

Funkcje

3

Umiejętności

Po szkole podstawowej uczeń:

- znajduje współrzędne danych (na rysunku) punktów kratowych w układzie współrzędnych na płaszczyźnie,
- rysuje w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty kratowe o danych współrzędnych całkowitych (dowolnego znaku),
- interpretuje dane przedstawione w układzie współrzędnych za pomocą wykresów,
- tworzy wykresy liniowe na podstawie zebranych przez siebie danych lub danych pochodzących z różnych źródeł.

Po tym dziale uczeń:

- rozpoznaje funkcje wśród przyporządkowań, określa je na różne sposoby i sporządza ich wykresy,
- wyznacza dziedzinę i zbiór wartości funkcji określonej wzorami typu:

$$f(x) = \frac{1}{g(x)}, \quad f(x) = \sqrt{g(x)}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}}, \quad \text{gdzie } g(x) \text{ jest funkcją liniową lub funkcją liniową z wartością bezwzględną,}$$

- z wykresu funkcji odczytuje jej podstawowe własności; odczytuje rozwiązania nierówności typu $f(x) < m$, dla ustalonej wartości m , oraz równań i nierówności typu $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$; oblicza miejsca zerowe funkcji na podstawie jej wzoru,
- podaje zależność funkcyjną między wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi; rysuje wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$,
- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysuje wykresy funkcji: $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = f(x - a) + b$, $y = |f(x)|$,
- dodaje i odejmuje wektory, mnoży wektor przez liczbę oraz interpretuje geometrycznie działania na wektorach,
- oblicza współrzędne wektora, współrzędne jego końców oraz długość wektora; wykonuje działania na współrzędnych wektorów,
- stosuje wektory do opisu przesunięcia wykresu funkcji.

Uwagi metodyczne

Z funkcją, jednym z najważniejszych pojęć matematyki, uczniowie spotykają się po raz pierwszy. W klasie pierwszej kładziemy nacisk na poznanie ogólnych jej własności, zwłaszcza na swobodne korzystanie z wykresu. Zaczynamy od różnych sposobów określania funkcji.

Zapis $f(x) = \dots$ początkowo może stwarzać kłopoty. Warto go jednak wprowadzić, bo będzie wykorzystywany m.in. przy przesunięciach wykresów funkcji.

◀ 1.5. Podaj trzy przykłady przyporządkowań będących funkcjami i trzy przykłady przyporządkowań, które nie są funkcjami.

1. Pojęcie funkcji

Umiejętności:

- określanie funkcji za pomocą opisu słownego, tabeli, grafu, wzoru
- obliczanie ze wzoru wartości funkcji dla danego argumentu

W życiu codziennym stale spotykamy się z sytuacjami, kiedy jednemu obiektowi jednoznacznie przyporządkowany jest drugi obiekt.

Przykład 1

- Każdy towar w sklepie ma swoją cenę.
- Produkty żywnościowe mają swoją wartość kaloryczną.
- Uczeń w szkole jest przypisany do jednej klasy.
- W ciągu każdego miesiąca zużywamy pewną ilość energii elektrycznej.
- Za zużytą energię płacimy odpowiednie rachunki.
- Każdy kredyt bankowy ma swoje oprocentowanie.

Definicja

Funkcją f ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie, które każdemu elementowi zbioru X przypisuje dokładnie jeden element zbioru Y , co symbolicznie zapisujemy:

$$f: X \rightarrow Y$$

Zbiór X nazywamy **dziedzina**, a jego elementy **argumentami** funkcji.

Element $y \in Y$ przyporządkowany argumentowi $x \in X$ nazywamy **wartością** funkcji f dla tego argumentu i oznaczamy $f(x)$.

Przykład 2 ◀ zad. 1.5

- Jeżeli każdej osobie w twojej klasie przyporządkujemy miesiąc jej urodzenia, to tak określone przyporządkowanie jest funkcją ze zbioru uczniów twojej klasy w zbiór miesięcy. Spełnione są warunki definicji funkcji, ponieważ **każdy** uczeń urodził się dokładnie w **jednym** miesiącu.
Dziedziną tej funkcji jest zbiór uczniów twojej klasy.
- Jeżeli zechcemy każdej osobie w Polsce przyporządkować jej rodzonego brata, to takie przyporządkowanie **nie jest** funkcją, ponieważ niektórzy ludzie nie mają braci, a inni mają ich kilku.

ZZ i MKP

temat 4.1

Multiteka

- Czy podane przyporządkowanie jest funkcją
- Czy podany rysunek przedstawia wykres funkcji
- Sposoby opisu funkcji

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.1

- c) Jeżeli każdemu miastu w Polsce przyporządkujemy kod pocztowy, to nie otrzymamy funkcji. Co prawda każde miasto ma jakiś kod pocztowy, ale w większych miastach jest po kilka kodów.
- d) Każdemu trójkątowi można przyporządkować jego pole. Otrzymamy w ten sposób funkcję, której dziedziną jest zbiór wszystkich trójkątów.

Sposoby określania funkcji

1. Opis słowny

W ten sposób określone zostały funkcje z przykładów 1, 2 a i 2 d.

Przykład 3 ◀ zad. 1.13

A oto inna funkcja opisana słownie:

„Każdej liczbie naturalnej przyporządkowujemy liczbę większą od niej o 1”.

Ta funkcja przyporządkowuje np. liczbie 0 liczbę 1, liczbie 1 – liczbę 2, liczbie 2000 – liczbę 2001. Dziedzinę funkcji tworzą wszystkie liczby naturalne.

Funkcje, których argumentami i wartościami są liczby, nazywamy **funkcjami liczbowymi**.

2. Tabela

Tabela często służy do przedstawiania funkcji liczbowych wtedy, gdy ich dziedziny mają tylko kilka elementów.

Przykład 4 ◀ zad. 1.4

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	6	9	3	6	9

← zapis ten oznacza, że liczbie 1 przyporządkowana jest liczba 3, liczbie 2 – liczba 6, liczbie 3 – liczba 9 itd.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Przykładami funkcji opisanych za pomocą tabel są w większości dane podawane w rocznikach statystycznych.

Oto funkcja, która wybranym szczytom górskim przyporządkowuje ich wysokości nad poziomem morza. Dziedziną tej funkcji jest pięcioelementowy zbiór wybranych szczytów:

$$D = \{\text{Rysy, Babia Góra, Barania Góra, Lackowa, Trzy Korony}\}$$

Szczyt	Wysokość [m n.p.m.]
Rysy	2499
Babia Góra	1725
Barania Góra	1220
Lackowa	997
Trzy Korony	962

◀ 1.4. Dana jest funkcja f opisana za pomocą tabeli.

x	1	3	5	7	9	11	13
$f(x)$	4	8	12	16	20	24	28

Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$.
 B. $f(7) = 16$
 C. Funkcję f można opisać wzorem: $f(x) = 2x + 2$.

Odp.: P, P, P

◀ 1.13. Podaj przykład opisu słownego funkcji f .

a) $f(x) = -x^2$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = |x + 3|$

d) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Odp.: Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej:

a) liczbę przeciwną do kwadratu tej liczby,

b) dodatniej liczbę odwrotną do pierwiastka kwadratowego z tej liczby,

c) wartość bezwzględną tej liczby powiększoną o 3,

d) różnej od zera sumę tej liczby i liczby do niej odwrotnej.

Inną wersją tabeli są, stosowane często w prasie, diagramy słupkowe.

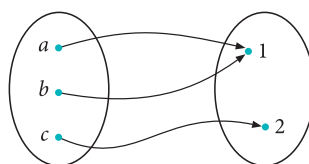
Ludność aktywna zawodowo w rolnictwie w 2007 r. (w % ogółu ludności)	
Estonia	4,8
Grecja	6,2
Irlandia	3,7
Litwa	4,2
Łotwa	5,2
Polska	8,3

Liczba telefonów komórkowych przypadających na 1000 mieszkańców w 2008 r.	
Estonia	1900
Finlandia	1300
Grecja	1200
Litwa	1500
Łotwa	990
Polska	1200

Dziedzina funkcji przedstawionych na diagramach są zbiory wybranych państw.

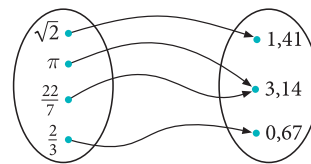
3. Graf

Przyporządkowanie jest określone za pomocą strzałek.



$$D = \{a, b, c\}$$

Funkcja przyporządkowuje:
argumentowi a – liczbę 1,
argumentowi b – również liczbę 1,
argumentowi c – liczbę 2.



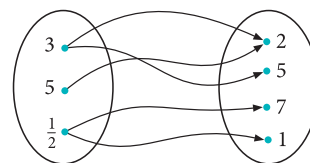
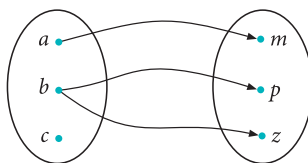
$$D = \left\{ \sqrt{2}, \pi, \frac{22}{7}, \frac{2}{3} \right\}$$

Funkcja przyporządkowuje wybranym
liczbom ich rozwinięcia dziesiętne
(z dokładnością do dwóch miejsc
po przecinku).

Uwaga: Nie każdy graf przedstawia funkcję. Patrząc na graf, łatwo możemy stwierdzić, czy przyporządkowanie jest funkcją czy nie. Narysowany graf określa funkcję o dziedzinie X , gdy z każdego elementu zbioru X wychodzi strzałka i to tylko jedna.

Przykład 5 ◀ zad. 1.7

Poniższe rysunki **nie** przedstawiają funkcji.

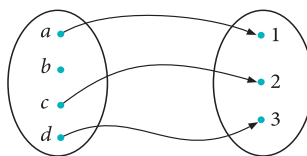


◀ 1.7. Sprawdź, czy podane przyporządkowanie jest funkcją.

- Każdej dodatniej liczbie całkowitej przyporządkowujemy liczbę jej dzielników.
- Każdemu uczniowi liceum przyporządkowujemy język obcy, którego się uczy.
- Każdej liczbie naturalnej przyporządkowujemy jej resztę z dzielenia przez 7.
- Każdej liczbie naturalnej przyporządkowujemy jej sześcian.
- Każdej książce przyporządkowujemy jej autora.

Odp.: Funkcjami są przyporządkowania: a), c), d).

Ten graf nie opisuje funkcji w zbiorze $\{a, b, c, d\}$, ale jeżeli przyjmiemy za dziedzinę tylko zbiór $\{a, c, d\}$, to takie przyporządkowanie jest funkcją.



4. Wzór

Przyjrzyjmy się funkcji oznaczonej literą f i przedstawionej za pomocą grafu.

Zapis $f(3) = 6$ oznacza, że funkcja f liczbie 3 przyporządkowuje liczbę 6. Czytamy go:

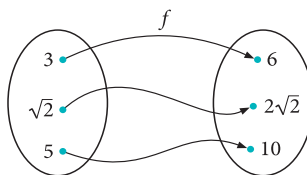
„ f od trzech równa się sześć”.

Podobnie: $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, $f(5) = 10$.

Zauważmy, że funkcja f przypisuje każdej liczbie ze zbioru $\{\sqrt{2}, 3, 5\}$ liczbę dwa razy większą. Zależność taką możemy zapisać następująco:

$$f(x) = 2x \text{ dla } x \in \{\sqrt{2}, 3, 5\}$$

Taki przepis na przyporządkowanie podany za pomocą symboli nazywamy **wzorem funkcji**.



Przykład 6 ◀ zad. 1.9

Sporządzimy tabelę funkcji wyrażonej następującym wzorem:

$$g(x) = x^2 - x + 1 \text{ dla } x \in \{0, 1, 2, \sqrt{2}, \pi - 5\}$$

Rozwiązanie

Aby obliczyć, jakie wartości funkcja przyporządkowuje poszczególnym argumentom, podstawiamy w miejsce x kolejne liczby z dziedziny.

$$g(0) = 0^2 - 0 + 1 = 1$$

$$g(1) = 1^2 - 1 + 1 = 1$$

$$g(2) = 2^2 - 2 + 1 = 3$$

$$g(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} + 1 = 2 - \sqrt{2} + 1 = 3 - \sqrt{2}$$

$$g(\pi - 5) = (\pi - 5)^2 - (\pi - 5) + 1 = \pi^2 - 10\pi + 25 - \pi + 5 + 1 = \pi^2 - 11\pi + 31$$

Tabela tej funkcji wygląda więc następująco:

x	0	1	2	$\sqrt{2}$	$\pi - 5$
$g(x)$	1	1	3	$3 - \sqrt{2}$	$\pi^2 - 11\pi + 31$

Jeżeli dany jest wzór funkcji, np.:

$g(x) = x^2 - x + 1$
to literę x możemy zamieniać na konkretne liczby z dziedziny funkcji, jak również na inne litery czy znaki:

$$g(m) = m^2 - m + 1$$

$$g(\otimes) = \otimes^2 - \otimes + 1$$

$$g(k+1) = (k+1)^2 - (k+1) + 1$$

5. Wykres

Funkcję liczbową f możemy również przedstawić za pomocą wykresu, czyli zbioru wszystkich punktów o współrzędnych $(x, f(x))$ na płaszczyźnie z układem współrzędnych. Ten sposób omawiamy w jednym z następnych tematów podręcznika.

◀ 1.9. Sporządź tabelę funkcji określonej podanym wzorem.

a) $f(x) = 4x - 5$ dla $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

b) $f(x) = x^2 - 2$ dla $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

c) $f(x) = |x - 3| + 1$ dla $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ dla $x \in \{-3, -1, 0, 8, 10\}$

Odp.:

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-17	-13	-9	-5	-1	3	7

c)

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	5	4	3	2	1	2	3

b)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	-1	-2	-1	2	7	14

d)

x	-3	-1	0	8	10
$f(x)$	$\sqrt[3]{-3}$	-1	0	2	$\sqrt[3]{10}$

Zadania

W każdym z zadań 1.1–1.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

1.1. C

1.1. Wskaż wartość funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ dla argumentu równego 8.

A. 18

B. 33

C. 34

D. 36

1.2. B

1.2. Jeżeli wartość funkcji f dla argumentu 2 jest równa 8, to funkcja nie może być określona za pomocą wzoru

A. $f(x) = 2x + 4$. B. $f(x) = x^2 + 2$. C. $f(x) = 2x^2$. D. $f(x) = x^3$.

1.3. C

1.3. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej połowę liczby do niej przeciwnej. Funkcję f można określić za pomocą wzoru

A. $f(x) = \frac{1}{2x}$. B. $f(x) = \frac{2}{x}$. C. $f(x) = -\frac{1}{2}x$. D. $f(x) = -\frac{1}{2}(-x)$.

1.4. P, P, P

1.4. Dana jest funkcja f opisana za pomocą tabeli.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Dziedziną funkcji f jest zbiór

$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$.

B. $f(7) = 16$

C. Funkcję f można opisać za pomocą wzoru:

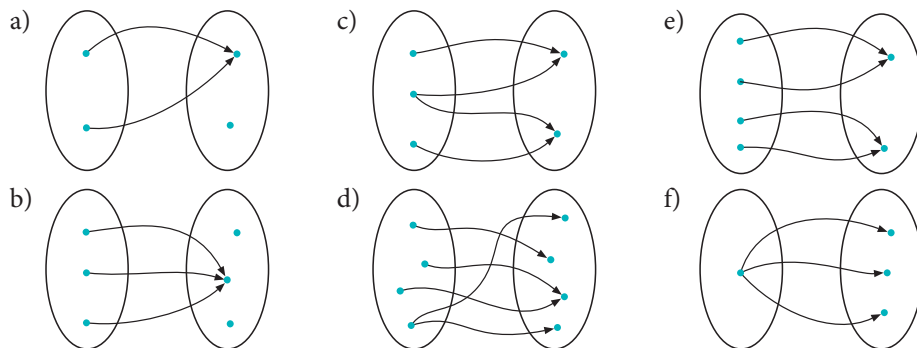
$f(x) = 2x + 2$.

x	1	3	5	7	9	11	13
$f(x)$	4	8	12	16	20	24	28

1.5. Podaj trzy przykłady przyporządkowań będących funkcjami i trzy przykłady przyporządkowań, które nie są funkcjami.

1.6. Czy podany graf przedstawia funkcję?

1.6. a) tak b) tak c) nie
d) nie e) tak f) nie



1.7. Sprawdź, czy podane przyporządkowanie jest funkcją.

- Każdej dodatniej liczbie całkowitej przyporządkowujemy liczbę jej dzielników.
- Każdemu uczniowi liceum przyporządkowujemy język obcy, którego się uczy.
- Każdej liczbie naturalnej przyporządkowujemy jej resztę z dzielenia przez 7.
- Każdej liczbie naturalnej przyporządkowujemy jej sześcian.
- Każdej książce przyporządkowujemy jej autora.

1.8. Oblicz $f(-2)$, $f(\sqrt{3})$, jeżeli

- $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.
- $f(x) = 3x^2 - 6x - 2$.
- $f(x) = |x| + x$.
- $f(x) = \frac{6}{x} - 2x + 1$.

1.9. Sporządź tabelę funkcji określonej za pomocą podanego wzoru.

- $f(x) = 4x - 5$ dla $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
- $f(x) = x^2 - 2$ dla $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
- $f(x) = |x - 3| + 1$ dla $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- $f(x) = \sqrt[3]{x}$ dla $x \in \{-3, -1, 0, 8, 10\}$

1.10. Podaj przykład wzoru funkcji danej w postaci tabeli.

a)

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	4	1	0	1

c)

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	-1	0	1	2

b)

x	0	1	2	3
$f(x)$	3	5	7	9

d)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	-1	0	1	8

1.11. Określ za pomocą wzoru funkcję f , która przyporządkowuje

- każdej liczbie rzeczywistej liczbę do niej przeciwną.
- każdej liczbie naturalnej kwadrat liczby większej od niej o 1.
- każdej liczbie rzeczywistej jej podwojony kwadrat.
- każdej liczbie rzeczywistej jej wartość bezwzględną zmniejszoną o 2.
- każdej liczbie dodatniej logarytm dziesiętny tej liczby.
- każdej liczbie rzeczywistej połowę pierwiastka sześciennego z tej liczby.

1.12. Określ podaną funkcję za pomocą wzoru.

- Pole $P(r)$ koła w zależności od promienia r tego koła.
- Pole $P(a)$ trójkąta równobocznego w zależności od długości a boku tego trójkąta.
- Obwód $O(a)$ prostokąta o bokach długości a , $2a$ w zależności od długości krótszego boku tego prostokąta.
- Objętość $V(a)$ prostopadłościanu o krawędziach długości a , $2a$, $3a$ w zależności od długości najkrótszej krawędzi tego prostopadłościanu.

1.7. Funkcjami są przyporządkowania: a), c), d).

1.8. a) $f(-2) = 2\sqrt{2}$,

$$f(\sqrt{3}) = \sqrt{7}$$

b) $f(-2) = 22$, $f(\sqrt{3}) = 7 - 6\sqrt{3}$

c) $f(-2) = 0$, $f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

d) $f(-2) = 2$, $f(\sqrt{3}) = 1$

1.9. a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-17	-13	-9	-5	-1	3	7

b)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	-1	-2	-1	2	7	14

c)

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	5	4	3	2	1	2	3

d)

x	-3	-1	0	8	10
$f(x)$	$\sqrt[3]{-3}$	-1	0	2	$\sqrt[3]{10}$

1.10. $x \in D$ i a) np. $f(x) = x^2$

b) np. $f(x) = 2x + 3$

c) np. $f(x) = x - 1$

d) np. $f(x) = x^3$

1.11. a) $f(x) = -x$, $x \in \mathbf{R}$

b) $f(x) = (x + 1)^2$, $x \in \mathbf{N}$

c) $f(x) = 2x^2$, $x \in \mathbf{R}$

d) $f(x) = |x| - 2$, $x \in \mathbf{R}$

e) $f(x) = \log x$, $x > 0$

f) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbf{R}$

1.12. a) $P(r) = \pi r^2$ dla $r > 0$

b) $P(a) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ dla $a > 0$

c) $O(a) = 6a$ dla $a > 0$

d) $V(a) = 6a^3$ dla $a > 0$

1.13. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej: **a)** liczbę przeciwną do kwadratu tej liczby, **b)** dodatniej liczbę odwrotną do pierwiastka kwadratowego z tej liczby, **c)** wartość bezwzględną tej liczby powiększoną o 3, **d)** różnej od zera sumę tej liczby i liczby do niej odwrotnej.

1.14. a)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3

b) 2, 3, 5, 7

1.15. a) 12 **b)** np. 9993

c) 1001, 1010, 1100, 2000

Prosto do matury

1. F, P, P

2. a) $f(x) = 2^x$ dla $x > 0$

b) $f(x) = \log x$ dla $x \in \mathbf{N} - \{0\}$

c) To nie jest funkcja.

d) $f(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}x\right)^3}$ dla $x \in \mathbf{R} - \{0\}$

3. $D = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

4.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{7}{11}$

5. $f(14 - 6\sqrt{5}) = \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} =$
 $= \sqrt{9 - 6\sqrt{5} + 5} = \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} =$
 $= |3 - \sqrt{5}| = 3 - \sqrt{5}$

1.13. Podaj przykład opisu słownego funkcji f .

a) $f(x) = -x^2$ b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ c) $f(x) = |x + 3|$ d) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

1.14. Funkcja f przyporządkowuje każdej dodatniej liczbie naturalnej jednocyfrowej liczbę jej naturalnych dzielników.

a) Sporządź tabelę tej funkcji.

b) Podaj wszystkie argumenty, dla których wartość funkcji jest równa 2.

1.15. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej sumę jej cyfr.

a) Podaj $f(2019)$.

b) Podaj przykład liczby n , dla której $f(n) = 30$.

c) Podaj wszystkie liczby czterocyfrowe, dla których wartość funkcji jest równa 2.

Prosto do matury



1. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie całkowitej ostatnią cyfrę jej kwadratu. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $f(4) = 16$

B. $f(-100) = 0$

C. Dla każdej liczby całkowitej k spełniony jest warunek $f(-k) = f(k)$.

2. Sprawdź, czy dane przyporządkowanie jest funkcją. Jeśli tak, zapisz jej wzór.

a) Każdej dodatniej liczbie rzeczywistej x przyporządkowujemy potęgę liczby 2 o wykładniku x .

b) Każdej dodatniej liczbie naturalnej x przyporządkowujemy wykładnik potęgi, do której trzeba podnieść 10, aby otrzymać x .

c) Każdej dodatniej liczbie rzeczywistej x przyporządkowujemy liczbę, której wartość bezwzględna jest równa x .

d) Każdej liczbie rzeczywistej x różnej od zera przyporządkowujemy odwrotność trzeciej potęgi połowy liczby x .

3. Funkcja f jest dana w postaci tabeli.

Podaj dziedzinę tej funkcji i narysuj jej graf.

x	2	4	6	8	10
$f(x)$	2	0	2	0	2

4. Funkcja f jest wyrażona wzorem $f(x) = \frac{2x-3}{2x+1}$ dla $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Sporządź tabelę tej funkcji.

5. Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ dla $x \geq 0$. Wykaż, że $f(14 - 6\sqrt{5}) = 3 - \sqrt{5}$.

2. Wyznaczanie dziedziny funkcji

Umiejętności:

- wyznaczanie dziedziny funkcji określonej za pomocą wzoru

Sposób wyznaczania dziedziny funkcji, gdy jest ona przedstawiona za pomocą tabeli, grafu czy opisu słownego, pokazaliśmy w poprzednim rozdziale. Zajmiemy się teraz wyznaczaniem dziedziny funkcji liczbowych danych wzorem.

Przyjmujemy następującą zasadę:

jeżeli obok wzoru funkcji liczbowej nie jest podana dziedzina, to zakładamy, że dziedziną tej funkcji jest zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których można obliczyć wartość funkcji.

Sposób wyznaczania dziedziny funkcji pokażemy na przykładach.

Przykład 1

Wyznamy dziedziny podanych funkcji.

a) $f(x) = x^2 - 4$ ← w miejsce x można podstawić dowolną liczbę rzeczywistą

Odp.: $D = \mathbf{R}$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ ← w miejsce x nie można podstawić liczby 0

Odp.: $D = \mathbf{R} - \{0\}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$
 $x \geq 0$ ← w miejsce x nie można podstawić liczby ujemnej

Odp.: $D = \langle 0; \infty \rangle$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 5$ ← argumenty funkcji muszą spełniać dwa warunki:
 $x \geq 0$ jako wyrażenie pod pierwiastkiem i $\sqrt{x} \neq 0$ jako wyrażenie z mianownika

Odp.: $D = (0; \infty)$

e) $f(x) = \frac{1-x}{(x-2)x}$ ← do wyrażenia w liczniku możemy podstawić dowolną liczbę

$(x-2)x \neq 0$ ← mianownik różny od zera

$x-2 \neq 0$ i $x \neq 0$ ← iloczyn wyrażeń jest różny od zera tylko wtedy, gdy każdy z jego czynników jest różny od zera

$\begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$

Odp.: $D = \mathbf{R} - \{0, 2\}$

Uwagi metodyczne

Ważnym tematem jest wyznaczanie dziedziny funkcji. W podręczniku pokazujemy wiele rozwiązanych przykładów, aby uświadomić uczniom, że dziedzinę możemy „narzucić” podczas definiowania funkcji. Tylko wtedy, gdy tego nie zrobimy, pojawia się zadanie: *Wyznacz dziedzinę (czyli zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których można obliczyć wartość funkcji).* Oznaczenie D , które stosujemy dla dziedziny funkcji, jest dość powszechne. Inne oznaczenia dziedziny funkcji występujące w podręcznikach to np.: X , D_f .

ZZ i MKP

tematy 4.1, 4.5

Multiteka

- Czy podany rysunek przedstawia wykres funkcji
- Sposoby opisu funkcji

dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 3.2

 **Generator**
testów i sprawdzianów

$$f) f(x) = \frac{x}{x}$$

← mianownik różny od zera

$$\text{Odp.: } D = \mathbf{R} - \{0\}$$

Po skróceniu ułamka wzór funkcji przyjmie postać $f(x) = 1$, nie zmienia to jednak jej dziedziny.

Dziedzinę funkcji wyznaczamy **przed** wykonaniem przekształceń we wzorze tej funkcji.



$$g) f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

← dla dowolnej liczby podstawionej w miejsce x otrzymujemy $x^2 + 1 > 0$

$$\text{Odp.: } D = \mathbf{R}$$

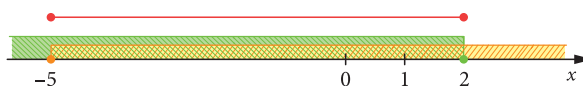
$$h) f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+5}$$

← żadne z wyrażeń pod pierwiastkiem nie może być ujemne

$$\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x+5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -5 \end{cases}$$

← wynik odczytujemy z osi liczbowej



$$\text{Odp.: } D = \langle -5; 2 \rangle$$

$$i) f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{(x-1)^2}$$

$$x \geq 0$$

← założenie dotyczące liczby pod pierwiastkiem

$$(x-1)^2 \neq 0$$

← założenie dotyczące mianownika

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

← liczby spełniające obydwa założenia

$$\text{Odp.: } D = \langle 0; 1 \rangle \cup (1; \infty)$$

$$j) f(x) = \sqrt{|x-3|} - 2$$

$$|x-3| - 2 \geq 0$$

← założenie dotyczące liczby pod pierwiastkiem

$$|x-3| \geq 2$$

$$x \leq 1 \text{ lub } x \geq 5$$

$$\text{Odp.: } D = (-\infty; 1) \cup (5; \infty)$$

$$k) f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-|x|}}$$

$$2-|x| > 0$$

← założenie dotyczące liczby pod pierwiastkiem w mianowniku

$$|x| < 2$$

$$\text{Odp.: } D = (-2; 2)$$

Przykład 2 ◀ zad. 2.13

Wyznamy dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{|x-5| - x + 1}$.

Rozwiązanie

$$|x-5| - x + 1 \geq 0$$

← założenie dotyczące liczby pod pierwiastkiem

Zapisujemy nierówność w postaci dwóch układów.

$$\begin{cases} x-5 \geq 0 \\ (x-5) - x + 1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x-5 \leq 0 \\ (-x+5) - x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x-5-x+1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x \leq 5 \\ -x+5-x+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ -4 \geq 0 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x \leq 5 \\ -2x \geq -6 \end{cases}$$

W pierwszym układzie otrzymaliśmy nierówność sprzeczną, zatem nie spełnia go żadna liczba. Drugi układ jest spełniony przez liczby

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ x \leq 3 \end{cases}, \text{ czyli } x \leq 3.$$

Odp.: $D = (-\infty; 3)$

Przykład 3 ◀ zad. 2.7

Wyznamy wartość parametru m , dla której dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x-1}{3x-m}$ jest zbiór $D = \mathbf{R} - \{5\}$.

Rozwiązanie

$$3x - m \neq 0$$

← założenie dotyczące mianownika

$$x \neq \frac{m}{3}$$

$$D = \mathbf{R} - \left\{ \frac{m}{3} \right\}$$

Zatem $\frac{m}{3} = 5$, czyli $m = 15$.

Odp.: $m = 15$

Przykład 4 ◀ zad. 2.19

Funkcja przyporządkowuje długości x boku prostokąta o obwodzie 20 pole P tego prostokąta. Wyznamy wzór i dziedzinę tej funkcji.

Rozwiązanie

Oznaczymy długość drugiego boku prostokąta przez y . Wówczas:

$$2x + 2y = 20$$

← obwód prostokąta wynosi 20

$$x + y = 10$$

◀2.13. Wyznam dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = \sqrt{|x+1| - 4x + 3}$

b) $f(x) = \sqrt{|x-2| + 3|x| - 6}$

c) $f(x) = \sqrt{|7 - |x+2|| - 3}$

d)

$f(x) = \sqrt{|x+4| - 2|x-2| + 4 - x}$

e) $f(x) = \sqrt{|4-2x| + |x| - 3x + 2}$

f) $f(x) = \sqrt{5x - |3+x| + 2|x-1|}$

Odp.: a) $\left(-\infty; 1\frac{1}{3}\right)$

b) $(-\infty; -1) \cup (2; \infty)$

c) $(-\infty; -12) \cup (-6; 2) \cup (8; \infty)$

d) $\langle -2; 6 \rangle$

e) $\left(-\infty; 1\frac{1}{2}\right)$

f) $\left\langle \frac{1}{2}; \infty \right\rangle$

◀2.7. Dla jakiej wartości parametru m dziedziną funkcji

$f(x) = \frac{x+2}{2x-m}$ jest zbiór

$D = \mathbf{R} - \{3\}$?

Odp.: $m = 6$

◀2.19. Niech x oznacza długość ramienia trójkąta równoramiennego o podstawie równej 10. Funkcja $f(x)$ przyporządkowuje zmiennej x obwód tego trójkąta. Podaj wzór funkcji i jej dziedzinę.

Odp.: $f(x) = 2x + 10$, $D = (5; \infty)$

$$\begin{aligned}
 y &= 10 - x && \leftarrow \text{wyznaczamy } y \text{ za pomocą } x \\
 P &= xy = x(10 - x) && \leftarrow \text{wyznaczamy pole prostokąta} \\
 P(x) &= x(10 - x) && \leftarrow \text{wzór szukanej funkcji}
 \end{aligned}$$

Dziedzinę funkcji najwygodniej jest wyznaczyć z warunków opisanych w treści zadania. Wyrażenia x oraz $10 - x$ oznaczają długości boków prostokąta. Zatem:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 10 - x > 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{długości boków są liczbami dodatnimi}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < 10 \end{cases}, \text{ czyli } x \in (0; 10)$$

Odp.: $P(x) = x(10 - x)$, $D = (0; 10)$

Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytach.

Odpowiedzi i rozwiązania

2.1. B

2.1. Wskaż dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$.

A. $\mathbf{R} - \{1\}$ B. $\mathbf{R} - \{2\}$ C. $(2; \infty)$ D. $(1; 2) \cup (2; \infty)$

2.2. D

2.2. Wskaż funkcję, której dziedziną jest przedział $(-\infty; 5)$.

A. $f(x) = \sqrt{x-5}$ B. $f(x) = \sqrt{5-x}$ C. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-5}}$ D. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5-x}}$

2.3. C

2.3. Wskaż funkcję, której dziedziną nie jest zbiór liczb rzeczywistych.

A. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5$ B. $f(x) = \frac{1}{2}$ C. $f(x) = \frac{x}{2x}$ D. $f(x) = \sqrt{x^2}$

2.4. a) $D = \mathbf{R}$ b) $D = \mathbf{R} - \{5\}$

c) $D = \mathbf{R}$ d) $D = \mathbf{R} - \{2\sqrt{3}\}$

2.4. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = 3$ b) $f(x) = \frac{3}{x-5}$ c) $f(x) = x^3 - 1$ d) $f(x) = \frac{x + \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - x}$

2.5. a) $D = \langle 0; \infty \rangle$

b) $D = \langle 3; \infty \rangle$ c) $D = (-\infty; 5)$

d) $D = (-\infty; 7)$ e) $D = \langle 1; \infty \rangle$

f) $D = \{3\}$

2.5. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = x + \sqrt{x}$ c) $f(x) = \sqrt{5-x}$ e) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x}$
 b) $f(x) = \sqrt{x-3}$ d) $f(x) = x^3 + 5 + \sqrt{7-x}$ f) $f(x) = \sqrt{2x-6} - 3\sqrt{3-x}$

2.6. a) $D = \langle -3; \infty \rangle - \{1\}$

b) $D = \mathbf{R} - \{-1, 3\}$

c) $D = (-\infty; 3) - \{0\}$

d) $D = (-\infty; 4) - \{-1\}$

2.6. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $k(x) = \frac{2x - \sqrt{x+3}}{x-1}$ c) $k(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{x}$
 b) $k(x) = \frac{x+5}{(x+1)(x-3)}$ d) $k(x) = \frac{\sqrt{4-x}+5}{x+1}$

2.7. $m = 6$

2.7. Dla jakiej wartości parametru m dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x+2}{2x-m}$ jest zbiór $D = \mathbf{R} - \{3\}$?

2.8. Dla jakiej wartości parametru m dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{x-3m}$ jest zbiór $D = \langle -12; \infty \rangle$?

D

2.9. Wykaż, że nie istnieje taka wartość parametru m , dla której dziedziną funkcji

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-3m}}{2x+m}$$

jest zbiór $D = \langle -6; \infty \rangle - \{2\}$.

2.10. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = |x-4|$ c) $f(x) = \frac{1}{|x|-5}$ e) $f(x) = \sqrt{|x+4|-4}$

b) $f(x) = \frac{1}{|x+2|}$ d) $f(x) = \frac{|x|-1}{|x|+1}$ f) $f(x) = \frac{1}{|x-10|-4}$

2.11. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = \frac{7}{\sqrt{|x|-7}}$ c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|+6}}$

b) $f(x) = \sqrt{2-|x|}$ d) $f(x) = \frac{\sqrt{2-|x-3|}}{5}$

2.12. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = \frac{\sqrt{|x|-5}}{x+5}$ d) $f(x) = \frac{1}{|x|-3} + \sqrt{|x|-2}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{3-|x|}$ e) $f(x) = \frac{\sqrt{|x-1|-1}}{\sqrt{4-|x-3|}}$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{|x+1|-2}}{\sqrt{|x-2|+1}}$ f) $f(x) = \frac{\sqrt{|5-|x+3||}}{|x-3|-1}$

2.13. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = \sqrt{|x+1|-4x+3}$ d) $f(x) = \sqrt{|x+4|-2|x-2|+4-x}$

b) $f(x) = \sqrt{|x-2|+3|x|-6}$ e) $f(x) = \sqrt{|4-2x|+|x|-3x+2}$

c) $f(x) = \sqrt{|7-|x+2||-3}$ f) $f(x) = \sqrt{5x-|3+x|+2|x-1|}$

2.14. Sprawdź, czy istnieje taka wartość parametru m , dla której dziedziną funkcji

$$f(x) = \frac{1}{|2x-3|-m}$$

jest zbiór $D = \mathbf{R} - \{1, 2\}$.

2.15. Sprawdź, czy istnieje taka wartość parametru m , dla której dziedziną funkcji

$$f(x) = \sqrt{5-|x+m|}$$

jest zbiór $D = \langle 0; 5 \rangle$.

* **2.16.** Dla jakiej wartości parametru m dziedziną funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{x-|m+1|}}{|x-2|+m}$ jest zbiór $D = \langle 1; \infty \rangle - \{4\}$?

2.8. $m = -4$

2.10. a) $D = \mathbf{R}$ b) $D = \mathbf{R} - \{-2\}$

c) $D = \mathbf{R} - \{-5, 5\}$ d) $D = \mathbf{R}$

e) $D = (-\infty; -8) \cup \langle 0; \infty \rangle$

f) $D = \mathbf{R} - \{6, 14\}$

2.11. a) $D = (-\infty; -7) \cup \langle 7; \infty \rangle$

b) $D = \langle -2; 2 \rangle$ c) $D = \mathbf{R}$

d) $D = \langle 1; 5 \rangle$

2.12. a) $D = (-\infty; -5) \cup \langle 5; \infty \rangle$

b) $D = (-\infty; 2) - \{-3\}$

c) $D = (-\infty; -3) \cup \langle 1; \infty \rangle$

d) $D = (-\infty; -2) \cup \langle 2; \infty \rangle - \{-3, 3\}$

e) $D = (-1; 0) \cup \langle 2; 7 \rangle$

f) $D = \mathbf{R} - \{2, 4\}$

2.13. a) $\left(-\infty; 1\frac{1}{3}\right)$

b) $(-\infty; -1) \cup \langle 2; \infty \rangle$

c) $(-\infty; -12) \cup \langle -6; 2 \rangle \cup \langle 8; \infty \rangle$

d) $\langle -2; 6 \rangle$ e) $\left(-\infty; 1\frac{1}{2}\right)$

f) $\left\langle \frac{1}{2}; \infty \right\rangle$

2.14. tak, $m = 1$

2.15. Dziedziną funkcji f jest zbiór rozwiązań nierówności $5 - |x+m| \geq 0$, czyli przedział $\langle -5-m; 5-m \rangle$. Zbiór $D = \langle 0; 5 \rangle$ byłby więc dziedziną, gdyby $-5-m = 0$ i $5-m = 5$, czyli $m = -5$ i $m = 0$, co jest niemożliwe. Zatem nie istnieje szukana wartość parametru m .

2.16. Dziedziną funkcji f jest zbiór rozwiązań układu $x - |m+1| \geq 0$ i $|x-2| + m \neq 0$. Zbiór $D = \langle 1; \infty \rangle - \{4\}$ jest więc dziedziną, gdy $|m+1| = 1$ i jedynym rozwiązaniem równania $|x-2| + m = 0$ w przedziale $\langle 1; \infty \rangle$ jest liczba 4. Tak jest dla $m = -2$.

2.17. a) np.

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x-7)(x-9)}$$

b) np. $f(x) = \sqrt{x+6}$ **c)** np. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{7-x}}$ **d)** np. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x+3|-6}}$ **e)** np. $f(x) = \sqrt{|2-x|-4}$ **f)** np. $f(x) = \frac{\sqrt{|x-4|-1}}{x}$ **2.18.** $f(x) = 3x$, $D = (0; \infty)$ **2.19.** $f(x) = 2x + 10$, $D = (5; \infty)$ **2.20.** $f(x) = 20 - 2x$, $D = (5; 10)$ **2.21.** $P(d) = \frac{1}{2}d(5-d)$, $D = (0; 5)$ **2.22. a)** $y = 6x^2 + 12x$,
 $D = (0; \infty)$ **b)** $y = x^3 + 3x^2$, $D = (0; \infty)$ *** 2.17.** Podaj przykład funkcji, której dziedziną jest wskazany zbiór.**a)** $D = \mathbf{R} - \{3, 7, 9\}$ **d)** $D = (-\infty; -9) \cup (3; \infty)$ **b)** $D = \langle -6; \infty)$ **e)** $D = (-\infty; -2) \cup \langle 6; \infty)$ **c)** $D = (-\infty; 7)$ **f)** $D = (-\infty; 3) \cup \langle 5; \infty) - \{0\}$ **2.18.** Podaj wzór i określ dziedzinę funkcji, która długości x boku trójkąta równobocznego przyporządkowuje obwód tego trójkąta.**2.19.** Niech x oznacza długość ramienia trójkąta równoramiennego o podstawie równej 10. Funkcja $f(x)$ przyporządkowuje zmiennej x obwód tego trójkąta. Podaj wzór funkcji i jej dziedzinę.**2.20.** Niech x oznacza długość ramienia trójkąta równoramiennego o obwodzie równym 20. Funkcja $f(x)$ przyporządkowuje zmiennej x długość podstawy tego trójkąta. Podaj wzór funkcji i jej dziedzinę.**2.21.** Suma długości przekątnych rombu jest równa 5. Podaj wzór oraz dziedzinę funkcji, która długości d jednej z przekątnych rombu przyporządkowuje jego pole.**2.22.** W prostopadłościanie o podstawie kwadratowej krawędź boczna jest o 3 jednostki dłuższa od krawędzi podstawy. Podaj wzór i określ dziedzinę funkcji, która długości krawędzi podstawy przyporządkowuje

- pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu.
- objętość tego prostopadłościanu.

Prosto do matury**1.** F, P, P**2.** $D = (-\infty; 2)$ **3.** $D = \langle -4; 2)$ **4.** $D = \langle -\frac{1}{2}; \infty) - \{4\}$ **5.** $f(x) = x + 32$, $D = (0; 32)$ **Prosto do matury****1.** Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{mx+1}$. Oceń prawdziwość podanych zdań.**A.** Dla $m = -2$ dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \langle \frac{1}{2}; \infty)$.**B.** Dla $m = \frac{1}{2}$ dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \langle -2; \infty)$.**C.** Dla pewnej wartości m dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych.**2.** Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = x^2 + 1 + \sqrt{2-x}$.**3.** Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{3-|x+1|}$.**4.** Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{4x+2}}{|2x-3|-5}$.**5.** Niech x oznacza długość podstawy trójkąta równoramiennego o ramieniu równym 16. Funkcja $f(x)$ przyporządkowuje zmiennej x obwód tego trójkąta. Podaj wzór funkcji i jej dziedzinę.**Uwagi metodyczne**

W części zadaniowej umieściliśmy kilka nietypowych zadań nawiązujących do geometrii; przynajmniej jedno z nich trzeba rozwiązać w klasie. Odpowiednie może być zadanie 2.20. Prawdopodobnie podanie wzoru $f(x) = 20 - 2x$ nie będzie trudne, bo uczniowie mają za sobą trening w układaniu równań do zadań tekstowych, ale już określenie dziedziny tej funkcji może stwarzać kłopoty. To dobra okazja, żeby się uczyć na własnych błędach.

Można np. pytać:

- Co oznacza zmienna x ?
- Jakich liczb nie można za nią podstawiać?
- Czy każda liczba dodatnia może być długością boku trójkąta?
- Jakie są ograniczenia?

Można też zrobić inaczej – poprosić uczniów o obliczenie wartości wyznaczonej funkcji np. dla $x = 30$ i interpretację wyniku.

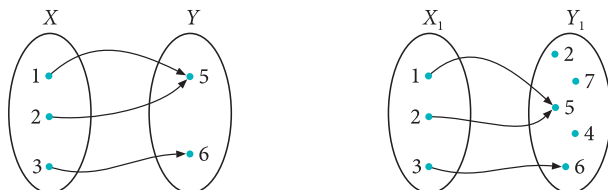
3. Zbiór wartości funkcji

Umiejętności:

- wyznaczanie zbioru wartości funkcji
- obliczanie, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość

W definicji funkcji jest mowa o dwóch zbiorach: X i Y . Definicja narzuca ściśle warunki elementom zbioru X , niewiele natomiast mówi o elementach zbioru Y .

Przyjrzyjmy się następującym rysunkom.



Oba grafy przedstawiają przyporządkowania będące funkcjami. Każda z nich tym samym argumentom przyporządkowuje takie same wartości. Różnica między grafami polega na tym, że w zbiorze Y_1 są „niewykorzystane” elementy. Wygodnie jest wyodrębnić ze zbioru Y_1 te elementy, które są przyporządkowane jakimś elementom zbioru X_1 . Otrzymany w ten sposób zbiór nazywamy **zbiorem wartości funkcji** i oznaczamy w tym podręczniku ZW .

Wyznaczenie zbioru wartości funkcji, bardzo proste w wypadku grafów czy tabel, może być bardziej skomplikowanym zadaniem matematycznym dla funkcji określonych za pomocą wzoru.

Przykład 1

Wyznamy zbiór wartości funkcji $f(x) = -3x$, której dziedziną jest zbiór $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Rozwiązanie

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	-3	-6	-9	-12

← przedstawiamy funkcję w postaci tabeli

Odp.: $ZW = \{0, -3, -6, -9, -12\}$

Uwagi metodyczne

Bardzo ważną umiejętnością jest obliczanie wartości funkcji określonej za pomocą wzoru. Oznaczenie zbioru wartości ZW wydaje się wygodne. W różnych podręcznikach i innych publikacjach używa się Y na oznaczenie zbioru wartości funkcji. Warto wyjaśnić uczniom, że tylko niektóre oznaczenia są identyczne we wszystkich książkach matematycznych. Różnice pojawiają się nawet przy nazywaniu zbiorów liczbowych (np.: $C = Z$, $W = Q$).

Funkcje f i g określone na tej samej dziedzinie i przyporządkowujące każdemu argumentowi x wartości takie, że $f(x) = g(x)$, nazywamy **funkcjami równymi**.

ZZ i MKP

tematy 4.1, 4.5

Multiteka

- Czy podany rysunek przedstawia wykres funkcji
- Sposoby opisu funkcji

dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 3.3

Generator
testów i sprawdzianów

◀3.5. Wyznacz zbiór wartości funkcji, która każdej liczbie naturalnej przypisuje jej resztę z dzielenia przez 7.

Odp.: $ZW = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

◀3.8. Niech $f(x) = \frac{1}{x}$ dla $x \in \langle 1; \infty \rangle$. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

Odp.: $ZW = (0; 1)$

◀3.10. Dla funkcji o danym wzorze i wskazanej dziedzinie sprawdź, która z podanych obok liczb należy do zbioru wartości tej funkcji.

a) $f(x) = x - 3$, $D = \langle 0; \infty \rangle$; $-5, -1, 3, 5$

b) $g(x) = 2x$, $D = \mathbb{N}$; $4, 1, 3, 8$

c) $h(x) = \frac{1}{x}$, $D = \mathbb{Z} - \{0\}$;

$\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 2, -1$

d) $m(x) = (x+1)^2 - (x-1)^2$,
 $D = (-2; 2)$; $-10, -4, 0, 4, 8, 10$

Odp.: a) $-1, 3, 5$ b) $4, 8$

c) $\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1$ d) $-4, 0, 4$

Przykład 2

Określimy zbiór wartości funkcji g , która każdej liczbie naturalnej z przedziału $\langle 5; 10 \rangle$ przyporządkowuje liczbę jej dodatnich dzielników; np. $g(6) = 4$, ponieważ liczba 6 ma cztery dodatnie dzielniki: 1, 2, 3, 6.

Rozwiązanie

x	5	6	7	8	9	10
$g(x)$	2	4	2	4	3	4

Odp.: $ZW = \{2, 3, 4\}$

Przykład 3 ◀ zad. 3.5

Wyznamy zbiór wartości funkcji, która każdej liczbie naturalnej przypisuje jej resztę z dzielenia przez 3.

Rozwiązanie

Każda liczba naturalna daje w wyniku dzielenia przez 3 resztę 0 lub 1, lub 2. Zatem $ZW = \{0, 1, 2\}$.

Przykład 4 ◀ zad. 3.8

Niech $f(x) = -x$ dla $x \in (0; \infty)$. Wyznamy zbiór wartości tej funkcji.

Rozwiązanie

Funkcja f przyporządkowuje dodatnim liczbom rzeczywistym liczby do nich przeciwne. Zatem:

- wszystkie wartości funkcji są liczbami ujemnymi,
- każda liczba ujemna jest wartością tej funkcji, ponieważ jest przyporządkowana pewnej liczbie dodatniej.

Odp.: $ZW = (-\infty; 0)$

Przykład 5 ◀ zad. 3.10

Sprawdzimy, czy liczba 5 należy do zbioru wartości funkcji $f(x) = 3x - 1$ o dziedzinie $D = \langle 0; \infty \rangle$.

Rozwiązanie

Szukamy odpowiedzi na pytanie, czy w podanej dziedzinie znajduje się argument x , któremu funkcja przyporządkowuje liczbę 5.

$$f(x) = 5$$

$$3x - 1 = 5$$

◀ rozwiązuujemy odpowiednie równanie

$$x = 2, \text{ liczba } 2 \text{ należy do przedziału } \langle 0; \infty \rangle \text{ i } f(2) = 5$$

Odp.: Liczba 5 należy do zbioru wartości funkcji f .

Przykład 6

Sprawdźmy, czy liczba 7 należy do zbioru wartości funkcji $g(x) = x - 3$, której dziedziną jest zbiór $D = \langle -2; 2 \rangle$.

Rozwiązanie

Rozwiązujemy równanie $g(x) = 7$.

$$x - 3 = 7$$

$$x = 10$$

← sprawdzamy, czy liczba 10 należy do dziedziny

10 nie należy do przedziału $\langle -2; 2 \rangle$.

Odp.: Liczba 7 nie należy do zbioru wartości tej funkcji.

Przykład 7 ◀ zad. 3.12

Zbiorem wartości funkcji f jest $ZW = \{-1, 1, 3\}$. Wyznamy dziedzinę D , jeżeli $f(x) = 2x + 1$.

Rozwiązanie

Szukamy liczb, którym funkcja przyporządkowuje dane wartości. W tym celu rozwiążemy odpowiednie równania.

$$2x + 1 = -1$$

$$2x = -2$$

$$x = -1$$

$$2x + 1 = 1$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

$$2x + 1 = 3$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

Odp.: Dziedziną funkcji jest zbiór $D = \{-1, 0, 1\}$.

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytach.

3.1. Wskaż zbiór wartości funkcji $f(x) = \frac{2}{3x}$, której dziedziną jest zbiór $\{1, 2, 3\}$.

A. $\left\{\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, 1\right\}$

B. $\left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$

C. $\left\{\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$

D. $\left\{\frac{2}{9}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right\}$

3.2. Wskaż liczbę należącą do zbioru wartości funkcji $f(x) = 4x - 3$, której dziedziną jest zbiór liczb całkowitych.

A. 100

B. 101

C. 102

D. 103

3.3. Dziedziną funkcji jest zbiór $\{-2, 0, 2\}$. Wskaż zbiór, który nie może być zbiorem wartości tej funkcji.

A. $\{0\}$

B. $\{0, \sqrt{3}\}$

C. $\{-2, 0, 2\}$

D. $\{-2, -1, 1, 2\}$

◀ 3.12. Dana jest funkcja

$y = f(x)$ oraz jej zbiór wartości ZW . Wyznacz dziedzinę D tej funkcji.

a) $f(x) = x - 1$, $ZW = \{0, 3, 5\}$

b) $f(x) = 2x$, $ZW = \{-4, 6, 100\}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $ZW = \{0, 1, 2\}$

d) $f(x) = \frac{9}{x}$, $ZW = \{-3, 3, 9\}$

Odp.: a) $D = \{1, 4, 6\}$

b) $D = \{-2, 3, 50\}$

c) $D = \{0, 1, 4\}$

d) $D = \{-3, 1, 3\}$

Odpowiedzi i rozwiązania

3.1. C

3.2. B

3.3. D

3.4. a) $ZW = \{-4, -1, 2, 5\}$

b) $ZW = \{2, 5, 8, 11\}$

c) $ZW = \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8\right\}$

d) $ZW = \{-3, 0, 2\}$

3.5. $ZW = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

3.6. $ZW = \{4, 7, 8, 10, 11, 12, 15\}$

3.7. $ZW = \{12, 14, 16, 18, 20, 22\}$

3.8. $ZW = (0; 1)$

3.9. a) ZW – zbiór liczb całkowitych nieparzystych

b) $ZW = \{-1, 1\}$

c) $ZW = \langle 0; 3 \rangle$

d) $ZW = \{-1, 1\}$

3.10. a) $-1, 3, 5$

b) $4, 8$

c) $\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1$

d) $-4, 0, 4$

3.11. Wskazówka: Rozwiąż równanie $k(x) = 1$.

3.12. a) $D = \{1, 4, 6\}$

b) $D = \{-2, 3, 50\}$

c) $D = \{0, 1, 4\}$

d) $D = \{-3, 1, 3\}$

3.4. Wyznacz zbiór wartości funkcji.

a) $f(x) = 3x + \frac{1}{2}$ $D = \left\{-1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right\}$

b) $f(x) = 3\sqrt{x} - 1$ $D = \{1, 4, 9, 16\}$

c) $f(x) = 2^{x+1}$ $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

d) $f(x) = \log x$ $D = \{0, 001, 1, 100\}$

3.5. Wyznacz zbiór wartości funkcji, która każdej liczbie naturalnej przypisuje jej resztę z dzielenia przez 7.

3.6. Funkcja f przyporządkowuje każdej naturalnej liczbie dwucyfrowej podzielnej przez 13 sumę jej cyfr. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

3.7. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie x ze zbioru $D = \langle 10; 20 \rangle$ najmniejszą liczbę całkowitą parzystą większą od liczby x , np.: $f(17,3) = 18$, $f(\sqrt{120}) = 12$. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

*** 3.8.** Niech $f(x) = \frac{1}{x}$ dla $x \in \langle 1; \infty \rangle$. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

3.9. Wyznacz zbiór wartości funkcji.

a) $f(k) = 2k + 1$ $k \in \mathbf{Z}$

b) $f(n) = (-1)^n$ $n \in \mathbf{N}$

c) $f(x) = |x|$ $x \in \langle -3; 3 \rangle$

d) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ $x \in \mathbf{R} - \{0\}$

3.10. Dla funkcji o danym wzorze i wskazanej dziedzinie sprawdź, która z podanych obok liczb należy do zbioru wartości tej funkcji.

a) $f(x) = x - 3$ $D = \langle 0; \infty \rangle$ $-5, -1, 3, 5$

b) $g(x) = 2x$ $D = \mathbf{N}$ $4, 1, 3, 8$

c) $h(x) = \frac{1}{x}$ $D = \mathbf{Z} - \{0\}$ $\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 2, -1$

d) $m(x) = (x+1)^2 - (x-1)^2$ $D = (-2; 2)$ $-10, -4, 0, 4, 8, 10$

D

3.11. Dana jest funkcja $k(x) = |x| + 2$, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych. Wykaż, że liczba 1 nie należy do zbioru wartości tej funkcji.

3.12. Dana jest funkcja $y = f(x)$ oraz jej zbiór wartości ZW . Wyznacz dziedzinę D tej funkcji.

a) $f(x) = x - 1$ $ZW = \{0, 3, 5\}$ **c)** $f(x) = \sqrt{x}$ $ZW = \{0, 1, 2\}$

b) $f(x) = 2x$ $ZW = \{-4, 6, 100\}$ **d)** $f(x) = \frac{9}{x}$ $ZW = \{-3, 3, 9\}$

3.13. Podaj zbiór wartości funkcji, która każdemu kwadratowi o boku a przyporządkowuje jego pole, przy czym a jest liczbą podzielną przez 3 i mniejszą od 10.

* **3.14.** Podaj przykład funkcji o dziedzinie D i zbiorze wartości ZW .

- a) $D = \mathbf{R}$ $ZW = \mathbf{R}$ c) $D = \langle -1; \infty \rangle$ $ZW = (-\infty; 1]$
 b) $D = \mathbf{Z}$ $ZW = \mathbf{N}$ d) $D = \mathbf{R}$ $ZW = \{-1, 0, 2\}$

* **3.15.** Podaj przykład funkcji, której dziedziną jest zbiór liczb wymiernych, a zbiorem wartości – zbiór liczb całkowitych.

D * **3.16.** Dana jest funkcja $f(x) = \frac{2^x + 17}{2^x + 6}$, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych. Wykaż, że do zbioru wartości funkcji nie należy żadna liczba całkowita.

* **3.17.** O funkcji $y = f(x)$ wiadomo, że jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, a zbiorem wartości $ZW = \{-1, 1\}$. Czy z tych informacji wynika, że w pewnym przedziale $(a; b)$ dla wszystkich argumentów wartości funkcji są równe 1 albo dla wszystkich argumentów z tego przedziału wartości funkcji są równe -1 ?

Prosto do matury



1. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie całkowitej liczbę o 2 mniejszą od jej kwadratu. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Liczba -2 należy do zbioru wartości funkcji f .
 B. Liczba -1 należy do zbioru wartości funkcji f .
 C. Liczba 36 należy do zbioru wartości funkcji f .

2. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = x - 5$, znając jej zbiór wartości $ZW = \{-7, -5, -1\}$.

3. Sprawdź, czy liczba 3 należy do zbioru wartości funkcji $f(x) = |x - 5| - x + 1$.

4. Wyznacz zbiór wartości funkcji, która bokowi każdego kwadratu o obwodzie mniejszym od 20 przyporządkowuje pole tego kwadratu.

D 5. Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}$, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych. Wykaż, że liczba $7\sqrt{2}$ należy do zbioru wartości tej funkcji.

3.13. $ZW = \{9, 36, 81\}$

3.14. a) np. $f(x) = x$ dla $x \in \mathbf{R}$

b) np. $f(x) = |x|$ dla $x \in \mathbf{Z}$

c) np. $f(x) = -x$ dla $x \in \langle -1; \infty \rangle$

d) np. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ 2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

3.15. np. funkcja, która każdej liczbie wymiernej przyporządkowuje najmniejszą liczbę całkowitą większą lub równą danej liczbie

3.16. Gdyby liczba całkowita k była wartością funkcji dla pewnego argumentu $n \in \mathbf{N}$, prawdziwa

byłaby równość $k = \frac{2^n + 17}{2^n + 6}$,

czyli $k \cdot 2^n + 6k = 2^n + 17$, stąd $2^n(1 - k) = 6k - 17$. Lewa strona ostatniej równości jest parzysta, a prawa nie. Sprzeczność.

3.17. Nie. *Wskazówka:* Rozpatrz np. funkcję, która liczbom wymiernym przyporządkowuje 1, a liczbom niewymiernym przyporządkowuje -1 .

Prosto do matury

1. P, P, F

2. $D = \{-2, 0, 4\}$

3. tak, $f\left(1\frac{1}{2}\right) = 3$

4. $ZW = (0; 25)$

5. *Wskazówka:* Sprawdź, czy rozwiązaniem równania $f(x) = 7\sqrt{2}$ jest liczba naturalna.

Uwagi metodyczne

Zanim wprowadzimy wykres funkcji, wykonajmy ćwiczenia z układem współrzędnych. Słabszym uczniom takie zadania sprawiają duży kłopot. Myli im się nazewnictwo (oś odciętych, oś rzędnych), miewają problemy z odczytywaniem współrzędnych punktu. Jeżeli tej ostatniej umiejętności nie nabędą, dalsza część nauki o własnościach funkcji nie będzie miała sensu. Dlatego warto sięgnąć po różne, nawet zdawałoby się nieprzystające do szkoły ponadpodstawowej, sposoby: x przy osi opisywać jako „otwarte, tnące nożyczki”, wysłać krasnoludki biegające tylko po prostych równoległych do osi w celu odczytania współrzędnych – i nie żałować na takie zabiegi czasu. Wszystko zaś należy zakończyć sprawdzianem umiejętności.

4. Warto powtórzyć – układ współrzędnych

Prostokątnym układem współrzędnych nazywamy parę osi liczbowych umieszczonych na płaszczyźnie tak, by przecinały się pod kątem prostym w punkcie oznaczonym liczbą 0 na każdej z nich.

Oś poziomą nazywamy osią x lub osią **odciętych**, oś pionową – osią y lub osią **rzędnych**, a punkt przecięcia osi – **początkiem układu**.

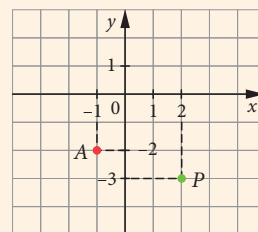
Każdemu punktowi płaszczyzny z wprowadzonym układem współrzędnych odpowiada para liczb rzeczywistych zwanych **współrzędnymi punktu**.

Na rysunku pokazujemy sposób wyznaczania współrzędnych punktu.

W danym układzie współrzędnych punktowi P odpowiada para liczb: 2, -3, co zapisujemy $P = (2, -3)$.

Każdej parze liczb odpowiada dokładnie jeden punkt płaszczyzny, np. parze $(-1, -2)$ odpowiada punkt A .

Można umieścić i nazwać osie układu współrzędnych zupełnie inaczej. Nie jest też konieczne, by odcinki jednostkowe na obu osiach miały jednakową długość. Matematycy przyjęli zasadę: pierwsza współrzędna punktu jest odczytywana z osi odciętych (x), a druga z osi rzędnych (y).



Układ współrzędnych łączy w pewnym sensie algebrę z geometrią, dlatego jest tak powszechnie używany. Wprowadzenie układu współrzędnych (choć nieco innego niż opisany wyżej) jest pomysłem francuskiego uczonego Kartezjusza (XVII w.), stąd używane są często nazwy – „kartezjański układ współrzędnych” i „płaszczyzna kartezjańska” (płaszczyzna z takim układem).

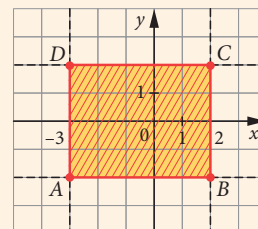
Przykład 1

Zaznaczmy czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-3, -2)$, $B = (2, -2)$, $C = (2, 2)$, $D = (-3, 2)$ i obliczmy jego pole.

Rozwiązanie

Boki tego czworokąta są równoległe do osi układu współrzędnych. $ABCD$ jest więc prostokątem, w którym $|AB| = 5$, a $|BC| = 4$.

Odp.: Pole prostokąta $ABCD$ jest równe 20.

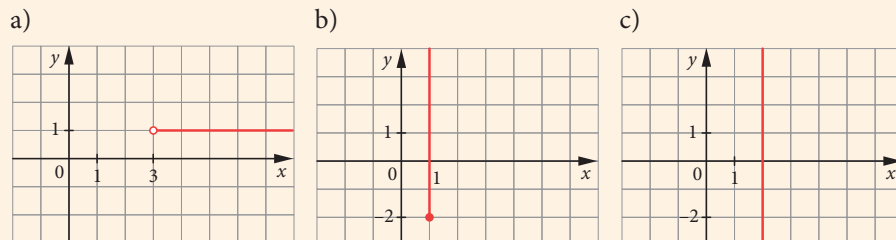


Przykład 2

Zaznaczmy na płaszczyźnie w układzie współrzędnych punkty, których współrzędne (x, y) spełniają podane warunki.

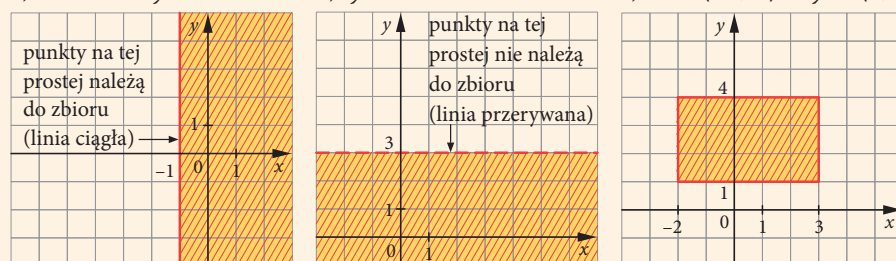
- a) $x > 3$ i $y = 1$
 b) $x = 1$ i $y \geq -2$
 c) $x = 2$

Jeżeli w warunku jest informacja tylko o jednej współrzędnej, to zakładamy, że druga może przyjmować dowolną wartość (choć najczęściej zapisujemy taką informację w postaci np. $y \in \mathbb{R}$).

Rozwiązanie**Przykład 3**

Zaznaczmy na płaszczyźnie zbiór wszystkich punktów, których współrzędne spełniają podane warunki.

- a) $x \geq -1$ i $y \in \mathbb{R}$ b) $y < 3$ i $x \in \mathbb{R}$ c) $x \in \langle -2; 3 \rangle$ i $y \in \langle 1; 4 \rangle$

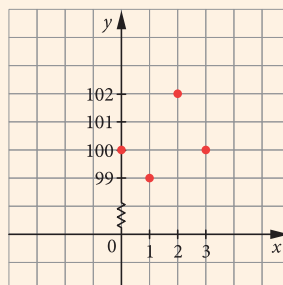
**Przykład 4**

Zaznaczmy na płaszczyźnie kartezjańskiej punkty, których współrzędne umieszczone są w tabeli.

x	0	1	2	3
y	100	99	102	100

Rozwiązanie

Aby zrobić czytelny rysunek, warto „skrócić” oś y .



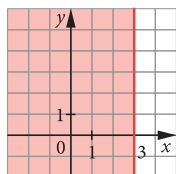
Odpowiedzi i rozwiązania

- 4.2. a) trójkąt prostokątny równoramienny
 b) równoległobok
 c) trapez równoramienny
 d) prostokąt

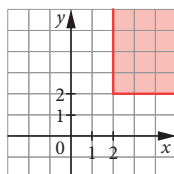
4.3. Czworokąt $ABCD$ jest prostokątem o polu 24.

4.4.

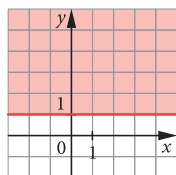
a)



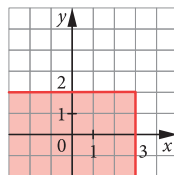
c)



b)

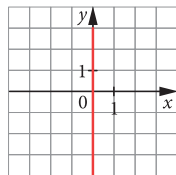


d)

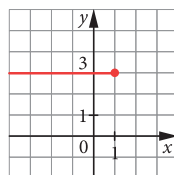


4.5.

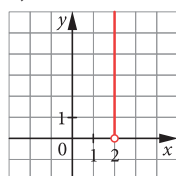
a)



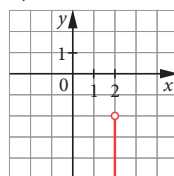
c)



b)

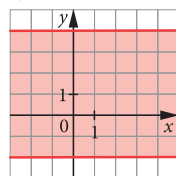


d)

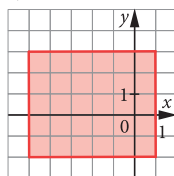


4.6.

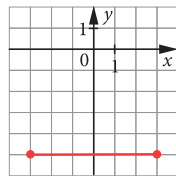
a)



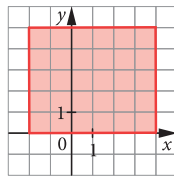
c)



b)



d)



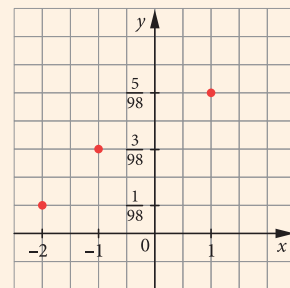
Przykład 5

Zaznaczmy w układzie współrzędnych punkty:

$$A = \left(-2, \frac{1}{98}\right), B = \left(-1, \frac{3}{98}\right) \text{ i } C = \left(1, \frac{5}{98}\right).$$

Rozwiązanie

W tym wypadku najlepiej przyjąć na osiach różne jednostki.



Zadania

4.1. Zaznacz w układzie współrzędnych podane punkty.

$$A = (0, -3), B = (-5, -1), C = (-5, 2), D = (2, -4), E = (3, 5), F = (-2, 0)$$

4.2. Narysuj w układzie współrzędnych wielokąt, którego kolejnymi wierzchołkami są podane punkty. Podaj nazwę tego wielokąta.

- a) $A = (-3, 1)$, $B = (5, 1)$, $C = (1, 5)$
 b) $K = (-2, -2)$, $L = (2, -2)$, $M = (8, 4)$, $N = (4, 4)$
 c) $P = (-3, -4)$, $Q = (4, 3)$, $R = (0, 2)$, $S = (-2, 0)$
 d) $D = (1, 0)$, $E = (6, 5)$, $F = (3, 8)$, $G = (-2, 3)$

4.3. Jakim czworokątem jest wielokąt $ABCD$, jeśli $A = (-2, -3)$, $B = (4, -3)$, $C = (4, 1)$, $D = (-2, 1)$? Oblicz jego pole.

4.4. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne spełniają podane warunki.

- a) $x \leq 3$ i $y \in \mathbf{R}$ b) $x \in \mathbf{R}$ i $y \geq 1$ c) $x \geq 2$ i $y \geq 2$ d) $x \leq 3$ i $y \leq 2$

4.5. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne spełniają podane warunki.

- a) $x = 0$ i $y \in \mathbf{R}$ b) $y > 0$ i $x = 2$ c) $x \leq 1$ i $y = 3$ d) $y < -2$ i $x = 2$

4.6. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne spełniają podane warunki.

- a) $y \in \langle -2; 4 \rangle$ i $x \in \mathbf{R}$ c) $x \in \langle -5; 1 \rangle$ i $y \in \langle -2; 3 \rangle$
 b) $x \in \langle -3; 3 \rangle$ i $y = -5$ d) $x \in \langle -2; 4 \rangle$ i $y \in \langle 0; 5 \rangle$

4.7. Które z podanych punktów należą do osi x ?

$$A = (-3, 7), B = (-4, 0), C = (\sqrt{2}, 0), D = \left(0, \frac{1}{3}\right), E = (-1, 5)$$

4.8. Które z podanych punktów należą do osi y ?

$$K = (2, -1), L = (0, 5), M = \left(-\frac{1}{2}, 0\right), P = (0, -\sqrt{3}), Q = (-4, -1)$$

4.7. B i C

4.8. L i P

5. Wykres funkcji

Umiejętności:

- określanie funkcji za pomocą wykresu

Każda funkcja liczbową łączy liczby w pary, które możemy przedstawić w postaci punktów na płaszczyźnie z układem współrzędnych.

Definicja

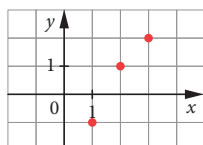
Wykresem funkcji liczbowej f ze zbioru X w zbiór Y nazywamy zbiór wszystkich punktów o współrzędnych $(x, f(x))$ dla $x \in X$.

Przykład 1

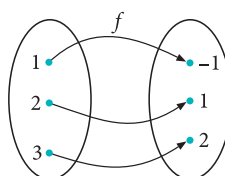
Narysujemy wykres funkcji określonej za pomocą grafu.

Rozwiązanie

Dziedziną funkcji jest zbiór trzech liczb, zatem wykresem funkcji jest zbiór trzech punktów.



Przyjmujemy zasadę, że pierwszą współrzędną punktu należącego do wykresu funkcji znajdujemy na poziomej osi x , a drugą – na pionowej osi y . Dziedzinę funkcji odczytujemy więc na osi x , a zbiór wartości na osi y .



Przykład 2

◀ zad. 5.5

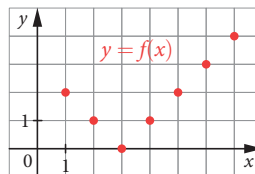
Narysujemy wykres funkcji $f(x) = |x - 3|$ o dziedzinie $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Rozwiązanie

Wyznaczamy wartości funkcji i zapisujemy je, np. w tabeli:

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	2	1	0	1	2	3	4

Wykres składa się z siedmiu punktów.

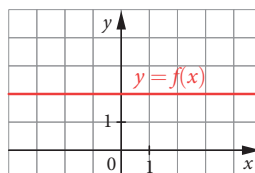


Przykład 3

Narysujemy wykres funkcji $f(x) = 2$, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie

Wykresem f jest prosta – zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których druga współrzędna jest równa 2.



Uwagi metodyczne

Rysujemy różne wykresy. Nie jesteśmy skrepowani wzorami funkcji, powinniśmy więc zaprezentować wiele możliwości, od prostych punktowych po skomplikowane, np. z asymptotami. Nasze doświadczenia wykazały, że uczniowie łatwiej opanowują ten temat, jeżeli wykresy są trudne, nieliniowe.

5.5. Sporządź wykres funkcji.

a) $f(x) = (-1)^x$,
 $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

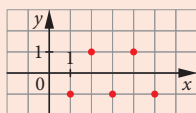
b) $f(x) = 2^x$,
 $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

c) $f(x) = -2\sqrt{x-1}$,
 $D = \{1, 2, 5, 10\}$

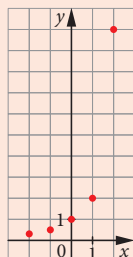
d) $f(x) = \sqrt{x^2}$,
 $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

5.5. Odp.:

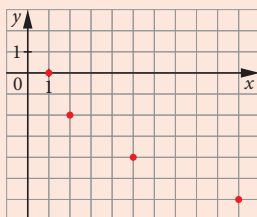
a)



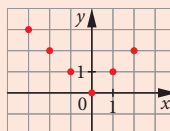
b)



c)



d)



ZZ i MKP

tematy 4.2, 4.3

Multiteka

- Czy podany rysunek przedstawia wykres funkcji

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 3.5

Generator
testów i sprawdzianów

Uwagi metodyczne

Trzeba przyzwyczajać uczniów do rysowania punktowych wykresów funkcji. Dobrymi przykładami są konkretne obserwacje, np. wykresy pomiaru temperatury, czy dane zaczerpnięte z rocznika statystycznego. Wiadomo, że łączenie kropek odcinkami jest matematycznym błędem, ale tak wyglądają wszystkie wykresy zamieszczane w mediach. Jest to podyktowane dbałością o czytelność i tak też można ten problem wyjaśnić uczniom.

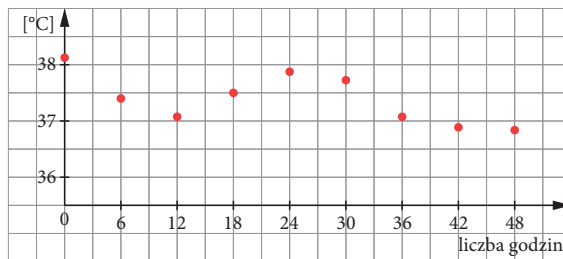
Podobnie – wykresem funkcji $g(x) = 5$ jest prosta równoległa do osi x będąca zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których druga współrzędna jest równa 5, a wykresem funkcji $h(x) = -\sqrt{3}$ jest prosta równoległa do osi x będąca zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których druga współrzędna jest równa $-\sqrt{3}$ itd. Dlatego przyjmujemy zasadę: jeśli chcemy zaznaczyć w układzie współrzędnych zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których druga współrzędna jest równa a , to piszemy krótko: **prowadzimy prostą o równaniu $y = a$** .

Przykład 4 ◀ zad. 5.7

W tabeli przedstawiono temperaturę ciała pacjenta mierzoną co 6 godzin.

Kolejne godziny	0	6	12	18	24	30	36	42	48
Temperatura [°C]	38,2	37,4	37,1	37,5	37,9	37,7	37,1	36,9	36,8

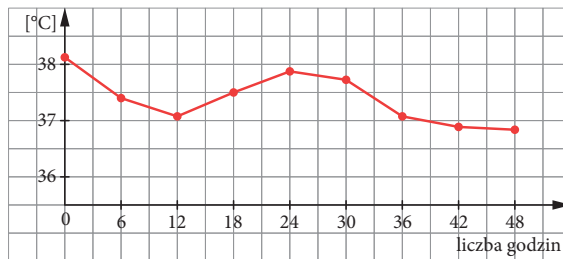
Sporządzimy wykres funkcji, która czasowi obserwacji (w godzinach) przyporządkowuje zarejestrowaną temperaturę (w °C).

Rozwiązanie

Aby wykres był czytelny, często przyjmuje się różne odcinki jednostkowe na osiach.

Zauważmy, że jednostki na osi pionowej zaznaczone są nie od 0.

Dziedzina funkcji składa się z kilku liczb, więc wykres również składa się z kilku punktów. W praktyce często łączy się je odcinkami, aby uzyskać następujący wykres:



Oczywiście nie jest to wykres funkcji z podanej tabeli, gdyż pomiar nie był wykonany w sposób ciągły i nie mamy pewności, czy np. po upływie trzech godzin temperatura wynosiła 37,8°C. Jest on jednak bardziej czytelny od poprzedniego i pozwala łatwiej stwierdzić, kiedy temperatura rosła, a kiedy malała, a w dodatku – kiedy rosła lub malała najszybciej.

◀ 5.7. Tabela przedstawia ceny biletów normalnych na dystansie nie większym od 50 km w pociągach Kolei Mazowieckich obowiązujące w 2018 r.

Odległość [km]	(0; 5)	(5; 10)	(10; 15)	(15; 20)	(20; 30)	(30; 40)	(40; 50)
Cena biletu [zł]	3,70	5,80	6,80	8,10	10,50	11,80	13,80

Na podstawie tabeli narysuj wykres funkcji, która przyporządkowuje liczbie przebytych kilometrów cenę biletu za przejazd.

Przykład 5 ◀ zad. 5.12

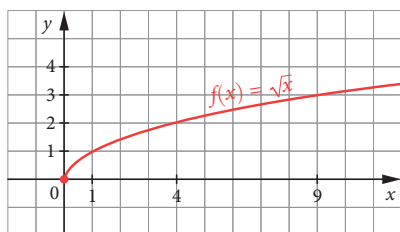
Narysujemy wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$.

Rozwiązanie

Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb nieujemnych. Jest to zbiór nieskończony, dlatego w tabeli umieścimy tylko kilka liczb wybranych z dziedziny.

x	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	2	4	9	100
$f(x) = \sqrt{x}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	3	10

Aby dokładnie narysować wykres tej funkcji, trzeba wyznaczyć o wiele więcej punktów, niż zrobiliśmy to w tabeli. Można w tym celu wykorzystać kalkulator graficzny albo komputer.

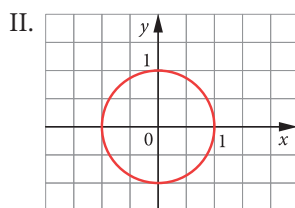
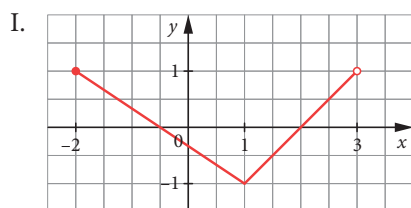


Zauważmy, że ten wykres nie jest zakończony z prawej strony kółeczkiem (pustym lub zamalowanym). W ten sposób zaznaczamy, że funkcja jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich. To oznacza, że linia wykresu ciągnie się dalej, a funkcja nie zmienia swoich własności. Taką konwencję stosujemy we wszystkich naszych podręcznikach.

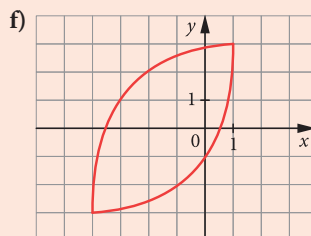
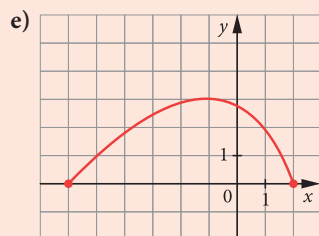
W powyższych przykładach sporządziliśmy wykresy na podstawie poznanych sposobów przedstawiania funkcji. Często jednak jest odwrotnie – dany jest wykres, a my mamy za zadanie stwierdzić, czy przedstawia on funkcję, i ewentualnie opisać jej własności.

Przykład 6 ◀ zad. 5.13

Który z poniższych wykresów przedstawia funkcję?

**Rozwiązanie**

Zgodnie z definicją funkcji dla każdego argumentu x istnieje dokładnie jedna liczba y taka, że $f(x) = y$. Zatem dla każdego x istnieje najwyżej jeden punkt wykresu funkcji o pierwszej współrzędnej x .



Odp.: a) tak b) nie c) tak d) nie e) tak f) nie

◀5.12. Wyznacz dziedzinę funkcji $y = f(x)$ i narysuj jej wykres.

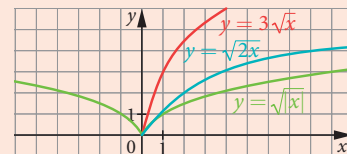
a) $f(x) = 3\sqrt{x}$

b) $f(x) = \sqrt{|x|}$

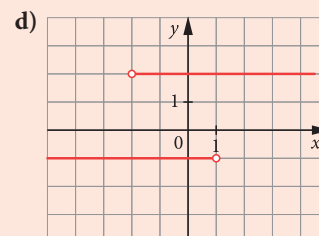
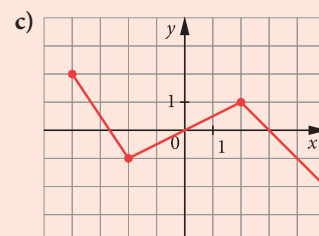
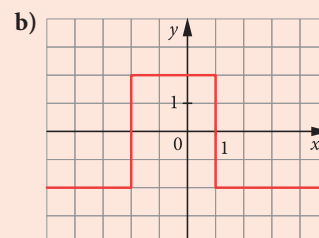
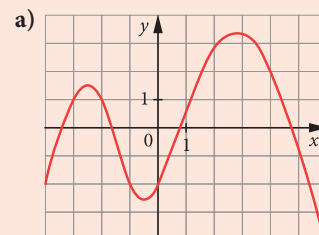
c) $f(x) = \sqrt{2x}$

Odp.: a) $D = \langle 0; \infty \rangle$ b) $D = \mathbb{R}$

c) $D = \langle 0; \infty \rangle$

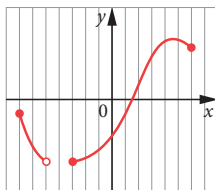


◀5.13. Czy podany rysunek przedstawia wykres funkcji?

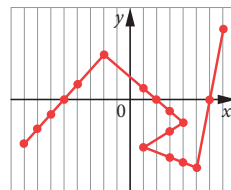


Wykres I spełnia ten warunek, natomiast wykres II go nie spełnia – należą do niego różne punkty mające takie same pierwsze współrzędne, np. $(0, 1)$ i $(0, -1)$.

Każda prosta równoległa do osi y może mieć z wykresem funkcji **najwyżej jeden** punkt wspólny. 



To jest wykres funkcji.



To nie jest wykres funkcji.

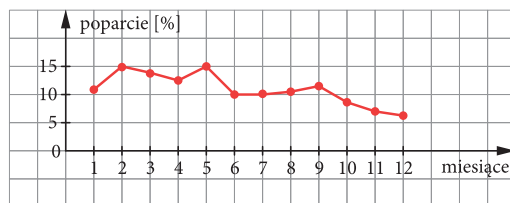
Wniosek

Wykres funkcji nie może zawierać dwóch różnych punktów, których pierwsze współrzędne są takie same.

W postaci wykresów często prezentuje się dane statystyczne.

Przykład 7

Wykres przedstawia procentowy udział osób popierających pewną partię polityczną w ciągu 12 kolejnych miesięcy.

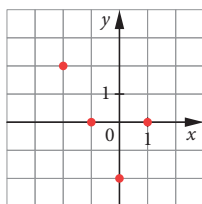


Wykres jest najlepszym sposobem zaprezentowania takich danych. Tabela byłaby mniej czytelna, a podanie wzoru tej funkcji – praktycznie niemożliwe.

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.4 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytcie.

5.1. Na wykresie przedstawiono funkcję. Wskaż tabelę określającą tę funkcję.



A.

x	-2	0	0	2
y	0	-1	1	2

B.

x	-2	-1	0	1
y	-2	0	2	0

C.

x	-2	-1	0	1
y	2	0	-2	0

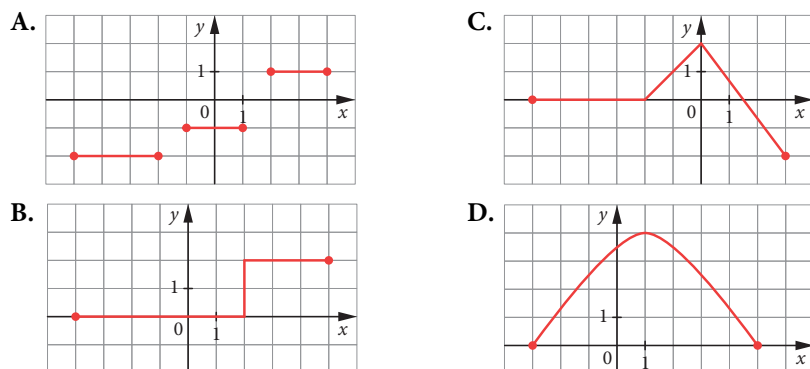
D.

x	-2	-1	0	1
y	2	0	2	0

Odpowiedzi i rozwiązania

5.1. C

5.2. Który z wykresów nie przedstawia funkcji?



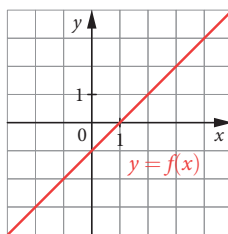
5.3. Dane są punkty $P = (2, 7)$, $Q = (3, 7)$, $R = (3, 5)$, $S = (5, 7)$.

Do wykresu jednej funkcji nie mogą należeć punkty

- A. P i Q . B. Q i R . C. R i S . D. S i P .

5.4. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f , która przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej

- A. liczbę o 1 większą.
B. liczbę o 1 mniejszą.
C. liczbę do niej przeciwną.
D. jej połowę.



5.5. Sporządź wykres funkcji.

- a) $f(x) = (-1)^x$, $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ c) $f(x) = -2\sqrt{x-1}$, $D = \{1, 2, 5, 10\}$
b) $f(x) = 2^x$, $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ d) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

5.6. Sporządź wykres funkcji, która każdej liczbie

- a) naturalnej mniejszej od 10 przyporządkowuje jej resztę z dzielenia przez 3.
b) całkowitej przyporządkowuje liczbę 3 razy mniejszą od niej.
c) naturalnej przyporządkowuje liczbę o 2 większą od niej.
d) całkowitej przyporządkowuje liczbę do niej przeciwną.

5.7. Tabela przedstawia ceny biletów normalnych na dystansie nie większym od 50 km w pociągach Kolei Mazowieckich obowiązujące w 2018 r.

Odległość [km]	(0; 5)	(5; 10)	(10; 15)	(15; 20)	(20; 30)	(30; 40)	(40; 50)
Cena biletu [zł]	3,70	5,80	6,80	8,10	10,50	11,80	13,80

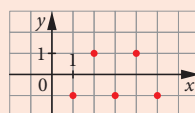
Na podstawie tabeli narysuj wykres funkcji, która przyporządkowuje liczbie przebytych kilometrów cenę biletu za przejazd.

5.2. B

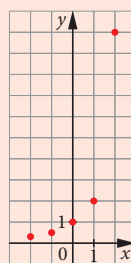
5.3. B

5.4. B

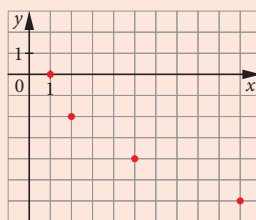
5.5. a)



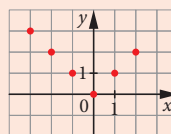
b)



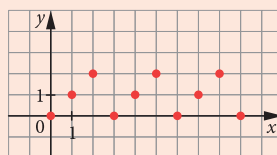
c)

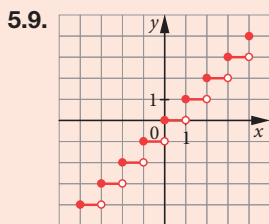


d)



5.6. a)

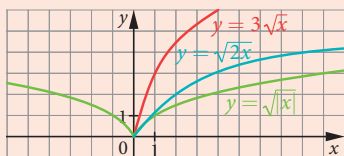




5.10. Wskazówka:

Pow. [dm ²]	1,17	1,50	2,34	3,15
Cena [zł]	0,75	0,90	1,60	1,80

5.12. a) $D = \langle 0; \infty \rangle$ b) $D = \mathbb{R}$
 c) $D = \langle 0; \infty \rangle$



5.13. a) tak b) nie c) tak
 d) nie e) tak f) nie

5.8. Jak wygląda wykres funkcji $y = f(x)$, jeżeli y jest resztą z dzielenia liczby x przez 5, a dziedziną funkcji jest zbiór liczb naturalnych? Naskicuj ten wykres.

5.9. Sporządź wykres funkcji, która każdej liczbie rzeczywistej x z przedziału $\langle -4; 4 \rangle$ przyporządkowuje największą liczbę całkowitą y taką, że $y \leq x$.

5.10. W pewnym zakładzie fotograficznym obowiązuje podany cennik wykonywania odbitek.

Narysuj wykres funkcji, która powierzchni zdjęcia (w dm²) przyporządkowuje jego cenę.

Rozmiar [cm × cm]	Cena odbitki [zł]
9 × 13	0,75
10 × 15	0,90
13 × 18	1,60
15 × 21	1,80

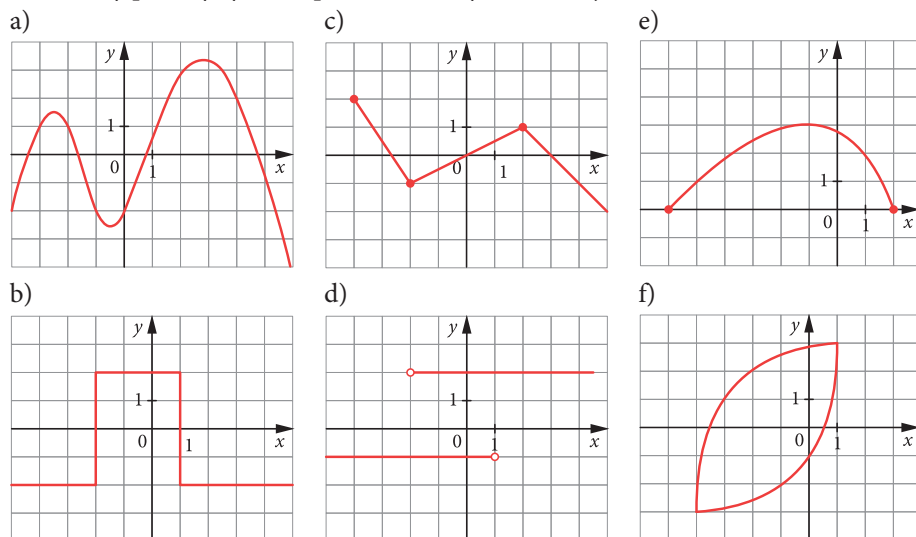
5.11. Sporządź wykres dowolnej funkcji spełniającej podane warunki dotyczące dziedziny D i zbioru wartości ZW .

- D ma 5 elementów i ZW ma 3 elementy.
- D ma 5 elementów i ZW ma 5 elementów.
- D ma nieskończenie wiele elementów i ZW ma jeden element.
- D ma nieskończenie wiele elementów i ZW ma 3 elementy.
- D ma nieskończenie wiele elementów i ZW ma nieskończenie wiele elementów.

* 5.12. Wyznacz dziedzinę funkcji $y = f(x)$ i narysuj jej wykres.

- $f(x) = 3\sqrt{x}$
- $f(x) = \sqrt{|x|}$
- $f(x) = \sqrt{2x}$

5.13. Czy podany rysunek przedstawia wykres funkcji?



5.14. Funkcja f każdej liczbie całkowitej x z przedziału $\langle -4; 4 \rangle$ przyporządkowuje liczbę o 2 mniejszą od połowy kwadratu liczby x .

- Określ funkcję f za pomocą wzoru.
- Sporządź wykres funkcji f .
- Podaj zbiór wartości funkcji f .

5.15. Funkcja f każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowuje największą liczbę całkowitą nie większą od liczby x .

- Oblicz $f(2,4)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{11}{3}\right)$, $f(-\sqrt{13})$.
- Podaj zbiór wartości funkcji f .
- Sporządź wykres funkcji f dla argumentów z przedziału $\langle -3; 5 \rangle$.

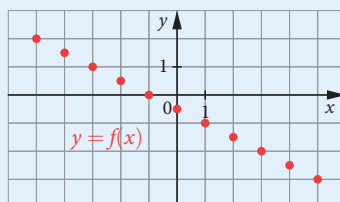
Prosto do matury



1. Wykres przedstawia funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb całkowitych z przedziału $\langle -5; 5 \rangle$.

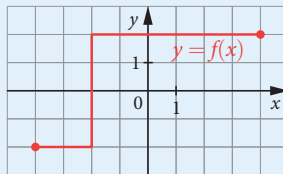
Oceń prawdziwość podanych zdań.

- $f(5) = -3$
- Liczba 10,5 należy do zbioru wartości funkcji f .
- Funkcję f można wyrazić wzorem $f(x) = \frac{-1-x}{2}$.



2. Sporządź wykres funkcji, która każdej liczbie całkowitej z przedziału $\langle -3; 3 \rangle$ przyporządkowuje liczbę o 4 mniejszą od jej kwadratu.

3. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{8}{x-1}$ o dziedzinie $D = \{-3, -1, 0, 3, 9\}$. Podaj zbiór wartości i narysuj wykres tej funkcji.



- D** **4.** Czy na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji? Odpowiedź uzasadnij.

5. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej n resztę z dzielenia kwadratu tej liczby przez 3.

- Sporządź wykres tej funkcji dla $n \in \{0, 1, 2, \dots, 9, 10\}$.
- Wykaż, że liczba 2 nie należy do zbioru wartości funkcji f .

D

5.14. a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$
dla $x \in \{-4, -3, \dots, 3, 4\}$
c) $ZW = \left\{-2, -\frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}, 6\right\}$

5.15. a) $f(2,4) = 2$, $f(-1) = -1$,
 $f\left(\frac{11}{3}\right) = 3$, $f(-\sqrt{13}) = -4$
b) $ZW = \mathbb{Z}$

Prosto do matury

1. P, F, P

2. Wskazówka:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = x^2 - 4$	5	0	-3	-4	-3	0	5

3. $ZW = \{-8, -4, -2, 1, 4\}$

4. Nie, bo argumentowi $x = -2$ odpowiadają różne y .

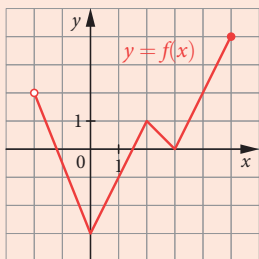
5. b) Wskazówka: Reszta z dzielenia liczby naturalnej n przez 3 jest równa 0, 1 lub 2. Wykaż, że w żadnym z tych przypadków reszta z dzielenia liczby n^2 przez 3 nie jest równa 2.

Uwagi metodyczne

Trudno wyrokować o wadze umiejętności nabytych w trakcie nauki matematyki; naszym zdaniem, odczytywanie, analiza i interpretacja własności funkcji na podstawie jej wykresu należą jednak do najważniejszych.

Definiowane pojęcia są dla uczniów nowe. Jeżeli dobrze je wprowadzimy i uczniowie będą swobodnie odczytywać własności funkcji na podstawie jej wykresu, to poznawanie następnych, coraz bardziej skomplikowanych funkcji nie powinno być trudne. Obrazy przemawiają do wyobraźni, trzeba ją tylko uruchomić i wytrenować.

◀6.4. Odczytaj z wykresu dziedzinę i zbiór wartości funkcji $y = f(x)$.



Odpo.: $D = \langle -2; 5 \rangle$, $ZW = \langle -3; 4 \rangle$

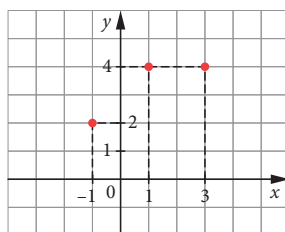
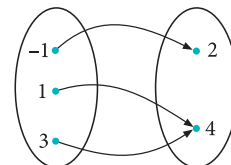
6. Odczytywanie argumentów oraz wartości funkcji z wykresu

Umiejętności:

- odczytywanie z wykresu dziedziny oraz zbioru wartości funkcji
- odczytywanie z wykresu funkcji argumentów, dla których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą
- odczytywanie z wykresu funkcji liczby rozwiązań równania $f(x) = m$

Przyjrzyjmy się funkcji danej grafem. Jej dziedziną jest zbiór $\{-1, 1, 3\}$, zaś jej zbiorem wartości jest $\{2, 4\}$.

Narysujmy wykres tej funkcji i zauważmy, że na jego podstawie równie łatwo jak na podstawie grafu możemy ustalić dziedzinę i zbiór wartości. Trzeba tylko sprawdzić, jakie są pierwsze i drugie współrzędne punktów należących do wykresu.



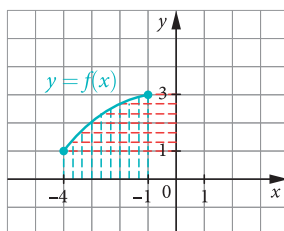
← przez każdy punkt wykresu prowadzimy prostą pionową oraz poziomą

← odczytujemy, w których miejscach proste przecięły osie układu

Jeśli taką operację zastosujemy do wszystkich punktów wykresu, to otrzymane punkty na osi x utworzą dziedzinę, a na osi y – zbiór wartości funkcji.

Przykład 1 ◀ zad. 6.4

Odczytamy dziedzinę i zbiór wartości funkcji danej za pomocą wykresu.

**Rozwiązanie**

Wyobraźmy sobie, że przez każdy punkt wykresu prowadzimy prostą pionową i poziomą (na rysunku zaznaczono kilka takich prostych).

← na osi x otrzymujemy przedział $\langle -4; -1 \rangle$

← na osi y otrzymujemy przedział $\langle 1; 3 \rangle$

Odpo.: $D = \langle -4; -1 \rangle$, $ZW = \langle 1; 3 \rangle$

ZZ i MKP

temat 4.2

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.6

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 2

Odczytamy dziedzinę i zbiór wartości funkcji, której wykres jest przedstawiony obok. Należy pamiętać, że odcinki łączące poszczególne punkty wykresu są tylko pomocnicze.

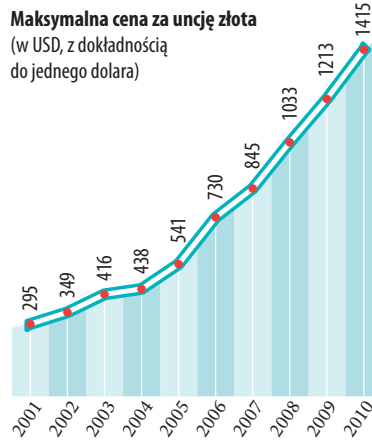
Rozwiązanie

Dziedziną jest dziesięcioelementowy zbiór lat:

$$D = \{2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010\}$$

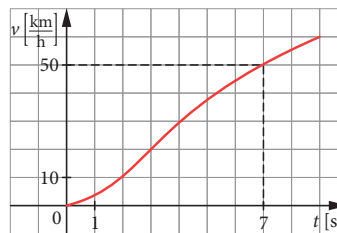
a zbiorem wartości – zbiór liczb:

$$ZW = \{295, 349, 416, 438, 541, 730, 845, 1033, 1213, 1415\}$$

**Przykład 3** ◀ zad. 6.5

Wykres przedstawia prędkość samochodu mierzoną od momentu ruszenia ze skrzyżowania. Odczytamy z wykresu, w którym momencie samochód osiągnął prędkość 50 km/h.

Odp.: Nastąpiło to w 7. sekundzie.

**Przykład 4** ◀ zad. 6.6

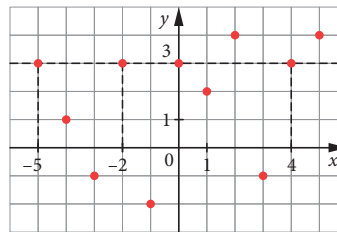
Korzystając z wykresu funkcji $y = f(x)$, sprawdzimy, dla których argumentów funkcja f przyjmuje wartość 3.

Rozwiązanie

Prowadzimy prostą poziomą $y = 3$ i odczytujemy pierwsze współrzędne wszystkich jej punktów wspólnych z wykresem funkcji.

Są nimi: $x = -5$, $x = -2$, $x = 0$ oraz $x = 4$.

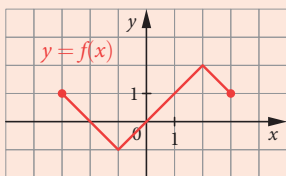
Odp.: $f(x) = 3$ dla $x = -5$, $x = -2$, $x = 0$ lub $x = 4$.

**Wartość największa, wartość najmniejsza funkcji**

Funkcje liczbowe opisują najrozmaitsze zależności. Wśród własności, na które często zwracamy uwagę, są **wartość największa** i **wartość najmniejsza**, jakie funkcja przyjmuje.

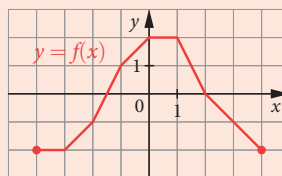
◀ 6.6. Odczytaj z wykresu funkcji argumenty, dla których

a) $f(x) = 0$, $f(x) = 2$, $f(x) = \frac{1}{2}$, $f(x) = 1$. b) $f(x) = 1$, $f(x) = -1$, $f(x) = 2$, $f(x) = -2$.



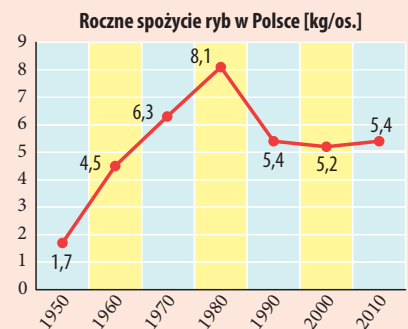
Odp.:

a) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-2, 0\}$;
 $f(x) = 2$ dla $x = 2$;
 $f(x) = \frac{1}{2}$ dla $x \in \{-2\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$;
 $f(x) = 1$ dla $x \in \{-3, 1, 3\}$



b) $f(x) = 1$ dla $x \in \{-1, 1\frac{1}{2}\}$;
 $f(x) = -1$ dla $x \in \{-2, 3\}$;
 $f(x) = 2$ dla $x \in \langle 0, 1 \rangle$;
 $f(x) = -2$ dla $x \in \langle -4, -3 \rangle \cup \{4\}$

◀ 6.5. Funkcja na wykresie przedstawia roczne spożycie ryb i przetworów rybnych w Polsce w kg/os. (źródło: *Tablice geograficzne* 2014). Odczytaj z wykresu, kiedy funkcja osiągnęła wartość 4,5 kg/os.



Odp.: w 1960 r.

Uwagi metodyczne

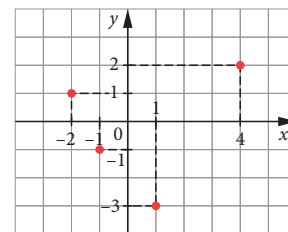
W naturalny sposób wprowadzamy pojęcie wartości największej oraz wartości najmniejszej w całej dziedzinie, a następnie w jednym z jej podzbiorów. Pojawiają się tu bardzo ciekawe możliwości, np. funkcja o ograniczonym zbiorze wartości, dla której nie można wyznaczyć wartości największej i najmniejszej (zbiorem wartości tej funkcji jest bowiem przedział otwarty, a jej wykres jest „ograniczony” albo asymptotami, albo pustymi kółeczkami).

◀6.12. Patrz s. 235.

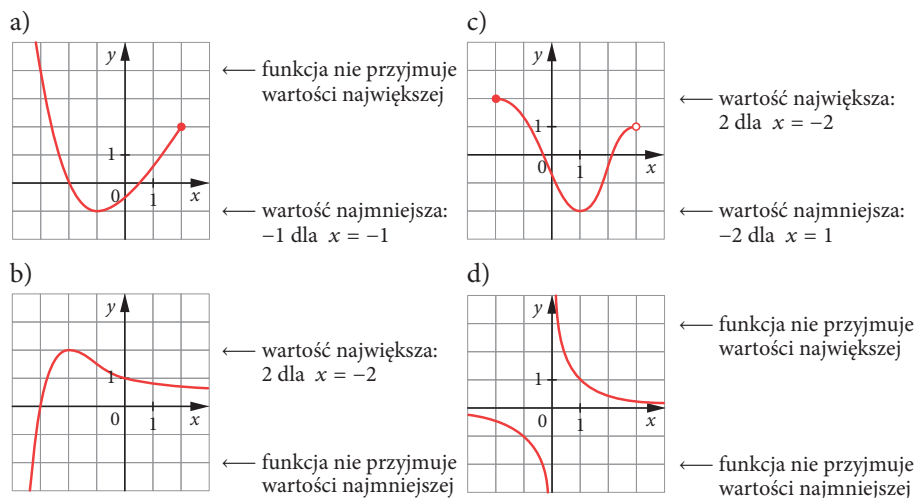
◀6.13. Patrz s. 236.

Jeżeli dany jest wykres funkcji, to szukamy punktu wykresu leżącego najniżej oraz punktu wykresu leżącego najwyżej względem osi x .

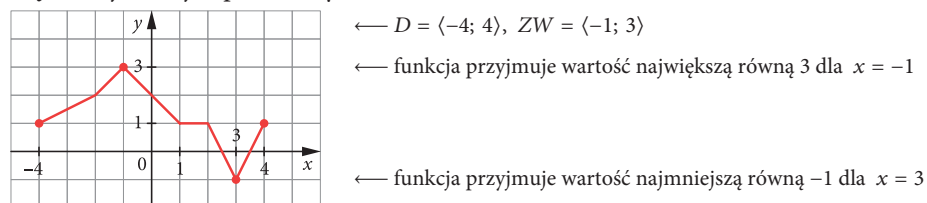
Dla danej obok funkcji najmniejszą wartością jest liczba -3 , a największą – liczba 2 .

**Przykład 5** ◀ zad. 6.12

Wyznamy wartość najmniejszą i wartość największą narysowanej funkcji. Odczytamy również argumenty, dla których funkcja przyjmuje te wartości.

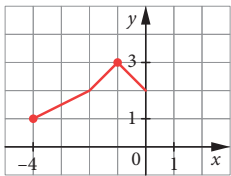
**Przykład 6** ◀ zad. 6.13

Wyznamy dziedzinę, zbiór wartości oraz wartość największą i wartość najmniejszą funkcji danej w postaci wykresu.



Czasem interesuje nas największa i najmniejsza wartość funkcji nie w całej dziedzinie, tylko w pewnym jej podzbiorze.

Gdybyśmy na przykład rozpatrywali tę funkcję tylko w przedziale $\langle -4; 0 \rangle$, to wartość największa nie zmieniałaby się, ale wartość najmniejsza uległaby zmianie.



← funkcja przyjmuje wartość największą równą 3 dla $x = -1$

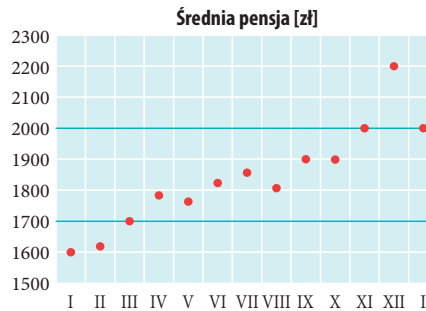
← funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą 1 dla $x = -4$

Liczba rozwiązań równania $f(x) = m$

Czasami interesuje nas odpowiedź na pytanie, ile razy funkcja osiągnęła pewną wartość m , bez wskazywania argumentów, dla których funkcja tę wartość przyjmuje.

Przykład 7 ◀ zad. 6.17

Z wykresu przedstawiającego wysokość średniej pensji w pewnej firmie w kolejnych miesiącach możemy odczytać, że np. w tym czasie średnia w wysokości 2000 zł wystąpiła dwa razy, w wysokości 1700 zł raz i ani razu nie sięgnęła kwoty 2300 zł.



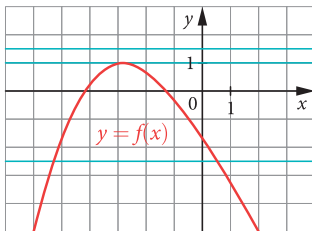
Jeżeli funkcję „średnia pensja” oznaczmy przez g , to możemy napisać, że równanie $g(x) = 2000$ ma dwa rozwiązania, równanie $g(x) = 1700$ ma jedno rozwiązanie, a równanie $g(x) = 2300$ nie ma rozwiązań.

Czasem wygodniej jest zamiast „równanie nie ma rozwiązań” zapisać „liczba rozwiązań równania jest równa 0”.

Przykład 8 ◀ zad. 6.18

Odczytamy z wykresu liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m .

- Jeżeli $m < 1$, to każda prosta $y = m$ przecina wykres w dwóch punktach, więc równanie $f(x) = m$ ma dwa rozwiązania.
- Jeżeli $m = 1$, to prosta $y = 1$ ma jeden punkt wspólny z wykresem, czyli równanie $f(x) = 1$ ma jedno rozwiązanie.
- Jeżeli $m > 1$, to prosta $y = m$ nie ma punktów wspólnych z wykresem, zatem równanie $f(x) = m$ nie ma rozwiązań.



Wyniki zapiszemy w tabeli.

Wartość m	Liczba rozwiązań równania $f(x) = m$
$m \in (-\infty; 1)$	2
$m = 1$	1
$m \in (1; \infty)$	0

◀ 6.17. Patrz s. 236.

◀ 6.18. Czy funkcja o podanym zbiorze wartości ZW przyjmuje wartość najmniejszą? Czy przyjmuje wartość największą?

a) $ZW = (-\infty; 3)$
 b) $ZW = (-8; 10)$
 c) $ZW = \langle -3; \infty)$
 d) $ZW = \{-100\}$

Odp.: a) nie, tak b) nie, nie
 c) tak, nie d) tak, tak

Uwagi metodyczne

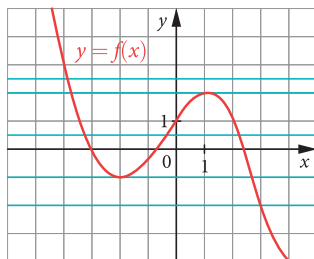
Kolejnym krokiem jest odczytywanie liczby rozwiązań równania $f(x) = m$. Najpierw na wykresie przesuwamy linijkę równoległą do osi odciętych i sprawdzamy liczbę przecięć z wykresem. Proponujemy zacząć od konkretnego (przykład 7.) – odczytania rozwiązań tego równania w przypadku podanego wykresu i ustalonej wartości liczby m . Następnie pytamy: *Ile jest takich rozwiązań?*, i wreszcie analizujemy dowolne wartości m . Najlepiej rysować proste równoległe do osi od dołu do góry, a wyniki zapisywać oddzielnie (np. w tabeli) i nie łączyć w sumy przypadków tej samej liczby rozwiązań dla niespójnych przedziałów wartości m (przykład 9.).

Odpowiedzi i rozwiązania**6.1.** D**6.2.** C**Przykład 9**

Odczytamy z wykresu funkcji $y = f(x)$ liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m .

Rozwiązanie

Podobnie jak poprzednio prowadzimy proste równoległe do osi x i odczytujemy liczby punktów przecięcia każdej z nich z wykresem.



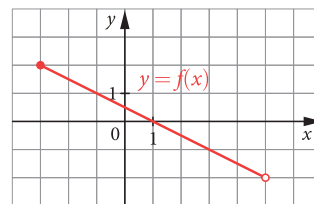
Wartość m	Liczba rozwiązań równania $f(x) = m$
$m \in (-\infty; -1)$	1
$m = -1$	2
$m \in (-1; 2)$	3
$m = 2$	2
$m \in (2; \infty)$	1

Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytach.

6.1. Wskaż dziedzinę D i zbiór wartości ZW funkcji przedstawionej za pomocą wykresu.

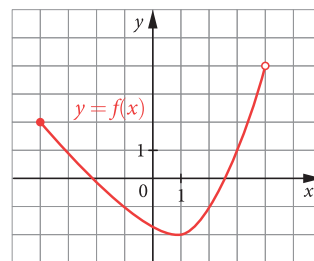
- A. $D = \langle -3; 5 \rangle$, $ZW = \langle -2; 2 \rangle$
 B. $D = (-3; 5)$, $ZW = \langle -2; 2 \rangle$
 C. $D = (-3; 5)$, $ZW = (-2; 2)$
 D. $D = \langle -3; 5 \rangle$, $ZW = (-2; 2)$



6.2. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f .

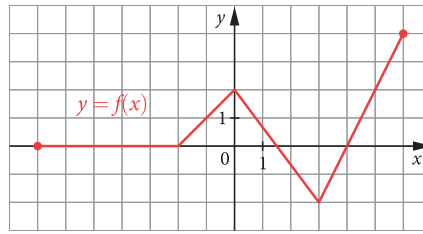
Wskaż zdanie prawdziwe.

- A. Funkcja f przyjmuje wartość największą i przyjmuje wartość najmniejszą.
 B. Funkcja f przyjmuje wartość największą i nie przyjmuje wartości najmniejszej.
 C. Funkcja f nie przyjmuje wartości największej i przyjmuje wartość najmniejszą.
 D. Funkcja f nie przyjmuje wartości największej i nie przyjmuje wartości najmniejszej.



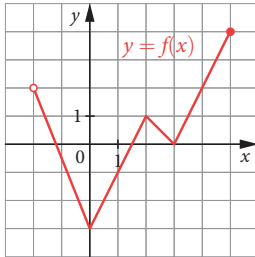
6.3. W którym z podanych przedziałów funkcja przedstawiona na wykresie przyjmuje zarówno wartość największą, jak i wartość najmniejszą?

- A. $(-1; 1)$ C. $(1; 5)$
B. $(0; 2)$ D. $(-1; 4)$

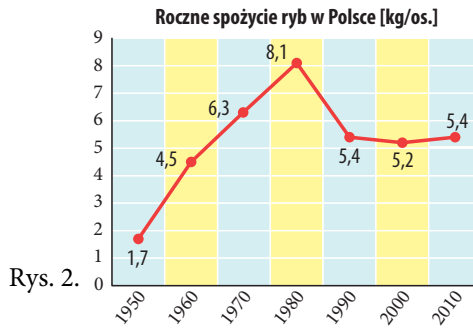


6.4. Odczytaj z wykresu (rys. 1) dziedzinę i zbiór wartości funkcji $y = f(x)$.

6.5. Funkcja na wykresie (rys. 2) przedstawia roczne spożycie ryb i przetworów rybnych w Polsce w kg/os. (źródło: *Tablice geograficzne* 2014). Odczytaj z wykresu, kiedy funkcja osiągnęła wartość 4,5 kg/os.



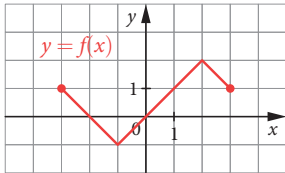
Rys. 1.



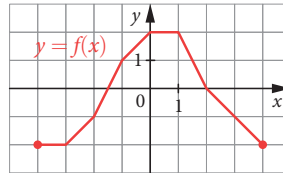
Rys. 2.

6.6. Odczytaj z wykresu funkcji argumenty, dla których

- a) $f(x) = 0$,
 $f(x) = 2$,
 $f(x) = \frac{1}{2}$,
 $f(x) = 1$.

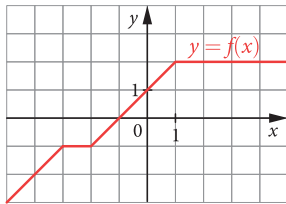


- b) $f(x) = 1$,
 $f(x) = -1$,
 $f(x) = 2$,
 $f(x) = -2$.

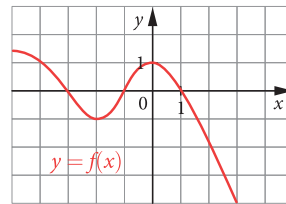


6.7. Odczytaj z wykresu argumenty, dla których $f(x) = -2$, $f(x) = 0$, $f(x) = 1$.

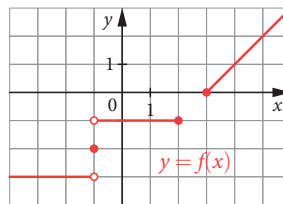
a)



b)



c)



6.3. D

6.4. $D = (-2; 5)$, $ZW = \langle -3; 4 \rangle$

6.5. w 1960 roku

6.6. a) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-2, 0\}$;
 $f(x) = 2$ dla $x = 2$;
 $f(x) = \frac{1}{2}$ dla $x \in \left\{-2\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$;
 $f(x) = 1$ dla $x \in \{-3, 1, 3\}$
b) $f(x) = 1$ dla $x \in \left\{-1, 1\frac{1}{2}\right\}$;
 $f(x) = -1$ dla $x \in \{-2, 3\}$;
 $f(x) = 2$ dla $x \in (0, 1)$;
 $f(x) = -2$ dla $x \in \langle -4, -3 \rangle \cup \{4\}$

6.7.

	$f(x) = -2$	$f(x) = 0$	$f(x) = 1$
a)	-4	-1	0
b)	2	-3, -1, 1	-4, 0
c)	-1	3	4

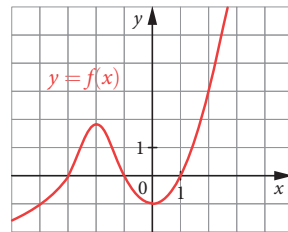
- 6.8. a)** $f(x) = -1$ dla $x \in \{-4, 0\}$,
 $f(x) = 3$ dla $x = 2$
b) $g(x) = 0$ dla $x = 0$, $g(x) = 2$
dla $x \in \{-1, 1\}$
c) $h(x) = -2$ dla $x = -3$, $h(x) = 1$
dla $x \in (2; 4)$

- 6.9. a)** $x = -5$ lub $x = 7$
b) $x = -6$
c) $x = -4$ lub
 $x = 2$, lub $x = 6$
d) $x = -3$ lub $x = 0$, lub $x = 3$,
lub $x = 5$

- 6.10. a)** 16 s **b)** 20 km/h
c) po 5 s

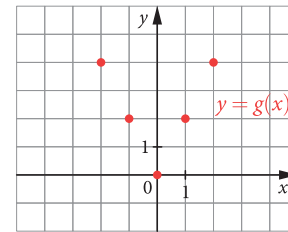
6.8. Na podstawie wykresu funkcji uzupełnij zdania.

a)



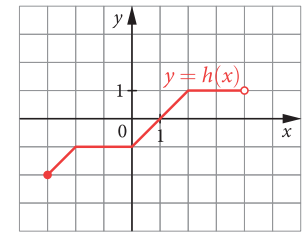
$f(x) = -1$ dla x ?
 $f(x) = 3$ dla x ?

b)



$g(x) = 0$ dla x ?
 $g(x) = 2$ dla x ?

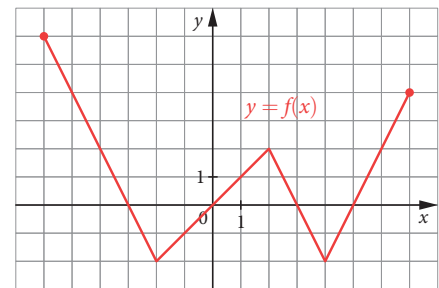
c)



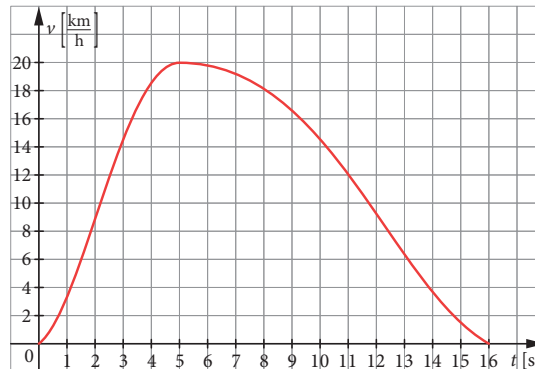
$h(x) = -2$ dla x ?
 $h(x) = 1$ dla x ?

6.9. Na podstawie wykresu funkcji
 $y = f(x)$ rozwiąż podane równanie.

- a) $f(x) = 4$
b) $f(x) = 6$
c) $f(x) = 2$
d) $f(x) = 0$

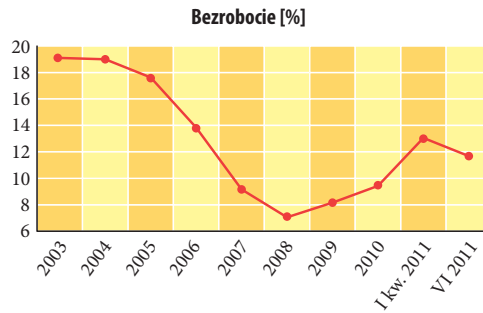


6.10. Wykres przedstawia prędkość rowerzysty od momentu ruszenia z jednego skrzyżowania do momentu zatrzymania się przed drugim skrzyżowaniem.



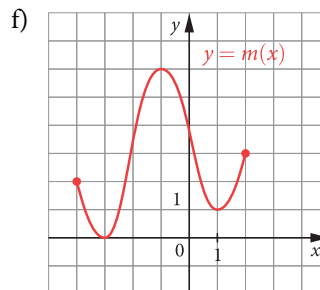
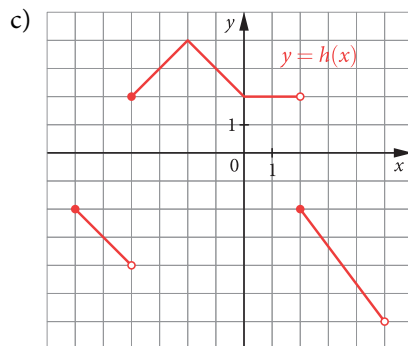
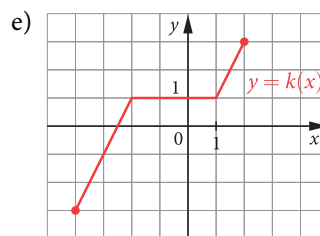
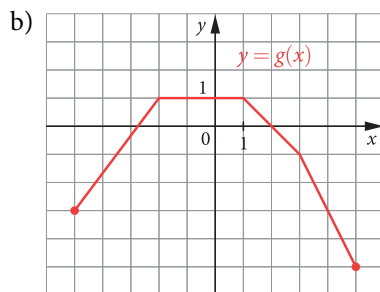
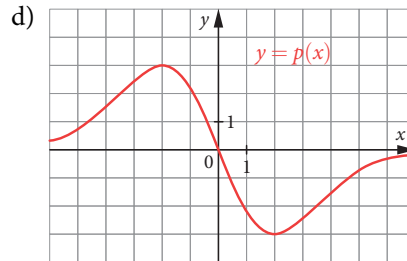
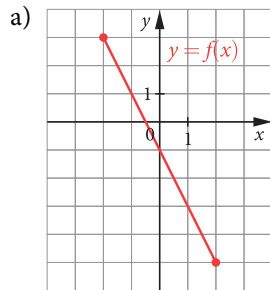
- a) Ile czasu trwał przejazd między skrzyżowaniami?
b) Jaką maksymalną prędkość rozwinął rowerzysta?
c) Po jakim czasie od ruszenia ze skrzyżowania osiągnął maksymalną prędkość?

6.11. Odczytaj z wykresu, w którym roku prezentowanego okresu odsetek bezrobotnych był najniższy, a w którym najwyższy.



6.11. najniższy w roku 2008, najwyższy w roku 2003

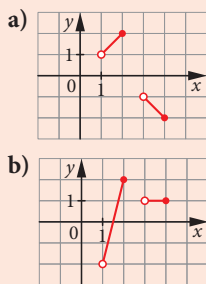
6.12. Odczytaj z wykresu dziedzinę, zbiór wartości, wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji.



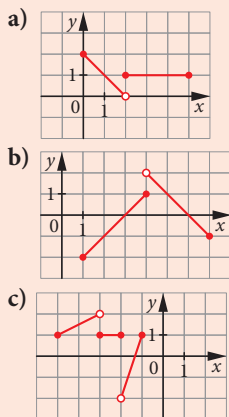
6.12. a) $D = \langle -2; 2 \rangle$, $ZW = \langle -5; 3 \rangle$, wartość najmniejsza: -5 dla $x = 2$, wartość największa: 3 dla $x = -2$
b) $D = \langle -5; 5 \rangle$, $ZW = \langle -5; 1 \rangle$, wartość najmniejsza: -5 dla $x = 5$, wartość największa: 1 dla $x \in \langle -2; 1 \rangle$
c) $D = \langle -6; 5 \rangle$, $ZW = (-6; -2) \cup (2; 4)$, brak wartości najmniejszej, wartość największa: 4 dla $x = -2$
d) $D = \mathbb{R}$, $ZW = \langle -3; 3 \rangle$, wartość najmniejsza: -3 dla $x = 2$, wartość największa: 3 dla $x = -2$
e) $D = \langle -4; 2 \rangle$, $ZW = \langle -3; 3 \rangle$, wartość najmniejsza: -3 dla $x = -4$, wartość największa: 3 dla $x = 2$
f) $D = \langle -4; 2 \rangle$, $ZW = \langle 0; 6 \rangle$, wartość najmniejsza: 0 dla $x = -3$, wartość największa: 6 dla $x = -1$

- 6.13. a)** wartość najmniejsza: -3 dla $x = 1$, wartość największa: -1 dla $x = 0$
b) wartość najmniejsza: -3 dla $x = -5$, wartość największa: 1 dla $x \in \langle -2; 0 \rangle$
c) wartość najmniejsza: -2 dla $x = 2$, wartość największa: 4 dla $x = -2$
d) wartość najmniejsza: -3 dla $x = 2$, wartość największa: 2 dla $x = -1$
e) wartość najmniejsza: 1 dla $x \in \langle -1; 1 \rangle$, wartość największa: 3 dla $x = 2$
f) wartość najmniejsza: 1 dla $x = 1$, wartość największa: 6 dla $x = -1$

6.14. Przykładowe wykresy



6.15. Przykładowe wykresy



6.16. a) 4 **b)** 2 **c)** 1 **d)** 0

6.13. Korzystając z wykresów funkcji podanych w zadaniu 6.12, odczytaj wartość najmniejszą oraz wartość największą odpowiedniej funkcji w podanym przedziale.

- a) $y = f(x)$ dla $x \in \langle 0; 1 \rangle$ d) $y = p(x)$ dla $x \in \langle -1; 2 \rangle$
 b) $y = g(x)$ dla $x \in \langle -5; 0 \rangle$ e) $y = k(x)$ dla $x \in \langle -1; 2 \rangle$
 c) $y = h(x)$ dla $x \in \langle -2; 2 \rangle$ f) $y = m(x)$ dla $x \in \langle -1; 2 \rangle$

6.14. Podaj przykład wykresu funkcji o dziedzinie $D = (1; 2) \cup (3; 4)$, która

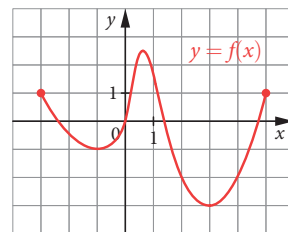
- a) przyjmuje wartość największą i wartość najmniejszą.
 b) przyjmuje wartość największą i nie przyjmuje wartości najmniejszej.
 c) nie przyjmuje wartości największej i przyjmuje wartość najmniejszą.
 d) nie przyjmuje wartości największej i nie przyjmuje wartości najmniejszej.

* **6.15.** Podaj przykład wykresu funkcji f o podanych własnościach.

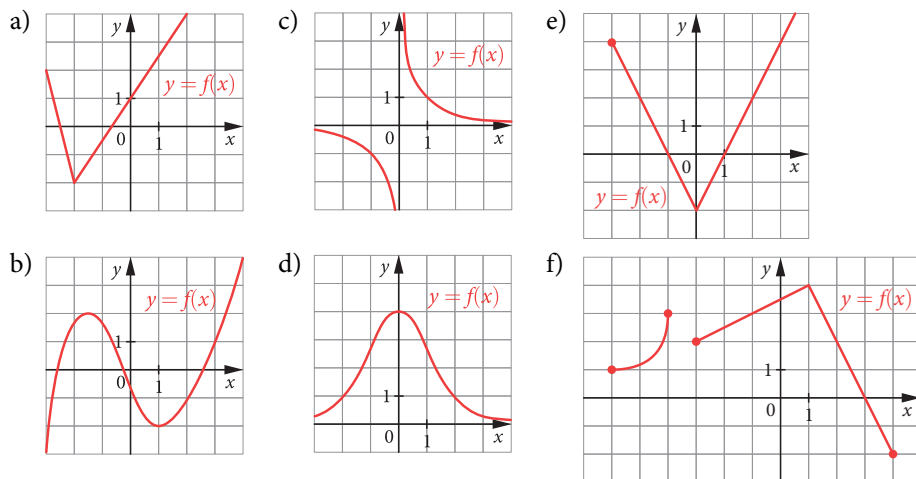
- a) $D = \langle 0; 5 \rangle$, przyjmuje wartość największą i nie przyjmuje wartości najmniejszej.
 b) $D = \langle 1; 7 \rangle$, nie przyjmuje wartości największej i przyjmuje wartość najmniejszą.
 c) $D = \langle -5; -1 \rangle$, nie przyjmuje wartości największej ani wartości najmniejszej.

6.16. Na podstawie wykresu funkcji f określ liczbę rozwiązań podanego równania.

- a) $f(x) = 0$
 b) $f(x) = 2$
 c) $f(x) = -3$
 d) $f(x) = 3$



6.17. Mając dany wykres funkcji $y = f(x)$, podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$, gdzie m jest dowolną liczbą rzeczywistą.

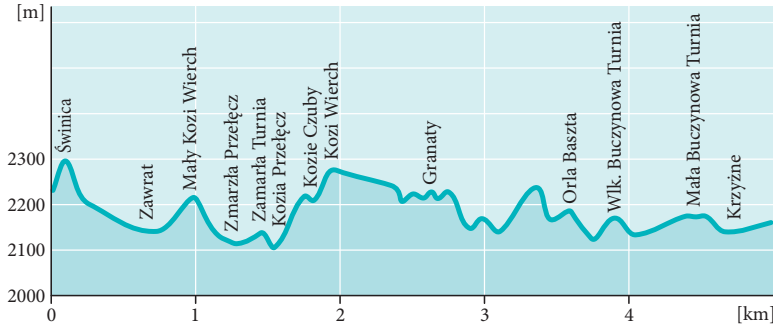


- 6.17. a)** 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2)$, 1 rozwiązanie dla $m = -2$,
 2 rozwiązania dla $m \in (-2; \infty)$
b) 1 rozwiązanie dla $m \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{-2, 2\}$,
 3 rozwiązania dla $m \in (-2; 2)$
c) 0 rozwiązań dla $m = 0$, 1 rozwiązanie dla $m \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$
d) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$, 1 rozwiązanie dla $m = 4$,
 2 rozwiązania dla $m \in (0; 4)$
e) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2)$, 1 rozwiązanie dla $m \in \{-2\} \cup (4; \infty)$,
 2 rozwiązania dla $m \in (-2; 4)$
f) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2) \cup (4; \infty)$, 1 rozwiązanie dla $m \in \langle -2; 1 \rangle \cup \{4\}$,
 2 rozwiązania dla $m \in \langle 1; 2 \rangle \cup \langle 3; 4 \rangle$, 3 rozwiązania dla $m \in \langle 2; 3 \rangle$

6.18. Czy funkcja o podanym zbiorze wartości ZW przyjmuje wartość najmniejszą? Czy przyjmuje wartość największą?

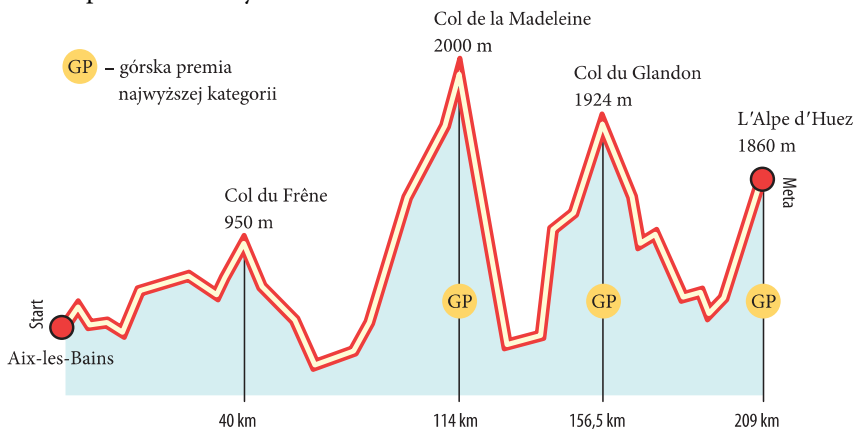
- a) $ZW = (-\infty; 3)$ b) $ZW = (-8; 10)$ c) $ZW = \langle -3; \infty)$ d) $ZW = \{-100\}$

6.19. W książce *Atlas turystyczny Tatr Polskich* są przedstawione tzw. profile szlaków turystycznych. Na podstawie wykresu określ, ile razy w trakcie wycieczki Orlą Percią od Zawratu do Krzyżnego przekracza się wysokość 2200 m n.p.m.



Zwróć uwagę na to, że aby rysunek był czytelny, na osiach zastosowano różne jednostki. W rzeczywistości podejścia są mniej strome.

6.20. Na podstawie profilu trasy kolarskiej (zamieszczonego w jednej z gazet) określ, ile razy podczas etapu z Aix-les-Bains do l'Alpe d'Huez uczestnicy wyścigu Tour de France przekraczali wysokość 1800 m.



Zauważ, że aby uwypuklić trudności, jakie napotkali zawodnicy, na osi pionowej przyjęto jednostkę ok. 50 razy mniejszą niż jednostka na osi poziomej. Pokonanie takich wzniesień jak na rysunku byłoby trudne nawet przy użyciu sprzętu wspinaczkowego.

6.18. a) nie, tak b) nie, nie
c) tak, nie d) tak, tak

6.19. 3 razy

6.20. 3 razy

Prosto do matury



Prosto do matury

1. P, P, P

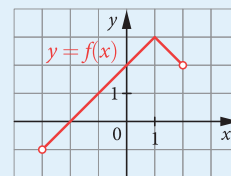
2. $D = \langle -5; 5 \rangle$, $ZW = \langle -5; 1 \rangle$,
wartość najmniejsza: -3 dla $x = 4$,
wartość największa: 1 dla $x = 1$

3. $D = (-3; 4)$, $ZW = (-1; 4)$,
wartość największa: 4 dla $x = 2$,
wartość najmniejsza: 1 dla $x = -1$

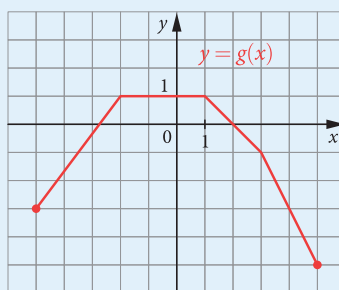
5. $m \in \{-2\} \cup \langle 1; 2 \rangle$

1. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f .
Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Dziedziną funkcji f jest przedział $(-3; 2)$.
B. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-1; 3)$.
C. Funkcja f nie osiąga wartości najmniejszej.

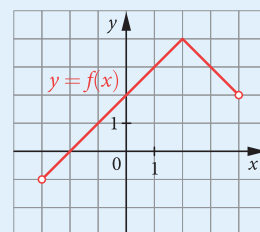


2. Odczytaj z wykresu (rys. 1) dziedzinę i zbiór wartości funkcji $y = g(x)$. Wyznacz wartość najmniejszą oraz wartość największą, które ta funkcja przyjmuje dla argumentów z przedziału $\langle 1; 4 \rangle$.



Rys. 1.

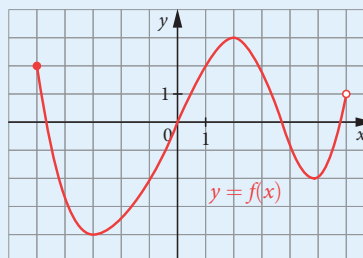
3. Odczytaj z wykresu (rys. 2) dziedzinę i zbiór wartości funkcji f . Podaj wartość największą i wartość najmniejszą funkcji w przedziale $\langle -1; 3 \rangle$.



Rys. 2.

4. Podaj przykład wykresu funkcji, której dziedziną jest przedział $(-1; 3)$, a zbiorem wartości jest przedział $\langle 2; 4 \rangle$.

5. Mając dany wykres funkcji $y = f(x)$, określ, dla jakich wartości m równanie $f(x) = m$ ma trzy rozwiązania.

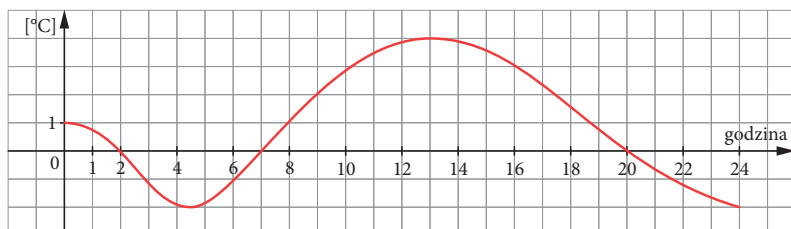


7. Miejsce zerowe funkcji

Umiejętności:

- odczytywanie z wykresu funkcji jej miejsc zerowych
- znajdowanie miejsc zerowych funkcji danych za pomocą wzoru

Przyjrzyjmy się wykresowi, który przedstawia temperaturę w pewnej miejscowości mierzoną w sposób ciągły przez 24 godziny.



Jeżeli interesuje nas, kiedy temperatura była równa 0°C , to szukamy punktów przecięcia wykresu z osią x i odczytujemy pierwsze współrzędne tych punktów. W ciągu opisanej doby temperatura osiągnęła wartość 0°C trzy razy – o godzinie 2^{00} , 7^{00} i 20^{00} . Argumenty, dla których funkcja osiąga wartość 0, mają często duże znaczenie, dlatego są wyróżnione specjalną nazwą.

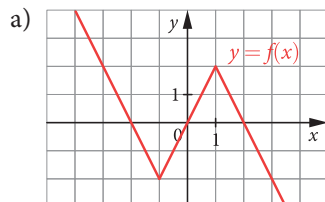
Definicja

Miejscem zerowym funkcji nazywamy taki argument, dla którego wartość funkcji jest równa 0.

Przykład 1 ◀ zad. 7.4

Wyznamy miejsca zerowe podanych funkcji.

Rozwiązanie



Nie należy mylić miejsca zerowego funkcji z punktem przecięcia wykresu z osią x . **Miejsce zerowe jest liczbą**, a nie punktem. Na przykład jeśli wykres jakiejś funkcji przecina oś x w punkcie $(2, 0)$, to miejscem zerowym jest liczba 2.

← wykres przecina oś x w trzech punktach

Odp.: Funkcja ma trzy miejsca zerowe. Są nimi liczby: -2 , 0 i 2 .

Uwagi metodyczne

Miejsce zerowe funkcji (liczba) jest często mylone z punktem przecięcia wykresu z osią x . Być może nie warto walczyć z utożsamianiem przez uczniów tych dwóch pojęć, ostatecznie zdanie: *Wykres przecina oś x w dwóch punktach, więc funkcja ma dwa miejsca zerowe*, jest poprawne. Poddajemy to pod rozwagę i osąd nauczycieli. Mamy nadzieję, że ewentualne „haczyki” na egzaminach nie będą dotyczyły akurat tego zagadnienia.

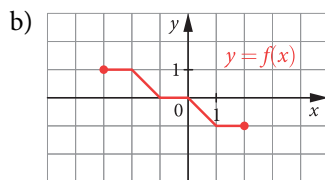
◀ 7.4. Patrz s. 242.

ZZ i MKP

temat 4.1

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 3.7

Generator
testów i sprawdzianów



← wykres przecina oś x w nieskończenie wielu punktach

Odp.: Funkcja ma nieskończenie wiele miejsc zerowych. Są nimi wszystkie liczby z przedziału $(-1; 0)$.

W omówionych przykładach szukaliśmy miejsc zerowych, analizując tylko wykresy funkcji. Jeśli znamy wzór funkcji, to jej miejsca zerowe często możemy wyznaczyć rachunkowo, rozwiązując równanie $f(x) = 0$.

Przykład 2 ◀ zad. 7.6–7.8

Wyznamy miejsca zerowe funkcji o podanym wzorze i danej dziedzinie.

Rozwiązanie

a) $f(x) = -3x + 6$, $D = \mathbf{R}$
 $-3x + 6 = 0$, stąd $x = 2$

Odp.: $f(x) = 0$ dla $x = 2$.

b) $f(x) = 2x + 4$, D jest zbiorem liczb naturalnych
 $2x + 4 = 0$, stąd $x = -2$, ale -2 nie jest liczbą naturalną

Odp.: Funkcja nie ma miejsc zerowych.

c) $f(x) = |x| - 3$, $D = \mathbf{Z} - \mathbf{N}$
 $|x| - 3 = 0$, czyli $|x| = 3$
 $x = -3$ lub $x = 3$
 $-3 \in D$, natomiast $3 \notin D$

Odp.: Miejscem zerowym tej funkcji jest liczba -3 .

Przykład 3 ◀ zad. 7.10

Wyznamy miejsca zerowe funkcji $y = g(x)$.

Rozwiązanie

a) $g(x) = (x - 4)(x + 7)$

Jeżeli podany jest tylko wzór funkcji, to zaczynamy od wyznaczenia jej dziedziny.

Dziedziną funkcji g jest zbiór $\mathbf{R}$. Szukamy rozwiązań warunku $g(x) = 0$.

$$(x - 4)(x + 7) = 0$$

$$x - 4 = 0 \text{ lub } x + 7 = 0$$

$$x = 4 \text{ lub } x = -7$$

Odp.: Miejscami zerowym funkcji g są -7 i 4 .

Zawsze sprawdzamy, czy rozwiązania równania $f(x) = 0$ należą do dziedziny funkcji f .

$a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$.

◀ 7.6. Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

- a) $f(x) = 3x - 6$
 b) $f(x) = \frac{3}{7}x - 2\frac{4}{7}$
 c) $f(x) = \sqrt{2}x - 2\sqrt{3}$
 d) $f(x) = 2^{17}x - 8^6$
 e) $f(x) = \pi^2x - 2\pi$
 f) $f(x) = 10^{-13}x - 10^{-17}$
Odp.: a) 2 b) 6 c) $\sqrt{6}$ d) 2
 e) $\frac{2}{\pi}$ f) 10^{-4}

◀ 7.7. Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

- a) $f(x) = (x + 1)(x - 3)$
 b) $f(x) = x\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)$
 c) $f(x) = x^2 - x$
 d) $f(x) = (x - 2)(x + 1)(x + 5)$
Odp.: a) $-1, 3$ b) $-2, 0$ c) $0, 1$
 d) $-5, -1, 2$

◀ 7.8. Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

- a) $f(x) = |x - 4| - 7$
 b) $f(x) = |x + 2| + 2$
 c) $f(x) = ||x| - 3| - 1$
 d) $f(x) = ||x - 1| + 3| - 5$
Odp.: a) $-3, 11$
 b) brak miejsc zerowych
 c) $-4, -2, 2, 4$
 d) $-1, 3$

◀ 7.10. Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

- a) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x - 1}$ c) $f(x) = (x - 5)(x + 2)\sqrt{x - 1}$ e) $f(x) = \frac{(4x + 12)(x - 1)}{x + 3}$
 b) $f(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{x}}$ d) $f(x) = \sqrt{x - 5} \cdot \sqrt{5 - x}$ f) $f(x) = \frac{(x - 7)(x - 2)}{\sqrt{2x - 4}}$

Odp.: a) 0 b) brak miejsc zerowych c) 1, 5 d) 5 e) 1 f) 7

$$b) g(x) = x\sqrt{x-1}$$

Najpierw wyznaczamy dziedzinę funkcji g .

$$x-1 \geq 0 \quad \leftarrow \text{wyrażenie pod pierwiastkiem nie jest ujemne}$$

Dziedziną funkcji g jest przedział $D = \langle 1; \infty \rangle$.

Znajdziemy teraz miejsca zerowe. Szukamy rozwiązań warunku $g(x) = 0$ i $x \in D$.

$$x\sqrt{x-1} = 0, \text{ stąd } x = 0 \text{ lub } \sqrt{x-1} = 0$$

Liczba 0 nie jest argumentem funkcji, więc jedynym miejscem zerowym jest liczba 1.

Odp.: Miejscem zerowym funkcji g jest 1.

$$* c) g(x) = \frac{x + \sqrt{2}}{x - 8}$$

Dziedziną funkcji g jest zbiór $D = \mathbf{R} - \{8\}$.

Szukamy rozwiązań warunku $g(x) = 0$ i $x \in D$.

$$\frac{x + \sqrt{2}}{x - 8} = 0 \quad \leftarrow \text{ułamek ma wartość 0 tylko wtedy, gdy licznik jest równy 0}$$

$$x + \sqrt{2} = 0, \text{ stąd } x = -\sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2} \in D$$

Odp.: Miejscem zerowym funkcji g jest $-\sqrt{2}$.

Przykład 4 zad. 7.15

Sprawdźmy, czy któraś z liczb ze zbioru A jest miejscem zerowym funkcji $y = f(x)$.

Rozwiązanie

$$a) f(x) = (x+3)\sqrt{x-2}, \quad A = \{-1, 0, 2, 3\}$$

Wyznaczamy dziedzinę funkcji f : $x-2 \geq 0$, czyli $D = \langle 2; \infty \rangle$.

Zatem $-1 \notin D$ i $0 \notin D$.

Pozostałe liczby sprawdzamy, podstawiając je do wzoru funkcji.

$$f(2) = (2+3)\sqrt{2-2} = 5 \cdot 0 = 0 \quad \leftarrow 2 \text{ jest miejscem zerowym } f$$

$$f(3) = (3+3)\sqrt{3-2} = 6 \cdot 1 \neq 0 \quad \leftarrow 3 \text{ nie jest miejscem zerowym } f$$

Odp.: Miejscem zerowym funkcji f należącym do zbioru A jest 2.

$$b) f(x) = \frac{x^2-3}{x+2}, \quad A = \{-2, 0, -\sqrt{3}\}$$

$$x+2 \neq 0, \text{ czyli } -2 \notin D \text{ i } D = \mathbf{R} - \{-2\}.$$

$$f(0) = \frac{-3}{2} \neq 0 \quad \leftarrow 0 \text{ nie jest miejscem zerowym } f$$

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{3-3}{-\sqrt{3}+2} = 0 \quad \leftarrow -\sqrt{3} \text{ jest miejscem zerowym } f$$

Odp.: Miejscem zerowym funkcji f należącym do zbioru A jest $-\sqrt{3}$.

◀7.15. Sprawdź, która z liczb ze zbioru A jest miejscem zerowym funkcji $y = f(x)$.

$$a) f(x) = 3x^2 + 5x - 2$$

$$A = \left\{-2, \frac{1}{3}, 1\right\}$$

$$b) f(x) = (x^2 - 9)\sqrt{x+3}$$

$$A = \{-3, 0, 2, 3\}$$

$$c) f(x) = \frac{x^3 - 3x - 2}{\sqrt{3-x}}$$

$$A = \{-2, -1, 2, 4\}$$

$$d) f(x) = 3^x - 3x - 3$$

$$A = \{-1, 1, 2\}$$

$$e) f(x) = 2^x - 7$$

$$A = \{\log_2 3, \log_2 7\}$$

$$f) f(x) = \frac{10^{2x} - 5 \cdot 10^x + 6}{x-1}$$

$$A = \{\log 2, \log 3, \log 5\}$$

$$\text{Odp.: a) } -2, \frac{1}{3} \quad \text{b) } -3, 3$$

$$c) -1, 2 \quad d) 2 \quad e) \log_2 7$$

$$f) \log 2, \log 3$$

◀ 7.17. Dla jakich wartości m liczba 5 jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = (m+3)x - 5$?

Odp.: $m = -2$

Odpowiedzi i rozwiązania

7.1. B

7.2. D

7.3. C

7.4. a) 1

b) $-2, 3$ oraz każda liczba z przedziału $\langle 0; 1 \rangle$

c) $-2, 0, 2, 3$

d) $-2, 2, 6$

e) -2

f) $-2, 2$

Przykład 5 ◀ zad. 7.17

Dla jakich wartości m liczba 3 jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = |4-m|x - 9$?

Rozwiązanie

$$f(3) = 0, \text{ czyli } |4-m| \cdot 3 - 9 = 0$$

$$|4-m| = 3$$

$$4-m = 3 \text{ lub } 4-m = -3, \text{ więc}$$

$$m = 1 \text{ lub } m = 7$$

Odp.: Dla $m = 1$ lub $m = 7$.

Zadania

W każdym z zadań 7.1–7.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytach.

7.1. Wskaż miejsce zerowe funkcji przedstawionej na wykresie obok.

A. $(-2, 0)$ B. -2 C. $(0, 2)$ D. 2

7.2. Wskaż miejsce zerowe funkcji $f(x) = \frac{1}{3}x - 7$.

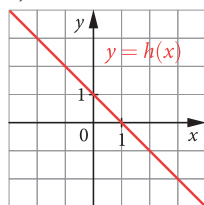
A. 7 B. $2\frac{1}{3}$ C. $7\frac{1}{3}$ D. 21

7.3. Wśród podanych funkcji wskaż tę, dla której liczba -3 jest miejscem zerowym.

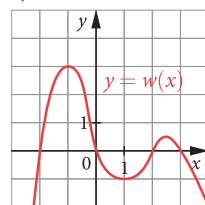
A. $f(x) = 2x + 4$ B. $f(x) = 2x + 5$ C. $f(x) = 2x + 6$ D. $f(x) = 2x + 7$

7.4. Odczytaj z wykresu miejsca zerowe funkcji.

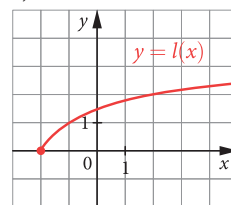
a)



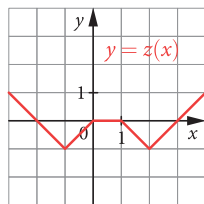
c)



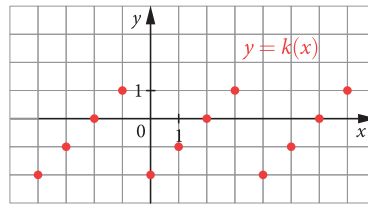
e)



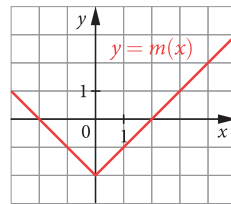
b)



d)



f)



7.5. Podaj przykład wykresu funkcji o dziedzinie $D = \mathbf{R}$ i o danym zbiorze miejsc zerowych.

- a) $\{-3\}$ c) $\langle 1; \infty \rangle$ e) $\langle -1; 2 \rangle \cup \langle 4; 5 \rangle$
 b) $\{-2, 2\}$ d) $\langle 1; 2 \rangle$ f) $\langle -3; 1 \rangle \cup (5; \infty)$

7.6. Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

- a) $f(x) = 3x - 6$ c) $f(x) = \sqrt{2}x - 2\sqrt{3}$ e) $f(x) = \pi^2 x - 2\pi$
 b) $f(x) = \frac{3}{7}x - 2\frac{4}{7}$ d) $f(x) = 2^{17}x - 8^6$ f) $f(x) = 10^{-13}x - 10^{-17}$

7.7. Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

- a) $f(x) = (x+1)(x-3)$ c) $f(x) = x^2 - x$
 b) $f(x) = x\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)$ d) $f(x) = (x-2)(x+1)(x+5)$

7.8. Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

- a) $f(x) = |x-4| - 7$ c) $f(x) = ||x| - 3| - 1$
 b) $f(x) = |x+2| + 2$ d) $f(x) = ||x-1| + 3| - 5$

7.9. Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

- a) $f(x) = |x| - 2x - 1$ d) $f(x) = |x+2| + |x-7|$
 b) $f(x) = |x-3| + 2x$ e) $f(x) = |x+3| + |x-1| - 10$
 c) $f(x) = |x-1| - |2x+1|$ f) $f(x) = |2x-2| - |x-4| + 3$

7.10. Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

- a) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ c) $f(x) = (x-5)(x+2)\sqrt{x-1}$ e) $f(x) = \frac{(4x+12)(x-1)}{x+3}$
 b) $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$ d) $f(x) = \sqrt{x-5} \cdot \sqrt{5-x}$ f) $f(x) = \frac{(x-7)(x-2)}{\sqrt{2x-4}}$

7.11. Wyznacz miejsca zerowe funkcji o podanym wzorze i danej dziedzinie.

- a) $f(x) = 7x + 5$ $D = \mathbf{R}$
 b) $f(x) = 4x - 11$ $D = \mathbf{Z}$
 c) $f(x) = \sqrt{2}x - 3$ $D = \mathbf{Q}$
 d) $f(x) = \sqrt{3}x - \sqrt{12}$ $D = \mathbf{N}$
 e) $f(x) = |x-1| \cdot |x+7|$ $D = \mathbf{N}$
 f) $f(x) = (2x+4)\sqrt{x+5}$ $D = \langle -5; -2 \rangle \cup (2; \infty)$

D 7.12. Wykaż, że liczba 3 jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = 3^{11}x - 9^6$.

D 7.13. Wykaż, że liczba -3 nie jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = (x+3)\sqrt{x-3}$.

7.6. a) 2 b) 6 c) $\sqrt{6}$ d) 2
 e) $\frac{2}{\pi}$ f) 10^{-4}

7.7. a) -1, 3 b) -2, 0 c) 0, 1
 d) -5, -1, 2

7.8. a) -3, 11
 b) brak miejsc zerowych
 c) -4, -2, 2, 4
 d) -1, 3

7.9. a) $-\frac{1}{3}$ b) -3 c) -2, 0
 d) brak miejsc zerowych
 e) -6, 4 f) 1

7.10. a) 0
 b) brak miejsc zerowych
 c) 1, 5 d) 5 e) 1 f) 7

7.11. a) $-\frac{5}{7}$
 b) brak miejsc zerowych
 c) brak miejsc zerowych
 d) 2
 e) 1
 f) -5

7.12. $f(3) = 3^{11} \cdot 3 - 9^6 =$
 $= 3^{12} - (3^2)^6 = 3^{12} - 3^{12} = 0$

7.13. $D = \langle 3; \infty \rangle$, $-3 \notin D$

7.14. Przykładowe funkcje

a) $f(x) = \frac{(x+2)(x-4)}{\sqrt{10-x}}$

b) $f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{x+9}$

c) $f(x) = (x-13)\sqrt{x-3}$

d) $f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{x+9}$

e) $f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x+2}}$

f) $f(x) = (x+3)(x+2)\sqrt{-x-1}$

7.15. a) $-2, \frac{1}{3}$ b) $-3, 3$

c) $-1, 2$ d) 2 e) $\log_2 7$

f) $\log 2, \log 3$

7.16. np. $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$

7.17. $m = -2$

7.18. $m = -3$

7.19. $k = -8$

7.20. a) I. $m \in \mathbf{R} - \{0\}$ II. $m = 0$

b) I. $m \in \mathbf{R} - \{1\}$ II. $m = 1$

c) I. $m \in \mathbf{R} - \{-2\}$ II. $m = -2$

d) I. $m \in \mathbf{R} - \{3\}$ II. $m = 3$

7.21. a) $m > 3$

b) $m > 15$

c) $m < -4$

d) $m < 1$

7.14. Podaj przykład wzoru funkcji, której dziedziną jest zbiór D i której wszystkie miejsca zerowe są elementami podanego zbioru A .

a) $D = (-\infty; 10)$ $A = \{-2, 4\}$

d) $D = \mathbf{N} - \{9\}$ $A = \{0, 1, 2, 3\}$

b) $D = \mathbf{R} - \{-9\}$ $A = \{0, 1, 2, 3\}$

e) $D = (-2; \infty)$ $A = \{4\}$

c) $D = \langle 3; \infty)$ $A = \{3, 13\}$

f) $D = (-\infty; -1)$ $A = \{-3, -2, -1\}$

7.15. Sprawdź, która z liczb ze zbioru A jest miejscem zerowym funkcji $y = f(x)$.

a) $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$ $A = \left\{-2, \frac{1}{3}, 1\right\}$

b) $f(x) = (x^2 - 9)\sqrt{x+3}$ $A = \{-3, 0, 2, 3\}$

c) $f(x) = \frac{x^3 - 3x - 2}{\sqrt{3-x}}$ $A = \{-2, -1, 2, 4\}$

d) $f(x) = 3^x - 3x - 3$ $A = \{-1, 1, 2\}$

e) $f(x) = 2^x - 7$ $A = \{\log_2 3, \log_2 7\}$

f) $f(x) = \frac{10^{2x} - 5 \cdot 10^x + 6}{x-1}$ $A = \{\log 2, \log 3, \log 5\}$

7.16. Podaj przykład wzoru funkcji, której dziedziną jest zbiór $\mathbf{R} - \{2\}$ i która nie ma miejsc zerowych.

7.17. Dla jakich wartości m liczba 5 jest miejscem zerowym funkcji

$$f(x) = (m+3)x - 5?$$

7.18. Dla jakiej wartości parametru m funkcje $f(x) = 5x - 3$ i $g(x) = (3m-1)x + 6$ mają wspólne miejsce zerowe?

7.19. Dla jakiej wartości parametru k funkcje $f(x) = |x-4| - 4$ i $g(x) = x^2 + kx$ mają jednakowe miejsca zerowe?

* **7.20.** Dla jakich wartości m funkcja f :

I. ma jedno miejsce zerowe,

II. nie ma miejsc zerowych?

a) $f(x) = mx - 2$

c) $f(x) = (m+2)x - 1$

b) $f(x) = (m-1)x + 3$

d) $f(x) = 5 - (m-3)x$

* **7.21.** Dla jakich wartości m miejsce zerowe funkcji

a) $f(x) = 2x - m + 1$ jest liczbą większą od 1?

b) $f(x) = -5x + m$ jest liczbą większą od 3?

c) $f(x) = \frac{1}{2}x - (m+2)$ jest liczbą mniejszą od -4 ?

d) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 3m - 2$ jest liczbą mniejszą od $1\frac{1}{2}$?

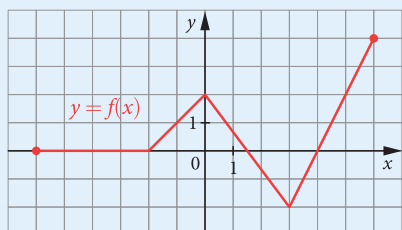
* **7.22.** Dla jakich wartości m funkcja $f(x) = (2x + m)\sqrt{5x - 3}$ ma dwa miejsca zerowe?

* **7.23.** Dla jakich wartości m funkcja $f(x) = \frac{|x - 2| - m}{\sqrt{x + 3}}$ ma dwa miejsca zerowe?

Prosto do matury



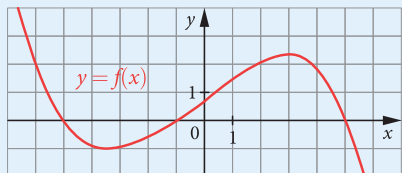
1. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f .



Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Równanie $f(x) = 0$ ma dokładnie trzy rozwiązania.
- B. Funkcja f ma co najmniej trzy miejsca zerowe.
- C. Funkcja f ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

2. Odczytaj z wykresu miejsca zerowe funkcji f .



3. Wyznacz (o ile istnieje) miejsce zerowe funkcji $f(x) = 12x - 3$, której dziedziną jest zbiór liczb całkowitych.

4. Dla jakich wartości m liczba 2 jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = |m - 1|x - 12$?

5. Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = |x + 2| - 3$.

7.23. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D = (-3; \infty)$. Funkcja f ma dwa miejsca zerowe, gdy równanie $|x - 2| - m = 0$ ma dwa rozwiązania należące do zbioru D . Równanie to ma dwa rozwiązania $x = 2 - m$ i $x = 2 + m$, gdy $m > 0$. Wtedy $2 - m < 2 + m$, więc oba rozwiązania należą do D , gdy $2 - m > -3$, czyli $m < 5$. Zatem funkcja f ma dwa miejsca zerowe dla $m \in (0; 5)$.

7.22. $m < -\frac{6}{5}$. Wskazówka:
 $D = \left(\frac{3}{5}; \infty\right)$, zatem $-\frac{m}{2} > \frac{3}{5}$.

Prosto do matury

1. F, P, P

2. -5, -1, 5

3. brak miejsc zerowych

4. $m = 7$ lub $m = -5$

5. -5, 1

Uwagi metodyczne

Niezwykle ważnym zagadnieniem jest odczytywanie z wykresu zbiorów rozwiązań nierówności – najpierw w szczególnym przypadku $f(x) > 0$ i $f(x) < 0$, następnie ogólnie, dla $f(x) > m$. Przystwojenie tego zagadnienia nie jest zbyt trudne, jeżeli poprzednie tematy zostały przez uczniów opanowane. Warto to sprawdzić, przeprowadzając krótką kartkówkę (odbitka ksero wykresu i punkty z pytaniami dotyczącymi własności funkcji).

Jeżeli uczniowie dobrze opanują to zagadnienie, to później nie będzie dla nich problemem rozwiązywanie nierówności (zwłaszcza kwadratowych).

8. Znak i monotoniczność funkcji

Umiejętności:

- odczytywanie z wykresu funkcji maksymalnych przedziałów, w których funkcja ma stały znak
- odczytywanie z wykresu funkcji maksymalnych przedziałów, w których funkcja maleje (lub rośnie)

Odczytywanie z wykresu rozwiązań nierówności $f(x) > 0$, $f(x) < 0$

Przykład 1

Odczytamy z wykresu, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości

- a) dodatnie. b) ujemne.

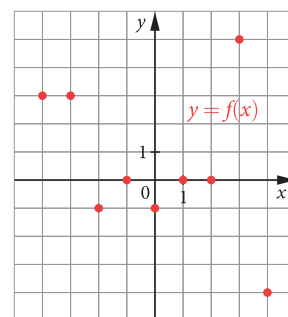
Rozwiązanie

Aby wykonać polecenie a), wybieramy wszystkie punkty wykresu leżące powyżej osi x i odczytujemy ich pierwsze współrzędne:

$$f(x) > 0 \quad \text{dla } x \in \{-4, -3, 3\}$$

Aby wykonać polecenie b), odczytujemy pierwsze współrzędne wszystkich punktów wykresu leżących poniżej osi x :

$$f(x) < 0 \quad \text{dla } x \in \{-2, 0, 4\}$$



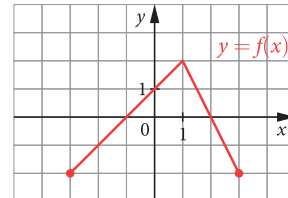
Przykład 2 ◀ zad. 8.6

Wyznamy przedziały, w których funkcja ma stały znak (tzn. ma albo dodatnie, albo ujemne wartości).

Rozwiązanie

$$f(x) > 0 \quad \text{dla } x \in (-1; 2)$$

$$f(x) < 0 \quad \text{dla } x \in \langle -3; -1) \text{ oraz dla } x \in (2; 3)$$



← ten fragment wykresu leży nad osią x

← te fragmenty wykresu leżą pod osią x

Zwróćmy uwagę na to, że przedział $\langle -3; -1)$ jest lewostronnie domknięty, bo $f(-3) < 0$, ale prawostronnie otwarty, bo $f(-1)$ nie jest ujemne, lecz równe 0. Podobnie $f(3) < 0$, natomiast $f(2) = 0$.

ZZ i MKP

temat 4.4

Multiteka

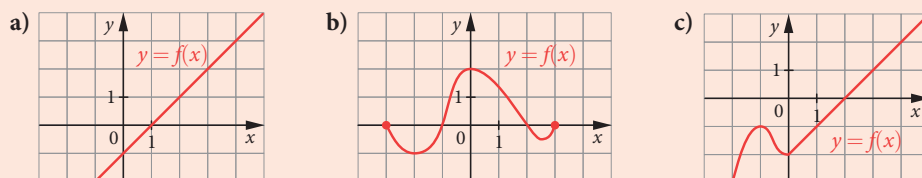
- Monotoniczność funkcji liniowej

dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 3.8

Generator
testów i sprawdzianów

◀ 8.6. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Odczytaj z niego rozwiązania nierówności:

- I. $f(x) > 0$, II. $f(x) \leq 0$, III. $f(x) < 2$, IV. $f(x) \geq -1$.



Odp.: a) I. $x \in (1; \infty)$ II. $x \in (-\infty; 1)$ III. $x \in (-\infty; 3)$ IV. $x \in \langle 0; \infty)$

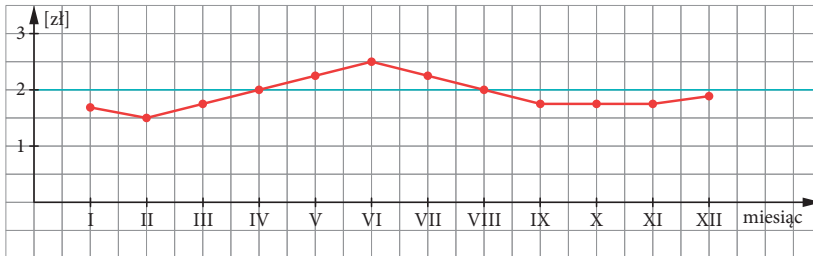
b) I. $x \in (-1; 2)$ II. $x \in \langle -3; -1) \cup \langle 2; 3)$ III. $x \in \langle -3; 3) - \{0\}$ IV. $x \in \langle -3; 3)$

c) I. $x \in (2; \infty)$ II. $x \in (-\infty; 2)$ III. $x \in (-\infty; 4)$ IV. $x \in \{-1\} \cup \langle 1; \infty)$

Podobnie odczytujemy z wykresu rozwiązanie nierówności $f(x) > m$, gdzie m jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Przykład 3 ◀ zad. 8.4

Wykres przedstawia średni kurs pewnej waluty w 12 kolejnych miesiącach.



Sprawdźmy, w których miesiącach kurs przekroczył 2 zł.

Rozwiązanie

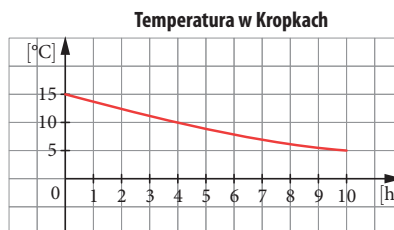
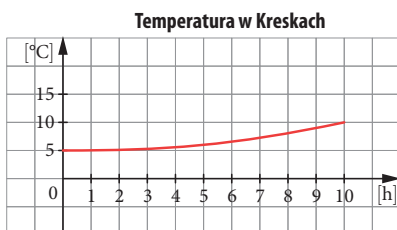
Z wykresu odczytujemy, że kurs osiągnął wartość 2 zł w kwietniu, następnie w maju, czerwcu i lipcu przekraczał 2 zł, w sierpniu znów był równy 2 zł, a w pozostałych miesiącach był niższy od 2 zł.

Odp.: Kurs przekroczył 2 zł w maju, czerwcu i lipcu.

Monotoniczność funkcji

Przykład 4

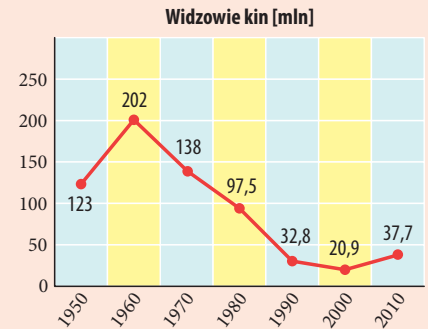
Przyjrzyjmy się wykresom temperatur mierzonych w dwóch miejscowościach tego samego dnia przez 10 godzin.



Porównując oba wykresy, możemy stwierdzić, że w Kreskach temperatura rosła, natomiast w Kropkach malała.

Pierwszy wykres jest wykresem funkcji rosnącej, drugi jest wykresem funkcji malejącej.

◀8.4. Wykres przedstawia liczbę widzów na wszystkich seansach kinowych w Polsce w poszczególnych latach.



a) Odczytaj, w jakich latach liczba widzów była wyższa od 100 mln.

b) Kiedy liczba ta była największa?

Odp.: a) w latach 1950–1980

b) w roku 1960

Uwagi metodyczne

Najtrudniejszym pojęciem w tym dziale jest monotoniczność funkcji, dlatego poświęcamy mu więcej czasu.

Uwagi metodyczne

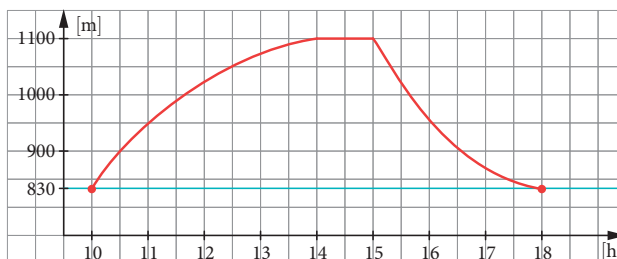
Wprowadzając pojęcie monotoniczności funkcji, analizujemy wykres ilustrujący wysokość pokonywaną w trakcie wycieczki górskiej. To bardzo dobry przykład funkcji monotonicznej na przedziałach w naturalny sposób skojarzonych ze słowami: „rośnie”, „maleje” i „jest stała”. Ponadto łatwo rozszerzyć te pojęcia na „nie maleje” i „nie rośnie”.

Radzimy od razu zwrócić uwagę na:

- domykanie przedziałów monotoniczności,
- niełączenie ich znakiem sumy.

Przykład 5

Oto wykres ilustrujący wysokość terenu mierzoną w czasie pieszej wycieczki po Bieszczadach.



Wycieczka rozpoczęła się o godzinie 10⁰⁰ z punktu startu leżącego na wysokości 830 m n.p.m. Przez pierwsze 4 godziny droga wiodła pod górę. O godzinie 14⁰⁰ turyści osiągnęli szczyt. Tam odpoczywali przez godzinę, po czym rozpoczęli schodzenie, które trwało do godziny 18⁰⁰.

Inaczej mówiąc, między 10⁰⁰ a 14⁰⁰ funkcja opisująca osiąganą wysokość rosła, od 14⁰⁰ do 15⁰⁰ była stała, natomiast od 15⁰⁰ do 18⁰⁰ malała.

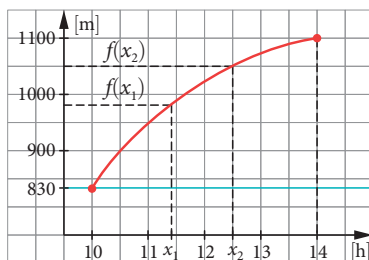
Oznaczmy omawianą funkcję f . Jeżeli porównamy **dowolne dwa argumenty** z przedziału $\langle 10; 14 \rangle$ – na rysunku 1 zaznaczone jako x_1 oraz x_2 – to większemu z nich odpowiada większa wartość funkcji, czyli spełniony jest warunek:

$$\text{jeżeli } x_2 > x_1, \text{ to } f(x_2) > f(x_1)$$

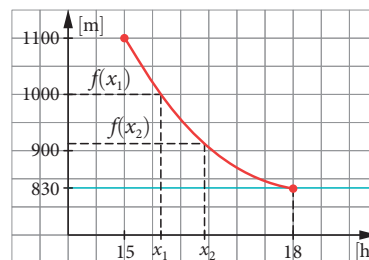
Na rysunku z konieczności wskazujemy dwa przykładowe argumenty. Można, oczywiście, porównać w taki sam sposób wartości dla innych argumentów wybranych z tego przedziału. Wniosek jest taki sam dla każdej pary argumentów.

Z kolei **dowolnym dwóm argumentom** z przedziału $\langle 14; 15 \rangle$ odpowiada ta sama wartość, czyli: jeżeli $x_2 > x_1$, to $f(x_2) = f(x_1)$.

Jeżeli natomiast porównamy **dowolne dwa argumenty** z przedziału $\langle 15; 18 \rangle$, jak na rysunku 2, to większemu z nich odpowiada mniejsza wartość funkcji, czyli spełniony jest warunek: jeżeli $x_2 > x_1$, to $f(x_2) < f(x_1)$.



Rys. 1.



Rys. 2.

Definicja

Funkcję $y = f(x)$ nazywamy **funkcją rosnącą** w zbiorze X , jeżeli dla dowolnych dwóch argumentów x_1, x_2 należących do X spełniony jest warunek:

$$\text{jeżeli } x_2 > x_1, \text{ to } f(x_2) > f(x_1)$$

Funkcja z przykładu 5 jest rosnąca w przedziale $\langle 10; 14 \rangle$.

Definicja

Funkcję $y = f(x)$ nazywamy **funkcją malejącą** w zbiorze X , jeżeli dla dowolnych dwóch argumentów x_1, x_2 należących do X spełniony jest warunek:

$$\text{jeżeli } x_2 > x_1, \text{ to } f(x_2) < f(x_1)$$

Funkcja z przykładu 5 jest malejąca w przedziale $\langle 15; 18 \rangle$.

Funkcja **stała** w zbiorze X przyporządkowuje wszystkim argumentom z tego zbioru tę samą wartość.

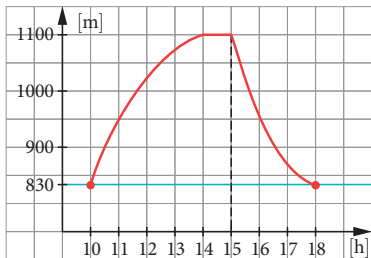
Funkcja z przykładu 5 jest stała w przedziale $\langle 14; 15 \rangle$.

Rozszerzymy wprowadzone definicje tak, aby obejmowały przypadki, gdy w pewnym przedziale funkcja jest stała.

Definicja

Funkcję $y = f(x)$ nazywamy **funkcją niemalejącą** w zbiorze X , jeżeli dla dowolnych dwóch argumentów x_1, x_2 należących do X spełniony jest warunek:

$$\text{jeżeli } x_2 > x_1, \text{ to } f(x_2) \geq f(x_1)$$



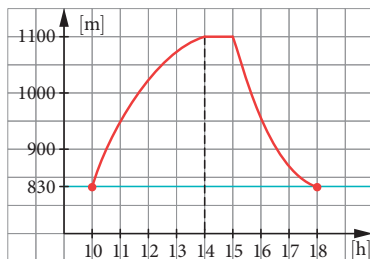
Określenie „funkcja niemalejąca” w istocie oznacza, że w rozpatrywanym zbiorze funkcja nie może większemu argumentowi przyporządkowywać mniejszej wartości.

Funkcja z przykładu 5 jest niemalejąca w przedziale $\langle 10; 15 \rangle$.

Definicja

Funkcję $y = f(x)$ nazywamy **funkcją nierosnącą** w zbiorze X , jeżeli dla dowolnych dwóch argumentów x_1, x_2 należących do X spełniony jest warunek:

$$\text{jeżeli } x_2 > x_1, \text{ to } f(x_2) \leq f(x_1)$$



Określenie „funkcja nierosnąca” w istocie oznacza, że w rozpatrywanym zbiorze funkcja nie może większemu argumentowi przyporządkowywać większej wartości.

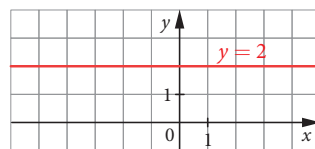
Funkcja z przykładu 5 jest nierosnąca w przedziale $\langle 14; 18 \rangle$.

Każdą funkcję, która jest w swojej dziedzinie rosnąca albo malejąca, albo niemalejąca, albo nierosnąca, nazywamy **funkcją monotoniczną**.

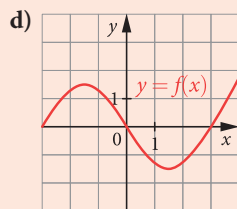
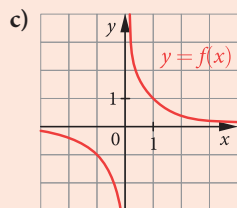
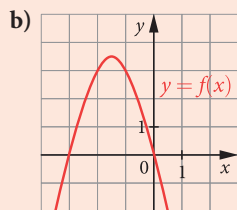
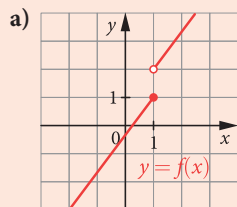
Obie funkcje z przykładu 4 są monotoniczne – ta opisująca temperaturę w Kreskach jest rosnąca, a opisująca temperaturę w Kropkach – jest malejąca.

Funkcja z przykładu 5 jest niemonotoniczna.

Każda funkcja stała jest funkcją niemalejącą i funkcją nierosnącą.



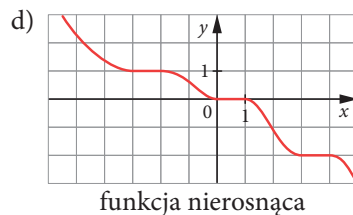
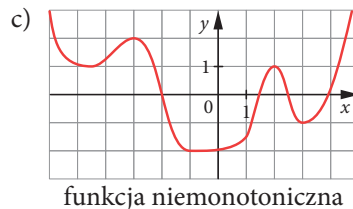
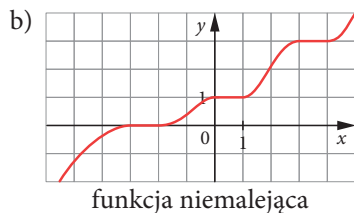
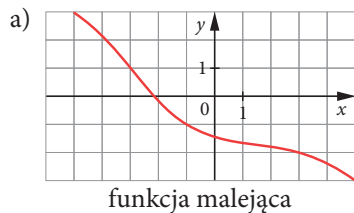
◀ 8.9. Określ na podstawie wykresu, czy przedstawiona funkcja jest monotoniczna.



Odp.: a) tak b)–d) nie

Przykład 6 ◀ zad. 8.9

Określmy na podstawie wykresu, czy przedstawione funkcje są monotoniczne.



Przykład 7 ◀ zad. 8.11

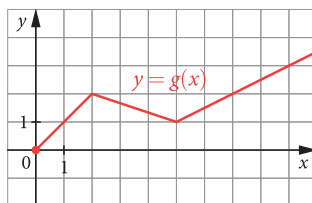
Określmy przedziały monotoniczności funkcji $y = g(x)$ o danym wykresie.

Rozwiązanie

Dziedziną tej funkcji jest zbiór $D = \langle 0; \infty \rangle$.

Funkcja g nie jest monotoniczna, ale:

- w przedziale $\langle 0; 2 \rangle$ jest rosnąca,
- w przedziale $\langle 2; 5 \rangle$ jest malejąca,
- w przedziale $\langle 5; \infty \rangle$ jest rosnąca.

**Przykład 8** ◀ zad. 8.16

Określmy przedziały monotoniczności funkcji $y = k(x)$ o danym wykresie.

Rozwiązanie

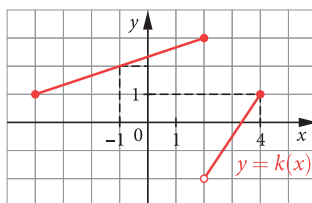
Dziedziną tej funkcji jest przedział $D = \langle -4; 4 \rangle$.

- W przedziale $\langle -4; 2 \rangle$ funkcja k jest rosnąca.
- W przedziale $\langle 2; 4 \rangle$ funkcja k jest rosnąca.

Funkcja k **nie jest** jednak **rosnąca** w całej dziedzinie. Zauważmy, że np. argumentowi $x = -1$ funkcja k przyporządkowuje wartość większą niż argumentowi $x = 4$:

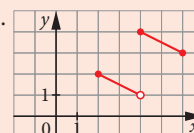
$$k(-1) = 2, \quad k(4) = 1$$

Mamy więc: $4 > -1$, ale $k(4) < k(-1)$.

**8.11.** Patrz s. 254.

8.16. Podaj przykład wykresu funkcji, której dziedziną jest przedział $\langle 2; 6 \rangle$, która jest malejąca w przedziałach $\langle 2; 4 \rangle$ i $\langle 4; 6 \rangle$, ale nie jest malejąca w dziedzinie.

Odp.: np.

**Wniosek**

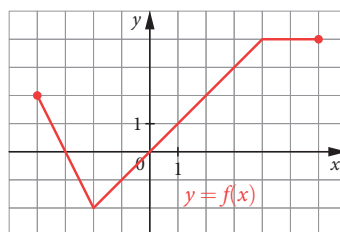
Z faktu, że funkcja jest rosnąca (malejąca) w kilku przedziałach, **nie wynika**, że jest rosnąca (malejąca) w całej dziedzinie.

Zadania

Rozwiąż zadania 8.1–8.3 na podstawie zamieszczonego obok rysunku. W każdym z tych zadań jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytce.

8.1. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq 0$.

- A. $\langle -3; 2 \rangle$ C. $\langle -3; 0 \rangle$
B. $\langle -3; 0 \rangle$ D. $\langle 0; 3 \rangle$

**Odpowiedzi i rozwiązania**

8.1. B

Uwagi metodyczne

Konieczne należy uświadomić uczniom, że funkcja rosnąca w zbiorze A i rosnąca w zbiorze B nie musi być rosnąca w zbiorze $A \cup B$. Ten problem analizujemy w przykładzie 8.

Częstym błędem przy opisywaniu przedziałów monotoniczności jest mylenie argumentów z wartościami (*Funkcja rośnie od $x = 1$ do $y = 5$*).

8.2. A

8.3. D

8.4. a) w latach 1950–1980
b) w roku 1960

8.5. spadek poniżej 2%: USA w 1998 r., Japonia od 1992 r. (w 1999 r. brak danych), UE od 1997 r.; najwyższa wartość: USA – w 1990 r. ok. 5,5%

8.2. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 3$.

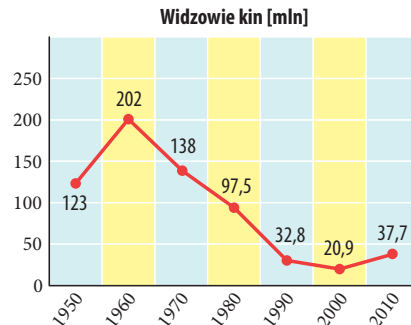
- A. $\langle 3; 6 \rangle$ B. $(3; 6)$ C. $\langle 3; 6 \rangle$ D. $(3; 6)$

8.3. W przedziale $\langle -2; 6 \rangle$ funkcja f jest

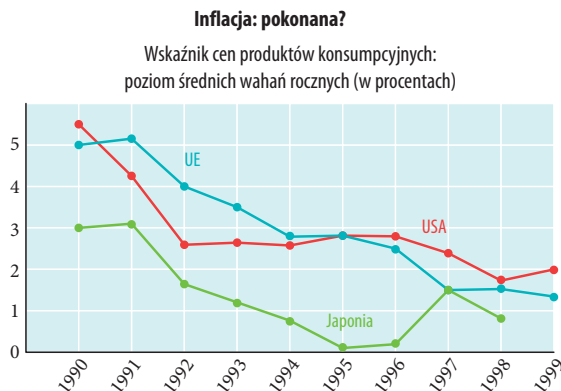
- A. rosnąca. B. stała. C. nierosnąca. D. niemalejąca.

8.4. Wykres przedstawia liczbę widzów na wszystkich seansach kinowych w Polsce w poszczególnych latach.

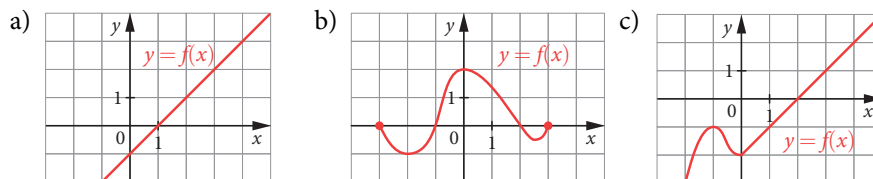
- a) Odczytaj, w jakich latach liczba widzów była wyższa od 100 mln.
b) Kiedy liczba ta była największa?



8.5. Z podanego wykresu odczytaj, od którego roku w UE, w USA i w Japonii inflacja była niższa od 2%. W którym roku badanego okresu i gdzie inflacja była najwyższa? Ile wynosiła wtedy jej wartość?

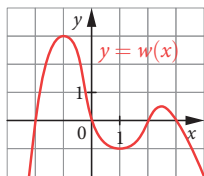
8.6. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Odczytaj z niego rozwiązania nierówności:

- I. $f(x) > 0$, II. $f(x) \leq 0$, III. $f(x) < 2$, IV. $f(x) \geq -1$.

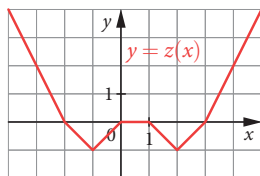
8.6. a) I. $x \in (1; \infty)$ II. $x \in (-\infty; 1)$ III. $x \in (-\infty; 3)$ IV. $x \in \langle 0; \infty \rangle$ b) I. $x \in (-1; 2)$ II. $x \in \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 2; 3 \rangle$ III. $x \in \langle -3; 3 \rangle - \{0\}$ IV. $x \in \langle -3; 3 \rangle$ c) I. $x \in (2; \infty)$ II. $x \in (-\infty; 2)$ III. $x \in (-\infty; 4)$ IV. $x \in \{-1\} \cup \langle 1; \infty \rangle$

8.7. Odczytaj z wykresu zbiory rozwiązań nierówności.

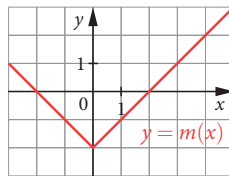
a) $w(x) > 0$,
 $w(x) \leq 0$



b) $z(x) > 2$,
 $z(x) \leq 0$,
 $z(x) < 4$



c) $m(x) > 0$,
 $m(x) < 0$,
 $m(x) \leq -1$



8.8. Podaj przykład wykresu funkcji f , która spełnia podane warunki.

a) $D = \langle -3; 5 \rangle$

$f(x) > 0$ dla $x \in \langle -3; -1 \rangle \cup (1; 5)$
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-1; 1)$

c) $D = (-3; 3)$

$f(x) > 0$ dla $x \in (0; 3)$
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-3; 0)$

b) $D = (1; 6)$

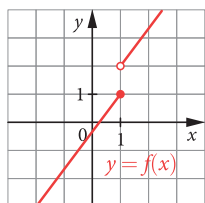
$f(x) > 0$ dla $x \in (1; 3)$
 $f(x) < 0$ dla $x \in \langle 3; 6 \rangle$

d) $D = \langle 0; 8 \rangle$

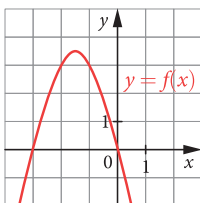
$f(x) > 0$ dla $x \in \langle 0; 2 \rangle \cup \langle 5; 8 \rangle$
 $f(x) < 0$ dla $x \in (2; 5)$

8.9. Określ na podstawie wykresu, czy przedstawiona funkcja jest monotoniczna.

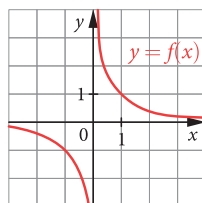
a)



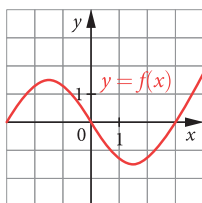
b)



c)

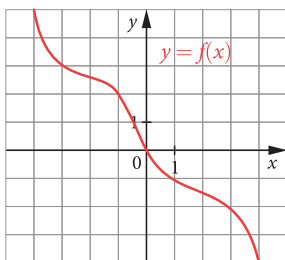


d)

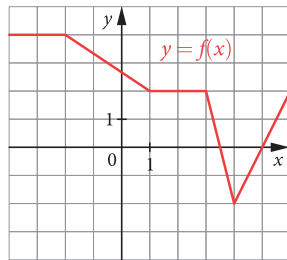


8.10. Określ na podstawie wykresu, czy przedstawiona funkcja jest monotoniczna.

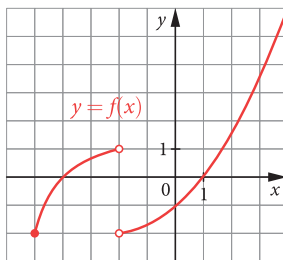
a)



b)



c)



8.7. a) $w(x) > 0$ dla

$x \in (-2; 0) \cup (2; 3)$,

$w(x) \leq 0$ dla

$x \in (-\infty; -2) \cup \langle 0; 2 \rangle \cup \langle 3; \infty \rangle$

b) $z(x) > 2$ dla

$x \in (-\infty; -3) \cup (4; \infty)$,

$z(x) \leq 0$ dla $x \in \langle -2; 3 \rangle$,

$z(x) < 4$ dla $x \in (-4; 5)$

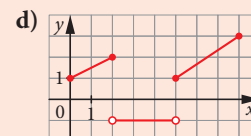
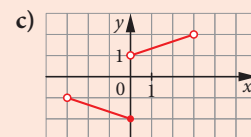
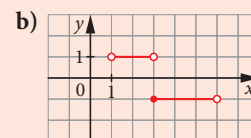
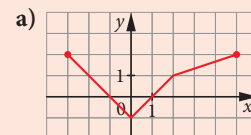
c) $m(x) > 0$ dla

$x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$,

$m(x) < 0$ dla $x \in (-2; 2)$,

$m(x) \leq -1$ dla $x \in \langle -1; 1 \rangle$

8.8. Przykładowe wykresy

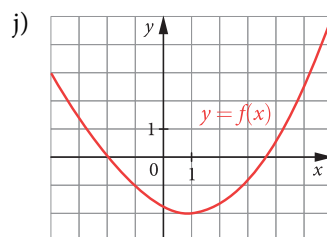
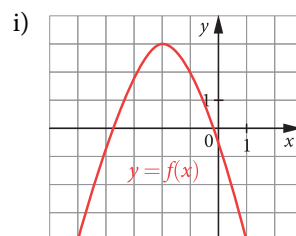
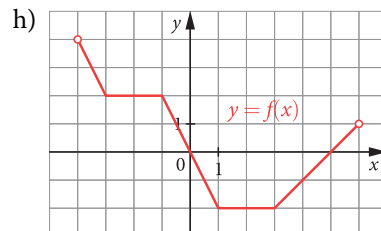
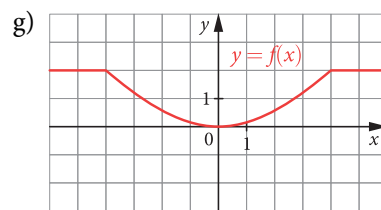
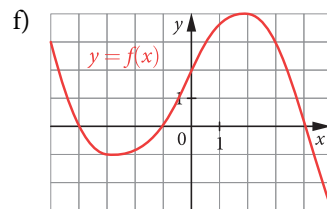
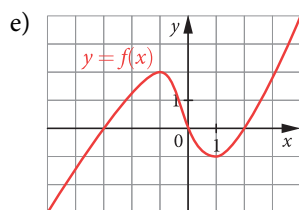
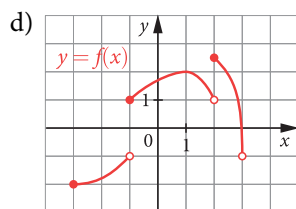
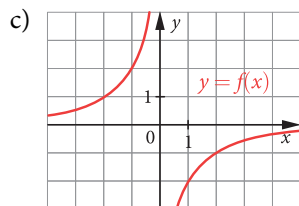
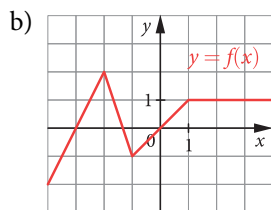
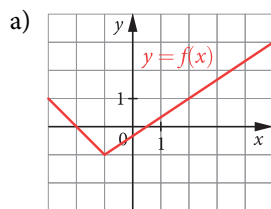


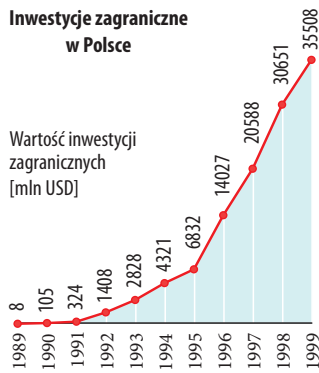
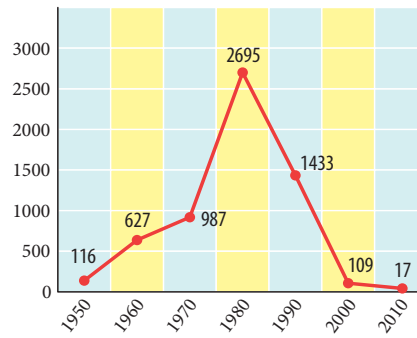
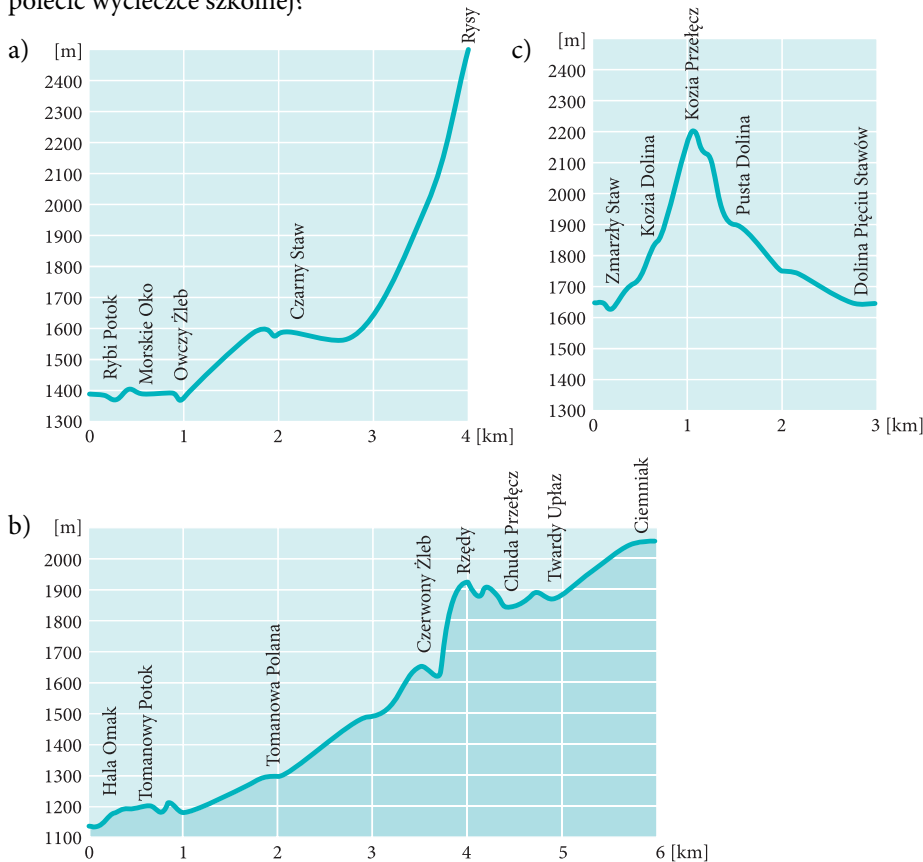
8.9. a) tak **b)–d)** nie

8.10. a) tak **b), c)** nie

- 8.11. a)** malejąca w przedziale $(-\infty; -1)$,
rosnąca w przedziale $\langle -1; \infty)$
b) rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -2)$ i $\langle -1; 1)$,
malejąca w przedziale $\langle -2; -1)$,
stała w przedziale $\langle 1; \infty)$
c) rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$
d) rosnąca w przedziale $\langle -3; 1)$,
malejąca w każdym z przedziałów $\langle 1; 2)$ i $\langle 2; 3)$
e) rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -1)$ i $\langle 1; \infty)$,
malejąca w przedziale $\langle -1; 1)$
f) malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -3)$ i $\langle 2; \infty)$,
rosnąca w przedziale $\langle -3; 2)$
g) stała w każdym z przedziałów $(-\infty; -4)$ i $\langle 4; \infty)$,
malejąca w przedziale $\langle -4; 0)$,
rosnąca w przedziale $\langle 0; 4)$
h) malejąca w każdym z przedziałów $\langle -4; -3)$ i $\langle -1; 1)$,
stała w każdym z przedziałów $\langle -3; -1)$ i $\langle 1; 3)$,
rosnąca w przedziale $\langle 3; 6)$
i) rosnąca w przedziale $(-\infty; -2)$,
malejąca w przedziale $\langle -2; \infty)$
j) malejąca w przedziale $(-\infty; 1)$,
rosnąca w przedziale $\langle 1; \infty)$

8.11. Podaj przedziały monotoniczności funkcji przedstawionej na wykresie.



8.12. Omów monotoniczność funkcji o podanym wykresie.**a)** Inwestycje zagraniczne w Polsce**b)** Produkcja odbiorników radiowych w Polsce [tys. szt.]**8.13.** Omów monotoniczność funkcji opisujących zmiany wysokości n.p.m. podczas pokonywania trzech tatrzańskich szlaków turystycznych. Który z nich można polecić wycieczce szkolnej?**Uwagi metodyczne**

Radzimy omówić kilka przykładów funkcji przedziałami liniowych. Najczęściej spotykane wnioski w prasie dotyczą takich właśnie przypadków: inflacja spada lub rośnie, stopa bezrobocia maleje, wysokość średnich zarobków w kraju rośnie, przyrost naturalny w Polsce rośnie itp.

8.12. a) funkcja rosnąca

b) funkcja rosnąca w latach 1950–1980, malejąca w latach 1980–2010

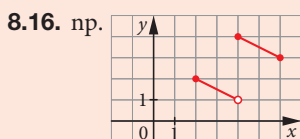
8.13. a) Funkcja jest malejąca w czterech przedziałach i rosnąca w czterech przedziałach, w szczególności rośnie od 1 km do ok. 1,8 km i od ok. 2,7 km do 4 km.

b) Funkcja „przeważnie” rośnie; jest tylko kilka krótkich zejść (wtedy maleje).

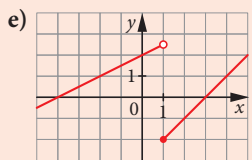
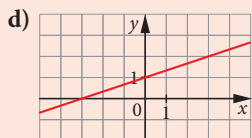
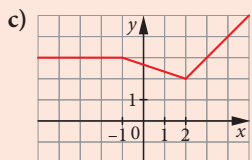
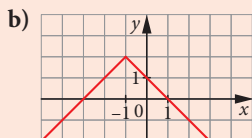
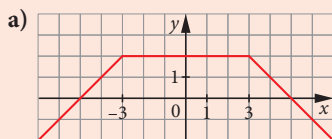
c) Od ok. 0,2 km do ok. 1 km funkcja rośnie, a w przedziale od ok. 1 km do 3 km – maleje.

- 8.14.** a) jedna b) jedna
c) sześć d) dziesięć

- 8.15.** a) nie b) nie c) tak
d) nie



8.17. Przykładowe wykresy



- 8.19.** Niech x_1 i x_2 , gdzie $x_1 < x_2$, będą miejscami zerowymi funkcji f . Wtedy $f(x_1) = f(x_2)$, więc funkcja f nie jest rosnąca.

- 8.14.** Ile jest wszystkich funkcji o dziedzinie $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ i zbiorze wartości $\{6, 7, 8, 9, 10\}$, które są

- a) malejące?
b) rosnące?
* c) rosnące w zbiorze $\{1, 2, 3\}$ i malejące w zbiorze $\{3, 4, 5\}$?
* d) malejące w zbiorze $\{1, 2\}$ i rosnące w zbiorze $\{3, 4, 5\}$?

Wykonaj tabele albo wykresy przykładowych funkcji spełniających te warunki.

- 8.15.** Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest przedział $(0; 4)$. Wiemy, że funkcja ta jest malejąca w przedziale $(0; 2)$ i jest malejąca w przedziale $(2; 4)$. Czy z tych informacji wynika, że funkcja $y = f(x)$ jest malejąca w podanym przedziale?

- a) $(0; 4)$ b) $(0; 3)$ c) $(0; 1)$ d) $(1; 4)$

- 8.16.** Podaj przykład wykresu funkcji, której dziedziną jest przedział $\langle 2; 6 \rangle$, która jest malejąca w przedziałach $\langle 2; 4 \rangle$ i $\langle 4; 6 \rangle$, ale nie jest malejąca w dziedzinie.

- 8.17.** Podaj przykład wykresu funkcji, która spełnia następujące warunki:

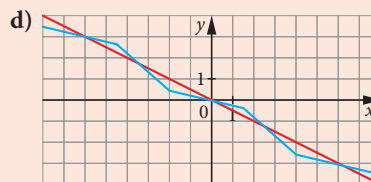
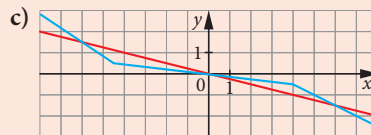
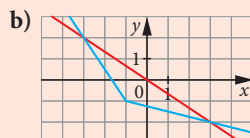
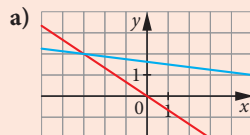
- a) jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -3)$, malejąca w przedziale $\langle 3; \infty)$ oraz stała w przedziale $\langle -3; 3 \rangle$.
b) ma dwa miejsca zerowe, jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -1)$ oraz malejąca w przedziale $\langle -1; \infty)$.
c) nie ma miejsc zerowych, jest rosnąca w przedziale $\langle 2; \infty)$, malejąca w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$ oraz stała w przedziale $(-\infty; -1)$.
d) jest rosnąca w zbiorze $\mathbf{R}$ i ma jedno ujemne miejsce zerowe.
e) jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 1)$ i $\langle 1; \infty)$, ale nie jest monotoniczna w zbiorze $\mathbf{R}$.

- 8.18.** Przedstaw w jednym układzie współrzędnych wykresy dwóch funkcji malejących, które przecinają się

- a) w jednym punkcie.
b) w dwóch punktach.
c) w trzech punktach.
d) w nieskończenie wielu punktach.

- D** * **8.19.** Wykaż, że jeżeli funkcja ma dwa miejsca zerowe, to nie jest funkcją rosnącą.

8.18. Przykładowe wykresy



Prosto do matury



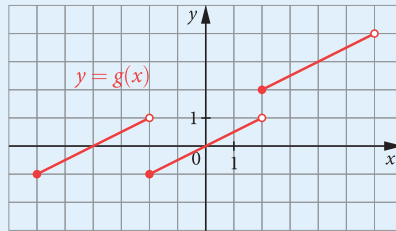
Prosto do matury

1. F, P, F

2. $x \in (-4; -3) \cup (0; 5)$ 3. malejąca w każdym z przedziałów $\langle -4; -2 \rangle$ i $\langle 2; 8 \rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -2; 2 \rangle$

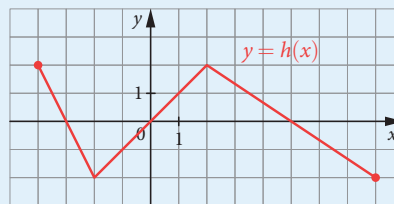
5. Taka funkcja jest niemalejąca lub nierosnąca, czyli jest monotoniczna.

1. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji g . Oceń prawdziwość podanych zdań.



- A. W przedziale $\langle -6; 2 \rangle$ funkcja g jest rosnąca.
 B. W przedziale $\langle -2; 6 \rangle$ funkcja g jest rosnąca.
 C. W przedziale $\langle -6; 6 \rangle$ funkcja g jest rosnąca.

2. Odczytaj z wykresu funkcji h zamieszczonego obok zbiór rozwiązań nierówności $h(x) > 0$.



3. Opisz przedziały monotoniczności funkcji h , której wykres zamieszczono obok.

4. Podaj przykład wykresu funkcji o dziedzinie $D = \langle -5; 1 \rangle$, która spełnia następujące warunki:

- $f(x) > 0$ dla $x \in (-5; -2) \cup \langle 0; 1 \rangle$,
- $f(x) < 0$ dla $x \in \{-5\} \cup (-2; 0)$.

5. Podaj przykład wykresu funkcji, której dziedziną jest przedział $\langle 1; 5 \rangle$ i która jest stała w przedziałach $\langle 1; 3 \rangle$ oraz $\langle 3; 5 \rangle$, ale nie jest stała w całej dziedzinie. Czy taka funkcja jest monotoniczna?

9. Ważna funkcja – proporcjonalność odwrotna

Umiejętności:

- rozpoznawanie wielkości odwrotnie proporcjonalnych
- szkicowanie wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ dla danego a
- korzystanie ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi

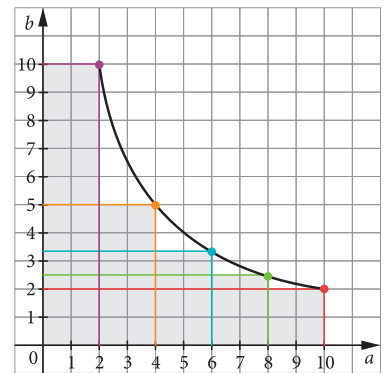
Jak dobrać wymiary prostokąta, aby jego pole było równe 20? Przedstawimy kilka wyników w tabeli, w której a i b oznaczają długości boków prostokąta, a P jego pole.

a	2	10	2,5	8	$5\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	4	5
b	10	2	8	2,5	$2\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$	5	4
P	20	20	20	20	20	20	20	20

Zależność między długościami boków prostokąta o polu 20 zapisujemy w postaci:

$$a \cdot b = 20$$

Prostokątów spełniających taki warunek jest nieskończenie wiele. Możemy zilustrować to na wykresie. Każdy z narysowanych prostokątów ma pole równe 20. Jeżeli przyjmemy, że długość boku a zmienia wartość od zera do nieskończoności, to odpowiadająca mu długość boku b będzie się odpowiednio zmieniała od nieskończoności do zera. Każdy z prostokątów ma trzy wierzchołki leżące na osiach. Czwarte wierzchołki wszystkich prostokątów wyznacza krzywą zwaną hiperbolą.



Definicja

Rozważamy dwie dodatnie zmienne wielkości x i y . Zależność między x i y taką, w której iloczyn a tych wielkości jest stały, nazywamy **proporcjonalnością odwrotną**.

$$xy = a, \quad x > 0, \quad y > 0$$

Mówimy wówczas, że x i y są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi.

Przy stałym polu prostokąta długość jednego z boków prostokąta jest odwrotnie proporcjonalna do długości drugiego boku.

ZZ i MKP

temat 4.13

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.9

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 1

Ojciec Karola dojeżdża do pracy samochodem. Codziennie pokonuje trasę 20 km z różną prędkością średnią. Czas przejazdu t jest odwrotnie proporcjonalny do prędkości średniej v , ponieważ:

$$t \cdot v = 20$$

Jeżeli ojciec Karola jedzie ze średnią prędkością $v = 60$ km/h, to dojazd do pracy zajmuje mu 20 minut.

$$t = \frac{20}{60} \text{ h} = 20 \text{ min}$$

Jeżeli jedzie ze średnią prędkością $v = 40$ km/h, to dojeżdża po półgodzinie. Pewnego dnia trafił na korek i całą trasę pokonał ze średnią prędkością 10 km/h. Zajęło mu to wówczas 2 godziny.

Przykład 2 ◀ zad. 9.5

Na polu może równocześnie pracować maksymalnie 6 traktorów i wówczas zaorzą pole w ciągu 8 godzin. W jakim czasie wykonają tę samą pracę 4 traktory pracujące w tym samym tempie?

**Rozwiązanie**

Skoro 6 traktorów może zaorać pole w ciągu 8 godzin, to znaczy, że na zaoranie tego pola przez jeden traktor potrzeba $6 \cdot 8 = 48$ godzin. Cztery traktory tę samą pracę wykonałyby 4 razy szybciej, czyli w 12 godzin.

Liczba godzin pracy jest odwrotnie proporcjonalna do liczby traktorów.

Odp.: Cztery traktory wykonają tę pracę w ciągu 12 godzin.

Przykład 3 ◀ zad. 9.6

Narciarską trasę zjazdową ubijają trzy ratraki w czasie 2 godzin. Ile czasu potrzeba na ubicie śniegu, jeżeli na trasę wyjedzie pięć ratraków? Zakładamy, że wszystkie ratraki pracują z taką samą wydajnością i mogą pracować na tej trasie jednocześnie.

**Rozwiązanie**

Jeden ratrak wykonałby tę pracę w czasie 6 godzin.

Pięć ratraków – w czasie $\frac{6}{5}$ godziny.

Odp.: Pięć ratraków przygotowuje trasę zjazdową w czasie 1 godziny i 12 minut.

◀9.5. Pewna ilość mąki pszennej wystarcza na upieczenie 120 bułek po 0,3 kg każda. Ile pięciodekagramowych kajerek można upiec z tej samej ilości mąki?

Odp.: 720

◀9.6. Jadąc na rowerze ze średnią prędkością 14 km/h, Jola dojeżdża do szkoły w czasie 30 minut. Krysia, która mieszka w tej samej odległości od szkoły co Jola, potrzebuje 20 minut na dojazd. Z jaką średnią prędkością dojeżdża do szkoły Krysia?

Odp.: 21 km/h

◀9.16. Właściciel wyciągu narciarskiego kupił nową armatkę śnieżną. Poprzednia pokrywała śniegiem trasę zjazdową w czasie 24 godzin. Jeżeli obydwie armatki pracują równocześnie, to trasa jest gotowa po upływie 6 godzin. Ile czasu zaśnieża trasę nowa armatka?

Odp.: 8 godz.

Przykład 4 ◀ zad. 9.16

Pan Piotr, wykwalifikowany malarz, może pomalować całą altanę ogrodową w czasie 8 godzin. Jego pomocnik Krzysiek tę samą pracę wykona w czasie 16 godzin. Ile czasu zajmie im pomalowanie altany, jeżeli będą pracować wspólnie?

Rozwiązanie

W ciągu godziny pan Piotr pomaluje $\frac{1}{8}$ altany, a Krzysiek $\frac{1}{16}$ altany. Wspólnie wykonają zatem w ciągu godziny $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$ pracy.

W czasie 16 godzin pomalowałoby 3 takie domki, a pomalowanie jednego zajmie im $\frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$ godziny.

Odp.: Pomalowanie altany zajmie im 5 godzin i 20 minut.

Przykład 5

Władze pewnej gminy ogłosiły przetarg na wykonanie przed sezonem letnim drogi prowadzącej nad pobliskie jezioro. Oferty złożyły trzy firmy. Pierwsza zobowiązała się wykonać pracę w ciągu 4 dni, druga w 6 dni, a trzecia w 12 dni. Ile dni zajęłoby zbudowanie całej drogi, gdyby wszystkie te firmy pracowały jednocześnie, i jak należałoby podzielić między nie kwotę wynagrodzenia?

Rozwiązanie

Należy przyjąć, że każda z firm wykona zaplanowany przez siebie fragment drogi: w wypadku pierwszej firmy oznacza to $\frac{1}{4}$ całości, drugiej – $\frac{1}{6}$ całości, a trzeciej – $\frac{1}{12}$ całości.

Pracując wspólnie (choć nad różnymi fragmentami drogi), firmy wykonają w ciągu jednego dnia $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$ część pracy.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

Skoro w ciągu jednego dnia firmy mogłyby wykonać połowę pracy, to cała praca zajęłaby im 2 dni.

W tym czasie pierwsza firma zbudowałaby $\frac{2}{4}$, czyli połowę drogi, druga firma – $\frac{2}{6}$, czyli $\frac{1}{3}$ drogi, a trzecia firma – $\frac{2}{12}$, czyli $\frac{1}{6}$ drogi. Na takie części należałoby również podzielić kwotę wynagrodzenia między te firmy.

Odp.: Zbudowanie drogi zajęłoby 2 dni; firmy powinny otrzymać odpowiednio $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{6}$ kwoty wynagrodzenia.

Przykład 6 ◀ zad. 9.10

Grupa n robotników maluje s samochodów w r dni. Przez ile dni grupa k robotników pomaluje p samochodów przy założeniu tej samej wydajności i wykonalności pracy?

Rozwiązanie

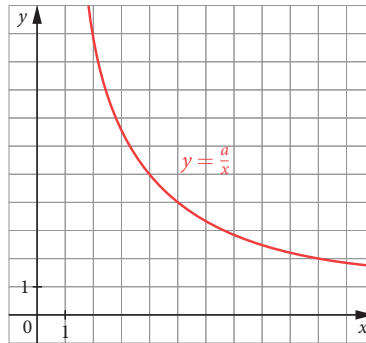
nr	← tyle dni 1 robotnik maluje s samochodów
$\frac{nr}{s}$	← tyle dni 1 robotnik maluje 1 samochód
$\frac{pnr}{s}$	← tyle dni 1 robotnik maluje p samochodów
$\frac{pnr}{ks}$	← tyle dni k robotników maluje p samochodów

Odp.: Grupa k robotników pomaluje p samochodów w $\frac{pnr}{ks}$ dni.

Zgodnie z definicją dwie dodatnie wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne, gdy ich iloczyn a jest stały. Jedną z nich możemy wyznaczyć w zależności od drugiej, wykonując dzielenie:

$$y = \frac{a}{x} \quad (a > 0)$$

Otrzymaliśmy w ten sposób wzór funkcji, której zarówno argumenty, jak i wartości są liczbami dodatnimi. Wykres tej funkcji znajduje się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.



Założmy teraz, że wielkości x i y przyjmują zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne. Wtedy $y = \frac{a}{x}$ jest wzorem funkcji, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera. Dla różnych wartości współczynnika a otrzymujemy w ten sposób różne zależności funkcyjne, np.:

- dla $a = 1$ mamy $y = \frac{1}{x}$
- dla $a = -2$ mamy $y = -\frac{2}{x}$
- dla $a = \frac{1}{3}$ mamy $y = \frac{1}{3x}$, czyli $y = \frac{1}{3x}$
- dla $a = \sqrt{5}$ mamy $y = \frac{\sqrt{5}}{x}$

Zajmiemy się najpierw funkcjami postaci $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a > 0$.

Narysujmy wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$. Dziedziną tej funkcji jest zbiór nieskończony.

W tabeli możemy uwzględnić tylko kilka wybranych argumentów.

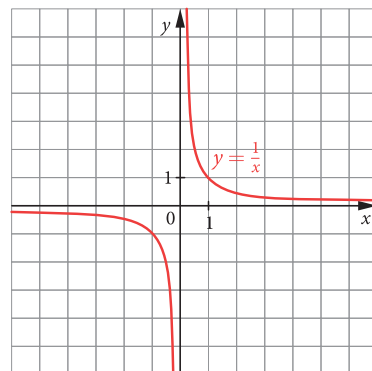
x	-10	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{4}$	1	3	1000
$f(x)$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-2	-100	100	4	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{1000}$

◀9.10. Jeżeli Danka będzie odkładała do skarbonki miesięcznie kwotę p zł, to uzbiera potrzebną sumę w czasie t miesięcy. Ile czasu zajmie jej uzbieranie tej samej sumy przy comiesięcznej składce s zł?

Odp.: $\frac{pt}{s}$ miesięcy

Z tabeli można wnioskować, że:

- dla dodatnich argumentów wartości funkcji są dodatnie, a dla ujemnych – ujemne,
- dla argumentów przeciwnych (np. 3 i -3) wartości funkcji są również liczbami przeciwnymi ($\frac{1}{3}$ i $-\frac{1}{3}$),
- dla dużych dodatnich argumentów wartości funkcji są małe,
- dla małych dodatnich argumentów wartości funkcji są duże.



Do dokładnego narysowania wykresu można wykorzystać komputer lub kalkulator graficzny.

Wykresem funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ jest krzywa nazywana **hiperbolą**. Początek układu współrzędnych jest jej środkiem symetrii.

Funkcje o wzorze $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą różną od zera, mają podobne własności.

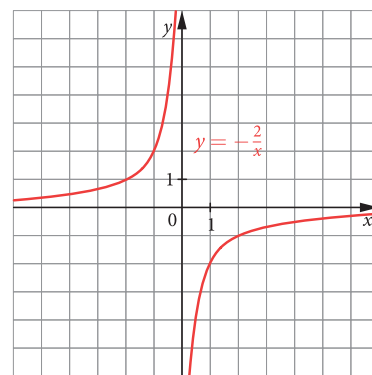
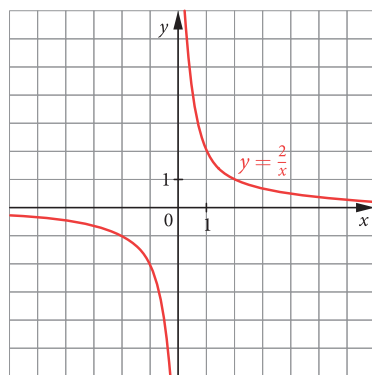
Przykład 7

Narysujemy wykresy funkcji $f(x) = \frac{2}{x}$ i $g(x) = -\frac{2}{x}$.

Rozwiązanie

x	-4	-1	$-\frac{1}{2}$	1	4
$f(x) = \frac{2}{x}$	$-\frac{1}{2}$	-2	-4	2	$\frac{1}{2}$

Tabela dla funkcji g wyglądałaby bardzo podobnie, tylko wartość funkcji g dla danego argumentu jest liczbą przeciwną do wartości funkcji f dla tego samego argumentu.



Wykresy funkcji $f_1(x) = \frac{1}{x}$ i $f_2(x) = \frac{2}{x}$ mają podobny kształt. Wykres funkcji $f_2(x) = \frac{2}{x}$ jest bardziej oddalony od początku układu współrzędnych.

Aby dokładniej porównać własności funkcji o wzorze $f(x) = \frac{a}{x}$, warto narysować kilka wykresów w jednym układzie współrzędnych.

Przykład 8

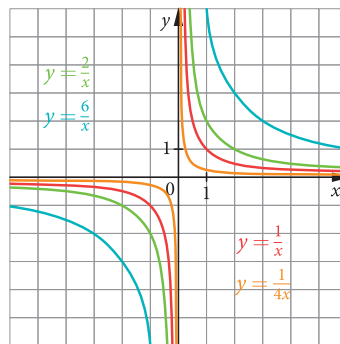
Sporządźmy wykresy funkcji $f(x) = \frac{6}{x}$ i $g(x) = \frac{1}{4x}$ oraz umieścimy je (wraz z dwoma już poznanymi) na jednym rysunku.

Jeżeli $g(x) = \frac{a}{x}$ i $g(x) = \frac{1}{4x}$,
to $a = \frac{1}{4}$.

Rozwiązanie

x	-6	-3	-1	$\frac{1}{2}$	2
$f(x) = \frac{6}{x}$	-1	-2	-6	12	3

x	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$
$g(x) = \frac{1}{4x}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{4}$	-1	4	$\frac{1}{2}$



Zauważmy, że im bliższa zera jest wartość współczynnika a funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, tym bardziej wykres tej funkcji przybliża się do początku układu współrzędnych.

Wykres każdej funkcji o wzorze $f(x) = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$, $x \neq 0$) nazywamy **hiperbolą**.

Zauważmy, że $|y| = \frac{|a|}{|x|}$.

Jeżeli wartość bezwzględna x jest coraz większa, to wartość bezwzględna y maleje do zera – na wykresie funkcji punkty hiperboli są coraz bliższe osi x . Mówimy, że oś x jest **asymptotą poziomą** wykresu.

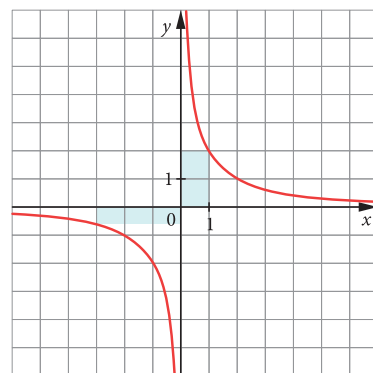
Z kolei gdy wartość bezwzględna x zbliża się do zera (mimo że nigdy go nie osiąga!), to wartość bezwzględna y nieograniczenie rośnie – na wykresie punkty hiperboli są coraz bliższe osi y . Mówimy, że oś y jest **asymptotą pionową** wykresu.

Zwróćmy uwagę na jeszcze jedną własność hiperboli. Dla dowolnego punktu $P = (x, y)$ leżącego na hiperboli o równaniu $y = \frac{a}{x}$ prostokąt o wierzchołkach $(0, 0)$, $(x, 0)$, P , $(0, y)$ ma pole równe $|a|$.

Jest to prosta konsekwencja równości:

$$|x| \cdot |y| = |a|$$

ponieważ boki rozważanego prostokąta mają długości równe $|x|$ oraz $|y|$.



Zadania

W każdym z zadań 9.1–9.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

9.1. D

9.1. Jaką liczbę należy wstawić do tabeli w miejsce a , aby przedstawiała wielkości odwrotnie proporcjonalne?

30	5	$\frac{1}{3}$
4	24	a

A. $\frac{1}{40}$ B. 40 C. 120 D. 360

9.2. A

9.2. Wskaż wartość, którą funkcja $f(x) = \frac{1}{3x}$ przyjmuje dla argumentu -6 .

A. $-\frac{1}{18}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. -2 D. -18

9.3. B

9.3. Darmowe minuty w abonamencie telefonicznym wystarczają Ani na rozmawianie przez 30 dni średnio po 4 minuty dziennie. Na ile dni wystarczy jej darmowych minut, jeżeli codziennie będzie rozmawiała 3 razy, a każda rozmowa będzie trwała 2 minuty?

A. 10 B. 20 C. 40 D. 80

9.4. a) nie b) tak c) nie

9.4. Czy wielkości podane w tabeli są odwrotnie proporcjonalne?

a)

x	3	7	10
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

b)

a	8	4	1
b	2	4	16

c)

p	10	6	9
q	2	3	1

9.5. 720

9.5. Pewna ilość mąki pszennej wystarcza na upieczenie 120 bułek po 0,3 kg każda. Ile pięciodekagramowych kajzerek można upiec z tej samej ilości mąki?

9.6. Jadąc na rowerze ze średnią prędkością 14 km/h, Jola dojeżdża do szkoły w czasie 30 minut. Krysia, która mieszka w tej samej odległości od szkoły co Jola, potrzebuje 20 minut na dojazd. Z jaką średnią prędkością dojeżdża do szkoły Krysia?

9.6. 21 km/h

9.7. Pan Jan wyszedł z domu do pracy o godzinie 7²⁵. Jego żona Ewa, pracująca w tym samym budynku co mąż, wyszła z domu później. Oboje dotarli do celu o godzinie 7⁵⁰. Pani Ewa jechała do pracy ze średnią prędkością 45 km/h, natomiast pan Jan – ze średnią prędkością 36 km/h. O której godzinie pani Ewa wyszła z domu?

9.7. o 7³⁰

9.8. Motocyklista, jadąc drogą, na której dozwolona prędkość wynosiła 90 km/h, przejechał 1 km w czasie 40 sekund. Czy popełnił wykroczenie?

9.8. nie

9.9. Dwie samotne ciotki Julii prowadzą wspólne gospodarstwo. Co miesiąc każda z nich wkłada do wspólnej kasy pewną kwotę pieniędzy przeznaczoną na zakup żywności. Jeżeli dziennie wydają średnio 20 zł, to składka wystarcza im na 30 dni. Na ile dni wystarczy składka, jeżeli zwiększą dzienne wydatki do 24 zł, a na ile – jeżeli zaczęły oszczędzać i wydawać średnio 15 zł dziennie? Jaka jest wysokość składki każdej z ciotek, jeżeli płacą po równo?

9.9. po zwiększeniu na 25 dni;
po zmniejszeniu na 40 dni;
wysokość składki: 300 zł

9.10. Jeżeli Danka będzie odkładała do skarbonki miesięcznie kwotę p zł, to zbiera potrzebną sumę w czasie t miesięcy. Ile czasu zajmie jej zbieranie tej samej sumy przy comiesięcznej składce s zł?

9.10. $\frac{pt}{s}$ miesięcy

9.11. Motocyklista przejechał m kilometrów w h godzin. Jaki dystans pokonywał średnio w czasie jednej minuty?

9.11. $\frac{m}{60h}$ km

9.12. Szkoła wypłaca co miesiąc 12 uczniom stypendium w wysokości 80 zł. O ile zmniejszy się stypendium dla każdego ucznia, jeśli suma przeznaczona na wypłaty nie wzrośnie, a stypendium dostaną jeszcze cztery dodatkowe osoby?

9.12. o 20 zł

9.13. Joanna grabi cały trawnik przed domem w ciągu 20 minut. Jej młodsza siostra tę samą pracę wykonuje 10 minut dłużej. Ile czasu zajmie im zgrabienie trawnika, jeżeli będą pracowały razem?

9.13. 12 min

9.14. Podłoga sklepu została wyszlifowana za pomocą pierwszej szlifierki w czasie 35 godzin. Wykonanie tej samej pracy przy użyciu drugiej szlifierki zajęło 40 godzin. Ile czasu zajmie wyszlifowanie podłogi, jeśli szlifierki będą pracować jednocześnie?

9.14. 18 godz. i 40 min

9.15. 8 godz.

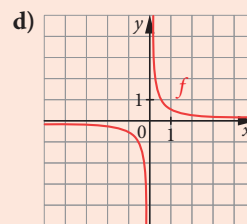
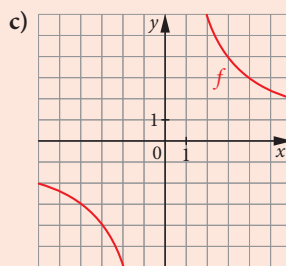
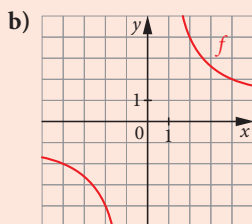
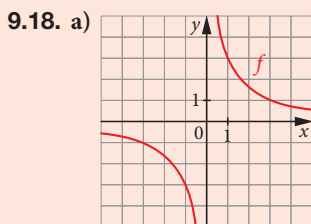
9.16. $\frac{st}{s+t}$ dni

9.17. pierwsza: 2 godz.,
druga: 1 godz.

9.19. a) 2 b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{4}$
d) Nie ma takiego a .

9.20. Patrz s. 267.

9.21. a) $(-1, -6), (2, 3), (-2, -3), (3, 2), (-3, -2), (6, 1), (-6, -1), (1, 6)$
b) $(1, 8), (-1, -8), (2, 4), (-2, -4), (4, 2), (-4, -2), (8, 1), (-8, -1)$
c) $(1, 12), (-1, -12), (2, 6), (-2, -6), (6, 2), (-6, -2), (3, 4), (-3, -4), (4, 3), (-4, -3), (12, 1), (-12, -1)$
d) $(1, -9), (-1, 9), (3, -3), (-3, 3), (9, -1), (-9, 1)$



9.22. a) $x \in (0; 3)$ b) $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$ c) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; \infty)$ d) $x \in (-1; 0)$

9.15. Właściciel wyciągu narciarskiego kupił nową armatkę śnieżną. Poprzednia pokrywała śniegiem trasę zjazdową w czasie 24 godzin. Jeżeli obydwie armatki pracują równocześnie, to trasa jest gotowa po upływie 6 godzin. Ile czasu zaśnieży trasę nowa armatka?



* 9.16. Stefan jest właścicielem fabryczki produkującej kapsle do butelek. Jedna z jego maszyn tłoczy partię kapsli w s dni, a druga takie samo zamówienie wykonuje w t dni. Ile dni zajmie realizacja tego zamówienia, jeżeli Stefan uruchomi obydwie maszyny równocześnie?

* 9.17. Materiały dla uczestników konferencji miały być wydrukowane w ciągu 40 minut na dwóch drukarkach o różnej wydajności używanych jednocześnie. Ponieważ jednak po 10 minutach pierwsza drukarka została uszkodzona, resztę materiałów wydrukowano tylko na drugiej, co wydłużyło czas drukowania do 55 minut. Ile czasu zajęłoby wydrukowanie wszystkich materiałów na każdej drukarce z osobna?

9.18. Naszkicuj wykres i podaj własności funkcji.

a) $f(x) = \frac{3}{x}$ b) $f(x) = \frac{8}{x}$ c) $f(x) = \frac{12}{x}$ d) $f(x) = \frac{1}{2x}$

9.19. Dla jakich wartości a wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ przechodzi przez dany punkt?

a) $A = (1, 2)$ b) $B = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ c) $C = \left(\frac{1}{8}, 2\right)$ d) $D = (0, 3)$

9.20. Zacieniuj zbiór punktów płaszczyzny, przez które przechodzą wykresy funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdy

a) $a \in \langle 1; 6 \rangle$. b) $a \in (2; 8)$. c) $a \in \langle 4; \infty \rangle$. d) $a \in (0; 2)$.

9.21. Wymień wszystkie punkty o obydwu współrzędnych całkowitych, przez które przechodzi wykres funkcji $y = f(x)$.

a) $f(x) = \frac{6}{x}$ b) $f(x) = \frac{8}{x}$ c) $f(x) = \frac{12}{x}$ d) $f(x) = -\frac{9}{x}$

9.22. Rozwiąż graficznie nierówność.

a) $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{x} < 2$ c) $-\frac{1}{x} \leq 2$ d) $-\frac{1}{x} > 1$

Prosto do matury



1. Niech c będzie ustaloną liczbą cukierków. Rozdajemy je wszystkie między n dzieci, tak aby każde dostało k cukierków. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Liczba n jest odwrotnie proporcjonalna do liczby c .
 B. Liczba n jest odwrotnie proporcjonalna do liczby k .
 C. Liczba k jest odwrotnie proporcjonalna do liczby c .

2. Przerysuj tabelę do zeszytu i uzupełnij ją tak, by wielkości x i y były odwrotnie proporcjonalne.

x	3	6	?	$\frac{1}{2}$	?
y	2	?	3	?	4

3. Odczytaj rozwiązanie nierówności $\frac{4}{x} \leq 2$, korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$.

4. Tomek i Romek malowali płot rozdzielający ich posesje, każdy po swojej stronie. Romek w ciągu każdej godziny malował o 20% mniej niż sąsiad. Tomek skończył malować swoją stronę po 5 godzinach. Po jakim czasie skończył pracę Romek?

5. W stałej temperaturze ciśnienie gazu jest odwrotnie proporcjonalne do jego objętości. Na początku ciśnienie gazu w naczyniu o pojemności 200 cm^3 wynosiło p . Ile będzie wynosiło ciśnienie gazu, jeżeli nie zmienimy temperatury, a objętość gazu

- a) zmniejszymy do 150 cm^3 ?
 b) zwiększymy do 300 cm^3 ?
 c) zmniejszymy o 20 cm^3 ?

Prosto do matury

1. F, P, F

2.

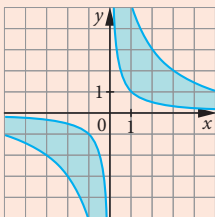
x	3	6	2	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$
y	2	1	3	12	4

3. $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 2; \infty \rangle$

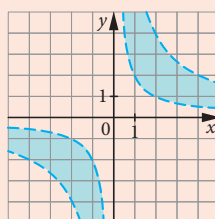
4. po 6 godz. i 15 min

5. a) $\frac{4}{3}p$ b) $\frac{2}{3}p$ c) $\frac{10}{9}p$

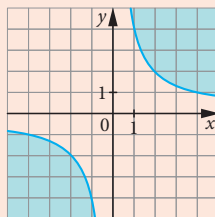
9.20. a)



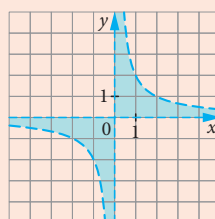
b)



c)



d)



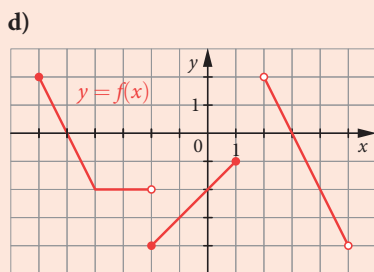
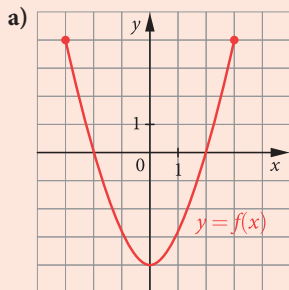
10. Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu

Umiejętności:

- odczytywanie własności funkcji z jej wykresu
- graficzne rozwiązywanie równań $f(x) = g(x)$ oraz układów nierówności

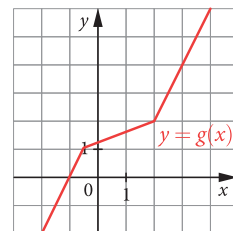
W przykładach 1, 2, 3 na podstawie wykresu funkcji odczytamy: jej dziedzinę, zbiór wartości, wartość największą i wartość najmniejszą (jeżeli funkcja je przyjmuje), miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, przedziały monotoniczności oraz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m .

◀10.4. Odczytaj z wykresu funkcji $y = f(x)$: jej dziedzinę, zbiór wartości, wartość największą i wartość najmniejszą (jeżeli funkcja je przyjmuje), miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, przedziały monotoniczności oraz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m .



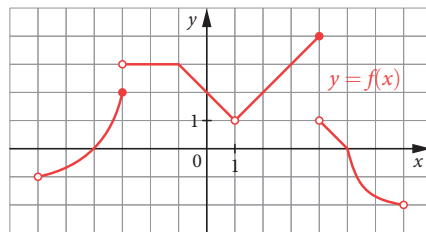
Przykład 1 ◀ zad. 10.4 a

- $D = \mathbb{R}$, $ZW = \mathbb{R}$
- Funkcja nie przyjmuje wartości najmniejszej. Funkcja nie przyjmuje wartości największej.
- Miejscem zerowym jest argument $x = -1$.
- $g(x) > 0$ dla $x \in (-1; \infty)$,
 $g(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -1)$.
- Funkcja jest monotoniczna – jest rosnąca.
- Równanie $f(x) = m$ ma dla dowolnej wartości m jedno rozwiązanie.



Przykład 2 ◀ zad. 10.4 d

- $D = (-6; 7) - \{1\}$, $ZW = (-2; 4)$
- Funkcja nie przyjmuje wartości najmniejszej; przyjmuje wartość największą równą 4 dla $x = 4$.
- Miejscami zerowymi są $x = -4$, $x = 5$.
- $f(x) > 0$ dla $x \in (-4; 1) \cup (1; 5)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-6; -4) \cup (5; 7)$.
- Funkcja nie jest monotoniczna, natomiast: w przedziale $(-6; -1)$ jest funkcją nie-
malejącą, w przedziale $(-1; 1)$ funkcja maleje, w przedziale $(1; 4)$ funkcja rośnie,
w przedziale $(4; 7)$ funkcja maleje.
- Równanie $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2) \cup (4; \infty)$, 1 rozwią-
zanie dla $m \in (-2; -1) \cup \{1\} \cup (3; 4)$, 2 rozwiązania dla $m \in (-1; 1) \cup (2; 3)$,
3 rozwiązania dla $m \in (1; 2)$, nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = 3$.



10.4. Odp.: a) $D = \langle -3; 3 \rangle$, $ZW = \langle -4; 4 \rangle$; wartość największa: 4 dla $x \in \{-3, 3\}$, wartość najmniejsza: -4 dla $x = 0$; miejsca zerowe: -2, 2; $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -3; 2 \rangle \cup (2; 3)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-2; 2)$; funkcja malejąca w przedziale $\langle -3; 0 \rangle$, rosnąca w przedziale $(0; 3)$; $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$, 1 rozwiązanie dla $m = -4$, 2 rozwiązania dla $m \in \langle -4; 4 \rangle$

d) $D = \langle -6; 1 \rangle \cup (2; 5)$, $ZW = \langle -4; 2 \rangle$; wartość największa: 2 dla $x = -6$, wartość najmniejsza: -4 dla $x = -2$; miejsca zerowe: -5, 3; $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -6; -5 \rangle \cup (2; 3)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-5; 1) \cup (3; 5)$; funkcja malejąca w każdym z przedziałów $\langle -6; -4 \rangle$ i $(2; 5)$, stała w przedziale $\langle -4; -2 \rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$; $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -4) \cup (2; \infty)$, 1 rozwiązanie dla $m \in \{-4, 2\}$, 2 rozwiązania dla $m \in (-4; -2) \cup (2; \infty)$, 3 rozwiązania dla $m \in (-2; 1)$, nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = -2$

ZZ i MKP

tematy 4.5, 4.6

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.10

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 3 ◀ zad. 10.5

Narysujemy wykres i na jego podstawie opiszemy własności funkcji

$$f(x) = \frac{4}{x} \text{ dla } 1 \leq |x| \leq 4.$$

Rozwiązanie

Wyznamy najpierw dziedzinę funkcji.

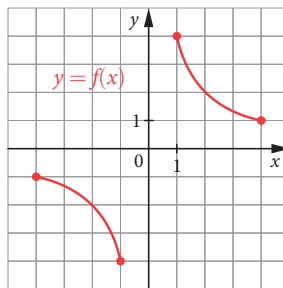
Podwójną nierówność $1 \leq |x| \leq 4$ zapiszemy w postaci układu.

$$\begin{cases} |x| \leq 4, \\ |x| \geq 1, \end{cases} \text{ czyli } \begin{cases} x \in \langle -4; 4 \rangle \\ x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty) \end{cases} \text{ i ostatecznie } x \in \langle -4; -1 \rangle \cup \langle 1; 4 \rangle$$

$$\text{Zatem } f(x) = \frac{4}{x} \text{ dla } x \in \langle -4; -1 \rangle \cup \langle 1; 4 \rangle.$$

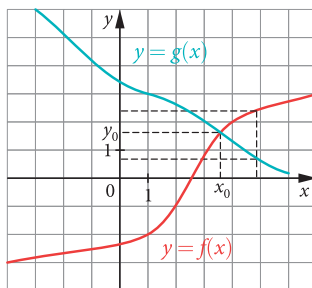
Wykres funkcji jest sumą fragmentów hiperboli.

- $D = \langle -4; -1 \rangle \cup \langle 1; 4 \rangle$, $ZW = \langle -4; -1 \rangle \cup \langle 1; 4 \rangle$
- Funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą -4 dla $x = -1$;
przyjmuje wartość największą równą 4 dla $x = 1$.
- Funkcja nie ma miejsc zerowych.
- $f(x) > 0$ dla $x \in \langle 1; 4 \rangle$, $f(x) < 0$ dla $x \in \langle -4; -1 \rangle$.
- Funkcja nie jest monotoniczna, natomiast:
w przedziale $\langle -4; -1 \rangle$ funkcja maleje,
w przedziale $\langle 1; 4 \rangle$ funkcja maleje.
- Równanie $f(x) = m$ ma:
0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -4) \cup (-1; 1) \cup (4; \infty)$,
1 rozwiązanie dla $m \in \langle -4; -1 \rangle \cup \langle 1; 4 \rangle$.

**Graficzne rozwiązywanie równań i nierówności postaci $f(x) \geq g(x)$**

W układzie współrzędnych umieszczone są wykresy dwóch funkcji: $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$.

Sprawdźmy, dla jakich argumentów wartości funkcji f są równe wartościom funkcji g , dla jakich są większe od wartości funkcji g , a dla jakich – mniejsze. Inaczej mówiąc, odczytajmy z wykresu zbiór rozwiązań odpowiedniego równania bądź nierówności.



- | | | |
|---------------------|---------------|---|
| $f(x) = g(x) = y_0$ | dla $x = x_0$ | ← obie funkcje mają identyczną wartość |
| $f(x) > g(x)$ | dla $x > x_0$ | ← wykres funkcji f leży ponad wykresem funkcji g |
| $f(x) < g(x)$ | dla $x < x_0$ | ← wykres funkcji f leży poniżej wykresu funkcji g |

◀10.5. Sporządź wykres funkcji $y = f(x)$ i odczytaj z niego: dziedzinę funkcji, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, wartość największą i wartość najmniejszą (jeżeli funkcja je przyjmuje), przedziały monotoniczności oraz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m .

a) $f(x) = \sqrt{x}$ dla $x \in \langle 0; 1 \rangle \cup (4; \infty)$

b) $f(x) = \frac{6}{x}$ dla $x \in (-6; -2) \cup \langle 1; 3 \rangle$

c) $f(x) = \frac{-2}{x}$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 2)$

Odp.: a) $D = \langle 0; 1 \rangle \cup (4; \infty)$,
 $ZW = \langle 0; 1 \rangle \cup (2; \infty)$;
miejsca zerowe: 0; $f(x) > 0$ dla $x \in \langle 0; 1 \rangle \cup (4; \infty)$,
funkcja nie przyjmuje wartości ujemnych; brak wartości największej,
wartość najmniejsza: 0 dla $x = 0$;
funkcja jest rosnąca;
 $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0) \cup (1; 2)$,
1 rozwiązanie dla $m \in \langle 0; 1 \rangle \cup (2; \infty)$

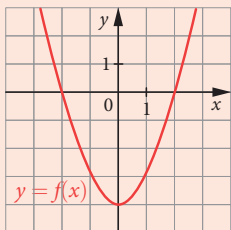
b) $D = (-6; -2) \cup \langle 1; 3 \rangle$,
 $ZW = (-3; -1) \cup (2; 6)$;
brak miejsc zerowych;
 $f(x) > 0$ dla $x \in \langle 1; 3 \rangle$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-6; -2)$;
wartość największa: 6 dla $x = 1$,
brak wartości najmniejszej;
funkcja nie jest monotoniczna, ale jest malejąca w każdym z przedziałów $(-6; -2)$ i $\langle 1; 3 \rangle$;
 $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -3) \cup \langle -1; 2 \rangle \cup (6; \infty)$,
1 rozwiązanie dla $m \in (-3; -1) \cup \langle 2; 6 \rangle$

c) $D = (-\infty; -1) \cup (0; 2)$,
 $ZW = (-\infty; -1) \cup (0; 2)$;
brak miejsc zerowych;
 $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -1)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (0; 2)$;
brak wartości największej, brak wartości najmniejszej;
funkcja nie jest monotoniczna, ale jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -1)$ i $(0; 2)$;
 $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in \langle -1; 0 \rangle \cup \langle 2; \infty \rangle$,
1 rozwiązanie dla $m \in (-\infty; -1) \cup (0; 2)$

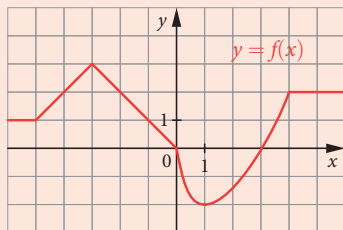
◀10.12. Patrz s. 274.

◀10.16. Odczytaj z wykresu rozwiązanie podanego układu nierówności.

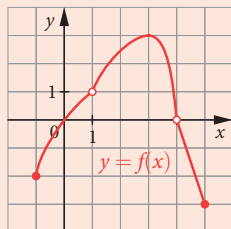
$$\text{a) } \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) > -3 \end{cases}$$



$$\text{b) } \begin{cases} f(x) \leq 2 \\ f(x) > 0 \end{cases}$$



$$\text{c) } \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < 3 \end{cases}$$



Podsumujmy:

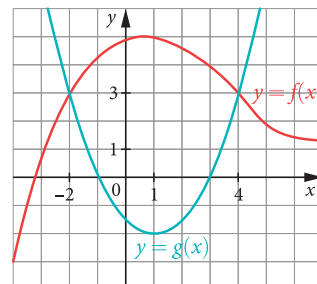
- graficzne rozwiązywanie równania $f(x) = g(x)$ polega na narysowaniu w jednym układzie współrzędnych wykresów $y = f(x)$ i $y = g(x)$, znalezieniu punktów wspólnych tych wykresów i odczytaniu pierwszych współrzędnych tych punktów;
- graficzne rozwiązywanie nierówności $f(x) > g(x)$ polega na narysowaniu w jednym układzie współrzędnych wykresów $y = f(x)$ i $y = g(x)$ oraz odczytaniu pierwszych współrzędnych wszystkich punktów, dla których wykres funkcji f leży ponad wykresem funkcji g .

Przykład 4 ◀ zad. 10.12

Odczytamy z wykresu rozwiązanie równania $f(x) = g(x)$ oraz nierówności $f(x) < g(x)$ i $f(x) > g(x)$.

Rozwiązanie

- $f(x) = g(x)$ dla $x = -2$ lub $x = 4$
- $f(x) < g(x)$ dla $x \in (-\infty; -2)$ oraz $x \in (4; \infty)$
- $f(x) > g(x)$ dla $x \in (-2; 4)$

**Przykład 5** ◀ zad. 10.16

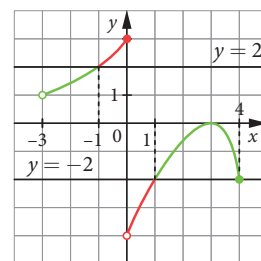
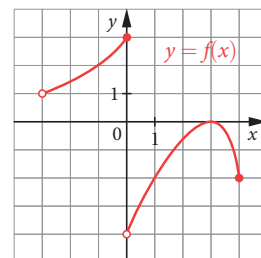
Odczytamy z wykresu rozwiązanie układu nierówności

$$\begin{cases} f(x) < 2 \\ f(x) \geq -2 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Dziedziną funkcji f jest przedział $(-3; 4)$.Prowadzimy proste $y = -2$ i $y = 2$. Interesujące nas punkty wykresu leżą pomiędzy tymi prostymi.

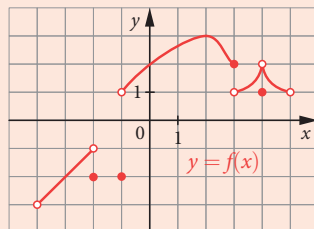
- Odczytujemy współrzędne punktów przecięcia tych prostych z wykresem: $(-1, 2)$, $(1, -2)$, $(4, -2)$.
- Pomiędzy poprowadzonymi prostymi znajdują się dwa fragmenty wykresu, na rysunku obok zaznaczone zielonym kolorem. Znajdujemy odpowiadające im przedziały na osi x , uwzględniając dziedzinę funkcji.



Zwróćmy uwagę, że odcięte punktów przecięcia wykresu z prostą $y = 2$ nie należą do rozwiązania, natomiast punktów przecięcia z prostą $y = -2$ do niego należą.

Odp.: $x \in (-3; -1) \cup (1; 4)$

$$\text{d) } \begin{cases} f(x) \leq 2 \\ f(x) > -2 \end{cases}$$

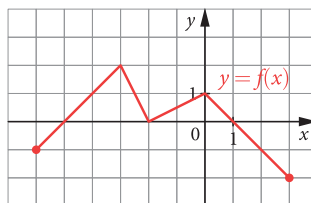


Odp.:

- a) $x \in (-2; -1) \cup (1; 2)$
- b) $x \in (-\infty; -4) \cup (-2; 0) \cup (3; \infty)$
- c) $x \in (0; 4) - \{1, 3\}$
- d) $x \in (-3; -2) \cup (-1; 0) \cup (3; 5)$

Zadania

Rozwiąż zadania 10.1–10.3 na podstawie zamieszczonego obok wykresu funkcji f . W każdym z tych zadań jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.



10.1. Wskaż nierówność, której zbiorem rozwiązań jest przedział $\langle -5; 1 \rangle$.

- A. $f(x) < 0$ B. $f(x) \leq 0$ C. $f(x) > 0$ D. $f(x) \geq 0$

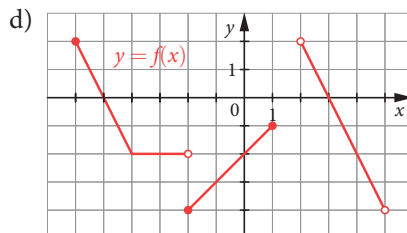
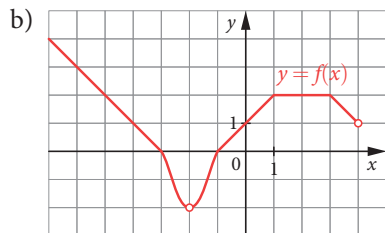
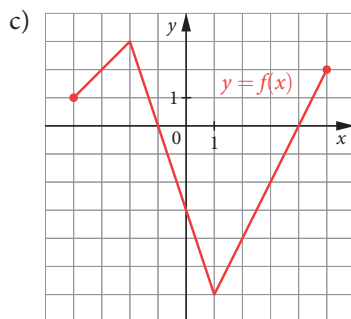
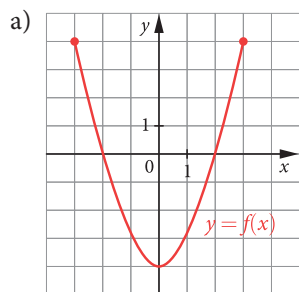
10.2. Wskaż najmniejszą wartość funkcji f .

- A. -6 B. -2 C. -1 D. 0

10.3. W którym z podanych przedziałów funkcja f jest rosnąca?

- A. $\langle -6; 2 \rangle$ B. $\langle -6; 0 \rangle$ C. $\langle -2; 0 \rangle$ D. $\langle -2; 1 \rangle$

10.4. Odczytaj z wykresu funkcji $y = f(x)$: jej dziedzinę, zbiór wartości, wartość największą i wartość najmniejszą (jeżeli funkcja je przyjmuje), miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, przedziały monotoniczności oraz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m .



- 10.4. a)** $D = \langle -3; 3 \rangle$, $ZW = \langle -4; 4 \rangle$; wartość największa: 4 dla $x \in \{-3, 3\}$, wartość najmniejsza: -4 dla $x = 0$; miejsca zerowe: $-2, 2$; $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -3; 2 \rangle \cup (2; 3]$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-2; 2)$; malejąca w przedziale $\langle -3; 0 \rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 0; 3 \rangle$; $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$, 1 rozwiązanie dla $m = -4$, 2 rozwiązania dla $m \in \langle -4; 4 \rangle$
- b)** $D = (-\infty; 4) - \{-2\}$, $ZW = (-2; \infty)$, brak wartości najmniejszej, brak wartości największej; miejsca zerowe: $-3, -1$; $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 4)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-3; -2) \cup (-2; -1)$; funkcja malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -2)$ i $\langle 3; 4 \rangle$, rosnąca w przedziale $(-2; 1)$, stała w przedziale $\langle 1; 3 \rangle$; $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2)$, 1 rozwiązanie dla $m \in (2; \infty)$, 2 rozwiązania dla $m \in (-2; 1)$, 3 rozwiązania dla $m \in (1; 2)$, nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = 2$
- d)** $D = \langle -6; 1 \rangle \cup (2; 5]$, $ZW = \langle -4; 2 \rangle$; wartość największa: 2 dla $x = -6$, wartość najmniejsza: -4 dla $x = -2$; miejsca zerowe: $-5, 3$; $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -6; -5 \rangle \cup (2; 3)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-5; 1) \cup (3; 5]$; malejąca w każdym z przedziałów $\langle -6; -4 \rangle$ i $(2; 5]$, stała w przedziale $\langle -4; -2 \rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$; $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -4) \cup (2; \infty)$, 1 rozwiązanie dla $m \in \{-4, 2\}$, 2 rozwiązania dla $m \in (-4; -2) \cup (2; \infty)$, 3 rozwiązania dla $m \in (-2; 1)$, nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = -2$

Odpowiedzi i rozwiązania

10.1. D

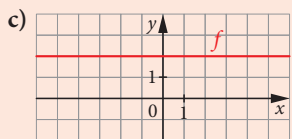
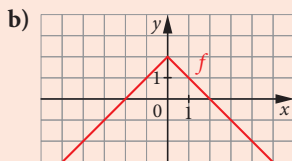
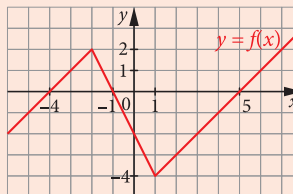
10.2. B

10.3. C

10.5. a) $D = \langle 0; 1 \rangle \cup (4; \infty)$,
 $ZW = \langle 0; 1 \rangle \cup (2; \infty)$;
 miejsce zerowe: 0; $f(x) > 0$ dla
 $x \in (0; 1) \cup (4; \infty)$,
 funkcja nie przyjmuje wartości
 ujemnych; brak wartości
 największej,
 wartość najmniejsza: 0 dla $x = 0$;
 funkcja jest rosnąca;
 $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla
 $m \in (-\infty; 0) \cup (1; 2)$,
 1 rozwiązanie dla
 $m \in \langle 0; 1 \rangle \cup (2; \infty)$

b) $D = (-6; -2) \cup \langle 1; 3 \rangle$,
 $ZW = (-3; -1) \cup \langle 2; 6 \rangle$;
 brak miejsc zerowych;
 $f(x) > 0$ dla $x \in \langle 1; 3 \rangle$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-6; -2)$;
 wartość największa: 6 dla $x = 1$,
 brak wartości najmniejszej;
 funkcja nie jest monotoniczna,
 ale jest malejąca w każdym
 z przedziałów $(-6; -2)$ i $\langle 1; 3 \rangle$;
 $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla
 $m \in (-\infty; -3) \cup \langle -1; 2 \rangle \cup (6; \infty)$,
 1 rozwiązanie dla
 $m \in (-3; -1) \cup \langle 2; 6 \rangle$

c) $D = (-\infty; -1) \cup (0; 2)$,
 $ZW = (-\infty; -1) \cup (0; 2)$;
 brak miejsc zerowych;
 $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -1)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (0; 2)$;
 brak wartości największej, brak
 wartości najmniejszej;
 funkcja nie jest monotoniczna,
 ale jest rosnąca w każdym
 z przedziałów $(-\infty; -1)$ i $(0; 2)$;
 $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla
 $m \in \langle -1; 0 \rangle \cup (2; \infty)$,
 1 rozwiązanie dla
 $m \in (-\infty; -1) \cup (0; 2)$

10.6. Przykładowe wykresy**10.7. np.**

10.5. Sporządź wykres funkcji $y = f(x)$ i odczytaj z niego: dziedzinę funkcji, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, wartość największą i wartość najmniejszą (jeżeli funkcja je przyjmuje), przedziały monotoniczności oraz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m .

a) $f(x) = \sqrt{x}$ dla $x \in \langle 0; 1 \rangle \cup (4; \infty)$

b) $f(x) = \frac{6}{x}$ dla $x \in (-6; -2) \cup \langle 1; 3 \rangle$

c) $f(x) = \frac{-2}{x}$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 2)$

10.6. Podaj przykład wykresu funkcji $y = f(x)$, która spełnia dane warunki.

a) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \langle -1; \infty \rangle$

Wartość najmniejszą równą -1 funkcja przyjmuje dla $x = -2$.

$f(x) = 0$ dla $x = -3$ oraz dla $x = -1$,

$f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-3; -1)$.

Funkcja w przedziale $(-\infty; -2)$ jest malejąca, a w przedziale $\langle -2; \infty \rangle$ rośnie.

Równanie $f(x) = m$ ma dla $m \in (-\infty; -1)$ zero rozwiązań,

dla $m = -1$ jedno rozwiązanie, dla $m \in (-1; \infty)$ dwa rozwiązania.

b) $D = \mathbf{R}$, $ZW = (-\infty; 2)$

Wartość największą równą 2 funkcja przyjmuje dla $x = 0$.

$f(x) = 0$ dla $x = -2$ oraz dla $x = 2$,

$f(x) > 0$ dla $x \in (-2; 2)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$.

Funkcja w przedziale $(-\infty; 0)$ jest rosnąca, a w przedziale $\langle 0; \infty \rangle$ jest malejąca.

Dla $m \in (-\infty; 2)$ równanie $f(x) = m$ ma dwa rozwiązania,

dla $m = 2$ ma jedno rozwiązanie, dla $m \in (2; \infty)$ równanie nie ma rozwiązań.

c) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \{2\}$

Funkcja nie ma miejsc zerowych, jest monotoniczna.

* **10.7.** Podaj przykład wykresu funkcji $y = f(x)$, która spełnia warunki:

- $D = \mathbf{R}$, $ZW = \mathbf{R}$

- $f(x) = 0$ dla $x = -4$, $x = -1$ oraz $x = 5$,

$f(x) > 0$ dla $x \in (-4; -1) \cup (5; \infty)$,

$f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -4) \cup (-1; 5)$.

- Funkcja nie jest monotoniczna, natomiast: w przedziale $(-\infty; -2)$ jest rosnąca, w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$ jest malejąca, a w przedziale $\langle 1; \infty \rangle$ jest rosnąca.

- Równanie $f(x) = m$ dla $m \in (-\infty; -4)$ ma jedno rozwiązanie,

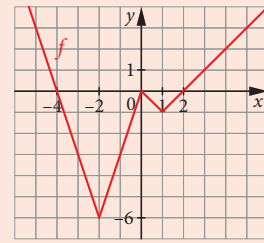
dla $m = -4$ ma dwa rozwiązania, dla $m \in (-4; 2)$ ma trzy rozwiązania,

dla $m = 2$ ma dwa rozwiązania, dla $m \in (2; \infty)$ ma jedno rozwiązanie.

* 10.8. Podaj przykład wykresu funkcji $y = f(x)$, która spełnia warunki:

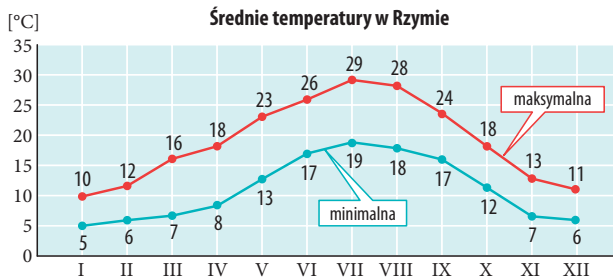
- $D = \mathbf{R}$, $ZW = \langle -6; \infty \rangle$
- Wartość najmniejszą równą -6 funkcja przyjmuje dla $x = -2$.
- Funkcja ma trzy miejsca zerowe: $x = -4$, $x = 0$, $x = 2$.
- $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -4) \cup (2; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-4; 0) \cup (0; 2)$.
- W przedziale $(-\infty; -2)$ funkcja jest malejąca, w przedziale $(-2; 0)$ jest rosnąca, w przedziale $(0; 1)$ jest malejąca, w przedziale $(1; \infty)$ jest rosnąca.
- Równanie $f(x) = m$ dla $m \in (-\infty; -6)$ nie ma rozwiązań, dla $m = -6$ ma jedno rozwiązanie, dla $m \in (-6; -1)$ ma dwa rozwiązania, dla $m = -1$ ma trzy rozwiązania, dla $m \in (-1; 0)$ ma cztery rozwiązania, dla $m = 0$ ma trzy rozwiązania, dla $m \in (0; \infty)$ ma dwa rozwiązania.

10.8. np.



10.9. Największa różnica, równa 10, jest w kwietniu, maju, lipcu i sierpniu.

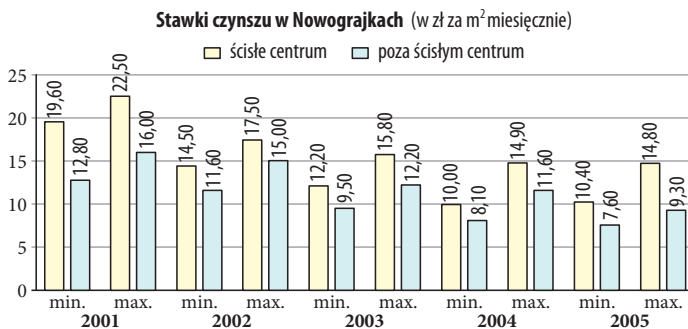
10.9. Poniższe wykresy przedstawiają wartości średnie najniższych oraz najwyższych temperatur w Rzymie w poszczególnych miesiącach (na podstawie obserwacji z wielu lat). W których miesiącach różnica wartości tych funkcji jest największa?



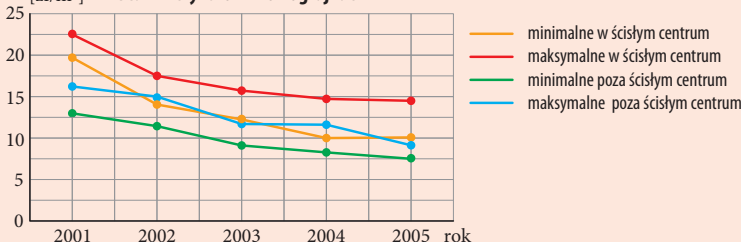
10.10. Na podstawie danych z diagramu „Stawki czynszu w Nowograjkach” narysuj wykresy czterech funkcji (w jednym układzie współrzędnych, różnymi kolorami), które kolejnym latom przyporządkowują stawki czynszu:

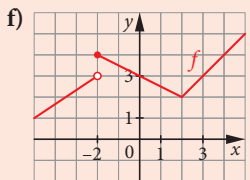
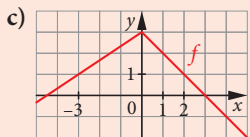
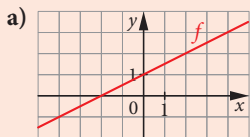
- minimalne w ścisłym centrum miasta,
- maksymalne w ścisłym centrum,
- minimalne poza ścisłym centrum,
- maksymalne poza ścisłym centrum.

Zbadaj monotoniczność każdej funkcji. Czy stawki czynszu poza centrum Nowograjek były w badanym okresie niższe od stawek w ścisłym centrum?

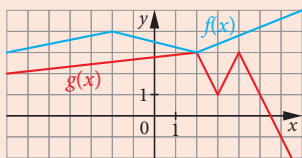
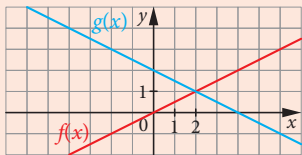
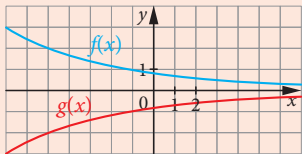


10.10. [zł/m²] Stawki czynszu w Nowograjkach



10.11. Przykładowe wykresy

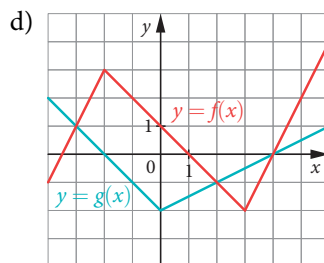
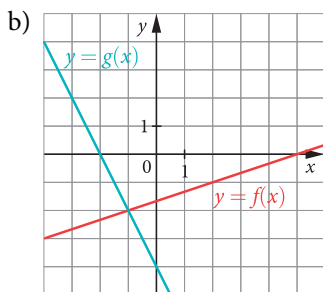
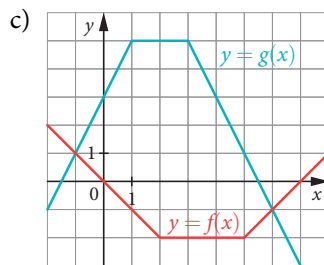
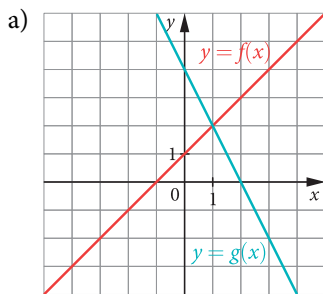
- 10.12.** a) $f(x) = g(x)$ dla $x = 1$,
 $f(x) < g(x)$ dla $x \in (-\infty; 1)$,
 $f(x) > g(x)$ dla $x \in (1; \infty)$
 b) $f(x) = g(x)$ dla $x = -1$,
 $f(x) < g(x)$ dla $x \in (-\infty; -1)$,
 $f(x) > g(x)$ dla $x \in (-1; \infty)$
 c) $f(x) = g(x)$ dla $x \in [-1, 6]$,
 $f(x) < g(x)$ dla $x \in (-1; 6)$,
 $f(x) > g(x)$ dla
 $x \in (-\infty; -1) \cup (6; \infty)$
 d) $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{-3, 2, 4\}$,
 $f(x) < g(x)$ dla
 $x \in (-\infty; -3) \cup (2; 4)$,
 $f(x) > g(x)$ dla
 $x \in (-3; 2) \cup (4; \infty)$

10.13.**10.14.****10.15.**

10.11. Podaj przykład wykresu funkcji $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, dla której zbiorem rozwiązań podanej nierówności jest zbiór A .

- a) $f(x) > 1$ $A = (0; \infty)$ d) $f(x) \leq -1$ $A = (-2; 1)$
 b) $f(x) > 2$ $A = (-\infty; -1)$ e) $f(x) > -1$ $A = (-\infty; -1) \cup \{3\}$
 c) $f(x) > 1$ $A = (-3; 2)$ f) $f(x) \leq 3$ $A = (-\infty; -2) \cup \{0; 3\}$

10.12. Odczytaj z wykresów funkcji $y = f(x)$ i $y = g(x)$ rozwiązania równania $f(x) = g(x)$ oraz rozwiązania nierówności $f(x) < g(x)$ i $f(x) > g(x)$.



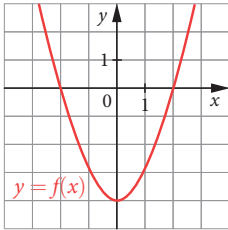
10.13. Podaj przykład wykresów dwóch funkcji: $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$ o dziedzinie $\mathbf{R}$, takich, że dla każdego $x \in \mathbf{R}$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \geq g(x)$.

10.14. Podaj przykład wykresów dwóch funkcji: $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$ o dziedzinie $\mathbf{R}$, takich, że funkcja f jest rosnąca, funkcja g jest malejąca oraz dla $x \in (-\infty; 2)$ zachodzi nierówność $g(x) \geq f(x)$, a dla $x \in \langle 2; \infty$ zachodzi nierówność $g(x) \leq f(x)$.

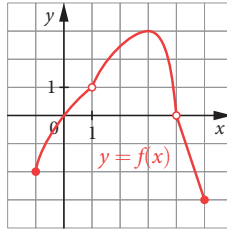
* **10.15.** Podaj przykład wykresów dwóch funkcji: $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$, których dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, funkcja f jest malejąca, funkcja g jest rosnąca i dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$ zachodzi nierówność $f(x) > g(x)$.

10.16. Odczytaj z wykresu rozwiązanie podanego układu nierówności.

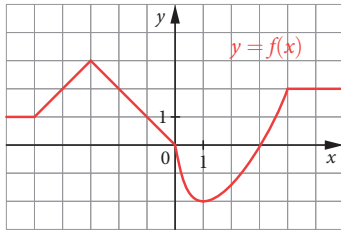
a) $\begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) > -3 \end{cases}$



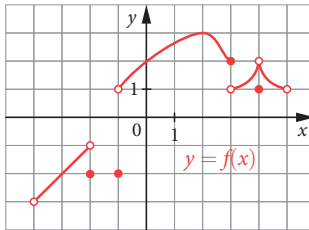
c) $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < 3 \end{cases}$



b) $\begin{cases} f(x) \leq 2 \\ f(x) > 0 \end{cases}$

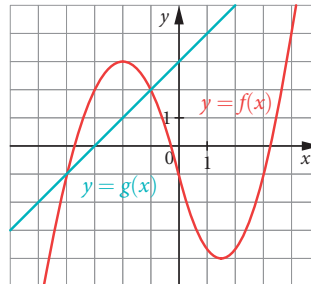


d) $\begin{cases} f(x) \leq 2 \\ f(x) > -2 \end{cases}$



* **10.17.** Odczytaj z wykresu rozwiązanie układu

nierówności $\begin{cases} f(x) < -1 \\ |g(x) + 1| < 2 \end{cases}$

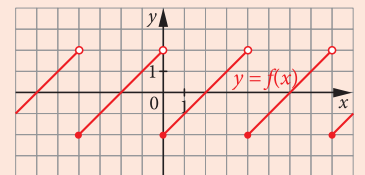


* **10.18.** Podaj przykład wykresu funkcji $y = f(x)$, która spełnia następujące warunki: $D = \mathbb{R}$, $ZW = \langle -2; 2 \rangle$. Funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą -2 dla każdego argumentu postaci $x = 4k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Miejscami zerowymi funkcji są wszystkie argumenty postaci $x = 4k + 2$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. $f(x) > 0$ dla argumentów należących do każdego z przedziałów postaci $(4k - 2; 4k)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, $f(x) < 0$ dla argumentów należących do każdego z przedziałów postaci $(4k; 4k + 2)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów postaci $\langle 4k; 4k + 4 \rangle$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

- 10.16. a)** $x \in (-2; -1) \cup (1; 2)$
b) $x \in (-\infty; -4) \cup \langle -2; 0 \rangle \cup (3; \infty)$
c) $x \in (0; 4) - \{1, 3\}$
d) $x \in (-3; -2) \cup (-1; 0) \cup \langle 3; 5 \rangle$

10.17. $x \in (-6; -4)$

10.18.



Prosto do matury

1. F, F, P

2. $D = \langle -6; 3 \rangle$, $ZW = \langle -1; 3 \rangle$;
wartość największa: 3 dla $x = 1$,
wartość najmniejsza: -1 dla
 $x = -3$;
miejsca zerowe: $-4, -2, 3$;
 $g(x) < 0$ dla $x \in (-4; -2)$,
 $g(x) > 0$ dla
 $x \in \langle -6; -4 \rangle \cup (-2; 3)$;
funkcja nie jest monotoniczna,
natomiast: maleje w każdym
z przedziałów $\langle -6; -3 \rangle$ i $\langle 1; 3 \rangle$,
rośnie w przedziale $\langle -3; 1 \rangle$;
 $g(x) = m$ ma 3 rozwiązania dla
 $m \in \langle 0; 2 \rangle$

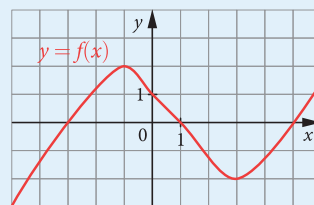
3. a) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \mathbf{R}$,
miejsca zerowe: $-4, 2$,
 $f(x) > 0$ dla
 $x \in (-\infty; -4) \cup \langle -2; 2 \rangle$,
 $f(x) < 0$ dla
 $x \in (-4; -2) \cup (2; \infty)$,
brak wartości największej,
brak wartości najmniejszej,
funkcja nie jest monotoniczna,
ale jest malejąca w każdym
z przedziałów $(-\infty; -2)$ i $\langle -2; \infty)$
b) dla $m \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$

5. cztery miesiące
(od maja do września)

Prosto do matury



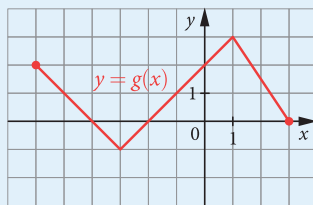
1. Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Równanie $f(x) = 1$ ma dwa rozwiązania.
B. Równanie $f(x) = 2$ ma jedno rozwiązanie.
C. Równanie $f(x) = 0,5$ ma trzy rozwiązania.



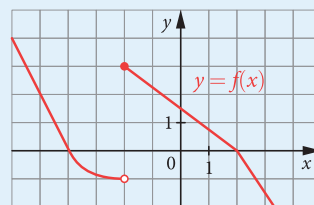
2. Odczytaj z podanego wykresu funkcji g (rys. 1) jej własności. Dla jakich wartości parametru m równanie $g(x) = m$ ma trzy rozwiązania?

3. Na rysunku 2 przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$.

- a) Odczytaj z wykresu: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, wartość największą i wartość najmniejszą (jeżeli funkcja je przyjmuje) oraz przedziały monotoniczności.
b) Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie?



Rys. 1.

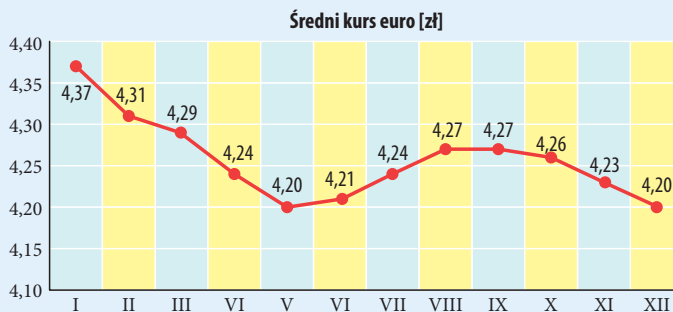


Rys. 2.

4. Podaj przykład wykresu funkcji $y = f(x)$, która spełnia warunki:

$D = \langle -2; 5 \rangle$, $ZW = \langle -4; 1 \rangle$; $f(x) = 0$ dla $x = -1$, $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -2; -1 \rangle$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-1; 5)$; w przedziale $\langle -2; 3 \rangle$ funkcja jest malejąca, a w przedziale
 $\langle 3; 5 \rangle$ jest rosnąca; równanie $f(x) = m$ dla $m = -4$ ma jedno rozwiązanie, dla
 $m \in (-4; -2)$ ma dwa rozwiązania, dla $m \in (-2; 1)$ ma jedno rozwiązanie.

5. Wykres przedstawia średni kurs euro w kolejnych miesiącach 2017 r. (źródło: NBP). Na podstawie wykresu wyznacz najdłuższy okres, w którym ten kurs nie spadał.



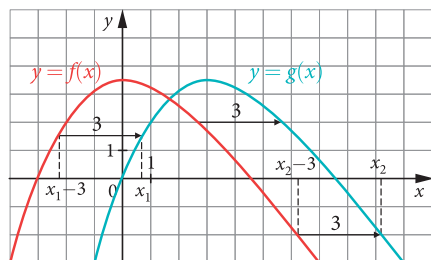
11. Przesunięcie wykresu funkcji wzdłuż osi

Umiejętności:

- szkicowanie wykresu funkcji $y = f(x + a)$ na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$
- szkicowanie wykresu funkcji $y = f(x) + a$ na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$

Przesunięcie wykresu funkcji wzdłuż osi x

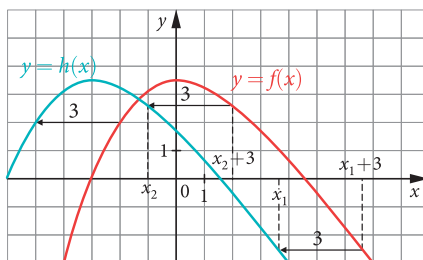
Przesuńmy wykres funkcji $y = f(x)$ o trzy jednostki **w prawo** wzdłuż osi x i oznaczmy nową funkcję $y = g(x)$.



$$g(x) = f(x - 3)$$

Wartości funkcji g są takie same, jakie funkcja f przyjmuje dla argumentów o trzy jednostki mniejszych.

Przesuńmy wykres funkcji $y = f(x)$ o trzy jednostki **w lewo** wzdłuż osi x i oznaczmy nową funkcję $y = h(x)$.



$$h(x) = f(x + 3)$$

Wartości funkcji h są takie same, jakie funkcja f przyjmuje dla argumentów o trzy jednostki większych.

Wniosek

Jeżeli $a > 0$, to:

- aby otrzymać wykres funkcji $y = f(x - a)$, przesuwamy wykres funkcji $y = f(x)$ o a jednostek w prawo wzdłuż osi x ,
- aby otrzymać wykres funkcji $y = f(x + a)$, przesuwamy wykres funkcji $y = f(x)$ o a jednostek w lewo wzdłuż osi x .

Zauważmy, że po przesunięciu wykresu danej funkcji wzdłuż osi x otrzymujemy wykres nowej funkcji, która może mieć inną dziedzinę.

Uwagi metodyczne

Proponujemy zacząć od przesunięcia wykresu wzdłuż osi x , żeby uniknąć mechanicznego kojarzenia zwrotu przesunięcia ze znakiem liczby.

Wyjaśnianie, w jaki sposób z wykresu funkcji $y = f(x)$ powstaje wykres funkcji $y = f(x - a)$, jest trudne i żmudne. Proponujemy działanie „w drugą stronę”: najpierw przesuwamy wykres konkretnej funkcji $y = f(x)$ o trzy jednostki w prawo wzdłuż osi x . Nową funkcję (oznaczaną innym kolorem) nazywamy np. $y = g(x)$, a następnie pytamy uczniów, dla jakich argumentów obydwie funkcje przyjmują takie same wartości. Uczniowie powinni samodzielnie sformułować wniosek, że wartości funkcji g są takie same, jak przyjmowane przez funkcję f dla argumentów o trzy jednostki mniejszych: $g(x) = f(x - 3)$, lub że wartości funkcji f są takie same, jakie funkcja g przyjmuje dla argumentów o trzy jednostki większych:

$$f(x) = g(x + 3).$$

W słabszych klasach wykonujemy oddzielnie dwa przesunięcia – w prawo i w lewo. Podsumowując, stwierdzamy, co należy zrobić, aby mając wykres funkcji $y = f(x)$, narysować wykres funkcji $y = f(x - a)$.

ZZ i MKP

tematy 4.7, 4.8

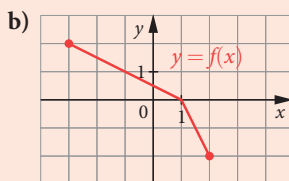
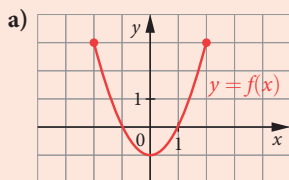
Multiteka

- Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi OY
- Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi OX

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 3.11

◀11.4. Mając dany wykres funkcji $y = f(x)$, narysuj wykresy funkcji:

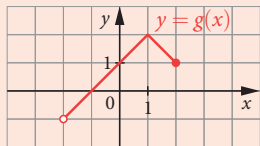
- I. $y = f(x - 1)$, III. $y = f(x - 2)$,
II. $y = f(x + 3)$, IV. $y = f(x + 5)$.



Odp.: Wskazówka: Punkty wykresu należy przesunąć:

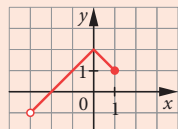
- I. w prawo o 1 jednostkę,
II. w lewo o 3 jednostki,
III. w prawo o 2 jednostki,
IV. w lewo o 5 jednostek.

◀11.5. Mając dany wykres funkcji $y = g(x)$, narysuj wykres funkcji $y = h(x)$ i podaj dziedzinę funkcji h .

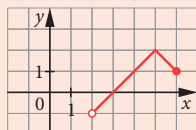


- a) $h(x) = g(x + 1)$
b) $h(x) = g(x - 4)$
c) $h(x) = g(x - 2)$
d) $h(x) = g(x + 3)$

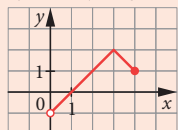
Odp.: a) $D = (-3; 1)$



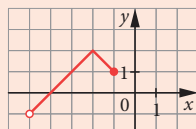
b) $D = (2; 6)$



c) $D = (0; 4)$



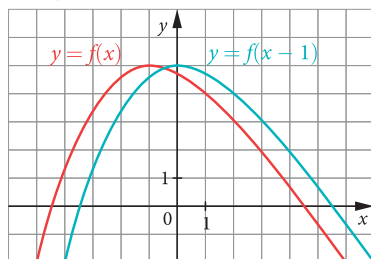
d) $D = (-5; -1)$



Przykład 1 ◀ zad. 11.4

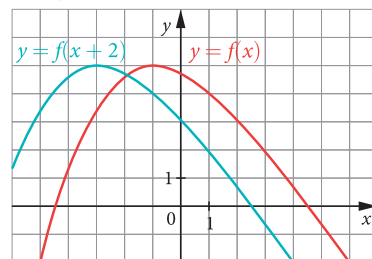
Mając dany wykres funkcji $y = f(x)$, narysujemy wykres funkcji:

a) $y = f(x - 1)$.



Wykres funkcji f przesuwamy o 1 jednostkę w prawo.

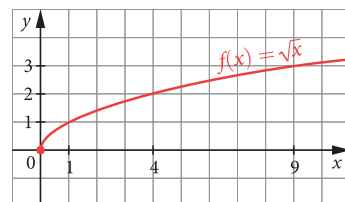
b) $y = f(x + 2)$.



Wykres funkcji f przesuwamy o 2 jednostki w lewo.

Przykład 2 ◀ zad. 11.5

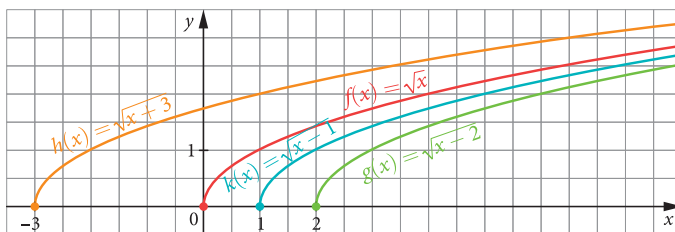
Na rysunku obok mamy wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$. Wykonując odpowiednie przesunięcia, narysujemy wykresy funkcji: $g(x) = \sqrt{x - 2}$, $h(x) = \sqrt{x + 3}$ i $k(x) = \sqrt{x - 1}$ oraz wyznaczmy dziedziny tych funkcji.



Rozwiązanie

Zauważmy, że:

- $g(x) = f(x - 2)$ ← przesunięcie o 2 jednostki w prawo
- $h(x) = f(x + 3)$ ← przesunięcie o 3 jednostki w lewo
- $k(x) = f(x - 1)$ ← przesunięcie o 1 jednostkę w prawo

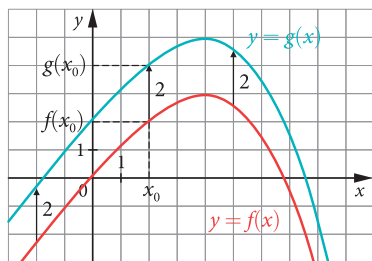


Zwróćmy uwagę na to, że dziedzina nowej funkcji jest zgodna z przesunięciem wzdłuż osi x . Dziedziną funkcji f jest zbiór $\langle 0; \infty \rangle$. Wykres funkcji $g(x) = \sqrt{x - 2}$ otrzymujemy po przesunięciu wykresu f o 2 w prawo, więc dziedziną funkcji g jest zbiór $\langle 2; \infty \rangle$. Jest to też zgodne z założeniem, że $x - 2 \geq 0$.

Odp.: Dziedziną funkcji g jest zbiór $\langle 2; \infty \rangle$, funkcji h – zbiór $\langle -3; \infty \rangle$, funkcji k – zbiór $\langle 1; \infty \rangle$.

Przesunięcie wykresu funkcji wzdłuż osi y

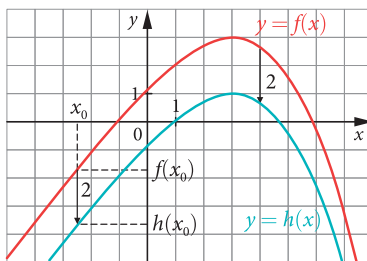
Przesuńmy wykres funkcji $y = f(x)$ o dwie jednostki w **górę** wzdłuż osi y i oznaczmy nową funkcję $y = g(x)$.



$$g(x) = f(x) + 2$$

Dla każdego argumentu wartość funkcji g jest o 2 większa od wartości funkcji f .

Przesuńmy wykres funkcji $y = f(x)$ o dwie jednostki w **dół** wzdłuż osi y i oznaczmy nową funkcję $y = h(x)$.



$$h(x) = f(x) - 2$$

Dla każdego argumentu wartość funkcji h jest o 2 mniejsza od wartości funkcji f .

Wniosek

Jeżeli $b > 0$, to:

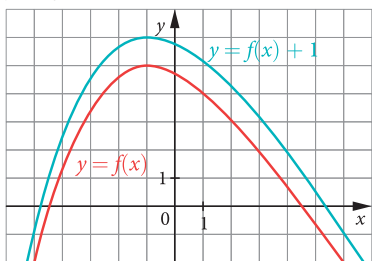
- aby otrzymać wykres funkcji $y = f(x) + b$, przesuwamy wykres funkcji $y = f(x)$ o b jednostek w górę wzdłuż osi y ,
- aby otrzymać wykres funkcji $y = f(x) - b$, przesuwamy wykres funkcji $y = f(x)$ o b jednostek w dół wzdłuż osi y .

Zauważmy, że po przesunięciu wykresu danej funkcji wzdłuż osi y otrzymujemy wykres nowej funkcji o tej samej dziedzinie.

Przykład 3 ◀ zad. 11.6

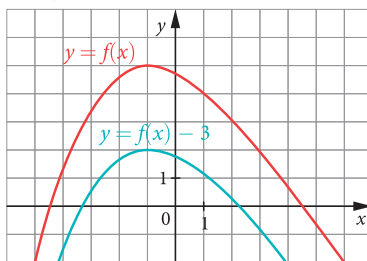
Mając dany wykres funkcji $y = f(x)$, narysujemy wykres funkcji:

a) $y = f(x) + 1$.



Wykres funkcji f przesuwamy o 1 jednostkę w górę.

b) $y = f(x) - 3$.



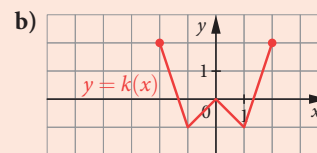
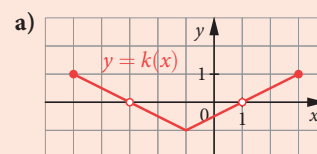
Wykres funkcji f przesuwamy o 3 jednostki w dół.

Uwagi metodyczne

Przesunięcie wykresu wzdłuż osi y nie jest tak trudne, jak w przypadku osi x . Można je wprowadzić za pomocą tabeli bądź skorzystać ze sposobu zastosowanego przy wprowadzaniu przesunięcia wzdłuż osi x . W podręczniku stosujemy konsekwentnie drugi sposób.

◀11.6. Mając dany wykres funkcji $y = k(x)$, narysuj wykresy funkcji:

- I. $y = k(x) + 1$, III. $y = k(x) + 2$,
II. $y = k(x) - 1$, IV. $y = k(x) - 3$.



Odpo.: Wskazówka: Punkty wykresu należy przesunąć:

- I. w górę o 1 jednostkę,
II. w dół o 1 jednostkę,
III. w górę o 2 jednostki,
IV. w dół o 3 jednostki.

◀11.10. Zapisz wzór funkcji $y = g(x)$, która powstanie po przesunięciu wykresu funkcji $y = f(x)$:

I. o 7 jednostek w górę wzdłuż osi y ,

II. o 5 jednostek w prawo wzdłuż osi x .

a) $f(x) = |x|$

b) $f(x) = 2x - 3$

c) $f(x) = x^2 - 3x + 3$

d) $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$

e) $f(x) = 2^{x-4}$

f) $f(x) = \log(x-3) + 6$

Odp.: a) I. $g(x) = |x| + 7$

II. $g(x) = |x-5|$

b) I. $g(x) = 2x + 4$

II. $g(x) = 2x - 13$

c) I. $g(x) = x^2 - 3x + 10$

II. $g(x) = x^2 - 13x + 43$

d) I. $g(x) = \frac{8x+4}{x+1}$

II. $g(x) = \frac{x-8}{x-4}$

e) I. $g(x) = 2^{x-4} + 7$

II. $g(x) = 2^{x-9}$

f) I. $g(x) = \log(x-3) + 13$

II. $g(x) = \log(x-8) + 6$

◀11.13. Funkcja f osiąga wartość największą równą 7 dla $x = -3$. Podaj wartość największą funkcji

a) $y = f(x+1)$.

b) $y = f(x-10)$.

c) $y = f(x) + 5$.

d) $y = f(x) - 9$.

Odp.: a) 7 dla $x = -4$

b) 7 dla $x = 7$

c) 12 dla $x = -3$

d) -2 dla $x = -3$

Odpowiedzi i rozwiązania

11.1. B

11.2. A

11.3. A

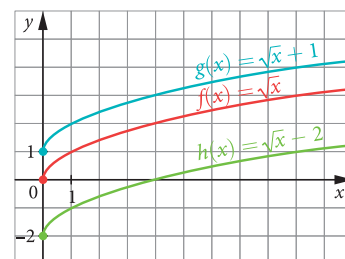
Przykład 4 ◀ zad. 11.10

Narysujemy wykresy funkcji $g(x) = \sqrt{x} + 1$ oraz $h(x) = \sqrt{x} - 2$, mając dany wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że:

- $g(x) = f(x) + 1$ ← przesunięcie o 1 jednostkę w górę
- $h(x) = f(x) - 2$ ← przesunięcie o 2 jednostki w dół



Przykład 5 ◀ zad. 11.13

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\langle 2; 10 \rangle$. Podamy dziedzinę funkcji $g(x) = f(x-3)$.

Rozwiązanie

Wykres funkcji $g(x) = f(x-3)$ powstaje w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o 3 jednostki w prawo wzdłuż osi x . Dziedziną funkcji g będzie zatem dziedzina funkcji f przesunięta na osi x o 3 jednostki w prawo.

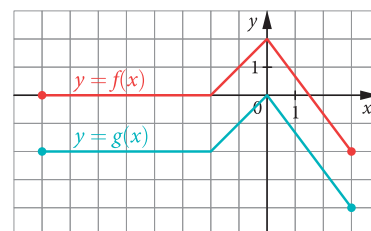
Odp.: Dziedziną funkcji $g(x) = f(x-3)$ jest przedział $\langle 5; 13 \rangle$.

Zadania

W każdym z zadań 11.1–11.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszyty.

11.1. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji f i g . Wskaż prawdziwą zależność.

- A. $g(x) = f(x) + 2$
 B. $g(x) = f(x) - 2$
 C. $g(x) = f(x + 2)$
 D. $g(x) = f(x - 2)$



11.2. Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle 2; 7 \rangle$. Dziedzina funkcji $y = f(x+4)$

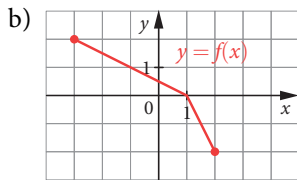
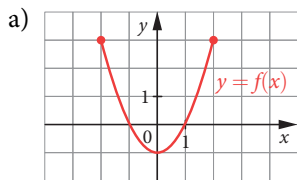
- A. to przedział $\langle -2; 3 \rangle$.
 B. to przedział $\langle 2; 7 \rangle$.
 C. to przedział $\langle 4; 11 \rangle$.
 D. jest niemożliwa do określenia.

11.3. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -11; 3 \rangle$. Zbiór wartości funkcji $y = f(x) - 5$

- A. to przedział $\langle -16; -2 \rangle$.
 B. to przedział $\langle -11; 3 \rangle$.
 C. to przedział $\langle -6; 8 \rangle$.
 D. jest niemożliwy do określenia.

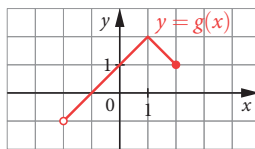
11.4. Mając dany wykres funkcji $y = f(x)$, narysuj wykresy funkcji:

- I. $y = f(x - 1)$, II. $y = f(x + 3)$, III. $y = f(x - 2)$, IV. $y = f(x + 5)$.



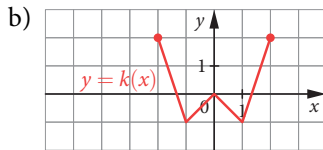
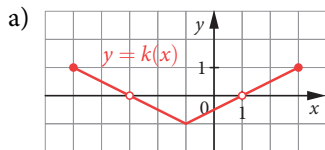
11.5. Mając dany wykres funkcji $y = g(x)$, narysuj wykres funkcji $y = h(x)$ i podaj dziedzinę funkcji h .

- a) $h(x) = g(x + 1)$ c) $h(x) = g(x - 2)$
b) $h(x) = g(x - 4)$ d) $h(x) = g(x + 3)$



11.6. Mając dany wykres funkcji $y = k(x)$, narysuj wykresy funkcji:

- I. $y = k(x) + 1$, II. $y = k(x) - 1$, III. $y = k(x) + 2$, IV. $y = k(x) - 3$.



11.7. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$, a następnie, wykonując odpowiednie przesunięcie, wykres funkcji o podanym wzorze.

- a) $y = \frac{1}{x + 1}$ b) $y = \frac{1}{x - 2}$ c) $y = \frac{1}{x} + 3$ d) $y = \frac{1}{x} - 4$

11.8. Przekształć wykres odpowiedniej funkcji $y = \frac{a}{x}$ i naszkicuj wykres funkcji

- a) $y = \frac{6}{x + 3}$ b) $y = \frac{3}{x} - 5$ c) $y = \frac{8}{x} + 1$ d) $y = \frac{2}{x - 2}$

11.9. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$, a następnie, wykonując odpowiednie przesunięcie, wykres funkcji o podanym wzorze.

- a) $y = \sqrt{x + 1}$ b) $y = \sqrt{x} + 5$ c) $y = \sqrt{x} - 3$ d) $y = \sqrt{x - 4}$

11.10. Zapisz wzór funkcji $y = g(x)$, która powstanie po przesunięciu wykresu funkcji $y = f(x)$:

- I. o 7 jednostek w górę wzdłuż osi y , II. o 5 jednostek w prawo wzdłuż osi x .

- a) $f(x) = |x|$ c) $f(x) = x^2 - 3x + 3$ e) $f(x) = 2^{x-4}$
b) $f(x) = 2x - 3$ d) $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$ f) $f(x) = \log(x-3) + 6$

11.11. Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -5; 10 \rangle$, a zbiorem jej wartości przedział $\langle 2; 8 \rangle$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji

- a) $y = f(x - 5)$ b) $y = f(x + 1)$ c) $y = f(x) - 4$ d) $y = f(x) + 7$.

11.10. a) I. $g(x) = |x| + 7$ II. $g(x) = |x - 5|$

b) I. $g(x) = 2x + 4$ II. $g(x) = 2x - 13$

c) I. $g(x) = x^2 - 3x + 10$ II. $g(x) = x^2 - 13x + 43$

d) I. $g(x) = \frac{8x+4}{x+1}$ II. $g(x) = \frac{x-8}{x-4}$

e) I. $g(x) = 2^{x-4} + 7$ II. $g(x) = 2^{x-9}$

f) I. $g(x) = \log(x-3) + 13$ II. $g(x) = \log(x-8) + 6$

11.11. a) $D = \langle 0; 15 \rangle$, $ZW = \langle 2; 8 \rangle$

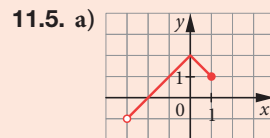
b) $D = \langle -6; 9 \rangle$, $ZW = \langle 2; 8 \rangle$

c) $D = \langle -5; 10 \rangle$, $ZW = \langle -2; 4 \rangle$

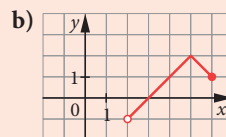
d) $D = \langle -5; 10 \rangle$, $ZW = \langle 9; 15 \rangle$

11.4. Wskazówka: Punkty wykresu należy przesunąć:

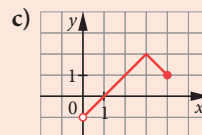
- I. w prawo o 1 jednostkę,
II. w lewo o 3 jednostki,
III. w prawo o 2 jednostki,
IV. w lewo o 5 jednostek.



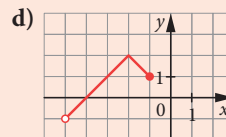
$D = (-3; 1)$



$D = (2; 6)$



$D = (0; 4)$



$D = (-5; -1)$

11.6. Wskazówka: Punkty wykresu należy przesunąć:

- I. w górę o 1 jednostkę,
II. w dół o 1 jednostkę,
III. w górę o 2 jednostki,
IV. w dół o 3 jednostki.

11.7. Wskazówka: Punkty wykresu $\frac{1}{x}$ należy przesunąć:

- a) w lewo o 1 jednostkę,
b) w prawo o 2 jednostki,
c) w górę o 3 jednostki,
d) w dół o 4 jednostki.

11.8. Wskazówka: Należy przesunąć punkty wykresu:

- a) $\frac{6}{x}$ w lewo o 3 jednostki,
b) $\frac{3}{x}$ w dół o 5 jednostek,
c) $\frac{8}{x}$ w górę o 1 jednostkę,
d) $\frac{2}{x}$ w prawo o 2 jednostki.

11.9. Wskazówka: Punkty wykresu $\sqrt{x}$ należy przesunąć:

- a) w lewo o 1 jednostkę,
b) w górę o 5 jednostek,
c) w dół o 3 jednostki,
d) w prawo o 4 jednostki.

- 11.12. a)** malejąca w przedziale $(-\infty; -1)$,
rosnąca w przedziale $\langle -1; \infty)$
b) malejąca w przedziale $(-\infty; -6)$,
rosnąca w przedziale $\langle -6; \infty)$
c), d) malejąca w przedziale $(-\infty; -3)$,
rosnąca w przedziale $\langle -3; \infty)$

- 11.13. a)** 7 dla $x = -4$
b) 7 dla $x = 7$
c) 12 dla $x = -3$
d) -2 dla $x = -3$

11.14. Zbiorem wartości funkcji g jest przedział $(0; 3)$, więc nie ma ona miejsc zerowych.

11.15. $g(x) = 8 \cdot 2^x = 2^3 \cdot 2^x = 2^{x+3} = f(x+3)$. Zatem $k = 3$.

11.16. $f(x-k) = (x-k)^2 + 3 = x^2 - 2kx + k^2 + 3 = x^2 - 2kx + k^2 + 3$.
Zatem $-12 = -2k$ i $m = k^2 + 3$.
Stąd $k = 6$ i $m = 39$.

Prosto do matury

1. P, F, P

2. **Wskazówka:** Punkty wykresu należy przesunąć:

- a)** w prawo o 5 jednostek.
b) w górę o 4 jednostki.

3. -4, 1, 3

4. rosnąca w przedziale $(-\infty; 9)$,
stała w przedziale $\langle 9; 11)$,
malejąca w przedziale $\langle 11; \infty)$

5. Wykres funkcji g jest obrazem wykresu funkcji f w przesunięciu o 3 w górę, więc jej zbiorem wartości jest $(-3+3; \infty) = (0; \infty)$. Oznacza to, że 0 nie jest wartością funkcji g , czyli nie ma ona miejsc zerowych.

11.12. Funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty; -3)$ i rosnąca w przedziale $\langle -3; \infty)$. Podaj przedziały monotoniczności funkcji

a) $y = f(x-2)$. **b)** $y = f(x+3)$. **c)** $y = f(x) + 7$. **d)** $y = f(x) - 100$.

11.13. Funkcja f osiąga wartość największą równą 7 dla $x = -3$. Podaj wartość największą funkcji

a) $y = f(x+1)$. **b)** $y = f(x-10)$. **c)** $y = f(x) + 5$. **d)** $y = f(x) - 9$.

11.14. Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle 2; 8)$, a zbiorem jej wartości przedział $(2; 5)$. Wykaż, że funkcja $g(x) = f(x) - 2$ nie ma miejsc zerowych.

11.15. Wykres funkcji $g(x) = 8 \cdot 2^x$ powstał z wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ po przesunięciu o k jednostek w lewo wzdłuż osi x . Wyznacz k .

* **11.16.** Wykres funkcji $g(x) = x^2 - 12x + m$ powstał po przesunięciu wykresu funkcji $f(x) = x^2 + 3$ o k jednostek w prawo wzdłuż osi x . Wyznacz k i m .

Prosto do matury



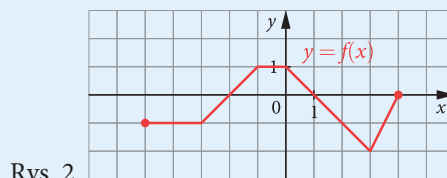
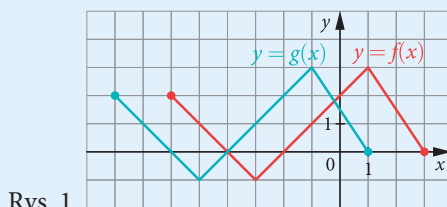
1. Na rysunku 1 przedstawiono wykresy funkcji f i g .

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $g(x) = f(x+2)$ **B.** $f(x) = g(x+2)$ **C.** $f(x) = g(x-2)$

2. Na rysunku 2 przedstawiono wykres funkcji f . Sporządź wykres funkcji

a) $y = f(x-5)$. **b)** $y = f(x) + 4$.



3. Miejscami zerowymi funkcji g są liczby: -2, 3 i 5. Podaj miejsca zerowe funkcji $y = g(x+2)$.

4. Funkcja h jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 4)$, stała w przedziale $\langle 4; 6)$ i malejąca w przedziale $\langle 6; \infty)$. Podaj przedziały monotoniczności funkcji $y = h(x-5)$.

5. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-3; \infty)$. Wykaż, że funkcja $g(x) = f(x) + 3$ nie ma miejsc zerowych.

12. Wykresy funkcji $y = -f(x)$, $y = |f(x)|$, $y = f(-x)$

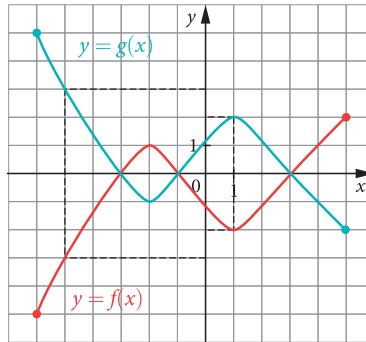
Umiejętności:

- szkicowanie wykresu funkcji $y = -f(x)$ na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$
- szkicowanie wykresu funkcji $y = |f(x)|$ na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$
- szkicowanie wykresu funkcji $y = f(-x)$ na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$

Wykres funkcji $y = -f(x)$

Przekształćmy wykres funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem osi x i oznaczmy nową funkcję $y = g(x)$.

Wartości funkcji g są liczbami przeciwnymi do wartości, jakie funkcja f przyjmuje dla tych samych argumentów.



$$g(x) = -f(x)$$

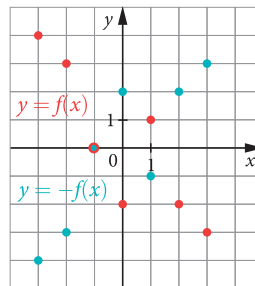
Przykład 1 ◀ zad. 12.4

Mając daną tabelę funkcji $y = f(x)$, narysujemy w jednym układzie współrzędnych wykresy obu funkcji: $y = f(x)$ i $y = -f(x)$.

Rozwiązanie

Tabelę funkcji $y = f(x)$ uzupełniamy wartościami funkcji $y = -f(x)$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	4	3	0	-2	1	-2	-3
$y = -f(x)$	-4	-3	0	2	-1	2	3



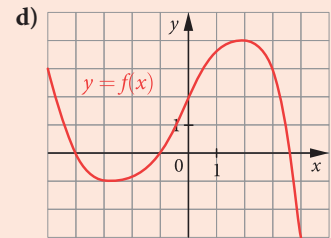
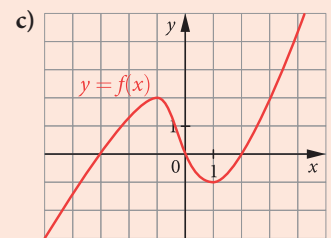
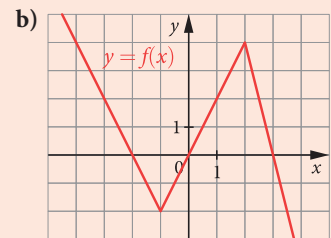
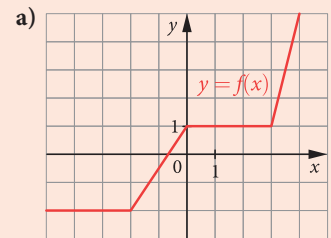
Wniosek

Aby otrzymać wykres funkcji $y = -f(x)$, przekształcamy wykres funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem osi x . Dziedziny obu funkcji są identyczne.

Uwagi metodyczne

Uczniowie na ogół nie mają problemów z przekształcaniem wykresu przez symetrię osiową, dobrze znaną z wcześniejszych etapów nauki. Kłopotliwe może być zrozumienie zapisów: $y = -f(x)$ i $y = f(-x)$.

◀12.4. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Sporządź wykres funkcji $y = -f(x)$.



Odp.: Wskazówka: Punkty wykresu należy przekształcić symetrycznie względem osi x .

ZZ i MKP

tematy 4.11, 4.12

Multiteka

- Przekształcanie wykresu funkcji przez symetrię względem osi OX
- Przekształcanie wykresu funkcji przez symetrię względem osi OY
- Przekształcanie wykresów funkcji z wartością bezwzględną

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.12

◀ 12.6. Patrz s. 288.

Wykres funkcji $y = |f(x)|$ **Przykład 2** ◀ zad. 12.6

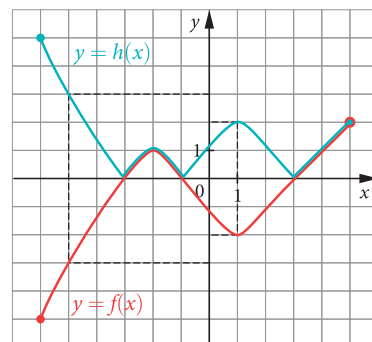
Mając dany wykres funkcji $y = f(x)$, narysujemy wykres funkcji $h(x) = |f(x)|$.

Rozwiązanie

Zgodnie z definicją wartości bezwzględnej funkcja h jest określona w następujący sposób:

- $h(x) = f(x)$ dla wszystkich argumentów x , dla których $f(x) \geq 0$,
- $h(x) = -f(x)$ dla wszystkich argumentów x , dla których $f(x) < 0$.

Dziedziny funkcji f oraz h są równe.



$$h(x) = |f(x)|$$

Jeżeli funkcja $y = f(x)$ ma miejsca zerowe, to funkcje $y = -f(x)$ oraz $y = |f(x)|$ mają identyczne miejsca zerowe, zatem ich wykresy mają te same punkty wspólne z osią x .

**Wniosek**

Aby otrzymać wykres funkcji $y = |f(x)|$, przekształcamy przez symetrię względem osi x tylko te fragmenty wykresu funkcji $y = f(x)$, które leżą poniżej osi x , a pozostałe zachowujemy bez zmian. Dziedziny obu funkcji są identyczne.

◀ 12.7. Przekształć wykres funkcji f i naszkicuj wykres funkcji g .

- a) $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = -f(x)$
 b) $f(x) = \frac{12}{x}$, $g(x) = -f(x)$
 c) $f(x) = \frac{5}{x}$, $g(x) = f(-x)$
 d) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = |f(x)|$

Przykład 3 ◀ zad. 12.7

Przekształćmy odpowiednio wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ i sporządzimy wykres funkcji $g(x) = |\sqrt{x} - 2|$.

Rozwiązanie

Dziedziną obydwu funkcji: f i g , jest przedział $(0; \infty)$.

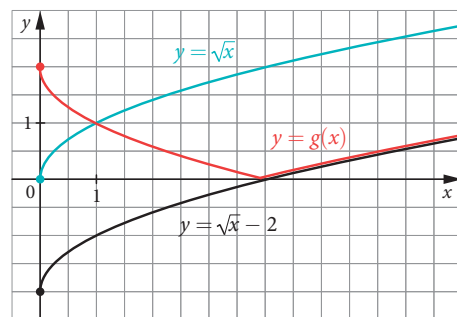
Wykres funkcji $g(x) = |\sqrt{x} - 2|$ otrzymamy w kolejnych krokach.

Krok 1: $h(x) = f(x) - 2 = \sqrt{x} - 2$

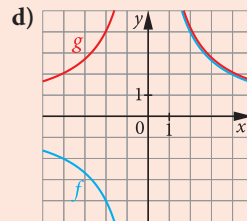
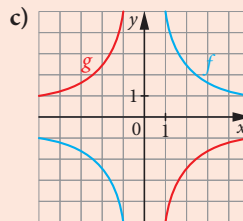
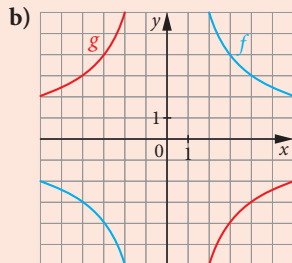
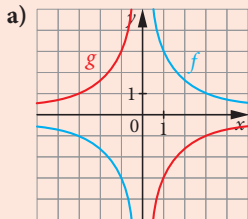
← przesuwamy wykres f o 2 jednostki w dół

Krok 2: $g(x) = |h(x)| = |\sqrt{x} - 2|$

← przekształcamy przez symetrię względem osi x tylko ten fragment wykresu h , który leży poniżej osi x



12.7. Odp.:

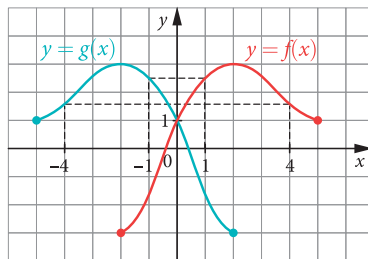


Wykres funkcji $y = f(-x)$

Przekształćmy wykres funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem osi y i oznaczmy otrzymany wykres funkcji $y = g(x)$.

Wartości funkcji g oraz f są identyczne dla przeciwnych argumentów.

Dziedziny funkcji g oraz f są symetryczne względem 0.



$$g(x) = f(-x)$$

Przykład 4 ◀ zad. 12.8

Mając daną tabelę funkcji $y = f(x)$, narysujemy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji: $y = f(x)$ i $y = f(-x)$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	6	5	4	3	2	2	1

Jeżeli 0 jest argumentem funkcji $y = f(x)$, to jest też argumentem funkcji $y = f(-x)$. Wykresy obu funkcji przecinają wówczas oś y w tym samym punkcie.

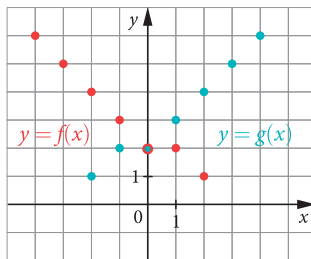
Rozwiązanie

Uzupełniamy tabelę o dziedzinę i wartości funkcji $g(x) = f(-x)$.

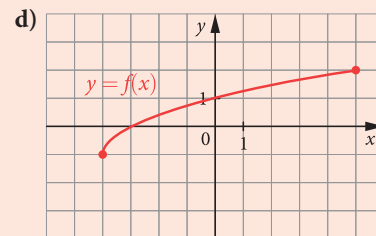
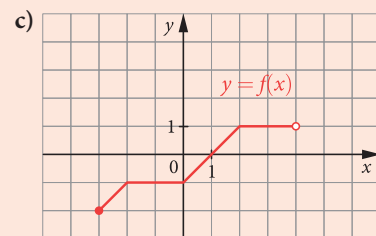
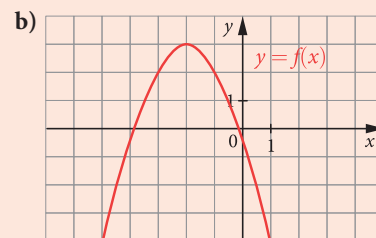
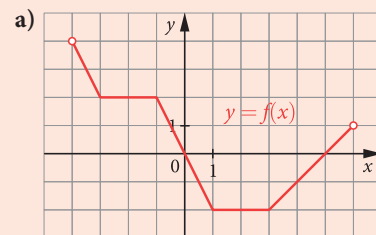
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x)$	6	5	4	3	2	2	1	×	×
$g(x) = f(-x)$	×	×	1	2	2	3	4	5	6

Zauważmy:

- dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest zbiór $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$,
- argumentami funkcji $g(x) = f(-x)$ są liczby przeciwne do argumentów funkcji f , czyli dziedziną funkcji g jest zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$,
- dla każdej pary argumentów będących liczbami przeciwnymi wartości funkcji $y = f(x)$ oraz $y = f(-x)$ są takie same, zatem odpowiednie punkty wykresu są symetryczne względem osi y .



◀12.8. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Sporządź wykres funkcji $y = f(-x)$.



Odp.: Wskazówka: Punkty wykresu należy przekształcić symetrycznie względem osi y .

Wniosek

Aby otrzymać wykres funkcji $y = f(-x)$, przekształcamy wykres funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem osi y . Dziedziny obu funkcji są symetryczne względem punktu 0.

◀12.9. Przekształć odpowiednio wykres funkcji $y = \sqrt{x}$ lub $y = \frac{1}{x}$ i naskicuj wykres funkcji o podanym wzorze.

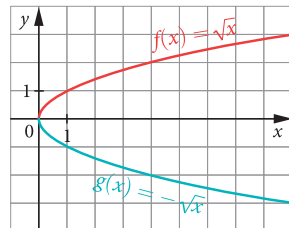
- a) $y = |\sqrt{x} - 1|$
 b) $y = \left| \frac{1}{x} - 2 \right|$
 c) $y = \left| \frac{1}{x} + 1 \right|$
 d) $y = |\sqrt{x} - \sqrt{2}|$

Przykład 5 ◀ zad. 12.9

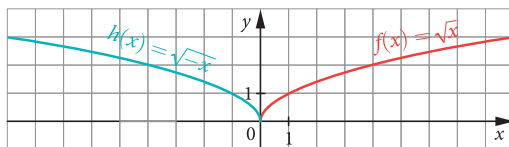
Przekształcając odpowiednio wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$, sporządzimy wykresy funkcji $g(x) = -\sqrt{x}$, $h(x) = \sqrt{-x}$ oraz $k(x) = -\sqrt{-x}$.

Rozwiązanie

Wykres funkcji $g(x) = -\sqrt{x} = -f(x)$ otrzymamy, przekształcając wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ przez symetrię osiową względem osi x . Dziedziny obu funkcji są równe.

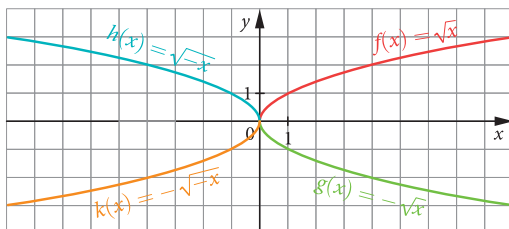


Wykres funkcji $h(x) = \sqrt{-x} = f(-x)$ otrzymamy, przekształcając wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ przez symetrię osiową względem osi y . Dziedziną funkcji f jest przedział $(0; \infty)$, zaś dziedziną funkcji h – przedział $(-\infty; 0)$.



Aby uzyskać wykres funkcji $k(x) = -\sqrt{-x} = -f(-x)$, należy wykonać oba wyżej wymienione przekształcenia. Ich kolejność nie ma znaczenia, zatem:

- albo przekształcamy wykres funkcji $g(x) = -\sqrt{x}$ przez symetrię osiową względem osi y ,
- albo przekształcamy wykres funkcji $h(x) = \sqrt{-x}$ przez symetrię osiową względem osi x .



Przykład 6 ◀ zad. 12.14, 12.15

O funkcji f wiadomo, że:

- jej dziedziną jest przedział $\langle 0; 10 \rangle$,
- jest rosnąca w przedziale $\langle 0; 5 \rangle$,
- jest malejąca w przedziale $\langle 5; 10 \rangle$.

Zbadamy przedziały monotoniczności funkcji

a) $y = -f(x)$. b) $y = f(-x)$.

Rozwiązanie

- a) Wykres funkcji $y = -f(x)$ powstaje z wykresu funkcji $y = f(x)$ w wyniku symetrii osiowej względem osi x . Taka symetria nie zmienia dziedziny funkcji, zmienia jednak w odpowiednich przedziałach jej monotoniczność. Zatem funkcja $y = -f(x)$ jest **malejąca** w przedziale $\langle 0; 5 \rangle$ i **rosnąca** w przedziale $\langle 5; 10 \rangle$.
- b) Wykres funkcji $y = f(-x)$ powstaje z wykresu funkcji $y = f(x)$ w wyniku symetrii osiowej względem osi y . Dziedziną funkcji $y = f(-x)$ jest przedział $\langle -10; 0 \rangle$. Skoro funkcja f jest **rosnąca** w przedziale $\langle 0; 5 \rangle$, to funkcja $y = f(-x)$ jest w przedziale $\langle -5; 0 \rangle$ **malejąca**. Podobnie, skoro funkcja f jest **malejąca** w przedziale $\langle 5; 10 \rangle$, to funkcja $y = f(-x)$ jest w przedziale $\langle -10; -5 \rangle$ **rosnąca**. Zatem funkcja $y = f(-x)$ rośnie w przedziale $\langle -10; -5 \rangle$ i maleje w przedziale $\langle -5; 0 \rangle$.

Zadania

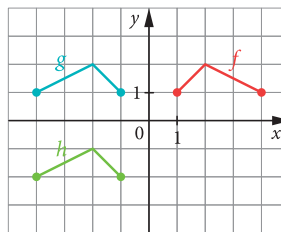
W każdym z zadań 12.1–12.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytcie.

12.1. Zbiorem wartości funkcji $y = -f(x)$ jest przedział $\langle -7; -3 \rangle$. Wskaż zbiór wartości funkcji $y = f(x)$.

- A. $\langle 0; 3 \rangle$ B. $\langle -7; -3 \rangle$ C. $\langle -3; 0 \rangle$ D. $\langle 3; 7 \rangle$

12.2. W układzie współrzędnych narysowane są wykresy trzech funkcji: f , g oraz h . Wskaż prawdziwą zależność.

- A. $g(x) = -f(x)$ C. $g(x) = f(-x)$
B. $h(x) = -g(x)$ D. $h(x) = g(-x)$



12.3. Funkcja $y = f(x)$ jest rosnąca w przedziale $\langle 2; 7 \rangle$. Wynika z tego, że funkcja $y = f(-x)$ jest

- A. rosnąca w przedziale $\langle 2; 7 \rangle$. C. malejąca w przedziale $\langle 2; 7 \rangle$.
B. rosnąca w przedziale $\langle -7; -2 \rangle$. D. malejąca w przedziale $\langle -7; -2 \rangle$.

◀ **12.14.** O funkcji f wiadomo, że jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 1)$ i malejąca w przedziale $\langle 1; \infty \rangle$. Podaj przedziały monotoniczności funkcji $y = -f(x)$.

Odp.: malejąca w przedziale $(-\infty; 1)$,
rosnąca w przedziale $\langle 1; \infty \rangle$

◀ **12.15.** O funkcji f wiadomo, że jej dziedziną jest przedział $(-3; 12)$, że jest stała w przedziale $(-3; 3)$ i rosnąca w przedziale $\langle 3; 12 \rangle$. Podaj dziedzinę oraz przedziały monotoniczności funkcji $y = f(-x)$.

Odp.: $D = (-12; 3)$,
malejąca w przedziale $(-12; -3)$,
stała w przedziale $\langle -3; 3 \rangle$

Odpowiedzi i rozwiązania

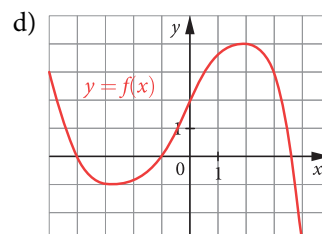
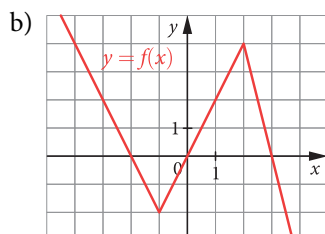
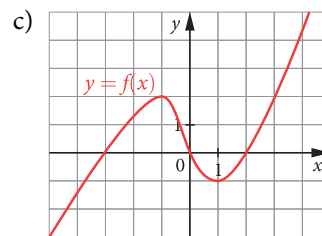
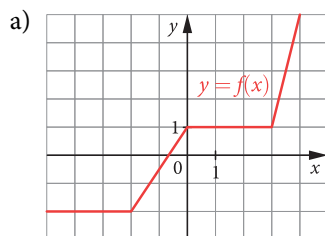
12.1. D

12.2. C

12.3. D

12.4. Wskazówka: Punkty wykresu należy przekształcić symetrycznie względem osi x .

12.4. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Sporządź wykres funkcji $y = -f(x)$.



12.5. a) $D = (0; \infty)$,
 $ZW = (-\infty; 0)$

b) $D = \langle -3; 5 \rangle$, $ZW = \langle -7; -2 \rangle$

c) $D = \langle -4; \infty \rangle$, $ZW = (-2; \infty)$

d) $D = (3; 9)$, $ZW = (-5; 4)$

12.5. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest zbiór D , a zbiorem wartości – zbiór ZW . Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości funkcji $y = -f(x)$.

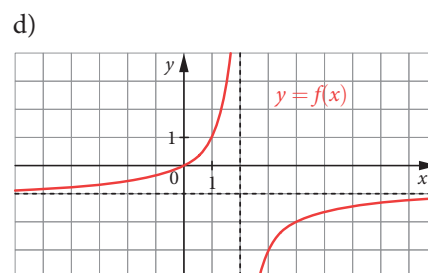
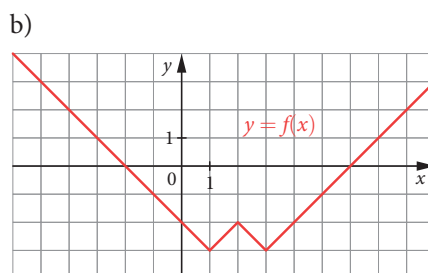
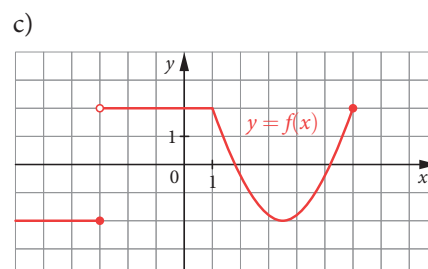
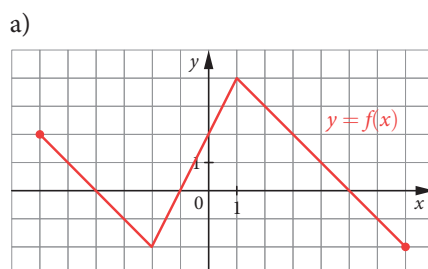
a) $D = (0; \infty)$ $ZW = (0; \infty)$

c) $D = (-4; \infty)$ $ZW = (-\infty; 2)$

b) $D = \langle -3; 5 \rangle$ $ZW = \langle 2; 7 \rangle$

d) $D = (3; 9)$ $ZW = \langle -4; 5 \rangle$

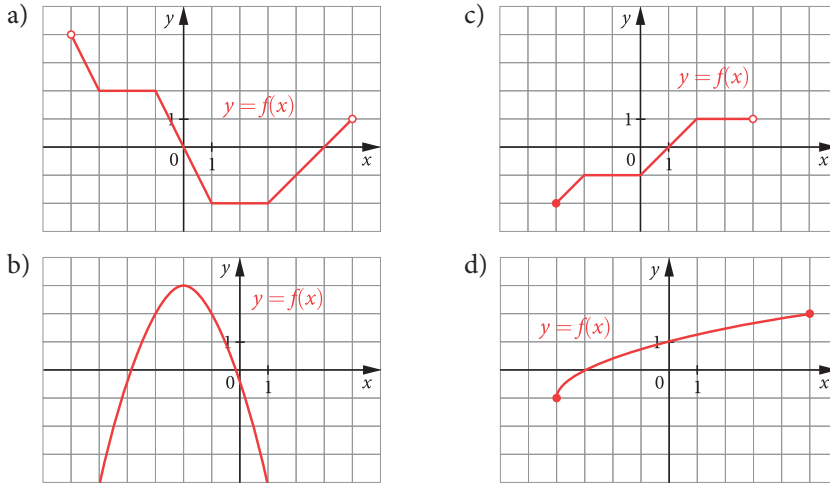
12.6. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Sporządź wykres funkcji $y = |f(x)|$.



12.7. Przekształć wykres funkcji f i naszkicuj wykres funkcji g .

- a) $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = -f(x)$ c) $f(x) = \frac{5}{x}$, $g(x) = f(-x)$
 b) $f(x) = \frac{12}{x}$, $g(x) = -f(x)$ d) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = |f(x)|$

12.8. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Sporządź wykres funkcji $y = f(-x)$.



12.9. Przekształć odpowiednio wykres funkcji $y = \sqrt{x}$ lub $y = \frac{1}{x}$ i naszkicuj wykres funkcji o podanym wzorze.

- a) $y = |\sqrt{x} - 1|$ c) $y = \left| \frac{1}{x} + 1 \right|$
 b) $y = \left| \frac{1}{x} - 2 \right|$ d) $y = |\sqrt{x} - \sqrt{2}|$

12.10. Wśród podanych funkcji wskaż pary takich, których wykresy są symetryczne względem osi x lub osi y . Wybrane pary wpisz do tabeli w zeszycie, wg wzoru.

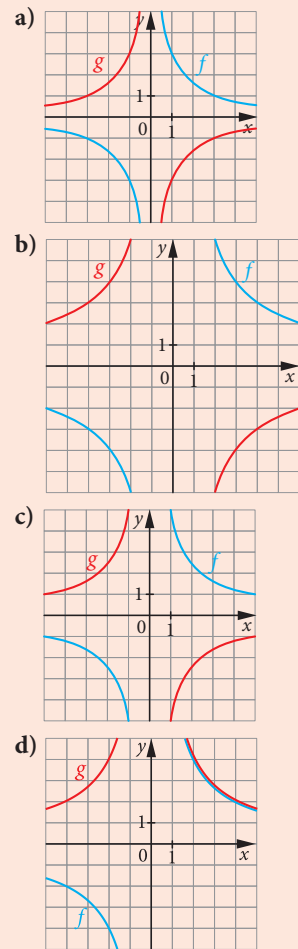
Pary funkcji, których wykresy są symetryczne względem osi x	Pary funkcji, których wykresy są symetryczne względem osi y
$k_1(x) = 5x - 4$ i $k_3(x) = -5x + 4$	$k_1(x) = 5x - 4$ i $k_2(x) = -5x - 4$

$f_1(x) = 2x - 3$	$g_1(x) = x^2 + 2x + 7$	$h_1(x) = 10^{x-2}$
$f_2(x) = -2x - 3$	$g_2(x) = x^2 - 2x + 7$	$h_2(x) = -10^{x-2}$
$f_3(x) = -2x + 3$	$g_3(x) = -x^2 - 2x + 7$	$h_3(x) = 10^{-x-2}$
	$g_4(x) = -x^2 - 2x - 7$	$h_4(x) = 10^{-x+2}$

12.10.

Pary funkcji, których wykresy są symetryczne względem osi x	Pary funkcji, których wykresy są symetryczne względem osi y
$f_1(x) = 2x - 3$ i $f_3(x) = -2x + 3$	$f_1(x) = 2x - 3$ i $f_3(x) = -2x - 3$
$g_1(x) = x^2 + 2x + 7$ i $g_4(x) = -x^2 - 2x - 7$	$g_1(x) = x^2 + 2x + 7$ i $g_2(x) = x^2 - 2x + 7$
$h_1(x) = 10^{x-2}$ i $h_2(x) = -10^{x-2}$	$h_1(x) = 10^{x-2}$ i $h_3(x) = 10^{-x-2}$

12.7.



12.8. Wskazówka: Punkty wykresu należy przekształcić symetrycznie względem osi y .

12.11. a) $D = \{-8, -6, 3\}$,

$ZW = \{0, 2, 8\}$

b) $D = (-\infty; 0)$, $ZW = (0; \infty)$

c) $D = (-9; \infty)$, $ZW = (0; \infty)$

d) $D = \langle -9; -2 \rangle$, $ZW = \langle -1; 3 \rangle$

12.12. a) $x = -3$, $x = -2$, $x = 5$

b) $x = -5$, $x = 2$, $x = 3$

12.13. a) wartość najmniejsza: -5
dla $x = 1$, wartość największa: 3
dla $x = 5$

b) wartość najmniejsza: -3
dla $x = -5$, wartość największa: 5
dla $x = -1$

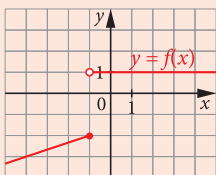
12.14. malejąca w przedziale
 $(-\infty; 1)$,

rosnąca w przedziale $\langle 1; \infty \rangle$

12.15. $D = (-12; 3)$, malejąca
w przedziale $(-12; -3)$,
stała w przedziale $\langle -3; 3 \rangle$

12.16. Tak, wartość
najmniejsza: 0 , wartość
największa: 4 .

12.19.



12.20. a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 4$,
 $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

12.11. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest zbiór D , a zbiorem wartości – zbiór ZW .
Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości funkcji $y = f(-x)$.

a) $D = \{-3, 6, 8\}$ $ZW = \{0, 2, 8\}$

c) $D = (-\infty; 9)$ $ZW = (0; \infty)$

b) $D = (0; \infty)$ $ZW = (0; \infty)$

d) $D = \langle 2; 9 \rangle$ $ZW = \langle -1; 3 \rangle$

12.12. Miejscami zerowymi funkcji $y = f(x)$ są: $x = -3$, $x = -2$ oraz $x = 5$.
Wyznacz miejsca zerowe funkcji

a) $y = -f(x)$. **b)** $y = f(-x)$.

12.13. Funkcja $y = f(x)$ przyjmuje wartość najmniejszą równą -3 dla $x = 5$ i przyjmuje wartość największą równą 5 dla $x = 1$. Podaj wartość najmniejszą, wartość największą oraz argumenty, dla których te wartości przyjmuje funkcja

a) $y = -f(x)$. **b)** $y = f(-x)$.

12.14. O funkcji f wiadomo, że jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 1)$ i malejąca w przedziale $\langle 1; \infty \rangle$. Podaj przedziały monotoniczności funkcji $y = -f(x)$.

12.15. O funkcji f wiadomo, że jej dziedziną jest przedział $(-3; 12)$, że jest stała w przedziale $(-3; 3)$ i rosnąca w przedziale $\langle 3; 12 \rangle$. Podaj dziedzinę oraz przedziały monotoniczności funkcji $y = f(-x)$.

12.16. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -4; 2 \rangle$. Czy funkcja $y = |f(x)|$ przyjmuje wartość największą lub wartość najmniejszą? Jeżeli tak, podaj te wartości.

12.17. Wiadomo, że dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest przedział $\langle -3; 5 \rangle$, a jej zbiorem wartości jest przedział $\langle -2; 3 \rangle$. Podaj przykład wykresu funkcji $y = f(x)$ spełniającej takie założenia.

12.18. Podaj przykład wykresu funkcji f , której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych i która spełnia warunek $f(-x) = -f(x)$.

* **12.19.** O funkcji f wiadomo, że jej dziedziną jest zbiór $\mathbf{R}$, jest monotoniczna, do zbioru jej wartości należą liczby o różnych znakach oraz że funkcja $y = |f(x)|$ też jest monotoniczna. Podaj przykład wykresu funkcji spełniającej te założenia.

12.20. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie całkowitej x z przedziału $\langle 0; 8 \rangle$ liczbę o 4 mniejszą od kwadratu połowy liczby x .

a) Podaj wzór funkcji f i sporządź jej wykres.

b) Przekształcając odpowiednio wykres funkcji f , naszkicuj wykres funkcji

$$g(x) = |f(x)|.$$

12.21. Sporządź wykres funkcji $y = f(x)$, która spełnia następujące warunki:
 $D = \langle -2; 5 \rangle$, $ZW = \langle -2; 2 \rangle$, wartość największą równą 2 funkcja przyjmuje dla $x = 1$, wartość najmniejszą równą -2 funkcja przyjmuje dla $x = 3$; funkcja ma dwa miejsca zerowe: $x = -1$, $x = 2$.

$f(x) > 0$ dla $x \in (-1; 2)$, $f(x) < 0$ dla $x \in \langle -2; -1 \rangle$ oraz dla $x \in (2; 5)$; w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$ funkcja jest rosnąca, w przedziale $\langle 1; 3 \rangle$ jest malejąca, w przedziale $\langle 3; 5 \rangle$ jest rosnąca.

Równanie $f(x) = m$ nie ma rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$, ma jedno rozwiązanie dla $m = -2$ oraz dla $m = 2$, ma dwa rozwiązania dla

$m \in (-2; -1) \cup (-1; 2)$, ma trzy rozwiązania dla $m = -1$.

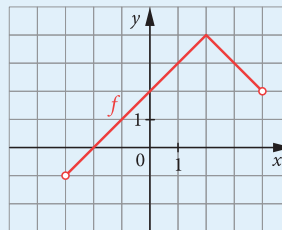
Przekształć odpowiednio narysowany wykres funkcji f i narysuj wykres funkcji $g(x) = |f(x)|$.

Prosto do matury

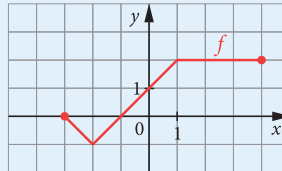
1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .

Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Dziedziną funkcji $g(x) = f(-x)$ jest przedział $\langle -4; 3 \rangle$.
- B. Miejscem zerowym funkcji $g(x) = f(-x)$ jest 2.
- C. Zbiorem wartości funkcji $h(x) = -f(x)$ jest przedział $\langle -4; 1 \rangle$.



2. Mając dany wykres funkcji $y = f(x)$, narysuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj dziedziny i przedziały monotoniczności obu funkcji.



3. Posługując się wykresem funkcji $y = f(x)$ z poprzedniego zadania, narysuj wykres funkcji $h(x) = f(-x)$. Podaj dziedziny i miejsca zerowe obu funkcji.

4. Wiadomo, że dziedziną funkcji $y = f(-x)$ jest przedział $\langle 1; 5 \rangle$, a zbiorem wartości funkcji $y = -f(x)$ jest przedział $\langle -1; 2 \rangle$. Podaj przykład wykresu funkcji $y = f(x)$ spełniającej takie założenia.

5. Wiadomo, że dziedziną funkcji $y = f(-x)$ jest przedział $\langle 1; 5 \rangle$, zbiorem wartości funkcji $y = -f(x)$ jest przedział $\langle -1; 2 \rangle$, a równanie $|f(x)| = 1$ ma 3 rozwiązania. Narysuj przykładowy wykres funkcji $y = f(x)$ spełniającej takie założenia.



Prosto do matury

1. P, P, F

2. Punkty wykresu należy przekształcić symetrycznie względem osi x .

Funkcja $y = f(x)$: $D = \langle -3; 4 \rangle$, $ZW = \langle -1; 2 \rangle$,

malejąca w przedziale $\langle -3; -2 \rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$, stała w przedziale $\langle 1; 4 \rangle$.

Funkcja $y = g(x)$: $D = \langle -3; 4 \rangle$, $ZW = \langle -2; 1 \rangle$,

rosnąca w przedziale $\langle -3; -2 \rangle$, malejąca w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$, stała w przedziale $\langle 1; 4 \rangle$.

3. Punkty wykresu należy przekształcić symetrycznie względem osi y .

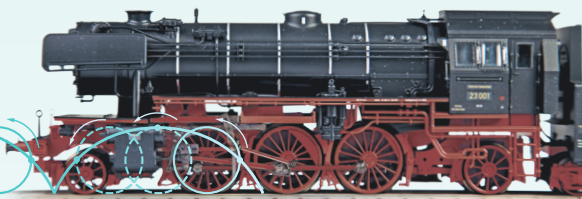
Funkcja $y = f(x)$: $D = \langle -3; 4 \rangle$, miejsca zerowe: $-3, -1$.

Funkcja $y = h(x)$: $D = \langle -4; 3 \rangle$, miejsca zerowe: $1, 3$.

4. **Wskazówka:** Narysuj funkcję, której dziedziną jest przedział $\langle -5; -1 \rangle$, a zbiorem wartości przedział $\langle -2; 1 \rangle$.

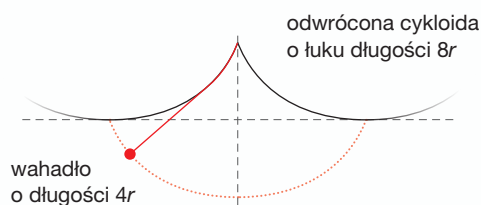
Cykloida i elipsa

Punkt okręgu toczącego się bez poślizgu po prostej zakreśla krzywą zwaną cykloidą. Taką nazwę nadał jej w 1599 r. Galileusz. Długość łuku cykloidy zakreślonego przez punkt okręgu o promieniu r jest równy $8r$, a pole pod łukiem wynosi $3\pi r^2$.



Wahadło cykloidalne

Holenderski fizyk, astronom i matematyk, Christiaan Huygens [czyt. höjchens], próbował ulepszyć zbudowany przez siebie zegar wahadłowy (1657 r.) tak, aby działał prawidłowo także w trudnych warunkach, np. na statku. Odkrył, że jeżeli wahadło porusza się po cykloidzie, okres drgań zegara nie zależy od początkowego wychylenia wahadła.



Niestety inne czynniki, jak tarcie wahadła o elementy ograniczające w kształcie cykloidy, uniemożliwiły prawidłowe działanie zegara.

Szczególne właściwości

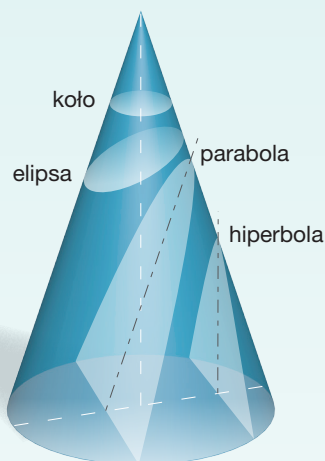
Rozważmy punkty A i B nieleżące jeden pod drugim. Krzywa, po której ciało poruszające się pod wpływem siły ciężkości pokona drogę z A do B w najkrótszym czasie, jest nazywana **brachistochroną**. Okazuje się, że brachistochrona zawsze jest fragmentem cykloidy.

Droga z A do B po cykloidzie jest najszybsza nawet wówczas, gdy jej fragment znajduje się poniżej punktu końcowego B . Czy warto nadawać kształt cykloidy rampom budowanym w skateparkach?



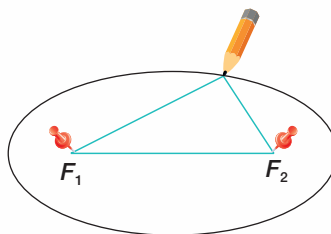
Przekroje stożka

Rozwój geometrii zawdzięczamy starożytnym Grekom. Około III wieku p.n.e. Apoloniusz z Pergii napisał złożony z 8 ksiąg traktat *Konika* poświęcony przekrojom stożka. To on nadał krzywym powstającym przy przekroju stożka obrotowego płaszczyzną nazwy **elipsa**, **hiperbola** i **parabola**.



Dwa ogniska

Elipsa składa się z tych wszystkich punktów płaszczyzny, dla których suma odległości od dwóch ustalonych punktów F_1 i F_2 (zwanymi ogniskami) jest stała. Na rysunku pokazano jeden ze sposobów jej wyznaczania, znany już w starożytności.



Elipsa w medycynie

Skupiające własności ognisk elipsy wykorzystuje się do bezoperacyjnego usuwania kamieni nerkowych. Podczas zabiegu generator umieszczony w ognisku F_1 elipsy wytwarza wysokoenergetyczne fale uderzeniowe. Po odbiciu od czaszy reflektora fale te skupiają się w ognisku F_2 , w którym znajduje się kamień nerkowy. Kamień zostaje rozkruszony, co ułatwia jego wydalenie z organizmu.



13. Wektory

Umiejętności:

- dodawanie i odejmowanie wektorów oraz mnożenie wektora przez liczbę
- interpretacja geometryczna działań na wektorach
- swobodne operowanie pojęciem wektora

W kolejnych tematach zdefiniujemy wektory i działania na nich, omówimy własności tych działań oraz pokażemy przykłady zastosowania wektorów w zadaniach geometrycznych.

Przykład 1

Marta wybrała się w podróż z Gdańska do Krakowa. Spójrzmy na mapę Polski. Ilustracją początku i końca tej podróży jest narysowana na mapie strzałka. Natomiast z rysunku nie można odczytać rzeczywistej drogi, którą przebyła Marta.



Definicja

Niech A i B będą dwoma punktami na płaszczyźnie. Uporządkowaną parę punktów (A, B) nazywamy **wektorem o początku A i końcu B** i oznaczamy symbolem $\overrightarrow{AB}$. Jeśli $A = B$, to wektor $\overrightarrow{AB}$ nazywamy wektorem zerowym.

Niezerowy wektor $\overrightarrow{AB}$ jednoznacznie wyznacza:

- prostą AB ,
- półprostą AB ,
- odcinek AB .

Definicja

- Dwa niezerowe wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są **równoległe** ($\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$), inaczej: mają **ten sam kierunek**, jeżeli proste AB i CD są równoległe.
- **Długością** wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywamy długość odcinka AB i oznaczamy $|\overrightarrow{AB}|$ albo $|AB|$.
- **Wektorem przeciwnym** do wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywamy wektor $\overrightarrow{BA}$.

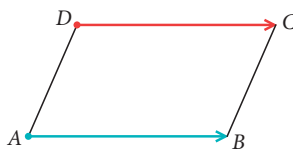
Na dwóch oddzielnych rysunkach zaznaczyliśmy wektory przeciwne.

Wektory przeciwne mają ten sam kierunek i równe długości.



Zgodnie z definicją każdy wektor ma swój początek i koniec. O wektorze $\overrightarrow{AB}$ często mówimy, że jest **wektorem zaczepionym** lub **związanym**.

Przyjrzyjmy się wektorom wyznaczonym przez przeciwległe boki równoległoboku $ABCD$. Wektory położone tak, jak $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$, nazwiemy wektorami równymi.

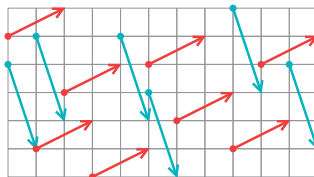


Definicja

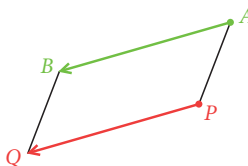
Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ nazywamy **równymi** ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$), jeśli odcinki AB i DC są równej długości i równoległe oraz odcinki AD i BC są równej długości i równoległe.

Przykład 2

Wszystkie wektory zaznaczone na rysunku kolorem czerwonym są równe. Również wszystkie wektory zaznaczone kolorem niebieskim są równe.



W dowolnym punkcie płaszczyzny można zaczepić wektor $\overrightarrow{PQ}$ równy danemu wektorowi $\overrightarrow{AB}$.



Definicja

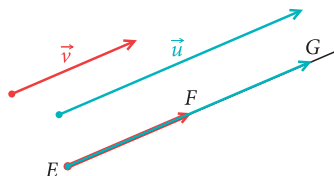
Wektorem swobodnym wyznaczonym przez wektor zaczepiony $\overrightarrow{AB}$ nazywamy zbiór wszystkich wektorów zaczepionych równych wektorowi $\overrightarrow{AB}$.

Wektory swobodne często oznaczamy pojedynczymi literami, np.: $\vec{v}$, $\vec{u}$, $\vec{w}$.

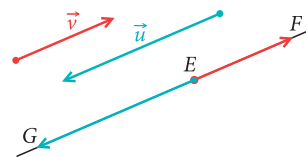
Zapis $\overrightarrow{MP} = \vec{v}$ oznacza, że wektor $\overrightarrow{MP}$ zaczepiony w punkcie M należy do wektora swobodnego $\vec{v}$. W takim wypadku mówimy również, że wektor $\vec{v}$ został zaczepiony w punkcie M lub że wektor $\overrightarrow{MP}$ reprezentuje wektor $\vec{v}$. Każdy wektor zaczepiony jest reprezentantem dokładnie jednego wektora swobodnego. W dalszych rozważaniach będziemy używać uproszczonych określeń, np. „niezerowy wektor $\vec{w}$ ” oznacza, że niezerowy jest każdy wektor zaczepiony reprezentujący wektor $\vec{w}$. Wektor swobodny zerowy oznaczamy symbolem $\vec{0}$.

Definicja

- Dwa niezerowe wektory $\vec{v}$ i $\vec{u}$ są **równoległe**, jeżeli po zaczepieniu ich w dowolnych punktach półproste wyznaczone przez te wektory są równoległe.
- Dwa niezerowe i równoległe wektory $\vec{v}$ i $\vec{u}$ mają **ten sam zwrot**, inaczej: **zwroty zgodne**, jeśli po zaczepieniu obu wektorów w jednym punkcie półproste wyznaczone przez te wektory się pokrywają. Jeśli zaś te półproste tworzą w sumie prostą, to wektory $\vec{v}$ i $\vec{u}$ mają **zwroty przeciwne**.



wektory o zgodnych zwrotach

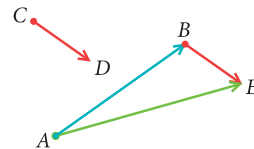


wektory o przeciwnych zwrotach

Zdefiniujemy teraz dodawanie wektorów swobodnych.

Definicja

Jeżeli $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są dowolnymi wektorami swobodnymi, to $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}$, gdzie E jest takim punktem, że $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$.



Przykład 3

Niech punkt G oznacza Gdańsk, punkt K – Kraków, punkt W – Wrocław. Ilustracją pierwszego etapu podróży Marty jest wektor $\overrightarrow{GK}$. Z Krakowa Marta pojechała do Wrocławia i tam swoją podróż zakończyła. Ilustracją drugiego etapu podróży jest wektor $\overrightarrow{KW}$. Wektor $\overrightarrow{GW}$, będący sumą wektorów $\overrightarrow{GK}$ oraz $\overrightarrow{KW}$, mówiąc poglądowo, podsumowuje całą podróż, której punktem startowym był Gdańsk, a końcowym – Wrocław.

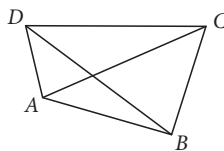
$$\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{KW} = \overrightarrow{GW}$$

Zauważmy, że długość wektora $\overrightarrow{GW}$ nie jest równa sumie długości wektorów $\overrightarrow{GK}$ oraz $\overrightarrow{KW}$.



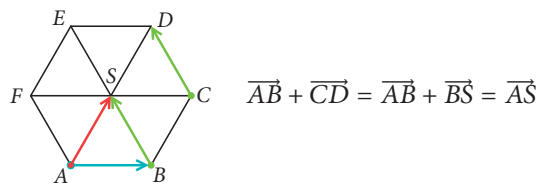
Przykład 4 ◀ zad. 13.6

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$
- $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$
- $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

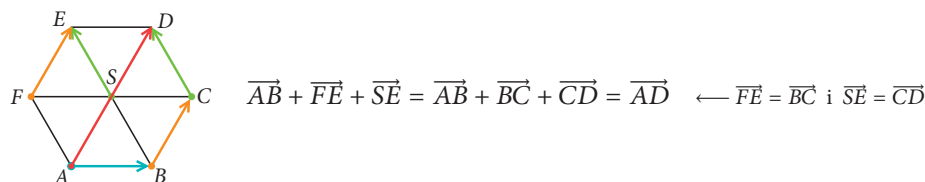
**Przykład 5** ◀ zad. 13.11

W sześciokącie foremnym $ABCDEF$ wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FS}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{ED}$ są równe. Wynika to bezpośrednio z własności sześciokąta foremnego. Wykonamy podane działania na wektorach.

Rozwiązanie



$$\leftarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BS}$$



$$\leftarrow \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BC} \text{ i } \overrightarrow{SE} = \overrightarrow{CD}$$

Definicja

Iloczynem niezerowego wektora $\vec{v}$ i liczby $k \neq 0$, co zapisujemy $k \cdot \vec{v}$, nazywamy równoległy do wektora $\vec{v}$ wektor $\vec{w}$ taki, że $|\vec{w}| = |k| \cdot |\vec{v}|$ oraz:

- jeżeli $k > 0$, to zwroty wektorów $\vec{w}$ oraz $\vec{v}$ są zgodne,
- jeżeli $k < 0$, to zwroty wektorów $\vec{w}$ oraz $\vec{v}$ są przeciwne.

Jeżeli $k = 0$ lub $\vec{v}$ jest wektorem zerowym, to $k \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

Przykład 6

Droga z Gdańska do Krakowa (w linii prostej) wiedzie przez Łódź. Przyjmijmy, że odległość z Gdańska do Łodzi stanowi $\frac{5}{8}$ odległości z Gdańska do Krakowa. Jeśli oznaczymy Gdańsk, Kraków i Łódź odpowiednio punktami G , K i L , to możemy użyć wektorów i zapisać, że $\overrightarrow{GL} = \frac{5}{8} \overrightarrow{GK}$.



◀ **13.6.** Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Wyznacz sumy i różnice wektorów.

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}$
- $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$
- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$

Odp.: a) $\overrightarrow{DB}$ b) $\overrightarrow{BD}$
c) $\vec{0}$ d) $\overrightarrow{AD}$

◀ **13.11.** Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$. Przedstaw wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{FC}$ oraz $\overrightarrow{EC}$ w postaci $m \cdot \overrightarrow{AD} + p \cdot \overrightarrow{BE}$, gdzie m, p są odpowiednio dobranymi liczbami.

Odp.: $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{BE}$,
 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{BE}$,
 $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BE}$,
 $\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BE}$

◀13.14. Dany jest trójkąt ABC . Punkty K, L, M są środkami odpowiednio boków AB, BC oraz AC . Wykaż, że $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

Odp.: $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{CM} =$
 $= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} =$
 $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Przykład 7 ◀ zad. 13.14

W trójkącie ABC punkty K, L, M są środkami boków, jak na rysunku.

Udowodnimy, że $\overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

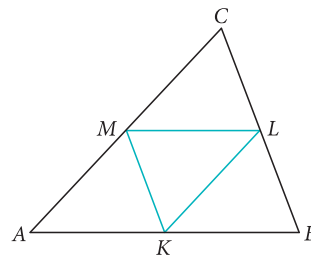
Dowód

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CL} \\ \overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} \end{cases} \\
 2\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CL} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} \\
 2\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{AB} & \leftarrow \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \text{ i } \overrightarrow{CL} + \overrightarrow{BL} = \vec{0} \\
 \overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}
 \end{aligned}$$

Koniec dowodu

Podobnie można wykazać inne równości, np.:

$$2\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{KL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{BA} = -2\overrightarrow{ML}.$$



Twierdzenie

Własności działań na wektorach

Jeżeli $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ są wektorami oraz k, p są liczbami rzeczywistymi, to:

- $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$,
- $\vec{v} + (\vec{u} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w}$,
- $k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$,
- $(k + p)\vec{u} = k\vec{u} + p\vec{u}$.

Dowód tego twierdzenia pominiemy.

Zilustrujemy własność:

$$k \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$$

czyli rozdzielność mnożenia przez liczbę względem dodawania wektorów, dla $k = 2$.

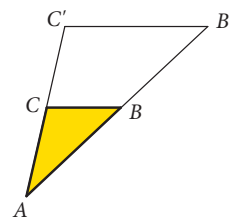
Zakładamy, że:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{BC} \quad \text{oraz} \quad \overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AB}$$

Zatem $2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$ (zob. przykład 7).

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$$



Jeżeli pomnożymy wektor przez -1 , otrzymamy wektor przeciwny.

Między wektorem $\overrightarrow{AB}$ a wektorem do niego przeciwnym zachodzi związek:

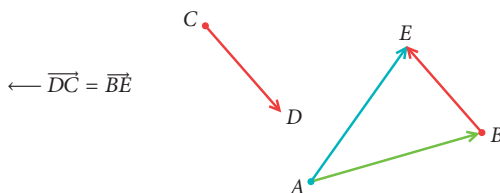
$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

Z tej własności korzystamy, definiując odejmowanie wektorów.

Definicja

Aby **od wektora $\vec{v}$ odjąć wektor $\vec{w}$** , do wektora $\vec{v}$ dodajemy wektor przeciwny do $\vec{w}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} &= \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}\end{aligned}$$



Przykład 8 ◀ zad. 13.15

Wykażemy, że dla dowolnych czterech punktów A, B, C, D prawdziwa jest równość:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

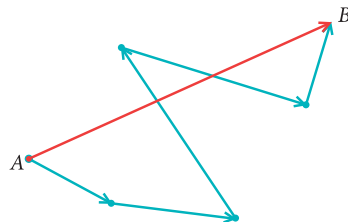
Dowód

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} = \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}\end{aligned}$$

Koniec dowodu

Zauważmy, że każdy wektor można przedstawić w postaci sumy innych wektorów na nieskończenie wiele sposobów. O takiej operacji mówimy, że **rozkładamy wektor na składowe**.

Na przykład na rysunku obok wektor $\overrightarrow{AB}$ został rozłożony na pięć składowych.



Zadania

13.1. Punkt M jest środkiem odcinka KL . Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{LM}$ B. $\overrightarrow{KM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{LK}$ C. $\overrightarrow{KM} = -\overrightarrow{LM}$

13.2. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych prostokąta $ABCD$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{BS}$ B. $|\overrightarrow{AS}| = |\overrightarrow{BS}|$ C. $|\overrightarrow{AS}| + |\overrightarrow{SB}| = |\overrightarrow{AB}|$

◀ **13.15.** Dany jest pięciokąt $ABCDE$. Wykaż, że

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}.$$

$$\begin{aligned}\text{Odp.: } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AE} &= \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \\ &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EA}) = \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}\end{aligned}$$

Odpowiedzi i rozwiązania

13.1. F, P, P

13.2. F, P, F

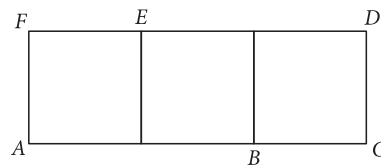
- 13.3.** a) $\overline{AB} = \overline{ED}$, $\overline{AC} = \overline{FD}$,
 $\overline{AE} = \overline{BD}$, $\overline{AF} = \overline{CD}$, $\overline{BA} = \overline{DE}$,
 $\overline{CA} = \overline{DF}$, $\overline{EA} = \overline{DB}$, $\overline{FA} = \overline{DC}$,
 $\overline{BC} = \overline{FE}$, $\overline{BD} = \overline{EA}$, $\overline{BF} = \overline{EC}$,
 $\overline{CB} = \overline{EF}$, $\overline{DB} = \overline{AE}$, $\overline{FB} = \overline{CE}$
 b) $\overline{AB}$ i $\overline{DE}$, $\overline{AC}$ i $\overline{FD}$, $\overline{AE}$ i $\overline{DB}$,
 $\overline{AF}$ i $\overline{DC}$, $\overline{BA}$ i $\overline{ED}$, $\overline{CA}$ i $\overline{FD}$,
 $\overline{EA}$ i $\overline{BD}$, $\overline{FA}$ i $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ i $\overline{EF}$,
 $\overline{BD}$ i $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ i $\overline{CE}$, $\overline{CB}$ i $\overline{FE}$,
 $\overline{DB}$ i $\overline{EA}$, $\overline{FB}$ i $\overline{EC}$

13.4. Punkt P jest środkiem odcinka AB .

- 13.5.** a) $\overline{DB}$ b) $\vec{0}$
 c) $\overline{AC}$ d) $\overline{AB}$

- 13.6.** a) $\overline{DB}$ b) $\overline{BD}$
 c) $\vec{0}$ d) $\overline{AD}$

13.3. Trzy kwadraty, z których zbudowany jest prostokąt $ACDF$, są przystające. Korzystając z oznaczeń, wskaż wszystkie pary wektorów



- a) niezerowych równych.
 b) niezerowych przeciwnych.
 c) o zgodnych zwrotach i różnych długościach.
 d) tej samej długości, ale o różnych kierunkach.

13.4. Dane są punkty A i B . Wyznacz taki punkt P , aby $\overline{PA}$ i $\overline{PB}$ były wektorami przeciwnymi.

13.5. Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami prostokąta. Wyznacz sumy i różnice wektorów.

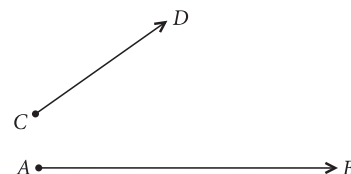
- a) $\overline{AB} - \overline{BC}$ c) $\overline{AB} + \overline{AD}$
 b) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$ d) $\overline{AC} + \overline{CD} - \overline{BD}$

13.6. Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Wyznacz sumy i różnice wektorów.

- a) $\overline{AB} + \overline{DA}$ c) $\overline{AC} + \overline{CD} - \overline{BC}$
 b) $\overline{AD} - \overline{DC}$ d) $\overline{AC} - \overline{BC} + \overline{BD}$

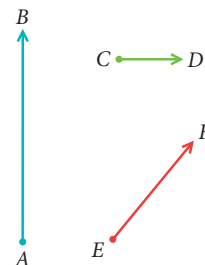
13.7. Dane są wektory $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, takie jak na rysunku. Skonstruuj wektor $\vec{v}$.

- a) $\vec{v} = \overline{AB} - \overline{CD}$ c) $\vec{v} = \overline{BA} + 2\overline{CD}$
 b) $\vec{v} = 2\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{CD}$ d) $\vec{v} = 3\overline{CD} - 2\overline{AB}$



13.8. Dane są wektory $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ i $\overline{EF}$, takie jak na rysunku. Skonstruuj wektor $\vec{v}$.

- a) $\vec{v} = \overline{AB} + \overline{CD} - \overline{EF}$
 b) $\vec{v} = \overline{CD} - 2\overline{EF} + \frac{1}{2}\overline{AB}$
 c) $\vec{v} = \overline{AB} + 3\overline{CD} - \frac{1}{2}\overline{EF}$
 d) $\vec{v} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{EF}) - 2\overline{DC}$



13.9. $\overline{AC} = \frac{4}{3}\overline{AB}$

13.10. $\vec{u} = -\frac{2}{3}(\vec{v} + \vec{w})$

13.9. Wiadomo, że $\overline{AB} = 3\overline{BC}$. Wyznacz wektor $\overline{AC}$ w zależności od wektora $\overline{AB}$.

13.10. W równoległoboku $ABCD$ punkty K i L są odpowiednio środkami boków AB i BC . Wyznacz wektor $\vec{u} = \overline{BK} + \overline{BL}$ za pomocą wektorów $\overline{DK} = \vec{v}$ i $\overline{DL} = \vec{w}$.

13.11. Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$. Przedstaw wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{FC}$ oraz $\overrightarrow{EC}$ w postaci $m \cdot \overrightarrow{AD} + p \cdot \overrightarrow{BE}$, gdzie m , p są odpowiednio dobranymi liczbami.

13.12. S jest punktem przecięcia przekątnych w sześciokącie foremnym $ABCDEF$. Przedstaw wektor $\vec{w}$ za pomocą wektora o jednym z końców w punkcie S lub wielokrotności takiego wektora.

a) $\vec{w} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EF} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BF}$

b) $\vec{w} = \overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FE})$

13.13. Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkty K i L spełniają warunki:

• $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{5} \overrightarrow{DB}$

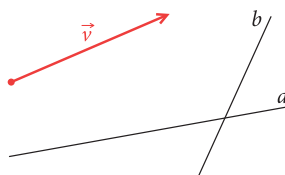
• $\overrightarrow{AL} = \frac{4}{5} \overrightarrow{AC}$

Wyznacz wektor $\overrightarrow{KL}$ za pomocą wektora $\overrightarrow{DC}$.

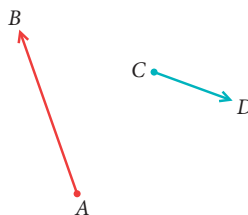
D 13.14. Dany jest trójkąt ABC . Punkty K , L , M są środkami odpowiednio boków AB , BC oraz AC . Wykaż, że $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

D 13.15. Dany jest pięciokąt $ABCDE$. Wykaż, że $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$.

13.16. Rozłóż wektor $\vec{v}$ (zob. rysunek) na dwie składowe tak, aby jedna z nich była równoległa do prostej a , a druga – do prostej b . Wykonaj odpowiedni rysunek.



13.17. Rozłóż wektor $\overrightarrow{AB}$ (zob. rysunek) na pięć składowych w taki sposób, aby jedną z nich był wektor $\overrightarrow{CD}$. Wykonaj odpowiedni rysunek.



* **13.18.** Wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mają różne kierunki. Dla jakich wartości parametrów m i k prawdziwa jest równość $(m-3)\vec{u} + (k+5)\vec{v} = \vec{0}$?

D 13.19. W równoległoboku $ABCD$ punkt K jest środkiem boku AB , zaś punkt M jest środkiem boku DC . Oceń prawdziwość podanych zdań. Uzasadnij odpowiedź.

A. $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{CB}$

B. $|\overrightarrow{KM}| = |\overrightarrow{CB}|$

C. $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KC}$

D. $|\overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{MB}|$

E. $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

F. $|\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KD}| = |\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MB}|$

13.11. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{BE}$,

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{BE}$,

$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BE}$,

$\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BE}$

13.12. a) $\frac{3}{2} \overrightarrow{AS}$ b) $\overrightarrow{AS}$

13.13. $\overrightarrow{KL} = \frac{3}{5} \overrightarrow{DC}$

13.14. $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{CM} =$
 $= \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CA} =$
 $= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

13.15. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AE} =$
 $= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} =$
 $= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EA}) =$
 $= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$

13.18. Skoro $(m-3)\vec{u} + (k+5)\vec{v} = \vec{0}$, to $(3-m)\vec{u} = (k+5)\vec{v}$. Aby taka równość zachodziła, wektory po obu stronach znaku równości muszą być zerowe, bo $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ i $\vec{u} \nparallel \vec{v}$. Zatem $3-m=0$ i $k+5=0$, stąd $m=3$, $k=-5$.

13.19. F, P, P, F, P, P

13.20. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} =$
 $= \frac{3}{2}\overrightarrow{DA} + 5\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{AE} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

13.21. Wskazówka: Zauważ, że $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u}$ oraz $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{v}$ i rozwiąż odpowiedni układ równań.

Prosto do matury

1. P, F, F

2. a) $\overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{AC}$ c) $\vec{0}$

4. $\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a}$,
 $\vec{c} = -\frac{4}{3}\vec{a}$

5. $k = m = 2$

D

13.20. W trójkącie ABC na boku AB zaznaczono taki punkt D , że $|AD|:|AB| = 2:3$, a na boku AC taki punkt E , że $|AE|:|AC| = 1:5$. Wykaż, że $\overrightarrow{BC} = 5\overrightarrow{AE} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$.

D

* **13.21.** W kwadracie $ABCD$, w którym punkt S jest środkiem boku CD , dane są wektory $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$ i $\overrightarrow{BS} = \vec{v}$. Wykaż, że $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}$ oraz $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$.

Prosto do matury



1. Punkty A, B, C są wierzchołkami trójkąta.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AC}$

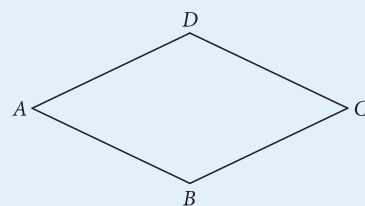
C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

2. Punkty A, B, C, D są wierzchołkami rombu, jak na rysunku. Wyznacz sumy i różnice wektorów.

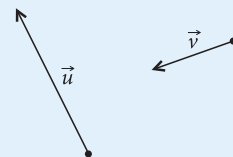
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

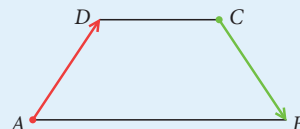


3. Mając dane wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, położone jak na rysunku, skonstruuj wektor $\vec{w} = 2\vec{u} - \frac{5}{2}\vec{v}$.



4. Dane są trzy wektory o tym samym kierunku: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, przy czym $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 4$, wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ mają zwroty zgodne, zaś wektory $\vec{a}$ i $\vec{c}$ zwroty przeciwne. Wyraż wektory $\vec{b}$ i $\vec{c}$ za pomocą wektora $\vec{a}$.

5. W trapezie równoramiennym $ABCD$, w którym $AB \parallel DC$, jak na rysunku, kąt DAB jest równy 60° oraz $|AD| = |DC|$. Wyznacz współczynniki k i m , dla których prawdziwa jest równość $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AD} + m \cdot \overrightarrow{CB}$.



14. Wektory w układzie współrzędnych

Umiejętności:

- obliczanie współrzędnych oraz długości wektora
- dodawanie i odejmowanie wektorów, mnożenie wektora przez liczbę
- sprawdzanie współliniowości punktów

Wygodnym narzędziem do opisywania wektorów na płaszczyźnie jest układ współrzędnych. Zaczniemy od opisu wektora na osi liczbowej.

Wektory na osi liczbowej

Wektor swobodny wyznaczony przez wektor zaczepiony o początku w punkcie 0 i końcu w punkcie 1 nazywamy **wektorem jednostkowym**.

Oznaczmy ten wektor $\vec{i}$.

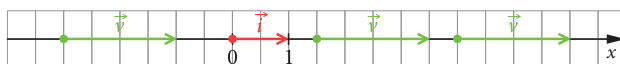
Ograniczyliśmy nasze rozważania do jednej prostej, zatem, mówiąc obrazowo, wektor jednostkowy może się dowolnie przesuwać tylko na tej prostej.

Przykład 1

Narysujemy na osi kilka wektorów postaci $k \cdot \vec{i}$ ($k \neq 0$).

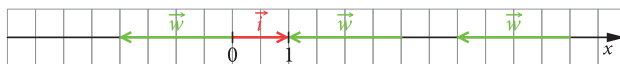
a) $k = 2$

$$\vec{v} = 2 \cdot \vec{i}$$



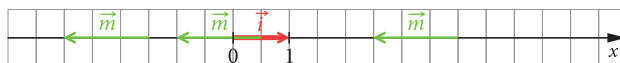
b) $k = -2$

$$\vec{w} = -2 \cdot \vec{i}$$



c) $k = -\frac{3}{2}$

$$\vec{m} = -\frac{3}{2} \cdot \vec{i}$$



Zgodnie z definicją mnożenia wektora przez liczbę każdy wektor równy wektorowi $k \cdot \vec{i}$ ($k \neq 0$) ma ten sam kierunek, długość równą $|k|$ oraz dla $k < 0$ zwrot przeciwny, a dla $k > 0$ zwrot zgodny ze zwrotem wektora jednostkowego osi. Wektor $0 \cdot \vec{i}$ jest wektorem zerowym.

Definicja

Liczbę k nazywamy **współrzedną wektora** $\vec{w} = k \cdot \vec{i}$ na osi. Zapis $\vec{w} = [k]$ odczytujemy: wektor $\vec{w}$ ma na osi współrzedną k .

ZZ i MKP

tematy 4.9, 4.10

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 3.14

Generator
testów i sprawdzianów

Zatem dla wektorów z przykładu 1 mamy:

$$\vec{v} = [2], \quad \vec{w} = [-2], \quad \vec{m} = \left[-\frac{3}{2}\right]$$

Wniosek

Dwa wektory na osi liczbowej są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe współrzędne.

Oznaczmy początek osi liczbowej literą O .

Każdemu punktowi na osi liczbowej odpowiada dokładnie jedna współrzędna. Zauważmy, że współrzędna dowolnego punktu A na osi jest równa współrzędnej wektora $\overrightarrow{OA}$.

Niech $A = (x_A)$. Wówczas $\overrightarrow{OA} = x_A \cdot \vec{i}$, czyli $\overrightarrow{OA} = [x_A]$.



Mając dane współrzędne punktów A i B , można wyznaczyć współrzędną wektora $\overrightarrow{AB}$.

Niech $A = (x_A)$, $B = (x_B)$. Wówczas:

$$\overrightarrow{OA} = x_A \cdot \vec{i}, \quad \overrightarrow{OB} = x_B \cdot \vec{i} \quad \text{oraz} \quad \overrightarrow{AB} = k \cdot \vec{i}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

← definicja dodawania wektorów

$$x_A \cdot \vec{i} + k \cdot \vec{i} = x_B \cdot \vec{i}$$

$$k \cdot \vec{i} = x_B \cdot \vec{i} - x_A \cdot \vec{i}$$

$$k \cdot \vec{i} = (x_B - x_A) \cdot \vec{i}$$

$$k = x_B - x_A$$



Wniosek

Jeżeli $A = (x_A)$ oraz $B = (x_B)$, to $\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A]$.

Zatem aby obliczyć współrzędną wektora na osi, od współrzędnej końca tego wektora odejmujemy współrzędną jego początku.

Przykład 2

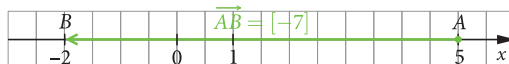
Wyznamy współrzędną i długość wektora $\overrightarrow{AB}$.

Rozwiązanie

a) $A = (5), B = (-2)$

$$\overrightarrow{AB} = [-2 - 5] = [-7]$$

$$|\overrightarrow{AB}| = 7$$



b) $A = (\sqrt{5}), B = (1)$

$$\overrightarrow{AB} = [1 - \sqrt{5}]$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |1 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 1$$

**Twierdzenie**

Jeżeli $\vec{v} = [a]$, $\vec{p} = [b]$ i $k \in \mathbb{R}$, to:

- wektor $\vec{w} = \vec{v} + \vec{p}$ ma współrzędną równą sumie współrzędnych, czyli $\vec{w} = [a + b]$,
- wektor $\vec{w} = \vec{v} - \vec{p}$ ma współrzędną równą różnicy współrzędnych, czyli $\vec{w} = [a - b]$,
- wektor $\vec{w} = k \cdot \vec{v}$ ma współrzędną równą iloczynowi liczby k i współrzędnej wektora $\vec{v}$, czyli $\vec{w} = [ka]$.

Dowód tego twierdzenia zostawiamy jako ćwiczenie do samodzielnego wykonania.

Przykład 3

Dane są punkty $A = (3)$, $B = (-7)$, $C = (5)$. Wyznamy taki punkt $D = (x)$, aby zachodziła podana równość.

Rozwiązanie

a) $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AD} = [x - 3], \overrightarrow{BC} = [12]$$

$$[x - 3] = 3 \cdot [12]$$

$$x - 3 = 36$$

$$x = 39$$

Odp.: $D = (39)$

b) $-2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} = 5\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AD} = [x - 3], \overrightarrow{BD} = [x + 7], \overrightarrow{AC} = [2]$$

$$-2 \cdot [x - 3] + [x + 7] = 5 \cdot [2]$$

$$-2x + 6 + x + 7 = 10$$

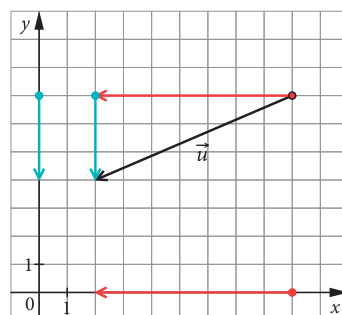
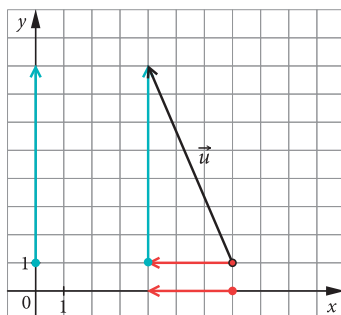
$$x = 3$$

Odp.: $D = (3)$

Wektory w układzie współrzędnych

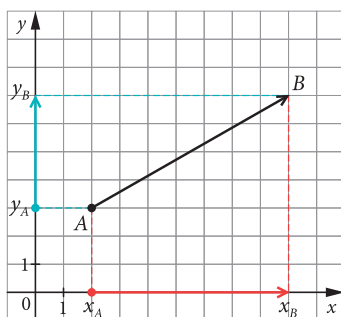
Jeżeli na płaszczyźnie dane są dwie przecinające się proste, to rozkład niezerowego wektora na dwie składowe równoległe odpowiednio do tych prostych jest (z dokładnością do wektorów równych) jednoznaczny. Wprowadzimy na płaszczyźnie układ współrzędnych i skorzystamy z tej własności.

Przyjrzyjmy się przykładom rozkładu niezerowego wektora $\vec{u}$ na dwie składowe równoległe do osi układu współrzędnych. Aby zwiększyć czytelność rysunku, wektor $\vec{u}$ został umieszczony w pierwszej ćwiartce układu.



Na rysunkach czerwonym kolorem zaznaczone są składowe równoległe do osi x , niebieskim – składowe równoległe do osi y . Każda z nich ma na odpowiedniej osi swoją współrzędną.

Jeżeli wektor $\vec{u}$ jest równoległy do jednej z osi układu współrzędnych, to jego składowa równoległa do drugiej osi jest wektorem zerowym.



← na osi x współrzędną składowej jest liczba $x_B - x_A$

← na osi y współrzędną składowej jest liczba $y_B - y_A$

Definicja

Współzrzednymi wektora $\overrightarrow{AB}$ o początku w punkcie $A = (x_A, y_A)$ i o końcu w punkcie $B = (x_B, y_B)$ nazywamy uporządkowaną parę liczb:

$$[x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Wektor zerowy ma obydwie współrzędne równe 0 i oznaczamy go $\vec{0} = [0, 0]$.

Jeżeli np. $A = (-7, 2)$, $B = (-4, \sqrt{2})$, to $\overrightarrow{AB} = [3, \sqrt{2} - 2]$, $\overrightarrow{BA} = [-3, 2 - \sqrt{2}]$.

Przykład 4 ◀ zad. 14.2

Wektor $\overrightarrow{AB} = [-3, 5]$ jest zaczepiony w punkcie $A = (0, -2)$. Wyznamy współrzędne końca wektora, czyli punktu B .

Rozwiązanie

Jeżeli oznaczymy $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, to prawdziwe są dwie równości:

$$\begin{cases} x_B - x_A = -3 \\ y_B - y_A = 5 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} x_B - 0 = -3 \\ y_B - (-2) = 5 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} x_B = -3 \\ y_B = 3 \end{cases}$$

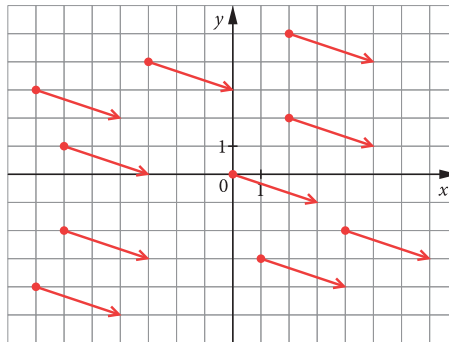
Odp.: $B = (-3, 3)$

Przypomnijmy – płaszczyznę, na której wprowadzony został prostokątny układ współrzędnych, nazywamy **płaszczyzną kartezjańską**. Na płaszczyźnie kartezjańskiej każdemu punktowi przyporządkowana jest dokładnie jedna uporządkowana para liczb, nazywanych współrzędnymi tego punktu. Podobnie – każdemu wektorowi przyporządkowana jest dokładnie jedna uporządkowana para liczb, nazywanych współrzędnymi tego wektora.

Przykład 5

Na rysunku prezentujemy kilka wektorów, które mają współrzędne $[3, -1]$.

Wszystkie te wektory mają ten sam kierunek (są równoległe), zgodne zwroty i równe długości, czyli są równe.

**Wniosek**

Dwa wektory na płaszczyźnie kartezjańskiej są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe współrzędne.

Korzystając z własności wektorów, możemy wyznaczać współrzędne punktów dzielących odcinek w różnych stosunkach. Na przykład aby wyznaczyć punkty M i N dzielące dany odcinek AB na trzy równe części, możemy najpierw wykorzystać zależność $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$, a następnie skorzystać z faktu, że punkt N jest środkiem odcinka MB .

◀14.2. Dane są współrzędne punktu M oraz współrzędne wektora $\overrightarrow{MP}$. Wyznacz współrzędne punktu P .

- a) $M = (6, 3)$, $\overrightarrow{MP} = [-3, -2]$
- b) $M = (-2, -3)$, $\overrightarrow{MP} = [4, 2]$
- c) $M = (2, 1)$, $\overrightarrow{MP} = [-4, -3]$
- d) $M = (1, 2)$, $\overrightarrow{MP} = \left[-\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}\right]$

Odp.: a) $P = (3, 1)$

b) $P = (2, -1)$

c) $P = (-2, -2)$

d) $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Wzory na współrzędne środka odcinka warto znać na pamięć, bo często się z nich korzysta.

Twierdzenie

Środek odcinka o końcach $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ ma współrzędne:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

Dowód twierdzenia pozostawiamy do samodzielnego przeprowadzenia.

◀14.5. Wyznacz środek odcinka PQ .

- a) $P = (3, -2)$, $Q = (-5, 6)$
 b) $P = (-3, 7)$, $Q = (3, -1)$
 c) $P = \left(2\frac{1}{2}, -3\right)$, $Q = \left(5\frac{1}{2}, 9\right)$
 d) $P = \left(-1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $Q = \left(3\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}\right)$
 Odp.: a) $S = (-1, 2)$ b) $S = (0, 3)$
 c) $S = (4, 3)$ d) $S = (1, 4)$

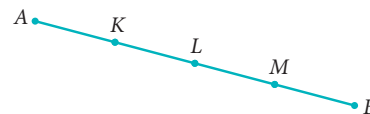
◀14.7. Punkty $A = (3, -5)$ i $B = (-7, 11)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, zaś punkt $S = (-5, 0)$ jest środkiem boku CD . Wyznacz współrzędne wierzchołków C i D .

Odp.: $C = (-10, 8)$, $D = (0, -8)$

Przykład 6 ◀ zad. 14.5

Dane są punkty $A = (1, 2)$, $B = (13, -26)$.

Wyznamy współrzędne punktów K , L , M , które dzielą odcinek AB na cztery równe części.



Rozwiązanie

Współrzędne środka odcinka są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych końców tego odcinka.

$$L = \left(\frac{1+13}{2}, \frac{2-26}{2} \right) = (7, -12) \quad \leftarrow L \text{ jest środkiem odcinka } AB$$

$$K = \left(\frac{1+7}{2}, \frac{2-12}{2} \right) = (4, -5) \quad \leftarrow K \text{ jest środkiem odcinka } AL$$

$$M = \left(\frac{7+13}{2}, \frac{-12-26}{2} \right) = (10, -19) \quad \leftarrow M \text{ jest środkiem odcinka } LB$$

Odp.: $K = (4, -5)$, $L = (7, -12)$, $M = (10, -19)$

Przykład 7 ◀ zad. 14.7

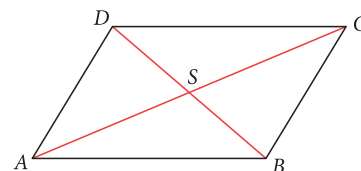
Punkty $A = (1, 13)$ i $B = (-6, 0)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, a punkt $S = (5, -2)$ jest punktem przecięcia jego przekątnych. Wyznamy współrzędne wierzchołków C i D tego równoległoboku.

Rozwiązanie

Niech $C = (x_C, y_C)$. Ponieważ punkt S jest środkiem odcinka AC , więc:

$$\begin{cases} \left(\frac{1+x_C}{2}, \frac{13+y_C}{2} \right) = (5, -2) \\ \frac{1+x_C}{2} = 5 \\ \frac{13+y_C}{2} = -2 \end{cases}, \text{ stąd } x_C = 9 \text{ i } y_C = -17$$

Zatem $C = (9, -17)$.



Niech $D = (x_D, y_D)$. Wówczas $\overrightarrow{DC} = [9 - x_D, -17 - y_D]$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad \leftarrow ABCD \text{ jest równoległobokiem}$$

$$[-7, -13] = [9 - x_D, -17 - y_D] \quad \leftarrow \overrightarrow{AB} = [-7, -13]$$

$$\begin{cases} -7 = 9 - x_D \\ -13 = -17 - y_D \end{cases}$$

$$x_D = 16 \text{ i } y_D = -4$$

Zatem $D = (16, -4)$.

Odp.: $C = (9, -17)$, $D = (16, -4)$

Bezpośrednio z definicji mnożenia wektora przez liczbę wynika, że dwa niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $k \neq 0$ spełniająca równość:

$$\vec{u} = k \cdot \vec{w}$$

Na przykład:

- wektor $\vec{v} = [-2, 9]$ jest równoległy do wektora $\vec{w} = [6, -27]$,
ponieważ $\frac{6}{-2} = \frac{-27}{9} = -3$, czyli $\vec{w} = -3 \cdot \vec{v}$,
- wektor $\vec{u} = [8, 5]$ nie jest równoległy do wektora $\vec{w} = [6, -27]$,
ponieważ $\frac{6}{8} \neq \frac{-27}{5}$.

Korzystając z tej własności, możemy badać współliniowość punktów danych w układzie współrzędnych.

Przykład 8 ◀ zad. 14.10

Zbadamy, czy punkty $A = (-2, 1)$, $B = (3, 3)$ oraz $C = (33, 15)$ są współliniowe.

Rozwiązanie

Zauważmy, że aby odpowiedzieć na postawione pytanie, wystarczy sprawdzić, czy wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ są równoległe.

$$\overrightarrow{AB} = [5, 2], \quad \overrightarrow{AC} = [35, 14]$$

Zatem:

$$\overrightarrow{AC} = 7 \cdot \overrightarrow{AB}$$

Odp.: Punkty A, B, C są współliniowe.

Aby zbadać współliniowość punktów A, B, C , możemy sprawdzać, czy różne pary wektorów są równoległe, np.: pary $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ albo pary $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$ itd.

◀ 14.10. Punkty K, L, M są współliniowe. Wyznacz niewiadomą współrzędną.
a) $K = (2, 1)$, $L = (-2, 6)$, $M = (x, -9)$
b) $K = (18, y)$, $L = (10, 2)$, $M = (-2, 8)$
Odp.: a) $x = 10$ b) $y = -2$

Wykorzystanie rozkładu wektora na dwie składowe równoległe do osi układu współrzędnych, przedstawienie wektora w postaci współrzędnych oraz zastosowanie twierdzenia o działaniach na wektorach na osi (zob. s. 305) prowadzi do następującego twierdzenia.

Twierdzenie

Dane są wektory $\vec{u} = [a, b]$ i $\vec{v} = [c, d]$. Wówczas:

- $\vec{u} + \vec{v} = [a + c, b + d]$
- $\vec{u} - \vec{v} = [a - c, b - d]$
- $k \cdot \vec{u} = [k \cdot a, k \cdot b]$

Przykład 9

Dane są punkty $O = (0, 0)$, $A = (4, 3)$, $B = (-2, 5)$. Skorzystamy z powyższego twierdzenia i zbadamy zależność między wektorem $\vec{OB}$ a wektorami $\vec{OA}$ i $\vec{AB}$.

Rozwiązanie

$$\vec{OA} = [4 - 0, 3 - 0] = [4, 3]$$

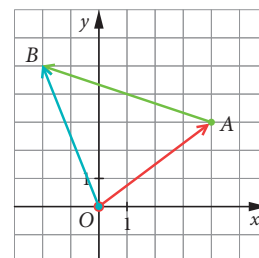
$$\vec{AB} = [-2 - 4, 5 - 3] = [-6, 2]$$

$$\vec{OB} = [-2 - 0, 5 - 0] = [-2, 5]$$

Wektor $\vec{OB}$ jest sumą wektorów $\vec{OA}$ i $\vec{AB}$.

Można to zapisać następująco:

$$\vec{OA} + \vec{AB} = [4, 3] + [-6, 2] = [-2, 5] = \vec{OB}$$



Przykład 10

Na rysunku zaznaczyliśmy wektory $\vec{v} = [-4, 6]$, $\vec{u} = [-2, 3]$, $\vec{w} = [8, -12]$. Zbadamy zależności między tymi wektorami.

Rozwiązanie

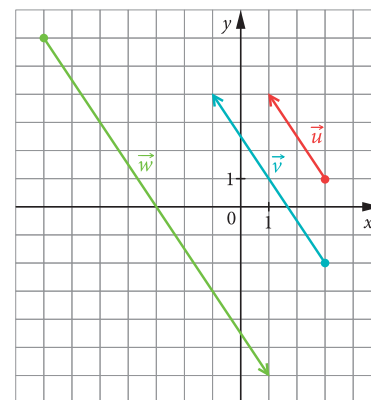
Z rysunku odczytujemy, że zachodzą równości:

$$\vec{u} = \frac{1}{2} \vec{v} \text{ oraz } \vec{w} = -2\vec{v}$$

Te same równości uzyskamy, porównując współrzędne wektorów:

$$\vec{u} = [-2, 3] = \frac{1}{2} [-4, 6] = \frac{1}{2} \vec{v}$$

$$\vec{w} = [8, -12] = -2[-4, 6] = -2\vec{v}$$



Przykład 11

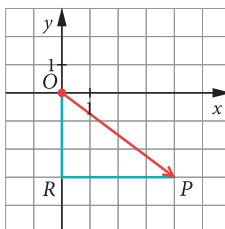
Obliczmy długość wektora $\vec{u} = [4, -3]$.

Rozwiązanie

Jeżeli zaczepimy wektor $\vec{u} = [4, -3]$ w punkcie $O = (0, 0)$, to jego końcem będzie punkt $P = (4, -3)$.

Rozważmy trójkąt prostokątny OPR . Przyprostokątne tego trójkąta mają długości $|OR| = |-3| = 3$ i $|RP| = 4$. Zatem na mocy twierdzenia Pitagorasa:

$$|OP|^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25, \text{ czyli } |\vec{OP}| = 5$$



Odp.: $|\vec{u}| = 5$

Wniosek

Jeżeli $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, to **długość wektora** $\vec{AB}$ jest równa:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Przykład 12 zad. 14.20

Punkty $A = (1, 3)$, $B = (-1, -2)$, $D = (4, 4)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wyznamy współrzędne wierzchołka C oraz długości przekątnych tego równoległoboku.

Rozwiązanie

Punkt $C = (x, y)$ jest wierzchołkiem równoległoboku $ABCD$ tylko wtedy, gdy $\vec{AB} = \vec{DC}$.

$$\vec{AB} = [-2, -5], \quad \vec{DC} = [x - 4, y - 4]$$

$$\begin{cases} x - 4 = -2 \\ y - 4 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Zatem $C = (2, -1)$.

Długości przekątnych równoległoboku $ABCD$ są długościami wektorów $\vec{AC}$ i $\vec{BD}$.

$$\vec{AC} = [1, -4], \text{ stąd } |AC| = |\vec{AC}| = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

$$\vec{BD} = [5, 6], \text{ stąd } |BD| = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$$

Odp.: $C = (2, -1)$, $|AC| = \sqrt{17}$, $|BD| = \sqrt{61}$

◀14.20. W równoległoboku $ABCD$ dany jest punkt $A = (2, 2)$ oraz współrzędne wektorów $\vec{AB} = [8, 1]$ i $\vec{AC} = [4, 5]$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków.

Odp.: $B = (10, 3)$, $C = (6, 7)$,
 $D = (-2, 6)$

Zadania

Odpowiedzi i rozwiązania

14.1. a) $\overrightarrow{AB} = [3, 2]$

b) $\overrightarrow{AB} = [4, 1]$

c) $\overrightarrow{AB} = [-2, 0]$

d) $\overrightarrow{AB} = [0, 4]$

14.2. a) $P = (3, 1)$

b) $P = (2, -1)$

c) $P = (-2, -2)$

d) $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

14.3. a) $K = (2, -4)$

b) $K = (2, 2)$

c) $K = (3, -2)$

d) $K = (5, -5)$

14.4. a) $[5, 0]$

b) $[0, 1]$

c) $[-3, 0]$

d) $\left[0, -2\frac{1}{2}\right]$

14.5. a) $S = (-1, 2)$

b) $S = (0, 3)$

c) $S = (4, 3)$

d) $S = (1, 4)$

14.6. a) $B = (4, 8)$

b) $B = (-1, 5)$

c) $B = \left(6, \frac{2}{3}\right)$

d) $B = \left(4\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$

14.7. $C = (-10, 8)$, $D = (0, -8)$

14.1. Dane są punkty A i B . Wyznacz współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$.

a) $A = (1, 3)$

$B = (4, 5)$

c) $A = (-1, 5)$

$B = (-3, 5)$

b) $A = (-5, -2)$

$B = (-1, -1)$

d) $A = (6, -3)$

$B = (6, 1)$

14.2. Dane są współrzędne punktu M oraz współrzędne wektora $\overrightarrow{MP}$. Wyznacz współrzędne punktu P .

a) $M = (6, 3)$

$\overrightarrow{MP} = [-3, -2]$

c) $M = (2, 1)$

$\overrightarrow{MP} = [-4, -3]$

b) $M = (-2, -3)$

$\overrightarrow{MP} = [4, 2]$

d) $M = (1, 2)$

$\overrightarrow{MP} = \left[-\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}\right]$

14.3. Dane są współrzędne wektora $\overrightarrow{KL}$ oraz współrzędne punktu L . Wyznacz współrzędne punktu K .

a) $\overrightarrow{KL} = [3, 5]$

$L = (5, 1)$

c) $\overrightarrow{KL} = [-2, 3]$

$L = (1, 1)$

b) $\overrightarrow{KL} = [5, 0]$

$L = (7, 2)$

d) $\overrightarrow{KL} = [0, 3]$

$L = (5, -2)$

14.4. Podaj współrzędne wektora

a) równoległego do osi x , o zwrocie zgodnym z osią x i o długości 5.b) równoległego do osi y , o zwrocie zgodnym z osią y i o długości 1.c) równoległego do osi x , o zwrocie przeciwnym do zwrotu osi x i o długości 3.d) równoległego do osi y , o zwrocie przeciwnym do zwrotu osi y i o długości $2\frac{1}{2}$.14.5. Wyznacz środek odcinka PQ .

a) $P = (3, -2)$

$Q = (-5, 6)$

c) $P = \left(2\frac{1}{2}, -3\right)$

$Q = \left(5\frac{1}{2}, 9\right)$

b) $P = (-3, 7)$

$Q = (3, -1)$

d) $P = \left(-1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$Q = \left(3\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}\right)$

14.6. Punkt S jest środkiem odcinka AB . Znajdź współrzędne punktów A i S , wyznacz współrzędne punktu B .

a) $A = (-3, 1)$

$S = \left(\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\right)$

c) $A = \left(0, 5\frac{1}{3}\right)$

$S = (3, 3)$

b) $A = (2, 4)$

$S = \left(\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\right)$

d) $A = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}\right)$

$S = (2, 0)$

14.7. Punkty $A = (3, -5)$ i $B = (-7, 11)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, zaś punkt $S = (-5, 0)$ jest środkiem boku CD . Wyznacz współrzędne wierzchołków C i D .

14.8. Punktem przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$ jest $P = (-1, -1)$. Wyznacz współrzędne wierzchołków B, C i D , wiedząc, że $\overrightarrow{BC} = [2, 6]$ oraz $A = (-4, -4)$.

14.9. Zbadaj współliniowość punktów A, B, C .

- a) $A = (0, 0)$ $B = (-3, 2)$ $C = (9, -6)$
 b) $A = (-4, 5)$ $B = (0, -3)$ $C = (2, -8)$
 c) $A = (6, 1)$ $B = (-3, -1)$ $C = (-11, -2)$

14.10. Punkty K, L, M są współliniowe. Wyznacz niewiadomą współrzędną.

- a) $K = (2, 1)$ $L = (-2, 6)$ $M = (x, -9)$
 b) $K = (18, y)$ $L = (10, 2)$ $M = (-2, 8)$

14.11. Dane są punkty $A = (-3, 2)$, $B = (1, 4)$, $C = (-1, -1)$. Wyznacz współrzędne podanego wektora.

- a) $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
 b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ d) $2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC})$

14.12. Dane są punkty $A = (-4, -2)$, $B = (-2, -2)$, $C = (2, 2)$. Wyznacz współrzędne takiego punktu D , aby spełniona była podana równość.

- a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$ c) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
 b) $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ d) $2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

14.13. Dany jest wektor $\vec{a} = [-3, 2]$. Wyznacz taką liczbę k (o ile ona istnieje), aby zachodziła równość $\vec{b} = k\vec{a}$.

- a) $\vec{b} = [-9, 6]$ b) $\vec{b} = \left[\frac{3}{2}, -1\right]$ c) $\vec{b} = [3, 2]$ d) $\vec{b} = \left[-\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

14.14. Dane są wektory: $\vec{a} = [1, -2]$, $\vec{b} = [-3, 5]$. Wyznacz taki wektor $\vec{c}$, aby zachodziła podana równość.

- a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ b) $2\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ c) $-5\vec{a} + 3\vec{b} = 2\vec{c}$ d) $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c} = -2\vec{b}$

14.15. Oblicz długość wektora $\overrightarrow{AB}$.

- a) $A = (2, -5)$ $B = (-2, -2)$ c) $A = (-4, 1)$ $B = (2, -2)$
 b) $A = (3, 3)$ $B = (7, 0)$ d) $A = (2\sqrt{5}, \sqrt{2} + 1)$ $B = (\sqrt{5}, 1 + 3\sqrt{2})$

14.16. Dane są punkty: $A = (-3, 2)$, $B = (1, 4)$, $C = (-1, -1)$. Oblicz współrzędne i długości podanych wektorów.

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ b) $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}$ c) $\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ d) $\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{AC}$

14.8. $B = (0, -4)$, $C = (2, 2)$,
 $D = (-2, 2)$

14.9. a) współliniowe
 b) niewspółliniowe
 c) niewspółliniowe

14.10. a) $x = 10$ b) $y = -2$

14.11. a) $[2, -11]$ b) $[6, -5]$
 c) $[-6, -3]$ d) $\left[5, \frac{1}{2}\right]$

14.12. a) $D = (-2, -2)$
 b) $D = (-2, 0)$
 c) $D = (-5, -2)$
 d) $D = \left(0, -\frac{2}{5}\right)$

14.13. a) $k = 3$
 b) $k = -\frac{1}{2}$
 c) Nie ma takiego k .
 d) $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$

14.14. a) $\vec{c} = [-2, 3]$
 b) $\vec{c} = [5, -9]$
 c) $\vec{c} = \left[-7, 12\frac{1}{2}\right]$
 d) $\vec{c} = \left[-5\frac{1}{2}, 9\right]$

14.15. a) $|\overrightarrow{AB}| = 5$ b) $|\overrightarrow{AB}| = 5$
 c) $|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{5}$ d) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13}$

14.16. a) $[2, -3]$, $\sqrt{13}$
 b) $[10, 1]$, $\sqrt{101}$
 c) $[-6, -3]$, $3\sqrt{5}$
 d) $[-8, 4]$, $4\sqrt{5}$

14.17. $2\sqrt{10}$ **14.18.**

$$|\overline{KL}| = \sqrt{(7-6)^2 + (6-19)^2} =$$

$$= \sqrt{170},$$

$$|\overline{LM}| = \sqrt{(17-7)^2 + (12-6)^2} =$$

$$= \sqrt{136},$$

$$|\overline{MK}| = \sqrt{(6-17)^2 + (19-12)^2} =$$

$$= \sqrt{170}.$$

Zatem $|\overline{KL}| = |\overline{MK}|$, czyli trójkąt jest równoramienny.

$$\mathbf{14.19.} \quad \overline{AB} = [6-4, 5-1] = [2, 4],$$

$$\overline{BC} = [-2-6, 2-5] = [-8, -3],$$

$$\overline{DC} = [-2+4, 2+2] = [2, 4],$$

$$\overline{AD} = [-4-4, -2-1] = [-8, -3].$$

Zatem $\overline{AB} = \overline{DC}$ oraz $\overline{BC} = \overline{AD}$, skąd wynika, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

$$\mathbf{14.20.} \quad B = (10, 3), \quad C = (6, 7),$$

$$D = (-2, 6)$$

$$\mathbf{14.21.} \quad \overline{AB} = [4, 2] = \overline{DC},$$

zatem czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem. Ponadto $|\overline{AB}| = \sqrt{20}$ i $|\overline{BC}| = \sqrt{45}$, czyli $|\overline{AB}| \neq |\overline{BC}|$, więc czworokąt $ABCD$ nie jest rombem.

14.22. Wskazówka: Wykaż, że $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{CD}| = |\overline{DA}|$ oraz $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$ (romb o równych przekątnych jest kwadratem).

$$\mathbf{14.23.} \quad 5\sqrt{3}$$

14.17. Dane są wektory $\vec{v} = [1, -3]$, $\vec{u} = [2, -1]$, $\vec{w} = [-4, 2]$. Oblicz długość wektora $\vec{m} = 2\vec{v} - \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{w}$.

14.18. Wykaż, że trójkąt KLM o wierzchołkach $K = (6, 19)$, $L = (7, 6)$, $M = (17, 12)$ jest równoramienny.

14.19. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (4, 1)$, $B = (6, 5)$, $C = (-2, 2)$, $D = (-4, -2)$ jest równoległobokiem.

14.20. W równoległoboku $ABCD$ dany jest punkt $A = (2, 2)$ oraz współrzędne wektorów $\overline{AB} = [8, 1]$ i $\overline{AC} = [4, 5]$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków.

14.21. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-5, 2)$, $B = (-1, 4)$, $C = (2, 10)$, $D = (-2, 8)$ jest równoległobokiem, ale nie jest rombem.

* **14.22.** Wykaż, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (6, -1)$, $B = (1, 5)$, $C = (-5, 0)$, $D = (0, -6)$ jest kwadratem.

14.23. Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $A = (-2, 1)$, $B = (2, 3)$, $C = (\sqrt{3}, 2 - 2\sqrt{3})$ jest równoboczny i oblicz jego pole.

Prosto do matury



1. Dane są punkty $A = (-5, 1)$ i $B = (3, -2)$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $\overline{AB} = [8, -3]$

B. $\overline{AB} = [-8, 3]$

C. $|\overline{AB}| = \sqrt{73}$

2. Dane są współrzędne wektora $\overline{PQ} = [\sqrt{3}, -2\sqrt{2}]$ oraz współrzędne punktu $Q = (-3\sqrt{3}, 5\sqrt{2})$. Wyznacz współrzędne punktu P .

3. Zbadaj, czy punkt $Q = \left(\frac{2}{3}, -\frac{11}{3}\right)$ należy do prostej przechodzącej przez punkty $K = (-2, -1)$ i $L = (3, -13)$.

4. Punkty $A = (-5, 2)$, $B = (2, -2)$ i $D = (-4, 10)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C i oblicz pole tego rombu.

5. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-10, -3)$, $B = (8, 3)$, $C = (4, 15)$, $D = (-14, 9)$ jest prostokątem.

Prosto do matury

1. P, F, P

2. $P = (-4\sqrt{3}, 7\sqrt{2})$

3. nie

4. $C = (3, 6)$, 60

5. $\overline{AB} = [8+10, 3+3] = [18, 6]$, $\overline{DC} = [4+14, 15-9] = [18, 6]$, czyli $\overline{AB} = \overline{DC}$, więc czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem. Ponadto $|\overline{AC}| = \sqrt{520} = |\overline{BD}|$, czyli przekątne są równe. Zatem czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem o równych przekątnych, czyli jest prostokątem.

15. Przekształcanie wykresów funkcji

Umiejętności:

- przesunięcie wykresu funkcji o wektor
- składanie symetrii i przesunięć wykresów funkcji

Wykorzystamy teraz pojęcie wektora do zdefiniowania pewnej funkcji, której dziedziną jest zbiór wszystkich punktów płaszczyzny.

Definicja

Przesunięciem równoległym o wektor $\vec{u}$ nazywamy przekształcenie, w którym obrazem punktu A jest taki punkt B , że $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Przykład 1 ◀ zad. 15.4

Punkt $B = (4, \sqrt{3})$ jest obrazem punktu A w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u} = [-1, 7]$. Wyznamy współrzędne punktu A .

Rozwiązanie

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, jeśli więc oznaczymy $A = (x, y)$, to $\overrightarrow{AB} = [4 - x, \sqrt{3} - y]$ i spełniony ma być układ równań:

$$\begin{cases} 4 - x = -1 \\ \sqrt{3} - y = 7 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} x = 5 \\ y = \sqrt{3} - 7 \end{cases}$$

Odp.: $A = (5, \sqrt{3} - 7)$

Przesunięcie punktu płaszczyzny o wektor $[a, 0]$ jest przesunięciem tego punktu:

- o a jednostek w prawo wzdłuż osi x , gdy $a > 0$,
- o $-a$ jednostek w lewo wzdłuż osi x , gdy $a < 0$.

Gdy przesuniemy wykres funkcji $y = f(x)$ o wektor $[a, 0]$, otrzymamy zatem wykres funkcji $y = f(x - a)$.

Przesunięcie punktu płaszczyzny o wektor $[0, b]$ jest przesunięciem tego punktu:

- o b jednostek w górę wzdłuż osi y , gdy $b > 0$,
- o $-b$ jednostek w dół wzdłuż osi y , gdy $b < 0$.

Gdy przesuniemy wykres funkcji $y = f(x)$ o wektor $[0, b]$, otrzymamy wykres funkcji $y = f(x) + b$.

◀ 15.4. Wyznamy współrzędne punktu M , który jest obrazem punktu P w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u}$.

- a) $\vec{u} = [3, 1]$, $P = (-1, -2)$
 b) $\vec{u} = [-2, \sqrt{5}]$, $P = (4, 0)$
 c) $\vec{u} = [1, -7]$, $P = (-1, 2)$
 d) $\vec{u} = [-\sqrt{2}, -\sqrt{3}]$, $P = (\sqrt{2}, -9)$

Odp.: a) $M = (2, -1)$

b) $M = (2, \sqrt{5})$

c) $M = (0, -5)$

d) $M = (0, -9 - \sqrt{3})$

ZZ i MKP

tematy 4.7–4.12

Multiteka

- Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi OY
- Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi OX
- Przekształcanie wykresu funkcji przez symetrię względem osi OX
- Przekształcanie wykresu funkcji przez symetrię względem osi OY
- Przekształcanie wykresów funkcji z wartością bezwzględną

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.15

Wniosek

Jeśli przesuniemy wykres funkcji $y = f(x)$ o wektor $[a, b]$, otrzymamy wykres funkcji $y = f(x - a) + b$.

◀15.10. Przekształcając odpowiednio wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ lub $f(x) = \frac{a}{x}$, narysuj wykres funkcji $y = g(x)$ i wyznacz jej dziedzinę.

a) $g(x) = \sqrt{x-2} - 1$

b) $g(x) = \sqrt{x+3} + 2$

c) $g(x) = \frac{1}{x-2} + 1$

d) $g(x) = \frac{4}{x+3} + 2$

Odp.: a) $D = \langle 2; \infty \rangle$

b) $D = \langle -3; \infty \rangle$ c) $D = \mathbb{R} - \{2\}$

d) $D = \mathbb{R} - \{-3\}$

◀15.11. Przekształcając odpowiednio wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ lub $f(x) = \frac{a}{x}$, narysuj wykres funkcji $y = g(x)$ i wyznacz jej dziedzinę.

a) $g(x) = -\sqrt{x+5} - 4$

b) $g(x) = 3 - \sqrt{x-2}$

c) $g(x) = -\frac{8}{x+4} - 5$

d) $g(x) = 2 - \frac{6}{x-1}$

Odp.: a) $D = \langle -5; \infty \rangle$

b) $D = \langle 2; \infty \rangle$ c) $D = \mathbb{R} - \{-4\}$

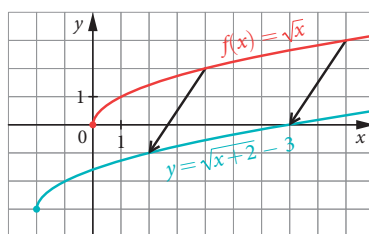
d) $D = \mathbb{R} - \{1\}$

Przykład 2 ◀ zad. 15.10

Narysujemy wykres funkcji $y = \sqrt{x+2} - 3$.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że jeżeli wprowadzimy funkcję pomocniczą $f(x) = \sqrt{x}$, to funkcję $y = \sqrt{x+2} - 3$ możemy zapisać w postaci $y = f(x+2) - 3$.



← wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ przesuwamy o wektor $[-2, -3]$

Przykład 3 ◀ zad. 15.11

Przekształcimy odpowiednio wykres funkcji $f(x) = \frac{3}{x}$ i narysujemy wykres funkcji $g(x) = 4 - \frac{3}{x+2}$.

Rozwiązanie

Dziedziną funkcji g jest przedział $\mathbb{R} - \{-2\}$. Rysujemy kolejne wykresy.

Krok 1: wykres funkcji $f(x) = \frac{3}{x}$

Krok 2: wykres funkcji

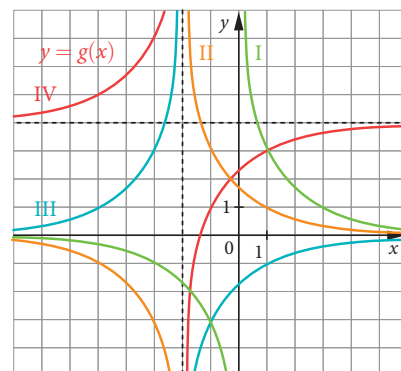
$$y = \frac{3}{x+2} \quad \leftarrow \text{przesunięcie o wektor } [-2, 0]$$

Krok 3: wykres funkcji

$$y = -\frac{3}{x+2} \quad \leftarrow \text{symetria względem osi } x$$

Krok 4: wykres funkcji

$$g(x) = -\frac{3}{x+2} + 4 \quad \leftarrow \text{przesunięcie o wektor } [0, 4]$$



Przykład 4 ◀ zad. 15.13–15.16

Funkcja f ma następujące własności:

- $D = \langle -4; 5 \rangle$, $ZW = \langle -1; 2 \rangle$, miejscem zerowym funkcji jest liczba -2 ,
- funkcja przyjmuje wartość największą równą 2 dla $x = 2$.

Na podstawie tych informacji opiszemy własności funkcji $g(x) = f(x - 3) - 1$.

Rozwiązanie

Wykres funkcji $g(x) = f(x - 3) - 1$ powstaje w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o wektor $[3, -1]$. Funkcja g ma zatem następujące własności:

- $D = \langle -1; 8 \rangle$, ← przesunięcie przedziału $\langle -4; 5 \rangle$ o wektor $[3, 0]$
- $ZW = \langle -2; 1 \rangle$, ← przesunięcie przedziału $\langle -1; 2 \rangle$ o wektor $[0, -1]$
- wartość największą równą 1 przyjmuje dla $x = 5$.

Miejscami zerowymi funkcji $g(x) = f(x - 3) - 1$ są argumenty, dla których funkcja $y = f(x - 3)$ przyjmuje wartość 1 . Nie mamy informacji, które to argumenty, więc miejsc zerowych funkcji g nie można określić.

Przykład 5 ◀ zad. 15.21

Mając dany wykres funkcji f , narysujemy wykres funkcji $g(x) = ||f(x + 4) + 2| - 3|$ oraz odczytamy, dla jakich wartości m równanie $g(x) = m$ ma 5 rozwiązań.

Rozwiązanie

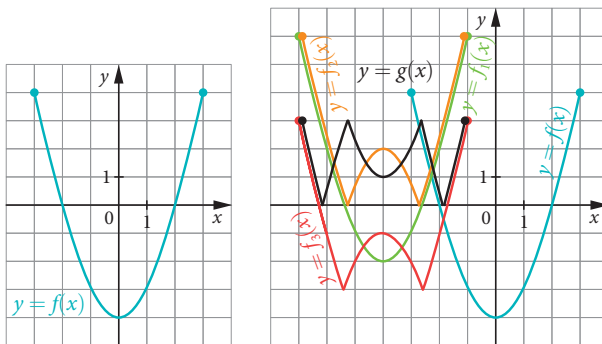
Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -3; 3 \rangle$. Rysujemy kolejne wykresy.

Krok 1: $f_1(x) = f(x + 4) + 2$ ← przesunięcie o wektor $[-4, 2]$

Krok 2: $f_2(x) = |f_1(x)| = |f(x + 4) + 2|$ ← symetria względem osi x części wykresu leżącego pod osią x

Krok 3: $f_3(x) = f_2(x) - 3 = |f(x + 4) + 2| - 3$ ← przesunięcie o wektor $[0, -3]$

Krok 4: $g(x) = |f_3(x)| = ||f(x + 4) + 2| - 3|$ ← symetria względem osi x części wykresu leżącego pod osią x

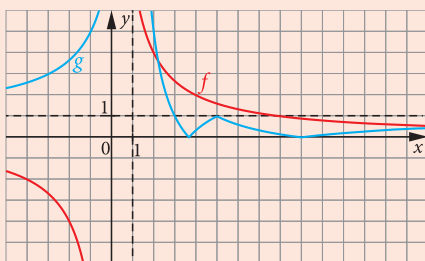


Odp.: Równanie $g(x) = m$ ma 5 rozwiązań dla $m = 1$.

◀ **15.21.** Przekształć odpowiednio wykres funkcji $f(x) = \frac{8}{x}$ i narysuj wykres funkcji

$$g(x) = \left| \frac{8}{x-1} - 2 \right| - 1.$$

Odp.:



◀ **15.13.** Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle 0; 4 \rangle$, a jej zbiorem wartości jest przedział $\langle -3; -1 \rangle$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji $y = f(x - 6) + 3$.

Odp.: $D = \langle 6; 10 \rangle$, $ZW = \langle 0; 2 \rangle$

◀ **15.14.** Funkcja f osiąga wartość największą równą 25 dla $x = 17$. Wyznacz wartość najmniejszą funkcji $y = -f(x + 2) - 7$ oraz argument, dla którego funkcja tę wartość osiąga.

Odp.: -32 dla $x = 15$

◀ **15.15.** Funkcja f przyjmuje wartość największą równą 6 dla $x = -3$, a wartość najmniejszą równą 2 dla $x = 0$. Wyznacz wartość największą i wartość najmniejszą funkcji $y = -|f(x - 3) + 1| - 2$.

Odp.: wartość największa: -5 dla $x = 3$,
wartość najmniejsza: -9 dla $x = 0$

◀ **15.16.** Tabela przedstawia liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$, gdzie m jest dowolną liczbą rzeczywistą. Sporządź taką tabelę dla funkcji $g(x) = -f(x + 1) + 3$.

Wartość m	Liczba rozwiązań równania $f(x) = m$
$m \in (-\infty; -2)$	2
$m = -2$	1
$m \in (-2; \infty)$	0

Odp.:

Wartość m	Liczba rozwiązań równania $g(x) = m$
$m \in (-\infty; 5)$	0
$m = 5$	1
$m \in (5; \infty)$	2

Zadania

Odpowiedzi i rozwiązania

15.1. C

15.2. C

15.3. C

15.4. a) $M = (2, -1)$ b) $M = (2, \sqrt{5})$ c) $M = (0, -5)$ d) $M = (0, -9 - \sqrt{3})$ 15.5. $(-1, 2)$ 15.6. a) $M = (2, -9)$ b) $M = (4, 7)$ c) $M = (7, 5 - \sqrt{3})$ d) $M = (2, 13)$

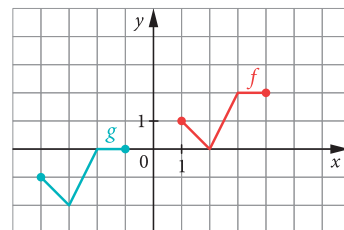
W każdym z zadań 15.1–15.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

15.1. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest przedział $(-\infty; 0)$. Wskaż dziedzinę funkcji $y = f(x - 1) + 2$.

A. $(-\infty; 2)$ B. $(-\infty; -1)$ C. $(-\infty; 1)$ D. $(-\infty; -2)$

15.2. W układzie współrzędnych narysowane są wykresy funkcji f oraz g .

Wskaż prawdziwą zależność.

A. $g(x) = f(x + 5) + 2$ B. $g(x) = f(x - 5) + 2$ C. $g(x) = f(x + 5) - 2$ D. $g(x) = f(x - 5) - 2$ 

15.3. Wskaż funkcję, która ma taki sam zbiór wartości jak funkcja $y = f(x)$.

A. $y = f(x + 5) + 3$ B. $y = f(x) + 7$ C. $y = f(x - 8)$

D. żadna z podanych

15.4. Wyznacz współrzędne punktu M , który jest obrazem punktu P w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u}$.

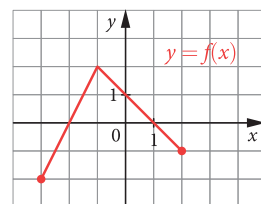
a) $\vec{u} = [3, 1]$ $P = (-1, -2)$ c) $\vec{u} = [1, -7]$ $P = (-1, 2)$ b) $\vec{u} = [-2, \sqrt{5}]$ $P = (4, 0)$ d) $\vec{u} = [-\sqrt{2}, -\sqrt{3}]$ $P = (\sqrt{2}, -9)$

15.5. Dane są punkty $A = (6, 2)$ i $B = (2, 5)$. Wyznacz współrzędne obrazu punktu $(3, -1)$ w przesunięciu równoległym o wektor $\overrightarrow{AB}$.

15.6. Obrazem punktu M w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u}$ jest punkt P . Wyznacz współrzędne punktu M .

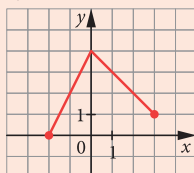
a) $\vec{u} = [-3, 7]$ $P = (-1, -2)$ c) $\vec{u} = [1, \sqrt{3}]$ $P = (8, 5)$ b) $\vec{u} = [3, -5]$ $P = (7, 2)$ d) $\vec{u} = [-5, -9]$ $P = (-3, 4)$

15.7. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Sporządź wykres funkcji

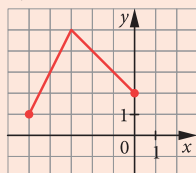
a) $y = f(x - 1) + 2$.b) $y = f(x + 2) + 3$.c) $y = f(x - 3) - 1$.d) $y = f(x + 4) - 2$.

15.7.

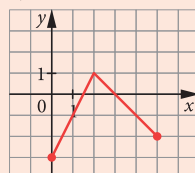
a)



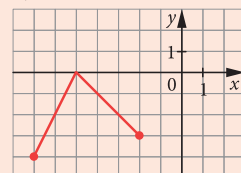
b)



c)

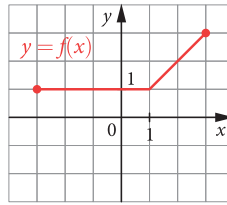


d)



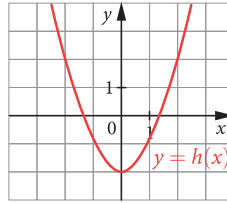
15.8. Przekształć wykres funkcji $y = f(x)$ zgodnie z podanym wzorem, a następnie wyznacz dziedzinę i zbiór wartości otrzymanej funkcji.

- a) $y = -f(x) + 2$
 b) $y = f(-x) - 3$
 c) $y = -f(x - 1)$
 d) $y = f(-x) + 4$



15.9. Przekształć wykres funkcji $y = h(x)$ zgodnie z podanym wzorem, a następnie opisz przedziały monotoniczności otrzymanej funkcji.

- a) $y = -h(x - 1) + 2$
 b) $y = -h(x - 1) - 2$
 c) $y = 1 - h(x + 3)$
 d) $y = 3 - h(-x)$



15.10. Przekształcając odpowiednio wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ lub $f(x) = \frac{a}{x}$, narysuj wykres funkcji $y = g(x)$ i wyznacz jej dziedzinę.

- a) $g(x) = \sqrt{x - 2} - 1$
 b) $g(x) = \sqrt{x + 3} + 2$
 c) $g(x) = \frac{1}{x - 2} + 1$
 d) $g(x) = \frac{4}{x + 3} + 2$

15.11. Przekształcając odpowiednio wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ lub $f(x) = \frac{a}{x}$, narysuj wykres funkcji $y = g(x)$ i wyznacz jej dziedzinę.

- a) $g(x) = -\sqrt{x + 5} - 4$
 b) $g(x) = 3 - \sqrt{x - 2}$
 c) $g(x) = -\frac{8}{x + 4} - 5$
 d) $g(x) = 2 - \frac{6}{x - 1}$

15.12. Przekształcając odpowiednio wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ lub $f(x) = \frac{a}{x}$, narysuj wykres funkcji $y = g(x)$ i wyznacz jej dziedzinę.

- a) $g(x) = |\sqrt{x + 2} - 1|$
 b) $g(x) = -|\sqrt{-x} - 2|$
 c) $g(x) = 3 - \left|\frac{2}{x}\right|$
 d) $g(x) = \left|\frac{4}{x + 3} - 2\right|$

15.13. Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle 0; 4 \rangle$, a jej zbiorem wartości jest przedział $\langle -3; -1 \rangle$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji $y = f(x - 6) + 3$.

15.14. Funkcja f osiąga wartość największą równą 25 dla $x = 17$. Wyznacz wartość najmniejszą funkcji $y = -f(x + 2) - 7$ oraz argument, dla którego funkcja tę wartość osiąga.

15.8. Wskazówka: Punkty wykresu należy przekształcić następująco:

- a) symetria względem osi x , a następnie przesunięcie o wektor $[0, 2]$, $D = \langle -3; 3 \rangle$, $ZW = \langle -1; 1 \rangle$,
 b) symetria względem osi y i przesunięcie o wektor $[0, -3]$, $D = \langle -3; 3 \rangle$, $ZW = \langle -2; 0 \rangle$,
 c) symetria względem osi x i przesunięcie o wektor $[1, 0]$, $D = \langle -2; 4 \rangle$, $ZW = \langle -3; -1 \rangle$,
 d) symetria względem osi y i przesunięcie o wektor $[0, 4]$, $D = \langle -3; 3 \rangle$, $ZW = \langle 5; 7 \rangle$.

15.9. Wskazówka: Punkty wykresu należy przekształcić następująco:

- a) symetria względem osi x , a następnie przesunięcie o wektor $[1, 2]$, rosnąca w przedziale $(-\infty; 1)$, malejąca w przedziale $\langle 1; \infty \rangle$,
 b) symetria względem osi x , a następnie przesunięcie o wektor $[1, -2]$, rosnąca w przedziale $(-\infty; 1)$, malejąca w przedziale $\langle 1; \infty \rangle$,
 c) symetria względem osi x , a następnie przesunięcie o wektor $[-3, 1]$, rosnąca w przedziale $(-\infty; -3)$, malejąca w przedziale $\langle -3; \infty \rangle$,
 d) symetria względem osi x , symetria względem osi y , a następnie przesunięcie o wektor $[0, 3]$, rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$, malejąca w przedziale $\langle 0; \infty \rangle$.

15.10. a) $D = \langle 2; \infty \rangle$

b) $D = \langle -3; \infty \rangle$ **c)** $D = \mathbb{R} - \{2\}$

d) $D = \mathbb{R} - \{-3\}$

15.11. a) $D = \langle -5; \infty \rangle$ **b)** $D = \langle 2; \infty \rangle$ **c)** $D = \mathbb{R} - \{-4\}$ **d)** $D = \mathbb{R} - \{1\}$

15.12. a) $D = \langle -2; \infty \rangle$ **b)** $D = (-\infty; 0)$ **c)** $D = \mathbb{R} - \{0\}$ **d)** $D = \mathbb{R} - \{-3\}$

15.13. $D = \langle 6; 10 \rangle$, $ZW = \langle 0; 2 \rangle$

15.14. -32 dla $x = 15$

15.15. wartość największa: -5 dla $x = 3$, wartość najmniejsza: -9 dla $x = 0$

15.16.

Wartość m	Liczba rozwiązań równania $g(x) = m$
$m \in (-\infty; 5)$	0
$m = 5$	1
$m \in (5; \infty)$	2

15.17. $D = \langle -6; 1 \rangle$, funkcja malejąca w każdym z przedziałów $\langle -6; -4 \rangle$ i $\langle -4; 1 \rangle$

15.18. Wskazówka: Punkty wykresu należy przekształcić przez symetrię względem osi y i przesunąć o wektor $[0, -2]$.

15.19. $x \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$

15.20. $m \in (1; 2)$

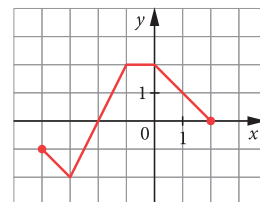
15.15. Funkcja f przyjmuje wartość największą równą 6 dla $x = -3$, a wartość najmniejszą równą 2 dla $x = 0$. Wyznacz wartość największą i wartość najmniejszą funkcji $y = -|f(x-3) + 1| - 2$.

* **15.16.** Tabela przedstawia liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$, gdzie m jest dowolną liczbą rzeczywistą. Sporządź taką tabelę dla funkcji $g(x) = -f(x+1) + 3$.

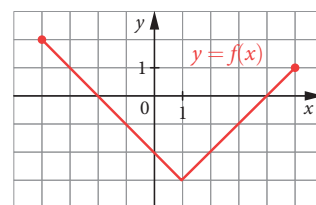
Wartość m	Liczba rozwiązań równania $f(x) = m$
$m \in (-\infty; -2)$	2
$m = -2$	1
$m \in (-2; \infty)$	0

* **15.17.** Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle 3; 10 \rangle$. Funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle 3; 5 \rangle$, malejąca w przedziale $(5; 10)$, ale nie jest monotoniczna. Narysuj przykład takiej funkcji. Podaj dziedzinę oraz przedziały monotoniczności funkcji $y = f(x+9) - 5$.

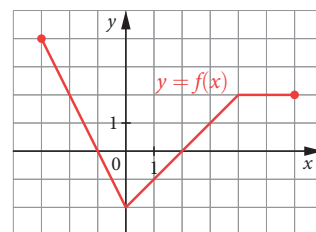
* **15.18.** Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(-x) + 2$. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$.



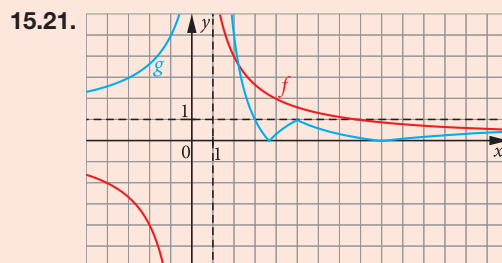
* **15.19.** Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Narysuj wykres funkcji $g(x) = ||f(x)| - 1|$. Rozwiąż równanie $g(x) = 1$.



* **15.20.** Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Narysuj wykres funkcji $g(x) = ||f(x+3) - 1| - 2|$. Dla jakich wartości m równanie $g(x) = m$ ma 4 rozwiązania?



* **15.21.** Przekształć odpowiednio wykres funkcji $f(x) = \frac{8}{x}$ i narysuj wykres funkcji $g(x) = \left| \left| \frac{8}{x-1} - 2 \right| - 1 \right|$.

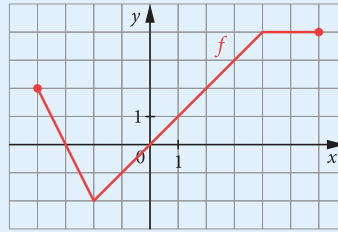


- * **15.22.** Dziedziną funkcji f jest przedział $(-4; 5)$, zbiorem wartości jest przedział $\langle -2; 3 \rangle$, jej miejscami zerowymi są liczby 1 i 3.
- Podaj dziedzinę funkcji $y = f(-x) + 1$.
 - Podaj zbiór wartości funkcji $y = |f(x) - 2|$.
 - Podaj liczbę rozwiązań równania $|f(x + 2) - 3| = 3$.

Prosto do matury



- Funkcja $y = f(x)$ przyjmuje wartość największą równą 10 dla $x = 1$.
Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Funkcja $g(x) = f(x - 1) + 5$ przyjmuje wartość największą równą 15 dla $x = 2$.
B. Funkcja $h(x) = f(x + 3) - 11$ przyjmuje wartość największą równą 13 dla $x = -10$.
C. Funkcja $k(x) = f(x - 10) - 10$ przyjmuje wartość największą równą 0 dla $x = 11$.
- Miejsmem zerowym funkcji $y = f(x)$ jest liczba 5. Podaj wartość, jaką funkcja $y = f(x + 3) - 2$ przyjmuje dla argumentu 2.
- Mając dany wykres funkcji $y = f(x)$, narysuj wykres funkcji $y = f(x - 2) - 1$. Podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x - 2) - 1 < 0$.



- Przekształcając odpowiednio wykres funkcji $f(x) = \frac{6}{x}$, sporządź wykres funkcji $g(x) = \left| \frac{6}{x-2} + 3 \right|$ i wyznacz liczbę rozwiązań równania $g(x) = 3$.
- Podaj przykład wykresu takiej funkcji $y = f(x)$, która spełnia jednocześnie następujące warunki:
 - funkcja $y = f(x)$ nie ma miejsc zerowych,
 - funkcja $y = f(-x) - 1$ ma jedno miejsce zerowe,
 - funkcja $y = -f(x) + 2$ ma dwa miejsca zerowe.

- 15.22.** a) $(-5; 4)$ b) $\langle 0; 4 \rangle$
c) 2 rozwiązania

Prosto do matury

- P, F, P
- 2
- $\left(-1\frac{1}{2}; 3\right)$
- 1 rozwiązanie

16. Powtórzenie

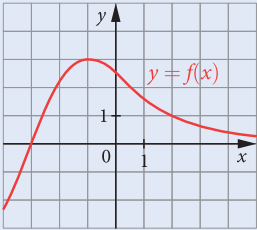
Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–25 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

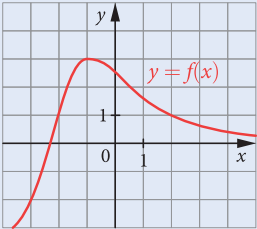
Odpowiedzi i rozwiązania

1. C
 2. A
 3. B

1. Który z podanych punktów leży na osi odciętych?
 A. $A = (-5, 7)$ B. $B = (0, \sqrt{3})$ C. $C = (2\sqrt{2}, 0)$ D. $D = (-2, 2\sqrt{3})$
 2. Który z podanych punktów leży na osi rzędnych?
 A. $A = (0, 2+\sqrt{3})$ B. $B = (-3, -1)$ C. $C = (-4, 0)$ D. $D = (-3\sqrt{2}, 0)$
 3. Dany jest wykres funkcji $f(x)$. Które zdanie jest fałszywe?
 A. $D = \mathbb{R}$
 B. $ZW = (-\infty; 3)$
 C. Funkcja nie jest monotoniczna.
 D. Funkcja ma jedno miejsce zerowe.

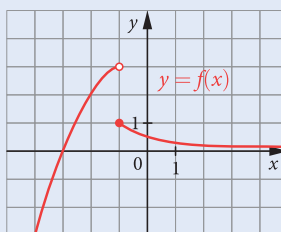

 4. B
 5. B

4. Wskaż zbiór wartości funkcji $y = -x + 5$ o dziedzinie $D = \{-1, 2, 0, \sqrt{7}\}$.
 A. $\mathbb{R}$ B. $\{5 - \sqrt{7}, 6, 5, 3\}$ C. $\{\sqrt{7} - 5, 3, 5, 6\}$ D. $\{-2, 35, 3, 5, 6\}$
 5. Funkcja przedstawiona na rysunku obok przyjmuje wartości większe od 1 dla
 A. $x > 1$. C. $x \in \langle -2; 2 \rangle$.
 B. $x \in (-2; 2)$. D. $x > -2$.


 6. D
 7. C
 8. A
6. Wskaż liczbę, która nie należy do zbioru wartości funkcji $y = 3\sqrt{x}$.
 A. $\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2} + \sqrt{7}$ C. $4 - \sqrt{2}$ D. $2 - \sqrt{7}$
 7. Wykres funkcji $y = \sqrt{x-2}$ powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ o wektor
 A. $\vec{v} = [0, 2]$. B. $\vec{v} = [0, -2]$. C. $\vec{v} = [2, 0]$. D. $\vec{v} = [-2, 0]$.
 8. Wykres funkcji $y = 2\sqrt{x} + 3$ powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = 2\sqrt{x}$ o wektor
 A. $\vec{v} = [0, 3]$. B. $\vec{v} = [0, -3]$. C. $\vec{v} = [3, 0]$. D. $\vec{v} = [-3, 0]$.

9. Dany jest wykres funkcji f . Które zdanie jest prawdziwe?

- A. Funkcja nie przyjmuje wartości największej i nie przyjmuje wartości najmniejszej.
- B. Funkcja przyjmuje wartość największą równą 3 i nie przyjmuje wartości najmniejszej.
- C. Funkcja przyjmuje wartość największą równą 1 i nie przyjmuje wartości najmniejszej.
- D. Funkcja przyjmuje wartość największą równą -1 i nie przyjmuje wartości najmniejszej.



9. A

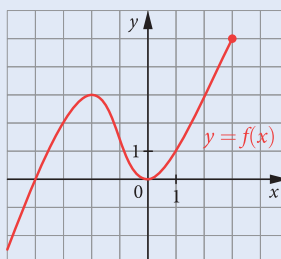
10. Jeżeli x oznacza długość ramienia trójkąta równoramiennego o podstawie równej 20 oraz $f(x) = 2x + 20$, to funkcja f przyporządkowuje zmiennej x

- A. obwód tego trójkąta i jej dziedziną jest $D = (0; \infty)$.
- B. pole tego trójkąta i jej dziedziną jest $D = (0; \infty)$.
- C. obwód tego trójkąta i jej dziedziną jest $D = (10; \infty)$.
- D. obwód tego trójkąta i jej dziedziną jest $D = (20; \infty)$.

10. C

11. Poniższe zdania dotyczą funkcji $y = f(x)$, którego wykres jest narysowany obok.

- I. Dziedziną funkcji jest przedział $(-\infty; 3)$.
- II. Funkcja ma dwa miejsca zerowe.
- III. $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -4)$.
- IV. Wartość największą równą 5 funkcja przyjmuje dla $x = 3$.



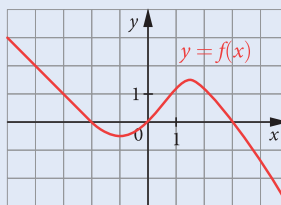
11. B

Które zdania są prawdziwe?

- A. tylko I i II
- B. wszystkie
- C. tylko I, II i IV
- D. tylko II, III i IV

12. Dany jest wykres funkcji. Które ze zdań jest fałszywe?

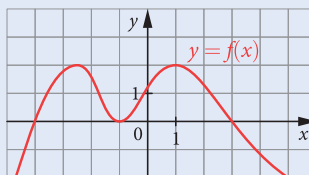
- A. Funkcja nie przyjmuje wartości największej i nie przyjmuje wartości najmniejszej.
- B. Funkcja ma trzy miejsca zerowe.
- C. Dla $x \in (0; 3)$ wartości funkcji są dodatnie.
- D. Wykres funkcji ma oś symetrii.



12. D

13. Jakie miejsca zerowe ma funkcja przedstawiona na wykresie?

- A. $-4, -1, 3$
- B. $-5, -1, 6$
- C. $-5, 1, 6$
- D. $-4, 3$



13. A

14. A

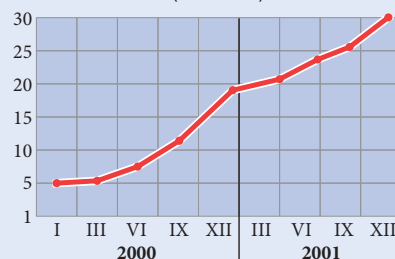
14. Na podstawie wykresu stwierdzono, że w badanym okresie liczba wysyłanych miesięcznie SMS-ów

- I. wzrosła o 600%.
- II. rosła.
- III. wzrosła o 25 mln.

Które z tych stwierdzeń jest fałszywe?

- A. I
- B. II
- C. III
- D. żadne

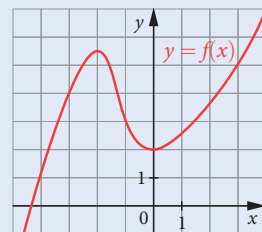
Liczba wysyłanych miesięcznie SMS-ów
(dane w mln)



15. C

15. Ile razy funkcja przedstawiona na wykresie przyjmuje wartość równą 3?

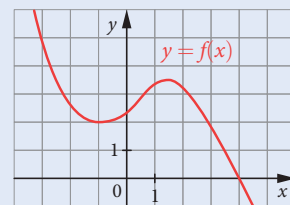
- A. dokładnie raz
- B. dokładnie dwa razy
- C. dokładnie trzy razy
- D. nieskończenie wiele razy



16. D

16. Funkcja przedstawiona na wykresie przyjmuje ujemne wartości dla wszystkich

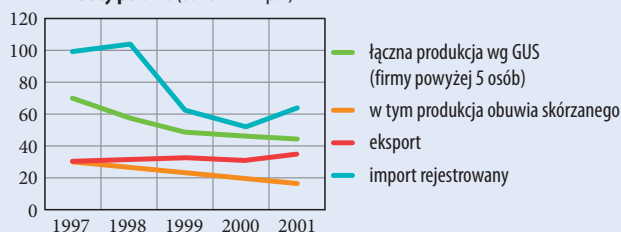
- A. $x < 0$.
- B. $x \in (-2; 1)$.
- C. $x \in \{-2, -1, 0, 5, 6\}$.
- D. $x > 4$.



17. D

17. Na podstawie wykresu przedstawiającego rynek obuwniczy oceń, które zdanie jest fałszywe.

Buty polskie (dane w mln par)



- A. W pokazanym okresie produkcja butów w Polsce malała.
- B. W latach 1997–2001 wzrósł eksport butów.
- C. Od 1998 r. do 2000 r. import (rejestrwany) butów zmalał o prawie 50 mln par.
- D. W danym okresie zmalał procentowy udział produkcji obuwia skózanego w stosunku do całej produkcji.

18. Jeżeli zbiorem wartości funkcji $f(x) = 3x + 2$ jest zbiór $\{0, 3, 2, 17\}$, to dziedziną tej funkcji jest zbiór

- A. $\{-\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, 5\}$. B. $\{-\frac{2}{3}, 0, \frac{19}{3}, 5\}$. C. $\{-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 5\}$. D. $\{2, 3, 4, 5\}$.

18. A

19. Na rysunku 1 przedstawiono wykresy funkcji f i g . Która równość jest prawdziwa?

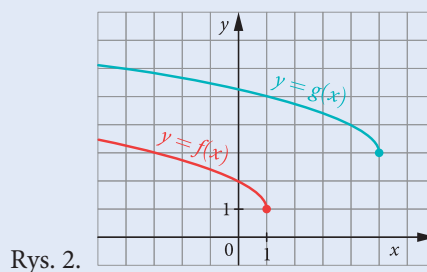
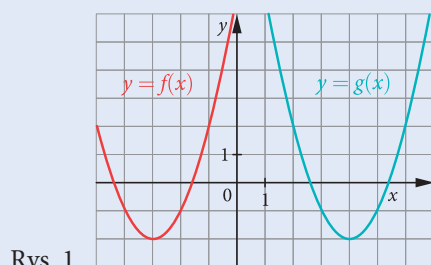
- A. $f(x) = g(x - 7)$ C. $f(x) - 7 = g(x)$
B. $f(x - 7) = g(x)$ D. $g(x) = f(x + 7)$

19. B

20. Na rysunku 2 przedstawiono wykresy funkcji f i g . Która równość jest prawdziwa?

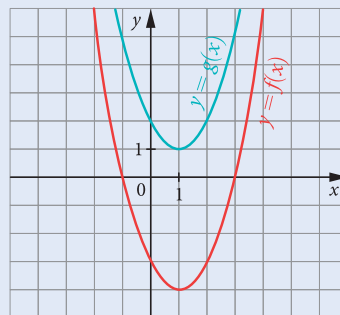
- A. $g(x) = f(x - 4) + 2$ C. $g(x - 4) = f(x) + 2$
B. $g(x) - 2 = f(x + 4)$ D. $g(x + 4) = f(x) - 2$

20. A



21. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji f i g . Która równość jest prawdziwa?

- A. $g(x) = f(x) - 1$
B. $g(x) - 5 = f(x)$
C. $g(x - 5) = f(x)$
D. $g(x) = f(x + 5)$



21. B

22. Za pomocą n kosiarek można skosić trawniki w ośrodku wypoczynkowym w ciągu t godzin. Ile godzin to zajmie, jeśli użyje się k kosiarek?

- A. $\frac{tk}{n}$ B. $\frac{tn}{k}$ C. $\frac{k}{nt}$ D. $\frac{n}{kt}$

22. B

23. B

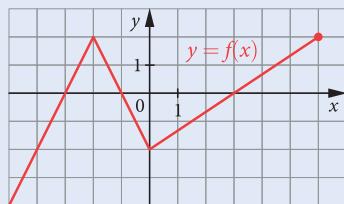
23. Które ze zdań dotyczących funkcji f (rys. 1) są prawdziwe?I. $D = \mathbf{R}$ i $ZW = \mathbf{R}$.II. Miejscami zerowymi funkcji f są liczby -3 , -1 i 3 .III. Wartość największą równą 2 funkcja f przyjmuje dla $x = -2$ oraz dla $x = 6$.IV. Funkcja f nie jest monotoniczna.

A. wszystkie B. tylko II, III i IV C. tylko I, II i IV D. tylko II

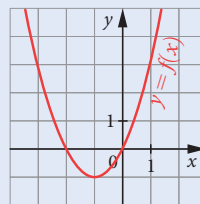
24. C

24. Wykres na rysunku 2 przedstawia funkcję $y = f(x)$. Która z podanych funkcji przyjmuje wartość największą?A. $y = f(x) - 1$ B. $y = f(x - 1)$ C. $y = -f(x)$ D. $y = f(-x)$

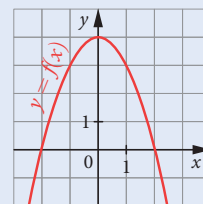
25. B

25. Wykres na rysunku 3 przedstawia funkcję $y = f(x)$. Wskaż zdanie fałszywe.A. Oś y jest osią symetrii wykresu funkcji f .B. Funkcja f jest monotoniczna.C. W przedziale $(-\infty; 0)$ funkcja f jest rosnąca.D. Największą wartością funkcji f jest 4.

Rys. 1.



Rys. 2.



Rys. 3.

W zadaniach 26–39 oceń prawdziwość podanych zdań.

26. F, P, P

26. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie całkowitej ostatnią cyfrę jej sześcienu.A. $f(-2) = -8$ B. $f(-10) = 0$ C. Dla każdej liczby całkowitej k spełniony jest warunek $f(-k) = f(k)$.

27. F, P, F

27. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie całkowitej połowę liczby do niej przeciwnej.A. $f(-50) = 100$ B. Każda liczba całkowita należy do zbioru wartości funkcji f .C. Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór liczb całkowitych.

28. P, F, P

28. Funkcja f wyrażona jest wzorem $f(x) = \sqrt{x}$.A. Funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą.B. Funkcja f przyjmuje wartość największą.C. Funkcja f ma miejsce zerowe.

29. Funkcja f wyrażona jest wzorem $f(x) = \sqrt{x + 2020}$.

- A. Dziedziną funkcji f jest przedział $D = \langle 2020; \infty \rangle$.
- B. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $ZW = \langle 2020; \infty \rangle$.
- C. Miejscem zerowym funkcji f jest liczba 2020.

30. Funkcja f określona jest za pomocą wzoru $f(x) = \sqrt{mx - 1}$.

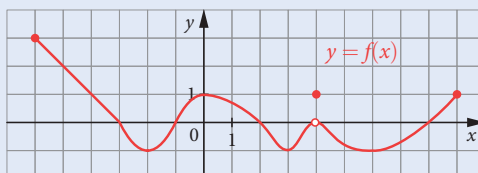
- A. Dla $m = -3$ dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \left\langle \frac{1}{3}; \infty \right\rangle$.
- B. Dla $m = \frac{1}{3}$ dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \langle -3; \infty \rangle$.
- C. Dla pewnej wartości m dziedzina funkcji f jest zbiorem pustym.

31. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie całkowitej liczbę o 2 większą od jej kwadratu.

- A. Liczba 3 należy do zbioru wartości funkcji f .
- B. Liczba 5 należy do zbioru wartości funkcji f .
- C. Liczba 51 należy do zbioru wartości funkcji f .

32. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f .

- A. Równanie $f(x) = 0$ ma dokładnie trzy rozwiązania.
- B. Funkcja f ma co najmniej trzy miejsca zerowe.
- C. Funkcja f ma pięć miejsc zerowych.



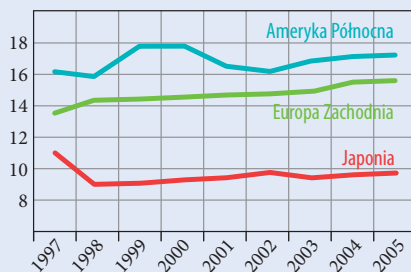
33. Funkcja $y = f(x)$ przyjmuje wartość najmniejszą równą 5 dla $x = 1$.

- A. Funkcja $g(x) = -f(x + 1)$ przyjmuje wartość największą równą 5 dla $x = 0$.
- B. Funkcja $h(x) = f(x + 3) - 11$ przyjmuje wartość najmniejszą równą -6 dla $x = 4$.
- C. Funkcja $k(x) = f(x - 5) - 5$ przyjmuje wartość najmniejszą równą 0 dla $x = 6$.

34. Oceń na podstawie wykresu, które ze zdań dotyczących produkcji samochodów w badanym okresie są prawdziwe.

- A. Tylko w Europie Zachodniej produkcja samochodów w latach 1997–2005 była stale rosnąca.
- B. Między 1997 a 1998 r. produkcja samochodów w Japonii spadła o ponad 30%.
- C. W drugiej połowie 2000 r. nastąpił spadek produkcji samochodów w Ameryce Północnej.

Produkcja samochodów [mln]



29. F, F, F

30. F, F, P

31. P, F, P

32. F, P, F

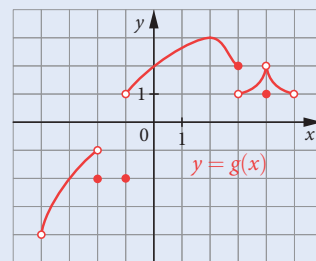
33. F, F, P

34. P, F, P

35. P, F, P

35. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji g .

- A. W przedziale $\langle -1; 2 \rangle$ funkcja g jest rosnąca.
 B. W przedziale $\langle 4; 5 \rangle$ funkcja g jest malejąca.
 C. W przedziale $\langle 2; 3 \rangle$ funkcja g jest malejąca.



36. P, F, P

36. Punkt C należy do odcinka AB i jest różny od jego końców. Wynika stąd, że

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. B. $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}|$. C. $|\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB}|$.

37. F, P, P

37. Punkt P jest środkiem boku AB w trójkącie ABC . Wynika stąd, że

- A. $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CP}$. B. $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CB}$. C. $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{CP}$.

38. P, F, P

38. Dane są dwa niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$.

- A. Jeżeli $|\vec{u} + \vec{w}| = |\vec{u}| + |\vec{w}|$, to wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$ są równoległe.
 B. Jeżeli wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$ są równoległe, to $|\vec{u} + \vec{w}| = |\vec{u}| + |\vec{w}|$.
 C. Dla każdej pary wektorów $\vec{u}$ i $\vec{w}$ prawdziwa jest nierówność $|\vec{u} + \vec{w}| \leq |\vec{u}| + |\vec{w}|$.

39. P, P, P

39. Dany jest wektor $\vec{u} = [-3, 5]$ oraz punkty $M = (7, -2)$ i $N = (-2, 13)$.

- A. Obrazem punktu M w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u}$ jest punkt $M' = (4, 3)$.
 B. Dla pewnego punktu P prawdziwa jest równość $2\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PN}$.
 C. Dla pewnej liczby m prawdziwa jest równość $m \cdot \vec{u} = \overrightarrow{NM}$.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

40. $f(1) = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}$,
 $f(2) = 7 + 4\sqrt{3}$,
 $f(2\sqrt{3}) = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$

41. a) $D = \mathbb{R} - \{0\}$
 b) $D = \langle 2; \infty \rangle$
 c) $D = (0; \infty)$
 d) $D = \langle 0; 2 \rangle$
 e) $D = (-\infty; 3)$
 f) $D = \langle 0; 1 \rangle$

42. a) $D = \mathbb{R} - \{7\}$
 b) $D = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$
 c) $D = (-\infty; 0) \cup \langle 10; \infty \rangle$
 d) $D = \mathbb{R}$
 e) $D = \left\langle -\frac{2}{3}; \infty \right\rangle - \left\{ \frac{1}{3} \right\}$
 f) $D = \langle 1; 5 \rangle$

40. Dane są zbiór $A = \{1, \sqrt{3}, 2, 2\sqrt{3}\}$ i funkcja $f(x) = \frac{2 + \sqrt{3}}{x - \sqrt{3}}$. Oblicz wartości funkcji f dla tych liczb ze zbioru A , które należą do dziedziny funkcji f .

41. Wyznacz dziedzinę funkcji.

- a) $f(x) = -2x + \frac{3}{x}$ c) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x}}$ e) $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{2x-6}$
 b) $f(x) = \sqrt{3x-6}$ d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}}$ f) $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$

42. Wyznacz dziedzinę funkcji.

- a) $f(x) = \frac{1}{|x-7|}$ c) $f(x) = \sqrt{|x-5|-5}$ e) $f(x) = \frac{\sqrt{3x+2}}{|3x+1|-2}$
 b) $f(x) = \frac{1}{|x+1|-2}$ d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|+3}}$ f) $f(x) = \frac{\sqrt{2-|x-3|}}{\sqrt{|5x-7|+4}}$

43. Dane są funkcja f i jej dziedzina D . Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

- a) $f(x) = 3x + 1$ $D = \{-3, -1, 0, 5\}$ c) $f(x) = x\sqrt{x}$ $D = \{0, 1, 4\}$
 b) $f(x) = \frac{x}{x+2}$ $D = \left\{-1, \frac{1}{2}, 0\right\}$ d) $f(x) = x^4$ $D = \{-2, -1, 0, 1\}$

44. Dana jest funkcja $f(x) = -7x + 3$, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych. Sprawdź, które z liczb: $-25, -7, -4, 17$ należą do zbioru wartości tej funkcji.

D 45. Wykaż, że liczba 2 nie należy do zbioru wartości funkcji $f(x) = ||x - 1| + 5| - 2$.

46. Dane są funkcja f i jej zbiór wartości ZW . Wyznacz dziedzinę funkcji f .

- a) $f(x) = -2x + 3$ $ZW = \{-1, 1, 5\}$ c) $f(x) = \sqrt{2x}$ $ZW = \{0, 1, 4\}$
 b) $f(x) = \frac{4}{x-5}$ $ZW = \left\{-1, \frac{4}{5}, 2\right\}$ d) $f(x) = x^3$ $ZW = \{-1, 1, 8\}$

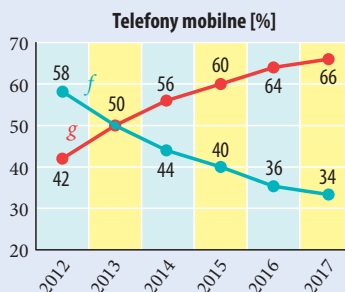
47. Sporządź tabelę funkcji, która każdej liczbie naturalnej z przedziału $\langle 20; 25 \rangle$ przyporządkowuje sumę jej wszystkich naturalnych dzielników.

48. Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

- a) $f(x) = \sqrt{5}x - 2\sqrt{5}$ d) $f(x) = |x + 2| + 2$
 b) $f(x) = 2x(x + 6)(x + 3)$ e) $f(x) = 4 - 8x$, $D = \mathbb{Z}$
 c) $f(x) = |x - 1| - 6$ f) $f(x) = 2^{11}x - 4^7$, $D = \mathbb{N}$

D 49. Wykaż, że funkcja $f(x) = ||x - 1| + 1| + 2$ nie ma miejsc zerowych.

50. Funkcje f i g przedstawiają odpowiednio procentowy udział klasycznych telefonów komórkowych i smartfonów w ogólnej liczbie sprzedawanych na świecie telefonów mobilnych. Opisz monotoniczność każdej z tych funkcji.

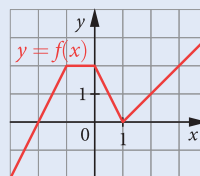


51. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest przedział $\langle 2; 22 \rangle$, a zbiorem wartości przedział $\langle 4; 6 \rangle$.

Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji

$$y = f(x + 3) - 8.$$

52. Na podstawie wykresu funkcji f sporządź wykres funkcji $y = f(x + 2) - 3$.



53. Funkcja $y = f(x)$ przyjmuje wartości dodatnie jedynie w przedziale $(-2; 5)$ oraz wartości ujemne jedynie w przedziale $(5; 9)$. Podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x - 4) > 0$ i zbiór rozwiązań nierówności $f(x - 4) < 0$.

43. a) $ZW = \{-8, -2, 1, 16\}$

b) $ZW = \left\{-1, \frac{1}{5}, 0\right\}$

c) $ZW = \{0, 1, 8\}$

d) $ZW = \{0, 1, 16\}$

44. $-25, -4$

46. a) $D = \{-1, 1, 2\}$

b) $D = \{1, 7, 10\}$

c) $D = \left\{0, \frac{1}{2}, 8\right\}$

d) $D = \{-1, 1, 2\}$

47.

x	20	21	22	23	24	25
y	42	32	36	24	60	31

48. a) 2 b) $-6, -3, 0$ c) $-5, 7$

d), e) brak miejsc zerowych
 f) 8

49. $||x - 1| + 1| \geq 0$, więc $f(x) \geq 2$

50. f : malejąca, g : rosnąca

51. $D = \langle -1; 19 \rangle$, $ZW = \langle -4; -2 \rangle$

52. Wskazówka: Punkty wykresu należy przesunąć o wektor $[-2, -3]$.

53. $f(x - 4) > 0$ dla $x \in (2; 9)$,
 $f(x - 4) < 0$ dla $x \in (9; 13)$

45. Sprawdzamy, czy istnieje argument x , dla którego $f(x) = 2$.

$$||x - 1| + 5| - 2 = 2$$

$$||x - 1| + 5| = 4$$

$$|x - 1| + 5 = -4 \text{ lub } |x - 1| + 5 = 4$$

$$|x - 1| = -9 \text{ lub } |x - 1| = -1$$

W obu przypadkach $x \in \emptyset$, więc liczba 2 nie należy do zbioru wartości funkcji f .

54. Funkcja $y = g(-x)$ jest malejąca w przedziale $\langle -6; -4 \rangle$, stała w przedziale $\langle -4; -3 \rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle -3; 3 \rangle$.

55. wartość największa: 12 dla $x = -4$,
wartość najmniejsza: -3 dla $x = 4$

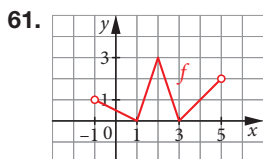
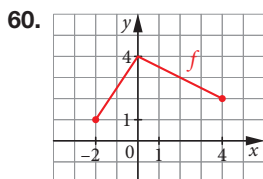
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}, \\ \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}, \\ \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}. \end{aligned}$$

Wskazówka: Zaznacz punkt F należący do odcinka AC taki, że $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FC}$ i zauważ, że $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AD}$ oraz $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AB}$.

57. $A' = (8, -9)$, $B' = (16, -3)$,
 $C' = (5, -4)$

58. a) z 90 elementów
b) $ZW = \{1, 2, 3, \dots, 18\}$
c) wartość najmniejsza: 1 dla argumentu 10,
wartość największa: 18 dla argumentu 99
e) dla argumentów: 13, 22, 31, 40

59. a) $V(x) = x^2(20 - 2x)$,
 $D = (0; 10)$
b) $P(x) = 80x - 6x^2$, $D = (0; 10)$

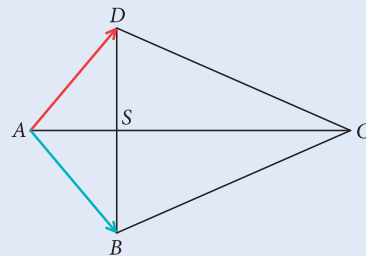


54. Funkcja $y = g(x)$ jest malejąca w przedziale $\langle -3; 3 \rangle$, stała w przedziale $\langle 3; 4 \rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle 4; 6 \rangle$. Określ przedziały monotoniczności funkcji $y = g(-x)$.

55. Funkcja $y = f(x)$ przyjmuje wartość największą równą 10 dla $x = 3$ i przyjmuje wartość najmniejszą równą -5 dla $x = 11$. Podaj wartość największą oraz wartość najmniejszą funkcji $y = f(x + 7) + 2$.

56. Dla deltoidu $ABCD$ przedstawionego na rysunku obok prawdziwa jest równość $|SC| = 3|AS|$. Przedstaw wektory $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{BC}$ za pomocą wektorów $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{AD}$.

57. Dane są punkty $A = (3, -6)$, $B = (11, 0)$, $C = (0, -1)$. Wyznacz współrzędne wierzchołków A' , B' , C' trójkąta będącego obrazem trójkąta ABC w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u} = [5, -3]$.



Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

58. Funkcja g przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej dwucyfrowej sumę cyfr tej liczby.

- Z ilu elementów składa się dziedzina funkcji g ?
- Wyznacz zbiór wartości funkcji g .
- Dla jakiego argumentu funkcja g przyjmuje wartość najmniejszą, a dla jakiego wartość największą?
- Uzasadnij, że funkcja g nie jest monotoniczna.
- Dla jakich argumentów funkcja g przyjmuje wartość 4?

59. Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny. Suma długości jego krawędzi jest równa 80. Podaj wzór i określ dziedzinę funkcji, która w zależności od długości krawędzi jego podstawy opisuje

- objętość graniastosłupa.
- pole powierzchni graniastosłupa.

60. Podaj przykład wykresu funkcji f spełniającej trzy następujące warunki:

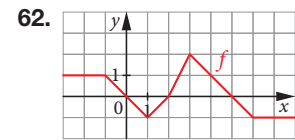
- dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -2; 4 \rangle$,
- funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą równą 1 dla $x = -2$,
- funkcja f przyjmuje wartość największą równą 4 dla $x = 0$.

61. Podaj przykład wykresu funkcji f spełniającej trzy następujące warunki:

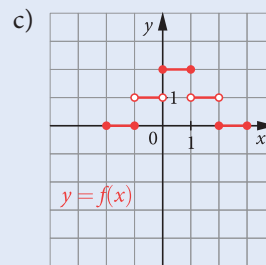
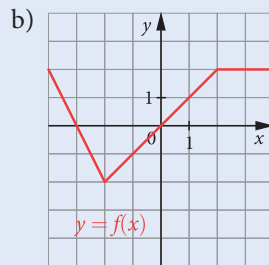
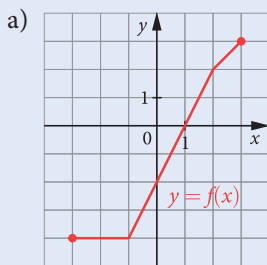
- dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -1; 5 \rangle$,
- zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 0; 3 \rangle$,
- miejscami zerowymi funkcji f są liczby 1 i 3.

* 62. Podaj przykład wykresu funkcji f spełniającej trzy następujące warunki:

- funkcja f ma trzy miejsca zerowe,
- funkcja $y = f(x) - 2$ ma jedno miejsce zerowe,
- funkcja $y = f(x) + 2$ nie ma miejsc zerowych.



63. a) $D = \langle -3; 3 \rangle$,
 $ZW = \langle -4; 3 \rangle$;
 wartość najmniejsza: -4 dla $x \in \langle -3; -1 \rangle$;
 wartość największa: 3 dla $x = 3$;
 miejsce zerowe: 1 ;
 $f(x) > 0$ dla $x \in (1; 3)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in \langle -3; 1 \rangle$;
 funkcja jest stała w przedziale $\langle -3; -1 \rangle$,
 rosnąca w przedziale $\langle -1; 3 \rangle$;
 $f(x) = m$ ma: nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = -4$,
 1 rozwiązanie dla $m \in (-4; 3)$,
 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -4) \cup (3; \infty)$



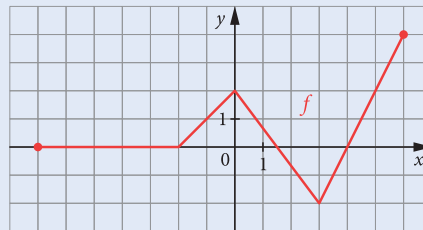
64. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f .

a) Sporządź wykres funkcji

$$g(x) = f(-x) + 1.$$

b) Określ zbiór wartości funkcji g .

c) Podaj miejsca zerowe funkcji g .

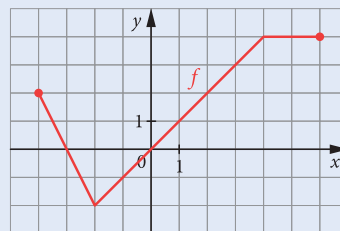


65. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f .

a) Sporządź wykres funkcji $g(x) = -f(x - 2)$.

b) Podaj liczbę rozwiązań równania $g(x) = 2$.

c) Podaj maksymalny przedział, w którym funkcja g jest nierosnąca.



64. b) $ZW = \langle -1; 5 \rangle$

c) $-3\frac{1}{2}, -2\frac{1}{4}$

65. b) 1 rozwiązanie

c) $\langle 0; 8 \rangle$

67. $x \in (-2; 7)$

68. a) nie, nie

b) o ok. 269%, o ok. 289%

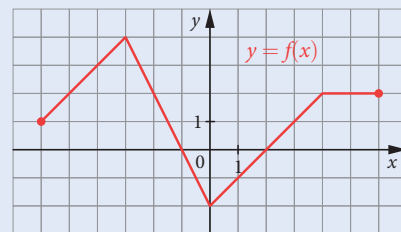
c) 230 zł, wzrosła o ok. 5%

d) zimą

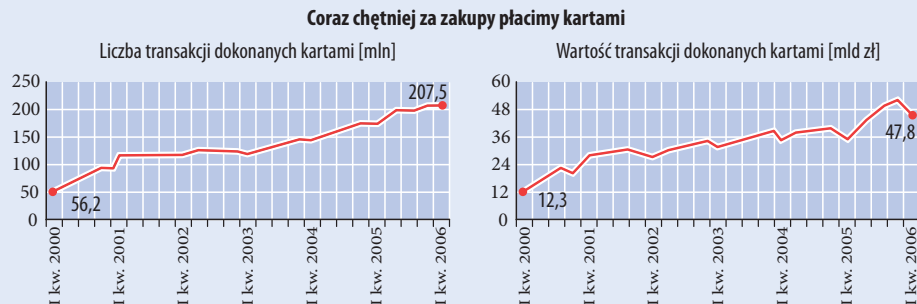
69. $D = (-7, -6)$

70. $P = (0, 5)$

71. $obw = 5\sqrt{5} + \sqrt{85}$, $P = 10$

66. Na podstawie wykresu funkcji f sporządź wykres funkcji $y = |f(-x) - 2|$.67. Przekształć odpowiednio wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$, i narysuj wykres funkcji $g(x) = 2 - |\sqrt{x+2} - 1|$. Odczytaj z wykresu rozwiązanie nierówności $g(x) > 0$.

68. Odpowiedz na pytania na podstawie podanych wykresów.



- Czy można się zgodzić ze stwierdzeniem, że *liczba transakcji dokonywanych kartami przez cały badany okres rosła*? A ze stwierdzeniem, że *wartość transakcji dokonywanych kartami przez cały badany okres rosła*?
- O ile procent wzrosła w badanym okresie liczba, a o ile wartość transakcji dokonywanych kartami?
- Ile wynosiła średnia wartość transakcji dokonanej kartą w pierwszym kwartale 2006 r.? Jak zmieniła się ta wielkość w porównaniu z pierwszym kwartałem 2000 r.?
- O jakiej porze roku Polacy mniej chętnie niż zwykle wydają pieniądze, płacąc kartami?

69. Oblicz współrzędne wierzchołka D równoległoboku $ABCD$, jeśli $A = (2, -10)$, $B = (7, 0)$, $C = (-2, 4)$.70. Dane są punkty $A = (3, 0)$, $B = (3, -4)$, $C = (-12, -7)$. Wyznacz współrzędne takiego punktu P , aby spełniona była równość $3\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{PB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CP}$.71. Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $A = (3, 2)$, $B = (-5, 6)$, $C = (-6, 4)$ jest prostokątny. Oblicz jego obwód i pole.