

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

4

Umiejętności

Po szkole podstawowej uczeń:

- wyznacza zbiory obiektów, analizuje i oblicza, ile jest obiektów mających daną własność,
- przeprowadza proste doświadczenia losowe, analizuje je i oblicza prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach losowych,
- stosuje regułę dodawania i mnożenia do zliczania par elementów w sytuacjach wymagających rozważenia kilku przypadków,
- oblicza prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach polegających na rzucie dwiema kostkami lub losowaniu dwóch elementów ze zwracaniem i bez zwracania,
- interpretuje dane przedstawione za pomocą tabel, diagramów słupkowych i kołowych, wykresów, w tym także wykresów w układzie współrzędnych,
- tworzy diagramy słupkowe i kołowe oraz wykresy liniowe na podstawie zebranych przez siebie danych lub danych pochodzących z różnych źródeł,
- oblicza średnią arytmetyczną kilku liczb.

Po tym dziale uczeń:

- oblicza prawdopodobieństwo w prostych sytuacjach z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa,
- zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych,
- stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania,
- oblicza wartość oczekiwaną w prostych grach losowych,
- prezentuje dane z zastosowaniem mediany, dominanty, średniej arytmetycznej i średniej ważonej,
- stosuje skalę centylową,
- interpretuje parametry opisowe dla danych empirycznych,
- oblicza odchylenie standardowe zestawu danych (także w wypadku danych odpowiednio pogrupowanych).

1. Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa

Prawdopodobne jest to, co się zwykle zdarza.

Arystoteles

Logika klasyczna, nazywana od nazwiska jej twórcy arystotelesowską, zajmuje się tylko takimi zdaniami, którym można przypisać dokładnie jedną z dwóch wartości – prawdę albo fałsz. Teorie matematyczne przez wiele wieków opierały się na takiej właśnie dwuwartościowej logice. Również obecnie ta metoda rozumowania jest bardzo użyteczna. W pewnym momencie zaistniała jednak potrzeba wymyślenia czegoś, co uwzględniałoby bardziej skomplikowane przypadki. W życiu codziennym spotykamy się bowiem z pytaniami, na które rzadko można udzielić jednoznacznej odpowiedzi. Na przykład:

- Czy wybierać kierunek studiów zgodnie z zainteresowaniami, czy raczej kierować się potrzebami rynku pracy?
- Czy dostanę się na wymarzoną uczelnię?
- Jaką mam szansę na pomyślne zdanie egzaminu?

W życiu mamy na ogół do czynienia ze zdaniami, które nie są ani w pełni prawdziwe, ani w pełni fałszywe. Do poruszania się w takim świecie bardzo przydatna jest **logika probabilistyczna** (łac. *probabilis* – prawdopodobny). Pozwala ona ocenić, na ile dane zdanie jest wiarygodne. Prawdopodobieństwo zajścia jakiegoś zdarzenia logika ta ocenia wartościami z nieskończonego zbioru liczb leżących pomiędzy 0 a 1 (lub w procentach – między 0% a 100%). Można się spotkać np. ze stwierdzeniami typu:

- Ten pacjent ma ok. 50-procentową szansę na przeżycie operacji.
- Jeżeli będę dzisiaj pytany z matematyki, to na 99% dostanę jedynkę.
- Szansę otrzymania czwórki z egzaminu oceniam na 30%.
- Prawdopodobieństwo zdobycia głównej nagrody w lotto, czyli trafienia „szóstki”, wynosi około 1 : 14 000 000.
- Jeżeli założymy na domu piorunochron, to prawdopodobieństwo pożaru od uderzenia pioruna zmaleje do 0,001.

W dalszych tematach pokażemy, w jaki sposób można w pewnych sytuacjach owo „podobieństwo do prawdy” dobrze oszacować. Posłużymy się modelami matema-

Określenie „prawdopodobny” możemy rozumieć jako „podobny do prawdy”.

Multiteka

• Liczenie kart

tycznymi zjawisk losowych, chociaż oczywiście będą się one odnosiły (jak każdy model) do sytuacji wyidealizowanych. Nie istnieje idealnie jednorodna kostka do gry, ale nietrudno sobie wyobrazić, że właśnie z taką kostką mamy do czynienia. Podobnie zresztą postępowaliśmy np. w geometrii. Cała teoria została wyprowadzona na bazie obiektów w rzeczywistości nieistniejących. Nie da się przecież wykreślić prostej, która nie miałaby grubości, nie narysujemy czegoś takiego jak punkt itd. Mimo to praktyczne zastosowania twierdzeń geometrycznych są kolosalne i trudno sobie wyobrazić dzisiejszą cywilizację bez rozwijania tej dyscypliny nauki. Z bardzo podobną sytuacją mamy do czynienia również w fizyce. Wyjaśnienie jej praw na ogół też wymaga jakichś nierealnych założeń, ale takie doskonałe zjawiska są po prostu dobrymi przybliżeniami rzeczywistych zjawisk fizycznych.

W dalszym ciągu naszych rozważań będziemy więc zakładać, że mamy do czynienia:

- z idealnymi symetrycznymi monetami, które po podrzuceniu i opadnięciu nie ustawiają się na krawędzi,
- z idealnie jednorodnymi kostkami do gry,
- z ponumerowanymi kulkami o identycznej wielkości i masie, różniącymi się co najwyżej kolorem itp.

Ponadto przyjmujemy, że wyniki naszych doświadczeń będą zależały wyłącznie od przypadku i nie wpłyną na nie żadne czynniki zewnętrzne czy wewnętrzne. Na przykład podczas losowania karty z talii nie będziemy podglądać albo nie oznaczmy celowo kart. Jeżeli każde takie losowanie będzie można również wielokrotnie powtórzyć, to nazywać je będziemy **doświadczeniem losowym**.

Przykład 1

W księgarni na półce stoi sześć egzemplarzy powieści. Jeżeli sprzedawca losowo sięgnie po jeden, to może wybrać każdy ze stojących tomów. O takiej sytuacji powiemy, że doświadczeniem losowym jest wybieranie jednego egzemplarza. Wynik tego doświadczenia to wybór konkretnej książki. Wszystkich możliwych wyników jest 6.

Przykład 2

Jaś wytrząsa jedną monetę ze zgromadzonego w skarbonce bilonu. Doświadczeniem losowym jest wypadnięcie monety, wynikiem – otrzymanie konkretnej monety. Wszystkich wyników jest tyle, ile monet w skarbonce.

Przykład 3

Z kolekcji liczącej 113 egzemplarzy Bożenka wyciąga na chybił trafił jedną płytę. Doświadczeniem losowym jest losowanie płyty, wynikiem – otrzymanie konkretnego krążka. Liczba wszystkich wyników jest równa 113.

Przykład 4

Jaś i Zosia umówili się, że po obiedzie zmywa naczynia ta osoba, która wylosuje starszą kartę z talii liczącej 52 karty. Jeżeli obydwoje wylosują karty tej samej wartości (np. dwie dziesiątki), zmywa tata, który po namyśle wyraził zgodę na takie rozwiązanie. Doświadczeniem losowym jest więc losowanie dwóch kart, wynikiem – otrzymanie konkretnej pary kart. Wszystkich możliwych wyników jest 2652, czyli tyle, ile można utworzyć par kart z talii. Sposób wyznaczenia liczby takich par zaprezentujemy w dalszych tematach podręcznika.

Przykład 5

Zjawiskiem losowym jest wybór drogi, którą wędruje tornado. Tu jednak mamy do czynienia z nieskończoną liczbą możliwych wyników. Ponadto jedno z nich są bardziej, a inne mniej prawdopodobne.

Matematyczna teoria prawdopodobieństwa, nazywana również probabilistyką, narodziła się we Francji niewiele ponad 350 lat temu. Jej początek dały rozważania kawalera de Méré na temat gier hazardowych, a ściślej – nierównych szans gracza i bankiera. Problem został rozwinięty przez matematyków: Pascala i Fermata. Jedną z pierwszych prac naukowych dotyczących teorii prawdopodobieństwa napisał holenderski uczyony Christiaan Huygens. Została ona opublikowana w 1657 r. Do rozwoju tej dyscypliny naukowej przyczyniły się powstanie i wzrost znaczenia towarzystw ubezpieczeniowych, zajmujących się początkowo ubezpieczaniem statków, co wymagało m.in. poprawnego ustalenia wysokości składki.



Przykład dawnej tablicy do gry w kości

2. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Umiejętności:

- obliczanie prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa

Doświadczenia losowe i zdarzenia elementarne

Będziemy się zajmować bardzo niewielkim fragmentem rachunku prawdopodobieństwa. W rozpatrywanych w podręczniku przykładach ograniczymy się do takich doświadczeń losowych, które spełniają równocześnie dwa warunki:

- mają **skończoną liczbę** wyników,
- każdy wynik ma **identyczną szansę** (identyczne prawdopodobieństwo) zajścia.

Pojedyncze, wykluczające się wyniki doświadczenia losowego zostały nazwane **zdarzeniami elementarnymi**.

Jeżeli w doświadczeniu losowym możemy uzyskać n różnych wyników i zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo (szansa) zajścia każdego z nich wynosi $\frac{1}{n}$.

Na przykład w rzucie monetą możliwe są tylko dwa zdarzenia elementarne – wypadnięcie orła albo wypadnięcie reszki, a szansa uzyskania każdego z nich jest równa $\frac{1}{2}$. Podobnie w rzucie sześcienną kostką do gry – każde z sześciu możliwych zdarzeń elementarnych (czyli wypadnięcie jedyńki, dwójki, trójki, czwórki, piątki albo szóstki) ma szansę zajścia równą $\frac{1}{6}$.

W prostych przykładach bez trudu umiemy ocenić szansę uzyskania jakiegoś wyniku w doświadczeniu losowym.

Przykład 1 ◀ zad. 2.1

W doświadczeniu polegającym na losowaniu jednej karty z talii mamy 52 zdarzenia elementarne. Prawdopodobieństwo zajścia każdego z nich (np. wylosowania waleta pik) wynosi $\frac{1}{52}$.

Przykład 2 ◀ zad. 2.3

Wśród 13 piłek tenisowych jedna jest uszkodzona. Jeżeli losujemy jedną piłkę, mamy szansę równą $\frac{1}{13}$ trafienia na tę złą i $\frac{12}{13}$ wybrania piłki dobrej.

◀2.1. Podaj możliwe wyniki opisanego doświadczenia losowego. Ile jest tych wyników? Jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania każdego z nich?

- W szkolnym sklepiu jest 17 identycznych butelek wody mineralnej. Sabina bierze jedną z nich.
- W pudełku jest 5 kredek czerwonych, 3 zielone, 2 żółte, pomarańczowa i niebieska. Piotrek wyjmując na chybił trafił jedną kredkę.
- W urnie jest 13 losów pustych i 2 pełne. Wyciągamy jeden los.
- Z klasy liczącej 18 dziewcząt i 18 chłopców losujemy jednego ucznia.
- W przedszkolu Mateusz sięga po omacku do skrzynki, w której jest 25 piłek i wyciąga jedną z nich.
- Sprzedawca wyciąga losowo z szuflady jedną z piętnastu 60-watowych żarówek.

Odpo.: a) $\frac{1}{17}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{1}{15}$ d) $\frac{1}{36}$ e) $\frac{1}{25}$ f) $\frac{1}{15}$

◀2.3. W loterii fantowej jest 100 losów, w tym 13 wygrywających. Wyciągamy jeden los. Oblicz prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu

- pustego.
- wygrywającego.

Odpo.: a) 0,87 b) 0,13

Multiteka

- Czy małpy mogą napisać dzieło Szekspira?

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.2

Generator
testów i sprawdzianów

◀ 2.6. Z talii 52 kart Robert wyjmie jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wyciągnie

- siódemkę.
- figurę, tzn. asa, króla, damę lub waleta.
- kartę pik.
- kartę koloru czerwonego, tzn. karo lub kier.
- kartę młodszą od dziesiątki.
- kartę różną od damy i króla.

Odp.: a) $\frac{1}{13}$ b) $\frac{4}{13}$ c) $\frac{1}{4}$
 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{8}{13}$ f) $\frac{11}{13}$

◀ 2.7. Rzucamy sześcienną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo każdego ze zdarzeń:

- A – wypadnie szóstka,
 B – wypadnie nieparzysta liczba oczek,
 C – wypadnie liczba oczek będąca liczbą pierwszą,
 D – wypadną co najmniej 3 oczka,
 E – wypadną co najwyżej 2 oczka,
 F – nie wypadnie dwójka,
 G – wypadnie czwórka lub szóstka,
 H – nie wypadnie liczba pierwsza.

Odp.: $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{2}$,
 $P(C) = \frac{1}{2}$, $P(D) = \frac{2}{3}$, $P(E) = \frac{1}{3}$,
 $P(F) = \frac{5}{6}$, $P(G) = \frac{1}{3}$, $P(H) = \frac{1}{2}$

Przykład 3 ◀ zad. 2.6

Losujemy jedną kartę z talii. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągniemy asa?

Rozwiązanie

W talii 52 kart są 4 asy. Zatem szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{4}{52}$.

W tym samym doświadczeniu prawdopodobieństwo wylosowania trefla jest równe $\frac{13}{52}$, a karty starszej od dziewiątki $\frac{20}{52}$.

Aby wyraźniej pokazać, skąd wziął się wynik, czasem nie będziemy skracać otrzymanych ułamków.

Przykład 4 ◀ zad. 2.7

Izydor Muszka uzależnia od całkowitego przypadku podjęcie decyzji, jak spędzić popołudnie. Jeżeli w rzucie kostką wypadnie jedno oczko – idzie na mecz, jeżeli parzysta liczba oczek – spotyka się z koleżanką Jolką, w pozostałych przypadkach – zabiera się do nauki. Ocenimy prawdopodobieństwo, z jakim Izydor zabierze się do nauki.

Rozwiązanie

W rzucie kostką jest sześć możliwych wyników, a tylko jeden sprzyja podjęciu decyzji o pójściu na mecz, więc takie zdarzenie zajdzie z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$.

Inaczej jest w dwóch następnych sytuacjach, którym sprzyja większa liczba zdarzeń elementarnych. Parzysta liczba oczek to wypadnięcie dwójki, czwórki lub szóstki, więc szansę na spotkanie z Jolką Izydor ma aż w trzech na sześć możliwych przypadków. Prawdopodobieństwo jest w tym wypadku równe $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Pozostały jeszcze dwa zdarzenia elementarne – wypadnięcie trzech albo pięciu oczek. Zatem Izydor weźmie się do nauki z prawdopodobieństwem $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Odp.: Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{3}$.

Do powyższego przykładu wprowadzimy symboliczny opis. Będziemy z niego korzystać również w dalszych zadaniach. Oto on:

- Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych dla danego doświadczenia przyjęło się oznaczać dużą grecką literą Ω (omega).
- Zapis $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ jest jedną z form krótkiego zapisu faktu, że zdarzeniami elementarnymi w doświadczeniu z przykładu 4 są: 1, czyli wypadnięcie jednego oczka, 2 – wypadnięcie dwóch oczek itd.
- Zdarzenie polegające na wypadnięciu jednego oczka zapisujemy krótko: $A = \{1\}$.

- Zapis $B = \{2, 4, 6\}$ oznacza zdarzenie polegające na wypadnięciu parzystej liczby oczek. Powiemy, że zajściu tego zdarzenia **sprzyjają** trzy zdarzenia elementarne.
- Ostatniemu z opisywanych zdarzeń sprzyjają dwa wyniki: $C = \{3, 5\}$.
- Zdarzenie A jest elementarne, natomiast zdarzenia B i C nie są elementarne.
- Zdanie „prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia B jest równe $\frac{1}{2}$ ” zapisujemy w postaci: $P(B) = \frac{1}{2}$.
- Liczbę zdarzeń elementarnych w zbiorze Ω oznaczamy symbolicznie: $\overline{\Omega}$.
- Liczbę zdarzeń sprzyjających zajściu zdarzenia A oznaczamy podobnie: $\overline{A}$.

Definicja prawdopodobieństwa

Definicja

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Zakładamy, że w danym doświadczeniu losowym Ω jest skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych.

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A w tym doświadczeniu jest równe stosunkowi liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A do liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}}$$

Każdy wynik elementarny sprzyja zajściu zdarzenia $A = \Omega$ i $P(\Omega) = 1$, dlatego zdarzenie Ω nazywamy **zdarzeniem pewnym**.

Na przykład w rzucie sześcienną kostką wyrzucenie liczby oczek mniejszej od 7 jest zdarzeniem pewnym.

Wygodnie jest wprowadzić pojęcie **zdarzenia niemożliwego**, czyli takiego, któremu nie sprzyja żaden wynik elementarny (inaczej mówiąc – zdarzenie takie nigdy w danym doświadczeniu losowym nie zajdzie). Na przykład w rzucie sześcienną kostką wyrzucenie liczby oczek równej 8 jest zdarzeniem niemożliwym. Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia niemożliwego jest więc równe 0. Zdarzenie niemożliwe oznaczamy symbolem zbioru pustego $\emptyset$ i $P(\emptyset) = 0$.



◀2.12. Biuro turystyczne ma w ofercie wycieczki do następujących miast: Ankary, Aten, Limy, Lizbony, Londynu, Paryża, Rio de Janeiro, Sydney i Toronto. Jedną z tych wycieczek biuro przeznaczyło w ramach promocji na nagrodę dla zwycięzcy konkursu „Matematyka bez granic”. Zwycięzca będzie losować cel podróży. Wyznacz prawdopodobieństwo, z jakim uda się do

- a) Ameryki Północnej.
- b) Ameryki Południowej.
- c) kraju Unii Europejskiej.
- d) stolicy jakiegoś państwa.

Odp.: a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{2}{9}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$

We wszystkich rozpatrywanych w podręczniku zadaniach zdarzenia elementarne opisywanych doświadczeń losowych są jednakowo prawdopodobne, dlatego nie będziemy powtarzać tej uwagi za każdym razem przed zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa.

Zauważmy, że liczby $\overline{\Omega}$, $\overline{A}$ są liczbami naturalnymi. Ponadto, zawsze prawdziwy jest układ nierówności $0 \leq \overline{A} \leq \overline{\Omega}$. Jeżeli obie strony każdej z nierówności podzielimy przez $\overline{\Omega}$, to otrzymamy $0 \leq \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} \leq 1$.

Wniosek

Jeżeli A jest zdarzeniem w jakimś doświadczeniu losowym, to $0 \leq P(A) \leq 1$.

Przykład 5 ◀ zad. 2.12

W skrzynce są cztery kule białe, dwie zielone, pięć czerwonych i trzy czarne. Ile wynosi prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana kula będzie zielona?

Rozwiązanie

Doświadczeniem jest losowanie jednej kuli ze skrzynki zawierającej 14 kul. Zdarzeniem elementarnym jest wybór konkretnej kuli. Zatem zbiór zdarzeń elementarnych ma 14 elementów:

$$\overline{\Omega} = 14$$

Interesujące nas zdarzenie A polega na wylosowaniu zielonej kuli. Ponieważ są dwie takie kule, liczba zdarzeń sprzyjających jego zajściu jest równa 2:

$$\overline{A} = 2$$

$$\text{Zatem } P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}.$$

Odp.: Zieloną kulę wylosujemy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{7}$.

Opis rozwiązania tak prostego jak powyższe zadanie wydaje się trochę sztuczny. Odpowiedź jesteśmy przecież w stanie podać od razu – z pamięci. Chcemy jednak pokazać, jak można takie rozwiązanie zapisać. Przyda się to do dalszych, już nie tak banalnych zadań.

Przykład 6

W pudełku są cztery klocki: dwa czerwone i dwa zielone. Jaś wyjmuję dwa klocki na chybił trafił. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wyjmie klocki różnego koloru?

Rozwiązanie

Dwa klocki czerwone oznaczmy c_1, c_2 , a zielone – z_1, z_2 .

Zdarzeniem elementarnym jest wyciągnięcie przez Jasia dwóch klocków.

Na przykład zdarzenie polegające na wyciągnięciu klocka c_1 z klockiem c_2 zapiszemy w postaci $\{c_1, c_2\}$. Zauważmy, że kolejność zapisu c_1 i c_2 jest w tej sytuacji nieistotna, ponieważ Jaś wyjmując obydwa klocki równocześnie. Zatem zapisy $\{c_1, c_2\}$ i $\{c_2, c_1\}$ oznaczają to samo zdarzenie elementarne w tym doświadczeniu.

Wszystkie możliwe wyniki losowania Jasia to:

$$\Omega = \{ \{c_1, c_2\}, \{c_1, z_1\}, \{c_1, z_2\}, \\ \{c_2, z_1\}, \{c_2, z_2\}, \{z_1, z_2\} \}$$

$$\overline{\Omega} = 6$$

Jeżeli A oznacza zdarzenie polegające na tym, że Jaś wyjął dwa klocki różnego koloru, to:

$$A = \{ \{c_1, z_1\}, \{c_1, z_2\}, \{c_2, z_1\}, \{c_2, z_2\} \}$$

$$\overline{A} = 4$$

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Jeżeli w doświadczeniu losujemy więcej niż jeden element i gdy:

- ważna jest kolejność losowanych elementów, to do opisu zdarzeń elementarnych stosujemy nawiasy **okrągłe** (lub nie stosujemy żadnych nawiasów),
- nie uwzględniamy kolejności losowanych elementów, to stosujemy nawiasy **klamrowe**.

Odp.: Prawdopodobieństwo tego, że klocki będą różnego koloru, wynosi $\frac{2}{3}$.

Zadania

2.1. Podaj możliwe wyniki opisanego doświadczenia losowego. Ile jest tych wyników? Jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania każdego z nich?

- W szkolnym sklepiku jest 17 identycznych butelek wody mineralnej. Sabina bierze jedną z nich.
- W pudełku jest 5 kredek czerwonych, 3 zielone, 2 żółte, pomarańczowa i niebieska. Piotrek wyjmując na chybił trafił jedną kredkę.
- W urnie jest 13 losów pustych i 2 pełne. Wyciągamy jeden los.
- Z klasy liczącej 18 dziewcząt i 18 chłopców losujemy jednego ucznia.
- W przedszkolu Mateusz sięga po omacku do skrzynki, w której jest 25 piłek i wyciąga jedną z nich.
- Sprzedawca wyciąga losowo z szuflady jedną z piętnastu 60-watowych żarówek.

Odpowiedzi i rozwiązania

- 2.1.** a) $\frac{1}{17}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{1}{15}$
 d) $\frac{1}{36}$ e) $\frac{1}{25}$ f) $\frac{1}{15}$

2.2. a) $A = \{2, 4, 5, 6\}$

b) $\frac{4}{6}$

2.3. a) 0,87 **b)** 0,13

2.4. a) $\frac{57}{67}$ **b)** $\frac{10}{67}$

2.5. $\frac{7}{20}$

2.6. a) $\frac{1}{13}$ **b)** $\frac{4}{13}$ **c)** $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{2}$ **e)** $\frac{8}{13}$ **f)** $\frac{11}{13}$

2.7. $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{2}$,

$P(C) = \frac{1}{2}$, $P(D) = \frac{2}{3}$, $P(E) = \frac{1}{3}$,

$P(F) = \frac{5}{6}$, $P(G) = \frac{1}{3}$, $P(H) = \frac{1}{2}$

2.8. a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{4}{9}$ **c)** $\frac{13}{90}$ **d)** $\frac{4}{5}$

e) $\frac{23}{30}$ **f)** $\frac{7}{30}$ **g)** $\frac{1}{15}$ **h)** $\frac{1}{45}$

2.2. Doświadczenie losowe polega na rzucie sześcienną kostką.

a) Zapisz zbiór zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A – wypadła parzysta liczba oczek lub pięć oczek na kostce.

b) Oblicz prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A .

2.3. W loterii fantowej jest 100 losów, w tym 13 wygrywających. Wyciągamy jeden los. Oblicz prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu

a) pustego.

b) wygrywającego.

2.4. W pojemniku jest 57 bułek świeżych i 10 czerstwych. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wyciągnięta bułka jest

a) świeża.

b) czerstwa.

2.5. Monika kupiła jeden los na loterii książkowej. Wśród wszystkich 100 losów jest 65 pustych. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że Monika otrzyma książkę.

2.6. Z talii 52 kart Robert wyjmie jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wyciągnie

a) siódmkę.

b) figurę, tzn. asa, króla, damę lub waleta.

c) kartę pik.

d) kartę koloru czerwonego, tzn. karo lub kier.

e) kartę młodszą od dziesiątki.

f) kartę różną od damy i króla.

2.7. Rzucamy sześcienną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo każdego ze zdarzeń:

A – wypadnie szóstka,

B – wypadnie nieparzysta liczba oczek,

C – wypadnie liczba oczek będąca liczbą pierwszą,

D – wypadną co najmniej 3 oczka,

E – wypadną co najwyżej 2 oczka,

F – nie wypadnie dwójka,

G – wypadnie czwórka lub szóstka,

H – nie wypadnie liczba pierwsza.

2.8. Ze zbioru dwucyfrowych liczb naturalnych wylosowano jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana liczba jest

a) parzysta.

e) złożona.

b) mniejsza od 50.

f) pierwsza.

c) podzielna przez 7.

g) kwadratem liczby naturalnej.

d) niepodzielna przez 5.

h) sześcianiem liczby naturalnej.

2.9. W urnie jest 100 losów ponumerowanych od 1 do 100. Monika wylosowała jeden los. Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że wyciągnęła los z liczbą

- a) mniejszą od 10. d) podzielną przez 3.
b) parzystą. e) podzielną przez 10.
c) większą od 55. f) pierwszą mniejszą od 50.

2.10. W trzypiętrowym domu wczasowym na każdym piętrze jest 15 wolnych dwuosobowych pokoi. Jakie jest prawdopodobieństwo, że rodzice Bartka, którzy zarezerwowali sobie miejsca w tym domu, otrzymają pokój na drugim piętrze? Zakładamy, że wybór pokoju jest losowy, a na parterze wszystkie pokoje są zajęte.

2.11. W hotelu jest 17 wolnych pokoi jednoosobowych o kolejnych numerach od 1 do 17. Oblicz, z jakim prawdopodobieństwem pierwszemu gościowi przydzielony zostanie pokój o numerze

- a) parzystym.
b) będącym liczbą pierwszą.
c) różnym od 7 i od 13.
d) nie większym od 11.
e) równym co najmniej 8.

2.12. Biuro turystyczne ma w ofercie wycieczki do następujących miast: Ankary, Aten, Limy, Lizbony, Londynu, Paryża, Rio de Janeiro, Sydney i Toronto. Jedną z tych wycieczek biuro przeznaczyło w ramach promocji na nagrodę dla zwycięzcy konkursu „Matematyka bez granic”. Zwycięzca będzie losować cel podróży. Wyznacz prawdopodobieństwo, z jakim uda się do

- a) Ameryki Północnej. c) kraju Unii Europejskiej.
b) Ameryki Południowej. d) stolicy jakiegoś państwa.

2.13. Pan Alojzy Mrówka ma w portfelu jeden banknot stużłotowy, dwa pięćdziesięciozłotowe, cztery dwudziestozłotowe i siedem dziesięciozłotowych. Wyciąga losowo jeden banknot. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to kwota mniejsza od 50 zł?

2.14. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany miesiąc ma nazwę (w języku polskim) złożoną przynajmniej z ośmiu liter?

2.15. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana dwucyfrowa liczba naturalna jest podzielna przez 14?

2.16. W pudełku są klocki czerwone i 6 brązowych. Wiadomo, że prawdopodobieństwo wylosowania klocka czerwonego jest równe $\frac{6}{7}$. Ile czerwonych klocków jest w tym pudełku?

2.9. a) 0,09 b) 0,5 c) 0,45
d) 0,33 e) 0,1 f) 0,15

2.10. $\frac{1}{3}$

2.11. a) $\frac{8}{17}$ b) $\frac{7}{17}$ c) $\frac{15}{17}$
d) $\frac{11}{17}$ e) $\frac{10}{17}$

2.12. a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{2}{9}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$

2.13. $\frac{11}{14}$

2.14. $\frac{7}{12}$

2.15. $\frac{7}{90}$

2.16. 36

2.17. $\frac{1}{51}$

2.18. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{3}$

Prosto do matury

1. B

2. B

3. D

4. P, P, F

5. $\frac{17}{20}$

6. $\frac{1}{2}$

7. 30

2.17. Ania i Małgosia grają w wojnę. Każda z nich otrzymała 26 kart z talii. Małgosia odkryła swoją pierwszą kartę. Był to as kier. Teraz swoją kartę odkrywa Ania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to as pik?

2.18. W pojemniku są zielone i niebieskie kulki. Kulek zielonych jest dwa razy więcej niż niebieskich. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wyciągnięta kulka jest
a) zielona. b) niebieska.

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytcie.

1. Rzucamy sześcienną kostką. Wskaż prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby pierwszej.

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 3

2. W torebce są cukierki owocowe i czekoladowe. Cukierków owocowych jest dwa razy więcej niż czekoladowych. Wyjmujemy losowo cukierek z torebki. Wskaż prawdopodobieństwo tego, że będzie to cukierek czekoladowy.

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

3. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy jedną liczbę. Wskaż prawdopodobieństwo wylosowania liczby x , która spełnia nierówność $1 - x \leq 0$.

- A. 0 B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{5}{6}$ D. 1

4. Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych nieparzystych mniejszych od 30 losujemy jedną. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej

- A. przez 3 jest równe $\frac{1}{3}$. B. przez 5 jest równe $\frac{1}{5}$. C. przez 7 jest równe $\frac{1}{7}$.

5. W pudełku znajduje się 40 zapalek, w tym 6 wypalonych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągnięta losowo zapalka nie będzie wypalona?

6. Ze zbioru wszystkich krawędzi ostrosłupa wybieramy jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to krawędź podstawy?

7. W klasie 3b jest 12 dziewcząt. Nauczyciel wywołuje do odpowiedzi jedną wylosowaną osobę. Ilu uczniów jest w tej klasie, jeżeli prawdopodobieństwo wylosowania chłopca wynosi $\frac{3}{5}$?

3. Reguła mnożenia

Umiejętności:

- zliczanie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych, stosowanie reguły mnożenia oraz reguły dodawania

Jeżeli chcemy odpowiedzieć na pytanie, jakie jest prawdopodobieństwo zaistnienia konkretnego zdarzenia w danym doświadczeniu losowym, powinniśmy obliczyć:

- liczbę wszystkich możliwych wyników,
- liczbę wyników sprzyjających.

Zacniemy od wyznaczania liczby wszystkich możliwych wyników uzyskanych w konkretnym doświadczeniu losowym.

Przykład 1

Bagaż do samolotu można spakować w jedną małą walizkę podręczną i duże walizki, które trzeba nadać oddzielnie. Franek chce wziąć jedną dużą i jedną małą walizkę. W domu ma trzy duże i dwie małe walizki. Ile różnych zestawów może uzyskać?

Rozwiązanie

W rozwiązaniu tego zadania pomożemy sobie rysunkiem.

Oznaczmy walizki:

duże – d_1, d_2, d_3 ,

małe – m_1, m_2 .

Jeśli Franek sięgnie najpierw po dużą walizkę, ma trzy możliwości wyboru. Na rysunku zaznaczono je w postaci trzech odcinków (tzw. gałęzi) wychodzących z punktu startu. Do każdej z wybranych dużych walizek może dołożyć jedną z dwóch małych – w ten sposób tworzy się sześć zestawów „duża i mała”.

Możemy je wypisać, przesuwając się od punktu START wzdłuż gałęzi:

$d_1m_1, d_1m_2, d_2m_1, d_2m_2, d_3m_1, d_3m_2$

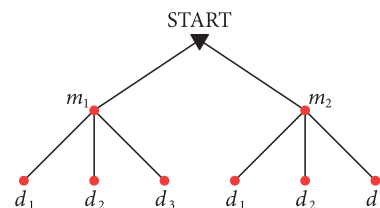
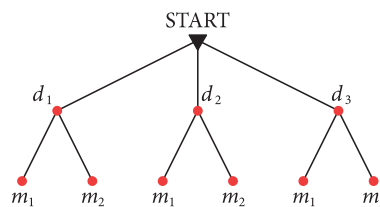
Zatem Franek może uzyskać $3 \cdot 2 = 6$ różnych par walizek.

Zauważmy, że nie ma znaczenia kolejność wybieranych elementów. Jeżeli Franek zacznie wybierać najpierw małą walizkę i do niej dobierać dużą, rysunek będzie wyglądał inaczej, inaczej też zapiszemy uzyskane wyniki:

$m_1d_1, m_1d_2, m_1d_3, m_2d_1, m_2d_2, m_2d_3$

ale liczba możliwości się nie zmienia: $2 \cdot 3 = 6$.

Odp.: 6



Rysunek ilustrujący wyniki takiego doświadczenia losowego nazywamy drzewkiem, a liczba wszystkich możliwych wyników równa jest liczbie gałęzi w ostatnim wierszu.

Twierdzenie

Reguła mnożenia

Jeśli zbiór A ma m elementów, a zbiór B ma n elementów, to liczba par (x, y) takich, że $x \in A$ i $y \in B$, jest równa $m \cdot n$.

Regułę mnożenia można uogólnić na n ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) zbiorów, z których każdy ma skończoną liczbę elementów. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 2 ◀ zad. 3.1, 3.2

Ania odłożyła na półkę trzy powieści, dwie biografie i cztery kryminały. Są to książki, spośród których zamierza wybrać zestaw do przeczytania podczas urlopu. Ile różnych zestawów może uzyskać, jeżeli z każdej kategorii wybierze po jednym egzemplarzu?

Rozwiązanie

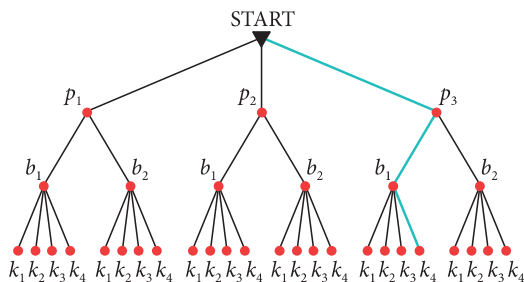
Oznaczmy książki stojące na półce:

powieści – p_1, p_2, p_3 ,

biografie – b_1, b_2 ,

kryminały – k_1, k_2, k_3, k_4 .

Kiedy Ania sięga na półkę po jedną powieść, ma trzy możliwości do wyboru. Na rysunku zaznaczono je w postaci trzech gałęzi wychodzących z punktu startu.



Do każdej z powieści może dołożyć jedną z dwóch biografii – w ten sposób tworzy się sześć zestawów „powieść i biografia”. Do każdego z nich można dołożyć jeden z czterech kryminałów. Zatem Ania zabierze na urlop jeden z $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ możliwych zestawów. Ostatni wiersz drzewka ma 24 gałęzi, a przykładowo zaznaczona ścieżka wskazuje zestaw $p_3 b_1 k_4$.

Odp.: 24

◀ 3.1. W karcie dań jest 5 zup, 12 drugich dań i 3 desery. Na ile sposobów można wybrać zestaw obiadowy składający się z zupy, drugiego dania i deseru?

Odp.: 180

◀ 3.2. Nauczyciel matematyki układa sprawdzian powtórzeniowy zawierający po jednym zadaniu z działów: funkcja liniowa, funkcja kwadratowa, ciągi, funkcja wykładnicza. Ile zestawów może ułożyć, jeżeli dysponuje pięcioma zadaniami o funkcji liniowej, dziesięcioma – o funkcji kwadratowej, sześcioma – o ciągach i trzema – o funkcji wykładniczej?

Odp.: 900

Przykład 3 ◀ zad. 3.3

W trzech urnach umieszczone są ponumerowane kule. W pierwszej urnie jest siedem kul, w drugiej – cztery, a w trzeciej – pięć. Z każdej urny losujemy jedną kulę. Liczba wszystkich możliwych zestawów trzech kul, czyli wyników tego doświadczenia, wynosi $7 \cdot 4 \cdot 5 = 140$.

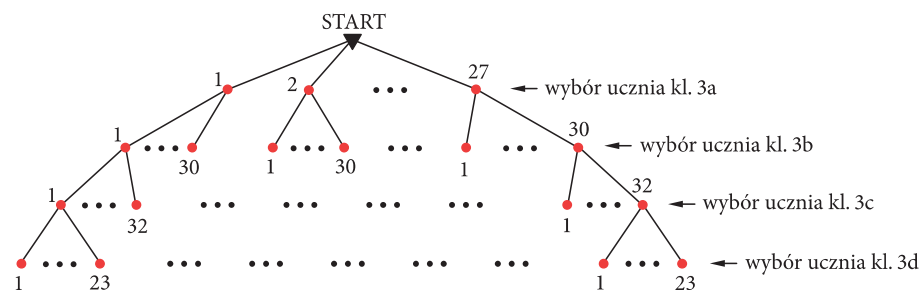
Przykład 4

Z czterech klas trzecich wybrano losowo po jednym uczniu do reprezentowania szkoły. W klasie 3a jest 27 uczniów, w 3b – 30 uczniów, w 3c – 32 uczniów, a w 3d – 23 uczniów. Obliczymy, ile jest wszystkich możliwych reprezentacji i zilustrujemy wyniki losowania za pomocą drzewka.

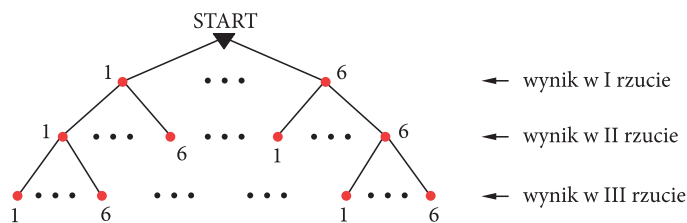
Rozwiązanie

Wszystkich możliwych reprezentacji jest $27 \cdot 30 \cdot 32 \cdot 23 = 596\,160$.

Drzewko ilustrujące wszystkie wyniki tego losowania jest bardzo rozbudowane. Dlatego uprościliśmy rysunek – poszczególne liczby zamarkowaliśmy kropkami.

**Przykład 5** ◀ zad. 3.5

Rzucamy trzy razy kostką. Wynikiem tego doświadczenia jest trójka liczb, np. 1, 6, 6.



Liczba wszystkich możliwych wyników wynosi $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

◀ 3.5. Ile możemy otrzymać wyników doświadczenia polegającego na rzucie

- a) pięć razy kostką do gry?
- b) siedem razy monetą?
- c) dwiema kostkami do gry?
- d) pięcioma monetami?
- e) kostką i monetą?
- f) dwa razy kostką i trzy razy monetą?

Odp.: a) 6^5 b) 128 c) 36
d) 32 e) 12 f) 288

◀ 3.3. Rysiek pisze kartki świąteczne według wzoru:

Wesołych Radosnych Pogodnych Rodzinnych Spokojnych	Świąt,	udanego szalonego niezapomnianego wystrzałowego	Sylwestra i dużo	zdrowia pomyślności szczęścia sukcesów	w Nowym Roku życzy Rysiek.
--	--------	--	------------------	---	----------------------------

Ile różnych kartek może napisać?

Odp.: 80

◀3.7. Na ile sposobów można rozmieścić n kredek różnych kolorów w k pudełkach dla danych n i k ? Zakładamy, że kolejność kredek w pudełku nie jest istotna oraz że w każdym pudełku zmieszczą się wszystkie kredki.

- a) $n = 2, k = 3$
 b) $n = 1, k = 6$
 c) $n = 12, k = 1$
 d) $n = 10, k = 3$

Odp.: a) 3^2 b) 6 c) 1 d) 3^{10}

Przykład 6 ◀ zad. 3.7

Na ile sposobów można rozmieścić trzy różne książki w dwóch pudełkach, jeżeli w każdym pudełku jest miejsce na trzy książki?

Rozwiązanie

Dla każdej z książek mamy dwa pudełka do wyboru. Mamy zatem $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ możliwości umieszczenia trzech książek w dwóch pudełkach.

Odp.: 8

Przykład 7

W pierwszej skrzynce znajdują się 4 modele starych samochodów osobowych przeznaczone na wystawę. W drugiej skrzynce jest 5 modeli współczesnych samochodów wyścigowych. Dekorator ma ponadto do dyspozycji 3 modele motocykli. Na wystawie salonu można ustawić po jednym modelu samochodu i motocykla. Wyznamy liczbę możliwych zestawów.

Rozwiązanie

Jeżeli dekorator zdecyduje się na ustawienie starego samochodu, to ma $4 \cdot 3 = 12$ możliwych zestawów, a jeżeli na auto wyścigowe, to $5 \cdot 3 = 15$ różnych możliwości. Dekorator postanowił wybrać samochód losowo.

W tym celu włożył wszystkie modele samochodów do jednej skrzynki i poprosił pracownika salonu o wylosowanie jednego samochodu. W ten sposób mógł otrzymać jeden z $(4 + 5) \cdot 3 = 27$ możliwych zestawów.

W ostatnim przykładzie, poza regułą mnożenia, skorzystaliśmy z tzw. reguły dodawania.

Twierdzenie

Reguła dodawania

Jeżeli zbiory A i B są rozłączne, zbiór A ma m elementów i zbiór B ma n elementów, to liczba wszystkich elementów x takich, że $x \in A$ lub $x \in B$, jest równa $m + n$.

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} + \overline{B}, \text{ gdy } A \cap B = \emptyset$$

Warunek, że zbiory A i B są rozłączne lub inaczej – nie mają wspólnych elementów – zapisujemy często w postaci równości $A \cap B = \emptyset$.

Przykład 8 ◀ zad. 3.8

Pan Teodor Motylek ma zamiar wyjechać na tygodniowe wczasy. Spakował do walizki 7 koszul, 10 krawatów i 8 par skarpetek.

- Ile różnych zestawów może stworzyć z wymienionych części garderoby?
- Po namyśle pan Teodor dołożył do walizki 2 koszule i 3 pary skarpetek. O ile zwiększyła się liczba zestawów?

Rozwiązanie

- $7 \cdot 10 \cdot 8 = 560$
- $9 \cdot 10 \cdot 11 - 7 \cdot 10 \cdot 8 = 430$

Odp.: a) 560 b) o 430

Przykład 9 ◀ zad. 3.9

Klasa Izydora Muszki wybiera się na wycieczkę. Cała grupa liczy 36 uczniów i 3 opiekunów. W autokarze jest 25 foteli dwuosobowych. Wychowawca postanowił przydzielić miejsca losowo. Zastanówmy się, jak może przeprowadzić losowanie i ile jest różnych wyników w takim doświadczeniu.

**Rozwiązanie**

W urnie powinno być 50 losów z numerami miejsc. Uczestnicy wycieczki w kolejności alfabetycznej losują po jednym losie, a następnie udają się na swoje miejsce do autokaru. Oczywiście wyjętego numeru nie wrzucają z powrotem do urny. Zatem pierwsza losująca osoba ma 50 losów w urnie, druga 49, trzecia 48 itd.

Obliczmy, ile losów zostanie dla ostatniej osoby. Przed nią było 38 losujących, więc w urnie zostanie $50 - 38 = 12$ losów.

Różnych wyników losowania jest więc tyle, ile wynosi iloczyn trzydziestu dziewięciu czynników:

$$50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \dots \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$$

Jest to ogromna liczba, równa w przybliżeniu $7 \cdot 10^{56}$.

Odp.: $50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \dots \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$

◀3.8. W trzech urnach rozmieszczone są kolorowe ponumerowane kule. W pierwszej urnie jest 12 kul żółtych, w drugiej 6 czerwonych, a w trzeciej 5 fioletowych.

a) Losujemy po jednej kuli z każdej urny. Ile zestawów kul otrzymamy?

b) Do drugiej urny dołożono 4 czerwone kule. Losujemy po jednej kuli z każdej urny. O ile więcej otrzymamy zestawów kul niż w wyniku losowania przed dołożeniem kul?

Odp.: a) 360 b) o 240

◀3.9. Do pustej sali kinowej weszły 4 osoby. Na ile sposobów mogą zająć miejsca? Wszystkich foteli w tym kinie jest 180.

Odp.: $180 \cdot 179 \cdot 178 \cdot 177$

Przykład 10

Zastanówmy się, jak można przeprowadzić losowanie z poprzedniego przykładu, aby spełnić ukryte marzenie Izydora Muszki i posadzić obok niego Jolkę. Na ile różnych sposobów możemy wówczas rozlokować uczestników wycieczki?

Rozwiązanie

Najprościej liczbę wszystkich możliwości opiszemy, jeśli tym razem zaczniemy losowanie od Izydora. Ma on do wyboru jedno z 50 miejsc (w urnie jest 50 losów), ale po odczytaniu wyniku wiadomo już, które miejsce powinniśmy zarezerwować dla koleżanki. Wybieramy los z tym numerem, wręczamy go Jolce (która nie bierze udziału w losowaniu) i kontynuujemy losowanie. Następny uczestnik ma więc do wyboru 48 możliwości, kolejny – 47 itd.

Liczba wszystkich możliwości jest iloczynem 38 czynników $50 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \dots \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$.

Odp.: $50 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \dots \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$

Aby lepiej zilustrować przebieg losowania, warto zapisać wynik jako iloczyn 39 czynników, z tym że na drugim miejscu wpisać 1, jako liczbę losów dla Jolki:
 $50 \cdot 1 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \dots \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$.

Za pomocą urny i ponumerowanych kul można symulować wiele doświadczeń losowych. Na przykład:

- rzut sześcienną kostką do gry można zastąpić losowaniem jednej z sześciu kul ponumerowanych 1, 2, 3, 4, 5, 6,
- rzut monetą można zastąpić losowaniem jednej z dwóch kul,
- rzut dwiema kostkami można zastąpić dwukrotnym losowaniem jednej z sześciu kul itp.



Można wielokrotnie powtarzać czynność wyjmowania kuli z urny. Rozróżnimy tu dwa sposoby losowania – obydwa uwzględniające kolejność losowanych numerów.

1. Przed każdym podejściem stan urny jest taki sam. Inaczej mówiąc, po wylosowaniu (i zanotowaniu wyniku) wyciągnięta kula wrzucana jest z powrotem do urny. Taki sposób losowania nazywamy **losowaniem ze zwracaniem**.
2. Raz wyjęta kula nie wraca do urny. Taki sposób losowania nazywamy **losowaniem bez zwracania**.

Przykład 11 ◀ zad. 3.13

Z cyfr 4, 7, 8 układamy czterocyfrowe kody. Ile takich kodów możemy uzyskać?

Rozwiązanie

Przykładem takiego kodu jest ciąg 7448. Cyfry muszą się oczywiście powtarzać. Jeżeli chcemy to doświadczenie przeprowadzić za pomocą losowania kul z urny, to:

- w urnie muszą być trzy kule ponumerowane odpowiednio cyframi 4, 7 i 8,
- losujemy ze zwracaniem z tej urny cztery razy po jednej kuli.

Przy każdym losowaniu mamy zatem trzy możliwości do wyboru, więc wszystkich wyników (kodów) jest $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$.

Odp.: 81

Przykład 12

Pięcioro pacjentów ustawia się losowo w kolejkę (inaczej mówiąc – losuje numerki do lekarza). Na ile sposobów mogą to zrobić?

Rozwiązanie

Teraz w urnie mamy pięć kul ponumerowanych od 1 do 5, a losowanie odbywa się bez zwracania. Pierwsza osoba ma pięć możliwości wyboru, druga – cztery itd. Wszystkich wyników losowania jest zatem $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Odp.: 120

**Przykład 13** ◀ zad. 3.21

Obliczymy, ile można utworzyć siedmiocyfrowych numerów telefonicznych, jeżeli

- a) układ cyfr może być dowolny.
- b) numer nie może zaczynać się od zera.

Rozwiązanie

- a) Na każdym miejscu takiego numeru możemy wpisać jedną z dziesięciu cyfr.

Takich dowolnie tworzonych numerów siedmiocyfrowych jest zatem

$$10^7 = 10\,000\,000, \text{ czyli } 10 \text{ milionów.}$$

- b) Jeżeli numer telefonu nie może zaczynać się od zera, to na pierwszym miejscu możemy wpisać jedną z dziewięciu cyfr, a na każdym z pozostałych sześciu – jedną z dziesięciu. Liczba wszystkich możliwych wyników takiego losowania jest więc równa $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^6$, czyli 9 milionów.

Odp.: a) 10^7 b) $9 \cdot 10^6$

◀ **3.13.** Dwanaście ponumerowanych kul rozmieszczono w pięciu pojemnikach oznaczonych literami A, B, C, D, E. Ile jest różnych rozmieszczeń tych kul?

Odp.: 5^{12}

◀ **3.21.** Ela chciała zatelefonować do Ali, ale pamiętała tylko pierwsze cztery cyfry siedmiocyfrowego numeru. Jaką największą liczbę numerów musiałaby wypróbować, aby połączyć się z koleżanką?

Odp.: 1000

Odpowiedzi i rozwiązania

3.1. 180

3.2. 900

3.3. 80

3.4. 6^{32} 3.5. a) 6^5 b) 128 c) 36
d) 32 e) 12 f) 2883.6. 2^{30} 3.7. a) 3^2 b) 6 c) 1 d) 3^{10}

Zadania

3.1. W karcie dań jest 5 zup, 12 drugich dań i 3 desery. Na ile sposobów można wybrać zestaw obiadowy składający się z zupy, drugiego dania i deseru?

3.2. Nauczyciel matematyki układa sprawdzian powtórzeniowy zawierający po jednym zadaniu z działów: funkcja liniowa, funkcja kwadratowa, ciągi, funkcja wykładnicza. Ile zestawów może ułożyć, jeżeli dysponuje pięcioma zadaniami o funkcji liniowej, dziesięcioma – o funkcji kwadratowej, sześcioma – o ciągach i trzema – o funkcji wykładniczej?

3.3. Rysiek pisze kartki świąteczne według wzoru:

Wesołych Radosnych Pogodnych Rodzinnych Spokojnych	Świąt, udanego szalonego niezapomnianego wyrzałowego	Sylwestra i dużo	zdrowia pomyślności szczęścia sukcesów	w Nowym Roku życzy Rysiek.
--	--	------------------	---	----------------------------

Ile różnych kartek może napisać?

3.4. W klasie jest 32 uczniów. Nauczyciel matematyki nie stawia za pracę klasową ocen z plusami lub minusami. Ile jest możliwych wyników jednej klasówki, którą pisali wszyscy uczniowie?

3.5. Ile możemy otrzymać wyników doświadczenia polegającego na rzucie

- a) pięć razy kostką do gry?
- b) siedem razy monetą?
- c) dwiema kostkami do gry?
- d) pięcioma monetami?
- e) kostką i monetą?
- f) dwa razy kostką i trzy razy monetą?

3.6. W 30-osobowej klasie odbył się sprawdzian z matematyki. Ile mogło być różnych wyników sprawdzianu, jeżeli wiadomo, że nauczyciel wystawiał tylko „plus” albo „minus”?

3.7. Na ile sposobów można rozmieścić n kredek różnych kolorów w k pudełkach dla danych n i k ? Zakładamy, że kolejność kredek w pudełku nie jest istotna oraz że w każdym pudełku zmieszczą się wszystkie kredki.

- a) $n = 2, k = 3$
- b) $n = 1, k = 6$
- c) $n = 12, k = 1$
- d) $n = 10, k = 3$

3.16. $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$

3.17. $3 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 1512$

3.18. a) $4 \cdot 3 \cdot 2$ b) $5 \cdot 4 \cdot 3$
c) $3 \cdot 2$ d) $3 \cdot 3 \cdot 2$

3.19. 136. *Wskazówka:* Ostatnią cyfrą musi być 0 lub 5.

3.20. a) $9 \cdot 89 \cdot 88 = 70\,488$
b) 0

3.21. 1000

3.22. 840

3.23. $18 \cdot 12 \cdot 28$

3.24. 6

3.25. a) 5^{30} b) 6^{30}

3.16. Ile słów pięcioliterowych (mających sens lub nie) można ułożyć z pięciu liter wybranych ze słowa KOMPUTER?

3.17. Ile jest czterocyfrowych liczb, w których żadna cyfra się nie powtarza, zaczynających się od 1, 3 lub 7?

3.18. Ile jest trzycyfrowych liczb, do których zapisania możemy użyć podanych cyfr? Cyfry w liczbach nie mogą się powtarzać.

- a) 2, 6, 8, 9 b) 1, 3, 5, 7, 9 c) 2, 3, 5 d) 0, 7, 8, 9

3.19. Ile jest podzielnych przez 5 liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach?

3.20. W urnie są kule ponumerowane kolejnymi liczbami dwucyfrowymi od 10 do 99. Losujemy trzy razy kolejno bez zwracania po jednej kuli. Z wylosowanych numerów kul tworzymy sześciocyfrowe liczby (zapisywane zgodnie z kolejnością losowania). Ile możemy otrzymać liczb

- a) podzielnych przez 10? b) podzielnych przez 100?

3.21. Ela chciała zatelefonować do Ali, ale pamiętała tylko pierwsze cztery cyfry siedmiocyfrowego numeru. Jaką największą liczbę numerów musiałaby wypróbować, aby połączyć się z koleżanką?

3.22. Krzysiek dostał na urodziny kolejną elektryczną składającą się z elektrowozu i siedmiu różnych wagoników. Na ile sposobów może zbudować pociąg, który ma elektrowóz na początku składu i cztery wagoniki?

3.23. W klasie 5c jest 18 dziewcząt i 12 chłopców. Na ile sposobów można wybrać w tej klasie samorząd złożony z przewodniczącego, zastępcy i skarbnika, jeżeli funkcję przewodniczącego ma objąć dziewczynka, a zastępcą ma być chłopiec?

3.24. Marta ma trzy różne klucze. Tylko dwa z nich pasują do zamków w skrytce bankowej, którą można otworzyć jednoczesnym przekręceniem obydwu kluczy. Klucze nie różnią się, niestety, wielkością. Ile prób otwarcia podjęła Marta, jeżeli dopiero przy ostatnim z możliwych wariantów (a jest mądrą dziewczyną i nie sprawdzała kilka razy tego samego układu) drzwi się otworzyły?

3.25. W konkursie „Kangur Matematyczny” jest 30 pytań, a do każdego z nich 5 wariantów odpowiedzi (z których dokładnie jedna jest poprawna). Na ile sposobów uczestnik konkursu może wypełnić kartę odpowiedzi, jeżeli

- a) odpowie na wszystkie pytania?
* b) na niektóre (a nawet na wszystkie) pytania może nie udzielić odpowiedzi?

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Ile jest liczb trzycyfrowych, których wszystkie cyfry są różnymi liczbami parzystymi?

- A. 48 B. 60 C. 100 D. 125

2. W kawiarni można zamówić 8 rodzajów ciastek, 4 rodzaje deserów lodowych i 7 rodzajów kawy. Na ile sposobów możemy zamówić zestaw składający się z kawy i czegoś słodkiego (ciastka lub deseru lodowego)?

- A. 19 B. 36 C. 84 D. 224

3. Na ile sposobów możemy rozdzielić pomiędzy pięciu uczniów cztery różne tematy referatów do napisania tak, aby każdy dostał co najwyżej jeden temat?

- A. $5 \cdot 4$ B. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ C. 5^4 D. 4^5

4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Liczba wszystkich liczb sześciocyfrowych, które są utworzone z cyfr 1, 2, 3 oraz są

- A. parzyste, jest równa 243.
 B. nieparzyste, jest równa 64.
 C. podzielne przez 4, jest równa 81.

5. Nauczyciel wychowania fizycznego zamawia stroje dla szkolnej drużyny piłki nożnej. Do wyboru ma 6 kolorów koszulek, 4 kolory spodenek i 3 kolory getrów. Ile różnych zestawów może wybrać?

6. Autobusy w Pyrkach mają specjalną rejestrację, na którą składają się najpierw dwie litery, a następnie dwie cyfry. Ile maksymalnie autobusów można w taki sposób zarejestrować, jeżeli do dyspozycji mamy 24 litery alfabetu?

7. Przesuwamy się po bokach i przekątnych wypukłego pięciokąta $ABCDE$. Na ile sposobów możemy dojść z punktu A do punktu E , przechodząc przez wszystkie pozostałe wierzchołki pięciokąta i przez każdy z nich tylko raz?

Prosto do matury

1. A

2. C

3. B

4. P, F, F

5. 72

6. 57 600

7. 6

4. Obliczanie prawdopodobieństwa

Umiejętności:

- obliczanie prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa

Przypomnijmy, że jeżeli w danym doświadczeniu losowym wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to **prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia** A jest równe:

$$P(A) = \frac{|\bar{A}|}{|\bar{\Omega}|}$$

gdzie $|\bar{A}|$ oznacza liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A , a $|\bar{\Omega}|$ – liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu.

Przykład 1

Rzucamy dwa razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wypadną różne wyniki?

Rozwiązanie

W pierwszym rzucie może выпаść orzeł (oznaczamy to O) lub reszka (oznaczamy R), w drugim rzucie podobnie – wynik to O lub R. Przyjmujemy następującą konwencję – zapis OR oznacza taki wynik doświadczenia, w którym w pierwszym rzucie wypadł orzeł i w drugim wypadła reszka. Zatem zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych zapiszemy w postaci:

$$\Omega = \{OO, OR, RO, RR\}$$

Niech A oznacza zdarzenie: wypadną różne wyniki.

$$A = \{OR, RO\}$$

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Zamiast monety możemy wykorzystać urnę z dwiema ponumerowanymi kulami i losować kolejno ze zwracaniem.

$$\text{Odp.: } \frac{1}{2}$$

Gdybyśmy nie uwzględnili kolejności wyników rzutów, to otrzymalibyśmy 3 zdarzenia elementarne: „różne wyniki”, „dwa orły” i „dwie reszki”, ale wówczas zdarzenia te nie byłyby jednakowo prawdopodobne (co zauważy nawet początkujący gracz).



Przykład 2 ◀ zad. 4.1

Rzucamy trzy razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że liczba reszek będzie większa od liczby orłów?

Rozwiązanie

Doświadczeniem jest trzykrotny rzut monetą. Wyznamy zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych:

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ROO, RRO, ROR, ORR, RRR\}$$

Zatem zbiór zdarzeń elementarnych ma $2^3 = 8$ elementów.

$$\overline{\Omega} = 8$$

Interesujące nas zdarzenie A polega na wylosowaniu większej liczby reszek niż orłów, czyli:

$$A = \{RRR, RRO, ROR, ORR\}$$

$$\overline{A} = 4$$

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Zauważmy, że jeżeli wykonujemy nieparzystą liczbę rzutów monetą, to nie ma możliwości otrzymania takiej samej liczby reszek i orłów. W połowie wszystkich możliwych wyników więcej jest reszek, a w połowie – orłów. Odpowiedzi można było udzielić od razu, bez wypisywania elementów zbioru A .

$$\text{Odp.: } \frac{1}{2}$$

Przykład 3

Zapisujemy czterocyfrowe liczby w następujący sposób: rzucamy 4 razy monetą – jeżeli wypadnie orzeł, to zapisujemy 1, a jeśli reszka – to 2. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba jest:

A – parzysta, B – podzielna przez 3, C – podzielna przez 4?

Rozwiązanie

Zbiór zdarzeń elementarnych ma $2^4 = 16$ elementów.

$$\overline{\Omega} = 16$$

W zapisie otrzymanych liczb występują tylko cyfry 1 i 2. Połowa tych liczb kończy się jedyneką, a połowa – dwójką, zatem:

$$\overline{A} = 8, \quad P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

Doświadczenia „ k razy rzut monetą (kostką)” i „rzut k rozróżnialnymi monetami (kostkami)” możemy dokładnie tak samo zinterpretować i opisać. Identyczne są zatem zbiory zdarzeń elementarnych takich doświadczeń.

◀4.1. Rzucamy czterema monetami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na trzech spośród tych monet wypadnie reszka?

$$\text{Odp.: } \frac{1}{4}$$

Zauważmy, że do wybrania zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A niepotrzebne były informacje o cyfrach uzyskanych w pierwszych trzech losowaniach. Szukane prawdopodobieństwo można zatem wyznaczyć prościej – wystarczy wziąć pod uwagę tylko ostatnie losowanie. Skoro na dwie możliwości jedna jest dobra, to $P(A) = \frac{1}{2}$.

Zdarzenie B zajdzie wtedy, gdy suma cyfr będzie podzielna przez 3 – w naszym losowaniu oznacza to wyłącznie liczbę, której suma cyfr jest równa 6 (najmniejszą z możliwych sum jest 4, a największą – 8). Zatem dobrymi wynikami są tylko liczby zapisane z użyciem dwóch dwójek i dwóch jedynek: 1122, 1212, 1221, 2121, 2112, 2211.

$$\overline{B} = 6, \quad P(B) = \frac{\overline{B}}{\overline{\Omega}} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Zdarzenie C zajdzie wtedy, gdy na końcu liczby pojawi się układ cyfr 12 (zgodnie z cechą podzielności przez 4), czyli dobrymi wynikami są tylko liczby: 1112, 1212, 2112, 2212.

$$\overline{C} = 4, \quad P(C) = \frac{\overline{C}}{\overline{\Omega}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Podobnie jak przy zdarzeniu A , do obliczenia szukanego prawdopodobieństwa niepotrzebna jest informacja o wynikach pierwszych dwóch losowań. Zadanie można uprościć – wystarczy obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania liczby dwucyfrowej podzielnej przez 4, w której występują tylko cyfry 1 i 2. Sprzyjający układ 12 wystąpi raz na cztery możliwości (11, 12, 21, 22), więc $P(C) = \frac{1}{4}$.

$$\text{Odp.: } P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{3}{8}, \quad P(C) = \frac{1}{4}$$

Przykład 4 ◀ zad. 4.7

Rzucamy dwa razy kostką. Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że:

A – suma oczek jest większa od 10,

B – za drugim razem wypadła liczba oczek o 2 większa niż za pierwszym razem,

C – obydwa wyniki są nieparzyste,

D – wyniki w obydwu rzutach są różne.

Rozwiązanie

W tym doświadczeniu losowym:

$$\overline{\Omega} = 6^2 = 36$$

A – suma oczek jest większa od 10:

$$A = \{56, 65, 66\}$$

$$\overline{A} = 3, \quad P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$\Omega = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66\}$$

- ◀ 4.7. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
- a) na obu kostkach wypadną identyczne wyniki.
 - b) na obu kostkach wypadną parzyste liczby oczek.
 - c) liczba oczek na pierwszej kostce będzie większa.
 - d) liczba oczek na pierwszej kostce będzie wielokrotnością liczby oczek z drugiej kostki.

$$\text{Odp.: a) } \frac{1}{6} \quad \text{b) } \frac{1}{4} \quad \text{c) } \frac{5}{12} \quad \text{d) } \frac{7}{18}$$

B – za drugim razem wypadła liczba oczek o 2 większa niż za pierwszym razem:

$$B = \{13, 24, 35, 46\}$$

$$\overline{B} = 4$$

$$P(B) = \frac{\overline{B}}{\overline{\Omega}} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

C – obydwa wyniki są nieparzyste:

$$\overline{C} = 3^2 = 9$$

$$P(C) = \frac{\overline{C}}{\overline{\Omega}} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

D – wyniki w obydwu rzutach są różne:

$$\overline{D} = 6 \cdot 5$$

$$P(D) = \frac{\overline{D}}{\overline{\Omega}} = \frac{6 \cdot 5}{36} = \frac{5}{6}$$

$$\text{Odp.: } P(A) = \frac{1}{12}, P(B) = \frac{1}{9}, P(C) = \frac{1}{4},$$

$$P(D) = \frac{5}{6}$$

Poszczególne zdarzenia w tym doświadczeniu można też zliczać na rysunku. Każdemu z 36 zdarzeń elementarnych odpowiada jedna komórka w tabeli. Zaznaczymy na przykład zdarzenia sprzyjające zdarzeniu B .

1. rzut \ 2. rzut	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3	×					
4		×				
5			×			
6				×		

Przykład 5

Rzucamy trzy razy kostką. Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że w pierwszym rzucie otrzymamy tyle oczek, ile jest równa suma oczek w drugim i trzecim rzucie.

Rozwiązanie

$$\overline{\Omega} = 6^3$$

Niech A oznacza zdarzenie: w pierwszym rzucie otrzymamy tyle oczek, ile jest równa suma oczek z drugiego i trzeciego rzutu.

$$A = \{615, 624, 633, 642, 651, 514, 523, 532, 541, 413, 422, 431, 312, 321, 211\}$$

$$\overline{A} = 15, \quad P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{15}{6^3} = \frac{5}{72}$$

$$\text{Odp.: } \frac{5}{72}$$

Przykład 6

Krzyś opiekuje się szczeniakami – dwiema suczkami i dwoma pieskami. Podaje je losowo weterynarzowi do szczepienia. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suczki i pieski będą szczepione na zmianę?

◀4.8. Ze zbioru {4, 6, 7, 8} losujemy cztery razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Otrzymane wyniki zapisujemy i tworzymy w ten sposób czterocyfrowe liczby – ostatnia wylosowana liczba jest cyfrą jedności. Oblicz z jakim prawdopodobieństwem otrzymamy liczbę

a) o różnych cyfrach.
b) nieparzystą.

Odp.: a) $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4^4} = \frac{3}{32}$

b) $\frac{4^3 \cdot 1}{4^4} = \frac{1}{4}$

◀4.10. Patryk i Martyna jadą na wakacje tym samym pociągiem. Komputer przydzielił im losowo miejsca w tym samym sześciuosobowym przedziale. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że zajmą miejsca

a) naprzeciwko siebie.
b) obok siebie.

Odp.: a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{4}{15}$

Rozwiązanie

Cztery szczeniaki są podawane kolejno, zatem:

$$\overline{\Omega} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

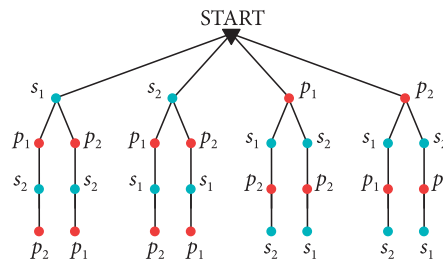
Liczba zdarzeń sprzyjających jest równa:

$$\overline{A} = 4 \cdot 2$$

co wyjaśniamy na rysunku drzewka (s_1, s_2 oznacza suczkę, p_1, p_2 – pieska).

$$P(A) = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{3}$$

Odp.: $\frac{1}{3}$



Przykład 7 ◀ zad. 4.8

Tata Ali codziennie śpiewa córeczce jedną z siedmiu kołysanek, które zna. Z jakim prawdopodobieństwem nie powtórzy w ciągu tygodnia ani jednej, jeżeli kołysanki wybiera w sposób losowy?

Rozwiązanie

Jeżeli ponumerujemy kołysanki 1, 2, ..., 7, to każdą możemy utożsamić z kulą o odpowiadającym jej numerze. Tata Ali losuje jedną dziennie (z całego zbioru, czyli ze zwracaniem), więc ma zawsze 7 możliwości wyboru. Zatem:

$$\overline{\Omega} = 7^7$$

Jeżeli przyjmiemy, że A jest zdarzeniem polegającym na wyborze różnych piosenek w ciągu tygodnia, to zdarzenia sprzyjające otrzymamy, gdy będziemy losować 7 razy bez zwracania, czyli:

$$\overline{A} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$P(A) = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7^7} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7^6} = \frac{720}{117649} \approx \frac{1}{163}$$

Odp.: $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7^6}$

Przykład 8 ◀ zad. 4.10

Klara i Leon wybierają losowo przedziały spośród 7 kolejnych wolnych przedziałów w wagonie. Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że nie będą jechali

- a) w tym samym przedziale.
b) ani w tym samym przedziale, ani w sąsiednich przedziałach.

Rozwiązanie

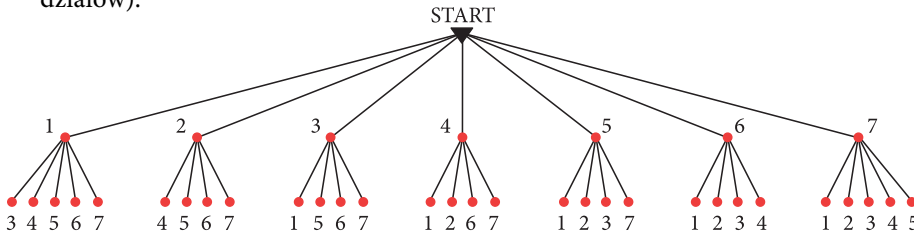
Klara i Leon mają po 7 możliwości wyboru, zatem $\overline{\Omega} = 7 \cdot 7$.

- a) Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że nie wylosują tego samego przedziału. Pierwsza osoba wybierająca przedział ma 7 możliwości, natomiast druga już tylko 6. Liczba wszystkich sprzyjających układów jest więc równa $7 \cdot 6$.

$$\overline{\overline{A}} = 7 \cdot 6$$

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{7 \cdot 6}{7 \cdot 7} = \frac{6}{7}$$

- b) Niech B oznacza zdarzenie polegające na tym, że Klara i Leon nie wylosują ani tego samego przedziału, ani sąsiednich przedziałów. Do wyznaczenia liczby wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu B posłużymy się rysunkiem. Przyjmijmy, że jako pierwsza przedział wybiera Klara (cyfry na rysunku oznaczają numery przedziałów).



Zauważmy, że:

- jeżeli Klara trafi do pierwszego przedziału, to Leon może jechać w każdym z przedziałów o numerach 3, 4, 5, 6 oraz 7 – daje to 5 możliwości (podobna sytuacja zaistnieje wówczas, gdy Klara wylosuje ostatni przedział),
- jeżeli Klara trafi do któregoś ze środkowych przedziałów, to Leon ma do wyboru jeden z czterech przedziałów.

Wszystkich sprzyjających zdarzeń elementarnych jest tyle, ile gałęzi w ostatnim wierszu drzewka.

$$\overline{\overline{B}} = 1 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 30$$

$$P(B) = \frac{\overline{\overline{B}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{30}{7 \cdot 7} = \frac{30}{49}$$

Odp.: a) $\frac{6}{7}$ b) $\frac{30}{49}$

Przykład 9 ◀ zad. 4.14

Autobus wiozący pięciu pasażerów jedzie trasą, wzdłuż której jest 8 przystanków. Zakładamy, że wszystkie rozkłady wysiadania pasażerów na przystankach są jednakowo prawdopodobne. Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia, że każdy pasażer wysiądzie na innym przystanku.

◀ 4.14. Sześciu pasażerów wsiada na przystanku do tramwaju złożonego z trzech wagonów. Zakładamy, że każdy pasażer może z tym samym prawdopodobieństwem wsiąść do dowolnego wagonu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że

- a) wszyscy pasażerowie wsiądą do jednego wagonu. b) do jednego z wagonów nie wsiądzie żaden pasażer.

Rozwiązanie

$$\overline{\overline{\Omega}} = 3^6$$

a) A – wszyscy pasażerowie wsiądą do jednego wagonu

Są trzy wagony, zatem: $\overline{\overline{A}} = 3$, $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$.

b) B – do jednego z wagonów nie wsiądzie żaden pasażer

Dwa wagony, do których wsiądą pasażerowie, wybieramy na 3 sposoby. Każdy z sześciu pasażerów ma do wyboru jeden z dwóch wagonów i odejmujemy 2 przypadki, w których wszyscy trafią do jednego wagonu.

$$\overline{\overline{B}} = 3 \cdot (2^6 - 2) = 3 \cdot 2 (2^5 - 1) = 6 \cdot 31 = 186, \quad P(B) = \frac{186}{729} = \frac{62}{243}$$

Odp.: a) $\frac{1}{243}$ b) $\frac{62}{243}$

- ◀ 4.23. W pudełku jest 10 kul oznaczonych cyframi 0, 1, ..., 8, 9. Wyjmujemy losowo jedną kulę, zapisujemy jej numer i wrzucamy z powrotem do pudełka. Czynność tę powtarzamy trzy razy. W ten sposób tworzymy ciągi trzelementowe (a, b, c) , dla których budujemy wyrażenia $100a + 10b + c$. Oblicz prawdopodobieństwo, że wartość tego wyrażenia jest
- liczbą dwucyfrową.
 - liczbą większą od 653 i mniejszą od 921.
 - wielokrotnością liczby 10.
- Odp.: a) 0,09 b) 0,267 c) 0,1

Rozwiązanie

Każdy z pasażerów ma do wyboru dowolny z ośmiu przystanków (ośmiu ponumerowanych kul). Wyobraźmy sobie, że losowanie odbywa się przed wejściem pasażera do autobusu. Pierwszy pasażer losuje jedną kulę z ośmiu, wrzuca ją z powrotem do urny, aby drugi pasażer miał do dyspozycji 8 przystanków itd.

$$\overline{\Omega} = 8^5$$

Niech A oznacza zdarzenie, że każdy pasażer wysiądzie na innym przystanku. Wyniki sprzyjające uzyskamy wówczas, gdy żadna cyfra się nie powtórzy. Zatem:

$$\overline{A} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$$

$$P(A) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{8^5} = \frac{105}{512}$$

Odp.: $\frac{105}{512}$



Przykład 10 ◀ zad. 4.23

W urnie znajduje się pięć kul podpisanych cyframi 2, 3, 4, 6, 8. Losujemy jedną kulę, zapisujemy wynik i wrzucamy wylosowaną kulę z powrotem do urny. Następnie losujemy drugi raz i dopisujemy wynik do pierwszej cyfry (po jej prawej stronie). W ten sposób wylosowane cyfry tworzą liczbę dwucyfrową. Z jakim prawdopodobieństwem otrzymamy liczbę większą od 44?

Rozwiązanie

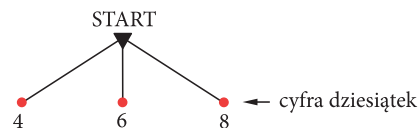
W urnie mamy pięć kul i losowanie powtarzamy dwukrotnie. Liczba wszystkich możliwych wyników jest więc równa 25.

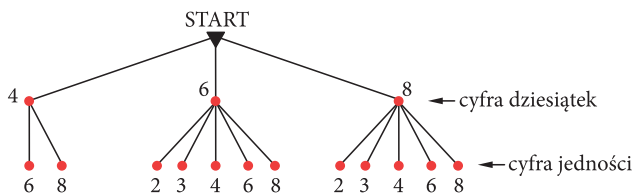
$$\overline{\Omega} = 25$$

Oznaczmy literą A interesujące nas zdarzenie – wylosowanie liczby większej od 44. Przykładami sprzyjających zdarzeń elementarnych są wyniki: 66, 48, 63 itd. Natomiast niepożądane liczby to np. 23, 44.

Zastanówmy się, jak zliczyć wyłącznie sprzyjające układy cyfr. Pierwsza wylosowana cyfra będzie cyfrą dziesiątek tworzonej liczby, więc nie może być mniejsza od 4. W pierwszym losowaniu interesują nas zatem tylko kule oznaczone 4, 6 albo 8.

Jeżeli pierwszą wylosowaną cyfrą jest 6 lub 8, to nie jest ważne, jaka będzie następna – każdy układ jest dobry. Inaczej rzecz się ma z wylosowaną jako pierwszą cyfrą 4. Liczba 46 jest dobra, a 43 nie. W tym wypadku w drugim losowaniu mogą pojawić się tylko dwie kule – z numerem 6 oraz 8. Ostatecznie drzewko wszystkich sprzyjających układów wygląda następująco:





Liczba wszystkich możliwych zakończeń gałęzi, czyli dwucyfrowych liczb większych od 44, jest więc równa $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 12$, czyli:

$$\overline{A} = 12, \quad P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{12}{25}$$

Odp.: $\frac{12}{25}$

Zadania

4.1. Rzucamy czterema monetami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na trzech spośród tych monet wypadnie reszka?

4.2. Rzucamy pięć razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w żadnych dwóch kolejnych rzutach nie powtórzy się ten sam wynik.

4.3. Rzucamy monetą i sześcienną kostką do gry. Wypisz zbiór zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia losowego, a następnie oblicz prawdopodobieństwo każdego z następujących zdarzeń:

A – wypadnie reszka i parzysta liczba oczek,

B – wypadnie orzeł i liczba oczek podzielna przez 3,

C – wypadnie nieparzysta liczba oczek,

D – wypadnie orzeł,

E – wypadnie reszka i liczba oczek podzielna przez 7,

F – wypadnie szóstka.

4.4. Pan Krzysztof ma w lewej kieszeni jeden cienkopis czarny i jeden niebieski, a w prawej – jeden zielony, jeden czerwony i jeden fioletowy. Wyjmuje losowo po jednym cienkopisie z każdej kieszeni. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wyjmie cienkopisy czarny i czerwony.

4.5. Z talii 52 kart losujemy kolejno dwie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że pierwszą wylosowaną kartą będzie as, a drugą dama.

4.6. Z pudełka, w którym są 3 kule białe i 2 czarne, losujemy bez zwracania dwie kule. Co jest bardziej prawdopodobne: wylosowanie dwóch kul białych czy wylosowanie najpierw kuli czarnej, a potem białej?

Odpowiedzi i rozwiązania

4.1. $\frac{1}{4}$

4.2. $\frac{1}{16}$

4.3. $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{6}$,
 $P(C) = \frac{1}{2}$, $P(D) = \frac{1}{2}$,
 $P(E) = 0$, $P(F) = \frac{1}{6}$

4.4. $\frac{1}{6}$

4.5. $\frac{4}{663}$

4.6. Zdarzenia są jednakowo prawdopodobne.

4.7. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{7}{18}$

4.8. a) $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4^4} = \frac{3}{32}$

b) $\frac{4^3 \cdot 1}{4^4} = \frac{1}{4}$

4.9. $\frac{4}{9}$

4.10. a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{4}{15}$

4.11. $\frac{1}{4}$

4.12. $\frac{1}{4^{10}} = \frac{1}{1\,048\,576}$

4.13. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{24}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$

4.7. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że

- na obu kostkach wypadną identyczne wyniki.
- na obu kostkach wypadną parzyste liczby oczek.
- liczba oczek na pierwszej kostce będzie większa.
- liczba oczek na pierwszej kostce będzie wielokrotnością liczby oczek z drugiej kostki.

4.8. Ze zbioru $\{4, 6, 7, 8\}$ losujemy cztery razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Otrzymane wyniki zapisujemy i tworzymy w ten sposób czterocyfrowe liczby – ostatnia wylosowana liczba jest cyfrą jedności. Oblicz z jakim prawdopodobieństwem otrzymamy liczbę

- o różnych cyfrach.
- nieparzystą.

4.9. Tworzymy liczbę trzycyfrową w następujący sposób: spośród cyfr 1, 2, ..., 9 losujemy najpierw cyfrę setek, potem z pozostałych ośmiu cyfrę dziesiątek, a następnie z pozostałych siedmiu – cyfrę jedności. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby parzystej.

4.10. Patryk i Martyna jadą na wakacje tym samym pociągami. Komputer przydzielił im losowo miejsca w tym samym sześciuosobowym przedziale. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że zajmą miejsca

- naprzeciwko siebie.
- obok siebie.

4.11. W wagonie jest jedenaście przedziałów po osiem miejsc w każdym. Kupujemy (losową) miejscówkę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy miejsce przy oknie.

4.12. W teleturnieju prowadzący zadaje dziesięć pytań. Do każdego z nich podane są cztery odpowiedzi, z których tylko jedna jest poprawna. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że osoba nieznająca odpowiedzi na żadne pytanie odpowie na wszystkie poprawnie.

4.13. Ambroży, Baltazar, Cezary i Dionizy losują kolejność, w jakiej będą skakać do basenu z trampoliny. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że

- Ambroży będzie skakał na końcu.
- panowie skoczą w alfabetycznej kolejności ich imion.
- Cezary i Dionizy będą skakali jeden za drugim (Cezary za Dionizym lub odwrotnie).
- Baltazar będzie skakał wcześniej niż Dionizy.

4.14. Sześciu pasażerów wsiada na przystanku do tramwaju złożonego z trzech wagonów. Zakładamy, że każdy pasażer może z tym samym prawdopodobieństwem wsiąść do dowolnego wagonu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że



- a) wszyscy pasażerowie wsiadą do jednego wagonu.
 * b) do jednego z wagonów nie wsiądzie żaden pasażer.

4.15. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch białych kul z urny zawierającej 3 kule białe i 2 czarne w doświadczeniu, które polega na losowaniu kolejno dwóch kul

- a) bez zwracania. b) ze zwracaniem.

4.16. W urnie są cztery kule, na każdej z nich napisana jest cyfra. Losujemy dwa razy po jednej kuli bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że na drugiej z wylosowanych kul jest większa cyfra niż na pierwszej, jeżeli kule w urnie mają cyfry

- a) 1, 2, 3, 4. b) 1, 1, 2, 3.

4.17. Z cyfr 0, 1, 2, 3, 4 układamy wszystkie możliwe liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrana jedna z tych liczb ma dwie cyfry parzyste i jedną nieparzystą.

4.18. Ze zbioru wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 1, 2, 3, 4, 5 i 6, wybieramy losowo jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy liczbę

- a) o różnych cyfrach. c) parzystą.
 b) o jednakowych cyfrach. d) większą od 500.

4.19. Gracz rzuca dwa razy kostką. Jeżeli wyniki są identyczne, to do sumy wyrzuconych oczek dolicza mu się 5 punktów, jeżeli wyniki są różne i wśród nich jest jedynka, to dolicza się 3 punkty. W pozostałych przypadkach grający traci tyle punktów, ile wynosi suma wyrzuconych oczek. Oblicz prawdopodobieństwo, z jakim w jednej grze gracz

- a) zdobędzie maksymalną liczbę punktów. c) zdobędzie 9 punktów.
 b) zdobędzie 6 punktów. d) straci punkty.

4.20. Pięcioletni Tomek pomaga tacie w robieniu porządków. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ustawi czterotomową encyklopedię i zachowa kolejność tomów (Tomek nie umie jeszcze czytać i książki ustawia losowo).

4.14. Patrz s. 227.

4.15. a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{9}{25}$

4.16. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{12}$

4.17. $\frac{7}{12}$

4.18. a) $\frac{5}{9}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{3}$

4.19. a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{1}{18}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{5}{9}$

4.20. $\frac{1}{12}$ (jeśli uznamy za poprawne ustawienia 1, 2, 3, 4 oraz 4, 3, 2, 1)
 lub $\frac{1}{24}$ (jeśli poprawne jest tylko ustawienie 1, 2, 3, 4)

4.21. tak

4.22. $\frac{5}{54}$

4.23. a) 0,09 b) 0,267 c) 0,1

4.24. $\overline{\Omega} = 12^6$

A – wszystkie osoby urodziły się w dwóch miesiącach

Dwa miesiące spośród dwunastu wybieramy na $\frac{12 \cdot 11}{2}$ sposobów.

Dla każdej z sześciu osób wybieramy jeden z dwóch miesięcy i odrzucamy dwa przypadki, w których wszyscy urodzili się w tym samym miesiącu.

$$\overline{A} = \frac{12 \cdot 11}{2} \cdot (2^6 - 2)$$

$$P(A) = \frac{12 \cdot 11 \cdot (2^6 - 2)}{2 \cdot 12^6} = \frac{341}{12^5}$$

Odp.: $\frac{341}{12^5}$

4.25. a) 0,384 b) 0,096
c) 0,008 d) 0,48 e) 0,512

4.26. $\frac{1}{16}$

4.21. Bliźniaki Antek i Bartek ustanowili następującą zasadę wynoszenia śmieci. Rzucają kostką i monetą. Jeżeli na kostce wypadnie mniej niż pięć oczek i na monecie orzeł, to przez tydzień śmieci wynosi Antek, a jeżeli na kostce wypadną więcej niż dwa oczka i na monecie reszka, to Bartek. W pozostałych przypadkach śmieci ma wynosić ich młodszy brat Czarek. Czy ustalone warunki są sprawiedliwe?

4.22. Rzucamy trzy razy kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma liczby oczek wyrzuconych w pierwszym i drugim rzucie jest mniejsza od liczby oczek wyrzuconych w trzecim rzucie.

4.23. W pudełku jest 10 kul oznaczonych cyframi 0, 1, ..., 8, 9. Wyjmujemy losowo jedną kulę, zapisujemy jej numer i wrzucamy z powrotem do pudełka. Czynność tę powtarzamy trzy razy. W ten sposób tworzymy ciągi trzelementowe (a, b, c) , dla których budujemy wyrażenia $100a + 10b + c$. Oblicz prawdopodobieństwo, że wartość tego wyrażenia jest

- a) liczbą dwucyfrową.
- b) liczbą większą od 653 i mniejszą od 921.
- c) wielokrotnością liczby 10.

* 4.24. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że urodziny sześciu losowo wybranych osób wypadają w dwóch miesiącach? Prawdopodobieństwo urodzenia w każdym miesiącu przyjmujemy za jednakowe.

4.25. Pomalowany klocek sześcienny pocięto na 1000 jednakowych sześcianników. Oblicz prawdopodobieństwo wyciągnięcia sześciannika

- a) pomalowanego na jednej ścianie.
- b) pomalowanego na dwóch ścianach.
- c) pomalowanego na trzech ścianach.
- d) pomalowanego na jednej lub dwóch ścianach.
- e) niepomalowanego.

4.26. Ankieta składa się z czterech pytań, na które można odpowiedzieć „tak” lub „nie”. Jarek i Kasia wypełnili swoje ankiety na chybił trafił. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wypełnili je tak samo.

* 4.27. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy ze zwracaniem trzy razy po jednym elemencie. Wylosowane liczby ustawiamy w ciąg w kolejności losowania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowane liczby tworzą

- a) ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$ lub 3.
- b) ciąg arytmetyczny.

4.27. $\overline{\Omega} = 9^3$

a) A – wylosowane liczby utworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$ lub 3

$$A = \{421, 842, 139\}, \overline{A} = 3, P(A) = \frac{3}{9^3} = \frac{1}{3 \cdot 9^2} = \frac{1}{243}$$

b) B – wylosowane liczby utworzą ciąg arytmetyczny o różnicy r

Ciągi stałe: $r = 0$ – 9 ciągów

Ciągi rosnące:

$r = 1$: $\{123, 234, 345, 456, 567, 678, 789\}$ – 7 ciągów

$r = 2$: $\{135, 246, 357, 468, 579\}$ – 5 ciągów

$r = 3$: $\{147, 258, 369\}$ – 3 ciągi

$r = 4$: $\{159\}$ – 1 ciąg

Ciągów malejących jest tyle samo co ciągów rosnących.

$$\overline{B} = 9 + 2(7 + 5 + 3 + 1) = 41, P(B) = \frac{41}{729}$$

Odp.: a) $\frac{1}{243}$ b) $\frac{41}{729}$

- * 4.28.** Ze zbioru wszystkich liczb całkowitych czterocyfrowych wybieramy losowo jedną. Oznaczmy ją n . Oblicz prawdopodobieństwo tego, że 1 jest ostatnią cyfrą liczby
a) n^2 . b) n^4 .

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

- 1.** Wskaż prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie dwóch orłów w trzech rzutach monetą.

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{3}{8}$

- 2.** Kazik zapomniał czterocyfrowego kodu do domofonu w swoim bloku. Wybrał więc losowo liczby na klawiaturze. Wskaż prawdopodobieństwo tego, że drzwi się otworzą.

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{40}$ C. $\frac{1}{10^4}$ D. $\frac{1}{4^{10}}$

- 3.** Rzucamy trzema kostkami i czterema monetami. Wskaż prawdopodobieństwo tego, że wypadną tylko szóstki i reszki.

- A. $\frac{1}{3 \cdot 6 + 4 \cdot 2}$ B. $\frac{1}{3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}$ C. $\frac{1}{6^3 \cdot 2^4}$ D. $\frac{1}{3^6 \cdot 4^2}$

4. Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 układamy wszystkie możliwe liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Prawdopodobieństwo tego, że jedna z tych liczb wybrana losowo jest

- A. równa 125, wynosi $\frac{1}{125}$.

- B.** mniejsza od 300, wynosi $\frac{2}{5}$.

- C. parzysta, wynosi $\frac{3}{5}$.

- 5.** Rzucamy dwa razy kostką sześcienną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że iloczyn oczek uzyskanych w obu rzutach będzie liczbą podzielną przez 3.

6. Z pudełka, w którym są 2 kule białe i 3 czarne, losujemy kolejno bez zwracania dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że obie wylosowane kule będą tego samego koloru.

- 7.** Trzech profesorów przyszło na konferencję z podobnymi parasolami. Po zakończeniu konferencji zabrali parasole losowo. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że każdy wrócił do domu z własnym parasolem.

4.28. $\overline{\overline{\Omega}} = 9 \cdot 10^3$

- a) Ostatnią cyfrą liczby n^2 jest cyfra 1, gdy ostatnią cyfrą liczby n jest 1 lub 9.

$$\overline{A} = 9 \cdot 10^2 \cdot 2$$

$$P(A) = \frac{9 \cdot 10^2 \cdot 2}{9 \cdot 10^3} = \frac{1}{5}$$

- b)** Ostatnią cyfrą liczby n^4 jest cyfra 1, gdy ostatnią cyfrą liczby n^2 jest 1 lub 9, czyli ostatnią cyfrą liczby n jest 1 lub 9, lub 3, lub 7, czyli:

$$\overline{B} = 9 \cdot 10^2 \cdot 4$$

$$P(B) = \frac{9 \cdot 10^2 \cdot 4}{9 \cdot 10^3} = \frac{2}{5}$$

- Odp.: a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{2}{5}$

Prosto do matury

1. D

- ## 2. C

- ### 3. C

4. F, P, F

- 5.** $\frac{5}{9}$

6. $\frac{2}{5}$

7. $\frac{1}{6}$

5. Własności prawdopodobieństwa

Umiejętności:

- obliczanie prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa
- zliczanie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosowanie reguły mnożenia i reguły dodawania

Zdarzenia wykluczające się i zdarzenia przeciwne

Określimy pewne relacje, które mogą zajść między zdarzeniami A i B w doświadczeniu losowym o zbiorze zdarzeń elementarnych Ω .

- Mówimy, że zdarzenia A i B **wykluczają się**, jeżeli nie mogą zajść jednocześnie. Nie istnieje zatem zdarzenie elementarne $\omega \in \Omega$, które sprzyjałoby zarówno zdarzeniu A , jak i zdarzeniu B .
- **Zdarzeniem przeciwnym** do A nazywamy zdarzenie polegające na tym, że zdarzenie A nie zajdzie. Zdarzenie przeciwne do zdarzenia A oznaczamy A' . Każde zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu A nie sprzyja zdarzeniu A' i na odwrót. Inaczej mówiąc, każde zdarzenie elementarne $\omega \in \Omega$ albo sprzyja zdarzeniu A , albo sprzyja zdarzeniu A' .

Przykład 1 ◀ zad. 5.1–5.3

Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie monetą. Zbiór zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu:

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ROO, RRO, ROR, ORR, RRR\}$$

Przyjmijmy, że A jest zdarzeniem polegającym na tym, że wypadną co najmniej 2 orły:

$$A = \{OOO, OOR, ORO, ROO\}$$

B jest z zdarzeniem polegającym na tym, że wypadną dokładnie 2 reszki:

$$B = \{ORR, ROR, RRO\}$$

C jest zdarzeniem polegającym na tym, że wypadną co najmniej 2 reszki:

$$C = \{ORR, ROR, RRO, RRR\}$$

Wówczas:

- zdarzenia A i B się wykluczają,
- zdarzenia A i C się wykluczają,
- zdarzenia A i C są przeciwne (możemy ten fakt zapisać $C = A'$ lub $C' = A$).

◀5.1. Losujemy jedną kartę z talii liczącej 52 karty. Niech A będzie zdarzeniem polegającym na wylosowaniu karty koloru czarnego, B – kiera, C – figury. Czy wśród zdarzeń A , B , C są takie, które się wykluczają?

Odp.: tak, zdarzenia A i B

◀5.2. Rzucamy kostką i monetą. A oznacza zdarzenie – wypadła nieparzysta liczba oczek i reszka, B – wypadł orzeł, C – wypadła parzysta liczba oczek, D – wypadła szóstka. Które ze zdarzeń A , B , C , D się wykluczają?

Odp.: pary zdarzeń wykluczających się: A i B , A i C , A i D

◀5.3. Rzucono 6 razy monetą. Niech A oznacza zdarzenie – otrzymana liczba orłów jest nieparzysta, B – otrzymana liczba reszek jest mniejsza od liczby orłów, C – otrzymana liczba orłów jest 2 razy mniejsza od liczby reszek. Które ze zdarzeń A , B , C się wykluczają?

Odp.: pary zdarzeń wykluczających się: A i C , B i C

Przykład 2 ◀ zad. 5.5

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie kostką. W tabeli przedstawiamy kilka par zdarzeń przeciwnych w tym doświadczeniu.

Zdarzenie	Zdarzenie przeciwne
A – suma liczb oczek jest równa 10	A' – suma liczb oczek jest różna od 10
B – wypadły parzyste liczby oczek	B' – co najmniej raz wypadła nieparzysta liczba oczek
C – co najmniej raz wypadła szóstka	C' – szóstka nie wypadła ani razu

Przykład 3

Obserwujemy pewien zbiór graczy w lotto. Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia „losowo wybrana osoba wygrała przynajmniej raz jakąkolwiek kwotę” jest zdarzenie „losowo wybrana osoba nigdy nie wygrała”.

Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego

Niech A oznacza zdarzenie w doświadczeniu losowym, którego zbiorem zdarzeń elementarnych jest zbiór Ω . Przyjmijmy, że $|\Omega| = n$. Jeżeli oznaczymy $|\bar{A}| = k$, to zgodnie z określeniem zdarzenia przeciwnego $|\bar{A}| = n - k$. Zatem:

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

$$P(A') = \frac{n-k}{n} = 1 - \frac{k}{n} = 1 - P(A)$$

Powyższą równość zapiszemy w postaci następującego wzoru:

$$P(A') + P(A) = 1$$

Przykład 4 ◀ zad. 5.8, 5.9

Rzucamy dwa razy kostką do gry. Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że przynajmniej raz wypadła szóstka.

Rozwiązanie

Dla dwukrotnego rzutu kostką wypisywaliśmy już cały zbiór zdarzeń elementarnych, wiemy więc, że:

$$|\Omega| = 6^2$$

Zwrot „w dwóch rzutach przynajmniej raz wypadła szóstka” oznacza, że szóstka wypadła raz lub dwa razy.

◀5.5. Rzucamy trzema kostkami. Określ zdarzenie przeciwne do zdarzenia A – na co najmniej jednej kostce wypadły dwa oczka.

Odp.: A' – na żadnej kostce nie wypadły dwa oczka

◀5.8. Rzucamy dwa razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej raz wypadnie orzeł.

Odp.: $\frac{3}{4}$

◀5.9. Rzucamy trzy razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej raz wypadnie reszka.

Odp.: $\frac{7}{8}$

◀5.11. Rzucamy 3 razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że iloczyn liczb oczek otrzymanych we wszystkich rzutach będzie mniejszy od 200.

Odp.: $\frac{215}{216}$

◀5.14. Ze zbioru liczb {20, 22, 30, 33, 40, 44, 50, 55, 60, 66, 70, 77, 80, 88, 90, 99} losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy liczbę podzielną przez 3 lub przez 6.

Odp.: $\frac{3}{8}$

Zdarzenie A' polega na tym, że w wykonanych rzutach szóstka nie wypadła ani razu.

$$\overline{\overline{A'}} = 5^2$$

← odpowiednie pary są utworzone przez 5 elementów

$$P(A') = \frac{\overline{\overline{A'}}}{\overline{\Omega}} = \frac{5^2}{6^2} = \frac{25}{36}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} \quad \leftarrow P(A) + P(A') = 1$$

Odp.: Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{11}{36}$.



Przykład 5 ◀ zad. 5.11

Ze zbioru {1, 2, 3, 5, 7, 8, 11, 13} losujemy ze zwracaniem trzy razy po jednej liczbie. Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest liczbą parzystą.

Rozwiązanie

Zbiór liczy 8 elementów, losujemy ze zwracaniem, zatem: $\overline{\Omega} = 8^3$.

Iloczyn trzech liczb jest liczbą parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna z nich jest parzysta. Zajściu zdarzenia A będą sprzyjały np. takie układy liczb: (3, 4, 7), (11, 8, 8). Prościej jest obliczyć prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia przeciwnego A' , które polega na tym, że iloczyn wylosowanych liczb jest liczbą nieparzystą. Zajdzie ono bowiem wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie trzy wylosowane liczby są nieparzyste.

$$\overline{\overline{A'}} = 6^3$$

← trójki są utworzone z elementów zbioru {1, 3, 5, 7, 11, 13}

$$P(A') = \frac{\overline{\overline{A'}}}{\overline{\Omega}} = \frac{6^3}{8^3} = \frac{27}{64}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64} \quad \leftarrow P(A) + P(A') = 1$$

Odp.: Szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{37}{64}$.

Działania na zdarzeniach

Wykonamy teraz kilka prostych operacji na zdarzeniach.

Przykład 6 ◀ zad. 5.14

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie kostką.

a) Zdarzenie A – iloczyn liczb oczek otrzymanych w obu rzutach jest równy 6:

$$A = \{16, 23, 32, 61\}$$

Zdarzenie B – przynajmniej raz wypadła szóstka:

$$B = \{16, 26, 36, 46, 56, 66, 61, 62, 63, 64, 65\}$$

Zdarzenie C – iloczyn liczb oczek jest równy 6 **lub** przynajmniej raz wypadła szóstka, czyli zaszło zdarzenie A **lub** zdarzenie B :

$$C = \{16, 23, 26, 32, 36, 46, 56, 66, 61, 62, 63, 64, 65\} = A \cup B$$

b) Zdarzenie D – suma liczb oczek otrzymanych w obu rzutach jest mniejsza od 6:

$$D = \{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 31, 32, 41\}$$

Zdarzenie E – wyniki obydwu rzutów są liczbami parzystymi:

$$E = \{22, 24, 26, 42, 44, 46, 62, 64, 66\}$$

Zdarzenie F – suma liczb oczek jest mniejsza od 6 **i** wyniki obydwu rzutów są parzyste, czyli zaszło zdarzenie D **i** zdarzenie E :

$$F = \{22\} = D \cap E$$

c) Zdarzenie G – iloczyn liczb oczek otrzymanych w obu rzutach jest równy 10:

$$G = \{25, 52\}$$

Zdarzenie H – za drugim razem wypadły o 3 oczka więcej niż za pierwszym razem:

$$H = \{14, 25, 36\}$$

Zdarzenie K – iloczyn liczb oczek jest równy 10 **lub** za drugim razem wypadły o 3 oczka więcej, czyli zaszło zdarzenie G **lub** zdarzenie H :

$$K = \{14, 25, 36, 52\} = G \cup H$$

Zdarzenie L – iloczyn liczb oczek jest równy 10 **i** za drugim razem wypadły o 3 oczka więcej, czyli zaszło zdarzenie G **i** zdarzenie H :

$$L = \{25\} = G \cap H$$

Przykład 7 ◀ zad. 5.15

Z talii 52 kart losujemy jedną. Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wylosowana karta jest treflem lub figurą.

Rozwiązanie

Doświadczenie losowe polega na losowaniu jednej karty z talii.

Zbiór zdarzeń elementarnych Ω jest zbiorem wszystkich możliwych wyników, czyli:

$$\begin{aligned} \Omega = \{ & 2_{\clubsuit}, 3_{\clubsuit}, 4_{\clubsuit}, \dots, 10_{\clubsuit}, W_{\clubsuit}, D_{\clubsuit}, K_{\clubsuit}, A_{\clubsuit}, 2_{\diamond}, 3_{\diamond}, \dots, K_{\diamond}, A_{\diamond}, \\ & 2_{\heartsuit}, \dots, A_{\heartsuit}, 2_{\spadesuit}, \dots, A_{\spadesuit} \} \\ \overline{\Omega} = & 52 \end{aligned}$$

Wprowadzamy oznaczenia.

T – zdarzenie polegające na wylosowaniu trefla:

$$\begin{aligned} T = \{ & 2_{\clubsuit}, 3_{\clubsuit}, 4_{\clubsuit}, 5_{\clubsuit}, 6_{\clubsuit}, 7_{\clubsuit}, 8_{\clubsuit}, 9_{\clubsuit}, 10_{\clubsuit}, W_{\clubsuit}, D_{\clubsuit}, K_{\clubsuit}, A_{\clubsuit} \} \\ \overline{T} = & 13 \end{aligned}$$

◀5.15. Z talii liczącej 52 karty wyciągnięto jedną kartę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest to figura lub karta w kolorze czerwonym?

Odp.: $\frac{17}{26}$

F – zdarzenie polegające na wylosowaniu figury:

$$F = \{W_{\clubsuit}, D_{\clubsuit}, K_{\clubsuit}, A_{\clubsuit}, W_{\diamondsuit}, D_{\diamondsuit}, K_{\diamondsuit}, A_{\diamondsuit}, W_{\heartsuit}, D_{\heartsuit}, K_{\heartsuit}, A_{\heartsuit}, \\ W_{\spadesuit}, D_{\spadesuit}, K_{\spadesuit}, A_{\spadesuit}\}$$

$$\overline{F} = 16$$

A – zdarzenie polegające na wylosowaniu trefla lub figury:

$$A = \{2_{\clubsuit}, 3_{\clubsuit}, 4_{\clubsuit}, 5_{\clubsuit}, 6_{\clubsuit}, 7_{\clubsuit}, 8_{\clubsuit}, 9_{\clubsuit}, 10_{\clubsuit}, W_{\clubsuit}, D_{\clubsuit}, K_{\clubsuit}, A_{\clubsuit}, \\ W_{\diamondsuit}, D_{\diamondsuit}, K_{\diamondsuit}, A_{\diamondsuit}, W_{\heartsuit}, D_{\heartsuit}, K_{\heartsuit}, A_{\heartsuit}, W_{\spadesuit}, D_{\spadesuit}, K_{\spadesuit}, A_{\spadesuit}\}$$

Zauważmy, że $\overline{A}$ nie jest równe sumie liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu T i liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu F . Musimy bowiem odjąć liczbę zdarzeń sprzyjających zjawisku obu tych zdarzeń, czyli 4 (liczbę figur treflowych). Zatem:

$$\overline{A} = 13 + 16 - 4 = 25$$

$$P(A) = \frac{25}{52}$$

Odp.: Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{25}{52}$.

Podsumujmy:

Aby wyznaczyć liczbę zdarzeń sprzyjających zjawisku zdarzenia A lub B , dodajemy liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A do liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu B i odejmujemy liczbę zdarzeń sprzyjających obu tym zdarzeniom jednocześnie.

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} + \overline{B} - \overline{A \cap B}$$

Przykład 8

Losujemy jedną liczbę spośród 1, 2, ..., 99, 100. Obliczymy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia

- A – wylosowana liczba jest podzielna przez 2 lub przez 3.
- B – wylosowana liczba jest podzielna przez 11 lub przez 13.

Rozwiązanie

$$\overline{\Omega} = 100$$

- W rozpatrywanym zbiorze mamy:

$$\begin{array}{ll} 50 \text{ liczb podzielnych przez } 2 & \longleftarrow 100 = 50 \cdot 2 \\ 33 \text{ liczby podzielne przez } 3 & \longleftarrow 100 = 33 \cdot 3 + 1 \\ 16 \text{ liczb podzielnych przez } 2 \text{ i przez } 3, \text{ czyli przez } 6 & \longleftarrow 100 = 16 \cdot 6 + 4 \end{array}$$

Zatem:

$$\overline{A} = 50 + 33 - 16 = 67$$

$$P(A) = \frac{67}{100}$$

b) W rozpatrywanym zbiorze mamy:

$$9 \text{ liczb podzielnych przez } 11 \quad \leftarrow 100 = 9 \cdot 11 + 1$$

$$7 \text{ liczb podzielnych przez } 13 \quad \leftarrow 100 = 7 \cdot 13 + 9$$

W rozpatrywanym zbiorze nie ma liczb podzielnych przez 11 i przez 13 (czyli przez 143), dlatego w tym wypadku nie musimy nic odejmować. Zatem:

$$\overline{B} = 9 + 7 = 16$$

$$P(B) = \frac{16}{100}$$

$$\text{Odp.: a) } P(A) = \frac{67}{100} \quad \text{b) } P(B) = \frac{16}{100}$$

Zadania

5.1. Losujemy jedną kartę z talii liczącej 52 karty. Niech A będzie zdarzeniem polegającym na wylosowaniu karty koloru czarnego, B – kiera, C – figury. Czy wśród zdarzeń A , B , C są takie, które się wykluczają?

5.2. Rzucamy kostką i monetą. A oznacza zdarzenie – wypadła nieparzysta liczba oczek i reszka, B – wypadł orzeł, C – wypadła parzysta liczba oczek, D – wypadła szóstka. Które ze zdarzeń A , B , C , D się wykluczają?

5.3. Rzucono 6 razy monetą. Niech A oznacza zdarzenie – otrzymana liczba orłów jest nieparzysta, B – otrzymana liczba reszek jest mniejsza od liczby orłów, C – otrzymana liczba orłów jest 2 razy mniejsza od liczby reszek. Które ze zdarzeń A , B , C się wykluczają?

5.4. Rzucamy trzy razy monetą. Na czym polega zdarzenie przeciwne do zdarzenia A – co najmniej raz wypadł orzeł?

5.5. Rzucamy trzema kostkami. Określ zdarzenie przeciwne do zdarzenia A – na co najmniej jednej kostce wypadły dwa oczka.

5.6. Z talii 52 kart losujemy jedną kartę. Określamy następujące zdarzenia:

A – wylosowano karo,

C – wylosowano kartę koloru czerwonego,

B – wylosowano asa,

D – wylosowano figurę.

Czy wśród zdarzeń A , B , C , D jest para zdarzeń wykluczających się?

Odpowiedzi i rozwiązania

5.1. tak, zdarzenia A i B

5.2. pary zdarzeń wykluczających się: A i B , A i C , A i D

5.3. pary zdarzeń wykluczających się: A i C , B i C

5.4. A' – wypadły trzy reszki

5.5. A' – na żadnej kostce nie wypadły dwa oczka

5.6. nie

5.7. a) nie b) tak c) tak
d) tak e) nie

5.8. $\frac{3}{4}$

5.9. $\frac{7}{8}$

5.10. $\frac{33}{49}$

5.11. $\frac{215}{216}$

5.12. przez 5 i przez 9: 0,022;
przez 5 lub przez 9: 0,289

5.13. $\frac{4}{9}$

5.14. $\frac{3}{8}$

5.7. Czy zdarzenia losowe A i B się wykluczają? Odpowiedź uzasadnij.

- a) doświadczenie – rzut dwiema monetami
 A – wypadnięcie orła na pierwszej monecie
 B – wypadnięcie reszki na drugiej monecie
- b) doświadczenie – rzut dwiema monetami
 A – wypadnięcie orła na pierwszej monecie
 B – wypadnięcie dwóch reszek
- c) doświadczenie – rzut kostką i monetą
 A – wypadnięcie orła
 B – wypadnięcie reszki
- d) doświadczenie – rzut kostką i monetą
 A – wypadnięcie orła i parzystej liczby oczek
 B – wypadnięcie reszki
- e) doświadczenie – rzut kostką i monetą
 A – wypadnięcie orła lub parzystej liczby oczek
 B – wypadnięcie reszki lub nieparzystej liczby oczek

5.8. Rzucamy dwa razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej raz wypadnie orzeł.

5.9. Rzucamy trzy razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej raz wypadnie reszka.

5.10. Z liczb należących do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ tworzymy wszystkie możliwe liczby dwucyfrowe (cyfry mogą się powtarzać). Następnie z tak powstałego zbioru liczb losujemy jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w wylosowanej liczbie przynajmniej jedna cyfra jest parzysta?

5.11. Rzucamy 3 razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że iloczyn liczb oczek otrzymanych we wszystkich rzutach będzie mniejszy od 200.

5.12. Losujemy jedną liczbę spośród wszystkich należących do zbioru $\{1, 2, \dots, 1000\}$. Wyznacz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 5 i przez 9 oraz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 5 lub przez 9.

5.13. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że za każdym razem wypadnie liczba oczek, która jest parzysta lub większa od czterech.

5.14. Ze zbioru liczb $\{20, 22, 30, 33, 40, 44, 50, 55, 60, 66, 70, 77, 80, 88, 90, 99\}$ losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy liczbę podzielną przez 3 lub przez 6.

5.15. Z talii liczącej 52 karty wyciągnięto jedną kartę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest to figura lub karta w kolorze czerwonym?

5.16. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dwa razy wypadnie ta sama liczba oczek lub dwa razy liczba oczek będzie mniejsza od 4.

5.17. W klasie jest 18 dziewcząt. Siedem z nich trenuje koszykówkę, a trzy tenis. Wśród nich jest jedna, która uprawia obydwie wymienione dyscypliny sportowe. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana dziewczyna z tej klasy nie trenuje ani tenisa, ani koszykówki.

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż liczbę dwucyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 10 lub przez 15.
A. 12 B. 13 C. 15 D. 16

2. Z talii 52 kart losujemy jedną. Wskaż prawdopodobieństwo tego, że jest ona królem lub kierem.
A. $\frac{14}{52}$ B. $\frac{15}{52}$ C. $\frac{16}{52}$ D. $\frac{17}{52}$

3. Rzucamy pięcioma monetami. Wskaż prawdopodobieństwo tego, że wypadnie co najmniej jedna reszka.
A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{5}{6}$ C. $\frac{9}{10}$ D. $\frac{31}{32}$

4. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Oznaczmy zdarzenia:
A – iloczyn liczb oczek jest nieparzysty, C – suma liczb oczek jest nieparzysta,
B – iloczyn liczb oczek jest parzysty, D – suma liczb oczek jest parzysta.
Oceń prawdziwość podanych zdań. Zdarzenia
A. A i B się wykluczają. B. A i D się wykluczają. C. B i C się wykluczają.

5. Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia pary liczb, których iloczyn jest mniejszy od 30.

6. Z talii liczącej 52 karty losujemy kolejno ze zwracaniem dwie karty. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że za pierwszym lub za drugim razem wylosujemy asa.

7. Ze zbioru wszystkich liczb trzycyfrowych losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy liczbę, w której zapisie występuje co najmniej jedno zero.

5.15. $\frac{17}{26}$

5.16. $\frac{1}{3}$

5.17. $\frac{1}{2}$

Prosto do matury

1. A

2. C

3. D

4. P, F, F

5. $\frac{11}{12}$

6. $\frac{25}{169}$

7. 0,19

6. Wartość oczekiwana w prostych grach losowych

Umiejętności:

- obliczanie wartości oczekiwanej w prostych grach losowych

Na koniec wrócimy do zagadnień, które zapoczątkowały powstanie i rozwój rachunku prawdopodobieństwa, czyli do gier losowych. Przeanalizujemy najpierw kilka przykładów.

Przykład 1

Rysiek gra z kolegą w rzut monetą. Jeżeli wypadnie orzeł, Rysiek wygrywa 5 zł, jeżeli reszka – przegrywa i musi zapłacić 5 zł koledze.

Rysiek wygra z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ i z takim samym prawdopodobieństwem przegra.

Przykład 2

Teodor Motylek gra w kasynie w rzut trzema monetami. Jeżeli wypadną identyczne wyniki na monetach, Teodor wygrywa 200 zł, w pozostałych przypadkach przegrywa i wpłaca krupierowi 70 zł.

Zbiór zdarzeń elementarnych w rzucie trzema monetami to:

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ROO, RRO, ROR, ORR, RRR\}$$

Panu Motylkowi sprzyjają wyniki $\{OOO, RRR\}$, zatem wygra 200 zł z prawdopodobieństwem $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, a przegra z prawdopodobieństwem $\frac{3}{4}$.

Przykład 3

Gra polega na rzucie dwa razy kostką do gry. Zenobia wygrywa 1000 zł, gdy przynajmniej raz w tych dwóch rzutach wypadnie szóstka. W pozostałych przypadkach przegrywa i wpłaca krupierowi 200 zł.

W przykładzie 4 w poprzednim temacie (s. 235) obliczyliśmy prawdopodobieństwo otrzymania przynajmniej jednej szóstki w dwóch rzutach kostką. Zatem możemy napisać, że Zenobia wygra 1000 zł z prawdopodobieństwem $\frac{11}{36}$, a straci 200 zł z prawdopodobieństwem $\frac{25}{36}$.

Naturalne pytania, jakie może postawić każdy uczestnik gry losowej, to:

- Czy opłaca mi się w nią zagrać?
- Czy ta gra jest sprawiedliwa?

Na obydwie pytania od razu można odpowiedzieć Ryśkowi z przykładu 1. Przy tak ustalonych zasadach gra w monetę jest sprawiedliwa – co należy rozumieć w taki sposób, że jeśli Ryśiek zagra bardzo wiele razy, to wyjdzie na zero, czyli ani nie zyska, ani nie straci.

Zastanówmy się, jak wygląda sytuacja Teodora z przykładu 2. Obliczmy **średnią wygraną** w jednej grze.

Wynik	OOO	OOR	ORO	ROO	RRO	ROR	ORR	RRR
„Wygrana” Teodora [zł]	200	-70	-70	-70	-70	-70	-70	200

Średnia wygrana wynosi:

$$\frac{2 \cdot 200 + 6 \cdot (-70)}{8} = -2,50 \text{ [zł]}$$

Zapiszmy średnią wygraną w nieco innej postaci:

$$\frac{2 \cdot 200 + 6 \cdot (-70)}{8} = 200 \cdot \frac{2}{8} + (-70) \cdot \frac{6}{8} = 200 \cdot 0,25 + (-70) \cdot 0,75$$

Zestawmy możliwe wartości wygranej z ich prawdopodobieństwami.

„Wygrana” Teodora [zł]	200	-70
Prawdopodobieństwo	0,25	0,75

Jak widać, średnią wygraną możemy na podstawie powyższej tabeli obliczyć następująco:

$$200 \cdot 0,25 - 70 \cdot 0,75 = -2,5 \text{ [zł]}$$

Zatem w grze z przykładu 2 przeważa prawdopodobieństwo przegranej – Teodor Motylek może oczywiście wygrać nawet w pierwszym podejściu 200 zł, może również za drugim razem wygrać, bo gra jest losowa – ale należy się spodziewać, że przy większej liczbie powtórzeń wygranym okaże się kasyno.

Jak wygląda sytuacja pani Zenobii z przykładu 3?

„Wygrana” Zenobii [zł]	1000	-200
Prawdopodobieństwo	$\frac{11}{36}$	$\frac{25}{36}$

W tej grze średnia wygrana dla gracza w jednym rozdaniu wynosi:

$$1000 \cdot \frac{11}{36} - 200 \cdot \frac{25}{36} = \frac{1}{36}(11\,000 - 5000) \approx 166,67 \text{ [zł]}$$

Zatem tu przeważa prawdopodobieństwo wygranej – pani Zenobia może oczywiście przegrać nawet dużą kwotę, ale należy się spodziewać, że przy większej liczbie powtórzeń powinna wygrać.

Natomiast w przykładzie 1 średnia wygrana wynosi $1 \cdot 0,5 - 1 \cdot 0,5 = 0$ [zł].

O grach, w których średnia wygrana jest różna od 0, czyli takich jak opisane w przykładach 2 i 3, mówimy, że nie są sprawiedliwe.

Omawiamy w tym temacie szczególny przypadek doświadczeń losowych, dlatego dostosowaliśmy do niego język. I tak:

- zamiast mówić o zdarzeniu losowym, używamy tu określenia **gra losowa**,
 - zbiór zdarzeń sprzyjających to wygrana **stawka**,
 - prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia to **prawdopodobieństwo wygranej**, itp.
- Wprowadzimy jeszcze nazwę obliczanej wyżej średniej.

Definicja

Jeżeli w grze losowej wyniki gracza X przyjmują wartości $x_1, x_2, \dots, x_n$ odpowiednio z prawdopodobieństwami $p_1, p_2, \dots, p_n$, gdzie $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$ i $n > 1$, to wartością oczekiwaną EX tej gry nazywamy liczbę:

$$EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Zatem wartość oczekiwana gry Ryśka $ER = 0$, w grze Teodora $ET = -2,5$, a w grze Zenobii $EZ \approx 166,67$.

- Wartość oczekiwana dawniej nazywana była „nadzieją matematyczną” i stąd pochodzi jej oznaczenie: E – od francuskiego słowa *espérance* (nadzieja).
- Wyrażenia „wartość oczekiwana gry” oraz „wartość oczekiwana wygranej gracza” znaczą to samo.

Wartość oczekiwana jest tylko rodzajem średniej, ale jej wysokość może być ceną wskazówką. Grę losową nazywamy **grą sprawiedliwą**, jeśli jej wartość oczekiwana jest równa zero.

◀6.1. Patrz s. 245.



Przykład 4 ◀ zad. 6.1

Z talii 52 kart Karol losuje jedną kartę. Jeżeli wylosowana karta jest treflem lub figurą, wygrywa 20 zł, w przeciwnym razie przegrywa 10 zł. Obliczmy wartość oczekiwaną tej gry.

Rozwiązanie

W przykładzie 7 w poprzednim temacie obliczyliśmy prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wylosowana karta jest treflem lub figurą.

Zatem:

$$P(A) = \frac{25}{52} \quad P(A') = 1 - \frac{25}{52} = \frac{27}{52}$$

x_i	20	-10
p_i	$\frac{25}{52}$	$\frac{27}{52}$

Wartość oczekiwana gry Karola wynosi:

$$EK = 20 \cdot \frac{25}{52} - 10 \cdot \frac{27}{52} = \frac{10}{52} (50 - 27) = \frac{230}{52} \approx 4,42 \text{ [zł]}$$

Odp.: Wartość oczekiwana tej gry $EK \approx 4,42$ zł.

Przykład 5 ◀ zad. 6.5

Tarcza koła ruletki jest podzielona na 37 równych sektorów, ponumerowanych od 0 do 36. Gracz stawia na wybrany przez siebie numer 1 zł, a następnie krupier puszcza na obracającą się tarczę kulkę. Jeżeli kulka zatrzyma się w sektorze o numerze obstawionym przez gracza, to gracz otrzymuje 36 zł, w przeciwnym razie traci swoją stawkę. Sprawdźmy, czy ta gra jest sprawiedliwa.

Rozwiązanie

W tej grze losowej gracz X może uzyskać dwa wyniki:

35 z prawdopodobieństwem $\frac{1}{37}$ ← gdy wygra (wcześniej wpłacił 1 zł)

-1 z prawdopodobieństwem $\frac{36}{37}$ ← gdy przegra

x_i	35	-1
p_i	$\frac{1}{37}$	$\frac{36}{37}$

$$EX = 35 \cdot \frac{1}{37} - \frac{36}{37} = \frac{1}{37} \cdot (35 - 36) = -\frac{1}{37}$$

Odp.: Podana gra nie jest sprawiedliwa.

Zadania

6.1. Losujemy jedną kartę z talii liczącej 52 karty. Jeżeli wylosujemy asa, wygrywamy 20 zł, jeżeli inną figurę – wygrywamy 10 zł, w każdym innym przypadku tracimy 5 zł. Oblicz wartość oczekiwaną gry.

◀ **6.5.** Rzucamy trzy razy monetą. Jeżeli dokładnie raz wypadnie reszka, wygrywamy 50 zł, w przeciwnym razie przegrywamy 30 zł. Wykaż, że gra jest sprawiedliwa.

Rozwiązanie

$$\overline{\Omega} = 2^3 = 8$$

A – dokładnie raz wypadnie reszka

$$\overline{A} = 3$$

$$P(A) = \frac{3}{8}, \quad P(A') = \frac{5}{8}$$

x_i	50	30
p_i	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

$$EX = \frac{3}{8} \cdot 50 + \frac{5}{8} \cdot (-30) = 0$$

Gra jest sprawiedliwa, bo wartość oczekiwana wygranej jest równa 0.

Odpowiedzi i rozwiązania

6.1. $\frac{5}{13}$

6.2. $-\frac{85}{26} \approx -3,27$

6.3. 0

6.4. $\frac{1}{36}$

6.5. Patrz s. 245.

6.6. $-3,75$

6.7. $-0,625$

6.8. $\frac{2}{13}$

6.2. Losujemy jedną kartę z talii liczącej 52 karty. Jeżeli wylosujemy asa pik, wygrywamy 100 zł, jeżeli figurę kier, wygrywamy 50 zł, w każdym innym przypadku tracimy 10 zł. Oblicz wartość oczekiwaną gry.

6.3. Jolka rzuca monetą i sześcienną kostką do gry. Jeżeli wypadnie orzeł i liczba oczek podzielna przez 3, wygrywa 20 zł. W przeciwnym wypadku przegrywa 4 zł. Oblicz wartość oczekiwaną tej gry.

6.4. Waldemar rzuca dwiema sześciennymi kostkami do gry. Jeżeli otrzyma takie same wyniki na obu kostkach, to wygrywa stawkę będącą iloczynem tych wyników. W przeciwnym wypadku przegrywa 3 zł. Oblicz wartość oczekiwaną tej gry.

D 6.5. Rzucamy trzy razy monetą. Jeżeli dokładnie raz wypadnie reszka, wygrywamy 50 zł, w przeciwnym razie przegrywamy 30 zł. Wykaż, że gra jest sprawiedliwa.

6.6. Gracz wpłaca krupierowi 10 zł, a następnie rzuca 5 razy monetą. Jeżeli w żadnych dwóch kolejnych rzutach nie powtórzy się ten sam wynik, wygrywa 100 zł, w przeciwnym razie traci swoją stawkę. Oblicz wartość oczekiwaną wygranej gracza.

6.7. W wesołym miasteczku za 5 zł można rzucić do obracającej się tarczy składającej się z 16 pól jednakowej wielkości – jak na rysunku. Za trafienie w pole czerwone wygrywamy 20 zł, za trafienie w pole żółte wygrywamy 10 zł, za trafienie w pole niebieskie wygrywamy 5 zł. Trafienie w pole czarne nie daje wygranej. Oblicz wartość oczekiwaną tej gry.



6.8. Losujemy jedną kartę z talii 52 kart. Za wylosowanie asa trefl dostajemy 8 punktów, króla trefl – 7 punktów, damy trefl – 6 punktów, a waleta trefl – 5 punktów. Stawki za wylosowanie figury w pozostałych kolorach są wyższe niż w treflach – odpowiednio: w karach – dwukrotnie wyższe, w kierach – trzykrotnie wyższe, a w pikach – czterokrotnie wyższe. Wylosowanie karty niebędącej figurą oznacza utratę 7 punktów. Oblicz wartość oczekiwaną tej gry.

*** 6.9.** Rzucamy trzema sześciennymi kostkami do gry. Jeśli na wszystkich kostkach wypadną parzyste liczby oczek, to wygrywamy stawkę będącą iloczynem tych liczb. W przeciwnym wypadku przegrywamy 8 zł. Sprawdź, czy ta gra jest sprawiedliwa.

6.9. Liczba możliwych wyników: $6^3 = 216$

Zdarzenia sprzyjające wygranej:

(2, 2, 2)	$p_1 = \frac{1}{216}$	$x_1 = 8$	(4, 4, 6)	$p_6 = p_2$	$x_6 = 96$
(2, 2, 4)	$p_2 = \frac{3}{216}$	$x_2 = 16$	(4, 6, 6)	$p_7 = p_2$	$x_7 = 144$
(2, 2, 6)	$p_3 = p_2$	$x_3 = 24$	(4, 4, 4)	$p_8 = p_1$	$x_8 = 64$
(2, 4, 4)	$p_4 = p_2$	$x_4 = 32$	(6, 6, 6)	$p_9 = p_1$	$x_9 = 216$
(2, 6, 6)	$p_5 = p_2$	$x_5 = 72$	(2, 4, 6)	$p_{10} = \frac{6}{216}$	$x_{10} = 48$

Prawdopodobieństwo wygranej: $p_1 + \dots + p_{10} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$

Prawdopodobieństwo przegranej 8 zł: $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$$EX = \frac{1}{216} \cdot (8 + 64 + 216) + \frac{3}{216} \cdot (16 + 24 + 32 + 72 + 96 + 144) + \frac{6}{216} \cdot 48 + \frac{7}{8} \cdot (-8) = \frac{288}{216} + \frac{1}{72} \cdot 384 + \frac{4}{3} - 7 = \frac{4}{3} + \frac{16}{3} + \frac{4}{3} - 7 = 1, \quad EX \neq 0, \text{ więc ta gra nie jest sprawiedliwa.}$$

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Gra losowa przyjmuje wartości 10 oraz -3 z prawdopodobieństwami odpowiednio $0,2$ i $0,8$. Wskaż wartość oczekiwaną tej gry.

- A. $-0,4$ B. $6,4$ C. $-0,2$ D. $0,4$

2. Wpłacamy krupierowi 40 zł i rzucamy kostką. Wygrywamy kwotę równą dziesięciokrotności liczby wyrzuconych oczek. Wskaż wartość oczekiwaną tej gry.

- A. $-0,50$ zł B. -5 zł C. $0,50$ zł D. 5 zł

3. Wpłacamy krupierowi s zł i rzucamy dwiema monetami. W przypadku wyrzucenia dwóch orłów wygrywamy 20 zł, w przypadku wyrzucenia orła i reszki wygrywamy 2 zł, w przypadku wyrzucenia dwóch reszek nie wygrywamy nic. Wskaż taką wartość s , dla której gra jest sprawiedliwa.

- A. 6 zł B. 7 zł C. 8 zł D. żadna z wymienionych

4. Gracz przegrał w pięciu kolejnych losowaniach gry losowej, w której wartość oczekiwana jego wygranej jest dodatnia. Oceń prawdziwość podanych zdań.

W szóstym losowaniu prawdopodobieństwo wygranej tego gracza

- A. zwiększyło się.
B. jest takie samo jak w pięciu poprzednich losowaniach.
C. zmniejszyło się.

5. Losujemy jedną kartę z talii liczącej 52 karty. Jeżeli wylosujemy asa kier, wygrywamy 100 zł, jeżeli inną figurę – wygrywamy 10 zł, w każdym innym przypadku tracimy 10 zł. Oblicz wartość oczekiwaną gry.

6. Płacimy krupierowi 50 zł i z talii liczącej 52 karty losujemy kolejno ze zwracaniem dwie karty. Jeżeli za pierwszym lub za drugim razem wylosujemy asa, to wygrywamy 300 zł. W przeciwnym wypadku nie wygrywamy nic. Oblicz wartość oczekiwaną gry.

D

7. Dwaj bracia grają ze sobą na punkty. Każdy z nich na zmianę rzuca dwa razy kostką. Jeśli w każdym z tych dwóch rzutów wypadnie parzysta liczba oczek lub liczba oczek większa od czterech, rzucający dopisuje sobie 25 punktów. W przeciwnym razie 20 punktów dopisuje sobie przeciwnik. Wykaż, że ta gra jest sprawiedliwa.

7. A – w każdym z dwóch rzutów wypadnie parzysta liczba oczek lub liczba oczek większa od 4 , czyli $2, 4, 5$ lub 6 .

$$\overline{A} = 4^2$$

$$P(A) = \frac{4^2}{6^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \quad P(A') = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$EX = \frac{4}{9} \cdot 25 + \frac{5}{9} \cdot (-20) = 0$$

Wartość oczekiwana wygranej każdego z braci jest równa 0 , więc gra jest sprawiedliwa.

Prosto do matury

1. A

2. B

3. A

4. F, P, F

5. $-\frac{55}{26}$

6. $-\frac{950}{169}$

Co wynikło z gry w kości

Rachunek prawdopodobieństwa jest stosunkowo młodym działem matematyki. Jego początki są ściśle związane z grą w kości.

Gra w kości

Gra w kości znana była już w świecie starożytnym. Przed wynalezieniem dzisiejszych sześciennych kości używano m.in. drobnych kości zwierzęcych, zwanych astragalusami. Po rzucie upadały na jeden z czterech asymetrycznych boków. Rzucano czterema kośćmi jednocześnie, a każdemu bokowi odpowiadała ustalona liczba punktów.

W starożytnym Rzymie gry były ulubioną formą rozrywki, a gra w kości cieszyła się szczególną popularnością. Świadczą o tym chociażby słowa przypisywane Juliuszowi Cezarowi: „Alea iacta est”, czyli „Kości zostały rzucone”. Grano najczęściej o pieniądze, a hazard stał się taką plagą, że starano się go prawnie ograniczać.



Grający w kości, mozaika z czasów cesarstwa rzymskiego, III w., Muzeum Narodowe w Tunisie

Słynna korespondencja

Wydaje się, że dopiero w XVI w. zaczęto matematycznie rozważać szanse wyrzucenia różnych układów oczek. Prawdziwy przełom przyniósł jednak rok 1654 za sprawą Francuza, Antoine'a Gombaulda, kawalera de Méré. Był on zagorzałym hazardzistą, a przy tym człowiekiem o dużych zdolnościach matematycznych. Obstawiał takie układy kości, które według własnych obserwacji uznał za pojawiające się częściej niż inne. Kiedy jednak zaczął grać w nową



Blaise Pascal
(1623–1662),
francuski filozof,
matematyk i fizyk

grę, jego metoda przestała działać. Zamiast uznać to za odwrócenie koła fortuny, zaczął szukać matematycznego wytłumaczenia tego niepowodzenia. Zwrócił się o pomoc do swojego przyjaciela, Blaise'a Pascala, wybitnego matematyka i filozofa. Ten z kolei listownie włączył w dyskusję innego wielkiego francuskiego matematyka, Pierre'a de Fermata. I tak powstała słynna wymiana listów, która zapoczątkowała nowy dział matematyki – **rachunek prawdopodobieństwa**.



Pierre de Fermat
(1601 lub 1607 – 1665),
francuski matematyk
i prawnik

Co się bardziej opłaca?

Rozpatrzmy dwa spośród problemów rozwiązanych w tej korespondencji. Pierwszy z nich polegał na ocenieniu szansy wyrzucenia **co najmniej jednej szóstki** przy **czterokrotnym rzucie kością** (zdarzenie A), drugi – na ustaleniu, jaka jest szansa wyrzucenia **co najmniej raz dwóch szóstek jednocześnie** przy **24-krotnym rzucie dwiema kośćmi** (zdarzenie B). Dziś wiemy, że w rozwiązaniu problemu warto wykorzystać zdarzenia przeciwne:

$$1 \quad P(A^*) = \frac{5^4}{6^4} \quad \text{– w 4 rzutach kością} \\ \text{ani razu nie wypadnie} \\ \text{szóstka}$$

$$P(A) = 1 - P(A^*) \approx 0,52$$

Oznacza to, że jeżeli powtórzymy czterokrotny rzut kością 100 razy, średnio 52 razy wypadnie co najmniej jedna szóstka.

$$2 \quad P(B^*) = \frac{35^{24}}{36^{24}} \quad \text{– w 24 rzutach dwiema kośćmi} \\ \text{ani razu nie wypadną dwie} \\ \text{szóstki jednocześnie}$$

$$P(B) = 1 - P(B^*) \approx 0,49$$

Oznacza to, że jeżeli powtórzymy 100 razy serię 24 rzutów dwiema kośćmi, średnio w 49 seriach co najmniej raz wypadną dwie szóstki jednocześnie.

Tymczasem kawaler de Méré był przekonany, że szansa zajścia każdego z tych zdarzeń jest większa od 0,5. W przypadku zdarzenia A miał rację, mimo że źle wyliczył prawdopodobieństwo, ale w przypadku zdarzenia B się pomylił. Stąd obstawiane wyniki nie pojawiały się z przewidywaną przez niego częstością.

Achilles i Ajas grający w kości,
scena z greckiej amfory,
ok. 540–530 p.n.e.,
Muzea Watykańskie



Uwagi metodyczne

Zaczynamy od umiejętności odróżniania statystyki opisowej od wnioskowania statystycznego. Zwracamy również uwagę na dwa znaczenia słowa „populacja” (s. 252).

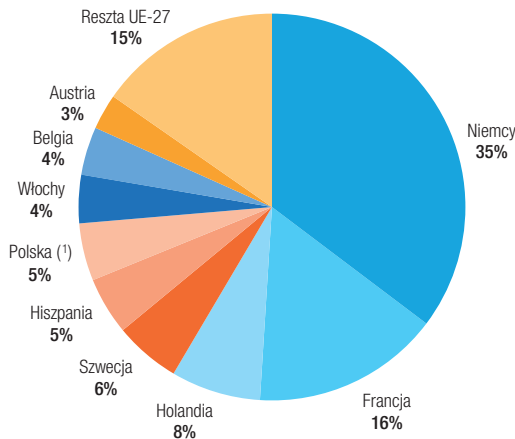
7. Wstęp do statystyki

*Myślenie statystyczne stanie się pewnego dnia
równie niezbędnym elementem wychowania
obywatelskiego, jak umiejętność czytania i pisania.*
H. G. Wells

Trudno wyobrazić sobie dzisiejszy świat bez statystyki. GUS – Główny Urząd Statystyczny – zbiera, przetwarza i prezentuje olbrzymią liczbę danych. Co roku wydawany jest rocznik statystyczny, dokument wagi państwowej. Na mniejszą skalę ze statystyką mamy do czynienia na co dzień – media publikują wyniki najrozmaitszych badań opinii publicznej, nauczyciel jest zobowiązany do robienia statystyki ocen i frekwencji uczniów, kibic śledzi wyniki rozgrywek piłkarskich itd. Wyniki badań statystycznych pojawiają się wszędzie (najczęściej w postaci różnych tabel, diagramów, wykresów itp.).

Działalność statystyczną prowadzono już w starożytności. W Biblii czytamy: „W owym czasie wyszło rozporządzenie Cezara Augusta, żeby przeprowadzić spis ludności w całym państwie”. Mowa tu o okresie tuż przed narodzeniem Chrystusa, czyli samym początku naszej ery.

Udział noclegów spędzonych przez Europejczyków podczas wakacyjnych podróży, w podziale na państwa zamieszkania turystów, 2018 rok
(% noclegów za granicą mieszkańców UE-27)



Uwaga: Ocena UE-27 stworzona na potrzeby tej publikacji, na podstawie dostępnych źródeł.

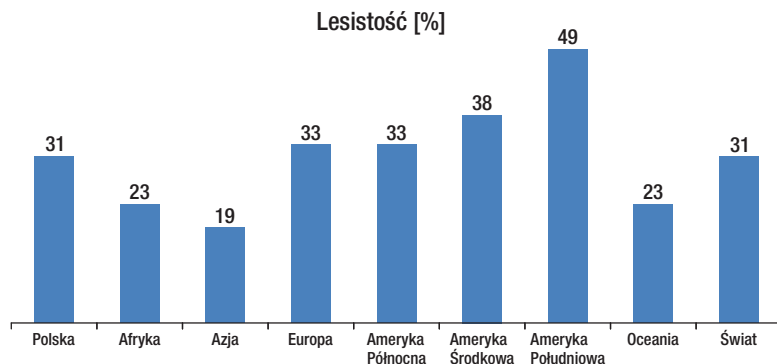
⁽¹⁾ Dane z 2017 roku.

eurostat

Źródło: https://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php?title=Tourism_statistics/pl#Miejsca_noclegowe_w_UE-27:_dominuj.C4.85_W.C5.82ochy_i_Francja [dostęp: 17 grudnia 2020 r.]

Multiteka

- Nieprzewidziana wygrana
- Najpopularniejsze zwierzę domowe
- Diagram Nightingale

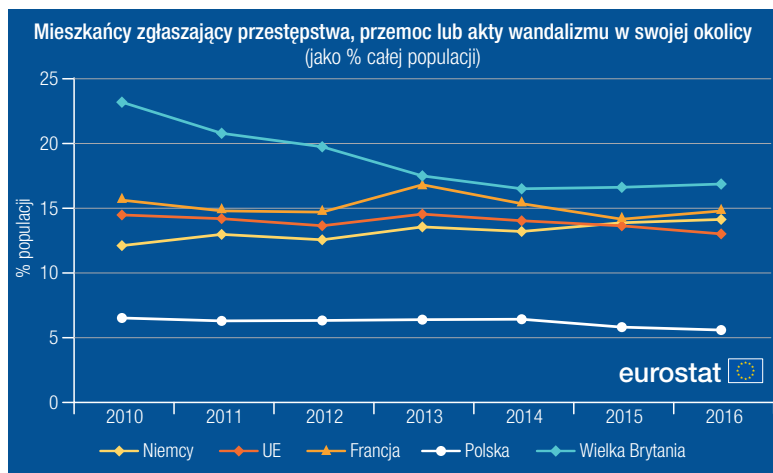


Źródło: <https://www.bdl.lasy.gov.pl/porta/portal/lasy-na-swiecie> [dostęp: 17 grudnia 2020 r.]

Statystyka spełnia przede wszystkim dwa podstawowe zadania:

- służy jako narzędzie opisu i wówczas nazywamy ją **statystyką opisową**,
- służy jako narzędzie do wyciągania wniosków z przeprowadzonych badań, wówczas mamy do czynienia z **wnioskowaniem statystycznym**.

Słowo **statystyka** wywodzi się od łacińskiego *status* – stan rzeczy, państwo. Dawne znaczenie wyrazu „statysta” to mąż stanu, dyplomata, osoba zajmująca się sprawami państwa. Początkowo (od XVI w.) statystyka zajmowała się gromadzeniem rozmaitych danych liczbowych potrzebnych do sprawnego kierowania państwem.



Źródło: <https://www.money.pl/gospodarka/wiadomosci/artukul/w-polsce-zyje-sie-lepiej-niz-w-niemczech-czy,24,0,2403864.html> [dostęp: 17 grudnia 2020 r.]

Uwagi metodyczne

W podręczniku podajemy kilka przykładów ilustrujących obydwa znaczenia terminu „populacja”. Problem nie jest duży, ale może spowodować zamęt. Dlatego radzimy przedstawić więcej przykładów – po przeanalizowaniu tych z podręcznika uczniowie powinni podać własne przykłady, które warto omówić na lekcji.

Statystyka opisowa porządkuje i prezentuje informacje o pewnym zbiorze elementów (ludzi, zwierząt, roślin, zdarzeń, procesów itp.). Zbiór ten nazywamy **populacją**. Natomiast wnioskowanie statystyczne jest najczęściej próbą uogólnienia wyników takich badań. Wówczas badana grupa stanowi podzbiór, czyli tzw. **próbę** wybraną z populacji.

Termin **populacja** używany jest zatem w dwóch znaczeniach:

- w statystyce opisowej oznacza zbiór opisywanych elementów,
- we wnioskowaniu statystycznym oznacza zbiorowość, w stosunku do której wyciągane są wnioski (po przeanalizowaniu wyników badań wybranej próby).

Prześledźmy na przykładach różnicę w stosowaniu tych pojęć.

Przykład 1

Pani Piórnik podsumowała wyniki klasy trzeciej po pierwszym semestrze. Obliczyła, ile jest ocen niedostatecznych, dopuszczających, dostatecznych itd., obliczyła średnią klasową, liczbę osób bez ocen niedostatecznych, liczbę osób ze średnią powyżej 4,5 oraz poniżej 3 itp. Dane statystyczne przedstawiła najpierw na zebraniu rady pedagogicznej, a potem przekazała je rodzicom. Opisała w ten sposób pewną konkretną grupę osób. W tym wypadku mamy do czynienia ze statystyką opisową, a opisywaną populacją jest zbiór uczniów klasy trzeciej.

Przykład 2

Na początku sezonu właściciel firmy Alfa, szkolącej chętnych do zdobycia prawa jazdy, przedstawił dane o wynikach egzaminów ubiegłorocznych absolwentów kursów.

- Podanie odsetka osób, które zdały egzamin, jest statystyką opisową populacji wszystkich absolwentów.
- Jeżeli natomiast na podstawie tej samej informacji ocenimy poziom przygotowywania do egzaminu na prawo jazdy przez Alfę, to przeprowadzimy wnioskowanie statystyczne (niekoniecznie słuszne!), w którym zbiór wszystkich absolwentów stanowi próbę, a populacją jest zbiór wszystkich kursantów Alfy.

Przykład 3

W szkolnej bibliotece podsumowano liczbę wypożyczonych książek i obliczono średnią przypadającą na jednego czytelnika.

- Taka informacja jest statystyką opisową populacji wszystkich czytelników wypożyczających książki w tej bibliotece.
- Jeżeli na podstawie tej statystyki uogólnimy informację i wypowiemy się na temat czytelnictwa np. młodzieży licealnej, to jest to wnioskowanie statystyczne, w którym próbą jest zbiór uczniów wypożyczających książki w konkretnej bibliotece, a populację stanowi młodzież licealna.

Jedną z najgłośniejszych „wpadek” w zastosowaniu statystyki była prognoza wyników wyborów na stanowisko prezydenta USA w 1936 r., sporządzona przez czasopismo „Literary Digest”. Gazeta twierdziła, że potrafi przewidzieć wynik z dokładnością do ułamka procenta. Sondaż wyborczy miał być przeprowadzony na ogromnej, 10-milionowej próbie. Odpowiedzi udzieliło 2,3 mln ankietowanych. Według wyników ankiety wybory miał wygrać gubernator stanu Kansas, republikanin – Alfred M. Landon (miał zwyciężyć w 32 na 48 stanów i uzyskać 370 głosów elektorskich). Natomiast przegranym miał być urzędujący prezydent, kandydat demokratów – Franklin Delano Roosevelt (161 głosów elektorskich). Tymczasem F. D. Roosevelt wygrał wybory w 46 stanach, uzyskał 523 głosy elektorskie i został prezydentem na następną kadencję. Na dodatek przewaga, jaką zwycięzca uzyskał nad rywalem, była największa we wszystkich wyborach od czasu, gdy Stany Zjednoczone stały się niezależnym państwem.



Franklin Delano Roosevelt

Na błędny wynik prognozy wpływ miały przede wszystkim dwa czynniki:

- niewłaściwy sposób wyboru ankietowanych (nazwiska losowano z rejestrów samochodowych, książek telefonicznych oraz prenumeratorów gazety; w 1936 r. oznaczało to zawężenie do zamożniejszej części społeczeństwa, bardziej skłonnej do głosowania na republikanów),
- nieuwzględnienie faktu, że w stosunku do liczby wysłanych ankiet tylko niewielka grupa osób udzieliła odpowiedzi (w statystyce taką sytuację określa się jako obciążenie wyników wskutek niepełności odpowiedzi).

Próba losowa, pomimo jej ogromnej liczebności, nie była reprezentatywna dla ogółu wyborców. W wyniku popełnionego błędu czasopismo „Literary Digest” niedługo po wyborach przestało się ukazywać.

Już po przeanalizowaniu kilku przykładów widać, jak bardzo ważny dla wnioskowania statystycznego jest właściwy dobór próby. Jedno z zadań statystyki to opracowanie metod, które sprawiają, że wybierane próby będą **reprezentatywne**. Bardzo często proponowany sposób polega na różnego rodzaju losowaniach elementów z populacji i wówczas taką próbę nazywamy **próbą losową**. Współczesna statystyka dysponuje na tyle precyzyjnymi narzędziami, że dobór próby, metody jej badania oraz wyciąganie logicznych wniosków z wyników tych badań dają dosyć dokładny obraz analizowanej populacji. W wielu sytuacjach nie ma innej metody niż wnioskowanie na podstawie badania próbek losowych. Dotyczy to np. kontroli jakości wyrobów, określania skuteczności działania nowych leków oraz poznawania skutków ubocznych ich stosowania.

Przykład 4

W firmie Plasterek produkowane są m.in. jałowe kompresy gazowe. Porównamy rodzaje problemów, jakie mogą być interesujące dla tej firmy z punktu widzenia statystyki i rachunku prawdopodobieństwa.

Uwagi metodyczne

W badaniu statystycznym kolejność postępowania jest (mniej więcej) następująca:

1. postawienie problemu badawczego dotyczącego ustalonej populacji,
2. opracowanie sposobu zbierania danych (np. przygotowanie pytań do ankiety),
3. określenie odpowiedniego sposobu wyboru, a następnie wybranie próby z danej populacji,
4. zebranie danych (z próby),
5. opis danych i ich prezentacja,
6. analiza, interpretacja i uogólnienie wniosków na całą populację.

W szkole zajmować się będziemy w zasadzie tylko punktem 5. powyższego spisu. Aby trochę rozszerzyć horyzont, pokazujemy (w przykładzie 4 powyżej) związek statystyki z rachunkiem prawdopodobieństwa. Związek ten występuje dopiero na etapie wnioskowania statystycznego, ale na podany przykład warto zwrócić uwagę, zwłaszcza jeżeli rachunku prawdopodobieństwa uczniowie uczyli się zgodnie z podręcznikiem, czyli przed statystyką.

W statystyce	W rachunku prawdopodobieństwa
Nie można sprawdzić jakości każdego kompresu (oznaczałoby to zniszczenie całej produkcji!), więc kontroli poddawane jest co któreś opakowanie. Wyniki takiego badania przesądzą o tym, czy wyprodukowana partia kompresów spełnia wymagania jakości i może być sprzedana, czy też trafi na przemiał. Ile opakowań trzeba sprawdzić, w jaki sposób je wybierać, jak zinterpretować wyniki, aby (z dostatecznie dużym prawdopodobieństwem) dopuścić do sprzedaży tylko wartościową produkcję?	W skrzynce pobranej z magazynu firmy Plasterek znajduje się 1000 opakowań jałowych kompresów gazowych. Wiadomo, że wśród nich jest 60 nieszczelnych (inaczej mówiąc – nadających się tylko na śmietnik). Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych 30 opakowań jest co najmniej jedno nieszczelne?

Wnioskowanie statystyczne jest ściśle związane z rachunkiem prawdopodobieństwa.

Wniosek

W statystyce mamy do czynienia z odwróconym, w stosunku do rachunku prawdopodobieństwa, wnioskowaniem:

- w probabilistyce – na podstawie znajomości całej populacji określamy prawdopodobieństwo wylosowania próbki o określonej własności,
- w statystyce – na podstawie własności próbki losowej wyciągamy najbardziej prawdopodobne wnioski o własnościach nieznannej populacji.

W tym podręczniku zajmiemy się przede wszystkim elementarnymi pojęciami statystyki opisowej. Zaawansowane metody statystyczne będą wprowadzane w trakcie studiowania na wyższych uczelniach (niezależnie od wybranego kierunku studiów). Lekarz, biolog, językoznawca, inżynier, ekonomista itd. musi obecnie umiejętnie korzystać z wyników statystyki. Nierzadko sam powinien wiedzieć, jak zaplanować i opisać eksperyment statystyczny. Umiejętność taką z pewnością powinien posiadać każdy przedsiębiorca prowadzący własną firmę. Łatwo można podać przykład niepowodzeń, do których doszło z powodu braku odpowiednich badań rynkowych. Jeżeli np. właściciel firmy odzieżowej postanawia rozszerzyć działalność gospodarczą poza obszar własnego państwa, to najpierw powinien sprawdzić, jakie są typowe rozmiary obcokrajowców, którym chce sprzedawać ubrania. Może się bowiem okazać, że rozmiary te są np. zdecydowanie mniejsze od rozmiarów oferowanych przez jego firmę w kraju. Brak tej wiedzy może spowodować niepowodzenie całego przedsięwzięcia. A przecież trzeba jeszcze zbadać, jaki jest gust przyszłych klientów, gdzie wydzierżawić sklepy, jaką metodą rozreklamować ofertę itd.

Dodajmy jeszcze jedną uwagę. Otóż wyniki (nawet rzetelnych) badań statystycznych można zaprezentować tak, aby osiągnąć zaplanowane wcześniej efekty. Mówiąc prościej – łatwo można manipulować opinią publiczną, jeżeli świadomość statystyczna obywateli jest niska. To również powód przemawiający za tym, żeby poznać przynajmniej podstawy statystyki.

Pewną wysepkę zamieszkiwało małżeństwo, któremu w pierwszym roku urodziły się bliźnięta, a w następnym trzecie dziecko. W zależności od punktu widzenia można powiedzieć, że w ciągu roku przyrost naturalny spadł o 50% albo że liczba ludności tej wyspy wzrosła o 25%.

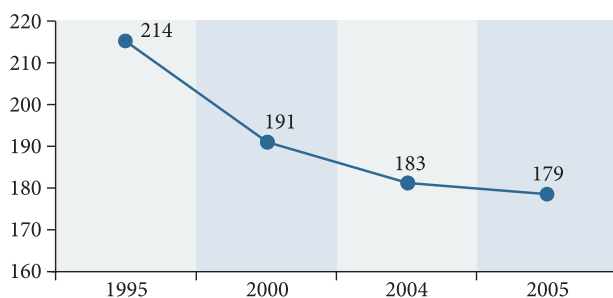


Przykład 5

Oto dane z *Małego Rocznika Statystycznego 2007* o liczbie łóżek w szpitalach ogólnych (w tysiącach):

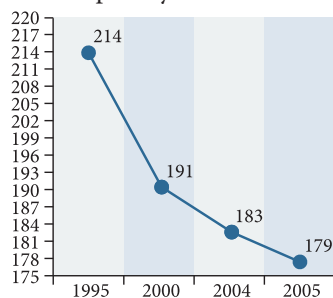
Rok	1995	2000	2004	2005
Liczba łóżek	213,97	190,95	183,28	179,49

Na podstawie tych danych możemy wykonać poniższy wykres (liczbę łóżek zaokrąglono do tysięcy).

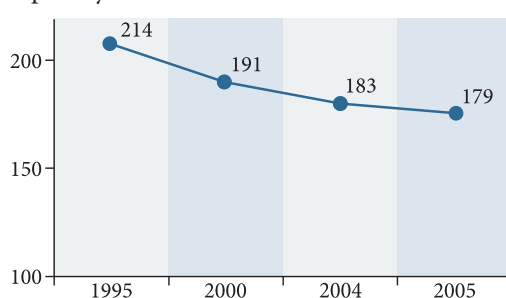


Te same dane możemy zaprezentować w nieco inny sposób i podpisać je odpowiednim komentarzem (manipulacja polega na obraniu różnych jednostek na osiach).

Dramatycznie spada liczba łóżek szpitalnych!



Od 1995 r. nieznacznie spadła liczba łóżek szpitalnych.



8. Mediana, średnia i dominanta

Umiejętności:

- prezentowanie danych z zastosowaniem mediany, dominanty, średniej arytmetycznej i średniej ważonej
- stosowanie skali centylowej
- interpretowanie parametrów opisowych dla danych empirycznych

Dane surowe i uporządkowane

Wszystkie wyniki badania statystycznego nazywamy **danymi surowymi**. Najczęściej są nimi zbiory liczb (wiek, wzrost, oceny z egzaminów, liczby piskląt w gniazdach, liczby wadliwych elementów produkcji, oglądalność programów telewizyjnych itd.). Nawet jeśli badanie ma charakter opisowy, np. podanie ulubionego gatunku filmowego, to i tak wyniki opisuje się liczbowo (tyle osób lubi fantastykę, tyle – kryminały, tyle – kino obyczajowe itd.).

Danych surowych jest na ogół bardzo dużo, więc wyciąganie wniosków na ich podstawie jest albo bardzo trudne, albo wręcz niemożliwe.

Przykład 1

Studenci trzeciego roku BIWU (czyli Bardzo Interesującego Wydziału Uniwersyte-tu) zdawali w sesji zimowej egzamin punktowany w skali od 0 do 9. Wyniki były następujące:

8 2 7 5 5 2 3 2 3 5 6 6 5 1 4 5 6 7 6 3 5 2 0 4 3 0 3 3 6 7 4 6 6 4 8 8 6 7 9 9 9 1 1 2 5 7
2 5 8 4 3 3 6 5 8 4 7 7 8 5 4 5 1 4 5 2 2 7 6 4 0 3 6 7 1

Są to punkty spisane z alfabetycznie ułożonej listy uczestników egzaminu. Inaczej mówiąc – pominięte zostały nazwiska zdających. Tak przedstawione wyniki są bardzo trudne do zinterpretowania. Lepszym pomysłem jest na przykład uszeregowanie danych w kolejności od najmniejszej do największej:

0 0 0 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5
6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 9 9 9

Taki zapis liczb nazywać będziemy **szeregiem uporządkowanym**.

Centyle

Statystyka opisowa zajmuje się prezentacją danych (liczbowych) surowych za pomocą innych liczb, których jest już tylko kilka.

ZZ i KPU

tematy 4.1, 4.2, 4.4

Multiteka

• Zwykły Joe

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.8

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 2

Jaś wrócił ze szkoły bardzo zadowolony, ponieważ dostał z klasówki trójkę. Mama Jasia wcale nie wykazała z tego powodu entuzjazmu i zareagowała typowym dla mam pytaniem: dlaczego tylko trójka? Oburzony Jaś tłumaczy: nie „tylko”, ale „aż” – w całej klasie były z tej klasówki trzy oceny dostateczne i dwie dobre, a wszystkie pozostałe były niższe!

Zatem tylko dwie osoby w klasie napisały prace lepiej od Jasia.

Przykład 3

Chętni do studiowania na BIWU muszą zdać egzamin wstępny oceniany w punktach. Ustalona przed egzaminem liczba dostępnych miejsc jest równa 230. Przyjęci zostaną ci kandydaci, którzy zmieścili się w grupie 230 osób z najlepiej zdanym egzaminem. Dla każdego zdającego najważniejsza zatem będzie pozycja na liście uporządkowanych wyników, a nie liczba punktów uzyskanych z egzaminu.

Przykłady 2 i 3 dotyczą ustalenia miejsca interesującej nas liczby w szeregu liczb uporządkowanych według wielkości. W badaniu statystycznym używa się do tego celu centyli.

Definicja

p -tym centylem w zbiorze liczb nazywamy taką wartość k , że $p\%$ liczb z tego zbioru jest mniejszych lub równych k .

Zdanie „Na egzaminie wstępnym Piotr znalazł się na trzydziestym centylu” oznacza więc, że wyniki słabsze niż jego (lub identyczne) uzyskało 30% zdających. Pozostała grupa, czyli 70% zdających, otrzymała wyniki lepsze od wyniku Piotra.

Przykład 4 ◀ zad. 8.1

Jeżeli w klasie Jasia (przykład 2) klasówkę napisało 32 uczniów i 30 uzyskało oceny niższe niż on (lub takie same), to wynik Jasia znajduje się na 94. centylu, ponieważ liczba 30 stanowi 94% liczby 32.

Zasada wyznaczania poszczególnych centyli podana w tym podręczniku nie jest jedyna. W różnych podręcznikach można znaleźć inne sposoby ich znajdowania, wyznaczone wartości mogą się więc nieznacznie różnić.

Mediana

Do opisywania danych surowych praktycznie wykorzystuje się tylko niektóre centyle. Najważniejszy wśród nich jest 50. (nazywany medianą), czyli wartość, poniżej której znajduje się połowa wyników.

◀ 8.1. W tabeli przedstawiono wyniki sprawdzianu w klasie liczącej 30 uczniów.

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów, którzy uzyskali tę ocenę	4	5	9	6	4	2

Na którym centylu znajduje się wynik ucznia, który dostał

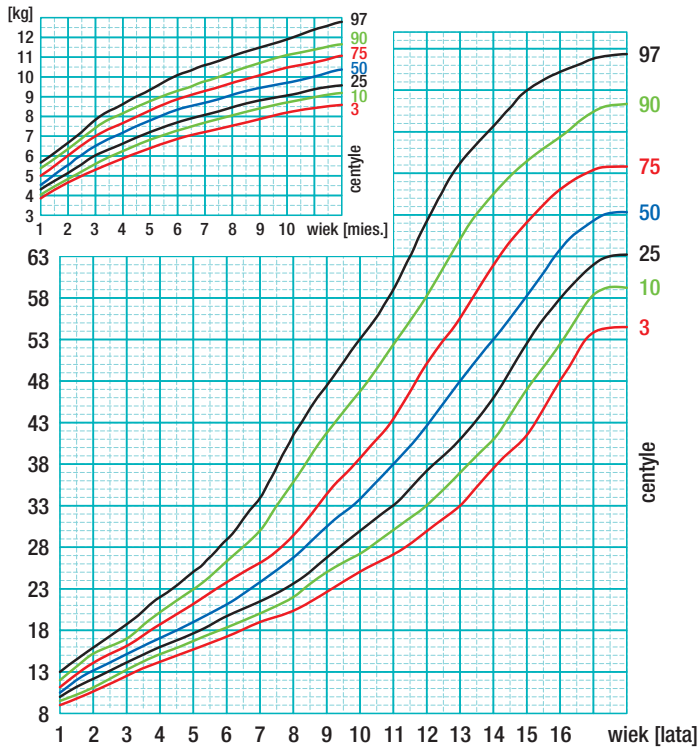
a) dwójkę? b) trójkę? c) czwórkę? d) piątkę? e) szóstkę?

Odp.: a) 30 b) 60 c) 80 d) 93 e) 100

Przykład 7 ◀ zad. 8.4

Lekarze pediatrzy kontrolują rozwój dziecka między innymi w ten sposób, że sprawdzają jego wagę i wzrost ze wzorcem umieszczonym na tzw. siatce centylowej. Rodzice mogą oczywiście zaznaczać wyniki pomiarów samodzielnie. Taka kontrola jest ważna szczególnie w pierwszym roku życia dziecka.

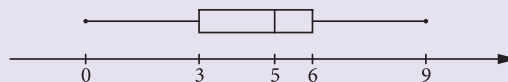
Siatka centylowa masy ciała chłopców



Mediana (zaznaczona niebieską linią) została wyznaczona na podstawie badań statystycznych przeprowadzonych w naszym kraju. Zauważmy, że na przykład:

- 90% chłopców w wieku 18 lat nie przekracza masy 82 kg,
- 25% chłopców w wieku 10 lat waży nie więcej niż 30 kg,
- połowa niemowląt płci męskiej w dniu urodzenia waży co najwyżej 4,6 kg, a po ukończeniu roku nie przekracza masy 10,5 kg,
- duże różnice (rozrzut) w masie ciała mają chłopcy w wieku 14,5 roku, a mianowicie: 10% z nich waży co najwyżej 44 kg, 15% mieści się w przedziale 44–49 kg, 25% w przedziale 49–55 kg, 25% w przedziale 55–65 kg, 15% w przedziale 65–73 kg, 10% przekracza masę 73 kg.

W ten sposób dane surowe zostały opisane za pomocą pięciu liczb: **wartości najmniejszej, dolnego kwartyła, mediany, górnego kwartyła oraz wartości największej**. Liczby te umieścimy na osi, a następnie wykonamy rysunek przydatny do interpretacji, którą przedstawimy później. Kwartyłe łączymy prostokątem, w którym na wysokości mediany stawiamy pionową kreskę; poziomymi kreskami łączymy wartości ekstremalne z kwartylami.



Otrzymany diagram pudełkowy często nazywany jest pudełkiem z wąsami.

◀ 8.4. Patrz s. 266.

Jednym z najważniejszych parametrów opisujących dane zebrane w badaniu statystycznym jest średnia arytmetyczna. Zanim zaczniemy ją stosować, warto, aby uczniowie samodzielnie powtórzyli pojęcie średniej – wprowadzone już w szkole podstawowej. Średnia arytmetyczna, podobnie jak jej uogólnienie, czyli średnia ważona, ma interpretację fizyczną (środek ciężkości układu).

◀8.5. Wyznacz średnią arytmetyczną danych surowych. Wynik zaokrąglij do drugiego miejsca po przecinku.

- Odp.: a) 4,31 b) 28,93

Wróćmy do danych z przykładu 1. W uporządkowanym szeregu 75 liczb:

wyznaczamy 38. wyraz, czyli medianę. Jest ona równa 5.

W statystyce zamiast „średnia arytmetyczna” mówimy krótko – **średnia**. Średnią wyników obserwacji jest ich suma podzielona przez liczbę wszystkich wyników. Średnią w próbie oznaczamy $\bar{x}$.

Jeżeli wyrazy szeregu $x_1, x_2, \dots, x_n$ są wszystkimi wynikami obserwacji, to ich **średnia** jest równa:

Przykład 8 ◀ zad. 8.5

Rozwiązanie

- a) 2, 2, 4, 4, 4, 9, 11, 12, 15, 15

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 9 + 11 + 12 + 2 \cdot 15}{10} = \frac{78}{10} = 7,8$$

Odp.: $\bar{x} = 7,8$

- b) 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, 3400, 4900

$$\bar{x} = \frac{890 + 2 \cdot 980 + 1278 + 3 \cdot 1500 + 2390 + 2600 + 2 \cdot 3400 + 4900}{12} = \frac{25\,318}{12} \approx 2109,83$$

Odp.: $\bar{x} = 2109,83$

- c) 23, 43, 73, 102, 165, 229, 332, 345, 372, 556

$$\bar{x} = \frac{23 + 43 + 73 + 102 + 165 + 229 + 332 + 345 + 372 + 556}{10} = 224$$

Odp.: $\bar{x} = 224$

d) 2, 2, 2, 2, 5, 6, 7, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 17, 17, 19

$$\bar{x} = \frac{4 \cdot 2 + 5 + 6 + 7 + 11 + 4 \cdot 12 + 13 + 2 \cdot 17 + 19}{16} \approx 9,44$$

Odp.: $\bar{x} = 9,44$

Dominanta

Do opisu zestawu danych liczbowych służy również miara zwana dominantą.

Definicja

Dominantą (modą, wartością modalną) w zestawie danych jest ta wartość, która występuje w nim najczęściej, ale więcej niż raz.

Przykład 9 ◀ zad. 8.7

Wskażemy dominantę w przedstawionym zestawie danych.

Rozwiązanie

a) 2, 2, 4, 4, 4, 9, 11, 12, 15, 15

Dominanta jest równa 4.

b) 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, 3400, 4900

Dominanta jest równa 1500.

c) 23, 43, 73, 102, 165, 229, 332, 345, 372, 556

Ten zestaw danych nie ma dominanty – każdy wynik występuje tylko raz.

d) 2, 2, 2, 2, 5, 6, 7, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 17, 17, 19

Dominantami tego zestawu są liczby 2 oraz 12.

Uporządkowany szereg danych może nie mieć dominanty, może też mieć ich wiele.

Przykład 10 ◀ zad. 8.8

Spójrzmy na uporządkowane wyniki egzaminu 75 studentów trzeciego roku BIWU na s. 260.

Mediana danych jest równa 5.

Teraz zgrupujemy wyniki tak, jak czyni to najczęściej każdy egzaminator – zliczymy poszczególne oceny.

Liczba punktów	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Liczba wyników	3	5	8	9	9	12	11	9	6	3

Dominantą tego zestawu jest również 5.

◀8.8. Zapisz dane surowe w szeregu uporządkowanym, wyznacz ich medianę, dominantę i średnią. Wyniki zaokrąglaj do całości.

a) Liczby punktów uzyskanych ze sprawdzianu w klasie 3 przez poszczególnych uczniów:

14, 17, 12, 11, 8, 5, 16, 11, 13, 14, 17, 12, 7, 8, 14, 11, 12, 10, 15, 11, 13, 9, 14, 11, 7, 18, 15.

b) Liczby batonów sprzedanych dziennie w sklepie szkolnym w ciągu miesiąca:

18, 14, 20, 11, 5, 66, 18, 11, 4, 3, 19, 21, 20, 15, 2, 1, 0, 12, 12, 20, 5, 9, 7, 50, 8.

c) Miesięczne opady w mm od stycznia do grudnia w Łowiczu:

30, 24, 30, 44, 52, 62, 85, 72, 45, 35, 33, 35.

d) Masa w gramach losowo wybranych z koszyka jajek kurzych:

41, 39, 42, 47, 36, 29, 52, 44, 42, 43, 40, 42, 41.

e) Liczby książek wypożyczonych w ciągu roku szkolnego przez poszczególnych uczniów:

25, 4, 107, 21, 23, 46, 17, 4, 0, 29, 34.

Odp.: a) mediana: 12, dominanta: 11, średnia: 12 b) mediana: 12, dominanta: 20, średnia: 15

c) mediana: 40, dominanta: 30 i 35, średnia: 46 d) mediana: 42, dominanta: 42, średnia: 41

e) mediana: 23, dominanta: 4, średnia: 28

◀8.7. Miesięczna średnia temperatura powietrza od stycznia do grudnia w Rzymie (zaokrąglona do 1°) wynosi w kolejnych miesiącach: 7°C, 8°C, 11°C, 14°C, 18°C, 22°C, 25°C, 25°C, 22°C, 17°C, 12°C, 9°C. Wskaż dominantę i wyznacz medianę tych danych.

Odp.: dominanta: 22°C i 25°C, mediana: 15,5°C

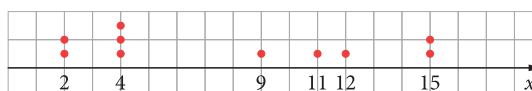
Średnia ocen:

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 12 + 6 \cdot 11 + 7 \cdot 9 + 8 \cdot 6 + 9 \cdot 3}{75} = 4,64$$

Zilustrujmy teraz dwa z omówionych zestawów danych. Na poziomej osi x zaznaczymy wartości otrzymanych wyników, a powyżej narysujemy tyle kropek, ile było tych wyników.

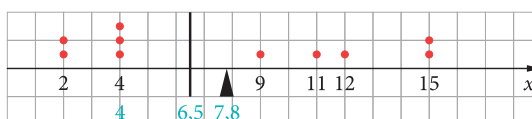
Przykład 11

a) Zestaw 2, 2, 4, 4, 4, 9, 11, 12, 15, 15 możemy przedstawić graficznie:

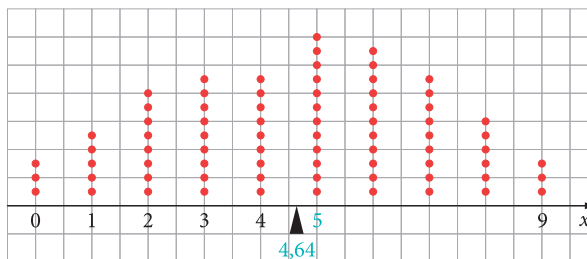


Zauważmy, że mediana dla tej próby jest równa 6,5. Średnią równą 7,8 wyznaczyliśmy w przykładzie 8a, a dominantę równą 4 – w przykładzie 9a.

Zaznaczmy te wielkości na rysunku.



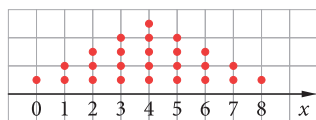
b) Dla zestawu z przykładu 10 mamy średnią równą 4,64 i dominantę oraz medianę równe 5.



Średnia wyników ma interpretację fizyczną. Jeżeli przyjmiemy, że zamiast rysowanych kółeczek mamy kulki o identycznej masie ułożone na osi w odpowiednich punktach jedna nad drugą, to **średnia wskazuje środek ciężkości** całego układu. Inaczej mówiąc, wyznacza ona taki punkt na osi, w którym masy kulek po obydwu jego stronach zrównoważą się. Jeżeli podeprzemy w tym punkcie oś, to żadna z jej stron nie przeważa drugiej.

Przykład 12

Na rysunku zaprezentowane są dane surowe pewnej obserwacji. Wyznamy na jego podstawie średnią, dominantę i medianę.



Szereg uporządkowany dla narysowanego zestawu danych to: 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8.

Rozwiązanie

Od razu możemy wskazać dominantę – najczęściej pojawia się wynik 4.

Na podstawie tego rysunku łatwo również wyznaczyć medianę – tyle samo kropek jest po lewej i po prawej stronie liczby 4.

Środek ciężkości całego układu jest również w punkcie 4. Aby to sprawdzić, obliczamy średnią:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 8}{25} = \frac{100}{25} = 4$$

Odp.: średnia = dominanta = mediana = 4

Średnia ważona

Średnią arytmetyczną czasem wygodnie jest zastąpić innym parametrem charakteryzującym dane surowe. Zanim go wprowadzimy, przeanalizujmy przykład.

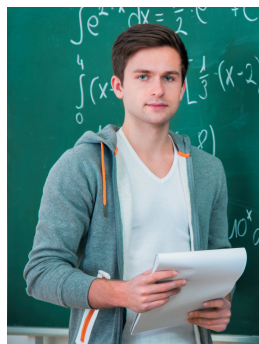
Przykład 13

Marzeniem wszystkich uczniów i nauczycieli jest opracowanie sprawiedliwego i jednoznacznego systemu oceniania, zwłaszcza w wypadku wystawiania ocen semestralnych. Najczęściej (choć nie zawsze) średnia arytmetyczna nie jest dobrym pomysłem – ocena z klasówki to nie to samo, co ocena na przykład za pracę domową. Pani Piórnik przyjęła następującą zasadę: oceny z pracy klasowej mnożyła przez 5, z odpowiedzi ustnej przez 3, z kartkówki przez 2, pozostałe oceny przez 1. Inaczej mówiąc, ocena z pracy klasowej była liczona pięciokrotnie, z odpowiedzi – trzykrotnie itd. Zatem do „średniej” musiała uwzględnić odpowiednio więcej ocen.

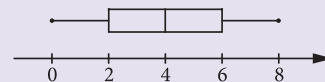
Izydor Muszka otrzymał w semestrze z prac klasowych oceny: 4, 3, 5, 3; z odpowiedzi ustnych: 4, 5; z kartkówek: 1, 5. Zgodnie z przyjętą zasadą „średnia” ocen Izydora jest więc równa:

$$\frac{5 \cdot (4 + 3 + 5 + 3) + 3 \cdot (4 + 5) + 2 \cdot (1 + 5)}{4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2} = \frac{114}{30} = 3,8$$

Pani Piórnik postawiła Izydorowi na semestr czwórkę.

**Uwagi metodyczne**

Rozkład wyników zaprezentowany na rysunku jest symetryczny. Symetryczny jest również diagram pudełkowy dla tych danych:

**Uwagi metodyczne**

W statystyce opisowej korzysta się również ze średniej ważonej oraz średniej geometrycznej. W podręczniku wprowadzamy pierwsze z tych pojęć, natomiast nie używamy (wprowadzonego zresztą na lekcjach geometrii) drugiego – dosyć trudno o pokazanie tu praktycznego zastosowania.

◀8.13. Dane są wyniki $x_1, x_2, \dots, x_n$ i ich wagi $a_1, a_2, \dots, a_n$. Oblicz średnią ważoną wyników.

a)

x_i	-2	1	3
a_i	3	5	4

b)

x_i	-2	-1	0	1	2
a_i	1	3	5	7	9

c)

x_i	3	4	5	6
a_i	0,3	0,2	0,4	0,1

d)

x_i	2	4	6
a_i	1	1	1

Odp.: a) $\frac{11}{12}$ b) $\frac{4}{5}$ c) 4,3 d) 4

Uwagi metodyczne

W podręczniku dla klasy drugiej wprowadziliśmy pojęcie **średniej geometrycznej** dwóch liczb (s. 204). Przypomnijmy, że jeżeli p i q są liczbami nieujemnymi, to ich średnią geometryczną jest liczba $\sqrt{pq}$. Pojęcie to można uogólnić na n nieujemnych liczb.

Średnią geometryczną n ($n > 1$) nieujemnych liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ jest liczba $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$.

Między średnią geometryczną a średnią arytmetyczną zachodzi następująca zależność: dla n nieujemnych liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Średnia geometryczna jest czasem lepszym przybliżeniem przeciętnego wyniku niż średnia arytmetyczna. Dotyczy to wielkości otrzymywanych w wyniku mnożenia, jak np. średnie oprocentowanie kapitału. Najczęściej jest więc używana w statystyce finansowej.

Definicja

Jeżeli wynikom $x_1, x_2, \dots, x_n$ nadane są nieujemne wagi $a_1, a_2, \dots, a_n$ takie, że $a_1 + a_2 + \dots + a_n > 0$, to **średnią ważoną** tych wyników jest liczba:

$$\bar{x}_w = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

Przykład 14 ◀ zad. 8.13

Obliczymy średnią ważoną następujących wyników pomiaru: 10, 11, 5, 4, 12 z podanymi wagami.

Rozwiązanie

a) Z wagami odpowiednio 2, 1, 3, 1, 1:

$$\bar{x}_w = \frac{2 \cdot 10 + 1 \cdot 11 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 12}{2 + 1 + 3 + 1 + 1} = \frac{62}{8} = 7,75$$

b) Z wagami odpowiednio 0,1, 0,2, 0,3, 0,2, 0,2:

$$\bar{x}_w = \frac{0,1 \cdot 10 + 0,2 \cdot 11 + 0,3 \cdot 5 + 0,2 \cdot 4 + 0,2 \cdot 12}{0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,2 + 0,2} = \frac{7,9}{1} = 7,9$$

Odp.: a) $\bar{x}_w = 7,75$ b) $\bar{x}_w = 7,9$

Wartość oczekiwana gry losowej jest średnią ważoną z przyjmowanych wartości $x_1, x_2, \dots, x_n$ z wagami $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Zauważmy, że:

- jeżeli wszystkie wagi są równe, to średnia ważona jest równa średniej arytmetycznej,
- jeżeli wszystkie wyniki są równe, to, niezależnie od przyjętych wag, ich średnia ważona jest taka sama (równa każdemu wynikowi),
- średnia ważona wyznacza środek ciężkości układu „kul” o różnych masach.

Przykład 15 ◀ zad. 8.14

Dwa izotopy miedzi mają masy atomowe 63 i 65. Wyznamy masę atomową miedzi otrzymanej w sposób naturalny, jeżeli wiadomo, że składa się ona z obu izotopów w stosunku odpowiednio 7 : 3.

Rozwiązanie

Szukana wielkość jest średnią ważoną liczb 63 i 65 z wagami 7 oraz 3.

$$\bar{x}_w = \frac{7 \cdot 63 + 3 \cdot 65}{7 + 3} = 63,6$$

Odp.: 63,6

◀8.14. Łukasz musi wybrać liceum. Aby ułatwić sobie podjęcie decyzji, wybrał cztery kryteria i przypisał im wagi. Następnie zdobył informacje o liceach i ocenił te kryteria w skali od 0 do 10 (im więcej punktów, tym lepsza ocena). Wyniki zebrał w poniższej tabeli. Które liceum powinien wybrać Łukasz?

	Wyniki matury	Łatwość dojazdu	Oferta nauki języków obcych	Opinia uczniów klas starszych
	waga 0,4	waga 0,3	waga 0,2	waga 0,1
I LO	6	3	4	8
II LO	3	5	2	7
III LO	5	7	3	9

Odp.: III LO

**Przykład 16** zad. 8.18

Wyznamy takie wagi m i p , aby średnia ważona liczby 7 z wagą m i liczby 4 z wagą p

a) była równa 5. b) była równa 5, a suma wag m i n wynosiła 1.

Rozwiązanie

a) Zgodnie z definicją: $m \geq 0$, $p \geq 0$, $m + p > 0$ i $\frac{7m + 4p}{m + p} = 5$.

Równanie możemy przekształcić do postaci $p = 2m$.

Rozwiązaniem zadania jest każda para liczb m , p spełniająca układ warunków:

$$\begin{cases} p > 0 \\ m > 0 \\ p = 2m \end{cases}$$

Takich par liczb jest nieskończenie wiele, np.: $\begin{cases} m = 1 \\ p = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} m = 3 \\ p = 6 \end{cases}$, $\begin{cases} m = \frac{2}{5} \\ p = \frac{4}{5} \end{cases}$.

Odp.: Rozwiązaniem jest każda para liczb m , p spełniająca układ warunków: $p > 0$ i $m > 0$ i $p = 2m$.

b) Szukamy rozwiązania układu warunków:

$$\begin{cases} p > 0 \\ m > 0 \\ p = 2m \\ p + m = 1 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu warunków jest jedna para liczb: $\begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ p = \frac{2}{3} \end{cases}$.

Odp.: $m = \frac{1}{3}$, $p = \frac{2}{3}$

Zadania

8.1. W tabeli przedstawiono wyniki sprawdzianu w klasie liczącej 30 uczniów.

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów, którzy uzyskali tę ocenę	4	5	9	6	4	2

Na którym centylu znajduje się wynik ucznia, który dostał

a) dwójkę? b) trójkę? c) czwórkę? d) piątkę? e) szóstkę?

8.2. Marta dostała na półrocze czwórkę z matematyki. Znajduje się z tym wynikiem na 84. centylu w klasie liczącej 25 osób. Jej koleżanka Zuzia otrzymała trójkę i znalazła się na 64. centylu. Ile czwórek było w tej klasie?

8.18. Średnia ważona liczby 15 z wagą m i liczby 33 z wagą n jest równa 21.

a) Podaj przykład takich wag m i n .

b) Jaką zależność spełniają wielkości m i n ?

Odp.: a) np. $n = 2$, $m = 4$

b) $m = 2n$

Odpowiedzi i rozwiązania

8.1. a) 30 b) 60 c) 80
d) 93 e) 100

8.2. pięć

8.3. np.:

{0, 1, 2, 2, 4, 8, 9, 9, 9, 11},

{1, 1, 3, 3, 5, 7, 7, 7, 8, 12},

{3, 3, 4, 4, 6, 6, 9, 9, 10, 15}

8.4. P, F, P, P

8.3. Podaj takie trzy zestawy dziesięciu liczb całkowitych, aby we wszystkich medianie była równa 6, ale każdy z nich miał inną wartość najmniejszą i inną wartość największą.

8.4. W 2019 r. egzamin maturalny z matematyki na poziomie podstawowym zdało 250 489 osób. Poniżej przedstawiona jest tabela zawierająca rozkład wyników tego egzaminu w poszczególnych centylach.

Na jej podstawie oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Wynik nie wyższy od 10% uzyskało 2% zdających.
 B. Wynik niższy od 30% uzyskało mniej niż 30 000 zdających.
 C. Liczba osób, które uzyskały wynik wyższy od 50%, przekracza 150 000.
 D. Liczba osób, które uzyskały wynik niższy niż 20%, jest mniejsza od liczby osób, które uzyskały wynik wyższy od 90%.

Matematyka – poziom podstawowy					
wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla
0	1	34	21	68	64
2	1	36	23	70	66
4	1	38	26	72	69
6	1	40	28	74	71
8	1	42	30	76	74
10	2	44	33	78	76
12	3	46	35	80	78
14	4	48	38	82	80
16	5	50	40	84	82
18	7	52	43	86	85
20	8	54	45	88	87
22	10	56	48	90	89
24	12	58	51	92	91
26	13	60	53	94	93
28	15	62	56	96	96
30	17	64	58	98	98
32	19	66	61	100	100

8.5. Wyznacz średnią arytmetyczną danych surowych. Wynik zaokrąglij do drugiego miejsca po przecinku.

- a) 1, 8, 7, 3, 4, 2, 9, 7, 1, 3, 2, 6, 3
b) 21, 32, 33, 45, 33, 17, 0, 21, 22, 17, 45, 48, 20, 51

8.6. Oblicz średnią liczbę biletów sprzedanych w kolejnych dniach na seans filmowy w kinie:

43, 102, 372, 229, 332, 556, 345, 23, 73, 165

8.7. Miesięczna średnia temperatura powietrza od stycznia do grudnia w Rzymie (zaokrąglona do 1°) wynosi w kolejnych miesiącach:

7°C, 8°C, 11°C, 14°C, 18°C, 22°C,
25°C, 25°C, 22°C, 17°C, 12°C, 9°C

Wskaż dominantę i wyznacz medianę tych danych.



8.8. Zapisz dane surowe w szeregu uporządkowanym, wyznacz ich medianę, dominantę i średnią. Wyniki zaokrąglij do całości.

- a) Liczby punktów uzyskanych ze sprawdzianu w klasie 3 przez poszczególnych uczniów: 14, 17, 12, 11, 8, 5, 16, 11, 13, 14, 17, 12, 7, 8, 14, 11, 12, 10, 15, 11, 13, 9, 14, 11, 7, 18, 15.
b) Liczby batonów sprzedanych dziennie w sklepiku szkolnym w ciągu miesiąca: 18, 14, 20, 11, 5, 66, 18, 11, 4, 3, 19, 21, 20, 15, 2, 1, 0, 12, 12, 20, 5, 9, 7, 50, 8.
c) Miesięczne opady w mm od stycznia do grudnia w Łowiczu: 30, 24, 30, 44, 52, 62, 85, 72, 45, 35, 33, 35.
d) Masa w gramach losowo wybranych z koszyka jajek kurzych: 41, 39, 42, 47, 36, 29, 52, 44, 42, 43, 40, 42, 41.
e) Liczby książek wypożyczonych w ciągu roku szkolnego przez poszczególnych uczniów: 25, 4, 107, 21, 23, 46, 17, 4, 0, 29, 34.

8.9. Krzysь chciał zważyć jednocześnie cztery szczeniaki na domowej wadze. Udało mu się zważyć trzy, bo suczka Sinuska uciekła. Średnia masa trzech zważonych szczeniąt wyniosła 2,1 kg. Sinuskę postawiono na wagę oddzielnie. Ważyła 1,9 kg. Ile średnio waży jeden szceniak?

8.5. a) 4,31 b) 28,93

8.6. 224

8.7. dominanty: 22°C i 25°C,
mediana: 15,5°C

8.8. a) mediana: 12, dominanta: 11, średnia: 12
b) mediana: 12, dominanta: 20, średnia: 15
c) mediana: 40, dominanty: 30 i 35, średnia: 46
d) mediana: 42, dominanta: 42, średnia: 41
e) mediana: 23, dominanta: 4, średnia: 28

8.9. 2,05 kg

- 8.10. a)** średnia: 8, mediana: 7, dominanta: 5
b) średnia: 5, mediana: 5, dominanta: 5 i 7
c) średnia: 17, mediana: 17, dominanta: 12

- 8.11. a)** w piątki
b) Najwięcej zarobiła na pierogach ruskich. Zysk byłby większy.

- 8.12.** Dyskoteka ma trwać do godz. 21⁰⁰, bufet będzie czynny 2,5 h.

8.10. Pani Gertruda prowadzi bar Uszko, w którym daniem głównym są pierogi. Przez trzy tygodnie pani Gertruda skrupulatnie notowała liczbę oraz rodzaj wydawanych porcji pierogów. W tabeli zanotowane są zebrane przez nią dane (R oznacza pierogi ruskie, M – pierogi z mięsem, G – pierogi z kapustą i grzybami).

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.
R	8	5	10	6	13	5	5	7	6	10	6	16	4	5	8	7	11	5	14	7	4
M	7	10	5	3	2	5	9	7	3	2	7	5	3	2	7	5	7	6	–	3	5
G	4	2	7	5	10	2	4	–	3	5	10	9	1	2	5	–	3	9	7	1	6

Wyznacz średnią, medianę i dominantę w zestawie liczb

- a) sprzedanych dziennie porcji pierogów ruskich.
 b) sprzedanych dziennie porcji pierogów z mięsem.
 c) wszystkich sprzedanych dziennie porcji pierogów.

Wyniki zaokrąglaj do całości.

8.11. Skorzystaj z danych dotyczących sprzedaży pierogów w barze Uszko z poprzedniego zadania.

- a) Pani Gertruda swoje obserwacje zapisywała w kolejne dni, zaczynając od poniedziałku. W jaki dzień tygodnia ma najwięcej chętnych na swoje danie główne?
 b) Cena hurtowa porcji pierogów, które kupuje pani Gertruda, wynosi: R – 3 zł, M – 5 zł, G – 4 zł, natomiast w Uszku klient płaci odpowiednio: 5,50 zł, 7 zł i 6 zł. Na którym rodzaju pierogów pani Gertruda zarobiła najwięcej? Czy zysk pani Gertrudy byłby większy czy mniejszy, gdyby każdy rodzaj pierogów kosztował w Uszku 6,50 zł za porcję (zakładamy sprzedaż na takim samym poziomie)?

8.12. Dwie klasy trzecie planują wspólną dyskotekę. Wszyscy chętni mają przyjść o godzinie 18. Trzeba ustalić, do której godziny ma trwać dyskoteka i jak długo powinien być czynny bufet. Uczniowie przeprowadzili pomiędzy sobą ankietę z pytaniem „Ile godzin zamierzasz zostać na dyskotekę?”. Odpowiedzi zebrano w następującej tabeli:

Czas (w godz.)	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	6
Liczba uczniów	2	1	6	4	12	4	8	1	2	1

Postanowiono, że dyskoteka zakończy się, gdy w szkole pozostanie nie więcej niż 50% liczby uczestników. Natomiast bufet będzie otwarty, dopóki będzie co najmniej 75% uczniów. Do której godziny ma trwać dyskoteka i jak długo będzie czynny bufet?

8.13. Dane są wyniki $x_1, x_2, \dots, x_n$ i ich wagi $a_1, a_2, \dots, a_n$. Oblicz średnią ważoną wyników.

a)

x_i	-2	1	3
a_i	3	5	4

c)

x_i	3	4	5	6
a_i	0,3	0,2	0,4	0,1

b)

x_i	-2	-1	0	1	2
a_i	1	3	5	7	9

d)

x_i	2	4	6
a_i	1	1	1

8.14. Łukasz musi wybrać liceum. Aby ułatwić sobie podjęcie decyzji, wybrał cztery kryteria i przypisał im wagi. Następnie zdobył informacje o liceach i ocenił te kryteria w skali od 0 do 10 (im więcej punktów, tym lepsza ocena). Wyniki zebrał w poniższej tabeli. Które liceum powinien wybrać Łukasz?

	Wyniki matury	Łatwość dojazdu	Oferta nauki języków obcych	Opinia uczniów klas starszych
	waga 0,4	waga 0,3	waga 0,2	waga 0,1
I LO	6	3	4	8
II LO	3	5	2	7
III LO	5	7	3	9

8.15. Średnia ważona liczby 4 z wagą 2 i liczby 8 z wagą x jest równa 7. Wyznacz x .

8.16. Średnia ważona podanego zestawu danych i ich wag wynosi $\bar{x}_w = 14,3$. Oblicz brakującą wagę m .

x	5	10	15	22
waga	2	3	m	4

8.17. Oblicz średnią ważoną swoich ocen z pierwszego semestru. Przyjmij jako wagę liczbę godzin danego przedmiotu w tygodniu.

8.18. Średnia ważona liczby 15 z wagą m i liczby 33 z wagą n jest równa 21.

a) Podaj przykład takich wag m i n .

b) Jaką zależność spełniają wielkości m i n ?

8.13. a) $\frac{11}{12}$ b) $\frac{4}{5}$ c) 4,3 d) 4

8.14. III LO

8.15. $x = 6$

8.16. $m = 1$

8.18. a) np. $n = 2$, $m = 4$

b) $m = 2n$


Prosto do matury
Prosto do matury

- 1. D**
- 2. B**
- 3. B**
- 4. P, P, F**
- 5.** $\bar{x} = 3,94$, dominanta: 1,5
- 6.** mediana: 3, $\bar{x} = 2,97$
- 7. 3, 3, 9, 13**
- W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszyście.
- 1.** Średni wzrost dziesięciorga zawodników drużyny jest równy 184 cm. Jedenasty zawodnik ma 195 cm wzrostu. Wskaż średni wzrost jedenastu sportowców.
A. 190 cm **B.** 188 cm **C.** 187 cm **D.** 185 cm
- 2.** Średnia ważona liczby 7 z wagą 3 i liczby 19 z wagą x jest równa 17. Wskaż x .
A. $x = 13$ **B.** $x = 15$ **C.** $x = 7$ **D.** $x = 12$
- 3.** Do zestawu danych surowych: 2, 3, 3, 4, 6, 6, 8, 9, 11, 11, 11, 25 dopisano jedną daną, taką że mediana całego zestawu nie uległa zmianie. Wskaż tę daną.
A. 5 **B.** 7 **C.** 10 **D.** 12
- 4.** Oceń prawdziwość podanych zdań.
 W uporządkowanym rosnąco szeregu liczb całkowitych mediana
A. może być liczbą niecałkowitą.
B. jest liczbą wymierną.
C. może być liczbą niewymierną.
- 5.** Kolejni klienci kiosku robili zakupy za następujące kwoty (w zł): 2,40; 0,60; 7,20; 5; 4,20; 1,50; 2; 6,40; 1,50; 12,50; 1,50; 2,50. Wyznacz średnią i dominantę tych kwot. Średnią podaj z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.
- 6.** We wszystkich klasach trzecich pewnej szkoły przeprowadzono wspólny sprawdzian z matematyki. Liczbę poszczególnych ocen ze sprawdzianu przedstawiono w tabeli.
- | | | | | | | |
|-------------|----|----|----|----|----|---|
| Ocena | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Liczba ocen | 23 | 16 | 35 | 27 | 11 | 3 |
- Wyznacz medianę i średnią tych ocen. Średnią podaj z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.
- 7.** Wyznacz zestaw czterech danych, w którym mediana wynosi 6, dominanta jest równa 3, a średnia 7.

9. Miary rozproszenia

Umiejętności:

- obliczanie odchylenia standardowego zestawu danych (także w wypadku danych odpowiednio pogrupowanych)
- interpretowanie parametrów opisowych dla danych empirycznych

Zastanówmy się teraz, jakie wady i zalety mają omówione wcześniej parametry opisujące dane surowe – mediana i średnia.

Mediana dzieli uporządkowany szereg danych na pół. Jej wartość zależy od liczby wszystkich wyników oraz od wartości wyrazu środkowego (dla nieparzystej liczby wszystkich danych) lub wyrazów środkowych (dla parzystej liczby wszystkich danych). Natomiast wartości skrajne nie mają na nią wpływu.

Przykład 1 ◀ zad. 9.1

W zestawieniu zarobków pracowników firmy Szwaczka (zob. przykład 6 na s. 258) mediana jest równa 1500. Z informacji tej wynika tylko tyle, że np. zarobki księgowej tej firmy wynoszące 3400 zł sytuują się w górnej połowie listy.

Przypomnijmy całą listę płac.

- 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, **3400**, 4900
mediana: 1500

Jeżeli księgowa dostanie podwyżkę o 1000 zł, to wartość mediany się nie zmieni.

- 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, **4400**, 4900
mediana: 1500

Jeżeli prezes firmy, zarabiający 4900 zł, dostanie pensję o 2000 zł większą, to mediana również się nie zmieni.

- 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, **4400**, **6900**
mediana: 1500

Natomiast zmiana na liście w sąsiedztwie mediany może zmienić jej wartość.

Na przykład w szeregu:

- 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, **1700**, 2390, 2600, 3400, **4400**, **6900**
mediana jest równa 1600.

◀ **9.1.** Kasia bawi się kostką do gry, rzucając ją wiele razy. Wyniki zapisuje w kolejności rzutów:
2, 6, 4, 5, 1, 1, 3, 2, 2, 2, 4, 5, 6, 6, 5,
1, 3, 4, 5, 2, 1, 3, 5, 6, 4, 3, 5, 1, 6, 2,
2, 3, 1, 3, 2, 3, 5, 6, 6, 5, 4, 4, 2, 4, 3,
4, 2, 1
Narysuj diagram częstości oraz wyznacz medianę tych wyników i ich dominantę.

Odp.: mediana: 3, dominanta: 2

ZZ i KPU

temat 4.3

Multiteka

- Zliczanie tłumu

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 4.9

Generator
testów i sprawdzianów

Uwagi metodyczne

W przykładzie 1 (s. 271) pokazujemy, jak zmiany w danych wpływają na zmianę wartości mediany oraz średniej. Podkreśliśmy, że w badaniu statystycznym najbardziej wątpliwe są wszelkie skrajne wyniki. Jeżeli ich wielkość znacząco odbiega od reszty, to nawet nadaje im się nazwę „samotników”. Średnia uwzględnia w sposób znaczący takie wyniki, mediana – nie. Dobrą ilustracją są listy z zarobkami, na ogół właśnie mediana znajduje się na nich bliżej większości liczb.

Dominanta ma w zasadzie zastosowanie minimalne. Uwaga ta dotyczy zwłaszcza takich zestawów danych, które nie mają dominanty istotnie „górującej” nad pozostałymi wartościami. Może się bowiem zdarzyć, że zmiana jednego wyniku całkowicie zmieni dominantę.

W zestawie: 2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dominantą jest najmniejsza z liczb, czyli 2. Jeżeli zmienimy jedną z dwójek na dziewiątkę (otrzymamy zestaw: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9), to dominantą zostanie 9, a więc liczba największa. Zaletą dominanty może być to, że (w przeciwieństwie do średniej) musi być liczbą występującą w zestawie, np. jeżeli badamy, ile dni wolnych pracownicy firmy biorą latem, to dominanta powie nam o najbardziej typowej długości letniego urlopu.

Jedną z najczęściej nadużywanych metod korzystania z wyników badań statystycznych jest operowanie średnią tam, gdzie powinno się używać dominanty. Z pewnością każdy poda tu odpowiednie przykłady (średnia podwyżka pensji nauczyciela, średni czas pracy itd.).

Porównajmy teraz średnie dla powyższych danych. W szeregu:

- 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, 3400, 4900
średnia jest równa 2109,83,
- 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, **4400**, 4900
średnia jest równa 2193,17,
- 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, **4400**, **6900**
średnia jest równa 2359,83.

Zatem zmiana w szeregu danych nawet jednej wartości powoduje zmianę średniej.

Średnia – środek ciężkości rozkładu danych – ma więc istotną zaletę. Reaguje na zmiany każdej wartości rozkładu. Poza tym wygodnie jest ją stosować w różnych obliczeniach matematycznych. Może się jednak zdarzyć, że to, co uważamy za zaletę średniej, w konkretnym przypadku jest wadą. Dzieje się tak na przykład wtedy, gdy w szeregu danych wystąpi wynik nietypowy.

Przykład 2

W drugim semestrze, do końca maja, Agata otrzymała z matematyki następujące oceny:

4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6

Zauważmy, że mediana i średnia tych wyników są identyczne i wynoszą 5. Agata spodziewała się na świadectwie piątki z matematyki. Niestety, na początku czerwca nie zrobiła pracy domowej i „złapała” jedną ocenę niedostateczną. Zatem jej wyniki utworzyły szereg:

1, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6

Mediana danych nadal jest równa 5. Natomiast średnia ocen spadła do 4,6.

W tym wypadku wydaje się, że do wystawienia końcowej oceny lepiej posłużyć się medianą, traktując jedną ocenę niedostateczną jako wynik dla Agaty nietypowy.

Częstym błędem jest wyznaczanie średniej dla populacji jako średniej dla średnich jej podzbiorów.

Przykład 3

Dwie rodziny wybrały się wspólnie na grzybobranie. Każde z szóstki dzieci pierwszej rodziny zebrało odpowiednio 10, 8, 7, 9, 8 i 6 grzybów. Czworko dzieci z drugiej rodziny przyniosło odpowiednio 3, 7, 6, 4 grzybów. Obliczmy średnią liczbę grzybów zebranych przez dziecko w każdej z rodzin i średnią liczbę grzybów zebranych przez każde z dzieci.

Rozwiązanie

Średnia liczba grzybów znaleziona przez jedno dziecko w pierwszej rodzinie wynosi:

$$\frac{10 + 8 + 7 + 9 + 8 + 6}{6} = \frac{48}{6} = 8$$

a w drugiej jest równa:

$$\frac{3 + 7 + 6 + 4}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

Średnia liczba grzybów zebranych przez jedno dziecko podczas tej wyprawy to $\frac{48 + 20}{10} = 6,8$.

Zauważmy, że ta średnia nie jest równa średniej dwóch wyznaczonych średnich (która wynosi $\frac{8 + 5}{2} = 6,5$).

Często zdarza się, że średnia z wyliczonych wcześniej średnich klasowych jest błędnie nazywana średnią ocen w szkole.

Różne parametry charakteryzujące próbę wprowadzane są po to, aby na ich podstawie można było wyciągnąć poprawne wnioski o całej populacji. Zastanówmy się, jak podanie mediany, dominanty i średniej spełnia to zadanie.

Przykład 4

Klasy 3a i 3b liczą po 20 osób. Biblioteka szkolna zebrała dane o liczbie książek przeczytanych przez uczniów obydwu klas we wrześniu i październiku. Po podsumowaniu danych i wykonaniu obliczeń statystycznych okazało się, że parametry opisujące wyniki były identyczne dla obu klas. Liczba 4 była zarówno średnią, medianą, jak i dominantą zestawu danych dotyczących każdej z klas.

Jakie zatem wnioski (wspólne dla obydwu klas) można wyciągnąć na podstawie takich informacji?

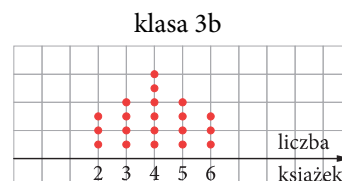
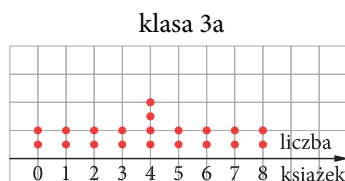
- Średnia jest równa 4, czyli każdy z uczniów przeczytał przeciętnie 4 książki.
- Mediana jest równa 4, zatem połowa uczniów przeczytała co najwyżej 4 książki oraz połowa uczniów przeczytała co najmniej 4 książki.
- Dominanta jest równa 4, czyli największa liczba uczniów przeczytała w badanym okresie 4 książki.

**Uwagi metodyczne**

Proponujemy zwrócić uwagę na przykład 3, ponieważ błąd polegający na uśrednianiu średnich jest dosyć często popełniany.

Czy z powyższych danych można wnioskować, że uczniowie obydwu klas prezentują podobne grupy czytelników? Niezupełnie – można się o tym przekonać, porównując dane surowe, które były następujące:

Podane rozkłady nie wyczerpują wszystkich możliwości dopasowania danych surowych do informacji podanych na początku przykładu.



W klasie 3a cztery osoby przeczytały co najmniej 7 książek, ale jednocześnie dość liczna jest grupa uczniów nie lubiących czytać, wyniki są równomiernie rozproszone. Natomiast w klasie 3b każdy uczeń przeczytał co najmniej 2 książki, wszystkie wyniki są zgrupowane blisko średniej, nie ma tu „maniaków” czytania.

Podanie średniej, dominanty i mediany nie wystarcza zatem do opisu badanej populacji.

Uwagi metodyczne

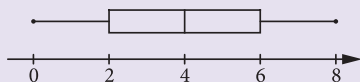
Mediana i dominanta to najprostsze miary tendencji centralnych badanych wyników. W celu dokładniejszego opisu danych definiowane są miary ich rozproszenia. Mamy tu analogię do pojęć wprowadzanych przy zmiennej losowej (wartość oczekiwana – wariancja – odchylenie standardowe) w rachunku prawdopodobieństwa.

Omówione cechy wygodnie jest obserwować na diagramach pudełkowych. Wykonajmy je, aby zilustrować poziom czytelnictwa w obydwu klasach z przykładu 4 (s. 273).

Aby obliczyć kwartyle, wypiszmy dane w postaci uporządkowanych rosnąco szeregów.

Klasa 3a:

0 0 1 1 2 2 3 3 4 4 4 4 5 5 6 6 7 7 8 8



Klasa 3b:

2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6



Wprowadzimy teraz parametry mierzące rozproszenie wyników.

Jest wiele takich miar. Najprostszą jest **rozstęp** w uporządkowanym szeregu, czyli odległość między danymi skrajnymi.

W wynikach klasy 3a rozstęp jest równy $8 - 0 = 8$, a w wynikach klasy 3b: $6 - 2 = 4$. Wadą tej miary jest jej wrażliwość na pozycje skrajne. Jeżeli pojawi się wynik nietypowy, to rozstęp będzie bardzo duży i niewiele powie o skupieniu danych wokół średniej.

Dla rzeczywistych potrzeb wnioskowania statystycznego taka miara rozproszenia jest za mało dokładna i dlatego niezbyt przydatna. Ważniejsza jest informacja o przeciętnej odległości wyników od wartości średniej.

Definicja

Przeciętnym odchyleniem od średniej $\bar{x}$ liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ jest wartość:

$$\frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

Obydwa diagramy są symetryczne, ale pudełko danych klasy 3a jest dłuższe, a odległość między skrajnymi wartościami jest dużo większa niż w pudełku ilustrującym rozkład danych klasy 3b. Jest to zgodne z obserwacją, że wyniki pierwszej grupy są rozproszone, a drugiej – skupione wokół średniej.

Poza rozstępem, czyli odległością między końcami „wąsów”, istotną informacją opisującą rozkład danych jest właśnie długość pudełka. Jest to tzw. **odstęp międzykwartylowy**, czyli różnica między górnym a dolnym kwartylem. Wewnątrz pudełka mieści się połowa danych, więc wartość odstępu międzykwartylowego dotyczy połowy otrzymanych wyników.

Odstęp międzykwartylowy dla danych klasy 3a jest równy $6 - 2 = 4$, a dla klasy 3b: $5 - 3 = 2$, czyli jest on istotnie mniejszy – połowa wszystkich danych grupuje się bliżej średniej.

Przykład 5

Obliczmy przeciętne odchylenie liczb 1, 4, 7, 8, 10 od ich średniej $\bar{x} = 6$.

Rozwiązanie

Kolejne odległości są równe:

$$|1 - 6| = 5, |4 - 6| = 2, |7 - 6| = 1, |8 - 6| = 2, |10 - 6| = 4$$

Zatem odchylenie to $\frac{5 + 2 + 1 + 2 + 4}{5} = 2,8$.

Odp.: Przeciętne odchylenie liczb tego zestawu od ich średniej wynosi 2,8.

Zauważmy, że suma nieujemnych liczb jest tym mniejsza, im mniejsze są jej składniki i na odwrót – jeżeli suma nieujemnych liczb jest mała, to jej składniki muszą być również małe (żadne wyrazy nie mogą się przecież zredukować). Zatem jeżeli przeciętne odchylenie od średniej jest małe, to dane są zgrupowane blisko niej.

Wyrażanie wielkości za pomocą wartości bezwzględnej nie jest wygodne. Takie wzory nie dają się na przykład łatwo przekształcać. Dlatego (choć nie jest to jedyny powód) narzędziem mierzącym rozproszenie wyników, używanym w statystyce, jest wielkość wyrażona przez kwadraty odległości, tzw. **wariancja**.

Definicja

Wariancją w zestawie wyników $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy przeciętne odchylenie kwadratowe od wartości średniej $\bar{x}$, czyli:

$$\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Przykład 6

Obliczmy wariancję danych 2, 2, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 8.

Rozwiązanie

Kolejno obliczamy:

- średnią (z dokładnością do jednego miejsca po przecinku): $\bar{x} = 5,1$
- wariancję: $\frac{2 \cdot 3,1^2 + 3 \cdot 1,1^2 + 4 \cdot 0,1^2 + 3 \cdot 0,9^2 + 1,9^2 + 2 \cdot 2,9^2}{15} = \frac{45,75}{15} = 3,05$

Odp.: Wariancja jest równa 3,05.

Wariancja ma tę samą własność co przeciętne odchylenie, tzn. jest sumą nieujemnych składników, więc jest mała tylko wtedy, gdy składniki są małe. Jej wadą jest niewygodna, mierzona w kwadratach, jednostka. Wprowadzona została więc jeszcze jedna miara rozproszenia, tzw. **odchylenie standardowe**.

Uwagi metodyczne

Przed zdefiniowaniem odchylenia standardowego wprowadzamy pojęcie wariancji. Jej interpretacja jako miary rozrzutu danych (średnie odchylenie kwadratowe od wartości średniej) ma podobny charakter do odchylenia standardowego.

Samodzielnie jednak wariancja występuje rzadko, m.in. ze względu na jednostkę mierzoną w kwadratach. Wariancja posłuży nam tylko jako pojęcie pomocnicze, potrzebne do wprowadzenia odchylenia standardowego.

Najważniejszym parametrem jest odchylenie standardowe wyrażane jako pierwiastek z wariancji. Wygoda stosowania odchylenia standardowego zamiast przeciętnego odchylenia będzie dla naszych uczniów, niestety, co najmniej wątpliwa.

Nie przekonamy ich argumentem, że matematycy wolą mieć do czynienia z funkcjami różniczkowalnymi, a te wyrażane za pomocą modułów najczęściej założenia różniczkowalności nie spełniają. Bezpośrednie zastosowanie odchylenia standardowego (przy rozkładzie normalnym) uczniowie poznają dopiero na dalszym etapie nauki statystyki – na studiach. Najprościej (i najuczciwiej) jest ich o tym uprzedzić. W szkole mają poznać pewne narzędzie statystyczne oraz zrozumieć jego interpretację. Natomiast istotę i wygodę stosowania tego narzędzia zauważą później.

Definicja

Odchyleniem standardowym w zestawie wyników obserwacji nazywamy pierwiastek kwadratowy z wariancji. Odchylenie standardowe oznaczamy σ .

Zatem:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

σ (sigma) jest małą literą alfabetu greckiego.



Zaletą odchylenia standardowego jest to, że wyraża się je, podobnie jak przeciętne odchylenie, w jednostkach liniowych, a nie kwadratowych. Nadal zachowana zostaje podstawowa własność potrzebna do oszacowania rozproszenia – **odchylenie standardowe jest małe wtedy i tylko wtedy, gdy wyniki są skupione blisko średniej**.

Ze względu na zależność między wariancją a odchyleniem standardowym przyjmuje się σ^2 jako oznaczenie wariancji.

Dla zestawu danych z przykładu 6 odchylenie standardowe jest równe:

$$\sigma = \sqrt{3,05} \approx 1,75$$

Przykład 7 ◀ zad. 9.3

Powróćmy jeszcze raz do wyników czytelnictwa w klasach 3a i 3b (zob. przykład 4 na s. 273).

Obliczymy odchylenie przeciętne i odchylenie standardowe dla obydwu rozkładów wyników. Przypomnijmy, że średnie wyników są równe 4 w każdej z klas.

W klasie 3a (0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8) mamy:

- odchylenie przeciętne: $\frac{40}{20} = 2$
- odchylenie standardowe:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2(0-4)^2 + 2(1-4)^2 + 2(2-4)^2 + 2(3-4)^2 + 2(5-4)^2 + 2(6-4)^2 + 2(7-4)^2 + 2(8-4)^2}{20}}$$

$$\sigma = \sqrt{6} \approx 2,45$$

Natomiast w klasie 3b (2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6) mamy:

- odchylenie przeciętne: $\frac{20}{20} = 1$
- odchylenie standardowe:

$$\sigma = \sqrt{\frac{3(2-4)^2 + 4(3-4)^2 + 4(5-4)^2 + 3(6-4)^2}{20}} = \sqrt{\frac{8}{5}} \approx 1,26$$

◀9.3. Oblicz średnią, wariancję i odchylenie standardowe następujących danych surowych. Wyniki zaokrąglaj do jednego miejsca po przecinku.

a) Masa (w gramach) losowo wybranych z koszyka jajek kurzych:

41, 39, 42, 47, 36, 29, 52, 44, 42, 43, 40, 42, 41

b) Liczby pacjentów przychodni lekarskiej w wybranych dniach:

37, 59, 24, 113, 49, 83, 57, 57, 69, 17

c) Rozmiary damskich ubrań zakupionych w pewnym sklepie:

38, 40, 38, 42, 42, 42, 44, 50, 36, 38, 38, 46, 42, 40, 44, 46, 42, 36, 40, 40

d) Liczby sprzedanych przez kwiaciarkę tulipanów w losowo wybranych dziesięciu dniach:

112, 108, 102, 115, 92, 111, 84, 98, 105, 93

Odp.: a) $\bar{x} = 41,4$, $\sigma^2 = 26,5$, $\sigma = 5,2$ b) $\bar{x} = 56,5$, $\sigma^2 = 711,1$, $\sigma = 26,7$

c) $\bar{x} = 41,2$, $\sigma^2 = 11,6$, $\sigma = 3,4$ d) $\bar{x} = 102,0$, $\sigma^2 = 91,6$, $\sigma = 9,6$

Wyniki potwierdzają wcześniejsze obserwacje dotyczące rodzaju czytelnictwa w obydwu klasach. Ale zauważmy, że obserwacje te zostały poczynione po zaprezentowaniu danych surowych eksperymentu. Teraz moglibyśmy wyciągnąć podobne wnioski bez znajomości dokładnych wyników, a tylko mając do dyspozycji następujące liczby:

- w zestawie wyników klasy 3a:
dominanta = mediana = średnia = 4, odchylenie standardowe = 2,45,
- w zestawie wyników klasy 3b:
dominanta = mediana = średnia = 4, odchylenie standardowe = 1,26.

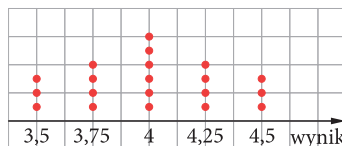
Przykład 8

Obliczymy odchylenie standardowe wyników o rozkładzie zbliżonym do rozkładu wyników klasy 3b, ale skupionych bliżej średniej.

Rozwiązanie

W zestawie danych:

3,5 3,5 3,5 3,75 3,75 3,75 3,75 4 4 4 4 4 4
4,25 4,25 4,25 4,25 4,5 4,5 4,5



średnia wynosi 4, sześć wyników jest oddalonych od niej o 0,5, osiem – o 0,25.

Odchylenie standardowe tego zestawu równa się:

$$\sqrt{\frac{6 \cdot 0,5^2 + 8 \cdot 0,25^2}{20}} = \sqrt{0,1} \approx 0,32$$

i jest dużo mniejsze niż w wypadku zestawu wyników klasy 3b.

Grupowanie danych

Pokazaliśmy wcześniej przykłady grupowania danych w tabelach. Przypomnijmy tabelę wyników egzaminu 75 studentów BIWU:

Liczba punktów	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Liczba wyników	3	5	8	9	9	12	11	9	6	3

Na podstawie tak zaprezentowanych danych wyznaczaliśmy dominantę i średnią wyników (medianę wskazujemy w uporządkowanym szeregu). W tabeli mamy podaną informację, jak często występuje każdy z wyników i dlatego tak opracowane dane noszą nazwę **tabeli rozkładu częstości**.

Liczba punktów	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Liczba wyników	3	5	8	9	9	12	11	9	6	3
Częstość względna	$\frac{3}{75} = 0,04$	$\frac{5}{75} \approx 0,06$	$\frac{8}{75} \approx 0,11$	$\frac{9}{75} = 0,12$	$\frac{9}{75} = 0,12$	$\frac{12}{75} = 0,16$	$\frac{11}{75} \approx 0,15$	$\frac{9}{75} = 0,12$	$\frac{6}{75} = 0,08$	$\frac{3}{75} = 0,04$
Częstość względna w %	4	6	11	12	12	16	15	12	8	4

Diagram częstości względnej pokazujemy na następnej stronie.

Uwagi metodyczne

Na podstawie tabeli na dole strony podręcznika uczniowskiego możemy odpowiedzieć np. na pytanie „Jak często wśród liczby punktów wystąpiła szóstka?”. Odpowiedź „11 razy” mówi niewiele. Wyczerpująca jest odpowiedź „11 razy na 75 zdających”. Istotna zatem jest częstość względna wyniku. Podajemy ją w postaci ułamka zwykłego $\frac{11}{75}$ albo ułamka dziesiętnego 0,15 (przybliżonego), albo w postaci procentowej 15%.

Częstość bezwzględna to, inaczej mówiąc, liczebność występowania danej w zestawie danych surowych. Zauważmy, że pytanie o częstość względną to nic innego jak pytanie o to, jakim procentem całości jest interesująca nas wielkość. W omawianym przykładzie powiemy, że szóstka stanowi 15% wszystkich wyników.

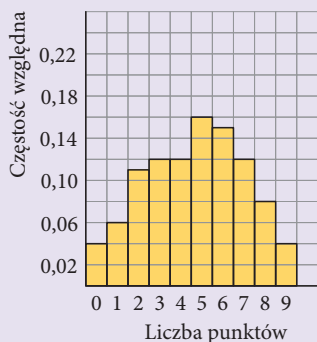
Wniosek: Suma wszystkich częstości względnych wyrażonych w ułamkach jest równa 1, a wyrażonych w procentach jest równa 100%.

Wyniki zapisane w postaci ułamków dziesiętnych lub procentów na ogół podajemy w przybliżeniu, ale musimy tę operację wykonać tak, aby zachować powyższą własność częstości.

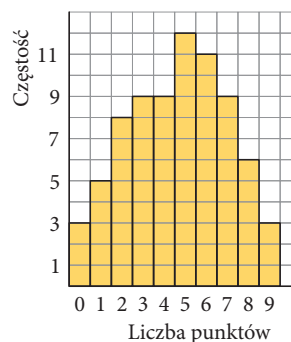
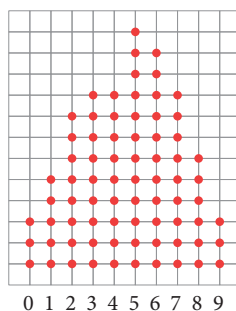
Wyznamy częstości względne wszystkich wyników z tabeli.

Trzy ułamki dziesiętne zostały zaokrąglone – dwa zgodnie z przyjętą regułą zaokrąglania ($\frac{8}{75} \approx 0,11$, $\frac{11}{75} \approx 0,15$), a jeden nie ($\frac{5}{75} \approx 0,06$), ale dzięki temu suma wszystkich ułamków równa się 1.

Diagramy częstości mają podobny kształt, ale inne są jednostki na pionowych osiach.



Częstym sposobem prezentowania danych zgrupowanych są diagramy słupkowe, wykonane na podstawie tabeli częstości. Są one dokładnym odwzorowaniem „punktowych” rysunków, co można zaobserwować na poniższych rysunkach.



Uwagi metodyczne

Diagram słupkowy narysowany w przykładzie 9 ilustruje rozkład częstości. Ze względu na przydatność tego typu diagramów oraz ich cechy charakterystyczne określa się je specjalną nazwą.

Histogramem nazywamy pionowy diagram słupkowy, w którym pole słupka reprezentuje częstość, z jaką pojawiły się wyniki obserwacji należące do klasy reprezentowanej przez słupek. Sąsiednie słupki mają wspólne boki.

Interpretując histogram z przykładu 9 geometrycznie, możemy stwierdzić, że jego pole (czyli pole wszystkich słupków łącznie) jest równe 20, a pole słupka nad 4 jest równe 6, zatem częstość względna liczby 4 jest równa $\frac{6}{20} = 0,3$.

Jednostką pola w histogramie jest prostokąt o bokach równych jednostkom osi. Często jednostki te są różne i wówczas prostokąt nie jest kwadratem.

Zauważmy, że jeżeli słupki mają równe podstawy, to dominantą jest wielkość reprezentowana przez najwyższy słupek diagramu (pole takiego słupka jest większe od pola każdego z pozostałych).

Przykład 9 zad. 9.5

Na diagramie przedstawiono liczbę zniszczonych w ostatnim sezonie krzeseł we wszystkich kinach sieci Sowa. Odczytamy z tego diagramu różne informacje.

Rozwiązanie

a) Ile kin liczy sieć Sowa?

Słupki diagramu podzielone zostały poziomymi kreskami – każda kostka dotyczy jednego kina.

Zatem dane w diagramie są następujące:

0 zniszczonych krzeseł – w jednym kinie, 1 zniszczone krzesło – w trzech kinach, 2 zniszczone krzesła – w dwóch kinach, 3 – w czterech kinach itd. Cała sieć składa się z dwudziestu kin.

b) W ilu kinach uległy zniszczeniu jakieś krzesła?

W dziewiętnastu.

c) Jaki jest rozstęp liczby zniszczonych krzeseł?

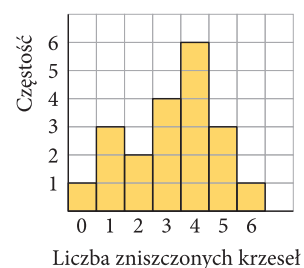
Najmniejsza liczba jest równa 0, największa 6, zatem rozstęp jest równy 6.

d) Jaka liczba dominuje?

4 (aż w sześciu kinach zniszczone zostały 4 krzesła)

e) W ilu kinach zniszczono co najmniej 5 krzeseł?

W czterech.



◀9.5. Diagram przedstawia liczby punktów zdobyte w turnieju przez poszczególnych zawodników.

Na jego podstawie odpowiedz na poniższe pytania.

a) Ile osób uczestniczyło w zawodach?

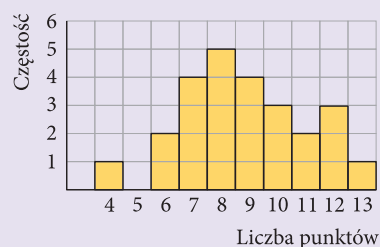
b) Jaką najmniejszą i jaką największą liczbę punktów zdobyli zawodnicy?

c) Ile wynosi dominanta liczby punktów?

d) Ilu zawodników zdobyło co najmniej 9 punktów?

e) Ile średnio punktów zdobył w tym turnieju jeden zawodnik?

Odp.: a) 25 b) najmniejsza: 4, największa: 13 c) 8 d) 13 e) 8,84



f) Ile jest równa mediana?

3,5 (w dwudziestu uporządkowanych danych surowych mediana jest średnią arytmetyczną 10. i 11. wyniku)

g) Ile jest równa średnia liczba zniszczonych krzeseł?

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 1}{20} = 3,2$$

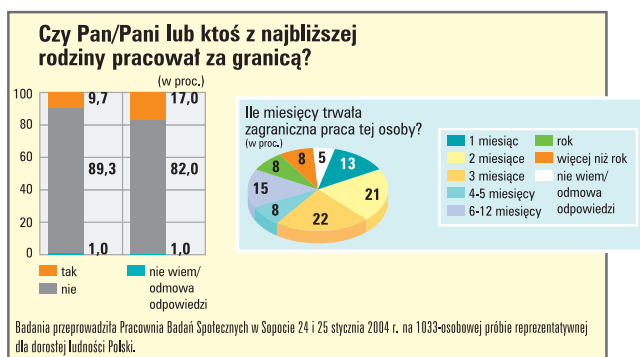
h) Ile jest równe odchylenie standardowe w tym zestawie danych?

$$\sigma = \sqrt{\frac{(0-3,2)^2 + 3(1-3,2)^2 + 2(2-3,2)^2 + 4(3-3,2)^2 + 6(4-3,2)^2 + 3(5-3,2)^2 + (6-3,2)^2}{20}}$$

$$\sigma \approx 1,57$$

Za pomocą wprowadzonych parametrów opisujemy dane surowe zebrane w wyniku obserwacji próby jakiejś populacji. Jeżeli chcemy uogólnić wyciągnięte wnioski na całą populację, to bardzo ważnym warunkiem jest właściwy dobór próby – istotna jest np. jej liczebność i sposób losowania.

Wyniki badań statystycznych prezentowane np. w gazetach powinny być zaopatrzone w informacje na temat rodzaju próby.



Próba powinna być reprezentatywna dla badanej populacji.

Jeżeli ten warunek jest spełniony, to najczęściej cechy rozkładu wyników próby są również cechami rozkładu całej populacji. Inaczej mówiąc, parametry opisujące próbę są dobrym przybliżeniem parametrów opisujących całą populację.

Pokażemy na koniec przykład sposobu wyboru próby losowej innego niż typowe losowanie ze zbioru wszystkich elementów.

Uwagi metodyczne

Uwaga, że próba powinna być reprezentatywna dla badanej populacji (zapisana pod ramką poniżej) jest bardzo ważna, ponieważ dotyczy możliwości uogólniania cech rozkładu próby na całą populację.

Ten tekst wymaga jednak dodatkowego komentarza.

I. Wkraczamy w tym momencie na teren wnioskowania statystycznego, stąd brak rozwinięcia tematu (będzie on rozwinięty dopiero w trakcie dalszej nauki, na wyższej uczelni).

II. Nie definiujemy „próby reprezentatywnej” – odwołujemy się do intuicyjnego rozumienia tego pojęcia (nauką o sposobach wyboru takich prób zajmuje się jedna z gałęzi statystyki). Podajemy natomiast przykład złego doboru próby („Wstęp do statystyki” – tekst w ramce, s. 253, opisujący prognozę wyników wyborów na stanowisko prezydenta USA w 1936 r.) oraz prezentujemy tzw. warstwową próbę losową, która jest przykładem innego wyboru próby niż zwykłe losowanie (przykład 10 na s. 280).

Dodajmy jeszcze, że we **wnioskowaniu statystycznym** przy przejściu (uogólnianiu) od wariancji próby $x_1, x_2, \dots, x_n$ wyników do wariancji całej populacji dokładniejszym przybliżeniem tej ostatniej jest liczba:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}$$

(jest to tzw. wariancja z próby)

Podobnie, lepszym przybliżeniem odchylenia standardowego całej populacji jest liczba: $\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}}$ (jest to tzw. odchylenie standardowe z próby)

Z arytmetycznych własności takiego działania wynika, że otrzymane w ten sposób liczby – wariancja i odchylenie standardowe – będą miały trochę większą wartość. Takie obliczenia pozwalają na szerszy margines błędu przy uogólnianiu wniosków na całą populację. Można powiedzieć, że tak obliczone wartości wariancji i odchylenia standardowego są nie tyle lepszymi, ile bezpieczniejszymi przybliżeniami parametrów odnoszących się do populacji generalnej. Oczywiście dla dużych wartości n (przy bardzo licznych próbach) różnice są praktycznie niezauważalne. Problem może wystąpić i mieć znaczenie podczas używania kalkulatora naukowego z zaprogramowanymi obliczeniami statystycznymi. Należy wówczas sprawdzić, który klawisz podaje wyniki odnoszące się do próby (wykonuje dzielenie przez $n - 1$), a który – wyniki odnoszące się do całej populacji (wykonuje dzielenie przez n). Jeszcze raz przypomnijmy, że w statystyce opisowej nie wyróżniamy „próby wybranej z populacji”. Zbiory elementów, które badamy i opisujemy, są całą populacją. Dlatego w definicjach wariancji i odchylenia standardowego oraz w przykładach wykonujemy dzielenie przez n .

Przykład 10

W liceum, do którego chodzi Matylda, między kilkoma grupami uczniów doszło do konfliktu o muzykę nadawaną w trakcie przerw. Aby problem rozstrzygnąć i wybrać jeden z kilku możliwych wariantów (najprostszy, zaproponowany przez dyrekcję, polegał na wyłączeniu radiowęzła), postanowiono przeprowadzić badanie opinii na ten temat wśród szkolnej społeczności. Matylda otrzymała za zadanie przygotowanie sposobu wybrania reprezentatywnej próby losowej. Przyjęto, że jej liczebność nie powinna przekroczyć 50 osób – taka liczba ankiet wydawała się możliwa do opracowania. Ponadto, ponieważ wystąpiły wyraźne różnice w gustach między różnymi poziomami klas, a nie poszczególnymi klasami, należało wybrać jedną grupę reprezentującą klasy pierwsze, drugą – klasy drugie, trzecią – klasy trzecie, czwartą – klasy czwarte. O uwzględnienie swoich głosów upomniął się też personel szkoły.

Prześledźmy, co kolejno przygotowała Matylda.

Krok 1: Zebrała dane o liczebności poszczególnych grup.

Grupa	klasy 1	klasy 2	klasy 3	klasy 4	personel
Liczebność	180	171	165	150	74

Krok 2: Obliczyła, jaki procent całej szkolnej populacji tworzy każda z grup.

Grupa	klasy 1	klasy 2	klasy 3	klasy 4	personel
Procent	24,3%	23,1%	22,3%	20,3%	10%

Krok 3: Obliczyła, ile osób w takim razie powinna liczyć reprezentacja każdej z grup w ustalonej 50-osobowej próbie losowej.

Grupa	Liczebność	Procent	Reprezentacja
klasy 1	180	24,3%	$24,3\% \cdot 50 = 12,15$ 12 osób
klasy 2	171	23,1%	$23,1\% \cdot 50 = 11,55$ 12 osób
klasy 3	165	22,3%	$22,3\% \cdot 50 = 11,15$ 11 osób
klasy 4	150	20,3%	$20,3\% \cdot 50 = 10,15$ 10 osób
personel	74	10%	$10\% \cdot 50 = 5$ 5 osób

W skład ankietowej próby powinno zatem wejść 12 uczniów klas pierwszych, 12 – klas drugich, 11 – klas trzecich, 10 – klas czwartych i 5 osób reprezentujących personel szkoły.

Wylosowanie tych grup miało się odbyć tradycyjnie – poprzez wskazanie (losowo!) odpowiedniej liczby numerów z alfabetycznie zapisanych list. Tak wybrana próba nazywana jest **warstwową próbą losową**.

Zadania

9.1. Kasia bawi się kostką do gry, rzucając ją wiele razy. Wyniki zapisuje w kolejności rzutów:

2, 6, 4, 5, 1, 1, 3, 2, 2, 2, 4, 5, 6, 6, 5, 1, 3, 4, 5, 2, 1, 3, 5, 6, 4, 3, 5, 1, 6, 2, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 5, 6, 6, 5, 4, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 1

Narysuj diagram częstości oraz wyznacz medianę tych wyników i ich dominantę.

9.2. Pielęgniarka szkolna przeprowadziła wśród uczniów klas pierwszych pomiar masy ciała. Wyniki (w kg) zapisała zgodnie z kolejnością alfabetyczną nazwisk:

48, 49, 47, 48, 51, 54, 52, 47, 49, 53, 50, 48, 49, 51, 48, 50, 49, 51, 47, 47, 52, 51, 51, 50, 49, 48, 47, 54, 47, 50, 48, 49, 49, 50, 51, 48, 50, 48, 48, 56, 50, 52, 51, 53, 49, 54, 55, 48, 49, 50, 51, 52, 48, 49, 51, 52, 49, 53, 53, 55, 54, 49

Dla tego zestawu danych

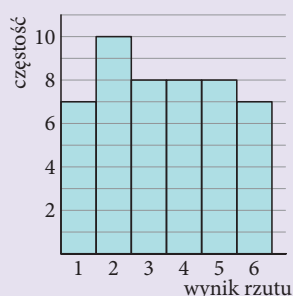
- wyznacz rozstęp wartości.
- wyznacz medianę i dominantę.
- oblicz średnią masę ucznia (wynik zaokrąglij do całości) oraz odchylenie standardowe od średniej (wynik zaokrąglij do dwóch miejsc po przecinku).
- narysuj diagram rozkładu częstości.

9.3. Oblicz średnią, wariancję i odchylenie standardowe następujących danych surowych. Wyniki zaokrąglij do jednego miejsca po przecinku.

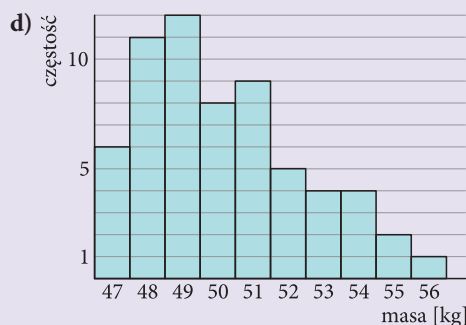
- Masa (w gramach) losowo wybranych z koszyka jajek kurzych:
41, 39, 42, 47, 36, 29, 52, 44, 42, 43, 40, 42, 41
- Liczby pacjentów przychodni lekarskiej w wybranych dniach:
37, 59, 24, 113, 49, 83, 57, 57, 69, 17
- Rozmiary damskich ubrań zakupionych w pewnym sklepie:
38, 40, 38, 42, 42, 42, 44, 50, 36, 38, 38, 46, 42, 42, 40, 44, 46, 42, 36, 40, 40
- Liczby sprzedanych przez kwiaciarkę tulipanów w losowo wybranych dziesięciu dniach: 112, 108, 102, 115, 92, 111, 84, 98, 105, 93

Odpowiedzi i rozwiązania

9.1. mediana: 3,
dominanta: 2



9.2. a) 9 b) mediana: 50, dominantą: 49
c) średnia: 50, odchylenie standardowe: 2,35



Uwagi metodyczne

W zaprezentowanych tematach poświęconych statystyce zajmowaliśmy się tylko metodami opisującymi próby losowe.

Nie będziemy się zajmować szukaniem odpowiedzi na pytania:

- w jaki sposób wyciągać wnioski dotyczące całej populacji po obserwacji próby,
- czy i na ile wyciągane wnioski są wiarygodne,
- w jaki sposób wybrać reprezentatywną próbę losową,
- jak przeprowadzić badanie, aby zrealizować postawiony cel badawczy.

Są one przedmiotem bardziej zaawansowanej statystyki.

9.3.

- $\bar{x} = 41,4$, $\sigma^2 = 26,5$, $\sigma = 5,2$
- $\bar{x} = 56,5$, $\sigma^2 = 711,1$, $\sigma = 26,7$
- $\bar{x} = 41,2$, $\sigma^2 = 11,6$, $\sigma = 3,4$
- $\bar{x} = 102,0$, $\sigma^2 = 91,6$, $\sigma = 9,6$

9.4. mediana: 101,5,
dominanta: 75 i 90,
średnia: 108,8,
wariancja: 1067,6,
odchylenie standardowe: 32,7

9.5. a) 25
b) najmniejsza: 4, największa: 13
c) 8
d) 13
e) 8,84

9.6. a) 55 cm
b) mediana: 55, dominanta: 53,
rozstęp: 13, $\sigma \approx 2,66$

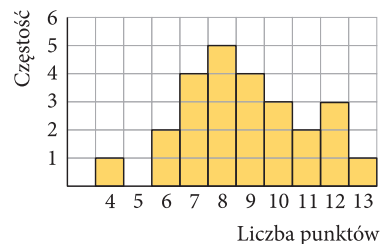
9.7. np. 6, 8, 12, 14

9.4. W tabeli podana jest moc silnika (w KM) wybranych 20 modeli samochodów. Uporządkuj dane niemalejąco, wyznacz ich medianę i dominantę. Oblicz średnią, wariancję i odchylenie standardowe. Wyniki podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

Marka samochodu	moc [KM]	Marka samochodu	moc [KM]
Citroen Berlingo II	115	Subaru Forester IV	150
Citroen Xsara Picasso	110	Toyota Auris II	132
Fiat Bravo II	90	Toyota Avensis I	128
Fiat Punto IV	77	Toyota Corolla IX	97
Fiat Grande Punto	90	Opel Astra H	100
Alfa Romeo 146	103	Opel Corsa D	75
Ford Focus 95	95	Opel Omega A	125
Ford Fiesta VI	60	Land Rover Discovery IV	190
Ford KA II	75	Suzuki Swift V	136
IV Mazda CX-5	160	Suzuki Alto VII	68

9.5. Diagram przedstawia liczby punktów zdobyte w turnieju przez poszczególnych zawodników. Na jego podstawie odpowiedz na poniższe pytania.

- Ile osób uczestniczyło w zawodach?
- Jaką najmniejszą i jaką największą liczbę punktów zdobyli zawodnicy?
- Ile wynosi dominanta liczby punktów?
- Ilu zawodników zdobyło co najmniej 9 punktów?
- Ile średnio punktów zdobył w tym turnieju jeden zawodnik?



9.6. Długości ciał noworodków (w cm) wprowadzane do szpitalnego rejestru w takiej kolejności, w jakiej dzieci się rodziły, wynosiły:

54, 57, 59, 58, 59, 56, 54, 58, 57, 52, 50, 53, 53, 55, 54, 57, 55, 57, 49, 53, 54, 62, 56, 58, 55, 60, 50, 53, 53, 56, 56, 53, 58, 54, 54, 53, 57, 53, 55, 54, 53, 54, 58, 58, 52, 53, 53, 56, 57, 58

- Jaka jest średnia długość ciała noworodka z badanej próby? Wynik zaokrąglaj do całości.
- Wyznacz medianę, dominantę, rozstęp i odchylenie standardowe (zaokrąglone do dwóch miejsc po przecinku) w tym zestawie danych.

9.7. Podaj przykład zestawu czterech danych, których średnia jest równa 10, zaś odchylenie standardowe zaokrąglone do całości wynosi 3.

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Dane do zadań 1–3. Wyniki zaokrąglono do jednego miejsca po przecinku.

Według *Małego Rocznika Statystycznego 1938* produkcja światowa włókna bawełny wynosiła (w milionach kwintali):

Rok	1929	1930	1931	1932	1933	1934	1935	1936
Mln q	57,4	56,3	59,7	51,8	57,7	51,3	57,4	68,6

1. Wskaż średnią podanego zestawu danych.

- A. 57,5 B. 57,6 C. 57,8 D. 56,8

2. Wskaż wariancję podanego zestawu danych.

- A. 25,6 B. 25,0 C. 25,1 D. 25,2

3. Wskaż odchylenie standardowe podanego zestawu danych.

- A. 5,3 B. 5,0 C. 5,1 D. 5,2

4. Przyjmujemy, że $\bar{x}$ oznacza średnią zestawu danych, σ^2 – wariancję tego zestawu oraz σ – odchylenie standardowe. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Istnieje taki zestaw danych, w którym

- A. $\sigma > \sigma^2$. B. $\sigma < 0$. C. $\bar{x} < 0 < \sigma$.

5. Kolejne miesięczne rachunki za telefon zaokrąglone do pełnych złotych wynosiły: 50, 61, 43, 60, 49, 52, 47, 36, 42, 45, 33, 46. Wyznacz średnią i odchylenie standardowe tych danych (z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku).

6. Przeliczono zawartość 100 losowo wybranych pudełek zapalek. Wyniki kontroli przedstawiono w poniższej tabeli.

Liczba zapalek w pudełku	38	39	40	41	42	43	44
Liczba pudełek	3	11	37	18	16	13	2

Wyznacz średnią i odchylenie standardowe liczby zapalek w pudełku (z dokładnością do jednego miejsca po przecinku).

7. Wyznacz zestaw czterech danych, tworzących ciąg arytmetyczny, których średnia jest równa 5, zaś odchylenie standardowe zaokrąglone do całości wynosi 2.

Prosto do matury

1. A

2. C

3. B

4. P, F, P

5. $\bar{x} = 47$, $\sigma = 7,99$

6. $\bar{x} = 40,8$, $\sigma = 1,4$

7. np. 2, 4, 6, 8

10. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–25 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytach.

Odpowiedzi i rozwiązania

1. A
 2. A
 3. B
 4. A
 5. D
 6. C
 7. A
 8. B
1. Jaką liczbę trzeba dopisać do zestawu $-3, 0, 7$ i 10 , aby średnia arytmetyczna wszystkich pięciu liczb była równa 3 ?
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
 2. Ile wynosi prawdopodobieństwo znalezienia w 30-osobowej grupie co najmniej dwóch osób urodzonych w tym samym miesiącu?
A. 1 B. $\frac{1}{15}$ C. $\frac{2^{30}}{30^{30}}$ D. Jest za mało danych, żeby to obliczyć.
 3. Rzucamy raz kostką do gry. Które z poniższych zdarzeń jest przeciwne do zdarzenia „wypadły co najwyżej trzy oczka”?
A. Wypadły mniej niż trzy oczka. C. Wypadły więcej niż cztery oczka.
B. Wypadły co najmniej cztery oczka. D. Wypadły trzy oczka lub więcej.
 4. Czterech panów wybiera losowo (w tym samym czasie, ale w różnych mieszkaniach) jeden z pięciu kanałów telewizyjnych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszyscy wybiorą ten sam kanał?
A. $\frac{1}{125}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{4}{125}$ D. $\frac{4^5}{5^4}$
 5. Średnia arytmetyczna liczb A i B jest równa k i $A = 6k$. Ile jest równe B ?
A. $4k$ B. $2k$ C. $-3k$ D. $-4k$
 6. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w rzucie dwiema monetami wypadnie (w dowolnej kolejności) orzeł i reszka?
A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$
 7. Z klasy, w której stosunek liczby dziewcząt do liczby chłopców jest równy $4 : 5$, wylosowano jedną osobę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest to dziewczyna?
A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{9}$
 8. W urnie znajduje się 7 kul białych i 3 kule czarne. Losujemy dwie kule. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wylosowane kule są różnego koloru?
A. $\frac{7}{30}$ B. $\frac{7}{15}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{10}{21}$

9. W uporządkowanym szeregu: 3, 3, 5, 7, k , k , 15, 16, 16, 19, 20, 21 mediana wynosi 12. Ile jest równe k ?

- A. 11 B. 8 C. 12 D. 9

10. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w rzucie dwiema kostkami wypadną różne liczby oczek?

- A. $\frac{11}{12}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{6}$

11. Ula chce zamalować trzy różne kwiatki na obrazku, każdy na inny kolor. W pudełku ma 10 różnych kredek. Na ile sposobów może zamalować kwiatki?

- A. 27 B. 10 C. 10^3 D. 720

12. Rzucamy trzy razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w trzecim rzucie wypadnie szóstka?

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{216}$ D. $\frac{6}{125}$

13. Średnia dwóch liczb, z których jedną jest $\sqrt{5}$, wynosi $\sqrt{3}$. Wskaż drugą liczbę.

- A. $2\sqrt{3} - \sqrt{5}$ B. $2\sqrt{5} - \sqrt{3}$ C. $2\sqrt{15}$ D. $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$

14. Ze zbioru kolejnych liczb $\{1, 2, 3, \dots, 555\}$ wybieramy losowo jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wybrana liczba jest podzielna przez 3?

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{184}{555}$ D. $\frac{1}{3}$

15. Odchylenie standardowe zestawu danych: 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7

- A. równa się 1. B. równa się 7. C. równa się 0. D. nie istnieje.

16. Ile jest równe prawdopodobieństwo tego, że przy losowym ustawianiu w kolejkę sześciu osób Ania i Mania będą stały obok siebie?

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

17. Które zdanie dotyczące uporządkowanego szeregu danych:

1, 1, 3, 3, 3, 4, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 10 jest prawdziwe?

- A. Dominantą w tym zestawie jest liczba 3.
B. Ten zestaw danych ma dwie dominanty.
C. Dominantą w tym zestawie jest liczba 8.
D. Ten zestaw danych ma cztery dominanty.

18. Który zestaw danych ma trzy dominanty?

- A. 3 2 3 3 1 1 3 5 6 5 1 5 5 7 7 9 9 7 8 9 8 7 C. 2 4 2 7 2 7 2 9 9 2 1 2 2 2 2
B. 1 2 3 3 1 3 4 4 5 7 7 3 7 D. 9 9 9 9 9 9 9 8 8 8 8 8 8 6 6 6 6

9. D

10. D

11. D

12. A

13. A

14. D

15. C

16. B

17. C

18. A

19. B

20. B

21. A

22. $\overline{\Omega} = 3n(3n - 1)$

A – wylosowano kule różnego koloru

$$\overline{A} = n \cdot 2n \cdot 2$$

$$P(A) = \frac{n \cdot 2n \cdot 2}{3n(3n - 1)} = \frac{4n}{3(3n - 1)}$$

$$P(A) = \frac{16}{33}$$

$$\frac{4n}{3(3n - 1)} = \frac{16}{33} \quad | \cdot \frac{3}{4}$$

$$11n = 4(3n - 1)$$

$$n = 4$$

Odp.: C

23. D

24. D

25. B

26. F, P, P

27. F, F, P

19. Uparty pan Kajetan co tydzień bierze udział w grze w lotto. Przez 100 kolejnych gier nie wygrał ani razu. Wypełnia więc kupon po raz 101.

I. Szansa na wygraną przez pana Kajetana się zwiększyła.

II. Szansa na kolejną przegraną nie uległa zmianie.

Które spośród zdań I, II są prawdziwe?

A. tylko I B. tylko II C. żadne D. obydwa

20. Ile wynosi mediana w następującym zestawie danych surowych:

6 2 2 5 2 8 2 2 8 5 6 8 8?

A. 5,5 B. 5 C. 6 D. 8

21. Średnia punktów z egzaminu czterdziestu studentów jest równa s . Dwudziestu innych studentów otrzymało w sumie 1800 punktów. Ile wynosi średnia wszystkich studentów?

A. $\frac{2}{3}s + 30$ B. $\frac{2s + 30}{3}$ C. $\frac{40s + 90}{60}$ D. $\frac{s + 1800}{60}$

* 22. W urnie znajduje się n kul białych i $2n$ kul czarnych. Losujemy kolejno dwie kule bez zwracania. Prawdopodobieństwo tego, że wylosowane kule są różnego koloru, wynosi $\frac{16}{33}$. Ile jest równe n ?

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

23. Ile jest pięciocyfrowych liczb o różnych, nieparzystych cyfrach?

A. 60 B. 5^5 C. $4 \cdot 5^4$ D. 120

24. Dany jest uporządkowany nierosnąco zestaw liczb naturalnych: 16, 15, a , 13, 12, 11. Mediana tego zestawu jest równa 14. Zatem

A. $a = 12$. B. $a = 13$. C. $a = 14$. D. $a = 15$.

25. Rzucamy trzema monetami dwuzłotowymi. Wygrywamy te monety, na których wypadł orzeł. Wskaż wartość oczekiwaną wygranej.

A. 2 zł B. 3 zł C. 4 zł D. 5 zł

W zadaniach 26–34 oceń prawdziwość podanych zdań.

26. Liczba wszystkich liczb czterocyfrowych utworzonych z cyfr 0, 1, 5

A. jest równa 81. B. jest równa 54. C. podzielnych przez 4 jest równa 6.

27. Prawdopodobieństwo tego, że w czterech rzutach monetą co najmniej raz wypadnie

A. orzeł, wynosi $\frac{1}{16}$. B. orzeł, wynosi $\frac{1}{4}$. C. reszka, wynosi $\frac{15}{16}$.

28. Zdarzenie polegające na tym, że w tysiącu rzutach monetą ani razu nie wypadnie orzeł, jest zdarzeniem

- A. niemożliwym.
- B. tak samo prawdopodobnym jak to, że orzeł pojawi się 1000 razy.
- C. o prawdopodobieństwie zajścia równym $\frac{1}{2^{1000}}$.

28. F, P, P

29. Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6 można utworzyć

- A. 6^5 liczb pięciocyfrowych.
- B. 6^4 liczb pięciocyfrowych podzielnych przez 5.
- C. $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ liczb czterocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach.

29. P, P, P

30. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Niech p oznacza prawdopodobieństwo wyrzucenia sumy oczek mniejszej od 5, a r – sumy oczek większej od 9. Zatem

- A. $p < r$.
- B. $p \geq r$.
- C. $p = r$.

30. F, P, P

31. Rzucamy kostką i monetą. Jeżeli wypadnie reszka i parzysta liczba oczek, wygrywamy 120 zł. W przeciwnym razie przegrywamy 40 zł.

- A. Wartość oczekiwana gry jest równa 5.
- B. Wartość oczekiwana gry jest równa -2 .
- C. Gra jest sprawiedliwa.

31. F, F, P

32. Średnia arytmetyczna zestawu liczb naturalnych: 23, $x + 8$, 6, 14, $x + 15$, 2 jest równa 12.

- A. Ten zestaw nie ma dominanty.
- B. $x = 2$
- C. Mediana tego zestawu jest równa 12.

32. P, P, P

33. Średnia arytmetyczna zestawu liczb naturalnych: 5, 21, $2x$, 19, 11, $7x$, 31, $8x + 5$ jest równa $5x$.

- A. Ten zestaw nie ma dominanty.
- B. Średnia tego zestawu jest równa 20.
- C. Mediana tego zestawu jest mniejsza od średniej.

33. P, P, F

34. Spośród 16 uczniów piszących kartkówkę z języka hiszpańskiego dwie osoby dostały ocenę niedostateczną, dwie – dopuszczającą, trzy – dostateczną, pięć – dobrą, trzy – bardzo dobrą i jedna – ocenę celującą.

- A. Wynik ucznia, który dostał piątkę, znajduje się na 94. centylu.
- B. W klasie jest uczeń, którego wynik znajduje się na 50. centylu.
- C. Najliczniejsza jest grupa uczniów, których wynik znajduje się na 44. centylu.

34. P, F, F

35. 255

36. 12 096

37. 30

38. 720

39. $\frac{1}{2}$ 40. $\frac{5}{16}$ 41. $\frac{1}{221}$ 42. $\frac{5}{16}$ 43. $\frac{1}{7}$ 44. a) $x \geq 8$ b) $x = -1$

45. 5,8

46. a) 5760 b) 14 400 c) 2880

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

35. Na ile sposobów można wybrać dziewczynkę i chłopca z klasy, w której jest 17 dziewczynek i 15 chłopców?

36. Ile liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach jest mniejszych od 50 000?

37. Grupa 5 znajomych wybiera się na wakacje dwoma samochodami. Każdy z nich może wybrać, którym samochodem chce jechać, ale w każdym samochodzie musi jechać co najmniej 1 osoba. Na ile sposobów mogą się podzielić?

38. Na ile sposobów możemy posadzić pięcioro dzieci na sześciu różnokolorowych krzesłkach?

39. Rzucamy kostką ośmiościenną, na której ściankach znajdują się liczby od 1 do 8. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba wyrzuconych oczek jest liczbą pierwszą.

40. Rzucamy dwiema kostkami czworościennymi, na których ściankach znajdują się liczby 1, 3, 5, 7. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek jest podzielna przez 3.

41. Z talii 52 kart losujemy 2 karty. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch asów.

42. Rzucamy czterema monetami. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej trzech orłów.

43. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dwie losowo wybrane osoby urodziły się tego samego dnia tygodnia.

44. Do zestawu danych 5, 6, 6, 8, 12 dopisz taką liczbę x , aby
a) mediana zestawu była równa 7. b) średnia zestawu była równa 6.

45. Dane są wyniki $x_1, x_2, \dots, x_n$ i ich wagi $a_1, a_2, \dots, a_n$. Oblicz średnią ważoną wyników.

x_i	4,1	5,3	5,8	6	6,4	7
a_i	1	3	5	4	2	1

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

46. Dwie rodziny – czworo dorosłych i pięcioro dzieci – zajmują 9 kolejnych miejsc w jednym rzędzie w kinie. Na ile sposobów mogą to zrobić tak, aby

a) rodzice siedzieli obok siebie oraz dzieci siedziały obok siebie (w dowolnym porządku)?

b) dzieci siedziały obok siebie (w dowolnym porządku)?

c) żadnych dwoje dzieci nie siedziało obok siebie?

47. Ile jest różnych kodów składających się z dwóch liter i dwóch cyfr? Litery i cyfry mogą występować w dowolnej kolejności. Zakładamy, że alfabet składa się z 24 liter.

48. Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Wypisz zbiór zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego, a następnie oblicz prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:

A – wypadną dwie szóstki,

B – na dokładnie jednej kostce wypadnie piątka,

C – suma oczek na obu kostkach jest mniejsza od 2,

D – iloczyn oczek na obu kostkach wynosi 12,

E – na żadnej kostce nie wypadnie jedynka,

F – na każdej kostce wypadnie parzysta liczba oczek.

49. Z pudełka, w którym jest 6 kul białych i 2 kule czarne, losujemy kolejno bez zwracania trzy kule. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kul o tym samym kolorze.

50. Z pudełka, w którym są 2 kule białe i 3 kule czarne, losujemy cztery razy po jednej kuli ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania najpierw kuli czarnej, a potem trzech kul białych.

51. Z pudełka, w którym są 2 kule białe, 3 czarne i 5 kul zielonych, losujemy trzy razy po jednej kuli ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul w tym samym kolorze i trzeciej w innym kolorze.

52. Na biurku Weroniki stoją cztery maskotki – słoń, kot, pies i laleczka Pyza. Weronika losuje dwie spośród nich. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że

a) obydwie maskotki będą zwierzakami.

b) jedną z maskotek będzie Pyza.

53. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana liczba dwucyfrowa jest podzielna przez 2 lub przez 5.

54. Trzy osoby kolejno rzucają kostką sześcienną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej dwie z nich otrzymają taki sam wynik.

55. Z pudełka, w którym jest 7 losów wygrywających i 3 losy puste, wyciągamy trzy losy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy co najmniej jeden los wygrywający.

56. Do gry planszowej dzieci używają sześcienną kostkę, na której ściankach napisane są cyfry: 0, 2, 2, 3, 3 i 5. Jeżeli wypadnie liczba oczek różna od zera, pionek porusza się na planszy do przodu o wskazaną przez kostkę liczbę kroków, czyli 2, 3 lub 5. Jeżeli na kostce wypadnie 0, pionek musi się cofnąć o 10 kroków. Oblicz wartość oczekiwaną liczby kroków w jednym rzucie kostką.

47. 345 600

$$\begin{aligned} 48. \quad & P(A) = \frac{1}{36}, \quad P(B) = \frac{5}{18}, \\ & P(C) = 0, \quad P(D) = \frac{1}{9}, \\ & P(E) = \frac{25}{36}, \quad P(F) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$49. \quad \frac{5}{14}$$

$$50. \quad \frac{24}{625}$$

$$51. \quad \frac{33}{50}$$

$$52. \quad \text{a) } \frac{1}{2} \quad \text{b) } \frac{1}{2}$$

$$53. \quad \frac{3}{5}$$

$$54. \quad \frac{4}{9}$$

$$55. \quad \frac{119}{120}$$

$$56. \quad \frac{5}{6}$$

D

57. Rzucamy dwiema kostkami sześciennymi. Jeżeli wypadną dwie szóstki, wygrywamy 50 zł. Jeżeli wypadnie jedna szóstka lub na obu kostkach wypadną takie same (ale różne od 6) liczby oczek, to wygrywamy 10 zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy 10 zł. Wykaż, że gra jest sprawiedliwa.

58. a) 83,9 **b)** 72%

58. Na jednym z wydziałów pewnej uczelni obowiązuje następujący system obliczania punktów rekrutacyjnych:

- wynik matury z matematyki na poziomie rozszerzonym (w %) z wagą 0,4,
- wynik matury z geografii na poziomie rozszerzonym (w %) z wagą 0,3,
- wynik matury z języka angielskiego na poziomie rozszerzonym (w %) z wagą 0,2,
- wynik matury z języka polskiego na poziomie podstawowym (w %) z wagą 0,1.

a) Ile punktów rekrutacyjnych uzyskał Szymon, który otrzymał na maturze 92% z matematyki, 73% z geografii, 91% z języka angielskiego i 70% z języka polskiego?

b) Adam uzyskał 69,6 punktów rekrutacyjnych. Na maturze otrzymał 62% z geografii, 83% z języka angielskiego i 56% z języka polskiego. Jaki wynik miał na maturze z matematyki?

59. $w_1 = 6$ i $w_2 = 4$

59. Podaj taki układ wag w_1 i w_2 , aby średnia liczby 32 z wagą w_1 i liczby 27 z wagą w_2 była równa 30 i aby suma wag wynosiła 10.

60. $\bar{x} = 54$, $\sigma = \sqrt{14} \approx 3,74$

60. W tabeli przedstawiono średni wynik matury z matematyki na poziomie podstawowym w kraju w latach 2010–2013.

Rok	2010	2011	2012	2013
Wynik (w %)	58	48	56	54

Oblicz średnią i odchylenie standardowe tych danych.

61. $\bar{x} = 100$, $\sigma = \sqrt{2} \approx 1,41$

61. Zbadano masę 20 losowo wybranych paczek herbaty. Wyniki przedstawiono w tabeli.

Liczba pudełek	2	4	10	3	1
Masa (w gramach)	98	99	100	101	105

Oblicz średnią i odchylenie standardowe tych danych.

$$\mathbf{57.} \quad \overline{\Omega} = 6^2$$

A – wypadną dwie szóstki

$$\overline{A} = 1, \quad P(A) = \frac{1}{36} \quad \text{– wygrywamy 50 zł}$$

B – wypadnie jedna szóstka lub wypadną takie same (różne od 6) liczby oczek

$$\overline{B} = 3 \cdot 5, \quad P(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \quad \text{– wygrywamy 10 zł}$$

W pozostałych przypadkach przegrywamy 10 zł z prawdopodobieństwem:

$$1 - \frac{1}{36} - \frac{15}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

$$EX = \frac{1}{36} \cdot 50 + \frac{15}{36} \cdot 10 + \frac{20}{36} \cdot (-10) = \frac{1}{36} (50 + 150 - 200) = 0$$

Wartość oczekiwana wygranej jest równa 0, więc gra jest sprawiedliwa.

Skorowidz

Centyl 257

ciąg 122

- arytmetyczny 138
 - Fibonacciego 127, 136
 - geometryczny 158
 - liczbowy 122
 - malejący 129
 - naprzemienny 162
 - niemalejący 129
 - nierosnący 129
 - nieskończony 122
 - rosnący 129
 - skończony 122
 - stały 124
- cosinus kąta 8

Dane surowe 256

dominanta (moda, wartość modalna) 261

doświadczenie losowe 201, 203

Figura osiowosymetryczna 97

- środkowosymetryczna 88

Geometria analityczna 46

gra losowa 244

- — sprawiedliwa 244

Iloraz ciągu geometrycznego 158

Kąt nachylenia prostej do osi x 58

klasyczna definicja prawdopodobieństwa 205

Liczby Fibonacciego 127

logika probabilistyczna 200

losowanie bez zwracania 216

- ze zwracaniem 216

Mediana 258

monotoniczność ciągu 129

Nierówność opisująca koło 75

n -ty wyraz ciągu 123

Odchylenie standardowe 276

odległość między punktami na płaszczyźnie 48

- punktu od prostej 66

okres kapitalizacji (rozrachunkowy) 177

oprocentowanie stałe 178

- zmienne 178

osie symetrii czworokąta 107, 108

- — trójkąta 106

- — wielokąta foremnego 109

oś symetrii 95, 97

Populacja 252

prawdopodobieństwo wygranej 244

- zajścia zdarzenia 205, 222

- zdarzenia przeciwnego 235

procent składany 175

promień wodzący punktu 9

proste prostopadłe 64

- równoległe 61, 62

próba losowa 253

- z populacji 252

przeciętne odchylenie od średniej 274

punkt stały przekształcenia 90

punkty symetryczne względem prostej 95

- — — punktu 87

Raty malejące 184

- równe 182, 184

reguła dodawania 214

- mnożenia 212

rok bankowy 179

rozstęp 274

rozwiązywanie trójkąta 12

równania prostych prostopadłych 42, 64

- — równoległych 42, 60–62

równanie kierunkowe prostej 40

- okręgu 71
- prostej w postaci ogólnej 40
- różnica ciągu arytmetycznego 138

Śinus kąta 8

- statystyka 251
- opisowa 251
- stopa procentowa 177
- suma początkowych wyrazów ciągu
 - arytmetycznego 149
 - — — — geometrycznego 168
- symetria osiowa 95, 97
 - — względem osi x 98
 - — — — y 99
- środkowa 87, 89
 - — względem początku układu współrzędnych 90, 91
- szereg uporządkowany 256

Średnia 260

- ważona 264
- środek ciężkości trójkąta 53
 - — układu 262
- odcinka 51
- symetrii 87, 88
- środkowa boku trójkąta 53

Tabela rozkładu częstości 277

- tangens kąta 8
- twierdzenie cosinusów 21
 - o dwusiecznej 27

- sinusów 16

Uogólnione twierdzenie Pitagorasa 21

Wariancja 275

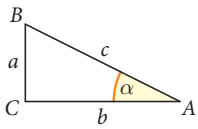
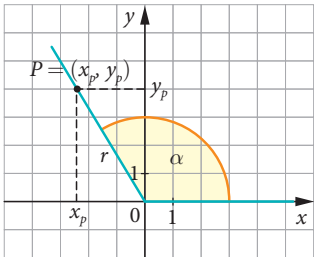
- warstwowa próba losowa 281
- wartość oczekiwana gry losowej 244, 264
- wielokąt foremny 109
- własności ciągu arytmetycznego 141, 143, 144
 - — geometrycznego 162
- wnioskowanie statystyczne 251
- współczynnik kierunkowy prostej 40, 58, 59
- współrzędne środka ciężkości trójkąta 54
 - — odcinka 51, 52
- wzory redukcyjne 9
- wzór Herona 30
 - na pole trójkąta 10, 29, 30
- ogólny ciągu arytmetycznego 140
 - — — geometrycznego 159
 - — — liczbowego 124
- rekurencyjny (indukcyjny) ciągu liczbowego 126
- sinusów 13

Zbiory rozłączne 214

- zdarzenia przeciwne 234
 - wykluczające się 234
- zdarzenie elementarne 203
 - niemożliwe 205
 - pewne 205

Wybrane wzory trygonometryczne

Definicje funkcji trygonometrycznych

kąta ostrego	kąta wypukłego
$\sin \alpha = \frac{a}{c}$ $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ 	$\sin \alpha = \frac{y_P}{r}$ $\cos \alpha = \frac{x_P}{r}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_P}{x_P}$  $r = OP = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$

Wartości funkcji trygonometrycznych wybranych kątów

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje	0

α	$(0^\circ; 90^\circ)$	$(90^\circ; 180^\circ)$
$\sin \alpha$	+	+
$\cos \alpha$	+	-
$\operatorname{tg} \alpha$	+	-

Podstawowe zależności trygonometryczne

- Jedynka trygonometryczna**
 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- Wzory redukcyjne**
 - $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
 - $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
 - $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$
 - $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$
 - $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
 - $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
 - $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

Zależności trygonometryczne w trójkącie

- Pole trójkąta**

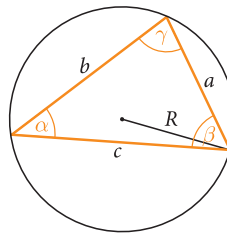
$$P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha \quad P = \frac{1}{2}ac \sin \beta \quad P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$
- Twierdzenie sinusów**

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$
- Twierdzenie cosinusów**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



Tablica wartości funkcji trygonometrycznych

Miara kąta α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	Miara kąta α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0,0000	1,0000	0,0000	45°	0,7071	0,7071	1,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,2900
45°	0,7071	0,7071	1,0000	90°	1,0000	0,0000	—

Notatki



Notatki

