

Maciej Antek
Krzysztof Belka
Piotr Grabowski

Prosto do matury

Podręcznik do matematyki
dla liceum ogólnokształcącego i technikum

1

Zakres podstawowy i rozszerzony

**nowa
era** *Twoje mocne strony*

Prosto do matury

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:

dr Moniki Fabijańczyk, dr. Zenona Krzemianowskiego i dr hab. Anny Cegieli.

Zakres kształcenia: podstawowy i rozszerzony

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa (liceum ogólnokształcące i technikum)

Rok dopuszczenia: 2019

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 1013/1/2019

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Piotra Grabowskiego.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2019
ISBN 978-83-267-3649-0

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Magdalena Spalińska

Współpraca redakcyjna: Jan Baranowski, Urszula Cielniak, Anna Dubiel, Marcin Minda, Elżbieta Zięcina

Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak

Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski, Robert Pysiak

Redakcja językowa: Marta Zuchowicz

Korekta językowa: Anna Wesołowska

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler

Opieka graficzna: Ewa Kaletyn

Projekt graficzny: Sławomir Włodarczyk, Ewa Kaletyn, Diana Gawronkiewicz/Podpunkt

Projekt okładki: Maciej Galiński, Ewa Kaletyn

Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska

Rysunki merytoryczne: Andrzej Oziębło

Ilustracje: Krzysztof Mrawiński

Opracowanie graficzne infografik: Marek Błoszko, Enzo Di Giacomo, Ewa Pawińska

Realizacja projektu graficznego: BOP s.c.

Fotografia na okładce: Getty Images/Moment/Marco Bottigelli

Fotografie: Archiwum NE s. 85 (Kochański); BE&W: Alamy Stock Photo - AF Fotografie s. 8 (Euklides), Getty Images/Icon Sportswire s. 292-293 (deskorolkarze); Panther Media GmbH s. 199 (działowa 3), Mary Evans Picture Library s. 87 (John Neper); Shutterstock: Alexandre Rotenberg s. 183, cożyta s. 333 (działowa 4), Franck Boston s. 84-85 (kwadratowe pomarańcze), Jiri Pavlik s. 403 (latarka), Joe Ferrer s. 401 (działowa 5), Josef Mohyla s. 447 (trzykroćka), Khram s. 7 (działowa 1), LianeM s. 446 (ziemiaki), LiliKar s. 447 (plaster miodu), Leszek Glasner s. 266 (armatka śnieżna), Mr Brown s. 259 (złoty), Netfalls Remy Musser s. 446 (jacht), Norman Chan s. 101 (działowa 2), Orhan Cam s. 433 (działowa 6) pixelman s. 447 (rozgwiazda), Shutterstock s. 447 (plaster miodu), Siemens s. 293 (piloci), Thinkstock/Getty Images: iStockphoto s. 426-427, iStockphoto - erlucho s. 259 (ratrak), Sharon Meredith s. 403 (antena).

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl, tel. 801 88 10 10

Druk i oprawa: Drukarnia Orthdruk

Spis treści

Wstęp	5
Wykaz używanych oznaczeń matematycznych	6

Dział 1. Liczby

1. Język matematyki	8
2. Warto powtórzyć – wyrażenia algebraiczne	16
3. Wzory skróconego mnożenia	21
4. Liczby pierwsze i złożone	31
5. Liczby wymierne. Liczby niewymierne	40
6. Warto powtórzyć – działania w zbiorze liczb rzeczywistych	52
7. Potęga o wykładniku całkowitym	59
8. Warto powtórzyć – pierwiastki kwadratowe i sześciennie	65
9. Pierwiastki wyższych stopni	69
10. Potęga o wykładniku wymiernym	76
11. Pojęcie logarytmu	86
12. Powtórzenie	93

Dział 2. Równania i nierówności

1. Warto powtórzyć – rozwiązywanie równań liniowych z jedną niewiadomą	102
2. Nierówności pierwszego stopnia	106
3. Przedziały liczbowe	114
4. Działania na zbiorach	121
5. Wartość bezwzględna liczby	128
6. Interpretacja geometryczna wartości bezwzględnej	134
7. Równania i nierówności z wartością bezwzględną	143
8. Równanie liniowe i nierówność liniowa z parametrami	154
9. Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi – wprowadzenie	165
10. Rozwiązywanie układu równań liniowych	173
11. Powtórzenie	191

Dział 3. Funkcje

1. Pojęcie funkcji	200
2. Wyznaczanie dziedziny funkcji	207
3. Zbiór wartości funkcji	213
4. Warto powtórzyć – układ współrzędnych	218
5. Wykres funkcji	221
6. Odczytywanie argumentów oraz wartości funkcji z wykresu	228

7. Miejsce zerowe funkcji	239
8. Znak i monotoniczność funkcji	246
9. Ważna funkcja – proporcjonalność odwrotna	258
10. Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu	268
11. Przesunięcie wykresu funkcji wzdłuż osi	277
12. Wykresy funkcji $y = -f(x)$, $y = f(x) $, $y = f(-x)$	283
13. Wektory	294
14. Wektory w układzie współrzędnych	303
15. Przekształcanie wykresów funkcji	315
16. Powtórzenie	322

Dział 4. Funkcja liniowa

1. Od proporcjonalności prostej do funkcji $y = ax$	334
2. Funkcja liniowa i jej wykres	344
3. Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty	355
4. Rysowanie wykresów funkcji przedziałami liniowych	363
5. Równanie prostej w postaci ogólnej	371
6. Położenie dwóch prostych na płaszczyźnie	380
7. Geometryczna interpretacja układów równań	386
8. Powtórzenie	393

Dział 5. Funkcja kwadratowa

1. Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2$	402
2. Postać kanoniczna funkcji kwadratowej	410
3. Postać ogólna funkcji kwadratowej	418
4. Powtórzenie	428

Dział 6. Figury na płaszczyźnie

1. Warto powtórzyć – kąty i ich własności	434
2. Wielokąty i ich własności	437
3. Figury przystające	448
4. Powtórzenie	456

Odpowiedzi	461
Skorowidz	496

Wstęp

Napisany przez nas podręcznik jest dostosowany do podstawy programowej obowiązującej w liceum od września 2019 r. i obejmuje treści z zakresu podstawowego oraz rozszerzonego.

Książka zawiera prawie dwa tysiące zadań do samodzielnego rozwiązania. To wystarczy do gruntownego przećwiczenia umiejętności nabytych podczas lekcji. Zadania trudniejsze oznaczone są * lub **, zadania typu „Udowodnij, że...” poprzedzone zostały znakiem D, natomiast zadania, do których rozwiązania przydatny jest kalkulator – znakiem .

Podręcznik dostosowany jest do samodzielnej nauki, co może być cenne na przykład w razie nieobecności w szkole. Wprowadzane pojęcia ilustrujemy przykładami rozwiązyanych zadań. W zrozumieniu materiału bardzo pomogą kolorowe rysunki merytoryczne. Wybrane rozwiązane zadania typu maturalnego zostały oznaczone znakiem . Podręcznik zawiera również krótkie powtórzenie najważniejszych pojęć oraz dodatkowe zadania utrwalające materiał ze szkoły podstawowej.

Różowym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.

Po każdym rozdziale proponujemy zestaw pięciu zadań zatytułowanych *Prosto do matury*. Warto, by po omówieniu każdego rozdziału uczniowie próbowali rozwiązywać je samodzielnie. Będzie to sprawdzianem umiejętności potrzebnych na maturze.

Odpowiedzi do pytań, poleceń, rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Mamy nadzieję, że nowa seria naszych podręczników nie tylko rzetelnie przygotuje Was do matury, lecz także umożliwi rozwinięcie zdolności matematycznych i zachęci do dalszego studiowania matematyki.

Autorzy

Wykaz używanych oznaczeń matematycznych

$x \in A; x \notin A$	x należy do zbioru A ; x nie należy do zbioru A
$\{a, b, c\}$	zbiór, którego elementami są a, b, c
$\mathbf{N, Z, Q, R}$	zbiór liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych, rzeczywistych
$\emptyset$	zbiór pusty
$A \subset B$	zbiór A jest podzbiorem zbioru B
$\sqrt[n]{a}$	pierwiastek stopnia n z liczby a
$\log_a b$	logarytm przy podstawie a liczby b
$\log b$	logarytm przy podstawie 10 liczby b
$a < b$ ($a > b$)	liczba a jest mniejsza (większa) od liczby b
$a \leq b$	liczba a jest nie większa, tzn. równa lub mniejsza od liczby b
$a \geq b$	liczba a jest nie mniejsza, tzn. równa lub większa od liczby b
$(a; b)$	przedział otwarty, zbiór liczb większych od a i mniejszych od b
$\langle a; b \rangle$	przedział domknięty (zamknięty)
$\langle a; b \rangle$	przedział lewostronnie domknięty
$(a; b \rangle$	przedział prawostronnie domknięty
$A \cap B$	część wspólna (iloczyn) zbiorów A i B
$A \cup B$	suma zbiorów A i B
$A - B$	różnica zbiorów A i B
$ a $	wartość bezwzględna liczby a
$f(x)$	wartość funkcji f dla argumentu x
D	dziedzina funkcji
ZW	zbiór wartości funkcji
$A = (a, b)$	punkt A o współrzędnych a (tzw. odcięta) i b (tzw. rzędna)
AB	odcinek o końcach A i B
$ AB $	długość odcinka AB
$\overrightarrow{AB}$	wektor o początku A i końcu B
$ \overrightarrow{AB} $	długość wektora $\overrightarrow{AB}$
$\vec{u} = [a, b]$	wektor $\vec{u}$ o współrzędnych a i b
$a \parallel b$	prosta a jest równoległa do prostej b
$a \perp b$	prosta a jest prostopadła do prostej b
$\sphericalangle ABC$	kąt o wierzchołku B i ramionach: półprostej BA i półprostej BC
$\triangle ABC$	trójkąt ABC
$F_1 \equiv F_2$	figura F_1 jest przystająca do figury F_2

Liczby

1

Umiejętności

Po szkole podstawowej uczeń:

- mnoży sumę algebraiczną przez jednomian oraz dwumian przez dwumian; przeprowadza redukcję wyrazów podobnych,
- oblicza wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych,
- rozpoznaje wielokrotności danej liczby oraz liczby pierwsze i liczby złożone,
- rozpoznaje liczby podzielne przez: 2, 3, 4, 5, 9, 10, 100,
- rozkłada liczby naturalne na czynniki pierwsze,
- znajduje największy wspólny dzielnik (NWD) i wyznacza najmniejszą wspólną wielokrotność (NWW) dwóch liczb naturalnych,
- dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne (także z wykorzystaniem kalkulatora),
- zamienia ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne (także okresowe),
- zamienia ułamki dziesiętne skończone na ułamki zwykłe,
- zaokrągla rozwinięcia dziesiętne liczb,
- stosuje własności działań na potęgach o wykładniku naturalnym,
- wykonuje działania na pierwiastkach kwadratowych i sześciennych,
- włącza liczbę przed znak pierwiastka i włącza liczbę pod znak pierwiastka,
- stosuje reguły dotyczące kolejności wykonywania działań na liczbach wymiernych,
- zapisuje liczby w notacji wykładniczej, tzn. w postaci $a \cdot 10^k$, gdzie $1 \leq a < 10$ oraz k jest liczbą całkowitą.

Po tym dziale uczeń:

- korzysta z podstawowych pojęć i symboli matematycznych,
- prawidłowo stosuje pojęcia: zbioru, podzbioru, zbioru pustego,
- stosuje wzory skróconego mnożenia: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)(a - b)$ w zadaniach na dowodzenie,
- przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych,
- przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach,
- odróżnia liczbę wymierną od liczby niewymiernej,
- zamienia ułamek dziesiętny okresowy na ułamek zwykły,
- stosuje prawa działań na potęgach o wykładniku całkowitym,
- wykonuje działania na pierwiastkach wyższych stopni,
- usuwa niewymierność z mianownika wyrażenia,
- stosuje prawa działań na potęgach o wykładniku wymiernym,
- rozwiązuje zadania z zastosowaniem definicji logarytmu.

1. Język matematyki

Umiejętności:

- korzystanie z podstawowych pojęć i symboli matematycznych
- posługiwanie się pojęciem zbioru i jego oznaczeniami
- wyróżnianie w twierdzeniach założeń i tezy

Matematyka posługuje się precyzyjnym językiem. Podczas nauki w szkole średniej będziemy używać pewnych pojęć, które teraz krótko omówimy.

Definicja

Definicja to wyjaśnienie znaczenia wprowadzanego pojęcia za pomocą poznanych (zdefiniowanych) wcześniej obiektów.

Aby nie objaśniać w nieskończoność, przyjmuje się, że w każdej teorii istnieją **pojęcia pierwotne**, których się nie definiuje. W geometrii nazywanej od imienia jej twórcy euklidesową pojęciami pierwotnymi są np. punkt, prosta, płaszczyzna.

Przykłady definicji:

- Wyrażenie będące iloczynem liczb i zmiennych nazywamy jednomianem.
- Skończoną sumę jednomianów nazywamy sumą algebraiczną.
- Okrąg o środku w punkcie S i promieniu $r > 0$ to zbiór punktów płaszczyzny oddalonych od punktu S o odległość r .

Twierdzenie matematyczne

Twierdzenie matematyczne to zdanie orzekające prawdziwe, które można udowodnić na podstawie wcześniej udowodnionych twierdzeń i znanych definicji. Tu również teoria zaczyna się od stwierdzeń intuicyjnie oczywistych, przyjętych bez dowodu, tzw. **aksjomatów**. Przykładem aksjomatu w geometrii euklidesowej jest zdanie „Przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi nieskończenie wiele prostych”. Przyjrzyjmy się na przykładach budowie twierdzeń.



Euklides z Aleksandrii

(ok. 365 r. p.n.e. – ok. 270 r. p.n.e.) – matematyk grecki, jeden z pierwszych autorów teoretycznych prac matematycznych.

Najbardziej znane jego dzieło to *Elementy* (tytuł grecki *Stoicheia geometrias*). Usystematyzował w nim ówczesną wiedzę matematyczną w postaci aksjomatycznego wykładu.

Elementy były powszechnie używanym podręcznikiem geometrii jeszcze w początkach XX w. Pod względem liczby drukowanych wydań *Elementy* ustępują tylko Biblii.

ZZ i MKP

tematy 1.1, 1.2, 2.1

Multiteka

- Obalenie twierdzenia przez podanie kontrprzykładu
- Zbiory liczbowe
- Liczby na osi liczbowej

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.1

- Suma miar kątów trójkąta jest równa 180° .

Aby udowodnić to twierdzenie, musimy wykazać, że **jeżeli badany obiekt (figura geometryczna) jest trójkątem, to suma miar kątów tego obiektu wynosi 180° .**

- Liczba podzielna przez 8 jest podzielna przez 4.

Jeżeli liczba jest podzielna przez 8, to jest podzielna przez 4.

- Dla dowolnych liczb a i b prawdziwy jest wzór $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Jeżeli a i b są liczbami, to prawdziwy jest wzór $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

- W trójkącie prostokątnym kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów długości przyprostokątnych.

Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów długości przyprostokątnych.

W podanych przykładach na pomarańczowo wyróżniono **założenia**, czyli warunki, w których twierdzenia mogą być stosowane. Kolorem zielonym oznaczono **tezę**, czyli prawdziwe (o ile zostaną udowodnione) wnioski wynikające z przyjętych założeń.

Większość twierdzeń rozpatrywanych w trakcie nauki w szkole średniej ma budowę:

Jeżeli założenie, to teza.

Inne będziemy omawiać w miarę potrzeby później.

Dowód twierdzenia to proces prowadzący do wykazania, że podane zdanie jest prawdziwe. Polega on na logicznym wnioskowaniu (dedukcji), wykorzystującym założenia oraz wcześniej udowodnione twierdzenia.

Przykłady twierdzeń wraz z ich dowodami omówimy w następnych rozdziałach.

Zdanie zbudowane na wzór  twierdzenia, ale nieudowodnione, nazywane jest **hipotezą**.

Dedukcja to rozumowanie,  w którym z danych założeń wyprowadza się logicznie wniosek.

Wniosek

Wniosek jest logiczną konsekwencją przeprowadzonego rozumowania, najczęściej wynika bezpośrednio z twierdzenia poprzedzającego dany wniosek.

Pojęcie zbioru

Zbiór to pojęcie używane w matematyce na określenie zestawu aktualnie interesujących nas liczb, figur, przedmiotów itd. Słowo „zbiór” można zastąpić wieloma innymi, np.: kolekcja, pakiet, zestaw, seria, zasób, wykaz.

◀1.7. Wymień trzy liczby, które nie należą do zbioru

- a) liczb dodatnich.
- b) ułamków właściwych.
- c) liczb całkowitych.
- d) liczb mniejszych od trzech.

Odp.: a) np.: -13, -5, 0

b) np.: $\frac{5}{4}$, $1\frac{3}{7}$, $\frac{21}{20}$

c) np.: $3\frac{1}{2}$, $-\frac{12}{5}$, $\sqrt{15}$

d) np.: 4, $6\frac{2}{3}$, 13

◀1.9. Które z wymienionych zbiorów są zbiorami skończonymi?

- A – zbiór liczb naturalnych
- B – zbiór ułamków właściwych
- C – zbiór dzielników liczby 152
- D – zbiór rozwiązań równania $5x - 3 = 2$
- E – zbiór punktów odcinka o długości 3 cm

Odp.: C i D

Odpowiedzi na pytanie „co to jest zbiór?” nie ma. Pojęcie to przyjmujemy bez definiowania jako intuicyjnie oczywiste, czyli pojęcie pierwotne. Zawsze natomiast musimy znać odpowiedź na pytanie o to, **które elementy tworzą dany zbiór**.

Wyrażenie „zbiór dużych psów” użyte w języku potocznym nikogo nie razi. W matematyce budzi jednak sprzeciw, gdyż określenie „duży pies” jest bardzo nieprecyzyjne. Trudno może być stwierdzić, czy nasz ulubiony Ciapiek należy do tego zbioru, czy nie. Przykładem dobrze określonego zbioru jest natomiast „zbiór psów”.

Zbiory tradycyjnie oznaczamy dużymi literami, a ich elementy – małymi literami.

Zapis $a \in A$ czytamy „a należy do zbioru A” lub „a jest elementem zbioru A”.

Zapis $a \notin A$ zastępuje zdanie „a nie należy do zbioru A”.

Przykład 1 ◀ zad. 1.7

Przyjmijmy, że A jest zbiorem liczb naturalnych mniejszych od 10. W takim razie zdanie: $5 \in A$ jest prawdziwe, ponieważ 5 jest liczbą naturalną mniejszą od 10. Prawdziwe są również zdania $12 \notin A$ oraz $3\frac{1}{2} \notin A$, gdyż 12 jest liczbą naturalną większą od 10, a $3\frac{1}{2}$ nie jest liczbą naturalną.

Jeżeli chcemy wypisać wszystkie elementy zbioru A, robimy to w następującej formie:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

czyli wypisujemy w nawiasach klamrowych wszystkie elementy, oddzielając je przecinkami.

Zbiór A ma dziesięć elementów, a więc skończoną ich liczbę. Dlatego jest **zbiorem skończonym**, dziesięcioelementowym.

Kolejność wypisywania elementów zbioru nie jest ważna. Nie powtarzamy tych samych elementów.

Przykład 2

Jeżeli B jest zbiorem liczb naturalnych dwucyfrowych, to $10 \in B$, $7 \notin B$, $98 \in B$, ... Zbiór B jest zbiorem skończonym, ale kłopotliwe (i niepotrzebne) byłoby wypisywanie wszystkich jego elementów. Można tu zastosować następujący sposób:

$$B = \{10, 11, 12, \dots, 98, 99\}$$

Przykład 3 ◀ zad. 1.9

C jest zbiorem liczb naturalnych większych od 100. Zbiór C jest **nieskończony**, ma nieskończenie wiele elementów. Jedną z form zapisu tego zbioru jest:

$$C = \{101, 102, 103, \dots\}$$

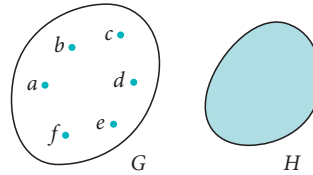
Przykład 4 ◀ zad. 1.10

Przyjmijmy, że D jest zbiorem rozwiązań równania $x^2 = -1$. Ponieważ równanie to nie ma rozwiązań, do zbioru D nie należy żaden element. W takiej sytuacji mówimy, że D jest **zbiorem pustym** i oznaczamy to symbolem $\emptyset$:

$$D = \emptyset$$

Przykład 5 ◀ zad. 1.18

Ilustracją zbioru może być rysunek. Wówczas $G = \{a, b, c, d, e, f\}$, a H jest pokolorowanym na niebiesko zbiorem punktów płaszczyzny.

**Definicja**

Zbiór B jest **podzbiorem** zbioru A , jeżeli każdy element zbioru B jest także elementem zbioru A . Sytuację taką zapisujemy symbolicznie:

$$B \subset A$$

i czytamy albo „ B jest podzbiorem zbioru A ”, albo „ B zawiera się w zbiorze A ”.

Uwaga:

- Przyjmujemy, że zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru: $\emptyset \subset A$.
- Każdy zbiór jest zawarty w sobie (każdy zbiór jest własnym podzbiorem): $A \subset A$.
- Dwa zbiory są równe wtedy, gdy mają te same elementy.

Przykład 6 ◀ zad. 1.20

Jeżeli oznaczymy zbiór kwadratów literą K , zbiór równoległoboków – literą R , a prostokątów – literą P , to prawdziwe są zdania:

- $K \subset P$, czyli K jest podzbiorem P ← bo każdy kwadrat jest prostokątem
- $K \subset R$, czyli K jest podzbiorem R ← bo każdy kwadrat jest równoległobokiem
- $P \subset R$, czyli P jest podzbiorem R ← bo każdy prostokąt jest równoległobokiem

Przykład 7 ◀ zad. 1.21

Wypiszemy wszystkie podzbiory zbioru $A = \{1, 2, 3\}$.

Rozwiązanie

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$$

Zbiór A ma osiem podzbiorów.

◀1.10. Które z wymienionych zbiorów są zbiorami pustymi?

A – zbiór rozwiązań równania $5x - 1 = 4$

B – zbiór rozwiązań równania $x^2 + 4 = 0$

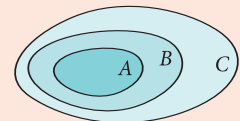
C – zbiór prostokątnych trójkątów równoramiennych

D – zbiór rozwartokątnych trójkątów równobocznych

Odp.: B i D

◀1.18. Sporządź rysunek ilustrujący zdanie: „Jeżeli $A \subset B$ i $B \subset C$, to $A \subset C$ ”.

Odp.:



◀1.20. Dane są zbiory: A – zbiór prostokątów, B – zbiór trapezów, C – zbiór czworokątów, D – zbiór równoległoboków, E – zbiór kwadratów. Czy prawdziwe jest zdanie $A \subset B \subset C \subset D \subset E$? Jeżeli nie, to przestaw litery tak, aby otrzymane zdanie było prawdziwe.

Odp.: $E \subset A \subset D \subset B \subset C$

◀1.21. A jest zbiorem wszystkich dodatnich dzielników liczby 35. Wypisz wszystkie trzelementowe podzbiory zbioru A . Ile ich jest?

Odp.: cztery: $\{1, 5, 7\}$, $\{1, 5, 35\}$, $\{35, 5, 7\}$, $\{1, 35, 7\}$

Zbiór liczb naturalnych

Za pomocą **liczb naturalnych**: 1, 2, 3, ... od najdawniejszych czasów określano liczbę przedmiotów. W tym podręczniku przyjmujemy, że liczbą naturalną jest także 0. Tradycyjnie używanym przez matematyków symbolem określającym zbiór liczb naturalnych jest $\mathbf{N}$.

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Często liczbę naturalną oznaczamy literą n .

Za pomocą liczb naturalnych możemy definiować inne zbiory liczb.

Przykład 8

$$\text{Zapis } F = \{x: x \in \mathbf{N} \text{ i } x < 1000\}$$

← znak : czytamy „takich, że”

czytamy: „ F jest zbiorem elementów x takich, że x należy do zbioru liczb naturalnych i x jest mniejsze od 1000” lub „ F jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 1000”.

Stosowane są też zapisy: $F = \{x \in \mathbf{N}: x < 1000\}$ oraz $F = \{x \in \mathbf{N} \text{ i } x < 1000\}$.

Przykład 9

Zapis $X = \{x: x = 2n \text{ i } n \in \mathbf{N}\}$ oznacza, że elementami zbioru X są liczby postaci $2n$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną. Podstawiamy na miejsce n kolejno liczby 0, 1, 2, 3 itd. i otrzymujemy wartości x . Zatem $X = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$, czyli X jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych parzystych.

Podobnie $Y = \{y: y = 2n + 1 \text{ i } n \in \mathbf{N}\}$ jest zapisem zbioru liczb nieparzystych, bo $Y = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$.

Przykład 10 ◀ zad. 1.22

Wypiszemy kilka elementów zbioru $A = \left\{x: x = \frac{1}{n} \text{ i } n \in \mathbf{N} \text{ i } n \neq 0\right\}$.

Rozwiązanie

Ponieważ $\mathbf{N}$ oznacza zbiór liczb naturalnych, do wyznaczenia elementów zbioru A będziemy podstawiać w miejsce litery n liczby 1, 2, 3, 4 itd.

$$\text{Jeżeli } n = 1, \text{ to } x = \frac{1}{1} = 1;$$

$$\text{jeżeli } n = 2, \text{ to } x = \frac{1}{2};$$

$$\text{jeżeli } n = 3, \text{ to } x = \frac{1}{3};$$

$$\text{jeżeli } n = 4, \text{ to } x = \frac{1}{4};$$

$$\text{jeżeli } n = 5, \text{ to } x = \frac{1}{5};$$

$$\text{jeżeli } n = 99, \text{ to } x = \frac{1}{99}.$$

Mamy więc $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{99}, \dots\right\}$. Na przykład liczba $\frac{1}{701}$ należy do zbioru A , a liczba $\frac{3}{5}$ do niego nie należy. Zbiór A jest zbiorem nieskończonym.

◀ 1.22. A jest zbiorem parzystych, dwucyfrowych liczb naturalnych. Oceń prawdziwość zdania.

a) $12 \in A$

b) $4 \notin A$

c) $15 \notin A$

d) $90 \notin A$

e) $3,5 \in A$

f) $\sqrt{3} \notin A$

Odp.: a), b), c), f) – zdania prawdziwe

Zbiór liczb całkowitych

Zbiór liczb **całkowitych** powstaje przez dołączenie do zbioru liczb naturalnych wszystkich liczb do nich przeciwnych:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots$$

Zbiór liczb całkowitych oznaczamy literą **Z** od niemieckiego słowa *Zahlen* (czyt. calen) – liczby.

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Już ok. V w. n.e. matematycy hinduscy używali liczb dodatnich i liczb ujemnych do określania stanu majątkowego oraz do rozliczeń handlowych.



Zadania

W każdym z zadań 1.1–1.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytach.

1.1. Ile elementów ma zbiór $A = \{x: x = 2n \text{ i } n \in \mathbf{N} \text{ i } n < 5\}$?

- A. 5 B. 6 C. 2 D. nieskończenie wiele

1.2. Wskaż zbiór $\left\{x: x = \frac{2}{n+1} \text{ i } n \in \mathbf{N} \text{ i } n < 3\right\}$.

- A. $\left\{2, 1, \frac{2}{3}\right\}$ C. $\left\{0, 2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right\}$
 B. $\left\{2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right\}$ D. $\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}\right\}$

1.3. Ile dwuelementowych podzbiorów ma zbiór $X = \{a, b, c, d\}$?

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 8

1.4. Liczby a, b i c są trzema kolejnymi liczbami naturalnymi. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. $b - a < c - b$ C. $b - a = c - b$
 B. $b - a > c - b$ D. Wielkości $b - a$ oraz $c - b$ nie da się porównać.

1.5. Odczytaj podany zapis.

- a) $n \in B$ d) $y \in \{1, 2, \dots, 10\}$ i $y \notin \{2, 4, 6, 8, 10\}$
 b) $x \notin F$ e) $5 \in \{1, 5, 10, 15\}$
 c) $x \in A$ i $x \notin B$ f) $x \in \{3, 6, 9, 12\}$ i $y \notin \{3, 9, 18\}$

1.6. Podaj pięć elementów zbioru wszystkich

- a) planet Układu Słonecznego. c) liczb całkowitych mniejszych od 10.
 b) ułamków właściwych. d) instrumentów muzycznych.

1.6. a) np.: Jowisz, Wenus, Ziemia, Mars, Saturn

b) np.: $\frac{3}{7}, \frac{6}{11}, \frac{12}{17}, \frac{43}{90}, \frac{28}{113}$

c) np.: $-5, 0, 3, 7, 8$

d) np.: skrzypce, gitara, fortepian, puzon, kontrabas

Odpowiedzi i rozwiązania

1.1. A

1.2. A

1.3. C

1.4. F, F, P, F

1.5. a) n należy do zbioru B

b) x nie należy do zbioru F

c) x należy do zbioru A i nie należy do zbioru B

d) y należy do zbioru

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

i nie należy do zbioru

$\{2, 4, 6, 8, 10\}$

e) 5 należy do zbioru $\{1, 5, 10, 15\}$

f) x należy do zbioru $\{3, 6, 9, 12\}$

i y nie należy do zbioru $\{3, 9, 18\}$

1.7. a) np.: $-13, -5, 0$

b) np.: $\frac{5}{4}, 1\frac{3}{7}, \frac{21}{20}$

c) np.: $3\frac{1}{2}, -\frac{12}{5}, \sqrt{15}$

d) np.: $4, 6\frac{2}{3}, 13$

1.8. a) 6 **b)** 5 **c)** 1 **d)** 4

e) 126 **f)** 8 **g)** 8 **h)** 0

1.9. C i D

1.10. B i D

1.11.

a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

b) $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

c) $C = \{-1, 1, 3\}$

d) $D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}\right\}$

e) $E = \{1, 0\}$

f) $F = \{-1, 0, 1, 2\}$

g) $G = \{-8, -7, -6, -5, -4, -3\}$

h) $H = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}\right\}$

1.12. A i D

1.7. Wymień trzy liczby, które nie należą do zbioru

a) liczb dodatnich.

c) liczb całkowitych.

b) ułamków właściwych.

d) liczb mniejszych od trzech.

1.8. Ile elementów ma podany zbiór?

a) $T = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

b) $S = \{-5, -4, -3, -2, -1\}$

c) zbiór rozwiązań równania $2x - 5 = 1$

d) zbiór dodatnich, nieskracalnych ułamków właściwych o mianowniku 8

e) $X = \{0, 1, 2, \dots, 125\}$

f) $Y = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

g) zbiór dodatnich dzielników liczby 42

h) $P = \emptyset$

1.9. Które z wymienionych zbiorów są zbiorami skończonymi?

A – zbiór liczb naturalnych

B – zbiór ułamków właściwych

C – zbiór dzielników liczby 152

D – zbiór rozwiązań równania $5x - 3 = 2$

E – zbiór punktów odcinka o długości 3 cm

1.10. Które z wymienionych zbiorów są zbiorami pustymi?

A – zbiór rozwiązań równania $5x - 1 = 4$

B – zbiór rozwiązań równania $x^2 + 4 = 0$

C – zbiór prostokątnych trójkątów równoramiennych

D – zbiór rozwartokątnych trójkątów równobocznych

1.11. Podaj wszystkie elementy zbioru.

a) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \leq 8\}$

e) $E = \left\{x \in \mathbf{N} \mid x = \frac{3-n}{2} \text{ i } n \in \mathbf{N}\right\}$

b) $B = \{x \in \mathbf{N} \mid 1 < x \text{ i } x < 7\}$

f) $F = \{x \in \mathbf{Z} \mid -2 < x \text{ i } x < 3\}$

c) $C = \{x: x = 2n - 1 \text{ i } n \in \mathbf{N} \text{ i } n < 3\}$

g) $G = \left\{x \in \mathbf{Z} \mid -8\frac{2}{3} \leq x \text{ i } x \leq -2\frac{1}{3}\right\}$

d) $D = \left\{x: x = \frac{1}{n+1} \text{ i } n \in \mathbf{N} \text{ i } n < 9\right\}$

h) $H = \left\{x: x = \frac{1}{n^2+1} \text{ i } n \in \mathbf{N} \text{ i } n < 5\right\}$

1.12. Które z podanych zbiorów są skończone?

$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \leq 10^{30}\}$

$D = \{n \in \mathbf{N} \mid n - 5 = 0\}$

$B = \{x \in \mathbf{Z} \mid x < 100\}$

$E = \left\{x: x = \frac{1}{n+3} \text{ i } n \in \mathbf{N}\right\}$

$C = \{x: x = n^2 \text{ i } n \in \mathbf{N}\}$

$F = \{x \in \mathbf{N} \mid x > \sqrt{5}\}$

1.13. Podaj pięć przykładów zbiorów skończonych.

1.14. Podaj pięć przykładów zbiorów nieskończonych.

1.15. Podaj przykład pięcioelementowego podzbioru zbioru liczb

- a) naturalnych parzystych.
- b) całkowitych ujemnych.
- c) całkowitych podzielnych przez 7.
- d) całkowitych ujemnych i podzielnych przez 4.

1.16. Określ, który z wymienionych poniżej zbiorów jest podzbiorem innego.

A jest zbiorem liczb parzystych,
 B jest zbiorem liczb podzielnych przez 3,
 C jest zbiorem liczb podzielnych przez 4,
 D jest zbiorem liczb podzielnych przez 9,
 E jest zbiorem liczb podzielnych przez 8,
 F jest zbiorem liczb podzielnych przez 24.

1.17. Sprawdź, czy zbiór A jest podzbiorem zbioru B .

- a) $A = \{-3, 0, 1\}$ i $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
- b) $A = \{x: x \in \mathbb{N} \text{ i } x > 10^{10}\}$ i $B = \{x: x \in \mathbb{N} \text{ i } x > 10\}$
- c) $A = \left\{x: x = \frac{1}{n+1} \text{ i } n \in \mathbb{N}\right\}$ i B – zbiór wszystkich liczb większych od $\frac{1}{4}$

1.18. Sporządź rysunek ilustrujący zdanie: „Jeżeli $A \subset B$ i $B \subset C$, to $A \subset C$ ”.

1.19. Podaj dwa przykłady trzech zbiorów liczbowych A, B, C spełniających warunek $A \subset B \subset C$.

1.20. Dane są zbiory: A – zbiór prostokątów, B – zbiór trapezów, C – zbiór czworokątów, D – zbiór równoległoboków, E – zbiór kwadratów. Czy prawdziwe jest zdanie $A \subset B \subset C \subset D \subset E$? Jeżeli nie, to przestaw litery tak, aby otrzymane zdanie było prawdziwe.

1.21. A jest zbiorem wszystkich dodatnich dzielników liczby 35. Wypisz wszystkie trzelementowe podzbiory zbioru A . Ile ich jest?

1.22. A jest zbiorem parzystych, dwucyfrowych liczb naturalnych. Oceń prawdziwość zdania.

- a) $12 \in A$ b) $4 \notin A$ c) $15 \notin A$ d) $90 \notin A$ e) $3,5 \in A$ f) $\sqrt{3} \notin A$

1.13. np. $\emptyset, \{1, 2, 3\}$, zbiór liczb naturalnych mniejszych od 10^{1000} , zbiór rozwiązań równania $x^2 - 10 = 0$, $\{-1000, -999, -998, \dots, -1, 0\}$

1.14. np. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$, zbiór wielokrotności liczby 3, zbiór liczb całkowitych mniejszych od 13, zbiór kwadratów

1.15. a) np.

$\{0, 4, 10, 1000, 200000\}$

b) np. $\{-64, -21, -13, -7, -1\}$

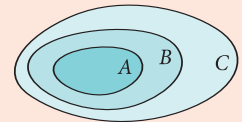
c) np. $\{-14, -7, 0, 21, 49\}$

d) np. $\{-64, -48, -20, -16, -4\}$

1.16. $C \subset A, E \subset A, E \subset C, D \subset B, F \subset A, F \subset B, F \subset C, F \subset E$

1.17. a) tak b) tak c) nie

1.18.



1.20. $E \subset A \subset D \subset B \subset C$

1.21. cztery: $\{1, 5, 7\}, \{1, 5, 35\}, \{35, 5, 7\}, \{1, 35, 7\}$

1.22. a), b), c), f) – zdania prawdziwe

Uwagi metodyczne

Przypominamy działania na wyrażeniach algebraicznych oraz zapisywanie różnych zależności w postaci takich wyrażeń.

Uczniowie nie powinni mieć z tym większych kłopotów, bo temat dość dokładnie omawiano w szkole podstawowej.

Na tym etapie nauki koncentrujemy się na dodawaniu i mnożeniu sum algebraicznych oraz obliczaniu wartości liczbowej wyrażenia algebraicznego.

2. Warto powtórzyć – wyrażenia algebraiczne

Wyrażenie, w którym liczby (stałe) i litery (zmiennne) połączone są znakami działań: dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia lub pierwiastkowania oraz nawiasami, nazywamy **wyrażeniem algebraicznym**. Przykłady wyrażeń algebraicznych:

$$ab, \quad 3(x - y), \quad (c + 5)^3, \quad \frac{x + y}{x - y}, \quad \sqrt{7ac}$$

Wartość liczbową wyrażenia algebraicznego obliczamy, podstawiając liczby w miejsce liter.

Pojedyncze zmienne lub liczby, lub ich iloczyny nazywamy **jednomianami**.

Przykłady:

$$3, \quad 2x, \quad \sqrt{5}xy, \quad -x^3yz, \quad \frac{3}{11}xyt^8$$

Iloczyn liczb występujących w jednomianie nazywamy jego **współczynnikiem**, np. współczynnikiem jednomianu $\sqrt{5}xy$ jest $\sqrt{5}$, współczynnikiem jednomianu x^2 jest 1, a współczynnikiem jednomianu $3xy^4 \cdot 2z$ jest 6.

Jednomiany zapisujemy w postaci **uporządkowanej**, czyli bez znaku mnożenia, z czynnikiem liczbowym na początku, z literami występującymi w dowolnej kolejności – najczęściej alfabetycznej.

Dwa jednomiany różniące się jedynie współczynnikami nazywamy **jednomianami podobnymi**. Przykłady jednomianów podobnych:

- $3x^2, \quad -5x^2, \quad \sqrt{3}x^2, \quad \frac{2}{7}x^2$
- $-2xy^3z^2, \quad \sqrt{55}xy^3z^2, \quad \frac{9}{13}xy^3z^2, \quad -\pi xy^3z^2$

Skończoną sumę jednomianów nazywamy **sumą algebraiczną**, a składniki tej sumy – jej **wyrazami**. Zamiast określenia „suma algebraiczna” używa się również określenia **wielomian**.

Przykłady sum algebraicznych:

$$x + y, \quad 3x^2 + 2x - 1, \quad xy + x^3yt - 5y - 4, \quad x^5 - \sqrt{7}z$$

Jeżeli wyrazy sumy algebraicznej (dwa lub więcej) są jednomianami podobnymi, to możemy je dodać. Czynność tę nazywamy **redukcją wyrazów podobnych**.

Mnożenie sum algebraicznych

- Aby pomnożyć sumę algebraiczną przez jednomian, należy pomnożyć każdy wyraz sumy przez ten jednomian.

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

- Aby pomnożyć dwie sumy algebraiczne, należy każdy wyraz jednej sumy pomnożyć przez każdy wyraz drugiej sumy.

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Przykład 1 ◀ zad. 2.4

Wykonamy działania i zredukujemy wyrazy podobne.

a) $\underline{2x^2 - 4x + x^2 + 3x} - 7 = 3x^2 - x - 7$

b) $\underline{xy^2 - x^2y + 4x - 3xy^2 - x^2y + 1 - xy^2 + 2x^2y} = -3xy^2 + 4x + 1$

c) $2x - (4x - 5y + 2) - (x - 2y - 1) = \underline{2x - 4x + 5y} - \underline{2 - x + 2y + 1} = -3x + 7y - 1$

d) $5x^2 + 2(3x - 4) - 3(2x^2 - 5x + 1) = \underline{5x^2 + 6x} - \underline{8 - 6x^2 + 15x - 3} = -x^2 + 21x - 11$

e) $(3a - 5)(5a - 2) = 3a \cdot 5a + 3a \cdot (-2) - 5 \cdot 5a - 5 \cdot (-2) = \underline{15a^2 - 6a - 25a + 10} = 15a^2 - 31a + 10$

Przykład 2 ◀ zad. 2.10

Zapiszemy w prostszej postaci wyrażenie:

$$2[-3(a + b - c) + 7] + 3[2(a - b - 2c) - 1]$$

i obliczymy jego wartość dla $a = -2\frac{1}{3}$, $b = 1\frac{1}{3}$, $c = -\frac{2}{3}$.

Rozwiązanie

$$2[-3(a + b - c) + 7] + 3[2(a - b - 2c) - 1] = -6a - 6b + 6c + 14 + 6a - 6b - 12c - 3 = -12b - 6c + 11$$

Podczas przekształceń zmienna a została zredukowana, zatem wartość wyrażenia nie zależy od jej wartości. Natomiast po podstawieniu wartości zmiennych b i c otrzymujemy:

$$-12 \cdot 1\frac{1}{3} - 6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 11 = -16 + 4 + 11 = -1$$

Za pomocą wyrażeń algebraicznych zapisujemy różne wzory i zależności, występujące np. w opisie zjawisk fizycznych lub chemicznych. Przykładem tego jest wzór $s = v \cdot t$ – mówimy, że droga jest iloczynem prędkości i czasu.

◀2.4. Zredukuj wyrazy podobne.

a) $5x + 2 - 3x + 1$

b) $-2a + 3b + b^2 - 7b + 5a - 1$

c) $4x + \frac{7}{8} - 1\frac{1}{3}y - 3x + \frac{1}{3}y + 0,125$

d) $2x - 5xy + 3y + 2xy - x + 2y$

e) $xy^2 + 2xy - 7xy^2 - xy + 2xy^2 + 4xy^2$

f) $8xyz - 2x^2yz + 11x^2yz + -4xyz + 5xyz^2 - 9x^2yz$

g) $-1\frac{1}{3}x^2y^2z^2 + 2\frac{1}{2}x^2y^2z^2 + -\frac{2}{3}x^2y^2z^2 - 1\frac{1}{2}x^2y^2z^2 + 2x^2y^2z^2$

Odp.: a) $2x + 3$

b) $b^2 + 3a - 4b - 1$

c) $x - y + 1$

d) $x + 5y - 3xy$

e) xy

f) $4xyz + 5xyz^2$

g) x^2yz^2

◀2.10. Oblicz wartość wyrażenia dla podanych wartości zmiennych.

a) $2x^2y - 3xy + 1$ dla $x = -2$, $y = 3$

b) $-4x^3 + 2y^2 - 4xy + x$ dla $x = -1$, $y = -2$

c) $10 - ab + \frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{4}b^2$ dla $a = 4$, $b = -2$

d) $2xyz^4 - 3z^2 + xy - 9$ dla $x = 1$, $y = -2$, $z = \sqrt{2}$

Odp.: a) 43 b) 3 c) 29 d) -33

◀2.13. Dużym samochodem osobowym może podróżować 5 osób, a małym mogą jechać 4 osoby. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, ile osób może podróżować m dużymi samochodami i trzy razy większą liczbą małych samochodów osobowych.

Odp.: $17m$

Odpowiedzi i rozwiązania

2.1. a) $(x + y) \cdot (z - w)$

b) $z \cdot w - (x + y + z)$

c) $x \cdot (y + z + w)$

d) $\frac{x \cdot w}{x + y + z + w}$

2.2. a) $10a$

b) a^2

c) $-2x^2y^2$

d) $3a^3b^2$

2.3. a) $\frac{3}{4}$ b) 4,5 c) 25 d) 0

2.4. a) $2x + 3$

b) $b^2 + 3a - 4b - 1$

c) $x - y + 1$

d) $x + 5y - 3xy$

e) xy

f) $4xyz + 5xyz^2$

g) x^2yz^2

Przykład 3 ◀ zad. 2.13

Pani Zofia kupiła i zmieszała x kg cukierków owocowych w cenie 13,20 zł za kilogram oraz y kg cukierków czekoladowych w cenie 15,60 zł za kilogram. Zapiszemy cenę 1 kg mieszanki w postaci wyrażenia algebraicznego.

Rozwiązanie

$$13,2x$$

← wartość kupionych cukierków owocowych

$$15,6y$$

← wartość kupionych cukierków czekoladowych

$$13,2x + 15,6y$$

← wartość mieszanki

$$x + y$$

← masa mieszanki w kg

$$\frac{13,2x + 15,6y}{x + y}$$

← cena w złotych 1 kg mieszanki

Odp.: Cena 1 kg mieszanki jest równa $\frac{13,2x + 15,6y}{x + y}$ zł.

Zadania

2.1. Dane są liczby: x, y, z, w . Zapisz symbolicznie liczbę, która jest

a) iloczynem sumy dwóch pierwszych i różnicy dwóch ostatnich.

b) różnicą iloczynu dwóch ostatnich i sumy trzech pierwszych.

c) iloczynem pierwszej liczby i sumy trzech ostatnich.

d) ilorazem iloczynu pierwszej i ostatniej przez sumę wszystkich liczb.

2.2. Uporządkuj jednomian.

a) $(-3) \cdot 2a \cdot \left(-1\frac{2}{3}\right)$

c) $\frac{1}{3}x \cdot x \cdot (-6y) \cdot y$

b) $1,6 \cdot \left(-\frac{5}{8}a\right) \cdot (-a)$

d) $-1\frac{1}{2} \cdot 2a^2(-3b) \cdot \frac{1}{3}ab$

2.3. Oblicz wartość jednomianu dla podanych wartości zmiennych.

a) $2ab^2$ dla $a = \frac{2}{3}, b = -\frac{3}{4}$

c) $-3xy^2z^3$ dla $x = 1\frac{2}{3}, y = \frac{1}{5}, z = -5$

b) $5a^2b$ dla $a = -\frac{3}{5}, b = 2\frac{1}{2}$

d) $\frac{7}{8}xy^5\sqrt{z}$ dla $x = \frac{5}{6}, y = 3\frac{1}{9}, z = 0$

2.4. Zredukuj wyrazy podobne.

a) $5x + 2 - 3x + 1$

b) $-2a + 3b + b^2 - 7b + 5a - 1$

c) $4x + \frac{7}{8} - 1\frac{1}{3}y - 3x + \frac{1}{3}y + 0,125$

d) $2x - 5xy + 3y + 2xy - x + 2y$

e) $xy^2 + 2xy - 7xy^2 - xy + 2xy^2 + 4xy^2$

f) $8xyz - 2x^2yz + 11x^2yz - 4xyz + 5xyz^2 - 9x^2yz$

g) $-1\frac{1}{3}x^2y^2z^2 + 2\frac{1}{2}x^2yz^2 - \frac{2}{3}x^2y^2z^2 - 1\frac{1}{2}x^2yz^2 + 2x^2y^2z^2$

2.5. Dodaj podane sumy algebraiczne, przedstaw wynik w najprostszej postaci.

- a) $7x^2 - 4x + 2$ i $3x^2 + 10x - 8$ c) $\frac{3}{5}m^2 - \frac{2}{3}n^2 + 2$ i $0,4m^2 + 1\frac{2}{3}n^2 - 1$
 b) $3ab + 2a - 5b + 1$ i $2ab - a + 3b + 2$ d) $3x^2 + 2px + p^2$ i $2x^2 - 4px - 2p^2$

2.6. Wykonaj działania i zredukuj wyrazy podobne.

- a) $3(2x - 5y)$ e) $5(x + 1) + 7(x - 1) - 3(x^2 + x)$
 b) $-2x(x + 3y)$ f) $2(3x^2 - 3) + (2x + 1)(2 - x)$
 c) $(x - 5)(2x + 5)$ g) $7x\left(\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}\right) - \frac{1}{5}(5x + 5)(x - 1)$
 d) $(-3x + 7y)(-2x - 3y)$ h) $(5x - 2)(3x - 1) - 3(x - 1)(2x + 3)$

2.7. Wykonaj działania i zredukuj wyrazy podobne.

- a) $(3x^3 - 5x^2 + 7x - 1) - (-4x^3 + 2x^2 - x + 5)$
 b) $(2x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x + 3) - (x^5 + 4x^3 + 2x - 1)$
 c) $(-3x^2 + 5x - 1) \cdot (2x + 1)$
 d) $(7x^3 + 2x^2 - 3x + 2) \cdot (3x + 2)$
 e) $(2x^2 + 3x - 5) \cdot (-x^2 + x + 2)$
 f) $(3x^3 + 2x^2 + 1) \cdot (-2x^3 + x - 3)$

2.8. Wykonaj działania i zredukuj wyrazy podobne.

- a) $2xy + 3x^2 - 2(x^2 + 7xy - y^2) + 10xy - 2y^2$
 b) $3x^2 + 2y^2 - (2x^2y - 2xy - 4xy^2) - (2xy + 7x^2y) + 9x^2y - 2y^2$
 c) $7(xy - y^2) + 2(xy - x^2) + 5xy + 3(x^2 - 5xy) + 7y^2$
 d) $2x^2 - y^2 - 3(2xy - x^2 - y^2) + 2(x^2y - x^2) - (y^2 + 2x^2y) + 6xy$

2.9. Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

- a) $(x^4 + xy + y^4)(x - y)$
 b) $(3x^2y + 6y^3)(5x^2 - y)$
 c) $(x^2 - 3xy + 7y^2)(x^2 + 5y^2)$
 d) $(x^2 + 2xy - y^2)(3x + y)$
 e) $(x^3 + 2x^2y - 3xy^2 + y^3)(x + y)$
 f) $(2x^2 - 3xy)(3x^2 - xy)$

2.5. a) $10x^2 + 6x - 6$

b) $5ab + a - 2b + 3$

c) $m^2 + n^2 + 1$

d) $5x^2 - 2px - p^2$

2.6. a) $6x - 15y$

b) $-2x^2 - 6xy$

c) $2x^2 - 5x - 25$

d) $6x^2 - 5xy - 21y^2$

e) $-3x^2 + 9x - 2$

f) $4x^2 + 3x - 4$

g) $6x + 1$

h) $9x^2 - 14x + 11$

2.7. a) $7x^3 - 7x^2 + 8x - 6$

b) $x^5 - 3x^4 - 2x^3 - 3x + 4$

c) $-6x^3 + 7x^2 + 3x - 1$

d) $21x^4 + 20x^3 - 5x^2 + 4$

e) $-2x^4 - x^3 + 12x^2 + x - 10$

f) $-6x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 6x^2 + x - 3$

2.8. a) $x^2 - 2xy$

b) $3x^2 + 4xy^2$

c) $x^2 - xy$

d) $3x^2 + y^2$

2.9. a) $x^5 - x^4y + x^2y - xy^2 + xy^4 - y^5$

b) $15x^4y - 3x^2y^2 + 30x^2y^3 - 6y^4$

c) $x^4 + 12x^2y^2 - 3x^3y - 15xy^3 + 35y^4$

d) $3x^3 + 7x^2y - xy^2 - y^3$

e) $x^4 + 3x^3y - x^2y^2 - 2xy^3 + y^4$

f) $6x^4 - 11x^3y + 3x^2y^2$

2.10. a) 43 b) 3 c) 29 d) -33

2.11. $(2,5b + 3p)$ zł2.12. $\frac{3kx}{2}$ 2.13. $17m$ 2.14. $10 - (xn + ym)$ 2.15. $(m + 2)k + p$ 2.16. $12km - 200k$ 2.17. $\frac{a + 2b + 5c}{100}$ 2.18. $\frac{bnk}{100}$ zł2.19. $\frac{5}{12}p^2$ 2.20. $\frac{7mp}{15000} + \frac{7kt}{5000}$

2.10. Oblicz wartość wyrażenia dla podanych wartości zmiennych.

a) $2x^2y - 3xy + 1$

dla $x = -2$, $y = 3$

b) $-4x^3 + 2y^2 - 4xy + x$

dla $x = -1$, $y = -2$

c) $10 - ab + \frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{4}b^2$

dla $a = 4$, $b = -2$

d) $2xyz^4 - 3z^2 + xy - 9$

dla $x = 1$, $y = -2$, $z = \sqrt{2}$

2.11. Banany kosztują b zł za kilogram, a pomarańcze p zł za kilogram. Ile zapłacimy za 2,5 kg bananów i 3 kg pomarańczy?2.12. Na półce w bibliotece stoi k książek. Połowa z nich ma x cm grubości, a druga połowa to książki dwa razy grubsze. Ile centymetrów długości ma półka, jeżeli książki stoją ciasno jedna obok drugiej i zajmują całą półkę?2.13. Dużym samochodem osobowym może podróżować 5 osób, a małym mogą jechać 4 osoby. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, ile osób może podróżować m dużymi samochodami i trzy razy większą liczbą małych samochodów osobowych.2.14. Bartek ma 10 zł i chce kupić x ołówków po n zł i y zeszytów po m zł. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, ile złotych reszty otrzyma od sprzedawcy.2.15. Grupa m uczniów i 2 nauczycieli przeprawia się promem wraz z autokarem, którym podróżują. Jaki jest koszt przeprawy całej grupy, jeżeli za przeprawę autokaru (razem z biletem kierowcy) trzeba zapłacić p zł, a za przeprawę każdego pasażera k zł?2.16. Biuro przewoźników dysponuje k autokarami i dwa razy mniejszą liczbą mikrobusów. Autokary można wynajmować po m zł za 100 km jazdy, a mikrobusy o 50 zł taniej. Ile pieniędzy wpłynie do kasy tego biura za wynajem wszystkich autokarów i mikrobusów na trasę 800 km?2.17. W kasie jest a złotych w banknotach 100-złotowych, b zł w banknotach 50-złotowych i c zł w banknotach 20-złotowych. Ile banknotów jest w kasie?2.18. Samochód spala przeciętnie b litrów benzyny na 100 km. Ile kosztuje benzyna potrzebna do przejechania n kilometrów, jeśli litr benzyny kosztuje k zł?2.19. Podstawa trójkąta równa p jest o 20% dłuższa od wysokości opuszczonej na tę podstawę. Wyznacz pole trójkąta.2.20. Owczarek niemiecki zjada m g karmy dziennie, a dzienna porcja jedzenia dla kota waży k g. Cena psiej karmy jest równa p zł za 15 kg, a kociej - t zł za 5 kg. Ile kosztuje tygodniowe wyżywienie obydwu zwierząt?

3. Wzory skróconego mnożenia

Umiejętności:

- wyłączanie czynnika poza nawias
- używanie wzorów skróconego mnożenia: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2

Wyłączanie czynnika poza nawias

Czynnością odwrotną do mnożenia sumy algebraicznej przez jednomian jest wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias.

Przykład 1 ◀ zad. 3.4

Z podanej sumy algebraicznej wyłączmy wspólny czynnik poza nawias.

$$a) 2x - 8 = \underline{2} \cdot x - \underline{2} \cdot 4 = 2(x - 4)$$

$$b) 4a^2 + a = \underline{a} \cdot 4a + \underline{a} \cdot 1 = a(4a + 1)$$

$$c) 3x - \sqrt{5}x = 3 \cdot \underline{x} - \sqrt{5} \cdot \underline{x} = x(3 - \sqrt{5})$$

$$d) 3xz - 12zy = \underline{3z} \cdot x - \underline{3z} \cdot 4y = 3z(x - 4y)$$

$$e) 7ab^2 + 21a^3b = \underline{7ab} \cdot b + \underline{7ab} \cdot 3a^2 = 7ab(b + 3a^2)$$

$$f) 2x^2y - 10xyz + 4xy^3z^2 = \underline{2xy} \cdot x - \underline{2xy} \cdot 5z + \underline{2xy} \cdot 2y^2z^2 = 2xy(x - 5z + 2y^2z^2)$$

Wyłączony czynnik może być zapisany przed nawiasem albo po nawiasie. Wynika to z prawa przemienności mnożenia.

Przykład 2 ◀ zad. 3.9

Z podanego wyrażenia wyłączmy przed nawias taki czynnik, aby współczynniki wszystkich wyrazów pozostałej w nawiasie sumy algebraicznej były liczbami całkowitymi.

$$\begin{aligned} a) \frac{1}{3}x^3y - \frac{2}{3}xy^2 + \frac{1}{3}x - 2y &= \\ &= \frac{1}{3}x^3y - \frac{2}{3}xy^2 + \frac{1}{3}x - 2 \cdot \frac{3}{3}y = \\ &= \frac{1}{3}(x^3y - 2xy^2 + x - 6y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) 0,7x^5 + 3x^4 - 0,2x^3 - x^2 + 1,1x - 7 &= \\ &= 0,1(7x^5 + 30x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 11x - 70) \end{aligned}$$

Aby sprawdzić, czy otrzymany wynik jest poprawny, wystarczy pomnożyć wyrażenie w nawiasie przez wyłączony czynnik.

Wspólnym czynnikiem może być również suma algebraiczna.

◀ 3.4. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

$$a) 16p - 12$$

$$b) 4p^2 - 10pr$$

$$c) 15m^2 - 75n$$

$$d) 32m + 24n - 160$$

$$\text{Odp.: a) } 4(4p - 3)$$

$$b) 2p(2p - 5r)$$

$$c) 15(m^2 - 5n)$$

$$d) 8(4m + 3n - 20)$$

◀ 3.9. Z podanego wyrażenia wyłącz przed nawias taki czynnik, aby współczynniki wszystkich wyrazów pozostałej w nawiasie sumy algebraicznej były liczbami całkowitymi.

$$a) \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{5}xy^2 + 2\frac{1}{5}y^3 - 5,2$$

$$b) 1\frac{1}{4}x^4 + 2\frac{3}{4}x^3 - 7\frac{1}{2}x - 2$$

$$c) -2\frac{2}{9}xy + 1\frac{2}{3}xyz + 3\frac{1}{3}x^2y^2z^2 + 2\frac{4}{9}$$

$$d) 2,5x^7 - 3,25x^5 + 1,75x^3 + 2x - 1$$

Odp.:

$$a) \frac{1}{5}(x^5 - 3xy^2 + 11y^3 - 26)$$

$$b) \frac{1}{4}(5x^4 + 11x^3 - 30x - 8)$$

$$c) \frac{1}{9}(-20xy + 15xyz + 30x^2y^2z^2 + 22)$$

$$d) \frac{1}{4}(10x^7 - 13x^5 + 7x^3 + 8x - 4)$$

ZZ i MKP

tematy 2.6–2.8

Multiteka

- Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian
- Mnożenie sum algebraicznych
- Kwadrat sumy
- Kwadrat różnicy
- Różnica kwadratów

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.3

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 3

Dane wyrażenie zapiszemy w postaci iloczynu, wyłączając wspólny czynnik przed nawias.

$$\text{a) } 2(x-y) + 3a(x-y) = (x-y)(2+3a)$$

$$\text{b) } \frac{1}{2}x(2x^2+3) - 2(2x^2+3) = (2x^2+3)\left(\frac{1}{2}x-2\right)$$

$$\text{c) } 3x^2(x-1) + 2x(x-1) = 3x \cdot \underline{x(x-1)} + 2 \cdot \underline{x(x-1)} = x(x-1)(3x+2)$$

$$\text{d) } 2ab^2(a-3b) - 3a^2(a-3b) + \frac{1}{2}ab(a-3b) = a(a-3b)\left(2b^2-3a+\frac{1}{2}b\right)$$

Wzory skróconego mnożenia

Wyrażenie $(a+b)^2$ nazywamy **kwadratem sumy** wyrażeń a i b .

Przekształćmy je, wykonując mnożenie:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Otrzymaliśmy **wzór skróconego mnożenia**.

Twierdzenie

Wzór na **kwadrat sumy** dwóch wyrażeń:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Kwadrat sumy dwóch wyrażeń jest równy sumie: kwadrat pierwszego wyrażenia plus podwojony iloczyn pierwszego i drugiego wyrażenia plus kwadrat drugiego wyrażenia.

Przykład 4 ◀ zad. 3.10 a, e

Zapiszemy podane wyrażenie w postaci sumy, stosując wzór na kwadrat sumy.

$$\text{a) } (2+x)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + x^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$\text{b) } (k+5m)^2 = k^2 + 2 \cdot k \cdot 5m + (5m)^2 = k^2 + 10km + 25m^2$$

Stosowanie wzoru na kwadrat sumy dwóch wyrażeń nie wymaga, by były one dodatnie. Jeżeli chcemy obliczyć kwadrat różnicy dwóch wyrażeń, np. $(a-1)^2$, możemy zapisać to wyrażenie w postaci $(a+(-1))^2$. Wtedy:

$$(a-1)^2 = (a+(-1))^2 = a^2 + 2a(-1) + (-1)^2 = a^2 - 2a + 1$$

◀3.10. Przedstaw wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.

$$\text{a) } (3c+2)^2$$

$$\text{b) } (10-4b)^2$$

$$\text{d) } (-7+2z)^2$$

$$\text{e) } \left(\frac{1}{2}z + \sqrt{3}\right)^2$$

$$\text{Odp.: a) } 9c^2 + 12c + 4$$

$$\text{b) } 100 - 80b + 16b^2$$

$$\text{d) } 49 - 28z + 4z^2$$

$$\text{e) } \frac{1}{4}z^2 + z\sqrt{3} + 3$$

Wygodniej jest posłużyć się wzorem na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń.

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Otrzymaliśmy kolejny wzór skróconego mnożenia.

Twierdzenie

Wzór na **kwadrat różnicy** dwóch wyrażeń:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Kwadrat różnicy dwóch wyrażeń jest równy sumie: kwadrat pierwszego wyrażenia minus podwojony iloczyn pierwszego i drugiego wyrażenia plus kwadrat drugiego wyrażenia.

Przykład 5 ◀ zad. 3.10 b, d

Przekształćmy podane wyrażenie, stosując wzór na kwadrat różnicy.

$$\text{a) } (-x + 3)^2 = (3 - x)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + x^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$\text{b) } (5 - 2x)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2x + (2x)^2 = 25 - 20x + 4x^2$$

Przykład 6 ◀ zad. 3.11

Wzory na kwadrat sumy i kwadrat różnicy można stosować do obliczania (bez używania kalkulatora) kwadratów niektórych liczb naturalnych.

$$\text{a) } 101^2 = (100 + 1)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10\,000 + 200 + 1 = 10\,201$$

$$\text{b) } 23^2 = (20 + 3)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 3 + 3^2 = 400 + 120 + 9 = 529$$

$$\text{c) } 99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9801$$

$$\text{d) } 28^2 = (30 - 2)^2 = 30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 2 + 2^2 = 900 - 120 + 4 = 784$$

Przykład 7

Uprośćmy wyrażenie $(2x - 5)^2 - 4(3 + x)^2$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} (2x - 5)^2 - 4(3 + x)^2 &= \\ &= (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 - 4(3^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + x^2) = \\ &= 4x^2 - 20x + 25 - 4(9 + 6x + x^2) = \\ &= 4x^2 - 20x + 25 - 36 - 24x - 4x^2 = -44x - 11 \end{aligned}$$

◀ **3.10.** Patrz s. 22.

◀ **3.11.** Stosując wzory na kwadrat sumy lub kwadrat różnicy, oblicz kwadraty następujących liczb naturalnych: 49, 51, 82, 39. Nie korzystaj z kalkulatora.

Odp.: np. $49^2 = (50 - 1)^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401$

◀3.17. Przedstaw wyrażenie w postaci kwadratu sumy lub kwadratu różnicy.

- a) $4a^2 + 12a + 9$
 b) $16 - 8y + y^2$
 c) $5m^2 - 4\sqrt{5}m + 4$
 d) $z^4 + 6z^2 + 9$
 e) $2\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 0,25$
 f) $\frac{3}{49}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{7}x + \frac{1}{4}$

Odp.: a) $(2a + 3)^2$ b) $(4 - y)^2$
 c) $(\sqrt{5}m - 2)^2$ d) $(z^2 + 3)^2$
 e) $\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right)^2$ f) $\left(\frac{\sqrt{3}}{7}x + \frac{1}{2}\right)^2$

◀3.16. Przedstaw wyrażenie w postaci iloczynu.

- a) $49 - 9k^2$
 b) $2\frac{1}{4}x^2 - 1\frac{7}{9}y^2$
 c) $-z^2 + 25w^2$
 d) $25 - 2x^2$
 e) $5p^2 - 4q^2$
 f) $13 - y^2$
 g) $\frac{1}{9}x^2y^2 - \frac{4}{25}x^2$
 h) $x^4 - \frac{25}{49}$

Odp.: a) $(7 + 3k)(7 - 3k)$
 b) $\left(1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{3}y\right)\left(1\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{3}y\right)$
 c) $(5w + z)(5w - z)$
 d) $(5 - x\sqrt{2})(5 + x\sqrt{2})$
 e) $(\sqrt{5}p + 2q)(\sqrt{5}p - 2q)$
 f) $(\sqrt{13} - y)(\sqrt{13} + y)$
 g) $x^2\left(\frac{1}{3}y - \frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{3}y + \frac{2}{5}\right)$
 h) $\left(x^2 + \frac{5}{7}\right)\left(x - \frac{\sqrt{35}}{7}\right)\left(x + \frac{\sqrt{35}}{7}\right)$

Stosowanie wzorów skróconego mnożenia przy zamianie iloczynów na sumy zazwyczaj upraszcza rachunki. Ważniejsze jednak jest stosowanie tych wzorów w drugą stronę, tzn. podczas przekształcania sum algebraicznych do postaci iloczynu. Taką operację często wykonuje się podczas rozwiązywania równań.

Przykład 8 ◀ zad. 3.17

Zapiszemy podaną sumę algebraiczną w postaci iloczynu.

- a) $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$ ← kwadrat sumy: $25 = 5^2$, $10x = 2 \cdot x \cdot 5$
 b) $16a^2 - 8a + 1 = (4a - 1)^2$ ← kwadrat różnicy: $16a^2 = (4a)^2$, $1 = 1^2$, $8a = 2 \cdot 4a \cdot 1$
 c) $49m^2 - 7mt + \frac{1}{4}t^2 = \left(7m - \frac{1}{2}t\right)^2$ ← $49m^2 = (7m)^2$, $\frac{1}{4}t^2 = \left(\frac{1}{2}t\right)^2$, $2 \cdot 7m \cdot \frac{1}{2}t = 7mt$

Obliczmy iloczyn sumy i różnicy dwóch wyrażeń:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

Otrzymaliśmy następujący wzór skróconego mnożenia.

Twierdzenie

Wzór na **różnicę kwadratów** dwóch wyrażeń:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Różnica kwadratów dwóch wyrażeń jest równa iloczynowi sumy tych wyrażeń i ich różnicy.

Przykład 9 ◀ zad. 3.16

Zapiszemy dane wyrażenie algebraiczne w postaci iloczynu.

- a) $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x + 2)(x - 2)$
 b) $1 - 100y^2 = 1^2 - (10y)^2 = (1 + 10y)(1 - 10y)$
 c) $4a^2 - 25b^2 = (2a)^2 - (5b)^2 = (2a + 5b)(2a - 5b)$
 d) $-0,25c^2 + 0,01d^2 = (0,1d)^2 - (0,5c)^2 = (0,1d + 0,5c)(0,1d - 0,5c)$

Przykład 10 ◀ zad. 3.19

Zapiszemy podaną sumę algebraiczną w postaci iloczynu.

- a) $2x^2 - 4xy + 2y^2 =$
 $= 2(x^2 - 2xy + y^2) =$ ← wyłączamy 2 przed nawias
 $= 2(x - y)^2$ ← wzór na kwadrat różnicy

◀3.19. Przedstaw sumę algebraiczną w postaci iloczynu. Najpierw wyłącz wspólny czynnik poza nawias, a następnie skorzystaj ze wzorów skróconego mnożenia.

- a) $3x^2 - 12x + 12$ d) $12x^2 - 36xy + 27y^2$
 b) $2x^2 + 4xy + 2y^2$ e) $18p^3 + 48p^2q + 32p^2q^2$
 c) $4\frac{1}{2}x^2 + 6x + 2$ f) $12k^4 - 60k^2m + 75m^2$

Odp.: a) $3(x - 2)^2$ b) $2(x + y)^2$ c) $\frac{1}{2}(3x + 2)^2$ d) $3(2x - 3y)^2$ e) $2p(3p + 4q)^2$
 f) $3(2k^2 - 5m)^2$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } 3mx^2 + 6mxy + 3my^2 &= \\
 &= 3m(x^2 + 2xy + y^2) = && \leftarrow \text{wylączamy } 3m \text{ przed nawias} \\
 &= 3m(x + y)^2 && \leftarrow \text{wzór na kwadrat sumy}
 \end{aligned}$$

Przykład 11

Dane wyrażenie algebraiczne przedstawimy w postaci iloczynu.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } 3x^2 - 12x + 12 &= 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x - 2)^2 && \leftarrow \text{wzór na kwadrat różnicy} \\
 \text{b) } 3x^2 - 27 &= 3(x^2 - 9) = 3(x - 3)(x + 3) && \leftarrow \text{wzór na różnicę kwadratów} \\
 \text{c) } (2x - 4)^2 - (2 - 3x)^2 &= && \leftarrow \text{wzór na różnicę kwadratów} \\
 &= [(2x - 4) + (2 - 3x)] \cdot [(2x - 4) - (2 - 3x)] = \\
 &= [2x - 4 + 2 - 3x] \cdot [2x - 4 - 2 + 3x] = \\
 &= (-x - 2)(5x - 6) \\
 \text{d) } 2a^3b + 12a^2b^2 + 18ab^3 &= 2ab(a^2 + 6ab + 9b^2) = && \leftarrow \text{wzór na kwadrat sumy} \\
 &= 2ab(a + 3b)^2
 \end{aligned}$$

Przykład 12 zad. 3.15

Uprościmy wyrażenie:

$$(5x - 7)^2 + (3 - 4x)(3 + 4x) - (3x + 10)^2$$

i obliczymy jego wartość dla $x = -\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}
 (5x - 7)^2 + (3 - 4x)(3 + 4x) - (3x + 10)^2 &= \\
 = 25x^2 - 70x + 49 + 9 - 16x^2 - 9x^2 - 60x - 100 &= -130x - 42
 \end{aligned}$$

Podstawiamy $x = -\frac{1}{2}$ i otrzymujemy wynik 23.

**Przykład 13**

Wskaż wartość wyrażenia $\frac{1}{4}(2x - 1)^2 - \frac{1}{9}(3x - 1)^2 + \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{3}\right)$ dla $x = 4$.

- A. -1 B. $\frac{1}{4}$ C. 4 D. 1

Rozwiązanie

Zadanie rozwiążemy na dwa sposoby.

3.15. Wykonaj działania i doprowadź wyrażenie do prostszej postaci. Oblicz wartość wyrażenia dla podanych wartości zmiennych.

a) $(x + 3y)(x - 3y) + (x + 2y)^2 - (2x^2 - 5y^2)$

dla $x = \sqrt{8}$ i $y = \sqrt{2}$

b) $(2xy + 5)^2 - (4 + 3xy) \cdot (3xy - 4) + 5x^2y^2$

dla $x = 1\frac{1}{3}$ i $y = -5\frac{1}{4}$

Odp.: a) $4xy$, 16

b) $20xy + 41$, -99

I sposób

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \cdot (8-1)^2 - \frac{1}{9} \cdot (12-1)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(4 + \frac{1}{3}\right) &= && \leftarrow \text{do wyrażenia podstawiamy } x = 4 \\ = \frac{49}{4} - \frac{121}{9} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{13}{3}\right) &= \frac{49}{4} - \frac{121}{9} + \frac{13}{9} && \leftarrow \text{wykonujemy obliczenia} \\ = \frac{49}{4} - \frac{108}{9} &= 12\frac{1}{4} - 12 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Zatem poprawna jest odpowiedź B.

II sposób

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(2x-1)^2 - \frac{1}{9}(3x-1)^2 + \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{3}\right) &= && \leftarrow \text{wykonujemy działania} \\ = \frac{1}{4}(4x^2 - 4x + 1) - \frac{1}{9}(9x^2 - 6x + 1) + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} &= \\ = x^2 - x + \frac{1}{4} - x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} &= \\ = -x + \frac{1}{4} + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Zauważmy przy okazji, że II sposób, choć pozornie dłuższy, jest uniwersalny – wskazuje, że wartość podanego wyrażenia nie zależy od wartości zmiennej.

Odp.: B

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytach.

Odpowiedzi i rozwiązania

3.1. C

3.1. Różnica dwóch liczb jest równa 5. Różnica ich kwadratów wynosi 95. Ile jest równa suma tych liczb?

- A. 90 B. 25 C. 19 D. 24

3.2. D

3.2. Wskaż wyrażenie równe wyrażeniu $(6a - 5b)^2$.

- A. $36a^2 + 25b^2$ C. $6a^2 - 60b + 5b^2$
B. $36a^2 - 25b^2$ D. $36a^2 - 60ab + 25b^2$

3.3. D

3.3. Wskaż postać iloczynową wyrażenia $27x^2 - 18xy + 3y^2$.

- A. $3(9x + 2)^2$ B. $(3x - 3y)^2$ C. $3(3x + y)^2$ D. $3(3x - y)^2$

3.4. a) $4(4p - 3)$

b) $2p(2p - 5r)$

c) $15(m^2 - 5n)$

d) $8(4m + 3n - 20)$

3.4. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $16p - 12$

b) $4p^2 - 10pr$

c) $15m^2 - 75n$

d) $32m + 24n - 160$

3.5. Wyłącz z wyrażenia podany czynnik.

- a) $10a^2b - 14ab^2$ $2a$ c) $90a^2b^2c + 30ab^2c$ abc
 b) $72a^3b^2 + 18a^2b^2$ $6ab$ d) $180p^2q^2 - 90pqr + 135$ 45

3.6. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

- a) $2abc - 6abd + 14abcd$ d) $\frac{tu}{2} + \frac{uw}{4} - tuw$
 b) $-5x^2y + 20x^3y^2$ e) $\frac{2}{3}x^4 - \frac{7}{8}x^3 + \frac{1}{5}x^2$
 c) $6mk^2p - 6mkp^2 + m^2k^2p^2$ f) $\frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{8}x^3$

3.7. Z podanego wyrażenia wyłącz czynnik -2 .

- a) $-10a^3b + 14a^2b^2 - 12ab^3$ c) $0,2pq + p^2q^2 - 0,5$
 b) $2am - 4bm - 3cm$ d) $-\frac{2}{3}m^2 - \frac{1}{7}n^2 - 1\frac{3}{5}$

3.8. Z podanego wyrażenia wyłącz czynnik $\frac{1}{2}$.

- a) $10x^2 - 8x + 3$ c) $9x^4 - x^2 - 5$
 b) $-4x^3 + 3x^2 - 2$ d) $-1\frac{1}{2}x^5 - 11x^3 + 7$

3.9. Z podanego wyrażenia wyłącz przed nawias taki czynnik, aby współczynniki wszystkich wyrazów pozostałej w nawiasie sumy algebraicznej były liczbami całkowitymi.

- a) $\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{5}xy^2 + 2\frac{1}{5}y^3 - 5,2$ c) $-2\frac{2}{9}xy + 1\frac{2}{3}xyz + 3\frac{1}{3}x^2y^2z^2 + 2\frac{4}{9}$
 b) $1\frac{1}{4}x^4 + 2\frac{3}{4}x^3 - 7\frac{1}{2}x - 2$ d) $2,5x^7 - 3,25x^5 + 1,75x^3 + 2x - 1$

3.10. Przedstaw wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.

- a) $(3c + 2)^2$ c) $(-2f - g)^2$ e) $\left(\frac{1}{2}z + \sqrt{3}\right)^2$ g) $(-5 - 6w)^2$
 b) $(10 - 4b)^2$ d) $(-7 + 2z)^2$ f) $(-5k + 4m)^2$ h) $(a\sqrt{2} - b\sqrt{5})^2$

3.11. Stosując wzory na kwadrat sumy lub kwadrat różnicy, oblicz kwadraty następujących liczb naturalnych: 49, 51, 82, 39. Nie korzystaj z kalkulatora.

3.11. np. $49^2 = (50 - 1)^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401$

3.5. a) $2a(5ab - 7b^2)$

b) $6ab(12a^2b + 3ab)$

c) $abc(90ab + 30b)$

d) $45(4p^2q^2 - 2pqr + 3)$

3.6. a) $2ab(c - 3d + 7cd)$

b) $-5x^2y(1 - 4xy)$

c) $mkp(6k - 6p + mkp)$

d) $\frac{1}{4}u(2t + w - 4tw)$

e) $x^2\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{8}x + \frac{1}{5}\right)$

f) $\frac{1}{2}x^3\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}\right)$

3.7. a) $-2(5a^3b - 7a^2b^2 + 6ab^3)$

b) $-2\left(-am + 2bm + 1\frac{1}{2}cm\right)$

c) $-2(-0,1pq - 0,5p^2q^2 + 0,25)$

d) $-2\left(\frac{1}{3}m^2 + \frac{1}{14}n^2 + \frac{4}{5}\right)$

3.8. a) $\frac{1}{2}(20x^2 - 16x + 6)$

b) $\frac{1}{2}(-8x^3 + 6x^2 - 4)$

c) $\frac{1}{2}(18x^4 - 2x^2 - 10)$

d) $\frac{1}{2}(-3x^5 - 22x^3 + 14)$

3.9. a) $\frac{1}{5}(x^5 - 3xy^2 + 11y^3 - 26)$

b) $\frac{1}{4}(5x^4 + 11x^3 - 30x - 8)$

c) $\frac{1}{9}(-20xy + 15xyz + 30x^2y^2z^2 + 22)$

d) $\frac{1}{4}(10x^7 - 13x^5 + 7x^3 + 8x - 4)$

3.10. a) $9c^2 + 12c + 4$

b) $100 - 80b + 16b^2$

c) $4f^2 + 4fg + g^2$

d) $49 - 28z + 4z^2$ **e)** $\frac{1}{4}z^2 + z\sqrt{3} + 3$

f) $25k^2 - 40km + 16m^2$

g) $25 + 60w + 36w^2$

h) $2a^2 - 2\sqrt{10}ab + 5b^2$

3.12. a) $x^2 - 15$

b) $7x^2 - 44\frac{1}{2}$

c) $-4x + 10$

d) -2

3.13. a) $2x^2 + 16y^2$

b) $ab - 5b^2$

c) 3

d) $8x - 8$

3.14. 54

3.15. a) $4xy, 16$

b) $20xy + 41, -99$

3.16. a) $(7 + 3k)(7 - 3k)$

b) $\left(1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{3}y\right)\left(1\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{3}y\right)$

c) $(5w + z)(5w - z)$

d) $(5 - x\sqrt{2})(5 + x\sqrt{2})$

e) $(\sqrt{5}p + 2q)(\sqrt{5}p - 2q)$

f) $(\sqrt{13} - y)(\sqrt{13} + y)$

g) $x^2\left(\frac{1}{3}y - \frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{3}y + \frac{2}{5}\right)$

h) $\left(x^2 + \frac{5}{7}\right)\left(x - \frac{\sqrt{35}}{7}\right) \cdot \left(x + \frac{\sqrt{35}}{7}\right)$

3.17. a) $(2a + 3)^2$ **b)** $(4 - y)^2$

c) $(\sqrt{5}m - 2)^2$ **d)** $(z^2 + 3)^2$

e) $\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right)^2$ **f)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{7}x + \frac{1}{2}\right)^2$

3.12. Wykonaj działania.

a) $3(2 - x)^2 + 2(x - 3)(x + 3) - (2x - 3)^2$

b) $2(2x - 3)(2x + 3) - 3(x + 5)^2 + \frac{1}{2}(2x - 1)^2 + 32\left(x + 1\frac{1}{2}\right)$

c) $15 - 4(x - 1)(x + 1) + (3x - 2)^2 - (x + 2)^2 - 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$

d) $(5 - x)^2 + 3(x - 2)(2 + x) - 4\left(x - 2\frac{1}{2}\right)^2 - 10(x - 1)$

3.13. Wykonaj działania.

a) $(x + 2y)^2 - (x + 2y)(x - 2y) + 2(x - 2y)^2 + 4xy$

b) $(a - 2b)(3a + b) - 3(a - b)^2$

c) $(5a + 1)^2 + (5a - 1)^2 - (5a + 1)(5a - 1) - 25a^2$

d) $(x + 3y)(3y - x) - 2(x - 2)^2 + 3(x^2 - 3y^2)$

3.14. Oblicz wartość wyrażenia $2(x - 3y)^2 - 3(x - 2y) \cdot (x + 2y) + 12xy$ dla $x = \sqrt{6}$ i $y = -\sqrt{2}$.

3.15. Wykonaj działania i doprowadź wyrażenie do prostszej postaci. Oblicz wartość wyrażenia dla podanych wartości zmiennych.

a) $(x + 3y)(x - 3y) + (x + 2y)^2 - (2x^2 - 5y^2)$ dla $x = \sqrt{8}$ i $y = \sqrt{2}$

b) $(2xy + 5)^2 - (4 + 3xy)(3xy - 4) + 5x^2y^2$ dla $x = 1\frac{1}{3}$ i $y = -5\frac{1}{4}$

3.16. Przedstaw wyrażenie w postaci iloczynu.

a) $49 - 9k^2$

e) $5p^2 - 4q^2$

b) $2\frac{1}{4}x^2 - 1\frac{7}{9}y^2$

f) $13 - y^2$

c) $-z^2 + 25w^2$

g) $\frac{1}{9}x^2y^2 - \frac{4}{25}x^2$

d) $25 - 2x^2$

h) $x^4 - \frac{25}{49}$

3.17. Przedstaw wyrażenie w postaci kwadratu sumy lub kwadratu różnicy.

a) $4a^2 + 12a + 9$

d) $z^4 + 6z^2 + 9$

b) $16 - 8y + y^2$

e) $2\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 0,25$

c) $5m^2 - 4\sqrt{5}m + 4$

f) $\frac{3}{49}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{7}x + \frac{1}{4}$

3.18. Jaki składnik należy wstawić w miejsce $?$, aby otrzymana suma algebraiczna była równa kwadratowi sumy lub kwadratowi różnicy dwóch wyrażeń?

- a) $25z^2 - 10z + ?$ d) $2p^2 - ? + 9$
 b) $4y^2 + ? + 9z^2$ e) $? - 6x^2y + y^2$
 c) $81x^2 + 36xy + ?$ f) $5x^4 - ? + 3y^2$

3.19. Przedstaw sumę algebraiczną w postaci iloczynu. Najpierw wyłącz wspólny czynnik poza nawias, a następnie skorzystaj ze wzorów skróconego mnożenia.

- a) $3x^2 - 12x + 12$ d) $12x^2 - 36xy + 27y^2$
 b) $2x^2 + 4xy + 2y^2$ e) $18p^3 + 48p^2q + 32pq^2$
 c) $4\frac{1}{2}x^2 + 6x + 2$ f) $12k^4 - 60k^2m + 75m^2$

*** 3.20.** Przedstaw sumę algebraiczną w postaci iloczynu.

- a) $(a-1)^2 - (b+2)^2$ d) $81 - c^2 - 6cd - 9d^2$
 b) $1 - (a-2b)^2$ e) $81 - x^2 - 2xy - y^2$
 c) $a^2 - 4ab + 4b^2 - 9$ f) $64 - 16x^2 + 8xy - y^2$

*** 3.21.** Przedstaw sumę algebraiczną w postaci iloczynu. Wyłącz wspólny czynnik poza nawias, a następnie skorzystaj ze wzorów skróconego mnożenia.

- a) $4y^2(x-7) + 9(x-7) + 12y(x-7)$ c) $(x-2) - 10x(x-2) + 25x^2(x-2)$
 b) $4z^2(x+1) + 4z(x+1) + x+1$ d) $x^4(x+1) - 16x - 16$

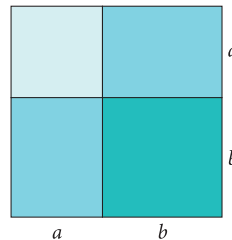
*** 3.22.** Przedstaw sumę algebraiczną w postaci iloczynu.

- a) $4x^2 + 12x - 9y^2 - 12y + 5$ c) $16x^2 - 4y^2 - 24x + 4y + 8$
 b) $25x^2 - 10x - 49y^2 - 28y - 3$ d) $4x^2 - y^2 - 20x + 25$

*** 3.23.** Przedstaw sumę algebraiczną w postaci iloczynu.

- a) $x^2 - 2x - 3$ c) $z^2 - 2x^2$
 b) $y^2 - 4y - 5$ d) $3 - w^2 - 2w$

D 3.24. Uzasadnij geometrycznie wzór na kwadrat sumy. Skorzystaj z zamieszczonego obok rysunku.



D 3.25. Wykaż, że wartość wyrażenia

$(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x) - \frac{1}{2}(1-2x^2)$ nie zależy od wartości zmiennej x .

3.18. a) 1 **b)** $12yz$ **c)** $4y^2$
d) $6p\sqrt{2}$ **e)** $9x^4$ **f)** $2\sqrt{15}x^2y$

3.19. a) $3(x-2)^2$ **b)** $2(x+y)^2$
c) $\frac{1}{2}(3x+2)^2$ **d)** $3(2x-3y)^2$
e) $2p(3p+4q)^2$ **f)** $3(2k^2-5m)^2$

3.20. a) $(a+b+1)(a-b-3)$
b) $(1+a-2b)(1-a+2b)$
c) $(a-2b+3)(a-2b-3)$
d) $(9+c+3d)(9-c-3d)$
e) $(9-x-y)(9+x+y)$
f) $(8-4x+y)(8+4x-y)$

3.21. a) $(x-7)(2y+3)^2$
b) $(x+1)(2z+1)^2$
c) $(x-2)(1-5x)^2$
d) $(x+1)(x^2+4)(x+2)(x-2)$

3.22. a) $(2x-3y+1)(2x+3y+5)$
b) $(5x-7y-3)(5x+7y+1)$
c) $4(2x-y-1)(2x+y-2)$
d) $(2x-y-5)(2x+y-5)$

3.23. a) $(x+1)(x-3)$
b) $(y+1)(y-5)$
c) $(z+\sqrt{2}x)(z-\sqrt{2}x)$
d) $(3+w)(1-w)$

3.24. Wskazówka: Zauważ, że suma pól figur narysowanych w kwadracie jest równa polu kwadratu.

3.25. Wartość wyrażenia jest równa $\frac{1}{2}$.

3.26. a) $(x + 2y + 3z)^2$

b) $(k - m - p)^2$ **c)** $\left(2t - u + \frac{1}{2}z\right)^2$

d) $(\sqrt{2}a + \sqrt{3}b - 2c)^2$

3.27. 7. Wskazówka: Zauważ, że jeśli $x + y = 27$, to $(x + y)^2 = 27^2$.

3.28. 240

3.29. $1800 \cdot 2202 =$
 $= (2001 - 201)(2001 + 201) =$
 $= 2001^2 - 201^2$

3.30. Wskazówka: $1\,012\,202 =$
 $= 1\,000\,000 + 2000 + 1 + 10\,000 +$
 $+ 200 + 1$

3.31. Wskazówka:

$$\begin{aligned} & \underbrace{1\,000\,000}_{100 \text{ cyfr}} \underbrace{04\,000\,000}_{100 \text{ cyfr}} 4 = \\ & = \underbrace{1\,000\,000}_{202 \text{ cyfry}} + \underbrace{4\,000\,000}_{101 \text{ cyfr}} + 4 = \\ & = \left(\underbrace{1\,000\,000}_{101 \text{ cyfr}}\right)^2 + 2 \cdot \underbrace{1\,000\,000}_{101 \text{ cyfr}} \cdot 2 + 2^2 \end{aligned}$$

Prosto do matury

1. P, F, F

2. $10 - 4x, -3\sqrt{2}$

3. $-64x + 30, -14$

4. $4y(1 - x), 0$

D * **3.26.** Wykaż, że $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$, a następnie zapisz podane wyrażenie w postaci kwadratu wyrażenia algebraicznego.

a) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 6xz + 12yz$

b) $k^2 + m^2 + p^2 - 2km - 2kp + 2mp$

c) $4t^2 + u^2 + \frac{1}{4}z^2 - 4tu + 2tz - uz$

d) $2a^2 + 3b^2 + 4c^2 + 2\sqrt{6}ab - 4\sqrt{2}ac - 4\sqrt{3}bc$

* **3.27.** Wiadomo, że $x + y = 27$ i $x^2 + y^2 = 715$. Oblicz xy .

* **3.28.** Wiadomo, że $x - y = 8$ i $xy = 88$. Oblicz $x^2 + y^2$.

D * **3.29.** Wykaż, że liczba $1800 \cdot 2202$ jest różnicą kwadratów pewnych dwóch liczb całkowitych.

D * **3.30.** Wykaż, że liczba $1\,012\,202$ jest sumą kwadratów pewnych dwóch liczb całkowitych.

D * **3.31.** Wykaż, że liczba $\underbrace{1\,000\,000}_{100 \text{ cyfr}} \underbrace{04\,000\,000}_{100 \text{ cyfr}} 4$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Prosto do matury



1. Dane jest wyrażenie $100x^2 - 49y^2$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $100x^2 - 49y^2 = (-7y + 10x)(10x + 7y)$

B. $100x^2 - 49y^2 = (7y + 10x)(7y - 10x)$

C. Dla dowolnych wartości zmiennych x i y wartość wyrażenia $100x^2 - 49y^2$ jest dodatnia.

2. Doprowadź do prostszej postaci wyrażenie $(3 - 2x)(3 + 2x) + (2x - 1)^2$ i oblicz jego wartość dla $x = \frac{10 + 3\sqrt{2}}{4}$.

3. Doprowadź do prostszej postaci wyrażenie $(3x - 4)^2 - 2(2x + 5)^2 - (x - 8)(8 + x)$ i oblicz jego wartość dla $x = \frac{11}{16}$.

4. Doprowadź do prostszej postaci wyrażenie

$(x - 2y)^2 - (x - 2y)(x + 2y) - 4y(2y - 1)$ i oblicz jego wartość dla $x = 1$ i $y = \frac{13}{257}$.

D **5.** Wykaż, że dla dowolnych wartości a i b prawdziwy jest wzór $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$.

5. Sposób 1.

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab$$

Sposób 2.

$$\begin{aligned} (a + b)^2 - (a - b)^2 &= [(a + b) + (a - b)][(a + b) - (a - b)] = (a + b + a - b)(a + b - a + b) = \\ &= 2a \cdot 2b = 4ab \end{aligned}$$

4. Liczby pierwsze i złożone

Umiejętności:

- dowodzenie prostych twierdzeń dotyczących własności liczb naturalnych i liczb całkowitych
- wyróżnianie w twierdzeniach założeń i tezy

Podzielność w zbiorze liczb naturalnych

Przypomnijmy pojęcie naturalnego dzielnika liczby naturalnej, znane ze szkoły podstawowej.

Definicja

Jeżeli różne od zera liczby naturalne n , m i k spełniają równość $n = m \cdot k$, to mówimy, że liczba n **jest podzielna** przez m i przez k . Liczby m i k nazywamy **dzielnikami** liczby n . Liczbę n nazywamy **wielokrotnością** każdej z liczb m i k .

Przykład 1

Dzielnikami liczby 12 są 3 i 4, bo $12 = 3 \cdot 4$, ale są nimi również 2, 6, 1 i 12. Liczba 12 ma sześć dzielników.

Przykład 2 ◀ zad. 4.12

Wyznamy wszystkie naturalne wartości n , dla których wartość wyrażenia $\frac{3n-8}{n}$ jest liczbą naturalną.

Rozwiązanie

Z treści zadania wynika, że n nie może być równe 0 (zera nie możemy wstawiać do mianownika).

Z. $n \neq 0$ ← w ten sposób można zapisać założenia wynikające z treści zadania

Przekształcamy wyrażenie do innej postaci:

$$\frac{3n-8}{n} = \frac{3n}{n} - \frac{8}{n} = 3 - \frac{8}{n}$$

Teraz widać, że aby wartość wyrażenia mogła być liczbą naturalną, n musi być dzielnikiem 8, czyli jedną z liczb: 1, 2, 4, 8. Podstawiamy każdą z nich do wyrażenia i sprawdzamy wyniki. Warunki zadania spełniają 4 i 8, bo dla 1 i 2 wartości wyrażenia są liczbami ujemnymi.

Odp.: $n = 4$ lub $n = 8$

◀ 4.12. Wyznamy wszystkie naturalne wartości n , dla których wartość wyrażenia $\frac{5n+6}{n}$ jest liczbą naturalną.

Odp.: 1, 2, 3, 6

ZZ i MKP

tematy 1.1, 1.2

Multiteka

- Dzielenie z resztą
- Spirala Ulama
- Algorytm Euklidesa
- Sito Eratostenesa
- Liczby na osi liczbowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.4

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Definicja

Liczbą pierwszą nazywamy liczbę naturalną $k > 1$, która ma dokładnie dwa różne dzielniki: 1 i k .

Liczby naturalne większe od 1, które nie są liczbami pierwszymi, nazywamy **liczbami złożonymi**.

Liczby 0 oraz 1 nie są ani liczbami pierwszymi, ani złożonymi.

Każdą liczbę złożoną możemy rozłożyć na czynniki pierwsze, tzn. zapisać ją w postaci iloczynu liczb pierwszych. Rozkład taki jest jednoznaczny z dokładnością do kolejności występujących czynników.

Liczba 0 ma nieskończenie wiele dzielników – każda liczba naturalna różna od 0 jest jej dzielnikiem. Liczba 1 ma tylko jeden dzielnik naturalny. Jest on równy 1.



◀4.5. Rozłóż na czynniki pierwsze następujące liczby:
39, 94, 108, 510, 1156, 3420, 4830, 8550.

Odp.: $39 = 3 \cdot 13$,
 $94 = 2 \cdot 47$,
 $108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$,
 $510 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$,
 $1156 = 2 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 17$,
 $3420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19$,
 $4830 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23$,
 $8550 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 19$

Przykład 3 ◀ zad. 4.5

Rozłożymy na czynniki pierwsze kilka liczb złożonych.

$$4 = 2 \cdot 2$$

$$18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$20 = 2 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 5$$

$$120 = 2 \cdot 60 = 2 \cdot 2 \cdot 30 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Cechy podzielności

Przy rozkładzie liczby naturalnej na czynniki warto korzystać z twierdzeń zwanych **cechami podzielności**.

Liczba naturalna jest podzielna przez:

- | | |
|----|--|
| 2 | jeśli jest liczbą parzystą, czyli jej ostatnią cyfrą jest 0, 2, 4, 6, 8. |
| 3 | jeśli suma jej cyfr jest podzielna przez 3. |
| 4 | jeśli jej ostatnie dwie cyfry to 00, 04, 08 lub cyfry tworzące liczbę podzielną przez 4. |
| 5 | jeśli jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5. |
| 6 | jeśli jest liczbą parzystą podzielną przez 3. |
| 9 | jeśli suma jej cyfr jest podzielna przez 9. |
| 10 | jeśli jej ostatnią cyfrą jest 0. |

Udowodnimy cechę podzielności przez 9 dla liczb trzycyfrowych.

Twierdzenie

Liczba naturalna trzycyfrowa n jest podzielna przez 9, jeżeli suma jej cyfr jest podzielna przez 9.

Założenia

$$n = 100a + 10b + c$$

a, b, c są cyframi

$$a \neq 0$$

← cyfra setek musi być różna od zera, żeby liczba była trzycyfrowa

$$a + b + c = 9k, \quad k \in \mathbf{N}$$

← na pewno istnieje takie k , bo suma cyfr jest podzielna przez 9

Liczbę trzycyfrową o cyfrze setek a , cyfrze dziesiątek b i cyfrze jedności c możemy zapisać w postaci $n = 100a + 10b + c$.



Teza

Istnieje takie $l \in \mathbf{N}$, że $n = 9l$.

← takiego l szukamy

Dowód

$$\begin{aligned} n &= 100a + 10b + c = 99a + 9b + a + b + c = 9(11a + b) + (a + b + c) = \\ &= 9(11a + b) + 9k = 9(11a + b + k) \end{aligned}$$

$$(11a + b + k) \in \mathbf{N}$$

← wszystkie składniki w nawiasie są liczbami naturalnymi, więc $(11a + b + k) = l$

Mamy zatem:

$$n = 9l, \text{ gdzie } l \in \mathbf{N}$$

Koniec dowodu

Udowodnimy cechę podzielności przez 4.

Twierdzenie

Liczba naturalna n , co najmniej trzycyfrowa, jest podzielna przez 4, jeżeli jej ostatnie dwie cyfry to 00, 04, 08 lub cyfry tworzące liczbę podzielną przez 4.

Założenia

$$n = a \cdot 100 + b, \quad a \in \mathbf{N}, \quad b \in \mathbf{N}$$

← np. $2764 = 27 \cdot 100 + 64$

b oznacza ostatnie dwie cyfry liczby n , czyli 00, 04, 08 lub liczbę dwucyfrową podzielną przez 4

Teza

Liczba n jest podzielna przez 4.

◀4.11. Jaką cyfrą można zastąpić *, aby otrzymane zdanie było prawdziwe?

- a) Liczba $1567*$ jest podzielna przez 2 i przez 9.
 b) Liczba $222*34$ jest podzielna przez 9.
 c) Liczba $40*$ jest podzielna przez 5 i przez 9.
 d) Liczba $13579*$ jest podzielna przez 6.
 e) Liczba $22222*$ jest podzielna przez 12.
 f) Liczba $1234*$ jest podzielna przez 15.

Odp.: a) 8 b) 5 c) 5
 d) 2 lub 8 e) 8 f) 5

Dowód

Rozpatrzmy dwa przypadki.

- I. Zakładamy, że dwie ostatnie cyfry liczby n to 00, 04 lub 08, czyli $b = 0 \cdot 10 + d$, gdzie d jest równe 0, 4 lub 8.

Wtedy:

$$n = a \cdot 100 + b = a \cdot 100 + d$$

Liczba n jest podzielna przez 4, bo każdy składnik sumy jest podzielny przez 4.

- II. Zakładamy, że dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4 (np. $2764 = 2 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 64$).

Oznacza to, że liczbę b można zapisać w postaci:

$$b = 4c \text{ i } c \in \mathbb{N}$$

← istnieje takie c , bo b jest podzielne przez 4

Zatem:

$$n = a \cdot 100 + b = 4 \cdot 25 \cdot a + 4c = 4(25a + c)$$

← wyłączamy 4 przed nawias

Liczba otrzymana w nawiasie jest naturalna, więc liczba n jest podzielna przez 4.

Koniec dowodu

Przykład 4 ◀ zad. 4.11

Liczba 7560 jest podzielna przez:

- 2 – ponieważ jest parzysta,
 3 – ponieważ suma jej cyfr wynosi $7 + 5 + 6 + 0 = 18$, czyli jest podzielna przez 3,
 4 – ponieważ liczba 60 jest podzielna przez 4 ($60 = 4 \cdot 15$),
 5 – ponieważ jej ostatnią cyfrą jest 0,
 6 – ponieważ jest parzysta i podzielna przez 3,
 9 – ponieważ suma jej cyfr (równa 18) jest podzielna przez 9,
 10 – ponieważ jej ostatnią cyfrą jest 0.

Ile jest liczb pierwszych?

Czy w nieskończonym ciągu liczb naturalnych liczby pierwsze pojawiają się tylko do pewnego, być może bardzo odległego miejsca, czy jest ich nieskończenie wiele? Odpowiedzi na to pytanie udzielił ponad 300 lat p.n.e. Euklides. Prześledźmy tok jego rozumowania.

Najpierw próbnie zakładamy, że jest ich skończona liczba, np. że jest k takich liczb. Można je zatem oznaczyć np. literą p i ponumerować od 1 do k :

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_k \quad \leftarrow p_k \text{ jest tu ostatnią, czyli największą liczbą pierwszą}$$

Rozważamy teraz liczbę:

$$A = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k + 1$$

będącą iloczynem tych hipotetycznie wszystkich liczb pierwszych zwiększonym o 1.

Liczba A jest większa od każdego czynnika z iloczynu $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k$, więc jest liczbą złożoną. Jednak w jej rozkładzie na czynniki pierwsze nie może pojawić się żadna z liczb $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$, bo przy dzieleniu A przez dowolną z nich otrzymamy resztę równą 1.

Otrzymaliśmy sprzeczność, bo z jednej strony A jest liczbą złożoną, a z drugiej – nie można jej rozłożyć na istniejące (wszystkie!) czynniki pierwsze.

Założenie, że liczb pierwszych jest skończona liczba, okazało się fałszywe, a zatem prawdą jest, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

W ciągu liczb naturalnych większych od 2 co druga jest złożona, bo jest parzysta. A jak są rozmieszczone liczby pierwsze? Może być tak, że pomiędzy dwiema kolejnymi liczbami pierwszymi jest bardzo dużo liczb złożonych. Mogą też, jak 3 i 5 lub 11 i 13, być oddzielone tylko jedną liczbą złożoną. Takie pary zostały nazwane **liczbami pierwszymi bliźniaczymi**. Do dziś nie udowodniono, czy liczb bliźniaczych jest nieskończenie wiele. W 2016 r. największą znaną parą liczb bliźniaczych były:

$$\begin{aligned} 2996863034895 \cdot 2^{1290000} - 1 \\ 2996863034895 \cdot 2^{1290000} + 1 \end{aligned}$$

Twierdzenie

Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

Jest wiele powodów, dla których naukowcy (i nie tylko!) pilnie śledzą rozwój badań nad wyszukiwaniem kolejnych liczb pierwszych, ich rozmieszczeniem na osi itp. Jedną z przyczyn jest powszechne zastosowanie, jakie liczby pierwsze mają w algorytmach szyfrujących, używanych do zabezpieczania różnych baz danych. Takie szyfrowanie polega, najogólniej mówiąc, na dobraniu dostatecznie dużych liczb pierwszych p i q oraz utworzeniu ich iloczynu $k = p \cdot q$. Liczba k jest kluczem publicznym, natomiast liczby p i q są utajnione – stanowią części klucza prywatnego. Aby odczytać zaszyfrowaną wiadomość, trzeba znać te liczby, czyli znać rozkład liczby k na czynniki pierwsze. To zadanie przy dużych wartościach liczb p i q jest obecnie praktycznie niewykonalne, nawet dla komputerów o dużej mocy obliczeniowej.

Dowód twierdzenia o istnieniu nieskończenie wielu liczb pierwszych, podany przez Euklidesa, jest wzorem rozumowania matematycznego, które nazywa się **metodą dowodzenia nie wprost** (czasem metodą sprowadzania do niedorzeczności). Polega ona na sprawdzeniu, co by było, gdyby podana teza była fałszywa. Jeśli w toku rozumowania pokażemy, że fałszywe są założenia, to oznacza, że ta teza jest jednak prawdziwa. Z metody dowodzenia nie wprost będziemy wielokrotnie korzystać podczas nauki matematyki w szkole średniej.

Podzielność w zbiorze liczb całkowitych

Na początku tego rozdziału podaliśmy definicję naturalnego dzielnika liczby naturalnej. Analogicznie definiujemy całkowite dzielniki liczb całkowitych.

Definicja

Jeżeli różne od zera liczby całkowite n , m i k spełniają równość $n = m \cdot k$, to mówimy, że liczba n **jest podzielna** przez m i przez k . Liczby m i k nazywamy **dzielnikami** liczby n .

Przykład 5

Zbiór naturalnych dzielników liczby 6 to zbiór $\{1, 2, 3, 6\}$.

Zbiór całkowitych dzielników liczby 6 to zbiór $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$.

Zbiór całkowitych dzielników liczby -6 to zbiór $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$.

Największy wspólny dzielnik oraz najmniejsza wspólna wielokrotność liczb naturalnych to pojęcia znane ze szkoły podstawowej. Nie będziemy ich powtarzać. Wprowadzimy natomiast jeszcze jedną definicję dotyczącą dzielników.

Definicja

Dwie liczby całkowite, których największym wspólnym dzielnikiem jest liczba 1, nazywamy **liczbami względnie pierwszymi**.

Liczbami względnie pierwszymi są np.: 14 i 15, 19 i 20, 35 i 47, -6 i 101.

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszyte.

4.1. Suma pięciu kolejnych liczb naturalnych jest równa 130. Wskaż środkową z nich.

A. 25

B. 26

C. 27

D. 28

4.2. Niech n oznacza nieparzystą liczbę naturalną. Które z podanych wyrażeń określa liczbę parzystą?

A. $n^2 + n$

B. $n^2 + 4$

C. n^2

D. $n - 2$

Odpowiedzi i rozwiązania

4.1. B

4.2. A

4.3. Wskaż najmniejszą liczbę pierwszą.

- A. -2 B. 1 C. 2 D. 3

4.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Liczby 21 i 91 są względnie pierwsze.
B. Liczby 21 i 101 są względnie pierwsze.
C. Liczby 21 i 119 są względnie pierwsze.

4.5. Rozłóż na czynniki pierwsze następujące liczby:

39, 94, 108, 510, 1156, 3420, 4830, 8550.

4.6. Którą z wymienionych liczb można przedstawić w postaci sumy dwóch liczb pierwszych: 35, 77, 81, 335, 333, 63, 103, 73?

4.7. Wyznacz wspólne dzielniki naturalne podanej pary liczb.

- a) 28 i 42 b) 66 i 88 c) 105 i 84 d) 280 i 135

4.8. Wyznacz największy wspólny dzielnik (NWD) podanej pary liczb.

- a) 90 i 126 b) 198 i 693 c) 300 i 822 d) 570 i 266

4.9. Wyznacz najmniejszą wspólną wielokrotność (NWW) podanej pary liczb.

- a) 28 i 12 b) 26 i 6 c) 13 i 5 d) 45 i 30

4.10. Jaką cyfrę należy wstawić w miejsce litery a , aby liczba

- a) $115a0$ była podzielna przez 5 i przez 3?
b) $94a$ była podzielna przez 5 i niepodzielna przez 2?
c) $333a$ była podzielna przez 5 i niepodzielna przez 3?
d) $17a6$ była podzielna przez 3 i przez 4?

4.11. Jaką cyfrą można zastąpić $*$, aby otrzymane zdanie było prawdziwe?

- a) Liczba $1567*$ jest podzielna przez 2 i przez 9.
b) Liczba $222*34$ jest podzielna przez 9.
c) Liczba $40*$ jest podzielna przez 5 i przez 9.
d) Liczba $13579*$ jest podzielna przez 6.
e) Liczba $22222*$ jest podzielna przez 12.
f) Liczba $1234*$ jest podzielna przez 15.

4.12. Wyznacz wszystkie naturalne wartości n , dla których wartość wyrażenia $\frac{5n+6}{n}$ jest liczbą naturalną.

4.3. C

4.4. F, P, F

4.5. $39 = 3 \cdot 13$,
 $94 = 2 \cdot 47$,
 $108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$,
 $510 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$,
 $1156 = 2 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 17$,
 $3420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19$,
 $4830 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23$,
 $8550 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 19$

4.6. *Wskazówka:* Zauważ, że każda z podanych liczb jest nieparzysta, a zatem jednym ze składników takiej sumy musi być liczba 2.

4.7. a) 1, 2, 7, 14
b) 1, 2, 11, 22
c) 1, 3, 7, 21
d) 1, 5

4.8. a) 18 b) 99 c) 6 d) 38

4.9. a) 84 b) 78 c) 65 d) 90

4.10. a) 2 lub 5, lub 8 b) 5 c) 5
d) 1 lub 7

4.11. a) 8 b) 5 c) 5
d) 2 lub 8 e) 8 f) 5

4.12. 1, 2, 3, 6

4.13. $-9, -3, -1, 3, 9$

4.14. $-10, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 10$

4.15. $-5, -4, -1$. *Wskazówka:* Zapisz szukaną liczbę kolejno w postaci: $\frac{a+1}{a+3} = \frac{a+3-3+1}{a+3} = \frac{(a+3)-2}{a+3} = 1 - \frac{2}{a+3}$.

4.16. $-1, 1, 3, 5$.
Wskazówka: Zobacz wskazówkę do zadania 4.15.

4.17. $12, 14, 16, 18$

4.18. Niech a, b, c będą kolejnymi cyframi liczby trzycyfrowej n . Zatem $n = 100a + 10b + c = 99a + 9b + a + b + c = 3(33a + 3b) + (a + b + c)$. Oznacza to, że liczba n jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy suma $a + b + c$ jest podzielna przez 3.

4.19. Założenia:
 $n = 1000a + 100b + 10c + d$,
 $a \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$,
 $b, c, d \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$,
 $a + b + c + d = 9k$, $k \in \mathbb{N}$
Teza: istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że $n = 9$.
Dowód:
 $n = 999a + 99b + 9c + a + b + c + d =$
 $= 999a + 99b + 9c + 9k =$
 $= 9(111a + 11b + c + k)$
 $111a + 11b + c + k \in \mathbb{N}$,
więc istnieje $m \in \mathbb{N}$,
 $m = 111a + 11b + c + k$ takie, że
 $n = 9m$, co należało udowodnić.

4.20. 90

4.13. Wyznacz wszystkie całkowite wartości n , dla których wartość wyrażenia $\frac{7n-9}{n}$ jest liczbą naturalną.

4.14. Wyznacz wszystkie całkowite wartości n , dla których wartość wyrażenia $\frac{n-10}{n}$ jest liczbą całkowitą.

* **4.15.** Wyznacz wszystkie liczby całkowite a , dla których wartość wyrażenia $\frac{a+1}{a+3}$ jest liczbą naturalną.

* **4.16.** Wyznacz wszystkie liczby całkowite a , dla których wartość wyrażenia $\frac{a+1}{a-2}$ jest liczbą całkowitą.

4.17. Wyznacz cztery kolejne liczby parzyste, których suma pomniejszona o różnicę ostatniej i pierwszej jest równa 54.

D 4.18. Udowodnij cechę podzielności przez 3 dla liczb trzycyfrowych.

D 4.19. Udowodnij cechę podzielności przez 9 dla liczb czterocyfrowych.

4.20. Podaj najmniejszą liczbę naturalną podzielną przez 6, 9 i 15.

D 4.21. Udowodnij, że jeżeli liczba d jest dzielnikiem każdej z liczb a i b , to jest również dzielnikiem

a) sumy $a + b$.

b) różnicy $a - b$.

4.22. Zabytkowy wahadłowy zegar ścienny spóźnia się 12 minut każdego dnia. Jeżeli pierwszego kwietnia w południe wskazał poprawnie godzinę 12, to po ilu dniach znów pokaże prawidłową godzinę?

* **4.23.** Podaj przykład takiego sześćcioelementowego zbioru liczb naturalnych, aby suma

a) dwóch dowolnych liczb z tego zbioru była parzysta.

b) dwóch dowolnych liczb z tego zbioru była nieparzysta.

c) trzech dowolnych liczb z tego zbioru była parzysta.

d) trzech dowolnych liczb z tego zbioru była nieparzysta.

4.24. Ile zer na końcu ma liczba będąca iloczynem pięćdziesięciu kolejnych liczb naturalnych: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 49 \cdot 50$?

4.21. Załóżmy, że liczba d jest dzielnikiem każdej z liczb a i b . Wtedy $a = kd$, $b = ld$, gdzie $k, l \in \mathbb{Z}$. Zatem $a \pm b = kd \pm ld = (k \pm l)d$ i $k \pm l \in \mathbb{Z}$, więc liczba d jest dzielnikiem liczby $a \pm b$.

4.22. po 60 dniach

4.23. a) $\{1, 3, 7, 11, 15, 17\}$ **b)** Taki zbiór nie istnieje.

c) $\{0, 4, 6, 8, 10, 12\}$ **d)** $\{1, 3, 5, 11, 13, 15\}$

4.24. Liczba zer na końcu jest równa liczbie czynników równych 5 w rozkładzie danego iloczynu na czynniki pierwsze (czynników równych 2 jest więcej niż czynników równych 5, więc wystarczy policzyć, ile jest piątek). Te czynniki znajdują się w liczbach: $1 \cdot 5, 2 \cdot 5, 3 \cdot 5, 4 \cdot 5, 5 \cdot 5$ (dwa), $6 \cdot 5, 7 \cdot 5, 8 \cdot 5, 9 \cdot 5, 10 \cdot 5$ (dwa). Jest ich $10 + 2 = 12$.

4.25. Podaj przykład dwóch takich liczb pierwszych a i b , aby również $a + b$ i $a - b$ były liczbami pierwszymi.

4.26. Wyznacz wszystkie naturalne wartości n , dla których wartość wyrażenia $\frac{30}{n} + 2$ jest liczbą pierwszą.

4.27. Czy można wskazać dwie kolejne liczby naturalne złożone i równocześnie względnie pierwsze?

4.28. Ze zbioru $\{9, 15, 21, 27, 28, 33, 39, 51, 56\}$ wypisz pary liczb względnie pierwszych.

D * **4.29.** Wykaż, że dwie kolejne liczby całkowite nieparzyste są względnie pierwsze.

Prosto do matury



1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Każda liczba podzielna przez 21 jest podzielna przez 7.

B. Każda liczba podzielna przez 7 jest podzielna przez 21.

C. Istnieją liczby podzielne przez 7 i przez 21.

2. Ze zbioru $\{10, 13, 21, 25, 26, 33, 39\}$ wypisz pary liczb względnie pierwszych.

3. Wyznacz cyfrę, którą należy wstawić w miejsce litery a , aby liczba $13579a$ była podzielna przez 6.

4. Suma dwóch liczb naturalnych jest równa 78, a ich największym wspólnym dzielnikiem jest 13. Wyznacz te liczby.

D **5.** Niech $a = \frac{15 + 2n}{n}$, gdzie n jest dodatnią liczbą naturalną. Wykaż, że dla tych wartości n , dla których a jest liczbą naturalną, a jest równocześnie liczbą pierwszą.

4.25. $a = 5, b = 2$

4.26. 2, 6, 10, 30

4.27. Można, np. 8 i 9.

4.28. 9 i 28, 9 i 56, 15 i 28, 15 i 56, 27 i 28, 27 i 56, 28 i 33, 28 i 39, 28 i 51, 33 i 56, 39 i 56, 51 i 56

4.29. Wskazówka: Przyjmij, że $a = 2n + 1$, $b = 2n - 1$, d jest największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b (d musi być liczbą nieparzystą) i skorzystaj z zadania 4.21 b.

Prosto do matury

1. P, F, P

2. 10 i 13, 10 i 21, 10 i 33, 10 i 39, 13 i 21, 13 i 25, 13 i 33, 21 i 25, 21 i 26, 25 i 26, 25 i 33, 25 i 39, 26 i 33

3. 2 lub 8

4. 13 i 65. Wskazówka: Zapisz szukane liczby w postaci $13p$ i $13m$, wiedząc, że p i m są względnie pierwsze, a następnie rozważ ich sumę.

$$5. a = \frac{15 + 2n}{n} = \frac{15}{n} + 2$$

a jest liczbą naturalną dla $n \in \mathbb{N}$, gdy n jest dzielnikiem liczby 15, czyli $n \in \{1, 3, 5, 15\}$.

Wtedy $a \in \left\{ \frac{15}{1} + 2, \frac{15}{3} + 2, \frac{15}{5} + 2, \frac{15}{15} + 2 \right\}$, czyli $a \in \{17, 7, 5, 3\}$.

Zatem a jest liczbą pierwszą.

5. Liczby wymierne. Liczby niewymierne

Umiejętności:

- zapisywanie liczb rzeczywistych w różnych postaciach

Każdą liczbę, którą można zapisać w postaci ułamka $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi oraz $n \neq 0$, nazywamy **liczbą wymierną**.

Każdą liczbę wymierną można zapisać w postaci ułamka na nieskończenie wiele sposobów, np.:

$$\bullet \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \dots \quad \bullet -\frac{5}{7} = -\frac{10}{14} = -\frac{25}{35} = \dots$$

Każda liczba całkowita jest liczbą wymierną, np. $-4 = -\frac{4}{1}$.

Liczbę, której nie można zapisać w postaci ułamka $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi oraz $n \neq 0$, nazywamy **liczbą niewymierną**.

Przykładami liczb niewymiernych są: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3} + 2$, π , $\frac{\sqrt{7}-1}{3}$.

Odkrycie liczb niewymiernych przypisuje się pitagorejczykom. Założony (ok. 530 r. p.n.e.) przez Pitagorasa związek filozoficzno-polityczny ma w dorobku liczne osiągnięcia naukowe, zwłaszcza matematyczne. Pitagorejczycy byli zafascynowani liczbami, które uznawali za istotę świata. Motto filozofii związku brzmiało: „wszystko jest liczbą”. Liczby przedstawiali w formie figur geometrycznych, układali je z kamyczków i odkrywali ich własności. Najważniejsze były liczby naturalne, ale znano i stosowano w tamtych czasach również ułamki. Prawdopodobnie pojęcie liczby niewymiernej pojawiło się wtedy, gdy odkryto, że nie można zmierzyć długości przekątnej kwadratu za pomocą ustalonej jednostki.

Zanim podamy uzasadnienie, że np. $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, przeanalizujemy sposób konstruowania odcinków o wymiernej długości.

Przykład 1

Odcinek o długości 3,7 danej jednostki powstaje w ten sposób, że najpierw odcinek o długości jednej jednostki (odcinek jednostkowy) dzielimy na 10 równych części i otrzymujemy odcinki o długości $\frac{1}{10}$ jednostki.

Z siedmiu takich części otrzymujemy odcinek o długości 0,7 jednostki. Szukany odcinek będzie się składał z trzech odcinków jednostkowych i odcinka o długości 0,7 jednostki, odłożonych kolejno na prostej. Dokładną konstrukcję podziału odcinka jednostkowego na 10 części przedstawimy w klasie drugiej, gdyż wymaga ona znajomości bardziej zaawansowanej matematyki.

ZZ i MKP

tematy 1.2–1.4

Multiteka

- Dowody twierdzenia Pitagorasa
- Zastosowania twierdzenia Pitagorasa
- Odległość do widnokręgu – zastosowanie twierdzenia Pitagorasa
- Obalenie twierdzenia przez podanie kontrprzykładu
- Zbiory liczbowe
- Liczby na osi liczbowej
- Spirala Teodorosa
- Liczba π

dla^{nauczyciela}.pl | Kartkówka 1.5

Opisanym w przykładzie sposobem możemy odmierzyć każdą długość, która jest dodatnią liczbą wymierną, tj. ułamek $\frac{k}{m}$. Odcinek jednostkowy dzielimy na m równych części i odkładamy kolejno k takich części.

Podobnie wyznaczamy na osi liczbowej punkty o wymiernych współrzędnych.

Do czasów Pitagorasa uważano, że zawsze można wykonać operację odwrotną, tzn. mając konkretny odcinek i ustaloną jednostkę – zmierzyć jego długość w opisany wyżej sposób. Tymczasem długości przekątnej „jednostkowego” kwadratu nie da się zapisać w postaci ułamka $\frac{k}{m}$.

Udowodnimy twierdzenie:

Twierdzenie

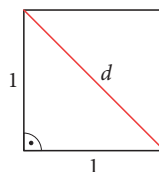
Jeżeli bok kwadratu ma długość 1, to długość przekątnej tego kwadratu jest liczbą niewymierną.

Założenie

Dany jest kwadrat o boku 1 i przekątnej d .

Teza

Liczba d jest niewymierna.



Dowód

Na mocy twierdzenia Pitagorasa mamy równość $d^2 = 1^2 + 1^2$, czyli $d^2 = 2$.

Przyjmijmy, że liczba d jest wymierna, czyli istnieją $k \in \mathbf{N}$ i $m \in \mathbf{N}$ takie, że $d = \frac{k}{m}$.

Wtedy prawdziwe musiałyby być następujące równości:

$$\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 2, \text{ więc } \frac{k^2}{m^2} = 2, \text{ stąd } k^2 = 2 \cdot m^2, \text{ czyli}$$

$$k \cdot k = 2 \cdot m \cdot m$$

Ostatnia równość nie może zajść, ponieważ będą różne liczby dwójek po rozłożeniu na czynniki pierwsze liczb k i m . Po lewej stronie, w iloczynie $k \cdot k$, będzie ich zawsze parzysta liczba (tzn. albo 0, albo 2, 4, 6 itd.), a po prawej stronie, w iloczynie $2 \cdot m \cdot m$, nieparzysta liczba (albo 1, albo 3, 5 itd.).

Zatem liczby d nie zapiszemy w postaci ułamka zwykłego, czyli jest ona liczbą niewymierną.

Koniec dowodu

Przedstawione rozumowanie jest kolejnym przykładem dowodzenia **metodą nie wprost**.

To odkrycie odegrało ważną rolę w dalszym rozwoju matematyki.

Długość przekątnej d w kwadracie o boku 1 nazwano pierwiastkiem kwadratowym z liczby 2 i oznaczono symbolem $\sqrt{2}$.

Zbiór utworzony z wszystkich liczb wymiernych oraz liczb niewymiernych nazywamy **zbiorem liczb rzeczywistych**. Inaczej mówiąc, każda liczba rzeczywista jest albo liczbą wymierną, albo liczbą niewymierną.

Zbiór liczb rzeczywistych oznaczamy symbolem $\mathbf{R}$ (od angielskiego *real* – rzeczywisty), a zbiór liczb wymiernych symbolem $\mathbf{Q}$ (od angielskiego słowa *quotient* – iloraz). Nie będziemy wprowadzać dodatkowego oznaczenia na zbiór liczb niewymiernych. Aby zapisać, że jakaś liczba jest niewymierna, użyjemy zaprzeczenia, np.: $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Zapis dziesiętny liczby rzeczywistej

Przykład 2

Zapiszemy liczbę wymierną w postaci dziesiętnej, wykonując odpowiednie dzielenie.

a) $\frac{1}{4} = 0,25$, ponieważ:

$$\begin{array}{r} 0,25 \\ 1 : 4 \\ \underline{10} \\ -8 \\ \underline{20} \\ -20 \\ \underline{0} \end{array}$$

b) $\frac{2}{3} = 0,666666\dots$, ponieważ:

$$\begin{array}{r} 0,66\dots \\ 2 : 3 \\ \underline{20} \\ -18 \\ \underline{20} \\ -18 \\ \underline{2} \end{array}$$

← od tego miejsca dzielenie się powtarza

c) $1\frac{3}{11} = \frac{14}{11} = 1,27272727\dots$, ponieważ:

$$\begin{array}{r} 1,2727\dots \\ 14 : 11 \\ \underline{-11} \\ 30 \\ \underline{-22} \\ 80 \\ \underline{-77} \\ 30 \\ \underline{-22} \\ 8 \end{array}$$

← od tego miejsca dzielenie się powtarza

Powtarzającą się nieskończenie wiele razy tę samą cyfrę lub grupę cyfr w rozwinięciu dziesiętnym liczby nazywamy **okresem rozwinięcia**. Okres składający się z najmniejszej liczby cyfr nazywamy **okresem zasadniczym** i zapisujemy w nawiasie okrągłym.

Zatem: $\frac{2}{3} = 0,(6)$, $\frac{14}{11} = 1,(27)$, $\frac{8}{7} = 1,(142857)$.

Ułamek $\frac{1}{4}$ ma rozwinięcie dziesiętne skończone: $\frac{1}{4} = 0,25$.

Przyjrzyjmy się dzieleniu liczby 8 przez 7.

Pod kolejnymi kreskami pojawiają się reszty (1, 3, 2, 6, 4, 5, 1 itd.), które są dodatnimi liczbami naturalnymi mniejszymi od 7. Takich liczb jest 6, więc najpóźniej po siódmym kroku dzielenia jedna z nich musi wystąpić ponownie i słupek dzielenia zaczyna się powtarzać.

W dzieleniu liczby 14 przez 11 reszta równa 3 pojawiła się ponownie już po trzecim dzieleniu (zob. przykład 2c). Dlatego okres zasadniczy tego ułamka dziesiętnego jest dwucyfrowy.

W dzieleniu liczby 1 przez 4 po drugim kroku dzielenia pojawia się reszta 0. Dlatego ten ułamek dziesiętny jest skończony.

Uogólnijmy:

Reszty, które pojawiają się po kolejnych etapach dzielenia m przez n , mogą być równe:

$$0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

Wniosek

Każda liczba wymierna ma rozwinięcie dziesiętne skończone lub nieskończone okresowe.

Umiemy znaleźć rozwinięcie dziesiętne dowolnego ułamka zwykłego. Pokażemy na przykładach, jak postąpić, aby rozwiązać zadanie odwrotne, tzn. nieskończony ułamek okresowy zamienić na zwykły.

Przykład 3

Zamienimy nieskończony ułamek okresowy na ułamek zwykły.

- a) $0,(1)$ b) $0,(01)$ c) $0,(001)$

Rozwiązanie

- a) $0,(1) = 0,1111\dots$

Oznaczmy ten ułamek nieskończony okresowy literą x .

$$x = 0,1111\dots \quad \leftarrow \text{mnożymy obie strony równania przez } 10$$

$$10x = 1,1111\dots$$

$$10x = 1 + 0,1111\dots \quad \leftarrow \text{podstawiamy } 0,1111\dots = x$$

$$10x = 1 + x, \text{ stąd } 9x = 1, \text{ zatem } x = \frac{1}{9}$$

$$\text{Odp.: } 0,(1) = \frac{1}{9}$$

$$\begin{array}{r} 1,142857 \\ 8:7 \\ \hline -7 \\ \hline 10 \\ -7 \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 20 \\ -14 \\ \hline 60 \\ -56 \\ \hline 40 \\ -35 \\ \hline 50 \\ -49 \\ \hline 1 \end{array}$$

◀5.5. Przedstaw liczby w postaci ułamków zwykłych nieskracalnych.

b) $-2,(7)$, $-7,(8)$, $1,2(6)$, $3,(15)$

Odp.: $-\frac{25}{9}$, $-\frac{71}{9}$, $\frac{19}{15}$, $\frac{104}{33}$

b) $0,(01) = 0,010101\dots$

$$x = 0,010101\dots$$

← mnożymy obie strony równania przez 100

$$100x = 1,010101\dots$$

$$100x = 1 + 0,010101\dots$$

$$100x = 1 + x, \text{ stąd } 99x = 1, \text{ zatem } x = \frac{1}{99}$$

Odp.: $0,(01) = \frac{1}{99}$

c) $0,(001) = 0,001001001\dots$

$$x = 0,001001\dots$$

← mnożymy obie strony równania przez 1000

$$1000x = 1,001001001\dots$$

$$1000x = 1 + 0,001001\dots$$

$$1000x = 1 + x, \text{ stąd } 999x = 1, \text{ zatem } x = \frac{1}{999}$$

Odp.: $0,(001) = \frac{1}{999}$

Uogólnijmy rozumowanie z przykładu 3.

Wniosek

$$0, \underbrace{(00\dots01)}_{n \text{ cyfr}} = \frac{1}{\underbrace{99\dots9}_{n \text{ cyfr}}}$$

Przykład 4 ◀ zad. 5.5 b

Zamienimy nieskończony ułamek okresowy na ułamek zwykły.

a) $0,(3)$

b) $-0,(27)$

c) $0,(9)$

d) $0,1(2)$

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że np.:

$$0,(3) = 3 \cdot 0,(1)$$

$$0,(27) = 27 \cdot 0,(01)$$

$$\text{a) } 0,(3) = 3 \cdot 0,(1) = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Odp.: $0,(3) = \frac{1}{3}$

$$\text{b) } 0,(27) = 27 \cdot 0,(01) = 27 \cdot \frac{1}{99} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

Odp.: $-0,(27) = -\frac{3}{11}$

$$\text{c) } 0,(9) = 9 \cdot 0,(1) = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$$

Mamy dwie możliwości dziesiętnego zapisu liczby 1: $0,(9)$ lub 1 (ew. $1,0000\dots$).

Odp.: $0,(9) = 1$

d) $0,1(2) = 0,12222222\dots$

Oznaczamy tę liczbę literą x .

$$x = 0,1(2)$$

$$10x = 1,2$$

← mnożymy obie strony równania przez 10

$$10x = 1 + 0,2$$

$$10x = 1 + \frac{2}{10}$$

$$10x = \frac{11}{10}$$

$$x = \frac{11}{110}$$

Odp.: $0,1(2) = \frac{11}{110}$

Twierdzenie

- Jeżeli liczba rzeczywista ma rozwinięcie dziesiętne skończone lub nieskończone okresowe, to jest liczbą **wymierną**.
- Jeżeli liczba rzeczywista ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone i nieokresowe, to liczba ta jest **niewymierna**.

Bardziej skomplikowane jest udowodnienie twierdzenia, że każda liczba niewymierna ma rozwinięcie dziesiętne. Przyjmijmy to twierdzenie bez dowodu.

$\sqrt{2}$ jako liczba niewymierna ma nieskończone i nieokresowe rozwinięcie dziesiętne:

$$\sqrt{2} = 1,41421356\dots$$

Przykład 5

◀ zad. 5.8

Obliczymy sumę $0,8(3) + 0,3(18)$.

Rozwiązanie

Obydwa ułamki dziesiętne okresowe zamieniamy najpierw opisaną wcześniej metodą na ułamki zwykłe.

$$0,8(3) + 0,3(18) =$$

$$= \frac{5}{6} + \frac{7}{22} = \frac{55 + 21}{66} =$$

← wykonujemy dodawanie ułamków zwykłych

$$= \frac{76}{66} = \frac{38}{33} =$$

$$= 1,15$$

← zapisujemy wynik w postaci ułamka dziesiętnego okresowego

Odp.: $1,15$

◀ 5.8. Oblicz.

a) $0,(3) + \frac{1}{7}$

b) $0,(4) + 0,(5)$

c) $0,1(2) + 0,2(1)$

d) $1,(09) + 0,(90)$

Odp.: a) $\frac{10}{21}$ b) 1 c) $\frac{1}{3}$ d) 2

◀ 5.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Suma dwóch liczb niewymiernych jest liczbą niewymierną.
 B. Iloczyn liczby wymiernej i niewymiernej jest liczbą niewymierną.
 C. Iloczyn dwóch liczb wymiernych jest liczbą wymierną.

Odp.: F, F, P



Przykład 6 ◀ zad. 5.4

Oceniemy prawdziwość podanych zdań.

Jeżeli liczby dodatnie a i b nie mają skończonego rozwinięcia dziesiętnego, to nie ma skończonego rozwinięcia dziesiętnego również

- A. suma $a + b$. B. iloczyn $a \cdot b$. C. iloraz $\frac{a}{b}$.

Rozwiązanie

Każde z podanych zdań jest fałszywe, gdyż do każdego z nich możemy podać kontrprzykład (czyli przykład takich liczb a i b , które nie spełniają podanego warunku).

- A. Jeśli $a = \frac{1}{3}$ i $b = \frac{5}{3}$, to $a = 0,(3)$ i $b = 1,(6)$, ale $a + b = 2$.
 B. Jeśli $a = \frac{11}{3}$ i $b = \frac{3}{11}$, to $a = 3,(66)$ i $b = 0,(27)$, ale $a \cdot b = 1$.
 C. Jeśli $a = \frac{1}{3}$ i $b = \frac{5}{3}$, to $a = 0,(3)$ i $b = 1,(6)$, ale $\frac{a}{b} = \frac{1}{5} = 0,2$.

Odp.: Zdania A, B i C są fałszywe.

Zastosowanie rozwinięć dziesiętnych liczb rzeczywistych wymaga użycia przybliżeń, a zwłaszcza jeśli działania wykonuje się na kalkulatorach lub w komputerach.

Zasada zaokrąglania rozwinięć dziesiętnych liczb rzeczywistych

- Jeżeli pierwsza z odrzuconych cyfr rozwinięcia dziesiętnego jest mniejsza od 5, to ostatnią zachowaną cyfrę pozostawiamy bez zmian.
Jest to tzw. **przybliżenie z niedomiarem**.
- Jeżeli pierwsza z odrzuconych cyfr rozwinięcia dziesiętnego jest równa 5 lub większa od 5, to ostatnią zachowaną cyfrę zwiększamy o 1.
Jest to tzw. **przybliżenie z nadmiarem**.

Przykład 7

Wyznamy kilka przybliżeń dziesiętnych podanej liczby.

$$\text{a) } \frac{3}{7} = 0,428571428\dots$$

$$\frac{3}{7} \approx 0,4$$

← przybliżenie z niedomiarem – pierwszą odrzuconą cyfrą jest 2
($0,4 < 0,428571428\dots$)

$$\frac{3}{7} \approx 0,43$$

← przybliżenie z nadmiarem – pierwszą odrzuconą cyfrą jest 8
($0,43 > 0,428571428\dots$)

$$\frac{3}{7} \approx 0,429$$

← przybliżenie z nadmiarem – pierwszą odrzuconą cyfrą jest 5
($0,429 > 0,428571428\dots$)

b) $\sqrt{29} = 5,38516480\dots$

$\sqrt{29} \approx 5,4$ ← przybliżenie z nadmiarem

$\sqrt{29} \approx 5,39$ ← przybliżenie z nadmiarem

$\sqrt{29} \approx 5,385$ ← przybliżenie z niedomiarem

$\sqrt{29} \approx 5,3852$ ← przybliżenie z nadmiarem

Jeżeli przybliżenie liczby a ma dwie cyfry po przecinku, to mówimy, że a jest przybliżone z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku lub do części setnych; jeżeli trzy cyfry po przecinku, to z dokładnością do trzeciego miejsca po przecinku itd.

Przykład 8 ◀ zad. 5.28

Podamy przykłady liczb wymiernych leżących na osi liczbowej pomiędzy $\sqrt{11}$ i $2\sqrt{3}$.

Rozwiązanie

Za pomocą kalkulatora znajdujemy:

$\sqrt{11} = 3,316624\dots$

$2\sqrt{3} = 3,464101\dots$

Odp.: Liczbami wymiernymi leżącymi pomiędzy $\sqrt{11}$ i $2\sqrt{3}$ są np.: 3,32, 3,317, 3,316(67), 3,4(2). Liczb spełniających warunek zadania jest nieskończenie wiele.

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. Która z podanych liczb jest rozwinięciem dziesiętnym liczby $\frac{1}{60}$?

- A. 1,(6) B. 0,1(6) C. 0,01(6) D. 0,001(6)

5.2. Wskaż liczbę, która nie jest przybliżeniem liczby $\sqrt{10} = 3,1622\dots$

- A. 3 B. 3,1 C. 3,16 D. 3,162

5.3. Która z podanych liczb jest różna od każdej z pozostałych?

- A. $\frac{1}{3} + \frac{2}{9}$ B. $\frac{4}{5} + \frac{1}{4}$ C. 0,(5) D. $\frac{1}{9} + \frac{4}{9}$

5.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Suma dwóch liczb niewymiernych jest liczbą niewymierną.
 B. Iloczyn liczby wymiernej i niewymiernej jest liczbą niewymierną.
 C. Iloczyn dwóch liczb wymiernych jest liczbą wymierną.

◀ **5.28.** Podaj przykład liczby wymiernej leżącej na osi liczbowej pomiędzy danymi liczbami.

a) 0 i 0,(3)

b) $-\sqrt{3}$ i $-\sqrt{2}$

c) $\sqrt{5}$ i 3

d) $\sqrt{8}$ i $\sqrt{10}$

Odp.: a) np. 0,2 b) np. -1,5

c) np. 2,5 d) np. 3

Odpowiedzi i rozwiązania

5.1. C

5.2. B

5.3. B

5.4. F, F, P

5.5. a) $\frac{1}{3}, \frac{13}{15}, \frac{11}{13}, \frac{8}{7}, \frac{7}{9}, \frac{7}{15}$
 b) $-\frac{25}{9}, -\frac{71}{9}, \frac{19}{15}, \frac{104}{33}$
 c) $\frac{168}{55}, -\frac{86}{37}, \frac{593}{74}, \frac{551}{550}$

5.6. $\frac{13}{15}, \frac{17}{20}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{11}{30}$

5.7. a) $\frac{2}{9}; \frac{4}{11}; \frac{21}{33}; 1,0(15); 1,(75)$

b) $\frac{7}{33}; \frac{34}{33}; 1,(33); \frac{13}{9}; 1,(90)$

5.8. a) $\frac{10}{21}$ b) 1 c) $\frac{1}{3}$ d) 2

5.9. a) 1,(5) b) 1,(83)
 c) 3,36(3) d) 2,(03) e) 0,2(8)
 f) 42

5.10. a) $x > y$ b) $x = y$
 c) $x < y$ d) $x > y$ e) $x < y$
 f) $x > y$

5.11. a) $-\frac{17}{42}$ b) $7\frac{1}{3}$ c) $\frac{7}{89}$
 d) 2,16 e) 0 f) $\frac{1}{6}$

5.12. nie

5.5. Przedstaw liczby w postaci ułamków zwykłych nieskracalnych.

a) $\frac{25}{75}, \frac{91}{105}, \frac{132}{156}, \frac{144}{126}, \frac{112}{144}, \frac{245}{525}$

b) $-2,(7), -7,(8), 1,2(6), 3,(15)$

c) $3,0(54), -2,(324), 8,0(135), 1,00(18)$

5.6. Uporządkuj liczby malejąco: $\frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{11}{30}, \frac{17}{20}, \frac{13}{15}$.

5.7. Uporządkuj liczby rosnąco.

a) $\frac{4}{11}, 1,(75), \frac{2}{9}, 1,0(15), \frac{21}{33}$ b) $1,(33), \frac{7}{33}, 1,(90), \frac{13}{9}, \frac{34}{33}$

5.8. Oblicz.

a) $0,(3) + \frac{1}{7}$ b) $0,(4) + 0,(5)$ c) $0,1(2) + 0,2(1)$ d) $1,(09) + 0,(90)$

5.9. Oblicz.

a) $2,(4) - 0,(8)$ d) $5,(6) - 2,(42) - 1,(21)$

b) $3,(21) - 1,(37)$ e) $3 \cdot 0,4(8) - 1,1(7)$

c) $2,(3) + 1,0(3) - 0,00(3)$ f) $\frac{2 \cdot 0,2(6) + 1,(3)}{0,0(4)}$

5.10. Porównaj liczby x i y .

a) $x = \frac{7}{12}$ $y = 0,(36)$

b) $x = \frac{7}{11}$ $y = 0,(45) + 0,(18)$

c) $x = 0,(6)$ $y = 0,8(3) + 0,1(6)$

d) $x = 0,6(36)$ $y = 0,(45) + 0,0(8)$

e) $x = 0,(78) - 0,(6)$ $y = 0,(51) + 0,(3)$

f) $x = 0,8(6) + 0,7(3)$ $y = 0,9(3) - 0,4(6)$

5.11. Oblicz.

a) $\frac{3}{7} - 3\frac{1}{3} + 2\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{9}$ d) $(2,2 - 0,22 : 5,5) \cdot \left(3\frac{3}{4} - 1\frac{1}{8}\right) : 2\frac{5}{8}$

b) $\left[\left(-2\frac{3}{5}\right) : \left(-1\frac{1}{20}\right) + \frac{1,32}{1,98} \right] \cdot 2\frac{1}{3}$ e) $\frac{0,216}{0,15} - \frac{1,96}{1,75} - \frac{0,88}{2,75}$

c) $\frac{4,75 - \left(-\frac{5}{8}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)}{30,25 + 3\frac{1}{8}} : 1\frac{3}{4}$ f) $\left(\frac{0,15}{0,216} + \frac{1,75}{1,5}\right) : 11\frac{1}{6}$

5.12. Czy suma dwóch ułamków dziesiętnych okresowych może być liczbą niewymierną?

5.13. Podaj przykład dwóch liczb o nieskończonych okresowych rozwinięciach dziesiętnych, których suma jest liczbą

- a) całkowitą.
- b) niecałkowitą o skończonym rozwinięciu dziesiętnym.
- c) o nieskończonym rozwinięciu dziesiętnym.

5.14. Podaj przykład liczby zapisanej w postaci rozwinięcia okresowego wyłącznie cyframi 0 i 1, która jest

- a) dodatnia i mniejsza od $\frac{1}{20}$.
- b) większa od $\frac{1}{10}$ i mniejsza od 1.

5.15. Który znak: <, = czy > należy wstawić w miejsce $\boxed{?}$, aby otrzymać zależność prawdziwą?

- a) $\frac{13}{15} \boxed{?} 0,8723$
- b) $3\frac{1}{7} \boxed{?} 3\frac{2}{11}$
- c) $2\frac{7}{9} \boxed{?} 2,(7)$
- d) $4,823 \boxed{?} 4\frac{16}{21}$

5.16. Podaj trzydziestą piątą oraz tysięczną cyfrę po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby.

- a) $\frac{23}{37}$
- b) $\frac{5}{11}$
- c) $\frac{17}{55}$

5.17. Podaj przykład liczby wymiernej leżącej na osi liczbowej pomiędzy danymi liczbami.

- a) $\frac{2}{7}$ i $\frac{3}{7}$
- b) $2\frac{3}{11}$ i $2\frac{4}{11}$
- c) $-1\frac{3}{17}$ i $-1\frac{4}{17}$
- d) 0,23 i 0,24

5.18. Podaj przykład dwóch liczb leżących na osi liczbowej pomiędzy danymi liczbami.

- a) $\frac{13}{5}$ i $\frac{14}{5}$
- b) $\frac{7}{17}$ i $\frac{8}{17}$
- c) $\frac{2}{3}$ i 1
- d) $\frac{3}{22}$ i $\frac{2}{11}$

5.19. Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę naturalną n , dla której ułamek $\frac{n}{1234}$ ma skończone rozwinięcie dziesiętne.

5.20. Podaj przykład liczby o nieskończonym rozwinięciu dziesiętnym, zapisanej wyłącznie za pomocą cyfr 0 i 1, która jest

- a) wymierna.
- b) niewymierna.

5.21. Czy podana liczba jest wymierna (zakładamy, że rozwinięcie jest nieskończone i zachowana jest reguła pisania kolejnych cyfr)?

- a) 0,30300300030000300000...
- b) 0,123456789101112131415... ← po przecinku piszemy kolejne liczby naturalne
- c) -1,05152535455565758595105115...

5.13.

a) np. $0,(3) + 0,(6) = \frac{3}{9} + \frac{6}{9} = 1$

b) np. $0,(3) + 0,1(6) = 0,333... + 0,1666... = 0,499... = 0,5$

c) np. $0,(2) + 0,(3) = 0,(5)$

5.14. a) np. $0,(01) < 0,05 = \frac{1}{20}$

b) np. $0,(101) > 0,1 = \frac{1}{10}$

5.15. a) < **b)** < **c)** = **d)** >

5.16. a) 2, 6 **b)** 4, 5 **c)** 9, 0

5.17. a) $\frac{5}{14}$ **b)** $\frac{51}{22}$ **c)** $-1\frac{7}{34}$
d) 0,235

5.18. a) 2,67; 2,7 **b)** $\frac{15}{34}, \frac{14+\sqrt{2}}{34}$
c) $\frac{7}{9}, \frac{8}{9}$ **d)** $\frac{5}{33}, \frac{1}{6}$

5.19. 617

5.20. a) np. 0,(101100111)

b) np. 0,1011011101111... – w każdej kolejnej grupie jedynek jest o jedna jedynka więcej niż w poprzedniej

5.21. Wszystkie liczby są niewymierne.

5.22. $0,151515\dots$, $\sqrt{4}$, $-\sqrt[3]{64}$,
 $0,0(3)$, $1\frac{5}{12}$, $-0,0023131313\dots$

5.23. $\sqrt{3}$, $\sqrt{39}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{7}$, $5\sqrt{18}$,
 $(7\sqrt{7} - 7)$

5.24. $-\sqrt{10}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{15}$

5.25. $(\sqrt{8} + 2)$, $\sqrt{17}$, $\frac{\sqrt{20}}{3}$,
 $(1 - \sqrt{5})$, $-\sqrt{121}$

5.26. a) $<$ b) $=$ c) $>$

5.27. a) np. $\sqrt{2}$
b) np. $0,401001000100001\dots$
c) np. $-2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) np. $\sqrt{5}$

5.28. a) np. $0,2$ b) np. $-1,5$
c) np. $2,5$ d) np. 3

5.29. a) $\frac{\sqrt{26}}{2}$, $\frac{\sqrt{27}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{45}}{2}$, $\frac{\sqrt{46}}{2}$
c) $-\frac{\sqrt{55}}{2}$, $-\frac{\sqrt{53}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{33}}{2}$, $\frac{\sqrt{35}}{2}$

5.30. 709,22 CAD, 315,79 PLN,
22,61 PLN

5.31. C



5.22. Które z podanych liczb są wymierne?

$0,151515\dots$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $-\sqrt[3]{64}$, $2,0202202220\dots$,
 $0,0(3)$, $1\frac{5}{12}$, $-0,002313131313\dots$, $13,25262728292102112\dots$

5.23. Które z podanych liczb są niewymierne?

$\sqrt{3}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt{39}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{7}$, $(2 + \sqrt{16})$, $5\sqrt{18}$,
 $(3\sqrt{4} - 2\sqrt{36})$, $(7\sqrt{7} - 7)$

5.24. Dane liczby uporządkuj rosnąco: $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{10}$, $\sqrt{15}$.

5.25. Dane liczby uporządkuj malejąco.

$(1 - \sqrt{5})$, $\sqrt{17}$, $(\sqrt{8} + 2)$, $-\sqrt{121}$, $\frac{\sqrt{20}}{3}$

5.26. Który znak: $<$, $=$ czy $>$ należy wstawić w miejsce $?$?

a) $\frac{3\sqrt{5}-1}{4}$ $?$ $\frac{5\sqrt{3}-1}{4}$ b) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{5}}$ $?$ $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}-1}$ c) $\frac{2\sqrt{2}+3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ $?$ $\frac{2\sqrt{2}+3}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

5.27. Podaj przykład liczby niewymiernej leżącej na osi liczbowej pomiędzy danymi liczbami.

a) 1 i 2 b) $\frac{2}{5}$ i $\frac{1}{2}$ c) -2 i -1 d) $2\frac{1}{5}$ i $2\frac{1}{3}$

5.28. Podaj przykład liczby wymiernej leżącej na osi liczbowej pomiędzy danymi liczbami.

a) 0 i $0,3$ b) $-\sqrt{3}$ i $-\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5}$ i 3 d) $\sqrt{8}$ i $\sqrt{10}$

5.29. Podaj przykład dwóch liczb niewymiernych leżących na osi liczbowej pomiędzy danymi liczbami.

a) $\sqrt{6}$ i $\sqrt{7}$ b) $\sqrt{11}$ i $\sqrt{12}$ c) $-\sqrt{14}$ i $-\sqrt{13}$ d) $\sqrt{8}$ i π



5.30. Przed wyjazdem na konferencję pani Anna wymieniła 2000 zł na dolary kanadyjskie po kursie 1 CAD = 2,82 PLN. Ile dolarów otrzymała? Gdy wróciła z wyjazdu, miała 120 dolarów kanadyjskich. Sprzedała je po kursie 1 PLN = 0,38 CAD. Ile złotych otrzymała? Ile pieniędzy straciła na wymianie 120 dolarów?



5.31. W automacie można kupić sok „Malinka” w różnych opakowaniach i cenach:

A. 0,20 l za 1,10 zł, C. 0,33 l za 1,70 zł,

B. 0,25 l za 1,30 zł, D. 0,50 l za 2,60 zł.

Którą ofertę należy wybrać, aby za 1 zł wypić najwięcej „Malinki”?

5.32. Dla każdej z liczb podaj jej przybliżenia dziesiętne do pierwszego, do drugiego i do trzeciego miejsca po przecinku.

$$\frac{7}{16}, \quad \frac{3}{19}, \quad 1\frac{9}{13}, \quad 2\sqrt{3}, \quad \sqrt{17}, \quad -\frac{17}{2}, \quad -3\frac{2}{21}$$

* **5.33.** Pięciu ekspertów zmierzyło szerokość spornej miedzy. Każdy z nich odczytał wynik z przyjętą przez siebie dokładnością:

50 cm, 47 cm, 47,6 cm, 47,64 cm, 47,638 cm

Tylko jeden z ekspertów podał zły wynik. Który wynik był błędny?

5.34. Długości boków prostokątnej działki zmierzono w metrach i centymetrach. Następnie zaokrąglono wyniki do pełnych metrów i otrzymano wymiary $6 \text{ m} \times 20 \text{ m}$. Jakie co najwyżej jest pole tej działki? Podaj wynik z dokładnością do 1 m^2 .

Prosto do matury



1. W rozwinięciu dziesiętnym dodatniej i mniejszej od 1 liczby p nie występują cyfry inne niż 0 i 1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Liczba p nie może być wymierna.
- B. Liczba p może być niewymierna.
- C. Liczba p jest mniejsza od $\frac{1}{6}$.

2. Oblicz.

a) $0,(3) + \frac{2}{7} - 0,(2)$

b) $2 \cdot 3,(1) - 1,(5) - 4,(6)$

3. Sylwia kupiła pasek za 2,19 euro, ale następnego dnia wymieniła go na inny, za 2,89 euro. Dała sprzedawcy jedno euro. Ile reszty powinna otrzymać?

4. Stawka za godzinę pracy wynosi 14,70 zł i jest naliczana za każdą przepracowaną minutę. Ile zarobił robotnik, jeśli pracował od 7^{40} do 16^{10} ?

5. Podaj przykład liczby, która leży na osi liczbowej pomiędzy $\frac{1}{20}$ a $\frac{1}{19}$ i ma rozwinięcie dziesiętne

- a) skończone.
- b) nieskończone okresowe.
- c) nieskończone nieokresowe.

5.32. np. dla $\frac{7}{16}$: 0,4; 0,44; 0,438;
dla $\sqrt{17}$: 4,1; 4,12; 4,123

5.33. 47 cm

5.34. 133 m^2

Prosto do matury

1. F, P, P

2. a) $\frac{25}{63}$ b) 0

3. 0,30 euro

4. 124,95 zł

5. a) np. 0,051
b) np. 0,05(1)
c) np. 0,05101101110...

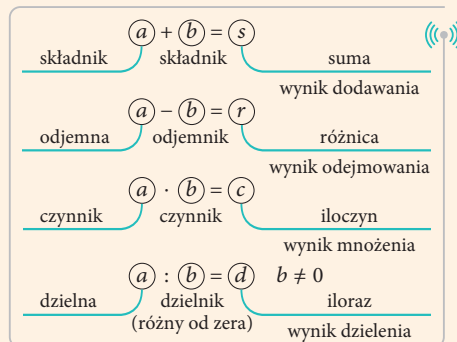
Uwagi metodyczne

Przypominamy własności i kolejność wykonywania działań na liczbach rzeczywistych.

6. Warto powtórzyć – działania w zbiorze liczb rzeczywistych

Dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie liczb to cztery podstawowe działania określone w zbiorze liczb rzeczywistych. Jedynym ograniczeniem jest niewykonalność dzielenia przez zero.

W tabeli przypominamy podstawowe własności dodawania i mnożenia.



Własności dodawania	
jest łączne	$(a + b) + c = a + (b + c)$
jest przemienne	$a + b = b + a$
ma element neutralny: 0	$a + 0 = 0 + a = a$
dla każdej liczby a istnieje liczba przeciwna: $-a$	$a + (-a) = 0$
Własności mnożenia	
jest łączne	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
jest przemienne	$a \cdot b = b \cdot a$
ma element neutralny: 1	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
dla każdej liczby $a \neq 0$ istnieje liczba odwrotna: $\frac{1}{a}$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$
Własność wiążąca dodawanie z mnożeniem	
rozdzielność mnożenia względem dodawania	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Kolejność wykonywania działań

- Najpierw wykonujemy **działania w nawiasach**, w których nie ma już żadnego innego nawiasu.
- Jeżeli mamy kilka działań (bez nawiasów), to najpierw obliczamy **potęgi i pierwiastki**, potem wykonujemy **mnożenia i dzielenia** – w tej kolejności, w której występują, a następnie **dodawania i odejmowania** również w takiej kolejności, w jakiej występują.

Przykład 1 ◀ zad. 6.3

Wykonamy działania.

$$\begin{aligned}
 & 21 \cdot \{3 \cdot (18 - 15) + 7 \cdot (33 - 34)\} : 2 : 3 - 7 + 5 \cdot 3 : (2 + 15 : 5) = \\
 & = 21 \cdot \{3 \cdot 3 + 7 \cdot (-1)\} : 2 : 3 - 7 + 15 : 5 = 21 \cdot (9 - 7) : 2 : 3 - 7 + 3 = \\
 & = 21 \cdot 2 : 2 : 3 - 7 + 3 = 21 : 3 - 7 + 3 = 7 - 7 + 3 = 3
 \end{aligned}$$

Z własności działań na liczbach rzeczywistych wynikają następujące wnioski:

- Różnicę dwóch liczb możemy zastąpić sumą odjemnej i liczby przeciwnej do odjemnika:

$$a - b = a + (-b)$$

- Iloraz dwóch liczb możemy zastąpić iloczynem dzielnej i liczby odwrotnej do dzielnika (krócej: odwrotności dzielnika):

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}, \quad b \neq 0$$

- Jeżeli iloczyn kilku czynników jest równy 0, to przynajmniej jeden z czynników musi być równy 0, w szczególności:

$$\text{jeśli } a \cdot b = 0, \text{ to } a = 0 \text{ lub } b = 0$$

Ostatnia własność jest kluczem do rozwiązywania wielu równań. Jeżeli wiemy, że

$$(x - 2)(x - 5)(x + 7) = 0,$$

to znaczy, że $x - 2 = 0$ lub $x - 5 = 0$, lub $x + 7 = 0$.

Rozwiązaniami tego równania są liczby 2, 5, -7.

Przykład 2 ◀ zad. 6.4

Wykonamy działania.

$$\text{a) } \frac{1}{3} + 0,3 = \frac{1}{3} + \frac{3}{10} = \frac{10}{30} + \frac{9}{30} = \frac{19}{30}$$

$$\text{b) } \frac{4}{5} \cdot 1\frac{2}{3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

$$\text{c) } \frac{5}{7} : 1\frac{4}{21} = \frac{5}{7} : \frac{25}{21} = \frac{5}{7} \cdot \frac{21}{25} = \frac{3}{5}$$

Potęga o wykładniku naturalnym**Definicja**

Jeżeli wykładnik potęgi n jest dodatnią liczbą naturalną i podstawa potęgi a jest dowolną liczbą rzeczywistą, to:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

◀ 6.3. Oblicz.

$$\text{a) } \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) : 1\frac{5}{6} + \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \left[\left(5\frac{1}{2} - 3\frac{1}{4}\right) : 2\frac{1}{4} + 7\frac{5}{8}\right] : 2\frac{7}{8}$$

$$\text{c) } \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + \left(2\frac{1}{2} - 1\frac{7}{8}\right) : \frac{1}{8} - 2\frac{1}{4}$$

$$\text{d) } \left(1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3}\right) : \frac{5}{6} - \left(3\frac{1}{3} - 1\frac{1}{4}\right) : 2\frac{1}{12}$$

Odp.: a) 1 b) 3 c) 2 d) 4

◀ 6.4. Oblicz.

$$\text{a) } \frac{8 : \left(-1\frac{3}{5}\right) - \left(4\frac{1}{2} \cdot 1\frac{2}{3} - 3\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2}}$$

$$\text{b) } \frac{\frac{1}{2} - \frac{2}{5} : \left(1\frac{2}{3} - 2\frac{1}{5}\right)}{\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2} - \frac{3}{4}}$$

$$\text{c) } \frac{\left(\frac{2}{3} \cdot 2,7 - \frac{7}{15} : \frac{1}{3}\right) : \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right)}{\frac{8}{15} + 0,3}$$

$$\text{d) } \frac{\left(\frac{1}{5} + 1,3\right) : \frac{3}{2} - \left(18\frac{3}{4} - 4,95\right) : 2\frac{3}{10}}{1\frac{1}{5} : 0,6 - 2\frac{2}{5} \cdot 1,25}$$

Odp.: a) -7 b) 5 c) 7 d) 5

Uwagi metodyczne

Przypominamy definicję potęgi o wykładniku naturalnym oraz własności działań na potęgach.

Dla dowolnej liczby rzeczywistej a prawdziwa jest równość:

$$a^1 = a$$

Ponadto $1^n = 1$.

Własności działań na potęgach		
Działanie	Wzór	Założenia
iloczyn potęg o tej samej podstawie	$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$	n, k – dodatnie liczby naturalne
iloraz potęg o tej samej podstawie	$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$	$a \neq 0, n, k$ – dodatnie liczby naturalne, $n > k$
potęga potęgi	$(a^n)^k = a^{n \cdot k}$	n, k – dodatnie liczby naturalne
potęga iloczynu	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	n – dodatnia liczba naturalna
potęga ilorazu	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$b \neq 0, n$ – dodatnia liczba naturalna

Przykład 3

Wykonamy działania i zapiszemy wynik w prostszej postaci.

$$\text{a) } \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$$

$$\text{b) } \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^7 = -\frac{1}{128}$$

$$\text{c) } \left(\frac{3}{4}\right)^6 : \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\text{d) } \left[2^3 \cdot (2^3)^2\right] : \left[(2^4)^3 : (2^3)^2\right] = \left[2^3 \cdot 2^6\right] : \left[2^{12} : 2^6\right] = 2^9 : 2^6 = 2^3 = 8$$

$$\text{e) } \left[(a^5 \cdot a^2)^4 : (a^2)^3\right] \cdot \left[(a^7)^2 : (a^5)^2\right] = \left[a^{28} : a^6\right] \cdot \left[a^{14} : a^{10}\right] = a^{22} \cdot a^4 = a^{26}, a \neq 0$$

$$\text{f) } \left(-\frac{4a^5b^5}{3a^2}\right)^2 = \frac{4^2(a^5)^2(b^5)^2}{3^2(a^2)^2} = \frac{16a^{10}b^{10}}{9a^4} = \frac{16}{9} \cdot \frac{a^{10}}{a^4} \cdot b^{10} = \frac{16}{9}a^6b^{10}, a \neq 0$$

Przykład 4 ◀ zad. 6.9

Wykonamy działania i zapiszemy wynik w prostszej postaci.

$$\text{a) } \frac{(3^5 + 3^3) \cdot 2^3}{(3^3 + 7 \cdot 3^2) \cdot 2^2} = \frac{(3^3 \cdot 3^2 + 3^3) \cdot 2}{3^2 \cdot 3 + 7 \cdot 3^2} = \frac{3^3 \cdot (3^2 + 1) \cdot 2}{3^2 \cdot (3 + 7)} = \frac{3(9 + 1) \cdot 2}{10} = \frac{6 \cdot 10}{10} = 6$$

6.9. Oblicz.

$$\text{a) } \frac{5^{27}}{5^{27} - 5^{26}}$$

$$\text{b) } \frac{2^{13} + 2^{15}}{2^{11} - 2^{10}}$$

$$\text{c) } \frac{3^{117} \cdot 2^{115}}{3^{116} \cdot 2^{117} + 6^{115}}$$

$$\text{d) } \frac{32^7 \cdot (27^6 + 81^5)}{64^6 \cdot (9^9 + 243^4)}$$

Odp.: a) $\frac{5}{4}$ b) 40 c) $\frac{9}{13}$ d) $\frac{1}{2}$

$$b) \frac{180 \cdot 6^3 - 29 \cdot 6^4}{72 + 6^3} =$$

I sposób

$$= \frac{180 \cdot 6^3 - 29 \cdot 6^3 \cdot 6}{2 \cdot 36 + 6^3} = \frac{6^3 \cdot (180 - 29 \cdot 6)}{2 \cdot 6^2 + 6^2 \cdot 6} = \frac{6^3 \cdot (6 \cdot 30 - 29 \cdot 6)}{6^2 \cdot (2 + 6)} =$$

$$= \frac{6 \cdot 6(30 - 29)}{8} = \frac{36 \cdot 1}{8} = \frac{36}{8} = 4\frac{4}{8} = 4\frac{1}{2}$$

II sposób

$$= \frac{6 \cdot 30 \cdot 6^3 - 29 \cdot 6^4}{6^2 \cdot 2 + 6^3} = \frac{30 \cdot 6^4 - 29 \cdot 6^4}{6^2 \cdot (2 + 6)} = \frac{6^4 \cdot (30 - 29)}{6^2 \cdot 8} =$$

$$= \frac{6^4}{6^2} \cdot \frac{1}{8} = 6^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Warto pamiętać 
kolejne potęgi
liczb 2, 3, 5:

$2^1 = 2$	$3^1 = 3$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$
$2^6 = 64$	
$2^7 = 128$	$5^1 = 5$
$2^8 = 256$	$5^2 = 25$
$2^9 = 512$	$5^3 = 125$
$2^{10} = 1024$	$5^4 = 625$

Notacja wykładnicza

W naukach przyrodniczych: fizyce, astronomii, chemii itd., często operujemy wielkościami bardzo małymi albo bardzo dużymi. W takiej sytuacji wygodnie jest użyć tzw. **notacji wykładniczej**, tzn. zapisać liczbę w postaci $k \cdot 10^n$, gdzie n jest liczbą całkowitą i $1 \leq k < 10$ (dla k dodatnich) lub $-10 < k \leq -1$ (dla k ujemnych). Najpierw rozszerzamy definicję potęg.

Definicja

- Jeżeli $a \neq 0$ i n jest dodatnią liczbą naturalną, to:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- Jeżeli $a \neq 0$, to $a^0 = 1$.

Przykład 5

$$a) 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$b) 10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100000} = 0,00001$$

$$c) 0,000000000000001 = \frac{1}{1000000000000000} = \frac{1}{10^{14}} = 10^{-14}$$

$$d) 0,00000001 = 10^{-8}$$

$$e) 10^0 = 1$$

Uwaga – działania na potęgach o wykładnikach ujemnych podlegają tym samym prawom co działania na potęgach o wykładnikach naturalnych.

Uwagi metodyczne

Przypominamy znaną ze szkoły podstawowej notację wykładniczą. Proponujemy poświęcić jej nieco więcej czasu, bo będzie przydatna na lekcjach fizyki i chemii.

◀6.12. Oblicz. Wynik podaj w notacji wykładniczej.

- a) $2 \cdot 10^{15} \cdot 7 \cdot 10^9$
 b) $1,44 \cdot 10^{12} : (1,2 \cdot 10^5)$
 c) $3 \cdot 10^{10} + 3,5 \cdot 10^9$
 d) $5,2 \cdot 10^{-20} \cdot 3 \cdot 10^{21}$
 e) $2,2 \cdot 10^{-5} + 6 \cdot 10^{-4} - 8 \cdot 10^{-3}$
 f) $1,7 \cdot 10^{-11} + 5 \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^{-5}$

Odp.: a) $1,4 \cdot 10^{25}$ b) $1,2 \cdot 10^7$
 c) $3,35 \cdot 10^{10}$ d) $1,56 \cdot 10^2$
 e) $-7,378 \cdot 10^{-3}$ f) $3,2 \cdot 10^{-11}$

◀6.15. Odległość od Ziemi do Słońca wynosi około 150 mln km. Oblicz, ile minut zajęłoby pokonanie takiej drogi ślimakowi poruszającemu się z prędkością 5 cm/min. Wynik zapisz w notacji wykładniczej. Oszacuj, ile to lat. Przyjmij, że 1 rok to około pół miliona minut.

Odp.: $3 \cdot 10^{12}$ min, $6 \cdot 10^6$ lat

Odpowiedzi i rozwiązania

6.1. a) 62,07 b) 4501,33
 c) 3223,42 d) 14

6.2. a) 3,76 b) -130,67
 c) 69,21 d) 37

Przykład 6 ◀ zad. 6.12

Wykonamy działania i zapiszemy wynik w notacji wykładniczej.

$$\begin{aligned} & 3,6 \cdot 10^{-22} : (9 \cdot 10^{-7}) + 8,3 \cdot 10^{-16} = \\ & = 0,4 \cdot 10^{-22} : 10^{-7} + 8,3 \cdot 10^{-16} = \\ & = 0,4 \cdot 10^{-15} + 8,3 \cdot 10^{-16} = \\ & = 4 \cdot 10^{-16} + 8,3 \cdot 10^{-16} = 12,3 \cdot 10^{-16} = \\ & = 1,23 \cdot 10^{-15} \end{aligned}$$

← to nie jest zapis w notacji wykładniczej, ponieważ $12,3 > 10$

W notacji wykładniczej wykładnik potęgi liczby 10 wyznaczamy szybko w następujący sposób: 

$$3 \overbrace{700\,000}^{\text{przecinek przesunął się o 6 miejsc w lewo}} = 3,7 \cdot 10^6$$

Przecinek przesunął się o 6 miejsc w lewo, czyli wykładnik równa się 6.

$$0,000000297 = 2,97 \cdot 10^{-7}$$

Przecinek przesunął się o 7 miejsc w prawo, czyli wykładnik równa się -7.

Przykład 7 ◀ zad. 6.15

Powierzchnia Słońca wynosi 6,09 bilionów km^2 , czyli $6\,090\,000\,000\,000\,\text{km}^2$. Można tę wielkość zapisać w notacji wykładniczej jako $6,09 \cdot 10^{12}\,\text{km}^2$.

Powierzchnia małej diody może wynosić około $1\,\text{mm}^2$. Obliczymy, ile razy większa jest powierzchnia Słońca od powierzchni takiej diody.

Rozwiązanie

$$\frac{6 \cdot 10^{12}\,\text{km}^2}{1\,\text{mm}^2} = \frac{6 \cdot 10^{12} \cdot (10^6\,\text{mm})^2}{1\,\text{mm}^2} = \frac{6 \cdot 10^{12} \cdot 10^{12}\,\text{mm}^2}{1\,\text{mm}^2} = 6 \cdot 10^{24}$$

Odp.: Powierzchnia Słońca jest około $6 \cdot 10^{24}$ razy większa od powierzchni diody.

Zadania

6.1. Oblicz.

- a) $2,35 + 13,17 + 41,28 + 5,27$
 b) $1128,33 + 2076 + 315,54 + 981,46$
 c) $777,57 + 28,31 + 348,21 + 56,56 + 2012,77$
 d) $0,28 + 13,39 + 0,025 + 0,305$

6.2. Oblicz.

- a) $278,31 + 13,75 - 213,07 + 3,05 - 78,28$
 b) $451,21 - 22,33 - 175,28 + 31 - 415,27$
 c) $81,03 + 21,37 - 45,06 - 17,03 + 28,90$
 d) $23,001 + 41,205 - 28,017 + 0,811$

6.3. Oblicz.

a) $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) : 1\frac{5}{6} + \frac{1}{2}$

b) $\left[\left(5\frac{1}{2} - 3\frac{1}{4}\right) : 2\frac{1}{4} + 7\frac{5}{8}\right] : 2\frac{7}{8}$

c) $\frac{3}{4} - \frac{3}{2} + \left(2\frac{1}{2} - 1\frac{7}{8}\right) : \frac{1}{8} - 2\frac{1}{4}$

d) $\left(1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3}\right) : \frac{5}{6} - \left(3\frac{1}{3} - 1\frac{1}{4}\right) : 2\frac{1}{12}$

6.4. Oblicz.

a) $\frac{8 : \left(-1\frac{3}{5}\right) - \left(4\frac{1}{2} \cdot 1\frac{2}{3} - 3\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2}}$

b) $\frac{\frac{1}{2} - \frac{2}{5} : \left(1\frac{2}{3} - 2\frac{1}{5}\right)}{\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2} - \frac{3}{4}}$

c) $\frac{\left(\frac{2}{3} \cdot 2,7 - \frac{7}{15} : \frac{1}{3}\right) : \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right)}{\frac{8}{15} + 0,3}$

d) $\frac{\left(\frac{1}{5} + 1,3\right) : \frac{3}{2} - \left(18\frac{3}{4} - 4,95\right) : 2\frac{3}{10}}{1\frac{1}{5} : 0,6 - 2\frac{2}{5} \cdot 1,25}$

6.5. Oblicz.

a) $\frac{\left(1\frac{1}{3} + 1\frac{2}{3} \cdot 1,2\right) : 1\frac{2}{3} - \left(1,75 : 1\frac{1}{8} - 2\frac{1}{3} : 5,25\right) \cdot 0,9}{\left(5\frac{5}{6} - 5,5\right) \cdot 0,3}$

b) $\frac{\left(10 - 2\frac{1}{2}\right) : 1,5 - 1,75 \cdot \left(2\frac{2}{7} - 5\frac{6}{7}\right)}{2,25 \cdot \left(2,5 - 2\frac{1}{4}\right)}$

c) $\frac{\left(16,5 - 13\frac{7}{9}\right) \cdot \frac{18}{33} + 2\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{8}{33} - \frac{1}{11}\right) + \frac{2}{11}}{\left(6\frac{3}{4} + 5,5\right) \cdot \frac{1}{7} - \frac{3}{4}}$

d) $\frac{3\frac{1}{3} \cdot \left[5 - \left(2\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right)\right]}{3\frac{2}{3} + \frac{3}{8} : \left(3\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)} \cdot 6\frac{4}{5}$

6.6. Oblicz.

a) $1^3, (-1)^2, 1^2, (-1)^5$

c) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2, \left(-\frac{2}{3}\right)^1, \left(\frac{3}{2}\right)^3$

b) $2^0, 2^2, (-2)^3, 2^5, 2^3, 2^6, (-2)^4$

d) $0,1^2, 0,2^3, 0,4^2, 0,05^1$

6.7. Przedstaw iloczyn w postaci potęgi.

a) $2^3 \cdot 2^2$

e) $(-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4$

b) $2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3$

f) $10 \cdot 10^2 \cdot 10^3$

c) $3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^0$

g) $(-10) \cdot (-10)^3 \cdot (-10)^5$

d) $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6$

h) $0,2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,2^3 \cdot 0,2^4$

6.3. a) 1 b) 3 c) 2 d) 4**6.4.** a) -7 b) 5 c) 7 d) 5**6.5.** a) 10 b) 20 c) 2 d) 30**6.6.** a) 1, 1, 1, -1 b) 1, 4, -8, 32, 8, 64, 16 c) $\frac{4}{25}, -\frac{2}{3}, \frac{27}{8}$ d) 0,01; 0,008; 0,16; 0,05**6.7.** a) 2^5 b) 2^6 c) 3^5
d) $\left(\frac{1}{3}\right)^9$ e) $(-2)^9$ f) 10^6
g) $(-10)^9$ h) $0,2^{10}$

7. Potęga o wykładniku całkowitym

Umiejętności:

- obliczanie potęg o wykładniku całkowitym

Zauważmy, że $2^3 : 2^3 = 1$, a ogólniej, jeśli $a \neq 0$, to $a^n : a^n = 1$. Gdybyśmy zastosowali wzór na iloraz potęg, otrzymalibyśmy równość:

$$1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$$

Dlatego naturalne jest przyjęcie następującej definicji potęgi o wykładniku zerowym.

Definicja

Jeżeli $a \neq 0$, to:

$$a^0 = 1$$

Podobna sytuacja jest przy określaniu potęgi o wykładniku całkowitym ujemnym.

$$2^3 : 2^6 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^3}$$

Gdybyśmy i w tym przypadku zastosowali wzór na iloraz potęg, to otrzymalibyśmy równość $2^3 : 2^6 = 2^{3-6} = 2^{-3}$. Zatem $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$.

Definicja

Jeżeli $a \neq 0$ i $n \in \mathbb{N}$, to:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Jeżeli n jest dodatnią liczbą naturalną, to $0^n = 0$. Założenie, że podstawa potęgi jest różna od zera, potrzebne jest wtedy, gdy wykładnik jest zerem lub ujemną liczbą całkowitą.

Przykład 1 ◀ zad. 7.3

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}, \quad \left(\frac{5}{11}\right)^{-2} = \left(\frac{11}{5}\right)^2 = \frac{121}{25}$$

◀ 7.3. Oblicz.

- a) 2^{-1} , 3^{-1} , $(-5)^{-1}$, 8^{-1} , $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$, $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}$
 b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$, $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$, $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}$, $\left(-2\frac{1}{3}\right)^{-1}$, $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-4}$, $\left(3\frac{2}{5}\right)^0$, $\left(-1\frac{1}{5}\right)^{-2}$
 c) $0,1^2$, $0,4^{-2}$, $0,05^{-1}$, $(-0,2)^{-3}$, $0,25^{-2}$, $(-0,125)^{-1}$, $2,5^{-2}$, $(-3,125)^0$
 d) $\left(1\frac{1}{5}\right)^{-1}$, $\left(2\frac{1}{3}\right)^2$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$, $\left(-\frac{1}{18}\right)^0$, $\left(\frac{5}{7}\right)^{-1}$, $(-3)^{-3}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$, $\left(-3\frac{1}{2}\right)^{-1}$

Odp.: a) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, 7, 5, -3, $-1\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$ b) $2\frac{1}{4}$, $2\frac{10}{27}$, $2\frac{7}{9}$, $\frac{4}{9}$, $-\frac{3}{7}$, $\frac{81}{256}$, 1, $\frac{25}{36}$

c) 0,01; 6,25; 20; -125; 16; -8; 0,16; 1 d) $\frac{5}{6}$, $\frac{49}{9}$, $-\frac{8}{27}$, 1, $\frac{7}{5}$, $-\frac{1}{27}$, 16, $-\frac{2}{7}$

ZZ i MKP

tematy 1.7, 1.8

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.7

Generator
testów i sprawdzianów

Własności działań na potęgach		
Działanie	Wzór	Założenia
iloczyn potęg o tej samej podstawie	$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$	$a \neq 0$, n, k – liczby całkowite
iloraz potęg o tej samej podstawie	$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$	$a \neq 0$, n, k – liczby całkowite
potęga potęgi	$(a^n)^k = a^{n \cdot k}$	$a \neq 0$, n, k – liczby całkowite
potęga iloczynu	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$a \neq 0$, $b \neq 0$, n – liczba całkowita
potęga ilorazu	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$a \neq 0$, $b \neq 0$, n – liczba całkowita

Udowodnimy wzór $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$. Zakładamy, że $a \neq 0$, n, k – liczby całkowite. Z wcześniejszej nauki wiemy, że wzór jest prawdziwy dla wykładników n i k naturalnych i większych od zera. Jeżeli $n = 0$ lub $k = 0$, to na mocy definicji $a^0 = 1$ i wzór jest prawdziwy. Rozpatrzmy teraz dwa przypadki (w pierwszym dla ułatwienia w prawej kolumnie tabeli podajemy odpowiednio dobrane przykłady).

I. Tylko jedna z liczb n i k jest ujemna, np. $n > 0$, $k < 0$.

Oznaczmy $k = -m$. Wówczas $a^n \cdot a^k = a^n \cdot a^{-m} = \frac{a^n}{a^m}$ na mocy definicji.

a) $n > m$. Wówczas istnieje takie $p > 0$, że $n = m + p$.	
$a^n \cdot a^{-m} = \frac{a^n}{a^m} = \frac{a^{m+p}}{a^m} = \frac{a^m \cdot a^p}{a^m} =$ $= a^p = a^{n-m} = a^{n+(-m)}$	$n = 7, m = 3$. Zatem $p = 4$. $a^7 \cdot a^{-3} = \frac{a^7}{a^3} = \frac{a^{3+4}}{a^3} = \frac{a^3 \cdot a^4}{a^3} =$ $= a^4 = a^{7-3} = a^{7+(-3)}$
b) $n = m$	
$a^n \cdot a^{-m} = \frac{a^n}{a^m} = \frac{a^n}{a^n} = 1 = a^0 = a^{n-m} = a^{n+(-m)}$	$a^7 \cdot a^{-7} = \frac{a^7}{a^7} = 1 = a^0 = a^{7-7} = a^{7+(-7)}$
c) $n < m$. Wówczas istnieje takie $p > 0$, że $m = n + p$.	
$a^n \cdot a^{-m} = \frac{a^n}{a^m} = \frac{a^n}{a^{n+p}} = \frac{a^n}{a^n \cdot a^p} = \frac{1}{a^p} =$ $= a^{-p} = a^{n-m} = a^{n+(-m)}$	$n = 2, m = 5$. Zatem $p = 3$. $a^2 \cdot a^{-5} = \frac{a^2}{a^5} = \frac{a^2}{a^{2+3}} = \frac{a^2}{a^2 \cdot a^3} = \frac{1}{a^3} =$ $= a^{-3} = a^{2-5} = a^{2+(-5)}$

II. Obydwie liczby n i k są ujemne. Przyjmujemy oznaczenia $n = -r$ oraz $k = -m$.

$$a^{-r} \cdot a^{-m} = \frac{1}{a^r} \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^r \cdot a^m} = \frac{1}{a^{r+m}} = a^{-(r+m)} = a^{-r-m} = a^{(-r)+(-m)}$$

Zatem rozpatrywany wzór jest prawdziwy.

Podobnie dowodzi się prawdziwości pozostałych wzorów. Przeprowadźcie te dowody samodzielnie jako dodatkowe ćwiczenie.

Przykład 2 ◀ zad. 7.7

Które z wyrażeń jest zapisem większej liczby: $\left(\frac{3}{7}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^4$ czy $\left(2\frac{3}{5}\right)^{11} \cdot \left(\frac{13}{5}\right)^{-9}$?

Rozwiązanie

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^4 = \left(\frac{3}{7}\right)^{-6+4} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9} = 5\frac{4}{9}$$

$$\left(2\frac{3}{5}\right)^{11} \cdot \left(\frac{13}{5}\right)^{-9} = \left(\frac{13}{5}\right)^{11} \cdot \left(\frac{13}{5}\right)^{-9} = \left(\frac{13}{5}\right)^{11-9} = \left(\frac{13}{5}\right)^2 = \frac{169}{25} = 6\frac{19}{25}$$

Odp.: $\left(2\frac{3}{5}\right)^{11} \cdot \left(\frac{13}{5}\right)^{-9} > \left(\frac{3}{7}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^4$

Przykład 3 ◀ zad. 7.6

Zapiszemy podane wyrażenie w postaci potęgi Y^p , gdzie p jest liczbą całkowitą, a Y jest liczbą lub wyrażeniem.

a) $\frac{3^4}{3^8} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$

b) $\frac{(a-1)^3}{(a-1)^5} = (a-1)^{3-5} = (a-1)^{-2}$. Ten przykład wymaga założenia, że $a \neq 1$.

c) $(a+b)^3 \cdot (a+b)^{-3} = (a+b)^{3-3} = (a+b)^0 = 1$, przy założeniu, że $(a+b) \neq 0$

Przykład 4

Zapiszemy wyrażenia w prostszej postaci, podając potrzebne założenia.

a) $(c+d)^{1-n^2} \cdot (c+d)^{n^2} = (c+d)^{1-n^2+n^2} = c+d$, $c+d \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{(2x+5)^7}{(2x+5)^3} = (2x+5)^{7-3} = (2x+5)^4$, $x \neq -\frac{5}{2}$

Przykład 5 ◀ zad. 7.14

Zapiszemy wyrażenie $\left(\frac{x^{-2}}{1+x^{-2}}\right) \cdot \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^{-1}$ w prostszej postaci, a następnie obliczymy jego wartość dla $x = -3$.

◀ 7.7. Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej.

a) 2^3 , 3^{-3} , 15^0 , $(-2)^5$, 3^2
b) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$, $\left(\frac{1}{15}\right)^{-1}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $(-5)^3$, $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}$

Odp.: a) $(-2)^5$, 3^{-3} , 15^0 , 2^3 , 3^2

b) $(-5)^3$, $\left(\frac{1}{3}\right)^3$, $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $\left(\frac{1}{15}\right)^{-1}$

◀ 7.6. Zapisz iloraz w postaci potęgi.

a) $\frac{3^6}{3^4}$

b) $\frac{53^3}{53^4}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 : \left(\frac{1}{2}\right)^5$

d) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$

Odp.: a) 3^2 b) 53^{-1} c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

d) $\left(\frac{3}{2}\right)^2$

◀ 7.14. Oblicz wartość wyrażenia dla $a = -2$.

a) $a^0 \cdot a^{-1} \cdot a^2 \cdot a^{-3} \cdot a^4$

b) $(a \cdot a^{-3} \cdot a^5 \cdot a^{-7})^{-1}$

c) $\frac{(a^2)^3 \cdot (a^3)^4}{(a^3)^5}$

d) $\frac{(a^{-3})^2 \cdot (a^2)^{-1}}{(a^{-4})^2 \cdot a^{-1}}$

Odp.: a) 4 b) 16 c) -8 d) -2

Rozwiązanie

Zakładamy, że $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^{-2}}{1+x^{-2}}\right) \cdot \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^{-1} &= \left(\frac{x^{-2}}{1+x^{-2}}\right) \cdot \left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \frac{x^{-2} \cdot (x^2+1)}{(1+x^{-2}) \cdot x} = \\ &= \frac{1+x^{-2}}{(1+x^{-2}) \cdot x} = \frac{1}{x} \quad \leftarrow \text{zauważmy, że } x^{-2} \cdot (x^2+1) = x^{-2+2} + x^{-2} = x^0 + x^{-2} \end{aligned}$$

Wartość wyrażenia dla $x = -3$ jest zatem równa $-\frac{1}{3}$.Odp.: $\frac{1}{x}, -\frac{1}{3}, x \neq 0$

Zadania

W każdym z zadań 7.1 i 7.2 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

7.1. C

7.2. C

7.3. a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{8}, 7, 5, -3,$
 $-1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}$ b) $2\frac{1}{4}, 2\frac{10}{27}, 2\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{3}{7}, \frac{81}{256}, 1, \frac{25}{36}$ c) 0,01; 6,25; 20; -125; 16; -8;
0,16; 1d) $\frac{5}{6}, \frac{49}{9}, -\frac{8}{27}, 1, \frac{7}{5}, -\frac{1}{27}, 16, -\frac{2}{7}$ 7.4. a) 10,240; 4,096; 0,026; 7,840;  0,343; 92,352b) 2,310; 0,001; 9,860; 27,040;
49,140; 0,013

7.5. 15

7.6. a) 3^2 b) 53^{-1} c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ d) $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ 7.1. Wskaż liczbę równą liczbie $\left[\left(\frac{5}{3}\right)^{-1}\right]^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$.A. $\frac{5}{3}$

B. 1

C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{9}{25}$

7.2. Wskaż największą liczbę.

A. $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}$ B. $\left(2\frac{1}{2}\right)^{-3}$ C. $\left(-3\frac{1}{5}\right)^0$ D. $\left(-1\frac{1}{7}\right)^{-2}$

7.3. Oblicz.

a) $2^{-1}, 3^{-1}, (-5)^{-1}, 8^{-1}, \left(\frac{1}{7}\right)^{-1}, \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}, \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}, \left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}, \left(\frac{2}{7}\right)^{-1}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}, \left(\frac{3}{4}\right)^{-3}, \left(\frac{3}{5}\right)^{-2}, \left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}, \left(-2\frac{1}{3}\right)^{-1}, \left(-1\frac{1}{3}\right)^{-4}, \left(3\frac{2}{5}\right)^0, \left(-1\frac{1}{5}\right)^{-2}$ c) $0,1^2, 0,4^{-2}, 0,05^{-1}, (-0,2)^{-3}, 0,25^{-2}, (-0,125)^{-1}, 2,5^{-2}, (-3,125)^0$ d) $\left(1\frac{1}{5}\right)^{-1}, \left(2\frac{1}{3}\right)^2, \left(-\frac{2}{3}\right)^3, \left(-\frac{1}{18}\right)^0, \left(\frac{5}{7}\right)^{-1}, (-3)^{-3}, \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}, \left(-3\frac{1}{2}\right)^{-1}$

7.4. Oblicz potęgi; wyniki podaj z dokładnością do trzeciego miejsca po przecinku.

a) $3,2^2, 1,6^3, 0,4^4, 2,8^2, 0,7^3, 3,1^4$ b) $1,52^2, 0,08^3, 3,14^2, (-5,2)^2, (-7,01)^2, (-0,112)^2$ 7.5. Jeżeli $\frac{m \cdot m \cdot m}{m + m + m} = 5$, to ile jest równe m^2 ?

7.6. Zapisz iloraz w postaci potęgi.

a) $\frac{3^6}{3^4}$ b) $\frac{53^3}{53^4}$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 : \left(\frac{1}{2}\right)^5$ d) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$

7.7. Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej.

a) $2^3, 3^{-3}, 15^0, (-2)^5, 3^2$
 b) $\left(\frac{1}{3}\right)^3, \left(\frac{1}{15}\right)^{-1}, \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}, (-5)^3, \left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}$

7.8. Oblicz.

a) $\frac{3^{21}}{9^{10}}, \frac{5^{19}}{25^{10}}, \frac{2^5 \cdot 3^4}{6^4}, \frac{2^{17} - 2^{16}}{2^{15}}$ b) $\frac{3^{20}}{3^{22} - 3^{21}}, \frac{6^{13}}{3^{14}} \cdot \frac{5^{10}}{10^{12}}, \frac{2^{19} \cdot 15^3 \cdot 3^{15}}{6^{18} \cdot 5^2}$

7.9. Oblicz.

a) $4^{-3} \cdot 0,125^{-3}$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$ e) $5^{-7} \cdot 4^{-7} \cdot 0,05^{-7}$
 b) $2,5^{-2} \cdot 0,2^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ d) $2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^{-3}$ f) $2^0 \cdot 5^0 : \left(\frac{1}{13}\right)^0$

7.10. Oblicz.

a) $5^{-2} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{-2}$ c) $\left(3\frac{1}{7}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{7}{11}\right)^{-4}$ e) $4^{-2} \cdot 4^2$ g) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^4$
 b) $8^{-3} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{-3}$ d) $\left(6\frac{2}{3}\right)^{-1} \cdot (-0,2)^{-1}$ f) $3^5 \cdot 3^{-8}$ h) $\left(2\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(2\frac{1}{3}\right)^{-3}$

7.11. Oblicz.

a) $(2^{-3})^{-4} : 2^6$ c) $(3^{-5})^0 : (3^2)^{-1}$ e) $(-0,1)^{-5} : 0,1^{-4}$ g) $(-0,25)^5 : \left(\frac{1}{4}\right)^3$
 b) $(5^{-2})^3 : (5^{-3})^2$ d) $\left(1\frac{1}{5}\right)^{-2} : 0,3^{-2}$ f) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-6} : (-0,2)^{-4}$ h) $\left(1\frac{2}{5}\right)^{-2} : 1,4^{-3}$

7.12. Oblicz.

a) $\frac{2^0 + 2^{-2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - 5 \cdot (-2)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} + \frac{3}{4}$
 b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \cdot 8^{-2} + (-64^{-1})^{-2} \cdot 2^{-13} - 0,2^{-3} \cdot 125^{-1}$
 c) $3 \cdot \left[5 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^2 \cdot \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} + 3 \cdot 2^{-3}\right]^{-2}$
 d) $\frac{\left[\left(\frac{1}{4^{-1}} + \frac{3}{9^{-1}}\right) - \left(\frac{1}{5^{-2}} - \frac{2}{3^{-2}}\right)\right] \cdot (5^0 - 5^{-2})^{-1}}{(2 \cdot 5^{-1} - 5^{-2})^{-1}}$

7.13. Rozwiąż równanie.

a) $2^{16}x + 8^5 \cdot 5 = 2^5 \cdot (4^5x + 8^5)$ b) $27^5x - 12 \cdot 9^6 = 81^3 \cdot (3x - 4)$

7.7. a) $(-2)^5, 3^{-3}, 15^0, 2^3, 3^2$

b) $(-5)^3, \left(\frac{1}{3}\right)^3, \left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}, \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}, \left(\frac{1}{15}\right)^{-1}$

7.8. a) $3, \frac{1}{5}, 2, 2$ **b)** $\frac{1}{6}, \frac{2}{75}, 10$

7.9. a) 8 **b)** 9 **c)** 16 **d)** 8
e) 1 **f)** 1

7.10. a) 25 **b)** 8 **c)** $\frac{1}{16}$ **d)** $-\frac{3}{4}$
e) 1 **f)** $\frac{1}{27}$ **g)** $1\frac{24}{25}$ **h)** $5\frac{4}{9}$

7.11. a) 64 **b)** 1 **c)** 9 **d)** $\frac{1}{16}$
e) -10 **f)** 25 **g)** $-\frac{1}{16}$ **h)** $1\frac{2}{5}$

7.12. a) 1 **b)** 0 **c)** 3 **d)** 9

7.13. a) 27 **b)** $\frac{1}{3}$

7.14. a) 4 b) 16 c) -8 d) -2

$$7.15. \frac{5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} - 4^{-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{4}{5}\right)^{-1}} = \frac{5 \cdot \frac{5}{2} - \frac{1}{4}}{2^2 + \frac{5}{4}} =$$

$$= \frac{\frac{50}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{16}{4} + \frac{5}{4}} = \frac{\frac{49}{4}}{\frac{21}{4}} = \frac{49}{21} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$

$$7.16. 15^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-11} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-12} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-13} \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^{-14} + 7 \cdot \left(2\frac{1}{3}\right)^{-11} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{-10} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-5} =$$

$$= \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^{-11} \cdot 4^{-12} \cdot 3^{-13} \cdot 5^{-14}}{3^{-11} \cdot 5^{-12} \cdot 4^{-13} \cdot 2^{-14}} + \frac{7 \cdot 7^{-11}}{3^{-11} \cdot 7^{-10} \cdot 3^{10}} = 2^3 \cdot 4 + 3 = 35$$

7.17. $\frac{13}{18}$. Wskazówka:

$$\frac{5 \cdot 4^{-15} \cdot 9^{-9} - 4 \cdot 3^{-20} \cdot 8^{-9}}{3 \cdot 2^{-9} \cdot 6^{-19} - 2^{-29} \cdot 27^{-6}} =$$

$$= \frac{5 \cdot 2^{-30} \cdot 3^{-18} - 4 \cdot 3^{-20} \cdot 2^{-27}}{3 \cdot 2^{-9} \cdot 2^{-19} \cdot 3^{-19} - 2^{-29} \cdot 3^{-18}} =$$

$$= \frac{2^{-30} \cdot 3^{-20} (5 \cdot 3^2 - 4 \cdot 2^3)}{2^{-30} \cdot 3^{-20} (2^2 \cdot 3^2 - 2^1 \cdot 3^2)} =$$

7.18.

$$(1-2^{-2}) \cdot (1-3^{-2}) \cdot (1-4^{-2}) \cdot \dots \cdot (1-99^{-2}) \cdot (1-100^{-2}) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{99^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{100^2}\right) =$$

$$= \frac{2^2-1}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{3^2} \cdot \frac{4^2-1}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{99^2-1}{99^2} \cdot \frac{100^2-1}{100^2} =$$

$$= \frac{(2-1) \cdot (2+1)}{2^2} \cdot \frac{(3-1) \cdot (3+1)}{3^2} \cdot \frac{(4-1) \cdot (4+1)}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{(99-1) \cdot (99+1)}{99^2} \cdot \frac{(100-1) \cdot (100+1)}{100^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{98 \cdot 100}{99^2} \cdot \frac{99 \cdot 101}{100^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{101}{100} = \frac{101}{200}$$

7.14. Oblicz wartość wyrażenia dla $a = -2$.

$$a) a^0 \cdot a^{-1} \cdot a^2 \cdot a^{-3} \cdot a^4 \quad c) \frac{(a^2)^3 \cdot (a^3)^4}{(a^3)^5}$$

$$b) (a \cdot a^{-3} \cdot a^5 \cdot a^{-7})^{-1} \quad d) \frac{(a^{-3})^2 \cdot (a^2)^{-1}}{(a^{-4})^2 \cdot a^{-1}}$$

$$D \quad 7.15. \text{ Wykaż, że zachodzi równość } \frac{5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} - 4^{-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{4}{5}\right)^{-1}} = 2\frac{1}{3}.$$

D * 7.16. Wykaż, że podana liczba jest naturalna.

$$15^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-11} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-12} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-13} \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^{-14} + 7 \cdot \left(2\frac{1}{3}\right)^{-11} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{-10} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-5}$$

$$* 7.17. \text{ Oblicz } \frac{5 \cdot 4^{-15} \cdot 9^{-9} - 4 \cdot 3^{-20} \cdot 8^{-9}}{3 \cdot 2^{-9} \cdot 6^{-19} - 2^{-29} \cdot 27^{-6}}.$$

$$* 7.18. \text{ Oblicz } (1-2^{-2}) \cdot (1-3^{-2}) \cdot (1-4^{-2}) \cdot \dots \cdot (1-99^{-2}) \cdot (1-100^{-2}).$$

Prosto do matury



1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

$$A. 5^{-2} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{-2} = 25 \quad B. (11^{-2})^{-3} \cdot 11^{-4} > 11^2 \quad C. (3^{-1})^{-3} \cdot 3^{-5} < 1$$

$$2. \text{ Oblicz wartość wyrażenia } \frac{\left(\frac{2}{7}\right)^{-2} - 7 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^{-1}}{\left(\frac{3}{7}\right)^{-1} + 2\frac{1}{3}}.$$

3. Uporządkuj liczby $0,25^{-2}$, $0,4^{-1}$, $(-0,1)^{-4}$, $0,5^{-3}$ w kolejności od najmniejszej do największej.4. Przedstaw wyrażenie $\left(\frac{a^{-2}}{1+a^{-2}} - 1\right) : (a^2+1)^{-1}$ w prostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla $a = -2$.

$$D \quad 5. \text{ Wykaż, że liczba } \left(8 - 6 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^0\right)^{-2} \text{ jest rozwiązaniem równania}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} (3x-1) = 27(3-x) - \left(\frac{1}{9}\right)^{-2}.$$

Prosto do matury

1. P, F, P

2. $1\frac{1}{2}$

3. $0,4^{-1}$, $0,5^{-3}$, $0,25^{-2}$, $(-0,1)^{-4}$

4. $-a^2$, -4 , $a \neq 0$

5. $\left(8 - 6 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^0\right)^{-2} = (8 - 6 \cdot 1)^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

Podstawiamy tę liczbę do obu stron równania.

$$L = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \left(3 \cdot \frac{1}{4} - 1\right) = 3^3 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{-27}{4}$$

$$P = 27 \left(3 - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{9}\right)^{-2} = 27 \cdot 2\frac{3}{4} - 9^2 = 27 \cdot \frac{11}{4} - 81 = \frac{297 - 324}{4} = \frac{-27}{4}$$

 $L = P$, więc ta liczba spełnia podane równanie.

8. Warto powtórzyć – pierwiastki kwadratowe i sześciennie

Definicja

- **Pierwiastkiem kwadratowym** (stopnia drugiego) z nieujemnej liczby a nazywamy taką nieujemną liczbę b , która podniesiona do kwadratu jest równa a :

$$\sqrt{a} = b, \text{ gdy } a \geq 0, b \geq 0 \text{ i } b^2 = a$$

- **Pierwiastkiem sześciennym** (stopnia trzeciego) z liczby a nazywamy taką liczbę b , która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa a :

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ gdy } b^3 = a$$

Liczbę a nazywamy **liczbą podpierwiastkową**.

Zwróćmy uwagę na dwa założenia w definicji pierwiastka kwadratowego, różniące ją od definicji pierwiastka sześciennego:

1. liczba pod pierwiastkiem kwadratowym jest nieujemna (gdyby np. $\sqrt{-2} = b$, to prawdziwa byłaby równość $b^2 = -2$, co nie jest możliwe),
2. wartość pierwiastka kwadratowego jest nieujemna (założenie zrobione po to, aby pierwiastkowanie było jednoznaczne – każdej nieujemnej liczbie przyporządkowany jest dokładnie jeden pierwiastek drugiego stopnia, np. na mocy definicji $\sqrt{4} = 2$, mimo że również $(-2)^2 = 4$).

Jeżeli $\sqrt{a} = x$, to
 $a \geq 0$ i $x \geq 0$.
 $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$

Przykład 1 ◀ zad. 8.1, 8.2

Obliczmy podane pierwiastki.

a) $\sqrt{\frac{64}{121}} = \frac{8}{11}$, bo $\left(\frac{8}{11}\right)^2 = \frac{64}{121}$

c) $\sqrt[3]{1000} = 10$, bo $10^3 = 1000$

b) $\sqrt{20\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$, bo $\left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4} = 20\frac{1}{4}$

d) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$, bo $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$

$\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną. Używając kalkulatora lub komputera, możemy znaleźć jej przybliżone rozwinięcie dziesiętne: $\sqrt{2} = 1,414213562373\dots$

Podobnie $\sqrt[3]{7} = 1,912931182\dots$

Rozwinięcia dziesiętne $\sqrt{2}$ i $\sqrt[3]{7}$ są nieskończone i nieokresowe.

◀ 8.1. Oblicz pierwiastki:

$$\sqrt{121}, \sqrt{324}, \sqrt{0,0016}, \sqrt{3,61},$$

$$\sqrt{5\frac{4}{9}}, \sqrt{1\frac{11}{25}}, \sqrt[3]{\frac{6}{25}}.$$

Odpo.: 11; 18; 0,04; 1,9; $2\frac{1}{3}$; $1\frac{1}{5}$; $1\frac{4}{5}$

◀ 8.2. Oblicz pierwiastki:

$$\sqrt[3]{\frac{27}{64}}, \sqrt[3]{125}, \sqrt[3]{0,008}, \sqrt[3]{-27},$$

$$\sqrt[3]{1728}, \sqrt[3]{-729}, \sqrt[3]{3375}.$$

Odpo.: $\frac{3}{4}$, 5, 0,2, -3, 12, -9, 15

Działania na pierwiastkach kwadratowych i sześciennych

Twierdzenie

$$\bullet \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \text{ dla } a \geq 0 \text{ i } b \geq 0 \quad \bullet \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$$

Iloczyn pierwiastków tego samego stopnia jest równy pierwiastkowi z iloczynu.

Przykład 2 ◀ zad. 8.4, 8.5

Wykonamy podane działania.

$$\text{a) } \sqrt{2} \cdot \sqrt{128} = \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 32} = \sqrt{64 \cdot 4} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{4} = 8 \cdot 2 = 16$$

$$\text{b) } \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 15} = \sqrt{15 \cdot 15} = 15$$

$$\text{c) } \sqrt{2 \cdot 18 \cdot 49} = \sqrt{36 \cdot 49} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{49} = 6 \cdot 7 = 42$$

$$\text{d) } \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4 \cdot 16} = \sqrt[3]{4 \cdot 4^2} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

Twierdzenie

$$\bullet \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ dla } a \geq 0 \text{ i } b > 0 \quad \bullet \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \text{ dla } b \neq 0$$

Iloraz pierwiastków tego samego stopnia jest równy pierwiastkowi z ilorazu.

Przykład 3 ◀ zad. 8.6

Wykonamy podane działania.

$$\text{a) } \sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \frac{4}{7}$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{\frac{216}{512}} = \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{512}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\text{b) } \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{d) } \sqrt[3]{54} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{54 : 2} = \sqrt[3]{27} = 3$$

Przykład 4

Obliczymy pierwiastki, rozkładając liczby podpierwiastkowe na czynniki.

$$\text{a) } \sqrt{441} = \sqrt{9 \cdot 49} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{49} = 3 \cdot 7 = 21$$

← 441 jest podzielne przez 9, bo suma cyfr jest podzielna przez 9

$$\text{b) } \sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{9 \cdot 192} = \sqrt[3]{9 \cdot 3 \cdot 64} = \sqrt[3]{27 \cdot 64} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 3 \cdot 4 = 12$$

← 1728 jest podzielne przez 9

$$\text{c) } \sqrt{5\frac{19}{25}} = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

◀ 8.4. Oblicz iloczyn pierwiastków.

$$\text{a) } \sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{b) } \sqrt{147} \cdot \sqrt{3}$$

$$\text{c) } \sqrt{12} \cdot \sqrt{27}$$

$$\text{d) } \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{64}$$

$$\text{e) } \sqrt{3} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{12}$$

$$\text{f) } \sqrt{2} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{18}$$

$$\text{g) } \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{8}$$

$$\text{h) } \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{20}$$

$$\text{i) } \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{12}$$

$$\text{Odp.: a) 8 b) 21 c) 18 d) 8}$$

$$\text{e) 12 f) 18 g) 6 h) 10 i) 6}$$

◀ 8.5. Oblicz pierwiastki z iloczynów.

$$\text{a) } \sqrt{3 \cdot 4 \cdot 12}, \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 18}, \sqrt{7 \cdot 3 \cdot 21}$$

$$\text{b) } \sqrt{2 \cdot 6 \cdot 3}, \sqrt{2 \cdot 18 \cdot 9}, \sqrt{2 \cdot 8 \cdot 16}$$

$$\text{c) } \sqrt{25 \cdot 18 \cdot 2}, \sqrt{2 \cdot 25 \cdot 8}, \sqrt{3 \cdot 9 \cdot 12}$$

$$\text{d) } \sqrt{6 \cdot 12 \cdot 8}, \sqrt[3]{3 \cdot 9 \cdot 64}, \sqrt[3]{36 \cdot 30 \cdot 25}$$

$$\text{Odp.: a) 12, 18, 21}$$

$$\text{b) 6, 18, 16}$$

$$\text{c) 30, 20, 18}$$

$$\text{d) 24, 12, 30}$$

◀ 8.6. Oblicz iloraz pierwiastków.

$$\text{a) } \sqrt{75} : \sqrt{3}$$

$$\text{d) } \sqrt{\frac{7}{16}} : \sqrt{\frac{28}{9}}$$

$$\text{g) } \sqrt[3]{\frac{2}{9}} : \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$$

$$\text{b) } \sqrt{80} : \sqrt{5}$$

$$\text{e) } \sqrt{\frac{2}{9}} : \sqrt{\frac{8}{25}}$$

$$\text{h) } \sqrt[3]{1\frac{2}{3}} : \sqrt[3]{\frac{5}{81}}$$

$$\text{c) } \sqrt{242} : \sqrt{2}$$

$$\text{f) } \sqrt{6\frac{6}{11}} : \sqrt{5\frac{1}{2}}$$

$$\text{i) } \sqrt[3]{3\frac{1}{7}} : \sqrt[3]{134\frac{3}{4}}$$

$$\text{Odp.: a) 5 b) 4 c) 11 d) } \frac{3}{8} \text{ e) } \frac{5}{6} \text{ f) } 1\frac{1}{11} \text{ g) } \frac{2}{3} \text{ h) 3 i) } \frac{2}{7}$$

Praktycznym zastosowaniem obydwu podanych twierdzeń jest wyłączanie czynnika spod znaku pierwiastka. W tym celu sprawdzamy, czy liczba pod pierwiastkiem jest podzielna przez kwadraty liczb, a w wypadku pierwiastków sześciennych – sześciiany liczb naturalnych.

Przykład 5 ◀ zad. 8.8

Wyłączmy czynnik przed znak pierwiastka.

$$a) \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$3\sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} \quad (\llcorner \llcorner \llcorner)$$

$$b) \sqrt{250} = \sqrt{25 \cdot 10} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{10} = 5\sqrt{10}$$

← $\sqrt{10} = \sqrt{2 \cdot 5}$ jest liczbą niewymierną

$$c) \sqrt{384} = \sqrt{4 \cdot 96} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 24} = \sqrt{4^2 \cdot 4 \cdot 6} = \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{6} = 8\sqrt{6}$$

$$d) \sqrt[3]{96} = \sqrt[3]{8 \cdot 12} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{12} = 2\sqrt[3]{12}$$

$$e) \sqrt{2\frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{20}{9}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 5}}{3} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{5}}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

$$f) \sqrt{2,42} = \sqrt{2 \cdot 1,21} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1,21} = \sqrt{2} \cdot 1,1 = 1,1\sqrt{2}$$

Przykład 6 ◀ zad. 8.9

Wyłączmy wspólny czynnik przed nawias i uprościmy ułamek.

$$a) \frac{\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{3} - 1)}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{3} - 1$$

$$b) \frac{\sqrt[3]{192} + 4}{\sqrt[3]{3} + 1} = \frac{\sqrt[3]{3 \cdot 64} + 4}{\sqrt[3]{3} + 1} = \frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{64} + 4}{\sqrt[3]{3} + 1} = \frac{\sqrt[3]{3} \cdot 4 + 4}{\sqrt[3]{3} + 1} = \frac{4(\sqrt[3]{3} + 1)}{\sqrt[3]{3} + 1} = 4$$

Zadania

8.1. Oblicz pierwiastki: $\sqrt{121}$, $\sqrt{324}$, $\sqrt{0,0016}$, $\sqrt{3,61}$, $\sqrt{5\frac{4}{9}}$, $\sqrt{1\frac{11}{25}}$, $\sqrt{3\frac{6}{25}}$.

8.2. Oblicz pierwiastki: $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$, $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{0,008}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[3]{1728}$, $\sqrt[3]{-729}$, $\sqrt[3]{3375}$.

8.3. Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej.

a) $\sqrt{9}$, $3 - \sqrt{4}$, $2\sqrt{35}$, $\sqrt{100}$, $1 - \sqrt{125}$

b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $1 + \sqrt{3}$, $\sqrt{27}$, $1 - \sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$

c) $3\sqrt{2} - 4$, $5 + \sqrt{3}$, $2\sqrt{3} - 2$, $\sqrt{13}$, $2\sqrt{7}$

8.4. Oblicz iloczyn pierwiastków.

a) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$

d) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{64}$

g) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{8}$

b) $\sqrt{147} \cdot \sqrt{3}$

e) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{12}$

h) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{20}$

c) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{27}$

f) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{18}$

i) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{12}$

◀ 8.8. Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt{48}$, $\sqrt{75}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{45}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{80}$

b) $\sqrt{128}$, $\sqrt{294}$, $\sqrt{486}$, $\sqrt{405}$, $\sqrt{320}$

c) $\sqrt[3]{40}$, $\sqrt[3]{56}$, $\sqrt[3]{81}$, $\sqrt[3]{135}$, $\sqrt[3]{270}$, $\sqrt[3]{448}$

d) $\sqrt[3]{24}$, $\sqrt[3]{-16}$, $\sqrt[3]{1\frac{13}{27}}$, $\sqrt[3]{-1\frac{34}{216}}$

Odp.: a) $4\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$, $4\sqrt{2}$, $3\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$

b) $8\sqrt{2}$, $7\sqrt{6}$, $9\sqrt{6}$, $9\sqrt{5}$, $8\sqrt{5}$

c) $2\sqrt[3]{5}$, $2\sqrt[3]{7}$, $3\sqrt[3]{3}$, $3\sqrt[3]{5}$, $3\sqrt[3]{10}$, $4\sqrt[3]{7}$

d) $2\sqrt[3]{3}$, $-2\sqrt[3]{2}$, $\frac{2}{3}\sqrt[3]{5}$, $-\frac{5}{6}\sqrt[3]{2}$

◀ 8.9. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias i uprość ułamek.

a) $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{27}}{5\sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{45} - 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

c) $\frac{2\sqrt{7} + \sqrt{14}}{\sqrt{7}}$

d) $\frac{3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$

Odp.: a) 1 b) 1 c) $2 + \sqrt{2}$ d) 5

Odpowiedzi i rozwiązania

8.1. 11; 18; 0,04; 1,9; $2\frac{1}{3}$; $1\frac{1}{5}$; $1\frac{4}{5}$

8.2. $\frac{3}{4}$, 5, 0,2, -3, 12, -9, 15

8.3. a) $1 - \sqrt{125}$, $3 - \sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{100}$, $2\sqrt{35}$ b) $1 - \sqrt{3}$, $1 + \sqrt{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{27}$ c) $3\sqrt{2} - 4$, $2\sqrt{3} - 2$, $\sqrt{13}$, $2\sqrt{7}$, $5 + \sqrt{3}$

8.4. a) 8 b) 21 c) 18 d) 8
e) 12 f) 18 g) 6 h) 10 i) 6

8.5. a) 12, 18, 21 b) 6, 18, 16
c) 30, 20, 18 d) 24, 12, 30

8.6. a) 5 b) 4 c) 11 d) $\frac{3}{8}$
e) $\frac{5}{6}$ f) $1\frac{1}{11}$ g) $\frac{2}{3}$ h) 3 i) $\frac{2}{7}$

8.7. a) -2 b) 12 c) 12 d) -8

8.8. a) $4\sqrt{3}, 5\sqrt{3}, 4\sqrt{2}, 3\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}$
b) $8\sqrt{2}, 7\sqrt{6}, 9\sqrt{6}, 9\sqrt{5}, 8\sqrt{5}$
c) $2\sqrt[3]{5}, 2\sqrt[3]{7}, 3\sqrt[3]{3}, 3\sqrt[3]{5}, 3\sqrt[3]{10}, 4\sqrt[3]{7}$
d) $2\sqrt[3]{3}, -2\sqrt[3]{2}, \frac{2}{3}\sqrt[3]{5}, -\frac{5}{6}\sqrt[3]{2}$

8.9. a) 1 b) 1 c) $2 + \sqrt{2}$ d) 5

8.10. a) 6 b) 0 c) 6 d) 4
e) 2 f) 1

8.11. a) 2 b) 16 c) -5 d) 1
e) -22 f) 0

8.5. Oblicz pierwiastki z iloczynów.

a) $\sqrt{3 \cdot 4 \cdot 12}, \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 18}, \sqrt{7 \cdot 3 \cdot 21}$ c) $\sqrt{25 \cdot 18 \cdot 2}, \sqrt{2 \cdot 25 \cdot 8}, \sqrt{3 \cdot 9 \cdot 12}$
b) $\sqrt{2 \cdot 6 \cdot 3}, \sqrt{2 \cdot 18 \cdot 9}, \sqrt{2 \cdot 8 \cdot 16}$ d) $\sqrt{6 \cdot 12 \cdot 8}, \sqrt[3]{3 \cdot 9 \cdot 64}, \sqrt[3]{36 \cdot 30 \cdot 25}$

8.6. Oblicz iloraz pierwiastków.

a) $\sqrt{75} : \sqrt{3}$ d) $\sqrt{\frac{7}{16}} : \sqrt{\frac{28}{9}}$ g) $\sqrt[3]{\frac{2}{9}} : \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$
b) $\sqrt{80} : \sqrt{5}$ e) $\sqrt{\frac{2}{9}} : \sqrt{\frac{8}{25}}$ h) $\sqrt[3]{1\frac{2}{3}} : \sqrt[3]{\frac{5}{81}}$
c) $\sqrt{242} : \sqrt{2}$ f) $\sqrt[3]{6\frac{6}{11}} : \sqrt[3]{5\frac{1}{2}}$ i) $\sqrt[3]{3\frac{1}{7}} : \sqrt[3]{134\frac{3}{4}}$

8.7. Oblicz.

a) $\sqrt{25} - \sqrt{9} - \sqrt{25 - 9}$ c) $\sqrt{324} + \sqrt{576} - \sqrt{324 + 576}$
b) $\sqrt{225 - 144} + \sqrt{225} - \sqrt{144}$ d) $\sqrt{144 + 256} - \sqrt{144} - \sqrt{256}$

8.8. Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt{48}, \sqrt{75}, \sqrt{32}, \sqrt{45}, \sqrt{20}, \sqrt{80}$ c) $\sqrt[3]{40}, \sqrt[3]{56}, \sqrt[3]{81}, \sqrt[3]{135}, \sqrt[3]{270}, \sqrt[3]{448}$
b) $\sqrt{128}, \sqrt{294}, \sqrt{486}, \sqrt{405}, \sqrt{320}$ d) $\sqrt[3]{24}, \sqrt[3]{-16}, \sqrt[3]{1\frac{13}{27}}, \sqrt[3]{-1\frac{34}{216}}$

8.9. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias i uprość ułamek.

a) $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{27}}{5\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{45} - 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{2\sqrt{7} + \sqrt{14}}{\sqrt{7}}$ d) $\frac{3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$

8.10. Oblicz.

a) $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{12})$ d) $(\sqrt{28} - \sqrt{112} + \sqrt{252}) : \sqrt{7}$
b) $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{32} - \sqrt{40,5} + \sqrt{0,5})$ e) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{48} + \sqrt{75}}{\sqrt{3}}$
c) $(\sqrt{125} + \sqrt{80} - \sqrt{45}) : \sqrt{5}$ f) $\frac{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{-128}}{\sqrt[3]{2}}$

8.11. Oblicz.

a) $\sqrt{-2\sqrt[3]{-8}}$ d) $\sqrt{7\frac{1}{9}} - \frac{\sqrt[3]{-0,027}}{0,3} - 2\frac{2}{3}$
b) $\sqrt[3]{2^5 \cdot 2^4 \cdot 2^3}$ e) $\frac{\sqrt{1\frac{7}{9}} - 2\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}}{\sqrt[3]{-0,008}} - 2\sqrt{1}$
c) $\frac{\sqrt[3]{-60} \cdot \sqrt[3]{50}}{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6}}$ f) $\frac{\sqrt{1,21} + 5\sqrt[3]{0,008} - \sqrt{4,41}}{\sqrt{13}}$

9. Pierwiastki wyższych stopni

Umiejętności:

- posługiwanie się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia
- stosowanie praw działań na pierwiastkach
- przedstawianie liczb rzeczywistych w różnych postaciach
- znoszenie niewymierności z mianownika

Podobnie jak pierwiastki kwadratowe i sześciennie, nazywane inaczej pierwiastkami drugiego i trzeciego stopnia, definiujemy pierwiastki wyższych stopni.

Przypomnijmy, że w definicji pierwiastka kwadratowego:

- liczba pod pierwiastkiem jest nieujemna,
- wartość pierwiastka jest nieujemna.

Jeżeli $\sqrt{a} = x$, to $a \geq 0$ i $x \geq 0$.
 $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$

W definicji pierwiastka kwadratowego założenie, że liczba pod pierwiastkiem nie może być ujemna, wynika stąd, że w zbiorze liczb rzeczywistych nie ma przecież liczby, która podniesiona do kwadratu byłaby równa np. -64 .

Inaczej wygląda sprawa, gdy przyjrzymy się podnoszeniu liczb do potęgi trzeciej. Na przykład $(-4)^3 = -64$, zatem $\sqrt[3]{-64} = -4$. Podobnie $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[3]{-1} = -1$ itd.

Takie same zastrzeżenia będą dotyczyły pierwiastków wyższych stopni. Dlatego w definicji odróżnimy pierwiastki stopnia parzystego i stopnia nieparzystego.

Definicja

- **Pierwiastkiem stopnia n** , gdy n jest **parzystą** liczbą naturalną większą od zera, z liczby nieujemnej a nazywamy taką liczbę nieujemną b , która podniesiona do potęgi n jest równa a :

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ i } n \text{ jest dodatnią liczbą naturalną parzystą,} \\ \text{gdy } a \geq 0, b \geq 0 \text{ oraz } b^n = a$$

- **Pierwiastkiem stopnia n** , gdy n jest **nieparzystą** liczbą naturalną większą od 1, z liczby a nazywamy taką liczbę b , która podniesiona do potęgi n jest równa a :

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ i } n \text{ jest liczbą naturalną nieparzystą większą od 1,} \\ \text{gdy } b^n = a$$

ZZ i MKP

tematy 1.5, 1.6, 1.9

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.9

Generator
testów i sprawdzianów

◀ 9.4. Oblicz pierwiastki.

a) $\sqrt[5]{-32}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$, $\sqrt[6]{64}$

b) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$, $\sqrt[4]{625}$, $\sqrt[5]{-\frac{243}{1024}}$

c) $\sqrt[10]{1024}$, $\sqrt[7]{\frac{128}{2187}}$, $\sqrt[6]{0,000064}$

d) $\sqrt[11]{\frac{1}{2048}}$, $\sqrt[5]{0,00243}$, $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$

Odp.: a) -2 , $\frac{1}{3}$, 2 b) $\frac{1}{2}$, 5 , $-\frac{3}{4}$

c) 2 , $\frac{2}{3}$, $0,2$ d) $\frac{1}{2}$, $0,3$, $\frac{2}{5}$

◀ 9.9. Oblicz.

a) $(\sqrt[3]{5})^4$

b) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{49}$

c) $\sqrt[3]{6^3 \cdot 6^2 \cdot 6}$

d) $\sqrt{11} \cdot \sqrt{33} \cdot (\sqrt{3})^3$

Odp.: a) $5\sqrt[3]{5}$ b) 7 c) 36 d) 99

Przykład 1 ◀ zad. 9.4

a) $(\sqrt[5]{0})^5 = 0$, $(\sqrt[6]{5})^6 = 5$, $(\sqrt[16]{3})^{16} = 3$,

$(\sqrt[4]{16})^4 = 16$, $(\sqrt[7]{4})^7 = 4$, $(\sqrt[23]{\pi})^{23} = \pi$,

$(\sqrt[11]{-1})^{11} = -1$, $(\sqrt[9]{-0,3})^9 = -0,3$

b) $\sqrt[4]{16} = 2$, bo $2^4 = 16$

$\sqrt[5]{-243} = -3$, bo $(-3)^5 = -243$

$\sqrt[10]{1} = 1$, bo $1^{10} = 1$

W definicji pierwiastka stopnia parzystego przyjmujemy, że wartość pierwiastka jest nieujemna, po to, aby pierwiastkowanie było jednoznaczne. Przy takim bowiem założeniu każdej nieujemnej liczbie przyporządkowany jest dokładnie jeden pierwiastek danego stopnia.

Na przykład na mocy definicji $\sqrt[4]{16} = 2$, mimo że również $(-2)^4 = 16$.

Zauważmy, że jeśli do wzoru na iloczyn pierwiastków kwadratowych

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}, \text{ gdzie } a \geq 0 \text{ i } b \geq 0$$

w miejsce b podstawimy a , to otrzymamy równość: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2}$.

Przy iloczynie trzech pierwiastków mamy: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^3}$.

Czyli inaczej, prawdziwy jest wzór $(\sqrt{a})^3 = \sqrt{a^3}$. Podobnie rozumując, wyprowadzamy wzór $(\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3}$.

Wzory te możemy uogólnić na n czynników w iloczynie pierwiastków (n -tą potęgę pierwiastka), czyli prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Dla liczb rzeczywistych a oraz $n \in \mathbf{N}$ i $n \neq 0$ prawdziwe są równości:

- $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n}$, przy czym $a \geq 0$,
- $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n}$.

Dowód tego twierdzenia pomijamy.

Przykład 2 ◀ zad. 9.9

Wykonamy podane działania.

a) $(\sqrt[3]{3})^5 = \sqrt[3]{3^5} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3^2} = 3 \sqrt[3]{9}$ b) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4 \cdot 16} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

c) $\sqrt[3]{7^2 \cdot 7 \cdot 7^3} = \sqrt[3]{7^{2+1+3}} = \sqrt[3]{7^6} = (\sqrt[3]{7^3})^2 = 7^2 = 49$

lub $\sqrt[3]{7^2 \cdot 7 \cdot 7^3} = \sqrt[3]{7^{2+1} \cdot 7^3} = \sqrt[3]{7^3 \cdot 7^3} = \sqrt[3]{7^3} \cdot \sqrt[3]{7^3} = 7 \cdot 7 = 49$

d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot (\sqrt{8})^3 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5 \cdot 2} \cdot \sqrt{8^3} = 5 \cdot \sqrt{2 \cdot (2^3)^3} =$
 $= 5 \cdot \sqrt{2 \cdot 2^9} = 5 \cdot \sqrt{2^{10}} = 5 \cdot 2^5 = 5 \cdot 32 = 160$

Odpowiednie wzory dla pierwiastków wyższych stopni przyjmują postać:

Wzór	Założenia	
	dla parzystego $n > 0$	dla nieparzystego $n > 1$
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$a \geq 0$ i $b \geq 0$	—
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$a \geq 0$ i $b > 0$	$b \neq 0$
$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$	$a > 0$ i $k \in \mathbf{Z}$	$a \neq 0$ i $k \in \mathbf{Z}$

Przykład 3 ◀ zad. 9.11

Uprościmy podane wyrażenie.

$$\text{a) } \frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{-2}} = \sqrt[5]{\frac{64}{-2}} = \sqrt[5]{-32} = -2$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{49} = \sqrt[3]{7 \cdot 7^2} = \sqrt[3]{7^3} = 7$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\frac{32}{2}} = \sqrt[4]{16} = 2$$

$$\text{d) } \left(\sqrt[3]{\sqrt{27}} \right)^2 = \sqrt[3]{(\sqrt{27})^2} = \sqrt[3]{27} = 3$$

Przykład 4 ◀ zad. 9.7

Wyłączymy wspólny czynnik przed nawias i uprościmy ułamek.

$$\text{a) } \frac{\sqrt[5]{6} - \sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{2}} = \frac{\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{3} - \sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{2}} = \frac{\sqrt[5]{2}(\sqrt[5]{3} - 1)}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{3} - 1$$

$$\text{b) } \left(\frac{\sqrt[5]{12} - \sqrt[5]{6}}{\sqrt[5]{4} - \sqrt[5]{2}} \right)^5 = \left(\frac{\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{6} - \sqrt[5]{6}}{\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{2} - \sqrt[5]{2}} \right)^5 = \left(\frac{\sqrt[5]{6}(\sqrt[5]{2} - 1)}{\sqrt[5]{2}(\sqrt[5]{2} - 1)} \right)^5 = \left(\frac{\sqrt[5]{6}}{\sqrt[5]{2}} \right)^5 = (\sqrt[5]{3})^5 = 3$$

Usuwanie niewymierności z mianownika

W wielu operacjach matematycznych wygodniejszy jest taki zapis liczby rzeczywistej będącej ilorazem liczb rzeczywistych, w którym mianownik jest liczbą wymierną – o ile jest to możliwe. Aby do takiej postaci doprowadzić, czyli usunąć niewymierność z mianownika, najczęściej mnożymy licznik i mianownik przez odpowiednio dobrane wyrażenie. Wyjaśnimy to na przykładach.

Przykład 5 ◀ zad. 9.13

Usuniemy niewymierność z mianownika.

$$\text{a) } \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \leftarrow \text{licznik i mianownik pomnożyliśmy przez } \sqrt{5}$$

$$\text{b) } \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \quad \leftarrow \text{licznik i mianownik pomnożyliśmy przez } \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}$$

$$\text{c) } \frac{6}{5\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{15} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \quad \leftarrow \text{licznik i mianownik pomnożyliśmy przez } \sqrt{3}$$

9.11. Oblicz.

$$\text{a) } \frac{\sqrt[4]{243} \cdot \sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{81}}$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt[5]{25} \cdot \sqrt[5]{625}}{\sqrt[5]{5}}$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt[6]{128} \cdot (\sqrt[6]{8})^3 \cdot \sqrt[6]{3}}{\sqrt[6]{48}}$$

$$\text{d) } \left(\frac{\sqrt[10]{81} \cdot \sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{81}} \right)^2$$

Odp.: a) 3 b) 5 c) 4 d) 3

9.7. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias i uprość ułamek.

$$\text{a) } \frac{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}}$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt[4]{192} - \sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{12} - \sqrt[4]{2}}$$

$$\text{c) } \left(\frac{\sqrt[5]{14} - \sqrt[5]{7}}{\sqrt[5]{6} - \sqrt[5]{3}} \right)^5$$

$$\text{d) } \left(\frac{\sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{12}} \right)^3$$

Odp.: a) 5 b) 2 c) $\frac{7}{3}$ d) $\frac{5}{3}$

9.13. Usuń niewymierność z mianownika.

$$\text{a) } \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

$$\text{b) } \frac{15}{\sqrt[3]{3}}$$

$$\text{c) } \frac{14}{\sqrt{2}}$$

$$\text{d) } \frac{3\sqrt{2} + 6}{\sqrt{3}}$$

$$\text{e) } \frac{25 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$\text{f) } \frac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

Odp.: a) $\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$ b) $5\sqrt[3]{9}$ c) $7\sqrt{2}$

d) $\sqrt{6} + 2\sqrt{3}$ e) $5\sqrt{5} - 1$

f) $5 + \sqrt{6}$

◀9.14. Usuń niewymierność z mianownika.

- a) $\frac{3}{\sqrt{7}-2}$
 b) $\frac{2\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{3}}$
 c) $\frac{-2\sqrt{7}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}$
 d) $\frac{11}{1+2\sqrt{3}}$
 e) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$
 f) $\frac{3\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$

Odp.: a) $\sqrt{7}+2$ b) $3\sqrt{3}+4$

c) $\sqrt{35}+7$ d) $2\sqrt{3}-1$

e) $3+2\sqrt{2}$ f) $4+\sqrt{5}$

◀9.15. Wykonaj działania i doprowadź wynik do prostszej postaci.

- a) $\frac{3}{\sqrt{7}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+3} - \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$
 b) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$
 c) $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} - \frac{4}{\sqrt{5}+3}\right)^{-1} : \frac{2+\sqrt{5}}{3}$
 d) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{3-\sqrt{3}}\right)^{-1} \cdot (\sqrt{3}+5)$

Odp.: a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) 0 c) -3 d) 2

Usuwać niewymierności z mianowników, często korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów zapisanego w postaci:

$$(\sqrt{c} - \sqrt{d}) \cdot (\sqrt{c} + \sqrt{d}) = c - d \quad (\text{dla } c \geq 0 \text{ i } d \geq 0)$$

Przykład 6 ◀ zad. 9.14

Usuniemy niewymierność z mianownika.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} &= \frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \leftarrow \text{mnożymy licznik i mianownik przez } (\sqrt{3}+\sqrt{2}) \\ &= \frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = 2(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \leftarrow \text{stosujemy wzór na różnicę kwadratów} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} &= \frac{1 \cdot (\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \leftarrow \text{mnożymy licznik i mianownik przez } (\sqrt{5}-\sqrt{3}) \\ &= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} \leftarrow \text{stosujemy wzór na różnicę kwadratów} \end{aligned}$$

Często usuwamy niewymierność z mianownika, żeby ułatwić dodawanie i odejmowanie wyrażeń zawierających pierwiastki.

Przykład 7 ◀ zad. 9.15

Wykonamy działania.

$$\begin{aligned} &\left(\frac{8}{3-\sqrt{5}} - \frac{10}{\sqrt{5}}\right)^{-1} = \\ &= \left(\frac{8}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} - \frac{10}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)^{-1} = \left(\frac{8(3+\sqrt{5})}{9-5} - \frac{10\sqrt{5}}{5}\right)^{-1} \leftarrow \text{usuujemy niewymierności z mianowników} \\ &= \left(\frac{8(3+\sqrt{5})}{4} - \frac{10\sqrt{5}}{5}\right)^{-1} = [2(3+\sqrt{5}) - 2\sqrt{5}]^{-1} = \\ &= (6+2\sqrt{5}-2\sqrt{5})^{-1} = 6^{-1} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Usunięcie niewymierności z mianownika pozwala dokładniej szacować wartości wyrażeń zawierających pierwiastki.

Przykład 8

Wiadomo, że $\sqrt{2} \approx 1,41$. Oszacujemy wartość wyrażenia $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$ z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

Rozwiązanie

Jeżeli w liczbie $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$ w miejsce $\sqrt{2}$ od razu podstawimy 1,41, to otrzymamy:

$$\frac{3}{\sqrt{2}-1} \approx \frac{3}{0,41} \approx 7,32$$

Natomiast jeżeli liczbę 1,41 podstawimy po usunięciu niewymierności z mianownika, to otrzymamy:

$$\frac{3}{\sqrt{2}-1} = \frac{3(\sqrt{2}+1)}{2-1} = 3\sqrt{2}+3 \approx 3 \cdot 1,41 + 3 = 7,23$$

Wartość wyrażenia $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$ odczytana z kalkulatora naukowego wynosi 7,24264...

W tym wypadku dokładniejszy wynik uzyskaliśmy po usunięciu niewymierności z mianownika.

Zadania

W każdym z zadań 9.1–9.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

9.1. Wskaż zależność fałszywą.

A. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{10}$ B. $\sqrt{15} : \sqrt{3} = \sqrt{5}$ C. $\sqrt{5} - \sqrt{2} = \sqrt{3}$ D. $\sqrt{\sqrt{4}} = \sqrt{2}$

9.2. Wskaż liczbę równą liczbie $\sqrt{18} - \sqrt{8}$.

A. 10 B. $\sqrt{10}$ C. $\sqrt{2}$ D. $5\sqrt{2}$

9.3. Wskaż liczbę równą liczbie $\sqrt[5]{64}$.

A. $2\sqrt[5]{2}$ B. $\frac{\sqrt[5]{2}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. 2

9.4. Oblicz pierwiastki.

a) $\sqrt[5]{-32}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$, $\sqrt[6]{64}$ c) $\sqrt[10]{1024}$, $\sqrt[7]{\frac{128}{2187}}$, $\sqrt[6]{0,000064}$
 b) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$, $\sqrt[4]{625}$, $\sqrt[5]{-\frac{243}{1024}}$ d) $\sqrt[11]{\frac{1}{2048}}$, $\sqrt[5]{0,00243}$, $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$

9.5. Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej.

a) $\sqrt[3]{216}$, $\sqrt[6]{729}$, $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$, $\sqrt[4]{625}$, $\sqrt[8]{256}$ b) $\sqrt[5]{243}$, $\sqrt[3]{1\frac{91}{125}}$, $\sqrt[4]{0,0081}$, $\sqrt[3]{-216}$, $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$

Odpowiedzi i rozwiązania

9.1. C

9.2. C

9.3. A

9.4. a) -2 , $\frac{1}{3}$, 2 b) $\frac{1}{2}$, 5, $-\frac{3}{4}$
 c) 2, $\frac{2}{3}$, 0,2 d) $\frac{1}{2}$, 0,3, $\frac{2}{5}$

9.5. a) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$, $\sqrt[8]{256}$, $\sqrt[6]{729}$, $\sqrt[4]{625}$,
 $\sqrt[3]{216}$ b) $\sqrt[3]{-216}$, $\sqrt[4]{0,0081}$,
 $\sqrt[3]{1\frac{91}{125}}$, $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$, $\sqrt[5]{243}$

- 9.6. a)** $3\sqrt[4]{2}, -2\sqrt[5]{5}, 0, 2\sqrt[4]{3}$
b) $-\frac{3}{2\sqrt[5]{8}}, 3\sqrt[4]{5}, 2\sqrt[5]{6}$ **c)** $-6\sqrt[3]{3}, 3\sqrt[5]{2}, 2\sqrt[7]{4}$
9.7. a) 5 **b)** 2 **c)** $\frac{7}{3}$ **d)** $\frac{5}{3}$

- 9.8. a)** -2 **b)** 1 **c)** 9 **d)** 2
e) -1 **f)** 3 **g)** 72 **h)** $\frac{1}{2}$

- 9.9. a)** $5\sqrt[3]{5}$ **b)** 7 **c)** 36 **d)** 99

- 9.10. a)** $2\sqrt[8]{8}$ **b)** 5 **c)** 9 **d)** 21

- 9.11. a)** 3 **b)** 5 **c)** 4 **d)** 3

- 9.12. a)** ab^2 **b)** 1

- 9.13. a)** $\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$ **b)** $5\sqrt[3]{9}$ **c)** $7\sqrt{2}$
d) $\sqrt{6} + 2\sqrt{3}$ **e)** $5\sqrt{5} - 1$
f) $5 + \sqrt{6}$

- 9.14. a)** $\sqrt{7} + 2$ **b)** $3\sqrt{3} + 4$
c) $\sqrt{35} + 7$ **d)** $2\sqrt{3} - 1$
e) $3 + 2\sqrt{2}$ **f)** $4 + \sqrt{5}$

9.6. Wylłącz czynnik przed pierwiastek.

- a)** $\sqrt[4]{162}, \sqrt[5]{-160}, \sqrt[4]{0,0048}$ **b)** $\sqrt[5]{-\frac{243}{256}}, \sqrt[4]{405}, \sqrt[5]{192}$ **c)** $\sqrt[3]{-648}, \sqrt[5]{486}, \sqrt[7]{512}$

*** 9.7.** Wylłącz wspólny czynnik przed nawias i uprość ułamek.

- a)** $\frac{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}}$ **b)** $\frac{\sqrt[4]{192} - \sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{12} - \sqrt[4]{2}}$ **c)** $\left(\frac{\sqrt[5]{14} - \sqrt[5]{7}}{\sqrt[5]{6} - \sqrt[5]{3}}\right)^5$ **d)** $\left(\frac{\sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{12}}\right)^3$

9.8. Oblicz.

- a)** $\sqrt[5]{-2} \cdot \sqrt[5]{16}$ **e)** $\sqrt[7]{-\sqrt[6]{-\sqrt[5]{-1}}}$
b) $\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt[4]{2}$ **f)** $\left(\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{3}}\right)^3\right)^5$
c) $(\sqrt[7]{-3})^{14}$ **g)** $\sqrt[4]{4^3} \cdot \sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[4]{6^6}$
d) $\sqrt[4]{2\sqrt{64}}$ **h)** $\frac{\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[5]{6}}{\sqrt[5]{12} \cdot \sqrt[5]{10} \cdot \sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{6} \cdot \sqrt[5]{4}}$

9.9. Oblicz.

- a)** $(\sqrt[3]{5})^4$ **b)** $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{49}$ **c)** $\sqrt[3]{6^3 \cdot 6^2 \cdot 6}$ **d)** $\sqrt{11} \cdot \sqrt{33} \cdot (\sqrt{3})^3$

9.10. Oblicz.

- a)** $(\sqrt[8]{2})^{11}$ **b)** $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{125}$ **c)** $\sqrt[7]{3^6 \cdot 3^5 \cdot 3^3}$ **d)** $(\sqrt[5]{49})^2 \cdot \sqrt[5]{21} \cdot \sqrt[5]{81}$

9.11. Oblicz.

- a)** $\frac{\sqrt[4]{243} \cdot \sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{81}}$ **c)** $\frac{\sqrt[6]{128} \cdot (\sqrt[6]{8})^3 \cdot \sqrt[6]{3}}{\sqrt[6]{48}}$
b) $\frac{\sqrt[5]{25} \cdot \sqrt[5]{625}}{\sqrt[5]{5}}$ **d)** $\left(\sqrt[10]{81 \cdot \sqrt[3]{27}}\right)^2$

9.12. Uprość wyrażenie.

- a)** $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b^2} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b^4}$ **b)** $\sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{c}} : \sqrt[4]{\frac{a}{c}}, \text{ dla } a > 0, b > 0, c > 0$

9.13. Usuń niewymierność z mianownika.

- a)** $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ **b)** $\frac{15}{\sqrt[3]{3}}$ **c)** $\frac{14}{\sqrt{2}}$ **d)** $\frac{3\sqrt{2} + 6}{\sqrt{3}}$ **e)** $\frac{25 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ **f)** $\frac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

9.14. Usuń niewymierność z mianownika.

- a)** $\frac{3}{\sqrt{7} - 2}$ **b)** $\frac{2\sqrt{3} - 1}{2 - \sqrt{3}}$ **c)** $\frac{-2\sqrt{7}}{\sqrt{5} - \sqrt{7}}$ **d)** $\frac{11}{1 + 2\sqrt{3}}$ **e)** $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{3}}$ **f)** $\frac{3\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1}$

9.15. Wykonaj działania i doprowadź wynik do prostszej postaci.

a) $\frac{3}{\sqrt{7}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+3} - \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

c) $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} - \frac{4}{\sqrt{5}+3}\right)^{-1} : \frac{2+\sqrt{5}}{3}$

b) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

d) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{3-\sqrt{3}}\right)^{-1} \cdot (\sqrt{3}+5)$

9.16. Oblicz.

a) a , wiedząc, że $\sqrt{a} = b$ i $\sqrt{b} = 3$

c) a , wiedząc, że $\sqrt[3]{\sqrt{a}} = 2$

b) b , wiedząc, że $a^3 = 5$ i $b^2 = a$

d) c , wiedząc, że $c^2 = b$ i $b^2 = a$ i $a^2 = 7$

D * **9.17.** Wykaż, że $(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6}) \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}} = 2$.

* **9.18.** Wiedząc, że $\sqrt{2020} + \sqrt{1980} = a$, oblicz $\sqrt{2020} - \sqrt{1980}$.

* **9.19.** Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$

b) $\frac{1 + 2\sqrt{15}}{\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7}}$

Prosto do matury



1. Dana jest liczba $a = (\sqrt{2})^3$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $a = \sqrt{8}$

B. $a = 2\sqrt{2}$

C. $a = (\sqrt[3]{2})^2$

2. Sprawdź, czy prawdziwe jest zdanie $\frac{\sqrt[4]{96} - \sqrt[4]{64}}{\sqrt[4]{6} - \sqrt[4]{4}} = 2$.

3. Oblicz a , wiedząc, że $\sqrt{a} = b$ i $\sqrt[5]{b} = 2$.

4. Oblicz $\left(\frac{\sqrt[7]{21} + \sqrt[7]{35}}{\sqrt[7]{12} + \sqrt[7]{20}}\right)^7 \cdot \left(\frac{\sqrt[9]{14} + \sqrt[9]{56}}{\sqrt[9]{8} + \sqrt[9]{32}}\right)^{-9}$.

D **5.** Wykaż, że liczby $\frac{12}{3-\sqrt{3}} + \frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3}$ i $18 - 4\sqrt{3}$ są równe.

9.17. $(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6}) \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}} = (4 + \sqrt{15}) \cdot \sqrt{(\sqrt{10} - \sqrt{6})^2} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}} =$
 $= (4 + \sqrt{15}) \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{60} + 6} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}} = (4 + \sqrt{15}) \cdot \sqrt{4(4 - \sqrt{15})(4 - \sqrt{15})} =$
 $= (4 + \sqrt{15}) \cdot (4 - \sqrt{15}) \cdot 2 = (16 - 15) \cdot 2 = 2$

9.18. $(\sqrt{2020} - \sqrt{1980}) \cdot (\sqrt{2020} + \sqrt{1980}) = 2020 - 1980 = 40$.

Zatem $\sqrt{2020} - \sqrt{1980} = \frac{40}{\sqrt{2020} + \sqrt{1980}} = \frac{40}{a}$.

9.15. a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **b)** 0 **c)** -3 **d)** 2

9.16. a) $a = 81$

b) $b = \sqrt[6]{5}$ lub $b = -\sqrt[6]{5}$

c) $a = 4096$

d) $c = \sqrt[8]{7}$ lub $c = -\sqrt[8]{7}$

9.19. a) $\frac{2 + \sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

Wskazówka: $\frac{1}{(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{3}}$.

$\cdot \frac{(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2})^2 - 3}$

b) $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$

Prosto do matury

1. P, P, F

2. tak

3. $a = 1024$

4. 1

5. $\frac{12}{3-\sqrt{3}} + \frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3} =$
 $= \frac{12(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} +$
 $+ \frac{6\sqrt{3}(2\sqrt{3}-3)}{(2\sqrt{3}+3)(2\sqrt{3}-3)} =$
 $= \frac{12(3+\sqrt{3})}{9-3} + \frac{12 \cdot 3 - 18\sqrt{3}}{12-9} =$
 $= 2(3+\sqrt{3}) + 12 - 6\sqrt{3} = 18 - 4\sqrt{3}$

10. Potęga o wykładniku wymiernym

Umiejętności:

- obliczanie potęg o wykładniku wymiernym
- stosowanie praw działań na potęgach o wykładniku wymiernym
- stosowanie praw działań na potęgach o wykładniku rzeczywistym

Do tej pory wykonywaliśmy działania na potęgach o wykładnikach całkowitych. Korzystaliśmy ze zdefiniowanej wcześniej wielkości a^k , gdzie $k \in \mathbf{Z}$. Dla wykładnika $k \leq 0$ potrzebne było założenie dotyczące podstawy potęgi, a mianowicie $a \neq 0$.

Teraz rozszerzymy definicję potęgi tak, aby:

- jej wykładnikiem mogła być dowolna liczba wymierna,
- zachowane zostały wszystkie własności działań na potęgach.

Zrobimy to w dwóch etapach, przy czym każdy z nich będzie wymagał dodatkowego założenia dla podstawy potęgi.

Definicja

Jeżeli $a \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$ i $n > 1$, to:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Przykład 1

$$25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5, \quad 4^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{4}, \quad \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}, \quad 4 = \sqrt{16} = 16^{\frac{1}{2}},$$

$$3 = \sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}}, \quad \sqrt[3]{9} = 9^{\frac{1}{3}}, \quad 28^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{28}$$

Zauważmy teraz, że liczbę wymierną $\frac{k}{n}$, gdzie $n > 1$, $k \in \mathbf{Z}$, możemy zapisać w postaci $\frac{1}{n} \cdot k$, a jednocześnie $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$, zatem naturalne jest rozszerzenie definicji potęgi w przedstawiony poniżej sposób.

Definicja

Jeżeli $a > 0$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$ i $n > 1$, to:

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$$

ZZ i MKP

temat 1.9

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.10

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Każdy z zapisów występujących w równościach:

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^k = (a^k)^{\frac{1}{n}}$$

(przy założeniu, że $a > 0$) oznacza to samo: pierwiastek stopnia n z liczby a^k .

Przykład 2

Zapiszemy podane liczby na różne sposoby.

Rozwiązanie

a) $3^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{3^2}$

b) $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$

c) $7^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{7^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$

d) $16^{\frac{3}{2}} = \sqrt{16^3} = (\sqrt{16})^3 = 4^3 = 64$

e) $8^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{8^5} = (\sqrt[3]{8})^5 = 2^5 = 32$

f) $81^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^{-3}} = (\sqrt[4]{81})^{-3} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

Pierwiastki stopnia nieparzystego można wyciągać również z liczb ujemnych.

Na przykład $\sqrt[3]{-8} = -2$. Zauważmy jednak, że w definicji potęgi $a^{\frac{k}{n}}$ konieczne jest założenie, że $a > 0$.

Przyjrzyjmy się równościom:

$$a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{3}{9}} = \dots$$

lub tym samym równościom zapisanym inaczej:

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[9]{a^3} = \dots$$

Równości te są prawdziwe dla dowolnej liczby $a > 0$. Natomiast dla $a = -8$ otrzymujemy:

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \text{ oraz } \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Przykład 3

Sprawdźmy, czy dla potęg $a^{\frac{3}{4}}$ i $a^{\frac{5}{7}}$ prawdziwy jest wzór na iloczyn potęg o tych samych podstawach, tzn. czy $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{5}{7}} = a^{\frac{3}{4} + \frac{5}{7}}$. Zakładamy, że $a > 0$.

Rozwiązanie

$$a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{5}{7}} = a^{\frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7}} \cdot a^{\frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 4}} =$$

← sprowadzamy ułamki w wykładnikach do wspólnego mianownika

$$= a^{\frac{21}{28}} \cdot a^{\frac{20}{28}} = \sqrt[28]{a^{21}} \cdot \sqrt[28]{a^{20}} =$$

← zapisujemy potęgi w postaci pierwiastków

$$= \sqrt[28]{a^{21} \cdot a^{20}} =$$

← $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$

$$= \sqrt[28]{a^{41}} = \sqrt[28]{a^{41}} = a^{\frac{41}{28}} = a^{\frac{21+20}{28}} = a^{\frac{21}{28} + \frac{20}{28}} = a^{\frac{3}{4} + \frac{5}{7}}$$

Ostatecznie otrzymujemy więc równość: $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{5}{7}} = a^{\frac{3}{4} + \frac{5}{7}}$.

Twierdzenie

Jeżeli a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, a p i r dowolnymi liczbami wymiennymi, to:

- $a^p \cdot a^r = a^{p+r}$ ← iloczyn potęg o tych samych podstawach
- $\frac{a^p}{a^r} = a^{p-r}$ ← iloraz potęg o tych samych podstawach
- $(a^p)^r = a^{p \cdot r}$ ← potęga potęgi
- $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$ ← potęga iloczynu
- $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$ ← potęga ilorazu

Udowodnimy pierwszą tezę twierdzenia, pozostałe udowodnicie samodzielnie jako dodatkowe ćwiczenie.

Założenia

Liczby a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi.

Liczby p i r są dowolnymi liczbami wymiennymi.

Teza

$$a^p \cdot a^r = a^{p+r}$$

Dowód

Skoro p i r są liczbami wymiennymi, to możemy je zapisać w postaci:

$$p = \frac{k}{n} \text{ i } r = \frac{l}{w}$$

gdzie n i w są dodatnimi liczbami naturalnymi, a k i l – liczbami całkowitymi. Dalsze postępowanie jest powtórzeniem przekształceń z przykładu 3.

$$\begin{aligned}
 a^p \cdot a^r &= a^{\frac{k}{n}} \cdot a^{\frac{l}{w}} = a^{\frac{k \cdot w}{n \cdot w}} \cdot a^{\frac{l \cdot n}{w \cdot n}} = && \leftarrow \text{sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika} \\
 &= \sqrt[n \cdot w]{a^{k \cdot w}} \cdot \sqrt[n \cdot w]{a^{l \cdot n}} = && \leftarrow \text{zapisujemy potęgi w postaci pierwiastków} \\
 &= \sqrt[n \cdot w]{a^{k \cdot w} \cdot a^{l \cdot n}} = && \leftarrow \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy} \\
 &= \sqrt[n \cdot w]{a^{k \cdot w + l \cdot n}} = && \leftarrow x^n \cdot x^k = x^{n+k} \\
 &= a^{\frac{k \cdot w + l \cdot n}{n \cdot w}} = a^{\frac{k \cdot w}{n \cdot w} + \frac{l \cdot n}{n \cdot w}} = a^{\frac{k}{n} + \frac{l}{w}} = a^{p+r} && \leftarrow \text{zapisujemy pierwiastki w postaci potęg}
 \end{aligned}$$

Koniec dowodu

Przykład 4 ◀ zad. 10.6

Zapis pierwiastków w postaci potęg często ułatwia obliczenia.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[15]{64} &= 8^{\frac{1}{5}} \cdot 64^{\frac{1}{15}} = (2^3)^{\frac{1}{5}} \cdot (2^6)^{\frac{1}{15}} = 2^{\frac{3}{5}} \cdot 2^{\frac{6}{15}} = 2^{\frac{3}{5}} \cdot 2^{\frac{2}{5}} = 2^{\frac{3}{5} + \frac{2}{5}} = 2^{\frac{5}{5}} = 2 \\ \text{b)} \quad \sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} &= 2^{\frac{3}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{5} + \frac{1}{3}} = 2^{\frac{9+5}{15}} = 2^{\frac{14}{15}} = \sqrt[15]{2^{14}} \\ \text{c)} \quad \frac{2 \cdot \sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[15]{2^{12}}} &= \frac{2 \cdot 2^{\frac{4}{5}}}{2^{\frac{12}{15}}} = \frac{2^{1+\frac{4}{5}}}{2^{\frac{4}{5}}} = 2^{1+\frac{4}{5}-\frac{4}{5}} = 2^1 = 2 \end{aligned}$$

Potęga o wykładniku rzeczywistym

Wychodząc od definicji potęgi o wykładniku naturalnym, doszliśmy do definicji potęgi o dowolnym wykładniku wymiernym. Do wyznaczenia wartości takich potęg trzeba zwykle używać kalkulatora naukowego albo komputera, np.:

$$3^{-1,7} = \frac{1}{\sqrt[10]{3^{17}}} = 0,154487685\dots$$

Nie będziemy dokładnie definiować potęgi o wykładniku niewymiernym – wymaga to bardziej zaawansowanej wiedzy matematycznej. Poprzestaniemy na intuicyjnie przyjętym stwierdzeniu, że liczba a^w jest dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby rzeczywistej w jednoznacznie określona.

Przyjmujemy również, że dla każdej liczby rzeczywistej w prawdziwa jest równość:

$$1^w = 1$$

Przykład 5

Na przykładzie potęgi $2^{\sqrt{3}}$ pokażemy, w jaki sposób można oszacować jej przybliżoną wartość. Liczba $\sqrt{3}$, jak każda liczba niewymierna, ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone i nieokresowe.

Odczytajmy z kalkulatora:

$$\sqrt{3} = 1,7320508\dots$$

Weźmy kolejne przybliżenia liczby $\sqrt{3}$. Mają one skończone rozwinięcia dziesiętne, zatem są liczbami wymiernymi. Ich wartości są zapisane w lewej kolumnie tabeli. Z kalkulatora odczytujemy przybliżone wartości potęg.

$\sqrt{3} \approx 2$	$2^2 = 4$
$\sqrt{3} \approx 1,7$	$2^{1,7} \approx 3,249009585$
$\sqrt{3} \approx 1,73$	$2^{1,73} \approx 3,317278183$
$\sqrt{3} \approx 1,732$	$2^{1,732} \approx 3,321880096$
$\sqrt{3} \approx 1,7321$	$2^{1,7321} \approx 3,32211036$
$\sqrt{3} \approx 1,73205$	$2^{1,73205} \approx 3,321995226$

◀10.6. Zapisz w postaci potęgi, bez użycia symbolu pierwiastka.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \sqrt{7}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{3^3}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[3]{7^{-5}} \\ \text{b)} \quad & 5\sqrt{5}, 3\sqrt[3]{3}, 2\sqrt[3]{2}, 7\sqrt[4]{7^3}, 9\sqrt[3]{9^2} \\ \text{c)} \quad & \sqrt{3\sqrt{27}}, \sqrt{3\sqrt{3}}, \sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}, \\ & \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \\ \text{d)} \quad & (2\sqrt{2})^3, (9\sqrt[3]{3})^2, 9\sqrt{3}, 8\sqrt[3]{2}, \\ & 2\sqrt[3]{16} \end{aligned}$$

Odp.: a) $7^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}}, 3^{\frac{3}{5}}, 5^{\frac{1}{4}}, 7^{-\frac{5}{3}}$

b) $5^{1\frac{1}{2}}, 3^{2\frac{1}{3}}, 2^{1\frac{1}{3}}, 7^{1\frac{3}{4}}, 9^{1\frac{2}{3}}$

c) $3^{1\frac{1}{4}}, 3^{\frac{3}{4}}, 2^{\frac{4}{9}}, 2^{\frac{7}{8}}$

d) $2^{4\frac{1}{2}}, 3^{4\frac{2}{3}}, 3^{2\frac{1}{2}}, 2^{3\frac{1}{3}}, 2^{2\frac{2}{3}}$

Kolejne liczby występujące w prawej kolumnie są coraz dokładniejszymi przybliżeniami liczby $2^{\sqrt{3}}$. Taką operację możemy powtarzać np. za pomocą komputera i otrzymywać w ten sposób coraz dokładniejsze przybliżenie szukanej potęgi. Liczba $2^{\sqrt{3}}$ z dokładnością do 9. miejsca po przecinku jest równa 3,321997085.

Dla potęg o dowolnych wykładnikach rzeczywistych prawdziwe są wszystkie twierdzenia dotyczące potęg o wykładnikach wymiernych, czyli: jeżeli α i β są dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz a i b dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, to:

- $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ ← iloczyn potęg o tych samych podstawach
- $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$ ← iloraz potęg o tych samych podstawach
- $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$ ← potęga potęgi
- $(a \cdot b)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$ ← potęga iloczynu
- $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$ ← potęga ilorazu

Dla $a > 0$ i $b > 0$ zachodzi równość:

$$\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right) = a - b$$

Aby to sprawdzić, wystarczy zastosować wzór na różnicę kwadratów:

$$\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right) = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a - b$$

◀10.9. Wykonaj działania.

a) $\frac{\left(11^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}\right) \cdot (\sqrt{11} + \sqrt{2})}{(\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{8})^2}$

b) $\frac{5^{-2} \cdot 125^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2}{25^{-2\frac{1}{2}}}$

c) $\frac{0,2^{-2} \cdot 125^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2}{625^{-\frac{1}{2}} \cdot 25^{-1}}$

d) $\frac{\left(4 \cdot 7^{\frac{1}{2}} + 4 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^2}{18 + 2 \cdot 56^{\frac{1}{2}}}$

Odp.: a) 1 b) $\frac{1}{5}$ c) 25 d) 8

Przykład 6 ◀ zad. 10.9

Obliczmy wartość wyrażenia $\left(125^{\frac{1}{2}} - 27^{\frac{1}{2}}\right)\left(5^{\frac{3}{2}} + 3^{\frac{3}{2}}\right)$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \left(125^{\frac{1}{2}} - 27^{\frac{1}{2}}\right)\left(5^{\frac{3}{2}} + 3^{\frac{3}{2}}\right) &= \left(125^{\frac{1}{2}} - 27^{\frac{1}{2}}\right)\left(\left(5^3\right)^{\frac{1}{2}} + \left(3^3\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \\ &= \left(125^{\frac{1}{2}} - 27^{\frac{1}{2}}\right)\left(125^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{1}{2}}\right) = 125 - 27 = 98 \quad \leftarrow \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right) = a - b \end{aligned}$$

Odp.: 98

Zadania

W każdym z zadań 10.1–10.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszyty.

10.1. Wskaż liczbę, która jest równa liczbie $2^{\frac{3}{2}}$.

- A. $4\sqrt{\frac{1}{2}}$ B. $\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}$ C. $2\sqrt{8}$ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

10.2. Wskaż liczbę, która jest równa liczbie $\sqrt{5\sqrt{5}}$.

- A. $5^{\frac{1}{4}}$ B. $5^{\frac{3}{4}}$ C. $5^{\frac{3}{2}}$ D. $5^{\frac{5}{4}}$

10.3. Liczba 6,31 jest przybliżeniem liczby $10^{\frac{4}{5}}$. Wśród podanych liczb wskaż tę, która jest przybliżeniem liczby $10^{-\frac{1}{5}}$.

- A. -6,31 B. 0,0631 C. 0,631 D. 3,69

10.4. Oblicz.

- a) $4^{\frac{1}{2}}, 4^{\frac{3}{2}}, 4^{\frac{5}{2}}$ c) $27^{\frac{1}{3}}, 27^{\frac{2}{3}}, 27^{\frac{1}{3}}$ e) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}, \left(\frac{25}{81}\right)^{-\frac{1}{2}}, \left(\frac{8}{27}\right)^{-1\frac{1}{3}}$
 b) $8^{\frac{1}{3}}, 8^{\frac{2}{3}}, 8^{\frac{4}{3}}$ d) $81^{\frac{1}{4}}, 81^{\frac{3}{4}}, 81^{-\frac{1}{2}}$ f) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}, \left(1\frac{7}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$

10.5. Oblicz.

- a) $\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}, \left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}, \left(6\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$ d) $\left(\frac{125}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}, \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}, \left(\frac{625}{81}\right)^{-\frac{1}{2}}, \left(6\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}$
 b) $64^{\frac{1}{6}}, \left(\frac{25}{49}\right)^{-0,5}, 0,25^{-\frac{1}{2}}, \left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{1}{2}}$ e) $0,49^{-\frac{1}{2}}, 0,125^{\frac{2}{3}}, 0,027^{-\frac{2}{3}}$
 c) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}, \left(2\frac{93}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}, \left(7\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$ f) $0,04^{\frac{3}{2}}, 0,0001^{-1\frac{1}{4}}, 0,125^{-\frac{1}{3}}$

10.6. Zapisz w postaci potęgi, bez użycia symbolu pierwiastka.

- a) $\sqrt{7}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{3}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[3]{7^{-5}}$ c) $\sqrt{3\sqrt{27}}, \sqrt{3\sqrt{3}}, \sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$
 b) $5\sqrt{5}, 3\sqrt[3]{3}, 2\sqrt[3]{2}, 7\sqrt[4]{7^3}, 9\sqrt[3]{9^2}$ d) $(2\sqrt{2})^3, (9\sqrt[3]{3})^2, 9\sqrt{3}, 8\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{16}$

Odpowiedzi i rozwiązania

10.1. A

10.2. B

10.3. C

10.4. a) 2, 8, 32 b) 2, 4, 16

c) 3, 9, 81 d) $3, 27, \frac{1}{9}$

e) $2, \frac{9}{5}, \frac{81}{16}$ f) $\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{64}{27}$

10.5. a) $5, \frac{4}{3}, \frac{2}{5}$ b) $2, \frac{7}{5}, 2, \frac{6}{5}$

c) $\frac{8}{27}, \frac{5}{7}, \frac{11}{4}$ d) $\frac{16}{25}, \frac{9}{4}, \frac{9}{25}, \frac{8}{125}$

e) $\frac{10}{7}, \frac{1}{4}, \frac{100}{9}$ f) 0,008, 100 000, 2

10.6. a) $7^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}}, 3^{\frac{3}{5}}, 5^{\frac{1}{4}}, 7^{-\frac{5}{3}}$

b) $5^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{2}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}, 7^{\frac{1}{4}}, 9^{\frac{2}{3}}$

c) $3^{\frac{1}{4}}, 3^{\frac{3}{4}}, 2^{\frac{9}{8}}, 2^{\frac{7}{8}}$

d) $2^{\frac{4}{2}}, 3^{\frac{4}{3}}, 3^{\frac{2}{2}}, 2^{\frac{3}{3}}, 2^{\frac{2}{3}}$

10.7. a) 2^1 b) 2^0 c) 2^{-2} d) 2^0
e) 2^0 f) 2^2

10.8. a) $3^{0,3}$ b) $3^{-3\frac{1}{3}}$ c) 3

d) 5. *Wskazówka:* Przekształć mianownik do postaci

$$2^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{4}} - 3^{\frac{1}{4}}\right) \left(2^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{1}{4}}\right),$$

a w liczniku wykonaj następujące przekształcenia

$$\begin{aligned} 2^{\frac{5}{4}} + 3 \cdot 2^{\frac{1}{4}} - 2 \cdot 3^{\frac{1}{4}} - 3^{\frac{5}{4}} &= \\ &= \left(2^{\frac{5}{4}} + 3 \cdot 2^{\frac{1}{4}}\right) - \left(2 \cdot 3^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{5}{4}}\right) = \\ &= 2^{\frac{1}{4}} \left(2^{\frac{4}{4}} + 3\right) - 3^{\frac{1}{4}} \left(2 + 3^{\frac{4}{4}}\right). \end{aligned}$$

10.9. a) 1 b) $\frac{1}{5}$ c) 25 d) 8

10.10. $3^{\frac{2}{5}}$

10.11. a) $a^{\frac{1}{6}}$ b) a^3 c) $(ab)^{\frac{1}{2}}$

d) $\left(\frac{a}{b}\right)^5$

10.7. Przedstaw w postaci potęgi 2^p , $p \in \mathbf{Q}$.

a) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-1}$

c) $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{-\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{8}$

e) $\frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}$

b) $2^{-1} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{2}{3}}$

d) $\left(32^{-\frac{1}{2}} : 64^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{128}$

f) $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2^{-2} \cdot \sqrt[4]{4}}{64^{-\frac{3}{4}} \cdot 0,25}$

10.8. Podaj najprostszą postać wyrażenia.

a) $\sqrt[20]{3} \cdot \sqrt[12]{27}$

c) $\frac{(5^2 - 2^2) \left(5^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}\right)}{5^{\frac{4}{3}} + 2 \cdot 5^{\frac{1}{3}} - 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{4}{3}}}$

b) $\frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot 3^{-\frac{1}{2}}}{81^{\frac{1}{2}} \cdot 27^{\frac{2}{3}}}$

d) $\frac{2^{\frac{5}{4}} + 3 \cdot 2^{\frac{1}{4}} - 2 \cdot 3^{\frac{1}{4}} - 3^{\frac{5}{4}}}{2^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(2^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{1}{4}}\right)$

10.9. Wykonaj działania.

a) $\frac{\left(11^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}\right) \cdot (\sqrt{11} + \sqrt{2})}{(\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{8})^2}$

c) $\frac{0,2^{-2} \cdot 125^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2}{625^{-\frac{1}{2}} \cdot 25^{-1}}$

b) $\frac{5^{-2} \cdot 125^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2}{25^{-2\frac{1}{2}}}$

d) $\frac{\left(4 \cdot 7^{\frac{1}{2}} + 4 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^2}{18 + 2 \cdot 56^{\frac{1}{2}}}$

10.10. Wyrażenie $\left(2^{\frac{2}{3}} \cdot 0,25^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}\right)^{-1} : \left[\left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot 0,81^{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[5]{100}\right]^{-\frac{1}{3}}$ przedstaw w postaci potęgi 3^p , $p \in \mathbf{Q}$.

10.11. Przedstaw podane wyrażenie w postaci potęgi a^p , $(ab)^p$ lub $\left(\frac{a}{b}\right)^p$, $p \in \mathbf{Q}$, wiedząc, że $a > 0$ i $b > 0$.

a) $\frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[6]{a^5}}$

c) $\left(\frac{a\sqrt{a} \cdot b\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{b}}\right)^{0,6}$

b) $\left(\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}} : \frac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}\right)^{-3}$

d) $\left(\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{b}\sqrt{b}\sqrt{b}}\right)^4 \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{a}\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}\sqrt{b}}\right)^3$

10.13. Zakładamy, że $a > 0$, a $p, r \in \mathbf{Q}$. Zatem $p = \frac{k}{n}$, $r = \frac{l}{m}$, gdzie $n, m \in \mathbf{N}$, $n, m > 0$, $k, l \in \mathbf{Z}$. Wtedy:

$$\frac{a^p}{a^r} = \frac{a^{\frac{k}{n}}}{a^{\frac{l}{m}}} = \frac{a^{\frac{km}{nm}}}{a^{\frac{ln}{nm}}} = \frac{\sqrt[nm]{a^{km}}}{\sqrt[nm]{a^{ln}}} = \sqrt[nm]{a^{km - ln}} = \sqrt[nm]{a^{\frac{km - ln}{nm}}} = a^{\frac{k}{n} - \frac{l}{m}} = a^{p-r}$$

10.14.

$$\begin{aligned} \left(\left(2^{\frac{1}{2}} + 1\right)^{\frac{1}{2}} + \left(2^{\frac{1}{2}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 &= \left(\left(2^{\frac{1}{2}} + 1\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2 \cdot \left(2^{\frac{1}{2}} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(2^{\frac{1}{2}} - 1\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\left(2^{\frac{1}{2}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \\ &= 2^{\frac{1}{2}} + 1 + 2 \cdot \left(\left(2^{\frac{1}{2}} + 1\right)\left(2^{\frac{1}{2}} - 1\right)\right)^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} - 1 = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot (2 - 1)^{\frac{1}{2}} = 2 \left(2^{\frac{1}{2}} + 1\right) \end{aligned}$$

10.12. Zapisz wyrażenie w prostszej postaci, wiedząc, że $a > 0$ i $b > 0$.

a) $\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[3]{a^2b^4}$ c) $(\sqrt{a} + \sqrt[4]{b^2}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt[4]{b^2})$
 b) $(a\sqrt{b})^3 \cdot (\sqrt{ab})^{-3}$ d) $\sqrt[3]{2a^2} \cdot \sqrt[3]{4a^4}$

D 10.13. Wykaż, że dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej a oraz dowolnych liczb wymiernych p i r prawdziwy jest wzór $\frac{a^p}{a^r} = a^{p-r}$.

D 10.14. Wykaż, że podana równość jest prawdziwa.

$$\left(\left(2^{\frac{1}{2}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(2^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 = 2 \left(2^{\frac{1}{2}} + 1 \right)$$

D * 10.15. Wykaż, że podana równość jest prawdziwa.

$$\left(\frac{3^{0,6} + 3^{-0,6}}{3^{0,6} - 3^{-0,6}} + \frac{3^{0,6} - 3^{-0,6}}{3^{0,6} + 3^{-0,6}} - 2 \right)^{-1} = \frac{3^{\frac{12}{5}} - 1}{4}$$

D * 10.16. Czy istnieje taka liczba niewymierna a , dla której liczba a^n

- a) jest wymierna dla każdej liczby naturalnej $n > 1$? Odpowiedź uzasadnij.
 b) jest wymierna dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n ? Odpowiedź uzasadnij.

Prosto do matury



1. Oceń prawdziwość podanych zależności.

A. $4^{\frac{3}{5}} = 16^{\frac{2}{5}}$ B. $\left(2^{\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}} \right)^2 = \frac{5}{2}$ C. $\left(2^{\frac{1}{2}} - 2^{-\frac{1}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$

2. Oblicz.

a) $16^{\frac{1}{4}} \cdot 27^{\frac{2}{3}} : 25^{-0,5}$ b) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[5]{27} : \sqrt[15]{81}$

3. Oblicz.

$$\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{-\frac{1}{4}}}{4^{-1} \cdot \sqrt{8}}$$

4. Zapisz wyrażenie $\frac{a^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}} \cdot a^{-0,6}$ w postaci potęgi liczby a , wiedząc, że $a > 0$.

D 5. Wykaż, że liczba $\left(\left(2 - 3^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left(2 + 3^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right)^2$ jest całkowita.

$$\begin{aligned} 5. \left(\left(2 - 3^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left(2 + 3^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right)^2 &= \left(\left(2 - 3^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right)^2 + 2 \cdot \left(2 - 3^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(2 + 3^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\left(2 + 3^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right)^2 = \\ &= \left(2 - 3^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} + 2 \cdot \left(\left(2 - 3^{\frac{1}{2}} \right) \left(2 + 3^{\frac{1}{2}} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} + \left(2 + 3^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} = \frac{1}{2 - 3^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2 + 3^{\frac{1}{2}}} + 2 \cdot (4 - 3)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2 + 3^{\frac{1}{2}} + 2 - 3^{\frac{1}{2}}}{\left(2 - 3^{\frac{1}{2}} \right) \left(2 + 3^{\frac{1}{2}} \right)} + 2 \cdot 1 = \frac{4}{4 - 3} + 2 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10.15. \left(\frac{3^{0,6} + 3^{-0,6}}{3^{0,6} - 3^{-0,6}} + \frac{3^{0,6} - 3^{-0,6}}{3^{0,6} + 3^{-0,6}} - 2 \right)^{-1} &= \left(\frac{(3^{0,6} + 3^{-0,6})^2 + (3^{0,6} - 3^{-0,6})^2 - 2(3^{0,6} - 3^{-0,6})(3^{0,6} + 3^{-0,6})}{(3^{0,6} - 3^{-0,6})(3^{0,6} + 3^{-0,6})} \right)^{-1} = \\ &= \frac{3^{1,2} - 3^{-1,2}}{3^{1,2} + 2 \cdot 3^{0,6} \cdot 3^{-0,6} + 3^{-1,2} + 3^{1,2} - 2 \cdot 3^{0,6} \cdot 3^{-0,6} - 3^{-1,2} - 2(3^{1,2} - 3^{-1,2})} = \frac{3^{1,2} - 3^{-1,2}}{4 \cdot 3^{-1,2}} = \frac{3^{-1,2}(3^{2,4} - 1)}{4 \cdot 3^{-1,2}} = \frac{3^{\frac{12}{5}} - 1}{4} \end{aligned}$$

10.12. a) ab^2 b) $a^{\frac{1}{2}}$ c) $a - b$
 d) $2a^2$

10.13. Patrz s. 82.

10.14. Patrz s. 82.

10.16. a) Nie. Wskazówka:

Rozważ iloraz potęg a^3 i a^2 .

b) Tak,

np. $(\sqrt{2})^{2n} = ((\sqrt{2})^2)^n = 2^n \in \mathbb{Q}$
 dla $n \in \mathbb{N}$.

Prosto do matury

1. F, F, P

2. a) 90 b) 3

3. 4

4. $a^{\frac{1}{30}}$

Kwadratura koła

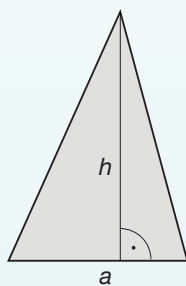
Zwrot „kwadratura koła” stał się dziś symbolem czegoś niemożliwego do wykonania. Jednak zanim udowodniono tę „niemożliwość”, przez wiele stuleci matematycy starali się problem kwadratury koła rozwiązać.

Kwadrat o polu danej figury

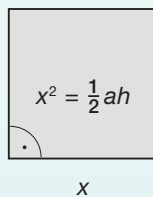
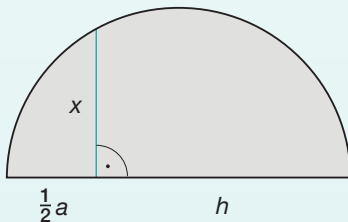
Kwadratura figury geometrycznej polega na konstrukcyjnym wyznaczeniu boku kwadratu o polu tej figury. Dla starożytnych Greków była to zwyczajna metoda obliczania pola figur. Problem kwadratury należało rozwiązać przy użyciu cyrkla i linijki bez podziałki. Taką zasadę wykonywania konstrukcji geometrycznych wprowadził Platon, jeden z najsłynniejszych filozofów starożytnej Grecji. Praktyczne zastosowanie tego zagadnienia spowodowało, że już w jego czasach rozwiązano problem kwadratury dowolnego wielokąta.

Kwadratura wielokąta

Oto kolejne kroki pokazujące, jak przeprowadzić kwadraturę dowolnego wielokąta.

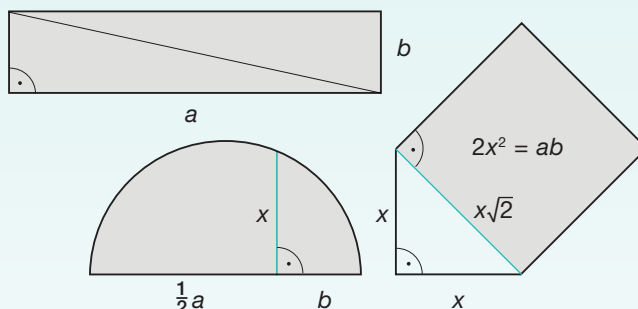


1 Z rysunków obok można odczytać, jak konstrukcyjnie przeprowadzić kwadraturę trójkąta o boku a i wysokości h . Zaznaczony w półkolu o średnicy $\frac{1}{2}a + h$ odcinek x to szukany bok kwadratu, którego pole jest równe polu trójkąta.



2 Aby wykonać kwadraturę prostokąta, wystarczy podzielić go na dwa trójkąty przystające i przypomnieć sobie twierdzenie Pitagorasa, dzięki któremu można skonstruować kwadrat o polu równym sumie pól dwóch danych kwadratów (rysunki na następnej stronie).





3 Kwadratura dowolnego wielokąta jest wykonalna, ponieważ każdy wielokąt można podzielić na skończoną liczbę trójkątów o rozłącznych wnętrzach. Taki sposób podziału nazywamy triangulacją wielokąta.

Niewykonalna konstrukcja

Prawdziwym wyzwaniem dla starożytnych matematyków okazała się **kwadratura koła**, czyli wyznaczenie boku kwadratu o polu danego koła. Jeśli koło ma promień r , to jego pole wynosi πr^2 . Zatem jeśli bok kwadratu oznaczmy jako a , to $a^2 = \pi r^2$, czyli $a = r\sqrt{\pi}$. Mając więc dany odcinek o długości r , powinniśmy **za pomocą cyrkla i linijki** skonstruować odcinek o długości $r\sqrt{\pi}$. Jest to zadanie niewykonalne, a winę za to ponosi liczba π . Pełny dowód niewykonalności konstrukcji odcinka o długości $\sqrt{\pi}$ został podany dopiero pod koniec XIX wieku.

Przybliżenia liczby π

Zanim udowodniono niewykonalność kwadratury koła, wielu matematykom wydawało się, że zagadnienie to rozwiązali. Konstruowali kwadraty o polach coraz bardziej zbliżonych do pola wyjściowego koła, jednak ich wyniki były obarczone pewnym błędem. Im mniejszy był ten błąd, im bliższe sobie były pola koła i kwadratu, tym dokładniej wyznaczano liczbę π : od przyjęcia przez Babilończyków (ok. 2000 r. p.n.e.), że $\pi = 3$, przez obliczenie wartości π z dokładnością do 35 miejsc po przecinku przez holenderskiego matematyka **Ludolfa van Ceulena** w 1610 r. (stąd liczbę π nazywa się czasem ludolfiną), aż po dzisiejsze komputerowe wyznaczenie π z dokładnością do miliona cyfr po przecinku. Warto wspomnieć, że autorem bardzo dokładnej, a jednocześnie prostej technicznie kwadratury koła jest **Adam Adamandy Kochański**, nadworny matematyk Jana III Sobieskiego.



11. Pojęcie logarytmu

Umiejętności:

- wykorzystywanie definicji logarytmu

Wiemy, że liczba a^w jest dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby rzeczywistej w jednoznacznie określona. Inaczej mówiąc, jeżeli założymy, że $a, w \in \mathbf{R}$ i $a > 0$, to istnieje dokładnie jedna liczba $b \in \mathbf{R}$, dla której zachodzi równość:

$$a^w = b$$

Z własności działań na potęgach wynika ponadto, że skoro $a > 0$, to również $b > 0$. Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Gdy liczby a i b są dodatnie i $a \neq 1$, to istnieje dokładnie jedna taka liczba x , że $a^x = b$.

Dowód tego twierdzenia pominiemy – wymaga on znajomości bardziej zaawansowanej matematyki.

Liczbę x można czasem wyznaczyć w prosty sposób, np.:

- jeśli $2^x = 8$, to $x = 3$, bo $2^3 = 8$,
- jeśli $3^x = \frac{1}{3}$, to $x = -1$, bo $3^{-1} = \frac{1}{3}$,
- jeśli $5^x = \sqrt{5}$, to $x = \frac{1}{2}$, bo $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$.

Najczęściej jednak wyznaczenie wykładnika takiej potęgi jest zadaniem trudnym. Możemy na przykład znajdować coraz dokładniejsze przybliżenia liczby x spełniającej równanie $2^x = 3$, posługując się kalkulatorem, ale dokładnie jej nie wyznaczymy, bo x jest liczbą niewymierną.

Liczbę x wyróżniono nowym określeniem.

Definicja

Logarytmem przy podstawie a ($a > 0$ i $a \neq 1$) liczby b ($b > 0$) nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść liczbę a , aby otrzymać liczbę b .

$$\log_a b = c, \text{ gdy } a^c = b \text{ i } a > 0, a \neq 1, b > 0$$

Liczbę b nazywamy **liczbą logarytmowaną**.

ZZ i MKP

temat 1.10

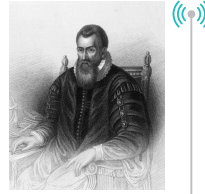
Multiteka

• Logarytmy

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.11

Generator
testów i sprawdzianów

Twórcą logarytmów jest szkocki matematyk John Napier (Neper) (1550–1617). W pracy *Opis zadziwiających tablic logarytmów* (opublikowanej w 1620 r.) podał opis i własności logarytmów oraz szereg ich zastosowań, przede wszystkim do upraszczania skomplikowanych rachunków, wykonywanych np. dla potrzeb astronomii.



Liczba x spełniająca równanie $2^x = 3$ jest więc logarytmem przy podstawie 2 liczby 3. Zapisujemy ją $x = \log_2 3$. Jej wartość to:

$$\log_2 3 = 1,5849625\dots$$

Podobnie:

$$\log_3 2 = 0,6309297\dots, \quad \log_4 7 = 1,4036774\dots, \quad \log_{\sqrt{2}} 3 = 3,1699250\dots$$

Przykład 1

- a) Jeżeli $5^x = 7$, to $x = \log_5 7$.
 b) Jeżeli $4^x = 9$, to $x = \log_4 9$.
 c) Jeżeli $3^x = 17$, to $x = \log_3 17$.
 d) Jeżeli $(\sqrt{13})^x = 2$, to $x = \log_{\sqrt{13}} 2$.

Logarytmy wielu liczb są liczbami wymiernymi (podobnie jak pierwiastki).

Przykład 2 ◀ zad. 11.5 a

- a) $\log_2 4 = 2$, bo $2^2 = 4$
 b) $\log_3 81 = 4$, bo $3^4 = 81$
 c) $\log_5 1 = 0$, bo $5^0 = 1$
 d) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$, bo $2^{-2} = \frac{1}{4}$
 e) $\log_4 2 = \frac{1}{2}$, bo $4^{\frac{1}{2}} = 2$
 f) $\log_7 7 = 1$, bo $7^1 = 7$

Przykład 3 ◀ zad. 11.5 d

Obliczmy podany logarytm.

a) $\log_{\sqrt{5}} (5^{\sqrt[3]{5}}) = x$ b) $\log_{3\sqrt{27}} (9^{\sqrt[5]{3}})$

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_{\sqrt{5}} (5^{\sqrt[3]{5}}) &= x \\ (\sqrt{5})^x &= 5^{\sqrt[3]{5}} \\ 5^{\frac{1}{2}x} &= 5^{1+\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{2}x &= \frac{4}{3} \\ x &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Odp.: } \log_{\sqrt{5}} (5^{\sqrt[3]{5}}) = \frac{8}{3}$$

← oznaczamy literą x szukaną liczbę

← korzystamy z definicji logarytmu

← doprowadzamy potęgi do tej samej podstawy

← porównujemy wykładniki

◀ 11.5. Oblicz.

a) $\log_5 25, \log_7 343, \log_6 1296, \log_3 729, \log_2 1024, \log_4 64$

Odp.: 2, 3, 4, 6, 10, 3

◀ 11.5. Oblicz.

d) $\log_{\sqrt{2}} 32, \log_{\sqrt{6}} \frac{1}{36}, \log_{\sqrt[3]{3}} 27, \log_{2\sqrt{2}} 16, \log_{27\sqrt[4]{3}} 9, \log_{7\sqrt[4]{49}} \frac{1}{7}$

Odp.: 10, -4, 9, $2\frac{2}{3}$, $\frac{8}{13}$, $-\frac{2}{3}$

◀11.6. Oblicz x .

a) $\log_3 x = 2$

b) $\log_5 x = 1$

c) $\log_{11} x = 0$

d) $\log x = \frac{1}{3}$

e) $\log_{0,1} x = -3$

f) $\log_{\sqrt{3}} x = 6$

g) $\log_4 x = -1$

h) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4$

i) $\log_{25} x = \frac{1}{2}$

Odp.: a) 9 b) 5 c) 1 d) $\sqrt[3]{10}$

e) 1000 f) 27 g) $\frac{1}{4}$ h) $\frac{1}{16}$ i) 5

◀11.8. Oblicz.

a) $10^{\log 5}$

b) $5^{\log_5 4}$

c) $9^{\log_3 15}$

d) $2^{\log_2 64}$

e) $3^{\log_3 15}$

f) $49^{\log_7 3}$

Odp.: a) 5 b) 4 c) 225 d) 64

e) 15 f) 9

b) $\log_{3\sqrt{27}}(9\sqrt[5]{3}) = x$

$$(3\sqrt{27})^x = 9\sqrt[5]{3}$$

$$\left(3 \cdot 27^{\frac{1}{2}}\right)^x = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{5}}$$

$$\left(3^{1+\frac{3}{2}}\right)^x = 3^{2+\frac{1}{5}}$$

$$\frac{5}{2}x = \frac{11}{5}$$

$$x = \frac{22}{25}$$

Odp.: $\log_{3\sqrt{27}}(9\sqrt[5]{3}) = \frac{22}{25}$

← oznaczamy literą x szukaną liczbę

← korzystamy z definicji logarytmu

← wykonujemy działania na potęgach

← doprowadzamy potęgi do tej samej podstawy

← porównujemy wykładniki

Przykład 4 ◀ zad. 11.6Wyznamy liczbę x , wiedząc, że $\log_4 x = -2$.**Rozwiązanie**Zgodnie z definicją logarytmu -2 jest wykładnikiem potęgi, do której należy podnieść liczbę 4, żeby otrzymać x , czyli $x = 4^{-2} = \frac{1}{16}$.

Odp.: $x = \frac{1}{16}$

Zapisane poniżej własności wynikają bezpośrednio z definicji logarytmu.

WniosekDla każdego $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz $b > 0$:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Przykład 5 ◀ zad. 11.8

a) $3^{\log_3 9} = 9$

c) $(\sqrt{7})^{2\log_7 10} = ((\sqrt{7})^2)^{\log_7 10} = 7^{\log_7 10} = 10$

b) $5^{\log_5 2} = 2$

d) $4^{\log_2 7} = (2^2)^{\log_2 7} = 2^{2 \cdot \log_2 7} = (2^{\log_2 7})^2 = 7^2 = 49$

Przykład 6 ◀ zad. 11.7

Obliczmy $\log_{\sqrt{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że liczbą logarytmowaną b logarytmu przy podstawie $\sqrt{2}$ jest $b = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$.

$$\log_{\sqrt{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = \log_{\sqrt{2}} 2 = 2$$

Odp.: $\log_{\sqrt{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2$

Liczbę $\log_a \log_m b$ czytamy „logarytm przy podstawie a logarytmu przy podstawie m z b ”.



$$\begin{aligned} \leftarrow \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} &= 2, \text{ bo } \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \\ \leftarrow \text{bo } (\sqrt{2})^2 &= 2 \end{aligned}$$

Przykład 7 ◀ zad. 11.9

Obliczmy $36^{1+\log_6 2}$.

Rozwiązanie

Zastosujemy wzory dotyczące działań na potęgach.

$$\begin{aligned} 36^{1+\log_6 2} &= 36 \cdot 36^{\log_6 2} = \\ &= 36 \cdot (6^2)^{\log_6 2} = 36 \cdot 6^{2\log_6 2} = 36 \cdot (6^{\log_6 2})^2 = \\ &= 36 \cdot 2^2 = 36 \cdot 4 = 144 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leftarrow a^{m+n} &= a^m \cdot a^n \\ \leftarrow \text{dwukrotnie stosujemy wzór} \\ a^{m \cdot n} &= (a^m)^n \end{aligned}$$

Odp.: $36^{1+\log_6 2} = 144$

Ważną rolę wśród logarytmów pełnią logarytmy przy podstawie 10, czyli **logarytmy dziesiętne**. W zapisie logarytmu dziesiętnego pomijamy liczbę 10 i np. logarytm przy podstawie 10 liczby 5 zapisujemy: $\log 5$.

Przykład 8

- a) $\log 100 = 2$, bo $10^2 = 100$ c) $\log 0,001 = -3$, bo $10^{-3} = 0,001$
 b) $\log 1 = 0$, bo $10^0 = 1$ d) $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$, bo $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

Większość kalkulatorów naukowych pozwala obliczać logarytm dziesiętny dowolnej dodatniej liczby x oraz wykonywać operację odwrotną – podnosić 10 do potęgi x . Trzeba tylko pamiętać, że są to wyniki przybliżone. Na przykład, z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku, $\log 17 \approx 1,23$, a $10^{1,23} \approx 16,98$.

◀ 11.7. Oblicz.

- a) $\log_2 \log_3 81$
 b) $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 8$
 c) $\log_{\sqrt{2}} \log_3 9$
 d) $\log_{\frac{1}{9}} \log_4 64$
 e) $\log_{\sqrt{3}} \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$
 f) $\log_{\sqrt{5}} \log_2 32$
 g) $\log_{\frac{3}{2}} \log_{25} 125$
 h) $\log_9 \log_4 \sqrt[3]{4}$
 i) $\log_2 \log_3 \sqrt[4]{3}$

Odp.: a) 2 b) -1 c) 2 d) $-\frac{1}{2}$
 e) 2 f) 2 g) 1 h) $-\frac{1}{2}$ i) -2

◀ 11.9. Oblicz.

- a) $2^{1+\log_2 3}$
 b) $6^{2-\log_6 3}$
 c) $3^{3+\log_3 2}$
 d) $8^{1-\log_2 3}$
 e) $25^{1-\log_5 2}$
 f) $27^{\frac{5-\log_3 27}{6}}$

Odp.: a) 6 b) 12 c) 54 d) $\frac{8}{27}$
 e) $\frac{25}{4}$ f) 3

◀11.14. Wyznacz liczbę decybeli dla odgłosu motocykla pozbawionego tłumika. Natężenie dźwięku wydawanego przez ten motocykl wynosi $0,01 \text{ W/m}^2$.

Odp.: 100 dB

◀11.13. Skala Richtera służy do określania (w stopniach skali) siły trzęsień ziemi. Siła ta opisana jest za pomocą wzoru $R = \log \frac{A}{A_0}$, w którym A oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach, $A_0 = 10^{-4} \text{ cm}$ jest stałą, nazywaną amplitudą wzorcową.

a) Ile stopni w skali Richtera ma trzęsienie ziemi o amplitudzie $A = 10 \text{ cm}$?

b) W listopadzie 2013 r. w Chile miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 6,6 w skali Richtera. Oblicz amplitudę tego trzęsienia ziemi.

Odp.: a) 5 b) $10^{2,6} \approx 4 \text{ [m]}$

Logarytmy mają wiele zastosowań.

Poziom natężenia dźwięku mierzymy w dB (decybelach). Liczbę decybeli N oblicza się według wzoru $N = 10 \log \frac{I}{I_0}$, w którym I to natężenie danego dźwięku mierzone w W/m^2 (watach na metr kwadratowy), a I_0 to natężenie dźwięku na progu słyszalności dla ucha ludzkiego wynoszące 10^{-12} (jedna bilionowa) W/m^2 .

Przykład 9 ◀ zad. 11.14

Natężenie dźwięku piły łańcuchowej wynosi $0,1 \text{ W/m}^2$. Wyznaczymy liczbę decybeli dla odgłosu tej piły.

Rozwiązanie

Podstawiamy do wzoru $I = 0,1$.

$$N = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} = 10 \cdot \log \frac{0,1}{10^{-12}} = 10 \cdot \log \frac{10^{-1}}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^{11} = 10 \cdot 11 = 110$$

Odp.: Poziom natężenia dźwięku dla odgłosu piły łańcuchowej wynosi 110 dB.

Przykład 10 ◀ zad. 11.13

W tabeli podano gęstość zaludnienia kilku wybranych państw.

Wielkości przedstawione w środkowej kolumnie tabeli są bardzo zróżnicowane. Trudno byłoby je na przykład przedstawić na czytelnym diagramie. Dlatego w prawej kolumnie umieściliśmy **logarytmy dziesiętne** wielkości ze środkowej kolumny. Wszystkie podane tam liczby mieszczą się w przedziale $(-2; 5)$. Jeżeli wiemy, że logarytm dziesiętny gęstości zaludnienia Angoli jest równy 0,94, a Martyniki 2,58, to należy się spodziewać, że Angola w przeciwieństwie do Martyniki nie należy do

grona państw gęsto zaludnionych. Gdy chcemy się dowiedzieć, ile osób przypada w tych państwach na 1 km^2 , wyznaczamy: $10^{0,94} \approx 8,71$ i $10^{2,58} \approx 380$.

Państwo	Gęstość zaludnienia	
	liczba osób/ km^2	
Monako	16 500	4,22
Singapur	6650	3,82
Martynika	?	2,58
Polska	123	2,09
Szwecja	19	1,28
Angola	?	0,94
Mongolia	1,73	0,24
Grenlandia	0,03	-1,52

Operację zamiany wielkości fizycznych lub chemicznych na ich logarytmy dziesiętne stosuje się między innymi przy określaniu skali kwasowości i zasadowości roztworów chemicznych (skala pH). Dzięki temu informacje podane na przykład na kosmetykach są bardziej czytelne. Napis „pH = 5,5” umieszczony na opakowaniu szamponu wygląda „mniej groźnie” niż „pH = 316 000” ($10^{5,5} \approx 316 000$).

Zadania

W każdym z zadań 11.1–11.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

11.1. Wskaż wartość wyrażenia $\log_{0,16} 0,4 + \log_{\frac{1}{9}} 3$.

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. 0

11.2. Wskaż liczbę niewymierną.

- A. $\log_4 32$ B. $\log_{27} \sqrt[3]{9}$ C. $\log_5 \sqrt{5}$ D. $\log_6 \sqrt{12}$

11.3. Wskaż liczbę największą.

- A. $\log_7 \frac{1}{7}$ B. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}$ C. $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5}$ D. $\log_3 \sqrt[3]{3}$

11.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. $\log_2 \frac{1}{4} < 0$ B. $\log_{\frac{1}{36}} \frac{1}{6} < 0$ C. $\log_{\frac{1}{3}} 9 < 0$

11.5. Oblicz.

- a) $\log_5 25$, $\log_7 343$, $\log_6 1296$, $\log_3 729$, $\log_2 1024$, $\log_4 64$
 b) $\log_8 2$, $\log_{81} 3$, $\log_{27} 9$, $\log_{25} \frac{1}{5}$, $\log_{69} \frac{1}{69}$, $\log_4 \frac{1}{64}$
 c) $\log_5 \sqrt{5}$, $\log_3 (3\sqrt{3})$, $\log_2 (4\sqrt[3]{16})$, $\log_3 (\frac{1}{3}\sqrt[3]{3})$, $\log_2 (0,125\sqrt[6]{64})$, $\log \sqrt{0,001}$
 d) $\log_{\sqrt{2}} 32$, $\log_{\sqrt{6}} \frac{1}{36}$, $\log_{\sqrt[3]{3}} 27$, $\log_{2\sqrt{2}} 16$, $\log_{27\sqrt[4]{3}} 9$, $\log_{7\sqrt[4]{49}} \frac{1}{7}$
 e) $\log_{0,2} 0,04$, $\log_{0,25} 0,5$, $\log_{0,2} 0,008$, $\log_{0,5} 0,125$, $\log_{0,0016} 5$, $\log_{0,11} 0,0121$

11.6. Oblicz x .

- a) $\log_3 x = 2$ d) $\log x = \frac{1}{3}$ g) $\log_4 x = -1$
 b) $\log_5 x = 1$ e) $\log_{0,1} x = -3$ h) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4$
 c) $\log_{11} x = 0$ f) $\log_{\sqrt{3}} x = 6$ i) $\log_{25} x = \frac{1}{2}$

11.7. Oblicz.

- a) $\log_2 \log_3 81$ d) $\log_{\frac{1}{9}} \log_4 64$ g) $\log_{\frac{3}{2}} \log_{25} 125$
 b) $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 8$ e) $\log_{\sqrt{3}} \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$ h) $\log_9 \log_4 \sqrt[3]{4}$
 c) $\log_{\sqrt{2}} \log_3 9$ f) $\log_{\sqrt{5}} \log_2 32$ i) $\log_2 \log_3 \sqrt[4]{3}$

Odpowiedzi i rozwiązania

11.1. D

11.2. D

11.3. B

11.4. P, F, P

11.5. a) 2, 3, 4, 6, 10, 3

b) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{2}$, -1 , -3

c) $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$, -2 , $-1\frac{1}{2}$

d) 10, -4 , 9, $2\frac{2}{3}$, $\frac{8}{13}$, $-\frac{2}{3}$

e) 2, $\frac{1}{2}$, 3, 3, $-\frac{1}{4}$, 2

11.6. a) 9 **b)** 5 **c)** 1 **d)** $\sqrt[3]{10}$

e) 1000 **f)** 27 **g)** $\frac{1}{4}$ **h)** $\frac{1}{16}$ **i)** 5

11.7. a) 2 **b)** -1 **c)** 2 **d)** $-\frac{1}{2}$

e) 2 **f)** 2 **g)** 1 **h)** $-\frac{1}{2}$ **i)** -2

11.8. a) 5 b) 4 c) 225 d) 64
e) 15 f) 9

11.9. a) 6 b) 12 c) 54 d) $\frac{8}{27}$
e) $\frac{25}{4}$ f) 3

11.10. Daną liczbę podstawiamy do lewej strony równania i obliczamy wartość otrzymanego wyrażenia.

a) $\log_2(2^3 + 8) = \log_2 16 = 4$, zatem liczba 3 jest rozwiązaniem równania $\log_2(2^x + 8) = 4$.

b) $\log_5 \log_4(7 - 3) = \log_5 \log_4 4 = \log_5 1 = 0$, zatem liczba 7 jest rozwiązaniem równania $\log_5 \log_4(x - 3) = 0$.

11.11. $\log_3 9 - \log_{36} 6 - \log_7 7 = 2 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} < 1$

11.12. a) $\frac{1}{2}$ b) $\sqrt{11}$

11.13. a) 5 b) $10^{2,6} \approx 4$ [m]

11.14. 100 dB

Prosto do matury

1. F, F, F

2. $2\frac{1}{4}$

3. $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9}$, $\log_{0,5} 4$,
 $\log \sqrt{100\,000}$, $\log \frac{2}{3} \frac{8}{27}$

4. $\frac{1}{2}$

5. 1

11.8. Oblicz.

a) $10^{\log 5}$
b) $5^{\log_5 4}$

c) $9^{\log_3 15}$
d) $2^{\log_2 64}$

e) $3^{\log_3 15}$
f) $49^{\log_7 3}$

11.9. Oblicz.

a) $2^{1+\log_2 3}$

c) $3^{3+\log_3 2}$

e) $25^{1-\log_5 2}$

b) $6^{2-\log_6 3}$

d) $8^{1-\log_2 3}$

f) $27^{\frac{5-\log_3 27}{6}}$

11.10. Wykaż, że rozwiązaniem równania jest podana obok liczba.

a) $\log_2(2^x + 8) = 4$, 3

b) $\log_5 \log_4(x - 3) = 0$, 7

11.11. Wykaż, że liczba $\log_3 9 - \log_{36} 6 - \log_7 7$ jest mniejsza od 1.

11.12. Oblicz x .

a) $\log_{\sqrt{x}} \frac{1}{8} = 6$

b) $\log_x 11 = 2$

11.13. Skala Richtera służy do określania (w stopniach skali) siły trzęsień ziemi. Siła ta opisana jest za pomocą wzoru $R = \log \frac{A}{A_0}$, w którym A oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach, $A_0 = 10^{-4}$ cm jest stałą, nazywaną amplitudą wzorcową.

a) Ile stopni w skali Richtera ma trzęsienie ziemi o amplitudzie $A = 10$ cm?

b) W listopadzie 2013 r. w Chile miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 6,6 w skali Richtera. Oblicz amplitudę tego trzęsienia ziemi.

11.14. Wyznacz liczbę decybeli dla odgłosu motocykla pozbawionego tłumika. Natężenie dźwięku wydawanego przez ten motocykl wynosi $0,01 \text{ W/m}^2$.

Prosto do matury



1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Liczba $10^{2-\log 20} - 5^{\log_5 4}$ jest

A. parzysta.

B. złożona.

C. pierwsza.

2. Oblicz $4^{\log_2 3 - 1}$.

3. Ustaw liczby: $\log_{0,5} 4$, $\log \sqrt{100\,000}$, $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9}$, $\log \frac{2}{3} \frac{8}{27}$ w kolejności rosnącej.

4. Oblicz $\log_x \sqrt{3}$, wiedząc, że $\log_9 x = \frac{1}{2}$.

5. Wiedząc, że $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$, $\log_c x = 6$, oblicz $\log_{abc} x$.

12. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–30 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszyte.

1. Wskaż wyrażenie, które jest zapisem iloczynu ilorazu liczb a, b i pierwiastka stopnia trzeciego z różnicy kwadratów tych liczb.

- A. $\frac{b}{a} \cdot \sqrt[3]{a^2 - b^2}$ B. $\frac{a \cdot b}{\sqrt[3]{a^2 - b^2}}$ C. $\frac{a}{b} \cdot \sqrt[3]{a^2 - b^2}$ D. $\frac{a}{b} \cdot \sqrt[3]{a^2 + b^2}$

2. Wskaż wśród podanych liczb tę, która ma najwięcej dzielników naturalnych.

- A. 14 B. 50 C. 101 D. 125

3. Wskaż wyłączony przed nawias czynnik W , jeżeli $2a^3 + 4a^2b + 2ab^2 = W(a+b)^2$.

- A. a B. 2 C. ab D. $2a$

4. Wskaż wyłączony przed nawias czynnik W , jeżeli

$$3\sqrt{2}(x-1) + 6\sqrt{2}(x+5) - 3\sqrt{2}x = W(2x+9).$$

- A. $W = \sqrt{2}$ B. $W = -\sqrt{2}$ C. $W = 3\sqrt{2}$ D. $W = -3\sqrt{2}$

5. Wskaż parę liczb względnie pierwszych.

- A. 13 i 52 B. 27 i 64 C. 15 i 108 D. 7 i 91

6. Wskaż liczbę równą liczbie $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2$.

- A. $8\sqrt{3}$ B. $-2\sqrt{3}$ C. 2 D. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

7. Wskaż liczbę równą liczbie $\sqrt[4]{1\frac{17}{64}} \cdot \sqrt[4]{4}$.

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. 1

8. Wskaż liczbę równą liczbie $\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - 2\sqrt{3}$.

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ B. -2 C. $8\sqrt{3}$ D. 6

9. Wskaż liczbę równą liczbie $\frac{\frac{1}{2} \cdot 4^{-1} \cdot 16}{2^{-3} \cdot \sqrt{64} \cdot 8 \cdot 4^0}$.

- A. 4 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. 2

Odpowiedzi i rozwiązania

1. C

2. B

3. D

4. C

5. B

6. C

7. A

8. D

9. C

10. B
10. Ile razy liczba $0,312^2$ jest mniejsza od liczby 312^2 ?
A. 100 000 razy B. 1 000 000 razy C. 1000 razy D. 10 000 razy
11. D
11. Masę Słońca równą $1,989 \cdot 10^{33}$ g można wyrazić w kg jako
A. $198,9 \cdot 10^{27}$. B. $1,989 \cdot 10^{29}$. C. $19,89 \cdot 10^{31}$. D. $1989 \cdot 10^{27}$.
12. C
12. Wskaż liczbę, która ma skończone rozwinięcie dziesiętne.
A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{7}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{5}{12}$
13. B
13. Wskaż liczbę równą liczbie $\frac{1}{30}$.
A. 0,03 B. 0,0(3) C. 0,(30) D. 0,(03)
14. A
14. Wskaż wyrażenie równe wyrażeniu $3(x-2) - [2(3x-1) - 3]$.
A. $-1 - 3x$ B. $-3x$ C. $1 - 3x$ D. $2x - 1$
15. A
15. Wskaż wyrażenie równe wyrażeniu $(2a+b)(a-b) - 3a(a+b) + 4ab$.
A. $-a^2 - b^2$ B. $a^2 - b^2$ C. $2a - b^2$ D. $a^2 + b^2$
16. C
16. Ile złotych reszty z 20 zł otrzymał Waldek, który kupił 4 ciastka po a złotych za sztukę i 2 butelki soku po b złotych za butelkę?
A. $20 - 4b - 2a$ B. $2(2a - b - 10)$ C. $2(10 - 2a - b)$ D. $2(10 + 2a - b)$
17. B
17. Wskaż wyrażenie równe wyrażeniu $2x^2 + 16xy + 32y^2$.
A. $(2x + 4y)^2$ B. $2(x + 4y)^2$ C. $2(x + 8y)^2$ D. $2(x + 16y)^2$
18. A
18. Zmieszano 1,5 litra soku jabłkowego z m litrami soku bananowego, a następnie przelano mieszaninę, napełniając n szklanek. Ile litrów soku mieści się w czterech szklankach?
A. $\frac{2(3+2m)}{n}$ B. $\frac{4(1,5+n)}{m}$ C. $3(1,5m+n)$ D. $\frac{2(3+m)}{n}$
19. C
19. Wskaż liczbę, która nie jest przybliżeniem liczby $\sqrt{8} = 2,8284271\dots$
A. 3 B. 2,8 C. 2,82 D. 2,828
20. B
20. Wskaż wyrażenie równe wyrażeniu $4p^2 - 12pq + 9q^2$.
A. $(4p - 9q)^2$ B. $(2p - 3q)^2$ C. $(2p + 3q)^2$ D. $(2p - 9q)^2$
21. B
21. Wskaż liczbę równą liczbie $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{20} + \sqrt{125}}{\sqrt{5}}$.
A. 5 B. 4 C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. -4

22. Wskaż liczbę, która jest różna od pozostałych podanych.

- A. $2\sqrt{32}$ B. $4\sqrt{8}$ C. $8\sqrt{2}$ D. $16\sqrt{2}$

22. D

23. Wskaż liczbę równą liczbie $\frac{6}{2\sqrt{3}-3}$.

- A. $6\sqrt{3}+3$ B. $2(2\sqrt{3}-3)$ C. $4\sqrt{3}+6$ D. $4\sqrt{3}-3$

23. C

24. Wskaż liczbę większą od 3.

- A. $\sqrt{8}$ B. $\sqrt[3]{28}$ C. $\sqrt[4]{78}$ D. $\sqrt[5]{128}$

24. B

25. Wskaż liczbę, która jest zaokrągleniem liczby 7,687986.

- A. 7,6 B. 7,68 C. 7,688 D. 7,6879

25. C

26. Wskaż wartość wyrażenia $(2x-y)(2x+y)-3(x-y)^2-2x(3y+x)$ dla $x=\sqrt{3}$ i $y=\sqrt{2}$.

- A. 11 B. -11 C. -10 D. 12

26. B

27. Wskaż liczbę równą połowie liczby 4^8 .

- A. 4^6 B. 2^8 C. 2^{15} D. 4^4

27. C

28. Wskaż liczbę równą $\frac{1}{125}$ liczby 25^4 .

- A. $\left(\frac{1}{5}\right)^5$ B. 5^5 C. 5^4 D. 25^2

28. B

29. Wskaż nierówność fałszywą.

- A. $\log_2 8 < 4$ B. $\log_3 \frac{1}{27} < -2$ C. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} < -3$ D. $\log_2 \frac{1}{16} > -5$

29. C

30. Wskaż liczbę równą liczbie $\frac{4^{28}+4^{27}}{4^{27}+4^{26}}$.

- A. 16 B. 8 C. 4 D. 1

30. C

W zadaniach 31–48 oceń prawdziwość podanych zdań.

31. Liczba 123 000 000 030 102 jest

- A. podzielna przez 4. B. podzielna przez 6. C. podzielna przez 9.

31. F, P, F

32. Liczba 10 000 062 jest

- A. pierwiastkiem kwadratowym z liczby naturalnej.
B. kwadratem liczby naturalnej.
C. sześcianem liczby naturalnej.

32. P, F, F. *Wskazówka:* Liczba 10 000 062 nie jest podzielna przez 4, zatem nie może być kwadratem żadnej liczby parzystej.

33. P, F, P

34. P, P, F

35. F, F, F. *Wskazówka:* Jako kontrprzykład można wskazać np. liczby 6, 18, 30 (lub ogólniej liczby postaci $12k + 6$).

36. P, P, P

37. P, P, P

38. F, P, P. *Wskazówka:* Jeżeli przyjmiemy, że

$$m = \sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}, \text{ to } m^2 = 2.$$

39. P, F, F

40. F, P, F

33. Pokój ma a metrów szerokości i b metrów długości, drzwi mają szerokość 80 cm. Niech p oznacza długość listwy podłogowej mierzonej w metrach. Zatem
 A. $p = 2(a + b) - 0,8$. B. $p = a + b - 0,8$. C. $p = 2(a + b - 0,4)$.

34. W pewnej firmie $\frac{1}{3}$ wszystkich zatrudnionych ma średnie wykształcenie, $\frac{3}{4}$ pozostałych ma wyższe wykształcenie, a 20 osób ma wykształcenie podstawowe.
 A. W tej firmie pracuje ponad 100 osób.
 B. W tej firmie pracuje 120 osób.
 C. Na podstawie danych nie można podać liczby zatrudnionych w tej firmie osób.

35. O trzech różnych dodatnich liczbach naturalnych a , b i c wiadomo, że sumy dwóch dowolnych z nich, czyli $a + b$, $a + c$ i $b + c$, są podzielne przez 12.
 A. Każda z liczb a , b i c jest podzielna przez 12.
 B. Co najmniej jedna z liczb a , b i c jest podzielna przez 12.
 C. Suma $a + b + c$ jest podzielna przez 12.

36. Suma dwóch liczb jest równa $\sqrt{6}$, a ich różnica wynosi $\sqrt{2}$. Różnica kwadratów tych liczb jest
 A. liczbą niewymierną.
 B. wielokrotnością liczby $\sqrt{3}$.
 C. większa od 3.

37. Istnieje liczba niewymierna, w której rozwinięciu dziesiętnym po przecinku występują
 A. tylko jedynki i dwójki.
 B. na co trzeciej pozycji zera.
 C. do setnej pozycji tylko siódemki.

* 38. Liczba $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} - \sqrt{2}$ jest
 A. niewymierna. B. wymierna. C. równa 0.

39. Liczba $\sqrt{27 - 10\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ jest
 A. wymierna. B. większa od 5. C. mniejsza od 5.

40. O liczbie $p = \sqrt{19 + 8\sqrt{3}} + \sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$ wiadomo, że
 A. p jest liczbą niewymierną.
 B. $p = 8$.
 C. $p = 2\sqrt{19}$.

41. LiczbaA. $a = \log_{\sqrt{2}} \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ jest parzysta.B. $b = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{49 \cdot 7}}{\sqrt{\sqrt{49}}}$ jest liczbą pierwszą.C. $c = \frac{1}{2\sqrt{3}-2}$ jest wymierna.**41.** P, P, F**42.** Niech a oznacza pewną dodatnią liczbę rzeczywistą.A. Połowa kwadratu liczby a jest większa od kwadratu połowy liczby a .B. Połowa odwrotności liczby a jest większa od odwrotności połowy liczby a .C. Odwrotność połowy pierwiastka kwadratowego z liczby a jest większa od pierwiastka kwadratowego z połowy odwrotności liczby a .**42.** P, F, P**43.** Załóżmy, że $\log_k m = p$. ZatemA. $k^m = p$.B. $k^p = m$.C. $p^m = k$.**43.** F, P, F**44.** LiczbaA. $a = 3^{\log_3 5}$ jest równa 5.B. $b = \log_7 7^5$ jest równa 5.C. $c = \log_{\sqrt{5}}(5\sqrt{5})$ jest równa 5.**44.** P, P, F**45.** LiczbaA. $a = \log_4 8$ jest wymierna.B. $b = \log_2 \sqrt{2}$ jest wymierna.C. $c = \log_{\sqrt{3}}(3\sqrt{3})$ jest wymierna.**45.** P, P, P**46.** Liczba $p = \frac{2}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$. ZatemA. $p = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$.B. $p = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.C. $p = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}$.**46.** P, F, P**47.** Liczba $k = (\sqrt[5]{7})^3$. ZatemA. $k = 7^{\frac{5}{3}}$.B. $k = 7^{\frac{3}{5}}$.C. $k = 7^{0,6}$.**47.** F, P, P**48.** Liczba $a = 0, (4)$. ZatemA. a jest większe od $\frac{1}{3}$.B. a jest liczbą niewymierną.C. $a + \frac{2}{3} > 1$.**48.** P, F, P

49. a) $5x(x-6y)$ b) $3xy(3y+x)$
 c) $12pr(4p^2-3r+2)$
 d) $7mn(2m-3n+10)$

50. a) y^2 b) $4x^2$ c) $2\sqrt{6}xy$
 d) $5x^2$

51. a) $(x+6)^2$ b) $(10k-2)^2$
 c) $(ab+5)^2$ d) $(t\sqrt{3}+u\sqrt{2})^2$
 e) $(5p-6q)^2$ f) $(x-\frac{1}{3}y)^2$
 g) $(\frac{3}{4}a+2x)^2$ h) $(\frac{1}{2}a^2-2b^2)^2$

52. a) $(x-20)(x+20)$
 b) $(4a-5b)(4a+5b)$
 c) $(1-10cd)(1+10cd)$
 d) $(\frac{1}{5}z+\frac{2}{3})(\frac{1}{5}z-\frac{2}{3})$

53. a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
 b) $B = \{-1, 1\}$
 c) $C = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
 d) $D = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}\}$

54. $2 \cdot 10^{-8} \text{ t}$

55. $3 \cdot 10^{10} \text{ km}$

56. a) $\frac{\sqrt{5}-2}{3}$ b) $1\frac{1}{2}$
 c) $\frac{5(\sqrt{3}-1)}{4}$ d) $\frac{\sqrt{7}+2}{12}$

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

49. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

- a) $5x^2-30xy$ c) $48p^3r-36pr^2+24pr$
 b) $9xy^2+3x^2y$ d) $14m^2n-21mn^2+70mn$

50. Uzupełnij sumę algebraiczną takim składnikiem, aby można było ją zapisać w postaci iloczynu za pomocą wzoru na kwadrat sumy lub kwadrat różnicy.

- a) $9x^2-6xy+?$ c) $2x^2+?+3y^2$
 b) $?+20xy+25y^2$ d) $?+2\sqrt{5}xy+y^2$

51. Przedstaw wyrażenie w postaci iloczynu za pomocą wzoru na kwadrat sumy lub kwadrat różnicy.

- a) $x^2+12x+36$ e) $25p^2-60pq+36q^2$
 b) $100k^2-40k+4$ f) $x^2-\frac{2}{3}xy+\frac{1}{9}y^2$
 c) $a^2b^2+10ab+25$ g) $\frac{9}{16}a^2+3ax+4x^2$
 d) $3t^2+2\sqrt{6}tu+2u^2$ h) $\frac{1}{4}a^4-2a^2b^2+4b^4$

52. Przedstaw wyrażenie w postaci iloczynu.

- a) x^2-400 b) $16a^2-25b^2$ c) $1-100c^2d^2$ d) $-\frac{4}{9}+\frac{1}{25}z^2$

53. Wyznacz wszystkie elementy zbioru.

- a) $A = \{x: x \in \mathbf{N} \text{ i } x \leq 7\}$ c) $C = \{x: x \in \mathbf{Z} \text{ i } -2 \leq x < \sqrt{10}\}$
 b) $B = \{x: x = (-1)^{n+1} \text{ i } n \in \mathbf{N}\}$ d) $D = \{x: x = \frac{1}{n+1} \text{ i } n \in \mathbf{N} \text{ i } n < 9\}$

54. Jedna tabletkę pewnego preparatu witaminowego zawiera 20 mg cynku. Wyraż tę wielkość w tonach. Zapisz wynik w notacji wykładniczej.

55. Przyjmijmy, że każdy z 6 miliardów ludzi ma na głowie 100 tysięcy włosów o średniej długości 5 cm. Ile kilometrów zajęłyby te włosy ułożone jeden za drugim? Wynik podaj w notacji wykładniczej.

56. Usuń niewymierność z mianownika.

- a) $\frac{5-2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}$ b) $\frac{3\sqrt{2}-4\frac{1}{2}}{\sqrt{8}-3}$ c) $\frac{5}{2(\sqrt{3}+1)}$ d) $\frac{0,5}{2\sqrt{7}-4}$

57. Oblicz $\sqrt[3]{2^7 - 3^3 + 5^2 - 7^0}$.

58. Oblicz.

a) $\log_2 \log 100$

b) $\log_4 \log_{\sqrt{2}} 4$

c) $\log_{\frac{1}{2}} \log_{2\sqrt{2}} 64$

59. Oblicz x .

a) $\log_3 \sqrt{x} = \frac{1}{4}$

b) $\log_2 \sqrt{x+2} = \frac{1}{4}$

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

60. Oblicz.

a) $6 : \frac{1}{3} - 0,8 : \frac{1,5}{\frac{3}{2} \cdot 0,4 \cdot \frac{50}{1 : \frac{1}{2}}} + \frac{1}{4} + \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0,25}}{6 - \frac{46}{1 + 2,2 \cdot 10}}$

b) $\frac{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \frac{10}{2^4}\right] : (-2)^{-5}}{\left[\left(3\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot 3^0 - 1,25^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^{-1}}$

61. Wykonaj działania i zapisz wyrażenie $(2x-3)^2 + 2(x-3)^2 - (\sqrt{6}x-3)(\sqrt{6}x+3)$ w prostszej postaci.

62. Wyrażenie $\frac{a+2+\sqrt{a^2-4}}{a+2-\sqrt{a^2-4}} + \frac{a+2-\sqrt{a^2-4}}{a+2+\sqrt{a^2-4}}$ zapisz w prostszej postaci i oblicz jego wartość dla $a = \sqrt{7}$.

63. Wyrażenie $(x-2y)(x+2y) - 2(x+y)^2 + 2y(2x+y)$ zapisz w prostszej postaci i oblicz jego wartość dla $x = \sqrt{5}$ i $y = \sqrt{3}$.

64. Wiedząc, że liczby a i b są dodatnie, $ab = 18$ i $a^2 + b^2 = 108$, oblicz $a+b$.

D

65. Wykaż, że różnica czterocyfrowej liczby n i liczby, która powstała z liczby n w wyniku zapisania jej cyfr w odwrotnej kolejności, jest podzielna przez 9.

66. Iloczyn dwóch liczb naturalnych jest równy 588, a ich największym wspólnym dzielnikiem jest 7. Wyznacz te liczby.

67. Znajdź dwa tysiące dwudziestą cyfrę po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby $\frac{28}{111}$.

68. Przedstaw liczbę $\frac{0,(45)}{2,1(24)}$ w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

57. 5

58. a) 1 b) 1 c) -2

59. a) $\sqrt{3}$, $x > 0$ b) 0, $x > -2$

60. a) 11 b) -3

61. $-24x + 36$

62. a , $\sqrt{7}$, $a^2 - 4 \geq 0$,
 $a + 2 - \sqrt{a^2 - 4} \neq 0$,
 $a + 2 + \sqrt{a^2 - 4} \neq 0$

63. $-x^2 - 4y^2$, -17

64. 12

66. 7 i 84 lub 21 i 28

67. 2

68. $\frac{150}{701}$

65. $n = 1000a + 100b + 10c + d$, gdzie a, b, c, d są kolejnymi cyframi liczby n .

Badana różnica to:

$$(1000a + 100b + 10c + d) - (1000d + 100c + 10b + a) = 999a + 90b - 90c - 999d = 9(111a + 10b - 10c - 111d).$$

69. $a = f = c < d < e = h < b < g$

70. $(-5)^3, \left(\frac{1}{3}\right)^3, \left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}, \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}, \left(\frac{1}{15}\right)^{-1}$

71. 8

72. $3\frac{1}{4}$

73. Wskazówka:
 $6^{2020} + 6^{2021} + 6^{2022} = 6^{2020} \cdot 43$

74. $-\sqrt{9}, \sqrt{3\frac{6}{25}}, 1 + \sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$

75. $3^{\frac{57}{10}}$

76. $\frac{1-2\sqrt{11}}{\sqrt{7}-3} > \frac{1+2\sqrt{11}}{\sqrt{3}-7}$

77. $-2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{7}, \pi, 2\sqrt{3}$

78. -5

81. 14

69. Ustaw w kolejności rosnącej liczby: $a = 2,34343434\dots$, $b = 2,3(45)$, $c = 2,3(43)$, $d = 2,3(4)$, $e = 2,345345345\dots$, $f = 2,(34)$, $g = 2,34(5)$, $h = 2,(345)$.

70. Uporządkuj liczby rosnąco: $\left(\frac{1}{3}\right)^3$, $\left(\frac{1}{15}\right)^{-1}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $(-5)^3$, $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

71. Oblicz $\frac{25^{-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot 10^2}{(5^{-1})^3 \cdot 125 \cdot 2^{-3}} : \frac{9^{-1} \cdot 27^{-2} \cdot 81}{\left(\frac{1}{9}\right)^2}$.

72. Oblicz $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \cdot 2\frac{1}{4} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 : 5^{-2}\right]^2 - \left[\left(3\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 0,3^{-3} - 2\right] : \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$.

D 73. Udowodnij, że liczba $6^{2020} + 6^{2021} + 6^{2022}$ jest podzielna przez 86.

74. Ze zbioru $A = \left\{-\sqrt{3}, -\sqrt{9}, \sqrt{3\frac{6}{25}}, \sqrt[3]{\frac{3}{5}}, 3 - \sqrt[4]{12}, 1 + \sqrt[4]{5\frac{1}{16}}\right\}$

wypisz wszystkie liczby wymierne.

75. Przedstaw liczbę $\frac{(\sqrt[5]{3})^{11} \cdot \left(\frac{1}{81}\right)^{-5}}{(9 \cdot \sqrt[4]{27})^6}$ w postaci potęgi o podstawie 3 i wykładniku wymiernym.

76. Porównaj liczby $\frac{1-2\sqrt{11}}{\sqrt{7}-3}$ i $\frac{1+2\sqrt{11}}{\sqrt{3}-7}$.

77. Uporządkuj liczby rosnąco: $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, π , $\sqrt{7}$.

78. Oblicz $\frac{4}{\sqrt{5}-3} + \frac{1}{\sqrt{5}+2}$. Zapisz wynik bez niewymierności w mianowniku.

D 79. Wykaż, że liczba $\frac{\sqrt{12} - \sqrt[3]{-16}}{\sqrt{3} - \sqrt[3]{-2}}$ jest całkowita.

D 80. Wykaż, że liczba $\frac{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{162}}$ jest wymierna.

81. Oblicz $\left(\left(4 - 7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(4 + 7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

79. $\frac{\sqrt{12} - \sqrt[3]{-16}}{\sqrt{3} - \sqrt[3]{-2}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 3} - \sqrt[3]{8 \cdot (-2)}}{\sqrt{3} - \sqrt[3]{-2}} = \frac{2\sqrt{3} - 2\sqrt[3]{-2}}{\sqrt{3} - \sqrt[3]{-2}} = \frac{2(\sqrt{3} - \sqrt[3]{-2})}{\sqrt{3} - \sqrt[3]{-2}} = 2$

80. $\frac{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{162}} = \frac{\sqrt[3]{8 \cdot 2} + \sqrt[3]{8 \cdot 6}}{\sqrt[3]{27 \cdot 2} + \sqrt[3]{27 \cdot 6}} = \frac{2\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{6}}{3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{6}} = \frac{2(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{6})}{3(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{6})} = \frac{2}{3}$