

Równania i nierówności

2

Umiejętności

Po szkole podstawowej uczeń:

- sprawdza, czy dana liczba jest rozwiązaniem równania (pierwszego, drugiego lub trzeciego stopnia) z jedną niewiadomą,
- rozwiązuje równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą metodą równań równoważnych,
- rozwiązuje równania, które po prostych przekształceniach algebraicznych, są równaniami pierwszego stopnia z jedną niewiadomą,
- przedstawia część wielkości jako procent tej wielkości,
- oblicza liczbę a równą p procent danej liczby b ,
- oblicza, jaki procent danej liczby b stanowi liczba a ,
- oblicza liczbę b , której p procent jest równe a ,
- stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, również w przypadkach wielokrotnych podwyżek lub obniżek danej wielkości,
- rozwiązuje zadania tekstowe za pomocą równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym z obliczeniami procentowymi,
- przekształca proste wzory, aby wyznaczyć zadaną wielkość we wzorach geometrycznych (np. pól figur) i fizycznych (np. dotyczących prędkości, drogi i czasu),
- zaznacza na osi liczbowej zbiory liczb spełniających warunek taki jak $x \geq 1,5$ lub $x < -\frac{4}{7}$.

Po tym dziale uczeń:

- rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia i zaznacza zbiory ich rozwiązań na osi liczbowej,
- stosuje prawa działań na zbiorach,
- wykorzystuje własności wartości bezwzględnej do algebraicznego rozwiązywania równań (nierówności) z wartością bezwzględną typu: $|x - a| = b$, $|x - a| < b$, $|x - a| > b$, $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = |a + b|$, $||x - 1| - 2| = 2x$; zapisuje przedział liczbowy jako zbiór rozwiązań odpowiedniej nierówności,
- rozwiązuje równania i nierówności liniowe z parametrami,
- bada, dla jakich wartości parametru równanie liniowe ma jedno rozwiązanie (jest sprzeczne, jest tożsamościowe),
- rozwiązuje układy dwóch równań liniowych metodami podstawiania i przeciwnych współczynników,
- rozpoznaje układy: oznaczony, nieoznaczony i sprzeczny,
- rozwiązuje zadania tekstowe z zastosowaniem układu dwóch równań liniowych.

1. Warto powtórzyć – rozwiązywanie równań liniowych z jedną niewiadomą

Definicja

Równanie, które można zapisać w postaci $ax + b = 0$, gdzie x jest niewiadomą, a i b są liczbami danymi, nazywamy **równaniem liniowym** z jedną niewiadomą.

Liczby a i b występujące w zapisie $ax + b = 0$ nazywamy **współczynnikami** równania liniowego.

Aby **rozwiązać równanie liniowe** z jedną niewiadomą (inaczej: znaleźć liczbę, która **spełnia** to równanie), można:

- do obu jego stron dodać tę samą liczbę albo to samo wyrażenie liniowe z jedną zmienną;
- od obu jego stron odjąć tę samą liczbę albo to samo wyrażenie liniowe z jedną zmienną;
- obie jego strony pomnożyć przez tę samą liczbę różną od zera;
- obie jego strony podzielić przez tę samą liczbę różną od zera.

Po wykonaniu dowolnej z wymienionych czynności otrzymamy **równanie równoważne**, czyli mające identyczny zbiór rozwiązań z równaniem danym na początku – przed przekształceniami.

◀ 1.4. Rozwiąż równanie.

a) $5x - 2 = 3$

b) $2x + 11 = 5$

c) $7x - 8 = 13$

d) $4x - 3 = 2x + 7$

e) $9x + 1 = 4x - 9$

f) $2x + 3(x - 4) = 4x - 5$

Odp.: a) 1 b) -3 c) 3 d) 5

e) -2 f) 7

Przykład 1 ◀ zad. 1.4

Rozwiążemy podane równania, komentując równoważne przekształcenia.

Rozwiązanie

a) $x - 4 = 0$

$$x - 4 + 4 = 4$$

$$x = 4$$

← do obu stron równania dodajemy 4

b) $2x + 1 = 7$

$$2x + 1 - 1 = 7 - 1$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

← od obu stron równania odejmujemy 1

← obie strony równania dzielimy przez 2

c) $-3x = 15 - 6x$
 $-3x + 6x = 15 - 6x + 6x$ ← do obu stron równania dodajemy $6x$
 $3x = 15$ ← obie strony równania dzielimy przez 3
 $x = 5$

d) $5x + 2\sqrt{5} = 3 - \sqrt{7}x$ ← do obu stron równania dodajemy $\sqrt{7}x - 2\sqrt{5}$
 $5x + 2\sqrt{5} + \sqrt{7}x - 2\sqrt{5} = 3 - \sqrt{7}x + \sqrt{7}x - 2\sqrt{5}$
 $5x + \sqrt{7}x = 3 - 2\sqrt{5}$ ← wyłączamy x przed nawias
 $x(5 + \sqrt{7}) = 3 - 2\sqrt{5}$ ← obie strony równania dzielimy przez $5 + \sqrt{7}$
 $x = \frac{3 - 2\sqrt{5}}{5 + \sqrt{7}}$

Dodawanie do obu stron równania tej samej liczby (wyrażenia) potocznie nazywamy **przenoszeniem tej liczby** (wyrażenia) na drugą stronę równania ze zmienionym znakiem. Podobnie – odejmowanie od obu stron równania tej samej liczby (wyrażenia) potocznie nazywamy **przenoszeniem tej liczby** (wyrażenia) na drugą stronę równania ze zmienionym znakiem.

Przykład 2 ◀ zad. 1.6

Rozwiążemy podane równania.

Rozwiązanie

a) $2(x - \sqrt{3}) + 1 = 2x$ ← wykonujemy działania po lewej stronie równania
 $2x - 2\sqrt{3} + 1 = 2x$ ← przenosimy wyrazy z niewiadomą na lewą,
a liczby na prawą stronę znaku równości
 $2x - 2x = 2\sqrt{3} - 1$ ← redukujemy wyrazy podobne
 $0 = 2\sqrt{3} - 1$ ← sprzeczność

Odp.: Równanie jest sprzeczne, czyli nie ma rozwiązań.

b) $3(2 - x) + 4x = 2 - x$
 $6 - 3x + 4x + x = 2$
 $2x = 2 - 6$
 $2x = -4$
 $x = -2$

Odp.: Równanie ma jedno rozwiązanie: $x = -2$.

c) $3x + 2(\sqrt{2} + 2) = 1 + 2\sqrt{2} + 3(x + 1)$
 $3x + 2\sqrt{2} + 4 = 1 + 2\sqrt{2} + 3x + 3$
 $3x - 3x = 4 + 2\sqrt{2} - 4 - 2\sqrt{2}$
 $0 = 0$ ← tożsamość (prawda dla każdego x)

Odp.: Równanie jest tożsamościowe, czyli każda liczba jest jego rozwiązaniem: $x \in \mathbf{R}$.

◀ 1.6. Rozwiąż równanie.

a) $6x + 2(x - 7) + 5 = 8x - 11$
b) $x - (7 - 4x) = 3(x - 5) + 8$
c) $4(2x - 1) - 7 = 2(4x - 6) + 1$
d) $3(2x - 1) + 2(3x + 5) =$
 $= 4(2x + 8) - 2(3 - 2x)$
e) $3(3x + 5) + 5(3 - 5x) = 4(6 - 4x) + 6$
f) $\frac{1}{5}(5 - 10x) + 0,2(10 + 5x) =$
 $= \frac{1}{2} - 2(x - 3)$

Odp.: a) brak rozwiązań b) 0

c) $x \in \mathbf{R}$ d) brak rozwiązań

e) $x \in \mathbf{R}$ f) 3,5

◀ 1.9. Patrz s. 105.

Odpowiedzi i rozwiązania

1.1. F, P, P

1.2. P, F, P

1.3. F, P, F

1.4. a) 1 b) -3 c) 3 d) 5
e) -2 f) 7**Przykład 3** ◀ zad. 1.9Rozwiążemy równanie $(2x + 1)^2 - (x - 3)^2 = (2x + 1)(2x - 1) - x^2 + 3$.**Rozwiązanie**

Stosujemy wzory skróconego mnożenia: kwadrat sumy, kwadrat różnicy po lewej stronie równania; różnica kwadratów po prawej stronie równania.

$$\begin{aligned} (4x^2 + 4x + 1) - (x^2 - 6x + 9) &= (4x^2 - 1) - x^2 + 3 \\ 4x^2 + 4x + 1 - x^2 + 6x - 9 &= 4x^2 - 1 - x^2 + 3 \\ 10x &= 10, \text{ stąd } x = 1 \end{aligned}$$

Odp.: $x = 1$ **Zadania****1.1.** Oceń prawdziwość podanych zdań.

Podane równania są równoważne:

A. $\frac{3}{4}x = \frac{4}{3}, \quad \frac{4}{3}x = \frac{3}{4}$.

B. $4(x + 1) - 12 = 4, \quad 2(x - 3) - 3 = x - 6$.

C. $\sqrt{3}(x + 5) = 2\sqrt{27}x, \quad 2\sqrt{27}x + \sqrt{3} = \sqrt{3}(x + 6)$.

1.2. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Podane równania są równoważne:

A. $5x + \sqrt{3} = 2(\sqrt{3} + x), \quad \sqrt{3}x + 2 = 3$.

B. $2(x + 7) - 7(x + 1) = 3(x + 5), \quad \frac{5(x + 1)}{7} + \frac{x - 1}{2} = 17$.

C. $\frac{x + 3}{2} - \frac{x - 1}{3} = 1\frac{1}{2}, \quad \frac{2x + 5}{4} = \frac{2x - 5}{2} + 4\frac{3}{4}$.

1.3. Liczba a spełnia równanie $x + \frac{3x - 8}{4} + \frac{x - 10}{6} = 4$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Liczba a spełnia równanie $x + 3(x - 1) = 2(x + 5) - 7$.

B. Liczba a spełnia równanie $\frac{x + 2}{2} = \frac{x + 5}{3}$.

C. Liczba a spełnia równanie $x(2x - 3) + 1 = 2(x - 3)(x + 4)$.

1.4. Rozwiąż równanie.

a) $5x - 2 = 3$

c) $7x - 8 = 13$

e) $9x + 1 = 4x - 9$

b) $2x + 11 = 5$

d) $4x - 3 = 2x + 7$

f) $2x + 3(x - 4) = 4x - 5$

1.5. Rozwiąż równanie.

- a) $12 - (3x + 5) = 5x - (2x - 1)$
 b) $7(x + 3) - 3(x - 1) = 5(x + 3)$
 c) $5 - 2(x - 1) + \frac{1}{2}(2x - 4) = 5(x - 3) + 8$
 d) $\frac{1}{2} + 2(3 - 2x) + 3(1 - x) = 5\frac{1}{2} - 2x$
 e) $3\left(x - \frac{2}{3}\right) - \frac{3}{4}(12 - 4x) = \frac{1}{2}(2x - 12)$
 f) $5\left(x - \frac{1}{6}\right) - 2\left(x + \frac{5}{6}\right) = 6 + 5\left(x - \frac{1}{2}\right)$

1.6. Rozwiąż równanie.

- a) $6x + 2(x - 7) + 5 = 8x - 11$
 b) $x - (7 - 4x) = 3(x - 5) + 8$
 c) $4(2x - 1) - 7 = 2(4x - 6) + 1$
 d) $3(2x - 1) + 2(3x + 5) = 4(2x + 8) - 2(3 - 2x)$
 e) $3(3x + 5) + 5(3 - 5x) = 4(6 - 4x) + 6$
 f) $\frac{1}{5}(5 - 10x) + 0,2(10 + 5x) = \frac{1}{2} - 2(x - 3)$

1.7. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{5-x}{5} = \frac{x+3}{15}$
 b) $\frac{8x-1}{6} = \frac{x-2}{3} + \frac{1}{2}(2x+1)$
 c) $\frac{4x-8}{3} = 6(x+2)$
 d) $2 - \frac{7-x}{3} = \frac{3x+2}{5} - 1$
 e) $3\left(\frac{x+5}{6} - \frac{3x+1}{2}\right) + 11 = 4(1-x)$
 f) $\frac{5x-1}{3} + \frac{7-x}{2} = 2\left(3 + \frac{x}{2}\right)$

1.8. W równaniu $3(x+1) - 2(x-3) = \boxed{?}$ zastąp $\boxed{?}$ takim wyrażeniem, aby otrzymane równanie

- a) było tożsamościowe.
 b) było sprzeczne.
 c) miało rozwiązanie równe 2.

1.9. Rozwiąż równanie.

- a) $(x-1)(x+6) - (x-2)^2 = 2(3x+4)$
 b) $x(2x+1) = 4(x-2) + 2(x+2)^2$
 c) $(7-2x)^2 - (x+1)(x-5) = 3(x-3)^2 + 3$
 d) $5(x+1)^2 - 3(x+4)^2 - 1 = 2(x+5)^2 - 6(7x+5)$
 e) $(3x-2)^2 - (2x+1)^2 = (2x+1)(2x-1) + x^2 - 12$
 f) $(2x-3)(2x+3) + 5(x-1)^2 = (3x-2)(3x-2)$

- 1.5. a) 1 b) 9 c) 2 d) 0,8**
e) 1 f) -3

- 1.6. a) brak rozwiązań b) 0**
c) $x \in \mathbf{R}$ d) brak rozwiązań
e) $x \in \mathbf{R}$ f) 3,5

- 1.7. a) 3 b) $x \in \mathbf{R}$ c) $-3\frac{1}{7}$**
d) 1 e) brak rozwiązań f) 17

- 1.8. a) np. $x+9$ b) np. $\frac{1}{2}(2x-6)$**
c) np. $3x+5$

- 1.9. a) 6 b) 0 c) 4 d) 8 e) 1**
f) 4

Uwagi metodyczne

Po przypomnieniu równań liniowych wprowadzamy nierówności liniowe. Należy założyć, że uczniowie nie słyszeli o nierównościach liniowych i zmianie zwrotu na przeciwny. Wyjaśniając te zagadnienia w podręczniku, odwołujemy się do intuicyjnego pojęcia „uporządkowania liczb na osi liczbowej”.

2. Nierówności pierwszego stopnia

Umiejętności:

- rozwiązywanie nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą
- sprawdzanie, czy dana liczba jest rozwiązaniem nierówności

Jedną z podstawowych operacji w matematyce jest porównywanie liczb. Na przykład nierówności $2 < 3$, $-5 < 0$, $4 \leq 5$, $\sqrt{11} > 3$ są prawdziwe, a nierówności $1 > 1$, $\sqrt{1,0002} < 1$ są fałszywe.

Znak $\leq$ oznacza „mniejsze lub równe”. Zatem nierówność $4 \leq 5$ jest prawdziwa, podobnie jak nierówność $4 \leq 4$.

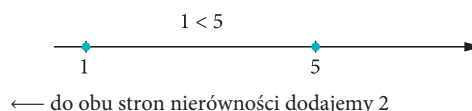
Jeżeli do obu stron nierówności dodamy (lub od obu stron odejmiemy) tę samą liczbę, to otrzymane sumy (różnice) zachowają uporządkowanie na osi liczbowej.

Na przykład:

• $1 < 5$

$$1 + 2 < 5 + 2$$

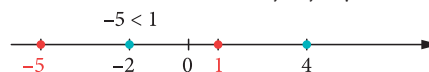
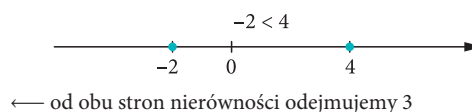
$$3 < 7$$



• $-2 < 4$

$$-2 - 3 < 4 - 3$$

$$-5 < 1$$

**Wniosek**

- Do obu stron nierówności możemy dodać tę samą liczbę.
 - Od obu stron nierówności możemy odjąć tę samą liczbę.
- Po wykonaniu tych działań **zwrot nierówności się nie zmienia**.

Jeżeli pomnożymy dwie liczby przez 2, to otrzymane iloczyny zachowają uporządkowanie na osi liczbowej.

Na przykład:

• $-1 < 2$

$$(-1) \cdot 2 < 2 \cdot 2$$

$$-2 < 4$$

← obie strony nierówności mnożymy przez 2

ZZ i MKP

temat 2.5

Multiteka

• Nierówność liniowa

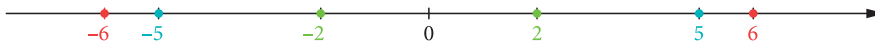
dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.2

Generator
testów i sprawdzianów

- $3 < 4$
 $3 \cdot 2 < 4 \cdot 2$ ← obie strony nierówności mnożymy przez 2
 $6 < 8$
- $-3 < -1$
 $(-3) \cdot 2 < (-1) \cdot 2$ ← obie strony nierówności mnożymy przez 2
 $-6 < -2$

Zwrot nierówności nie zmienia się przy mnożeniu obu jej stron przez dowolną liczbę dodatnią.

Kiedy mnożymy liczbę przez -1 , otrzymujemy liczbę do niej przeciwną. Na osi liczbowej ilustracją tego działania jest symetria środkowa względem punktu 0.



Po wykonaniu takiej symetrii dwie liczby zmieniają kolejność występowania na osi, np.:

- $2 < 5$, a po symetrii $-5 < -2$, co można zapisać również w postaci $-2 > -5$,
- $-2 < 5$, po symetrii $-5 < 2$, czyli $2 > -5$,
- $-6 < -2$, po symetrii $2 < 6$, czyli $6 > 2$.

Tę obserwację krótko podsumujemy: kiedy mnożymy obie strony nierówności przez -1 , musimy zmienić jej zwrot.

Mnożenie stron nierówności przez dowolną liczbę ujemną, np. przez -7 , możemy wykonać w dwóch etapach. Najpierw mnożymy przez -1 , a następnie przez 7. Przy pierwszej czynności zmienimy zwrot nierówności na przeciwny, drugie mnożenie zwrotu już nie zmieni.

Zauważmy jeszcze, że dzielenie można zastąpić mnożeniem przez odwrotność dzielnika, więc opisane wyżej własności dotyczą również dzielenia.

Wniosek

- Obie strony nierówności możemy pomnożyć (podzielić) przez tę samą liczbę **dodatnią**. Po wykonaniu takiego działania **zwrot nierówności się nie zmienia**.
- Obie strony nierówności możemy pomnożyć (podzielić) przez tę samą liczbę **ujemną**. Po wykonaniu takiego działania **zwrot nierówności zmieni się na przeciwny**.

Zajmiemy się teraz sytuacją, gdy po jednej lub po obu stronach znaków $>$, $<$, $\leq$, $\geq$ pojawiają się niewiadome.

Przykład 1

Bartek miał banknot 20-złotowy. Kupił kilka batoników po 2 zł każdy. Kasjerka wydała mu ponad 12 zł reszty.

- Ile batoników mógł kupić Bartek?
- Jaki warunek spełnia niewiadoma liczba x batoników?

Rozwiązanie

- Jeżeli Bartek otrzymał ponad 12 zł reszty, to za batoniki zapłacił mniej niż 8 zł. Mógł zatem kupić co najwyżej 3 batoniki.
- Warunek podany w przykładzie można zapisać w postaci nierówności:
 $20 - x \cdot 2 > 12$.

Nauczymy się teraz rozwiązywać takie nierówności.

Dwa wyrażenia algebraiczne połączone znakiem $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ nazywamy nierównością algebraiczną. Przykłady nierówności algebraicznych:

$$5x - 7 < 6 - 2x, \quad 4\frac{1}{2} - 2x \geq 3y, \quad 4z - 3 \leq 5, \quad 9 - 2x^2 \geq 7$$

Nierówności, w których występuje znak $<$ lub $>$, nazywamy **ostrymi**.
 Nierówności, w których występuje znak $\leq$ lub $\geq$, nazywamy **nieostrymi**.

Nierówność z niewiadomą x , którą można przedstawić w jednej z postaci $ax + b > 0$ lub $ax + b \geq 0$, gdzie $a, b \in \mathbf{R}$, nazywamy **nierównością liniową** z jedną niewiadomą. Jeśli dodatkowo założymy, że $a \neq 0$, to nierówność taką nazywamy nierównością pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.

Mówimy, że **liczba spełnia nierówność** (jest rozwiązaniem nierówności), jeżeli po podstawieniu tej liczby w miejsce niewiadomej otrzymamy nierówność prawdziwą.

Na przykład liczba 1 spełnia nierówność $5x - 7 < 6 - 2x$, bo nierówność $5 \cdot 1 - 7 < 6 - 2 \cdot 1$, czyli $-2 < 4$, jest prawdziwa, natomiast liczba 2 tej nierówności nie spełnia, bo nierówność $5 \cdot 2 - 7 < 6 - 2 \cdot 2$, czyli $3 < 2$, jest fałszywa.

Rozwiązanie nierówności liniowej polega na wskazaniu **zbioru wszystkich liczb**, które tę nierówność spełniają. Często przedstawiamy ten zbiór na osi liczbowej.

Z rozważań przedstawionych na początku tematu wynika, że aby rozwiązać nierówność, można:

- do obu jej stron dodać tę samą liczbę albo to samo wyrażenie liniowe z jedną zmienną; od obu jej stron odjąć tę samą liczbę albo to samo wyrażenie liniowe z jedną zmienną;
- obie jej strony pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę dodatnią, pozostawiając bez zmiany zwrot nierówności;
- obie jej strony pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę ujemną, zmieniając równocześnie zwrot nierówności na przeciwny.

Po wykonaniu dowolnej z wymienionych czynności otrzymamy **nierówność równoważną**, czyli mającą identyczny zbiór rozwiązań z nierównością początkową, od której rozpoczynaliśmy rozwiązywanie zadania.

Definicja

Dwie nierówności nazywamy **równoważnymi**, gdy mają ten sam zbiór rozwiązań.

Sposób rozwiązywania nierówności pokażemy na przykładach. Zaczniemy od najprostszego zadania.

Przykład 2 ◀ zad. 2.8

Zaznaczmy na osi liczbowej zbiór rozwiązań podanej nierówności.

a) $x > 1$



Puste kółeczko oznacza, że liczba 1 nie spełnia nierówności, czyli **nie należy** do zbioru rozwiązań. Zbiór rozwiązań nierówności tworzą wszystkie liczby większe od 1.

b) $x \leq 4$



Zamalowane kółeczko oznacza, że liczba 4 spełnia nierówność, czyli **należy** do zbioru rozwiązań. Zbiór rozwiązań nierówności tworzą: liczba 4 i wszystkie liczby od niej mniejsze.

Przykład 3 ◀ zad. 2.11

Rozwiążemy podaną nierówność i zaznaczmy zbiór jej rozwiązań na osi liczbowej.

Dodawanie (odejmowanie) tej samej liczby do (od) obu stron nierówności potocznie nazywamy (podobnie jak przy wykonywaniu takich samych operacji na równaniach) **przenoszeniem liczby z przeciwnym znakiem na drugą stronę**.



◀ 2.11. Rozwiąż nierówność i przedstaw zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

- a) $(x-3)(x+2) \geq (x-6)(x-7)$
 b) $(x-3)^2 - 2(x-1)(x+1) < 4 - (1-x)^2$
 c) $9(x-1)(x+1) + 6 \leq (3x+2)^2 - 5x$
 d) $(2x-1)^2 - (x+1)^2 > 3x(x-5) + 18$
 e) $(x+1)^2 < (x-1)^2$
 f) $(x+1)^2 - 5(x-2) \geq (x+\sqrt{13})(x-\sqrt{13})$
 g) $(2x-1)^2 - 1 + 5(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2) < 4x^2$
 h) $3 - (2x-5)(5+2x) \leq 1 - (2x-3)^2$

Odp.: a) $x \geq 4$ b) $x > 1$ c) $x \geq -1$ d) $x > 2$ e) $x < 0$ f) $x \leq 8$ g) $x > -\frac{1}{4}$
 h) $x \geq 3$

◀ 2.8. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności.

- a) $x > -3$
 b) $x \geq 2$
 c) $x \leq -1$
 d) $x - 4 > 0$
 e) $2x + 4 \geq 6$
 f) $7x - 15 \leq -1$
 g) $2x - 13 > 3x - 15$
 h) $3(x+2) > 2(x+1) + 4$
 i) $2(x-3) \leq x - 4$

Rozwiązanie

a) $x - 4 < 7$

$$x - 4 + 4 < 7 + 4$$

$$x < 11$$

Odp.: $x < 11$

← do obu stron nierówności dodajemy 4



b) $20 - x \cdot 2 > 12$

$$-2x > 12 - 20$$

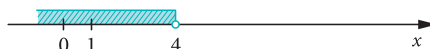
$$-2x > -8$$

$$x < 4$$

Odp.: $x < 4$

← przenosimy liczbę 20 z przeciwnym znakiem na drugą stronę

← wykonujemy odejmowanie po prawej stronie

← dzielimy obie strony nierówności przez -2 , zmieniamy zwrot

c) $\frac{x-6}{2} + x(x+2) \leq (x+3)^2 + 2$

← mnożymy obie strony nierówności przez 2

$$x - 6 + 2x(x + 2) \leq 2(x^2 + 6x + 9) + 4$$

← wykonujemy działania po obu stronach

$$x - 6 + 2x^2 + 4x \leq 2x^2 + 12x + 18 + 4$$

$$5x - 6 + 2x^2 \leq 2x^2 + 12x + 22$$

$$5x + 2x^2 - 2x^2 - 12x \leq 22 + 6$$

$$-7x \leq 28$$

← obie strony nierówności dzielimy przez -7 , zmieniamy zwrot

$$x \geq -4$$



Odp.: $x \geq -4$

d) $2(x + 1) < 2x - 2$

$$2x + 2 < 2x - 2$$

$$2x - 2x < -2 - 2$$

$$0 < -4$$

Otrzymana nierówność jest fałszywa. Żadna liczba rzeczywista nie spełnia podanej nierówności algebraicznej.

Odp.: Nierówność nie ma rozwiązań.

e) $5x - 2 > 5(x - 1) + 1$

$$5x - 2 > 5x - 5 + 1$$

$$5x - 5x > -4 + 2$$

$$0 > -2$$

Otrzymana nierówność jest prawdziwa. Każda liczba rzeczywista spełnia podaną nierówność algebraiczną.

Odp.: Zbiorem rozwiązań nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych.

Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytach.

2.1. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $-2x < 12$.

- A. $x < -6$ B. $x \leq -6$ C. $x > -6$ D. $x \geq -6$

2.2. Która nierówność nie ma rozwiązań?

- A. $x + 3 < x + 5$ B. $x - 3 < x - 5$ C. $3x < 2x$ D. $3x \leq 2x$

2.3. Która liczba nie spełnia nierówności $5(3 - x) + 1 > 2(x - 6) + 4$?

- A. -4 B. -2 C. 2 D. 4

2.4. Niech X oznacza zbiór rozwiązań nierówności $5(1 - x) + 2 < 3x - 8(x + 2)$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. X jest zbiorem liczb dodatnich. C. $X = \mathbf{R}$
B. X jest zbiorem liczb ujemnych. D. $X = \emptyset$

2.5. Sprawdź, czy liczba 2 należy do zbioru rozwiązań podanej nierówności.

- a) $4(x - 1)(x + 1) > (2x - 1)^2 + 3$ b) $3 - (3x + 2) \leq \frac{x - 5}{2}$ c) $\frac{4 - x}{2} \leq \frac{3x - 2}{4}$

2.6. Sprawdź, czy liczba -5 należy do zbioru rozwiązań podanej nierówności.

- a) $5\left(x - 1\frac{1}{2}\right) \geq 6\frac{1}{2} - 2x$ b) $6(x - 1) - 1\frac{1}{3} \leq 3x + 1\frac{2}{3}$ c) $7x + 5\frac{1}{4} < 3x - 2,75$

2.7. Wskaż największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $\frac{x}{2} \geq \frac{2x}{3} + \frac{1}{4}$.

- A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

2.8. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności.

- a) $x > -3$ d) $x - 4 > 0$ g) $2x - 13 > 3x - 15$
b) $x \geq 2$ e) $2x + 4 \geq 6$ h) $3(x + 2) > 2(x + 1) + 4$
c) $x \leq -1$ f) $7x - 15 \leq -1$ i) $2(x - 3) \leq x - 4$

2.9. Rozwiąż nierówność.

- a) $3x - 1 > 2$ e) $2x - 3 < x + 5$
b) $7x + 12 \geq -2$ f) $4(x - 1) > 3(x - 2)$
c) $5x - 17 \leq 3$ g) $3(2x + 1) + 5x < 2(3x + 2) - 11$
d) $2x + 1\frac{1}{2} > 7,5$ h) $6(1 - x) + 2(x + 1) > 10 - 5x$

Odpowiedzi i rozwiązania

2.1. C

2.2. B

2.3. D

2.4. F, F, F, P

2.5. a) nie b) tak c) tak

2.6. a) nie b) tak c) tak

2.7. A

2.9. a) $x > 1$ b) $x \geq -2$
c) $x \leq 4$ d) $x > 3$ e) $x < 8$
f) $x > -2$ g) $x < -2$ h) $x > 2$

2.10. a) $x > -3$ b) $x \geq 4$
 c) $x > 4$ d) $x < 2$ e) $x > 0$
 f) $x < -\frac{4}{5}$ g) $x > -25$
 h) $x \geq 2\frac{2}{3}$ i) $x \geq 6$ j) $x \geq -3\frac{13}{20}$

2.11. a) $x \geq 4$ b) $x > 1$
 c) $x \geq -1$ d) $x > 2$ e) $x < 0$
 f) $x \leq 8$ g) $x > -1\frac{1}{4}$ h) $x \geq 3$

2.12. a) $x < 2\frac{3}{4}$ b) $x < 2$
 c) $x \geq 0$ d) $x \geq -2$

2.13. $x < \frac{1}{3}; -8$

2.14. $x > -\frac{1}{5}; -1$

2.15. $x \leq -1\frac{2}{5}; -2$

2.10. Rozwiąż nierówność.

a) $8 - 3(3x + 1) < 5(3 - x) + 2$ f) $\frac{x+2}{3} - (1-x) < \frac{x-2}{2}$
 b) $5(x-1) - 4 \geq 3(x+1) - 2(x-2)$ g) $\frac{3(x+1)}{2} - 7x < 4 - 5(x-2)$
 c) $(x-3)(x+2) > (x-6)(x-7)$ h) $1 + x - \frac{5x-2}{4} \geq \frac{7-2x}{2}$
 d) $\frac{2x-4}{4} > x-2$ i) $2,5 - x - \frac{2x-7}{2} \leq 1 + \frac{2-5x}{4}$
 e) $\frac{3x-2}{2} - 1 < \frac{2}{3}(2x-3) + x$ j) $\frac{1-4x}{3} + x + 2 \geq -2(x+2) + \frac{1}{4}$

2.11. Rozwiąż nierówność i przedstaw zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

a) $(x-3)(x+2) \geq (x-6)(x-7)$
 b) $(x-3)^2 - 2(x-1)(x+1) < 4 - (1-x)^2$
 c) $9(x-1)(x+1) + 6 \leq (3x+2)^2 - 5x$
 d) $(2x-1)^2 - (x+1)^2 > 3x(x-5) + 18$
 e) $(x+1)^2 < (x-1)^2$
 f) $(x+1)^2 - 5(x-2) \geq (x+\sqrt{13})(x-\sqrt{13})$
 g) $(2x-1)^2 - 1 + 5(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2) < 4x^2$
 h) $3 - (2x-5)(5+2x) \leq 1 - (2x-3)^2$

2.12. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{(x-3)(x+3)}{3} - \frac{(x-4)^2}{2} < -\frac{1}{6}x^2$
 b) $(x-2)^2 + 1 > \frac{x-8}{3} - (1-x)(1+x)$
 c) $1 - (3x-2)^2 \geq \frac{x-36}{3} - 9(x+1)(x-1)$
 d) $(x+2)^2 - \frac{2x-1}{3} \geq (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) - \frac{1}{3}$

2.13. Rozwiąż nierówność $2x - \frac{(3x-2)(3x+2)}{3} > 3 - 3(x-1)^2$. Sprawdź, które z liczb: $1\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{5}$, -8 należą do zbioru rozwiązań tej nierówności.

2.14. Rozwiąż nierówność $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) + 3(x-1)^2 - 5 < -x - \frac{1}{2}(8-8x^2)$ i podaj największą liczbę całkowitą, która tej nierówności nie spełnia.

2.15. Rozwiąż nierówność $-3(x-3)^2 + \left(-3x + 3\frac{1}{2}\right)^2 \geq 6(x+1)^2 + 0,25$ i podaj największą liczbę całkowitą, która tę nierówność spełnia.

- D 2.16.** Wykaż, że każda liczba mniejsza od -2 spełnia nierówność

$$(3x - 8)(x - 4) - \frac{(5 - 2x)^2 - 11}{2} > 2(x + 5)^2 - (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}).$$

- 2.17.** Wyznacz wszystkie liczby naturalne spełniające podaną nierówność.

$$\frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{2} \geq 2(x+2) - 5$$

- 2.18.** Ile czekoladek znajduje się w pudełku, jeżeli w pięciu takich pudełkach jest mniej niż 111 czekoladek, a w siedmiu jest ich więcej niż 151?

- 2.19.** Samochodem dostawczym można przewozić 1200 kg towaru. Po załadowaniu cukru okazało się, że samochód został wypełniony w 55% ładowności. Ile co najwyżej 10,5-kilogramowych worków z mąką można wstawić, aby nie przekroczyć dopuszczalnej ładowności?

- * **2.20.** Suma dwóch kolejnych liczb naturalnych nieparzystych nie przekracza 16. Wyznacz wszystkie pary takich liczb.

- * **2.21.** Różnica między kwadratem liczby naturalnej parzystej i kwadratem następnej liczby naturalnej parzystej jest większa od liczby -36 . Wyznacz wszystkie pary takich liczb.

- D * 2.22.** Wykaż, że każda liczba ujemna spełnia nierówność $(3^x + 2)x < x$.

Prosto do matury



- 1.** Dana jest nierówność $0 \cdot (x + 3) < 5$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Dla $x = -2$ nierówność jest prawdziwa.
B. Dla $x = 11$ nierówność jest fałszywa.
C. Nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej.

- 2.** Rozwiąż nierówność $2(3x + 5) - 3(11 - 5x) \geq 4(-7 + 4x)$.

- 3.** Rozwiąż nierówność $(4x - 3)(3x + 5) + 3x \leq (2x + 4)(6x - 5)$.

- 4.** Rozwiąż nierówność $x - \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{2} \geq \frac{1}{2} - 2(x - 3)^2$. Podaj najmniejszą liczbę naturalną, która tej nierówności nie spełnia.

- 5.** Rozwiąż nierówność $\frac{x+2}{4} + (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) + 1 < (x + 2)^2 - \frac{4x-1}{3}$. Podaj wszystkie liczby całkowite ujemne spełniające tę nierówność.

$$\mathbf{2.14.} \quad (3x - 8)(x - 4) - \frac{(5 - 2x)^2 - 11}{2} > 2(x + 5)^2 - (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

$$3x^2 - 12x - 8x + 32 - \frac{25 - 20x + 4x^2 - 11}{2} > 2(x^2 + 10x + 25) - (x^2 - 5)$$

$$3x^2 - 20x + 32 - 7 + 10x - 2x^2 > 2x^2 + 20x + 50 - x^2 + 5$$

$$-30x > 30$$

$$x < -1$$

Tę nierówność spełnia każda liczba mniejsza od -1 , spełnia ją zatem każda liczba mniejsza od -2 .

2.17. 0 i 1

2.18. 22

2.19. 51

2.20. 7 i 9, 5 i 7, 3 i 5, 1 i 3

2.21. 0 i 2, 2 i 4, 4 i 6, 6 i 8

2.22. Dana nierówność jest równoważna nierówności $(3^x + 1)x < 0$, którą spełnia każda liczba ujemna, bo $3^x + 1 > 0$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x .

Prosto do matury

1. P, F, P

2. $x \geq -1$

3. brak rozwiązań

4. $x \leq 2$; 3

5. $x > -2$; -1

3. Przedziały liczbowe

Umiejętności:

- rozwiązywanie układów nierówności
- posługiwanie się pojęciem przedziału liczbowego
- zaznaczanie przedziałów na osi liczbowej

Zadanie polegające na szukaniu wspólnych rozwiązań kilku nierówności nazywamy rozwiązywaniem układu tych nierówności. Mówimy, że **liczba spełnia układ nierówności**, jeżeli należy do zbioru rozwiązań każdej nierówności danego układu.

Rozwiązanie układu nierówności polega na wskazaniu **zbioru wszystkich liczb**, które ten układ spełniają. Często przedstawiamy ten zbiór na osi liczbowej.

Sposób rozwiązywania układu nierówności pokażemy na przykładach.

Zacznijmy od najprostszego zadania.

◀ 3.4. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań układu nierówności.

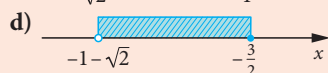
a) $\begin{cases} x \geq 2 \\ x < 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x > -3 \\ x \geq 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \leq 1 \\ x > -\sqrt{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \leq -\frac{3}{2} \\ x \geq -1 - \sqrt{2} \end{cases}$

Odp.:



◀ 3.5. Rozwiąż układ nierówności.

a) $\begin{cases} x > -2 \\ x \geq -3 \\ x < 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq 0 \\ x > -2 \end{cases}$

Odp.: a) $x \in (-2; 1)$ b) $\langle 0; 4 \rangle$

Przykład 1 ◀ zad. 3.4

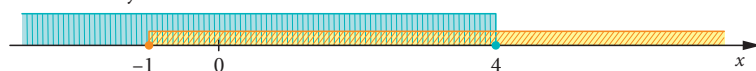
Przedstawimy na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb spełniających następujący układ nierówności:

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

◀ klamra oznacza, że obie nierówności muszą być spełnione równocześnie

Rozwiązanie

Wygodnie jest zacząć od zaznaczenia zbiorów rozwiązań poszczególnych nierówności na osi liczbowej.



Obok przedstawiona jest ilustracja zbioru rozwiązań danego układu nierówności na osi liczbowej.

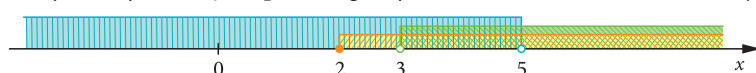


Przykład 2 ◀ zad. 3.5

Rozwiążemy układ nierówności $\begin{cases} x > 3 \\ x \geq 2 \\ x < 5 \end{cases}$

Rozwiązanie

Zaznaczamy zbiory rozwiązań poszczególnych nierówności na osi liczbowej.



Z rysunku odczytujemy, że każdą z trzech nierówności spełniają liczby większe od 3 i jednocześnie mniejsze od 5. Zatem $x > 3$ i $x < 5$.

ZZ i MKP

temat 2.3

Multiteka

• Działania na przedziałach

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.3

Generator
testów i sprawdzianów

Obok przedstawiona jest ilustracja zbioru rozwiązań na osi liczbowej.



Układ nierówności $\begin{cases} x > 3 \\ x < 5 \end{cases}$ możemy zapisać w postaci **podwójnej nierówności**:

$$3 < x < 5$$

W ostatnim zapisie obowiązuje zasada, że zwroty obu nierówności są zgodne.

Przypomnijmy, że zbiór B jest **podzbiorem zbioru** A ($B \subset A$), jeżeli każdy element zbioru B jest także elementem zbioru A .

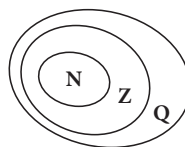
Przykład 3

Poznaliśmy następujące podzbiory zbioru liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$:

$\mathbf{N}$ – zbiór liczb naturalnych,

$\mathbf{Z}$ – zbiór liczb całkowitych,

$\mathbf{Q}$ – zbiór liczb wymiernych.



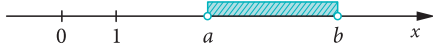
Zdanie $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ ilustruje prostą obserwację, że każda liczba naturalna jest liczbą całkowitą, a każda liczba całkowita jest liczbą wymierną.

Pewne podzbiory zbioru liczb rzeczywistych nazywamy **przedziałami liczbowymi**.

W poniższych definicjach zakładamy, że a i b oznaczają liczby rzeczywiste oraz $a < b$.

Definicja

Przedziałem otwartym $\langle a; b \rangle$ nazywamy zbiór liczb rzeczywistych x spełniających podwójną nierówność $a < x < b$.



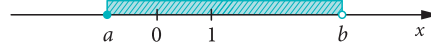
Definicja

Przedziałem domkniętym $\langle a; b \rangle$ nazywamy zbiór liczb rzeczywistych x spełniających podwójną nierówność $a \leq x \leq b$.



Definicja

Przedziałem lewostronnie domkniętym $\langle a; b \rangle$ nazywamy zbiór liczb rzeczywistych x spełniających podwójną nierówność $a \leq x < b$.

**Definicja**

Przedziałem prawostronnie domkniętym $(a; b]$ nazywamy zbiór liczb rzeczywistych x spełniających podwójną nierówność $a < x \leq b$.



Do zapisania zbioru rozwiązań pojedynczej nierówności wprowadzamy następujące oznaczenia przedziałów:

- $x > a$ $(a; \infty)$
- $x < a$ $(-\infty; a)$
- $x \geq a$ $\langle a; \infty)$
- $x \leq a$ $(-\infty; a]$

Zapis $(a; \infty)$ czytamy: „przedział otwarty od a do nieskończoności”. Podobnie zapis $(-\infty; a)$ czytamy „przedział otwarty od minus nieskończoności do a ”.

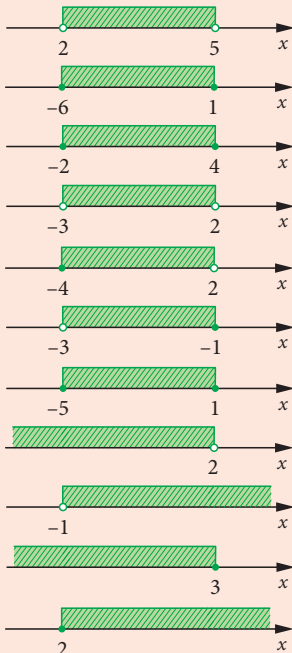
Symbol ∞ **nie oznacza** żadnej liczby.



◀ **3.6.** Zaznacz na osi liczbowej podane przedziały.

$(2; 5)$, $\langle -6; 1 \rangle$, $\langle -2; 4 \rangle$, $(-3; 2)$,
 $\langle -4; 2 \rangle$, $(-3; -1)$, $\langle -5; 1 \rangle$, $(-\infty; 2)$,
 $(-1; \infty)$, $(-\infty; 3)$, $\langle 2; \infty)$

Odp.:



Przykład 4 ◀ zad. 3.6

Zaznaczymy na osi liczbowej przedział

- a) $\langle -1; 4 \rangle$. b) $(-\infty; 3)$. c) $\langle 0; 2\sqrt{2} \rangle$. d) $(-\frac{1}{2}; \infty)$.

Rozwiązanie

- a) $\langle -1; 4 \rangle$
- b) $(-\infty; 3)$

c) $\langle 0; 2\sqrt{2} \rangle$

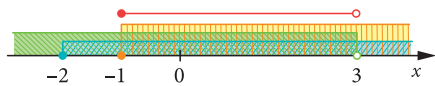


d) $\left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$

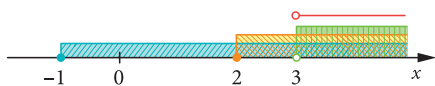
**Przykład 5** ◀ zad. 3.7

Zapiszemy zbiór rozwiązań układu nierówności w postaci przedziału liczbowego (jeżeli to możliwe).

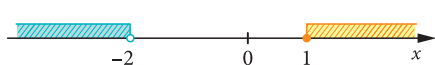
a)
$$\begin{cases} x < 3 \\ x \geq -2 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Odp.: $x \in \langle -1; 3 \rangle$

b)
$$\begin{cases} x > 3 \\ x \geq 2 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Odp.: $x \in (3; \infty)$

c)
$$\begin{cases} x < -2 \\ x \geq 1 \end{cases}$$



Odp.: Ten układ nierówności nie ma rozwiązania.

Przykład 6 ◀ zad. 3.13

Zaznaczmy na osi liczbowej zbiór rozwiązań podwójnej nierówności

$$x - 2 \leq 3x + 4 \leq 2x + 8$$

i zapiszemy go w postaci przedziału.

Rozwiązanie

$$\begin{cases} x - 2 \leq 3x + 4 \\ 3x + 4 \leq 2x + 8 \end{cases}$$

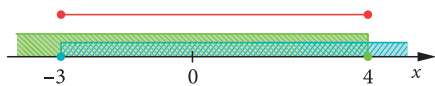
◀ nierówność podwójną zapisujemy w postaci układu

$$\begin{cases} x - 3x \leq 4 + 2 \\ 3x - 2x \leq 8 - 4 \end{cases}$$

◀ rozwiązujemy każdą z nierówności

$$\begin{cases} -2x \leq 6 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

Odp.: $x \in \langle -3; 4 \rangle$

◀ 3.7. Podaj zbiór rozwiązań układu nierówności w postaci przedziału (jeżeli to możliwe).

a)
$$\begin{cases} 2x - 3 < -5 \\ 3x - 2 < 7 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - 6 < x + 4 \\ x - 2 \geq 10 - 3x \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3x - 5 \geq 2x + 1 \\ x + 1 \geq 2x - 3 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 6x + 2 > 0 \\ 4x - 8 < 0 \end{cases}$$

Odp.: a) $(-\infty; -1)$ b) $\langle 3; 10 \rangle$ c) brak rozwiązań d) $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$

◀ 3.13. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań podwójnej nierówności i zapisz go w postaci przedziału.

a) $2 < x + 3 < 6$

b) $-1 \leq 2x + 3 < 3$

c) $x + 3 \leq 2x + 1 \leq x + 7$

d) $3 \leq x + 1 < 9$

e) $-3 < 2 - x < 5$

f) $x - 2 \leq 3x + 4 < 2x + 8$

Odp.: a) $(-1; 3)$ b) $\langle -2; 0 \rangle$ c) $\langle 2; 6 \rangle$ d) $\langle 2; 8 \rangle$ e) $(-3; 5)$ f) $\langle -3; 4 \rangle$

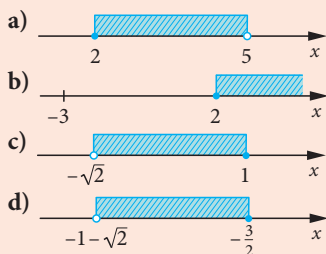
Odpowiedzi i rozwiązania

3.1. D

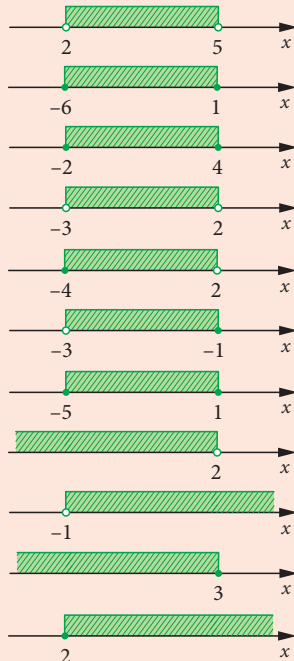
3.2. B

3.3. B

3.4.

3.5. a) $x \in (-2; 1)$ b) $\langle 0; 4 \rangle$

3.6.

3.7. a) $(-\infty; -1)$ b) $\langle 3; 10 \rangle$
c) brak rozwiązań d) $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

3.1. Wskaż przedział, który jest zbiorem rozwiązań układu nierówności.

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x > 0 \end{cases}$$

A. $(0; 3)$ B. $\langle 0; 3 \rangle$ C. $\langle 0; 3 \rangle$ D. $(0; 3)$ 3.2. Ile liczb całkowitych należy do przedziału $(-2; 3)$?

A. 4 B. 5 C. 6 D. nieskończenie wiele

3.3. Wskaż układ nierówności, którego zbiorem rozwiązań jest przedział $\langle -5; 2 \rangle$.A. $\begin{cases} x \geq -5 \\ -x \geq -2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x \geq -5 \\ -x > -2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} -x \leq 5 \\ -x \geq -2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} -x < 5 \\ -x \geq -2 \end{cases}$

3.4. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań układu nierówności.

a) $\begin{cases} x \geq 2 \\ x < 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \leq 1 \\ x > -\sqrt{2} \end{cases}$
b) $\begin{cases} x > -3 \\ x \geq 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x \leq -\frac{3}{2} \\ x \geq -1 - \sqrt{2} \end{cases}$

3.5. Rozwiąż układ nierówności.

a) $\begin{cases} x > -2 \\ x \geq -3 \\ x < 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq 0 \\ x > -2 \end{cases}$

3.6. Zaznacz na osi liczbowej podane przedziały.

(2; 5), $\langle -6; 1 \rangle$, $\langle -2; 4 \rangle$, $\langle -3; 2 \rangle$, $\langle -4; 2 \rangle$, $\langle -3; -1 \rangle$, $\langle -5; 1 \rangle$,
 $(-\infty; 2)$, $(-1; \infty)$, $(-\infty; 3)$, $\langle 2; \infty \rangle$

3.7. Podaj zbiór rozwiązań układu nierówności w postaci przedziału (jeżeli to możliwe).

a) $\begin{cases} 2x - 3 < -5 \\ 3x - 2 < 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 5 \geq 2x + 1 \\ x + 1 \geq 2x - 3 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 2x - 6 < x + 4 \\ x - 2 \geq 10 - 3x \end{cases}$ d) $\begin{cases} 6x + 2 > 0 \\ 4x - 8 < 0 \end{cases}$

3.8. Wyznacz wszystkie liczby naturalne spełniające układ nierówności.

a) $\begin{cases} 2x + 5 > 1 \\ 3x - 2 < 13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x - 2 < 6 \\ 5x + 2 \geq -3 \end{cases}$

3.9. Wyznacz wszystkie liczby całkowite spełniające układ nierówności.

a) $\begin{cases} 3x - 8 < 0 \\ 2x + 6 \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 5 < 0 \\ 3x + 1 > 0 \end{cases}$

3.10. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań układu nierówności i zapisz ten zbiór w postaci przedziału (jeżeli to możliwe).

a) $\begin{cases} 2(7 - x) + 1 \geq 3 - 4(x - 2) \\ 6(x + 2) - 5x < 3x + 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 9(x + 1) - 7(x + 1) > 3(x + 2) + 1 \\ \frac{1}{2}(x - 2) + 5 \geq 4 - \frac{1}{2}x \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x-2}{3} > \frac{3-x}{5} - 1 \\ (3x-1)^2 - 1 \leq 3(x-2)^2 + 6(x^2 + 3) \end{cases}$

d) $\begin{cases} (5-x)^2 + 3(x-1)^2 < (2x+1)(2x-1) - 3 \\ 2(x-3)^2 - (4-x)^2 < 5 + (x+1)^2 \end{cases}$

3.11. Znajdź największą liczbę x spełniającą podany układ warunków.

a) $\frac{2x+1}{3} - \frac{3x-1}{2} > 1$ i x jest liczbą całkowitą.

b) $\frac{7x+1}{9} - \frac{4x-5}{5} > 1$ i x jest liczbą naturalną.

3.12. Znajdź najmniejszą liczbę x spełniającą podany układ warunków.

a) $2(3x-1) - 7 > 4x+5$ i x jest liczbą nieparzystą.

b) $\frac{1}{2}(x-4) - (3-1,5x) < 6$ i x jest liczbą naturalną.

3.13. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań podwójnej nierówności i zapisz go w postaci przedziału.

a) $2 < x + 3 < 6$

d) $3 \leq x + 1 < 9$

b) $-1 \leq 2x + 3 < 3$

e) $-3 < 2 - x < 5$

c) $x + 3 \leq 2x + 1 \leq x + 7$

f) $x - 2 \leq 3x + 4 < 2x + 8$

3.8. a) 0, 1, 2, 3, 4 b) 0, 1

3.9. a) -3, -2, -1, 0, 1, 2
b) 0, 1, 2

3.10. a) $(1; \infty)$
b) brak rozwiązań
c) $\left(\frac{1}{2}; 5\right)$
d) $(2; \infty)$

3.11. a) -1 b) 4

3.12. a) 9 b) 0

3.13. a) $(-1; 3)$ b) $(-2; 0)$
c) $\langle 2; 6 \rangle$ d) $\langle 2; 8 \rangle$ e) $(-3; 5)$
f) $\langle -3; 4 \rangle$

- 3.14.** a) żaden b) $B \subset A$
 c) $A \subset B$ d) $B \subset A$ e) $A \subset B$
 f) $A = B$

Prosto do matury

1. F, P, P

2. $\left(-1\frac{1}{2}; 2\right)$

3. 0, 1, 2

4. $\left(-\infty; 1\frac{6}{13}\right)$

5. $n - 7 \leq 3n + 4 < 3 - n$
 $n - 7 \leq 3n + 4$ i $3n + 4 < 3 - n$
 $-2n \leq 11$ i $4n < -1$
 $n \geq -5\frac{1}{2}$ i $n < -\frac{1}{4}$
 $n \in \left(-5\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$

W otrzymanym przedziale nie ma liczb naturalnych, więc nie istnieje liczba naturalna spełniająca daną nierówność.

3.14. Zbadaj, czy zachodzi któryś ze związków: $A \subset B$, $B \subset A$, $A = B$.

- | | |
|---|--|
| a) $A = \{a, b, c\}$ | $B = \{b, c, d\}$ |
| b) $A = \{x, y, z\}$ | $B = \emptyset$ |
| c) $A = \{x: x \in \mathbf{N} \text{ i } x > 0\}$ | $B = \{y: y \in \mathbf{R} \text{ i } y > 0\}$ |
| d) $A = \{x: x \in \mathbf{R} \text{ i } x > 2\}$ | $B = (3; \infty)$ |
| e) $A = \langle -5; 2,5 \rangle$ | $B = (-\infty; \sqrt{7})$ |
| f) $A = \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{-8}; \infty\right)$ | $B = \left(\log_9 \frac{1}{9}; \infty\right)$ |

Prosto do matury



1. Dany jest przedział $(-5; 3)$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Przedział ten jest zbiorem rozwiązań układu nierówności $\begin{cases} x \leq 3 \\ -x > -5 \end{cases}$.
 B. Do tego przedziału należy 8 liczb całkowitych.
 C. Przedział ten jest zbiorem rozwiązań nierówności $-3 \leq -x < 5$.

2. Podaj zbiór rozwiązań układu nierówności w postaci przedziału.

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x < \frac{1}{2} \\ 17x + 20 > 27x \end{cases}$$

3. Wyznacz wszystkie liczby całkowite spełniające układ nierówności.

$$\begin{cases} 5x + 3 > 0 \\ 7 - 2x \geq 0 \\ 11 - 4x > 0 \end{cases}$$

4. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań układu nierówności:

$$\begin{cases} \frac{2x-5}{3} < \frac{5-3x}{2} - 1 \\ (2x-3)^2 \geq 10 - (5-2x)(5+2x) \end{cases}$$

i zapisz ten zbiór w postaci przedziału.

D

5. Wykaż, że nie istnieje rozwiązanie podwójnej nierówności:

$$n - 7 \leq 3n + 4 < 3 - n$$

gdzie n oznacza liczbę naturalną.

4. Działania na zbiorach

Umiejętności:

- wykonywanie działań na zbiorach (suma, część wspólna, różnica zbiorów)
- stosowanie symboli działań na zbiorach

Zdefiniujemy trzy działania na zbiorach. Omawiane przykłady dotyczą zbiorów liczbowych, ale wprowadzane definicje stosuje się nie tylko w matematyce.

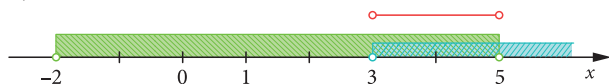
Część wspólna (iloczyn) zbiorów

Przykład 1

Rozwiążemy układ nierówności $\begin{cases} -2 < x < 5 \\ x > 3 \end{cases}$, zaznaczając odpowiednie przedziały na osi liczbowej.

Rozwiązanie

Zbiorem rozwiązań pierwszej nierówności jest przedział liczbowy $(-2; 5)$, a drugiej – przedział $(3; \infty)$.



Do zbioru rozwiązań układu należą wszystkie liczby spełniające pierwszą i drugą nierówność jednocześnie, a więc takie, które są elementami obydwu przedziałów. Tworzą one przedział liczbowy $(3; 5)$.

Odp.: $x \in (3; 5)$

Definicja

Częścią wspólną lub **iloczynem** zbiorów A i B nazywamy zbiór utworzony ze wszystkich elementów, które należą jednocześnie do zbioru A i do zbioru B . Część wspólną zbiorów A i B oznaczamy $A \cap B$.

Przykład 2 ◀ zad. 4.5

Wyznamy część wspólną podanych zbiorów A i B .

a) A jest zbiorem liczb całkowitych podzielnych przez 3, B jest zbiorem liczb całkowitych podzielnych przez 2.

Część wspólna $A \cap B$ jest zbiorem liczb całkowitych podzielnych przez 3 i przez 2, czyli zbiorem liczb całkowitych podzielnych przez 6.

◀ 4.5. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B , a następnie wyznacz zbiór $A \cap B$.

- a) $A = \langle -5; 2 \rangle$, $B = \langle -1; 4 \rangle$
 b) $A = \langle -\infty; 3 \rangle$, $B = \langle 0; 5 \rangle$
 c) $A = \langle -5; 3 \rangle$, $B = \langle 3; 6 \rangle$
 d) $A = \langle -\infty; 5 \rangle$, $B = \langle 2; \infty \rangle$
 e) $A = \langle -5; -2 \rangle$, $B = \langle 1; 3 \rangle$
 f) $A = \langle -\infty; 8 \rangle$, $B = \langle 8; 10 \rangle$

Odp.: a) $\langle -1; 2 \rangle$ b) $\langle 0; 3 \rangle$ c) $\emptyset$
 d) $\langle 2; 5 \rangle$ e) $\emptyset$ f) $\{8\}$

ZZ i MKP

tematy 2.1, 2.2, 2.4

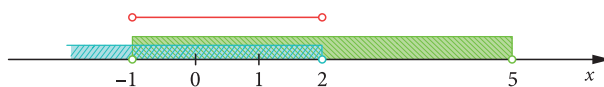
Multiteka

- Różnica zbiorów
- Różnica zbiorów – rozwiązanie zadania
- Działania na dwóch zbiorach (1)
- Działania na dwóch zbiorach (2)
- Działania na trzech zbiorach (1)
- Działania na trzech zbiorach (2)

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.4

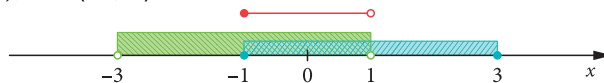
b) $A = (-\infty; 2)$, $B = (-1; 5)$

Obydwa zbiory zaznaczamy na osi liczbowej.



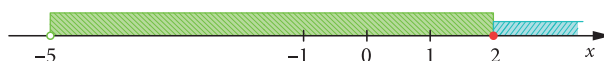
Do zbioru $A \cap B$ należą liczby x spełniające nierówność $-1 < x < 2$, czyli $(-\infty; 2) \cap (-1; 5) = (-1; 2)$.

c) $A = (-3; 1)$, $B = (-1; 3)$



$$(-3; 1) \cap (-1; 3) = (-1; 1)$$

d) $A = (-5; 2)$, $B = \langle 2; \infty)$



Jedyną liczbą należącą do przedziału A i do przedziału B jest 2.

Zbiór $A \cap B$ jest jednoelementowy: $(-\infty; 2) \cap \langle 2; \infty) = \{2\}$.

e) $A = (-2; 1)$, $B = \langle 2; \infty)$



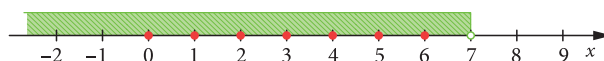
Nie ma liczby, która należałaby jednocześnie do przedziału A i do przedziału B .

Zatem częścią wspólną tych zbiorów jest zbiór pusty.

$$(-2; 1) \cap \langle 2; \infty) = \emptyset$$

Jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to mówimy, że zbiory A oraz B są **rozłączne**.

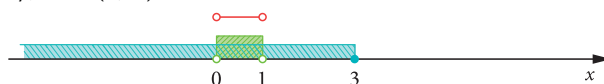
f) $A = (-\infty; 7)$, $B = \mathbf{N}$



W nawiasach kłamrowych wypisujemy wszystkie elementy wyznaczonego zbioru.

$$(-\infty; 7) \cap \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

g) $A = (-\infty; 3)$, $B = (0; 1)$



$$A \cap B = (0; 1) = B$$

Jeżeli $A \cap B = B$, to zbiór B jest podzbiorem zbioru A .

Suma zbiorów

Przykład 3

Wyznamy zbiór X liczb naturalnych mniejszych od 20 podzielnych przez 3 lub przez 4.

Rozwiązanie

Jeżeli $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ jest zbiorem liczb naturalnych mniejszych od 20 podzielnych przez 3, a $B = \{0, 4, 8, 12, 16\}$ – odpowiednio zbiorem liczb podzielnych przez 4, to szukany zbiór $X = \{0, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18\}$ nazwiemy sumą zbiorów A oraz B .

Definicja

Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór utworzony ze wszystkich elementów, które należą przynajmniej do jednego z nich, czyli do zbioru A lub do zbioru B . Sumę zbiorów A i B oznaczamy $A \cup B$.

Przykład 4

◀ zad. 4.8

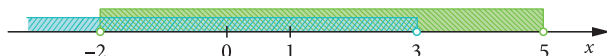
Wyznamy sumę zbiorów A i B .

a) $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$, czyli A jest zbiorem liczb naturalnych parzystych i mniejszych od 20;

$B = \{0, 5, 10, 15\}$, czyli B jest zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez 5 i mniejszych od 20.

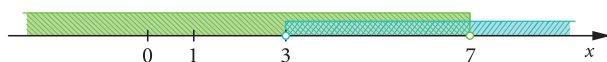
$$A \cup B = \{0, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$$

b) $A = (-\infty; 3)$, $B = (-2; 5)$



$$A \cup B = (-\infty; 5)$$

c) $A = (-\infty; 7)$, $B = (3; \infty)$



$$A \cup B = \mathbb{R}$$

d) $A = \langle -3; 1 \rangle$, $B = \langle 2; 5 \rangle$



$$A \cup B = \langle -3; 1 \rangle \cup \langle 2; 5 \rangle$$

W tym wypadku suma $A \cup B$ nie jest przedziałem liczbowym, ponieważ zbiory A oraz B są rozłączne.

◀4.8. Wyznamy sumę zbiorów $A \cup B$.

a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

i $B = \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$

b) $A = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$

i $B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\right\}$

c) A jest zbiorem liczb naturalnych mniejszych od 5, B jest zbiorem nieparzystych liczb naturalnych, spełniających nierówność $3x - 1 < 20$.

d) A jest zbiorem wielokrotności liczby 5, B jest zbiorem wielokrotności liczby 10.

Odp.: a) $A \cup B = \{-3, -2, -\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}, 2, 3\}$

b) $A \cup B = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\right\}$

c) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

d) $A \cup B = A$

◀4.9. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B , a następnie wyznacz zbiór $A \cup B$.

- a) $A = (-\infty; 3)$, $B = (3; 5)$
 b) $A = (-3; 2)$, $B = \langle 2; 4)$
 c) $A = (-\infty; 1)$, $B = (-3; \infty)$
 d) $A = (-3; \infty)$, $B = (0; \infty)$
 e) $A = (2; 7)$, $B = \langle -3; 2)$
 f) $A = \langle -2; 2)$, $B = (-5, 5)$

Odp.: a) $A \cup B = (-\infty; 5)$
 b) $A \cup B = (-3; 4)$ c) $A \cup B = \mathbb{R}$
 d) $A \cup B = A$ e) $A \cup B = \langle -3; 7)$
 f) $A \cup B = B$

◀4.13. Wyznacz różnice zbiorów $A - B$ i $B - A$.

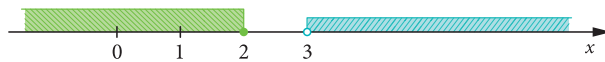
- a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
 $B = \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$
 b) $A = \{-2, 0, 2\}$, $B = \{-1, 1, 3\}$
 c) $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}\}$,
 $B = \{1, 2\}$
 d) $A = \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$,
 $B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$
 e) A jest zbiorem dzielników całkowitych liczby 18,
 $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 81\}$
 f) $A = \{0, 3, 6, 9\}$,
 $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 3\}$

Odp.: a) $A - B = \{-3, -2, 0, 2, 3\}$,
 $B - A = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
 b) $A - B = A$, $B - A = B$
 c) $A - B = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$, $B - A = \emptyset$
 d) $A - B = \{3, 6, 9\}$,
 $B - A = \{1, 4, 7\}$
 e) $A - B = \{-18, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 18\}$, $B - A = \emptyset$
 f) $A - B = \{6, 9\}$,
 $B - A = \{-1, 1, 2\}$

Przykład 5 ◀ zad. 4.9

Zaznaczmy na osi zbiór liczb spełniających następujący warunek: $x \leq 2$ lub $x > 3$.

Rozwiązanie



Szukanym zbiorem jest suma przedziałów $(-\infty; 2] \cup (3; \infty)$.

Różnica zbiorów

Przykład 6

Zaznaczmy na osi liczbowej zbiór rozwiązań podanego układu dwóch nierówności.

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$$



Warunki $x \in \langle -1; \infty)$ i $x \neq 3$ możemy zapisać w postaci $x \in \langle -1; 3) \cup (3; \infty)$.

Inaczej mówiąc, ze zbioru $\langle -1; \infty)$ została wykluczona jedna liczba.

Definicja

Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór utworzony ze wszystkich elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B .

Różnicę zbiorów A i B oznaczamy $A - B$.

Zbiór określony w przykładzie 6 możemy zapisać również w postaci $\langle -1; \infty) - \{3\}$.

Przykład 7 ◀ zad. 4.13

Wyznaczmy różnice zbiorów $A - B$ oraz $B - A$.

- a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

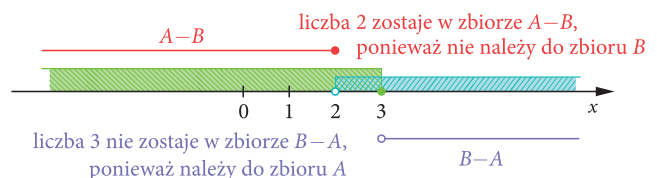
$$A - B = \{1, 3, 5\}$$

$$B - A = \{8, 10\}$$

- b) $A = (-\infty; 3)$,
 $B = (2; \infty)$

$$A - B = (-\infty; 2]$$

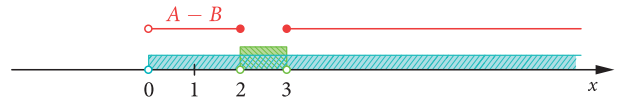
$$B - A = (3; \infty)$$



- c) $A = (0; \infty)$, $B = (2; 3)$

$$A - B = (0; 2] \cup \langle 3; \infty)$$

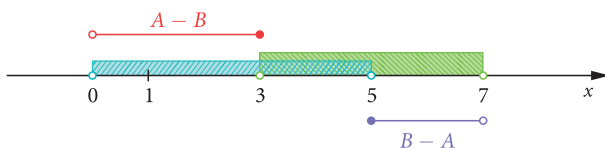
$$B - A = \emptyset$$



d) $A = (0; 5)$, $B = (3; 7)$

$A - B = (0; 3)$

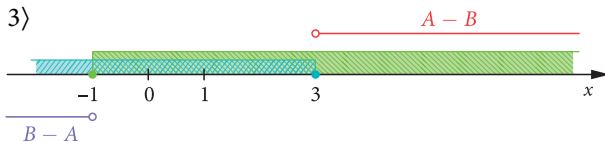
$B - A = (5; 7)$



e) $A = \langle -1; \infty)$, $B = (-\infty; 3)$

$A - B = (3; \infty)$

$B - A = (-\infty; -1)$

**Przykład 8** ◀ zad. 4.15

D oznacza zbiór liczb, które możemy podstawiać do wyrażenia w miejsce litery x , aby obliczyć wartość tego wyrażenia dla danej liczby.

Dla każdego z podanych wyrażenń wyznaczmy zbiór D , korzystając z założeń określających wykonalność działań.

Wyrażenie	Założenie	Zbiór D
$x + 1$	niepotrzebne	$\mathbf{R}$
$\frac{1}{x}$	$x \neq 0$	$\mathbf{R} - \{0\}$
$\sqrt{x}$	$x \geq 0$	$\langle 0; \infty)$
$\frac{3}{2-x}$	$2-x \neq 0$	$\mathbf{R} - \{2\}$
$\frac{x+1}{x+5}$	$x+5 \neq 0$	$\mathbf{R} - \{-5\}$
$\sqrt{x} + \frac{3}{x-2}$	$x \geq 0$ i $x-2 \neq 0$	$\langle 0; \infty) - \{2\}$
$\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x-3}$	$x+1 \neq 0$ i $x-3 \neq 0$	$\mathbf{R} - \{-1, 3\}$
$\frac{x^2+5x+7}{3}$	niepotrzebne	$\mathbf{R}$

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

4.1. Wskaż różnicę zbiorów $\langle -2; 6) - \langle 3; 8)$.

A. $\langle -2; 3)$ B. $\langle -2; 3)$ C. $\langle 3; 6)$ D. $\emptyset$ **Odpowiedzi i rozwiązania**

4.1. B

◀ **4.15.** Niech D oznacza zbiór liczb, które możemy podstawiać do wyrażenia w miejsce litery x . Podaj założenia określające wykonalność działań w wyrażeniu. Wyznacz zbiór D , korzystając z podanych założeń.

a) $\frac{3}{x}$

b) $\frac{1}{x-5}$

c) $\frac{x+1}{x-7}$

d) $\sqrt{x-4}$

e) $\frac{x-3}{5}$

f) $\frac{5}{x+1} - \frac{7}{x+2}$

g) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+3}$

h) $\sqrt{x-3} + 3\sqrt{3}$

i) $\sqrt{1-x} + \frac{7}{x-4}$

j) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$

k) $\frac{x+5}{2} + \frac{x+2}{5}$

l) $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$

m) $\frac{x+1}{x-3} + \frac{x}{\sqrt{x-5}}$

n) $\sqrt{x+2} + \frac{1}{\sqrt{3-x}}$

o) $\sqrt{(x-3)^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2}}$

Odp.: a) $x \neq 0$, $D = \mathbf{R} - \{0\}$

b) $x \neq 5$, $D = \mathbf{R} - \{5\}$

c) $x \neq 7$, $D = \mathbf{R} - \{7\}$

d) $x \geq 4$, $D = \langle 4; \infty)$

e) $D = \mathbf{R}$

f) $x \neq -1$ i $x \neq -2$,

$D = \mathbf{R} - \{-2, -1\}$

g) $x \neq 0$ i $x \neq 2$ i $x \neq -3$,

$D = \mathbf{R} - \{-3, 0, 2\}$

h) $x \geq 3$, $D = \langle 3; \infty)$

i) $x \leq 1$ i $x \neq 4$, $D = (-\infty; 1)$

j) $x \neq 0$ i $x \neq 1$ i $x \neq 2$,

$D = \mathbf{R} - \{0, 1, 2\}$

k) $D = \mathbf{R}$

l) $x > 2$, $D = (2; \infty)$

m) $x \neq 3$ i $x > 5$, $D = (5; \infty)$

n) $x \geq -2$ i $x < 3$, $D = \langle -2; 3)$

o) $x \neq 0$, $D = \mathbf{R} - \{0\}$

4.2. C

4.3. D

4.4. P, F, P

4.5. a) $\langle -1; 2 \rangle$ b) $\langle 0; 3 \rangle$ c) $\emptyset$
 d) $\langle 2; 5 \rangle$ e) $\emptyset$ f) $\{8\}$

4.6. a) $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$
 b) $1, 2, 3, 4$
 c) $0, 1, 2$

4.7. a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,
 $B = \{0, 5, 10, 15\}$, $A \cap B = \{0\}$
 b) $A = \{13, 26, 39, 52, 65, 78, 91\}$
 $B = \{1, 2, 4, 13, 26, 52\}$,
 $A \cap B = \{13, 26, 52\}$
 c) $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$,
 $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, \dots, 11, 12\}$,
 $A \cap B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$
 d) $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$,
 $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,
 $A \cap B = \{2, 3, 5\}$

4.8. a) $A \cup B = \{-3, -2, -\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}, 2, 3\}$
 b) $A \cup B = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\right\}$
 c) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
 d) $A \cup B = A$

4.9. a) $A \cup B = (-\infty; 5)$
 b) $A \cup B = (-3; 4)$
 c) $A \cup B = \mathbf{R}$
 d) $A \cup B = A$
 e) $A \cup B = \langle -3; 7 \rangle$
 f) $A \cup B = B$

4.2. Wskaż iloczyn zbiorów $\langle 2; 6 \rangle \cap \langle 3; 8 \rangle$.

A. $\langle 2; 3 \rangle$ B. $\langle 2; 3 \rangle$ C. $\langle 3; 6 \rangle$ D. $\emptyset$

4.3. Wskaż sumę zbiorów $\langle 2; 6 \rangle \cup \langle -3; 8 \rangle$.

A. $\langle 6; 8 \rangle$ B. $\langle -2; 3 \rangle$ C. $\langle -3; 6 \rangle$ D. $\langle -3; 8 \rangle$

4.4. Niech A i B będą niepustymi zbiorami. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $A \cup \emptyset = A$
 B. $A \cap \emptyset = A$
 C. Zbiór A jest podzbiorem zbioru B . Zatem $A \cap B = A$.

4.5. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B , a następnie wyznacz zbiór $A \cap B$.

a) $A = \langle -5; 2 \rangle$, $B = \langle -1; 4 \rangle$ d) $A = (-\infty; 5)$, $B = (2; \infty)$
 b) $A = (-\infty; 3)$, $B = \langle 0; 5 \rangle$ e) $A = \langle -5; -2 \rangle$, $B = \langle 1; 3 \rangle$
 c) $A = \langle -5; 3 \rangle$, $B = (3; 6)$ f) $A = (-\infty; 8)$, $B = \langle 8; 10 \rangle$

4.6. Wymień wszystkie elementy zbioru.

a) $\mathbf{Z} \cap \langle -\pi; \pi \rangle$ b) $\mathbf{Z} \cap (0; 3\sqrt{2})$ c) $\mathbf{N} \cap (-\infty; \sqrt{9} - 1)$

4.7. Wyznacz elementy zbiorów: A , B oraz $A \cap B$.

a) $A = \{x \in \mathbf{N} \text{ i } x \leq \sqrt{17}\}$, $B = \{x: x = 5n \text{ i } x < 18 \text{ i } n \in \mathbf{N}\}$
 b) A jest zbiorem dwucyfrowych wielokrotności liczby 13, B jest zbiorem naturalnych dzielników liczby 52.
 c) $A = \{x \in \mathbf{N} \text{ i } 4 \leq x \leq 8\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} \text{ i } -3 \leq x \leq 12\}$
 d) A jest zbiorem liczb pierwszych mniejszych od 20, $B = \{x \in \mathbf{N} \text{ i } 3x - 1 \leq 14\}$.

4.8. Wyznacz sumę zbiorów $A \cup B$.

a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ i $B = \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$
 b) $A = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$ i $B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\right\}$
 c) A jest zbiorem liczb naturalnych mniejszych od 5, B jest zbiorem nieparzystych liczb naturalnych, spełniających nierówność $3x - 1 < 20$.
 d) A jest zbiorem wielokrotności liczby 5, B jest zbiorem wielokrotności liczby 10.

4.9. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B , a następnie wyznacz zbiór $A \cup B$.

a) $A = (-\infty; 3)$, $B = (3; 5)$ d) $A = (-3; \infty)$, $B = (0; \infty)$
 b) $A = (-3; 2)$, $B = \langle 2; 4 \rangle$ e) $A = (2; 7)$, $B = \langle -3; 2 \rangle$
 c) $A = (-\infty; 1)$, $B = (-3; \infty)$ f) $A = \langle -2; 2 \rangle$, $B = (-5, 5)$

4.10. Dane są zbiory $A = \{1, 3, 5, 9, 11\}$, $B = \{2, 5, 7, 9, 11\}$,
 $C = \{3, 7, 9, 11, 13\}$. Zapisz podany zbiór, używając nazw zbiorów A, B, C oraz
symboli $\cup, \cap$.

- a) $\{5, 9, 11\}$ c) $\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ e) $\{3, 9, 11\}$
b) $\{9, 11\}$ d) $\{7, 9, 11\}$ f) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$

4.11. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających podane warunki i zapisz go
w postaci sumy przedziałów.

- a) $3x - 1 < 2$ lub $x + 3 > 4$ c) $-1 < x < 3$ lub $x > 5$
b) $x + 5 \leq 3$ lub $x > 4 - x$ d) $-3 \leq x < 2$ lub $5 < x \leq 7$

4.12. Podaj elementy zbioru A i zbioru B , a następnie wyznacz zbiór $A \cup B$.

- a) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 2x - 5 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 7x - 2 = 26\}$
b) $A = \{x: x = 2n \text{ i } n \in \mathbf{N} \text{ i } x < 10\}$, B to zbiór liczb pierwszych mniejszych od 11
c) $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid -3 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} \mid -7 < x \leq 2\}$
d) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \leq \sqrt{37}\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x \leq 2\sqrt{3}\}$

4.13. Wyznacz różnice zbiorów $A - B$ i $B - A$.

- a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$
b) $A = \{-2, 0, 2\}$, $B = \{-1, 1, 3\}$
c) $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}\}$, $B = \{1, 2\}$
d) $A = \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$, $B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$
e) A jest zbiorem dzielników całkowitych liczby 18, $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 = 81\}$
f) $A = \{0, 3, 6, 9\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid -1 \leq x \leq 3\}$

* **4.14.** Jakie warunki powinny spełniać zbiory A i B , aby równość była prawdziwa?

- a) $A \cup B = A$ c) $A \cup B = A \cap B$ e) $A - B = A$
b) $A \cap B = A$ d) $A - B = \emptyset$ f) $A - B = A \cup B$

4.15. Niech D oznacza zbiór liczb, które możemy podstawiać do wyrażenia w miej-
sce litery x . Podaj założenia określające wykonalność działań w wyrażeniu. Wyznacz
zbiór D , korzystając z podanych założeń.

- a) $\frac{3}{x}$ f) $\frac{5}{x+1} - \frac{7}{x+2}$ k) $\frac{x+5}{2} + \frac{x+2}{5}$
b) $\frac{1}{x-5}$ g) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+3}$ l) $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$
c) $\frac{x+1}{x-7}$ h) $\sqrt{x-3} + 3\sqrt{3}$ m) $\frac{x+1}{x-3} + \frac{x}{\sqrt{x-5}}$
d) $\sqrt{x-4}$ i) $\sqrt{1-x} + \frac{7}{x-4}$ n) $\sqrt{x+2} + \frac{1}{\sqrt{3-x}}$
e) $\frac{x-3}{5}$ j) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ o) $\sqrt{(x-3)^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2}}$

Rozwiązanie zadania możesz zapisać w postaci tabeli (zob. przykład 8 s. 125).

4.10. a) $A \cap B$ **b)** $A \cap B \cap C$
c) $A \cup B \cup C$ **d)** $B \cap C$ **e)** $A \cap C$
f) $A \cup C$

4.11. a) $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$
b) $(-\infty; -2) \cup (2; \infty)$
c) $(-1; 3) \cup (5; \infty)$
d) $\langle -3; 2 \rangle \cup (5; 7)$

4.12. a) $A = \{0, 1, 2\}$,
 $B = \{4\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 4\}$
b) $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$,
 $B = \{2, 3, 5, 7\}$,
 $A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
c) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$,
 $B = \{0, 1, 2\}$,
 $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
d) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
 $B = \{0, 1, 2, 3\}$, $A \cup B = A$

4.13. a) $A - B = \{-3, -2, 0, 2, 3\}$,
 $B - A = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
b) $A - B = A$, $B - A = B$
c) $A - B = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$, $B - A = \emptyset$
d) $A - B = \{3, 6, 9\}$,
 $B - A = \{1, 4, 7\}$
e) $A - B = \{-18, -6, -3, -2, -1, 1,$
 $2, 3, 6, 18\}$, $B - A = \emptyset$
f) $A - B = \{6, 9\}$,
 $B - A = \{-1, 1, 2\}$

4.14. a) $B \subset A$ **b)** $A \subset B$
c) $A = B$ **d)** $A \subset B$
e) $A \cap B = \emptyset$ **f)** $B = \emptyset$

4.15. a) $x \neq 0$, $D = \mathbf{R} - \{0\}$
b) $x \neq 5$, $D = \mathbf{R} - \{5\}$
c) $x \neq 7$, $D = \mathbf{R} - \{7\}$
d) $x \geq 4$, $D = \langle 4; \infty \rangle$
e) $D = \mathbf{R}$
f) $x \neq -1$ i $x \neq -2$,
 $D = \mathbf{R} - \{-2, -1\}$
g) $x \neq 0$ i $x \neq 2$ i $x \neq -3$,
 $D = \mathbf{R} - \{-3, 0, 2\}$
h) $x \geq 3$, $D = \langle 3; \infty \rangle$
i) $x \leq 1$ i $x \neq 4$, $D = (-\infty; 1)$
j) $x \neq 0$ i $x \neq 1$ i $x \neq 2$,
 $D = \mathbf{R} - \{0, 1, 2\}$
k) $D = \mathbf{R}$
l) $x > 2$, $D = (2; \infty)$
m) $x \neq 3$ i $x > 5$, $D = (5; \infty)$
n) $x \geq -2$ i $x < 3$, $D = \langle -2; 3 \rangle$
o) $x \neq 0$, $D = \mathbf{R} - \{0\}$

5. Wartość bezwzględna liczby

Umiejętności:

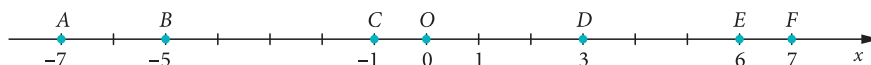
- stosowanie algebraicznej i geometrycznej interpretacji wartości bezwzględnej

Definicja

Wartością bezwzględną liczby nazywamy odległość odpowiadającego jej punktu na osi liczbowej od punktu o współrzędnej 0 mierzoną w odcinkach jednostkowych. Wartość bezwzględną liczby a oznaczamy $|a|$.

Przykład 1

Każdemu punktowi osi liczbowej odpowiada dokładnie jedna współrzędna, a każdej liczbie odpowiada dokładnie jeden punkt na osi. Znajdziemy odległość kilku z nich od punktu O .



$$|AO| = 7 \quad |BO| = 5 \quad |CO| = 1 \quad |DO| = 3 \quad |EO| = 6 \quad |FO| = 7$$

Zatem zgodnie z definicją:

$$|-7| = 7 \quad |-5| = 5 \quad |-1| = 1 \quad |3| = 3 \quad |6| = 6 \quad |7| = 7$$

Jeżeli liczba a jest nieujemna, to jest równa swojej wartości bezwzględnej.

Jeżeli a jest liczbą ujemną, to jej wartość bezwzględna jest liczbą do niej przeciwną.

$$|a| = a \quad \text{dla } a \geq 0$$

$$|a| = -a \quad \text{dla } a < 0$$

Często spotykany jest następujący zapis definicji wartości bezwzględnej liczby:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

W tym wypadku klamerek nie oznacza układu, czyli spełnienia obydwu warunków równocześnie.

Przykład 2

a) $|-5,3| = 5,3$

b) $|0| = 0$

c) $\left|\frac{3}{7}\right| = \frac{3}{7}$

Wprost z definicji wynikają następujące własności wartości bezwzględnej:

- $|a| = |-a|$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $|a| \geq 0 \quad \text{dla } a \in \mathbf{R}$

ZZ i MKP

temat 2.10

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.5

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 3

Przekształćmy podane wyrażenie, korzystając z własności wartości bezwzględnej.

- a) $|6| = |-6| = 6$ $\leftarrow |a| = |-a|$
 b) $|2x| = |2| \cdot |x| = 2|x|$ $\leftarrow |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
 c) $|x^2(x+1)| = |x^2| \cdot |x+1| = x^2|x+1|$ $\leftarrow x^2 \geq 0$ dla $x \in \mathbf{R}$
 d) $\left|\frac{xy}{5}\right| = \frac{|xy|}{|5|} = \frac{|xy|}{5}$ $\leftarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Przykład 4 zad. 5.5

Zapiszemy podaną liczbę bez używania znaku wartości bezwzględnej.

- a) $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$ $\leftarrow \sqrt{2} > 1$, więc $\sqrt{2} - 1 > 0$
 b) $|\sqrt{35} - 7| = |7 - \sqrt{35}| = 7 - \sqrt{35}$ $\leftarrow 7 > \sqrt{35}$
 c) $|-5 - \sqrt{3}| = |5 + \sqrt{3}| = 5 + \sqrt{3}$
 d) $\left|\frac{\pi - 4}{5 - \pi}\right| = \frac{|\pi - 4|}{|5 - \pi|} = \frac{-\pi + 4}{5 - \pi} = \frac{4 - \pi}{5 - \pi}$ $\leftarrow \pi < 4$ i $5 > \pi$
 e) $|4 - \sqrt{15}| + |4 - \sqrt{17}| =$ $\leftarrow \sqrt{15} < 4$ i $\sqrt{17} > 4$
 $= 4 - \sqrt{15} + (-4 + \sqrt{17}) = \sqrt{17} - \sqrt{15}$

Z własności $|a| = |-a|$ wynika równość $|a - b| = |b - a|$.

Przykład 5 zad. 5.10

Zapiszemy podane wyrażenie bez użycia symbolu wartości bezwzględnej, znając warunek, jaki spełnia x .

- a) $|x - 4|$ dla $x \in (-\infty; 4)$
 Jeżeli $x < 4$, to $x - 4 < 0$, zatem $|x - 4| = -(x - 4) = -x + 4$.
 b) $|1 + x| + |x - 7|$ dla $x \in (-1; 7)$
 Jeżeli $x > -1$, to $1 + x > 0$, więc $|1 + x| = 1 + x$.
 Jeżeli $x < 7$, to $x - 7 < 0$, więc $|x - 7| = -(x - 7) = -x + 7$.
 Zatem $|1 + x| + |x - 7| = 1 + x - x + 7 = 8$.

Pojęcie wartości bezwzględnej można wykorzystać przy obliczaniu pierwiastków kwadratowych. Przypomnijmy, że pierwiastkiem kwadratowym z nieujemnej liczby a nazywamy taką nieujemną liczbę b , która podniesiona do kwadratu jest równa a .

Zauważmy, że $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$ oraz $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.

Wniosek

$$\sqrt{a^2} = |a| \text{ dla } a \in \mathbf{R}$$

◀5.5. Zapisz liczbę bez używania symbolu wartości bezwzględnej. Nie korzystaj z kalkulatora.

- a) $|3 - \sqrt{2}|$
 b) $\left|5\frac{1}{2} - \frac{11}{2}\right|$
 c) $\left|\frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} + 2}\right|$
 d) $\left|\frac{2 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} + 2}\right|$
 e) $|3\sqrt{7} - 5\sqrt{3}|$
 f) $|2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}|$

Odp.: a) $3 - \sqrt{2}$ b) 0 c) $7 - 4\sqrt{3}$
 d) $9 - 4\sqrt{5}$ e) $5\sqrt{3} - 3\sqrt{7}$
 f) $3\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$

◀5.10. Wyznacz wszystkie wartości x , dla których podane wyrażenie jest określone, i zapisz to wyrażenie w najprostszej postaci.

- a) $\frac{|x| \cdot |-x|}{-|x^2|}$
 b) $\frac{|3 - x|}{|2x - 6|}$
 c) $\frac{|\sqrt{2} - x|}{|3x - 3\sqrt{2}|}$
 d) $\frac{|5 - 2x|}{|4x - 10|} - \frac{|x - 6|}{|12 - 2x|}$

Odp.: a) $x \in \mathbf{R} - \{0\}$, -1

- b) $x \in \mathbf{R} - \{3\}$, $\frac{1}{2}$
 c) $x \in \mathbf{R} - \{\sqrt{2}\}$, $\frac{1}{3}$
 d) $x \in \mathbf{R} - \left\{2\frac{1}{2}, 6\right\}$, 0

◀5.12. Zapisz podane wyrażenie bez użycia symbolu pierwiastka.

- a) $\sqrt{(x+7)^2}$
 b) $\sqrt{(3-x)^2}$
 c) $\sqrt{(x-y+2z)^2}$
 d) $\sqrt{x^2-2x+1}$
 e) $\sqrt{9x^2+6x+1}$
 f) $\sqrt{25y^2-10y+1}$
 g) $\sqrt{4-20x+25x^2}$
 h) $\sqrt{y^2-2\sqrt{2}y+2}$

Odp.: a) $|x+7|$ b) $|3-x|$
 c) $|x-y+2z|$ d) $|x-1|$
 e) $|3x+1|$ f) $|5y-1|$
 g) $|2-5x|$ h) $|y-\sqrt{2}|$

◀5.3. Patrz s. 131.

$$\text{Zatem: } \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = -1+\sqrt{2} = \sqrt{2}-1$$

$$\sqrt{(4-\pi)^2} = |4-\pi| = 4-\pi$$

$$\sqrt{(-\sqrt{3}-2\sqrt{2})^2} = |-\sqrt{3}-2\sqrt{2}| = \sqrt{3}+2\sqrt{2}$$

Przykład 6 ◀ zad. 5.12

Zapiszemy podane wyrażenie bez użycia symbolu pierwiastka.

a) $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$

b) $\sqrt{(x+5)^2} = |x+5|$

c) $\sqrt{9-6x+x^2} = \sqrt{(3-x)^2} = |3-x|$ $\leftarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

d) $\sqrt{4x^2+4x+1} = \sqrt{(2x+1)^2} = |2x+1|$ $\leftarrow (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Zauważmy, że w podanych przykładach musimy zostawić na końcu znak wartości bezwzględnej, ponieważ pierwiastek kwadratowy nie może mieć wartości ujemnej, a zmienna x może przyjmować różne wartości.



Przykład 7 ◀ zad. 5.3

Wiadomo, że w zadaniu jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Mamy wskazać liczbę równą liczbie $\sqrt{8-2\sqrt{7}}$.

A. $2-\sqrt{7}$

B. $\sqrt{7}-2$

C. $1-\sqrt{7}$

D. $\sqrt{7}-1$

Rozwiązanie

Liczby podane w punktach A, B, C, D nie mają zewnętrznego pierwiastka. Możemy się zatem spodziewać, że $8-2\sqrt{7}$ jest kwadratem jednej z tych liczb.

I sposób

Podnosimy do kwadratu liczby podane w odpowiedziach i sprawdzamy, czy mogą być rozwiązaniem zadania.

A. $(2-\sqrt{7})^2 = 4-4\sqrt{7}+7 \neq 8-2\sqrt{7}$

B. Nie musimy sprawdzać, bo różni się od punktu A tylko znakiem, czyli kwadraty tych liczb są równe.

C. $(1-\sqrt{7})^2 = 1-2\sqrt{7}+7 = 8-2\sqrt{7}$, ale

D. $(\sqrt{7}-1)^2 = 8-2\sqrt{7}$

Ponieważ $1-\sqrt{7} < 0$, więc poprawną odpowiedzią jest D.

Własność tę mają wszystkie pierwiastki parzystego stopnia, czyli

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$$

dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych n i $a \in \mathbf{R}$.



II sposób

Przedstawiamy liczbę $8 - 2\sqrt{7}$ jako kwadrat pewnej liczby.

$$\sqrt{8 - 2\sqrt{7}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{7} + 1} = \sqrt{(\sqrt{7})^2 - 2\sqrt{7} + 1^2} = \sqrt{(\sqrt{7} - 1)^2} = |\sqrt{7} - 1|$$

$$\sqrt{7} - 1 > 0, \text{ zatem } |\sqrt{7} - 1| = \sqrt{7} - 1$$

Odp.: D

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. Wskaż liczbę równą $||1 - 2| - 3|$.

- A. 0 B. 2 C. 4 D. 6

5.2. Wskaż równość, która zachodzi dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

- A. $\sqrt{x^2} = x$ B. $\sqrt{(-x)^2} = x$ C. $\sqrt{(-x)^2} = -x$ D. $\sqrt{x^2} = |-x|$

5.3. Wskaż liczbę równą liczbie $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.

- A. $\sqrt{3} - 1$ B. $1 - \sqrt{3}$ C. $2 - \sqrt{3}$ D. $\sqrt{3} - 2$

5.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Równość $|x| = -x$ nie zachodzi dla żadnej liczby x , bo wartość bezwzględna nie może być ujemna.
 B. Równość $|x| = -x$ zachodzi tylko dla liczby $x = 0$.
 C. Równość $|x| = -x$ zachodzi tylko dla liczb x nie większych od 0.

5.5. Zapisz liczbę bez używania symbolu wartości bezwzględnej. Nie korzystaj z kalkulatora.

- a) $|3 - \sqrt{2}|$ c) $\left| \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} + 2} \right|$ e) $|3\sqrt{7} - 5\sqrt{3}|$
 b) $\left| 5\frac{1}{2} - \frac{11}{2} \right|$ d) $\left| \frac{2 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} + 2} \right|$ f) $|2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}|$

5.6. Oblicz.

- a) $|-3| - |-1 - 5| \cdot |(-3) \cdot (-2)|$ c) $|3 - |2 - 5||$
 b) $|-2 + |2 - |3 - 5|||$ d) $|1 - |1 - |1 - 4|||$

Odpowiedzi i rozwiązania

5.1. B

5.2. D

5.3. A

5.4. F, F, P

5.5. a) $3 - \sqrt{2}$ b) 0 c) $7 - 4\sqrt{3}$
 d) $9 - 4\sqrt{5}$ e) $5\sqrt{3} - 3\sqrt{7}$
 f) $3\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$

5.6. a) -33 b) 2 c) 0 d) 1

5.7. a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2$

b) $2\sqrt{3} + \sqrt{5} - 5$

c) $\sqrt{10} + \sqrt{17} - \sqrt{47}$

d) $3 + \sqrt{50} - \sqrt{99}$

5.8. a) 7 b) 4 c) $5\sqrt{5}$ d) 5

e) 2 f) 8 g) 3 h) 2

5.9. a) 1 b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 2 d) 1

5.10. a) $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, -1

b) $x \in \mathbb{R} - \{3\}$, $\frac{1}{2}$

c) $x \in \mathbb{R} - \{\sqrt{2}\}$, $\frac{1}{3}$

d) $x \in \mathbb{R} - \{2\frac{1}{2}, 6\}$, 0

5.11. a) -3 b) 13 c) -5 d) 9

e) 6 f) -3

5.12. a) $|x + 7|$ b) $|3 - x|$

c) $|x - y + 2z|$ d) $|x - 1|$

e) $|3x + 1|$ f) $|5y - 1|$

g) $|2 - 5x|$ h) $|y - \sqrt{2}|$

5.7. Zapisz liczbę bez używania symbolu wartości bezwzględnej. Nie korzystaj z kalkulatora.

a) $|\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2|$

c) $|\sqrt{10} + \sqrt{17} - \sqrt{47}|$

b) $|5 - 2\sqrt{3} - \sqrt{5}|$

d) $|\sqrt{99} - 3 - \sqrt{50}|$

5.8. Oblicz.

a) $\left|3,5 + 2\frac{7}{8}\right| + \left|2\frac{7}{8} - 3\frac{1}{2}\right|$

e) $|2\sqrt{5} - 3| - 5|\sqrt{5} - 2| + |5 - 3\sqrt{5}|$

b) $|\sqrt{3} - 5| + |\sqrt{3} - 1|$

f) $|2 - 2\sqrt{3}| \cdot |2 + 2\sqrt{3}|$

c) $|8 + 3\sqrt{5}| - |2\sqrt{5} - 8|$

g) $|\sqrt{7} - 2| \cdot |-\sqrt{7} - 2|$

d) $\left|2,5 + 1\frac{7}{8}\right| + \left|\frac{15}{8} - \frac{5}{2}\right|$

h) $|5 - 3\sqrt{3}| \cdot |5 + 3\sqrt{3}|$

5.9. Oblicz.

a) $\left|\frac{11 - \sqrt{13}}{\sqrt{13} - 11}\right|$

b) $\left|\frac{3 - \sqrt{15}}{\sqrt{30} - 3\sqrt{2}}\right|$

c) $\left|\frac{2 - 4\sqrt{6}}{2\sqrt{6} - 1}\right|$

d) $\left|\frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1}\right|$

5.10. Wyznacz wszystkie wartości x , dla których podane wyrażenie jest określone, i zapisz to wyrażenie w najprostszej postaci.

a) $\frac{|x| \cdot |-x|}{-|x^2|}$

b) $\frac{|3 - x|}{|2x - 6|}$

c) $\frac{|\sqrt{2} - x|}{|3x - 3\sqrt{2}|}$

d) $\frac{|5 - 2x|}{|4x - 10|} - \frac{|x - 6|}{|12 - 2x|}$

5.11. Zapisz podane wyrażenie bez użycia symbolu wartości bezwzględnej, znając warunek, jaki spełnia x .

a) $|x + 2| - |x - 1|$

$x \in (-\infty; -3)$

b) $|5 + x| + |x - 8|$

$x \in (4; 7)$

c) $|4 - x| - 2|x - 3| - |7 - x|$

$x \in (4; 7)$

d) $|x - 5| - 1 + |x + 5|$

$x \in (1; 5)$

e) $3|2x - 1| - \frac{x - 2}{|2 - x|} - 2|3x + 1|$

$x \in (-\infty; -1)$

f) $|x - 2| - \frac{2x - 6}{|x - 3|} - |1 - x|$

$x \in (5; \infty)$

5.12. Zapisz podane wyrażenie bez użycia symbolu pierwiastka.

a) $\sqrt{(x + 7)^2}$

e) $\sqrt{9x^2 + 6x + 1}$

b) $\sqrt{(3 - x)^2}$

f) $\sqrt{25y^2 - 10y + 1}$

c) $\sqrt{(x - y + 2z)^2}$

g) $\sqrt{4 - 20x + 25x^2}$

d) $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$

h) $\sqrt{y^2 - 2\sqrt{2}y + 2}$

5.13. Oblicz.

$$\begin{aligned} \text{a)} & \sqrt{(2 - \sqrt{7})^2} & \text{c)} & \sqrt{(5 - 2\sqrt{3})^2} - 2\sqrt{(\sqrt{3} - 3)^2} & \text{e)} & \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5} - 3}{\sqrt{5} - 2}\right)^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} \\ \text{b)} & \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} & \text{d)} & \sqrt{(1 - \sqrt{7})^2} - \sqrt{(\sqrt{7} + 3)^2} & \text{f)} & \sqrt{(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})^2} \end{aligned}$$

5.14. Zapisz podane wyrażenie bez użycia symbolu wartości bezwzględnej, znając warunek, jaki spełnia x .

$$\begin{aligned} \text{a)} & \frac{3x - 9}{|x - 3|} + 2\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 2|3 - x| & x & \in \langle -1; 1 \rangle \\ \text{b)} & \frac{x^2 - 4}{|x| + 2} + \frac{\sqrt{x^2 + 6x + 9}}{2x + 6} - \left| \frac{1}{2} - x \right| & x & \in \langle 1; 2 \rangle \\ \text{c)} & \sqrt{x^2 - 10x + 25} - \frac{x - 1}{|x - 1|} + |x + 5| & x & \in (1; 5) \\ * \text{d)} & \sqrt{3x^2 - 6x + 3} + |\sqrt{3}x - 3| + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} & x & \in \langle 1; 2 \rangle \end{aligned}$$

5.15. Zapisz liczbę w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$ i $c \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \text{a)} & \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} & \text{c)} & \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} & \text{e)} & \sqrt{12 - 6\sqrt{3}} \\ \text{b)} & \sqrt{(3 - \sqrt{10})^2} & \text{d)} & \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} & \text{f)} & \sqrt{16 - 6\sqrt{7}} \end{aligned}$$

D 5.16. Udowodnij, że wyrażenie $\sqrt{25n^2 + 10\sqrt{3}n + 3} - \sqrt{9n^2 + 6\sqrt{3}n + 3}$ przyjmuje wartości naturalne parzyste dla każdej naturalnej liczby n .

*** 5.17.** Zapisz liczbę $|\sqrt{7} + \sqrt{11} - 6|$ bez używania symbolu wartości bezwzględnej. Nie korzystaj z kalkulatora.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Dla każdego x wartość wyrażenia $|x - 3|$ jest równa wartości wyrażenia

A. $|x + 3|$. **B.** $x - 3$. **C.** $|3 - x|$.

2. Oblicz $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| + |\sqrt{18} - 2\sqrt{3}| + |0,25\sqrt{32} - 0,5\sqrt{12}|$.

3. Uprość wyrażenie $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} - |9 - 6x| + \sqrt[4]{(x - 1,5)^4}$.

D 4. Udowodnij, że dla wszystkich $a \in (-2; 5)$ wyrażenie $|2a - 10| + |-2a - 4|$ przyjmuje stałą wartość.

D 5. Udowodnij, że liczba $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}$ jest całkowita.

$$5. \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} = |3 - \sqrt{2}| + |2 + \sqrt{2}| = 5$$

5.13. a) $\sqrt{7} - 2$ b) $3 - \sqrt{2}$ c) -1
d) -4 e) 4 f) $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$

5.14. a) -1 b) -1 c) 9
d) 2 dla $x \in \langle 1; \sqrt{3} \rangle$ lub
 $2\sqrt{3}x - 4$ dla $x \in \langle \sqrt{3}; 2 \rangle$

5.15. a) $2 - \sqrt{3}$ b) $-3 + \sqrt{10}$
c) $-1 + \sqrt{3}$ d) $-1 + \sqrt{2}$
e) $3 - \sqrt{3}$ f) $3 - \sqrt{7}$

5.16. Wskazówka:

$$\sqrt{(a \pm b)^2} = |a \pm b|$$

5.17. Załóżmy, że $\sqrt{7} + \sqrt{11} > 6$.
Wtedy $7 + 2\sqrt{77} + 11 > 36$,
czyli $\sqrt{77} > 9$, zatem
 $77 > 81$. Ta nierówność
okazała się fałszywa, zatem
 $|\sqrt{7} + \sqrt{11} - 6| = 6 - \sqrt{7} - \sqrt{11}$.

Prosto do matury

1. F, F, P

2. $3\sqrt{2}$

3. $-\frac{3}{2}|2x - 3|$

4. Jeśli $a \in (-2; 5)$,
to $2a - 10 < 0$ i $-2a - 4 < 0$,
więc $|2a - 10| + |-2a - 4| =$
 $= -(2a - 10) - (-2a - 4) = 14$.
Zatem wyrażenie ma stałą wartość
dla każdego a z danego przedziału.

6. Interpretacja geometryczna wartości bezwzględnej

Umiejętności:

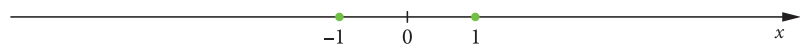
- wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej i jej interpretacji geometrycznej
- zaznaczanie na osi liczbowej zbiorów opisanych za pomocą równań i nierówności typu: $|x - a| = b$, $|x - a| < b$, $|x - a| > b$

Wartość bezwzględna mierzy odległość liczby od zera.

Przykład 1 zad. 6.6

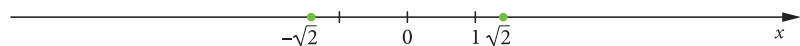
Zaznaczmy na osi liczbowej punkty, których współrzędne x spełniają podane równanie.

a) $|x| = 1$

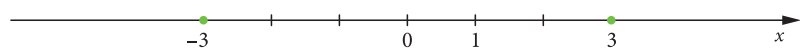


Są dwie liczby oddalone od zera o jedną jednostkę: 1 oraz -1.

b) $|x| = \sqrt{2}$



c) $2|x| + 1 = 7$, czyli $|x| = 3$.



Przykład 2 zad. 6.8

Zaznaczmy na osi liczbowej punkty, których współrzędne x spełniają podaną nierówność.

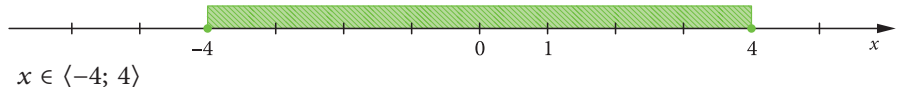
a) $|x| < 2$

Nierówność opisuje wszystkie punkty, których odległość od punktu 0 jest mniejsza od 2.



Są to punkty o współrzędnych większych od -2 i równocześnie mniejszych od 2. Zatem $x \in (-2; 2)$.

b) $|x| \leq 4$



◀ 6.6. Zaznacz na osi liczbowej wszystkie punkty, których współrzędne x spełniają podane równanie.

a) $|x| = 4$

b) $|x| = 2\frac{2}{3}$

c) $|x| - \sqrt{3} = 0$

d) $4 - |x| = 4$

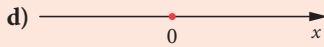
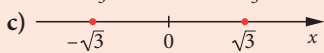
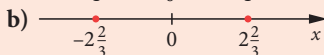
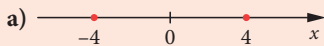
e) $1 - |x| = 4$

f) $2|x| - 1 = 3$

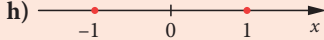
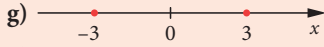
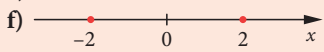
g) $5 + 3|x| = 14$

h) $9 - 5|x| = 4$

Odp.:



e) brak



ZZ i MKP

temat 2.11

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.6

Generator
testów i sprawdzianów

◀ 6.8. Zaznacz na osi liczbowej wszystkie punkty, których współrzędna x spełnia podaną nierówność.

a) $|x| < 5$

b) $|x| > 7$

c) $|x| \leq 2$

d) $-2|x| < 0$

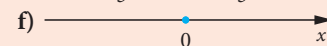
e) $2 + |x| > 5$

f) $|x| - 2 \leq -2$

g) $11 - 4|x| < 3$

h) $\frac{1}{2}|x| - 2 < 3,5|x| - 5$

Odp.:



c) $|x| > 3$

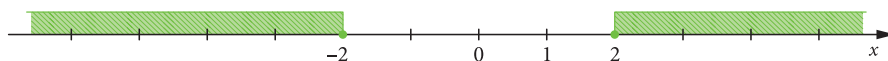
Nierówność określa wszystkie punkty, których odległość od punktu 0 jest większa od 3.



Są to punkty o współrzędnych mniejszych od -3 lub większych od 3 .

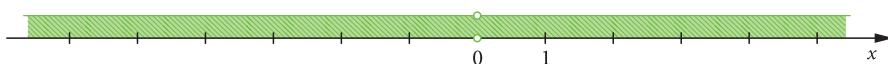
Zatem $x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$.

d) $|x| \geq 2$



$x \in (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$

e) $|x| > 0$



Tylko liczba 0 nie spełnia tej nierówności: $x \in \mathbf{R} - \{0\}$.

f) $|x| > -2$

Wartość bezwzględna każdej liczby jest nieujemna, zatem także większa od -2 , więc każda liczba rzeczywista x spełnia tę nierówność: $x \in \mathbf{R}$.

g) $|x| < -1$

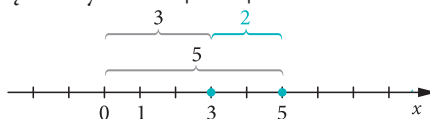
Wartość bezwzględna każdej liczby jest nieujemna, więc ta nierówność nie ma rozwiązań.

Przykład 3

Sprawdźmy, jaką interpretację geometryczną ma wyrażenie $|a - b|$.

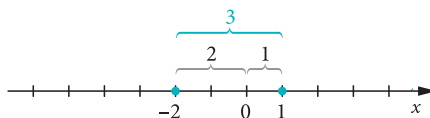
a) $a = 5, b = 3$

$$|5 - 3| = |2| = 2$$



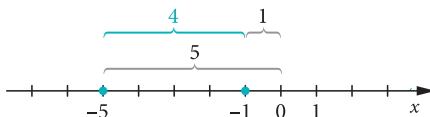
b) $a = -2, b = 1$

$$|-2 - 1| = |-3| = 3$$



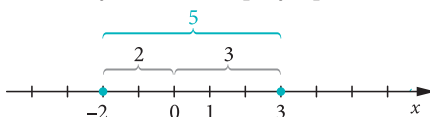
c) $a = -5, b = -1$

$$|-5 - (-1)| = |-5 + 1| = |-4| = 4$$



d) $a = 3, b = -2$

$$|3 - (-2)| = |3 + 2| = |5| = 5$$



Twierdzenie

Odległość między punktami odpowiadającymi na osi liczbom a i b wyraża się wzorem:

$$|a - b|$$

Dowód tego twierdzenia zostawiamy do samodzielnego przeprowadzenia.

◀6.18. Oblicz długość odcinka AB , którego końce $A = (a)$ i $B = (b)$ leżą na osi liczbowej oraz

- a) $a = 3$, $b = -5$.
 b) $a = -1$, $b = -7$.
 c) $a = 9$, $b = 2$.
 d) $a = -\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3}$.
 e) $a = 2\sqrt{5}$, $b = -7\sqrt{5}$.
 f) $a = 1 + 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3} + 5$.
 g) $a = 2 - \sqrt{2}$, $b = 1 + \sqrt{2}$.
 h) $a = 3 - 2\sqrt{5}$, $b = 2 - \sqrt{5}$.

Odp.: a) $|AB| = 8$ b) $|AB| = 6$
 c) $|AB| = 7$ d) $|AB| = 3\sqrt{3}$
 e) $|AB| = 9\sqrt{5}$ f) $|AB| = 4$
 g) $|AB| = 2\sqrt{2} - 1$
 h) $|AB| = \sqrt{5} - 1$

◀6.11. Rozwiąż równanie.

- a) $|x - 1| = 5$
 b) $|x + 2| = 3$
 c) $\left|5\frac{1}{3} - x\right| = 2\frac{2}{3}$
 d) $|x + 7| = 7$
 e) $|x - 2| = -1$
 f) $|11 + x| = 3$

Odp.: a) $x = -4$ lub $x = 6$
 b) $x = -5$ lub $x = 1$
 c) $x = 2\frac{2}{3}$ lub $x = 8$
 d) $x = -14$ lub $x = 0$
 e) brak rozwiązań
 f) $x = -14$ lub $x = -8$

Przykład 4 ◀ zad. 6.18

Obliczmy długość odcinka AB , jeżeli punkty $A = (a)$ i $B = (b)$ leżą na osi liczbowej.

- a) $a = 2 - \sqrt{2}$ i $b = 1 + \sqrt{2}$ b) $a = -3$ i $b = -8 + \sqrt{2}$

Rozwiązanie

$$\text{a) } |AB| = |a - b| = \left| (2 - \sqrt{2}) - (1 + \sqrt{2}) \right| = \left| 2 - \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} \right| = \left| 1 - 2\sqrt{2} \right| = 2\sqrt{2} - 1$$

$$\text{Odp.: } |AB| = 2\sqrt{2} - 1$$

$$\text{b) } |AB| = |a - b| = \left| -3 - (-8 + \sqrt{2}) \right| = \left| -3 + 8 - \sqrt{2} \right| = \left| 5 - \sqrt{2} \right| = 5 - \sqrt{2}$$

$$\text{Odp.: } |AB| = 5 - \sqrt{2}$$

Fakt, że odległość między punktami odpowiadającymi na osi liczbom a i b wyraża się wzorem $|a - b|$, wykorzystamy do rozwiązywania prostych równań i nierówności z wartością bezwzględną.

Przykład 5 ◀ zad. 6.11

Rozwiążemy graficznie równanie.

- a) $|x - 2| = 3$ b) $|x + 3| = 2$ c) $|1 - x| = 4$

Rozwiązanie

- a) $|x - 2| = 3$

Szukamy na osi punktów x , których odległość od liczby 2 jest równa 3.



Rozwiązaniami są liczby -1 oraz 5 .

Sprawdźmy: $|-1 - 2| = |-3| = 3$, $|5 - 2| = |3| = 3$.

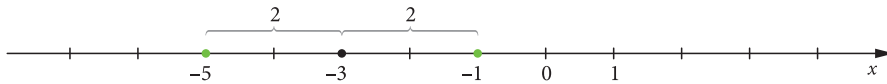
Odp.: $x = -1$ lub $x = 5$

b) $|x + 3| = 2$

Zapiszmy to równanie w takiej postaci, aby można było wykorzystać geometryczną interpretację wyrażenia $|a - b|$.

$|x - (-3)| = 2$

Szukamy punktów x , których odległość od punktu -3 jest równa 2.



Odp.: $x = -5$ lub $x = -1$

c) $|1 - x| = 4$

$|x - 1| = 4$

$\leftarrow |a - b| = |b - a|$



Odp.: $x = -3$ lub $x = 5$

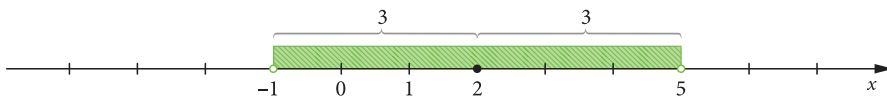
Przykład 6 zad. 6.13

Rozwiążemy graficznie podaną nierówność.

Rozwiązanie

a) $|x - 2| < 3$

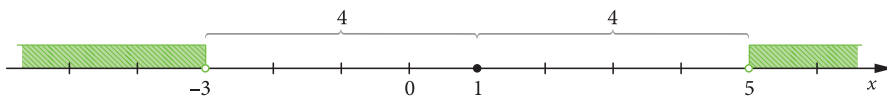
Szukamy punktów x , których odległość od punktu 2 jest mniejsza od 3. Zbiorem rozwiązań jest przedział otwarty $(-1; 5)$.



Odp.: $x \in (-1; 5)$

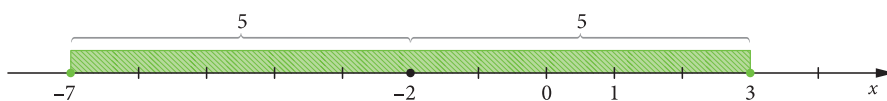
b) $|x - 1| > 4$

Szukamy punktów, których odległość od punktu 1 jest większa od 4.



Odp.: $x \in (-\infty; -3) \cup (5; \infty)$

c) $|x + 2| \leq 5$, czyli $|x - (-2)| \leq 5$



Odp.: $x \in [-7; 3]$

6.13. Rozwiąż nierówność.

a) $|x + 7| \leq 4$

b) $|x - 5| > 3$

c) $|x - 5| + 1 < 5$

d) $1 - |x + 6| \leq 4$

e) $|4 - x| + 3 > 3$

f) $3(2 - |x + 9|) > 7$

g) $2 + 3|x - 5| \geq -1$

h) $15 \geq 3(|x - 11| + 5)$

Odp.: a) $x \in [-11; -3]$

b) $x \in (-\infty; 2) \cup (8; \infty)$

c) $x \in (1; 9)$

d) $x \in \mathbb{R}$

e) $x \in \mathbb{R} - \{4\}$

f) brak rozwiązań

g) $x \in \mathbb{R}$

h) $x = 11$

◀6.14. Przedstaw w postaci $|x - a| < b$ lub $|x - a| \leq b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest podany przedział liczbowy.

- a) $(-3; 7)$
 b) $\langle 6; 14 \rangle$
 c) $\langle -10; 0 \rangle$
 d) $\langle -5; -1 \rangle$

Odp.: a) $|x - 2| < 5$
 b) $|x - 10| \leq 4$ c) $|x + 5| \leq 5$
 d) $|x + 3| \leq 2$

◀6.15. Przedstaw w postaci $|x - a| > b$ lub $|x - a| \geq b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest podana suma przedziałów liczbowych.

- a) $(-\infty; 7) \cup (11; \infty)$
 b) $(-\infty; -2) \cup \langle 8; \infty)$
 c) $(-\infty; -7) \cup \langle -1; \infty)$
 d) $(-\infty; -15) \cup (13; \infty)$

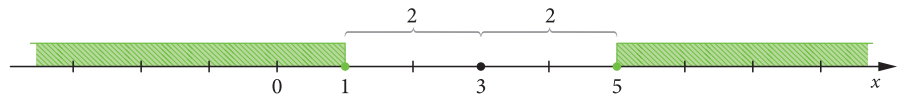
Odp.: a) $|x - 9| > 2$ b) $|x - 3| \geq 5$
 c) $|x + 4| \geq 3$ d) $|x + 1| > 14$

◀6.17. Rozwiąż układ nierówności.

- a) $\begin{cases} \sqrt{x^2} > 4 \\ |x + 2| < 5 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} \sqrt{x^2} \leq 5 \\ \sqrt{x^2} > 3 \end{cases}$
 c) $\begin{cases} \sqrt{4x^2 - 4x + 1} < 7 \\ |x - 2| \geq 1 \end{cases}$
 d) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 10x + 25} < 3 \\ |x - 2| < 10 \end{cases}$

Odp.: a) $x \in (-7; -4)$
 b) $x \in \langle -5; -3 \rangle \cup \langle 3; 5 \rangle$
 c) $x \in (-3; 1) \cup \langle 3; 4 \rangle$
 d) $x \in (-8; -2)$

d) $|3 - x| \geq 2$, czyli $|x - 3| \geq 2$

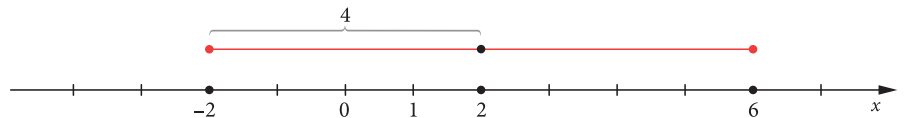


Odp.: $x \in (-\infty; 1] \cup [5; \infty)$

Przykład 7 ◀ zad. 6.14

Zapiszemy w postaci $|x - a| \leq b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest przedział $\langle -2; 6 \rangle$.

Rozwiązanie



Odległość między końcami przedziału $\langle -2; 6 \rangle$ jest równa 8. Punktem oddalonym od -2 i od 6 o połowę tej odległości, czyli o 4, jest punkt odpowiadający liczbie 2. Zatem $a = 2$, $b = 4$.

Odp.: $|x - 2| \leq 4$

Przykład 8 ◀ zad. 6.15

Zapiszemy w postaci $|x - a| > b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest suma przedziałów $(-\infty; -4) \cup (6; \infty)$.

Rozwiązanie

Środkiem odcinka o końcach w punktach -4 oraz 6 jest punkt 1 , a jego odległość od -4 oraz od 6 wynosi 5 . Zatem $a = 1$, $b = 5$.

Odp.: $|x - 1| > 5$

Środkiem odcinka o końcach w punktach a i b jest na osi punkt $\frac{a+b}{2}$.

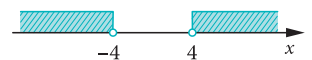
Przykład 9 ◀ zad. 6.17

Rozwiążemy układ nierówności $\begin{cases} \sqrt{x^2} > 4 \\ |x - 2| < 5 \end{cases}$.

Rozwiązanie

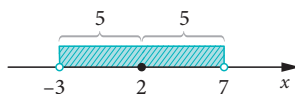
Rozwiązujemy pierwszą nierówność:

$\sqrt{x^2} > 4$, czyli $|x| > 4$, więc $x \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$

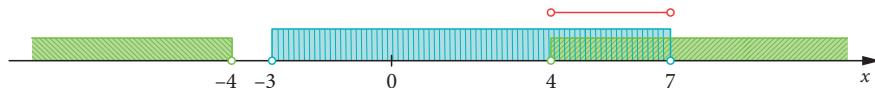


Rozwiązujemy drugą nierówność $|x - 2| < 5$.

Szukamy punktów x , których odległość od punktu 2 jest mniejsza od 5. Zbiorem rozwiązań drugiej nierówności jest przedział otwarty $(-3; 7)$.



Z rysunku odczytujemy, które wartości x spełniają obydwie nierówności:



Odp.: $x \in (-4; -3)$

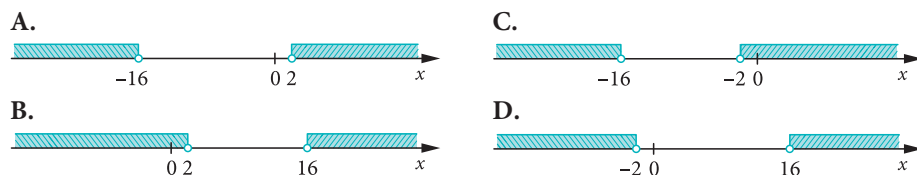
Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.5 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

6.1. Wskaż przedział będący zbiorem rozwiązań nierówności $|x - 4| < 2$.

- A. $(-2; 2)$ B. $(0; 2)$ C. $(-\infty; 6)$ D. $(2; 6)$

6.2. Wskaż rysunek, na którym przedstawiono zbiór rozwiązań nierówności $|x + 9| > 7$.



6.3. Na rysunku przedstawiono zbiór rozwiązań jednej z poniższych nierówności. Wskaż tę nierówność.



- A. $|x + 2| \leq 3$ B. $|x + 3| \leq 2$ C. $|x - 2| \leq 3$ D. $|x - 3| \leq 2$

6.4. Wskaż równanie, którego rozwiązaniami są dwie liczby ujemne.

- A. $|x - 11| = 13$ B. $|x + 11| = 13$ C. $|x - 13| = 11$ D. $|x + 13| = 11$

6.5. Wskaż nierówność tożsamościową.

- A. $|x + 7| > 0$ B. $|x + 7| \geq 7$ C. $|x + 7| \geq -7$ D. $|x + 7| \leq 7$

Odpowiedzi i rozwiązania

6.1. D

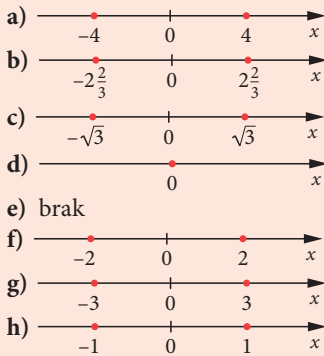
6.2. C

6.3. C

6.4. D

6.5. C

6.6.



6.7. a) $x = -6$ lub $x = 6$

b) $x = -5$ lub $x = 5$

c) $x = -2$ lub $x = 2$

d) brak rozwiązań

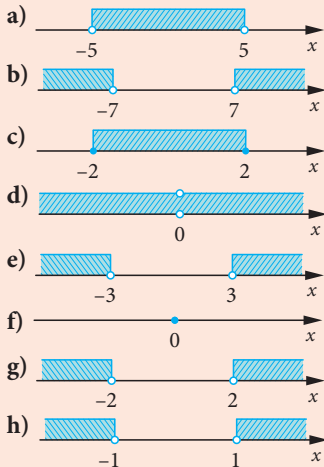
e) $x = -2 - \frac{\sqrt{2}}{3}$ lub $x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{3}$

f) $x = 0$

g) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$

h) $x = -2$ lub $x = 2$

6.8.



6.9. a) $x \in (-9; 9)$

b) $x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$

c) $x \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$

d) $x \in \mathbb{R}$

e) $x = 0$

f) brak rozwiązań

6.6. Zaznacz na osi liczbowej wszystkie punkty, których współrzędne x spełniają podane równanie.

a) $|x| = 4$

c) $|x| - \sqrt{3} = 0$

e) $1 - |x| = 4$

g) $5 + 3|x| = 14$

b) $|x| = 2\frac{2}{3}$

d) $4 - |x| = 4$

f) $2|x| - 1 = 3$

h) $9 - 5|x| = 4$

6.7. Rozwiąż równanie.

a) $|x| = 6$

e) $3(|x| - 2) = \sqrt{2}$

b) $12|x| = 60$

f) $\sqrt{6}(|x| + \sqrt{3}) = 3\sqrt{2}$

c) $3|x| - 1 = 5$

g) $2(1 - |x|) = 1$

d) $2|x| + 5\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$

h) $3 - 5|x| = |x| - 9$

6.8. Zaznacz na osi liczbowej wszystkie punkty, których współrzędna x spełnia podaną nierówność.

a) $|x| < 5$

e) $2 + |x| > 5$

b) $|x| > 7$

f) $|x| - 2 \leq -2$

c) $|x| \leq 2$

g) $11 - 4|x| < 3$

d) $-2|x| < 0$

h) $\frac{1}{2}|x| - 2 < 3,5|x| - 5$

6.9. Rozwiąż nierówność.

a) $|x| - 3 < 6$

d) $6 - 3|x| \leq 11$

b) $3|x| + 2 > 11$

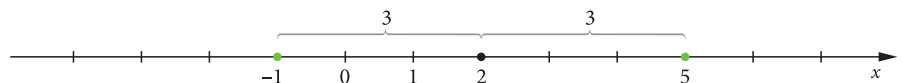
e) $3 - 2(7 - 2|x|) \leq -11$

c) $9 - 2|x| \leq 1$

f) $5 + 3|x| \leq 1$

6.10. Opisz równanie według wzoru, a następnie zilustruj odpowiednim rysunkiem.

- Równanie $|x - 2| = 3$ oznacza, że odległość punktów $A = (x)$ leżących na osi liczbowej od punktu $B = (2)$ na tej osi jest równa 3.



a) $|x - 4| = 7$

b) $|x + 2| = 1$

6.11. Rozwiąż równanie.

a) $|x - 1| = 5$

d) $|x + 7| = 7$

b) $|x + 2| = 3$

e) $|x - 2| = -1$

c) $\left|5\frac{1}{3} - x\right| = 2\frac{2}{3}$

f) $|11 + x| = 3$

6.10. a) Odległość punktów $A = (x)$ leżących na osi liczbowej od punktu $B = (4)$ na tej osi jest równa 7.b) Odległość punktów $A = (x)$ leżących na osi liczbowej od punktu $B = (-2)$ na tej osi jest równa 1.

6.11. a) $x = -4$ lub $x = 6$ b) $x = -5$ lub $x = 1$ c) $x = 2\frac{2}{3}$ lub $x = 8$

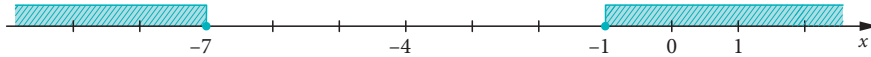
d) $x = -14$ lub $x = 0$ e) brak rozwiązań f) $x = -14$ lub $x = -8$

6.12. Opisz nierówność według wzoru, a następnie zilustruj odpowiednim rysunkiem.

- Nierówność $|x - 1| < 2$ oznacza, że odległość punktów $A = (x)$ leżących na osi liczbowej od punktu $B = (1)$ na tej osi jest mniejsza od 2.



- Nierówność $|x + 4| \geq 3$ oznacza, że odległość punktów $A = (x)$ leżących na osi liczbowej od punktu $B = (-4)$ na tej osi jest większa lub równa 3.



- a) $|x - 2| < 1$ c) $|x - 5| \geq 1$
b) $|x + 3| \leq 2$ d) $|x + \sqrt{2}| > 3$

6.13. Rozwiąż nierówność.

- a) $|x + 7| \leq 4$ e) $|4 - x| + 3 > 3$
b) $|x - 5| > 3$ f) $3(2 - |x + 9|) > 7$
c) $|x - 5| + 1 < 5$ g) $2 + 3|x - 5| \geq -1$
d) $1 - |x + 6| \leq 4$ h) $15 \geq 3(|x - 11| + 5)$

6.14. Przedstaw w postaci $|x - a| < b$ lub $|x - a| \leq b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest podany przedział liczbowy.

- a) $(-3; 7)$ b) $\langle 6; 14 \rangle$ c) $\langle -10; 0 \rangle$ d) $\langle -5; -1 \rangle$

6.15. Przedstaw w postaci $|x - a| > b$ lub $|x - a| \geq b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest podana suma przedziałów liczbowych.

- a) $(-\infty; 7) \cup (11; \infty)$ c) $(-\infty; -7) \cup \langle -1; \infty \rangle$
b) $(-\infty; -2) \cup \langle 8; \infty \rangle$ d) $(-\infty; -15) \cup (13; \infty)$

6.16. Rozwiąż układ nierówności.

- a) $\begin{cases} |x| > 2 \\ |x - 2| < 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} |x| > 3 \\ |x + 1| \leq 3 \end{cases}$
b) $\begin{cases} |x| \leq 5 \\ |x + 1| > 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} |x - 5| < 15 \\ |x - 8| > 1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} |x - 1| < 3 \\ |x - 2| \geq 1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} |x - 4| \geq 1 \\ |x - 3| \leq 2 \end{cases}$
d) $\begin{cases} |x + 1| \leq 3 \\ |x - 1| \leq 3 \end{cases}$ h) $\begin{cases} |x - 5| < 1 \\ |x + 1| \leq 5 \end{cases}$

6.12. a) Odległość punktów $A = (x)$ leżących na osi liczbowej od punktu $B = (2)$ na tej osi jest mniejsza od 1.

b) Odległość punktów $A = (x)$ leżących na osi liczbowej od punktu $B = (-3)$ na tej osi jest mniejsza lub równa 2.

c) Odległość punktów $A = (x)$ leżących na osi liczbowej od punktu $B = (5)$ na tej osi jest większa lub równa 1.

d) Odległość punktów $A = (x)$ leżących na osi liczbowej od punktu $B = (-\sqrt{2})$ na tej osi jest większa od 3.

6.13. a) $x \in \langle -11; -3 \rangle$

b) $x \in (-\infty; 2) \cup (8; \infty)$

c) $x \in (1; 9)$ **d)** $x \in \mathbf{R}$

e) $x \in \mathbf{R} - \{4\}$ **f)** brak rozwiązań

g) $x \in \mathbf{R}$ **h)** $x = 11$

6.14. a) $|x - 2| < 5$

b) $|x - 10| \leq 4$ **c)** $|x + 5| \leq 5$

d) $|x + 3| \leq 2$

6.15. a) $|x - 9| > 2$ **b)** $|x - 3| \geq 5$

c) $|x + 4| \geq 3$ **d)** $|x + 1| > 14$

6.16. a) $x \in (2; 5)$

b) $x \in \langle -5; -3 \rangle \cup (1; 5)$

c) $x \in (-2; 1) \cup \langle 3; 4 \rangle$

d) $x \in \langle -2; 2 \rangle$

e) $x \in \langle -4; -3 \rangle$

f) $x \in (-10; 7) \cup (9; 20)$

g) $x \in \langle 1; 3 \rangle \cup \{5\}$

h) brak rozwiązań

- 6.17. a)** $x \in (-7; -4)$
b) $x \in \langle -5; -3 \rangle \cup \langle 3; 5 \rangle$
c) $x \in (-3; 1) \cup \langle 3; 4 \rangle$
d) $x \in (-8; -2)$

- 6.18. a)** $|AB| = 8$ **b)** $|AB| = 6$
c) $|AB| = 7$ **d)** $|AB| = 3\sqrt{3}$
e) $|AB| = 9\sqrt{5}$ **f)** $|AB| = 4$
g) $|AB| = 2\sqrt{2} - 1$
h) $|AB| = \sqrt{5} - 1$

6.19. $7 - 5\sqrt{2} = \sqrt{49} - \sqrt{50} < 0$

6.20. Rozwiązaniami równania są liczby $\sqrt{7} - \sqrt{11}$ i $\sqrt{7} + \sqrt{11}$. Ich iloczyn jest równy
 $(\sqrt{7} - \sqrt{11})(\sqrt{7} - \sqrt{11}) = 7 - 11 = -4$.

Prosto do matury

1. F, F, P

2. $x \in (-\infty; -5) \cup (9; \infty)$

3. $x \in (5; 7)$

4. $|x - 6| < 8$

5. Rozwiązaniami równania $|x + 5,4| = 6,8$ są liczby $-12,2$ i $1,4$. Można sprawdzić, że spełniają one nierówność $|x - 3,9| \geq 1,4$.

6.17. Rozwiąż układ nierówności.

a) $\begin{cases} \sqrt{x^2} > 4 \\ |x + 2| < 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{x^2} \leq 5 \\ \sqrt{x^2} > 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{4x^2 - 4x + 1} < 7 \\ |x - 2| \geq 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 10x + 25} < 3 \\ |x - 2| < 10 \end{cases}$

6.18. Oblicz długość odcinka AB , którego końce $A = (a)$ i $B = (b)$ leżą na osi liczbowej oraz

a) $a = 3, b = -5$.

b) $a = -1, b = -7$.

c) $a = 9, b = 2$.

d) $a = -\sqrt{3}, b = 2\sqrt{3}$.

e) $a = 2\sqrt{5}, b = -7\sqrt{5}$.

f) $a = 1 + 2\sqrt{3}, b = 2\sqrt{3} + 5$.

g) $a = 2 - \sqrt{2}, b = 1 + \sqrt{2}$.

h) $a = 3 - 2\sqrt{5}, b = 2 - \sqrt{5}$.

6.19. Udowodnij, że równanie $|x + 3\sqrt{5}| = 7 - 5\sqrt{2}$ jest sprzeczne (czyli nie ma rozwiązań).

6.20. Udowodnij, że iloczyn rozwiązań równania $|x - \sqrt{7}| = \sqrt{11}$ jest liczbą całkowitą.

Prosto do matury



1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Zbiór rozwiązań nierówności $|x + 7| < 2$ jest zbiorem wszystkich liczb, których odległość od liczby 7 jest równa 2.
 B. Do zbioru rozwiązań nierówności $|x + 7| < 2$ należy 5 liczb całkowitych.
 C. Zbiorem rozwiązań nierówności $|x + 7| < 2$ jest przedział $(-9; -5)$.

2. Rozwiąż nierówność $10 < 2|x - 2| - 4$.

3. Przedstaw w postaci przedziału zbiór rozwiązań układu nierówności $\begin{cases} |x| > 5 \\ |x - 3| < 4 \end{cases}$.

4. Przedstaw w postaci $|x - a| < b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest przedział $(-2; 14)$.

5. Udowodnij, że wszystkie rozwiązania równania $|x + 5,4| = 6,8$ należą do zbioru rozwiązań nierówności $|x - 3,9| \geq 2,5$.

7. Równania i nierówności z wartością bezwzględną

Umiejętności:

- rozwiązywanie równań i nierówności z wartością bezwzględną

Podczas rozwiązywania równań lub nierówności typu $|x - b| = a$, $|x - b| < a$, $|x - b| > a$ korzystaliśmy bezpośrednio z geometrycznej interpretacji wartości bezwzględnej. Prześledźmy na przykładach, jak można rozwiązać podobne zadanie, jeżeli wyrażenie pod znakiem wartości bezwzględnej jest bardziej skomplikowane.

Przykład 1 ◀ zad. 7.6

Rozwiążemy równanie $|2x - 5| = 7$.

Rozwiązanie

Zadanie rozwiążemy na dwa sposoby. W pierwszym skorzystamy z geometrycznej interpretacji wartości bezwzględnej, w drugim – bezpośrednio z jej definicji.

I sposób

$$\begin{aligned} |2x - 5| &= 7 && \leftarrow \text{przekształcamy równanie do postaci } |x - b| = a \\ \left| 2\left(x - \frac{5}{2}\right) \right| &= 7 \\ 2\left|x - \frac{5}{2}\right| &= 7, \text{ stąd } \left|x - \frac{5}{2}\right| = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Wyznaczamy liczby, które na osi liczbowej są oddalone od $\frac{5}{2}$ o $\frac{7}{2}$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{5}{2} - \frac{7}{2} \text{ lub } x = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} \\ x &= -1 \text{ lub } x = 6 \end{aligned}$$

II sposób

Zauważmy, że $|w| = 7$ tylko wówczas, gdy $w = 7$ lub $w = -7$. Zatem:

$$\begin{aligned} |2x - 5| &= 7 && \leftarrow \text{przyjmujemy } w = 2x - 5 \\ 2x - 5 &= 7 \text{ lub } 2x - 5 = -7 \\ 2x &= 12 \text{ lub } 2x = -2 \\ x &= 6 \text{ lub } x = -1 \end{aligned}$$

Druga metoda rozwiązywania równania okazała się w tym wypadku prostsza.

Odpo.: $x = -1$ lub $x = 6$

◀ 7.6. Rozwiąż równanie.

a) $|6x - 5| = 11$

b) $|2 - 5x| = 6$

c) $|3x - 7| = 8$

d) $|2x - \sqrt{3}| = 3\sqrt{3}$

e) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 5$

f) $\frac{1}{7}\sqrt{9x^2 + 12x + 4} = 2$

Odpo.: a) $x = -1$ lub $x = 2\frac{2}{3}$

b) $x = -\frac{4}{5}$ lub $x = 1\frac{3}{5}$

c) $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = 5$

d) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = 2\sqrt{3}$

e) $x = -2$ lub $x = 3$

f) $x = -5\frac{1}{3}$ lub $x = 4$

ZZ i MKP

temat 2.11

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.7

 **Generator**
testów i sprawdzianów

◀ 7.7. Rozwiąż nierówność.

b) $\left| 2 - \frac{1}{5}x \right| > 1$

d) $|11 - 5x| \geq 4$

Odp.: b) $x \in (-\infty; 5) \cup (15; \infty)$

d) $x \in \left(-\infty; 1\frac{2}{5}\right) \cup (3; \infty)$

◀ 7.7. Rozwiąż nierówność.

a) $|3x - 5| \leq 2$

c) $|7x - 5| < 2$

Odp.: a) $x \in \left[1; 2\frac{1}{3}\right]$

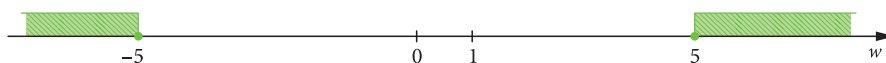
c) $x \in \left(\frac{3}{7}; 1\right)$

Przykład 2 ◀ zad. 7.7 b, dRozwiążemy nierówność $|3 - 2x| \geq 5$.**Rozwiązanie**

Tę nierówność można, podobnie jak równanie z przykładu 1, przekształcić do postaci $|x - a| \geq b$ i rozwiązywać tak, jak w poprzednim rozdziale. Prostsze wydaje się jednak inne postępowanie.

Zauważmy, że $|w| \geq 5$ tylko wtedy, gdy zajdzie jedna z dwóch możliwości:

$$w \leq -5 \text{ lub } w \geq 5$$



Zatem:

$$|3 - 2x| \geq 5$$

← przyjmujemy $w = 3 - 2x$

$$3 - 2x \leq -5 \text{ lub } 3 - 2x \geq 5$$

$$-2x \leq -8 \text{ lub } -2x \geq 2$$

$$x \geq 4 \text{ lub } x \leq -1$$

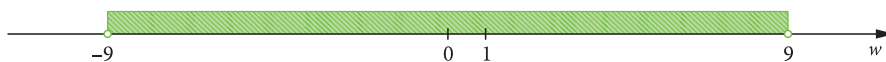
Rozwiązaniem nierówności $|3 - 2x| \geq 5$ jest każda liczba należąca do przedziału $(-\infty; -1)$ albo do przedziału $(4; \infty)$.

Odp.: $x \in (-\infty; -1) \cup (4; \infty)$

Przykład 3 ◀ zad. 7.7 a, cRozwiążemy nierówność $|2x + 3| < 9$.**Rozwiązanie**

Zauważmy, że $|w| < 9$ tylko wtedy, gdy spełniona jest podwójna nierówność:

$$-9 < w < 9$$



Zatem:

$$|2x + 3| < 9$$

← przyjmujemy $w = 2x + 3$

$$-9 < 2x + 3 < 9$$

← nierówność podwójną zapisujemy w postaci układu nierówności

$$\begin{cases} 2x + 3 < 9 \\ 2x + 3 > -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x < 6 \\ 2x > -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x < 6 \\ 2x > -12 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} x < 3 \\ x > -6 \end{cases}$$

Rozwiązaniem nierówności $|2x + 3| < 9$ jest każda liczba spełniająca warunek $-6 < x < 3$.

Odp.: $x \in (-6; 3)$

Przykład 4 ◀ zad. 7.9

Rozwiążemy równanie $||x - 3| - 2| = 5$.

Rozwiązanie

Wartość bezwzględna wyrażenia $|x - 3| - 2$ jest równa 5, więc:

$$|x - 3| - 2 = 5 \text{ lub } |x - 3| - 2 = -5, \text{ czyli}$$

$$|x - 3| = 7 \text{ lub } |x - 3| = -3$$

Drugie równanie jest sprzeczne (wartość bezwzględna żadnej liczby nie jest równa -3), rozwiążemy więc tylko pierwsze.

$$x - 3 = 7 \text{ lub } x - 3 = -7$$

$$x = 10 \text{ lub } x = -4$$

Równanie $||x - 3| - 2| = 5$ ma dwa rozwiązania.

Odp.: $x = 10$ lub $x = -4$

Przykład 5 ◀ zad. 7.9

Rozwiążemy równanie $||2x + 4| - 3| = 1$.

Rozwiązanie

$$|2x + 4| - 3 = 1$$

$$\text{lub } |2x + 4| - 3 = -1$$

$$|2x + 4| = 4$$

$$\text{lub } |2x + 4| = 2$$

$$2x + 4 = 4 \text{ lub } 2x + 4 = -4$$

$$\text{lub } 2x + 4 = 2 \text{ lub } 2x + 4 = -2$$

$$x = 0 \text{ lub } x = -4$$

$$\text{lub } x = -1 \text{ lub } x = -3$$

Równanie $||2x + 4| - 3| = 1$ ma cztery rozwiązania.

Odp.: $x = 0$ lub $x = -4$, lub $x = -1$, lub $x = -3$.

Przykład 6 ◀ zad. 7.11 a, b

Rozwiążemy nierówność $||x + 2| - 3| < 7$.

Rozwiązanie

$$||x + 2| - 3| < 7 \text{ tylko wtedy, gdy } -7 < |x + 2| - 3 < 7$$

$$\begin{cases} |x + 2| - 3 < 7 \\ |x + 2| - 3 > -7 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} |x + 2| < 10 \\ |x + 2| > -4 \end{cases}$$

Nierówność $|x + 2| > -4$ jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej, więc do rozwiązania zostaje tylko nierówność $|x + 2| < 10$.

$$-10 < x + 2 < 10, \text{ stąd } -12 < x < 8$$

Odp.: $x \in (-12; 8)$

◀ 7.9. Rozwiąż równanie.

a) $||x + 3| + 5| = 7$

b) $||x + 3| - \sqrt{7}| = \pi$

c) $||x + 5| - 2| = 1$

d) $|3\sqrt{2} - |\sqrt{2}x - 1|| = 2\sqrt{3}$

e) $|9 - \sqrt{49 - 14x + x^2}| = 6$

f) $|4 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 2x + 1}| = 7$

Odp.: a) $x = -5$ lub $x = -1$

b) $x = -\pi - 3 - \sqrt{7}$ lub

$x = \pi - 3 + \sqrt{7}$

c) $x = -8$ lub $x = -6$ lub $x = -4$

lub $x = -2$

d) $x = \frac{6 - 2\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ lub

$x = \frac{-6 + 2\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ lub

$x = \frac{6 + 2\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ lub

$x = \frac{-6 - 2\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$

e) $x = -8$ lub $x = 4$ lub $x = 10$

lub $x = 22$

f) $x = -23$ lub $x = 21$

◀ 7.11. Rozwiąż nierówność.

a) $||x - 7| + 1| < 6$

b) $|2|3 - x| - 6| \leq 2$

Odp.: a) $x \in (2; 12)$

b) $x \in \langle -1; 1 \rangle \cup \langle 5; 7 \rangle$

◀ 7.11. Rozwiąż nierówność.

c) $\left| 7 - \left| \frac{1}{2}x - 2 \right| \right| > 3$

d) $\left| |5x + 2| - 3 \right| \geq 4$

Odp.: c) $x \in (-\infty; -16) \cup (-4; 12) \cup (24; \infty)$

d) $x \in \left(-\infty; -1\frac{4}{5}\right) \cup (1; \infty)$

◀ 7.16. Rozwiąż równanie.

a) $|3x - 1| - 4x = 2$

b) $|5x + 2| = 2x - 1$

c) $4x - |7 - 2x| = 9$

d) $|x + 2| = \frac{1}{3}x + 2$

e) $|x + 5| - 2 = 2x$

f) $3|x - 2| - 4x = 6$

Odp.: a) $x = -\frac{1}{7}$

b) brak rozwiązań

c) $x = 2\frac{2}{3}$

d) $x = -3$ lub $x = 0$

e) $x = 3$

f) $x = 0$

Przykład 7 ◀ zad. 7.11 c, d

Rozwiążemy nierówność $|2 - |3x + 6|| > 1$.

Rozwiązanie

$2 - |3x + 6| > 1$

lub

$2 - |3x + 6| < -1$

$-|3x + 6| > -1$

lub

$-|3x + 6| < -3$

$|3x + 6| < 1$

lub

$|3x + 6| > 3$

$-1 < 3x + 6 < 1$

lub

$3x + 6 > 3$ lub $3x + 6 < -3$

$-7 < 3x < -5$

lub

$3x > -3$ lub $3x < -9$

$-\frac{7}{3} < x < -\frac{5}{3}$

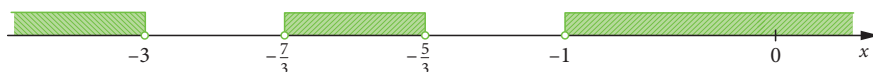
lub

$x > -1$ lub $x < -3$

$x \in \left(-\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}\right)$

lub

$x \in (-1; \infty)$ lub $x \in (-\infty; -3)$



Odp.: $x \in (-\infty; -3) \cup \left(-\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}\right) \cup (-1; \infty)$

Przykład 8 ◀ zad. 7.16

Rozwiążemy równanie $|3x - 2| = 5x + 1$.

Rozwiązanie

I sposób

Zauważmy, że:

- gdy $3x - 2 \geq 0$, to $|3x - 2| = 3x - 2$ i równanie ma postać: $3x - 2 = 5x + 1$,
- gdy $3x - 2 < 0$, to $|3x - 2| = -(3x - 2)$ i równanie ma postać: $-3x + 2 = 5x + 1$.

Mamy zatem:

$\begin{cases} 3x - 2 \geq 0 \\ 3x - 2 = 5x + 1 \end{cases}$

lub

$\begin{cases} 3x - 2 < 0 \\ -3x + 2 = 5x + 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x \geq 2 \\ -2x = 3 \end{cases}$

lub

$\begin{cases} 3x < 2 \\ -8x = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} -2x = 3 \end{cases}$

lub

$\begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ x = \frac{1}{8} \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ x = \frac{1}{8} \end{cases}$

Pierwszy układ jest sprzeczny, natomiast drugi nie, bo liczba $\frac{1}{8}$ należy do przedziału $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$. Jedynym rozwiązaniem równania $|3x - 2| = 5x + 1$ jest liczba $\frac{1}{8}$.

Dla dowolnego wyrażenia a :

- jeżeli $a \geq 0$, to $|a| = a$,
- jeżeli $a \leq 0$, to $|a| = -a$.

II sposób

$$|3x - 2| = 5x + 1$$

Zauważmy, że równanie może mieć rozwiązania tylko przy założeniu, że $5x + 1 \geq 0$, czyli $x \geq -\frac{1}{5}$. Wtedy mamy dwie możliwości:

$$3x - 2 = 5x + 1 \quad \text{lub} \quad 3x - 2 = -5x - 1$$

Stąd:

$$x = -\frac{3}{2} \quad \text{lub} \quad x = \frac{1}{8}$$

Tylko drugie rozwiązanie spełnia założenie $x \geq -\frac{1}{5}$.

$$\text{Odp.: } x = \frac{1}{8}$$

Przykład 9 ◀ zad. 7.17

Rozwiążmy nierówność $x - |2x + 4| < 3$.

Rozwiązanie

Zapisujemy nierówność w postaci dwóch układów (podobnie jak w przykładzie 8).

$$\begin{array}{ll} \begin{cases} 2x + 4 \geq 0 \\ x - (2x + 4) < 3 \end{cases} & \text{lub} \quad \begin{cases} 2x + 4 < 0 \\ x + 2x + 4 < 3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x \geq -4 \\ -x < 7 \end{cases} & \text{lub} \quad \begin{cases} 2x < -4 \\ 3x < -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -2 \\ x > 7 \end{cases} & \text{lub} \quad \begin{cases} x < -2 \\ x < -\frac{1}{3} \end{cases} \end{array}$$

$$\text{Odp.: } x \in (-\infty; -2) \cup (7; \infty)$$

Przykład 10 ◀ zad. 7.19

Rozwiążmy równanie $|x - 2| + |3x + 12| = 26$.

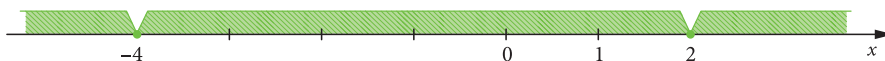
Rozwiązanie

Aby pozbyć się znaków wartości bezwzględnej, zauważmy, że:

$$x - 2 \geq 0 \quad \text{dla} \quad x \geq 2$$

$$3x + 12 \geq 0 \quad \text{dla} \quad x \geq -4$$

Liczby 2 oraz -4 dzielą oś liczbową na trzy przedziały.



W każdym z tych przedziałów dane równanie przyjmie inną postać.

◀ 7.17. Rozwiąż nierówność.

a) $2|x + 1| - 3 \leq 2x - 1$

b) $\frac{1}{2}|2x - 5| + 1 > 3x$

c) $|x + 3| \geq \frac{1}{5}x + 3$

d) $2|3 - x| + 3x - 7 < 1$

e) $5 - |2x - 7| \geq \frac{1}{2}x - 3$

f) $|x + 2| - x > 2 - \frac{2}{3}x$

Odp.: a) $x \in \langle -1; \infty \rangle$

b) $x \in \left(-\infty; \frac{7}{8}\right)$

c) $x \in (-\infty; -5) \cup \langle 0; \infty \rangle$

d) $x \in (-\infty; 2)$

e) $x \in \left\langle -\frac{2}{3}; 6 \right\rangle$

f) $x \in (-\infty; -3) \cup (0; \infty)$

◀ 7.19. Rozwiąż równanie.

a) $|x - 3| + |x + 2| = 7$

b) $|x - 1| - |x + 5| = 6$

c) $|3 - x| + |4 - 2x| = 4$

d) $|2x - 16| - |x - 3| = 3$

Odp.: a) $x = -3$ lub $x = 4$

b) $x \in (-\infty; -5)$

c) $x = 1$ lub $x = 3\frac{2}{3}$

d) $x = 5\frac{1}{3}$ lub $x = 16$

I. Dla $x \in (-\infty; -4)$ mamy $|x - 2| = -x + 2$,
 $|3x + 12| = -3x - 12$, zatem:
 $(-x + 2) + (-3x - 12) = 26$
 $-4x = 36$
 $x = -9$ $\longleftarrow -9 \in (-\infty; -4)$

Uwaga – kiedy dzielimy oś liczbową na przedziały, nie możemy pominąć krańców tych przedziałów.

II. Dla $x \in \langle -4; 2 \rangle$ mamy $|x - 2| = -x + 2$, $|3x + 12| = 3x + 12$, zatem:
 $(-x + 2) + (3x + 12) = 26$
 $2x = 12$
 $x = 6$ $\longleftarrow 6 \notin \langle -4; 2 \rangle$

III. Dla $x \in (2; \infty)$ mamy $|x - 2| = x - 2$, $|3x + 12| = 3x + 12$, zatem:
 $(x - 2) + (3x + 12) = 26$
 $4x = 16$
 $x = 4$ $\longleftarrow 4 \in (2; \infty)$

Odp.: $x = -9$ lub $x = 4$

◀ 7.21. Rozwiąż nierówność.

a) $|x - 2| + |2x - 7| < 9$

b) $|3x - 8| \leq |x + 6|$

c) $|x + 3| - |x + 1| > 2(x + 1)$

d) $|x + 2| + |x - 3| \geq x + 3$

Odp.: a) $x \in (0; 6)$

b) $x \in \left\langle \frac{1}{2}; 7 \right\rangle$ c) $x \in (-\infty; 0)$

d) $x \in (-\infty; 2) \cup \langle 4; \infty \rangle$

Przykład 11 ◀ zad. 7.21

Rozwiążemy nierówność $|4x - 2| - |5 - x| > 2x$.

Rozwiązanie

Aby pozbyć się znaków wartości bezwzględnej, zauważmy, że:

$$4x - 2 \geq 0 \text{ dla } x \geq \frac{1}{2}$$

$$5 - x \geq 0 \text{ dla } x \leq 5$$

Liczyby $\frac{1}{2}$ oraz 5 dzielą oś liczbową na trzy przedziały.



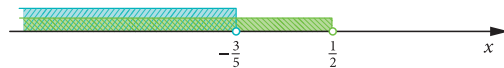
W każdym z tych przedziałów dana nierówność przyjmie inną postać.

I. Dla $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ mamy $|4x - 2| = -4x + 2$, $|5 - x| = 5 - x$, zatem:

$$(-4x + 2) - (5 - x) > 2x$$

$$-5x > 3$$

$$x < -\frac{3}{5}$$



Sprawdzamy, które rozwiązania nierówności $x < -\frac{3}{5}$ należą do przedziału $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$:

$$\left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cap \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) = \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right)$$

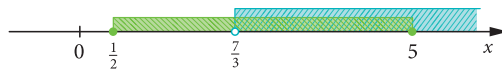
$$\text{Zatem } x \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right).$$

II. Dla $x \in \left\langle \frac{1}{2}; 5 \right\rangle$ mamy $|4x - 2| = 4x - 2$, $|5 - x| = 5 - x$, zatem:

$$(4x - 2) - (5 - x) > 2x$$

$$3x > 7$$

$$x > \frac{7}{3}$$



Sprawdzamy, które rozwiązania nierówności $x > \frac{7}{3}$ należą do przedziału $\left\langle \frac{1}{2}; 5 \right\rangle$:

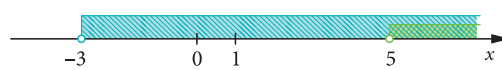
$$\left\langle \frac{1}{2}; 5 \right\rangle \cap \left(\frac{7}{3}; \infty \right) = \left(\frac{7}{3}; 5 \right)$$

$$\text{Zatem } x \in \left(\frac{7}{3}; 5 \right).$$

III. Dla $x \in (5; \infty)$ mamy $|4x - 2| = 4x - 2$, $|5 - x| = -5 + x$, zatem:

$$(4x - 2) - (-5 + x) > 2x$$

$$x > -3$$



Każda liczba z przedziału $(5; \infty)$ jest rozwiązaniem nierówności $x > -3$.

$$(5; \infty) \cap (-3; \infty) = (5; \infty)$$

$$\text{Zatem } x \in (5; \infty).$$

Podsumowując – rozwiązaniami nierówności $|4x - 2| - |5 - x| > 2x$ są liczby należące do sumy trzech przedziałów: $\left(-\infty; -\frac{3}{5}\right)$, $\left(\frac{7}{3}; 5\right)$, $(5; \infty)$.

$$\text{Odp.: } x \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{7}{3}; \infty\right)$$

* Przykład 12 ◀ zad. 7.25

Rozwiążemy równanie $|3x - 7| = |5 + 2x|$.

Rozwiązanie

Rozwiązaniami tego równania są tylko takie wartości x , dla których wyrażenia $3x - 7$ oraz $5 + 2x$ są albo liczbami równymi, albo liczbami przeciwnymi. Zatem:

$$3x - 7 = 5 + 2x \text{ lub } 3x - 7 = -5 - 2x$$

Stąd:

$$x = 12 \text{ lub } 5x = 2$$

$$\text{Odp.: } x = 12 \text{ lub } x = \frac{2}{5}$$

$|a| = |b|$ wtedy i tylko wtedy,
gdy $a = b$ lub $a = -b$.

◀ 7.25. Rozwiąż równanie.

a) $|x + 1| = 3|x - 1|$

b) $|\sqrt{3} + 2x| = |1 - \sqrt{3}x|$

c) $|3x - \pi + 1| = |\sqrt{3} - 2x|$

d) $\sqrt{2x^2 - 2\sqrt{6}x + 3} = \sqrt{3x^2 + 2\sqrt{6}x + 2}$

Odp.: a) $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 2$

b) $x = -5 - 3\sqrt{3}$ lub $x = 5 - 3\sqrt{3}$

c) $x = \frac{\pi - 1 + \sqrt{3}}{5}$ lub

$x = \pi - 1 - \sqrt{3}$

d) $x = -5 - 2\sqrt{6}$ lub $x = 5 - 2\sqrt{6}$

Zadania

Odpowiedzi i rozwiązania

7.1. C

7.2. B

7.3. D

7.4. F, P, P

7.5. F, P, F

7.6. a) $x = -1$ lub $x = 2\frac{2}{3}$ b) $x = -\frac{4}{5}$ lub $x = 1\frac{3}{5}$ c) $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = 5$ d) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = 2\sqrt{3}$ e) $x = -2$ lub $x = 3$ f) $x = -5\frac{1}{3}$ lub $x = 4$ 7.7. a) $x \in \left\langle 1; 2\frac{1}{3} \right\rangle$ b) $x \in (-\infty; 5) \cup (15; \infty)$ c) $x \in \left(\frac{3}{7}; 1\right)$ d) $x \in \left(-\infty; 1\frac{2}{5}\right) \cup \langle 3; \infty \rangle$ e) $x \in (-\infty; -5) \cup (1; \infty)$ f) $x \in \left(-1\frac{5}{7}; 2\right)$ 7.8. a) $x = 2$ b) $x \in \mathbf{R} - \{\sqrt{5} - 1\}$

c) brak rozwiązań

d) $x \in \mathbf{R}$

W każdym z zadań 7.1–7.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

7.1. Wskaż równanie, które nie jest spełnione przez wszystkie liczby rzeczywiste.

A. $|x| \cdot |x| = x^2$ B. $|x| + |x| = |2x|$ C. $|x| - x = 0$ D. $|x| + |x| = 2\sqrt{x^2}$

7.2. Wskaż równość prawdziwą.

A. $|\pi - 3,14| = 0$ C. $|\pi - 3,14| = 3,14 - \pi$ B. $|\pi - 3,14| = \pi - 3,14$ D. $|-3,14 - \pi| = \pi - 3,14$ 7.3. Wskaż wszystkie rozwiązania równania $|2x - 1| = |x + 7|$.A. $x = 8$ B. $x = 2$ lub $x = 8$ C. $x = -2$ D. $x = -2$ lub $x = 8$

7.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Równość $|x - 7| = x - 7$ zachodzi dla każdej liczby x z przedziału $(-7; \infty)$.B. Równość $|x - 7| = x - 7$ zachodzi dla każdej liczby x z przedziału $(7; \infty)$.C. Równość $|x - 7| = x - 7$ zachodzi dla liczby x równej 7.7.5. Dane jest równanie $|x - 6| = 2x$. Oceń prawdziwość podanych zdań.A. Jedynym rozwiązaniem tego równania jest liczba -6 .

B. Jedynym rozwiązaniem tego równania jest liczba 2.

C. Równanie to ma dwa rozwiązania: -6 oraz 2.

7.6. Rozwiąż równanie.

a) $|6x - 5| = 11$ d) $|2x - \sqrt{3}| = 3\sqrt{3}$ b) $|2 - 5x| = 6$ e) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 5$ c) $|3x - 7| = 8$ f) $\frac{1}{7}\sqrt{9x^2 + 12x + 4} = 2$

7.7. Rozwiąż nierówność.

a) $|3x - 5| \leq 2$ d) $|11 - 5x| \geq 4$ b) $\left|2 - \frac{1}{5}x\right| > 1$ e) $9 - \sqrt{9x^2 + 36x + 36} < 0$ c) $|7x - 5| < 2$ f) $\sqrt{1 - 14x + 49x^2} < 13$

7.8. Rozwiąż nierówność.

a) $1 - |6 - 3x| \geq 1$ c) $5 + \left|3\frac{1}{5}x - 7\right| < 1$ b) $|x - \sqrt{5} + 1| > 0$ d) $9 > 6 - |2x - 8|$

7.9. Rozwiąż równanie.

a) $|x + 3| + 5 = 7$

b) $|x + 3| - \sqrt{7} = \pi$

c) $|x + 5| - 2 = 1$

d) $|3\sqrt{2} - |\sqrt{2}x - 1|| = 2\sqrt{3}$

e) $|9 - \sqrt{49 - 14x + x^2}| = 6$

f) $|4 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 2x + 1}| = 7$

7.10. Wykaż, że równanie $||x + 3| - 5| - 2| + 1 = 0$ nie ma rozwiązań.**7.11.** Rozwiąż nierówność.

a) $|x - 7| + 1 < 6$

b) $|2|3 - x| - 6| \leq 2$

c) $|7 - |\frac{1}{2}x - 2|| > 3$

d) $|5x + 2| - 3 \geq 4$

e) $|\sqrt{0,16x^2 - 4x + 25} - 2| < 3$

f) $7 - |3 - 2|11 - 3x|| < 2$

7.12. Na rysunku przedstawiono zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność $|2x - 6| \leq 12$. Wskaż wielkość m .A. $m = 2$ B. $m = 18$ C. $m = 5$ D. $m = 9$ **7.13.** Wyznacz wszystkie liczby naturalne spełniające nierówność $|x - 7| < 4$.**7.14.** Wyznacz wszystkie liczby naturalne spełniające podany układ nierówności.

$$\begin{cases} |x| > 2 \\ |x - 3| \leq 2 \end{cases}$$

7.15. Wśród podanych nierówności jedna jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą, a jedna nie ma rozwiązań. Wskaż te nierówności.

I. $|x - 5| + 2 + 3 \geq 0$

III. $|2x + 3| - 5 + 1 < 0$

II. $|5x - 1| - 3 - 2 \geq 0$

IV. $|3x + 2| + 1 - 5 < 0$

7.16. Rozwiąż równanie.

a) $|3x - 1| - 4x = 2$

b) $|5x + 2| = 2x - 1$

c) $4x - |7 - 2x| = 9$

d) $|x + 2| = \frac{1}{3}x + 2$

e) $|x + 5| - 2 = 2x$

f) $3|x - 2| - 4x = 6$

7.9. a) $x = -5$ lub $x = -1$ **b)** $x = -\pi - 3 - \sqrt{7}$ lub $x = \pi - 3 + \sqrt{7}$ **c)** $x = -8$ lub $x = -6$ lub $x = -4$ lub $x = -2$ **d)** $x = \frac{6 - 2\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{-6 + 2\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{6 + 2\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{-6 - 2\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ **e)** $x = -8$ lub $x = 4$ lub $x = 10$ lub $x = 22$ **f)** $x = -23$ lub $x = 21$ **7.11. a)** $x \in (2; 12)$ **b)** $x \in \langle -1; 1 \rangle \cup \langle 5; 7 \rangle$ **c)** $x \in (-\infty; -16) \cup$
 $\cup (-4; 12) \cup (24; \infty)$ **d)** $x \in \left(-\infty; -1\frac{4}{5}\right) \cup \langle 1; \infty \rangle$ **e)** $x \in (0; 25)$ **f)** $x \in \left(-\infty; 2\frac{1}{3}\right) \cup (5; \infty)$ **7.12.** D**7.13.** 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10**7.14.** 3, 4, 5**7.15.** spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą: I, brak rozwiązań: III**7.16. a)** $x = -\frac{1}{7}$ **b)** brak rozwiązań**c)** $x = 2\frac{2}{3}$ **d)** $x = -3$ lub $x = 0$ **e)** $x = 3$ **f)** $x = 0$

- 7.17. a)** $x \in (-1; \infty)$
b) $x \in (-\infty; \frac{7}{8})$
c) $x \in (-\infty; -5) \cup (0; \infty)$
d) $x \in (-\infty; 2)$
e) $x \in \langle -\frac{2}{3}; 6 \rangle$
f) $x \in (-\infty; -3) \cup (0; \infty)$

- 7.18. a)** $x \in (-4; -3)$
b) $x \in (-10; 7) \cup (9; 20)$
c) $x \in \langle 1; 3 \rangle \cup \{5\}$
d) brak rozwiązań

- 7.19. a)** $x = -3$ lub $x = 4$
b) $x \in (-\infty; -5)$
c) $x = 1$ lub $x = 3\frac{2}{3}$
d) $x = 5\frac{1}{3}$ lub $x = 16$

- 7.20. a)** $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 4$
b) brak rozwiązań
c) $x = 0$ lub $x = 6$
d) $x \in (-\infty; -4)$

- 7.21. a)** $x \in (0; 6)$
b) $x \in \langle \frac{1}{2}; 7 \rangle$
c) $x \in (-\infty; 0)$
d) $x \in (-\infty; 2) \cup \langle 4; \infty \rangle$

- 7.22. a)** $x \in \mathbf{R}$
b) $x \in \langle -1\frac{3}{5}; 4 \rangle$
c) brak rozwiązań
d) $x \in \langle 3; 4\frac{1}{2} \rangle$

- 7.23. a)** $x = \frac{2}{5}$ lub $x = 3\frac{3}{5}$
b) $x = -\frac{1}{4}$ lub $x = \frac{4}{5}$
c) $x = -\frac{1}{7}$ lub $x = 13\frac{2}{3}$
d) $x \in \langle -1; 1 \rangle$

- 7.24. a)** $x \in \langle -\frac{17}{22}; -\frac{5}{22} \rangle$
b) $x \in \mathbf{R}$
c) $x \in (-\infty; -6) \cup \langle \frac{2}{3}; \infty \rangle$
d) brak rozwiązań

7.17. Rozwiąż nierówność.

- a) $2|x+1| - 3 \leq 2x - 1$
b) $\frac{1}{2}|2x-5| + 1 > 3x$
c) $|x+3| \geq \frac{1}{5}x + 3$

7.18. Rozwiąż układ nierówności.

- a) $\begin{cases} \sqrt{x^2} - 3 > 0 \\ |\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}| \leq 1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} |1 - 0,2x| - 3 < 0 \\ 1 - \sqrt{x^2 - 16x + 64} < 0 \end{cases}$

7.19. Rozwiąż równanie.

- a) $|x-3| + |x+2| = 7$
b) $|x-1| - |x+5| = 6$

7.20. Rozwiąż równanie.

- a) $3|x-1| + 2|x+2| = 9 + 3x$
b) $|2x-3| - |3x-2| = 5 - x$

7.21. Rozwiąż nierówność.

- a) $|x-2| + |2x-7| < 9$
b) $|3x-8| \leq |x+6|$

7.22. Rozwiąż nierówność.

- a) $|x+1| + 3|x-1| \geq 4x - 5$
b) $|x+3| + \frac{1}{2}(4-x) \geq |2x-1|$

7.23. Rozwiąż równanie.

- a) $|x-2| + |4-2x| - |3x-6| + |10-5x| = 8$
b) $|3x-1| + |2-6x| + x = 5$
c) $|x+3| + 2|4-x| - |3x+9| + |3x-12| = 15$
d) $|2x+2| - |x-1| - |x+1| = 2 - |2-2x|$

7.24. Rozwiąż nierówność.

- a) $|x+0,5| - |-2x-1| + 4|2x+1| + |2+4x| \leq 3$
b) $|x-3| + |2x+6| \geq 2 + |x+3|$
c) $8 - 2x + |x+1| - |-2x-2| - |3x+3| \leq 0$
d) $|x + \sqrt{3}| + |2\sqrt{3} - 2x| \leq 3 + |x - \sqrt{3}|$

- d) $2|3-x| + 3x - 7 < 1$
e) $5 - |2x-7| \geq \frac{1}{2}x - 3$
f) $|x+2| - x > 2 - \frac{2}{3}x$

c) $\begin{cases} 5 + \frac{1}{3}|3x-12| \geq 6 \\ |x-3| + |x^2| \leq x^2 + 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 1 - \sqrt{(x-5)^2} > 0 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt[3]{125} \leq 0 \end{cases}$

- c) $|3-x| + |4-2x| = 4$
d) $|2x-16| - |x-3| = 3$

- c) $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} - 3\sqrt{1-2x+x^2} = 2$
d) $2|x+4| + 12 = |2x-4|$

- c) $|x+3| - |x+1| > 2(x+1)$
d) $|x+2| + |x-3| \geq x+3$

- c) $|3-3x| - |2-x| < 2x-6$
d) $|x-2| - 3\sqrt{4x^2 - 28x + 49} \geq 1-x$

* 7.25. Rozwiąż równanie.

a) $|x + 1| = 3|x - 1|$

c) $|3x - \pi + 1| = |\sqrt{3} - 2x|$

b) $|\sqrt{3} + 2x| = |1 - \sqrt{3}x|$

d) $\sqrt{2x^2 - 2\sqrt{6}x + 3} = \sqrt{3x^2 + 2\sqrt{6}x + 2}$

* 7.26. Rozwiąż nierówność.

a) $\sqrt{4x^2 - 12|x| + 9} > 1$

c) $\sqrt{25x^2 - 20|x| + 4} \leq 1$

b) $\sqrt{9x^2 - 6|x| + 1} < 2$

d) $\sqrt{49x^2 - 56|x| + 16} \geq 3$

* 7.27. Rozwiąż równanie $|x - 1| - 2| + 2||x - 2| - 1| + 3|2x - 6| = 0$.

* 7.28. Rozwiąż równanie $\sqrt{x^2 + 2x + 26 - 10|x + 1|} = 3$.

D * 7.29. Udowodnij, że dla każdej pary liczb $x \in \mathbf{R}$ i $y \in \mathbf{R}$ takich, że $x \neq y$, prawdziwa jest nierówność: $|x - y| + \frac{1}{|x - y|} \geq 2$.

D * 7.30. Udowodnij, że dla każdej pary liczb $x \in \mathbf{R}$ i $y \in \mathbf{R}$ prawdziwa jest nierówność $\frac{|x| + |y|}{2} \geq \sqrt{|xy|}$.

Prosto do matury



1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Równość $|3x - 12| = -3x + 12$ jest spełniona przez wszystkie liczby x z przedziału $(-\infty; 4)$.

B. Równość $|3x - 12| = -3x + 12$ jest spełniona przez wszystkie liczby x z przedziału $(-\infty; 4)$.

C. Równość $|3x - 12| = 12 - 3x$ nie zachodzi dla żadnej liczby rzeczywistej x .

2. Rozwiąż równanie $|1 - |x + 5|| = 3$.

3. Rozwiąż nierówność $|1 - |1 - x|| < 1$.

4. Rozwiąż nierówność $|x| + 6\sqrt{4x^2 - 4x + 1} \geq x$.

5. Rozwiąż równanie $|x - 1| + |2x + 3| + |4 - x| + |x| = 0$.

7.29. $|x - y| + \frac{1}{|x - y|} - 2 = \frac{|x - y|^2 + 1 - 2|x - y|}{|x - y|} = \frac{(|x - y| - 1)^2}{|x - y|} \geq 0$,

bo $(|x - y| - 1)^2 \geq 0$ i $|x - y| > 0$. Zatem $|x - y| + \frac{1}{|x - y|} \geq 2$ dla $x, y \in \mathbf{R}$ i $x \neq y$.

7.30. $\frac{|x| + |y|}{2} - \sqrt{|xy|} = \frac{|x| + |y| - 2\sqrt{|x|}\sqrt{|y|}}{2} = \frac{(\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|})^2}{2} \geq 0$ dla $x, y \in \mathbf{R}$,

więc $\frac{|x| + |y|}{2} \geq \sqrt{|xy|}$ dla $x, y \in \mathbf{R}$.

7.25. a) $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 2$

b) $x = -5 - 3\sqrt{3}$ lub $x = 5 - 3\sqrt{3}$

c) $x = \frac{\pi - 1 + \sqrt{3}}{5}$ lub

$x = \pi - 1 - \sqrt{3}$

d) $x = -5 - 2\sqrt{6}$ lub $x = 5 - 2\sqrt{6}$

7.26. a)

$x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; \infty)$

b) $x \in (-1; 1)$

c) $x \in \langle -0,6; -0,2 \rangle \cup \langle 0,2; 0,6 \rangle$

d)

$x \in (-\infty; -1) \cup \left\langle -\frac{1}{7}; \frac{1}{7} \right\rangle \cup \langle 1; \infty \rangle$

7.27. $x = 3$

7.28. $x \in \{-9, -3, 1, 7\}$

Prosto do matury

1. P, P, F

2. $x \in \{-9, -1\}$

3. $x \in (-1; 1) \cup (1; 3)$

4. $x \in \mathbf{R}$

5. brak rozwiązań

8. Równanie liniowe i nierówność liniowa z parametrami

Umiejętności:

- rozwiązywanie równań i nierówności liniowych z parametrami

Przypomnijmy, że równanie $ax + b = 0$, w którym x jest niewiadomą, a i b są liczbami danymi, nazywamy **równaniem liniowym** z jedną niewiadomą. Liczby a i b występujące w zapisie $ax + b = 0$ nazywamy **współczynnikami** równania liniowego.

Prześledzimy sposób rozwiązywania równania $ax + b = 0$ w zależności od wartości jego współczynników. W prawej kolumnie tabeli podajemy odpowiednio dobrane przykłady ilustrujące omawiane sytuacje.

I przypadek: $a \neq 0$	
Równanie $ax + b = 0$ można przekształcić do postaci $ax = -b$ Skoro $a \neq 0$, możemy podzielić obie strony równania przez a . $x = \frac{-b}{a}$ Równanie ma jedno rozwiązanie.	Przekształcamy równanie $2(3x - 7) = 3x + 1$ $3x - 15 = 0 \quad \leftarrow a = 3 \text{ i } b = -15$ $3x = 15$ Dzielimy obie strony równania przez 3. $x = 5$ Równanie ma jedno rozwiązanie.
II przypadek: $a = 0$ i $b = 0$	
Równanie $ax + b = 0$ ma postać $0 \cdot x + 0 = 0$ Równanie jest tożsamościowe, czyli jego rozwiązaniem jest każda liczba rzeczywista: $x \in \mathbf{R}$.	Przekształcamy równanie $4(5x - 3) = -2(6 - 10x)$ $20x - 12 = -12 + 20x$ $0 \cdot x + 0 = 0 \quad \leftarrow a = 0 \text{ i } b = 0$ Równanie jest tożsamościowe, czyli jego rozwiązaniem jest każda liczba rzeczywista: $x \in \mathbf{R}$.
III przypadek: $a = 0$ i $b \neq 0$	
Równanie $ax + b = 0$ ma postać $0 \cdot x + b = 0$ Równanie jest sprzeczne, czyli nie ma rozwiązań.	Przekształcamy równanie $-3(4x - 5) = 2(1 - 6x)$ $-12x + 15 = 2 - 12x$ $0 \cdot x + 13 = 0 \quad \leftarrow a = 0 \text{ i } b = 13$ Równanie jest sprzeczne, czyli nie ma rozwiązań.

ZZ i MKP

temat 5.8

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.8


Generator
testów i sprawdzianów

Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Równanie liniowe $ax + b = 0$:

- ma jedno rozwiązanie, gdy $a \neq 0$,
- jest tożsamościowe, gdy $a = 0$ i $b = 0$,
- jest sprzeczne, gdy $a = 0$ i $b \neq 0$.

Jeżeli $a \neq 0$, to rozwiązaniem równania $ax + b = 0$ jest $x = -\frac{b}{a}$.

Równanie liniowe z jednym parametrem

Zajmiemy się analizą równań liniowych, w których poza niewiadomą x występuje jeszcze jedna litera oznaczająca liczbę.

Przykład 1

Dane jest równanie $3x + m - \sqrt{2} = 0$, w którym x jest niewiadomą, a m oznacza pewną liczbę. Zapiszemy to równanie dla m przyjmujących wartości: 5, -7, 0, $\sqrt{2}$.

Rozwiązanie

$$\begin{array}{ll} 3x + 5 - \sqrt{2} = 0 & \leftarrow m = 5 \\ 3x - 7 - \sqrt{2} = 0 & \leftarrow m = -7 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 3x - \sqrt{2} = 0 & \leftarrow m = 0 \\ 3x = 0 & \leftarrow m = \sqrt{2} \end{array}$$

Literę, która w danym równaniu oznacza pewną liczbę, nazywamy **parametrem**. Rozwiązywanie równania z parametrem polega na określaniu liczby i postaci rozwiązań równania w zależności od tego, jaka liczba rzeczywista została podstawiona w miejsce litery oznaczającej parametr. W poniższych przykładach x oznacza niewiadomą, a pozostałe litery to parametry.

Obrazowo mówiąc, równanie z parametrem jest zapisem całej rodziny równań.

Przykład 2 ◀ zad. 8.3

Rozwiążemy równanie $3x + m - \sqrt{2} = 0$.

Rozwiązanie

$$3x + m - \sqrt{2} = 0, \text{ czyli } 3x = -m + \sqrt{2}, \text{ stąd } x = \frac{\sqrt{2} - m}{3}$$

Dla każdej wartości m równanie ma jedno rozwiązanie $x = \frac{\sqrt{2} - m}{3}$. Na przykład:

- dla $m = 5$ rozwiązaniem jest $x = \frac{\sqrt{2} - 5}{3}$,
- dla $m = 0$ rozwiązaniem jest $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$,
- dla $m = \sqrt{2}$ rozwiązaniem jest $x = 0$.

Równań postaci $3x + m - \sqrt{2} = 0$ jest nieskończenie wiele, ale każde z nich ma dokładnie jedno rozwiązanie.

◀ 8.3. Rozwiąż równanie z parametrem m .

- $2x + 3m = 5$
- $mx - 7m = x - m$
- $m(x + 1) - 2m = x + 3$
- $5mx - m = 10x - 2$

Odp.: a) $x = \frac{5 - 3m}{2}$ dla $m \in \mathbb{R}$

b) $x = \frac{6m}{m - 1}$ dla $m \neq 1$,
brak rozwiązań dla $m = 1$

c) $x = \frac{m + 3}{m - 1}$ dla $m \neq 1$,
brak rozwiązań dla $m = 1$

d) $x = \frac{1}{5}$ dla $m \neq 2$,
 $x \in \mathbb{R}$ dla $m = 2$

8.4. Rozwiąż równanie z parametrem k .

a) $k^2x - 1 = x - 5k$

b) $k^2x + 7k = x + 7$

c) $kx + 1 = k + k^2x$

d) $k^2x + \sqrt{3} - k = 3x$

Odp.: a) $x = \frac{1-5k}{k^2-1}$ dla

 $k \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, brak rozwiązań dla $k = -1$ lub $k = 1$

b) $x = -\frac{7}{k+1}$ dla $k \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, brak rozwiązań dla $k = -1$, $x \in \mathbb{R}$ dla $k = 1$

c) $x = -\frac{1}{k}$ dla $k \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$, $x \in \mathbb{R}$ dla $k = 1$, brak rozwiązań dla $k = 0$

d) $x = \frac{1}{k+\sqrt{3}}$ dla

 $k \in \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$, $x \in \mathbb{R}$ dla $k = \sqrt{3}$, brak rozwiązań dla

$k = -\sqrt{3}$

Przykład 3

Rozwiążemy równanie $mx + 3 - 2m = 0$.

Rozwiązanie

$$mx = 2m - 3$$

Aby wyznaczyć x , należy obie strony równania podzielić przez m . Można tę operację wykonać tylko przy założeniu, że $m \neq 0$. Musimy zatem rozważyć dwie sytuacje.

I. $m \neq 0$. Wówczas $x = \frac{2m-3}{m}$, czyli $x = 2 - \frac{3}{m}$.

II. $m = 0$. Wtedy równanie ma postać $0 \cdot x = -3$ i nie ma rozwiązań.

Odp.: Dla $m \neq 0$ równanie ma jedno rozwiązanie $x = 2 - \frac{3}{m}$, dla $m = 0$ równanie nie ma rozwiązań.

Przykład 4 ◀ z 8.4

Rozwiążemy równanie $k^2x + 3 = k + 9x$.

Rozwiązanie

$$k^2x - 9x = k - 3$$

◀ grupujemy wyrazy z niewiadomą po jednej stronie równania

$$(k^2 - 9)x = k - 3$$

◀ wyłączamy x poza nawias

$$(k+3)(k-3)x = k-3$$

◀ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

I. Jeżeli $k \neq -3$ i $k \neq 3$, to obydwie strony równania możemy podzielić przez wyrażenie $(k+3)(k-3)$. Wtedy $x = \frac{k-3}{(k+3)(k-3)}$, czyli $x = \frac{1}{k+3}$.

II. Jeżeli $k = -3$, to równanie ma postać $0 \cdot x = -6$ i nie ma rozwiązań.

III. Jeżeli $k = 3$, to równanie ma postać $0 \cdot x = 0$ i jest tożsamościowe.

Odp.: Dla $k = -3$ równanie nie ma rozwiązań, dla $k = 3$ rozwiązaniem jest każda liczba rzeczywista, dla $k \neq -3$ i $k \neq 3$ rozwiązaniem jest $x = \frac{1}{k+3}$.

* Przykład 5

Dla jakiej wartości parametru m równanie $(m^2 + m)x - 5m = 5$ jest równaniem tożsamościowym?

Rozwiązanie

$$m(m+1)x = 5(m+1)$$

Równanie liniowe tożsamościowe to równanie postaci $0 \cdot x = 0$.Zatem muszą być spełnione dwa warunki: $m(m+1) = 0$ i $5(m+1) = 0$.Jedyną liczbą spełniającą obydwa warunki jest $m = -1$.Odp.: Równanie jest tożsamościowe dla $m = -1$.

Przykład 6 ◀ zad. 8.6

Dla jakiej wartości parametru k rozwiązaniem równania $(3k + 4)x = -6k - 1$ jest liczba 5?

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}(3k + 4) \cdot 5 &= -6k - 1 && \leftarrow \text{w miejsce niewiadomej } x \text{ podstawiamy } 5 \\ 15k + 20 &= -6k - 1 && \leftarrow \text{rozwiązujemy równanie z niewiadomą } k \\ 21k &= -21, \text{ stąd } k &= -1\end{aligned}$$

Sprawdźmy, podstawiając do danego równania $k = -1$.

$$(3 \cdot (-1) + 4)x = -6 \cdot (-1) - 1, \text{ czyli } x = 5$$

Odp.: $k = -1$

Równanie liniowe z kilkoma parametrami

Równanie liniowe może mieć więcej parametrów. Najczęściej oznacza się je literami: m, k, p lub początkowymi literami alfabetu, gdyż litery końcowe tradycyjnie służą do oznaczania niewiadomych.

Rozwiązywanie równań liniowych z większą liczbą parametrów nie różni się od rozwiązywania równania z jednym parametrem. Prześledźmy to na przykładach.

Przykład 7 ◀ zad. 8.17

Rozwiążemy równanie $x + m = k - 1$ z parametrami m oraz k .

Rozwiązanie

$$x = k - 1 - m$$

Odp.: Dla dowolnych wartości m i k równanie ma jedno rozwiązanie $x = k - 1 - m$.

Przykład 8

Rozwiążemy równanie $kx - 3 = m$ z parametrami m oraz k .

Rozwiązanie

$$kx = m + 3$$

I. Jeżeli $k \neq 0$, to $x = \frac{m+3}{k}$.

II. Jeżeli $k = 0$ i $m = -3$, to równanie jest tożsamościowe.

III. Jeżeli $k = 0$ i $m \neq -3$, to równanie jest sprzeczne.

Odp.: Dla $k \neq 0$ równanie ma jedno rozwiązanie $x = \frac{m+3}{k}$, dla $k = 0$ i $m = -3$ rozwiązaniem jest każda liczba rzeczywista, dla $k = 0$ i $m \neq -3$ nie ma rozwiązań.

Jeżeli w odpowiedzi nie podajemy warunku dla jakiegoś parametru, oznacza to, że parametr ten może przyjmować dowolną wartość liczbową.



◀8.6. Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem równania $(m + 3)x - 5 = 3m$ jest liczba -2 ?

$$\text{Odp.: } m = -2\frac{1}{5}$$

◀8.17. Rozwiąż równanie z parametrami m i p .

a) $(x + 1)m = 2m + p$

b) $px - m = x + 3$

Odp.: a) $x = 1 + \frac{p}{m}$ dla $m \neq 0$

i $p \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$ dla $m = p = 0$,
brak rozwiązań dla $m = 0$ i $p \neq 0$

b) $x = \frac{m+3}{p-1}$ dla $p \neq 1$ i $m \in \mathbf{R}$,

$x \in \mathbf{R}$ dla $p = 1$ i $m = -3$, brak
rozwiązań dla $p = 1$ i $m \neq -3$

Przykład 9

Rozwiążemy równanie $(x - m)(p + 2) = -6$ z parametrami m oraz p .

Rozwiązanie

$$px + 2x - mp - 2m = -6$$

$$px + 2x = mp + 2m - 6$$

$$(p + 2)x = mp + 2m - 6$$

I. Jeżeli $p \neq -2$, to $x = \frac{mp + 2m - 6}{p + 2}$, stąd $x = \frac{m(p + 2) - 6}{p + 2}$, czyli $x = m - \frac{6}{p + 2}$.

II. Jeżeli $p = -2$, to równanie ma postać:

$$0 \cdot x = m \cdot (-2) + 2m - 6$$

$$0 \cdot x = -6$$

Zatem dla $p = -2$ równanie jest sprzeczne niezależnie od wartości parametru m .

Odp.: Dla $p \neq -2$ równanie ma jedno rozwiązanie $x = m - \frac{6}{p + 2}$, dla $p = -2$ równanie nie ma rozwiązań.

8.18. Rozwiąż równanie

$m^2x - m = p^2x + p$, w którym m i p są parametrami.

Odp.: $x = \frac{1}{m - p}$ dla $m \neq p$

i $m \neq -p$, $x \in \mathbf{R}$ dla $m = -p$,
brak rozwiązań dla $m = p \neq 0$

*** Przykład 10** ◀ zad. 8.18

Rozwiążemy równanie $k^2x - k = m^2x - m$ z parametrami k oraz m .

Rozwiązanie

$$k^2x - k = m^2x - m$$

$$k^2x - m^2x = k - m$$

$$(k^2 - m^2)x = k - m$$

$$(k - m)(k + m)x = k - m$$

I. Jeżeli $k - m \neq 0$ i $k + m \neq 0$, to $x = \frac{k - m}{(k - m)(k + m)}$, czyli $x = \frac{1}{k + m}$.

II. Jeżeli $k - m = 0$, to równanie ma postać $0 \cdot x = 0$ i jego rozwiązaniem jest każda liczba rzeczywista.

III. Jeżeli $k + m = 0$, to równanie ma postać $0 \cdot x = k - m$ i liczba rozwiązań równania zależy od wartości wyrażenia $k - m$. Zauważmy, że rozwiązaniem układu:

$$\begin{cases} k + m = 0 \\ k - m = 0 \end{cases}$$

jest para liczb $k = 0$, $m = 0$, zatem powtarza się sytuacja z punktu II.

Natomiast gdy $k = -m \neq 0$, to równanie nie ma rozwiązań.

Odp.: Dla $k \neq m$ i $k \neq -m$ równanie ma jedno rozwiązanie $x = \frac{1}{k + m}$, dla $k = m$ rozwiązaniem jest każda liczba rzeczywista, dla $k = -m \neq 0$ równanie nie ma rozwiązań.

Przykład 11 ◀ zad. 8.20

Za k opakowań ryżu Tomasz zapłacił o p zł mniej niż za m opakowań tego samego ryżu. Ile kosztowało jedno opakowanie ryżu?

Rozwiązanie

Niech x oznacza cenę jednego opakowania ryżu.

$$kx + p = mx$$

Po przekształceniu równania z niewiadomą x otrzymujemy:

$$p = (m - k)x$$

Stąd mamy:

$$x = \frac{p}{m - k}$$

Z treści zadania wynika, że $m > k > 0$ i $p > 0$. Zatem otrzymane wyrażenie $\frac{p}{m - k}$, opisujące cenę jednego opakowania ryżu, ma wartość dodatnią dla dowolnych wartości m, k i p spełniających te nierówności.

Odp.: Cena jednego opakowania ryżu wynosi $x = \frac{p}{m - k}$ zł dla $m > k > 0$ i $p > 0$.

Nierówność liniowa z parametrem

Nierówność liniowa z jedną niewiadomą to nierówność, którą można zapisać w jednej z dwóch postaci:

- $ax + b > 0$,
- $ax + b \geq 0$,

gdzie x jest niewiadomą, a współczynniki a i b są liczbami danymi.

Prześledźmy sposób rozwiązywania nierówności liniowej z parametrem na przykładach.

Przykład 12 ◀ zad. 8.21

Rozwiążmy nierówność $3x - 2m + 6 \leq 0$ z parametrem m .

Rozwiązanie

$$3x \leq 2m - 6, \text{ stąd } x \leq \frac{2m - 6}{3}$$

Odp.: Dla każdej wartości parametru m zbiorem rozwiązań podanej nierówności jest przedział $\left(-\infty; \frac{2m - 6}{3}\right]$.

◀8.20. Kwotę k złotych wypłacono z bankomatu w banknotach pięćdziesięciozłotowych oraz stułotowych. Wyznacz liczbę banknotów pięćdziesięciozłotowych w zależności od k , wiedząc, że liczba wszystkich banknotów wynosiła 40.

Odp.: $\frac{4000 - k}{50}$ dla $k \in \{2000, 2050, 2100, \dots, 4000\}$

◀8.21. Rozwiąż nierówność z parametrem k .

a) $2(kx - 3) < 3k$

b) $(5 - 2x)k + 2 < 7k$

c) $1 - 3kx > 5\left(k + \frac{1}{5}\right)$

d) $5 - kx > 2k(x - 3) + 2$

Odp.: a) $x \in \mathbb{R}$ dla $k = 0$,

$x < \frac{3k + 6}{2k}$ dla $k > 0$,

$x > \frac{3k + 6}{2k}$ dla $k < 0$

b) brak rozwiązań dla $k = 0$,

$x > \frac{1}{k} - 1$ dla $k > 0$,

$x < \frac{1}{k} - 1$ dla $k < 0$

c) brak rozwiązań dla $k = 0$,

$x < -1\frac{2}{3}$ dla $k > 0$,

$x > -1\frac{2}{3}$ dla $k < 0$

d) $x \in \mathbb{R}$ dla $k = 0$,

$x < 2 + \frac{1}{k}$ dla $k > 0$,

$x > 2 + \frac{1}{k}$ dla $k < 0$

◀ 8.2. Patrz s. 161.

**Przykład 13** ◀ zad. 8.2

Dana jest nierówność $px > p + 2$ z parametrem p . Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Dla $p = 4$ zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(1; \infty)$.
- B. Dla $p = 0$ nierówność jest sprzeczna.
- C. Dla $p = 1$ zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(3; \infty)$.

Rozwiązanie

Do oceny prawdziwości podanych zdań nie musimy tej nierówności rozwiązywać. Najprościej będzie podstawić podane wartości parametru p .

- A. Jeżeli $p = 4$, to nierówność ma postać $4x > 4 + 2$, zatem zbiorem jej rozwiązań nie jest przedział $(1; \infty)$.
- B. Dla $p = 0$ nierówność ma postać $0 \cdot x > 2$ i jest sprzeczna.
- C. Dla $p = 1$ nierówność ma postać $x > 1 + 2$, zatem zbiorem jej rozwiązań jest przedział $(3; \infty)$.

Odp.: Zdanie A jest fałszywe, zdania B oraz C są prawdziwe.

Przykład 14

Rozwiążemy nierówność $px - 2p > 0$ z parametrem p .

Rozwiązanie

$$px > 2p$$

- I. Jeżeli $p = 0$, to nierówność ma postać $0 \cdot x > 0$ i nie ma rozwiązań.
- II. Jeżeli $p > 0$, to obie strony nierówności możemy podzielić przez liczbę p . Zwrot nierówności **nie zmienia się** i otrzymujemy $x > 2$.
- III. Jeżeli $p < 0$, to obie strony nierówności także możemy podzielić przez liczbę p , ale zwrot nierówności **zmienia się** i otrzymujemy $x < 2$.

Odp.: Jeżeli $p = 0$, to nierówność nie ma rozwiązań. Jeżeli $p > 0$, to $x \in (2; \infty)$. Jeżeli $p < 0$, to $x \in (-\infty; 2)$.

Przykład 15

Rozwiążemy nierówność $2px - 2x \leq 3p^2 - 3$ z parametrem p .

Rozwiązanie

$$2(p - 1)x \leq 3(p - 1)(p + 1)$$

- I. Jeżeli $p = 1$, to nierówność ma postać $0 \cdot x \leq 0$ i jest spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą.

II. Jeżeli $p > 1$, to obie strony nierówności możemy podzielić przez liczbę dodatnią $2(p-1)$. Zwrot nierówności nie zmienia się i otrzymujemy nierówność:

$$x \leq \frac{3(p+1)}{2}$$

III. Jeżeli $p < 1$, to obie strony nierówności możemy podzielić przez liczbę ujemną $2(p-1)$. Zwrot nierówności zmienia się i otrzymujemy nierówność:

$$x \geq \frac{3(p+1)}{2}$$

Odp.: Jeżeli $p = 1$, to $x \in \mathbf{R}$. Jeżeli $p > 1$, to $x \in \left(-\infty; \frac{3(p+1)}{2}\right]$. Jeżeli $p < 1$, to $x \in \left[\frac{3(p+1)}{2}; \infty\right)$.

Przykład 16 ◀ zad. 8.24

Sprawdźmy, czy istnieje taka wartość parametru k , dla której podana nierówność jest spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą.

$$kx + 2k < 3x + 4$$

Rozwiązanie

$$kx + 2k < 3x + 4$$

$$kx - 3x < -2k + 4$$

$$(k-3)x < -2k + 4$$

Przykładami nierówności spełnionych przez dowolną liczbę rzeczywistą są:
 $0 \cdot x > -4$, $0 \cdot x < 5$

Zauważmy, że aby nierówność była spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą, współczynnik przy niewiadomej x musi być równy 0. Ten warunek jest spełniony, gdy $k = 3$. Ale dla $k = 3$ nierówność ma postać $0 \cdot x < -2$ i nie ma rozwiązań.

Odp.: Nie istnieje taka wartość parametru k , dla której nierówność $kx + 2k < 3x + 4$ jest spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą.

Zadania

8.1. Dane jest równanie $x - 2k = 10$ z parametrem k . Oceń prawdziwość zdań.

- A. Dla $k = 0$ rozwiązaniem równania jest liczba 10.
- B. Dla $k = 5$ rozwiązaniem równania jest liczba 0.
- C. Dla $k = \sqrt{3}$ rozwiązaniem równania jest liczba $12\sqrt{3}$.

8.2. Dana jest nierówność $px > 2p - 2$ z parametrem p . Oceń prawdziwość zdań.

- A. Dla $p = 4$ zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(-1; \infty)$.
- B. Dla $p = 2$ nierówność jest sprzeczna.
- C. Dla $p = 1$ zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(1; \infty)$.

◀ **8.24.** Dla jakich wartości parametru m zbiorem rozwiązań nierówności
 $m(x+1) - 2(2x-4) > (m+1)x - 5$
 jest przedział $\left(-\infty; 3\frac{1}{5}\right)$?

Odp.: $m = 3$

Odpowiedzi i rozwiązania

8.1. P, F, F

8.2. F, F, F

8.3. a) $x = \frac{5-3m}{2}$ dla $m \in \mathbb{R}$

b) $x = \frac{6m}{m-1}$ dla $m \neq 1$,
brak rozwiązań dla $m = 1$

c) $x = \frac{m+3}{m-1}$ dla $m \neq 1$,
brak rozwiązań dla $m = 1$

d) $x = \frac{1}{5}$ dla $m \neq 2$,
 $x \in \mathbb{R}$ dla $m = 2$

8.4. a) $x = \frac{1-5k}{k^2-1}$ dla

$k \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, brak rozwiązań
dla $k = -1$ lub $k = 1$

b) $x = -\frac{7}{k+1}$ dla $k \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$,
brak rozwiązań dla $k = -1$,
 $x \in \mathbb{R}$ dla $k = 1$

c) $x = -\frac{1}{k}$ dla $k \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$,
 $x \in \mathbb{R}$ dla $k = 1$,
brak rozwiązań dla $k = 0$

d) $x = \frac{1}{k+\sqrt{3}}$ dla

$k \in \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$,

$x \in \mathbb{R}$ dla $k = \sqrt{3}$,

brak rozwiązań dla $k = -\sqrt{3}$

8.5. $x = 2$ dla $k > -1$,

$x = -2$ dla $k < -1$,

$x \in \mathbb{R}$ dla $k = -1$

8.6. $m = -2\frac{1}{5}$

8.7. $k \in \left\langle -\frac{1}{3}; 4\frac{2}{3} \right\rangle$

8.8. $k = 2$

8.9. Nie ma takiego k .

8.10. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{5}\right)$

8.11. a) $k = 1$

b) Nie ma takiego k .

8.12. a) $p \in (-\infty; 5)$

b) $p \in \left(\frac{2}{5}; \infty\right)$

c) $p \in \left(-\infty; -2\frac{2}{3}\right)$

d) $p \in (-4; \infty)$

8.13. $m \in \left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$

8.3. Rozwiąż równanie z parametrem m .

a) $2x + 3m = 5$

c) $m(x+1) - 2m = x+3$

b) $mx - 7m = x - m$

d) $5mx - m = 10x - 2$

8.4. Rozwiąż równanie z parametrem k .

a) $k^2x - 1 = x - 5k$

c) $kx + 1 = k + k^2x$

b) $k^2x + 7k = x + 7$

d) $k^2x + \sqrt{3} - k = 3x$

* **8.5.** Rozwiąż równanie $|k+1|x - 2 = 2k$, w którym k jest parametrem.

8.6. Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem równania $(m+3)x - 5 = 3m$ jest liczba -2 ?

8.7. Dla jakich wartości parametru k rozwiązanie równania

$$1 - \frac{x-9k}{10} = \frac{3k-x}{2} - \frac{3x-1}{5}$$
 należy do przedziału $\langle -1; 2 \rangle$?

8.8. Dla jakich wartości parametru k równanie $k^2x + 4[3 - (k-1)x] = 12k$ nie ma rozwiązania?

8.9. Dla jakich wartości parametru k równanie $k^2x - 7k = 10 - 6x$ jest tożsamościowe?

8.10. Dla jakich wartości parametru m rozwiązanie równania

$$7x - 3m = 2(m+1) + 3x$$
 jest mniejsze od $\frac{3}{4}$?

8.11. Dla jakich wartości parametru k podane równanie jest tożsamościowe?

a) $2 - kx = 2k - x$

b) $kx + 5 = 3x + 1$

8.12. Dla jakich wartości parametru p podane równanie jest sprzeczne?

a) $|x-1| = p-5$

b) $2|x-3| + 3p = 2(1-p)$

c) $5p - |x+2| = 2(p-4)$

d) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} + 4p^2 + 5 = (1-2p)^2 + 3p$

8.13. Dla jakich wartości parametru m rozwiązanie równania $2m+3(x-5m) = m+9$

$$\text{jest większe od rozwiązania równania } 2\sqrt{9x^2 - 12x + 4} - \frac{1}{2}(2x-3) = 1\frac{1}{2} - x?$$

8.26. tak, $p = -1\frac{1}{5}$

8.27. tak, $m = 2$

8.28. Dana nierówność jest równoważna nierówności $m(m-2)x \geq m(m-3)$. Jeśli $m = 0$ lub $m = 2$ to nierówność jest tożsamościowa, a jeśli $m \neq 0$ i $m \neq 2$, to zbiorem rozwiązań nierówności jest pewien przedział. Zatem dla żadnej wartości parametru m nierówność nie jest sprzeczna.

8.29. np. $(k-2)(k+2)x = k+2$

Prosto do matury

1. P, F, P

2. $x = \frac{5}{2-k}$ dla $k \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$,
 $x \in \mathbb{R}$ dla $k = 0$, brak rozwiązań dla $k = 2$

3. $x \in \mathbb{R}$ dla $p = 0$,
 $x \geq \frac{p-1}{3p}$ dla $p > 0$,
 $x \leq \frac{p-1}{3p}$ dla $p < 0$

4. $m = -3$ i $k = 4$

5. a) Dla $x = 5$ mamy
 $2 \cdot 5 + |m| = 8$, stąd $|m| = -2$.
Jest to sprzeczność, więc nie ma takiego m .

b) $2x + |m| = 8$

$$x = \frac{8 - |m|}{2}$$

$$x = 4 - \frac{|m|}{2} \leq 4, \text{ bo } |m| \geq 0$$

Zatem nie istnieje m spełniające warunki zadania.

8.27. Sprawdź, czy istnieje taka wartość parametru m , dla której nierówność $m^2x - m^2 - 4x - 2m < 0$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą.

8.28. Wykaż, że nie istnieje taka wartość parametru m , dla której nierówność $m^2(x-1) \geq m(2x-3)$ jest sprzeczna.

* **8.29.** Podaj przykład równania liniowego z parametrem k , które dla $k = 2$ jest sprzeczne, dla $k = -2$ jest tożsamościowe, a dla $k \neq 2$ oraz $k \neq -2$ ma jedno rozwiązanie.

8.30. Wykaż, że dla dowolnej wartości parametru $k \in \mathbb{R}$ równanie $2kx + [1 - (k+1)x] \cdot (k+1) = 4$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Prosto do matury



1. Dane jest równanie $kx + m = 1$ z parametrami k oraz m .

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Dla $k = 1$ i $m = 2$ rozwiązaniem równania jest liczba -1 .

B. Dla $k = 0$ i $m = 0$ równanie jest tożsamościowe.

C. Dla $k = 0$ i $m = 0$ równanie jest sprzeczne.

2. Rozwiąż równanie $k^2x = 2kx - 5k$ z parametrem k .

3. Rozwiąż nierówność $3px \geq p - 1$ z parametrem p .

4. Dla jakich wartości parametrów k oraz m równanie $mx - 2k + 3x + 8 = 0$ jest tożsamościowe?

5. Wykaż, że nie istnieje taka wartość parametru m , dla której rozwiązaniem równania $2x + |m| = 8$ jest

a) liczba 5.

b) liczba większa od 4.

8.30. Przekształcamy równanie.

$$2kx + [1 - (k+1)x] \cdot (k+1) = 4$$

$$2kx + (k+1) - (k+1)^2x = 4$$

$$(2k - k^2 - 2k - 1)x = 3 - k \quad | \cdot (-1)$$

$$(k^2 + 1)x = k - 3$$

Dla dowolnego k zachodzi nierówność $k^2 + 1 > 0$, więc równanie ma dokładnie jedno

$$\text{rozwiązanie } x = \frac{k-3}{k^2+1}.$$

9. Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi – wprowadzenie

Umiejętności:

- rozpoznawanie równania liniowego z dwiema niewiadomymi
- sprawdzanie, czy dana para liczb jest rozwiązaniem równania liniowego z dwiema niewiadomymi
- rozpoznawanie układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi
- sprawdzanie, czy dana para liczb jest rozwiązaniem układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Równanie liniowe z dwiema niewiadomymi

Definicja

Równanie postaci $ax + by = c$, w którym niewiadome x i y występują w pierwszej (liniowej) potęgze, a , b i c są liczbami danymi oraz a i b nie są jednocześnie równe zero, nazywamy **równaniem liniowym z dwiema niewiadomymi**.

Przykładami równań tej postaci są:

$$2x - y = 7$$

$$-\sqrt{5}x + 4y = 0,27(13)$$

$$2x = 9$$

$$-y = 7\sqrt{3}$$

Odpowiedź na pytanie, czy równanie $2x = 9$ jest równaniem postaci $ax + by = c$, gdzie $a = 2$, $b = 0$ i $c = 9$, czy jest równaniem liniowym z jedną niewiadomą, odczytujemy z kontekstu. Czasem dla podkreślenia jednoznaczności będziemy zapisywać takie równanie w postaci $2x + 0y = 9$.

Jeżeli do równania z dwiema niewiadomymi podstawimy parę liczb w miejsce odpowiednich niewiadomych i otrzymamy równość, to mówimy, że ta para liczb spełnia to równanie. Każdą parę liczb spełniającą dane równanie nazywamy **rozwiązaniem tego równania**.

Przykład 1 ◀ zad. 9.5

Znajdziemy kilka rozwiązań równania $5x - 2y = 4$.

Rozwiązanie

- $5 \cdot 2 - 2y = 4$ ← wstawiamy do równania $x = 2$ (czyli liczbę 2 w miejsce x)
- $-2y = 4 - 10$
- $y = 3$

Rozwiązaniem równania jest para liczb $x = 2$ i $y = 3$.

◀9.5. Dane jest równanie liniowe z dwiema niewiadomymi $6x - y = 7$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- Para $(1, -1)$ jest rozwiązaniem tego równania.
- Rozwiązaniami tego równania są uporządkowane pary liczb.
- To równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Odp.: P, P, P

ZZ i MKP

temat 3.1

Multiteka

- Układ równań – rozwiązanie zadania
- Układy równań liniowych – liczba rozwiązań

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.9

Generator
testów i sprawdzianów

◀9.1. Wskaż parę liczb spełniającą równanie $3x - 5y = 15$.

- A. (0, 3) C. (0, -3)
B. (-5, 0) D. (3, -1)

Odp.: C

- $5 \cdot \sqrt{2} - 2y = 4$ ← wstawiamy do równania $x = \sqrt{2}$
 $-2y = -5\sqrt{2} + 4$
 $y = \frac{5}{2}\sqrt{2} - 2$
 Rozwiązaniem równania jest para liczb $x = \sqrt{2}$ i $y = \frac{5}{2}\sqrt{2} - 2$.

- $5x - 2 \cdot 0 = 4$ ← wstawiamy do równania $y = 0$
 $x = \frac{4}{5}$
 Rozwiązaniem równania jest para liczb $x = \frac{4}{5}$ i $y = 0$.

Jest nieskończenie wiele par liczb spełniających równanie $5x - 2y = 4$.

Przykład 2 ◀ zad. 9.1

Sprawdźmy, która z par liczb: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ jest rozwiązaniem równania $x - y = 5$.

Rozwiązanie

- (1, 4)
 $1 - 4 = -3 \neq 5$ ← wstawiamy do równania $x = 1$ i $y = 4$

Odp.: Para liczb $x = 1$ i $y = 4$ nie jest rozwiązaniem tego równania.

- (2, -3)
 $2 - (-3) = 5$ ← wstawiamy do równania $x = 2$ i $y = -3$

Odp.: Para liczb $x = 2$ i $y = -3$ jest rozwiązaniem tego równania.

Rozwiązania równania liniowego z dwiema niewiadomymi zapisujemy w różnych postaciach. Jedną z nich jest zapis:

$$x = x_0 \text{ i } y = y_0$$

Druga możliwość to zapis z klamerką:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

i kolejna – zapis w postaci uporządkowanej pary liczb:

$$(x_0, y_0)$$

Zauważmy, że kolejność liczb w zapisie takiej pary ma znaczenie. Na przykład para (2, 3) jest rozwiązaniem równania $5x - 2y = 4$, natomiast para liczb (3, 2) nie jest rozwiązaniem tego równania.

Przykład 3

Podamy przykłady pięciu par liczb całkowitych spełniających dane równanie.

a) $x + 3y = 7$

b) $-4x + 2y = 12$

Rozwiązanie

a) $x + 3y = 7$

← z równania wyznaczamy jedną niewiadomą, np. x

$x = 7 - 3y$

Wynika stąd, że rozwiązaniami są pary liczb postaci $(7 - 3y, y)$, gdzie y jest dowolną liczbą rzeczywistą, a $x = 7 - 3y$. Zatem przykładami takich par są: $(7, 0), (4, 1), (10, -1), (1, 2), (-2, 3)$.

b) $-4x + 2y = 12$

← obie strony równania dzielimy przez 2

$-2x + y = 6$

← z równania wyznaczamy jedną niewiadomą, np. y

$y = 6 + 2x$

Wynika stąd, że rozwiązaniami są pary liczb postaci $(x, 6 + 2x)$, gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą, a $y = 6 + 2x$. Zatem przykładami takich par są: $(0, 6), (1, 8), (-1, 4), (-2, 2), (2, 10)$.

Odp.: a) np.: $(7, 0), (4, 1), (10, -1), (1, 2), (-2, 3)$

b) np.: $(0, 6), (1, 8), (-1, 4), (-2, 2), (2, 10)$

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Zadania tekstowe, z którymi zetknęliście się do tej pory, można było rozwiązać albo w pamięci, albo rozwiązując równanie liniowe z jedną niewiadomą.

Często wygodniejszą formą rozwiązywania zadania jest wprowadzenie kilku niewiadomych. Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 4

W szkółce leśnej posadzono w sumie 100 sadzonek świerka i modrzewia. Po określonym czasie okazało się, że do rozsady nie nadaje się $\frac{1}{6}$ sadzonek świerka i $\frac{1}{8}$ sadzonek modrzewia. Po ich odrzuceniu do rozsadzenia pozostało 86 sadzonek. Sprawdźmy, ile sadzonek świerka i ile modrzewia posadzono na początku w szkółce.

Rozwiązanie

Oznaczmy:

x – początkowa liczba sadzonek świerka

y – początkowa liczba sadzonek modrzewia

$\frac{1}{6}x$ – liczba odrzuconych sadzonek świerka

$\frac{1}{8}y$ – liczba odrzuconych sadzonek modrzewia

Na podstawie treści zadania wiemy, że:

$$x + y = 100 \quad \leftarrow \text{posadzono w sumie 100 sadzonek}$$

oraz

$$100 - \left(\frac{x}{6} + \frac{y}{8} \right) = 86 \quad \leftarrow \text{po odrzuceniu wszystkich niedobrych zostało 86}$$

Zauważmy, że jest wiele par liczb spełniających jedno z równań. Na przykład po podstawieniu $x = 60$ i $y = 40$ otrzymamy:

$$60 + 40 = 100, \text{ ale } 100 - \left(\frac{60}{6} + \frac{40}{8} \right) = 100 - (10 + 5) = 85 \neq 86$$

Z kolei po podstawieniu $x = 24$ i $y = 80$ otrzymamy:

$$100 - \left(\frac{24}{6} + \frac{80}{8} \right) = 100 - (4 + 10) = 86, \text{ ale } 24 + 80 = 104 \neq 100$$

Zadanie, które mamy rozwiązać, polega na znalezieniu takich par liczb $x = x_0$ i $y = y_0$, które będą spełniały wszystkie założenia podane w treści, czyli jedno i drugie równanie. Inaczej mówiąc, mamy do rozwiązania **układ równań**:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 100 - \left(\frac{x}{6} + \frac{y}{8} \right) = 86 \end{cases}$$

Jedyną parą liczb spełniającą ten układ równań jest $x = 36$ i $y = 64$. Sprawdźmy:

$$\begin{cases} 36 + 64 = 100 \\ 100 - \left(\frac{36}{6} + \frac{64}{8} \right) = 100 - (6 + 8) = 86 \end{cases}$$

Metodami rozwiązywania układów równań oraz wyjaśnieniem, dlaczego poszukiwanym rozwiązaniem tego układu jest tylko jedna para liczb, zajmiemy się w następnych tematach podręcznika.

Odp.: W szkółce posadzono 36 sadzonek świerka i 64 sadzonki modrzewia.

Przyjrzyjmy się ponownie układowi równań:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 100 - \left(\frac{x}{6} + \frac{y}{8} \right) = 86 \end{cases}$$

Drugie równanie przekształcimy równoważnie do prostszej postaci.

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ -\left(\frac{x}{6} + \frac{y}{8} \right) = 86 - 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 14 \end{cases} \quad \leftarrow \text{obie strony równania mnożymy przez 24}$$

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 4x + 3y = 336 \end{cases}$$

Zatem każde z równań układu jest równaniem liniowym z dwiema niewiadomymi.

Układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi zapisujemy najczęściej w postaci:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

przy czym litery x i y oznaczają niewiadome, natomiast $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi dodatkowo warunki: liczby a_1, b_1 nie są jednocześnie równe zero i liczby a_2, b_2 nie są jednocześnie równe zero.

Przykład 5 ◀ zad. 9.6

Sprawdźmy, czy podana para liczb spełnia układ równań $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 6x + 5y = 3 \end{cases}$.

- a) (2, -3) b) (1, 1) c) (-2, 3)

Rozwiązanie

a) Do każdego z równań układu podstawiamy $x = 2$ i $y = -3$:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = 4 - 9 = -5 \neq 5 \\ 6 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) = 12 - 15 = -3 \neq 3 \end{cases}$$

Odp.: Para (2, -3) nie spełnia podanego układu równań.

b) Do każdego z równań układu podstawiamy $x = 1$ i $y = 1$:

$$\begin{cases} 2 + 3 = 5 \\ 6 + 5 = 11 \neq 3 \end{cases}$$

Odp.: Para (1, 1) nie spełnia podanego układu równań.

c) Do każdego z równań układu podstawiamy $x = -2$ i $y = 3$:

$$\begin{cases} -4 + 9 = 5 \\ -12 + 15 = 3 \end{cases}$$

Odp.: Para (-2, 3) spełnia podany układ równań.

Przykład 6 ◀ zad. 9.7

Dany jest układ równań $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 5 \\ 3x + 2y = 30 \end{cases}$.

Sprawdźmy, czy pary (0, 15), (-2, 3), (2, 12) należą do zbioru jego rozwiązań.

Rozwiązanie

$$\begin{cases} 0 + \frac{15}{3} = 5 \\ 0 + 30 = 30 \end{cases} \quad \leftarrow \text{podstawiamy } x = 0 \text{ i } y = 15$$

Para (0, 15) spełnia ten układ równań.

◀ **9.6.** Znajdź trzy pary liczb (x, y) , które spełniają podane równanie.

- a) $x - y = 7$
b) $2x + y = 5$
c) $5x + 3y = 8$
d) $x - y = 0$
e) $0x + y = 9$
f) $x + 0y = 11$

Odp.:

- a) np. (1, -6), (5, -2), (0, -7)
b) np. (2, 1), (3, -1), (0, 5)
c) np. (1, 1), $(\frac{5}{8}, 0)$, $(0, \frac{2}{3})$
d) np. (2, 2), (-5, -5), (0, 0)
e) np. (-1, 9), (3, 9), (7, 9)
f) np. (11, 3), (11, -7), (11, 105)

◀ **9.7.** Sprawdź, czy podana para liczb spełnia układ równań.

- a) $\begin{cases} 6x + 5y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad (-3, 4)$
b) $\begin{cases} 7x - 2 = 2y \\ x - y = 1 \end{cases} \quad (0, -1)$
c) $\begin{cases} 2y - 3 = x \\ 2x + y = -1 \end{cases} \quad (3, 3)$
d) $\begin{cases} 2(x - 1) = 3y \\ x = 1 - y \end{cases} \quad (2, 0)$
e) $\begin{cases} 5x + y = 3 \\ 7x - 4y = -3 \end{cases} \quad (\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$
f) $\begin{cases} x + y = \frac{1}{2} \\ x - y = \frac{1}{3} \end{cases} \quad (\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$

Odp.: a) tak b) tak c) nie
d) nie e) tak f) nie

$$\begin{cases} -\frac{2}{2} + \frac{3}{3} = -1 + 1 = 0 \neq 5 \\ -6 + 6 = 0 \neq 30 \end{cases} \quad \leftarrow \text{podstawiamy } x = -2 \text{ i } y = 3$$

Para $(-2, 3)$ nie spełnia tego układu równań.

$$\begin{cases} \frac{2}{2} + \frac{12}{3} = 1 + 4 = 5 \\ 6 + 24 = 30 \end{cases} \quad \leftarrow \text{podstawiamy } x = 2 \text{ i } y = 12$$

Para $(2, 12)$ spełnia ten układ równań.

Odp.: Pary $(0, 15)$ i $(2, 12)$ należą do zbioru rozwiązań tego układu, natomiast para $(-2, 3)$ nie należy do tego zbioru.

Wniosek

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi może mieć więcej niż jedno rozwiązanie.

Zadania

W każdym z zadań 9.1–9.4 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

9.1. C

9.1. Wskaż parę liczb spełniającą równanie $3x - 5y = 15$.

- A. $(0, 3)$ B. $(-5, 0)$ C. $(0, -3)$ D. $(3, -1)$

9.2. C

9.2. Wskaż parę liczb, która nie spełnia równania $6x - 2y = -12$.

- A. $(0, 6)$ B. $(-1, 3)$ C. $(-1, 5)$ D. $(-2, 0)$

9.3. B

9.3. Wskaż parę liczb spełniającą układ równań $\begin{cases} 5x + 3y = -12 \\ x + y = -2 \end{cases}$.

- A. $(-4, 2)$ B. $(-3, 1)$ C. $(-5, 3)$ D. $(3, -5)$

9.4. B

9.4. Wskaż parę liczb, która nie jest rozwiązaniem układu $\begin{cases} \frac{4}{5}x - \frac{8}{7}y = 12 \\ -x + \frac{10}{7}y = -15 \end{cases}$.

- A. $(15, 0)$ B. $(1, 4)$ C. $\left(\frac{95}{7}, -1\right)$ D. $\left(0, -\frac{21}{2}\right)$

9.5. Dane jest równanie liniowe z dwiema niewiadomymi $6x - y = 7$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Para $(1, -1)$ jest rozwiązaniem tego równania.
 B. Rozwiązaniami tego równania są uporządkowane pary liczb.
 C. To równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań.

9.6. Znajdź trzy pary liczb (x, y) , które spełniają podane równanie.

- a) $x - y = 7$ c) $5x + 3y = 8$ e) $0x + y = 9$
 b) $2x + y = 5$ d) $x - y = 0$ f) $x + 0y = 11$

9.7. Sprawdź, czy podana para liczb spełnia układ równań.

- a) $\begin{cases} 6x + 5y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ $(-3, 4)$ d) $\begin{cases} 2(x - 1) = 3y \\ x = 1 - y \end{cases}$ $(2, 0)$
 b) $\begin{cases} 7x - 2 = 2y \\ x - y = 1 \end{cases}$ $(0, -1)$ e) $\begin{cases} 5x + y = 3 \\ 7x - 4y = -3 \end{cases}$ $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$
 c) $\begin{cases} 2y - 3 = x \\ 2x + y = -1 \end{cases}$ $(3, 3)$ f) $\begin{cases} x + y = \frac{1}{2} \\ x - y = \frac{1}{3} \end{cases}$ $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$

9.8. Sprawdź, czy para $(1, 2)$ jest rozwiązaniem podanego układu równań.

- a) $\begin{cases} 2x - 5y = -8 \\ x + y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 6x + 3y = 12 \\ x - y = -1 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} -x + \sqrt{2}y = 2\sqrt{2} - 1 \\ x + 5y = 11 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 10^{10}x + 10^{10}y = 3 \cdot 10^{10} \\ 2 \cdot 10^{20}x - 10^{15}y = 2 \cdot 10^5 \end{cases}$
 c) $\begin{cases} \sqrt{5}x + 2\sqrt{5}y = 5\sqrt{5} \\ 2\sqrt{3}x + \sqrt{7}y = 2\sqrt{10} \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2^{11}x + 2^{10}y = 2^{12} \\ 3^{-2}x + 3^{-1}y = 7 \cdot 3^{-2} \end{cases}$

9.9. Do danego równania dopisz drugie równanie tak, aby otrzymany układ był spełniony przez podaną obok parę liczb.

- a) $2x + y = 7$ $(2, 3)$ d) $4x + 3y = 5$ $(2, -1)$
 b) $x + y = 10$ $(4, 6)$ e) $-13x + 2y = -1$ $(-1, -7)$
 c) $-x + 5y = 3$ $(-3, 0)$ f) $117x - 119y = 0$ $(0, 0)$

9.10. Dany jest układ równań $\begin{cases} 2x - y = -\log_2 2 \\ 4x + 2 = 2y \end{cases}$.

- a) Wykaż, że pary $(3, 7)$ i $(-1, -1)$ są rozwiązaniami tego układu.
 b) Podaj przykład dwóch innych rozwiązań tego układu oraz jeden przykład pary niebędącej jego rozwiązaniem.

9.10. a) Do każdego z równań układu podstawiamy $x = 3$ i $y = 7$.

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 - 7 = 6 - 7 = -1 = -\log_2 2 \\ 4 \cdot 3 + 2 = 12 + 2 = 14 = 2 \cdot 7 \end{cases}$$

Do każdego z równań układu podstawiamy $x = -1$ i $y = -1$.

$$\begin{cases} 2 \cdot (-1) - (-1) = -2 + 1 = -1 = -\log_2 2 \\ 4 \cdot (-1) + 2 = -4 + 2 = -2 = 2 \cdot (-1) \end{cases}$$

b) Każde równanie można przekształcić do postaci $y = 2x + 1$.

Przykłady innych rozwiązań: $(1, 3)$, $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3} + 1)$

Przykład pary niebędącej rozwiązaniem: $(2, 4)$

9.5. P, P, P

9.6. a) np. $(1, -6)$, $(5, -2)$, $(0, -7)$

b) np. $(2, 1)$, $(3, -1)$, $(0, 5)$

c) np. $(1, 1)$, $\left(\frac{5}{8}, 0\right)$, $\left(0, 2\frac{2}{3}\right)$

d) np. $(2, 2)$, $(-5, -5)$, $(0, 0)$

e) np. $(-1, 9)$, $(3, 9)$, $(7, 9)$

f) np. $(11, 3)$, $(11, -7)$, $(11, 105)$

9.7. a) tak **b)** tak **c)** nie

d) nie **e)** tak **f)** nie

9.8. a) tak **b)** tak **c)** nie

d) tak **e)** nie **f)** tak

9.9. a) np. $x + y = 5$

b) np. $x - y = -2$

c) np. $2x - y = -6$

d) np. $-3x + y = -7$

e) np. $-7x + y = 0$

f) np. $x + 2y = 0$

9.11. tak

9.12. $m = 3$

9.13. Wskazówka: $11x = 19 + 7y$, zatem dobierz taką liczbę y , aby prawa strona tego równania była podzielna przez 11.

9.14. (1, 16), (4, 9), (7, 2).
Wskazówka: Przekształć równanie do równoważnej postaci
 $y = \frac{55 - 7x}{3}$.

9.15. (11, 51), (24, 34), (37, 17), (50, 0).
Wskazówka: Przekształć równanie do równoważnej postaci
 $x = 50 - \frac{13y}{17}$.

Prosto do matury

1. P, F, P

2. np. $x = -1$, $y = -1$

3. tak

4. $m = 5$

9.11. Sprawdź, czy pary liczb $\left(\sqrt{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(0, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{3}{4}\sqrt{6}, 0\right)$ są rozwiązaniami układu równań $\begin{cases} 2\sqrt{2}x - \sqrt{6}y = 3\sqrt{3} \\ -2\sqrt{6}x + 3\sqrt{2}y = -9 \end{cases}$.

9.12. Wyznacz taką wartość m , aby para liczb $(-3, 5)$ była rozwiązaniem równania $2x + my = 9$.

* 9.13. Znajdź parę liczb całkowitych (x, y) spełniającą równanie $11x - 7y = 19$.

* 9.14. Podaj wszystkie pary liczb naturalnych spełniających równanie $7x + 3y = 55$.

* 9.15. Podaj wszystkie pary liczb naturalnych spełniających równanie $17x + 13y = 850$.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Para liczb $\left(\frac{11 + \sqrt{2}}{4}, \frac{6 - \sqrt{2}}{6}\right)$ spełnia równanie $4x + 6y = 17$.

B. Istnieje para liczb całkowitych spełniających równanie $4x + 6y = 17$.

C. Istnieje para liczb wymiernych spełniających równanie $4x + 6y = 17$.

2. Podaj parę liczb ujemnych spełniającą równanie $2x - 3y = 1$.

3. Sprawdź, czy para liczb $(2\sqrt{3}, -\sqrt{6})$ jest rozwiązaniem równania $\sqrt{6}x + \sqrt{3}y = 3\sqrt{2}$.

4. Wyznacz taką wartość m , aby para liczb $(8, -11)$ była rozwiązaniem równania $mx + 3y = 7$.

D 5. Udowodnij, że para liczb $(2^{101}, 2^{102})$ jest rozwiązaniem podanego układu równań.

$$\begin{cases} 2x + y = 2^{103} \\ \log_2 x - \log_2 y = -1 \end{cases}$$

5. Do każdego z równań układu podstawiamy $x = 2^{101}$ i $y = 2^{102}$.

$$\begin{cases} 2 \cdot 2^{101} + 2^{102} = 2 \cdot 2^{102} = 2^{103} \\ \log_2 2^{101} - \log_2 2^{102} = 101 - 102 = -1 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest para $(2^{101}, 2^{102})$.

10. Rozwiązywanie układu równań liniowych

Umiejętności:

- rozwiązywanie układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą podstawiania
- rozwiązywanie układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą przeciwnych współczynników

W tym temacie omówimy dwie algebraiczne metody rozwiązywania układów równań, trzecią – geometryczną – poznacie później.

Każda z podanych niżej metod polega na zastępowaniu danego układu równań innym, równoważnym mu i jednocześnie prostszym układem, z którego można już odczytać rozwiązania. Pokażemy to na przykładach.

Metoda podstawiania

Przykład 1 ◀ zad. 10.5

Rozwiążemy metodą podstawiania układ równań $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 5y = 14 \end{cases}$.

Rozwiązanie

Krok 1: Z pierwszego równania wyznaczamy zmienną y i podstawiamy do drugiego równania.

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ 3x - 5(-2x + 5) = 14 \end{cases}$$

Krok 2: W drugim równaniu wykonujemy przekształcenia.

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ 3x + 10x - 25 = 14 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} y = -2x + 5 \\ 13x = 39 \end{cases}$$

Krok 3: Z drugiego równania, które jest już równaniem z jedną niewiadomą, obliczamy x .

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ x = 3 \end{cases}$$

Krok 4: Obliczoną wartość x podstawiamy do pierwszego równania i obliczamy y .

$$\begin{cases} y = -2 \cdot 3 + 5 \\ x = 3 \\ x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Odp.: Jedynym rozwiązaniem układu jest para liczb $(3, -1)$.

◀ 10.5. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ y = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 7y = 2 \\ x = 2y \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 4y = 15 \\ y = -2x \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + 4y = -2 \\ -2x + 6y = 10 \end{cases}$

Odp.: a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = -3 \\ y = 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

ZZ i MKP

tematy 1.11, 1.12, 3.2–3.5

Multiteka

- Procenty – rozwiązywanie zadania „od końca”
- Obliczanie wysokości odsetek na lokacie
- Układ równań – rozwiązanie zadania
- Układy równań liniowych – liczba rozwiązań

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.10

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Przykład 2

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$ metodą podstawiania.

Rozwiązanie

Krok 1: $\begin{cases} x = 2y - 3 \\ 2(2y - 3) - 4y = 1 \end{cases}$ $\leftarrow$ z pierwszego równania wyznaczamy zmienną x i podstawiamy ją do drugiego równania

Krok 2: $\begin{cases} x = 2y - 3 \\ 4y - 6 - 4y = 1 \end{cases}$ $\leftarrow$ wykonujemy działania

$$\begin{cases} x = 2y - 3 \\ -6 = 1 \end{cases}$$

Drugiego równania nie spełnia żadna liczba, zatem układ równań także nie ma rozwiązań.

Odp.: Układ równań nie ma rozwiązań.

Przykład 3

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} -6x + 2y = -8 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$ metodą podstawiania.

Rozwiązanie

Krok 1: $\begin{cases} -6x + 2(3x - 4) = -8 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$ $\leftarrow$ z drugiego równania wyznaczamy y

Krok 2: $\begin{cases} -6x + 6x - 8 = -8 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$ $\leftarrow$ wykonujemy działania

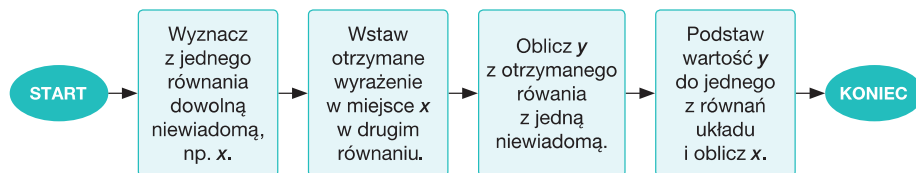
$$\begin{cases} 0 = 0 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$$

Pierwsze równanie jest spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą.

Rozwiązaniem układu jest każda para liczb spełniająca drugie równanie, np. $(0, -4)$, $(1, -1)$, $(-2, -10)$. Takich par liczb jest nieskończenie wiele.

Odp.: Układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań (x, y) ; są nimi pary liczb spełniające równanie $y = 3x - 4$.

Metodę podstawiania, stosowaną do rozwiązywania układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi, można przedstawić w postaci następującego schematu.



Metoda przeciwnych współczynników

W tej metodzie będziemy wykorzystywać jedno z podstawowych praw arytmetyki, które mówi, że:

jeżeli $a = b$ i $c = d$, to $a + c = b + d$

Rozwiążmy tą metodą poprzednio opisane przykłady.

Przykład 4 ◀ zad. 10.7

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 5y = 14 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

Rozwiązanie

Chcemy mieć w obydwu równaniach przy jednej z niewiadomych współczynniki będące liczbami przeciwnymi. W tym wypadku najłatwiej jest pomnożyć obydwie strony pierwszego równania przez 5.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 5y = 14 \end{cases} \quad | \cdot 5, \text{ stąd } \begin{cases} 10x + 5y = 25 \\ 3x - 5y = 14 \end{cases}$$

Jeśli dodamy równania stronami, to otrzymamy:

$$(10x + 5y) + (3x - 5y) = 25 + 14, \text{ czyli } 13x = 39$$

W ten sposób wyeliminowaliśmy niewiadomą y , czyli otrzymaliśmy równanie z jedną niewiadomą x . Mamy więc nowy układ równań:

$$\begin{cases} 13x = 39 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \quad \leftarrow \text{przepisujemy którekolwiek z początkowych równań}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ 6 + y = 5 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Odp.: Jedynym rozwiązaniem układu jest para liczb $(3, -1)$.

Przykład 5

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

Rozwiązanie

$$\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases} \quad | \cdot 2 \quad \leftarrow \text{obydwie strony pierwszego równania mnożymy przez 2}$$

$$\begin{cases} -2x + 4y = 6 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases} \quad \leftarrow \text{dodajemy równania stronami i jedno przepisujemy bez zmian}$$

$$\begin{cases} 0 = 7 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

Z otrzymanej sprzeczności w pierwszym równaniu wnioskujemy, że układ nie ma rozwiązań.

Odp.: Układ równań nie ma rozwiązań.

◀ 10.7. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} x - 5y = 2 \\ 2x + 5y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 3y = -18 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 4y = -10 \\ 3x + 4y = -15 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x - 3y = 3 \\ x - 3y = -6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 7y = 4 \\ 2x + y = -8 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 7x - 3y = 4 \\ 2y + 7x = 9 \end{cases}$

Odp.: a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

◀10.8. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 5x + 6y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2x + 3y = 8 \\ 26x - 39y = 104 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 5y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x + 5y = 0,2 \\ 5x - 4y = 2,3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 9x + 6y = 1 \\ 12x + 8y = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 6x - 4y = 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 7x - 3y = 7 \\ 3\frac{1}{2}x - 2y = 7 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 3x + 4y = -6 \end{cases}$

Odp.: a) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

b) brak rozwiązań

c) $\begin{cases} x = -7 \\ y = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 0,3 \\ y = -0,2 \end{cases}$

e) brak rozwiązań

f) $\begin{cases} x = -1,5 \\ y = -3 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x = -2 \\ y = -7 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$

Przykład 6

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} -6x + 2y = -8 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

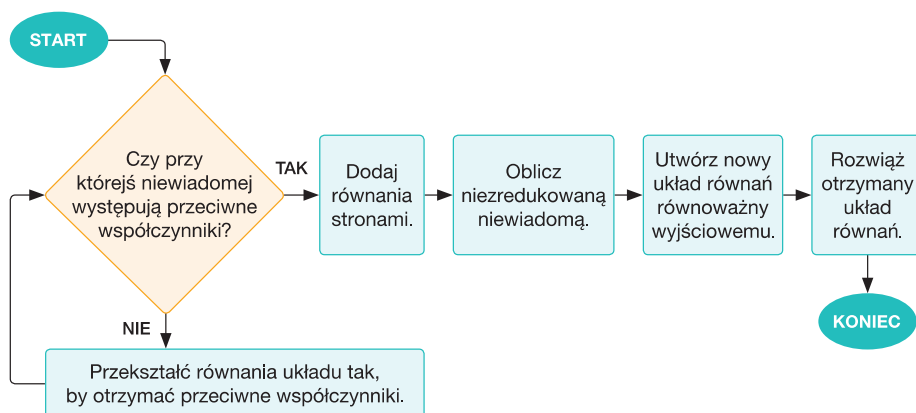
Rozwiązanie

$$\begin{cases} -6x + 2y = -8 \\ 3x - y = 4 \quad | \cdot 2 \end{cases} \quad \begin{cases} -6x + 2y = -8 \\ 6x - 2y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Drugie równanie w ostatnim układzie jest spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą, więc układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Odp.: Układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań (x, y) ; są nimi pary liczb spełniające równanie $3x - y = 4$.

Metodę przeciwnych współczynników, stosowaną do rozwiązywania układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi, można przedstawić w postaci schematu.



Czasem wygodnie jest stosować metodę przeciwnych współczynników do kolejnego wyznaczania niewiadomych.

Przykład 7 ◀ zad. 10.8

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} 7x + 5y = 1 \\ 3x - 9y = 4 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

Rozwiązanie

Aby doprowadzić do przeciwnych współczynników, np. przy zmiennej y , musimy w tym wypadku pomnożyć obydwa równania przez odpowiednie liczby.

$$\begin{cases} 7x + 5y = 1 & | \cdot 9 \\ 3x - 9y = 4 & | \cdot 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 63x + 45y = 9 \\ 15x - 45y = 20 \end{cases} \quad \begin{cases} 78x = 29 \\ 3x - 9y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{29}{78} \\ 3x - 9y = 4 \end{cases}$$

Gdybyśmy chcieli teraz podstawić wyznaczone $x = \frac{29}{78}$ do drugiego równania i obliczyć wartość y , przekształcenia byłyby kłopotliwymi działaniami na ułamkach. Dlatego wygodniej będzie powrócić do pierwotnej postaci układu i ponownie zastosować metodę przeciwnych współczynników – tym razem w celu wyznaczenia niewiadomej y .

$$\begin{cases} 7x + 5y = 1 & | \cdot 3 \\ 3x - 9y = 4 & | \cdot (-7) \end{cases} \quad \begin{cases} 21x + 15y = 3 \\ -21x + 63y = -28 \end{cases} \quad \begin{cases} 78y = -25 \\ 3x - 9y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{25}{78} \\ 3x - 9y = 4 \end{cases}$$

Parą liczb spełniającą układ równań jest zatem $x = \frac{29}{78}$ oraz $y = -\frac{25}{78}$.

Odp.: Rozwiązaniem układu jest para liczb $\left(\frac{29}{78}, -\frac{25}{78}\right)$.

Podobnie jak układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi definiuje się układy równań z większą liczbą niewiadomych, z których każda jest w pierwszej potęgze. Najogólniej – mówimy o układach n równań liniowych z n niewiadomymi ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$). Pokażemy na przykładzie, jak można rozwiązywać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi.

Przykład 8 ◀ zad. 10.10

Rozwiążemy układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi.

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 7 \\ 3x + 3y + 2z = 1 \\ x - 3y + 5z = 4 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Na początku korzystamy z metody podstawiania. Z dowolnie wybranego równania wyznaczamy jedną z niewiadomych za pomocą pozostałych i wstawiamy otrzymane wyrażenie do pozostałych dwóch równań zamiast tej niewiadomej.

$$\begin{cases} y = 7 - 2x + 3z \\ 3x + 3(7 - 2x + 3z) + 2z = 1 \\ x - 3(7 - 2x + 3z) + 5z = 4 \end{cases} \quad \leftarrow \text{porządkujemy drugie i trzecie równanie}$$

$$\begin{cases} y = 7 - 2x + 3z \\ 3x + 21 - 6x + 9z + 2z = 1 \\ x - 21 + 6x - 9z + 5z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 7 - 2x + 3z \\ -3x + 11z = -20 \\ 7x - 4z = 25 \end{cases}$$

◀ 10.10. Rozwiąż układ równań.

- a) $\begin{cases} (x-3)^2 - (y-1)^2 = x^2 - 4x - (y+2)(y-2) \\ 3x - 6y = 15 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 - 8 = (y-2)^2 + (x+3)(x-3) \\ -3x + y - 4 = 0 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} (x-2)^2 + (x+y)(y-x) = y(y-1) \\ \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{4} = 0,25(x+2y) + 1 \end{cases}$
- d) $\begin{cases} (x-2)^2 - (y-1)^2 = (x-y)(x+y) + 4 \\ 2(x-y) + y^2 = (y-2\sqrt{2})(y+2\sqrt{2}) \end{cases}$

Odp.:

- a) $\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$
- d) $\begin{cases} x = 3\frac{1}{2} \\ y = 7\frac{1}{2} \end{cases}$

Drugie i trzecie równanie tworzą układ równań z dwiema niewiadomymi, który rozwiążemy metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} -3x + 11z = -20 & | \cdot 7 \\ 7x - 4z = 25 & | \cdot 3 \\ \hline -21x + 77z = -140 \\ 21x - 12z = 75 \end{cases}$$

Stąd, po dodaniu równań stronami, otrzymujemy:

$$65z = -65$$

$$z = -1$$

← podstawiamy do równania $7x - 4z = 25$

$$7x = 25 - 4$$

$$x = 3$$

← podstawiamy obliczone niewiadome do równania
 $y = 7 - 2x + 3z$

$$y = 7 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = -2$$

Odp.: Rozwiązaniem układu jest trójka liczb: $x = 3$, $y = -2$ i $z = -1$.

Przykład 9 zad. 10.11

Rozwiążemy dany układ równań.

$|a| = 5$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 5$ lub $a = -5$.

Rozwiązanie

$$\text{a) } \begin{cases} |x - 4| = 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Rozwiązaniem danego układu równań są pary liczb, które spełniają

$$\text{układ } \begin{cases} x - 4 = 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \text{ lub układ } \begin{cases} x - 4 = -5 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 9 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = -15 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$$

Odp.: Rozwiązaniami układu są dwie pary liczb: $(9, -15)$ i $(-1, 5)$.

$$\text{b) } \begin{cases} |x - y| = 2 \\ -x + 3y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 2 \\ -x + 3y = 8 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x - y = -2 \\ -x + 3y = 8 \end{cases}$$

Zastosujemy metodę przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ -x + 3y = 8 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x - y = -2 \\ -x + 3y = 8 \end{cases}$$

◀ 10.11. Rozwiąż układ równań.

$$\text{a) } \begin{cases} 2(x - y)^2 - 3(x + 1) = 2(x - y)(x + y) + 4y(1 - x + y) \\ \frac{x + y}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{x + y}{2} - \frac{x - y - 2}{4} = 1\frac{1}{4}y \\ 2(x - 3) + 3(x + y) = -3 \end{cases}$$

Odp.:

$$\text{a) } \begin{cases} x = 19 \\ y = -15 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2y = 10 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x - y = -2 \\ 2y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Odp.: Rozwiązaniami układu są dwie pary liczb: (7, 5) i (1, 3).

Prawdziwe jest następujące twierdzenie, którego uzasadnienie poznacie w IV dziale tego podręcznika (zob. przykład 1 s. 386).

Twierdzenie

Układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi:

- ma dokładnie jedno rozwiązanie
- albo
- nie ma rozwiązań,
- albo
- ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Zgodnie z tym przyjmujemy następującą definicję:

Definicja

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy układem:

- **oznaczonym**, jeżeli ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- **sprzecznym**, jeżeli nie ma rozwiązań,
- **nieoznaczonym**, jeżeli ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Zatem układ równań rozwiązywany w przykładzie 1 jest układem oznaczonym, w przykładzie 2 – układem sprzecznym, a w przykładzie 3 – układem nieoznaczonym.



Przykład 10 ◀ zad. 10.4

Dany jest układ równań $\begin{cases} x + my = 3 \\ mx + 4y = 6 \end{cases}$, w którym m oznacza parametr, a x i y są niewiadomymi. Ocenimy prawdziwość podanych zdań.

- A. Dla $m = 2$ dany układ jest nieoznaczony.
- B. Dla $m = 0$ rozwiązaniem układu jest para liczb dodatnich.
- C. Dla $m = -2$ dany układ jest spreczny.

◀10.4. Dany jest układ równań liniowych z niewiadomymi x i y oraz parametrem m .

$$\begin{cases} 5x + my = 7 \\ 5x + y = 3 \end{cases}$$

Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Dla $m = -1$ układ jest oznaczony.
- B. Dla $m = 0$ układ jest oznaczony.
- C. Dla $m = 1$ układ jest spreczny.

Odp.: P, P, P

Rozwiązanie

A. Podstawiamy do układu równań $m = 2$:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$$

Drugie równanie jest równoważne równaniu pierwszemu (powstało przez pomnożenie obu stron pierwszego przez 2), a zatem każde z nich ma identyczny zbiór rozwiązań. Równanie liniowe z dwiema niewiadomymi $x + 2y = 3$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, każde z nich jest równocześnie rozwiązaniem układu, zatem pierwsze zdanie jest prawdziwe.

B. Podstawiamy do układu równań $m = 0$:

$$\begin{cases} x = 3 \\ 4y = 6 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} x = 3 > 0 \\ y = \frac{3}{2} > 0 \end{cases}$$

Drugie zdanie jest prawdziwe.

C. Podstawiamy do układu równań $m = -2$:

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2x + 4y = 6 \end{cases} \quad \leftarrow \text{dzielimy obie strony drugiego równania przez } -2$$

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 6 \\ x - 2y = -3 \end{cases} \quad \leftarrow \text{odejmujemy równania stronami i jedno przepisujemy bez zmian}$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że trzecie zdanie również jest prawdziwe.

Odp.: A, B, C – zdania są prawdziwe.

Zastosowanie układów równań

W szkole podstawowej rozwiązywaliście zadania tekstowe za pomocą równań z jedną niewiadomą. Zajmiemy się teraz takimi zadaniami, które wygodnie jest rozwiązać, używając układów równań liniowych.

Zacznijmy od zapisywania informacji podanych w zadaniach w postaci równań liniowych tworzących układ.

Przykład 11 zad. 10.20

Zapiszemy podane informacje w postaci układów równań.

a) Suma dwóch liczb równa się 22, a ich różnica wynosi 8. Niewiadomymi są te liczby.

◀10.20. Z równań:

I. $\frac{1}{2}x - y + 2 = 0$

II. $x + 4 = 2y$

III. $2x - 4y = -4$

IV. $x + 2y = 8$

ułoż trzy układy dwóch równań: oznaczony, nieznaczony oraz sprzeczny. Rozwiąż ułożone układy równań, aby uzasadnić odpowiedź.

Odp.: I i II: nieznaczony,
I i III oraz II i III: sprzeczne,
IV z pozostałymi: oznaczone;
rozwiązania układów

IV i I oraz IV i II – $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$,

IV i III – $\begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$

Rozwiązanie

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

x – pierwsza liczba

y – druga liczba

Informacje podane w zadaniu można opisać dwoma równaniami:

$$x + y = 22 \quad \leftarrow \text{suma tych liczb równa się 22}$$

$$x - y = 8 \quad \leftarrow \text{różnica tych liczb wynosi 8}$$

Liczby mają spełniać obydwa warunki zadania, inaczej mówiąc – spełniać obydwa równania, zatem szukany układ równań ma postać:

$$\begin{cases} x + y = 22 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

- b) Aby odnowić pokój, pani Małgorzata kupiła 4 puszki farby kolorowej przeznaczonej do pomalowania ścian i 2 puszki farby białej do pomalowania sufitu. Za wszystko zapłaciła 669,76 zł. Po przeanalizowaniu ulotek informacyjnych doszła do wniosku, że musi jeszcze dokupić 2 puszki farby kolorowej i 2 białej. Tymczasem ceny farb wzrosły odpowiednio: o 3 zł – puszka kolorowej i o 1,50 zł – puszka białej, więc za drugi zakup pani Małgorzata zapłaciła 408,78 zł. Niewiadomymi są ceny farb przed podwyżką.

Rozwiązanie

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

x – cena puszki farby kolorowej przed podwyżką

y – cena puszki farby białej przed podwyżką

$x + 3$ – cena puszki farby kolorowej po podwyżce

$y + 1,50$ – cena puszki farby białej po podwyżce

$$4x + 2y = 669,76 \quad \leftarrow \text{kwota za 4 puszki farby kolorowej i 2 puszki białej przed podwyżką}$$

$$2(x + 3) + 2(y + 1,5) = 408,78 \quad \leftarrow \text{kwota za 2 puszki farby kolorowej i 2 puszki białej po podwyżce cen}$$

Zatem układ równań ma postać:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 669,76 \\ 2(x + 3) + 2(y + 1,5) = 408,78 \end{cases}$$

Przykład 12 ◀ zad. 10.21

Suma 20% pierwszej liczby i 15% drugiej liczby jest równa 120, a suma 12% pierwszej liczby i 25% drugiej liczby jest równa 136. Wyznamy te liczby.

◀10.21. Utwórz układ równań opisujący przedstawioną sytuację.

a) Liczba x jest o 12 większa od liczby y . Średnia arytmetyczna liczb x i y jest równa 11.

b) Suma liczby x i potrojonej wartości liczby y jest równa 20, a różnica podwojonej wartości liczby x i liczby y wynosi 19.

c) Po dodaniu 30% liczby x do liczby y otrzymamy 84, natomiast po odjęciu 10% liczby y od liczby x otrzymamy 74.

d) Liczba x jest o 5 większa od liczby y , a iloraz liczby x przez 4 jest o 4 mniejszy od ilorazu liczby y przez 3.

Odp.: a)
$$\begin{cases} x = y + 12 \\ \frac{x + y}{2} = 11 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + 3y = 20 \\ 2x - y = 19 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y + 0,3x = 84 \\ x - 0,1y = 74 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} y + 5 = x \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{3} - 4 \end{cases}$$

◀10.31. Monika dojeżdża do szkoły pociągiem o 7^{00} . Potem po 5 minutach czekania wsiada do tramwaju i jest przed szkołą o 7^{50} . Łącznie przebywa drogę 30 km. Pociąg jedzie ze średnią prędkością 50 km/h, a tramwaj – 20 km/h. Oblicz, ile czasu Monika jedzie pociągiem, a ile tramwajem.

Odp.: pociągiem: 30 minut, tramwajem: 15 minut

Rozwiązanie

Wprowadzamy oznaczenia:

x – pierwsza liczba

y – druga liczba

Wówczas warunki zadania można opisać następującymi równaniami:

$$20\%x + 15\%y = 120$$

$$12\%x + 25\%y = 136$$

Zamieniamy procenty na liczby.

$$0,2x + 0,15y = 120$$

$$0,12x + 0,25y = 136$$

$$p\% \text{ liczby } a = \frac{p}{100} \cdot a$$

Rozwiążemy teraz układ tych równań. Wykorzystamy metodę przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} 0,2x + 0,15y = 120 \\ 0,12x + 0,25y = 136 \end{cases} \quad | \cdot (-0,6) \quad , \quad \text{stad} \quad \begin{cases} -0,12x - 0,09y = -72 \\ 0,12x + 0,25y = 136 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,16y = 64 \\ 0,12x + 0,25y = 136 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 400 \\ 0,12x + 100 = 136 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 400 \\ 0,12x = 36 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 400 \\ x = 300 \end{cases}$$

Odp.: Pierwsza liczba jest równa 300, a druga 400.

Przykład 13 ◀ zad. 10.31

W dwóch naczyniach znajduje się roztwór kwasu. W pierwszym naczyniu jest roztwór o stężeniu 3%, a w drugim 8%. Ile litrów roztworu z każdego naczynia należy przelać do trzeciego, aby otrzymać 2 litry roztworu o stężeniu 5%?

Rozwiązanie

Niech x oznacza potrzebną liczbę litrów roztworu 3%. Wówczas

$3\%x$ oznacza liczbę litrów czystego kwasu pobranego z pierwszego naczynia.

Podobnie, jeśli y oznacza potrzebną liczbę litrów roztworu 8%, to

$8\%y$ oznacza liczbę litrów czystego kwasu pobranego z drugiego naczynia.

Pierwsze równanie wyraża objętość całego otrzymanego roztworu:

$$x + y = 2$$

Drugie równanie wyraża liczbę litrów czystego kwasu w otrzymanym roztworze:

$$3\%x + 8\%y = 5\% \cdot 2$$

Po zamianie procentów na liczby drugie równanie przyjmie następującą postać:

$$0,03x + 0,08y = 0,05 \cdot 2$$

Otrzymany układ równań rozwiążemy metodą podstawiania.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 0,03x + 0,08y = 0,1 \end{cases} \quad | \cdot 100, \text{ stąd } \begin{cases} y = 2 - x \\ 3x + 8y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 - x \\ 3x + 8(2 - x) = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 - x \\ 3x + 16 - 8x = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1,2 \\ y = 0,8 \end{cases}$$

Odp.: Należy wziąć 1,2 litra roztworu 3% i 0,8 litra roztworu 8%.

Przykład 14 ◀ zad. 10.30

Linia kolejowa łącząca miejscowości A i B prowadzi przez przełęcz górską. Pociąg wjeżdża na przełęcz ze średnią prędkością 40 km/h, a zjeżdża z niej ze średnią prędkością 80 km/h. Podróż z A do B trwa 2 h, a podróż powrotna trwa 1 h 45 min. Ile kilometrów liczy linia kolejowa łącząca te miejscowości?

Rozwiązanie

Wprowadzamy oznaczenia:

s_1 – droga z miejscowości A do przełęcz

s_2 – droga z miejscowości B do przełęcz

Tradycyjnie literą v oznaczamy prędkość, a literą t – czas.

Wiadomo, że $v = \frac{s}{t}$, czyli $t = \frac{s}{v}$. Jeśli dodamy czasy przejazdu pociągu na dwóch fragmentach trasy (pod górę i z góry), otrzymamy łączny czas przejazdu z jednej do drugiej miejscowości.

$$\frac{s_1}{40} + \frac{s_2}{80} = 2 \quad \leftarrow \text{łączny czas przejazdu z A do B}$$

$$\frac{s_2}{40} + \frac{s_1}{80} = 1\frac{3}{4} \quad \leftarrow \text{łączny czas przejazdu z B do A}$$

Otrzymany układ równań rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} \frac{s_1}{40} + \frac{s_2}{80} = 2 & | \cdot 80 \\ \frac{s_1}{80} + \frac{s_2}{40} = 1\frac{3}{4} & | \cdot (-160) \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} 2s_1 + s_2 = 160 \\ -2s_1 - 4s_2 = -280 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2s_1 + s_2 = 160 \\ -3s_2 = -120 \end{cases} \quad \begin{cases} s_2 = 40 \\ 2s_1 + 40 = 160 \end{cases} \quad \begin{cases} s_1 = 60 \\ s_2 = 40 \end{cases}$$

Zatem cała droga jest równa $s_1 + s_2 = 100$.

Odp.: Linia kolejowa łącząca miejscowości A i B ma długość 100 km.

Zwróćmy uwagę na dodatkowy problem związany z praktycznym wykorzystaniem matematyki. Często współczynniki równań są podawane w postaci przybliżeń dziesiętnych (np. wtedy, gdy są danymi notowanymi podczas jakichś doświadczeń). Należy wówczas bardzo uważać, gdyż nawet niewielkie zmiany ich wielkości na skutek zaokrągleń mogą znacząco zmienić końcowe rozwiązanie układu.



◀ 10.30. Monika dojeżdża do szkoły pociągiem, a potem tramwajem. Za oba bilety miesięczne płaci razem 153 zł 60 gr. Bilet kolejowy jest o 40% droższy od tramwajowego. Oblicz, ile kosztuje każdy z biletów.

Odp.: kolejowy: 89 zł 60 gr, tramwajowy: 64 zł

Przykład 15

Porównajmy współczynniki trzech układów równań:

$$\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 2,4x - 7,201y = 11,999 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3y = 5 \\ 2,4x - 7,201y = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3y = 5 \\ 2,399x - 7,2y = 12,001 \end{cases}$$

Różnice w zastosowanych przybliżeniach są bardzo małe, tymczasem rozwiązania bardzo się różnią: pierwszy układ spełnia para (8, 1), drugi – (5, 0), a trzeci – (–1, –2).

Zadania

W każdym z zadań 10.1–10.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

10.1. D

10.1. Wskaż parę liczb spełniającą układ równań $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 7y = -11 \end{cases}$.

- A. (1, 1) B. (–1, 2) C. (–1, 3) D. (1, 2)

10.2. C

10.2. Wskaż parę liczb, która nie spełnia układu równań $\begin{cases} x - 2\sqrt{2}y = -3 \\ -3\sqrt{2}x + 12y = 9\sqrt{2} \end{cases}$.

- A. $(2\sqrt{2} - 3, 1)$ B. (–3, 0) C. (–1, 5) D. $(1, \sqrt{2})$

10.3. B

10.3. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 5x + my = -12 \\ x + y = -2 \end{cases}$ z niewiadomymi x i y jest para liczb (–3, 1). Wskaż wartość współczynnika m .

- A. $m = -3$ B. $m = 3$ C. $m = -1$ D. $m = 2$

10.4. P, P, P

10.4. Dany jest układ równań liniowych z niewiadomymi x i y oraz parametrem m .

$$\begin{cases} 5x + my = 7 \\ 5x + y = 3 \end{cases}$$

Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Dla $m = -1$ układ jest oznaczony.
B. Dla $m = 0$ układ jest oznaczony.
C. Dla $m = 1$ układ jest sprzeczny.

10.5. a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = -3 \\ y = 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

10.5. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 4y = 15 \\ y = -2x \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ y = -3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 7y = 2 \\ x = 2y \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + 4y = -2 \\ -2x + 6y = 10 \end{cases}$

10.6. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a)
$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -1,5x + 0,5y = -2,5 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 4x = 5y + 2 \\ 2x + 7y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 5x - 3y = -2 \\ 7x + 7y = 14 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 2y = 6x - 5 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 6x = 3 - 5y \\ 18x + 7y = 17 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} 14x + 3y = 4 \\ 2x - 6 = 5y \end{cases}$$

10.7. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a)
$$\begin{cases} x - 5y = 2 \\ 2x + 5y = 4 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 4x - 3y = 3 \\ x - 3y = -6 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 4x - 3y = -18 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 2x + 7y = 4 \\ 2x + y = -8 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x - 4y = -10 \\ 3x + 4y = -15 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} 7x - 3y = 4 \\ 2y + 7x = 9 \end{cases}$$

10.8. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a)
$$\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 5x + 6y = 5 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 9x + 6y = 1 \\ 12x + 8y = 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} -2x + 3y = 8 \\ 26x - 39y = 104 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 6x - 4y = 3 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 5y = 4 \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} 7x - 3y = 7 \\ 3\frac{1}{2}x - 2y = 7 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 4x + 5y = 0,2 \\ 5x - 4y = 2,3 \end{cases}$$

h)
$$\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 3x + 4y = -6 \end{cases}$$

10.9. Rozwiąż układ równań.

a)
$$\begin{cases} 1,5 - (x - y) = 0,5(y - x) + 2 \\ 2y - 4 = 4x \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \frac{3x - y}{2} - \frac{x + y}{4} = 4 \\ \frac{x - y}{2} - \frac{x + 5y}{5} = 5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ \frac{x + 2}{4} - \frac{y - 3}{3} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 7x - 3y = \frac{-5(x + y)}{2} - \frac{5y - 25x}{3} \\ 3\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y = 0 \end{cases}$$

10.6. a) nieskończenie wiele par liczb (x, y) spełniających równanie $3x - y = 5$

b)
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1\frac{1}{2} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x = 1\frac{1}{3} \\ y = -1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$$

10.7. a)
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

10.8. a)
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

b) brak rozwiązań

c)
$$\begin{cases} x = -7 \\ y = 5 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x = 0,3 \\ y = -0,2 \end{cases}$$

e) brak rozwiązań

f)
$$\begin{cases} x = -1,5 \\ y = -3 \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -7 \end{cases}$$

h)
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

10.9. a)
$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x = -2\frac{1}{7} \\ y = 2\frac{1}{7} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x = 1\frac{4}{11} \\ y = -3\frac{2}{33} \end{cases}$$

d) nieskończenie wiele par liczb (x, y) spełniających równanie $x + y = 0$

$$10.10. \text{ a) } \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x = 3\frac{1}{2} \\ y = 7\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$10.11. \text{ a) } \begin{cases} x = 19 \\ y = -15 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$10.12. \text{ a) } \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x = 2\frac{41}{65} \\ y = -3\frac{1}{5} \\ z = -1\frac{42}{65} \end{cases}$$

$$10.13. \text{ a) } \begin{cases} x = -7 \\ y = -4 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 11 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -\frac{1}{9} \\ y = \frac{11}{9} \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x = -25 \\ y = 11 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x = -1 \\ y = -6 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

10.10. Rozwiąż układ równań.

$$\text{a) } \begin{cases} (x-3)^2 - (y-1)^2 = x^2 - 4x - (y+2)(y-2) \\ 3x - 6y = 15 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 - 8 = (y-2)^2 + (x+3)(x-3) \\ -3x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} (x-2)^2 + (x+y)(y-x) = y(y-1) \\ \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{4} = 0,25(x+2y) + 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} (x-2)^2 - (y-1)^2 = (x-y)(x+y) + 4 \\ 2(x-y) + y^2 = (y-2\sqrt{2})(y+2\sqrt{2}) \end{cases}$$

10.11. Rozwiąż układ równań.

$$\text{a) } \begin{cases} 2(x-y)^2 - 3(x+1) = 2(x-y)(x+y) + 4y(1-x+y) \\ \frac{x+y}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{x-y-2}{4} = 1\frac{1}{4}y \\ 2(x-3) + 3(x+y) = -3 \end{cases}$$

10.12. Rozwiąż układ równań.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 2 \\ 10x - y + 3z = 7 \\ x - y - 3z = -11 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 5x - y + 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = -4 \\ -x + 5y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 7x - 5y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 5 \\ 5x - 3y - z = -5 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x + y - 3z = 7 \\ 3x + 3y + 2z = -5 \\ x - 3y + 5z = 4 \end{cases}$$

10.13. Rozwiąż układ równań.

$$\text{a) } \begin{cases} x - 3y = 5 \\ |y+1| = 3 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + |y-1| = 7 \\ 2x - |y-1| = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} |2x+y| = 1 \\ x-4y = -5 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} |x| - 2y = 3 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2|x| - 3y = 3 \\ |x| + 4y = 7 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + |y+2| = 3 \end{cases}$$

10.14. Jakie wyrażenia można wstawić w miejsce $?$, aby otrzymać układ sprzeczny?

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = ? \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 6x + ? = ? \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 6x - y = 1 \\ ? + ? = ? \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = ? \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 2x + 10y = 7 \\ x + ? = 3 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} x - y = 100 \\ y - x = ? \end{cases} \end{array}$$

10.15. Jakie wyrażenia można wstawić w miejsce $?$, aby otrzymać układ nieoznaczony?

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} x - y = 3 \\ ? + ? = ? \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} -x + 3y = 2 \\ -2x + ? = ? \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -2x + ? = ? \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 0,3x - 2,1y = 1,8 \\ 0,4x + ? = ? \end{cases} \end{array}$$

10.16. Podaj liczbę rozwiązań układu równań.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 2(x - 3) + 3(y - 1) = 1 \\ 4(x - 3) + 6(y - 1) = 4 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 3x - 2 = 7y \\ 1\frac{1}{2}x - 3\frac{1}{2}y = 1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 5(x + 2) - (2y + 1) = 6 \\ 1\frac{2}{3}(x + 2) - \frac{1}{3}(2y + 1) = 2 \end{cases} \end{array}$$

10.17. Jakie wyrażenie można wstawić w miejsce $?$, aby otrzymać układ:

I. oznaczony,

II. sprzeczny,

III. nieoznaczony?

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + ? = ? \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} -3x + 10y = 4 \\ ? + ? = 8 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 6x - 5y = 11 \\ ? + ? = ? \end{cases} \quad \text{d)} \begin{cases} 7x - 12y = -5 \\ ? + ? = ? \end{cases} \end{array}$$

D 10.18. Wykaż, że układ równań $\begin{cases} 2(1 - x) = 4(y - 1) + 3 \\ 4(2y - 1) = 2(1 - 2x) - 2 \end{cases}$ jest sprzeczny.

D 10.19. Wykaż, że układ równań $\begin{cases} 8(x - 1) + 6(y + 2) = 2 \\ 4(x + 2) = 10 - 3(y + 1) \end{cases}$ jest nieoznaczony.

10.20. Z równań:

$$\text{I. } \frac{1}{2}x - y + 2 = 0 \quad \text{II. } x + 4 = 2y \quad \text{III. } 2x - 4y = -4 \quad \text{IV. } x + 2y = 8$$

ułoż trzy układy dwóch równań: oznaczony, nieoznaczony oraz sprzeczny. Rozwiąż ułożone układy równań, aby uzasadnić odpowiedź.

10.18. Przekształcamy równoważnie każde z równań układu.

$$\begin{array}{ll} \begin{cases} 2(1 - x) = 4(y - 1) + 3 \\ 4(2y - 1) = 2(1 - 2x) - 2 \end{cases} & \begin{cases} -2x - 4y = -3 \\ 4x + 8y = 4 \quad | : (-2) \end{cases} \\ \begin{cases} 2 - 2x = 4y - 4 + 3 \\ 8y - 4 = 2 - 4x - 2 \end{cases} & \begin{cases} -2x - 4y = -3 \\ -2x - 4y = -2 \end{cases} \end{array}$$

Zatem ten układ równań jest sprzeczny.

10.19. Przekształcamy równoważnie każde z równań układu.

$$\begin{array}{ll} \begin{cases} 8(x - 1) + 6(y + 2) = 2 \\ 4(x + 2) = 10 - 3(y + 1) \end{cases} & \begin{cases} 8x + 6y = -2 \\ 4x + 3y = -1 \quad | \cdot 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 8x - 8 + 6y + 12 = 2 \\ 4x + 8 = 10 - 3y - 3 \end{cases} & \begin{cases} 8x + 6y = -2 \\ 8x + 6y = -2 \end{cases} \end{array}$$

Zatem ten układ równań jest nieoznaczony.

10.14. a) np. 2

b) np. 0

c) np. $-10y$, 1

d) $5y$

e) np. $12x$, $-2y$, 1

f) np. 0

10.15. a) np. $2x$, $-2y$, 6

b) $-3y$, -5

c) $6y$, 4

d) $-2,8y$, 2,4

10.16. a) jedno

b) nieskończenie wiele

c) zero

d) nieskończenie wiele

10.17. d) np.: I. $x + y = 2$,

II. $14x - 24y = -2$,

III. $3,5x - 6y = -2,5$

10.20. I i II: nieoznaczony,

I i III oraz II i III: sprzeczne,

IV z pozostałymi: oznaczone;
rozwiązania układów

$$\text{IV i I oraz IV i II} - \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases},$$

$$\text{IV i III} - \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

10.21. a)
$$\begin{cases} x = y + 12 \\ \frac{x+y}{2} = 11 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + 3y = 20 \\ 2x - y = 19 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y + 0,3x = 84 \\ x - 0,1y = 74 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} y + 5 = x \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{3} - 4 \end{cases}$$

10.22.
$$\begin{cases} x = 21 \\ y = 17 \end{cases}$$

10.23. 25 dwuzłotówek
i 15 pięciozłotówek

10.24. Staszek: 43 km,
Jurek: 37 km

10.25. jogurt: 2,50 zł, serek: 5,20 zł

10.26. 20 zł i 14 zł

10.27. kromka chleba: 30 kcal,
szklanka mleka: 122 kcal

10.21. Utwórz układ równań opisujący przedstawioną sytuację.

- a) Liczba x jest o 12 większa od liczby y . Średnia arytmetyczna liczb x i y jest równa 11.
b) Suma liczby x i potrojonej wartości liczby y jest równa 20, a różnica podwojonej wartości liczby x i liczby y wynosi 19.
c) Po dodaniu 30% liczby x do liczby y otrzymamy 84, natomiast po odjęciu 10% liczby y od liczby x otrzymamy 74.
d) Liczba x jest o 5 większa od liczby y , a iloraz liczby x przez 4 jest o 4 mniejszy od ilorazu liczby y przez 3.

10.22. Liczba x jest o 4 większa od liczby y . Średnia arytmetyczna liczb x i y jest równa 19. Wyznacz te liczby.

10.23. Hania ma w skarbonce 125 zł w monetach o nominałach 2 zł i 5 zł. Monet pięciozłotowych jest o 10 mniej niż dwuzłotowych. Ile jest w skarbonce monet dwuzłotowych, a ile pięciozłotowych?

10.24. Staszek i Jurek porównali dystans, jaki przejechali w ciągu tygodnia rowerami. W sumie pokonali 80 km. Gdyby Staszek przejechał 4 km mniej, a Jurek 2 km więcej, to obaj przejechaliby tyle samo. Ile km przejechał Staszek, a ile Jurek?

10.25. Za 5 opakowań jogurtu owocowego i cztery opakowania serka koziego Anna zapłaciła 33,30 zł. W tym samym sklepie za 6 opakowań identycznego jogurtu i 2 opakowania takiego samego serka koziego Grzegorz zapłacił 25,40 zł. Jaka była cena jogurtu, a jaka serka?

10.26. Marcin zdał wszystkie egzaminy w sesji zimowej i chciał zaprosić 3 koleżanki i 3 kolegów z grupy do klubu studenckiego. Aby wyrównać proporcje między liczbą studentów i liczbą studentek odwiedzających ten klub, zachęcano dziewczęta niższą ceną biletów. Marcin za bilety dla wszystkich zapłaciłby 122 zł, uznał jednak, że absolutnie nie może wydać na imprezę więcej niż 120 zł. Postanowił zmienić plany. Zaprosił tylko najbliższego przyjaciela, ale za to aż 5 koleżanek. Teraz miał zapłacić tylko 110 zł. Jaka jest cena biletów każdego rodzaju?

10.27. Michał ważył za dużo, więc zaczął zwracać uwagę na to, co je. Na podwieczorek, zamiast dwóch drożdżówek, przygotował sobie 3 kromki chleba graham i 2 szklanki mleka. Kiedy jednak zajrzał do tabeli wartości kalorycznych, przekonał się, że jego podwieczorek to aż 334 kcal. Zredukował go więc do 2 kromek chleba i 1 szklanki mleka. Rezultat był lepszy – tylko 182 kcal. Uspokojony zabrał się do jedzenia. Jaka jest wartość kaloryczna jednej kromki chleba, a jaka jednej szklanki mleka?

10.28. W grupie uczniów, którzy zapisali się na wycieczkę, liczba chłopców stanowiła 75% liczby dziewcząt. Gdy do tej grupy dodatkowo zapisało się pięciu chłopców, liczba chłopców była równa liczbie dziewcząt. Ile dziewcząt i ilu chłopców wybrało się na wycieczkę?

10.29. Zosia, Krysia i Piotrek wybrali się na kiermasz książki, mając na zakupy po 70 zł. Zosia kupiła dwa komiksy po k zł oraz trzy lektury po m zł i otrzymała 5 zł reszty. Krysia na cztery lektury po m zł oraz jeden komiks w cenie k zł wydała całą sumę. Czy Piotrkowi wystarczy pieniędzy na cztery komiksy po k zł i dwie lektury po m zł? Zapisz obliczenia i odpowiedź.

10.30. Monika dojeżdża do szkoły pociągiem, a potem tramwajem. Za oba bilety miesięczne płaci razem 153 zł 60 gr. Bilet kolejowy jest o 40% droższy od tramwajowego. Oblicz, ile kosztuje każdy z biletów.

10.31. Monika dojeżdża do szkoły pociągiem o 7^{00} . Potem po 5 minutach czekania wsiada do tramwaju i jest przed szkołą o 7^{50} . Łącznie przebywa drogę 30 km. Pociąg jedzie ze średnią prędkością 50 km/h, a tramwaj – 20 km/h. Oblicz, ile czasu Monika jedzie pociągiem, a ile tramwajem.

10.32. Stopiono dwa kawałki metalu. Jeden z nich zawierał 80% srebra, a drugi 87,5% srebra. Otrzymano 20 g stopu zawierającego 83% srebra. Jaką masę miał każdy ze stopionych kawałków?

10.33. Pole prostokąta nie zmieni się, jeśli jego dłuższy bok zmniejszymy o 4 cm, a krótszy zwiększymy o 4 cm. Pole to nie zmieni się również, jeśli dłuższy bok prostokąta zwiększymy o 4 cm, a krótszy zmniejszymy o 2 cm. Oblicz długości boków prostokąta.

* **10.34.** Ktoś zapytał znajomego, ile ma lat. Zapytany odpowiedział: „Kiedy ja byłem w twoim wieku, ty się dopiero urodziłeś; za pięć lat będziemy mieć razem dwa razy tyle lat, ile mieliśmy 5 lat temu”. Ile lat ma każdy z nich?

* **10.35.** Znajdź takie trzy liczby, z których największa jest większa od liczby średniej o trzecią część najmniejszej, średnia jest większa od najmniejszej o trzecią część największej, a najmniejsza jest większa o 20 od trzeciej części liczby średniej.

* **10.36.** Trzy szkoły zorganizowały wspólne zawody. Pierwsza szkoła wystawiła o 25% uczniów więcej niż szkoła druga, a druga o 4 osoby więcej niż szkoła trzecia. Szkoły druga i trzecia razem wystawiły o 20 uczniów więcej niż szkoła pierwsza. Ilu uczniów z każdej szkoły brało udział w zawodach?

10.28. 20 dziewcząt i 20 chłopców

10.29. wystarczy
($k = 10$ zł, $m = 15$ zł)

10.30. kolejowy: 89 zł 60 gr,
tramwajowy: 64 zł

10.31. pociągiem: 30 minut,
tramwajem: 15 minut

10.32. 12 g i 8 g

10.33. 12 cm i 8 cm

10.34. 20 i 10

10.35. 45, 75, 90. *Wskazówka:* Niech a, b, c oznaczać szukane liczby, przy czym $a < b < c$.

$$\text{Wówczas} \begin{cases} c = b + \frac{1}{3}a \\ b = a + \frac{1}{3}c \\ a = 20 + \frac{1}{3}b \end{cases}.$$

10.36. Szkoły wystawiły odpowiednio 40, 32 i 28 uczniów. *Wskazówka:* Niech x, y, z oznaczać liczby uczniów wystawionych przez szkoły.

$$\text{Wówczas} \begin{cases} x = 1\frac{1}{4}y \\ y = z + 4 \\ y + z = x + 20 \end{cases}.$$

10.37. $v_p = 3$ km/h

i $v_s = 12$ km/h. *Wskazówka:* Niech v_p oznacza prędkość prądu, a v_s – prędkość własną statku (w km/h).

$$\text{Wówczas } \begin{cases} v_s + v_p = \frac{90}{6} \\ v_s - v_p = \frac{90}{10} \end{cases}$$

10.38. ⁹²⁰. *Wskazówka:* Niech v_1 oznacza średnią prędkość pociągu osobowego, a v_2 – średnią prędkość pociągu pospiesznego (w km/h). Wówczas

$$\begin{cases} v_1 \cdot 1\frac{48}{60} + v_2 \cdot 1 = 240 \\ v_1 \cdot \frac{52}{60} + v_2 \cdot 1\frac{40}{60} = 240 \end{cases} \quad \text{Stąd}$$

$v_1 = 75$ km/h i $v_2 = 105$ km/h.

Po rozwiązaniu równania $75t + 105t = 240$ otrzymujemy

$$t = 1\frac{1}{3}.$$

Prosto do matury

1. P, P, F

2. 75 dziewcząt i 65 chłopców

3. $x = -2$, $y = -2$

4. czereśnie: 7,50 zł, truskawki: 5,20 zł

* **10.37.** Statek pokonuje dystans 90 km, płynąc z prądem rzeki w czasie 6 godzin, a z powrotem w czasie 10 godzin. Oblicz prędkość prądu rzeki i prędkość własną statku przy założeniu, że statek płynie w obie strony z taką samą prędkością własną.

* **10.38.** Stacje A i B łączy linia kolejowa o długości 240 km. O godzinie 8⁰⁰ z A do B wyjechał pociąg osobowy, a o godzinie 8⁴⁸ z B do A wyjechał pociąg pospieszny. Pociągi te minęły się o godzinie 9⁴⁸. Gdyby pociąg pospieszny wyjechał o godzinie 8⁰⁰, a osobowy o godzinie 8⁴⁸, to pociągi minęłyby się o godzinie 9⁴⁰. O której godzinie minęłyby się te pociągi, gdyby oba wyjechały o godzinie 8⁰⁰? Zakładamy, że we wszystkich podanych sytuacjach średnie prędkości pociągów się nie zmieniają.

Prosto do matury



1. Dany jest układ równań liniowych z niewiadomymi x i y oraz parametrem m .

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + my = 2m \end{cases}$$

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Dla $m = 1$ rozwiązaniem układu jest para liczb dodatnich.

B. Dla $m = 6$ układ jest sprzeczny.

C. Dla $m = 0$ rozwiązaniem układu jest para liczb ujemnych.

2. W konkursie historycznym startowało 140 uczniów. Do drugiego etapu zakwalifikowało się 38 osób, czyli $\frac{1}{3}$ startujących dziewcząt i $\frac{1}{5}$ startujących chłopców. Ile dziewcząt i ilu chłopców brało udział w tym konkursie?

3. Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} \frac{x-y}{3} - \frac{x+y}{2} = 2 \\ (x+2)(y-4) = (x-1)(y+2) \end{cases}$$

4. Właściciel sklepu z owocami kupił na giełdzie truskawki i czereśnie. Cena hurtowa kilograma czereśni była o 2 zł wyższa niż cena hurtowa kilograma truskawek. Właściciel sklepu ustalił cenę sprzedaży czereśni o 25% wyższą od ceny hurtowej, a cenę sprzedaży truskawek – o 30% wyższą od ceny hurtowej. Za pół kilograma czereśni i kilogram truskawek klient zapłacił w sklepie 8,95 zł. Oblicz cenę kilograma czereśni i kilograma truskawek w tym sklepie.

D 5. Wykaż, że układ równań
$$\begin{cases} 3(x+1) - 4(y-1) = 2 \\ 3(x-1) + 2(1-2y) = -6 \end{cases}$$
 jest nieoznaczony. Podaj trzy przykłady par liczb spełniających ten układ.

5. Przekształcamy równoważnie każde z równań układu.

$$\begin{cases} 3(x+1) - 4(y-1) = 2 \\ 3(x-1) + 2(1-2y) = -6 \\ 3x + 3 - 4y + 4 = 2 \\ 3x - 3 + 2 - 4y = -6 \\ 3x - 4y = -5 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases}$$

Zatem ten układ równań jest nieoznaczony.

Przykład par liczb spełniających ten układ: $(-\frac{5}{3}, 0)$, $(1, 2)$, $(-3, 1)$

11. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–22 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

- Wskaż przedział, do którego należy rozwiązanie równania $x(x-3)-15 = x(x+2)$.
A. $(-8; -5)$ B. $(-5; -3)$ C. $(-3; 5)$ D. $(-4; -2)$
- Która z liczb nie należy do zbioru rozwiązań nierówności $-2x \geq -7$?
A. -4 B. $-3,5$ C. $3,5$ D. 4
- Wskaż nierówność, która ma ten sam zbiór rozwiązań co nierówność $-2x > 0$.
A. $x > 0$ B. $x < 0$ C. $x > 2$ D. $x < 2$
- Która nierówność nie ma rozwiązań?
A. $x - 2 < x + \log_2 8$ C. $x + \sqrt{27} \leq x + \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$
B. $3x < 2x$ D. $x + \log 0,01 < x - 3$
- Wskaż nierówność, która ma inny zbiór rozwiązań niż nierówność $6 \leq -3x$.
A. $2 \leq -x$ B. $x \leq -2$ C. $x \geq -2$ D. $3x \leq -6$
- Ile jest liczb całkowitych w przedziale $\langle -1,1; 15,2 \rangle$?
A. 17 C. 15
B. 16 D. nieskończenie wiele
- Który z przedziałów jest zbiorem rozwiązań układu nierówności $\begin{cases} x > -2 \\ -x \geq -5 \end{cases}$?
A. $\langle -2; 5 \rangle$ C. $\langle -2; \infty \rangle$
B. $(-2; 5)$ D. Układ nie ma rozwiązań.
- Wskaż przedział, do którego nie należy żadna liczba podzielna przez 3.
A. $(7; 10)$ B. $(300; 303)$ C. $(101; 102)$ D. $\langle 3; \infty \rangle$
- Wskaż układ nierówności, którego zbiorem rozwiązań jest przedział $\langle -1; 3 \rangle$.
A. $\begin{cases} x \geq -1 \\ -x \geq -3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x \geq -1 \\ -x > -3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} -x \leq 1 \\ -x \geq -3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} -x < 1 \\ -x \geq -3 \end{cases}$
- W jakiej postaci można zapisać $a\%$ liczby b ?
A. $100ab$ B. $\frac{ab}{100}$ C. $\frac{100a}{b}$ D. $\frac{a}{100b}$

Odpowiedzi i rozwiązania

1. D

2. D

3. B

4. D

5. C

6. A

7. B

8. B

9. B

10. B

11. A

11. Wskaż nierówność, która opisuje przedział zaznaczony na osi liczbowej.



- A. $|x - 5| < 13$ B. $|x - 5| > 13$ C. $|x - 13| < 5$ D. $|x - 13| > 5$

12. C

12. Wskaż nierówność, która opisuje zaznaczoną na osi liczbowej sumę przedziałów.



- A. $|x - 7| \geq 3$ B. $|x - 7| \leq 3$ C. $|x - 3| \geq 7$ D. $|x - 3| > 7$

13. D

13. Wskaż nierówność, którą spełnia liczba $\pi + 1$.

- A. $|x - 1| > 5$ B. $|x - 1| < 2$ C. $|x + \log 10| \leq 4$ D. $|x - 3^{-1}| > 3$

14. C

14. Wskaż liczbę, która spełnia równanie $|3x - 5| = 4x - 8$.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

15. D

15. Wskaż równanie, które ma niepusty zbiór rozwiązań.

- A. $||x + 1| + 3| = 0$ B. $||x - 3| + 2| = 1$ C. $||x - 2| + 3| = 2$ D. $||x + 5| + 3| = 3$

16. D

16. Wskaż liczbę, która nie jest rozwiązaniem równania $|x + 3| + |x - 2| = 5$.

- A. 0 B. -2 C. -1 D. 5

17. C

17. Punkty $A = (2\sqrt{5})$ i $B = (-3\sqrt{5})$ leżą na osi liczbowej. Wskaż długość odcinka AB .

- A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{5} + 5$ C. $5\sqrt{5}$ D. 10

18. D

18. Wskaż wartość m , dla której para liczb $(-2, 1)$ jest rozwiązaniem równania $(m - 1)x + 2m - 2y = 3x - (m + 1)y$.

- A. $m = 4,5$ B. $m = 0$ C. $m = -5$ D. $m = -7$

19. B

19. Wskaż parę liczb, która jest rozwiązaniem układu
$$\begin{cases} \sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y = 5\sqrt{2} \\ 3x - \sqrt{3}y = 6 + \sqrt{3} \end{cases}$$

- A. $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ B. $(2, -1)$ C. $(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$ D. $(3\sqrt{2}, -1)$

20. C

20. Wskaż parę liczb, która jest rozwiązaniem układu
$$\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ 7x + 5y = 8 \end{cases}$$

- A. $(-1, 0,5^{-1})$ B. $(-1, 4)$ C. $(\log 0,1, 3)$ D. $(3^{-1}, \log_2 4)$

21. Wskaż wartość m , dla której układ równań $\begin{cases} 4x - my = 2 \\ 2x + y = \sqrt{7} - 2 \end{cases}$ jest sprzeczny.
- A. $m = -4$ B. $m = 2$ C. $m = 4$ D. $m = -2$

21. D

22. Wskaż wartość m , dla której układ równań $\begin{cases} 6x - 4y = 14 \\ mx + 6y = -21 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.
- A. $m = -4$ B. $m = 4$ C. $m = -9$ D. $m = 9$

22. C

W zadaniach 23–35 oceń prawdziwość podanych zdań.

23. X oznacza zbiór rozwiązań nierówności $3x + 4(x + 1) > 17 - 3(x + 1)$. Zatem
- A. X jest zbiorem liczb ujemnych.
 B. najmniejszą liczbą całkowitą należącą do X jest 2.
 C. X jest zbiorem liczb większych od 1.

23. F, P, P

24. Dany jest przedział $(-4; 7)$.
- A. Przedział ten jest zbiorem rozwiązań układu nierówności $\begin{cases} x \leq 7 \\ -x > -4 \end{cases}$.
 B. Do tego przedziału należy 11 liczb całkowitych.
 C. Przedział ten jest zbiorem rozwiązań nierówności $-7 \leq -x < 4$.

24. F, P, P

25. Równanie $||x| - 7| = 2$ ma
- A. co najmniej dwa rozwiązania.
 B. dokładnie cztery rozwiązania.
 C. wszystkie rozwiązania mniejsze od 10.

25. P, P, P

26. Równanie $|x - 3| + |x + 2| = 5$ ma
- A. co najmniej dwa rozwiązania.
 B. nieskończenie wiele rozwiązań należących do przedziału $(-2; 3)$.
 C. sześć rozwiązań całkowitych.

26. P, P, P

27. Zbiór rozwiązań równania $||x| + 1| + 3| = 7$ ma
- A. dokładnie jeden element.
 B. dokładnie dwa elementy.
 C. nieskończenie wiele elementów.

27. F, P, F

28. Wartość wyrażenia $|x + 5|$ jest równa wartości wyrażenia $x + 5$
- A. dla każdej liczby x .
 B. dla każdej liczby x z przedziału $(-\infty; -5)$.
 C. dla każdej liczby x z przedziału $(-5; \infty)$.

28. F, F, P

29. P, P, F

29. Dane jest równanie $3x + 2k - 5 = 0$ z parametrem k .A. Dla $k = 1$ rozwiązaniem równania jest liczba 1.B. Dla $k = \frac{5}{2}$ rozwiązaniem równania jest liczba 0.C. Dla $k = 0$ rozwiązaniem równania jest liczba $\frac{5}{2}$.

30. P, F, F

30. Dane jest równanie $2mx + 1 = 0$ z parametrem m .A. Dla $m = 5$ równanie ma jedno rozwiązanie.B. Dla $m = 0$ równanie jest tożsamościowe.C. Dla $m = -\frac{1}{2}$ równanie jest tożsamościowe.

31. P, P, F

31. Dana jest nierówność $px \leq 5p - 1$ z parametrem p .A. Dla $p = 1$ zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(-\infty; 4)$.B. Dla $p = 0$ nierówność jest sprzeczna.C. Dla $p = -1$ zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(-\infty; 6)$.

32. F, P, P

32. Dane jest równanie $kx + km - m = 0$ z parametrami k oraz m .A. Dla $k = m = 1$ rozwiązaniem równania jest liczba 1.B. Istnieją takie wartości parametrów k oraz m , dla których równanie jest tożsamościowe.C. Istnieją takie wartości parametrów k oraz m , dla których równanie jest sprzeczne.

33. F, P, P

33. Dane jest równanie liniowe z dwiema niewiadomymi $13x - 2y = 7$.A. Równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań (a, b) takich, że $a = -1$.B. Równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań (a, b) takich, że $a < 0$ i $b < 0$.C. Równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań (a, b) takich, że $ab < 0$.

34. F, P, F

34. Dany jest układ równań
$$\begin{cases} 8x - 3y = -44 \\ -5x + y = 24 \end{cases}.$$
A. Rozwiązaniem tego układu jest para $(-3, 7)$.

B. Rozwiązaniem tego układu jest para liczb przeciwnych.

C. Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

35. F, F, P

35. Dany jest układ równań
$$\begin{cases} 4x - 2y = -2 \\ -x + y = 4 \end{cases}.$$

A. Ten układ jest sprzeczny.

B. Rozwiązaniem tego układu jest para liczb ujemnych.

C. Rozwiązaniem tego układu jest para liczb dodatnich.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

36. Rozwiąż równanie $\frac{3x^2 - 1}{2} - \frac{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{3} = (x + 3)^2 + \frac{x^2}{6}$.

37. Rozwiąż nierówność $2(x - 5) - 3(4x - 1) < 4(3 - 2x)$. Zaznacz zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

38. Podaj wszystkie liczby naturalne, które spełniają podaną nierówność.

$$x - \frac{x - 7}{3} \geq 1\frac{1}{2} - \frac{1 - 2x}{2}$$

39. Rozwiąż nierówność $\frac{(2 - x)(3 - 5x)}{6} - 1 \leq \frac{(2x - 1)^2}{3} - \frac{(x - 2)(x + 2)}{2}$. Podaj największą liczbę całkowitą, która nie spełnia tej nierówności.

40. Dane są zbiory $A = \langle -5; 3 \rangle$, $B = (-7; 0)$, $C = (2; \infty)$. Wykonaj podane działania na zbiorach i zapisz wynik w postaci przedziału lub sumy przedziałów liczbowych.

a) $A - B$ b) $A \cap (B \cup C)$ c) $C - (A \cap B)$ d) $(B \cap C) \cup (B - A)$

41. Dla jakich wartości parametru m liczba 5 należy do przedziału $\langle 3m - 1; 4m + 9 \rangle$?

42. Dla jakich wartości parametru m zbiory $A = (-\infty; m + 3)$ i $B = (2m - 1; \infty)$ spełniają warunek $A - B = A$?

43. Rozwiąż równanie.

a) $|x| - 7 = 0$ c) $|x - 9| = 3$ e) $2 \cdot |3 - x| + 5 = 0$
 b) $|x + 13| = 0$ d) $|x + 4| - 1 = 0$ f) $\frac{3}{5}|1 - x| - \frac{1}{2} = 1$

44. Rozwiąż nierówność.

a) $5 - |x| < 0$ c) $|x + 2| \geq 5$ e) $17 + |3 - x| < 0$
 b) $|x - 10| < 6$ d) $|x + 4| + 7 > 0$ f) $11 - |3 + x| \geq 0$

45. Przedstaw w postaci $|x - a| \leq b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest podany przedział liczbowy.

a) $\langle -4; 12 \rangle$ b) $\langle -9; -3 \rangle$ c) $\langle 0; 2\sqrt{2} \rangle$ d) $\left\langle \frac{3}{2}; \frac{11}{2} \right\rangle$

46. Przedstaw w postaci $|x - a| > b$ lub $|x - a| \geq b$ nierówność, której zbiór rozwiązań jest przedstawiony na rysunku.



36. $x = -1\frac{5}{12}$

37. $x > -9,5$

38. 0, 1, 2, 3, 4

39. $x \geq -2,8, -3$

40. a) $\langle 0; 3 \rangle$ b) $\langle -5; 0 \rangle \cup (2; 3)$
 c) $(2; \infty)$ d) $(-7; -5)$

41. $m \in \langle -1; 2 \rangle$

42. $m \geq 4$

43. a) $x = -7$ lub $x = 7$

b) $x = -13$

c) $x = 6$ lub $x = 12$

d) $x = -5$ lub $x = -3$

e) brak rozwiązań

f) $x = -1,5$ lub $x = 3,5$

44. a) $x \in (-\infty; -5) \cup (5; \infty)$

b) $x \in (4; 16)$

c) $x \in (-\infty; -7) \cup \langle 3; \infty \rangle$

d) $x \in \mathbb{R}$

e) brak rozwiązań

f) $x \in \langle -14; 8 \rangle$

45. a) $|x - 4| \leq 8$

b) $|x + 6| \leq 3$

c) $|x - \sqrt{2}| \leq \sqrt{2}$

d) $\left|x - \frac{7}{2}\right| \leq 2$

46. $|x - 1| \geq 5$

47. $x = -4$ lub $x = 20$

48. $x \in (-\infty; -10) \cup$
 $\cup (-6; 0) \cup (4; \infty)$

49. $x = -1\frac{2}{7}$

50. $x \in (-\infty; -1)$

51. $x = -\frac{2}{5}$ lub $x = 2$

52. $x = -\frac{1}{5}$ lub $x = 5$

$$53. \left(\left| \sqrt{24} - 3\sqrt{3} \right| + \left| \sqrt{6} - \sqrt{12} \right| - \right. \\ \left. + \left| \sqrt{75} - \sqrt{54} \right| \right)^2 = \left(\sqrt{27} - \sqrt{24} + \right. \\ \left. + \sqrt{12} - \sqrt{6} - \left(\sqrt{75} - \sqrt{54} \right) \right)^2 = \\ = \left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - \right. \\ \left. + 5\sqrt{3} + 2\sqrt{6} \right)^2 = \left(-\sqrt{6} \right)^2 = 6$$

$$54. \sqrt{29 - 12\sqrt{5}} - 2\sqrt{5} = \\ \sqrt{(3 - 2\sqrt{5})^2} - 2\sqrt{5} = |3 - 2\sqrt{5}| - \\ - 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 3 - 2\sqrt{5} = -3$$

55. $\left\langle -4; -2\frac{1}{4} \right\rangle$

$$56. m \in \left(\frac{7}{3}; \frac{10}{3} \right). \text{ Wskazówka:}$$

Musi być spełniony następujący

$$\text{układ warunków } \begin{cases} 4 - m \leq 2 \\ 5 \geq 3m - 5 \\ 2 < 3m - 5 \\ 4 - m < 5 \end{cases}$$

57. $x = -3\frac{2}{5}$ lub $x = 3$

58. $x \in \left(\frac{2}{3}; 3 \right) \cup (7; \infty)$

59. $|x| - |2x - 6| < 10 - x$

$$\text{I. } x \in (-\infty; 0) \\ -x + 2x - 6 < 10 - x \\ x < 8$$

$$\text{II. } x \in (0; 3) \\ x + 2x - 6 < 10 - x \\ x < 4$$

$$\text{III. } x \in (3; \infty) \\ x - 2x + 6 < 10 - x \\ 6 < 10$$

W każdym z trzech przypadków nierówność jest prawdziwa dla każdego x , więc ta nierówność jest tożsamościowa.

47. Rozwiąż równanie $||x - 8| - 2| = 10$.

48. Rozwiąż nierówność $|5 - |x + 3|| > 2$.

49. Rozwiąż równanie $\left| \frac{1}{3}x - 2 \right| - 2x = 5$.

50. Rozwiąż nierówność $|x - 1| - 4 > 2x$.

51. Rozwiąż równanie $\sqrt{25x^2 - 40x + 16} = 6$.

52. Rozwiąż równanie $\sqrt{9x^2 - 12x + 4} = \sqrt{4x^2 + 12x + 9}$.

53. Wykaż, że liczba $\left(\left| \sqrt{24} - 3\sqrt{3} \right| + \left| \sqrt{6} - \sqrt{12} \right| - \left| \sqrt{75} - \sqrt{54} \right| \right)^2$ jest całkowita.

54. Wykaż, że liczba $\sqrt{29 - 12\sqrt{5}} - 2\sqrt{5}$ jest całkowita.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

55. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań układu nierówności:

$$\begin{cases} 2(x - 3) > 3(1 + 2x) \\ 5x - 13 \leq -(5 - 7x) \end{cases}$$

i zapisz ten zbiór w postaci przedziału.

56. Dla jakich wartości parametru m zbiór $A = \langle 2; 3m - 5 \rangle$ jest podzbiorem zbioru $B = \langle 4 - m; 5 \rangle$?

57. Rozwiąż równanie $|2x - 5| + |3x + 6| = 16$.

58. Rozwiąż nierówność podwójną $2 < |5 - x| < 2x + 3$.

59. Wykaż, że nierówność $|x| - |2x - 6| < 10 - x$ jest tożsamościowa.

60. Wykaż, że wszystkie rozwiązania równania $\left| x + \frac{1}{2} \right| = 4\frac{1}{2}$ należą do zbioru rozwiązań nierówności $|x - 6| + |3x + 6| < 24$.

61. Wykaż, że równanie $|3x - 5| + |2x + 7| + |13 - 11x| = 0$ jest sprzeczne.

62. Dla jakich wartości parametru m równanie $|7x - 2| = 5 + m$ nie ma rozwiązań?

60. $\left| x + \frac{1}{2} \right| = 4\frac{1}{2}$

$$x + \frac{1}{2} = -4\frac{1}{2} \text{ lub } x + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2} \\ x = -5 \text{ lub } x = 4$$

Podstawiamy otrzymane rozwiązania do lewej strony danej nierówności.

$$|-5 - 6| + |3 \cdot (-5) + 6| = 11 + 9 = 20 < 24$$

$$|4 - 6| + |3 \cdot 4 + 6| = 2 + 18 = 20 < 24$$

Zatem wszystkie rozwiązania równania należą do rozwiązania danej nierówności.

61. Suma nieujemnych składników jest równa 0, gdy każdy z tych składników jest równy 0.

$$|3x - 5| + |2x + 7| + |13 - 11x| = 0$$

$$3x - 5 = 0 \text{ i } 2x + 7 = 0 \text{ i } 13 - 11x = 0$$

$$x = \frac{5}{3} \text{ i } x = -\frac{7}{2} \text{ i } x = \frac{13}{11}, \text{ zatem dane równanie jest sprzeczne.}$$

62. $m < -5$

63. Rozwiąż równanie $3x - 5m + 6 = 0$ z parametrem m .

64. Rozwiąż równanie $k^2x = x + k - 1$ z parametrem k .

65. Dla jakich wartości parametrów k oraz m równanie $mx - k + x + km = 0$ jest sprzeczne?

66. Rozwiąż nierówność $3px - p^2 \geq 0$ z parametrem p .

67. Rozwiąż układ równań.

a)
$$\begin{cases} (x+5)(y+4) = (x+3)(y+7) \\ (2x+1)(5y+2) = 2y(5x+4) \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{2x-y}{3} + \frac{y-1}{2} = \frac{1}{4}x + 1\frac{2}{3} \\ \frac{3x-4y}{4} + \frac{4x-2y-1}{3} = 3 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} (x-5)^2 - (x+3)(x-7) = 2(y+3) + 48 \\ \frac{x+y-1}{2} - \frac{x-y-1}{4} = 0,75 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y+2)^2 - 4 = (1-x)(2y+4) + (x+y)^2 \\ \frac{1}{2}(x+y) - \frac{5}{6} = \frac{1}{3}(x+2y) \end{cases}$$

68. Rozwiąż układ równań.

a)
$$\begin{cases} 5x + 3y = \sqrt{2} \\ 7x + 4y = \sqrt{8} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3^7x + 2 \cdot 3^{10}y = 3^{10} \\ 3^{-10}x - 3^{-7}y = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x - 5y = 8\sqrt{2} - 7\sqrt{3} \\ 2x + y = \sqrt{2} + 4\sqrt{3} \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 16x + 4y = 2^{15} \\ 8x - y = 2^{12} \end{cases}$$

69. Rozwiąż układ równań.

a)
$$\begin{cases} |3x + 2y| = 4 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} |x - 1| = y + 3 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2|x - 3| - 6y = -5 \\ -3|x - 3| + 9y = 8 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} |x - y + 2| = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

D 70. Wykaż, że układ równań
$$\begin{cases} (x-2)(x+3) - (x-4)(x+4) = 2(3-y) \\ (x+2)^2 - x(x+3) = (y-2)^2 - y(y-2) \end{cases}$$
 jest sprzeczny.

70. Przekształcamy równoważnie każde z równań układu.

$$\begin{cases} (x-2)(x+3) - (x-4)(x+4) = 2(3-y) \\ (x+2)^2 - x(x+3) = y(y-2)^2 - y(y-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 2x - 6 - x^2 + 16 = 6 - 2y \\ x^2 + 4x + 4 - x^2 - 3x = y^2 - 4y + 4 - y^2 + 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 2x - 6 - x^2 + 16 = 6 - 2y \\ x^2 + 4x + 4 - x^2 - 3x = y^2 - 4y + 4 - y^2 + 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \text{ . Zatem ten układ równań jest sprzeczny.}$$

63. $x = 1\frac{2}{3}m - 2$

64. $x = \frac{1}{k+1}$ dla $k \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$,
 $x \in \mathbf{R}$ dla $k = 1$, brak rozwiązań dla $k = -1$

65. $m = -1$ i $k \neq 0$

66. $x \in \mathbf{R}$ dla $p = 0$, $x \geq \frac{p}{3}$ dla $p > 0$, $x \leq \frac{p}{3}$ dla $p < 0$

67. a) (1, 2)

b) (4, 3)

c) (-2, 2)

d) (1, -4)

68. a) $(2\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

b) $(\sqrt{2} + \sqrt{3}, -\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$

c) $(9, \frac{1}{3})$

d) $(2^{10}, 2^{12})$

69. a) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = \frac{24}{11} \\ y = -\frac{14}{11} \end{cases}$

b) układ sprzeczny

c) $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 5 \\ y = 8 \end{cases}$

71. $A = 37$ 72. $A = 531$ lub $A = 612$

73. 360 i 100

74. 14 080 zł, strata 29,6%

75. 240

76. Zebra: 41%, Lis: 29%,
Lew: 18%, Wielbłąd: 12%

77. b) 32%

71. Suma cyfr liczby dwucyfrowej A jest równa 10. Jeżeli przestawimy w niej cyfry, to otrzymamy liczbę o 36 większą od A . Znajdź liczbę A .

72. Suma cyfr liczby trzycyfrowej A jest równa 9. Jeżeli zamienimy miejscami cyfrę setek i cyfrę jedności, to otrzymamy liczbę o 396 mniejszą od liczby A . Znajdź liczbę A .

73. Na dwóch powierzchniach doświadczalnych posadzono 460 sadzonek. Po pewnym czasie okazało się, że do dalszych doświadczeń nie nadaje się $\frac{3}{4}$ sadzonek z pierwszej powierzchni doświadczalnej i $\frac{3}{5}$ sadzonek z drugiej powierzchni doświadczalnej. Po odrzuceniu nieodpowiednich na obydwu powierzchniach łącznie pozostało 130 sadzonek. Oblicz, ile sadzonek posadzono na każdej powierzchni doświadczalnej.



74. Pan Raczek zainwestował na giełdzie 20 000 zł. Podzielił swój kapitał w stosunku 1 : 4. Za mniejszą część kupił akcje firmy A, a za resztę akcje firmy B. Po roku akcje firmy A podrożały o 12%, natomiast akcje firmy B staniały o 40%. Pan Raczek sprzedał wszystkie akcje i postanowił zainwestować w dzieła sztuki. Jaką kwotą wtedy dysponował? Ile procent pieniędzy stracił?

75. W pewnym technikum $\frac{3}{4}$ liczby maturzystów będzie zdawać na wyższe uczelnie państwowe, $\frac{1}{6}$ zamierza studiować na prywatnych uczelniach, a pozostałe 20 osób chce po skończeniu szkoły pójść do pracy. Ilu maturzystów jest w tym technikum?

76. W wyborach na prezydenta zoo startowało 4 kandydatów. Okazało się, że:

- Lew uzyskał poparcie o 6 punktów procentowych większe niż Wielbłąd,
- Zebra uzyskała 12-punktową przewagę nad Lisem,
- Lew i Wielbłąd uzyskali razem poparcie o 40 punktów procentowych mniejsze niż Zebra i Lis.

Podaj (w procentach) wynik głosowania.

77. W wyborach startują 3 partie: Partia Niebieskich, Partia Żółtych i Partia Pomarańczowych. Na dwa miesiące przed wyborami sytuacja wyglądała następująco:

- poparcie dla Niebieskich było o połowę większe niż poparcie dla Żółtych,
- poparcie dla Pomarańczowych było o 25% większe niż poparcie dla Żółtych,
- co czwarty wyborca nie był zdecydowany, na kogo głosować.

a) Narysuj diagram kołowy ilustrujący poparcie dla poszczególnych partii.

b) Po upływie miesiąca Niebiescy zyskali 8 punktów procentowych poparcia, Żółci stracili 25% poparcia, a liczba niezdecydowanych zmniejszyła się do 15% wyborców. Ile procent wynosiło wówczas poparcie dla Pomarańczowych?