

Geometria analityczna

2



Umiejętności

Po szkole podstawowej
i klasie pierwszej szkoły
ponadpodstawowej uczeń:

- znajduje współrzędne danych (na rysunku) punktów kratowych oraz rysuje w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty kratowe o danych współrzędnych całkowitych (dowolnego znaku),
- znajduje środek odcinka, którego końce mają dane współrzędne (całkowite lub wymierne) oraz znajduje współrzędne drugiego końca odcinka, gdy dany jest jeden koniec i środek,
- oblicza długość odcinka, którego końce są danymi punktami kratowymi w układzie współrzędnych,
- dla danych punktów kratowych A i B znajduje inne punkty kratowe należące do prostej AB ,
- stosuje wzory na długość okręgu i pole koła,
- rozpoznaje figury osiowosymetryczne i wskazuje ich osie symetrii oraz rozpoznaje figury środkowosymetryczne i wskazuje ich środki symetrii,
- wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty,
- opisuje zbiory punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej,
- zapisuje równanie prostej w postaci ogólnej,
- wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do danej prostej i przechodzi przez dany punkt,
- bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań,
- oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych.

Po tym dziale uczeń:

- oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych oraz odległość punktu od prostej,
- wyznacza współrzędne środka odcinka,
- stosuje geometryczną interpretację współczynnika kierunkowego prostej,
- opisuje proste równoległe i prostopadłe za pomocą równań w postaci ogólnej,
- opisuje okrąg za pomocą równania $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ oraz koło za pomocą nierówności $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$,
- określa wzajemne położenie prostej i okręgu (koła); znajduje punkty wspólne prostej i okręgu,
- wyznacza równanie stycznej do okręgu,
- wyznacza środek symetrii w figurach środkowosymetrycznych, obraz figur w symetrii środkowej na płaszczyźnie,
- wyznacza oś symetrii w figurach osiowosymetrycznych, obraz figur w symetrii osiowej na płaszczyźnie,
- wyznacza obraz okręgu lub wielokąta w symetrii środkowej o środku w początku układu współrzędnych oraz symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych,
- klasyfikuje figury ze względu na liczbę osi symetrii; rozpoznaje wielokąty foremne.

Uwagi metodyczne

Równanie prostej w postaci ogólnej ma wiele zalet. Ujednolica równania wszystkich prostych na płaszczyźnie kartezjańskiej, umożliwia pozbycie się niewygodnych ułamków, a przez wyznaczenie punktów przecięcia z osiami układu pozwala na szybkie i dokładne narysowanie prostej. Ostatnia czynność przydaje się podczas graficznego rozwiązywania układów równań.

◀1.6. Przekształć równanie prostej z postaci ogólnej do postaci kierunkowej, jeśli to możliwe.

a) $2x - y = 0$

b) $\frac{1}{2}x + 3y - 1 = 0$

c) $2y - 8 = 0$

d) $3x - 5 = 0$

e) $-6x - 2y + 1 = 0$

f) $x - 3y - 4 = 0$

Odp.: a) $y = 2x$

b) $y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$

c) $y = 4$

d) brak równania w postaci kierunkowej

e) $y = -3x + \frac{1}{2}$

f) $y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$

1. Warto powtórzyć – równanie prostej

Równanie prostej na płaszczyźnie

Równanie $ax + by + c = 0$ o zmiennych x i y opisuje:

- całą płaszczyznę, gdy $a = b = c = 0$,
- zbiór pusty, gdy $a = b = 0$ i $c \neq 0$,
- prostą, gdy a i b nie są jednocześnie równe 0.

Każdą prostą na płaszczyźnie możemy opisać za pomocą równania:

$$ax + by + c = 0, \text{ gdzie } a^2 + b^2 \neq 0$$

- Warunek $a^2 + b^2 \neq 0$ oznacza, że a i b nie mogą być **jednocześnie** równe 0.
- Warunek $ab \neq 0$ oznacza, że **żadna** z liczb a, b nie może być równa 0.

- Jeżeli $b \neq 0$, to równanie $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ jest wzorem funkcji liniowej zmiennej x i opisuje na płaszczyźnie prostą, która jest wykresem tej funkcji.
- Jeżeli $b = 0$ i $a \neq 0$, to równanie $x = -\frac{c}{a}$ opisuje na płaszczyźnie prostą prostopadłą do osi x , która nie jest wykresem żadnej funkcji.

Równanie $ax + by + c = 0$, w którym a i b nie są jednocześnie równe zero, czyli równanie liniowe z dwiema niewiadomymi, nazywamy **równaniem prostej w postaci ogólnej**, natomiast równanie $y = mx + n$ **równaniem kierunkowym prostej o współczynniku kierunkowym m i wyrazie wolnym n** .

Przykład 1 ◀ zad. 1.6

Przekształćmy dane równanie prostej z postaci ogólnej do postaci kierunkowej.

Rozwiązanie

a) $3x - y - 5 = 0$

$$-y = -3x + 5$$

$$y = 3x - 5$$

b) $x + 4y - 7 = 0$

$$4y = -x + 7$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$$

Jeżeli prosta ma równanie w postaci kierunkowej, to jest ono tylko jedno.

Przykład 2 ◀ zad. 1.8

Przekształćmy dane równanie kierunkowe prostej do postaci ogólnej.

Rozwiązanie

a) $y = \sqrt{11}x - 6$

$$-\sqrt{11}x + y + 6 = 0$$

◀ wystarczy przenieść wszystkie wyrazy na jedną stronę i uporządkować je

◀1.8. Przekształć równanie prostej z postaci kierunkowej do postaci ogólnej.

a) $y = 3x + 1$

c) $y = -\frac{2}{9}x + \frac{2}{3}$

e) $y = \frac{3}{4}x - 5$

b) $y = \frac{1}{5}x - 3$

d) $y = -5x$

f) $y = -\frac{1}{7}x + \frac{1}{2}$

Odp.: a) $3x - y + 1 = 0$ b) $x - 5y - 15 = 0$ c) $2x + 9y - 6 = 0$

d) $5x + y = 0$ e) $3x - 4y - 20 = 0$ f) $2x + 14y - 7 = 0$

$$b) y = -\frac{6}{7}x + \frac{3}{2}$$

$$\frac{6}{7}x + y - \frac{3}{2} = 0$$

$$12x + 14y - 21 = 0$$

Równanie danej prostej w postaci ogólnej można zapisać (»»») na nieskończenie wiele sposobów (jedne równania powstają z innych przez pomnożenie przez liczbę różną od zera).

← jeżeli zależy nam na współczynnikach całkowitych, to obydwie strony równania mnożymy przez 14

Przykład 3 ◀ zad. 1.10

Napiszemy równanie prostej przechodzącej przez dane punkty.

a) $(-1, 1)$ i $(-1, 12)$

b) $(-1, -4)$ i $(7, 12)$

Rozwiązanie

a) Pierwsze współrzędne obu punktów są takie same, zatem prosta przechodząca przez te punkty jest prostopadła do osi x i ma równanie $x = -1$.

b) Pierwsze współrzędne obu punktów są różne, zatem do rozwiązania zadania wykorzystamy z równania kierunkowego prostej $y = mx + n$.

$$\begin{cases} -4 = -m + n \\ 12 = 7m + n \end{cases} \quad \begin{cases} 4 = m - n \\ 12 = 7m + n \end{cases} \quad \begin{cases} 4 = m - n \\ 16 = 8m \end{cases} \quad \begin{cases} m = 2 \\ n = -2 \end{cases}$$

Odp.: a) $x = -1$ b) $y = 2x - 2$

Przykład 4 ◀ zad. 1.11

Wyznamy punkty przecięcia prostej o równaniu $2x - 5y + 10 = 0$ z osiami układu współrzędnych.

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć punkt przecięcia prostej z osią x , rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 10 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{każdy punkt osi } x \text{ ma współrzędną } y = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 10 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \end{cases}$$

Punkt przecięcia prostej z osią x ma współrzędne $(-5, 0)$.

Aby wyznaczyć punkt przecięcia prostej z osią y , rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 10 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{każdy punkt osi } y \text{ ma współrzędną } x = 0$$

$$\begin{cases} -5y + 10 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Punkt przecięcia prostej z osią y ma współrzędne $(0, 2)$.

Odp.: Punkty przecięcia prostej z osiami to $(-5, 0)$ i $(0, 2)$.

◀ 1.10. Napisz równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty.

a) $A = (4, -5)$ i $B = (2, 3)$

b) $A = (-9, -1)$ i $B = (3, 3)$

c) $A = (2, 6)$ i $B = \left(7, 3\frac{1}{2}\right)$

d) $A = \left(-1, \frac{1}{3}\right)$ i $B = \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$

Odp.: a) $y = -4x + 11$

b) $y = \frac{1}{3}x + 2$

c) $y = -\frac{1}{2}x + 7$

d) $y = x + 1\frac{1}{3}$

◀ 1.11. Wyznamy punkty przecięcia prostej z osiami układu współrzędnych i narysuj tę prostą.

a) $x + 2y - 4 = 0$

b) $3x - y + 6 = 0$

c) $-2x + 4y - 1 = 0$

d) $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 1 = 0$

Odp.: a) $(0, 2), (4, 0)$

b) $(0, 6), (-2, 0)$

c) $\left(0, \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

d) $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

Punkt $A = (x_A, y_A)$ jest punktem wspólnym prostej $k: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ i prostej $l: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy jego współrzędne spełniają równania obu prostych, czyli gdy para liczb (x_A, y_A) należy do zbioru rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Równania prostych równoległych i prostopadłych

Przypomnijmy zależności między równaniami prostych równoległych i prostych prostopadłych.

Prosta k	Prosta l taka, że $l \parallel k$	Prosta p taka, że $p \perp k$
$y = mx + n, m \neq 0$	$y = mx + n_1$	$y = -\frac{1}{m}x + n_2$
$x = a$	$x = a_1$	$y = a_2$
$y = b$	$y = b_1$	$x = b_2$

◀1.20. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt A i równoległej do prostej l .

a) $A = (2, 3)$, $l: y = 5x - 2$

b) $A = (-3, -1)$, $l: y = \frac{2}{3}x - 2$

c) $A = (\frac{1}{2}, 3)$, $l: y = -4x + 1\frac{2}{3}$

d) $A = (3, -2)$, $l: x = -2$

e) $A = (-4, 5)$, $l: y = -\frac{1}{2}x + 3$

f) $A = (\sqrt{2}, 4)$, $l: y = 2\sqrt{2}x + 3$

Odp.: a) $y = 5x - 7$

b) $y = \frac{2}{3}x + 1$

c) $y = -4x + 5$

d) $x = 3$

e) $y = -\frac{1}{2}x + 3$

f) $y = 2\sqrt{2}x$

Przykład 5 ◀ zad. 1.20, 1.21

Dana jest prosta $l: y = -3x + 2$. Przez punkt $A = (4, 3)$ poprowadzono prostą k równoległą do prostej l oraz prostą h prostopadłą do l . Napiszemy równania prostych k i prostej h .

Rozwiązanie

- $k: y = -3x + n$
 $3 = -3 \cdot 4 + n$
 $n = 15$
 $k: y = -3x + 15$

← każda prosta równoległa do l ma równanie tej postaci

← $A = (4, 3) \in k$

- $h: y = \frac{1}{3}x + c$
 $3 = \frac{4}{3} + c$
 $c = \frac{5}{3}$
 $h: y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

← każda prosta prostopadła do l ma równanie tej postaci

← $A = (4, 3) \in h$

Odp.: $k: y = -3x + 15$, $h: y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

◀1.21. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt A i prostopadłej do prostej l .

a) $A = (6, 5)$

$l: y = -3x + 1$

d) $A = (-1, -7)$

$l: y = -0,2x + 5,6$

b) $A = (0, -4)$

$l: y = 7x + 1$

e) $A = (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$

$l: x = 1\frac{1}{2}$

c) $A = (\sqrt{12}, 4)$

$l: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$

f) $A = (-3, 1 + \sqrt{2})$

$l: y = \frac{3\sqrt{2}}{2}x + 13$

Odp.: a) $y = \frac{1}{3}x + 3$ b) $y = -\frac{1}{7}x - 4$ c) $y = -\sqrt{3}x + 10$

d) $y = 5x - 2$ e) $y = 2\frac{1}{2}$ f) $y = -\frac{\sqrt{2}}{3}x + 1$

Zadania

W każdym z zadań 1.1–1.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1.1. Wskaż równanie, za pomocą którego można opisać wykres funkcji

$$f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{2}{3}.$$

A. $-9x + 15y + 10 = 0$

C. $-9x - 15y + 10 = 0$

B. $9x - 15y - 10 = 0$

D. $9x + 15y + 10 = 0$

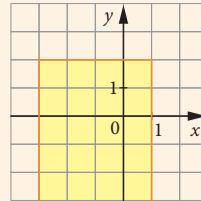
1.2. Wskaż zbiór, którego ilustracją jest figura przedstawiona na rysunku.

A. $D = \{(x, y): -3 \leq x \leq 1 \text{ i } y < 2\}$

B. $D = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } -3 \leq x \leq 2\}$

C. $D = \{(x, y): -3 < x < 1 \text{ i } y \leq 2\}$

D. $D = \{(x, y): -3 \leq x \leq 1 \text{ i } y \leq 2\}$



1.3. Wskaż punkt przecięcia prostej $18x - 4y - 3 = 0$ z osią x .

A. $(0, \frac{1}{6})$

B. $(-\frac{3}{4}, 0)$

C. $(\frac{1}{6}, 0)$

D. $(0, \frac{3}{4})$

1.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Równanie $x + 3y - 2 = 0$ jest równaniem prostej przechodzącej przez I, II i IV ćwiartkę układu współrzędnych.

B. Prosta o równaniu $5x - 7 = 0$ jest równoległa do osi y .

C. Prosta o równaniu $3y - 3\pi = 0$ nie jest wykresem funkcji.

1.5. Zaznacz na płaszczyźnie kartezjańskiej podany zbiór.

a) $A = \{(x, y): -3 \leq x \leq 1\}$

b) $B = \{(x, y): x \in \langle -2; 4 \rangle \text{ i } y = -\frac{1}{2}x\}$

c) $C = \{(x, y): x < 0 \text{ i } 1 < y < 3\}$

d) $D = \{(x, y): x \in \mathbf{Z} \text{ i } y = 2\}$

e) $E = \{(x, y): x \in \langle -1; 2 \rangle \text{ i } y = 1 - 2x\}$

f) $F = \{(x, y): x \in \langle 0; 3 \rangle \text{ i } y \in \langle -3; 0 \rangle\}$

* g) $G = \{(x, y): |x| < 5 \text{ i } y = |x| + 1\}$

* h) $H = \{(x, y): |x| < 4 \text{ i } y = \sqrt{|-x|}\}$

Odpowiedzi i rozwiązania

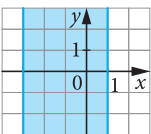
1.1. C

1.2. D

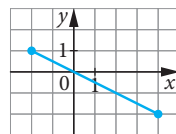
1.3. C

1.4. P, P, F

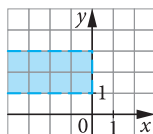
1.5. a)



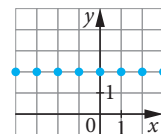
b)



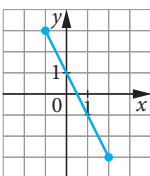
c)



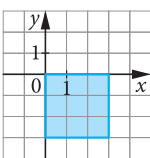
d)



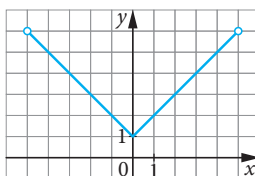
e)



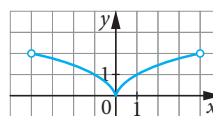
f)



g)



h)



- 1.6. a)** $y = 2x$ **b)** $y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$
c) $y = 4$ **d)** brak równania
 w postaci kierunkowej
e) $y = -3x + \frac{1}{2}$ **f)** $y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$

- 1.7. a)** $a = -5$ **b)** $a = 1$
c) $a = \frac{3}{4}$ **d)** $a = \frac{\pi}{2}$

- 1.8. a)** $3x - y + 1 = 0$
b) $x - 5y - 15 = 0$
c) $2x + 9y - 6 = 0$
d) $5x + y = 0$
e) $3x - 4y - 20 = 0$
f) $2x + 14y - 7 = 0$

- 1.9. a)** tak **b)** tak **c)** nie
d) nie **e)** nie **f)** tak

- 1.10. a)** $y = -4x + 11$

b) $y = \frac{1}{3}x + 2$

c) $y = -\frac{1}{2}x + 7$

d) $y = x + 1\frac{1}{3}$

1.11. a) $(0, 2), (4, 0)$

b) $(0, 6), (-2, 0)$

c) $(0, \frac{1}{4}), (-\frac{1}{2}, 0)$

d) $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$

1.12. a) np. $(-3, 3), (0, 2),$

$(1, 1\frac{2}{3}), (3, 1), (6, 0)$

b) np. $(-2, \frac{6}{7}), (-\frac{2}{7}, 0),$

$(0, -\frac{1}{7}), (2, -1\frac{1}{7}), (-4, 1\frac{6}{7})$

1.13. a) $(0, 2)$

b) $(3, -1)$

c) $(1, -4)$

d) brak punktów wspólnych

e) $(0, -2)$

f) proste pokrywają się

1.14. Szukany zbiór punktów to:

a) suma dwóch prostych: $x = 7$

i $y = 0,$

b) suma dwóch prostych: $x = -3$

i $y = x,$

c) prosta $x = 6,$

d) suma dwóch prostych: $x = 1$

i $x = 3,$

e) $\{(-5, 2)\},$

f) prosta $x = -3,$

g) $\{(-7, 1)\},$

h) prosta $y = -5.$

1.6. Przekształć równanie prostej z postaci ogólnej do postaci kierunkowej, jeśli to możliwe.

a) $2x - y = 0$

c) $2y - 8 = 0$

e) $-6x - 2y + 1 = 0$

b) $\frac{1}{2}x + 3y - 1 = 0$

d) $3x - 5 = 0$

f) $x - 3y - 4 = 0$

1.7. Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej o podanym równaniu.

a) $5x + y + 1 = 0$

c) $3x - 4y + 2 = 0$

b) $x - y + 9 = 0$

d) $\pi x - 2y + 3 = 0$

1.8. Przekształć równanie prostej z postaci kierunkowej do postaci ogólnej.

a) $y = 3x + 1$

c) $y = -\frac{2}{9}x + \frac{2}{3}$

e) $y = \frac{3}{4}x - 5$

b) $y = \frac{1}{5}x - 3$

d) $y = -5x$

f) $y = -\frac{1}{7}x + \frac{1}{2}$

1.9. Sprawdź, czy oba równania przedstawiają tę samą prostą.

a) $x - y + \frac{5}{2} = 0, -x + y - 2\frac{1}{2} = 0$

d) $4x - 2y + 1 = 0, -2x + y - 1 = 0$

b) $-2x + y = 0, 2x - y = 0$

e) $7x - 5 = 0, 7y - 5 = 0$

c) $-3x + 5y - 1 = 0, 3x + 5y - 1 = 0$

f) $1\frac{1}{2}x + 3y - 4 = 0, 3x + 6y - 8 = 0$

1.10. Napisz równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty.

a) $A = (4, -5)$ i $B = (2, 3)$

c) $A = (2, 6)$ i $B = (7, 3\frac{1}{2})$

b) $A = (-9, -1)$ i $B = (3, 3)$

d) $A = (-1, \frac{1}{3})$ i $B = (-\frac{1}{3}, 1)$

1.11. Wyznacz punkty przecięcia prostej z osiami układu współrzędnych i narysuj tę prostą.

a) $x + 2y - 4 = 0$

c) $-2x + 4y - 1 = 0$

b) $3x - y + 6 = 0$

d) $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 1 = 0$

1.12. Napisz pięć par liczb spełniających podane równanie.

a) $x + 3y - 6 = 0$

b) $7x + 14y + 2 = 0$

1.13. Wyznacz punkt wspólny prostych k i l .

a) $k: 2x - 3y + 6 = 0$

$l: x + 2y - 4 = 0$

b) $k: -\frac{2}{3}x - y + 1 = 0$

$l: x - y - 4 = 0$

c) $k: 4x - y - 8 = 0$

$l: x + \frac{1}{2}y + 1 = 0$

d) $k: -3x + y - 2 = 0$

$l: 1,5x - 0,5y + 2 = 0$

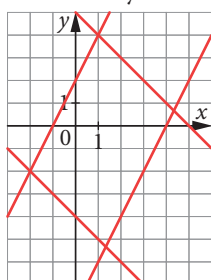
e) $k: 3x + 0,6y + 1,2 = 0$

$l: 2x - 3y - 6 = 0$

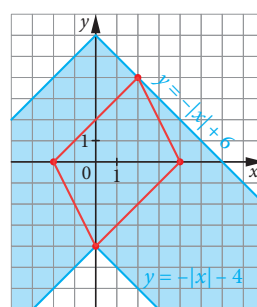
f) $k: 5x + 3y - 6 = 0$

$l: 2x + 1,2y - 2,4 = 0$

1.15. nie ma osi symetrii,
ma środek symetrii



1.16.



Odp.: $m \in \langle -4; 6 \rangle$

* **1.14.** Narysuj w układzie współrzędnych zbiór punktów opisany danym równaniem.

- | | |
|-------------------------|----------------------------|
| a) $(x-7)y = 0$ | e) $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 0$ |
| b) $(x+3)(x-y) = 0$ | f) $(x+3)^2 = 0$ |
| c) $x^2 - 12x + 36 = 0$ | g) $ x+7 + y-1 = 0$ |
| d) $x^2 - 4x + 3 = 0$ | h) $y^2 + 10y + 25 = 0$ |

1.15. Narysuj w jednym układzie współrzędnych proste o równaniach: $y = -x + 5$, $y = 2x - 8$, $y = -x - 4$ oraz $y = 2x + 2$. Ile osi symetrii ma figura będąca sumą tych prostych? Czy ma środek symetrii?

* **1.16.** Dla jakich wartości m wykres funkcji $f(x) = -|x| + m$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z równoległobokiem o wierzchołkach $(0, -4)$, $(4, 0)$, $(2, 4)$, $(-2, 0)$?

* **1.17.** Dla jakich wartości m wykres funkcji $f(x) = mx + m + 4$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z prostokątem o wierzchołkach $(3, 3)$, $(-3, 3)$, $(-3, -1)$, $(3, -1)$?

* **1.18.** Dobierz m tak, aby prosta o równaniu $(m+2)x + y = m - 1$ nie miała punktów wspólnych z podaną ćwiartką układu współrzędnych.

- a) I b) II c) III d) IV

* **1.19.** Dla jakich wartości m prosta o podanym równaniu przechodzi przez pierwszą, trzecią i czwartą ćwiartkę układu współrzędnych?

- a) $(m+3)x - y + m + 1 = 0$ b) $(1-m)x - y + m + 5 = 0$

1.20. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt A i równoległej do prostej l .

- | | | | |
|--------------------------------------|-----------------------------|------------------------|----------------------------|
| a) $A = (2, 3)$ | $l: y = 5x - 2$ | d) $A = (3, -2)$ | $l: x = -2$ |
| b) $A = (-3, -1)$ | $l: y = \frac{2}{3}x - 2$ | e) $A = (-4, 5)$ | $l: y = -\frac{1}{2}x + 3$ |
| c) $A = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ | $l: y = -4x + 1\frac{2}{3}$ | f) $A = (\sqrt{2}, 4)$ | $l: y = 2\sqrt{2}x + 3$ |

1.21. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt A i prostopadłej do prostej l .

- | | | | |
|-------------------------|----------------------------------|---|------------------------------------|
| a) $A = (6, 5)$ | $l: y = -3x + 1$ | d) $A = (-1, -7)$ | $l: y = -0,2x + 5,6$ |
| b) $A = (0, -4)$ | $l: y = 7x + 1$ | e) $A = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ | $l: x = 1\frac{1}{2}$ |
| c) $A = (\sqrt{12}, 4)$ | $l: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$ | f) $A = (-3, 1 + \sqrt{2})$ | $l: y = \frac{3\sqrt{2}}{2}x + 13$ |

1.19. $y = ax + b$, $a > 0$ i $b < 0$

a) $y = (m+3)x + m + 1$
 $m+3 > 0$ i $m+1 < 0$
 $m > -3$ i $m < -1$
 $m \in (-3; -1)$

b) $y = (1-m)x + m + 5$
 $1-m > 0$ i $m+5 < 0$
 $m < 1$ i $m < -5$
 $m \in (-\infty; -5)$

Odp.: a) $m \in (-3; -1)$

b) $m \in (-\infty; -5)$

1.20. a) $y = 5x - 7$ b) $y = \frac{2}{3}x + 1$

c) $y = -4x + 5$ d) $x = 3$

e) $y = -\frac{1}{2}x + 3$ f) $y = 2\sqrt{2}x$

1.21. a) $y = \frac{1}{3}x + 3$ b) $y = -\frac{1}{7}x - 4$

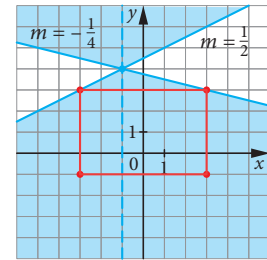
c) $y = -\sqrt{3}x + 10$ d) $y = 5x - 2$

e) $y = 2\frac{1}{2}$ f) $y = -\frac{\sqrt{2}}{3}x + 1$

1.14.–1.16. Patrz s. 44.

1.17. $f(x) = mx + m + 4$

$f(x) = m(x+1) + 4$, więc wykresy wszystkich takich funkcji przechodzą przez punkt $(-1, 4)$.



Odp.: $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$

1.18. $(m+2)x + y = m - 1$

$y = -(m+2)x + m - 1$

$y = ax + b$, gdzie $a = -(m+2)$,
 $b = m - 1$

a) $a \leq 0$ i $b \leq 0$

$-(m+2) \leq 0$ i $m - 1 \leq 0$

$m \geq -2$ i $m \leq 1$

$m \in [-2; 1]$

b) $a \geq 0$ i $b \leq 0$

$-(m+2) \geq 0$ i $m - 1 \leq 0$

$m \leq -2$ i $m \leq 1$

$m \in (-\infty; -2]$

c) $a \leq 0$ i $b \geq 0$

$-(m+2) \leq 0$ i $m - 1 \geq 0$

$m \geq -2$ i $m \geq 1$

$m \in [1; \infty)$

d) $a \geq 0$ i $b \geq 0$

$-(m+2) \geq 0$ i $m - 1 \geq 0$

$m \leq -2$ i $m \geq 1$

Nie ma takiego m .

Odp.: a) $m \in [-2; 1]$

b) $m \in (-\infty; -2]$

c) $m \in [1; \infty)$

d) Nie ma takiego m .

Uwagi metodyczne

W tym temacie wprowadzamy wzory: na odległość punktów płaszczyzny kartezjańskiej oraz na współrzędne środka odcinka. Pierwszy wynika z prostego zastosowania twierdzenia Pitagorasa. Drugiego nie uzasadniamy (żmudne rachunki), tylko podajemy metodę, za pomocą której można wykazać jego prawdziwość.

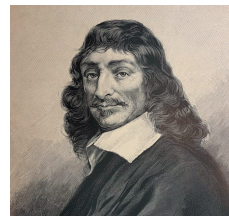
2. Odległość na płaszczyźnie kartezjańskiej

Umiejętności:

- obliczanie odległości między dwoma punktami
- wyznaczanie współrzędnych środka odcinka

Planimetria jest częścią geometrii zajmującą się badaniem własności figur na płaszczyźnie, a jej początki sięgają czasów przed naszą erą. Około 300 lat p.n.e. w dziele *Elementy* Euklides zawarł znane wówczas twierdzenia planimetrii w formie teorii aksjomatycznej.

W pierwszej i drugiej klasie prezentowaliśmy fragmenty geometrii euklidesowej. Tutaj przedstawimy inny sposób opisywania własności figur na płaszczyźnie, nazywany **geometrią analityczną**. Jej twórcy, żyjącemu w XVII w. Kartezjuszowi, matematyka zawdzięcza m.in. wprowadzenie pojęcia układu współrzędnych. W geometrii analitycznej badanie figur sprowadza się do badania opisujących je liczb i funkcji.



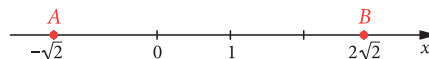
René Descartes, Kartezjusz (1596–1650)

– matematyk, fizyk i filozof francuski. Autor licznych dzieł naukowych, m.in. *Rozprawy o metodzie*. W tym traktacie filozoficzno-matematycznym znalazł się pierwszy opis układu współrzędnych na płaszczyźnie; stamtąd pochodzi też słynna maksyma „Myślę, więc jestem” (*Cogito ergo sum*). Kartezjusz wprowadził m.in. pojęcia zmiennej i funkcji, sformułował prawa odbicia i załamania światła oraz zależność między masą a prędkością ciała, zbliżoną do obecnej zasady zachowania pędu.

Odległość między punktami

Przypomnijmy:

- Płaszczyznę kartezjańską nazywamy płaszczyznę z wprowadzonym na niej prostokątnym układem współrzędnych.
- Odległość między punktami A i B , czyli długość odcinka AB , oznaczamy $|AB|$.
- Odległość między punktami $A = (a)$ i $B = (b)$ na osi liczbowej jest równa $|AB| = |a - b|$.



Zatem gdy $A = (-\sqrt{2})$ i $B = (2\sqrt{2})$, to $|AB| = |-\sqrt{2} - 2\sqrt{2}| = |-3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$.

ZZ i KPU

tematy 2.1, 2.2

Multiteka

- Środek ciężkości trójkąta

dla nauzyciela.pl | Kartkówka 2.2

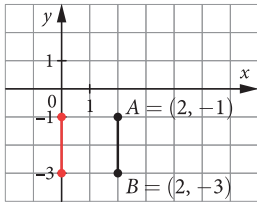
Generator
testów i sprawdzianów

Pokażemy teraz, jak mierzy się odległość między punktami na płaszczyźnie kartezjańskiej. Przeanalizujemy najpierw sytuację, gdy pierwsze lub drugie współrzędne punktów są takie same.

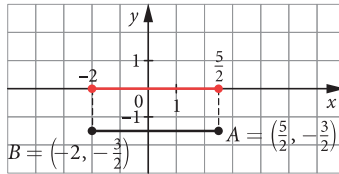
Do obliczania odległości na płaszczyźnie kartezjańskiej musimy mieć identyczne jednostki na obydwu osiach.

Przykład 1

- a) Długość odcinka AB jest taka sama jak odległość między punktami odpowiadającymi liczbom -1 i -3 na osi y , czyli $|AB| = |-1 - (-3)| = |2| = 2$.



- b) Długość odcinka AB jest taka sama jak odległość między punktami odpowiadającymi liczbom $\frac{5}{2}$ i -2 na osi x , czyli $|AB| = \left| \frac{5}{2} - (-2) \right| = 4\frac{1}{2}$.



Przykład 2

◀ zad. 2.1

Obliczymy odległość punktu $A = (12, 5)$ od początku układu współrzędnych.

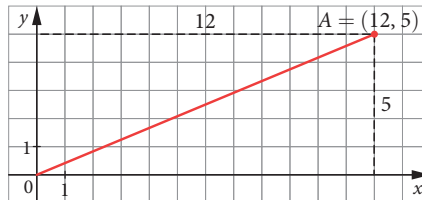
Rozwiązanie

Odcinek OA jest przekątną prostokąta, którego boki mają długości 12 i 5.

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa.

$$|OA|^2 = 12^2 + 5^2 = 169$$

Odp.: $|OA| = 13$



Przykład 3

Obliczymy odległość między punktami $A = (1, 2)$ i $B = (5, -1)$.

Rozwiązanie

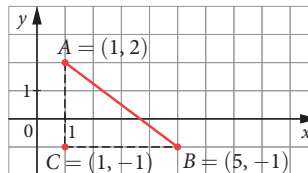
Odcinek AB jest przekątną prostokąta, którego boki mają długości:

$$|AC| = |2 - (-1)| = 3, \quad |BC| = |5 - 1| = 4$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2, \quad |AB|^2 = 3^2 + 4^2, \quad \text{czyli } |AB|^2 = 25$$

Odp.: $|AB| = 5$



◀2.1. Oblicz odległość punktu P od początku układu współrzędnych.

a) $P = (-4, 3)$

b) $P = (2, -5)$

c) $P = (-3, -9)$

d) $P = (3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

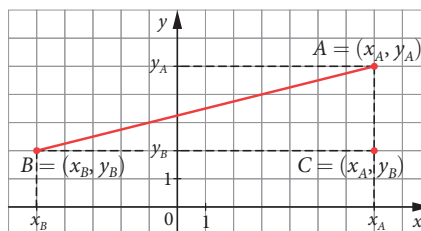
Odp.: a) 5 b) $\sqrt{29}$

c) $3\sqrt{10}$ d) 6

Powtórzmy rozumowanie z przykładu 3 dla dwóch dowolnych punktów. Przyjmijmy, że na płaszczyźnie kartezjańskiej dane są dwa punkty o współrzędnych:

$$A = (x_A, y_A) \text{ i } B = (x_B, y_B)$$

Wprowadzony pomocniczo punkt C ma współrzędne $C = (x_A, y_B)$.



Odcinek AB jest przekątną prostokąta, którego boki mają długości:

$$|BC| = |x_A - x_B|$$

← drugie współrzędne punktów B i C są równe

$$|AC| = |y_A - y_B|$$

← pierwsze współrzędne punktów A i C są równe

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$$

$$|AB|^2 = |x_A - x_B|^2 + |y_A - y_B|^2$$

$$|AB|^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Dla dowolnej liczby $a \in \mathbf{R}$: $|a|^2 = a^2$.



Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Jeżeli na płaszczyźnie kartezjańskiej dane są punkty o współrzędnych $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, to odległość między nimi jest równa:

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Ponieważ:

$$|a - b| = |b - a| \text{ oraz } (a - b)^2 = (b - a)^2$$

otrzymany wzór można zapisać w postaci:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Przykład 4 ◀ zad. 2.2–2.5

Obliczmy odległość między punktami A i B o podanych współrzędnych.

Rozwiązanie

a) $A = (3, 1)$, $B = (5, 3)$

$$|AB| = \sqrt{(3-5)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

b) $A = (-7, -3)$, $B = (17, -13)$

$$|AB| = \sqrt{[17 - (-7)]^2 + [-13 - (-3)]^2} = \sqrt{24^2 + (-10)^2} = \sqrt{576 + 100} = \sqrt{676} = 26$$

c) $A = (-\sqrt{3}, 7)$, $B = (\sqrt{2}, 3 - \sqrt{5})$

$$|AB| = \sqrt{(-\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + [7 - (3 - \sqrt{5})]^2} = \sqrt{3 + 2\sqrt{6} + 2 + (4 + \sqrt{5})^2} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6} + 16 + 8\sqrt{5} + 5} = \sqrt{26 + 2\sqrt{6} + 8\sqrt{5}}$$

Przykład 5 ◀ zad. 2.6

Obliczmy obwód i pole trójkąta o wierzchołkach:

$$A = (1, 2), B = (-5, -2), C = (-3, -5).$$

Rozwiązanie

Wyznamy najpierw długości boków trójkąta.

$$|AB| = \sqrt{(1+5)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$|BC| = \sqrt{(-5+3)^2 + (-2+5)^2} = \sqrt{13}$$

$$|AC| = \sqrt{(1+3)^2 + (2+5)^2} = \sqrt{65}$$

Obwód trójkąta jest równy:

$$|AB| + |CB| + |CA| = 2\sqrt{13} + \sqrt{13} + \sqrt{65} = 3\sqrt{13} + \sqrt{65}$$

Na podstawie rysunku można przypuszczać, że trójkąt ABC jest prostokątny.

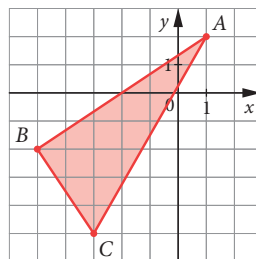
Sprawdźmy rachunkowo, czy rzeczywiście tak jest:

$$|AB|^2 + |CB|^2 = (\sqrt{52})^2 + (\sqrt{13})^2 = 52 + 13 = 65 = (\sqrt{65})^2 = |CA|^2$$

Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa, trójkąt ABC jest prostokątny, z kątem prostym przy wierzchołku B . Zatem:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13$$

Odp.: Obwód trójkąta jest równy $3\sqrt{13} + \sqrt{65}$, a jego pole wynosi 13.



◀2.2. Oblicz odległość między podanymi punktami.

a) $A = (3, 7)$ i $B = (11, 7)$

b) $P = (-2, 5)$ i $Q = (5, 5)$

c) $K = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ i $L = (-2\sqrt{2}, \sqrt{2})$

d) $M = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ i $N = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

Odp.: a) 8 b) 7 c) $3\sqrt{2}$ d) $\frac{2}{3}$

◀2.3. Oblicz długość odcinka AB .

a) $A = (1, -2)$, $B = (4, 2)$

b) $A = (5, -3)$, $B = (-1, 5)$

c) $A = (-6, -1)$, $B = (6, 8)$

d) $A = (-35, -4)$, $B = (5, 5)$

Odp.: a) 5 b) 10 c) 15 d) 41

◀2.4. Oblicz obwód trójkąta o danych wierzchołkach.

a) $A = (3, 1)$, $B = (4, 3)$, $C = (-2, 6)$

b) $A = (-2, -2)$, $B = (-1, -7)$, $C = (2, -5)$

c) $A = (-1, -1)$, $B = (-2, 3)$, $C = (3, 1)$

d) $A = (3, 3)$, $B = (0, 4)$, $C = (0, 0)$

Odp.: a) $5\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$

b) $5 + \sqrt{13} + \sqrt{26}$

c) $2\sqrt{5} + \sqrt{17} + \sqrt{29}$

d) $4 + 3\sqrt{2} + \sqrt{10}$

◀2.5. Oblicz obwód wielokąta, którego kolejnymi wierzchołkami są podane punkty.

a) $A = (-3, -2)$, $B = (1, 1)$, $C = (5, -2)$

b) $A = (5, 8)$, $B = (-4, -4)$, $C = (4, 11)$

c) $A = (0, 0)$, $B = (2, 2)$, $C = (-1, 5)$, $D = (-3, 3)$

d) $A = (-2, -2)$, $B = (2, 1)$, $C = (2, 5)$, $D = (-1, 1)$

Odp.: a) 18 b) $32 + \sqrt{10}$

c) $10\sqrt{2}$ d) $14 + \sqrt{10}$

◀2.6. Patrz s. 54, 55.

◀2.7. Oblicz obwód trójkąta, którego boki zawierają się w prostych o podanych równaniach.

a) $7x + y + 16 = 0$,
 $3x + 4y - 36 = 0$,
 $4x - 3y + 2 = 0$

b) $x + 2y - 6 = 0$,
 $x - y - 3 = 0$,
 $x + 4 = 0$

c) $4x + 3y - 2 = 0$,
 $3x + 4y + 2 = 0$,
 $x - y + 3 = 0$

d) $3x - 4y - 15 = 0$,
 $2x - 5y - 10 = 0$,
 $4x - 3y - 6 = 0$

Odp.: a) $10(2 + \sqrt{2})$

b) $4(\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 3)$

c) $10 + \sqrt{2}$

d) $15 + \sqrt{29}$

Przykład 6 ◀ zad. 2.7

Dane są równania boków trójkąta:

$AB: 3x - y + 7 = 0$, $AC: x - y - 1 = 0$

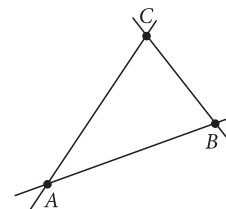
i $BC: x + y - 3 = 0$.

Obliczmy jego obwód.

Rozwiązanie

Do obliczenia długości boków trójkąta potrzebne są współrzędne jego wierzchołków. Aby je znaleźć, należy rozwiązać odpowiednie układy równań (rachunki zostawiamy do samodzielnego wykonania).

- $\begin{cases} 3x - y + 7 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$ ← punkt przecięcia prostych AB i AC jest wierzchołkiem A trójkąta
 $A = (-4, -5)$
- $\begin{cases} 3x - y + 7 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$ ← punkt przecięcia prostych AB i BC jest wierzchołkiem B trójkąta
 $B = (-1, 4)$
- $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$ ← punkt przecięcia prostych AC i BC jest wierzchołkiem C trójkąta
 $C = (2, 1)$



Obliczamy długości boków trójkąta.

$$|AB| = \sqrt{(-1 + 4)^2 + (4 + 5)^2} = \sqrt{9 + 81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

$$|AC| = \sqrt{(2 + 4)^2 + (1 + 5)^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{2 \cdot 36} = 6\sqrt{2}$$

$$|BC| = \sqrt{(2 + 1)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{2 \cdot 9} = 3\sqrt{2}$$

Odp.: Trójkąt ABC ma obwód równy $3\sqrt{10} + 9\sqrt{2}$.

Przykład 7

Obliczmy obwód i pole czworokąta $ABCD$, w którym $A = (4, 1)$, $B = (2, 5)$, $C = (-2, 3)$, $D = (0, -1)$.

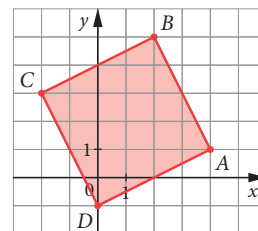
Rozwiązanie

$$|AB| = \sqrt{(2 - 4)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$|BC| = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (3 - 5)^2} = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$$

$$|CD| = \sqrt{2^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$$

$$|DA| = \sqrt{4^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$$



Czworokąt $ABCD$ jest rombem, a ponadto:

$$|DB| = \sqrt{2^2 + (-1 - 5)^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$$

$$|DB|^2 = 40, |AB|^2 = 20, |DA|^2 = 20$$

$|DB|^2 = |AB|^2 + |DA|^2$, więc czworokąt $ABCD$ jest rombem o kątach prostych, czyli kwadratem. Obwód tego kwadratu jest równy $8\sqrt{5}$, a pole 20.

Odp.: Obwód czworokąta $ABCD$ wynosi $8\sqrt{5}$, a jego pole 20.

Środek odcinka

Środek odcinka jest jednym z podstawowych pojęć geometrii. Można je definiować na różne sposoby. My posłużymy się pojęciem odległości.

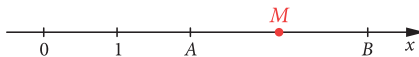
Definicja

Środkiem odcinka AB nazywamy taki punkt M , że $|AM| = |MB| = \frac{1}{2}|AB|$.

Wyznamy współrzędne środka odcinka w zależności od współrzędnych końców tego odcinka. Zaczniemy od sytuacji prostszej – gdy odcinek leży na osi liczbowej.

Przyjmijmy, że końcami odcinka są punkty $A = (a)$ oraz $B = (b)$ takie, że $b > a$. Oznaczmy współrzędną środka M literą m . Odległość punktu M od punktu A jest wtedy równa $m - a$, odległość punktu M od B jest równa $b - m$. Zgodnie z definicją zachodzi równość $m - a = b - m$, czyli:

$$m = \frac{a + b}{2}$$



Współrzędna środka odcinka jest średnią arytmetyczną współrzędnych końców tego odcinka.

Jeżeli będziemy rozpatrywać punkty na płaszczyźnie kartezjańskiej, to możemy sprawdzić, że powyższy wzór zachodzi odpowiednio dla każdej z dwóch współrzędnych. Prawdziwe jest więc następujące twierdzenie:

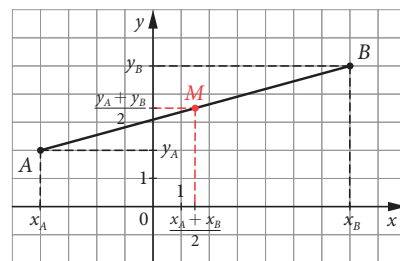
Twierdzenie

Środkiem odcinka o końcach $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ jest punkt:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

Współrzędne środka odcinka są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych końców tego odcinka.

Aby udowodnić to twierdzenie, można obliczyć długości odcinków AM , MB , AB i sprawdzić, że spełnione są równości podane w definicji. Te dosyć żmudne rachunki pominiemy. Natomiast uzasadnienie geometryczne prezentujemy na rysunku obok.



◀ **2.9.** Oblicz współrzędne środka odcinka AB .

- a) $A = (2, 3)$, $B = (8, 5)$
 b) $A = (-1, 4)$, $B = (-3, -2)$
 c) $A = (0, -1)$, $B = (-5, 3)$
 d) $A = (1, -7)$, $B = (-8, 0)$

Odp.: a) $(5, 4)$ b) $(-2, 1)$
 c) $(-2\frac{1}{2}, 1)$ d) $(-3\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2})$

◀ **2.10.** Punkt M jest środkiem odcinka AB o danym końcu A . Wyznacz współrzędne punktu B .

- a) $A = (3, 4)$, $M = (1, 7)$
 b) $A = (-1, 5)$, $M = (0, 1)$
 c) $A = (4, -16)$, $M = (-3, -8)$
 d) $A = (-7, -2)$, $M = (-1, 3)$

Odp.: a) $B = (-1, 10)$
 b) $B = (1, -3)$
 c) $B = (-10, 0)$
 d) $B = (5, 8)$

◀ **2.14.** W równoległoboku $ABCD$ dane są współrzędne trzech wierzchołków. Wyznacz współrzędne czwartego wierzchołka tego równoległoboku.

- a) $A = (-4, -2)$, $B = (2, 3)$, $C = (3, 8)$
 b) $B = (-3, 0)$, $C = (4, -3)$, $D = (2, 3)$

Odp.: a) $D = (-3, 3)$
 b) $A = (-5, 6)$

Przykład 8 ◀ zad. 2.9

Środkiem odcinka AB o końcach $A = (-2, 7)$ i $B = (4, 11)$ jest punkt

$$M = \left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{7 + 11}{2} \right), \text{ czyli punkt } M = (1, 9).$$

Przykład 9 ◀ zad. 2.10

Środkiem odcinka AB jest punkt $M = (3, -2)$. Punkt A ma współrzędne $A = (2, 5)$. Wyznamy współrzędne drugiego końca odcinka.

Rozwiązanie

Przyjmijmy $B = (x, y)$. Zgodnie ze wzorem na współrzędne środka odcinka mamy:

$$3 = \frac{2 + x}{2} \quad \text{oraz} \quad -2 = \frac{5 + y}{2}$$

Stąd $x = 4$, $y = -9$, zatem $B = (4, -9)$.

Odp.: $B = (4, -9)$

Przykład 10 ◀ zad. 2.14

W równoległoboku $ABCD$ dane są wierzchołki $A = (-3, -4)$, $B = (4, -2)$ i $D = (0, 2)$. Wyznamy współrzędne wierzchołka C tego równoległoboku.

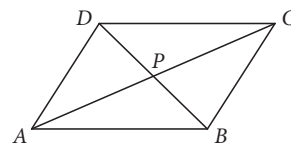
Rozwiązanie

W równoległoboku punkt przecięcia przekątnych jest środkiem każdej z nich. Wykorzystamy tę własność.

Wykonujemy kolejne kroki.

Krok 1: Wyznamy współrzędne punktu P – środka odcinka BD .

$$P = \left(\frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2} \right) = \left(\frac{0 + 4}{2}, \frac{2 - 2}{2} \right) = (2, 0)$$



Krok 2: Zapisujemy współrzędne punktu P jako środka odcinka AC o danym końcu A oraz szukanym końcu C .

$$P = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right) = \left(\frac{-3 + x_C}{2}, \frac{-4 + y_C}{2} \right)$$

Krok 3: Wyznaczamy współrzędne punktu C – porównujemy odpowiednie współrzędne i rozwiązujemy układ równań.

$$\begin{cases} \frac{-3 + x_C}{2} = 2 \\ \frac{-4 + y_C}{2} = 0 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} -3 + x_C = 4 \\ -4 + y_C = 0 \end{cases} \text{ i ostatecznie } C = (7, 4)$$

Odp.: $C = (7, 4)$

Środek ciężkości trójkąta

Przykład 11

W trójkącie o wierzchołkach $A = (-2, 4)$, $B = (0, -2)$ i $C = (6, 4)$ poprowadzono środkową boku AC . Napiszemy równanie tej środkowej.

Środkową boku trójkąta nazywamy odcinek łączący środek boku z przeciwległym wierzchołkiem.

Rozwiązanie

Szukana środkowa przechodzi przez środek boku AC oraz wierzchołek B . Środek boku AC ma współrzędne $(2, 4)$, punkt $B = (0, -2)$, zatem środkowa boku AC jest prostą o równaniu kierunkowym $y = ax + b$.

Wyznaczamy współczynniki a i b .

$$\begin{cases} 4 = 2a + b \\ -2 = b \end{cases}$$

Stąd $a = 3$ i $b = -2$.

Odp.: Środkowa boku AC ma równanie $y = 3x - 2$.

Przypomnijmy poznane w drugiej klasie twierdzenie o środkowych w trójkącie.

Twierdzenie

Trzy środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten, nazywany **środkiem ciężkości trójkąta**, dzieli każdą ze środkowych w stosunku $2 : 1$ (licząc od wierzchołka).

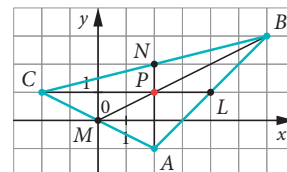
Podamy bez dowodu następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Środkiem ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ i $C = (x_C, y_C)$ jest punkt:

$$S = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

Współrzędne środka ciężkości trójkąta są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych wierzchołków tego trójkąta.



◀2.15. Wyznacz środek ciężkości trójkąta ABC .

a) $A = (-1, 2)$, $B = (3, 5)$,

$C = (4, -10)$

b) $A = (-5, -6)$, $B = (-2, 4)$,

$C = (16, -1)$

Odp.: a) $S = (2, -1)$

b) $S = (3, -1)$

◀2.16. W trójkącie ABC dane są:

$B = (6, 3)$, $C = (-7, 10)$ oraz

środek ciężkości $S = (-2, 4)$.

Wyznacz współrzędne wierzchołka A .

Odp.: $A = (-5, -1)$

Przykład 12 ◀ zad. 2.15

Wyznamy środek ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A = (-5, 8)$, $B = (-1, -2)$ i $C = (4, 5)$.

Rozwiązanie

Niech S oznacza środek ciężkości tego trójkąta. Zatem:

$$S = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right) = \left(\frac{-5 - 1 + 4}{3}, \frac{8 - 2 + 5}{3} \right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{3} \right)$$

$$\text{Odp.: } S = \left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{3} \right)$$

Przykład 13 ◀ zad. 2.16

W trójkącie ABC dane są: punkty $A = (-5, 2)$, $B = (6, -8)$ i środek ciężkości $S = (1, 0)$. Wyznamy współrzędne wierzchołka C .

Rozwiązanie

Do obliczenia współrzędnych wierzchołka C zastosujemy wzór na współrzędne środka ciężkości trójkąta.

$$(1, 0) = \left(\frac{-5 + 6 + x_C}{3}, \frac{2 - 8 + y_C}{3} \right)$$

$$\begin{cases} 1 = \frac{1 + x_C}{3} \\ 0 = \frac{-6 + y_C}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = 1 + x_C \\ 0 = -6 + y_C \end{cases} \quad \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 6 \end{cases}$$

$$\text{Odp.: } C = (2, 6)$$

2.6. a) $P = (5, 0)$, $Q = (3, 6)$, $R = (0, 5)$

$$|PQ| = \sqrt{(3-5)^2 + 6^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$|QR| = \sqrt{3^2 + (6-5)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$|PR| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$

$$|PQ|^2 + |QR|^2 = 40 + 10 = 50 = |PR|^2. \text{ Zatem trójkąt } PQR \text{ jest prostokątny } (\sphericalangle Q = 90^\circ).$$

$$P_{PQR} = \frac{1}{2} |PQ| \cdot |QR| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 10$$

b) $P = (-6, -4)$, $Q = (2, -2)$, $R = (-3, 1)$

$$|PQ| = \sqrt{(2+6)^2 + (-2+4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$|QR| = \sqrt{(-3-2)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$|PR| = \sqrt{(-3+6)^2 + (1+4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$|QR|^2 + |PR|^2 = 34 + 34 = 68 = |PQ|^2. \text{ Zatem trójkąt } PQR \text{ jest prostokątny } (\sphericalangle R = 90^\circ).$$

$$P_{PQR} = \frac{1}{2} |QR| \cdot |PR| = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{34})^2 = 17$$

Zadania

2.1. Oblicz odległość punktu P od początku układu współrzędnych.

- a) $P = (-4, 3)$ c) $P = (-3, -9)$
b) $P = (2, -5)$ d) $P = (3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

2.2. Oblicz odległość między podanymi punktami.

- a) $A = (3, 7)$ i $B = (11, 7)$ c) $K = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ i $L = (-2\sqrt{2}, \sqrt{2})$
b) $P = (-2, 5)$ i $Q = (5, 5)$ d) $M = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ i $N = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

2.3. Oblicz długość odcinka AB .

- a) $A = (1, -2)$, $B = (4, 2)$ c) $A = (-6, -1)$, $B = (6, 8)$
b) $A = (5, -3)$, $B = (-1, 5)$ d) $A = (-35, -4)$, $B = (5, 5)$

2.4. Oblicz obwód trójkąta o danych wierzchołkach.

- a) $A = (3, 1)$, $B = (4, 3)$, $C = (-2, 6)$
b) $A = (-2, -2)$, $B = (-1, -7)$, $C = (2, -5)$
c) $A = (-1, -1)$, $B = (-2, 3)$, $C = (3, 1)$
d) $A = (3, 3)$, $B = (0, 4)$, $C = (0, 0)$

2.5. Oblicz obwód wielokąta, którego kolejnymi wierzchołkami są podane punkty.

- a) $A = (-3, -2)$, $B = (1, 1)$, $C = (5, -2)$
b) $A = (5, 8)$, $B = (-4, -4)$, $C = (4, 11)$
c) $A = (0, 0)$, $B = (2, 2)$, $C = (-1, 5)$, $D = (-3, 3)$
d) $A = (-2, -2)$, $B = (2, 1)$, $C = (2, 5)$, $D = (-1, 1)$

D 2.6. Wykaż, że trójkąt PQR jest prostokątny i oblicz jego pole.

- a) $P = (5, 0)$, $Q = (3, 6)$, $R = (0, 5)$
b) $P = (-6, -4)$, $Q = (2, -2)$, $R = (-3, 1)$
c) $P = (4, -3)$, $Q = (2, 5)$, $R = (-2, 4)$
d) $P = (-4, -6)$, $Q = (6, -1)$, $R = (-6, -2)$

2.7. Oblicz obwód trójkąta, którego boki zawierają się w prostych o podanych równaniach.

- | | | |
|-----------------------|--------------------|-------------------|
| a) $7x + y + 16 = 0$ | $3x + 4y - 36 = 0$ | $4x - 3y + 2 = 0$ |
| b) $x + 2y - 6 = 0$ | $x - y - 3 = 0$ | $x + 4 = 0$ |
| c) $4x + 3y - 2 = 0$ | $3x + 4y + 2 = 0$ | $x - y + 3 = 0$ |
| d) $3x - 4y - 15 = 0$ | $2x - 5y - 10 = 0$ | $4x - 3y - 6 = 0$ |

2.6. Ciąg dalszy. c) $P = (4, -3)$, $Q = (2, 5)$, $R = (-2, 4)$

$$|PQ| = \sqrt{(2-4)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$|QR| = \sqrt{(2+2)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$|PR| = \sqrt{(-2-4)^2 + (4+3)^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85}$$

$$|PQ|^2 + |QR|^2 = 68 + 17 = 85 = |PR|^2. \text{ Zatem trójkąt } PQR \text{ jest prostokątny } (\sphericalangle Q = 90^\circ).$$

$$P_{PQR} = \frac{1}{2}|PQ| \cdot |QR| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{17} \cdot \sqrt{17} = 17$$

d) $P = (-4, -6)$, $Q = (6, -1)$, $R = (-6, -2)$

$$|PQ| = \sqrt{(6+4)^2 + (-1+6)^2} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$$|QR| = \sqrt{(6+6)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{144+1} = \sqrt{145}$$

$$|PR| = \sqrt{(-6+4)^2 + (-2+6)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$|PQ|^2 + |PR|^2 = 125 + 20 = 145 = |QR|^2. \text{ Zatem trójkąt } PQR \text{ jest prostokątny } (\sphericalangle P = 90^\circ).$$

$$P_{PQR} = \frac{1}{2}|PQ| \cdot |PR| = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 25$$

Odpowiedzi i rozwiązania

2.1. a) 5 b) $\sqrt{29}$

c) $3\sqrt{10}$ d) 6

2.2. a) 8 b) 7

c) $3\sqrt{2}$ d) $\frac{2}{3}$

2.3. a) 5 b) 10

c) 15 d) 41

2.4. a) $5\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$

b) $5 + \sqrt{13} + \sqrt{26}$

c) $2\sqrt{5} + \sqrt{17} + \sqrt{29}$

d) $4 + 3\sqrt{2} + \sqrt{10}$

2.5. a) 18

b) $32 + \sqrt{10}$

c) $10\sqrt{2}$

d) $14 + \sqrt{10}$

2.6. a) $P = 10$

b) $P = 17$

c) $P = 17$

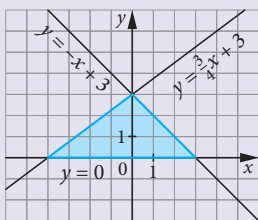
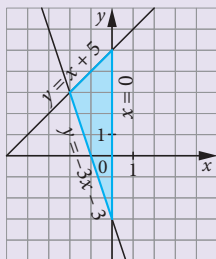
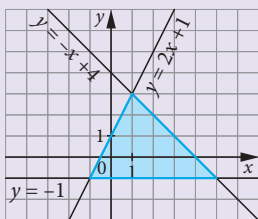
d) $P = 25$

2.7. a) $10(2 + \sqrt{2})$

b) $4(\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 3)$

c) $10 + \sqrt{2}$

d) $15 + \sqrt{29}$

2.8. a) $P = 10\frac{1}{2}$ b) $P = 8$ c) $P = 12$ 

2.9. a) $(5, 4)$ b) $(-2, 1)$
 c) $(-2\frac{1}{2}, 1)$ d) $(-3\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2})$

2.10. a) $B = (-1, 10)$
 b) $B = (1, -3)$
 c) $B = (-10, 0)$
 d) $B = (5, 8)$

2.11. $A = (-1, 2)$, $B = (8, -4)$

2.12. $S_{AB} = (-1, 3)$,
 $S_{AC} = (2\frac{1}{2}, -1)$, $S_{BC} = (-1\frac{1}{2}, 1)$

2.13. $5 + 2\sqrt{10} + \sqrt{13}$

2.14. a) $D = (-3, 3)$
 b) $A = (-5, 6)$

2.15. a) $S = (2, -1)$
 b) $S = (3, -1)$

2.16. $A = (-5, -1)$

2.17. Długości środkowych poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków A , B i C :

a) $\sqrt{82}$, $\sqrt{58}$, 10 ,b) $\frac{\sqrt{85}}{2}$, 2 , $\frac{\sqrt{85}}{2}$,c) $\frac{\sqrt{53}}{2}$, $\frac{\sqrt{41}}{2}$, $\sqrt{2}$,d) $\frac{\sqrt{61}}{2}$, $\sqrt{13}$, $\frac{1}{2}$.

2.8. Narysuj trójkąt ograniczony podanymi prostymi i oblicz jego pole.

a) $y = \frac{3}{4}x + 3$	$y = -x + 3$	$y = 0$
b) $y = x + 5$	$y = -3x - 3$	$x = 0$
c) $y = -1$	$y = 2x + 1$	$y = -x + 4$

2.9. Oblicz współrzędne środka odcinka AB .

a) $A = (2, 3)$, $B = (8, 5)$	c) $A = (0, -1)$, $B = (-5, 3)$
b) $A = (-1, 4)$, $B = (-3, -2)$	d) $A = (1, -7)$, $B = (-8, 0)$

2.10. Punkt M jest środkiem odcinka AB o danym końcu A . Wyznacz współrzędne punktu B .

a) $A = (3, 4)$, $M = (1, 7)$	c) $A = (4, -16)$, $M = (-3, -8)$
b) $A = (-1, 5)$, $M = (0, 1)$	d) $A = (-7, -2)$, $M = (-1, 3)$

2.11. Punkty $M = (2, 0)$ i $N = (5, -2)$ dzielą odcinek AB na trzy równe części. Znajdź współrzędne końców tego odcinka.2.12. Wyznacz współrzędne środków boków trójkąta o wierzchołkach: $A = (3, 1)$, $B = (-5, 5)$, $C = (2, -3)$.2.13. Oblicz obwód trójkąta, którego wierzchołkami są środki boków trójkąta o wierzchołkach: $A = (-3, -3)$, $B = (3, 1)$, $C = (-9, 5)$.2.14. W równoległoboku $ABCD$ dane są współrzędne trzech wierzchołków. Wyznacz współrzędne czwartego wierzchołka tego równoległoboku.

a) $A = (-4, -2)$, $B = (2, 3)$, $C = (3, 8)$
b) $B = (-3, 0)$, $C = (4, -3)$, $D = (2, 3)$

2.15. Wyznacz środek ciężkości trójkąta ABC .

a) $A = (-1, 2)$, $B = (3, 5)$, $C = (4, -10)$
b) $A = (-5, -6)$, $B = (-2, 4)$, $C = (16, -1)$

2.16. W trójkącie ABC dane są: $B = (6, 3)$, $C = (-7, 10)$ oraz środek ciężkości $S = (-2, 4)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka A .2.17. Oblicz długości środkowych w trójkącie ABC .

a) $A = (2, 6)$, $B = (6, -2)$, $C = (-4, -4)$
b) $A = (1, -3)$, $B = (-2, -1)$, $C = (-5, -3)$
c) $A = (2, 4)$, $B = (-2, 2)$, $C = (-1, 4)$
d) $A = (-2, -4)$, $B = (2, -1)$, $C = (0, -2)$

2.18. $A = (4, -4)$, $B = (6, 2)$, $C = (-2, 4)$, $D = (-4, 2)$ K , L , M , N – środki boków AB , BC , CD , DA

$$K = \left(\frac{4+6}{2}, \frac{-4+2}{2} \right) = (5, -1), L = (2, 3), M = (-3, 3), N = (0, -1)$$

$$|KL| = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|LM| = |2+3| = 5$$

$$|MN| = \sqrt{3^2 + (3+1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$|KN| = |5-0| = 5$$

 $|KL| = |LM| = |MN| = |KN| = 5$, więc czworokąt $KLMN$ jest rombem.

- D 2.18.** Wykaż, że środki kolejnych boków czworokąta $ABCD$ o wierzchołkach: $A = (4, -4)$, $B = (6, 2)$, $C = (-2, 4)$, $D = (-4, 2)$ są wierzchołkami rombu.
- D 2.19.** Wykaż, że środki kolejnych boków czworokąta $ABCD$ o wierzchołkach: $A = (5, -1)$, $B = (1, 5)$, $C = (-3, 1)$, $D = (-1, -3)$ są wierzchołkami kwadratu.
- * 2.20.** W trójkącie ABC dane są: wierzchołek $C = (2, 7)$, środek $M = (0, 5)$ boku AC i środek $K = (4, 3)$ boku BC . Wyznacz równania środkowych trójkąta ABC .

Prosto do matury



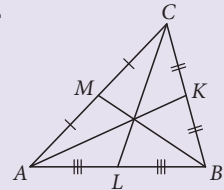
W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

- Odległość punktu $A = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$ od początku układu współrzędnych wynosi
A. $2\sqrt{3}$. B. 3. C. $\sqrt{6}$. D. 6.
 - Długość odcinka o końcach $G = (2\sqrt{7}, 0)$ oraz $R = (\sqrt{7}, -\sqrt{2})$ jest równa
A. 3. B. $2\sqrt{7}$. C. $2\sqrt{14}$. D. $4\sqrt{14}$.
 - Obwód trójkąta o wierzchołkach $A = (-1, -2)$, $B = (2, 2)$, $C = (-2, -1)$ wynosi
A. 12. B. $12 + \sqrt{2}$. C. $10 + \sqrt{2}$. D. $\sqrt{102}$.
 - Dane są punkty: $A = (-4, 1)$, $B = (1, 3)$, $C = (-3, 1)$, $D = (2, -1)$.
Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. $|AB| < |CD|$ B. $|AB| \geq |CD|$ C. $|CB| < |AD|$
 - Oblicz obwód trójkąta, którego boki zawierają się w prostych o równaniach $x + y = 0$, $2x + y - 2 = 0$, $2x - y + 6 = 0$.
 - Punkty $A = (5, 2)$, $B = (0, 7)$ i $D = (5, -5)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz obwód i długości przekątnych tego równoległoboku.
- D 7.** Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $G = (4, -3)$, $H = (-1, 2)$, $L = (7, 0)$ jest prostokątny, i oblicz jego pole.

2.19. $A = (5, -1)$, $B = (1, 5)$, $C = (-3, 1)$, $D = (-1, -3)$
 K, L, M, N – środki boków AB, BC, CD, DA
 $K = \left(\frac{5+1}{2}, \frac{-1+5}{2}\right) = (3, 2)$, $L = (-1, 3)$, $M = (-2, -1)$, $N = (2, -2)$
 $|KL| = \sqrt{(3+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$
 $|LM| = \sqrt{(-1+2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$
 $|MN| = \sqrt{(2+2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$
 $|KN| = \sqrt{(3-2)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$
 Zatem czworokąt $KLMN$ jest rombem.
 $|KM| = \sqrt{(3+2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$
 $|KL|^2 + |LM|^2 = 17 + 17 = 34 = |KM|^2$, więc $\sphericalangle KLM = 90^\circ$.
 Zatem czworokąt $KLMN$ jest kwadratem.

2.18. Patrz s. 56.

2.20.



$C = (2, 7)$, $M = (0, 5)$, $K = (4, 3)$
 K, L, M – środki boków BC, AB i AC

Niech $A = (x_A, y_A)$,

$B = (x_B, y_B)$.

$$\left(\frac{x_A+2}{2}, \frac{y_A+7}{2}\right) = (0, 5)$$

$$\left(\frac{x_B+2}{2}, \frac{y_B+7}{2}\right) = (4, 3)$$

Stąd $A = (-2, 3)$ i $B = (6, -1)$.

$$L = \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = (2, 1)$$

Równania środkowych:

• prosta AK : $y = 3$

• prosta BM : $y = ax + b$

$$\begin{cases} 5 = b \\ -1 = 6a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow y = -x + 5$$

• prosta CL : $x = 2$

Odp.: AK : $y = 3$, BM : $y = -x + 5$,

CL : $x = 2$

Prosto do matury

1. C

2. A

3. C

4. F, P, P

5. $4(\sqrt{2} + \sqrt{5})$

6. $obw = 10\sqrt{2} + 14$,
 $|BD| = 13$, $|AC| = \sqrt{29}$

7. $G = (4, -3)$, $H = (-1, 2)$,
 $L = (7, 0)$

$$|GH| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$|HL| = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$|GL| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$|GH|^2 + |GL|^2 = 50 + 18 = 68 = |HL|^2$$

Zatem trójkąt GHL jest prostokątny ($\sphericalangle G = 90^\circ$).

$$P = \frac{1}{2} |GH| \cdot |GL| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 15$$

Odp.: $P = 15$

3. Położenie prostych na płaszczyźnie kartezjańskiej

Umiejętności:

- stosowanie geometrycznej interpretacji współczynnika kierunkowego prostej
- opisywanie prostych równoległych i prostopadłych za pomocą równań w postaci ogólnej
- obliczanie odległości punktu od prostej

Geometryczna interpretacja współczynnika kierunkowego prostej

Przypomnijmy:

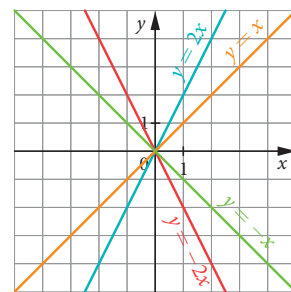
Definicja

Współczynnik a , występujący we wzorze funkcji $f(x) = ax$ ($D = \mathbf{R}$), nazywamy **współczynnikiem kierunkowym**.

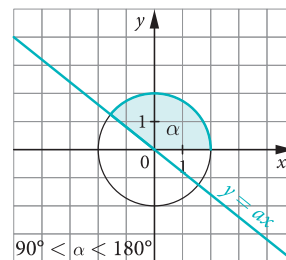
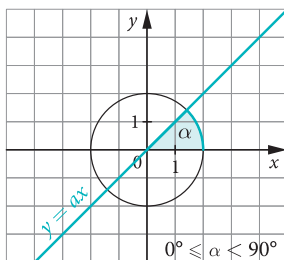
Wykresem funkcji $f(x) = ax$ jest prosta. Zauważmy, że $f(0) = 0$ i $f(1) = a$, zatem wykres funkcji f przechodzi przez punkty $(0, 0)$ oraz $(1, a)$.

Jeżeli:

- $a = 0$, to wykres funkcji pokrywa się z osią x ,
- $a > 0$, to wykres zawiera się w I i III ćwiartce układu współrzędnych,
- $a < 0$, to wykres zawiera się w II i IV ćwiartce układu współrzędnych.



Prosta o równaniu $y = ax$ wyznacza z osią x cztery kąty wypukłe. Jeden z nich, na poniższych rysunkach oznaczony α , nazywamy **kątem nachylenia prostej do osi x** . Mówimy też, że jest to **kąt, jaki prosta tworzy z osią x** .



ZZ i KPU

temat 2.3

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.3

Generator
testów i sprawdzianów

Kąt nachylenia prostej $y = ax$ do osi x spełnia zatem następujące warunki:

- jego wierzchołkiem jest początek układu współrzędnych,
- dodatnia półoś x jest jego ramieniem początkowym, a ramię końcowe zawiera się w prostej $y = ax$,
- $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ i $\alpha \neq 90^\circ$.

Zauważmy, że jeśli punkt $P \neq (0, 0)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = ax$, to jego współrzędne (x, y) spełniają warunek:

$$\frac{y}{x} = a$$

Z drugiej strony – jeżeli punkt $P = (x, y)$ leży na końcowym ramieniu kąta α , który prosta $y = ax$ tworzy z osią x , to:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

Zatem **współczynnik kierunkowy a jest równy tangensowi kąta nachylenia α** wykresu funkcji $f(x) = ax$ do osi x :

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$

Kąt nachylenia wykresu funkcji $f(x) = ax$ do osi x jest kątem:

- zerowym, gdy $a = 0$,
- ostrym, gdy $a > 0$,
- rozwartym, gdy $a < 0$.

Przykład 1 ◀ zad. 3.1

Napiszemy równanie prostej postaci $y = ax$, nachylonej do osi x pod kątem

- a) 120° . b) 45° .

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \text{a) } a &= \operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ - 60^\circ) = & \text{b) } a &= \operatorname{tg} 45^\circ = 1 \\ &= -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3} & y &= x \\ y &= -\sqrt{3}x \end{aligned}$$

Odp.: a) $y = -\sqrt{3}x$ b) $y = x$

Przykład 2 ◀ zad. 3.2

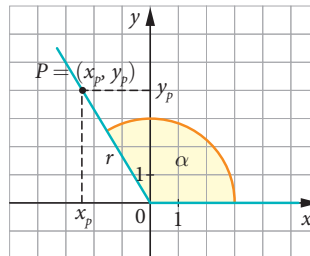
Wyznamy w przybliżeniu do 1° kąt nachylenia podanej prostej do osi x .

- a) $y = 0,4x$ b) $y = -4x$

Rozwiązanie

a) $y = 0,4x$, zatem α jest takim kątem, że $\operatorname{tg} \alpha = 0,4$.

Z tablic matematycznych odczytujemy wartość kąta, którego tangens jest w przybliżeniu równy $0,4$: $\operatorname{tg} 22^\circ \approx 0,4$.



◀3.1. Napisz równanie prostej postaci $y = ax$, która tworzy z osią x podany kąt.

- a) 150° c) 60°
b) 135° d) 30°

Odp.: a) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ b) $y = -x$

c) $y = \sqrt{3}x$ d) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

◀3.2. Wyznacz kąt nachylenia prostej do osi x . Wynik podaj z dokładnością do 1° .

- a) $y = 0,6x$ c) $y = 9x$ e) $y = 0,06x$
b) $y = -2,6x$ d) $y = -14x$ f) $y = -0,1x$

Odp.: a) 31° b) 111° c) 84° d) 94° e) 3° f) 174°

b) $y = -4x$, zatem α jest takim kątem, że $\operatorname{tg} \alpha = -4$.

Z tablic matematycznych odczytujemy wartość kąta β , którego tangens jest w przybliżeniu równy 4: $\operatorname{tg} 76^\circ \approx 4$.

Korzystamy ze wzoru redukcyjnego $\operatorname{tg}(180^\circ - \beta) = -\operatorname{tg} \beta$.

Zatem:

$$-4 = -\operatorname{tg} 76^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 76^\circ) = \operatorname{tg} \alpha$$

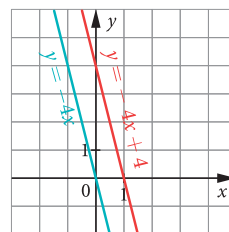
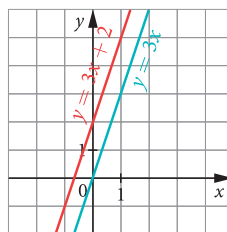
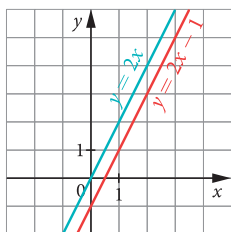
$$\text{czyli } \alpha = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ.$$

Odp.: a) 22° b) 104°

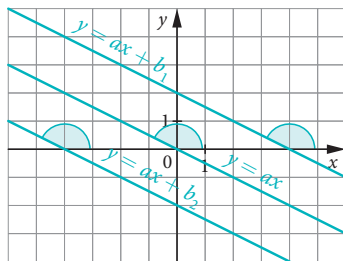
Równania prostych równoległych na płaszczyźnie

Przypomnijmy:

Jeżeli wykres funkcji $y = ax$ przesuniemy równoległe o b jednostek wzdłuż osi y , to otrzymamy wykres funkcji $f(x) = ax + b$.



Inaczej mówiąc, prosta $y = ax + b$, $b \in \mathbb{R}$, jest nachylona do osi x pod takim samym kątem jak prosta $y = ax$.



Proste k i l na płaszczyźnie nazywamy równoległymi, jeżeli nie mają punktu wspólnego albo gdy mają wszystkie punkty wspólne.

◀ 3.3. Napisz równanie prostej l nachylonej do osi x pod kątem α i przechodzącej przez punkt P .

a) $\alpha = 45^\circ$, $P = (4, 18)$

b) $\alpha = 60^\circ$, $P = (5, 1)$

c) $\alpha = 30^\circ$, $P = (-5, 0)$

d) $\alpha = 120^\circ$, $P = (\sqrt{3}, 2)$

e) $\alpha = 0^\circ$, $P = (-3, -2)$

f) $\alpha = 135^\circ$, $P = (0, -7)$

Odp.: a) $y = x + 14$

b) $y = \sqrt{3}x + 1 - 5\sqrt{3}$

c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 5\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $y = -\sqrt{3}x + 5$

e) $y = -2$

f) $y = -x - 7$

Przykład 3 ◀ zad. 3.3

Napiszemy równanie prostej nachylonej do osi x pod kątem 150° i przechodzącej przez punkt $M = (-3, 5)$.

Rozwiązanie

$$y = ax + b$$

← szukamy współczynników a i b

$$a = \operatorname{tg} 150^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$$

$$5 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3 + b$$

← podstawiamy współrzędne punktu M

$$b = 5 + \sqrt{3}$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 5 + \sqrt{3}$$

Odp.: Szukana prosta ma równanie $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 5 + \sqrt{3}$.

Udowodnimy twierdzenie, które sformułowaliśmy w klasie pierwszej.

Twierdzenie

Proste o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich współczynniki kierunkowe są równe, tzn. gdy $a_1 = a_2$.

Dowód

Dwie proste w układzie współrzędnych są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich kąty nachylenia do osi x są równe:

$$\alpha = \beta \quad \leftarrow \text{kąty odpowiadające}$$

Oznaczmy $a_1 = \operatorname{tg} \alpha$ i $a_2 = \operatorname{tg} \beta$.

Mamy więc udowodnić dwa twierdzenia:

1. Jeżeli $\alpha = \beta$, to $a_1 = a_2$.
2. Jeżeli $a_1 = a_2$, to $\alpha = \beta$.

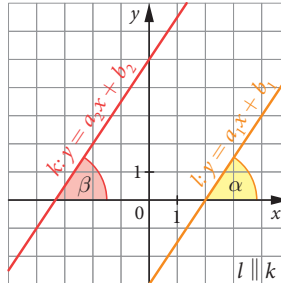
Pierwsze twierdzenie jest oczywiste: jeżeli $\alpha = \beta$, to $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$, czyli $a_1 = a_2$.

W drugą stronę: jeżeli $a_1 = a_2$, to $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$.

Kąty α i β są kątami nachylenia prostych do osi x , czyli $\alpha, \beta \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle - \{90^\circ\}$.

Dla takich kątów równość $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$ oznacza, że $\alpha = \beta$.

Koniec dowodu



Zbadamy teraz zależność między równaniami ogólnymi prostych równoległych.

Niech $k: ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

Zastanówmy się, jaką postać mają równania prostych równoległych do prostej k .

Rozpatrzmy trzy przypadki.

I. Prosta k jest równoległa do osi y (jest prostą pionową, $a \neq 0$, $b = 0$):

$$k: ax + c = 0, \text{ czyli } k: x + \frac{c}{a} = 0, \text{ inaczej: } x + c_1 = 0$$

Prosta l równoległa do prostej k jest również prostą równoległą do osi y , zatem jej równanie ma postać $x + d = 0$.

II. Prosta k jest równoległa do osi x (jest prostą poziomą, $a = 0$, $b \neq 0$):

$$k: by + c = 0, \text{ czyli } k: y + \frac{c}{b} = 0, \text{ inaczej: } y + c_1 = 0$$

Prosta l równoległa do prostej k jest również prostą równoległą do osi x , zatem jej równanie ma postać $y + d = 0$.

III. Prosta k nie jest równoległa do żadnej z osi układu współrzędnych ($ab \neq 0$):

$$k: ax + by + c = 0$$

Na mocy udowodnionego wcześniej twierdzenia wiemy, że prosta l jest równoległa do k wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki kierunkowe obydwu prostych są równe.

Wyznaczamy równanie kierunkowe prostej k :

$$by = -ax - c, \text{ stąd } y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Zatem prosta l ma równanie kierunkowe $l: y = -\frac{a}{b}x + c_1$, a po przekształceniu do postaci ogólnej $l: ax + by - bc_1 = 0$, inaczej: $ax + by + d = 0$.

Zauważmy, że w każdym z trzech przypadków równania prostych k i l różnią się tylko wyrazem wolnym. Nasze rozważania zapiszemy w postaci twierdzenia.

Twierdzenie

Prosta l jest równoległa do prostej $k: ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy równanie prostej l można zapisać w postaci $ax + by + d = 0$. Ponadto jeżeli $c = d$, to $k = l$, a jeżeli $c \neq d$, to $k \neq l$.

Przykład 4 ◀ zad. 3.4

Dana jest prosta $k: 2x - 5y + 1 = 0$. Wyznaczmy równanie równoległej do niej prostej

a) l przechodzącej przez punkt $A = (-3, 4)$.

b) p przechodzącej przez punkt $B = (0, \sqrt{3})$.

◀ 3.4. Napisz równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt P .

a) $k: 9x - 2y + 1 = 0$ $P = (0, -3)$

b) $k: 2x + 3y - 10 = 0$ $P = (1, 1)$

c) $k: 7x + y - 18 = 0$ $P = (5, 0)$

d) $k: 6x - 5y + 19 = 0$ $P = (-2, -3)$

e) $k: x + 11y - 21 = 0$ $P = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

f) $k: 5x + \sqrt{3}y - 18 = 0$ $P = (2, -\sqrt{3})$

Odp.: a) $9x - 2y - 6 = 0$ b) $2x + 3y - 5 = 0$

c) $7x + y - 35 = 0$ d) $6x - 5y - 3 = 0$

e) $x + 11y - 10\sqrt{2} = 0$ f) $5x + \sqrt{3}y - 7 = 0$

Rozwiązanie

Każdą prostą równoległą do prostej k można opisać za pomocą równania postaci $2x - 5y + c = 0$. Zatem:

a) $2 \cdot (-3) - 5 \cdot 4 + c = 0$, stąd $c = 26$, czyli $l: 2x - 5y + 26 = 0$

b) $-5 \cdot \sqrt{3} + c = 0$, stąd $c = 5\sqrt{3}$, czyli $p: 2x - 5y + 5\sqrt{3} = 0$

Odp.: a) $l: 2x - 5y + 26 = 0$ b) $p: 2x - 5y + 5\sqrt{3} = 0$

Przykład 5 ◀ zad. 3.5

Sprawdźmy, czy proste $l: \frac{6}{7}x - \frac{8}{7}y + \sqrt{11} = 0$,
 $m: 2x - \frac{8}{3}y + \frac{4}{3} = 0$ i $p: -3\sqrt{5}x - 4\sqrt{5}y + 2\sqrt{5} = 0$
są równoległe do prostej $k: -3x + 4y - 2 = 0$.

Równanie ogólne prostej możemy zapisać na nieskończenie wiele sposobów (możemy mnożyć obydwie jego strony przez dowolną liczbę różną od zera).

**Rozwiązanie**

- Prosta l jest równoległa do prostej $k: -3x + 4y - 2 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy równanie prostej l można zapisać w postaci $-3x + 4y + c = 0$, gdzie $c \in \mathbf{R}$. Przekształcamy dane równanie prostej l tak, żeby współczynnik przy x wynosił -3 .

$$\frac{6}{7}x - \frac{8}{7}y + \sqrt{11} = 0$$

← obie strony równania mnożymy przez $-\frac{7}{2}$

$$-3x + 4y - \frac{7\sqrt{11}}{2} = 0$$

Zatem $c = -\frac{7\sqrt{11}}{2}$, czyli prosta l jest równoległa do prostej k (i różna od k).

- Postępujemy podobnie jak poprzednio. Przekształcamy dane równanie prostej m tak, żeby współczynnik przy x wynosił -3 .

$$2x - \frac{8}{3}y + \frac{4}{3} = 0$$

← obie strony równania mnożymy przez $-\frac{3}{2}$

$$-3x + 4y - 2 = 0$$

Zatem $c = -2$, czyli prosta l jest równoległa do prostej k , bo jest z nią identyczna.

- Przekształcamy dane równanie prostej p tak, żeby współczynnik przy x wynosił -3 .

$$-3\sqrt{5}x - 4\sqrt{5}y + 2\sqrt{5} = 0$$

← obie strony równania dzielimy przez $\sqrt{5}$

$$-3x - 4y + 2 = 0$$

Równania $-3x - 4y + 2 = 0$ nie doprowadzimy do żądanej postaci.

Rozwiązanie układu równań $\begin{cases} -3x - 4y + 2 = 0 \\ -3x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$ prowadzi do wyznaczenia do-

kładnie jednego punktu wspólnego prostych p i k : $(x, y) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Zatem proste p i k nie są równoległe.

Odp.: Proste l oraz m są równoległe do k , prosta p nie jest równoległa do k .

◀ 3.5. Sprawdź, czy proste l i p są równoległe do prostej k .

a) $k: x - 2y + 9 = 0$,

$l: 2x - 4y + 7 = 0$,

$p: 3x + 2y - 1 = 0$

b) $k: -3x + y + 7 = 0$,

$l: 9x + 3y - \sqrt{2} = 0$,

$p: 6x - 2y + 11 = 0$

c) $k: \sqrt{7}x + 2\sqrt{7}y + 3\sqrt{7} = 0$,

$l: -6x - 12y + 7 = 0$,

$p: 3x + 6y + \sqrt{2} = 0$

d) $k: x + y = 0$,

$l: 3x - 3y + 5 = 0$,

$p: -1\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + 7 = 0$

Odp.: a) $l \parallel k$, $p \nparallel k$

b) $l \nparallel k$, $p \parallel k$

c) $l \parallel k$, $p \parallel k$

d) $l \nparallel k$, $p \nparallel k$

Równania prostych prostopadłych na płaszczyźnie

Twierdzenie

Prosta l jest prostopadła do prostej $k: ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy równanie prostej l można zapisać w postaci $bx - ay + c_1 = 0$.

Dowód

Zauważmy, że każde równanie ogólne prostej można przekształcić do postaci, w której przynajmniej jeden ze współczynników przy zmiennych x, y ma wartość 1.

Rozważymy więc trzy możliwe sytuacje.

I. $a = 0$ i $b = 1$

Prosta k ma wtedy równanie $y + c = 0$, czyli jest równoległa do osi x . Każda prosta l prostopadła do k jest więc prostopadła do osi x , czyli ma równanie postaci $x + p = 0$. Zatem teza twierdzenia jest prawdziwa.

II. $a = 1$ i $b = 0$

Prosta k ma równanie $x + c = 0$, czyli jest równoległa do osi y . Każda prosta l prostopadła do k ma więc równanie postaci $y + q = 0$ lub inaczej $-y - q = 0$, czyli teza twierdzenia jest prawdziwa.

III. $ab \neq 0$

Przekształcamy równanie prostej k do postaci kierunkowej.

$$k: y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Korzystamy z twierdzenia udowodnionego w klasie pierwszej:

Prosta l prostopadła do prostej $k: y = mx + p$ ($m \neq 0$) ma równanie postaci $y = -\frac{1}{m}x + q$.

Zatem:

$$l: y = \frac{b}{a}x + q$$

$$l: bx - ay + aq = 0 \quad \leftarrow c_1 = aq$$

$$l: bx - ay + c_1 = 0$$

Koniec dowodu

Przykład 6 ◀ zad. 3.7

Napišemy równanie prostej l prostopadłej do prostej $k: 2x + 7y = 0$ i przechodzącej przez punkt $A = (2\sqrt{7}, -\sqrt{7})$.

◀ 3.7. Napiš równanie ogólne prostej l prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt P .

a) $k: 8x + 3y - 1 = 0$ $P = (-2, -2)$

b) $k: 5x + 11y = 0$ $P = (-1, -5)$

c) $k: \sqrt{2}x - 3y + 2\sqrt{2} = 0$ $P = (0, \sqrt{2})$

d) $k: \sqrt{3}x + \sqrt{2}y + 1 = 0$ $P = (0, 0)$

e) $k: 6x - 2y + 17 = 0$ $P = (3, -2)$

f) $k: 4x + 7y + \sqrt{15} = 0$ $P = (\sqrt{3}, 1)$

Odp.: a) $l: 3x - 8y - 10 = 0$ b) $l: 11x - 5y - 14 = 0$

c) $l: 3x + \sqrt{2}y - 2 = 0$ d) $l: \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 0$

e) $l: x + 3y + 3 = 0$ f) $l: 7x - 4y + 4 - 7\sqrt{3} = 0$

Rozwiązanie

$$l: 7x - 2y + c = 0$$

← l jest prostopadła do k

$$14\sqrt{7} + 2\sqrt{7} + c = 0$$

← $A = (2\sqrt{7}, -\sqrt{7}) \in l$

$$c = -16\sqrt{7}$$

Odp.: $l: 7x - 2y - 16\sqrt{7} = 0$

Odległość punktu od prostej**Przykład 7**

Obliczmy odległość punktu $P = (-2, 3)$ od prostej $l: 3x - 4y + 1 = 0$.

Rozwiązanie

Wykonamy kolejne kroki.

Krok 1: Wyznamy równanie prostej k prostopadłej do l i przechodzącej przez punkt P .

Krok 2: Wyznamy współrzędne punktu Q przecięcia prostych l i k .

Krok 3: Obliczymy długość odcinka PQ , która jest szukaną odległością punktu P od prostej l .

Mamy więc (rachunki pozostawiamy do samodzielnego wykonania):

1. $k: 4x + 3y + c = 0$

$$-8 + 9 + c = 0, \text{ stąd } c = -1$$

$$k: 4x + 3y - 1 = 0$$

2. Z rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ 4x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{otrzymujemy } Q = \left(\frac{1}{25}, \frac{7}{25}\right).$$

3. $|PQ| = \sqrt{\left(\frac{1}{25} + 2\right)^2 + \left(\frac{7}{25} - 3\right)^2} = \sqrt{\frac{7225}{25^2}} = \frac{85}{25} = \frac{17}{5}$

Odp.: Punkt P jest odległy od prostej l o $\frac{17}{5}$.

Jeśli przeprowadzimy powyższe rozumowanie dla dowolnego punktu $P = (x_0, y_0)$ i dowolnej prostej $ax + by + c = 0$, to po rachunkach, których nie będziemy tu podawać, otrzymamy wzór na odległość punktu od prostej.

Twierdzenie

Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) jest równa:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

◀3.8. Wyznacz odległości punktów $A = (4, 1)$, $B = (0, 2)$, $C = (2, 2)$ od prostej o równaniu $3x - 4y + 2 = 0$.

Odp.: punkt A: 2, punkt B: $1\frac{1}{5}$,
punkt C: 0

◀3.12. Oblicz pole trójkąta ABC o podanych wierzchołkach.

a) $A = (5, 5)$, $B = (-2, 4)$,
 $C = (-1, -3)$

b) $A = (1, 2)$, $B = (4, 8)$,
 $C = \left(-\frac{1}{2}, \frac{23}{4}\right)$

c) $A = (-4, -2)$, $B = (1, 5)$,
 $C = (-3, 6)$

Odp.: a) $P = 25$

b) $P = 10\frac{1}{8}$

c) $P = 16,5$

◀3.13. Boki trójkąta zawierają się w prostych: $4x + 3y - 21 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$, $3x + y - 7 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta i oblicz jego pole.

Odp.: $(6, -1)$, $(0, 7)$, $(2, 1)$, $P = 10$

◀3.14. Narysuj w układzie współrzędnych czworokąt $ABCD$ i oblicz jego obwód oraz pole.

a) $A = (4, -2)$, $B = (2, 1)$,
 $C = (-3, 2)$, $D = (1, -4)$

b) $A = (7, 2)$, $B = (5, 4)$,
 $C = (-1, -2)$, $D = (1, -4)$

c) $A = (-1, 0)$, $B = (1, 3)$,
 $C = (-2, 5)$, $D = (-4, 2)$

d) $A = (-4, 0)$, $B = (1, -5)$,
 $C = (2, 2)$, $D = (-2, 4)$

Odp.: a) $obw = \sqrt{13}(4 + \sqrt{2})$, $P = 19,5$

b) $obw = 16\sqrt{2}$, $P = 24$

c) $obw = 4\sqrt{13}$, $P = 13$

d) $obw = 10\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$, $P = 30$

Przykład 8 ◀ zad. 3.8

Odległość punktu $P = (1, -5)$ od prostej $x + 2y - 3 = 0$ jest równa

$$\frac{|1 - 10 - 3|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}.$$

Przykład 9 ◀ zad. 3.12–3.14

Obliczymy pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (-8, 0)$, $B = (5, 1)$, $C = (-2, 2)$.

Rozwiązanie

I sposób

Wykorzystamy wzór na pole trójkąta: $P = \frac{1}{2}a \cdot h$. Jako podstawę przyjmiemy bok AB (więc $a = |AB|$). Wówczas wysokość h poprowadzona z wierzchołka C jest odległością punktu C od prostej AB . Mamy zatem:

$$a = |AB| = \sqrt{(5 + 8)^2 + 1^2} = \sqrt{170}$$

Równanie prostej AB zapisujemy w postaci $y = mx + n$ i po podstawieniu współrzędnych punktów A i B mamy:

$$\begin{cases} 0 = -8m + n \\ 1 = 5m + n \end{cases}$$

$$m = \frac{1}{13}, n = \frac{8}{13}$$

Prosta AB ma równanie: $y = \frac{1}{13}x + \frac{8}{13}$, a w postaci ogólnej: $x - 13y + 8 = 0$.

Obliczamy odległość punktu C od prostej AB , czyli wysokość trójkąta.

$$h = \frac{|1 \cdot (-2) - 13 \cdot 2 + 8|}{\sqrt{1^2 + 13^2}} = \frac{20}{\sqrt{170}}$$

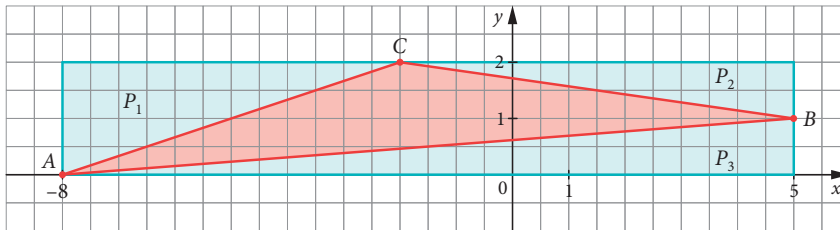
$$P = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{170} \cdot \frac{20}{\sqrt{170}} = 10$$

Odp.: Pole trójkąta ABC jest równe 10.

II sposób

Opisany powyżej sposób rozwiązania jest jedną z ogólnych metod stosowanych w takich zadaniach. Natomiast w tym konkretnym przypadku na pytanie można odpowiedzieć szybciej, ponieważ wierzchołki trójkąta są punktami kratowymi.

Zaznaczamy odpowiednie figury w układzie współrzędnych.



Punkt kratowy to punkt, którego współrzędne są liczbami całkowitymi.

Aby obliczyć pole trójkąta ABC , należy od pola P prostokąta odjąć sumę pól trzech trójkątów (na rysunku oznaczonych P_1 , P_2 oraz P_3).

$$P_{ABC} = P - (P_1 + P_2 + P_3) = 13 \cdot 2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 13 \right) = 26 - 16 = 10$$

Odp.: Pole trójkąta ABC jest równe 10.

Przykład 10 ◀ zad. 3.16

Obliczymy odległość między prostymi równoległymi $k: x + y - 1 = 0$ i $l: x + y - 3 = 0$.

Rozwiązanie

Wyznaczamy jakikolwiek punkt leżący na jednej z prostych, np. punkt przecięcia prostej k z osią y : $(0, 1)$. Następnie obliczamy odległość tego punktu od drugiej prostej:

$$\frac{|0 + 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Odp.: Odległość między prostymi jest równa $\sqrt{2}$.

Mierzenie odległości między prostymi ma sens tylko wtedy, gdy te proste są równoległe.

Zadania

3.1. Napisz równanie prostej postaci $y = ax$, która tworzy z osią x podany kąt.

- a) 150° c) 60°
b) 135° d) 30°

◀ **3.16.** Wyznacz odległość między prostymi k i l .

- a) $k: 3x + 4y = 0$,
 $l: 3x + 4y + 10 = 0$
b) $k: x - 2y + 1 = 0$,
 $l: x - 2y - 4 = 0$
c) $k: y = x$, $l: y = x - 3$
d) $k: y = -\frac{1}{3}x + 2$, $l: y = -\frac{1}{3}x - 1$

Odp.: a) 2 b) $\sqrt{5}$

c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{9\sqrt{10}}{10}$

Odpowiedzi i rozwiązania

3.1. a) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

b) $y = -x$

c) $y = \sqrt{3}x$

d) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

3.2. a) 31° b) 111° c) 84°
d) 94° e) 3° f) 174°

3.3. a) $y = x + 14$
b) $y = \sqrt{3}x + 1 - 5\sqrt{3}$
c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 5\frac{\sqrt{3}}{3}$
d) $y = -\sqrt{3}x + 5$
e) $y = -2$
f) $y = -x - 7$

3.4. a) $9x - 2y - 6 = 0$
b) $2x + 3y - 5 = 0$
c) $7x + y - 35 = 0$
d) $6x - 5y - 3 = 0$
e) $x + 11y - 10\sqrt{2} = 0$
f) $5x + \sqrt{3}y - 7 = 0$

3.5. a) $l \parallel k, p \nparallel k$
b) $l \nparallel k, p \parallel k$
c) $l \parallel k, p \parallel k$
d) $l \nparallel k, p \nparallel k$

3.6. $|AB| = |CD| = 6$,
 $|AD| = |BC| = \sqrt{13}$,
 $|AC| = \sqrt{73}, |BD| = 5$

3.7. a) $l: 3x - 8y - 10 = 0$
b) $l: 11x - 5y - 14 = 0$
c) $l: 3x + \sqrt{2}y - 2 = 0$
d) $l: \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 0$
e) $l: x + 3y + 3 = 0$
f) $l: 7x - 4y + 4 - 7\sqrt{3} = 0$

3.8. punkt A: 2, punkt B: $1\frac{1}{5}$,
punkt C: 0

3.2. Wyznacz kąt nachylenia prostej do osi x . Wynik podaj z dokładnością do 1° .

a) $y = 0,6x$ e) $y = 0,06x$
b) $y = -2,6x$ d) $y = -14x$ f) $y = -0,1x$

3.3. Napisz równanie prostej l nachylonej do osi x pod kątem α i przechodzącej przez punkt P .

a) $\alpha = 45^\circ$ $P = (4, 18)$ d) $\alpha = 120^\circ$ $P = (\sqrt{3}, 2)$
b) $\alpha = 60^\circ$ $P = (5, 1)$ e) $\alpha = 0^\circ$ $P = (-3, -2)$
c) $\alpha = 30^\circ$ $P = (-5, 0)$ f) $\alpha = 135^\circ$ $P = (0, -7)$

3.4. Napisz równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt P .

a) $k: 9x - 2y + 1 = 0$ $P = (0, -3)$
b) $k: 2x + 3y - 10 = 0$ $P = (1, 1)$
c) $k: 7x + y - 18 = 0$ $P = (5, 0)$
d) $k: 6x - 5y + 19 = 0$ $P = (-2, -3)$
e) $k: x + 11y - 21 = 0$ $P = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
f) $k: 5x + \sqrt{3}y - 18 = 0$ $P = (2, -\sqrt{3})$

3.5. Sprawdź, czy proste l i p są równoległe do prostej k .

a) $k: x - 2y + 9 = 0$ $l: 2x - 4y + 7 = 0$ $p: 3x + 2y - 1 = 0$
b) $k: -3x + y + 7 = 0$ $l: 9x + 3y - \sqrt{2} = 0$ $p: 6x - 2y + 11 = 0$
c) $k: \sqrt{7}x + 2\sqrt{7}y + 3\sqrt{7} = 0$ $l: -6x - 12y + 7 = 0$ $p: 3x + 6y + \sqrt{2} = 0$
d) $k: x + y = 0$ $l: 3x - 3y + 5 = 0$ $p: -1\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + 7 = 0$

3.6. W równoległoboku $ABCD$ dane są wierzchołek $C = (10, 4)$ oraz równania boków $AB: y = 1$ i $AD: 3x - 2y - 4 = 0$. Oblicz długości boków i przekątnych tego równoległoboku.

3.7. Napisz równanie ogólne prostej l prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt P .

a) $k: 8x + 3y - 1 = 0$ $P = (-2, -2)$
b) $k: 5x + 11y = 0$ $P = (-1, -5)$
c) $k: \sqrt{2}x - 3y + 2\sqrt{2} = 0$ $P = (0, \sqrt{2})$
d) $k: \sqrt{3}x + \sqrt{2}y + 1 = 0$ $P = (0, 0)$
e) $k: 6x - 2y + 17 = 0$ $P = (3, -2)$
f) $k: 4x + 7y + \sqrt{15} = 0$ $P = (\sqrt{3}, 1)$

3.8. Wyznacz odległości punktów $A = (4, 1)$, $B = (0, 2)$, $C = (2, 2)$ od prostej o równaniu $3x - 4y + 2 = 0$.

3.19. $A = (-4, -2)$, $BD: 2x - y - 2 = 0$, $CE: x - 4y + 8 = 0$

• $AB \perp CE$ i $A \in AB$, więc prosta AB ma równanie $4x + y + c = 0$ i $4 \cdot (-4) - 2 + c = 0$. Stąd $c = 18$.
Zatem $AB: 4x + y + 18 = 0$.

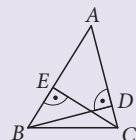
• $AC \perp BD$ i $A \in AC$, więc prosta AC ma równanie $x - 2y + d = 0$ i $-4 - 2 \cdot (-2) + d = 0$. Stąd $d = 0$.
Zatem $AC: x - 2y = 0$.

• B jest punktem wspólnym prostych AB i BD , a C – prostych AC i CE .

$B: \begin{cases} 4x + y + 18 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 10 = 0 \\ y = -2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ y = 22 \end{cases}$, stąd $B = (-10, 22)$.

$C: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 4y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 2y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases}$, stąd $C = (8, 4)$.

Odp.: $B = (-10, 22)$, $C = (8, 4)$



3.9. Wyznacz odległości punktów $A = (2, 0)$, $B = (3, -2)$, $C = (-3, -7)$ od prostej o równaniu $y = 2x - 1$.

3.10. Wyznacz odległość punktu przecięcia prostych o równaniach $y = -\frac{5}{2}x + 2$ i $y = x - 5$ od prostej o równaniu $y = -x + 3$.

3.11. Wyznacz odległość punktu $P = (3, 0)$ od prostej przechodzącej przez punkty $A = (1, -3)$ i $B = (-4, 9)$.

3.12. Oblicz pole trójkąta ABC o podanych wierzchołkach.

- a) $A = (5, 5)$ $B = (-2, 4)$ $C = (-1, -3)$
 b) $A = (1, 2)$ $B = (4, 8)$ $C = \left(-\frac{1}{2}, \frac{23}{4}\right)$
 c) $A = (-4, -2)$ $B = (1, 5)$ $C = (-3, 6)$

3.13. Boki trójkąta zawierają się w prostych: $4x + 3y - 21 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$, $3x + y - 7 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta i oblicz jego pole.

3.14. Narysuj w układzie współrzędnych czworokąt $ABCD$ i oblicz jego obwód oraz pole.

- a) $A = (4, -2)$ $B = (2, 1)$ $C = (-3, 2)$ $D = (1, -4)$
 b) $A = (7, 2)$ $B = (5, 4)$ $C = (-1, -2)$ $D = (1, -4)$
 c) $A = (-1, 0)$ $B = (1, 3)$ $C = (-2, 5)$ $D = (-4, 2)$
 d) $A = (-4, 0)$ $B = (1, -5)$ $C = (2, 2)$ $D = (-2, 4)$

3.15. W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty oraz $A = (11, 6)$ i $B = (0, 9)$. Przyprostokątna CB zawiera się w prostej o równaniu $y = -3x + 9$. Oblicz współrzędne punktu C oraz długości boków tego trójkąta.

3.16. Wyznacz odległość między prostymi k i l .

- a) $k: 3x + 4y = 0$ $l: 3x + 4y + 10 = 0$ c) $k: y = x$ $l: y = x - 3$
 b) $k: x - 2y + 1 = 0$ $l: x - 2y - 4 = 0$ d) $k: y = -\frac{1}{3}x + 2$ $l: y = -\frac{1}{3}x - 1$

3.17. Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB .

- a) $A = (-3, -1)$, $B = (3, 5)$ c) $A = (1, -1)$, $B = (-2, 5)$
 b) $A = (0, 2)$, $B = (8, 0)$ d) $A = (-5, 6)$, $B = (3, 1)$

3.18. W trójkącie ABC dane są wierzchołki $A = (2, 7)$, $B = (-1, 4)$, $C = (5, 2)$. Wyznacz równanie wysokości AD tego trójkąta.

* **3.19.** W trójkącie ABC dane są współrzędne wierzchołka $A = (-4, -2)$ oraz równania wysokości $BD: 2x + y - 2 = 0$ i $CE: x - 4y + 8 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i C .

3.20. $|AC| = |BC|$, $A = (5, 2)$, $B = (-1, 4)$, $k: 2x - 3y + 19 = 0$, $C \in k$

Niech $C = (x, y)$.

$|AC|^2 = |BC|^2$, czyli:

$$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = (x + 1)^2 + (y - 4)^2$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16$$

$$4y = 12x - 12 \quad |:4$$

$y = 3x - 3$ – równanie symetralnej odcinka AB

Punkt C należy do prostej k i symetralnej odcinka AB :

$$\begin{cases} 2x - 3y + 19 = 0 \\ y = 3x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 9x + 9 + 19 = 0 \\ y = 3x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \end{cases}$$

Odp.: $C = (4, 9)$

3.9. punkt $A: \frac{3\sqrt{5}}{5}$, punkt $B: \frac{7\sqrt{5}}{5}$,
punkt $C: 0$

3.10. $2\sqrt{2}$

3.11. 3

3.12. a) $P = 25$

b) $P = 10\frac{1}{8}$

c) $P = 16,5$

3.13. $(6, -1)$, $(0, 7)$, $(2, 1)$, $P = 10$

3.14. a) $obw = \sqrt{13}(4 + \sqrt{2})$,

$P = 19,5$

b) $obw = 16\sqrt{2}$, $P = 24$

c) $obw = 4\sqrt{13}$, $P = 13$

d) $obw = 10\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$, $P = 30$

3.15. $C = (2, 3)$, $|AB| = \sqrt{130}$,
 $|BC| = 2\sqrt{10}$, $|AC| = 3\sqrt{10}$

3.16. a) 2 b) $\sqrt{5}$

c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{9\sqrt{10}}{10}$

3.17. a) $y = -x + 2$

b) $y = 4x - 15$

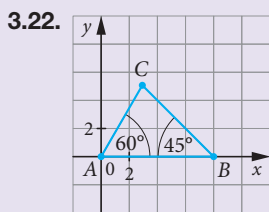
c) $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}$

d) $y = \frac{8}{5}x + \frac{51}{10}$

3.18. $y = 3x + 1$

3.19. Patrz s. 68.

3.20. Patrz s. 69.

 $A = (0, 0)$, $B = (8, 0)$ Prosta AC : $y = ax$ Prosta BC : $y = bx + c$

$$a = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$b = \operatorname{tg}(180^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1$$

$$-1 \cdot 8 + c = 0, \text{ stąd } c = 8.$$

Punkt C wyznaczamy jako punkt wspólny prostych AC i BC :

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ y = -x + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ x(\sqrt{3} + 1) = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ x = \frac{8}{\sqrt{3} + 1} \end{cases}$$

$$x = \frac{8}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = 4\sqrt{3} - 4$$

$$y = \sqrt{3}(4\sqrt{3} - 4) = 12 - 4\sqrt{3}$$

Odp.: $C = (4\sqrt{3} - 4, 12 - 4\sqrt{3})$ **Prosto do matury**

1. C
2. B
3. C
4. F, P, P
5. $x - y - 3 = 0$
6. $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = 2\sqrt{10}$, $|AC| = 8\sqrt{2}$, $|BD| = 4\sqrt{2}$
7. $|CD| = 2\sqrt{5}$

* 3.20. W trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) dane są współrzędne wierzchołków $A = (5, 2)$ i $B = (-1, 4)$. Punkt C leży na prostej $k: 2x - 3y + 19 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C .

* 3.21. W trapezie prostokątnym $ABCD$ o podstawach AB i CD dane są współrzędne wierzchołków $A = (-2, -2)$, $B = (8, 3)$, $C = (3, 8)$. Oblicz pole tego trapezu.

* 3.22. W trójkącie ABC o kątach $\sphericalangle CAB = 60^\circ$ i $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ dane są współrzędne wierzchołków $A = (0, 0)$ i $B = (8, 0)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C .

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż kąt, który przybliży z dokładnością do 1° kąt nachylenia prostej $y = -1,6x$ do osi x .

- A. 58° B. 167° C. 122° D. -122°

2. Wskaż prostą, która tworzy z osią x kąt o mierze 150° .

- A. $\sqrt{3}x + y + 3 = 0$ C. $\sqrt{3}x + 2y - 5 = 0$
 B. $\sqrt{3}x + 3y - 11 = 0$ D. $\sqrt{3}x - 3y + 3 = 0$

3. Wskaż prostą równoległą do prostej $x - \sqrt{3}y + \sqrt{2} = 0$.

- A. $x - y + \sqrt{2} = 0$ C. $\sqrt{3}x - 3y - 11 = 0$
 B. $x + \sqrt{3}y + \sqrt{7} = 0$ D. $x - y - 1 = 0$

4. Oceń prawdziwość podanych zdań. Prosta o równaniu $x - 2y - 1 = 0$ jest

- A. równoległa do prostej $2x - y - 1 = 0$.
 B. prostopadła do prostej $2x + y + 2 = 0$.
 C. oddalona o $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ od prostej $x - 2y - 3 = 0$.

5. Napisz równanie symetralnej odcinka o końcach $A = (-1, 2)$ i $B = (5, -4)$.

6. Dane są współrzędne wierzchołków $A = (-3, 1)$ i $B = (3, 3)$ oraz punktu przecięcia przekątnych $S = (1, 5)$ równoległoboku $ABCD$. Oblicz długości boków i przekątnych tego równoległoboku.

7. W trójkącie o wierzchołkach $A = (-5, -1)$, $B = (3, 3)$, $C = (-1, 6)$ poprowadzono wysokość CD . Oblicz $|CD|$.

3.21. $A = (-2, -2)$, $B = (8, 3)$, $C = (3, 8)$. Niech a_{AB} , a_{BC} – współczynniki kierunkowe prostych AB i BC .

$a_{AB} = \frac{3+2}{8+2} = \frac{1}{2}$, $a_{BC} = \frac{8-3}{3-8} = -1$, zatem boki AB i BC nie są prostopadłe. Trapez jest prostokątny, więc $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ADC = 90^\circ$.

Wyznaczamy równania prostych DC i AD .

• $DC \parallel AB$ i $C \in DC$, więc prosta DC ma równanie $y = \frac{1}{2}x + b$ i $\frac{1}{2} \cdot 3 + b = 8$. Stąd $b = \frac{13}{2}$. Zatem $DC: y = \frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$.

• $AD \perp AB$ i $A \in AD$, więc prosta AD ma równanie $y = -2x + c$ i $-2 \cdot (-2) + b = -2$. Stąd $c = -6$. Zatem $AD: y = -2x - 6$.

Wyznaczamy współrzędne punktu D (punkt wspólny prostych DC i AD).

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{13}{2} \\ y = -2x - 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{13}{2} = -2x - 6 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 4 \end{cases}, \text{ stąd } D = (-5, 4). \text{ Obliczamy pole trapezu: } P = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|) \cdot |AD|.$$

$$|AB| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}, \quad |CD| = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}, \quad |AD| = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot (5\sqrt{5} + 4\sqrt{5}) \cdot 3\sqrt{5} = \frac{1}{2} \cdot 9\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} = 67,5$$

Odp.: $P = 67,5$

4. Równanie okręgu. Nierówność opisująca koło

Umiejętności:

- opisywanie okręgu za pomocą równania $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
- opisywanie koła za pomocą nierówności $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$

Równanie okręgu

Okręgiem o środku S i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny oddalonych o r od punktu S . Punkt $P = (x, y)$ należy zatem do okręgu o środku $S = (a, b)$ i promieniu r ($r > 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$|SP| = r$$

Po podstawieniu współrzędnych punktów S i P do wzoru na odległość otrzymujemy równanie:

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

Obie strony tego równania są liczbami dodatnimi, zatem możemy je podnieść do kwadratu i otrzymamy:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Równania $f(x) = g(x)$ i $f^2(x) = g^2(x)$ nie muszą być równoważne, tzn. najczęściej mają różne zbiory rozwiązań. Na przykład rozwiązaniem równania $x = 2$ jest tylko liczba 2, natomiast rozwiązaniami równania $x^2 = 4$ są dwie liczby: 2 oraz -2 . Jeżeli chcemy podnieść równanie $f(x) = g(x)$ stronami do kwadratu i otrzymać równanie równoważne, to równocześnie musimy założyć, że $f(x)$ i $g(x)$ mają ten sam znak – są albo niedodatnie, albo nieujemne.



Wniosek

Równanie $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, $r > 0$, opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej **okrąg** o środku $S = (a, b)$ i promieniu r .

Przykład 1 ◀ zad. 4.1

Zapiszemy równanie okręgu o danym środku S i promieniu r .

Rozwiązanie

a) $S = (1, 5)$, $r = 3$

Do wzoru $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ podstawiamy $a = 1$, $b = 5$, $r = 3$ i otrzymujemy równanie $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 9$.

◀ 4.1. Napisz równanie okręgu o środku S i promieniu r .

a) $S = (-1, 3)$, $r = 3$

c) $S = (-2, -5)$, $r = 1$

e) $S = (6, -4)$, $r = 5$

b) $S = (0, 0)$, $r = 11$

d) $S = (0, 5)$, $r = 3\sqrt{2}$

f) $S = \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$, $r = \sqrt{3}$

Odp.: a) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$

b) $x^2 + y^2 = 121$

c) $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 1$

d) $x^2 + (y - 5)^2 = 18$

e) $(x - 6)^2 + (y + 4)^2 = 25$

f) $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = 3$

Uwagi metodyczne

Zapis równania okręgu z wykorzystaniem pierwiastka na ogół nie stwarza problemów uczniom, ale podniesienie tego równania stronami do kwadratu jest łatwe tylko pozornie, bo nie wolno robić tego mechanicznie. W podręczniku podajemy uwagę, że takie równania najczęściej nie są równoważne. Jest to bardzo ważne. Nie ma wprowadzić w podstawie programowej nawet najprostszych równań pierwiastkowych, ale może warto wpoić uczniom zasadę, że po podniesieniu stron równania do kwadratu każde jego rozwiązanie musimy sprawdzić.

ZZ i KPU

tematy 2.4, 2.5

Multiteka

- Okrąg i trójkąt w układzie współrzędnych

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.4

 **Generator**
testów i sprawdzianów

◀4.2. Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą podanego równania?

a) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$

b) $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 0$

c) $x^2 + y^2 = 2$

d) $(x+2)^2 + y^2 + 1 = 0$

e) $(x+2)^2 + y^2 - 3 = 0$

f) $(x-5)^2 + (y-2)^2 = -16$

Odp.: a) okrąg o środku $S = (2, 3)$ i promieniu $r = 4$

b) zbiór $\{(-2, 5)\}$

c) okrąg o środku $S = (0, 0)$ i promieniu $r = \sqrt{2}$

d) zbiór pusty

e) okrąg o środku $S = (-2, 0)$ i promieniu $r = \sqrt{3}$

f) zbiór pusty

◀4.5. Do okręgu o środku $S = (4, 3)$ należy punkt $A = (8, 0)$. Napisz równanie tego okręgu.

Odp.: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$

b) $S = (-2, 3)$, $r = \sqrt{2}$

Równanie tego okręgu ma postać: $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 2$.

c) $S = (3, 0)$, $r = 1$

Równanie okręgu ma postać: $(x-3)^2 + y^2 = 1$.

Przykład 2 ◀ zad. 4.2

Sprawdźmy, czy dane równanie opisuje okrąg. Jeśli tak, odczytamy współrzędne jego środka i promień.

a) $x^2 + (y-4)^2 = 1$

b) $(x + \sqrt{7})^2 + (3-y)^2 = 5$

c) $(x-3)^2 + (2y-3)^2 = 1$

d) $(x-5)^2 + (y+8)^2 = -4$

e) $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 0$

Rozwiązanie

a) Równanie opisuje okrąg o środku $S = (0, 4)$ i promieniu $r = 1$.

b) Równanie można zapisać w postaci $(x + \sqrt{7})^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{5})^2$, więc opisuje ono okrąg o środku $S = (-\sqrt{7}, 3)$ i promieniu $r = \sqrt{5}$.

c) Równanie nie opisuje okręgu, ponieważ nie można go zapisać w postaci $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

d) Równanie nie opisuje okręgu. Żadna para liczb (x, y) go nie spełnia. Równanie opisuje zbiór pusty.

e) Równanie opisuje zbiór jednoelementowy. Tylko współrzędne punktu $(5, -3)$ spełniają to równanie.

Przykład 3 ◀ zad. 4.5

Napiszemy równanie okręgu o środku $S = (1, -9)$ przechodzącego przez punkt $A = (0, 2)$.

Rozwiązanie

Szukane równanie ma postać $(x-1)^2 + (y+9)^2 = r^2$.

Promień r tego okręgu jest równy odległości jego środka S od punktu A . Wystarczy obliczyć kwadrat tej odległości:

$$r^2 = (1-0)^2 + (-9-2)^2 = 1^2 + 11^2 = 122$$

Odp.: $(x-1)^2 + (y+9)^2 = 122$

Przykład 4 ◀ zad. 4.6

Napiszemy równanie okręgu o środku $S = (-3, -2)$ stycznego do osi x .

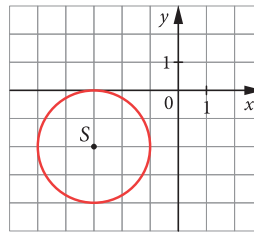
Rozwiązanie

Promień tego okręgu jest równy odległości jego środka od osi x .

Zatem $r = 2$ i szukane równanie ma postać

$$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 4.$$

Odp.: $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$

**Przykład 5** ◀ zad. 4.14, 4.15

Napiszemy równanie okręgu opisanego na trójkącie o bokach zawartych w prostych $2x - y + 3 = 0$, $x - y = 0$ oraz $x - 1 = 0$.

RozwiązanieI sposób

Na rysunku mamy pomocniczy szkic sytuacji podanej w zadaniu.

Opiszemy etapy konstruowania okręgu opisanego na trójkącie.

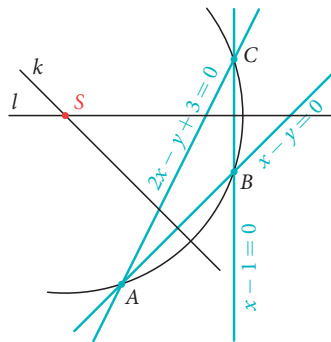
Należy wyznaczyć kolejno:

Krok 1: Wierzchołki trójkąta – oznaczmy je A , B i C .

Krok 2: Równania symetralnych k i l dwóch wybranych boków trójkąta ABC .

Krok 3: Punkt S przecięcia tych symetralnych będący środkiem szukanego okręgu.

Krok 4: Odległość punktu S od jednego z wierzchołków trójkąta, będącą promieniem r szukanego okręgu.



Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku:

prosta AC : $2x - y + 3 = 0$, prosta AB : $x - y = 0$, prosta BC : $x - 1 = 0$.

Wykonujemy kolejne kroki.

1. Rozwiązujemy trzy układy równań (przekształcenia rachunkowe zostawiamy do samodzielnego wykonania):

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$$

i otrzymujemy: $A = (-3, -3)$, $B = (1, 1)$ i $C = (1, 5)$.

◀ **4.6.** Napisz równanie okręgu o środku w punkcie $S = (-2, 5)$ stycznego

a) do osi x .

b) do osi y .

Odp.: a) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 25$

b) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 4$

◀ **4.14.** Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC .

a) $A = (5, 1)$, $B = (4, 6)$,

$C = (-1, 5)$

b) $A = (1, 0)$, $B = (5, 2)$,

$C = (2, 3)$

c) $A = (0, 2)$, $B = (9, -1)$,

$C = (8, 6)$

Odp.: a) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$

b) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$

c) $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$

◀ **4.15.** Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie, którego boki zawierają się w prostych o równaniach: $y = 3x - 9$, $2x + y - 1 = 0$ i $y = -x + 3$.

Odp.: $(x + 2)^2 + y^2 = 25$

2. Wyznaczamy równania symetralnych k, l boków AB i BC .

- $(-1, -1)$ $\leftarrow$ współrzędne środka boku AB
 $k: x + y + c = 0$ $\leftarrow k \perp AB$
 $c = 2$ $\leftarrow (-1, -1) \in k$
 $k: x + y + 2 = 0$
- $(1, 3)$ $\leftarrow$ współrzędne środka boku BC
 $l: y + c = 0$ $\leftarrow l \perp BC$
 $c = -3$ $\leftarrow (1, 3) \in l$
 $l: y - 3 = 0$

3. Rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases}$$

są współrzędne środka szukanego okręgu: $S = (-5, 3)$.

4. $r^2 = |SC|^2 = 36 + 4 = 40$

Odp.: $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 40$

II sposób

Wyznaczamy (jak w I sposobie) współrzędne wierzchołków A, B, C trójkąta.

Niech $S = (a, b)$ będzie środkiem szukanego okręgu, a r – jego promieniem. Okrąg przechodzi przez punkty $A = (-3, -3)$, $B = (1, 1)$ i $C = (1, 5)$, więc współrzędne każdego z tych punktów spełniają równanie okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} (-3 - a)^2 + (-3 - b)^2 = r^2 \\ (1 - a)^2 + (1 - b)^2 = r^2 \\ (1 - a)^2 + (5 - b)^2 = r^2 \end{cases}$$

Zauważmy, że prawe strony wszystkich równań są identyczne.

Skoro $r^2 = (-3 - a)^2 + (-3 - b)^2$, możemy zapisać podany układ równań w postaci:

$$\begin{cases} (1 - a)^2 + (1 - b)^2 = (-3 - a)^2 + (-3 - b)^2 \\ (1 - a)^2 + (5 - b)^2 = (-3 - a)^2 + (-3 - b)^2 \end{cases}$$

Po przekształceniach otrzymujemy kolejno:

$$\begin{cases} 1 - 2a + a^2 + 1 - 2b + b^2 = 9 + 6a + a^2 + 9 + 6b + b^2 \\ 1 - 2a + a^2 + 25 - 10b + b^2 = 9 + 6a + a^2 + 9 + 6b + b^2 \\ \begin{cases} -8a - 8b = 16 \\ -8a - 16b = -8 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} a + b = -2 \\ a + 2b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -5 \\ b = 3 \end{cases}$$

Obliczamy r^2 : $r^2 = (-3 + 5)^2 + (-3 - 3)^2$, czyli $r^2 = 40$.

Zatem $S = (-5, 3)$ i $r^2 = 40$.

Odp.: $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 40$

Nierówność opisująca koło

Przypomnijmy:

Punkt $P = (x, y)$ należy do koła o środku $S = (a, b)$ i promieniu r ($r > 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy $|SP| \leq r$.

Wniosek

Nierówność $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$, $r > 0$, opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej **koło** o środku $S = (a, b)$ i promieniu r .

Nierówność $(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$ opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór punktów leżących na zewnątrz tego koła.

Przykład 6 ◀ zad. 4.16

Sprawdźmy, które z punktów: $A = (-2, 2)$, $B = (2, 2 - 2\sqrt{2})$, $C = (3, 5)$, $D = (-1, 0)$ należą do koła o środku $S = (1, 2)$ i promieniu 3.

Rozwiązanie

Nierówność opisująca to koło ma postać $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 9$.

Aby sprawdzić położenie punktu względem koła, podstawiamy współrzędne punktu do lewej strony tej nierówności.

$$\bullet (-2 - 1)^2 + (2 - 2)^2 = (-3)^2 + 0 = 9 \leq 9 \quad \leftarrow A = (-2, 2)$$

Punkt A należy do okręgu o środku $S = (1, 2)$ i promieniu 3. Okrąg ten jest brzegiem danego koła, więc punkt A należy do tego koła.

$$\bullet (2 - 1)^2 + (2 - 2\sqrt{2} - 2)^2 = 1 + 8 = 9 \leq 9 \quad \leftarrow B = (2, 2 - 2\sqrt{2})$$

Punkt B należy do okręgu, który jest brzegiem danego koła, więc należy do tego koła.

$$\bullet (3 - 1)^2 + (5 - 2)^2 = 4 + 9 = 13 > 9 \quad \leftarrow C = (3, 5)$$

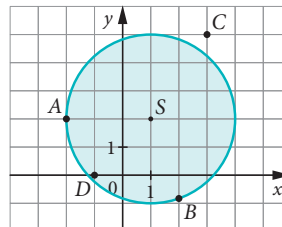
Punkt C nie należy do koła. Współrzędne punktu C spełniają nierówność $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 > 3^2$, zatem C leży na zewnątrz koła o środku S i promieniu 3.

$$\bullet (-1 - 1)^2 + (0 - 2)^2 = 4 + 4 = 8 < 9 \quad \leftarrow D = (-1, 0)$$

Punkt D należy do koła o środku S i promieniu 3.

Obok zamieszczamy ilustrację zadania.

Odp.: Punkty A, B oraz D należą do podanego koła.



◀ 4.16. Zbadaj położenie punktów A, B, C względem koła.

a) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 \leq 4$,

$A = (2, 3)$, $B = (1, 4)$, $C = (-1, 1)$

b) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 \leq 1$,

$A = (3, -1)$, $B = (-2, -1)$, $C = (1, 1)$

Odp.: a) A i B – należą,
 C – nie należy.

b) A – należy, B i C – nie należą.

◀ 4.17. Patrz s. 78.

D Przykład 7 ◀ zad. 4.17

Wykażemy, że odcinek AB o końcach $A = (-1, 6)$, $B = (1, 4)$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem o równaniu $(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

Dowód

Sprawdzamy położenie końców odcinka względem okręgu. W tym celu podstawiamy ich współrzędne do równania okręgu. Dla punktu A mamy:

$$(-1 + 5)^2 + (6 - 4)^2 = 16 + 4 < 25$$

czyli punkt A leży wewnątrz koła ograniczonego tym okręgiem.

Dla punktu B mamy:

$$(1 + 5)^2 + (4 - 4)^2 = 36 > 25$$

czyli punkt B leży na zewnątrz tego koła.

Zatem odcinek AB ma dokładnie jeden punkt wspólny z danym okręgiem.

Koniec dowodu**Zadania****Odpowiedzi i rozwiązania**

4.1. a) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$

b) $x^2 + y^2 = 121$

c) $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 1$

d) $x^2 + (y - 5)^2 = 18$

e) $(x - 6)^2 + (y + 4)^2 = 25$

f) $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = 3$

4.2. a) okrąg o środku $S = (2, 3)$ i promieniu $r = 4$

b) zbiór $\{(-2, 5)\}$

c) okrąg o środku $S = (0, 0)$ i promieniu $r = \sqrt{2}$

d) zbiór pusty

e) okrąg o środku $S = (-2, 0)$ i promieniu $r = \sqrt{3}$

f) zbiór pusty

4.3. a) $S = (-3, -11)$, $r = \sqrt{5}$

b) $S = (0, 0)$, $r = 14$

c) $S = (1, -3)$, $r = 2$

d) $S = (3, -5)$, $r = \sqrt{14}$

4.4. a) A – tak, B – nie

b) A – nie, B – tak

4.1. Napisz równanie okręgu o środku S i promieniu r .

a) $S = (-1, 3)$

$r = 3$

d) $S = (0, 5)$

$r = 3\sqrt{2}$

b) $S = (0, 0)$

$r = 11$

e) $S = (6, -4)$

$r = 5$

c) $S = (-2, -5)$

$r = 1$

f) $S = \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$

$r = \sqrt{3}$

4.2. Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą podanego równania?

a) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$

d) $(x + 2)^2 + y^2 + 1 = 0$

b) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 0$

e) $(x + 2)^2 + y^2 - 3 = 0$

c) $x^2 + y^2 = 2$

f) $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = -16$

4.3. Odczytaj z równania środek i promień okręgu.

a) $(x + 3)^2 + (y + 11)^2 = 5$

c) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$

b) $x^2 + y^2 = 196$

d) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 14$

4.4. Sprawdź, czy punkty A, B należą do okręgu o podanym równaniu.

a) $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$

$A = (6, 3)$, $B = (2, 5)$

b) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$

$A = (2, 0)$, $B = (1, 1)$

D

4.17. Wykaż, że odcinek AB ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem o podanym równaniu.

- | | |
|--------------------------------|------------------------------|
| a) $A = (3, 1), B = (-2, 3)$ | $(x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 25$ |
| b) $A = (6, 1), B = (5, 2)$ | $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ |
| c) $A = (-4, 1), B = (-3, -2)$ | $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ |
| d) $A = (0, 4), B = (-2, 2)$ | $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 18$ |

Prosto do matury



Prosto do matury

- A
- A
- B
- P, P, P
- $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 25$
- $(x + 2)^2 + y^2 = 4$
- $A = (0, 1), B = (3, 0), C = (4, 3), D = (1, 4)$
 $\bullet |AB| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$
 $|BC| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$
 $|CD| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$
 $|DA| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$
 Zatem czworokąt $ABCD$ jest rombem.
 $\bullet |AC| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
 $|AC|^2 = 20 = |AB|^2 + |BC|^2$,
 więc $\sphericalangle ABC = 90^\circ$.
 Zatem czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.
 $\bullet S$ – środek okręgu (środek odcinka AC)
 r – promień okręgu
 $S = (2, 2), r = \frac{1}{2} \cdot |AC| = \sqrt{5}$
 Równanie okręgu:
 $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5$

1. Wskaż punkt leżący na okręgu o równaniu $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$.

- A. $(3, 0)$ B. $(3, -4)$ C. $(-3, -4)$ D. $(-3, 0)$

2. Odległość między środkami okręgów o równaniach $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$ oraz $(x - 3)^2 + y^2 = 8$ jest równa

- A. $\sqrt{26}$. B. $2\sqrt{26}$. C. 8. D. $4 + \sqrt{8}$.

3. Odcinek o końcach $P = (0, 0), Q = (8, 6)$ jest średnicą okręgu o równaniu

- A. $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$. C. $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$.
 B. $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$. D. $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Okrąg o środku $S = (-9, 0)$ i promieniu $r = \sqrt{2}$ można opisać za pomocą równania $(x + 9)^2 + y^2 = 2$.
 B. Punkt $M = (\sqrt{2} - 9, 0)$ należy do okręgu o środku $S = (-9, 0)$ i promieniu $r = \sqrt{2}$.
 C. Punkt $N = (\sqrt{2} - 9, -1)$ leży na zewnątrz koła o środku $S = (-9, 0)$ i promieniu $r = \sqrt{2}$.

5. Dane są punkty $M = (-5, 8)$ i $N = (3, 2)$. Napisz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek MN .

6. Napisz równanie okręgu stycznego do osi y , którego środek jest punktem przecięcia prostych $2x - y + 4 = 0$ i $x - 2y + 2 = 0$.

D

7. Dane są punkty: $A = (0, 1), B = (3, 0), C = (4, 3), D = (1, 4)$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest kwadratem i napisz równanie okręgu, którego średnicami są przekątne tego kwadratu.

4.17. a) $A = (3, 1), B = (-2, 3), o: (x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 25$

Podstawiamy współrzędne punktów A i B do lewej strony równania okręgu o .

$A: (3 + 1)^2 + (1 - 6)^2 = 16 + 25 > 25$, $B: (-2 + 1)^2 + (3 - 6)^2 = 1 + 9 = 10 < 25$

Punkt A leży na zewnątrz, a punkt B – wewnątrz koła ograniczonego okręgiem o , więc odcinek AB ma dokładnie jeden punkt wspólny z tym okręgiem.

b) $A = (6, 1), B = (5, 2), o: (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

$A: (6 - 3)^2 + (1 - 3)^2 = 9 + 4 = 13 > 9$, $B: (5 - 3)^2 + (2 - 3)^2 = 4 + 1 = 5 < 9$

Odcinek AB ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem o .

c) $A = (-4, 1), B = (-3, -2), o: (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$

$A: (-4 + 2)^2 + (1 + 1)^2 = 4 + 4 > 4$, $B: (-3 + 2)^2 + (-2 + 1)^2 = 1 + 1 = 2 < 4$

Odcinek AB ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem o .

d) $A = (0, 4), B = (-2, 2), o: (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 18$

$A: (0 + 1)^2 + (4 + 2)^2 = 1 + 36 > 18$, $B: (-2 + 1)^2 + (2 + 2)^2 = 1 + 16 = 17 < 18$

Odcinek AB ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem o .

5. Okrąg i prosta

Umiejętności:

- określanie wzajemnego położenia prostej i okręgu (koła)
- wyznaczanie punktów wspólnych prostej i okręgu
- wyznaczanie równania stycznej do okręgu

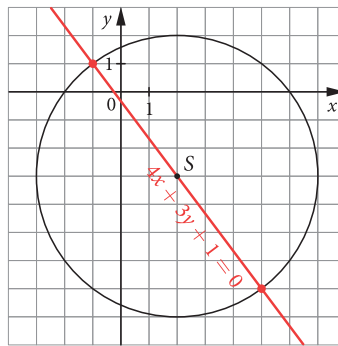
Prostą i okrąg możemy opisać za pomocą równań, zatem wyznaczenie punktów wspólnych tych dwóch figur sprowadza się do rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \\ px + qy + m = 0 \end{cases}$$

w którym $r > 0$ oraz $p^2 + q^2 \neq 0$.

Przykład 1 ◀ zad. 5.2

Z wykresu przedstawiającego okrąg o środku $S = (2, -3)$ i promieniu $r = 5$ oraz prostą o równaniu $4x + 3y + 1 = 0$ możemy odczytać ich punkty wspólne: $A = (-1, 1)$ i $B = (5, -7)$. Sprawdzimy rachunkowo, czy współrzędne tych punktów zostały poprawnie odczytane.



Rozwiązanie

Aby sprawdzić, czy współrzędne punktów zostały odczytane poprawnie, podstawiamy je do układu równań opisujących okrąg i prostą.

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25 \\ 4x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 + 16 = 25 \\ -4 + 3 + 1 = 0 \end{cases} \leftarrow A = (-1, 1) \quad \begin{cases} 9 + 16 = 25 \\ 20 - 21 + 1 = 0 \end{cases} \leftarrow B = (5, -7)$$

Dla każdego z punktów obydwie równości są prawdziwe. Zatem współrzędne punktów przecięcia okręgu z prostą zostały poprawnie odczytane z rysunku.

Przykład 2 ◀ zad. 5.3

Wyznamy punkty wspólne prostej $2x + y - 7 = 0$ i okręgu $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 20$, a następnie wykonamy ilustrację graficzną rozwiązania.

Rozwiązanie

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 = 20 \end{cases}$$

◀ 5.2. Patrz s. 84.

◀ 5.3. Wyznacz współrzędne punktów przecięcia okręgu i prostej o danych równaniach.

- a) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$, $x - y + 1 = 0$
 b) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 9$, $x + y - 8 = 0$
 c) $(x-2)^2 + y^2 = 25$, $x - 5 = 0$
 d) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$, $2x - y + 4 = 0$

Odp.: a) $(-2, -1)$, $(2, 3)$

b) $(1, 7)$, $(4, 4)$

c) $(5, -4)$, $(5, 4)$

d) brak punktów wspólnych

ZZ i KPU

tematy 2.7, 2.9, 2.10

Multiteka

- Prosta i okrąg w układzie współrzędnych

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.5

Generator
testów i sprawdzianów

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ (x + 2)^2 + (-2x + 7 - 1)^2 = 20 \end{cases}$$

← podstawiamy $y = -2x + 7$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2x + 7 \\ (x - 2)^2 = 0 \end{cases}$$

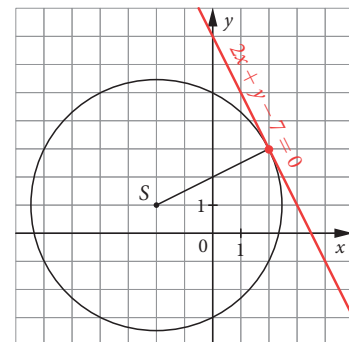
Jedynym pierwiastkiem drugiego równania jest liczba 2. Zatem rozwiązaniem układu jest jedna para liczb: $x = 2$, $y = 3$.

Prosta i okrąg mają więc jeden punkt wspólny, a to oznacza, że prosta jest styczna do okręgu w punkcie (2, 3).

Żeby zilustrować tę sytuację na płaszczyźnie kartezjańskiej, zauważmy, że równanie:

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 20$$

opisuje okrąg o środku $S = (-2, 1)$ i promieniu $r = \sqrt{20}$. Rysunek możemy łatwo wykonać bez znajdowania odcinka o długości r , bo wiemy już, że punkt (2, 3) leży na okręgu.



Odp.: Prosta jest styczna do okręgu w punkcie (2, 3).

Przykład 3

Zbadamy wzajemne położenie prostej $y = x + 3$ i okręgu $x^2 + (y + 2)^2 = 9$.

Rozwiązanie

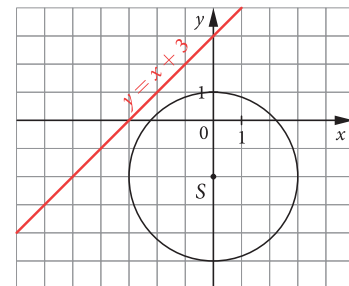
$$\begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 + (y + 2)^2 = 9 \end{cases}$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 + 5x + 8 = 0 \end{cases}$$

Wyróżnik równania kwadratowego jest równy $\Delta = 25 - 32 = -7$, czyli równanie nie ma rozwiązań. Zatem układ równań także ich nie ma. Okrąg i prosta nie mają punktów wspólnych. Można to również odczytać z rysunku.

Innym sposobem rozwiązania jest obliczenie odległości środka okręgu od prostej i porównanie jej z promieniem.



Odp.: Prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem.

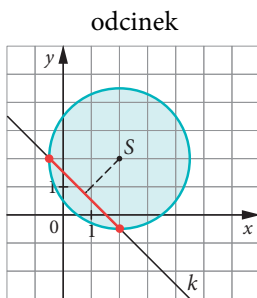
Zbadamy teraz, jaką figurą jest zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej opisany za pomocą układu warunków:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2 \\ px + qy + m = 0 \end{cases}$$

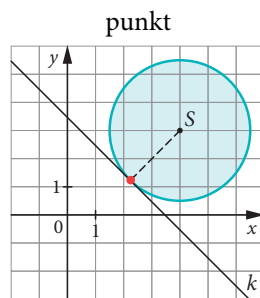
w którym $r > 0$ oraz $p^2 + q^2 \neq 0$.

Pierwszy warunek opisuje koło o środku $S = (a, b)$ i promieniu r , drugi jest równaniem prostej, nazwijmy ją k . Punkt (x, y) spełnia podany układ warunków, gdy należy do każdej z tych figur. Są trzy możliwości.

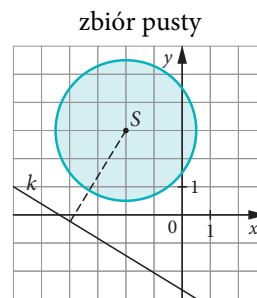
- I. Odległość punktu $S = (a, b)$ od prostej k jest mniejsza od r :
wtedy prosta k przecina koło, czyli punkty wspólne obu figur tworzą odcinek – opisywany zbiór jest odcinkiem (rys. 1).
- II. Odległość punktu $S = (a, b)$ od prostej k jest równa r :
wtedy prosta k jest styczna do koła, czyli jedynym punktem wspólnym tych figur jest punkt styczności – opisywany zbiór jest jednoelementowy (rys. 2).
- III. Odległość punktu $S = (a, b)$ od prostej k jest większa od r :
wtedy prosta k jest rozłączna z kołem, czyli figury nie mają punktów wspólnych – opisywany zbiór jest zbiorem pustym (rys. 3).



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Przykład 4 zad. 5.8

Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą układu warunków $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-2)^2 \leq 11 \\ y = 3 - 2,5x \end{cases}$?

Rozwiązanie

Nierówność $(x-4)^2 + (y-2)^2 \leq 11$ opisuje koło o środku $S = (4, 2)$ i promieniu $r = \sqrt{11}$. Natomiast $y = 3 - 2,5x$ jest równaniem kierunkowym prostej.

◀5.8. Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą podanego układu warunków?

- a) $\begin{cases} (x+2)^2 + (y-5)^2 \leq 4 \\ 2x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} (x+3)^2 + (y+5)^2 \leq 32 \\ y = x + 6 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} (x-10)^2 + (y-1)^2 \leq 100 \\ x = 19 \end{cases}$
- d) $\begin{cases} (x-6)^2 + (y+12)^2 \leq 100 \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$

Odp.: a) odcinek b) punkt
c) odcinek d) zbiór pusty

Zapiszemy równanie prostej, nazwijmy ją k , w postaci ogólnej:

$$k: 2,5x + y - 3 = 0$$

czyli $k: 5x + 2y - 6 = 0$.

Sprawdzamy, jaka jest zależność między odległością punktu S od prostej k a promieniem r koła.

$$\frac{|20 + 4 - 6|}{\sqrt{25 + 4}} = \frac{18}{\sqrt{29}} = \frac{18\sqrt{29}}{29} \approx 3,34 \quad \leftarrow \text{odległość środka } S \text{ od prostej } k$$

Zauważmy, że $\sqrt{11} < 3,32$, natomiast $\frac{18\sqrt{29}}{29} > 3,32$. Otrzymaliśmy układ nierówności:

$$\frac{18\sqrt{29}}{29} > 3,32 > \sqrt{11}$$

Zatem prosta o równaniu $y = 3 - 2,5x$ nie ma punktów wspólnych z kołem opisanym za pomocą nierówności $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 \leq 11$.

Odp.: Opisany zbiór jest zbiorem pustym.

◀ 5.11. Okrąg o środku

$S = (-1, -2)$ przechodzi przez punkt $M = (0, 3)$. Napisz równanie stycznej do tego okręgu w punkcie M .

Odp.: $x + 5y - 15 = 0$



Przykład 5 ◀ zad. 5.11

Okrąg o środku $S = (1, 2)$ przechodzi przez punkt $M = (-2, 1)$. Napiszemy równanie stycznej do tego okręgu w punkcie M .

Rozwiązanie

Szukana styczna (oznaczymy ją k) jest prostopadła do prostej MS , jej równanie można zapisać w postaci kierunkowej:

$$k: y = ax + b$$

Do wyznaczenia współczynnika a potrzebny jest współczynnik kierunkowy m prostej MS : $y = mx + p$.

$$\begin{cases} 2 = m + p \\ 1 = -2m + p \end{cases} \quad \leftarrow \text{podstawiamy współrzędne punktów } S \text{ i } M$$

Stąd $m = \frac{1}{3}$. Zauważmy, że do rozwiązania zadania nie jest potrzebna wartość p .

$$a = -\frac{1}{m} = -3$$

$$k: y = -3x + b$$

$$1 = 6 + b$$

◀ szukana styczna przechodzi przez punkt M

$$k: y = -3x - 5$$

Odp.: Styczna ma równanie $y = -3x - 5$.

Przykład 6 ◀ zad. 5.14

Napišemy równania stycznych do okręgu $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 5$ prostopadłych do prostej $l: x - 2y = 0$.

Rozwiązanie

Zadanie rozwiążemy dwoma sposobami. W pierwszym odwołamy się do konstrukcyjnego wyznaczania takich stycznych, a w drugim pokażemy metodę rachunkową.

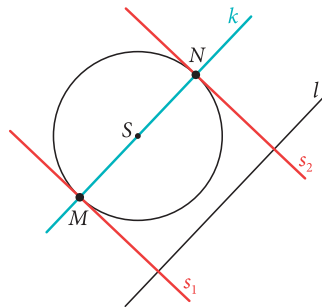
I sposób

Konstrukcja stycznych opisanych w zadaniu przebiega następująco:

Krok 1: Przez środek okręgu prowadzimy prostą k równoległą do l .

Krok 2: Wyznaczamy punkty M i N przecięcia okręgu prostą k . Są to punkty styczności szukanych stycznych (na rysunku oznaczonych s_1, s_2).

Krok 3: Przez punkty M i N prowadzimy proste s_1 i s_2 prostopadłe do l .



Wykonujemy kolejne kroki.

1. Z równania okręgu $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 5$ odczytujemy jego środek $S = (1, -3)$. Następnie znajdujemy równanie prostej k , równoległej do l i przechodzącej przez S .

$$k: x - 2y + c = 0$$

$$1 + 6 + c = 0$$

$$\leftarrow S \in k$$

$$k: x - 2y - 7 = 0$$

2. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 = 5 \\ x - 2y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\text{i otrzymujemy } \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}.$$

$$\text{Zatem } M = (3, -2), N = (-1, -4).$$

3. Znajdujemy równania stycznych s_1 i s_2 .

$$s_1: 2x + y + c = 0 \text{ i } 6 - 2 + c = 0 \quad \leftarrow s_1 \perp l \text{ i } M \in s_1$$

$$s_1: 2x + y - 4 = 0$$

$$s_2: 2x + y + c = 0 \text{ i } -2 - 4 + c = 0 \quad \leftarrow s_2 \perp l \text{ i } N \in s_2$$

$$s_2: 2x + y + 6 = 0$$

Odp.: Szukane styczne mają równania $y = -2x + 4$, $y = -2x - 6$.

◀5.14. Napisz równania stycznych do danego okręgu prostopadłych do prostej k .

a) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 18$,

$k: y = x$

b) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 10$,

$k: x - y = 7$

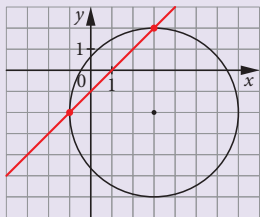
Odp.: a) $y = -x + 3$, $y = -x - 9$

b) $y = -x + 2 - 2\sqrt{5}$,

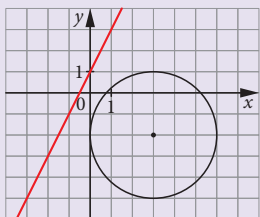
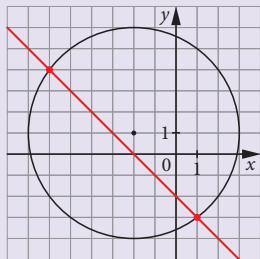
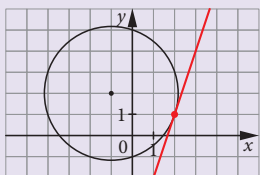
$y = -x + 2 + 2\sqrt{5}$

Odpowiedzi i rozwiązania

5.1. P, P, F

5.2. a) Prosta przecina okrąg w punktach $(-1, -2)$ i $(3, 2)$.

b) Prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem.

c) Prosta przecina okrąg w punktach $(-6, 4)$ i $(1, -3)$.d) Prosta jest styczna do okręgu w punkcie $(2, 1)$.5.3. a) $(-2, -1), (2, 3)$ b) $(1, 7), (4, 4)$ c) $(5, -4), (5, 4)$

d) brak punktów wspólnych

II sposób

Prosta jest styczna do okręgu o środku S i promieniu r wtedy i tylko wtedy, gdy odległość punktu S od tej prostej jest równa r .

Okrąg dany w zadaniu ma środek $S = (1, -3)$ i promień $\sqrt{5}$.

Każdą prostą prostopadłą do prostej l można opisać za pomocą równania postaci $2x + y + c = 0$. Jeżeli skorzystamy ze wzoru na odległość punktu od prostej, to otrzymamy równanie z niewiadomą c .

$$\frac{|2 \cdot 1 - 3 + c|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \quad \leftarrow S = (1, -3), r = \sqrt{5}$$

$$\frac{|c - 1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$|c - 1| = 5$$

$$c - 1 = 5 \text{ lub } c - 1 = -5$$

$$c = 6 \text{ lub } c = -4$$

$|x| = a$ ($a > 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy $x = a$ lub $x = -a$.

Równania stycznych to $2x + y + 6 = 0$ i $2x + y - 4 = 0$.

Odp.: Szukane styczne mają równania $y = -2x + 4$, $y = -2x - 6$.

Zadania

5.1. Oceń prawdziwość podanych zdań. Zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej

opisany za pomocą układu warunków $\begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 1)^2 \leq 4 \\ y = 2 - x \end{cases}$

A. jest odcinkiem.

B. ma dokładnie dwie osie symetrii.

C. jest zbiorem pustym.

5.2. Zbadaj graficznie i rachunkowo wzajemne położenie prostej i okręgu o danych równaniach.

a) $y = x - 1$

$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$

b) $y = 2x + 1$

$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$

c) $y = -x - 2$

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

d) $y = 3x - 5$

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$

5.3. Wyznacz współrzędne punktów przecięcia okręgu i prostej o danych równaniach.

a) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$

$x - y + 1 = 0$

b) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$

$x + y - 8 = 0$

c) $(x - 2)^2 + y^2 = 25$

$x - 5 = 0$

d) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$

$2x - y + 4 = 0$

5.16. $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$

$S(1, 3), r = \sqrt{5}$

Styczne prowadzone z początku układu współrzędnych mają postać $y = ax$, czyli $ax - y = 0$.

Odległość punktu S od stycznej jest równa r , czyli:

$$\frac{|a \cdot 1 - 3|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |a - 3| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2 + 1} \Leftrightarrow (a - 3)^2 = 5(a^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + 6a - 4 = 0 \quad | : 2$$

$$2a^2 + 3a - 2 = 0, \quad \Delta = 25, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = \frac{1}{2}$$

$$a_1 a_2 = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1, \text{ zatem szukane styczne są prostopadłe.}$$

5.4. Oblicz długość cięciwy, którą okrąg $(x+1)^2 + (y+4)^2 = 10$ wycina z prostej $y = 2x - 7$.

5.5. Przez środek okręgu $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$ i punkt $P = (1, 6)$ poprowadzono prostą przecinającą ten okrąg w dwóch punktach. Wyznacz te punkty.

5.6. Okrąg $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 32$ o środku S przecina oś x w punktach A i B . Oblicz pole i obwód trójkąta ABS .

5.7. Punkty $A = (0, -1)$ i $B = (-2, 1)$ należą do okręgu $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$. Znajdź współrzędne takiego punktu C należącego do tego okręgu, aby $|AC| = |BC|$.

5.8. Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą podanego układu warunków?

a) $\begin{cases} (x+2)^2 + (y-5)^2 \leq 4 \\ 2x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x-10)^2 + (y-1)^2 \leq 100 \\ x = 19 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x+3)^2 + (y+5)^2 \leq 32 \\ y = x + 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x-6)^2 + (y+12)^2 \leq 100 \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$

5.9. Wierzchołki trapezu $ABCD$ leżą na okręgu $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 25$. Jedna podstawa trapezu zawiera się w prostej $y - 5 = 0$, a druga jest średnicą okręgu. Oblicz obwód i pole tego trapezu.

5.10. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A = (2, 2)$ oraz przez punkty przecięcia okręgu $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$ z prostą $y + x = 1$.

5.11. Okrąg o środku $S = (-1, -2)$ przechodzi przez punkt $M = (0, 3)$. Napisz równanie stycznej do tego okręgu w punkcie M .

5.12. Napisz równanie okręgu o środku $S = (-3, 1)$ stycznego do prostej $2x - y + 1 = 0$.

5.13. Napisz równania stycznych do okręgu $x^2 + y^2 = 18$ równoległych do prostej $y = -x + 2$.

5.14. Napisz równania stycznych do danego okręgu prostopadłych do prostej k .

a) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 18$

$k: y = x$

b) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 10$

$k: x - y = 7$

5.15. Okrąg o środku $S = (6, 3)$ jest styczny do prostej l w punkcie $A = (2, 1)$. Napisz równania okręgu i prostej l .

D * 5.16. Wykaż, że styczne do okręgu $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$ poprowadzone z początku układu współrzędnych są prostopadłe.

5.17. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$

$S = (3, -1)$, $r = \sqrt{5}$, $A = (4, -4)$

$|AS| = \sqrt{(3-4)^2 + (-1+4)^2} = \sqrt{10}$

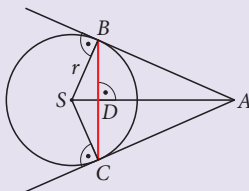
$|AB| = \sqrt{|AS|^2 - |BS|^2} = \sqrt{10 - 5} = \sqrt{5}$

$P_{ABS} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |BS| = \frac{1}{2}|AS| \cdot |BD|$

Stąd $|BD| = \frac{|AB| \cdot |BS|}{|AS|}$.

$|BC| = 2|BD| = \frac{2|AB| \cdot |BS|}{|AS|} = \frac{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

Odp.: $\sqrt{10}$



5.4. $2\sqrt{5}$

5.5. $(2, 4), (4, 0)$

5.6. $P = 16$, $obw = 8(1 + \sqrt{2})$

5.7. $C = (1 - \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5})$
lub $C = (1 + \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5})$

5.8. a) odcinek b) punkt
c) odcinek d) zbiór pusty

5.9. $obw = 16 + 4\sqrt{5}$, $P = 32$

5.10. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 4\frac{1}{2}$

5.11. $x + 5y - 15 = 0$

5.12. $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 7,2$

5.13. $y = -x + 6$, $y = -x - 6$

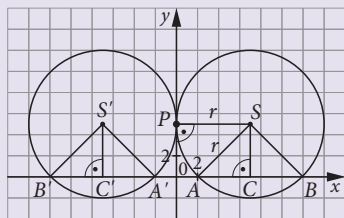
5.14. a) $y = -x + 3$, $y = -x - 9$

b) $y = -x + 2 - 2\sqrt{5}$,
 $y = -x + 2 + 2\sqrt{5}$

5.15. $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 20$,
 $l: y = -2x + 5$

5.16. Patrz s. 84.

5.18.



r – promień okręgu

$$S = (r, 5) \text{ i } S' = (-r, 5)$$

$$|AC| = \frac{1}{2}|AB| = 2\sqrt{6}$$

$$r = \sqrt{|AC|^2 + |CS|^2} =$$

$$= \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + 5^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$C = (r, 0) = (7, 0)$$

$$A = (7 - 2\sqrt{6}, 0)$$

$$B = (7 + 2\sqrt{6}, 0)$$

Punkty A', B', C' są położone symetrycznie do punktów A, B, C .

$$C' = (-7, 0)$$

$$A' = (-7 + 2\sqrt{6}, 0)$$

$$B' = (-7 - 2\sqrt{6}, 0)$$

Odp.: $(x - 7)^2 + (y - 5)^2 = 49$,
punkty:

$$(7 - 2\sqrt{6}, 0), (7 + 2\sqrt{6}, 0)$$

lub $(x + 7)^2 + (y - 5)^2 = 49$,
punkty:

$$(-7 - 2\sqrt{6}, 0), (-7 + 2\sqrt{6}, 0)$$

Prosto do matura

1. B
2. D
3. B
4. F, P, F
5. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 34$
6. $4\sqrt{2}$
7. $x = 7, x = 9$

- * **5.17.** Z punktu $A = (4, -4)$ poprowadzono styczne do okręgu $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$. Oblicz długość odcinka łączącego punkty styczności.
- * **5.18.** Okrąg styczny do osi y w punkcie $P = (0, 5)$ wyznacza na osi x cięciwę o długości $4\sqrt{6}$. Napisz równanie tego okręgu i znajdź jego punkty przecięcia z osią x .
- * **5.19.** W trójkącie prostokątnym ABC o kącie prostym przy wierzchołku C dany jest wierzchołek $A = (4, -1)$. Przeciwprostokątna ma równanie $2x + y - 7 = 0$, a przyprostokątna przeciwległa wierzchołkowi A – równanie $x - y + 1 = 0$.
 - a) Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC .
 - b) Wyznacz współrzędne wierzchołka C .
 - c) Oblicz pole trójkąta ABC .

Prosto do matura



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż styczną do okręgu o równaniu $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$.
A. $x = 2$ B. $x = 7$ C. $y = 2$ D. $y = 3$
2. Ile punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisanych za pomocą układu warunków $\begin{cases} (x-3)^2 + (y+1)^2 \leq 4 \\ y = 2 + x \end{cases}$?
A. dwa B. jeden C. nieskończenie wiele D. zero
3. Która prosta przecina okrąg $(x-1)^2 + y^2 = 4$ w dwóch punktach?
A. $y = 2$ B. $x + y - \sqrt{3} = 0$ C. $x - y + 2 = 0$ D. $x = 3$
4. Dany jest okrąg o środku $S = (13, 2)$ i promieniu $r = 4$ oraz prosta $k: x - y = 11$.
Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Prosta k jest styczna do okręgu $o(S, r)$.
B. Prosta k przecina okrąg $o(S, r)$.
C. Figura złożona z prostej k i okręgu $o(S, r)$ ma dokładnie jedną oś symetrii.
5. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A = (-1, 2)$, współśrodkowego z okręgiem o równaniu $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 49$.
6. Oblicz długość cięciwy, którą okrąg $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16$ wyznacza na prostej $y = -x + 3$.
7. Napisz równania stycznych do okręgu $(x-8)^2 + (y+2)^2 = 1$ prostopadłych do prostej $y - 2 = 0$.

5.19. $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, $A = (4, -1)$, prosta AB : $2x + y - 7 = 0$, prosta BC : $x - y + 1 = 0$

a) B – punkt przecięcia prostych AB i BC

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow -2x + 7 = x + 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}, \text{ stąd } B = (2, 3).$$

S – środek okręgu opisanego na trójkącie ABC (środek boku AB)

$$S = \left(\frac{4+2}{2}, \frac{-1+3}{2} \right), \text{ stąd } S = (3, 1). \quad r = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}\sqrt{(4-2)^2 + (-1-3)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{5}.$$

Równanie okręgu: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$

b) $AC \perp BC$ i $A \in AC$, więc prosta AC ma równanie $y = -x + b$ i $-4 + b = -1$.

Stąd $b = 3$. Zatem $AC: y = -x + 3$. C – punkt przecięcia prostych AC i BC :

$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow -x + 3 = x + 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}, \text{ stąd } C = (1, 2).$$

c) $P = 0,5 \cdot |AC| \cdot |BC| = 0,5 \sqrt{3^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1 + 1} = 0,5 \sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = 3$

Odp.: a) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$ **b)** $C = (1, 2)$ **c)** $P = 3$

6. Symetria środkowa

Umiejętności:

- wyznaczanie środka symetrii w figurach środkowosymetrycznych
- wyznaczanie obrazu figur w symetrii środkowej na płaszczyźnie
- wyznaczanie obrazu okręgu lub wielokąta w symetrii środkowej o środku w początku układu współrzędnych
- stosowanie poznanych twierdzeń w zadaniach wieloetapowych

Symetria środkowa była już omawiana w szkole podstawowej. Powtórzmy własności tego przekształcenia, a następnie rozważymy jego działanie na płaszczyźnie kartezjańskiej.

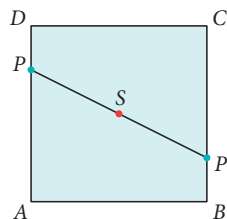
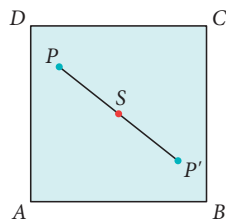
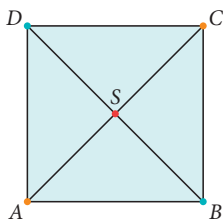
Symetria środkowa na płaszczyźnie

Punkty A i A' są **symetryczne względem punktu S** , gdy S jest środkiem odcinka AA' . Punkt S nazywamy **środkiem symetrii** punktów A i A' .



Jeżeli punkt A' jest symetryczny do punktu A względem punktu S , to również punkt A jest symetryczny do punktu A' względem punktu S . Punkt S jest symetryczny do punktu S względem punktu S .

Popatrzmy na kwadrat $ABCD$ i punkt S przecięcia jego przekątnych.



Punkty A i C są symetryczne względem punktu S . Podobnie punkty B i D są symetryczne względem punktu S .

Wyberzmy dowolny punkt P tego kwadratu. Punkt P' symetryczny do punktu P względem punktu S również należy do kwadratu $ABCD$.

Podobnie – gdy punkt P należy do brzegu kwadratu, symetryczny do niego punkt P' także należy do brzegu kwadratu.

W takiej sytuacji mówimy, że punkt S jest środkiem symetrii kwadratu $ABCD$.

O kwadracie powiemy, że jest figurą środkowosymetryczną.

ZZ i KPU

temat 2.12

Multiteka

- Symetria środkowa
- Symetria środkowa w układzie współrzędnych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.6

Generator
testów i sprawdzianów

Definicja

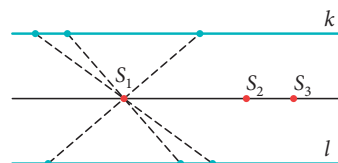
Punkt S nazywamy **środkiem symetrii figury F** , jeżeli dla każdego punktu A należącego do F punkt A' symetryczny do A względem S też należy do F .
 Figurę F nazywamy **środkowsymetryczną**.

◀6.2. Czy prosta jest figurą środkowsymetryczną? Jeżeli tak, to ile ma środków symetrii?

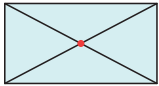
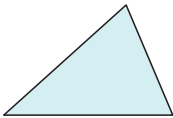
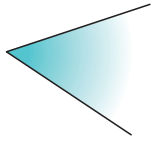
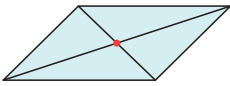
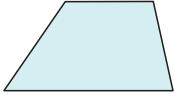
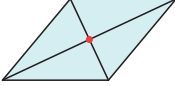
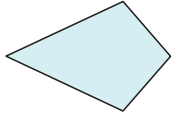
Odp.: Tak, każdy punkt prostej jest jej środkiem symetrii.

Przykład 1 ◀ zad. 6.2

- Odcinek jest figurą środkowsymetryczną.
Środkiem symetrii odcinka jest jego środek.
- Okrąg jest figurą środkowsymetryczną.
Środkiem symetrii okręgu jest jego środek.
- Figura złożona z dwóch prostych równoległych k, l ma nieskończenie wiele środków symetrii.
Tworzą one prostą równoległą do k i do l , jednakowo od nich oddaloną.



Wśród znanych figur geometrycznych wyróżnimy te, które mają środek symetrii, i te, które go nie mają. Na przykład:

Figury mające środek symetrii	Figury niemające środka symetrii
 odcinek	 półprosta
 prostokąt	 trójkąt
 kwadrat	 kąt
 równoległobok	 trapez niebędący równoległobokiem
 romb	 deltoid niebędący rombem
 okrąg	
 koło	

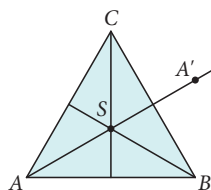
D Przykład 2 ◀ zad. 6.3

Wykażemy, że punkt S przecięcia wysokości trójkąta równobocznego nie jest jego środkiem symetrii.

Rozwiązanie

Gdyby tak było, punkt A' symetryczny do wierzchołka A względem S należałby do trójkąta. Tak nie jest, zatem punkt S nie jest środkiem symetrii trójkąta ABC .

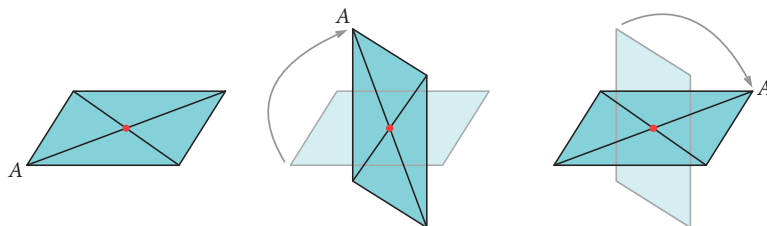
Podobnej próby nie przejdzie żaden inny kandydat na środek symetrii trójkąta równobocznego, a tym bardziej żadnego innego.



Trójkąt **nie** ma środka symetrii.



Figura środkowosymetryczna ma tę własność, że gdy obrócimy ją o 180° wokół jej środka symetrii, to figura przed obrotem i figura po obrocie nałożą się na siebie.



Można to sprawdzić dla wymienionych w tabeli figur środkowosymetrycznych. Nie istnieje natomiast punkt o takiej własności dla półprostej, kąta czy trapezu.

Przekształcenie płaszczyzny, które każdemu jej punktowi P przyporządkowuje punkt P' symetryczny do P względem ustalonego punktu S , nazywamy **symetrią środkową o środku S** .

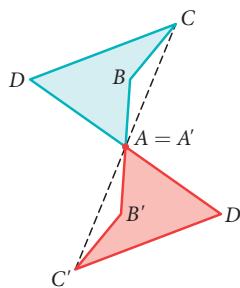
Przykład 3 ◀ zad. 6.5

Narysujemy figurę, która jest obrazem danego czworokąta $ABCD$ w symetrii środkowej o środku A .

Rozwiązanie

Zauważmy, że obrazem:

- wierzchołka czworokąta $ABCD$ jest wierzchołek czworokąta $A'B'C'D'$,
- punktu leżącego na brzegu czworokąta $ABCD$ jest punkt należący do brzegu czworokąta $A'B'C'D'$,
- punktu wewnętrznego czworokąta $ABCD$ jest punkt wewnętrzny czworokąta $A'B'C'D'$,
- punktu A jest ten sam punkt.



◀6.3. Czy dana figura ma środek symetrii?

- kąt
- trapez prostokątny
- suma trzech prostych równoległych
- suma dwóch odcinków równoległych, rozłącznych i jednakowej długości

Odp.: a) nie

b) nie

c) Tak, ale wtedy i tylko wtedy, gdy środkowa prosta jest jednakowo oddalona od dwóch pozostałych prostych.

d) tak

◀6.5. Trójkąt ABC

przekształcono symetrycznie względem środka boku BC i otrzymano figurę, która wraz z trójkątem ABC utworzyła kwadrat. Jakim trójkątem jest trójkąt ABC ?

Odp.: trójkątem równoramiennym prostokątnym, w którym $\angle A = 90^\circ$

Jeżeli w jakimś przekształceniu obrazem punktu P jest ten sam punkt P , to nazywamy go **punktem stałym** tego przekształcenia.

Symetria środkowa względem punktu S ma jeden punkt stały – jest nim środek tej symetrii.

Figury: F i jej obraz F' w symetrii środkowej są **przystające**. Oznacza to, że obrazem odcinka jest odcinek o tej samej długości, obrazem prostej – prosta, kąta – kąt o tej samej mierze, okręgu o promieniu r – okrąg o promieniu r , trójkąta ABC – przystający do niego trójkąt $A'B'C'$ itd.

Symetria środkowa względem początku układu współrzędnych

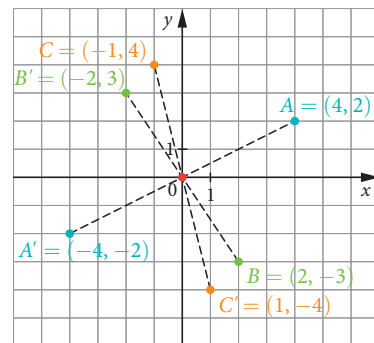
Płaszczyznę kartezjańską można przekształcić przez symetrię względem dowolnego punktu. Ograniczymy się jednak do omówienia sytuacji, gdy środkiem symetrii jest początek układu współrzędnych.

Przyjrzyjmy się rysunkowi.

Jeśli $P' = (x', y')$ jest obrazem punktu $P = (x, y)$ w symetrii względem punktu $(0, 0)$, to:

$$\begin{cases} \frac{x' + x}{2} = 0 \\ \frac{y' + y}{2} = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{współrzędne środka odcinka}$$

czyli $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$



◀6.10. Trójkąt o wierzchołkach $A = (-6, -2)$, $B = (-1, -4)$, $C = (-4, 2)$ przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych. Wyznacz współrzędne wierzchołków obrazu tego trójkąta i narysuj obydwa trójkąty w układzie współrzędnych.

Odp.: $A' = (6, 2)$, $B' = (1, 4)$, $C' = (4, -2)$

Przykład 4 ◀ zad. 6.10

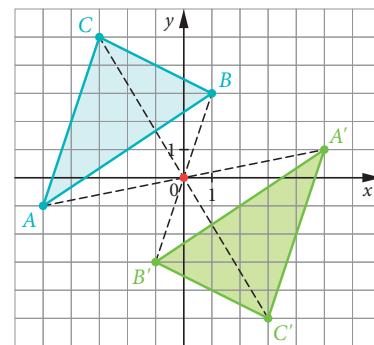
Trójkąt o wierzchołkach $A = (-5, -1)$, $B = (1, 3)$, $C = (-3, 5)$ przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych. Wyznamy współrzędne wierzchołków obrazu trójkąta ABC w tej symetrii i narysujemy obydwa trójkąty w układzie współrzędnych.

Rozwiązanie

Niech A' , B' , C' oznaczają odpowiednio wierzchołki obrazu trójkąta ABC w tym przekształceniu. Zatem zgodnie z podanymi wzorami mamy:

$$A' = (5, 1), B' = (-1, -3), C' = (3, -5)$$

Na rysunku przedstawiamy ilustrację graficzną rozwiązania.



**Przykład 5** ◀ zad. 6.11

Wyznamy obraz prostej $k: y = 2x - 3$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

Rozwiązanie

Obrazem prostej jest prosta, zatem należy:

Krok 1: Wybrać dwa dowolne punkty A i B należące do prostej k .

Krok 2: Przekształcić punkty A i B przez symetrię środkową względem punktu $(0, 0)$, aby otrzymać punkty A' i B' .

Krok 3: Wyznaczyć równanie prostej k' przechodzącej przez punkty A' i B' .

Wykonujemy kolejne kroki.

1. $A = (0, -3) \in k$ i $B = (1, -1) \in k$

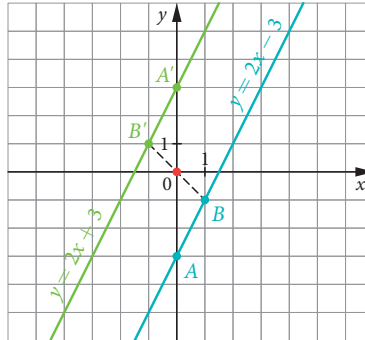
2. $A' = (0, 3)$, $B' = (-1, 1)$

3. $k': y = ax + b$, zatem:

$$\begin{cases} 3 = b \\ 1 = -a + b \end{cases} \quad \leftarrow \begin{matrix} A' = (0, 3) \in k' \\ B' = (-1, 1) \in k' \end{matrix}$$

$$\begin{cases} b = 3 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$k': y = 2x + 3$$



Odp.: Obrazem prostej $k: y = 2x - 3$ jest prosta $k': y = 2x + 3$.

Zauważmy, że obrazem prostej w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych jest prosta do niej równoległa.

Zapiszemy to spostrzeżenie w postaci twierdzenia, którego dowód pominiemy.

Twierdzenie

W symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych obrazem prostej $k: y = ax + b$ jest równoległa do niej prosta $k': y = ax - b$.

Zadania

6.1. Narysuj dowolny trójkąt. Przekształć go przez symetrię względem środka jednego z boków. Jaką figurę tworzą oba trójkąty?

6.2. Czy prosta jest figurą środkowosymetryczną? Jeżeli tak, to ile ma środków symetrii?

◀ **6.11.** Napisz równanie obrazu danej prostej po przekształceniu jej przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych.

a) $y = 3x - 4$

b) $y = \sqrt{2}x + 11$

c) $y = -0,3x - \sqrt{7}$

d) $x - 15 = 0$

e) $8x - 3y + 5 = 0$

f) $9x + \sqrt{11}y - 3\sqrt{2} = 0$

Odp.: a) $y = 3x + 4$

b) $y = \sqrt{2}x - 11$

c) $y = -0,3x + \sqrt{7}$

d) $x + 15 = 0$

e) $8x - 3y - 5 = 0$

f) $9x + \sqrt{11}y + 3\sqrt{2} = 0$

Odpowiedzi i rozwiązania

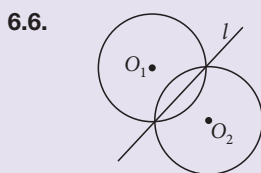
6.1. równoległobok

6.2. Tak, każdy punkt prostej jest jej środkiem symetrii.

- 6.3.** a) nie
b) nie
c) Tak, ale wtedy i tylko wtedy, gdy środkowa prosta jest jednakowo oddalona od dwóch pozostałych prostych.
d) tak

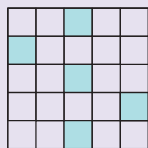
6.4. a), b) trzy

6.5. trójkątem równoramiennym prostokątnym, w którym $\sphericalangle A = 90^\circ$

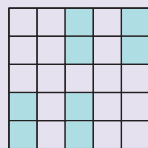


6.7.

a) dwie



b) trzy



6.8. $A' = (5, -4)$, $B' = (-7, 2)$,
 $C' = (\sqrt{3}, 5)$, $D' = (6, -\sqrt{5})$

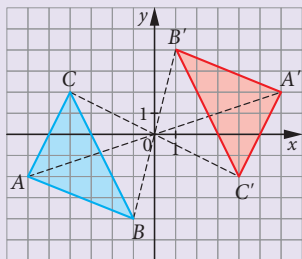
6.9. a) $(-1, 2)$

b) $(0, 3)$

c) $(4, 3)$

d) $(1, 4)$

6.10. $A' = (6, 2)$, $B' = (1, 4)$,
 $C' = (4, -2)$



6.3. Czy dana figura ma środek symetrii?

a) kąt

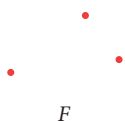
b) trapez prostokątny

c) suma trzech prostych równoległych

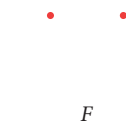
d) suma dwóch odcinków równoległych, rozłącznych i jednakowej długości

6.4. Przerysuj figurę F , a następnie uzupełnij ją jednym punktem tak, aby otrzymana figura miała środek symetrii. Ile odpowiedzi ma to zadanie?

a)



b)

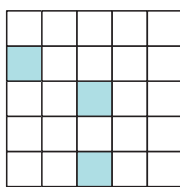


6.5. Trójkąt ABC przekształcono symetrycznie względem środka boku BC i otrzymano figurę, która wraz z trójkątem ABC utworzyła kwadrat. Jakim trójkątem jest trójkąt ABC ?

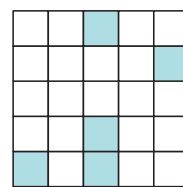
6.6. Dany jest okrąg O_1 i prosta sieczna l nieprzechodząca przez jego środek. Narysuj taki okrąg O_2 , aby figura będąca sumą okręgów O_1 , O_2 oraz prostej l miała środek symetrii.

6.7. Ile co najmniej kraterów trzeba zamalować, żeby otrzymać figurę środkowosymetryczną?

a)



b)



6.8. Podaj współrzędne obrazów punktów:

$A = (-5, 4)$, $B = (7, -2)$, $C = (-\sqrt{3}, -5)$, $D = (-6, \sqrt{5})$
w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

6.9. Wyznacz współrzędne środka symetrii odcinka PQ .

a) $P = (3, -2)$, $Q = (-5, 6)$

c) $P = (2\frac{1}{2}, -3)$, $Q = (5\frac{1}{2}, 9)$

b) $P = (-3, 7)$, $Q = (3, -1)$

d) $P = (-1\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $Q = (3\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2})$

6.10. Trójkąt o wierzchołkach $A = (-6, -2)$, $B = (-1, -4)$, $C = (-4, 2)$ przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych. Wyznacz współrzędne wierzchołków obrazu tego trójkąta i narysuj obydwa trójkąty w układzie współrzędnych.

6.11. Napisz równanie obrazu danej prostej po przekształceniu jej przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych.

- a) $y = 3x - 4$ c) $y = -0,3x - \sqrt{7}$ e) $8x - 3y + 5 = 0$
 b) $y = \sqrt{2}x + 11$ d) $x - 15 = 0$ f) $9x + \sqrt{11}y - 3\sqrt{2} = 0$

6.12. Trójkąt, którego boki zawarte są w prostych o równaniach $2x - 5y - 6 = 0$, $3x - y + 4 = 0$ oraz $5x + 7y - 54 = 0$, przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych. Wyznacz współrzędne wierzchołków obrazu tego trójkąta.

6.13. Na płaszczyźnie kartezjańskiej narysuj okrąg $(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 9$, następnie przekształć go przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych i napisz równanie otrzymanego okręgu.

6.14. Okrąg o środku w punkcie S i promieniu r przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych. Napisz równanie otrzymanego okręgu.

- a) $S = (-2, 3)$, $r = 5$ c) $S = (-4, -2)$, $r = \sqrt{2}$
 b) $S = (0, -\sqrt{5})$, $r = 1$ d) $S = (7, -8)$, $r = 3\sqrt{5}$

6.15. Napisz równanie okręgu otrzymanego w wyniku przekształcenia okręgu o podanym równaniu przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych.

- a) $(x - 8)^2 + (y + 4)^2 = 2$ c) $(x + 11)^2 + (y + 0,1)^2 = 9$
 b) $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 7$ d) $(x - \sqrt{3})^2 + (y + 2)^2 = \sqrt{2}$

6.16. Okrąg K_1 jest obrazem okręgu K w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Napisz równanie okręgu K .

- a) $K_1: (x + 4)^2 + (y + 17)^2 = 5$ c) $K_1: (x + 1)^2 + (y - 11)^2 = 2$
 b) $K_1: (x - \sqrt{7})^2 + (y - 7)^2 = 3$ d) $K_1: (x - 3)^2 + (y + 0,2)^2 = 13$

6.17. Punkty $A = (-1, -4)$, $B = (5, 0)$ i $C = (2, 1)$ przekształcono przez symetrię względem początku układu współrzędnych i otrzymano odpowiednio punkty A' , B' , C' . Wyznacz współrzędne środka ciężkości trójkąta $A'B'C'$.

D * **6.18.** Udowodnij, że trójkąt o wierzchołkach $A = (-3, 2)$, $B = (3, 2\sqrt{3} + 2)$, $C = (3, 2 - 2\sqrt{3})$ jest równoboczny. Napisz równanie okręgu symetrycznego względem początku układu współrzędnych do okręgu opisanego na tym trójkącie.

6.18. $A = (-3, 2)$, $B = (3, 2\sqrt{3} + 2)$, $C = (3, 2 - 2\sqrt{3})$

$$|AB| = \sqrt{(3+3)^2 + (2\sqrt{3}+2-2)^2} = \sqrt{36+12} = 4\sqrt{3}, \quad |BC| = |2\sqrt{3}+2-(2-2\sqrt{3})| = 4\sqrt{3},$$

$$|AC| = \sqrt{(3+3)^2 + (2-2\sqrt{3}-2)^2} = 4\sqrt{3}$$

$|AB| = |BC| = |AC|$, więc trójkąt ABC jest równoboczny.

Środek S okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest jego środkiem ciężkości, więc:

$$S = \left(\frac{-3+3+3}{3}, \frac{2+2\sqrt{3}+2+2-2\sqrt{3}}{3} \right) = (1, 2)$$

Promień R okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ABC jest równy: $R = \frac{|AB| \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3} = 4.$

Okrąg symetryczny względem punktu $(0, 0)$ ma taki sam promień oraz środek $S' = (-1, -2)$:

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 16$$

Odp.: $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 16$

6.11. a) $y = 3x + 4$

b) $y = \sqrt{2}x - 11$

c) $y = -0,3x + \sqrt{7}$

d) $x + 15 = 0$

e) $8x - 3y - 5 = 0$

f) $9x + \sqrt{11}y + 3\sqrt{2} = 0$

6.12. $(2, 2)$, $(-1, -7)$, $(-8, -2)$

6.13. $(x+4)^2 + (y-6)^2 = 9$

6.14. a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$

b) $x^2 + (y-\sqrt{5})^2 = 1$

c) $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 2$

d) $(x+7)^2 + (y-8)^2 = 45$

6.15. a) $(x+8)^2 + (y-4)^2 = 2$

b) $(x+5)^2 + (y+5)^2 = 7$

c) $(x-11)^2 + (y-0,1)^2 = 9$

d) $(x+\sqrt{3})^2 + (y-2)^2 = \sqrt{2}$

6.16. a) $K: (x-4)^2 + (y-17)^2 = 5$

b) $K: (x+\sqrt{7})^2 + (y+7)^2 = 3$

c) $K: (x-1)^2 + (y+11)^2 = 2$

d) $K: (x+3)^2 + (y-0,2)^2 = 13$

6.17. $(-2, 1)$

Prosto do matury



Prosto do matury

- 1. B**
- 1.** Trójkąt $A'B'C'$ jest obrazem trójkąta o wierzchołkach $A = (-3, -1)$, $B = (2, 6)$, $C = (-2, 4)$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Wskaż środek ciężkości trójkąta $A'B'C'$.
- A. $\left(1, -\frac{11}{2}\right)$ B. $(1, -3)$ C. $(3, -9)$ D. $(0, -3)$
- 2. A**
- 2.** Okrąg o równaniu $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 9$ przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych. Wskaż równanie otrzymanego okręgu.
- A. $(x+1)^2 + (y+4)^2 = 9$ C. $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 9$
 B. $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 9$ D. $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 9$
- 3. B**
- 3.** Okrąg o równaniu $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 5$ jest obrazem okręgu F w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Wskaż równanie okręgu F .
- A. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$ C. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$
 B. $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 5$ D. $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 5$
- 4. F, F, F**
- 4.** Figurę F tworzą: odcinek AB oraz punkty C i D nienależące do tego odcinka. Oceń prawdziwość podanych zdań.
- Figura F
- A. ma zawsze dokładnie jeden środek symetrii.
 B. ma środek symetrii wtedy i tylko wtedy, gdy punkty A, B, C, D są wierzchołkami równoległoboku.
 C. może mieć nieskończenie wiele środków symetrii.
- 5. $2x - 4y - 5 = 0$**
- 5.** Napisz równanie obrazu prostej $2x - 4y + 5 = 0$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.
- 6. $(0, -1)$**
- 6.** Punkty $A = (1, -5)$, $B = (3, 1)$ i $C = (-4, 7)$ przekształcono przez symetrię względem początku układu współrzędnych i otrzymano odpowiednio punkty A', B', C' . Wyznacz współrzędne środka ciężkości trójkąta $A'B'C'$.
- 7. $A_1 = (5, -2)$, $B = (-2, -3)$, $P = 38$**
- 7.** Punkt $A = (-5, 2)$ przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych i otrzymano punkt A_1 . Punkt $B_1 = (2, 3)$ jest obrazem punktu B w tym samym przekształceniu. Podaj współrzędne punktów A_1 i B oraz oblicz pole czworokąta ABA_1B_1 .

7. Symetria osiowa

Umiejętności:

- wyznaczanie osi symetrii w figurach osiowosymetrycznych
- wyznaczanie obrazu figur w symetrii osiowej na płaszczyźnie
- wyznaczanie obrazu okręgu lub wielokąta w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych
- stosowanie poznanych twierdzeń w zadaniach wieloetapowych

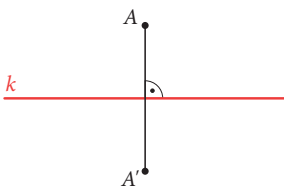
Symetria osiowa, podobnie jak symetria środkowa, była omawiana w szkole podstawowej. Powtórzmy własności tego przekształcenia, a następnie omówimy jego działanie na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Symetria osiowa na płaszczyźnie

Przypomnijmy:

Punkty A i A' są **symetryczne względem prostej k** , gdy odcinek AA' jest prostopadły do k i jego środek należy do k .

Prostą k nazywamy **osią symetrii** punktów A i A' .

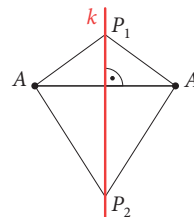


Jeżeli punkt A' jest symetryczny do punktu A względem prostej k , to również punkt A jest symetryczny do punktu A' względem prostej k .
Jeżeli punkt A leży na prostej k , to $A' = A$.

Zauważmy, że oś symetrii punktów A i A' jest symetralną odcinka AA' . Jest zatem zbiorem punktów równo oddalonych od jego końców. Tę własność symetralnej wykorzystujemy do konstrukcji punktu A' symetrycznego do punktu A względem prostej k :

Krok 1: Z dowolnego punktu P_1 prostej k zataczamy okrąg o promieniu $|P_1A|$.

Krok 2: Z dowolnego punktu P_2 ($P_2 \neq P_1$) prostej k zataczamy okrąg o promieniu $|P_2A|$.



$$|P_1A| = |P_1A'|$$

$$|P_2A| = |P_2A'|$$

ZZ i KPU

temat 2.11

Multiteka

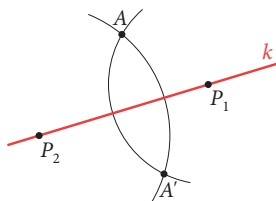
- Symetria osiowa
- Tadź Mahal – piękno symetrii
- Symetria względem osi układu współrzędnych
- Przekształcenia na płaszczyźnie

dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 2.7

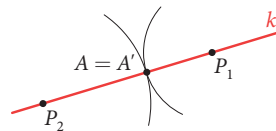
Generator
testów i sprawdzianów

Krok 3: Jeżeli punkt A nie leży na prostej k , to poprowadzone okręgi przecinają się w dwóch punktach. Jednym z nich jest punkt A , a drugim szukany punkt A' (rys. 1).

Jeżeli punkt A leży na prostej k , to $A' = A$ (rys. 2).



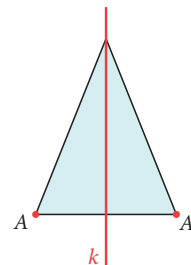
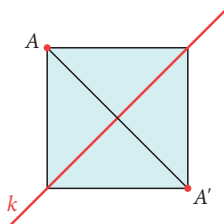
Rys. 1



Rys. 2

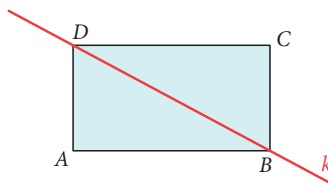
Przykład 1

- Przeciwnie wierzchołki kwadratu są symetryczne względem prostej zawierającej tę przekątną kwadratu, do której nie należą.
- Końce podstawy trójkąta równoramiennego są symetryczne względem prostej zawierającej wysokość opuszczoną z trzeciego wierzchołka tego trójkąta.



Przykład 2

Wierzchołki prostokąta, który nie jest kwadratem, **nie są** symetryczne względem prostej zawierającej przekątną.



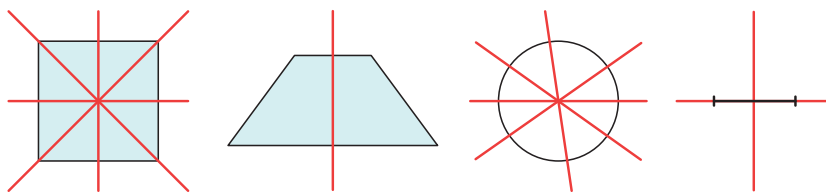
W przypadku symetrii środkowej wyróżniliśmy figury mające środek symetrii. Teraz zajmiemy się figurami mającymi oś symetrii.

Definicja

Prostą k nazywamy **osią symetrii figury F** , jeżeli dla każdego punktu A należącego do F punkt A' symetryczny do A względem k też należy do F .
Figurę F nazywamy **osiowosymetryczną**.

Przykład 3 ◀ zad. 7.1, 7.2

- Kwadrat jest figurą osiowosymetryczną. Ma cztery osie symetrii.
- Trapez równoramienny różny od równoległoboku ma jedną oś symetrii.
- Okrąg ma nieskończenie wiele osi symetrii – jest nią każda prosta przechodząca przez jego środek.
- Odcinek ma dwie osie symetrii. Jedną z nich jest prosta, w której ten odcinek się zawiera, a drugą – jego symetralna.

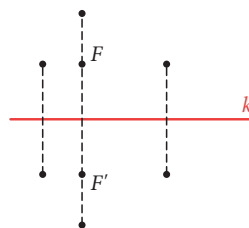


Przekształcenie płaszczyzny, które każdemu jej punktowi P przyporządkowuje punkt P' symetryczny do P względem ustalonej prostej k , nazywamy **symetrią osiową o osi k** .

Przykład 4 ◀ zad. 7.6

Dana jest figura F i prosta k . Wyznamy figurę F' , która jest obrazem figury F w symetrii o osi k .

- Figura F składa się ze skończonej liczby punktów.
Aby otrzymać figurę F' , przekształcamy przez symetrię względem prostej k każdy z tych punktów.



◀ 7.1. Ile osi symetrii ma figura będąca sumą

- prostej i okręgu?
- dwóch okręgów?
- dwóch prostych?

Rozważ różne możliwości.

Odpo.: a) jedną lub dwie
b) jedną, dwie lub nieskończenie wiele
c) dwie lub nieskończenie wiele

◀ 7.2. Wskaż osie symetrii figury, która jest sumą

- dwóch trójkątów równobocznych o wspólnym boku.
- prostej i punktu nieleżącego na niej.
- dwóch okręgów o różnych promieniach, stycznych zewnętrznie.

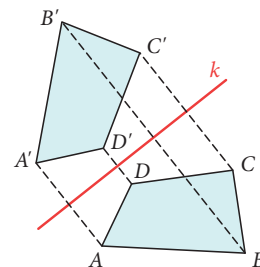
Odpo.: a) prosta zawierająca wspólny bok, prosta przechodząca przez wierzchołki trójkątów nienależące do wspólnego boku
b) prosta prostopadła do danej prostej, przechodząca przez dany punkt
c) prosta przechodząca przez środki obu okręgów

◀ 7.6. Patrz s. 101.

b) Figura F jest czworokątem $ABCD$.

Zauważmy, że obrazem:

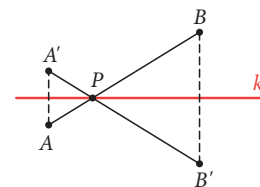
- wierzchołka czworokąta $ABCD$ jest wierzchołek czworokąta $A'B'C'D'$,
- punktu leżącego na brzegu czworokąta $ABCD$ jest punkt należący do brzegu czworokąta $A'B'C'D'$,
- punktu wewnętrznego czworokąta $ABCD$ jest punkt wewnętrzny czworokąta $A'B'C'D'$.



c) Figura F jest odcinkiem AB przecinającym prostą k .

Obrazem odcinka AB jest odcinek $A'B'$.

Odcinki AB i $A'B'$ przecinają się w punkcie P leżącym na osi symetrii k . Jest to punkt, który w wyniku symetrii został przekształcony sam na siebie – czyli punkt stały tego przekształcenia.



Symetria osiowa względem prostej k ma nieskończenie wiele punktów stałych – każdy punkt prostej k jest punktem stałym tego przekształcenia.

Figury: F i jej obraz F' w symetrii osiowej **są przystające**. Oznacza to, że obrazem odcinka jest odcinek o tej samej długości, obrazem prostej – prosta, kąta – kąt o tej samej mierze, okręgu o promieniu r – okrąg o promieniu r , trójkąta ABC – przystający do niego trójkąt $A'B'C'$ itd.

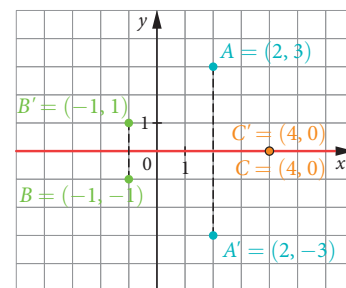
Symetria osiowa względem osi x

Płaszczyznę kartezjańską można przekształcić przez symetrię osiową względem dowolnej prostej. Ograniczymy się jednak do omówienia dwóch sytuacji, w których osią symetrii jest jedna z osi układu współrzędnych. Zaczniemy od osi x .

Przyjrzyjmy się rysunkowi.

Punkty położone symetrycznie względem osi x mają identyczne pierwsze współrzędne, natomiast ich drugie współrzędne są liczbami przeciwnymi. Wynika to wprost z własności prostokątnego układu współrzędnych. Zatem jeśli $P' = (x', y')$ oznacza obraz punktu $P = (x, y)$ w symetrii względem osi x , to:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$



Przykład 5 ◀ zad. 7.10

Wyznamy równanie obrazu okręgu $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$ w symetrii osiowej względem osi x .

Rozwiązanie

Dany okrąg ma środek $S = (-1, 2)$ i promień $r = 4$. Wiemy, że obrazem okręgu w tym przekształceniu jest figura do niego przystająca, czyli okrąg o takim samym promieniu.

Przyjmijmy, że S' oznacza środek, a r' – promień okręgu po przekształceniu.

$$S' = (-1, -2)$$

$$r' = r = 4$$

$$\text{Odp.: } (x+1)^2 + (y+2)^2 = 16$$

Przykład 6

Okrąg o równaniu $(x+\sqrt{3})^2 + (y-4)^2 = 7$ powstał w wyniku przekształcenia pewnego okręgu przez symetrię względem osi x . Jaki okrąg został przekształcony?

Rozwiązanie

Szukany okrąg ma środek $S = (x, y)$ i promień r .

Jeśli S' oznacza środek, a r' – promień okręgu po przekształceniu, to:

$$S' = (-\sqrt{3}, 4), \text{ zatem } S = (-\sqrt{3}, -4)$$

$$r' = r = \sqrt{7}$$

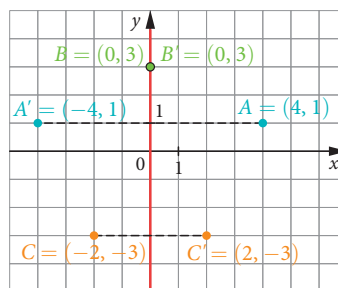
$$\text{Odp.: } (x+\sqrt{3})^2 + (y+4)^2 = 7$$

Symetria osiowa względem osi y

Przyjrzyjmy się rysunkowi.

Punkty położone symetrycznie względem osi y mają identyczne drugie współrzędne, natomiast ich pierwsze współrzędne są liczbami przeciwnymi. Wynika to wprost z własności prostokątnego układu współrzędnych. Zatem jeśli $P' = (x', y')$ oznacza obraz punktu $P = (x, y)$ w symetrii względem osi y , to:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$



◀7.10. Okrąg o podanym równaniu przekształcono przez symetrię osiową względem osi x . Napisz równanie otrzymanego okręgu.

a) $(x-9)^2 + (y+11)^2 = 1$

b) $(x-1+\sqrt{2})^2 + y^2 = 8$

c) $x^2 + (y-2-\sqrt{5})^2 = 7$

d) $x^2 + (y+1-3\sqrt{6})^2 = 9$

Odp.: a) $(x-9)^2 + (y-11)^2 = 1$

b) $(x-1+\sqrt{2})^2 + y^2 = 8$

c) $x^2 + (y+2+\sqrt{5})^2 = 7$

d) $x^2 + (y-1+3\sqrt{6})^2 = 9$

◀ 7.11. Okrąg o podanym równaniu przekształcono przez symetrię osiową względem osi y . Napisz równanie otrzymanego okręgu.

- a) $(x+3)^2 + (y-13)^2 = 12$
 b) $x^2 + (y-7+\sqrt{11})^2 = 6$
 c) $(x+5-\sqrt{3})^2 + y^2 = 18$
 d) $(x+0,4)^2 + (y-1-2\sqrt{7})^2 = 16$

Odpowiedzi i rozwiązania

- 7.1. a) jedną lub dwie
 b) jedną, dwie lub nieskończenie wiele
 c) dwie lub nieskończenie wiele

- 7.2. a) prosta zawierająca wspólny bok, prosta przechodząca przez wierzchołki trójkątów nienależące do wspólnego boku
 b) prosta prostopadła do danej prostej, przechodząca przez dany punkt
 c) prosta przechodząca przez środki obu okręgów

Przykład 7 ◀ zad. 7.11

Wyznamy równanie obrazu okręgu $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$ w symetrii osiowej względem osi y .

Rozwiązanie

Dany okrąg ma środek $S = (3, 1)$ i promień $r = 2$.

Przyjmijmy, że S' oznacza środek, a r' – promień okręgu po przekształceniu.

$$S' = (-3, 1) \\ r' = r = 2$$

Odp.: $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$

Zadania

7.1. Ile osi symetrii ma figura będąca sumą

- a) prostej i okręgu? b) dwóch okręgów? c) dwóch prostych?

Rozważ różne możliwości.

7.2. Wskaż osie symetrii figury, która jest sumą

- a) dwóch trójkątów równobocznych o wspólnym boku.
 b) prostej i punktu nieleżącego na niej.
 c) dwóch okręgów o różnych promieniach, stycznych zewnętrznie.

7.3. Narysuj dwa punkty: A i B . Wyznacz taki punkt C , aby figura składająca się z punktów A, B, C

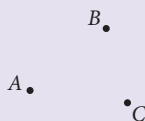
- a) miała jedną oś symetrii.
 b) miała dwie osie symetrii.
 c) nie miała osi symetrii.

7.4. Narysuj trzy niewspółliniowe punkty: A, B, C . Wyznacz taki punkt D , aby figura składająca się z punktów A, B, C, D miała oś symetrii. Przy jakim położeniu punktów A, B, C, D figura $\{A, B, C, D\}$ ma dwie osie symetrii?

7.5. Narysuj dwie proste: a i b spełniające podany warunek, a następnie dorysuj taką prostą c , aby figura będąca sumą tych trzech prostych miała oś symetrii. Ile jest takich prostych?

- a) a, b są równoległe b) a, b przecinają się

7.3. a) np.

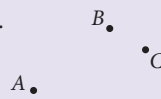


b) np.

$B \equiv C$



c) np.



7.4. np.

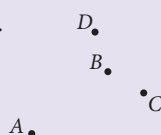
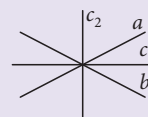


Figura $\{A, B, C, D\}$ ma dwie osie symetrii, gdy punkty A, B, C i D są wierzchołkami rombu lub prostokąta.

7.5. a) nieskończenie wiele np. $\frac{a}{b}$
 $\frac{b}{c}$
 $\frac{c}{a}$

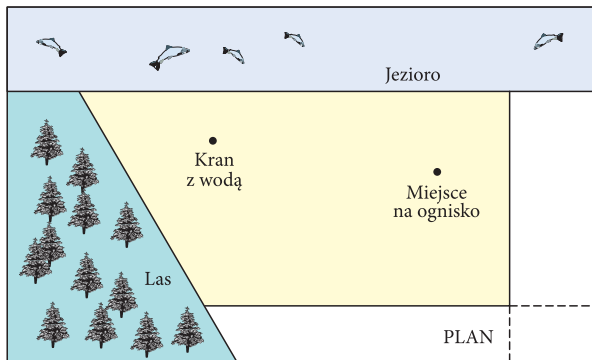
b) dwie



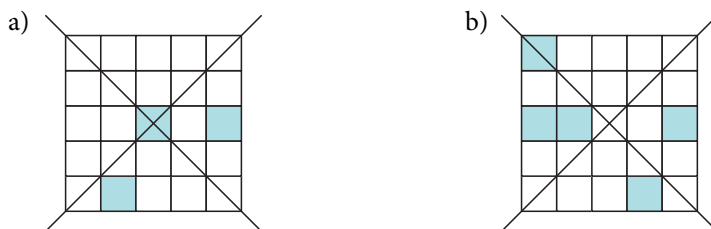
7.6. Dana jest figura F i prosta k . Wyznacz obraz figury F w symetrii o osi k .

- F – kwadrat, k – prosta zawierająca jeden z boków tego kwadratu
- F – równoległobok, k – prosta zawierająca dłuższą przekątną tego równoległoboku
- F – okrąg, k – prosta zawierająca cięciwę tego okręgu
- F – suma dwóch prostych równoległych, k – prosta przecinająca te dwie proste
- F – trapez równoramienny, k – prosta prostopadła do ramienia tego trapezu i przechodząca przez wierzchołek jego kąta rozwartego
- F – trójkąt równoramienny, k – prosta przechodząca przez środek podstawy tego trójkąta i prostopadła do jednego z jego ramion

7.7. Poniżej przedstawiony jest plan pola namiotowego na Mazurach. Michał i Bartek chcą rozbić na tym polu namiot. Michał upiera się, by namiot stał w tej samej odległości od kranu z wodą i od ogniska. Bartkowi zależy na tym, by mieć jednakowo blisko do lasu i do jeziora. Gdzie powinni rozbić namiot?

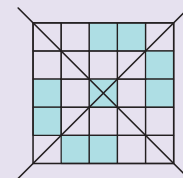


7.8. Ile co najwyżej krutek nie będzie zamalowanych, jeżeli uzupełnimy rysunek tak, aby obydwie przekątne były osiami symetrii otrzymanej figury?

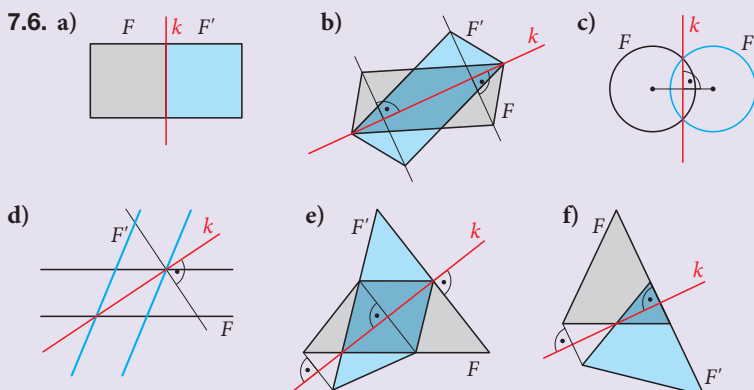
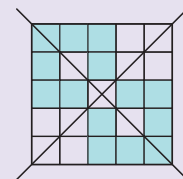


7.8.

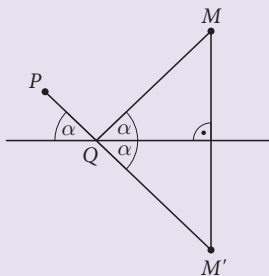
a) szesnaście



b) jedenaście



7.9.



Kąt padania powinien być równy kątowi odbicia. Piłka powinna odbić się od punktu Q – jest to punkt wspólny brzegu muru i odcinka PM' , gdzie M' to obraz punktu M w symetrii względem brzegu muru.

7.10. a) $(x - 9)^2 + (y - 11)^2 = 1$

b) $(x - 1 + \sqrt{2})^2 + y^2 = 8$

c) $x^2 + (y + 2 + \sqrt{5})^2 = 7$

d) $x^2 + (y - 1 + 3\sqrt{6})^2 = 9$

7.11. a) $(x - 3)^2 + (y - 13)^2 = 12$

b) $x^2 + (y - 7 + \sqrt{11})^2 = 6$

c) $(x - 5 + \sqrt{3})^2 + y^2 = 18$

d) $(x - 0,4)^2 + (y - 1 - 2\sqrt{7})^2 = 16$

7.12. a) $K: (x + 3)^2 + (y - 17)^2 = 10$

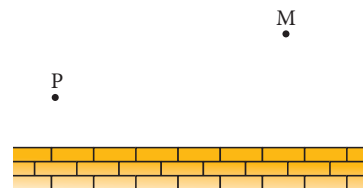
b) $K: (x + 13)^2 + (y + 10)^2 = 15$

c) $K: (x + 14)^2 + (y + 16)^2 = 17$

7.13. P, F, F

7.14. $P = 42$

* 7.9. Paweł chce kopnąć piłkę tak, by odbiła się od muru i trafiła do Marcina. W jakim kierunku powinien ją kopnąć?



7.10. Okrąg o podanym równaniu przekształcono przez symetrię osiową względem osi x . Napisz równanie otrzymanego okręgu.

a) $(x - 9)^2 + (y + 11)^2 = 1$

b) $(x - 1 + \sqrt{2})^2 + y^2 = 8$

c) $x^2 + (y - 2 - \sqrt{5})^2 = 7$

d) $x^2 + (y + 1 - 3\sqrt{6})^2 = 9$

7.11. Okrąg o podanym równaniu przekształcono przez symetrię osiową względem osi y . Napisz równanie otrzymanego okręgu.

a) $(x + 3)^2 + (y - 13)^2 = 12$

b) $x^2 + (y - 7 + \sqrt{11})^2 = 6$

c) $(x + 5 - \sqrt{3})^2 + y^2 = 18$

d) $(x + 0,4)^2 + (y - 1 - 2\sqrt{7})^2 = 16$

7.12. Obrazem okręgu K w symetrii f jest okrąg K_1 . Napisz równanie okręgu K .

a) $K_1: (x - 3)^2 + (y + 17)^2 = 10$, f – symetria środkowa względem początku układu współrzędnych

b) $K_1: (x + 13)^2 + (y - 10)^2 = 15$, f – symetria osiowa względem osi x

c) $K_1: (x - 14)^2 + (y + 16)^2 = 17$, f – symetria osiowa względem osi y

7.13. Punkty $A' = (2, 4)$, $B' = (-6, 6)$, $C' = (0, -8)$ są obrazami wierzchołków trójkąta ABC w symetrii osiowej względem osi x .

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Punkty $P = (-3, 1)$, $Q = (1, 2)$, $R = (-2, -5)$ są środkami boków trójkąta ABC .

B. Środkiem ciężkości trójkąta ABC jest punkt $S = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

C. Środkowa trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka A ma długość $\sqrt{17}$.

7.14. Punkty $A = (-3, 6)$, $B = (3, -1)$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi x i otrzymano odpowiednio punkty A_1 i B_1 . Oblicz pole czworokąta AA_1BB_1 .

7.15. Okrąg o równaniu $(x - 4)^2 + (y + 7)^2 = 18$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi x .

a) Wykaż, że punkt $A = (1, 4)$ leży na otrzymanym okręgu.

b) Napisz równanie stycznej do otrzymanego okręgu poprowadzonej w punkcie A .

7.15. $K: (x - 4)^2 + (y + 7)^2 = 18$

$S = (4, -7)$, $r = \sqrt{18}$ – środek i promień okręgu K

K' – obraz okręgu K w symetrii względem osi x

$S' = (4, 7)$, $r = \sqrt{18}$ – środek i promień okręgu K'

$K': (x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 18$

a) $A = (1, 4)$; $(1 - 4)^2 + (4 - 7)^2 = 3^2 + 3^2 = 18$, więc $A \in K'$.

b) $l: y = ax + b$ – szukana styczna

$l \perp AS'$ i $A \in l$:

• współczynnik kierunkowy prostej AS' : $m = \frac{4-1}{7-4} = 1$

• $a = -\frac{1}{m} = -1$ i $-1 + b = 4$, czyli $b = 5$

Odp.: $y = -x + 5$

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Trójkąt $A'B'C'$ jest obrazem trójkąta o wierzchołkach $A = (3, 2)$, $B = (-3, 6)$, $C = (-6, 1)$ w symetrii osiowej względem osi y . Wskaż środek ciężkości trójkąta $A'B'C'$.

- A. $(-2, 3)$ B. $(-2, -3)$ C. $(2, -3)$ D. $(2, 3)$

2. Okrąg o równaniu $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 9$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi x . Wskaż równanie otrzymanego okręgu.

- A. $(x+1)^2 + (y+4)^2 = 9$ C. $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 9$
B. $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 9$ D. $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 9$

3. Okrąg o równaniu $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 5$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi y . Wskaż równanie otrzymanego okręgu.

- A. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$ C. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$
B. $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 5$ D. $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 5$

4. Po przekształceniu okręgu F przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych otrzymano okrąg F' . Oceń prawdziwość podanych zdań.

Figura będąca sumą okręgów F i F'

- A. ma zawsze dokładnie dwie osie symetrii.
B. może mieć tylko jedną oś symetrii.
C. może mieć nieskończenie wiele osi symetrii.

5. Punkt $A = (-4, 3)$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi x i otrzymano punkt A_1 , a punkt $B = (-1, -2)$ przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych i otrzymano punkt B_1 . Podaj współrzędne punktów A_1 i B_1 oraz oblicz pole czworokąta AA_1BB_1 .

6. Trójkąt ABC ograniczony prostymi $2x - y + 6 = 0$, $x - y = 0$, $x - 2 = 0$ odbito symetrycznie względem osi y . Wyznacz współrzędne wierzchołków wielokąta będącego częścią wspólną trójkąta ABC i jego obrazu. Oblicz pole tego wielokąta.

7. Okrąg o środku $S = (2, -3)$ i promieniu $r = 4$ przekształcono symetrycznie względem osi x i otrzymano okrąg o środku S_1 . Okręgi o środkach S i S_1 przecinają się w punktach A i B . Oblicz pole czworokąta SAS_1B .

Prosto do matury

1. D

2. B

3. C

4. F, F, P

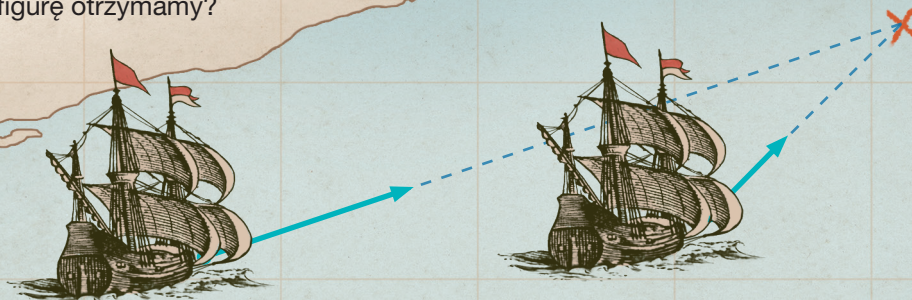
5. $A_1 = (-4, -3)$, $B_1 = (1, 2)$,
 $P = 20$

6. $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 6)$, $(-2, 2)$,
 $P = 12$

7. $P = 6\sqrt{7}$

Okrąg Apoloniusza

Na kartce zaznaczamy dwa różne punkty. Są to dwa statki. Oba mogą się poruszać tylko po prostej, w dowolnym kierunku, każdy z inną stałą prędkością. Szybszy statek goni wolniejszy. Naszym zadaniem jest zaznaczenie na kartce wszystkich punktów, w których statki mogą się spotkać. Jaką figurę otrzymamy?



Ta zagadka przedstawia problem matematyczny rozważany przez **Apoloniusza z Perga**:

Dane są punkty A i B na płaszczyźnie oraz dodatnia stała $k \neq 1$. Jaką figurę na płaszczyźnie tworzą punkty P , których stosunek odległości od A i B jest stały i równy k ($\frac{|AP|}{|BP|} = k$)?

Postawiony problem rozwiążemy dwoma sposobami.

Sposób I (odległość w układzie współrzędnych)

Wprowadźmy układ współrzędnych jak na rysunku. Oznaczmy $B = (b, 0)$. Szukamy punktów $P = (x, y)$ takich, że $|AP| = k \cdot |BP|$ dla danego $k > 0$, $k \neq 1$. Mamy:

$$|AP| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}, \quad |BP| = \sqrt{(x-b)^2 + (y-0)^2}$$

Warunek $|AP| = k \cdot |BP|$ zapisujemy w postaci:

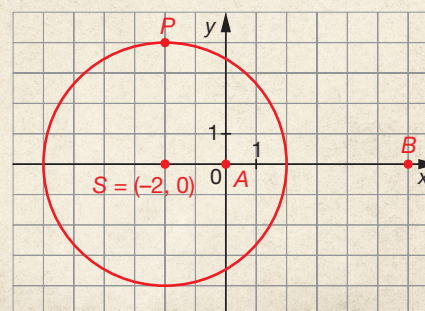
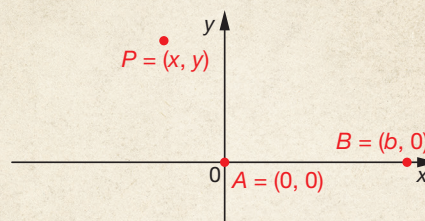
$$\sqrt{x^2 + y^2} = k \cdot \sqrt{(x-b)^2 + y^2}$$

Po podniesieniu obu stron do kwadratu i wykonaniu odpowiednich przekształceń otrzymujemy:

$$\left(x + \frac{bk^2}{1-k^2}\right)^2 + y^2 = \frac{b^2k^2}{(1-k^2)^2}$$

Jest to równanie okręgu o środku w punkcie $\left(-\frac{bk^2}{1-k^2}, 0\right)$ i promieniu $\left|\frac{bk}{1-k^2}\right|$. Okrąg ten tworzą punkty P spełniające warunek podany w zadaniu.

Rozwiązanie dla $k = \frac{1}{2}$, $b = 6$ pokazano na rysunku obok.



Sposób II (twierdzenie o dwusiecznej)

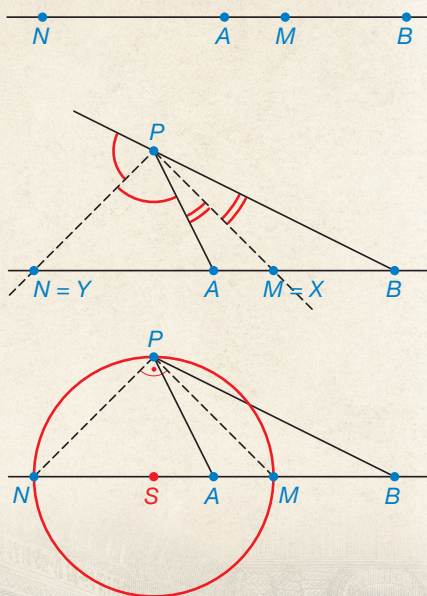
Zauważmy, że dwa spośród szukanych punktów leżą na prostej AB ; na rysunku oznaczono je M i N . Mamy:

$$\frac{|AM|}{|BM|} = \frac{|AN|}{|BN|} = k$$

Teraz rozważmy dowolny punkt P leżący poza prostą AB i spełniający warunek $\frac{|AP|}{|BP|} = k$. Prowadzimy dwusieczne PX i PY odpowiednio kąta APB i kąta zewnętrznego przy wierzchołku P . Z twierdzenia o dwusiecznej mamy:

1. $\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{|AP|}{|BP|} = k$. Zatem $X = M$.
2. $\frac{|AY|}{|BY|} = \frac{|AP|}{|BP|} = k$. Zatem $Y = N$.

Oznacza to, że kąt MPN jest prosty. To z kolei oznacza, że wszystkie punkty P wraz z punktami M i N tworzą okrąg o średnicy MN .



Okrąg Apoloniusza

Okrąg będący rozwiązaniem postawionego problemu jest nazywany **okręgiem Apoloniusza**.

Dla danych punktów A i B i różnych wartości k otrzymamy różne okręgi. Żadne dwa z nich się nie przecinają.



Wróćmy do zagadki ze statkami. Zauważmy, że jeżeli każdy z nich płynie ze stałą prędkością po linii prostej, to stosunek ich prędkości jest równy stosunkowi długości przebytych przez nie dróg, czyli odpowiednich odcinków. Dlatego jako rozwiązanie otrzymamy okrąg Apoloniusza.

8. Symetrie wielokątów

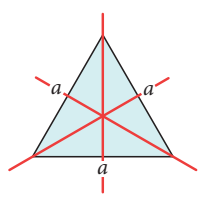
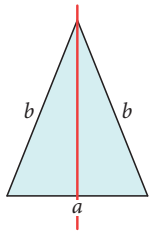
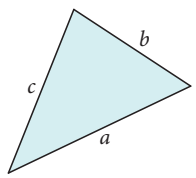
Umiejętności:

- klasyfikowanie figur ze względu na liczbę osi symetrii
- rozpoznawanie wielokątów foremnych
- stosowanie poznanych twierdzeń w zadaniach wieloetapowych

W tym temacie przypomnimy niektóre poznane wcześniej wiadomości dotyczące wielokątów. Następnie zbadamy, w jaki sposób można je wykorzystać, gdy wielokąt leży na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Osie symetrii trójkąta

Liczba osi symetrii może być wygodnym parametrem służącym do klasyfikacji figur. Podzielimy najpierw trójkąty ze względu na liczbę osi symetrii.

Liczba osi symetrii	3	1	0
	równoboczny	równoramienny, ale nie równoboczny	różnoboczny
Trójkąt			

Nie jest możliwe, aby trójkąt miał dwie osie symetrii. Nie może też mieć więcej niż trzy osie symetrii.



Przykład 1 ◀ zad. 8.6

Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (10, 4)$, $B = (-2, 3)$, $C = (2, -5)$. Wykażemy, że jest on równoramienny i napiszemy równanie jego osi symetrii.

Rozwiązanie

Obliczamy długości boków trójkąta ABC .

$$|AB| = \sqrt{12^2 + 1} = \sqrt{145}$$

$$|AC| = \sqrt{8^2 + 9^2} = \sqrt{64 + 81} = \sqrt{145}$$

$$|BC| = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80}$$

◀ 8.6. Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $A = (7, -5)$, $B = (10, 9)$, $C = (-6, 1)$ jest równoramienny, a następnie wyznacz równanie jego osi symetrii.

Rozwiązanie

$A = (7, -5)$, $B = (10, 9)$,
 $C = (-6, 1)$

$$\bullet |AB| = \sqrt{(7-10)^2 + (-5-9)^2} = \sqrt{9 + 196} = \sqrt{205}$$

$$|BC| = \sqrt{(10+6)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{256 + 64} = \sqrt{320}$$

$$|AC| = \sqrt{(7+6)^2 + (-5-1)^2} = \sqrt{169 + 36} = \sqrt{205}$$

$|AB| = |AC|$, zatem trójkąt ABC jest równoramienny.

• $k: y = ax + b$ – szukana oś symetrii

$$D = \left(\frac{10-6}{2}, \frac{9+1}{2} \right) = (2, 5)$$

– środek boku BC

Do prostej k należą punkty A i D :

$$\begin{cases} 7a + b = -5 \\ 2a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = -10 \\ b = 5 - 2a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 9 \end{cases}$$

Odp.: $y = -2x + 9$

Multiteka

• Symetrie

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.8



Generator
testów i sprawdzianów

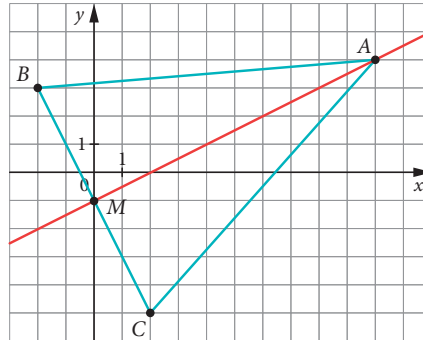
Zatem $|AB| = |AC| \neq |BC|$, czyli trójkąt ABC jest równoramienny i nie jest równoboczny. Ma więc tylko jedną oś symetrii. Jest nią prosta przechodząca przez wierzchołek A i środek podstawy BC – oznaczmy go literą M .

$$M = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{3-5}{2} \right) = (0, -1) \quad \leftarrow \text{współrzędne środka odcinka } BC$$

Prosta AM ma równanie kierunkowe $y = ax + b$ (punkty A i M mają różne pierwsze współrzędne) i jest szukaną osią symetrii:

$$\begin{cases} -1 = b \\ 4 = 10a + b \end{cases} \quad \begin{cases} -1 = b \\ 5 = 10a \end{cases} \quad \begin{cases} -1 = b \\ 0,5 = a \end{cases}$$

$$y = 0,5x - 1$$



Odp.: Trójkąt ABC jest równoramienny, a jego osią symetrii jest prosta $y = 0,5x - 1$.

Osie symetrii i środek symetrii czworokąta

Przejdźmy teraz do klasyfikacji czworokątów. Wygodnie jest zacząć od liczby par boków równoległych.

Czworokąty mające **dwie pary boków równoległych** – równoległoboki.

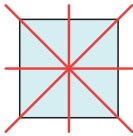
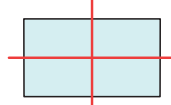
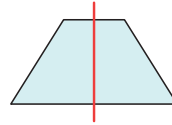
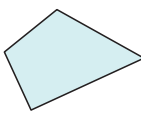
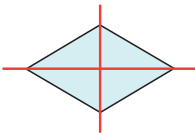
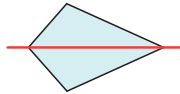
- Równoległobok nie musi mieć osi symetrii.
- Jeśli równoległobok ma **dwie** osie symetrii, to jest albo prostokątem (gdy osie symetrii przechodzą przez środki przeciwległych boków), albo rombem (gdy osie symetrii przechodzą przez wierzchołki).
- Jeśli równoległobok ma **cztery** osie symetrii, to jest kwadratem.

Czworokąty mające **co najmniej jedną parę boków równoległych** – trapezy.

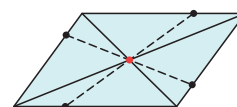
- Trapez nie musi mieć osi symetrii.
- Jeśli trapez ma **jedną** oś symetrii, to jest równoramienny.

Czworokąty niemające boków równoległych.

- Dowolny czworokąt nie ma osi symetrii.
- Jeśli czworokąt nie ma boków równoległych i ma **jedną** oś symetrii, to jest deltoidem.

Liczba osi symetrii	4	2	1	0
Czworokąt	kwadrat 	prostokąt 	trapez równoramienny 	dowolny czworokąt 
		romb 	deltoid 	

Obrazem odcinka w symetrii środkowej jest przystający do niego odcinek równoległy, więc wśród czworokątów tylko równoległoboki mają środek symetrii. Środkiem symetrii równoległoboku jest punkt przecięcia jego przekątnych.



Prawdziwe jest twierdzenie, którego dowód pominiemy.

Twierdzenie

Czworokąt jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy jego przekątne przecinają się w punkcie, który jest środkiem każdej z nich.

Podsumujemy:

- Czworokąt może mieć: 0, 1, 2 lub 4 osie symetrii.
- Osie symetrii czworokąta przecinają się w jego środku symetrii.

D Przykład 2

Wykażemy, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach:

$$A = (0, -1), B = (4, -3), C = (10, -1), D = (6, 1)$$

jest równoległobokiem i wyznaczmy jego środek symetrii.

Rozwiązanie

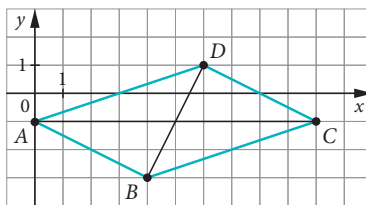
Czworokąt jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy jego przekątne mają wspólny środek.

Dowód

Przekątnymi czworokąta $ABCD$ są odcinki AC i BD . Wyznaczamy środki tych odcinków.

$$\left(\frac{10}{2}, \frac{-1-1}{2}\right) = (5, -1) \leftarrow \text{środek odcinka } AC$$

$$\left(\frac{4+6}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) = (5, -1) \leftarrow \text{środek odcinka } BD$$



Przekątne czworokąta $ABCD$ mają więc wspólny środek, czyli czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem. Jego środkiem symetrii jest punkt $(5, -1)$.

Koniec dowodu

Osie symetrii i środek symetrii wielokąta foremnego

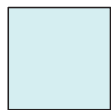
Przypomnijmy pojęcie zdefiniowane w szkole podstawowej.

Definicja

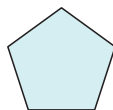
Wielokąt, którego wszystkie boki są równe i wszystkie kąty wewnętrzne mają równe miary, nazywamy **wielokątem foremnym**.



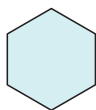
trójkąt
równoboczny



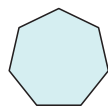
kwadrat



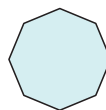
pięciokąt
foremny



sześciokąt
foremny



siedmiokąt
foremny

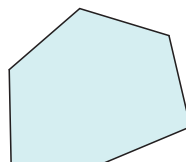


ośmiokąt
foremny

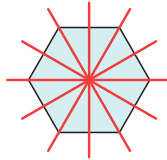
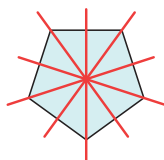
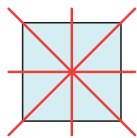
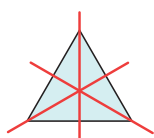
Przykład 3 ◀ zad. 8.13

Z faktu, że sześciokąt ma wszystkie boki równej długości, **nie wynika**, że jest on foremny.

Na rysunku pokazano przykład sześciokąta nieforemnego, którego boki są równej długości.

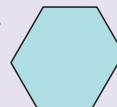
**Przykład 4**

Symetralna boku wielokąta foremnego jest jego osią symetrii. Dwusieczna kąta wielokąta foremnego zawiera się w osi symetrii tego wielokąta.



◀ 8.13. Narysuj sześciokąt foremny. Czy z faktu, że sześciokąt ma wszystkie kąty równe, wynika, że jest on foremny?

Odp.: nie, np.



Zauważmy, że n -kąt foremny ($n \geq 3$) ma n osi symetrii.

Jeżeli wielokąt ma środek symetrii, to jego boki dają się połączyć w pary boków równoległych. Wynika stąd, że wielokąt wypukły o nieparzystej liczbie boków nie może być figurą środkowosymetryczną.

Zatem n -kąt foremny ma środek symetrii wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą parzystą.

Wielokąty foremne są figurami wypukłymi.



◀8.15. Punkt $S = (2, -3)$ jest środkiem symetrii sześciokąta $ABCDEF$ o danych trzech wierzchołkach: $A = (-1, -4)$, $C = (4, -5)$, $E = (3, 1)$. Wyznacz obwód tego sześciokąta.

Odp.: $2\sqrt{10} + 4\sqrt{13}$

Przykład 5 ◀ zad. 8.15

Punkt $S = (-2, 1)$ jest środkiem symetrii sześciokąta $ABCDEF$ o danych trzech wierzchołkach: $A = (-4, -3)$, $B = (0, -2)$ i $C = (2, 3)$. Wyznamy pozostałe wierzchołki tego sześciokąta i obliczymy jego pole.

Rozwiązanie

Punkty D, E, F są końcami odcinków o środku S i początkach odpowiednio A, B, C .

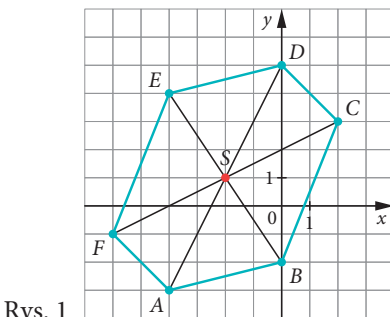
$$\begin{cases} \frac{x_D - 4}{2} = -2 \\ \frac{y_D - 3}{2} = 1 \end{cases}, \text{ stąd } D = (0, 5)$$

Podobnie wyznaczamy współrzędne wierzchołków $E = (-4, 4)$ oraz $F = (-6, -1)$.

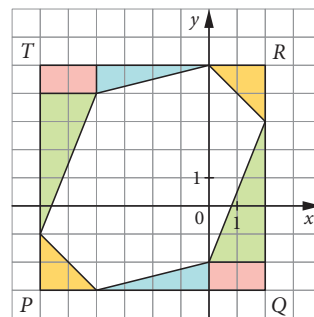
Rozwiązanie można również odczytać bezpośrednio z rysunku (rys. 1).

Pole P sześciokąta $ABCDEF$ najprościej obliczymy jako różnicę pola prostokąta $PQRT$ i sumy pól czterech prostokątów (zob. rys. 2, na którym tym samym kolorem zaznaczone są figury przystające).

$$P = 8 \cdot 8 - (2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 5) = 64 - 22 = 42$$



Rys. 1



Rys. 2

Odp.: Pozostałe wierzchołki sześciokąta to: $D = (0, 5)$, $E = (-4, 4)$ i $F = (-6, -1)$, a jego pole wynosi 42.

8.8. $A = (-3, 0)$, $B = (5, 0)$, $C = (1, 4\sqrt{3})$

$$\bullet |AB| = |-3 - 5| = 8$$

$$|BC| = \sqrt{(1 - 5)^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 48} = 8$$

$$|AC| = \sqrt{(1 + 3)^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 48} = 8$$

$|AB| = |BC| = |AC| = 8$, zatem trójkąt ABC jest równoboczny.

• D, E, F – środki boków AB, BC i AC

$$D = (1, 0), E = (3, 2\sqrt{3}), F = (-1, 2\sqrt{3})$$

Prosta CD : $x = 1$

$$\text{Prosta } AE: a_{AE} = \frac{2\sqrt{3}}{3+3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ i punkt } A \text{ należy do prostej, stąd } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}.$$

$$\text{Prosta } BF: a_{BF} = \frac{2\sqrt{3}}{-1-5} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ i punkt } B \text{ należy do prostej, stąd } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Odp.: } x = 1, y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}, y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Zadania

8.1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Przekątne równoległoboku są jego osiami symetrii.
- B. Symetralne boków równoległoboku są jego osiami symetrii.
- C. Środek jednej z przekątnych równoległoboku jest jego środkiem symetrii.
- D. Przekątna dzieli równoległobok na dwa trójkąty przystające.
- E. Symetralne boków prostokąta są jego osiami symetrii.
- F. Dwusieczne kątów rombu są jego osiami symetrii.
- G. Przekątne dzielą romb na cztery przystające trójkąty prostokątne.
- H. Przekątna dzieli trapez równoramienny na dwa trójkąty przystające.

8.2. Nazwij równoległobok, który ma

- a) tylko dwie osie symetrii przechodzące przez wierzchołki.
- b) tylko dwie osie symetrii przecinające jego boki.
- c) cztery osie symetrii.

8.3. Narysuj wszystkie osie symetrii danego wielokąta.

- a) trapez równoramienny o podstawach długości 10 cm, 8 cm i wysokości 4 cm
- b) trójkąt równoramienny o ramionach dwa razy dłuższych od podstawy
- c) prostokąt, którego długości boków są w stosunku 2 : 3

8.4. Podaj przykłady wielokątów, w których symetralna jednego z boków zawiera dwusieczną jednego z kątów wewnętrznych.

8.5. Wyznacz równania ogólne osi symetrii odcinka o końcach $A = (4, -11)$, $B = (-6, 4)$.

D

8.6. Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $A = (7, -5)$, $B = (10, 9)$, $C = (-6, 1)$ jest równoramienny, a następnie wyznacz równanie jego osi symetrii.

8.7. Podstawą trójkąta równoramiennego ABC jest odcinek o końcach $A = (3, 2)$ i $B = (1, 6)$. Jedno z ramion trójkąta zawiera się w prostej $x - y - 1 = 0$. Oblicz współrzędne wierzchołka C oraz obwód tego trójkąta.

D

8.8. Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $A = (-3, 0)$, $B = (5, 0)$, $C = (1, 4\sqrt{3})$ jest równoboczny i napisz równania jego osi symetrii.

* **8.9.** Prosta o równaniu $x - 2y + 1 = 0$ zawiera jeden z boków kwadratu, którego wierzchołki leżą na okręgu o środku $S = (0, -2)$. Oblicz współrzędne wierzchołków tego kwadratu.

8.9. $S = (0, -2)$, $l: x - 2y + 1 = 0$

• Wyznaczamy równanie okręgu.

r – promień okręgu, d – odległość punktu S od prostej l

$$r = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} = d\sqrt{2}, \quad d = \frac{|0 - 2 \cdot (-2) + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}, \quad \text{stąd } r = \sqrt{10}.$$

Równanie okręgu: $x^2 + (y + 2)^2 = 10$

• Szukamy współrzędnych wierzchołków kwadratu.

$$\begin{cases} x^2 + (y + 2)^2 = 10 \\ x = 2y - 1 \end{cases} \Rightarrow (2y - 1)^2 + (y + 2)^2 = 10 \Leftrightarrow 5y^2 = 5 \Leftrightarrow y = 1 \text{ lub } y = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Otrzymujemy wierzchołki: $(1, 1)$, $(-3, -1)$. Pozostałe dwa wyznaczamy, korzystając z faktu, że S jest środkiem przekątnych.

$$(0, -2) = \left(\frac{x_1 + 1}{2}, \frac{y_1 + 1}{2} \right), \quad \text{stąd } (x_1, y_1) = (-1, -5). \quad (0, -2) = \left(\frac{x_2 - 3}{2}, \frac{y_2 - 1}{2} \right), \quad \text{stąd } (x_2, y_2) = (3, -3).$$

Otrzymujemy wierzchołki: $(-1, -5)$, $(3, -3)$.

Odp.: $(1, 1)$, $(-3, -1)$, $(3, -3)$, $(-1, -5)$

Odpowiedzi i rozwiązania

8.1. F, F, P, P, P, P, P, F

8.2. a) romb b) prostokąt
c) kwadrat

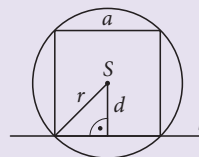
8.4. np. trójkąt równoramienny, pięciokąt foremny

$$\begin{aligned} \mathbf{8.5.} \quad & 4x - 6y - 17 = 0, \\ & 3x + 2y + 10 = 0 \end{aligned}$$

8.6. Patrz s. 106.

$$\begin{aligned} \mathbf{8.7.} \quad & C = (8, 7), \\ & obw = 2(5\sqrt{2} + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

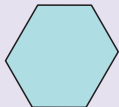
8.8. Patrz s. 110.



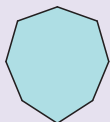
- 8.10. a)** $A' = (5, -2)$,
 $B' = (1, -2)$, $C' = (3, -8)$
b) nie
c) tak – dwie osie symetrii:
 $y = -\frac{14}{9}x$, $y = \frac{9}{14}x$

8.11. $D = (4, -1)$, $P = 104$

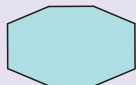
8.13. nie, np.



8.14. a)



b)



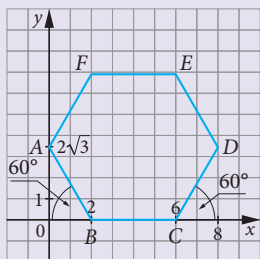
8.15. $2\sqrt{10} + 4\sqrt{13}$

8.16. $10\sqrt{2} + 6\sqrt{10}$

8.17. $B = (-6, -10)$, $C = (6, -4)$,
 $D = (2, 4)$

8.18. Patrz s. 113.

8.19. $A = (0, 2\sqrt{3})$, $B = (2, 0)$,
 C leży na osi x .



$|AB|^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2 = 16$, więc
bok sześciokąta ma długość 4.

Odp.: $C = (6, 0)$, $D = (8, 2\sqrt{3})$,
 $E = (6, 4\sqrt{3})$, $F = (2, 4\sqrt{3})$

8.10. Punkty $A = (-5, 2)$, $B = (-1, 2)$ i $C = (-3, 8)$ przekształcono przez symetrię względem początku układu współrzędnych i otrzymano odpowiednio punkty A' , B' , C' .

a) Wyznacz współrzędne punktów A' , B' , C' .

b) Czy figura będąca sumą trójkąta ABC i trójkąta $A'B'C'$ ma oś symetrii? Jeżeli tak, podaj jej równanie.

c) Czy figura będąca sumą okręgów: opisanego na trójkącie ABC i opisanego na trójkącie $A'B'C'$ ma oś symetrii? Jeżeli tak, podaj jej równanie.

8.11. Punkty $A = (-9, -1)$, $B = (-4, 11)$, $C = (3, 7)$ są kolejnymi wierzchołkami deltoidu $ABCD$. Wyznacz współrzędne wierzchołka D i oblicz pole tego deltoidu.

* **8.12.** Punkt $P = (-2, -3)$ jest wierzchołkiem rombu, którego jeden z boków ma równanie $x - 2y - 4 = 0$. Środkiem symetrii tego rombu jest punkt $M = (1, 1)$. Wyznacz pozostałe wierzchołki rombu i oblicz jego pole.

8.13. Narysuj sześciokąt foremny. Czy z faktu, że sześciokąt ma wszystkie kąty równe, wynika, że jest on foremny?

8.14. Narysuj ośmiokąt, który ma wszystkie boki równej długości i który ma

a) jedną oś symetrii.

b) dwie osie symetrii.

8.15. Punkt $S = (2, -3)$ jest środkiem symetrii sześciokąta $ABCDEF$ o danych trzech wierzchołkach: $A = (-1, -4)$, $C = (4, -5)$, $E = (3, 1)$. Wyznacz obwód tego sześciokąta.

8.16. Prosta o równaniu $y = 3x - 5$ jest osią symetrii trapezu równoramiennego $ABCD$ o podstawach AB i CD . Dane są dwa wierzchołki tego trapezu: $A = (-2, -1)$, $C = (9, 2)$. Wyznacz jego obwód.

8.17. Proste o równaniach $y = \frac{1}{2}x - 2$ i $y = -2x - 7$ są osiami symetrii czworokąta $ABCD$ o wierzchołku $A = (-10, -2)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków czworokąta.

D 8.18. Wykaż, że prosta o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 2$ jest osią symetrii pięciokąta o wierzchołkach: $A = (-1, -1)$, $B = (4, -1)$, $C = (4, 4)$, $D = (0, 7)$, $E = (-3, 3)$.

* **8.19.** Punkty A, B, C, D, E, F są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta foremnego. Wiadomo, że $A = (0, 2\sqrt{3})$, $B = (2, 0)$, a C leży na osi x . Wyznacz współrzędne wierzchołków C, D, E, F .

8.12. $P = (-2, -3)$, $M = (1, 1)$, $k: x - 2y - 4 = 0$. $P \in k$, bo $-2 - 2 \cdot (-3) - 4 = 0$.

• M – środek przekątnych PR i QS

Niech $R = (x_R, y_R)$. Wtedy $(1, 1) = \left(\frac{x_R - 2}{2}, \frac{y_R - 3}{2}\right)$, stąd $x_R = 4$, $y_R = 5$. Zatem $R = (4, 5)$.

• $PR \perp QS$, więc iloczyn współczynników kierunkowych tych prostych: $a_{PR} \cdot a_{QS} = -1$.

$a_{PR} = \frac{5 + 3}{4 + 2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, stąd $a_{QS} = -\frac{3}{4}$.

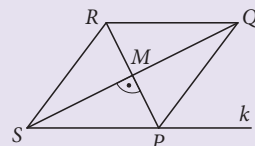
Prosta QS : $a_{QS} = -\frac{3}{4}$ i punkt M należy do prostej, stąd $y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$. Punkt S należy do prostych QS i k : $y = \frac{1}{2}x - 2$.

$S: -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4} = \frac{1}{2}x - 2 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x = \frac{15}{4} \Rightarrow x = 3$, $y = -\frac{1}{2}$. Stąd $S = \left(3, -\frac{1}{2}\right)$.

• Niech $Q = (x_Q, y_Q)$. Punkt M jest środkiem odcinka QS , stąd $x_Q = -1$, $y_Q = \frac{5}{2}$. Zatem $Q = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$.

• $|PR| = \sqrt{(4 + 2)^2 + (5 + 3)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$, $|SQ| = \sqrt{(-1 - 3)^2 + \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$, $P = \frac{1}{2}|PR| \cdot |SQ| = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25$

Odp.: $(4, 5)$, $\left(3, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$, $P = 25$



- * **8.20.** Wszystkie wierzchołki ośmiokąta foremnego leżą na okręgu o środku w punkcie $(0, 0)$. Jednym z wierzchołków ośmiokąta jest punkt $(4, 0)$. Wyznacz współrzędne dwóch sąsiednich wierzchołków.

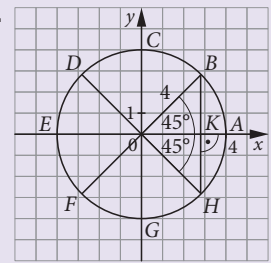
Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

- Deltoid niebędący rombem
 - nie ma osi symetrii ani środka symetrii.
 - nie ma osi symetrii i ma środek symetrii.
 - ma jedną oś symetrii i nie ma środka symetrii.
 - ma jedną oś symetrii i ma środek symetrii.
- Wskaż równanie prostej, która nie jest osią symetrii kwadratu o wierzchołkach $(2, 4)$, $(-4, 2)$, $(-2, -4)$, $(4, -2)$.
 - $y = 2x$
 - $y = \frac{1}{2}x$
 - $y = -2x$
 - $y = -3x$
- Punkt $(1, 2)$ jest środkiem symetrii sześciokąta $ABCDEF$ o danych wierzchołkach: $A = (-1, -1)$, $C = (5, 1)$ i $E = (-1, 6)$. Wskaż punkt, który nie jest wierzchołkiem tego sześciokąta.
 - $(-3, 3)$
 - $(3, 5)$
 - $(-3, 4)$
 - $(3, -2)$
- Oceń prawdziwość podanych zdań.
 - Środek dowolnej przekątnej sześciokąta foremnego jest jego środkiem symetrii.
 - Przekątne pięciokąta foremnego są jego osiami symetrii.
 - Jedynym czworokątem, który ma cztery osie symetrii, jest kwadrat.
- Sprawdź, czy czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-19, -24)$, $B = (38, 0)$, $C = (27, 6)$, $D = (-30, -18)$ ma środek symetrii.
- Punkty $A = (-6, 0)$ i $B = (-5, -8)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$, a prosta o równaniu $x + 2y + 6 = 0$ jest jedną z jego osi symetrii. Wyznacz współrzędne wierzchołków C i D .
- Jedno z ramion trójkąta równoramiennego ABC jest zawarte w prostej o równaniu $y = 2x - 3$. Podstawą trójkąta jest odcinek o końcach $A = (2, 1)$, $B = (5, 2)$. Oblicz współrzędne wierzchołka C .

8.20.



$A = (4, 0)$, promień okręgu: $r = 4$
Szukamy współrzędnych punktów B i H .

$$|OB| = |OH| = 4$$

$$|OK| \cdot \sqrt{2} = 4, \text{ stąd:}$$

$$|OK| = |BK| = |HK| = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Zatem } B = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}),$$

$$H = (2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}).$$

$$\text{Odp.: } (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}), (2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$$

Prosto do matury

- C
- C
- C
- F, F, P
- tak
- $C = (2, -4)$, $D = (1, 4)$
- $C = (3, 3)$

- 8.18.** $A = (-1, -1)$, $B = (4, -1)$, $C = (4, 4)$, $D = (0, 7)$, $E = (-3, 3)$, $k: y = \frac{1}{2}x + 2$. $C \in k$, bo $\frac{1}{2} \cdot 4 + 2 = 4$.

Wykażemy, że: $AE \perp k$, $BD \perp k$ oraz K i M to odpowiednio środki odcinków AE i BD .

$$\bullet a_{AE} = \frac{3+1}{-3+1} = -2, \text{ więc } AE \perp k.$$

$$\bullet a_{BD} = \frac{7+1}{0-4} = -2, \text{ więc } BD \perp k.$$

$\bullet K$ należy do prostych AE i k .

Prosta AE ma równanie $y = -2x + b$ i punkt A należy do tej prostej, więc $y = -2x - 3$.

$$K: -2x - 3 = \frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x = -5 \Rightarrow x = -2, y = 1. \text{ Stąd } K = (-2, 1) = \left(\frac{-1-3}{2}, \frac{-1+3}{2}\right),$$

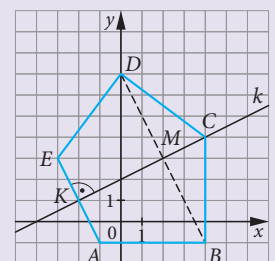
czyli K jest środkiem odcinka AE .

$\bullet M$ należy do prostych BD i k .

Prosta BD ma równanie $y = -2x + c$ i punkt B należy do tej prostej, więc $y = -2x + 7$.

$$M: -2x + 7 = \frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x = 5 \Rightarrow x = 2, y = 3. \text{ Stąd } M = (2, 3) = \left(\frac{4+0}{2}, \frac{-1+7}{2}\right), \text{ czyli } M \text{ jest środkiem odcinka } BD.$$

Punkt C leży na prostej k : $y = \frac{1}{2}x + 2$, punkty A i E oraz B i D są symetryczne względem tej prostej, zatem jest ona osią symetrii pięciokąta $ABCDE$.



9. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–21 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

1. C
 2. D
 3. B
 4. A
 5. C
 6. B
 7. D
 8. D
 9. D
1. Odległość między punktami $P = \left(1\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}\right)$ i $Q = \left(-2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$ jest równa
A. $2\sqrt{2}$. B. 3. C. $4\sqrt{2}$. D. 4.
 2. Punkt A leży na osi x , $B = (-5, 6)$, a środek odcinka AB leży na osi y . Wskaż długość odcinka AB .
A. $2\sqrt{17}$ B. 8 C. 16 D. $2\sqrt{34}$
 3. W kwadracie $ABCD$ punkty $P = (2, 3)$ i $Q = (7, 4)$ są odpowiednio środkami boków AB i BC . Przekątna kwadratu ma długość
A. $\sqrt{26}$. B. $2\sqrt{26}$. C. $3\sqrt{26}$. D. $\frac{1}{2}\sqrt{26}$.
 4. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-2, 3)$, $B = (6, -1)$, $C = (0, 7)$. Wskaż długość środkowej tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka C .
A. $2\sqrt{10}$ B. $4\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{15}$ D. 8
 5. Wskaż równanie prostej przechodzącej przez punkt $A = (-3, 5)$ i równoległej do prostej $y = \frac{2}{3}x - 4$.
A. $2x + 3y - 9 = 0$ C. $2x - 3y + 21 = 0$
B. $3x - 2y + 19 = 0$ D. $3x + 2y - 1 = 0$
 6. W trapezie $ABCD$, którego podstawa AB jest zawarta w prostej $x - 2y + 10 = 0$, dany jest wierzchołek $D = (6, 6)$. Która prosta zawiera podstawę CD ?
A. $y = -\frac{1}{2}x + 3$ B. $y = \frac{1}{2}x + 3$ C. $y = -2x + 3$ D. $y = 2x + 3$
 7. Wskaż odległość między prostymi $y = 3x - 2$ i $y = 3x + 1$.
A. 3 B. $\sqrt{10}$ C. $\frac{1}{\sqrt{10}}$ D. $\frac{3}{\sqrt{10}}$
 8. Środek okręgu o równaniu $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 144$ ma współrzędne
A. $(-3, -5)$. B. $(3, 5)$. C. $(-3, 5)$. D. $(3, -5)$.
 9. Dany jest okrąg o równaniu $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 3$. Wskaż współrzędne środka i promień r tego okręgu.
A. $(3, -2)$, $r = 3$ C. $(-3, -2)$, $r = \sqrt{3}$
B. $(-3, 2)$, $r = 3$ D. $(-3, 2)$, $r = \sqrt{3}$

Multiteka

- Współrzędne kartezjańskie
- Topologia
- Układ współrzędnych biegunowych

dlanauczyciela.pl | Klasówka 2

Generator
testów i sprawdzianów

- 10.** Wskaż punkt należący do okręgu o równaniu $x^2 + (y + 4)^2 - 9 = 0$.
 A. (0, 4) B. (3, -4) C. (-3, 4) D. (4, 0) **10. B**
- 11.** Liczba punktów wspólnych okręgu o równaniu $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$ z osiami układu współrzędnych jest równa
 A. 4. B. 3. C. 2. D. 1. **11. B**
- 12.** Na okręgu o promieniu 7 leży punkt $A = (0, -4)$. Równanie tego okręgu może mieć postać
 A. $(x - 7)^2 + y^2 = 7$. C. $(x - 7)^2 + (y + 4)^2 = 49$.
 B. $x^2 + (y + 4)^2 = 49$. D. $(x - 4)^2 + y^2 = 7$. **12. C**
- 13.** Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą nierówności $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 \leq 8$?
 A. koło o środku (3, -1) i promieniu $r = 2\sqrt{2}$
 B. koło o środku (3, -1) i promieniu $r = 8$
 C. okrąg o środku (3, -1) i promieniu $r = 2\sqrt{2}$
 D. półpłaszczyzna **13. A**
- 14.** Ile punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisanych za pomocą układu warunków $\begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 9 \\ y - x - 2 = 0 \end{cases}$?
 A. dwa B. jeden C. nieskończenie wiele D. zero **14. C**
- 15.** Prosta o równaniu $y = -2x - 9$ jest styczna do okręgu o środku w punkcie $S = (4, 3)$. Wskaż promień tego okręgu.
 A. $2\sqrt{5}$ B. $3\sqrt{5}$ C. $4\sqrt{5}$ D. $5\sqrt{5}$ **15. C**
- 16.** Wskaż równanie prostej, która nie jest styczna do okręgu $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$.
 A. $3x + 4y - 20 = 0$ C. $3x - 4y + 12 = 0$
 B. $4x + 3y - 16 = 0$ D. $4x - 3y - 10 = 0$ **16. C**
- 17.** Wskaż równanie okręgu, który jest styczny do osi układu współrzędnych w punktach $P = (-3, 0)$ i $Q = (0, 3)$.
 A. $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ C. $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$
 B. $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$ D. $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$ **17. C**
- 18.** Punkty $A = (-3 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$, $B = (1 + \sqrt{3}, 5 - 2\sqrt{3})$,
 $C = (5 + 3\sqrt{3}, 7 + 3\sqrt{3})$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$.
 Środkiem symetrii tego równoległoboku jest punkt
 A. $(-1, 2 - 1,5\sqrt{3})$. C. $(-3 + 2\sqrt{3}, 2 + 5\sqrt{3})$.
 B. $(1 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$. D. $(3 + 2\sqrt{3}, 6 + 0,5\sqrt{3})$. **18. B**

- 19. A**
- 19.** Obrazem okręgu o środku $S = (-3, 5)$ i promieniu 2020 w symetrii osiowej względem osi y jest okrąg o środku S_1 . Odległość między środkami tych okręgów jest równa
- A. 6. B. 10. C. 2010. D. 2020.
- 20. B**
- 20.** Okrąg o równaniu $(x - 7)^2 + (y + 2)^2 = 11$ przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych. Wskaż równanie otrzymanego okręgu.
- A. $(x + 7)^2 + (y + 2)^2 = 11$ C. $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 11$
 B. $(x + 7)^2 + (y - 2)^2 = 11$ D. $(x - 2)^2 + (y + 7)^2 = 11$
- 21. B**
- 21.** Wskaż środek ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A = (-3, -1)$, $B = (2, 6)$, $C = (-2, 4)$.
- A. $\left(-1, \frac{11}{2}\right)$ B. $(-1, 3)$ C. $(-3, 9)$ D. $(0, 3)$
- W zadaniach 22–32 oceń prawdziwość podanych zdań.**
- 22. F, F, P**
- 22.**
- A. Równanie $2x + 4y + 3 = 0$ opisuje prostą przechodzącą przez I, II i IV ćwiartkę układu współrzędnych.
 B. Prosta o równaniu $-3x\pi = 0$ jest równoległa do osi x .
 C. Prosta o równaniu $\sqrt{7}x + \pi y = 2$ jest wykresem funkcji.
- 23. F, P, F**
- 23.** Dane jest koło opisane za pomocą nierówności $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 \leq 9$.
- A. Punkt $A = (-1, -1)$ należy do tego koła.
 B. Punkt $B = (-7, -3)$ leży na zewnątrz tego koła.
 C. Punkt $C = (-6, \sqrt{5} - 2)$ leży na zewnątrz tego koła.
- 24. P, F, P**
- 24.** Dany jest okrąg o równaniu $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$.
- A. Punkt $M = (3, -6)$ należy do tego okręgu.
 B. Punkt $P = (3, 3)$ należy do tego okręgu.
 C. Okrąg ten jest styczny do obydwu osi układu współrzędnych.
- 25. P, P, P**
- 25.** Okrąg o równaniu $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$ jest styczny do
- A. osi x . B. prostej $y = 6$. C. prostej $x = 1$.
- 26. F, F, P**
- 26.** Dany jest okrąg o równaniu $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$.
- A. Prosta $y - x = 0$ jest osią symetrii tego okręgu.
 B. Prosta $y = x + 1$ jest styczna do tego okręgu.
 C. Prosta $y = 4 - x$ przecina ten okrąg.

27. Figura opisana za pomocą układu nierówności $\begin{cases} (x+3)^2 + (y+1)^2 \leq 25 \\ 4x + 3y - 10 \leq 0 \end{cases}$

- A. ma nieskończenie wiele osi symetrii.
 B. ma dokładnie jedną oś symetrii.
 C. jest środkowosymetryczna.

27. P, F, P

28. Dany jest okrąg o równaniu $(x+4)^2 + (y+4)^2 = 16$.

- A. Prosta $y = -8$ jest styczna do tego okręgu.
 B. Prosta $y = x$ nie ma punktów wspólnych z tym okręgiem.
 C. Prosta $x = -4$ jest osią symetrii tego okręgu.

28. P, F, P

29. Dany jest zbiór F opisany za pomocą układu nierówności $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$.

Do zbioru F należy

- A. punkt o współrzędnych $(-1, 1)$.
 B. co najmniej pięć punktów o obu współrzędnych całkowitych.
 C. dokładnie sześć punktów o obu współrzędnych całkowitych.

29. P, P, P

30. Punkt przecięcia prostych o równaniach $3x + 2y - 6 = 0$ i $2x - y - 4 = 0$ należy do zbioru punktów płaszczyzny opisanego za pomocą nierówności

- A. $x^2 + y^2 \leq 3$. B. $x^2 + y^2 \leq 4$. C. $x^2 + y^2 \leq 5$.

30. F, P, P

31. Dany jest okrąg o równaniu $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 1$.

- A. Prosta $7x + 3y = 0$ zawiera średnicę tego okręgu.
 B. Prosta $y = x - 10$ jest osią symetrii tego okręgu.
 C. Prosta $y = 2x - 9$ jest styczna do tego okręgu.

31. P, P, F

32. Odległość punktu $(2, 5)$ od środka okręgu $(x-4)^2 + y^2 = 1$ jest

- A. równa 3. B. równa $\sqrt{21}$. C. liczbą wymierną.

32. F, F, F

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

33. Oblicz długość odcinka AB .

- a) $A = (1, 7)$, $B = (3, -3)$ c) $A = \left(-\frac{11}{100}, 5\frac{1}{2}\right)$, $B = (-0,11, -3)$
 b) $A = \left(-1\frac{1}{2}, 3\sqrt{3}\right)$, $B = (0,5, \sqrt{3})$ d) $A = (-\sqrt{2}, 7)$, $B = (2\sqrt{2}, -2)$

33. a) $2\sqrt{26}$ b) 4
 c) 8,5 d) $3\sqrt{11}$

34. Oblicz odległość punktu A od prostej l .

- a) $A = (2, -3)$, $l: x - y + 5 = 0$ c) $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$, $l: 2x + 3y + 10 = 0$
 b) $A = (-1, 4)$, $l: -3x + 4y + 1 = 0$ d) $A = \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $l: -x + 3y + 5 = 0$

34. a) $5\sqrt{2}$ b) 4
 c) $\sqrt{13}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

35. a) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 26$

b) $(x-4)^2 + y^2 = 61$

c) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + (y+3)^2 = 11\frac{1}{9}$

d) $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 24$

36. a) Prosta jest styczna do okręgu.

b) Prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem.

c) Prosta przecina okrąg w dwóch punktach.

d) Prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem.

37. a) przecinające się

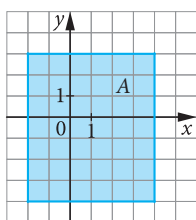
b) styczne zewnętrznie

c) rozłączne zewnętrznie

d) styczne wewnętrznie

38. $m < 0$

39. prostokątem o polu 42



40. $m \in \langle -8; 5 \rangle$

41. $|QR| = 4\sqrt{13}$

42. $y = \frac{1}{3}x + 1$

43. $k': y = 3x + 7$

44. $(6, 9), (6, 0), (0, 3),$

$obw = 6(2\sqrt{2} + \sqrt{5})$

35. Napisz równanie okręgu o środku S przechodzącego przez punkt P.

a) $S = (-2, 1), P = (3, 2)$

c) $S = \left(\frac{1}{3}, -3\right), P = \left(2\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

b) $S = (4, 0), P = (-2, 5)$

d) $S = (-3, 3), P = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$

36. Zbadaj wzajemne położenie prostej i okręgu.

a) $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 20$

$2x + y - 4 = 0$

b) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$

$3x - 2y - 3 = 0$

c) $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 45$

$x - 4y + 2 = 0$

d) $(x+7)^2 + y^2 = 34$

$x - y - 2 = 0$

37. Zbadaj wzajemne położenie okręgów o podanych równaniach.

a) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 52$

$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 13$

b) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$

$(x+6)^2 + (y+8)^2 = 100$

c) $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 16$

$(x+2)^2 + (y+6)^2 = 18$

d) $(x-6)^2 + (y-1)^2 = 10$

$(x-4)^2 + (y-7)^2 = 90$

38. Dla jakich wartości m prosta o równaniu $3x + \sqrt{5}y = m$ przechodzi przez II, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych?

39. Narysuj na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór:

$A = \{(x, y): x \in \langle -2; 4 \rangle \text{ i } y \in \langle -4; 3 \rangle\}$

Jaką figurą geometryczną jest zbiór A? Ile wynosi jego pole?

40. Dla jakich wartości m prosta o równaniu $2x + y = m$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z prostokątem o wierzchołkach $(1, 3), (-3, 3), (-3, -2), (1, -2)$?

41. Dany jest punkt $P = (6, -4)$. Punkt Q jest obrazem punktu P w symetrii osiowej względem osi x , a punkt R – obrazem punktu P w symetrii osiowej względem osi y . Oblicz długość odcinka QR.

42. Wyznacz równanie tej spośród osi symetrii okręgu o równaniu $(x+3)^2 + y^2 = 36$, która przechodzi przez punkt $A = (6, 3)$.

43. Dana jest prosta k o równaniu $y = 3x - 7$. Wyznacz równanie prostej k' , która jest obrazem prostej k w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

44. Punkt $B = (12, 6)$ jest wierzchołkiem równoległoboku ABCD. Dwa boki równoległoboku zawierają się w prostych $x + 2y - 6 = 0$ i $x - y + 3 = 0$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków równoległoboku i oblicz jego obwód.

45. Prosta BC: $y = -\frac{1}{2}x + 6$, $A = (-6, -1)$, $P_{ABC} = 40$, $|AC| = |BC|$

Prosta BC: $x + 2y - 12 = 0$

h – odległość punktu A od prostej BC (wysokość trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka A)

$h = \frac{|-6 - 2 - 12|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$

$P_{ABC} = \frac{1}{2}|BC| \cdot h$, stąd $|BC| = \frac{2P_{ABC}}{h} = \frac{2 \cdot 40}{4\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$. $C = \left(x, -\frac{1}{2}x + 6\right)$ i $|AC| = |BC| = 4\sqrt{5}$, stąd:

$\sqrt{(x+6)^2 + \left(-\frac{1}{2}x + 6 + 1\right)^2} = 4\sqrt{5} \Leftrightarrow (x+6)^2 + \left(7 - \frac{1}{2}x\right)^2 = 80 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 36 + 49 - 7x + \frac{1}{4}x^2 = 80 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5}{4}x^2 + 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0$

Zatem $x = -2$, $y = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + 6 = 7$.

Odp.: $C = (-2, 7)$

* 45. W trójkącie równoramiennym ABC , w którym $|AC| = |BC|$, ramię BC zawiera się w prostej $y = -\frac{1}{2}x + 6$ i $A = (-6, -1)$. Pole tego trójkąta jest równe 40. Oblicz współrzędne punktu C .

46. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-2, 8)$, $B = (4, -1)$, $C = (5, 4)$. Z wierzchołka C poprowadzono wysokość CD . Wyznacz współrzędne punktu D .

47. Trójkąt ABC jest ograniczony prostymi $AB: x - 3y + 9 = 0$, $BC: x + 2y - 16 = 0$, $AC: 2x - y + 8 = 0$.

a) Oblicz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

b) Oblicz wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C .

c) Wyznacz równanie prostej zawierającej środkową poprowadzoną z wierzchołka B tego trójkąta.

48. Punkty $A = (-8, -13)$, $C = (0, 3)$ są wierzchołkami trójkąta ABC , którego wysokości przecinają się w punkcie $K = (2, -3)$. Oblicz współrzędne wierzchołka B .

49. W trójkącie prostokątnym kąt ABC jest prosty. Wierzchołek C leży na prostej $x - 2y + 6 = 0$ oraz $A = (-3, -4)$ i $B = (6, -1)$. Oblicz współrzędne punktu C oraz pole tego trójkąta.

50. Środek okręgu przechodzącego przez punkty $A = (3, 1)$ i $B = (-1, 3)$ należy do prostej $x - y + 3 = 0$. Napisz równanie tego okręgu.

51. Oblicz długość cięciwy, którą okrąg $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$ wycina z prostej $y = -x + 3$.

52. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A = (4, 4)$, $B = (2, 0)$, $C = (-8, 10)$.

53. Prosta $y = -x + 2$ jest styczna do okręgu o środku $A = (5, 3)$. Oblicz współrzędne punktu styczności B oraz napisz równanie tego okręgu.

54. Okrąg o środku w punkcie $S = (3, 3)$ jest styczny do obu osi współrzędnych. Prosta k jest styczna do tego okręgu w punkcie $P = (2, m)$, $m > 1$. Wyznacz równanie prostej k .

55. Wyznacz równania prostych stycznych do okręgu $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$ i prostopadłych do prostej $x - 3y + 6 = 0$.

56. Do okręgu $(x - 7)^2 + (y + 1)^2 = 25$ poprowadzono styczne z początku układu współrzędnych. Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są punkty styczności oraz punkt przecięcia stycznych.

60. $A = (-1, -1)$, $B = (5, 1)$, punkty A, B, C leżą na okręgu $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 20$.

Punkt $C = (x, y)$ spełnia warunek $|AC| = |BC|$, czyli $|AC|^2 = |BC|^2$. Stąd:

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = (x - 5)^2 + (y - 1)^2$$

$$4y = -12x + 24 \quad |:4$$

$$y = -3x + 6$$

Punkt C leży na okręgu $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 20$, więc:

$$(x - 1)^2 + (-3x + 6 - 3)^2 = 20 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (-3(x - 1))^2 = 20$$

$$10(x - 1)^2 = 20, \text{ czyli } (x - 1)^2 = 2.$$

$$x - 1 = -\sqrt{2} \text{ lub } x - 1 = \sqrt{2}$$

$$x_1 = 1 - \sqrt{2}, \quad y_1 = -3(1 - \sqrt{2}) + 6 = 3 + 3\sqrt{2}$$

$$x_2 = 1 + \sqrt{2}, \quad y_2 = -3(1 + \sqrt{2}) + 6 = 3 - 3\sqrt{2}$$

$$\text{Odp.: } C = (1 - \sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}) \text{ lub } C = (1 + \sqrt{2}, 3 - 3\sqrt{2})$$

45. Patrz s. 118.

46. $D = (2, 2)$

47. a) $A = (-3, 2)$, $B = (6, 5)$,
 $C = (0, 8)$

b) $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

c) $y = 5$

48. $B = (10, -7)$

49. $C = (4, 5)$, $P = 30$

50. $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 25$

51. $4\sqrt{2}$

52. $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 50$

53. $B = (2, 0)$,
 $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 18$

54. $k: y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + 3\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

55. $y = -3x + 11 - 3\sqrt{10}$,
 $y = -3x + 11 + 3\sqrt{10}$

56. $P = 12,5$

67. $A = (-6, 2)$, $B = (2, -7)$,
 $C = (6, -4)$, $D = (6, 1)$

$$|AB| = \sqrt{64 + 81} = \sqrt{145}$$

$$|BC| = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$|CD| = |1 + 4| = 5$$

$$|AD| = \sqrt{144 + 1} = \sqrt{145}$$

$$|AB| = |AD| \text{ i } |BC| = |CD|,$$

więc czworokąt $ABCD$ jest deltoidem, którego osią symetrii jest prosta AC . Zatem oś symetrii tego czworokąta przechodzi przez wierzchołek A .

57. $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 45$

58. $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 18$

59. $y = -x + 2$, $y = -x + 14$

60. Patrz s. 119.

62. $y = 3x + 1$

63. $C = (-10, 8)$, $D = (0, -8)$

64. $A = (-2, -2)$, $B = (6, 2)$,
 $C = (2, 5)$, $D = (-4, 2)$

Wyznaczamy współczynniki
kierunkowe prostych zawierających
boki czworokąta $ABCD$.

$$a_{AB} = \frac{2+2}{6+2} = \frac{1}{2}$$

$$a_{BC} = \frac{5-2}{2-6} = -\frac{3}{4}$$

$$a_{CD} = \frac{2-5}{-4-2} = \frac{1}{2}$$

$$a_{AD} = \frac{2+2}{-4+2} = -2$$

$AB \parallel CD$ i $AD \perp AB$, i $AD \perp CD$,
więc czworokąt jest trapezem
prostokątnym o podstawach
 AB i CD .

a) $|AB| = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

$$|BC| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$|CD| = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$|AD| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$obw = 5 + 9\sqrt{5}$$

$$\text{b) } P = \frac{1}{2} (|AB| + |CD|) \cdot |AD| =$$

$$= \frac{1}{2} (4\sqrt{5} + 3\sqrt{5}) \cdot 2\sqrt{5} = 35$$

c) $|AC| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$,

$$|BD| = |6 - (-4)| = 10$$

Odp.: a) $obw = 5 + 9\sqrt{5}$

b) $P = 35$

c) $|AC| = \sqrt{65}$, $|BD| = 10$

65. $P = 45$

66. $A = (-7, 2)$, $B = (-6, -3)$,

$C = (1, -3)$, $D = (3, 4)$,

$E = (2, 9)$, $F = (-5, 9)$

Wyznaczamy współrzędne

środków odcinków AD , BE i CF .

$$AD: S = \left(\frac{-7+3}{2}, \frac{2+4}{2} \right) = (-2, 3)$$

$$BE: S = \left(\frac{-6+2}{2}, \frac{-3+9}{2} \right) = (-2, 3)$$

$$CF: S = \left(\frac{1-5}{2}, \frac{-3+9}{2} \right) = (-2, 3)$$

Punkt $S = (-2, 3)$ jest środkiem
symetrii sześciokąta $ABCDEF$.

67. Patrz s. 119.

68. $y = 2x - 6$, $y = -\frac{1}{2}x + 4$,

$y = -3x + 14$, $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

57. Dany jest okrąg o środku $S = (-2, 5)$. Cięciwa AB tego okręgu ma długość $9\sqrt{2}$ i jest zawarta w prostej $y = x + 4$. Napisz równanie okręgu.

58. Dane są punkty $A = (-4, -2)$, $B = (7, 9)$ i $C = (6, 2)$. Napisz równanie okręgu o środku w punkcie C stycznego do prostej AB .

59. Prosta $x - y - 2 = 0$ przecina okrąg $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 18$ w punktach A i B . Napisz równania stycznych do tego okręgu w tych punktach.

* 60. Punkty $A = (-1, -1)$, $B = (5, 1)$ leżą na okręgu $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$. Wyznacz na okręgu taki punkt C , aby trójkąt ABC był trójkątem równoramiennym o podstawie AB .

* 61. Wierzchołki prostokąta $ABCD$ leżą na okręgu $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 13$. Ponadto punkty A i B leżą na prostej $y = 5x - 5$. Wyznacz wierzchołki tego prostokąta i oblicz jego pole.

62. Napisz równanie prostej równoległej do prostej $3x - y + 7 = 0$ i przechodzącej przez środek okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A = (1, -1)$, $B = (-2, -4)$, $C = (0, 0)$.

63. Punkty $A = (3, -5)$ i $B = (-7, 11)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, a punkt $S = (-5, 0)$ jest środkiem boku CD . Wyznacz współrzędne wierzchołków C i D .

64. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-2, -2)$, $B = (6, 2)$, $C = (2, 5)$, $D = (-4, 2)$ jest trapezem prostokątnym. Oblicz

a) obwód czworokąta.

b) pole czworokąta.

c) długości przekątnych czworokąta.

65. Punkty wspólne okręgu $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 17$ i prostej o równaniu $5x + 3y - 36 = 0$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi y . Oblicz pole czworokąta, którego wierzchołkami są te punkty i ich obrazy.

66. Wykaż, że sześciokąt $ABCDEF$ o wierzchołkach $A = (-7, 2)$, $B = (-6, -3)$, $C = (1, -3)$, $D = (3, 4)$, $E = (2, 9)$, $F = (-5, 9)$ ma środek symetrii.

67. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-6, 2)$, $B = (2, -7)$, $C = (6, -4)$, $D = (6, 1)$ ma oś symetrii przechodzącą przez wierzchołek A .

68. Punkty $A = (1, -4)$ i $B = (10, -1)$ są wierzchołkami kwadratu $ABCD$, a punkt $S = (4, 2)$ jest jego środkiem symetrii. Wyznacz równania osi symetrii tego kwadratu.

61. Punkty A, B, C, D leżą na okręgu $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 13$, ponadto A i B leżą na prostej $y = 5x - 5$. $S = (4, 2)$, $r = \sqrt{13}$ – środek i promień okręgu

• Punkty A i B leżą na przecięciu okręgu i prostej:

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-2)^2 = 13 \\ y = 5x - 5 \end{cases} \Rightarrow (x-4)^2 + (5x-7)^2 = 13 \Leftrightarrow 26x^2 - 78x + 52 = 0 \quad |:26$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0$$

Stąd $x = 1$, $y = 0$ lub $x = 2$, $y = 5$. Otrzymujemy punkty $A = (1, 0)$ i $B = (2, 5)$.

• $C = (x_C, y_C)$, $D = (x_D, y_D)$. Punkt S jest środkiem odcinków AC i BD :

$$(4, 2) = \left(\frac{x_C+1}{2}, \frac{y_D}{2} \right), \text{ stąd } x_C = 7, y_C = 4, \text{ czyli } C = (7, 4).$$

$$(4, 2) = \left(\frac{x_D+2}{2}, \frac{y_D+5}{2} \right), \text{ stąd } x_D = 6, y_D = -1, \text{ czyli } D = (6, -1).$$

• Pole prostokąta: $P = |AB| \cdot |AD| = \sqrt{1+25} \cdot \sqrt{25+1} = (\sqrt{26})^2 = 26$.

Odp.: $(1, 0)$, $(2, 5)$, $(7, 4)$, $(6, -1)$, $P = 26$