operatorname{tg} 153^\circ$ h) $\operatorname{tg} 172^\circ$

$$5.4. \sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \operatorname{tg} 135^\circ = -1$$

5.5. a) 0,9397 b) -7,1154 c) -0,9903 d) -2,0503 e) 0,7771 f) -0,5095
 g) -0,9397 h) -0,1405

5.6. Dany jest cosinus kąta wypukłego α . Wyznacz miarę tego kąta z dokładnością do 1° . Skorzystaj z tablic trygonometrycznych lub kalkulatora.

- a) $\cos \alpha = -0,2079$ c) $\cos \alpha = -0,89$
b) $\cos \alpha = -0,9272$ d) $\cos \alpha = -0,05$

5.7. Dany jest tangens kąta wypukłego α . Wyznacz miarę tego kąta z dokładnością do 1° . Skorzystaj z tablic trygonometrycznych lub kalkulatora.

- a) $\operatorname{tg} \alpha = -0,9325$ b) $\operatorname{tg} \alpha = -0,1405$ c) $\operatorname{tg} \alpha = -1,43$ d) $\operatorname{tg} \alpha = -4,6$

5.8. Dany jest sinus kąta wypukłego α . Wyznacz miarę tego kąta z dokładnością do 1° . Skorzystaj z tablic trygonometrycznych lub kalkulatora.

- a) $\sin \alpha = 0,6428$ b) $\sin \alpha = 0,9877$ c) $\sin \alpha = 0,85$ d) $\sin \alpha = 0,8$

5.9. Skonstruuj kąt rozwarty α o podanej wartości sinusa lub cosinusa.

- a) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ b) $\sin \alpha = \frac{5}{7}$ c) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ d) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$

5.10. Skonstruuj kąt wypukły α o podanej wartości tangensa.

- a) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{7}$ b) $\operatorname{tg} \alpha = -3$ c) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$ d) $\operatorname{tg} \alpha = -5$



5.11. Oblicz (z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku) pole trójkąta ABC , w którym

- a) $|AB| = 16$, $|AC| = 22$, $\sphericalangle CAB = 140^\circ$.
b) $|BC| = 9$, $|AC| = 12$, $\sphericalangle BCA = 127^\circ$.
c) $|AB| = 9$, $|BC| = 12$, $\sphericalangle ABC = 100^\circ$.
d) $|BC| = |AC| = 16$, $\sphericalangle BCA = 144^\circ$.



5.12. Oblicz pole równoległoboku o przekątnych długości 10 i 6 oraz kącie między nimi równym 140° . Wynik zaokrąglaj do pierwszego miejsca po przecinku.

5.13. Długości boków trójkąta ABC są równe $|AB| = 18$ i $|AC| = 14$, a jego pole wynosi 63. Kąt CAB jest rozwarty. Oblicz miarę tego kąta.

5.14. Ramię trójkąta równoramiennego ABC ma długość 24, a jego pole jest równe $144\sqrt{3}$. Oblicz miarę kąta między ramionami trójkąta.



5.15. Wykaż, że przekątne równoległoboku dzielą ten równoległobok na cztery części o równych polach.

5.16. W trapezie prostokątnym o podstawach długości 5 cm i 12 cm tangens kąta rozwartego jest równy -2 . Oblicz pole i obwód tego trapezu.

5.6. a) 102° b) 158° c) 153°
d) 93°

5.7. a) 137° b) 172° c) 125°
d) 102°

5.8. a) 40° lub 140°
b) 81° lub 99°
c) 58° lub 122°
d) 53° lub 127°

5.9. Patrz s. 260.

5.10. Patrz s. 260.

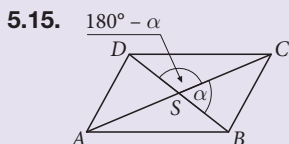
5.11. a) 113,13 b) 43,12
c) 53,18 d) 75,24

5.12. 19,3

5.13. 150°

5.14. 60° lub 120°

5.16. $P = 119 \text{ cm}^2$,
 $obw = (31 + 7\sqrt{5}) \text{ cm}$



5.15. Założenie: na rysunku
Teza: $P_{ABS} = P_{BCS} = P_{CDS} = P_{ADS}$
Dowód:
 $|AS| = |CS|$, $|BS| = |DS|$, $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
Oznaczamy: $e = |AS| = |CS|$, $f = |BS| = |DS|$

$$P_{ABS} = \frac{1}{2} |AS| \cdot |BS| \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} ef \sin \alpha$$

$$P_{BCS} = \frac{1}{2} |CS| \cdot |BS| \sin \alpha = \frac{1}{2} ef \sin \alpha$$

$$P_{CDS} = \frac{1}{2} |CS| \cdot |DS| \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} ef \sin \alpha$$

$$P_{ADS} = \frac{1}{2} |AS| \cdot |DS| \sin \alpha = \frac{1}{2} ef \sin \alpha$$

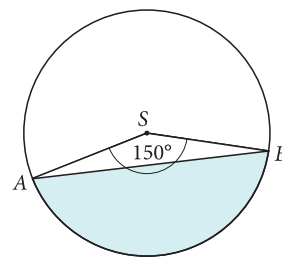
$$\text{Zatem } P_{ABS} = P_{BCS} = P_{CDS} = P_{ADS} = \frac{1}{2} ef \sin \alpha.$$

5.17. Zamalowany obszar jest różnicą $\frac{150}{360}$ części koła o promieniu 12 cm i trójkąta równoramiennego o ramionach długości 12 cm i kącie 150° między ramionami.

$$P = \frac{15}{36} \cdot \pi \cdot 12^2 - \frac{1}{2} \cdot 12^2 \cdot \sin 150^\circ = \frac{5}{12} \cdot \pi \cdot 12^2 - \frac{1}{2} \cdot 12^2 \cdot \frac{1}{2} = 60\pi - 36 = 12(5\pi - 3)$$

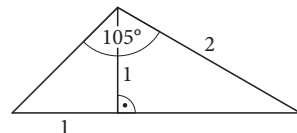
Odp.: $P = 12(5\pi - 3) \text{ cm}^2$

*** 5.17.** Promień okręgu o środku S jest równy 12 cm (zob. rysunek). Oblicz pole zamalowanego obszaru.



D * 5.18. Wykorzystaj podany rysunek i wykaż, że

$$\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$



Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

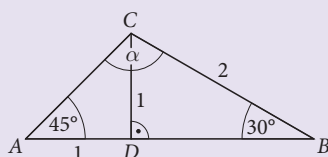
Prosto do matury

- D
- A
- D
- P, P, P
- $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\tan \alpha = -\frac{3}{2}$
- 22,54
- Ile jest równy $\cos 150^\circ$?
A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
 - Kąt α jest wypukły, jego ramię wodzące przechodzi przez punkt P i $\tan \alpha = -\frac{7}{11}$. Które z podanych współrzędnych może mieć punkt P ?
A. $(-11, 7)$ B. $(-11, -7)$ C. $(-7, 11)$ D. $(7, -11)$
 - Wskaż liczbę równą $\cos 147^\circ$.
A. $\sin 33^\circ$ B. $\cos 33^\circ$ C. $-\sin 33^\circ$ D. $-\cos 33^\circ$
 - Ramię wodzące kąta α przechodzi przez punkt $(-24, 10)$. Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ B. $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ C. $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$
 - Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α , którego ramię wodzące przechodzi przez punkt $(-2, 3)$.
 - Oblicz pole trójkąta ABC , w którym $|AB| = 8$, $|BC| = 12$ i $\angle ABC = 152^\circ$. Wynik zaokrąglij do drugiego miejsca po przecinku.

$$\begin{aligned} 7. \frac{\sin 120^\circ \cdot \tan 135^\circ - \cos 180^\circ}{\cos 150^\circ \cdot \sin 90^\circ} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-1) - (-1)}{-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1} = \\ &= \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3-2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

D 7. Wykaż, że $\frac{\sin 120^\circ \cdot \tan 135^\circ - \cos 180^\circ}{\cos 150^\circ \cdot \sin 90^\circ} = \frac{3-2\sqrt{3}}{3}.$

5.18.



$$\alpha = 105^\circ$$

Założenie: na rysunku

$$\text{Teza: } \sin 105^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Dowód: Wykorzystujemy dwa różne wzory na pole trójkąta ABC :

$$(1) P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |CD| \text{ oraz } (2) P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AC| \cdot |BC| \sin 105^\circ$$

$$|BD| = \sqrt{3}, |AC| = \sqrt{2}$$

$$(1) P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}) \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$(2) P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sin 105^\circ = \sqrt{2} \cdot \sin 105^\circ$$

$$\text{Stąd } \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \sqrt{2} \cdot \sin 105^\circ \Leftrightarrow \sin 105^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \text{ więc } \sin 105^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

6. Własności funkcji trygonometrycznych

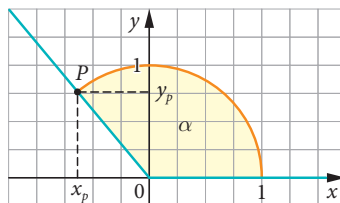
Umiejętności:

- wykorzystywanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi
- korzystanie z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych

Omówimy teraz podstawowe własności funkcji trygonometrycznych kątów wypukłych.

Niech $P = (x_p, y_p)$ oznacza punkt leżący na ramieniu wodzącym kąta α oraz $r = |OP| = 1$.

Wówczas $P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. Zauważmy, że dla wszystkich kątów $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ spełnione są zależności $-1 \leq x_p \leq 1$ oraz $0 \leq y_p \leq 1$.



Wniosek

Dla każdego kąta α takiego, że $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ prawdziwe są nierówności:

$$0 \leq \sin \alpha \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

Przykład 1 ◀ zad. 6.1

Sprawdźmy, czy istnieje kąt α spełniający warunek $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ taki, że $27(\cos \alpha)^3 + 8 = 0$.

Rozwiązanie

$$27(\cos \alpha)^3 + 8 = 0, \text{ więc } (\cos \alpha)^3 = -\frac{8}{27}, \text{ stąd } \cos \alpha = -\frac{2}{3}$$

Odp.: Ponieważ $-1 \leq -\frac{2}{3} \leq 1$, istnieje kąt α spełniający podany warunek (zob. s. 261).

Następne własności funkcji trygonometrycznych kąta wypukłego są takie same jak poznane wcześniej własności funkcji trygonometrycznych kąta ostryego.

Twierdzenie

Jedynka trygonometryczna

Dla każdego kąta α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) prawdziwa jest równość:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

◀6.1. Sprawdź, czy istnieje kąt wypukły α spełniający podany warunek.

a) $3 \cos \alpha + 2\sqrt{2} = 0$

b) $5 \sin \alpha = \sqrt{3} - 2$

c) $\sin \alpha + \cos \alpha = 2$

d) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sqrt{3}$

e) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0$

f) $\tan \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{2}$

Odp.: a) tak b) nie c) nie

d) nie e) tak f) nie

ZZ i KPU

tematy 4.6, 4.7

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 4.6

Generator
testów i sprawdzianów

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku oraz załóżmy, że promień wodzący r punktu $P = (x_P, y_P)$ jest równy 1. Wówczas $y_P = \sin \alpha$ i $x_P = \cos \alpha$.

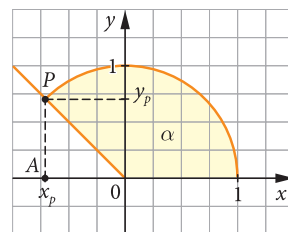
- Jeżeli ramię wodzące kąta pokrywa się z jedną z półosi układu, to prawdziwość wzoru wynika bezpośrednio z definicji (zob. przykład 2 ze s. 257).

- Jeżeli α jest kątem ostrym lub rozwartym:

$$|OA|^2 + |AP|^2 = |OP|^2$$

$$|x_P|^2 + |y_P|^2 = 1, \text{ więc } x_P^2 + y_P^2 = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$



← twierdzenie Pitagorasa

← $|m|^2 = m^2$

← $x_P = \cos \alpha$ i $y_P = \sin \alpha$

Koniec dowodu

Użyjmy ponownie oznaczeń przyjętych w definicjach funkcji trygonometrycznych.

Jeżeli $\cos \alpha \neq 0$, to $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{y_P}{r}}{\frac{x_P}{r}} = \frac{y_P}{x_P} = \operatorname{tg} \alpha$.

Wniosek

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ dla } \alpha \neq 90^\circ$$

◀ 6.5. Kąt α jest wypukły

i $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$. Oblicz $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

Odp.: $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg} \alpha = -4$

◀ 6.6. Kąt α jest wypukły

i $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{7}{24}$. Oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

Odp.: $\sin \alpha = \frac{7}{25}$, $\cos \alpha = -\frac{24}{25}$

◀ 6.7. Kąt α jest rozwarty

i $\sin \alpha = \frac{12}{37}$. Oblicz $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

Odp.: $\cos \alpha = -\frac{35}{37}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{35}$

◀ 6.8. Kąt α jest wypukły

i $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Oblicz $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

Odp.: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{14}}{2}$

lub $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{14}}{2}$

Przykład 2 ◀ zad. 6.5–6.8

Wyznamy sinus i cosinus kąta α spełniającego warunki $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ i $\operatorname{tg} \alpha = -2$.

Rozwiązanie

Skoro $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ i $\operatorname{tg} \alpha < 0$, to $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$. ← $\operatorname{tg} \alpha$ istnieje, więc $\alpha \neq 90^\circ$

$$\frac{y_P}{x_P} = -2$$

← z definicji tangensa: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_P}{x_P}$

Ponieważ $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$, możemy przyjąć, że $x_P = -1$ i $y_P = 2$. Zatem ramię wodzące kąta przechodzi przez punkt $P = (-1, 2)$.

Obliczamy promień wodzący punktu P .

$$r^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5, \quad r = \sqrt{5}$$

Zatem $\sin \alpha = \frac{y_P}{r} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ i $\cos \alpha = \frac{x_P}{r} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Odp.: $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

◀ 6.14. Udowodnij tożsamość. Tam, gdzie to konieczne, podaj założenia.

a) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$

c) $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \operatorname{tg}^2 \alpha$

b) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$

d) $2 \sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha + 3 = 5 \sin^2 \alpha$

Odp.: a) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$L = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = P$

b) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ $L = \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = P$

c) $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \operatorname{tg}^2 \alpha$; $\alpha \in \langle 0^\circ; 90^\circ \rangle \cup \langle 90^\circ; 180^\circ \rangle$

$L = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha = P$

d) $2 \sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha + 3 = 5 \sin^2 \alpha$ $L = 2 \sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha + 3 = 2 \sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha + 3 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha = 5 \sin^2 \alpha = P$

**Przykład 3** ◀ zad. 6.10–6.12

Kąt wypukły α spełnia warunek $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Obliczmy $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że:

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Zatem:

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{2} \quad \leftarrow \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - 1}{2}, \text{ czyli } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\frac{5}{9} - 1}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{2}{9}$$

Odp.: $\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{2}{9}$

Wymienione wcześniej związki między funkcjami trygonometrycznymi są spełnione dla wszystkich kątów wypukłych α , dla których te funkcje są określone. Mówimy, że te związki są **tożsamościami trygonometrycznymi**. Korzystając z nich, można udowadniać inne tożsamości.

Przykład 4 ◀ zad. 6.14–6.15

Udowodnimy podaną tożsamość.

a) $\frac{1}{1 - \sin \alpha} + \frac{1}{1 + \sin \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha}$

Dowód

Zastanówmy się najpierw, jakie warunki musi spełniać kąt α , żeby wszystkie wyrażenia podane w treści zadania były poprawnie określone. Wypiszmy założenia.

$$\begin{cases} 1 - \sin \alpha \neq 0 \\ 1 + \sin \alpha \neq 0 \\ \cos^2 \alpha \neq 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{mianowniki wyrażeń różne od zera}$$

czyli $\begin{cases} \sin \alpha \neq 1 \\ \sin \alpha \neq -1 \\ \cos \alpha \neq 0 \end{cases}$

W tym wypadku możemy dokładnie określić kąt wypukły, który powyższych warunków nie spełnia – jest nim $\alpha = 90^\circ$.

Zatem dowodzimy tożsamości dla wszystkich kątów wypukłych z wyjątkiem kąta 90° .

◀ 6.15. Udowodnij tożsamość. Tam, gdzie to konieczne, podaj założenia.

a) $\frac{1}{1 - \cos \alpha} + \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$

b) $\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{4}{\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}$

c) $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}$

d) $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha - 1} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + 1} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \alpha - \cos \alpha)}$

Odp.: Patrz s. 270.

◀ 6.10. Kąt wypukły α spełnia

warunek $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 3$.

Oblicz $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Odp.: $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ) \cup (90^\circ; 180^\circ)$

i $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 3$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 3 \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

◀ 6.11. Kąt wypukły α spełnia

warunek $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{4}{3}$.

Oblicz $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Odp.: $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{4}{3}$

i α – kąt wypukły

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{16}{9} \quad 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{16}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{7}{9} \quad | : 2$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{7}{18}$$

◀ 6.12. Kąt wypukły α spełnia

warunek $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{1}{3}$.

Oblicz $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$.

Odp.: $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{1}{3}$

i $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$

$$\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot (\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) =$$

$$= -\frac{1}{3}(1 - \sin \alpha \cos \alpha) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{4}{9}\right) = -\frac{13}{27},$$

bo: $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{9} \sin^2 \alpha +$

$$+ \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{9} \quad 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{8}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{4}{9}$$

$$\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = -\frac{13}{27}$$

Przekształcamy lewą stronę równości.

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{1 - \sin \alpha} + \frac{1}{1 + \sin \alpha} = \\
 &= \frac{1 + \sin \alpha + 1 - \sin \alpha}{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)} = && \leftarrow \text{sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika} \\
 &= \frac{2}{1 - \sin^2 \alpha} = && \leftarrow \text{wykonujemy działania i stosujemy jednostkę trygonometryczną} \\
 &= \frac{2}{\cos^2 \alpha} = P && \leftarrow \text{otrzymujemy prawą stronę równości}
 \end{aligned}$$

Koniec dowodu

$$b) \frac{4}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \left(\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \right)^2$$

Dowód

Funkcja tangens musi być określona i nie może przyjmować wartości 0, zatem $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ i $\alpha \neq 90^\circ$. Przy takich założeniach również oba wyrażenia podpierwiastkowe są dodatnie. Tym razem przekształcamy prawą stronę równości.

$$\begin{aligned}
 P &= \left(\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \right)^2 = \\
 &= \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} - 2 \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} + \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \\
 &= \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} - 2 + \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{(1 + \cos \alpha)^2 - 2(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) + (1 - \cos \alpha)^2}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} = \\
 &= \frac{1 + 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha) + 1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \\
 &= \frac{2 + 2 \cos^2 \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{4 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{4}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{4}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = L
 \end{aligned}$$

Koniec dowodu

Zadania

Odpowiedzi i rozwiązania

6.1. a) tak b) nie c) nie
d) nie e) tak f) nie

6.2. a) tak b) tak c) nie

6.1. Sprawdź, czy istnieje kąt wypukły α spełniający podany warunek.

- a) $3 \cos \alpha + 2\sqrt{2} = 0$ c) $\sin \alpha + \cos \alpha = 2$ e) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0$
b) $5 \sin \alpha = \sqrt{3} - 2$ d) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sqrt{3}$ f) $\operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{2}$

6.2. Sprawdź, czy istnieją kąty przyległe α i β spełniające podany warunek.

- a) $\sin \alpha = \sin \beta$ b) $\cos \alpha = \cos \beta$ c) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$

* **6.3.** Oblicz wartość wyrażenia bez korzystania z tablic i kalkulatora.

- a) $\sin^2 160^\circ + \sin^2 70^\circ$ d) $\sin 115^\circ \cdot \sin 65^\circ - \cos 115^\circ \cdot \cos 65^\circ$
 b) $\cos^2 15^\circ + \cos^2 105^\circ$ e) $\cos 101^\circ \cdot \operatorname{tg} 79^\circ + \sin 101^\circ$
 c) $\operatorname{tg} 80^\circ \cdot \operatorname{tg} 170^\circ$ f) $\operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 65^\circ \cdot \operatorname{tg} 125^\circ \cdot \operatorname{tg} 155^\circ$

* **6.4.** Uprość podane wyrażenie.

- a) $\sin(180^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{tg} \alpha$
 b) $\sin(180^\circ - \alpha) \cdot \cos(90^\circ - \alpha) - \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \sin(90^\circ - \alpha)$
 c) $\sin^3(180^\circ - \alpha) + \cos^2(180^\circ - \alpha) \cdot \sin \alpha$
 d) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$

6.5. Kąt α jest wypukły i $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$. Oblicz $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

6.6. Kąt α jest wypukły i $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{7}{24}$. Oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

6.7. Kąt α jest rozwarty i $\sin \alpha = \frac{12}{37}$. Oblicz $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

6.8. Kąt α jest wypukły i $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Oblicz $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

6.9. Kąt rozwarty α spełnia warunek $5(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha) + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 0$.

- a) Oblicz $\operatorname{tg} \alpha$.
 b) Zaznacz w układzie współrzędnych kąt α i podaj współrzędne dowolnego punktu, który jest różny od początku układu współrzędnych i który leży na końcowym ramieniu kąta α .

* **6.10.** Kąt wypukły α spełnia warunek $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 3$. Oblicz $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

* **6.11.** Kąt wypukły α spełnia warunek $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{4}{3}$. Oblicz $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

* **6.12.** Kąt wypukły α spełnia warunek $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{1}{3}$. Oblicz $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$.

D * **6.13.** O kącie wypukłym α wiadomo, że $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Wykaż, że

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{m^2 - 1}{2}.$$

D **6.14.** Udowodnij tożsamość. Tam, gdzie to konieczne, podaj założenia.

- a) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$ c) $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \operatorname{tg}^2 \alpha$
 b) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ d) $2 \sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha + 3 = 5 \sin^2 \alpha$

6.3. a) $\sin^2 160^\circ + \sin^2 70^\circ = \sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ = \sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ = 1$

b) $\cos^2 15^\circ + \cos^2 105^\circ = \cos^2 15^\circ + \cos^2 75^\circ = \cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ = 1$

c) $\operatorname{tg} 80^\circ \cdot \operatorname{tg} 170^\circ = \operatorname{tg} 80^\circ \cdot (-\operatorname{tg} 10^\circ) = \frac{-\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ} \cdot \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{-\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ} \cdot \frac{\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ} = -1$

d) $\sin 115^\circ \cdot \sin 65^\circ - \cos 115^\circ \cdot \cos 65^\circ = \sin 65^\circ \cdot \sin 65^\circ + \cos 65^\circ \cdot \cos 65^\circ = \sin^2 65^\circ + \cos^2 65^\circ = 1$

e) $\cos 101^\circ \cdot \operatorname{tg} 79^\circ + \sin 101^\circ = -\cos 79^\circ \cdot \frac{\sin 79^\circ}{\cos 79^\circ} + \sin 79^\circ = 0$

f) $\operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 65^\circ \cdot \operatorname{tg} 125^\circ \cdot \operatorname{tg} 155^\circ = \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 65^\circ \cdot (-\operatorname{tg} 55^\circ) \cdot (-\operatorname{tg} 25^\circ) = \frac{\sin 35^\circ \cdot \sin 65^\circ \cdot \sin 55^\circ \cdot \sin 25^\circ}{\cos 35^\circ \cdot \cos 65^\circ \cdot \cos 55^\circ \cdot \cos 25^\circ} = 1,$

bo: $\sin 35^\circ = \cos 55^\circ$, $\sin 65^\circ = \cos 25^\circ$, $\sin 55^\circ = \cos 35^\circ$, $\sin 25^\circ = \cos 65^\circ$

6.4. a) $\sin(180^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha - \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0$

b) $\sin(180^\circ - \alpha) \cdot \cos(90^\circ - \alpha) - \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \sin(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \cdot \sin \alpha - (-\cos \alpha) \cdot \cos \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

c) $\sin^3(180^\circ - \alpha) + \cos^2(180^\circ - \alpha) \cdot \sin \alpha = \sin^3 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha = \sin \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \sin \alpha$

d) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -1$

6.5. $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg} \alpha = -4$

6.6. $\sin \alpha = \frac{7}{25}$, $\cos \alpha = -\frac{24}{25}$

6.7. $\cos \alpha = -\frac{35}{37}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{35}$

6.8. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{14}}{2}$
 lub $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{14}}{2}$

6.9. a) $-\frac{2}{5}$ **b)** np. $(-5, 2)$

6.10. Patrz s. 267.

6.11. Patrz s. 267.

6.12. Patrz s. 267.

6.13. $\sin \alpha + \cos \alpha = m$, $m > 0$,
 α – kąt wypukły
 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = m^2$
 $2 \sin \alpha \cos \alpha = m^2 - 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{m^2 - 1}{2}$

6.14. Patrz s. 266.

6.16. $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} - \cos \alpha \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} &= \\ = \sin \alpha \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha} - \cos \alpha \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha} &= \\ = \sin \alpha \cdot |\sin \alpha| - \cos \alpha \cdot |\cos \alpha| &= \\ = \sin^2 \alpha - \cos \alpha \cdot (-\cos \alpha) &= \\ = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{aligned}$$

Prosto do matury

1. D
2. C
3. D
4. F, F, P
5. 1
6. $\frac{2}{3}$

$$7. \begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\sqrt{11}}{5} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \sin \alpha = -\sqrt{11} \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{11}} \sin \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \left(-\frac{5}{\sqrt{11}} \sin \alpha\right)^2 = 1$$

$$\text{i } \sin \alpha > 0$$

$$\sin^2 \alpha + \frac{25}{11} \sin^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{36}{11} \sin^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{11}{36}, \text{ stąd } \sin \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{11}} \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = -\frac{5}{6}$$

$$\text{Zatem } \cos \alpha = -\frac{5}{6}.$$

D * 6.15. Udowodnij tożsamość. Tam, gdzie to konieczne, podaj założenia.

- a) $\frac{1}{1 - \cos \alpha} + \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$
- b) $\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{4}{\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}$
- c) $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}$
- d) $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha - 1} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + 1} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \alpha - \cos \alpha)}$

D * 6.16. Wykaż, że jeśli α jest kątem rozwartym, to

$$\sin \alpha \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} - \cos \alpha \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 1.$$

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Kąt α jest rozwarty i $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$. Jaką wartość ma $\sin \alpha$?

- A. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

2. Wskaż liczbę, która nie może być cosinusem kąta wypukłego.

- A. 2^{-1} B. $(-2)^{-1}$ C. $2^{\frac{1}{2}}$ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

3. Kąt α jest wypukły i $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Ile wynosi $\cos \alpha$?

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $-\frac{4}{5}$ D. Nie można tego jednoznacznie określić.

4. Oceń prawdziwość podanych zdań. Istnieje kąt rozwarty α taki, że

- A. $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{5}$. B. $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$. C. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

5. Oblicz bez korzystania z tablic matematycznych wartość wyrażenia

$$\sin 24^\circ \cdot \sin 156^\circ - \cos 24^\circ \cdot \frac{\sin 24^\circ}{\operatorname{tg} 156^\circ}.$$

6. Kąt α jest wypukły i $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{6}$. Oblicz $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2$.

D 7. Kąt α jest wypukły i $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{11}}{5}$. Wykaż, że $\cos \alpha = -\frac{5}{6}$.

$$6.15. \text{ a) } \frac{1}{1 - \cos \alpha} + \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{2}{\sin^2 \alpha}, \alpha \in (0^\circ; 180^\circ), \quad L = \frac{1}{1 - \cos \alpha} + \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{(1 + \cos \alpha) + (1 - \cos \alpha)}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2}{\sin^2 \alpha} = P$$

$$\text{b) } \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{4}{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha}, \alpha \in (0^\circ; 90^\circ) \cup (90^\circ; 180^\circ), \quad L = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{(1 + \cos \alpha)^2 - (1 - \cos \alpha)^2}{1 - \cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{(1 + \cos \alpha + 1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha - 1 + \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{4 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{4}{\sin \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin \alpha} : \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha} = P$$

$$\text{c) } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}, \alpha \in (0^\circ; 90^\circ) \cup (90^\circ; 180^\circ), \quad L = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = P$$

$$\text{d) } \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha - 1} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + 1} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \alpha - \cos \alpha)}, \alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle - \{45^\circ, 90^\circ, 135^\circ\}, \text{ czyli } \alpha \neq 45^\circ, \alpha \neq 90^\circ, \alpha \neq 135^\circ$$

$$L = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha - 1} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + 1} = \frac{1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 1} + \frac{1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 1} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha) + \cos \alpha (\sin \alpha - \cos \alpha)}{(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)} =$$

$$= \frac{\cos \alpha \cdot \sin \alpha + \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha - \cos^2 \alpha}{(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)} = P$$

7. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–20 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. W trójkącie prostokątnym ABC przeciwprostokątna AC ma długość 39, a $|CB| = 15$. Sinus kąta BCA jest równy
 A. $\frac{5}{13}$. B. $\frac{12}{5}$. C. $\frac{12}{13}$. D. $\frac{5}{12}$.
2. Przeciwprostokątna PQ trójkąta PQS ma długość 25, a przyprostokątna SQ o długości 24 leży naprzeciw kąta α . Miara kąta α spełnia warunek
 A. $70^\circ < \alpha \leq 72^\circ$. B. $72^\circ < \alpha \leq 76^\circ$. C. $76^\circ < \alpha \leq 78^\circ$. D. $65^\circ < \alpha \leq 68^\circ$.
3. Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym kąt o wierzchołku A jest prosty, $\sphericalangle ABC = \alpha$ oraz $|BC| = \sqrt{45}$ i $|AB| = \sqrt{20}$. Wartość wyrażenia $\frac{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha}$ wynosi
 A. $\frac{5\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{4}$. D. $\frac{2\sqrt{5}}{4}$.
4. Dany jest trójkąt prostokątny MLN , w którym $\sphericalangle MLN = 90^\circ$, $\sphericalangle LNM = 60^\circ$ i $|ML| = k$. Obwód tego trójkąta jest równy
 A. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})k$. B. $(1 + \sqrt{2})k$. C. $(3 + \sqrt{3})k$. D. $(1 + \sqrt{3})k$.
5. W okręgu o środku S i promieniu 4 poprowadzono cięciwę MN . Miara kąta SNM jest równa 43° . Odległość cięciwy MN od środka okręgu jest liczbą z przedziału
 A. $\left\langle \frac{13}{4}; \frac{15}{4} \right\rangle$. B. $\left\langle \frac{11}{4}; \frac{13}{4} \right\rangle$. C. $\left\langle \frac{10}{4}; \frac{11}{4} \right\rangle$. D. $\left\langle \frac{9}{4}; \frac{10}{4} \right\rangle$.
6. Sinus kąta rozwartego α jest równy $\frac{12}{13}$. Wtedy
 A. $\cos \alpha = \frac{1}{13}$. B. $\cos \alpha = \frac{5}{13}$. C. $\cos \alpha = -\frac{1}{13}$. D. $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$.
7. Kąt α jest ostry i $\cos \alpha = \frac{5}{14}$. Zatem $\operatorname{tg} \alpha$ jest równy
 A. $\frac{3\sqrt{19}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{19}$. C. $\frac{2\sqrt{15}}{14}$. D. $\frac{3\sqrt{14}}{5}$.

Odpowiedzi i rozwiązania

1. C

2. B

3. C

4. D

5. C

6. D

7. A

Uwagi metodyczne

Podczas rozwiązywania zadań trygonometrycznych często trzeba narysować trójkąty prostokątne na tablicy lub w zeszycie. Pamiętajmy o tym, aby te trójkąty były różnie położone, a boki – różnie nazywane. Chyba każdy z nas miał uczniów, którzy przed poprawnym zapisaniem na przykład sinusa kąta alfa muszą najpierw nazwać boki trójkąta: a , b i c , a potem ustawić trójkąt tak, aby kąt ostry znalazł się „we właściwym miejscu”. Zadania podsumowujące służą wyćwiczeniu przez uczniów umiejętności zastosowania trygonometrii niezależnie od położenia ani nazw wierzchołków trójkąta.

Multiteka

- Jednostki miar kątów
- Geometria hiperboliczna

dla nauczyciela.pl | Klasówka 4

Generator
testów i sprawdzianów

- 8. B**
- 8.** Kąt α jest ostry. Wskaż wartość wyrażenia $(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha) + 2 \sin^2 \alpha$.
 A. $\sin \alpha$ B. 1 C. 0 D. 2
- 9. C**
- 9.** Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 4$. Wówczas wyrażenie $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ ma wartość
 A. 2. B. 1. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{2}$.
- 10. D**
- 10.** Dwa boki trójkąta mają długości 10 cm i $8\sqrt{2}$ cm. Kąt między tymi bokami ma miarę 45° . Ile wynosi pole tego trójkąta?
 A. $40\sqrt{6} \text{ cm}^2$ B. 80 cm^2 C. $\frac{40\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^2$ D. 40 cm^2
- 11. C**
- 11.** Ile wynosi pole równoległoboku o kącie ostrym 60° oraz bokach długości 6 i 11?
 A. 66 B. 33 C. $33\sqrt{3}$ D. $66\sqrt{3}$
- 12. D**
- 12.** Jaką długość ma bok rombu o wysokości $\frac{\sqrt{3}}{6}$ i kącie ostrym 30° ?
 A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$
- 13. B**
- 13.** W trapezie $ABCD$ kąty przy podstawie AB mają miary odpowiednio 90° i 30° . Dłuższe ramię trapezu ma długość $4\sqrt{3}$, a jego krótsza podstawa 0,5. Ile wynosi pole trapezu?
 A. $14\sqrt{3}$ B. $7\sqrt{3}$ C. $7\sqrt{3} + 1$ D. $14\sqrt{3} - 1$
- 14. D**
- 14.** W trapezie równoramiennym o wysokości 3 i ramieniu $2\sqrt{3}$ kąt ostry ma miarę
 A. 15° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .
- 15. C**
- 15.** Która z podanych równości nie jest tożsamością?
 A. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ C. $\sin^2 \alpha = 1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$
 B. $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$ D. $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2 \sin \alpha \cos \alpha + 1$
- 16. B**
- 16.** Ramię wodzące kąta α przechodzi przez punkt $(-3, 4)$. Ile wynosi $\cos \alpha$?
 A. $-\frac{4}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{3}{4}$
- 17. D**
- 17.** Jaką wartość ma iloczyn $\operatorname{tg} 32^\circ \cdot \operatorname{tg} 58^\circ$?
 A. -1 B. 0 C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ D. 1

18. Ile wynosi promień wodzący punktu $P = (-3, 1)$?

- A. 10 B. $\sqrt{10}$ C. $-\sqrt{10}$ D. $2\sqrt{2}$

18. B

19. Jaka jest miara kąta wypukłego, który tworzą wskazówki zegara o godzinie 10^{10} ?

- A. $\frac{23 \cdot 180^\circ}{36}$ B. $\frac{360^\circ}{3}$ C. 110° D. $\frac{27 \cdot 180^\circ}{36}$

19. A

20. Jaką wartość ma wyrażenie $\frac{\sin 17^\circ}{\cos 73^\circ} + \frac{\cos 37^\circ}{\sin 53^\circ}$?

- A. 1 B. 0 C. ok. 1,27 D. 2

20. D

W zadaniach 21–27 oceń prawdziwość podanych zdań.

21. Pole trójkąta o bokach 5 i 6 może być równe

- A. $\sqrt{2}$. B. 15. C. $10\sqrt{3}$.

21. P, P, F

22. Kąt α jest rozwarty. Wynika stąd, że

- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha > 0$. C. $\operatorname{tg} \alpha > 0$.

22. P, F, F

23. Ramię wodzące kąta α przechodzi przez punkt $(-12, 9)$. Zatem

- A. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. B. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. C. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$.

23. P, F, P

24. Kąt α jest rozwarty i $\sin \alpha = m$. Zatem

- A. $\sin(180^\circ - \alpha) = m$. B. $\cos \alpha = \sqrt{1 - m^2}$. C. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}$.

24. P, F, P

25. Liczba $\cos 150^\circ$ jest równa liczbie

- A. $\cos 30^\circ$. B. $\sin 120^\circ$. C. $\frac{1}{2} \operatorname{tg} 120^\circ$.

25. F, F, P

26. W trójkącie PQR kąt Q jest prosty, a kąty ostre φ i δ spełniają nierówność $\varphi > \delta$. Zatem

- A. $\operatorname{tg} \varphi < \sin \varphi$. B. $\operatorname{tg} \delta < \cos \varphi$. C. $\sin \varphi \leq \cos \delta$.

26. F, F, P

27. F, P, F

$$28. \text{ a) } \sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}, \cos \alpha = \frac{1}{4}, \\ \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{15}, \alpha = 76^\circ$$

$$\text{b) } \sin \alpha = \frac{3}{4}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}, \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{7}, \alpha = 49^\circ$$

$$\text{c) } \sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}, \alpha = 18^\circ$$

d) Nie istnieje taki trójkąt prostokątny.

$$29. \text{ a) } \frac{1}{9} \quad \text{b) } \frac{1}{2}$$

$$30. \text{ a) } 31^\circ \text{ lub } 149^\circ$$

$$\text{b) } 81^\circ \quad \text{c) } 132^\circ \quad \text{d) } 108^\circ$$

$$31. 44^\circ$$

$$32. \sin \sphericalangle B = \frac{4\sqrt{41}}{41}, \\ \cos \sphericalangle B = \frac{5\sqrt{41}}{41}, \operatorname{tg} \sphericalangle B = \frac{4}{5}$$

$$33. \sin \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{7}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$34. \sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}, \cos \alpha = -\frac{2}{5}$$

$$35. \cos \alpha = \frac{11}{61}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{60}{11} \text{ lub } \\ \cos \alpha = -\frac{11}{61}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{60}{11}$$

$$36. \frac{55}{73}$$

27. Kąt α spełnia warunki: $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ i $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Zatem

A. $|\cos \alpha| < |\sin \alpha|$.

B. $\sin \alpha + \cos \alpha$ jest liczbą niewymierną.

C. $\operatorname{tg} \alpha < -1$.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

28. W trójkącie prostokątnym ABC , w którym kąt C jest prosty, dane są długości dwóch boków. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta $BAC = \alpha$ oraz odczytaj z tablic miarę kąta α z dokładnością do 1° .

a) $|AC| = 2, |AB| = 8$

c) $|AC| = 9, |BC| = 3$

b) $|BC| = 3, |AB| = 4$

d) $|AC| = 5, |AB| = 4$

29. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\frac{\sin^2 45^\circ - \operatorname{tg}^2 30^\circ}{\cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}$

b) $\frac{\sin 120^\circ - \cos 135^\circ}{\frac{\cos 0^\circ}{\sin 135^\circ} - \operatorname{tg} 120^\circ}$

30. Kąt α jest wypukły i spełnia podany warunek. Wyznacz za pomocą tablic trygonometrycznych lub kalkulatora miarę tego kąta z dokładnością do 1° .

a) $\sin \alpha = 0,515$

b) $\operatorname{tg} \alpha = 6,3$

c) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$

d) $\operatorname{tg} \alpha = -3$

31. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 24 cm, a ramię ma długość 32 cm. Wyznacz z dokładnością do 1° miarę kąta między ramionami tego trójkąta.

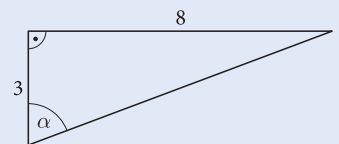
32. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta B w trójkącie ABC , jeżeli $A = (-2, 1)$, $B = (3, 1)$, $C = (-2, 5)$.

33. Kąt α jest ostry i $\cos \alpha = \frac{2}{7}$. Wyznacz wartości sinusa i tangensa kąta α .

34. Kąt α jest wypukły i $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{2}$. Wyznacz wartości sinusa i cosinusa kąta α .

35. Kąt α jest wypukły i $\sin \alpha = \frac{60}{61}$. Wyznacz wartości cosinusa i tangensa kąta α .

36. Na podstawie rysunku wyznacz $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$.



37. Kąt α jest ostry i $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $\left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}\right)^2$.

D

38. Wykaż, że wartość wyrażenia $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} + \sin^2 \alpha$ jest stała dla każdego kąta ostrego α .

39. Wyznacz kąt, którego wierzchołkiem jest początek układu współrzędnych, jedno ramię pokrywa się z dodatnią półosią x , a drugie ramię przechodzi przez punkt $(-3\sqrt{6}, 3\sqrt{2})$.

40. Oblicz wartość podanego wyrażenia bez korzystania z tablic matematycznych.

a) $\sin^2 13^\circ + \sin^2 77^\circ$

b) $1 - \operatorname{tg} 36^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 54^\circ$

c) $\sin 25^\circ - \cos 155^\circ \cdot \operatorname{tg} 155^\circ$

41. Ramię wodzące kąta α_M przechodzi przez punkt M . Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór wszystkich punktów M , dla których

a) $75^\circ \leq \alpha_M \leq 120^\circ$.

b) $30^\circ < \alpha_M \leq 135^\circ$.

42. Podaj założenia, jakie musi spełniać kąt wypukły α i przekształć wyrażenie

$$\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha} \text{ do prostszej postaci.}$$

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

43. Oblicz pole i obwód trójkąta równoramiennego, którego podstawa ma 24 cm, a kąty ostre przy podstawie mają po 32° . Wyniki podaj z dokładnością do pierwszego miejsca po przecinku.

44. Suma długości dwóch boków trójkąta wynosi 30 cm. Jeden z tych boków jest o 50% dłuższy od drugiego, a kąt zawarty między nimi ma 77° . Oblicz pole tego trójkąta z dokładnością do pierwszego miejsca po przecinku.

45. Kąty przy dłuższej podstawie trapezu mają miary 50° i 80° . Krótsza podstawa ma długość 11 cm, a wysokość trapezu jest równa 8 cm. Oblicz pole tego czworokąta. Wynik zaokrąglij do pierwszego miejsca po przecinku.

46. Dłuższa podstawa trapezu prostokątnego ma 15 cm długości, dłuższe ramię ma 9 cm, a miara kąta rozwartego wynosi 148° . Oblicz pole trapezu. Wynik zaokrąglij do pierwszego miejsca po przecinku.

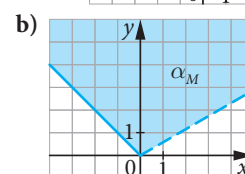
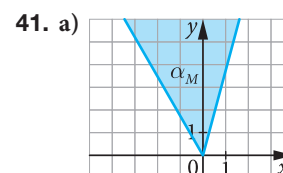
37. $3 + 2\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} 38. \quad \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} + \sin^2 \alpha &= \frac{1}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1} + \\ &+ \sin^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} + \sin^2 \alpha = 1 \end{aligned}$$

Zatem wartość tego wyrażenia nie zależy od miary kąta ostrego α .

39. 150°

40. a) 1 b) 0 c) 0



42. $1 + \sin \alpha$, $\alpha \neq 90^\circ$

43. $P = 90,0 \text{ cm}^2$, $\text{obw} = 52,3 \text{ cm}$

44. $105,2 \text{ cm}^2$

45. $120,5 \text{ cm}^2$

46. $53,5 \text{ cm}^2$

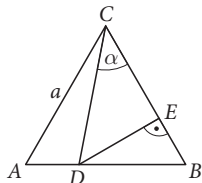
47. $2\sqrt{37}$

48. 18 cm^2

49. $P = \frac{77\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$,

$obw = (7\sqrt{3} + 29) \text{ cm}$

50.

Dane: $|AB| = |BC| = |AC|$,

$|AD| : |DB| = 1 : 2$

Oznaczamy: $\alpha = \angle DCB$, a – bok trójkąta ABC ; $DE \perp BC$,

więc $\tan \alpha = \frac{|DE|}{|CE|}$, $\sin \alpha = \frac{|DE|}{|CD|}$

$|EB| = \frac{1}{2}|BD| = \frac{1}{3}a$, stąd $|CE| = \frac{2}{3}a$,

więc $|DE| = |EB| \cdot \sqrt{3} = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan \alpha = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}a} = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$|CD|^2 = |CE|^2 + |DE|^2 = \frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{9}a^2 = \frac{5}{9}a^2 \Rightarrow |CD| = \frac{a\sqrt{5}}{3}$

$\sin \alpha = \frac{|DE|}{|CD|} = \frac{a\sqrt{3}}{3} : \frac{a\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

Odp.: $\sin \angle DCB = \frac{\sqrt{21}}{7}$

51. a) $\frac{\sin \alpha - \tan \alpha}{\cos \alpha} < 0$. Wskazówka:

Skorzystaj z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego.

b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

52. $\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha$

$L = \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1) =$

$= \sin^2 \alpha (-\cos^2 \alpha) =$

$= -\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$

$P = \cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha =$

$= \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1) =$

$= \cos^2 \alpha (-\sin^2 \alpha) =$

$= -\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = L$

dla $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$

53. Teza: $\left(\frac{1}{1 - \cos \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 - \sin \alpha} - \frac{1}{1 + \sin \alpha} \right) = \frac{4}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$

Założenie: $\alpha \neq 0^\circ$, $\alpha \neq 90^\circ$, $\alpha \neq 180^\circ$

$L = \frac{1 + \cos \alpha - (1 - \cos \alpha)}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} =$

$\frac{1 + \sin \alpha - (1 - \sin \alpha)}{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)} =$

$\frac{2 \cos \alpha}{2 \sin \alpha} =$

$\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} =$

$\frac{2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{2 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{4}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = P$

47. W trapezie prostokątnym $ABCD$ kąt przy wierzchołku D jest rozwarty, a kąt między przekątną DB i dłuższą podstawą AB ma miarę 60° . Podstawa AB tego trapezu i przekątna DB mają długości odpowiednio równe 11 i 6. Oblicz długość drugiej przekątnej trapezu.

48. Dany jest okrąg o środku O i promieniu $r = 6 \text{ cm}$. Z punktu A leżącego na tym okręgu poprowadzono równej długości cięciwy AS i AW , które utworzyły kąt 30° . Oblicz pole czworokąta $SOWA$.

49. Ramiona trapezu o podstawach długości 4 cm i 18 cm tworzą z dłuższą podstawą kąty o miarach 60° i 30° . Oblicz pole i obwód tego trapezu.

* 50. W trójkącie równobocznym ABC punkt D dzieli bok AB na takie odcinki, że $|AD| : |DB| = 1 : 2$. Oblicz sinus kąta DCB .

51. Miara jednego z kątów ostrych w trójkącie prostokątnym jest równa α .

a) Określ znak wyrażenia $\frac{\sin \alpha - \tan \alpha}{\cos \alpha}$.

b) Oblicz wartość wyrażenia $\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$ dla $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

D 52. Udowodnij, że dla kąta wypukłego α podana równość jest prawdziwa.

$\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha$

D 53. Udowodnij tożsamość. Dla jakich kątów wypukłych tożsamość jest prawdziwa?

$\left(\frac{1}{1 - \cos \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 - \sin \alpha} - \frac{1}{1 + \sin \alpha} \right) = \frac{4}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$

* 54. Kąt α jest wypukły i $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{3}$. Oblicz $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$.

* 55. Kąt α jest wypukły i $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{3}{8}$. Oblicz $\sin \alpha + \cos \alpha$.

54. $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ i $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{3}$

$$\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha) (\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{2}{3} (1 - \sin \alpha \cos \alpha) (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 =$$

$$= \left(\frac{2}{3} \right)^2 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{4}{9} 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{4}{9} - 1 = -\frac{5}{9} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{5}{18}$$

zatem: $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = \frac{2}{3} (1 - \sin \alpha \cos \alpha) = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{5}{18} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{23}{18} = \frac{23}{27}$

Odp.: $\frac{23}{27}$

55. $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ i $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{3}{8}$ ($\alpha \in \langle 90^\circ; 180^\circ \rangle$)

Należy obliczyć $a = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2$, a następnie uwzględnić dwie odpowiedzi: $\sqrt{a}$ i $-\sqrt{a}$.

$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + 2 \left(-\frac{3}{8} \right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Zatem $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$ lub $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{1}{2}$.

Odp.: $-\frac{1}{2}$ lub $\frac{1}{2}$