

Funkcja liniowa

4

Umiejętności

Po szkole podstawowej uczeń:

- podaje przykłady wielkości wprost proporcjonalnych,
- wyznacza wartość przyjmowaną przez wielkość wprost proporcjonalną w przypadku konkretnej zależności proporcjonalnej,
- stosuje podział proporcjonalny,
- znajduje współrzędne danych (na rysunku) punktów kratowych w układzie współrzędnych na płaszczyźnie,
- rysuje w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty kratowe o danych współrzędnych całkowitych (dowolnego znaku),
- interpretuje dane przedstawione za pomocą wykresów w układzie współrzędnych,
- tworzy wykresy liniowe na podstawie zebranych przez siebie danych lub danych pochodzących z różnych źródeł.

Po tym dziale uczeń:

- rysuje wykresy funkcji $y = ax$, $y = |ax + b|$ i funkcji liniowej określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami; omawia ich własności,
- podaje wzory funkcji liniowej i funkcji przedziałami liniowej na podstawie ich wykresów,
- sprawdza rachunkowo, czy dany punkt leży na danej prostej; sprawdza współliniowość punktów (na płaszczyźnie kartezjańskiej),
- interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej,
- wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty oraz punkty przecięcia prostej (opisanej równaniem w postaci ogólnej) z osiami układu współrzędnych,
- przekształca równanie prostej z postaci kierunkowej do ogólnej i odwrotnie,
- przedstawia interpretację geometryczną danego układu równań liniowych,
- bada równoległość (prostokątność) prostych na płaszczyźnie kartezjańskiej,
- wyznacza równanie prostej równoległej do danej prostej przechodzącej przez dany punkt,
- wyznacza równanie prostej prostopadłej do danej prostej przechodzącej przez dany punkt,
- rozwiązuje zadania tekstowe z zastosowaniem własności funkcji liniowej.

Uwagi metodyczne

Funkcja liniowa jest tematem nowym dla uczniów, dlatego wszystkie pojęcia należy wprowadzać powoli. Zaczynamy od pokazania związku pomiędzy proporcjonalnością prostą (przykłady o realistycznym kontekście) a liniową zależnością zmiennych.

◀1.4. Podaj wzór wiążący wymienione wielkości wprost proporcjonalne. Zapisz ich współczynnik proporcjonalności.

a) obwód y okręgu i promień r okręgu

b) długość y przekątnej kwadratu i obwód x kwadratu

c) droga s przebyta pociągiem ze średnią prędkością 80 km/h i czas t podróży (w godzinach)

Odp.: a) $y = 2\pi r$, 2π

b) $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$

c) $s = 80t$, 80

1. Od proporcjonalności prostej do funkcji $y = ax$

Umiejętności:

- rysowanie wykresu funkcji $y = ax$
- interpretacja współczynnika kierunkowego funkcji $y = ax$

Proporcjonalność prosta

Przykład 1

W pewnym zakładzie fotograficznym cena jednej odbitki wynosi 60 gr. Zatem za dwie odbitki zapłacimy 1,20 zł, za trzy – 1,80 zł itd. Zależność między liczbą odbitek a kwotą do zapłacenia pokazujemy w tabeli.

liczba odbitek	1	2	3	4	5	6
kwota do zapłacenia (w zł)	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60

Przykład 2 ◀ zad. 1.4

Drukarka drukuje w ciągu minuty 8 stron. Oznacza to, że w ciągu 2 minut wydrukuje 16 stron, w ciągu 3 minut – 24 strony itd. Zależność między czasem drukowania a liczbą stron pokazujemy w tabeli.

czas drukowania (w minutach)	1	2	3	4	5	6
liczba stron	8	16	24	32	40	48

Sytuacje przedstawione w przykładach są do siebie pod pewnym względem bardzo podobne. Występują tam **wielkości, których stosunek jest stały**:

- w przykładzie 1 stosunek należnej kwoty do liczby odbitek jest stały i równy cenie jednej odbitki,
- w przykładzie 2 stosunek liczby wydrukowanych stron do czasu drukowania jest stały i równy liczbie stron wydrukowanych w ciągu minuty.

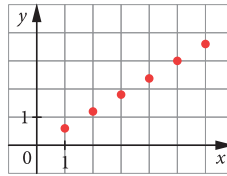
Wielkości dodatnie, których stosunek jest stały, nazywamy **wielkościami wprost proporcjonalnymi**. Powiemy więc, że:

- kwota należna za odbitki jest wprost proporcjonalna do ich liczby,
- liczba wydrukowanych stron jest wprost proporcjonalna do czasu drukowania.

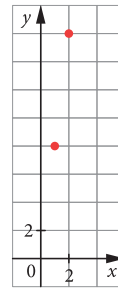
Narysujmy teraz dla każdego z powyższych przykładów wykres funkcji, która pierwszej z wielkości wprost proporcjonalnych przyporządkowuje drugą.

Funkcje te można wyrazić wzorami:

- $y = 0,6x$,
- $y = 8x$.



$$y = 0,6x$$



$$y = 8x$$

Oznaczmy literą a stały iloraz wprost proporcjonalnych dodatnich wielkości x i y . Otrzymany związek możemy wówczas zapisać w postaci:

$$\frac{y}{x} = a, \text{ czyli } y = ax$$

Jest to wzór funkcji opisującej wielkości wprost proporcjonalne. Występujący w tym wzorze współczynnik a nazywamy **współczynnikiem proporcjonalności**. Punkty wykresu tak określonej funkcji leżą na jednej prostej, a cały wykres znajduje się w I ćwiartce układu współrzędnych.

Funkcja $f(x) = ax$

Rozszerzymy teraz pojęcie proporcjonalności prostej.

Zakładamy, że:

- dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych,
- współczynnik a jest ustaloną liczbą rzeczywistą.

Przykład 3

Naszkicujemy wykres funkcji wyrażonej wzorem $f(x) = 2x$, $D = \mathbb{R}$.

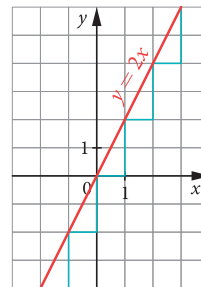
Rozwiązanie

Obliczmy wartości funkcji dla kilku argumentów x .

x	-1	-0,5	0	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4	5
y	-2	-1	0	2	3	4	6	8	10

Zauważmy, że jeżeli kolejne argumenty x zwiększamy o 1, to odpowiadające im wartości y zwiększają się o 2.

Oznacza to, że do kolejnych punktów wykresu dochodzimy, robiąc jeden jednostkowy krok w prawo i dwa jednostkowe kroki w górę.



Uwagi metodyczne

Wyraźnie podkreślamy interpretację współczynnika kierunkowego zarówno podczas sporządzania wykresu funkcji liniowej, jak i podczas wyznaczania wzoru funkcji liniowej na podstawie jej wykresu.

Przykład 4

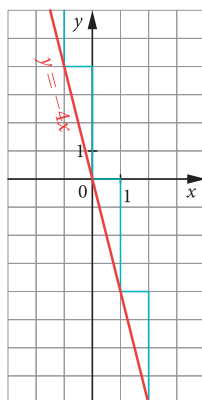
Naszkicujemy wykres funkcji wyrażonej wzorem $f(x) = -4x$, $D = \mathbf{R}$.

Rozwiązanie

Odpowiednia tabela wartości tej funkcji dla wybranych argumentów ma postać:

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	4	0	-4	-8	-12	-16	-20

Jeżeli dla tej funkcji kolejne argumenty x zwiększamy o 1, to odpowiadające im wartości y zmniejszają się o 4.



← jedna jednostka w prawo
i cztery jednostki w dół

◀ 1.7. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest zbiór liczb rzeczywistych. Naszkicuj wykres tej funkcji.

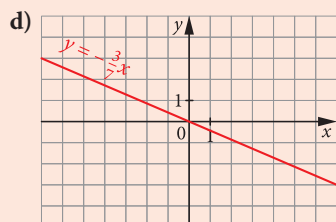
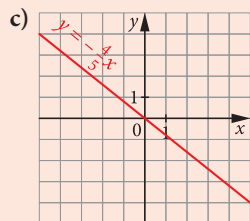
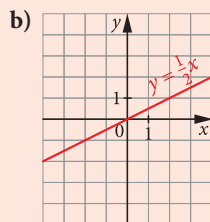
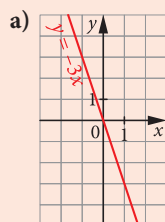
a) $f(x) = -3x$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x$

c) $f(x) = -\frac{4}{5}x$

d) $f(x) = -\frac{3}{7}x$

Odp.:



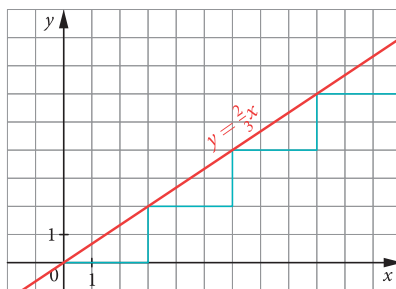
Matematycy w takiej sytuacji powiedzą, że **przyrost wartości funkcji jest ujemny**.

Przykład 5 ◀ zad. 1.7

Narysujemy wykres funkcji $f(x) = \frac{2}{3}x$, $D = \mathbf{R}$.

Rozwiązanie

Tutaj zmianie wielkości x o 1 jednostkę odpowiada zmiana wielkości y o $\frac{2}{3}$ jednostki, albo inaczej – zmianie wielkości x o 3 jednostki odpowiada zmiana wielkości y o 2 jednostki.



← trzy jednostki w prawo
i dwie jednostki w górę

Uogólnimy podane przykłady.

Niech $f(x) = ax$, gdzie $a \neq 0$. Wówczas $f(0) = 0$ i $f(1) = a$, zatem wykres funkcji f przechodzi przez punkty $(0, 0)$ oraz $(1, a)$.

Przyjmijmy, że trzy różne punkty A, B oraz C należą do wykresu funkcji f . Wynika stąd, że:

$$A = (x_1, ax_1), B = (x_2, ax_2), C = (x_3, ax_3)$$

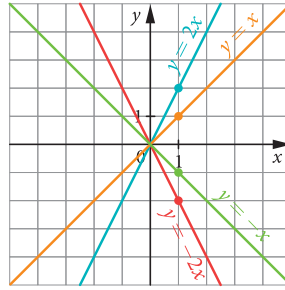
Wówczas:

$$\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1, ax_2 - ax_1] = [x_2 - x_1, a(x_2 - x_1)],$$

$$\overrightarrow{AC} = [x_3 - x_1, ax_3 - ax_1] = [x_3 - x_1, a(x_3 - x_1)]$$

Ponieważ $\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_3 - x_1)}{a(x_2 - x_1)}$, więc punkty A, B oraz C są współliniowe.

Jeżeli $a = 0$, to wykres funkcji pokrywa się z osią x .



Uwagi metodyczne

Po narysowaniu wielu wykresów uczniowie powinni samodzielnie podsumowywać własności funkcji liniowej. Jedyną trudność może stanowić uzależnienie pewnych własności od ogólnych wartości współczynnika a , a nie od konkretnych liczb, które ten współczynnik przyjmuje, np.: *Im większa jest wartość $|a|$, tym bliżej osi y leży wykres funkcji $y = ax$.*

Wniosek

Jeżeli dziedziną funkcji $f(x) = ax$ jest zbiór liczb rzeczywistych, to jej wykresem jest prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych.

Definicja

Współczynnik a , występujący we wzorze funkcji $f(x) = ax$ ($D = \mathbf{R}$), nazywamy **współczynnikiem kierunkowym**.

Zbadajmy, korzystając z definicji, monotoniczność funkcji $f(x) = ax$. Dziedziną funkcji jest zbiór $\mathbf{R}$, a współczynnikiem a ustalona liczba rzeczywista. Weźmy parę argumentów x_1 oraz x_2 i załóżmy, że większy z nich oznaczony jest jako x_2 . Zatem:

$$x_2 > x_1$$

Wartości funkcji dla tak oznaczonych argumentów wynoszą:

$$f(x_1) = ax_1, \quad f(x_2) = ax_2$$

Sprawdźmy, która z wartości jest większa, badając znak ich różnicy.

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1)$$

Przyjęliśmy, że $x_2 > x_1$, więc czynnik $(x_2 - x_1)$ jest dodatni.

Zatem różnica $f(x_2) - f(x_1)$ jest dodatnia dla $a > 0$, ujemna dla $a < 0$ oraz równa 0 dla $a = 0$.

◀1.9. Wyznacz wartość m , dla której podana funkcja jest rosnąca.

- a) $f(x) = (2m - 1)x$
 b) $f(x) = (2 - \sqrt{3}m)x$
 c) $f(x) = (m - 3\pi)x$
 d) $f(x) = (5m - 1,3)x$
 e) $f(x) = (5^{-2} + 3^{-2}m)x$
 f) $f(x) = \left(3m - \log_{\frac{1}{3}} 9\right)x$

Odp.: a) $m > \frac{1}{2}$ b) $m < \frac{2\sqrt{3}}{3}$

c) $m > 3\pi$ d) $m > 0,26$

e) $m > -\frac{9}{25}$ f) $m > -\frac{2}{3}$

◀1.10. Wyznacz wartość m , dla której podana funkcja jest malejąca.

- a) $f(x) = (7m + 2)x$
 b) $f(x) = (\sqrt{5} + \sqrt{3}m)x$
 c) $f(x) = (8 - 3m)x$
 d) $f(x) = (m - 1,9)x$
 e) $f(x) = (2^{-3} + 3^{-3}m)x$
 f) $f(x) = \left(4m - \log_{\frac{1}{\pi}} \pi\right)x$

Odp.: a) $m < -\frac{2}{7}$ b) $m < -\sqrt{\frac{5}{3}}$

c) $m > \frac{8}{3}$ d) $m < 1,9$

e) $m < -\frac{27}{8}$ f) $m < -\frac{1}{4}$

◀1.11. Dla jakich wartości parametru m funkcja $y = f(x)$ jest rosnąca, dla jakich malejąca, a dla jakich stała?

- a) $f(x) = -2(m - 9)x$
 b) $f(x) = (5m - 20)x$
 c) $f(x) = -2\sqrt{3}(m + 2)x$
 d) $f(x) = -5(3 - |m|)x$
 e) $f(x) = ((m - 2)^2 - m^2)x$
 f) $f(x) = -\sqrt{3}|m^2 - 4|x$

Odp.: a) malejąca dla $m > 9$,
 rosnąca dla $m < 9$,
 stała dla $m = 9$

b) malejąca dla $m < 4$,
 rosnąca dla $m > 4$,
 stała dla $m = 4$

c) malejąca dla $m > -2$,
 rosnąca dla $m < -2$,
 stała dla $m = -2$

d) malejąca dla $m \in (-3; 3)$,
 rosnąca dla $m \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$,
 stała dla $m \in \{-3, 3\}$

e) malejąca dla $m > 1$,
 rosnąca dla $m < 1$,
 stała dla $m = 1$

f) malejąca dla $m \in \mathbf{R} - \{-2, 2\}$,
 stała dla $m \in \{-2, 2\}$

Wniosek

- Funkcja $f(x) = ax$ jest rosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy $a > 0$.
- Funkcja $f(x) = ax$ jest malejąca wtedy i tylko wtedy, gdy $a < 0$.
- Dla $a = 0$ funkcja $f(x) = ax$ jest stała.
- Każda funkcja postaci $f(x) = ax$, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą, jest monotoniczna.

Przykład 6 ◀ zad. 1.9, 1.10

Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = (7 - m)x$ jest rosnąca?

Rozwiązanie

$$7 - m > 0$$

← współczynnik kierunkowy dodatni

$$7 > m$$

Odp.: Funkcja $f(x) = (7 - m)x$ jest rosnąca dla $m < 7$.

Przykład 7 ◀ zad. 1.11

Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = 2(|m| - 9)x$ jest rosnąca, dla jakich malejąca, a dla jakich stała?

Rozwiązanie

I. f rosnąca

$$2(|m| - 9) > 0$$

← współczynnik kierunkowy dodatni

$$|m| - 9 > 0, \text{ czyli } |m| > 9, \text{ stąd } m \in (-\infty; -9) \cup (9; \infty)$$

II. f malejąca

$$2(|m| - 9) < 0$$

← wykorzystujemy rozwiązanie nierówności I

$$m \in (-9; 9)$$

III. f stała

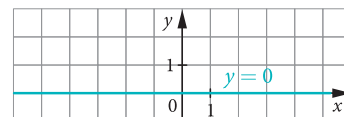
$$2(|m| - 9) = 0, \text{ czyli } m = -9 \text{ lub } m = 9$$

Odp.: Funkcja $f(x) = 2(|m| - 9)x$ jest rosnąca dla $m \in (-\infty; -9) \cup (9; \infty)$, malejąca dla $m \in (-9; 9)$ oraz stała dla $m = -9$ lub $m = 9$.

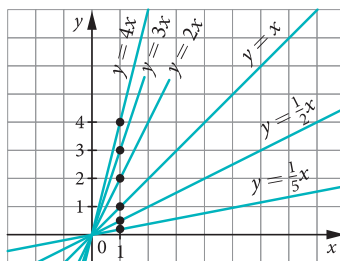
Podsumujmy własności funkcji $f(x) = ax$ ($D = \mathbf{R}$) w zależności od współczynnika a .

I. Jeżeli $a = 0$, to wzór funkcji ma postać

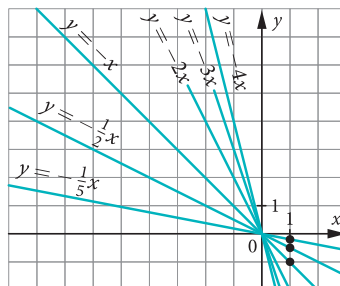
$f(x) = 0$. Wykresem jest wówczas prosta pokrywająca się z osią x . Każda liczba rzeczywista jest miejscem zerowym tej funkcji. Funkcja jest stała, a więc monotoniczna.



II. Jeżeli $a > 0$, to wykres przecina I i III ćwiartkę układu współrzędnych. Zbiorem wartości jest zbiór liczb rzeczywistych. Miejscem zerowym jest liczba 0. Równanie $ax = m$ ma dokładnie jedno rozwiązanie dla dowolnej wartości m . Funkcja jest rosnąca. Wartości dodatnie przyjmuje dla $x > 0$, a wartości ujemne dla $x < 0$.



III. Jeżeli $a < 0$, to wykres przecina II i IV ćwiartkę układu współrzędnych. Zbiorem wartości jest zbiór liczb rzeczywistych. Miejscem zerowym jest liczba 0. Równanie $ax = m$ ma dokładnie jedno rozwiązanie dla dowolnej wartości m . Funkcja jest malejąca. Wartości dodatnie przyjmuje dla $x < 0$, a wartości ujemne dla $x > 0$.



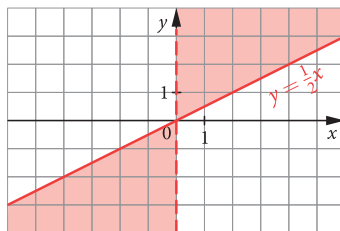
Przykład 8 ◀ zad. 1.13

Zaznaczmy na płaszczyźnie zbiór wszystkich punktów, które należą do wykresów funkcji $y = ax$, gdy $a \geq \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie

Szukany zbiór punktów zaznaczono na rysunku kolorem.

Punkty wykresu funkcji $y = \frac{1}{2}x$ należą do wyznaczonego zbioru, a punkty osi y (poza początkiem układu) do niego nie należą.



Przykład 9 ◀ zad. 1.14

Sprawdźmy, dla jakich argumentów funkcja $f(x) = 2\sqrt{3}x$ przyjmuje wartości większe od $\sqrt{3}$.

Rozwiązanie

$$f(x) > \sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3}x > \sqrt{3}$$

$$x > \frac{1}{2}$$

$$\text{Odp.: } x \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$$

◀1.14. Dla jakich argumentów funkcja $y = f(x)$ przyjmuje wartości mniejsze od k ?

a) $f(x) = \sqrt{5}x$, $k = -3\sqrt{5}$

b) $f(x) = -9x$, $k = 27\pi$

Odp.: a) $x < -3$ b) $x > -3\pi$

◀1.13. Zaznacz tę część płaszczyzny, której punkty należą do wykresów funkcji $y = ax$ dla współczynników a spełniających podany warunek.

a) $a > 1$

b) $0 < a < 1$

c) $a \geq 1$

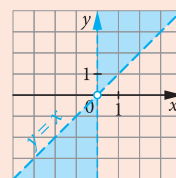
d) $0 < a < 2$

e) $-2 \leq a \leq 2$

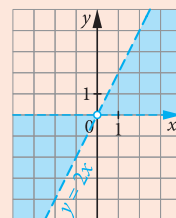
f) $a \leq 1$ lub $a \geq 2$

Odp.:

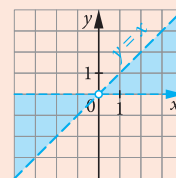
a)



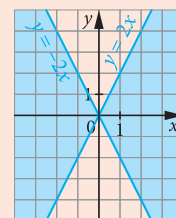
d)



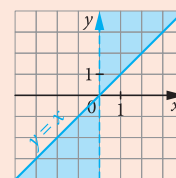
b)



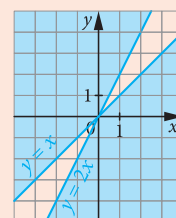
e)



c)



f)



◀1.15. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest zbiór D . Narysuj wykres tej funkcji i opisz jej własności.

- a) $f(x) = \frac{1}{3}x$, $D = \langle -6; 9 \rangle$
 b) $f(x) = 3x$, $D = (-\infty; 2)$
 c) $f(x) = -\frac{1}{4}x$, $D = (-8; 4)$
 d) $f(x) = \frac{1}{5}x$, $D = \langle -5; \infty \rangle$

Odp.: a) $ZW = \langle -2; 3 \rangle$, $f(0) = 0$, funkcja rosnąca, wartość najmniejsza: -2 dla $x = -6$, wartość największa: 3 dla $x = 9$, $f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie dla $m \in \langle -2; 3 \rangle$, nie ma rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2) \cup (3; \infty)$
 b) $ZW = (-\infty; 6)$, $f(0) = 0$, funkcja rosnąca, brak wartości najmniejszej, wartość największa: 6 dla $x = 2$, $f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie dla $m \in (-\infty; 6)$, nie ma rozwiązań dla $m \in (6; \infty)$
 c) $ZW = \langle -1; 2 \rangle$, $f(0) = 0$, funkcja malejąca, wartość najmniejsza: -1 dla $x = 4$, brak wartości największej, $f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie dla $m \in \langle -1; 2 \rangle$, nie ma rozwiązań dla $m \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$
 d) $ZW = \langle -1; \infty \rangle$, $f(0) = 0$, funkcja rosnąca, wartość najmniejsza: -1 dla $x = -5$, brak wartości największej, $f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie dla $m \in \langle -1; \infty \rangle$, nie ma rozwiązań dla $m \in (-\infty; -1)$

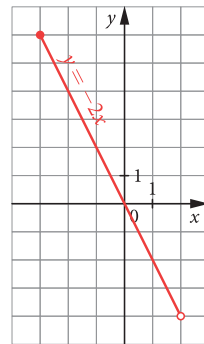
Przykład 10 ◀ zad. 1.15

Dziedziną funkcji $f(x) = -2x$ jest przedział $\langle -3; 2 \rangle$. Narysujemy wykres i opiszemy własności tej funkcji.

Rozwiązanie

Wykresem funkcji jest odcinek bez jednego końca.

- Zbiorem wartości f jest przedział $(-4; 6)$.
- Miejscem zerowym funkcji jest 0.
- Dla $x \in \langle -3; 0 \rangle$ funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla $x \in (0; 2)$ – wartości ujemne.
- Funkcja jest malejąca.
- Funkcja nie przyjmuje wartości najmniejszej, wartość największą równą 6 funkcja przyjmuje dla $x = -3$.
- Równanie $f(x) = m$ ma dokładnie jedno rozwiązanie dla $m \in (-4; 6)$, natomiast dla $m \leq -4$ oraz dla $m > 6$ nie ma rozwiązań.



Przykład 11 ◀ zad. 1.16

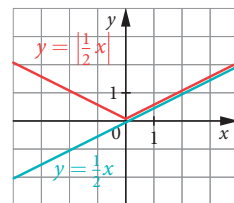
Narysujemy wykres funkcji $f(x) = \left| \frac{1}{2}x \right|$ i opiszemy jej własności.

Rozwiązanie

Jeżeli przyjmiemy, że $g(x) = \frac{1}{2}x$, to $f(x) = |g(x)|$. Zatem wykres funkcji f otrzymamy, odbijając symetrycznie względem osi x tę część prostej $y = \frac{1}{2}x$, która leży pod osią, i zachowując część tej prostej leżącą nad osią.

Wykresem funkcji f jest więc suma dwóch półprostych o wspólnym początku w punkcie $(0, 0)$.

- $D = \mathbf{R}$, $ZW = \langle 0; \infty \rangle$
- Miejscem zerowym funkcji jest 0.
- Dla $x \in \mathbf{R} - \{0\}$ funkcja przyjmuje wartości dodatnie. Funkcja nie przyjmuje wartości ujemnych.
- Funkcja nie jest monotoniczna, natomiast w przedziale $(-\infty; 0)$ jest malejąca, w przedziale $\langle 0; \infty \rangle$ jest rosnąca.
- Funkcja nie przyjmuje wartości największej, wartość najmniejszą równą 0 funkcja przyjmuje dla $x = 0$.
- Równanie $f(x) = m$ nie ma rozwiązań dla $m < 0$, ma dokładnie jedno rozwiązanie dla $m = 0$, ma dwa rozwiązania dla $m > 0$.



◀1.16. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest zbiór D . Narysuj wykres tej funkcji i na jego podstawie podaj: zbiór wartości, przedziały monotoniczności, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) oraz argumenty, dla których funkcja je przyjmuje.

- a) $f(x) = 2|x|$ $D = \mathbf{R}$ c) $f(x) = |x|$ $D = \langle -4; 6 \rangle$
 b) $f(x) = |x|$ $D = \mathbf{R} - \{0\}$ d) $f(x) = \left| \frac{1}{3}x \right|$ $D = (-9; 6)$

Odp.: a) $ZW = \langle 0; \infty \rangle$, malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$, rosnąca w przedziale $\langle 0; \infty \rangle$, brak wartości największej, wartość najmniejsza: 0 dla $x = 0$
 b) $ZW = (0; \infty)$, malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$, rosnąca w przedziale $\langle 0; \infty \rangle$, brak wartości największej, brak wartości najmniejszej
 c) $ZW = \langle 0; 6 \rangle$, malejąca w przedziale $\langle -4; 0 \rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 0; 6 \rangle$, wartość największa: 6 dla $x = 6$, wartość najmniejsza: 0 dla $x = 0$
 d) $ZW = \langle 0; 3 \rangle$, malejąca w przedziale $(-9; 0)$, rosnąca w przedziale $\langle 0; 6 \rangle$, brak wartości największej, wartość najmniejsza: 0 dla $x = 0$

Zadania

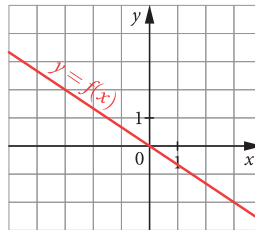
W każdym z zadań 1.1–1.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszyte.

1.1. Wyciąg narciarski może przetransportować na górę 10 osób w ciągu minuty. Zatem funkcja, która opisuje liczbę narciarzy przetransportowanych na górę w ciągu x minut, jest wyrażona za pomocą wzoru

A. $f(x) = \frac{1}{10}x$. B. $f(x) = 10x$. C. $f(x) = x + 10$. D. $f(x) = \frac{10}{x}$.

1.2. Na wykresie przedstawiono funkcję

A. $f(x) = \frac{2}{3}x$. C. $f(x) = -\frac{2}{3}x$.
B. $f(x) = \frac{3}{2}x$. D. $f(x) = -\frac{3}{2}x$.



1.3. Wskaż wartość m , dla której wykres funkcji $f(x) = (5m + 7)x$ przechodzi przez punkt $P = (1, -13)$.

A. $m = 4$ B. $m = \frac{7}{5}$ C. $m = 1$ D. $m = -4$

1.4. Podaj wzór wiążący wymienione wielkości wprost proporcjonalne. Zapisz ich współczynnik proporcjonalności.

- a) obwód y okręgu i promień r okręgu
b) długość y przekątnej kwadratu i obwód x kwadratu
c) droga s przebyta ze średnią prędkością 80 km/h i czas t podróży (w godzinach)

1.5. Wyznacz taką wartość współczynnika a , aby wykres funkcji $f(x) = ax$ przechodził przez podany punkt P .

a) $P = (3, -27)$ b) $P = (-7, -11)$ c) $P = (4, -2\pi)$ d) $P = (5, \sqrt{125})$

1.6. Punkt $M = \left(\log_{\frac{1}{2}}(4k), -2\right)$ należy do wykresu funkcji liniowej wyrażonej wzorem $f(x) = x$. Wyznacz wartość k .

1.7. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest zbiór liczb rzeczywistych. Naszkicuj wykres tej funkcji.

a) $f(x) = -3x$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x$ c) $f(x) = -\frac{4}{5}x$ d) $f(x) = -\frac{3}{7}x$

Odpowiedzi i rozwiązania

1.1. B

1.2. C

1.3. D

1.4. a) $y = 2\pi r$, 2π

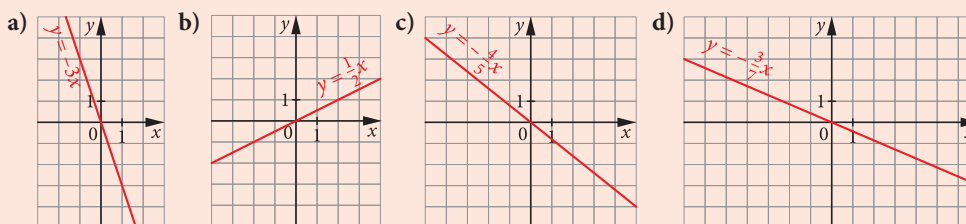
b) $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$ c) $s = 80t$, 80

1.5. a) $a = -9$ b) $a = \frac{11}{7}$

c) $a = -\frac{\pi}{2}$ d) $a = \sqrt{5}$

1.6. $k = 1$

1.7.



1.8. a) B i C b) D c) C i D
d) B, C i D

1.9. a) $m > \frac{1}{2}$ b) $m < \frac{2\sqrt{3}}{3}$
c) $m > 3\pi$ d) $m > 0,26$
e) $m > -\frac{9}{25}$ f) $m > -\frac{2}{3}$

1.10. a) $m < -\frac{2}{7}$ b) $m < -\sqrt{\frac{5}{3}}$
c) $m > \frac{8}{3}$ d) $m < 1,9$
e) $m < -\frac{27}{8}$ f) $m < -\frac{1}{4}$

1.11. a) malejąca dla $m > 9$,
rosnąca dla $m < 9$,
stała dla $m = 9$
b) malejąca dla $m < 4$,
rosnąca dla $m > 4$,
stała dla $m = 4$
c) malejąca dla $m > -2$,
rosnąca dla $m < -2$,
stała dla $m = -2$
d) malejąca dla $m \in (-3; 3)$,
rosnąca dla
 $m \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$,
stała dla $m \in \{-3, 3\}$
e) malejąca dla $m > 1$,
rosnąca dla $m < 1$,
stała dla $m = 1$
f) malejąca dla $m \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$,
stała dla $m \in \{-2, 2\}$

1.12. Wszystkie zdania są prawdziwe.

1.8. Punkt A należy do wykresu funkcji $f(x) = ax$. Sprawdź, które spośród punktów B, C, D również należą do wykresu tej funkcji.

- a) $A = (3, -6)$, $B = (-2, 4)$, $C = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$, $D = (-10, 5)$
b) $A = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$, $B = (-2, -1)$, $C = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{4}\right)$, $D = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{8}\right)$
c) $A = (-\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $B = (\sqrt{3}, -\sqrt{2})$, $C = (\sqrt{6}, -3)$, $D = (-6, 3\sqrt{6})$
d) $A = (2^{11}, 4^7)$, $B = (8^{-3}, 4^{-3})$, $C = \left(\left(\frac{1}{8}\right)^{17}, \left(\frac{1}{8}\right)^{16}\right)$, $D = \left((\sqrt{2})^{20}, (\sqrt[3]{2})^{39}\right)$

1.9. Wyznacz wartość m , dla której podana funkcja jest rosnąca.

- a) $f(x) = (2m - 1)x$ d) $f(x) = (5m - 1,3)x$
b) $f(x) = (2 - \sqrt{3}m)x$ e) $f(x) = (5^{-2} + 3^{-2}m)x$
c) $f(x) = (m - 3\pi)x$ f) $f(x) = \left(3m - \log_{\frac{1}{3}} 9\right)x$

1.10. Wyznacz wartość m , dla której podana funkcja jest malejąca.

- a) $f(x) = (7m + 2)x$ d) $f(x) = (m - 1,9)x$
b) $f(x) = (\sqrt{5} + \sqrt{3}m)x$ e) $f(x) = (2^{-3} + 3^{-3}m)x$
c) $f(x) = (8 - 3m)x$ f) $f(x) = \left(4m - \log_{\frac{1}{\pi}} \pi\right)x$

1.11. Dla jakich wartości parametru m funkcja $y = f(x)$ jest rosnąca, dla jakich malejąca, a dla jakich stała?

- a) $f(x) = -2(m - 9)x$ d) $f(x) = -5(3 - |m|)x$
b) $f(x) = (5m - 20)x$ e) $f(x) = ((m - 2)^2 - m^2)x$
c) $f(x) = -2\sqrt{3}(m + 2)x$ f) $f(x) = -\sqrt{3}|m^2 - 4|x$

1.12. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Funkcja $f(x) = -3x$ jest malejąca.

B. Funkcja $f(x) = -\frac{1}{3}x$ jest malejąca.

C. Wykresy funkcji $f(x) = -\frac{1}{3}x$ i $f(x) = \frac{1}{3}x$ są symetryczne względem osi y .

D. Wykresy funkcji $f(x) = -\frac{1}{3}x$ i $f(x) = \frac{1}{3}x$ są symetryczne względem osi x .

E. Wykresy funkcji $f(x) = -3x$ i $f(x) = 3x$ są symetryczne względem osi x .

F. Wykresy funkcji $f(x) = -3x$ i $f(x) = 3x$ są symetryczne względem osi y .

1.13. Zaznacz tę część płaszczyzny, której punkty należą do wykresów funkcji $y = ax$ dla współczynników a spełniających podany warunek.

- a) $a > 1$ c) $a \geq 1$ e) $-2 \leq a \leq 2$
b) $0 < a < 1$ d) $0 < a < 2$ f) $a \leq 1$ lub $a \geq 2$

1.14. Dla jakich argumentów funkcja $y = f(x)$ przyjmuje wartości mniejsze od k ?

- a) $f(x) = \sqrt{5}x$, $k = -3\sqrt{5}$ b) $f(x) = -9x$, $k = 27\pi$

1.15. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest zbiór D . Narysuj wykres tej funkcji i opisz jej własności.

- a) $f(x) = \frac{1}{3}x$ $D = \langle -6; 9 \rangle$ c) $f(x) = -\frac{1}{4}x$ $D = (-8; 4)$
b) $f(x) = 3x$ $D = (-\infty; 2)$ d) $f(x) = \frac{1}{5}x$ $D = \langle -5; \infty \rangle$

1.16. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest zbiór D . Narysuj wykres tej funkcji i na jego podstawie podaj: zbiór wartości, przedziały monotoniczności, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) oraz argumenty, dla których funkcja je przyjmuje.

- a) $f(x) = 2|x|$ $D = \mathbf{R}$ c) $f(x) = |x|$ $D = \langle -4; 6 \rangle$
b) $f(x) = |x|$ $D = \mathbf{R} - \{0\}$ d) $f(x) = \left|\frac{1}{3}x\right|$ $D = (-9; 6)$

Prosto do matury



1. Dana jest funkcja $f(x) = -\pi x$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Funkcja f jest malejąca.
B. Wykresy funkcji $f(x) = -\pi x$ i $f(x) = 3,14x$ są symetryczne względem osi x .
C. Dla $x > 1$ wartości funkcji są mniejsze od $-3,14$.

2. Zaznacz tę część płaszczyzny, której punkty należą do wykresów funkcji $y = ax$ dla współczynników a spełniających podwójną nierówność $-3 \leq a \leq \frac{1}{2}$.

3. Wyznacz taką wartość parametru m , aby wykres funkcji $f(x) = (0,5 - |3 - 2m|)x$ przechodził przez punkt $P = (-2, 9)$.

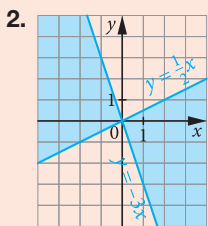
4. Dana jest funkcja $f(x) = -\frac{1}{2}x$ o dziedzinie $D = (-6; 5)$.

- a) Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$.
b) Podaj wartość największą i wartość najmniejszą funkcji $y = f(x)$ (o ile te wartości istnieją) oraz argumenty, dla których funkcja je przyjmuje.
c) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od 1?

5. Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = (|m - 1| - \sqrt{3})x$ jest malejąca?

Prosto do matury

1. P, F, F



3. $m = 4$ lub $m = -1$

4. b) brak wartości największej, wartość najmniejsza: $-\frac{5}{2}$ dla $x = 5$ c) $x \in (-6; -2)$

5. $m \in (-\sqrt{3} + 1; \sqrt{3} + 1)$

1.13. Patrz s. 339.

1.14. a) $x < -3$ **b)** $x > -3\pi$

1.15. a) $ZW = \langle -2; 3 \rangle$, $f(0) = 0$, funkcja rosnąca, wartość najmniejsza: -2 dla $x = -6$, wartość największa: 3 dla $x = 9$, $f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie dla $m \in \langle -2; 3 \rangle$, nie ma rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2) \cup (3; \infty)$

b) $ZW = (-\infty; 6)$, $f(0) = 0$, funkcja rosnąca, brak wartości najmniejszej, wartość największa: 6 dla $x = 2$, $f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie dla $m \in (-\infty; 6)$, nie ma rozwiązań dla $m \in (6; \infty)$

c) $ZW = \langle -1; 2 \rangle$, $f(0) = 0$, funkcja malejąca, wartość najmniejsza: -1 dla $x = 4$, brak wartości największej, $f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie dla $m \in \langle -1; 2 \rangle$, nie ma rozwiązań dla $m \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$

d) $ZW = \langle -1; \infty \rangle$, $f(0) = 0$, funkcja rosnąca, wartość najmniejsza: -1 dla $x = -5$, brak wartości największej, $f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie dla $m \in \langle -1; \infty \rangle$, nie ma rozwiązań dla $m \in (-\infty; -1)$

1.16. a) $ZW = \langle 0; \infty \rangle$, malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$, rosnąca w przedziale $(0; \infty)$, brak wartości największej, wartość najmniejsza: 0 dla $x = 0$

b) $ZW = (0; \infty)$, malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$, rosnąca w przedziale $(0; \infty)$, brak wartości największej, brak wartości najmniejszej

c) $ZW = \langle 0; 6 \rangle$, malejąca w przedziale $\langle -4; 0 \rangle$, rosnąca w przedziale $(0; 6)$, wartość największa: 6 dla $x = 6$, wartość najmniejsza: 0 dla $x = 0$

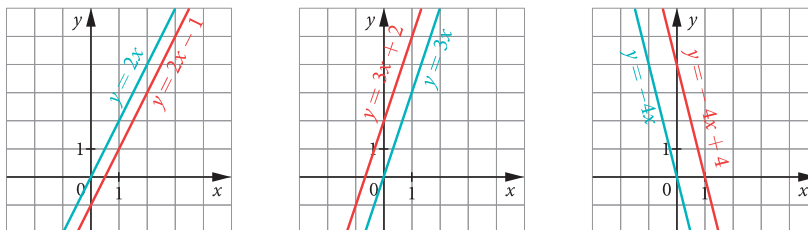
d) $ZW = \langle 0; 3 \rangle$, malejąca w przedziale $(-9; 0)$, rosnąca w przedziale $(0; 6)$, brak wartości największej, wartość najmniejsza: 0 dla $x = 0$

2. Funkcja liniowa i jej wykres

Umiejętności:

- rysowanie wykresu funkcji liniowej opisaną za pomocą wzoru
- wyznaczanie wzoru funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub jej wykresie
- interpretacja współczynników występujących we wzorze funkcji liniowej

Jeżeli wykres funkcji $y = ax$ przesuniemy o b jednostek wzdłuż osi y , czyli o wektor $[0, b]$, to otrzymamy wykres funkcji $f(x) = ax + b$.



Wykres funkcji $f(x) = ax + b$ przecina oś y w punkcie $(0, b)$.

Definicja

Funkcję postaci $f(x) = ax + b$, gdzie $x \in \mathbf{R}$, nazywamy **funkcją liniową**. Liczbę a nazywamy współczynnikiem kierunkowym tej funkcji.

Operacja dodania liczby (dodatniej lub ujemnej) do wartości funkcji nie zmienia monotoniczności tej funkcji. Wykres przesunie się równolegle wzdłuż osi y . W wypadku funkcji $f(x) = ax + b$ mamy zatem:

- dla $a < 0$ funkcja jest malejąca,
- dla $a = 0$ funkcja jest stała,
- dla $a > 0$ funkcja jest rosnąca.

Podsumowując – **funkcja liniowa jest funkcją monotoniczną**.

Ponadto jeśli:

- $a > 0$ i $b > 0$, to wykres przechodzi przez I, II i III ćwiartkę układu współrzędnych,
- $a > 0$ i $b < 0$, to wykres przechodzi przez I, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych,
- $a < 0$ i $b > 0$, to wykres przechodzi przez I, II i IV ćwiartkę układu współrzędnych,
- $a < 0$ i $b < 0$, to wykres przechodzi przez II, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych.

Interpretacja współczynników a i b we wzorze $f(x) = ax + b$ często pozwala na szybkie szkicowanie wykresów funkcji liniowych oraz na czynność odwrotną – odczytywanie wzoru funkcji liniowej na podstawie jej wykresu.

ZZ i MKP

tematy 5.1, 5.2

Multiteka

- Wykresy funkcji liniowych
- Monotoniczność funkcji liniowej
- Punkty przecięcia wykresu funkcji liniowej z osiami układu współrzędnych

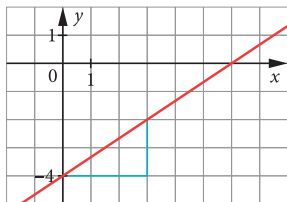
dlanauczyciela.pl | Kartkówka 4.2

Przykład 1 ◀ zad. 2.4

Naszkicujemy wykres funkcji liniowej $y = f(x)$.

Rozwiązanie

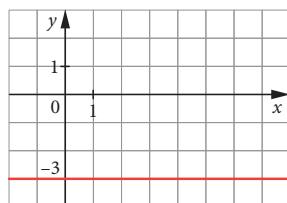
a) $f(x) = \frac{2}{3}x - 4$



Mówimy, że wykresem funkcji $y = ax + b$ jest prosta o równaniu $y = ax + b$.

- ← $a = \frac{2}{3}$: zmianie wielkości x o 3 jednostki odpowiada zmiana wielkości y o 2 jednostki
 ← $b = -4$: wykres przecina oś y w punkcie $(0, -4)$

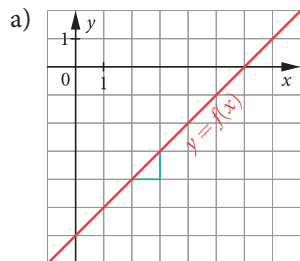
b) $f(x) = -3$



- ← $a = 0$: wykres jest prostą równoległą do osi x
 ← $b = -3$: wykres przecina oś y w punkcie $(0, -3)$

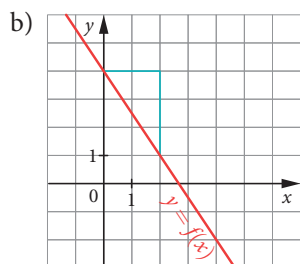
Przykład 2 ◀ zad. 2.5

Na podstawie wykresu funkcji liniowej wyznaczmy jej wzór.

Rozwiązanie

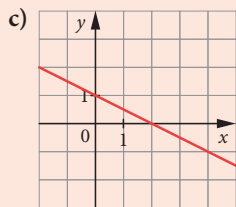
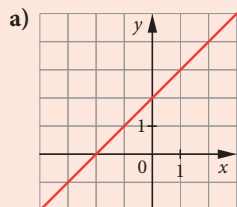
- ← zmianie wielkości x o 1 jednostkę odpowiada zmiana wielkości y o 1 jednostkę; $a = 1$
 ← wykres przecina oś y w punkcie $(0, -6)$; $b = -6$

Jest to wykres funkcji o wzorze $f(x) = x - 6$.



- ← zmianie wielkości x o 2 jednostki odpowiada zmiana wielkości y o -3 jednostki; $a = -\frac{3}{2}$
 ← wykres przecina oś y w punkcie $(0, 4)$; $b = 4$

Jest to wykres funkcji o wzorze $f(x) = -\frac{3}{2}x + 4$.

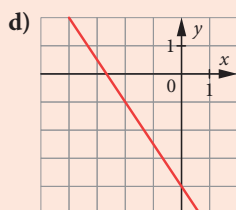
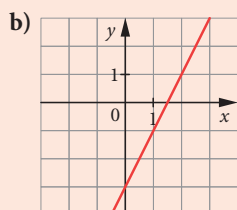
◀ 2.5. Podaj wzór funkcji f przedstawionej na wykresie.

Odp.: a) $f(x) = x + 2$

b) $f(x) = 2x - 3$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

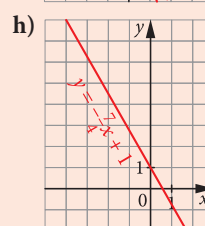
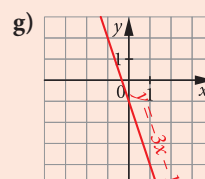
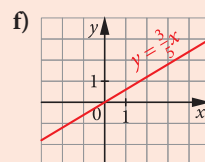
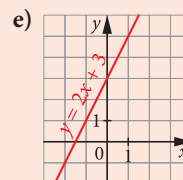
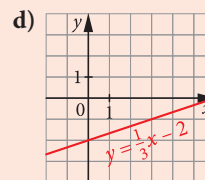
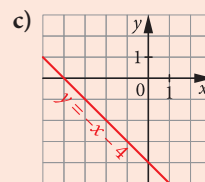
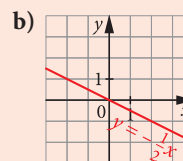
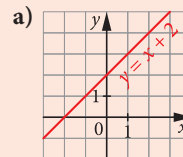
d) $f(x) = -\frac{3}{2}x - 4$



◀ 2.4. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$, wykorzystując interpretację graficzną jej współczynników.

- a) $y = x + 2$ e) $y = 2x + 3$
 b) $y = -\frac{1}{2}x$ f) $y = \frac{3}{5}x$
 c) $y = -x - 4$ g) $y = -3x - 1$
 d) $y = \frac{1}{3}x - 2$ h) $y = -\frac{7}{4}x + 1$

Odp.:



◀ 2.7. Wyznacz miejsce zerowe funkcji $y = f(x)$.

- a) $f(x) = 5x - 2$
 b) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$
 c) $f(x) = x - \sqrt{2}$
 d) $f(x) = \sqrt{2}x$
 e) $f(x) = -4$
 f) $f(x) = \sqrt{3}x - 3$

Odp.: a) $x = \frac{2}{5}$ b) $x = 3$

- c) $x = \sqrt{2}$ d) $x = 0$
 e) brak miejsc zerowych
 f) $x = \sqrt{3}$

◀ 2.9. Wyznacz punkty przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych.

- a) $f(x) = 3x - 6$
 b) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$
 c) $f(x) = -7x$
 d) $f(x) = -\sqrt{5}x + \frac{\sqrt{5}}{10}$
 e) $f(x) = 0$
 f) $f(x) = 2x - 1,6$
 Odp.: a) $(2, 0), (0, -6)$
 b) $(-7, 0), (0, 3\frac{1}{2})$
 c) $(0, 0)$
 d) $(\frac{1}{10}, 0), (0, \frac{\sqrt{5}}{10})$
 e) Wykres pokrywa się z osią x .
 f) $(\frac{4}{5}, 0), (0, -1\frac{3}{5})$

Wyznamy miejsca zerowe funkcji $f(x) = ax + b$.

$$ax + b = 0$$

← rozwiązujemy równanie $f(x) = 0$

$$ax = -b$$

Jeżeli $a \neq 0$, to równanie ma jedno rozwiązanie postaci $x = -\frac{b}{a}$.

Jeżeli $a = 0$ i $b = 0$, to rozwiązaniem równania jest każda liczba rzeczywista.

Jeżeli $a = 0$ i $b \neq 0$, to równanie nie ma rozwiązań.

Wniosek

Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$, gdzie $x \in \mathbf{R}$, ma albo jedno miejsce zerowe (gdy $a \neq 0$), albo nieskończenie wiele miejsc zerowych (gdy $a = 0$ i $b = 0$), albo nie ma miejsc zerowych (gdy $a = 0$ i $b \neq 0$).

Przykład 3 ◀ zad. 2.7

Wyznamy miejsca zerowe funkcji $y = f(x)$.

Rozwiązanie

a) $f(x) = x + 4$
 $x + 4 = 0$

Odp.: $x = -4$

b) $f(x) = -2x + 5$
 $-2x + 5 = 0$

Odp.: $x = \frac{5}{2}$

c) $f(x) = 0$

Odp.: Każda liczba rzeczywista jest miejscem zerowym tej funkcji.

d) $f(x) = 3$

Odp.: Ta funkcja nie ma miejsc zerowych.

Przykład 4 ◀ zad. 2.9

Wyznamy punkty przecięcia wykresu funkcji $y = -\frac{1}{2}x + 3$ z osiami układu współrzędnych.

Rozwiązanie

Punkt przecięcia z osią y (czyli dla $x = 0$).

$$A = (0, 3)$$

← dla $x = 0$ wartość $y = 3$

Punkt przecięcia z osią x (czyli dla $y = 0$).

$$0 = -\frac{1}{2}x + 3$$

← rozwiązujemy równanie $y = 0$

$$x = 6, \text{ zatem szukany punkt to } B = (6, 0).$$

Odp.: Wykres funkcji $y = -\frac{1}{2}x + 3$ przecina osie układu współrzędnych w punktach $A = (0, 3)$ i $B = (6, 0)$.

Przykład 5 ◀ zad. 2.10

Narysujemy wykres i opiszemy własności funkcji $f(x) = -2x + 6$.

Rozwiązanie

Najpierw znajdziemy punkty przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych:

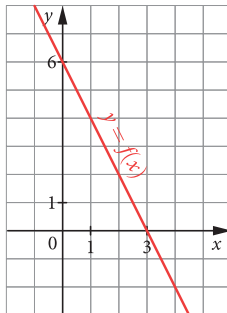
z osią y : punkt $(0, 6)$

z osią x : punkt $(3, 0)$

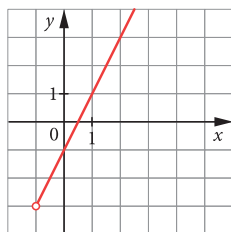
← rozwiązanie równania $0 = -2x + 6$

Własności tej funkcji odczytujemy z wykresu.

- $D = \mathbf{R}$
- $ZW = \mathbf{R}$
- Miejscem zerowym funkcji jest $x = 3$.
- Funkcja jest malejąca.
- Dla $x \in (-\infty; 3)$ funkcja przyjmuje wartości dodatnie.
- Dla $x \in (3; \infty)$ funkcja przyjmuje wartości ujemne.

**Przykład 6** ◀ zad. 2.11

Narysujemy wykres funkcji $f(x) = 2x - 1$ o dziedzinie $D = (-1; \infty)$.

Rozwiązanie

← punkt $(-1, -3)$ nie należy do wykresu

Wykresem funkcji jest półprosta bez punktu początkowego.

Przykład 7 ◀ zad. 2.12

Dla jakiego argumentu x funkcja o wzorze $f(x) = \frac{1}{2}x - 5$ przyjmuje wartość -2 ?

Rozwiązanie

$$\frac{1}{2}x - 5 = -2$$

← rozwiązujemy równanie $f(x) = -2$

$$\frac{1}{2}x = 3$$

$$x = 6$$

Odp.: Funkcja f przyjmuje wartość -2 dla $x = 6$.

◀2.10. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$ i opisz jej własności.

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$

b) $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$

c) $f(x) = 3x - 2$

d) $f(x) = 4$

Odp.: a) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \mathbf{R}$,

miejsce zerowe: $x = 6$,

funkcja malejąca,

$f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 6)$,

$f(x) < 0$ dla $x \in (6; \infty)$

b) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \mathbf{R}$,

miejsce zerowe: $x = 10$,

funkcja rosnąca,

$f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; 10)$,

$f(x) > 0$ dla $x \in (10; \infty)$

c) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \mathbf{R}$,

miejsce zerowe: $x = \frac{2}{3}$,

funkcja rosnąca,

$f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; \frac{2}{3})$,

$f(x) > 0$ dla $x \in (\frac{2}{3}; \infty)$

d) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \{4\}$,

brak miejsc zerowych,

funkcja stała,

$f(x) = 4$ dla $x \in \mathbf{R}$

◀2.12. Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = -2x + 1$ przyjmuje wartości: $-1, 0, 3, -2$?

Odp.: $f(1) = -1$, $f(\frac{1}{2}) = 0$,

$f(-1) = 3$, $f(\frac{3}{2}) = -2$

◀2.11. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$ o podanym wzorze i dziedzinie D .

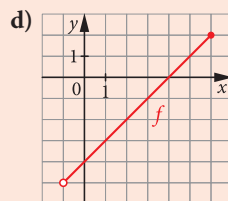
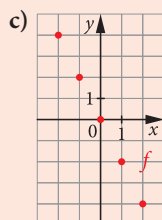
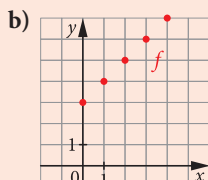
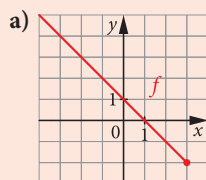
a) $f(x) = -x + 1$, $D = (-\infty; 3)$

b) $f(x) = x + 3$, $D = \mathbf{N}$

c) $f(x) = -2x$, $D = \mathbf{Z}$

d) $f(x) = x - 4$, $D = (-1; 6)$

Odp.:



◀2.13. Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = 6x + 11$ przyjmuje wartości większe od -7 ?

Odp.: $x > -3$

◀2.16. Sprawdź, które z podanych punktów należą do wykresu danej funkcji.

a) $f(x) = 3x - 4$, $A = (1, 0)$,
 $B = (-2, -5)$, $C = (2, 2)$,
 $D = (0, -4)$

b) $f(x) = -\sqrt{3}x + 2$,
 $A = (\sqrt{3}, -1)$, $B = (0, 2)$,
 $C = (-1, 3)$, $D = (1, 2 - \sqrt{3})$

Odp.: a) C, D b) A, B, D

◀2.17. Dla jakich wartości m punkt A leży na prostej l ?

a) $A = (m, 2m)$, $l: y = 5x + 3$
 b) $A = (m + 1, 13)$, $l: y = 7x - 1$
 c) $A = (m - 2, m - 1)$,
 $l: y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

d) $A = (2, -2)$, $l: y = (m - 3)x + 4$

Odp.: a) $m = -1$ b) $m = 1$

c) $m = 3$ d) $m = 0$

Przykład 8 ◀ zad. 2.13

Dla jakich argumentów x funkcja $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ przyjmuje wartości większe od 3?

Rozwiązanie

$$-\frac{1}{2}x + 2 > 3$$

← rozwiązujemy nierówność $g(x) > 3$

$$-\frac{1}{2}x > 1$$

$$x < -2$$

Odp.: Wartości funkcji g są większe od 3 dla $x < -2$.

Przykład 9 ◀ zad. 2.16

Sprawdźmy, czy punkty $A = (\sqrt{2}, 1)$ oraz $B = (3, 2\sqrt{2})$ należą do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{2}x - 1$.

Rozwiązanie

Punkt należy do wykresu funkcji, jeżeli jego współrzędne spełniają wzór tej funkcji.

$$f(x) = \sqrt{2}x - 1, \quad A = (\sqrt{2}, 1)$$

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 1$$

← w miejsce x we wzorze funkcji podstawiamy $\sqrt{2}$

$$f(\sqrt{2}) = 2 - 1 = 1$$

← jest to druga współrzędna punktu A

Odp.: Punkt A należy do wykresu funkcji f .

$$f(x) = \sqrt{2}x - 1, \quad B = (3, 2\sqrt{2})$$

$$f(3) = \sqrt{2} \cdot 3 - 1$$

$$f(3) = 3\sqrt{2} - 1 \neq 2\sqrt{2}$$

Odp.: Punkt B nie należy do wykresu funkcji f .

Przykład 10 ◀ zad. 2.17

Sprawdźmy, dla jakich wartości m punkt $A = (m - 1, 2m - 5)$ leży na prostej o równaniu $y = 3x - 7$.

Rozwiązanie

$$2m - 5 = 3(m - 1) - 7$$

← współrzędne punktu A mają spełniać równanie prostej

$$2m - 3m = 5 - 3 - 7$$

$$-m = -5, \text{ czyli } m = 5$$

Odp.: Punkt A leży na prostej o równaniu $y = 3x - 7$, gdy $m = 5$.

Przykład 11 ◀ zad. 2.23

Wyznamy wszystkie wartości parametru m , dla których wykres funkcji liniowej $f(x) = (m-2)x + m + 7$ przechodzi przez I, II i IV ćwiartkę układu współrzędnych.

Rozwiązanie

Warunek zadania będzie spełniony, gdy współczynniki spełnią układ nierówności:

$$\begin{cases} m-2 < 0 & \leftarrow \text{współczynnik kierunkowy ujemny} \\ m+7 > 0 & \leftarrow \text{wykres przecina oś } y \text{ powyżej punktu } (0, 0) \\ m < 2 \\ m > -7 \end{cases}$$

Odp.: $m \in (-7; 2)$

Przykład 12 ◀ zad. 2.25

Wyznamy wszystkie wartości parametru k , dla których funkcja liniowa $f(x) = (4-3k)x - 1 + k$ jest rosnąca, a jej wykres przecina oś y poniżej punktu $M = (0, -3)$.

Rozwiązanie

Warunki zadania będą spełnione, gdy współczynniki spełnią układ nierówności:

$$\begin{cases} 4-3k > 0 & \leftarrow \text{współczynnik kierunkowy dodatni} \\ -1+k < -3 & \leftarrow \text{wykres przecina oś } y \text{ poniżej punktu } (0, -3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3k > -4 \\ k < -2 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} k < \frac{4}{3} \\ k < -2 \end{cases}$$

Odp.: $k \in (-\infty; -2)$

Przykład 13 ◀ zad. 2.28

Narysujemy wykres funkcji $f(x) = |x-1| - 4$ i podamy zbiór jej wartości.

Rozwiązanie

Rysujemy kolejne wykresy.

Krok 1: $g(x) = x - 1$

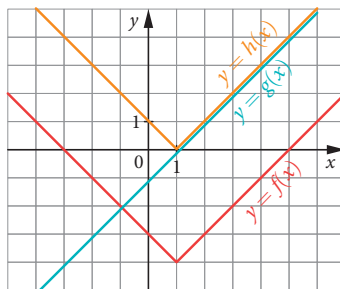
(przesunięcie równoległe prostej $y = x$ o wektor $[0, -1]$)

Krok 2: $h(x) = |g(x)| = |x - 1|$

(symetria części wykresu g leżących pod osią x względem tej osi)

Krok 3: $f(x) = h(x) - 4 = |x - 1| - 4$

(przesunięcie wykresu h o wektor $[0, -4]$)



Odp.: $ZW = \langle -4; \infty \rangle$

◀ 2.23. Wyznamy wszystkie wartości parametru m , dla których wykres funkcji liniowej $f(x) = (m-2)x - 2(m+1)$ przechodzi przez II, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych.

Odp.: $m-2 < 0$ i $-2(m+1) < 0$, więc $m \in (-1; 2)$

◀ 2.25. Wyznamy wszystkie wartości parametru k , dla których funkcja liniowa $f(x) = (1-k)x - k + 5$ jest malejąca, a jej wykres przecina oś y powyżej punktu $A = (0, -2)$.

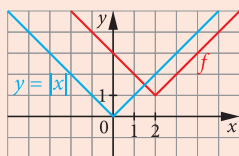
Odp.: $1-k < 0$ i $-k+5 > -2$, więc $k \in (1; 7)$

◀ 2.28. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$ i na jego podstawie określ zbiór wartości funkcji.

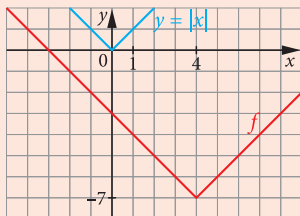
- $f(x) = |x-2| + 1$
- $f(x) = |x+5| + 2$
- $f(x) = |x-4| - 7$
- $f(x) = 2|x-3| - 4$
- $f(x) = |3x+6| + 1$
- $f(x) = \left|\frac{1}{2}x - 1\right| - 3$

2.28. Odp.:

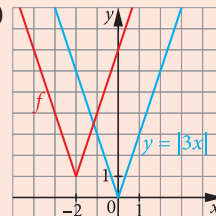
a) $ZW = \langle 1; \infty \rangle$



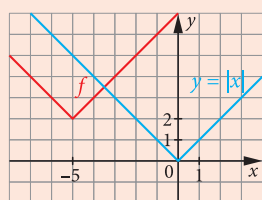
c) $ZW = \langle -7; \infty \rangle$



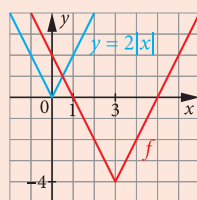
e) $ZW = \langle 1; \infty \rangle$



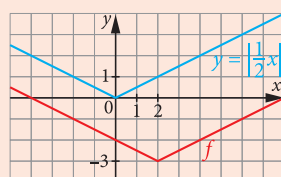
b) $ZW = \langle 2; \infty \rangle$



d) $ZW = \langle -4; \infty \rangle$



f) $ZW = \langle -3; \infty \rangle$



◀ 2.29. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$ i na jego podstawie podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$, gdzie $m \in \mathbb{R}$.

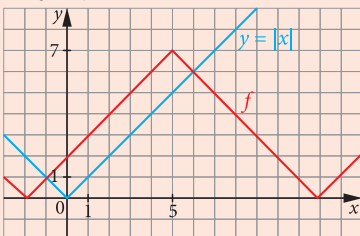
a) $f(x) = ||x - 5| - 7|$

b) $f(x) = ||x - 7| - 2|$

c) $f(x) = |2x + 6| - 6|$

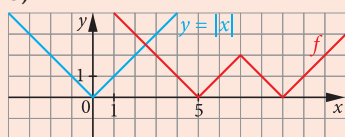
d) $f(x) = \left| \frac{1}{3}x - 2 \right| - 5$

Odp.: a)



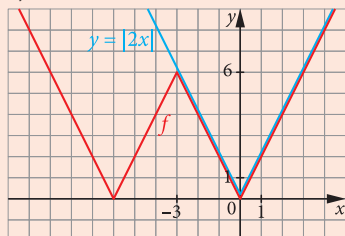
0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$,
2 rozwiązania dla $m \in \{0\} \cup (7; \infty)$,
3 rozwiązania dla $m = 7$,
4 rozwiązania dla $m \in (0; 7)$

b)



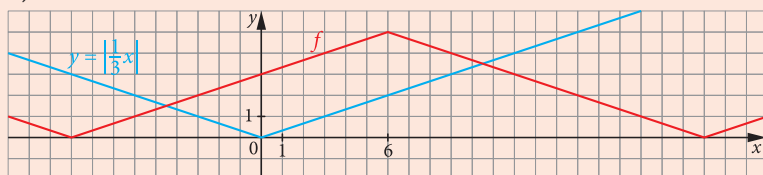
0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$,
2 rozwiązania dla $m \in \{0\} \cup (2; \infty)$,
3 rozwiązania dla $m = 2$,
4 rozwiązania dla $m \in (0; 2)$

c)



0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$,
2 rozwiązania dla $m \in \{0\} \cup (6; \infty)$,
3 rozwiązania dla $m = 6$,
4 rozwiązania dla $m \in (0; 6)$

d)



0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$,
2 rozwiązania dla $m \in \{0\} \cup (5; \infty)$,
3 rozwiązania dla $m = 5$,
4 rozwiązania dla $m \in (0; 5)$

Przykład 14 ◀ zad. 2.29

Narysujemy wykres funkcji $f(x) = ||x + 2| - 3|$ i na jego podstawie podamy liczbę rozwiązań równania $f(x) = k$, gdzie $k \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie

Rysujemy kolejne wykresy.

Krok 1: $g(x) = x + 2$

← przesunięcie równoległe prostej $y = x$ o wektor $[0, 2]$

Krok 2: $h(x) = |g(x)| = |x + 2|$

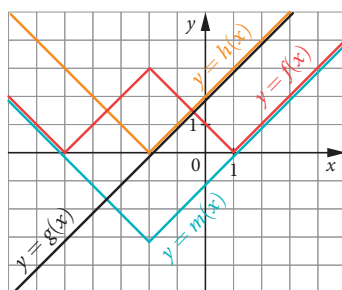
← symetria części wykresu g leżących poniżej osi x względem tej osi

Krok 3: $m(x) = h(x) - 3 = |x + 2| - 3$

← przesunięcie wykresu h o wektor $[0, -3]$

Krok 4: $f(x) = |m(x)| = ||x + 2| - 3|$

← symetria części wykresu m leżących poniżej osi x względem tej osi



Wartość k	Liczba rozwiązań równania $f(x) = k$
$k \in (-\infty; 0)$	0
$k = 0$	2
$k \in (0; 3)$	4
$k = 3$	3
$k \in (3; \infty)$	2

Zadania

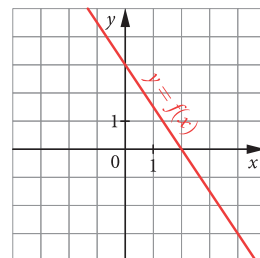
W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

2.1. Wskaż punkt, w którym wykres funkcji $f(x) = -2x + 5$ przecina oś y .

- A. (0, -5) B. (0, -2) C. (0, 2) D. (0, 5)

2.2. Wskaż wzór funkcji, której wykres przedstawiony jest na rysunku.

- A. $f(x) = \frac{2}{3}x + 3$
B. $f(x) = -\frac{2}{3}x + 3$
C. $f(x) = \frac{3}{2}x + 3$
D. $f(x) = -\frac{3}{2}x + 3$



Odpowiedzi i rozwiązania

2.1. D

2.2. D

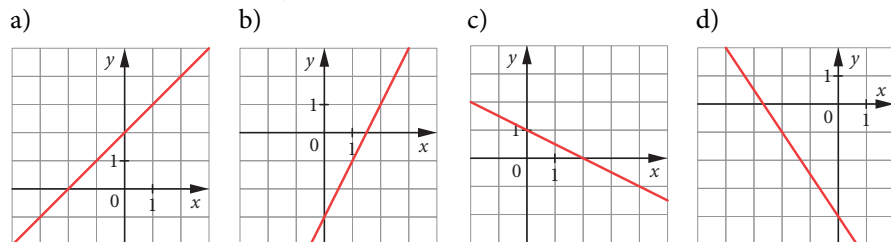
2.3. Wskaż miejsce zerowe funkcji $f(x) = 12x + 3$.

- A. -3 B. $-\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{4}$ D. 3

2.4. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$, wykorzystując interpretację graficzną jej współczynników.

- a) $y = x + 2$ c) $y = -x - 4$ e) $y = 2x + 3$ g) $y = -3x - 1$
 b) $y = -\frac{1}{2}x$ d) $y = \frac{1}{3}x - 2$ f) $y = \frac{3}{5}x$ h) $y = -\frac{7}{4}x + 1$

2.5. Podaj wzór funkcji f przedstawionej na wykresie.



2.6. Zaznacz tę część płaszczyzny, której punkty należą do wykresów funkcji $y = -x + b$ dla współczynników b spełniających podany warunek.

- a) $b \geq 1$ b) $-2 \leq b \leq 2$ c) $|b| \geq 3$ d) $|b - 2| \leq \frac{1}{2}$

2.7. Wyznacz miejsce zerowe funkcji $y = f(x)$.

- a) $f(x) = 5x - 2$ c) $f(x) = x - \sqrt{2}$ e) $f(x) = -4$
 b) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$ d) $f(x) = \sqrt{2}x$ f) $f(x) = \sqrt{3}x - 3$

2.8. Wyznacz miejsca zerowe funkcji $y = f(x)$.

- a) $f(x) = |x + 5|$ c) $f(x) = |3x - 4| + \sqrt{2}$ e) $f(x) = |x + 4| - 7$
 b) $f(x) = |2x - 6|$ d) $f(x) = |x - 1| - 4$ f) $f(x) = |2x - 1| - 5$

2.9. Wyznacz punkty przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych.

- a) $f(x) = 3x - 6$ c) $f(x) = -7x$ e) $f(x) = 0$
 b) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$ d) $f(x) = -\sqrt{5}x + \frac{\sqrt{5}}{10}$ f) $f(x) = 2x - 1,6$

2.10. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$ i opisz jej własności.

- a) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$ c) $f(x) = 3x - 2$
 b) $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$ d) $f(x) = 4$

2.9.

- a) $(2, 0), (0, -6)$ c) $(0, 0)$ e) Wykres pokrywa się z osią x .
 b) $(-7, 0), (0, 3\frac{1}{2})$ d) $(\frac{1}{10}, 0), (0, \frac{\sqrt{5}}{10})$ f) $(\frac{4}{5}, 0), (0, -1\frac{3}{5})$

2.10. a) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \mathbf{R}$, miejsce zerowe: $x = 6$, funkcja malejąca, $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 6)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (6; \infty)$

b) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \mathbf{R}$, miejsce zerowe: $x = 10$, funkcja rosnąca, $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; 10)$, $f(x) > 0$ dla $x \in (10; \infty)$

c) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \mathbf{R}$, miejsce zerowe: $x = \frac{2}{3}$, funkcja rosnąca, $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; \frac{2}{3})$, $f(x) > 0$ dla $x \in (\frac{2}{3}; \infty)$

d) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \{4\}$, brak miejsc zerowych, funkcja stała, $f(x) = 4$ dla $x \in \mathbf{R}$

2.3. B

2.4. Patrz s. 345.

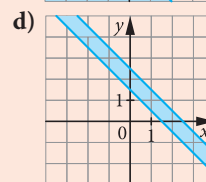
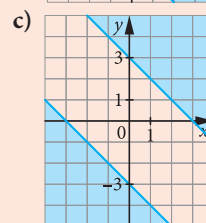
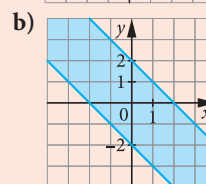
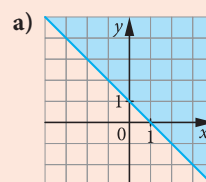
2.5. a) $f(x) = x + 2$

b) $f(x) = 2x - 3$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

d) $f(x) = -\frac{3}{2}x - 4$

2.6.



2.7. a) $x = \frac{2}{5}$ **b)** $x = 3$

c) $x = \sqrt{2}$ **d)** $x = 0$

e) brak miejsc zerowych

f) $x = \sqrt{3}$

2.8. a) $x = -5$ **b)** $x = 3$

c) brak miejsc zerowych

d) $x = -3$, $x = 5$

e) $x = -11$, $x = 3$

f) $x = -2$, $x = 3$

2.12. $f(1) = -1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$,

$f(-1) = 3$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = -2$

2.13. $x > -3$

2.14. $x \leq 4\frac{2}{3}$

2.15. $x < 2$

2.16. a) C, D b) A, B, D

2.17. a) $m = -1$ b) $m = 1$

c) $m = 3$ d) $m = 0$

2.18. $m = -3$

2.19. a) $m = -1$, $f(x) = -3x + 8$

b) $m = -\frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{2}{5}x + 4$

c) $m = \frac{1}{2}$, $f(x) = 5x + 11$

d) $m = 3$, $f(x) = -2x - 9$

2.20. $k = 8$

2.11. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$ o podanym wzorze i dziedzinie D .

a) $f(x) = -x + 1$ $D = (-\infty; 3]$

b) $f(x) = x + 3$ $D = \mathbf{N}$

c) $f(x) = -2x$ $D = \mathbf{Z}$

d) $f(x) = x - 4$ $D = (-1; 6)$

2.12. Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = -2x + 1$ przyjmuje wartości: $-1, 0, 3, -2$?

2.13. Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = 6x + 11$ przyjmuje wartości większe od -7 ?

2.14. Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = -\frac{3}{7}x + 2$ przyjmuje wartości nieujemne?

2.15. Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = 2\sqrt{5}x - 3\sqrt{5}$ przyjmuje wartości mniejsze od $\sqrt{5}$?

2.16. Sprawdź, które z podanych punktów należą do wykresu danej funkcji.

a) $f(x) = 3x - 4$ $A = (1, 0)$, $B = (-2, -5)$, $C = (2, 2)$, $D = (0, -4)$

b) $f(x) = -\sqrt{3}x + 2$ $A = (\sqrt{3}, -1)$, $B = (0, 2)$, $C = (-1, 3)$, $D = (1, 2 - \sqrt{3})$

2.17. Dla jakich wartości m punkt A leży na prostej l ?

a) $A = (m, 2m)$ $l: y = 5x + 3$

b) $A = (m + 1, 13)$ $l: y = 7x - 1$

c) $A = (m - 2, m - 1)$ $l: y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

d) $A = (2, -2)$ $l: y = (m - 3)x + 4$

Zapis $l: y = 5x + 3$ czytamy „prosta l o równaniu $y = 5x + 3$ ”.

2.18. Wyznacz taką wartość parametru m , aby wykres funkcji $f(x) = mx + 3$ przechodził przez punkt $(2, -3)$.

2.19. Wyznacz wartość parametru m tak, aby do wykresu funkcji $y = f(x)$ należał punkt A . Dla obliczonego m napisz wzór funkcji.

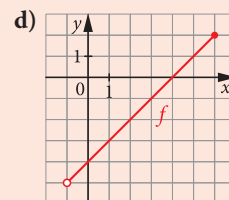
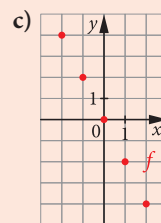
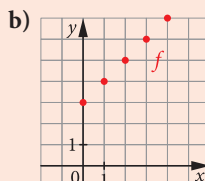
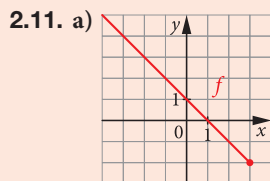
a) $f(x) = 3mx - m + 7$ $A = (3, -1)$

b) $f(x) = \frac{2}{5}x - (2m - 3)$ $A = \left(2\frac{1}{2}, 5\right)$

c) $f(x) = (7 - 4m)x + 11$ $A = (-2, 1)$

d) $f(x) = 3\left(2 - 1\frac{2}{3}m\right) - 2x$ $A = (-2, -5)$

2.20. Wyznacz taką wartość k , aby miejscem zerowym funkcji $f(x) = 2x + k$ była liczba -4 .



2.21. Narysuj wykres funkcji $y = -3x + 5$.

- Wyznacz miejsce zerowe tej funkcji.
- Sprawdź rachunkowo, czy punkty $A = (1, 2)$ i $B = (-3, -4)$ należą do wykresu tej funkcji.
- Czy funkcja ta jest rosnąca, malejąca czy stała?

2.22. Dana jest funkcja $y = \frac{5}{4}x - 2$.

- Wyznacz miejsce zerowe tej funkcji.
- Jaką wartość przyjmuje ta funkcja dla argumentu $\frac{4\sqrt{2} + 8}{5}$?
- Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości nie mniejsze od 8?

2.23. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których wykres funkcji liniowej $f(x) = (m - 2)x - 2(m + 1)$ przechodzi przez II, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych.

2.24. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których wykres funkcji liniowej $f(x) = \left(1 - 2\frac{1}{2}m\right)x + m + 5$ przechodzi przez I, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych.

2.25. Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których funkcja liniowa $f(x) = (1 - k)x - k + 5$ jest malejąca, a jej wykres przecina oś y powyżej punktu $A = (0, -2)$.

2.26. Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których funkcja liniowa $f(x) = (6 - k) - 2(k - 1)x$ jest rosnąca, a jej wykres przecina oś y powyżej punktu $K = (0, 7)$.

2.27. Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których funkcja liniowa $f(x) = (1 - 2k)x - (3k - 2)$ jest malejąca, a jej wykres przecina oś y poniżej punktu $M = (0, -1)$.

2.28. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$ i na jego podstawie określ zbiór wartości funkcji.

- $f(x) = |x - 2| + 1$
- $f(x) = |x + 5| + 2$
- $f(x) = |x - 4| - 7$
- $f(x) = 2|x - 3| - 4$
- $f(x) = |3x + 6| + 1$
- $f(x) = \left|\frac{1}{2}x - 1\right| - 3$

2.21. a) $x = \frac{5}{3}$

- A należy, B nie należy
- malejąca

2.22. a) $x = 1,6$

- $\sqrt{2}$
- $x \geq 8$

2.23. $m - 2 < 0$ i $-2(m + 1) < 0$,
więc $m \in (-1; 2)$

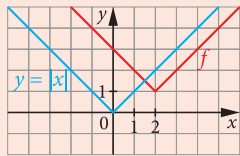
2.24. $m \in (-\infty; -5)$

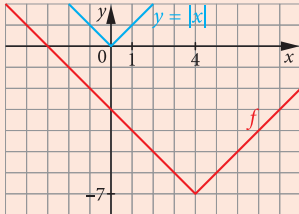
2.25. $1 - k < 0$ i $-k + 5 > -2$,
więc $k \in (1; 7)$

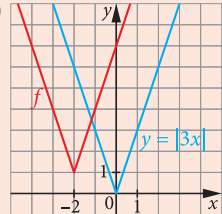
2.26. $k \in (-\infty; -1)$

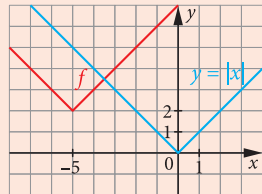
2.27. $1 - 2k < 0$ i $-(3k - 2) < -1$,
więc $k \in (1; \infty)$

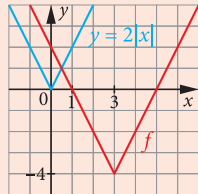
2.28.

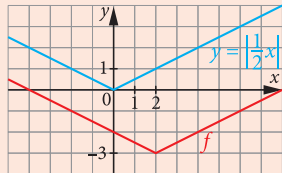
a)  $ZW = \{1; \infty\}$

c)  $ZW = \{-7; \infty\}$

e)  $ZW = \{1; \infty\}$

b)  $ZW = \{2; \infty\}$

d)  $ZW = \{-4; \infty\}$

f)  $ZW = \{-3; \infty\}$

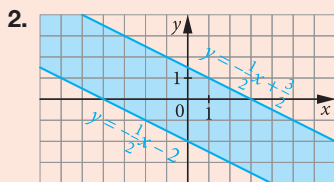
2.29. Patrz s. 350.

2.30. Wykres funkcji $y = f(x)$ pokrywa się z osią x , jeśli współczynnik kierunkowy prostej i wyraz wolny są równe 0.

- a) $m = -7$ lub $m = 7$
 b) $m = -4$
 c) $m = 3$
 d) Nie ma takiego m .

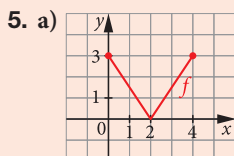
Prosto do matury

1. F, F, P



3. a) $x = \frac{3}{2}$ b) -6 c) $x < -1$

4. $(-3, 0), (0, -1), (1, 0), (13, 0), (17, 0)$



- b) tak, wartość 3 dla $x = 0$ oraz $x = 4$
 c) tak, wartość 0 dla $x = 2$

2.29. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$ i na jego podstawie podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$, gdzie $m \in \mathbb{R}$.

a) $f(x) = ||x - 5| - 7|$

c) $f(x) = ||2x + 6| - 6|$

b) $f(x) = ||x - 7| - 2|$

d) $f(x) = \left| \left| \frac{1}{3}x - 2 \right| - 5 \right|$

* 2.30. Dla jakich wartości m wykres funkcji $y = f(x)$ pokrywa się z osią x ?

a) $f(x) = (7 - |m|)x$

c) $f(x) = -2(m^2 - 9)x + m - 3$

b) $f(x) = (m^2 - 16)x - m - 4$

d) $f(x) = (|m| - 9)x + m - 3$

Prosto do matury



1. Dana jest funkcja $f(x) = 12x + 3$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Funkcja f jest malejąca.

B. Funkcja f przyjmuje wartości nieujemne dla $x \leq -\frac{1}{4}$.

C. Wykres funkcji f przecina oś y w punkcie $(0, 3)$.

2. Zaznacz tę część płaszczyzny, której punkty należą do wykresów funkcji

$$y = -\frac{1}{2}x + b \text{ dla współczynników } b \text{ spełniających podwójną nierówność } -2 \leq b \leq \frac{3}{2}.$$

3. Dana jest funkcja $g(x) = -2x + 3$.

a) Znajdź miejsce zerowe funkcji g .

b) Jaka jest wartość funkcji g dla $x = 4\frac{1}{2}$?

c) Dla jakich argumentów funkcja g przyjmuje wartości większe od 5?

4. Wyznacz punkty przecięcia wykresu funkcji $f(x) = ||x - 7| - 8| - 2$ z osiami układu współrzędnych.

5. Dziedziną funkcji $f(x) = \left| \frac{3}{2}x - 3 \right|$ jest przedział $(0; 4)$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f .

b) Czy funkcja przyjmuje wartość największą? Jeśli tak, podaj tę wartość oraz argumenty, dla których funkcja ją przyjmuje.

c) Czy funkcja przyjmuje wartość najmniejszą? Jeśli tak, podaj tę wartość oraz argumenty, dla których funkcja ją przyjmuje.

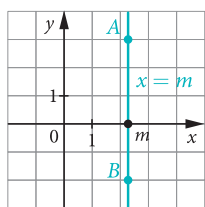
3. Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

Umiejętności:

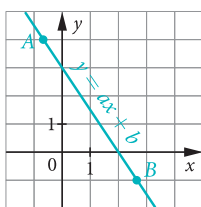
- wyznaczanie równania prostej przechodzącej przez dwa dane punkty
- wykorzystywanie własności funkcji liniowej do interpretacji zagadnień osadzonych w kontekście praktycznym

Przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta. Na płaszczyźnie z układem współrzędnych rozpatrzmy dwa przypadki.

I. Punkty wyznaczają prostą, która **jest prostopadła do osi x** . Taka prosta nie jest wykresem żadnej funkcji, a jej równanie ma postać $x = m$.



II. Punkty wyznaczają prostą, która **nie jest prostopadła do osi x** . Taka prosta jest wykresem pewnej funkcji liniowej, a jej równanie ma postać $y = ax + b$.



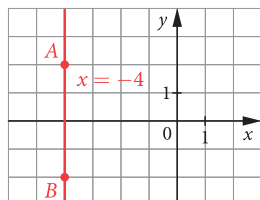
Równanie postaci $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej**.

Przykład 1 ◀ zad. 3.4

Wyznamy równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B.

Rozwiązanie

a) $A = (-4, 2)$ i $B = (-4, -2)$ ← pierwsze współrzędne punktów A i B są takie same



← prosta jest prostopadła do osi x

Odp.: Prosta AB ma równanie $x = -4$.

◀ 3.4. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez dane punkty A i B.

a) $A = (2, 4)$ $B = (-5, 4)$ d) $A = \left(5, \frac{1}{2}\right)$ $B = \left(5, 1\frac{1}{2}\right)$

b) $A = \left(1\frac{2}{3}, -2\right)$ $B = \left(1\frac{7}{8}, -2\right)$ e) $A = (-1, -12)$ $B = (3, 8)$

c) $A = (-7, 5)$ $B = (-4, -1)$ f) $A = \left(2\frac{1}{5}, 3\right)$ $B = \left(1, -1\frac{1}{2}\right)$

Odp.: a) $y = 4$ b) $y = -2$ c) $y = -2x - 9$ d) $x = 5$ e) $y = 5x - 7$ f) $y = 3\frac{3}{4}x - 5\frac{1}{4}$

ZZ i MKP

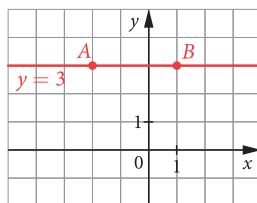
tematy 5.3, 5.4

Multiteka

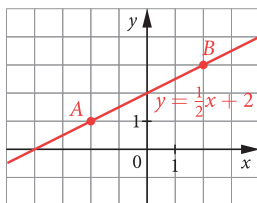
- Wykresy funkcji liniowych
- Monotoniczność funkcji liniowej
- Punkty przecięcia wykresu funkcji liniowej z osiami układu współrzędnych
- Wyznaczanie współczynnika kierunkowego prostej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.3

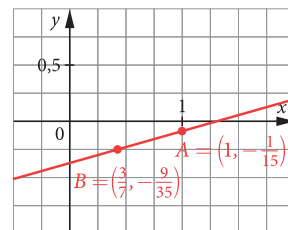
b) $A = (-2, 3)$ i $B = (1, 3)$

← drugie współrzędne punktów A i B są takie same← prosta jest równoległa do osi x Odp.: Prosta AB ma równanie $y = 3$.

c) $A = (-2, 1)$ i $B = (2, 3)$

Prosta AB nie jest prostopadła do osi x , zatem jej równanie ma postać $y = ax + b$.← $a = \frac{1}{2}$, bo czterem jednostkom wzdłuż osi x odpowiadają dwie jednostki wzdłuż osi y ← $b = 2$, bo prosta przecina oś y w punkcie $(0, 2)$ Odp.: Prosta AB ma równanie $y = \frac{1}{2}x + 2$.

d) $A = \left(1, -\frac{1}{15}\right)$ i $B = \left(\frac{3}{7}, -\frac{9}{35}\right)$

Prosta AB nie jest prostopadła do osi x , zatem jej równanie ma postać $y = ax + b$, ale w tym wypadku trudno jest odczytać wartości współczynników bezpośrednio z rysunku.

$$-\frac{1}{15} = a + b$$

← podstawiamy współrzędne punktu A w miejsce x i y

$$-\frac{9}{35} = \frac{3}{7}a + b$$

← podstawiamy współrzędne punktu B w miejsce x i y Współczynniki a i b spełniają zatem układ równań:

$$\begin{cases} a + b = -\frac{1}{15} \\ \frac{3}{7}a + b = -\frac{9}{35} \end{cases}$$

← rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Odp.: Prosta AB ma równanie $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{5}$.

Wyznamy współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$, wiedząc, że $x_A \neq x_B$, czyli punkty A i B nie leżą na prostej równoległej do osi y .

Prosta AB ma równanie $y = ax + b$. Aby wyznaczyć współczynnik a , rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} y_A = x_A \cdot a + b \\ y_B = x_B \cdot a + b \end{cases}$$

metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} y_A = x_A \cdot a + b \\ y_B - y_A = x_B \cdot a - x_A \cdot a \end{cases}$$

W dalszych rozważaniach pominiemy pierwsze równanie – wyznaczamy tylko współczynnik kierunkowy. W drugim równaniu wyłączamy a przed nawias.

$$\begin{aligned} y_B - y_A &= a(x_B - x_A) && \leftarrow \text{z założenia } x_A \neq x_B \\ a &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \end{aligned}$$

Wniosek

Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, gdzie $x_A \neq x_B$, jest równy $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Przykład 2 ◀ zad. 3.5

Wyznamy współczynnik kierunkowy a prostej AB , mając dane współrzędne punktów A i B .

Rozwiązanie

a) $A = (-2\sqrt{3}, 3)$ i $B = (2, 5)$

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 3}{2 + 2\sqrt{3}} = \frac{2}{2(1 + \sqrt{3})} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - 3} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Odp.: $a = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

b) $A = (-\pi, 7)$ i $B = (2\sqrt{13}, 7)$

$$a = \frac{7 - 7}{2\sqrt{13} + \pi} = 0 \quad \leftarrow \text{prosta } AB \text{ jest równoległa do osi } x$$

Odp.: $a = 0$

◀ 3.5. Wyznam współczynnik kierunkowy prostej AB , mając dane współrzędne punktów A i B .

a) $A = (-2, -7)$, $B = (-5, 9)$

b) $A = \left(3\frac{1}{2}, -5\right)$, $B = \left(2\frac{1}{6}, -1\right)$

c) $A = \left(\frac{2}{3}\sqrt{7}, \sqrt{7}\right)$,

$B = (\sqrt{7} - 1, -1)$

d) $A = (1, \sqrt{3} + 2)$, $B = (-\sqrt{3}, 3)$

e) $A = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, -3\right)$,

$B = \left(-2\sqrt{3}, 2\frac{5}{6}\right)$

f) $A = (\sqrt{2} - \sqrt{3}, 2\sqrt{2})$,

$B = (-\sqrt{3}, 2)$

Odp.: a) $-5\frac{1}{3}$ b) -3

c) $3(2\sqrt{7} + 5)$ d) $2 - \sqrt{3}$

e) $-\frac{7\sqrt{3}}{12}$ f) $2 - \sqrt{2}$

◀3.6. Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej AB . Napisz równanie prostej.

- a) $A = (-\sqrt{3}, -8)$, $B = (1, 0)$
 b) $A = \left(-\frac{11}{2}, 22\right)$, $B = (7, -15,5)$
 c) $A = (1-\sqrt{2}, -4)$,
 $B = (\sqrt{8}, \sqrt{8}+1)$
 d) $A = \left(1\frac{2}{3}, 2\sqrt{3}-1\right)$,
 $B = \left(\sqrt{3}, 1\frac{2}{5}\sqrt{3}\right)$
 e) $A = (\sqrt{3}, -1)$, $B = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{3}{2}\right)$
 f) $A = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\sqrt{5}\right)$, $B = (0, -5)$

Odp.: a) $a = 4(\sqrt{3}-1)$,
 $y = 4(\sqrt{3}-1)x - 4(\sqrt{3}-1)$
 b) $a = -3$, $y = -3x + 5,5$
 c) $a = 1 + \sqrt{2}$, $y = (1 + \sqrt{2})x - 3$
 d) $a = -\frac{3}{5}$, $y = -\frac{3}{5}x + 2\sqrt{3}$
 e) $a = -\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}x + 2$
 f) $a = 2(\sqrt{5}-1)$,
 $y = 2(\sqrt{5}-1)x - 5$

◀3.9. Sprawdź, czy punkty P , M , L leżą na jednej prostej.

- a) $P = (2, 0)$, $M = (0, -1)$,
 $L = (4, 2)$
 b) $P = (1, 0)$, $M = (0, -3)$,
 $L = (2, 2)$
 c) $P = (0, 4)$, $M = (-2, 0)$,
 $L = (-3, -2)$
 d) $P = (1, -1)$, $M = (-1, 7)$,
 $L = \left(\frac{3}{4}, -2\right)$
 e) $P = (5, 2\sqrt{2})$, $M = (3, 0)$,
 $L = (1, -2\sqrt{2})$
 f) $P = \left(\frac{1}{2}, -5\frac{1}{2}\right)$, $M = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$,
 $L = (1, 1)$

Odp.: a) nie b) nie c) tak
 d) nie e) tak f) nie

Przykład 3 ◀ zad. 3.6

Napiszemy równanie prostej AB , wiedząc, że $A = (-2\sqrt{3}, 3)$ i $B = (2, 5)$.

Rozwiązanie

Wykorzystamy obliczenia z przykładu 2a.

Prosta AB ma równanie $y = ax + b$, przy czym:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \text{ czyli:}$$

$$y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}x + b$$

$$5 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \cdot 2 + b$$

$$5 = \sqrt{3} - 1 + b, \text{ czyli } b = 6 - \sqrt{3}$$

← podstawiamy współrzędne punktu B w miejsce x i y

Odp.: Prosta AB ma równanie $y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}x + 6 - \sqrt{3}$.

Wniosek

Aby wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty, najpierw porównujemy pierwsze współrzędne tych punktów:

- jeśli są one równe, prosta ma równanie w postaci niekierunkowej $x = m$,
- jeśli są one różne, prosta ma równanie w postaci kierunkowej $y = ax + b$.

Wówczas:

- odczytujemy wartości a i b z wykresu lub
- rozwiązujemy odpowiedni układ równań, lub
- wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej, a drugi współczynnik obliczamy, rozwiązując odpowiednie równanie.

Przykład 4 ◀ zad. 3.9

Sprawdzimy, czy punkty $A = (-3, 1)$, $B = (-1, 2)$ i $C = (3, 5)$ leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie

Jedną z metod rozwiązywania tego zadania – sprawdzenie równoległości odpowiednich wektorów – była omówiona wcześniej. Inną metodą jest znalezienie równania prostej przechodzącej przez dwa z podanych punktów, a następnie sprawdzenie, czy współrzędne trzeciego punktu spełniają to równanie.

Wyznaczamy równanie prostej AB .

$$\begin{cases} 1 = -3a + b \\ 2 = -a + b \end{cases} \quad \begin{cases} -1 = -2a \\ 2 = -a + b \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2\frac{1}{2} \end{cases}$$

Prosta AB ma równanie $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4 \neq 5 \quad \leftarrow \text{podstawiamy współrzędne punktu C}$$

Odp.: Punkty A , B i C nie leżą na jednej prostej.

Przykład 5 ◀ zad. 3.15

O godzinie 2^{00} stan wody w rzece był równy 2,4 m. O godzinie 4^{00} stan wody wynosił już 3,2 m. Zakładamy, że woda przybiera wciąż w tym samym tempie, co oznacza, że stan wody (w zależności od czasu) jest opisany za pomocą funkcji $w = a \cdot t + b$, gdzie w oznacza wysokość wody w metrach, natomiast t – kolejne godziny. Obliczymy, kiedy poziom wody osiągnie stan ostrzegawczy równy 4,4 m.

Rozwiązanie

Wykres tej funkcji przechodzi przez dwa podane punkty $(2, 2,4)$ i $(4, 3,2)$. Po podstawieniu ich współrzędnych do wzoru otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2,4 = a \cdot 2 + b \\ 3,2 = a \cdot 4 + b \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest para liczb $a = 0,4$ i $b = 1,6$. Zależność stanu wody od czasu (w godzinach) ma więc postać:

$$w = 0,4t + 1,6$$

Aby wyznaczyć godzinę, o której woda osiągnie stan ostrzegawczy, trzeba znaleźć taki argument t , dla którego wartość $w = 4,4$, czyli rozwiązać równanie:

$$0,4t + 1,6 = 4,4$$

$$t = 7$$

Odp.: Woda osiągnie stan ostrzegawczy o godzinie 7^{00} .

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

3.1. Wskaż równanie prostej przechodzącej przez punkty $(-2, 2)$ i $(4, -1)$.

A. $y = \frac{1}{2}x + 1$ B. $y = \frac{1}{2}x - 1$ C. $y = -\frac{1}{2}x + 1$ D. $y = -\frac{1}{2}x - 1$

◀ **3.15.** W wannie znajduje się 120 litrów wody. Po wyjęciu korka woda zaczyna wypływać w stałym tempie i po 30 sekundach pozostaje jej 95 litrów. Podaj wzór i dziedzinę funkcji, która opisuje, ile wody znajduje się w wannie po t minutach.

Odp.: $f(t) = -50t + 120$,

$$t \in \left\langle 0; 2\frac{2}{5} \right\rangle$$

Odpowiedzi i rozwiązania

3.1. C

3.2. D**3.3. C**

3.4. a) $y = 4$ **b)** $y = -2$
c) $y = -2x - 9$ **d)** $x = 5$
e) $y = 5x - 7$ **f)** $y = 3\frac{3}{4}x - 5\frac{1}{4}$

3.5. a) $-5\frac{1}{3}$ **b)** -3
c) $3(2\sqrt{7} + 5)$ **d)** $2 - \sqrt{3}$
e) $-\frac{7\sqrt{3}}{12}$ **f)** $2 - \sqrt{2}$

3.6. a) $a = 4(\sqrt{3} - 1)$,
 $y = 4(\sqrt{3} - 1)x - 4(\sqrt{3} - 1)$
b) $a = -3$, $y = -3x + 5,5$
c) $a = 1 + \sqrt{2}$, $y = (1 + \sqrt{2})x - 3$
d) $a = -\frac{3}{5}$, $y = -\frac{3}{5}x + 2\sqrt{3}$
e) $a = -\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}x + 2$
f) $a = 2(\sqrt{5} - 1)$,
 $y = 2(\sqrt{5} - 1)x - 5$

3.7. a) $y = 4x - 1$
b) $y = -\frac{1}{2}x - 1$
c) $y = 12x + 4$
d) $y = -2x + 3$
e) $y = -3x + 7$
f) $y = -2\sqrt{3}x - \sqrt{3}$

3.2. Wskaż parę punktów, przez które nie przechodzi wykres żadnej funkcji liniowej.

- A.** $(3, -2)$ i $(-3, -2)$ **C.** $(-3, 0)$ i $(0, 0)$
B. $(3, -2)$ i $(-3, 2)$ **D.** $(3, -2)$ i $(3, 2)$

3.3. Wskaż punkt należący do prostej przechodzącej przez punkty $(0, 3)$ i $(6, 5)$.

- A.** $(100, 37)$ **B.** $(101, 37)$ **C.** $(102, 37)$ **D.** $(103, 37)$

3.4. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez dane punkty A i B .

a) $A = (2, 4)$ $B = (-5, 4)$ **d)** $A = \left(5, \frac{1}{2}\right)$ $B = \left(5, 1\frac{1}{2}\right)$
b) $A = \left(1\frac{2}{3}, -2\right)$ $B = \left(1\frac{7}{8}, -2\right)$ **e)** $A = (-1, -12)$ $B = (3, 8)$
c) $A = (-7, 5)$ $B = (-4, -1)$ **f)** $A = \left(2\frac{1}{5}, 3\right)$ $B = \left(1, -1\frac{1}{2}\right)$

3.5. Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej AB , mając dane współrzędne punktów A i B .

a) $A = (-2, -7)$, $B = (-5, 9)$ **d)** $A = (1, \sqrt{3} + 2)$, $B = (-\sqrt{3}, 3)$
b) $A = \left(3\frac{1}{2}, -5\right)$, $B = \left(2\frac{1}{6}, -1\right)$ **e)** $A = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, -3\right)$, $B = \left(-2\sqrt{3}, 2\frac{5}{6}\right)$
c) $A = \left(\frac{2}{3}\sqrt{7}, \sqrt{7}\right)$, $B = (\sqrt{7} - 1, -1)$ **f)** $A = (\sqrt{2} - \sqrt{3}, 2\sqrt{2})$, $B = (-\sqrt{3}, 2)$

3.6. Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej AB . Napisz równanie prostej.

a) $A = (-\sqrt{3}, -8)$, $B = (1, 0)$ **d)** $A = \left(1\frac{2}{3}, 2\sqrt{3} - 1\right)$, $B = \left(\sqrt{3}, 1\frac{2}{5}\sqrt{3}\right)$
b) $A = \left(-\frac{11}{2}, 22\right)$, $B = (7, -15,5)$ **e)** $A = (\sqrt{3}, -1)$, $B = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{3}{2}\right)$
c) $A = (1 - \sqrt{2}, -4)$, $B = (\sqrt{8}, \sqrt{8} + 1)$ **f)** $A = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\sqrt{5}\right)$, $B = (0, -5)$

3.7. Wyznacz równanie prostej przecinającej osie układu współrzędnych w podanych punktach A i B .

a) $A = (0, -1)$ $B = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$ **d)** $A = (0, 3)$ $B = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$
b) $A = (0, -1)$ $B = (-2, 0)$ **e)** $A = (0, 7)$ $B = \left(2\frac{1}{3}, 0\right)$
c) $A = (0, 4)$ $B = \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ **f)** $A = (0, -\sqrt{3})$ $B = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

D 3.8. Wykaż, że prostą przecinającą oś układu współrzędnych w punktach $(a, 0)$ oraz $(0, b)$ dla $a \neq 0$ i $b \neq 0$ można opisać za pomocą równania $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

3.9. Sprawdź, czy punkty P, M, L leżą na jednej prostej.

- a) $P = (2, 0)$ $M = (0, -1)$ $L = (4, 2)$
 b) $P = (1, 0)$ $M = (0, -3)$ $L = (2, 2)$
 c) $P = (0, 4)$ $M = (-2, 0)$ $L = (-3, -2)$
 d) $P = (1, -1)$ $M = (-1, 7)$ $L = \left(\frac{3}{4}, -2\right)$
 e) $P = (5, 2\sqrt{2})$ $M = (3, 0)$ $L = (1, -2\sqrt{2})$
 f) $P = \left(\frac{1}{2}, -5\frac{1}{2}\right)$ $M = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ $L = (1, 1)$

3.10. Wyznacz brakującą współrzędną tak, aby punkty A, B, C były współliniowe.

- a) $A = (1, 2)$ $B = (3, 6)$ $C = (-1, y)$
 b) $A = (2, -1)$ $B = \left(x, -\frac{3}{2}\right)$ $C = (-4, 2)$
 c) $A = (x, -3)$ $B = (5, 2)$ $C = (-4, -7)$
 d) $A = (-3, -7)$ $B = (1, 1)$ $C = (0, y)$
 e) $A = \left(1, 1\frac{1}{3}\right)$ $B = (x, -2)$ $C = (-3, 4)$
 f) $A = (\sqrt{5}, y)$ $B = (-1, -\sqrt{5})$ $C = (2, 3 - \sqrt{5})$

3.11. Jaki warunek musi spełniać m , aby punkty R, S, T nie były współliniowe?

- a) $R = (-1, 0)$ $S = (0, 2)$ $T = (m, 4)$
 b) $R = (0, -1)$ $S = (1, 0)$ $T = (2, m)$
 c) $R = (0, 0)$ $S = (-1, 3)$ $T = (m, -6)$
 d) $R = (-1, -1)$ $S = (0, 1)$ $T = (2, m)$

3.12. Sprawdź, czy istnieje taka wartość k , dla której punkty

$A = (-12, -8)$, $B = (-4 - |2k|, -7)$, $C = (4, -4)$, $D = (|6k - 4|, -1)$ są współliniowe.

D 3.13. Wykaż, że punkty $A = (3, -3\sqrt{2})$, $B = (\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, $C = (-\sqrt{5}, \sqrt{10})$ nie są współliniowe.

3.14. Komputer pobiera z internetu ze stałą prędkością plik o dużym rozmiarze. Pobieranie rozpoczęło się o 17³² i do 17⁴⁰ pobrane zostało 15% pliku.

- a) O której godzinie plik zostanie pobrany w całości?
 b) O której godzinie skończyłoby się pobieranie pliku o dwa razy większym rozmiarze, gdyby prędkość pobierania była dwa razy większa?

3.8.

Sposób 1. Współczynnik kierunkowy prostej jest równy $\frac{b-0}{0-a} = -\frac{b}{a}$, więc prosta ma równanie $y = -\frac{b}{a}x + b$, czyli po przekształceniu $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Sposób 2. Sprawdzamy, czy współrzędne danych punktów spełniają dane równanie prostej.

3.9. a) nie b) nie c) tak
 d) nie e) tak f) nie

3.10. a) $y = -2$ b) $x = 3$
 c) $x = 0$ d) $y = -1$
 e) $x = 6$ f) $y = 1$

3.11. a) $m \neq 1$ b) $m \neq 1$
 c) $m \neq 2$ d) $m \neq 5$

3.12. Wyznaczamy równanie prostej AC: $y = \frac{1}{4}x - 5$.

Podstawiamy do niego współrzędne punktów B i D i otrzymujemy układ równań $\begin{cases} |k| = 2 \\ |3k - 2| = 8 \end{cases}$, który ma jedno rozwiązanie $k = -2$.

Punkty A, B, C i D są współliniowe dla $k = -2$.

3.13. Wskazówka: Wyznacz najpierw równanie prostej AB .

3.14. a) ok. 18²⁵ b) ok. 18²⁵

3.15. $f(t) = -50t + 120$,
 $t \in \left\langle 0; 2\frac{2}{5} \right\rangle$

3.16.

a) $f(t) = \left| 1,5 \cdot 10^8 - 3 \cdot 10^5 t \right|$,

$t \geq 0$

b) 12^{08}

c) 16^{10}

Prosto do matury

1. P, P, P

2. $y = -\frac{1}{4}x + 4\frac{1}{2}$

3. tak

4. $k = -1$ lub $k = \frac{1}{3}$

5. ok. 9^{02}

3.15. W wannie znajduje się 120 litrów wody. Po wyjęciu korka woda zaczyna wypływać w stałym tempie i po 30 sekundach pozostaje jej 95 litrów. Podaj wzór i dziedzinę funkcji, która opisuje, ile wody znajduje się w wannie po t minutach.

* **3.16.** Jeden z rodzajów cząstek elementarnych emitowanych przez Słońce to neutrino, poruszające się z prędkością zbliżoną do prędkości światła. Przyjmijmy, że jedno z neutrino powstało na Słońcu o godzinie 12^{00} , zmierza w kierunku Ziemi, przenika przez nią i dalej porusza się w przestrzeni kosmicznej.

a) Podaj wzór funkcji, która opisuje odległość tego neutrino od Ziemi (w kilometrach) w zależności od czasu mierzonego od godziny 12^{00} (w sekundach).

b) O której godzinie neutrino przeniknie przez Ziemię? Podaj wynik z dokładnością do 1 minuty.

c) O której godzinie neutrino minie orbitę Neptuna? Podaj wynik z dokładnością do 10 minut.

W obliczeniach przyjmij, że prędkość neutrino wynosi $3 \cdot 10^5$ km/s, odległość Ziemi od Słońca jest równa $1,5 \cdot 10^8$ km, a odległość od Ziemi do orbity Neptuna jest równa $4,35 \cdot 10^9$ km. Pomiń średnicę Ziemi.

Prosto do matury



1. Dane są punkty $A = (2, -1)$ i $B = (4, 0)$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Prosta przechodząca przez punkty A i B ma równanie $y = \frac{1}{2}x - 2$.

B. Punkty A, B oraz $C = (-4, -4)$ są współliniowe.

C. Punkty A, B oraz $C = (100, 48)$ są współliniowe.

2. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $(-2, 5)$ i $(6, 3)$.

3. Sprawdź, czy punkty $A = \left(-\frac{2}{3}, -2\right)$, $B = \left(\frac{5}{3}, 1\right)$, $C = \left(3, \frac{19}{7}\right)$ należą do jednej prostej.

4. Dla jakich wartości k punkty $A = (-8, -5)$, $B = (|3k + 1|, 0)$, $C = \left(5, \frac{3}{2}\right)$ są współliniowe?

5. W pewien letni poranek o godzinie 7^{25} temperatura wynosiła $22,3^\circ\text{C}$, a o godzinie 9^{45} było już $26,2^\circ\text{C}$. Zakładając, że temperatura w opisywanym czasie rosła w stałym tempie, oblicz, o której godzinie temperatura przekroczyła 25°C .

4. Rysowanie wykresów funkcji przedziałami liniowych

Umiejętności:

- rysowanie wykresu funkcji wyrażonej różnymi wzorami w przedziałach
- odczytywanie własności takich funkcji na podstawie wykresu

Przykład 1

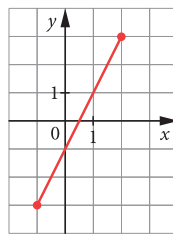
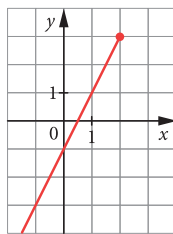
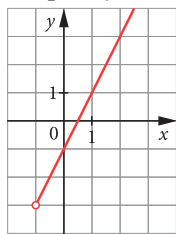
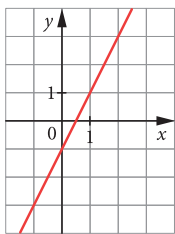
Naszkicujemy wykres funkcji $y = 2x - 1$ określonej dla czterech różnych dziedzin.

- a) $x \in \mathbf{R}$ b) $x > -1$ c) $x \leq 2$ d) $x \in \langle -1; 2 \rangle$

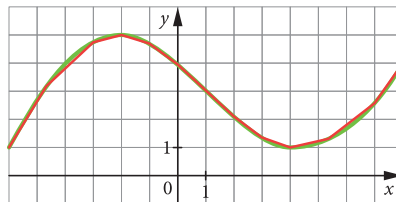
Rozwiązanie

Obliczmy wartości funkcji dla dwóch argumentów: $f(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -3$ oraz $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Wykresami funkcji są odpowiednio:

- a) prosta b) półprosta c) półprosta d) odcinek
bez początku



Często spotykamy się z wykresami utworzonymi z odcinków. Różne funkcje można badać, przybliżając je w przedziałach za pomocą funkcji liniowych (zobacz rysunek obok).



Nauczymy się teraz sporządzać zbudowane z odcinków wykresy funkcji opisanych za pomocą wzoru.

Przykład 2

◀ zad. 4.6, 4.7

Dziedziną funkcji f jest suma przedziałów $(-\infty; 0) \cup \langle 1; \infty)$. W każdym z przedziałów funkcja została określona inaczej: argumentom z przedziału $(-\infty; 0)$ przyporządkowuje wartości zgodnie ze wzorem $f(x) = x + 1$, natomiast argumentom z przedziału $\langle 1; \infty)$ według wzoru $f(x) = x - 1$. Narysujemy wykres funkcji f .

4.6. Sporządź wykres funkcji.

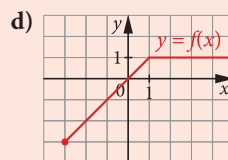
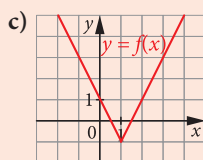
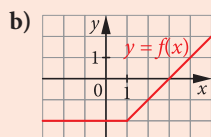
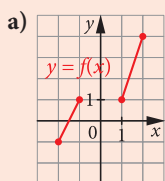
a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{dla } x \in \langle -2; -1 \rangle \\ 3x - 2 & \text{dla } x \in \langle 1; 2 \rangle \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ x - 3 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty) \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ 2x - 3 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty) \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in \langle -3; 1) \\ 1 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty) \end{cases}$

Odp.:



◀ 4.7. Patrz s. 364.

Multiteka

- Wykresy funkcji liniowych
- Wykorzystanie funkcji liniowej – rozwiązanie zadania

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.4

Generator
testów i sprawdzianów

Rozwiązanie

Podaną funkcję możemy wyrazić wzorem $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ x-1 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty \rangle \end{cases}$.

Obliczmy wartości funkcji f w kilku punktach.

$$f(2) = 2 - 1 = 1$$

← $2 \in \langle 1; \infty \rangle$, więc wartość funkcji dla $x = 2$ obliczamy ze wzoru $f(x) = x - 1$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

← $-\frac{1}{2} \in (-\infty; 0)$, więc wartość funkcji dla $x = -\frac{1}{2}$ obliczamy ze wzoru $f(x) = x + 1$

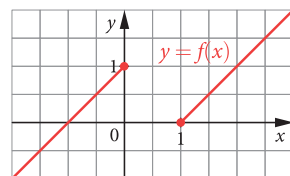
$$f(0) = 0 + 1 = 1$$

← $0 \in (-\infty; 0)$

$$f(1) = 1 - 1 = 0$$

← $1 \in \langle 1; \infty \rangle$

Liczy z przedziału $(0; 1)$ nie należą do dziedziny tej funkcji. Fragment wykresu odpowiadający argumentom z przedziału $(-\infty; 0)$ jest półprostą; fragment odpowiadający argumentom z przedziału $\langle 1; \infty \rangle$ też jest półprostą. Wykresem funkcji $y = f(x)$ jest więc suma dwóch półprostych.



Przykład 3

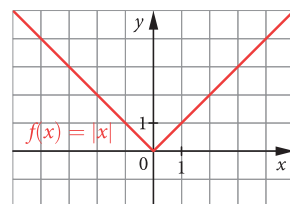
Podamy dziedzinę i narysujemy wykres funkcji $f(x) = |x|$.

Rozwiązanie

Jeśli przyjmiemy, że $g(x) = x$, to $f(x) = |g(x)|$ i wykres funkcji f otrzymamy, korzystając z wcześniej poznanych reguł. Możemy też postąpić inaczej.

Zapiszmy wzór funkcji f w następującej postaci: $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$. Fragment wykresu odpowiadający argumentom z przedziału $(-\infty; 0)$ jest półprostą bez początku $(0, 0)$; fragment odpowiadający argumentom z przedziału $\langle 0; \infty \rangle$ jest półprostą o początku $(0, 0)$. Wykres tej funkcji jest więc sumą dwóch półprostych jak na rysunku.

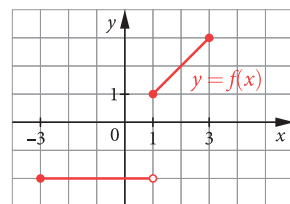


Przykład 4 zad. 4.6, 4.7

Wyznamy dziedzinę i narysujemy wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in \langle -3; 1) \\ x & \text{dla } x \in \langle 1; 3) \end{cases}$.

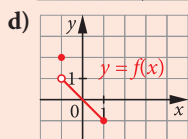
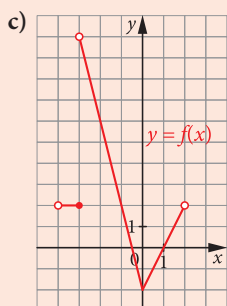
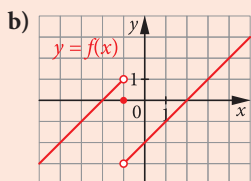
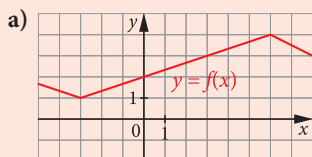
Rozwiązanie

Dziedziną funkcji jest suma $\langle -3; 1) \cup \langle 1; 3) = \langle -3; 3)$. Skoro $1 \in \langle 1; 3)$, to $f(1) = 1$. Ma to swoją ilustrację na wykresie w postaci zamalowanego kółeczka odpowiadającego punktowi o współrzędnych $(1, 1)$ i pustego kółeczka odpowiadającego punktowi o współrzędnych $(1, -2)$.



◀ 4.6. Patrz s. 363.

4.7. Odp.:



◀ 4.7. Sporządź wykres funkcji.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \\ \frac{1}{3}x + 2 & \text{dla } x \in \langle -3; 6) \\ -\frac{1}{2}x + 7 & \text{dla } x \in \langle 6; \infty) \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-4; -3) \\ -2 - 4x & \text{dla } x \in \langle -3; 0) \\ 2x - 2 & \text{dla } x \in \langle 0; 2) \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ 0 & \text{dla } x = -1 \\ x - 2 & \text{dla } x \in (-1; \infty) \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x = -1 \\ -x & \text{dla } x \in (-1; 1) \\ -1 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$$

Przykład 5 ◀ zad. 4.6, 4.7

Wyznaczmy dziedzinę i narysujemy wykres podanej funkcji.

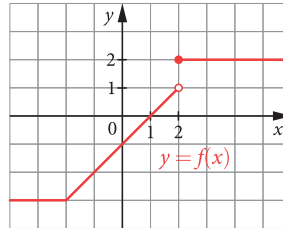
$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ x - 1 & \text{dla } x \in \langle -2; 2) \\ 2 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty) \end{cases}$$

Rozwiązanie

Dziedziną funkcji f jest suma trzech przedziałów równa zbiorowi liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$. W pierwszym i ostatnim z podanych przedziałów funkcja f jest stała. Sprawdzamy, jaką wartość funkcja f przyjmuje dla $x = -2$.

$$f(-2) = -2 - 1 = -3$$

Zwróćmy uwagę, że w punkcie $x = -2$ puste kołeczko z lewej strony nakłada się na zamalowane kołeczko z prawej strony. Inaczej jest dla argumentu $x = 2$. Z lewej strony wykres „dochodzi” do pustego kołeczka w punkcie $(2, 1)$, a z prawej zaczyna się zamalowanym kołeczkiem w punkcie $(2, 2)$.

**Przykład 6** ◀ zad. 4.11

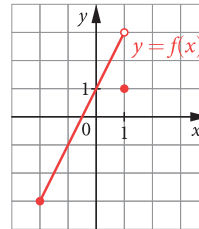
Narysujemy wykres i opiszemy własności funkcji $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x = -2 \\ 2x + 1 & \text{dla } x \in (-2; 1) \\ 1 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$.

Rozwiązanie

Pierwsza i ostatnia linia wzoru funkcji oznaczają, że do wykresu należą punkty $(-2, -3)$ i $(1, 1)$. Pozostałą część wykresu stanowi odcinek bez końców. Punkt $(-2, -3)$ jest akurat jednym z końców odcinka ($2 \cdot (-2) + 1 = -3$), natomiast punkt $(1, 1)$ nie ma tej własności ($2 \cdot 1 + 1 = 3 \neq 1$).

Wzór funkcji f można zatem zapisać krócej.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{dla } x \in \langle -2; 1) \\ 1 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$$



Własności funkcji f :

- $D = \langle -2; 1 \rangle$, $ZW = \langle -3; 3 \rangle$,
- $f(x) = 0$ dla $x = -\frac{1}{2}$, $f(x) > 0$ dla $x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$, $f(x) < 0$ dla $x \in \left\langle -2; -\frac{1}{2} \right\rangle$,
- f nie przyjmuje wartości największej, f przyjmuje wartość najmniejszą równą -3 dla $x = -2$,
- f nie jest monotoniczna, ale w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$ jest rosnąca,
- równanie $f(x) = m$ ma 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -3) \cup \langle 3; \infty)$, 1 rozwiązanie dla $m \in \langle -3; 3 \rangle - \{1\}$, 2 rozwiązania dla $m = 1$.

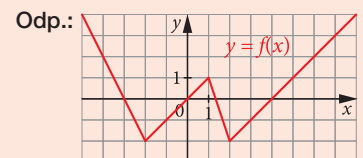
◀ 4.6., 4.7. Patrz s. 363, 364.

◀ 4.11. Narysuj wykres funkcji.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 6 & \text{dla } x \leq -2 \\ x & \text{dla } -2 < x \leq 1 \\ -3x + 4 & \text{dla } 1 < x \leq 2 \\ x - 4 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

Na podstawie wykresu oceń, które zdania są prawdziwe, a które fałszywe.

- Funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą równą -2 dla dwóch argumentów: $x = -2$, $x = 2$.
- W przedziale $\langle -2; 1 \rangle$ funkcja f jest rosnąca.
- W przedziale $\langle 2; \infty)$ funkcja f jest rosnąca.
- W zbiorze $\langle -2; 1 \rangle \cup \langle 2; \infty)$ funkcja f jest rosnąca.
- Funkcja f przyjmuje wartość największą równą 1 dla argumentu $x = 1$.
- Dla $x \in \left(0; \frac{4}{3}\right)$ funkcja przyjmuje wartości dodatnie.
- Dla $x \in (-\infty; -3) \cup \left(0; \frac{4}{3}\right) \cup (4; \infty)$ funkcja przyjmuje wartości dodatnie.



prawdziwe: A, B, C, F, G,
fałszywe: D, E

4.13. Patrz s. 369.

Przykład 7 zad. 4.13

W pewnym państwie przyjęto następujące zasady płacenia podatku dochodowego:

- obywatel, którego roczny dochód nie przekracza 1000 euro, nie płaci podatku,
- obywatel, którego roczny dochód przekracza 1000 euro, płaci podatek w wysokości 20% swojego dochodu pomniejszonego o 1000 euro.

Na przykład podatek należny od dochodu w wysokości 5000 euro wynosi:

$$20\% \cdot (5000 - 1000) = 800 \text{ (euro)}$$

Podamy wzór i naskicujemy wykres funkcji opisującej podatek p , który należy zapłacić od dochodu w wysokości d euro.

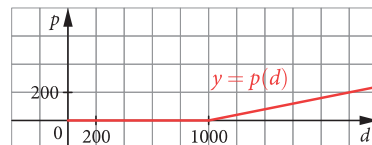
Rozwiązanie

Funkcję można określić za pomocą wzoru:

$$p(d) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq d \leq 1000 \\ 0,2(d - 1000) & \text{dla } d > 1000 \end{cases}$$

czyli

$$p(d) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq d \leq 1000 \\ 0,2d - 200 & \text{dla } d > 1000 \end{cases}$$



Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytach.

Odpowiedzi i rozwiązania

4.1. A

4.1. Wskaż zbiór wartości funkcji $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ x - 2 & \text{dla } x \in \langle 0; \infty \end{cases}$.

- A. $\langle -2; \infty \rangle$ B. $(-\infty; 1)$ C. $(-\infty; -2) \cup \langle 1; \infty \rangle$ D. R

4.2. C

4.2. Dana jest funkcja $f(x) = -\sqrt{17}x + \sqrt{33}$ dla $x \in \langle -119; -118 \rangle$. Wskaż zdanie prawdziwe dotyczące tej funkcji.

- A. Funkcja f przyjmuje wartość największą i przyjmuje wartość najmniejszą.
 B. Funkcja f nie przyjmuje wartości największej i przyjmuje wartość najmniejszą.
 C. Funkcja f nie przyjmuje wartości najmniejszej i przyjmuje wartość największą.
 D. Funkcja f nie przyjmuje wartości największej ani wartości najmniejszej.

4.3. C

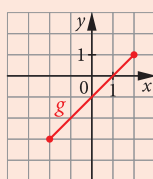
4.3. Wskaż wzór funkcji, która ma miejsce zerowe.

- A. $f(x) = x + 3$ dla $x \in \langle -1; 4 \rangle$ C. $f(x) = 3x - 6$ dla $x \in (-2; 2)$
 B. $f(x) = -2x - 11$ dla $x \in (-\infty; -6)$ D. $f(x) = \sqrt{3}x$ dla $x \in (0; \infty)$

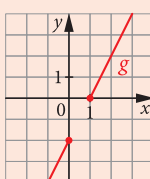
4.4. Narysuj wykres funkcji g o podanej dziedzinie D .

- a) $g(x) = x - 1$, $D = \langle -2; 2 \rangle$ c) $g(x) = -2x + 5$, $D = \langle -1; 2 \rangle \cup \langle 3; 5 \rangle$
 b) $g(x) = 2x - 2$, $D = (-\infty; 0) \cup \langle 1; \infty \rangle$ d) $g(x) = \frac{1}{3}x + 2$, $D = (-\infty; -9) \cup \langle 3; 6 \rangle$

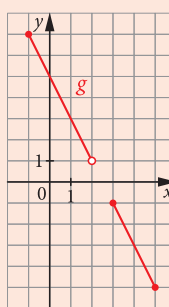
4.4. a)



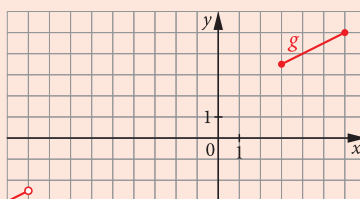
b)



c)



d)



4.5. Określ dziedzinę i wzór funkcji, której wykresem jest podany zbiór.

- a) odcinek o końcach $(0, 1)$ i $(1, 6)$
 b) odcinek o końcach $(1, -1)$ i $(2, 2)$
 c) półprosta równoległa do osi x o początku w punkcie $(-3, 3)$ i przecinająca oś y

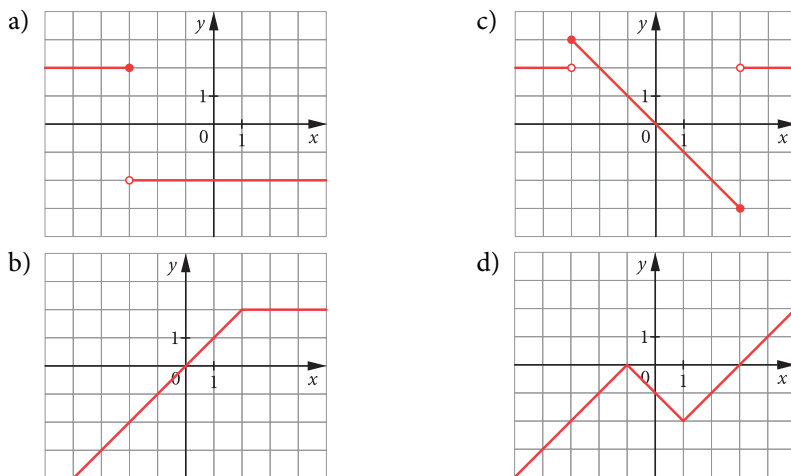
4.6. Sporządź wykres funkcji.

- a) $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{dla } x \in \langle -2; -1 \rangle \\ 3x-2 & \text{dla } x \in \langle 1; 2 \rangle \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ 2x-3 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty \rangle \end{cases}$
 b) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ x-3 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty \rangle \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in \langle -3; 1 \rangle \\ 1 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty \rangle \end{cases}$

4.7. Sporządź wykres funkcji.

- a) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \\ \frac{1}{3}x+2 & \text{dla } x \in \langle -3; 6 \rangle \\ -\frac{1}{2}x+7 & \text{dla } x \in \langle 6; \infty \rangle \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-4; -3) \\ -2-4x & \text{dla } x \in (-3; 0) \\ 2x-2 & \text{dla } x \in \langle 0; 2 \rangle \end{cases}$
 b) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ 0 & \text{dla } x = -1 \\ x-2 & \text{dla } x \in (-1; \infty) \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x = -1 \\ -x & \text{dla } x \in (-1; 1) \\ -1 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$

4.8. Podaj wzór funkcji przedstawionej na wykresie.



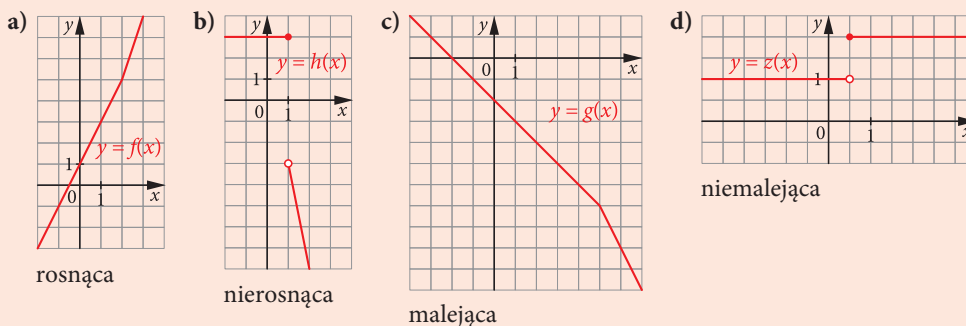
4.9. Sporządź wykres funkcji i na jego podstawie określ monotoniczność funkcji.

- a) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{dla } x < 2 \\ 3x-1 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$ c) $g(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{dla } x < 5 \\ -2x+3 & \text{dla } x \geq 5 \end{cases}$
 b) $h(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \leq 1 \\ -5x+2 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$ d) $z(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x < 0,5 \\ 2 & \text{dla } x \geq 0,5 \end{cases}$

4.8.

- a) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \\ -2 & \text{dla } x \in (-3; \infty) \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty) \\ -x & \text{dla } x \in \langle -3; 3 \rangle \end{cases}$
 b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ 2 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -x-1 & \text{dla } x \in \langle -1; 1 \rangle \\ x-3 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$

4.9.

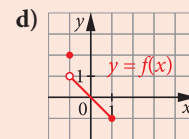
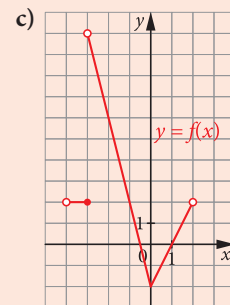
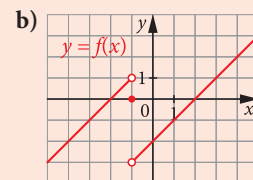
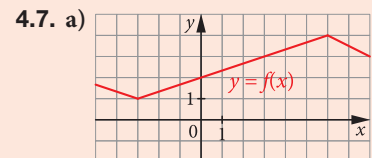
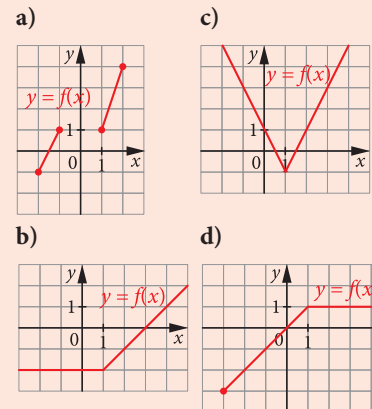


4.5. a) $D = \langle 0; 1 \rangle$, $y = 5x + 1$

b) $D = \langle 1; 2 \rangle$, $y = 3x - 4$

c) $D = \langle -3; \infty \rangle$, $y = 3$

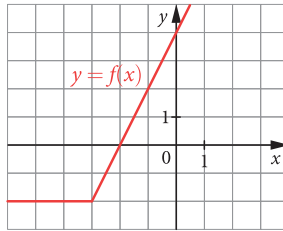
4.6.



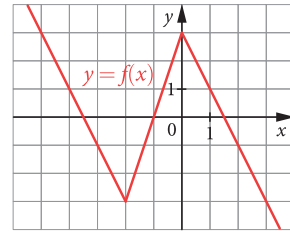
- 4.10. a) $a = -2$, $b = 4$
 b) $a = 5$, $b = 1$
 c) $a = -7$, $b = 3$
 d) $a = 2$, $b = 2$

4.10. Wyznacz współczynniki a , b w taki sposób, aby podany wzór określał funkcję przedstawioną na rysunku.

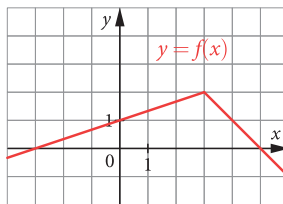
a) $f(x) = \begin{cases} a & \text{dla } x \leq -3 \\ 2x + b & \text{dla } x > -3 \end{cases}$



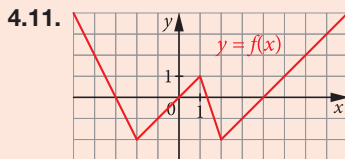
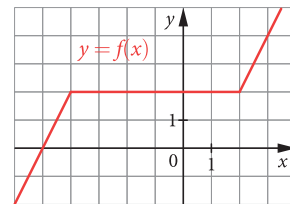
c) $f(x) = \begin{cases} -2x + a & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ 3x + b & \text{dla } x \in (-2; 0) \\ -2x + b & \text{dla } x \in (0; \infty) \end{cases}$



b) $f(x) = \begin{cases} -x + a & \text{dla } x \geq 3 \\ \frac{1}{3}x + b & \text{dla } x < 3 \end{cases}$



d) $f(x) = \begin{cases} ax + 10 & \text{dla } x \in (-\infty; -4) \\ b & \text{dla } x \in [-4; 2) \\ 2x - b & \text{dla } x \in [2; \infty) \end{cases}$



prawdziwe: A, B, C, F, G,
 fałszywe: D, E

4.11. Narysuj wykres funkcji.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 6 & \text{dla } x \leq -2 \\ x & \text{dla } -2 < x \leq 1 \\ -3x + 4 & \text{dla } 1 < x \leq 2 \\ x - 4 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

Na podstawie wykresu oceń, które zdania są prawdziwe, a które fałszywe.

- A. Funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą równą -2 dla dwóch argumentów: $x = -2$, $x = 2$.
 B. W przedziale $\langle -2; 1 \rangle$ funkcja f jest rosnąca.
 C. W przedziale $\langle 2; \infty \rangle$ funkcja f jest rosnąca.
 D. W zbiorze $\langle -2; 1 \rangle \cup \langle 2; \infty \rangle$ funkcja f jest rosnąca.
 E. Funkcja f przyjmuje wartość największą równą 1 dla argumentu $x = 1$.
 F. Dla $x \in \left(0; \frac{4}{3}\right)$ funkcja przyjmuje wartości dodatnie.
 G. Dla $x \in (-\infty; -3) \cup \left(0; \frac{4}{3}\right) \cup (4; \infty)$ funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

4.12. Sporządź wykres funkcji i na jego podstawie określ monotoniczność funkcji.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} 3x-1 & \text{dla } x < 1 \\ 2x & \text{dla } 1 \leq x < 3 \\ x+3 & \text{dla } x \geq 3 \end{cases} & \text{c) } f(x) &= \begin{cases} 5 & \text{dla } x < -2 \\ 2 & \text{dla } -2 \leq x < 0 \\ 1 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases} \\ \text{b) } f(x) &= \begin{cases} -5x-7 & \text{dla } x \leq -1 \\ -x-3 & \text{dla } -1 < x \leq 2 \\ -2x-1 & \text{dla } x > 2 \end{cases} & \text{d) } f(x) &= \begin{cases} x+1 & \text{dla } x < -3 \\ 2x+5 & \text{dla } -3 \leq x < 1 \\ 3x+5 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

4.13. Przyjrzyj się propozycjom rozwiązań podatkowych przedstawionym przez trzy partie polityczne.

partia A	Każdy obywatel płaci podatek w wysokości 20% swojego rocznego dochodu.
partia B	- Każdy obywatel, którego roczny dochód nie przekracza 5000 zł, nie płaci podatku. - Każdy obywatel, którego roczny dochód przekracza 5000 zł, płaci podatek w wysokości 25% swojego dochodu pomniejszonego o 5000 zł.
partia C	- Każdy obywatel, którego roczny dochód nie przekracza 10 000 zł, płaci podatek w wysokości 20% swojego dochodu. - Każdy obywatel, którego roczny dochód przekracza 10 000 zł, płaci podatek w wysokości 30% swojego dochodu.

- Porównaj, jaki podatek należy zapłacić od rocznego dochodu w wysokości 20 000 zł według każdej z przedstawionych zasad.
- Podaj wzory funkcji $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, które rocznemu dochodowi x podatnika wyrażonemu w zł przyporządkowują należny podatek.
- Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$.
- Dla jakiego rocznego dochodu propozycja partii B jest bardziej opłacalna dla podatnika niż propozycja partii A?

4.14. Przekształcając odpowiednio wykres funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{dla } x \in \langle -3; 2 \rangle \\ -x+7 & \text{dla } x \in \langle 2; 5 \rangle \end{cases},$$

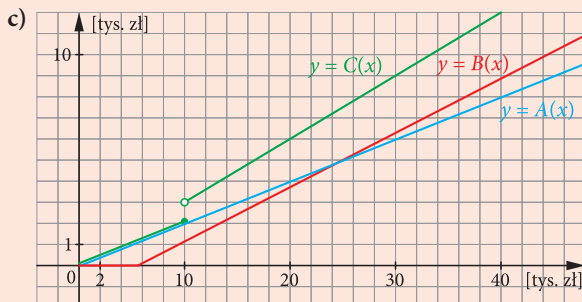
sporządź wykres funkcji $g(x) = |f(x)|$. Odczytaj z wykresu wartość najmniejszą i wartość największą funkcji g oraz argumenty, dla których funkcja je przyjmuje.

4.15. Przekształcając odpowiednio wykres funkcji

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x < -1 \\ x-2 & \text{dla } x \geq -1 \end{cases},$$

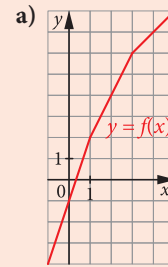
sporządź wykres funkcji $g(x) = |f(x)|$. Odczytaj z wykresu przedziały monotoniczności funkcji g .

4.13. a) A: 4000 zł B: 3750 zł C: 6000 zł **b)** $A(x) = 0,2x$ dla $x \geq 0$,
 $B(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \langle 0; 5000 \rangle \\ 0,25(x-5000) & \text{dla } x \in (5000; \infty) \end{cases}, \quad C(x) = \begin{cases} 0,2x & \text{dla } x \in \langle 0; 10\,000 \rangle \\ 0,3x & \text{dla } x \in (10\,000; \infty) \end{cases}$

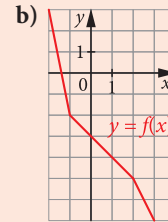


d) do 25 000 zł

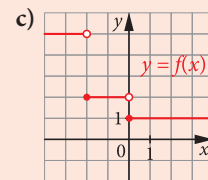
4.12.



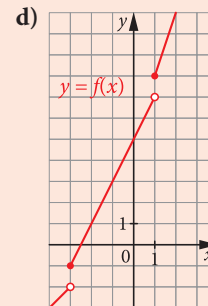
rosnąca



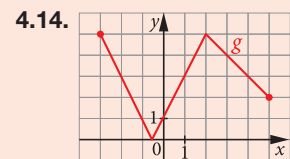
malejąca



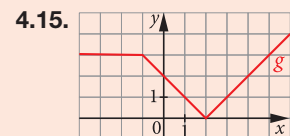
nirosnąca



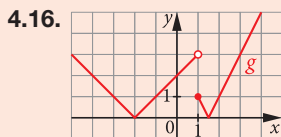
rosnąca



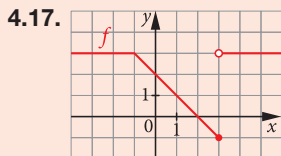
wartość najmniejsza: 0 dla $x = -\frac{1}{2}$,
 największa: 5 dla $x = -3$ lub $x = 2$



stała w przedziale $(-\infty; -1)$,
 malejąca w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$,
 rosnąca w przedziale $(2; \infty)$



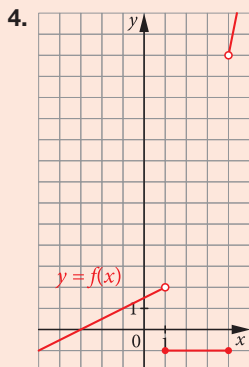
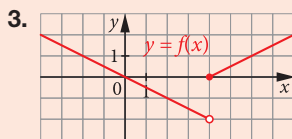
$$m \in \{0\} \cup (3; \infty)$$



$D = \mathbb{R}$, $ZW = \langle -1; 3 \rangle$;
 miejsce zerowe: 2;
 $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (2; 3)$;
 stała w każdym z przedziałów
 $(-\infty; -1)$ i $(3; \infty)$,
 malejąca w przedziale $\langle -1; 3 \rangle$;
 wartość największa: 3 dla
 $x \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$,
 wartość najmniejsza: -1 dla $x = 3$;
 $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla
 $m \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$,
 1 rozwiązanie dla $m \in \langle -1; 3 \rangle$,
 nieskończenie wiele rozwiązań dla
 $m = 3$

Prosto do matury

1. F, F, F



Funkcja nie jest monotoniczna.

5. $a = \frac{1}{2}$, $b = 4$

4.16. Przekształcając odpowiednio wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{dla } x < 1 \\ 2x-3 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$, sporządź wykres funkcji $g(x) = |f(x)|$. Odczytaj z wykresu, dla jakich wartości m równanie $g(x) = m$ ma dwa rozwiązania.

4.17. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{dla } |x-1| \leq 2 \\ 3 & \text{dla } |x-1| > 2 \end{cases}$. Na podstawie wykresu podaj dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe funkcji, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie i w których ujemne, przedziały monotoniczności, wartość największą i wartość najmniejszą oraz określ liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m .

Prosto do matury



1. Funkcja f wyrażona jest wzorem $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x+2 & \text{dla } x < 2 \\ 2x-2 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Funkcja f jest rosnąca.

B. Funkcja f ma dwa miejsca zerowe.

C. Najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $\langle 1; 2 \rangle$ jest $\frac{5}{2}$.

2. Sporządź wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{3}x + 4$ dla $x \in \langle -6; 0 \rangle \cup (3; \infty)$.

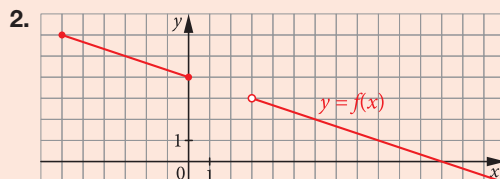
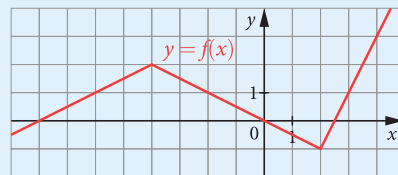
3. Sporządź wykres funkcji, która każdej liczbie rzeczywistej x mniejszej od 4 przyporządkowuje połowę liczby przeciwnej do x , a każdej liczbie rzeczywistej nie mniejszej od 4 przyporządkowuje liczbę o 2 mniejszą od połowy x .

4. Sporządź wykres funkcji f i na jego podstawie określ monotoniczność funkcji.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{dla } x < 1 \\ -1 & \text{dla } 1 \leq x \leq 4 \\ 5x - 7 & \text{dla } x > 4 \end{cases}$$

5. Wyznacz współczynniki a, b we wzorze funkcji f w taki sposób, aby wzór określał funkcję przedstawioną na rysunku.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dla } x \in (-\infty; -4) \\ -ax & \text{dla } x \in \langle -4; 2 \rangle \\ 4ax - b - 1 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$$



5. Równanie prostej w postaci ogólnej

Umiejętności:

- opisywanie zbiorów punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej
- zapisywanie równania prostej w postaci ogólnej

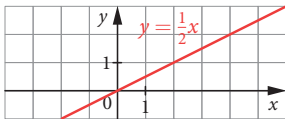
Wprowadzenie układu kartezjańskiego na płaszczyźnie pozwala na opisywanie różnych zbiorów punktów tej płaszczyzny za pomocą równań bądź nierówności.

Przykład 1 zad. 5.5

Zaznaczmy w układzie współrzędnych dane zbiory.

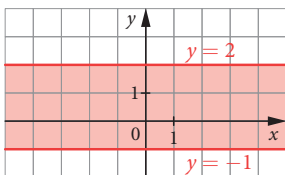
Rozwiązanie

$$a) A = \left\{ (x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } y = \frac{1}{2}x \right\}$$



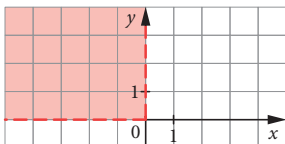
Równanie $y = \frac{1}{2}x$ opisuje prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych.

$$b) B = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } -1 \leq y \leq 2\}$$



Zbiór B jest pasmem równoległym do osi x .

$$c) C = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } x < 0 \text{ i } y > 0\}$$



Zbiór C tworzą punkty II ćwiartki układu współrzędnych.

5.5. Zaznacz na płaszczyźnie kartezjańskiej podany zbiór.

$$a) A = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } -1 \leq x \leq 2\}$$

$$b) B = \{(x, y): x \in \langle -2; 2 \rangle \text{ i } y = -x\}$$

$$c) C = \{(x, y): x > 0 \text{ i } -1 < y < 3\}$$

$$d) D = \{(x, y): x \in \mathbf{Z} \text{ i } y \in \mathbf{Z}\}$$

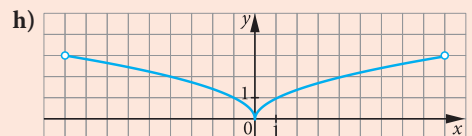
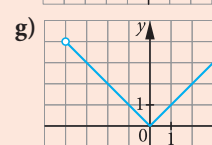
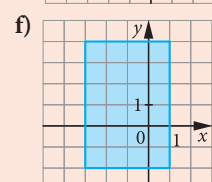
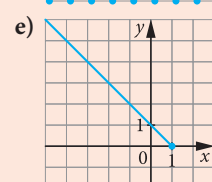
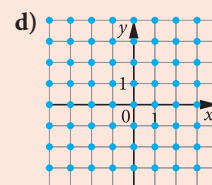
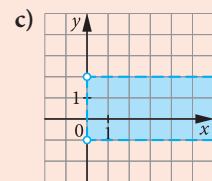
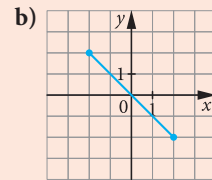
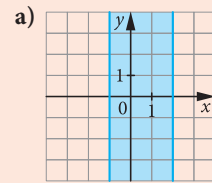
$$e) E = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } x \leq 1 \text{ i } y = 1 - x\}$$

$$f) F = \{(x, y): x \in \langle -3; 1 \rangle \text{ i } y \in \langle -2; 4 \rangle\}$$

$$g) G = \{(x, y): |x| < 4 \text{ i } y = |x|\}$$

$$h) H = \{(x, y): |x| < 9 \text{ i } y = \sqrt{|x|}\}$$

5.5. Odp.:



ZZ i MKP

tematy 5.3, 5.4

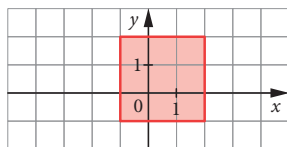
Multiteka

- Wykresy funkcji liniowych

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 4.5

Generator
testów i sprawdzianów

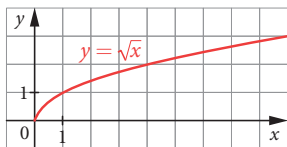
d) $D = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } -1 \leq x \leq 2 \text{ i } -1 \leq y \leq 2\}$



Zbiór D jest kwadratem.

e) $E = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } y = \sqrt{x}\}$

Do narysowania tego zbioru potrzebne jest dodatkowe założenie, że $x \geq 0$.



Zbiór E jest wykresem funkcji $y = \sqrt{x}$.

Układ współrzędnych na płaszczyźnie pozwala na opisanie (w postaci równania lub nierówności) zależności między zmiennymi x i y . Jeżeli któraś ze zmiennych nie występuje w takim opisie (czyli współczynnik przy tej zmiennej jest równy 0), to przyjmujemy, że może mieć dowolną wartość rzeczywistą.

Zastanówmy się teraz, jaki zbiór punktów jest wyrażony równaniem $ax + by = c$ z niewiadomymi x, y w zależności od wartości współczynników a, b i c .

- Gdy $a = b = c = 0$, to równanie $0x + 0y = 0$ przedstawia całą płaszczyznę, bo jest spełnione przez każdą parę liczb (x, y) – czyli każdy punkt płaszczyzny jest opisany za pomocą tego równania.
- Gdy $a = 0$, $b = 0$ i $c \neq 0$, to równania $0x + 0y = c$ nie spełnia żadna para liczb (x, y) , możemy powiedzieć, że takie równanie opisuje zbiór pusty.
- Jeżeli $b \neq 0$, to z równania $ax + by = c$ możemy wyznaczyć zmienną y .

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

Niezależnie od wartości współczynników a i c to równanie jest wzorem funkcji liniowej zmiennej x i opisuje prostą, która jest wykresem tej funkcji na płaszczyźnie.

- Jeżeli $b = 0$ i $a \neq 0$, to w równaniu $ax = c$ zmienna y może przyjmować dowolną wartość rzeczywistą. Równanie to możemy przekształcić do postaci:

$$x = \frac{c}{a}$$

Takie równanie opisuje zatem na płaszczyźnie prostą prostopadłą do osi x , która oczywiście nie jest wykresem żadnej funkcji zmiennej x .

Wniosek

Równanie $ax + by = c$ o zmiennych x i y opisuje:

- całą płaszczyznę, gdy $a = b = c = 0$,
- zbiór pusty, gdy $a = b = 0$ i $c \neq 0$,
- prostą, gdy a i b nie są jednocześnie równe 0.

Równanie $ax + by = c$, gdy a i b nie są równocześnie równe zero, czyli równanie liniowe z dwiema niewiadomymi, nazywamy **równaniem prostej w postaci ogólnej**, natomiast równanie $y = ax + b$ **równaniem kierunkowym prostej**.

Równanie prostej w postaci ogólnej często będziemy zapisywać w postaci $ax + by - c = 0$ (wszystkie wyrazy po jednej stronie równania przyrównane do zera), a założenie, że a i b nie są równocześnie równe zero – w równoważnej postaci $a^2 + b^2 \neq 0$.

Mówimy również, że wykresem równania liniowego z dwiema niewiadomymi lub jego interpretacją geometryczną na płaszczyźnie kartezjańskiej jest prosta.

Przykład 2 ◀ zad. 5.6

Przekształćmy dane równanie prostej z postaci ogólnej do postaci kierunkowej.

Rozwiązanie

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 2x - y - 3 = 0 & \text{b) } x + 3y - 4 = 0 \\ -y = -2x + 3 & 3y = -x + 4 \\ y = 2x - 3 & y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \end{array}$$

Przykład 3 ◀ zad. 5.8

Przekształćmy dane równanie kierunkowe prostej do postaci ogólnej.

Rozwiązanie

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = \sqrt{5}x - 3 & \leftarrow \text{wystarczy przenieść wszystkie wyrazy} \\ -\sqrt{5}x + y + 3 = 0 & \text{na jedną stronę i uporządkować ich kolejność} \\ \text{b) } y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} & \\ \frac{3}{4}x + y - \frac{1}{2} = 0 & \leftarrow \text{jeżeli zależy nam na całkowitych współczynnikach,} \\ 3x + 4y - 2 = 0 & \text{to obydwie strony równania mnożymy przez 4} \end{array}$$

Zauważmy, że równanie danej prostej w postaci ogólnej można zapisać na nieskończenie wiele sposobów (jedne równania powstają z innych przez pomnożenie przez liczbę różną od zera). Natomiast jeżeli prosta ma równanie w postaci kierunkowej, to jest ono tylko jedno.

◀ 5.6. Przekształć równanie prostej z postaci ogólnej do postaci kierunkowej, jeśli to możliwe.

- $x - y = 0$
- $x - 3y + 2 = 0$
- $2y - 7 = 0$
- $2x - 5 = 0$
- $2x - 2y + 1 = 0$
- $x + 2y - 4 = 0$

Odp.: a) $y = x$

b) $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

c) $y = 3\frac{1}{2}$

d) Nie ma równania w postaci kierunkowej.

e) $y = x + \frac{1}{2}$

f) $y = -\frac{1}{2}x + 2$

◀ 5.8. Przekształć równanie prostej z postaci kierunkowej do postaci ogólnej.

a) $y = 2x - 5$

b) $y = \frac{2}{3}x + 5$

c) $y = -x$

d) $y = -\frac{2}{7}x + \frac{3}{14}$

e) $y = -\frac{1}{3}x + 1$

f) $y = \frac{2}{5}x - 2$

Odp.: a) $2x - y - 5 = 0$

b) $2x - 3y + 15 = 0$

c) $x + y = 0$

d) $4x + 14y - 3 = 0$

e) $x + 3y - 3 = 0$

f) $2x - 5y - 10 = 0$

◀5.9. Sprawdź, czy oba równania opisują tę samą prostą.

a) $2x - y + 3 = 0$, $-2x + y - 3 = 0$

b) $x + 3y - 2 = 0$, $x - 3y + 2 = 0$

c) $3x + 7y - 2 = 0$,
 $-6x - 14y + 4 = 0$

d) $3x + 6 = 0$, $2y + 4 = 0$

e) $-2x + 4y - 10 = 0$,
 $3x - 6y + 15 = 0$

f) $2x - y + 3 = 0$, $4x - 2y + 6 = 0$

Odp.: a) tak b) nie c) tak

d) nie e) tak f) tak

◀5.11. Wyznacz punkty przecięcia prostej z osiami układu współrzędnych i narysuj tę prostą.

a) $x + y - 3 = 0$

b) $2x - y - 2 = 0$

c) $3x + 7y - 21 = 0$

d) $-2x - 5y + 10 = 0$

e) $2x - y - \sqrt{2} = 0$

f) $2x + y + 2 = 0$

Odp.: a) (0, 3), (3, 0)

b) (0, -2), (1, 0)

c) (0, 3), (7, 0)

d) (0, 2), (5, 0)

e) $(0, -\sqrt{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$

f) (0, -2), (-1, 0)

Przykład 4 ◀ zad. 5.9

Sprawdźmy, czy równania $26x - 65y + 91 = 0$ i $-0,4x + y - 1,4 = 0$ opisują różne proste.

Rozwiązanie

Jeżeli każde z równań zapiszemy w postaci kierunkowej, to z pierwszego otrzymamy

$$-65y = -26x - 91, \text{ czyli } y = \frac{26}{65}x + \frac{91}{65}, y = \frac{2}{5}x + \frac{7}{5}, \text{ a z drugiego } y = 0,4x + 1,4.$$

Obydwa równania są więc równoważne i opisują tę samą prostą.

To samo zadanie można rozwiązać krócej: pomnożyć obydwie strony drugiego równania przez brakujący współczynnik przy y , czyli przez -65 , i sprawdzić wartości pozostałych uzyskanych w ten sposób współczynników.

Do narysowania prostej wystarczy znać położenie dwóch punktów, które do niej należą. Łatwo jest wyznaczyć punkty przecięcia prostej z osiami układu współrzędnych, zwłaszcza gdy równanie prostej jest dane w postaci ogólnej.

Przykład 5 ◀ zad. 5.11

Wyznamy punkty przecięcia prostej o równaniu $2x - 3y + 6 = 0$ z osiami układu współrzędnych i narysujemy tę prostą.

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć punkt przecięcia prostej z osią x , rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{każdy punkt osi } x \text{ ma współrzędną } y = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Punkt przecięcia z osią x ma współrzędne $(-3, 0)$.

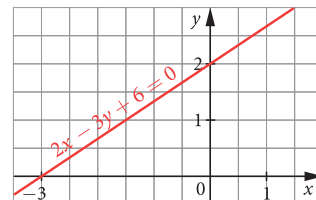
Aby wyznaczyć punkt przecięcia prostej z osią y , rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{każdy punkt osi } y \text{ ma współrzędną } x = 0$$

$$\begin{cases} -3y + 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Punkt przecięcia z osią y ma współrzędne $(0, 2)$.



Odp.: Punkty przecięcia prostej z osiami to $(-3, 0)$ i $(0, 2)$.

Przykład 6 ◀ zad. 5.13

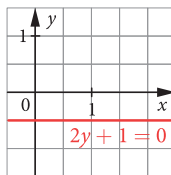
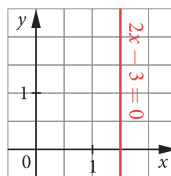
Narysujemy prostą o podanym równaniu.

a) $2x - 3 = 0$

Jest to prosta $x = \frac{3}{2}$ prostopadła do osi x , przecinająca ją w punkcie $(\frac{3}{2}, 0)$.

b) $2y + 1 = 0$

Jest to prosta $y = -\frac{1}{2}$ równoległa do osi x , przecinająca oś y w punkcie $(0, -\frac{1}{2})$.

**Przykład 7** ◀ zad. 5.14

Narysujemy zbiór punktów opisany za pomocą podanego równania.

a) $(x + 3)(2x - y + 3) = 0$

b) $|x + 2| + |y - 5| = 0$

Rozwiązanie

a) $(x + 3)(2x - y + 3) = 0$, czyli:

$x + 3 = 0$ lub $2x - y + 3 = 0$

$x = -3$ lub $y = 2x + 3$

Odp.: Szukanym zbiorem jest suma dwóch prostych.

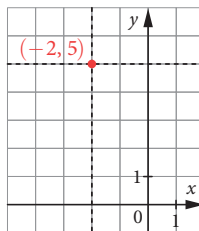
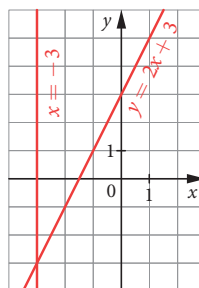
b) $|x + 2| + |y - 5| = 0$

← $|a| + |b| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ i $b = 0$

$|x + 2| = 0$ i $|y - 5| = 0$

$x = -2$ i $y = 5$

Odp.: Szukanym zbiorem jest punkt $(-2, 5)$.

**Przykład 8** ◀ zad. 5.15

Opiszemy za pomocą równań proste, w których zawarte są krawędzie narysowanej litery F.

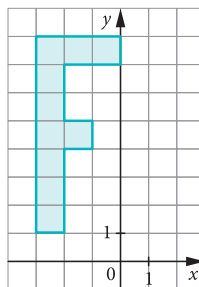
Rozwiązanie

Cztery proste pionowe mają równania:

$x = -3$, $x = -2$, $x = -1$ oraz $x = 0$.

Proste poziome wyrażone są równaniami:

$y = 1$, $y = 4$, $y = 5$, $y = 7$ oraz $y = 8$.



◀5.13. W układzie współrzędnych poprowadź prostą o podanym równaniu.

a) $2x + 7 = 0$

b) $x - 2y + 6 = 0$

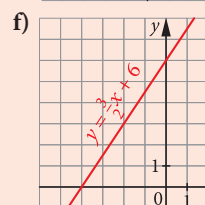
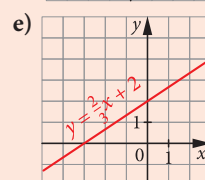
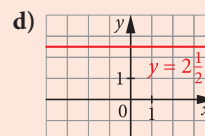
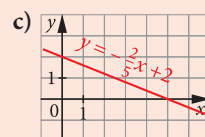
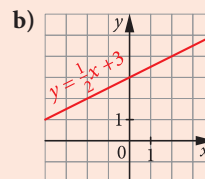
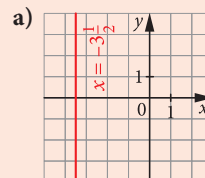
c) $2x + 5y - 10 = 0$

d) $2y - 5 = 0$

e) $2x - 3y + 6 = 0$

f) $2y = 3x + 12$

Odp.:



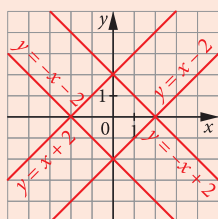
◀5.14. Patrz s. 378.

◀5.15. Zaznacz w jednym układzie współrzędnych proste o równaniach:

$y = x - 2$, $y = x + 2$, $y = -x + 2$ oraz $y = -x - 2$.

Ile osi symetrii ma figura będąca sumą tych prostych? Czy ma środek symetrii?

Odp.:



4 osie symetrii
i środek symetrii

◀ 5.16. Wyznacz ćwiartki układu współrzędnych, przez które przechodzi podana prosta.

- a) $y = 2x - 1$
 b) $x - 5y = 0$
 c) $x + 2y + 10 = 0$
 d) $x + 2y - 6 = 0$
 e) $\frac{5}{2}x - 2y - 8 = 0$
 f) $x + 1 = 0$

Odp.: a) I, III, IV b) I, III
 c) II, III, IV d) I, II, IV
 e) I, III, IV f) II, III

◀ 5.17.–5.20. Patrz s. 378.

◀ 5.21., 5.22. Patrz s. 379.

Odpowiedzi i rozwiązania

5.1. B

5.2. D

5.3. D

5.4. P, P, P

Przykład 9 ◀ zad. 5.16–5.22

Dla jakich wartości m prosta o równaniu $5x + (2m - 1)y + 3 = 0$ nie przecina drugiej i trzeciej ćwiartki układu współrzędnych?

Rozwiązanie

Jeżeli prosta nie przecina drugiej i trzeciej ćwiartki układu współrzędnych, to zawiera się w pierwszej i czwartej lub pokrywa się z osią y . Zatem jej równanie musi mieć postać:

$$x = c, \text{ gdzie } c \geq 0$$

Warunek dla żadnego m nie będzie spełniony, bo nawet jeśli $2m - 1 = 0$, to dane równanie ma postać $5x + 3 = 0$, czyli $x = -\frac{3}{5}$. Jest to równanie opisujące prostą pionową zawartą w drugiej i trzeciej ćwiartce układu współrzędnych.

Odp.: Nie ma takiej wartości m .

Zadania

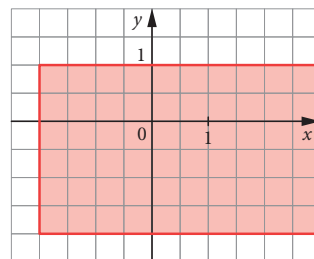
W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszyty.

5.1. Wskaż równanie opisujące wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x - \frac{7}{15}$.

- A. $15x + 60y - 28 = 0$ C. $15x + 60y + 28 = 0$
 B. $15x - 60y - 28 = 0$ D. $-15x - 60y + 28 = 0$

5.2. Wskaż zbiór opisujący figurę przedstawioną na rysunku.

- A. $D = \{(x, y): x > -2 \text{ i } -2 \leq y \leq 1\}$
 B. $D = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } -2 \leq x \leq 1\}$
 C. $D = \{(x, y): x \geq -2 \text{ i } -2 < y < 1\}$
 D. $D = \{(x, y): x \geq -2 \text{ i } -2 \leq y \leq 1\}$



5.3. Wskaż punkt przecięcia prostej $12x + 3y - 4 = 0$ z osią x .

- A. $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ B. $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ C. $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ D. $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

5.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Równanie $4x - 2y + 1 = 0$ opisuje prostą przechodzącą przez I, II i III ćwiartkę układu współrzędnych.
 B. Prosta o równaniu $4y - \pi = 0$ jest równoległa do osi x .
 C. Prosta o równaniu $\pi x - 2 = 0$ nie jest wykresem funkcji.

5.5. Zaznacz na płaszczyźnie kartezjańskiej podany zbiór.

- a) $A = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } -1 \leq x \leq 2\}$
- b) $B = \{(x, y): x \in \langle -2; 2 \rangle \text{ i } y = -x\}$
- c) $C = \{(x, y): x > 0 \text{ i } -1 < y < 3\}$
- d) $D = \{(x, y): x \in \mathbf{Z} \text{ i } y \in \mathbf{Z}\}$
- e) $E = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } x \leq 1 \text{ i } y = 1 - x\}$
- f) $F = \{(x, y): x \in \langle -3; 1 \rangle \text{ i } y \in \langle -2; 4 \rangle\}$
- g) $G = \{(x, y): |x| < 4 \text{ i } y = |x|\}$
- h) $H = \{(x, y): |x| < 9 \text{ i } y = \sqrt{|x|}\}$

5.6. Przekształć równanie prostej z postaci ogólnej do postaci kierunkowej, jeśli to możliwe.

- a) $x - y = 0$ c) $2y - 7 = 0$ e) $2x - 2y + 1 = 0$
- b) $x - 3y + 2 = 0$ d) $2x - 5 = 0$ f) $x + 2y - 4 = 0$

5.7. Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej opisanej podanym równaniem.

- a) $x + y - 3 = 0$ c) $2x + 3y - 1 = 0$
- b) $4x - y + 7 = 0$ d) $\sqrt{2}x - 5y + \pi = 0$

5.8. Przekształć równanie prostej z postaci kierunkowej do postaci ogólnej.

- a) $y = 2x - 5$ c) $y = -x$ e) $y = -\frac{1}{3}x + 1$
- b) $y = \frac{2}{3}x + 5$ d) $y = -\frac{2}{7}x + \frac{3}{14}$ f) $y = \frac{2}{5}x - 2$

5.9. Sprawdź, czy oba równania opisują tę samą prostą.

- a) $2x - y + 3 = 0$ $-2x + y - 3 = 0$
- b) $x + 3y - 2 = 0$ $x - 3y + 2 = 0$
- c) $3x + 7y - 2 = 0$ $-6x - 14y + 4 = 0$
- d) $3x + 6 = 0$ $2y + 4 = 0$
- e) $-2x + 4y - 10 = 0$ $3x - 6y + 15 = 0$
- f) $2x - y + 3 = 0$ $4x - 2y + 6 = 0$

5.10. Podaj przykład trzech różnych równań liniowych opisujących tę samą prostą.

5.11. Wyznacz punkty przecięcia prostej z osiami układu współrzędnych i narysuj tę prostą.

- a) $x + y - 3 = 0$ c) $3x + 7y - 21 = 0$ e) $2x - y - \sqrt{2} = 0$
- b) $2x - y - 2 = 0$ d) $-2x - 5y + 10 = 0$ f) $2x + y + 2 = 0$

5.5. Patrz s. 371.

5.6. a) $y = x$ b) $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

c) $y = 3\frac{1}{2}$

d) Nie ma równania w postaci kierunkowej.

e) $y = x + \frac{1}{2}$ f) $y = -\frac{1}{2}x + 2$

5.7. a) $a = -1$ b) $a = 4$

c) $a = -\frac{2}{3}$ d) $a = \frac{\sqrt{2}}{5}$

5.8. a) $2x - y - 5 = 0$

b) $2x - 3y + 15 = 0$ c) $x + y = 0$

d) $4x + 14y - 3 = 0$

e) $x + 3y - 3 = 0$

f) $2x - 5y - 10 = 0$

5.9. a) tak b) nie c) tak
d) nie e) tak f) tak

5.10. np. $2x - y + 5 = 0$,
 $x - 0,5y + 2,5 = 0$,
 $-6x + 3y - 15 = 0$

5.11. a) $(0, 3), (3, 0)$

b) $(0, -2), (1, 0)$

c) $(0, 3), (7, 0)$

d) $(0, 2), (5, 0)$

e) $(0, -\sqrt{2}), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

f) $(0, -2), (-1, 0)$

5.12. a) $y = x + 7$; np. $(0, 7)$,

$(-2, 5)$, $(1, 8)$, $(\frac{1}{3}, 7\frac{1}{3})$,

$(-\sqrt{2}, 7 - \sqrt{2})$

b) $y = -2x + 3$; np. $(0, 3)$, $(1, 1)$,

$(2, -1)$, $(\frac{1}{3}, 2\frac{1}{3})$, $(-\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$

c) $x = 3y + 2$; np. $(5, 1)$,

$(2, 0)$, $(-1, -1)$, $(3, \frac{1}{3})$,

$(-3\sqrt{2} + 2, -\sqrt{2})$

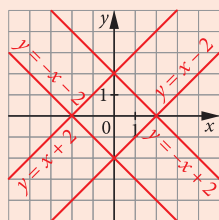
d) $y = \frac{3}{4}x - 1$; np. $(0, -1)$,

$(4, 2)$, $(-4, -4)$, $(\frac{1}{3}, -\frac{3}{4})$,

$(-\sqrt{2}, -\frac{3\sqrt{2} + 4}{4})$

5.13. Patrz s. 375.

5.15.



4 osie symetrii
i środek symetrii

5.16. a) I, III, IV **b)** I, III

c) II, III, IV **d)** I, II, IV

e) I, III, IV **f)** II, III

5.17. a) $m > 0$ **b)** $m < 0$

5.18. Prosta ma równanie
kierunkowe $y = ax + b$, gdzie
 $a = m - 1$, $b = 3 - m$.

Rozwiązujemy układ nierówności:

a) $a \leq 0$ i $b \leq 0$, stąd $m \in \emptyset$.

b) $a \geq 0$ i $b \leq 0$, stąd $m \geq 3$.

c) $a \leq 0$ i $b \geq 0$, stąd $m \leq 1$.

d) $a \geq 0$ i $b \geq 0$, stąd $m \in \langle 1; 3 \rangle$.

5.19. Prosta $y = ax + b$ nie
przechodzi przez trzecią ćwiartkę
układu współrzędnych, jeśli $a \leq 0$
i $b \geq 0$.

a) $m \leq 0$ **b)** $m \leq -2$ **c)** $m \leq -1$

d) Nie ma takiego m .

5.20. Prosta $y = ax + b$
przechodzi przez ćwiartki układu
współrzędnych: pierwszą, trzecią
i czwartą, jeśli $a > 0$ i $b < 0$.

a) $m > 5$ **b)** $m \in (2; 4)$

c) $m > 2$ **d)** $m \in (-4; 1)$

5.12. Wyznacz pięć par liczb spełniających podane równanie.

a) $x - y + 7 = 0$

c) $-x + 3y + 2 = 0$

b) $2x + y - 3 = 0$

d) $3x - 4y - 4 = 0$

5.13. W układzie współrzędnych poprowadź prostą o podanym równaniu.

a) $2x + 7 = 0$

c) $2x + 5y - 10 = 0$

e) $2x - 3y + 6 = 0$

b) $x - 2y + 6 = 0$

d) $2y - 5 = 0$

f) $2y = 3x + 12$

5.14. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów opisany równaniem.

a) $x(x - y) = 0$

e) $|x - 1| + |y + 2| = 0$

b) $(x - 2)(y + 1) = 0$

f) $(x - 2)(x + 5) = 0$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$

g) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 0$

d) $y^2 + 8y + 16 = 0$

h) $(x - 6)^2 = 0$

5.15. Zaznacz w jednym układzie współrzędnych proste o równaniach:

$y = x - 2$, $y = x + 2$, $y = -x + 2$ oraz $y = -x - 2$

Ile osi symetrii ma figura będąca sumą tych prostych? Czy ma środek symetrii?

5.16. Wyznacz ćwiartki układu współrzędnych, przez które przechodzi podana prosta.

a) $y = 2x - 1$

c) $x + 2y + 10 = 0$

e) $\frac{5}{2}x - 2y - 8 = 0$

b) $x - 5y = 0$

d) $x + 2y - 6 = 0$

f) $x + 1 = 0$

5.17. Dla jakich wartości m prosta o równaniu $2y + 3x = m$ przechodzi przez

a) pierwszą ćwiartkę układu współrzędnych?

b) trzecią ćwiartkę układu współrzędnych?

5.18. Dobierz m tak, aby prosta o równaniu $(m - 1)x - y = m - 3$ nie miała punktów wspólnych z podaną ćwiartką układu współrzędnych.

a) I

b) II

c) III

d) IV

5.19. Dla jakich wartości m prosta o podanym równaniu nie przechodzi przez trzecią ćwiartkę układu współrzędnych?

a) $y = mx + 3$

c) $(m + 1)x - 2y + 5 = 0$

b) $y = (m + 2)x + 1$

d) $2(m - 3)x + 3y + 8 = 0$

5.20. Dla jakich wartości m prosta o podanym równaniu przechodzi przez pierwszą, trzecią i czwartą ćwiartkę układu współrzędnych?

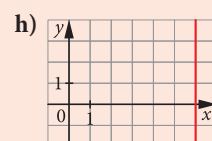
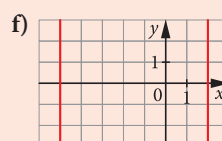
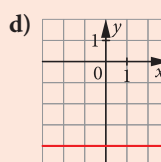
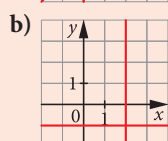
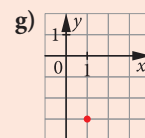
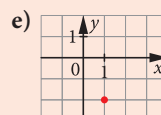
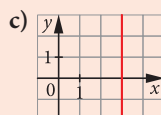
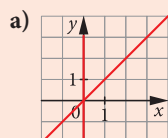
a) $(m - 5)x - y - m - 1 = 0$

c) $(m - 2)x - 3y - m + 2 = 0$

b) $(4 - m)x - y - m + 2 = 0$

d) $(m + 4)x - 2y + m - 1 = 0$

5.14.



5.21. Dobierz m tak, aby prosta o podanym równaniu przechodziła tylko przez pierwszą i drugą ćwiartkę układu współrzędnych.

- a) $y = (m - 7)x + 5$ c) $(m - 5)x + 3y + 2 = 0$
 b) $y = 2(m + 3)x + 7$ d) $(3 - m)x + 7y - 1 = 0$

5.22. Dobierz m tak, aby prosta o danym równaniu nie przecinała drugiej i trzeciej ćwiartki układu współrzędnych.

- a) $2x + my - 5 = 0$ c) $5x - (2m + 6)y - 3 = 0$
 b) $3x + (m - 1)y + 2 = 0$ d) $x + (m - 5)y - m = 0$

5.23. Dla jakich wartości m wykres funkcji $f(x) = |x| + m$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z prostokątem o wierzchołkach $(0, 1)$, $(-2, 1)$, $(-2, -3)$, $(0, -3)$?

5.24. Dla jakich wartości m wykres funkcji $f(x) = mx + 2 + m$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z kwadratem o wierzchołkach $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$?

Prosto do matury



1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Równanie $2x + 4y + 3 = 0$ opisuje prostą przechodzącą przez I, II i IV ćwiartkę układu współrzędnych.
 B. Prosta o równaniu $-3x\pi = 0$ jest równoległa do osi x .
 C. Prosta o równaniu $\sqrt{7}x + \pi y = 2$ jest wykresem funkcji.

2. Wyznacz punkty przecięcia prostej $2x + 7y - 14 = 0$ z osiami układu współrzędnych i narysuj tę prostą.

3. Dla jakich wartości m prosta o równaniu $3x + \sqrt{5}y = m$ przechodzi przez II, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych?

4. Narysuj na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór:

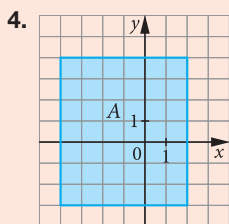
$$A = \{(x, y): x \in \langle -4; 2 \rangle \text{ i } y \in \langle -3; 4 \rangle\}$$

Jaką figurą geometryczną jest zbiór A ? Ile jest równe jej pole?

5. Dla jakich wartości m prosta o równaniu $2x + y = m$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z prostokątem o wierzchołkach $(1, 3)$, $(-3, 3)$, $(-3, -2)$, $(1, -2)$?

Prosto do matury

1. F, F, P
 2. $(7, 0)$, $(0, 2)$
 3. $m < 0$



prostokąt o polu 42

5. $m \in \langle -8; 5 \rangle$

5.21. Prosta $y = ax + b$ przechodzi tylko przez ćwiartki układu współrzędnych pierwszą i drugą, jeśli $a = 0$ i $b > 0$.

- a) $m = 7$
 b) $m = -3$
 c) Nie ma takiego m .
 d) $m = 3$

5.22. Prosta nie przecina drugiej ani trzeciej ćwiartki układu współrzędnych, jeśli jej równanie ma postać:

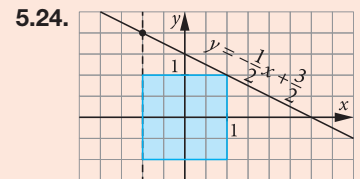
$y = 0$ (żadna z podanych prostych nie może mieć takiego równania) lub

$x = x_0$, gdzie $x_0 \geq 0$.

Jeżeli więc prosta ma równanie $ax + by + c = 0$, to muszą być spełnione warunki: $a \neq 0$, $b = 0$ i $\frac{c}{a} \leq 0$.

- a) $m = 0$
 b) Nie ma takiego m .
 c) $m = -3$
 d) $m = 5$

5.23. $m \in \langle -5; 1 \rangle$



$f(-1) = -m + 2 + m = 2$, więc wykresy wszystkich funkcji danej postaci przechodzą przez punkt $(-1, 2)$. Dla $m = -\frac{1}{2}$ mamy

$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ i $f(1) = 1$, czyli prosta przechodzi przez punkt $(1, 1)$. Proste mające co najmniej jeden punkt wspólny z danym kwadratem zawierają się w kącie ostrym wyznaczonym przez proste $x = -1$ i $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, więc wykres funkcji f ma co najmniej jeden punkt wspólny z danym kwadratem, gdy $m \leq -\frac{1}{2}$.

6. Położenie dwóch prostych na płaszczyźnie

Umiejętności:

- wyznaczanie równania prostej, która jest równoległa lub prostopadła do danej prostej i przechodzi przez dany punkt
- badanie równoległości i prostopadłości prostych na podstawie ich równań

Każda prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych i niepokrywająca się z osią y jest wykresem pewnej funkcji o wzorze $y = ax$ ($D = \mathbf{R}$), gdzie a jest współczynnikiem kierunkowym tej prostej.

Twierdzenie

Wykresy funkcji $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki kierunkowe tych funkcji są równe, tzn. gdy $a_1 = a_2$.

Dowód tego twierdzenia poznacie podczas dalszej nauki.

Przykład 1

Narysujemy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

$$y = 2x - 1, \quad y = -\frac{1}{2}x + 3, \quad y = -\frac{1}{2}x + 1,$$

$$y = 2x + 2, \quad y = -\frac{1}{2}x - 2$$

i wskażemy wśród nich proste równoległe.

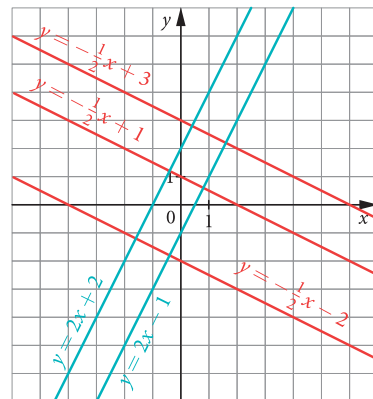
Rozwiązanie

Prostymi równoległymi są wykresy funkcji:

- $y = 2x - 1$ oraz $y = 2x + 2$,

a także:

- $y = -\frac{1}{2}x + 3, \quad y = -\frac{1}{2}x + 1, \quad y = -\frac{1}{2}x - 2.$



Przykład 2

◀ zad. 6.6

Napišemy równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P = (1, -5)$ i równoległej do prostej $y = -3x + 1$.

ZZ i MKP

temat 5.5

Multiteka

- Proste równoległe i proste prostopadłe w układzie współrzędnych

dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 4.6

Generator
testów i sprawdzianów

◀ 6.6. Wyznacz równanie prostej równoległej do danej prostej k i przechodzącej przez punkt P .

a) $k: y = -x - 1, P = (2, -1)$

d) $k: 5x + 3 = 0, P = \left(\frac{1}{5}, 5\right)$

b) $k: y = -2x + 3, P = (-1, 2)$

e) $k: 2y - 2 = 0, P = \left(1\frac{1}{2}, -7\right)$

c) $k: \sqrt{2}x + 3y = 1, P = (-\sqrt{2}, 0)$

f) $k: x - y + 1 = 0, P = (-2, 3)$

Odp.: a) $y = -x + 1$ b) $y = -2x$ c) $y = -\frac{\sqrt{2}}{3}x - \frac{2}{3}$ d) $x = \frac{1}{5}$ e) $y = -7$ f) $y = x + 5$

Rozwiązanie

$$y = ax + b$$

$$y = -3x + b$$

$$-5 = -3 \cdot 1 + b$$

$$b = -2$$

← prosta l jest równoległa do prostej $y = -3x + 1$

← punkt $P = (1, -5)$ leży na prostej l

Odp.: Prosta l ma równanie $y = -3x - 2$.

Przykład 3 ◀ zad. 6.7

Dla jakich wartości m prosta o równaniu $y = (2m + 3)x - 3$ jest równoległa do prostej $y = -5x + 1$?

Rozwiązanie

$$2m + 3 = -5$$

$$m = -4$$

← współczynniki kierunkowe obu prostych są równe

Odp.: Dla $m = -4$.

Zajmiemy się teraz prostymi prostopadłymi na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zaczniemy od najprostszych sytuacji.

- Jeżeli prosta ma równanie $y = b$, to każda prosta do niej prostopadła ma równanie postaci $x = c$.
- Jeżeli prosta ma równanie $x = c$, to każda prosta do niej prostopadła ma równanie postaci $y = b$.

Jeżeli rozważamy proste prostopadłe, z których żadna nie jest równoległa do osi układu współrzędnych, to każda z nich ma równanie postaci $y = ax + b$.

Twierdzenie

Prosta prostopadła do prostej o równaniu $y = mx$ ($m \neq 0$) i przechodząca przez początek układu współrzędnych ma równanie $y = -\frac{1}{m}x$.

Dowód

Przyjmijmy, że $m > 0$.

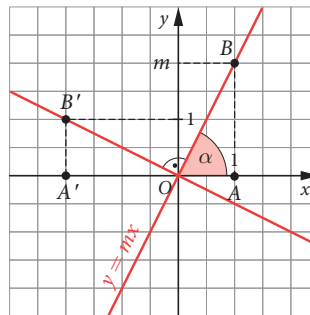
Prosta $y = mx$ przechodzi przez punkt $B = (1, m)$.

Niech $A = (1, 0)$ i $O = (0, 0)$.

Oznaczmy $\angle AOB = \alpha$.

Przez początek układu prowadzimy prostą $y = ax$ prostopadłą do danej i zaznaczamy na niej odcinek OB' równy odcinkowi OB , jak na rysunku.

$$\angle A'OB' = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha = \angle ABO$$



◀6.7. Dla jakiej wartości m wykresy funkcji $f(x) = -5x + 1$ i $g(x) = (3 - 2m)x - 1$ są równoległe?

Odp.: $m = 4$

Uwagi metodyczne

Podajemy prosty geometryczny dowód twierdzenia o prostych prostopadłych przechodzących przez początek układu współrzędnych. Następnie na przykładach omawiamy sposób znajdowania równania prostej prostopadłej do danej i przechodzącej przez dany punkt.

Zatem $\triangle AOB$ jest przystający do $\triangle A'B'O$ (cecha kbk). Stąd $B' = (-m, 1)$, więc

$$1 = a \cdot (-m) \quad \leftarrow \text{punkt } B' \text{ leży na prostej } y = ax$$

$$a = -\frac{1}{m}, \text{ czyli } y = -\frac{1}{m}x \quad \leftarrow \text{równanie prostej } OB'$$

Zauważmy, że nie ma żadnego znaczenia początkowe założenie dotyczące znaku liczby m , gdyż dla $m < 0$ prowadzone rozumowanie jest analogiczne.

Koniec dowodu

Wniosek

Iloczyn współczynników kierunkowych dwóch prostych prostopadłych nie-równoległych do osi układu współrzędnych jest równy -1 .

Przykład 4

Prosta o równaniu $y = -4x$ jest prostopadła do prostej o równaniu $y = \frac{1}{4}x$, a prosta o równaniu $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ jest prostopadła do prostej o równaniu $y = -\sqrt{2}x$.

Wniosek

Prosta prostopadła do prostej o równaniu $y = ax + b$, gdzie $a \neq 0$, ma równanie postaci $y = -\frac{1}{a}x + c$.

Przykład 5

Prosta l ma równanie $y = 7x - 5$. Każda prosta prostopadła do l ma równanie postaci $y = -\frac{1}{7}x + b$. Takich prostych jest nieskończenie wiele.

Przykład 6 ◀ zad. 6.9

Napiszemy równanie prostej prostopadłej do danej prostej l i przechodzącej przez dany punkt P .

Rozwiązanie

$$\text{a) } l: y = 3x - 2, P = (-1, 4)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + b \quad \leftarrow \text{równanie prostej prostopadłej do prostej } l$$

$$4 = -\frac{1}{3} \cdot (-1) + b \quad \leftarrow \text{wstawiamy współrzędne punktu } P$$

$$b = 3\frac{2}{3}$$

Odp.: Szukana prosta ma równanie $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$.

◀ 6.9. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt P .

a) $l: y = 3x - \sqrt{2}, P = (0, 2)$

b) $l: y = -\frac{1}{2}x - 1, P = (3, 1)$

c) $l: y = -5, P = (3, 7)$

d) $l: x = -7\sqrt{2}, P = (4, -2)$

e) $l: x - 5y + 2 = 0, P = (-1, 2)$

f) $l: y = \frac{3}{2}x + \sqrt{2}, P = (-1, 1)$

Odp.: a) $y = -\frac{1}{3}x + 2$

b) $y = 2x - 5$ c) $x = 3$

d) $y = -2$ e) $y = -5x - 3$

f) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

b) $l: 2x + 5y = 1, P = (2, -1)$

$$y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5} \quad \leftarrow \text{zapisujemy równanie prostej } l \text{ w postaci kierunkowej}$$

$$y = \frac{5}{2}x + b \quad \leftarrow \text{równanie prostej prostopadłej do prostej } l$$

$$-1 = \frac{5}{2} \cdot 2 + b \quad \leftarrow \text{wstawiamy współrzędne punktu } P$$

$$b = -6$$

Odp.: Szukana prosta ma równanie $y = \frac{5}{2}x - 6$.c) $l: y = -3, P = (\sqrt{3}, 3)$ Prosta l jest równoległa do osi x , więc prosta prostopadła do niej jest prostopadła do osi x i nie ma równania kierunkowego, tylko równanie postaci $x = a$.Odp.: Szukana prosta ma równanie $x = \sqrt{3}$.**Przykład 7** ◀ zad. 6.10Dla jakich wartości m prosta o równaniu $y = 2mx + 1$ jest prostopadła do prostej $y = -3x + 2$?

Rozwiązanie

$$2m \cdot (-3) = -1 \quad \leftarrow \text{iloczyn współczynników kierunkowych jest równy } -1$$

$$m = \frac{1}{6}$$

Odp.: Dla $m = \frac{1}{6}$.**Zadania**

W każdym z zadań 6.1–6.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

6.1. Wskaż prostą równoległą do prostej $y = \frac{2}{3}x - 1$.

A. $2x + 3y + 5 = 0$

C. $3x + 2y + 5 = 0$

B. $2x - 3y + 5 = 0$

D. $3x - 2y + 5 = 0$

6.2. Wskaż wartość m , dla której wykresy funkcji $f(x) = (m - 3)x - 1$ oraz $g(x) = 2x - m$ są równoległe.

A. $m = 0$

B. $m = 1$

C. $m = 3$

D. $m = 5$

6.3. Wskaż prostą prostopadłą do prostej o równaniu $5x + 2y - 3 = 0$.

A. $y = \frac{2}{5}x - 6$

B. $y = -\frac{2}{5}x - 6$

C. $y = \frac{5}{2}x - 6$

D. $y = -\frac{5}{2}x - 6$

◀ 6.10. Dla jakich wartości m proste o równaniach $y = -3x + 11$ i $y = -mx - 3$ są prostopadłe?

Odp.: $m = -\frac{1}{3}$

Odpowiedzi i rozwiązania**6.1.** B**6.2.** D**6.3.** A

6.4. np. $g(x) = \sqrt{2}x$,
 $h(x) = \sqrt{2}x + 0,5$,
 $k(x) = \sqrt{2}x + 100$,
 $l(x) = \sqrt{2}x - \pi$

6.5. np. $x = -\sqrt{3}$,
 $y = x + 7$,
 $y = -2x + 3$

6.6. a) $y = -x + 1$ b) $y = -2x$
c) $y = -\frac{\sqrt{2}}{3}x - \frac{2}{3}$ d) $x = \frac{1}{5}$
e) $y = -7$ f) $y = x + 5$

6.7. $m = 4$

6.8. a) $m = 3$ b) $m = 2$
c) $m = -3$ d) $m = 0$
e) $m = -4$ f) $m = -\frac{1}{2}$

6.9. a) $y = -\frac{1}{3}x + 2$ b) $y = 2x - 5$
c) $x = 3$ d) $y = -2$
e) $y = -5x - 3$ f) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

6.10. $m = -\frac{1}{3}$

6.11. $k = -\frac{5}{2}$,
punkt przecięcia: $\left(2\frac{4}{13}, -\frac{6}{13}\right)$

6.4. Podaj cztery przykłady funkcji liniowych, których wykresy są równoległe do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{2}x - 7$.

6.5. Podaj trzy przykłady równań prostych przecinających prostą $k: 5x - 2y = -\sqrt{2}$.

6.6. Wyznacz równanie prostej równoległej do danej prostej k i przechodzącej przez punkt P .

a) $k: y = -x - 1$	$P = (2, -1)$	d) $k: 5x + 3 = 0$	$P = \left(\frac{1}{5}, 5\right)$
b) $k: y = -2x + 3$	$P = (-1, 2)$	e) $k: 2y - 2 = 0$	$P = \left(1\frac{1}{2}, -7\right)$
c) $k: \sqrt{2}x + 3y = 1$	$P = (-\sqrt{2}, 0)$	f) $k: x - y + 1 = 0$	$P = (-2, 3)$

6.7. Dla jakiej wartości m wykresy funkcji $f(x) = -5x + 1$ i $g(x) = (3 - 2m)x - 1$ są równoległe?

6.8. Dla jakich wartości m proste k i l opisane podanymi równaniami nie mają punktów wspólnych?

a) $k: 3x + 2y = 5$	$l: mx + 2y = 1$
b) $k: 2x - y = -2$	$l: 4x - my = -7$
c) $k: 4x + 5 = 0$	$l: x + (m + 3)y = 1$
d) $k: 2mx + 3y - 10 = 0$	$l: 5y - 7 = 0$
e) $k: (3m - 5)x - y - 7 = 0$	$l: (5m + 3)x - y + 3 = 0$
f) $k: 2y + (4m + 3)x = 0$	$l: -mx + y + 2 = 0$

6.9. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt P .

a) $l: y = 3x - \sqrt{2}$	$P = (0, 2)$	d) $l: x = -7\sqrt{2}$	$P = (4, -2)$
b) $l: y = -\frac{1}{2}x - 1$	$P = (3, 1)$	e) $l: x - 5y + 2 = 0$	$P = (-1, 2)$
c) $l: y = -5$	$P = (3, 7)$	f) $l: y = \frac{3}{2}x + \sqrt{2}$	$P = (-1, 1)$

6.10. Dla jakich wartości m proste o równaniach $y = -3x + 11$ i $y = -mx - 3$ są prostopadłe?

6.11. Wyznacz taką wartość k , dla której wykresy funkcji $f(x) = \frac{2}{3}x - 2$ oraz $g(x) = (k + 1)x + 3$ są prostopadłe. Dla wyznaczonej wartości k oblicz współrzędne punktu, w którym wykresy tych funkcji się przecinają.

6.12. Dla jakich wartości m proste o równaniach $y = \left|m + \frac{2}{3}\right|x + 7$ i $y = -3x - 3$ są prostopadłe?

6.13. Dla jakich wartości m proste o równaniach $y = |2m + 5|x - 3$ oraz $y = |3 - m|x + 8$ są równoległe?

6.14. Wykres funkcji liniowej f przechodzi przez punkty $(-3, -1)$ i $(5, 3)$. Wykres funkcji liniowej g jest równoległy do wykresu funkcji f i przechodzi przez punkt $(1, -3)$. Podaj wzory funkcji f i g .

6.15. Funkcja f wyrażona jest wzorem $f(x) = -2x + 8$. Podaj wzór funkcji g , wiedząc, że jej wykres jest prostą prostopadłą do wykresu funkcji f oraz że funkcje f i g mają to samo miejsce zerowe.

* **6.16.** Dla jakich wartości k i m wykresy funkcji $f(x) = (2k + 3)x + 3m$ oraz $g(x) = (5 - m)x + k - 2$ są równoległe oraz jeden z nich przechodzi przez punkt $A = (2, -3)$?

Prosto do matury



1. Dane są dwie proste k i l . Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Jeżeli $k: 2x + y = 0$ i $l: x - 2y = 3$, to proste k i l są prostopadłe.
 B. Jeżeli $k: 2x + y = 1$ i $l: 2x - y = -1$, to proste k i l są prostopadłe.
 C. Jeżeli $k: y = -3$ i $l: x = 3$, to proste k i l są prostopadłe.

2. Spośród prostych opisanych za pomocą podanych równań wypisz wszystkie pary prostych równoległych oraz wszystkie pary prostych prostopadłych.

$k: y = -2$	$l: y = -2x + 3$	$m: x = 13$
$p: y = \frac{1}{2}x + 6$	$r: y = -\frac{1}{2}x$	$t: y = -0,5x + 1,4$

3. Podaj wzór funkcji liniowej f , wiedząc, że jej miejscem zerowym jest liczba 2 oraz że wykres funkcji f jest równoległy do wykresu funkcji $g(x) = -3x + 4$.

4. Dla jakich wartości m wykresy funkcji $f(x) = |2m - 3|x - 5$ i $g(x) = -0,2x - m$ są prostopadłe?

5. Dla jakich wartości k i m wykresy funkcji $f(x) = 4x - 3$ i $g(x) = (2k - m)x + 4m$ są prostopadłe i przecinają oś odciętych w tym samym punkcie?

6.12. $m = -\frac{1}{3}$ lub $m = -1$

6.13. $m = -8$ lub $m = -\frac{2}{3}$

6.14. $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$,
 $g(x) = \frac{1}{2}x - 3\frac{1}{2}$

6.15. $g(x) = \frac{1}{2}x - 2$

6.16. Z warunków zadania wynika, że: $\begin{cases} 2k + 3 = 5 - m \\ f(2) = -3 \end{cases}$

lub $\begin{cases} 2k + 3 = 5 - m \\ g(2) = -3 \end{cases}$,

czyli $\begin{cases} 2k + m = 2 \\ 4k + 3m = -9 \end{cases}$

lub $\begin{cases} 2k + m = 2 \\ k - 2m = -11 \end{cases}$.

Stąd $k = 7,5$, $m = -13$
 lub $k = -1,4$, $m = 4,8$.

Prosto do matury

1. P, F, P

2. $k \perp m$, $p \perp l$, $r \parallel t$

3. $f(x) = -3x + 6$

4. $m = -1$ lub $m = 4$

5. $k = -\frac{13}{128}$, $m = \frac{3}{64}$

7. Geometryczna interpretacja układów równań

Umiejętności:

- interpretacja geometryczna układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi
- obliczanie współrzędnych punktu przecięcia dwóch prostych

Punkt $A = (x_A, y_A)$ jest punktem przecięcia prostej k o równaniu $a_1x + b_1y = c_1$ i prostej l o równaniu $a_2x + b_2y = c_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy jego współrzędne spełniają obydwa równania, czyli gdy para liczb $x = x_A$ i $y = y_A$ jest jedynym rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Z geometrycznej interpretacji równania liniowego z dwiema niewiadomymi wynika **graficzna (geometryczna) metoda rozwiązywania układu równań liniowych**.

Przykład 1 ◀ zad. 7.5

Rozwiążemy graficznie układ równań.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 4x - y = 2 \\ 2x - 1 = \frac{1}{2}y \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} -3x + y = -5 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$$

Rozwiązanie

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

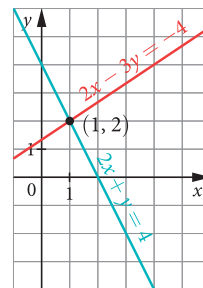
Wykresy obu równań rysujemy w układzie współrzędnych. Wykresem tego układu równań są dwie przecinające się proste, a jego rozwiązaniem są współrzędne punktu przecięcia prostych, które odczytujemy z rysunku:

$$x = 1 \text{ i } y = 2$$

Odczytywanie danych z rysunku może być obarczone błędem wynikającym z niedokładności wykresu. Dlatego warto sprawdzić rozwiązanie, podstawiając odczytane wartości do pierwotnej postaci układu równań:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -4 \\ 2 \cdot 1 + 2 = 4 \end{cases}$$

Odp.: Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $x = 1$, $y = 2$.



ZZ i MKP

tematy 5.6, 5.9

Multiteka

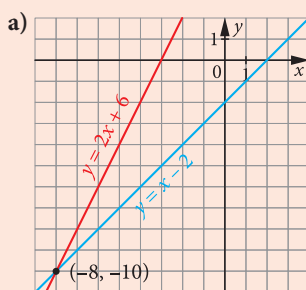
- Interpretacja geometryczna układu dwóch równań liniowych
- Układy równań liniowych – interpretacja geometryczna
- Wykorzystanie funkcji liniowej – rozwiązanie zadania

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 4.7

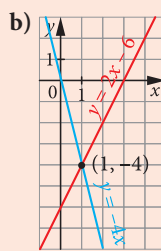
◀ 7.5. Rozwiąż graficznie i algebraicznie układ równań.

$$\text{a) } \begin{cases} y - 2x = 6 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 4x + y = 0 \\ 2x - y = 6 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 3x + y = 5 \\ -3x + y = -7 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} \frac{1}{2}x + 3 = 2y \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

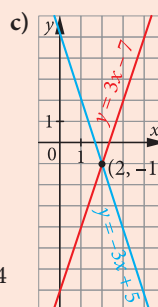
Odp.:



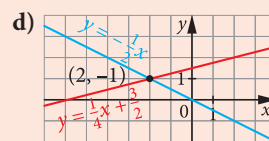
$$x = -8, y = -10$$



$$x = 1, y = -4$$



$$x = 2, y = -1$$

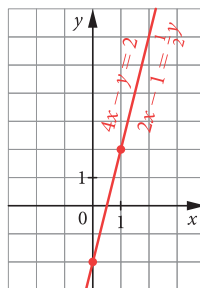


$$x = -2, y = 1$$

$$b) \begin{cases} 4x - y = 2 \\ 2x - 1 = \frac{1}{2}y \end{cases}$$

Wykresem każdego z równań jest ta sama prosta. Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, ponieważ rozwiązaniem są współrzędne każdego punktu leżącego na tej prostej.

Odp.: Rozwiązaniem układu równań jest każda para liczb spełniająca równanie $4x - y = 2$.



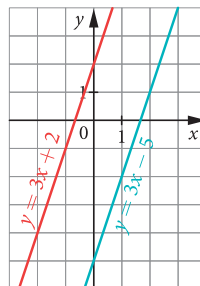
$$c) \begin{cases} -3x + y = -5 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$$

Wyznaczając y z każdego równania, otrzymujemy następującą postać układu równań:

$$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$$

Jego wykresem są dwie proste równoległe.

Odp.: Układ równań nie ma rozwiązania.



W przykładzie 1 wyczerpaliśmy wszystkie możliwości wzajemnego położenia dwóch prostych będących wykresem układu równań liniowych. Uzupełnimy definicję rodzajów układów równań o ich interpretację graficzną.

Definicja

Układ dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi nazywamy:

- **oznaczonym** – gdy układ ma jedno rozwiązanie, a jego wykresem są dwie proste przecinające się,
- **nieoznaczonym** – gdy układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, a jego wykresem jest jedna prosta,
- **sprzecznym** – gdy układ nie ma rozwiązania, a jego wykresem są proste równoległe niepokrywające się.

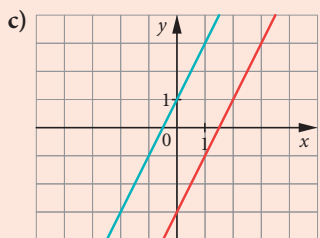
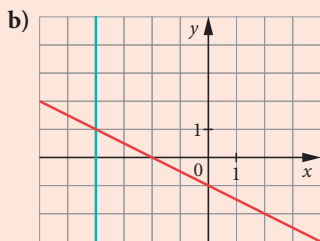
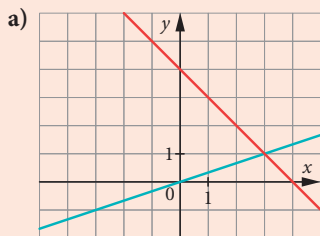
Zgodnie z tą definicją – w przykładzie 1 występują odpowiednio:

- układ oznaczony,
- układ nieoznaczony,
- układ spreczny.

Uwagi metodyczne

Zwróćmy uwagę na częste mylenie stwierdzeń „układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań” i „układ jest spełniony przez każdą parę liczb”.

◀ 7.8. Podaj przykład układu równań, którego interpretację graficzną przedstawiono na rysunku. Odczytaj z wykresu rozwiązanie tego układu.



Odp.: a) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$, $(3, 1)$

b) $\begin{cases} x + 4 = 0 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$, $(-4, 1)$

c) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$, brak rozwiązań

◀ 7.14. Wyznacz wartość m , dla której układ równań

$$\begin{cases} x - 5y = 10 \\ 3x + my = 3 \end{cases} \text{ jest sprzeczny.}$$

Odp.: $m = -15$

Przykład 2 ◀ zad. 7.8

Napiszemy układ równań, którego interpretację graficzną przedstawia zamieszczony obok rysunek.

Rozwiązanie

Rozwiązaniem układu jest para liczb $(-1, 2)$.

Czerwona prosta jest wykresem funkcji $y = 2$.

Niebieska jest wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$, której współczynniki odczytujemy z rysunku.

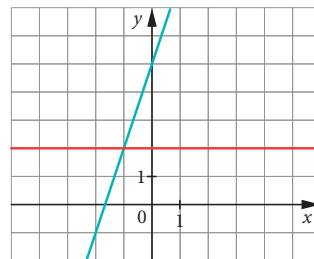
$$a = \frac{3}{1} = 3 \text{ oraz } b = 5$$

Zatem $y = 3x + 5$ to równanie niebieskiej prostej. Szukanym układem równań jest:

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = 3x + 5 \end{cases} \text{ lub w wersji uporządkowanej } \begin{cases} y = 2 \\ -3x + y = 5 \end{cases}$$

Zauważmy, że para $(-1, 2)$ spełnia obydwa równania – jest rozwiązaniem układu.

Odp.: $\begin{cases} y = 2 \\ -3x + y = 5 \end{cases}$



Przykład 3 ◀ zad. 7.12

Sprawdźmy, jaką parę prostych opisuje dla $m = -2$ podany układ równań.

$$\begin{cases} 2x + (m + 1)y = m + 3 \\ (2m + 6)x - y + 1 + m = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie

$$\begin{cases} 2x + (-2 + 1)y = -2 + 3 \\ (-4 + 6)x - y + 1 - 2 = 0 \end{cases}$$

◀ wstawiamy do równań -2 w miejsce m

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

◀ oba równania opisują tę samą prostą

Odp.: Dla $m = -2$ ten układ jest nieoznaczony i opisuje prostą o równaniu $2x - y = 1$.

* Przykład 4 ◀ zad. 7.14

Wyznamy wartość m , dla której układ równań $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ mx + 2y = 1 \end{cases}$ jest sprzeczny.

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że równanie $3x + y = 5$ opisuje prostą k , a równanie $mx + 2y = 1$ prostą l . Szukamy wartości m , dla której proste k i l nie mają punktów wspólnych.

$$y = -3x + 5$$

◀ równanie prostej k w postaci kierunkowej

$$y = -\frac{m}{2}x + \frac{1}{2}$$

◀ równanie prostej l w postaci kierunkowej

◀ 7.12. Jaką parę prostych opisuje układ równań dla wskazanej wartości k ?

a) $\begin{cases} (2k + 1)x + (k - 1)y = 3 \\ x + (1 - k)y = k \end{cases}$, $k = 3$

b) $\begin{cases} kx + 2y = 1 \\ x + 2ky = k - 1 \end{cases}$, $k = \sqrt{2}$

c) $\begin{cases} 3kx + (2k - 1)y = -4 \\ (2 - 2k)x + (k + 1)y = k \end{cases}$, $k = \frac{1}{2}$

d) $\begin{cases} x + (2k + 7)y = k + 7 \\ (k + 3)x + (1 - k)y = k + 1 \end{cases}$, $k = -5$

Odp.: a), b), c) parę prostych przecinających się

d) jedną prostą

Prosta k przecina oś y w punkcie $(0, 5)$, a prosta l – w punkcie $(0, \frac{1}{2})$. Zatem jeżeli obie proste będą miały identyczne współczynniki kierunkowe, to nie będą miały punktów wspólnych.

$$\begin{aligned} -3 &= -\frac{m}{2} && \leftarrow \text{porównujemy współczynniki kierunkowe obu prostych} \\ m &= 6 \end{aligned}$$

Odp.: Układ równań jest sprzeczny dla $m = 6$.

*** Przykład 5** ◀ zad. 7.9

Zbadamy, dla jakich wartości parametru m punkt przecięcia prostych o równaniach $3x + 4y = 5m - 7$ oraz $x - 4y = m + 3$ należy do I ćwiartki układu współrzędnych.

Rozwiązanie

Warunki zadania będą spełnione, jeśli rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5m - 7 \\ x - 4y = m + 3 \end{cases} \text{ będzie para liczb dodatnich.}$$

Rozwiążemy ten układ metodą przeciwnych współczynników.

Najpierw obliczymy x .

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5m - 7 \\ x - 4y = m + 3 \end{cases} \quad \leftarrow \text{dodajemy równania stronami}$$

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5m - 7 \\ 4x = 6m - 4 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} 3x + 4y = 5m - 7 \\ x = \frac{3}{2}m - 1 \end{cases}$$

Następnie obliczymy y .

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5m - 7 \\ -3x + 12y = -3m - 9 \end{cases} \quad \leftarrow \text{mnożymy drugie równanie przez } -3 \text{ i dodajemy równania stronami}$$

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5m - 7 \\ 16y = 2m - 16 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} 3x + 4y = 5m - 7 \\ y = \frac{1}{8}m - 1 \end{cases}$$

$$\text{Zatem rozwiązaniem układu równań jest para liczb postaci } \begin{cases} x = \frac{3}{2}m - 1 \\ y = \frac{1}{8}m - 1 \end{cases}.$$

Zauważmy, że dla dowolnej wartości $m \in \mathbb{R}$ układ ma dokładnie jedno rozwiązanie – czyli jest oznaczony. Punkt o współrzędnych $(\frac{3}{2}m - 1, \frac{1}{8}m - 1)$ należy do I ćwiartki układu współrzędnych, jeśli spełniony jest układ nierówności:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}m - 1 > 0 \\ \frac{1}{8}m - 1 > 0 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ m > 8 \end{cases} \text{ i ostatecznie } m > 8$$

Odp.: Punkt przecięcia prostych o podanych równaniach należy do I ćwiartki układu współrzędnych, gdy $m \in (8; \infty)$.

◀ 7.9. Dla jakich wartości parametru k punkt przecięcia prostych o równaniach $x - y = k - 1$ oraz $2x - y = 3 - k$ należy do III ćwiartki układu współrzędnych?

Odp.: $k \in (2, \infty)$

Zadania

Odpowiedzi i rozwiązania

7.1. D

7.2. C

7.3. A

7.4. P, P, F

W każdym z zadań 7.1–7.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

7.1. Wskaż układ równań, którego wykresem jest para prostych równoległych.

A. $\begin{cases} x - y + 11 = 0 \\ -x - y - 1 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ x - 2y - 7 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{5} = 0 \\ \sqrt{3}y + \sqrt{5} = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 6x - 9y = 0 \\ 8x - 12y - 5 = 0 \end{cases}$

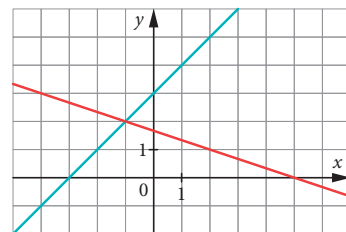
7.2. Wskaż układ równań, którego graficzną interpretacją przedstawiono na rysunku.

A. $\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + 3y + 5 = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x - 3y - 5 = 0 \end{cases}$



7.3. Wskaż układ równań, którego wykresem jest para prostych przecinających się w punkcie leżącym na osi rzędnych.

A. $\begin{cases} x - 13y - 17 = 0 \\ x + 13y + 17 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x - 13y + 17 = 0 \\ -x + 13y + 17 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 13x + y + 17 = 0 \\ -13x + y - 17 = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 13x + y + 17 = 0 \\ -13x - y - 17 = 0 \end{cases}$

7.4. Dany jest układ równań $\begin{cases} 7x + 3y = 2 + m \\ 5x + 6y = k - 1 \end{cases}$ z niewiadomymi x i y .

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Układ jest oznaczony dla dowolnych wartości $k, m \in \mathbf{R}$.

B. Dla $m = 2$ i $k = 0$ proste opisane przez ten układ przecinają się w punkcie $(1, -1)$.

C. Istnieją takie wartości m i k , dla których proste opisane układem są równoległe.

7.5. Rozwiąż graficznie i algebraicznie układ równań.

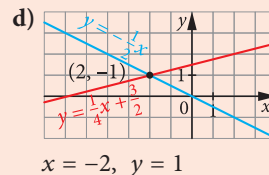
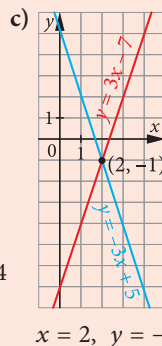
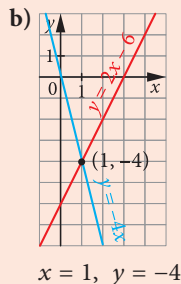
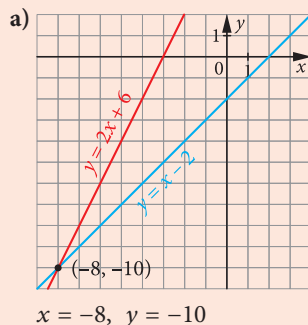
a) $\begin{cases} y - 2x = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ -3x + y = -7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + y = 0 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3 = 2y \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

7.5.

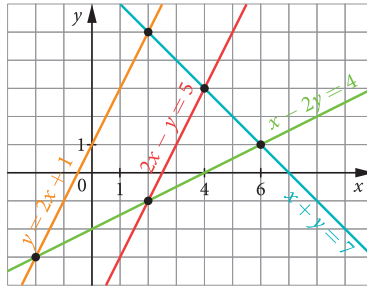


7.6. Przekształć układ równań do możliwie prostej postaci. Rozwiąż otrzymany układ równań algebraicznie i graficznie.

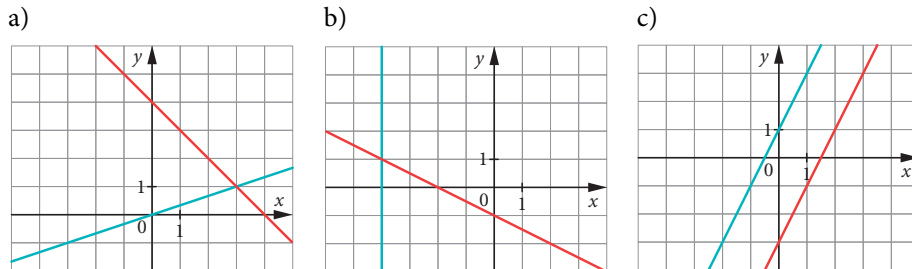
- a)
$$\begin{cases} \frac{y+1}{3} = 2-x \\ 3(x+2) - 2(y-2) = 3x+12 \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} 0,1 - \frac{1}{5}(y+1) = 0,3(x-2) \\ \frac{x-3}{2} + \frac{2y+9}{6} = 1,5 \end{cases}$$
- c)
$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 2(x-2y) - (3-x)(3+x) \\ 2x = 4-y \end{cases}$$
- d)
$$\begin{cases} 4(x-1)^2 - (3y-2)^2 = (2x-3)^2 - (3y+1)(3y-1) - 2 \\ (2x-\sqrt{3})(2x+\sqrt{3}) - (2x+1)^2 = 12(y-1) \end{cases}$$

7.7. Korzystając z rysunku, na którym przedstawione są wykresy równań pierwszego stopnia, ułóż

- a) oznaczone układy równań i podaj ich rozwiązanie.
b) sprzeczne układy równań.



7.8. Podaj przykład układu równań, którego interpretację graficzną przedstawiono na rysunku. Odczytaj z wykresu rozwiązanie tego układu.



7.9. Dla jakich wartości parametru k punkt przecięcia prostych o równaniach $x - y = k - 1$ oraz $2x - y = 3 - k$ należy do III ćwiartki układu współrzędnych?

7.10. Podaj przykład układu równań, którego wykresem jest jedna prosta przechodząca przez punkty $(-3, 4)$ i $(5, -12)$.

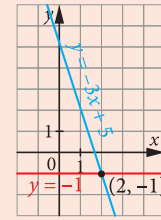
7.8. a)
$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}, (3, 1) \quad \text{b)} \quad \begin{cases} x + 4 = 0 \\ x + 2y = -2 \end{cases}, (-4, 1)$$

c)
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x - y = -1 \end{cases}, \text{brak rozwiązań}$$

7.9. $k \in (2, \infty)$

7.10. np.
$$\begin{cases} y = -2x - 2 \\ x + \frac{1}{2}y + 1 = 0 \end{cases}$$

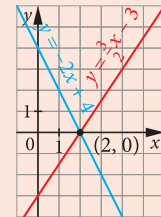
7.6. a) $x = 2, y = -1$



b) brak rozwiązań

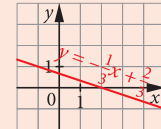


c) $x = 2, y = 0$



d) nieskończenie wiele par liczb (x, y) spełniających równanie

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$



7.7. a) układy oznaczone i ich rozwiązania:

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ x - 2y = 4 \end{cases}, x = -2, y = -3;$$

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ x + y = 7 \end{cases}, x = 2, y = 5;$$

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x - 2y = 4 \end{cases}, x = 2, y = -1;$$

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}, x = 4, y = 3;$$

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x + y = 7 \end{cases}, x = 6, y = 1$$

b) układ sprzeczny:
$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

7.11. np. $\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = 2x - 10 \end{cases}$

7.12. a), b), c) parę prostych przecinających się
d) jedną prostą

7.13. Podstawiamy współrzędne punktu A do obu równań:
 $1 = -1 + m$ i $1 = k - 1$. Stąd
 $m = 2$, $k = 2$.

7.14. Przekształcamy układ równań do postaci

$$\begin{cases} y = \frac{1}{5}x - 2 \\ y = \frac{-3}{m}x + \frac{3}{m} \end{cases},$$

gdzie $m \neq 0$. Ten układ jest sprzeczny, jeśli $\frac{1}{5} = \frac{-3}{m}$ i $-2 \neq \frac{3}{m}$ i $m \neq 0$, czyli $m = -15$.

7.15. Dany układ jest równoważny

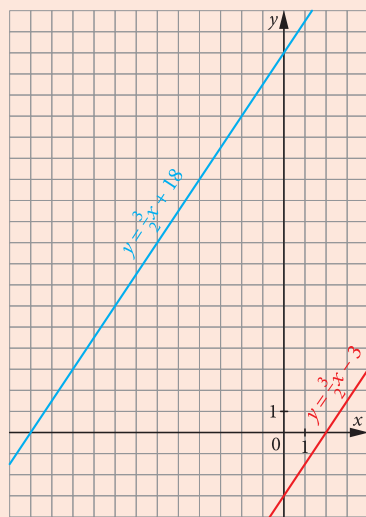
$$\text{układowi } \begin{cases} y = -\frac{m}{2}x + 3 \\ y = 2x - 3 \end{cases}.$$

Równania układu opisują różne proste (w różnych punktach przecinają oś y), więc nie istnieje szukana wartość m .

Prosto do matury

1. P, P, F

2.



3. $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = \frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$

7.11. Wykresem pewnego układu równań jest para prostych równoległych, z których pierwsza przechodzi przez punkt $(-1, 0)$, a druga przechodzi przez punkt $(5, 0)$. Podaj przykład takiego układu równań.

7.12. Jaką parę prostych opisuje układ równań dla wskazanej wartości k ?

a) $\begin{cases} (2k+1)x + (k-1)y = 3 \\ x + (1-k)y = k \end{cases} \quad k = 3$ c) $\begin{cases} 3kx + (2k-1)y = -4 \\ (2-2k)x + (k+1)y = k \end{cases} \quad k = \frac{1}{2}$

b) $\begin{cases} kx + 2y = 1 \\ x + 2ky = k-1 \end{cases} \quad k = \sqrt{2}$ d) $\begin{cases} x + (2k+7)y = k+7 \\ (k+3)x + (1-k)y = k+1 \end{cases} \quad k = -5$

7.13. Wyznacz takie wartości m i k , aby wykresy funkcji $y = -x + m$ i $y = kx - 1$ przecinały się w punkcie $A = (1, 1)$.

* 7.14. Wyznacz wartość m , dla której układ równań $\begin{cases} x - 5y = 10 \\ 3x + my = 3 \end{cases}$ jest sprzeczny.

* 7.15. Sprawdź, czy istnieje taka wartość m , dla której układ równań $\begin{cases} mx + 2y = 6 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ jest nieoznaczony.

Prosto do matury



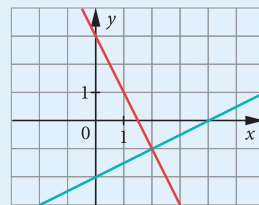
1. Dane są proste o równaniach $2x - 3y = 5$ i $kx + 6y = 10$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Dla $k = 2$ proste przecinają się.
B. Dla $k = -4$ proste są równoległe.
C. Dla $k = 4$ proste są identyczne.

2. Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - 5 = 1 \end{cases}$.

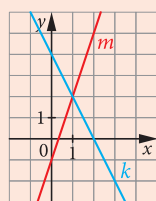
3. Napisz układ równań, którego interpretację graficzną przedstawiono na rysunku.



4. Dana jest prosta k o równaniu $2x + y = 4$. Podaj przykład równania takiej prostej m , aby proste k i m przecinały się w punkcie $(1, 2)$. Narysuj obie proste w układzie współrzędnych.

* 5. Wyznacz wartości m oraz k , dla których układ równań $\begin{cases} 3x - 2y = m \\ -9x - ky = 12 \end{cases}$ jest oznaczony.

4. np. $y = 3x - 1$



5. Przekształcamy równoważnie każde z równań układu.

$$\begin{cases} 3x - 2y = m & | \cdot 3 \\ -9x - ky = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} 9x - 6y = 3m \\ -9x - ky = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} 9x - 6y = 3m \\ -(6+k)y = 3m + 12 \end{cases}$$

Ten układ równań jest oznaczony, gdy $k \neq -6$, $m \in \mathbb{R}$.

8. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–21 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż funkcję liniową, której wykres przechodzi przez początek układu współrzędnych.

- A. $f(x) = 3x - 1$ B. $f(x) = 3$ C. $f(x) = 3x$ D. $f(x) = 3 - x$

2. Wybierz punkty, w których prosta o równaniu $x - 2y + 4 = 0$ przecina osie układu współrzędnych.

- A. (0, 3) i (1, 0) B. (0, 2) i (-4, 0) C. (0, 3) i (-5, 0) D. (0, -1) i (-1, 0)

3. Równania $y = -\frac{2}{3}x + 3$ oraz $4x + 6y - 9 = 0$ opisują

- A. osie układu współrzędnych. C. proste równoległe.
B. proste przecinające się. D. tę samą prostą.

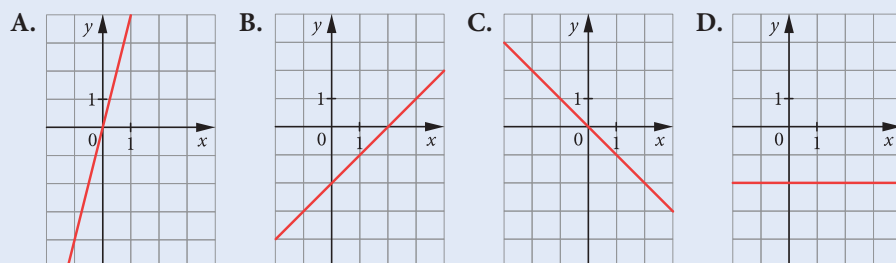
4. Spośród podanych prostych wybierz tę, której nie można opisać za pomocą równania w postaci kierunkowej.

- A. $3x - y + 2 = 0$ B. $2x - \sqrt{2}y = 0$ C. $-5x + 2 = 0$ D. $2y + 1 = 0$

5. Wskaż funkcję malejącą.

- A. $f(x) = -3$ B. $f(x) = -5 + x$ C. $f(x) = 2x - 1$ D. $f(x) = 5 - x$

6. Która z narysowanych prostych jest równoległa do prostej o równaniu $y = x + 2$?



7. Przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi prosta będąca wykresem funkcji $f(x) = -2x + 1$?

- A. I, II i IV B. II, III i IV C. tylko I i II D. tylko II i IV

Odpowiedzi i rozwiązania

1. C

2. B

3. C

4. C

5. D

6. B

7. A

- 8. C**
- 8.** Dla jakiej wartości m funkcje $f(x) = 2x - 1$ oraz $f(x) = m - x$ mają to samo miejsce zerowe?
- A. $m = -1$ B. $m = 0$ C. $m = \frac{1}{2}$ D. $m = 2$
- 9. D**
- 9.** Które zdanie dotyczące prostej l o równaniu $y = 3x + 6$ jest fałszywe?
- A. Prosta l przecina oś układu w punktach $(-2, 0)$, $(0, 6)$.
 B. Prosta l przechodzi przez I, II i III ćwiartkę układu współrzędnych.
 C. Prosta l jest równoległa do prostej $-3x + y - 2 = 0$.
 D. Prosta l przecina prostą $x - \frac{1}{3}y - \sqrt{3} = 0$.
- 10. A**
- 10.** Który z odcinków o podanych końcach przecina prostą $3x + y = 4$?
- A. $(-1, 1)$, $(2, 3)$ C. $(0, 0)$, $(1, -1)$
 B. $(3, -2)$, $(3, 1)$ D. $(-2, -2)$, $(-5, 1)$
- 11. B**
- 11.** Prosta l opisana jest równaniem $3x - 2y = -7$. Wskaż współczynnik kierunkowy funkcji liniowej f , której wykresem jest prosta l .
- A. $\frac{7}{3}$ B. $1,5$ C. 3 D. $\frac{2}{3}$
- 12. C**
- 12.** Wskaż prostą równoległą do prostej o równaniu $x - \sqrt{3}y + \sqrt{2} = 0$.
- A. $x - y + \sqrt{2} = 0$ C. $\sqrt{3}x - 3y - 11 = 0$
 B. $x + \sqrt{3}y + \sqrt{7} = 0$ D. $x - y - 1 = 0$
- 13. C**
- 13.** Wskaż sprzeczny układ równań.
- A. $\begin{cases} 3x - 2y + 6 = 0 \\ y - 6 = 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x - 8y + 3 = 0 \\ \frac{1}{2}x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$
 B. $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2x - 5y + 7 = 0 \\ x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$
- 14. C**
- 14.** Wskaż prostą prostopadłą do prostej o równaniu $2x - y = 0$.
- A. $y = \frac{1}{2}x$ B. $y = 2x$ C. $y = -\frac{1}{2}x$ D. $y = -2x$
- 15. C**
- 15.** Wskaż punkt należący do prostej o równaniu $-12x + 2y + 1 = 0$.
- A. $(0, -2,5)$ B. $(-3, 1)$ C. $(0, -0,5)$ D. $\left(\frac{1}{2}, -5\right)$
- 16. C**
- 16.** Równania $y = -\frac{5}{3}x + 3$ oraz $10x + 6y - 9 = 0$ przedstawiają
- A. proste prostopadłe. C. proste równoległe.
 B. proste przecinające się. D. tę samą prostą.

17. Wskaż prostą równoległą do osi y .

- A. $x + y = 0$ B. $x - 7 = 0$ C. $2x + 2y = 9$ D. $y = 1$

17. B

18. Wskaż punkt przecięcia prostych o równaniach $-5x + 3y = 3$ i $2x + 3y = 24$.

- A. $\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$ B. $(3, 6)$ C. $(12, 0)$ D. $(0, 1)$

18. B

19. Wskaż wartość m , dla której wykresy funkcji $f(x) = (5m + 7)x - 8$ i $g(x) = 5x - m$ są równoległe.

- A. $m = -\frac{2}{5}$ B. $m = \frac{2}{5}$ C. $m = \frac{5}{2}$ D. $m = -\frac{5}{2}$

19. A

20. Wskaż wartość m , dla której wykresy funkcji $f(x) = -\frac{2}{3}x + 1$ oraz $g(x) = (m - 1)x + 11$ są prostopadłe.

- A. $m = \frac{1}{3}$ B. $m = \frac{5}{3}$ C. $m = \frac{1}{2}$ D. $m = \frac{5}{2}$

20. D

21. Dana jest prosta l : $x + y - 3 = 0$. Wskaż zdanie fałszywe.

- A. Prosta l przecina osie układu w punktach $(3, 0)$, $(0, 3)$.
 B. Prosta l przecina I, II i IV ćwiartkę układu współrzędnych.
 C. Prosta l jest prostopadła do prostej $x - y + 3 = 0$.
 D. Prosta l ma dokładnie jeden punkt wspólny z wykresem funkcji $y = -|x - 1| + 2$.

21. D

W zadaniach 22–30 oceń prawdziwość podanych zdań.

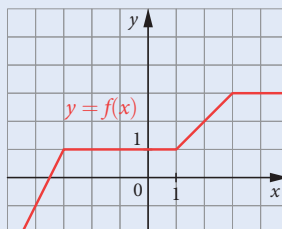
22. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 4 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ \frac{3}{2}x + 1 & \text{dla } x \in \langle -2; \infty \rangle \end{cases}$.

22. F, F, P

- A. Funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą.
 B. Funkcja f przyjmuje wartość największą.
 C. Równanie $f(x) = \sqrt{2}$ ma 2 rozwiązania.

23. Dana jest funkcja f przedstawiona na wykresie.

- A. Funkcja f nie jest monotoniczna.
 B. Funkcja f przyjmuje wartość największą równą 3.
 C. Równanie $f(x) = 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.



23. F, P, P

24. P, F, F

24. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ 2x + 3 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty \rangle \end{cases}$.

- A. Funkcja f jest rosnąca.
- B. Funkcja f ma dwa miejsca zerowe.
- C. Wykresem funkcji f jest linia prosta.

25. P, F, P

25. Dany jest układ równań $\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$.

- A. Rozwiązaniem układu jest jedna para liczb.
- B. Układ jest sprzeczny.
- C. Układ jest oznaczony.

26. P, P, F

26. Dany jest układ równań $\begin{cases} -3x + 4y = 7 \\ kx - 12y = 15 \end{cases}$.

- A. Dla $k = -27$ rozwiązaniem układu jest para liczb $x = -1$, $y = 1$.
- B. Dla $k = 9$ ten układ jest sprzeczny.
- C. Istnieje taka wartość k , dla której ten układ jest nieoznaczony.

27. P, P, P

27. Dany jest układ równań $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ kx + 2y = m \end{cases}$.

- A. Istnieją takie wartości m oraz k , dla których ten układ jest oznaczony.
- B. Istnieją takie wartości m oraz k , dla których ten układ jest nieoznaczony.
- C. Istnieją takie wartości m oraz k , dla których ten układ jest sprzeczny.

28. F, P, P

28. Dana jest prosta k : $2x + y - m + 3 = 0$.

- A. Jeżeli $m = -3$, to prosta k przechodzi przez początek układu współrzędnych.
- B. Dla dowolnej wartości $m \in \mathbf{R}$ prosta k ma punkty wspólne z IV ćwiartką układu współrzędnych.
- C. Jeżeli $m < 2$, to prosta k nie ma punktów wspólnych z I ćwiartką układu współrzędnych.

29. P, P, P

29. Dane są proste k : $2x + 3y = 5$ i l : $3x - 2y = 1$.

- A. Proste k i l są prostopadłe.
- B. Proste k i l przecinają się w punkcie $(1, 1)$.
- C. Proste k i l oraz prosta $x - y = 0$ mają dokładnie jeden punkt wspólny.

30. F, F, F

30. Dane są proste k : $4x - y = 2$ i l : $x + 2y = 14$.

- A. Proste k i l są prostopadłe.
- B. Proste k i l są równoległe.
- C. Proste k i l przecinają się w punkcie należącym do IV ćwiartki układu współrzędnych.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

31. Wyznacz wzór funkcji liniowej, której miejscem zerowym jest liczba 3 i której wykres przechodzi przez punkt $(0, -5)$.

32. Podaj wzór funkcji liniowej, której wykres powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = 2x + 3$ przez symetrię względem

a) osi x .

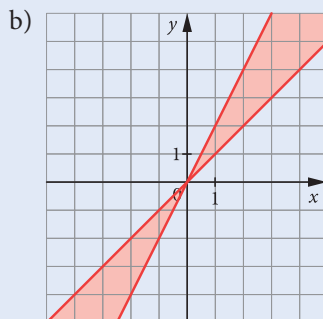
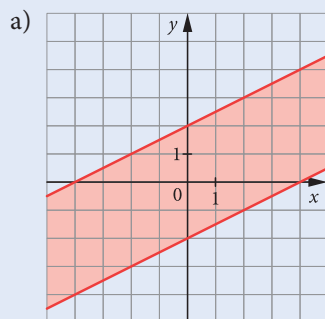
b) osi y .

33. Wyznacz takie wartości m , aby funkcja $f(x) = (2m - 3)x + 6 - m$ była malejąca.

34. Wyznacz wartość m , dla której wykresem układu równań $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ -2x + my = -2 \end{cases}$ są dwie różne proste równoległe.

35. Wykaż, że nie istnieje taka wartość m , dla której wykresy funkcji $f(x) = |5m - 11|x - 5$ i $g(x) = 3x - 5m + 2$ są prostopadłe.

36. Jakie warunki spełniają współczynniki funkcji liniowych $f(x) = ax + b$, których wykresy zawierają się w obszarze zaznaczonym kolorem na rysunku?



37. Zbadaj wzajemne położenie prostych k i l .

a) $k: -7x + 14y - 2 = 0$ $l: x - 2y + 1 = 0$

b) $k: x + 3y - 7 = 0$ $l: \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}y - 3\frac{1}{2} = 0$

38. Wyznacz punkt przecięcia prostych o podanych równaniach (o ile taki punkt istnieje).

a) $2x - 3y + 18 = 0$ i $6x - 9y + 15 = 0$

b) $5x - 10y - 2 = 0$ i $x - 2y - 0,4 = 0$

c) $7x - 14y - 1 = 0$ i $x - 2y - 1 = 0$

d) $2x - 6 = 0$ i $y - 3 = 0$

31. $f(x) = 1\frac{2}{3}x - 5$

32. a) $y = -2x - 3$

b) $y = -2x + 3$

33. $m \in (-\infty; 1\frac{1}{2})$

34. $m = \frac{1}{2}$

35. $|5m - 11| \cdot 3 \geq 0$ dla $m \in \mathbf{R}$, więc $|5m - 11| \cdot 3 \neq -1$. Zatem wykresy funkcji f i g nie są prostopadłe dla żadnego $m \in \mathbf{R}$.

36. a) $a = \frac{1}{2}$, $b \in \langle -2; 2 \rangle$

b) $a \in \langle 1; 2 \rangle$, $b = 0$

37. a) $k \parallel l$ **b)** $k = l$

38. a) proste równoległe

b) jedna prosta

c) proste równoległe

d) $(3, 3)$

39. a) $x + y - 1 = 0$

b) $\sqrt{2}x + 3y + 2 = 0$

40. a) $-x + 2y - 5 = 0$

b) $x + 2y - 3 = 0$

41. a) $m = 2$ b) $m = 5$

42. $x = 3$

43. Wyznaczamy równanie prostej przechodzącej przez punkty

$$(-1, 4) \text{ i } (3, 2): y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}.$$

Podstawiamy do niego współrzędne punktu

$$(2019, -1006): -\frac{1}{2} \cdot 2019 + 3\frac{1}{2} =$$

$$= -1009\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} = -1006.$$

Współrzędne tego punktu spełniają równanie prostej, więc te trzy punkty są współliniowe.

44. Funkcja $f(x) = ax + b$ jest rosnąca i ma dodatnie miejsce zerowe, gdy $a > 0$ i $b < 0$.

Rozwiązujemy układ nierówności $|3m - 5| - 4 > 0$ i $|m - 2| - 6 < 0$. Otrzymujemy: $m \in \left(-4; \frac{1}{3}\right) \cup (3; 8)$.

45. $m = 3$

46. Wykresy danych funkcji przechodzą przez punkt A, gdy

$$\begin{cases} 2 = (k + m) \cdot (-2) + k \\ 2 = (k - m) \cdot (-2) - m - 2 \end{cases}$$

Rozwiązaniem otrzymanego układu równań jest para $\begin{cases} k = -2 \\ m = 0 \end{cases}$.

Stąd wynika, że obie funkcje mają ten sam wzór $y = -2x - 2$, co oznacza, że nie istnieją takie wartości m i k , że wykresy danych funkcji przecinają się w punkcie A.

39. Podaj równanie prostej równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt P .

a) $k: x + y + 1 = 0$ $P = (2, -1)$

b) $k: \sqrt{2}x + 3y - 1 = 0$ $P = (-\sqrt{2}, 0)$

40. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt P .

a) $k: 2x + y - 3 = 0$ $P = (-1, 2)$

b) $k: 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}y + 2 = 0$ $P = (1, 1)$

41. Dla jakich wartości m proste k i l nie mają punktów wspólnych?

a) $k: 2x - y + 2 = 0$ $l: 4x - my + 7 = 0$

b) $k: \frac{1}{2}x + 2y + 1 = 0$ $l: 2x + (m + 3)y - 12 = 0$

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

42. Wyznacz miejsce zerowe funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty $(-2, 5)$ i $(1, 2)$.

43. Wykaż, że punkty $(-1, 4)$, $(3, 2)$ i $(2019, -1006)$ leżą na jednej prostej.

44. Wyznacz takie wartości m , aby funkcja $f(x) = (|3m - 5| - 4)x + |m - 2| - 6$ była rosnąca i miała dodatnie miejsce zerowe.

45. Wyznacz parametr m tak, aby do wykresu funkcji $f(x) = (3 - 2m)x - |3m - 6|$ należał punkt $A = (-2, 3)$.

46. Wykaż, że nie istnieją takie wartości m i k , aby wykresy funkcji $y = (k + m)x + k$ oraz $y = (k - m)x - m - 2$ przecinały się w punkcie $A = (-2, 2)$.

47. Na podstawie wykresu określ monotoniczność podanej funkcji.

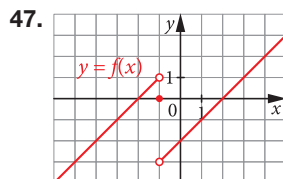
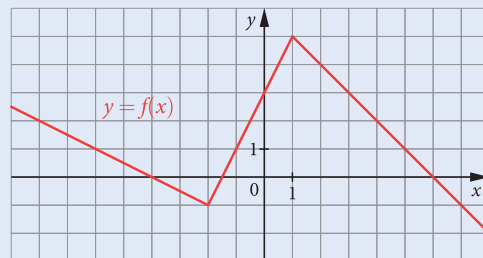
$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ 0 & \text{dla } x = -1 \\ x - 2 & \text{dla } x \in (-1; \infty) \end{cases}$$

48. Wykres przedstawia funkcję f .

a) Podaj wzór tej funkcji.

b) Sporządź wykres funkcji $g(x) = f(-x)$.

c) Sporządź wykres funkcji $h(x) = |f(x)|$.

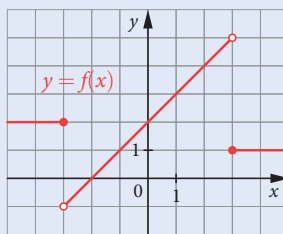


rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -1)$ i $(-1; \infty)$

$$48. a) f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ 2x + 3 & \text{dla } x \in (-2; 1) \\ 6 - x & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$$

49. Wykres przedstawia funkcję f .

- Podaj wzór tej funkcji.
- Narysuj wykres funkcji $h(x) = |f(x)|$.
- Podaj przedziały monotoniczności funkcji h .



50. Przekształcając odpowiednio wykres funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 1,5x + 4,5 & \text{dla } x \in \langle -5; -1 \rangle \\ -x + 2 & \text{dla } x \in \langle -1; 4 \rangle \end{cases}, \text{ narysuj wykres funkcji } g(x) = |f(x)| - 3.$$

Odczytaj z wykresu wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji g oraz argumenty, dla których funkcja przyjmuje te wartości.

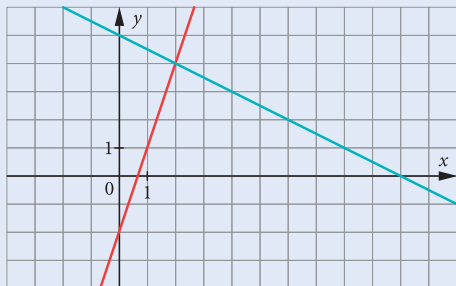
51. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{dla } |x - 2| \leq 3 \\ -2 & \text{dla } |x - 2| > 3 \end{cases}$.

Na podstawie wykresu podaj: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe funkcji; przedziały, w których wartości funkcji mają ten sam znak; wartość największą i wartość najmniejszą oraz argumenty, dla których funkcja przyjmuje te wartości. Następnie oceń prawdziwość zdań.

- Równanie $f(x) = -1$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.
- W przedziale $\langle -1; \infty \rangle$ f jest funkcją monotoniczną.
- W przedziale $(-\infty; -1)$ f jest funkcją niemalejącą.

52. Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases}$.

53. Podaj przykład układu równań liniowych, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku poniżej.



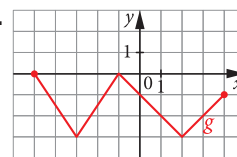
54. Dane są dwie funkcje liniowe: $f(x) = -3x + 6$, $g(x) = \frac{3}{4}x - 3$. Dla jakich argumentów obie te funkcje przyjmują wartości mniejsze od 3?

49. a)

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \\ x + 2 & \text{dla } x \in (-3; 3) \\ 1 & \text{dla } x \in (3; \infty) \end{cases}$$

c) stała w każdym z przedziałów $(-\infty; -3)$ i $(3; \infty)$, rosnąca w przedziale $(-3; 3)$

50.



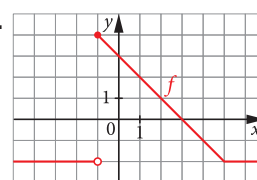
wartość największa: 0 dla

$x \in \{-5, -1\}$,

wartość najmniejsza: -3 dla

$x \in \{-3, 2\}$

51.



$D = \mathbb{R}$, $ZW = \langle -2; 4 \rangle$,

miejsce zerowe: 3,

$f(x) > 0$ dla $\langle -1; 3 \rangle$,

$f(x) < 0$ dla

$x \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$,

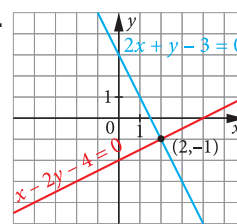
wartość największa: 4 dla $x = -1$,

wartość najmniejsza: -2 dla

$x \in (-\infty; -1) \cup (5; \infty)$.

Zdania A, B, C są prawdziwe.

52.

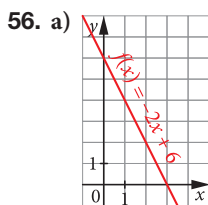


$(2, -1)$

53. np. $\begin{cases} 3x - y - 2 = 0 \\ x + 2y - 10 = 0 \end{cases}$

54. $x \in (1; 8)$

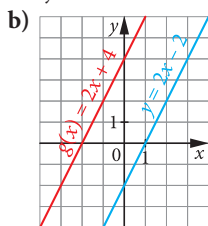
55. $b \in (4; 10)$



b) tak

c) $y = 2x - 6$

57. a) $g(x) = 2x + 4$,
miejsce zerowe: -2



c) $x \in (-\infty; -2)$

58. a) $x = 4$, $x = 1\frac{3}{4}$

b) $x = 2$

c) $x \in \left(1\frac{3}{4}; 4\right)$

d) $x \in (2; \infty)$

59. $m > 2$

60. $g(x) = 2x - 16$

61. $p = -2$, $q = 3$ lub $p = 2$,
 $q = -3$.

Wskazówka:

$(4p + 3q)(2p + q) = -1$.

Ponieważ liczby p, q są całkowite,
rozpatrujemy dwa przypadki:

$$\begin{cases} 4p + 3q = 1 \\ 2p + q = -1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} 4p + 3q = -1 \\ 2p + q = 1 \end{cases}.$$

55. Wyznacz takie wartości b , aby liczba będąca miejscem zerowym funkcji $f(x) = -2x + b$ należała do przedziału $(2; 5)$.56. Dana jest funkcja $f(x) = -2x + 6$.

a) Naskicuj wykres tej funkcji.

b) Sprawdź, czy punkt $A = (-1, 8)$ należy do wykresu danej funkcji.c) Napisz równanie prostej, która jest symetryczna do wykresu danej funkcji względem osi x .57. Wykres funkcji liniowej g przechodzi przez punkt $A = (-1, 2)$ i jest równoległy do wykresu funkcji $y = 2x - 2$.a) Napisz wzór funkcji g i oblicz jej miejsce zerowe.

b) Sporządź wykresy obu funkcji.

c) Dla jakich argumentów funkcja g przyjmuje wartości ujemne?58. Dane są funkcje $f(x) = 0,5x - 2$ i $g(x) = -4x + 7$. Sporządź w jednym układzie współrzędnych wykresy tych funkcji.

a) Oblicz miejsca zerowe tych funkcji.

b) Dla jakiego argumentu wartości obu funkcji są równe?

c) Dla jakich argumentów funkcje te przyjmują jednocześnie wartości ujemne?

d) Dla jakich argumentów wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g ?59. Dla jakich wartości m punkt przecięcia prostych o równaniach $x - y = m - 1$ i $2x - y = 3 - m$ należy do trzeciej ćwiartki układu współrzędnych?60. Funkcja liniowa f przyjmuje wartości ujemne tylko dla argumentów większych od 8. Wykres funkcji f przecina oś y w punkcie $(0, 4)$. Napisz wzór funkcji g , której wykres jest prostopadły do wykresu funkcji f , wiedząc, że funkcje f i g mają to samo miejsce zerowe.61. Wyznacz wszystkie całkowite wartości parametrów p i q , dla których wykresy funkcji liniowych $f(x) = (4p + 3q)x + 2p - 5$ oraz $g(x) = (2p + q)x - 4q + 7$ są prostopadłe.