

Dowody w matematyce

2

Umiejętności

Po szkole podstawowej uczeń:
przeprowadza proste dowody geometryczne, np.:

- oblicza kąty z wykorzystaniem:
 - równości kątów wierzchołkowych, odpowiadających i naprzemianległych,
 - twierdzenia o sumie kątów trójkąta lub czworokąta,
 - twierdzenia o kątach przy podstawie trójkąta równoramiennego,
- stosuje cechy przystawiania trójkątów do uzasadnienia przystawiania jednej dostrzeżonej pary trójkątów przystających oraz wyciąga wnioski z tej własności.

Po tym dziale uczeń:

potrafi udowodnić następujące twierdzenia i wzory:

- o istnieniu nieskończenie wielu liczb pierwszych,
- o niewymierności liczb: $\sqrt{2}$, $\log_2 5$ itp.,
- o podstawowych własnościach potęg (o wykładnikach całkowitych i wymiernych) i logarytmów,
- o dzieleniu z resztą wielomianu przez dwumian postaci $x - a$,
- o kątach w okręgu,
- o odcinkach w trójkącie prostokątnym,
- o dwusiecznej kąta,
- twierdzenie sinusów i cosinusów oraz twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa,
- wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego,
- wzory na n -ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego,
- wzory rekurencyjne na współczynniki ilorazu i resztę (algorytm Hornera),
- wzór na pole trójkąta z zastosowaniem funkcji sinus.

Uwagi metodyczne

W szkole podstawowej uczeń się dowiedział, że w twierdzeniach zaczynających się od słów „wykaż, że dla każdego...” podawanie wielu przykładów nie jest dowodem, a podanie jednego kontrprzykładu świadczy o tym, że stwierdzenie nie jest prawdziwe. Nie oznacza to, że uczeń nie rozwiązywał zadań, w których należało podać przykłady bądź kontrprzykłady, ponieważ takie poszukiwanie i sprawdzanie prawdziwości tezy dla konkretnych przypadków pozwalało mu zrozumieć postawiony problem, a następnie podać ogólne rozumowanie.

W liceum uczeń poznaje dowody niektórych twierdzeń matematycznych związanych z treściami nauczania. Zabieg ten ma na celu uświadomienie uczniom, co to jest dowód oraz jaka jest rola dowodu w matematyce. W tym dziale uczymy technik przeprowadzania dowodu matematycznego.

1. Dowody w geometrii

Umiejętności:

- dowodzenie twierdzeń z zakresu geometrii płaszczyzny

Od początku nauki w szkole średniej spotykamy się z dowodami – zarówno warty zapamiętania ogólnych faktów matematycznych (np. twierdzenie Pitagorasa lub wzory skróconego mnożenia), jak i mniej ogólnych, podawanych często w postaci zadań typu „Udowodnij (...)”. Ten dział w całości poświęcimy dowodzeniu – omówimy kolejno dowodzenie własności figur geometrycznych oraz dowody w arytmetyce i w algebrze. Uzupełnimy również poznane już twierdzenia o obowiązujące dowody, które zostały wcześniej pominięte.

Przypomnijmy:

Twierdzenie matematyczne to zdanie orzekające prawdziwe, które **można udowodnić**, wykorzystując pojęcia pierwotne, znane definicje, aksjomaty oraz wcześniej udowodnione twierdzenia.

- Pojęcie pierwotne** – pojęcie niedefiniowane w danej teorii, uznawane za intuicyjnie zrozumiałe.
- Aksjomat** – w danej teorii stwierdzenie intuicyjnie oczywiste, które przyjmuje się bez dowodu.
- Zdanie zbudowane na wzór twierdzenia, ale nieudowodnione, nazywane jest **hipotezą**.

Większość twierdzeń rozpatrywanych podczas nauki w szkole średniej ma postać:

Jeżeli założenie, to teza.

Założenie opisuje warunki, w których twierdzenie może być stosowane.

Teza to prawdziwe wnioski wynikające z założeń.

Dowód twierdzenia to proces polegający na logicznym wnioskowaniu (dedukcji), prowadzący do wykazania, że podane zdanie jest prawdziwe.

Niektóre twierdzenia mają postać:

A wtedy i tylko wtedy, gdy B.

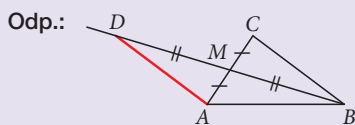
Udowodnienie tak sformułowanego twierdzenia polega na wykazaniu prawdziwości dwóch zdań:

Jeżeli A, to B. oraz **Jeżeli B, to A.**

Aby udowodnić własności figur, warto:

- wykonać czytelny rysunek, czyli: ← zobacz przykłady 1, 4
 - wprowadzić wygodne oznaczenia,
 - oznaczyć znane kąty, boki itp.,
 - wyróżnić równe odcinki, kąty,
 - użyć różnych kolorów lub rodzajów linii,

◀1.7. W trójkącie ABC poprowadzono środkową BM , a następnie na półprostej BM wyznaczono taki punkt D (różny od punktu B), że $|BM| = |MD|$. Udowodnij, że $|BC| = |AD|$.



$\sphericalangle CMB = \sphericalangle DMA$ (wierzchołkowe)

$\triangle BMC \equiv \triangle DMA$

Zatem $|AD| = |BC|$.

KPU

tematy 4.4, 4.5

Multiteka

- Dowód za milion dolarów

dlanauuczyciela.pl | Kartkówka 2.1

Generator
testów i sprawdzianów

- II. uzupełnić dany rysunek przydatnymi elementami, aby: ← zobacz przykłady 1, 4
- pokazać podane zależności,
 - zastosować odpowiednie twierdzenia,
- III. zastosować poznane definicje i twierdzenia, ← zobacz podane przykłady
- IV. wykonać potrzebne przekształcenia i obliczenia. ← zobacz przykłady 2, 3

Fakty, z których najczęściej będziemy korzystać w dowodach geometrycznych, to:

- własności kątów (kąty: wierzchołkowe, przyległe, utworzone przez prostą przecinającą proste równoległe; suma kątów w wielokącie; kąty w kole; kąt między styczną a cięciwą),
- nierówność trójkąta,
- cechy przystawiania trójkątów, cechy podobieństwa trójkątów,
- twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do niego,
- twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do niego,
- twierdzenie o dwusiecznej, twierdzenie o środkowych w trójkącie,
- twierdzenie sinusów, twierdzenie cosinusów,
- wzory na pola i obwody figur.

Przykład 1

Wykażemy, że jeżeli w trójkącie dwa boki są różnej długości, to na przeciw dłuższego boku leży większy kąt.

Założenia

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$$|CB| > |CA|$$

Teza

$$\sphericalangle A > \sphericalangle B$$

Dowód

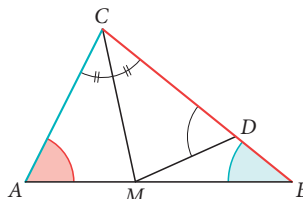
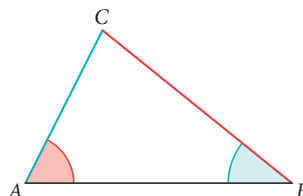
Prowadzimy dwusieczną CM , a na półprostej CB odkładamy odcinek CD tak, żeby $|CD| = |CA|$.

Punkt D należy do boku BC trójkąta i jest różny od wierzchołka B , ponieważ $|CB| > |CA|$.

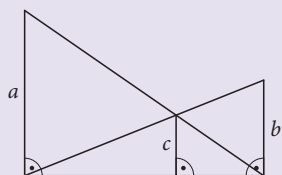
Trójkąty AMC i DMC (zob. rysunek) są przystające na mocy cechy bkb, zatem:

$$\sphericalangle MAC = \sphericalangle MDC$$

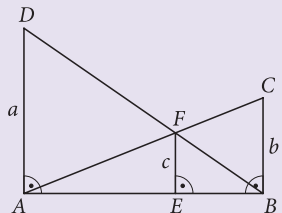
← odpowiednie kąty w trójkątach przystających



1.29.



Odp.:



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$$\text{Wykaż, że } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

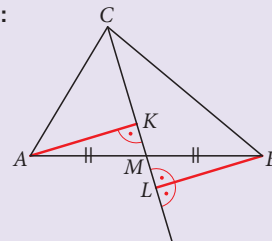
Trójkąt AFD jest podobny do trójkąta CFB oraz trójkąt ABD jest podobny do trójkąta EBF .

$$\frac{a}{b} = \frac{|DF|}{|FB|}, \quad \frac{a}{c} = \frac{|DF| + |FB|}{|FB|} = \frac{|DF|}{|FB|} + 1 = \frac{a}{b} + 1$$

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

1.10. Wykaż, że dwa wierzchołki trójkąta są jednakowo oddalone od prostej, która zawiera środkową poprowadzoną do boku łączącego te wierzchołki.

Odp.:



M – środek boku AB

$$|AM| = |BM|$$

AK – odległość punktu A od środkowej

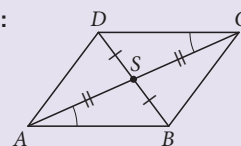
BL – odległość punktu B od środkowej

$\triangle AKM \equiv \triangle BLM$ są prostokątne i przystające.

Zatem $|AK| = |BL|$.

1.13. Wykaż, że czworokąt jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy jego przekątne przecinają się w punkcie, który jest środkiem każdej z nich.

Odp.:



$$|AS| = |SC| \text{ oraz } |BS| = |SD|$$

$\sphericalangle ASB = \sphericalangle CSD$ (wierzchołkowe)

$$\triangle ASB \equiv \triangle CSD$$

czyli $\sphericalangle SAB = \sphericalangle SCD$, zatem

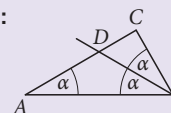
$AB \parallel CD$ (kąty naprzemianległe).

Analogicznie $AD \parallel BC$.

Czworokąt jest równoległobokiem.

1.14. W trójkącie ABC , w którym miara kąta B jest dwa razy większa od miary kąta A , poprowadzono dwusieczną BD . Udowodnij, że trójkąt BDC jest podobny do trójkąta ABC .

Odp.:



$$\sphericalangle ABD = \alpha = \sphericalangle DBC$$

$\sphericalangle CDB$ to kąt zewnętrzny trójkąta ABD , czyli $\sphericalangle CDB = 2\alpha$.

Niech $\sphericalangle ACB = \gamma$.

Kąty w trójkącie ABC : $\alpha, 2\alpha, \gamma$

Kąty w trójkącie BDC : $\alpha, 2\alpha, \gamma$

Zatem te trójkąty są podobne.

Kąt MDC jest kątem zewnętrznym w trójkącie MBD .

$$\sphericalangle MDC = \sphericalangle DMB + \sphericalangle B$$

← twierdzenie o kącie zewnętrznym trójkąta

$$\sphericalangle A = \sphericalangle DMB + \sphericalangle B$$

← $\sphericalangle MDC = \sphericalangle A$

Zatem $\sphericalangle A > \sphericalangle B$.

Koniec dowodu

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Udowodnimy teraz twierdzenie, które podaliśmy w drugiej klasie bez dowodu. Jest ono często stosowane w celu sprawdzenia, czy trójkąt o danych bokach jest prostokątny, ostrokątny, czy rozwartokątny.

W starożytnym Egipcie i Babilonie ok. 4000 lat temu to twierdzenie było wykorzystywane jako sposób wyznaczania kąta prostego.

Twierdzenie

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli w trójkącie suma kwadratów długości dwóch boków jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to kąt leżący naprzeciw tego boku jest prosty.

Założenia

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Teza

$$\sphericalangle ACB = 90^\circ$$

Dowód

Dowód twierdzenia odwrotnego przeprowadzimy, wykorzystując twierdzenie Pitagorasa.

Założmy, że dany trójkąt ABC ma boki długości a , b , c spełniające warunek $a^2 + b^2 = c^2$.

Zbudujmy trójkąt $A'B'C'$, w którym:

$$|B'C'| = a, |A'C'| = b, \sphericalangle A'C'B' = 90^\circ$$

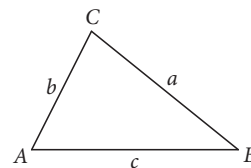
Na mocy twierdzenia Pitagorasa trzeci bok trójkąta $A'B'C'$ ma długość c , zatem:

$$\triangle A'B'C' \equiv \triangle ABC$$

← cecha bbb przystawiania trójkątów

czyli $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

Koniec dowodu



Zauważmy, że twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do niego moglibyśmy sformułować jako jedno twierdzenie:

Trójkąt o bokach a , b , c takich, że $a \leq b \leq c$, jest prostokątny o kącie prostym leżącym naprzeciw boku c **wtedy i tylko wtedy, gdy** $a^2 + b^2 = c^2$.

Przykład 2

Sprawdźmy, czy trójkąt o bokach długości 11, 60 i 61 jest prostokątny.

Rozwiązanie

Liczby 11, 60, 61 spełniają nierówność trójkąta, więc trójkąt o bokach podanej długości istnieje.

W trójkącie prostokątnym dwa kąty są ostre, czyli najdłuższym bokiem może być tylko przeciwprostokątna. Wystarczy więc sprawdzić, czy zachodzi równość

$$11^2 + 60^2 = 61^2.$$

$$11^2 + 60^2 = 121 + 3600 = 3721 = 61^2$$

Zatem, na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa, badany trójkąt jest prostokątny.

Długość łuku i pole wycinka kołowego

Przypomnijmy:

- Obwód L koła o promieniu r jest równy $L = 2\pi r$.
- Pole P koła o promieniu r jest równe $P = \pi r^2$.
- Wycinkiem kołowym nazywamy każdą z dwóch części, na które dzieli koło dwa niepokrywające się promienie.

Wyprowadzenie wzorów na obwód i pole koła wymaga bardziej zaawansowanego aparatu matematycznego, niż przewiduje to podstawa programowa szkoły ponadpodstawowej. Również bez dowodu podamy dwa twierdzenia, które prowadzą do wyznaczenia długości łuku oraz pola wycinka kołowego w kole o promieniu r .

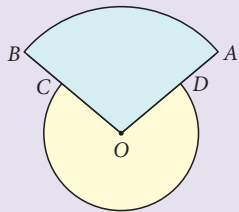
Twierdzenie 1

Długość łuku okręgu jest proporcjonalna do kąta środkowego odpowiadającego temu łukowi.

Twierdzenie 2

Pole wycinka kołowego jest proporcjonalne do kąta środkowego odpowiadającego temu wycinkowi.

◀1.19. Dane są dwa wycinki kołowe (zob. rysunek) o promieniach $|OA| = \sqrt{13}$ i $|OD| = \sqrt{5}$. Kąt wypukły AOB ma miarę 100° .



Wykaż, że

- a) pola obu wycinków są równe.
b) długość łuku wycinka AOB jest mniejsza od długości łuku wycinka COD .

Odp.: a) P_1 – pole wycinka AOB ,

P_2 – pole wycinka COD

$$P_1 = \frac{100}{360} \cdot \pi \cdot \sqrt{13}^2 = \frac{65\pi}{18}$$

$$P_2 = \frac{260}{360} \cdot \pi \cdot \sqrt{5}^2 = \frac{65\pi}{18}$$

$$P_1 = P_2$$

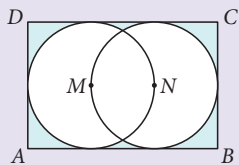
$$\text{b) } L_{AOB} = \frac{100}{360} \cdot 2\pi\sqrt{13} = \frac{5\sqrt{13}}{9}\pi$$

$$L_{COD} = \frac{260}{360} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{5} = \frac{13\sqrt{5}}{9}\pi$$

$$13\sqrt{5} > 5\sqrt{13}$$

$$\text{Zatem } L_{AOB} < L_{COD}.$$

◀1.21. Dwa koła, każde o polu równym S , są zawarte w prostokącie $ABCD$ tak jak na rysunku.

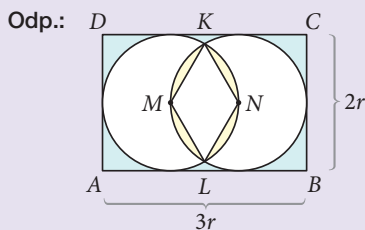


Udowodnij, że pole

a) prostokąta $ABCD$ jest równe $\frac{6S}{\pi}$.

b) zamalowanego obszaru jest

$$\text{równe } \frac{(36 - 8\pi - 3\sqrt{3})S}{6\pi}.$$



$$S = \pi r^2, \text{ stąd } r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

$$\text{a) } P_{ABCD} = 2r \cdot 3r = \frac{6S}{\pi}$$

- Niech L_W oznacza długość łuku AB wyznaczonego w kole o promieniu r przez kąt środkowy α wyrażony w stopniach (zob. rysunek).

Zauważmy, że jeżeli mamy w tym kole kilka wycinków wyznaczonych przez kąty środkowe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, o łukach odpowiednio $L_{W_1}, L_{W_2}, L_{W_3}, \dots$, to na mocy twierdzenia 1 zachodzą równości:

$$\frac{L_{W_1}}{L_{W_2}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad \frac{L_{W_1}}{L_{W_3}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}, \quad \frac{L_{W_2}}{L_{W_3}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \text{ itd.}$$

W szczególnym przypadku:

$$\frac{L_W}{\pi r} = \frac{\alpha}{180^\circ}$$

← kąt środkowy o mierze 180° wyznacza półokrąg

i stąd długość L_W łuku AB jest równa:

$$L_W = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi r$$

Wzór na długość łuku często podawany jest też w postaci:

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

- Niech P_W oznacza pole wycinka kołowego wyznaczonego w kole o promieniu r przez kąt środkowy α wyrażony w stopniach (zob. rysunek).

Podobnie jak poprzednio skorzystamy z równości stosunków wielkości proporcjonalnych:

$$\frac{P_W}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$

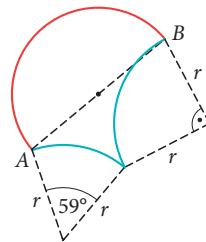
← kąt środkowy o mierze 360° wyznacza okrąg

i stąd pole P_W wycinka kołowego wyznaczonego przez kąt środkowy α wynosi:

$$P_W = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

Przykład 3

Wykażemy, że linia czerwona (półokrąg o promieniu 2,5 cm) łącząca punkty A i B jest dłuższa od sumy dwóch niebieskich łuków wyznaczonych przez kąty 59° i 90° w okręgach o promieniach 2,8 cm (zob. rysunek).



Dowód

Długość (w cm) czerwonego półokręgu jest równa $L_1 = 2,5\pi$.

Długość (w cm) łuku wyznaczonego przez kąt 90° , czyli jedna czwarta obwodu koła o promieniu 2,8 cm, wynosi $L_2 = 1,4\pi$.

- b) Pole części wspólnej kół można podzielić na romb o boku r i cztery odcinki kołowe (zamalowane kolorem żółtym).

$$P_{\text{rombu}} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \left(2 \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}r^2\sqrt{3}, \quad P_{\text{odcinka}} = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$

Pole części wspólnej:

$$P_{\text{wsp}} = \frac{1}{2}r^2\sqrt{3} + 4 \cdot \left(\frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{2}{3}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2\sqrt{3} = \frac{S}{\pi} \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{S}{\pi} \cdot \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}$$

Pole zamalowanego w treści zadania obszaru:

$$P = P_{ABCD} - 2P_{\text{koła}} + P_{\text{wsp}} = \frac{6S}{\pi} - 2S + \frac{S}{\pi} \cdot \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6} = \frac{(36 - 8\pi - 3\sqrt{3})S}{6\pi}$$

Długość (w cm) łuku wyznaczonego przez kąt 59° wynosi:

$$L_3 = \frac{59}{180} \pi \cdot 2,8 = \frac{59}{90} \cdot 1,4\pi$$

Długość (w cm) niebieskiej linii równa się:

$$L_2 + L_3 = 1,4\pi + \frac{59}{90} \cdot 1,4\pi = 1,4\pi \left(1 + \frac{59}{90}\right) = 1,4\pi \cdot \frac{149}{90}$$

Porównamy wielkości L_1 i $L_2 + L_3$. W tym celu zbadamy ich iloraz:

$$\frac{L_2 + L_3}{L_1} = \frac{1,4\pi \cdot 149}{90 \cdot 2,5\pi} = \frac{2086}{2250} < 1$$

Zatem $L_2 + L_3 < L_1$.

Koniec dowodu

Związki miarowe w wielokątach

Przykład 4

W kwadracie $ABCD$ punkty E i F są odpowiednio środkami boków AB i BC . Wykażemy, że odcinki DE i DF dzielą przekątną AC na trzy równe części.

Założenia

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

- $ABCD$ jest kwadratem.
- $|AE| = |EB|$
- $|BF| = |FC|$

Teza

$$|AM| = |MN| = |NC|$$

Dowód

Prowadzimy przekątną DB i jej punkt przecięcia z AC oznaczamy literą K , jak na rysunku.

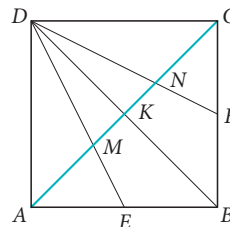
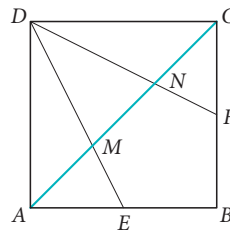
$$|AM| = |NC| \text{ i } |MK| = |KN| \quad \leftarrow \text{prosta } BD \text{ jest osią symetrii kwadratu } ABCD$$

W trójkącie ABD punkt K jest środkiem boku BD . Zatem odcinki AK oraz DE są w tym trójkącie środkowymi i przecinają się w punkcie M . Oznacza to, że:

$$|AM| = 2|MK| \quad \leftarrow \text{twierdzenie o punkcie przecięcia środkowych trójkąta}$$

co, wobec równości $|MK| = |KN|$, kończy dowód.

Koniec dowodu



Przypomnijmy twierdzenie udowodnione w podręczniku do klasy drugiej (s. 204).

Twierdzenie

W trójkącie prostokątnym kwadrat wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego jest równy iloczynowi długości odcinków, na które ta wysokość podzieliła przeciwprostokątną.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$$\triangle ACB \sim \triangle ADC \sim \triangle CDB$$

Wykorzystamy następujące proporcje, aby wyprowadzić kolejne związki miarowe dotyczące trójkąta prostokątnego:

- $\frac{b}{c} = \frac{p}{b}$ $\leftarrow$ z podobieństwa trójkątów DAC i CAB
- $\frac{a}{c} = \frac{q}{a}$ $\leftarrow$ z podobieństwa trójkątów DCB i CAB

Stąd:

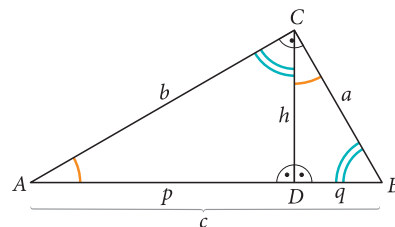
- $b^2 = c \cdot p$
- $a^2 = c \cdot q$

Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Jeśli odcinek CD jest wysokością trójkąta prostokątnego ABC o kącie prostym BCA , to:

$$|AC|^2 = |AB| \cdot |AD| \text{ i } |BC|^2 = |AB| \cdot |DB|$$



Odpowiedzi i rozwiązania

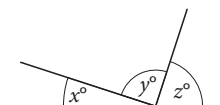
1.1. Wskazówka: Zwróć uwagę, że ten czworokąt jest deltoidem, a przekątna AC dzieli go na trójkąty przystające.

D

Zadania

1.1. Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $|AB| = |AD|$ i $|BC| = |DC|$. Wykaż, że $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$.

1.2. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Wiadomo, że $\frac{y}{x} = 5$ i $\frac{z}{x} = 4$. Wykaż, że $z = 72$.



$$\mathbf{1.2.} \quad x^\circ + y^\circ + z^\circ = 180^\circ$$

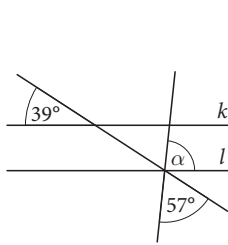
$$\frac{y}{x} = 5, \text{ więc } y = 5x$$

$$\frac{z}{x} = 4, \text{ więc } z = 4x$$

$$x + 5x + 4x = 180$$

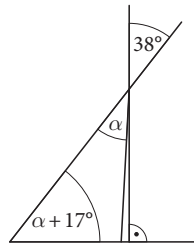
$$x = 18, y = 90, z = 72$$

1.3. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 1. Proste k i l są równoległe. Udowodnij, że $\alpha = 84^\circ$.



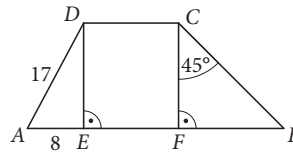
Rys. 1.

1.4. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 2. Wykaż, że $\alpha = 35^\circ$.



Rys. 2.

1.5. Dany jest trapez $ABCD$ ($AB \parallel DC$). Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 3. Wykaż, że $|BC| = 15\sqrt{2}$.

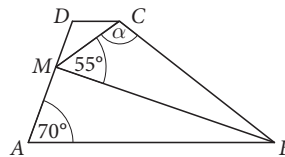


Rys. 3.

1.6. Wykaż, że w czworokącie o bokach równej długości przeciwległe kąty są równe.

1.7. W trójkącie ABC poprowadzono środkową BM , a następnie na półprostej BM wyznaczono taki punkt D (różny od punktu B), że $|BM| = |MD|$. Udowodnij, że $|BC| = |AD|$.

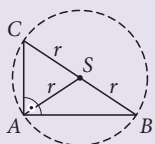
1.8. W trapezie $ABCD$ ($AB \parallel DC$), w którym $\sphericalangle BAD = 70^\circ$, poprowadzono odcinek BM tak, że $|MD| = |DC|$ (zob. rysunek). Odcinek BM jest zawarty w dwusiecznej kąta ABC , a $\sphericalangle BMC = 55^\circ$. Wykaż, że $\alpha = 105^\circ$.



1.9. W trójkątach ABC oraz $A'B'C'$ poprowadzono dwusieczne BD i $B'D'$. Wiadomo, że $|BD| = |B'D'|$, $\sphericalangle BDC = \sphericalangle B'D'C'$ i $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$. Udowodnij, że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ są przystające.

1.10. Wykaż, że dwa wierzchołki trójkąta są jednakowo oddalone od prostej, która zawiera środkową poprowadzoną do boku łączącego te wierzchołki.

* **1.11.** Wykaż, że w trójkącie prostokątnym środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego równa jest połowie przeciwprostokątnej i dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty równoramienne.



Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem przeciwprostokątnej (średnicy okręgu).

$$|AS| = |BS| = |CS| = r$$

$$\text{Zatem } |AS| = \frac{1}{2}|BC|.$$

Trójkąty ASC i ASB są równoramienne.

1.3. Wskazówka: Znajdź kąt naprzemianległy do kąta 39° .

1.4. Wskazówka: Zapisz sumę miar kątów trójkąta prostokątnego przedstawionego na rysunku, którego jeden kąt ma 38° .

1.5. Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AED :

$$|DE|^2 + 8^2 = 17^2$$

$$|DE| = |CF| = 15$$

Trójkąt FBC jest prostokątny i równoramienny, więc $|CF| = |FB| = 15$.

$$|BC| = |CF| \cdot \sqrt{2} = 15\sqrt{2}$$

1.6. Wskazówka: Tym czworokątem jest romb.

1.7. Patrz s. 94.

$$\sphericalangle ADC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

$$\sphericalangle DMC = \sphericalangle DCM = 35^\circ$$

$$\sphericalangle AMB = 180^\circ - 55^\circ - 35^\circ = 90^\circ$$

$$\sphericalangle ABM = 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$$

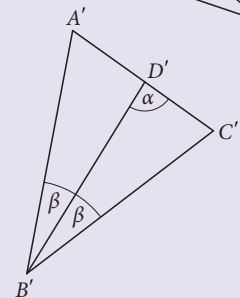
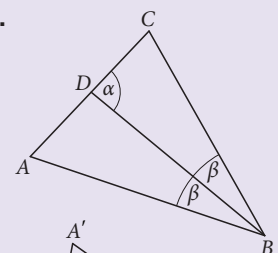
$$\sphericalangle MBC = 20^\circ$$

W trójkącie BMC :

$$\alpha + 55^\circ + 20^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 105^\circ$$

1.9.

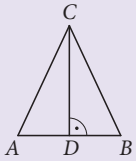


$\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC = \sphericalangle A'B'D' = \sphericalangle D'B'C'$, więc trójkąty BDC i $B'D'C'$ są przystające, zatem kąty C i C' są równe.

Ponieważ $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$, $|BC| = |B'C'|$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$, więc $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

1.10. Patrz s. 95.

1.12.

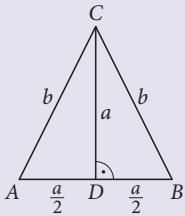


Wskazówka: Skorzystaj z cechy kbk przystawiania dla trójkątów ADC i BDC .

1.13. Patrz s. 95.

1.14. Patrz s. 95.

1.16.

W trójkącie ADC :

$$b^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad b = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos \angle A = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

1.17. Wskazówka: Oznacz literami a, b, c, d odległości punktu M od boków prostokąta i zastosuj twierdzenie Pitagorasa w powstałych trójkątach prostokątnych.

$$1.18. P_{SZ} = \frac{32}{360} \pi \cdot 1^2 = \frac{4\pi}{45}$$

$$P_N = \frac{1}{4} \pi \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{\pi - 2}{4}$$

$$P_N - P_{SZ} = \frac{\pi - 2}{4} - \frac{4\pi}{45} =$$

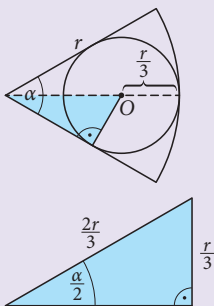
$$= \frac{29\pi - 90}{180} > 0$$

$$29\pi \approx 91,06$$

$$P_N > P_{SZ}$$

1.19. Patrz s. 98.

1.20.



Środek koła wpisanego w wycinek leży na dwusiecznej kąta α .

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{r}{3}}{\frac{2r}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 30^\circ, \quad \alpha = 60^\circ$$

1.12. Wysokość trójkąta zawiera się w dwusiecznej jednego z jego kątów wewnętrznych. Wykaż, że trójkąt ten jest równoramienny.

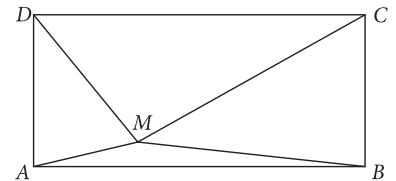
1.13. Wykaż, że czworokąt jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy jego przekątne przecinają się w punkcie, który jest środkiem każdej z nich.

1.14. W trójkącie ABC , w którym miara kąta B jest dwa razy większa od miary kąta A , poprowadzono dwusieczną BD . Udowodnij, że trójkąt BDC jest podobny do trójkąta ABC .

* 1.15. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = 7$, $|AC| = 3$, $\angle BAC = 60^\circ$. Dwusieczna kąta CAB przecina bok BC trójkąta w punkcie E . Wykaż, że $|AE| = \frac{21\sqrt{3}}{10}$.

1.16. W trójkącie równoramiennym ABC , w którym $|AC| = |BC|$, wysokość CD jest równa podstawie. Wykaż, że $\cos \angle A = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

1.17. Punkt M leży wewnątrz prostokąta $ABCD$ jak na rysunku. Udowodnij, że $|AM|^2 + |CM|^2 = |BM|^2 + |DM|^2$.



1.18. Promień półkola (rys. 1) jest równy 1. Wykaż, że pole niebieskiej figury jest większe od pola figury szarej.

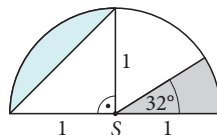
1.19. Dane są dwa wycinki kołowe (rys. 2) o promieniach $|OA| = \sqrt{13}$ i $|OD| = \sqrt{5}$. Kąt wypukły AOB ma miarę 100° . Wykaż, że

a) pola obu wycinków są równe.

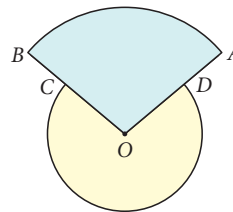
b) długość łuku wycinka AOB jest mniejsza od długości łuku wycinka COD .

* 1.20. W wycinek koła o promieniu r wpisano koło o promieniu $\frac{r}{3}$ (rys. 3).

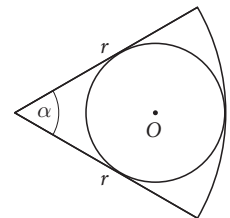
Wykaż, że $\alpha = 60^\circ$.



Rys. 1.

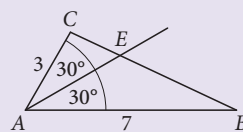


Rys. 2.



Rys. 3.

1.15.



$$P_{ABC} = P_{ABE} + P_{ACE}$$

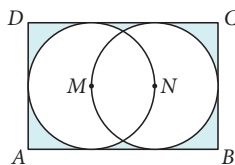
$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot |AE| \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot |AE| \cdot \sin 30^\circ$$

$$\frac{21\sqrt{3}}{4} = \frac{7}{4}|AE| + \frac{3}{4}|AE|$$

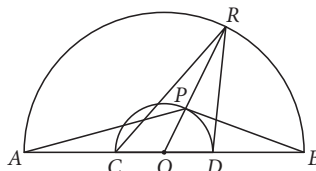
$$|AE| = \frac{21\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{21\sqrt{3}}{10}$$

- * **1.21.** Dwa koła, każde o polu równym S , są zawarte w prostokącie $ABCD$ tak jak na rysunku. Udowodnij, że pole

- a) prostokąta $ABCD$ jest równe $\frac{6S}{\pi}$.
 b) zamalowanego obszaru jest równe $\frac{(36 - 8\pi - 3\sqrt{3})S}{6\pi}$.

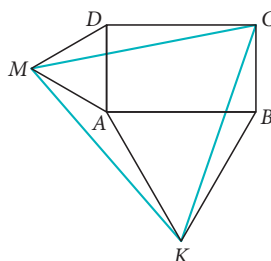


- * **1.22.** Dane są dwa półokręgi o wspólnym środku O i średnicach odpowiednio AB i CD (punkty A, B, C, D i O są współliniowe). Punkt P leży na wewnętrznym półokręgu, punkt R leży na zewnętrznym półokręgu, punkty O, P i R są współliniowe. Udowodnij, że $\angle APB + \angle CRD = 180^\circ$.



- 1.23.** Wykaż, że suma odległości dowolnego punktu wewnętrznego trójkąta od jego wierzchołków jest większa od połowy obwodu tego trójkąta.

- * **1.24.** Na dwóch bokach prostokąta $ABCD$ zbudowano trójkąty równoboczne ADM i BAK , jak na rysunku. Wykaż, że trójkąt MKC jest równoboczny.



- * **1.25.** Przekątna BD trapezu $ABCD$ jest prostopadła do ramienia AD i zawiera się w dwusiecznej kąta ABC . Wykaż, że pole trójkąta ABD jest dwa razy większe od pola trójkąta BCD .

- 1.26.** Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie M . Wykaż, że $|MA| \cdot |MD| = |MB| \cdot |MC|$.

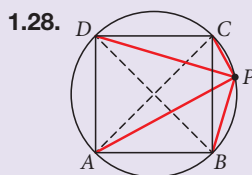
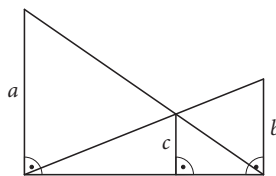
- 1.27.** Niech w trójkącie prostokątnym a i b oznaczają długości jego przyprostokątnych, c oznacza długość przeciwprostokątnej, r – promień okręgu wpisanego w ten trójkąt, R – promień okręgu opisanego na tym trójkącie. Wykaż, że

- a) $r = \frac{a+b-c}{2}$. b) $2r + 2R = a + b$.

- * **1.28.** Punkt P należy do okręgu opisanego na kwadracie o boku a . Wykaż, że suma kwadratów odległości punktu P od wierzchołków tego kwadratu ma stałą wartość, niezależną od wyboru punktu.

- 1.29.** Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Wykaż, że $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.



$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a$$

$$|AC| = |BD| = a\sqrt{2}$$

P leży na okręgu i jest różny od wierzchołków.

Trójkąty APC i BPD są prostokątne.

$$|PA|^2 + |PC|^2 = 2a^2 \text{ i } |PB|^2 + |PD|^2 = 2a^2$$

$$|PA|^2 + |PC|^2 + |PB|^2 + |PD|^2 = 4a^2$$

$4a^2$ to wartość stała, niezależna od wyboru punktu P .

Jeśli P jest jednym z wierzchołków, np. $P = A$, to

$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 = 0 + a^2 + (a\sqrt{2})^2 + a^2 = 4a^2 - \text{stała.}$$

- 1.21.** Patrz s. 98.

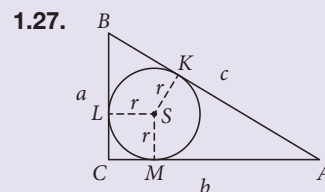
- 1.22.** $\triangle ODR \equiv \triangle OPB$, zatem $\angle ORD = \angle OBP$
 $\triangle OCR \equiv \triangle OPA$, zatem $\angle ORC = \angle OAP$
 $\angle APB + \angle CRD =$
 $= \angle APB + (\angle CRO + \angle ORD) =$
 $= \angle APB + \angle OAP + \angle OPB = 180^\circ$

- 1.23.** Wskazówka: Skorzystaj z nierówności trójkąta.

- 1.24.** Wskazówka: Zwróć uwagę, że $\triangle MDC \equiv \triangle MAK \equiv \triangle CBK$.

- 1.25.** Wskazówka: Przedłuż ramiona trapezu do punktu przecięcia M , wykaż, że pola trójkątów BDC i CDM są równe i wykorzystaj zależność między polami trójkątów ABM oraz DCM .

- 1.26.** Wskazówka: Uzasadnij równość miar kątów w trójkątach AMB i DMC , a następnie zapisz równość stosunków długości odpowiednich boków w tych trójkątach.



- 1.27.** a) $|CL| = |CM| = r$
 $|BL| = |BK| = a - r$
 $|AM| = |AK| = b - r$
 $|AB| = |AK| + |BK|$
 $c = a - r + b - r$
 $r = \frac{a+b-c}{2}$

- b) $2R = c$
 $|AB| = |AK| + |BK|$
 $2R = a - r + b - r$
 $2r + 2R = a + b$

- 1.29.** Patrz s. 95.

POLSKA SZKOŁA MATEMATYCZNA

Kiedy w 1918 r. Polska odzyskała niepodległość, jedną z dziedzin wymagających odbudowania była nauka. Z ogromnym sukcesem udało się to polskiej matematyce, która przebojem dołączyła do światowej elity. Dziś o matematykach i ich ogromnych osiągnięciach z tamtego okresu mówi się: **polska szkoła matematyczna**.

Warszawa i Lwów

Największy wpływ na sukces polskiej szkoły matematycznej miały dwa środowiska naukowe, działające na uniwersytetach w Warszawie i we Lwowie. Pierwsze było skupione wokół matematyków: Wacława Sierpińskiego, Zygmunta Janiszewskiego i Stefana Mazurkiewicza, drugie – wokół Hugona Steinhausa i Stefana Banacha.



Stefan
Mazurkiewicz



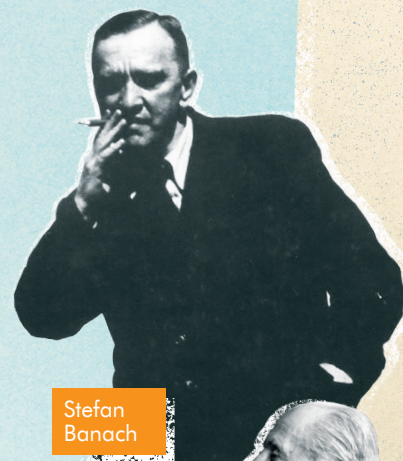
Wacław
Sierpiński



Zygmunt
Janiszewski

Kierunek ich działania nakreślił w 1917 r. Zygmunt Janiszewski w artykule „O potrzebach matematyki w Polsce”. Zgodnie z jego wytycznymi naukowcy zajmowali się głównie nowo odkrytymi obszarami matematyki. Jako pierwsi na świecie założyli czasopismo matematyczne o wąskiej specjalizacji. „**Fundamenta Mathematicae**”, wydawane od 1920 r. w Warszawie, poświęcone było głównie **teorii mnogości**. Lwowskie czasopismo „**Studia Mathematica**”, wydawane od 1929 r., uznano za najważniejsze miejsce prezentowania dokonań z zakresu nowoczesnej **analizy funkcjonalnej**.

Środowisko lwowskich matematyków słynęło z jeszcze innej rzeczy – niepowtarzalnej atmosfery i aury niezwykłości. Matematyczne dyskusje odbywano często nie w salach wykładowych, ale we lwowskich kawiarniach, przy poczęstunku, kawie i trunkach.



Stefan
Banach



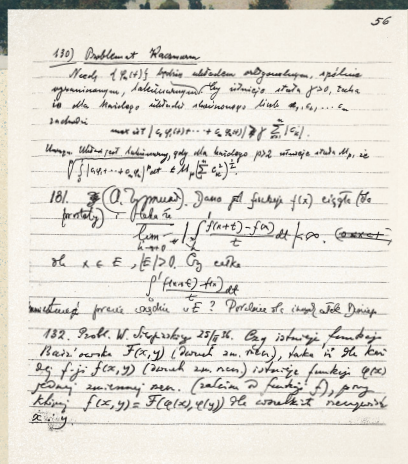
Hugo
Steinhaus

Księga szkocka

Do historii przeszła szczególnie Café Szkocka. Początkowo matematycy zapisywali swoje rozważania ołówkiem na marmurowych blatach stolików i serwetkach. Po wyczyszczeniu blatu przez obsługę kawiarni wszystkie zapiski ginęły bezpowrotnie. Żona Stefana Banacha kupiła więc zeszyt i do tego zeszytu, nazwanego *Księgą szkocką*, przeniosła się dyskusja. Wpisywano tam matematyczne problemy, które pojawiały się w trakcie kawiarnianych spotkań. Za ich rozwiązanie często przewidywana była nagroda.



Café Szkocka



strona z Księgi szkockiej

Przykładowe nagrody



2 małe piwa



mała kawa



10 dag kawioru



obiad u George'a



żywa gęś

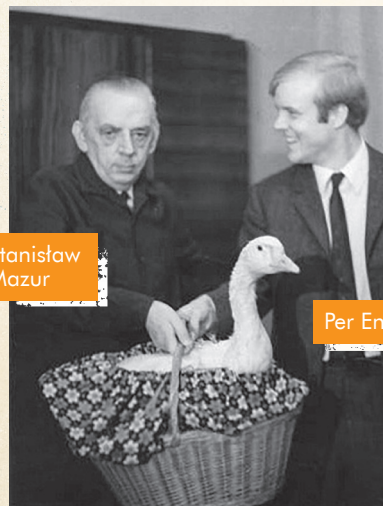
Problemy i twierdzenia

Przy każdym wpisie w *Księdze szkockiej* widnieje nazwisko jego autora. Na przykład tytuł poniższego fragmentu pochodzi od nazwisk dwóch matematyków: Hermana Auerbacha i Stanisława Mazura.

Twierdzenie Auerbach - Mazur

Jeżeli z rogu bilardu o współmiernych bokach wychodzi kula pod kątem 45° , to po skończonej liczbie odbić dojdzie do jednego z trzech pozostałych rogów.

Dla wyjaśnienia dodajmy, że dwa odcinki nazywamy współmiernymi, jeżeli istnieje trzeci odcinek mieszczący się całkowitą liczbę razy w każdym z tych dwóch odcinków.



Stanisław Mazur

Per Enflo

Problematami zapisanymi w *Księdze szkockiej* matematycy zajmują się nawet dziś. Żywą gęś z rąk Stanisława Mazura odebrał w 1972 r. Szwed Per Enflo za rozwiązanie problemu sformułowanego przez Mazura w 1936 r.

2. Dowody w algebrze

Umiejętności:

- dowodzenie twierdzeń z zakresu algebry

Aby rozwiązać zadanie na dowodzenie dotyczące podzielności liczb, nierówności lub innych zależności między liczbami czy wyrażeniami algebraicznymi, warto:

- I. zapisać precyzyjnie założenie i tezę, ← zobacz podane przykłady
- II. zastosować poznane definicje i twierdzenia, ← zobacz podane przykłady
- III. sprawdzić prawdziwość tezy w rozłącznych przypadkach, wyczerpujących wszystkie możliwości, ← zobacz przykłady 4, 6
- IV. przekształcić tezę równoważnie, ← zobacz przykład 9
- V. zastosować dowód nie wprost. ← zobacz przykłady 8, 10

Fakty, z których najczęściej będziemy korzystać w dowodach algebraicznych, to:

- cechy podzielności liczb,
- własności działań w zbiorze liczb rzeczywistych (w tym: potęgowania, pierwiastkowania, logarytmowania); wzory skróconego mnożenia,
- własności liczb (naturalnych, całkowitych, wymiernych, niewymiernych),
- własności ciągu arytmetycznego, geometrycznego,
- twierdzenie Bézouta, twierdzenie o całkowitych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Podzielność w zbiorze liczb całkowitych

Przykład 1

Wykażemy, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $7 \cdot 3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$ jest podzielna przez 19.

Założenie

$n \in \mathbb{Z}$

Teza

Liczba $7 \cdot 3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$ jest podzielna przez 19.

Dowód

$$7 \cdot 3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} = 7 \cdot 3^n + 3^n \cdot 3 + 3^n \cdot 3^2 = 3^n (7 + 3 + 3^2) = 3^n \cdot 19$$

3^n jest liczbą całkowitą, bo $n \in \mathbb{Z}$, zatem podana liczba jest podzielna przez 19.

Koniec dowodu

Liczba $n \in \mathbb{Z}$ jest **podzielna** przez liczbę $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $k \in \mathbb{Z}$ taka, że $n = m \cdot k$.

◀2.2. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $3 \cdot 2^{4n} + 4^{2n+1} + 4^{2n+2}$ jest podzielna przez 23.

Odp.: $3 \cdot 2^{4n} + 4^{2n+1} + 4^{2n+2} = 4^{2n} (3 + 4 + 16) = 4^{2n} \cdot 23$
 4^{2n} jest liczbą całkowitą dla $n \in \mathbb{N}$, zatem dana liczba jest podzielna przez 23.

KPU

tematy 4.1, 4.2

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.2

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 2

Udowodnimy, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6.

Założenie

$$n \in \mathbb{Z}$$

Teza

Liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6.

Dowód

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$$

Liczba $n(n-1)(n+1)$ jest iloczynem trzech kolejnych liczb całkowitych. Zatem:

- co najmniej jedna z nich jest parzysta,
- dokładnie jedna z nich jest podzielna przez 3.

Iloczyn liczb podzielnych przez 2 i przez 3 jest liczbą podzielną przez 6.

Koniec dowodu

Przykład 3

Udowodnimy, że różnica czwartych potęg dwóch kolejnych liczb całkowitych nieparzystych jest podzielna przez 16.

Założenie

$$k \in \mathbb{Z}$$

Teza

Istnieje takie $p \in \mathbb{Z}$, że:

$$(2k-1)^4 - (2k+1)^4 = 16p$$

Dowód

$$\begin{aligned} (2k-1)^4 - (2k+1)^4 &= \\ &= \left[(2k-1)^2 \right]^2 - \left[(2k+1)^2 \right]^2 = && \leftarrow \text{stosujemy wzór na różnicę kwadratów} \\ &= \left[(2k-1)^2 - (2k+1)^2 \right] \cdot \left[(2k-1)^2 + (2k+1)^2 \right] = \\ &= \left[(4k^2 - 4k + 1) - (4k^2 + 4k + 1) \right] \cdot \left[(4k^2 - 4k + 1) + (4k^2 + 4k + 1) \right] = \\ &= -8k(8k^2 + 2) = 16k(-4k^2 - 1) \end{aligned}$$

$k(-4k^2 - 1)$ jest liczbą całkowitą, bo $k \in \mathbb{Z}$. Zatem szukane p istnieje

$$\text{i } p = k(-4k^2 - 1).$$

Koniec dowodu

Dwie kolejne liczby nieparzyste dla $n \in \mathbb{Z}$ możemy zapisać na wiele sposobów: $2n+1$, $2n+3$ lub $2n+3$, $2n+5$ itd. Na ogół z powodów rachunkowych najwygodniejsza postać to $2n-1$ i $2n+1$.

2.4. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36.

$$\text{Odp.: } k^6 - 2k^4 + k^2 = k^2(k^4 - 2k^2 + 1) = k^2(k^2 - 1)^2 = \left[k \cdot (k^2 - 1) \right]^2$$

Wystarczy pokazać, że $k \cdot (k^2 - 1)$ jest podzielna przez 6.

$k \cdot (k^2 - 1) = k \cdot (k-1) \cdot (k+1)$ to iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych. Wśród nich jest co najmniej jedna podzielna przez 2 i dokładnie jedna podzielna przez 3. Zatem ten iloczyn jest podzielny przez 6, a jego kwadrat jest podzielny przez 36.

◀2.3. Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych zwiększona o 1 jest liczbą podzielną przez 3.

Odp.: $n, n+1, n+2$ – trzy kolejne liczby całkowite dla $n \in \mathbb{Z}$

$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + 1 =$
 $= n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 + 1 =$
 $= 3n^2 + 6n + 6 = 3(n^2 + 2n + 2)$
 $n^2 + 2n + 2$ jest liczbą całkowitą dla $n \in \mathbb{Z}$, zatem suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 3.

Przykład 4

Udowodnimy, że różnica kwadratów dwóch liczb całkowitych nieparzystych jest podzielna przez 8.

Założenie

a i b są liczbami całkowitymi nieparzystymi.

Teza

Różnica kwadratów $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 8.

Dowód

Niech $a = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$ i $b = 2m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$.

Wówczas:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (2k + 1)^2 - (2m + 1)^2 = && \leftarrow \text{wzór na różnicę kwadratów} \\ &= (2k + 1 - 2m - 1)(2k + 1 + 2m + 1) = \\ &= (2k - 2m)(2k + 2m + 2) = 2(k - m) \cdot 2(k + m + 1) = 4(k - m)(k + m + 1) \end{aligned}$$

Aby wykazać podzielność otrzymanego iloczynu przez 8, wystarczy udowodnić, że jeden z czynników $(k - m)$, $(k + m + 1)$ jest liczbą parzystą.

Zauważmy, że:

- jeśli obie liczby k i m są parzyste lub obie są nieparzyste, to liczba $k - m$ jest parzysta,
- jeśli jedna spośród liczb k i m jest parzysta, a druga nieparzysta, to liczba $k + m + 1$ jest parzysta.

Zatem liczba $4(k - m)(k + m + 1)$ jest podzielna przez 8.

Koniec dowodu

Różnica potęg

Znamy wzory skróconego mnożenia na różnicę kwadratów i różnicę sześcianów:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

Uogólnieniem tych zależności jest wzór na **różnicę n -tych potęg**, którego dowód pominiemy.

Twierdzenie

Dla każdej dodatniej liczby naturalnej n prawdziwy jest wzór:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Na przykład dla $n = 5$ powyższy wzór ma postać:

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

Jeśli zastosujemy wzór na różnicę n -tych potęg dla liczb całkowitych a, b , to otrzymamy następujący wniosek.

Wniosek

Dla dowolnych różnych liczb całkowitych a i b liczba $a^n - b^n$ jest podzielna przez $a - b$.

Przykład 5

Udowodnimy, że liczba $49^{12} - 256^6$ jest podzielna przez 3.

Dowód

$$49^{12} - 256^6 = (7^2)^{12} - (4^4)^6 = 7^{24} - 4^{24}$$

Liczba $7^{24} - 4^{24}$ jest podzielna przez $7 - 4 = 3$.

Koniec dowodu

Dzielenie z resztą

W szkole podstawowej było omawiane dzielenie z resztą. Przypomnijmy, że na przykład równość:

$$17 = 5 \cdot 3 + 2$$

można odczytać w następujący sposób:

reszta z dzielenia liczby 17 przez 3 jest równa 2

lub

reszta z dzielenia liczby 17 przez 5 jest równa 2.

Reszta z dzielenia nie może być większa od dzielnika, zatem równość:

$$19 = 5 \cdot 3 + 4$$

oznacza, że reszta z dzielenia liczby 19 przez 5 jest równa 4,

ale

nie oznacza, że reszta z dzielenia liczby 19 przez 3 jest równa 4.

Dzielenie z resztą możemy wykonywać również w zbiorze liczb całkowitych. Przyjęto zasadę, że reszta jest w takim przypadku liczbą nieujemną mniejszą od wartości bezwzględnej dzielnika.

◀2.11. Wykaż, że liczba $25^{21} - 64^7$ jest podzielna przez 3.

Odp.: $25^{21} - 64^7 = (5^2)^{21} - (2^6)^7 = 5^{42} - 2^{42}$
Liczba $5^{42} - 2^{42}$ jest podzielna przez $5 - 2 = 3$.

Jeżeli na przykład chcemy wyznaczyć resztę z dzielenia liczby -17 przez 3 , to korzystamy z równości:

$$-17 = (-6) \cdot 3 + 1$$

Zatem **reszta z dzielenia liczby -17 przez 3 jest równa 1 .**

Uogólnieniem tych rozważań jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb całkowitych a i b , $b \neq 0$ (a – dzielna, b – dzielnik), istnieje dokładnie jedna para liczb całkowitych q i r (q – iloraz, r – reszta) takich, że:

$$a = q \cdot b + r, \text{ gdzie } r \geq 0 \text{ i } r < |b|$$

Z powyższego twierdzenia będziemy korzystać, zapisując liczby całkowite w odpowiednich postaciach. Na przykład każdą liczbę całkowitą n , która przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3 , można zapisać w postaci $n = 5k + 3$, $k \in \mathbb{Z}$.

◀2.8. Liczba całkowita a przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2 , liczba całkowita b przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3 . Udowodnij, że różnica czwartych potęg liczb a i b jest podzielna przez 5 .

Odp.: $a = 5n + 2$, $n \in \mathbb{Z}$

$b = 5m + 3$, $m \in \mathbb{Z}$

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

Aby liczba $a^4 - b^4$ była podzielna przez 5 , wystarczy, aby jeden z jej czynników był podzielny przez 5 .

$$a + b = 5n + 2 + 5m + 3 = 5n + 5m + 5 = 5(n + m + 1)$$

Czynnik $a + b$ jest podzielny przez 5 .

Przykład 6

Udowodnimy, że kwadrat liczby całkowitej niepodzielnej przez 3 daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3 .

Założenie

n jest liczbą całkowitą niepodzielną przez 3 .

Teza

n^2 przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1 .

Dowód

Skoro liczba całkowita n nie jest podzielna przez 3 , to są dwie możliwości:

- $n = 3k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$

Wtedy $n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$.

- $n = 3m + 2$, $m \in \mathbb{Z}$

Wtedy $n^2 = (3m + 2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1$.

W obydwu przypadkach liczbę n^2 można przedstawić w postaci $3p + 1$, gdzie $p \in \mathbb{Z}$, co oznacza, że reszta z dzielenia liczby n^2 przez 3 jest równa 1 .

Koniec dowodu

Liczby wymierne i niewymierne

Przykład 7

Wykażemy bez użycia kalkulatora, że $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5}$ jest liczbą wymierną.

Dowód

Zapiszemy różnicę pod pierwiastkiem w postaci kwadratu i skorzystamy z zależności $\sqrt{a^2} = |a|$.

$$\begin{aligned}\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} &= \sqrt{4 - 4\sqrt{5} + 5} = \\ &= \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2 \quad \leftarrow 2 - \sqrt{5} < 0\end{aligned}$$

Zatem dana liczba:

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} = -2$$

jest całkowita, czyli jest wymierna.

Koniec dowodu

Przykład 8

Udowodnimy, że liczba $\log_3 7$ jest niewymierna.

Dowód nie wprost

Przypuścimy, że teza jest fałszywa, czyli że liczba $\log_3 7$ jest wymierna.

Zauważmy, że $\log_3 7 > \log_3 3 = 1$, zatem liczba $\log_3 7$ jest dodatnia. Istnieją zatem takie liczby naturalne dodatnie n i k , że $\log_3 7 = \frac{n}{k}$.

$$\begin{aligned}3^{\frac{n}{k}} &= 7 && \leftarrow \text{z definicji logarytmu} \\ 3^n &= 7^k && \leftarrow \text{z własności działań na potęgach}\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy równość dwóch liczb naturalnych: 3^n oraz 7^k .

Lewa strona tej równości jest podzielna przez 3, zatem prawa również. Ale gdyby liczba 7^k była podzielna przez 3, to również liczba 7 byłaby podzielna przez 3.

Otrzymaliśmy sprzeczność, co dowodzi, że liczba $\log_3 7$ jest niewymierna.

Koniec dowodu

Metoda **dowodzenia nie wprost** (lub **sprowadzania do niedorzeczności**) polega na sprawdzeniu, co by było, gdyby podana teza była fałszywa. Jeśli w toku rozumowania okaże się, że oznaczałoby to fałszywość założeń, to wnioskujemy, że teza jest prawdziwa.

◀2.16. Udowodnij bez użycia kalkulatora, że

$\sqrt{16 + 6\sqrt{7}} + \sqrt{32 - 10\sqrt{7}}$ jest liczbą całkowitą.

$$\begin{aligned}\text{Odp.: } \sqrt{16 + 6\sqrt{7}} + \sqrt{32 - 10\sqrt{7}} &= \\ &= \sqrt{3^2 + 6\sqrt{7} + \sqrt{7}^2} + \\ &+ \sqrt{5^2 - 10\sqrt{7} + \sqrt{7}^2} = \\ &= \sqrt{(3 + \sqrt{7})^2} + \sqrt{(5 - \sqrt{7})^2} = \\ &= |3 + \sqrt{7}| + |5 - \sqrt{7}| = \\ &= 3 + \sqrt{7} + 5 - \sqrt{7} = 8\end{aligned}$$

◀2.17. Wykaż, że liczba $\sqrt[3]{2}$ jest niewymierna.

Odp.: Dowód nie wprost.

Założmy, że $\sqrt[3]{2}$ jest liczbą wymierną, zatem daje się zapisać w postaci nieskracalnego ułamka $\frac{p}{q}$, gdzie $p \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

$$\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}, \quad 2 = \frac{p^3}{q^3}, \quad 2 \cdot q^3 = p^3$$

Lewa strona jest liczbą parzystą, zatem prawa też. To oznacza, że p musi być liczbą parzystą, więc p^3 jest podzielne przez 8. Aby lewa strona była podzielna przez 8, q musi być liczbą parzystą. Dotarliśmy do sprzeczności,

ponieważ ułamek $\frac{p}{q}$ jest

nieskracalny. Zatem $\sqrt[3]{2}$ jest liczbą niewymierną.

◀2.20. Wykaż, że jeżeli $a + b \geq 0$, to prawdziwa jest nierówność $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.

Odp.: $a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 \geq 0$

$$L = a^3 - a^2b + b^3 - ab^2 =$$

$$= a^2(a - b) - b^2(a - b) =$$

$$= (a - b)(a^2 - b^2) =$$

$$= (a - b)(a - b)(a + b) =$$

$$= (a - b)^2(a + b)$$

$(a - b)^2$ jest liczbą nieujemną,

natomiast $a + b \geq 0$ z założenia.

Iloczyn $(a - b)^2(a + b)$ jest zatem liczbą nieujemną.

◀2.25. Wykaż, że dla liczb rzeczywistych x, y takich, że $xy < -12$, prawdziwa jest nierówność $x^2 + y^2 \geq 24$.

Odp.: $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

Jeśli $xy < -12$, to $-2xy > 24$.

$(x + y)^2 \geq 0$ i $-2xy > 24$, więc

$$(x + y)^2 + (-2xy) \geq 24.$$

Nierówności

Przykład 9

Wykażemy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $x^2 + 2y^2 - 2xy + 4y + 5 > 0$.

Założenia

$$x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$$

Teza

$$x^2 + 2y^2 - 2xy + 4y + 5 > 0$$

Dowód

Przekształcamy równoważnie lewą stronę nierówności:

$$L = x^2 - 2xy + y^2 + y^2 + 4y + 4 + 1 =$$

$$= (x - y)^2 + (y + 2)^2 + 1 > 0$$

Pierwsze dwa składniki otrzymanej sumy są nieujemne, zatem lewa strona nierówności jest dodatnia.

Koniec dowodu

Przykład 10

Wykażemy, że dla liczb rzeczywistych x, y takich, że $xy > 9$, prawdziwa jest nierówność $x^2 + y^2 \geq 18$.

Założenia

$$x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, xy > 9$$

Teza

$$x^2 + y^2 \geq 18$$

Dowód (I sposób)

Zauważmy, że:

$$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$$

Z założenia $xy > 9$, zatem $2xy > 18$. Ponadto $(x - y)^2 \geq 0$.

Mamy więc $x^2 + y^2 \geq 18$.

Koniec dowodu

Dowód (II sposób, nie wprost)

Przypuśćmy, że dla liczb $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$ prawdziwy jest układ nierówności:

$$xy > 9 \text{ i } x^2 + y^2 < 18$$

Wykażemy, że jest to niemożliwe.

Skoro $xy > 9$, to $-2xy < -18$.

◀2.27. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność

$$\frac{|x| + |y|}{2} \geq \sqrt{|xy|}.$$

Odp.: Wystarczy uzasadnić, że $\frac{|x| + |y|}{2} - \sqrt{|xy|} > 0$.

$$L = \frac{|x| + |y|}{2} - \sqrt{|xy|} = \frac{|x| + |y| - 2\sqrt{|xy|}}{2} = \frac{(\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|})^2}{2}$$

Stąd $L \geq 0$.

Zatem $\begin{cases} x^2 + y^2 < 18 \\ -2xy < -18 \end{cases}$. Po dodaniu stronami tych nierówności otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 &< 0 \\ (x - y)^2 &< 0 \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest fałszywa – otrzymaliśmy sprzeczność, co dowodzi, że podane w zadaniu twierdzenie jest prawdziwe.

Koniec dowodu

D

Zadania

- 2.1.** Wykaż, że liczba $6^{100} - 2 \cdot 6^{99} + 10 \cdot 6^{98}$ jest podzielna przez 17.
- 2.2.** Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $3 \cdot 2^{4n} + 4^{2n+1} + 4^{2n+2}$ jest podzielna przez 23.
- 2.3.** Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych zwiększona o 1 jest liczbą podzielną przez 3.
- * **2.4.** Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36.
- 2.5.** Udowodnij, że iloczyn czterech kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 24.
- 2.6.** Udowodnij, że jeżeli przy dzieleniu przez 7 jedna liczba daje resztę 5, a druga resztę 4, to iloczyn tych liczb przy dzieleniu przez 7 daje resztę 6.
- 2.7.** Udowodnij, że jeśli liczba całkowita przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej kwadrat przy dzieleniu przez 5 daje resztę 4.
- * **2.8.** Liczba całkowita a przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2, liczba całkowita b przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3. Udowodnij, że różnica czwartych potęg liczb a i b jest podzielna przez 5.
- 2.9.** Udowodnij, że suma kwadratów dwóch liczb całkowitych niepodzielnych przez 3 jest liczbą niepodzielną przez 3.
- 2.10.** Wykaż, że liczba $1918^{10} - 1795^{10}$ jest podzielna przez 123.
- 2.11.** Wykaż, że liczba $25^{21} - 64^7$ jest podzielna przez 3.
- 2.12.** Udowodnij, że jeżeli $x - y = 3$ i $x^2 + y^2 = 13$, to $xy = 2$.
- 2.13.** Udowodnij, że jeżeli $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 7$, to $a^4 + b^4 = 31$.

$$\begin{aligned} \mathbf{2.30.} \quad a_{n+1} - a_{n-1} &= a_1 \cdot q^n - a_1 \cdot q^{n-2} = \\ &= a_1 q^{n-2} (q^2 - 1) = a_1 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-2} \cdot \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 - 1 \right) = \\ &= a_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-2} \cdot \left(\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5 - 4}{4} \right) = a_1 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-2} \cdot \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{4} = \\ &= a_1 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-2} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = a_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} = a_1 \cdot q^{n-1} = a_n \end{aligned}$$

Odpowiedzi i rozwiązania

- 2.1.** $6^{100} - 2 \cdot 6^{99} + 10 \cdot 6^{98} =$
 $= 6^{98}(6^2 - 2 \cdot 6 + 10) = 6^{98} \cdot 34 =$
 $= 6^{98} \cdot 2 \cdot 17$
 $6^{98} \cdot 2$ jest liczbą całkowitą, zatem
dana liczba jest podzielna przez 17.
- 2.2.** Patrz s. 106.
- 2.3.** Patrz s. 108.
- 2.4.** Patrz s. 107.
- 2.5.** *Wskazówka:* Wśród czterech kolejnych liczb całkowitych jest co najmniej jedna liczba podzielna przez 2, co najmniej jedna podzielna przez 3 i dokładnie jedna podzielna przez 4.
- 2.6.** $x = 7n + 5$ – jedna liczba, $n \in \mathbb{Z}$
 $y = 7m + 4$ – druga liczba, $m \in \mathbb{Z}$
 $x \cdot y = (7n + 5)(7m + 4) =$
 $= 49mn + 28n + 35m + 20 =$
 $= 7(7mn + 4n + 5m + 2) + 6 =$
 $= 7k + 6$
 $k = (7mn + 4n + 5m + 2) \in \mathbb{Z}$
- 2.7.** Patrz zadanie 2.6.
- 2.8.** Patrz s. 110.
- 2.9.** *Wskazówka:* Liczba niepodzielna przez 3 daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1 lub 2.
- 2.10.** Liczba $1918^{10} - 1795^{10}$ jest podzielna przez
 $1918 - 1795 = 123$.
- 2.11.** Patrz s. 109.
- 2.12.** $x^2 + y^2 = 13$
 $x^2 - 2xy + y^2 + 2xy = 13$
 $(x - y)^2 + 2xy = 13$
 $3^2 + 2xy = 13$
 $2xy = 4$
 $xy = 2$
- 2.13.** $(a^2 + b^2)^2 = 7^2$
 $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = 49$
 $a^4 + b^4 = 49 - 2(ab)^2$
 $a + b = 1$
 $a^2 + 2ab + b^2 = 1$
 $2ab + 7 = 1$
 $2ab = -6$
 $ab = -3$
 $a^4 + b^4 = 49 - 2 \cdot (-3)^2 = 49 - 18 = 31$

2.14. Z podanego warunku mamy

$$c = \frac{a+b}{2}. \text{ Zatem}$$

$$\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = \frac{a}{a-\frac{a+b}{2}} + \frac{b}{b-\frac{a+b}{2}} =$$

$$= \frac{2a}{a-b} + \frac{2b}{b-a} = \frac{2(a-b)}{a-b} = 2.$$

2.15. $4a^2 - 9b^2 + 2a - 3b = 0$
 $(2a - 3b)(2a + 3b) + 2a - 3b = 0$
 $(2a - 3b)(2a + 3b + 1) = 0$
 $2a - 3b = 0 \vee 2a + 3b + 1 = 0$
 $2a = 3b \vee 2a + 3b = -1$
 Sprzeczne, ponieważ a i b są dodatnie. Zatem $2a = 3b$.

2.16. Patrz s. 111.

2.17. Patrz s. 111.

2.18. Dowód nie wprost. Patrz zadanie 2.17.

2.19. Obie strony są dodatnie, więc możemy nierówność podnieść stronami do kwadratu.

$$2^{50} - 1 + 2^{50} + 1 +$$

$$+ 2\sqrt{(2^{50} - 1)(2^{50} + 1)} < 2^{52}$$

$$2 \cdot 2^{50} + 2\sqrt{2^{100} - 1} < 4 \cdot 2^{50}$$

$$2\sqrt{2^{100} - 1} < 2 \cdot 2^{50} \quad | : 2$$

$$\sqrt{2^{100} - 1} < 2^{50}$$

Ponownie podnosimy obie strony do kwadratu.

$2^{100} - 1 < 2^{100}$, czyli $0 < 1$
 Otrzymana nierówność jest prawdziwa. Przekształcenia były równoważne, a to dowodzi prawdziwości wyjściowej nierówności.

2.20. Patrz s. 112.

2.21. Wystarczy wykazać, że
 $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \geq 0$.
 $L = x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz +$
 $+ z^2 + x^2 - 2xz + z^2 =$
 $= (x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 \geq 0$
 Suma kwadratów liczb jest liczbą nieujemną.

2.22. $L = 4x^2 - 4xy + y^2 + y^2 + 2y + 1 = (2x - y)^2 + (y + 1)^2 \geq 0$
 Suma kwadratów liczb jest liczbą nieujemną.

2.23. $L = 4x^2 - 12x + 9 + 9y^2 - 12y + 4 + 1 = (2x - 3)^2 + (3y - 2)^2 + 1 > 0$
 Suma kwadratów zwiększona o 1 jest liczbą dodatnią.

2.24. $L = 9x^2 + 30x + 25 + y^2 + 14y + 49 = (3x + 5)^2 + (y + 7)^2 \geq 0$
 Suma kwadratów jest liczbą nieujemną.

2.25. Patrz s. 112.

2.26. Patrz zadanie 2.25.

2.27. Patrz s. 112.

2.14. Udowodnij, że jeżeli $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ i $a + b = 2c$, to $\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2$.

2.15. Liczby dodatnie a i b spełniają warunek $4a^2 + 2a = 9b^2 + 3b$. Udowodnij, że $2a = 3b$.

2.16. Udowodnij bez użycia kalkulatora, że $\sqrt{16 + 6\sqrt{7}} + \sqrt{32 - 10\sqrt{7}}$ jest liczbą całkowitą.

2.17. Wykaż, że liczba $\sqrt[3]{2}$ jest niewymierna.

2.18. Wykaż, że liczba $\log 17$ jest niewymierna.

* **2.19.** Wykaż, że prawdziwa jest nierówność $\sqrt{2^{50} + 1} + \sqrt{2^{50} - 1} < 2^{26}$.

2.20. Wykaż, że jeżeli $a + b \geq 0$, to prawdziwa jest nierówność $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.

2.21. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z prawdziwa jest nierówność $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0$.

2.22. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $4x^2 + 2y^2 - 4xy + 2y + 1 \geq 0$.

2.23. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $4x^2 + 9y^2 - 12x - 12y + 14 > 0$.

2.24. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $9x^2 + y^2 + 30x + 14y + 74 \geq 0$.

2.25. Wykaż, że dla liczb rzeczywistych x, y takich, że $xy < -12$, prawdziwa jest nierówność $x^2 + y^2 \geq 24$.

* **2.26.** Wykaż, że dla dodatnich liczb rzeczywistych x, y takich, że $xy > 3$, prawdziwa jest nierówność $x^4 + y^4 \geq 18$.

* **2.27.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $\frac{|x| + |y|}{2} \geq \sqrt{|xy|}$.

2.28. Wykaż, że jeżeli $A = 3^{4\sqrt{2}+2}$ i $B = 3^{2\sqrt{2}+3}$, to $B = 9\sqrt{A}$.

2.29. Dane są takie dodatnie liczby a i b , że $\log_2(8a) = 10$ i $\log_4 \frac{16}{b} = 3$. Wykaż, że $\log_2(ab) = 5$.

2.30. Iloraz ciągu geometrycznego wynosi $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Wykaż, że w tym ciągu każdy wyraz a_n , $n \geq 2$, jest równy różnicy dwóch sąsiadujących z nim wyrazów.

$$\mathbf{2.28.} \quad 9\sqrt{A} = 9 \cdot \sqrt{3^{4\sqrt{2}+2}} = 9 \cdot \sqrt{3^{4\sqrt{2}} \cdot 3^2} = 9 \cdot 3^{2\sqrt{2}} \cdot 3 =$$

$$= 27 \cdot 3^{2\sqrt{2}} = 3^3 \cdot 3^{2\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}+3} = B$$

2.29.

$$\log_2(8a) = 10 \quad \text{ i } \quad \log_4 \frac{16}{b} = 3$$

$$8a = 2^{10} \quad \log_4 16 - \log_4 b = 3$$

$$a = 2^7 \quad 2 - 3 = \log_4 b$$

$$\log_4 b = -1$$

$$b = \frac{1}{4}$$

$$\log_2 \left(2^7 \cdot \frac{1}{2^2} \right) = \log_2 2^5 = 5$$

2.30. Patrz s. 113.